

TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS:
ANÁLISE, SÍNTESE E APLICAÇÃO
EM VEÍCULO HÍBRIDO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS:
ANÁLISE, SÍNTESE E APLICAÇÃO
EM VEÍCULO HÍBRIDO

Cesar de Souza Lima ^{NT}

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

- CAMPINAS -

1980

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. HANS INGO WEBER, ^{TT} orientador desta tese, pela imprescindível ajuda e pelo modo amigo e imediato que sempre me recebeu.

À minha esposa, cuja simples presença me deu forças para superar os momentos difíceis.

Aos colegas da F.E.C., KONSTANTINOS STAVROPOULOS, GUIDO JOSÉ KRETSCHKEK, LUIZA M. DE CAMPOS PETRUCELI, LUIZ R. MORELLI, JULIO CESAR CASANGEL, ANA MARIA VIEIRA ROCHA, TAKA O. PERRONI pelo excelente trabalho de datilografia e a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos MEUS PAIS, pelo amor e
dedicação que sempre me
deram, ofereço este traba-
lho como uma forma de agradecimento.

TÍTULO: TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS: ANÁLISE, SÍNTESE E
APLICAÇÃO EM VEÍCULO HÍBRIDO.

R E S U M O

É apresentada uma classificação sistemática dos trens de engrenagens planetários e suas variantes até considerar-se esgotadas todas as espécies existentes. Relações cinemáticas, de torque e rendimento são derivadas com o objetivo de contribuir para o preenchimento de uma lacuna na bibliografia nacional e até estrangeira, sobre estes mecanismos. Os resultados obtidos são utilizados para o desenvolvimento de um método de síntese visando obter-se um planetário otimizado para um determinado tipo de sistema de transmissão e utilizado num protótipo estacionário de um veículo híbrido com unidade de volante para armazenamento de energia.

TITLE: PLANETARY GEAR TRAINS: ANALYSIS, SYNTHESIS AND
APPLICATION ON HYBRID VEHICLE.

A B S T R A C T

A systematic classification of the planetary gear trains and its various derivarions is presented until all possible kinds of specimes are comprised. Kinematic relationships, as well as the torque and the efficiency relations are derived. The results are applied in the development of a method of synthesis used to obtain an optimized planetary for a certain kind of transmission utilized in the stationary prototype of an hybrid vehicle with a flywheel for energy storage.

Í N D I C E

PARTE I - ESTUDO SOBRE OS TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS

	<u>Pág.</u>
<u>CAP.1 - ESPÉCIES DE TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS EXISTENTES</u>	1
1-1. INTRODUÇÃO AOS TRENS PLANETÁRIOS	1
1-2. CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE T.E.P.-SIMPLES ...	4
1-2-1. Concepção dos Tipos de Planetários Simples	4
1-2-2. Derivação dos Tipos de Planetários Simples	6
1-3. T.E.P.-LIGADOS E T.E.P.-INCORPORADOS	10
1-4. TRENS DE ENGRENAGENS-SATÉLITE E PLANETA	11
1-4-1. T.E.-Satélite e Planeta Formados por T.E.P.-Elementares	12
1-4-2. T.E.-Satélite e Planeta Formados por T.E.P.-Simples	13
1-5. REVISÃO DAS ESPÉCIES DE PLANETÁRIOS APRESENTADAS	15
<u>CAP.2 - CINEMÁTICA DOS PLANETÁRIOS</u>	16
2-1. DEFINIÇÕES	16
2-2. A RAZÃO BÁSICA: O PARÂMETRO CINEMÁTICO QUE CARACTERIZA OS PLANETÁRIOS	17
2-2-1. Derivação da Razão Básica para os T.E.P.-Simples	18
2-2-2. Derivação da Razão Básica para os T.E.P.-Ligados e os T.E.P.-Incorporados	22
2-2-3. Derivação da Razão Básica para os T.E.P.-Satélite e Planeta	24
2-3. RELAÇÃO CINEMÁTICA	26

	<u>Pág.</u>
<u>CAP.3 - ESTUDO DE POTÊNCIA, TORQUE E RENDIMENTO DOS T.E.P.-SIMPLES</u>	29
3-1. POTÊNCIA DE ACOPLAMENTO E POTÊNCIA DE ROLAMENTO	29
3-2. RELAÇÕES ENTRE MOMENTOS	31
3-3. CONFIGURAÇÕES DOS FLUXOS DE POTÊNCIA	32
3-3-1. Identificação do Eixo de Soma a Partir da Razão Básica i_o	34
3-4. EXPRESSÕES DE RENDIMENTO PARA OS T.E.P.-SIMPLES	35
3-5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O RENDIMENTO	38
3-5-1. Auto-Travamento	38
3-5-2. Rendimento de Planetários com um dos Membros Principais Fixo	41

PARTE II - APLICAÇÃO EM VEÍCULO HÍBRIDO

<u>CAP.4 - DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO</u>	43
4-1. INTRODUÇÃO	43
4-2. VOLANTES: UM CAMINHO PARA A ECONOMIA DE ENERGIA	43
4-2-1. Ônibus Elétricos com Unidade de Volante para Armazenamento de Energia	43
4-3. OBJETIVO DA APLICAÇÃO	45
<u>CAP.5 - INÍCIO DA SÍNTESE</u>	46
5-1. DADOS INICIAIS	46
5-2. EQUAÇÕES CINEMÁTICAS	47
5-3. ALTERNATIVAS A SEREM CONSIDERADAS	49
5-3-1. Esquemas dos Caminhos a Seguir	50
<u>CAP.6 - ANÁLISE DO FLUXO DE POTÊNCIA</u>	51
6-1. POSSÍVEIS CONFIGURAÇÕES PARA O FLUXO DE POTÊNCIA	51

	<u>Pág.</u>
6-2. DEFINIÇÃO E ANÁLISE DA RAZÃO P_v/P_i	52
6-2-1. Cálculo de P_v/P_i	52
<u>CAP.7 - EQUAÇÕES DE VELOCIDADE</u>	55
7-1. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE VELOCIDADE ...	55
<u>CAP.8 - OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO OTIMIZADA</u>	60
8-1. CÁLCULO DOS RENDIMENTOS	60
8-1-1. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "a" como Suporte	60
8-1-2. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "b" como Suporte	62
8-1-3. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "c" como Suporte	69
8-2. ESCOLHA DA MELHOR SOLUÇÃO	73
8-2-1. Equações Finais de Velocidade	74
8-2-2. Equações de Potência e Torque	75
8-2-3. Rendimento Total da Caixa de Engrenagens	77
8-3. CONCLUSÕES	82
<u>APÊNDICE A - CONSIDERAÇÕES DE PROJETO PECULIARES AOS T.E.P.-SIMPLES DO TIPO P(P)N</u>	83
<u>APÊNDICE B - PROGRAMAS PARA CALCULADORA HP-97 REFERIDOS NO CAP. 8.</u>	84
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	96

P A R T E I

- ESTUDO SOBRE OS TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS

ESPÉCIES DE TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS EXISTENTES

1-1. INTRODUÇÃO AOS TRENS PLANETÁRIOS

Alguns sistemas de engrenagens se diferenciam dos comuns pelo fato de possuírem uma ou mais engrenagens com possibilidade de girar ao redor do próprio eixo e, simultaneamente, em torno de um outro eixo. Devido a uma analogia com o nosso sistema solar eles são frequentemente chamados de *trens de engrenagens planetários* ou, simplesmente, *planetários*. Na Fig. 1 vê-se um desses planetários, onde a engrenagem que possui o eixo geométrico móvel é chamada de *planeta* e a engrenagem central de *sol*. A manivela que suporta o planeta permitindo o rolamento do mesmo em relação à engrenagem central é chamada de *suporte* ou *braço*. A Fig. 2 ilustra um outro planetário cuja engrenagem central é de dentes internos. Muitas vezes, também, os T.E.P. são chamados de *trens epicíclicos*, devido ao fato de um ponto pertencente a um planeta que rola sobre o seu sol descrever uma *epicicloide*.

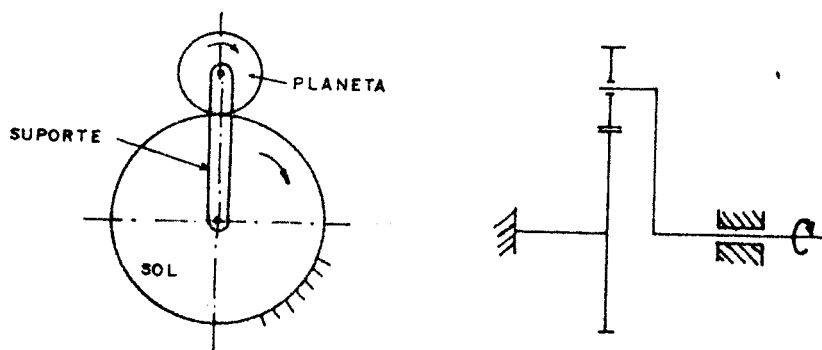
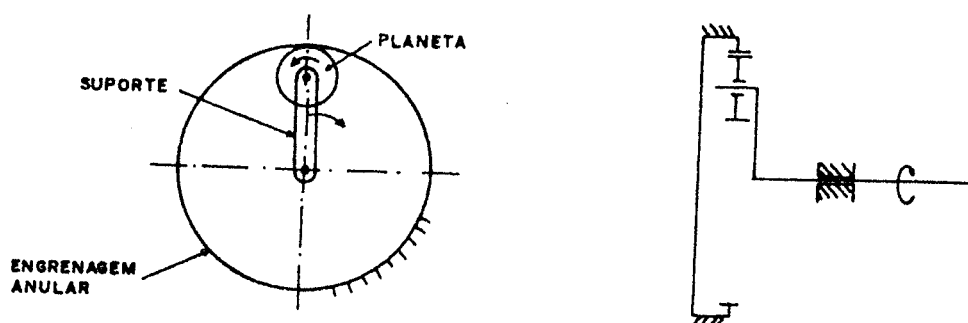


Figura 1



Um sistema, como os das Figs. 1 e 2, que consista de uma engrenagem central, um ou mais planetas e um suporte, aqui será chamado de *trem de engrenagem planetário elementar* (T.E.P.-Elementar).

O movimento do planeta pode ser aproveitado para uso direto, nesse caso, o eixo do planeta pode, por exemplo, ser acoplado ao eixo de saída através de juntas universais (Fig. 3). No entanto, a rotação do planeta raramente é utilizada diretamente. Normalmente, uma segunda engrenagem central é movida pelo(s) planetas, sendo então a partir dessa segunda engrenagem central feito o aproveitamento do movimento (Fig. 4).

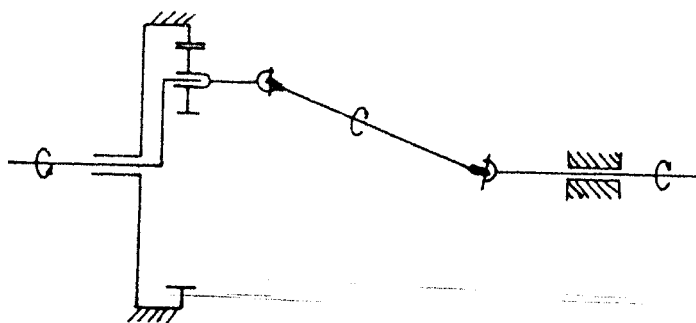


Figura 3

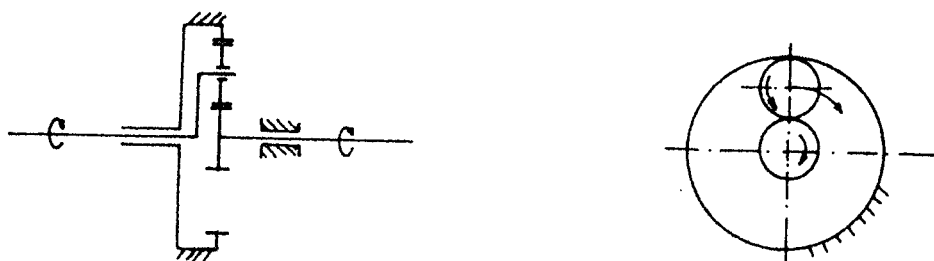


Figura 4

O fato de mais de um planeta (usualmente três) serem colocados entre as duas engrenagens centrais não muda o caráter cinemático do planetário, mas apenas divide entre os planetas a carga transmitida. No lado esquerdo da Fig. 5 encontra-se o esquema simplificado de um planetário e no lado direito a vista frontal onde se vê os três planetas.



Um sistema que consista de duas engrenagens centrais, um ou mais planetas e um suporte, aqui será chamado de T.E.P. - Simples.

Deve ser observado que se todos os membros principais (engrenagens centrais e o suporte ou seus respectivos eixos) estiverem livres para giro, então o trem planetário terá dois graus de liberdade, esse é o caso geral (Fig. 5).

Daqui por diante denominaremos *planeta simples* todo planeta do mesmo tipo dos até agora apresentados, sempre que quisermos distingui-lo de outros.

Em alguns planetários o mesmo planeta realiza engrenamento em diferentes círculos primitivos, ou seja, o planeta é formado por duas engrenagens num corpo só (Fig. 6). Com essa configuração ele, normalmente, é chamado de *planeta composto*.

Quando dois planetas estiverem dispostos em série, ou seja, um após o outro formando um par (Fig. 7), eles serão chamados neste trabalho de *planetas emparelhados*. A utilização desses planetas no lugar de planetas simples causa uma mudança no sentido de rotação do membro de saída e, portanto, no caráter do planetário. Um conjunto de três planetas em série não tem nenhum significado, pois nesse caso o sentido da rotação não é alterado.

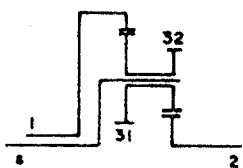


Figura 6

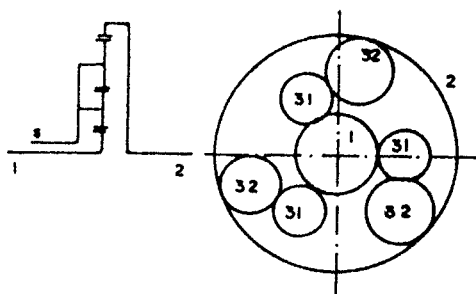


Figura 7

A notação aqui utilizada será a seguinte: os algarismos "1" e "2" indicarão as engrenagens centrais ou os seus eixos, "s" o suporte e "3" o planeta (Fig. 5). Quando a engrenagem for de um planeta composto ou for um dos planetas emparelhados, o algarismo (1 ou 2) que seguir o "3" indicará a engrenagem central que faz contato com a engrenagem indexada (Fig. 6).

1-2. CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE T.E.P.-SIMPLES

A classificação dos tipos de T.E.P.-Simples realizada sistematicamente por LÉVAI [1]^{*} merece ser difundida e será, portanto, apresentada mais adiante. Ele tomou como base um T.E.P. com dois planetas compostos e engrenados entre si (emparelhados); cada tipo de planetário foi então obtido pela modificação metódica nos diâmetros das engrenagens, sendo que a progressão foi feita a partir da forma mais complexa para a mais simples.

1-2-1. Concepção dos Tipos de Planetários Simples

O mais complexo T.E.P.-Simples é formado por planetas compostos e emparelhados (Fig. 8). Na Fig. 9 aparece o mesmo tipo de planetário, porém com engrenagens cônicas. Deve-se saber que a utilização de engrenagens cônicas não muda o caráter cinemático do planetário (Fig. 10). Engrenagens cônicas não serão

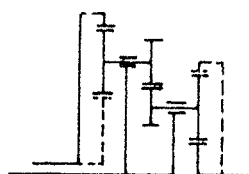


Figura 8

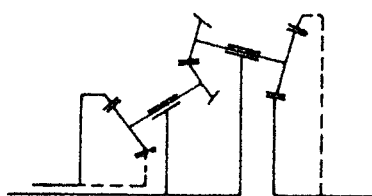


Figura 9



Figura 10

consideradas neste trabalho. Apenas para não deixar passar a maior aplicação de engrenagens cônicas em planetários é que foi esquematizado, na Fig. 11, o diferencial utilizado nos veículos automotores.**

* O número dentro do colchete indica a referência bibliográfica no final do trabalho.

** É interessante notar que no caso dos diferenciais as engrenagens centrais é que são chamadas de *planetárias*. Essa nomenclatura é a utilizada na prã

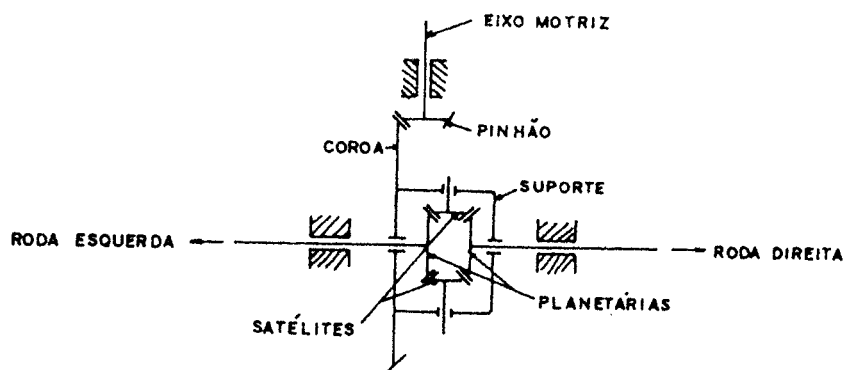


Figura 11.

Os tipos de planetários são concebidos de acordo com as suas características cinemáticas que definem seu caráter. As diferenças de características e portanto de caráter que geram novos tipos de planetários são:

1. O número de engrenagens existentes no planetário.
2. O tipo dessas engrenagens, isto é, se são de dentes externos (D.E.) ou de dentes internos (D.I.).
3. A disposição dessas engrenagens dentro do trem.

O jeito de como os membros principais são ligados ao exterior do planetário não modifica o caráter. O mesmo se diz de uma reflexão na disposição dos membros. A Fig. 12 indica que os três planetários são do mesmo tipo. A função (entrada, saída ou membro fixo) dos membros principais também não tem importância na definição do tipo.

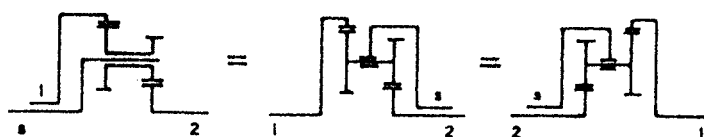


Figura 12

É possível rotular-se os planetários com letras, o que permite o seu estudo com considerável economia de tempo, espaço e trabalho. Se a letra "P" for associada a uma engrenagem de D.E., a letra "N" para engrenagens de D.I. e se a letra P ou N, quando relacionada a um planeta, é posta entre parêntesis, então podemos dizer que o planetário da Fig. 12 é do tipo N(PP)P ou sua reflexão P(PP)N que, como já foi dito, é o mesmo tipo. Outros exemplos: Fig. 7 - tipo P(P)(P)N e na Fig. 5 - tipo P(P)N. As letras P e N são as iniciais de *Positivo* e *Negativo*, isso porque vamos considerar os sinais dos diâmetros das engrenagens de D.E. e de D.I. como positivos e negativos, respectivamente.

Deve ficar claro que não é necessário (e algumas vezes é totalmente impossível) mostrar-se as posições, dimensões ou distâncias reais (mesmo relativas) na representação esquemática (Figs. 13 e 14).

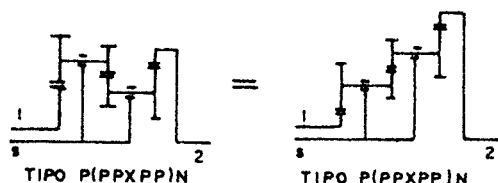


Figura 13

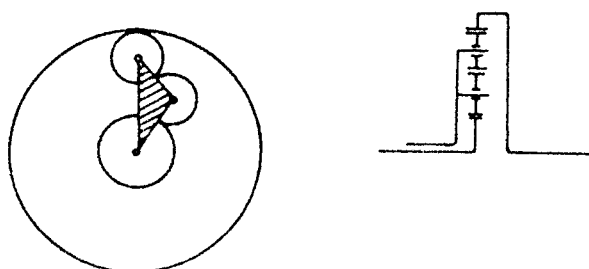


Figura 14

1-2-2. Derivação dos Tipos de Planetários - Simples

A derivação dos tipos a partir da forma mais complexa de planetário, que aparece na Fig. 8, é um processo de mudança nos diâmetros das engrenagens. A troca de uma engrenagem de diâmetro positivo (D.E.) para uma de diâmetro negativo (D.I.) resulta em novos tipos de planetários (Figs. 15 e 16). Em certos

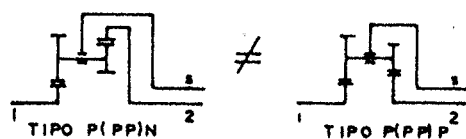


Figura 15

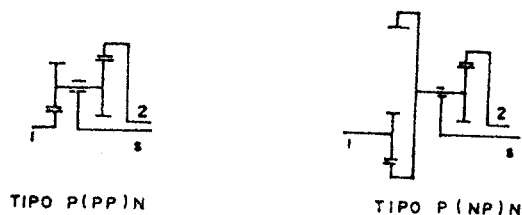


Figura 16.

casos, uma mudança nos diâmetros sem trocar o sinal pode também dar novos tipos. Isso ocorre quando os diâmetros de certas engrenagens tornam-se iguais entre si, consequentemente, o número de engrenagens decresce (Figs. 17 e 18).

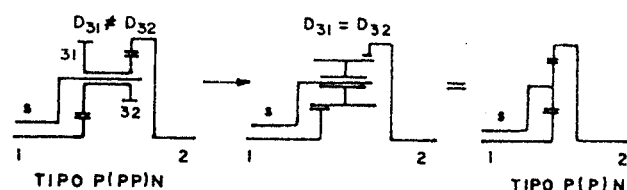


Figura 17

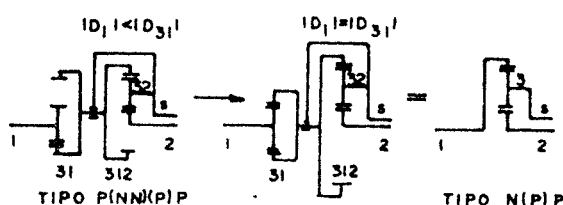


Figura 18

A forma geral é dada novamente na Fig. 19, indicando-se os índices necessários. É vantajoso que o leitor procure uma lógica para os índices com 3 algarismos.

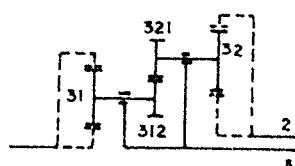


Figura 19

A Tabela 1 contém todas as variações possíveis. As variantes que podem ser realizadas praticamente, estão enumeradas. Algumas das variantes são reflexões de outras. Visto que uma reflexão não resulta em novo tipo, o número associado é uma repetição. As variantes precedidas por hífen não podem ser construídas; por exemplo, duas engrenagens de D.I. não podem se engrenar.

Vê-se, na Tabela 1, que os T.E.P.-Simples podem ser de 34 tipos diferentes.

A Fig. 20 ilustra a árvore completa da família dos planetários-simples. Nela pode ser visto, a partir de onde e como foi derivada cada uma das variantes. As setas mais grossas indicam os tipos criados pela mudança no sinal dos diâmetros, enquan

TABELA 1

Nº	Tipo	Nº	Tipo	Nº	Tipo
1	P(P)N	-	P(P)P	-	N(P)N
-	P(N)N	-	P(N)P	-	N(P)N
2	P(PP)N	16	P(PP)P	31	N(PP)N
3	P(NP)N	17	P(NP)P	-	N(NP)N
-	P(PN)N	17	P(PN)P	-	N(PN)N
-	P(NN)N	18	P(NN)P	-	N(NN)N
4	P(P)(P)N	-	P(P)(P)P	-	N(P)(P)N
-	P(N)(P)N	-	P(N)(P)P	-	N(N)(P)N
-	P(P)(N)N	-	P(P)(N)P	-	N(P)(N)N
-	P(N)(N)N	-	P(N)(N)P	-	N(N)(N)N
5	P(P)(PP)N	19	P(P)(PP)P	32	N(P)(PP)N
6	P(N)(PP)N	20	P(N)(PP)P	-	N(N)(PP)N
7	P(P)(NP)N	21	P(P)(NP)P	-	N(P)(NP)N
-	P(P)(PN)N	22	P(P)(PN)P	-	N(P)(PN)N
-	P(N)(NP)N	-	P(N)(NP)P	-	N(N)(NP)N
-	P(N)(PN)N	-	P(N)(PN)P	-	N(N)(PN)N
-	P(P)(NN)N	23	P(P)(NN)P	-	N(P)(NN)N
-	P(N)(NN)N	-	P(N)(NN)P	-	N(N)(NN)N
8	P(PP)(P)N	19	P(PP)(P)P	32	N(PP)(P)N
9	P(NP)(P)N	22	P(NP)(P)P	-	N(NP)(P)N
-	P(PN)(P)N	21	P(PN)(P)P	-	N(PN)(P)N
-	P(PP)(N)N	20	P(PP)(N)P	-	N(PP)(N)N
-	P(NN)(P)N	23	P(NN)(P)P	-	N(NN)(P)N
-	P(NP)(N)N	-	P(NP)(N)P	-	N(NP)(N)N
-	P(PN)(N)N	-	P(PN)(N)P	-	N(PN)(N)N
-	P(NN)(N)N	-	P(NN)(N)P	-	N(NN)(N)N
10	P(PP)(PP)N	24	P(PP)(PP)P	33	N(PP)(PP)N
11	P(NP)(PP)N	25	P(NP)(PP)P	-	N(NP)(PP)N
12	P(PN)(PP)N	26	P(PN)(PP)P	34	N(PN)(PP)N
13	P(PP)(NP)N	26	P(PP)(NP)P	34	N(PP)(NP)N
-	P(PP)(PN)N	25	P(PP)(PN)P	-	N(PP)(PN)N
14	P(NN)(PP)N	27	P(NN)(PP)P	-	N(NN)(PP)N
15	P(NP)(NP)N	28	P(NP)(NP)P	-	N(NP)(NP)N
-	P(NP)(PN)N	29	P(NP)(PN)P	-	N(NP)(PN)N
-	P(PN)(NP)N	-	P(PN)(NP)P	-	N(PN)(NP)N
-	P(PN)(PN)N	28	P(PN)(PN)P	-	N(PN)(PN)N
-	P(PP)(NN)N	27	P(PP)(NN)P	-	N(PP)(NN)N
-	P(NN)(NP)N	-	P(NN)(NP)P	-	N(NN)(NP)N
-	P(NN)(PN)N	30	P(NN)(PN)P	-	N(NN)(PN)N
-	P(NP)(NN)N	30	P(NP)(NN)P	-	N(NP)(NN)N
-	P(PN)(NN)N	-	P(PN)(NN)P	-	N(PN)(NN)N
-	P(NN)(NN)N	-	P(NN)(NN)P	-	N(NN)(NN)N

to as mais finas mostram os tipos surgidos pela redução do número de engrenagens devido à igualdade entre diâmetros. Os tipos delimitados por círculos são geralmente os mais usados.

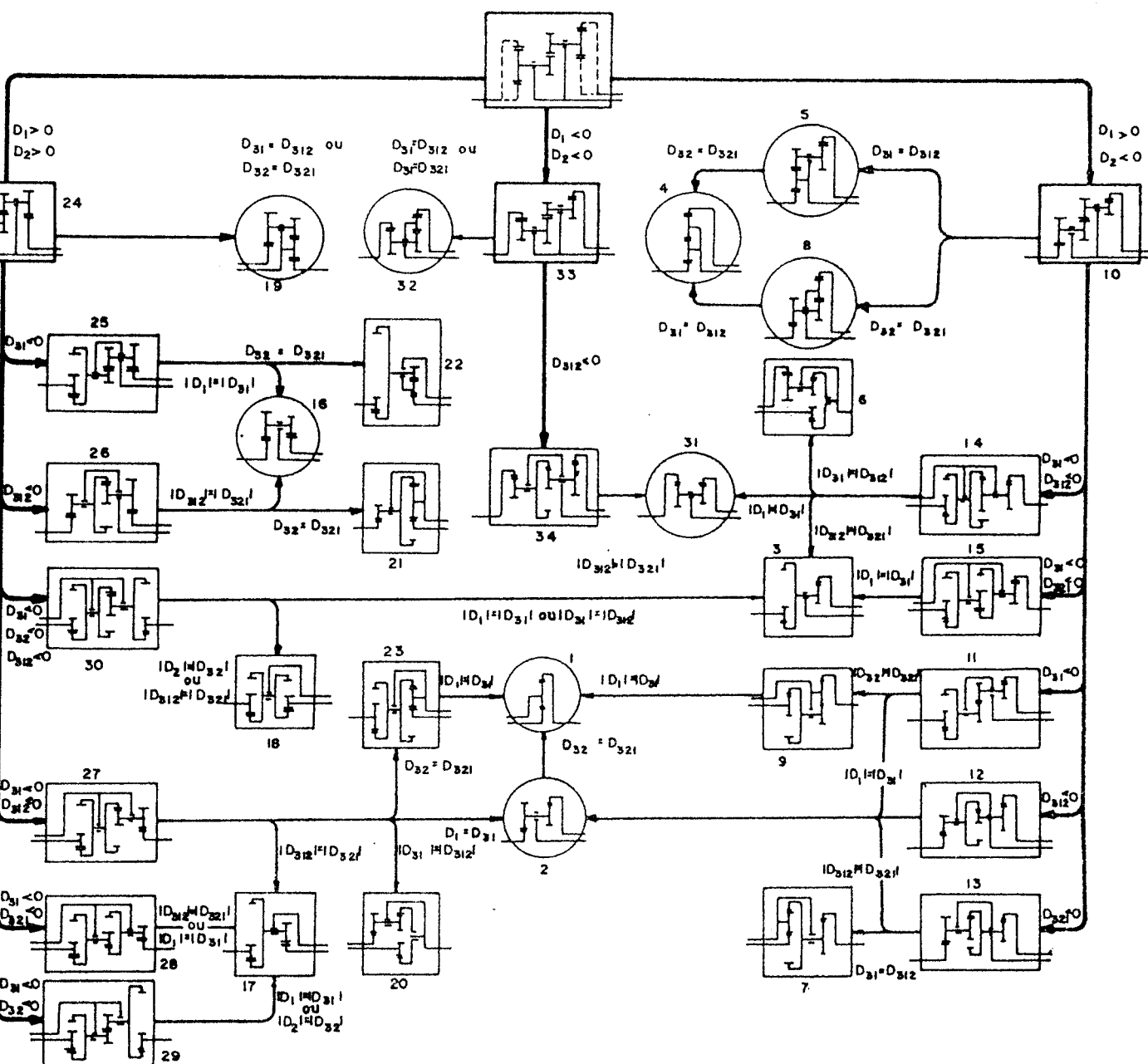


Figura 20 (Fonte: Ref. [1])

É possível acontecer que, à primeira vista, um planetário não se pareça com nenhum dos 34 tipos mostrados. O motivo deverá ser: a configuração das engrenagens e eixos é uma não usual ou então, não se trata de um único planetário-simples mas, *ligações* de vários planetários dessa espécie formando um mais complexo. A Fig. 21 ilustra dois exemplos de configurações não usuais. O primeiro corresponde ao tipo N° 8 e o segundo ao tipo N° 10.

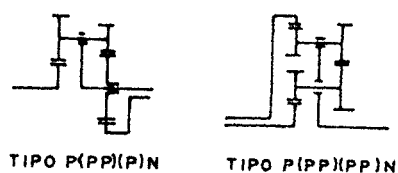


Figura 21

As *ligações* entre planetários-simples resultam em novas espécies de planetários que neste trabalho serão chamadas de T.E.P.-Ligados e T.E.P.-Incorporados.

1-3. T.E.P.-LIGADOS E T.E.P.-INCORPORADOS

Os T.E.P.-Ligados são reconhecidos pelo fato de que todos eles sempre possuem mais de duas engrenagens centrais e sempre podem ser separados em dois ou mais planetários-simples. O planetário da Fig. 22, por exemplo, pode ser separado nos tipos N° 16 e N° 1.

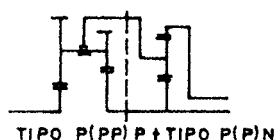


Figura 22

A separação de um T.E.P.-Ligado não será muito óbvia se existir um *incorporamento* entre planetas, ou seja, quando dois planetas de planetários distintos se incorporarem em apenas um no trem resultante. Acontecendo isto, haverá também uma redução no número de engrenagens centrais. O incorporamento entre planetas só poderá acontecer quando seus diâmetros se igualarem e eles estiverem a uma mesma distância do eixo central do planetário. No lado esquerdo da Fig. 23 vê-se o mesmo planetário da Fig. 22, porém satisfazendo as condições acima e, no lado direito, o planetário resultante da simplificação. Planetários como este serão

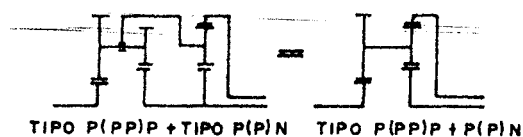


Figura 23

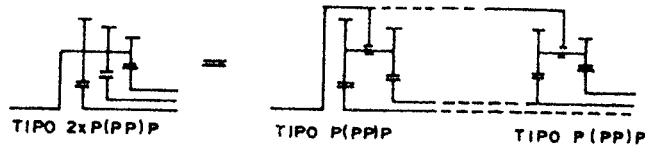


Figura 24

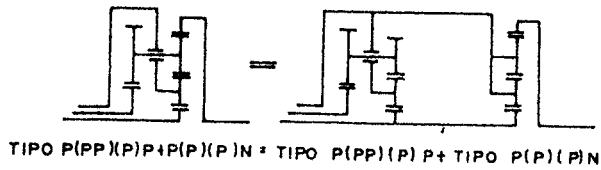


Figura 25

chamados de T.E.P.-Incorporados. Está claro que os T.E.P.-Incorporados são um caso particular dos T.E.P.-Ligados.

As Figs. 24 a 27 também ilustram planetários-incorporados. Na Fig. 28 vê-se um tipo de planetário-incorporado muito utilizado na indústria automobilística.

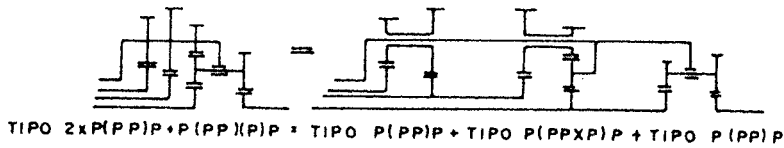


Figura 26

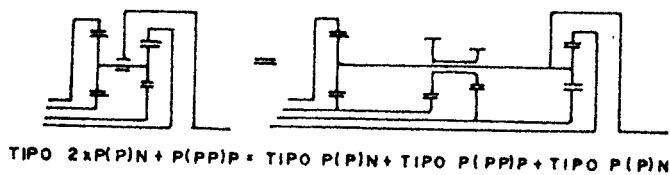


Figura 27

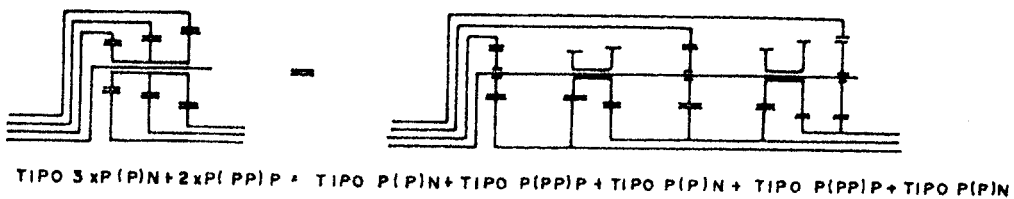


Figura 28

1-4. TRENS DE ENGRENAGENS-SATÉLITE E PLANETA

Um caso especial de T.E.P. pode ser obtido pela superposição de dois planetários de maneira tal que o eixo geométrico de um planetário (planetário *secundário*) seja colinear com o eixo do planeta de um segundo planetário (*primário*). Na Fig. 29 aparece a concepção de um tipo pertencente à espécie acima descrita.

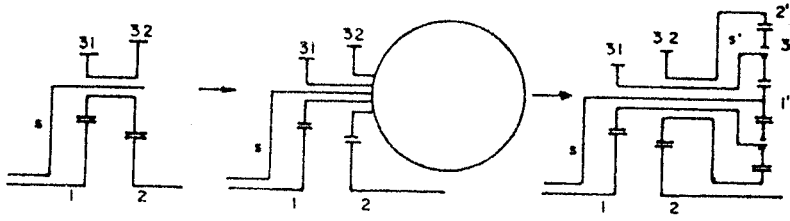


Figura 29

Uma característica interessante desses sistemas é que ao movimento do planeta secundário ã adicionado o movimento do planeta primário, isto é, tudo se passa como um movimento planetário composto duplo e comparável ao movimento de um satélite ao redor de seu planeta, os quais, simultaneamente, giram em volta do seu sol. Esse mecanismo pode ser chamado de *Trem de Engrenagem-Satélite e Planeta*.

LÉVAI [2] pesquisou essa espécie de planetários e seus resultados serão apresentados a seguir.

De acordo com a notação que estamos utilizando o planetário da Fig. 29 pode ser rotulado por: tipo $P\{PP(P)NP\}P$, as letras fora da chave referem-se às engrenagens centrais (1 e 2) do trem primário e o "P", entre parêntesis, representa o planeta 3' do trem secundário.

1-4-1. T.E.-Satélite e Planeta Formados por T.E.P.-Elementares.

Os tipos mais simples de T.E.-Satélite e Planeta são os formados por planetários elementares. Vejamos agora de quantas maneiras diferentes eles podem ser criados.

Os planetários-elementares possuem três configurações básicas, ou seja, $P(P)$, $N(P)$ e $P(N)$ (Fig. 30). Estes três tipos

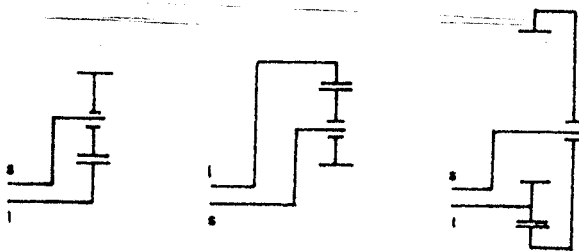


Figura 30

podem ser utilizados tanto como planetário primário, como secundário e cada um deles de dois modos diferentes, como mostra a Fig. 31. Fazendo-se as combinações conclui-se que existem 18 tipos de T.E.-Satélite e Planeta Elementares.

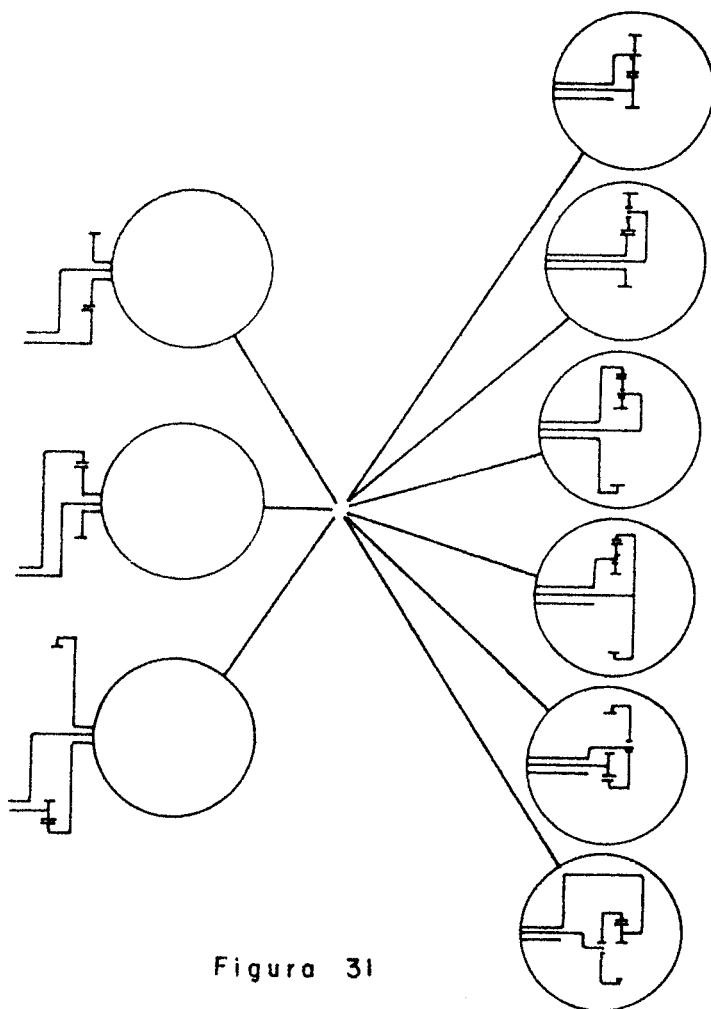


Figura 31

1-4-2. T.E.-Satélite e Planeta Formados por T.E.P.-Simples

Através da *árvore* da Fig. 20 os 34 tipos de T.E.P.-Simples podem ser subdivididos em:

- 4 Não possuindo nenhum planeta emparelhado e nenhuma engrenagem de D.I. como planeta (Fig. 32).
- 8 Possuindo planetas emparelhados, mas nenhuma engrenagem de D.I. como planeta.
- 3 Não possuindo nenhum planeta emparelhado, mas possuindo engrenagens de D.I. como planetas.
- 19 Possuindo tanto planetas emparelhados como planetas formados por engrenagens de D.I.

Vamos considerar, inicialmente, apenas as combinações formadas pelos quatro primeiros tipos, pois esses são os mais utilizados.

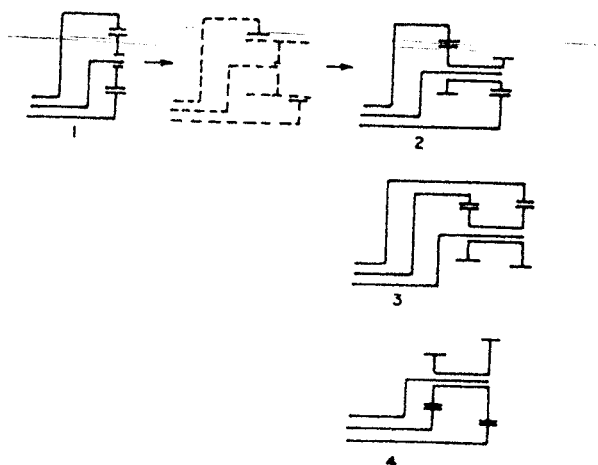


Figura 32

Para inserir-se o planetário secundário é preciso que as duas engrenagens que formam o planeta composto do planetário primário sejam separadas. Para realizar-se isto no primeiro tipo da Fig. 32 é preciso antes transformar o seu planeta *simples* em um *composto*, cujas engrenagens sejam de mesmo diâmetro. Feito isto, os dois primeiros tipos transformam-se numa identidade, porém para realizar as combinações deve-se tomar esse tipo duas vezes devido à diferença entre suas engrenagens centrais (uma é de D.E. e a outra de D.I.). Voltamos então, a ter quatro possibilidades para os trens primários e, teoricamente, cada um deles pode ser utilizado de três maneiras diferentes como trem secundário, donde se conclui que, teoricamente, 48 tipos de T.E.-Satélite e Planeta podem ser obtidos. Se, contudo, for escolhido não se fazer nenhuma distinção entre as engrenagens centrais do trem primário, então o número de combinações fica reduzido a 40. A Fig. 33 mostra as combinações possíveis de se realizar, neste último caso.

O número de variantes crescerá bastante se forem considerados, nas combinações, os 30 tipos restantes de T.E.P.-Simples. Esses tipos mais complexos de T.E.-Satélite e Planeta parecem à primeira vista bastante complicados e sofisticados, mas talvez, um ou outro tipo possa ser útil no caso de movimentos especiais.

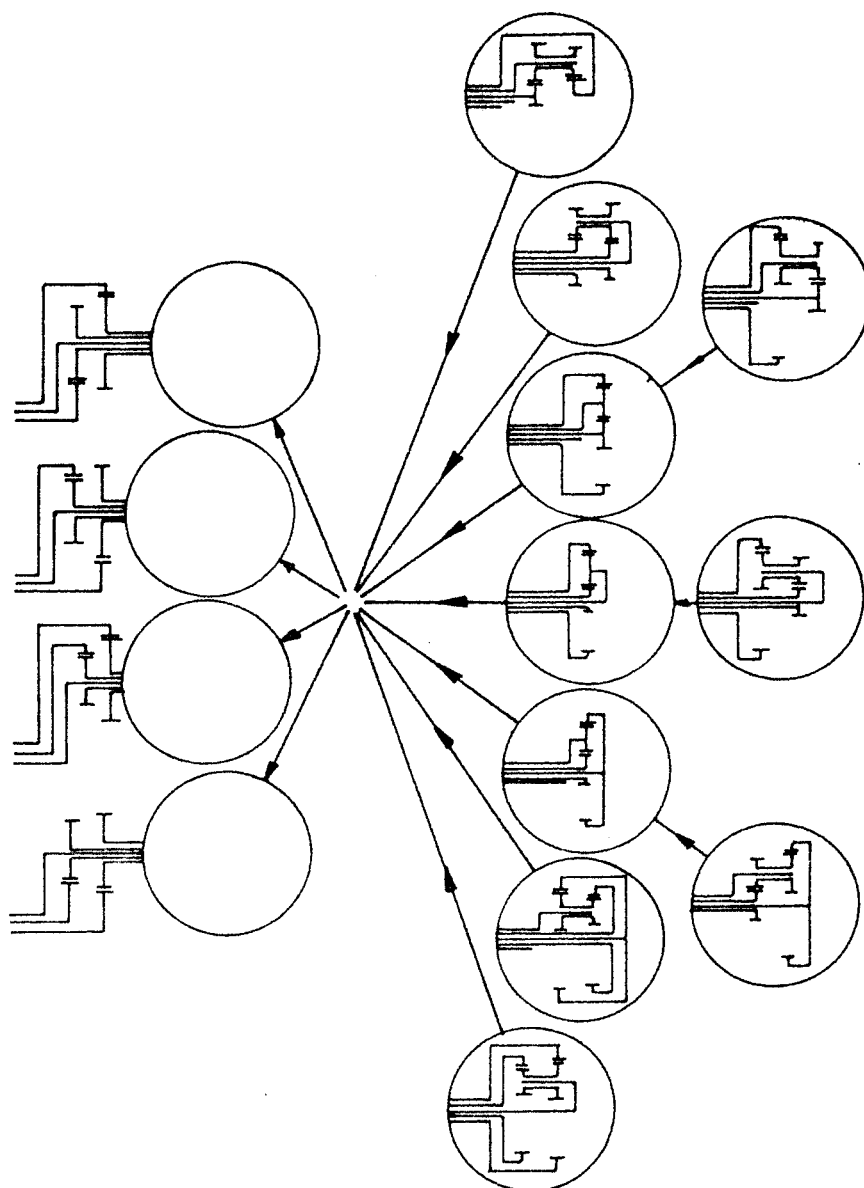


Figura 33

1-5. REVISÃO DAS ESPÉCIES DE PLANETÁRIOS APRESENTADAS

É vantajoso que o leitor mantenha em mente as espécies de planetários apresentadas anteriormente e reunidas a seguir:

- | | | |
|-----------------------|---|---|
| Espécies
de T.E.P. | { | 1. elementares |
| | | 2. simples |
| | | 3. ligados |
| | | 4. incorporados |
| | | 5. satélite e planeta (elementares e simples) |

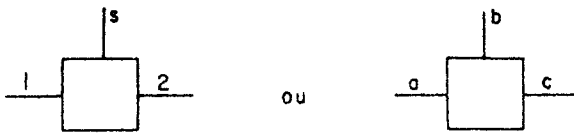
As espécies 2, 3 e 4 são as mais importantes na prática. Vale a pena lembrar que 4 é um caso particular de 3.

CINEMÁTICA DOS PLANETÁRIOS

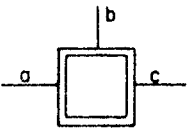
2-1. DEFINIÇÕES

Neste capítulo serão referidos apenas os planetários com mais de dois membros (ou eixos) principais. Portanto, os T.E.P.-Elementares e os T.E.P.-Satélite e Planeta (Elementares) não serão considerados diretamente; mas, apesar disto, o leitor não encontrará dificuldades com relação à cinemática desses planetários após ter entendido os aqui expostos.

A introdução de alguns símbolos e convenções se faz necessário nesta fase do trabalho. As Fig. 34a,b,c são as representações simbólicas de algumas espécies de planetários já conhecidas e a Fig. 34d representa um sistema com múltiplas razões de



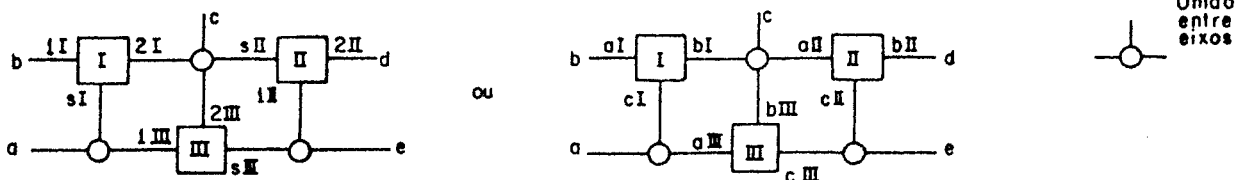
a) REPRESENTAÇÃO DE UM T.E.P. - SIMPLES



b) REPRESENTAÇÃO DE UM T.E.P. - LIGADO OU UM T.E.P. - INCORPORADO



c) REPRESENTAÇÃO DE UM T.E. - SATÉLITE E PLANETA



d) REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA COM MÚLTIPLAS RAZÕES DE TRANSMISSÃO (S.M.R.T.)

Figura 34

transmissão (mais de três membros ou eixos externos) formado por ligações de T.E.P.-Simples. Evidentemente, um T.E.P.-Ligado ou um T.E.P.-Incorporado pode ser derivado a partir de um S.M.R.T. se considerarmos apenas três dos seus eixos.

Com relação aos T.E.P.-Simples e aos T.E.-Satélite e Planeta os índices 1,2,s serão utilizados, por conveniência, sempre que for possível distinguir-se o suporte dos dois outros membros principais (Fig. 34a,c). No caso dos S.M.R.T. estes índices serão seguidos por algarismos romanos (Fig. 34d). Quando não for possível indicar-se qual membro principal é o suporte ou então, se se tratar de um T.E.P.-Ligado ou um T.E.P.-Incorporado, os índices a,b,c serão utilizados (Fig. 34). Também serão usadas letras minúsculas para designar-se os eixos externos de um S.M.R.T. (Fig. 34d).

2-2. A RAZÃO BÁSICA: O PARÂMETRO CINEMÁTICO QUE CARACTERIZA OS PLANETÁRIOS

Tanto a *análise* como a *síntese* dos planetários são melhor realizadas por procedimentos analíticos, contudo o leitor poderá encontrar na referência bibliográfica autores que preferiram seguir outros caminhos como, por exemplo, tabulares e gráficos. Sendo assim, serão apresentados aqui apenas métodos analíticos de análise e síntese.

Ao seguirmos um método analítico o parâmetro fundamental é o que relaciona as rotações dos três membros principais de um planetário e que pode ser chamado de *razão básica*.

Qualquer planetário possui as velocidades angulares dos três membros principais relacionadas pela seguinte asserção: *a razão entre as velocidades angulares de dois membros relativas ao terceiro é uma constante*.

Como, uma vez indexados os membros principais de um planetário, podemos obter, através da afirmação acima, seis constantes diferentes é conveniente que uma destas constantes seja definida como a *razão básica* e as outras sejam postas em função desta.

Se os índices utilizados forem 1,2,s, então a razão

básica do planetário será " i_0 " e vamos defini-la por:

$$i_0 = \frac{\omega_{1/s}}{\omega_{2/s}} = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} \quad (2.1)$$

onde, $\omega_{1/s}$ = velocidade angular de "1" em relação a "s".

Se os índices utilizados forem a,b,c então, neste caso, a razão básica será " i_0 " e definida por:

$$i_0 = \frac{\omega_{a/c}}{\omega_{b/c}} = \frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} \quad (2.2)$$

Certamente, o leitor gostaria de saber de onde surgiu a afirmação *fantasma* exposta acima. Por esse motivo e para encontrar a relação existente entre a razão básica e os raios das engrenagens do planetário é que serão apresentadas as deduções a seguir.

2-2-1. Derivação da Razão Básica para os T.E.P.-Simples

Vejamos agora como pode ser derivada a *razão básica* para os T.E.P.-Simples. Para possibilitar a generalização desta demonstração uma das formas mais complexas de planetários-simples será considerada, ou seja, o planetário tipo P(PP)(PP)N que aparece esquematizado na Fig. 35. Nesta figura vê-se inclusive que os planetas não realizam engrenamentos sobre uma mesma reta; fato que permitirá a completa generalização do resultado a ser obtido.

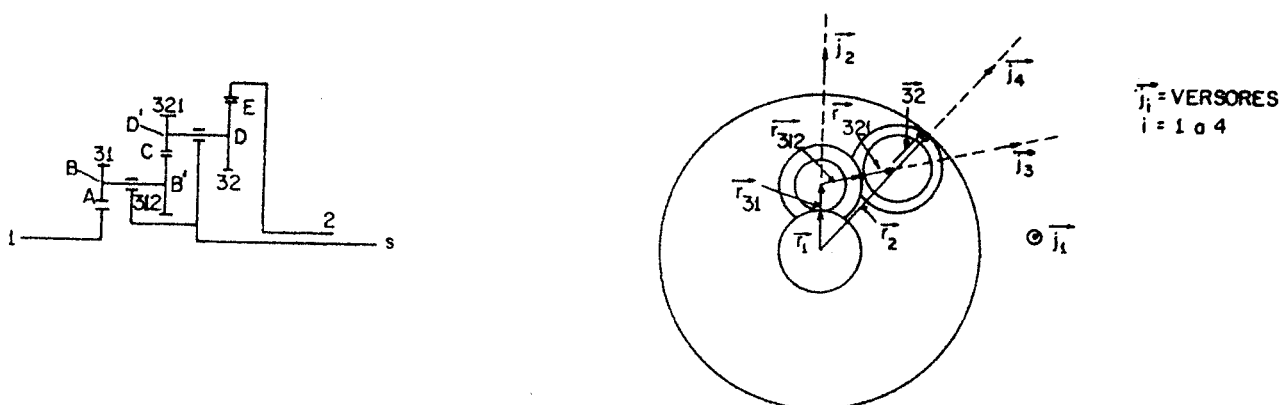


Figura 35

O caminho a seguir deverá ser o seguinte: duas expressões para a velocidade do ponto "C" terão de ser encontradas, uma delas partindo-se do membro "1" e a outra do membro "2" (Fig. 35), igualando-se então as duas expressões chegar-se-á ao resultado desejado.

Referindo-se à Fig. 35, a velocidade do ponto "A" pode ser escrita como:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

e a do ponto "B",

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{31}$$

também,

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})$$

então,

$$\vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{31}$$

aplicando-se propriedades do produto vetorial, tem-se,

$$\omega_s (r_1 + r_{31}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_2) = (\omega_1 \cdot r_1 + \omega_{31} \cdot r_{31}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_2) \quad ; \quad \vec{j}_1 \text{ e } \vec{j}_2 \text{ são vetores unitários.}$$

logo,

$$\omega_{31} = \frac{\omega_s (r_1 + r_{31}) - \omega_1 r_1}{r_{31}} \quad (2.3)$$

deixando-se pendente a equação acima e considerando-se agora o ponto "C",

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} = \vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31}) + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{312}$$

ou ainda,

$$\vec{v}_C = \omega_s [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + \omega_{31} \cdot r_{312} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3)$$

substituindo-se (2.3) na equação acima,

$$\vec{v}_C = \omega_s [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + \frac{\omega_s (r_1 + r_{31}) - \omega_1 \cdot r_1}{r_{31}} r_{312} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) \quad (2.4)$$

guardando-se a equação acima e referindo-se agora ao ponto "E",

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

e no ponto "D"

$$\vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{D/E} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_{32} \times (-\vec{r}_{32})$$

também,

$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_s \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})$$

então,

$$\vec{\omega}_s \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32}) = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 - \vec{\omega}_{32} \times \vec{r}_{32}$$

através de propriedades do produto vetorial, tem-se,

$$\omega_s (r_2 - r_{32}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_4) = (\omega_2 \cdot r_2 - \omega_{32} \cdot r_{32}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_4)$$

portanto,

$$\omega_{32} = - \frac{\omega_s (r_2 - r_{32}) - \omega_2 \cdot r_2}{r_{32}} \quad (2.5)$$

mantendo-se pendente a equação acima e passando-se agora mais uma vez ao ponto "C", tem-se,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{C/D} = \vec{\omega}_S \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32}) + \vec{\omega}_{32} \times (-\vec{r}_{321})$$

ou ainda,

$$\vec{v}_C = \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] - \omega_{32} \cdot r_{321} \cdot (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3)$$

substituindo-se (2.5) na equação acima,

$$\vec{v}_C = \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] + \frac{\omega_S (r_2 - r_{32}) - \omega_2 \cdot r_2}{r_{32}} \cdot r_{321} \cdot (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) \quad (2.6)$$

igualando-se (2.6) a (2.4), tem-se,

$$\begin{aligned} \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + \frac{\omega_S (r_1 + r_{31}) - \omega_1 \cdot r_1}{r_{31}} \cdot r_{312} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) = & \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] + \\ & + \frac{\omega_S (r_2 - r_{32}) - \omega_2 \cdot r_2}{r_{32}} \cdot r_{321} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + (\omega_S \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}} + \omega_S \cdot r_{312} - \omega_1 \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) = & \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] + \\ & + (\omega_S \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}} - \omega_S \cdot r_{321} - \omega_2 \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}}) (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + (\omega_S - \omega_1) \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) + \omega_S \cdot r_{312} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) = & \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] + \\ & + (\omega_S - \omega_2) \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) - \omega_S \cdot r_{321} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})] + (\omega_S - \omega_1) \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) + \omega_S (\vec{j}_1 \times \vec{r}_{312}) = & \omega_S [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_{32})] + \\ & + (\omega_S - \omega_2) \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) - \omega_S (\vec{j}_1 \times \vec{r}_{321}) \end{aligned}$$

$$(\omega_s - \omega_1) \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) = (\omega_s - \omega_2) \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}} (\vec{j}_1 \times \vec{j}_3) - \omega_s [\vec{j}_1 \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31} + \vec{r}_{312} + \vec{r}_{321} + \vec{r}_{32} - \vec{r}_2)]$$

como, $\vec{r}_1 + \vec{r}_{31} + \vec{r}_{312} + \vec{r}_{321} + \vec{r}_{32} - \vec{r}_2 = \vec{0}$ (veja Fig. 35), então,

$$(\omega_s - \omega_1) \frac{r_1 \cdot r_{312}}{r_{31}} = (\omega_s - \omega_2) \frac{r_2 \cdot r_{321}}{r_{32}}$$

se, $\omega_s \neq \omega_2$, pode-se escrever,

$$\frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = \frac{r_2 \cdot r_{31} \cdot r_{321}}{r_1 \cdot r_{32} \cdot r_{312}} = i_o \quad (2.7)$$

Este é o resultado desejado, no entanto é preciso modificá-lo um pouco para torná-lo coerente com a convenção já utilizada no capítulo anterior que define como negativo o raio de uma engrenagem com dentes internos. Sendo assim, temos:

$$\boxed{\frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = - \frac{R_2 \cdot R_{31} \cdot R_{321}}{R_1 \cdot R_{32} \cdot R_{312}} = i_o} \quad (2.8)$$

O leitor poderá, facilmente, verificar a equivalência entre as equações (2.7) e (2.8) e observar que a única diferença entre elas é o modo como foi considerado o sinal do raio de cada engrenagem.

A equação (2.8), da forma como foi deduzida, é válida para qualquer dos 34 tipos de T.E.P.-Simples. Entretanto, um cuidado especial deve ser tomado com relação ao sinal da razão básica. Na realidade para se obter o sinal de i_o , em vez de realizar-se a eliminação sistemática das engrenagens, como foi feito no capítulo 1 (Fig. 20), é melhor imaginar-se fixo o suporte do planetário, como se ele estivesse trabalhado no modo *não-epi-cíclico* ($\omega_s = 0$ na fórmula), e a partir daí obter-se o sinal de i_o .

2-2-2. Derivação da Razão Básica para os T.E.P.-Ligados e os T.E.P.-Incorporados.

Como já foi dito antes tanto um T.E.P. ligado

um T.E.P.-Incorporado podem ser derivados a partir de um S.M.R.T. onde apenas três dos seus "eixos" externos são considerados. Sendo assim, considerando-se a Fig. 36a:

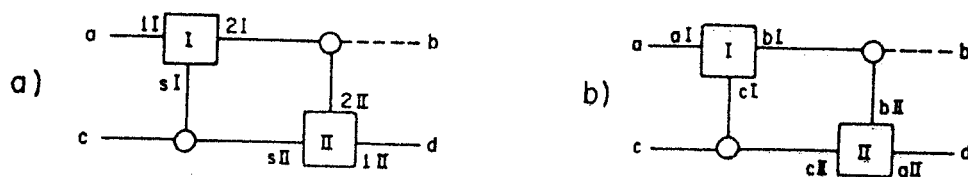


Figura 36

$$i_{OI} = \frac{\omega_{1I} - \omega_{sI}}{\omega_{2I} - \omega_{sI}} \quad (2.9)$$

também,

$$i_{OII} = \frac{\omega_{1II} - \omega_{sII}}{\omega_{2II} - \omega_{sII}} \quad (2.10)$$

como, $\omega_{2I} = \omega_{2II}$ e $\omega_{sI} = \omega_{sII}$, tem-se a partir de (2.9) e (2.10)

$$\frac{\omega_{1I} - \omega_{sI}}{i_{OI}} = \frac{\omega_{1II} - \omega_{sII}}{i_{OII}}$$

mas, $\omega_{1I} = \omega_a$, $\omega_{sI} = \omega_{sII} = \omega_c$ e $\omega_{1II} = \omega_b$, então,

$$\frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} = \frac{i_{OI}}{i_{OII}} = i_{\hat{O}} \quad (2.11)$$

Naturalmente, para a Fig. 36b, a notação deve ser modificada para:

$$\frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} = \frac{i_{\hat{O}I}}{i_{\hat{O}II}} = i_{\hat{O}} \quad (2.12)$$

A generalização de (2.11) e (2.12) fica então a seguinte:

$$\frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} = i\hat{0} \quad (2.13)$$

E a equação (2.13), evidentemente, é aplicável aos T.E.P.-Ligados, aos T.E.P.-Incorporados e a cada conjunto de três eixos externos de um S.M.R.T.

2-2-3. Derivação da Razão Básica para os T.E.-Satélite e Planeta

De acordo com a Fig. 37, tem-se,

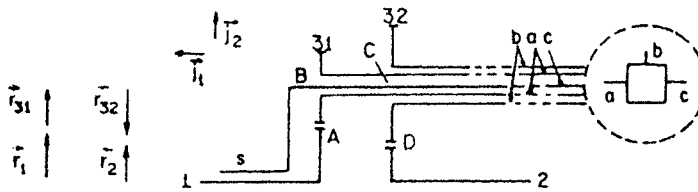


Figura 37

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{31}$$

também,

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31})$$

então,

$$\vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{31}$$

através de uma propriedade do produto vetorial, tem-se:

$$\omega_s(r_1 + r_{31})(\vec{j}_1 \times \vec{j}_2) = \omega_1 \cdot r_1(\vec{j}_1 \times \vec{j}_2) + \omega_{31} \cdot r_{31}(\vec{j}_1 \times \vec{j}_2) ; \quad \vec{j}_1 \text{ e } \vec{j}_2 \text{ são vetores unitários}$$

logo,

$$\omega_{31} = \frac{\omega_s(r_1 + r_{31}) - \omega_1 \cdot r_1}{r_{31}} = \omega_a \quad (2.14)$$

para o planetário secundário,

$$i_{\hat{O}S} = \frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} \quad (2.15)$$

então,

$$\omega_a = i_{\hat{O}S} \cdot \omega_b + (1 - i_{\hat{O}S}) \omega_c$$

substituindo-se em (2.14) e considerando-se que $\omega_b = \omega_{32}$ e $\omega_c = \omega_s$;

$$\frac{\omega_s(r_1 + r_{31}) - \omega_1 \cdot r_1}{r_{31}} = i_{\hat{O}S} \cdot \omega_{32} + (1 - i_{\hat{O}S}) \omega_s \quad (2.16)$$

Referindo-se agora ao ponto "D";

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{D/C}$$

ou,

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_s \times (\vec{r}_1 + \vec{r}_{31}) + \vec{\omega}_{32} \times \vec{r}_{32}$$

Simplificando-se e resolvendo-se,

$$\omega_{32} = \frac{\omega_2 \cdot r_2 - \omega_s(r_1 + r_{31})}{r_{32}}$$

substituindo-se em (2.16)

$$\frac{\omega_s(r_1 + r_{31}) - \omega_1 \cdot r_1}{r_{31}} = i_{\hat{O}S} \cdot \frac{\omega_2 \cdot r_2 - \omega_s(r_1 + r_{31})}{r_{32}} + (1 - i_{\hat{O}S}) \omega_s$$

como $\vec{r}_1 + \vec{r}_{31} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{32}$ e portanto $r_1 + r_{31} = r_2 - r_{32}$, tem-se;

$$\left(\frac{r_1}{r_{31}} + 1\right)\omega_s - \frac{r_1}{r_{31}}\omega_1 = i_{\hat{O}S} \cdot \frac{r_2}{r_{32}}\omega_2 - i_{\hat{O}S} \left(\frac{r_2}{r_{32}} - 1\right)\omega_s + (1 - i_{\hat{O}S})\omega_s$$

$$\left(\frac{r_1}{r_{31}} + i_{\hat{O}S} \cdot \frac{r_2}{r_{32}}\right)\omega_s = i_{\hat{O}S} \cdot \frac{r_2}{r_{32}}\omega_2 + \frac{r_1}{r_{31}}\omega_1$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = - i_{\hat{O}S} \cdot \frac{r_2 \cdot r_{31}}{r_1 \cdot r_{32}} = i_{\hat{O}S} \cdot \frac{R_2 \cdot R_{31}}{R_1 \cdot R_{32}} = i_{\hat{O}S} \cdot i_{op}$$

portanto, para os T.E.-Satélite e Planeta,

$$i_o = \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = i_{\hat{O}S} \cdot i_{op}$$

(2.17)

não se deve esquecer que,

31 → a

32 → b

s → c

(Ver Fig. 37)

nem também da equação (2.15).

2-3. RELAÇÕES CINEMÁTICAS

A equação cinemática fundamental dos planetários, apresentada até aqui, pode ser rearrumada de outras formas diferentes. Também, equações que relacionem as razões das velocidades angulares de dois "eixos" de um planetário com relação ao terceiro, podem ser derivadas. Várias dessas variantes serão utilizadas no transcorrer deste trabalho.

Vejamos a seguir a tradução matemática do acima exposto.

$$\frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} = i_o \quad (2.18)$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_s}{\omega_1 - \omega_s} = \frac{1}{i_o} \quad (2.19)$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_s - \omega_2} = 1 - i_0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\omega_s - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{1 - i_0} \quad (2.21)$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_s - \omega_1} = \frac{i_0 - 1}{i_0} \quad (2.22)$$

$$\frac{\omega_s - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{i_0}{i_0 - 1} \quad (2.23)$$

$$\omega_1 = i_0 \cdot \omega_2 + (1 - i_0) \omega_s \quad (2.24)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + (i_0 - 1) \omega_s}{i_0} \quad (2.25)$$

$$\omega_s = \frac{\omega_1 - i_0 \cdot \omega_2}{1 - i_0} \quad (2.26)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{i_0} + \left(1 - \frac{1}{i_0}\right) \frac{\omega_s}{\omega_1} \quad \text{ou} \quad k_{21} = \frac{1}{i_0} + \left(1 - \frac{1}{i_0}\right) k_{s1} \quad (2.27)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_0 + (1 - i_0) \frac{\omega_s}{\omega_2} \quad \text{ou} \quad k_{12} = i_0 + (1 - i_0) k_{s2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_s} = (1 - i_0) + i_0 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_s} \quad \text{ou} \quad k_{1s} = (1 - i_0) + i_0 \cdot k_{2s} \quad (2.29)$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_1} = \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot i_0 - 1}{i_0 - 1} \quad \text{ou} \quad k_{s1} = \frac{i_0 \cdot k_{21} - 1}{i_0 - 1} \quad (2.30)$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_2} = \frac{i_0 - \frac{\omega_1}{\omega_2}}{i_0 - 1} \quad \text{ou} \quad k_{s_2} = \frac{i_0 - k_{12}}{i_0 - 1} \quad (2.31)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_s} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_s} - (1 - i_0)}{i_0} \quad \text{ou} \quad k_{2s} = \frac{k_{1s} - (1 - i_0)}{i_0} \quad (2.32)$$

Observe-se, nas equações (2.27) a (2.32), que:

$$k_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad k_{s1} = \frac{\omega_s}{\omega_1}, \quad k_{s2} = \frac{\omega_s}{\omega_2}, \quad \dots$$

ESTUDOS DE POTÊNCIA, TORQUE E RENDIMENTO DOS T.E.P.-SIMPLES

3-1. POTÊNCIA DE ACOPLAMENTO E POTÊNCIA DE ROLAMENTO

Se compararmos o que ocorre com a potência nos trens comuns e nos trens planetários-simples, certamente a primeira diferença a notar será que nos planetários o fluxo de potência pode se propagar por mais de um caminho. No entanto, a diferença fundamental está no fato de que no interior dos planetários-simples o fluxo de potência pode ocorrer de duas formas diferentes: uma, idêntica à que ocorre nos trens comuns, será chamada aqui de *potência de rolamento*; a outra, intrínseca apenas aos trens planetários, acontece graças ao movimento acoplado das engrenagens, ou seja, um movimento sem rolamento relativo entre as mesmas, e que será denominada de *potência de acoplamento*.

Do acima exposto conclui-se que dois modos particulares de funcionamento podem ocorrer em um T.E.P.-Simples de maneira que apenas um "tipo" de potência percorra o seu interior, ou seja, se o suporte estiver fixo ter-se-á apenas potência de rolamento, se os três membros principais girarem com a mesma velocidade angular (em módulo e sentido) ter-se-á unicamente potência de acoplamento. Em qualquer outro caso a potência externa se transmitirá através do planetário uma parte como potência de rolamento e o restante como potência de acoplamento.

Para "enxergar-se" melhor os dois tipos de potência interna pode-se decompor os movimentos dos membros principais de uma forma conveniente, como está exemplificado na Fig. 38 para um planetário do tipo P(P)N.

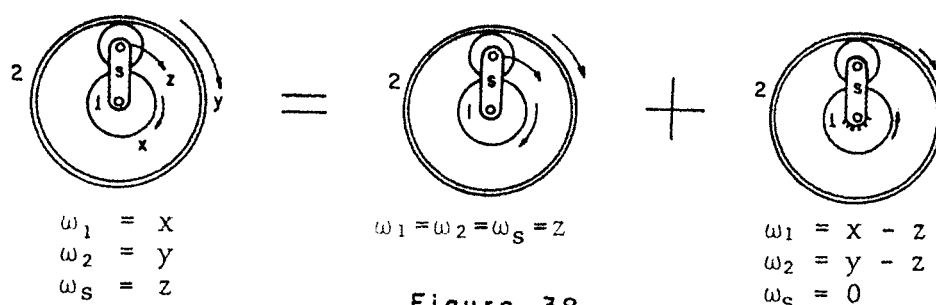


Figura 38

O objetivo primordial da Fig. 38 é induzir no leitor a idéia de que com a decomposição adequada das velocidades angulares consegue-se também a separação das potências de acoplamento e de rolamento em um planetário. Através deste raciocínio podemos construir a Tabela 2 a seguir.

TABELA 2

EIXO	POTÊNCIA EXTERNA	POTÊNCIA DE ACOPLAMENTO	POTÊNCIA DE ROLAMENTO
1	$P_1 = M_1 \cdot \omega_1$	$P_{K1} = M_1 \cdot \omega_s$	$P_{W1} = M_1 (\omega_1 - \omega_s)$
2	$P_2 = M_2 \cdot \omega_2$	$P_{K2} = M_2 \cdot \omega_s$	$P_{W2} = M_2 (\omega_2 - \omega_s)$
s	$P_s = M_s \cdot \omega_s$	$P_{Ks} = M_s \cdot \omega_s$	$P_{Ws} = 0$
1,2,s	Potência Externa = Potência de Acoplamento + Potência de Rolamento		

Algumas conclusões já podem ser enfatizadas neste ponto do estudo, uma delas é que o fluxo da potência de rolamento faz sempre o percurso entre os membros "1" e "2", isto é, entre as engrenagens centrais. Outra importante conclusão é que a perda de potência global no planetário corresponde praticamente à perda sofrida na potência de rolamento durante o seu trajeto entre as duas engrenagens centrais, já que apenas na transmissão desta potência se verifica o rolamento e, conseqüentemente, o atrito entre as engrenagens que é o principal causador de uma potência de perda.

Aproveitando ainda a Fig. 38 podemos aplicar a lei da conservação da energia ou da potência em cada um dos três planetários desenhados. Procedendo assim e definindo como " P_v " a potência perdida, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Potência de Acoplamento} = P_{K1} + P_{K2} + P_{Ks} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Potência de Rolamento} = P_{W1} + P_{W2} + P_v = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Potência Externa} = P_1 + P_2 + P_s + P_v = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

As equações (3.1) e (3.2) serão de importância relevante no estudo dos momentos que será apresentado a seguir.

3-2. RELAÇÕES ENTRE MOMENTOS

A equação (3.1) pode ser escrita,

$$M_1 \cdot \omega_s + M_2 \cdot \omega_s + M_s \cdot \omega_s = 0$$

simplificando-se resulta a equação dos momentos,

$$M_1 + M_2 + M_s = 0 \quad (3.4)$$

A equação (3.2) também pode ser escrita da maneira seguinte, se o sentido do fluxo da potência de rolamento for de "1" para "2", ou seja, se $P_{W1} > 0$:

$$\underline{P_{W1} > 0:}$$

$$M_1(\omega_1 - \omega_s) + M_2(\omega_2 - \omega_s) - M_1(\omega_1 - \omega_s)(1 - \eta_{12}) = 0 \quad (3.5)$$

η_{12} = rendimento do planetário quando o suporte estiver fixo e o sentido do fluxo for de "1" para "2".

simplificando-se (3.5), resulta

$$\frac{M_2}{M_1} = - \frac{\omega_1 - \omega_s}{\omega_2 - \omega_s} \cdot \eta_{12}$$

ou

$$\frac{M_2}{M_1} = - i_o \cdot \eta_{12} \quad (3.6)$$

Se a potência de rolamento fluir de "2" para "1", a equação (3.2) deverá ser escrita:

$$\underline{P_{W1} < 0:}$$

$$M_1(\omega_1 - \omega_s) + M_2(\omega_2 - \omega_s) - M_2(\omega_2 - \omega_s)(1 - \eta_{21}) = 0$$

simplificando-se, obtém-se:

$$\frac{M_2}{M_1} = - i_o \cdot \eta_{21}^{-1} \quad (3.7)$$

Como $\eta_{12} \approx \eta_{21}$, as equações (3.6) e (3.7) podem ser reunidas em apenas uma:

$$\boxed{\frac{M_2}{M_1} = -i_o \cdot \eta_o^{W1}} \quad (3.8)$$

$\eta_o = \eta_{12} = \eta_{21}$ = rendimento estacionário

$$W1 = \frac{P_{W1}}{|P_{W1}|} = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_s)}{|M_1(\omega_1 - \omega_s)|} = \pm 1$$

Através da equação dos momentos (3.4), tem-se

$$M_1 + M_s = i_o \cdot \eta_o^{W1} \cdot M_1$$

$$\boxed{\frac{M_s}{M_1} = i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1} \quad (3.9)$$

e ainda,

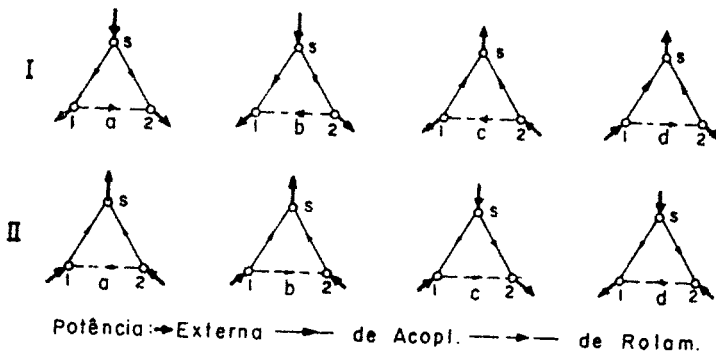
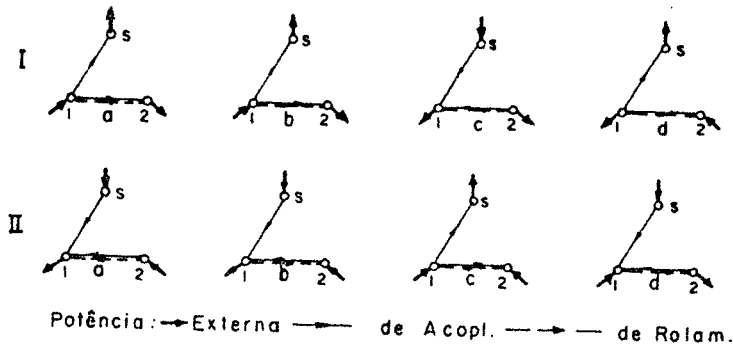
$$M_2 + M_s = \frac{M_2}{i_o \cdot \eta_o^{W1}}$$

$$\boxed{\frac{M_s}{M_2} = \frac{1}{i_o \cdot \eta_o^{W1}} - 1} \quad (3.10)$$

3-3. CONFIGURAÇÕES DOS FLUXOS DE POTÊNCIA

Já foi dito anteriormente que a potência de rolamento flui, no interior do planetário, entre os membros "1" e "2". A potência de acoplamento difere da potência de rolamento pelo fato da primeira formar dois caminhos distintos no interior do planetário. As Figs. 39 e 40 apresentam as diversas configurações de fluxos de potência possíveis de ocorrer em um T.E.P.-Simples.

Vê-se pelas Figs. 39 e 40 que qualquer um dos três membros principais pode servir como elemento de convergência ou divergência da potência de acoplamento. O que determinará qual

Fig. 39 - Fluxos de Potência ($i_0 < 0$)Fig. 40 - Fluxos de Potência ($0 < i_0 < 1$)

OBS: Para $i_0 > 1$, permutar os índices 1 e 2 nesta figura.

dos membros principais realizará esta função pode ser melhor compreendido através de uma analogia entre um T.E.P.-Simplex transmitindo apenas potência de acoplamento e um mecanismo de movimento linear (Fig. 41).

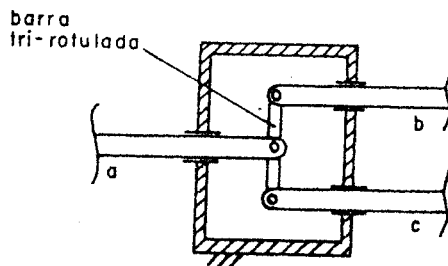
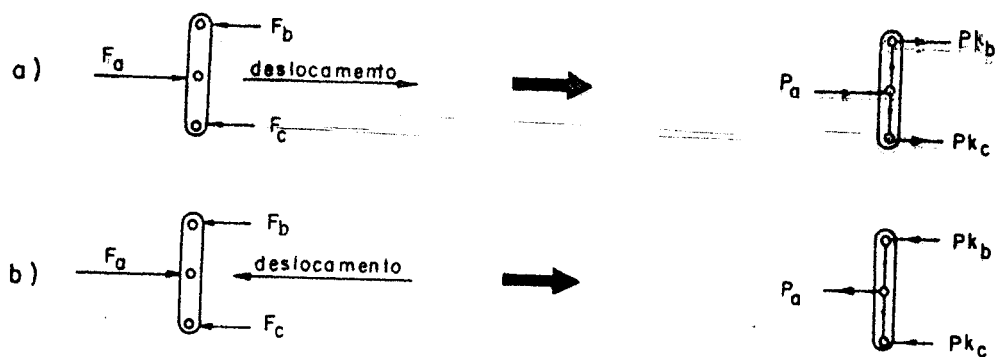


Figura 41

A Fig. 42 mostra duas configurações relacionando forças e movimento com fluxo de potência para o mecanismo da analogia. É interessante notar a instabilidade para o caso da Fig. 42a (se não houver nenhum vínculo externo entre as barras "b" e "c") onde ocorre a bifurcação da potência; a mesma coisa acontece com os planetários. Em ambos os casos da Fig. 42 a barra de onde diverge ou para onde converge a potência é a barra

Figura 42- $(F_a + F_b + F_c = 0)$

"a" onde atua a força maior, ou seja, a força que possui o sentido oposto ao das outras duas. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para um planetário, apenas substituindo-se forças por momentos. Sendo assim, a conclusão que se deve tirar é que num T.E.P.-Simples o eixo de onde diverge ou para onde converge a potência de acoplamento é o mesmo eixo onde atua o momento maior ou o momento que possui sentido oposto aos outros dois. Chamaremos esse eixo de *eixo de soma* e a seguir veremos como identificá-lo a partir da razão básica i_o .

3-3-1. Identificação do Eixo de Soma a partir da Razão Básica i_o .

A equação (3.8) pode fornecer a informação de qual membro principal será o eixo de soma:

1º caso:

$$\frac{M_2}{M_1} = - i_o \cdot \eta_o^{W1}$$

$$\text{se } i_o \cdot \eta_o^{W1} < 0 \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} > 0$$

Logo, "s" será o eixo de soma.

2º caso:

$$\text{se } i_o \cdot \eta_o^{W1} > 1 \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} < -1 \text{ e } |M_2| > |M_1|$$

então, "2" será o eixo de soma.

3º caso:

se $0 < i_o \cdot \eta_o^{W1} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{M_2}{M_1} < 0$ e $|M_2| < |M_1|$

Logo, "1" será o eixo de soma.

Como veremos na seção 3-5 o valor de "i_o" deverá estar, na prática, normalmente fora do intervalo $\eta_o \leq i_o \leq 1/\eta_o$. Sendo assim, os três casos anteriores podem ser explicitados como na tabela 3.

TABELA 3

RAZÃO BÁSICA	EIXO DE SOMA
$i_o < 0$	s
$i_o > 1$	2
$0 < i_o < 1$	1

3-4. EXPRESSÕES DE RENDIMENTO PARA OS T.E.P.-SIMPLES

De uma forma geral o rendimento de um planetário pode ser escrito como:

$$\eta = - \frac{P_{saída}}{P_{entrada}}$$

A Fig. 43 apresenta as seis disposições possíveis para as potências externas e as expressões dos rendimentos correspondentes.

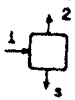
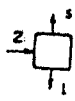
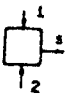
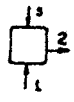
1 - BIFURCAÇÃO DE POTÊNCIA		
1a) 	1b) 	1c) 
$\eta_{1s}^2 = -(P_2 + P_s)/P_1$	$\eta_{s2}^1 = -(P_1 + P_2)/P_s$	$\eta_{21}^s = -(P_s + P_1)/P_2$
2 - ADIÇÃO DE POTÊNCIA		
2a) 	2b) 	2c) 
$\eta_{s1}^2 = -P_1/(P_2 + P_s)$	$\eta_{2s}^1 = -P_s/(P_1 + P_2)$	$\eta_{12}^s = -P_2/(P_s + P_1)$

Figura 43

Vejamos agora os desenvolvimentos das expressões contidas na Fig. 43:

$$1a) \quad \eta_{1 < s}^2 = - \frac{M_2 \cdot \omega_2 + M_s \cdot \omega_s}{M_1 \cdot \omega_1}$$

mas,

$$\frac{M_2}{M_1} = -i_o \cdot \eta_o^{W1} \quad e \quad \frac{M_s}{M_1} = i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1$$

então,

$$\eta_{1 < s}^2 = - \frac{-i_o \cdot \eta_o^{W1} \cdot M_1 \cdot \omega_2 + (i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1) M_1 \cdot \omega_s}{M_1 \cdot \omega_1} = i_o \cdot \eta_o^{W1} \cdot k_{21} - (i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1) k_{s1} \quad (3.11)$$

pela equação (2.27) tem-se $k_{21} = \frac{1}{i_o} + (1 - \frac{1}{i_o}) k_{s1}$

substituindo-se a equação acima em (3.11) e simplificando-se, resulta:

$$\boxed{\eta_{1 < s}^2 = \eta_o^{W1} + k_{s1} (1 - \eta_o^{W1})} \quad (3.12)$$

2a) Invertendo-se (3.12) tem-se,

$$\boxed{\eta_{s > 1}^2 = \frac{1}{\eta_o^{W1} + k_{s1} (1 - \eta_o^{W1})}} \quad (3.13)$$

1b)

$$\eta_{s < 2}^1 = - \frac{M_1 \cdot \omega_1 + M_2 \cdot \omega_2}{M_s \cdot \omega_s}$$

pondo-se novamente M_2 e M_s como funções de M_1 :

$$\eta_{s < 2}^1 = - \frac{M_1 \cdot \omega_1 - i_o \cdot \eta_o^{W1} \cdot M_1 \cdot \omega_2}{(i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1) M_1 \cdot \omega_s} = \frac{i_o \cdot \eta_o^{W1} \cdot k_{2s} - k_{1s}}{i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1} \quad (3.14)$$

mas pela equação (2.32) tem-se,

$$k_{2s} = \frac{k_{1s} - (1 - i_o)}{i_o}$$

substituindo-se a equação acima em (3.14) e simplificando-se, resulta:

$$\eta_{s < 2} = \frac{\eta_o^{W1} (k_{1s} - 1 + i_o) - k_{1s}}{i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1} \quad (3.15)$$

2b) Invertendo-se (3.15) tem-se,

$$\eta_{1 > 2} = \frac{i_o \cdot \eta_o^{W1} - 1}{\eta_o^{W1} (k_{1s} - 1 + i_o) - k_{1s}} \quad (3.16)$$

1c)

$$\eta_{2 < 1} = - \frac{M_s \cdot \omega_s + M_1 \cdot \omega_1}{M_2 \cdot \omega_2}$$

ou

$$\eta_{2 < 1} = \frac{k_{s2} \cdot i_o \cdot \eta_o^{W1} - k_{s2} + k_{12}}{i_o \cdot \eta_o^{W1}}$$

mas pela equação (2.28), $k_{12} = i_o + k_{s2} - k_{s2} \cdot i_o$, logo

$$\eta_{2 < 1} = \frac{k_{s2} \cdot i_o \cdot \eta_o^{W1} - k_{s2} + i_o + k_{s2} - k_{s2} \cdot i_o}{i_o \cdot \eta_o^{W1}}$$

$$\eta_{2 < 1} = \frac{1}{\eta_o^{W1}} + \left(1 - \frac{1}{\eta_o^{W1}}\right) k_{s2} \quad (3.17)$$

2c) Invertendo-se (3.17), tem-se

$$\eta_{s > 2} = \frac{1}{\frac{1}{\eta_o^{W1}} + \left(1 - \frac{1}{\eta_o^{W1}}\right) k_{s2}} \quad (3.18)$$

3-5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O RENDIMENTO

Como foi visto na seção 3.1, toda a potência perdida em um planetário vem da potência de rolamento, consequentemente, se for adicionada uma mesma velocidade angular às velocidades dos três membros principais de um planetário que se encontre operando com o suporte fixo ($P_K=0$), a perda de potência continuará a mesma. Sendo assim, é correto escrever:

$$\eta = \frac{P - \Delta P_W}{P} = 1 - \frac{\Delta P_W}{P} = 1 - \frac{P_W}{P}(1 - \eta_0) \quad (3.19)$$

onde

η = rendimento do planetário para uma situação qualquer
($\omega_1=x$; $\omega_2=y$; $\omega_s=z$)

P = potência motora para a situação acima

P_W = potência motora (de rolamento) quando é feito $\omega_1=x-z$;
 $\omega_2=y-z$; $\omega_s=z-z=0$

ΔP_W = potência de perda para o caso acima = $(1 - \eta_0) \cdot P_W$

Da equação (3.19) observa-se que:

$$\text{Se } \frac{P_W}{P} = 1 \rightarrow \eta = \eta_0$$

$$\text{Se } \frac{P_W}{P} < 1 \rightarrow \eta > \eta_0$$

$$\text{Se } \frac{P_W}{P} = 0 \rightarrow \eta = 1 \quad (\omega_1 = \omega_2 = \omega_s = z)$$

$$\text{Se } \frac{P_W}{P} > 1 \rightarrow \eta < \eta_0$$

$$\text{Se } \frac{P_W}{P} > \frac{1}{1 - \eta_0} \rightarrow \eta < 0 \quad (\text{auto-travamento})$$

3-5-1. Auto-travamento

Como vimos, um rendimento negativo caracteriza a impossibilidade de movimento, ou seja, o *auto-travamento*. Nesse caso o rendimento perde aquele significado clássico e o seu valor absoluto passa a informar sobre a intensidade do auto-travamento, ou

melhor, sobre quanto o planetário penetrou na região de auto-travamento.

Os fatores determinantes do auto-travamento são dois: o valor da razão básica e o modo de operação. São seis os possíveis modos de operação de um planetário, como indica a Fig. 43, mas apenas em um deles poderá ocorrer o auto-travamento (caso 2b). A seguir vamos analisar a equação (3.16), referente a esse caso, à procura dos valores de " i_o " que conduzirão ao auto-travamento. Para isso vamos rearrumar convenientemente essa equação:

$$\eta_{2>s} = \frac{i_o \eta_o^{W1} - 1}{\eta_o^{W1} (i_o - 1) + k_{1s} (\eta_o^{W1} - 1)} \quad (3.20)$$

Façamos a análise em duas etapas:

1ª Etapa: $i_o > 1$, $M_1 > 0$, $\omega_1 > 0$

por (3.8); $\frac{M_2}{M_1} = -i_o \cdot \eta_o^{W1} < 0$

logo $k_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} < 0$

por (2.30); $k_{s1} = \frac{i_o k_{21} - 1}{i_o - 1} \rightarrow k_{s1} < 0 \rightarrow \omega_s < 0$

então; $M_1 \cdot (\omega_1 - \omega_s) > 0 \rightarrow W1 = +1$

Das considerações acima podemos concluir que o denominador de (3.20) será sempre positivo, portanto o rendimento será negativo quando:

$$i_o \cdot \eta_o < 1 \rightarrow 1 < i_o < \frac{1}{\eta_o} \quad (3.21)$$

2ª Etapa: $i_o < 1$, $M_1 > 0$, $\omega_1 > 0$

Novamente por (3.8); $\frac{M_2}{M_1} = -i_o \cdot \eta_o^{W1}$

portanto,

$$\frac{M_2}{M_1} < 0 \quad \text{se} \quad 0 < i_o < 1 \quad \rightarrow \quad k_{21} < 0$$

e

$$\frac{M_2}{M_1} > 0 \quad \text{se} \quad i_o < 0 \quad \rightarrow \quad k_{21} > 0$$

analisando novamente (2.30) e considerando ambos os casos acima, temos:

$$k_{1s} = \frac{i_o - 1}{i_o k_{21} - 1} \quad \rightarrow \quad 0 < k_{1s} < 1 - i_o \quad \rightarrow \quad \omega_s > \omega_1$$

então, $M_1(\omega_1 - \omega_s) < 0 \quad \rightarrow \quad W_1 = -1$

e a equação (3.20) fica

$$\eta_{1/2 > s} = \frac{i_o \cdot \frac{1}{\eta_o} - 1}{\frac{1}{\eta_o}(i_o - 1) + k_{1s}(\frac{1}{\eta_o} - 1)}$$

como $0 < k_{1s} < 1 - i_o$, então o denominador na equação acima será sempre menor que zero, conseqüentemente o rendimento dado por esta equação será negativo quando

$$i_o \cdot \frac{1}{\eta_o} > 1 \quad \rightarrow \quad \eta_o < i_o < 1 \quad (3.22)$$

Unindo (3.22) a (3.21) temos que para o modo de operação considerado ocorrerá o auto-travamento se

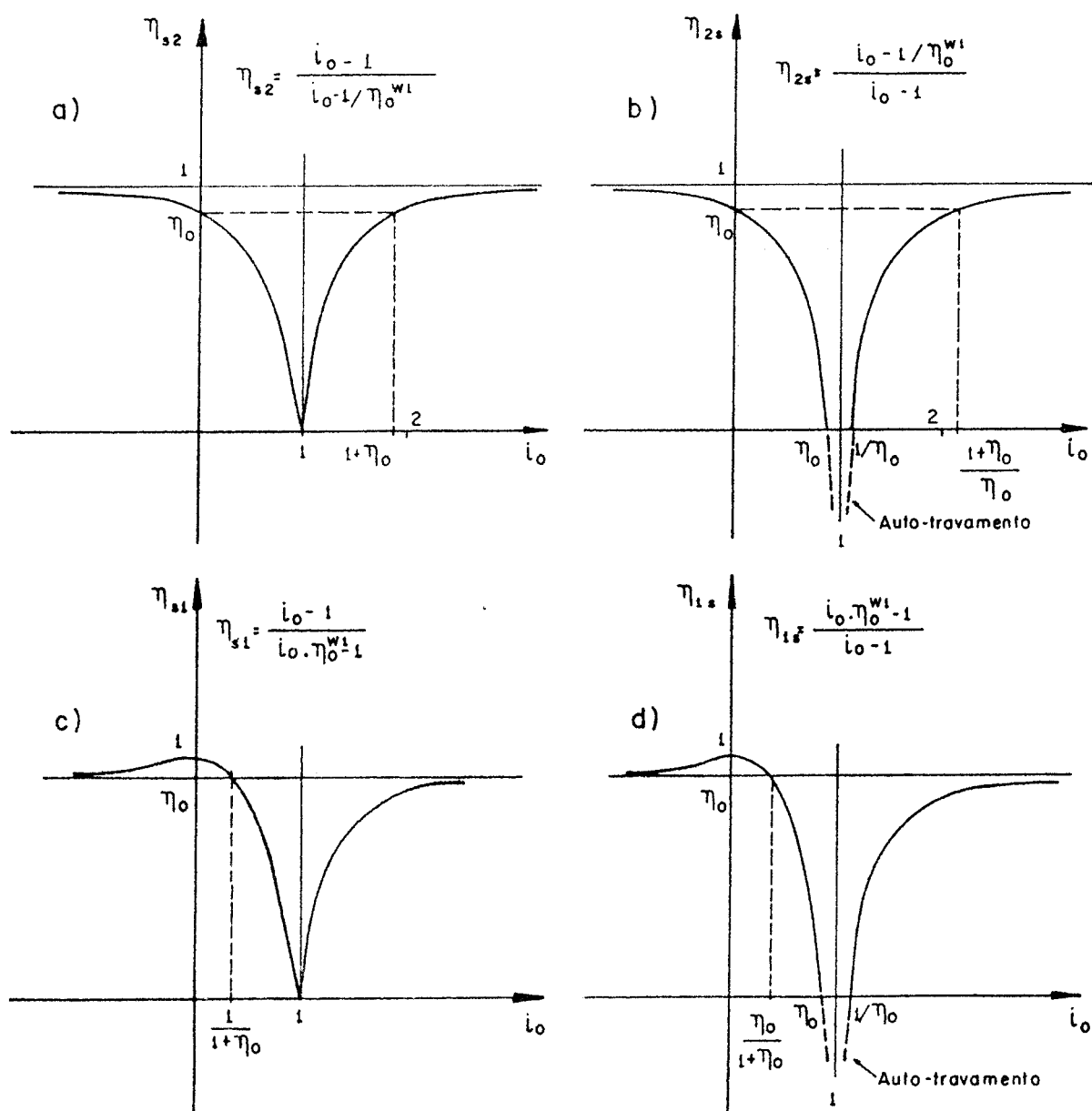
$$\boxed{\eta_o < i_o < \frac{1}{\eta_o}} \quad (3.23)$$

O leitor poderá verificar através de análises semelhantes à anterior que em qualquer dos outros modos de operação não existirá valor de " i_o " que torne o rendimento negativo. Sendo assim, podemos aceitar a seguinte regra:

O auto-travamento ocorre apenas em planetários com $\eta_o < i_o < \frac{1}{\eta_o}$ de dois ou três eixos e quando houver uma tentativa de ter-se potência saindo unicamente pelo suporte.

3-5-2. Rendimento de Planetários com um dos Membros Principais Fixo.

As seis equações obtidas na seção 3-4 servem também para calcular o rendimento de planetários com apenas dois eixos, ou melhor, com um dos membros principais fixo. Quando o membro fixo é o suporte, então $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta_0$, mas não sendo este o caso podemos chegar, facilmente, a partir de uma das equações referidas acima, a uma expressão que forneça o rendimento como uma função de " i_0 ". Existem quatro situações diferentes para a trajetória da potência quando o membro fixo não é o suporte. Analisando cuidadosamente as quatro equações relativas a estas situações podemos traçar os gráficos 3-5-a,b,c,d. Como era de se esperar os gráficos 3-5-b,d



mostram claramente a ocorrência do auto-travamento no intervalo $\eta_0 < i_0 < 1/\eta_0$, também está evidente, nos gráficos 3-5-a,c, que dentro desse mesmo intervalo o rendimento assume valores dos mais baixos, alcançando mesmo o valor zero quando $i_0 = 1$. Se o leitor analisar as equações de rendimento para as outras situações em que nenhum dos membros esteja fixo e para $\eta_0 < i_0 < 1/\eta_0$, chegará às mesmas conclusões acima. Por isso, justifica-se a não utilização, na prática, de T.E.P. com $\eta_0 < i_0 < 1/\eta_0$.

P A R T E I I

- APLICAÇÃO EM VEÍCULO HÍBRIDO

DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO

4-1. INTRODUÇÃO

A crise energética mundial nos últimos anos alertou a humanidade sobre a necessidade urgente de se criar tecnologias que possibilitem o aproveitamento das fontes alternativas de energia oferecidas pela natureza e também, a redução ao mínimo possível do desperdício significativo de energia que sempre acompanhou a sua utilização. Sistemas armazenadores tais como baterias eletro-químicas e volantes podem, sem dúvida, contribuir para a desejada economia de energia, fato esse que justifica a intensificação atual das pesquisas sobre esses sistemas.

4-2. VOLANTES: UM CAMINHO PARA A ECONOMIA DE ENERGIA

Volantes são componentes mecânicos utilizados desde milhares de anos antes da Era Cristã. Eles podem servir como um reservatório de energia ou como fonte de momento capaz de homogeneizar um movimento. A energia armazenada em um volante é proporcional à sua inércia e ao quadrado da velocidade angular, o que justifica o interesse em altas rotações.

A utilização de volantes para armazenamento de energia de forma eficiente e econômica, exigida pelo mundo moderno, envolve uma série de otimizações que dificultam o sucesso desta aplicação. No entanto, com as inovações da Engenharia Mecânica atual, com os novos materiais existentes e em desenvolvimento, novos mancais e sistemas de transmissão de energia aperfeiçoados, pode-se prever, para um futuro breve, resultados ainda mais compensadores e gratificantes do que os já obtidos até o presente.

4-2-1. Ônibus Elétricos com Unidade de Volante para Armazenamento de Energia

Uma importante aplicação dos volantes como armazenadores de energia é em veículos, sobre a qual vem sendo desenvolvidos trabalhos e pesquisas em vários países do mundo, inclusive no

Brasil [8] pelo Grupo de Estudos Especiais e Projetos Mecânicos (GEPROM) da UNICAMP, que vem realizando um projeto financiado por um Convênio de Cooperação Financeira com o Banco do Brasil S.A., através do Fundo de Incentivo à Pesquisa Técnico Científica. O objetivo desse projeto é a simulação, por um protótipo estacionário em escala reduzida, de um trólebus com transmissão híbrida (mecânica-elétrica) e com uma unidade de volante para armazenamento de energia. Na Fig. 44 vê-se uma representação simplificada em diagrama de blocos do protótipo em destaque. Sendo que

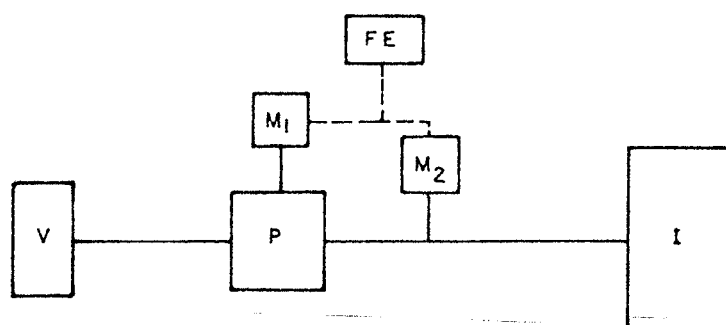


FIGURA 44

"V" é a unidade de armazenamento de energia que consiste de um volante de cerca de 100 kg circundado por um anel de proteção de chumbo e todo o conjunto sendo interno a uma caixa com vácuo parcial. "P" é um T.E.P. que possibilita a bifurcação da potência proveniente do volante, sendo que uma parcela da potência bifurcada se transmite mecanicamente até a inércia de rotação "I", que simula a inércia do veículo, e a outra parcela é transmitida através das máquinas elétricas de corrente contínua "M₁" e "M₂", controladas pelo campo, que podem funcionar como um grupo motor-gerador reversível. "FE" é uma fonte de energia elétrica.

Durante a fase de aceleração o volante cai de rotação e perde energia cinética a qual vai acelerar a inércia I. A energia aproveitável é considerada removida quando a velocidade cair de 12.000 para 8.000 r.p.m., a partir daí qualquer energia necesária para, por exemplo, manter a inércia em regime, deverá ser suprida por FE.

Na fase de desaceleração o fluxo de potência inverte de sentido e o volante passa a receber a energia cinética perdida por I, porém não retorna à sua velocidade máxima devido às perdas e ao fato de que o final da frenagem é feito por atrito. Durante todo o processo de aceleração e desaceleração a variação dos movimentos se dá de forma continuamente variável.

Estudos realizados mostram que a bifurcação do fluxo de potência melhora o rendimento da transmissão e que trólebus com sistemas deste tipo economizam cerca de 30% de energia.

4-3. OBJETIVO DA APLICAÇÃO

Esta segunda parte deste trabalho, que é uma aplicação fundamentada na primeira parte, visa apresentar um método de síntese que forneça um planetário otimizado para sistemas tais como o da Fig. 44. Os valores numéricos utilizados na síntese que se segue correspondem ao protótipo em desenvolvimento no GEPROM.

INÍCIO DA SÍNTESE

5-1. DADOS INICIAIS

Para o protótipo do GEPROM, temos:

- Faixas de rotação na fase de aceleração:

volante (V) $\rightarrow \pm 12.000$ a ± 3.000 r.p.m.

máq. elétrica 2 (M_2) $\rightarrow 0$ a ± 3.000 r.p.m.

máq. elétrica 1 (M_1) $\rightarrow \pm 3.000$ a $\pm n \times 1000$ r.p.m.

onde, $0,7 \leq n < 3$, por razões de funcionamento inerentes a máquinas elétricas.

O planetário procurado para o sistema da Fig. 44 deverá satisfazer as duas triplas de velocidades: $(\pm 12.000, 0, \pm 3.000)$ e $(\pm 8.000, \pm 3.000, \pm n \times 1000)$, mas como isto dificilmente ocorrerá é preciso que acrescentemos ao sistema em estudo três transmissões de 1 G.L., como mostra a Fig. 45.

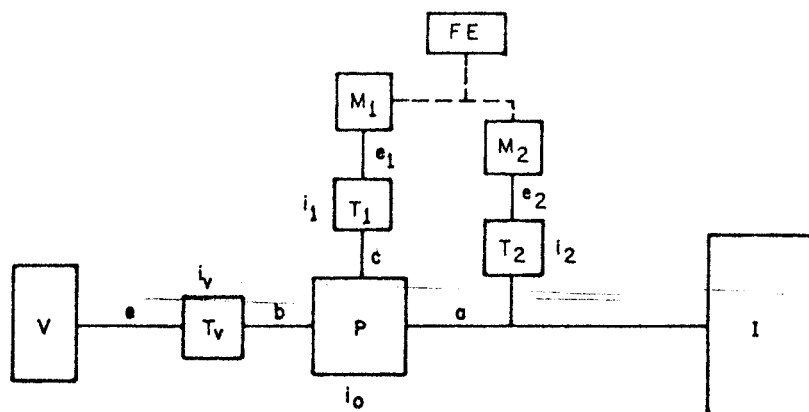


FIGURA 45

T_v , T_1 e $T_2 \rightarrow$ transmissões mecânicas com 1 grau de liberdade.

a , b , c , e , e_1 , $e_2 \rightarrow$ eixos mecânicos.

$i_v = \frac{\omega_b}{\omega_e}$; $i_1 = \frac{\omega_c}{\omega_{e_1}}$; $i_2 = \frac{\omega_a}{\omega_{e_2}}$ $\rightarrow$ razões de transmissão

Os valores das razões de transmissão i_v , i_1 e i_2 são desconhecidos e a introdução destas três variáveis conduzem a um conjunto infinito de soluções, fornecendo assim a liberdade necessária para a escolha do planetário que apresentar o maior rendimento.

rearrumando e simplificando, obtemos finalmente:

$$\omega'_b = \frac{(\omega'_c \cdot \omega''_a - \omega''_c \cdot \omega'_a) : \omega'_e}{\omega''_e (\omega'_c - \omega'_a) - \omega'_e (\omega''_c - \omega''_a)} \quad (5.5)$$

e

$$\omega''_b = i_V \cdot \omega''_e = \frac{\omega'_b}{\omega'_e} \cdot \omega''_e \quad (5.6)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \omega'_a &= 0 \\ \omega''_a &= \pm 3.000 |i_2| \text{ r.p.m.} \\ \omega'_c &= \pm 3.000 |i_1| \text{ r.p.m.} \\ \omega''_c &= \pm n \cdot 1000 |i_2| \text{ r.p.m.} \\ \omega'_e &= \pm 12.000 \text{ r.p.m.} \\ \omega''_e &= \pm 8.000 \text{ r.p.m.} \end{aligned}$$

Durante todo o ciclo que vai de t' a t''' (Fig. 46), os eixos giram sempre com o mesmo sentido de rotação inicial, conforme especificado para o protótipo atualmente em construção no GEPROM.

Para que a equação (5.5) forneça o valor de ω'_b é necessário que:

$$\omega''_e (\omega'_c - \omega'_a) - \omega'_e (\omega''_c - \omega''_a) \neq 0$$

então, se os eixos "a" e "c" giram no mesmo sentido:

$$8(3 |i_1| - 0) - 12(n \cdot |i_1| - 3 |i_2|) \neq 0$$

$$\therefore x = \frac{|i_1|}{|i_2|} \neq \frac{3}{n-2} \quad (5.7)$$

Como veremos a seguir, não vamos considerar o caso em que "a" e "c" giram em sentidos contrários.

5-3. ALTERNATIVAS A SEREM CONSIDERADAS

Na busca do planetário otimizado, algumas alternativas terão que ser consideradas, vejamos quais são:

a) Sentidos das rotações dos eixos "a" e "c".

Existem duas possibilidades diferentes:

I - "a" e "c" giram com o mesmo sentido.

II- "a" e "c" giram com sentidos contrários.

Vamos considerar apenas a primeira alternativa, uma vez que ela possibilitará, certamente, menores velocidades relativas entre as engrenagens centrais e o suporte, consequentemente a potência de rolamento será menor que no segundo caso, o que implica em perdas menores.

b) Escolha do eixo para ser o suporte dos planetas.

Serão consideradas as três possibilidades:

I - "a" como suporte

II - "b" como suporte

III- "c" como suporte

c) Tipo do planetário e o valor numérico do rendimento básico η_0

Se $i_0 < 0$ o planetário será do tipo $P(P)N^*$, mas se $i_0 > 0$ ele será do tipo $P(PP)P$. O motivo destas escolhas é o fato destes dois tipos serem os mais simples, compactos, com rendimentos básicos altos e certamente apresentarão um menor peso.

Para obtermos o valor de η_0 para os dois tipos anteriores de planetário será preciso que adotemos valores para os rendimentos dos dois tipos de engrenamento possíveis de ocorrer entre duas engrenagens. Uma boa prática é a seguinte:

- se as duas engrenagens são de dentes externos $\rightarrow \eta = 0,98$

- se uma delas é de dentes internos $\rightarrow \eta = 0,99$

consequentemente, os rendimentos básicos serão:

Tipo $P(P)N \rightarrow \eta_0 = 0,98 \times 0,99 = 0,97$

Tipo $P(PP)P \rightarrow \eta_0 = 0,98 \times 0,98 = 0,96$

Sendo assim, ficamos com as seguintes condições:

I - se $i_0 < 0 \rightarrow \eta_0 = 0,97$

II - se $i_0 > 0 \rightarrow \eta_0 = 0,96$

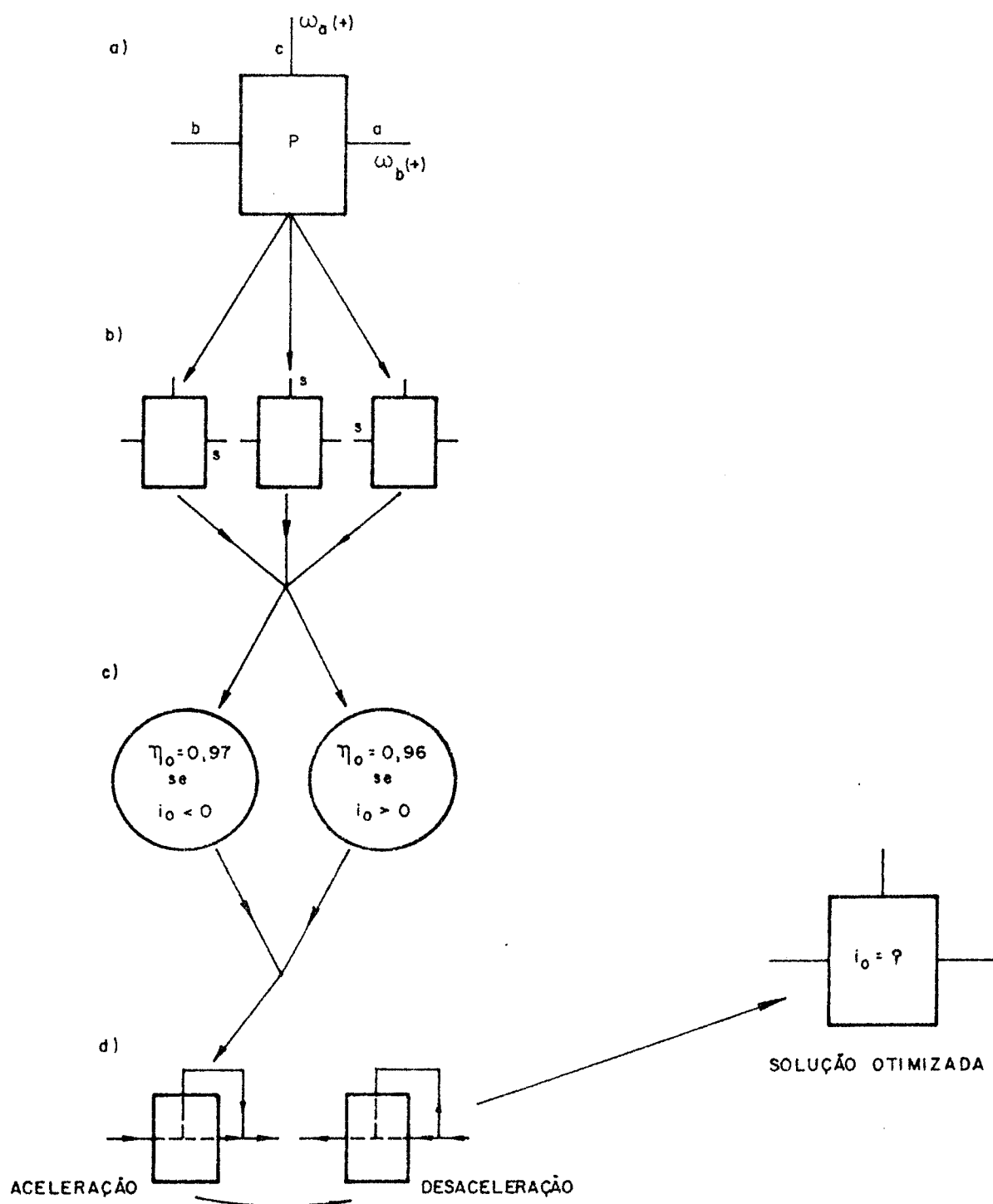
d) Fluxo de potência

Em nenhum momento deverá ocorrer recirculação da potên

tência, pois isso só traria desvantagens para o sistema. No próximo capítulo veremos qual a condição que vai nos garantir essa restrição.

5-3-1. Esquema dos Caminhos a Seguir

Os quatro itens anteriores podem ser esquematizados da seguinte forma:



ANÁLISE DO FLUXO DE POTÊNCIA

6-1. POSSÍVEIS CONFIGURAÇÕES PARA O FLUXO DE POTÊNCIA

O sistema de transmissão em estudo pode ser generalizado da forma como aparece na Fig. 47. "CV" pode ser qualquer ti-

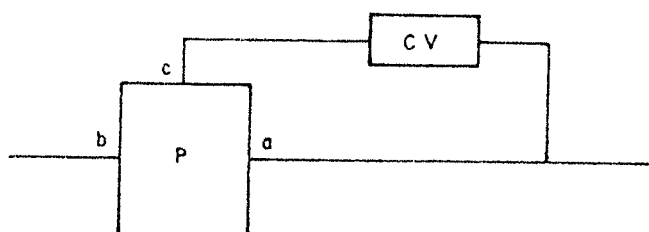


FIGURA 47

po de transmissão (elétrica, mecânica, hidrostática, etc.) continuamente variável. A Fig. 48 mostra as três possibilidades para o fluxo de potência, que vamos considerar. O que precisamos agora é saber as condições que conduzem a cada uma delas.

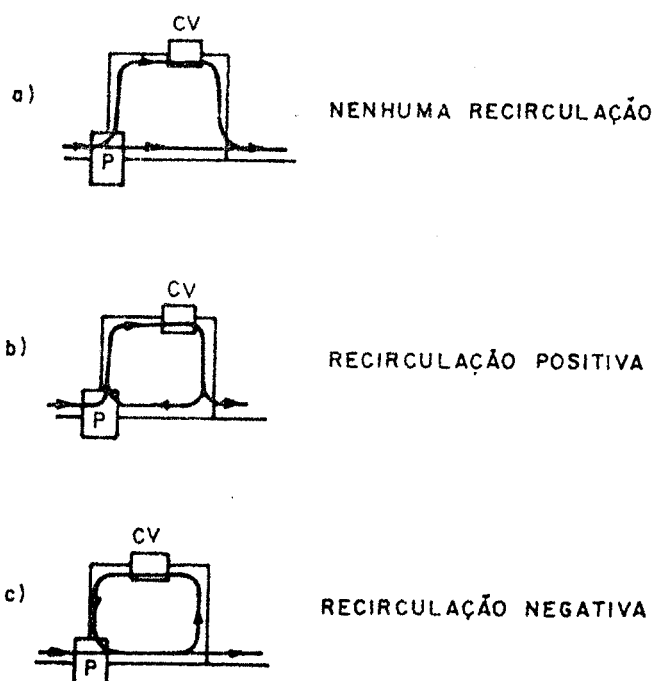


FIGURA 48

6-2. DEFINIÇÃO E ANÁLISE DA RAZÃO P_v/P_i

Durante este capítulo vamos continuar com a convenção utilizada desde o início do trabalho que considera positiva uma potência que entra num sistema (Fig. 49a).

Se definirmos P_v como a potência através de "CV" e P_i como a potência de entrada no planetário, conforme a Fig. 49b, é conveniente que o sinal de ambas seja positivo quando o sentido for da esquerda para a direita. Portanto, P_i será sempre positivo.

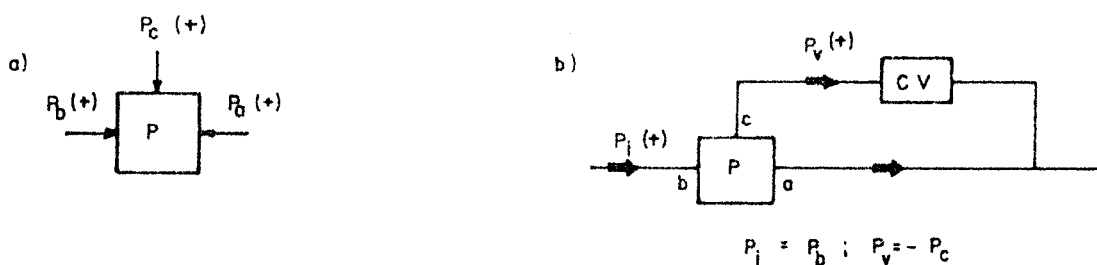


FIGURA 49

Com a ajuda da Fig. 49b fica fácil compreender que haverá no sistema:

$$\text{I} - \text{nenhuma recirculação se } 0 < \frac{P_v}{P_i} < 1 \quad (6.1)$$

$$\text{II} - \text{recirculação positiva se } \frac{P_v}{P_i} > 1 \quad (6.2)$$

$$\text{III} - \text{recirculação negativa se } \frac{P_v}{P_i} < 0 \quad (6.3)$$

6-2-1. Cálculo de P_v/P_i

Façamos, de acordo com a Fig. 49b e equação (2.2):

$$i_{\hat{O}} = \frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} = \text{constante} \quad (6.4)$$

$$\therefore i_{\hat{O}} \cdot \omega_b + (1 - i_{\hat{O}}) \cdot \omega_c = \omega_a \quad (6.5)$$

Se desprezarmos as perdas no planetário, temos:

$$M_a \cdot \omega_a + M_b \cdot \omega_b + M_c \cdot \omega_c = 0 \quad (6.6)$$

também podemos escrever:

$$M_a + M_b + M_c = 0 \quad (6.7)$$

multiplicando a equação acima por ω_a e subtraindo da equação(6.6), ficamos com:

$$M_b(\omega_b - \omega_a) + M_c(\omega_c - \omega_a) = 0 \quad (6.8)$$

substituindo (6.5) em (6.8), temos:

$$M_b \left[\omega_b - i_{\hat{O}} \cdot \omega_b - (1 - i_{\hat{O}}) \cdot \omega_c \right] + M_c(\omega_c - \omega_a) = 0$$

$$\therefore M_b = \frac{1}{(1 - i_{\hat{O}})} \cdot M_c \cdot \frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c}$$

observando (6.4), podemos escrever:

$$M_b = \frac{M_c \cdot i_{\hat{O}}}{1 - i_{\hat{O}}} \quad (6.9)$$

Como a razão de transmissão do sistema, que vamos chamar de "i", é igual a $\frac{\omega_a}{\omega_b}$, então chegamos, a partir de (6.5), em:

$$\frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{i - i_{\hat{O}}}{1 - i_{\hat{O}}} \quad (6.10)$$

também,

$$i = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{\omega_a}{\omega_c} \cdot \frac{\omega_c}{\omega_b} \quad (6.11)$$

substituindo $i_{cv} = \frac{\omega_a}{\omega_c}$ (razão de transmissão de "CV") em (6.11), resulta:

$$\frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{i}{i_{cv}}$$

substituindo a equação acima em (6.10) e simplificando, temos,

$$i = \frac{i_{cv} \cdot i_{\hat{o}}}{i_{\hat{o}} - 1 + i_{cv}} \quad (6.12)$$

A equação acima indica como a razão de transmissão do sistema varia em função de i_{cv} , para um dado $i_{\hat{o}}$.

A proporção da potência de entrada que deriva por "CV" é dada por:

$$\frac{P_v}{P_i} = - \frac{P_c}{P_b}$$

$$\therefore \frac{P_v}{P_i} = - \frac{M_c \cdot \omega_c}{M_b \cdot \omega_b}$$

substituindo (6.9) e (6.10) na equação acima, obtemos finalmente:

$$\frac{P_v}{P_i} = 1 - \frac{i}{i_{\hat{o}}} \quad (6.13)$$

EQUAÇÕES DE VELOCIDADE

7-1. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE VELOCIDADE

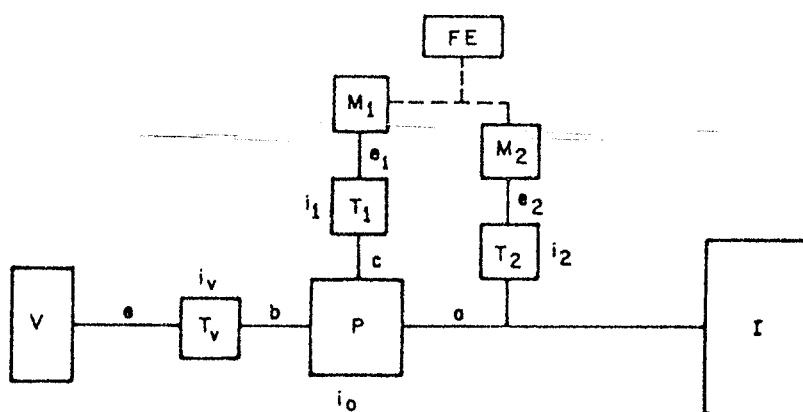


FIGURA 50

Já sabemos que, para a fase de aceleração:

$$\begin{array}{l} \omega'_a = 0 \\ \omega''_a = 3.000 |i_2| \text{ r.p.m.} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \omega'_c = 3.000 |i_1| \text{ r.p.m.} \\ \omega''_c = n \cdot 1000 |i_1| \text{ r.p.m.} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \omega'_e = \pm 12.000 \text{ r.p.m.} \\ \omega''_e = \pm 8.000 \text{ r.p.m.} \end{array} \right.$$

Substituindo estes valores em (5.5), temos:

$$\omega'_b = \frac{(\pm) 3.000 |i_1| \cdot 3.000 |i_2| \cdot 12.000}{(\pm) 8.000 \cdot 3000 |i_1| - (\pm) 12.000 (n \cdot 1000 |i_1| - 3.000 |i_2|)}$$

simplificando,

$$\omega'_b = \frac{9.000 |i_1| |i_2|}{2x|i_2| - n \cdot x|i_2| + 3|i_2|} = \frac{9.000 |i_1|}{(2-n) \cdot x + 3} \quad [\text{ r.p.m. }] \quad (7.1)$$

também,

$$i_v = \frac{\omega'_b}{\omega'_e} = \pm \frac{3 |i_1|}{4(2-n)x + 12} \quad (7.2)$$

Observando (6.4), podemos escrever:

$$i_{\hat{O}} = \frac{\omega'_a - \omega'_c}{\omega'_b - \omega'_c} = \frac{-3.000|i_1|}{\frac{9.000|i_1|}{(2-n)x+3} - 3.000|i_1|} = 1 + \frac{3}{(2-n)x} \quad (7.3)$$

A inércia do volante do GEPRON, $I_V = 1,82 \text{ kgm}^2$, então:

$$\begin{aligned} \Delta E_V &= \frac{1}{2} \cdot I_V [(\omega'_e)^2 - (\omega''_e)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1,82 \left[\left(\frac{12\pi}{30} \right)^2 - \left(\frac{8\pi}{30} \right)^2 \right] \times 16^6 = 7,9834 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

De acordo com o que foi assumido a aceleração da inércia I é uma constante, o torque também sendo constante temos que, a potência que acelera essa inércia é linear e parte de zero. Considerando este fato, parece ser uma boa aproximação se tomarmos P_i , também como uma função linear do tempo, como mostra a Fig. 51.

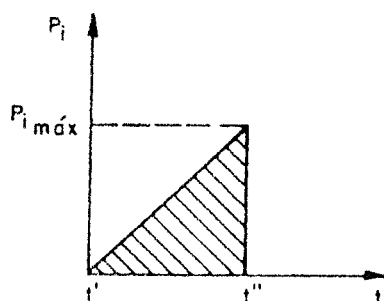


FIGURA 51

Sendo assim, fazendo $\Delta t = t'' - t' = 30 \text{ s}$, temos:

$$\Delta E_V = \frac{1}{2} \cdot P_{i_{\max}} \cdot \Delta t$$

$$\therefore P_{i_{\max}} = \frac{\Delta E_V \cdot 2}{30} = 53\,222,67 \text{ W}$$

Podemos então, escrever, usando um artifício para a variável tempo:

$$P = 53\,222,67 + 0 \cdot t + 1$$

$$(7.4)$$

Raciocinando em termos da energia cinética cedida pelo volante, podemos equacionar (considerando que o vácuo torna desprezível a perda de energia no volante):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot P_i \cdot t \cdot 30 &= \frac{1}{2} I_v (\omega'_e)^2 - \frac{1}{2} I_v (\omega_e)^2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \therefore 53\,222,67 \cdot t^2 \cdot 30 &= 1,82 \left(\frac{12000\pi}{30} \right)^2 - 1,82 \cdot \omega_e^2 \\ \therefore \omega_e^2 &= -877296,70 \cdot t^2 + 1579136,70 \\ \therefore \omega_e &= \pm \sqrt{-877296,7 \cdot t^2 + 1579136,70} \quad [\text{rad/s}] \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.5)\end{aligned}$$

portanto, se fizermos $\sqrt{-877296,7 \cdot t^2 + 1579136,7} = \Delta(t)$, para simplificar a redação, temos:

$$\omega_b = i_v \cdot \omega_e = \frac{3|i_1|}{4(2-n)x+12} \cdot \Delta(t) \quad (7.6)$$

então, considerando que ω_a é linear, podemos escrever:

$$\begin{aligned}i = \frac{\omega_a}{\omega_b} &= \frac{\frac{3 \cdot 000 \cdot \pi}{30} \cdot |i_2| \cdot t}{\frac{3|i_2|x}{4(2-n)x+12} \cdot \Delta(t)} \\ \therefore i &= \frac{400 \cdot \pi [(2-n)x+3] \cdot t}{3x \cdot \Delta(t)} \quad (7.7)\end{aligned}$$

O desenvolvimento de P_v/P_i , pela equação (6.13), é o seguinte:

$$\frac{P_v}{P_i} = 1 - \frac{i}{i_0}$$

substituindo (7.3) e (7.7) na equação acima, temos:

$$\frac{P_v}{P_i} = 1 - \frac{\frac{400\pi[(2-n)x+3] \cdot t}{3x \cdot \Delta(t)}}{1 + \frac{3}{(2-n)x}}$$

simplificando, obtemos finalmente:

$$\frac{P_v}{P_i} = 1 - \frac{400 \cdot \pi(2-n) \cdot t}{3 \cdot \Delta(t)} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.8)$$

Entrando com um pequeno programa numa calculadora eletrônica podemos obter as faixas de variação de P_v/P_i para vários valores de n . A tabela 4 mostra os resultados obtidos com esse procedimento.

TABELA 4

n	P_v/P_i
3,0	1 a 1,50
2,5	1 a 1,25
2,1	1 a 1,05
2,0	1
1,9	1 a 0,95
1,8	1 a 0,90
1,5	1 a 0,75
1,2	1 a 0,60
1,0	1 a 0,50
0,9	1 a 0,45
0,8	1 a 0,40
0,7	1 a 0,35

Já sabemos que para não ocorrer recirculação de potência é preciso que $0 < P_v/P_i < 1$. Sendo assim, concluimos pela tabela 4 que os possíveis valores de n são:

$$0,7 \leq n < 2$$

Vamos preferir o valor $n=0,7$, porque esta escolha fará com que uma parcela menor da potência de entrada (P_i) seja derivada através de "CV", como é fácil deduzir da tabela 4.

Substituindo o valor $n=0,7$ na equação (7.6), resulta:

$$\omega_b = \frac{3|i_1|}{5,2x+12} \cdot \Delta(t) \quad [\text{rad/s}] \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.9)$$

e pela equação (7.2)

$$i_v = \pm \frac{3|i_1|}{5,2x + 12}$$

Como será conveniente termos i_v positivo para podermos fazer " T_v " ser um planetário do tipo P(P)N com a engrenagem anular fixa, e como o sinal de i_v é o mesmo de ω_e , vamos preferir um sentido de rotação positivo para esta última. Então,

$$\omega_c = \sqrt{-877296,7 \cdot t^2 + 1579136,7} = \Delta(t) \text{ [rad/s]}; 0 \leq t \leq 1 \quad (7.10)$$

A equação de ω_a , que já foi utilizada em (7.7), é:

$$\omega_a = 100 \cdot \pi \cdot |i_2| \cdot t \text{ [rad/s]}; 0 \leq t \leq 1 \quad (7.11)$$

Procedendo agora ao cálculo de ω_c , temos que:

$$i_{\hat{O}} = 1 + \frac{3}{1,3 \cdot x} = \frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c}$$

$$\therefore \omega_c = \frac{\omega_a - i_{\hat{O}} \cdot \omega_b}{1 - i_{\hat{O}}} = \frac{\omega_a - \left(1 + \frac{3}{1,3 \cdot x}\right) \cdot \omega_b}{-\frac{3}{1,3 \cdot x}}$$

substituindo (7.9) e (7.11) na equação acima e simplificando, obtemos:

$$\omega_c = -\frac{130}{3} \cdot \pi \cdot |i_1| \cdot t + \frac{|i_1|}{4} \cdot \Delta(t) \text{ [rad/s]} \quad (7.12)$$

OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO OTIMIZADA

8-1. CÁLCULO DOS RENDIMENTOS

Com as equações de rendimento deduzidas na primeira parte e com as equações de velocidades obtidas no capítulo anterior, podemos calcular os rendimentos do sistema em estudo, seguindo os caminhos indicados na seção 5-3-1.

8-1-1. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "a" como Suporte

A Fig. 52 mostra a correspondência entre índices, que será utilizada a seguir:

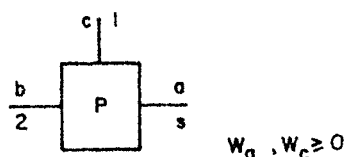


FIGURA 52

Para a fase de aceleração, temos que, pela equação (3.17):

$$\eta_{2 < 1} = \frac{1}{\eta_o w_1} + \left(1 - \frac{1}{\eta_o w_1}\right) k_{s2} \quad (8.1)$$

onde

$$k_{s2} = \frac{\omega_s}{\omega_2} = \frac{\omega_a}{\omega_b}$$

substituindo (7.9) e (7.11) na equação acima e simplificando, temos:

De acordo com o que foi definido na seção 3-2,

$$w_1 = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_s)}{|M_1(\omega_1 - \omega_s)|} = \frac{M_1(\omega_c - \omega_a)}{|M_1(\omega_c - \omega_a)|} = \pm 1$$

substituindo (7.11) e (7.12) na equação acima, resulta, após simplificação:

$$w_1 = \frac{M_1 \left[-\left(\frac{130}{3} \cdot x + 100\right) \cdot \pi t + \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right]}{\left| M_1 \left[-\left(\frac{130}{3} \cdot x + 100\right) \cdot \pi t + \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right] \right|}; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.3)$$

sendo que, $M_1 < 0$, pois a potência no membro "1" é negativa na aceleração e a velocidade é positiva.

Escolhendo o instante inicial da aceleração (t'), para o cálculo da razão básica do planetário, temos:

$$i_o = \frac{\omega'_1 - \omega'_s}{\omega'_2 - \omega'_s} = \frac{\omega'_c - \omega'_a}{\omega'_b - \omega'_a} \quad (8.4)$$

onde,

$$\omega'_a = 0; \quad \omega'_c = 3.000 |i_1| \text{ r.p.m.}$$

e, pela equação (7.1):

$$\omega'_b = \frac{9000 |i_1|}{(2-n) \cdot x + 3} = \frac{9000 |i_1|}{1,3 \cdot x + 3} \text{ r.p.m.}$$

substituindo os valores acima em (8.4), obtemos:

$$i_o = \frac{\frac{3.000 |i_1|}{9.000 |i_1|}}{\frac{1,3 \cdot x + 3}{3}} = \frac{1,3}{3} \cdot x + 1 \quad (8.5)$$

então, $i_o > 0$, pois $x > 0$. Consequentemente, pela seção 5-3-c, devemos ter:

$$\eta_o = 0,96 \quad (8.6)$$

Fazendo um programa e utilizando-o numa calculadora HP-97 (programa B.1 do Apêndice B) para calcular o rendimento do planetário, pela equação (8.1), com intervalos de $\Delta t = 0,1$ (3 seg) e considerando as equações (8.2), (8.3) e (8.6), obtemos os resultados apresentados na tabela 5. Um outro programa (B.2) foi utilizado para calcular os rendimentos médios e os resultados estão, também, apresentados na tabela 5. A fórmula para o rendimento médio é a seguinte:

$$\bar{\eta}_{2 < s}^1 = \int_0^1 \eta_{2 < s}^1 \cdot dt \quad (8.7)$$

Para a fase de desaceleração podemos fazer $t'' = 0$ e $t''' = 1$, para facilitar os cálculos, e admite-se que tudo ocorre de forma inversa em relação à fase de aceleração. Então, pela equação (3.18), temos:

$$\eta_{s > 2}^1 = \frac{1}{\frac{1}{\eta_0 W_1} + (1 - \frac{1}{\eta_0 W_1}) \cdot k_{s2}} \quad (8.8)$$

substituindo t por $(1-t)$ nas equações (8.2) e (8.3), obtemos:

$$k_{s2} = \frac{(5,2x+12) \cdot 100 \cdot \pi \cdot (1-t)}{3x \cdot \Delta(t)} ; 0 \leq t \leq 1 \quad (8.9)$$

e

$$W_1 = \frac{M_1 \left[-\left(\frac{130}{3} \cdot x + 100\right) \cdot \pi \cdot (1-t) + \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right]}{\left| M_1 \left[-\left(\frac{130}{3} \cdot x + 100\right) \cdot \pi \cdot (1-t) + \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right] \right|} ; 0 \leq t \leq 1 \quad (8.10)$$

sendo que, $M_1 > 0$, pois a potência no membro 1 agora é positiva.

A tabela 6 mostra os resultados obtidos da equação (8.8) através dos programas B.3 e B.4 do apêndice B.

8-1-2. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "b" como Supor te

Na Fig. 53 podemos ver a correspondência entre índices que será utilizada adiante.

TABELA 5 - Valores de $\eta_{2 < 1}$ ($\eta_0 = 0,96$ e $q = s$)

t	x=0,2	x=0,4	x=0,5	x=0,6	x=0,7
0,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
0,1	0,982	0,972	0,970	0,968	0,967
0,2	0,996	0,984	0,980	0,977	0,975
0,3	0,972	0,996	0,990	0,986	0,983
0,4	0,947	0,990	0,990	0,986	0,991
0,5	0,920	0,976	0,987	0,995	1,000
0,6	0,890	0,960	0,974	0,983	0,990
0,7	0,856	0,941	0,958	0,970	0,978
0,8	0,816	0,920	0,941	0,954	0,964
0,9	0,767	0,893	0,919	0,935	0,948
1,0	0,702	0,858	0,890	0,910	0,925
$\bar{\eta}_{2 < 1}$	0,898	0,955	0,964	0,970	0,974

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
0,1	0,967	0,966	0,966	0,965	0,965
0,2	0,974	0,972	0,972	0,971	0,970
0,3	0,981	0,979	0,978	0,977	0,976
0,4	0,988	0,986	0,984	0,983	0,981
0,5	0,996	0,993	0,991	0,989	0,987
0,6	0,995	0,998	0,998	0,996	0,994
0,7	0,984	0,989	0,993	0,996	0,998
0,8	0,972	0,978	0,982	0,986	0,989
0,9	0,957	0,964	0,969	0,974	0,978
1,0	0,936	0,945	0,952	0,958	0,963
$\bar{\eta}_{2 < 1}$	0,976	0,978	0,979	0,980	0,980

t	x=1,4	x=2,0	x=3,0	x=5,0	x=10,0
0,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
0,1	0,965	0,964	0,963	0,963	0,962
0,2	0,969	0,968	0,966	0,965	0,964
0,3	0,974	0,971	0,969	0,968	0,967
0,4	0,979	0,976	0,973	0,971	0,969
0,5	0,985	0,980	0,977	0,974	0,971
0,6	0,991	0,985	0,981	0,977	0,974
0,7	0,998	0,991	0,985	0,981	0,978
0,8	0,994	0,997	0,991	0,985	0,981
0,9	0,984	0,994	0,997	0,991	0,986
1,0	0,970	0,983	0,994	0,998	0,992
$\bar{\eta}_{2 < 1}$	0,980	0,980	0,978	0,975	0,973

TABELA 6 - Valores de $\eta_{1_{s>2}}$ ($\eta_0=0,96$ e $a=s$)

t	x=0,2	x=0,4	x=0,5	x=0,6	x=0,7
0,0	0,778	0,830	0,904	0,921	0,933
0,1	0,817	0,907	0,928	0,942	0,952
0,2	0,850	0,929	0,946	0,958	0,967
0,3	0,878	0,947	0,962	0,972	0,979
0,4	0,904	0,963	0,975	0,984	0,990
0,5	0,928	0,977	0,988	0,995	1,000
0,6	0,951	0,991	0,999	0,995	0,991
0,7	0,974	0,996	0,990	0,985	0,983
0,8	0,996	0,983	0,979	0,977	0,975
0,9	0,981	0,971	0,969	0,963	0,967
1,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
$\bar{\eta}_{1_{s>2}}$	0,919	0,963	0,971	0,975	0,978

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,943	0,950	0,956	0,961	0,965
0,1	0,960	0,966	0,971	0,975	0,979
0,2	0,974	0,979	0,983	0,987	0,990
0,3	0,985	0,989	0,993	0,996	0,998
0,4	0,995	0,999	0,998	0,996	0,994
0,5	0,996	0,993	0,991	0,989	0,987
0,6	0,988	0,986	0,984	0,982	0,981
0,7	0,980	0,979	0,977	0,976	0,975
0,8	0,973	0,972	0,971	0,971	0,970
0,9	0,967	0,966	0,966	0,965	0,965
1,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
$\bar{\eta}_{1_{s>2}}$	0,979	0,981	0,981	0,981	0,981

t	x=1,4	x=2,0	x=3,0	x=5,0	x=10,0
0,0	0,972	0,984	0,994	0,998	0,992
0,1	0,985	0,995	0,997	0,990	0,986
0,2	0,994	0,997	0,990	0,985	0,981
0,3	0,998	0,990	0,985	0,980	0,977
0,4	0,991	0,985	0,980	0,977	0,974
0,5	0,984	0,980	0,976	0,973	0,971
0,6	0,979	0,975	0,972	0,970	0,969
0,7	0,974	0,971	0,969	0,968	0,966
0,8	0,969	0,967	0,966	0,965	0,964
0,9	0,964	0,964	0,963	0,962	0,962
1,0	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
$\bar{\eta}_{1_{s>2}}$	0,981	0,978	0,973	0,970	0,967

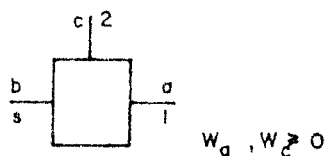


FIGURA 53

Para a fase de aceleração, a equação (3.15) nos fornece:

$$\eta_{s < \frac{1}{2}} = \frac{\eta_o^{w_1} \cdot (k_{1s} - 1 + i_o) - k_{1s}}{i_o \cdot \eta_o^{w_1} - 1} \quad (8.11)$$

onde,

$$k_{1s} = \frac{\omega_1}{\omega_s} = \frac{\omega_a}{\omega_b}$$

substituindo (7.9) e (7.11) na equação acima e simplificando, obtemos:

$$k_{1s} = \frac{(5,2 \cdot x + 12) \cdot 100 \cdot \pi \cdot t}{3x \cdot \Delta(t)} ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.12)$$

Pela definição de w_1 , temos:

$$w_1 = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_s)}{|M_1(\omega_1 - \omega_s)|} = \frac{M_1(\omega_a - \omega_b)}{|M_1(\omega_a - \omega_b)|} = \pm 1$$

substituindo (7.9) e (7.11) na equação acima, resulta, após simplificação:

$$w_1 = \frac{M_1(100 \cdot \pi \cdot t - \frac{3 \cdot x}{5,2 \cdot x + 12} \cdot \Delta(t))}{|M_1(100 \cdot \pi \cdot t - \frac{3 \cdot x}{5,2 \cdot x + 12} \cdot \Delta(t))|} ; \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ e } M_1 < 0 \quad (8.13)$$

Escolhendo, novamente, o instante inicial da aceleração, para o cálculo da razão básica, temos:

substituindo os mesmos valores de ω'_a , ω'_b e ω'_c da seção anterior, na equação acima, resulta:

$$i_o = \frac{-\frac{9000 \cdot |i_1|}{1,3 \cdot x + 3}}{3.000 \cdot |i_1| - \frac{9000 \cdot |i_1|}{1,3 \cdot x + 3}} = -\frac{3}{1,3 \cdot x} \quad (8.14)$$

então, $i_o < 0$. Consequentemente, pela seção 5-3-c, devemos ter:

$$\eta_o = 0,97 \quad (8.15)$$

Os resultados obtidos da equação (8.11) através dos programas B.5 e B.6, estão apresentados na tabela 7. A fórmula para o rendimento médio é a seguinte:

$$\bar{\eta}_{s < \frac{1}{2}} = \int_0^1 \eta_{s < \frac{1}{2}} \cdot dt \quad (8.16)$$

Para a fase de desaceleração, fazamos novamente $t''' = 0$ e $t'''' = 1$. A equação (3.16) vai nos fornecer os rendimentos, logo:

$$\eta_{\frac{1}{2} > s} = \frac{i_o \cdot \eta_o^{W_1 - 1}}{\eta_o^{W_1} (k_{1s} - 1 + i_o) - k_{1s}} \quad (8.17)$$

substituindo t por $(1-t)$ nas equações (8.12) e (8.13), resulta:

$$k_{1s} = \frac{100 \cdot \pi \cdot (1-t) \cdot (5,2 \cdot x + 12)}{3x \cdot \Delta(t)} ; 0 \leq t \leq 1 \quad (8.18)$$

e

$$W_1 = \frac{M_1 \left[100 \cdot \pi \cdot (1-t) - \frac{3 \cdot x}{5,2 \cdot x + 12} \cdot \Delta(t) \right]}{\left| M_1 \left[100 \cdot \pi \cdot (1-t) - \frac{3 \cdot x}{5,2 \cdot x + 12} \cdot \Delta(t) \right] \right|} ; 0 \leq t \leq 1 \text{ e } M_1 > 0 \quad (8.19)$$

Os rendimentos obtidos da equação (8.17), através dos programas B.7 e B.8, aparecem na tabela 8.

TABELA 7 - Valores de $\eta_{s<_2}^1$ ($\eta_0=0,97$ e $b=s$)

t	x=0,1	x=0,3	x=0,5	x=0,6	x=0,7
0,0	0,999	0,996	0,995	0,994	0,993
0,1	1,000	0,998	0,996	0,995	0,994
0,2	0,999	0,999	0,997	0,996	0,996
0,3	0,997	0,999	0,999	0,998	0,997
0,4	0,996	0,998	1,000	0,999	0,998
0,5	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000
0,6	0,993	0,995	0,997	0,997	0,998
0,7	0,991	0,993	0,995	0,995	0,996
0,8	0,988	0,990	0,992	0,993	0,994
0,9	0,985	0,988	0,990	0,990	0,991
1,0	0,982	0,984	0,986	0,987	0,987
$\bar{\eta}_{s<_2}^1$	0,993	0,995	0,995	0,995	0,995

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,992	0,991	0,991	0,990	0,990
0,1	0,993	0,993	0,992	0,991	0,991
0,2	0,995	0,994	0,993	0,993	0,992
0,3	0,996	0,995	0,995	0,994	0,994
0,4	0,998	0,997	0,996	0,996	0,995
0,5	0,999	0,999	0,998	0,997	0,997
0,6	0,999	1,000	1,000	0,999	0,998
0,7	0,997	0,998	0,998	0,999	1,000
0,8	0,995	0,995	0,996	0,997	0,997
0,9	0,992	0,993	0,993	0,994	0,994
1,0	0,988	0,989	0,989	0,990	0,991
$\bar{\eta}_{s<_2}^1$	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995

t	x=1,3	x=1,4	x=1,8	x=5,0	x=10,0
0,0	0,989	0,988	0,987	0,979	0,975
0,1	0,990	0,990	0,988	0,981	0,977
0,2	0,992	0,991	0,989	0,982	0,978
0,3	0,993	0,993	0,991	0,983	0,980
0,4	0,995	0,994	0,992	0,985	0,981
0,5	0,996	0,996	0,994	0,986	0,983
0,6	0,998	0,997	0,995	0,988	0,984
0,7	1,000	0,999	0,997	0,990	0,986
0,8	0,998	0,998	1,000	0,992	0,989
0,9	0,995	0,996	0,997	0,995	0,991
1,0	0,991	0,992	0,994	0,999	0,995
$\bar{\eta}_{s<_2}^1$	0,995	0,994	0,993	0,987	0,983

TABELA 8 - Valores de $\eta_{1,2>s}$ ($\eta_0=0,97$ e $p=s$)

t	x=0,1	x=0,3	x=0,5	x=0,6	x=0,7
0,0	0,982	0,984	0,986	0,987	0,987
0,1	0,985	0,987	0,989	0,990	0,991
0,2	0,988	0,990	0,992	0,993	0,994
0,3	0,990	0,993	0,995	0,995	0,996
0,4	0,992	0,995	0,997	0,997	0,998
0,5	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000
0,6	0,996	0,998	1,000	0,999	0,998
0,7	0,997	0,999	0,999	0,998	0,997
0,8	0,999	0,999	0,997	0,996	0,996
0,9	1,000	0,998	0,996	0,995	0,994
1,0	0,999	0,997	0,995	0,994	0,993
$\bar{\eta}_{1,2>s}$	0,993	0,995	0,995	0,995	0,995

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,988	0,989	0,989	0,990	0,991
0,1	0,992	0,993	0,993	0,994	0,994
0,2	0,995	0,995	0,996	0,997	0,997
0,3	0,997	0,998	0,998	0,999	1,000
0,4	0,999	1,000	1,000	0,999	0,998
0,5	0,999	0,999	0,998	0,997	0,997
0,6	0,998	0,997	0,996	0,996	0,995
0,7	0,996	0,996	0,995	0,994	0,994
0,8	0,995	0,994	0,994	0,993	0,992
0,9	0,994	0,993	0,992	0,992	0,991
1,0	0,992	0,992	0,991	0,990	0,990
$\bar{\eta}_{1,2>s}$	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995

t	x=1,3	x=1,4	x=1,8	x=5,0	x=10,0
0,0	0,991	0,992	0,994	0,999	0,995
0,1	0,995	0,995	0,997	0,995	0,991
0,2	0,998	0,998	1,000	0,992	0,988
0,3	1,000	0,999	0,997	0,990	0,986
0,4	0,998	0,997	0,996	0,988	0,984
0,5	0,996	0,996	0,994	0,986	0,983
0,6	0,995	0,994	0,992	0,985	0,981
0,7	0,993	0,993	0,991	0,983	0,980
0,8	0,992	0,991	0,989	0,982	0,978
0,9	0,990	0,990	0,988	0,981	0,977
1,0	0,989	0,989	0,987	0,979	0,976
$\bar{\eta}_{1,2>s}$	0,995	0,994	0,993	0,987	0,983

8-1-3. Cálculo dos Rendimentos Considerando o Eixo "c" como Suporte

A Fig. 54 mostra o relacionamento entre os índices que será utilizado nos cálculos seguintes,

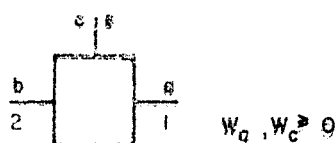


FIGURA 54

Para a fase de aceleração, o rendimento é calculado pela fórmula (3.17):

$$\eta_{2 < 1} = \frac{1}{\eta_0 W_1} + \left(1 - \frac{1}{\eta_0 W_1}\right) \cdot k_{s2} \quad (8.20)$$

onde,

$$k_{s2} = \frac{\omega_s}{\omega_2} = \frac{\omega_c}{\omega_b}$$

substituindo (7.9) e (7.12) na equação acima e simplificando, obtemos:

$$k_{s2} = \frac{-130 \cdot \pi \cdot t(5,2 \cdot x + 12)}{9 \cdot \Delta(t)} + \frac{5,2 \cdot x}{12} + 1 ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.21)$$

e, para W_1 , temos:

$$W_1 = \frac{M_1(\omega_1 - \omega_s)}{|M_1(\omega_1 - \omega_s)|} = \frac{M_1(\omega_a - \omega_c)}{|M_1(\omega_a - \omega_c)|} = \pm 1$$

substituindo (7.11) e (7.12) na equação anterior, obtemos, após simplificação:

$$W_1 = \frac{M_1 \left[\left(100 + \frac{130 \cdot x}{3}\right) \cdot \pi \cdot t - \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right]}{\left| M_1 \left[\left(100 + \frac{130 \cdot x}{3}\right) \cdot \pi \cdot t - \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right] \right|} ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.22)$$

com $M_1 < 0$

Mais uma vez vamos calcular a razão básica do planetário considerando o instante t' , início da aceleração:

$$i_o = \frac{\omega'_1 - \omega'_s}{\omega'_2 - \omega'_s} = \frac{\omega'_a - \omega'_c}{\omega'_b - \omega'_c} = i_{\hat{o}}$$

Neste caso, $i_o = i_{\hat{o}}$. Então, reaproveitando a equação (7.3), temos:

$$i_o = 1 + \frac{3}{1,3.x} \quad (8.23)$$

Pela equação (8.23) vemos que $i_o > 0$, logo:

$$\eta_o = 0,96 \quad (8.24)$$

Os rendimentos obtidos a partir da equação (8.20), através dos programas B.9 e B.10, estão expostos na tabela 9.

Para a fase de desaceleração, podemos, como foi feito anteriormente, substituir t por $(1-t)$ nas equações (8.21) e (8.22). Procedendo assim, temos:

$$\eta_{s_2} = \frac{1}{\frac{1}{\eta_o w_1} + (1 - \frac{1}{\eta_o w_1}) \cdot k_{s_2}} \quad (8.25)$$

onde,

$$k_{s_2} = -\frac{130 \cdot \pi \cdot (1-t) (5,2 \cdot x + 12)}{9 \cdot \Delta(t)} + \frac{5,2 \cdot x}{12} + 1; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.26)$$

e

$$w_1 = \frac{M_1 \left[\left(100 + \frac{130 \cdot x}{3} \right) \cdot \pi \cdot (1-t) - \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right]}{\left| M_1 \left[\left(100 + \frac{130 \cdot x}{3} \right) \cdot \pi \cdot (1-t) - \frac{x}{4} \cdot \Delta(t) \right] \right|}; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.27)$$

sendo que, $M_1 > 0$.

A tabela 10 mostra os rendimentos obtidos de (8.25) através dos programas B.11 e B.12.

TABELA 9 - Valores de $\eta_{2 < 1/s}$ ($\eta_0 = 0,96$ e $c \equiv s$)

t	x=0,1	x=0,2	x=0,4	x=0,6	x=0,7
0,0	0,998	0,996	0,995	0,989	0,987
0,1	1,000	0,998	0,995	0,981	0,990
0,2	0,998	1,000	0,997	0,994	0,992
0,3	0,996	0,998	0,999	0,996	0,995
0,4	0,994	0,996	0,998	0,988	0,997
0,5	0,992	0,993	0,996	0,999	1,000
0,6	0,990	0,991	0,993	0,996	0,997
0,7	0,987	0,988	0,990	0,992	0,994
0,8	0,984	0,985	0,987	0,989	0,990
0,9	0,980	0,981	0,982	0,984	0,985
1,0	0,975	0,975	0,976	0,978	0,978
$\bar{\eta}_{2 < 1/s}$	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,986	0,984	0,982	0,980	0,978
0,1	0,988	0,986	0,985	0,983	0,981
0,2	0,990	0,989	0,987	0,986	0,984
0,3	0,993	0,991	0,990	0,988	0,987
0,4	0,996	0,994	0,993	0,991	0,990
0,5	0,999	0,997	0,996	0,995	0,993
0,6	0,998	0,999	0,999	0,998	0,997
0,7	0,995	0,996	0,997	0,998	0,999
0,8	0,991	0,992	0,993	0,994	0,995
0,9	0,986	0,986	0,987	0,988	0,989
1,0	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
$\bar{\eta}_{2 < 1/s}$	0,992	0,991	0,991	0,990	0,989

t	x=1,4	x=1,6	x=1,8	x=5,0	x=10,0
0,0	0,975	0,971	0,967	0,910	0,819
0,1	0,978	0,974	0,971	0,915	0,829
0,2	0,981	0,977	0,974	0,921	0,839
0,3	0,984	0,981	0,977	0,927	0,849
0,4	0,987	0,984	0,981	0,934	0,860
0,5	0,990	0,988	0,985	0,941	0,871
0,6	0,994	0,992	0,989	0,948	0,884
0,7	0,999	0,996	0,994	0,957	0,898
0,8	0,997	0,998	1,000	0,967	0,915
0,9	0,990	0,992	0,994	0,979	0,936
1,0	0,982	0,984	0,985	0,995	0,964
$\bar{\eta}_{2 < 1/s}$	0,988	0,986	0,984	0,944	0,877

TABELA 10 - Valores de $\eta_{1s>2}$ ($\eta_0=0,96$ e $c=s$)

t	x=0,1	x=0,2	x=0,4	x=0,6	x=0,7
0,0	0,974	0,975	0,976	0,977	0,978
0,1	0,979	0,980	0,982	0,984	0,984
0,2	0,983	0,984	0,986	0,988	0,989
0,3	0,987	0,988	0,990	0,992	0,993
0,4	0,989	0,991	0,993	0,996	0,997
0,5	0,992	0,993	0,996	0,999	1,000
0,6	0,994	0,995	0,998	0,999	0,997
0,7	0,996	0,998	0,999	0,996	0,995
0,8	0,998	1,000	0,997	0,994	0,992
0,9	1,000	0,998	0,995	0,992	0,990
1,0	0,998	0,997	0,993	0,990	0,988
$\bar{\eta}_{1s>2}$	0,990	0,991	0,992	0,992	0,992

t	x=0,8	x=0,9	x=1,0	x=1,1	x=1,2
0,0	0,978	0,979	0,980	0,980	0,981
0,1	0,985	0,986	0,987	0,988	0,988
0,2	0,990	0,991	0,992	0,993	0,994
0,3	0,995	0,996	0,997	0,998	0,999
0,4	0,998	0,999	0,999	0,998	0,997
0,5	0,999	0,997	0,996	0,995	0,993
0,6	0,996	0,995	0,993	0,992	0,990
0,7	0,993	0,992	0,990	0,989	0,987
0,8	0,991	0,989	0,988	0,986	0,985
0,9	0,989	0,987	0,985	0,984	0,982
1,0	0,986	0,985	0,983	0,981	0,980
$\bar{\eta}_{1s>2}$	0,992	0,991	0,991	0,990	0,990

t	x=1,4	x=1,6	x=1,8	x=5,0	x=10,0
0,0	0,982	0,983	0,985	0,996	0,966
0,1	0,990	0,992	0,994	0,980	0,942
0,2	0,996	0,998	1,000	0,969	0,925
0,3	0,999	0,996	0,994	0,960	0,911
0,4	0,994	0,992	0,990	0,953	0,900
0,5	0,991	0,988	0,986	0,946	0,890
0,6	0,988	0,985	0,982	0,940	0,881
0,7	0,985	0,982	0,979	0,935	0,873
0,8	0,982	0,979	0,976	0,930	0,866
0,9	0,979	0,976	0,973	0,925	0,859
1,0	0,976	0,973	0,970	0,920	0,852
$\bar{\eta}_{1s>2}$	0,988	0,987	0,985	0,949	0,896

8-2. ESCOLHA DA MELHOR SOLUÇÃO

Observando as tabelas 5 a 10 podemos ver que o caso onde os rendimentos são maiores é aquele em que o membro "b" é feito o suporte dos planetas e que corresponde às tabelas 7 e 8. Como pode ser visto nessas duas tabelas, não existe um valor único para "x" que forneça com grande destaque um planetário de rendimento bem maior que os outros. Por isto é preciso que seja considerada a conveniência do rendimento atingir valores máximos em velocidades correspondentes àquelas em que o veículo simulado mais permanece durante seu movimento. Assim, se assumirmos que o veículo simulado passa mais tempo em velocidades próximas do valor correspondente a 55% de sua velocidade máxima, então os valores de "x" próximos de 0,8, nas tabelas 7 e 8, mostram-se mais adequados. Vamos adotar o valor $x=0,9$ que é um pouco maior que 0,8, pois um afastamento para mais no valor de "x" conduz a valores de i_v e i_o menores e preferíveis praticamente.

Pela equação (8.14), temos:

$$i_o = - \frac{3}{1,3.0,9} = - 2,56 = \frac{R_2}{R_1} ; R_2 < 0 \text{ (eng. de dentes internos)}$$

onde, R_1 e R_2 são os raios das engrenagens centrais do planetário "P" (Fig. 45), que será do tipo P(P)N. Vamos passar a utilizar os índices 1,2,s em vez de a,c,b (Fig. 53), por conveniência.

Para o protótipo do GEPROM é desejado que $\omega_a = \omega_1 = 3.000$ r.p.m., então, fazendo $i_2 = -1$ vamos ter:

$$|i_1| = x \cdot |i_2| = x = 0,9$$

Podemos, então, fazer $i_1 = -0,9$

Como já foi dito na seção 7-1, é conveniente fazermos "T_v" ser também um planetário do tipo P(P)N com a engrenagem anular fixa, então o suporte dos planetas deverá ser o eixo "b" para obtermos um redutor de velocidade no sentido de "V" para "P". Indexando os eixos "e", "b" e a engrenagem fixa por 1', s', 2', respectivamente, obtemos:

$$i_v = \frac{\omega_b}{\omega_e} = \frac{\omega_{s'}}{\omega_{1'}} = \frac{3 \cdot |i_1|}{5,2 \cdot x + 12} = \frac{3 \cdot 0,9}{5,2 \cdot 0,9 + 12} = 0,16187$$

$$\therefore 1/i_V = \frac{\omega_{1'}}{\omega_{s'}} = 6,18$$

e, pela equação (2.29), temos:

$$\frac{\omega_{1'}}{\omega_{s'}} = 6,18 = (1 - i_{O'}) ; \quad i_{O'} = \text{razão básica de } T_V$$

$$\therefore i_{O'} = -5,18 = \frac{R_{2'}}{R_{1'}} ; \quad R_{2'} < 0$$

O sistema de transmissão está agora determinado e aparece esquematizado na Fig. 55.

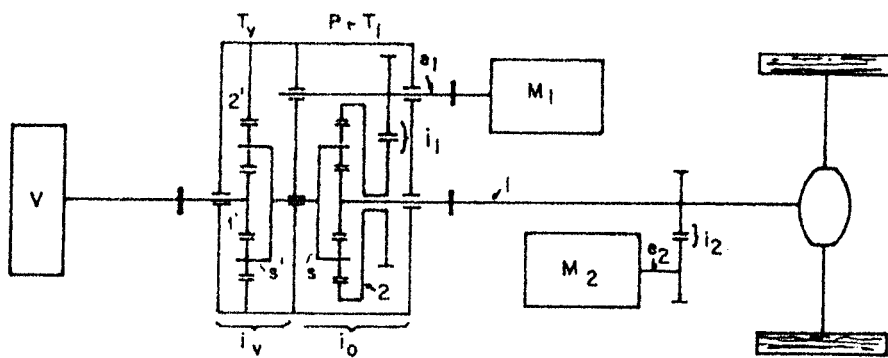


Figura 55

8-2-1. Equações Finais de Velocidade

Substituindo os valores de x , $|i_1|$ e $|i_2|$ nas equações (7.9), (7.11), (7.12) e transformando rad./s para r.p.m., obtemos as seguintes equações de velocidades para a fase de aceleração:

$$\omega_b = \omega_s = \frac{4,86}{\pi} \cdot \Delta(t) \quad [\text{r.p.m.}] \quad (8.28)$$

$$\omega_a = \omega_1 = 3000 \cdot t \quad [\text{r.p.m.}] \quad (8.29)$$

$$\omega_c = \omega_2 = -1170 \cdot t + \frac{13,5}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta(t) \quad [\text{r.p.m.}] \quad (8.30)$$

$$\omega_{1'} = \frac{1}{i_v} \cdot \omega_s \quad (8.31)$$

$$\omega_{e_1} = -\frac{1}{0,9} \cdot \omega_2 \quad (8.32)$$

$$\omega_{e_2} = -\omega_1 \quad (8.33)$$

$$\omega_e = \omega_{1'} = \frac{30}{\pi} \cdot \Delta(t) \quad [\text{r.p.m.}] \quad (8.34)$$

onde,

$$\Delta(t) = \sqrt{-877296,7 \cdot t^2 + 1579136,7} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

Na Fig. 56 estão mostradas graficamente as equações de velocidade anteriores, mas com o tempo "t" em segundos ($0 \leq t \leq 30s$).

8-2-2. Equações de Potência e Torque

Já sabemos, pela equação (7.4), que:

$$P_i = P_{1'} = 53222,67 \cdot t \quad [\text{Watt}] \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.35)$$

podemos também escrever, considerando a equação (7.3), que:

$$\frac{P_v}{P_i} = 1 - \frac{520 \cdot \pi \cdot t}{3 \cdot \Delta(t)} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.36)$$

se desprezarmos a perda em " $T_{1'}$ ", então temos, $P_v = -P_{e_1}$, logo:

$$-P_v = P_{e_1} = -P_i \cdot \frac{P_v}{P_i} = -53222,67 \cdot t \cdot \left(1 - \frac{520 \cdot \pi \cdot t}{3 \cdot \Delta(t)}\right) \quad [\text{Watt}] \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.37)$$

e

$$P_1 = -P_i + P_v = -53222,67 \cdot t \cdot \left(\frac{520 \cdot \pi \cdot t}{3 \cdot \Delta(t)}\right) \quad [\text{Watt}] \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.38)$$

As equações de torque são:

$$T_{1'} = \frac{P_{1'}}{\omega_{1'}} \quad [\text{N.m}] \quad (8.39)$$

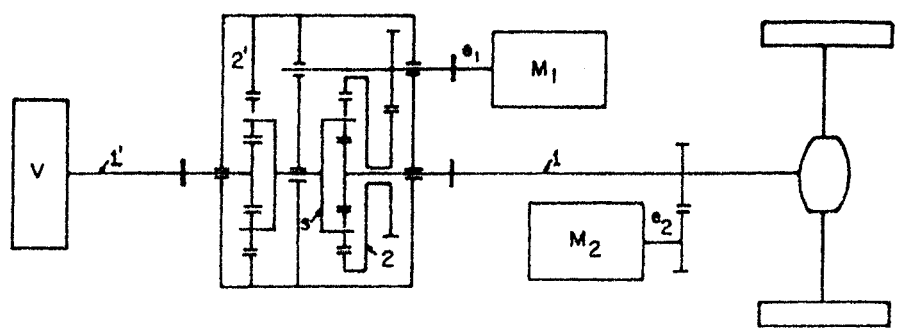
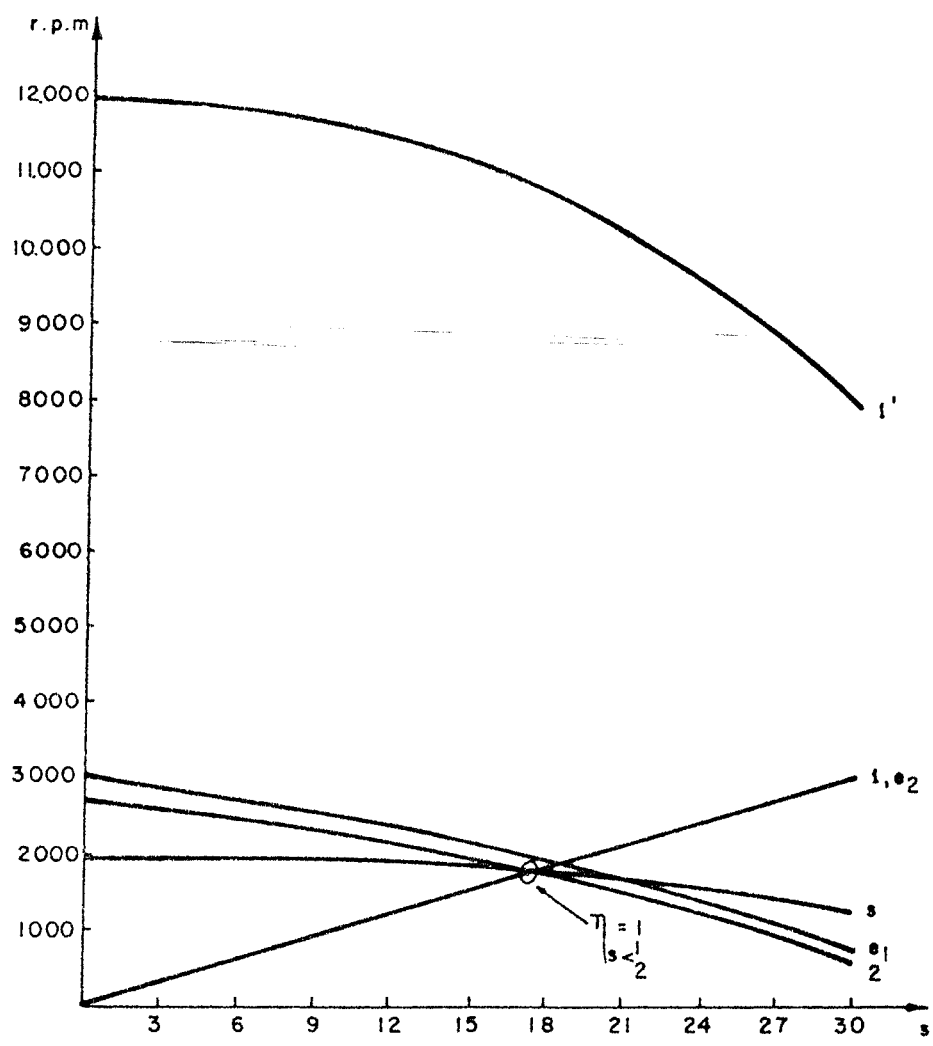


Figura 56 - Valores Absolutos das Rotações

$$T_{e_1} = \frac{P_{e_1}}{\omega_{e_1}} \quad [\text{N.m}] \quad (8.40)$$

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} \quad [\text{N.m}] \quad (8.41)$$

Estas equações de potência e torque estão apresentadas graficamente na Fig. 57.

8-2-3. Rendimento Total da Caixa de Engrenagens

A caixa de engrenagens da Fig. 55 é composta de dois planetários (P e T_v) e um engrenamento simples (T_1). Essa caixa está representada de forma mais simples na Fig. 58 a qual servirá de referência para os desenvolvimentos que se seguem.

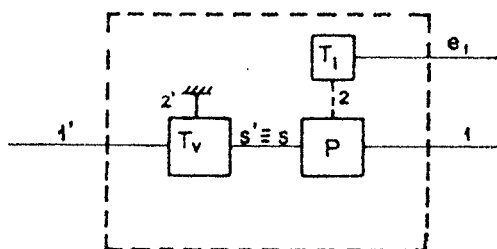


Figura 58

Raciocinando em termos de valores absolutos, para a fase de aceleração, temos:

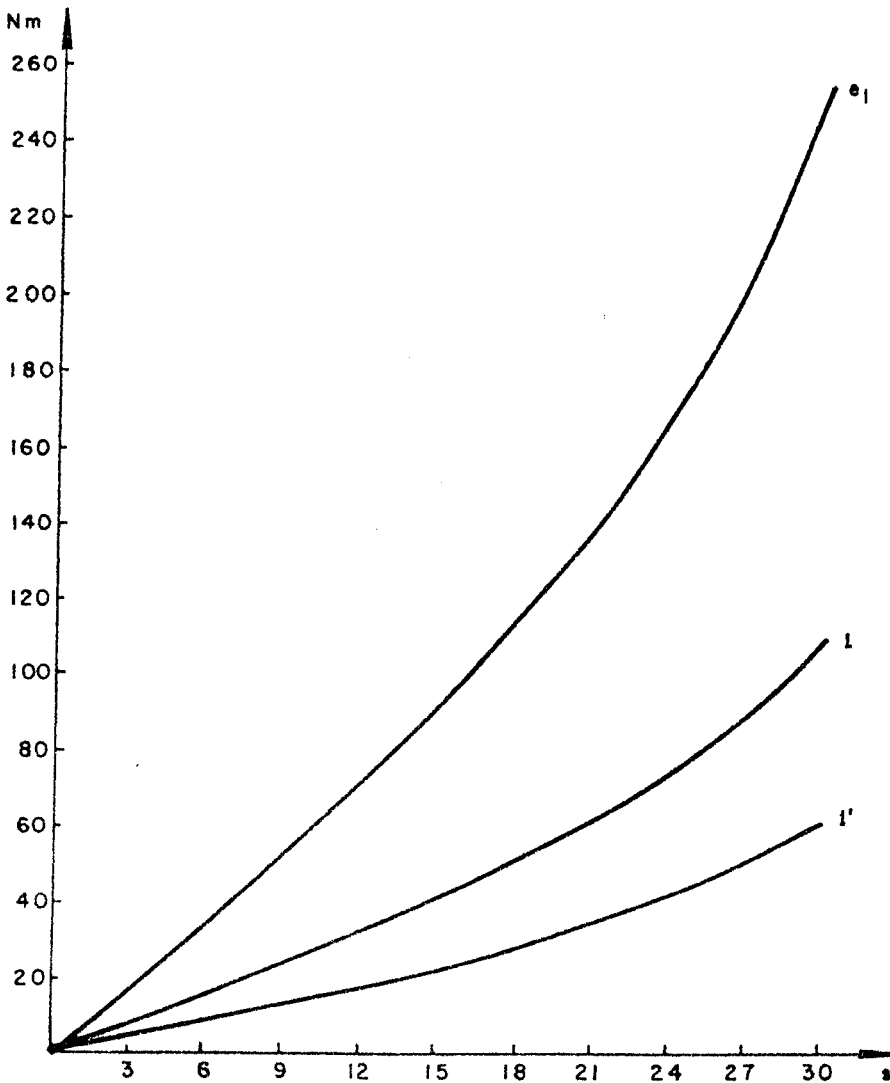
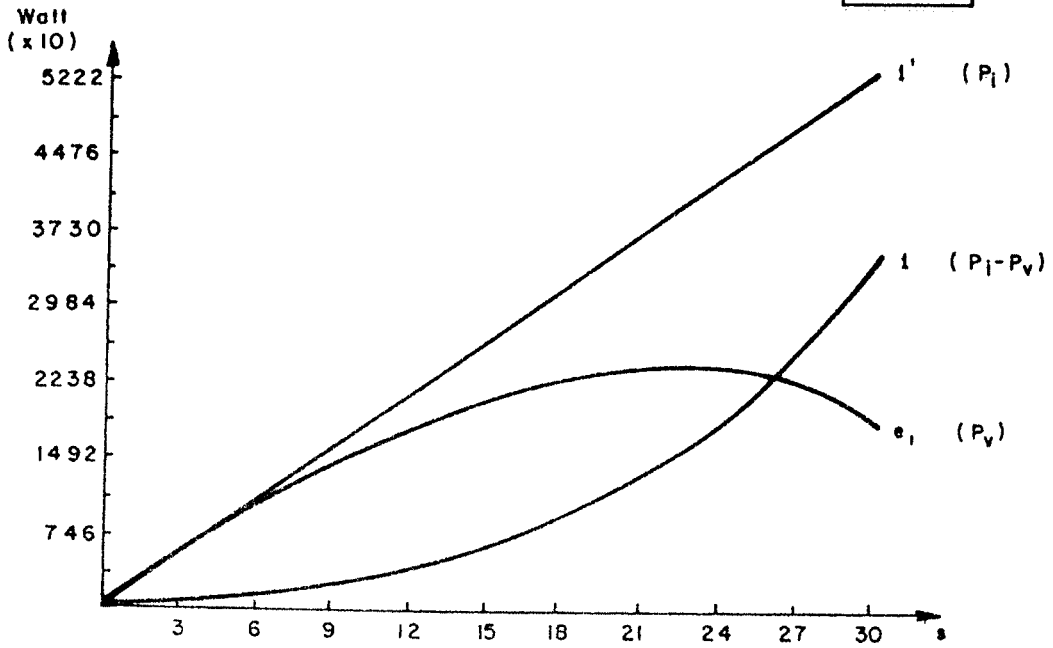
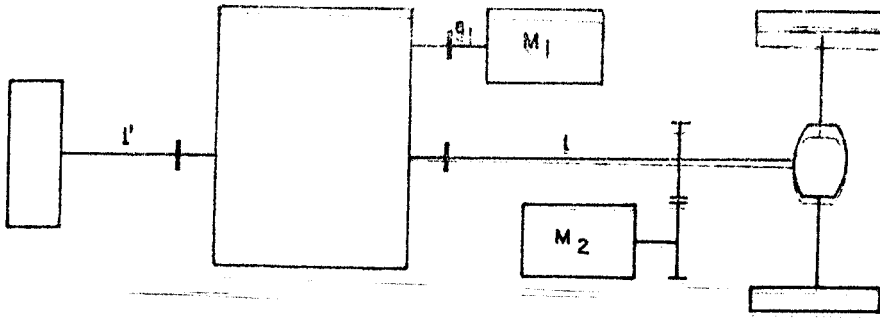
$$\eta_T = \frac{P_1 + P_{e_1}}{P_1} ; \quad \eta_T = \text{rendimento total} \quad (8.42)$$

de acordo com a seção 3-5-c, podemos considerar como sendo 0,98 o rendimento de T_1 , então:

$$\eta_T = \frac{P_1 + 0,98 \cdot P_2}{\frac{P_s}{\eta_v}} \quad (8.43)$$

onde, η_v é o rendimento de T_v .

O rendimento de "P" é dado por:



$$\eta_P = \frac{P_1 + P_2}{P_S}$$

$$\therefore P_1 = \eta_P \cdot P_S = P_2$$

substituindo a expressão de P_1 acima em (8.43), temos:

$$\eta_T = \frac{\eta_P \cdot P_S - P_2 + 0,98 \cdot P_2}{\frac{P_S}{\eta_V}} = \eta_V (\eta_P - 0,02 \cdot \frac{P_2}{P_S})$$

como, $\frac{P_2}{P_S} = \frac{P_V}{P_i}$, obtemos:

$$\eta_T = \eta_V (\eta_P - 0,02 \cdot \frac{P_V}{P_i}) \quad (8.44)$$

O valor de η_V pode ser calculado através da equação mostrada no gráfico 3-4-d. Então,

$$\eta_V = \eta_{1' \rightarrow s'} = \frac{i'_o \cdot \eta_o^{W1-1}}{i'_o - 1} \quad (8.45)$$

já sabemos que,

$$i_o = -5,18 ; \eta_o = 0,97$$

e

$$W1 = \frac{M_1, (\omega_1, -\omega_s,)}{|M_1, (\omega_1, -\omega_s,)|}$$

mas, como $M_1, > 0$ e $(\omega_1, -\omega_s,) > 0$, então $W1=1$, logo:

$$\eta_V = \frac{-5,18 \cdot 0,97 - 1}{-5,18 - 1} = 0,975 \quad (8.46)$$

substituindo este valor em (8.44), obtemos finalmente:

$$\eta_T = 0,975 (\eta_P - 0,02 \cdot \frac{P_V}{P_i}) \quad (8.47)$$

onde, η_p é dado pela equação (8.11) e $\frac{p_v}{p_i}$ por (8.36):

Calculando η_T pela equação (8.47) com intervalos de $\Delta t=0,1$ (3 seg.), obtemos os valores da tabela 11:

TABELA 11

t	η_T
0,0	0,947
0,1	0,950
0,2	0,951
0,3	0,953
0,4	0,956
0,5	0,959
0,6	0,961
0,7	0,960
0,8	0,959
0,9	0,959
1,0	0,957
$\bar{\eta}_T$	0,956

Pensando ainda em termos de valores absolutos, mas agora para a fase de desaceleração, podemos escrever:

$$\eta_T = \frac{P_1}{P_1 + P_{e1}} = \frac{\eta_v P_s}{P_1 + \frac{P_2}{0,98}} \quad (8.48)$$

também,

$$\eta_p = \frac{P_s}{P_1 + P_2}$$

$$\therefore P_1 = \frac{P_s - \eta_p \cdot P_2}{\eta_p} = \frac{P_s}{\eta_p} - P_2 \quad (8.49)$$

substituindo (8.49) em (8.48), resulta:

$$\eta_T = \frac{\eta_v \cdot P_s}{\frac{P_s}{\eta_p} - P_2 + \frac{P_2}{0,98}} = \frac{\eta_v}{\frac{1}{\eta_p} + \frac{0,1}{4,9} \cdot \frac{P_2}{P_s}}$$

$$\eta_T = \frac{\eta_V}{\frac{1}{\eta_P} + \frac{0,1}{4,9} \frac{P_V}{P_i}} \quad (8.50)$$

pela equação mostrada no gráfico 3-4-e, temos:

$$\eta_V = \eta_{s' \rightarrow i'} = \frac{i'_0 - 1}{i'_0 \eta_0 W_1 - 1}$$

onde, $W_1 = \frac{M_1(\omega_1, -\omega_{s'})}{|M_1(\omega_1, -\omega_{s'})|} = -1$, pois $M_1 < 0$ e $(\omega_1, -\omega_{s'}) > 0$

então,

$$\eta_V = \frac{-5,18 - 1}{-5,13 \cdot \frac{1}{0,97} - 1} = 0,975$$

substituindo em (8.50), obtemos:

$$\eta_T = \frac{0,975}{\frac{1}{\eta_P} + \frac{0,1}{4,9} \frac{P_V}{P_i}} \quad (8.51)$$

onde, η_P é dado pela equação (8.17) e $\frac{P_V}{P_i}$ por (8.36), mas substituindo t por $(1-t)$.

Calculando η_T pela equação (8.51), chegamos aos resultados da tabela 12.

TABELA 12

t	η_T
0,0	0,958
0,1	0,959
0,2	0,959
0,3	0,960
0,4	0,961
0,5	0,959
0,6	0,956
0,7	0,954
0,8	0,952
0,9	0,950
1,0	0,948
$\bar{\eta}_T$	0,956

8-3. CONCLUSÕES

O método de síntese apresentado demonstra ser útil no projeto de sistemas de transmissão do tipo considerado, mesmo em face das hipóteses simplificadoras adotadas. Pensou-se, principalmente, no protótipo estacionário do GEPROM, contudo, para veículos reais, pode ser utilizada uma solução obtida por este método que inicie um processo de procura por tentativa de uma solução mais refinada através de uma simulação por computador.

CONSIDERAÇÕES DE PROJETO PECULIARES AOS T.E.P.-SIMPLES DO
TIPO P(P)N

O planetário mais utilizado na prática é do tipo P(P)N apresentado na Fig. A-1. A introdução de vários planetas neste planetário (assim como nos outros) é vantajoso sob o ponto de vista de capacidade de carga, mas algumas limitações devido à interferência devem ser consideradas.

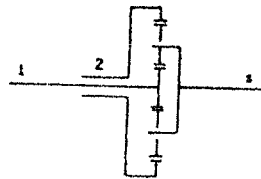


Figura A-1

Se for um objetivo ter-se plantas com espaçamentos iguais, então a seguinte equação deverá valer:

$$\frac{\text{Número de dentes do sol} + \text{Número de dentes da engrenagem anular}}{\text{Número de Planetas}} = \text{Inteiro} \quad (\text{A.1})$$

É possível a utilização de planetas com espaçamentos desiguais porém, isto é muito incomum na prática.

Se mais do que dois planetas estiverem para ser usados, então poderá haver interferência entre os dentes dos planetas adjacentes caso a razão entre os números de dentes da engrenagem anular e do sol seja muito grande. O número máximo de dentes da engrenagem anular pode ser calculado pela seguinte equação:

$$N_{2\max} = \frac{2 \cdot N_1 - 4}{1 - \sin \frac{180}{n_p}} - N_1 \quad (\text{A.2})$$

onde n_p = número de planetas.

PROGRAMAS PARA CALCULADORA HP-97 REFERIDOS NO CAP.8

- PROGRAMA B.1 -

```

000 CL PRGM
001 LBL A
002 1
003 1
004 STO I
005 .
006 1
007 STO 2
008 0
009 STO 3
010 LBL B
011 RCL 1
012 1
013 3
014 0
015 ×
016 3
017 ÷
018 1
019 0
020 0
021 +
022 CHS
023 fπ
024 ×
025 RCL 3
026 ×
027 GSB C
028 GTO D
029 LBL C
030 8
031 7
032 7
033 2
034 9
035 6
036 .
037 7
038 RCL 3
039 x2
040 ×
041 CHS
042 1
043 5
044 7
045 9
046 1
047 3
048 6
049 .
050 7

```

```

051 +
052 √x
053 RTN
054 LBL D
055 RCL 1
056 ×
057 4
058 ÷
059 +
060 x>0 ?
061 GTO E
062 1
063 GTO a
064 LBL E
065 1
066 CHS
067 LBL a
068 RCL 0
069 xzy
070 yx
071 1/x
072 STO 4
073 1
074 0
075 0
076 fπ
077 ×
078 RCL 3
079 ×
080 5
081 .
082 2
083 RCL 1
084 ×
085 12
086 +
087 ×
088 3
089 RCL 1
090 ×
091 ÷
092 GSB C
093 ÷
094 1
095 RCL 4
096 -
097 ×
098 RCL 4
099 +
100 f PAUSE
101 f DSZ I

```

Registadores: $R_0 = \eta_0^*$
 $R_1 = x^*$
 $R_2 = \Delta t = 0,1$
 $R_3 = \Sigma t$
 $R_4 = 1/\eta_0^{w1}$
 $I = \text{contador}$

* η_0 e x devem ser colocados de início nos registradores R_0 e R_1 , respectivamente.

- PROGRAMA B.2 -

000	CL PRGM	056	x	112	CHS
001	LBL A	057	-	113	1
002	STO 1	058	x>0 ?	114	5
003	1	059	GTO C	115	7
004	4	060	1	116	9
005	STO I	061	GTO D	117	1
006	0	062	LBL C	118	3
007	STO 3	063	1	119	6
008	GSB a	064	CHS	120	.
009	2	065	LBL D	121	7
010	÷	066	RCL 0	122	+
011	STO 5	067	xzy	123	$\sqrt{x}$
012	1	068	y ^x	124	RTN
013	STO 3	069	1/x		
014	GSB a	070	STO 4		
015	2	071	1		
016	÷	072	0		
017	STO + 5	073	0		
018	0	074	fπ		
019	STO + 3	075	x		
020	LBL B	076	RCL 3		
021	RCL 2	077	x		
022	STO + 3	078	3		
023	RCL 3	079	RCL 1		
024	GSB a	080	x		
025	STO + 5	081	5		
026	f DSZ 1	082	.		
027	GTO B	083	2		
028	RCL 5	084	RCL 1		
029	RCL 2	085	x		
030	x	086	1		
031	RTN	087	2		
032	LBL a	088	+		
033	fπ	089	÷		
034	x	090	÷		
035	RCL 1	091	GSB b		
036	x	092	÷		
037	1	093	1		
038	3	094	RCL 4		
039	0	095	-		
040	x	096	x		
041	3	097	RCL 4		
042	÷	098	+		
043	CHS	099	RTN		
044	GSB b	100	LBL b		
045	RCL 1	101	RCL 3		
046	x	102	x ²		
047	4	103	8		
048	÷	104	7		
049	+	105	7		
050	RCL 3	106	2		
051	fπ	107	9		
052	x	108	6		
053	1	109	.		
054	0	110	7		
055	0	111	x		

Registradores: X = x*

$R_0 = \eta_0^*$

$R_1 = x$

$R_2 = \Delta t = 1/15^*$

$R_3 = \Sigma t$

$R_4 = 1/\eta_0^{w1}$

$R_5 = \Sigma \eta$

I = contador

* Devem ser introduzidos
na calculadora de iní-
cio.

- PROGRAMA B.3 -

000	CL PRGM	057	4
001	LBL A	058	÷
002	1	059	+
003	1	060	$x > 0 ?$
004	STO I	061	GTO E
005	.	062	1
006	1	063	CHS
007	STO 2	064	GTO a
008	1	065	LBL E
009	STO 3	066	1
010	LBL B	067	LBL a
011	RCL 1	068	RCL 0
012	1	069	xzy
013	3	070	y^x
014	0	071	$1/x$
015	x	072	STO 4
016	3	073	1
017	÷	074	0
018	1	075	0
019	0	076	$f\pi$
020	0	077	×
021	+	078	RCL 3
022	CHS	079	×
023	$f\pi$	080	5
024	x	081	.
025	RCL 3	082	2
026	x	083	RCL 1
027	GSB C	084	×
028	GTO D	085	1
029	LBL C	086	2
030	8	087	+
031	7	088	×
032	7	089	3
033	2	090	÷
034	9	091	RCL 1
035	6	092	÷
036	.	093	GSB C
037	7	094	÷
038	RCL 3	095	1
039	x^2	096	RCL 4
040	×	097	-
041	CHS	098	×
042	1	099	RCL 4
043	5	100	+
044	7	101	$1/x$
045	9	102	f PAUSE
046	1	103	f DSZ I
047	3	104	GTO b
048	6	105	RTN
049	.	106	LBL b
050	7	107	RCL 2
051	+	108	STO-3
052	$\sqrt{x}$	109	GTO B
053	RTN		
054	LBL D		
055	RCL 1		
056	×		

Registadores: $R_0 = n_c *$ $R_1 = x *$ $R_2 = \Delta t = 0,1$ $R_3 = 1 - t$ $R_4 = 1/n_0^{wl}$

I = contador

* Introduzidos inicialmente na calculadora.

- PROGRAMA B.4 -

000	CL PRGM	057	x	114	7
001	LBL A	058	1	115	7
002	STO 1	059	0	116	2
003	1	060	0	117	5
004	4	061	x	118	6
005	STO 1	062	-	119	.
006	0	063	x>0 ?	120	7
007	STO 3	064	GTO C	121	x
008	GSB a	065	1	122	1
009	2	066	CHS	123	5
010	÷	067	GTO D	124	7
011	STO 5	068	LBL C	125	9
012	1	069	1	126	1
013	STO 3	070	LBL D	127	3
014	GSB a	071	RCL 0	128	6
015	2	072	xzy	129	.
016	÷	073	y ^x	130	7
017	STO + 5	074	1/x	131	+
018	0	075	STO 4	132	√x
019	STO 3	076	1	133	RTN
020	LBL B	077	0		
021	RCL 2	078	0		
022	STO + 3	079	fπ		
023	RCL 3	080	x		
024	GSB a	081	1		
025	STO + 5	082	RCL 3		
026	f DSZ 1	083	-		
027	GTO B	084	x		
028	RCL 5	085	3		
029	RCL 2	086	RCL 1		
030	x	087	x		
031	RTN	088	5		
032	LBL a	089	.		
033	1	090	2		
034	xzy	091	RCL 1		
035	-	092	x		
036	fπ	093	1		
037	x	094	2		
038	RCL 1	095	+		
039	x	096	÷		
040	1	097	÷		
041	3	098	GSB b		
042	0	099	÷		
043	x	100	1		
044	3	101	RCL 4		
045	÷	102	-		
046	CHS	103	x		
047	GSB b	104	RCL 4		
048	RCL 1	105	+		
049	x	106	1/x		
050	4	107	RTN		
051	÷	108	LBL b		
052	+	109	1		
053	1	110	RCL 3		
054	RCL 3	111	-		
055	-	112	x ²		
056	fπ	113	3		

Registradores: X=x*

$$R_0 = \eta_0^*$$

$$R_1 = x$$

$$R_2 = \Delta t = 1/15^*$$

$$R_3 = \Sigma t$$

$$R_4 = 1/\eta_0^{w1}$$

$$R_5 = \Sigma \eta$$

* Introduzidos inicial -
mente na calculadora

- PROGRAMA B.5 -

```

000 CL PRGM
001 LBL A
002 3
003 ENTER
004 1
005 .
006 3
007 RCL 1
008 ×
009 ÷
010 CHS
011 STO 6
012 1
013 1
014 STO I
015 .
016 1
017 STO 2
018 0
019 STO 3
020 LBL B
021 1
022 0
023 0
024 fπ
025 ×
026 RCL 3
027 ×
028 3
029 RCL 1
030 ×
031 5
032 .
033 2
034 RCL 1
035 ×
036 1
037 2
038 +
039 ÷
040 GSB C
041 GTO D
042 LBL C
043 RCL 3
044 x2
045 8
046 7
047 7
048 2
049 9
050 6
051 .
052 7
053 ×
054 CHS
055 1

```

```

056 5
057 7
058 9
059 1
060 3
061 6
062 ,
063 7
064 +
065 √x
066 RTN
067 LBL D
068 STO 7
069 ×
070 -
071 x>0 ?
072 GTO E
073 1
074 GTO a
075 LBL E
076 1
077 CHS
078 LBL a
079 RCL 0
080 xzy
081 yx
082 STO 4
083 1
084 0
085 0
086 fπ
087 ×
088 RCL 3
089 ×
090 5
091 .
092 2
093 RCL 1
094 ×
095 1
096 2
097 +
098 ×
099 3
100 ÷
101 RCL 1
102 ÷
103 RCL 7
104 ÷
105 STO 8
106 1
107 -
108 RCL 6
109 +
110 RCL 4
111 ×

```

```

112 RCL 8
113 -
114 RCL 6
115 RCL 4
116 ×
117 1
118 =
119 =
120 f PAUSE
121 f DSZ I
122 GTO b
123 RTN
124 LBL b
125 RCL 2
126 STO + 3
127 GTO b

```

Registradores: $R_0 = \eta_0 *$

$R_1 = x *$

$R_2 = \Delta t = 0,1$

$R_3 = \Sigma t$

$R_4 = \eta_0^{w1}$

$R_6 = i_0$

$R_7 = \Delta(t)$

$R_8 = k_{1s}$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

- PROGRAMA B.6 -

```

000 CL PRGM
001 LBL A
002 STO 1
003 1
004 4
005 STO I
006 0
007 STO 3
008 GSB a
009 2
010 ÷
011 STO 5
012 1
013 STO 3
014 GSB a
015 2
016 ÷
017 STO + 5
018 0
019 STO 3
020 LBL B
021 RCL 2
022 STO + 3
023 RCL 3
024 GSB a
025 STO + 5
026 f DSZ I
027 GTO B
028 RCL 5
029 RCL 2
030 ×
031 RTN
032 LBL a
033 1
034 3
035 0
036 ×
037 fπ
038 ×
039 3
040 ÷
041 CHS
042 4
043 1/x
044 5
045 .
046 2
047 RCL 1
048 ×
049 1
050 2
051 +
052 3
053 xzy
054 ÷
055 -
056 GSB b

```

```

057 ×
058 +
059 x>0 ?
060 GTO C
061 1
062 GTO D
063 LBL C
064 1
065 CHS
066 LBL D
067 RCL 0
068 xzy
069 yx
070 STO 4
071 1
072 .
073 3
074 RCL 1
075 ×
076 3
077 ÷
078 CHS
079 STO 6
080 1
081 3
082 0
083 fπ
084 ×
085 RCL 3
086 ×
087 3
088 ÷
089 CHS
090 RCL 7
091 4
092 ÷
093 +
094 5
095 .
096 2
097 RCL 1
098 ×
099 1
100 2
101 +
102 ×
103 3
104 ÷
105 RCL 7
106 ÷
107 STO 8
108 1
109 -
110 RCL 6
111 +
112 RCL 4
113 ×

```

```

114 RCL 8
115 -
116 RCL 6
117 RCL 4
118 ×
119 1
120 -
121 ÷
122 RTN
123 LBL b
124 RCL 3
125 x2
126 8
127 7
128 7
129 2
130 9
131 6
132 .
133 7
134 ×
135 CHS
136 1
137 5
138 7
139 9
140 1
141 3
142 6
143 .
144 7
145 +
146 √x
147 STO 7
148 RTN

```

Registradores: $X = x^*$

$R_0 = \eta_0^*$

$R_1 = x$

$R_2 = \Delta t = 1/15^*$

$R_3 = \Sigma t$

$R_4 = \eta_0^{w1}$

$R_5 = \Sigma \eta$

$R_6 = i_0$

$R_7 = \Delta(t)$

$R_8 = k_{is}$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora.

- PROGRAMA B.7 -

000	CL PRGM	057	7	114	2
001	LBL A	058	+	115	+
002	1	059	$\sqrt{x}$	116	$\times$
003	.	060	RTN	117	3
004	3	061	LBL D	118	$\div$
005	RCL 1	062	STO 7	119	RCL 7
006	$\times$	063	5	120	$\div$
007	3	064	.	121	STO 8
008	$\div$	065	2	122	1
009	CHS	066	RCL 1	123	-
010	STO 6	067	$\times$	124	RCL 6
011	1	068	1	125	+
012	1	069	2	126	RCL 4
013	STO I	070	+	127	$\times$
014	.	071	3	128	RCL 8
015	1	072	xzy	129	-
016	STO 2	073	$\div$	130	RCL 6
017	0	074	4	131	RCL 4
018	STO 3	075	1/x	132	$\times$
019	LBL B	076	xzy	133	1
020	1	077	-	134	-
021	3	078	$\times$	135	$\div$
022	0	079	+	136	1/x
023	f π	080	x>0 ?	137	f PAUSE
024	$\times$	081	GTO E	138	GTO b
025	1	082	1	139	RTN
026	RCL 3	083	CHS	140	LBL b
027	-	084	GTO a	141	RCL 2
028	$\times$	085	LBL E	142	STO + 3
029	3	086	1	143	GTO B
030	$\div$	087	LBL a		
031	CHS	088	RCL 0		
032	GSB C	089	xzy		
033	GTO D	090	y ^x		
034	LBL C	091	STO 4		
035	1	092	1		
036	RCL 3	093	3		
037	-	094	0		
038	x ²	095	f π		
039	8	096	$\times$		
040	7	097	1		
041	7	098	RCL 3		
042	2	099	-		
043	9	100	$\times$		
044	6	101	3		
045	.	102	$\div$		
046	7	103	CHS		
047	$\times$	104	RCL 7		
048	CHS	105	4		
049	1	106	$\div$		
050	5	107	+		
051	7	108	5		
052	9	109	.		
053	1	110	2		
054	3	111	RCL 1		
055	6	112	$\times$		
056	.	113	1		

Registadores: $R_0 = \eta_0^*$ $R_1 = x^*$ $R_2 = \Delta t = 0,1$ $R_3 = \Sigma t$ $R_4 = \eta_0^{w1}$ $R_5 = i_0$ $R_7 = \Delta(t)$ $R_8 = K_{is}$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

- PROGRAMA B.8 -

```

000 CL PRGM
001 LBL A
002 STO 1
003 1
004 4
005 STO I
006 0
007 STO 3
008 GSB a
009 2
010 ÷
011 STO 5
012 1
013 STO 3
014 GSB a
015 2
016 ÷
017 STO + 5
018 0
019 STO 3
020 LBL B
021 RCL 2
022 STO + 3
023 RCL 3
024 GSB a
025 STO + 5
026 f DSZ I
027 GTO B
028 RCL 5
029 RCL 2
030 ×
031 RTN
032 LBL a
033 1
034 xzy
035 -
036 1
037 3
038 0
039 ×
040 fπ
041 ×
042 3
043 ÷
044 CHS
045 4
046 1/x
047 5
048 .
049 2
050 RCL 1
051 ×
052 1
053 2
054 +
055 3
056 xzy
057 ÷

```

```

058 -
059 GSB b
060 ×
061 +
062 x>0 ?
063 GTO C
064 1
065 CHS
066 GTO D
067 LBL C
068 1
069 LBL D
070 RCL 0
071 xzy
072 yx
073 STO 4
074 1
075 .
076 3
077 RCL 1
078 ×
079 3
080 ÷
081 CHS
082 STO 6
083 1
084 3
085 0
086 fπ
087 ×
088 1
089 RCL 3
090 -
091 ×
092 3
093 ÷
094 CHS
095 RCL 7
096 4
097 ÷
098 +
099 5
100 .
101 2
102 RCL 1
103 ×
104 1
105 2
106 +
107 ×
108 3
109 ÷
110 RCL 7
111 +
112 STO 8
113 1
114 -
115 RCL 6

```

```

116 +
117 RCL 4
118 ×
119 RCL 8
120 -
121 RCL 6
122 RCL 4
123 ×
124 1
125 -
126 ÷
127 1/x
128 RTN
129 LBL b
130 1
131 RCL 3
132 -
133 x2
134 8
135 7
136 7
137 2
138 9
139 6
140 .
141 7
142 ×
143 CHS
144 1
145 5
146 7
147 9
148 1
149 3
150 6
151 .
152 7
153 +
154 √x
155 STO 7
156 RTN

```

Registradores: X = x*

$R_0 = \eta_0^*$
 $R_1 = x$
 $R_2 = \Delta t = 1/15^*$
 $R_3 = \Sigma t_{w1}$
 $R_4 = \eta_0$
 $R_5 = \Sigma \eta$
 $R_6 = i_0$
 $R_7 = \Delta(t)$
 $R_8 = k_{1s}$
I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora.

- PROGRAMA B.9 -

000	CL PRGM	058	-
001	LBL A	059	x>0 ?
002	1	060	GTO E
003	1	061	1
004	STO I	062	GTO a
005	.	063	LBL E
006	1	064	1
007	STO 2	065	CHS
008	0	066	LBL a
009	STO 3	067	RCL 0
010	LBL B	068	xzy
011	1	069	y ^x
012	3	070	1/x
013	0	071	STO 4
014	RCL 1	072	1
015	x	073	3
016	3	074	0
017	÷	075	fπ
018	1	076	x
019	0	077	RCL 3
020	0	078	x
021	+	079	5
022	fπ	080	.
023	x	081	2
024	RCL 3	082	RCL 1
025	x	083	x
026	GSB C	084	1
027	GTO D	085	2
028	LBL C	086	+
029	3	087	x
030	7	088	9
031	7	089	÷
032	2	090	GSB C
033	9	091	÷
034	6	092	CHS
035	.	093	5
036	7	094	.
037	RCL 3	095	2
038	x ²	096	RCL 1
039	x	097	x
040	CHS	098	1
041	1	099	2
042	5	100	÷
043	7	101	1
044	9	102	+
045	1	103	1
046	3	104	RCL 4
047	6	105	-
048	.	106	x
049	7	107	RCL 4
050	+	108	+
051	√x	109	f PAUSE
052	RTN	110	f DSZ I
053	LBL D	111	GTO b
054	RCL 1	112	RTN
055	x	113	LBL b
056	4	114	RCL 2
057	÷	115	STO + 3

116 GTO B

Registradores: $R_0 = \eta_0^*$ $R_1 = x^*$ $R_2 = \Delta t = 0,1$ $R_3 = \Sigma t$ $R_4 = 1/\eta_0^{w1}$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

- PROGRAMA B.10 -

000	CL PRGM	058	GTO C	116	9
001	LBL A	059	1	117	6
002	STO1	060	GTO D	118	.
003	1	061	LBL C	119	7
004	4	062	1	120	x
005	STO I	063	CHS	121	CHS
006	0	064	LBL D	122	1
007	STO 3	065	RCL 0	123	5
008	GSB a	066	xzy	124	7
009	2	067	y ^x	125	9
010	÷	068	1/x	126	1
011	STO 5	069	STO 4	127	3
012	1	070	1	128	6
013	STO 3	071	3	129	.
014	GSB a	072	0	130	7
015	2	073	fπ	131	+
016	÷	074	x	132	√x
017	STO + 5	075	RCL 3	133	RTN
018	0	076	x		
019	STO 3	077	5		
020	LBL B	078	.		
021	RCL 2	079	2		
022	STO + 3	080	RCL 1		
023	RCL 3	081	x		
024	GSB a	082	1		
025	STO + 5	083	2		
026	f DSZ I	084	+		
027	GTO B	085	x		
028	RCL 5	086	9		
029	RCL 2	087	÷		
030	x	088	GSB b		
031	RTN	089	÷		
032	LBL a	090	CHS		
033	fπ	091	5		
034	x	092	.		
035	1	093	2		
036	0	094	RCL 1		
037	0	095	x		
038	x	096	1		
039	1	097	2		
040	3	098	÷		
041	0	099	+		
042	RCL 1	100	1		
043	x	101	+		
044	fπ	102	1		
045	x	103	RCL 4		
046	RCL 3	104	-		
047	x	105	x		
048	3	106	RCL 4		
049	÷	107	+		
050	+	108	RTN		
051	GSB b	109	LBL b		
052	RCL 1	110	RCL 3		
053	x	111	x ²		
054	4	112	8		
055	÷	113	7		
056	-	114	7		
057	x>0 ?	115	2		

Registadores: X =x*

 $R_0 = \eta_0^*$ $R_1 = x$ $R_2 = \Delta t = 1/15^*$ $R_3 = \Sigma t$ $R_4 = 1/\eta_0^{w1}$ $R_5 = \Sigma \eta$

I =contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

- PROGRAMA B.11 -

000	CL PRGM	057	÷
001	LBL A	058	-
002	1	059	x>0 ?
003	1	060	GTO E
004	STO I	061	1
005	.	062	CHS
006	1	063	GTO a
007	STO 2	064	LBL E
008	1	065	1
009	STO 3	066	LBL a
010	LBL B	067	RCL 0
011	1	068	xzy
012	0	069	y ^x
013	0	070	1/x
014	RCL 1	071	STO 4
015	1	072	1
016	3	073	3
017	0	074	0
018	×	075	f _π
019	3	076	×
020	÷	077	RCL 3
021	+	078	×
022	f _π	079	5
023	×	080	.
024	RCL 3	081	2
025	×	082	RCL 1
026	GSB C	083	×
027	GTO D	084	1
028	LBL C	085	2
029	8	086	+
030	7	087	×
031	7	088	CHS
032	2	089	9
033	9	090	÷
034	6	091	GSB C
035	.	092	÷
036	7	093	5
037	RCL 3	094	.
038	x ²	095	2
039	×	096	RCL 1
040	CHS	097	×
041	1	098	1
042	5	099	2
043	7	100	÷
044	9	101	+
045	1	102	1
046	3	103	+
047	6	104	1
048	.	105	RCL 4
049	7	106	-
050	+	107	×
051	√x	108	RCL 4
052	RTN	109	+
053	LBL D	110	1/x
054	RCL 1	111	f PAUSE
055	×	112	f DSZ I
056	4	113	GTO b

114	RTN
115	LBL b
116	RCL 2
117	STO - 3
118	GTO b

Registadores: $R_0 = \eta_0^*$ $R_1 = x^*$ $R_2 = \Delta t = 0,1$ $R_4 = 1/\eta_0^{w1}$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

- PROGRAMA B.12 -

```

000 CL PRGM
001 LBL A
002 STO 1
003 1
004 4
005 STO I
006 0
007 STO 3
008 GSB a
009 2
010 ÷
011 STO 5
012 1
013 STO 3
014 GSB a
015 2
016 +
017 STO + 5
018 0
019 STO 3
020 LBL B
021 RCL 2
022 STO + 3
023 RCL 3
024 GSB a
025 STO + 5
026 f DSZ I
027 GTO B
028 RCL 5
029 RCL 2
030 ×
031 RTN
032 LBL a
033 1
034 xzy
035 -
036 fπ
037 ×
038 1
039 0
040 0
041 ×
042 1
043 3
044 0
045 RCL 1
046 ×
047 fπ
048 ×
049 1
050 RCL 3
051 -
052 ×
053 3
054 ÷
055 +
056 GSB b

```

```

057 RCL 1
058 ×
059 4
060 ÷
061 -
062 x>0 ?
063 GTO C
064 1
065 CHS
066 GTO D
067 LBL C
068 1
069 LBL D
070 RCL 0
071 xzy
072 yx
073 1/x
074 STO 4
075 1
076 3
077 0
078 fπ
079 ×
080 1
081 RCL 3
082 -
083 ×
084 5
085 .
086 2
087 RCL 1
088 ×
089 1
090 2
091 +
092 ×
093 9
094 ÷
095 GSB b
096 ÷
097 CHS
098 5
099 .
100 2
101 RCL 1
102 ×
103 1
104 2
105 ÷
106 +
107 1
108 +
109 1
110 RCL 4
111 -
112 ×
113 RCL 4

```

```

114 +
115 1/x
116 RTN
117 LBL b
118 1
119 RCL 3
120 -
121 x2
122 8
123 7
124 7
125 2
126 9
127 6
128 .
129 7
130 ×
131 CHS
132 1
133 5
134 7
135 9
136 1
137 3
138 6
139 .
140 7
141 +
142 √x
143 RTN

```

Registradores: X = x*

$$R_0 = \eta_0^*$$

$$R_1 = x$$

$$R_2 = \Delta t = 1/15^*$$

$$R_3 = \Sigma t$$

$$R_4 = 1/\eta_0^{wl}$$

$$R_5 = \Sigma \eta$$

I = contador

*Introduzidos inicialmente na calculadora

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LÉVAI, Z. - "Structure and Analysis of Planetary Gear Train" J. Mechanisms 3, 131-148 (1968).
- [2] LÉVAI, Z. - "Moon-and-Planet Gear Train", J. Mechanisms 6, 21-25 (1971).
- [3] SANGER, D.J. - "Synthesis of Multiple-speed Transmissions of the Planetary-gear Type", J. Mech., Eng. Sc., vol. 14, nº 5 (1972).
- [4] BUCHSBAUM, F. e FREUDENSTEIN, F. - "Synthesis of Kinematic Structure of Geared Kinematic Chains and Other Mechanisms", J. Mechanisms 5, 357 (1970).
- [5] CROSSLEY, F.R.E. - "A contribution to Gruebler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms", J. Engng. Ind., Trans. of ASME 86, 1 (1964).
- [6] WOO, L.S. - "Type Synthesis of Plane Linkages", J. Eng. Ind., Trans. ASME 89, 159 (1967).
- [7] FREUDENSTEIN, F. - "Discussão em [6], 170
- [8] WEBER, H.I. e SZAJNER, J. - "Armazenamento Mecânico de Energia em Ultra-volantes: Uma Nova Concepção de Onibus Elétrico", Paper Nº B-10 do I C.B.E., 1973.
- [9] MÜLLER, H.W. - "Die Umlaufgetriebe", Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1970.
- [10] WHITE, G. - "Properties of Differential Transmissions", The Engineer, July 28, 1967.
- [11] MACMILLAN, R.H. - "Epicyclic Gear Trains", The Engineer, March 25, 1949.
- [12] MACMILLAN, R.H. - "Epicyclic Gear Efficiencies", The Engineer, Dec. 23, 1949.

- [13] HANNON, G.H. - "Planetary Gear Transmissions", Plant En-
gineering, May 26, 1977.
- [14] GLOVER, J.H. - "Planetary Gear Systems", Product Engineering,
Sep. 27, 1965 e Jan. 6, 1964.
- [15] WOJNAROWSKI, K. and LIDWIN, A. - "The Application of Signal
Flow Graphs - the Kinematic Analysis of Planetary
Gear Trains", Mechanism and Mach. Theory, 1975,
vol. 10.
- [16] COLBOURNE, J.R. - "Simplified Kinematic Analysis of Planetary
Gear Trains", Mech. and Mach. Theory, 1972, vol.
7.
- [17] FITZGEORGE, D. - "Synthesis of Single-Ratio and Multi-Ratio
Epicyclic Gear Trains", Journal Mech. Eng. Science, 1971, vol. 13.
- [18] TOWNSEND, M.A. - "Extension of a Method of Analysis of
Planetary Gear Trains", Mech. and Mach. Theory,
1972, vol. 7.