

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Menoni
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 06/07/04.
Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DA VERSÃO DIRETA DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA TRATAMENTO
DE PROBLEMAS ACÚSTICOS ESTACIONÁRIOS BIDIMENSIONAIS
DIRETOS E INVERSOS.**

Autor: José Antonio Menoni

Orientador: Prof Dr. Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos.

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica ,
como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004

S.P. – Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	T/UNICAMP
	M527f
V	EX
TOMBO BC	62546
PROC.	16-86-05
C	☐
D	☒
PREÇO	11,00
DATA	12/3/05
Nº CPD	

Bib. id. 342772

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M527f

Menoni, José Antonio

Formulação e implantação da versão direta do método dos elementos de contorno para tratamento de problemas acústicos estacionários bidimensionais diretos e inversos / José Antonio Menoni.--Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Acústica. 2. Métodos de elementos de contorno. 3. Radiação. 4. Espalhamento potencial. 5. Problemas inverso (Equações diferenciais). I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

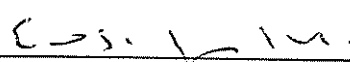
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

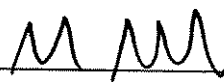
**Formulação e Implementação da Versão Direta do
Método dos Elementos de Contorno para
Tratamento de Problemas Acústicos Estacionários
Bidimensionais Diretos e Inversos.**

Autor: José Antonio Menoni

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
FEM / UNICAMP



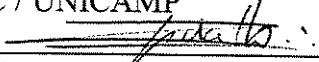
Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM / UNICAMP



Prof. Dra. Stelamaris Rolla Bertoli
FEC / UNICAMP



Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho.
CPTL / UFMS

Campinas, 06 de julho de 2004.

Agradecimentos

A CAPES / PICD, pelo incentivo a capacitação e a pesquisa.

Ao Departamento de Mecânica Computacional/FEM/UNICAMP e ao Departamento de Ciências Exatas/CPLT/UFMS.

E em especial ao Prof. Euclides e Prof. Edson, além de todos aqueles que de forma direta ou indireta tenha contribuído para a conclusão deste trabalho.

Abstract

Menoni, José Antonio, *Formulation and Implementation of a Direct Version of the Boundary Element Method to describe stationary bidimensional Direct and Inverse Acoustic Problems*,:Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 237 p. Tese (Doutorado)

The present Thesis reports a formulation and an implementation of the direct version of the Boundary Element Method (BEM) to model direct and indirect bidimensional stationary acoustic problems governed by the Helmholtz differential operator. Both internal and external problems, associated, respectively to bounded and unbounded domains, are treated in the analysis. The transformation of the Helmholtz differential equation into an equivalent Boundary Integral Equation (BIE) and the synthesis of its Fundamental Solution is recovered in detail. For internal problem two techniques are employed to obtain modal quantities of acoustic cavities. The first is the direct search method of the characteristic polynomial roots. The second strategy is based on numerical Frequency Response Functions, synthesized by the BEM. Radiation and scatter problems are formulated, implemented and validated within the realm of the Boundary Element Method. The present work still addresses the solution of an inverse problem. The inverse problem consists of determining the acoustic variables on the boundary of a radiating or scattering body of known geometry, based on the acoustic fields measured over a closed surface which embodies the analyzed body. Two techniques to solve the inversion problem are discussed. The first is the Single Value Decomposition strategy and the other is the Tikhonov regularization strategy. The accuracy of these techniques are discussed as functions of the internal parameters which are intrinsic to those strategies.

Key Words

Stationary Acoustics, Boundary Element Method, Helmholtz equation, Natural Frequencies, Radiation, Scatter, Inverse problems.

Resumo

Menoni, José Antonio, *Formulação e Implementação da Versão Direta do Método dos Elementos de Contorno para Tratamento de Problemas Acústicos Estacionários Bidimensionais Diretos e Inversos*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 237 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho trata da formulação e da implementação da versão direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para tratamento de problemas acústicos bidimensionais estacionários regidos pelo operador diferencial de Helmholtz. São abordados tanto problemas internos, associados a domínios limitados, quanto problemas externos, associados a domínios ilimitados. A tese ainda aborda a solução de problemas diretos e inversos. A transformação da equação de Helmholtz em Equação Integral de Contorno, bem como a síntese de sua Solução Fundamental é recuperada de forma detalhada no texto. Para o caso de problemas internos duas técnicas são estudadas para recuperação de grandezas modais de cavidades acústicas. A primeira é baseada na pesquisa direta das raízes do polinômio característico e a segunda é baseada na informação obtida a partir de Funções de Resposta em Frequência sintetizadas pelo MEC. Os problemas da radiação e espalhamento acústico são formulados, implementados e validados. O trabalho apresenta ainda a solução de problemas inversos, no qual as variáveis acústicas em um contorno geométrico conhecido são determinadas a partir de medições em uma superfície fechada e que envolve o corpo radiante. Duas técnicas são utilizadas no processo inverso, a Decomposição em Valores Singulares e a técnica de regularização de Tikhonov. Discute-se a precisão e eficiência destas técnicas em função dos parâmetros que são variáveis presentes nestas técnicas.

Palavras Chave

Acústica estacionária, Método de Elemento de Contorno, Equação de Helmholtz, Frequências Naturais, Radiação, Espalhamento, Problemas Inversos.

Sumário

Lista de figuras	V
Lista de tabelas	X
Nomenclatura	XII
Capítulo-1.....	1
1.1-Introdução.....	1
Capítulo-2: A equação da onda acústica.....	9
2.1-Introdução.....	9
2.2-Equação da onda unidimensional.....	9
2.2.1- A equação diferencial em termos da pressão.....	12
2.2.2- A equação diferencial em termos do potencial de velocidade.....	14
2.3-Equação da onda bidimensional.....	17
2.3.1- A equação diferencial em termos da pressão.....	19
2.3.2- A equação diferencial em termos do potencial de velocidade.....	20
2.4-Equação de Helmholtz.....	22
2.5-A solução fundamental da equação de helmholtz.....	23
2.6- Conclusão do capítulo.....	29
Capítulo-3: A Equação integral de contorno.....	30
3.1- Introdução.....	30
3.2 - Problema de domínio interior.....	30
3.3- Extensão para o contorno.....	34
3.4- O termo livre de integração c	39
3.5 – Problema de domínio exterior.....	40
3.6 – Extensão para o contorno.....	44

3.7 - Conclusão do capítulo.....	47
Capítulo – 4: Aspectos computacionais para o M.E.C.....	49
4.1- Introdução.....	49
4.2- A equação de Helmholtz revisitada.....	49
4.3- A discretização e colocação.....	50
4.4 – Aspectos da implementação.....	56
4.4.1-A integração numérica.....	56
4.4.2- A singularidade do núcleo.....	58
4.4.3 – Condições de contorno.....	62
4.5 - Avaliando pontos internos ao domínio.....	64
4.6 Conclusão do capítulo.....	65
Capítulo – 5: Respostas estacionárias de domínios limitados; frequências naturais.....	66
5.1 – Introdução.....	66
5.2 – Análise da solução , para cavidade retangular.....	67
5.3 – A formulação do M.e.C. e a equação da onda acústica 2D.....	69
5.4 – A estratégia da pesquisa direta e o polinômio característico.....	73
5.4.1- Caso Geral	73
5.4.2- Caso Particular.....	75
5.5 – Os zeros do polinômio característico $P(k)$ e o ponto de mínimo local	76
5.6 – Limites do critério de mínimo local do valor absoluto do determinante no método da pesquisa direta	102
5.7 – Critério de análise na identificação dos pontos de mínimos locais associados ao método da pesquisa direta	110
5.8 - As frequências naturais da cavidade acústica e a função de resposta e frequência (FRF'S)	113
5.8.1- A obtenção das frequências naturais através das FRF's.....	116
5.8.2 – A família de FRF's e a cavidade acústica retangular.....	123
5.9 – A família das FRF's e sua média aritmética.....	131
5.10 – A família de FRF's e as frequências naturais da cavidade semi-oval	135
5.12 – Representação gráfica dos modos de vibrar da cavidade acústica retangular..	137

5.13 – Conclusão do capítulo.....	140
Capítulo 6 – O problema da radiação acústica.....	141
6.1 – Introdução.....	141
6.2 – Propagação de ondas a partir de uma fonte acústica circular.....	142
6.3 – A formulação do M.E.C. para problemas de radiação acústica.....	143
6.4 – O potencial de radiação acústica em pontos do domínio.....	151
6.5 – A radiação acústica a partir fonte acústica circular pulsante.....	154
6.6 – O fluxo em pontos do domínio de uma fonte acústica radiante cilíndrica.....	159
6.7 – O fluxo analítico da fonte cilíndrica	162
6.8 – O problema valor intermediário	164
6.9 – Conclusão do capítulo.....	169
Capítulo 7 – Espalhamento de ondas.....	170
7.1 – Introdução.....	170
7.2 – O potencial de espalhamento analítico da fonte cilíndrica.....	170
7.3 – A formulação do M.E.C. para o espalhamento de ondas.....	173
7.4 – O espalhamento de ondas acústicas a partir da fonte cilíndrica de paredes rígidas.....	177
7.5 – A validação numérica	178
7.6 – Espalhamento de ondas em pontos do campo acústico	182
7.7 – Conclusão do capítulo	188
Capítulo 8 – Problema inverso.....	189
8.1 – Introdução.....	189
8.2 – Uma alternativa da formulação do M.E.C.....	189
8.3 - O problema inverso	193
8.4 - A decomposição em valores singulares (D.V.S).....	194
8.5 – A estimativa do parâmetro para o D.V.S	197
8.6 – O regularizador de Tikhonov	207
8.7 – Problema inverso e fontes com geometria do contorno complexas	216
8.8 – Conclusão do capítulo	223

Capítulo 9 – Conclusão e sugestões para próximos trabalhos.....	224
Referências bibliográficas	227

Lista de Figuras

2.1: Movimento da massa de fluido	10
2.2: Deslocamento de massa na direção x_3	12
2.3: Domínio e as condições de contorno	14
2.4: Deslocamento da massa de fluido 2D, nas direções x_1 e x_2	17
2.5: Propagação de ondas e interpretação da solução fundamental de Helmholtz	27
3.1: Domínio de Integração	31
3.2: Ângulos no contorno.....	35
3.3: Geometria do domínio exterior	40
3.4: Comportamento das Funções de Bessel, Bessel-Neumann e sua derivadas	43
3.5: Ângulo domínio exterior.....	44
4.1: Contorno discretizado	51
4.2: Elemento linear.....	53
4.3: Elemento Singular.....	59
4.4: Descontinuidade para o fluxo.....	63
5.1: Densidade de distribuição de frequências naturais por classe nodal.....	68
5.2: Densidade de distribuição de frequências naturais acumuladas.....	69
5.3: Força centrada no ponto interior ao domínio.....	71
5.4: Domínio e a ausência da força externa.....	74
5.5: A condição de Neumann no contorno.....	75
5.6: Tipos de curvas do determinantes em relação ao eixo das abscissas.....	78
5.7: Ponto de máximo de $P(k)$ entre o zero real e imaginário.....	79
5.8: Representação complexa do $\det[H(k)]$	81
5.10: Cavidade acústica retangular.....	86
5.11: Pontos de mínimos Locais da cavidade retangular.....	90
5.12: Cavidade acústica semi-oval.....	96

5.13: Curva do $ \text{Det}[H(k)] $ para cavidade semi-oval.....	97
5.14: Pontos de mínimos locais para cavidade semi-oval.....	101
5.15: Determinante de $H(k)$	103
5.16: Polinômio característico - Partes real, imaginária e valor absoluto.....	105
5.17: Detalhe do polinômio característico próximo à primeira frequência natural.....	106
5.18: Detalhe do polinômio característico próximo à segunda frequência natural.....	106
5.19: Detalhe do polinômio característico próximo à terceira frequência natural.....	107
5.20: Detalhe do polinômio característico próximo ao segundo mínimo local.....	108
5.21: Detalhe do valor absoluto: polinômio característico próximo ao segundo mínimo local.....	109
5.22: Detalhe do polinômio característico próximo ao terceiro mínimo local.....	110
5.23: Detalhe do valor absoluto: polinômio característico próximo ao segundo mínimo local.....	110
5.24: Detalhe do polinômio característico próximo ao sexto mínimo local	111
5.25: Detalhe do valor absoluto: polinômio característico próximo ao quinto e sexto mínimo local.....	111
5.26: Domínio limitado e a força incidente	114
5.27: Pontos fontes interior a cavidade.....	117
5.28: FRF's da cavidade acústica.....	117
5.29: Diferentes discretização	119
5.30: Pontos de máximos locais e o incremento.....	120
5.31: Pontos de máximo locais devido a localização do ponto fonte interior.....	121
5.32: Picos na curva da FRF's.....	122
5.33: Picos na curva da FRF's com maior discretização.....	123
5.34: Família de FRF's da cavidade retangular.....	123
5.35: Família de FRF's da cavidade retangular por faixa de frequências.....	128
5.36: Média aritmética da família de FRF's.....	134
5.37: Cavidade semi-oval e os pontos fontes.....	135
5.38: Família de FRF's da cavidade semi-oval.....	136
5.39: Malha de pontos internos da cavidade retangular.....	138
5.40: Modos próprios de vibrar.....	139

6.01: Fonte circular radiante.....	142
6.02: Fonte acústica radiante e as condições de contorno.....	144
6.03: Potencial acústico no contorno da fonte circular.....	146
6.04: Ampliação dos picos da resposta numérica.....	147
6.05: Solução: problema interior exterior.....	148
6.06: Regularização dos picos ampliados com pontos de CHIEF.....	149
6.07: Regularização com pontos de CHIEF em todo o contorno.....	150
6.08: Potencial de radiação acústica em pontos do domínio.....	151
6.10: Regularização da solução nos pontos do domínio com pontos de CHIEF.....	153
6.11: Cilindro pulsante.....	154
6.12: Potencial de radiação acústica do cilindro deslocado.....	156
6.13: Ampliação dos picos entre as frequências de 27 e 33 radianos.....	157
6.14: Regularização dos picos ampliados.....	157
6.16: Regularização da solução para o cilindro deslocado.....	158
6.17: Fluxo no cilindro radiante.....	159
6.18: Pontos aleatórios ao redor da fonte radiante.....	162
6.19: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 0.75$ Hz.....	163
6.20: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 25.13$ Hz.....	163
6.21: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 50.26$ Hz.....	164
6.22: Problema valor intermediário.....	165
6.23: Problema intermediário com $ka = 2.0$ radianos.....	168
6.24: Problema intermediário com $ka = 4.0$ radianos.....	169
6.25 Problema intermediário com $ka = 8.0$ radianos.....	169
6.26: Problema intermediário com $ka = 16.0$ radianos.....	169
7.01: Convergência da solução analítica	172
7.02: Potencial total $u^T(x_d)$	173
7.03a: Potencial de espalhamento para $ka = 4$ e malha-2	180
7.03b: Potencial de espalhamento para $ka = 4$ e malha-3.....	181
7.03c: Potencial de espalhamento para $ka = 4$ e malha-4.....	181
7.04a: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 1\pi$	183
7.04b: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 2\pi$	184

7.04c: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 4\pi$	185
7.04d: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 6\pi$	185
7.04e: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 8\pi$	186
7.04f: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 10\pi$	186
7.05: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $10a$ e $ka = 2\pi$	187
7.06: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $18a$ e $ka = 8\pi$	187
7.07: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $27.5a$ e $ka = 8\pi$	188
8.01: O problema exterior: Formulação alternativa.....	190
8.02: Estimativa do parâmetro σ para D.V.S.....	198
8.03a: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 0.5$	200
8.03b: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 1.0$	201
8.03c: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 2.0$	201
8.04a: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 4.0$	205
8.04b: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 8.0$	205
8.04c: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 16.0$	206
8.05: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 32.0$	206
8.06: Comparando o potencial e o potencial recuperado para $ka = 60.0$	207
8.07: Estimativa do parâmetro σ_T para Tikhonov	209
8.08a: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 0.5$	211
8.08b: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 1.0$	212
8.08c: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 2.0$	212
8.08d: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 4.0$	213
8.08e: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 8.0$	213
8.08f: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 16.0$	214
8.09: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-5}$ e $ka = 16.0$	215
8.10: Potencial recuperado para $\sigma_T = 10^{-7}$ e $ka = 0.5$	215
8.11: Perfil do auto falante.....	217
8.12a: Potencial recuperado no contorno do auto falante $k = 10.0$	219
8.12b: Potencial recuperado no contorno do auto falante $k = 20.0$	219
8.13: Deslocamento do tubo devido ao 1º modo de vibrar.....	220
8.14: Potencial recuperado: 1º modo de vibrar.....	221

8.15: Deslocamento do tubo devido ao 7º modo de vibrar.....	222
8.16: Potencial recuperado: devido ao 7º modo de vibrar.....	223

Lista de Tabelas

5.1: Análises dos zeros do polinômio característico.....	82
5.2 e 5.3: Identificação de pontos de mínimos locais através da curva tangencial.....	85
5.4: Discretização no contorno da cavidade retangular.....	87
5.5: A influencia do incremento no domínio da frequência.....	87
5.6: Modos próprios de vibrar não identificados.....	87
5.7: Frequências naturais da cavidade retangular.....	88
5.8: Discretização no contorno da cavidade semi-oval.....	96
5.9: Pontos de mínimos locais da cavidade semi-oval	97
5.10: Frequências natural da cavidade semi-oval	101
5.11: Pontos de máximos locais entre as frequências de 870 e 910 Hz.....	118
5.12: Total de pontos de máximos locais para cada ponto fonte	125
5.13: Pontos de máximo local devido sua localização no interior da cavidade.....	130
6.1: Discretização no contorno do cilindro.....	146
6.2: Erro do potencial no contorno da cavidade com pontos de CHIEF.....	151
6.3: Erro do potencial para o valor intermediário.....	163
7.1: Número mínimo de termo na série (solução analítica).....	172
7.2: Discretização no contorno do cilindro.....	179
7.3: Erro no cálculo do potencial de espalhamento em nós do contorno.....	180
7.4: Erro no cálculo do potencial de espalhamento em pontos do campo acústico.....	186
8.1 e 8.2: Estimativa do parâmetro σ para a estratégia do DVS.....	199
8.3: Densidade de pontos por comprimento de onda.....	203
8.4: Estimativa do parâmetro σ para $ka = 4$	204
8.5 e 8.6: Estimativa do parâmetro σ_T estratégia de Tikhonov.....	210
8.7: Potencial recuperado em 34 pontos do contorno da fonte- Perfil auto – falante.....	217
8.8: Potencial recuperado em 68 pontos do contorno da fonte- Perfil auto – falante.....	218

8.9: Densidade de pontos por comprimento de onda – Perfil auto falante.....	218
8.10: Potencial recuperado – 1º modo de vibrar do tubo quadrado.....	221
8.11: Potencial recuperado – 7º modo de vibrar do tubo quadrado.....	222

Nomenclatura

Letras Latinas

R : vetor

t : variável de tempo

x_i : coordenadas no plano

c_0 : Velocidade do som

k : número de ondas

u_i : Deslocamento de massa de fluido na i -ésima direção

$u_{,j}$: Derivada na j -ésima direção

p : pressão

$R = |x - x_d|$: distância entre dois pontos x e x_d

$H_0^{(1)}$: Função de Hankel de 1ª espécie

$H_0^{(2)}$: Função de Hankel de 2ª espécie

J_0 : Função de Bessel de 1ª espécie

Y_0 : Função de Bessel-Neumann de 1ª espécie (Função de Bessel de 2ª espécie)

n : vetor normal

c : Coeficiente: Termo livre de integração

L: comprimento do elemento

[H]: A matriz H.

[G]: A matriz G.

[$\mathcal{H}$] e [$\mathcal{G}$] : Matrizes envolvendo os pontos do domínio.

$J(\xi)$: Jacobiano da transformação

$i = \sqrt{-1}$: coeficiente imaginário

ne : número total de elementos

ng : número de pontos de Gauss

Letras Gregas

ω : velocidade angular

τ : tempo fixo

∂^n : derivada parcial de ordem n

∇ : Operador diferencial

δ : Função delta

ρ : densidade de massa

ε : Raio de um elemento de círculo

Γ : Contorno do domínio

Ω : Domínio do $\mathbb{R}^2$

$\overset{0}{\Omega}$: Interior do domínio

ξ : variável adimensional

σ : parâmetro para o D.V.S

σ_T : parâmetro para Tikhonov

Abreviações

M.E.C: Método dos Elementos de Contorno.

E.I.C: Equação Integral de Contorno

FRF's: Função Resposta de Frequências.

D.V.S: Decomposição em valores Singulares.

Capítulo 1

1.1- Introdução

Este trabalho é uma tentativa de se aprimorar um estudo realizado sobre o tema da acústica linear estacionária e bidimensional governada pela equação diferencial de Helmholtz [Anzou, 1996]. No citado trabalho utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para analisar o fenômeno de radiação acústica estacionária em domínios ilimitados. Por ocasião daquele estudo diversos aspectos da acústica bidimensional não conseguiram ser tratados pela formulação e implementação do MEC apresentada. Em particular o tratamento do espalhamento (scatter) de ondas acústicas não havia sido incluído na análise.

No Departamento de Mecânica Computacional (DMC/FEM/UNICAMP) existem grupos de pesquisa que tem atuado para desenvolver a solução de problemas mecânicos utilizando o Método dos Elementos de Contorno. O trabalho de Anzou (1996) foi o primeiro trabalho do grupo visando modelar problemas acústicos estacionários. Na presente tese pretende-se reportar um complemento e/ou um aprimoramento em relação ao trabalho de Anzou (1996). No caso em questão o domínio permanece bidimensional e a análise ainda se realiza no domínio da frequência. Mas novos aspectos são incorporados na análise. Em particular este trabalho trata tanto da dinâmica de domínios limitados quanto de domínios ilimitados. O problema do espalhamento de ondas acústicas também foi incluído. Na presente análise tanto problemas diretos quanto inversos são abordados.

Muitos dos estudos, nos ramos das engenharias demandam conhecimentos sobre o comportamento de propagação de ondas em diferentes meios. Fenômenos importantes de propagação de ondas ocorrem em domínios limitados e também em domínios ilimitados. Análises

de problemas realistas, que incluem domínios com geometrias complexas e condições de contorno arbitrárias, não podem ser realizadas com uso do ferramental analítico que fornece respostas matematicamente exatas. Estes problemas mais complexos e realistas exigem a aplicação de ferramentas numéricas de aproximação de sua solução. As ferramentas numéricas ganharam grande impulso na segunda metade do século passado com o advento do computador digital.

Dentre os métodos numéricos atualmente usados para aproximar a solução de problemas de engenharia podemos citar o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e ainda o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os dois primeiros são chamados métodos de domínio, pois eles exigem a discretização de todo o domínio sob análise. Por sua vez o MEC, se formulado com a utilização de um estado auxiliar adequado, somente requer a discretização do contorno do domínio em questão. Sem dúvida o MEF é o método mais intensamente utilizado para solução de problemas de engenharia. Mas para a análise dinâmica de domínios ilimitados o MEC apresenta algumas facilidades, quando comparado aos métodos de domínio [Mesquita et al, 1994a, Mesquita et al 1994b, Mesquita e Pavanello 2004]. No presente trabalho vamos realizar uma investigação da potencialidade do MEC para tratar a dinâmica de problemas acústicos estacionários bidimensionais.

Segundo Ciskowski [1991] a dinâmica de domínios ilimitados foi intensamente investigada no período de 1960 a 1975, tendo em vista duas grandes aplicações, quais sejam, a teoria potencial aplicada a fluidos perfeitos e os problemas acústicos lineares. O Método dos Elementos de Contorno teve sua origem em pesquisas de problemas de acústica, nos trabalhos de Chen e Schweikert (1963), Chertock (1964), Shaw e Fiedman (1962), Banaugh e Goldsmith (1963), e Schenck (1968). Estes trabalhos tratavam de problemas de radiação e espalhamento de ondas acústicas fazendo uso de equações integrais de contorno (EIC).

A formulação da Equação Integral de Contorno (EIC), tem na verdade duas diferentes formulações denominadas, respectivamente, de métodos diretos e método indireto. As duas formulações consistem na substituição do contorno físico por uma superfície de fontes, ajustadas de forma que o resultado obtido, seja o mesmo que o requerido pelas condições de contorno do problema original.

No caso do método indireto as grandezas matemáticas utilizadas para a formulação do problema não são as variáveis físicas do problema original. Por sua vez, no Método Direto, as variáveis originais presentes no contorno do problema físico são utilizadas na formulação da EIC [Ciskowski-1991, Erigen-1975].

Embora o Método da Equação Integral (EIC) de contorno tenha sido parte integrante no desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC), como pode ser visto nos artigos já citados, no período de 1960 até 1975 usava-se quase que exclusivamente a nomenclatura Equação Integral (EI), sem distinguir a forma direta da indireta. Na verdade, a primeira conferência de inovação desses métodos, organizado, no Rensselaer Polytechnic Institute em junho de 1975 por Tom Cruse e Frank Rizzo [1975], sob o patrocínio da ASME, foi denominada “Boundary Integral Equation Method: Computational in Applied Mechanics”. Dois anos mais tarde foi publicado o texto de M.A. Jaswon e G.T. Symm [1977] denominado “Integral Equations Methods in Potential Theory and Elastostatics”. Nenhum desses trabalhos usava a frase “Métodos de Elementos de Contorno”. Nesse mesmo ano, outra conferência tratando de métodos de inovações numéricas, foi realizada em Paris com patrocínio do CETIM. Nesta conferência uma pequena parte dos trabalhos tratavam dos Métodos de Equação Integral de Contorno e a maior parte desses trabalhos, tratavam de análises numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas [Ciskowski-1991]. Nesta conferência organizada por J.C. Lachat, Tom Cruse, Frank Rizzo e Richard Shaw constatou-se que cerca de $\frac{1}{4}$ das representações eram em métodos de equação integral de contorno, aproximadamente uma metade dos métodos em elementos finitos e o resto em outros métodos numéricos [Ciskowski-1991]. Passado um ano, o nome Método de Elementos de Contorno foi usado na segunda conferência dedicada a estes métodos, organizado por C.A. Brebbia [1978a] em Southampton, U.K. O primeiro “texto introdutório”, como oposição à pesquisa monográfica, foi também publicado por C.A. Brebbia em 1978. Desde aquele tempo o método tornou-se conhecido quase que exclusivamente como Método de Elementos de Contorno (MEC).

Uma importante característica do método de elementos de contorno, já brevemente mencionada, é que ele exige a discretização somente no contorno do domínio, permitindo a geração de malhas com menor custo inicial. Esta vantagem é particularmente importante nas

etapas iniciais do projeto, onde freqüentemente existe a necessidade de se refazer a malha da análise.

Considerando ainda o período de 1960 a 1975, onde o método de equação integral de contorno dominou as duas grandes aplicações da mecânica, quais sejam, a teoria do potencial utilizada principalmente em pesquisas de fluidos perfeitos (sob o patrocínio da indústria aeroespacial) e pesquisas em acústica, especialmente em acústicas submarinas (largamente apoiada pela U.S. Navy) é importante constatar que essas duas áreas apresentam dificuldades comuns, pois ambas desenvolvem análises em domínios infinitos, o que para os padrões da época era incompatível com as técnicas numéricas de elementos finitos e diferenças finitas.

A síntese da Equação Integral de Contorno para problemas da elastodinâmica, também conhecida por identidade Somigliana, publicada nos trabalhos de Cruse e Rizzo [1968a, 1968b] teve o mérito de aproximar a comunidade que atuava em mecânica dos sólidos daquela que trabalhava com mecânica dos fluidos e problemas potenciais e que, por sua vez, já vinha sendo utilizados nas EICs em suas análises. A partir desse ponto houve um rápido aumento nas aplicações em estruturas mecânicas e sólidos, baseados nestas formulações de contorno, mas agora com o título “Métodos de Elementos de Contorno”.

Uma das primeiras aplicações do método da equação integral de contorno (EIC), agora já sob a denominação de Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi para problemas acústicos estacionários governados pela equação de Helmholtz [Ciskowski-1991]:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1.1}$$

Na equação (1.1) u é o potencial de velocidades, k é o número de ondas e ∇^2 é o operador Laplaciano. Conforme veremos detalhadamente no decorrer desta tese, para se transformar a equação diferencial (1.1) em uma equação integral de contorno são necessários dois elementos. O primeiro elemento é a segunda identidade integral de Green e o outro elemento é um estado auxiliar, que neste caso é chamado de “Solução Fundamental do Operador de Helmholtz” que é definido pela seguinte expressão [Ciskowski-1991]:

definido pela seguinte expressão [Ciskowski-1991]:

$$\nabla^2 u^*(k, R) + k^2 u^*(k, R) = \delta(0) \quad (1.2)$$

Na expressão (1.2) δ representa o Delta de Dirac. Nesse trabalho trataremos do problema bidimensional e portanto a solução fundamental 2D é dada pela função de Hankel:

$$u^*(k, R) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R) \quad (1.3)$$

em que $H_0^{(1)}(k R)$ é a função de Hankel de primeira espécie e ordem zero. Por sua vez a segunda identidade de Green pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (1.4)$$

A aplicação das expressões (1.1) a (1.3) na segunda identidade de Green (1.4) obtém-se a chamada Equação Integral de Contorno para o operador de Helmholtz, equação esta que é a base para a formulação do Método de Elemento de Contorno:

$$c u(k, x_d) = \int_{\Gamma} u^*(k, R) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(k, R)}{\partial n} u d\Gamma \quad (1.5)$$

Na expressão (1.5) Γ é o contorno do domínio Ω caracterizado pelo vetor normal $\mathbf{n}$; $R=|x-x_d|$, onde x e x_d são pontos do domínio Ω . O ponto x é chamado de ponto de campo e x_d é um ponto de colocação. O termo c é conhecido como termo livre (de integração).

As equações integrais de contorno (EICs), por sua vez foram utilizadas para solucionar uma série de problemas de radiação e espalhamento de ondas acústicas. Alguns dos trabalhos mais significativos estão citados a seguir. Em 1963 Chen e Schweikert [1963] estudaram o problema

de radiação harmônica no tempo, seguido por [Chertock-1964] ainda tratando de problemas de radiação do som. Em 1965, Brundit [Brundit-1965] tratou o espalhamento de onda escalar, enquanto Greenspan e Werner [1966] estudaram o problema exterior de Dirichlet. Por sua vez Copley [1967] tratou a formulação da equação integral fundamental, enquanto Schenck [1968], através do método CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation), foi o primeiro a contornar a dificuldade relacionada à falta de unicidade da solução da equação integral de contorno (EIC) em domínios exteriores, para frequências que correspondem aos autovalores do domínio finito complementar.

Ainda segundo Ciskowski [1991], a pesquisa envolvendo o método de elementos de contorno em domínios ilimitados, continuou. O trabalho de Coyette [1994] cuidou da solução de problemas de radiação acústica envolvendo um feixe de ondas. O problema de radiação e espalhamento de ondas acústicas com pequeno comprimento foi tratado por Yoon [1990]. Uma discussão sobre a singularidade presente nas equações integrais, é encontrada no trabalho de Hwang [1999]. Por sua vez progresso no tratamento de problemas inversos para acústica podem ser encontrados nos trabalhos de [Chen-2002], [Kress-2002], [Yoon-2000].

No caso do domínio limitado, o método de elemento de contorno teve também suas pesquisas iniciadas na identificação das frequências naturais por meio da extração de autovalores, isto para os problemas de vibrações acústicas, como pode ser visto nos trabalhos publicados de [Nardini e Brebbia-1980], [Banerje-1988], [Sygulski-1994]. Muitos desses trabalhos tratam de métodos adaptativos como [Raveendra-1992], [Kamiya-1993].

Nos parágrafos precedentes foi feita uma rápida revisão bibliográfica do desenvolvimento do MEC aplicado a problemas da acústica estacionária. Uma coisa, porém, é realizar uma revisão bibliográfica. Coisa bastante distinta é refazer todas as etapas tanto da formulação quanto da implementação computacional descritas na revisão supra-mencionada. Isto posto é possível colocar o objetivo principal da presente tese. Pretende-se recuperar todos os aspectos matemáticos da formulação do MEC para o operador de Helmholtz 2D, bem como implementar e discutir as múltiplas variantes do método que se aplicam para problema internos (domínios limitados) e externos (domínios ilimitados), e ainda avançar na formulação de problemas

acústicos inversos. Para cumprir esta finalidade o trabalho foi dividido em capítulos como descrito a seguir:

No capítulo II, é apresentado um modelo matemático que descreve a equação linear da onda em meio acústico bidimensional. A equação é particularizada para o caso de regimes estacionários, reduzindo-se à equação de Helmholtz. Neste capítulo mostra-se ainda detalhadamente a dedução da solução fundamental do operador 2D de Helmholtz.

No capítulo III, é deduzida a formulação da equação integral de contorno a partir da segunda Identidade de Green. A equação integral de contorno é, na seqüência, formulada para domínios limitados e ilimitados. Mostra-se que para domínios ilimitados somente a discretização do contorno da fonte radiante limitada é suficiente para descrever completamente a dinâmica do problema exterior. Mostra-se ainda que a condição de radiação de Sommerfeld é satisfeita pela equação integral de contorno quando aplicada a domínios ilimitados.

No capítulo IV, apresenta-se a discretização da equação integral de contorno, discretização esta que dá origem ao Método dos Elementos de Contorno. Discute-se o tipo de elemento utilizado, bem como a forma para se incorporar as condições de contorno e o tratamento das singularidades existentes nos núcleos das equações integrais.

No capítulo V trata-se da implementação do MEC para um domínio acústico bidimensional e limitado. O MEC é utilizado para a síntese das grandezas modais que caracterizam a dinâmica acústica dos domínios bidimensionais, quais sejam os autovalores e os autovetores. Duas estratégias são utilizadas na identificação das frequências naturais. A primeira, conhecida como o Método da Pesquisa Direta, é baseada nos zeros do polinômio característico que, por sua vez, é complexo e definido como sendo o determinante da matriz associada ao sistema. A segunda estratégia é baseada nas Funções de Resposta em Frequência e Respostas (FRF's) e, nesse caso identificamos as frequências naturais, pelas ressonâncias presentes em uma ou várias curvas de FRF's associadas a diferentes pontos do domínio. Vantagens e limitações de cada uma dessas técnicas são discutidos a partir de sua aplicação a exemplos numéricos.

No capítulo VI, a formulação do MEC é então implementada para um domínio ilimitado, onde consideramos o problema de radiação acústica. Mostra-se a necessidade da regularização da solução devido à perda de unicidade da equação integral, o que é feito segundo a metodologia CHIEF. Neste capítulo realiza-se ainda uma implementação para determinação do fluxo acústico em pontos do domínio.

No capítulo VII, ainda tratando de problema de domínio exterior, a formulação do MEC, é implementada para o problema de espalhamento de ondas (scatter). Cumpre ressaltar que esta é a primeira vez que o grupo obteve sucesso na solução deste problema. Como a solução analítica para o espalhamento de ondas 2D é dada por meio de uma série de termos infinitos, um estudo que revela o número mínimo de termos necessário na solução é mostrado.

No capítulo VIII, trataremos do problema inverso para o caso de radiação acústica, o qual consiste em recuperar o potencial acústico no contorno de uma suposta fonte radiante, a partir do potencial acústico medido em pontos do domínio ao redor da fonte, o que caracteriza um problema inverso aplicado a domínio exterior. Desse modo o equacionamento do problema inverso é determinado a partir da formulação do MEC para problema de domínio exterior. A maior dificuldade na resposta do problema inverso, está no fato de que a equação matricial oriunda da aplicação do M.E.C, normalmente tem dimensão retangular e é mal condicionada, e requer além de um método específicos para sua inversão, estratégias de regularização da resposta. No caso desse trabalho são consideradas duas estratégias, a primeira trata da Decomposição em Valores Singulares (D.V.S), a segunda é conhecida como Estratégia do Regularizador de Tikhonov. Mostra-se através de exemplos as características de cada estratégia de solução do problema inverso.

No capítulo XIX são feitas considerações finais sobre o que foi alcançado no presente trabalho, bem como são indicadas novas direções de pesquisa a serem seguidas.

Capítulo 2

A equação da onda acústica

2.1- Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar um modelo matemático que descreve o comportamento de ondas em meios acústicos lineares, dependentes do tempo e em domínio unidimensional e bidimensional. Para isso estabeleceremos uma terminologia que relacione os problemas acústicos a conceitos físicos básicos, utilizando a noção de diagramas de corpos livres. Em seguida, mostraremos que, assumindo algumas simplificações, o modelo matemático que representa o comportamento de ondas no meio acústico linear, em regime estacionário, ou no domínio da frequência, se reduz à conhecida equação de Helmholtz. Esta equação será objeto de estudo em capítulos posteriores. Finalmente, apresentaremos uma solução particular para o operador bidimensional de Helmholtz, que é conhecida como “solução fundamental”.

2.2 - Equação da onda unidimensional

Consideremos uma quantidade fixa de massa (m) de um fluido, comprimida em um tubo longo, de tal modo que essa quantidade de massa possa ser representada por um comportamento unidimensional. Assim como é feito na mecânica do contínuo, essa quantidade de massa é isolada num diagrama de corpo livre, como mostra a figura 2.1, sobre a qual podemos aplicar a segunda lei de Newton [Kane-1994].

$$F_3 = m a_3$$

$$(P_s + p)S - (P_s + p + p_{,3})S = \rho S dx_3 \ddot{u}_3$$

ou, simplificando

$$p_{,3} = -\rho \ddot{u}_3 \quad (2.1)$$

onde:

p : pressão acústica

P_s : pressão hidrostática presente na quantidade de massa de fluido.

S : secção de área transversal normal à direção x_3

ρ : densidade de massa de fluido

u_3 : deslocamento da massa de fluido

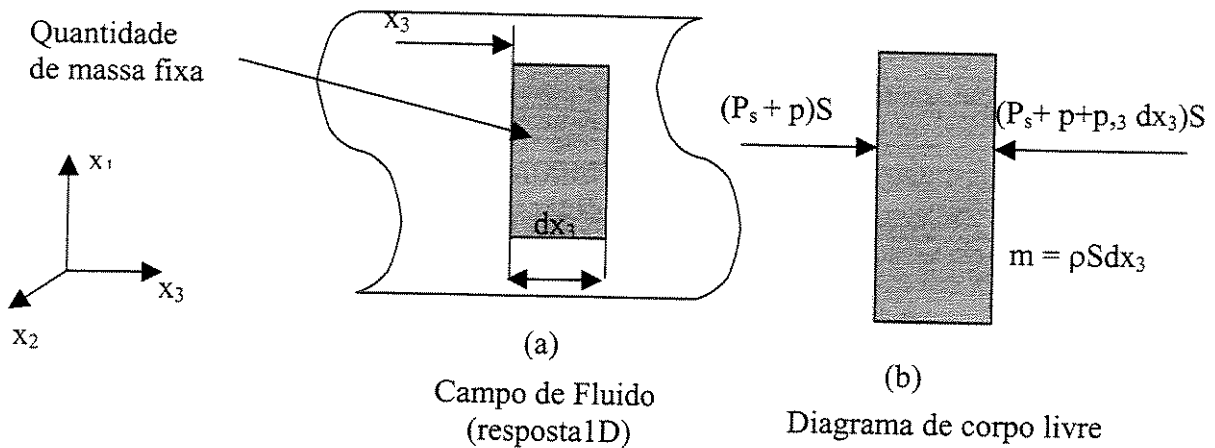


Figura 2.1: Movimento da massa de fluido.

Por outro lado, assim como em problemas de elasticidade, o comportamento do fluido é caracterizado por sua equação constitutiva. Neste caso, a relação constitutiva, entre a pressão do fluido e sua densidade é escrita por [Kane-1994]:

$$p = B \frac{\partial \rho}{\rho} \quad (2.2)$$

em que B é uma constante do meio, denominada de módulo de compressibilidade (modulus-Bulk), e obtida de modo experimental. Utilizando o princípio da conservação de massa e considerando a densidade ρ , a relação constitutiva (2.2), pode ser reescrita em termos da variação do volume, como segue:

$$d(m) = d(\rho V)$$

logo

$$d(m) = d\rho V + \rho dV = 0$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

que substituída em (2.2), resulta:

$$p = -B \left(\frac{dV}{V} \right) \quad (2.3)$$

A figura 2.2, mostra um pequeno deslocamento u_3 da massa de fluido originalmente mostrada na figura 2.1b. Imaginando que essa quantidade de massa permanece fixa, podemos determinar a variação de volume causado pelo deslocamento u_3 :

$$dV = (u_3 + u_{3,3} dx_3)S - u_3 S = S u_{3,3} dx_3 \quad (2.4)$$

onde

$(u_3 + u_{3,3} dx_3)S$: é o acréscimo de volume associado ao deslocamento u_3

$u_3 S$: é o decréscimo de volume.

Considerando o volume original Sdx_3 , podemos expressar a variação dV/V , substituindo (2.4) em (2.3) o que resulta em:

$$p = -Bu_{3,3} \quad (2.5)$$

Combinando a equação de equilíbrio (2.1) e a relação constitutiva (2.5), a equação diferencial que modela o meio acústico pode ser obtida em termos da pressão acústica ou do potencial de velocidade. É o que será feito a seguir

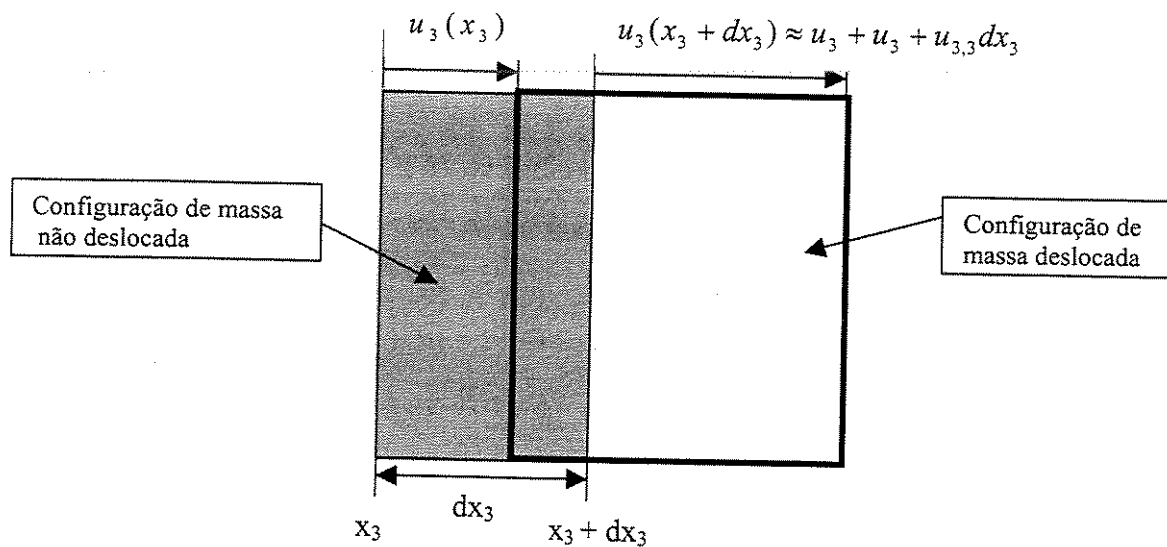


Figura 2.2: Deslocamento da massa na direção x_3

2.2.1- A equação diferencial em termos da pressão

Para obter a equação diferencial que descreve meio acústicos lineares, em termos da pressão acústica, vamos derivar a equação (2.1), na direção x_3 e a equação constitutiva (2.5) duas vezes em relação ao tempo, ou seja:

$$p_{,33} = -\rho \ddot{u}_{3,3} \quad (2.6)$$

$$\ddot{p} = -B \ddot{u}_{3,3} \quad (2.7)$$

Combinando agora as equações (2.6) e (2.7) de forma a eliminar $\ddot{u}_{3,3}$, a equação diferencial em termos da pressão acústica, pode ser escrita como:

$$p_{,33} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad (2.8)$$

com

$$c^2 = \frac{B}{\rho} \quad (2.9)$$

em que c representa a velocidade de propagação da onda acústica. A equação (2.9), é conhecida como equação da onda escalar [Kane-1994].

A expressão (2.8) indica que a equação escalar da onda acústica, pode ser tratada em termos da pressão acústica.

Assim se Ω é um domínio, de contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, como o mostrado na figura 2.3, a distribuição de pressão acústica, sobre contorno Γ , pode ser determinada por meio de um modelo matemático do domínio Ω , representado pelo problema de valor de contorno na forma:

$$\begin{cases} \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0, & \text{em } \Omega & (a) \\ \text{com} & & \\ p = \bar{p}, & \text{sobre } \Gamma = \Gamma_D & (b) \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \bar{p}_{,n}, & \text{sobre } \Gamma = \Gamma_N & (c) \end{cases} \quad (2.10)$$

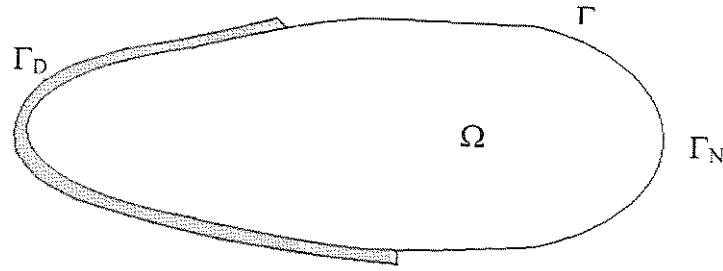


Figura 2.3: Domínio com Condições de Contorno

Onde as relações (2.10b-c), representam as condições de contorno em sua forma clássica, sobre o contorno Γ do domínio Ω sendo que a condição de contorno dada por (2.10b) conhecida como condição de Dirichlet, enquanto que a condição de contorno dada por (2.10c) é conhecida como condição de Neumann.

2.2.2- A equação diferencial em termos do potencial de velocidade.

Nesta seção vamos considerar outra vez a equação de equilíbrio (2.1) e a relação constitutiva (2.5) para $u = \xi$, ou seja:

$$p_{,3} = -\rho \ddot{\xi}_3 \quad (2.11)$$

$$p_{,3} = -\rho \dot{\xi}_{3,3} \quad (2.12)$$

Derivando (2.12), com relação ao tempo temos:

$$\frac{dp}{dt} = -B \frac{d(\xi_{3,3})}{dt} = -B \dot{\xi}_{3,3} \quad (2.13)$$

Definindo $v_3 = \dot{\xi}_3$, a equação de equilíbrio (2.11) pode ser reescrita como:

$$p_{,3} = -\rho \dot{v}_3 \quad (2.14)$$

Derivando (2.14) em relação ao tempo temos:

$$\frac{d(p_{,3})}{dt} = -\rho \frac{dv_3}{dt} = -\rho \ddot{v}_3 = -\rho \ddot{\xi}_3 \quad (2.15)$$

Considerando agora uma inversão na ordem de diferenciação do lado esquerdo da equação (2.15) temos:

$$\frac{d(p_{,3})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) = \frac{d}{dx_3} \left(\frac{dp}{dt} \right) \quad (2.16)$$

assim a equação (2.15) fica reescrita como:

$$\frac{d}{dx_3} \left(\frac{dp}{dt} \right) = -\rho \ddot{\xi}_3 \quad (2.17)$$

substituindo (2.13) em (2.17) obtemos:

$$\frac{d}{dx_3} \left(-B \dot{\xi}_{3,3} \right) = -\rho \ddot{\xi}_3$$

ou

$$-B \dot{\xi}_{3,33} = -\rho \ddot{\xi}_3 \quad (2.18)$$

Definindo, $\dot{\xi}_3 = \nabla u$ em que ∇u representa um potencial de velocidade e substituindo em

(2.18) temos:

$$(\nabla u)_{,33} - \frac{\rho}{B} \frac{d^2(\nabla u)}{dt^2} = 0$$

ou

$$\nabla \left(u_{,33} - \frac{\rho}{B} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = 0$$

implicando que:

$$u_{,33} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_3 = 0 \quad (2.19)$$

com c^2 dado por (2.9).

A expressão (2.19) indica que a equação escalar da onda acústica linear unidimensional, pode ser expressa em termos do potencial de velocidade.

Uma modelagem matemática de um domínio Ω , com contorno $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$, dado na figura 2.3, que permite determinar o potencial de velocidade em todo o contorno Γ , pode ser tratado por meio do problema valor de contorno, na forma:

$$\begin{cases} \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0; & \text{em } \Omega & (a) \\ e \\ u = \bar{u} & \text{em } \Gamma = \Gamma_D & (b) \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{u}_N & \text{em } \Gamma = \Gamma_N & (c) \end{cases} \quad (2.20)$$

onde as expressões (2.20b) e (2.20c), representam as condições de contorno, conhecidas

respectivamente por condição de Dirichet e condição de Neumann.

2.3 - Equação da onda bidimensional

A equação diferencial que rege problemas acústicos bidimensionais pode ser obtida através de uma extensão feita a partir da equação diferencial para problemas acústicos unidimensionais.

No caso bidimensional a equação de equilíbrio (2.1), é escrita como:

$$p_{,i} = -\rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.21)$$

A relação constitutiva para o caso 2D, pode ser determinada reescrevendo a relação constitutiva (2.5), de forma conveniente visando escrever, posteriormente a equação diferencial para o caso acústico bidimensional.

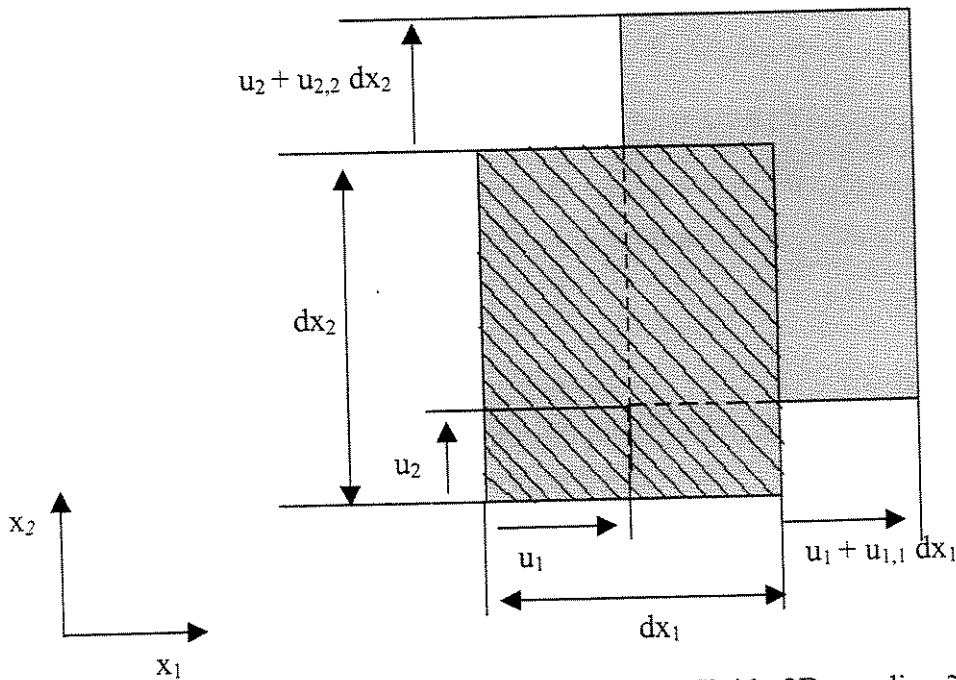


Figura 2.4: Deslocamento da massa de Fluido 2D nas direções x_1 e x_2

A fim de determinar a relação constitutiva do material para o caso bidimensional, é preciso

considerar na figura 2.4, um pequeno elemento de dada $S = dx_1 dx_2$, e seus acréscimos nas direções 1 e 2, dados, respectivamente, por:

$$u_{1,1}(x_1+dx_1) = u_1 + u_{1,1} dx_1$$

$$u_{2,2}(x_2+dx_2) = u_2 + u_{2,2} dx_2$$

Considerando o volume inicial $V_0 = dx_1 dx_2 dx_3$, uma pequena variação de massa nas direções 1 e 2, acarretará uma variação de volume, fazendo com que o volume final seja dado por: $V_f = (1 + u_{1,1})dx_1 (1 + u_{2,2})dx_2 dx_3$, conforme mostra a figura 2.4. Assim a variação de volume nas direções 1 e 2, é dada por:

$$\Delta V = V_f - V_0$$

ou

$$\Delta V = ((1 + u_{1,1})dx_1 (1 + u_{2,2})dx_2) dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3$$

assim podemos escrever:

$$\frac{\nabla V}{V_0} = \frac{(1 + u_{1,1} + u_{2,2} u_{1,1} + u_{2,2} - 1) dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3}$$

e desprezando a parte não linear ($u_{1,1} u_{2,2}$) obtemos:

$$\frac{\nabla V}{V_0} = u_{1,1} + u_{2,2}$$

substituindo a relação $\frac{\nabla V}{V_0}$ na equação constitutiva dada em (2.3) temos:

$$p = -B(u_{1,1} + u_{2,2})$$

ou

$$p = -B u_{i,i} \quad i=1,2 \quad (2.22)$$

que representa a relação constitutiva para o caso 2D. As equações (2.21) e (2.22), correspondem, respectivamente, às equações de equilíbrio, e constitutiva, para o caso bidimensional. A partir das equações (2.21) e (2.22), é possível obter a equação diferencial no caso bidimensional, para problemas acústicos, em termos da pressão e do potencial de velocidade, como veremos na próxima secção.

2.3.1- A equação diferencial 2D em termos da pressão

Analogamente ao que foi feito para obter a equação diferencial (2.8) no caso unidimensional, é feito agora para o caso bidimensional. Derivando a equação (2.21), uma vez, em relação a cada uma das direcções 1 e 2 e somando as parcelas, podemos expressar o resultado em notação indicial como:

$$p_{,ii} = -\rho \ddot{u}_{i,i}, \text{ com } i = 1,2 \quad (2.23)$$

Derivando a equação (2.22), duas vezes em relação ao tempo, obtemos:

$$\ddot{p} = B \ddot{u}_{i,i}, \text{ com } i = 1,2 \quad (2.24)$$

Eliminando o termo $\ddot{u}_{i,i}$ das equações (2.23) e (2.24), obtemos o resultado em notação indicial:

$$p_{,ii} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0, \text{ com } i = 1, 2 \quad (2.25)$$

A equação (2.25), representa a equação diferencial bidimensional, para problemas acústicos lineares em termos da pressão p , que é uma grandeza escalar.

Um modelo matemático que representa o problema valor de contorno da figura 2.3 e resolve (2.25) é escrito na forma de (2.19).

2.3.2 - A equação diferencial 2D em termos do potencial de velocidade.

A equação diferencial em termos do potencial de velocidade, é construída a partir de uma manipulação dos termos da equação de equilíbrio e da equação constitutiva dadas, respectivamente por (2.21) e (2.22). Considerando momentaneamente um deslocamento ξ as equações (2.21) e (2.22) podem ser respectivamente, reescrita por:

$$p_{,i} = -\rho \ddot{\xi}_i \quad (2.26)$$

$$p = -B \xi_{i,i} \quad i = 1, 2 \quad (2.27)$$

A derivada de (2.27) e (2.26) em relação ao tempo, resulta respectivamente em:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B \frac{\partial(\xi_{i,i})}{\partial t} = -B \dot{\xi}_{i,i} = -B \nabla \cdot \dot{\underline{\xi}}_i \quad (2.28)$$

$$\frac{d(p_{,i})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dp}{dx_i} \right) = -\rho \frac{\partial \ddot{\xi}_i}{\partial t} = -\rho \frac{\partial^2 \dot{\xi}_i}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

Uma inversão na ordem de diferenciação, sobre o lado esquerdo de (2.29), deixa-a

escrita por:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = -\rho \frac{\partial \ddot{\xi}_i}{\partial t} = -\rho \frac{\partial^2 \dot{\xi}_i}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

Considerando o divergente de $\frac{\partial p}{\partial t}$, (2.30) assume a forma:

$$\nabla \circ \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = -\rho \frac{\partial^2 \dot{\xi}_i}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Substituindo (2.28) em (2.31), temos:

$$\nabla \left(-B \nabla \circ \dot{\xi}_i\right) = -\rho \frac{\partial^2 \dot{\xi}_i}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

Definindo o potencial de velocidade como sendo $\dot{\xi}_i = \nabla u$, a equação (2.32) fica escrita por:

$$\nabla(-B \nabla \circ \nabla u) = -\rho \frac{\partial^2 \nabla u}{\partial t^2}$$

ou ainda na forma:

$$\nabla(-B \nabla^2 u) = \nabla \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

usando das propriedades de diferenciação encontramos:

$$-\nabla \left(\nabla^2 u - \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$$

de onde podemos escrever a equação diferencial linear da onda:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

com c^2 dado em (2.9).

A expressão (2.33) indica que a equação escalar da onda acústica linear bidimensional, também pode ser expressa em termos do potencial de velocidade.

2.4 - A equação de Helmholtz

Uma forma de expressar uma variação harmônica no tempo, é usar a teoria de números complexos (formula de Euler's). Assim a variação temporal harmônica da pressão atuando em um ponto de coordenadas x_1 e x_2 pode ser escrito como:

$$p(x_1, x_2, t) = p(x_1, x_2) e^{i\omega t} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.25):

$$p_{,ii} + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.35)$$

ou ainda

$$p_{,ii} + k^2 p = 0 \quad (2.36)$$

onde a constante $k = \frac{\omega}{c}$, é o número de onda, que no Sistema Internacional S.I, é medido em radianos/metro.

A equação diferencial (2.36) é conhecida na literatura como equação de Helmholtz, que governa problemas de acústica linear no caso bidimensional. A equação de Helmholtz, (2.36) pode ainda ser escrita utilizando-se do Laplaciano ∇^2 , na forma:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.37)$$

2.5 - A solução fundamental 2D da equação de Helmholtz

Sejam P e Q dois pontos de um domínio $\Omega \subset \mathcal{R}^2$, e $p^*(k, R)$ a solução fundamental da equação diferencial de Helmholtz, com singularidade em P , definida como a solução da seguinte equação:

$$\nabla^2 p^* + k^2 p^* = -\delta(P - Q) \quad (2.38)$$

onde $\delta(P - Q)$ representa a distribuição Delta de Dirac [Boyce-1990].

A solução de (2.38) sobre um contorno Γ pode ser escrita na forma :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p^* + k^2 p^*) d\Omega = \int_{\Omega} (-\delta(P - Q)) d\Omega \quad (2.39)$$

A integração do lado direito da equação (2.39) sobre o domínio Ω é determinada por meio da integração da distribuição Delta de Dirac ou seja:

$$\int_{\Omega} (-\delta(P - Q)) d\Omega = - \int_{\Omega} \delta(P - Q) d\Omega = -1 \quad (2.40)$$

Já a integração do lado esquerdo de (2.38), pode ser determinada, procurando uma solução com simetria cilíndrica e, desta forma, é conveniente escreve-la num sistema de coordenadas polares.

$$\frac{d^2 p^*}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d p^*}{dR} + k^2 p^* = 0 \quad (2.41)$$

válido para todo ponto de Ω , exceto no ponto P.

Fazendo-se $x = kR$, obtemos a equação diferencial de Bessel de ordem zero [Mesquita et al 2000]

$$x^2 \frac{d^2 p^*}{dx^2} + x \frac{d p^*}{dx} + x^2 p^* = 0 \quad (2.42)$$

Da teoria de Equações diferenciais, sabemos que a solução de (2.42) é do tipo:

$$p^*(x) = A H_0^{(1)}(x) + B H_0^{(2)}(x) \quad (2.43)$$

onde A e B são coeficientes a serem determinados e $H_0^{(1)}(x)$ e $H_0^{(2)}(x)$ são, respectivamente, as funções de Hankel de 1ª e 2ª espécie e ordem zero, definidas como:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + i Y_0(x) \quad (a)$$

e (2.44)

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - i Y_0(x) \quad (b)$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, definida por [Boyce-1990]:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \quad (2.45)$$

enquanto que $Y_0^{(1)}(x)$ é a função de Bessel de 2ª espécie e ordem zero ou conhecida também por função de Bessel-Neumann definida por [Boyce-1990]:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} (x)^{2m} \right] \quad (2.46)$$

onde γ é conhecida como constante de Euler-Máscheroni e definida pela equação

$$\gamma = \lim(h_n - \ln n), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (\gamma \approx 0.5772), \text{ e } h_m = \sum_{h=1}^m \frac{1}{h}.$$

O comportamento assintótico das funções de Bessel é caracterizado conforme mostra a equações a seguir [Boyce-1990]:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1 \quad (a)$$

e

$$(2.47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x) \quad (b)$$

e por outro lado se x cresce ilimitadamente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi x}} \quad (a)$$

e

$$(2.48)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_0(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi x}} \quad (b)$$

Se utilizarmos o fator $e^{i\omega t}$, para representar uma variação temporal estacionária então as

parcelas da solução (2.43)

$$H_0^{(1)}(x)e^{i\omega t} = [J_0(x) + iY_0(x)]e^{i\omega t} \quad (a)$$

$$e \quad (2.49)$$

$$H_0^{(2)}(x)e^{i\omega t} = [J_0(x) - iY_0(x)]e^{i\omega t} \quad (b)$$

representam, respectivamente, uma onda se propagando em direção à origem do sistema de coordenadas e outra se afastando da origem. Estes fatos podem ser verificados, comparando o gráfico do Operador de Helmholtz (2.49), em função da distância do centro da fonte, para um determinado intervalo de tempo.

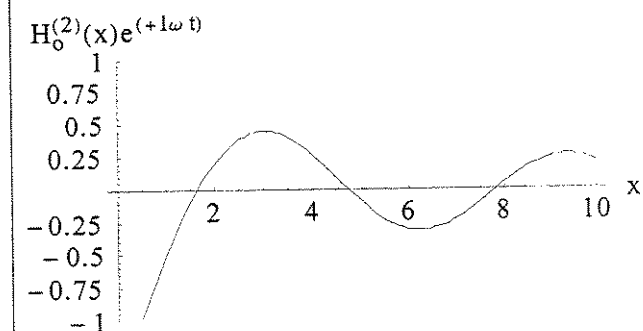
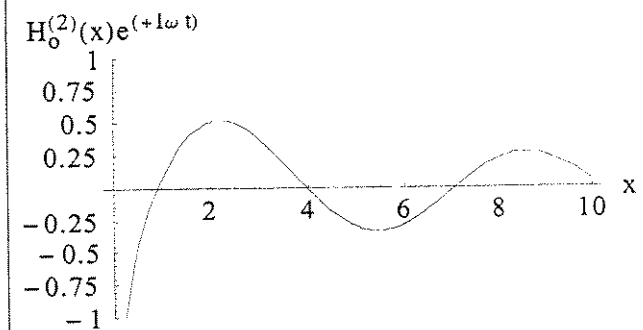
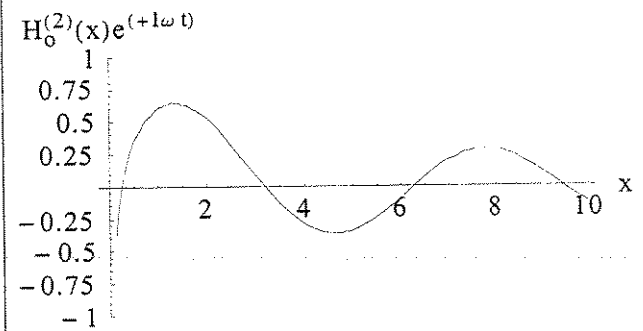
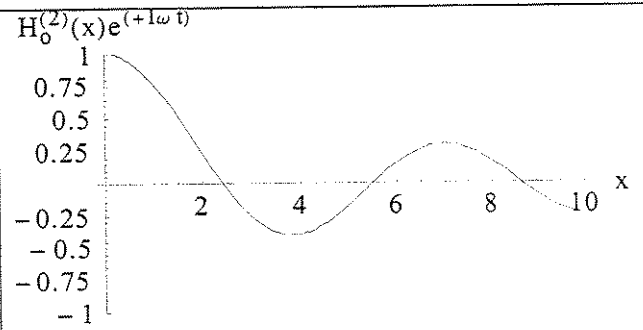
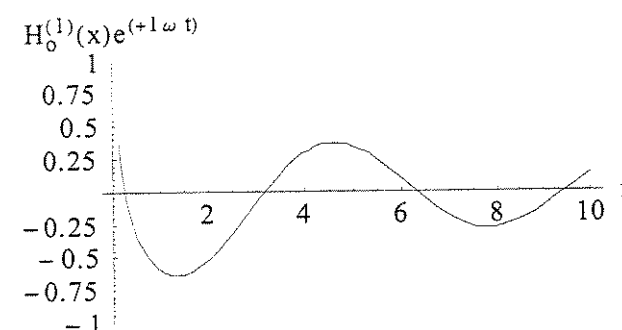
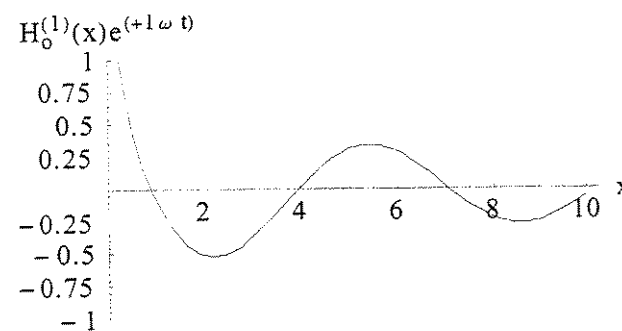
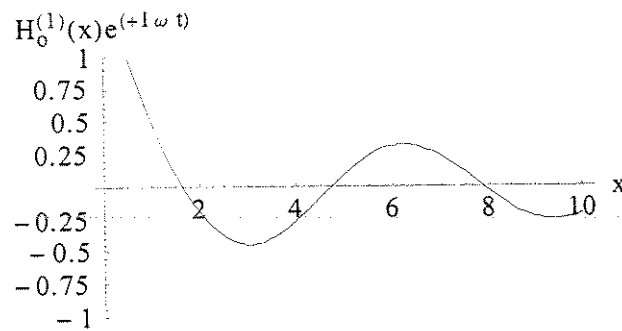
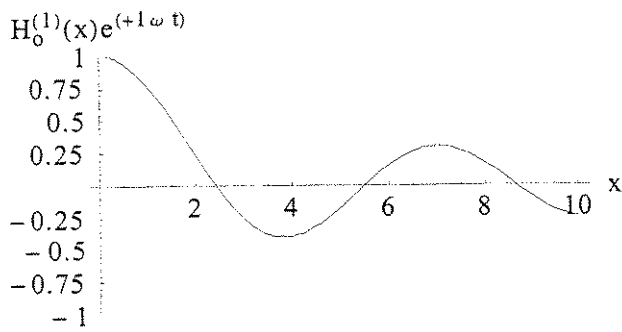
Nos gráficos da figura 2.4a, é mostrado o comportamento da curva (2.49a), onde verifica-se que na medida em que o tempo aumenta, a crista da onda de fato aproxima-se da origem da fonte e por outro lado, nos gráficos da figura 2.4b, é mostrado o comportamento de (2.49b) para a mesma variação de tempo e nesse caso verifica-se que a crista da onda afasta-se da origem. De modo análogo pode-se verificar o comportamento do operador de Hankel quando a exponencial de (2.49) for $(e^{-I\omega t})$.

Se a fonte de energia do sistema em estudo estiver na origem, então a condição de radiação de Sommerfeld [Harari-1998], a qual postula que nenhuma fonte de energia está situada no “infinito”, reduz a solução fundamental (2.43), pois a constante A desaparece ($A = 0$) e portanto (2.43) fica dada por:

$$p^*(x) = B H_0^{(2)}(x)$$

e portanto a solução de (2.38) pode ser avaliada fazendo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\nabla \cdot \nabla p^*(x) + k^2 p^*(x) \right) dA \right] = -1 \quad (2.50)$$



(a) $H_0^{(1)}(x)e^{+i\omega t}$: Onda propagando-se na direção da origem da fonte

da

(b) $H_0^{(2)}(x)e^{+i\omega t}$: Onda afastando-se da origem da fonte

Figura 2.4: Propagação de ondas e interpretação da solução Fundamental do operador de Helmholtz

O segundo termo do lado esquerdo da integral (2.50) tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isto pode ser verificado, variando-se o comportamento assintótico dos elementos da integral quando $\epsilon \rightarrow 0$. Neste caso a variável p^* cresce indefinidamente com comportamento $O(\ln[R])$, enquanto dA decresce com uma taxa $O(R^2)$, garantindo um valor nulo para o limite.

Vamos agora analisar o primeiro termo da integral de (2.50). Aplicando-se o teorema da divergência podemos escrever:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\epsilon} \left(\nabla^2 p^* \right) dA \right] = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\nabla \cdot \nabla p^* \right) dA = \int_{\Gamma_\epsilon} \nabla p^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.51)$$

substituindo (2.51) em (2.50):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right] = -1 \quad (2.52)$$

onde $\mathbf{n}$, é o vetor normal do contorno Γ_ϵ .

Notemos ainda que o vetor $\mathbf{n}$ e o raio $\mathbf{R}$ tem mesma direção portanto $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}$, assim o comportamento assintótico de p^* é:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left[1 - i \frac{2}{\pi} \ln(kR) \right] d\Gamma \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} \ln(k\epsilon) \epsilon d\theta \right] = -4i \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo a equação (2.53) em (2.43) e juntamente com (2.52) encontramos $B = -\frac{i}{4}$, e a solução fundamental no plano é dada por [T.W. Wu. 2000]

$$p^*(kR) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \quad (2.54)$$

onde: k representa o número de onda $k = \omega/c$, $R = |R|$ e R representa o vetor posição

2.6 – Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi feita a dedução da equação escalar da onda transiente bidimensional que governa os meios acústicos lineares.

Esta equação foi particularmente obtida para problemas com variação temporal harmônica, resultando na equação de Helmholtz. Deduziu-se uma solução analítica para o problema particular da equação de Helmholtz, tendo como termo não homogêneo uma fonte concentrada, modelada por uma distribuição Delta de Dirac, obedecendo a chamada condição de radiação de Sommerfeld. Esta solução particular é conhecida como “Solução Fundamental” do operador de Helmholtz 2D e será muito utilizada na formulação da equação integral de Contorno, representada no próximo capítulo.

Capítulo 3

A equação integral de contorno

3.1– Introdução

Neste capítulo a equação diferencial de Helmholtz, deduzida anteriormente, será transformada em uma equação integral de contorno. Para tanto far-se-á uso da Segunda Identidade de Green e da solução fundamental do operador de Helmholtz.

Será discutida a formulação para domínios internos limitados, bem como a formulação para domínios externos ilimitados.

3.2 – Problema de domínio interior

Vamos considerar o domínio bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ fechado por um contorno Γ , caracterizado, por sua vez, através de um vetor normal $\underline{n}$ tal como na figura 3.1a .

Sejam x_d e x dois pontos quaisquer de Ω , e seja Ω_ϵ uma circunferência de raio ϵ e centro em x_d fixo, com x sobre Γ_ϵ , em que Γ_ϵ é o contorno de Ω_ϵ , conforme mostrado na figura 3.1b.

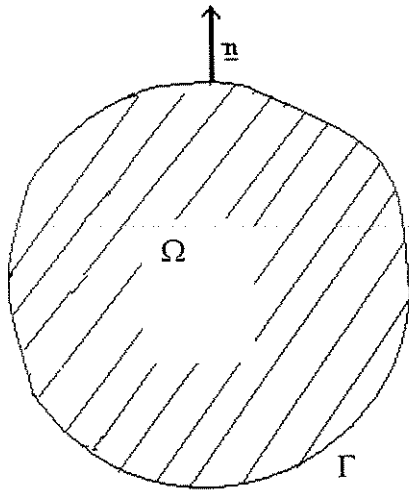
Sejam, ainda u e v duas funções escalares, tais que:

$$\nabla^2 u(kR) + k^2 u(kR) = 0, \text{ em } \Omega \cup \Gamma \quad (3.1)$$

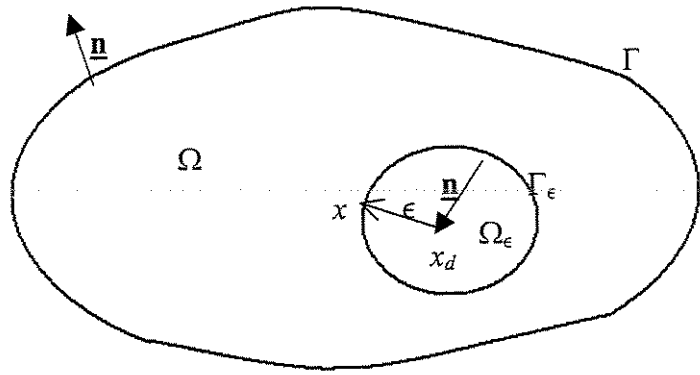
em que R , corresponde à distância euclidiana, de dois pontos quaisquer de Ω e,

$v(kR) = H_0^{(2)}(kR)$, tal que em $(\Omega - \Omega_\epsilon)$:

$$\begin{cases} \nabla^2 v(kR) + k^2 v(kR) = \delta(x_d - x) & (a) \\ \nabla^2 v(kR) + k^2 v(kR) = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.2)$$



a) Domínio Interior



b) Definições para dedução da equação Integral

Figura 3.1: Domínio de Integração

O nosso objetivo é avaliar a equação de Helmholtz (2.37) em termos do potencial de velocidade para todos os pontos de Ω internos ao contorno Γ . Para isto, consideremos o novo domínio $\Omega - \Omega_\epsilon$, de contorno $\Gamma + \Gamma_\epsilon$ e, apliquemos a ele a segunda Identidade de Green [Eringen-1975], isto é:

$$\int_{\Omega - \Omega_\epsilon} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.3)$$

Somando e subtraindo a expressão $(u k^2 v)$ ao integrando da integral do primeiro membro na equação (3.3), obtemos:

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} [u(\nabla^2 v + k^2 v) - v(\nabla^2 u + k^2 u)] d\Omega \quad (3.4)$$

A integral do lado direito de (3.4) é zero pois, conforme definido em (3.1) e (3.2a-b), as funções u e v satisfazem a equação de Helmholtz em todo $(\Omega - \Omega_\varepsilon)$. Assim, podemos concluir que:

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.3), temos:

$$\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

Desmembrando a integral em (3.6), obtemos:

$$\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma_\varepsilon = 0 \quad (3.7)$$

ou:

$$\int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma_\varepsilon \quad (3.8)$$

Considerando que em Ω_ε o vetor normal $\underline{n}$ é voltado para o centro da circunferência, então, pode se escrever que: [Hall-1994]

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \quad (3.9)$$

Para calcular a integral do lado direito de (3.8), observemos que $v(k\varepsilon) = H_0^{(2)}(k\varepsilon)$ em Ω , como definido em (3.2a-b) onde a distância $R = |x_d - x|$, é substituída pelo raio ε do domínio Ω_ε . Assim derivando esta expressão com relação a normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}_\varepsilon$ e utilizando (3.9) obtemos:

$$\frac{\partial v(k\varepsilon)}{\partial n} = \frac{\partial H_0^{(2)}(k\varepsilon)}{\partial(k\varepsilon)} \frac{\partial(k\varepsilon)}{\partial n} = -k \frac{\partial H_0^{(2)}(k\varepsilon)}{\partial(k\varepsilon)} = -k \frac{\partial(J_0(k\varepsilon) + iY_0(k\varepsilon))}{\partial(k\varepsilon)} \quad (3.10)$$

Fazendo, em (3.10), o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e usando as definições de valores assintóticos definidos nas equações (2.47a-b), para as funções de Bessel e de Bessel-Neumann, temos:

$$\frac{\partial v(k\varepsilon)}{\partial n} = -k \frac{\partial}{\partial(k\varepsilon)} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln(k\varepsilon) \right) = -ki \frac{2}{\pi(k\varepsilon)} = \frac{-2i}{\pi\varepsilon} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.8) e supondo, sem perda de generalidade, que o contorno Γ_ε possa ser escrito como $\Gamma_\varepsilon = \varepsilon\theta$ e realizando o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x, x_d) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} u \left(\frac{-2i}{\pi\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta - \int_0^{2\pi} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln(k\varepsilon) \right) \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon d\theta \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Calculando as duas integrais do lado direito de (3.12), obtemos que:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) u d\Gamma_\varepsilon = -4iu(x_d) \quad (3.13)$$

portanto, (3.8) torna-se:

$$\int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d)}{\partial n} - u(x_d) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma = 4iu(x_d) \quad (3.14)$$

A equação (3.14), permite avaliar a equação de Helmholtz para todos os pontos internos ao domínio Ω . Queremos, entretanto, a partir da equação (3.12), avaliar os pontos que estão sobre o contorno Γ de Ω .

3.3 - Extensão para o contorno

Consideremos, agora, que os pontos x e x_d estejam colocados sobre o contorno Γ (figura 3.2a), do domínio Ω . Considere x_d um ponto fixo, e x movendo-se sobre Γ . Quando o ponto x coincidir com o ponto x_d , ocorrerá uma singularidade logarítmica na expressão $v(kR) = H_0^{(2)}(k\varepsilon)$. Tal singularidade, não poderá ter o mesmo tratamento feito no caso dos pontos internos, já que a 2ª Identidade de Green, não pode ser aplicada, pois, para qualquer ponto sobre Γ , e qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o círculo Γ_ε terá pontos de Ω e pontos que não pertencem a Ω , pois $\varepsilon = |x_d - x|$. Entretanto, utilizando a equação (3.14), é possível tratar tal singularidade.

Para levantarmos esta singularidade, vamos considerar, o artifício, tal como é mostrado na figura 3.2b. Com centro no ponto x_d , traçamos um arco de circunferência Γ_ε , de modo que x seja deslocado para Γ_ε , o que altera o contorno do domínio para $\Gamma_\varepsilon + \Gamma_-$, conseqüentemente o domínio é estendido para $\Omega + \Omega_\varepsilon$.

Na figura 3.2b é possível definir um ângulo externo θ^e e um ângulo interno θ^i [Hartmann-1981, Mantic-1993]. Entre os dois existe a relação:

$$\theta^e + \theta^i = 2\pi \quad (3.15)$$

É importante perceber que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma_\varepsilon + \Gamma_-) = \Gamma \quad (a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Omega + \Omega_\varepsilon) = \Omega \quad (b) \quad (3.16)$$

Com a inclusão do ponto x_d no domínio e contorno estendidos, respectivamente $\Omega \cup \Omega_\varepsilon$ e $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_-$ podemos voltar a fazer valer a identidade de Green escrita na expressão (3.14), reescrevendo-a como:

$$\int_{\Gamma_- + \Gamma_\varepsilon} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma = 4iu(x_d) \quad (3.17)$$

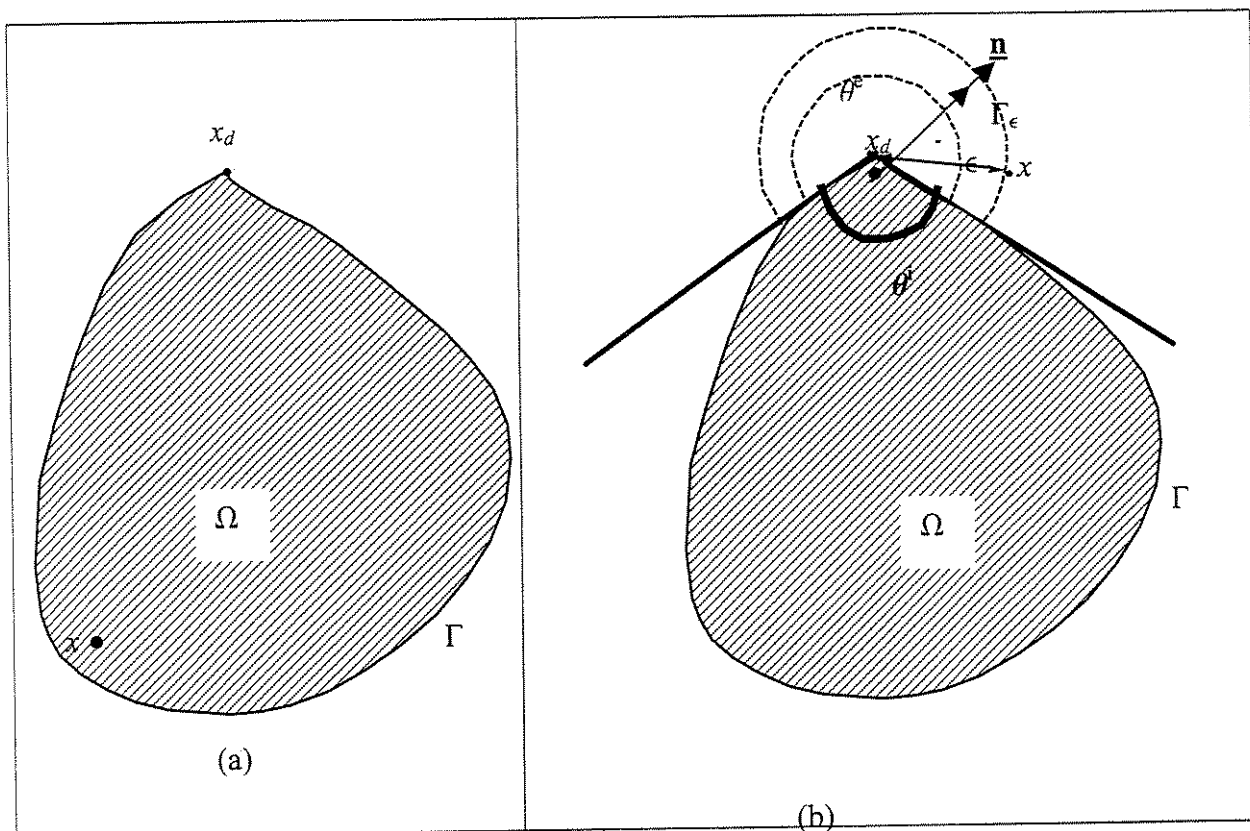


Figura 3.2: Ângulos no Contorno

ou ainda, separando as integrais sobre os distintos contornos

$$\int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma = 4iu(x_d) - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.18)$$

Para que o ponto x_d venha fazer parte do contorno Γ , necessitamos determinar o limite da equação (3.18)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[4iu(x_d) - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando (3.13a) o limite da primeira integral em (3.19) se torna

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma^-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.20)$$

considerando a equação (3.9) podemos escrever:

$$\frac{\partial v(x, x_d)}{\partial n} = \frac{\partial(k\varepsilon)}{\partial n} = \frac{2i}{\pi\varepsilon} \quad (3.21)$$

Podemos voltar a avaliar o limite da Segunda integral da equação (3.20). Substituindo os valores de $v(k\varepsilon) = H_0^{(2)}(k\varepsilon)$ pelos seus valores assintóticos dados (2.47a –b):

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v(k\varepsilon) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(k\varepsilon)}{\partial n} \right) d\Gamma_\varepsilon \right] = \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln(k\varepsilon) \right) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \left(\frac{-2i}{\pi\varepsilon} \right) \right] d\Gamma_\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Considerando que $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\theta$ e substituindo $u(x)$ para seu desenvolvimento em série em torno do ponto x_d , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(v(k\varepsilon) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(k\varepsilon)}{\partial n} \right) d\Gamma_\varepsilon(x) \right] = \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_a}^{\theta_b} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln(\varepsilon k) \right) \left(-\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \Big|_{x_d} - \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{x_d} \right) \varepsilon \right] \varepsilon d\theta - \\
\int_{\theta_a}^{\theta_b} \left[u(x_d) + \frac{\partial u(x_d)}{\partial \varepsilon} \Big|_{x_d} \varepsilon \right] \left(\frac{-2i}{\pi\varepsilon} \right) d\theta
\end{aligned} \tag{3.23}$$

mostra-se de forma análoga, que o limite da primeira integral do lado direito da equação (3.23) se anula. Resta tratar a segunda integral de (3.23)

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\theta_a}^{\theta_b} u(x_d) \left(\frac{-2i}{\pi\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta - \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \Big|_{x_d} \varepsilon \left(\frac{-2i}{\pi\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \right\} = \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i2u(x_d)}{\pi} \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u(x_d)}{\partial \varepsilon} \Big|_{x_d} \frac{2i}{\pi} \varepsilon \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta = i \frac{2}{\pi} \theta^e u(x_d)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Retornando o resultado (3.24) em (3.18) podemos escrever

$$\int_{\Gamma_-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma(x) = 4iu(x_d) - \frac{2i\theta^e}{\pi} u(x_d)$$

ou ainda

$$\int_{\Gamma_-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma(x) = 4iu(x_d) \left(1 - \frac{\theta^e}{2\pi} \right) \quad (3.25)$$

ou ainda

$$\left(1 - \frac{\theta^e}{2\pi} \right) u(x_d) = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma(x) \quad (3.26)$$

Lembrando que $v(kR) = H_0^{(2)}(kR)$ e introduzindo a constante complexa $(-\frac{i}{4})$ para dentro do sinal de integração, temos:

$$c u(x_d) = \int_{\Gamma} \left(\left(-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \right) u \right) d\Gamma \quad (3.27)$$

onde o termo “c” é chamado de “termo livre” (de integração) e é dado por:

$$c = 1 - \frac{\theta^e}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (2\pi - \theta^e) \quad (3.28)$$

Aqui, é importante fazer um comentário sobre a equação (3.27). Na seção 2.5, do capítulo 2, foi deduzida a solução fundamental do operador de Helmholtz, definido pela expressão (2.54). A solução obtida naquele capítulo foi $u^*(kR) = \left(-\frac{i}{4}\right) H_0^{(2)}(kR)$. Solução está encontrada nos textos básicos de Elementos de Contorno [Brebbia, 1980, Brebbia e Domingues, 1989 e Ciskowski e Brebbia, 1991]. Assim em conformidade com os objetivos traçados por este trabalho, esta seção traz a dedução completa da Equação integral de contorno, na qual mostramos

de modo natural a inclusão da solução fundamental do operador de Helmholtz, de onde observamos que o fator $(-i/4)$ é devido o operador de Helmholtz ser uma expressão complexa. Ou seja a solução mostrada em (3.27) geralmente é obtida a partir da dedução geral da integral de contorno em sua forma singular, realizada nesta seção.

3 - 4 O coeficiente c , termo livre do sinal de integração

O coeficiente c que aparece na equação (3.28), tem seu valor determinado quando é conhecida a posição do ponto fixo x_d em relação à $(\Omega \cup \Gamma)$. Assim o valor determinado pela relação $c = \left(1 - \frac{\theta^e}{2\pi}\right)$, depende somente do ângulo com origem no ponto x_d . Vejamos então:

Se o ponto x_d não pertencer a $\Omega \cup \Gamma$, sempre vai existir $\epsilon > 0$, que determina um círculo de raio ϵ e centro em x_d , tal que nenhum dos pontos deste círculo pertencem a $\Omega \cup \Gamma$, isto é, a região angular é o ângulo externo $\theta^e = 2\pi$ e que substituído em (3.28) determina $c = 0$.

Por outro lado, se o ponto x_d pertencer ao interior de Ω , sempre vai existir $\epsilon > 0$, de modo que o círculo de centro x_d e raio ϵ , esteja contido em Ω , determinando um ângulo interno $\theta^e = 2\pi$, conseqüentemente $\theta^e = 0$, de (2.28) resulta $c = 1$.

Consideremos agora, o ponto x_d sobre o contorno Γ :

a) se é possível traçar uma reta tangente ao contorno Γ , passando pelo ponto x_d , então o ângulo externo ao domínio Ω é $\theta^e = \pi$, e portanto $c = \frac{1}{2}$. Nesse caso dizemos que o ponto x_d pertence à parte suave do contorno Γ .

b) O ponto x_d está sobre a parte não suave do contorno Γ , isto é, o ponto x_d está sobre um canto no contorno. Nesse caso, o ângulo externo deve ser determinado, conforme sua definição em (2.13).

Podemos resumir essas quatro possibilidades descritas anteriormente do seguinte modo:

$$c = \begin{cases} 0, & \text{se o ponto não pertence ao domínio } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se o ponto } x_d, \text{ pertence à parte suave do contorno} \\ 1 & \text{se o ponto } x_d \text{ é um ponto interno ao domínio} \\ 1 - \frac{\theta^e}{2\pi} & \text{se o ponto } x_d \text{ pertence a parte não suave do contorno.} \end{cases} \quad (3.29)$$

3.5 - Problema de domínio exterior

A equação (3.27) obtida na seção 3.3, refere-se ao Ω , fechado por um contorno Γ , portanto um problema de domínio interno. A situação oposta, onde o domínio de interesse tem pontos fora do contorno Γ é denominada de problema de domínio exterior (Ω') (figura 3.3).

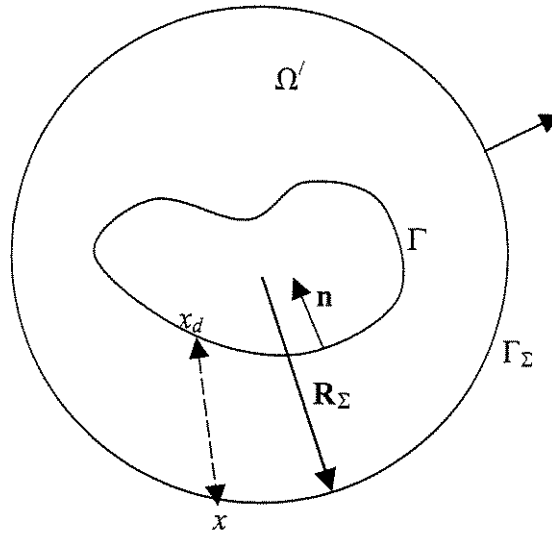


Figura 3.3: Geometria domínio exterior

A fim de estabelecer uma formulação Integral de Contorno para a equação de Helmholtz (2.37), em todo ponto de $(\Gamma \cup \Omega')$, é exigida uma condição adicional, que permita aplicar a Segunda Identidade de Green [Eringen -1981], sobre o domínio de interesse e para isso é definida

a função escalar: $u(k R_\Sigma)$, em que k é uma constante, tenda ao infinito com a mesma variação assintótica de $1/kR_\Sigma$, para R_Σ o raio de um círculo, como na figura 3.3. Nessas condições podemos aplicar a Segunda Identidade de Green em $(\Gamma \cup \Omega')$.

Sejam x_d e x dois pontos do domínio Ω' de contorno $(\Gamma \cup \Gamma_\Sigma)$, suficientemente distanciados de modo que: $|x_d - x| \approx R_\Sigma$. Assim podemos definir:

$$u(k R) = \frac{1}{k R_\Sigma} \quad (3.30)$$

Por outro lado podemos observar na figura 3.3, que a geometria do domínio Ω' , assemelha-se, ao do problema de domínio interior, para o contorno $\Gamma + \Gamma_\Sigma$, o que permite aplicar a equação (3.14) em todo o contorno $\Gamma + \Gamma_\Sigma$. O que é feito, quando o contorno Γ_Σ é percorrido no sentido anti-horário e o contorno Γ percorrido no sentido horário e desse modo podemos reescrever a equação (3.14) da seguinte forma:

$$4 i u(x_d) = \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Sigma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma_\Sigma \quad (3.31)$$

As integrais do segundo membro de (3.31) podem ser determinadas separadamente para cada um dos contornos Γ_Σ e Γ .

Iniciamos determinando a integral sobre o contorno Γ_Σ da figura 3.3, onde observa-se que o vetor normal $\underline{n}_\Sigma$ e o raio $\underline{R}_\Sigma$, têm o mesmo sentido, implicando em $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \underline{R}_\Sigma}$ e portanto:

$$\frac{\partial u(kR)}{\partial n} = \frac{\partial(kR)}{\partial(kR)} \frac{\partial(kR)}{\partial R} = \frac{-k}{(kR)^2} \frac{k}{1} = -\frac{1}{R^2} \quad (3.32)$$

Retomando a função definida por $v(kR) = H_0^{(2)}(kR)$, sua derivada na direção da normal $\underline{n}_{\Sigma_2}$ fica escrita na forma:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial(H_0^{(2)}(kR_\Sigma))}{\partial R_\Sigma} = \frac{\partial(H_0^{(2)}(kR_\Sigma))}{\partial(kR)_\Sigma} \frac{\partial(kR)}{\partial R} = k \frac{\partial(H_0^{(2)}(kR_\Sigma))}{\partial(kR_\Sigma)} \quad (3.33)$$

substituindo as equações (3.30), (3.31) e (3.32) juntamente com $v(kR)$ na integral sobre Γ_Σ , obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR)}{R_\Sigma^2} \right) d\Gamma_\Sigma - \int_{\Gamma_\Sigma} \left(\frac{1}{R_\Sigma} \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) d\Gamma_\Sigma \right) = \\ \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR)}{R_\Sigma^2} \right) d\Gamma_\Sigma \right) - \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(\frac{1}{R_\Sigma} \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) d\Gamma_\Sigma \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

As duas integrais do lado direito de (3.34), podem ser calculadas, definindo, sem perda de generalidade, $\partial\Gamma_\Sigma = R_\Sigma d\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR_\Sigma)}{R_\Sigma^2} \right) d\Gamma_\Sigma \right) &= \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR_\Sigma)}{R_\Sigma^2} \right) R_\Sigma d\theta \right) = \\ \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR_\Sigma)}{R_\Sigma} \right) d\theta \right) &= 2\pi \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(-\frac{H_0^{(2)}(kR_\Sigma)}{R_\Sigma} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

e

$$\lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(\frac{1}{R_\Sigma} \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) d\Gamma_\Sigma \right) = \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R_\Sigma} \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) R_\Sigma d\theta \right) =$$

$$\lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) d\theta \right) = 2\pi \lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) \quad (3.36)$$

Escrevendo as equações (3.35) e (3.36) em sua forma assintótica dadas em (2.48a-b), para $R_\Sigma \rightarrow \infty$, os valores das integrais dadas em (3.35) e (3.36), são nulos (figura 3.4a-b). Assim:

$$\lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\Sigma} \left(\left(-\frac{H_0^{(2)}(kR)}{R_\Sigma^2} \right) \right) d\Gamma_\Sigma - \int_{\Gamma_\Sigma} \left(\frac{1}{R_\Sigma} \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial(kR)} \right) d\Gamma_\Sigma \right) = 0 \quad (3.37)$$

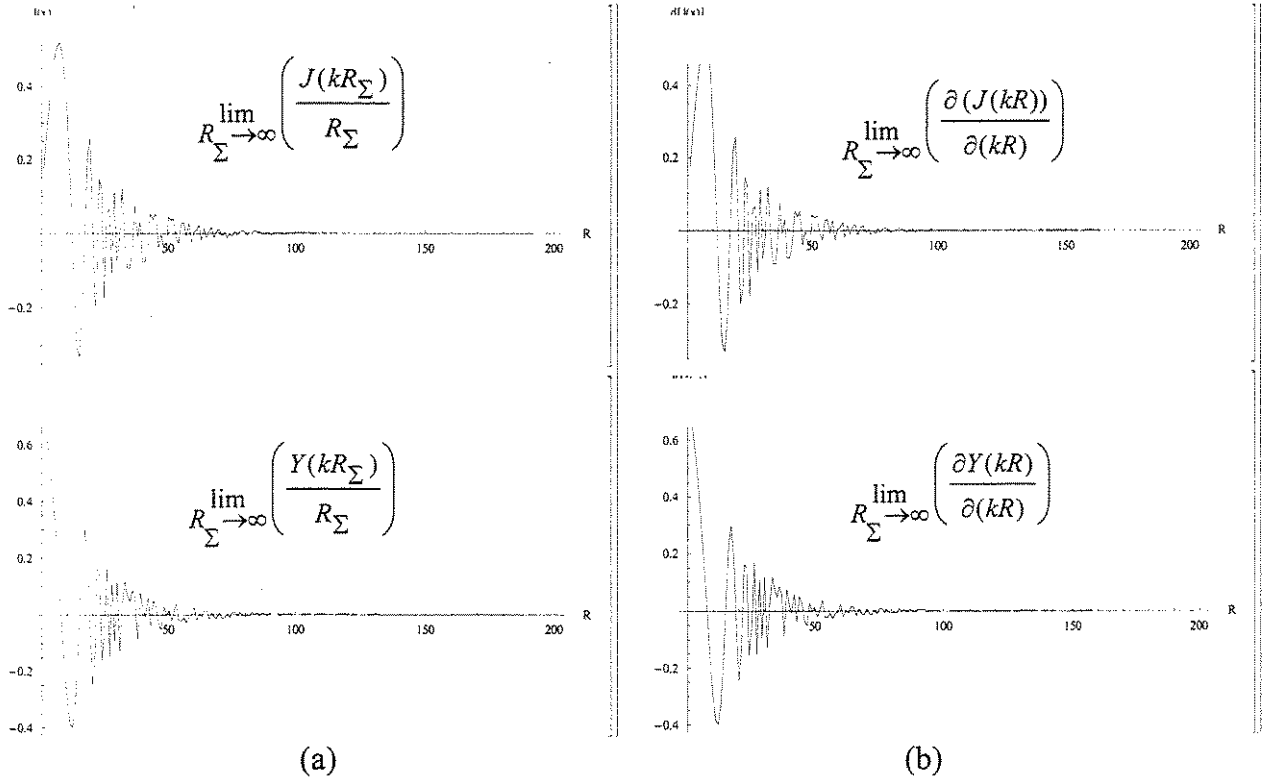


Figura3.4 - Comportamentos das Funções de Bessel, Bessel-Neumann e suas derivadas

Portanto a equação (3.31) se reduz a:

$$4iu(x_d) = \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.38)$$

A equação (3.38) avalia qualquer ponto no interior do domínio Ω' , que é externo ao contorno Γ da fonte acústica. Entretanto, queremos avaliar a partir de (3.38) pontos sobre o contorno Γ .

3.6 - Extensão para o contorno: domínio exterior.

Assim, como foi feito para o caso de domínio interior, vamos considerar x um ponto movendo-se sobre o contorno Γ , e x_d um ponto fixo sobre esse mesmo contorno (figura 3.5). Quando os pontos x e x_d coincidirem, ocorrerá uma singularidade logarítmica em $v(kR) = H_0^{(2)}(kR)$. Tal singularidade pode ser tratada através da equação (3.38), só que agora imaginando o domínio Ω' externo ao contorno Γ .

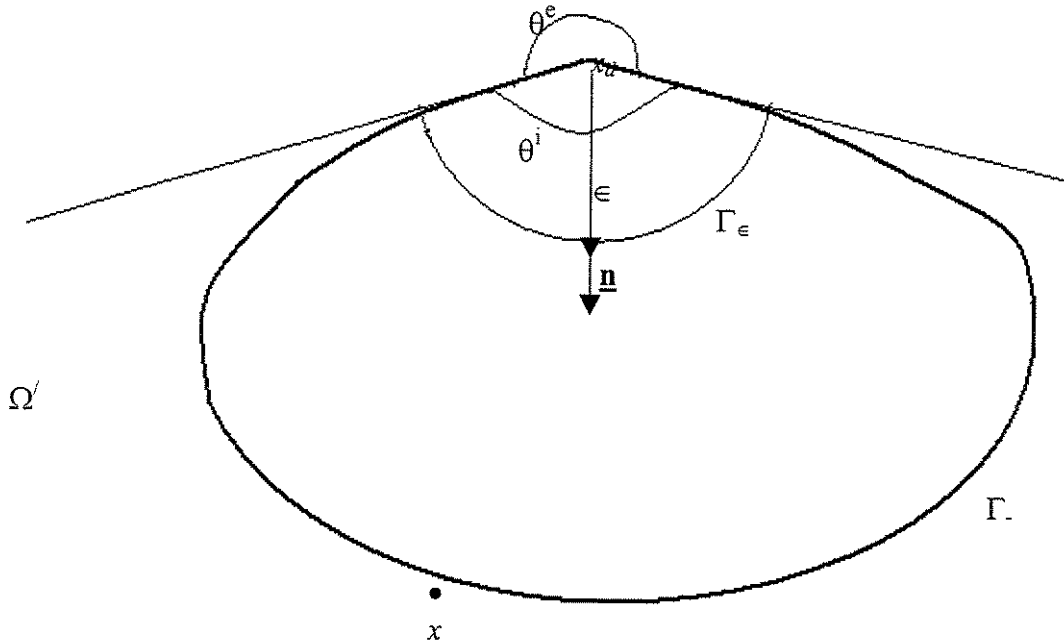


Figura-3.5: Ângulo domínio exterior θ^e

Usando do mesmo artifício feito na seção 3.3, quando em x_d , traçamos um círculo de raio

ϵ , fazendo com que o contorno Γ fique alterado para $\Gamma_\epsilon + \Gamma_-$, em que Γ_- é o que restou do contorno Γ , o novo domínio passa a ser $\Omega + \Omega_\epsilon$. Ainda devemos considerar válidas (3.15) e (3.16).

Considerando o novo contorno $\Gamma_- + \Gamma_\epsilon$, do domínio $\Omega + \Omega_\epsilon$, podemos aplicar (3.38), em $\Gamma_- + \Gamma_\epsilon$, reescrevendo-a por:

$$4iu(x_d) = \int_{\Gamma_- + \Gamma_\epsilon} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma$$

ou seja:

$$4iu(x_d) = \int_{\Gamma_-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(P, Q) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.39)$$

Para que o ponto x_d retorne ao contorno Γ , devemos tomar o limite de (3.39) conforme é escrito na seguinte equação:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(4iu(x_d) - \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma_\epsilon \right) \quad (3.40)$$

Mas devido (3.16a), podemos reescrever (3.40), por:

$$\int_{\Gamma_-} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma =$$

$$4i u(x_d) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right) \quad (3.41)$$

o cálculo da integral do lado direito de (3.41) é determinado usando as expressões assintóticas (2.47a-b) para $v(k\varepsilon) = H_0^{(2)}(k\varepsilon)$. Observamos na figura 3.5, que $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{n}$ sobre o contorno Γ_ε têm o mesmo sentido, de onde concluímos: $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$. Portanto:

$$\frac{\partial v(k\varepsilon)}{\partial n} = -\frac{2i}{\pi \varepsilon} \quad (3.42)$$

Assim podemos voltar a avaliar a integral do lado direito de (3.41), considerando $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\theta$ em que agora $\theta \in [0, \theta^i]$, e θ^i é o ângulo interno, com mostrado na figura 3.5.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma_\varepsilon \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\theta^i} \left(u(x) \left(-\frac{2i}{\pi \varepsilon} \right) - \left(1 + i \frac{2}{\pi} \ln(k\varepsilon) \right) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) \varepsilon d\theta \right) \quad (3.43)$$

mas podemos concluir que a primeira integral de (3.43), se anula, e:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} - v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \right) = \frac{2}{\pi} i u(x_d) \theta^i \quad (3.44)$$

Substituindo os resultados obtidos em (3.44) em (3.41), temos:

$$4iu(x_d) - \frac{2}{\pi}iu(x_d)\theta^i = \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x_d, x)}{\partial n} - u(x_d, x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.45)$$

Finalmente manipulando convenientemente os termos de (3.45) encontramos a seguinte equação integral para o problema de Domínio Exterior:

$$\left(1 - \frac{\theta^i}{2\pi} \right) u(x_d) = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left(v(x_d, x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial v(x_d, x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.46)$$

ou, lembrando que $v(kR) = H_0^{(2)}(kR)$, e introduzindo a constante complexa $(-i/4)$, para dentro do sinal de integração, obtemos:

$$cu(P) = \int_{\Gamma} \left(\left(-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \right) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \right) u \right) d\Gamma \quad (3.47)$$

em que o coeficiente $c = 1 - \frac{\theta^i}{2\pi}$, depende da posição do ponto fixo P , e pode assumir os seguintes valores:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{se o o ponto não pertence ao domínio } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se o ponto } x_d, \text{ pertence à parte suave do contorno} \\ 1 & \text{se o ponto } x_d \text{ é um ponto interno ao domínio} \\ \frac{\theta^e}{2\pi} & \text{se o ponto } x_d \text{ pertence à parte nao suave do contorno.} \end{cases} \quad (3.48)$$

3.7 – Conclusão

Neste capítulo analisamos o potencial acústico em pontos do domínio $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ e fizemos a

formulação de contorno associada à equação de Helmholtz, a qual representa o modelo matemático para este tipo de problemas. Observemos que é de fundamental importância definir o domínio de interesse, a ser avaliado com relação ao contorno do mesmo. De fato, este conhecimento é que vai orientar o sentido que o contorno deve ser percorrido. Assim com base nestes fatos, fizemos a formulação integral de contorno para o problema de domínio interior (contorno percorrido no sentido anti-horário), e para o problema domínio exterior (contorno percorrido no sentido horário), bem como suas respectivas extensão para o contorno. Apesar de termos dividido a formulação integral de contorno considerando o domínio interior e exterior, mostramos que, na realidade ela é única, isto é, só depende do sentido de percorrer o contorno Γ do domínio durante a discretização do contorno, como podemos ver nas equações 3.27 e 3.47.

Capítulo 4

A formulação computacional da equação integral de contorno, segundo o M. E. C.

4.1- Introdução

Neste capítulo focalizaremos nossa atenção na equação integral de Helmholtz deduzida no capítulo 3.

Apresentaremos de maneira sucinta os resultados ali estabelecidos e mostraremos como a geometria e as variáveis envolvidas podem ser aproximadas. Além disso, analisaremos aspectos computacionais importantes, como cálculo das variáveis no domínio, o tratamento de singularidade, e a integração numérica.

4.2 - Equação Integral de Helmholtz revisitada.

No capítulo 3, fizemos a formulação direta do M.E.C para a equação de Helmholtz, com a finalidade de obter, a partir da 2ª Identidade de Green, a Equação Integral de Contorno. Embora consideramos dois tipos de problemas, ou seja, o de domínio interior e o de domínio exterior, a formulação resultante é de fato única e a integral de contorno para um domínio acústico Ω em duas dimensões pode ser escrita por:

$$c u(P) = \int_{\Gamma} \left(\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \right) \right) d\Gamma \quad (4.1)$$

em que Γ é o contorno de Ω e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário, cujo sentido depende do tipo de problema (domínio interior ou domínio exterior).

O coeficiente c , quer seja para um problema de domínio interior ou um problema de domínio exterior, em geral é dado por:

$$c(x_d) = \begin{cases} 0, & \text{se o ponto não pertence ao domínio } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se o ponto } x_d, \text{ pertence à parte suave do contorno} \\ 1 & \text{se o ponto } x_d \text{ é um ponto interno ao domínio} \\ 1 - \frac{\theta^e}{2\pi} & \text{se o ponto } x_d \text{ pertence a parte não suave do contorno.} \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3 - A discretização e colocação.

A discretização do contorno Γ , consiste na divisão do mesmo em n partes.

O segmento de reta que une os extremos consecutivos de cada uma destas partes, é denominado de *elemento de contorno*. Desse modo, se Γ é o contorno de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e Γ é discretizado em n elementos, temos que:

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j \quad (4.3)$$

em que cada Γ_j , é um elemento de contorno Γ , conforme pode ser visto na figura 4.1.

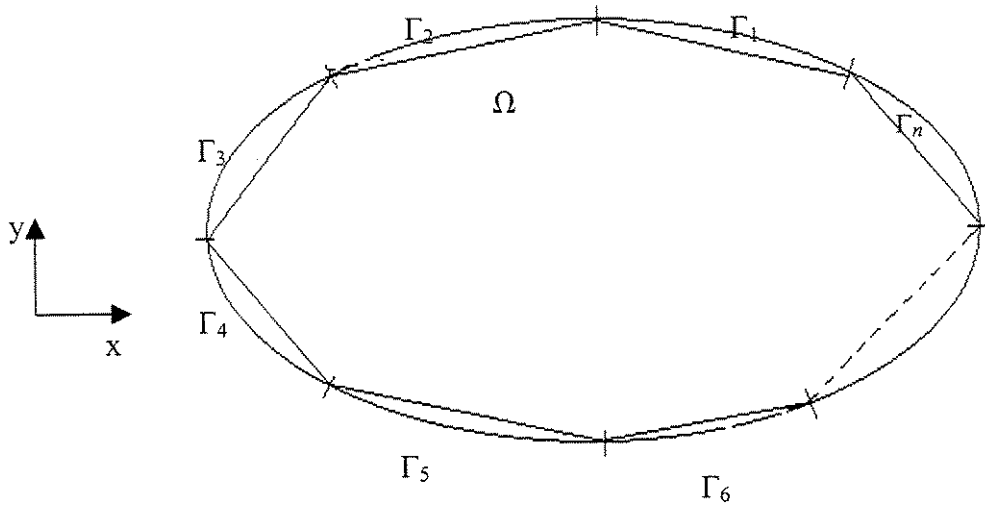


Figura 4.1: Contorno discretizado

A avaliação do contorno por meio da E.I.C, e segundo a equação diferencial que governa o problema no meio, é determinada pela contribuição que cada elemento exerce sobre esse contorno. Assim faz-se necessário a caracterização de cada um dos elementos no contorno discretizado.

Seja Γ_j um elemento de Γ , (x_j, y_j) e (x_{j+1}, y_{j+1}) as coordenadas de seus extremos e L seu comprimento, definido por:

$$L = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} \quad (4.4)$$

O vetor normal $\underline{n}$, para o elemento Γ_j , independentemente do tipo de problema (domínio interior ou domínio exterior) a ser resolvido, é dado por [Becker-1992]:

$$\underline{n} = \frac{1}{L} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ (x_{j+1} - x_j) & (y_{j+1} - y_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{L} [(y_{j+1} - y_j)\bar{\mathbf{i}} + (x_{j+1} - x_j)\bar{\mathbf{j}}] \quad (4.5)$$

Caracterizado cada um dos elementos Γ_j , considere: $x_j = (x, y)$, um nó do elemento Γ_j e $y_i = (x_i, y_i)$ um ponto de $\Omega \cup \Gamma$. É comum na literatura denominar x_i como ponto de colocação e y_j como ponto de campo. A distância entre os pontos x_i e y_j denotada por R_j é definida como sendo a distância Euclidiana dada por:

$$\underline{\mathbf{R}}_j = y_j - x_i = (x - x_i)\underline{\mathbf{i}} + (y - y_i)\underline{\mathbf{j}}$$

e

$$R_j(x, y) = |\underline{\mathbf{R}}_j| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (4.6)$$

Se a discretização do contorno é dada por (4.3) e considerando a definição (4.6), a equação integral de contorno de Helmholtz (4.1) na forma discretizada fica escrita como:

$$c u(P_i) = \sum_{j \neq i; j=1}^n \int_{\Gamma_j} \left[\frac{i}{4} H_0^1(k R_j(x, y)) \frac{\partial u_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right] d\Gamma_j - \sum_{j \neq i; j=1}^n \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \left(\frac{i}{4} H_0^1(k R_j(x, y)) \right) u_j \right] d\Gamma_j \quad (4.7)$$

Uma vez conhecida a Equação Integral de Contorno para o operador de Helmholtz em sua forma discretizada, devemos descrever sobre cada elemento a variação da geometria e das variáveis envolvidas no problema. Estas variações podem ser constantes, linear, quadrática, cúbica ou de ordem superior. A forma mais conveniente de descrever o comportamento de um elemento Γ_j é através da utilização das chamadas “funções de forma”, que utilizam um número de pontos (*nós*) sobre cada elemento onde o valor da variável é conhecido. Assim, uma “função de forma” quadrática exigirá a presença de três *nós* sobre cada elemento, ou seja, um no ponto médio e os outros nos extremos do elemento [Becker-1992].

A geometria do elemento Γ_j , pode ser descrita pelas coordenadas dos *nós* e pela “função de forma” correspondente, isto é:

$$x(\xi) = \sum_{s=1}^m N_s(\xi) x_s, \quad (a)$$

e (4.8)

$$y(\xi) = \sum_{s=1}^m N_s(\xi) y_s \quad (b)$$

em que ξ corresponde a um novo sistema de coordenadas que é local, para aquele elemento considerado, N_s são as “funções de forma” satisfazendo às seguintes condições:

$$\begin{aligned} i) \quad & N_s(\xi) = 1 \text{ no nó } s \\ ii) \quad & N_s(\xi) = 0 \text{ nos outros nós} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e m corresponde ao número de nós sobre cada elemento e tem a ver com o tipo de “função de forma” a ser utilizada [Becker-1992].

Por exemplo, vamos supor que queremos aproximar a geometria de um elemento Γ_j , através de uma “função de forma” linear. Para isto vamos definir um novo sistema de coordenadas que é local a Γ_j , utilizando a variável ξ com sua origem no ponto médio do elemento e assumindo valores no intervalo $[-1,1]$ (figura 4.2).

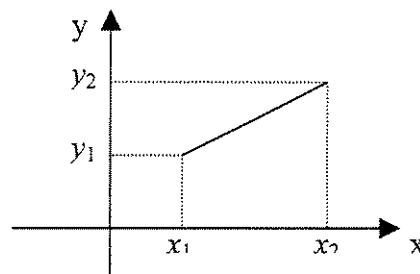


figura 4.2: Elementos Linear

A geometria de Γ_j pode ser aproximada pelas coordenadas dos dois nós e pela “função de forma”, como segue:

$$\begin{aligned}
x(\xi) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) x_i = N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2 \\
y(\xi) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) y_i = N_1(\xi) y_1 + N_2(\xi) y_2
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

em que neste caso, $N_i(\xi)$ assume a seguinte forma em cada nó:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= a_1 \xi + a_2 \\
N_2(\xi) &= a_3 \xi + a_4
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

Os coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 , são constantes que podem ser determinadas utilizando as condições de contorno, como segue:

$$\begin{aligned}
N_1(-1) &= 1 \quad , \quad N_1(1) = 0 \\
\text{e} \\
N_2(-1) &= 0 \quad , \quad N_2(1) = 1
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

e substituindo (4.12) em (4.11) , temos:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\
\text{e} \\
N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi + 1)
\end{aligned}$$

Este procedimento é aplicável, para qualquer que seja a ordem da função de forma utilizada. Estas funções de forma podem ser usadas para aproximar as variáveis do problema.

Assim, se $\bar{u}$ representa o potencial e $\vec{q} = \frac{\partial u}{\partial n}$ o fluxo, elas podem ser descritas como:

$$\begin{aligned}
u(\xi) &= \sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \\
q(\xi) &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{s=1}^m N_s(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_s
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para o comprimento do elemento Γ_j dado em (4.4) podemos considerar o seu infinitésimo $d\Gamma_s$, dado como:

$$d\Gamma_s = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi$$

em que:

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{s=1}^m x_s \frac{dN_s}{d\xi} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\xi} = \sum_{s=1}^m y_s \frac{dN_s}{d\xi}$$

Fazendo $J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$, o jacobiano da transformação, temos:

$$d\Gamma_s = J(\xi) d\xi \tag{4.14}$$

As funções de forma em (4.13), obtidas a partir de (4.8) juntamente com (4.14), substituídas em (4.7), deixa a equação integral de contorno de Helmholtz escrita como [Hall-1994]:

$$\begin{aligned}
c u(P_i) &= \sum_{j \neq i; j=1}^n \int_{\Gamma_j} \left[\left(\frac{i}{4} H_0^1(k R_j(x(\xi), y(\xi))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] J(\xi) d\xi - \\
&\quad \sum_{j \neq i; j=1}^n \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{i}{4} H_0^1(k R_j(x(\xi), y(\xi))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \right) \right] J(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{4.15}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

com c dado por (4.2), e k o número de onda.

4.4 – Aspecto da implementação computacional.

Os aspectos que trazem maiores dificuldades na implementação da equação integral de Hemholtz (4.15), sobre o elemento Γ_j , são as dificuldades de integração, já que o integrando no equacionamento, normalmente é complexo, como também à forma geométrica do contorno Γ , quando da existência de “cantos”.

4.4.1-A integração Numérica

Dentre todas as técnicas de integração, conhecidas na literatura, a integração Gaussiana é encontrada com maior frequência em problemas envolvendo o M.E.C. Isto talvez se deve ao fato, de que esta técnica, avalia a função interpolante de modo otimizado, ou seja: a partir da escolha dos pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{ng}$, no intervalo de integração, seus respectivos pesos $w_1, w_2, \dots, w_{ng}$, (ng : número de pontos de Gauss) são determinados, de forma a minimizar o erro durante a aproximação da integral [Burden-1989]. Assim temos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_l^{ng} w_l f(x_l) \quad (4.16)$$

em que $f(x)$ é uma função qualquer, w_l são conhecidos como os pesos, e ng o número de pontos de Gauss.

Os pesos w_l são tabelados e assumem valores no intervalo $[-1,1]$, e por ser ξ uma variável adimensional definida no mesmo intervalo, deixa o elemento Γ_j escrito na forma parametrizada, e assim para pontos onde $R_j(x,y)$ é não nulo (4.15), fica reescrita por:

$$\begin{aligned}
cu_i(P) = & \sum_{j \neq i, j=1}^n \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi), y(\xi))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \right) \right] j(\xi) d\xi - \\
& \sum_{j \neq i, j=1}^n \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi), y(\xi))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \right) \right] j(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{4.17}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

a derivada que aparece na segunda soma de (4.17), é calculada a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j) \right) &= \underline{n} \bullet \nabla \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j) \right) \\
&= \frac{i}{4} \underline{n} \bullet \frac{\partial}{\partial (k R_j)} (H_0^{(1)}(k R_j)) \frac{\partial (k R_j)}{\partial R_j} \\
&= \frac{i}{4} \underline{n} \bullet k \frac{\partial}{\partial (k R_j)} (H_0^{(1)}(k R_j)) \left(\frac{\partial R_j}{\partial R_x} + \frac{\partial R_j}{\partial R_y} \right)
\end{aligned}$$

e da teoria das funções de Bessel temos: $\frac{\partial (H_0^{(1)}(k R))}{\partial k R} = -H_1^{(1)}(k R)$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi), y(\xi))) \right) &= \\
\frac{i}{4} \frac{k}{|\underline{R}_j(x(\xi), y(\xi))|} (\underline{n}_j \bullet \underline{R}_j(x(\xi), y(\xi))) (-H_1^{(1)}(k R_j(x(\xi), y(\xi)))) &
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A integração Gaussiana dada em (4.16), pode ser substituída em (4.17) para um número conveniente de pontos de Gauss, deixando-a escrita em sua forma computacional:

$$\begin{aligned}
cu_i(P_i) = & \sum_{j \neq i, j=1}^n \sum_{l=1}^{ng} w_l \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi_l), y(\xi_l))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{n}} \right) j(\xi) - \\
& \sum_{j \neq i, j=1}^n \sum_{l=1}^{ng} w_l \left[\frac{i}{4} \frac{k}{|\underline{\mathbf{R}}_j(x(\xi_l), y(\xi_l))|} (\underline{\mathbf{n}}_j \bullet \underline{\mathbf{R}}_j(x(\xi_l), y(\xi_l))) (-H_1^{(1)}(k R_j(x(\xi_l), y(\xi_l)))) \right] \\
& \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \right) j(\xi)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

de onde podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\bar{h}(i, j) = & \sum_{j \neq i, j=1}^n \sum_{l=1}^{ng} w_l \left[\frac{i}{4} \frac{k}{|\underline{\mathbf{R}}_j(x(\xi_l), y(\xi_l))|} (\underline{\mathbf{n}}_j \bullet \underline{\mathbf{R}}_j(x(\xi_l), y(\xi_l))) (-H_1^{(1)}(k R_j(x(\xi_l), y(\xi_l)))) \right] \\
& \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) u_s \right) j(\xi)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

e

$$g(i, j) = \sum_{j \neq i, j=1}^n \sum_{l=1}^{ng} w_l \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi_l), y(\xi_l))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{n}} \right) j(\xi) \tag{4.21}$$

para $i = 1, \dots, n$

Nos pontos em que $i = j$, $R_j(x, y) = 0$, ocorrerá uma singularidade logarítmica em (4.20) e (4.21); esta singularidade é estudada particularmente para cada tipo de função de forma.

4.4.2 - A singularidade no núcleo

Voltamos a analisar (4.15), para os pontos em $i = j$, onde ocorre uma singularidade de ordem fraca [Marburg-1999], sempre que o ponto de colocação e o ponto de campo estiverem

sobre o mesmo elemento, isto devido à solução fundamental da equação de Helmholtz (2.54). Considerando que a singularidade está ligada diretamente às funções de forma, por meio dos integrandos e que nesse trabalho, as funções de forma são funções constantes, faremos um estudo analítico da singularidade dos integrandos de (4.15), para $m = 1$.

A figura 4.3 mostra o elemento Γ_j , de extremos (x_j, y_j) e (x_{j+1}, y_{j+1}) e de comprimento L . O ponto de colocação e o ponto campo, estão sobre este mesmo elemento.

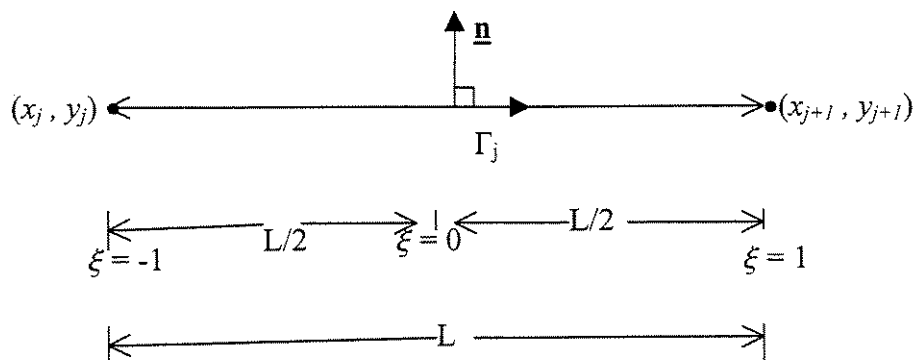


Figura 4.3: Elemento Singular

O comprimento L do elemento Γ_j (figura 4.3) é escrito em função da variável local ξ para $-1 \leq \xi \leq 1$. É dado por:

$$\Gamma_j = R_j(x,y) = \left| \xi \frac{L}{2} \right|, \quad (a)$$

e (4.23)

$$d\Gamma_j = dR_j(x,y) = \frac{L}{2} d\xi, \quad (b)$$

e $d\Gamma_j$ representa um infinitésimo do elemento Γ_j .

Com isto o primeiro integrando de (4.15), pode ser escrito para o elemento Γ_j , que associado a simetria do elemento, conforme mostra figura 4.3, fica escrito por:

$$g_{ii} = \frac{i}{4} \int_{\Gamma_j} H_0^{(1)}(k R_j(x, y)) d\Gamma = \frac{i}{4} L \int_0^1 H_0^{(1)}\left(k \frac{L}{2} \xi\right) d\xi \quad (4.24)$$

fazendo a substituição $s = \frac{kL}{2} \xi$, então $d\xi = \frac{2}{kL} ds$, com limite inferior 0, e limite superior para a integral $(kL/2)$, deixando (4.24), reescrita por:

$$g_{ii} = \frac{iL}{4} \int_0^1 H_0^{(1)}\left(k \frac{L}{2} \xi\right) d\xi = \frac{i}{2k} \int_0^{kL/2} H_0^{(1)}(s) ds \quad (4.25)$$

A função de Hankel de primeira espécie e de ordem zero, para o argumento s é definida por: $H_0^{(1)}(s) = J_0(s) + iY_0(s)$, assim (4.25), pode ser reescrita como:

$$g_{ii} = \frac{i}{2k} \int_0^{kL/2} H_0^{(1)}(s) ds = \frac{1}{2k} \left[i \int_0^{kL/2} J_0(s) ds - \int_0^{kL/2} Y_0(s) ds \right] \quad (4.26)$$

As integrais de (4.26), podem ser determinadas analiticamente usando (2.45) e (2.46). Substituindo (2.45) na primeira integral de (4.26) obtemos:

$$\int_0^{\frac{kL}{2}} J_0(s) ds = \frac{kL}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kL)^{2n}}{2^{4n} (n!)^2 (2n+1)} \right] \quad (4.27)$$

enquanto que substituindo (2.46) na segunda integral, de (4.26), encontramos:

$$\int_0^{\frac{kL}{2}} Y_0(s) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{kL}{2}} \left(\gamma + \ln\left(\frac{s}{2}\right) \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} H_n s^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} ds \quad (4.28)$$

os integrandos de (4.28), podem ser determinados fazendo:

$$\int_0^{kL/2} \left(\gamma + \ln\left(\frac{s}{2}\right) \right) ds = \frac{kL}{2} \left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - 1 \right) \quad a \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^{kL/2} \left(\gamma + \ln\left(\frac{s}{2}\right) \right) s^{2n} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kL)^{2n+1}}{2^{4n+1} (n!)^2 (2n+1)} \left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{2n+1} \right) \quad b \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} H_n}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^{kL/2} s^{2n} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} H_n (kL)^{2n+1}}{2^{4n+1} (n!)^2 (2n+1)} \quad c \quad (4.29)$$

Somando (4.29a, 4.29b, 4.29c), e substituindo em (4.28) temos:

$$\int_0^{kL/2} Y_0(s) ds = \frac{kL}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kL)^{2n}}{2^{4n} (n!)^2 (2n+1)} \left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \frac{1}{2n+1} - H_n \right) \right] \quad (4.30)$$

Substituindo (4.27) e (4.30) na equação (4.26), fica determinada a integração sobre o elemento singular:

$$g_{ii} = \frac{L}{2} \left[\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kL)^{2n}}{2^{4n} (n!)^2 (2n+1)} \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\gamma + \ln\left(\frac{kL}{4}\right) - \left(\frac{1}{2n+1} + H_n \right) \right) \right) \right] \quad (4.31)$$

No caso $i = j$, no segundo integrando de (4.15), a singularidade é tratada, devido à posição do ponto de colocação e dado por (4.2).

4.4.3 - Condição de contorno

Seja Γ o contorno no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, discretizado em n elementos, a intensidade de força, que o meio exerce em cada elemento do contorno Γ , é denominada de condição de contorno, sendo que as mesmas assumem seus valores em cada nó do elemento, portanto definidas em termos de seus valores nodais.

No caso de problemas de acústica, as condições de contorno são o potencial e o fluxo, as quais são classificadas como [Hall-1994]:

Condição de contorno de Dirichlet: o potencial u é conhecido em todos os elementos do contorno, e a derivada do potencial (fluxo) em relação a normal $\underline{n}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right)$, são incógnitas.

Condição de contorno de Neumann: a derivada do potencial (o fluxo) em relação a normal $\underline{n}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right)$: é conhecido em todos os elementos, enquanto o potencial u , é incógnita.

Condição de contorno misto, nesses problemas, o potencial u , é conhecido para um número de elementos, enquanto a derivada do potencial $\left(\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right)$, é conhecida para os elementos restantes.

Um outro tipo de condição de contorno é conhecido como a condição de Robin [Hall-1994], onde o potencial u , e o fluxo q são escritos por meio de uma combinação linear, isto é:

$$A(x)u(x) + B(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \underline{n}} = C(x) \quad (4.32)$$

em que $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são funções conhecidas.

De modo geral, para problemas propostos pelo M.E.C, parte das condições de contorno são conhecidas e a outra parte incógnitas. Com isso, por meio de (4.15), é possível gerar em cada nó

uma ou mais equações algébricas, devido à posição do *nó* sobre o elemento. Por exemplo, quando o contorno é discretizado com elementos lineares [Ciskowski-1991], os *nós* normalmente posicionam-se nos extremos do elemento (canto), e isto pode gerar diferentes valores para o fluxo sobre um mesmo *nó*, como mostra a figura 4.4.

Notemos que o *nó* 2 do elemento Γ_j coincide com o *nó* 1 do elemento Γ_{j+1} , portanto, o potencial no *nó* 2 é único, enquanto o fluxo $\overline{q_j}$ é diferente de $\overline{q_{j+1}}$.

Assim, a equação (4.19), deve ser organizada de forma que os fluxos sejam colocados num vetor de tamanho $2n$, isto é :

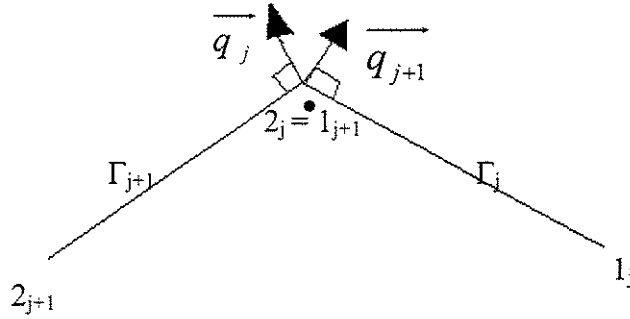


figura 4.4: Descontinuidade do fluxo

$$g(i, j) = \sum_{j \neq i; j=1}^{2n} \sum_{l=1}^{ng} w_l \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k R_j(x(\xi_l), y(\xi_l))) \right) \left(\sum_{s=1}^m N_s(\xi) \frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{n}} \right) j(\xi) \quad (4.33)$$

Substituindo (4.20) e (4.33) na equação (4.19), temos:

$$c_i u_j(P_i) + [\bar{h}(i, j)]_{n \times n} \{u_j\}_{n \times 1} = [g(i, j)]_{n \times 2n} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}} \right\}_{2n \times 1} \quad (4.34)$$

$$i \neq j ; i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, 2n$$

Um rearranjo dos termos permite escrever (4.34), na forma matricial, tal como é dado por (4.35).

$$[H]_{n \times n} \{u\}_{n \times 1} = [G]_{n \times 2n} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\}_{n \times 2n} \quad (4.35)$$

Considerando que de modo geral, parte das condições de contorno é conhecido e a outra parte é incógnita, uma troca entre as colunas das matrizes $[G]$ e $[H]$ deve ser efetuada, deixando de um lado as incógnitas. Assim, podemos reescrever (4.35) na forma de um sistema de equações algébricas dado por:

$$AX = \underline{b}$$

em que A é uma matriz quadrada, formada por colunas de $[G]$ e $[H]$, X é o vetor incógnita e $\underline{b}$ é o vetor coluna de tamanho n . A solução do sistema $AX = b$, permite determinar o potencial e o fluxo, em todo o contorno do domínio.

4-5 Avaliando pontos internos ao Domínio

O potencial acústico para os pontos de colocação internos ao domínio Ω é facilmente determinado, fazendo $c = 1$ na equação (4.19). Neste caso, o ponto de colocação x_d não pertence ao contorno do domínio e, portanto, os elementos matriciais determinado por $g(i, j)$ e $\bar{h}(i, j)$, dados respectivamente por (4.20) e (4.21), não apresentam singularidades em seus integrandos. Assim a equação (4.19), pode ser reescrita, também na forma matricial por:

$$u(x_d) = \mathcal{G} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \mathcal{H} u \quad (4.36)$$

em que $[\mathcal{G}] = [g(i, j)]$ e $[\mathcal{H}] = [\bar{h}(i, j)]$, representam as matrizes que relacionam os nós sobre o contorno com os pontos internos ao domínio.

4.6 - Conclusão do capítulo

Neste capítulo, apresentamos uma formulação para um domínio acústico Ω em duas dimensões, em que engloba tanto problemas de domínio interior quanto domínio exterior. Fizemos uma discretização do contorno Γ do domínio Ω e analisamos aspectos computacionais relacionados com o cálculo de variáveis no domínio, tratamento de singularidade e técnicas de integração numérica. Para os problemas de acústica em questão, estabelecemos condições de contorno e mostramos como elas podem ser incorporadas nos problemas discretizados a fim de que o sistema de equações seja compatível. Finalmente, definimos uma expressão que permite calcular pontos internos ao domínio.

Capítulo 5

Respostas estacionárias de domínios limitados; frequências naturais.

5.1 – Introdução

Nesse capítulo, analisaremos a dinâmica estacionária de um domínio acústico Ω bidimensional e limitado. Para isso, trataremos do equacionamento do M.E.C, com um domínio finito $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, constituído de um contorno Γ , de onde obteremos o sistema de equações algébricas, gerado pela equação integral de contorno (4.1), que é essencial, na determinação das grandezas modais do domínio acústico Ω .

A fim de obter, as grandezas modais, tais como as frequências naturais (ou autofrequências) e os modos próprios de vibrar, os quais correspondem respectivamente aos autovalores e autovetores associados ao sistema de equações algébricas, resultante da formulação do M.E.C duas diferentes estratégias serão investigadas: a primeira conhecida como o Método da Pesquisa Direta, a segunda estratégia é determinada a partir da obtenção de Funções de Respostas e Frequências (FRF's).

Na estratégia do método da pesquisa direta, a identificação das frequências naturais do domínio acústico, é baseada nos Zeros do Polinômio Característico que é do tipo complexo e definido como sendo o determinante da matriz do sistema algébrico. Por tratar de um polinômio complexo, os seus zeros serão atingidos, sempre que o módulo do polinômio é nulo, isto é parte real e imaginária do polinômio se anulam para uma mesma frequência. O que nos propomos investigar, é se a partir de um algoritmo que identifique os pontos de mínimos locais na curva do

módulo do determinante da matriz do sistema algébrico e os mesmos correspondem ao zero do polinômio.

Já para a estratégia baseada nas FRF's, as frequências naturais do domínio acústico estão associadas às frequências de ressonância desse domínio e portanto, são identificadas a partir dos picos na curva FRF's, os quais representam os pontos de máximo locais nessa curva. Considerando que as curvas das FRF's são distintas quando avaliamos pontos internos ao domínio acústico em suas diferentes localizações, propomos um critério de identificação dos picos, quando sobrepomos, várias curvas de FRF's geradas a partir de um conjunto de pontos internos ao domínio.

As duas estratégias associadas à formulação do MEC, terão como objeto comum de investigação, a discretização no contorno do domínio acústico, assim como o incremento que permite considerar diferentes frequências numa faixa estabelecida.

Nesse sentido dois exemplos com diferentes geometrias de contorno, serão investigados, um com solução analítica (cavidade acústica retangular) no qual faremos uma breve análise da solução analítica, e outro sem solução analítica, mas com os resultados comparados aos obtidos pelo Método de Elementos Finitos (M.E.F), para uma malha de elementos triangulares constantes.

Finalmente, mostraremos os modos próprios de vibrar do domínio acústico, quando avaliamos um conjunto de pontos internos a esse domínio.

5.2 – A análise de uma solução analítica, para a cavidade acústica retangular.

A solução analítica das frequências naturais dos modos de vibrar de uma cavidade acústica retangular, de comprimento L_x , altura L_y e de contorno rígido não engastado, são fornecidas pela expressão [Morse-1953]:

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2}, \quad (5.1)$$

com m e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, onde m e n são conhecidos como índices das frequências naturais e c_0 é a velocidade do som no meio acústico.

Considerando o caso particular, onde as dimensões da cavidade acústica $L_x = 2.30$ m, e $L_y = 0.90$ m, a velocidade do som no meio acústico $c_0 = 345$ m/s, vamos analisar o comportamento do número de frequências naturais analíticas fornecidas entre 0 e 1000 Hz.

O número de frequências naturais fornecidas por (5.1), e pelo M.E.C estão distribuídas, por classes modais na figura 5.1 e mostra uma variação não uniforme do número de frequências por classe modal.

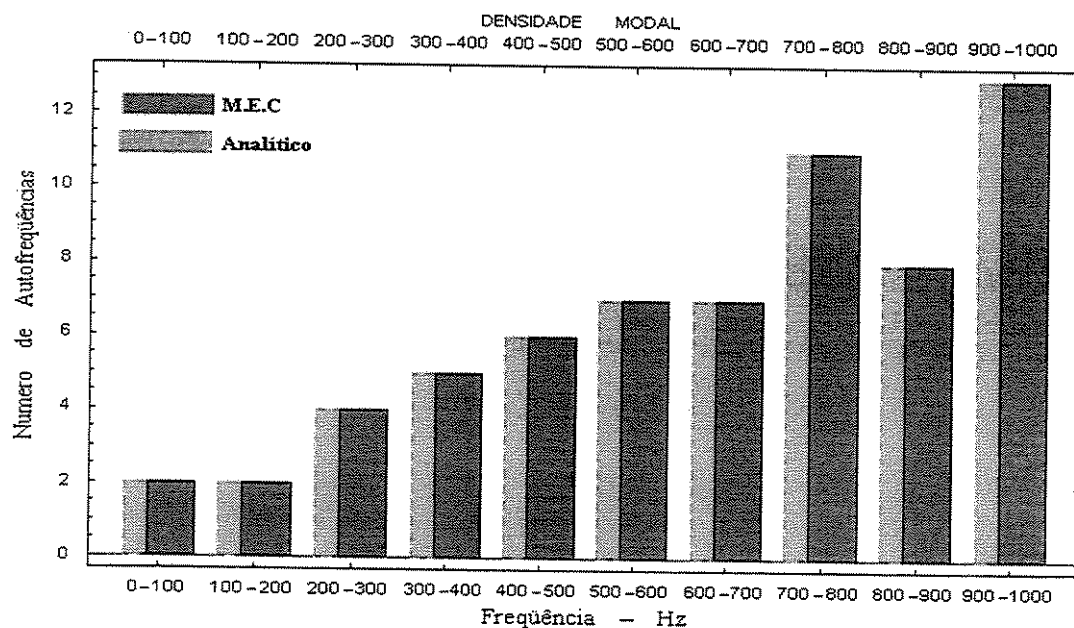


Figura 5.1: Densidade de distribuição de frequências por classes modais.

Na figura 5.2, observamos que a distribuição do número de frequências naturais da cavidade acústica acumuladas por faixa de frequências cresce exponencialmente. Esse

crescimento exponencial de freqüências naturais, para a cavidade acústica pode gerar dificuldades na identificação das freqüências naturais, para aquelas que não possuem solução analítica e que devem ser tratadas numericamente.

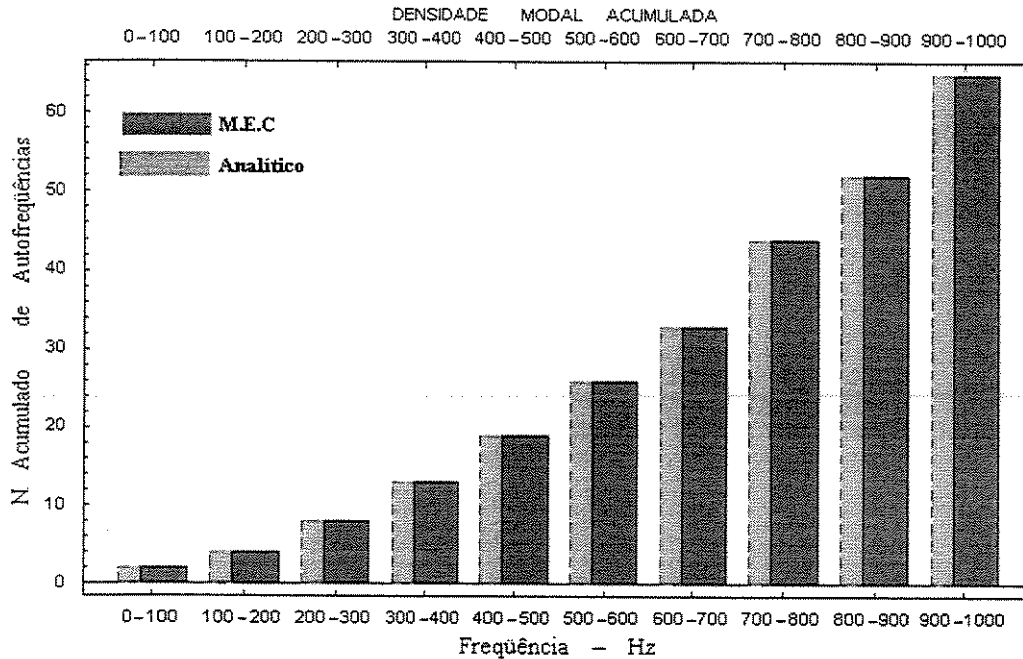


Figura 5.2: Densidade de distribuição de freqüências acumuladas.

5.3 – A formulação do M.E.C e a equação da onda acústica 2D

Como já descrito na seção 2.3 do capítulo 2, a propagação da onda acústica bidimensional, em termos do potencial de velocidade u e do tempo t , segundo [Trevelyan-1994], é dada por:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \quad (5.2)$$

em que:

c_0 : é a velocidade do som no meio

t : é variável tempo

b : é uma fonte acústica constante concentrada num ponto do domínio.

Consideremos o potencial $u(x,t)$ da onda harmônica, definido por $u(x,t) = u(x) e^{i\omega t}$ escrito como em [Sygulisk-1994], em que x representa a variação espacial, ω é a velocidade angular e $i = \sqrt{-1}$ o coeficiente imaginário. O comportamento harmônico da onda estacionária, para um domínio acústico Ω , de contorno $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$, é descrito substituindo $u(x, t)$, na equação (5.2), resultando em:

$$\nabla^2 u + k^2 u = b \quad (5.3)$$

com

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (5.4)$$

A constante k definida em (5.4) é denominada de número de onda.

A expressão matemática da velocidade angular $\omega = 2\pi f$, substituída, em (5.4), determina uma relação entre o número de onda k e a frequência f , com unidade de medida em Hertz (Hz) e escrita como:

$$f = \frac{k c}{2\pi} \quad (5.5)$$

As grandezas que caracterizam o comportamento dinâmico do meio acústico limitado Ω , quais sejam, frequências naturais e os correspondentes modos próprios de vibrar são determinados, a partir da formulação do M.E.C, que consiste em transformar a equação diferencial (5.2) numa Equação Integral de Contorno, obtida de modo análogo àquela em (3.27) sobre o contorno Γ , só que agora adicionada do termo de integral de volume em $\Omega_{(b)}$ (figura 5.3), ou seja:

$$c(x_d) u(P, k) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(x, x_d, k)}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u(x, x_d, k) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (5.6)$$

$$+ \int_{\Omega(x_b)} b u^*(x, x_d, k) d\Omega$$

em que, $u^*(x, x_d, k)$: é a solução fundamental para o caso bidimensional da equação de Helmholtz dada em (2.54), com $R = |x - x_d|$, x : é o ponto de campo, x_d é o ponto de colocação e $c(x_d)$ depende da posição do ponto de colocação x_d .

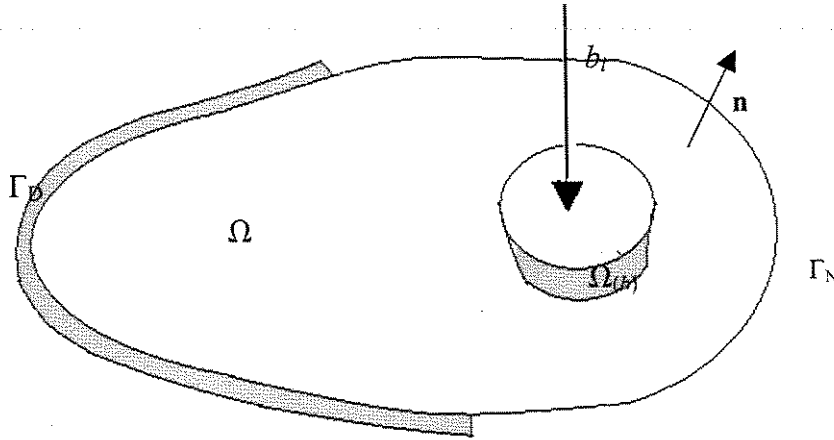


Figura 5.3: Força Centrada no Ponto do Domínio

Na equação (5.6), a atenção é para a integral de domínio, cuja sua origem é, devida à força concentrada de intensidade b_i incidente num ponto x_b do domínio (figura 5.3). A expressão matemática que representa a intensidade da força b_i sobre o ponto x_b , do domínio é $b(x_b, x_d) = b_i \delta(x_b - x_d)$, onde $\delta(x_b - x_d)$, é conhecida como função de distribuição Delta de Dirac e x_d pertencente ao domínio Ω , ($x_d \neq x_b$). Usando de propriedades do Delta de Dirac, a integral de domínio que aparece na equação (5.7) é determinada por [Mesquita, at all-2002]

$$b \int_{\Omega(x_b)} \delta(x_b - x_d) u^*(x_b, x_d, k) d\Omega(x_b) = b u^*(x_b, x_d, k) \quad (5.7)$$

Fazendo agora uma discretização do contorno Γ em n elementos, para a interpolação polinomial constante sobre cada elemento do contorno, e assumindo as condições de contorno dadas por, u em Γ_D e $\frac{\partial u}{\partial n}$ em Γ_N , podemos juntamente com a substituição da equação (5.7), em (5.6), escrever:

$$c(x_d)u_i(x_d, k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} u d\Gamma_j + \quad (5.8)$$

$$b_i u^*(x, x_d, k)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, ne.$$

ou ainda,

$$c(x_d)u_i(x_d, k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} u d\Gamma_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_j + \quad (5.9)$$

$$b_i u^*(x, x_d, k)$$

Definindo:

$$\bar{h}(i, j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} u d\Gamma_j \quad (a)$$

e

$$g[i, j] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_j \quad (b) \quad (5.10)$$

temos que para $i = j$, $c(x_d)$, é dado por (4.2), enquanto que $g[i, i]$, é dado por (4.31). Portanto (5.9), é escrita na forma:

$$\left([c(x_d)] + [\bar{h}(i, j)] \right) \{u(x_d, k)\} = [g[i, j]] \left\{ \frac{\partial u(x_d, k)}{\partial n} \right\} + \{b_i\} \quad (5.11)$$

ou ainda fazendo $[H] = [c(x_d)] + [\bar{h}(i, j)]$ e $[G] = [g(i, j)]$, reescrevemos (5.11) por:

$$[H] \{u(x_d, k)\} = [G] \left\{ \frac{\partial u(x_d, k)}{\partial n} \right\} + \{b_i\} \quad (5.12)$$

considerando que em problemas de contorno, parte das condições de contorno são conhecidas e a outra parte incógnitas, uma permuta entre as colunas de $[H]$ e $[G]$, acompanhadas de suas respectivas variáveis ou incógnitas, permite escrever (5.12) no seguinte sistema matricial:

$$[A] \{X\} = \{B\} + \{b\} \quad (5.13)$$

em que o vetor $\{b\}$, representa a contribuição que a força concentrada sobre o ponto x_d do domínio Ω exerce sobre cada elemento no contorno, a matriz $[A]$ é a matriz dos coeficientes, $\{x\}$ é o vetor incógnita e $\{B\}$ é um vetor coluna.

5.4 – A estratégia da pesquisa direta e o polinômio característico.

5.4.1-Caso geral

Nesse caso, temos que o domínio acústico bidimensional, mostrado na figura 5.4, a força de incidência é nula.

Assim a equação integral de contorno fica reescrita por:

$$c(x_d) u(P, k) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(x, x_d, k)}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u(x, x_d, k) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (5.14)$$

e de modo análogo à seção anterior, que permitiu escrever a equação matricial (5.13) a partir de (5.7), podemos introduzir as condições de contorno, dadas por $u(\Gamma_D) = 0$ e $\frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial \mathbf{n}} = 0$, e obtermos a equação matricial $[A(k)] \{X\} = \{0\}$, para uma frequência k .

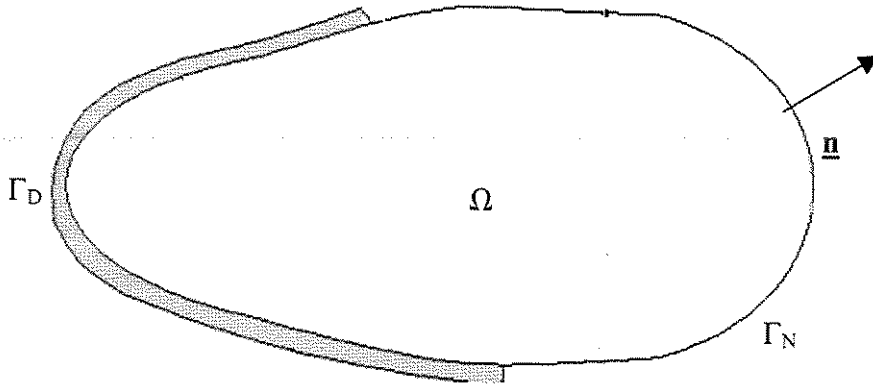


Figura 5.4: Domínio com ausência da força externa b

Da teoria de álgebra linear [Noble-1986], sabemos que um sistema de equações do tipo $[A(k)] \{X\} = \{0\}$ tem solução diferente da solução trivial se:

$$\det[A(k)] = 0 \quad (5.15)$$

assim (5.15), é satisfeita para alguns valores de k .

Definindo polinômio característico gerado por (5.15) como sendo:

$$P(k) = \det[A(k)] \quad (5.16)$$

que é um polinômio complexo, pois o $\det(A(k))$ é um número complexo, já que o mesmo é determinado a partir de (5.14), onde $u^*(x, x_d, k)$ é a solução fundamental da equação de Helmholtz dada em (2.54).

Seja $k = \lambda_i$ uma raiz do polinômio característico (5.16), então $P(\lambda_i) = 0$, obviamente tanto a parte real, como a parte imaginária de $P(\lambda_i)$ são nulas, o que implica em $|P(\lambda_i)| = 0$, e portanto λ_i é um ponto de mínimo local do polinômio característico $|P(k)| = |\det(A(k))|$.

Considerando que as respostas de (5.15), exige que os valores da variável k a serem determinados, sejam de fato raiz do polinômio (5.16) isso nos leva investigar na curva do determinante de $A(k)$, os valores de k tais que $|\det(A(k))| \cong 0$, na medida em que o zeros da parte real e o zero da parte imaginária do determinante de $A(k)$ se aproximam.

5.4.2 – Caso particular

Nesse consideramos em todo o contorno Γ do domínio acústico bidimensional, limitado Ω , as condições de contorno dadas por Neumann, como mostra a figura 5.5, e a força de incidência é nula.

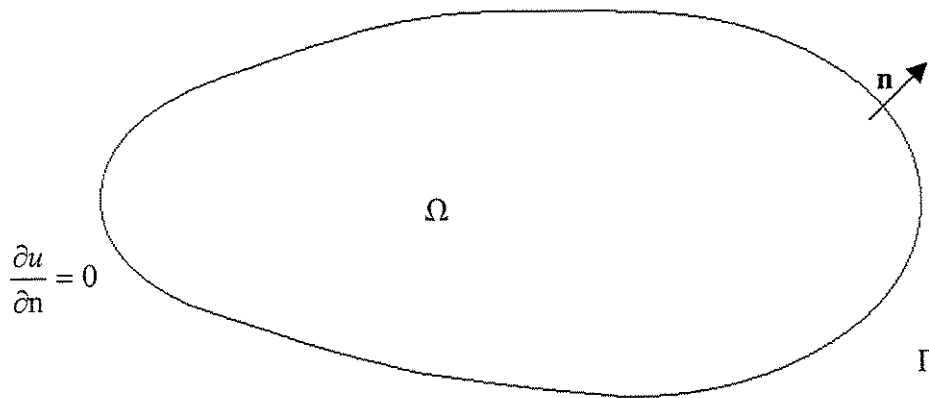


Figura 5.5 : A condição de contorno de Neumann é considerada em todo o contorno.

A equação integral de contorno para esse caso é a mesma escrita em (5.14), e portanto podemos expressá-la numa forma matricial, de modo análogo ao obtido em (5.12), a partir de (5.7), para $\{b_i\} = 0$, escrita por:

$$[H(k)]\{u\} = [G]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} \quad (5.17)$$

e introduzindo a condição de contorno de Neumann, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0$ para todo o contorno Γ , obtemos:

$$[H(k)]\{u\} = 0 \quad (5.18)$$

de onde podemos observar que a matriz $[H]$ de (5.18), é a matriz $[A]$ de (5.15) e portanto o determinante $(\det(H(k)))$ é também do tipo complexo, com isso a análise da matriz $[H]$ é a mesma da matriz $[A]$ considerada na seção(5.4.1).

5.5 - Os zeros do polinômio característico $P(k)$ e o ponto de mínimo local.

Os zero do polinômio característico $P(k)$ tem suas raízes identificadas, quando a parte real e parte imaginária de $P(k)$ se anulam para um mesmo valor de k .

Assim, uma investigação que permita identificar possíveis zeros do polinômio $P(k)$, pode ser feita, quando consideramos, o módulo do determinante, em pontos tais que $|P(k)| \cong 0$.

Passamos agora investigar as possibilidades de $|P(k)| \cong 0$. Para um melhor entendimento, mostramos na figura 5.6a-c, três possíveis situações que podem ocorrer para o polinômio $P(k)$: i) a parte real e parte imaginária de $P(k)$, se anulam para o mesmo valor de k (figura 5.6a). ii) a parte real e parte imaginária de $P(k)$, se anulam para diferentes valores de k (figura 5.6b). iii) A

parte real (imaginária) de $P(k)$ se anula, enquanto que parte real (imaginária) tende a tangenciar o eixo das abscissas (figura 5.6c), ou ambas tendem a tangenciar o eixo das abscissas.

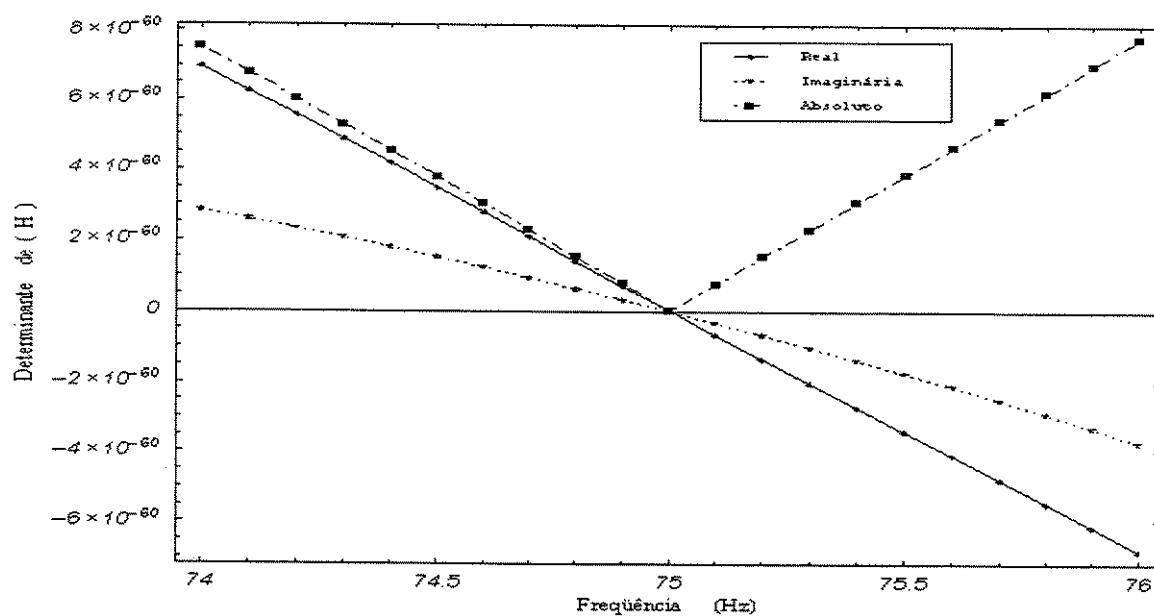


Figura 5.6a:

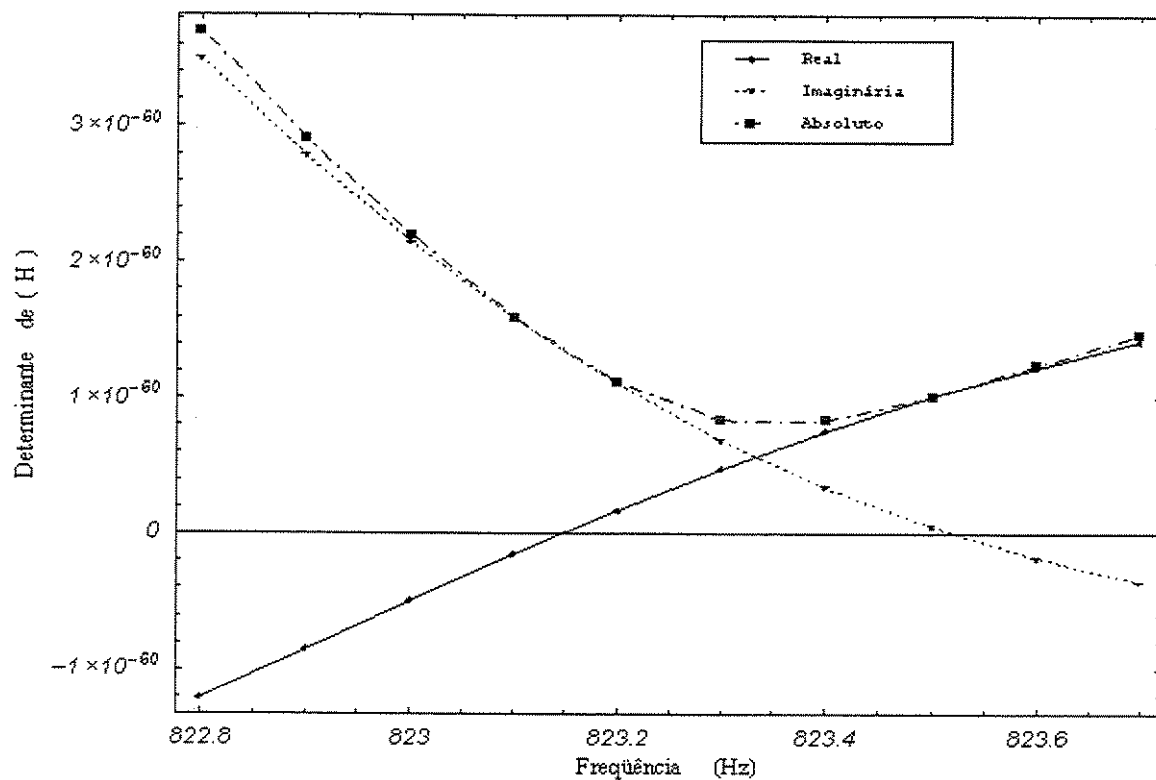


Figura 5.6b

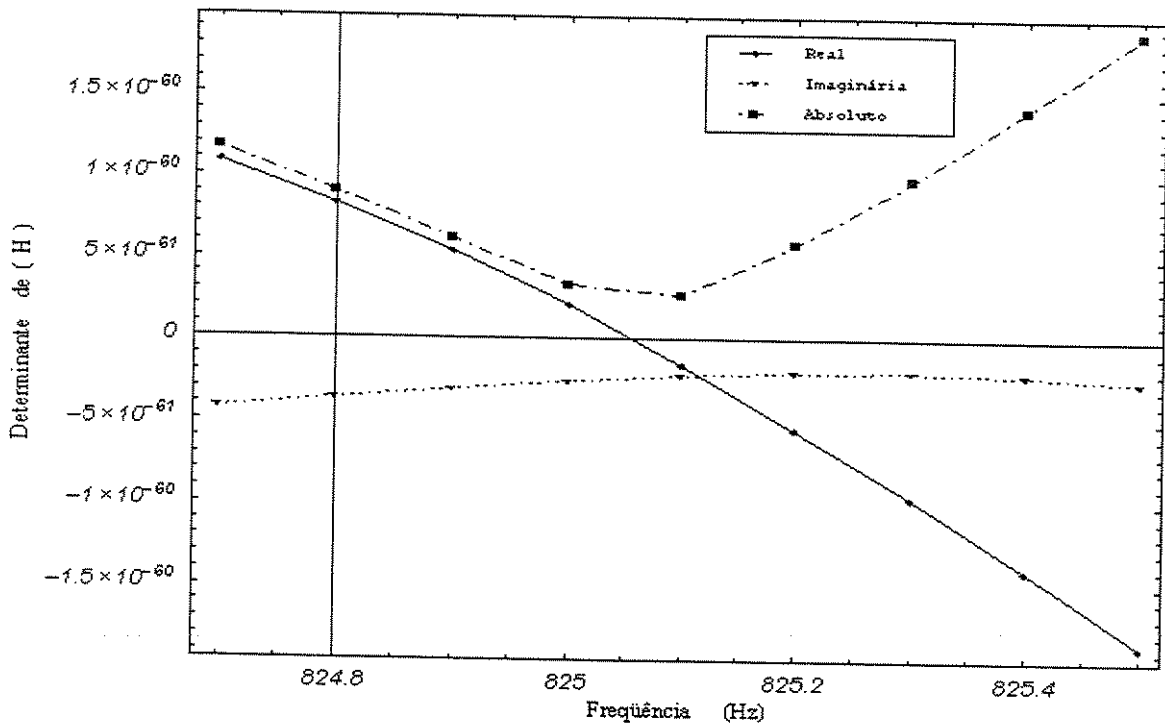


Figura 5. 6: Tipos de curvas do determinante em relação ao eixo das abscissas

Na figura 5.6a, podemos observar que o polinômio característico realmente atinge o zero absoluto, pois como havíamos mencionado anteriormente, tanto a parte real como a parte imaginária, se anulam para a mesma frequência, garantindo portanto o valor de mínimo local para $|\det(A(k))|$. Entretanto para o caso das figuras 5.6b e c, notadamente observamos que $|P(k)| \neq 0$, pois a parte real e a parte imaginária do polinômio $P(k)$, não se anula para uma mesma frequência (figura 5.6b), e portanto $\det(A(k))$, não se anula como sugere (5.15).

Neste ponto, sugerimos uma análise do comportamento, entre a distância do zero da parte real e da parte imaginária de $P(k)$, ou ainda uma análise do comportamento entre a distância dos pontos da parte real ou imaginária que tendem a tangenciar o eixo das abscissas, na ausência do zero da parte real ou imaginária de $P(k)$. Com isso, será possível, verificar se entre os supostos zero da parte real e o zero da parte imaginária do polinômio $P(k)$, existe um valor de k tal que $\det(A(k)) = 0$ e, portanto, a existência um ponto de mínimo local na curva do $|\det(A(k))|$. Esses fatos serão investigados e ilustrados a seguir. Antes porém, vale ressaltar que, o simples fato da

existência do zero da parte real e do zero da parte imaginária de $P(k)$, não fica garantido um ponto de mínimo local, como pode ser visto na figura 5.7.

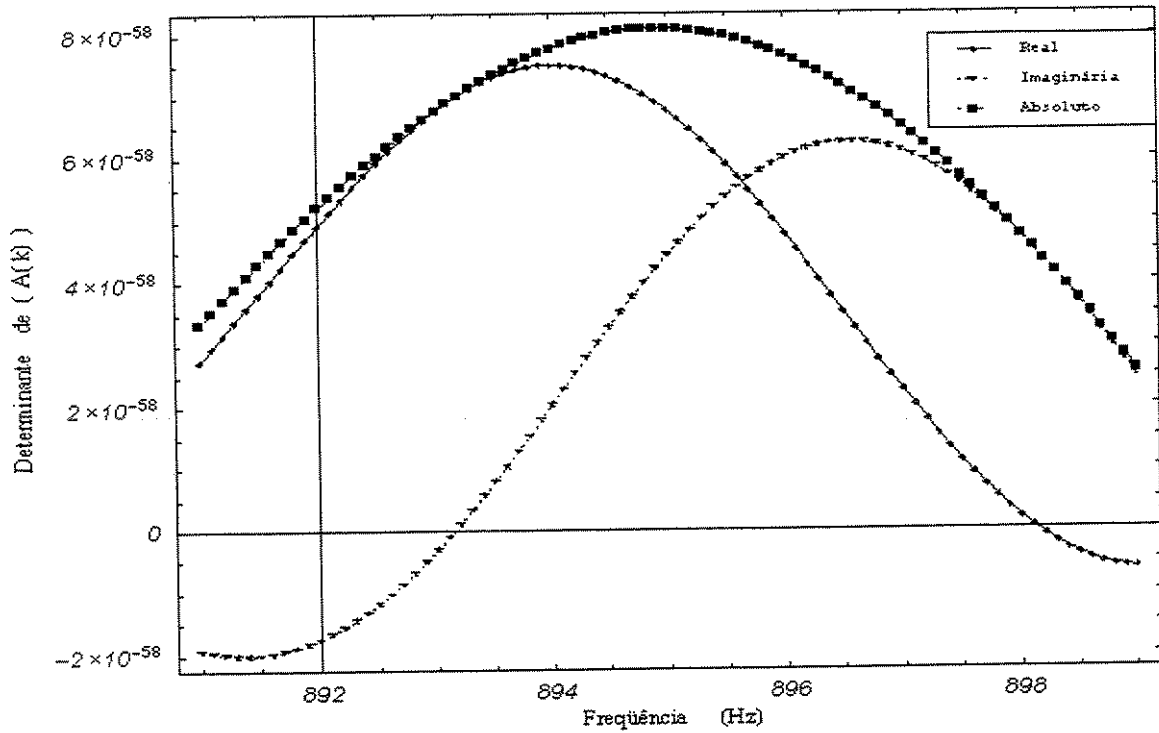


Figura 5.7: Ponto de Máximo local de $P(k)$, entre o zero real e imaginário.

Para melhor entendermos a identificação dos zeros do polinômio característico $P(k)$, dado em (5.16), nas situações mostradas nas figuras 5.6b–c, vamos mostrar algumas ilustrações, quando consideramos a cavidade acústica definida na seção 5.2, onde o comprimento $L_x = 2.3\text{m}$, a altura $L_y = 0.9\text{ m}$, com a condição de contorno dado pela condição de Neumann, isto é $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, em todo o seu contorno e velocidade do som $c_0 = 345\text{m/s}$.

Passamos inicialmente, a identificar o possível zero do polinômio $P(k)$, quando ocorre o ilustrado na figura 5.6b. Para isso vamos considerar no contorno da cavidade acústica, as seguintes discretizações: 128, 192, 256, 384 elementos, e o incremento $\Delta_k = k_i - k_{i-1}$ dado por $\Delta_k = 0.00182121\text{ Hz}$, (de (5.5) temos: $\Delta_k = \frac{2\pi \Delta_f}{c_0}$). Nas figuras de 5.8a, b, c, d, mostramos sobre o

eixo das abscissas, o comportamento entre as distâncias do zero da parte real e da parte imaginária de $P(k)$, quando modificamos a discretização no contorno da cavidade acústica.

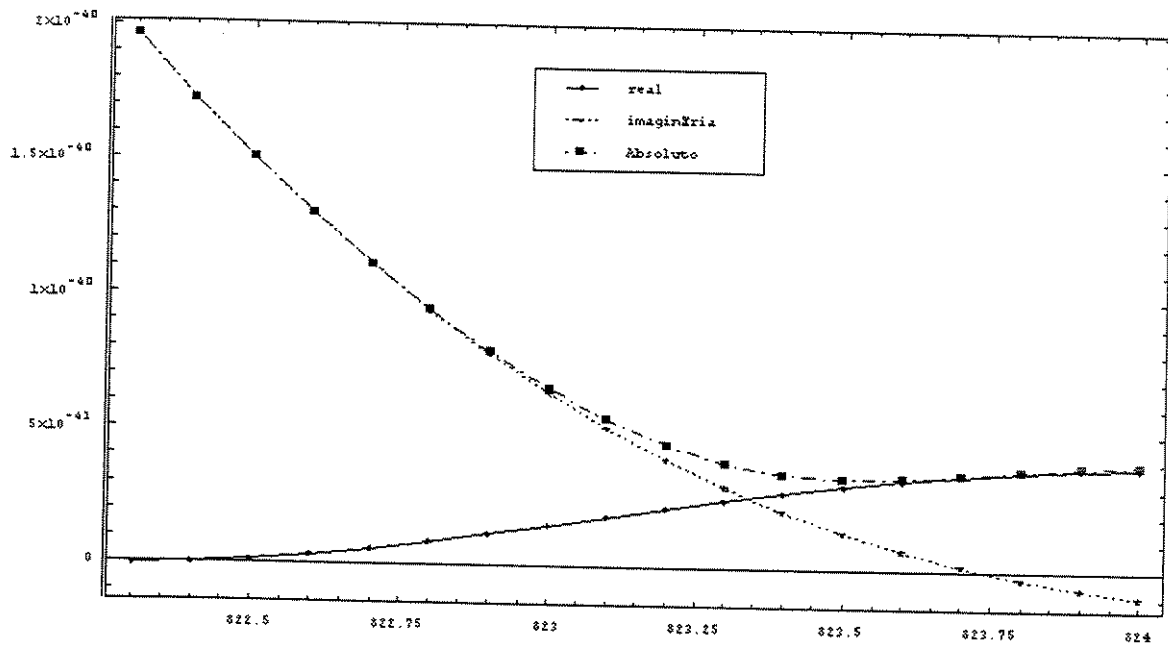


Figura 5.8.a: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 128 elementos no contorno.

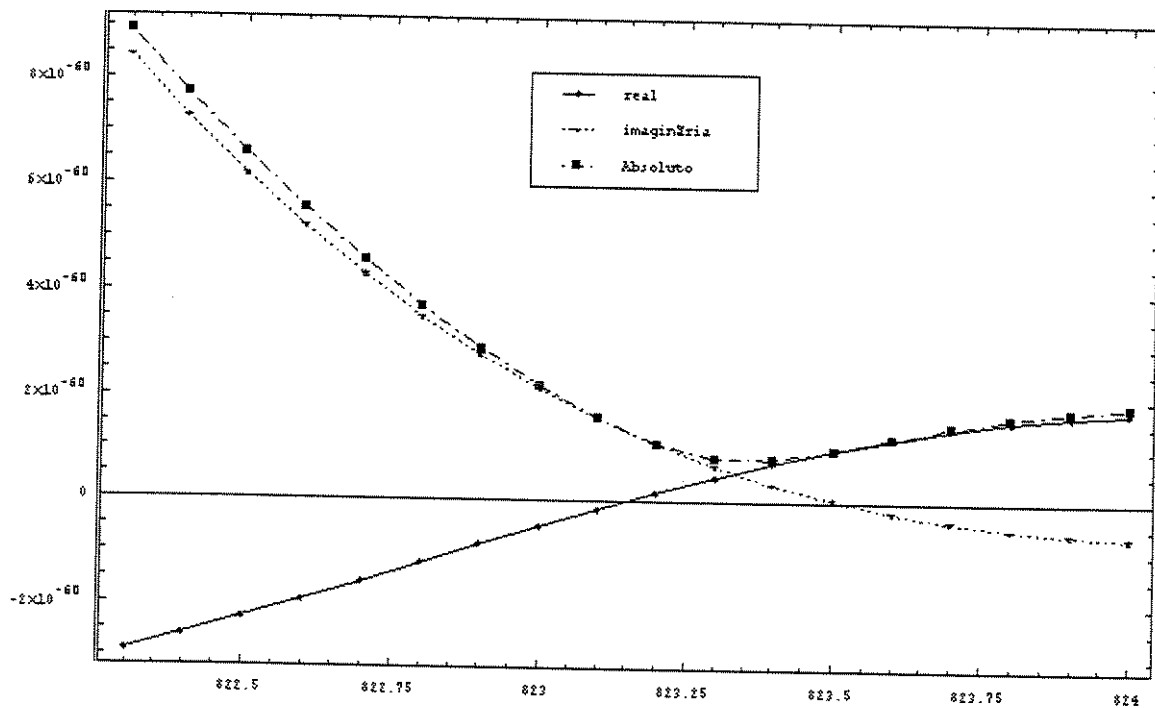


Figura 5.8.b: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 192 elementos no contorno

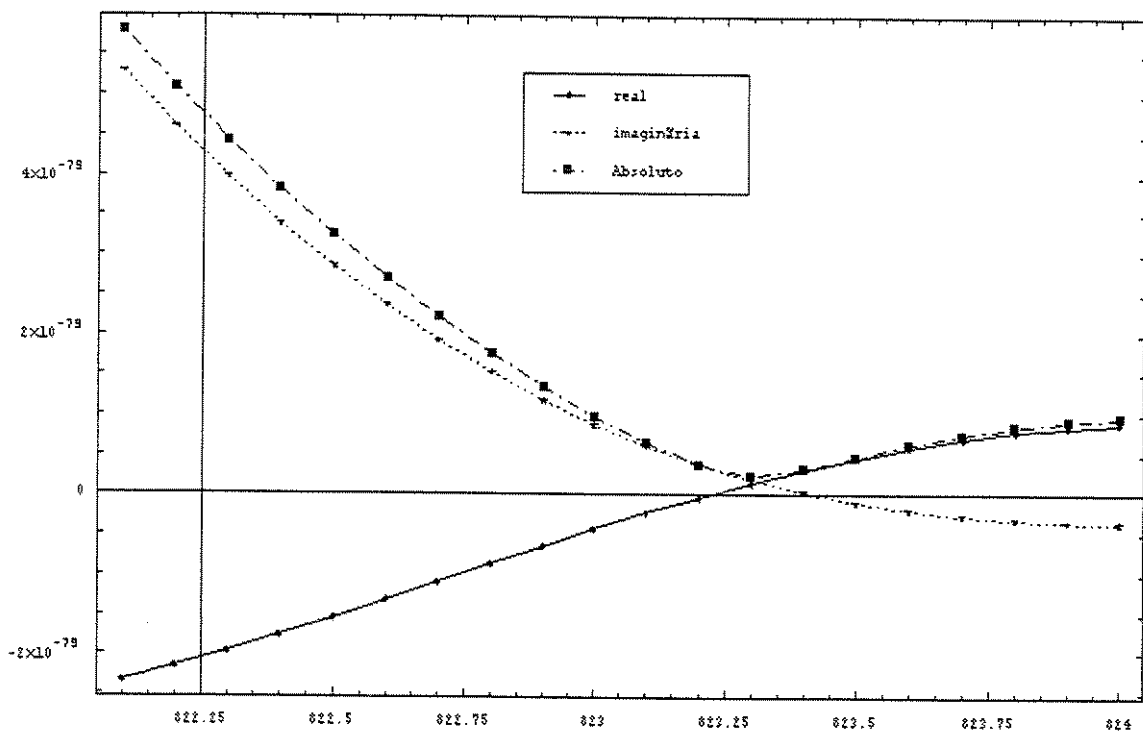


Figura 5.8.c: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 256 elementos no contorno

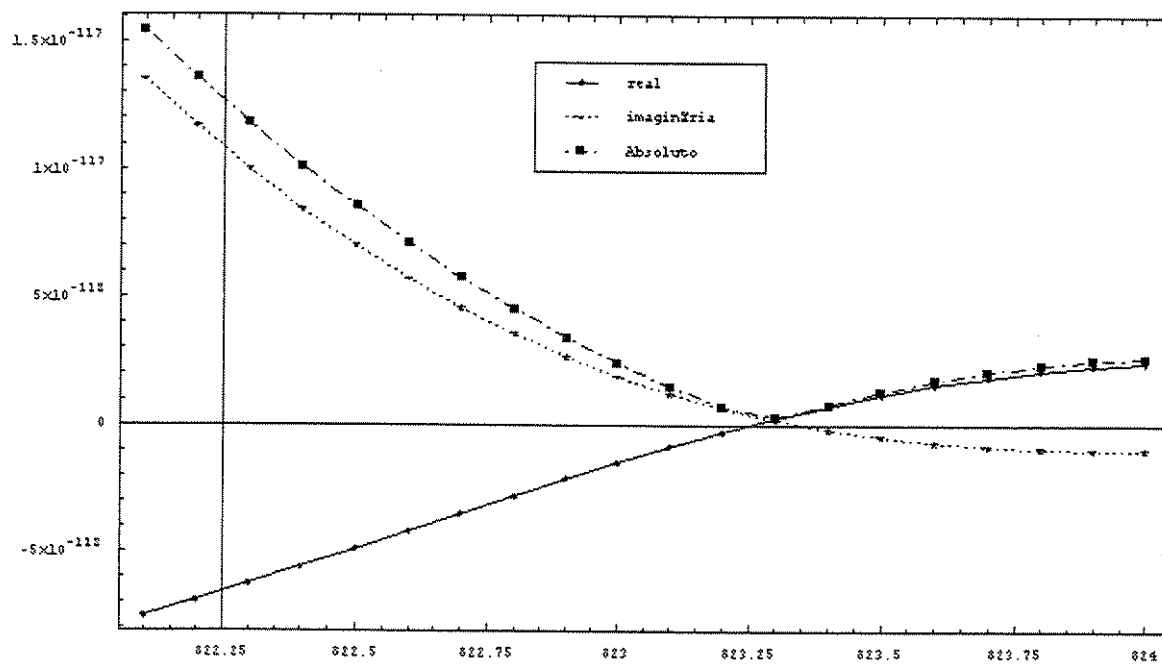


Figura 5.8.d: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 384 elementos no contorno

Na tabela 5.1, mostramos o comportamento numérico da distância entre os zeros da parte real e parte imaginária do polinômio complexo $P(k)$, representados na figura 5.7a-d.

Tabela 5.1: Análise dos zeros do polinômio característico

malha	ZR = Zero Real	ZI=Zero Imaginário	Min(Abs(Det(H)))	ZR – ZI
128	822.433	823.733	823.500	1.30025
192	823.147	823.523	823.400	0.375099
256	823.219	823.429	823.299	0.204180
384	823.254	823.345	823.299	0.090455

Na coluna 5, da tabela 5.1, podemos observar que a discretização no contorno da cavidade em estudo, foi determinante na aproximação entre os zeros da parte real e parte imaginária do polinômio complexo $P(k)$, o que garante um zero de $P(k)$, consequentemente, um zero do $\det(A(k))$ e portanto, fica identificado um ponto de mínimo local em $|\det(A(k))|$. Além disso o ponto de mínimo local identificado por 823,299 Hz, corresponde à frequência natural 823.273 Hz fornecida por (5.1) da cavidade acústica em estudo.

Com procedimento semelhante ao já utilizado, passamos a investigar um possível zero, para o polinômio $P(k)$, quando consideramos o ilustrado na figura 5.6c. Admitindo, as mesmas discretizações de 128, 192, 256, 384 elementos sobre o contorno da cavidade acústica e para o mesmo incremento $\Delta_k = 0.00182121$ Hz, mostramos nas figuras 5.9a-d, o comportamento da distância entre o zero da parte real e o ponto que tende a tangenciar o eixo das abscissas do polinômio $P(k)$.

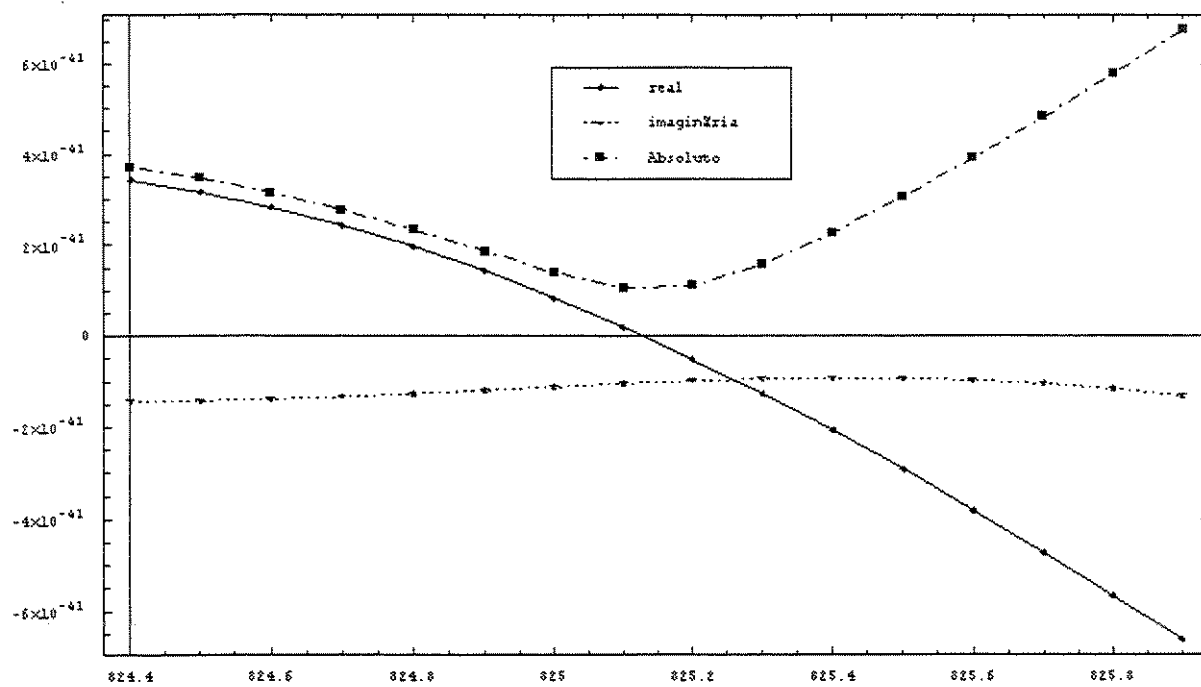


Figura 5.9.a: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 128 elementos no contorno

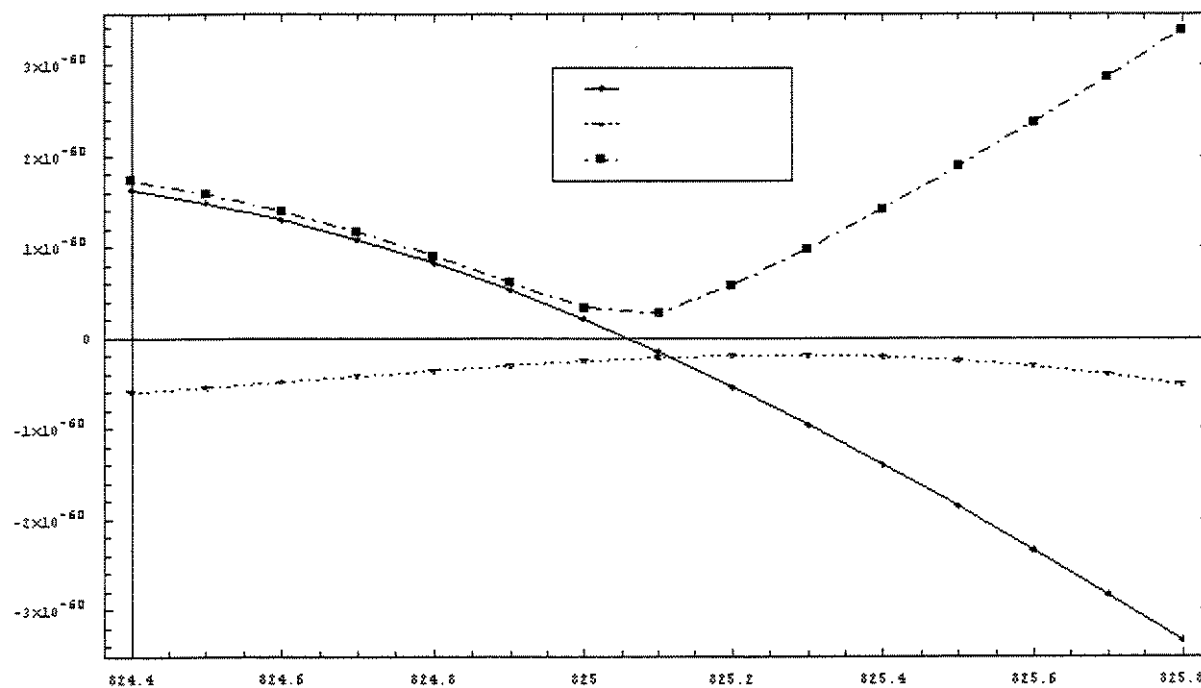


Figura 5.9.b: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 192 elementos no contorno

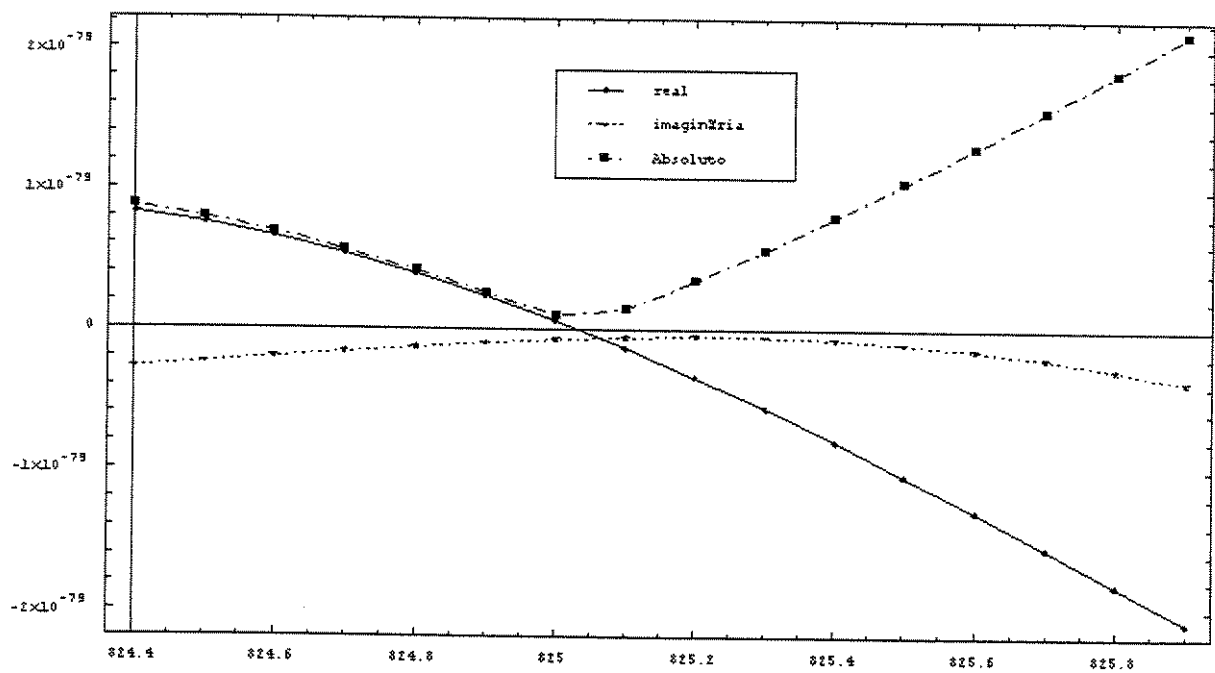


Figura 5.9.c: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 256 elementos no contorno

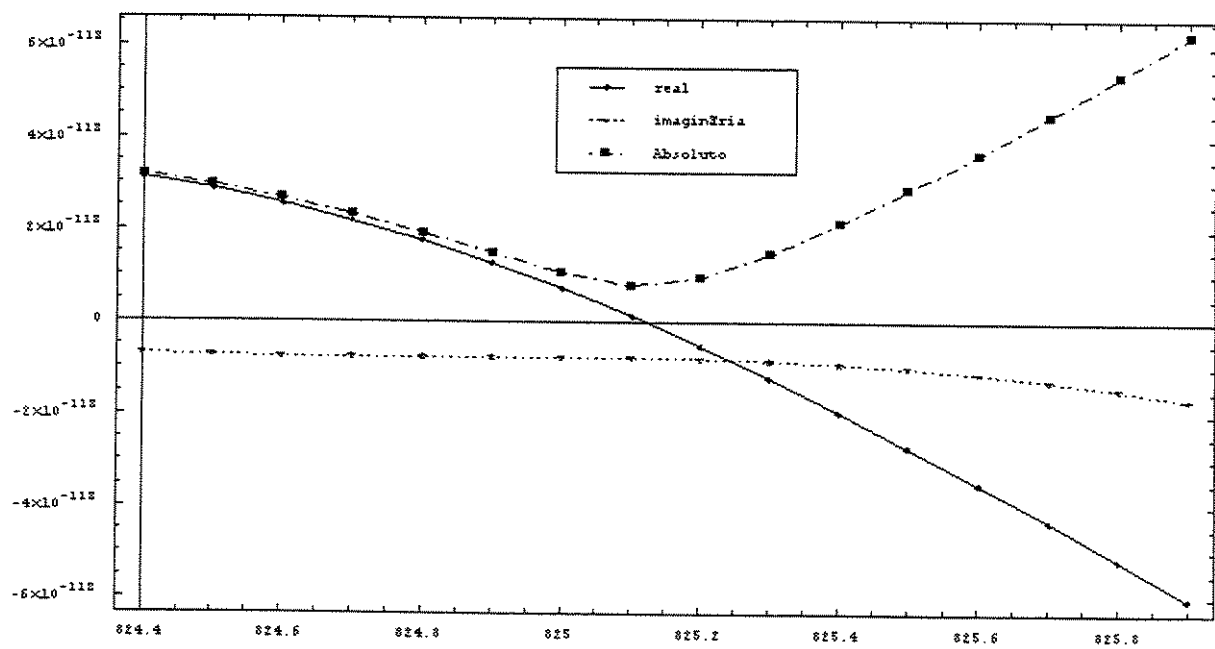


Figura 5.9.d: $\text{Det}[H(k)]$, para discretização de 384 elementos no contorno

Nesse caso as ilustrações dadas nas figuras de 5.9a-d, em pouco contribuíram para a identificação do zero do polinômio $P(k)$, recorremos então ao recurso da tabela 5.2, de resultados numéricos referentes às distâncias requeridas.

Aqui um aspecto interessante, pois quando aumentamos a discretização de 256 para 384 elementos, a distância entre os zeros da parte real e o suposto ponto de tangência da parte imaginária aumentou, como mostra a tabela 5.2.

Tabela 5.2- Identificação de ponto de mínimo local através da curva tangencial.

Malha	ZR = Zero Real	Max(Imaginário)	Min(Abs(Det(H)))	ZR – Max(Imaginário)
128	825.1280	825.400861	825.100861	0.272861
192	825.0570	825.30000	825.100000	0.242034
256	825.0320	825.200861	825.000861	0.16886
384	825.1200	824.40086	825.000861	0.719466

Entretanto, reduzindo o tamanho do incremento na faixa de frequências à metade do original e repetindo os mesmos procedimentos, constatamos a convergência esperada, quando aumentamos a discretização de 256 para 384 elementos como mostra a tabela 5.3.

Tabela 5.3: Identificação de ponto de mínimo local através da curva tangencial

Malha	ZR = Zero Real	Max(Imaginário)	Min(Abs(Det(H)))	ZR – Max(Imaginário)
128	825.1280	825.400861	825.11508	0.272861
192	825.0580	825.25082	825.05082	0.19294
256	825.0320	825.200861	825.000861	0.168099
384	825.0150	825.15082	824.950820	0.136207
512	825.0080	825.15082	824.950820	0.142565

Observamos na tabela 5.3 que ao aumentar a discretização do contorno da cavidade acústica para 512 elementos, novamente uma possível não convergência na identificação do zero do polinômio, foi identificada, dando indícios de não haver controle para a obtenção do ponto de mínimo local. Mas repetindo o procedimento de redução do incremento, podemos verificar que, a aproximação entre o zero da parte real e o ponto tangencial tende a ocorrer. Este fato também, parece garantir um zero para o polinômio de $P(k)$, implicando que existe um ponto de mínimo

local para $|\det(H(k))|$ dado por 824.950 Hz, o qual podemos verificar que também corresponde à frequência natural de 825.00Hz, fornecida por (5.1).

A identificação das frequências naturais da cavidade acústica através dos zeros do polinômio complexo é uma alternativa adicionada ao método da pesquisa direta, que contribui na obtenção e identificação das frequências naturais.

A seguir, serão apresentados dois exemplos, onde procuraremos identificar as frequências naturais das cavidades acústicas, usando da estratégia do método da pesquisa direta.

1- Cavidade Acústica Retangular

Na tentativa de obter as frequências naturais menores que 1000Hz, através da estratégia do método da pesquisa direta para uma cavidade acústica retangular, definida na figura 5.10, com condição de contorno sobre todos os elementos dados por Neumann ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$), usaremos de uma implementação de (5.14).

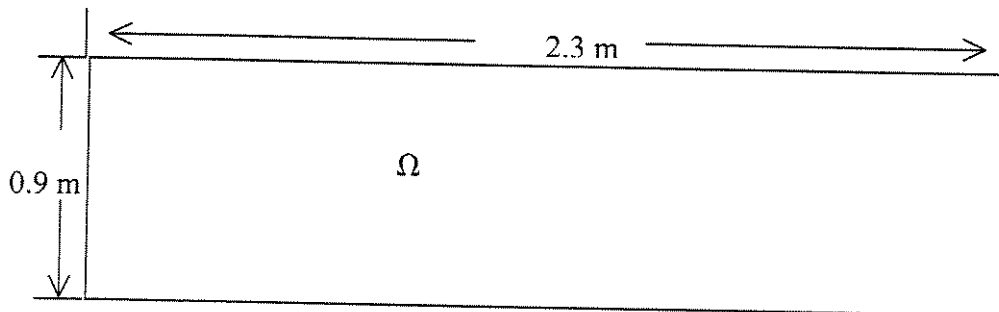


Figura 5.10: Cavidade acústica retangular

Com o objetivo de verificarmos a influência da discretização e o incremento Δ_f na obtenção das frequências naturais da cavidade acústica (figura 5.10), através da estratégia da pesquisa direta, vamos considerar as discretizações no contorno da cavidade acústica dadas na tabela 5.4: nela N_x representa a discretização sobre o comprimento L_x , enquanto que N_y

representa a discretização de elementos na altura L_y . O incremento $\Delta_k = k_i - k_{i-1}$ é dado na tabela 5.5., em que $k_i = k_0 + i \Delta_k$, $i = 0, 1, 2, \dots$, com $\Delta_k = \frac{2\pi\Delta_f}{c_0}$.

Tabela 5.4: Discretização no contorno da cavidade retangular

Discretizações	N_x	N_y	<i>Discretização em todo o contorno</i>
Malha-M1	23	9	64
Malha-M2	46	18	128
Malha-M3	69	27	192
Malha-M4	92	36	256
Malha-M5	138	54	384

Tabela 5.5: Incremento no Domínio da Freqüência

	Δ_{fi}	Faixa de Análise	Total de passos
1	0.00910600	1000 Hz	2000
2	0.003642420	1000 Hz	5000
3	0.001821210	1000 Hz	10000

O número de freqüências naturais, não identificadas da cavidade acústica (figura 5.10), em relação às 65 freqüências menores que 1000 Hz, obtidas analiticamente por (5.2), pode ser observada na tabela 5.6, quando (5.19) é submetida a um algoritmo de pesquisa de mínimos locais para diferentes discretizações no contorno da cavidade e também para diferentes incrementos no domínio da freqüência.

Tabela 5.6: Freqüências não identificadas em relação ao total.

Δ_{fi}	Malha-M1	Malha-M2	Malha-M3	Total de Passos
0.00910600	14/65	02/65	0/65	2000
0.003642420	12/65	02/65	0/65	5000
0.001821210	12/65	01/65	0/65	10000

Uma comparação entre os resultados numéricos e as frequências naturais obtidas por meio da implementação de (5.14), fornecidas analiticamente por (5.2), quando consideramos a discretização malha-M3, e os incrementos dados por Δf_1 , Δf_2 , Δf_3 é mostrada na tabela 5.7.

Tabela 5.7: Frequências naturais da membrana retangular (2.30 m X 0.90 m).

N.	Índice das frequências		Frequências naturais- numéricas			Frequências Naturais Analíticas
	m	n	Δf_1	Δf_2	Δf_3	
1	0	0	000.000	000.0000	000.0000	000.000
2	1	0	074.999	074.9999	075.0000	075.000
3	2	0	150.000	150.0000	150.0000	150.000
4	0	1	191.5000	191.5999	191.6666	191.667
5	1	1	205.999	205.7999	205.8181	205.818
6	3	0	225.000	224.9999	225.0000	225.000
7	2	1	243.500	243.4000	243.4000	243.385
8	3	1	295.500	295.5999	295.5999	295.569
9	4	0	300.000	300.0000	300.0000	300.000
10	4	1	356.000	355.9999	356.0000	356.000
11	5	0	374.999	374.9999	374.9999	375.000
12	0	2	383.500	383.3999	383.3000	383.333
13	1	2	390.500	390.6000	390.6000	390.601
14	2	2	411.500	411.5999	411.7000	411.636
15	5	1	420.999	421.2000	421.2000	421.141
16	3	2	444.499	444.5999	444.4999	444.488
17	6	0	449.999	450.0000	450.0000	450.000
18	4	2	487.000	486.8000	486.8000	486.800
19	6	1	488.999	489.2000	489.1000	489.118
20	7	0	525.000	525.0000	525.0000	525.000
21	5	2	536.499	536.2000	536.9999	536.225
22	7	1	559.000	559.0000	558.9000	558.893
23	0	3	575.000	575.0000	575.0000	575.000
24	1	3	580.000	580.0000	579.8999	579.871
25	6	2	591.000	591.2000	591.1999	591.138
26	2	2	594.499	594.4000	594.3000	594.243
continua						

Continuação tabela 5.7

27	8	0	599.999	599.9999	599.9999	600.000
28	3	3	617.499	617.3999	617.4999	617.454
29	8	1	630.000	630.0000	629.8999	629.870
30	4	3	648.500	648.5999	648.5999	648.556
31	7	2	649.999	649.9999	649.9999	650.053
32	9	0	675.000	675.000	675.0000	675.000
33	5	3	686.500	686.5999	686.5000	686.477
34	9	1	701.999	701.8000	701.8000	701.684
35	8	2	711.999	711.9999	711.9999	712.000
36	6	3	729.999	730.1999	730.1999	730.154
37	10	0	749.999	750.0000	750.0999	750.000
38	0	4	766.500	766.7999	766.7000	766.667
39	1	4	770.500	770.1999	770.3999	770.326
40	10	1	773.999	774.4000	774.1999	774.103
41	9	2	776.500	776.1999	776.3000	776.253
42	7	3	778.500	778.6000	778.6000	778.621
43	2	4	781.000	781.1999	781.3000	721.203
44	3	4	799.000	799.0000	799.0999	799.001
45	4	4	823.499	823.4000	823.4000	823.273
46	11	0	825.000	825.0000	825.1000	825.000
47	8	3	831.000	831.0000	831.1000	831.031
48	10	2	842.500	842.4000	842.3000	842.285
49	11	1	846.999	846.9999	847.1999	846.972
50	5	4	853.500	853.4000	853.5000	853.465
51	9	3	886.999	886.8000	886.8000	886.707
52	6	4	889.000	889.0000	889.0000	888.976
53	12	0	900.000	900.0000	900.1000	900.000
54	11	2	909.999	909.8000	909.8000	909.708
55	12	1	920.500	920.4000	920.2999	920.183
56	7	4	929.000	929.2000	929.2000	929.185
57	10	3	945.000	945.1999	945.0999	945.053
58	0	5	958.499	958.4000	958.4000	958.333
59	1	5	961.500	961.3999	961.3999	961.264
continua						

Continuação tabela 5.7						
60	2	5	969.999	970.2000	970.1000	970.001
61	8	4	973.500	973.5999	973.7000	973.539
62	13	0	974.999	975.0000	975.1000	975.000
63	12	2	978.000	977.2000	978.2000	978.235
64	3	5	984.500	984.3999	984.5000	984.392
65	13	1	993.999	993.8000	993.8000	993.660

O total de pontos de mínimos locais identificado pelo código implementado e correspondente às 65 frequências naturais da cavidade acústica na curva $|\det(H(k))| = 0$, são representados na figura 5.11 para a malha-M3, e incremento Δf_B .

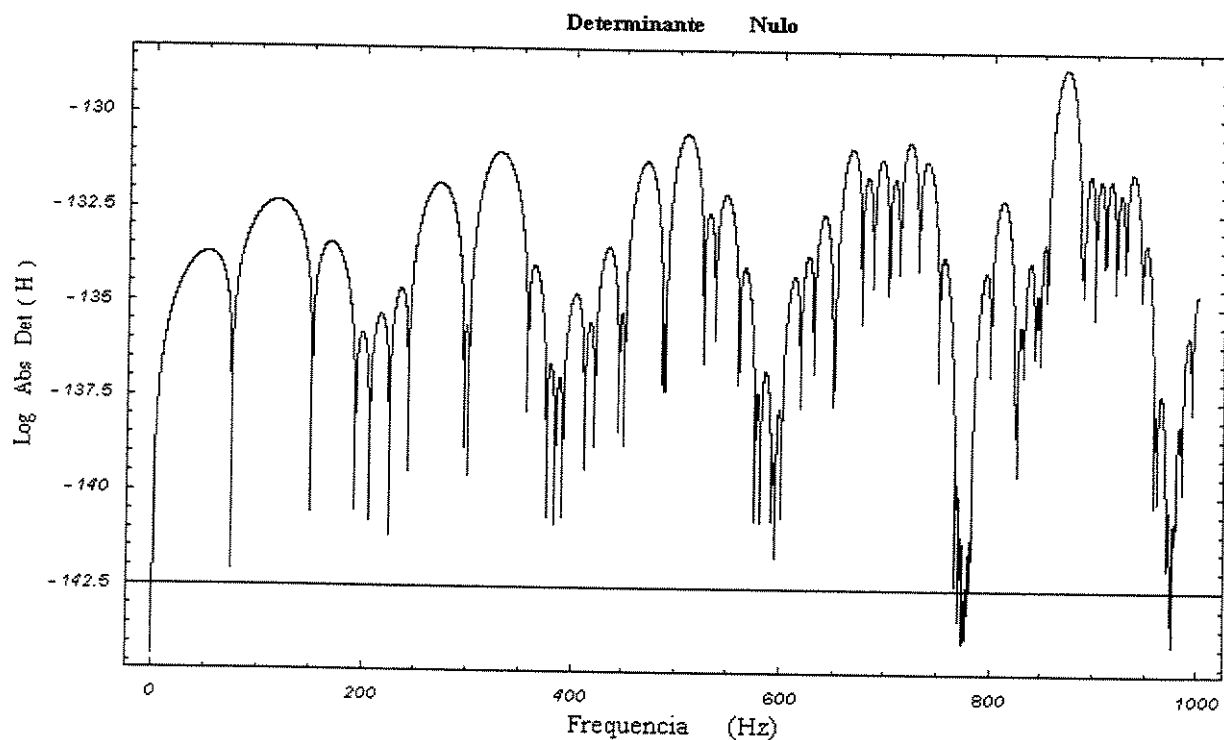


Figura 5.11: Pontos de Mínimos Locais da cavidade acústica retangular

A dificuldade de melhor visualização desses pontos de mínimos locais, que identificaram o total de frequências naturais da cavidade acústica em estudo, se explica pelo fato do crescimento exponencial do número dessas frequências naturais como mostrado na figura (5.2). Esta alta densidade de pontos de mínimos locais apresentada pode confundir pequenos desvios na curva do

$|\det(H(k))|$ e isto pode tornar o método da pesquisa direta não confiável como sugere [Banergee e Raveendra-1992], [Banergee e Ahmad 1988], [Ali e Rajakumar-1991] dentre outros.

Uma distribuição dos pontos de mínimos locais por classe modais, como visto na figura 5.1, garante uma melhor identificação desses pontos. Na figura 5.11a-i, mostramos o gráfico da curva do $\log(|\det(H(k))|)$, em função de faixas de frequências, de comprimento conveniente, representadas sobre o eixo das abscissas. Em cada uma destas figuras, os pontos de mínimos locais, identificaram as frequências naturais.

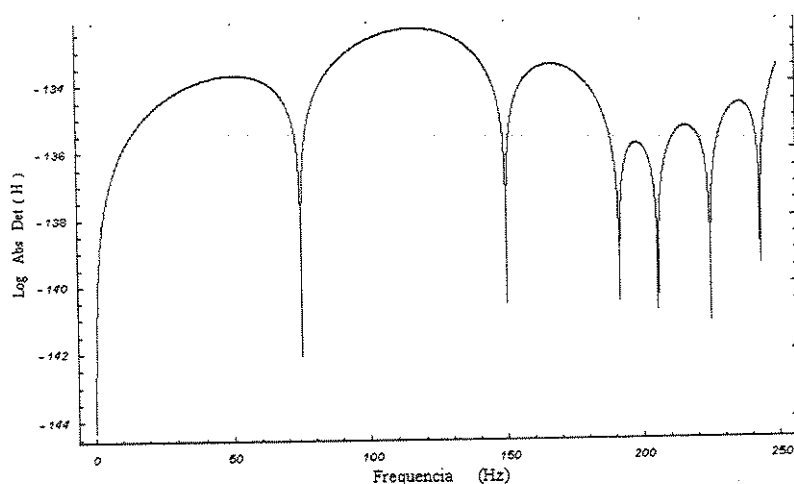


Figura 5.11a

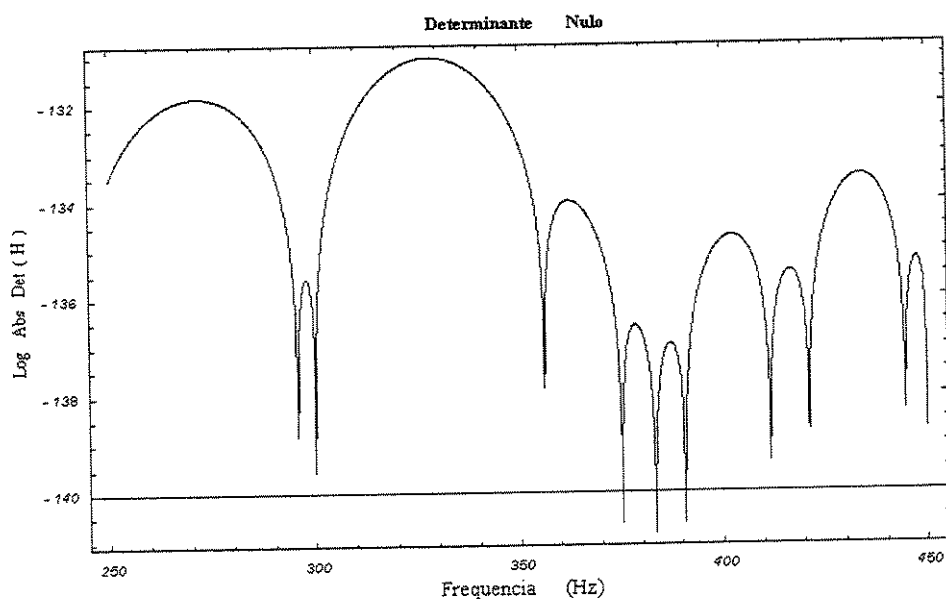


Figura 5.11b

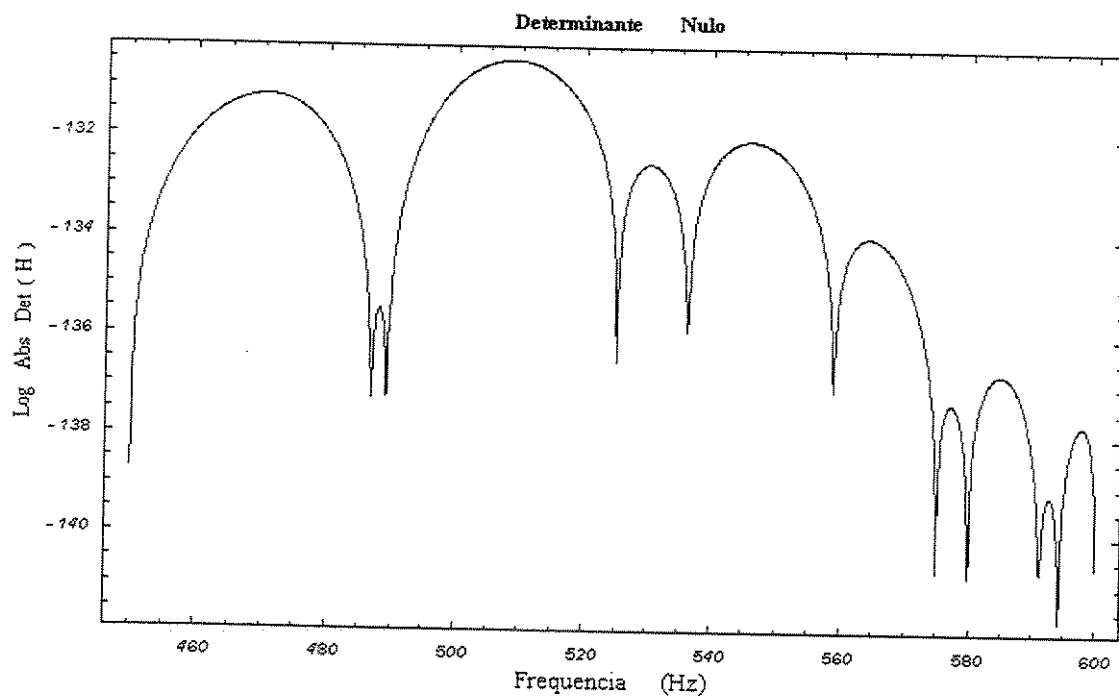


Figura 5 11c

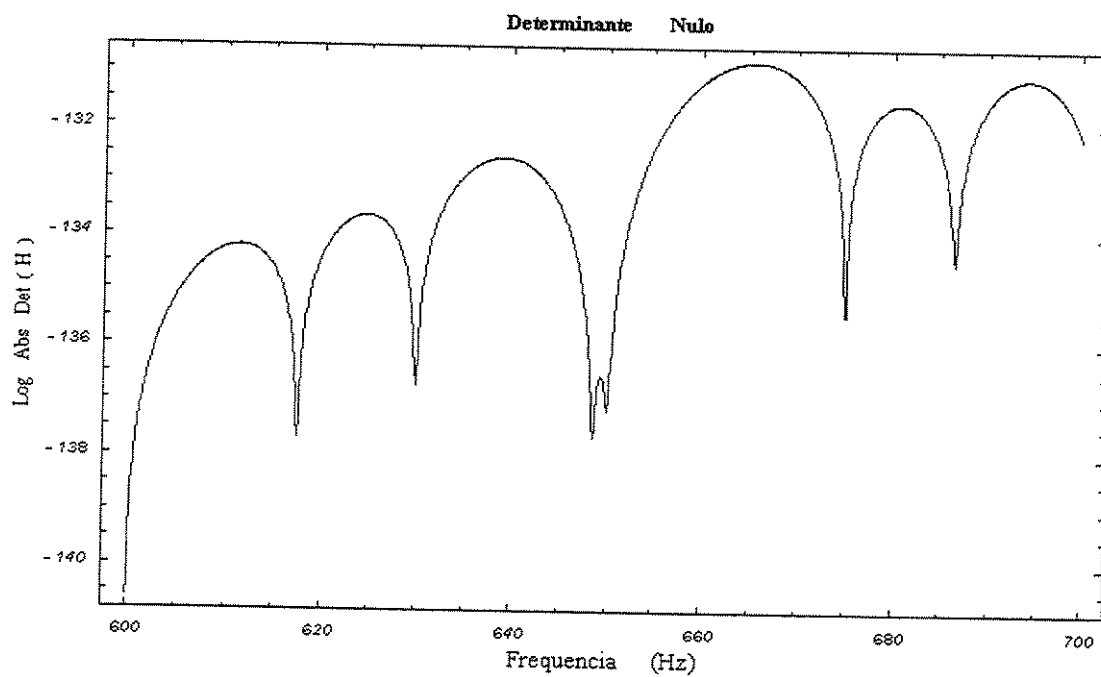


Figura 5 11d

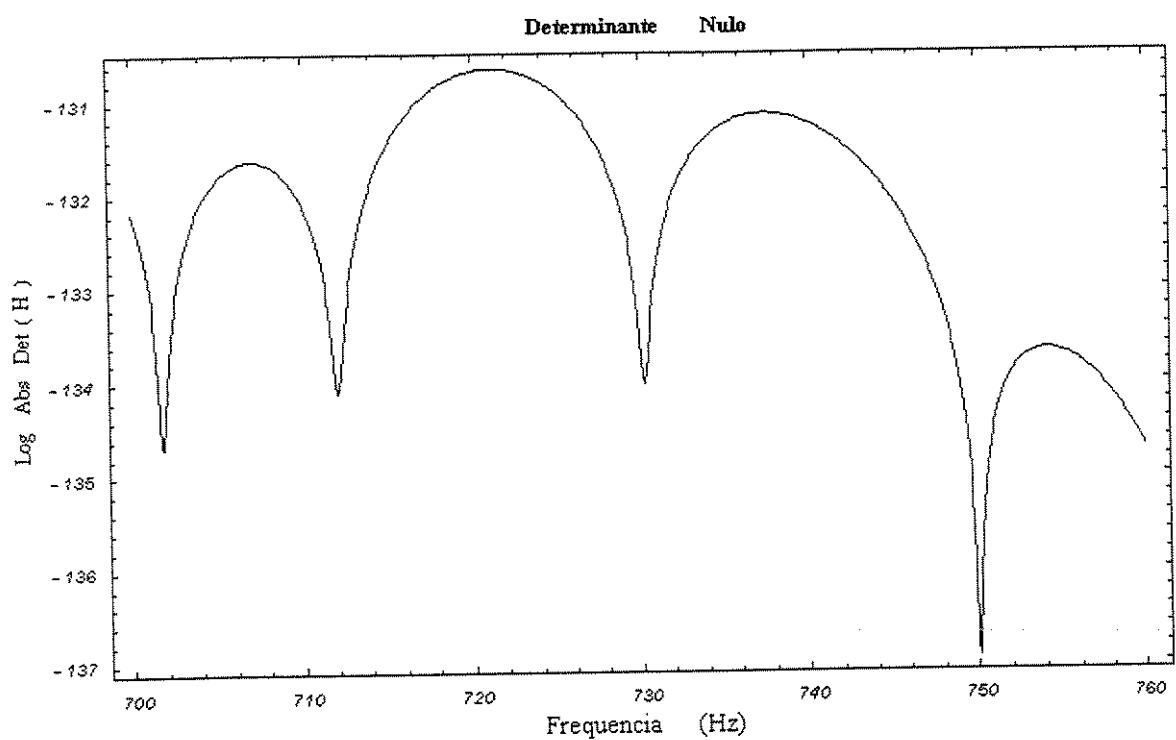


Figura 5 11e

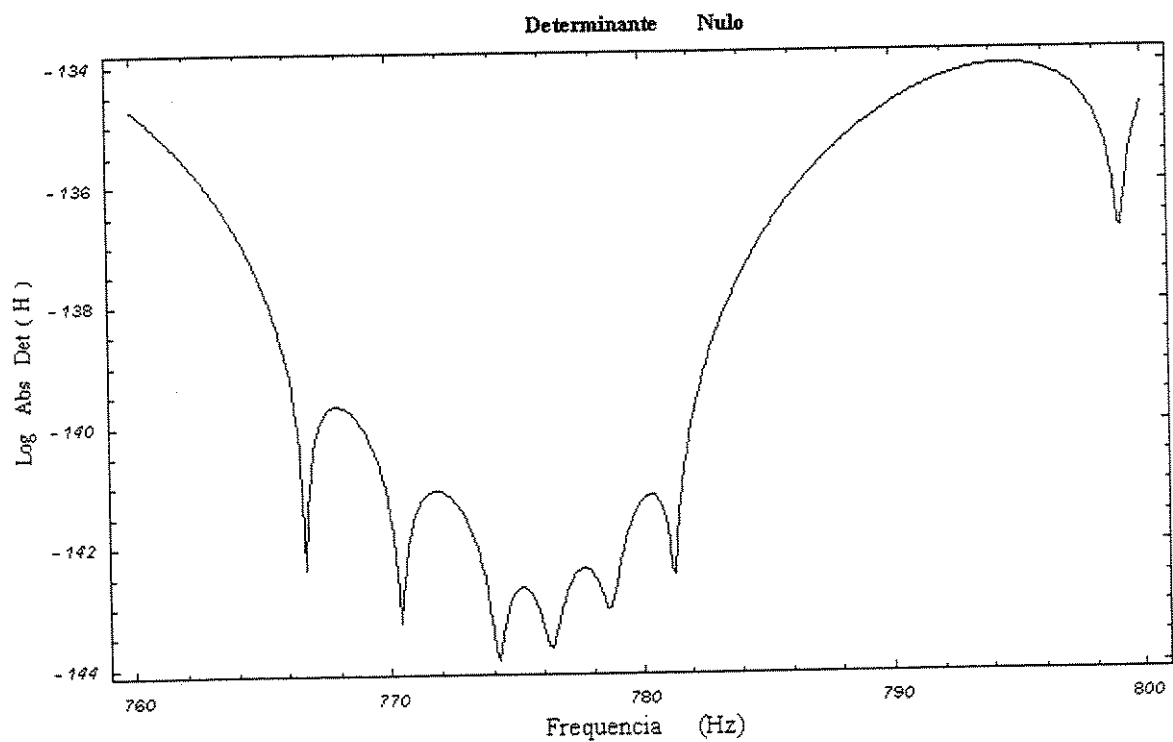


Figura 5 11f

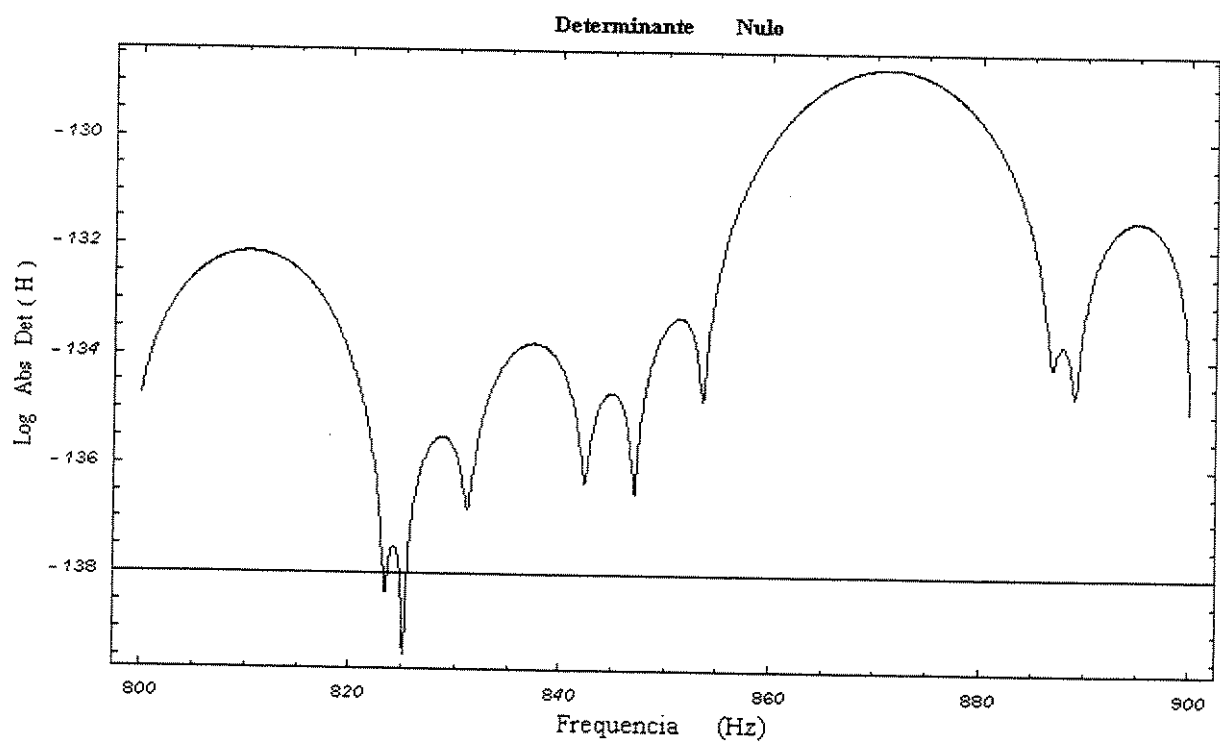


Figura 5 11g

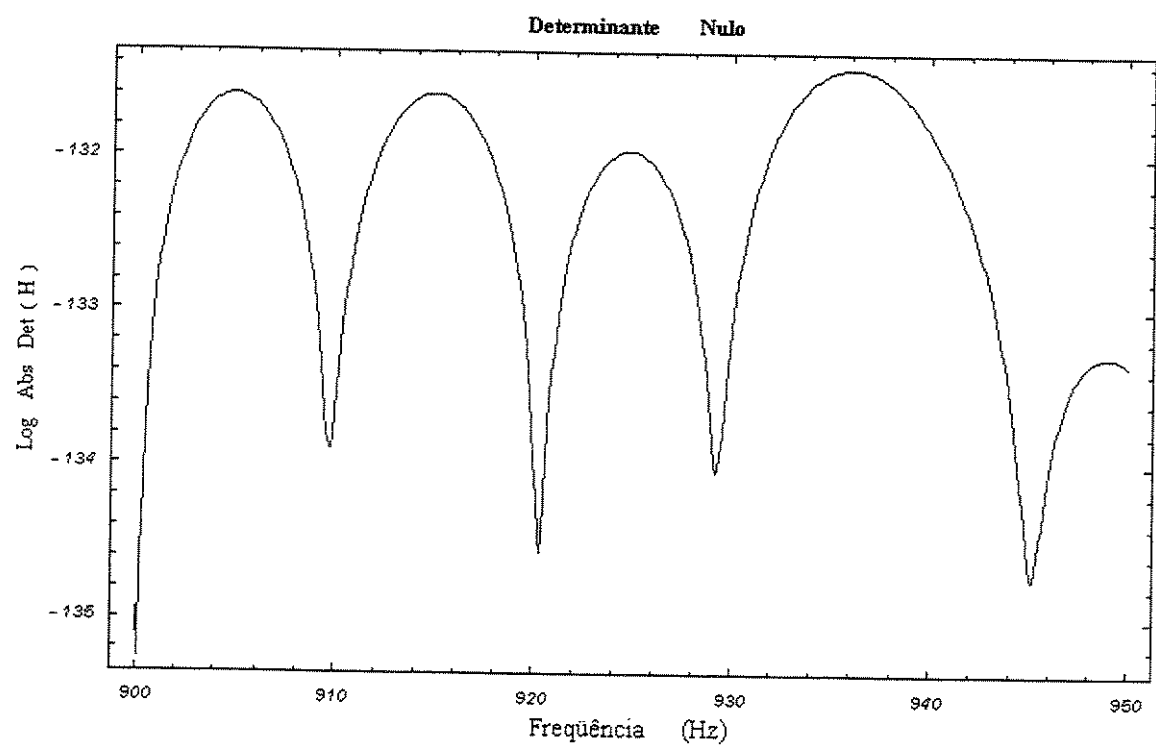


Figura 5 11h

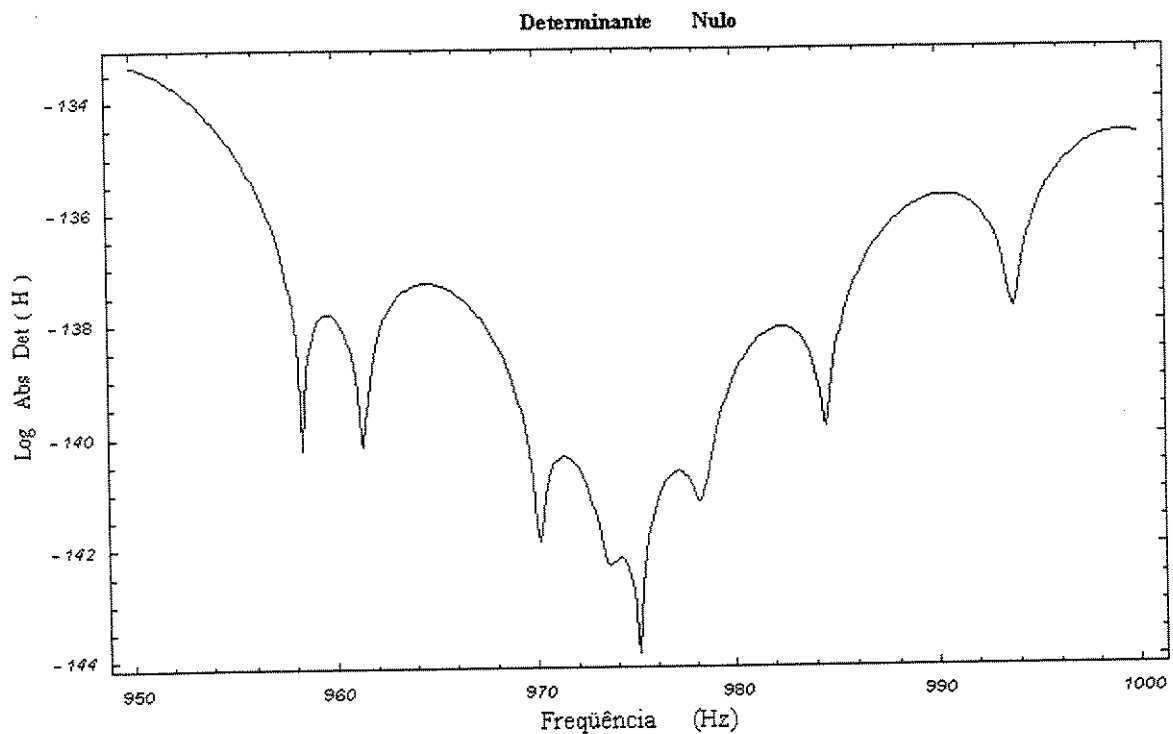


Figura 5.11i

Figura 5.11: Pontos de Mínimos Locais distribuídos por faixas de Frequências.

A partir das figuras de 5.11a à 5.11-i, verificamos que, todos os pontos de mínimos locais estão determinados pela implementação de 5.14 estão bem definidos. Assim podemos lançar mão, da alternativa de identificação dos zeros do polinômio característico, visto na seção 5.5, de onde é possível verificar que, de fato cada um deles corresponde a uma frequência natural da cavidade acústica em estudo.

2 – Cavidade acústica semi-oval

Considere a cavidade acústica descrita por um arco de circunferência dado por $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ radianos e raio 1 metro, com as extremidades do arco, unidos por uma corda, como mostra a figura 5.12. As condições de contorno dadas pelas condições Neumann, para $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, também são destacadas na figura.

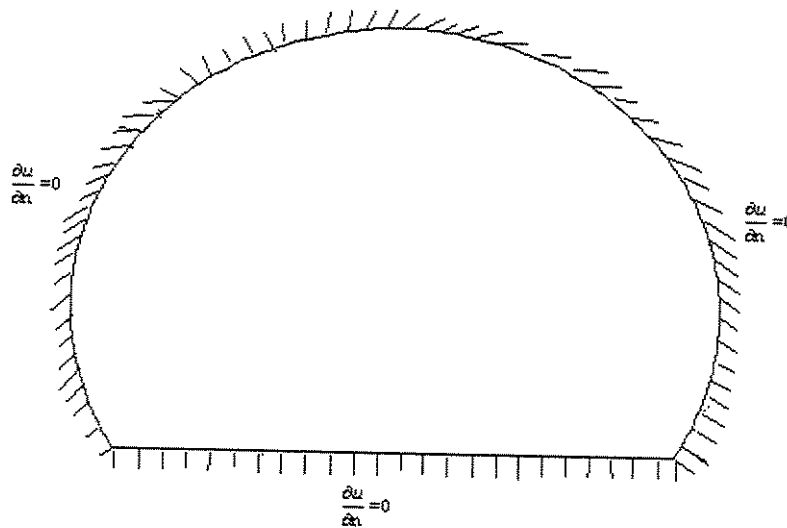


Figura 5.12: Cavidade Acústica: Semi-oval.

A fim de determinarmos as frequências naturais da cavidade acústica (figura 5.12), por meio do Método da Pesquisa Direta, vamos considerar as discretizações sobre seu contorno dadas na tabela 5.9 onde N_{oval} representa o número de elementos sobre o contorno oval, N_{corda} o número de elementos sobre a corda e N_{total} representa o total de elementos sobre o contorno. Os tamanhos dos incrementos sobre a faixa de frequências de comprimento 1000Hz, são dados pela tabela 5.9.

Tabela 5.8: Discretização sobre o contorno semi-oval

Discretizações	N_{oval}	N_{corda}	N_{total}
Malha-O1	80	32	112
Malha-O 2	140	57	197
Malha-O3	180	74	254

O número total de pontos de mínimos locais identificados, quando consideramos as diferentes discretizações e incrementos dados respectivamente nas tabelas 5.8 e 5.9, estão dispostos na tabela 5.10 e comparados com as respostas numéricas obtidas pelo MEF.

Tabela 5.9: Pontos de Mínimos Locais - Cavidade Semi-Oval

Passo- Δf	Malha-O1	Malha-O2	Malha-O3
$\Delta f_1 = 0.00910600$	67	73	74
$\Delta f_2 = 0.003642420$	70	73	74
$\Delta f_3 = 0.001821210$	70	74	74

Os 74 pontos de mínimos locais dados na coluna 4 da tabela 5.9, candidatos à frequência natural da cavidade acústica da figura 5.12, estão representados na curva do $\log(|\det(H(k))|)$, em função da frequência (figura 5.13). Já nas figuras 5.14a-g, mostramos esses mesmos pontos de mínimos locais, só que agora melhor identificados para a curva do $\log(|\det(H(k))|)$.

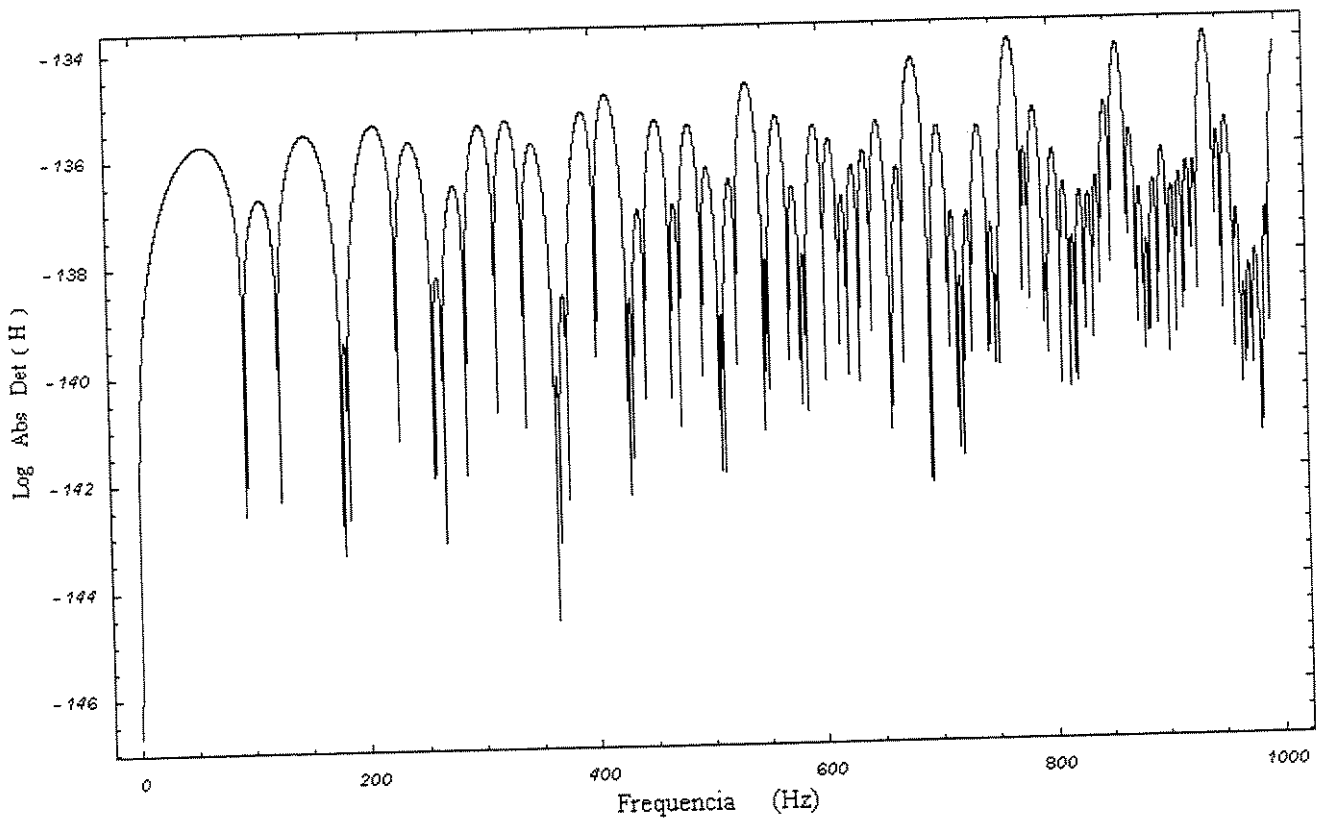


Figura 5.13: Curva do $|\det(H(k))|$ cavidade semi-oval

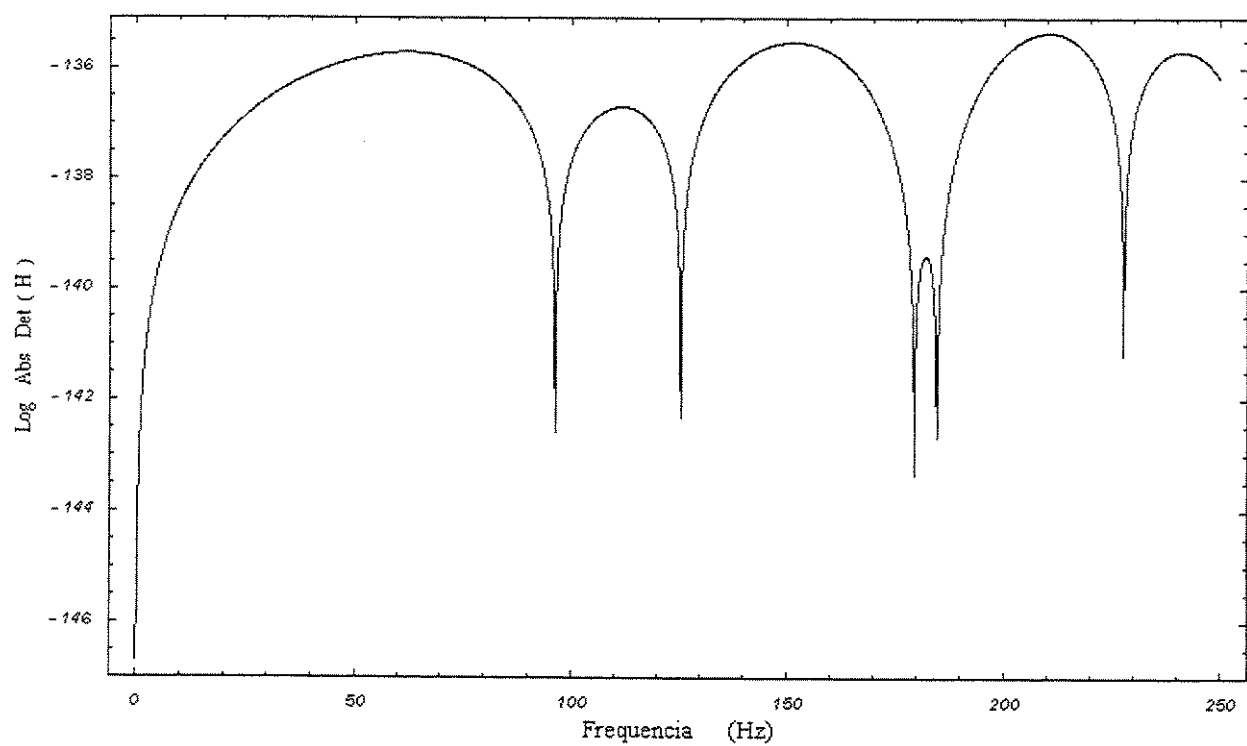


Figura 5.14a

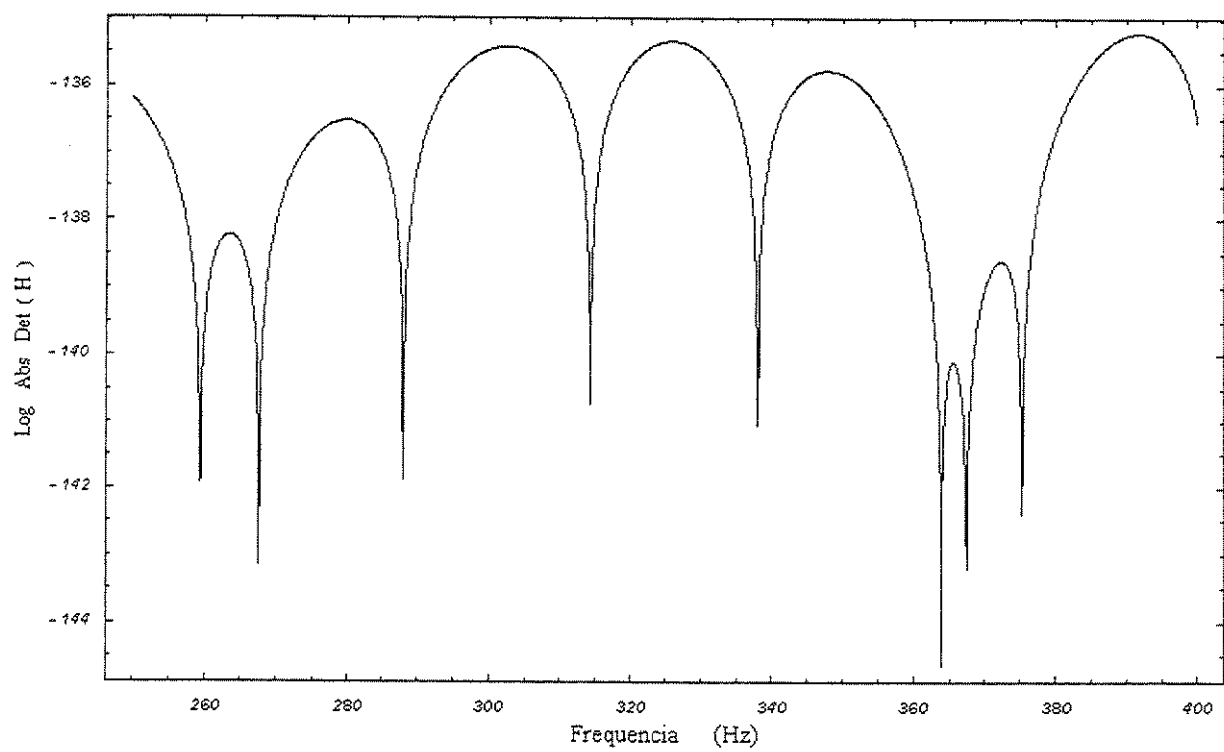


Figura 5.14b

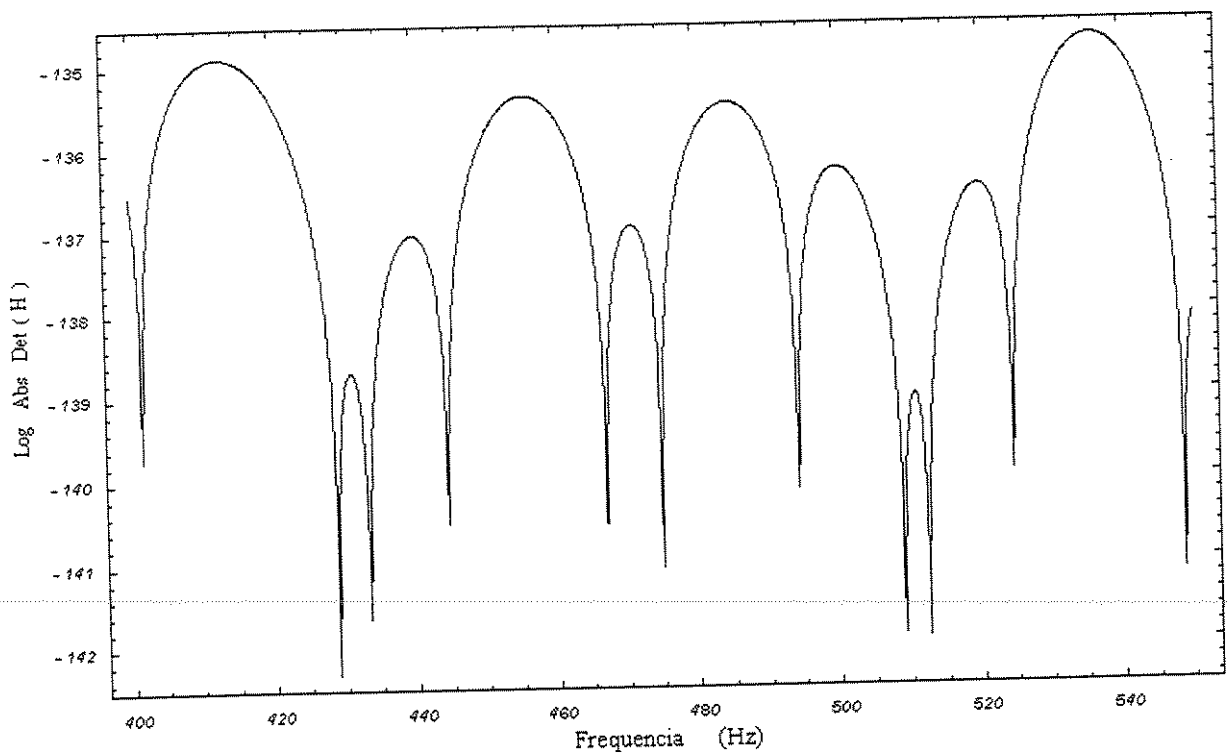


Figura 5.14c

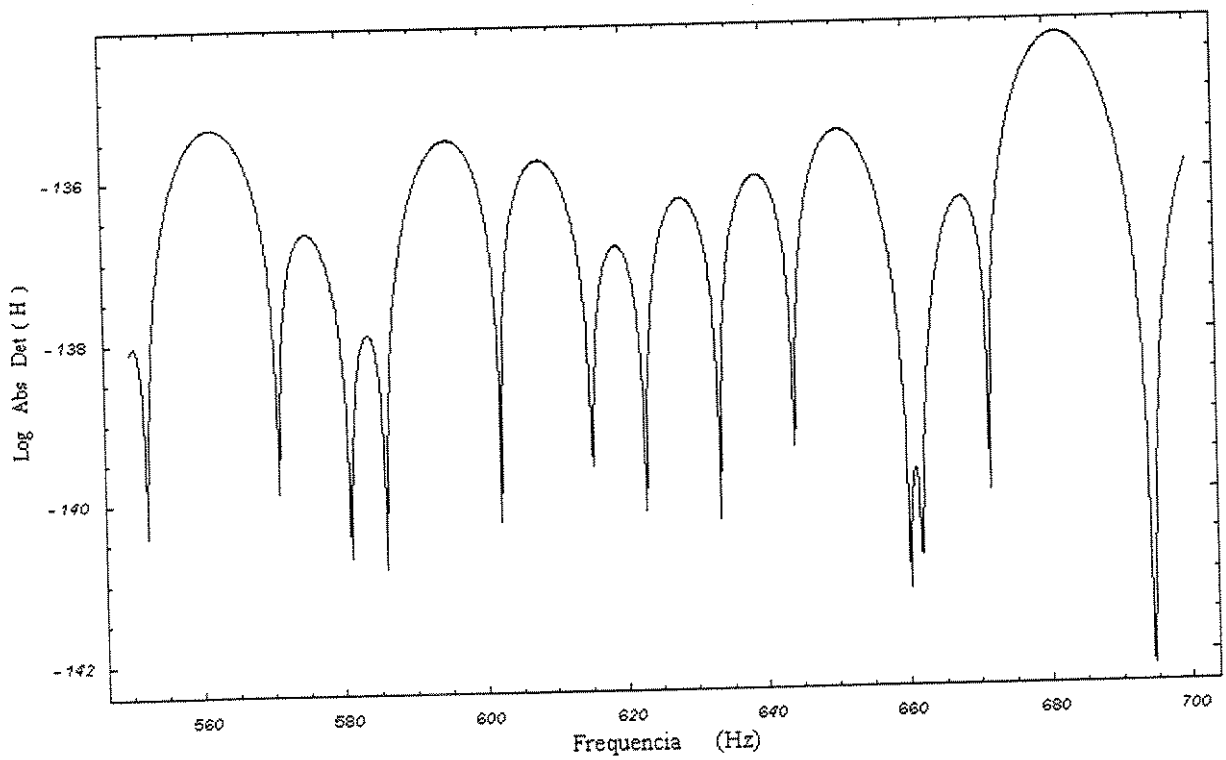


Figura 5.14d

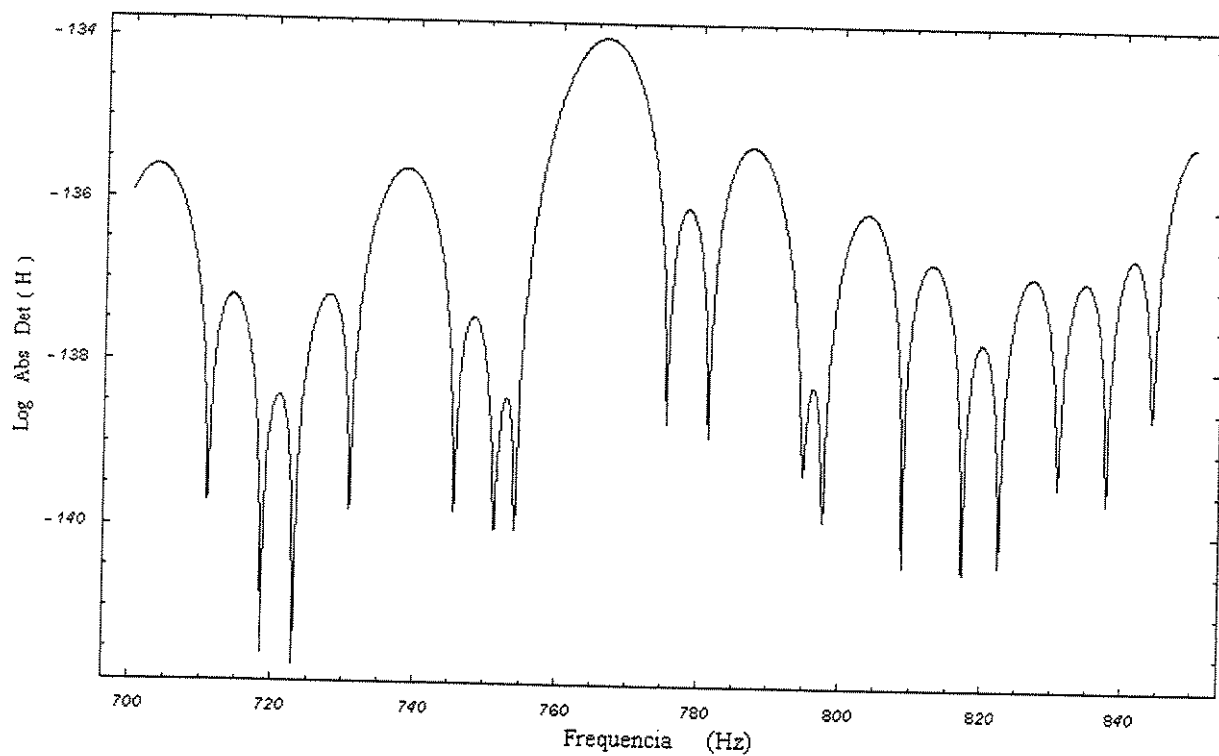


figura 5.14e

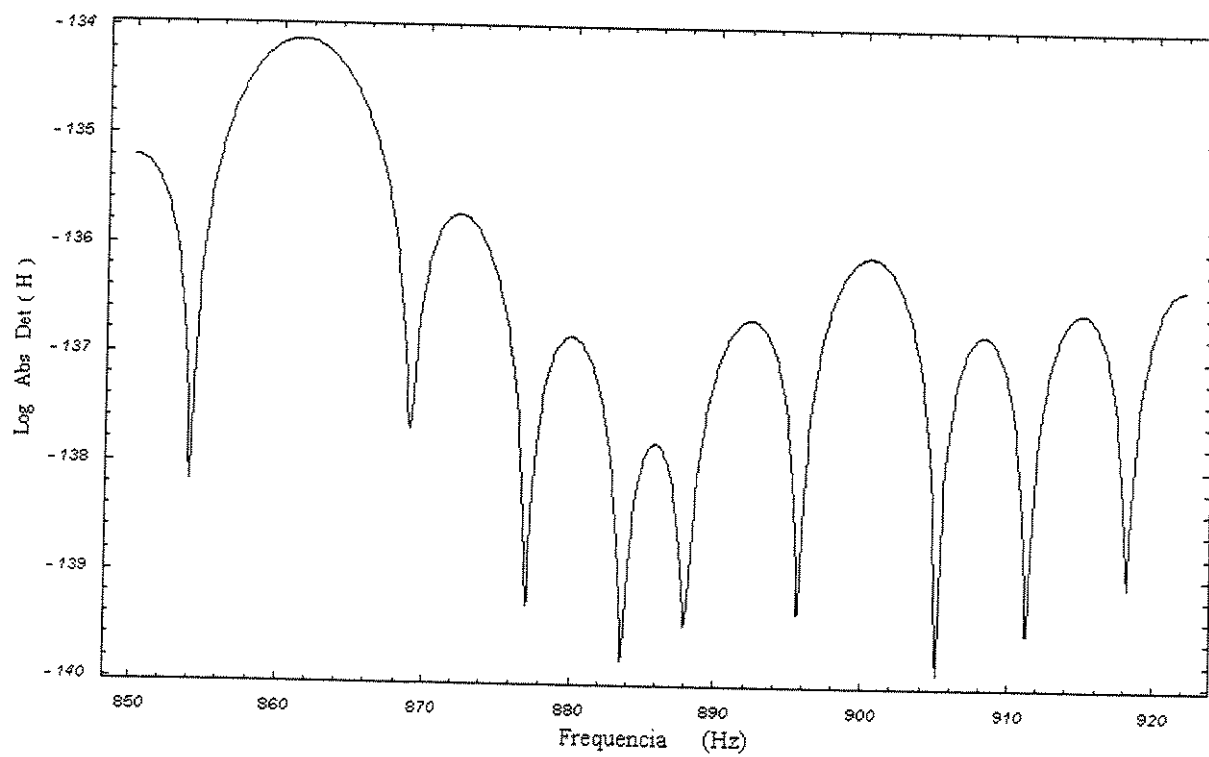


figura 5.14f

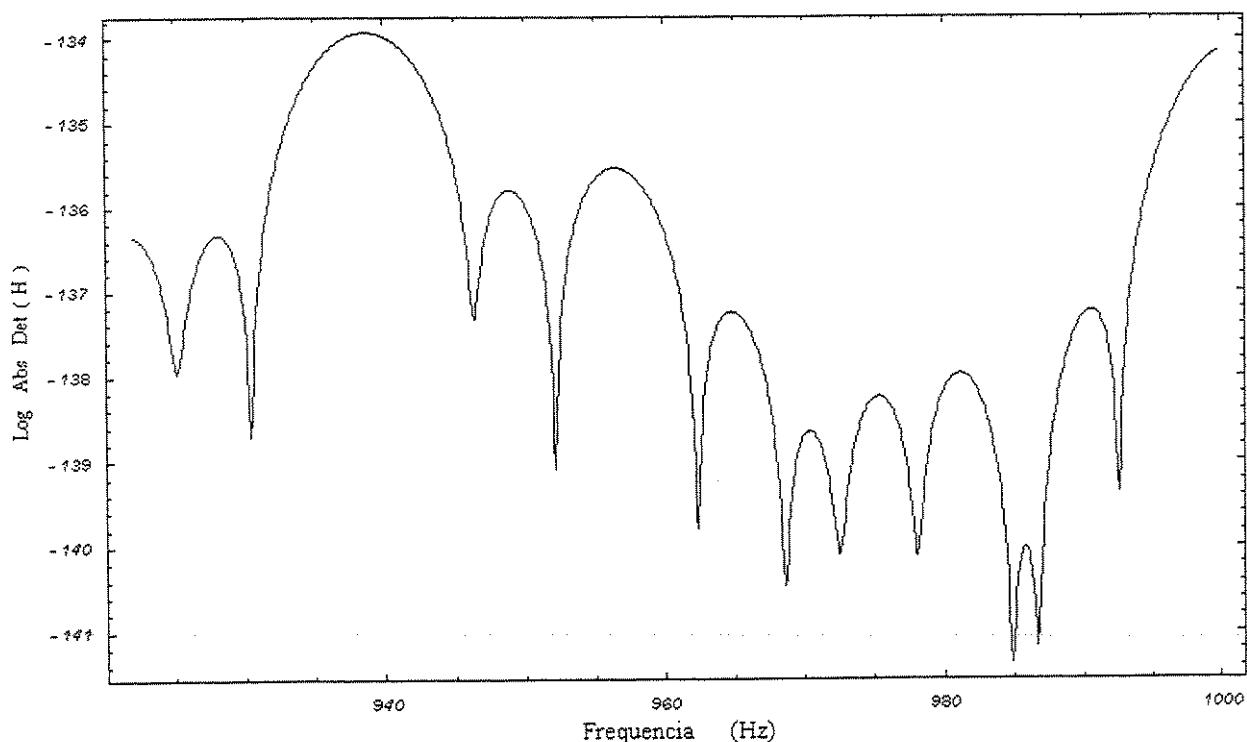


Figura 5.14g: Pontos de mínimos locais

Os pontos de mínimos locais, correspondentes às frequências naturais, identificados nas figuras 5.14a–g, são comparados com as respostas também numéricas, determinadas pelo método de elementos finitos, para uma discretização triangular da cavidade acústica em estudo para as 20 primeiras frequências e mostrados na tabela 5.10.

Tabela 5.10: Frequências naturais da cavidade acústica semi-oval

modos	Resultados do M.E.C	ANSYS – M.E.F.
1	0	0
2	96.165 Hz	96.131 Hz
3	125.23 Hz	125.28 Hz
4	179.42 Hz	179.41 Hz
5	184.60 Hz	184.62 Hz
6	227.51 Hz	227.62 Hz
7	259.29 Hz	259.48 Hz
8	267.71 Hz	267.91 Hz

9	288.00 Hz	288.21 Hz
10	314.16 Hz	314.40 Hz
11	338.00 Hz	338.29 Hz
12	363.87 Hz	364.41 Hz
13	367.41 Hz	367.76 Hz
14	375.15 Hz	375.73 Hz
15	401.50 Hz	402.04 Hz
16	428.94 Hz	429.62 Hz
17	433.28 Hz	433.96 Hz
18	444.45 Hz	445.23 Hz
19	466.97 Hz	467.95 Hz
20	474.85 Hz	475.83 Hz

O *método da pesquisa direta* que é de fácil implementação, adicionado da identificação do zero absoluto do polinômio característico, mostrou ser mais uma alternativa na identificação das frequências naturais de uma cavidade acústica. Entretanto podem ocorrer casos em que algum ponto supostamente de mínimo local seja identificado pelo código e o mesmo não corresponder a nenhuma frequência natural da cavidade, como podemos verificar na seção seguinte.

5.6 - Limites do critério de mínimo local do valor absoluto do determinante no método da pesquisa direta.

Ao longo das seções precedentes o Método da Pesquisa Direta das raízes complexas do determinante do sistema, sintetizado a partir do Método dos Elementos de Contorno, foi utilizado para a determinação das frequências naturais das cavidades acústicas. Mostrou-se que, na prática, o mínimo local do valor absoluto do determinante deve ser empregado como o critério de obtenção das raízes do polinômio característico (frequências naturais). Na seção anterior também foi discutida a influência da discretização do contorno, ou seja, da malha utilizada bem como o efeito do passo do número de onda k , na precisão dos resultados.

Nesta seção pretende-se ilustrar uma limitação do Método de Pesquisa Direta quando se utiliza o critério do mínimo local do valor absoluto do determinante para obtenção das raízes do polinômio.

A limitação ou a dificuldade será mostrada em um exemplo numérico. Trata-se de uma cavidade retangular, bidimensional com dimensões $L_x = 1.1\text{m}$ e $L_y = 0.7\text{m}$. A velocidade da onda acústica no meio foi considerada 345 m/s . A cavidade foi discretizada com 36 elementos constantes, sendo 11 elementos no lado L_x e 07 elementos no lado L_y . Considerou-se condições de Neumann homogêneas $\partial u / \partial n = 0$, em todo o contorno $\underline{x} \in \Gamma$.

A figura 5.15 abaixo mostra o valor absoluto do $\log(\det[H(k)])$ para uma faixa de frequência de 0 a 300 Hz. Uma análise da figura mostra claramente a existência de 03 (três) mínimos locais da função.

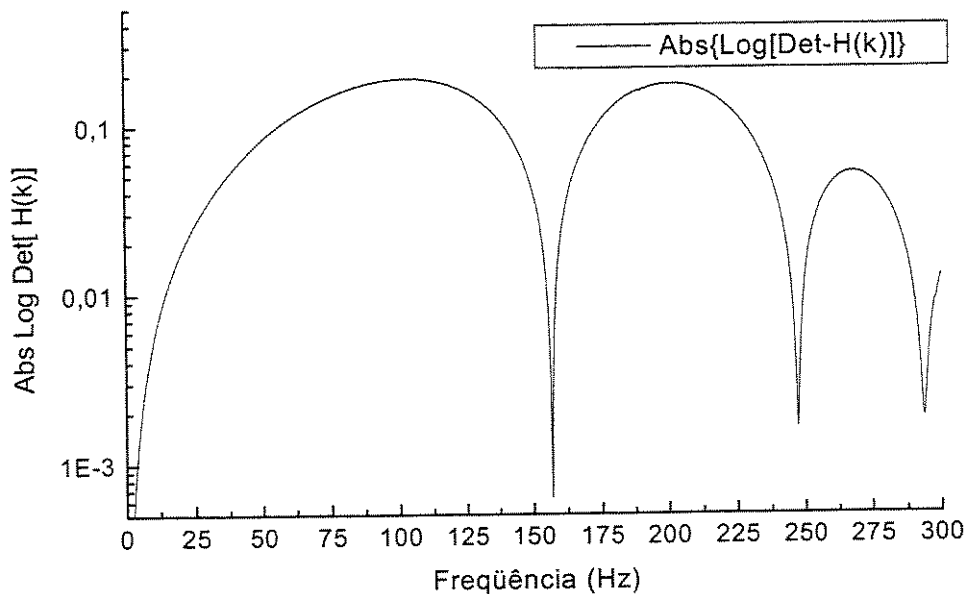


Figura 5.15: Determinante $H(k)$

A função $P(k)=Det[H(k)]$ mostrada na figura 5.15 foi submetida a um algoritmo de procura de mínimo local. O resultado pode ser verificado na Tabela 5.11. Nesta tabela estão colocados os

valores analíticos das 03 frequências naturais da cavidade, bem como as frequências correspondentes aos mínimos locais encontrados pelo algoritmo de busca mencionado.

O que salta à vista é que o algoritmo de procura do mínimo local do valor absoluto do determinante encontrou sete valores de mínimos locais, sendo que 03 deles não correspondem a frequências naturais da cavidade analisada. É necessário analisar esta situação, compreender o que acontece, sob pena do Método da Pesquisa Direta associado ao mínimo local, ser considerado não-confiável para obtenção das raízes complexas do polinômio característico, no presente caso, as frequências naturais do sistema.

Tabela 5.11: Frequências naturais e mínimos locais do $\det [H(k)]$

Mínimo	Valor do mínimo local	Frequência natural	Valor analítico
m_1	156,9	f_1	156,8
m_2	189,7	****	****
m_3	198,7	****	****
m_4	247,7	f_2	246,4
m_5	267,6	****	****
m_6	268,4	****	****
m_7	293,6	f_3	292,1

A figura 5.16 mostra as componentes real, imaginária e absoluta do polinômio característico em consideração. Pode-se verificar com clareza, que perto do valor analítico das frequências naturais ($f_1=156,8\text{Hz}$, $f_2=246,4\text{Hz}$ e $f_3=292,1\text{Hz}$) o valor absoluto do determinante (curva cheia) se aproxima de zero, caracterizando um mínimo local da função. O mesmo acontece com as partes real e imaginária do determinante. Ou seja, comprovando o que já havia sido mencionado no início do capítulo, o determinante de $H(k)$ somente é nulo, para aqueles valores em que tanto sua componente real como sua componente imaginária se anulam.

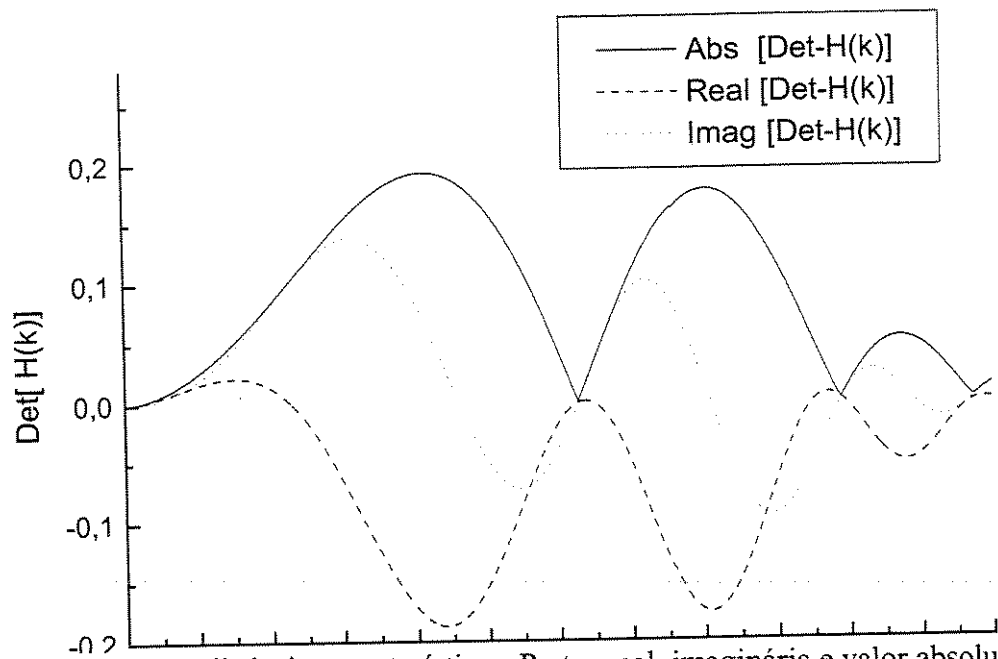


Figura 5.16: Polinômio característico - Partes real, imaginária e valor absoluto

Vamos analisar as três regiões nas quais o determinante apresenta um mínimo local e que correspondem às frequências naturais (analiticamente determinadas) do problema em questão. As figuras 5.17, 5.18 e 5.19, mostram os detalhes das componentes do determinante nas proximidades dos mínimos locais em questão. Pode-se perceber com clareza que, tanto a parte real, ($\text{Real Det}[H(k)]$), quanto a imaginária, ($\text{Imag Det}[H(k)]$), do determinante se aproximam ou cruzam o eixo das abscissas e que o valor absoluto, ($\text{Abs Det}[H(k)]$), atinge um ponto de mínimo.

Dois detalhes merecem atenção, pois eles serão utilizados nas seções seguintes. O primeiro detalhe, diz respeito ao fato que as raízes da parte real e imaginária do polinômio não se anulam exatamente na mesma frequência, como mostrado nas figuras 5.17, 5.18 e 5.19. Mais adiante, tentar-se-á mostrar que esta diferença no valor das raízes da parte real e imaginária tem origem puramente numérica e está fortemente associada tanto à discretização ou malha utilizada para analisar o problema, como também o passo de frequência Δk , utilizado na análise. Cumpre ressaltar que é exatamente esta diferença entre o "zero" da parte real e da parte imaginária que aponta para a utilização do mínimo local como critério para determinação das raízes da equação característica do sistema.

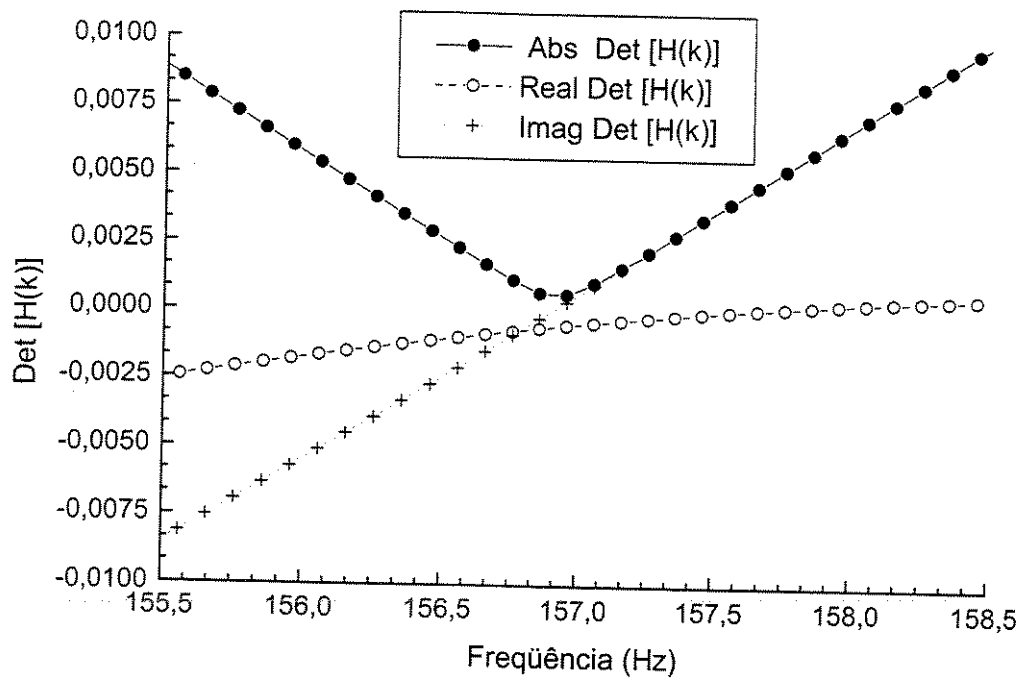


Figura 5.17: Detalhe do polinômio característico próximo à primeira frequência natural $f_1=156,8\text{Hz}$

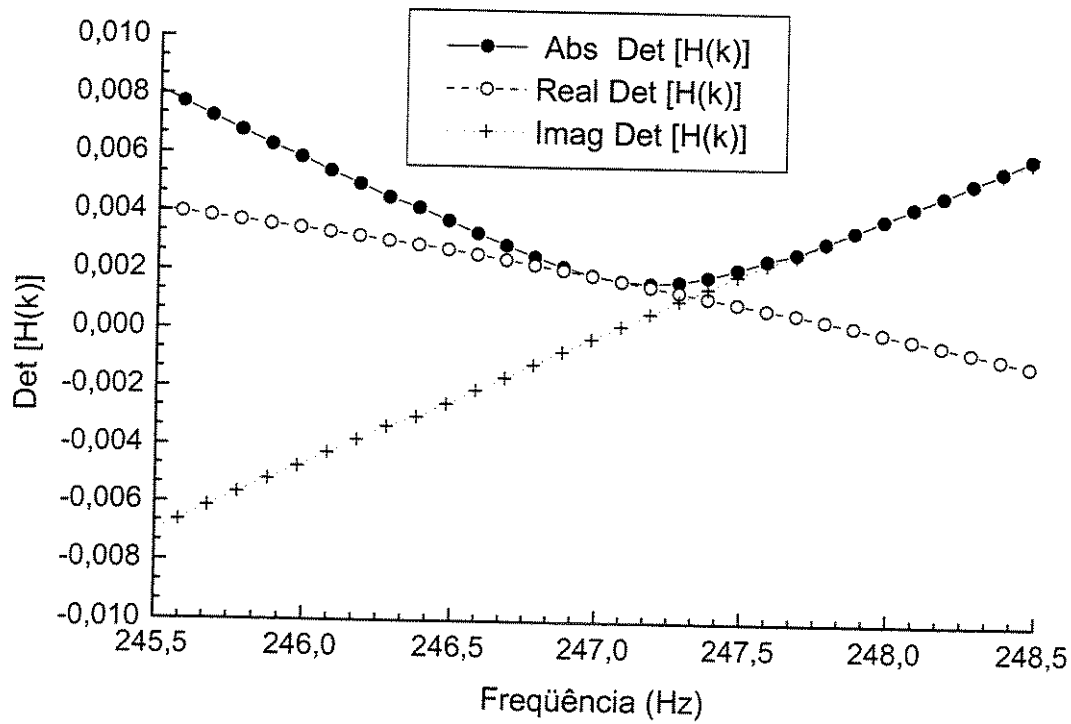


Figura 5.18: Detalhe do polinômio característico próximo à segunda frequência natural $f_2=246,4\text{Hz}$

O segundo aspecto a ser ressaltado, pode ser encontrado na figura 5.19, mais particularmente na análise do comportamento da curva real do polinômio característico. Verifica-se que neste caso que o polinômio não cruza o eixo das abscissas, mas tão somente tende a tangenciá-lo. Neste caso a raiz da parte real deveria ser o ponto tangente ao eixo das abscissas. Porém, como também pode ser visto na figura 5.19, a parte real do polinômio, não chega realmente a tangenciar o eixo das abscissas. Ele se aproxima, mas não o tangencia. Na prática então, o valor da frequência em que a função tangencia o eixo "x" é substituído por um máximo local. Vamos, mais adiante, mostrar que, a distância entre o máximo local e o eixo das abscissas é, também uma consequência ou função da qualidade da aproximação numérica que se realiza na análise. Mostra-se que, à medida que a malha e passo de avanço na frequência Δk são refinados, diminui a distância entre o máximo local e a tangente (ideal) ao eixo das abscissas.

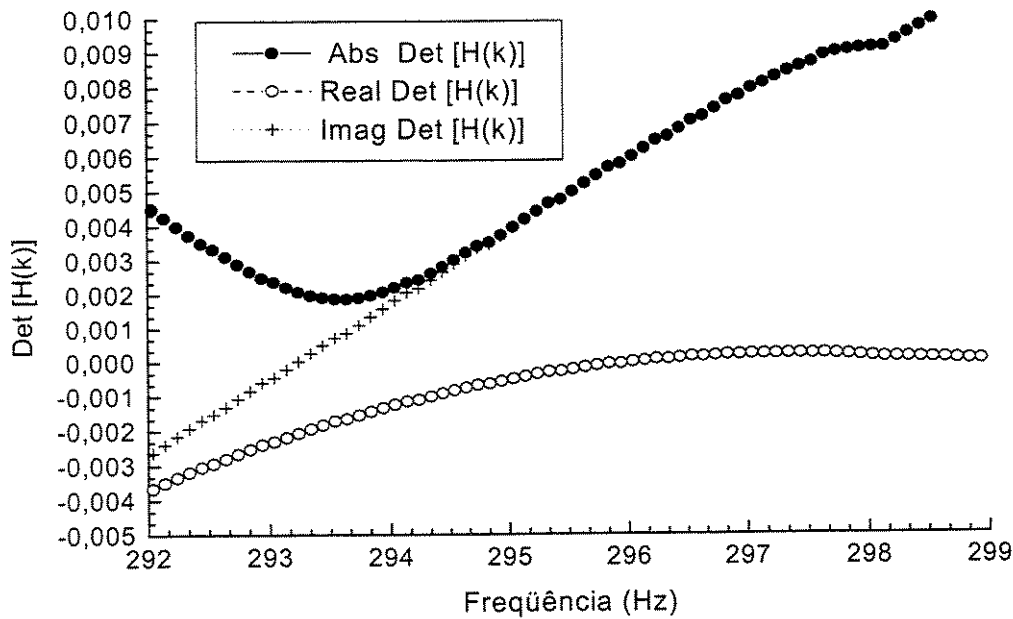


Figura 5.19: Detalhe do polinômio característico próximo à terceira frequência natural $f_3=292,1\text{Hz}$

Nos parágrafos precedentes, foi mostrado o comportamento das partes real e imaginária do polinômio característico nas proximidades de suas raízes, ou seja, na proximidade das frequências naturais da cavidade acústica.

Resta, entretanto, entender os mínimos locais do valor absoluto do determinante característico, que foram obtidos pelo algoritmo de procura de mínimos e que foram reportados da tabela 5.12, mínimos estes que não configuravam uma raiz do polinômio. Para tanto, far-se-á uma investigação numérica do determinante nas frequências próximas aos valores dos pontos de mínimo m_2 , m_3 , m_5 e m_6 , fornecidos na tabela 5.11.

A figura 5.20 mostra as três parcelas numericamente determinadas do polinômio característico próximo à frequência $m_2=189,7\text{Hz}$. Pode-se perceber claramente que nem a parte real e tampouco a parte imaginária do polinômio se aproxima do eixo das abscissas ou cruza o mesmo. Não há indício de "zero" tanto da parte real como da parte imaginária. Para se entender o mínimo local m_2 é necessário observar com mais detalhe o valor absoluto do determinante (ou polinômio característico) tal como mostrado na figura 5.21. Deve-se observar que a faixa de frequência das figuras 5.20 e 5.21 é a mesma. Na figura 5.21, entretanto, efetuou-se um "zoom", uma análise mais ampliada dos valores do módulo do determinante.

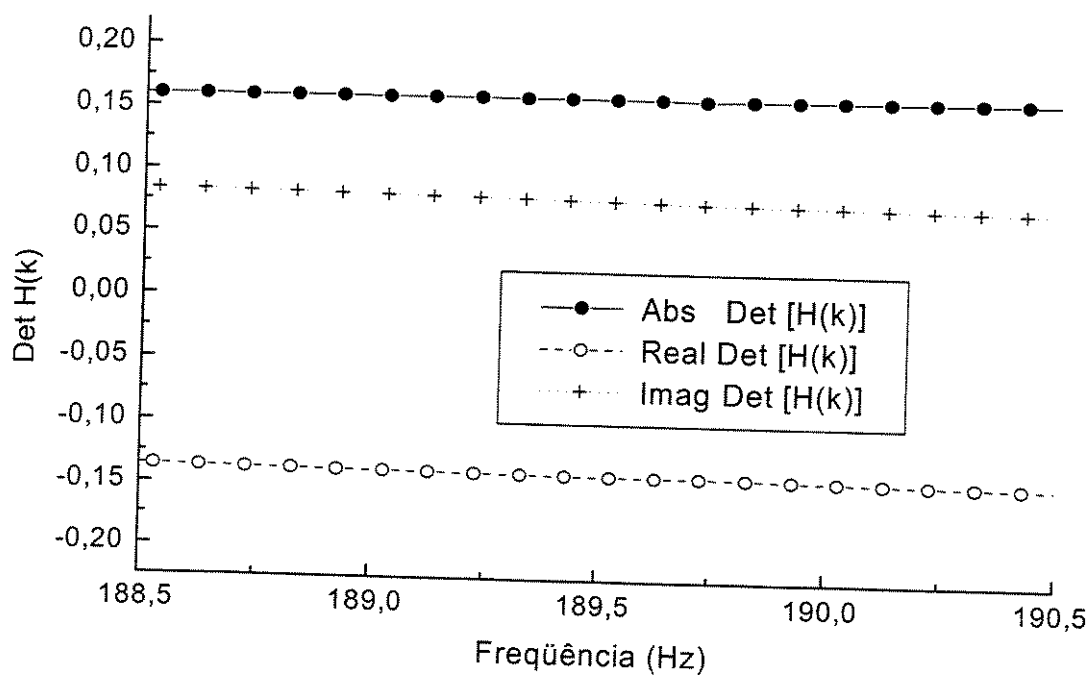


Figura 5.20: Detalhe do polinômio característico próximo ao segundo mínimo local $m_2=189,7\text{Hz}$



Figura 5.21: Detalhe do valor absoluto próximo ao segundo mínimo local $m_2=189,7\text{Hz}$

Nesta figura, agora, é possível perceber uma pequena oscilação no valor absoluto do determinante, caracterizando um mínimo local. Este mínimo local é proveniente de imprecisão numérica na determinação do determinante a partir de uma matriz, no caso, com dimensões 36×36 . Este mínimo local não está ligado a uma raiz da parte real ou mesmo imaginária do polinômio característico. É tão somente uma "flutuação", ou "oscilação numérica" na determinação do valor do determinante da matriz H do sistema originário do Método dos Elementos de Contorno. A análise numérica realizada ao longo dos estudos que redundaram no presente trabalho, corrobora a idéia que certos mínimos locais são somente originários de pequenas oscilações no valor numérico do determinante.

O mesmo padrão de comportamento pode ser encontrado para os mínimos locais m_3 , m_5 e m_6 , como pode ser verificado nas figuras 5.22 a 5.25.

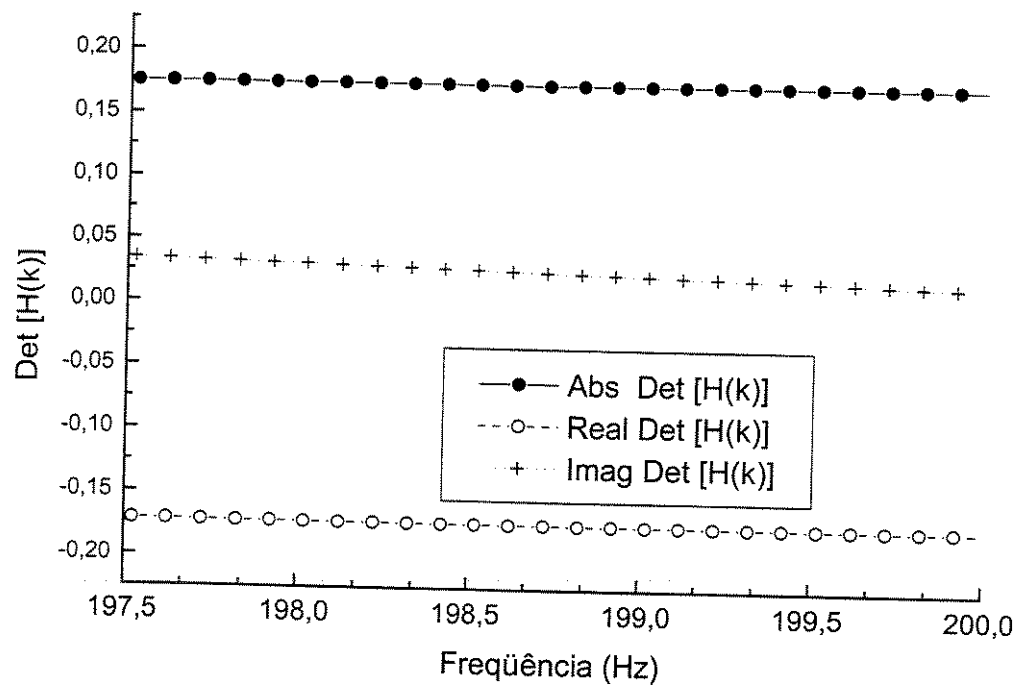


Figura 5.22: Detalhe do polinômio característico próximo ao terceiro mínimo local $m_3=198,7\text{Hz}$

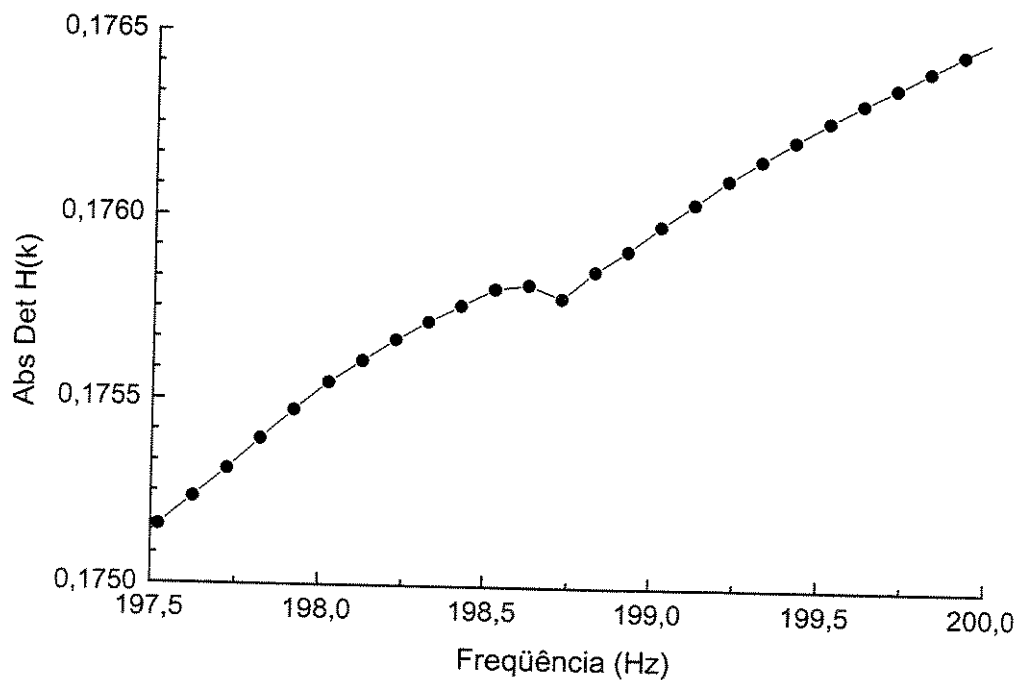


Figura 5.23: Detalhe do valor absoluto polinômio característico próximo ao terceiro mínimo local $m_3=198,7\text{Hz}$

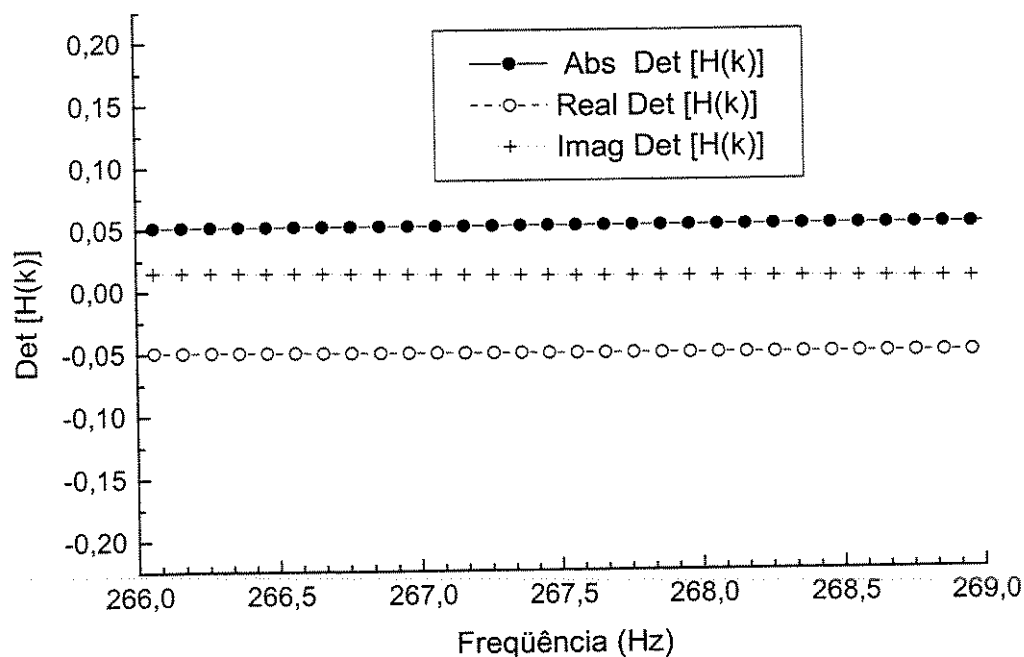


Figura 5.24: Detalhe do polinômio característico próximo aos quinto e sexto mínimos locais $m_5=267,6\text{Hz}$ e $m_6=268,4\text{Hz}$

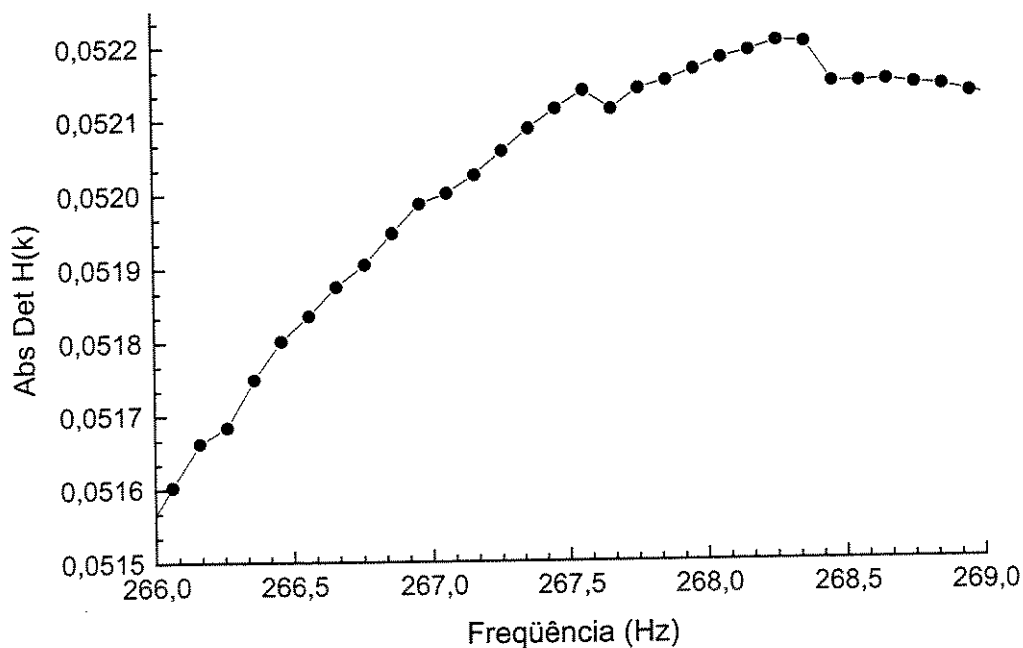


Figura 5.25: Detalhe do valor absoluto polinômio característico próximo aos quinto e sexto mínimos locais $m_5=267,6\text{Hz}$ e $m_6=268,4\text{Hz}$

A questão que se coloca agora é a seguinte: existe a possibilidade de se criar um critério para analisar os mínimos locais dos determinantes e/ou polinômios característicos de forma a se poder separar aqueles mínimos que são raízes ou frequências naturais, daqueles que representam oscilações de caráter numérico? É a este problema que será dedicada a próxima seção deste trabalho.

5.7 Critério de análise na identificação dos pontos de mínimos locais associados ao método da pesquisa direta.

A fim de estabelecer um critério de identificação do ponto de mínimo local, que corresponde à frequência natural da cavidade acústica, utilizando dos zeros do polinômio característico $P(k)$ definido em (5.16), vamos retornar à análise vista nas figuras 5.8a-d e 5.9a-d da seção 5.5.

Na figura 5.8a-d, pode ser observado que existe o zero da parte real (ZR) e o da parte imaginária (ZI) e portanto estão localizados no eixo das abscissas. Ainda em relação a essas figuras 5.8a-d, notamos que na medida em que aumentamos a discretização no contorno da cavidade acústica, a distância entre ZR e ZI diminui, ou seja $ZR \rightarrow ZI$ (ver tabela 5.1), ao mesmo tempo sobre o eixo das ordenadas $|P(k)| \rightarrow 0$, como também é mostrado, comparando as figuras 5.8a-d.

Analogamente nas figuras 5.9a-d, também foi analisado o comportamento da distância entre ZR e ZI, só que nesse caso o zero imaginário (ZI) foi considerado como sendo o ponto de máximo local pois a curva da parte imaginária apenas aproxima-se do eixo das abscissas, de qualquer forma, mais uma vez notamos que na medida em que aumentamos a discretização no contorno da cavidade acústica $ZR \rightarrow ZI$ (ver tabela 5.3), enquanto $|P(k)| \rightarrow 0$ no eixo das ordenadas.

Em cada um dos casos foi identificado o ponto de mínimo local, quando da aproximação entre ZR e ZI, os quais correspondem a frequências naturais da cavidade acústica em estudo, já visto nas figuras 5.8 e 5.9. Tal procedimento, foi repetido nas figuras 5.11a-i, onde identificamos

as frequências naturais da cavidade acústica da figura 5.10, o que nos levou a sugerir o seguinte critério de identificação de pontos de mínimos locais, para identificação de frequências naturais da cavidade:

- a) Utilizando, da formulação do M.E.C, gerar o polinômio $P(k)$.
- b) Usar de um algoritmo que identifique pontos de mínimos locais de $|P(k)|$.
- c) Para cada ponto de mínimo local fornecido pelo algoritmo, identificar ZR e ZI.
- d) Analisar se para discretizações maiores, $|P(k)| \rightarrow 0$, na medida em que $ZR \rightarrow ZI$.
- e) Se o item d), ocorre então k é um ponto de mínimo local.

Essa sugestão de critério na identificação de ponto de mínimo local é um auxílio para a estratégia do Método da Pesquisa Direta, na identificação das frequências naturais de uma cavidade acústica.

5.8 – As frequências naturais da cavidade acústica, e as funções de respostas e frequências (FRF'S).

Uma outra alternativa, para identificar as frequências naturais em um domínio acústico Ω , bidimensional e limitado, é por meio, da identificação de pontos de ressonância do domínio acústico. O uso da formulação do M.E.C, é através das Funções de Resposta e Frequências (FRF's), o que exige, que seja conhecido potencial acústico em pelo menos um ponto interno ao domínio.

Para isso, vamos considerar uma força de intensidade b_i , aplicada sobre o ponto x_b , interno ao domínio Ω , como mostra a figura 5.26.

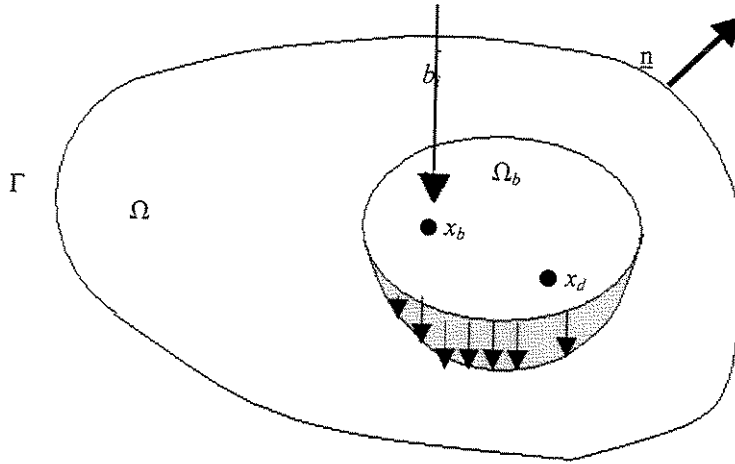


Figura 5.26: Domínio limitado e a força incidente

Devido a força de intensidade b_i , sobre o ponto x_b , uma integral de volume deve ser considerada e portanto podemos reescrever a equação integral de contorno (5.6) para o domínio Ω da figura 5.26, por:

$$c(x_d) u(x_d, k) = \int_{\Gamma} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(x_d, k)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(x_d, k) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega(x_b)} b u^*(x, x_d, k) d\Omega \quad (5.19)$$

Introduzindo a condição homogênea de contorno, dada por Neumann $\frac{\partial u(\Gamma)}{\partial n} = 0$, em todo o contorno Γ domínio Ω , e considerando que a integral de volume em (5.19), é dada por (5.7), reescrevemos (5.19) na forma discretizada:

$$c(x_d) u_i(x_d, k) + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u(x_d, k) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j = b_i u^*(x, x_d, k) \quad (5.20)$$

De modo análogo, em que obtivemos, o sistema de equações algébricas não lineares (5.13) a partir de (5.9), podemos escrevê-lo, também a partir de (5.20), por:

$$[H(k)]\{u(x_d)\} = \{b_i\} \quad (5.21)$$

A solução do sistema (5.21), permite determinar o potencial acústico u , em todo o contorno Γ do domínio Ω .

Conhecido o potencial acústico em todo o contorno Γ do domínio Ω , podemos avaliar o potencial acústico em um ponto x_d interno ao domínio, através de (5.20), para $c(x_d) = 1$, conforme previsto em (4.2), ou seja:

$$u(x_d, k) + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u(x_d, k) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j = b_i u^*(x, x_d, k) \quad (5.22)$$

Fixando o ponto interno x_d , podemos por meio de (5.22), avaliar o potencial acústico $u(x_d, k)$ para diferentes número de ondas k .

A função determinada por (5.22) é conhecida como uma função de respostas e frequências [Syguliski-1994].

A identificação das frequências naturais do domínio acústico Ω , usando da formulação do M.E.C, é feita sobre os picos determinados por (5.22). Esses picos também representam os pontos de máximo locais da função.

Assim um procedimento para obtermos as frequências naturais de um domínio acústico, usando da estratégia das FRF's, associado à formulação do M.E.C, é descrito a seguir:

i) A partir do incremento Δ_f , tomamos o número de onda $k_i = k_0 + i \Delta_k$, $i = 1, \dots, n$, onde k_0 é um valor conhecido e $\Delta_k = 2\pi \frac{\Delta_f}{c_0}$.

- ii) Fixado o número de onda $k = k_i$, por meio de (5.21) determinamos o potencial acústico $u(x)$ e sua derivada $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$, para todo $x \in \Gamma$, devido à força incidente aplicada em x_b .
- iii) Usando a equação (5.22), para $c = 1$, e x_d um ponto interno ao domínio determinamos $u(x_d)$.
- iv) Repetindo os itens ii) e iii), um conjunto de FRF's para $u(x_d)$ é formado, devido ao ponto fonte x_b .
- v) Cada um dos pontos de Máximos Locais determinados por meio do valor absoluto do conjunto das FRF's dada em iv), é candidato a uma frequência natural da cavidade acústica.

O item v é explicado, pelo fato de que as frequências naturais de uma cavidade acústica são também as frequências de ressonância.

Embora essa também seja uma estratégia de fácil implementação, a extração das frequências naturais, nem sempre são facilmente identificados, como podemos verificar, nas implementações que seguem.

5.8.1-A obtenção das frequências naturais através das FRF'S e implementações numéricas

Com o intuito de extrair as frequências naturais de uma cavidade acústica, por meio das FRF'S, fizemos uma implementação das equações (5.21) e (5.22). Ela será utilizada considerando a cavidade acústica retangular de dimensões L_x e L_y , dadas respectivamente por 2.3 m e 0.9 m. A condição homogênea de contorno é dada por Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, em todo o contorno, como mostra a figura 5.27.

Ainda mostramos no interior dessa cavidade acústica um conjunto de 12 pontos, distribuídos aleatoriamente, representando a localização do ponto x_b (força incidente b_i). Para cada ponto fonte x_b , vamos considerar um ponto resposta x_d , tal que $|x_b - x_d| = \zeta$ e $\zeta > 0$. No caso deste trabalho tomamos $\zeta = 5 \cdot 10^{-2}$

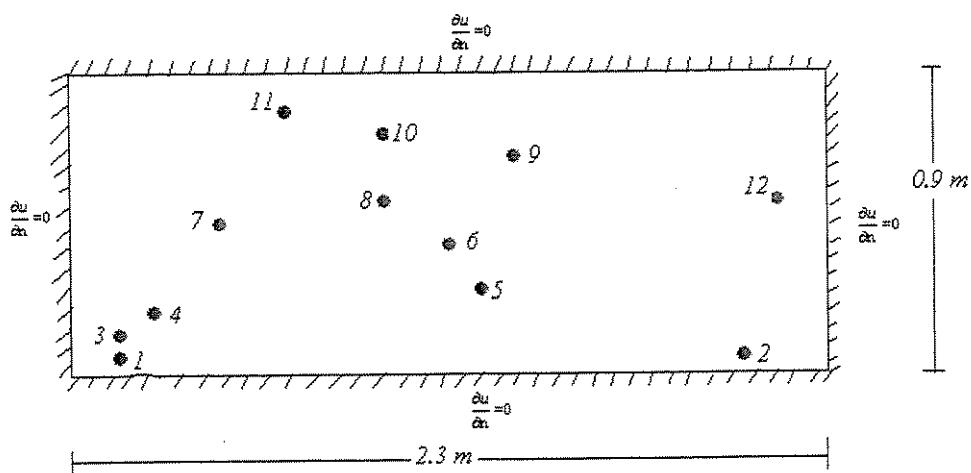


Figura 5.27: Pontos fonte interior a cavidade

Considerando na cavidade acústica da figura 5.27 o ponto fonte x_b localizado em 11 e fixando uma discretização no seu contorno em 192 elementos, para o número de onda k , percorrendo uma faixa de 0.01 à 1000Hz, segundo o incremento $\Delta_f = 0.00182121$ Hz, submetemos a implementação das equações (5.21) e (5.22) a um algoritmo na procura de pontos de máximos locais. Esses pontos de máximos locais são mostrados na figura 5.28.

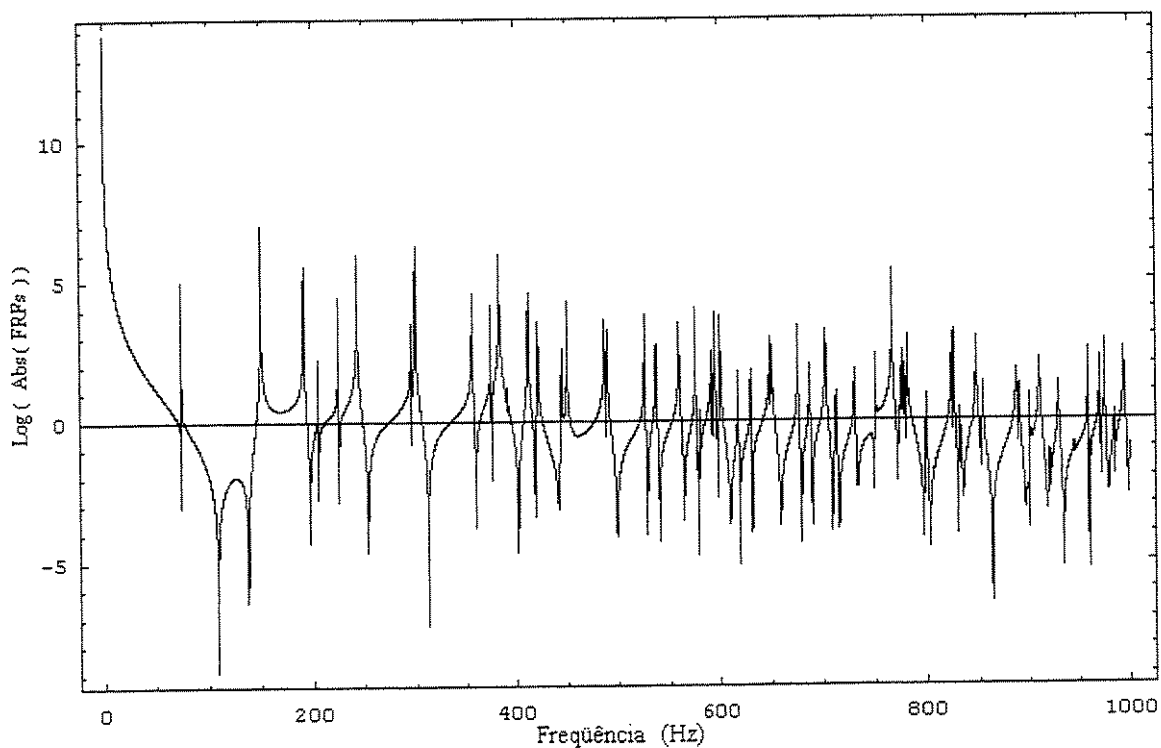


Figura 5.28: FRF's da cavidade acústica.

Comparando as frequências naturais dadas analiticamente por (5.1), com os pontos de máximo locais, obtidos numericamente pelo MEC, constatamos, através de seus valores numéricos, que os pontos de máximo locais determinados pelas frequências: 126.5 Hz, 745.8 e 898.2 Hz, não correspondem a nenhuma frequência natural da cavidade em estudo.

Constatado esse fato, uma investigação no sentido de identificar os picos sobre a curva das FRF's, que correspondem as frequências naturais da cavidade acústica, passou a ser nosso objetivo.

A investigação no sentido da identificação dessas frequências naturais, por meio dos pontos de máximo locais fornecidos pela FRF, é retomada e então passamos a analisar os seguintes aspectos:

- I) O efeito da discretização do contorno da cavidade acústica.
- II) O do tamanho do incremento Δ_f .
- III) A localização do ponto de excitação no interior da cavidade acústica.

Apenas para uma melhor visualização dos resultados e sem perda de generalidade desta análise, vamos considerar, a faixa de frequências compreendida entre 870 Hz e 910 Hz, na qual temos certamente quatro pontos de máximos locais que correspondem

Tabela 5.12: Pontos de Máximo Locais

	Pontos de Máximo Locais	Frequências Naturais
1	886.8	886.7
2	889.0	888.9
3	898.2 Hz	-----
4	900.1	900.0
5	909.8	909.7

às frequências naturais da cavidade acústica em estudo (ver tabela 5.7), e pelo menos um ponto de máximo local, a saber, 898.2 Hz, que não corresponde a frequência natural da cavidade acústica (Tabela 5.12).

Vamos considerar para a análise I, diferentes discretizações sobre o contorno variável, isto é tomamos malha-M1, M2 e M3, definidas na tabela 5.4, fixando o passo $\Delta_f = \Delta_B$ como o mostrado na tabelas 5.5 e o ponto fonte localizado na posição 11 da figura 5.27. Num gráfico do $\text{Log}(\text{abs}(\text{FRF}'S))$ em função da faixa de frequências como é mostrado na figura 5.29, podemos verificar nitidamente que a discretização sobre o contorno da cavidade tem grande influência na identificação do total de pontos de máximo locais, sem a garantia de que os mesmos corresponda a uma frequência natural da cavidade acústica, isto é, não representam ressonância na curva das FRF's.

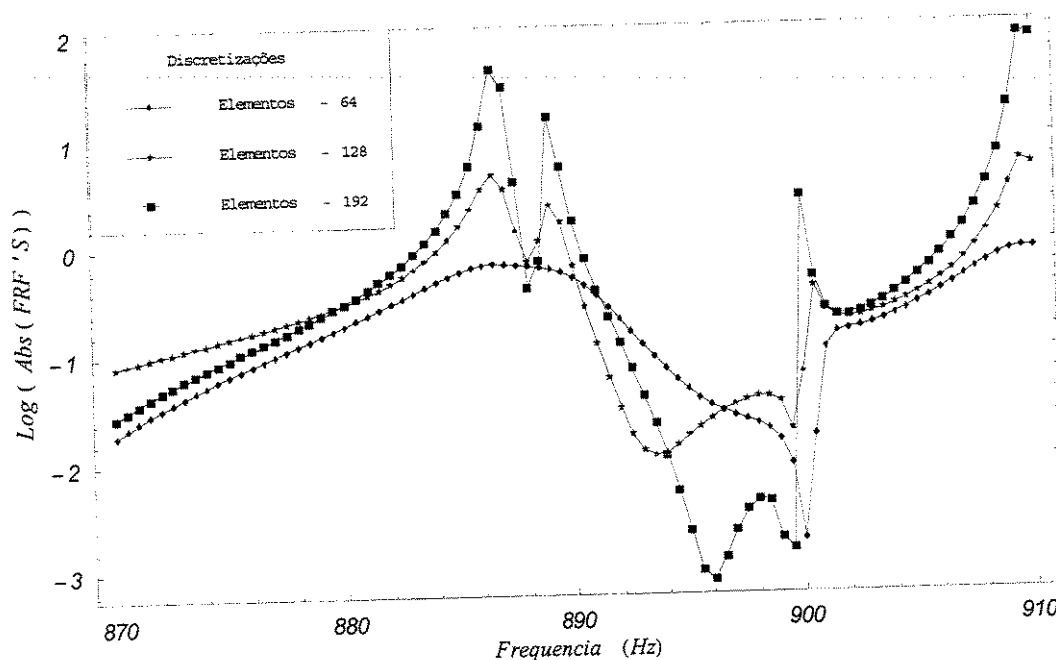


Figura 5.29- Diferentes Discretizações

De fato, para a malha-M1, apenas um ponto de máximo local é identificado na curva da FRF correspondente. Enquanto que para as malhas -M2 e M3, cinco pontos de máximos locais são identificados (ver tabela 5.12), nas curvas da FRF correspondentes. Quatro dos quais tendem à picos sobre as curvas, esses picos ficam melhores representados para a FRF, da malha-M3, o outro ponto de máximo local, correspondendo a frequência de 898.2 Hz, não define ainda um possível pico, dificultando assim a conclusão quanto a existência de uma frequência da cavidade

acústica, implicando assim numa possível falha da estratégia. Constatamos ainda que para maiores discretizações do contorno da cavidade acústica em estudo o fato se repete.

Para a análise II, quando Fixamos a discretização (malha-M3), e o ponto fonte (na posição 11 da figura 4.27), e variamos o incremento, conforme os dados da tabela 5.5, fazendo $\Delta f = \Delta f_1$, Δf_2 e Δf_3 , podemos observar por meio da figura 5.30, que fixado convenientemente o tamanho do passo, pouca importância ele tem na identificação dos pontos de máximos locais da cavidade.

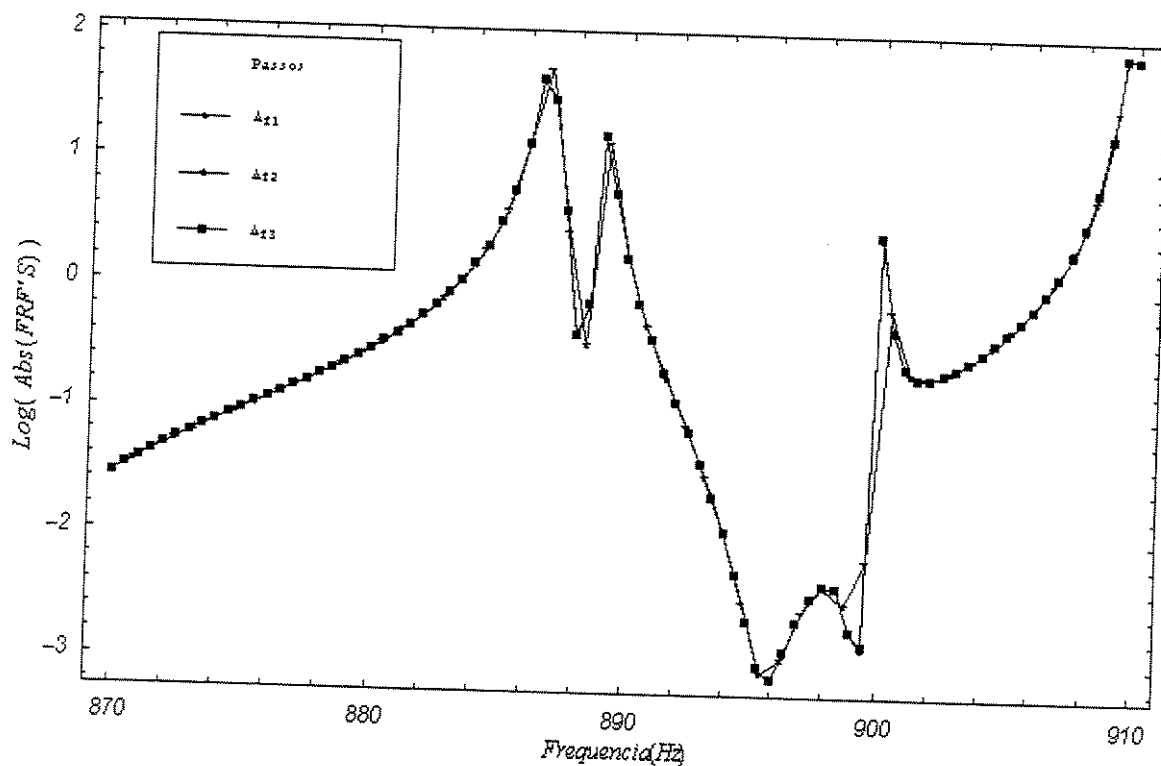


Figura 5.30: Pontos de máximos locais devido ao incremento.

Finalmente, para a análise III, fixamos a discretização, dada pela malha-M3, o incremento Δf na faixa de frequências e consideramos os pontos fontes nas localizações 6, 7, e 11 da figura 5.27, e como o esperado, para cada localização do ponto fonte, uma nova curva de FRF'S é determinada como mostra a figura 5.31.

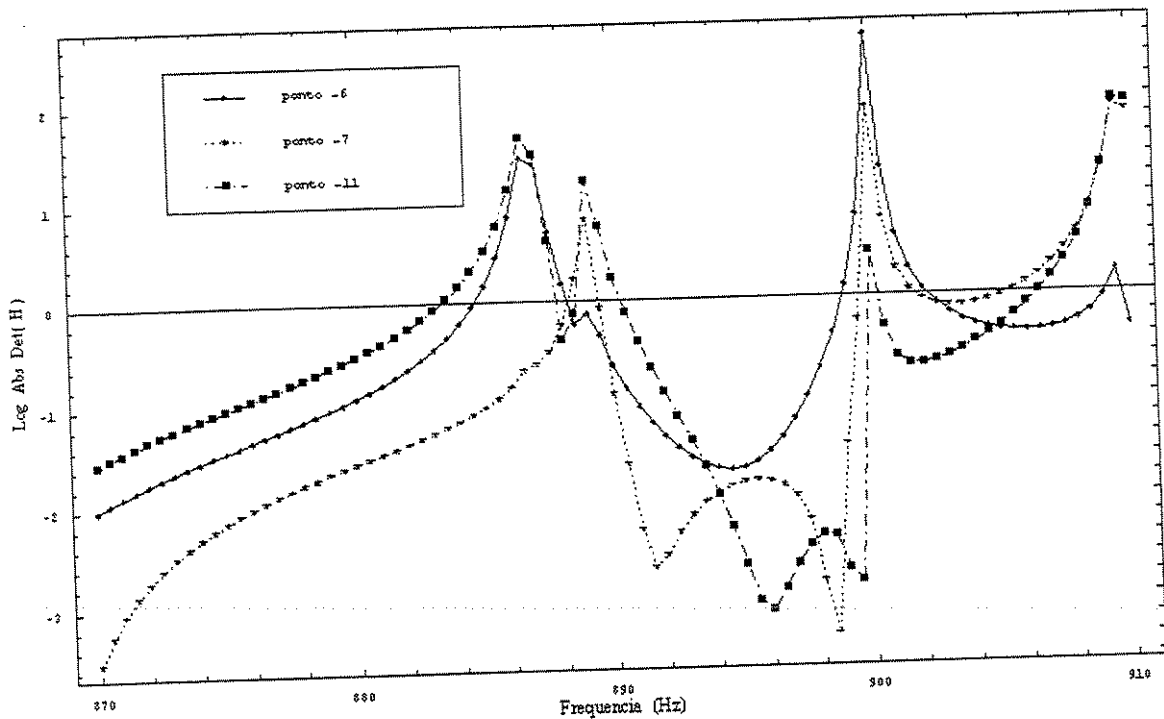


Figura 5.31: Pontos de máximos locais devido a localização do ponto fontes.

Nesse caso, o gráfico da curva do $\log(\text{Abs}(\text{FRF's}))$ em função das frequências, para cada uma das localizações do ponto fonte é mostrado na figura 5.31, onde verificamos uma característica comum, entre os pontos de máximos locais identificados nas diferentes FRF's. Pois aqueles pontos de máximo locais que tendem a picos sobre as curvas, são originários das mesmas frequências, não importando a localização do ponto fonte (ponto de excitação), enquanto os outros pontos de máximo locais que não tendem a picos sobre a curva das FRF'S, não são identificados pela mesma frequência, quando modificamos as localizações desses pontos sobre a cavidade acústica.

Comparando os valores numéricos das frequências que originaram os quatro picos sobre as diferentes curvas da figura 5.31, com as frequências naturais dadas por (5.1) na faixa considerada, podemos concluir que os picos sobre as curvas das FRF'S, originados pelas mesmas frequências correspondem as frequências naturais da cavidade acústica em estudo.

Entretanto, pode ocorrer, que devido às localizações dos pontos fontes o número de pontos de máximo locais identificados pelas FRF'S, não serem suficientes para identificar o total de frequências naturais, da cavidade acústica na faixa de frequências em estudo.

Por exemplo na figura 5.32., mostramos os picos sobre a curva das FRF'S, para os pontos fontes, localizadas nas posições, 4,10 e 12 da cavidade acústica.(figura 5.27). Pode se observar que no máximo 3 picos sobre as curvas foram apresentados, para as 4 frequências naturais existentes.

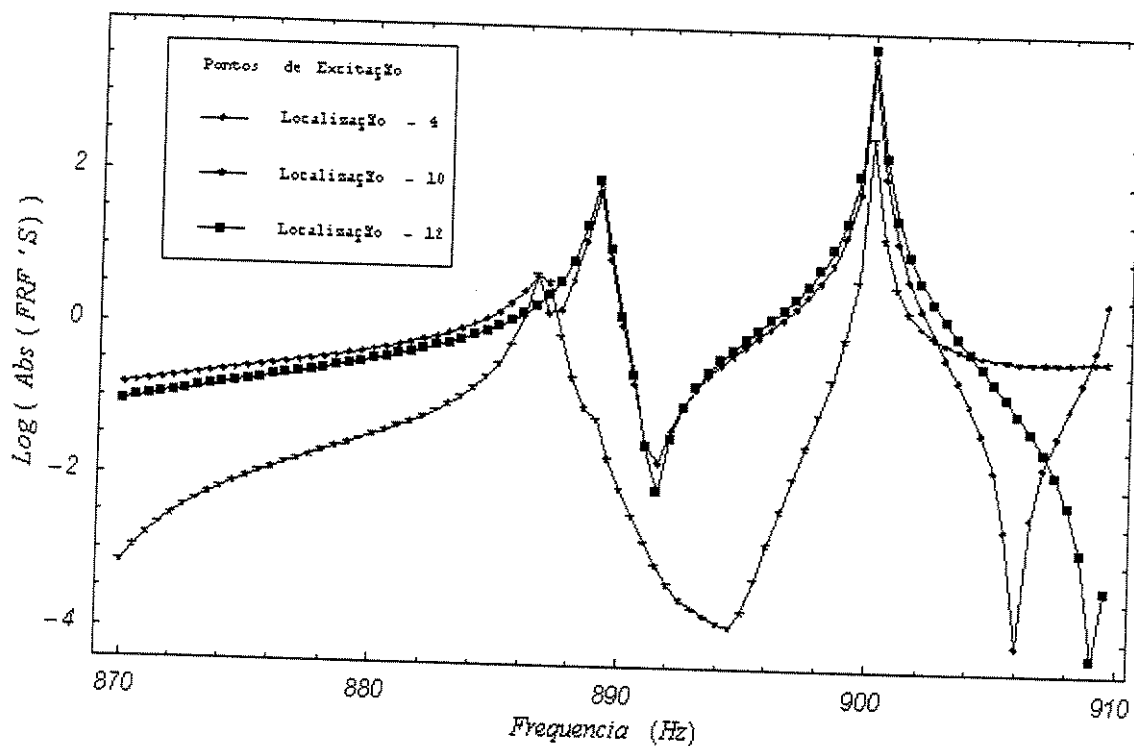


Figura 5.32: Picos na curva da FRF

Este fato pode ser contornado, por pelo menos, duas diferentes maneiras:

- i) Conservando as posições dos pontos de excitação e aumentando a discretização sobre o contorno da cavidade, o que levaria a um aumento considerável do custo computacional, mas certamente teríamos identificado todos as frequências naturais da cavidade acústica, além dos picos correspondentes aos modos de vibrar ficarem, melhor definidos como mostra a figura 5.33.

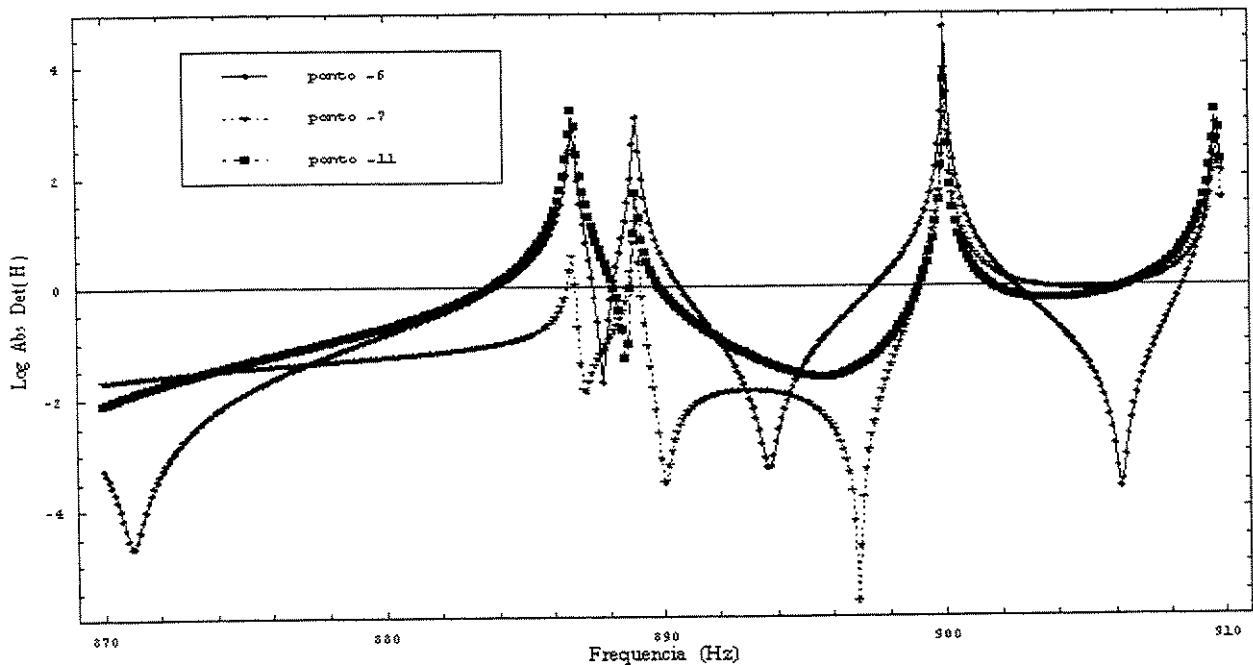


Figura 5.33: Picos nas Curvas das FRF com maior discretização

ii) Conservando a discretização sobre o contorno da cavidade e o passo sobre a faixa de frequências mas aumentando o número de pontos fontes no interior da cavidade acústica, o que certamente garantirá um custo computacional menor que o do caso i).

Evidentemente assegurar um número mínimo de pontos fontes no interior da cavidade acústica que garanta todos os possíveis picos sobre as curvas das FRF'S, correspondentes ao total de frequências naturais, ainda não é possível. No entanto, no caso de nosso exemplo, tomamos o conjunto de pontos fontes localizados nas posições 6, 7 e 11. e identificamos os quatro picos da faixa de frequência, com as características como o esperado, visto na figura 5.33.

5.8.2 - A família de frf's e as frequências naturais da cavidade retangular.

De modo geral, muitas são as dificuldades na identificação das frequências naturais de uma cavidade acústica. Entretanto, devido aos fatos descritos na seção 5.8.1, parece-nos conveniente, a identificação das frequências naturais da cavidade acústica, através dos picos na curva das FRF'S, quando sobrepomos várias curvas de FRF'S, geradas por um conjunto de pontos fontes,

localizados no interior da cavidade acústica. A esse conjunto de curvas de FRF'S sobrepostas, denominaremos de: família de curvas das frf's.

Retornando ao exemplo da cavidade acústica retangular (figura 5.27), vamos considerar a obtenção das freqüências naturais, usando de família de FRF'S. Para isso consideraremos a família de FRF's, gerada pelo conjunto de 12 pontos distribuídos no interior da cavidade acústica acima mencionada para uma discretização do contorno da cavidade de 192 elementos (malha-M3), e o incremento $\Delta_f = 0.001821212$, ($\Delta_f = \Delta_{f3}$). Na figura 5.34, mostramos os 18 primeiros picos na família de FRF's, que correspondem as 18 freqüências naturais analíticas da cavidade em estudo, para a faixa entre 0.01 e 500Hz.

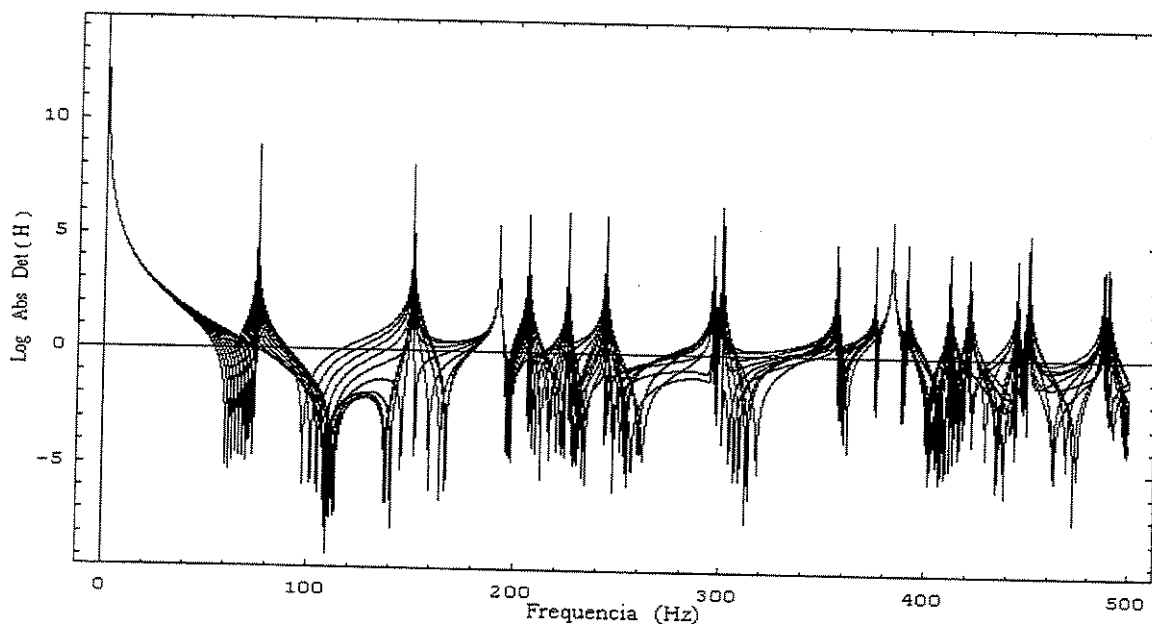


Figura 5.34: Família de FRF's cavidade Acústica Retangular

Como, cada um dos pontos fontes, localizados no interior da cavidade acústica, geram curvas distintas de FRF's, apresentados na tabela 5.13, o total de pontos de máximos locais determinado por cada um deles considerando a faixa de freqüências entre 0.01 e 1000Hz, para a malha M3 e o incremento $\Delta_f = \Delta_{f3}$.

Tabela 5.13: Total de Pontos de máximo locais para cada ponto fonte

Distribuição dos pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Total de máximos locais	64	65	65	62	65	64	66	66	65	63	67	35
Total de frequências naturais	64	62	64	61	64	64	64	64	63	62	64	32

Nas figuras de 5.35a-g são visualizados todos os picos, sobre as curvas da família de FRF's, que correspondem as frequências naturais da cavidade acústica (figura 5.27) para a faixa de 0 a 1000Hz, além dos pontos de máximos locais que não constituem um pico sobre a curva das FRF's

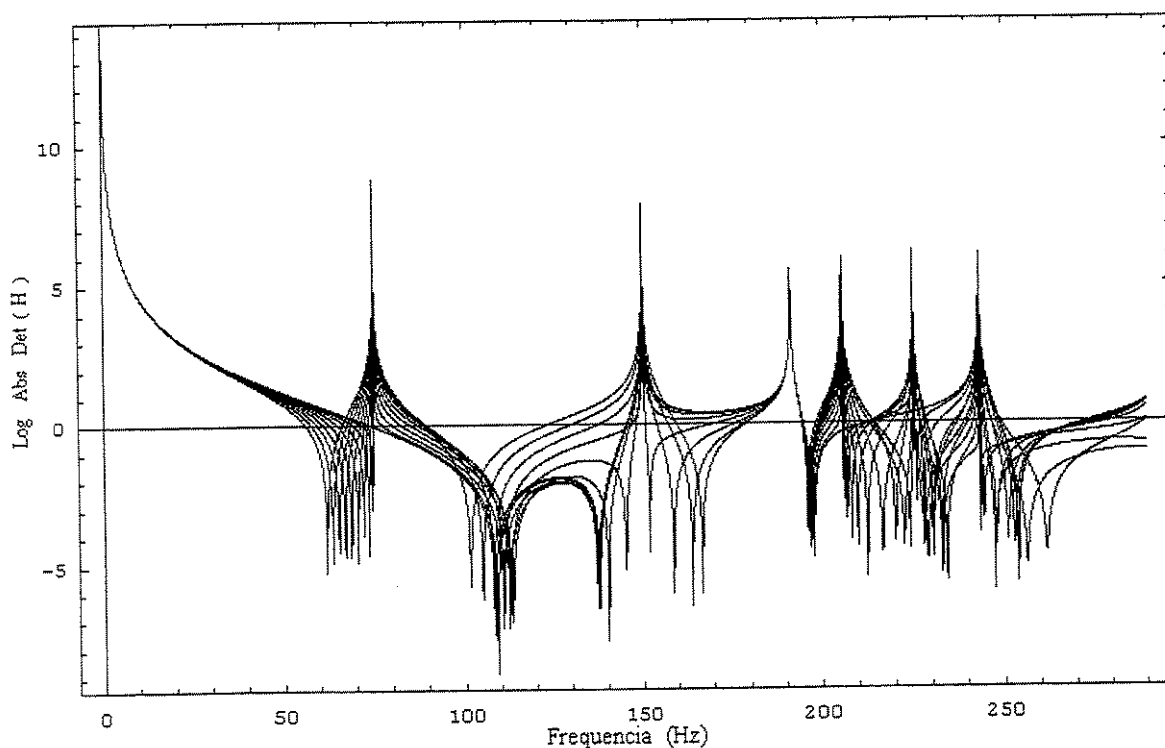


Figura 5.35a

Na figura 4.35a algumas observações quanto as curvas das FRF's que poderem ser observadas nas figuras 4.35b-g.

Existem de fato pontos de máximos locais que não representam picos sobre as curvas da FRF's.

Algumas das curvas das FRF'S, não representam o total de pontos de máximo local, que permite identificar as frequências naturais da cavidade acústica.

Todos os picos definidos sobre a família de curvas das FRF'S, correspondem à frequência natural da cavidade acústica.

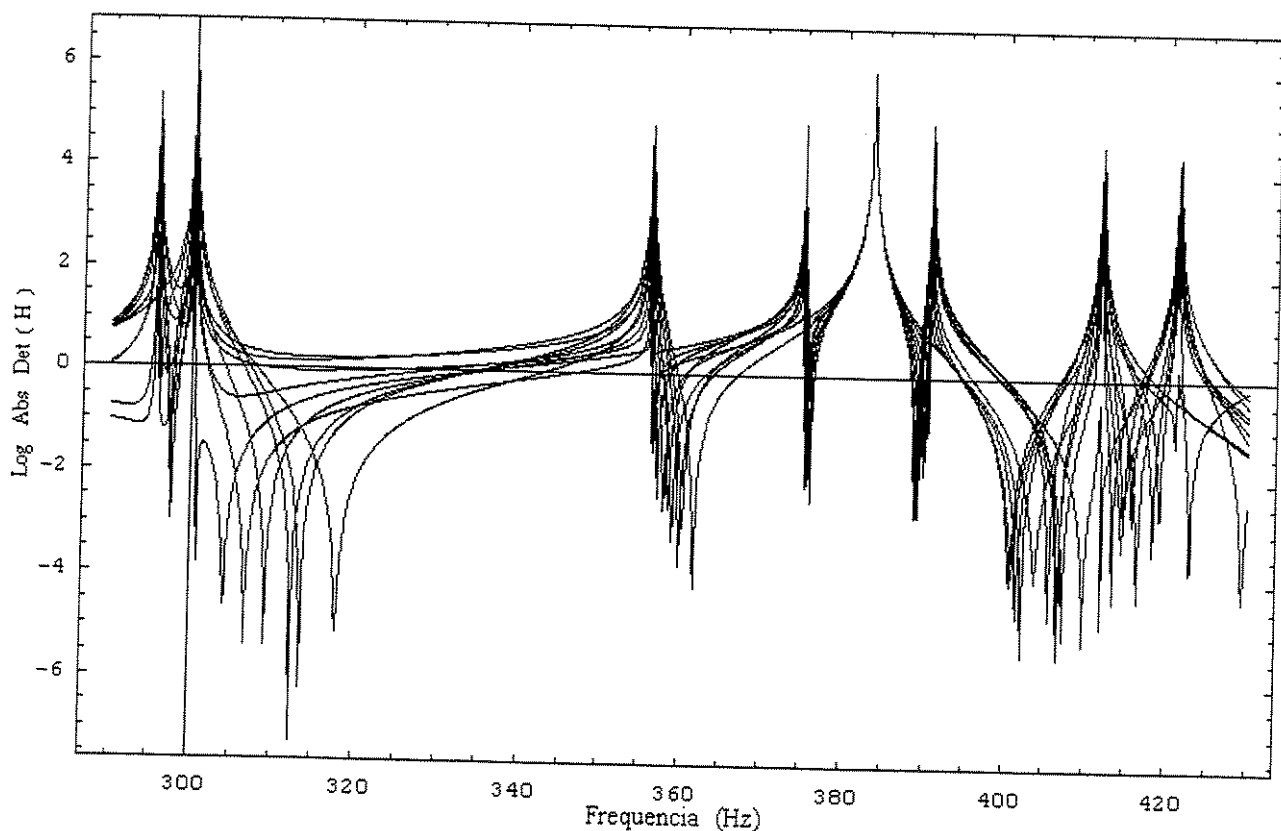


Figura 5.35b

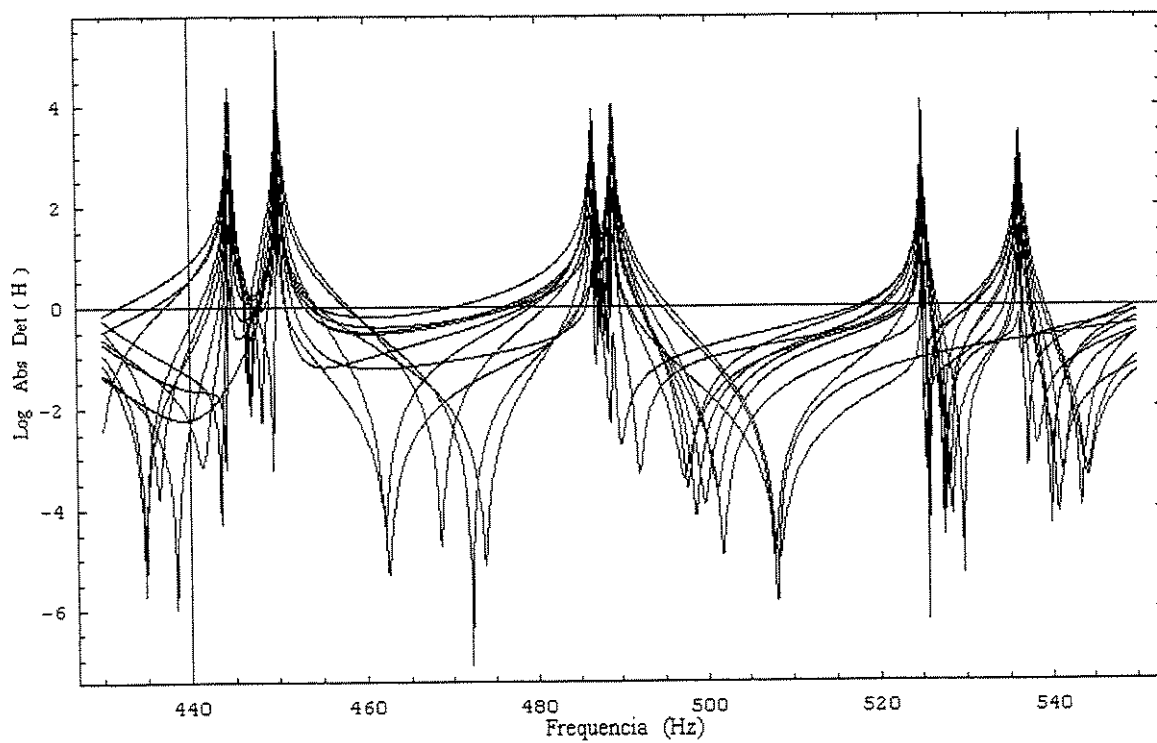


Figura 5.35c

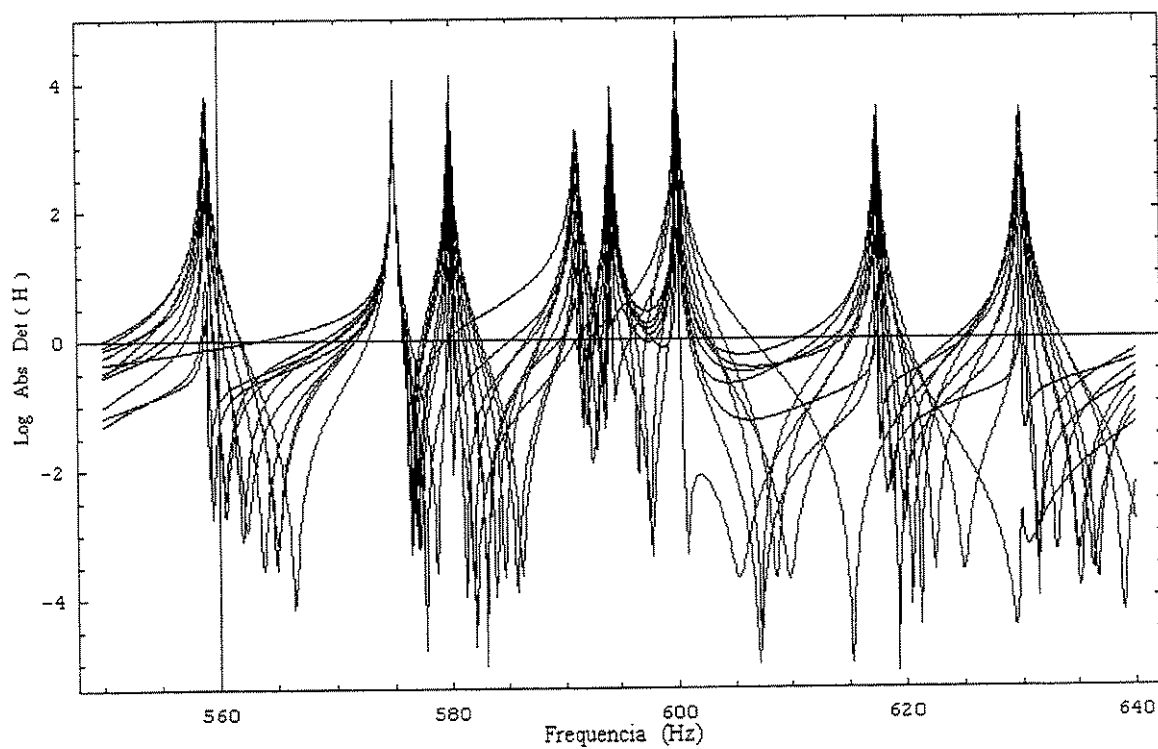


Figura 5.35d

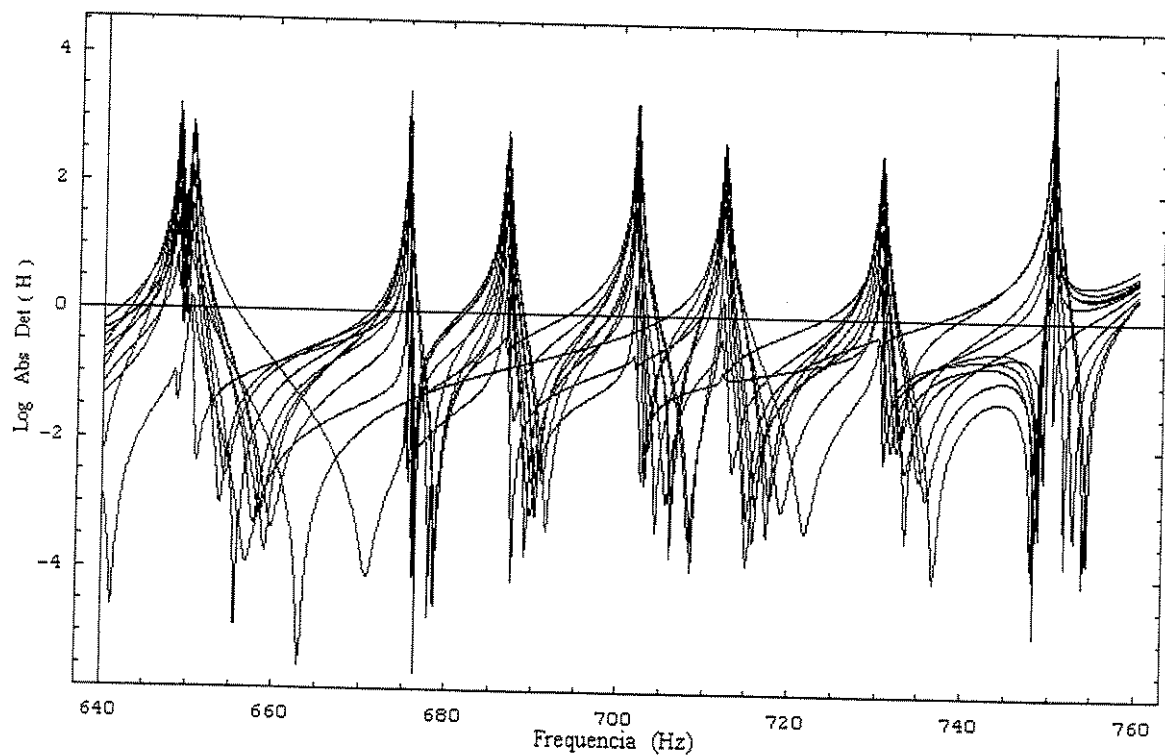


Figura 5.35e

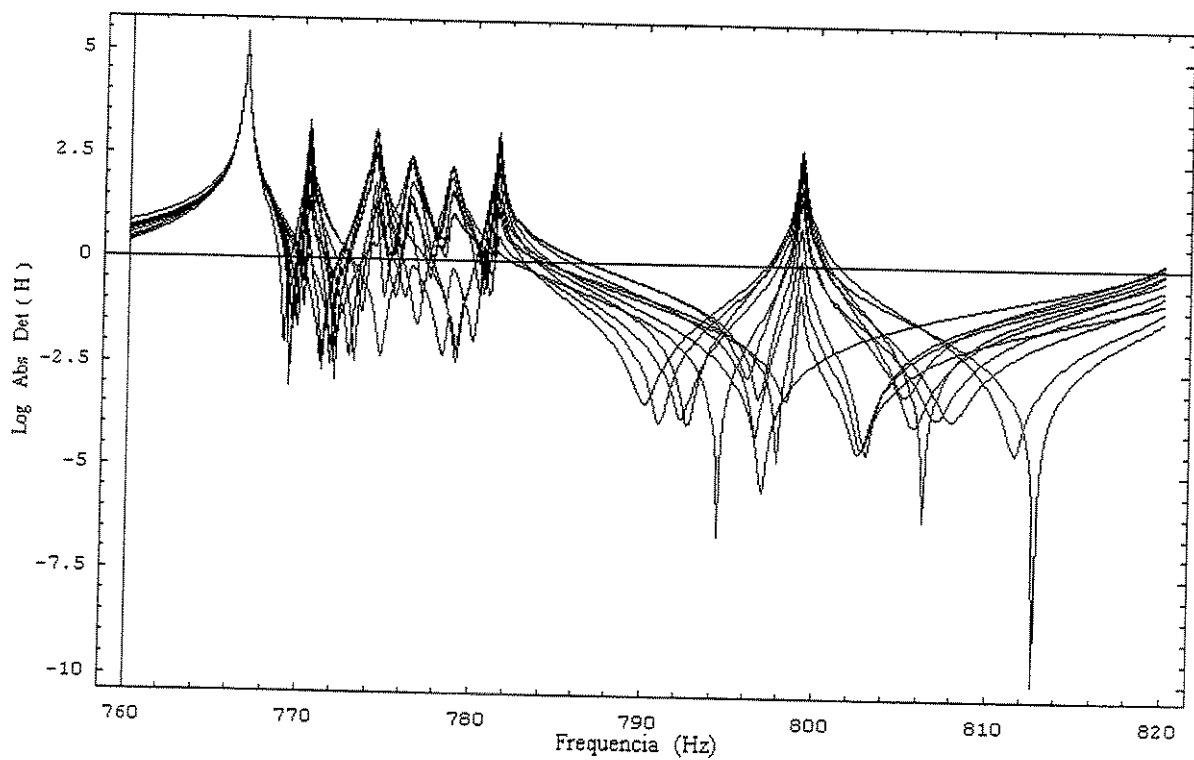


Figura 5.35f

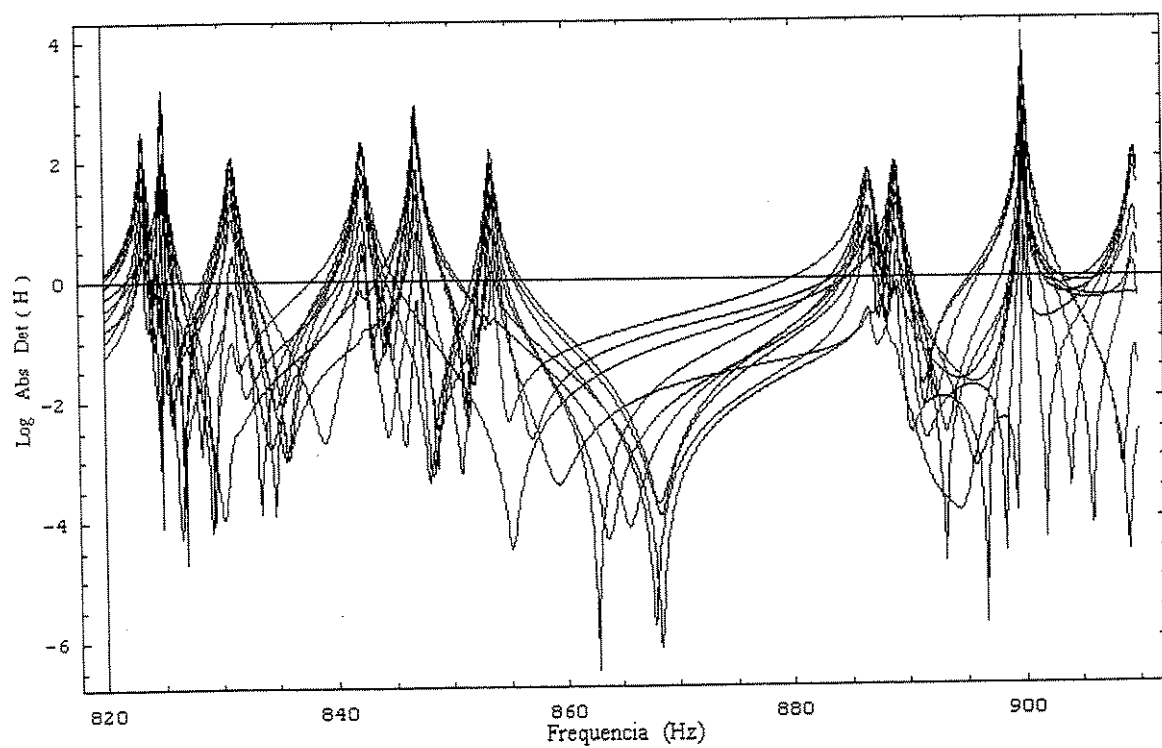


Figura 5.35g

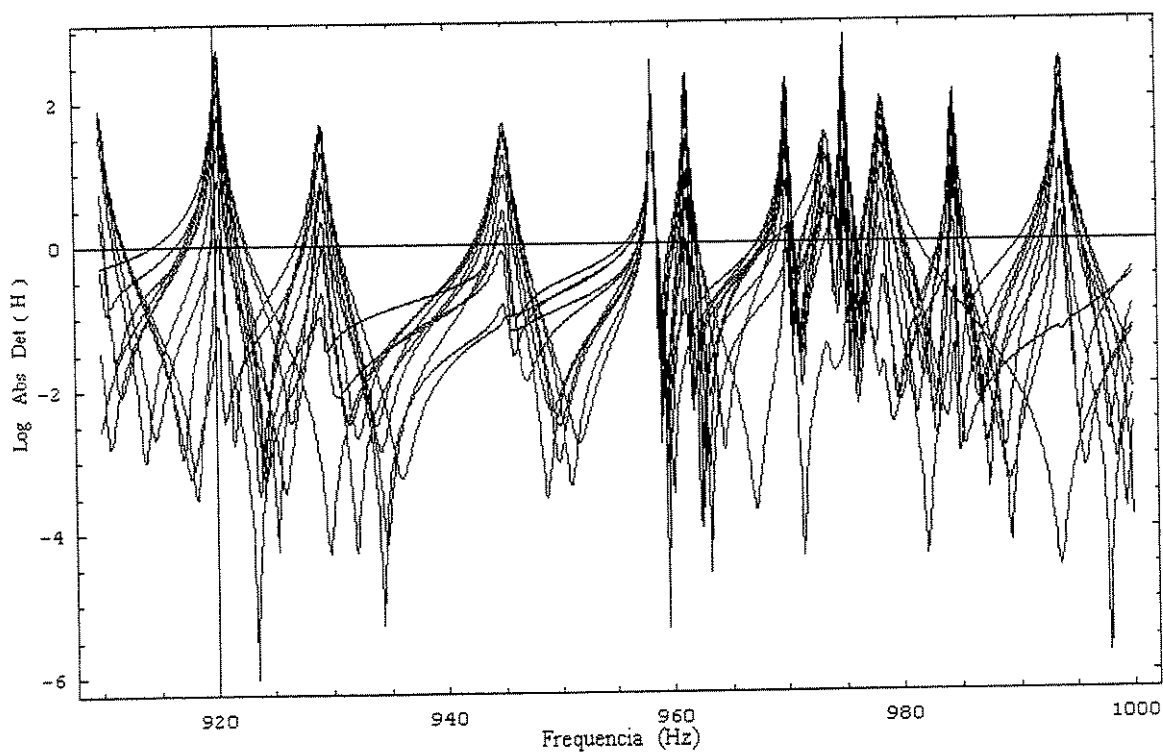


Figura 5.35h

De fato podemos verificar que, cada pico definido pela família de FRF's, tem seu ponto de máximo local, correspondendo a uma frequência natural da cavidade, como mostra a tabela 5.14, enquanto que os pontos de máximo locais que não definem picos, não correspondem a nenhuma frequência natural da cavidade.

Tabela 5.14 : Pontos de máximos locais devido sua localização no interior da cavidade

N.	Índice das frequências naturais		Pontos de máximos locais e Frequências Naturais da Cavidade Acústica					Frequências Naturais
	m	n	P1	P6	P7	P11	P12	Analíticas
1	0	0	000.0	000.0	000.0	000.0	000.00	000.000
2	1	0	075.0	075.0	075.0	075.0	-----	075.000
---	---	---	-----	-----	135.6	126.5	126.5	-----
3	2	0	150.0	150.0	150.0	150.0	150.09	150.000
4	0	1	191.7	191.7	191.7	191.7	191.7	191.667
5	1	1	205.8	205.8	205.8	205.8	-----	205.818
6	3	0	225.0	225.0	225.0	225.0	-----	225.000
7	2	1	243.4	243.4	243.4	243.4	243.4	243.385
8	3	1	295.6	295.6	295.6	295.6	-----	295.569
9	4	0	300.0	300.0	300.0	300.0	300.0	300.000
10	4	1	356.0	356.0	356.0	356.0	356.0	356.000
11	5	0	375.0	375.0	375.0	375.0	-----	375.000
12	0	2	383.3	383.3	383.3	383.3	383.3	383.333
13	1	2	390.6	390.6	390.6	390.7	-----	390.601
14	2	2	411.7	411.6	411.7	411.7	411.7	411.636
15	5	1	421.2	421.2	421.2	421.2	-----	421.141
16	3	2	444.5	444.5	444.5	444.5	-----	444.488
17	6	0	450.0	450.0	450.0	450.0	450.0	450.000
18	4	2	486.8	486.8	486.8	486.8	486.8	486.800
19	6	1	489.2	489.2	489.2	489.2	489.2	489.118
20	7	0	525.0	525.0	525.0	525.0	-----	525.000
21	5	2	536.3	536.3	536.3	536.3	-----	536.225
22	7	1	558.9	558.9	558.9	558.9	-----	558.893
23	0	3	575.0	575.0	575.0	575.0	575.0	575.000
24	1	3	579.9	579.9	579.9	579.9	-----	579.871
25	6	2	591.1	591.1	591.1	591.1	591.1	591.138
26	2	2	594.3	594.3	594.3	594.3	594.3	594.243
27	8	0	600.0	600.0	600.0	600.0	600.0	600.000
28	3	3	617.5	617.5	617.5	617.5	-----	617.454
29	8	1	629.9	629.9	629.9	629.9	629.9	629.870
30	4	3	648.6	648.6	648.6	648.6	648.6	648.556
31	7	2	650.1	650.1	650.1	650.1	-----	650.053
32	9	0	675.0	675.0	675.0	675.0	-----	675.000
33	5	3	686.5	686.5	686.5	686.5	-----	686.477
34	9	1	701.7	701.7	701.7	701.8	-----	701.684
35	8	2	712.0	712.0	712.0	712.0	712.0	712.000
36	6	3	730.2	730.1	730.2	730.1	730.2	730.154
---	---	---	-----	-----	742.8	745.8	744.1	

continua

37	10	0	750.0	750.1	750.1	750.1	750.1	750.000
38	0	4	766.7	766.7	766.7	766.7	766.7	766.667
39	1	4	770.4	770.4	770.4	770.4	-----	770.326
40	10	1	774.2	774.2	774.2	774.2	774.2	774.103
41	9	2	776.3	776.3	-----	776.3	781.3	776.253
42	7	3	778.7	778.8	778.8	778.8	-----	778.621
43	2	4	781.3	781.3	781.3	781.3	-----	781.203
44	3	4	799.1	799.1	799.1	799.1	-----	799.001
45	4	4	823.3	823.3	823.3	823.3	823.3	823.273
46	11	0	825.1	825.1	825.1	825.1	-----	825.000
47	8	3	831.1	831.1	831.1	831.1	831.1	831.031
48	10	2	842.3	842.3	842.3	842.3	842.3	842.285
49	11	1	847.1	847.1	847.1	847.1	-----	846.972
50	5	4	853.5	853.5	853.6	853.5	-----	853.465
51	9	3	886.7	886.7	886.7	886.7	-----	886.707
52	6	4	889.0	889.1	889.1	889.1	889.0	888.976
-----	-----	-----	-----	-----	895.5	898.2	-----	
53	12	0	900.1	900.1	900.1	900.1	900.1	900.000
54	11	2	909.8	909.8	909.7	909.8	-----	909.708
55	12	1	920.3	920.3	920.3	920.3	920.3	920.183
56	7	4	929.3	929.2	929.2	929.2	-----	929.185
57	10	3	945.1	944.9	945.1	944.9	945.1	945.053
58	0	5	958.4	958.4	958.4	958.4	958.4	958.333
59	1	5	961.4	961.4	961.4	961.3	-----	961.264
60	2	5	970.1	970.0	970.0	970.1	970.1	970.001
61	8	4	973.5	973.5	973.5	973.5	973.6	973.539
62	13	0	975.1	975.1	975.1	975.1	-----	975.000
63	12	2	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3	978.235
64	3	5	984.5	984.5	984.5	984.5		984.392
65	13	1	993.8	993.8	993.8	993.8		993.660

5.9 – A família de FRF's e a média aritmética.

A média aritmética de uma família de FRF's, é a média aritmética calculada entre os potenciais determinado em cada um dos pontos que constitui a família de FRF's, para uma mesma frequência. Assim se considerarmos a média aritmética de uma família de FRF's, determinada para uma faixa de frequências, o resultado é uma curva, onde são identificados picos os quais de fato, definem cada uma das frequências natural da cavidade acústica.

Como exemplo, mostramos nas figuras 5.36a-f, a média aritmética da família de FRF's, da cavidade acústica da figura 5.27, quando consideramos os mesmos dados (discretização, passo, mesma faixa de frequências, etc), que geraram as figuras 5.35a-h.

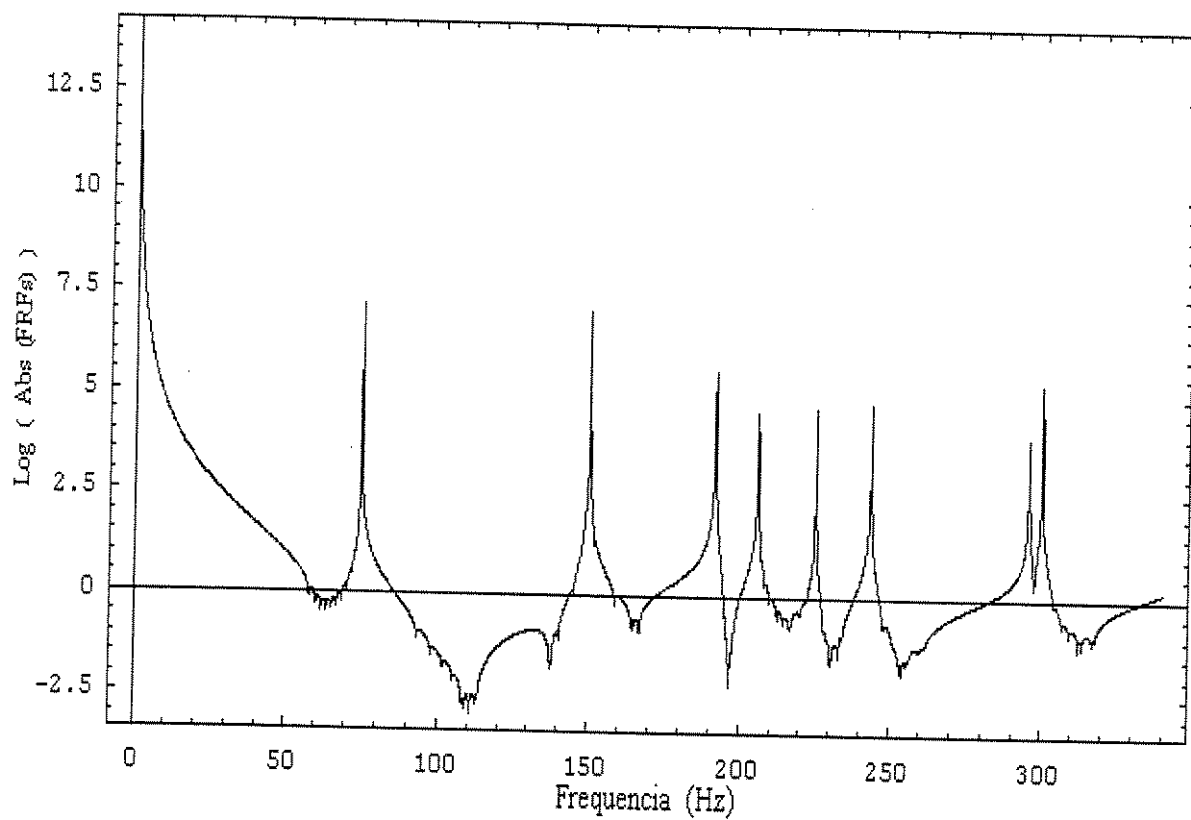


Figura 5.36a

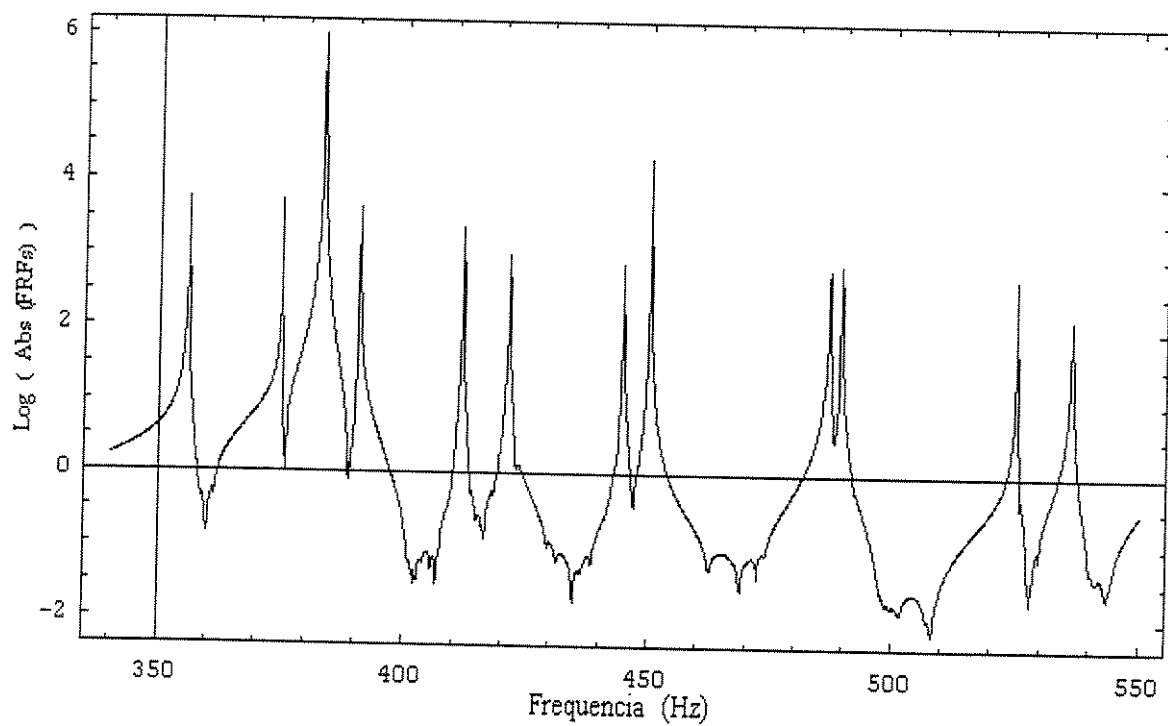


Figura 5.36b

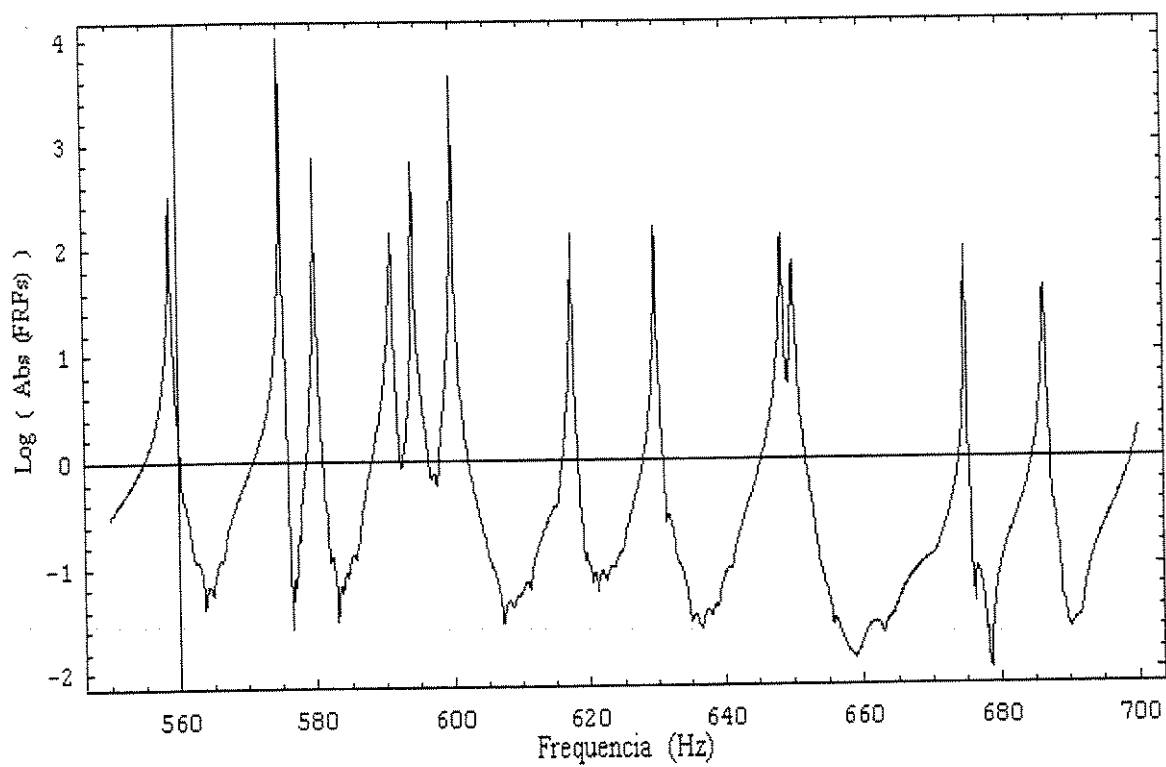


Figura 5.36c

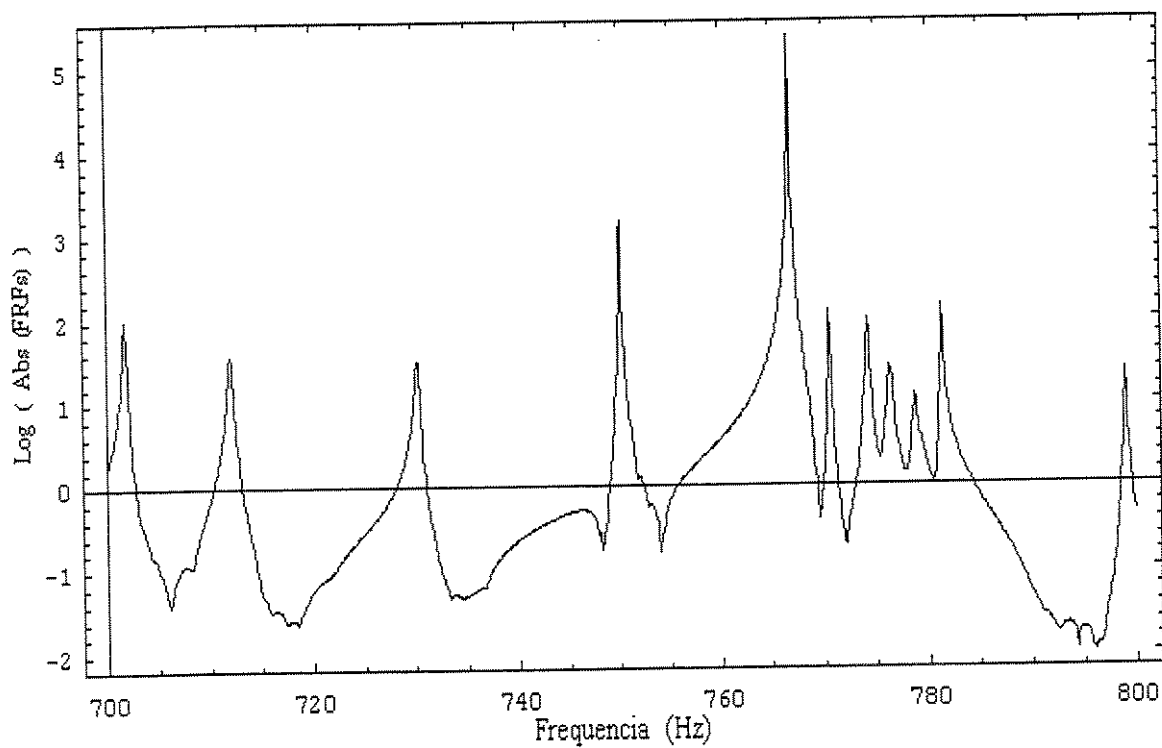


Figura 5.36d

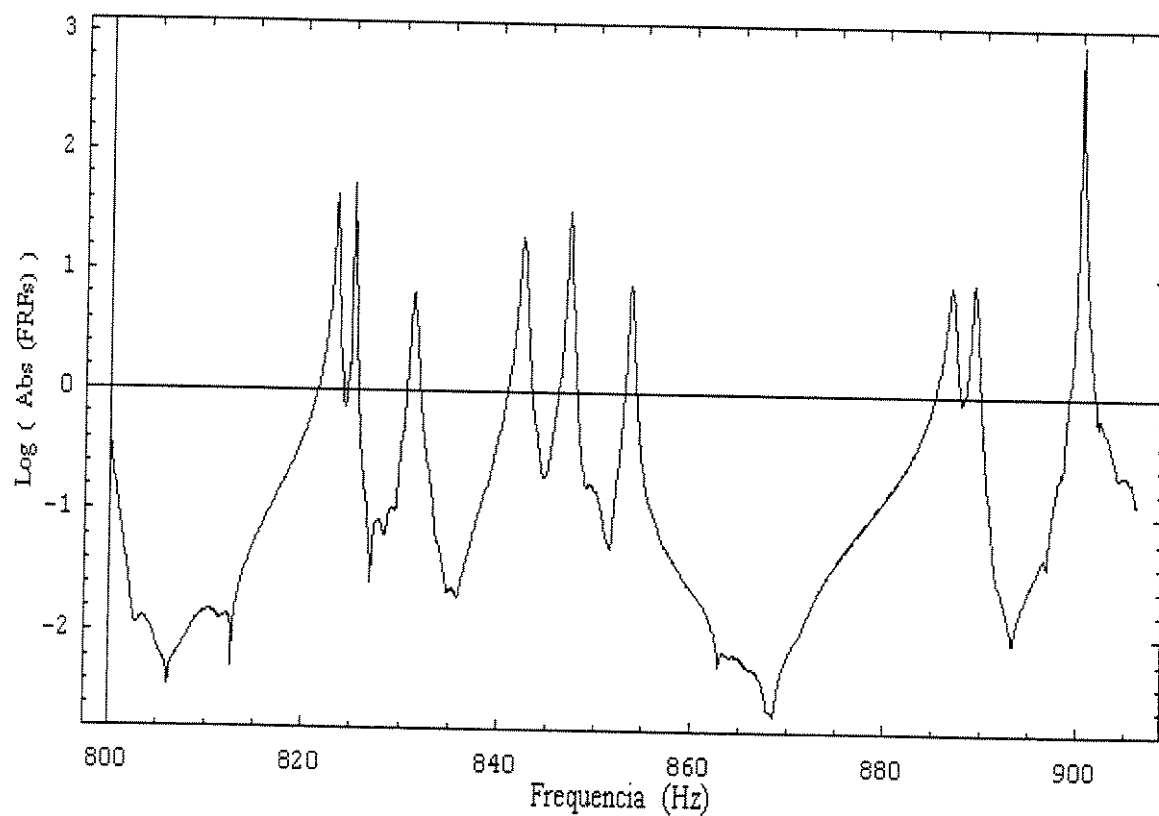


Figura 5.36e

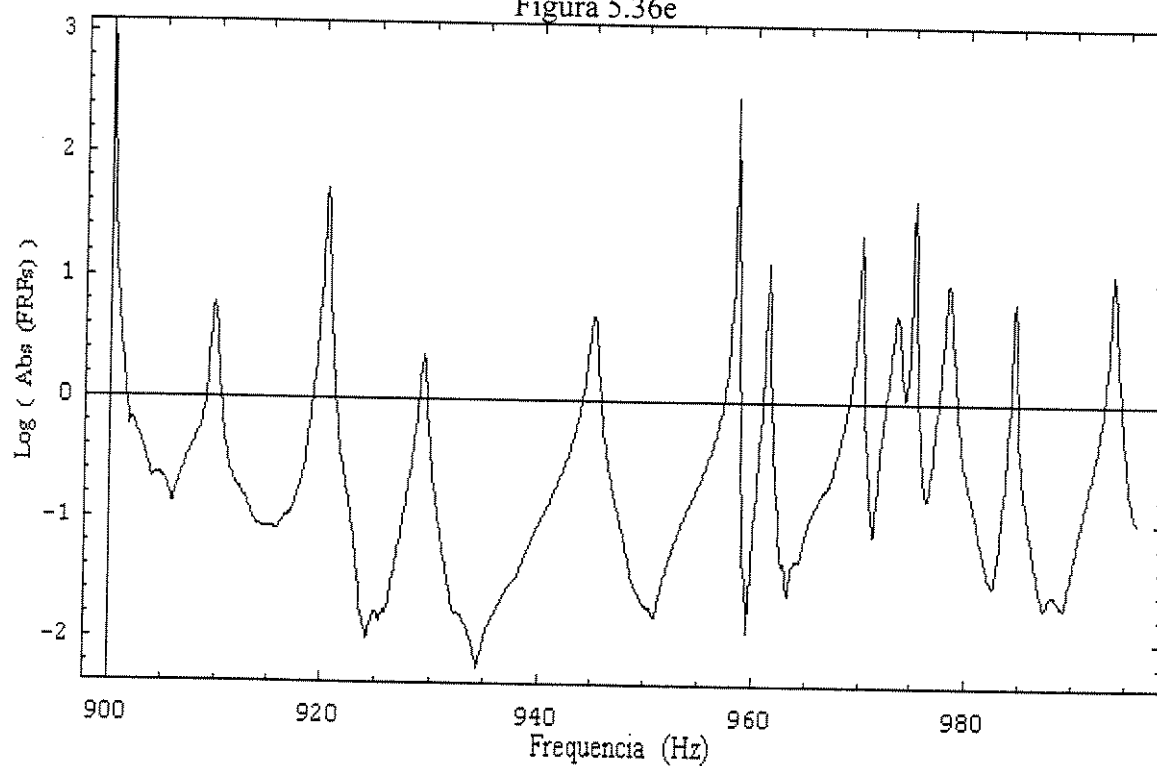


Figura 5.36g:

Figura 5.36: Média aritmética da família de FRF's..

Embora a média aritmética determinada entre os potencias correspondentes, de uma família de FRF's, mostram de forma mais clara os picos correspondentes às freqüências naturais da cavidade acústica, não foi possível definir através dessa estratégia um critério capaz de identificar numericamente as freqüências naturais da cavidade acústica.

5.10 - Família de curvas das FRF's e as freqüências naturais da cavidade acústica semi-oval.

Retomamos a cavidade acústica dada pela figura 5.12, e distribuindo internamente ao seu contorno um conjunto de 12 pontos, como mostramos na figura 5.37. onde para cada um desses pontos geramos uma curva de FRF'S, para o número de onda k variando entre 0.01 e 500Hz, com passo Δ_{β} e seu contorno discretizado em 197 elementos. Assim uma família de FRF'S é formada e então os picos que representam os possíveis modos de vibrar da cavidade semi-oval são identificados como mostraremos a seguir.

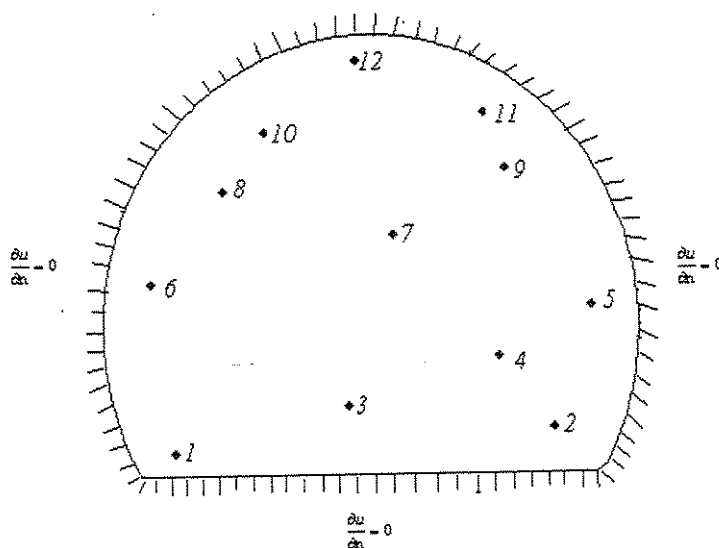


Figura 5.37 - Cavidade Semi-oval e os Pontos Fontes.

O total de modos de vibrar da cavidade semi-oval, para uma faixa de até 500Hz, extraído por meio do software ANSYS - M.E.F é de 20 modos. Na figura 5.38 mostramos, por meio do

gráfico $\text{Log}(\text{abs}(\text{FRF's}))$ em função das frequências, esse total de modos obtidos pela família de curvas das FRF's.

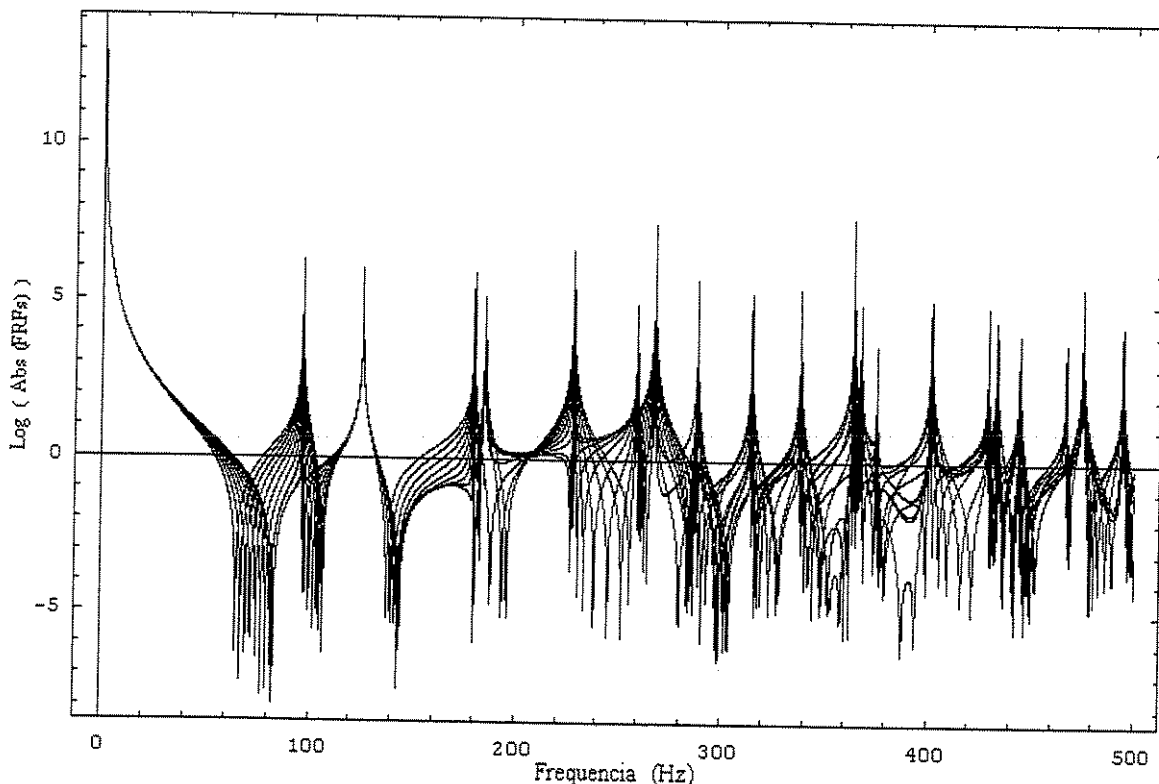


Figura 5.38: Família de FRF's da cavidade semi-oval.

A identificação das frequências naturais associadas aos modos próprios de vibrar das cavidades acústicas das figuras 5.27 e 5.37, por meio de famílias de curvas das FRF's mostrou-se nesses casos que os resultados numéricos obtidos são de boa precisão, quando comparados com os resultados analíticos para o caso da cavidade retangular, e no caso da cavidade semi-oval quando comparado com ANSYS - M.E.F. A escolha da quantidade de pontos internos e a localização dos mesmos nas cavidades acústicas, foi feita de forma aleatória e isto pode influenciar na identificação dos modos de vibrar, embora este fato seja facilmente contornável, aumentando a quantidade de pontos de resposta, ou mesmo modificando a localização desses pontos.

Observando as figuras 5.36a-g, notamos que para frequências de valor numéricos maiores, é exigido maior discretização, proporcionando desse modo melhor definição do pico sobre a

família de curva das FRF's. Embora o custo computacional para avaliar a curva da FRF's em um só ponto seja alto, esse custo tem um aumento computacional, relativamente pequeno para avaliar uma família de curvas de FRF's.

5.11 - Representação gráfica dos modos de vibrar da cavidade acústica.

Conhecidas às condições de contorno (potencial e sua derivada), no contorno de uma cavidade acústica, podemos a partir da equação (5.22), avaliar o potencial acústico em qualquer ponto interno ao contorno dessa cavidade, devido à ação de um força constante incidente em um desses pontos internos, (força de excitação), para uma frequência conhecida.

Considerando, que o modo próprio de vibrar de uma cavidade acústica é a representação gráfica do potencial acústico, avaliado em um conjunto de pontos internos ao contorno dessa cavidade, onde são conhecidos o potencial acústico e sua derivada, para um de seus modos de vibrar, fixamos sobre esse contorno uma discretização e então para um conjunto de pontos internos, podemos reescrever a equação (5.22), na forma de uma equação matricial, representada a seguir:

$$u(x_d) = [G] \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} + \{b\} - [\mathcal{H}] \{u\} \quad (5.23)$$

em que as matrizes G e $\mathcal{H}$ de (5.23), normalmente são de ordem retangulares e relacionam o conjunto de pontos internos ao domínio da cavidade aos nós do contorno dessa mesma cavidade.

A seguir mostramos uma representação gráfica dos modos próprios de vibrar da cavidade acústica retangular. No caso desta cavidade acústica, discretizamos em 192 elementos sobre o contorno e consideramos 299 pontos internos conforme mostra a figura 5.39.

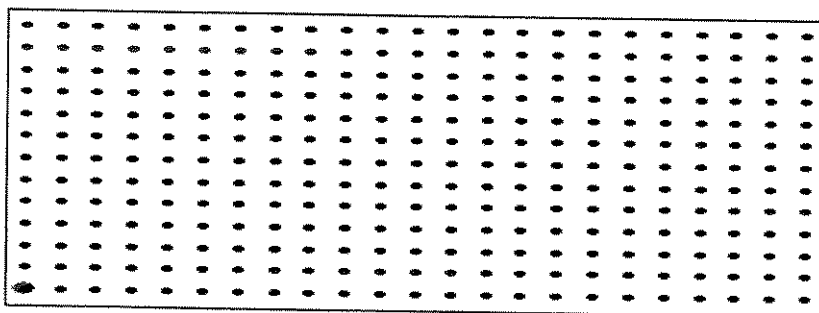


figura 5.39: Malha de pontos internos da cavidade retangular

Os gráficos mostrados nas figuras 5.40a-h, representam alguns modos próprios de vibrar da cavidade acústica retangular referida e são comparados com a solução analítica [Morse-1953]

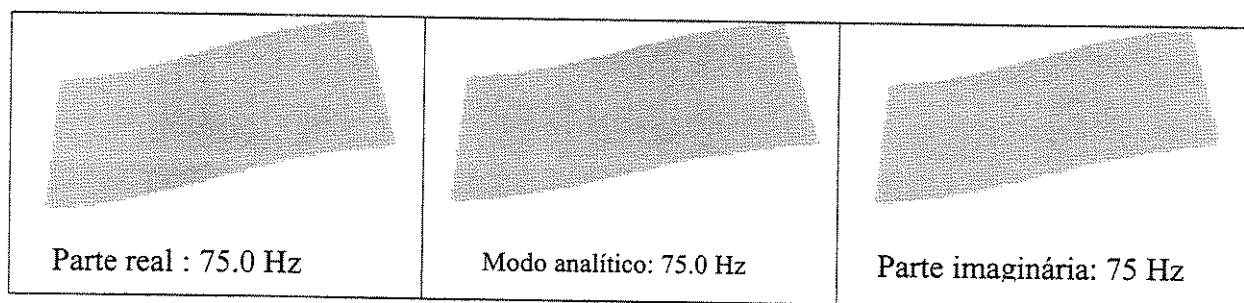


Figura 5.40a -Primeiro modo próprio de vibrar

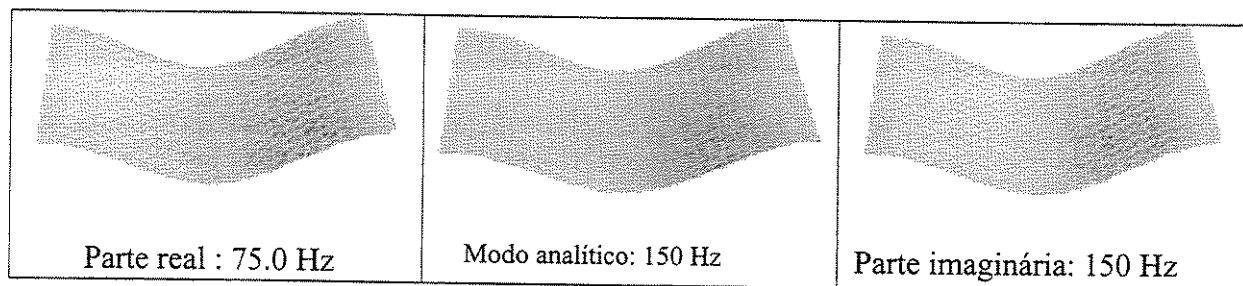


Figura5.40b: Segundo modo Próprio de vibrar

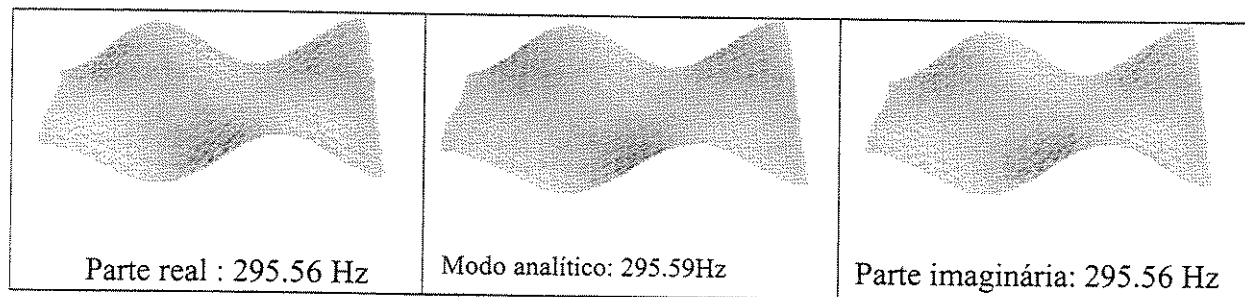


Figura 5.40c - Oitavo modo Próprio de vibrar

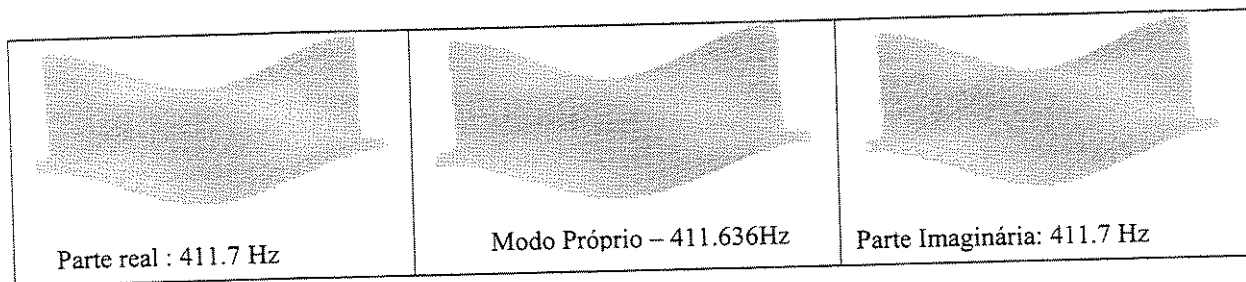


Figura 5.40d – 14^o modo próprio de vibrar

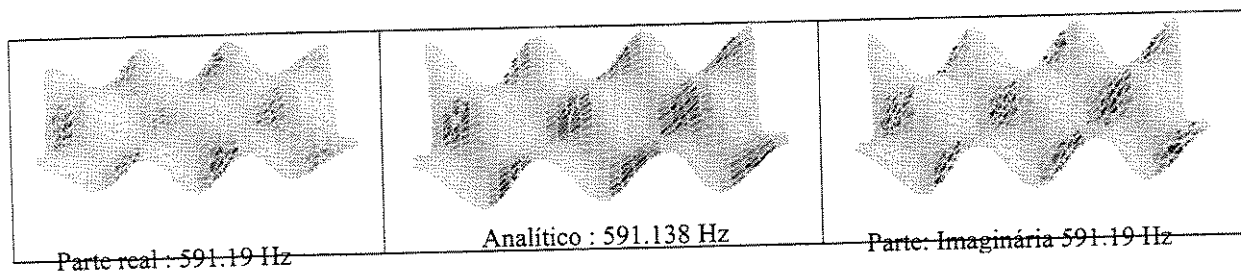


Figura 5.40e – 25^o modo próprio de vibrar

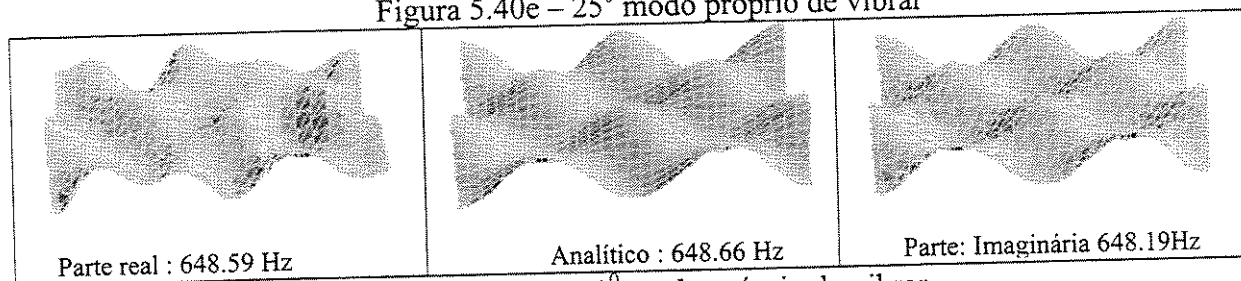


Figura 5.40f – 30^o modo próprio de vibrar

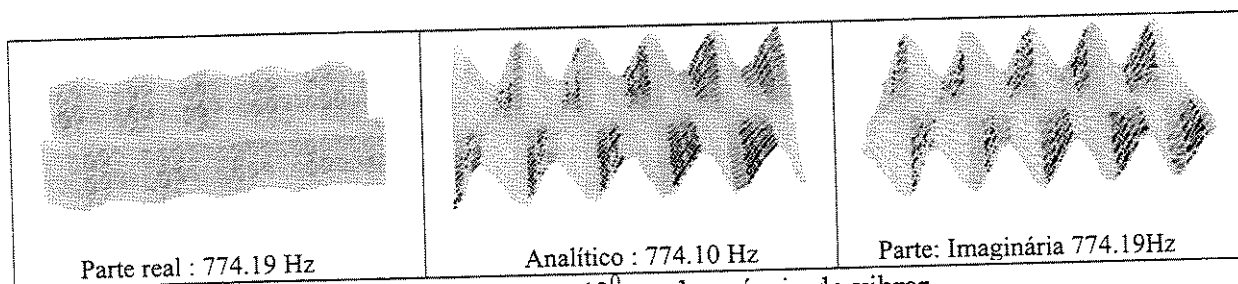


Figura 5.40g – 40^o modo próprio de vibrar

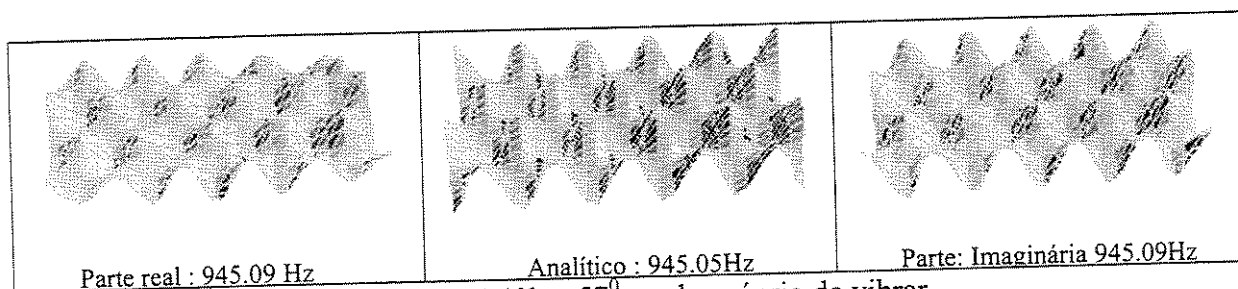


Figura 5.40h – 57^o modo próprio de vibrar

5.12 - Conclusão do capítulo

Neste capítulo utilizamos do MEC para obter as grandezas modais de um domínio acústico Ω . Associado a este método duas estratégias foram testadas independentemente para identificar as frequências naturais e os modos próprios de vibrar de um domínio acústico. Verificamos que ambas as estratégias são fáceis de implementar, mas possuem um alto custo computacional. A primeira estratégia, é conhecida como método da pesquisa direta, está associada aos zeros do polinômio característico e fornecem resultados satisfatórios na identificação das frequências. A segunda estratégia conhecida como função resposta e frequência também fornece bons resultados na identificação das frequências naturais, embora o esforço computacional tenha sido maior com relação ao método da pesquisa direta.

Representamos graficamente os modos próprios de vibrar de uma cavidade acústica e os resultados numéricos foram muito bons quando comparados com os analíticos.

Capítulo 6

O problema da radiação acústica

6.1 – Introdução

Muito das análises de problemas nas áreas da engenharias, são tratadas em domínios ilimitados, como é o caso do problema de radiação de ondas acústicas. Esses problemas são tratados como Problemas de Domínio Exterior ou Problemas de domínio aberto e caracterizam-se, por considerar que pontos pertencentes a ele, estão à esquerda do contorno, quando o mesmo é percorrido no sentido horário.

Uma alternativa para estudar problemas de radiação de ondas acústicas é o Método de Elementos de Contorno, já que esse método, além de exigir a discretização apenas no contorno da superfície da fonte acústica, incorpora automaticamente a condição de Radiação de Sommerfeld, nos pontos do domínio distante da fonte acústica [Harris-1992].

A formulação para a aproximar a solução desse tipo de problema exige que a da equação diferencial de Helmholtz, seja transformada numa equação Integral de Contorno como desenvolvido no capítulo 3, com solução fundamental dada pela equação (2.54).

Nesse capítulo o equacionamento do M.E.C é implementado e as simulações são feitas para uma fonte circular, tanto no caso estacionário, como também no caso onde são considerados pequenos deslocamentos da fonte (não estacionário). Nos dois casos as respostas numericamente obtidas, são comparadas com a solução analítica do problema, tanto no contorno do domínio, como em pontos do próprio domínio. O fluxo (derivada do potencial) também é avaliado em pontos do domínio. Além dessas simulações, também é considerado o problema de valor

intermediário, onde o potencial em pontos do domínio é determinado a partir do fluxo, medido em pontos do próprio domínio.

A regularização da solução no contorno da fonte pode ser melhorada, impondo uma restrição sobre pontos internos à fonte radiante, chamado de processo de CHIEF, (Combined Helmholtz Integral Formulation) [Provatidis-2002].

6.2 – A propagação de ondas a partir de uma fonte acústica circular radiante e pulsante.

Segundo [Morse -1953], o potencial de radiação acústica em um ponto x_d , situado a uma distância R do centro de uma fonte cilíndrica de raio a (figura 6.1), é dado por:

$$u(x_d) = A_0 H_0^{(1)}(k R) \quad (6.1)$$

em que A_0 é uma constante que representa a amplitude da onda, $H_0^{(1)}(k R)$ é a função de Hankel de ordem zero e primeira espécie e k o número de ondas.

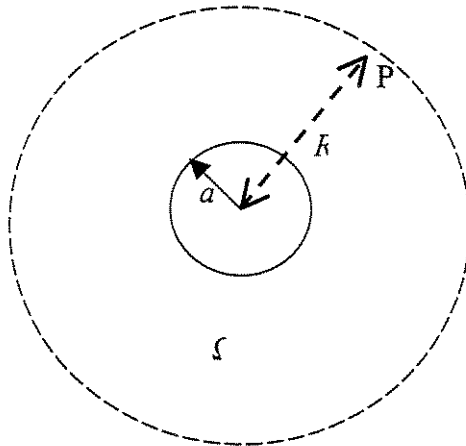


Figura 6.1: Fonte circular radiante.

O valor da constante A_0 pode ser determinado, derivando (6.1) na direção do vetor normal ao contorno do cilindro. Como o domínio de interesse, é externo ao contorno da fonte, concluímos que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial R}$. Assim obtemos: $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = A_0 H_1^{(1)}(ka)k$, o que permite reescrever (6.1) por:

$$u(k, R) = \frac{1}{k} \frac{H_0^{(1)}(kR)}{H_1^{(1)}(ka)} \quad (6.2)$$

em que $H_1^{(1)}(kR)$ é a função de Hankel de primeira ordem.

Se x_d é um ponto sobre o contorno da fonte cilíndrica, o potencial acústico sobre x_d é dado por (6.2), fazendo $R = a$

6.3 A formulação do M.E.C para problemas de radiação acústica.

No capítulo 3 na seção (3.5), tratamos do equacionamento bidimensional do M.E.C, para o caso de domínio exterior, o qual pode ser empregado para problemas de radiação acústica (figura 6.2).

A equação integral de contorno para problemas de domínio exterior obtida em (3.47), pode ser escrita como:

$$cu(x_d) = \int_{\Gamma} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\Gamma_D) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (6.3)$$

em que o coeficiente c dado por (3.48), $u^*(x, x_d, k) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR)$ é a solução fundamental da equação de Helmholtz, determinada em (2.54), R é a distância entre os pontos x e x_d

($R = |x - x_d|$), com x_d e x pontos no contorno da fonte; $\underline{n}$ é o vetor normal ao contorno Γ da fonte, $u(\Gamma_D)$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(\Gamma_N)$ são as condições de contorno.

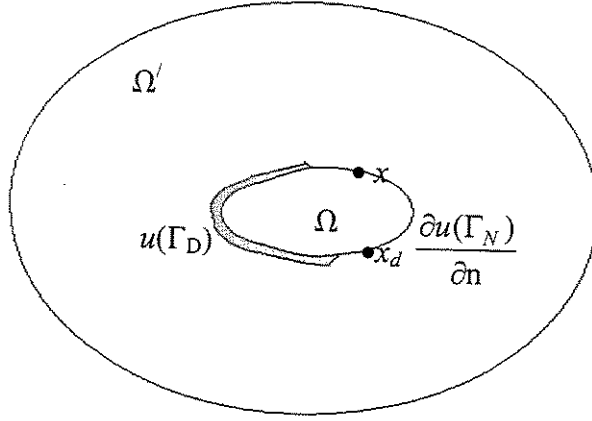


Figura 6.2: Fonte acústica radiante e as condições de contorno

Introduzindo as condições de contorno e considerando uma discretização do contorno da fonte em ne elementos, reescrevemos (6.3) por:

$$cu_i(x_d) = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial n} d\Gamma_j - \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u(\Gamma_D) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (6.4)$$

ou ainda:

$$cu_i(x_d) + \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u(\Gamma_D) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (6.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, ne.$$

e para $i \neq j$ fazendo:

$$\bar{h}(i, j) = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u(\Gamma_D) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (a)$$

(6.6)

$$g(i, j) = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (b)$$

sendo que para o caso em que $i = j$, o valor do coeficiente c é dado por (3.48) e $g(i, i)$ dado por (4.31), a equação (6.5), fica reescrita por:

$$\left(c(x_d) + [\bar{h}(i, j)] \right) \{u(x_d, k)\} = [g(i, j)] \frac{\partial u}{\partial n} \quad (6.7)$$

ou ainda fazendo $[H] = [c(x_d) + [\bar{h}(i, j)]]$ e $[G] = [g(i, j)]$, reescrevemos (6.7), por:

$$[H] \{u(x_d, k)\} = [G] \frac{\partial u}{\partial n} \quad (6.8)$$

Uma permuta entre as linhas das matrizes $[H]$ e $[G]$, deixa (6.8), escrita num sistema matricial da forma:

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (6.9)$$

A solução do sistema algébrico (6.9), permite determinar o potencial e sua derivada (fluxo), em todo o contorno da fonte radiante da figura 6.2.

Com o objetivo de analisar a influência da discretização no contorno de uma fonte acusticamente radiante e pulsante de tamanho finito, para diferentes números de ondas k , um código computacional implementando (6.9), foi elaborado segundo a formulação do M.E.C e utilizando elementos constantes.

A validação do código é feita para a implementação de (6.9), quando consideramos uma fonte acústica radiante, circular de raio $a = 1\text{m}$ e contorno rígido, com condições de contorno em todo o seu círculo dado por Neumann, ($\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 1$) e velocidade do meio $c_0 = 345\text{m/s}$.

Inicialmente, três diferentes discretizações no contorno do cilindro são consideradas e dadas na tabela 6.1. Além disso, como estamos utilizando elementos constantes, $c = \frac{1}{2}$ e o número de ondas k percorrer uma faixa entre 0.1 e 50 radianos, com um incremento $\Delta_k = 0.1$ radianos.

Tabela 6.1: Discretizações no contorno do cilindro

Discretizações	Total de Elementos no Contorno
Malha-M1	80
Malha-M2	120
Malha-M3	160

A figura 6.3 é mostrado o módulo do potencial acústico medido em um ponto do contorno da fonte em função do número de ondas k .

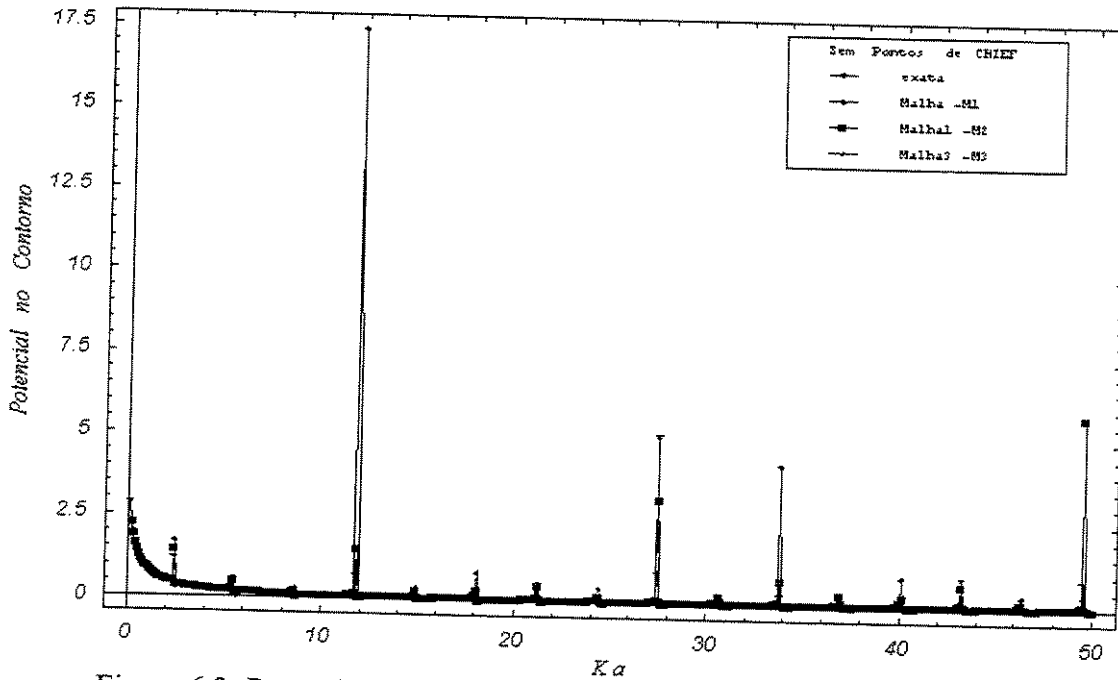


Figura 6.3: Potencial Acústico no Contorno da Fonte Circular Radiante

O aparecimento de picos nas diferentes curvas de respostas numéricas na figura 6.3, representam irregularidades da solução, isto ocorre para algumas frequências, que segundo [Schenk-1968], estão associados à formulação do M.E.C, para problemas de domínio interior.

A ampliação dos dois primeiros picos da figura 6.3, é ilustrado na figura 6.4 e corresponde aos valores de ka entre 1.8 e 6.2.

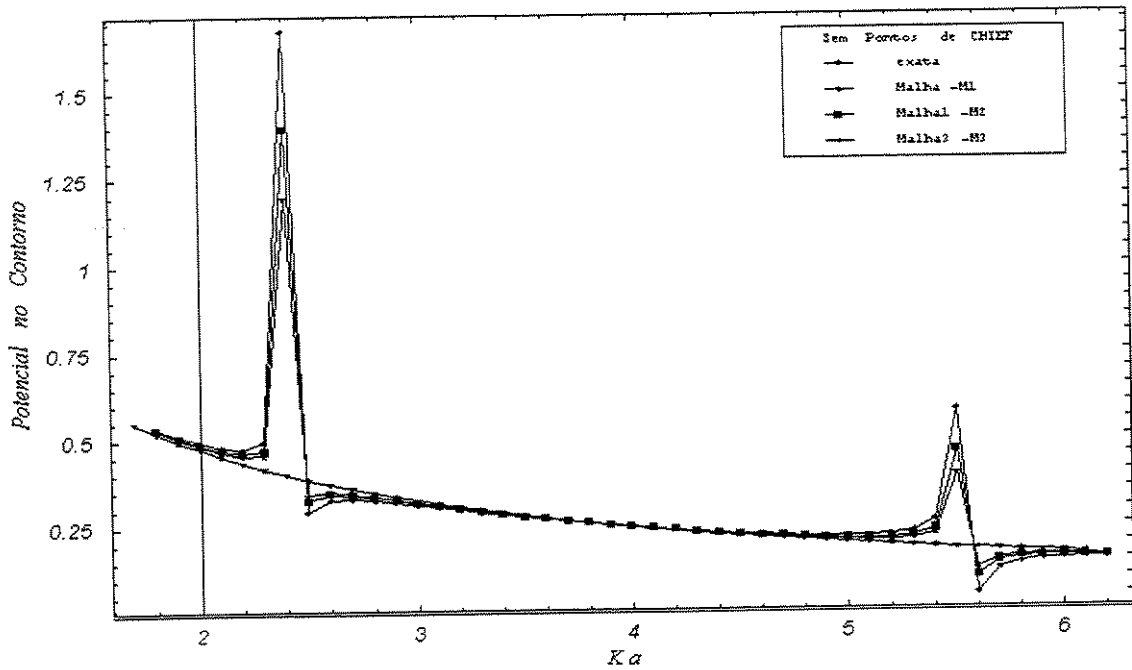


Figura 6.4: Ampliação dos Picos sobre as Curvas Numéricas.

A formulação do M.E.C em sua forma original, para problemas de domínio exterior torna-se mal condicionado para algumas frequências, correspondentes aos autovalores associados a algum problema de domínio interior. Em [Kane-1994], esta situação detectada por [Schenk-1968], pode ser contornada, se consideramos no problema de domínio interior, os autovetores associados aos autovalores do sistema, para os problemas de vibrações livres, os quais correspondem aos modos próprios de vibrar da cavidade acústica reproduzidos na figura 6.5a, enquanto que na figura 6.5b, destacamos a solução para algum problema exterior associado com a condição de pressão zero no interior da mesma cavidade.

Muitos são as estratégias usadas para contornar esse tipo de problema, segundo [Provatidis, Zafiropoulos-2002], a seis principais técnicas são: Surface Helmholtz Equation Formulation (SHIEF), Interior Helmholtz Equation Formulation, (IHIEF), Combined Helmholtz Equation Formulation (CHIEF), Lagrangian multiplier Helmholtz Equation Formulation (LMHIEF), Coupled Helmholtz Equation Formulation (CHI).

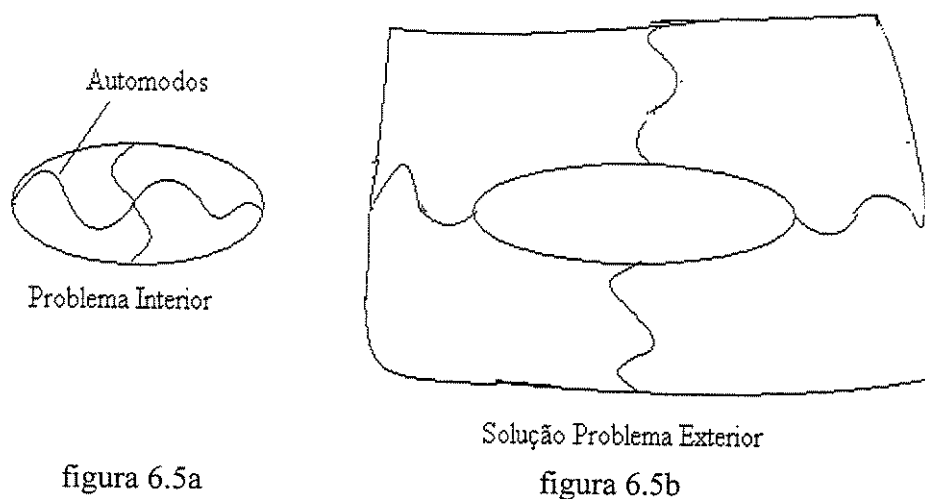


figura 6.5: Solução: Problema interior e exterior

A primeira dessas estratégias foi apresentada por Schenck (1967), e denominada de estratégia de CHIEF-(Combined Helmholtz Equation Formulation), a formulação desta estratégia pode ser visto em [Schenck-1968], e é empregada para levantar a não unicidade em problemas exteriores, governado pela equação de Helmholtz. Ela consiste em aumentar em um ou mais o número de pontos de colocação, restringindo a localização destes novos pontos no interior da fonte radiante e atribuindo aos mesmos a pressão zero. Isso inevitavelmente implicará em um acréscimo dos números de equações algébricas no sistema original, o que requer a solução para um sistema de equações algébricas retangular. No caso desse trabalho, usamos o método dos mínimos quadrados [Noble-1986], no sentido de resolver o sistema de equações.

Embora a estratégia seja de fácil implementação, a localização destes pontos de CHIEF no interior da fonte radiante nem sempre trazem bons resultados para a solução, e isso muitas vezes ocorre, por estarem sobre as linhas que descrevem os modos próprio de vibrar do problema

interior correspondente, determinado pelas frequências naturais da cavidade acústica. A implementação dessa estratégia é empregada a seguir no problema em estudo.

Retomemos agora a implementação, da fonte cilíndrica da figura 6.2, considerando os dados anteriormente usados, e inserimos os chamados pontos de CHIEF, de coordenadas (0.2, 0.874) e (-0.2, -0.874) escolhidos de modo conveniente, para ka compreendido entre 1.8 e 3.0.

Na figura 6.6, claramente podemos observar, a influência dos pontos de CHIEF, quando consideramos o pico sobre as curvas da figura 6.4, para $ka \approx 2.4$ e quando inserimos os pontos de CHIEF, nota-se que a solução numérica coincide com a solução do problema, em $ka \approx 2.4$.

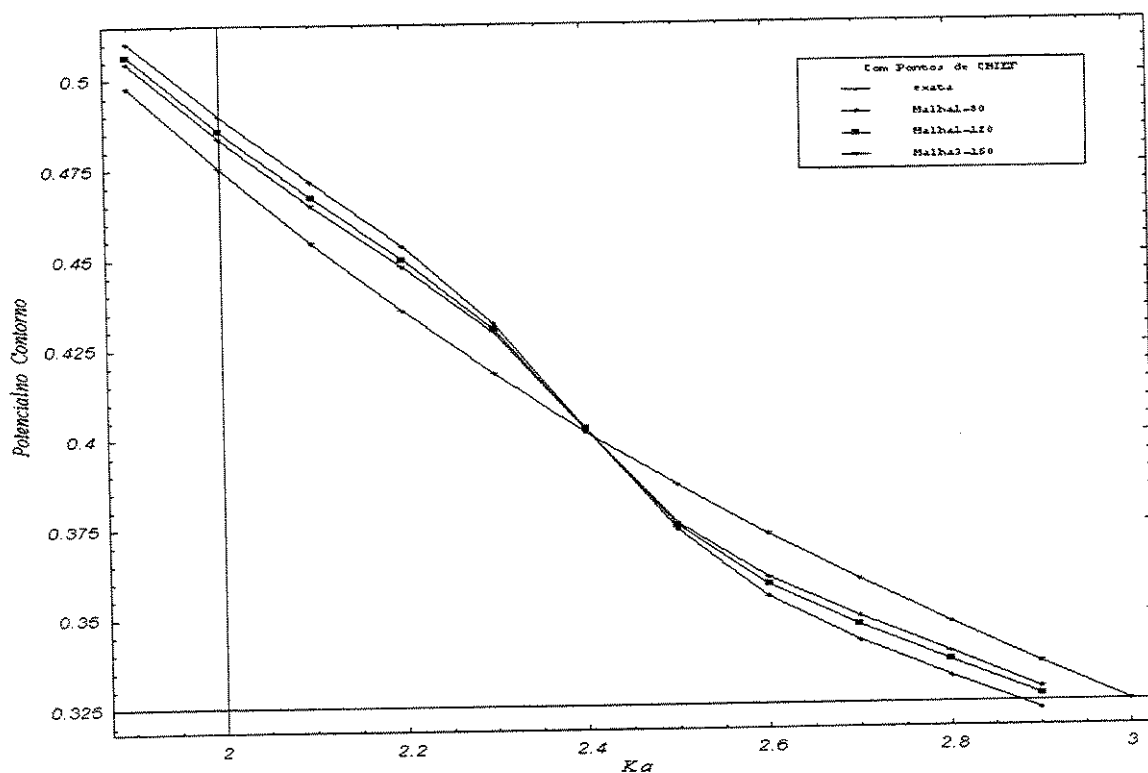


figura 6.6: Regularização com Pontos de CHIEF.

Repetindo agora os pontos de CHIEF e avaliando o potencial em toda a faixa compreendida entre 0.1 e 50 Hz, fica regularizada a solução em todo o contorno da fonte, como mostra a figura 6.7. De fato, a convergência das soluções numéricas para a solução analítica dada em (6.2), pode ser verificada através do cálculo do erro, definido em (6.10).

$$erro = \frac{\sum_{i=ka}^{ne} (u_A(ka) - u_N(ka))^2}{ne} \quad (6.10)$$

em que:

u_A : é o valor analítico dado por (6.2)

u_N : é o valor numérico devido (6.3).

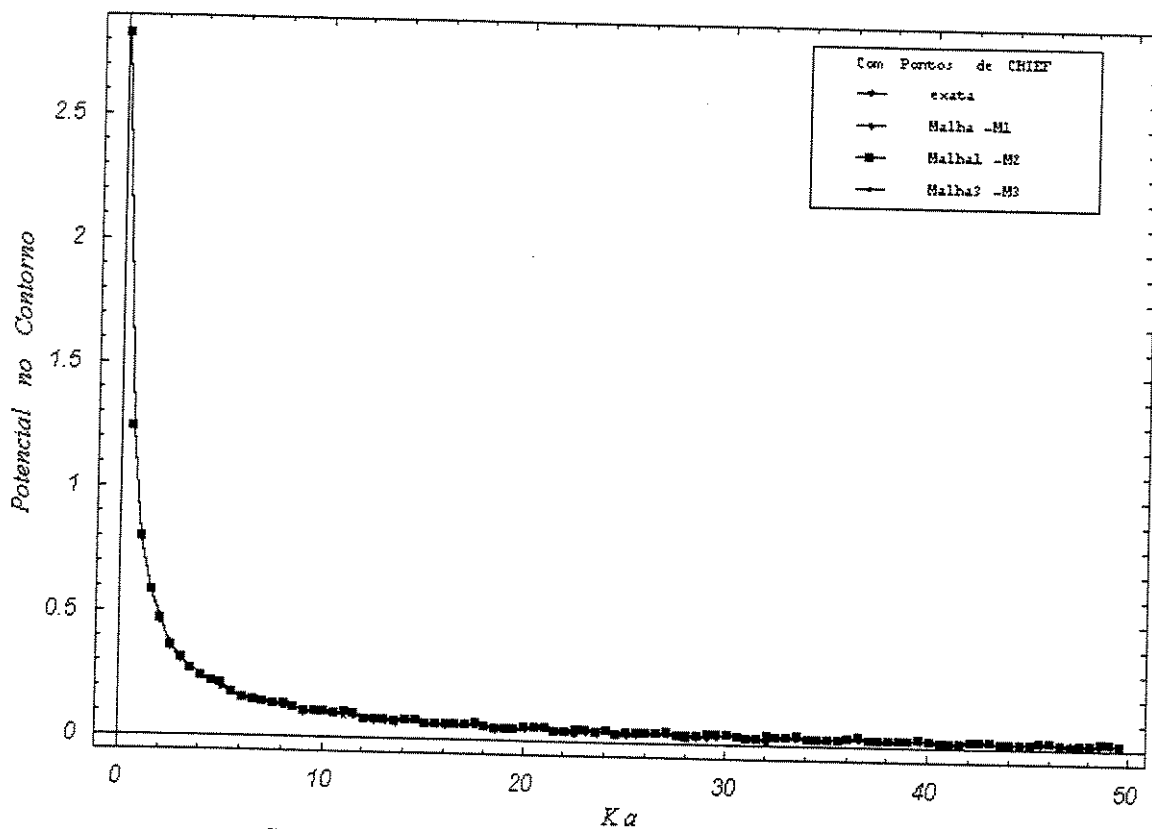


figura 6.7: Regularização com Pontos de CHIEF

Na tabela 6.2 temos o erro máximo dado por (6.10), quando comparamos o erro entre a solução analítica e a solução numérica, para a faixa entre 0.1 e 50 radianos, para cada uma das discretizações, quando inserimos os pontos de CHIEF.

Tabela 6.2: Erro no contorno com pontos de CHIEF

ka	Malha: 80 elementos	Malha: 120 elementos	Malha: 160 elementos
0.1 a 500.	0.03099%	0.02487%	0.0266%

No exemplo, podemos verificar que de fato a regularização da solução por meio dos pontos de CHIEF, aproximou a solução numérica da solução analítica dada por (6.2). Entretanto, uma das maiores dificuldades apresentada por essa estratégia de regularização é ainda falta de um critério que possibilite a identificação e mesmo a quantidade dos pontos internos a serem considerados.

6.4 - O potencial de radiação acústica em pontos do domínio.

O potencial acústico em pontos do domínio de uma fonte acústica, é determinado por meio da implementação da equação (6.3), para $c=1$ conforme (4.2), ou seja:

$$1u(x_d) = \int_{\Gamma} u^*(x, x_d, k) \frac{\partial u(\Gamma_N)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\Gamma_D) \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma \quad (6.11)$$

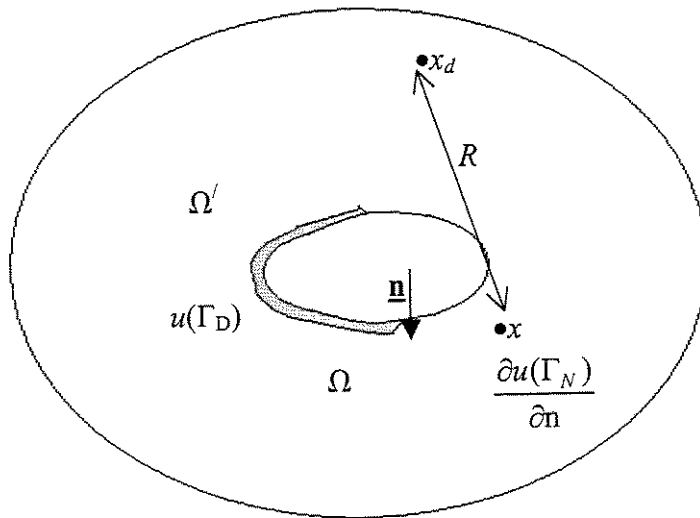


Figura 6.8: Potencial de radiação acústica em x_d no domínio aberto.

A equação (6.11) é aplicável em pontos do domínio Ω' , se a distância R entre o ponto de campo x_d e o contorno da fonte acústica for um número finito, caso contrário a condição de radiação de Sommerfeld dada por (6.12), é automaticamente satisfeita [Harris-1992], garantindo que, ondas propagando para fora do contorno da fonte radiante de raio finito, tornam-se essencialmente planas.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left[\frac{\partial u(kR)}{\partial R} - i k u(kR) \right] = 0 \quad (6.12)$$

Embora o potencial acústico num ponto x_d do domínio Ω' (figura 6.8), a partir de uma fonte acústica, é avaliado por (6.11), é exigido, que as condições de contorno sejam conhecidas em todo o contorno da fonte. Isto é, fixando o número de onda k e uma discretização do contorno da fonte, determinamos a solução no contorno da mesma, tal como descrito na seção anterior, partir de (6.9). Como o potencial acústico no ponto do domínio Ω' , nada mais é do que o reproscessamento de (6.3), para $c = 1$, é esperado que devido á formulação do M.E.C, o potencial acústico $u(x_d)$, para $x_d \in \Omega'$, tenha o mesmo tipo de irregularidade apresentado na figura 6.3.

De fato, vamos considerar o número de onda k , variando entre 0.1 e 10 radianos e o ponto x_d , localizado a uma distância de 2.1m do centro da fonte cilíndrica circular radiante de raio 1m com condições de contorno dadas por Neumann (figura 6.2) e seu contorno discretizado em 160 elementos.

Os resultados obtidos pela implementação direta de (6.11), mostra que a descontinuidade gerada no contorno da fonte radiante, devido a alguma frequência natural associada ao problema interno, provoca no ponto x_d do domínio Ω' , uma resposta com mesmas características daquela mostrada na figura 6.3, isto é, a curva do potencial acústico no ponto x_d , apresenta picos como os mostrados na figura 6.9

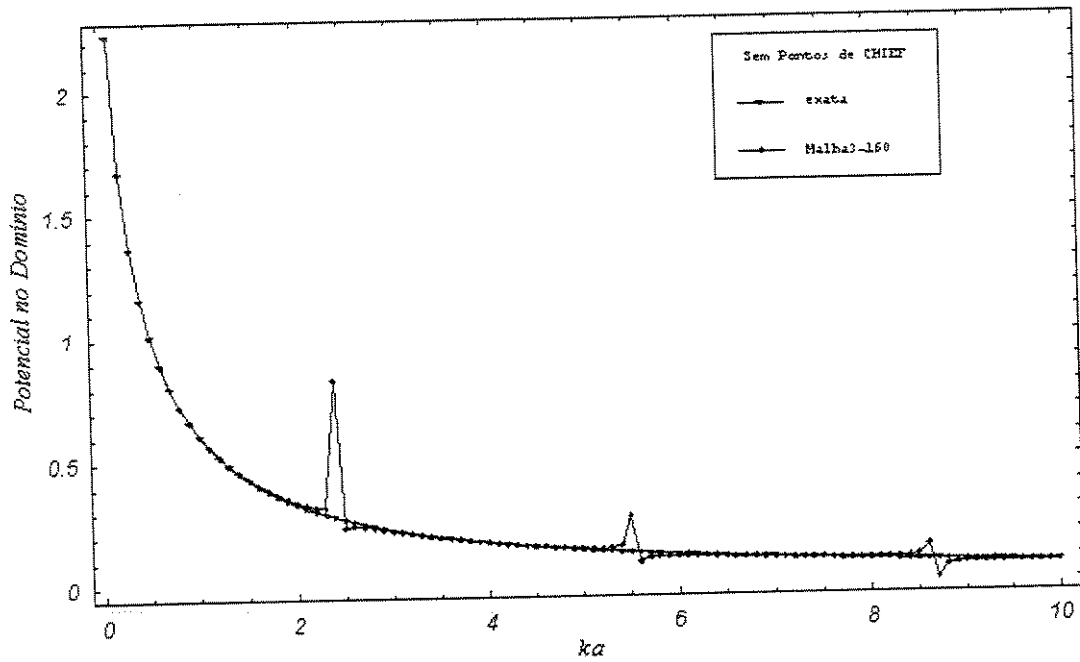


Figura 6.9: Potencial nos pontos do Domínio

Usando da mesma estratégia de regularização já empregada na solução do contorno da fonte, introduziremos no interior da mesma, os chamados pontos de CHIEF, e com as mesmas coordenadas (0.2, 0.874) e (-0.2, -0.874) já que se trata da mesma fonte, pode-se verificar que para o número de ondas k variando entre 0.1 à 10 radianos, a curva da resposta numérica é regularizada e convergindo a resposta para a resposta analítica conforme mostra o gráfico da figura 6.10.

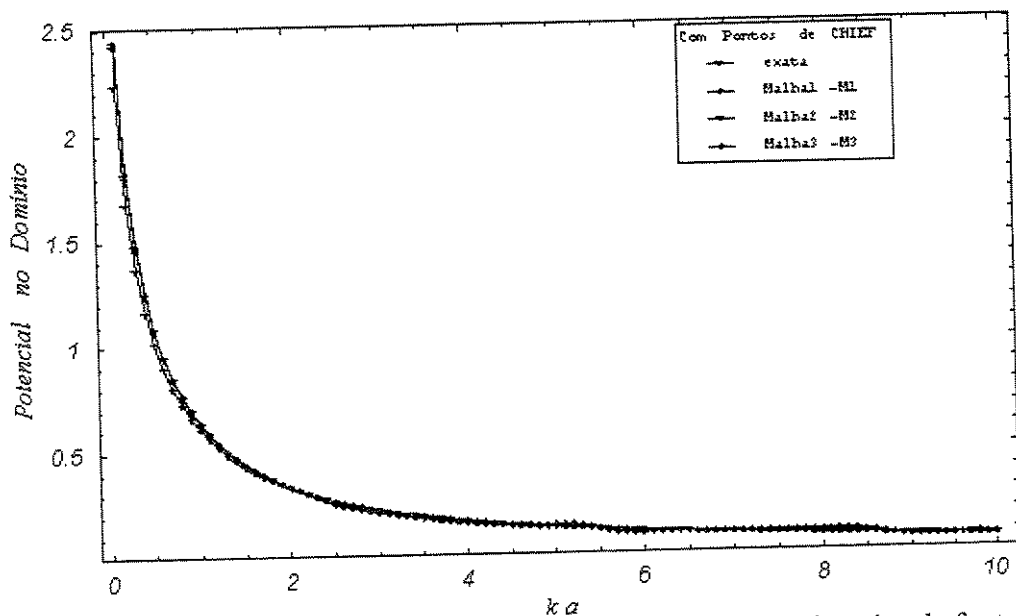


Figura 6.10: Potencial no Domínio com pontos de CHIEF no interior da fonte

6.5 – A radiação do cilindro deslocando horizontalmente.

Vamos considerar um cilindro de raio a , de paredes rígidas, deslocando horizontalmente (figura 6.11). Se a condição de contorno $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ no contorno do cilindro, então, devido ao deslocamento do mesmo, a condição de contorno fica determinada por $\frac{\partial u}{\partial n} = q \cos \theta$, em que θ é o ângulo de vértice sobre o contorno do cilindro e lados formados entre os seguimentos de reta na direção radial, e a direção de deslocamento do cilindro.

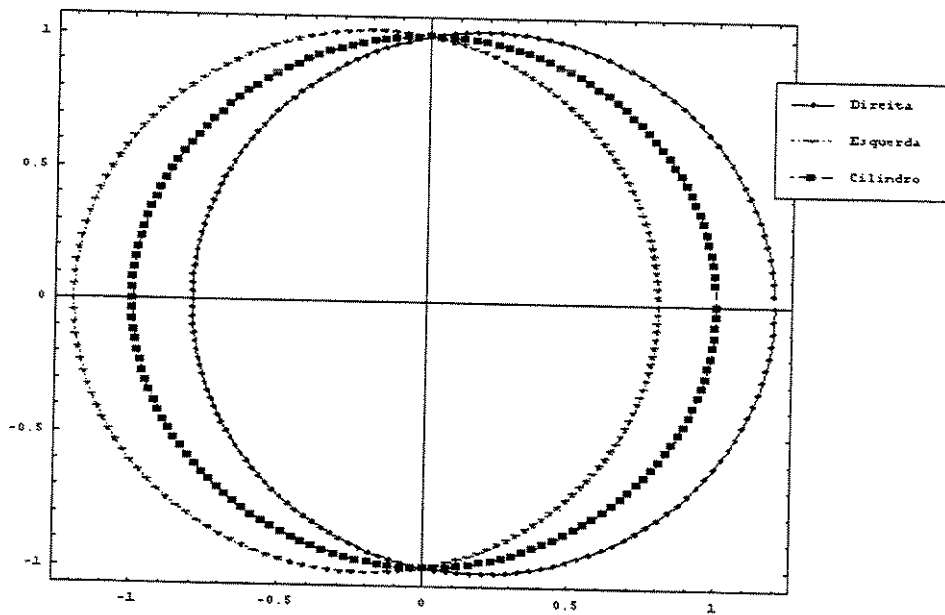


Figura 6.11: Cilindro Deslocado

Segundo [Morse-Ingard-1968], o potencial acústico em um ponto x_d a uma distância R do centro do contorno do cilindro, quando o mesmo desloca-se com velocidade constante sobre o eixo horizontal do sistema de coordenadas é dado por:

$$u(kR) = A_0 H_0^{(1)}(kR) \cos \theta \quad (6.13)$$

em que a constante A_0 é determinada, derivando (6.13) na direção do vetor normal $\mathbf{n}$, e lembrando que, por se tratar de um problema domínio exterior: $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial R}$.

Assim, em $R = a$, temos $A_0 = \frac{q}{k H_1^{(1)}(ka)}$, deixando (6.13) reescrita na forma:

$$u(kR) = \frac{q}{k} \frac{H_0^{(1)}(kR)}{H_1^{(1)}(ka)} \cos \theta \quad (6.14)$$

com isso podemos determinar potencial acústico em pontos do contorno do cilindro em movimento, fazendo em (6.6) $R = a$.

Vamos considerar a implementação da equação (6.9), quando a condições de contorno, em todo o contorno é dada por Neumann, com $q = 1$. Assim devido o deslocamento do cilindro as condições de contorno ficam dadas por $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \cos \theta$, sobre o contorno do cilindro de raio $a = 1\text{m}$, movendo-se na direção horizontal como mostra a figura 6.11. Fixando esses dados, medimos os potenciais acústicos sobre um ponto do contorno do cilindro quando o número de ondas k , varia entre 0.01 e 10 radianos, para três diferentes discretizações, dadas por: malha-M1 = 60 elementos, malha-M2 = 80 elementos e malha-M3 = 160 elementos. Os resultados apresentados pelo M.E.C, para cada uma das discretizações, são comparados com os resultados de (6.13), e mostrados na figura 6.12, por meio de um gráfico, do potencial acústico em função do produto entre o número de ondas k e o raio da fonte a .

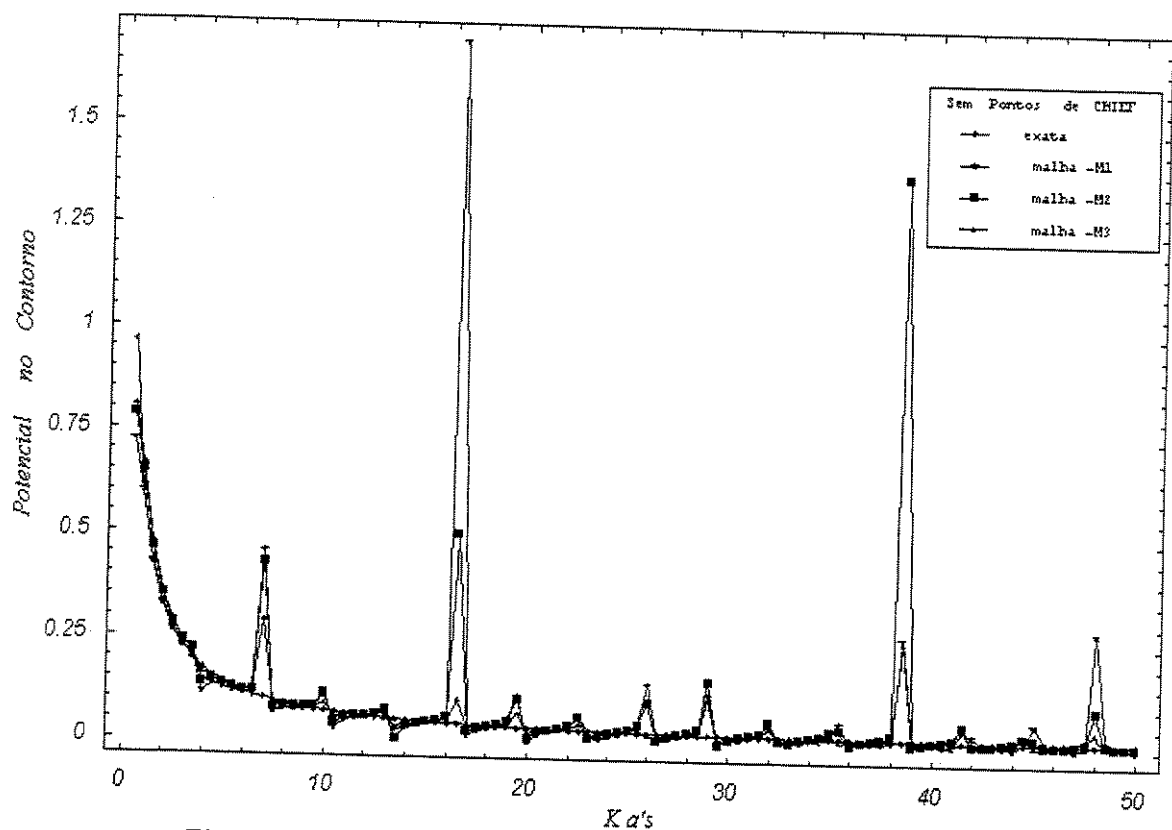


Figura 6.12: Potencial de radiação para o cilindro deslocado.

Mais uma vez, esses picos na curva de resposta não é um problema de discretização, pois, podemos observar na figura 6.13, onde apresentamos uma ampliação dos picos compreendidos na faixa de frequências entre 27 a 32 radianos, que nas frequências de picos, a malha-M2, apresenta pior resultado que o da malha-M1, que tem menor discretização no contorno. Com isso certamente temos um problema que esta relacionada ao equacionamento do M.E.C.

A regularização dos picos mostrados na figura 6.13, é feita usando também da técnica dos pontos de Chief, de coordenadas (0.2, 0.874) e (-0.2, -0.874), como podemos observar na figura 6.14, onde é mostrado também, que para maiores discretizações, melhor é a aproximação entre a solução analítica e a resposta numérica. Já na figura 6.15, a regularização dos picos entre 27 e 32 radianos para uma discretização malha-M4, no contorno do cilindro com 320 elementos

A regularização para a faixa de frequência, compreendida entre 0 e 50 radianos é mostrada na figura 6.16, quando discretizamos o contorno em 320 elementos (malha-M4).

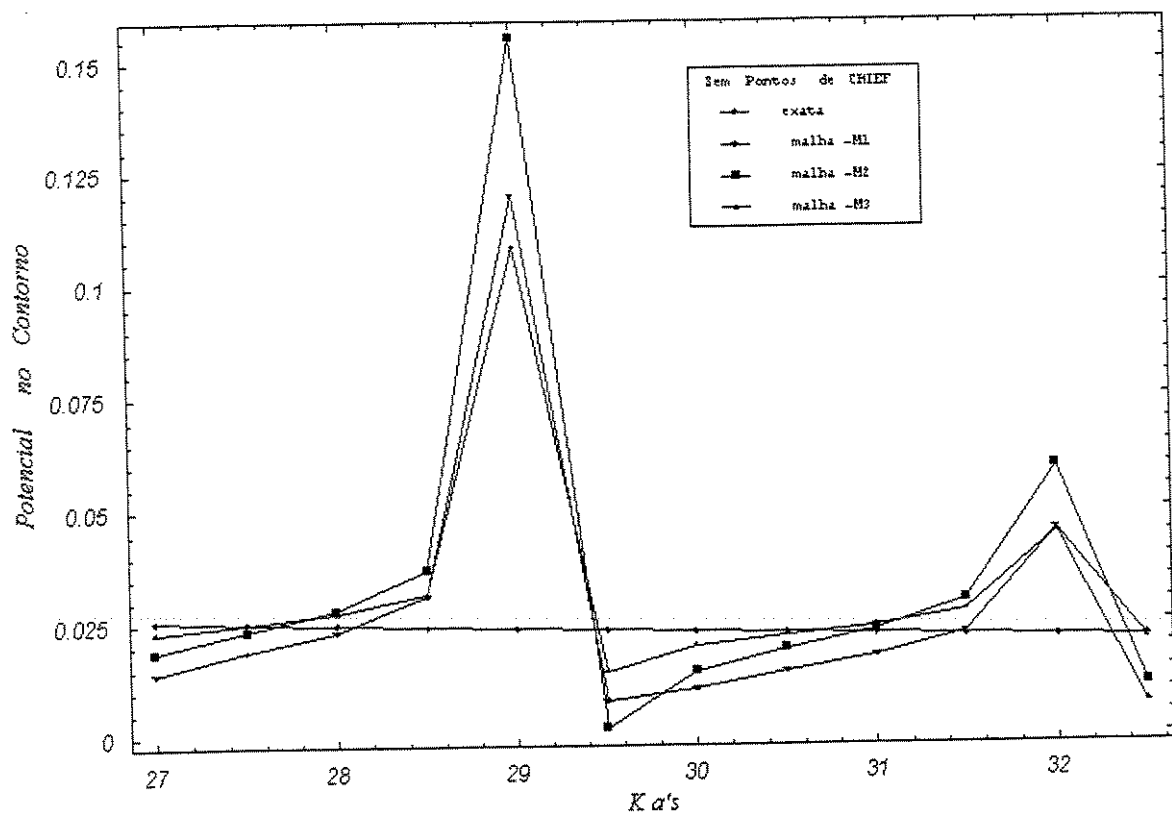


Figura 6.13- Ampliação dos picos para as frequências entre 27 e 33 radianos

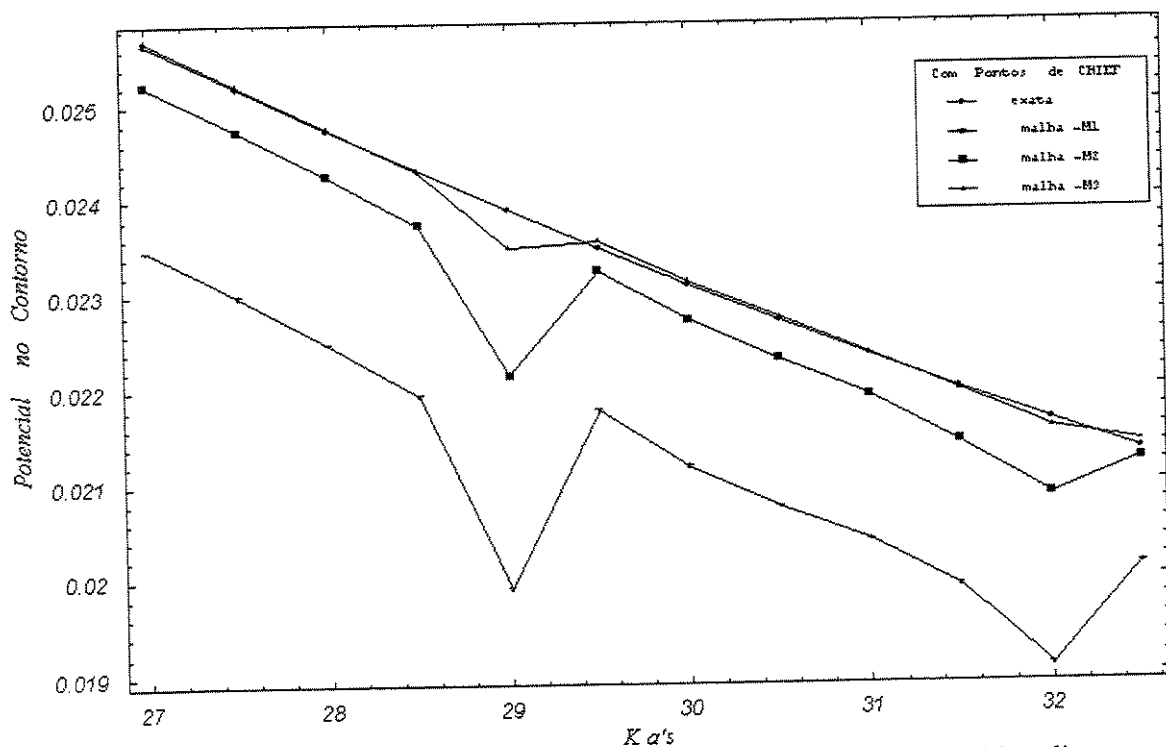


Figura 6.14- Regularização dos picos ampliados frequências entre 27 e 33 radianos

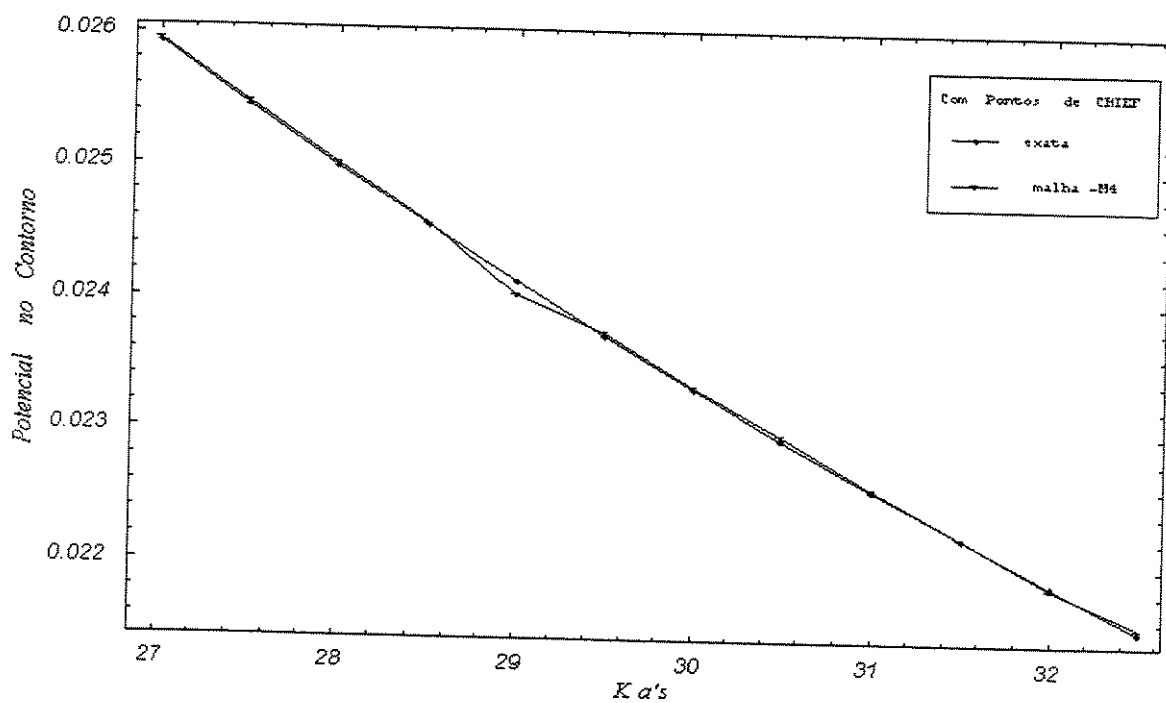


Figura 6.15- Regularização dos picos para as frequências entre 27 e 33 radianos.

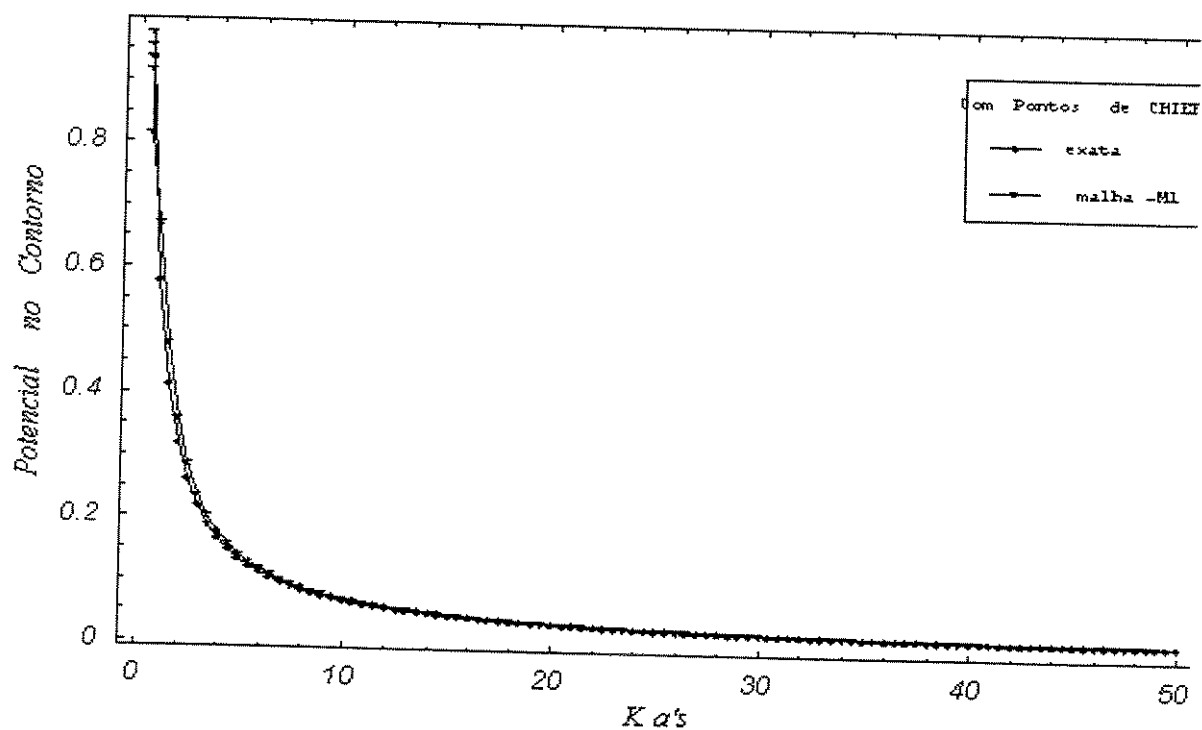


Figura 6.16: Regularização da solução para o cilindro deslocado

A estratégia de pontos de CHIEF é considerada eficiente na regularização da solução de problemas radiação e fato isso foi constatado nos dois casos empregados. A dificuldade maior está na escolha de localização e quantidade dos chamados pontos de CHIEF, pois não existe uma técnica que contorne tais dificuldades.

6.6 – O Fluxo em pontos do domínio de um Cilindro Pulsante.

Segundo [Ciskowski-1991], o fluxo acústico na direção radial, para um ponto x_d interno ao domínio Ω' mostrado na figura 6.18, é dado por:

$$\bar{q} = q_x \bar{i} + q_y \bar{j} \quad (6.15)$$

em que:

$\bar{q}$: denota o fluxo na direção radial.

$\bar{q}_x$: o fluxo em P na direção x .

$\bar{q}_y$: o fluxo em P na direção y .

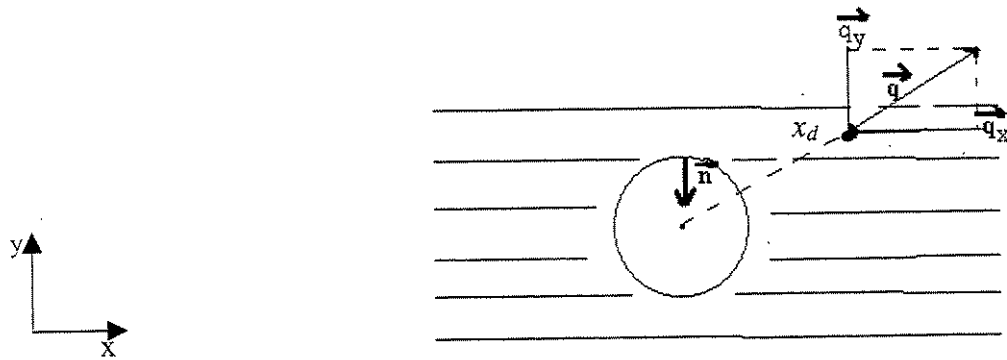


Figura 6.17: Fluxo do cilindro pulsante

A formulação para o fluxo no ponto x_d interno ao domínio é determinado por meio da derivada de (6.3), nas direções x e y , com $c(x_d) = 1$.

Assumindo a notação:

$$\bar{q}_x = \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} \quad (a)$$

$$e \quad \bar{q}_y = \frac{\partial u(x_d)}{\partial y} \quad (b) \quad (6.16)$$

e substituindo (6.16a,b) em (6.15), o fluxo no ponto x_d do domínio, fica dado por:

$$\vec{q} = \frac{\partial u(x_d)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x_d)}{\partial y} \vec{j} \quad (6.17)$$

Lembrando que R_j , e $\overline{R_j}(x, y)$ são definidos em (4.6), e usando a notação dada em (6.16) determinamos então $\bar{q}_x$ e q_y :

$$q_x = \frac{i}{4} \left(\left[\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left([H_0^1(kR)] \right) d\Gamma \right] \frac{\partial u(P, k)}{\partial n} - \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial n} [H_0^1(kR)] \right) d\Gamma \right] u(P, k) \right) \quad (6.18)$$

$$q_y = \frac{i}{4} \left(\left[\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left([H_0^1(kR)] \right) d\Gamma \right] \frac{\partial u(P, k)}{\partial n} - \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial n} [H_0^1(kR)] \right) d\Gamma \right] u(P, k) \right) \quad (6.19)$$

Os primeiros integrandos que aparecem em (6.18) e em (6.19), são facilmente determinados fazendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([H_0^1(kR)] \right) = -k H_1^{(1)}(kR) \frac{(x - x_c)}{R} \quad (6.20)$$

e .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left[H_0^{(1)}(kR) \right] \right) = -k H_1^{(1)}(kR) \frac{(y - y_c)}{R} \quad (6.21)$$

Enquanto que, os dois outros integrandos de (6.18) e (6.19), são determinados como é feito a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(k|x - x_d|) \right] \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[H_0^{(1)}(k|x - x_d|) \right] \right) = k \, n \bullet \nabla \left[H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial x} \right] \quad (6.22)$$

Substituindo (6.21) em (6.19), e (6.22) em (6.18), com $H_1^{(1)}(kR) = -\frac{\partial(H_0^{(1)}(kR))}{\partial kR}$, temos

então o fluxo no ponto x_d , do domínio e na direção x , dado por:

$$q_x = \frac{ik}{4} \left(\left[- \int_{\Gamma} H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial x} d\Gamma \right] \frac{\partial u(x_d, k)}{\partial n} + \int_{\Gamma} \left(n \bullet \nabla \left[\frac{\partial^2 H_0^{(1)}(kR)}{\partial (kR)^2} \frac{\partial R}{\partial x} \right] \right) d\Gamma u(x_d, k) \right)$$

e de modo análogo, conclui-se, que:

$$q_y = \frac{ik}{4} \left(\left[- \int_{\Gamma} H_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial y} d\Gamma \right] \frac{\partial u(x_d, k)}{\partial n} + \int_{\Gamma} \left(n \bullet \nabla \left[\frac{\partial^2 H_0^{(1)}(kR)}{\partial (kR)^2} \frac{\partial R}{\partial y} \right] \right) d\Gamma u(x_d, k) \right)$$

Determinados $\bar{q}_x$ e $\bar{q}_y$, no ponto x_d , do domínio o valor do fluxo, fica definido por meio de:

$$q = \sqrt{(q_x)^2 + (q_y)^2} \quad (6.23)$$

6.7 – O fluxo analítico

O fluxo analítico em pontos do domínio, para um contorno circular de raio a , é determinado, derivando o potencial (6.2), em relação à R , resultando em:

$$\frac{\partial(u(kR))}{\partial(kR)} = q \frac{H_1^{(1)}(kR)}{H_1^{(1)}(ka)} \quad (6.24)$$

Exemplo Numérico: (fluxo nos pontos do domínio)

Com o objetivo de comparar a solução determinada numericamente pelo M.E.C, com a solução dada por (6.24), calculamos, a partir de uma fonte acústica circular pulsante de raio 1 m e condições de contorno dadas por $\frac{\partial u}{\partial n} = 1$ discretizada com 160 elementos, o fluxo em 20 pontos distribuídos aleatoriamente ao redor da mesma, para três diferentes números de ondas.

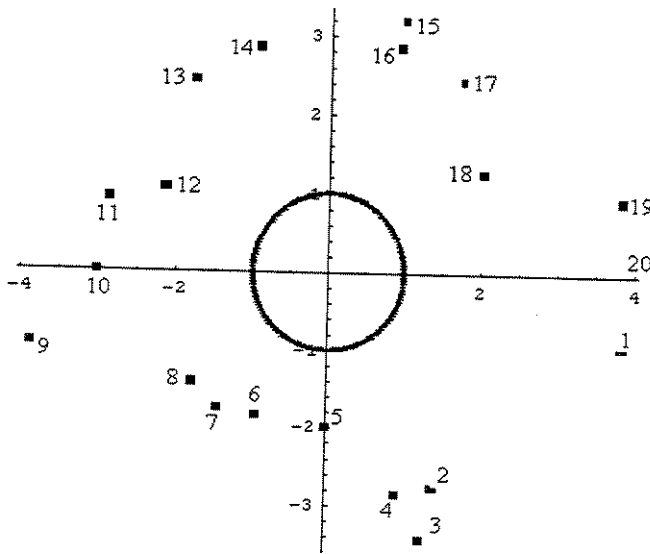


Figura 6.19: Conjunto de pontos ao redor da fonte circular.

Assim nas figuras 6.19 a 6.21, mostramos por meio das curvas numéricas e analíticas, uma comparação das respostas determinadas, do valor absoluto do fluxo em função da posição de cada ponto distribuído ao redor da fonte, especificando o número de onda usado em radianos.

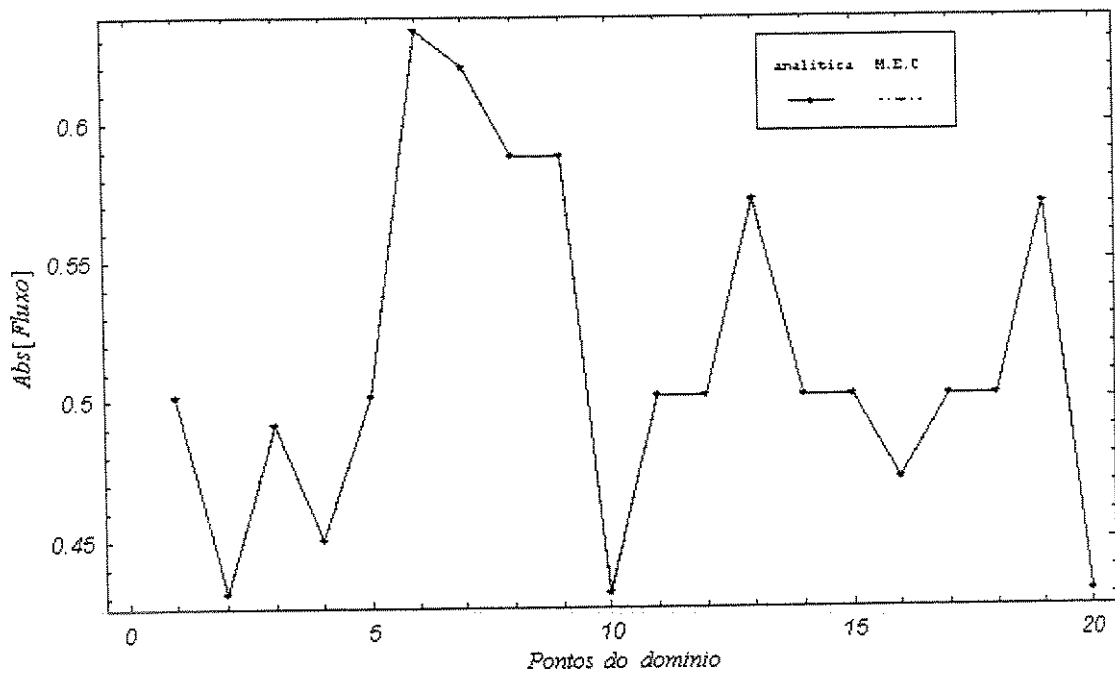


Figura 6.19: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 0.75 \text{ rad}$.

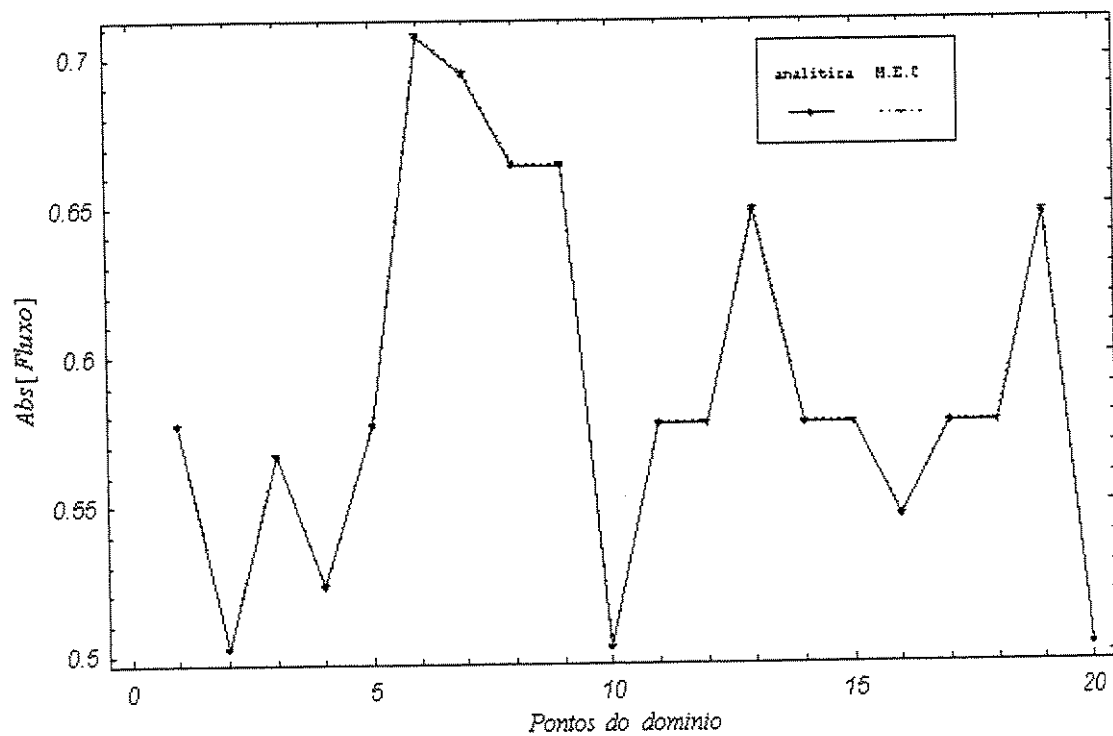


Figura 6.20: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 25.13 \text{ rad}$.

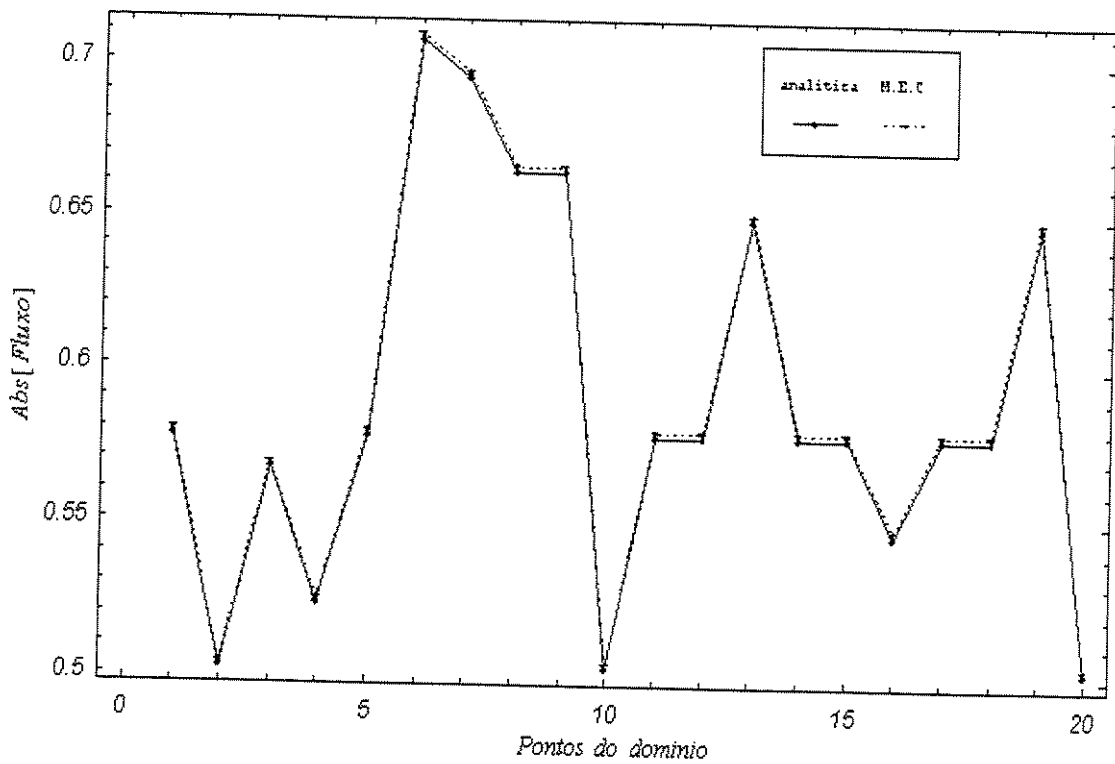


Figura 6.21: Fluxo nos pontos do domínio para $k = 50.26 \text{ rad}$.

6.8 – Problema de valor intermediário:

A nossa proposta aqui, é considerar num campo acústico, o fluxo acústico conhecido em um círculo de raio ξ_1 ao redor de uma suposta fonte acústica figura 6.22 e então a partir do fluxo medido nos pontos do círculo de raio ξ_1 , determinar o potencial em pontos x_d desse mesmo campo acústico, de modo que a distância entre x_d e o centro da fonte seja maior que o raio ξ_1 . Veja que nesse caso nós podemos avaliar o potencial acústico em pontos de um campo acústico sem conhecer o contorno da fonte radiante.

A estratégia de simulação para este problema, foi feita, quando consideramos conhecido o fluxo em 80 pontos de um círculo de raio ξ_1 , de um campo acústico, gerado nesse caso por uma fonte de contorno circular, com raio 1m, discretizado em 80 elementos e condição homogênea de contorno, dada por Neumann, $\frac{\partial u}{\partial n} = 1$.

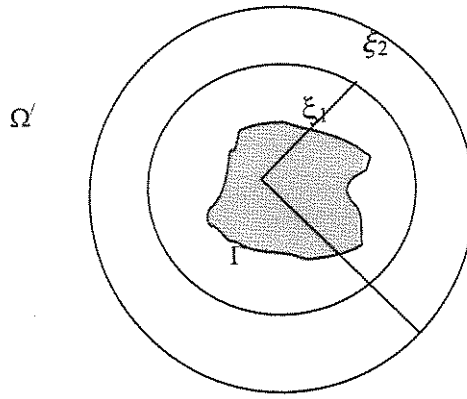


Figura 6.22: O potencial Acústico para o problema valor intermediário.

Conhecido o fluxo no círculo de raio ξ_1 , a partir de (6.3) e (6.11), determinamos o potencial no círculo de raio ξ_2 e a fim de compararmos os resultados, obtidos a partir do círculo de raio ξ_1 , consideramos as condições de contorno de Neumann, no contorno da fonte circular, determinamos só que agora de forma direta o potencial no círculo de raio ξ_2 , e por meio de (6.10).

Considerando a relação $\xi_2 = 2 \xi_1$, com $\xi_1 = 1.25\text{m}, 2.5\text{m}, 5\text{m}, 10\text{m}$, mostramos na tabela 6.4, o erro dado por (6.10), para os números de ondas $k = 2.0, 4.0, 8.0, 16.0$.

Na tabela 6.4, quando fixamos o número de ondas k , devemos lembrar que para o raio $\xi_1 = 1.25\text{m}$, as respostas do potencial estão sendo comparadas em $\xi_2 = 2.5\text{m}$, de modo análogo se $\xi_1 = 2.5\text{m}$, as respostas do potencial estão sendo comparadas para $\xi_2 = 5.0\text{m}$ e assim sucessivamente. Observando os resultados mostrados nesta tabela, eles indicam, nesse caso que o círculo de raio ξ_1 deve ser tomado próximo ao contorno da fonte.

Tabela 6.4: Erro no Cálculo do Potencial para o Problema Intermediário.

$k \backslash \xi_1$	1.25m	2.5m	5.0m	10.0m
2.0	0.32 %	0.11%	0.024%	0.09%
4.0	0.11%	0.022%	0.10%	7.20%
8.0	0.22%	0.09%	7.64%	23.2%
16.0	0.10%	7.21%	23.0%	38.3%

Nas figuras 6.23a-d, mostramos respectivamente para os números de ondas $k = 2.0, 4.0, 8.0, 16.0$, a aproximação entre o potencial medido em ponto de ξ_2 , de forma indireta a partir do fluxo conhecido em 80 pontos do círculo de raio $\xi_1=1.25m$, com o potencial medido de forma direta a partir do contorno da fonte.

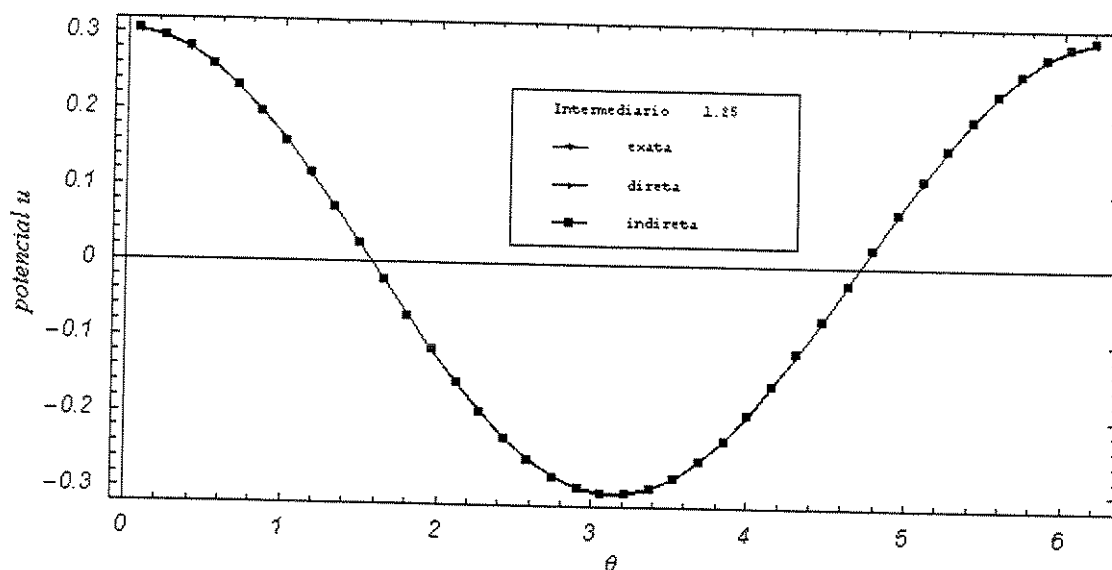


Figura 6.23a: Problema Intermediário $ka = 2.0$

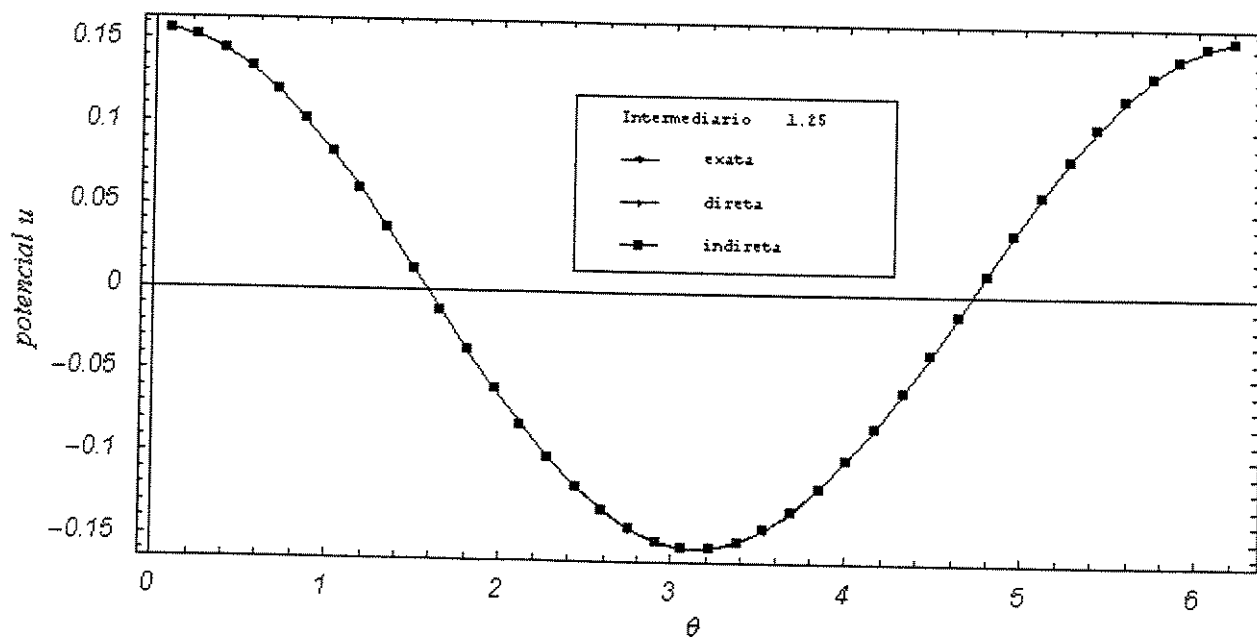


Figura 6.23b: Problema Intermediário $ka = 4.0$

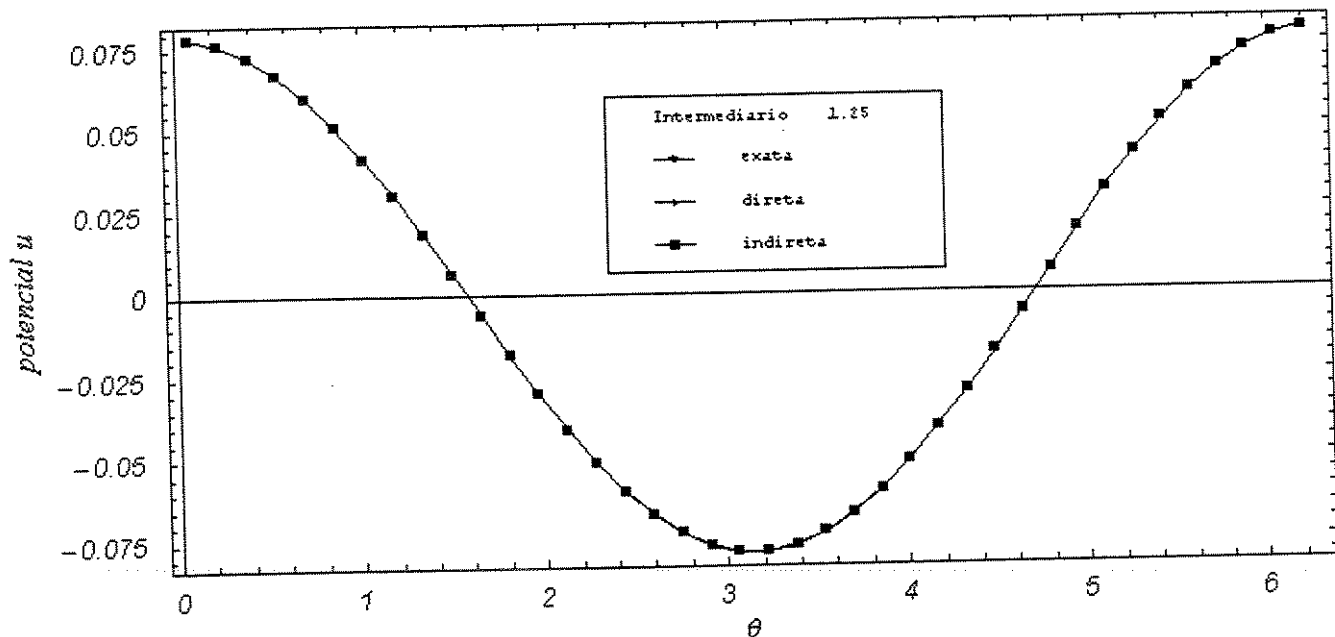


Figura 23c: Problema Intermediário $ka = 8.0$

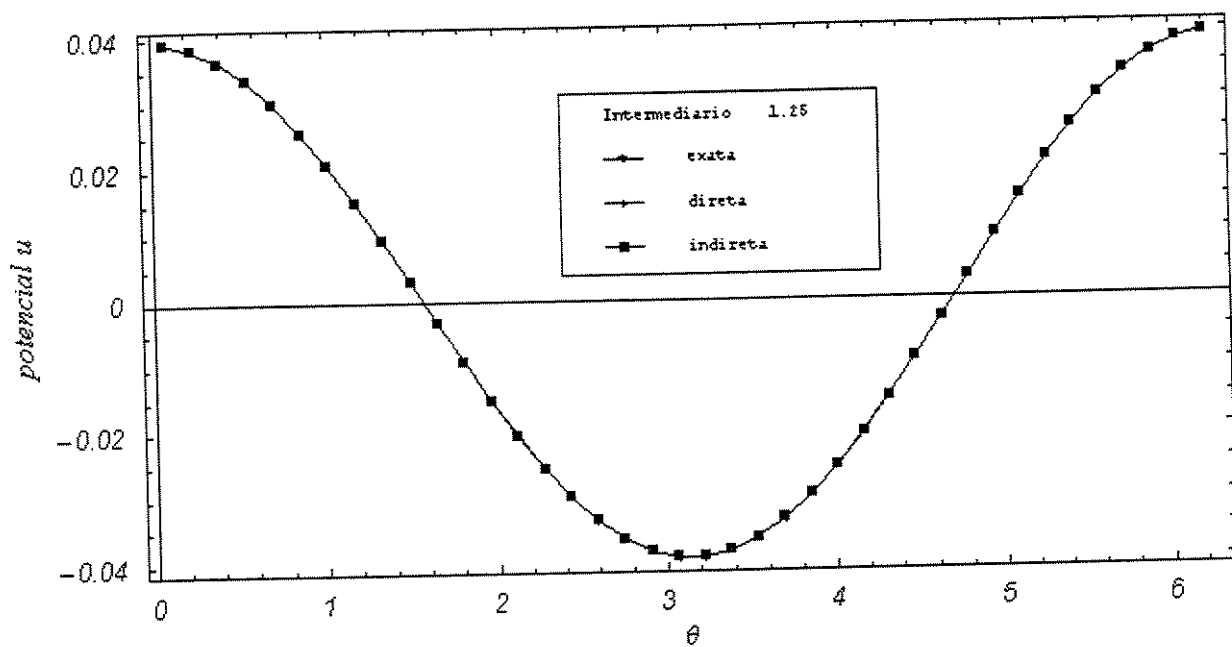


Figura 23d: Problema Intermediário $ka = 16.0$

Como podemos observar na tabela 6.4, o erro aumenta na medida em que o número de onda cresce e o raio distancia do contorno do cilindro, como mostramos na figura 6.24a-b, para $ka = 4$ se o raio $\xi_1 = 5$ m o erro é de 0.09% (figura 24a), para o raio $\xi_1 = 10$ m, o erro é de 7.21% (figura 24a), enquanto que na figura 25, para $ka = 8.0$ e o raio $\xi_1 = 5$ m, o erro é de 7.65%.

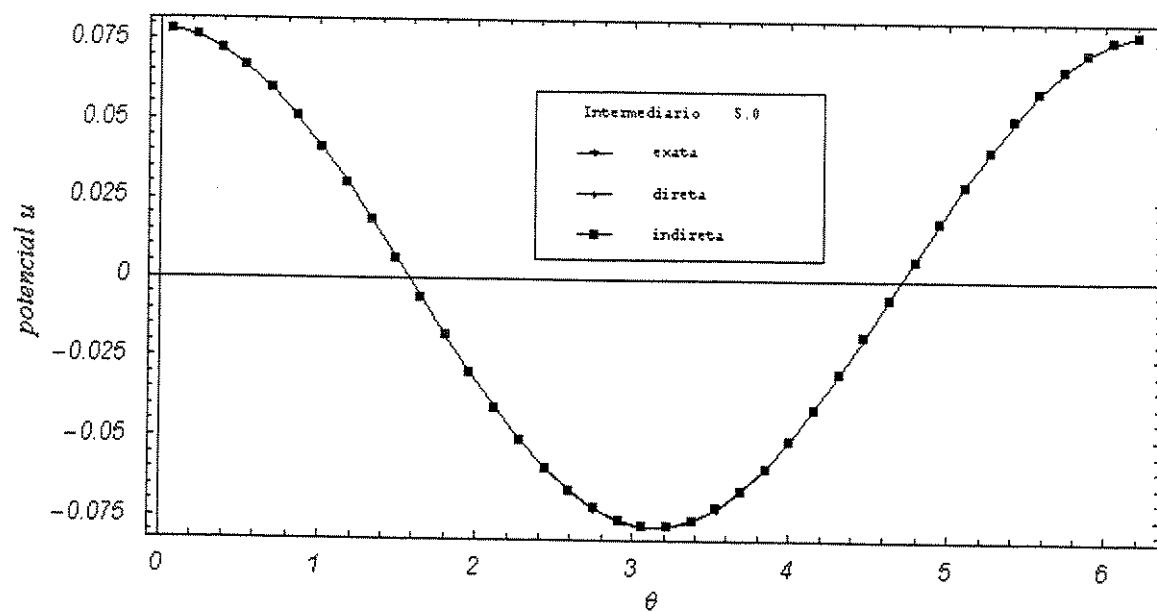


figura 24a : Problema Intermediário $ka = 4.0$ e $\xi_1 = 5.0\text{m}$

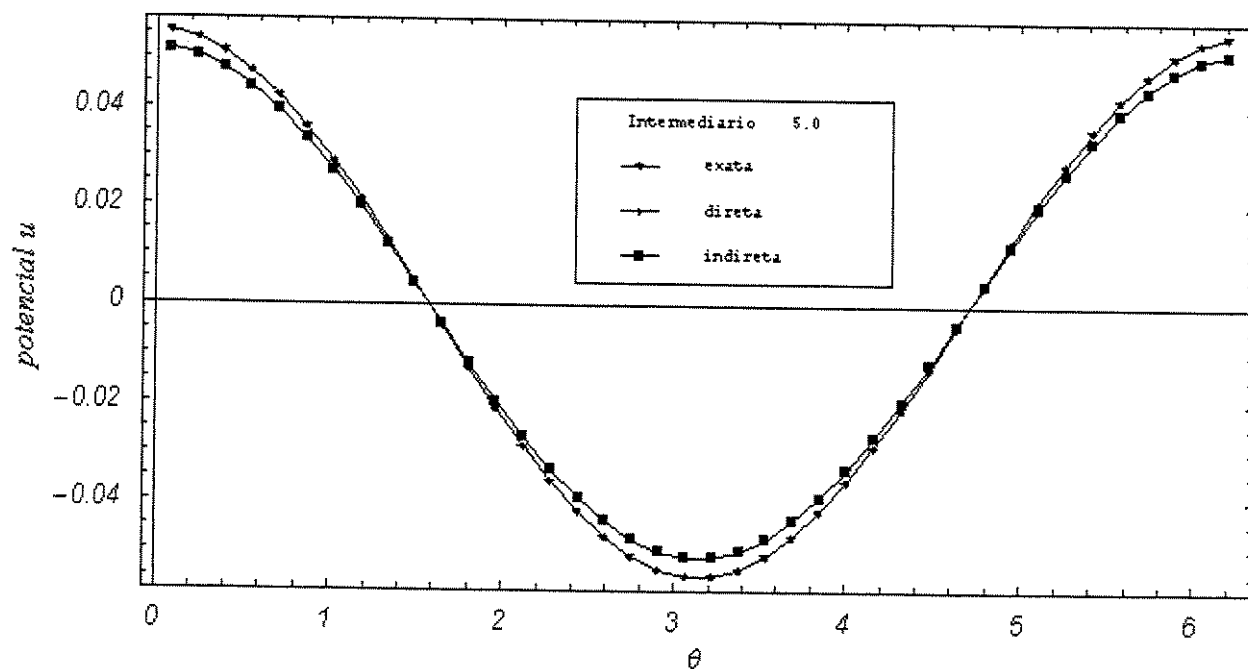


Figura24b: Problema Intermediário $ka = 4.0$ e $\xi_1 = 10.0\text{m}$

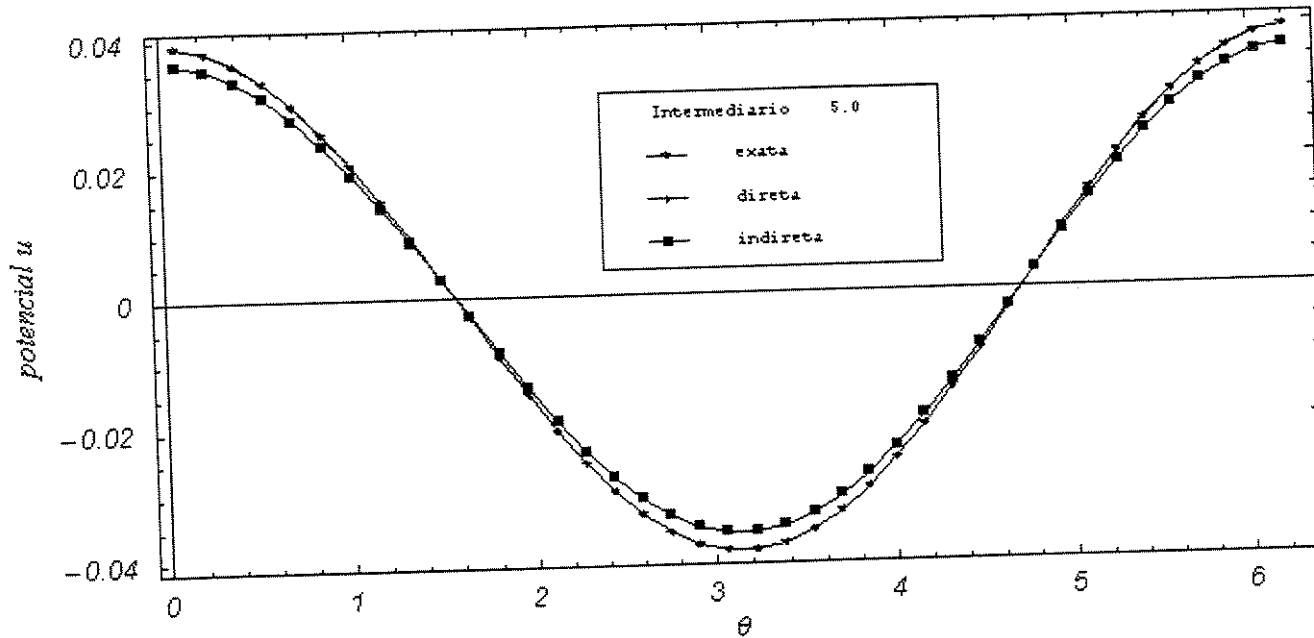


figura 25: Problema Intermediário $ka = 8.0$ e $\xi_1 = 5.0m$

6.9 – Conclusão do capítulo

Neste capítulo analisamos o problema de radiação acústica, utilizando o MEC. Fizemos uma implementação computacional do método e simulações foram feitas considerando uma fonte circular tanto no caso estacionário como não estacionário. As respostas numéricas foram obtidas em termos do potencial e do fluxo calculados tanto no contorno como em pontos do domínio. Uma comparação com a resposta analítica mostrou excelente concordância. Um ponto importante nesta análise foi que é possível calcular o potencial em pontos do domínio acústico sem que a geometria da fonte radiante seja conhecida. Finalmente salientamos que o problema valor intermediário, ou seja aquele em que o potencial em pontos do domínio é calculado a partir do conhecimento do fluxo no próprio domínio, nos apresentou resultados satisfatórios.

Capítulo 7

Espalhamento de ondas

7.1-Introdução

Quando uma onda plana, colide com um obstáculo, desviando sua direção de seu percurso original, ocorre o que denominamos de espalhamento de ondas. Neste capítulo, estudaremos o caso de espalhamento de onda, tomando como exemplo numérico, o caso de uma onda plana propagando na direção perpendicular ao eixo de um cilindro e atingindo a superfície do mesmo.

No exemplo, a parede do cilindro é considerada rígida, causando uma reflexão, ou um espalhamento da onda incidente. Do ponto de vista da metodologia de análise, o campo final, resultante do espalhamento está associado a um potencial de velocidade total u^T . O campo incidente é associado ao potencial u^I . A diferença entre o campo total e o campo incidente, chama-se de campo de espalhamento e está associado ao potencial de velocidade u^S .

7.2 – O Potencial de espalhamento analítico, para o caso do cilindro.

O potencial de espalhamento acústico u^S , para pontos no domínio Ω , a partir do cilindro de paredes rígidas e raio a é dado por uma série de n termos [Astley-1994]:

$$\frac{u^S(R, \theta)}{u^I} = U \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \left\{ \frac{J'_n(k a) H_n(k R)}{H'_n(k a)} \right\} \cos(n\theta); \quad (7.1)$$

em que:

U : é a amplitude da onda e,

$\varepsilon_n = 1$, se $n = 0$, e $\varepsilon_n = 2$, se $n \neq 0$.

J'_n : A derivada da função de Bessel de ordem n .

$H_n(kR)$: Função de Hankel de ordem n .

$H'_n(kR)$: Derivada da função de Hankel de ordem n .

R : distância entre ponto $x_d \in \Omega$ e o eixo do cilindro.

a : raio do cilindro

θ : Ângulo de vértice sobre o eixo do cilindro, formado entre as retas, na direção perpendicular ao eixo do cilindro e o segmento de reta na direção radial, que une o vértice ao ponto x_d .

Se em (7.1), tomarmos $R = a$, então a solução analítica é dada em pontos do contorno do cilindro.

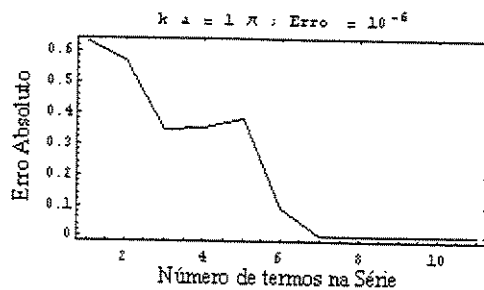
Como a solução analítica (7.1) é determinada por meio de termos de uma série, torna-se necessário analisar o número mínimo de termos da série que permite verificar a convergência da série, para a solução do problema em diferentes ka . Nesse sentido, vamos considerar como sendo o número mínimo de termos, o valor de n , para o qual o erro absoluto (7.2), entre dois termos consecutivos, na expansão da série seja menor que 10^{-6} .

$$e_{abs} = |a_n - a_{n-1}| \quad (7.2)$$

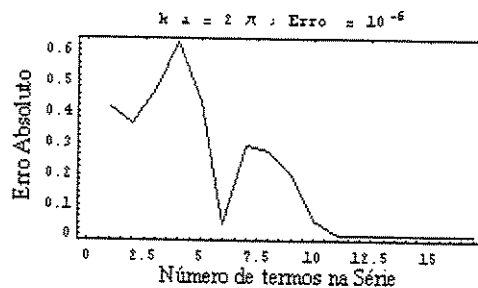
em que:

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \left\{ \frac{J'_n(ka) H_n(kR)}{H'_n(ka)} \right\} \cos(n\theta) \quad (7.3)$$

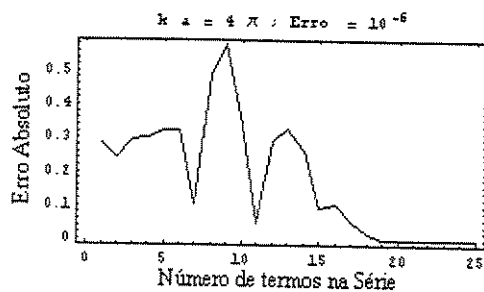
Nos gráficos das figuras 7.1a-f, estão representados os erros absolutos exigidos em função do número mínimo de termos da série que satisfazem a condição imposta, para cada um dos valores de ka : 1π , 2π , 4π , 6π , 8π , 10π radianos, quando em (7.3) $R = a$ ($a = 0.8$).



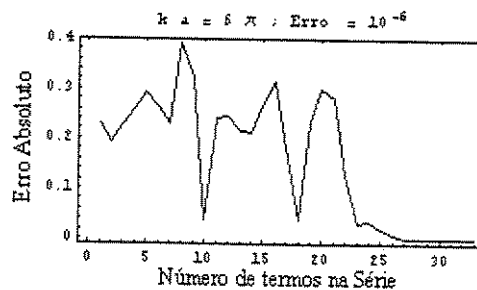
(a)



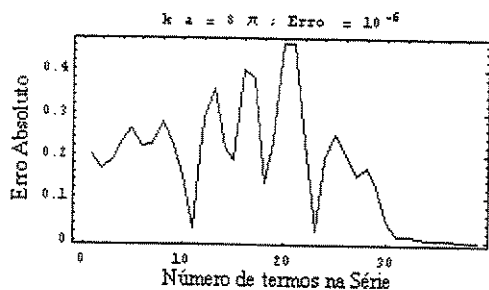
(b)



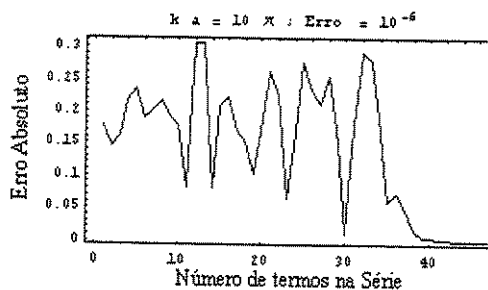
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 7.1: Convergência da solução analítica

Dos resultados mostrados nas figuras 7.1a-f, podemos garantir que a solução analítica (7.1) é confiável, quando asseguramos o número mínimo de termos na série, para os diferentes valores de ka , dados na tabela 7.1.

Tabela 7.1: Números mínimo de termos na Série

ka	1π	2π	4π	6π	8π	10π
Número mínimo de termos na série	11	17	25	33	39	47

7.3 - Formulação do M.E.C para o Espalhamento

Seja uma superfície cilíndrica circular e de paredes rígida imersa em um meio, através do qual, uma onda plana propaga-se em direção perpendicular ao eixo do cilindro e o atinja, como é mostrado na figura 7.2.

O potencial de velocidade total u^T , como foi mencionado pode ser escrito como a composição do potencial incidente u^I e do potencial de espalhamento u^S de tal modo que:

$$u^T = u^I + u^S \quad (7.5)$$

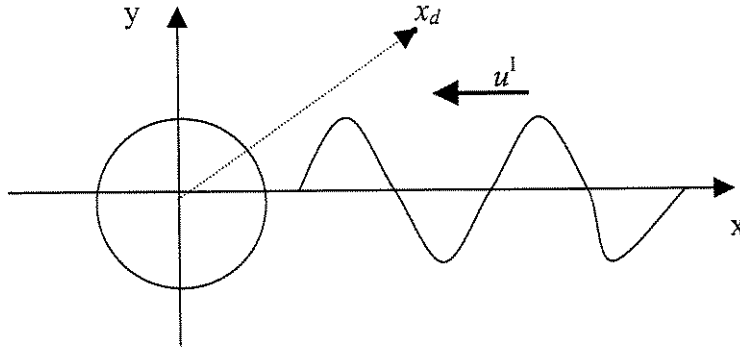


Figura 7.2: Potencial Total

Dado um ponto $x_d \in \Omega$ e $x \in \Gamma_S$, a Equação Integral de Contorno dada em (4.1), reescrita para o potencial acústico u^T (7.5), é descrito por:

$$c u^T(x_d) = \int_{\Gamma} u^*(x, x_d) \frac{\partial u^T}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} u^T d\Gamma \quad (7.6)$$

Decompondo o potencial total u^T em potencial incidente u^I e de espalhamento u^S temos:

$$c(u^s(x_d) + u^l(x_d)) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) \partial\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^s \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^l}{\partial n} \right) \partial\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^l \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (7.7)$$

com o potencial incidente $u^l(x_d)$, dado por [W.S.Hall]:

$$u^l(x_d) = U e^{ikR} \quad (7.8)$$

em que :

$$R = |x - x_d|, \text{ com } x \in \Gamma \text{ e } x_d \in \Omega$$

Desse modo, é importante observar que, o potencial do campo incidente é conhecido, bem como o valor de suas derivadas no contorno Γ . Desta forma todas as grandezas que incluem u^l , são conhecidas, logo a equação (7.7) pode ser reescrita por:

$$c u^s(x_d) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) \partial\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^s \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) d\Gamma + Z \quad (7.9)$$

em que:

$$Z = \int_{\Gamma} \left(u^l \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) \partial\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^l}{\partial n} \right) d\Gamma - c u^l(x_d) \quad (7.10)$$

Assumindo que o potencial de onda incidente é dado por (7.8) e lembrando que a solução fundamental do operador 2D de Helmholtz, dado (2.54) é expresso por:

$u^*(x, x_d) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR)$, podemos determinar Z , pois $\frac{\partial u^I}{\partial n}$, é dado por:

$$\frac{\partial u^I}{\partial n} = n \frac{\partial u^I}{\partial R} = n \frac{\partial u^I}{\partial x} = i k U e^{ikx} = i k u^I \quad (7.11)$$

Substituindo (7.8), (7.11) em (7.10), e organizando seus termos convenientemente, encontramos:

$$z = u^I \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} d\Gamma - i k \int_{\Gamma} u^*(x, x_d) d\Gamma - c(x_d) \right] \quad (7.12)$$

O potencial de espalhamento u^S , fica determinado em qualquer ponto x_d de Ω , substituindo (7.12) em (7.9), reduzido-a um sistema matricial de equações como faremos a seguir: Considerando uma discretização em ne elementos no contorno Γ , e definindo:

$$\bar{h}(i, j) = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, x_d, k)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (a) \quad (7.13)$$

$$g(i, j) = \sum_{i \neq j, j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d, k) d\Gamma_j \quad (b) \quad (7.13)$$

então para $i = 1, \dots, ne$, podemos escrever (7.12) na forma discretizada por:

$$z_i(x_d) = u^I \left[\left(\sum_{i \neq j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} d\Gamma_j - c_i(x_d) \right) - i k \sum_{i \neq j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^*(x, x_d) d\Gamma_j \right] \quad (7.14)$$

e considerando que para $i = j$, o valor do coeficiente c é dado por (43.48) e $g(i, j)$ dado por (4.31), podemos substituir (7.13) em (7.14) obtendo o vetor $\{z_i(x_d)\}$:

$$z_i(x_d) = u' \left(\left(\bar{h}(i, j) \right) - [I]c_i(x_d) \right) - i k [g(i, j)]$$

onde $[I]$ é a matriz identidade de dimensão ne , e para:

$$[G] = [g(i, j)] \text{ e } [Y] = \left(\bar{h}(i, j) \right) - [I]c_i(x_d) \quad (7.15)$$

reescrevemos (7.14) como:

$$\{z_i(x_d)\} = u' ([Y] - i k [G]) \quad (7.16)$$

reescrevendo (7.9) na forma:

$$\left(c_i(x_d) + \sum_{i \neq j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} \left(u^s \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) d\Gamma \right) u^s = \sum_{i \neq j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} (u^*(x, x_d)) d\Gamma \frac{\partial u^s}{\partial n} + z_i(x_d) \quad (7.17)$$

e agora fazendo: $\{W\} = \{z_i(x_d)\}$, $[G] = [g(i, j)]$ e $[H] = \left(\bar{h}(i, j) \right) + [I]c_i(x_d)$, (7.17) fica reescrita por:

$$[H] \{u^s\} = [G] \left\{ \frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}} \right\} + \{W\} \quad (7.18)$$

como em problemas envolvendo o M.E.C, parte da variável u^s é conhecida e a outra parte incógnitas, o mesmo ocorrendo para $\left\{ \frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}} \right\}$, uma troca das variáveis conhecidas com as respectivas colunas de $[H]$ e $[G]$, deixa escrito (7.18) por um sistema matricial da forma:

$$[A] \{X\} = [B] \{Y\} + \{W\}$$

ou ainda efetuando o produto $[B] \{Y\} = \{K\}$:

$$[A]\{X\} = \{K\} + \{W\}$$

ou

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (7.19)$$

A solução de (7.19) nos dá o potencial de espalhamento no contorno da fonte.

7.4 - O potencial acústico de espalhamento em pontos do contorno para o cilindro de paredes rígidas.

Neste trabalho, vamos considerar uma superfície cilíndrica de paredes rígidas e portanto segundo [Morse-1953] o gradiente do potencial de velocidade total u^T , na direção do vetor normal é zero em todo o contorno Γ_s isto é:

$$\nabla u^T \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u^T}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

$$\frac{\partial u^T}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial (u^s + u^i)}{\partial \mathbf{n}}$$

e portanto a condição de contorno empregada no caso do cilindro de paredes rígidas é:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} \quad (7.20)$$

Assim substituindo a condição de contorno (7.20) em (7.9) e calculando Z em (7.12) para $u^i(x_d)$ dado em (7.8), verificamos facilmente que uma discretização no contorno do cilindro permite escrever a Equação Integral de Contorno (7.9), num sistema matricial dado por:

$$[H]\{u^s\} = [G]\left\{\frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}}\right\} + \{W\} \quad (7.21)$$

ou ainda:

$$[H]\{u^s\} = [G]\left\{\frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}}\right\} + \{W\}$$

$$[H]\{u^s\} = F \quad (7.22)$$

$$\text{em que } F = [G]\left\{\frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}}\right\} + \{W\}$$

A solução do sistema matricial (7.22), permite determinar o potencial de espalhamento acústico u^s em pontos do contorno do cilindro de paredes rígidas.

7.5 – Validação numérica.

Vamos considerar a implementação de (7.22), quando é simulado o caso de um cilindro, inserido no meio ar ($c_0 = 345\text{m/s}$) de raio $a = 0.8\text{m}$ e paredes rígidas ($\frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}}$). É atingindo, por uma onda plana incidente, propagando na direção perpendicular ao eixo do mesmo como mostrado na figura 7.2. Para que possamos comparar as respostas numéricas determinadas por meio de (7.16), com a solução do problema dada em (7.1), consideraremos no contorno do cilindro Γ_s , as discretizações dadas na tabela 7.2 para os diferentes valores de ka , dados na tabela 7.1, ($ka = \pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi$).

Tabela 7.2: Discretização sobre o contorno do Cilindro.

Discretizações	Número de Elementos (ne)
Malha-1	32
Malha-2	64
Malha-3	128
Malha-4	256
Malha-5	512

As respostas numéricas obtidas, devido a implementação de (7.22), para as discretizações dadas na tabela 7.2, e os diferentes valores de ka são comparadas com a solução analítica (7.1), através do erro e^S definido por:

$$e^S = \frac{|u_A^S - u_N^S|}{\max\{u_A^S, u_N^S\}} \quad (7.23)$$

em que:

u_A^S : potencial de espalhamento analítico.

u_N^S : potencial de espalhamento numérico obtido por (7.22).

$\max\{u_A^S, u_N^S\}$: Máximo entre u_A^S e u_N^S .

Com esses resultados mostrados na tabela (7.3), onde na primeira linha estão dispostas as discretizações do contorno Γ_S e na primeira coluna os valores de ka , enquanto que no cruzamento (linha x coluna), é apresentado o máximo do erro e^S determinado por (7.22), quando comparamos o potencial em cada um dos nós no contorno Γ_S .

Considerando o potencial de espalhamento u^S , em cada um dos nós no contorno do cilindro, e a posição de cada um desses nós representado por θ/π , e $\theta = i \frac{2\pi}{ne}$, $i = 1, 2, \dots, ne$, mostramos

por meio das figuras 7.3a-c, uma ilustração da convergência da solução, para cada valor de ka , do potencial de espalhamento u^s em função do ângulo $\frac{\theta}{\pi}$.

Tabela 7.3: Erro do Potencial de Espalhamento u^s

$ka \backslash ne$	32	64	128	256	512
π	0.66%	0.11%	0.04%	0.01%	0.002%
2π	2.18%	0.58%	0.15%	0.04%	0.01%
4π	11.1%	2.5%	0.64%	0.16%	0.04%
6π	29.1%	13.1%	2.8%	1.45%	0.40%
8π	54.9%	12.4%	2.7%	0.67%	0.22%
10π	85.5%	27.8%	5.28%	1.60%	0.41%

O comportamento de convergência da resposta numérica em relação a solução do problema dada (7.1), para $ka = 4\pi$ e a discretização referente à malha-2, é dada na figura 7.3a.

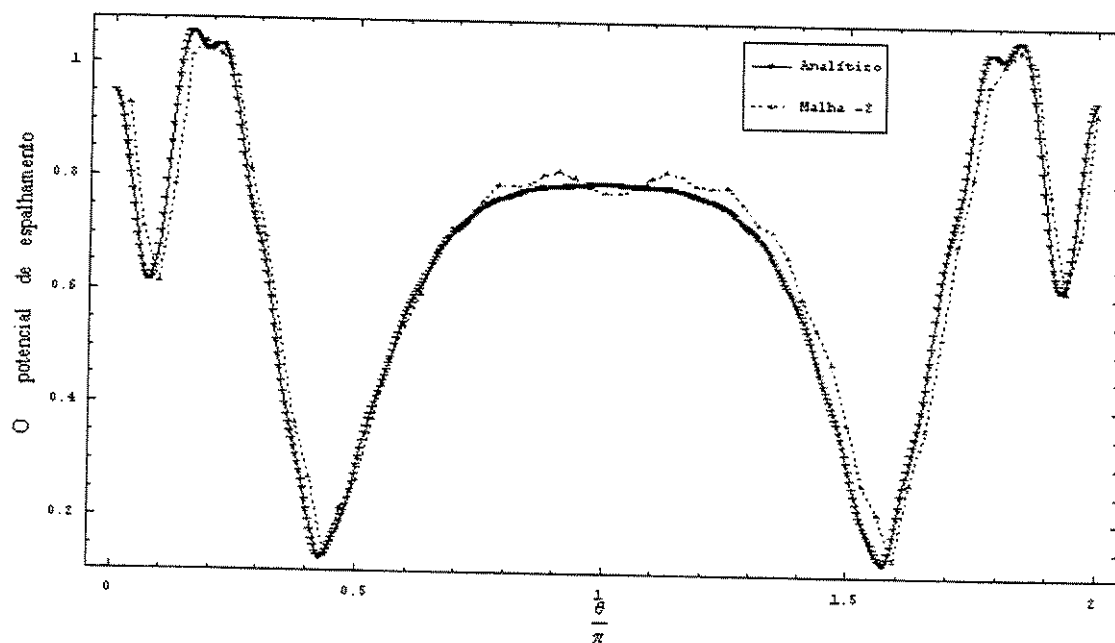


Figura 7.3a

Enquanto que nas figuras 73b-c, é mostrado o comportamento de convergência da resposta numérica em relação a solução do problema dado em (7.1), para $ka = 4\pi$ e a discretização referente a malha-3 e malha-4.

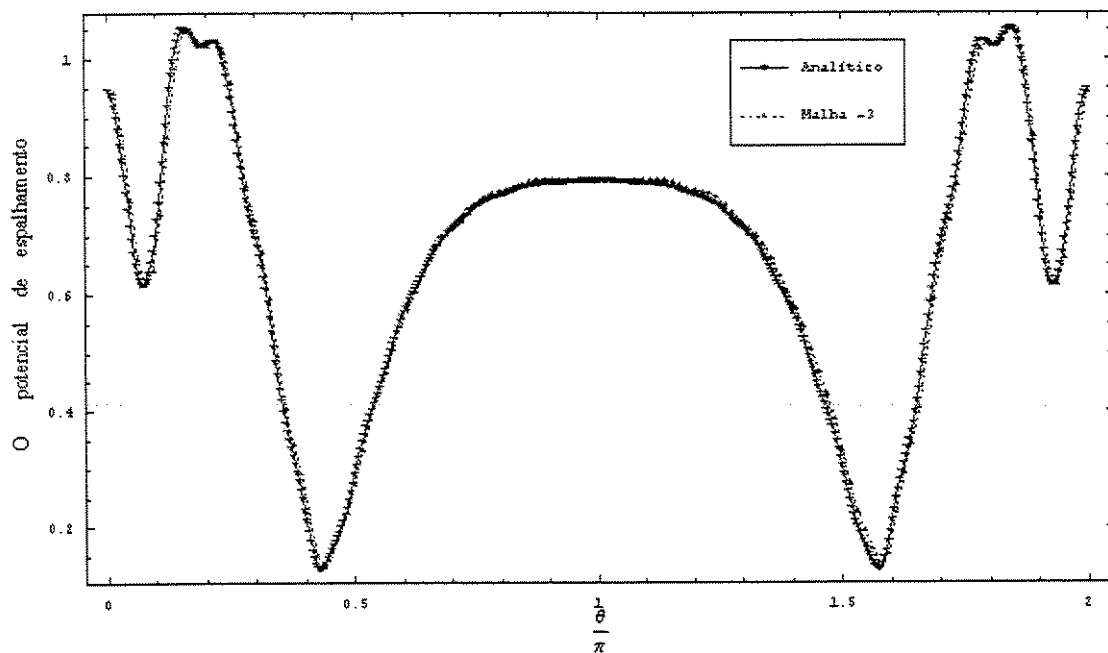


figura7.3b

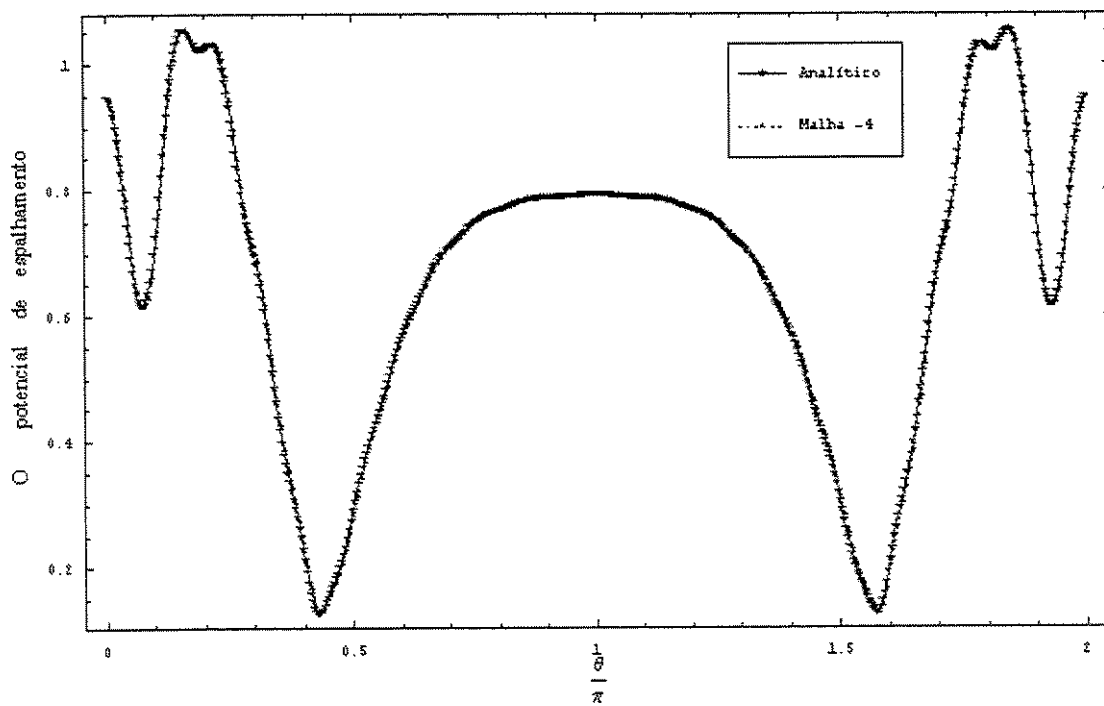


figura7.3c

A convergência da resposta numérica obtida pela implementação de (7.22), requer, para a solução dos problemas maiores discretizações no contorno do cilindro, para maiores valores de ka . Isto foi o que garantiu os resultados da tabela 7.3, pois podemos observar que o erro e^s diminui na medida em que o número de elementos ne aumenta através da discretizações no contorno do cilindro.

7.6 Espalhamento de ondas em pontos do campo acústico.

O potencial de espalhamento acústico em pontos ao domínio Ω' (domínio exterior ao cilindro), é determinado a partir de (7.9), quando adotamos $c = 1$, deixando-a escrita por:

$$u^s(x_d) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) \partial \Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^s \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) d\Gamma + Z \quad (7.24)$$

com Z dado por:

$$Z = \int_{\Gamma} \left(u^i \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} \right) \partial \Gamma - \int_{\Gamma} \left(u^*(x, x_d) \frac{\partial u^i}{\partial n} \right) d\Gamma - u^i(x_d)$$

Considerando para o cilindro de raio $a = 0.8\text{m}$, de paredes rígidas, inserido no meio ar com $c_0 = 345\text{m/s}$ e as discretizações em seu contorno, que asseguraram o erro menor que 1%, conforme visto na tabela 7.3, para os valores de $ka = \pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi$, uma implementação de (7.24) é feita, quando consideramos os pontos do campo acústico distribuídos, num círculo de raio igual a $5a$ e por meio por meio de um gráfico bidimensional, mostramos nas figuras 7.4a-f o comportamento entre a curvas da solução numérica obtida por (7.24) e a solução analítica determinada por (7.1), onde as coordenadas do potencial de espalhamento são projetadas sobre os eixos coordenados, com $x = \left| \frac{u^s}{u^i} \right| \cos(\theta)$, e $y = \left| \frac{u^s}{u^i} \right| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo formado entre a direção de propagação da onda incidente, e o ponto de campo (x_d) , como é feito em [Yoon-1990].

Assim nas figuras 7.4a-b, para uma discretização de 64 elementos no contorno do cilindro, mostramos respectivamente para $ka = \pi$, 2π , o comportamento das curvas de resposta numérica e de solução analítica.

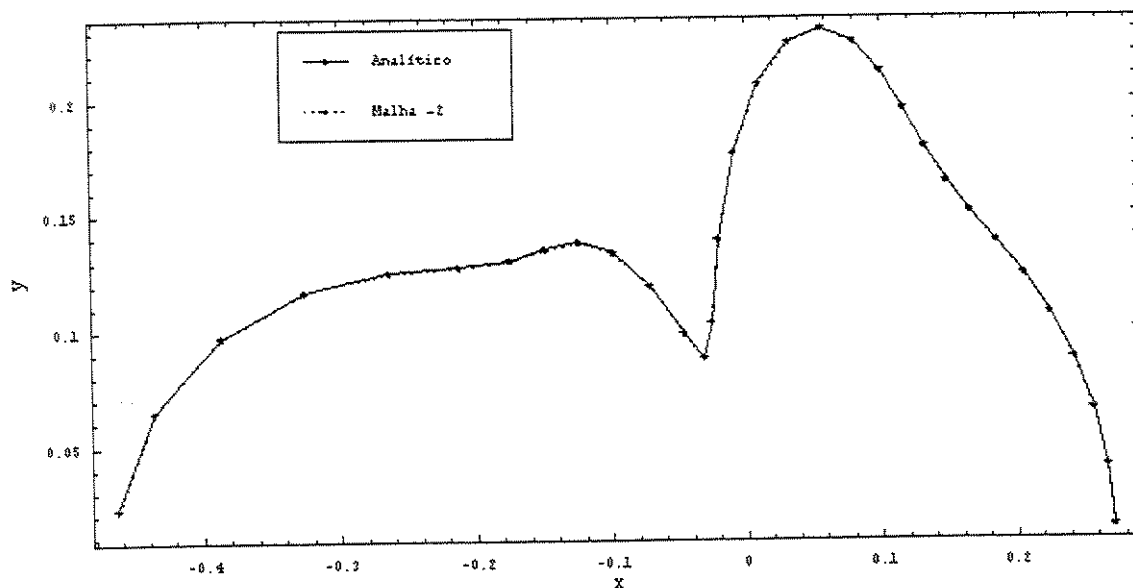


Figura 7.4a: Campo do potencial de espalhamento: $ka = \pi$

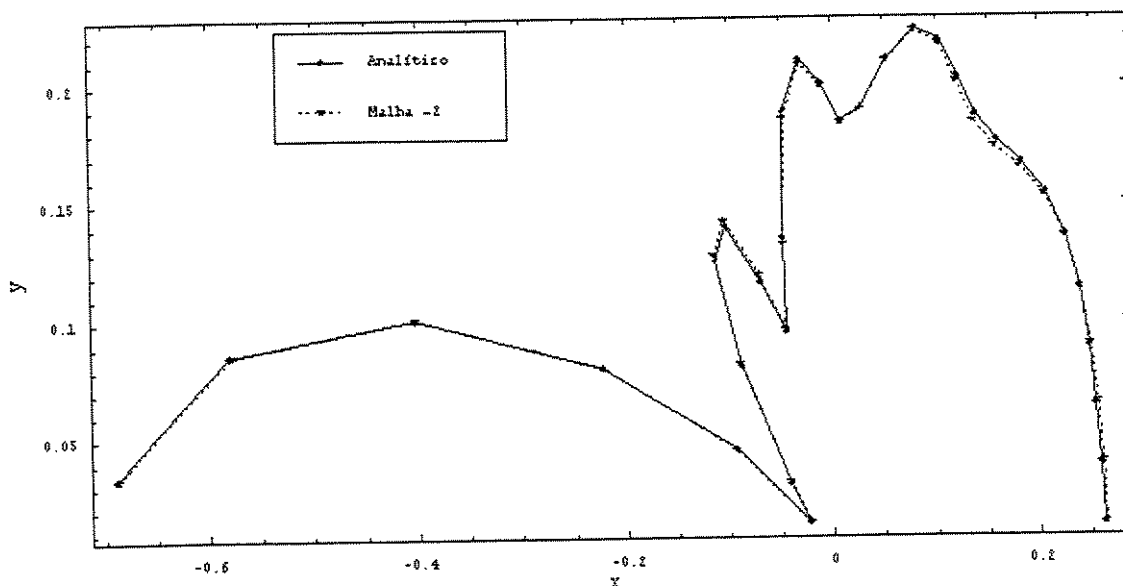


Figura 7.4b: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 2\pi$

Já na figura 7.4c-d, são mostradas as curvas referentes a resposta numérica (7.14) e a solução analítica (7.1), respectivamente para $ka = 4\pi$ e 8π , quando a discretização é de 256 elementos no contorno do cilindro satisfazendo o erro menor que 1% na tabela 7.3.

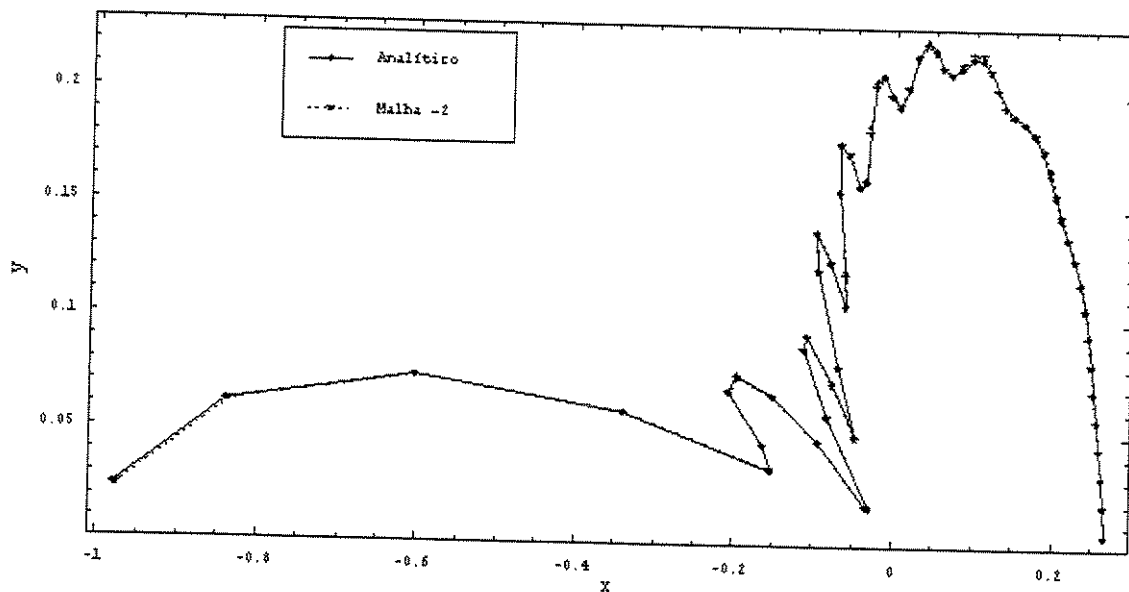


Figura 7.4c: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 4\pi$

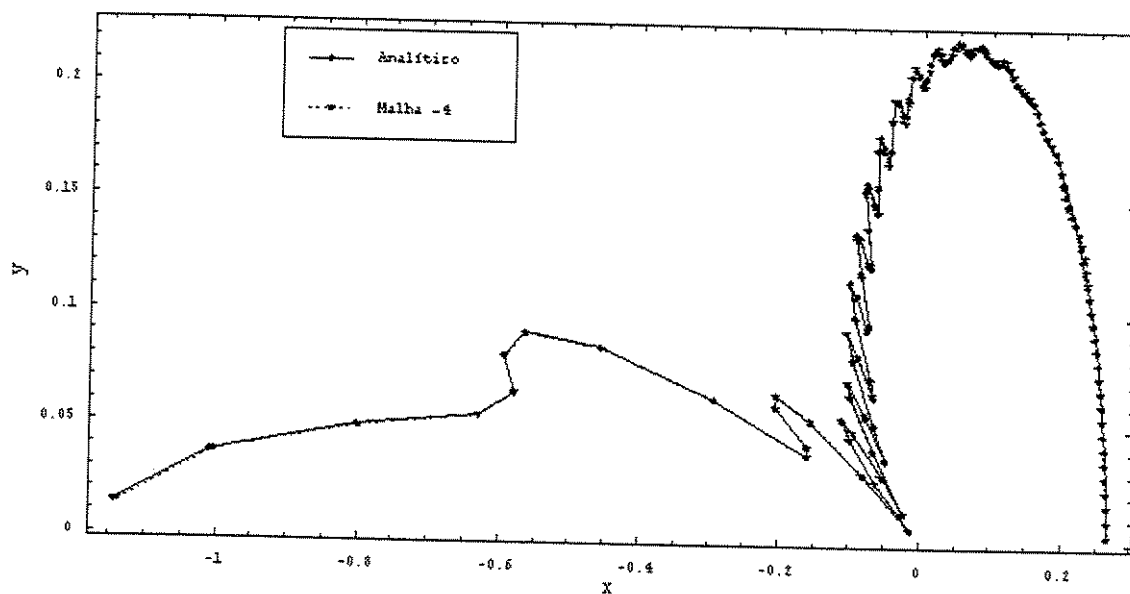


Figura 7.4c: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 8\pi$

Enquanto que para $ka = 6\pi$ e 10π a discretização de 512 elementos, garantiu o erro menor de 1% no contorno do cilindro, assim nas figuras 7.4e-f, são mostradas essas comparações entre as curvas.

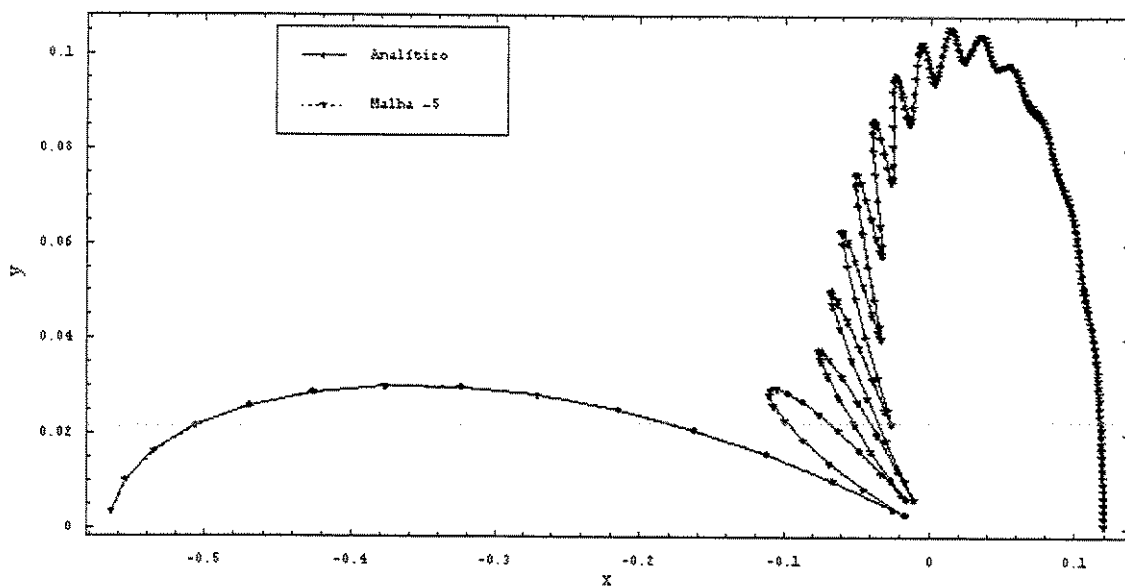


Figura 7.4e: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 6\pi$

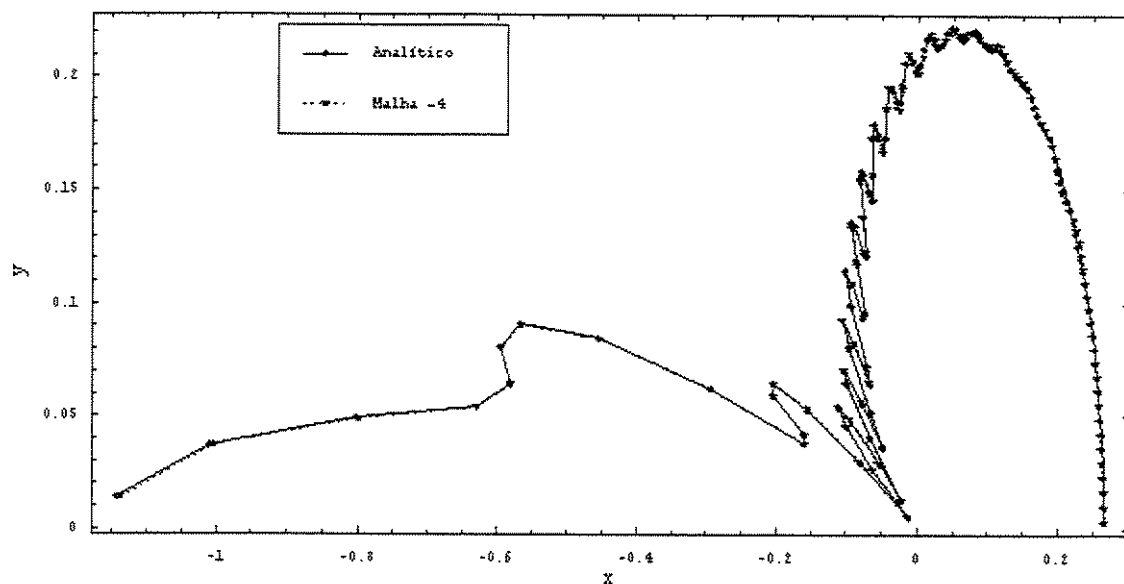


Figura 7.4f: Campo do potencial de espalhamento: $ka = 10\pi$

O erro determinado por (7.23), para os pontos no círculo de raio $5a$, mostrado nas figuras 7.4a-f, é destacado na tabela 7.4, na linha erro no domínio, para os diferentes valores de ka e as respectivas discretizações, que asseguraram o erro menor que 1% no contorno do cilindro, e para essas mesmas discretizações, repetimos na tabela 7.4 o erro dado na tabela 7.3, no contorno do cilindro.

Tabela 7.4: Erro do Potencial de espalhamento u^S no domínio

	Discretização: 64 elem		Discretização: 256		Discretização: 512	
	ka		ka		ka	
	π	2π	4π	8π	6π	10π
Erro no contorno ($a = 0.8m$)	0.11%	0.58%	0.16%	0.67%	0.40%	0.41%
Erro no domínio ($R = 5a$)	0.10%	0.38%	0.53%	0.70%	0.60%	0.65%

Comparando o erro do domínio com o erro no contorno do cilindro mostrado na tabela 7.4, podemos verificar que os resultados de boa qualidade no contorno produziram bons resultados também nos pontos do domínio para o círculo de raio $5a$. Esse fato repetiu para outros raios do círculo no campo acústico, por exemplo para um círculo de raio $100a$ e uma discretização de 64 elementos no contorno do cilindro com $ka = 2\pi$, o erro verificado foi de 0.34%, como podemos ver na figura 7.5. O mesmo ocorre quando consideramos um círculo de raio $18a$, com $ka = 8\pi$ e uma discretização de 256 elementos no contorno, o erro medido é de 0.59%, como mostra a figura 7.6.

Considerando ainda a discretização de 256 elementos no contorno do cilindro de raio $a = 0.8m$ e $ka = 8\pi$, o raio do círculo no campo acústico igual a $27.5a$, o erro apresentado é de 4.49%, o que pode ser visto na figura 7.7 e o erro aumenta na medida em que o raio aumenta, este fato garante um limite Máximo para o tamanho do raio do círculo no campo acústico, para cada valor de ka .

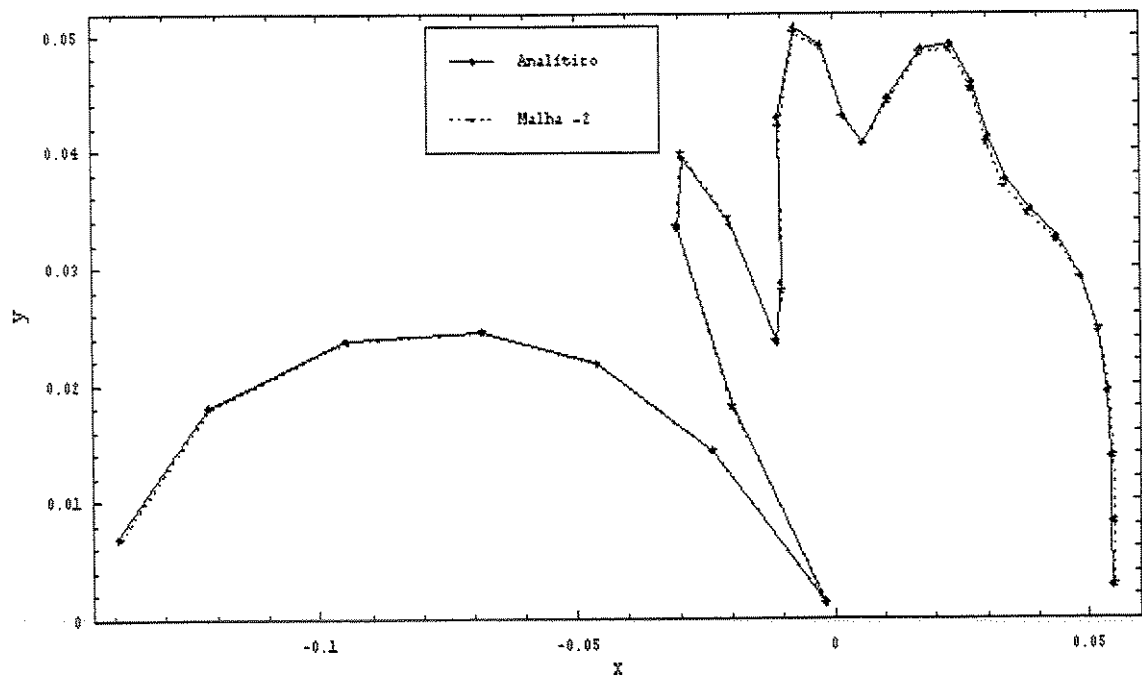


Figura 7.5: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $100a$ e $ka = 2\pi$.

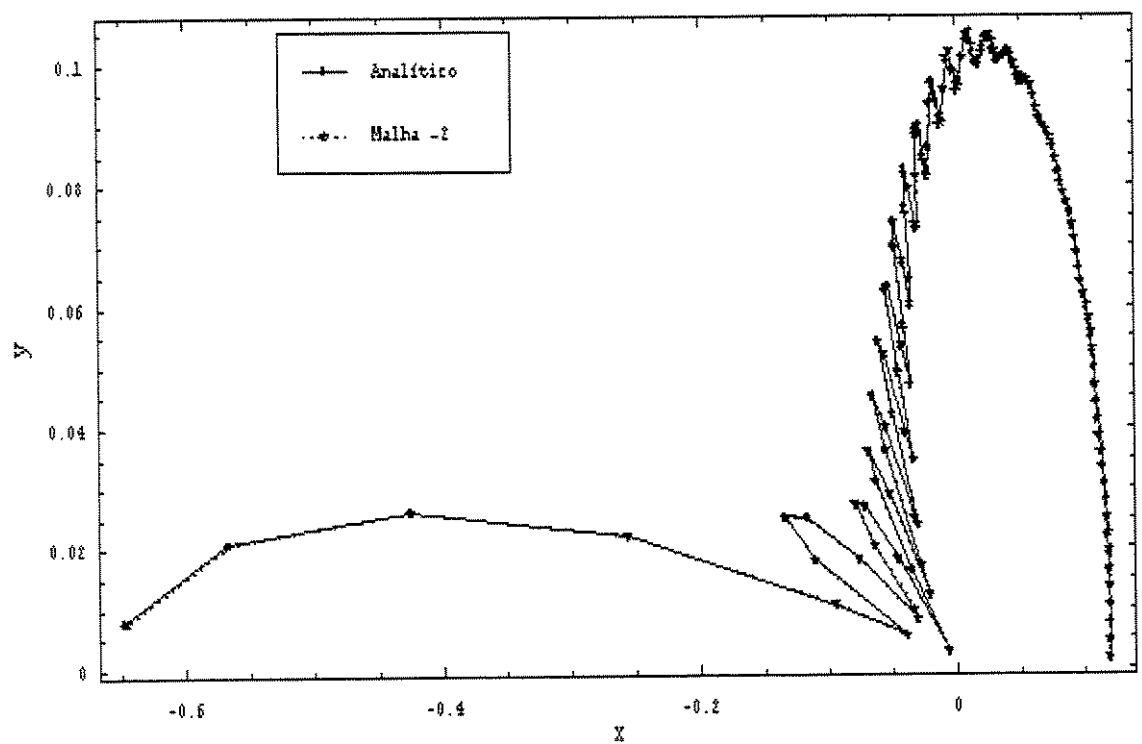


Figura 7.6: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $18a$ e $ka = 8\pi$.

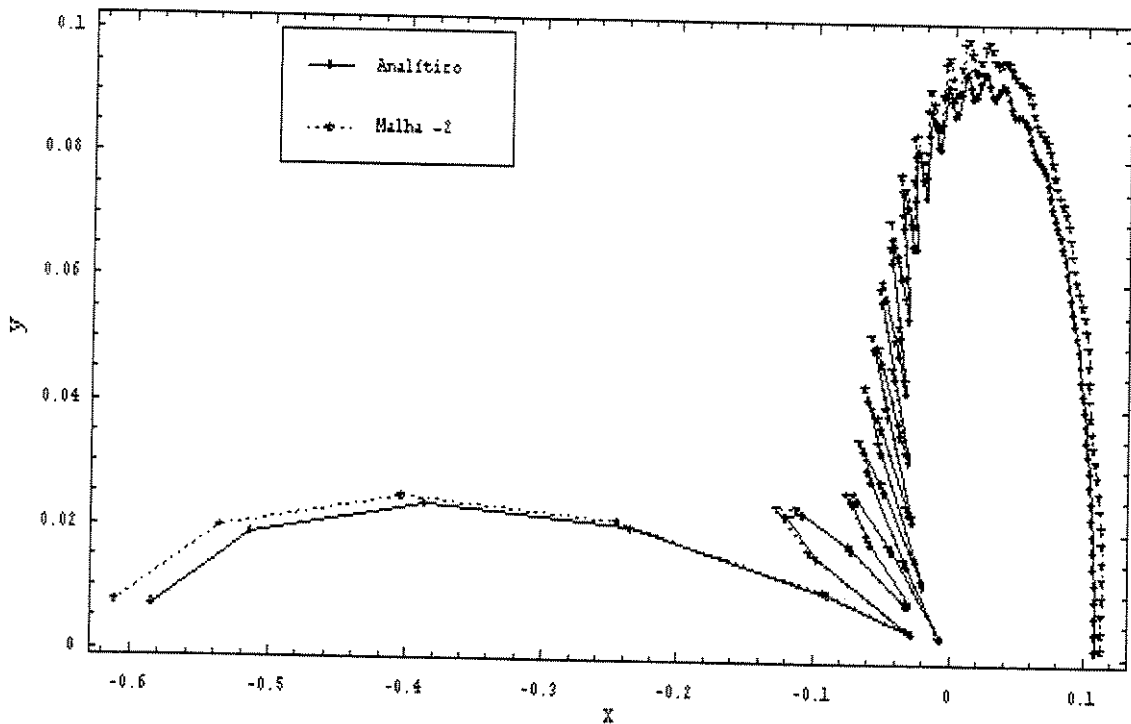


Figura 7.7: Potencial de espalhamento nos pontos do círculo de raio $27.5a$ e $ka = 8\pi$.

7.7 – Conclusão do capítulo

A formulação do potencial de espalhamento de ondas, deduzida a partir do potencial total, e implementada segundo o M.E.C, para uma interpolação constante, produziu bons resultados, se compararmos a resposta numérica obtida, com a solução analítica, o que foi assegurado no contorno do cilindro, sendo que para maiores valores de ka , foi exigido maior discretização no contorno do cilindro. Embora não tenha sido possível detectar uma distância máxima entre os pontos no domínio e o contorno do cilindro, verificamos que para pontos do domínio considerado próximo ao contorno do cilindro, os resultados numéricos também foram de boa qualidade se comparado com a solução analítica.

Capítulo 8

O problema inverso

8.1 – INTRODUÇÃO

Nas ultimas décadas o problema de identificação inverso, tem sido objeto de pesquisa, em fenômenos, tais como a deformação elástica, a propagação de ondas acústicas governadas por equações diferenciais, enfim, por problemas descritos por uma equação do potencial.

Neste capítulo, vamos concentrar nossa análise de estudo, enfocando a propagação de ondas acústicas, em um domínio aberto. Dentre os problemas de propagação de ondas acústicas, nós vamos considerar como problema inverso, a reconstrução do potencial de radiação acústica no contorno de uma fonte radiante, quando consideramos conhecido o potencial de radiação acústico num ponto do domínio, usando para isso uma formulação, baseada no Método de Elementos de Contorno.

A regularização da resposta é feita usando dois diferentes métodos, a saber: o método da Decomposição em Valores Singulares (D.V.S) e o método regularizador de Tikonov.

8.2 – Uma alternativa da formulação do M.E.C

A formulação matemática, que permite recuperar o potencial ou o fluxo nos pontos do contorno de uma fonte acústica radiante, pode ser entendida a partir do equacionamento do M.E.C para problemas de domínio ilimitado [Magalhães-2000]. Para isso vamos reconsiderar a equação (6.3), aplicada em problemas de radiação acústica, reescrita por:

$$c u_i(x_d) = \int_{\Gamma} u^*(x, x_d) \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x, x_d)}{\partial n} u(x) d\Gamma \quad (8.1)$$

Desse modo, se Γ é o contorno da fonte acústica (figura 8.1), discretizado em ne elementos, estabeleceremos para esses elementos, uma relação entre as condições de contorno $u(x)$ e $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$, as quais representam respectivamente o potencial e fluxo no contorno da fonte.

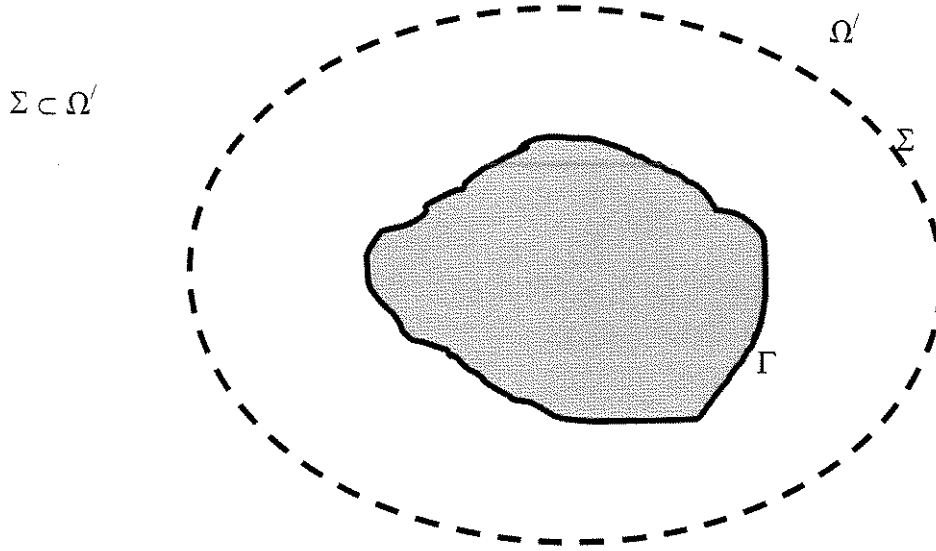


figura 8.1: Problema exterior : Formulação alternativa

Repetindo o mesmo raciocínio que permitiu escrever (6.8) a partir de (6.3), podemos a partir de (8.1) e para $c = 1/2$, escrever a equação matricial:

$$H u(x) = G \frac{\partial u(x)}{\partial n} \quad (8.2)$$

Considerando que as matrizes H e G de (8.2) são invertíveis, escrevemos:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = G^{-1} H u(x) \quad (8.3)$$

ou

$$u(x) = H^{-1} G \frac{\partial u(x)}{\partial n} \quad (8.4)$$

Estabelecidas as equações (8.3) e (8.4), retomamos (8.1), para $c = 1$, e então teremos o potencial acústico avaliado em ponto do domínio Ω' . Vamos para isso considerar um conjunto de m pontos distribuídos no domínio Ω' e para uma discretização de ne elementos sobre o contorno Γ , reescrevemos (8.1) por:

$$u(x_{d_i}) = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u^*(x_j, x_{d_i}) \frac{\partial u_j}{\partial n} d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x_j, x_{d_i})}{\partial n} u_j d\Gamma_j$$

ou ainda

$$u(x_{d_i}) = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u^*(x_j, x_{d_i}) d\Gamma_j \frac{\partial u_j}{\partial n} - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x_j, x_{d_i})}{\partial n} d\Gamma_j u_j$$

e fazendo:

$$g(i, j) = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u^*(x_j, x_{d_i}) d\Gamma_j, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

e

$$h(i, j) = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(x_j, x_{d_i})}{\partial n} d\Gamma_j \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

e então para $\mathcal{G} = [g(i, j)]$ e $\mathcal{H} = [h(i, j)]$, temos a equação matricial dada por:

$$u(x_d) = \mathcal{G} \frac{\partial u(x)}{\partial n} - \mathcal{H} u(x) \quad (8.5)$$

Embora a equação (8.5) permita avaliar o potencial acústico sobre os pontos x_d de Ω' (figura 8.1), quando são conhecidos o potencial e fluxo sobre o contorno Γ , uma alternativa para determinar o potencial de radiação acústica em pontos do domínio Ω' , quando consideramos conhecidos apenas o potencial $u(x)$ ou o fluxo $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ no contorno Γ , pode ser feita por meio de uma combinação entre as equações (8.5), (8.3) e (8.4). Vejamos:

Se o potencial $u(x)$ é conhecido em todo o contorno Γ , substituindo (8.3) em (8.5) resulta a seguinte equação matricial:

$$u(x_d) = (\mathcal{G} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}) - \mathcal{H}) u(x) \quad (8.6)$$

De modo análogo, se sobre o contorno Γ , conhecemos apenas o fluxo, então o potencial acústico em pontos x_d de Ω' , é determinado substituindo (8.4) em (8.5), resultando na equação matricial:

$$u(x_d) = (\mathcal{G} - \mathcal{H} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G})) \frac{\partial u}{\partial n} \quad (8.7)$$

Fazendo em (8.6), $\mathcal{R} = (\mathcal{G} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}) - \mathcal{H})$ e em (8.7) $\mathcal{S} = (\mathcal{G} - \mathcal{H} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}))$, podemos reescrever as seguintes equações:

$$u(x_d) = \mathcal{R} u(x) \quad (8.8)$$

e

$$u(x_d) = \mathcal{S} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \quad (8.9)$$

As matrizes $\mathcal{R}$ em (8.8) e $\mathcal{S}$ em (8.9) que geralmente são matrizes retangulares, e mal condicionadas são denominadas de operadores radiantes [Hon -2000].

8.3 - O problema inverso

O problema inverso consiste em determinar o potencial (ou fluxo) acústico em pontos do contorno da fonte, a partir do potencial medido em pontos do domínio. Com isso, conhecidas as equações (8.8) ou (8.9), recuperar o potencial $u(x)$, ou mesmo seu fluxo $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$, no contorno da fonte, seria um problema trivial, apenas da inversão das matrizes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, se não possuíssem algumas particularidades:

- i) Como os operadores radiantes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, geralmente são matrizes de dimensão retangular, sua inversão deve ter um tratamento específico.
- ii) No caso do problema inverso, as matrizes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, geralmente são mal condicionados e um parâmetro importante a ser avaliado, em um operador mal condicionado é o número de condição, no caso a “perturbação”, que ocorre nos operadores devido a grande diferença entre os valores singulares, que são ora muito grandes, ora muitos pequenos.

No caso da inversão dos operadores para as matrizes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, de dimensão retangular, faremos o uso do método dos mínimos quadrados o que permite a inversão de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Já para o problema de mal condicionamento das matrizes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, que normalmente ocorre com operadores ligados ao problema inverso [Magalhães-2000], vimos em diversos trabalhos, associado ao equacionamento do M.E.C e que tratam desse assunto, tais como em [Tanaka-1999, Hon-2000], que a convergência dos resultados esperados ocorrem quando faz-se com que o número de condição da matriz $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$, seja diminuído. Para isso é sempre adotada alguma estratégia que regularize as soluções “fictícias”, o que é feito por meio de regularização de parâmetros, quando da inversão de matrizes mal condicionadas. Assim sendo, passaremos a analisar a regularização da solução, quando empregamos a estratégia da Decomposição em

Valores Singulares (D.V.S) e a estratégia desenvolvida por Tikonov [Nelson, Yoon- 2000], na inversão dos operadores $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$.

8.4 - A Decomposição em Valores Singulares.

Vamos considerar o potencial acústico $u(x_d)$, determinado por meio de (8.8) em m pontos distribuídos no domínio Ω' (figura 8.1), resultantes de uma fonte radiante de contorno Γ , que por sua vez é discretizado em ne elementos, onde o potencial $u(x)$ é conhecido em todos os nós do contorno. Assim, a matriz $\mathcal{R}$ (operador) em (8.8) tem dimensão $m \times n$ e é complexa.

Ao tratarmos de matrizes complexas (como $\mathbf{R}$), é freqüentemente útil, usar a matriz transposta Hermitiana ($\mathbf{R}^H$) que é a transposta da conjugada da matriz $\mathbf{R}$ [Noble-1986], ou seja $\mathbf{R}^H = [\text{conj}(\mathbf{R})]^t$. Além disso, vamos definir os valores singulares de $\mathbf{R}$, como sendo as raízes quadradas estritamente positivas, dos autovalores de $\mathbf{R}^H \mathbf{R}$, (ou equivalentemente $\mathbf{R} \mathbf{R}^H$) [Noble-1986].

Vamos admitir agora que a matriz $\mathbf{R}$ de dimensão $m \times n$ tem posto s . Assim da álgebra linear, existem s números, a saber: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$, os valores singulares de $\mathbf{R}$, tais que tomando as matrizes unitárias $\mathbf{U}_{m \times m}$ e $\mathbf{V}_{n \times n}$, é sempre possível decompor a matriz $\mathbf{R}$, na forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (8.10)$$

onde

$$\mathbf{\Sigma}_{m \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{ss} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ou em sua forma mais compacta, podemos expressar a matriz $\Sigma_{m \times n}$, por:

$$\Sigma_{m \times n} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com D a matriz diagonal de ordem $s \times s$, e $d_{i,i} = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, s$ e $d_{i,j} = 0$, para $i \neq j$.

A forma escrita como em (8.10), é conhecida como Decomposição em Valores Singulares (D.V.S) da matriz $\mathbf{R}$.

Os valores de σ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, s$ são de fato os autovalores das matrizes $\mathbf{R}^H \mathbf{R}$ ou de $\mathbf{R} \mathbf{R}^H$, ($\mathbf{R}^H$ é a Hermitiana de $\mathbf{R}$) e isto pode ser visto, quando multiplicamos ambos os membros de (8.10) por $\mathbf{R}^H$ resultando numa matriz diagonal, como podemos verificar a seguir:

$$\mathbf{R}^H \mathbf{R} = (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H)^H \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H = \mathbf{V} \Sigma^H (\mathbf{U}^H \mathbf{U}) \Sigma \mathbf{V}^H = \mathbf{V} (\Sigma^H \Sigma) \mathbf{V}^H,$$

ou analogamente:

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^H = (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H) (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H)^H = \mathbf{U} \Sigma^H (\mathbf{V}^H \mathbf{V}) \Sigma \mathbf{U}^H = \mathbf{U} (\Sigma^H \Sigma) \mathbf{U}^H.$$

Assim se $\mathbf{R}$ é uma matriz escrita na forma $\mathbf{R} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$, ($\mathbf{R}$ admite a decomposição em valores singulares) como em (8.10), então por definição a sua matriz inversa generalizada ou pseudoinversa $\mathbf{R}^+$ de $\mathbf{R}$, é uma matriz de dimensão $(n \times m)$ escrita na forma $\mathbf{R}^+ = \mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^H$ [Noble-1986], onde:

$$\Sigma_{n \times m}^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com valores singulares $d_{i,j}^{-1} = 1/\sigma_i$ e $i = 1, 2, \dots, s$.

Desse modo podemos concluir que:

$$u(x) = (V \Sigma^+ U^H) u(x_d) \quad (8.11)$$

Embora a equação (8.11) permite determinar os valores do potencial $u(x)$, sobre pontos da fonte radiante, a partir do potencial medido em pontos de Ω' (figura 8.1), o resultado obtido pode não ser o esperado, e isto devido ao mal condicionamento do operador $\mathfrak{R}$, o qual pode ser medido através do número de condição, anotado por: $nc(\mathfrak{R})$.

A fim de que possamos medir o condicionamento da matriz $\mathfrak{R}$, vamos considerar momentaneamente a matriz $\mathfrak{R}$ como sendo uma matriz de ordem quadrada, assim o número de condição da matriz $\mathfrak{R}$ é por definição em [Nelson-2000] dado por:

$$nc(\mathfrak{R}) = \|\mathfrak{R}\| \|\mathfrak{R}^{-1}\| \quad (8.12)$$

Como vimos os valores singulares σ_i da matriz $\mathfrak{R}$, são a raízes quadrada dos autovalores de $\mathfrak{R}^H \mathfrak{R}$, assim usando de alguma das definições de norma de matrizes, por exemplo, a norma-2, definida por: $\|\mathfrak{R}\|_2 = \sqrt{\text{auto valor máximo de } (\mathfrak{R} \mathfrak{R}^H)}$ (ou seja $\|\mathfrak{R}\|_2 = \text{valor singular máximo de } \mathfrak{R}$), permite escrever que o número de condição $nc(\mathfrak{R})$ dado pela equação (8.12) como em [Nelson-2000]:

$$nc(\mathfrak{R}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (8.13)$$

onde $\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$ são respectivamente o maior e o menor dos valores singulares positivos da matriz $\mathfrak{R}$.

Aplicando a estratégia usada para obter (8.13) a matrizes retangular, como é o caso do operador $\mathfrak{R}$ dado em (8.10), podemos para uma decomposição de $\mathfrak{R}$ em valores singulares e $\mathfrak{R}^+ = V \Sigma^+ U^H$ a matriz pseudoinversa de $\mathfrak{R}$, determinar o número de condição $nc(\mathfrak{R})$ por:

$$nc(\mathfrak{R}) = \|\Sigma\| \|\Sigma^+\|$$

já que U e V em (8.10), são matrizes unitárias e como Σ e Σ^+ , são matrizes diagonais e ainda os valores singulares de $\mathfrak{R}$ estão dispostos em ordem decrescente, podemos, escrever que:

$$nc(\mathfrak{R}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_s} \quad (8.14)$$

com σ_s o menor valor singular não nulo de $\mathfrak{R}$.

Uma idéia usada na estabilização da recuperação do potencial acústico (ou do fluxo) no contorno da fonte, a partir do potencial medido em pontos do domínio Ω' figura 8.1, consiste na tentativa de tornar o operador $\mathfrak{R}$ melhor condicionado e segundo a teoria de álgebra linear [Noble 1986], isso implica em diminuir o número de condição da matriz $\mathfrak{R}$. Obviamente que se limitamos inferiormente o conjunto de valores singulares $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, s$, da matriz $\mathfrak{R}$, por um dos valores singulares σ_i ($\sigma_i > \sigma_s$), isso implicará em um menor valor de $nc(\mathfrak{R})$ dado em (8.14), o que poderá garantir um melhor condicionamento da matriz $\mathfrak{R}$, possivelmente uma convergência do resultado.

8.5 – A estimativa do parâmetro para o DVS.

A estimativa de um parâmetro $\sigma > 0$, tomado entre os valores singulares da matriz $\mathfrak{R}$, que melhor recupera o potencial (ou fluxo), no contorno de uma suposta fonte radiante, tem sido objeto de estudo como podemos ver em [Nelson-2000, partes I e II].

Entretanto nesse trabalho vamos usar de um procedimento descrito a partir da figura 8.2 para estimar o valor, que permite recupera o potencial no contorno Γ e como os valores singulares da matriz $\mathfrak{R}$, são valores próximo de zero, tomaremos como parâmetro o valor de σ , onde σ assume valores como: $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-5}$ e $\sigma = 10^{-6}$. Valores esses também usados em [Nelson-2000].

Na figura 8.2 mostramos uma suposta fonte acusticamente radiante de contorno Γ , circundada por dois círculos concêntricos de raios ξ_1 e ξ_2 , ($\xi_2 > \xi_1$) sobre os quais medimos o potencial acústico. Como nosso objetivo aqui é o problema inverso, procuramos determinar o melhor valor de σ , que permite obter o potencial acústico no círculo de raio ξ_1 , a partir do potencial acústico no círculo de raio ξ_2 , usando da implementação do MEC, em (8.11). O valor do parâmetro σ que melhor recupera o potencial acústico sobre o círculo de raio ξ_1 , é tomado como sendo o limitante inferior para o conjunto de valores singulares σ_i e portanto um valor ótimo. Como o círculo de raio ξ_1 , é tomado muito próximo de uma suposta fonte do contorno Γ , usaremos desse valor para recuperar o potencial acústico sobre o contorno Γ da fonte radiante de raio a .

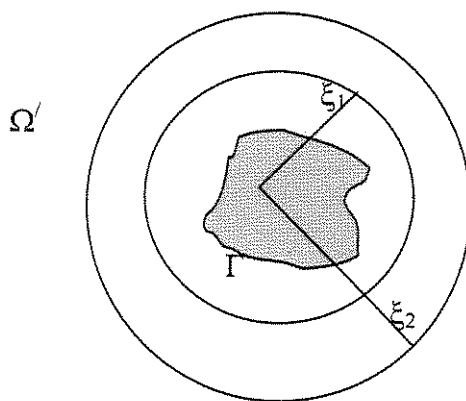


Figura 8.2- Estimativa do parâmetro σ para D.V.S.

Exemplo Ilustrativo – 1

Uma ilustração que mostra bons resultados no emprego do DSV, juntamente com a estimativa para o valor de σ , pode ser vista quando simulamos a recuperação do potencial acústico sobre uma fonte acústica radiante circular de raio a . Para isso vamos considerar a fonte radiante circular de raio $a = 1$, inserida no meio ar com velocidade de 345m/s, com condições de contorno dadas por Neumann, onde o fluxo $\frac{\partial u}{\partial n} = 1$.

A partir de (6.3), para $c = 1$, medimos o potencial acústico, sobre 80 pontos dispostos no círculo de raio $\xi_1 = 1.05$ m e 120 pontos, dispostos no círculo de raio $\xi_2 = 2.10$ m, para os números de ondas: $ka = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$ e 16.0 .

Na tabela 8.1, mostramos para cada um destes números de ondas, uma comparação através do erro determinado por (7.23), entre o valor do potencial acústico medido de modo direto, sobre o círculo de raio ξ_1 por meio de (6.3) e o potencial acústico recuperado sobre ξ_1 usando (8.11), a partir do potencial medido sobre o círculo de raio ξ_2 , quando limitamos inferiormente os valores singulares em: $\sigma = 10^{-1}, \sigma = 10^{-2}, \sigma = 10^{-3}, \sigma = 10^{-4}, \sigma = 10^{-5}$ e $\sigma = 10^{-6}$.

Tabela 8.1: Estimativa do parâmetro σ

ka	$\sigma = 10^{-1}$		$\sigma = 10^{-2}$		$\sigma = 10^{-3}$		$\sigma = 10^{-4}$		$\sigma = 10^{-5}$		$\sigma = 10^{-6}$	
	erro %	$nc(\mathfrak{R})$	erro %	$nc(\mathfrak{R})$	erro %	$nc(\mathfrak{R})$	erro %	$nc(\mathfrak{R})$	erro %	$nc(\mathfrak{R})$	erro %	$nc(\mathfrak{R})$
0.5	0.0004	8.35	0.0007	83.769	0.0005	796.1	0.035	7529.73	0.45	91740.5	8.62	1093570
1.0	0.0003	3.968	0.0007	51.2363	0.0028	774.063	0.04	4630.33	0.26	35.35	6.69	806265
2.0	0.28	3.655	0.28	66.67	0.28	799.31	0.34	8366.27	0.50	83579.2	3.98	740707
4.0	2.27	7.265	2.27	57.99	2.27	485.034	2.29	7462.42	2.41	40390.7	4.83	631115
8.0	16.16	7.890	16.16	75.72	16.16	688.90	16.15	7087.18	16.16	65221.3	16.91	480527
16.0	27.21	7.567	27.21	79.407	27.21	460.935	27.21	3320.53	27.3	73651.2	28.18	74099.27

Os resultados da tabela 8.1, mostram através do erro, que é possível recuperar o potencial acústico sobre o círculo de raio $\xi_1 = 1.05$ m, a partir do potencial conhecido em $\xi_2 = 2.10$ para os valores de $k = 0.5, 1.0, 2.0$, sendo que o menor erro corresponde ao menor número de condição do operador radiante $\mathfrak{R}$.

Entretanto, podemos observar na tabela 8.1, que para $k = 0.5$ e $\sigma = 10^{-5}$, o número de condição é 91740.5 um valor alto e mesmo assim garantiu o erro de 0.45% e portanto uma boa aproximação da resposta do problema. Isto mostra que a matriz pode não ser mal condicionada para um alto número de condição. Ainda em relação a tabela 8.1, para $k = 16$, o erro permaneceu em torno de 27.21%, enquanto o número de condição aumentou na medida que o valor de σ

diminuí. Assim sendo o número de condição da matriz $\mathcal{R}$ indica o comportamento do condicionamento da matriz, sem que o mesmo garanta a convergência da solução.

Como o propósito do problema é estimar o parâmetro σ , que recupera o potencial sobre o contorno da fonte, observamos que para $k = 0.5, 1.0, 2.0$, quaisquer dos σ , escolhidos entre $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$, $\sigma = 10^{-4}$ e $\sigma = 10^{-5}$, recuperam o potencial acústico sobre o contorno da fonte radiante de raio $a = 1\text{m}$, a partir do potencial medido sobre o círculo de raio $\xi_2 = 2.10$ e nos gráficos das figuras 8.3a–c mostramos, respectivamente para $k = 0.5, 1.0, 2.0$, e $\sigma = 10^{-3}$, a aproximação, entre a curva do potencial recuperado e a curva do potencial medido sobre o contorno da fonte radiante de raio $a = 1$.

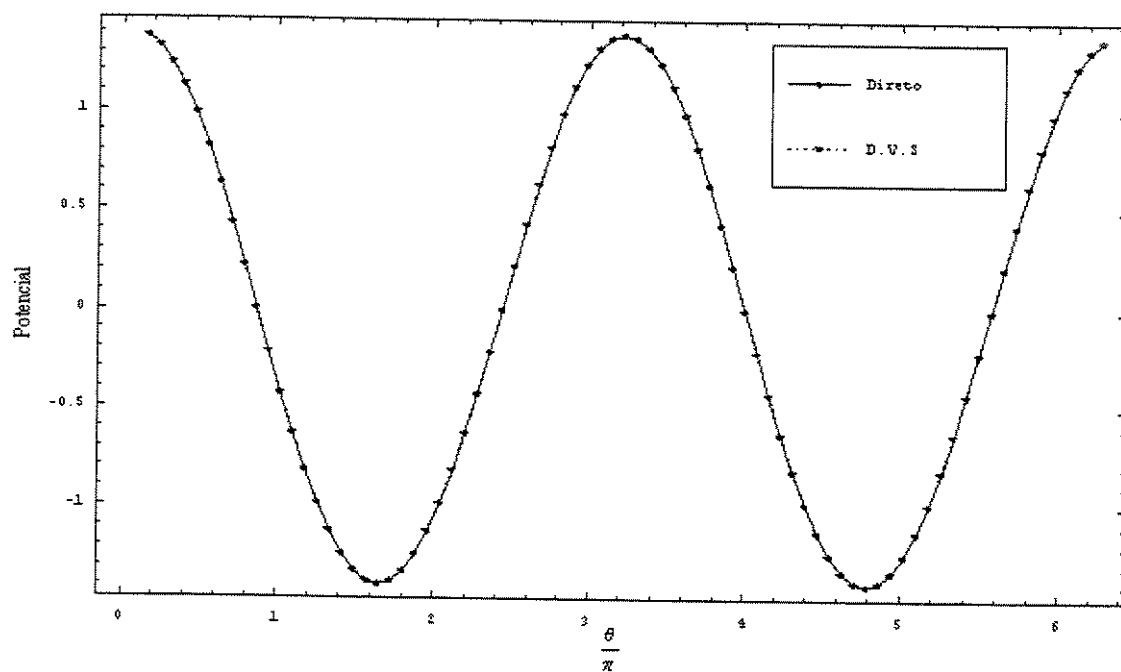


Figura 8.3a: Compara o potencial e o potencial recuperado para $ka = 0.5$

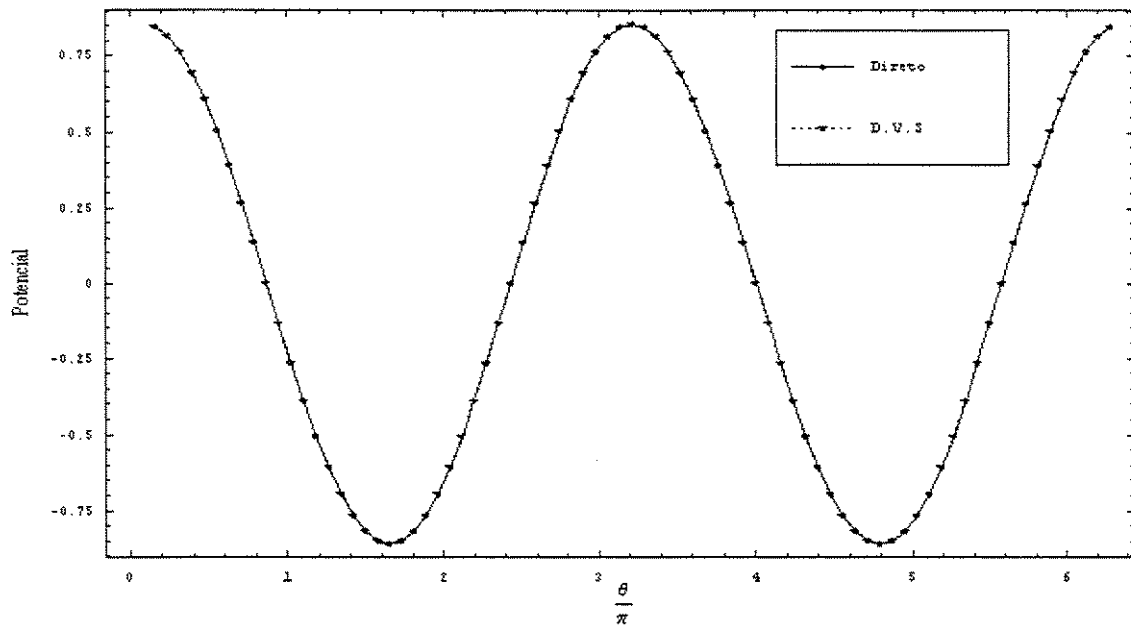


Figura 8.3b: Compara o potencial e o potencial recuperado para $ka = 1.0$

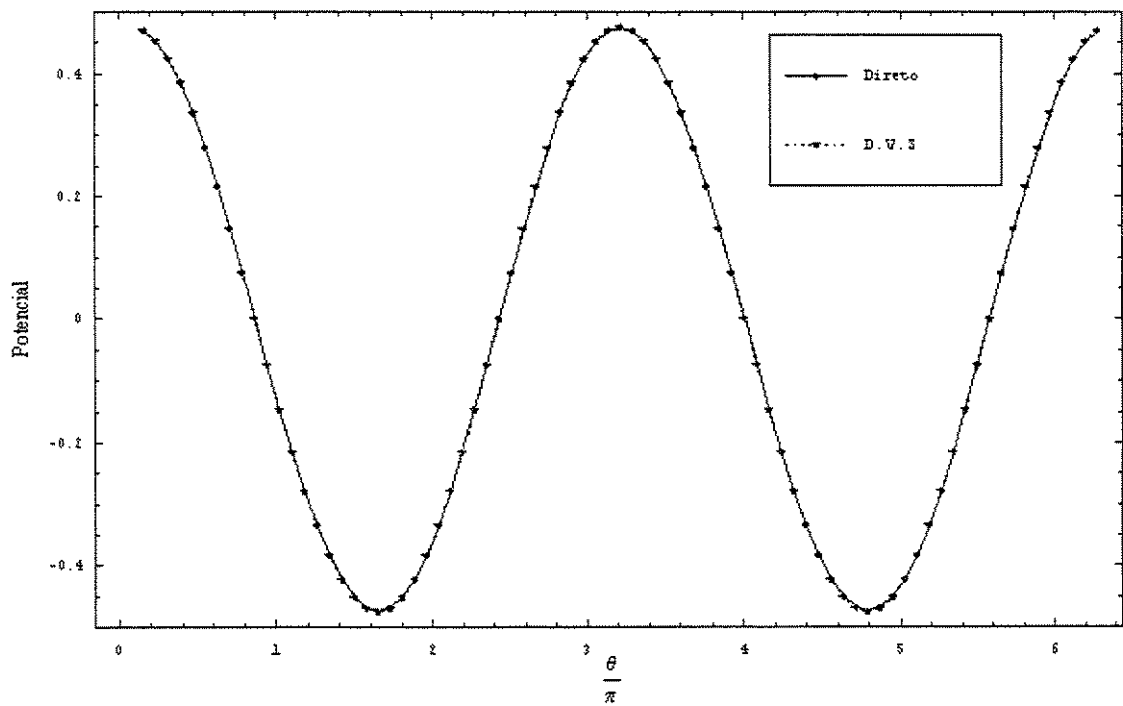


Figura 8.3c: Compara o potencial e o potencial recuperado para $ka = 2.0$

Como podemos observar na tabela 8.1, para os números de ondas $ka = 4.0$, $ka = 8.0$ e $ka = 16$, não houve aproximação do potencial recuperado em relação ao potencial medido, nos pontos do círculo de raio ξ_1 .

Retornando ao exemplo ilustrativo-1, passamos a analisar, a influência da densidade de pontos no círculo de raio ξ_1 . Para isso repetimos a implementação de (8.11), quando considerado o potencial conhecido em apenas 40 pontos no círculo de raio ξ_1 . Os resultados estão dispostos na tabela 8.2.

Comparando agora os resultados das tabelas 8.1 com os da tabela 8.2, notamos que para $ka = 4$, o erro permanece em torno de 2.4%, enquanto que para $ka = 8$ e 16, houve a aproximação entre o potencial medido e o potencial recuperado. Essa redução de 80 para 40 pontos no círculo de raio ξ_1 será analisada, comparando o número de pontos distribuídos em cada comprimento de onda contido no contorno da fonte, o que denominaremos de densidade n_ω .

Tabela 8.2: Estimativa do parâmetro σ

k	$\sigma = 10^{-1}$		$\sigma = 10^{-2}$		$\sigma = 10^{-3}$		$\sigma = 10^{-4}$		$\sigma = 10^{-5}$		$\sigma = 10^{-6}$	
	erro %	$nc(\Re)$	erro %	$nc(\Re)$	erro %	$nc(\Re)$	erro%	$nc(\Re)$	erro%	$nc(\Re)$	Erro%	$nc(\Re)$
0.5	0.0048	8.56	0.0007	86.34	0.0048	1306.23	0.079	8561.4	0.613	103645,0	4.47	1302570
1.0	0.0008	10.85	0.0024	115.8	0.013	1192.26	0.027	5644.58	0.40	599477.7	2.75	646124
2.0	0.31	11.87	0.31	69.32	0.32	868.92	0.44	11570.3	0.74	104311.	4.26	976260
4.0	2.36	7.524	2.36	61.759	2.36	536.395	2.41	8956.16	2.43	11904.2	7.05	763536
8.0	0.001	8.05	0.008	111.5	0.007	1022.14	0.068	11763.4	0.247	74219.7	0.247	1102620
16.0	0.0023	8.67	0.0023	69.04	0.0023	69.04	0.0023	69.04	0.0023	69.04	0.0023	69.04

Para isso vamos considerar λ_Γ o comprimento do contorno Γ da fonte; λ o comprimento de onda dado por $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e α , a quantidade de comprimentos de ondas no contorno Γ , onde:

$$\alpha = k \frac{\lambda_\Gamma}{2\pi} \quad (8.15)$$

Seja np o número de pontos distribuídos sobre o contorno Γ da fonte, onde pretendemos recuperar o potencial. Assim podemos estabelecer a relação n_ω , onde:

$$n_\omega = \frac{np}{\alpha} \quad (8.16)$$

em que n_ω , mede a densidade de pontos em cada comprimento de onda no contorno Γ da fonte.

Considerando (8.15) e (8.16), voltamos ao exemplo ilustrativo-1 e como o contorno da fonte no caso é um círculo de raio a , $\lambda_\Gamma = 2\pi a$ e portanto $\alpha = k a$, o que permite escrever:

$$n_\omega = \frac{np}{ka} \quad (8.17)$$

A partir (8.15) e (8.17), mostramos na tabela 8.3, o número de comprimento de ondas α , no contorno do cilindro de raio $a = 1$, e a densidade de pontos por comprimento de onda n_ω , quando tomamos no contorno do cilindro 80 pontos (tabela 8.1) e 40 pontos (tabela 8.2), para $ka = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0, 16.0$.

Tabela 8.3: Densidade de pontos por comprimento de onda.

ka	80		40	
	α	n_ω	α	n_ω
0.5	0.5	160	0.5	80
1.0	1.0	80	1.0	40
2.0	2.0	40	2.0	20
4.0	4.0	20	4.0	10
8.0	8.0	10	8.0	5
16.0	16.0	5	16.0	2.5

Comparando a densidade n_ω dada na tabela 8.3, com os resultados das tabelas 8.1 e 8.2, podemos observar que para $ka = 0.5, 1.0, 2.0$, a densidade n_ω não influenciou na convergência da resposta, enquanto que para $ka = 8.0, 16.0$, para um mesmo número α de comprimento de ondas no contorno do cilindro, a convergência da resposta melhorou na medida que a densidade n_ω diminui, entretanto para $ka = 4.0$, o erro que representa a convergência da resposta permaneceu em torno de 2.4%.

Retomamos $ka = 4.0$, fixamos $\alpha = 4.0$ e para $n_\omega = 5$, resultando num total de $np = 20$ pontos no contorno do cilindro, assim foi possível melhorar a convergência da resposta ao recuperar o potencial no contorno, como mostra a tabela 8.4 e portanto observar que a densidade n_ω tem de fato influência na convergência da resposta do problema.

Tabela 8.4: Estimativa do parâmetro σ , quando $ka = 4.0$

k	$\sigma = 10^{-1}$		$\sigma = 10^{-2}$		$\sigma = 10^{-3}$		$\sigma = 10^{-4}$		$\sigma = 10^{-5}$		$\sigma = 10^{-6}$	
	erro %	$nc(\mathcal{R})$	erro %	$nc(\mathcal{R})$	erro %	$nc(\mathcal{R})$	erro %	$nc(\mathcal{R})$	erro %	$nc(\mathcal{R})$	Erro %	$nc(\mathcal{R})$
4.0	0.00025	9.047	0.0008	89.14	0.0015	613.2	0.0016	1534.7	0.0016	1534.7	0.0016	1534.7

Dos resultados apresentados nas tabelas 8.2 e 8.4, podemos tomar quaisquer um dos valores de σ entre $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ e 10^{-5} , recuperar o potencial no contorno da fonte.

Na figura 8.4a são comparadas, a curva do potencial medido no contorno do cilindro de raio $a = 1$, com a curva do potencial recuperado no contorno do mesmo cilindro a partir do potencial conhecido em 40 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$, quando consideramos a densidade $n_\omega = 5$ e $ka = 4.0$ com $\sigma = 10^{-3}$.

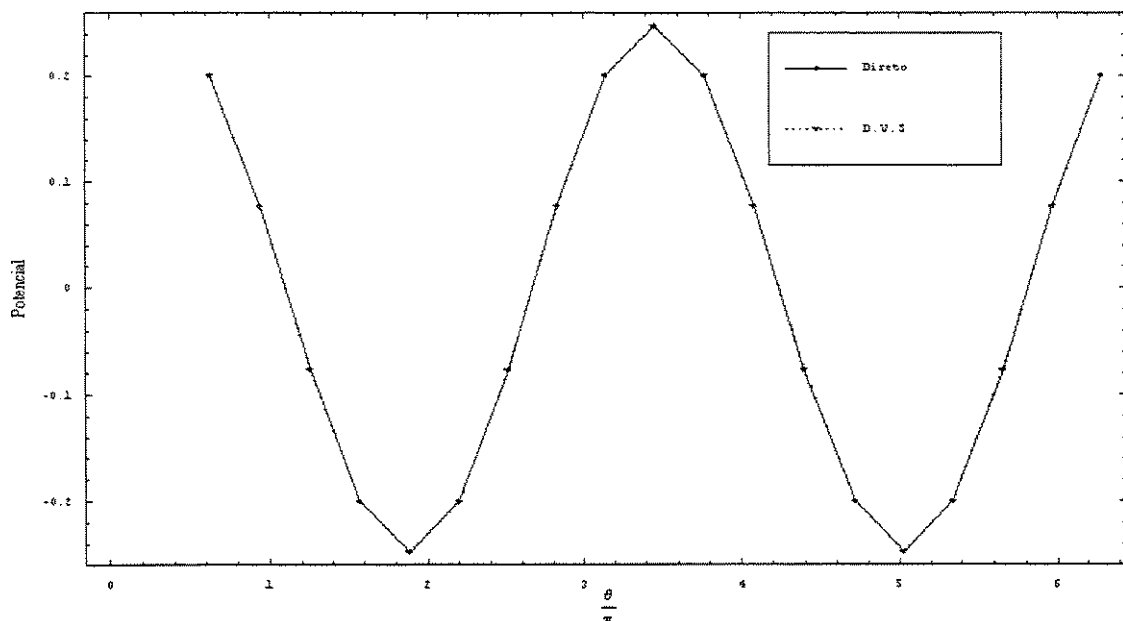


Figura 8.4a: Potencial Recuperado para $ka = 4.0$

Já nas figuras 8.4b-c, são comparados o potencial recuperado e o potencial medido em 40 pontos do contorno do cilindro, com $\sigma = 10^{-3}$, respectivamente para $ka = 8.0$ com $n_\omega = 5$ e $ka = 16.0$ e $n_\omega = 2.5$ a partir do potencial medido em 120 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$.

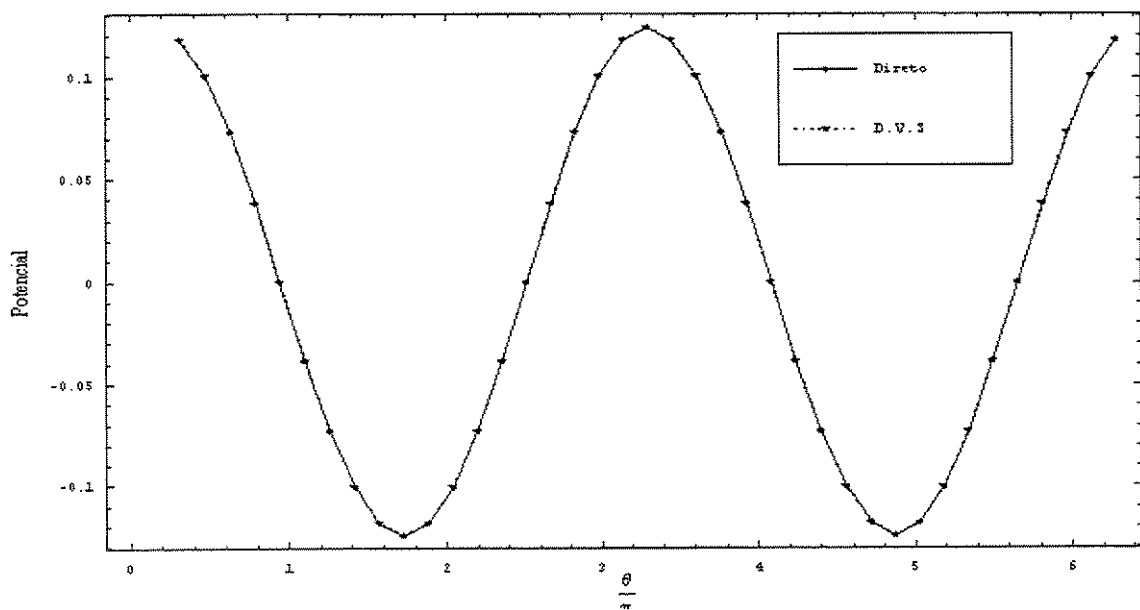


Figura 8.4b: Potencial Recuperado para $ka = 8.0$

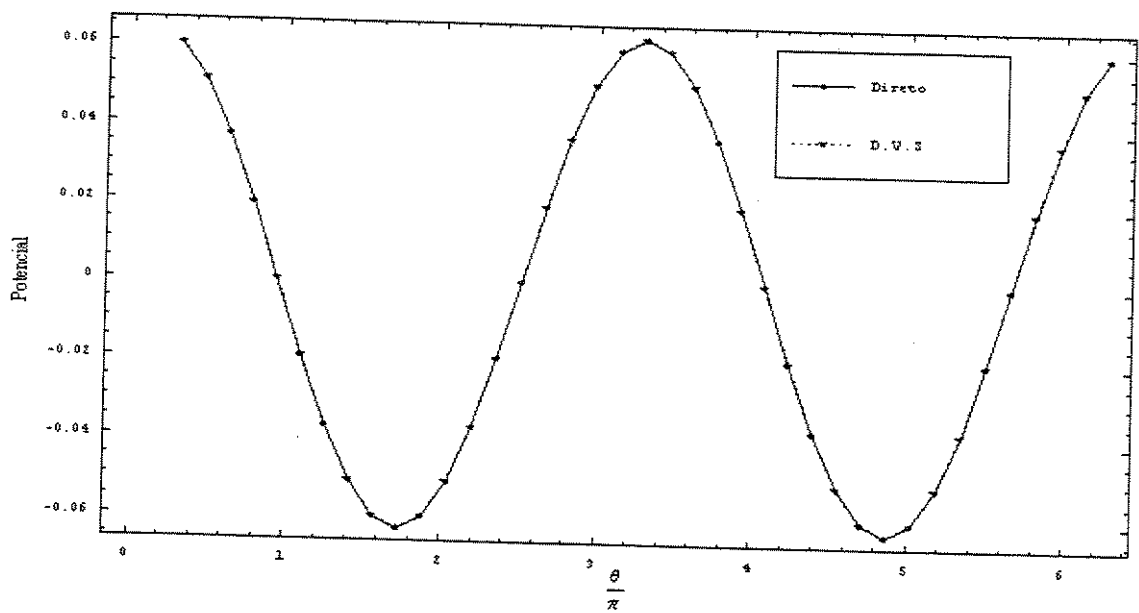


Figura 8.4c: Potencial Recuperado para $ka = 16.0$

Fixando a densidade em $n_\omega = 2.5$ e $\sigma = 10^{-3}$, mostramos na figura 8.5, que foi possível recuperar o potencial no contorno do cilindro para $ka = 32$ e portanto $np = 80$ pontos, a partir do potencial conhecido em 120 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$, enquanto que na figura 8.6, mostramos uma comparação entre o potencial medido e o potencial recuperado quando tomamos $ka = 60$ em 150 pontos no contorno do cilindro, a partir do potencial medido em 200 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$.

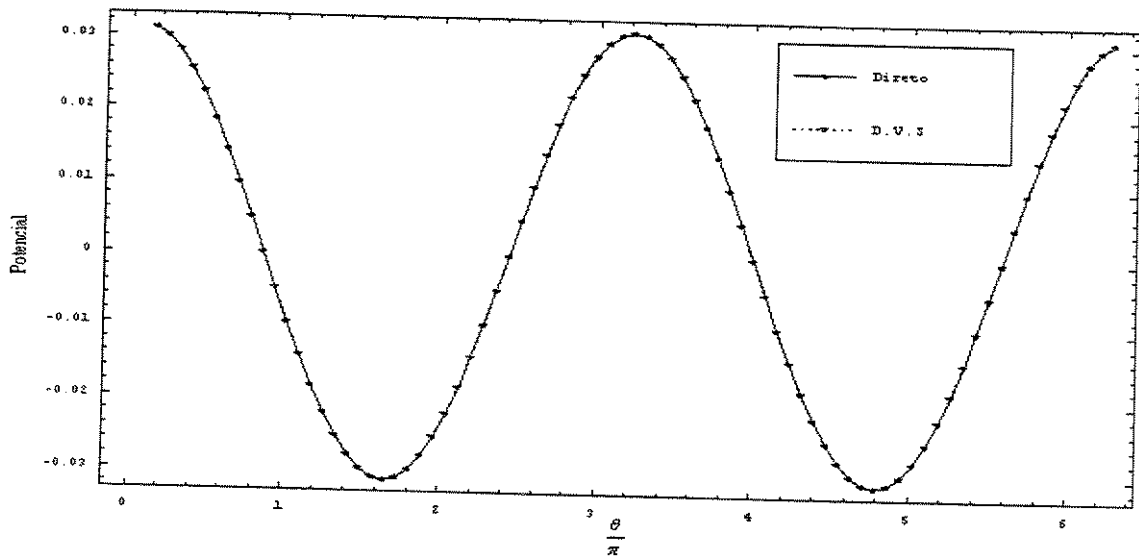


Figura 8.5: Potencial Recuperado para $ka = 32.0$

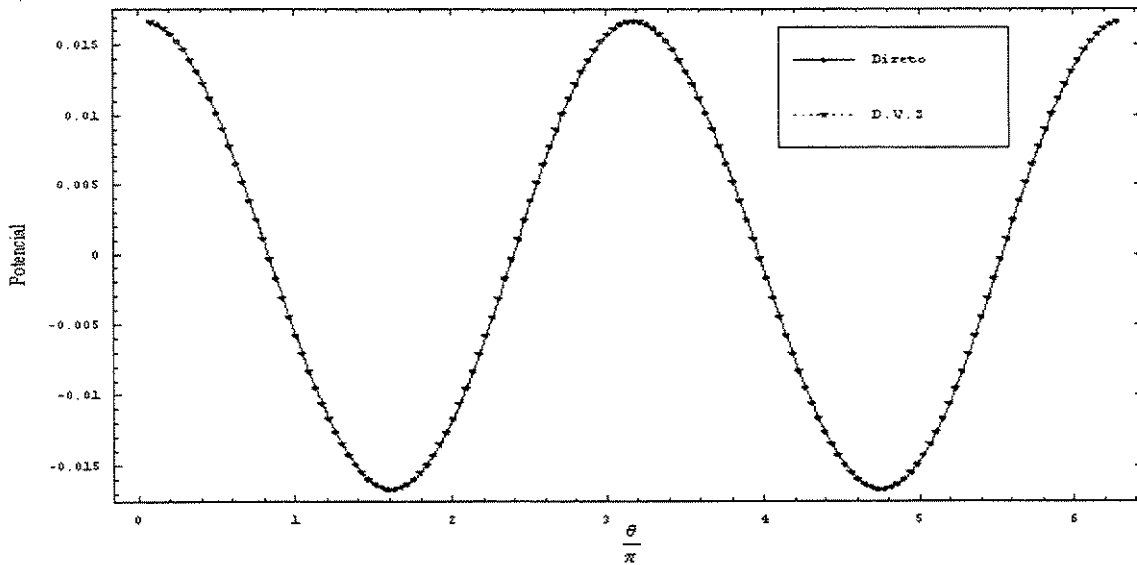


Figura 8.6: Potencial Recuperado para $ka = 60.0$

No exemplo dado, podemos observar que a densidade tal como foi definida em (8.17), é um aspecto importante a ser analisado no problema inverso, quando da recuperação do potencial no contorno da fonte, através do regularizador D.V.S.

8.6 - Regularizador da resposta segundo Tikhonov.

Uma das primeiras técnicas de regularização para resolver sistemas de equações algébricas do tipo $u(x_d) = \mathcal{R} u(x)$, dado em (8.8), onde o operador $\mathcal{R}$ é uma matriz retangular complexa e mal condicionada, foi desenvolvido por Tikhonov [Lins - 1976].

Nos casos de inversão de matrizes retangulares e complexas tal como é $\mathcal{R}$, é usualmente comum recorrermos a matriz Hermitiana $\mathcal{R}^H$, com seguinte procedimento: multiplicamos por $\mathcal{R}^H$ ambos os membros da equação (8,8), obtendo:

$$\mathcal{R}^H u(x_d) = (\mathcal{R}^H \mathcal{R}) u(x) \quad (8.18)$$

mas por definição, as raízes quadradas estritamente positivas dos autos valores de $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$, são os valores singulares de $\mathcal{R}$ [Noble-1986], com isso a inversão de $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$, exige a regularização de $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$.

A regularização proposta por Tikhonov, consiste em determinar o menor dos valores singulares de $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$ que permite, inverter a própria matriz $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$, e para isso usa da estratégia como a aplicada em (8.18): No lado direito de (8.18), somamos o fator $\sigma_T I$, onde σ_T é o menor valor singular de $\mathcal{R}$, que permite inverte $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$ e I é a matriz Identidade de mesma dimensão de $(\mathcal{R}^H \mathcal{R})$, assim (8.18) é reescrita por:

$$\mathcal{R}^H u(x_d) \cong (\mathcal{R}^H \mathcal{R} + \sigma_T I) u(x) \quad (8.19)$$

como os valores singulares de $\mathcal{R}$ são valores próximos de zero e convenientemente podem ser colocados numa ordem decrescente ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_s$), a escolha arbitrária σ_T entre um desses valores singulares, implica em (8.19) na substituição dos valores singulares menores que σ_T , pelo valor de σ_T .

Como $(\mathcal{R}^H \mathcal{R} + \sigma_T I)$ é uma matriz de dimensão quadrada e invertível, podemos multiplicar os membros de (8.19) por $(\mathcal{R}^H \mathcal{R} + \sigma_T I)^{-1}$ e então obtemos:

$$u(x) \cong (\mathcal{R}^H \mathcal{R} + \sigma_T I)^{-1} \mathcal{R}^H u(x_d) \quad (8.20)$$

De modo análogo podemos recuperar o fluxo no contorno, multiplicando (8.9), por S^H , e somando o fator regularizador $\sigma_T I$, (σ_T aqui é um valor singular de S).

$$S^H u(x_d) \cong (S^H S + \sigma_T I) q(x) \quad (8.21)$$

Como $(S^H S + \sigma_T I)$, é uma matriz quadrada e admite inversa, então o fluxo no contorno do fonte, é dado por:

$$q(x) \cong (S^H S + \sigma_T I)^{-1} S^H u(x_d) \quad (8.22)$$

A técnica de Tikhonov, tem sido uma ferramenta muito empregada nas publicações que tratam do problema inverso, como pode ser visto em: [Nelson-2000], [Mc Carthy2003], [Rus-

2002] e a estimativa do parâmetro σ_T é uma investigação presente nas publicações citadas. Nesse trabalho a estimativa de σ_T é feita analogamente a apresentada na seção 8.5 e tem procedimento semelhante ao empregado em [Nelson and Yoon-2000].

Exemplo Ilustrativo – 2.

No exemplo ilustrativo-2, vamos considerar inicialmente os mesmos dados do exemplo ilustrativo-1, onde a fonte radiante é um cilindro de raio $a = 1$, e os círculos de raios $\xi_1 = 1.05$ e $\xi_2 = 2.10$, como na figura 8.7.

O parâmetro σ_T que o recupera o potencial no contorno Γ do cilindro, é estimado a partir do potencial medido no círculo de raio ξ_2 e que através da implementação de (8.20), melhor representa a recuperação do potencial no círculo de raio ξ_1 . Assim o valor de σ_T , é tal que $\sigma_S \leq \sigma_T \leq \sigma_1$ e produz o menor erro determinado por (7.23), quando comparamos o potencial recuperado e o potencial medido no círculo de raio ξ_1 .

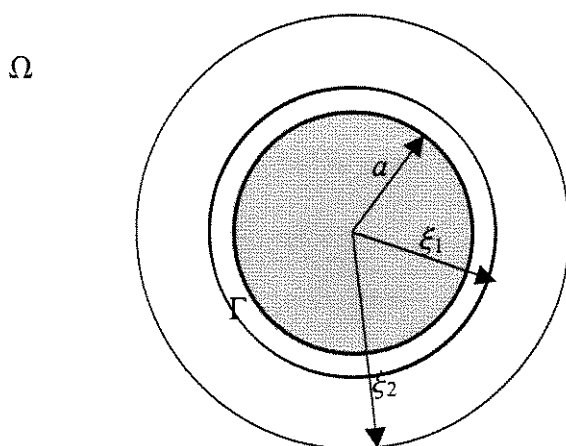


Figura 8.7: Estimativa do parâmetro σ_T

Para isso vamos considerar o potencial conhecido em 120 pontos no círculo de raio ξ_2 e 80 pontos distribuídos no círculo de raio ξ_1 , onde pretendemos recuperar o potencial. Assumindo os valores de $ka = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$ e 16.0 , na tabela 8.5 mostramos o erro determinado por (7.23), entre o potencial recuperado e o potencial medido no círculo de raio ξ_1 além do número de

condição da matriz $\mathcal{R}$, e estimativa do parâmetro σ_T é determinada entre os valores singulares: $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-5}$ e $\sigma = 10^{-6}$.

Tabela 8.5: Estimativa do parâmetro σ_T

ka	$\sigma = 10^{-1}$		$\sigma = 10^{-2}$		$\sigma = 10^{-3}$		$\sigma = 10^{-4}$		$\sigma = 10^{-5}$		$\sigma = 10^{-6}$	
	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$
0.5	11.2	4.038	1.25	12.419	0.17	39.143	1.17	123.784	35.10	392.85	94.14	1289.93
1.0	11.7	2.581	1.32	7.593	0.18	23.826	1.27	75.30	35.5	238.61	92.06	771.379
2.0	12.1	1.742	1.36	4.621	0.19	14.3021	1.25	45.13	34.01	142.75	92.61	454.871
4.0	12.2	1.29	1.37	2.802	0.18	8.339	1.72	26.996	55.55	82.81	94.01	262.436
8.0	12.2	1.104	1.38	1.7868	0.24	4.7883	2.98	14.841	49.14	46.844	94.14	148.292
16.0	12,2	1.0314	1.38	1.280	0.27	2.7174	1.68	8.0525	54.98	25.2884	90.07	79.9558

Analisando os resultados na tabela 8.5, podemos observar que o parâmetro $\sigma_T = 10^{-3}$ é o que melhor representa a recuperação do potencial no círculo de raio ξ_1 .

Já na tabela 8.6, é também mostrado o erro e o número de condição da matriz $\mathcal{R}$, quando pretendemos recuperar o potencial em 40 pontos do círculo de raio $\xi_1 = 1.05$, a partir do potencial conhecido nos mesmos 120 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$.

Tabela 8.6: Estimativa do parâmetro σ_T

ka	$\sigma = 10^{-1}$		$\sigma = 10^{-2}$		$\sigma = 10^{-3}$		$\sigma = 10^{-4}$		$\sigma = 10^{-5}$		$\sigma = 10^{-6}$	
	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$	erro%	$nc(\mathcal{R})$
0.5	0.16	5.620	0.63	17.5187	0.16	55.3239	1.89	175.121	41.01	560.126	97.70	2019.53
1.0	6.29	3.510	0.67	10.687	0.20	33.6646	3.04	106.446	76.70	337.668	95.51	1103.24
2.0	5.43	2.2488	0.68	6.4478	0.32	20.168	2.68	63.7122	61.32	201.669	96.55	644.638
4.0	6.52	1.5319	0.70	3.8038	0.20	11.648	2.41	36.714	88.33	116.075	95.98	367.462
8.0	6.56	1.1873	0.69	2.244	0.21	6.4313	2.34	201.149	33.25	63.540	95.70	201.30
16.0	6.60	1.0445	0.70	1.3739	0.08	2.8350	0.078	4.8997	0.017	5.5460	0.042	5.62681

Nesse caso também identificamos o parâmetro $\sigma_T = 10^{-3}$, como sendo o que melhor representa a aproximação do potencial recuperado em relação ao potencial medido no círculo de raio ξ_1 .

Como o proposto na seção 8.5, foi o de estimar o parâmetro regularizador σ_T , que recupera o potencial no contorno do cilindro, podemos tomar $\sigma_T = 10^{-3}$, para recuperar o potencial nos 80 pontos do contorno do cilindro de raio $a = 1$, a partir do potencial conhecido em 120 pontos do círculo de raio $\xi_2 = 2.10$ e nas figuras 8.8a–f, mostramos a aproximação entre as curvas do potencial recuperado em relação ao potencial medido.

Na figura 8.8a, considerando $ka = 0.5$, mostramos a aproximação entre o potencial medido e o potencial recuperado no contorno do cilindro, onde o erro medido foi de 0.168%, e $nc(\mathfrak{R}) = 28.2026$.

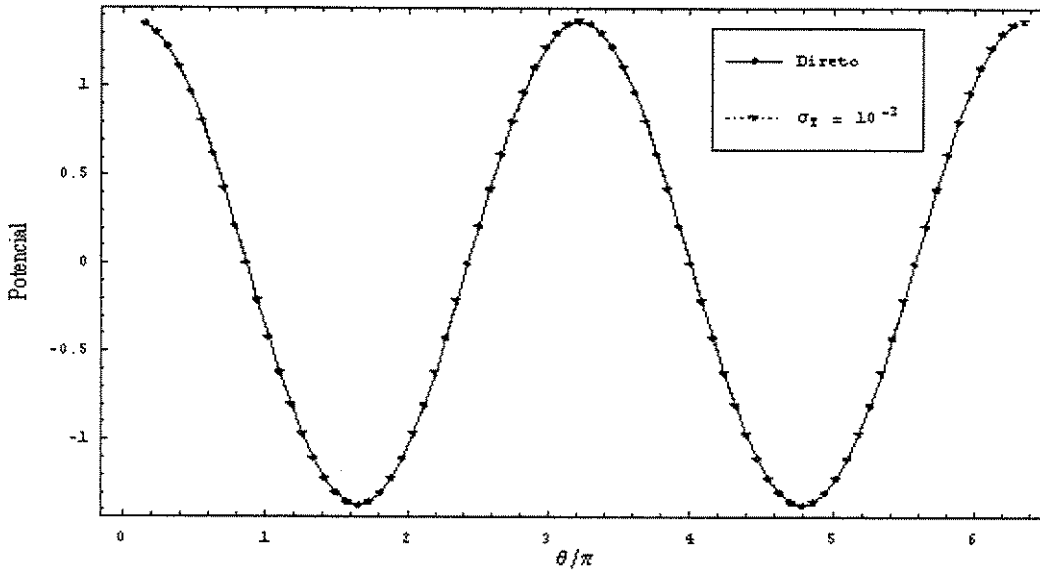


Figura 8.8a: Potencial recuperado para $ka = 0.5$

Analogamente ao apresentado na figura 8.8b é mostrado a aproximação, entre o potencial recuperado e o potencial medido no contorno do cilindro para $\sigma_T = 10^{-3}$ e $ka = 1.0$, nesse caso o erro foi de 0.18%, enquanto que $nc(\mathfrak{R}) = 23.1122$.

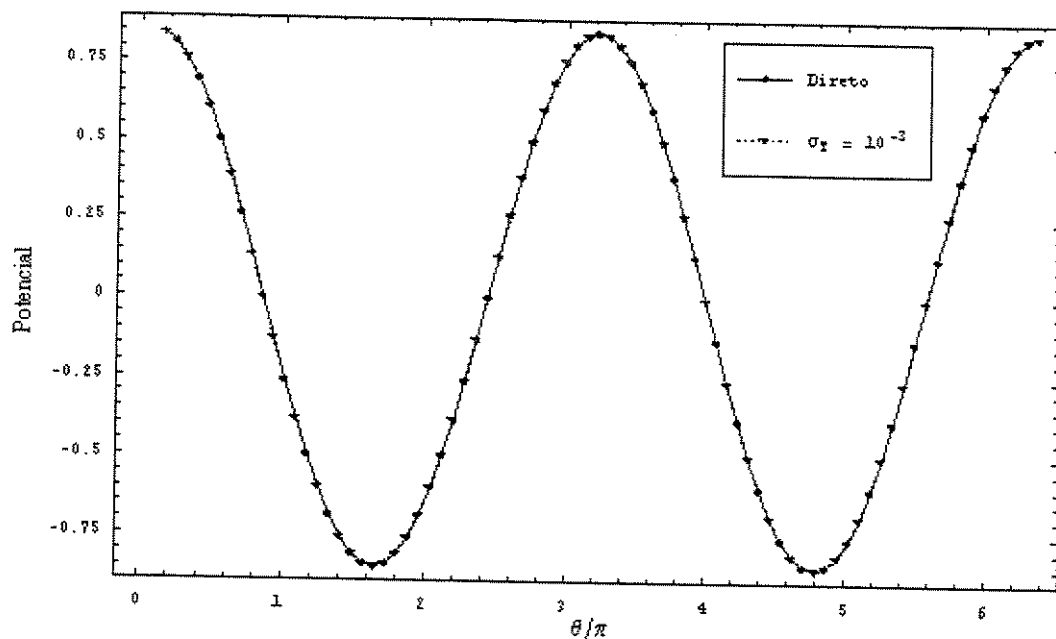


Figura 8.8b: Potencial recuperado para $ka = 1.0$

Repetindo esse mesmo procedimento, na figura 8.8c-f , mostramos aproximação, entre o potencial recuperado e o potencial medido no contorno do cilindro para $\sigma_T = 10^{-3}$, onde na figura 8.8c, para $ka = 2.0$, o erro medido foi de 0.20 com $nc(\mathcal{R}) = 13.8574$, na figura 8.8d, para $ka = 4.0$, o erro medido foi de 0.181% com $nc(\mathcal{R}) = 8.0537$, na figura 8.8e, para $ka = 8.0$, o erro medido foi de 0.23% com $nc(\mathcal{R}) = 4.5814$ e por fim na figura 8.8f, para $ka = 16.0$, o erro medido foi de 0.20 com $nc(\mathcal{R}) = 2.67931$.

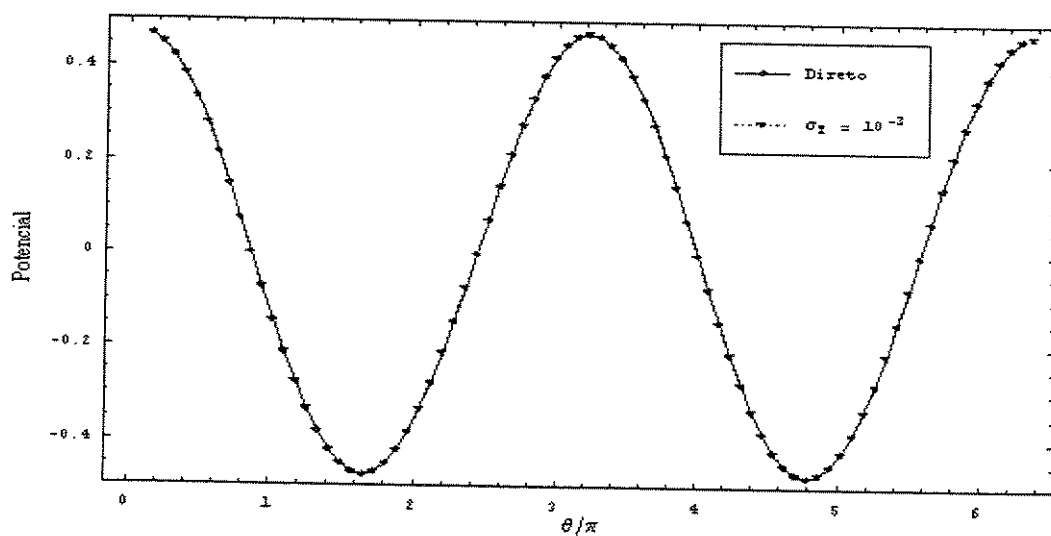


Figura 8.8c: Potencial recuperado para $ka = 2.0$

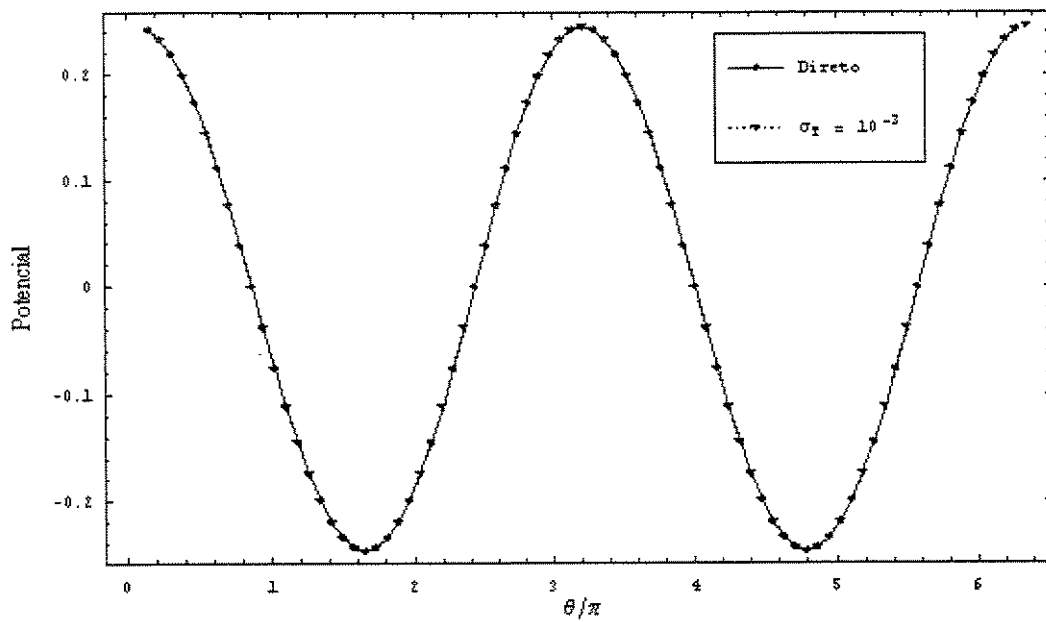


Figura 8.8d: Potencial recuperado para $ka = 4.0$

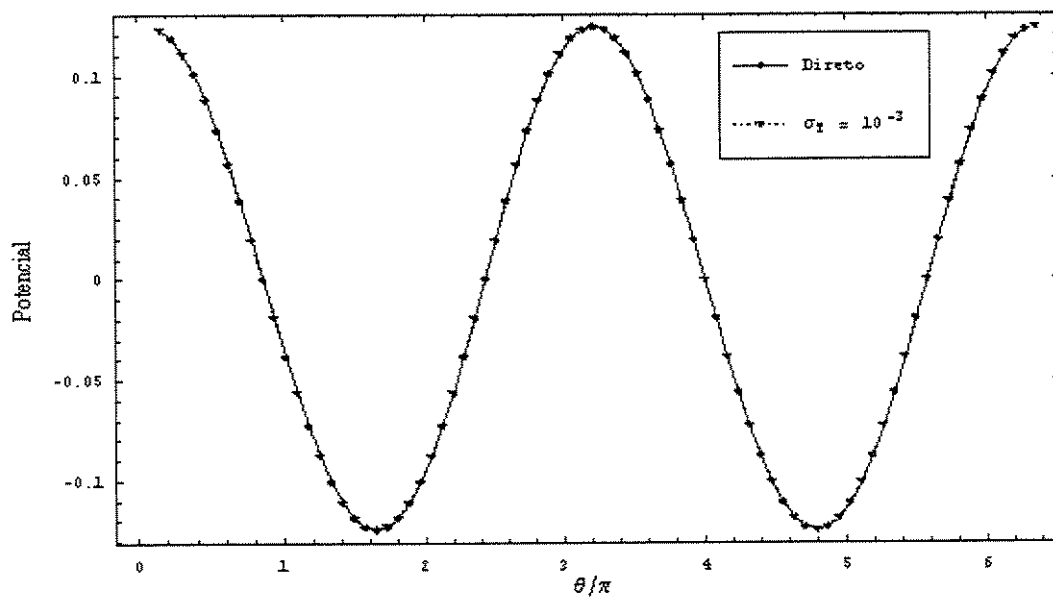


Figura 8.8e: Potencial recuperado para $ka = 8.0$

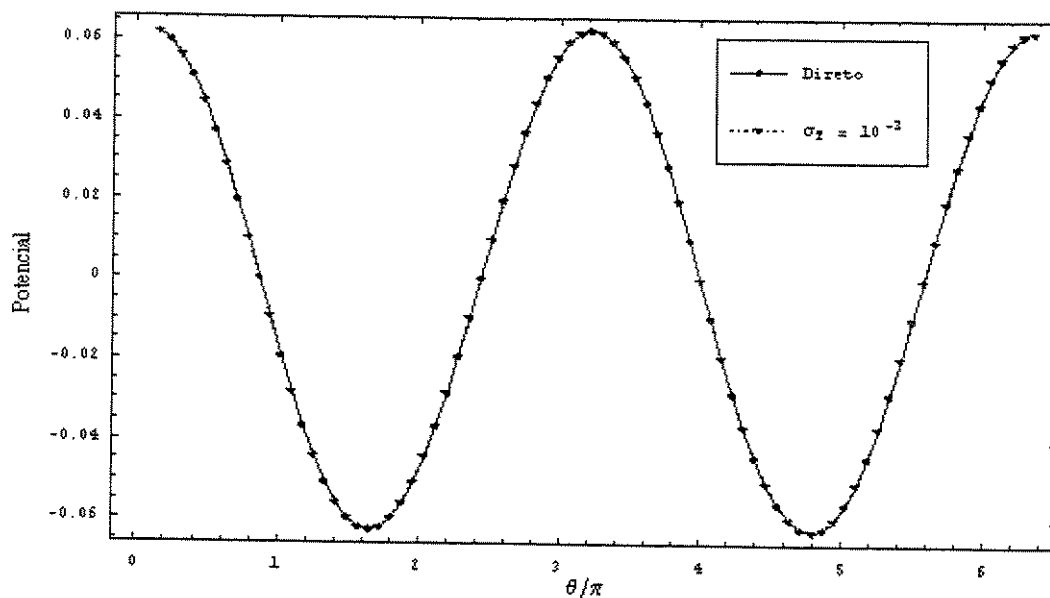


Figura 8.8f: Potencial recuperado para $ka = 16.0$

Ainda em relação as tabelas 8.5 e 8.6, podemos observar que, fixados o número de pontos no círculo de raio ξ_1 e o valor de ka , o número de condição da matriz R correspondente ao parâmetro σ_T que assegura melhor convergência da resposta, não é o menor número de condição da matriz R , conforme pode ser visto nas linhas das tabelas 8.5 ou 8.6. Por outro lado o número de condição da matriz R diminui na medida em que ka aumenta, para cada valor fixo de σ , (também pode ser visto agora nas colunas das tabelas 8.5 ou 8.6), o que possivelmente torna a matriz R melhor condicionada.

A observação, feita entre o número de condição da matriz R e o parâmetro σ , é pouca conclusiva e apenas garante que é possível recuperar o potencial no contorno do cilindro tal como foi feito, mas observando ainda na tabela 8.6, para $ka = 16.0$, podemos estimar o parâmetro σ_T entre 10^{-6} e 10^{-2} , pois nesse caso o erro medido é sempre menor que 1% e a densidade dada por (8.17) é de $n_\omega = 2.5$, (figura 8.9). De mesma forma se tivéssemos considerado o valor de $ka = 32$, poderíamos estimar por exemplo $\sigma_T = 10^{-5}$, com o erro de 0.04% (figura 8.10), enquanto que para $\sigma = 10^{-4}$ o erro é de 0.067% e para 10^{-6} o erro é de 0.063%, ou seja também nesse caso teríamos um erro menor que 1%, para o parâmetro σ_T entre 10^{-6} e 10^{-2} , e a densidade dada por (8.17) é de $n_\omega = 2.5$.

Este fato descrito, sugere que assim como no caso para o D.V.S na estimativa do parâmetro σ_T , um aspecto a ser considerado é a densidade n_ω definida em (8.15), que é a relação entre o número de pontos por comprimento de onda no contorno do círculo de raio ξ_1 .

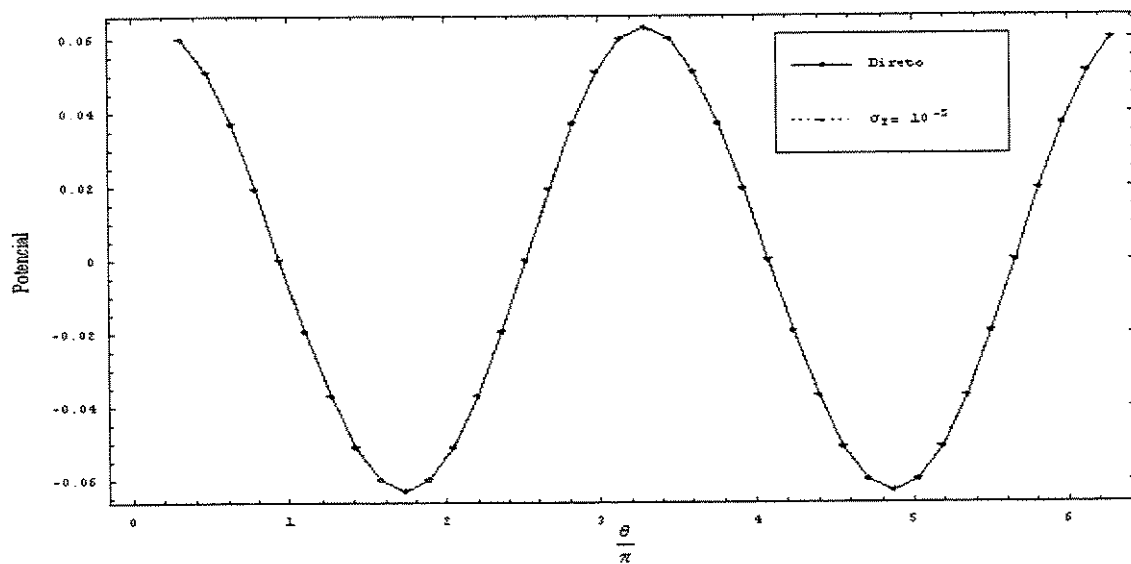


Figura 8.9: Potencial recuperado para $ka = 16$.

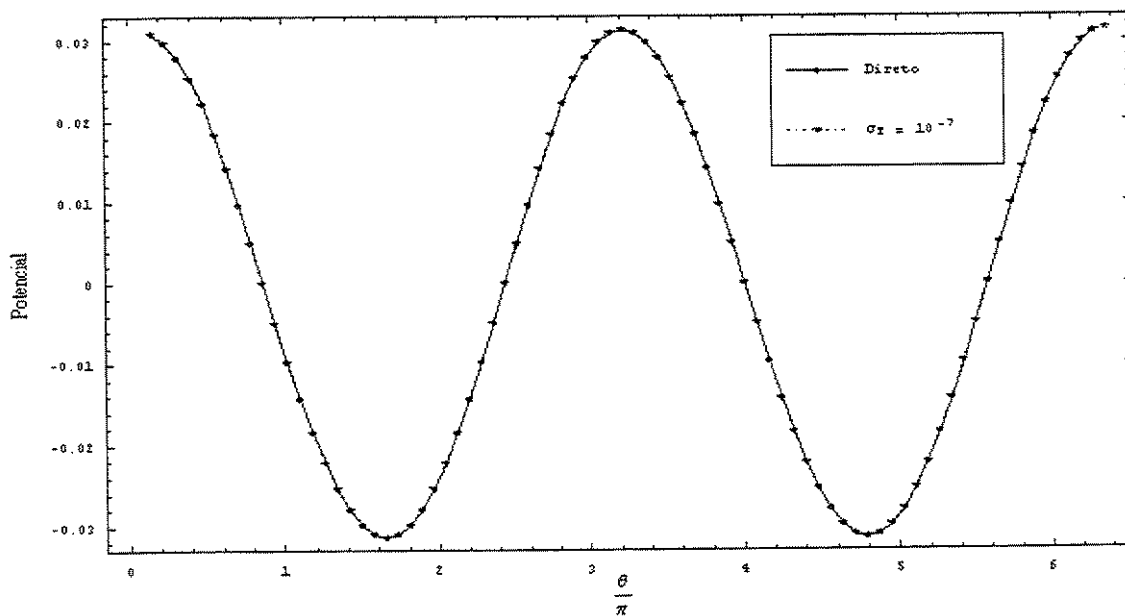


Figura 8.10: Potencial recuperado para $ka = 32$.

8.7- PROBLEMA INVERSO PARA FONTES RADIANTES COM GEOMETRIA DO CONTORNO MAIS COMPLEXAS.

Nesta seção vamos considerar o problema inverso para duas supostas fontes acústicas radiantes, com diferentes formas geométricas de seus contornos. A primeira fonte tem o contorno do perfil de um auto-falante [Kim -1990], e a segunda tem o contorno dado pelo deslocamento de um tubo quadrado, quando é considerado um de seus modos de vibrar dados em [Mesquita-2000].

Nos dois casos, vamos considerar o potencial conhecido, nos pontos de um círculo de raio ξ_2 , ao redor da fonte radiante. Assim o problema inverso consiste em recuperar o potencial acústico, no contorno dessa fonte, a partir do potencial conhecido nos pontos do círculo de raio ξ_2 .

Ainda que não temos a solução teórica para nenhum dos dois casos a serem considerados, o potencial no contorno de cada uma das fontes, é calculados por (6.3), considerando no contorno da fonte a condição de Neumann, dada por $\frac{\partial u}{\partial n} = 1.0$, e o potencial medido nos pontos do círculo de raio ξ_2 determinados por (7.23).

A resposta do problema inverso, que recupera o potencial no contorno da fonte, determinada por (8.11) segundo a estratégia de regularização D.V.S, ou por (8.21) segundo a estratégia de regularização de Tikhonov, é caracterizado pela densidade (n_ω) do número de pontos por comprimento de ondas no contorno da fonte, dada em (8.16), que combinada com (8.15) resulta em:

$$n_\omega = \frac{2\pi np}{k \lambda_\Gamma} \quad (8.23)$$

As duas respostas do potencial recuperado, obtidas por (8.11) ou por (8.21) e o potencial medido no contorno da fonte são comparadas através do erro definido em (7.23).

Exemplo Ilustrativo: 3 (Perfil do Auto-falante)

Nesse exemplo, a fonte considerada é o perfil de um auto-falante mostrado na figura 8.11, tem dimensões dadas por: 2.4 m de altura por 2.0 m de largura e a parte conexa tem os lados de 1.3 m e ao redor dessa fonte o círculo de raio $\xi_2 = 2.0$ m.

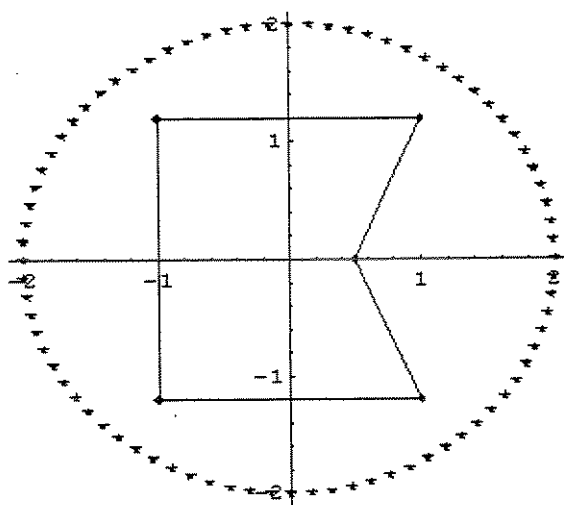


Figura 8.11: Perfil do Auto-falante.

Considerando, os números de ondas $k = 10$ e 20 , o potencial medido em 102 pontos no círculo de raio $\xi_2 = 2.0$ m, vamos através do problema inverso recuperar o potencial no contorno da fonte para dois casos: i) o potencial é conhecido em 34 pontos; ii) o potencial é conhecido em 68 pontos.

Na tabela 8.7, mostramos o erro determinado por (6.) entre o potencial recuperado e o potencial medido nos 34 pontos do contorno da fonte, considerando $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

Tabela 8.7 : Potencial recuperado em 34 pontos no contorno

k	D. V. S.- erro%			TIKHONOV - erro%		
	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$
10.0	0.002	0.002	0.002	0.169	0.16	0.45
20.0	0.0005	0.0005	0.0005	0.208	0.021	0.021

Já na tabela 8.8, mostramos o erro determinado por (7.23) entre o potencial recuperado e o potencial medido nos 68 pontos do contorno da fonte, com $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

Tabela 8.8 : Potencial recuperado em 68 pontos contorno.

k	D. V. S.- erro%			TIKONOV -erro%		
	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$
10.0	34.53	34.72	34.61	26.98	27.29	50.81
20.0	0.016	0.041	0.071	6.86	1.54	25.80

Como nosso interesse foi de recuperar o potencial no contorno da fonte, considerando a densidade do número de pontos por comprimento de onda, mostramos na tabela 8.9, a densidade n_ω determinada por (8.23), para os casos i) e ii) e números de ondas $k = 10$ e 20.

Tabela 8.9: Densidade de Pontos por Comprimento de onda

$k \backslash np$	10.0	20.0
34	2.37	1.18
68	4.74	2.37

Observando os resultados das tabelas 8.7 e 8.8, com as densidades dadas na tabela 8.9, verificamos que o potencial recuperado, teve melhor aproximação do potencial medido, no contorno da fonte, para as menores densidades. Isto é, para o caso em que: $np = 34$, $k = 10.0$, temos a densidade correspondente $n_\omega = 2.37$, com boa aproximação da resposta, tanto quando usamos da estratégia do D.V.S, como da estratégia de Tikhonov, o mesmo ocorreu $k = 20$, com $n_\omega = 1.18$, além disso o fato se repete, para $np = 68$ com densidade correspondente $n_\omega = 2.37$. A aproximação da resposta em todo o contorno da fonte para os resultados da tabela 8.7, quando $\sigma = 10^{-4}$, são mostrados nas figuras 8.12a-b.

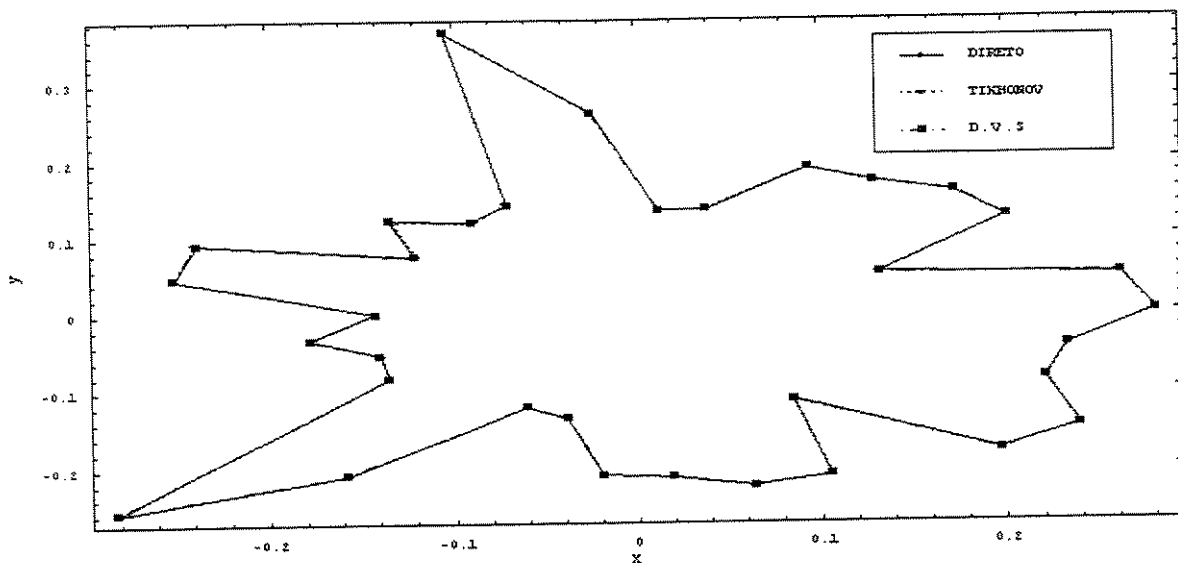


Figura 8.12a: Potencial recuperado no contorno do Auto-falante; $k=10.0$.

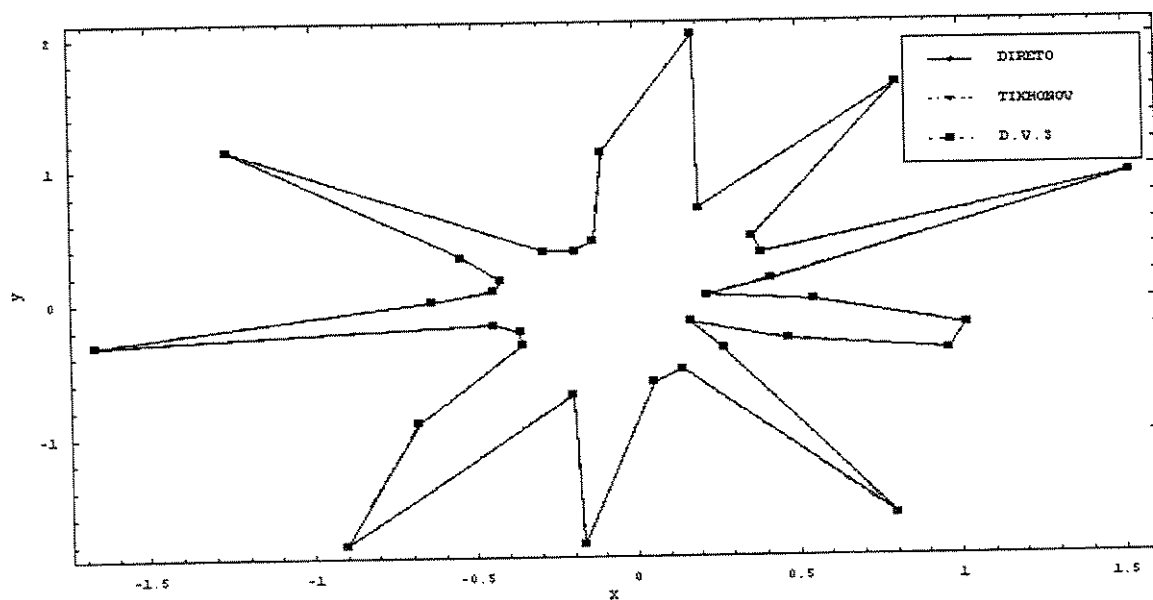


Figura 8.12b: Potencial recuperado no contorno do Auto-falante; $k=20.0$

É interessante observar aqui, que em outras simulações as respostas tiveram boa aproximações se $n_{\omega} \cong 2.5$ ou um valor menor.

Exemplo Ilustrativo 4 – (Problema do tubo quadrado).

Nesse exemplo vamos considerar o contorno da fonte, dado pelo deslocamento de um tubo quadrado de lado 2m, devido a seus modos naturais de vibrar dois desses modos dados em [Mesquita-2000], foram escolhidos arbitrariamente a saber: a) $k = 0.5761$, correspondendo ao primeiro modo natural de vibrar; b) $k = 5.1659$, correspondendo ao sétimo modo natural de vibrar, portanto 4 diferentes problemas a serem tratados.

O problema inverso mais uma vez aqui, trata da recuperação do potencial acústico no contorno da fonte radiante a partir de potencial conhecido num círculo de raio ξ_2 . No contorno da fonte vamos considerar 56 pontos e no círculo de raio ξ_2 , 168 pontos. Diferente do exemplo 3, aqui nós vamos considerar três diferentes valores de ξ_2 a saber 1.8, 2.0 e 2.2 m, com isso não consideramos a densidade n_ω .

- a) Na figura 8.13 é mostrado o contorno da fonte, quando o modo natural de vibrar é dado por $k = 0.5761$, e o círculo de raio ξ_2 .

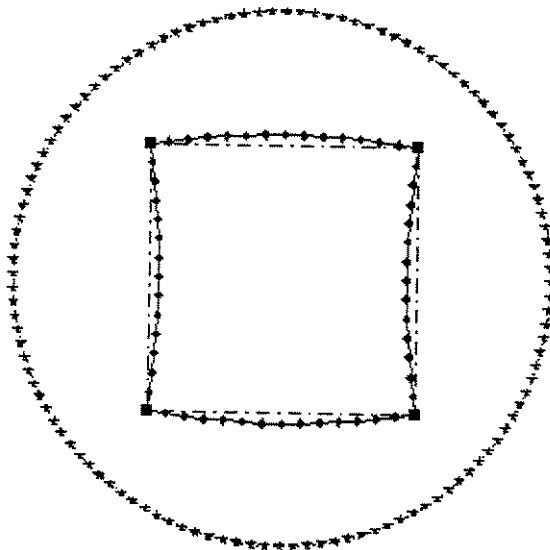


Figura 8.13: Deslocamento do tubo devido o 1º modo de vibrar

A tabela 8.10, mostra o erro calculado por (7.23), quando comparamos potencial medido e o potencial recuperado no contorno da fonte, a partir do potencial conhecido nos pontos dos

círculos de raio ξ_2 , quando consideramos os possíveis parâmetros regularizadores $\sigma = 10^{-3}$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-5}$.

Tabela 8.10: Potencial Recuperado para 1º modo do tubo quadrado

ξ_2	D. V. S.- erro%			TIKHONOV - erro%		
	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$
1.8	1.19	0.40	0.59	7.30	7.33	44.26
2.0	1.75	1.19	1.04	11.57	9.11	91.42
2.2	5.85	3.60	2.70	14.86	11.00	82.61

Nesse caso observamos que a recuperação do potencial é de melhor qualidade quando consideramos a estratégia de regularização D.V.S, com $\sigma = 10^{-4}$ e $\xi_2 = 1.8$ m.

As aproximações das respostas em todo os pontos do contorno da fonte, são mostradas na figura 8.14, para o parâmetro $\sigma = 10^{-4}$, que é o melhor parâmetro que recupera o potencial no contorno da fonte tanto para a estratégia D.V.S, como no caso de Tikhonov, para $\xi_2 = 1.8$ m.

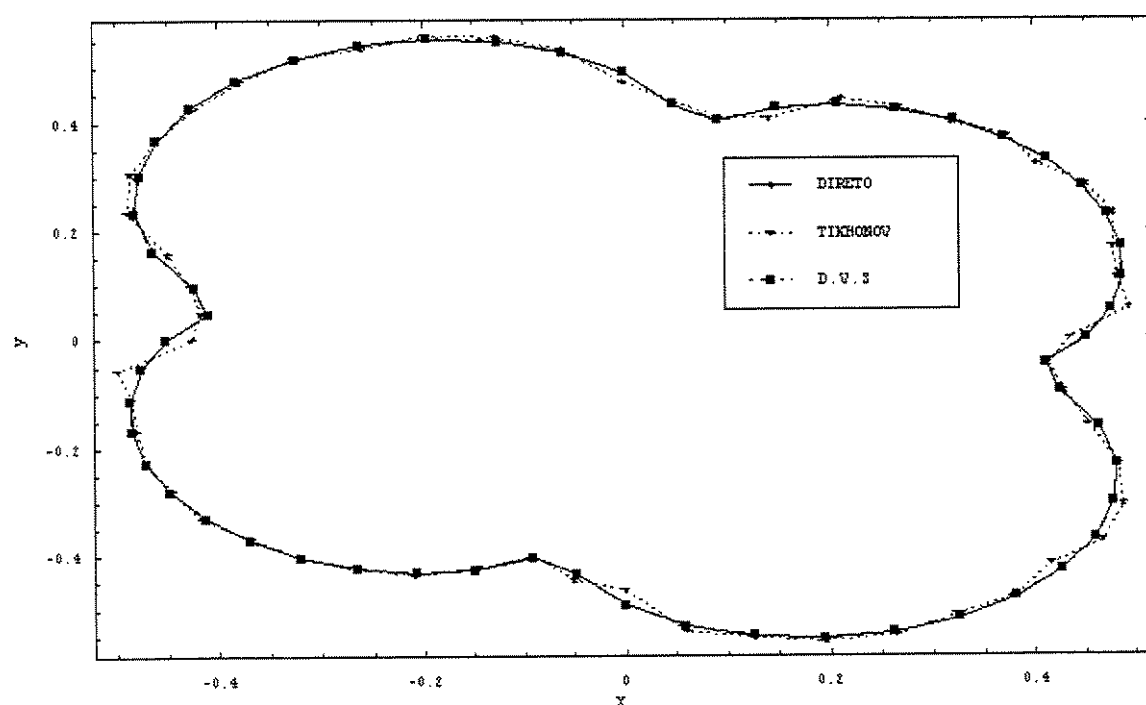


Figura 8.14: Potencial Recuperado 1º modo de vibrar do tubo quadrado.

- b) O contorno da fonte agora é dado na figura 8.15, quando consideramos o sétimo modo de vibrar do tubo quadrado com $k = 5.1659$.

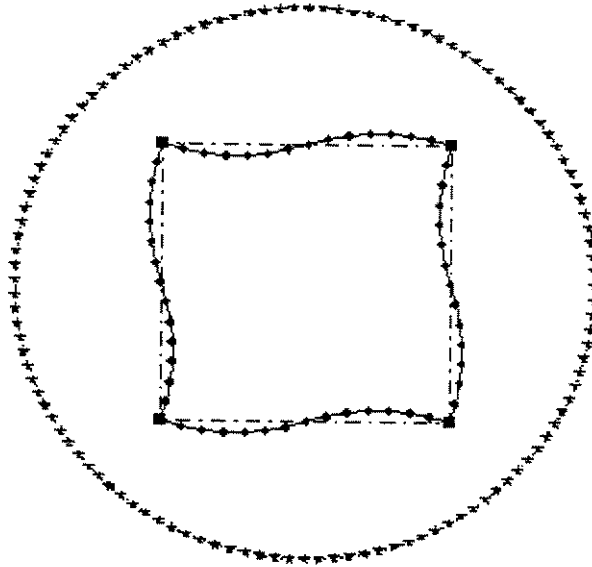


Figura 8.15: Contorno da fonte para o 7º modo de vibrar do tubo quadrado

Assim como foi mostrado na tabela 8.10, na tabela 8.11 comparamos o erro entre o potencial recuperado e o potencial medido no contorno da fonte radiante.

Tabela 8.10: Potencial Recuperado para 7º modo do tubo quadrado

ξ_2	D. V. S.- erro%			TIKHONOV - erro%		
	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$	$\sigma = 10^{-5}$
1.8	7.84	7.78	7.70	2.40	5.72	91.37
2.0	9.10	9.02	9.28	3.33	5.10	96.23
2.2	11.47	10.75	10.77	3.80	5.60	92.15

Nesse caso a resposta foi de melhor qualidade quando usamos da estratégia de Tikhonov. Uma comparação dessas respostas para $\xi_2 = 1.8$ e $\sigma = 10^{-3}$ é mostrada na figura 8.16.

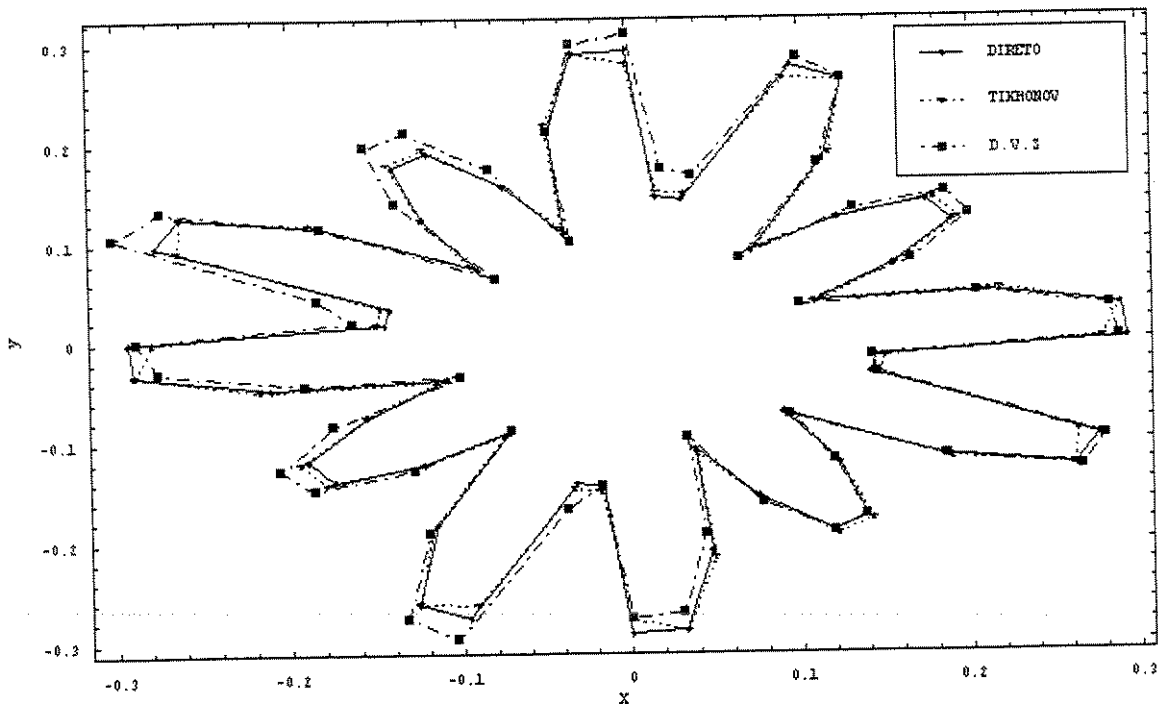


Figura 8.16: Potencial Recuperado 7º modo do tubo quadrado

8.8 – Conclusão do capítulo.

Neste capítulo, observamos que o mal condicionamento da matriz gerada pela formulação do MEC é um fator que tem grande influencia na reconstrução do potencial acústico no contorno da fonte. Verificamos que as duas estratégias utilizadas para a regularização da resposta numérica do problema são eficientes, mas não conclusivas, no sentido de que não foi possível garantir a reconstrução para um conjunto de valor de ka . Por outro lado, foi possível verificar que para números de ondas maiores, a relação definida entre: o número de pontos e o comprimento de ondas, no contorno da fonte, produziram bons resultados. Entretanto aqui também, não foi possível estabelecer um valor ótimo para esta relação.

Capítulo 9

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

O presente trabalho dedicou-se a recuperar as formulações do Método dos Elementos de Contorno quando aplicado a problemas da acústica linear estacionária bidimensional, regida pela equação diferencial parcial de Helmholtz.

A dedução da Solução Fundamental do operador de Helmholtz para o caso bidimensional foi feita detalhadamente, organizando informações que não estão imediatamente disponíveis na literatura de Elementos de Contorno. Mostrou-se também em detalhe que, para problemas exteriores em domínios ilimitados, a Equação Integral de Contorno reduz-se àquela escrita para o contorno da fonte radiante ou ainda para o contorno do corpo limitado que causa reflexão e espalhamento. Mostrou-se, enfim, que não existe contribuição do contorno ilimitado à EIC que governa o fenômeno acústico bidimensional.

No tratamento de domínios limitados obteve-se as grandezas modais de distintas cavidades acústicas. Duas técnicas foram aplicadas para obtenção das frequências naturais (auto-valores) e dos correspondentes modos operacionais de vibração (auto-vetores). A primeira técnica consiste na procura direta das raízes da equação característica complexa sintetizada com auxílio do MEC. Esta técnica exige a determinação simultânea das raízes das partes real e imaginária do polinômio característico. Como a aproximação numérica introduzida pelo MEC induz uma separação das raízes da parte real e imaginária, na prática utiliza-se o mínimo local do valor absoluto do polinômio característico como indicativo dos auto-valores. Esta técnica, porém, pode apresentar mínimos locais no valor absoluto do polinômio característico que são flutuações e não são raízes do polinômio. No presente trabalho mostrou-se que a diferença entre as raízes da

parte real e imaginária do polinômio característico apresenta uma dependência da discretização utilizada para representar a cavidade acústica através do MEC. Comprovou-se que quanto maior a discretização do contorno da cavidade, menor a diferença entre as partes real e imaginária das raízes do polinômio complexo. Esta conclusão cria uma metodologia para separar mínimos locais que estão associados a auto-valores daqueles que representam flutuações numéricas que surgem na avaliação do determinante da equação característica. Este é um resultado original do presente trabalho.

A segunda técnica utilizada para obtenção das grandezas modais de cavidades acústica foi a utilização de Funções de Resposta em Frequência (FRFs). A idéia era associar os valores máximos ou ressonâncias presentes nas FRFs com as frequências naturais das cavidades estudadas. Na prática tentou-se utilizar uma pesquisa dos máximos locais das FRFs para caracterizar os auto-valores. Porém nem todo máximo local das FRFs correspondem a auto-valores. Assim estudou-se tanto a média de uma família de FRFs como a superposição de múltiplas FRFs. Verificou-se que, por inspeção, é possível a determinação dos auto-valores da cavidade estudada. Não foi possível, entretanto, criar uma metodologia automática para determinação das grandezas modais a partir das FRFs.

No que diz respeito à análise dinâmica de domínios ilimitados foram abordados os problemas de radiação, espalhamento (scatter) e obtenção inversa das grandezas acústicas em contornos geometricamente determinados. O problema da radiação foi corretamente formulado, conforme atestam os resultados numéricos validados com soluções analíticas. Um aspecto que merece ser salientado é a determinação dos fluxos no domínio resultantes da implementação de uma equação integral contendo derivadas dos núcleos da EIC original.

O problema do espalhamento, foi pela primeira vez implementado no âmbito do grupo de pesquisa na qual a presente tese está inserida. A formulação também foi validada tendo por base soluções analíticas. Os resultados sintetizados mostram que é possível estudar espalhamento através do MEC para frequências relativamente altas, com elementos simples.

Uma investigação com forte grau de originalidade realizada na presente tese foi a solução de problemas inversos com a utilização do MEC. No caso tratou-se da obtenção das variáveis acústicas na superfície de um corpo radiante, de geometria conhecida, a partir do campo acústico medido em uma superfície fechada em torno do corpo estudado. Este problema abre a possibilidade de se determinar, a partir de medidas externas, quais partes de superfície de um corpo radiam som com mais intensidade. No estudo do problema inverso foram aplicadas duas técnicas. A primeira é a Decomposição em Valores Singulares (SVD) e a segunda é a regularização de Tikhonov. Ambas estratégias dependem de ajustes de parâmetros. No trabalho são fornecidos elementos para que se possa determinar os parâmetros adequados em cada formulação e situação específica.

O presente trabalho não esgotou todas as possibilidades de análise de problemas acústicos através do MEC. Mas ele contém elementos sobre os quais futuras análises podem ser construídas. Algumas sugestões de continuidade da análise são formuladas na sequência:

- a) Implementação de elementos polinomiais de ordem mais alta, por exemplo, linear, quadrática e cúbica, visando analisar os ganhos de precisão e eficiência computacional associados a cada tipo de discretização.
- b) Estudar a possibilidade de se conseguir realizar o problema inverso para o caso de um corpo radiante situado em um domínio limitado.
- c) Realizar uma implementação do MEC baseada na metodologia da formulação simétrica de Galerkin, visando estudar o efeito da simetrização das matrizes do MEC nos problemas de determinação de auto-valores, seja pela pesquisa direta, seja através das FRF.
- d) Implementar uma metodologia de extração de dados modais a partir de FRFs de cavidades acústicas, tal como proposto por Arruda [1996] e Mesquita et al [2000].
- e) Estender a análise para o caso tridimensional.

Referências Bibliográficas

- ALI, Ashraf, C. Rajakumar and Shah M. Yunus, On The Formulation of the Acoustic Boundary Element Eigenvalue Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol 31, pp 1271-1282.
- Anzou, Lúcia Ayako (Mestrado) Título: Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a equação de Helmholtz, visando a modelagem da radiação e dispersão acústica. Data da defesa: 19.04.96
- Arruda, JRF, Rio, SAV, Santos LAB, A space-frequency data compression method for spatially dense laser doppler vibrometer measurements. *Shock and Vibration* 3(2), 1996, pp 127-133.
- Astley R.J, Macaulay and Coyete J.P, Mapped wave envelope for Acoustical Radiation and Scattering, *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol 170, pp 97-118.
- Banaugh, R. P., and Goldsmith, W., Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape, *Jour. App. Mech.*, n.30, 1963, pp. 589-597.
- Banerjee, P. K., S. T. Raveendra, Polynomial Particular Solutions Based Boundary Element Analysis of Acoustic Eigenfrequency Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol 35, pp 1787-1802.
- Banerjee P.K, Ahmad S and Wang H.C, A New Formulation For the Acoustic Eigenfrequency Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, Vol 26, pp1299 – 1309.

- Banerjee, P.K, Ahmad, S. and Wang, H.C, A New Formulation For the Acoustic Eigenfrequency Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol 26, pp 1299 – 1309.
- Becker, A. A., The Boundary Element Method in Engineering, 1992, *Ed McGraw-Hill Book Company Europe*, 1992 cap 3, pp. 41- 48.
- Boyce, William E. e Richard C. DiPrima. Equações diferenciais elementares e problema valor de contorno, *Ed Guanabara Koogan*, 1990, Cap.6, pp 236 - 239.
- Brebbia, C.A., Recent advances in boundary elements, *Pentech Press, London*, 1978a.
- Brebbia, C. A., The boundary element method for engineers, *Pentech Press, London*, 1978b.
- Brebbia, C. A. and S. Walker., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- Brebbia, C.A., Domingues, J., Boundary Elements an Introductory Course. *Computational Mechanics Publications*, 1989.
- Brundit, G.B., A solution to the problem of scalar scattering from a smooth bounded obstacle using integral equation, *Qua. Jour. Of Mechanics and Applied Math.*, 18, 1965 pp.473-489.
- Burden, Richard L., Numerical Analysis, Ed PWS-KENT Publishing Company, 1989, cap 4, pp 198 – 200.
- Chen, J.T., Chen K.H, and Chen C.T, Adaptive boundary elements method of time-harmonic exterior acoustics in two dimensions, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2002, 191 pp 3331-3345.
- Chen, L.H., and Schweikert, D.G, Sound radiation from an arbitrary, *J. Acous. Soc. Amer.*, 1963, vo.l 35, pp. 1626-1632.
- Chertock, G., Sound radiation from vibrating surfaces, *J. Acous. Soc. Amer.*, 36, 1964, pp 1305 – 1313.

- Ciskowski, R.D. and C.A. Brebbia, Boundary Element Methods in Acoustics, *Computational Mechanics Publications Southampton Boston*, 1991, cap 3, pp 61-74.
- Copley, L. G., Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation, *J. Acous. Soc. Amer.* 44, 1967, pp. 28-32.
- Coyette. J. P and Fyfe K. R.. An Improved Formulation for Acoustic Eigenmode Extraction Form Boundary Element Models; *Journal of Vibration and Acoustics*, July 1990, Vol. 112, pp 392-398.
- Cruse, T.A., and Rizzo, F.J., (Eds.), Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics, *AMD-Vol. II, A.S.M.E*, 1975.
- Cruse, T.A., and Rizzo, F.J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I, *Jour. Math. Anal. And Appl.* 22, 1968, pp. 244-259.
- Cruse, T.A., and Rizzo, F.J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II, *Jour. Math. Anal. And Appl.* 22, 1968, pp. 341-355.
- Departament of Mechanical Engineering, Two-dimensional Problems, in Boundary Element Acoustics, *Eds T. Wu, WIT Press, Southampton UK*, 2000, Cap 3, pp.29 –31.
- Eringen, A.C., Shubi, E.S.: Elastodynamics. Vol. II, *Academic Press, New York*, 1975.
- Fridel Hartmann, The Somigliana Identity on Piecewise smooth surfaces, *Journal of Elasticity*, Vol.11, n 4, October 1981.
- Greenspan, D., and Werner, P., A numerical method for exterior Dirichlet problem for the reduced wave equation. *Archive for radiation mechanics and analysis*, 23, 1966, pp 288 – 316.
- Gurtin, Morton E. An introduction to continuum mechanics. *Edited by Richard Bellman, University of Southern California*, 1981, Cap. 2 , pp.37 – 38.

- Hall, W. S., The Boundary Element Method, *editor Kluwer Academic Publishers*, 1994, cap 2, pp. 41 – 51.
- Hall, W.S. and W.H. Robertson, Boundary element methods for acoustics wave scattering, Departament of Mathematics and Statistics, Tesside Polytechnic, Middlesbrough, Cleveland, UK.
- Harris, P.J. and Amini, S., On the Burton and Miller Boundary Integral Formulation of the Exterior Acoustic Problem, *Journal of Vibration and Acoustics*, October 1992, vol 114, pp 540-545.
- Hwang, W.S., A Boundary spectral method for solving exterior acoustical problems with hypersingular integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, pp. 1775 – 1783.
- Hon, Y.C, and Zongmin, W.U., A Numerical Computation for Inverse Boundary Determination Problem, *Engineering Analyses with Boundary Elements*, 2000, vol 24, pp 599 – 606.
- Harari I., Paul E. Barbone, Michael Slavutin and Rami Shalom, Boundary Infinite Elements for the Helmholtz Equations in Exterior Domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol. 41, pp1105-1131.
- Jaswon, M.A., and Symm, G.T., Integral equqtion mthods in potential theory and elastostatics, *academic press*, N.Y., 1977.
- Joseph, J. Shirron, I. And Babuska, A Comparison of approximate boundary conditions and infinite elements methods for exterior Helmholtz problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1998, pp 121-139.
- Juhl, P, A Note on the Convergence of the Direct Collocation Boundary Element Method, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, n° 212, vol 4, pp 703- 719.

- Kamiya N., E. Andon, Eigenvalue Analysis by Boundary Element Method, Department of Mechanical and Mechanical Information Systems Engineering, Nagoya University, Nagoya, BEM XIV- pp 673-690.
- Kamiya, N, and Ohw, E. A Note on Multiple Reciprocity Integral Formulation For The HelmHoltz Equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1993, Vol 9, pp 9 – 13.
- Kane, James H., *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey , Cap.16: Boundary formulations in acoustics, pp 476-516.
- Kim, G.T., and Lee B. H., 3-D Sound Source Reconstruction and Field Reprediction using the Helmholtz Integral Equation, *Journal of Sound and Vibration*, 1990, vol 136(2), pag 245 – 261.
- Kress, R., L. Kühn, Linear sampling methods for inverse boundary value problems in potential theory, *Applied Numerical Mathematics*, 2002, vol. 43, pp. 161 – 173.
- Lachat, J. C., Cruse, T.A., Rizzo, F.J., and Shaw, R.P. (eds.), International symposium on innovative numerical analysis in applied engineering science, *CETIM, Senlis, France*, 1977.
- Linz Peter, Theoretical Numerical Analysis, An introduction to Advanced Techniques, 1979, John Wiley & Sons, Inc.
- Magalhães, M.B.S., Tenenbaum, R.A., and Zindeluk M., Regularization Strategies Applied to Acoustics Holography, *XIX Meeting of the Brazilian Society of Acoustics*, April 2000, pp 434-439.
- Mantic, V., A new formula for the c-matrix in the somigliana identity, *Journal of Elasticity*, 1993, vol.33, pag 191-201.
- Marburg ST, Hardtke H. J, A study on the acoustic boundary admittance, determination, results and consequences, engineering analysis with boundary elements, June 1999, vol.23, pag 737-744.

- Mc Carthy, P.J., Direct Analytic Model of the L-curve for Tikhonov Regularization Parameter Selection, Institute of Physics Publishing (inverse Problem), 2003, vol. 19, pag 643- 663.
- Mesquita Neto, Euclides de, Carvalho, Edson Rodrigues, Arruda, José Roberto de França, Pavanello, Renato, Acoustic Eigenvalue Analysis by Boundary Element Methods, Chapter 7, *Boundary Element Acoustics- Fundamentals and Computer Codes* , T. W. Wu. (ed.), WIT Press, Southampton, 2000, pp.117-158, ISBN 1-85312-570-9
- Mesquita Neto, Euclides de, Pontes Jr., Bento Rodrigues de, Sousa Edson Antonio Capello de; Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. I: Formulation. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, RBCM, vol. XVI, nº 2, 1994a, pp. 143-158.
- Mesquita Neto, Euclides de, Pontes Jr., Bento Rodrigues de, Sousa Edson Antonio Capello de; Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. II: *Validation and applications*. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, RBCM, vol.XVI, nº 2, 1994b, pp.159-176.
- Mesquita, E, Pavanello, R; Numerical Methods for the dynamics of unbounded domains. *Computational and Applied Mathematics*, (2004), pp.1-22 (in press).
- Morse, P. M.–Feshbach, Methods of Theoretical Physics, parte II, *MacGraw-Hill*, New –York, 1953, pp 1331-1433.
- Morse, P. H., Ingard. K. U., ed., *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, 1968.
- Nelson, P. A., and Yoon S. H., Estimation of Acoustic Source Strength by Inverse Methods: Part I, Conditioning of the Inverse Problem, *Journal Sound and Vibration*, 2000, Vol. 233(4), pag 643 – 668.
- Noble Ben, James and W. Daniel, *Algebra Linear Aplicada*; Traduzido por João Pitombeira de Carvalho; 2ª edição, *Editora Prentice-Hall do Brasil*, 1986, cap. 9, pp 244-280.

- Raveendra S.T, Banerjee P. K; Polynomial Particular Solutions Based Boundary Element Analysis of Acoustic Eigenfrequency Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol.35, pp 1787-1802.
- Rus Guillermo and Rafael Gallego, Optimization algorithms for identification inverse problem with the boundary elements method, *Engineering Analyses with Boundary Elements*, January 2002, vol. 26, pp 315 –327.
- Schenck, H. A., Improved integral formulation for acoustic radiation problems, *J. Acous. Soc. Amer.*, vol. 44, 1968, pp. 41 – 58.
- Schenck, Harry A., Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, vol 44, n. 1, pp 41-58.
- Swokowski, Earl William, Cálculo com Geometria Analítica, *Copyright Ed McGraw-Hill do Brasil Ltda*, 1983, cap 6, pp 138 –139.
- Sygulski, R., Dynamic Analysis of open Membrane Structures Interacting with Air, *International Journal Numerical Methods in Engineering*, Vol 37, pag. 1807-1823, 1994.
- Tanaka, M., Matsumoto, T., and Sakamoto, K., Noise Source Identification of Railway Car Model by the Boundary Elements Method using Sound Pressure Measurements in 2-D infinite Half Space, 3rd Int. *Conference on Inverse Problems in Engineering*, 1999, June 13 –18, , Port Ludlow, WA,USA.
- Trevelyan, J., *Boundary Elements for Engineers Theory and Applications*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1994.
- T.W. Wu (editor), *Boundary Elements in acoustics – Fundamental and Computer Codes*, chapter 3, Wit Press, Southampton, UK, 2000
- Yoon W.S, Park J. M. and Eversman, W., Two Dimensional Radiation and Scattering at Short Wave Length, *Journal of Vibrations and Acoustics*, July 1990, vol112, pag 384-391.

Yoon, S. H., and Nelson P. A., Estimation of Acoustic Source Strength by Inverse Methods: Part II, Experimental Investigation of Methods for choosing Regularization Parameters, 2000, Vol 233(4), pp 669 – 705.

Zeb, A., Elliot, L., Ingham, D. B., and Lesnic, D., Boundary Elements two-dimensional Solution of an Inverse Stokes Problem, *Engineering Analyses with Boundary Elements*, 2000, vol 24, pp 75-88.