

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Síntese Computacional de Absorvedores Acústicos Poroelásticos

Autor: **Francisco Ilson da Silva Júnior**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Síntese Computacional de Absorvedores Acústicos Poroelásticos

Autor: **Francisco Ilson da Silva Junior**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si38s Silva Junior, Francisco Ilson da
Síntese computacional de absorvedores acústicos
poroelásticos. / Renato Pavanello.--Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Renato Pavanello
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização matemática. 2. Absorção do som. 3. Método
dos elementos finitos. 4. Acústica. I Pavanello, Renato. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Computational synthesis of poroelastic acoustic absorbers

Palavras-chave em Inglês: Poroelasticity, Topology optimization, Acoustical absorption

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Banca examinadora: Sérgio Francisco Muller de Almeida, Emílio Carlos Nelli Silva, José
Roberto de França Arruda e Euclides de Mesquita Neto

Data da defesa: 22/06/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

Síntese Computacional de Absorvedores Acústicos Poroelásticos

Autor: Francisco Ilson da Silva Júnior
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



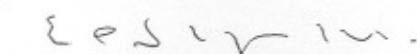
Prof. Dr. Sérgio Frascino Müller de Almeida
IEM/ITA/CTA



Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva
DEM/EPUSP



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 22 de junho de 2007.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Francisco Ilson e Rita.

*“Há homens que lutam um dia e são bons.
Há outros que lutam um ano e são melhores.
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.
Porém, há os que lutam toda a vida.
Esses são os imprescindíveis.”*

Bertolt Brecht

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- À Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e à Fapesp (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- A todos professores, funcionários e alunos de Pós-Graduação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, obrigado pela colaboração e atenção dispensadas.
- A todos os integrantes do LASH-ENTPE/Lyon-França (“Laboratoire d’Acoustique et Sciences de l’Habitat - École Nationale des Travaux Publics de l’État”), um obrigado pela acolhida naquele país, pelas experiências trocadas que garantiram o enriquecimento do tema de pesquisa desta tese. Agradeço ao Professor Franck Sgard, que me permitiu integrar o seu grupo de Pesquisadores. Ao Monsieur Luc Jaouen, um “merci beaucoup” pela sua ajuda. Uma lembrança, aos colegas brasileiros que me ajudaram a não sentir tanta falta da terrinha: Joácio, Moisés, Rafaella e Pascaline, pelos momentos vividos na França.
- Aos amigos de Departamento: Simone, Éder, Cibele, Cavaguti, Elson César e aos colegas de laboratório, Liliana, Márcio, Ricardo, Alberto Balestra e Alberto “Hitler”, um especial agradecimento pelos momentos de alegria e de descontração.
- Ao Professor Renato Pavanello, um grande obrigado pela paciência com este aluno em todos estes anos de convivência. Pelo comprometimento em sempre motivar e ajudar os seus orientados. Professor, agradeço pelos seus ensinamentos e conselhos dispensados e pelo apoio nas boas e más horas neste trabalho.

Resumo

Silva Junior, Francisco Ison, *Síntese Computacional de Absorvedores Acústicos Poroelásticos*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007, 225 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho, estudam-se os fenômenos de propagação de ondas elásticas e acústicas em meios poroelásticos acoplados e se propõe uma metodologia de projeto de isolamento acústica em baixas frequências, utilizando-se de técnicas de otimização topológica. Duas formulações para o método de elementos finitos são utilizadas, baseadas nas equações clássicas de Biot modificadas, escritas em termos do deslocamento estrutural (u) e da pressão acústica (p) nos interstícios preenchidos pelo fluido. O problema físico consiste em um material poroelástico absorvedor presente em um tubo de Kundt acoplado a um guia de onda no domínio das baixas frequências. A célula representativa é composta por dois sub-domínios: Acústico e Poroelástico. Dois métodos para a maximização da absorção acústica são propostos. O primeiro método é uma sequência evolucionária baseada no número de sensibilidade determinado a partir dos valores de absorção elementar acústica. O segundo método é baseado na técnica SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”) e envolve uma análise de sensibilidade e métodos de programação matemática. A análise de sensibilidade do sistema acoplado é feita através de três metodologias distintas. Um Método de Programação Linear Sequencial, o SLP (“Sequential Linear Programming”), é utilizado na solução do problema de otimização. Exemplos bidimensionais e tridimensionais foram implementados e otimizados para validar a metodologia proposta. Finalmente, as principais conclusões são apresentadas e algumas sugestões de investigações futuras são propostas.

Palavras chaves: Poroelasticidade, Otimização Topológica, Absorção Acústica.

Abstract

Silva Junior, Francisco Ilson, *Computational Synthesis of Poroelastic Acoustic Absorbers*.
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas,
2007, 225 p. Tese (Doutorado).

This work aims to study the coupled poroelasticity and build a design methodology based on Evolutionary and Topological optimization techniques. Two versions of the classical Biot equations are written in terms of solid phase structural displacements (u) and interstitial acoustic pressure (p). The problem is solved using a Kundt tube model coupled to an acoustic wave guide in the low frequency domain. Two methods for the maximization of the acoustic absorption at a specific frequency are proposed. The first method is an evolutionary sequence, based on a sensitivity number and obtained by acoustic elementary absorption determination. The second method is based on a SIMP technique (Simple Isotropic Material with Penalization). It involves a sensitivity analysis and mathematical programming methods. A sensitivity analysis of the coupled system is done by three different methodologies. A Sequential Linear Programming Method (SLP) is used to solve the optimization problem. Bidimensional and Tridimensional examples have been implemented and optimized to validate the proposed methodology. Finally, the main conclusions are presented and some suggestions about future investigations are proposed.

Keywords: Poroelasticity, Topology Optimization, Acoustical Absorption.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação e Objetivos	3
1.2	Principais Contribuições e Organização do Texto	4
2	Revisão Bibliográfica	8
2.1	A homogeneização em problemas Fluido-Estrutura	8
2.2	Teoria da Homogeneização de um meio com estrutura periódica	12
2.3	Revisão Histórica	16
2.3.1	A teoria da Poroelasticidade	16
2.3.2	As Formulações Numéricas na Poroelasticidade	18
2.3.3	A Homogeneização e a Otimização Topológica	21
2.3.4	A Metodologia de Projeto de Isolação Acústica	24
3	Propagação de Ondas no Meio Poroso	27
3.1	Contínuo e homogeneização em materiais porosos	27
3.1.1	Expressões gerais da Densidade e Permeabilidade térmica dinâmicas do fluido	29
3.2	Propagação de ondas em materiais Poroelásticos	30
3.2.1	Relações de Tensão-Deformação da teoria clássica de Biot	31
3.2.2	Relações entre os coeficientes poroelásticos de Biot	33

3.2.3	Equação da onda para materiais poroelásticos	36
3.3	Resumo das Equações da Poroelasticidade	41
3.4	Condições de interface entre os domínios	42
3.5	A aproximação por Elementos Finitos na Poroelasticidade Acoplada	44
3.6	Análise Energética na Poroelasticidade	47
3.7	Medidas em Vibro-Acústica	52
3.8	O Guia de Ondas Acústico	54
3.8.1	Modelagem e Implementação do Guia de Onda	56
3.8.2	O efeito do número de modos no Guia de Onda	64
4	Otimização na Poroelasticidade Acoplada	67
4.1	Posicionamento do Problema de Otimização - Maximização da absorção acústica	67
4.2	O modelo do Material Poro-Acústico	71
4.2.1	Variáveis de Projeto Contínuas - Homogeneização	71
4.2.2	O modelo do material aproximado - Método da densidade	83
5	Análise de Sensibilidade e Otimização Topológica em Sistemas Poroelásticos	89
5.1	Análise de Sensibilidade do Problema Poro-Acústico	89
5.2	Expressões da sensibilidade - variáveis contínuas	90
5.3	Testes Numéricos - Sensibilidade Contínua	96
5.4	Expressões da sensibilidade - variáveis discretas	101
5.5	Teste Numéricos - Número de Remoção	105
5.6	Solução Numérica do Problema de Otimização	109
5.7	As Metodologias de Otimização: SIMP x Evolucionária	114
6	Resultados de Otimização Topológica	116
6.1	Análises numéricas usando o código de elementos finitos	116
6.2	O programa de análise de Elementos Finitos desenvolvido	118
6.3	Resultados e a validação do programa de Elementos Finitos	118
6.4	Análises Preliminares ao Processo de Otimização	124

6.5	Otimização Topológica de Sistemas Poro-Acústicos - Metodologia Evolucionária	137
6.6	Otimização Topológica de Sistemas Poro-Acústicos - Metodologia SIMP . .	157
7	Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos	173
7.1	Conclusões	173
7.2	Propostas de Trabalhos Futuros	175
A	Ondas de compressão e cisalhamento no material poroelástico - Teoria de Biot	186
B	Formulação Micro-Macro da Poroelasticidade	192
B.1	Modelo Hidrodinâmico de um poro cilíndrico flexível	193
B.2	Modelo Térmico de um poro cilíndrico flexível	197

Lista de Figuras

1.1	Metodologia de Projeto de Sistemas de Absorção Acústica	5
2.1	Processo de Homogeneização de um domínio Ω	12
2.2	Macro e Micro comportamento da Função $F(x)$	13
2.3	Comportamento da Função $F(x, y)$ na célula unitária Y	14
2.4	Microestrutura periódica de um meio poroso	15
2.5	Estudo do efeito da absorção em meios heterogêneos a dupla escala - ENTPE	24
2.6	Processo de Homogeneização de um domínio a dupla escala (Olny e Boutin, 2003)	25
3.1	Homogeneização em meios porosos	28
3.2	Elemento infinitesimal para um contínuo poroelástico	31
3.3	Medições das propriedades globais poroelásticas	34
3.4	Condições de contorno e acoplamentos em domínios poroelásticos (Debergue et al., 1999)	43
3.5	Posicionamento do problema de Transmissibilidade Acústica	48
3.6	Impedância Acústica Superficial no meio poroelástico	53
3.7	Curva de Absorção para a Lã de Rocha a Dupla Porosidade: divergência a partir de 600 Hz	55
3.8	Amostras Porosas no interior de um Tubo de Kundt	55
3.9	Modos ortogonais em um tubo retangular $L_x \times L_y$	58
3.10	Elemento Quadrilateral e sua transformação Isoparamétrica	63
3.11	Correspondência do Carregamento do Guia de Onda	64
3.12	Exemplo 1 - $m = 2$, Elementos de Interface = 15 e $\omega = 300Hz$	64
3.13	Exemplo 2 - $m = 2$, Elementos de Interface = 30 e $\omega = 300Hz$	65

3.14	Exemplo 3 - $m = 5$, Elementos de Interface = 30 e $\omega = 300Hz$	65
3.15	Exemplo 4 - $m = 5$, Elementos de Interface = 60 e $\omega = 300Hz$	66
4.1	Efeito de um absorvedor acústico sobre a propagação sonora	68
4.2	Homogeneização de uma célula Poro-Acústica isotrópica	72
4.3	Homogeneização de uma célula Poro-Acústica isotrópica	81
4.4	Homogeneização do Coeficiente a_{ij}^H	82
4.5	Homogeneização do Coeficiente b^H	82
4.6	Distribuição de Pressão χ^j nas análises de elementos finitos	83
4.7	Curvas do material poroso-acústico - Distribuição SIMP	86
4.8	Velocidade complexa de propagação no material composto	87
5.1	Fluxograma do Método Direto	92
5.2	Fluxograma do Método Adjunto	95
5.3	Malha de elementos finitos para a análise de sensibilidade	97
5.4	Variação da Sensibilidade Elementar com relação a frequência	98
5.5	Variação da Sensibilidade Elementar com relação a densidade elementar	99
5.6	Desempenho dos Métodos de Sensibilidade	100
5.7	Intervalo de valores elementares do número de sensibilidade α_i	104
5.8	Variação da Sensibilidade Elementar - Malha com 10x10 GDL	106
5.9	Variação da Resposta Global - Malha com 10x10 GDL	107
5.10	Variação da Sensibilidade Elementar - Malha 30x30	108
5.11	Variação da Resposta Global - Malha 30x30	109
5.12	Fluxograma para implementação do Método SLP no Problema Poro-Acústico	113
5.13	Sequência de Otimização Topológica baseado no SIMP	114
5.14	Sequência de Otimização Topológica Evolucionária	115
6.1	Discretização em elementos finitos de um painel absorvedor	117
6.2	Malha para a Célula Poro-Acústica periódica a dupla porosidade	117
6.3	Malha de Elementos Finitos a simples porosidade	119
6.4	Malhas de elementos finitos para análise de convergência	120
6.5	Resposta de Pressão para o ponto 1	121

6.6	Resposta de Pressão para o ponto 2	121
6.7	Curva de absorção da amostra a dupla porosidade	122
6.8	Curvas de absorção da amostra a dupla porosidade	123
6.9	Distribuição de Pressão na célula a dupla porosidade em 560 Hz	124
6.10	Influência da espessura da amostra sobre a absorção acústica	125
6.11	Malha de Elementos Finitos - Macroporosidade μ	126
6.12	Resultados da variação da macroporosidade na absorção - $\mu > 75\%$	127
6.13	Resultados da variação da macroporosidade na absorção - $\mu < 75\%$	127
6.14	Evolução da função de absorção acústica com a densidade	128
6.15	Representações da função absorção	129
6.16	Malhas de Elementos Finitos para a análise da geometria do furo	130
6.17	Curvas de Absorção para o problema da geometria do furo	131
6.18	Distribuição de Pressão para as análises com geometrias de furo diferentes	132
6.19	Malhas de Elementos Finitos para a análise do ângulo de cunha	133
6.20	Curvas de Absorção para análise do ângulo de cunha	134
6.21	Distribuição de Pressão a 500 Hz para a análise do ângulo de cunha	135
6.22	Curvas de Absorção em análise paramétrica do ângulo de cunha	136
6.23	Malhas de elementos finitos para análise de dependência da malha	138
6.24	Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 300 Hz	139
6.25	Absorção Elementar para a síntese a 300 Hz	139
6.26	Distribuição de Pressão para as células otimizadas	140
6.27	Evolução da Função Objetivo para a síntese a 300 Hz	141
6.28	Curvas de Absorção para a síntese a 300 Hz	142
6.29	Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 500 Hz	143
6.30	Absorção Elementar para a síntese a 500 Hz	143
6.31	Distribuição de Pressão para as células otimizadas	144
6.32	Evolução da Função Objetivo para a síntese a 500 Hz	144
6.33	Curvas de Absorção para a síntese a 500 Hz	145
6.34	Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 300 Hz	146
6.35	Distribuição de Pressão para as células otimizadas	146

6.36	Evolução da Função Objetivo para a síntese a 300 Hz	147
6.37	Curvas de Absorção para a síntese a 300 Hz	148
6.38	Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 500 Hz	149
6.39	Distribuição de Pressão para as células otimizadas	149
6.40	Evolução da Função Objetivo para a síntese a 500 Hz	150
6.41	Curvas de Absorção para a síntese a 500 Hz	151
6.42	Configuração Otimizada para de síntese a 300 Hz - Fase Porosa e Fase Acústica	152
6.43	Configuração Otimizada para de síntese a 500 Hz - Fase Porosa e Fase Acústica	152
6.44	Distribuição de Pressão para as configurações otimizadas - 300 Hz	153
6.45	Distribuição de Pressão para as configurações otimizadas - 500 Hz	153
6.46	Evolução da Função Objetivo para a síntese de 300 Hz	154
6.47	Evolução da Função Objetivo para a síntese de 500 Hz	154
6.48	Curvas de Absorção para a síntese de 300 Hz	155
6.49	Curvas de Absorção para a síntese de 500 Hz	156
6.50	Posicionamento do Problema de Otimização Topológica - Método SIMP . .	158
6.51	Resultados para a Malha de 6x9 elementos finitos	159
6.52	Resultados para a Malha de 12x17 elementos finitos	159
6.53	Resultados para a Malha de 24x34 elementos finitos	160
6.54	Históricos da Função Objetivo	161
6.55	Históricos da Função Objetivo	161
6.56	Históricos da Função Objetivo	162
6.57	Históricos da Função Objetivo	163
6.58	Históricos da Função Objetivo	164
6.59	Absorção máxima obtida em função da redução de volume f_{vol}	165
6.60	Resultados da formulação de Fluido Equivalente	166
6.61	Resultados da formulação mista (u,p)	166
6.62	Históricos da Função Objetivo	167
6.63	Históricos da Função Objetivo	167
6.64	Configuração Inicial a dupla porosidade - Processo SIMP	168
6.65	Síntese da dupla porosidade inicial a 300Hz	168

6.66 Síntese da dupla porosidade inicial a 500Hz	169
6.67 Síntese da dupla porosidade inicial a 750Hz	169
6.68 Evolução da Função Objetivo	170
6.69 Evolução da Função Objetivo	170
6.70 Evolução da Função Objetivo	170
A.1 Influência da frequência sobre o comprimento de onda	191
B.1 Modelo volumétrico infinitesimal dV para um poro cilíndrico	193

Lista de Tabelas

3.1	Expressões gerais para os coeficientes - Modelo Acoplado	30
3.2	Formulação Mista (u,p) da Poroelasticidade e suas derivações	42
4.1	Propriedades do material poroso	81
4.2	Propriedades físicas do ar	81
4.3	Propriedades do material poroso	88
5.1	Tempos dos Métodos de Sensibilidade	100
6.1	Propriedades do material Poroelástico	120
6.2	Propriedades do material poroelástico	125
6.3	Propriedades do material Poroelástico	137
6.4	Resumo dos Resultados - Técnica Evolucionária	157
6.5	Resumo dos Resultados - Técnica SIMP	172
A.1	Propriedades do material poroelástico	190

Nomenclatura

Letras Latinas

- A - constante de Lamé para os materiais poroelásticos (Teoria de Biot-Allard)
- B - coeficiente de Skempton
- b - coeficiente de amortecimento viscoso
- c - velocidade de propagação do som em um meio
- E - módulo de elasticidade ou módulo de rigidez ou módulo de Young
- F - força ou cargas
- g - restrição de desigualdade
- h - porosidade
- H - frequência característica viscosa
- H' - frequência característica térmica
- i - termo imaginário ($\sqrt{-1}$)
- $\Im$ - parte imaginária
- L - função Lagrangiana
- N - módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal
- P - constante de Lamé modificada
- p - pressão intersticial da fase fluida
- Pr - número de Prandtl
- q - fluxo de massa por unidade de área na fronteira S do volume de controle poroelástico
- Q - coeficiente de acoplamento entre as equações das fases sólida e fluida
- R - módulo de deformação volumétrica do fluido por unidade de porosidade
- $\Re$ - parte real
- t - tempo
- u - deslocamento da fase estrutural
- U - deslocamento da fase fluida
- v - velocidade da partícula fluida

Z - impedância acústica

Letras Gregas

α - absorção acústica

β - taxa de atualização dos limites móveis (Método SLP)

Γ - contorno do domínio poroelástico

γ - termo de acoplamento entre as fases fluida e estrutural (Teria de Biot-Allard)

δ - delta de Kronecker

δu - função de ponderação para a fase sólida

δp - função de ponderação para a fase fluida

Λ - comprimento característico viscoso

Λ' - comprimento característico térmico

λ - multiplicador de Lagrange para as restrições de desigualdade

κ - permeabilidade hidráulica

η - viscosidade cinemática do Fluido

ν - coeficiente de Poisson

μ - densidade elementar - variável de projeto topológico

ρ - massa específica de um material

σ - fluxo resistivo

θ - Razão entre os calores específicos do fluido

ξ - dilatação do fluido

Ω - domínio poroelástico

ω - frequência

Termos com Subscritos

c_0 - velocidade de propagação do som no meio acústico

c_p - calor específico a pressão constante

c_v - calor específico a volume constante

K_b - módulo de deformação volumétrica do material poroelástico no vácuo

K_s - módulo de deformação volumétrica do material elástico no vácuo

K_f - módulo de deformação volumétrica ou compressibilidade do fluido

l_{min} - limite móvel mínimo

l_{max} - limite móvel máximo

P_0 - pressão atmosférica

p_b - pressão de bloqueio

N_i - Função de interpolação Lagrangiana

Z_n - impedância acústica superficial

z_a - impedância acústica

α_e - absorção elementar

$\Delta\alpha_e$ - variação da absorção - número de remoção (Método Evolucionário)

α_∞ - tortuosidade

δ_v - dimensão da camada limite viscosa

δ_t - dimensão da camada limite térmica

ν_b - coeficiente de Poisson drenado

ν_u - coeficiente de Poisson não drenado

μ_{min} - mínima densidade elementar de projeto

μ_{max} - máxima densidade elementar de projeto

ρ_s - massa específica da fase sólida

ρ_f - massa específica da fase fluida

ρ_0 - massa específica do ar em condições específicas

θ_- - multiplicador de Lagrange (restrição lateral a esquerda)

θ_+ - multiplicador de Lagrange (restrição lateral a direita)

Termos com Sobrescritos

$\tilde{A}$ - variável complexa e dependente da frequência

$\dot{a}$ - termo com derivada primeira temporal

$\ddot{a}$ - termo com derivada segunda temporal

$\hat{\sigma}^s$ - tensor de tensão da fase estrutural no vácuo

σ^s - tensor total de tensão da fase estrutural

σ^f - tensor de tensão da fase fluida

ε^s - tensor de deformação da fase estrutural

ε^f - tensor de deformação da fase fluida

Notação indicial

A_{ij} - matriz

A_i - vetor

$A_{i,i}$ - divergente de um vetor

$a_{,j}$ - gradiente de um escalar

$a_{,jj}$ - laplaciano de um escalar

Representação Vetorial

$[Z]$ - matriz dinâmica

$[A]$ - matriz de admitância

$\{U\}$ - vetor resposta nodal dos graus de liberdade - variáveis de estado generalizadas

$\{F\}$ - vetor de carga nodal

(m, n) - número de modos da decomposição modal do guia de onda retangular

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

FRF - Função de resposta em frequência

POO - Programação orientada a objetos

SPL - “Sound Pressure Level” (Nível de Pressão Sonora)

SVL - “Sound Velocity Level” (Nível de Vibração Estrutural)

SLP - “Sequential Linear Programming” (Programação linear seqüencial)

SIMP - “Simple Isotropic Material with Penalization” (Material Isotrópico com penalização)

Capítulo 1

Introdução

Estruturas contendo materiais poroelásticos são amplamente usadas em muitas aplicações de Engenharia devido às suas propriedades de absorção acústica, isolamento do som e suas características de amortecimento. Podem-se citar como aplicações destes materiais em Engenharia: o controle de ruídos em automóveis, o controle da qualidade do som em ambientes domésticos e industriais, a construção de sistemas de isolamento acústica em aeronaves, etc. Além deste campo de aplicação citam-se os problemas em Mecânica dos Solos, que envolvam fenômenos de escoamento em meios porosos e modelos estruturais biomecânicos.

Atualmente, no campo de desenvolvimento de projetos de sistemas absorvedores, uma ênfase ao controle de ruídos vem sendo dada. Tais projetos devem obedecer a uma redução significativa nos níveis de emissões sonoras permitidos por normas internacionais de qualidade. O sistema de isolamento deve ser o mais leve possível e a absorção no domínio das baixas frequências deve ter seu desempenho aumentado. O projeto de sistemas de isolamento acústica vem sendo um importante tópico de pesquisa nos últimos anos. Um bom exemplo disto se encontra na indústria da mobilidade, que deve ser capaz de produzir veículos com características atrativas aos seus consumidores, apresentando um ótimo conforto acústico aos passageiros do veículo e ao mesmo tempo respeitando os outros indivíduos e o meio ambiente. Além disso, os projetos devem ser concebidos com o intuito de um uso inteligente dos materiais, aproveitando-se ao máximo a sua capacidade para uma aplicação específica, e assim tornando-se competitivo.

Estudos extensivos vêm sendo conduzidos para o desenvolvimento de modelos analíticos

que reflitam o comportamento de materiais poroelásticos usados em acústica. Esses modelos são usados para predizerem a propagação de ondas acústicas e elásticas em materiais com comportamento poroelástico. Nos últimos trinta anos, vários modelos numéricos utilizando o método dos elementos finitos para a modelagem do fenômeno de absorção acústica foram desenvolvidos, devido a sua grande aplicação na comunidade acadêmica e industrial, aliado ao fato da necessidade de um modelo eficiente e de baixo custo. Aliados a estes métodos de modelagem, nos últimos anos, metodologias de otimização vêm ganhando ênfase na indústria mecânica, com o intuito de se produzir cada vez melhor com cada vez menos recursos.

Para a aplicação destes materiais em aeronaves comerciais, por exemplo, deseja-se um isolamento acústico eficiente e que proporcione conforto e qualidade sonora aos passageiros. Este sistema, dito passivo, em associação com outros, ditos ativos, realizam o controle de ruídos em uma aeronave. As propriedades, as configurações, as formas e a localização de camadas de materiais poroelásticos são fatores na maximização da absorção acústica de sistemas como este.

Em muitas indústrias automobilísticas, o projeto de isolamento acústico em seus habitáculos passam por diversas etapas. A validação da eficiência destes em sua maioria vem de análises experimentais as quais refletem, em testes, o desempenho e a absorção acústica dos sistemas absorvedores escolhidos. Com a utilização de modelos numéricos confiáveis, algumas etapas poderiam se tornar mais rápidas desde que a ferramenta disponibilizada para o projetista seja um ambiente virtual onde se reproduza numericamente, com boa representatividade, os fenômenos de um teste, que em sua grande maioria se torna oneroso e de alto valor agregado ao produto final.

Atualmente, na literatura, algumas metodologias de projeto de sistemas absorvedores foram propostas. Como exemplo, para se controlar a radiação acústica em estruturas e cavidades, uma estratégia é controlar o nível de vibração superficial estrutural reduzindo assim o nível de pressão sonora dentro da cavidade. Outra estratégia consiste no controle do som radiado pela estrutura para fora da cavidade. Como este problema é acoplado, as propriedades de vibração estrutural são afetadas pelas propriedades de isolamento do meio poroso, podendo levar a situações onde a redução do ruído interno na cavidade é mascarado

pelo aumento do nível de vibração estrutural em uma determinada faixa de frequência.

No presente trabalho, modelos numéricos aliados a uma metodologia numérica de otimização são propostos, implementados, testados e usados para determinarem as características geométricas e topológicas de sistemas ótimos de absorção acústica. Um exemplo disto é a determinação da geometria de construções complexas de materiais absorvedores em cavidades acústicas.

1.1 Motivação e Objetivos

A relevância do estudo de soluções ótimas de estruturas contendo materiais poroelásticos está no fato de uma ampla aplicação e ainda de haver um grande interesse comercial e estratégico, já que gerará aporte de conhecimento e redução do custo e do tempo de desenvolvimento de novos produtos.

Pacotes comerciais que modelam dispositivos com domínios poroelásticos e acústicos buscam a predição do comportamento destes sistemas, mas não a obtenção de soluções ótimas a determinadas condições de projeto, mostrando-se assim que a linha de pesquisa proposta é pertinente e representa uma contribuição para a comunidade científica.

Como motivação da linha de pesquisa, atualmente busca-se o uso inteligente dos recursos em projeto de isolamento acústica em seus diversos campos de aplicação. Em geral os materiais típicos utilizados no controle passivo possuem um baixo desempenho de absorção no domínio das baixas frequências, e sendo justamente nas baixas frequências, onde as fontes acústicas possuem alta densidade energética, ou alto nível de pressão sonora (“SLP - Sound Level Pressure”), aliado a isto atualmente as normas de conforto acústico estão cada vez mais rigorosas, exigindo portanto projetos que utilizem bem os seus recursos materiais.

Neste trabalho, propõe-se uma nova metodologia de otimização de projetos de isolamento acústica, baseada em técnicas de computação e análise numérica, para o desenvolvimento de um programa eficiente de otimização de topologia, que auxilie na tomada de decisões de um projeto de isolamento acústica e que seja de acesso livre para a comunidade científica que desenvolve pesquisa nesta área.

Neste contexto, esta pesquisa possui os seguintes objetivos gerais:

- Criar uma metodologia científica para síntese topológica de sistemas poroelásticos

usando os métodos de homogeneização e densidades (SIMP).

- Criar uma metodologia para a síntese das propriedades de absorção acústica e transmissibilidade dos materiais absorvedores.
- Criar uma ferramenta computacional para otimização topológica de sistemas acoplados poroelásticos com aplicação nas baixas frequências.
- Aplicação em projetos com geometrias fechadas bidimensionais e tridimensionais.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Aplicar a metodologia de base numérica de materiais Poro-Acústicos no projeto de painéis absorvedores acústicos.
- Criar uma ferramenta computacional livre, ou seja, disponível a comunidade científica, que auxilie de forma eficiente os engenheiros e projetistas na construção de sistemas absorvedores.
- Estudar e implementar computacionalmente alguns modelos da poroelasticidade: formulação de fluido equivalente e a formulação mista (u, p) , determinando qual formulação é a mais adequada ao problema de otimização proposto, segundo critérios de precisão e de custo computacional.
- Implementação e testes de métodos eficientes de álgebra computacional, visando a redução do custo computacional das análises.
- Interagir com grupos de pesquisa desenvolvedores das principais formulações em uso na atualidade, buscando-se o aprofundamento dos conceitos teóricos e físicos da modelagem microscópica-macroscópica da poroelasticidade acoplada.

1.2 Principais Contribuições e Organização do Texto

O presente trabalho apresenta uma formulação conhecida e testada para o estudo da poroelasticidade acoplada com aplicações em problemas de vibro-acústica, (Atalla et al., 1998) e (Atalla et al., 2001b). Utilizou-se de técnicas de otimização numérica e contribuiu-se para

a construção de uma metodologia sistemática no projeto de sistemas absorvedores baseado na busca de uma topologia ótima de estruturas porosas utilizadas em acústica e no valor global de sua absorção acústica aplicado no domínio das baixas frequências. Na Figura (1.1), a metodologia proposta de projeto topológico de sistemas de absorção acústica é colocada como um problema de otimização.

A definição do problema é baseada em uma lei de mistura que envolve os campos poroelásticos e acústicos combinados, usando-se estratégias de modelagem contínua e discreta. A aproximação dos modelos é baseada no método de elementos finitos. Os métodos de análise de sensibilidade são desenvolvidos para o modelo proposto e as técnicas de otimização usadas são os métodos evolucionários e os de otimização topológica (método das densidades).

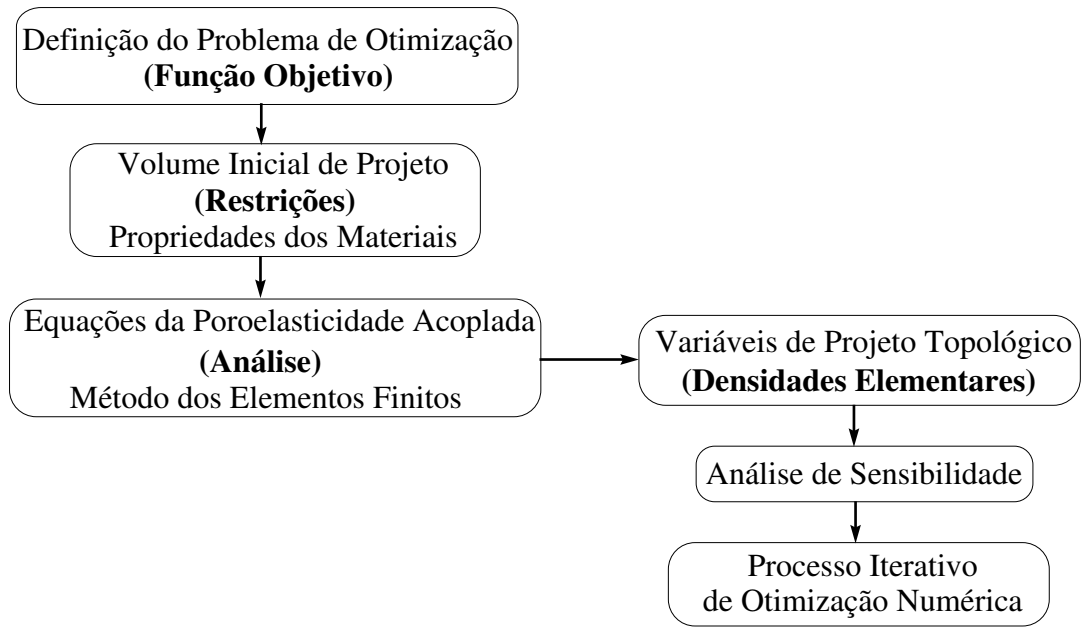


Figura 1.1: Metodologia de Projeto de Sistemas de Absorção Acústica

As variáveis elementares (densidades) do projeto topológico indicam a presença do isolador acústico ou do ar.

Outra contribuição foi a construção numérica de modelos de células periódicas Poro-Acústicas baseadas nas técnicas de Homogeneização. A determinação de novas configurações que maximizem o desempenho de dispositivos de absorção acústica, baseados em

formulações e modelos numéricos, consistiu em uma das principais contribuições deste trabalho, e podem ser aplicadas para o desenvolvimento de novos materiais fono-absorvedores.

O interesse no desenvolvimento de métodos numéricos e de otimização em Vibroacústica nasceu da experiência acumulada no Departamento de Mecânica Computacional neste tema, onde em trabalhos anteriores foram evidenciados vários fenômenos acústicos e aplicações variadas de materiais poroelásticos (Campos, 1995) e no trabalho de (Nunes, 2001), onde foram explorados através de investigação teórica e experimental, os efeitos da presença de materiais absorvedores em um modelo experimental de um habitáculo veicular.

O presente trabalho está organizado conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2, apresenta-se uma descrição da evolução da pesquisa em meios heterogêneos e aplicações da Homogeneização em problemas Fluido-estrutura acoplados. Alguns conceitos da homogeneização numérica são abordados neste capítulo. A seguir, uma revisão histórica da literatura sobre os modelos numéricos aplicados na poroelasticidade, as técnicas de otimização numérica e aplicações em projetos de isolamento acústica são apresentadas.

O Capítulo 3 traz um estudo da teoria da poroelasticidade, as propriedades e características dos materiais absorvedores, dos fenômenos de propagação de ondas em materiais poroelásticos e das hipóteses simplificadoras do fenômeno. O método dos elementos finitos aplicado na poroelasticidade é apresentado e as formulações implementadas computacionalmente são comparadas. Alguns aspectos necessários à modelagem do problema de propagação acústica, também são discutidos, como por exemplo: as condições de interface e acoplamento necessárias entre os domínios Poroelástico e Acústico e a excitação do sistema através de um modelo semi-analítico para um guia de onda retangular.

O Capítulo 4 trata do posicionamento do problema de otimização topológica proposto com aplicação em sistemas de absorção acústica. A definição da função objetivo e suas restrições são apresentadas. A modelagem do material composto por uma fase Porosa e uma fase Acústica é proposta em função de variáveis de densidade contínuas e discretas.

No Capítulo 5 são apresentados aspectos relativos ao desenvolvimento da análise de sensibilidade da função objetivo. A análise de sensibilidade apresentada consistiu em estudos da variação da absorção acústica com respeito às variáveis de projeto topológico, em

duas descrições: uma contínua e outra discreta. Algumas aplicações numéricas também são apresentadas neste capítulo e validadas com o método de diferenças finitas.

O Capítulo 6 contém a validação dessa metodologia de projeto ótimo proposta. Primeiramente o código de elementos finitos (método de análise) é validado. Alguns resultados preliminares de otimização são discutidos, onde análises sistemáticas e de variação de parâmetros são apresentadas. A seguir, a otimização de uma célula Poro-Acústica periódica foi realizada em diversas condições de análise, como por exemplo em pontos de frequência distintos. Resultados de diferentes formulações para descrição da função objetivo também foram comparados. A técnica de otimização evolucionária e o método das densidades (SIMP) foram aplicados em diversas condições.

No Capítulo 7, apresentam-se as conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros nesta área de pesquisa.

Este trabalho abre perspectivas para aplicações maiores, onde se está interessado em projetos e na determinação de soluções ótimas para sistemas absorvedores acústicos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, apresenta-se uma discussão sobre a homogeneização e o projeto de sistemas poroelásticos saturados no domínio das baixas frequências. Serão abordados alguns aspectos teóricos preliminares sobre a otimização de materiais e sobre as descrições físicas acopladas adotadas neste trabalho, discutindo-se alguns dos conceitos de trabalhos pioneiros nestas áreas. Finalmente, procura-se situar o presente trabalho dentro do panorama de pesquisas da área.

2.1 A homogeneização em problemas Fluido-Estrutura

Uma grande variedade de materiais compostos, porosos e deformáveis podem ser modelados como uma mistura sólido-fluida. Geralmente, as geometrias das interfaces entre as fases não é conhecida. Neste contexto foram desenvolvidas as técnicas de homogeneização.

A homogeneização tem aplicação em muitos campos da Engenharia, como por exemplo: Hidrologia, Vibroacústica, Mecânica dos Solos, Petróleo, Biomecânica, entre outros. O tratamento teórico de misturas sólido-fluidas foi alvo de estudo de muitos pesquisadores e amplamente discutido nos trabalhos de (Terzaghi, 1943) e de muitos outros autores no início do século XX.

Em Mecânica dos Solos, o problema de consolidação vem sendo estudado para aplicação nos projetos de fundações. Tal fenômeno consiste no processo de diminuição de volume do solo, resultam da aplicação de um carregamento externo sobre este. O problema de consolidação unidimensional foi estabelecido inicialmente por Terzagui, um dos pioneiros da Mecânica dos Solos moderna e talvez o mais célebre entre os pesquisadores desta área.

Em seus trabalhos, através de uma aproximação mecanicista, Terzagui introduziu o conceito de tensão efetiva, estudo que influenciou muitos outros autores nesta linha de pesquisa. Entre os mais conhecidos, cita-se o trabalho de (Biot, 1941). A tensão efetiva corresponde à soma de todas as tensões presentes no meio heterogêneo, originárias dos diversos componentes homogêneos do solo.

Em (Biot, 1956) foi utilizada a idéia de Terzagui para o desenvolvimento da teoria da consolidação em um espaço tridimensional para corpos isotrópicos e deformáveis. A teoria de Biot foi apresentada no domínio das baixas e altas frequências constituindo o corpo poroso como uma matriz elástica saturada com fluido incompressível.

Outros tipos de aproximações foram feitas, por exemplo: o trabalho de (Fillunger, 1998), baseou-se em teorias clássicas de grandes físicos do século XIX como Maxwell, Rayleigh, Kelvin entre outros, os quais estudaram o processo de difusão e a dinâmica de misturas líquidas e gasosas.

Com o desenvolvimento das teorias de campo clássicas, as formulações passaram a usar o conceito de continuidade das propriedades. Este enfoque foi originalmente desenvolvido por (Truesdell e Toupin, 1960) como um ramo da mecânica do contínuo. Cada fase é governada por um campo de equações separadas e acopladas. O acoplamento mecânico entre as fases é representado por médias ao longo do contínuo através de uma regra de mistura. A teoria da mistura contínua foi estendida e melhorada, estimulando muitos pesquisadores em campos da Ciência e Engenharia.

As teorias de misturas sólido-fluida foram bem adaptadas para problemas de Engenharia. A teoria de Terzagui e Biot, também conhecida como a teoria da poroelasticidade, foi amplamente usada nas análises do fenômeno de consolidação, processo determinante de um solo e na análise de fenômenos acoplados entre tensão e difusão com fluxo em rochas (percolação).

Embora o sucesso das teorias das misturas em mecanismos teóricos seja evidente, essas aproximações são macromecânicas, pois se baseiam em equações globais de campo, originárias geralmente, sem especificação da geometria microestrutural. Neste caso, a resposta mecânica macroscópica substitui a resposta microscópica através de variáveis físicas globais e as fases são assumidas como se ocupassem um determinado espaço de controle de

forma simultânea.

Neste contexto, todas as teorias clássicas de misturas do tipo sólido-fluida são referenciadas em frações volumétricas, ou seja, o comportamento microestrutural é descrito através da proporção volumétrica de cada fase.

Com o aumento da utilização dos materiais compostos nos anos 50, ampliou-se o interesse nos estudos dos efeitos específicos das configurações microestruturais. O principal interesse neste campo de pesquisa é achar as propriedades efetivas globais de estruturas compostas através da relação entre microestruturas em escalas locais com o comportamento macroscópico. Para tais materiais, tornou-se relativamente fácil especificar a geometria microestrutural, principalmente de compostos industriais, tais como agregados policristalinos e compostos produzidos por meios de embutimento e reforço. Várias dessas aproximações utilizaram geometrias definidas localmente e denominadas de elemento volumétrico representativo (RVE - “representing volume element”). O volume “RVE” representa o mínimo finito do material heterogêneo, sobre o qual os valores médios das propriedades possam ser determinados.

O estudo dos micromecanismos e das propriedades das fases individuais relacionadas ao comportamento mecânico de compostos, introduziram várias expressões analíticas das propriedades efetivas do material, possibilitando uma grande flexibilidade no projeto de materiais compostos. Embora tais técnicas ajudem na compreensão do efeito que cada fase tem sobre o comportamento macroscópico global de um material composto, a maioria destas não consegue reproduzir de forma satisfatória a resposta micromecânica. O desenvolvimento histórico das análises RVE pode ser achado em extensiva pesquisa e livros textos de referência (Sanchez-Palencia, 1980).

As análises RVE incluem os mecanismos dos efeitos específicos das microestruturas sobre o comportamento mecânico global de compostos, sendo tal aspecto impossível de se obter para as teorias de mistura, uma vez que estas são originárias de equações de campo macroscópico, definidas como problemas de valor inicial e de contorno.

A teoria matemática do método de homogeneização apresenta características dos dois métodos, o da teoria das misturas e da aproximação por elementos RVE.

Ao se aplicar as técnicas de homogeneização aos problemas em que exista interação

entre as fases, como por exemplo, nos meios sólidos porosos, elásticos e fluido saturados, caracterizando-se assim os comportamentos macro e micro-mecânicos da mistura. Tal método permite a introdução de equações diferenciais de campo em uma escala microscópica para cada constituinte de uma mistura sólido-fluida e não viola o conceito da análise RVE.

A teoria da homogeneização é conhecida como uma contrapartida às análises RVE e é baseada no método das expansões assintóticas de variáveis, cuja aplicabilidade em meios heterogêneos foi primeiramente apresentada por (Benssousan et al., 1978). Outros autores resolveram muitos problemas subjacentes à mecânica de materiais compostos ou em meios porosos com microestruturas periódicas, mais tarde denominadas de células unitárias.

Sanchez-Palencia, um autor contemporâneo que vem estudando a teoria da homogeneização, mostra muitas aplicações em mecânica em seus trabalhos (Sanchez-Palencia, 1980).

Babuska, em seus trabalhos, aplicou estas técnicas com o uso da matemática aplicada, e também estudou a teoria do ponto de vista da análise numérica, denominando esta metodologia de método de homogeneização numérica (Babuska, 1976). Outros autores estudaram o método da homogeneização usando expansões de Fourier generalizadas e contribuíram bastante para o seu desenvolvimento teórico.

O método de homogeneização tem sido aplicado em vários problemas da mecânica dos sólidos com ênfase nos materiais compostos usuais. Os tipos constituintes nestes materiais não são essenciais na formulação. Nos trabalhos de Lévy e Sanchez-Palencia, utilizando-se de microestruturas periódicas, verificou-se que o procedimento de homogeneização para um fluxo de Stokes na microestrutura de um esqueleto sólido resulta na macroescala em um fluxo sobre um meio poroso, o qual é governado pela lei constitutiva de Darcy. Uma variedade de formulações de homogeneização para outros tipos de problemas em fluido dinâmica também pode ser encontrada na literatura.

O procedimento de homogeneização pode ser aplicado para um sólido elástico com fluido saturado ou em um fluido com partículas rígidas. Neste caso a viscosidade do fluido desempenha um importante papel na descrição da interação entre as fases sólidas e fluida da microestrutura, já que os seus efeitos dissipativos estão relacionados à sua geometria.

A importância dos parâmetros efetivos na modelagem constitutiva em mistura sólido-

fluida foi primeiramente antecipada por Babuska.

A aplicação das leis da mecânica do contínuo em meios porosos implica na continuidade das fases envolvidas. Fisicamente, valores e propriedades podem ser definidos para cada ponto: porosidade, permeabilidade, tortuosidade, etc. Desta forma se garante a existência das derivadas espaciais e caracterizando-as como funções contínuas.

A evolução histórica e conceitual da análise do comportamento de meios heterogêneos, serviu de base para o desenvolvimento da homogeneização numérica em células periódicas compostas. Tal teoria será aplicada neste trabalho. A dinâmica dos materiais intermediários, compostos por fase porosa e outra acústica, é um resultado do modelo de interpolação a ser apresentado e discutido neste trabalho.

2.2 Teoria da Homogeneização de um meio com estrutura periódica

O processo de homogeneização é baseado na seguinte questão: “Um meio heterogêneo pode ser representado por um contínuo equivalente?” (Sanchez-Palencia, 1980). A idéia de descobrir um material macroscopicamente equivalente cujo comportamento médio representa o material heterogêneo é antiga e clássica.

Tal técnica pode ser definida como um processo natural de modelagem do comportamento de estruturas consideradas complicadas a partir de microestruturas conhecidas. A Figura (2.1) ilustra o princípio e o processo de homogeneização de um material.

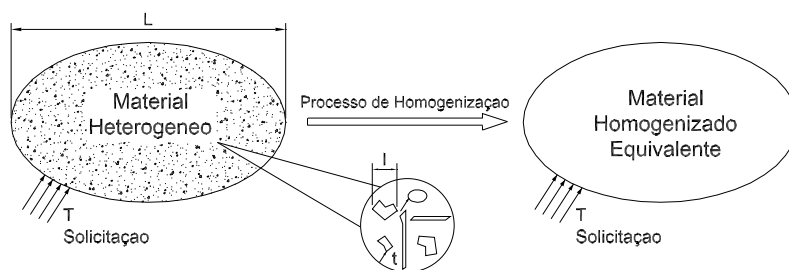


Figura 2.1: Processo de Homogeneização de um domínio Ω

Tal processo permite a substituição de um meio não homogêneo por um material homogêneo equivalente. A partir do modelo homogeneizado, pode-se formular o problema de otimização que busca a melhor composição da estrutura para um requisito especificado.

A homogeneização transforma o problema original em um factível. O problema simplificado deve refletir a maioria das características do problema original. Os coeficientes das equações homogeneizadas dependem da microestrutura.

Do ponto de vista matemático, a teoria da homogeneização numérica utiliza expansões assintóticas e periodicidade para substituir as equações diferenciais com coeficientes que oscilam rapidamente por equações diferenciais cujos coeficientes são constantes ou variam lentamente. Matematicamente, a expansão periódica e assintótica pode ser representada da seguinte forma (Hassani e Hinton, 1998):

$$F(x + Ny) = F(x) \quad (2.1)$$

onde F é uma função periódica escalar ou vetorial, N é uma matriz diagonal de números inteiros arbitrários, x e y são grandezas vetoriais que representam as escalas macro e microscópicas, respectivamente. O vetor x é uma grandeza global e possui variações lentas e o vetor y é uma grandeza local com oscilações rápidas.

Na Figura (2.2), a função $F(x)$ é apresentada, mostrando os dois comportamentos, o macroscópico homogeneizado e o microscópico em uma escala ampliada para se entender o processo.

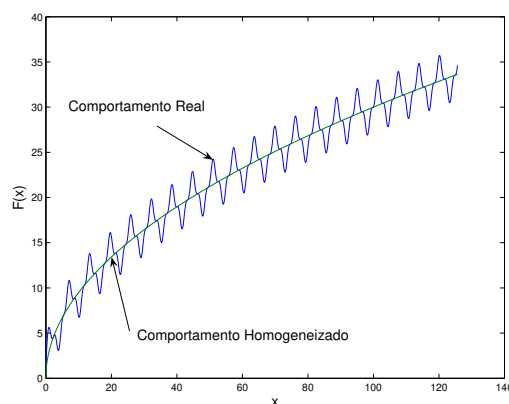


Figura 2.2: Macro e Micro comportamento da Função $F(x)$

Isolando um período, denominado de período Y (célula unitária), nota-se que a função $F(x, y)$ deva ser suave e periódica, qualidades importantes ao processo de homogeneização.

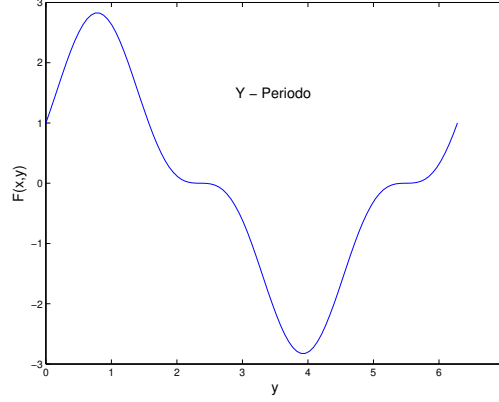


Figura 2.3: Comportamento da Função $F(x, y)$ na célula unitária Y

No gráfico descrito na Figura (2.3), percebe-se que a periodicidade ocorre ao nível macroscópico e que a chamada célula unitária de volume Y corresponde ao nível que se pode identificar a função microscópica.

Um aspecto importante ao desenvolvimento matemático da homogeneização é que a média da função $F(x, y)$ sobre o período Y é nula, Equação (2.2). Tal afirmação pode ser justificada pelo comportamento médio microscópico correspondente a função macroscópica homogeneizada, conforme descrito na Figura (2.2). Baseado-se nisto, a derivada desta função também é periódica e de mesmo período da função que a originou, possuindo assim média sobre o seu período igual a zero, Equação (2.3). Em forma de equações, tais fatos são descritos a seguir:

$$\int_Y F(x, y) dy = 0 \quad (2.2)$$

e para a derivada da função $F(x, y)$:

$$\int_Y \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = 0 \quad (2.3)$$

A técnica de homogeneização pode ser utilizada quando as escalas micro e macroscópicas de um meio, com comprimentos característicos l e L , respectivamente, possuem ordens de magnitudes diferentes. No processo de homogeneização, algumas variáveis são definidas em função de um parâmetro adimensional de pequeno valor relativo, $\epsilon = l/L$. As duas variáveis espaciais dependentes x e $y = x/\epsilon$ são utilizadas para descrever os estados macro e micro, respectivamente.

A micro-estrutura porosa homogeneizada é assumida como periódica, com um período Ω , implicando em periodicidade local geométrica e de seus parâmetros físicos, Figura (2.4). A micro-estrutura porosa é constituída por um domínio fluido Ω_f , um domínio estrutural Ω_s e uma Interface fluido-estrutura Γ .

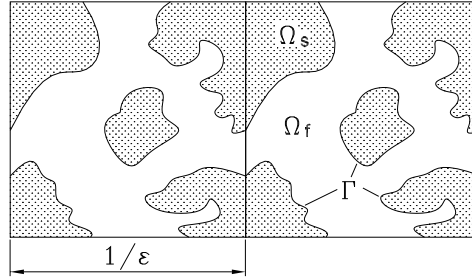


Figura 2.4: Microestrutura periódica de um meio poroso

Considerando-se que o domínio Ω possua um comprimento característico L , apresentando um grande número de períodos (ϵ^{-1}), tem-se que o comportamento físico com respeito a x pode ser descrito em um estado contínuo e homogeneizado. A partir da técnica de homogeneização, as heterogeneidades ao nível microscópico podem ser suavizadas.

Seja a quantidade v , relativa ao meio, a qual descreve alguma propriedade física ou mecânica do sistema, dependente da variável x e de pequenas heterogeneidades (ϵ). O estado homogeneizado pode ser descrito através de valores limites de v na situação em que ϵ tenda a zero. Nos meios poroelásticos, o tamanho do poro não é zero, entretanto o método leva a uma primeira aproximação do comportamento equivalente macroscópico. Heuristicamente, a homogeneização da variável v pode ser dada como se segue na Equação (2.4):

$$\begin{aligned}
v &= v_\varepsilon(x) = v(x, x\varepsilon^{-1}) \\
v(x, y) &= v^0(x, y) + \varepsilon v^1(x, y) + \varepsilon^2 v^2(x, y) + \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde v_ε é a variável avaliada ao nível macroscópico, v^i é a descrição de v no i -ésimo período Ω , introduzida a partir da solução local assintótica das equações governantes. As potências de ε são identificadas e caracterizadas durante o processo de homogeneização (Auriault et al., 1985).

Para a aplicação no campo da acústica, a magnitude das heterogeneidades ε é pequena para o caso dos materiais absorvedores empregados nos projetos acústicos, os quais possuem espessuras de dimensões consideráveis, como por exemplo: lã de vidro, lã de rocha, etc. Este fato delimita o campo de aplicação da técnica de Homogeneização (Olby e Boutin, 2003).

2.3 Revisão Histórica

Neste item será apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento dos modelos teóricos, formulações numéricas e da base teórica de otimização desenvolvida e aplicada em projetos de acústica. Este item será dividido em três partes. A primeira parte relata as contribuições científicas e experimentais que ajudaram a compor a teoria da Poroelasticidade, a segunda trata dos aspectos numéricos e computacionais para resolução de alguns problemas com materiais porosos e a terceira traz uma evolução histórica das técnicas de otimização topológica que serviram de base para a aplicação deste trabalho.

2.3.1 A teoria da Poroelasticidade

Nos trabalhos de (Eijk e Zwikker, 1941), (Zwikker et al., 1941a), (Zwikker et al., 1941b) e (Zwikker, 1941), apresentam-se os fundamentos teóricos dos materiais absorvedores usados em acústica, bem como uma discussão dos novos parâmetros físicos introduzidos. Técnicas de medições de propriedades acústicas e parâmetros físicos dos materiais absorvedores são exemplificados em uma montagem experimental.

Em (Biot, 1962), é reescrita a teoria clássica de Biot apresentada em 1956, agora para problemas de propagação de ondas acústicas em meios porosos com extensão a casos de anisotropia, viscoelasticidade e dissipação do sólido. Vários modelos dissipativos são discutidos, bem como seus funcionais correspondentes. Um método funcional e um Lagrangiano são utilizados para compor os termos de energia de diferentes sistemas. Processos químicos de meios porosos multifásicos incluindo efeitos superficiais em uma visão da teoria da termodinâmica também são mencionados, bem como a natureza de dissipação termoelástica e efeitos eletrocínéticos.

No trabalho (Rice e Cleary, 1976), os autores apresentam uma formulação modificada para a Teoria da Poroelasticidade de Biot, sendo propostas novas constantes com outro significado físico e de mais fácil entendimento. É estudado ainda o problema de um meio poroso contendo um fluido compressível.

Em (Johnson et al., 1987), um estudo das características físicas conhecidas de um fluido confinado em um poro de um meio poroso isotrópico é feito para uma posterior definição de parâmetros como o comprimento viscoso e térmico, características dinâmicas de materiais porosos. A evolução da tortuosidade e da permeabilidade em função da frequência são estudados a partir de um enfoque teórico e experimental.

Em (Depollier et al., 1988), um modelo comparativo das equações de Biot é construído para uma melhor aproximação das propriedades acústicas de materiais absorvedores de som. Novos termos dos coeficiente de Biot são escritos.

O trabalho (Champoux e Allard, 1991) apresenta um modelo teórico da tortuosidade dinâmica em função da frequência. Os resultados teóricos obtidos são comparados com os resultados de uma análise experimental de medidas acústicas sobre um material poroso rígido e saturado de ar.

Em (Leclaire et al., 1996a) é feita uma explanação sobre os significados físicos dos comprimentos característicos viscoso e térmico de um material poroelástico. Uma discussão sobre novas técnicas experimentais usando-se o gás Hélio para análise da transmissibilidade em frequências ultrasônicas é apresentada. A proposta deste trabalho está no novo método de determinação simultânea de ambos os comprimentos característicos de uma forma precisa e confiável.

Em (Leclaire et al., 1996b) os autores apresentam um estudo sobre o comprimento característico viscoso que é usado para descrever o comportamento acústico de um meio poroso saturado por fluido em altas frequências. Uma comprovação experimental destes efeitos é apresentada. A determinação experimental deste parâmetro se dá através da técnica de medidas de atenuação ultrasônica. Os valores são comparados através do ajuste não-linear de curvas de dispersão.

Neste panorama, pode-se observar o grande interesse no uso de materiais e modelos matemáticos confiáveis na área de acústica envolvendo materiais porosos fonoabsorvedores. Apesar da maciça contribuição de pesquisa nesta área, é possível esperar-se novas contribuições, à medida que novos materiais são sintetizados.

2.3.2 As Formulações Numéricas na Poroelasticidade

Em (Craggs, 1978), um modelo numérico de elementos finitos isoparamétricos com oito nós é usado para prever o comportamento da absorção acústica de materiais porosos rígidos. Resultados de simulações unidimensionais e bidimensionais mostram o efeito sobre os modos de propagação sonora. Valores analíticos de impedância também são citados neste texto.

O trabalho de (Craggs, 1979) mostra o procedimento do acoplamento de elementos acústicos com elementos porosos em um modelo de absorção acústica. A comprovação do método é feita através da comparação de resultados analíticos com outros obtidos em um tubo de impedância.

Em (Craggs, 1985) uma simplificação teórica do comportamento de absorção de materiais porosos é apresentada em termos da resistividade e densidade efetivas. Comprovações experimentais em uma cavidade acústica com a presença de materiais absorvedores são feitas. Aplicações de Engenharia e possibilidades de aplicações industriais são citadas pelo autor.

Em (Kang e Bolton, 1995), há o desenvolvimento de um modelo bidimensional elastodinâmico baseado na técnica de elementos finitos para materiais elásticos porosos usados no controle passivo de ruídos. É aplicada a formulação (u, U) , deslocamento da fase sólida (u) e deslocamento da fase fluida (U), com um acoplamento de domínios acústico-poroelástico para exemplos de tubos de impedância sob diversas condições de contorno.

Em (Goransson, 1995b) uma formulação residual fraca para o problema acoplado de propagação de ondas acústicas e elásticas através de materiais porosos flexíveis é apresentada para um caso unidimensional em termos da pressão acústica e do campo de deslocamento estrutural. O efeito de uma estrutura fibrosa é discutido em uma síntese de um problema fluido-estrutura em baixas frequências pelo estudo da transmissibilidade acústica através de uma parede dupla.

Em (Goransson, 1995a) uma nova formulação residual é desenvolvida levando em conta os fatores inerciais e acoplamentos fluido-estrutura. A formulação apresentada por este autor resulta em simetria do problema acoplado, já que um novo campo de variáveis é introduzido: o potencial de velocidades.

Para (Panneton e Atalla, 1997a), uma formulação de elementos finitos baseada na teoria clássica de Biot-Allard pode ser usada para a solução de problemas tridimensionais da poroelasticidade acoplada. Um esquema de programação das matrizes na formulação (u, U) é colocada em evidência. Os acoplamentos entre o fluido presente na matriz estrutural e os diversos acoplamentos entre os campos acústicos e poroelásticos são detalhados. Para um exemplo numérico que mostra o efeito da presença de um material absorvedor poroelástico dentro de uma cavidade acústica tridimensional são obtidas medidas globais do comportamento dinâmico de pressão.

Em (Panneton e Atalla, 1997b), linearizações dos termos das equações acopladas da poroelasticidade de Biot são propostas pelos autores, já que em trabalhos anteriores, nota-se que a técnica de elementos finitos aplicada em problemas dinâmicos poroelásticos recai em análises de problemas de autovetores e autovalores não-lineares.

Em (Atalla et al., 1998), uma formulação mista de deslocamento estrutural e pressão intersticial do fluido (u, p) é apresentada. A formulação é originária das equações clássicas da poroelasticidade de Biot acrescida do modelo de Allard (Allard, 1993). Faz-se uma implementação computacional baseada nas técnicas de elementos finitos, de forma acoplada, para o problema fluido-estrutura envolvendo as equações dinâmicas de uma matriz estrutural no vácuo e de um modelo equivalente fluido acústico de Helmholtz. Uma outra discussão pertinente neste trabalho é o ganho de tempo em processamento obtido pelo uso da formulação (u, p) em comparação com as formulações desenvolvidas por Biot-Allard

(u, U) .

Em (Debergue et al., 1999) são apresentadas as diversas condições de contorno e acoplamento para a formulação fraca mista (u, p) para materiais poroelásticos. O estudo torna evidentes as vantagens de se usar a formulação mista (u, p) quando comparada com a formulação (u, U) , devido às montagens das matrizes de acoplamento entre os vários domínios, acústico, poroelástico e elástico.

Em (Atalla et al., 2001b), a formulação mista de materiais poroelásticos desenvolvida em (Atalla et al., 1998) e (Debergue et al., 1999) é reapresentada e expandida aos domínios Acústicos-Elásticos-Poroelásticos. Uma formulação mista modificada é desenvolvida, de tal forma a construir um acoplamento natural entre os domínios poroso e elástico. Neste trabalho, os coeficientes, a montagem das matrizes de elementos finitos, o acoplamento acústico, elástico e poroelástico e a imposição das condições de contorno de tais acoplamentos são discutidos, definindo uma referência adequada entre as formulações desenvolvidas e o acoplamento a ser modelado.

Trabalhos posteriores de aplicação numérica e validação experimental foram desenvolvidas pelo grupo GAUS (Groupe d'acoustique de l'Université de Sherbrooke) de Sherbrooke, Canadá em cooperação com o grupo LASH (Laboratoire des sciences de l'habitat) do Professor Sgard da ENTPE (École Nationale des Travaux Publics de l'État) em Lyon, França. Ainda no desenvolvimento de formulações, destaca-se o trabalho de (Rigobert et al., 2004), o qual cria uma metodologia geral de montagem de sistemas para diversos domínios acoplados: elástico, acústico e poroelástico.

As contribuições dos trabalhos do nosso grupo, (Silva e Pavanello, 2003) e (Silva e Pavanello, 2004a), estão relacionadas à implementação e testes das formulações desenvolvidas e encontradas na literatura, em um ambiente de programação Orientada a Objetos aliada a linguagem C++. No trabalho (Silva e Pavanello, 2004b), utilizando-se uma modelagem com elementos finitos poroelásticos para a prescrição da resposta de absorção, algumas variações geométricas para dispositivos de isolamento acústica têm seus diversos resultados confrontados.

2.3.3 A Homogeneização e a Otimização Topológica

Atualmente, as técnicas de otimização topológica são bastante utilizadas em problemas de Engenharia. No presente trabalho, uma síntese e uma breve revisão histórica desta linha de pesquisa é apresentada. As primeiras aplicações desta metodologia foram na área Estrutural, mas atualmente podem-se encontrar aplicações em outros campos de pesquisa.

O livro de (Sanchez-Palencia, 1980) apresenta aspectos e conceitos físicos da homogeneização das propriedades de materiais heterogêneos.

No trabalho de (Babuska, 1976), a técnica de homogeneização é discutida e um novo procedimento específico para coeficientes de grandes oscilações é desenvolvido, baseando-se na transformada de Fourier. Ainda sobre o foco da homogeneização, (Bourgat, 1979) apresenta a solução da homogeneização de um problema de valor de contorno hiberbólico. Neste trabalho, várias geometrias para as células periódicas são testadas e validadas em testes numéricos.

Nos trabalhos de (Bendsoe e Kikuchi, 1988), (Bendsoe, 1989), (Guedes e Kikuchi, 1990) e (Susuki e Kikuchi, 1991), os autores utilizaram os resultados de homogeneização de células unitárias isotrópicas e elásticas para criar uma metodologia de otimização do material e assim obter a topologia ótima de estruturas submetidas a carregamentos externos. A metodologia numérica desenvolvida foi baseada no método de elementos finitos para descrição do comportamento da estrutura e obtenção das funções objetivo, sendo esta validada em problemas clássicos de otimização estrutural.

Os trabalhos posteriores de (Bendsoe et al., 1994), (Bendsoe et al., 1995) e (Bendsoe e Sigmund, 1999), cria-se uma necessidade de se representar de forma eficiente e não muito cara do ponto de vista computacional, o material intermediário, cuja representação é então baseada em modelos analíticos ou esquemas de interpolação matemática que garantam convergência ao ótimo.

O trabalho de (Thomsen, 1992) apresenta uma metodologia de interpolação de compostos constituídos por um ou dois materiais. A aplicação desta metodologia é feita em problemas estruturais e com o objetivo da maximização da rigidez.

No trabalho de (Terada et al., 1998), as equações de uma célula unitária composta por uma mistura de sólido elástico e um fluido viscoso regido pela Equação de Navier Stokes

em regime permanente são apresentadas e seus efeitos homogeneizados. O modelo da geometria da célula é tridimensional e tende a representar um poro preenchido por fluido. Com a descrição deste problema acoplado, o autor demonstra as condições necessárias para obtenção das mesmas equações da teoria da Consolidação de Biot, também conhecida como a teoria da poroelasticidade.

No livro de (Hassani e Hinton, 1998), uma revisão dos aspectos de homogeneização são apresentados e aliados às técnicas de otimização topológica estrutural. O referido autor reúne aspectos teóricos e práticos em uma única bibliografia. Esta referência traz em sua publicação, dois códigos computacionais que podem ser utilizados em problemas de otimização topológica estrutural, para diversas condições de contorno, diversos tipos de análises e funções objetivo.

O livro de (Bendsoe e Sigmund, 2003) apresenta vários aspectos atualizados da linha de pesquisa: Otimização Topológica. O referido autor não se restringe a problemas estruturais e faz uma grande revisão de aplicações de otimização conhecidas em problemas de Engenharia e Projeto Mecânico. Ainda do mesmo autor, (Sigmund, 2001a) apresenta um código de fácil implementação na linguagem Matlab, com algumas simplificações, pode-se resolver problemas de otimização topológica de estruturas com respeito à minimização da flexibilidade média (“compliance”) do sistema em diversas condições e solicitações. Utilizando-se do SIMP (“Single Interpolation Material with Penalization”) para interpolação e modelo do material e da metodologia de Condições de Otimalidade para resolver o problema de otimização numérica os resultados são apresentados de forma didática.

Os trabalhos de (Xie e Steven, 1993) e (Xie e Steven, 1996) e o livro (Xie e Steven, 1997) trazem aspectos e aplicações da técnica de otimização evolucionária. Desenvolvida e aplicada em problemas de otimização topológica estrutural, estáticos e dinâmicos, tal técnica baseia-se no efeito que um “indivíduo” contribui para a função objetivo. Para os casos em que se queira minimizar a função objetivo e caso a contribuição elementar seja pequena, tal elemento será um forte candidato a ser retirado do sistema. A Otimização Evolucionária pode ser vista como uma variação discreta para o material, baseando-se em uma metodologia de interpolação de materiais compostos, apresentada em trabalhos anteriores.

Trabalhos como os de (Bulman et al., 2001) e (Labanowski et al., 2004) trazem comparações entre metodologias de otimização topológica, algoritmos e códigos numéricos desenvolvidos pelos referidos autores. Mostra-se a eficiência dos métodos com aplicações em problemas clássicos e com soluções ótimas conhecidas.

Diversos trabalhos, baseados na análise de sensibilidade são feitos com aplicações em Otimização Estrutural (Arora e Haug, 1979). O trabalho de (Zheng-Dong e Hagiwara, 1991) traz diversas técnicas, diretas e iterativas, para obtenção da sensibilidade da resposta em frequência de Sistemas Acústico-Estruturais acoplados e com exemplos de aplicações na indústria automobilística.

Aspectos Numéricos e desenvolvimento de algoritmos matemáticos que aumentem a eficiência do “solver” de otimização, ou seja a busca pelo máximo ou mínimo de uma função restrita a condições de desigualdade e/ou igualdade têm sido discutidos na literatura. As revisões apresentadas nos trabalhos de (Arora et al., 1994) e (Arora et al., 1995) trazem estes aspectos. Seguindo a mesma linha de pesquisa, o trabalho de (Fuchs, 1981) apresenta a técnica SLP (“Sequential Linear Programming”) como estratégia de solução de problemas de otimização estrutural, a partir da linearização e na criação em sequência de subproblemas lineares, cuja solução é feita em um algoritmo padrão: o SIMPLEX. O trabalho de (Yang e Chuang, 1994) aborda a técnica de otimização linear ou programação matemática aplicado em problemas de topologia estrutural.

No presente trabalho, uma técnica de otimização numérica é utilizada para prever uma configuração topológica ótima de absorvedores acústicos modelados por elementos finitos em uma formulação acoplada. O modelo proposto para predição da função objetivo tem algumas particularidades, por envolver um modelo semi-analítico de propagação acústica em um guia de onda. O modelo do material é uma contribuição original a esta linha de pesquisa. Estabeleceu-se o comportamento e a sensibilidade de uma célula periódica composta por duas fases: Porosa e Acústica, modeladas segundo uma formulação de fluido equivalente, a propriedade de absorção de um sistema em escala macroscópica.

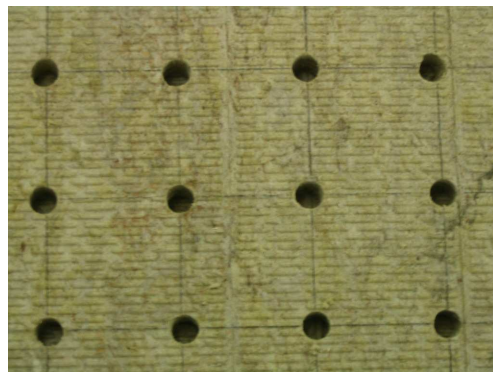
2.3.4 A Metodologia de Projeto de Isolação Acústica

Nesta seção, apresentam-se alguns trabalhos que já buscam soluções para a melhoria do desempenho de dispositivos e sistemas absorvedores em baixa frequência. Técnicas numéricas e experimentais vêm sendo desenvolvidas ao longo dos últimos anos. A nossa contribuição está em se aliar uma metodologia de otimização a uma descrição acoplada do sistema poroelástico absorvedor.

A homogeneização em meios poroelásticos a dupla escala é uma linha de pesquisa do grupo LASH (ENTPE - Lyon). Trabalhos científicos e teses vêm sendo feitos ao longo dos anos, buscando um desenvolvimento teórico e prático. Na Figura (2.5), é apresentada uma montagem de um painel a dupla escala, excitado por um sistema de alto falantes.



Painel absorvedor a dupla escala



Detalhe do painel absorvedor

Figura 2.5: Estudo do efeito da absorção em meios heterogêneos a dupla escala - ENTPE

Nesta linha de pesquisa, a tese de (Olny, 1999) apresenta os fundamentos teóricos da homogeneização a dupla escala em domínios heterogêneos poroelásticos. Os fundamentos relevantes a este tema são encontrados e dá-se ênfase a aspectos físicos e teóricos, tais como: a definição da micro, a meso e a macro escalas. A relação entre essas escalas e as condições de validade da teoria da Homogeneização são apresentadas em (Olny e Boutin, 2003). A dupla escala é apresentada na Figura (2.6).

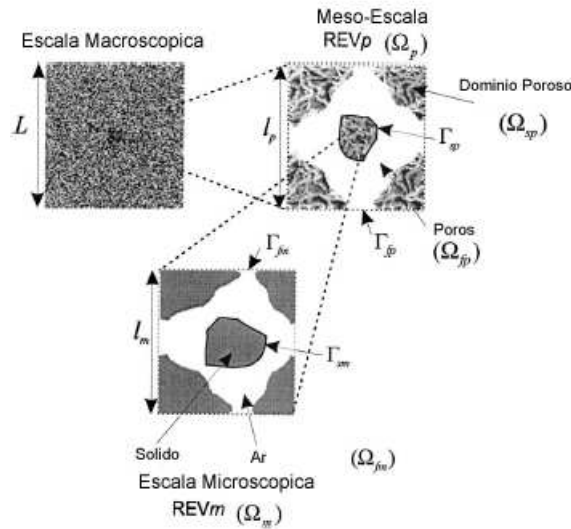


Figura 2.6: Processo de Homogeneização de um domínio a dupla escala (Olhy e Boutin, 2003)

Os trabalhos de (Atalla et al., 2001c) e (Sgard et al., 2005), tratam do mesmo assunto, porém com abordagem mais prática, numérico e experimental. Uma célula periódica Poro-Acústica é avaliada sobre diversas configurações geométricas e os resultados são validados segundo a teoria analítica da homogeneização e resultados experimentais. A tese de (Castel, 2005) apresenta importantes relações do modelo de elementos finitos, com uma completa descrição do acoplamento entre a decomposição modal para um guia de onda e um domínio poroelástico. Tal tese apresenta uma metodologia de refinamento numérico para problemas a dupla escala na poroelasticidade.

Uma outra revisão de métodos numéricos e formulações da poroelasticidade acoplada visando uma melhoria do desempenho de absorvedores acústicos é encontrada no trabalho de (Bécot e Sgard, 2006), no qual o autor busca uma metodologia de investigação dos efeitos de inclusão sobre a microestrutura do material absorvedor poroso.

O trabalho de (Sigmund e Jensen, 2003) traz um novo conceito para projeto de materiais absorvedores, o fenômeno de “band-gap”, bastante utilizado em dispositivos eletrônicos e fotônicos. Esta técnica também pode ser útil na descrição do desempenho dinâmico de sistemas de isolamento acústica concebidos de forma periódica.

Em trabalhos recentes, (Jensen e Sigmund, 2005) e (Cai et al., 2006), técnicas de

otimização paramétrica e de otimização topológica são aplicados com o objetivo de melhoria das variáveis acústicas, tais como transmissibilidade e nível de intensidade sonora.

Dentro deste escopo, o presente trabalho apresenta uma metodologia de otimização topológica numérica de sistemas de isolamento acústica com aplicações no campo das baixas frequências, utilizando-se de modelos acoplados de Biot-Allard para fases sólidas flexíveis, os quais incluem termos de dissipação térmica e viscosa à formulação.

Aplicando o Método de Elementos Finitos para as equações diferenciais parciais (problemas de valores de contorno) do modelo da poroelasticidade de Biot-Allard, foi proposta uma implementação numérica no domínio da frequência. Com base nessa ferramenta numérica de análise, criou-se uma metodologia de busca por uma topologia ótima que promova ao material um ganho no seu poder de absorção. Esta metodologia se baseia em algoritmos evolucionários e contínuos. A análise de sensibilidade de variáveis topológicas discretas e contínuas é testada sobre três metodologias distintas.

Dentro deste panorama bibliográfico consultado, acredita-se que o conceito proposto nesta tese seja original, permitindo-se a conjunção do conhecimento desenvolvido pelos pesquisadores na área de Otimização Topológica com as teorias de projeto e Modelagem propostas recentemente pelos pesquisadores da área de Vibroacústica Computacional.

Capítulo 3

Propagação de Ondas no Meio Poroso

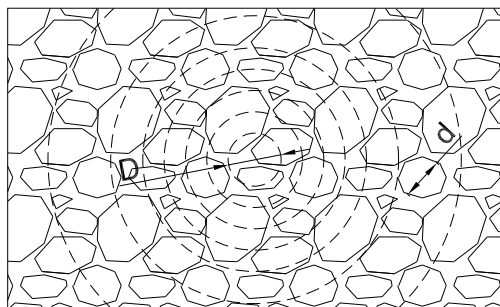
O presente capítulo apresenta uma descrição do desenvolvimento da formulação micro-macro de Biot-Allard originária da pesquisa bibliográfica desenvolvida. Uma revisão da teoria é apresentada e alguns conceitos físicos da fenomenologia da propagação de ondas em materiais porosos são destacados. Aspectos numéricos também serão apresentados neste capítulo, mostrando os reflexos da discretização sobre os resultados das simulações realizadas.

3.1 Contínuo e homogeneização em materiais porosos

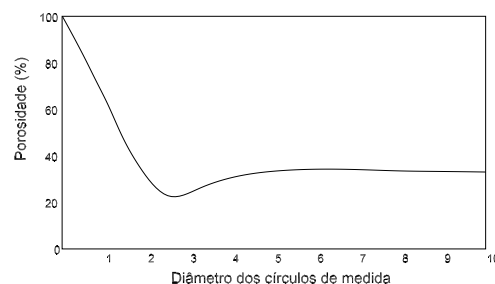
A aplicação das leis da mecânica do contínuo em meios porosos implica na adoção da hipótese de continuidade destes meios. Fisicamente, valores e propriedades podem ser definidas para cada ponto, tais como, porosidade, permeabilidade, tortuosidade, etc, de tal forma que as funções derivadas espaciais existam e possam ser calculadas em cada ponto. A especialidade dos meios porosos está no fato de que as dimensões dos volumes elementares necessários para se desconsiderar os efeitos das descontinuidades podem variar substancialmente para um dado meio e ainda em concordância com o parâmetro a ser analisado, tal fato conduz a uma grande diversidade de modelos para diferentes configurações microscópicas para os meios porosos.

Para definir-se a menor quantidade de matéria na homogeneização, pode-se considerar um espaço poroso intergranular bidimensional formado por grãos com diâmetro médio d . Uma medida da homogeneidade da mistura, fase fluida com fase fluida, pode ser obtida a partir da relação entre o diâmetro dos grãos d e o diâmetro D de círculos concêntricos

que delimitam a área de análise. Tais círculos são colocados sobre a amostra em um ponto qualquer do meio poroso, conforme ilustrado na Figura (3.1). Nota-se que a porosidade, pode ser definida como a razão entre as áreas dos espaços vazios e a área total, pode ser medida como função do diâmetro dos círculos da amostra (D) e o diâmetro médio dos grãos do esqueleto sólido (d).



Definição do mínimo volume de homogeneização em uma amostra porosa



Evolução da porosidade como função dos diâmetros de medidas

Figura 3.1: Homogeneização em meios porosos

O valor médio da porosidade do meio é encontrada quando a relação D/d assume valores maiores que 5, conforme indicado na Figura (3.1). Desta forma a mínima área requerida para se fazer a homogeneização da variável porosidade pode ser calculada estatisticamente. A maioria dos materiais porosos usados em sistemas de Isolação Acústica, tais como espumas, possuem comprimento característico em torno de $10^{-5}m$, ou seja, o tamanho da amostra representativa é dessa ordem.

Análises experimentais em materiais porosos são geralmente macroscopicamente significantes se a amostra é muito maior que o menor volume de homogeneização para um determinado parâmetro a ser analisado. Além disto, em experimentos acústicos envolvendo materiais porosos, o comprimento de onda deve ser comparável com as dimensões do volume mínimo de homogeneização. Caso estas premissas não sejam satisfeitas, há um comprometimento da modelagem realizada.

Três considerações sobre a relação entre o comportamento físico e o volume de homogeneização de meios porosos podem ser feitas:

Em primeiro lugar, caso o comprimento de onda for muito maior que o diâmetro do volume de homogeneização, a vibração se torna efetiva e distribuída em meios macroscópicos

homogeneizados. Neste caso, a vibração não é sensível às descontinuidades microscópicas, presentes em meios porosos.

Em segundo lugar, considera-se que o comprimento de onda é de mesma magnitude das dimensões de homogeneização. Caso contrário, fenômenos de difração podem ocorrer, mudando consideravelmente o comportamento físico macroscópico. A homogeneização deve ser dividida em pequenas células de escala dimensional do grão, por exemplo.

Por último, se o comprimento de onda for muito menor que as dimensões de homogeneização, o meio poroso é definido como não-homogeneizável. Neste caso, a análise deve ser realizada em uma escala muito menor. O meio a ser analisado neste caso é uma distribuição específica de grãos e vazios.

No caso de um modelo para aplicação em Vibro-Acústica, considerando-se as condições de mistura acima descritas, as hipóteses básicas adotadas para o meio poroso são: corpo sólido homogêneo, isotrópico e linear elástico; pequenos deslocamentos e deformações; efeitos dissipativos viscosos e térmicos presentes; meio poroso saturado por fluido.

No Apêndice B, encontra-se o desenvolvimento da teoria Micro-Macro a partir de simplificações físicas e geométricas para o problema microscópico infinitesimal de um em escoamento de um fluido viscoso com trocas térmicas em um poro cilíndrico flexível.

3.1.1 Expressões gerais da Densidade e Permeabilidade térmica dinâmicas do fluido

Com a adoção dos comprimentos característicos no Modelo Micro de Biot-Allard, pode-se então caracterizar os efeitos visco-térmicos nos materiais poroelásticos. Tais características ainda são função da geometria do poro. Para tanto expressões gerais, inicialmente adotadas para poros cilíndricos, foram generalizadas através de algumas constantes e outras variáveis de fluxo.

No trabalho de (Johnson et al., 1987), o qual é baseado nos trabalhos de Kosten, resolvem-se os problemas Hidrodinâmico e Térmico de forma acoplada, considerando o esqueleto flexível, através da introdução de um modelo de Tortuosidade Dinâmica, segundo a Equação (3.1).

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha(\omega) = \alpha_{\infty} \left[1 + (1 - j) \frac{\delta}{\Lambda} \right] \quad (3.1)$$

onde $\alpha(\omega)$ é a tortuosidade dinâmica, α_{∞} é uma definição limite de tortuosidade que pode ser mensurada em laboratório, δ representa a espessura da camada limite viscosa de ar sobre um poro e Λ é o comprimento característico viscoso.

Os valores das funções generalizadas $F(\omega)$ e $F(Pr \omega)$ foram determinadas para geometrias cilíndricas, resultando no cálculo de frequências características viscosas e térmicas, com o uso das funções $G(\omega)$ e $G(Pr \omega)$, (Champoux e Allard, 1991) e (Allard et al., 1994).

As expressões gerais para a densidade e o módulo de compressibilidade do fluido, Equações (B.24) e (B.53), respectivamente, são descritas em suas formas acopladas, segundo o resumo apresentado na tabela a seguir:

Tabela 3.1: Expressões gerais para os coeficientes - Modelo Acoplado

Densidade Efetiva	Compressibilidade Volumétrica do Fluido
$\rho = \alpha_{\infty} \rho_0 \left(1 + \frac{\sigma h}{j \omega \alpha_{\infty} \rho_0} G(\omega) \right)$	$K_f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{\sigma' h}{j Pr \omega \rho_0 \alpha_{\infty}} G'(Pr \omega) \right]^{-1}}$
$G(\omega) = \left(1 + \frac{4j \alpha_{\infty}^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 h^2} \right)^{1/2}$	$G'(Pr \omega) = \left(1 + \frac{4j \alpha_{\infty}^2 \eta \rho_0 Pr \omega}{\sigma'^2 \Lambda'^2 h^2} \right)^{1/2}$
$\Lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{8 \alpha_{\infty} \eta}{\sigma h} \right)^{1/2}$	$\Lambda' = \frac{1}{c'} \left(\frac{8 \alpha_{\infty} \eta}{\sigma h} \right)^{1/2}$

onde c e c' são parâmetros dependentes da geometria do poro, (Leclaire et al., 1996b).

3.2 Propagação de ondas em materiais Poroelásticos

No trabalho de (Biot, 1956), o modelo Lagrangiano para um volume elementar de material poroso com estrutura elástica foi desenvolvido. As relações de tensão-deformação foram derivadas a partir do potencial de energia de deformação.

As hipóteses e simplificações do modelo podem ser encontrados em trabalhos de (Biot, 1956), (Allard, 1993) e (Silva, 2003). A seguir, uma descrição das hipóteses básicas e das

principais relações do modelo de Biot.

3.2.1 Relações de Tensão-Deformação da teoria clássica de Biot

A parte sólida do meio poroso é considerada elástica com uma distribuição estatística de poros interconectados, conforme descrito no ítem (3.1). A porosidade do meio é definida como a relação entre o volume de poros interconectados e o volume total.

$$h = \frac{V_p}{V_b} \quad (3.2)$$

onde h é a porosidade do meio, propriedade já homogeneizada, V_p é o volume dos poros interconectados e V_b é o volume total.

Seja um sistema contínuo, cujo volume cúbico infinitesimal esteja sujeito a forças internas do material aplicadas nas suas faces, conforme descrito na Figura (3.2).

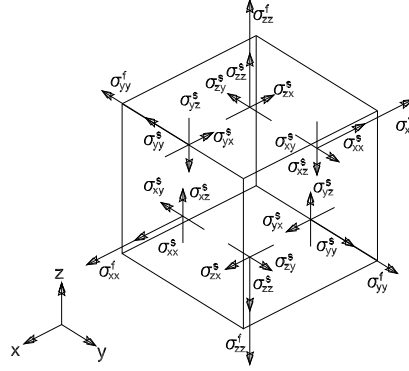


Figura 3.2: Elemento infinitesimal para um contínuo poroelástico

O tensor das tensões total σ_{ij}^t é simétrico e para um meio poroso tridimensional pode ser representado da seguinte forma matricial:

$$\sigma_{ij}^t = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^s + \sigma_{xx}^f & \sigma_{xy}^s & \sigma_{xz}^s \\ \sigma_{yx}^s & \sigma_{yy}^s + \sigma_{yy}^f & \sigma_{yz}^s \\ \sigma_{zx}^s & \sigma_{zy}^s & \sigma_{zz}^s + \sigma_{zz}^f \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Os componentes σ_{ij}^s representam os componentes de tensão atuantes na parte sólida das faces de um cubo unitário. A tensão σ^f representa a ação que a parte fluida, presente nos

poros interconectados, realiza sobre as faces do cubo infinitesimal, gerando um componente tensorial hidrostático.

Em uma notação indicial mais compacta, tem-se a Equação (3.4):

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f \quad (3.4)$$

onde σ_{ij}^t representa a tensão total ou efetiva no Poro, (Bourbié et al., 1987), composta pelas suas tensões parciais de suas duas fases constituintes: sólida e fluida.

A pressão no fluido, p , está relacionada com a tensão σ_{ij}^f através da seguinte relação:

$$\sigma_{ij}^f = -hp\delta_{ij} \quad (3.5)$$

onde δ_{ij} representa o tensor identidade.

Neste trabalho, o sistema fluido-estrutura é considerado como um sistema elástico, inicialmente com propriedades conservativas. As fases sólida e fluida são supostamente compressíveis. O modelo cinemático é caracterizado pelos tensores de deformação na parte sólida e na parte fluida.

Na parte sólida, têm-se os componentes da deformação associados a face i e direção j do cubo infinitesimal, desta forma as relações cinemáticas são dadas por:

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.6)$$

onde u_i representa a grandeza vetorial de deslocamento do sólido.

Em relação à parte fluida, somente a deformação volumétrica ou dilatação é relevante. Para tanto o modelo cinemático para o fluido se resume a Equação (3.7).

$$\varepsilon_{ij}^f = U_{i,i}\delta_{ij} \quad (3.7)$$

onde U_i representa o vetor de deslocamentos da fase fluida.

As relações constitutivas da fase sólida e fluida foram descritas no trabalho de (Biot, 1956) e de forma acoplada. Inicialmente os termos de acoplamento não possuíam sentido

físico. Em trabalhos posteriores, como se citam de (Detournay e Cheng, 1991) e outros aplicados à propagação acústica em meios porosos, (Johnson et al., 1987), (Champoux e Allard, 1991) e (Leclaire et al., 1996b), as constantes poroelásticas foram evidenciadas e relacionada a propriedades físicas que podiam ser medidas em laboratório.

Para a parte sólida:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \tilde{A}\varepsilon_{kk}^s\delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s + \tilde{Q}\varepsilon_{ij}^f \quad (3.8)$$

Para a fase fluida:

$$\sigma_{ij}^f(u_i, U_i) = \tilde{R}\varepsilon_{ij}^f + \tilde{Q}\varepsilon_{kk}^s\delta_{ij} \quad (3.9)$$

onde $\tilde{A}$ representa a primeira constante de Lamé do esqueleto sólido, porém modificada e medida em condições não-drenadas, N é a segunda constante de Lamé e representa o módulo de cisalhamento do esqueleto, $\tilde{Q}$ é o termo de acoplamento entre as duas fases e $\tilde{R}$ representa o módulo de Permeabilidade Volumétrica da fase fluida modificado.

As constantes de Lamé em condições drenadas são definidas pelos constantes elásticas do material, através das Equações (3.10) e (3.11), sendo que a supressão do sinal $\sim$ significa a medida avaliada em condição drenadas.

$$N = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.10)$$

$$A = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.11)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade linear.

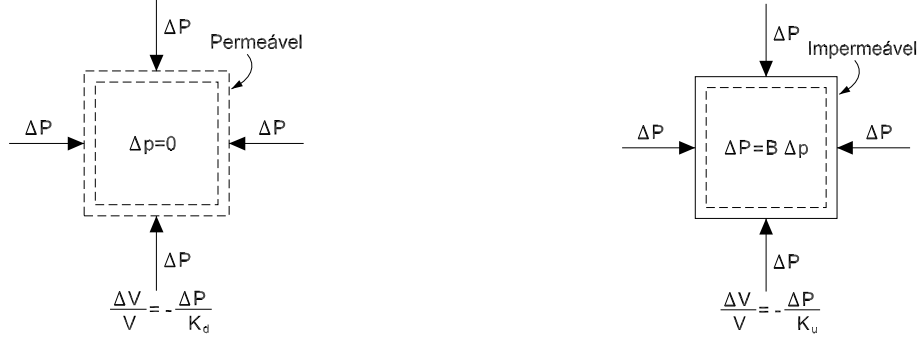
Para efeito de uma notação mais compacta, define-se uma nova variável para o modelo constitutivo, P , medido em condições drenadas e definido como sendo $P = A + 2N$, o que simplifica as relações das tensões da fase sólida.

3.2.2 Relações entre os coeficientes poroelásticos de Biot

A partir dos experimentos de Gedanken, pode-se avaliar as constantes poroelásticas $\tilde{P}$, N , $\tilde{Q}$ e $\tilde{R}$, introduzidas na Teoria de Biot e avaliadas em condições não drenadas, ou seja, com

o efeito da interação fluido-estrutura.

Os testes para se determinar as propriedades dos materiais poroelásticos, em termos de medidas globais, podem ser efetuados através de duas análises: pela resposta drenada e pela resposta não drenada.



Volume de controle para um teste drenado Volume de controle para um teste não drenado

Figura 3.3: Medições das propriedades globais poroelásticas

O teste drenado consiste em avaliar as propriedades elásticas em uma amostra porosa sem presença do fluido. Neste teste, as relações volumétricas fluidas, em um ensaio de aplicação de uma carga hidrostática ΔP , são relacionadas à constante K_d , que corresponde a compressibilidade da amostra em condições permeáveis. Para o teste não drenado, o fluido da amostra porosa em ensaio hidrostático é confinado, resultando em outra relação volumétrica, dada pela constante de compressibilidade K_u .

A partir destes testes, as seguintes relações são determinadas:

$$\tilde{Q}/K_s + \tilde{R}/K_f = h \quad (3.12)$$

$$\frac{(\tilde{P} - \frac{4}{3}N)}{K_s} + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{K}_f} = 1 - h \quad (3.13)$$

$$\left(\tilde{P} - \frac{4}{3}N\right)/K_b = 1 \quad (3.14)$$

onde h é redefinido aqui como sendo a porosidade da amostra.

O que resulta aos termos $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ e $\tilde{R}$, relações com o módulo de deformação volumétrica da fase estrutural no vácuo K_b , com K_s que representa o módulo de deformação volumétrica

do material que constitui a fase e com $\tilde{K}_f$, o qual se refere ao módulo de deformação volumétrica da fase fluida, (Allard, 1993), como se segue:

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \frac{(1-h)[1-h-K_b/K_s]K_s + h(K_s/\tilde{K}_f)K_b}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f} + \frac{4}{3}N \\ \tilde{Q} &= \frac{[1-h-K_b/K_s]hK_s}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f} \\ \tilde{R} &= \frac{h^2K_s}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f}\end{aligned}\quad (3.15)$$

O fluido utilizado nestes testes é o ar e a partir de aproximações pertinentes para a maioria dos materiais poroelásticos usados em acústica, algumas linearizações podem ser feitas (Allard, 1993). Considerando que a relação entre os módulos de deformação volumétrica no vácuo (considerando a porosidade) e o do material do qual é feito o esqueleto é muito pequena, ou seja:

$$\frac{K_b}{K_s} \lll 1 \quad (3.16)$$

onde a partir de tal aproximação, uma igualdade importante que será utilizada em itens que se referem às condições de contorno e às interações com outros domínios, pode ser estabelecida da seguinte forma:

$$h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \cong 1 \quad (3.17)$$

O que leva a algumas simplificações nas Equações (3.15), o que conduz a (Panneton e Atalla, 1997b):

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= K_b + \frac{(1-h)^2}{h}\tilde{K}_f + \frac{4}{3}N \\ \tilde{Q} &= (1-h)\tilde{K}_f \\ \tilde{R} &= h\tilde{K}_f\end{aligned}\quad (3.18)$$

A Teoria de Biot para a propagação unidimensional de ondas normais elásticas e fluida e de cisalhamento no meio poroso e relações matemáticas entre os termos apresentados no

item (3.2.2) são apresentadas no Apêndice (A). Tal item apresenta a determinação dos comprimentos de ondas no meio poroso segundo tal teoria.

3.2.3 Equação da onda para materiais poroelásticos

Para se construir as relações dinâmicas para o meio poroelástico, as equações de equilíbrio de tensões, forças dissipativas e de corpo de um elemento infinitesimal poroelástico, representado pela superposição de duas fases, devem ser combinadas a fim de se obterem as relações da Poroelasticidade Acoplada.

Tal procedimento permite escrever as equações da onda em meios poroelásticos na formulação clássica do trabalho de (Biot, 1956), a qual é utilizada em várias análises encontradas na literatura.

Substituindo-se os valores de tensões parciais das fases sólida e fluida, descritas em Equação (3.8) e Equação (3.9), ou seja usando as relações de tensão σ_{ij}^s e σ_{ij}^f da fase sólida e fluida, respectivamente, pode-se escrever as seguintes equações dinâmicas de equilíbrio, em sua formulação de deslocamentos:

$$\sigma_{ij,j}^s = \rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i + \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (3.19)$$

$$\sigma_{ij,j}^f = \rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (3.20)$$

onde ρ_{11} , ρ_{22} e ρ_{12} representam as massas específicas das fases sólida e fluida modificadas e de interação entre estas fases, respectivamente. O termo U_i é o vetor de deslocamento da partícula fluida e u_i é o vetor deslocamento da fase estrutural e $\tilde{b}$ é o termo associado à dissipação não conservativa no meio poroso.

As relações das massas específicas das fases sólida e fluida são descritas a seguir:

$$\rho_{11} = (1 - h)\rho_s + h\rho_0(\alpha_\infty - 1) \quad (3.21)$$

$$\rho_{22} = \alpha_\infty h\rho_0 \quad (3.22)$$

$$\rho_{12} = h\rho_0(1 - \alpha_\infty) \quad (3.23)$$

onde ρ_s é a massa específica do material da fase sólida, ρ_0 é a massa específica do ar e α_∞ , conforme apresentado anteriormente, representa a tortuosidade do material poroelástico.

As massas específicas ρ_{11} e ρ_{22} são definidas como coeficientes de massa que levam em conta a descontinuidade do fluxo relativo sobre os poros. A massa específica ρ_{12} corresponde à interação existente entre a inércia das fases sólida e fluida e é função da tortuosidade do material (Bourbié et al., 1987).

Uma formulação mista (u,p) é baseada nas equações da poroelasticidade, propostas inicialmente como uma formulação de deslocamento por Biot (Biot, 1956). O símbolo $\tilde{b}$ indica que a propriedade física associada b é complexa e dependente da frequência (ω).

O coeficiente $\tilde{b}$ é associado ao amortecimento viscoso dependente da frequência (ω), o qual leva em consideração os efeitos das forças de interação viscosa do fluido sobre a estrutura. Este termo é relacionado com a resistência ao fluxo no material poroso (Allard, 1993) e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{b} = h^2 \sigma \tilde{G} \quad (3.24)$$

onde σ é a medida de resistência ao fluxo que o material poroelástico oferece ao escoamento e o termo $\tilde{G}(\omega)$ é expresso a seguir:

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + \frac{i\omega}{H}} \quad (3.25)$$

sendo H a frequência característica viscosa, somente dependente das constantes poroelásticas do material (Dazel et al., 2002) e definida como sendo:

$$H = \frac{\sigma^2 \Lambda^2 h^2}{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_f} \quad (3.26)$$

onde α_∞ é tortuosidade do material (Bourbié et al., 1987), Λ é o comprimento característico viscoso (Johnson et al., 1987) e assim como a porosidade é uma propriedade geométrica da malha porosa e η é a viscosidade cinemática do fluido (Incropera e DeWitt, 1996).

O módulo de deformação volumétrica do fluido $\tilde{K}_f$ leva em consideração o efeito das interações térmicas do fluido presente no poro. Este efeito é de natureza dissipativa, ou seja pode ser compreendido como um amortecimento térmico.

$$\tilde{K}_f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - ((\gamma - 1)/[1 + (H'/2i\omega)\tilde{G}'])} \quad (3.27)$$

onde P_0 é a pressão atmosférica, γ é a razão entre os calores específicos do fluido (Incropera e DeWitt, 1996) e definido como sendo: $\gamma = c_p/c_v$. O termo $\tilde{G}'(\omega)$ é expresso a seguir:

$$\tilde{G}' = \sqrt{1 + \frac{i\omega}{H'}} \quad (3.28)$$

e de forma análoga ao problema viscoso, H' representa a frequência característica térmica, dependente das constantes poroelásticas do material, (Dazel et al., 2002), e definido como sendo:

$$H' = \frac{16\eta}{Pr(\Lambda')^2\rho_0} \quad (3.29)$$

onde Λ' é o comprimento característico térmico e Pr é o número de Prandtl.

Utilizando os vetores de deslocamento sólido e fluido (u_i, U_i) como variáveis primárias e assumindo oscilações harmônicas, uma formulação no domínio da frequência (Panneton e Atalla, 1996) pode ser escrita colocando-se os termos de amortecimento nas constantes do sistema, como se segue:

$$\omega^2 \tilde{\rho}_{11} u_i + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} U_i + \sigma_{ij,j}^s = 0 \quad (3.30)$$

$$\omega^2 \tilde{\rho}_{22} U_i + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_i + \sigma_{ij,j}^f = 0 \quad (3.31)$$

definindo-se novas relações para os termos das massas específicas dinâmicas, agora dependentes da frequência, conforme expressões abaixo, as quais são reescritas em função das relações das massas específicas originais e do parâmetro de dissipação viscosa $\tilde{b}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\ \tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\ \tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{i\omega} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Isolando o vetor de deslocamento da partícula fluida U_i na Equação (3.31), pode-se expressar tal valor em função do gradiente de pressão $p_{,i}$ nos poros e do deslocamento da parte sólida u_i .

$$U_i = \frac{h}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2}p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}u_i \quad (3.33)$$

A Equação (3.33) deve ser usada para a determinação da formulação mista (u,p), resultando na seguinte expressão para a fase sólida:

$$\omega^2\tilde{\rho}u_i + h\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}p_{,i} + \sigma_{ij,j}^s = 0 \quad (3.34)$$

agora escrita em termos do deslocamento estrutural u_i e da pressão do fluido p . Um novo termo de densidade é introduzido, $\tilde{\rho}$, função da frequência e definido como sendo:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (3.35)$$

A Equação (3.34) possui os termos ainda dependentes do deslocamento da fase fluida U_i , devido à dependência do tensor de tensões da fase estrutural, $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^s(u_i, U_i)$. As relações das tensões parciais apresentadas nos itens anteriores são aqui reescritas com os termos variando com a frequência e em sua forma tensorial, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \tilde{A}u_{i,i}\delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij} + \tilde{Q}U_{i,i}\delta_{ij} \quad (3.36)$$

$$-hp\delta_{ij} = \tilde{R}U_{i,i}\delta_{ij} + \tilde{Q}u_{i,i}\delta_{ij} \quad (3.37)$$

Os coeficientes $\tilde{A}$ e N correspondem aos coeficientes de Lamé para um meio sólido elástico, $\tilde{Q}$ é um coeficiente de acoplamento entre as dilatações, ε_{kk}^s e ε_{kk}^f , e as tensões parciais das duas fases, $\tilde{R}$ pode ser interpretado como sendo o módulo de deformação volumétrica do fluido que ocupa uma fração h de um volume unitário.

Com o intuito de eliminar a dependência de $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^s(u_i, U_i)$, as equações descritas em (3.36) e (3.37) são combinadas, resultando em:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} - h \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (3.38)$$

A partir da Equação (3.38) pode-se isolar o valor de tensão $\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i)$ o qual representa o tensor de tensões parciais da fase sólida somente dependente do deslocamento estrutural u_i :

$$\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} \quad (3.39)$$

o que leva a:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) - h \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (3.40)$$

Substituindo-se a Equação (3.40) na Equação (3.31), obtém-se uma expressão para a fase sólida em termos das variáveis (u_i, p) :

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + \tilde{\rho} \omega^2 u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \quad (3.41)$$

onde o termo de acoplamento entre a variável u_i (fase sólida) e p (fase fluida) é dado por:

$$\tilde{\gamma} = h \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \quad (3.42)$$

Substituindo as expressões descritas dos coeficientes $\tilde{A}$, $\tilde{Q}$ e $\tilde{R}$, escritas na Equação (3.15), na Equação (3.39), pode-se definir uma expressão para o tensor $\hat{\sigma}_{ij}^s$, como sendo:

$$\hat{\sigma}_{ij}^s = \left(K_b - \frac{2}{3} N \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} \quad (3.43)$$

a qual representa a relação de tensão-deformação clássica para um meio sólido elástico linear, obtido para o esqueleto em condições drenadas.

Nota-se que $\hat{\sigma}_{ij}^s$ é a tensão parcial do material da fase sólida no vácuo, ou seja representa o tensor das tensões do material poroelástico que prevalece em condições drenadas (sem a presença de fluido nos interstícios da matriz poroelástica). Neste trabalho, considera-se que este tensor não varia com a frequência.

Para a Equação da fase fluida na formulação mista (u, p) , deve-se aplicar o divergente em ambos os lados da Equação (3.33), obtendo-se:

$$U_{i,i} = \frac{h}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_{i,i} \quad (3.44)$$

Substituindo-se o valor de $U_{i,i}$ na Equação (3.37), obtém-se a equação da fase fluida em termos das variáveis (u_i, p) :

$$p_{,ii} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{h}^2} \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \quad (3.45)$$

Tal expressão corresponde à equação governante do domínio fluido.

3.3 Resumo das Equações da Poroelasticidade

A formulação mista (u, p) , por apresentar um acoplamento entre duas fases, uma fluida (acústica) e outra sólida, pode ser usada também para a modelagem de uma única fase, utilizando-se de simplificações e valores específicos para as constantes poroelásticas.

A seguir um resumo das equações da poroelasticidade acoplada é apresentado. Na tabela (3.2), a formulação completa mista (u, p) é resumida e derivada em outras aplicações, para a modelagem de outros domínios: fase porosa homogeneizada (formulação de fluido equivalente), fase sólida e fase acústica.

Tabela 3.2: Formulação Mista (u,p) da Poroelasticidade e suas derivações

<i>Formulação</i>	<i>Equações</i>	<i>Variáveis de Estado</i>	<i>Simplificações</i>
Mista (u,p)	$\widehat{\sigma}_{ij,j}^s + \omega^2 \widetilde{\rho} u_i + \widetilde{\gamma} p_{,i} = 0$ $\frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \omega^2 \frac{h^2}{R} p - \omega^2 \widetilde{\gamma} u_{i,i} = 0$	u_i - deslocamento estrutural p - pressão do fluido	
Fluido Equivalente	$\frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \omega^2 \frac{h^2}{R} p = 0$	p - pressão do fluido	$u_i = 0$
Fase Sólida (Elasticidade)	$\sigma_{ij,j}^e + \omega^2 \rho_s u_i = 0$	u_i - deslocamento estrutural	$p = 0$ $h = 0$
Fase Acústica (Helmholtz)	$\frac{1}{\rho_0} p_{,ii} + \omega^2 \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p = 0$	p - pressão do fluido	$u_i = 0$ $h = 1$

Neste trabalho, utilizou-se a formulação de Fluido Equivalente em muitas simulações numéricas para a modelagem do material poroso. Tal formulação pode ser utilizada quando a vibração do esqueleto é considerada desprezível, ou seja, quando o esqueleto é sem movimento e ainda para baixos valores de frequência de análise do sistema. No trabalho de (Atalla et al., 2001c), utiliza-se a formulação de fluido equivalente para modelagem de materiais porosos pesados tais como lâ de rocha e lâ de vidro, obtendo-se resultados satisfatórios em comparação com as análises experimentais.

3.4 Condições de interface entre os domínios

Neste ítem serão explicitadas as condições de interface que devem ser satisfeitas em um sistema contendo multidomínios e modelados segundo a formulação mista (u,p) da poroelasticidade. Tal estudo pode ser encontrado em maiores detalhes no trabalho de (Debergue et al., 1999), onde é apresentada a forma de composição das excitações no meio poroso e as integrais de interface resultantes do acoplamento entre as diversas formulações fracas para os diversos domínios modelados: sólido, acústico e poroelástico.

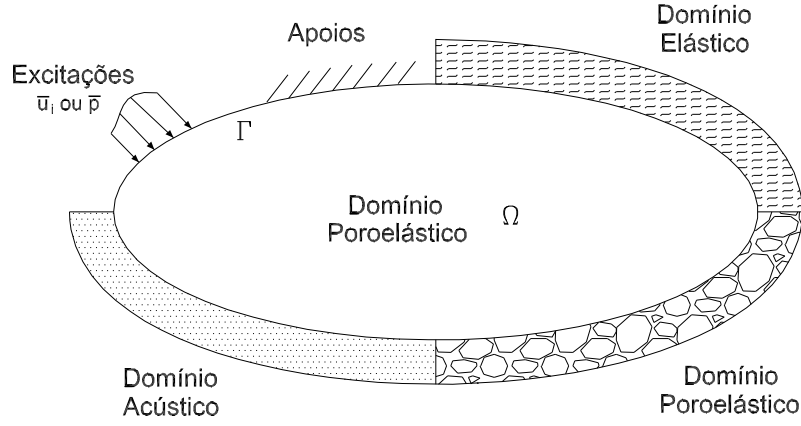


Figura 3.4: Condições de contorno e acoplamentos em domínios poroelásticos (Debergue et al., 1999)

Na Figura (3.4), são apresentados de forma esquemática, os possíveis acoplamentos entre os multidomínios que podem ser formulados e acoplados segundo a formulação mista (u,p) da Poroelasticidade.

Em todos os acoplamentos, as condições de interface podem ser expressas através da combinação das integrais de contorno de cada domínio aliada às condições de equilíbrio, de conservação de massa e de compatibilidade cinemática. A seguir são listadas as condições de interface entre os acoplamentos a serem satisfeitas:

- Acoplamento Acústico-Elástico:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^e n_j &= -p^a n_j \\ \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n_j} &= u_e^n\end{aligned}$$

- Acoplamento Poroelástico-Acústico:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^t n_j &= -p^a n_j \\ \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n_j} &= (1-h) u^n + h U^n \\ p &= p^a\end{aligned}$$

- Acoplamento Poroelástico-Elástico:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^t n_j &= \sigma_{ij}^e n_j \\ U^n - u^n &= 0 \\ u_i &= u_i^e\end{aligned}$$

- Acoplamento Poroelástico-Poroelástico:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{t1} n_j &= \sigma_{ij}^{t2} n_j \\ h_1 (U_1^n - u_1^n) &= h_2 (U_2^n - u_2^n) \\ u_{1i} &= u_{2i} \\ p_1 &= p_2\end{aligned}$$

Em todos os casos de acoplamento, n^j representa o vetor normal unitário com direção perpendicular a interface definida como sendo Γ . O tensor de tensões do domínio elástico e é dado por σ_{ij}^e e p^a é o campo de pressão do domínio acústico. No segundo caso, acoplamento poroelástico-acústico, σ_{ij}^t é o tensor de tensões total no domínio poroso, U^n e u^n são variáveis escalares e representam os deslocamentos normais fluido e sólido, respectivamente, avaliados na interface entre os domínios Γ . As variáveis de deslocamento vetoriais u_i e u_i^e representam o deslocamento estrutural do meio poroso e o deslocamento do domínio elástico, respectivamente.

3.5 A aproximação por Elementos Finitos na Poroelasticidade Acoplada

Uma formulação de elementos finitos poroelásticos em sua forma acoplada (u, p) é resumidamente apresentada aqui. Será apresentada uma descrição das matrizes elementares a serem determinadas e implementadas computacionalmente.

A formulação fraca do problema é obtida através das relações de equilíbrio de força e conservação de massa e energia. As variáveis de estado desta formulação são o deslocamento estrutural (u_i) e o campo de pressão (p) dos interstícios do material preenchido pela fase fluida.

Assumindo oscilações harmônicas $e^{j\omega t}$, é obtida a formulação dinâmica para a poroelasticidade acoplada. A descrição desta formulação é feita através das Equações (3.46) e (3.47), originalmente apresentadas e discutidas nos trabalhos de (Atalla et al., 1998) e (Atalla et al., 2001b).

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^s \varepsilon_{ij}^s (\delta u_i) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \tilde{\rho} u_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{\gamma} p_{,i} \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.46)$$

$$\int_{\Omega} \frac{h^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{h^2}{\tilde{R}} p \delta p d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_i \delta p_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\tilde{\gamma} u^n - \frac{h^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma = 0 \quad (3.47)$$

onde Ω e Γ denotam o domínio poroelástico e o seu contorno, respectivamente e n_j é o vetor normal unitário à superfície do contorno Γ .

O domínio poroelástico Ω é discretizado por elementos finitos, cujas aproximações polinomiais para as variáveis de estado u_i e p , com continuidade C_0 no domínio, são:

$$u_i = [N^u] \{\bar{u}_i\} \quad (3.48)$$

$$p = [N^p] \{\bar{p}\} \quad (3.49)$$

definindo-se $[N^u]$ e $[N^p]$ como as famílias de funções de forma para a variável de deslocamento estrutural e pressão intersticial, respectivamente. As variáveis $\{\bar{u}_i\}$ e $\{\bar{p}\}$ são os graus de liberdade de deslocamento estrutural e pressão intersticial, respectivamente, avaliados nos nós e definidos pela discretização do domínio poroelástico.

Seja a aproximação das variações virtuais e utilizando-se do Método de Galerkin:

$$\delta u_i = [N^u] \{\delta \bar{u}_i\} \quad (3.50)$$

$$\delta p = [N^p] \{\delta \bar{p}\} \quad (3.51)$$

Para se compor a formulação de elementos finitos em sua forma fraca do problema poroelástico, deve-se analisar cada termo da Equações (3.46) e (3.47). Um resumo das matrizes elementares a serem determinadas é apresentado a seguir.

A forma fraca definida nas Equações (3.46) e (3.47), considerando a aproximação de Elementos Finitos definida anteriormente em (3.50) e (3.51), resulta em:

$$[K]\{\bar{u}_i\} - \omega^2[\widetilde{M}]\{\bar{u}_i\} - [\widetilde{C}]\{\bar{p}\} = \{F^s\} \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{\omega^2}[\widetilde{H}]\{\bar{p}\} - [\widetilde{Q}]\{\bar{p}\} - [\widetilde{C}]^t\{\bar{u}_i\} = \{F^p\} \quad (3.53)$$

onde $\{F^s\}$ e $\{F^p\}$ representam as cargas nas fases sólida e fluida, respectivamente.

Na sua forma elementar, estes carregamentos consistem nas condições de interface de cada aresta do elemento, ou seja, as integrais de contorno descritas nas Equações (3.46) e (3.47). Na sua forma global, estes vetores são construídos com base nas condições de contorno do problema, podendo se apresentar em situações de cargas pontuais ou carregamentos aplicados, deslocamento ou pressão impostos, ou ainda em acoplamentos entre domínios diferentes, sejam eles acústico, elástico ou até mesmo, um outro poroelástico.

O próximo passo é a determinação das seguintes relações matriciais, Equação (3.54), obtidas com a aplicação da definição de elementos finitos nas variáveis de estado u_i e p , Equações (3.48) e (3.49) e de suas variações virtuais, Equações (3.50) e (3.51), o que conduz a:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{\Omega} [L]^t [N^u]^t [D] [L] [N^u] d\Omega \\ [\widetilde{M}] &= \widetilde{\rho} \int_{\Omega} [N^u]^t [N^u] d\Omega \\ [\widetilde{H}] &= \frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} [\nabla N^p]^t [\nabla N^p] d\Omega \\ [\widetilde{Q}] &= \frac{h^2}{\widetilde{R}} \int_{\Omega} [N^p]^t [N^p] d\Omega \\ [\widetilde{C}] &= \widetilde{\gamma} \int_{\Omega} [N^u]^t [\nabla N^p] d\Omega \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $[L]$ representa o operador diferencial de deformação da Elasticidade.

Em uma forma matricial o problema resulta em uma análise de resposta em frequência, determinada a cada ponto de frequência ω , Equação (3.55):

$$\begin{pmatrix} [K] - \omega^2[\widetilde{M}] & -[\widetilde{C}] \\ -[\widetilde{C}]^t & \frac{1}{\omega^2}[\widetilde{H}] - [\widetilde{Q}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^s \\ F^p \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Tal sistema é composto pela matriz dinâmica simetrizada, os vetores modais e forças aplicadas e será utilizada para a implementação do problema na frequência das equações da poroelasticidade acoplada.

O sistema composto pelos diversos domínios envolvidos, por exemplo, acústico, elástico, etc., deve ser discretizado segundo suas formulações e as condições de acoplamento impostas nas interfaces, com o intuito de satisfazer o equilíbrio cinemático, a continuidade e o equilíbrio entre os domínios.

Com a solução deste sistema de equações, obtêm-se os modos operacionais discretizados em valores nodais, para cada frequência correspondente. No presente trabalho, os métodos de soluções de sistemas lineares utilizados faz uso de algoritmos especiais para manipulação de matrizes esparsas, disponíveis em pacotes computacionais nas linguagens C++ e Matlab.

3.6 Análise Energética na Poroelasticidade

Neste ítem, parâmetros característicos da análise vibroacústica de um sistema poroelástico modelado pela teoria de Biot-Allard são apresentadas. Os potenciais de energia são escritos em seu formalismo com intuito de se expressar a impedância superficial e o coeficiente de absorção sonora de sistemas absorvedores poroelásticos.

A modelagem parte do estudo da transmissão de uma onda acústica que se propaga em um domínio acústico para um domínio poroelástico, descrito de forma esquemática na Figura (3.5).

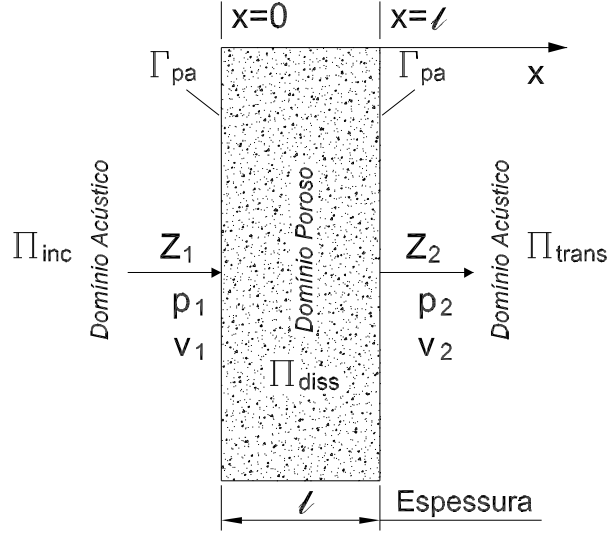


Figura 3.5: Posicionamento do problema de Transmissibilidade Acústica

Uma formulação baseada nos princípios variacionais de energia foi estudada e pode ser encontrada com maiores detalhes em (Atalla et al., 2001a). A partir da formulação (u, p) fraca clássica, Equações (3.46) e (3.47), admitindo-se as velocidades $j\omega u_i^*$ e $j\omega p^*$ como valores para as funções admissíveis δu_i e δp , respectivamente, o seguinte balanço de energia pode ser escrito, Equação (3.56).

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-j\omega \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}] d\Omega}_{\Pi_{elas}^s} + \underbrace{j\omega^3 \int_{\Omega} \tilde{\rho} u_i u_i^* d\Omega}_{\Pi_{iner}^s} \\
& + \underbrace{j\omega \frac{h}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega} [p_{,i} u_i^* + p_{,i}^* u_i] d\Omega - j\omega h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\Omega} [p_{,i} u_i^* + p_{,i}^* u_i] d\Omega}_{\Pi_{acop}^{sf}} \\
& \underbrace{-j \int_{\Omega} \frac{h}{\omega \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} p_{,i}^* d\Omega}_{\Pi_{iner}^f} + \underbrace{j\omega \int_{\Omega} \frac{h^2}{\tilde{R}} p p^* d\Omega}_{\Pi_{elas}^f} + \underbrace{j\omega \int_{\Gamma} t_i^s u_i^* d\Gamma}_{-\Pi_{trans}} \\
& + \underbrace{j\omega h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_{\Gamma} [p_{,i} u_n^* + p_{,i}^* u_n] d\Gamma}_{-\Pi_{trans}} + j\omega \int_{\Gamma} h (U_n - u_n) p^* d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

onde o $*$ representa a variável complexa conjugada.

Este balanço de energia pode ser reescrito em forma de equilíbrio dos potenciais, da seguinte forma, Equação (3.57).

$$\Pi_{elas}^s + \Pi_{iner}^s + \Pi_{elas}^f + \Pi_{iner}^f + \Pi_{acop}^{sf} - \Pi_{trans} = 0 \quad (3.57)$$

onde Π_{elas}^s é o potencial de energia elástica do esqueleto, Π_{iner}^s é a parcela de energia cinética da fase estrutural, assim como os potenciais Π_{elas}^f e Π_{iner}^f representam os potenciais de energia elástica e cinética, respectivamente, para a fase fluida. O Potencial de acoplamento entre as duas fases é dado por Π_{acop}^{sf} .

Nota-se pela Equação (3.57) que o potencial de transmissão Π_{trans} , pode ser expresso em termos dos potenciais determinados no domínio Ω . A média temporal do potencial de transmissão Π_{trans} , avaliada na interface Γ_{pa} em $x = l$, Figura (3.5), representa o potencial de energia dissipada pelo material poroelástico, Equação (3.58).

$$\Pi_{diss} = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_{pa}} j\omega U_n^a p^* d\Gamma \right) = \frac{1}{2} \Re (\Pi_{trans}) \quad (3.58)$$

onde U_n^a representa o deslocamento normal do domínio acústico na interface poro-acústica (partícula fluida) e $\Re$ é o operador para obtenção da parcela real do termo.

O potencial Π_{diss} reflete as dissipações devidos aos efeitos térmicos, viscosos e amortecimento estrutural. Com a combinação das Equações, (3.58) e (3.57), resulta-se em uma expressão que leva em consideração cada um dos efeitos volumétricos e dissipativos no domínio poroelástico, Equação (3.59).

$$\Pi_{diss} = \Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t \quad (3.59)$$

Os termos presentes na Equação (3.59), domínio da frequência ω , são descritos pelas seguintes relações:

$$\Pi_{diss}^s = \frac{1}{2} \Im \left[\omega \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij}^s \varepsilon_{ij}^s d\Omega \right] \quad (3.60)$$

$$\Pi_{diss}^v = \frac{1}{2} \Im \left[-\omega^3 \int_{\Omega} \widetilde{\rho} u_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{h}{\omega \widetilde{\rho}_{22}} p_{,i} p_{,i}^* d\Omega - 2\omega \widetilde{\gamma} \int_{\Omega} \Re(p_{,i} u_i^*) d\Omega \right] \quad (3.61)$$

$$\Pi_{diss}^t = \frac{1}{2} \Im \left[-\omega \int_{\Omega} \frac{h^2}{\widetilde{R}} p p^* d\Omega \right] \quad (3.62)$$

Para o caso de uma formulação de fluido equivalente, os termos de energia provenientes da fase sólida elástica não existem, ou seja, o esqueleto sólido é considerado sem movimento, podendo-se reduzir os potenciais dissipativos a novas relações descritas a seguir:

$$\Pi_{diss}^s = 0 \quad (3.63)$$

$$\Pi_{diss}^v = \frac{1}{2} \Im \left[\int_{\Omega} \frac{h^2}{\omega \widetilde{\rho}_{22}} p_{,i} p_{,i}^* d\Omega \right] \quad (3.64)$$

$$\Pi_{diss}^t = \frac{1}{2} \Im \left[-\omega \int_{\Omega} \frac{h^2}{\widetilde{R}} p p^* d\Omega \right] \quad (3.65)$$

Utilizando-se da discretização em elementos finitos e da aproximação para as variáveis de estado u_i e p , pode-se reescrever os potenciais, descritos na formulação mista (u, p) , na sua forma discreta. Utilizando-se das matrizes globais de elementos finitos, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\Pi_{diss}^s = \frac{1}{2} \omega \Im \left\{ \{u_i\}^t \int_{\Omega} [L]^t [N^u]^t [D] [L] [N^u] d\Omega \{u_i\} \right\} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{diss}^v &= \frac{1}{2} \omega \Im \left\{ -\omega^2 \{u_i\}^t \int_{\Omega} \tilde{\rho} [N^u]^t [N^u] d\Omega \{u_i\} \right. \\ &\quad + \{p\}^t \int_{\Omega} \frac{h^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} [\nabla N^p]^t [\nabla N^p] d\Omega \{p\} \\ &\quad \left. - 2\{p\}^t \int_{\Omega} \tilde{\gamma} [\nabla N^p]^t [N^u] d\Omega \{u_i\} \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\Pi_{diss}^t = \frac{1}{2} \omega \Im \left\{ -\{p\}^t \frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} [N^p]^t [N^p] d\Omega \{p\} \right\} \quad (3.68)$$

Ao se aplicar as definições das matrizes de elementos finitos da poroelasticidade acoplada, tem-se:

$$\Pi_{diss}^s = \frac{1}{2} \omega \Im [\{u_i\}^t [K] \{u_i\}] \quad (3.69)$$

$$\Pi_{diss}^v = \frac{1}{2} \omega \Im \left[-\omega^2 \{u_i\}^t [\tilde{M}] \{u_i\} + \frac{1}{\omega^2} \{p\}^t [\tilde{H}] \{p\} - 2\{p\}^t [\tilde{C}] \{u_i\} \right] \quad (3.70)$$

$$\Pi_{diss}^t = \frac{1}{2} \omega \Im [-\{p\}^t [\tilde{Q}] \{p\}] \quad (3.71)$$

Ao se somar as três ultimas equações e fazendo a montagem global da matriz dinâmica, tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{diss} &= \Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t \\ &= \frac{1}{2} \omega \Im \left\{ \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ p \end{array} \right\}^t \left[\begin{array}{cc} [K] - \omega^2 [\tilde{M}] & -[\tilde{C}] \\ -[\tilde{C}]^t & 1/\omega^2 [\tilde{H}] - [\tilde{Q}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ p \end{array} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \omega \Im (\{U\}^t [Z] \{U\}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde $\{U\}$ representa as variáveis de estado deslocamento e pressão em sua forma generalizada (u, p) e $[Z]$ é a matriz dinâmica global do sistema poroelástico.

Foram apresentadas aqui as expressões para o cálculo dos potenciais de energia no domínio poroelástico, sob formulação mista (u, p) . No próximo ítem, algumas relações de medidas globais serão apresentadas e posteriormente utilizadas na predição do desempenho de absorvedores poroelásticos.

3.7 Medidas em Vibro-Acústica

Para se caracterizar o efeito de absorção acústica dos materiais poroelásticos, uma importante medida que pode ser avaliada é o coeficiente de absorção acústica, representado neste trabalho por α . Este coeficiente é a relação entre os potenciais de perdas por dissipação térmica e viscosa no meio poroso e a de energia imposta inicialmente ao sistema. Tal relação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\Pi_{diss}}{\Pi_{inc}} = \frac{\Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t}{\Pi_{inc}} \quad (3.73)$$

Para o caso de uma excitação conhecida, que pode ser representada por um guia de ondas planas com amplitude p_0 e seção S , o potencial de incidência pode ser determinado através de:

$$\Pi_{inc} = \frac{S |p_0|^2}{2\rho_0 c_0} \quad (3.74)$$

onde c_0 é a velocidade de propagação do som no meio acústico.

Outra importante medida acústica é a impedância do sistema Z_d , relacionada de uma forma geral por:

$$Z_d = \frac{\int_{\Gamma} p(x, y) dS}{j\omega \int_{\Gamma} U_n^a(x, y) dS} \quad (3.75)$$

A impedância superficial relativa z_s pode ser calculada, em um modelo unidimensional com propagação de ondas planas, por exemplo em um tubo de Kundt, a partir de:

$$z_s = \frac{Z_d \cos(kd) + iZ_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + iZ_d \sin(kd)} \quad (3.76)$$

onde $Z_0 = \rho_0 c_0$, k é o número de onda e d é a posição de medida no material absorvedor.

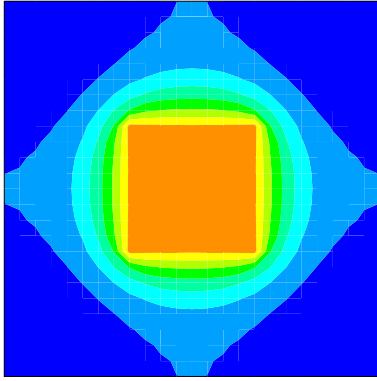
O coeficiente de absorção α em termos de impedância superficial Z_s é dado como sendo:

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2 \quad (3.77)$$

utilizando a relação $z_s = Z_s/Z_0$, resulta-se em:

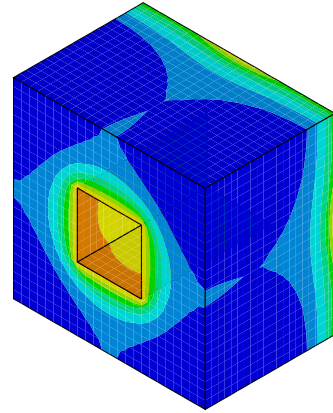
$$\alpha = \frac{4\Re(z_s)}{(\Re(z_s) + 1)^2 + \Im(z_s)^2} \quad (3.78)$$

Para amostras onde a propagação das ondas acústicas não é mais plana, outra fórmula recursiva para se determinar a impedância acústica superficial se faz necessária. Na Figura (3.6), um exemplo de distribuição de pressão é apresentada para uma célula 3D a dupla porosidade. Neste caso, a propagação no interior do domínio poroso não é mais plana, sendo a impedância superficial Z_d determinada pela integral superficial sobre a região Γ a qual representa a interface poro-acústica.



Impedância Superficial Γ

$$Z_d = \int_{\Gamma} p(x, y) dS \Big/ j\omega \int_{\Gamma} U_n^a(x, y) dS$$



Distribuição de Pressão Absoluta a 500 Hz
Amostra Poroelástica - dupla porosidade

Figura 3.6: Impedância Acústica Superficial no meio poroelástico

Outra medida bastante usada é a perda de transmissão, a qual caracteriza o desempenho do sistema poroelásticos com relação a atenuações acústicas. Esta medida é caracterizada através da seguinte relação:

$$TL = -10 \log \left(\frac{\Pi_{trans}}{\Pi_{inc}} \right) \quad (3.79)$$

onde Π_{trans} é o potencial de transmissão.

Neste trabalho, as medidas globais de absorção acústica e de perda de transmissão serão utilizadas como funções objetivo em problemas de otimização topológica.

3.8 O Guia de Ondas Acústico

A predição da absorção acústica através do modelo numérico de Elementos Finitos (Poro+Acústico) é de difícil convergência. Para a modelagem do problema de acoplamento poro-acústico com uma discretização por elementos finitos lineares, faz-se necessário uma malha extremamente fina da interface entre estes dois domínios. Tal requisito é necessário caso se queira representar os modos superiores da cavidade acústica de forma correta, com o objetivo de garantir uma boa convergência da solução. Tal fato limita consideravelmente o tamanho dos problemas factíveis utilizando-se de computadores padrões, (Castel, 2005).

A utilização de malhas muito grosseiras, não uniformes, ou com elementos cujas funções de interpolação são de baixa ordem podem ser insuficientes na representação modal numérica dos materiais heterogêneos, resultando na divergência da solução.

Neste caso, o modelo numérico de elementos finitos consiste em uma malha para o guia de onda acústico e uma malha para amostra de material poroso em uma das extremidades, cuja forma consiste em um domínio poroelástico inserido em uma cavidade acústica cúbica. Aplicou-se uma pressão p_0 de excitação na extremidade da cavidade e calculou-se o coeficiente de absorção α em função da frequência ω , conforme o resultado mostrado na Figura (3.7). O valor de α passa a ser maior que 1, o que demonstra divergência na solução. No trabalho de (Castel, 2005), uma análise numérica deste problema também é apresentada.

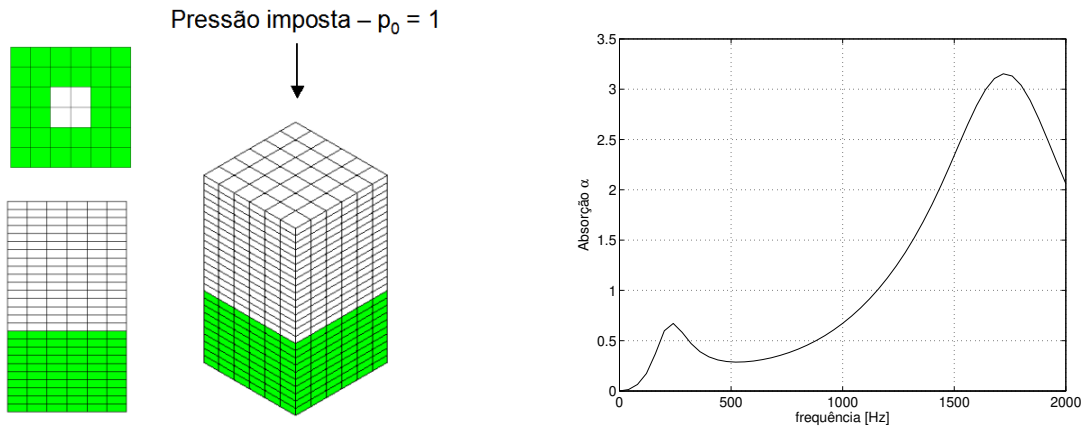


Figura 3.7: Curva de Absorção para a Lã de Rocha a Dupla Porosidade: divergência a partir de 600 Hz

Uma alternativa a este problema é a proposta encontrada nos trabalhos de (Atalla et al., 2001c) e (Sgard et al., 2005). Trata-se do acoplamento entre um modelo semi-analítico de um guia de onda com o modelo numérico de uma amostra de material poroso presente em um tubo de Kundt. O problema físico é descrito na Figura (3.8), a seguir:

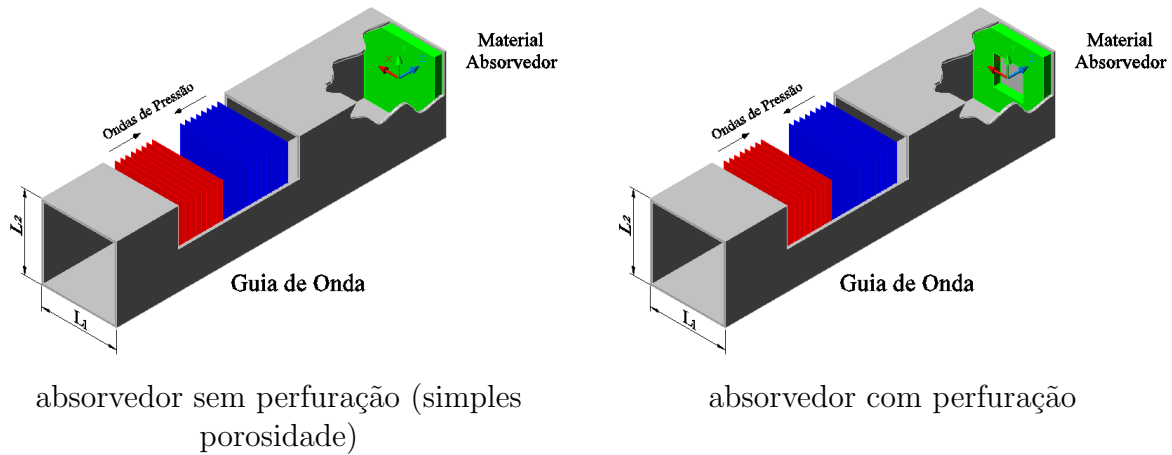


Figura 3.8: Amostras Porosas no interior de um Tubo de Kundt

Na primeira configuração da Figura (3.8), o absorvedor é apresentado em uma geometria plana e denominada de simples porosidade. A propagação acústica é feita de forma unidimensional. Para a segunda configuração, uma vez modificadas com a presença de uma perfuração, as ondas que se propagam no meio poroso não são mais planas. Esta configuração é um problema à dupla porosidade.

3.8.1 Modelagem e Implementação do Guia de Onda

Esta seção consiste na descrição do modelo e da estratégia numérica usada para se representar o guia de onda acoplado, Figura (3.8). O problema consiste em uma amostra poroelástica presente no interior do tubo e excitada com um guia de ondas acústico.

Para problemas a dupla porosidade da amostra, caso em que há perfurações no material poroso, faz-se necessário a representação dos altos modos do guia de onda. A propagação das ondas elásticas e acústicas no material deixa de ocorrer sob as hipóteses de ondas planas, em consequência, uma malha muito densa de elementos acústicos e poroelásticos deve ser utilizada.

Uma das alternativas para isto é o uso de modelos semi-analíticos para o guia de onda, o qual consiste em resumo em uma aproximação das matrizes de admitâncias sobre a geometria da interface poro-acústico, (Atalla et al., 2001c) e (Sgard et al., 2005). O seguinte desenvolvimento é descrito no trabalho de (Castel, 2005).

No modelo de guia de onda, a pressão p sobre a interface Poro-Acústica Γ_{pa} é decomposta em duas parcelas, uma denominada de pressão de bloqueio, p_b , e outra devido ao processo de radiação, p_{rad} , como se segue na Equação (3.80).

$$p = p_b + p_{rad} \quad (3.80)$$

onde a pressão de radiação p_{rad} é definida através de uma decomposição de amplitudes modais B_{mn} , apresentada a seguir:

$$p_{rad} = \sum_{m,n} B_{mn} \varphi_{mn}(x, y) \quad (3.81)$$

onde $\varphi_{mn}(x, y)$ representa a forma modal ortogonal do guia de onda.

A seguir, na Equação (3.82), apresenta-se a relação do deslocamento fluido U_n^a sobre a interface Γ_{pa} . Este deslocamento pode ser reescrito através da superposição dos modos da cavidade acústica, conforme apresentado a seguir:

$$U_n^a = \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma_{pa}} A(P1, P2) (p(P2) - p_b(P2)) d\Gamma \quad (3.82)$$

onde $A(P1, P2)$ representa o operador de admitância de um ponto $P1$ ao ponto $P2$, ambos pertencentes a face (x, y) na posição $z = 0$ ou seja na interface Γ_{pa} . Tal operador pode ser definido através da seguinte relação:

$$A((x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)) = \sum_{m,n} \frac{k_{mn}}{\rho_0 \omega N_{mn}} \varphi_{mn}(x_1, y_1) \varphi_{mn}(x_2, y_2) \quad (3.83)$$

onde N_{mn} é a norma dos modos (normalização dos modos) e k_{mn} é o número de onda do modo a se propagar no tubo. A norma dos modos é definida por:

$$N_{mn} = \int_{\Gamma_{pa}} |\varphi_{mn}(x, y)|^2 d\Gamma \quad (3.84)$$

A forma modal φ_{mn} é definida como uma função cosseno e representa um termo da série que modela o guia de onda em propagação no tubo de Kundt, para uma geometria retangular $L_x \times L_y$ do tubo de Kundt, a forma modal φ_{mn} é expressa através da Equação (3.85).

$$\varphi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.85)$$

Gerando algumas curvas ou formas modais sem a normalização N_{mn} dos modos, a Figura (3.9) é apresentada a seguir, segundo os números da aproximação da série (m, n) propostos.

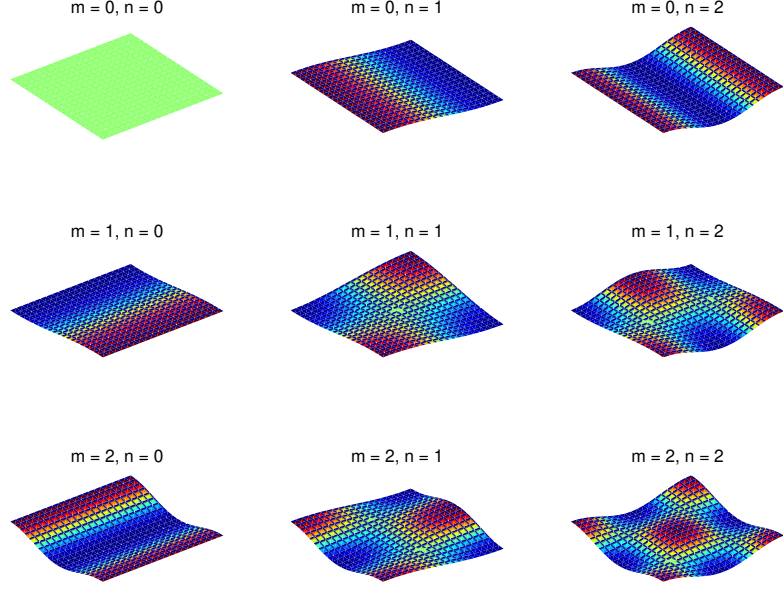


Figura 3.9: Modos ortogonais em um tubo retangular $L_x \times L_y$

Substituindo a Equação (3.82), no termo de acoplamento entre o guia de onda e o domínio poroso, resultante da formulação fraca do problema, chega-se à seguinte relação (Sgard et al., 2005):

$$\int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p d\Gamma = \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) p(x_2, y_2) \delta p(x_1, y_1) d\Gamma d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) p_b(x_2, y_2) \delta p(x_1, y_1) d\Gamma d\Gamma \quad (3.86)$$

A Equação (3.86) representa o acoplamento entre o domínio poroso e o modelo do guia de onda. Esta formulação possui a vantagem de descrever o domínio fluido acústico sem a necessidade de uma discretização de elementos finitos.

O acoplamento do guia de onda é feito em termos da admitância de radiação e do carregamento da pressão de bloqueio. Esta formulação foi inicialmente implementada no trabalho de (Atalla et al., 2001c).

Para um guia de ondas retangular, a seguinte relação entre as amplitudes modais e as pressões na interface poro-acústica, pode ser obtida através das propriedades de ortogonalidades dos modos:

$$\int_{\Gamma_{pa}} p_{rad} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_{pa}} (p - p_b) \varphi d\Gamma \quad \forall \varphi \quad (3.87)$$

onde φ é uma função admissível ou de ponderação à formulação fraca apresentada na Equação (3.87).

Neste caso, a pressão de radiação p_{rad} pode ser decomposta através de uma superposição modal. A integração da série apresentada na Equação (3.81), pode ser expressa através das amplitudes modais B_{mn} , sendo redefinida a seguir:

$$\int_{\Gamma_{pa}} p_{rad} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_{pa}} \sum_{mn} B_{mn} \varphi_{mn} \varphi d\Gamma \quad \forall \varphi \quad (3.88)$$

Em sua forma matricial a Equação (3.88) pode ser reescrita como sendo:

$$\int_{\Gamma_{pa}} p_{rad} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_{pa}} \varphi \{\phi\}^t \{B\} d\Gamma \quad (3.89)$$

onde são definidos, de forma discreta as formas modais φ_{mn} :

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos(\pi x/L_x) \\ \cos(\pi y/L_y) \\ \vdots \\ \cos(m\pi x/L_x) \cos(n\pi y/L_y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{00} \\ \varphi_{10} \\ \varphi_{01} \\ \vdots \\ \varphi_{mn} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

e as amplitudes B_{mn} :

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} B_{00} \\ B_{10} \\ B_{01} \\ \vdots \\ B_{mn} \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

O lado direito da Equação (3.87) traz a informação sobre a diferença de pressões p e p_b , a qual pode ser ponderada através de uma matriz $[C]$, que é construída com base na informação da geometria da interface e da função de forma escolhidas para interpolação, Equação (3.92).

$$\int_{\Gamma_{pa}} (p - p_b) \varphi d\Gamma = \{\varphi\}^t [C] \{p\} - \{\varphi\}^t [C] \{p_b\} \quad (3.92)$$

e ainda, pode-se simplificar a Equação (3.92), resultando em:

$$\int_{\Gamma_{pa}} (p - p_b) \varphi d\Gamma = [\Phi]^t [C] \{p - p_b\} \quad (3.93)$$

onde é definido $[\Phi]$ como sendo:

$$[\Phi] = [\{ \phi_1 \} \quad \cdots \quad \{ \phi_i \} \quad \cdots \quad \{ \phi_{nn} \}] \quad (3.94)$$

Substituindo a função de ponderação φ pelo vetor modo $\{\phi\}$, na Equação (3.89), resulta-se na seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma_{pa}} \{\phi\} p_{rad} d\Gamma = \int_{\Gamma_{pa}} \{\phi\} \{\phi\}^t d\Gamma \{B\} \quad (3.95)$$

onde é definido a matriz de normalização $[Q]$ como sendo:

$$[Q] = \int_{\Gamma_{pa}} \{\phi\} \{\phi\}^t d\Gamma \quad (3.96)$$

Combinando os resultados das Equações (3.95) e (3.93), é obtida uma expressão matricial que exprimirá as amplitudes modais B_{mn} , Equação (3.97):

$$[Q] \{B\} = [\Phi]^t [C] \{p - p_b\} \quad (3.97)$$

isolando o termo das amplitudes modais, tem-se:

$$\{B\} = [Q]^{-1} [\Phi]^t [C] \{p - p_b\} \quad (3.98)$$

Voltando a expressão integral de acoplamento, Equação (3.86), a integral de interface pode ser expressa como sendo:

$$- \int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p d\Gamma = - \int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \{\phi\}^t [K] \{B\} \delta p d\Gamma \quad (3.99)$$

onde é definida a seguinte matriz $[K]$:

$$[K] = -j \begin{bmatrix} k_{00} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & k_{10} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & k_{01} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

onde o termo k_{mn} é o número de onda complexo, definido pela seguinte expressão:

$$k_{mn} = j \left[\left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.101)$$

A integral de interface descrita na Equação (3.99) é substituída pela definição da matriz $[C]$, a qual traz a informação da função de forma escolhida para interpolação da geometria, resultando na seguinte expressão:

$$- \int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p d\Gamma = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \{\delta p\}^t [C]^t [\Phi] [K] \{B\} \quad (3.102)$$

Substituindo o resultado das amplitudes modais, Equação (3.98) na Equação (3.102), tem-se a seguinte relação matricial, para o termo integral de acoplamento:

$$- \int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p d\Gamma = \{\delta p\}^t \frac{1}{\rho_0 \omega^2} [C]^t [\Phi] [K] [Q]^{-1} [\Phi]^t [C] \{p - p_b\} \quad (3.103)$$

e assim finalmente, definindo-se uma forma de cálculo, sobre uma aproximação de elementos finitos, para a matriz de admitância $[A]$ definido na Equação (3.104), apresentada a seguir:

$$[A] = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} [C]^t [\Phi] [K] [Q]^{-1} [\Phi]^t [C] \quad (3.104)$$

A função integral $[C]^t [\Phi]$, como já dito anteriormente, depende da natureza da aproximação (ordem de interpolação) escolhida no programa. Para a composição deste termo, deve-se determinar cada contribuição elementar, e fazer a montagem matricial global resultante. De uma forma geral esta pode ser expressa como sendo:

$$[C]^t [\Phi] = \int_{\Gamma_{pa}} N_j \varphi_{mn}(x, y) d\Gamma = \sum_{j=1}^N A [I_{mn}^j] \quad (3.105)$$

onde N é o número de nós presentes na interface Γ_{pa} , N_j representa a família de função de formas com dimensões do número de nós N , A representa o operador de montagem das contribuições elementares e I_{mn}^j é o valor da contribuição integral elementar a ser determinada, dada pela seguinte expressão:

$$I_{mn}^j = \int_{A^e} N_j^e \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (3.106)$$

Para uma aproximação bi-linear de um elemento quadrático de quatro nós, a evolução dos termos desta integral pode ser processada de forma analítica. Para uma formulação isoparamétrica, Figura (3.10), partindo-se da Equação (3.106), o termo I_{mn}^j é dado por:

$$I_{mn}^j = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho_0 \omega^2} N_j \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} \sum_{k=1}^4 N_k x_k\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} \sum_{k=1}^4 N_k y_k\right) |\det [J]| d\xi d\eta \quad (3.107)$$

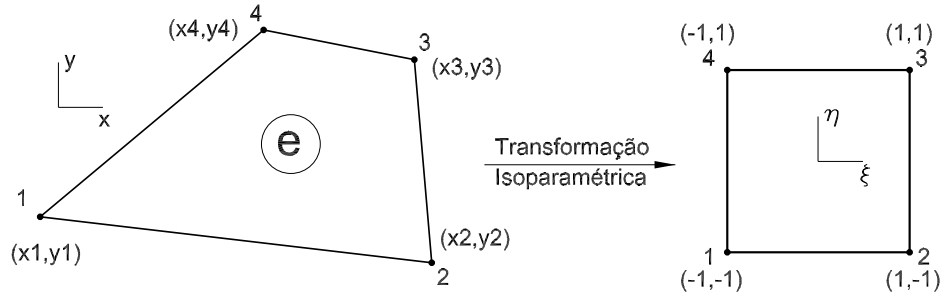


Figura 3.10: Elemento Quadrilateral e sua transformação Isoparamétrica

onde N_j^e são as funções de interpolação bilineares para o elemento quadrilateral no espaço isoparamétrico e são expressas como sendo:

$$N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = 1/4(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = 1/4(1 - \xi)(1 + \eta)$$

e ainda $[J]$ representa o Jacobiano da aproximação da geometria e expresso como sendo:

$$J = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & \partial N_2 / \partial \xi & \partial N_3 / \partial \xi & \partial N_4 / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & \partial N_2 / \partial \eta & \partial N_3 / \partial \eta & \partial N_4 / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Para cada par ordenado (m, n) , tem-se o cálculo dos termos de I_{mn}^j para cada elemento. No caso do elemento quadrilateral linear, quatro componentes são definidas. Devido a natureza da matriz de admitância $[A]$, Equação (3.103), um produto entre duas integrais de interface deve ser realizado, compondo-se assim a matriz de admitância ao nível global, logo a montagem de I_{mn} deve ser realizada anteriormente ao produto das matrizes $[K][Q]^{-1}$.

3.8.2 O efeito do número de modos no Guia de Onda

A seguir, um teste numérico é feito sobre uma cavidade retangular. Deseja-se notar as mudanças na matriz de admitância $[A]$ e na excitação $F = [A]p_b$ com a variação do número de modos transversais em uma análise com valor de frequência $\omega = 300Hz$.

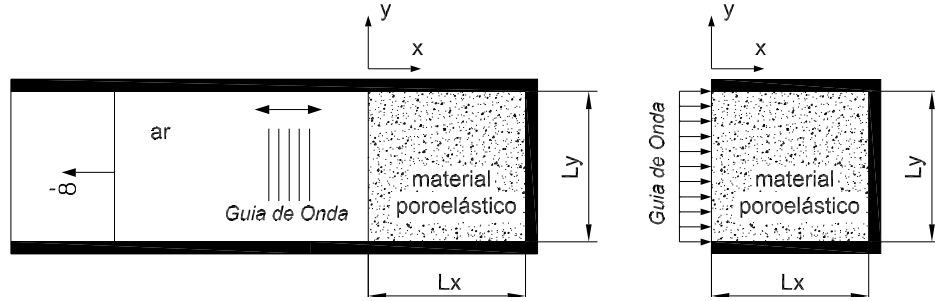


Figura 3.11: Correspondência do Carregamento do Guia de Onda

Conforme apresentado na Figura (3.11), a cavidade acústica possui uma dimensão muito maior ($L_z \rightarrow \infty$), o que consiste em uma idealização ao problema 2D, a outra dimensão é $L_y = 0,085m$, dividida em um número variável elementos lineares de interface conforme alguns exemplos numéricos a seguir. Comparou-se, o efeito do número de elementos de interface necessários para uma boa representação do número de modos da cavidade.

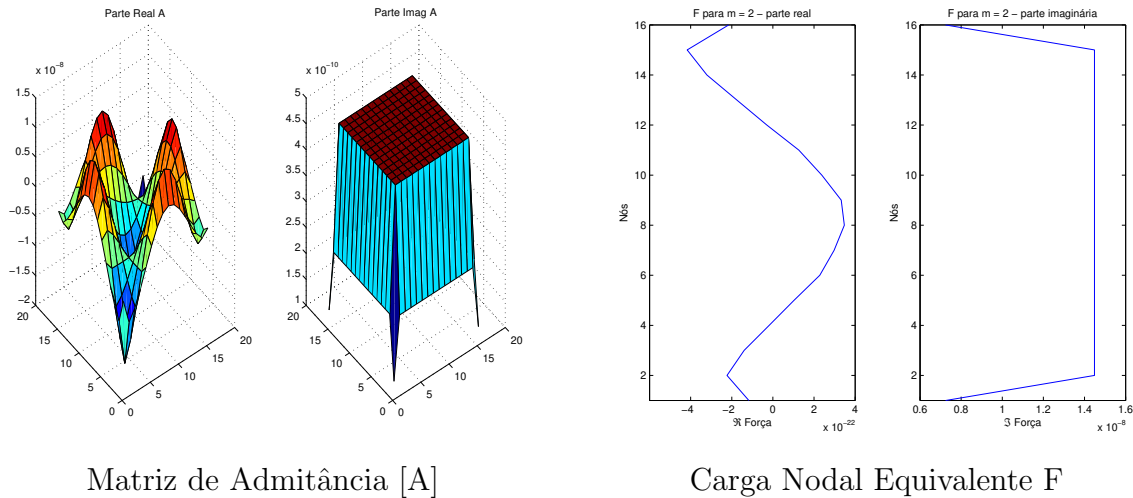
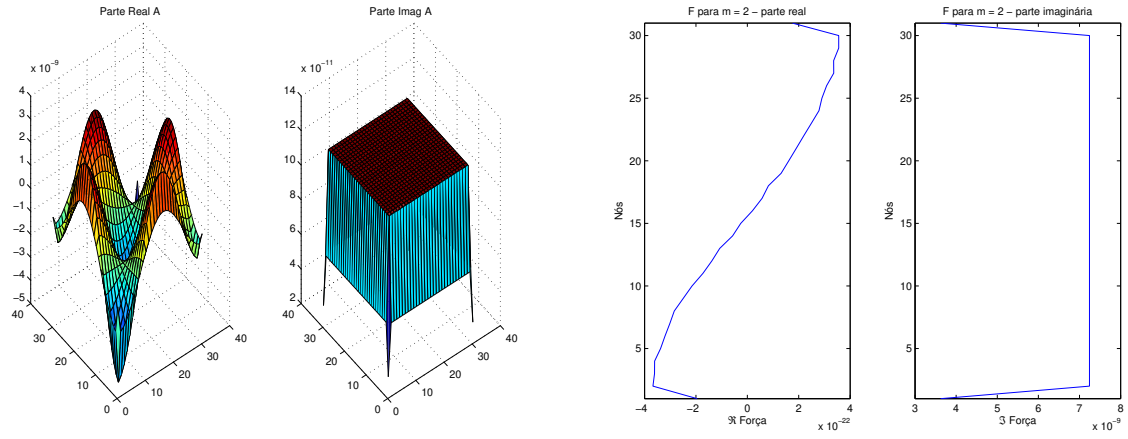


Figura 3.12: Exemplo 1 - $m = 2$, Elementos de Interface = 15 e $\omega = 300Hz$



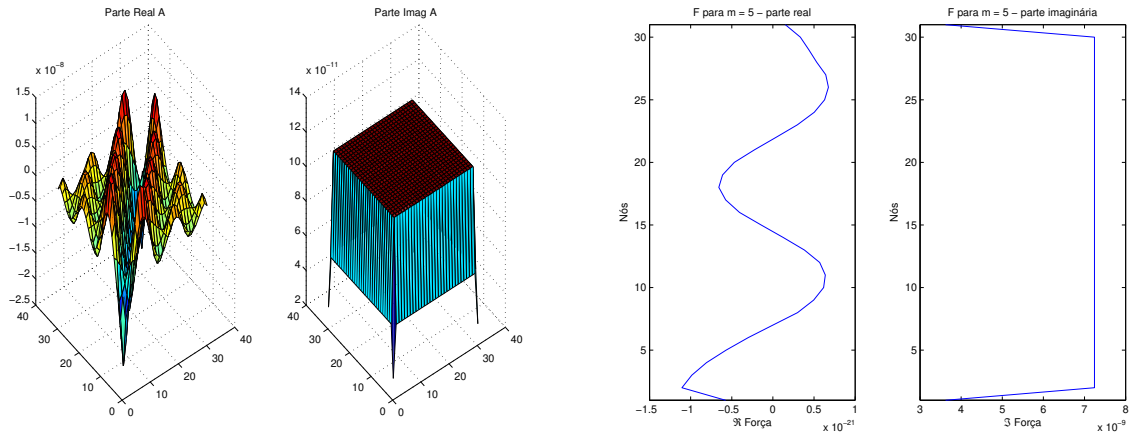
Matriz de Admitância $[A]$

Carga Nodal Equivalente F

Figura 3.13: Exemplo 2 - $m = 2$, Elementos de Interface = 30 e $\omega = 300Hz$

Nota-se pelas gráficos, que ao se utilizar o dobro de elementos de interface, para representar o carregamento do guia de onda, os valores das amplitudes para o segunda forma modal ($m = 2$) são muito sensíveis, porém a forma pode ser considerada como inalterada, principalmente para os resultados da parte imaginária.

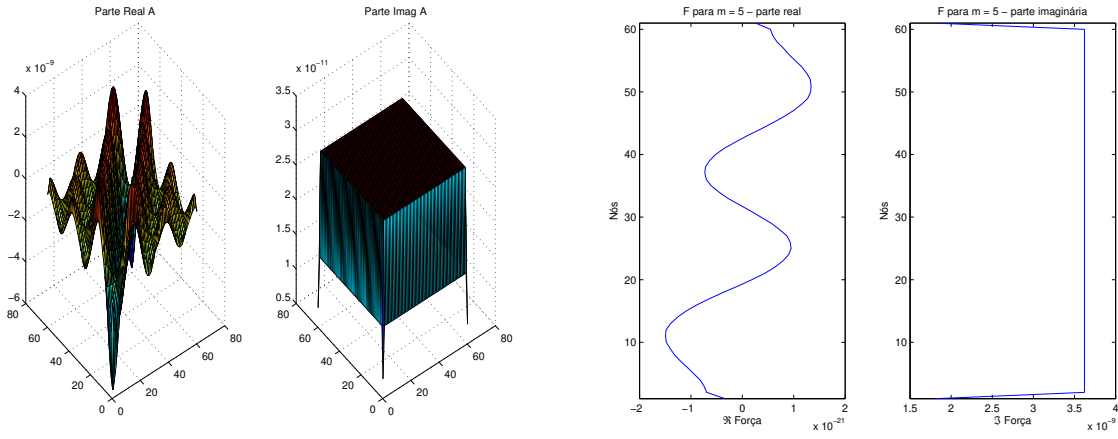
Em seguida uma análise para um número maior de modos, ou seja, para um total de $m = 5$.



Matriz de Admitância $[A]$

Carga Nodal Equivalente F

Figura 3.14: Exemplo 3 - $m = 5$, Elementos de Interface = 30 e $\omega = 300Hz$



Matriz de Admitância [A]

Carga Nodal Equivalente F

Figura 3.15: Exemplo 4 - $m = 5$, Elementos de Interface = 60 e $\omega = 300Hz$

A mesma variação nos resultados foram obtidas a partir da variação do número de elementos de interface, desta vez para um número de formas modais $m = 5$.

Em ambas comparações, nota-se que um número baixo de elementos pode proporcionar uma má representação dos modos, fatos esses verificados na constituição da matriz de admitância e no vetor de carga nodal equivalente.

Para a frequência de 300 Hz, a excitação é sempre um número imaginário puro, uma vez que os números obtidos na parte real do carregamento nodal equivalente são desprezíveis em comparação com a sua parte imaginária.

Neste capítulo, foram apresentados alguns aspectos teóricos relacionados ao modelo teórico de propagação de ondas em meios poroelásticos, acústicos e elásticos que serviram de base para construção de um modelo numérico de elementos finitos. A partir deste, deseja-se realizar a predição das medidas do desempenho de sistema de absorção acústica. As formulações apresentadas neste capítulo serão testadas e seus resultados comparados entre si. Alguns resultados das modelagens serão discutidos no Capítulo (6).

Capítulo 4

Otimização na Poroelasticidade Acoplada

Neste capítulo serão apresentados aspectos relativos ao posicionamento do problema de otimização segundo a metodologia de projeto proposta. O modelo do material artificial SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”) a ser empregado nas análises de otimização é apresentado e testado. As técnicas de homogeneização são aplicadas e uma proposta de uma célula unitária periódica e isotrópica composta de duas fases constituintes: Poroso e Acústico é apresentada. O objetivo é projetar um modelo de material intermediário Poro-Acústico consistente com as propriedades acústicas homogeneizadas.

4.1 Posicionamento do Problema de Otimização - Maximização da absorção acústica

Conforme visto no capítulo anterior, no item (3.7), o coeficiente de absorção acústica α é numericamente obtido através de um balanço de energia.

Considera-se o caso da propagação de ondas acústicas na presença de um meio com propriedades diferentes, o qual perturba e propicia desvios na direção preferencial de propagação. Ao se fazer um balanço de energia, considera-se os componentes incidentes, refletidos, transmitidos e dissipados, conforme mostrado na Figura (4.1).

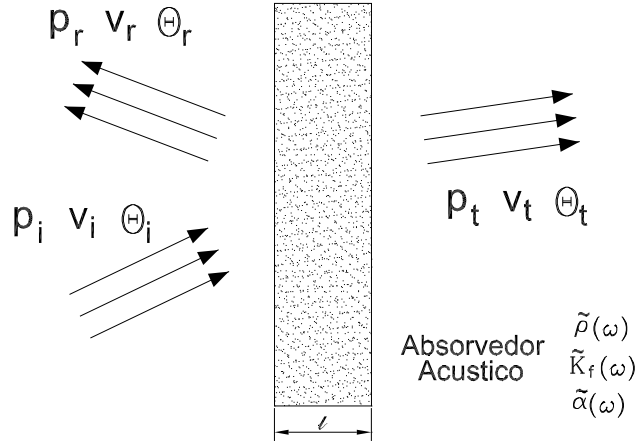


Figura 4.1: Efeito de um absorvedor acústico sobre a propagação sonora

Cada um dos efeitos sofridos pela onda acústica podem ser mensurados através de uma relação de energia conforme as equações de balanço energético, descritas a seguir:

$$\alpha = \frac{\text{ENERGIA ABSORVIDA}}{\text{ENERGIA INCIDENTE}} \quad (4.1)$$

$$R = \frac{\text{ENERGIA REFLETIDA}}{\text{ENERGIA INCIDENTE}} \quad (4.2)$$

$$T = \frac{\text{ENERGIA TRANSMITIDA}}{\text{ENERGIA INCIDENTE}} \quad (4.3)$$

Pela conservação da energia, tem-se que:

$$\alpha + R + T = 1 \quad (4.4)$$

Os potenciais de energia em um domínio poroelástico para a formulação mista (u, p) foi um tópico abordado no capítulo anterior, ítem (3.6). Uma interpretação física e matemática destes potenciais de energia é detalhada nos trabalhos de (Sgard et al., 2000) e (Atalla et al., 2001a).

O balanço de energia dissipada Π_{diss} em um material poroelástico, modelado pela formulação mista (u, p) , (Atalla et al., 1998) pode ser entendido como sendo a soma de três efeitos distintos, Equação (4.5).

$$\Pi_{diss} = \Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t \quad (4.5)$$

onde Π_{diss}^s representa a dissipação da fase sólida devido ao seu amortecimento histerético, Π_{diss}^v é parcela de perda devido às dissipações viscosas no meio poroso e Π_{diss}^t representa as perdas por efeitos térmicos.

Cada termo presente na Equação (3.59), no capítulo anterior, representa um potencial de energia. Para a formulação mista (u, p) , estas parcelas são obtidas por relações integrais no domínio, funções quadráticas das variáveis de estado, u_i e p , conforme apresentado no capítulo anterior.

O coeficiente de absorção é dado por um balanço entre a energia total inserida no sistema e a energia total dissipada, sendo descrito pela relação a seguir:

$$\alpha = \frac{\Pi_{diss}}{\Pi_{inc}} = \frac{\Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t}{\Pi_{inc}} \quad (4.6)$$

Para o caso de um guia de onda plana se propagando em um tubo de Kundt de seção retangular com amplitude de excitação p_0 , a energia inserida no sistema pode ser expressa por:

$$\Pi_{inc} = \frac{S |p_0|^2}{2\rho_0 c_0} \quad (4.7)$$

onde S é a área da seção retangular, ρ_0 é a densidade do ar e c_0 é a velocidade de propagação do som no ar em campo livre.

O objetivo da otimização proposta consiste na maximização da função de absorção acústica para valores específicos de frequência. Matematicamente, este problema pode ser posicionado pela descrição a seguir:

$$\max_{\mu} (\alpha)_{\omega} = \max_{\mu} \left(\frac{\Pi_{diss}}{\Pi_{inc}} \right)_{\omega} = \max_{\mu} \left(\frac{\Pi_{diss}^s + \Pi_{diss}^v + \Pi_{diss}^t}{\Pi_{inc}} \right)_{\omega} \quad (4.8)$$

Sujeito a:

$$\int_{\Omega} \mu d\Omega = V(\mu) \leq f_{vol} V_0 \quad (4.9)$$

$$0 \leq \mu_{\min} \leq \mu \leq 1 \quad (4.10)$$

$$\frac{d\Pi_{total}}{d\left\{ \begin{matrix} u_i & p \end{matrix} \right\}^t} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (4.11)$$

onde V é o volume do material artificial e V_0 representa o volume inicial de projeto de material poroso homogeneizado e considerado contínuo.

As restrições apresentadas nas Equações (4.9), (4.10) e (4.11) possuem significados físicos. A primeira restrição está relacionada com o limite volumétrico que este novo material pode ocupar. A segunda restrição se refere à variação das variáveis de projeto topológico. Valores nulos, geralmente causam instabilidade e singularidades na solução, devendo ser utilizado um valor μ_{min} pequeno. Neste caso, a variável de projeto é a densidade elementar, a qual consiste em uma variável artificial que indica a presença de um determinado material. Tal termo, será usado na interpolação do material intermediário e será definido na seqüência. A terceira restrição corresponde ao equilíbrio dinâmico, em um sistema discretizado, por exemplo, em elementos finitos, tal contexto pode ser expresso através da Equação (4.12):

$$[Z_A]\{U\} = \{F\} \quad (4.12)$$

onde $[Z_A]$ é a matriz dinâmica $[Z]$ do sistema Poro-Acústico acoplado superposta à projeção modal do guia de onda $[A]$, $\{U\}$ é o vetor das variáveis independentes, em sua forma generalizada e na formulação mista (u, p) corresponde a $\{U\} = \{u_i \ p\}^t$ e $\{F\}$ é a força de excitação do sistema.

Para um contexto de discretização em elementos finitos, a função objetivo absorção pode ser determinada de forma global como sendo:

$$\alpha = \frac{\Pi_{diss}}{\Pi_{inc}} = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im (\{U\}^t [Z] \{U\}) \quad (4.13)$$

Ou ainda aplicando a definição do método dos deslocamentos para a montagem do sistema, no contexto de um domínio discretizado em N elementos finitos, onde cada parcela elementar de dissipação é determinada individualmente e somada, em uma formulação geral, chega-se a:

$$\alpha = \frac{\Pi_{diss}}{\Pi_{inc}} = \frac{\sum_{k=1}^N \Pi_{diss}^k(\mu_k)}{\Pi_{inc}} = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \sum_{k=1}^N \Im (\{U\}_k^t [Z]_k \{U\}_k) \quad (4.14)$$

onde cada elemento está associado a uma variável local μ_k , a qual representa a densidade artificial de cada elemento e indica a existência de uma determinada fase constituinte do material composto.

4.2 O modelo do Material Poro-Acústico

Para se formular e resolver um problema de otimização topológica, faz-se necessário uma descrição matemática para o material composto por duas ou mais fases. Duas abordagens são utilizadas neste trabalho, uma contínua, a qual as relações são estabelecidas para um material intermediário, e outra discreta, onde somente duas condições são possíveis para o material. Nesta seção, serão abordados os modelos dos materiais intermediários.

4.2.1 Variáveis de Projeto Contínuas - Homogeneização

O modelo para o material pode ser obtido a partir da utilização das técnicas de homogeneização para uma célula periódica e unitária composta das fases poroelástica e acústica, tratando-se portanto de um problema acoplado, conforme ilustrado na Figura (4.2).

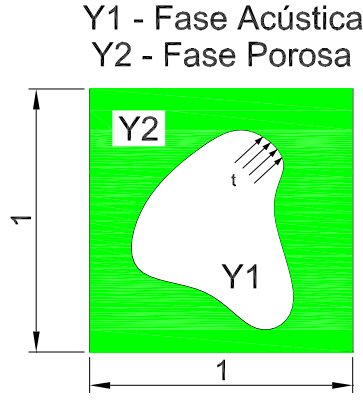


Figura 4.2: Homogeneização de uma célula Poro-Acústica isotrópica

Na sequência será apresentado o estudo desenvolvido inicialmente por (Bourgat, 1979) sobre a aplicação da técnica de homogeneização em domínios regidos por uma equação diferencial de segunda ordem. Será acrescentado o termo de massa à formulação original, com o propósito de descrever os problemas dinâmicos de materiais porosos regidos pela equação de fluido equivalente.

O problema de segunda ordem de valor de contorno é descrito de uma forma geral pela equação a seguir:

$$\Upsilon(u) + bu = f \quad (4.15)$$

sendo Υ um operador diferencial de segunda ordem, u representa a variável independente escalar e b é um coeficiente do termo linear.

Em sua forma diferencial e em notação indicial, o problema de valor de contorno de segunda ordem descrito na Equação (4.15) pode ser reescrito como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + bu = f \quad (4.16)$$

A seguinte expansão assintótica para a variável u é proposta;

$$u = u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (4.17)$$

onde a razão entre as escalas macro e microscópica é ε , isto é:

$$y = x/\varepsilon \quad (4.18)$$

onde y representa a escala microscópica e x é a variável espacial da escala macroscópica.

As escalas são dependentes uma da outra, portanto a regra de derivação de funções compostas deve ser observada, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (4.19)$$

Substituindo a expansão da variável $u = u^\varepsilon$ na Equação (4.16), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \right) \right] + \\ b(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = f \end{aligned} \quad (4.20)$$

Fazendo a suposição de que as propriedades do domínio, descritas nos termos a_{ij} e b são funções que possuem variação somente ao nível microscópico, ou seja na escala y , pode-se escrever:

$$a_{ij}(x, y) = a_{ij}(y) \quad (4.21)$$

$$b(x, y) = b(y) \quad (4.22)$$

tais expressões representam que o meio é homogêneo em x , mas suas propriedades dependem da constituição do meio ao nível microscópico.

Reordenado-se os termos das integrais e mais uma vez aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{aligned}
& a_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} \right) + \\
& \varepsilon a_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + a_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) + \\
& \varepsilon^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) + \varepsilon a_{ij} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \right) + \\
& bu_0 + \varepsilon bu_1 + \varepsilon^2 bu_2 = f \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Nesta equação, encontram-se quatro operadores diferenciais diferentes, cada um específico para sua potência de ε :

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \underbrace{a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\varepsilon^0} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)}_{\varepsilon^{-1}} \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)}_{\varepsilon^{-1}} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)}_{\varepsilon^{-2}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Estes operadores serão aqui especificados segundo a seguinte notação compacta:

$$\Upsilon_1 = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad (4.25)$$

$$\Upsilon_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.26)$$

$$\Upsilon_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.27)$$

Reescrevendo a Equação (4.23) em termos dos novos operadores diferenciais, tem-se a seguinte igualdade:

$$(\varepsilon^{-2} \Upsilon_1 + \varepsilon^{-1} \Upsilon_2 + \varepsilon^0 \Upsilon_3 + b) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = f \quad (4.28)$$

ou ainda, tal expressão pode ser rearrumada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-2} \Upsilon_1(u_0) + \varepsilon^{-1} \Upsilon_1(u_1) + \Upsilon_1(u_2) + \varepsilon^{-1} \Upsilon_2(u_0) + \Upsilon_2(u_1) + \varepsilon \Upsilon_2(u_2) + \\
& \Upsilon_3(u_0) + \varepsilon \Upsilon_3(u_1) + \varepsilon^2 \Upsilon_3(u_2) + bu_0 + \varepsilon bu_1 + \varepsilon^2 bu_2 = f \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Analisando os termos de potência de ε em ambos os lados da equação, obtêm-se as relações entre as parcelas da expansão da variável u .

$$\varepsilon^{-2} \Rightarrow \Upsilon_1(u_0) = 0 \quad (4.30)$$

$$\varepsilon^{-1} \Rightarrow \Upsilon_1(u_1) + \Upsilon_2(u_0) = 0 \quad (4.31)$$

$$\varepsilon^0 \Rightarrow \Upsilon_1(u_2) + \Upsilon_2(u_1) + \Upsilon_3(u_0) + bu_0 = f \quad (4.32)$$

$$\varepsilon^1 \Rightarrow \Upsilon_2(u_2) + \Upsilon_3(u_1) + bu_1 = 0 \quad (4.33)$$

$$\varepsilon^2 \Rightarrow \Upsilon_3(u_2) + bu_2 = 0 \quad (4.34)$$

A partir da Equação (4.30), tem-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u_0}{\partial y_j} \right) = 0 \quad (4.35)$$

o que indica que u_0 é uma função de x , ou seja $u_0 = f(x)$ e portanto $u_0(x, y) = u_0(x)$, isto é, depende exclusivamente da escala macroscópica.

A Equação (4.31) pode ser simplificada e apresenta a seguinte relação diferencial entre as parcela u_1 e u_0 :

$$\Upsilon_1(u_1) = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} \right)}_0 - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i} \quad (4.36)$$

sendo que o primeiro termo da Equação (4.36) se anula pois u_0 é constante em relação a escala microscópica y .

O operador bilinear ℓ_Y é bastante útil no desenvolvimento deste problema de homogeneização. Tal operador corresponde à forma fraca da função ao qual é aplicada. Assim, considera-se a forma integral abaixo:

$$\ell_Y(\theta, \phi) = \int_Y a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} dy \quad (4.37)$$

onde θ e ϕ são duas funções quaisquer da escala y microscópica.

A partir desta definição, a função escalar $\chi^j(y)$, que será utilizada para o desacoplamento do problema entre as duas escalas, macro e microscópica, é definida como sendo a resposta do sistema - variável independente u , sobre as condições de contorno estabelecidas a priori.

Em problemas bidimensionais ($j = 1, 2$), ou seja, dois conjuntos de soluções $\chi(y)$ serão determinados, para dois diferentes problemas cada qual com sua condição de contorno.

A determinação de $\chi^j(y)$ é usada para se construir uma relação para $u_1(x, y)$ e pode ser obtida através da solução da Equação (4.38), descrita a seguir:

$$\ell_Y (\chi^j - y_j, \psi) = 0 \quad \forall \psi \quad (4.38)$$

onde ψ representa a função de ponderação.

A expressão definida na Equação (4.38) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy - \int_Y a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy = 0 \quad (4.39)$$

Considerando-se que a função $\chi^j(y)$ é Y-periódica, decorrem as seguintes relações integrais:

$$\int_Y \chi^j(y) dy = 0 \quad (4.40)$$

$$\int_Y \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_j} dy = 0 \quad (4.41)$$

onde Y é o período na microescala, neste caso é o próprio volume da célula unitária.

Aplicando o operador Υ_1 sobre a função $\chi^j(y)$ e fazendo recorrência a Equação (4.36), uma nova relação é determinada:

$$\Upsilon_1(\chi^j) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} \quad (4.42)$$

Podendo-se reescrever a mesma relação da Equação (4.36), em uma forma passível à integração:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) = - \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_j} \right) \quad (4.43)$$

Aplicando-se duas integrações sobre a célula periódica Y , determina-se a relação de $u_1(x, y)$. A primeira integração:

$$a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial y_j} = - \frac{\partial u_0}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_j} + w(x) \quad (4.44)$$

onde $w(x)$ é uma constante proveniente da integração em y . A segunda integração, resulta em:

$$u_1(x, y) = - \chi^j(y) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} + \tilde{w}(x) \quad (4.45)$$

Usando-se a terceira equação apresentada em (4.32), pode-se determinar uma relação para o deslocamento $u_2(x, y)$, levando-se em conta as seguintes relações a seguir:

Seja a função θ , Y -periódica, esta função possui solução determinada, desde que a parcela $F(y)$ que consiste em aplicar-se o operador Υ_1 sobre θ , tenha sua integral sobre o período Y igual a zero, ou seja:

$$\Upsilon_1(\theta) = F \rightarrow \int_Y F(y) dy = 0 \quad (4.46)$$

Por ser uma função periódica, F possui integral do período sobre sua derivada também igual a zero.

$$\int_Y \frac{\partial F(y)}{\partial y} dy = 0 \quad (4.47)$$

O volume da célula é dado pela seguinte relação:

$$\int_Y dy = |Y| \quad (4.48)$$

A relação mostrada na Equação (4.32) pode ser reescrita, correspondendo a aplicação do operador Υ_1 sobre a função periódica $u_2(x, y)$:

$$\Upsilon_1(u_2) = f - \Upsilon_2(u_1) - \Upsilon_3(u_0) - bu_0 \quad (4.49)$$

Aplicando todos estes fatos para a Equação (4.49), a integral resultante é dada como sendo:

$$\int_Y \Upsilon_1(u_2)(x, y) dy = 0 \quad (4.50)$$

ou ainda:

$$\int_Y (f - \Upsilon_2(u_1) - \Upsilon_3(u_0) - bu_0) dy = 0 \quad (4.51)$$

Desenvolvendo as integrais e através de algumas simplificações, chega-se ao resultados descritos a seguir:

$$|Y| f - \int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) \right] dy - \int_Y a_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} dy - \int_Y bu_0 dy = 0 \quad (4.52)$$

Conforme já apresentado, uma função Y-periódica possui média igual a zero sobre o seu período Y:

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) dy = 0 \quad (4.53)$$

Sendo a Equação (4.52) reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dy + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \int_Y a_{ij} dy + u_0 \int_Y b dy = |Y| f \quad (4.54)$$

Substituindo o resultado obtido para a parcela $u_1(x, y)$, da Equação (4.45) na Equação (4.54), tem-se o seguinte desenvolvimento matemático:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ik} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} dy + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \int_Y a_{ij} dy + u_0 \int_Y b dy = |Y| f \quad (4.55)$$

$$-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \int_Y a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} dy + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \int_Y a_{ij} dy + u_0 \int_Y b dy = |Y| f \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|Y|} \left[\int_Y a_{ij} dy - \int_Y a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} dy \right] + u_0 \frac{1}{|Y|} \int_Y b dy = f \quad (4.57)$$

Reescrevendo esta última equação obtida através de seus coeficientes homogeneizados e macroscópicos:

$$a_{ij}^H \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + b^H u_0 = f \quad (4.58)$$

Os termos homogeneizados, que são calculados ao nível microscópico, são a seguir explicitados:

$$a_{ij}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ij} dy - \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} dy \quad (4.59)$$

$$b^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y b dy \quad (4.60)$$

O termo homogeneizado a_{ij}^H pode ser determinado através do operador bilinear a_Y aplicado nas seguintes funções:

$$a_Y(\chi^j - y_j, -y_i) = - \int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} dy + \int_Y a_{ij} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} dy \quad (4.61)$$

$$= \int_Y a_{ij} dy - \int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} dy \quad (4.62)$$

$$= a_{ij}^H(x) \quad (4.63)$$

A partir da Equação (4.39) e desde que a função ψ seja arbitrária, pode-se utilizar a própria função χ^j como função de ponderação. Desta forma, pode-se escrever a seguinte formulação fraca integral:

$$\ell_Y (\chi^j - y_j, \chi^i) = 0 \quad (4.64)$$

o que resulta na seguinte expressão:

$$\int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} dy - \int_Y a_{ij} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} dy = 0 \quad (4.65)$$

e que leva a seguinte simplificação:

$$\int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} dy - \int_Y a_{ij} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} dy = 0 \quad (4.66)$$

Em resumo, a solução do problema de homogeneização de um material composto é regido pela equação de valor de contorno, cujo comportamento é descrito pela Equação (4.16), passa pela execução dos seguintes passos:

- Determinar o valor de χ^j a partir da Equação integral (4.39) sobre a célula unitária e periódica Y , utilizando-se de algum método numérico, por exemplo: discretização por elementos finitos.
- Obter os resultados dos coeficientes homogeneizados a_{ij}^H e b^H , Equação (4.59) e Equação (4.60).
- Resolver o problema homogeneizado na escala macroscópica, restrito a suas condições de contorno.

Ao se fazer análises sucessivas paramétricas e seguindo os passos para obtenção dos coeficientes homogeneizados, tem-se um exemplo de comportamento intermediário e homogeneizado de uma célula isotrópica Poro-Acústica, regida pela equação da onda. O processo

consiste em se analisar pelo método dos elementos finitos, modelados à formulação de fluido equivalente, o domínio composto por Fase Porosa e Acústica descrito na Figura (4.3).

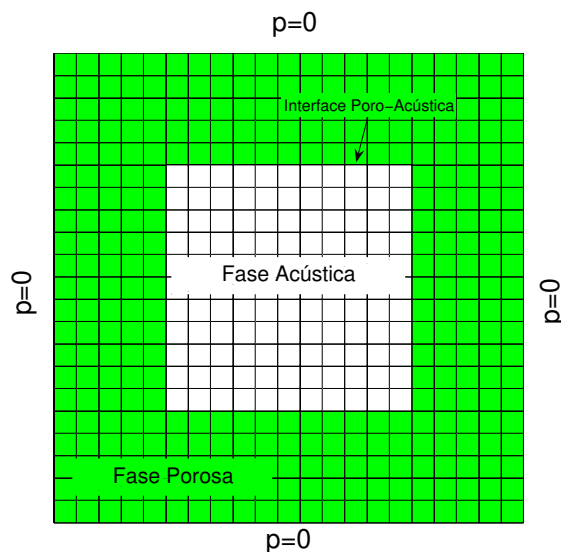


Figura 4.3: Homogeneização de uma célula Poro-Acústica isotrópica

As condições de contorno para os problemas χ^1 e χ^2 correspondem à imposição do valor de pressão acústica $p = 0$ em todo o contorno da célula periódica unitária, garantindo assim respostas simétricas e Y-periódicas.

A seguir, uma homogeneização numérica dos parâmetros do tensor a_{ij} e do termo linear b de uma célula Poro-Acústica é apresentada. A partir dos resultados de elementos finitos, as equações descritas em (4.59) e (4.60) são utilizadas. Neste testes, o material poroso utilizado tem suas propriedades descritas na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Propriedades do material poroso

Material	α_∞	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
Espuma A	1,1	5000	0,98	$154 \cdot 10^{-6}$	$220 \cdot 10^{-6}$

e para o domínio acústico, as propriedades físicas são apresentadas na Tabela (4.2), apresentada a seguir:

Tabela 4.2: Propriedades físicas do ar

Material	$\rho_f(kg/m^3)$	η	$P_0(N/m^2)$	Pr	$\gamma = C_p/C_v$	C_0
Ar	1,161	$15,89 \cdot 10^{-6}$	$1,01 \cdot 10^5$	0,707	1,40	343,0

Os resultados para os termos da matriz a_{ij}^H , partes reais e imaginária, para um problema bidimensional são apresentados na Figura (4.4).

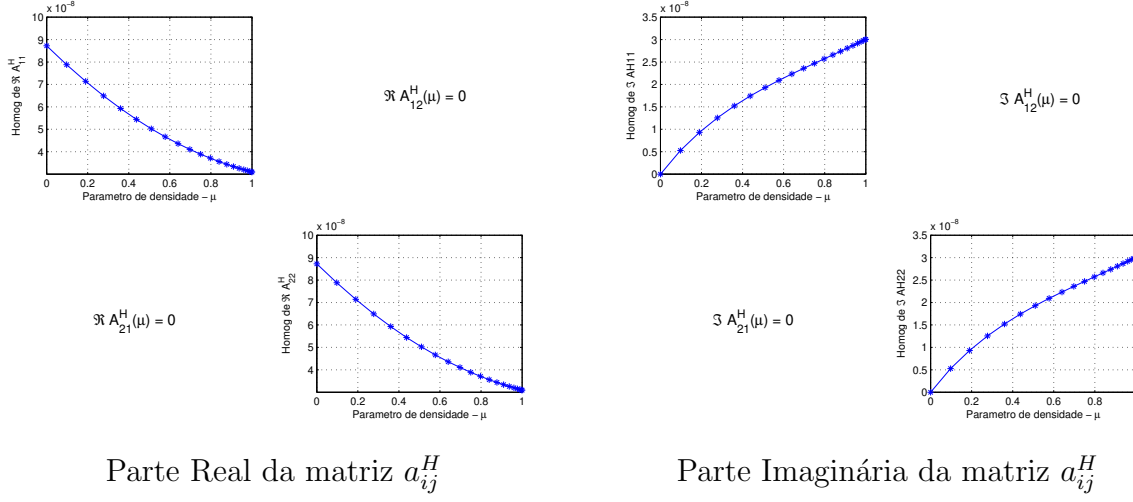


Figura 4.4: Homogeneização do Coeficiente a_{ij}^H

O coeficiente da matriz de massa homogeneizado b^H é apresentado na Figura (4.5).

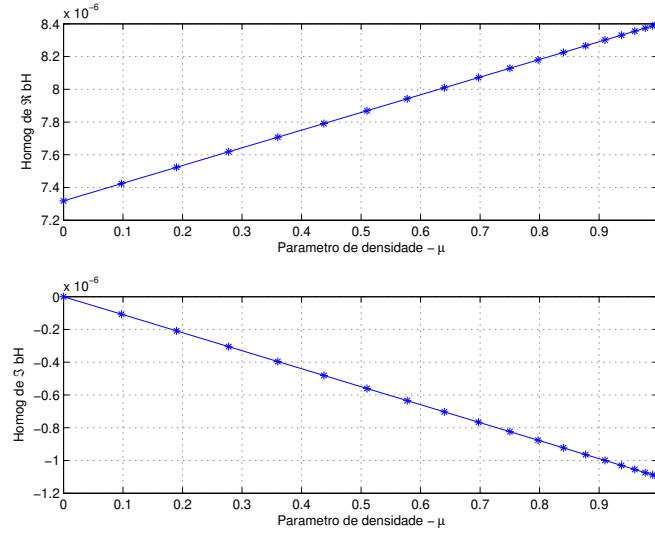


Figura 4.5: Homogeneização do Coeficiente b^H

A seguir alguns resultados de elementos finitos obtidos para a variável primária χ^j em sucessivas análises, nas quais variaram-se as densidades acústicas das células isotrópicas unitárias.

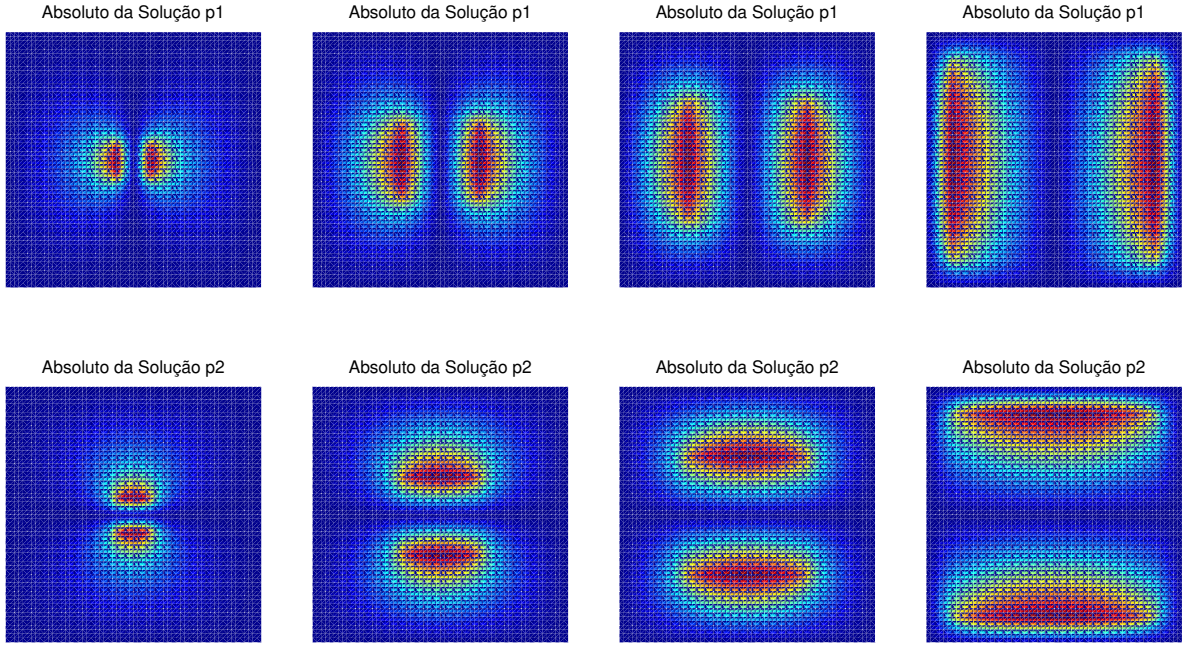


Figura 4.6: Distribuição de Pressão χ^j nas análises de elementos finitos

Na Figura (4.6) são apresentadas as duas soluções distintas para o campo de pressão acústica χ^j , com $j = 1$ e $j = 2$, os quais correspondem às soluções p_1 e p_2 apresentadas, respectivamente. Nota-se uma simetria dos resultados absolutos de pressão no domínio de uma célula unitária e periódica.

Com base nestes valores e aplicando-se as técnicas descritas nas Equações (4.59) e (4.60), pode-se determinar o comportamento do tensor a_{ij}^H e b^H com relação ao parâmetro de mistura de densidade μ , os quais para a simulação numérica proposta, foram descritos nas Figuras (4.4) e (4.5), respectivamente.

4.2.2 O modelo do material aproximado - Método da densidade

O método de homogeneização é uma técnica analítica, que descreve as propriedades físicas de um material homogeneizado a partir da definição de uma célula unitária periódica. Tal técnica traz um custo, a parametrização geométrica da célula. Diante disso, os métodos de densidade (“SIMP”), que podem ser entendidos como um caso particular do método de homogeneização, vêm ganhando a preferência dos pesquisadores por apresentar uma metodologia mais simples: utilização de uma única variável de projeto, a densidade relativa às fases do material em cada ponto do domínio. Os resultados desta metodologia são

satisfatórios em comparação aos obtidos com o método de homogeneização.

O SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”), (Bendsoe e Sigmund, 2003), (Bulman et al., 2001) e (Hassani e Hinton, 1998), consiste na introdução de uma equação matemática na relação constitutiva do material. Nos problemas estruturais estáticos, a propriedade C é ponderada por uma densidade relativa que varia de 0, ausência de material, a 1, presença de material. A densidade artificial, denotada por μ permite escrever:

$$C(x) = \mu C_0 \quad (4.67)$$

onde $C(x)$ representa a propriedade do material artificial, por exemplo: a rigidez em problemas estruturais e C_0 é a propriedade do material homogêneo contínuo.

Tal variação deve ser contínua e ainda podendo ser penalizada com a introdução de um expoente na função densidade. Assim, o comportamento do material isotrópico com penalidade é dado por:

$$C(x) = \mu^p(x) C_0 \quad (4.68)$$

onde p é o parâmetro de penalidade, o qual reduz as possibilidades de se modelar materiais intermediários entre densidade nula e unitária.

Geralmente em formulações mistas, como a formulação (u, p) da poroelasticidade, para assegurar que a matriz constitutiva do sistema seja positivo-definida, a propriedade não deve assumir valor nulo. Para tanto, pode-se utilizar um limite não-nulo, porém muito pequeno em comparação ao valor nominal da propriedade C_0 , redefinindo assim a interpolação “SIMP”, descrita na Equação (4.68), da seguinte forma:

$$C(x) = C_{void} + \mu^p(x)(C_0 - C_{void}) \quad (4.69)$$

onde o termo C_{void} é o limite mínimo não nulo da propriedade e deve ser escolhido a partir da seguinte relação: $0 < C_{void} \ll C_0$, (Sigmund e Clausen, 2007).

Na literatura, várias aplicações da metodologia SIMP em problemas multi-físicos vêm sendo estudadas. A técnica de aproximação das propriedades intermediárias não se limita

aos problemas da elasticidade. No trabalho (Bendsoe e Sigmund, 1999), um resumo sobre este t3pico 3 3 apresentado, onde para problemas termo-el3sticos, os autores estabelecem limites para o par3metro de penalidade, de tal forma que a interpola33o do material tenha algum sentido f3sico.

Nos trabalhos de (Sigmund, 2001b) e (Sigmund, 2001c) s3o apresentados algumas regras de interpola33o para os limites dos materiais envolvidos em projetos envolvendo otimiza33o topol3gica em Micro-Mecanismos (MEMS-Micro Electrical Mechanical Systems), nos quais envolvem an3lises acopladas de dom3nios el3stico, t3rmicos e el3tricos.

A proposta de aplicar a metodologia do SIMP nos materiais porosos consiste em se criar uma nova porosidade para o material. Uma densidade relativa que varia continuamente de um valor inicial de 0, que se constituiria na condi33o de dom3nio ac3stico, at3 1, que seria somente a presen3a de material poroso.

Tal aproxima33o, seria uma interpola33o entre dois materiais distintos, compostos por fases porosa e ac3stica, regidos por uma mesma equa33o diferencial, a formula33o de fluido equivalente, sem a presen3a de vazios. As propriedades do material poroso em uma formula33o de fluido equivalente, s3o ponderadas pela densidade μ da seguinte forma:

$$b^H(x) = \mu^p b_1(x, y) + (1 - \mu^p) b_2(x, y) \quad (4.70)$$

onde $b(x)$ 3 uma medida de resistividade da onda ac3stica sobre o material poro-ac3stico na escala macrosc3pica e as medidas b_1 e b_2 representam as varia33es desta fun33o na escala microsc3pica para o dom3nio poroso e ac3stico, respectivamente. De uma forma geral, pode-se escrever:

$$b(x, y) = \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} \quad (4.71)$$

onde $\tilde{\rho}_{22}$ 3 a densidade do fluido modificada e $\tilde{R}$ 3 uma compressibilidade volum3trica do fluido presente no material poroso, ambas s3o vari3veis complexas e dependentes da frequ3ncia ω .

Simplificando a express3o da Equa33o (4.71), $b(x, y)$ corresponde ao inverso do quadrado da velocidade de propaga33o do som no material.

$$b_1 = \frac{1}{C_p^2} \quad (4.72)$$

$$b_2 = \frac{1}{C_a^2} \quad (4.73)$$

onde b_1 está relacionado com a velocidade de propagação do som no meio poroso C_p e b_2 está relacionado com a velocidade de propagação da onda no ar C_a .

As velocidades de propagação do material poro-acústico variam entre $343m/s$ para a fase acústica e $198m/s$ para a fase porosa. Estas velocidades foram estimadas para o material poroelástico com características na frequência de 500 Hz. Graficamente, as curvas de densidade são construídas de acordo com o modelo da Equação (4.70) e apresentadas na Figura (4.7).

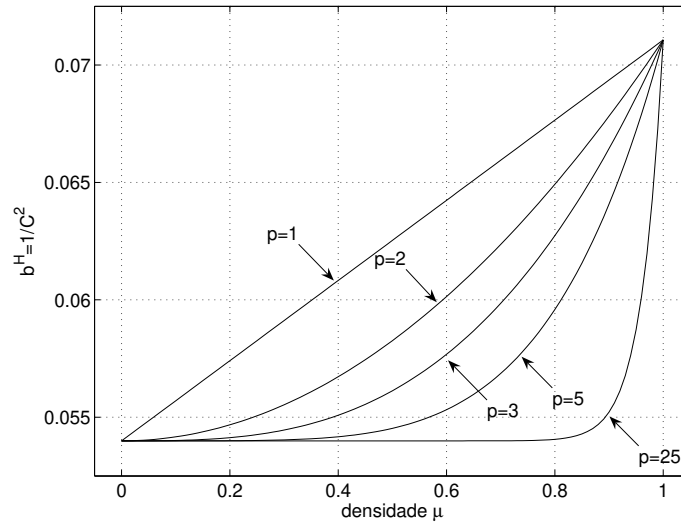


Figura 4.7: Curvas do material poroso-acústico - Distribuição SIMP

Nota-se que para penalidades elevadas, criam-se materiais artificiais com velocidades de propagação do som muito semelhantes às da fase acústica, isto é, um material artificial composto por fases acústica e porosa não extrapola seu poder de resistividade, o que é coerente.

A partir destas relações descritas, pode-se obter os valores da velocidade complexa de propagação sonora no material intermediário. Este parâmetro pode ser utilizado no

programa de Elementos Finitos como propriedade característica do material Poro-Acústico, (Jensen e Sigmund, 2005).

Um exemplo numérico de um material artificial construído com a metodologia SIMP é apresentado a seguir. Apresenta-se um exemplo da evolução numérica da velocidade de propagação homogeneizada C^H , Equação (4.74), para um material heterogêneo composto de domínios poroso (1) e acústico (2).

$$C^H = \mu^p C_p + (1 - \mu^p) C_a \quad (4.74)$$

Para o exemplo numérico de aplicação, o material poroso utilizado foi o mesmo do problema de homogeneização e suas propriedades são descritas na Tabela (4.1). Para o domínio acústico, as propriedades físicas podem ser encontradas na Tabela (4.2).

Utilizando-se de um valor $p = 4$ para a penalidade e o modelo SIMP definido na Equação (4.74), encontram-se as funções para o material composto, conforme indicado na Figura (4.8). Os resultados são dependentes do valor da densidade μ e da frequência ω .

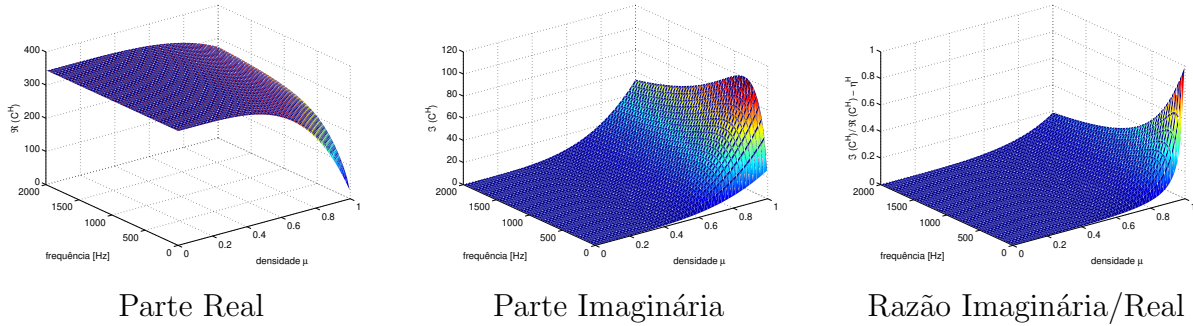


Figura 4.8: Velocidade complexa de propagação no material composto

As curvas têm comportamento suave, apesar de penalizadas. Estas representam o comportamento dinâmico do material artificial. Nota-se que para valores intermediários de densidade, não existe grande variação da curva com relação à frequência ω .

A razão entre as partes imaginária e real apresentou uma singularidade para o valor de densidade unitária e frequência nula, resultado este típico do modelo do material poroelástico. Este fator é uma medida do grau de amortecimento do material homogeneizado, conforme apresentado na Equação (4.75) a seguir:

$$\begin{aligned}
C^H &= C_r^H + C_i^H j \\
&= C_r^H (1 + \eta j)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

onde $\eta = C_i^H / C_r^H$ representa o fator de amortecimento.

Em resumo, o modelo utilizado neste trabalho é o SIMP, devido às suas características já discutidas. Na Tabela (4.3), as matrizes dinâmicas elementares dos domínios poroso e acústico são apresentadas e os termos intermediários a serem interpolados tem suas regras de mistura definidas segundo a metodologia SIMP.

Tabela 4.3: Propriedades do material poroso

Domínio Poroelástico	Domínio Acústico
$[Z]_{poro} = \begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [\widetilde{M}] & - [\widetilde{C}] \\ - [\widetilde{C}]^t & 1/\omega^2 [\widetilde{H}] - [\widetilde{Q}] \end{bmatrix}$	$[Z]_{acust} = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0]^t & 1/\omega^2 [H]_{ar} - [Q]_{ar} \end{bmatrix}$
Matrizes	
$ \begin{aligned} [K] &= \int_{\Omega} [LN^u]^t [D] [LN^u] d\Omega \\ [\widetilde{M}] &= \int_{\Omega} [N^u]^t m_{poro} [N^u] d\Omega \\ [\widetilde{H}] &= \int_{\Omega} [\nabla N^p]^t h_{poro} [\nabla N^p] d\Omega \\ [\widetilde{Q}] &= \int_{\Omega} [N^p]^t q_{poro} [N^p] d\Omega \\ [\widetilde{C}] &= \int_{\Omega} [N^u]^t c_{poro} [\nabla N^p] d\Omega \end{aligned} $	$ \begin{aligned} [H]_{ar} &= \int_{\Omega} [\nabla N^p]^t h_{ar} [\nabla N^p] d\Omega \\ [Q]_{ar} &= \int_{\Omega} [N^p]^t q_{ar} [N^p] d\Omega \end{aligned} $
Coeficientes	
$ \begin{aligned} [D] &= \text{matriz constitutiva sólida} \\ m_{poro} &= \widetilde{\rho} \\ c_{poro} &= \widetilde{\gamma} \\ h_{poro} &= h^2 / \widetilde{\rho}_{22} \\ q_{poro} &= h^2 / \widetilde{R} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} h_{ar} &= 1/\rho_0 \\ q_{ar} &= 1/\rho_0 c_0^2 \end{aligned} $
Regra de Interpolação	
$ \begin{aligned} \rho(\mu) &= m_{void} + \mu (m_{poro} - m_{void}) \\ \gamma(\mu) &= c_{void} + \mu^p (c_{poro} - c_{void}) \\ [D](\mu) &= [D]_{void} + \mu^p ([D]_{poro} - [D]_{void}) \\ h(\mu) &= h_{ar} + \mu^p (h_{poro} - h_{ar}) \\ q(\mu) &= q_{ar} + \mu^p (q_{poro} - q_{ar}) \end{aligned} $	

Capítulo 5

Análise de Sensibilidade e Otimização Topológica em Sistemas Poroelásticos

Neste capítulo, abordam-se conceitos relacionados ao problema de otimização do sistema poroelástico. A análise de sensibilidade também será apresentada. Serão abordadas e aplicadas as diversas metodologias de identificação da primeira derivada da função objetivo com relação às variáveis de projeto topológico (densidades elementares). Uma comparação da eficiência de cada método é apresentada neste capítulo. Uma abordagem evolucionária baseada na sensibilidade discreta das variáveis de projeto topológico é abordada. Finalmente, os testes numéricos da metodologia de otimização topológica proposta segundo um critério evolutivo são apresentados.

5.1 Análise de Sensibilidade do Problema Poro-Acústico

Para a determinação das expressões analíticas da sensibilidade (primeira derivada da função objetivo α), três procedimentos distintos foram considerados: primeiramente, as variáveis de projeto são contínuas, com e sem a presença do termo adjunto, e por último como variáveis discretas.

A análise de sensibilidade da função objetivo com respeito às variáveis de projeto topológico proposta ao sistema poroelástico foi validada através de uma derivação analítica e outra numérica por diferenças finitas.

Com a determinação da sensibilidade da função objetivo, é obtida uma expressão analítica, a qual é função do conjunto de variáveis de projeto elementares μ_k e da frequência de excitação do sistema ω , segundo descrito na Equação (5.1).

$$Sensibilidade = \nabla \alpha(\omega, \mu_k) = \frac{d\alpha(\omega, \mu_k)}{d\mu_k} \quad (5.1)$$

A avaliação da expressão (5.1) foi realizada por diferentes técnicas, conforme apresentado nos próximos itens.

5.2 Expressões da sensibilidade - variáveis contínuas

Nesta seção, um desenvolvimento matemático para a expressão da sensibilidade da função objetivo α é apresentado. A função objetivo é obtida a partir dos resultados do método de elementos finitos apresentado no Capítulo 3.

A absorção elementar é definida ao nível dos graus de liberdade do elemento como sendo:

$$\alpha^k = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \cdot \Im(\{U\}_k^t [Z]_k \{U\}^k) \quad (5.2)$$

onde $[Z]_k$ representa a matriz dinâmica ao nível elementar, $\{U\}_k$ é o vetor das variáveis nodais elementares e Π_{inc} é o potencial de incidência.

O somatório das absorções elementares pode ser descrito por:

$$\sum_{k=1}^N \alpha^k = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im[\{U\}^t [Z] \{U\}] \quad (5.3)$$

onde $[Z]$ representa a matriz dinâmica global e $\{U\}$ representa os vetores de deslocamentos estruturais e pressões em sua forma generalizada.

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ p \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

O valor da primeira derivada total de α , é representado por $d\alpha/d\mu_k$, um gradiente que reflete a variação da função objetivo (taxa de variação) com relação a cada uma das variáveis de projeto μ_k .

- Método Direto

A primeira metodologia de determinação da sensibilidade da função objetivo α é feita de forma direta, a qual através da regra da cadeia, as derivadas parciais da resposta e da função α em relação às variáveis de projeto μ_k são explicitadas.

A definição de derivada total de α em relação às variáveis de projeto μ_k é dada pela Equação (5.5).

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} = \frac{1}{\Pi_{inc}} \frac{d\Pi_{diss}}{d\mu_k} \quad (5.5)$$

A sensibilidade ou derivada da resposta $\{U\}$ em relação ao conjunto de variáveis de projeto é obtida pela derivação de ambos os lados da Equação de Equilíbrio, resultando na Equação (5.6), mostrada a seguir:

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial\mu_k} = -[Z_A]^{-1} \frac{\partial[Z]}{\partial\mu_k} \{U\} \quad (5.6)$$

onde $[Z_A]$ representa a matriz global do sistema Poro-Acústico $[Z]$ acoplada à matriz do guia de onda $[A]$.

Tal expressão, Equação (5.6), consiste em um sistema linear com dimensões globais, que deve ser solucionado para cada variável de projeto (densidade elementar). Cada sistema consiste na montagem de um vetor carga com dimensões globais, porém determinado a nível elementar. A Equação (5.7) mostra a igualdade entre os vetores globais e elementares para determinação da sensibilidade da resposta.

$$\frac{\partial[Z]}{\partial\mu_k} \{U\} = \frac{\partial[Z]_k}{\partial\mu_k} \{U\}_k \quad (5.7)$$

A matriz global $[Z_A]$ acopla todos os graus de liberdade do problema, por isto a determinação da sensibilidade da resposta não pode ser simplificada ao nível elementar, porém do ponto de vista da implementação computacional, $[Z_A]$ deve ser decomposta uma única vez, resultando em um sistema com n lados direitos a serem resolvidos, onde n representa o número de variáveis de projeto, e o que torna o método muito mais eficiente.

Substituindo o resultado da Equação (5.6) na definição da derivada total, obtém-se a expressão da sensibilidade da função objetivo α , Equação (5.8) determinada de forma

direta. Tal metodologia se torna desfavorável quando o número de variáveis de projeto é grande, visto que este é número de vezes que um sistema linear de equações com dimensões globais (número de graus de liberdade totais da malha) deva ser solucionado.

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im \left(\frac{\partial \{U\}^t}{\partial \mu_k} [Z] \{U\} + \{U\}^t \frac{\partial [Z]}{\partial \mu_k} \{U\} + \{U\}^t [Z] \frac{\partial \{U\}}{\partial \mu_k} \right) \quad (5.8)$$

Na Figura (5.1), um esquema em forma de seqüência é apresentado para o entendimento do método direto.

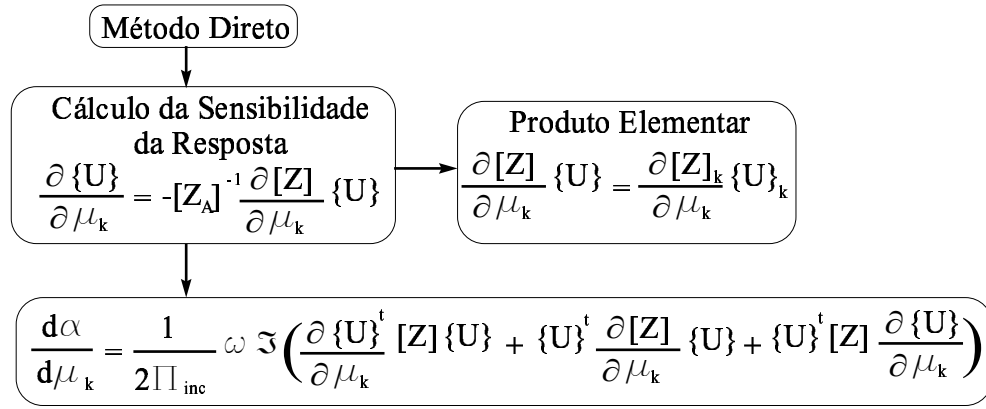


Figura 5.1: Fluxograma do Método Direto

- Método Adjunto

A segunda metodologia a ser utilizada neste trabalho é definida como o Método Adjunto. Tal método também baseia-se na definição da derivada total, Equação (5.9), em função dos seus valores parciais, porém há a construção de um problema adjunto, conforme segue-se o desenvolvimento a seguir:

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu_k} + \frac{\partial \alpha}{\partial \{U\}} \frac{\partial \{U\}}{\partial \mu_k} \quad (5.9)$$

A equação de Equilíbrio do Sistema é reescrita aqui através da Equação apresenta abaixo:

$$[Z_A]\{U\} - \{F\} = \{R\} = 0 \quad (5.10)$$

onde $\{R\}$ é o resíduo da Equação de Equilíbrio.

Aplicando-se a definição da derivada total da Equação de Equilíbrio (5.10), chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{d\{R\}}{d\mu_k} = \frac{\partial\{R\}}{\partial\mu_k} + \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}} \right] \frac{\partial\{U\}}{\partial\mu_k} = 0 \quad (5.11)$$

A partir de tal expressão, pode-se extrair a sensibilidade da resposta, Equação (5.12), notando-se que uma mesma expressão foi obtida pelo método direto.

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial\mu_k} = - \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}} \right]^{-1} \frac{\partial\{R\}}{\partial\mu_k} \quad (5.12)$$

A diferença deste método em relação ao método direto está no fato de que a sensibilidade da resposta $\{U\}$ não ser determinada de forma explícita e sim através de um problema adjunto, implícito a sensibilidade da função objetivo α .

Substituindo o resultado de (5.12) na expressão da sensibilidade de α , Equação (5.9), obtém-se:

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} = \frac{\partial\alpha}{\partial\mu_k} - \frac{\partial\alpha}{\partial\{U\}} \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}} \right]^{-1} \frac{\partial\{R\}}{\partial\mu_k} \quad (5.13)$$

Criando-se assim o termo $\{\lambda\}^t$, que representa o termo adjunto, representado a seguir:

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} = \frac{\partial\alpha}{\partial\mu_k} + \{\lambda\}^t \frac{\partial\{R\}}{\partial\mu_k} \quad (5.14)$$

O problema adjunto é obtido pela solução do seguinte sistema linear, Equação (5.15).

$$\{\lambda\}^t = - \frac{\partial\alpha}{\partial\{U\}} \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\{U\}} \right]^{-1} \quad (5.15)$$

o que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right]^t \{\lambda\} = - \frac{\partial \alpha}{\partial \{U\}} \quad (5.16)$$

Neste problema, a derivada parcial da função objetivo α em relação à resposta se faz necessária. Devido à resposta $\{U\}$ ser complexa, a derivada é dada pela definição de derivada parcial complexa:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \{U\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \{U_r\}} - i \frac{\partial \alpha}{\partial \{U_i\}} \right) \quad (5.17)$$

onde i é o termo imaginário, $\{U_r\}$ e $\{U_i\}$ representam as partes reais e imaginárias do vetor de resposta $\{U\}$, respectivamente.

A definição da derivada parcial da equação de equilíbrio em relação à resposta $\{U\}$ é obtida e explicitada através da Equação (5.18), mostrada abaixo:

$$\left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right] = [Z_A] \quad (5.18)$$

A derivada parcial da função objetivo α em relação às variáveis de projeto μ_k deve ser obtida à nível elementar através da Equação (5.19).

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_k} = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im \left(\{U\}^t \frac{\partial [Z]}{\partial \mu_k} \{U\} \right) \quad (5.19)$$

Também de forma elementar, a derivada parcial da Equação de Equilíbrio em relação às variáveis de projeto é dado pela produto elementar, conforme descrição a seguir:

$$\frac{\partial \{R\}}{\partial \mu_k} = \frac{\partial [Z]}{\partial \mu_k} \{U\} \quad (5.20)$$

Na Figura (5.2), um outro esquema em forma seqüencial é apresentado, desta vez para o entendimento do método adjunto.

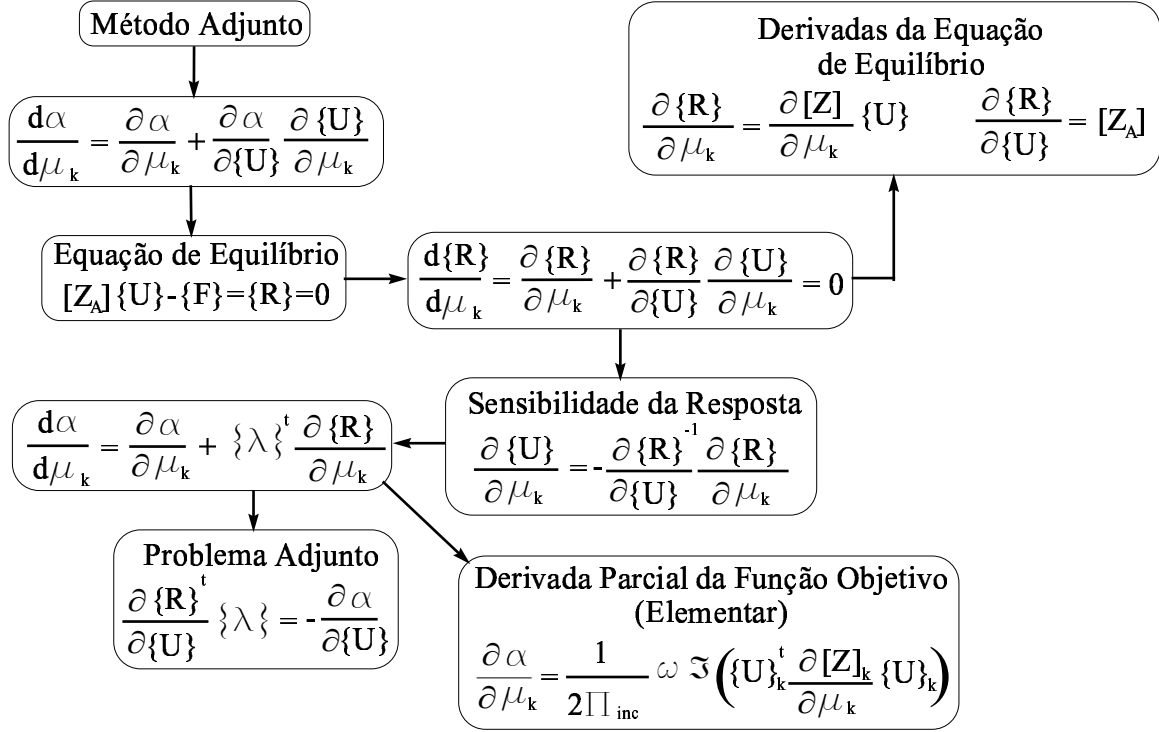


Figura 5.2: Fluxograma do Método Adjunto

- Método de Diferenças Finitas

A terceira metodologia é a derivação obtida numericamente através das diferenças finitas. A evolução da sensibilidade pelo método numérico de diferenças finitas, é baseado em uma aproximação da curva tangente, ou primeira derivada por uma secante a dois pontos da curva com pequena variação no eixo das abscissas. A estratégia de diferenças finitas utilizada para a validação da fórmula de análise de sensibilidade analítica é baseada na diferença do valor atual com os valores posteriores, como se segue:

$$\frac{d\alpha}{d\mu_e} = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\mu_k} \cong \frac{\alpha_{\mu_k} - \alpha_{\mu'_k}}{\mu_k - \mu'_k} \quad (5.21)$$

μ_k representa o vetor de variáveis de projeto em um estado atual de análise, μ'_k é o mesmo vetor, porém com uma pequena variação numérica d em alguma das variáveis k . Os resulta-

dos de absorção α_k e α'_k representam os resultados correspondentes aos valores determinados com as configurações μ_k e μ'_k , respectivamente. Com isto, pode-se então definir:

$$||\mu_k - \mu'_k|| = d \quad (5.22)$$

sendo d um valor pequeno. Para a definição deste parâmetro, deve-se utilizar de normas e convenções numéricas. Para análises numéricas feitas neste trabalho, adotaram-se valores em torno de 1 a 2

O método usado neste trabalho é o de diferenças centradas, no qual avalia-se o valor da função objetivo α em um valor do parâmetro em atraso e em avanço, ou seja, segundo a definição apresentada na Equação (5.23):

$$\frac{d\alpha}{d\mu_k} \cong \frac{\Delta\alpha}{\Delta\mu_k} = \frac{\alpha(\mu_k + d) - \alpha(\mu_k - d)}{2d} \quad (5.23)$$

onde a variável de progressão d deve ser um número pequeno, $d \rightarrow 0$, fator determinante na precisão deste método numérico.

Três abordagens para a determinação da sensibilidade das variáveis de projeto contínuas foram apresentadas: duas analíticas e outra numérica. No item (5.3), aplicações das três metodologias serão apresentadas e suas eficiências computacionais comparadas.

5.3 Testes Numéricos - Sensibilidade Contínua

A análise consistiu em se determinar o vetor de derivada primeira de alfa em relação as densidade elementares μ_k para cada ponto de frequência. A malha escolhida foi de 10×10 nós. Três métodos foram utilizados, um analítico direto, outro analítico com a presença do termo adjunto e o método de diferenças finitas. A malha considerada é bidimensional com simples porosidade e com excitação de um guia de onda acoplado na face ($x = 0$), conforme descrito na Figura (5.3).

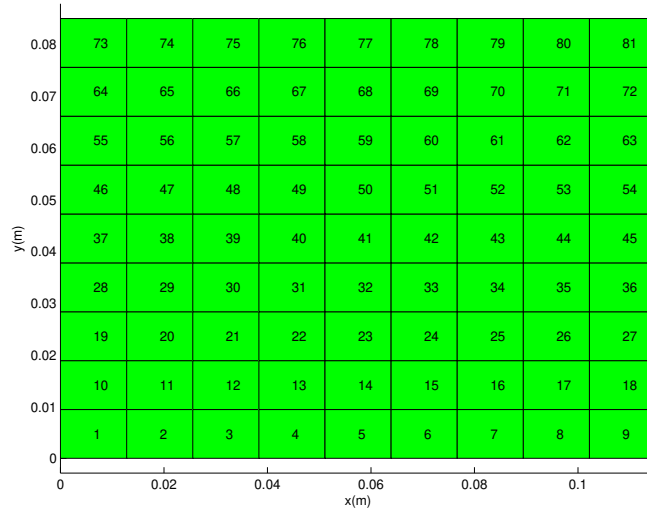
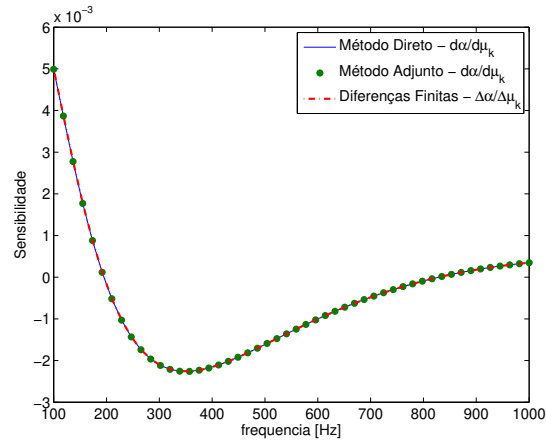
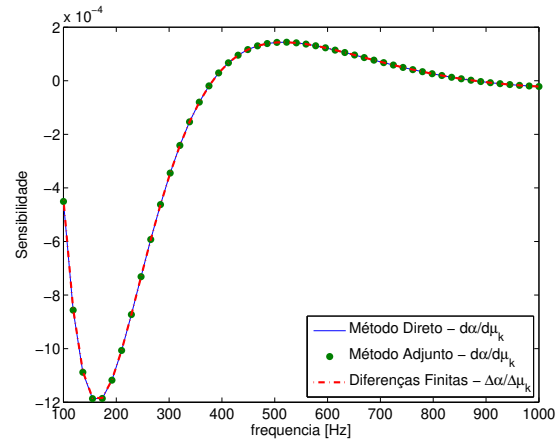


Figura 5.3: Malha de elementos finitos para a análise de sensibilidade

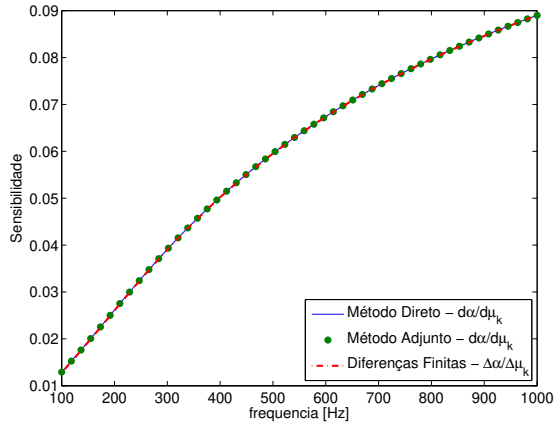
Analisando especificamente um determinado elemento, tem-se a evolução da derivada de α_e , em função da frequência, determinados e validados com os dois métodos, analítico e numérico. A penalidade do método SIMP utilizada nas simulações foi de valor $p = 3$. Para os elementos finitos poroelásticos: 5, 7, 10 e 22, tem-se os seguintes resultados descritos na Figura (5.4).



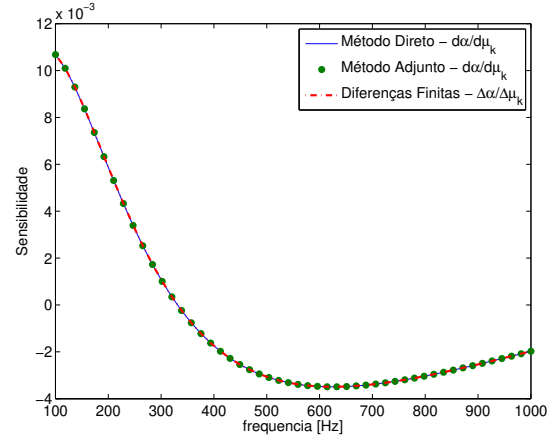
Elemento 5



Elemento 7



Elemento 10



Elemento 22

Figura 5.4: Variação da Sensibilidade Elementar com relação a frequência

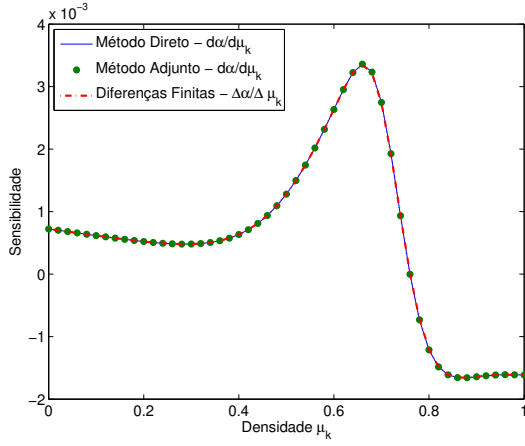
O parâmetro d de precisão numérica para o método de diferenças finitas utilizado foi de valor $d = 0,01$ e determinado na posição de $\mu_k = 1$.

A partir destes resultados, pode-se concluir que o procedimento para determinação analítica do gradiente da função objetivo em relação às variáveis de projeto está validado em conformidade aos resultados obtidos de forma numérica (diferenças finitas).

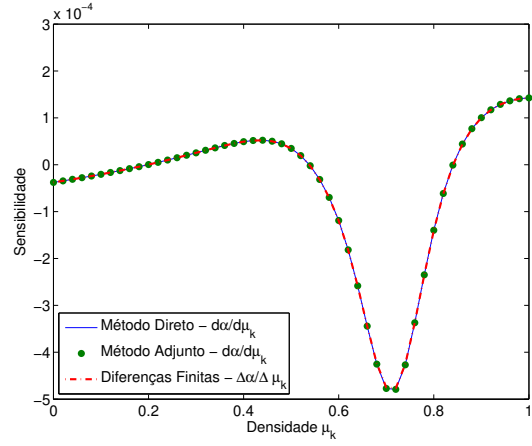
Neste trabalho, o método analítico adjunto desenvolvido será utilizado nos problemas de otimização topológica de sistemas absorvedores poroelásticos, por se tratar de um método eficiente e de boa precisão, conforme demonstrado no teste numérico.

Uma segunda análise paramétrica foi feita. Desta vez, a sensibilidade de α para diferentes densidades elementares μ_k , em um ponto específico de frequência $\omega = 500Hz$, é obtida. Na Figura (5.5), os seguintes comportamentos das sensibilidades dos elementos 5, 7, 10 e

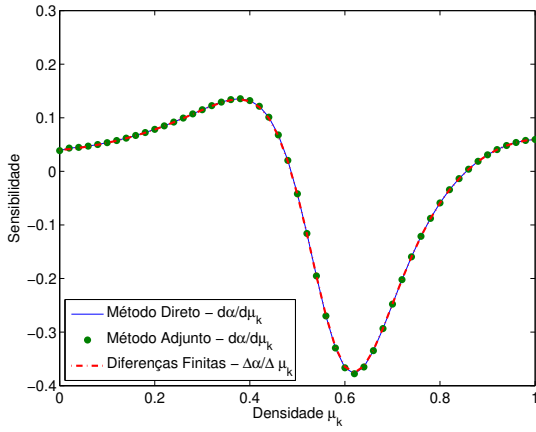
22 são apresentados.



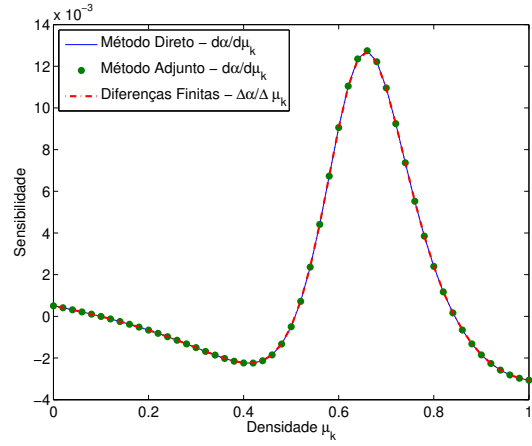
Elemento 5



Elemento 7



Elemento 10



Elemento 22

Figura 5.5: Variação da Sensibilidade Elementar com relação a densidade elementar

Nota-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos 3 métodos, o que valida o procedimento sugerido para o modelo poro-acústico.

Os tempos de processamento de cada tipo de análise foram comparados entre si e seus valores são apresentados na Tabela (5.1). Três tipos de malhas com elementos lineares foram testadas, com um seguido refinamento sequencial e aumento do número global de graus de liberdade.

Tabela 5.1: Tempos dos Métodos de Sensibilidade

TEMPOS (s)	Malha 5x5		Malha 9x9		Malha 15x15	
	Frequência	Densidade	Frequência	Densidade	Frequência	Densidade
Analítico Direto	1,0	27,7	5,6	666,3	37,6	13075,6
Analítico Adjunto	0,4	13,4	1,0	121,6	2,5	1213,0
Diferenças Finitas	12,7	20,5	90,3	253,5	670,0	3983,3

Os mesmo tempos de processamento são apresentados de uma forma gráfica, onde em uma escala logarítmica, pode-se qualificar os desempenhos dos métodos de sensibilidade das variáveis de projeto contínuas, Figura (5.6).

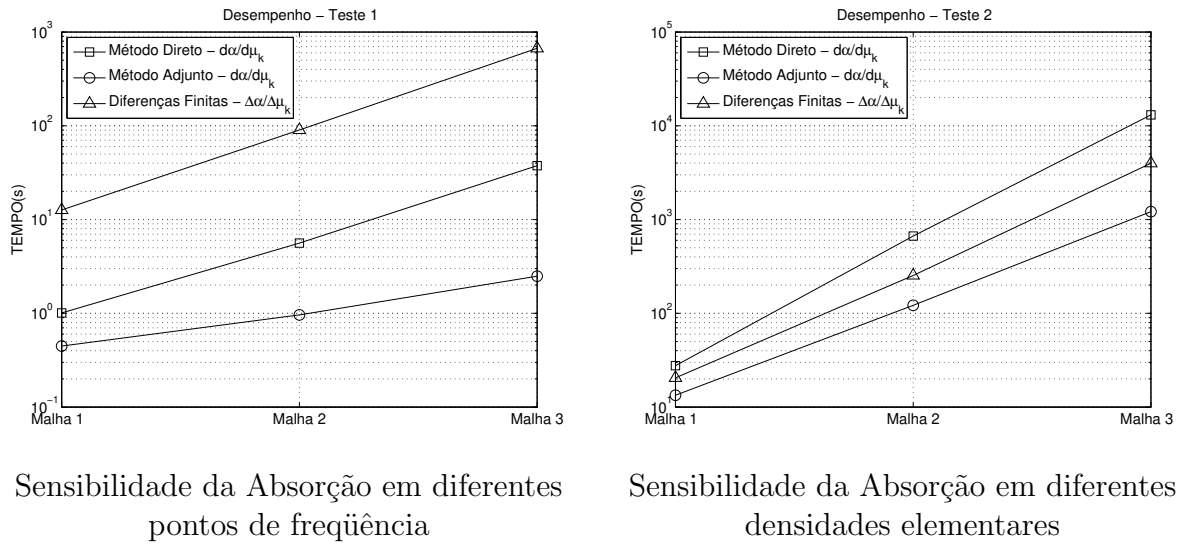


Figura 5.6: Desempenho dos Métodos de Sensibilidade

Através destes gráficos, pode-se notar que o método adjunto para determinação da sensibilidade se mostrou muito mais eficiente em comparação aos métodos direto e de diferenças finitas, pois apresentou tempos de processamento menores.

A análise de sensibilidade para diferentes densidades elementares, mostrou uma inversão entre os métodos direto e por diferenças finitas, em comparação ao problema de sensibilidade da absorção em função da frequência. O tipo de implementação computacional de cada um dos programas de análise, justifica tais tempos, nos quais para o método direto, diversas montagens do sistema global devem ser efetuadas.

5.4 Expressões da sensibilidade - variáveis discretas

Neste trabalho, também foi implementado um método de otimização topológica baseado na eliminação total de um determinado elemento em uma malha. Para este tipo de método, não faz sentido definir uma derivada contínua como sensibilidade, pois as variáveis discretas não possuem um domínio contínuo e sim pontual. As densidades elementares podem assumir os valores de 0, material acústico, ou 1, material poroso.

Para as variáveis discretas, o desenvolvimento deve ser concebido em termos de variação das quantidades pois as derivadas não são contínuas. Para a determinação da sensibilidade nestes casos, uma metodologia alternativa, baseada no cálculo de um número indicador de remoção para cada elemento deve ser utilizada. Através deste número, $\Delta\alpha_e$, a sensibilidade da função objetivo α é determinada. Considerando o cálculo da função objetivo α como se segue:

$$\alpha = \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im (\{U\}^t [Z] \{U\}) \quad (5.24)$$

sendo $[Z]$ a matriz dinâmica global que pode ser descrita pelo processo de montagem especificado abaixo:

$$[Z] = \underset{p=1}{\overset{n}{A}} [Z]_p \quad (5.25)$$

onde A representa o operador de montagem global e $[Z]_p$ é a matriz elementar, definida como sendo:

$$[Z]_p = \begin{bmatrix} [K]_p - \omega^2 [M]_p & -[C]_p \\ -[C]_p^t & \frac{1}{\omega^2} [H]_p - [Q]_p \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

onde $[K]_p$ e $[M]_p$ são as matrizes de rigidez e massa para o esqueleto poroso, $[H]_p$ e $[Q]_p$ representam as contribuições volumétricas e de compressibilidade do meio fluido e $[C]_p$ é a matriz de acoplamento fluido-estrutura no poroso.

A equação de equilíbrio do sistema Poro-Acústico com o efeito do acoplamento do guia de onda em uma forma matricial simplificada é dada por:

$$[Z_A]\{U\} = \{F\} \quad (5.27)$$

onde a matriz $[Z_A]$ representa a dinâmica do sistema e mais o acoplamento dinâmico proveniente da matriz de admitância do guia de onda com a interface porosa, de acordo com a expressão a seguir:

$$[Z_A] = [Z] + [A] \quad (5.28)$$

Supondo-se que uma modificação elementar qualquer resulte em outro sistema. Para tanto a modificação de um único elemento poroso, transformado em acústico, baseia-se no seguinte equacionamento, para a resposta Equação (5.29) e para o sistema Equação (5.30).

$$\{U\}^* = \{U\} + \{\Delta U\} \quad (5.29)$$

$$[Z_A]^* = [Z_A] + [\Delta Z] \quad (5.30)$$

A derivação discreta da Equação (5.24), consiste em se “retirar” um único elemento finito poroso do sistema. Na verdade, o elemento a ser retirado, será transformado em acústico, o que para a resposta resulta em uma mudança. A matriz dinâmica acústica $[Z]_a$ é real e para este elemento é descrita como sendo:

$$[Z]_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2}[H]_a - [Q]_a \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

onde $[H]_a$ e $[Q]_a$ representam as matrizes elementares volumétricas e de compressibilidade do meio acústico, respectivamente.

Tal elemento não contribui na função objetivo α , uma vez que o elemento acústico é considerado como não absorvedor de energia $\alpha^{acus} = 0$, porém sua inserção no novo sistema modifica consideravelmente a sua sensibilidade.

A modificação no sistema é definida matematicamente como sendo:

$$[\Delta Z] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & [Z]_a - [Z]_p & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

onde $[\Delta Z]$ pode ser interpretado como a diferença entre a matriz dinâmica do estado com a presença do elemento e pelo estado com a transformação do elemento, representado de forma esquemática através da Equação (5.32).

Supondo que a excitação $\{F\}$ do sistema, permaneça constante com a modificação elementar, uma vez que a carga depende somente da aproximação dos modos do guia de onda e da pressão de excitação p_0 , pode-se escrever a seguinte expressão:

$$[Z_A]^* \{U\}^* = \{F\} \quad (5.33)$$

Comparando-se as duas expressões das Equações (5.27) e (5.33), tem-se em uma expressão para a modificação da resposta, que é dada por:

$$\{\Delta U\} = -([Z_A] + [\Delta Z])^{-1} [\Delta Z] \{U\} \quad (5.34)$$

Ou ainda, pode-se escrever de forma resumida:

$$\{\Delta U\} = -[Z_A]^{*-1} [\Delta Z] \{U\} \quad (5.35)$$

A partir do desacoplamento do resultado, $[\Delta Z] \{U\}$ se torna um vetor com dimensões globais, porém determinado a nível elementar.

A dificuldade da determinação desta variação para a resposta, está no fato de que para cada elemento candidato a ser modificado, um diferente sistema linear com dimensões globais (número de graus de liberdade da malha) deve ser resolvido, o que torna muito dispendioso a determinação da sensibilidade da função objetivo α a partir de variáveis discretas.

Aplicando o operador variação (Δ) em ambos os lados da Equação (5.24), tem-se que o ganho de absorção com a transformação elementar é dado pela Equação (5.36). Este parâmetro se constitui no número de remoção e sua determinação é um passo importante no processo de otimização topológica evolucionária.

$$\Delta\alpha_e = \frac{1}{2\Pi_{inc}}\omega \Im \left(\{\Delta U\}^t [Z] \{U\} + \{U\}^t [\Delta Z] \{U\} + \{U\}^t [Z] \{\Delta U\} \right) \quad (5.36)$$

Um procedimento para otimização de sistemas com variáveis discretas é padrão e descrito a seguir, (Xie e Steven, 1997). Seja o domínio dos números de remoção a serem determinados para uma malha qualquer de elementos finitos aplicados ao problema de otimização topológica, Figura (5.7).

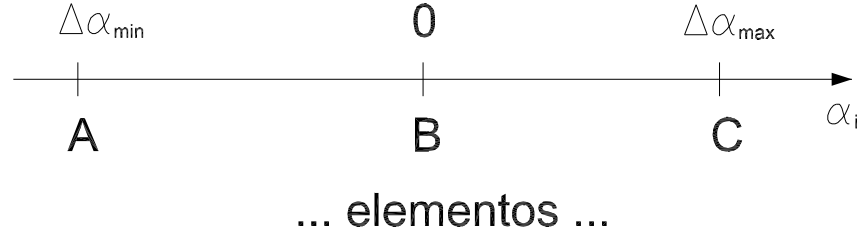


Figura 5.7: Intervalo de valores elementares do número de sensibilidade α_i

Os valores de $\Delta\alpha_e$ se encontram no intervalo $[\Delta\alpha_{min}, \Delta\alpha_{max}]$, definidos como mínimos e máximos encontrados ou determinados, respectivamente, para os valores dos números de sensibilidade elementares na malha de elementos finitos.

Existe um elemento em que $\Delta\alpha_e = \Delta\alpha_{min}$ e outro elemento $\Delta\alpha_e = \Delta\alpha_{max}$ e ainda outro com valor igual ou próximo de zero. De uma forma geral, pode-se, esquematizar um procedimento de retirada/transformação dos elementos com o intuito de se evoluir no processo de otimização.

- Aumentar os valores da função α - remover elementos α_e da região C, que indicam os maiores ganhos $\Delta\alpha_e$ na função objetivo (maximização de α).
- Reduzir os valores da função α - remover elementos α_e da região A, que indicam as maiores perdas $\Delta\alpha_e$ na função objetivo (minimização de α).

- Permanecer inalterados (ou mínimo possível de alteração) os valores da função α com redução de material - remover elementos α_e da região B, que alteram pouco a função objetivo.

5.5 Teste Numéricos - Número de Remoção

Neste ítem, alguns testes numéricos da sensibilidade da resposta $\{U\}$ com relação a sua fórmula de recorrência, Equação (5.37) e do uso dos termos de segunda ordem são apresentados.

A justificativa desta análise seria em uma possível simplificação dos cálculos para determinação do número de remoção do processo evolutivo de maximização da absorção acústica da amostra. A seguir, nota-se que o efeito da ausência do produto $[\Delta Z]\{\Delta U\}$, sobre a variação da resposta $\{U\}$ é significativo nas parcelas reais e imaginárias, conforme os resultados obtidos.

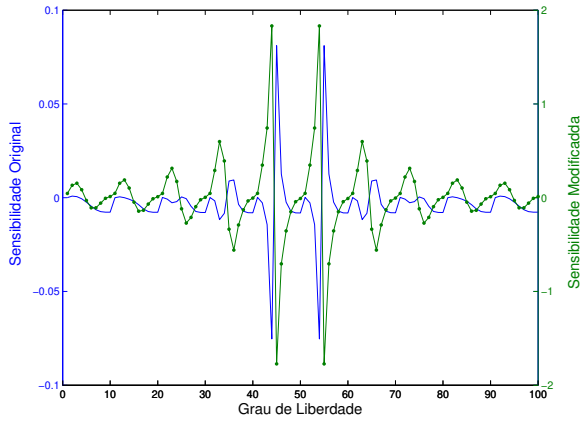
$$\{\Delta U\}_{original} = -([Z_A] + [\Delta Z])^{-1} [\Delta Z]\{U\} \quad (5.37)$$

A partir da modificação proposta, a nova sensibilidade da resposta deve ser determinada através da Equação (5.38).

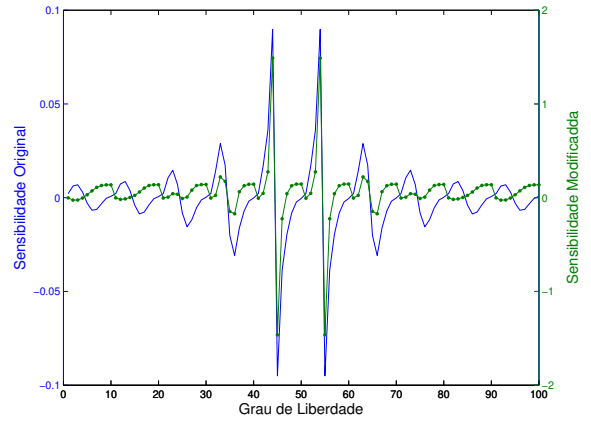
$$\{\Delta U\}_{modificada} = -[Z_A]^{-1} [\Delta Z]\{U\} \quad (5.38)$$

Nesta análise, utilizou-se uma malha com 9×9 elementos finitos, consistindo em um número de 10×10 graus de liberdade (GDL) e com as dimensões do domínio descritas na Figura (5.3).

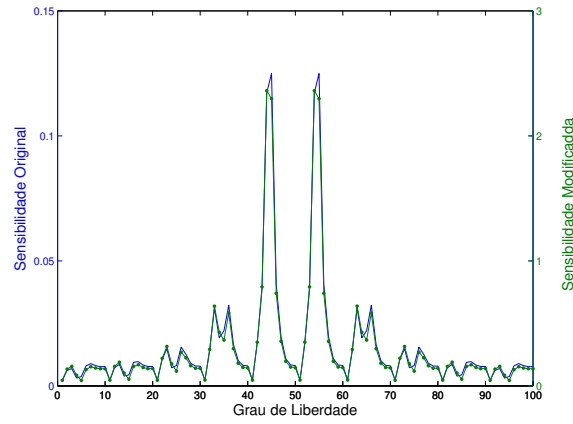
Primeiramente, a modificação do elemento 40 será analisada. Para a primeira iteração do processo evolutivo de determinação da sensibilidade da resposta $\{\Delta U\}$ e para uma frequência de 300 Hz, tem-se os resultados descritos na Figura (5.8).



Parte Real da Sensibilidade



Parte Imaginária da Sensibilidade

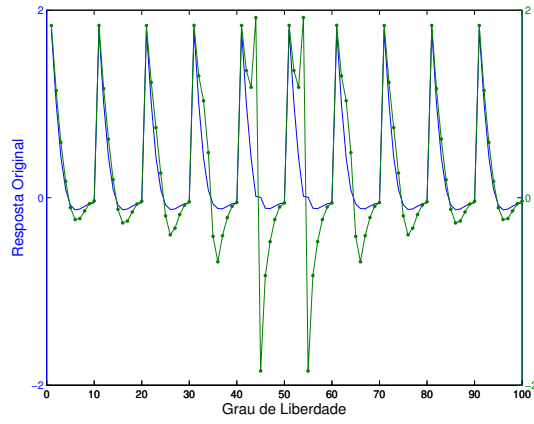


Absoluto da Sensibilidade

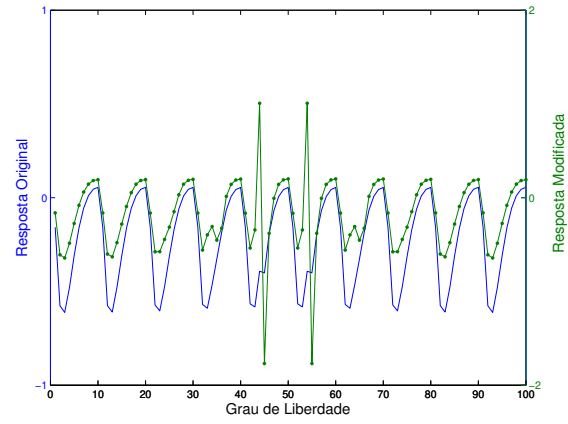
Figura 5.8: Variação da Sensibilidade Elementar - Malha com 10x10 GDL

Nestas curvas são apresentados os resultados obtidos pelo método original definido pela Equação (5.37) e pelo método modificado para a determinação da sensibilidade dado pela Equação (5.38).

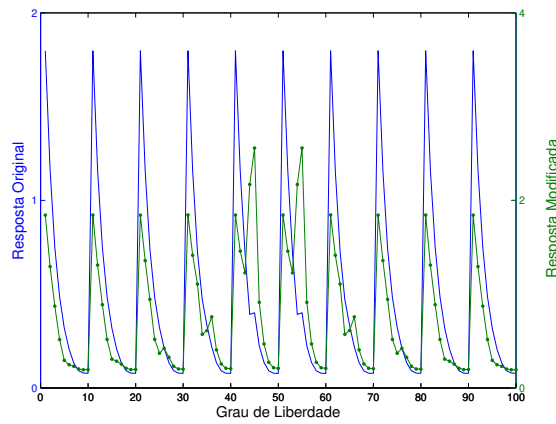
Para a resposta modificada ($\{U\} + \{\Delta U\}$), os resultados obtidos para este mesmo conjunto de condições de análise são mostrados na Figura (5.9).



Parte Real da Resposta



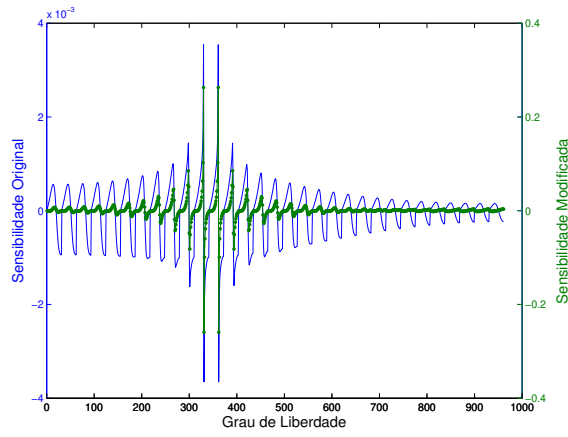
Parte Imaginária da Resposta



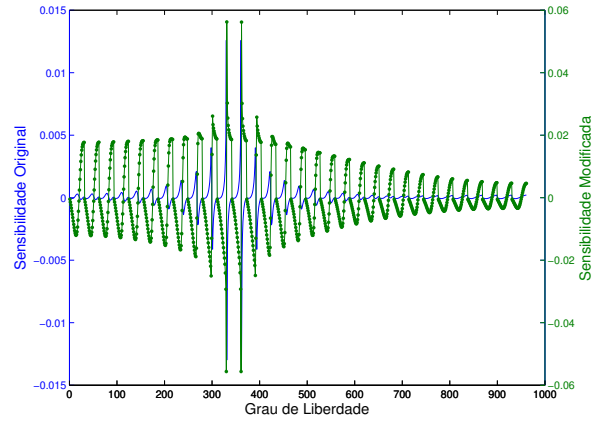
Absoluto da Resposta

Figura 5.9: Variação da Resposta Global - Malha com 10x10 GDL

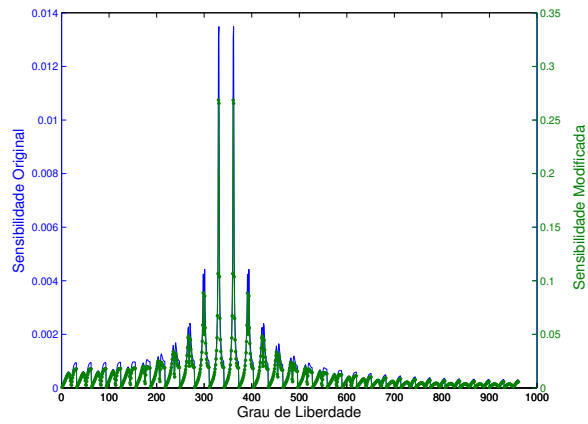
O mesmo procedimento de análise é feito para uma malha mais refinada. Uma malha de 30x30 nós foi utilizada, porém analisou-se o efeito da remoção do elemento 320. A escolha deste elemento, baseia-se na sua posição, uma vez que o mesmo está situado na região do elemento 10 da malha anterior. Os resultados são descritos na Figura (5.10) a seguir:



Parte Real da Sensibilidade



Parte Imaginária da Sensibilidade



Absoluto da Sensibilidade

Figura 5.10: Variação da Sensibilidade Elementar - Malha 30x30

A resposta modificada ($\{U\} + \{\Delta U\}$) para a malha mais refinada tem os seus resultados apresentados na Figura (5.11).

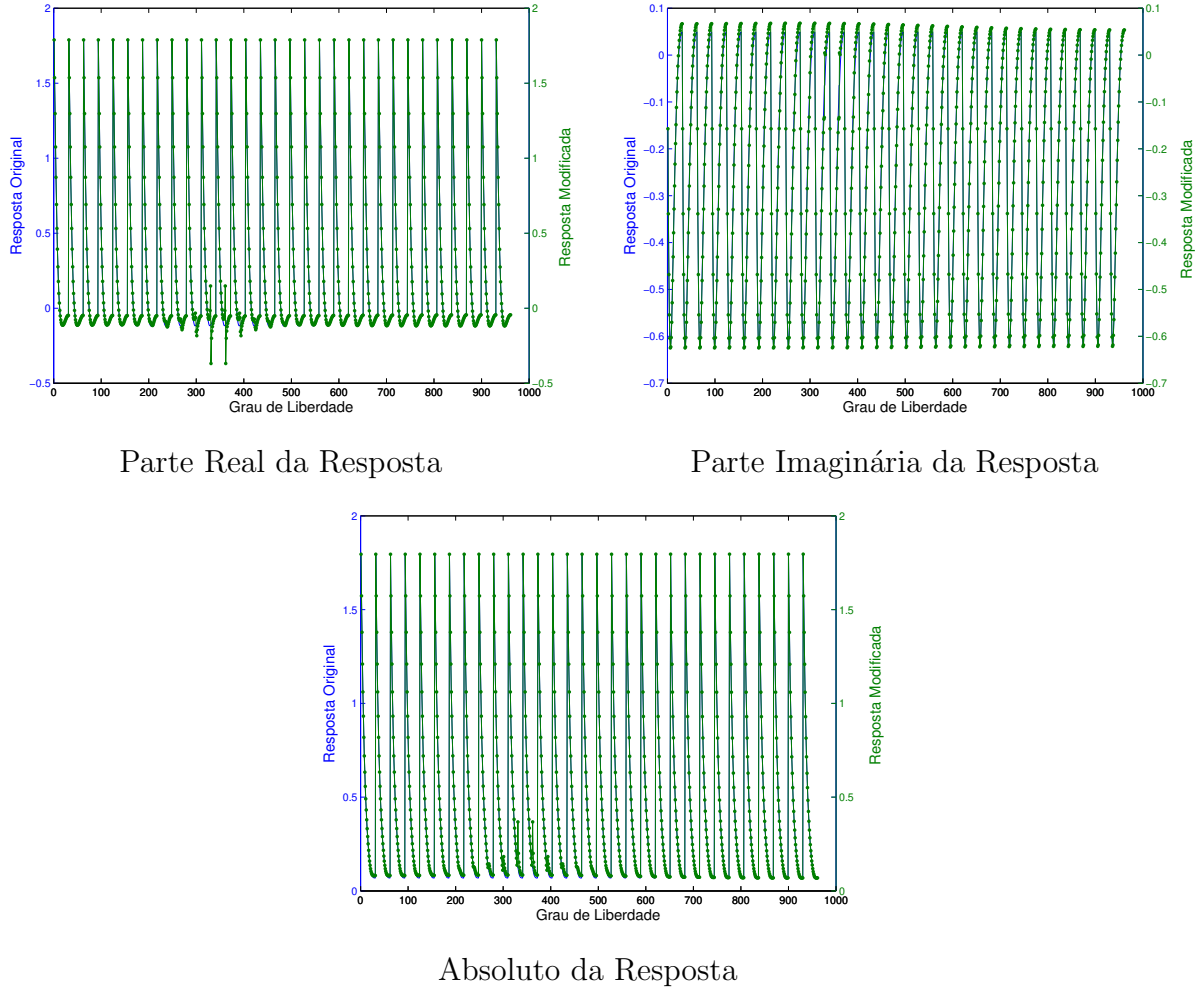


Figura 5.11: Variação da Resposta Global - Malha 30x30

Nota-se pelos resultados obtidos que a eliminação do termo de segunda ordem introduz um erro grande na solução, porém o comportamento geral da função é mantido. Neste trabalho, adotou-se a expressão descrita na Equação (5.37), a qual a sensibilidade é determinada na sua forma original, para o cálculo do número de remoção $\Delta\alpha_e$, privilegiando assim a precisão da estratégia evolucionária.

5.6 Solução Numérica do Problema de Otimização

Neste ítem, algumas considerações sobre o problema de otimização proposto são apresentadas. O problema de maximização da absorção acústica proposto é reescrito segundo a Equação (5.39), a seguir:

$$\begin{aligned}
& \max_{\mu} \alpha(\mu) \\
& \text{sa :} \\
& \int_{\Omega_p} \mu dV = \sum_{k=1}^N \mu_k V_k \leq f_{vol} V_0 \\
& \mu_{min} \leq \mu_k \leq \mu_{max}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

onde α é a função objetivo, N é o número de elementos finitos presentes na malha, V_e o volume elementar, μ_k é a densidade do elemento k e representa o conjunto das variáveis do projeto topológico, f_{vol} é a fração volumétrica e V_0 o volume inicial de projeto.

Para uma malha de elementos finitos regular, ou seja, todos os elementos com o mesmo volume V_k , pode-se escrever a seguinte equação:

$$V_0 = NV_k \tag{5.40}$$

As restrições de desigualdade serão aqui representadas pela função $g(\mu) \leq 0$, sendo descrita a seguir:

$$g(\mu) = \sum_{k=1}^N \mu_k V_k - f_{vol} V_0 \leq 0 \tag{5.41}$$

$$= \sum_{k=1}^N \mu_k - f_{vol} N \tag{5.42}$$

Para um problema restrito, possuindo restrições de desigualdade volumétricas e limites para as variáveis de projeto μ_k , a função Lagrangiana do problema de otimização restrito é dada pela Equação (5.43) a seguir:

$$L = \alpha + \lambda g + \sum_{i=1}^N [\theta_{-k} (\mu_{min} - \mu_k) + \theta_{+k} (\mu_k - \mu_{max})] \tag{5.43}$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange para a restrição de desigualdade volumétrica e θ_- e θ_+ são os multiplicadores de Lagrange das restrições laterais mínima e máxima, respectivamente.

O próximo passo que pode ser adotado é a transformação do problema de otimização em uma minimização irrestrita. Pode-se definir as condições de otimalidade necessárias ao

problema e determinar os pontos extremos ou mínimos globais em caso de funções convexas. A seguir, na Equações (5.44) a (5.50), as condições de otimalidade para o problema de otimização são apresentadas a seguir, (Arora, 2004) e (Bazaraa et al., 2006):

Condição de Otimalidade para a Função Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\mu_k} &= 0 \\ \frac{dL}{d\mu_k} &= \frac{d\alpha}{d\mu_k} + \lambda \frac{dg}{d\mu_k} + \theta_{+k} - \theta_{-k} = 0\end{aligned}\tag{5.44}$$

Condição de Otimalidade para as Restrições de Desigualdade:

$$\lambda g = 0\tag{5.45}$$

$$\theta_{-k} (\mu_{\min} - \mu_k) = 0\tag{5.46}$$

$$\theta_{+k} (\mu_k - \mu_{\max}) = 0\tag{5.47}$$

Condições de Otimalidade para os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda \geq 0\tag{5.48}$$

$$\theta_{-k} \geq 0\tag{5.49}$$

$$\theta_{+k} \geq 0\tag{5.50}$$

Para solucionar o problema numérico de otimização, optou-se por utilizar o algoritmo de solução SLP (“Sequential Linear Programming”), (Arora, 2004), o qual se baseia em uma seqüência de problemas de minimização lineares (problema primal-dual), onde com a atualização através de limites móveis, segue-se a evolução e a busca dos pontos extremos da função objetivo, mínimos locais, segundo a metodologia de aproximação SIMP do material através de variáveis de projeto contínuas.

O método SLP parte da linearização da função objetivo e das restrições de desigualdades, ou seja uma aproximação destas em uma Serie de Taylor das variáveis de projeto, truncadas a primeira derivada da função objetivo. A sensibilidade já determinada e apresentada no item (5.2), faz-se necessária na aplicação deste algoritmo.

O algoritmo numérico SLP é indicado em problemas onde existam um grande número de variáveis de projeto, porém a sua convergência numérica é dependente da escolha da regra de atualização dos limites móveis de cada problema linear LP, (“Linear Problem”).

O Subproblema LP, para uma iteração LP^i pode ser definido através da Equação (5.51):

$$\begin{aligned} \max_{\mu} \quad & \left[\alpha(\mu_k^0) + \frac{\partial \alpha(\mu_k^0)}{\partial \mu_k} (\mu_k^i - \mu_k^0) \right] \\ \text{sa :} \quad & \\ & g_j(\mu_k^0) + \frac{\partial g_j(\mu_k^0)}{\partial \mu_k} (\mu_k^i - \mu_k^0) \leq 0 \\ & l_{min}^i \leq \mu_k^i - \mu_k^0 \leq l_{max}^i \end{aligned}$$

onde $\partial \alpha(\mu_k^0)/\partial \mu_k$ representa a sensibilidade da função objetivo, ou vetor gradiente desta função avaliada no conjunto inicial μ_k^0 . O termo de derivada $\partial g(\mu_k^0)/\partial \mu_k$ é a sensibilidade da restrição de desigualdade, também avaliada no ponto inicial μ_k^0 .

O número total de variáveis de projeto e o número total de desigualdades ativas no problema de otimização são representados por m e n , respectivamente. Tomando-se os valores para os contadores k e j como sendo os números correspondentes à variável de projeto e à restrição de desigualdade ativa, respectivamente. Tais contadores possuem as seguintes variações:

$$\begin{aligned} k &= 1 \dots m \\ j &= 1 \dots n \end{aligned}$$

O vetor Gradiente ou Sensibilidade da Função Objetivo deve ser construído da seguinte forma:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_k} = \left\{ \begin{array}{c} \partial \alpha / \partial \mu_1 \\ \partial \alpha / \partial \mu_2 \\ \vdots \\ \partial \alpha / \partial \mu_m \end{array} \right\} \quad (5.51)$$

A matriz $\partial g(\mu_k^0)/\partial \mu_k$ possui dimensões $m \times n$, sendo m o número de variáveis de projeto e n é o número total de restrições de desigualdades. Tal matriz é construída de uma forma geral descrita na Equação (5.52):

$$\frac{\partial g_j}{\partial \mu_k} = \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial \mu_1 & \partial g_2 / \partial \mu_1 & \dots & \partial g_n / \partial \mu_1 \\ \partial g_1 / \partial \mu_2 & \partial g_2 / \partial \mu_2 & \dots & \partial g_n / \partial \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_1 / \partial \mu_m & \partial g_2 / \partial \mu_m & \dots & \partial g_n / \partial \mu_m \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Cada restrição de desigualdade g_j é relacionada ao seu respectivo multiplicador de Lagrange λ_j .

Para o problema de maximização de α , somente uma restrição de volume é imposta e o valor de seu gradiente $\partial g / \partial \mu_k$ para todo conjunto μ_k é constante. Os valores l_{min} e l_{max} representam os limites móveis.

O algoritmo SLP foi implementado conforme mostrado na Figura (5.12). Esta estratégia de solução foi aplicada em conjunto com modelo SIMP para as duas fases: porosa e acústica. Um algoritmo para otimização topológica foi proposto, implementado e testado neste trabalho.

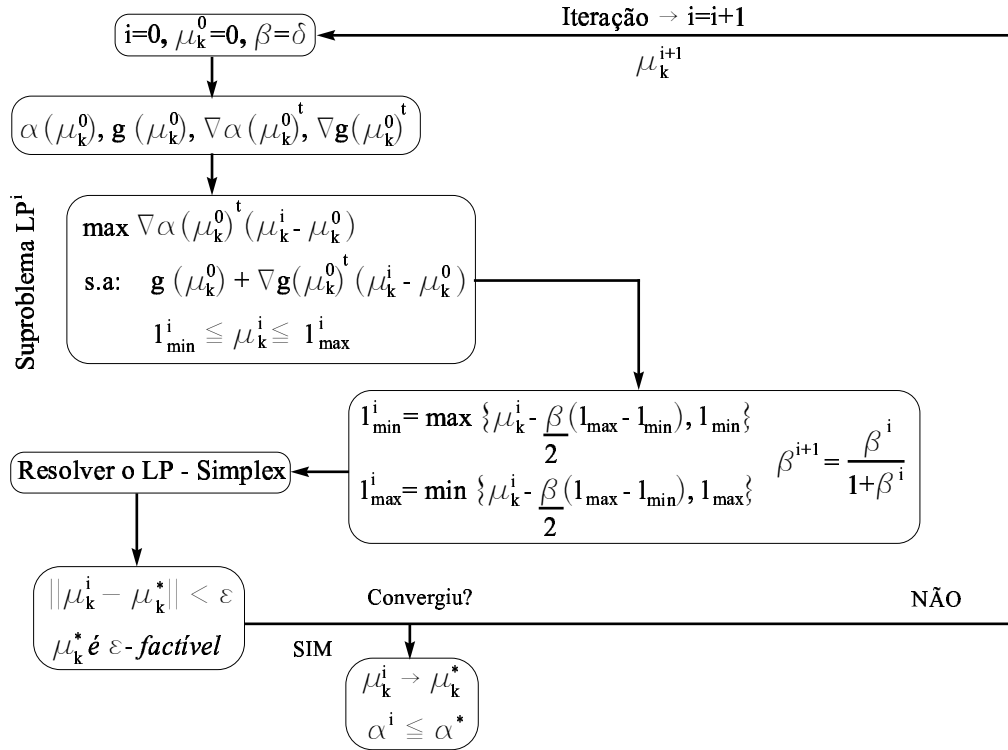


Figura 5.12: Fluxograma para implementação do Método SLP no Problema Poro-Acústico

5.7 As Metodologias de Otimização: SIMP x Evolucionária

A Otimização Topológica, baseada no modelo SIMP, que foi implementada neste trabalho, utiliza o valor da sensibilidade contínua para promover a correção dos valores das densidades elementares. As iterações para se resolver o problema de maximização, o qual se constitui em um problema não-linear, se baseiam em um algoritmo de otimização de programação matemática, SLP (“Sequential Linear Programming”). Esses métodos permitem a integração prática de um programa de análise de elementos finitos com um algoritmo de otimização para solução de problemas genéricos em otimização. Na Figura (5.13), mostra-se como o método de resolução SLP se enquadra no algoritmo de otimização implementado neste trabalho.

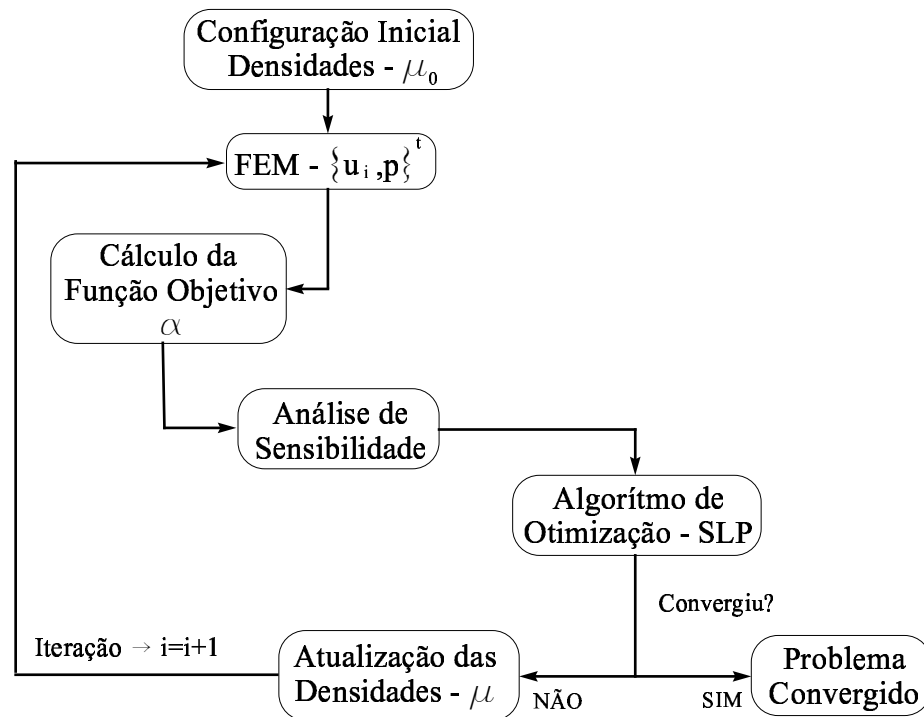


Figura 5.13: Sequência de Otimização Topológica baseado no SIMP

A Síntese Evolucionária consiste na busca dos elementos, os quais modificados (transformados em acústico), ofereceram sempre um ganho na resposta de absorção, até o limite de redução de volume de poroso. O processo é conhecido como evolucionário e do tipo

“mata-forte”.

Na Figura (5.14), mostra-se o roteiro geral do método evolucionário. Nota-se neste caso, que o aspecto fundamental se refere a uma boa avaliação do número de remoção, além de um módulo de simulação ou análise adequado.

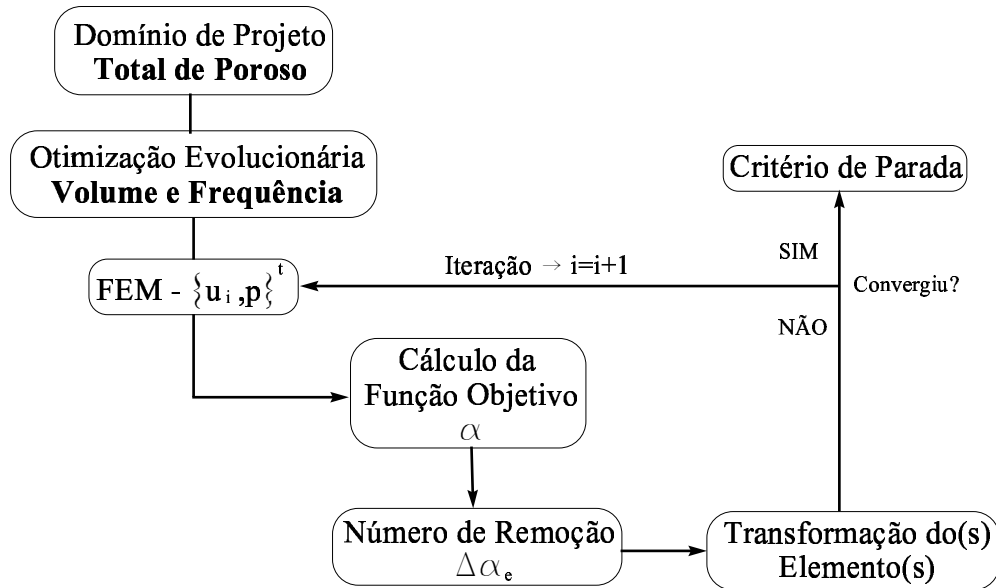


Figura 5.14: Seqüência de Otimização Topológica Evolucionária

Os dois algoritmos foram implementados e testados neste trabalho. No Capítulo 6, mostram-se os principais resultados obtidos até o momento com estas técnicas.

Capítulo 6

Resultados de Otimização Topológica

Neste capítulo, os principais resultados obtidos com a técnica de otimização são apresentados e discutidos. Tais resultados são provenientes do problema de maximização da absorção de uma amostra com a variação de sua topologia, baseando-se na evolução do sistema a partir de modificações elementares. Serão apresentados os resultados da validação do código de elementos finitos e as geometrias otimizadas obtidas pelas duas metodologias de otimização propostas nesta tese.

6.1 Análises numéricas usando o código de elementos finitos

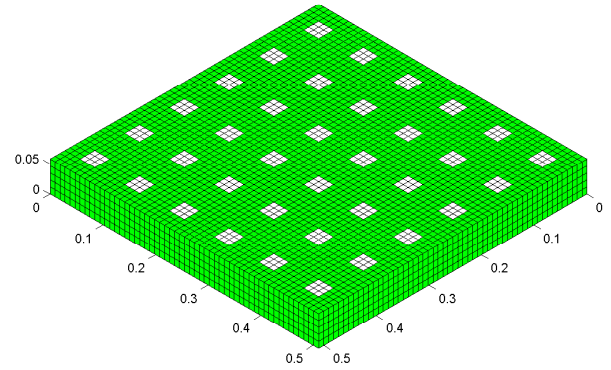
Como a formulação de elementos finitos para todo o domínio (poroso+acústico) em análise implica em custos computacionais elevados, a utilização de um código baseado no modelo de guia de onda será considerada para as simulações feitas neste trabalho.

Uma descrição do programa, sua história de desenvolvimento, bem como todas as suas funcionalidades são descritas no trabalho de (Castel, 2005). Nesta pesquisa, implementou-se o modelo do guia de ondas em um módulo específico, procurando-se ter mais flexibilidade no desenvolvimento dos Métodos de Modelagem.

Neste ítem, apresentam-se alguns testes em problemas específicos de interesse na determinação da absorção de materiais poroelásticos.



Painel real



Modelo Numérico

Figura 6.1: Discretização em elementos finitos de um painel absorvedor

O estudo da absorção do painel poroso descrito na Figura (6.1) se constitui na análise de materiais a dupla porosidade. Para as simulações numéricas que se utilizam de incidência normal para a excitação do sistema, é possível se reduzir o estudo para a simulação em uma única célula devido à simetria, conforme apresentado na Figura (6.2) a seguir:

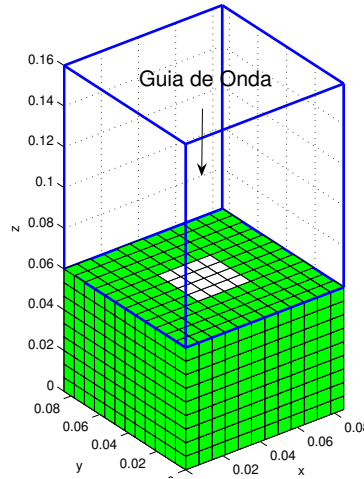


Figura 6.2: Malha para a Célula Poro-Acústica periódica a dupla porosidade

A célula apresentada na Figura (6.2) é constituída por dois tipos de domínios. Os elementos representados em branco constituem a malha acústica e os escuros são os elementos porosos.

Os componentes de velocidades perpendiculares ao contorno entre duas células são

iguais a zero, uma vez que o campo de pressão nas faces das células são dados por uma superposição de cossenos, conforme equação abaixo:

$$p(x, y, 0) = \sum_{m,n} C_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L_x}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L_y}y\right) \quad (6.1)$$

onde a matriz C_{mn} representa as amplitudes dos modos ortogonais de pressão da cavidade, L_x e L_y são as dimensões da cavidade retangular, m e n representam os índices dos modos da cavidade e x e y os eixos cartesianos, conforme indicado na Figura (6.2).

Devido à simetria, modos com índices diferentes não são excitados. Conseqüentemente os resultados numéricos podem ser obtidos através da modelagem de uma única célula genérica.

6.2 O programa de análise de Elementos Finitos desenvolvido

Um programa de elementos finitos foi desenvolvido em um ambiente C++ orientado a objetos. Optou-se por esta linguagem por se mostrar flexível, e por apresentar bibliotecas de sistemas lineares bastante eficientes. A biblioteca matemática de solução de sistemas lineares $Ax = B$, é escrita na linguagem C. Trata-se da UMFPack, um pacote livre e disponível o qual se baseia em métodos MultiFrontais para a solução de sistemas complexos, não simétricos e de armazenamento Esperso (Davis, 2005).

O problema escolhido para análise consiste em um material absorvedor presente em um tubo de kundt com acoplamento a um guia de onda conforme especificado na Figura (6.2). O problema será modelado numericamente com elementos poroelásticos sob duas formulações distintas: a mista (u, p) e a de fluido equivalente (p) , ambas acopladas ao modelo semi-analítico do guia de onda.

6.3 Resultados e a validação do programa de Elementos Finitos

O objetivo desta seção é verificar e confrontar os resultados obtidos pelo programa de Elementos Finitos Meflab implementado com os obtidos pelo programa em Fortran do grupo

LASH, ENTPE, França, onde o autor realizou estágio sanduíche durante o desenvolvimento desta tese. Os dois programas numéricos se propõem a resolver o mesmo problema físico, porém com uma diferença de programação entre eles. O código do MNS/Nova possui elementos com interpolação quadrática e o implementado em C++ são lineares.

Nesta seção, duas situações distintas para a geometria do material absorvedor são testadas. A primeira a simples porosidade, um problema unidirecional, mas que será modelado com a malha 3D apresentada na Figura (6.3).

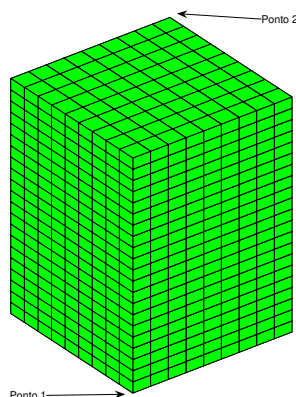


Figura 6.3: Malha de Elementos Finitos a simples porosidade

Os Pontos 1 e 2 representam os nós onde as respostas de pressão serão monitoradas em todo o domínio da frequência.

A resposta de pressão de uma célula poroelástica 3D à dupla porosidade é determinada. A dupla porosidade consiste em se fazer perfurações no material absorvedor com o intuito de se melhorar a sua performance de absorção em baixas frequências.

Ao código de elementos finitos, inclui-se um novo domínio ao problema, elementos acústicos representarão o “vazio” presente na amostra. A princípio, um problema acoplado Poro-Acústico se evidencia, porém com a utilização da formulação (u,p) mista e simétrica, item (3.2.3), a interface entre estes dois domínios não possui matriz de acoplamento.

Uma amostra de material poelástico absorvedor (Lã de Rocha) sob dupla porosidade com dimensões de $L_x = L_y = 0,085m$, $L_z = 0,115m$, com uma perfuração quadrada de dimensão $a = 0,0283m$ para um intervalo de frequência de 0 a 2000 Hz, foi analisada. As

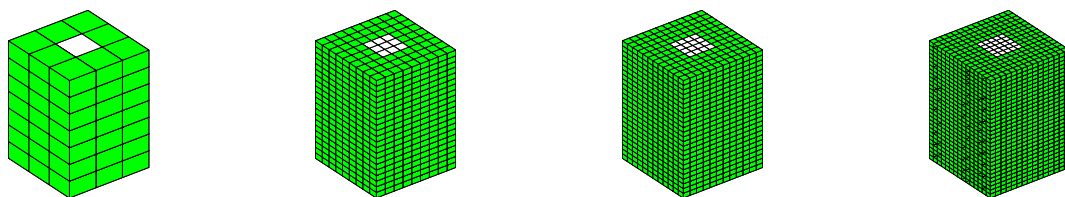
propriedades do poroelástico são descritas na Tabela (6.1) a seguir:

Tabela 6.1: Propriedades do material Poroelástico

Material	E [N/m^2]	ν	η	ρ_s [kg/m^3]	α_∞	σ [Ns/m^4]	h	Λ [μm]	Λ' [μm]
Lã de Rocha	$4,4 \cdot 10^6$	0	0,1	2167	2,1	135000	0,94	49	166

A Malha de Elementos Finitos é de $15 \times 15 \times 14$ elementos lineares, modelados a formulação de Fluido Equivalente e a Interface (Guia de Onda) aproximada com 8×8 modos.

Primeiramente, para este estudo, uma análise de convergência do problema foi efetuada. As malhas de elementos finitos, mostradas na Figura (6.4), cada vez mais refinadas. São calculadas as respostas de pressão dos pontos 1 e 2 e a absorção acústica da amostra. Os resultados são comparados entre si, visando uma análise de convergência.



Malha 1 - $3 \times 3 \times 7$ Malha 2 - $9 \times 9 \times 20$ Malha 3 - $12 \times 12 \times 25$ Malha 4 - $15 \times 15 \times 30$

Figura 6.4: Malhas de elementos finitos para análise de convergência

As malhas apresentadas na Figura (6.4) possuem dois tipos de domínios. Os elementos representados em branco constituem a malha acústica e os escuros são os elementos porosos.

Nas Figuras (6.5) e (6.6), os resultados de convergência das resposta de pressão, dispostas em parte real e imaginária, nos pontos 1 e 2 são apresentados.

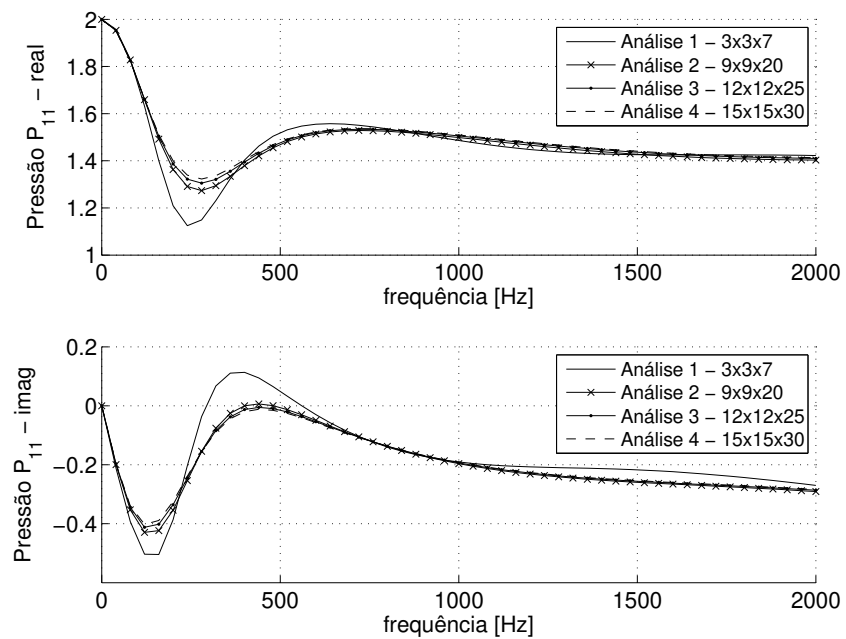


Figura 6.5: Resposta de Pressão para o ponto 1

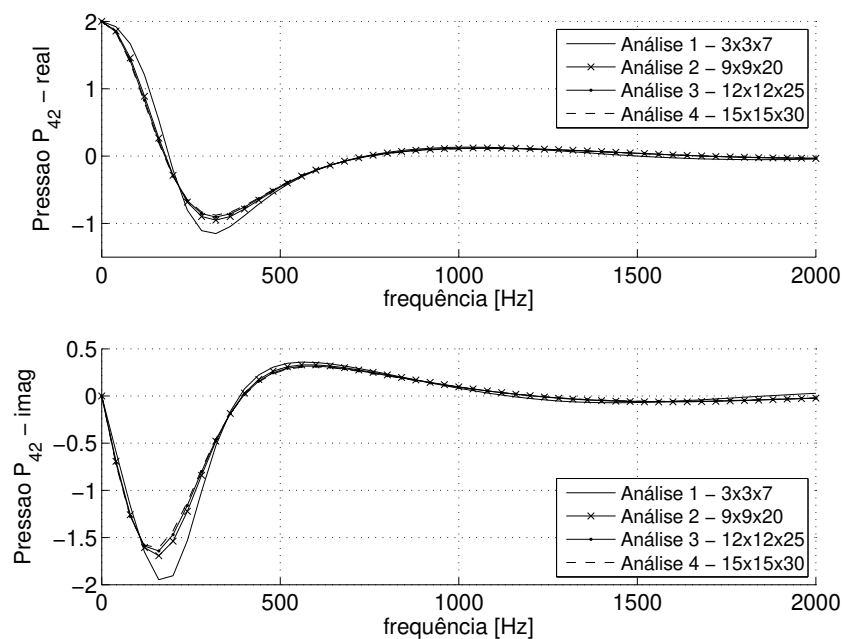


Figura 6.6: Resposta de Pressão para o ponto 2

As pressões sonoras calculadas nos pontos 1 e 2 mostraram uma rápida convergência

para as malhas estudadas. A absorção da amostra à dupla porosidade possui uma evolução de resposta segundo o refinamento de sua malha descrito na Figura (6.7).

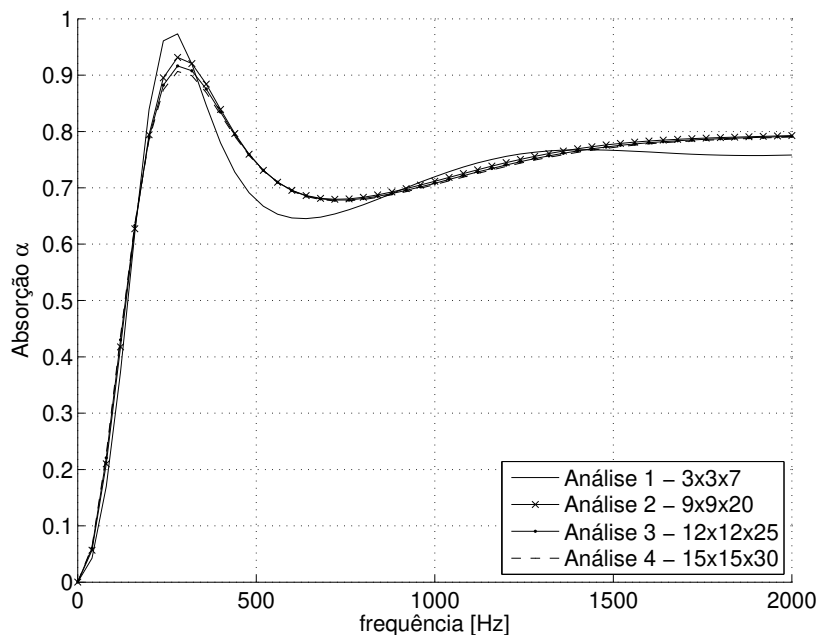


Figura 6.7: Curva de absorção da amostra a dupla porosidade

Como conclusão da análise de convergência, pode-se verificar que para uma malha média com 9x9x20 elementos, o resultado já se encontra relativamente convergido. Este resultado é importante pois servirá de base para a escolha de uma malha com resultados satisfatórios a serem obtidos pelo programa implementado em C++.

Os resultados convergidos agora são comparados com os obtidos pelo programa de Elementos Finitos MNS/Nova, Figura (6.8). Primeiramente para as curvas de absorção acústica e depois para as respostas de pressão na base e no topo da amostra.

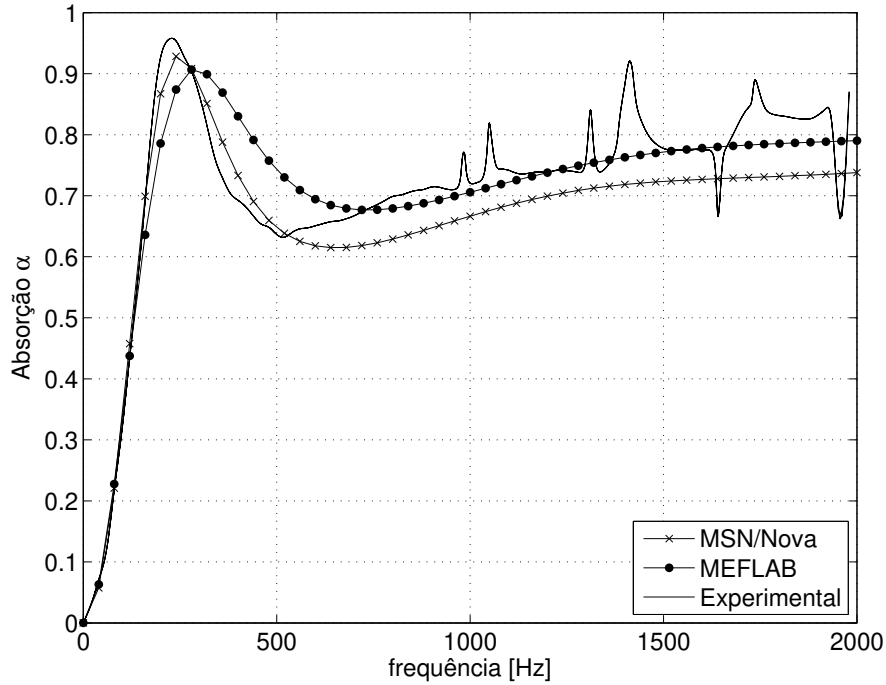


Figura 6.8: Curvas de absorção da amostra a dupla porosidade

Uma aceitável concordância dos resultados foi obtida para este problema. As respostas de pressão na base e no topo da amostra, em ambas as partes reais e imaginárias, obtidas pelo programa em C++ têm a mesma tendência daquelas obtidas pelo programa MNS/Nova, concluindo-se que o programa implementado foi validado e com performance semelhante a do programa MNS/Nova. Nota-se também uma boa concordância em relação aos valores experimentais obtidos por (Atalla et al., 2001c).

A distribuição de pressões reais e imaginárias, para um ponto específico de frequência é mostrado na Figura (6.9) a seguir. Nota-se uma distribuição bastante próxima nos dois casos, mesmo considerando-se a diferença na discretização.

Na Figura (6.9), os campos de pressão nodais obtidos pelos dois programas de elementos finitos, Meflab e MNS/Nova, são apresentados sobre a malha de elementos finitos.

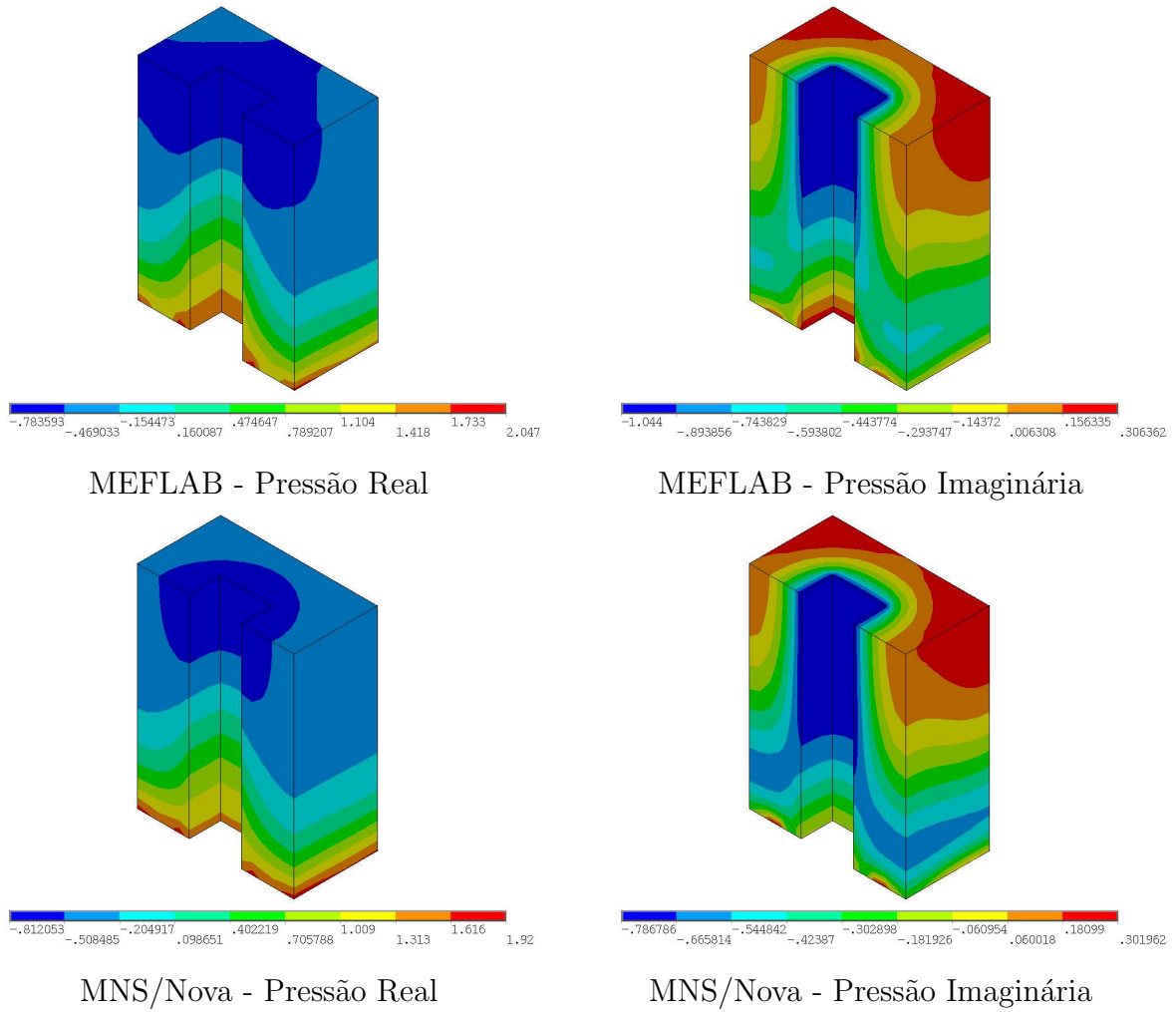


Figura 6.9: Distribuição de Pressão na célula a dupla porosidade em 560 Hz

6.4 Análises Preliminares ao Processo de Otimização

Nesta seção, os resultados de análises preliminares que ajudaram a entender o comportamento de um sistema poro-acústico presente no interior de um tubo de kundt são apresentados e discutidos. Como descrito anteriormente, o sistema poroso-acústico é modelado por um acoplamento entre elementos finitos a uma formulação de fluido equivalente com um guia de onda.

Para as simulações a serem apresentadas, as propriedades do material poroso utilizado são mostradas na Tabela (6.2), (Atalla et al., 2001c):

Tabela 6.2: Propriedades do material poroelástico

Material	α_∞	$\rho_1(kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$N(MPa)$	ν_b	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
Lã de Vidro	2,1	130	135000	0,94	$2,2 \cdot (1 + 0,1 \cdot j)$	0	$49 \cdot 10^{-6}$	$166 \cdot 10^{-6}$

Como primeira análise, são apresentados os resultados do efeito da variação da espessura da célula porosa sobre o espectro de absorção, o que pode ser aplicado aos resultados de um painel na macro-escala a simples porosidade. Na Figura (6.10), um gráfico tridimensional é apresentado, onde a curva representa a variação da absorção acústica em relação a frequência e a espessura do absorvedor poroso.

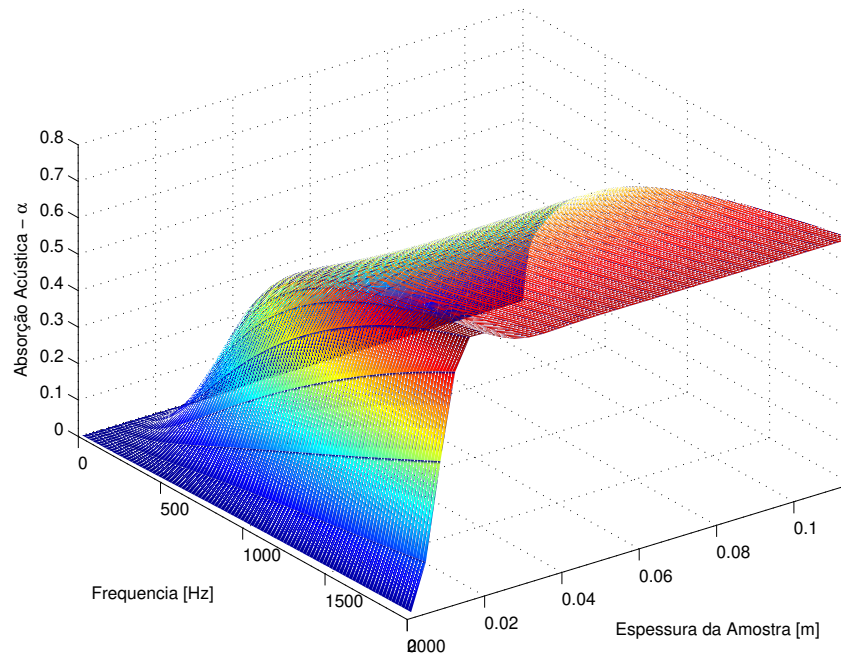


Figura 6.10: Influência da espessura da amostra sobre a absorção acústica

Nota-se a partir deste resultado da Figura (6.10) que a partir do valor de espessura de $0,06m$, o espectro de absorção permanece constante, ou seja, aumentar a espessura do absorvedor poroso não oferece ganho algum no poder de dissipação acústica.

A seguir, uma análise do efeito da variação da macroporosidade de uma amostra com volume acústico variável no seu interior é apresentada. A Figura (6.11) apresenta a seção transversal de uma configuração de célula com perfuração. As dimensões desta célula

definem o valor da porosidade na escala intermediária, a mesoescala.

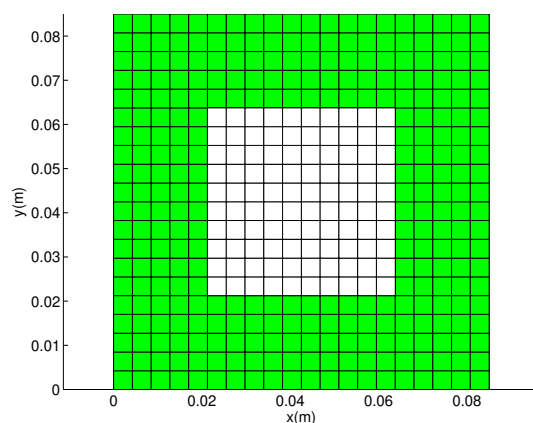


Figura 6.11: Malha de Elementos Finitos - Macroporosidade μ

Variou-se a razão entre o volume acústico e o volume total de 0 (simples porosidade) a 83%, segundo uma malha de $20 \times 20 \times 5$ elementos finitos, discretizando um domínio fixo, com dimensões externas de $Lx = Ly = 8,5cm$ e espessura de $L_z = 5cm$.

Neste problema, a faixa de frequência de análise foi de 0 a 2000Hz, uma vez que para altos valores de frequência, faz-se necessário um grande número de graus de liberdade (malha fina) para representar adequadamente o sistema físico. Os resultados obtidos para diferentes perfurações são apresentados nos gráficos mostrados nas Figuras (6.12) e (6.13).

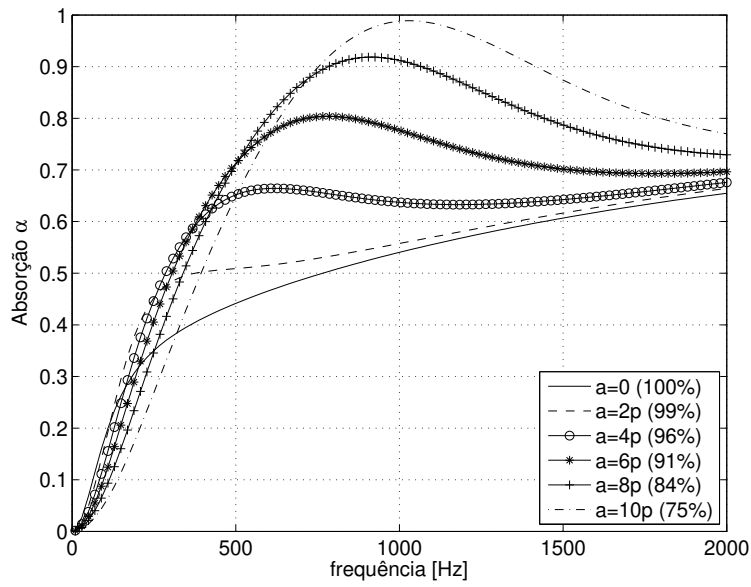


Figura 6.12: Resultados da variação da macroporosidade na absorção - $\mu > 75\%$

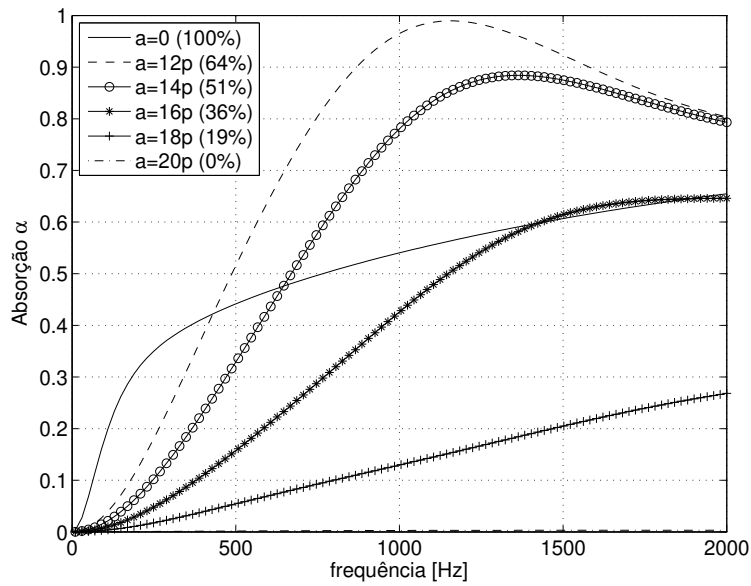


Figura 6.13: Resultados da variação da macroporosidade na absorção - $\mu < 75\%$

onde a representa a dimensão da perfuração e p é a unidade dimensional utilizada e correspondendo ao tamanho do lado de um elemento finito, sendo $p = 4,25mm$.

Pode-se observar que até um certo valor de macroporosidade, compensa se retirar material poroso, pois há um acréscimo na função de absorção em certa faixa de frequência quando comparado com os valores de simples porosidade. Nota-se que quando a retirada de material é grande, o poder de absorção cai consideravelmente em toda faixa de frequência em estudo.

Na Figura (6.14), os resultados de absorção acústica para as diversas células foram dispostos em uma única curva, ou seja para uma específica frequência de excitação do sistema, pode-se avaliar como a evolução da densidade na mesoescala atua sobre o efeito de absorção acústica.

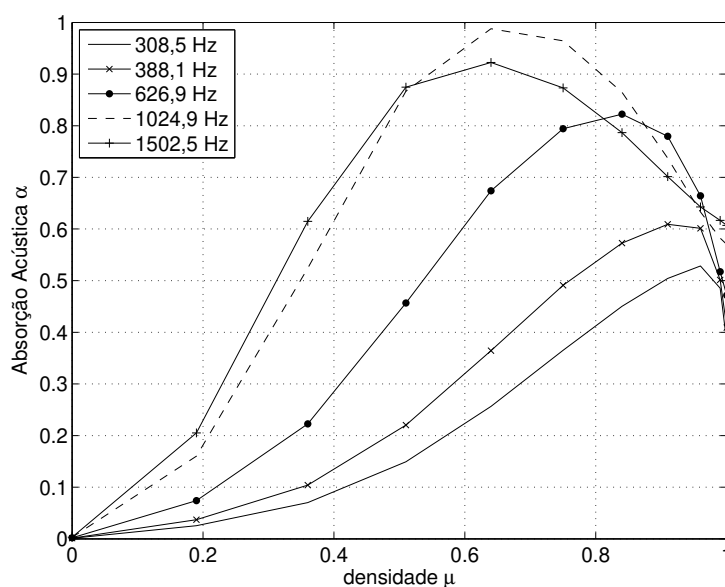
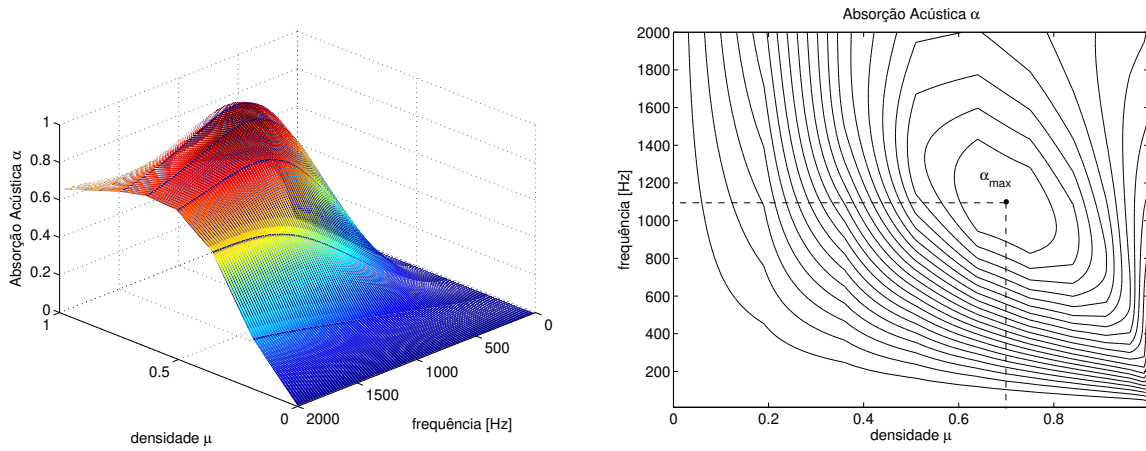


Figura 6.14: Evolução da função de absorção acústica com a densidade

Em outras duas representações, a absorção acústica, dependente dos valores da frequência ω e da densidade relativa da mesoescala μ , apresenta-se como uma função tridimensional e através de curvas de nível. A partir de tais diagramas, pode-se determinar o ponto de máxima absorção para uma específica densidade e frequência.



Função absorção α tridimensional

Função absorção α em curvas de nível

Figura 6.15: Representações da função absorção

Analisando-se a Figura (6.15), pode-se verificar que o centro da região fechada em destaque na representação em curvas de nível apresenta um ponto de máximo para a função absorção, em torno de uma densidade de 0,70 para uma frequência de 1100Hz.

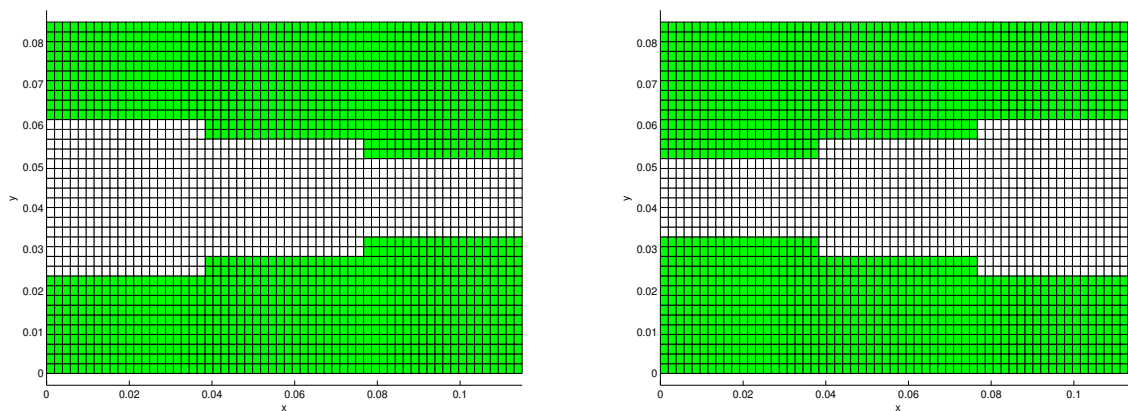
Nota-se que este tipo de síntese consistiu em uma busca paramétrica, onde para o específico problema de uma célula de base com volume acústico variável, determinou-se a melhor configuração que proporciona a máxima absorção acústica em uma específica frequência de excitação.

As análises se restringiram a furos quadrados devido a facilidade de implementação deste problema no programa MNS/Nova (pc3dsolver2-5d), porém se sabe que em uma análise mais criteriosa a forma da perfuração deve ser levada em consideração, e assim determinar-se os efeitos sobre o espectro de absorção acústica.

Nota-se nesta análise, de forma qualitativa, como se comporta o valor da sensibilidade da função absorção em relação à propriedade de macroporosidade do sistema ($d\alpha/d\mu_k$). Tal estudo se constitui em uma análise preliminar e será utilizada para a implementação do método SIMP.

Uma outra proposta de aplicação nesta fase de análise consiste no uso de um material poroso perfurado de duas formas distintas, com a mesma quantidade de material retirado na análise a dupla porosidade. Para uma mesma discretização de elementos, duas malhas apresentando domínios acústicos, com configurações diferentes, tiveram suas respostas de

absorção analisadas e comparadas com a resposta do material sem perfuração. As malhas são apresentadas na Figura (6.16). Neste caso, trata-se de uma análise bidimensional de um corte longitudinal da amostra de poroso, sendo que o guia de onda atua sobre a face $x = 0$.



Furos com diâmetros decrescentes

Furos com diâmetros crescentes

Figura 6.16: Malhas de Elementos Finitos para a análise da geometria do furo

Os elementos representados em branco constituem a malha acústica e os escuros são os elementos porosos. As curvas de absorção para as duas configurações, obtidas na análise, são apresentadas na Figura (6.17).

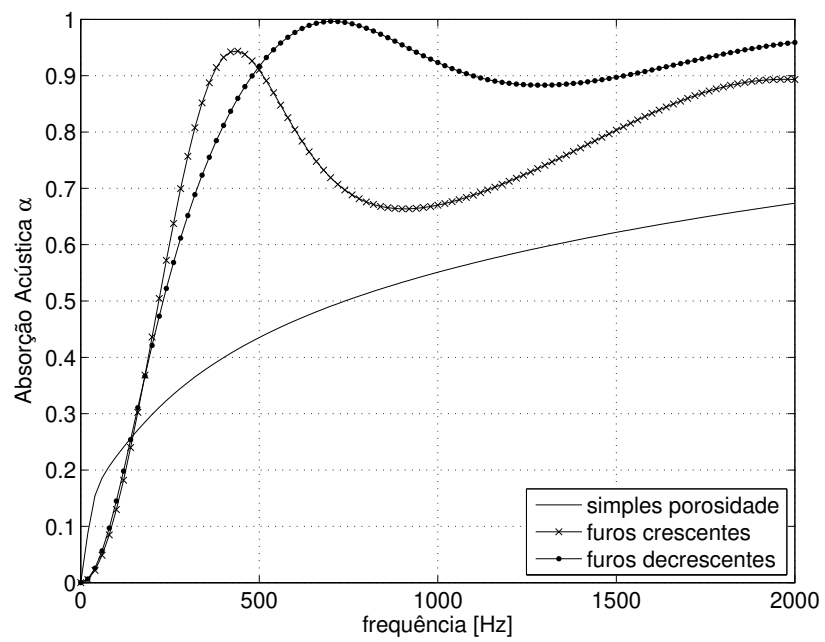
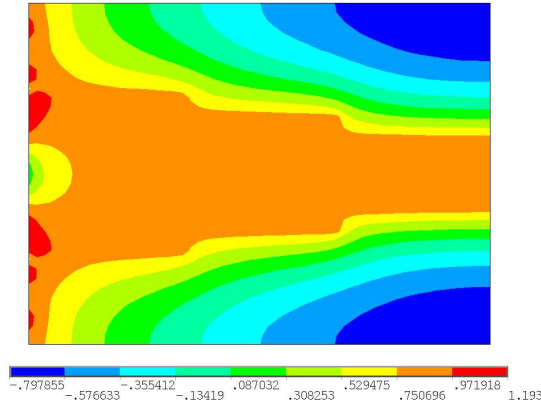
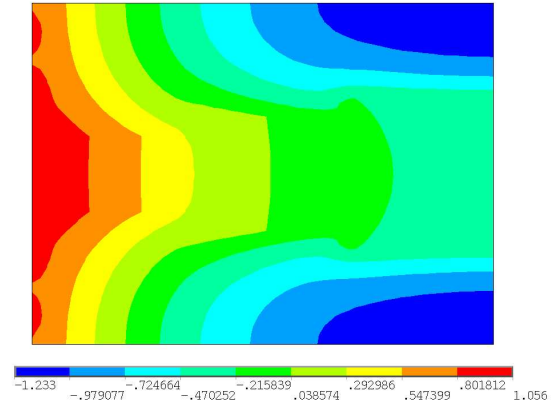


Figura 6.17: Curvas de Absorção para o problema da geometria do furo

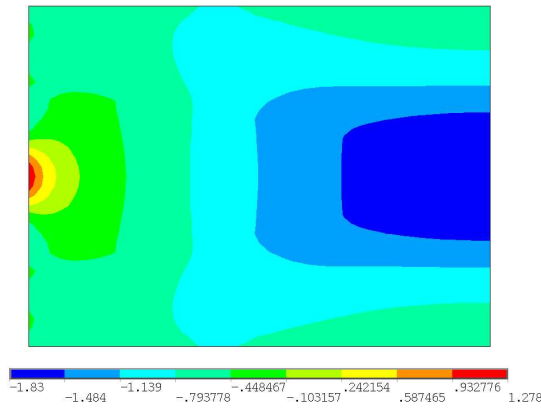
O resultado da distribuição de pressão a 500 Hz também é apresentado para as duas análises, conforme apresentado na Figura (6.18).



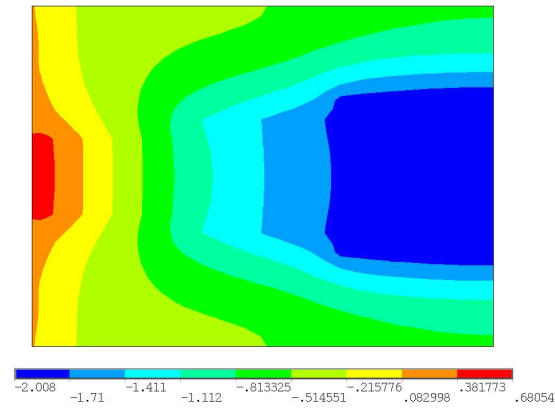
Pressão Real - Crescentes



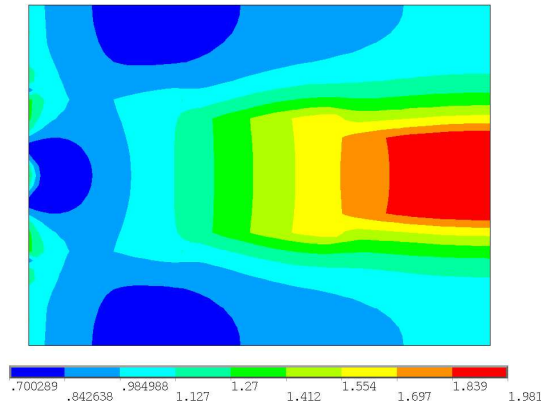
Pressão Real - Decrescentes



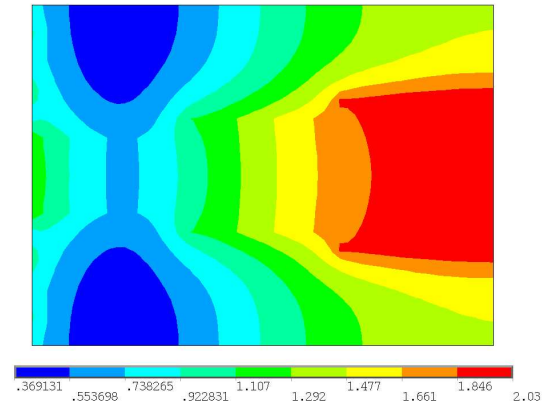
Pressão Imaginária - Crescentes



Pressão Imaginária - Decrescentes



Pressão Absoluta - Crescentes



Pressão Absoluta - Decrescentes

Figura 6.18: Distribuição de Pressão para as análises com geometrias de furo diferentes

Nota-se que a configuração com furos decrescentes tende a gerar uma absorção distribuída ao longo do espectro analisado, com um máximo na faixa de 600 Hz a 800 Hz.

Para a configuração com furos crescentes, a sua melhor propriedade de absorção se localiza em torno de 400 Hz e sua capacidade de absorção é reduzida consideravelmente para frequências mais altas.

Uma terceira configuração foi analisada. Trata-se do absorvedor acústico em forma de cunha é freqüentemente utilizado em projetos de câmaras anecóicas e auditórios, onde a qualidade do som deva ser controlada. Utilizando o mesmo material poroso, com propriedades descritas na Tabela (6.2), três malhas distintas, cada uma com um ângulo de cunha, construídas com o decréscimo de material absorvedor. Partindo-se de um mesmo domínio inicial de projeto (ângulo de cunha igual a 180^0), tem-se a descrição das malhas na Figura (6.19), mais uma vez, os elementos representados em branco constituem a malha acústica e os escuros são os elementos porosos.

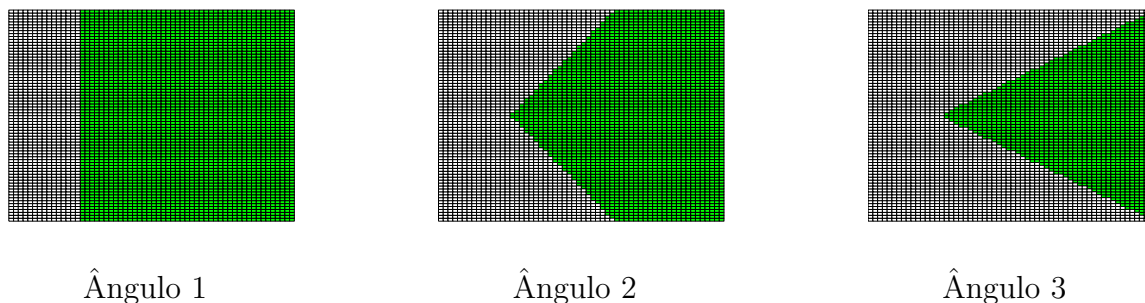


Figura 6.19: Malhas de Elementos Finitos para a análise do ângulo de cunha

Nota-se neste caso, que um modelo bidimensional também foi adotado, buscando-se refinar mais a malha, tendo em vista o volume acústico modelado.

As curvas de absorção obtidas nas análises dos diferentes ângulos no material absorvedor, mostraram-se sensíveis com a diminuição do volume da amostra, conforme as respostas apresentadas na Figura (6.20).

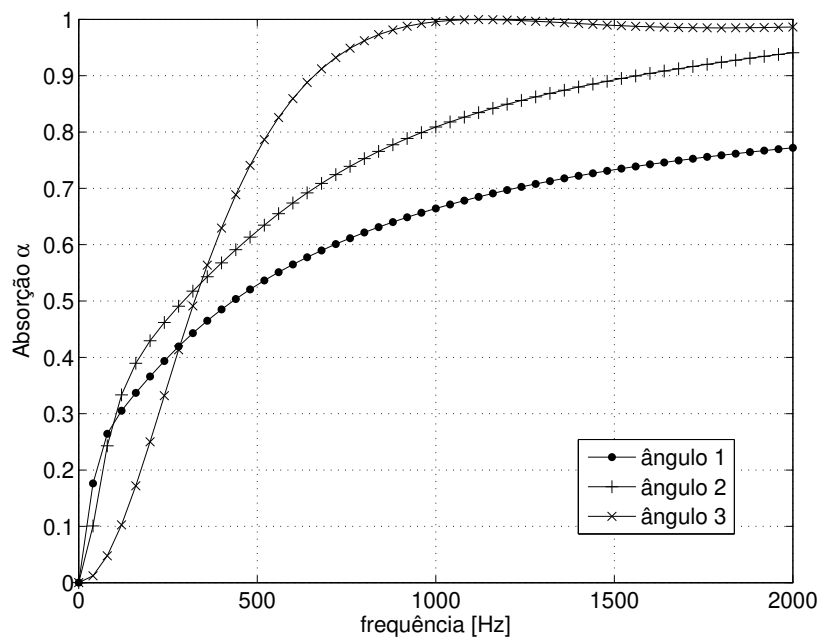


Figura 6.20: Curvas de Absorção para análise do ângulo de cunha

A normalização dos modos de pressão é definida segundo a escala individual de cada distribuição, onde os campos em vermelho representam os valores máximos e os campos em azul representam as regiões de baixa pressão acústica. As distribuições de pressão para esta nova análise, também para o ponto específico de 500 Hz de frequência, encontram-se apresentadas na Figura (6.21).

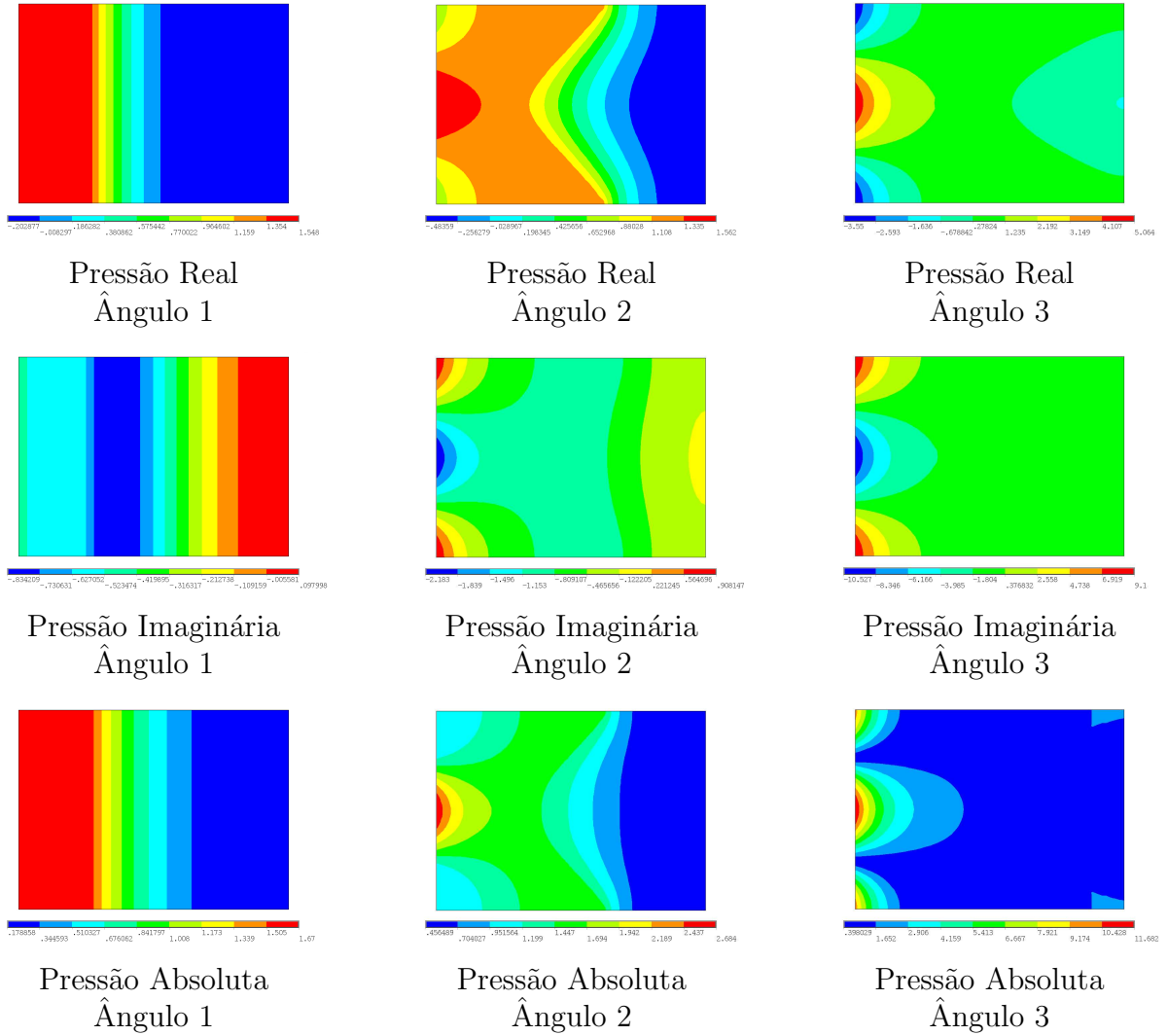


Figura 6.21: Distribuição de Pressão a 500 Hz para a análise do ângulo de cunha

Construindo-se uma parametrização para o valor do ângulo de cunha da amostra entre os limites de 90^0 e 20^0 , efetuou-se a análise de cada uma das configurações em um range de frequência de 0 a 2000 Hz, uma superfície de respostas para a absorção pode ser obtida, conforme apresentado na Figura (6.22).

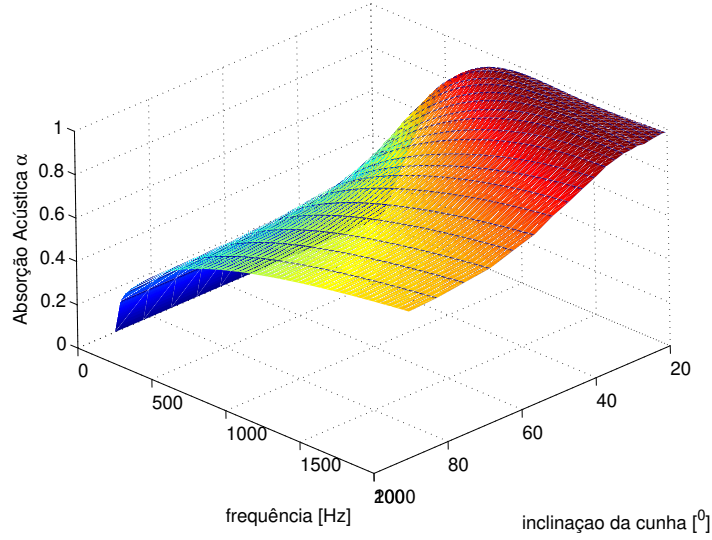


Figura 6.22: Curvas de Absorção em análise paramétrica do ângulo de cunha

A maior relação de absorção foi obtida com o menor ângulo analisado e partir da análise da Figura (6.22), nota-se que os melhores desempenhos de absorção são obtidos em frequências maiores que 480 Hz.

Neste exemplo, um conceito dos sistemas absorvedores acústicos é evidenciado e deve ser explorado para a melhoria do programa de otimização topológica. Quanto maior for a área da superfície de contato do material absorvedor com o domínio acústico, maiores serão os pontos com pressão quadrática (P^2) para um determinado intervalo de frequência. Tal fato ajuda no aumento do coeficiente de absorção acústica global da amostra, pois este é diretamente proporcional a média volumétrica de P^2 sobre o domínio poroso, conforme equação genérica mostrada a seguir:

$$\alpha \propto \int_{\Omega_p} P^2 dV \quad (6.2)$$

A partir destes resultados, pretende-se estabelecer uma relação e um critério para tomada de decisão na retirada de material poroso durante o processo de otimização topológica. Esperava-se que estes resultados apontassem para uma direção e uma configuração de projeto topológico ótimo, no entanto a complexidade do problema permite apontar apenas algumas tendências para análises das configurações ótimas encontradas.

Apesar do ganho considerável na absorção das amostras analisadas, a expectativa de variar a forma e a topologia das amostras e das perfurações com uma maior liberdade, conduziu a pesquisa para a implementação de metodologias sistemáticas para definição da topologia ótima dos sistemas poro-acústicos.

6.5 Otimização Topológica de Sistemas Poro-Acústicos - Metodologia Evolucionária

Como proposta de aplicação da metodologia de otimização evolucionária, apresenta-se um procedimento, onde se busca obter a melhor configuração geométrica de um painel absorvedor a dupla porosidade composta por células Poro-Acústicas periódicas, conforme esquema da Figura (6.1).

Conforme demonstrado nos trabalhos de (Atalla et al., 2001c) e (Sgard et al., 2005), a otimização de uma célula corresponde à otimização de um painel construído por diversas células em repetição da configuração local determinada. Um procedimento possível é o de otimizar o problema homogeneizado na mesoescala e os resultados são utilizados para a macro-escala.

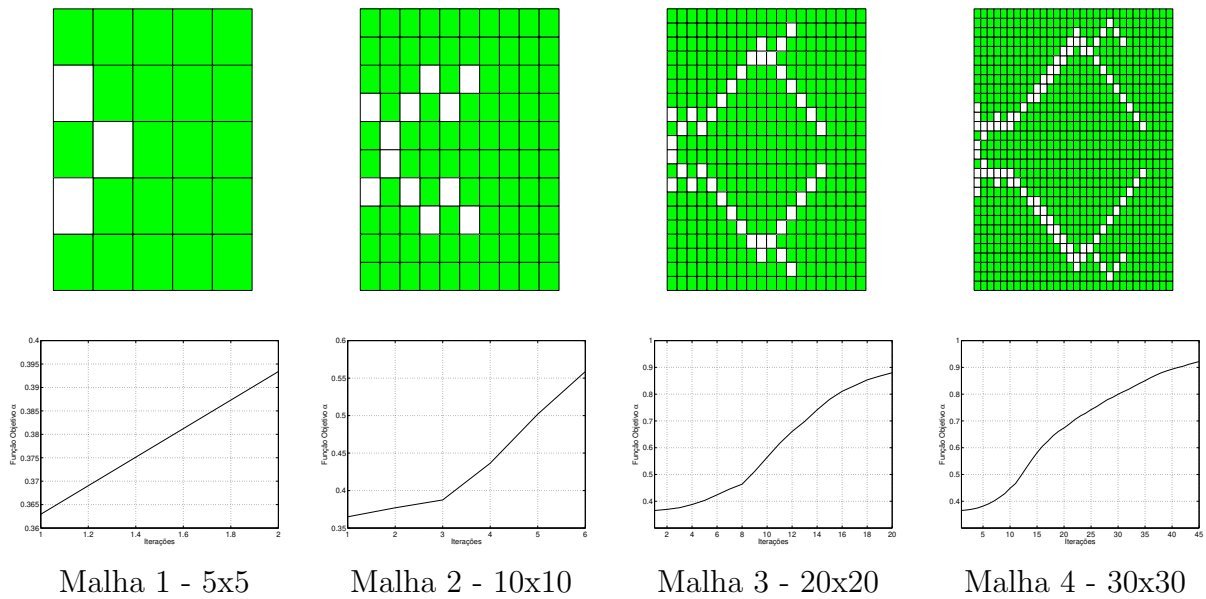
O material Poroelástico utilizado nesta proposta tem suas características apresentadas na Tabela (6.3) a seguir.

Tabela 6.3: Propriedades do material Poroelástico

Material	E [N/m^2]	ν	η	ρ_s [kg/m^3]	α_∞	σ [Ns/m^4]	h	Λ [μm]	Λ' [μm]
Lã de Rocha	$4,4 \cdot 10^6$	0	0, 1	2167	2,1	135000	0,94	49	166

A seguir, as análises numéricas são apresentadas. A metodologia de análise consistiu em um domínio de projeto retangular com dimensões iguais a $0,060 \times 0,085m$, o qual utilizando-se da técnica evolucionária de remoção/transformação do tipo “hard-kill” (mata-forte), baseada no número de remoção descrito no Capítulo (5.4), Equação (5.36), determinou-se a topologia do sistema Poro-Acústico para uma determinada redução de volume.

Inicialmente, foi feito um estudo da dependência dos resultados de otimização com relação a malha de elementos finitos. Seguidas sínteses foram feitas para o problema com a descrição anterior, Figura (6.23).



Malha 1 - 5x5

Malha 2 - 10x10

Malha 3 - 20x20

Malha 4 - 30x30

Figura 6.23: Malhas de elementos finitos para análise de dependência da malha

Em seguida, foram analisadas malhas bidimensionais de 40×40 elementos finitos, também modelados com a formulação de fluido equivalente. A configuração poro-acústica mostrada na Figura (6.24) foi determinada para uma redução de 10% de material poroso na frequência de 300 Hz.

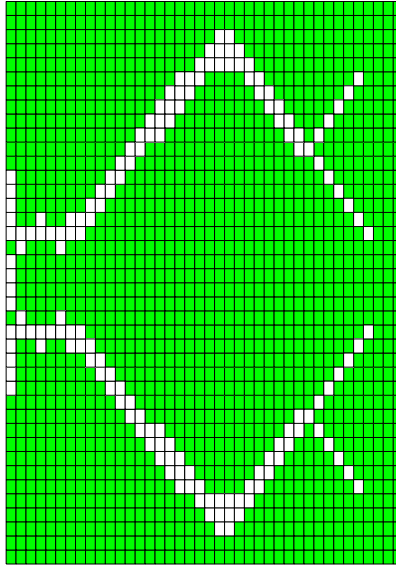


Figura 6.24: Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 300 Hz

O número de remoção $\Delta\alpha_e$, o qual corresponde a absorção acústica elementar resultante na última iteração tem sua distribuição apresentada na Figura (6.25). Este gráfico indica a contribuição de cada elemento para a absorção total do sistema, nas frequências de 300 e 500 Hz.

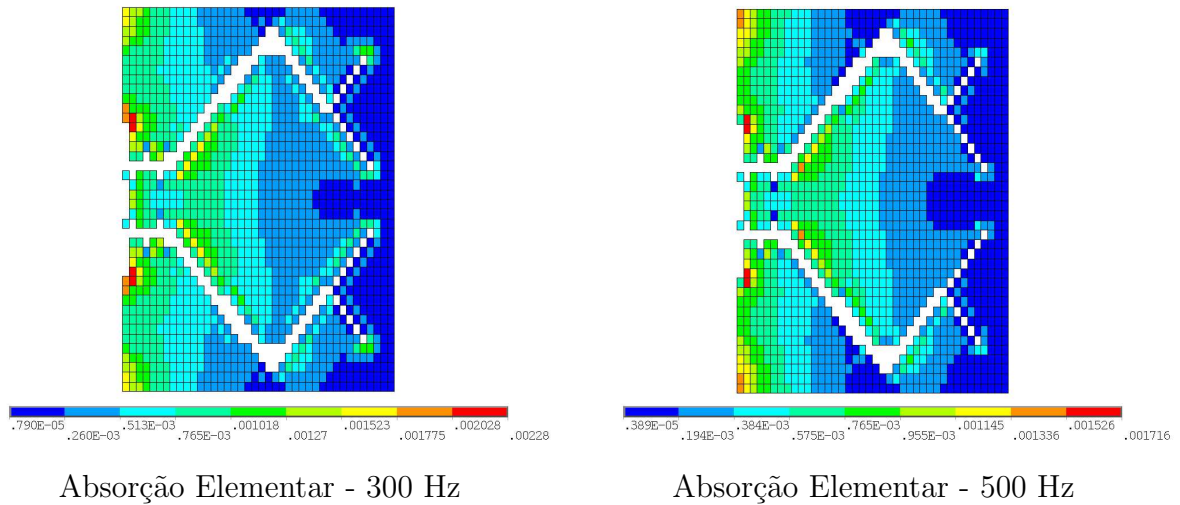


Figura 6.25: Absorção Elementar para a síntese a 300 Hz

Nota-se que os elementos que mais contribuíram para a absorção global são aqueles

situados sobre a superfície inclinada da cunha que se configurou, onde justamente o campo de pressão real foi maior, conforme descrição da Figura (6.26).

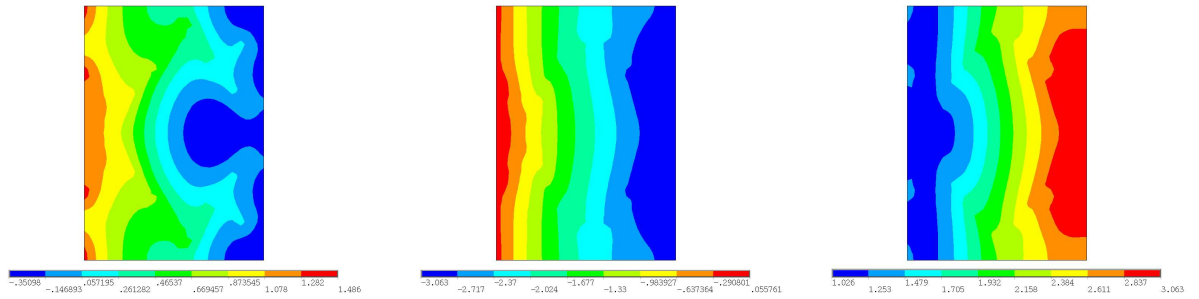
A absorção elementar α_e pode ser obtida através do seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\alpha_e &= \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im \left(\{U\}_e^t [Z]_e \{U\}_e \right) \\
&= \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \Im \left((\{U_r\}_e + j \{U_i\}_e)^t ([Z_r]_e + i [Z_i]_e) (\{U_r\}_e + i \{U_i\}_e) \right) \quad (6.3) \\
&= \frac{1}{2\Pi_{inc}} \omega \left((\{U_r\}_e + \{U_i\}_e)^t [Z_i]_e (\{U_r\}_e + \{U_i\}_e) \right)
\end{aligned}$$

onde i é o termo imaginário, $\{U_r\}_e$ e $\{U_i\}_e$ representam os componentes real e imaginário elementares da resposta, respectivamente e os termos $[Z_r]_e$ e $[Z_i]_e$ são os componentes real e imaginário da matriz dinâmica do elemento poroelástico, respectivamente.

Nota-se pela análise da Equação (6.3) que a absorção elementar é um número real e dependente do quadrado da soma dos componentes reais e imaginários dos vetores de resposta nodal do elemento e da parte imaginária da matriz dinâmica elementar.

Na Figura (6.26), os campos de pressão real, imaginário e o seu valor absoluto são apresentados para a estrutura otimizada obtida.



Pressão Real - 300 Hz Pressão Imaginária - 300 Hz Pressão Absoluta - 300 Hz

Figura 6.26: Distribuição de Pressão para as células otimizadas

A evolução da função objetivo α , absorção global em 300 Hz, em função do número de iterações é apresentada na Figura (6.27).

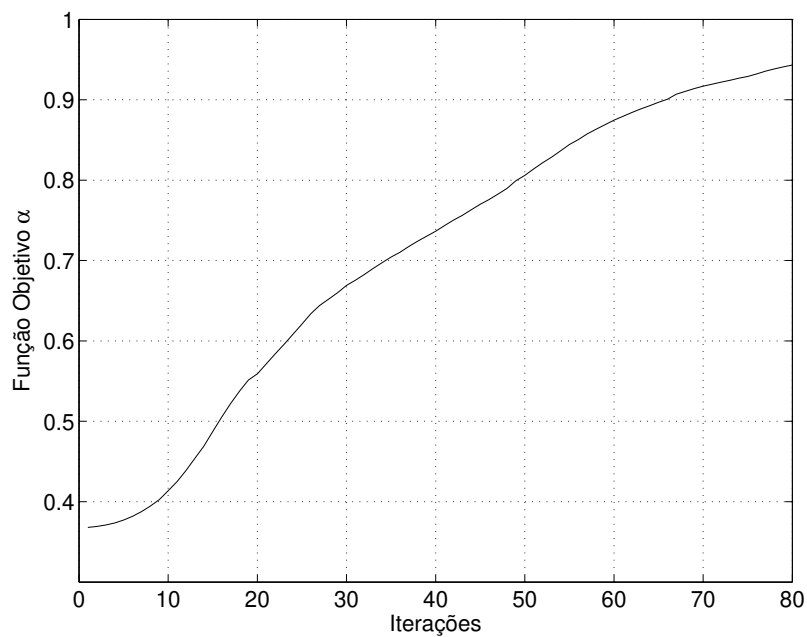


Figura 6.27: Evolução da Função Objetivo para a síntese a 300 Hz

Os espectros de absorção de 0 a 2000 Hz da amostra de material poroso a simples porosidade e com o resultado encontrado otimizado são mostrados na Figura (6.28) a fim de se evidenciar o ganho em absorção para o ponto de frequência específico de 300 Hz, retirando-se apenas 10% do volume de material poroso.

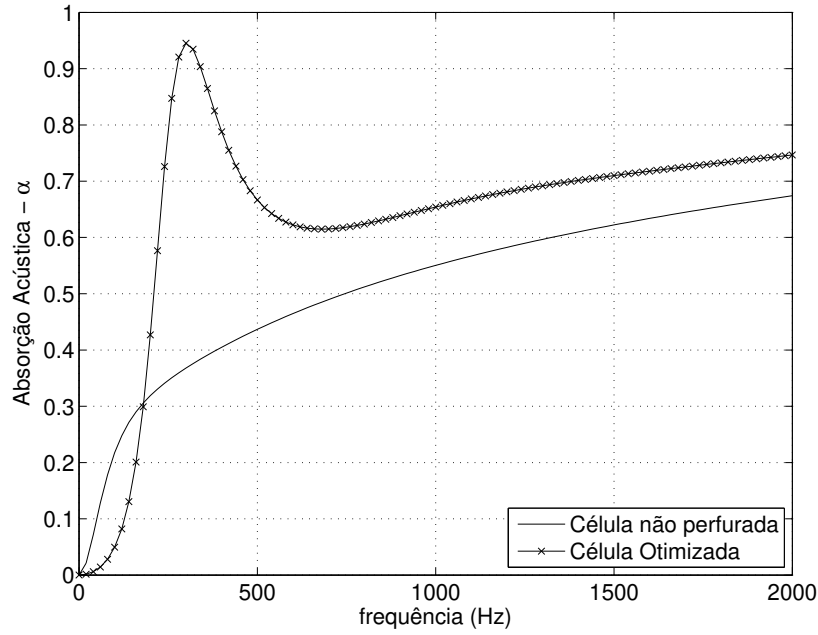


Figura 6.28: Curvas de Absorção para a síntese a 300 Hz

O resultado é significativo neste caso, constituindo-se em um aumento de aproximadamente 150% na capacidade de absorção do sistema em 300 Hz. Convém resaltar, que este ganho foi obtido sem comprometer o comportamento nas altas frequências, onde o resultado permaneceu cerca de 15% melhor em termos de absorção.

Uma outra análise usando o algoritmo evolucionário, desta vez para o ponto de frequência de 500 Hz, com o mesmo número de elementos da análise anterior, 40×40 elementos, conduziu ao resultado mostrado na Figura (6.29).

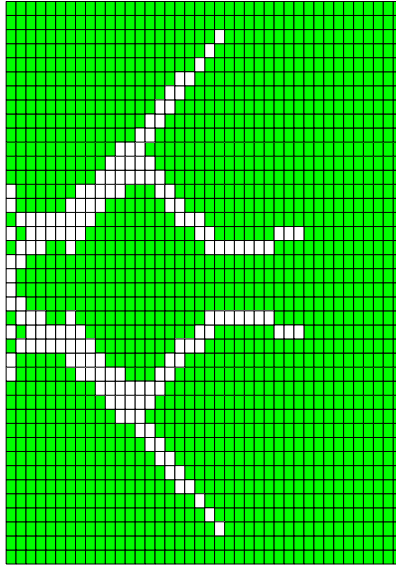


Figura 6.29: Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 500 Hz

A Figura (6.30) apresenta a distribuição da absorção, determinada a nível elementar, a contribuição para a absorção total do sistema, nas frequências de 300 e 500 Hz.

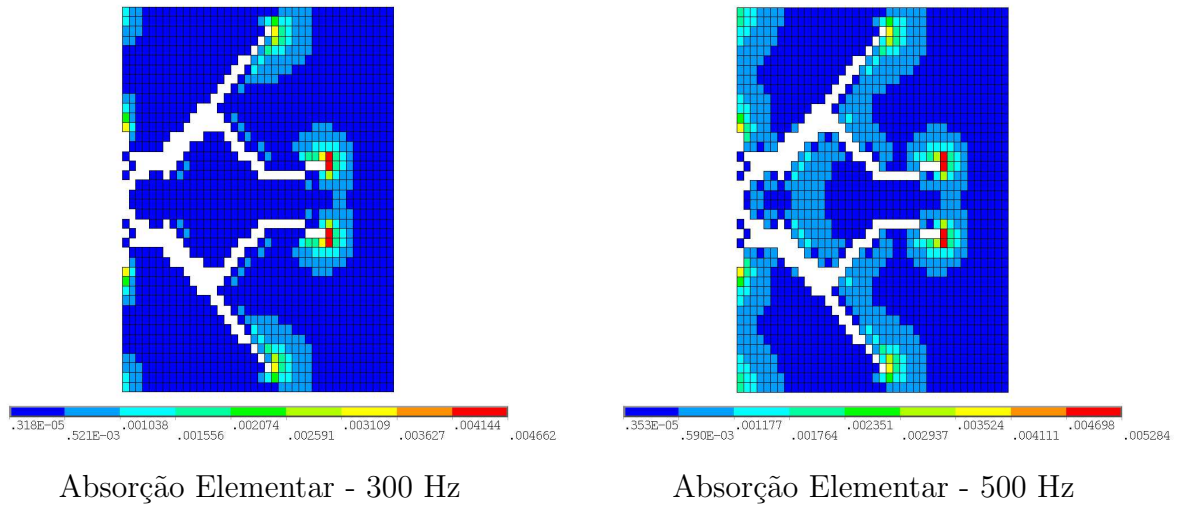


Figura 6.30: Absorção Elementar para a síntese a 500 Hz

A distribuição de pressão para esta nova configuração obtida é apresentada na Figura (6.31).

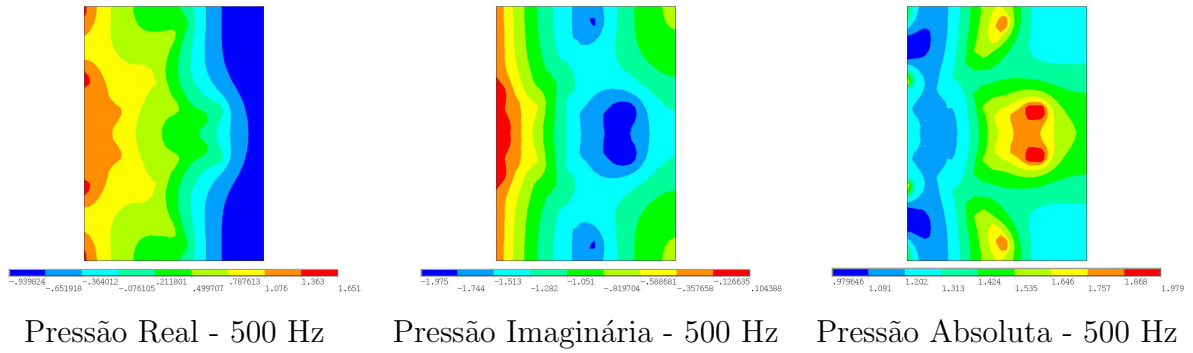


Figura 6.31: Distribuição de Pressão para as células otimizadas

A evolução da função objetivo para esta nova simulação está descrita na Figura (6.32). Novamente um ganho considerável foi obtido. Além disso o comportamento da função objetivo ao longo das iterações foi bastante suave, não evidenciando problemas de convergência devido a existência de possíveis múltiplos mínimos locais.

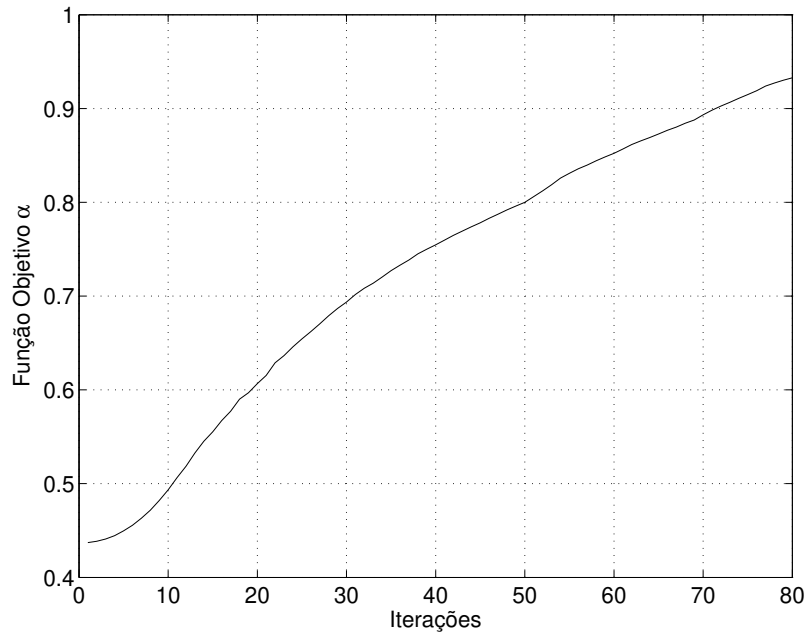


Figura 6.32: Evolução da Função Objetivo para a síntese a 500 Hz

As curvas de absorção para a célula com desempenho otimizado para a frequência de 500 Hz são apresentadas na Figura (6.33).

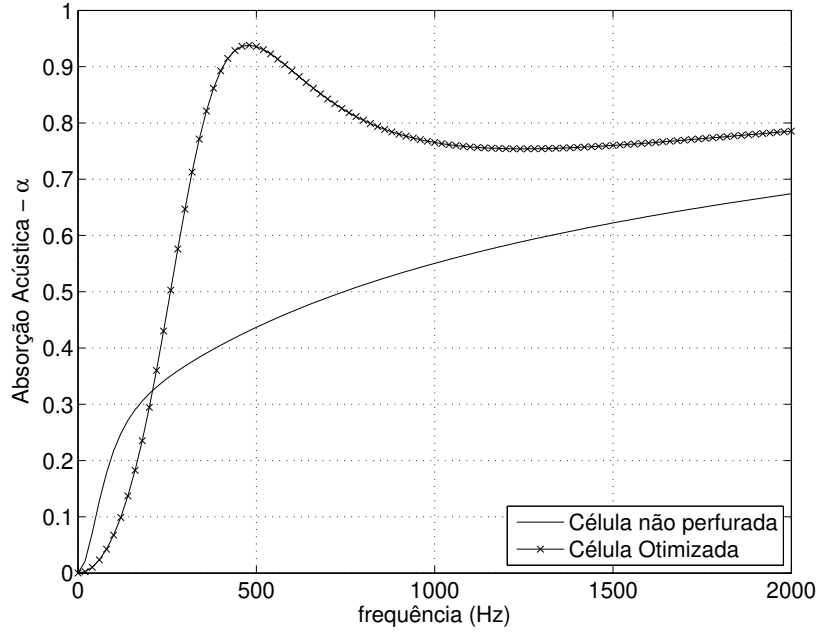


Figura 6.33: Curvas de Absorção para a síntese a 500 Hz

Através da análise da variação da Função objetivo α , mostra-se que durante a sua evolução, para as configurações intermediárias não existem elementos, os quais se retirados possam diminuir o valor da Função objetivo α , ou seja não existiu para as análises feitas, um número de remoção elementar $\Delta\alpha_e$ negativo. Tal fato evidenciado ao longo do processo evolucionário garante o alcance de ao menos um mínimo local. Em caso em que isso não ocorra, tem-se a necessidade de implementações de métodos mais sofisticados de busca, a fim de obter uma solução ótima mais adequada ao problema.

Para o mesmo problema, porém com a função objetivo α obtida por uma formulação acoplada em uma frequência de 300 Hz, mista (u, p) , os resultados obtidos para a topologia otimizada são descritos na Figura (6.34). Todos os dados do problema foram mantidos, exceto a formulação do modelo mecânico utilizada. Neste caso, o programa utilizado também foi o Meflab, cujo módulo de análise baseado na formulação (u, p) inclui configurações bidimensionais e tridimensionais.

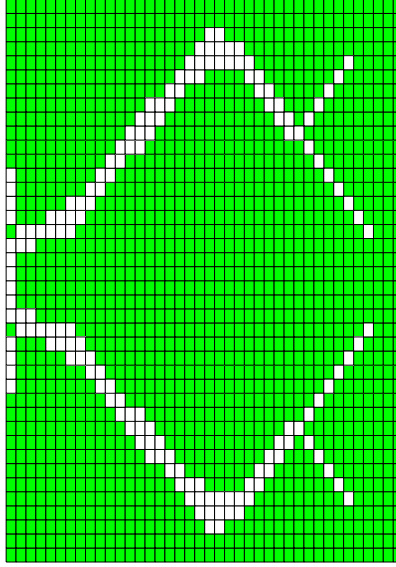
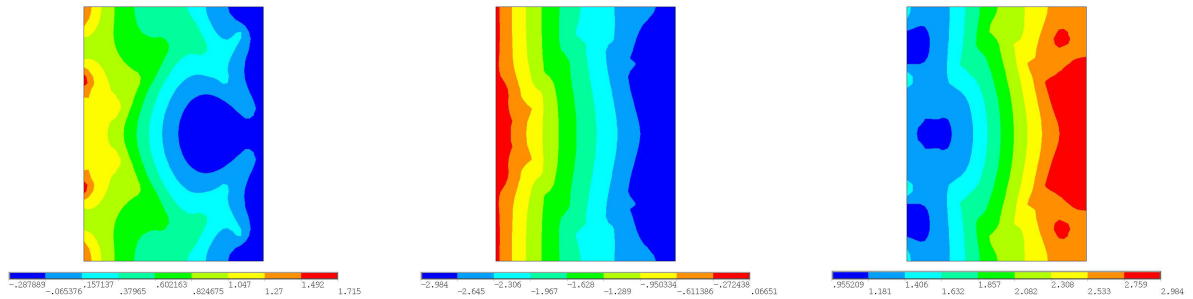


Figura 6.34: Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 300 Hz

Observa-se que a topologia encontrada é bastante semelhante àquela mostrada na Figura (6.24), onde o modelo de fluido-equivalente foi adotado.

A distribuição de Pressão para o problema acoplado na frequência de 300 Hz é apresentada na Figura (6.35). Nota-se novamente, que o campo de pressão encontrado na frequência de 300 Hz com a formulação mista (u, p) é muito semelhante ao mostrado na Figura (6.26).



Pressão Real - 300 Hz

Pressão Imaginária - 300 Hz

Pressão Absoluta - 300 Hz

Figura 6.35: Distribuição de Pressão para as células otimizadas

A evolução do processo tem sua descrição na Figura (6.36).

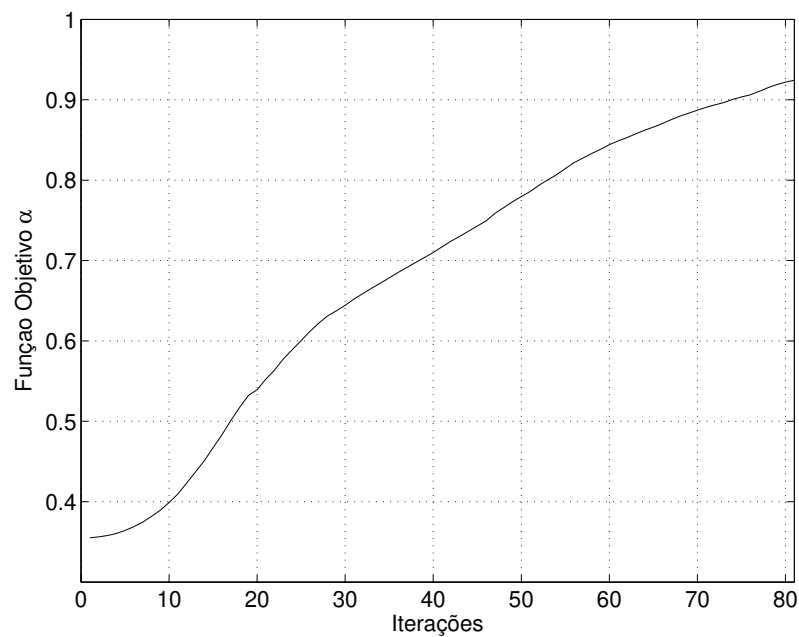


Figura 6.36: Evolução da Função Objetivo para a síntese a 300 Hz

O ganho de absorção para esta nova configuração obtida, em uma formulação acoplada, em comparação ao espectro de absorção de uma amostra sem perfuração é descrito na Figura (6.37)

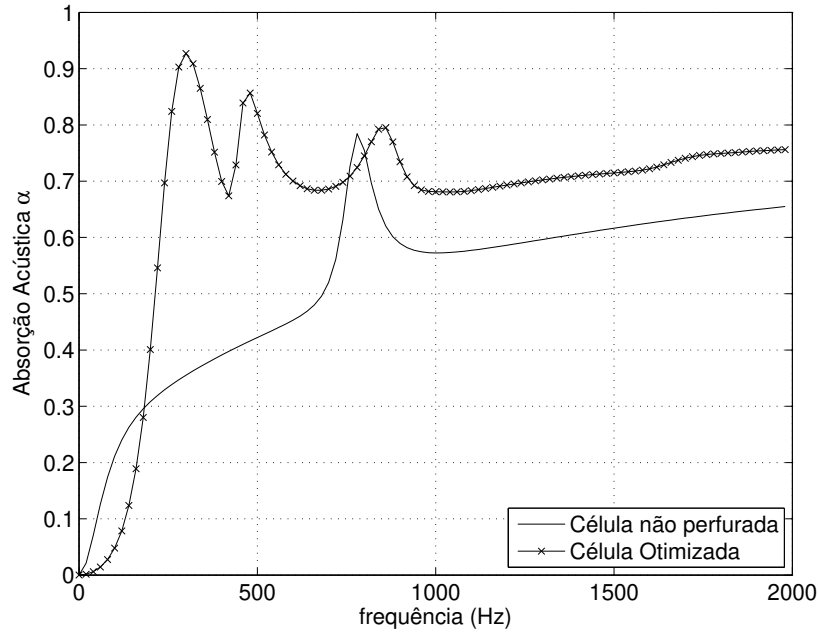


Figura 6.37: Curvas de Absorção para a síntese a 300 Hz

Neste caso a diferença é notável, tanto para a amostra sem perfuração como para a amostra perfurada. Neste caso, observa-se a existência de picos na curva de absorção, relacionados aos modos estruturais do esqueleto introduzidos com a formulação mista (u, p) .

Para a frequência de 500 Hz, os seguintes resultados foram obtidos. Primeiramente, a topologia otimizada é apresentada na Figura (6.38). Mais uma vez, o resultado possui concordância com o obtido usando-se o modelo de fluido-equivalente mostrado na Figura (6.29).

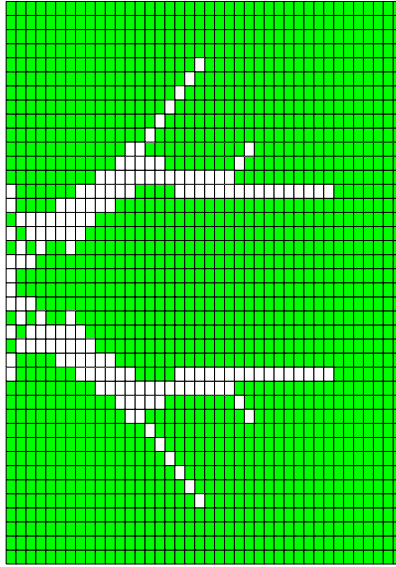
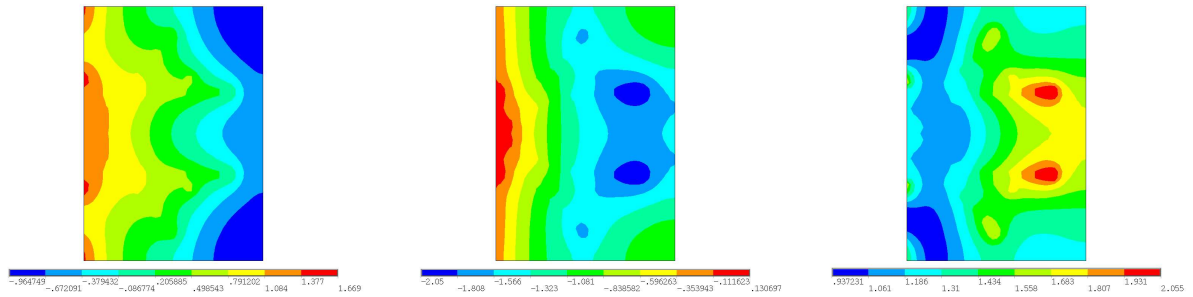


Figura 6.38: Estrutura Poro-Acústica Otimizada para a síntese a 500 Hz

A distribuição de Pressão para o problema acoplado na frequência de 500 Hz é apresentada na Figura (6.39) a seguir.



Pressão Real - 500 Hz Pressão Imaginária - 500 Hz Pressão Absoluta - 500 Hz

Figura 6.39: Distribuição de Pressão para as células otimizadas

A evolução do processo tem sua descrição na Figura (6.40).

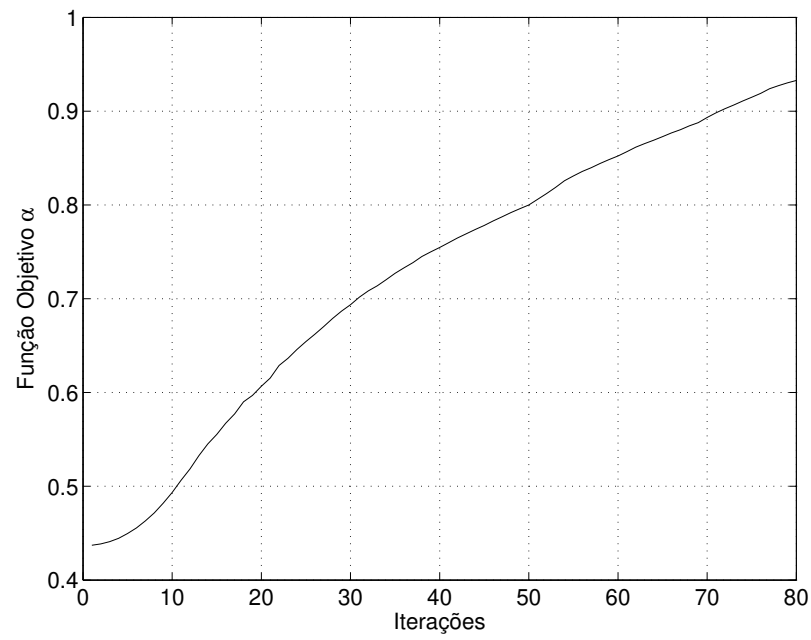


Figura 6.40: Evolução da Função Objetivo para a síntese a 500 Hz

O ganho de absorção para esta nova configuração obtida, em uma formulação acoplada, em comparação ao espectro de absorção de uma amostra sem perfuração é descrito na Figura (6.41)

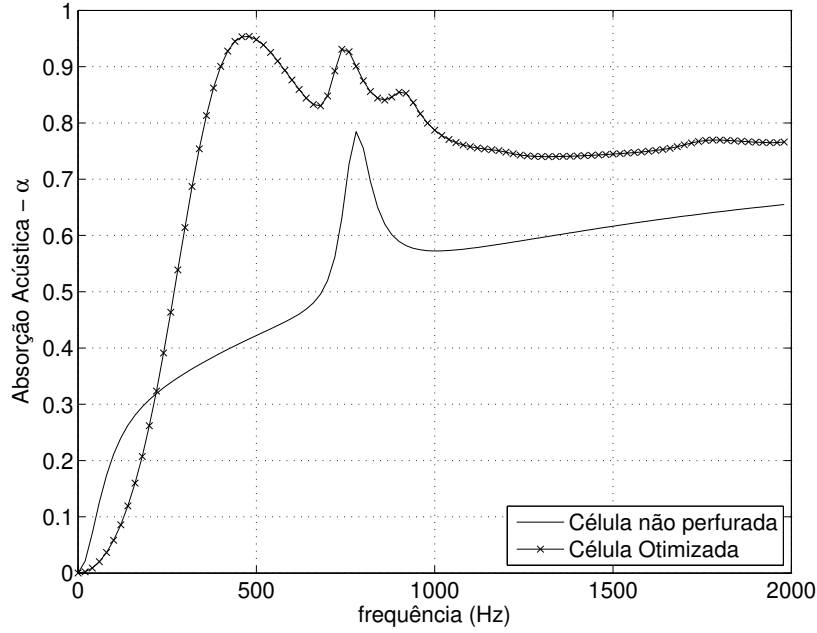


Figura 6.41: Curvas de Absorção para a síntese a 500 Hz

Nota-se a partir deste último resultado que a busca, para esta amostra poroelástica com estas características de análise e otimização, que as duas formulações: fluido equivalente e acoplada mista (u, p) chegaram a resultado semelhantes de topologia otimizada mas não iguais, com relação a maximização da absorção acústica, todavia, nos dois casos os resultados obtidos são satisfatórios, mostrando uma melhoria significativa na função absorção acústica do material.

O terceiro caso analisado é tridimensional. Partindo-se de uma malha de elementos hexaédricos com aproximação linear com $10 \times 10 \times 20$ elementos finitos, modelados com a formulação de fluido equivalente. O método de otimização aplicado é baseado no número de remoção com a técnica de “hard-kill” (mata-forte).

As configurações otimizadas são mostradas na Figuras (6.42) e (6.43). Os elementos porosos que foram transformados em acústicos são mostrados separados da estrutura porosa resultante da otimização.

A proposta é aumentar a absorção da amostra presente em um tubo de kundt analisado nos pontos de frequência de 300 e 500 Hz, conforme resultados apresentados nas Figuras

(6.42) e (6.43), respectivamente. Propõe-se uma redução de 10% em seu volume de material poroso. As propriedades do material são as mesmas dos casos anteriores, as quais estão mostradas na Tabela (6.3). O guia de onda foi modelado com 5x5 modos nas direções x e y e as dimensões da célula poro-acústica são $0,085 \times 0,085 \times 0,06m$.

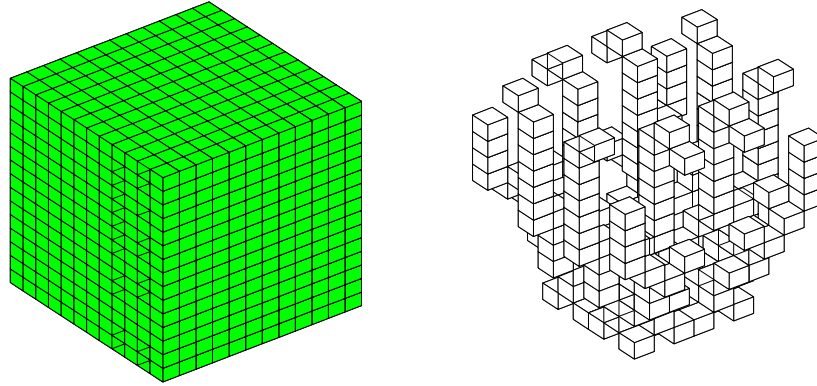


Figura 6.42: Configuração Otimizada para de síntese a 300 Hz - Fase Porosa e Fase Acústica

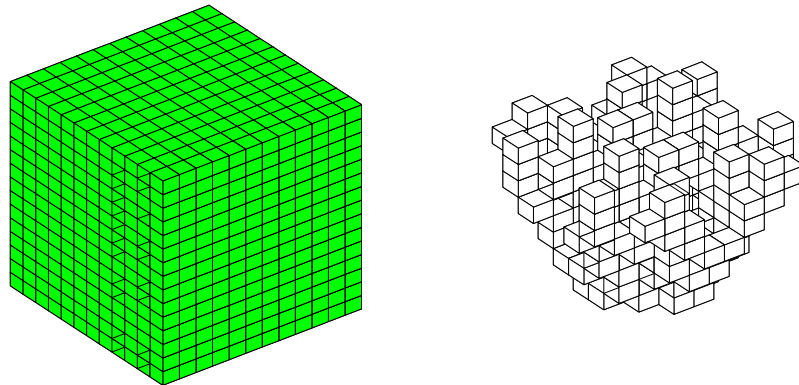


Figura 6.43: Configuração Otimizada para de síntese a 500 Hz - Fase Porosa e Fase Acústica

Observa-se nestes casos, uma tendência de retirada de material na região central da face onde se aplica o guia de onda, apresentando uma “escavação” que tende a isolar uma região central da amostra porosa.

As distribuições de pressão da amostra com o material poroso resultante do processo de otimização analisado nestes pontos de frequência, partes real e imaginária e valores absolutos, são apresentadas nas Figuras (6.44) e (6.45).

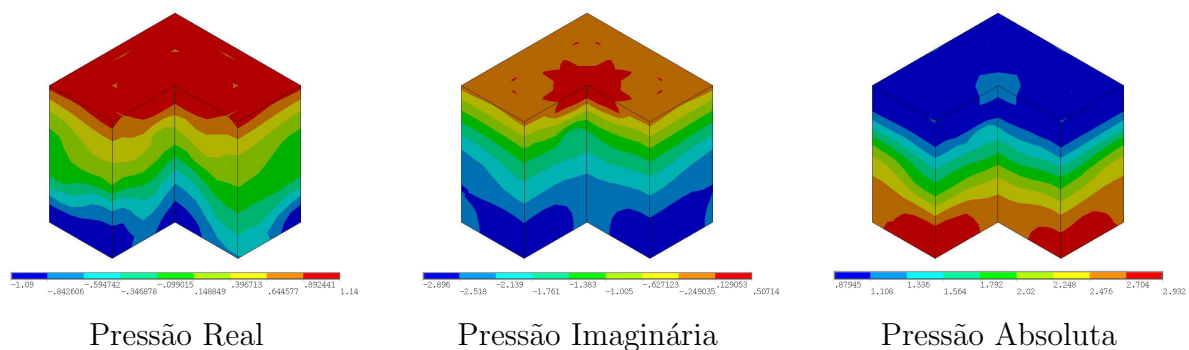


Figura 6.44: Distribuição de Pressão para as configurações otimizadas - 300 Hz

Para a configuração obtida com a síntese a 500 Hz, as seguintes representações para a distribuição de pressão nas células são apresentadas na figura a seguir:

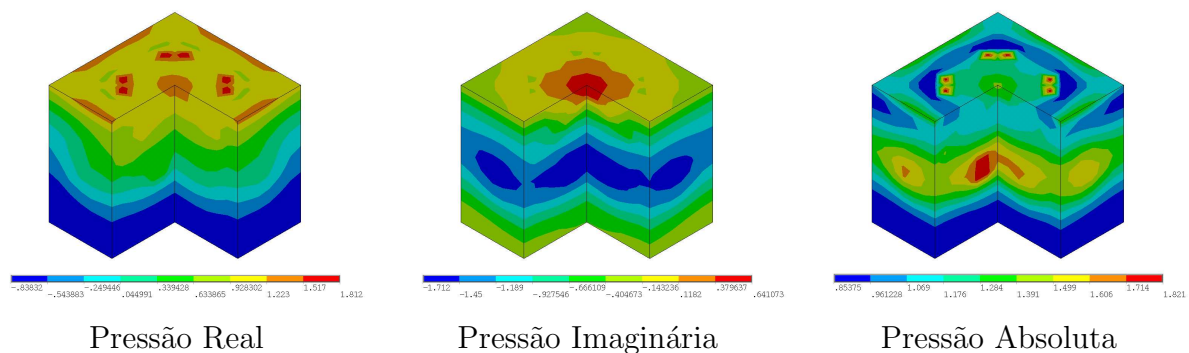


Figura 6.45: Distribuição de Pressão para as configurações otimizadas - 500 Hz

A solução do caso 3D mostra uma flexibilidade bem maior nas possíveis soluções para ampliar a eficiência do sistema de absorção acústica. A Evolução da Função Objetivo α para as duas configurações obtidas nas frequências de 300 e 500 Hz são apresentadas nas Figuras (6.46) e (6.47), respectivamente.

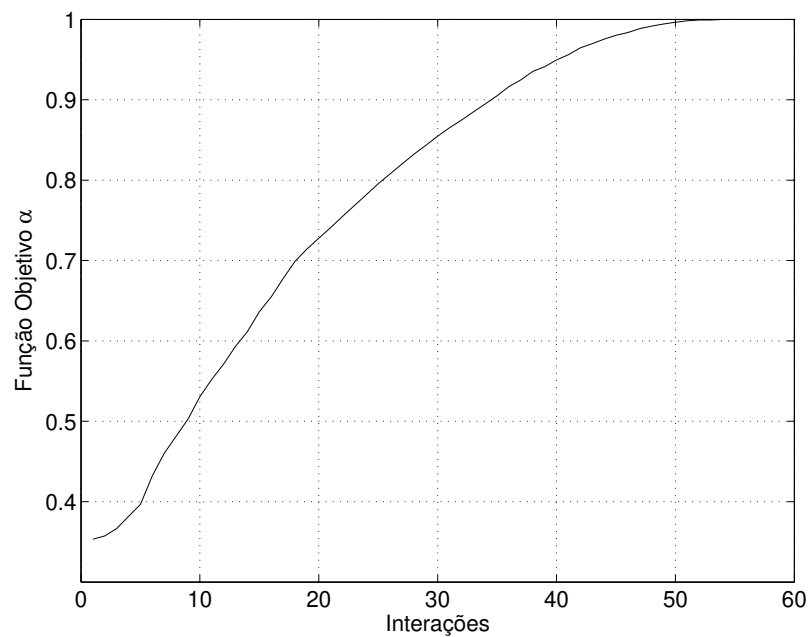


Figura 6.46: Evolução da Função Objetivo para a síntese de 300 Hz

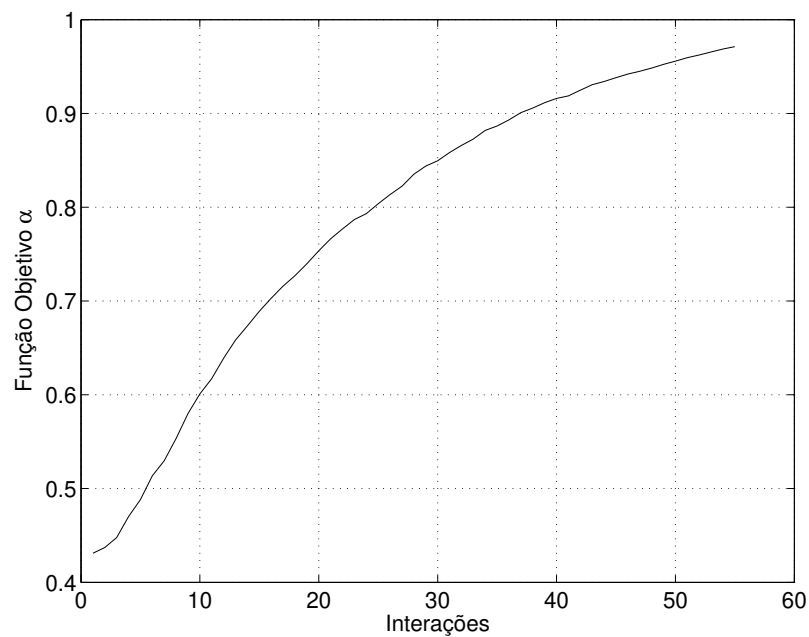


Figura 6.47: Evolução da Função Objetivo para a síntese de 500 Hz

Os espectros da resposta de absorção, resultantes para o novo material, são apresentados

nas seguintes curvas nas frequências de 300 e 500 Hz e comparadas com o desempenho do material sem a redução de volume proposta no projeto inicial, Figuras (6.48) e (6.49), respectivamente.

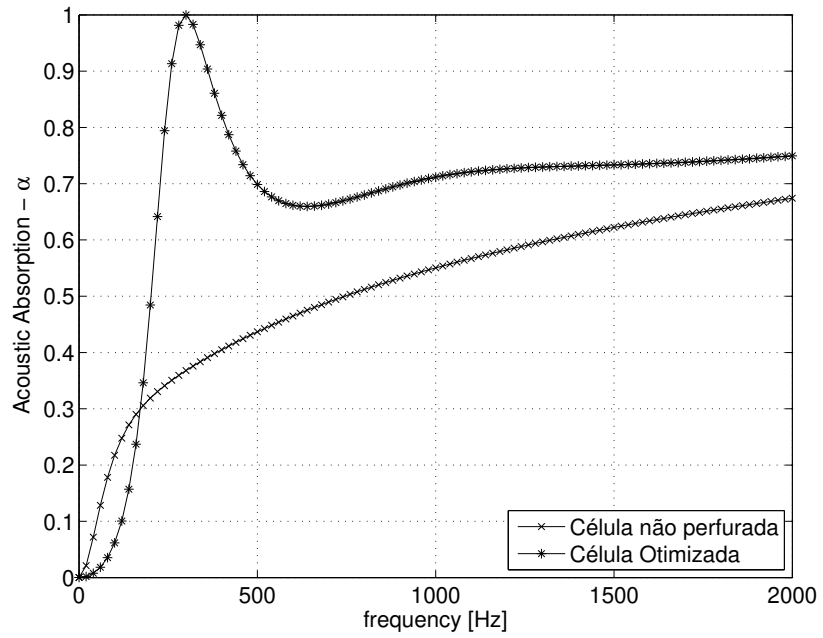


Figura 6.48: Curvas de Absorção para a síntese de 300 Hz

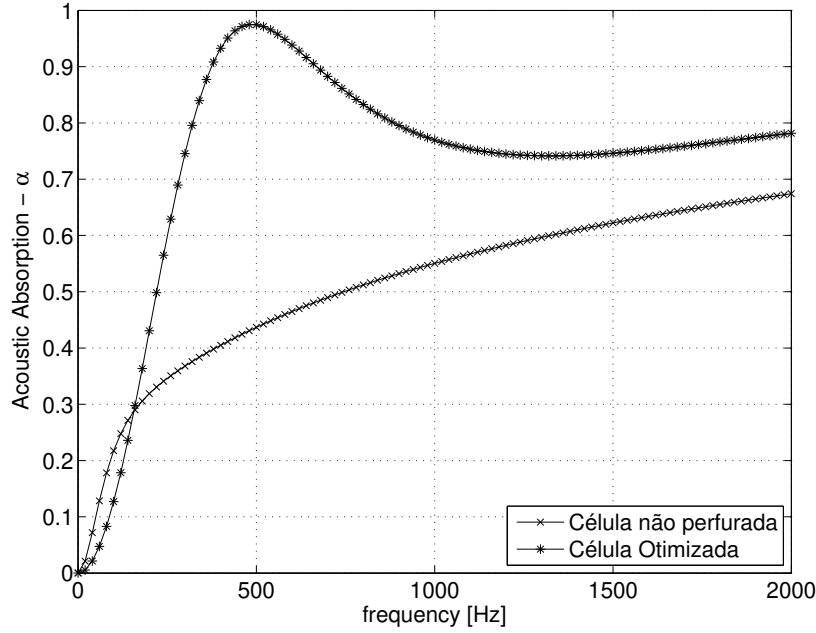


Figura 6.49: Curvas de Absorção para a síntese de 500 Hz

Nota-se que os picos de absorção máxima do sistema, ocorrem nas frequências nas quais as células foram otimizadas, 300 e 500 Hz. Observa-se também que para valores mais elevados de frequência a função absorção manteve valores acima dos encontrados para a célula homogênea. De uma forma geral, apesar da malha ser relativamente grosseira, os resultados se mostraram coerentes.

Com a aplicação da técnica evolucionária proposta em sínteses tridimensionais, os tempos de processamento encontrados foram cada vez maiores em malhas mais refinadas e necessárias para a obtenção de uma boa resposta do processo de otimização topológica.

Ressalta-se ainda que um processo típico de otimização Poro-Acústica tridimensional requer um elevado tempo de processamento em microcomputadores Pentium D ou similares, com 4GB de memória RAM. Tal fato inviabilizou até o momento o processo de otimização em malhas mais refinadas com o método evolucionário.

Um quadro de resumos dos cálculos efetuados usando o Método de Otimização Evolucionária é apresentado na Tabela (6.4). Nota-se que várias configurações e problemas foram abordados, o que permite afirmar que a técnica foi validada e aplicada, mostrando

resultados satisfatórios.

Tabela 6.4: Resumo dos Resultados - Técnica Evolucionária
Síntese Topológica - Metodologia Evolucionária

<i>Análise</i>	<i>Malha</i>	<i>Frequência</i>	<i>Resultados Obtidos</i>
Dependência da Malha	5x5 10x10 20x20 30x30	300 Hz	Topologia Otimizada Histórico da Função Objetivo
Maximização da Absorção Célula 2D [Fluido Equivalente]	40x40	300 Hz 500 Hz	Topologia Otimizada Histórico da Função Objetivo Distribuição de Pressão (nodal) Distribuição da Absorção (elementar) Espectros de Absorção
Maximização da Absorção Célula 2D [Mista (u,p)]	40x40	300 Hz 500 Hz	Topologia Otimizada Histórico da Função Objetivo Distribuição de Pressão (nodal) Distribuição da Absorção (elementar) Espectros de Absorção
Maximização da Absorção Célula 3D [Fluido Equivalente]	10x10x20	300 Hz 500 Hz	Topologia Otimizada Histórico da Função Objetivo Distribuição de Pressão (nodal) Espectros de Absorção

6.6 Otimização Topológica de Sistemas Poro-Acústicos - Metodologia SIMP

Nesta seção, serão apresentados os testes numéricos de aplicação da metodologia SIMP no projeto topológico de células utilizadas em painéis de absorção acústica. Os exemplos a serem apresentados aqui, possuem as mesmas dimensões de projeto das sínteses anteriores, onde a técnica evolucionária foi utilizada.

Primeiramente, a análise da dependência de malha é apresentada. Para uma célula Poro-Acústica cujas características são apresentadas na Figura (6.50) e submetida a uma excitação de um modelo de guia de onda, decomposto na base dos modos da cavidade acústica, conforme descrito na Figura (3.8).

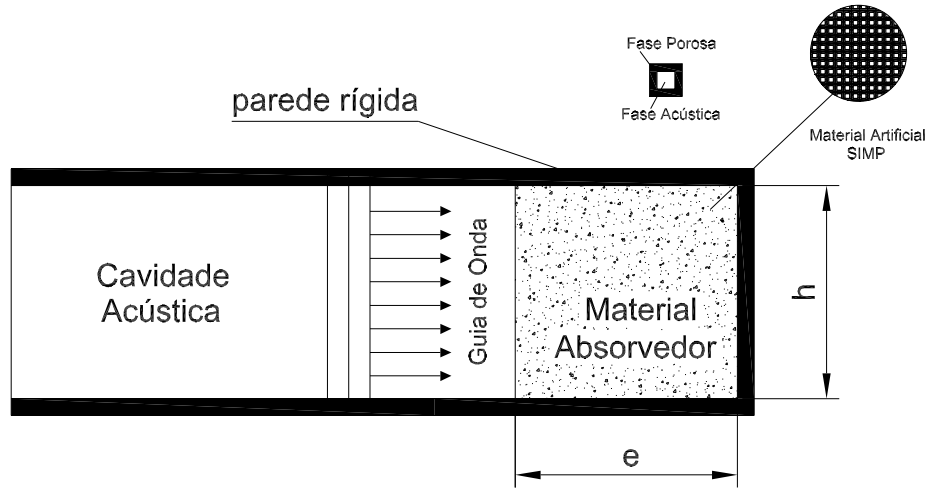


Figura 6.50: Posicionamento do Problema de Otimização Topológica - Método SIMP

Em todas as análises apresentadas a seguir, a aproximação modal adotada para o guia de onda envolve 5 modos em cada direção para a sua descrição. Para a análise de dependência de malha, o sistema Poro-Acústico foi analisado no ponto de frequência de 300 Hz. A dimensão da célula poro-acústica utilizada nestas análises foi de $0,085 \times 0,06m$.

Sobre o algoritmo numérico de otimização e programação matemática “SLP”, utilizou-se um número pequeno de $\beta = 0,05$ (taxa de atualização dos limites móveis) para se ter alguma garantia de convergência dos resultados mesmo a um custo de tempo elevado. O ponto inicial das variáveis de projeto (μ_0) na análise de dependência da malha utilizado foi para todos os elementos igual a fração volumétrica a ser retirada.

Usando uma penalidade de valor $p = 4$, com uma redução volumétrica proposta de 75% e utilizando de elementos lineares quadrilaterais de quatro nós sob a formulação de fluido-equivalente, os seguintes resultados de análise de dependência de malha foram obtidos.

Os seguintes de topologia e ganhos comparativos no espectro da função objetivo estão descritos para as três malhas analisadas, respectivamente nas Figuras (6.51), (6.52) e (6.53).

Nestes casos, considerou-se malhas com 6×9 , 12×17 e 24×34 elementos, cada uma respectivamente. Juntamente com os resultados de topologia, determinaram-se as distribuições de absorção acústica, onde os resultados de absorção elementar, obtidos através da Equação (6.3) são apresentados sobre a malha de elementos finitos.

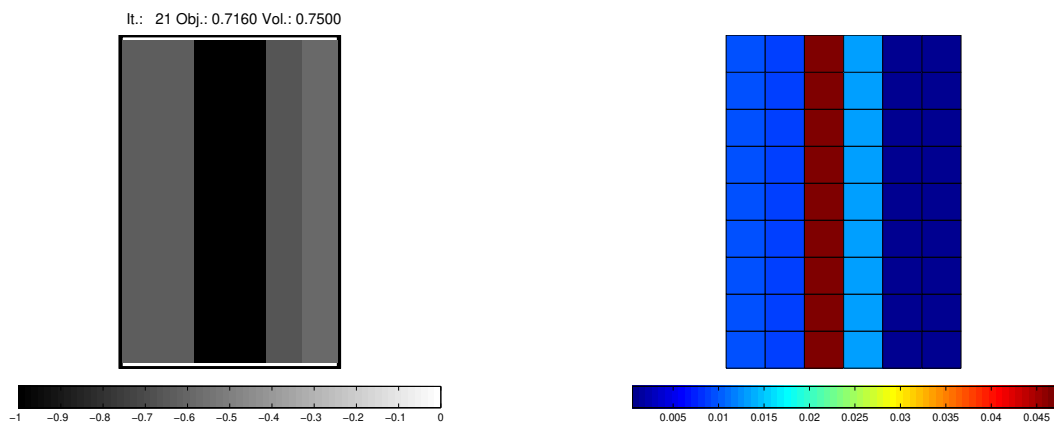


Figura 6.51: Resultados para a Malha de 6x9 elementos finitos

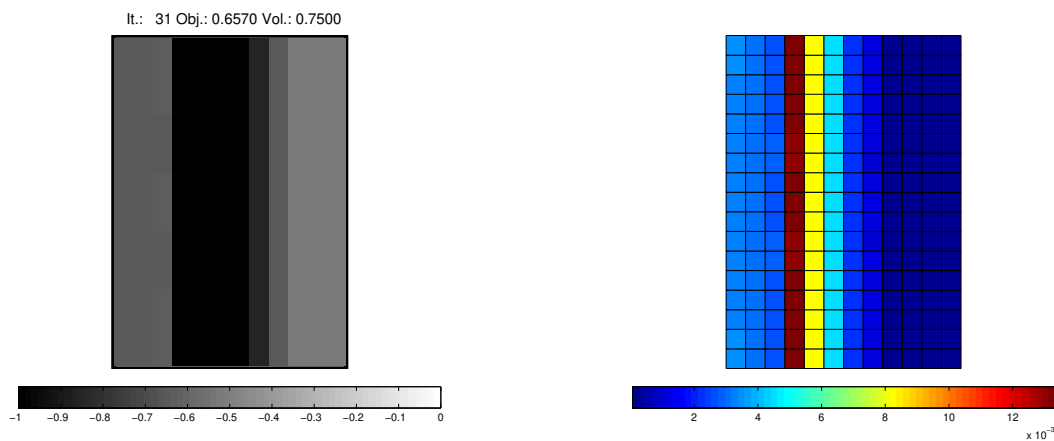


Figura 6.52: Resultados para a Malha de 12x17 elementos finitos

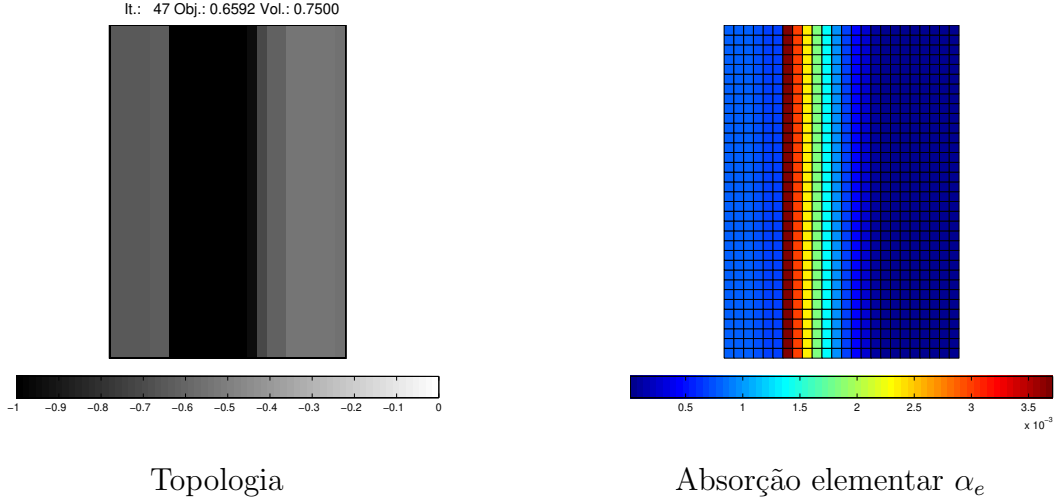
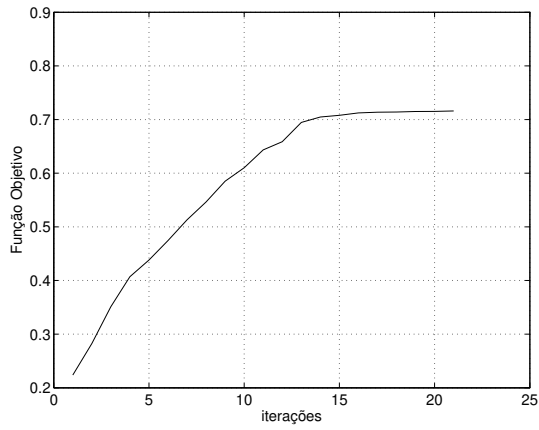


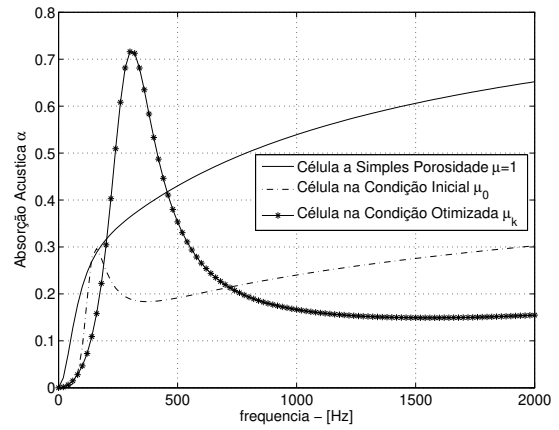
Figura 6.53: Resultados para a Malha de 24x34 elementos finitos

Nota-se que usando a metodologia SIMP, as soluções obtidas sempre distribuídas por camadas, o que por um lado simplifica de alguma forma a construção dos dispositivos de isolamento acústica, mas por outro conduz a resultados piores na função absorção, conforme resultados a seguir.

Nas Figuras (6.54) a (6.56), foram agrupados os resultados das evoluções histórias da função objetivo de cada análise feita juntamente com os espectros de absorção para célula em diversas distribuições para as densidades elementares. Nas curvas de absorção, mostram-se os resultados da célula homogênea com densidade $\mu = 1$ (simples porosidade) para todos os elementos, da célula referente a condição inicial com densidade $\mu_0 = 0,75$ para todos os elementos e da célula otimizada com a topologia mostrada para cada teste.

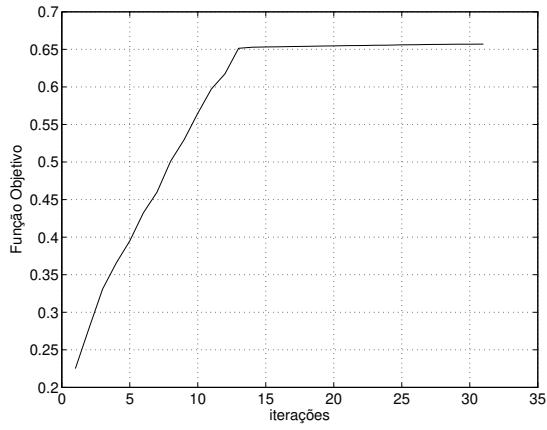


Evolução de α - Malha 1

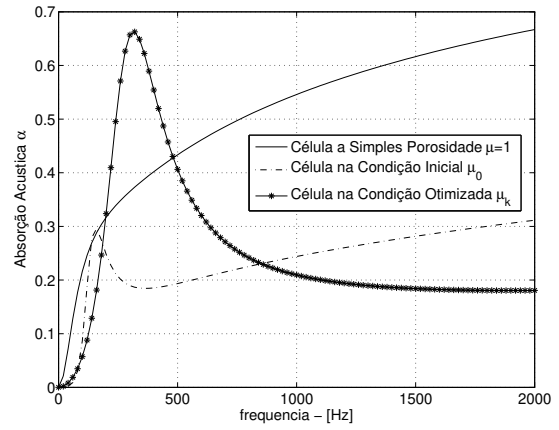


Curvas de Absorção

Figura 6.54: Históricos da Função Objetivo

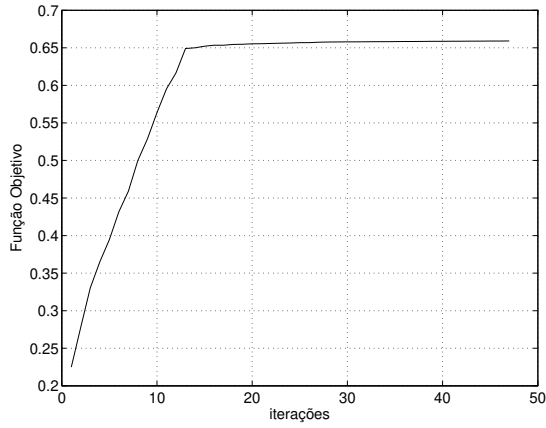


Evolução de α - Malha 2

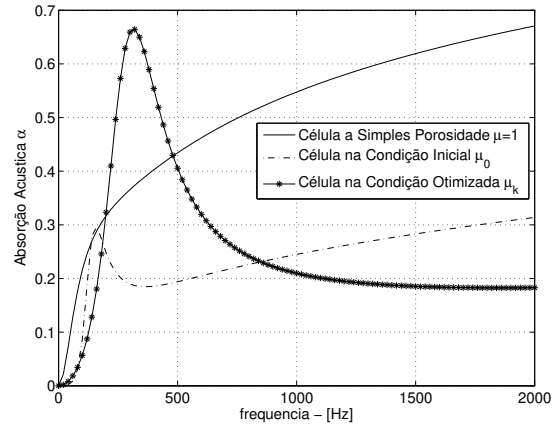


Curvas de Absorção

Figura 6.55: Históricos da Função Objetivo



Evolução de α - Malha 3

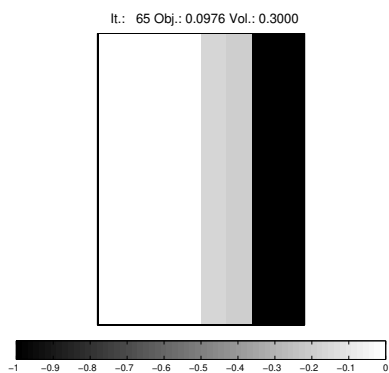


Curvas de Absorção

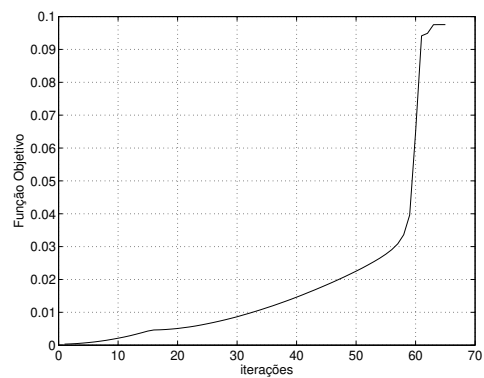
Figura 6.56: Históricos da Função Objetivo

Nota-se neste caso, que mais uma vez há uma evolução contínua e monotônica da função objetivo, principalmente para as malhas mais refinadas.

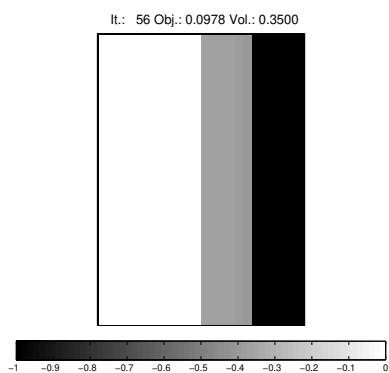
Utilizando a malha de elementos finitos mais refinada (24×34 elementos), a influência do valor da fração de redução volumétrica sobre o máxima performance de absorção (α_{otim}) é investigada. A taxa de atualização dos limites móveis utilizada também foi de $\beta = 0,05$. Cinco reduções foram feitas, de uma fração volumétrica de 0,3 a 0,5. Os mesmos parâmetros do algoritmo numérico de otimização foram utilizados nestas novas sintaxes. Os resultados desta nova análise são apresentados nas Figuras (6.57) e (6.58) a seguir.



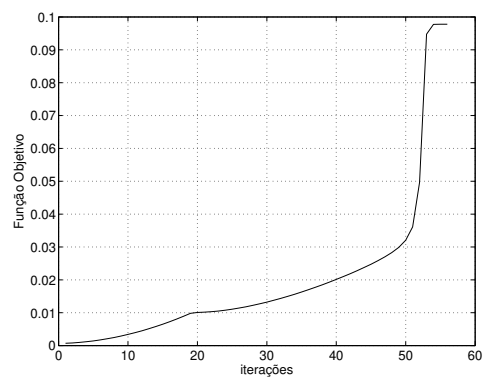
Topologia - Redução 1



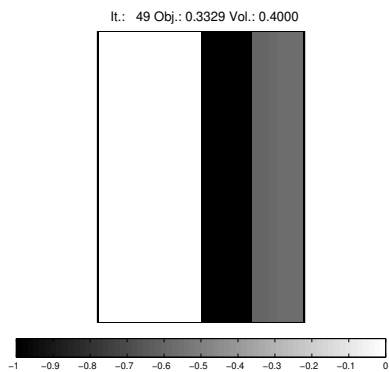
Evolução de α - Redução 1



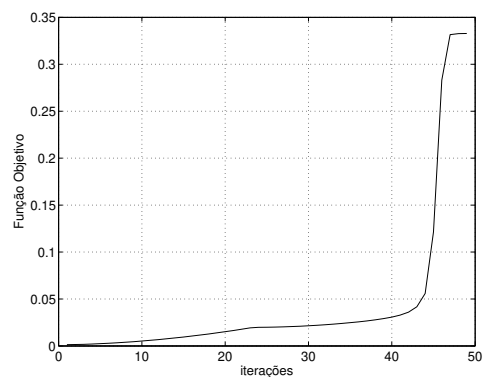
Topologia - Redução 2



Evolução de α - Redução 2

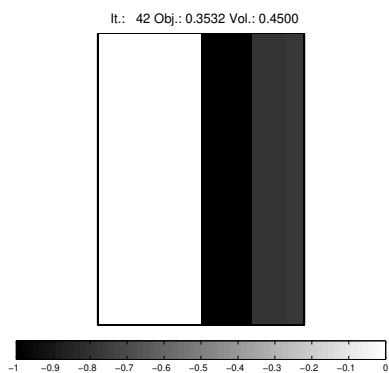


Topologia - Redução 3

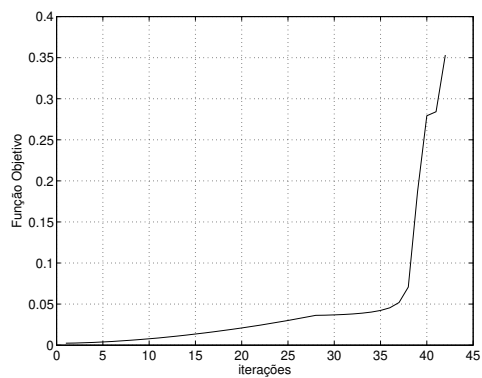


Evolução de α - Redução 3

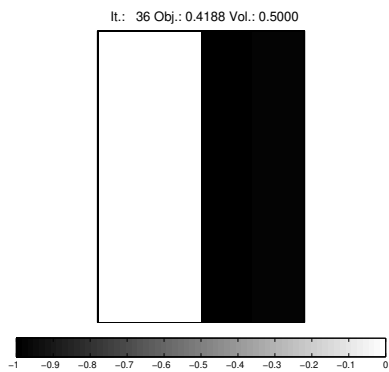
Figura 6.57: Históricos da Função Objetivo



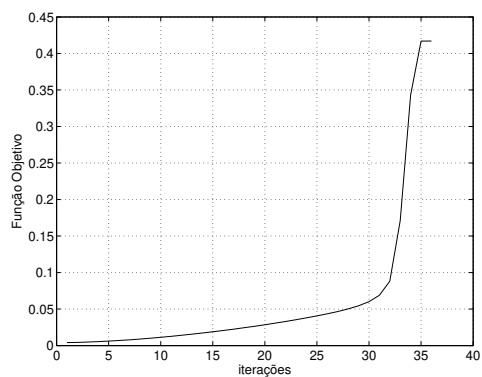
Topologia - Redução 4



Evolução de α - Redução 4



Topologia - Redução 5



Evolução de α - Redução 5

Figura 6.58: Históricos da Função Objetivo

No gráfico da Figura (6.59), encontra-se o histórico dos valores máximos obtidos para a função objetivo α em função da redução de volume f_{vol} proposta.

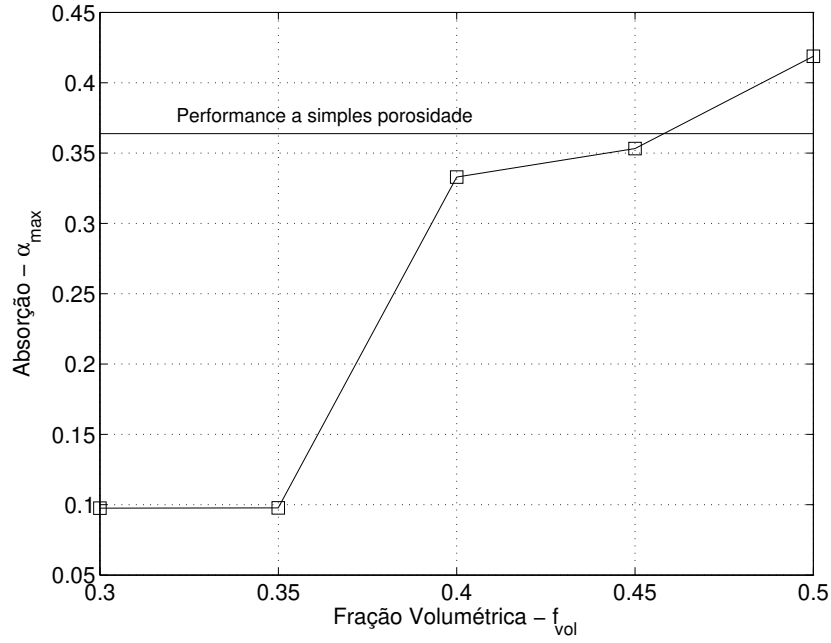


Figura 6.59: Absorção máxima obtida em função da redução de volume f_{vol}

A partir destes resultados, verifica-se que a influência do valor de redução volumétrica sobre a performance de absorção obtida é grande. Diferentes topologias otimizadas foram obtidas para as diversas frações analisadas. Nota-se a partir da análise do gráfico da Figura (6.59), que existe um limite mínimo de redução onde a performance, possa ser melhorada quando se compara com a construção da célula sem perfuração, ou seja, reduzir o volume da célula em menos de 50%, não proporciona ganho de absorção através da otimização topológica SIMP proposta, para a frequência em 300 Hz.

A fim de se comparar as formulações, para o mesmo problema uma nova malha de elementos é aplicada para o problema de otimização da célula Poro-Acústica, desta vez a fim de comparar os resultados sob duas formulações diferentes: a formulação de fluido-equivalente (p) e a formulação mista (u, p). O domínio é discretizado em uma malha com 24×34 elementos finitos quadriláteros lineares e avaliados no ponto de frequência igual a 500Hz. Os resultados para ambas as formulações são apresentados nas Figuras (6.60) e (6.61).

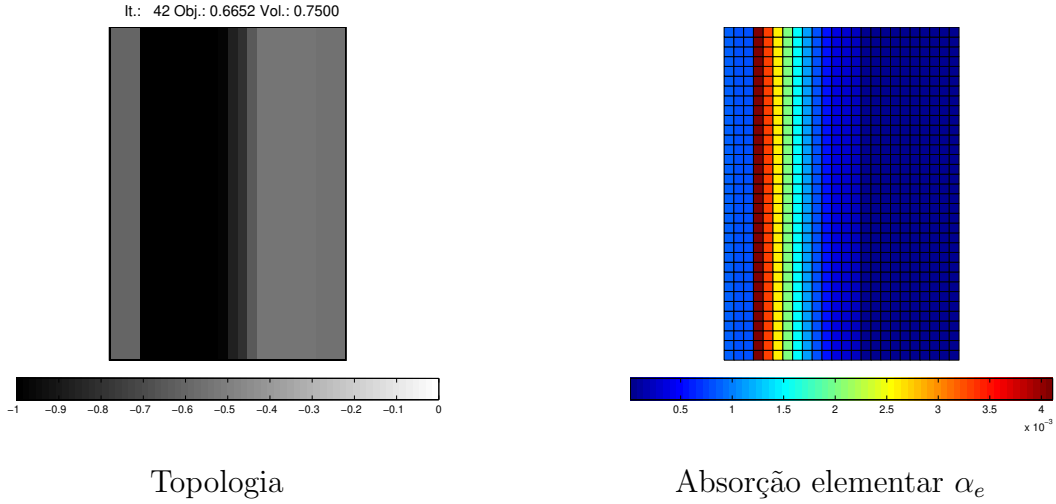


Figura 6.60: Resultados da formulação de Fluido Equivalente

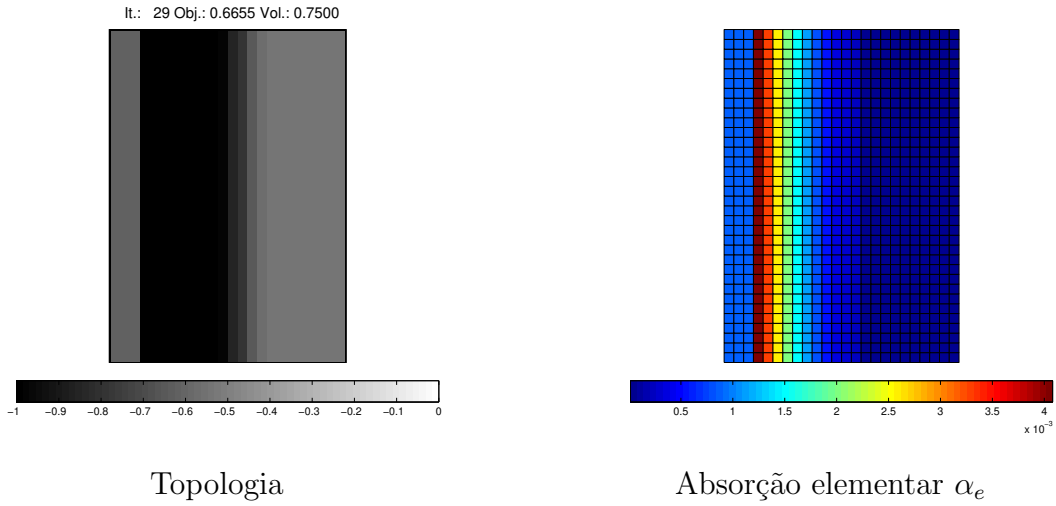
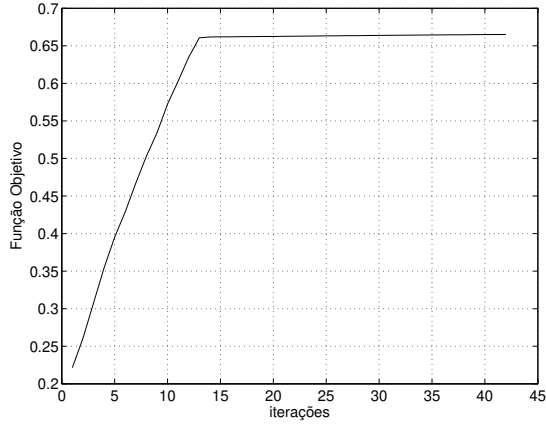


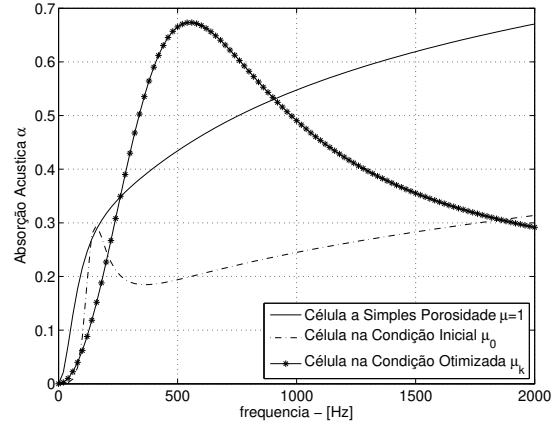
Figura 6.61: Resultados da formulação mista (u,p)

Observa-se o mesmo comportamento em camadas que o caso anterior, com o pico máximo de absorção em 500 Hz e uma diminuição da performance em alta frequência. Salienta-se neste caso, que a redução na massa foi de 25%, ao invés de 10% adotado no algoritmo evolucionário.

Da mesma forma que a análise de dependência da malha, os resultados da evolução histórica da função objetivo foram postos em comparação, conforme apresentado nas Figuras (6.62) e (6.63).

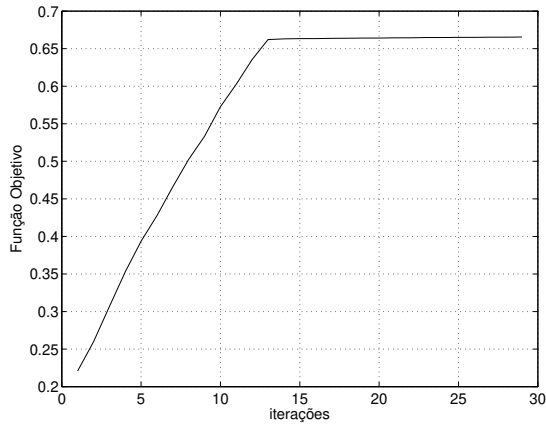


Evolução de α - Formulação de Fluido Equivalente

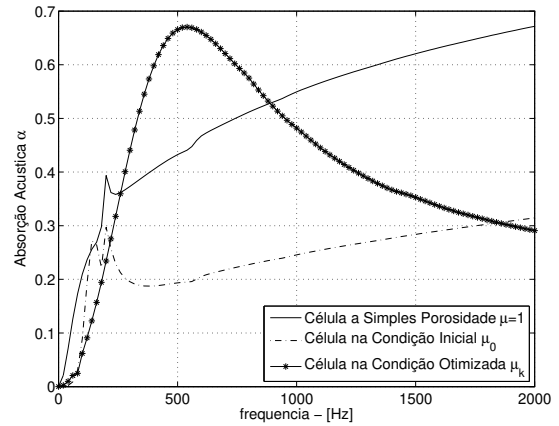


Curvas de Absorção

Figura 6.62: Históricos da Função Objetivo



Evolução de α - Formulação mista (u,p)



Curvas de Absorção

Figura 6.63: Históricos da Função Objetivo

Observa-se que os modelos definidos fluido-equivalente e mista (u, p) forneceram resultados muito semelhantes para a otimização usando o método SIMP.

Para se analisar o processo de otimização, foram feitas algumas sínteses topológicas, partindo-se de outro ponto inicial. Optou-se por uma configuração inicial a dupla porosidade, Figura (6.64), onde o somatório das densidades é um valor próximo da redução de volume, portanto um ponto factível. A excitação do guia de onda permanece no lado esquerdo da amostra, consistindo em um carregamento distribuído de valor inalterado em

relação às análises anteriores.

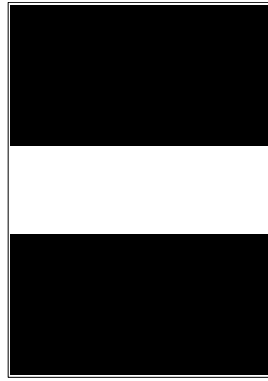


Figura 6.64: Configuração Inicial a dupla porosidade - Processo SIMP

Nesta síntese, utilizou-se uma malha de 48×68 elementos finitos quadrilaterais lineares modelados usando a formulação de fluido equivalente. O valor da penalidade escolhida para estas simulações foi de $p = 3$ e o passo de convergência do método de otimização “SLP” também foi alterado para $\beta = 0,05$. O sistema Poro-Acústico é avaliado em três pontos de frequência distintos, a 300Hz, 500Hz e 750 Hz. Para esta nova síntese, os resultados apresentados nas Figuras (6.65), (6.66) e (6.67) foram obtidos.

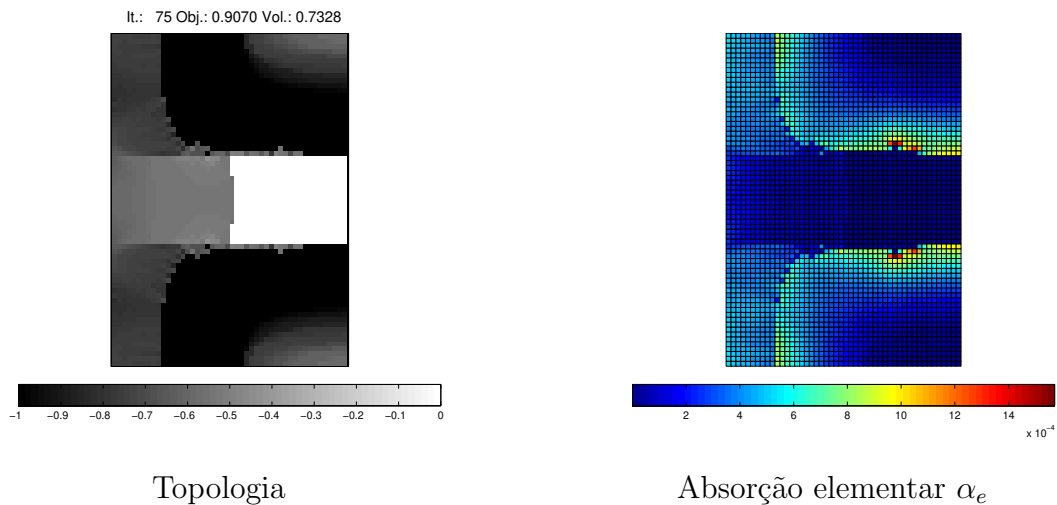


Figura 6.65: Síntese da dupla porosidade inicial a 300Hz

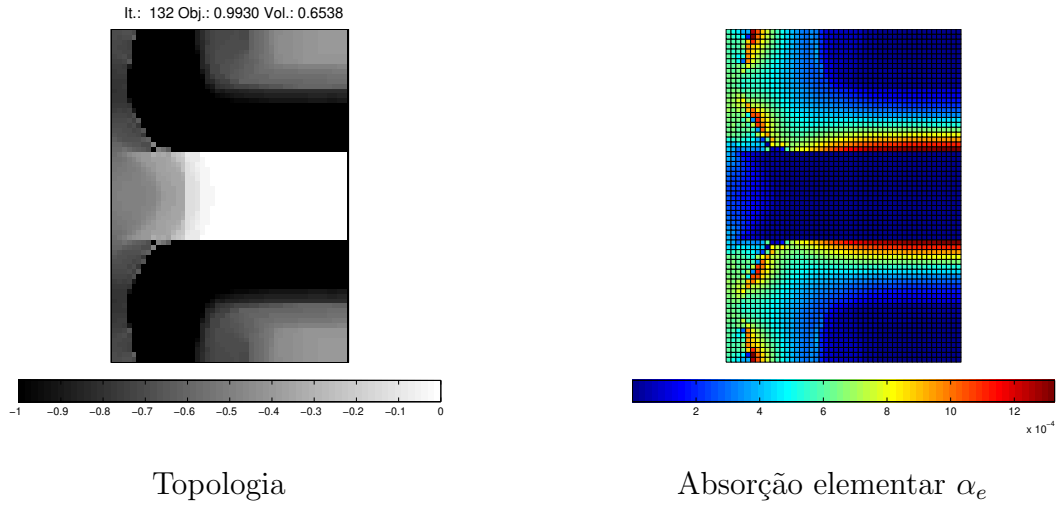


Figura 6.66: Síntese da dupla porosidade inicial a 500Hz

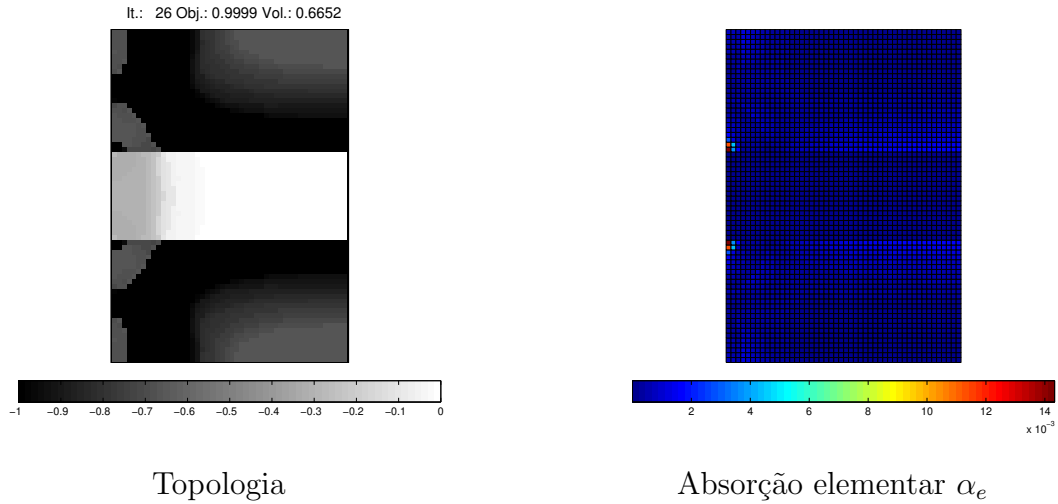
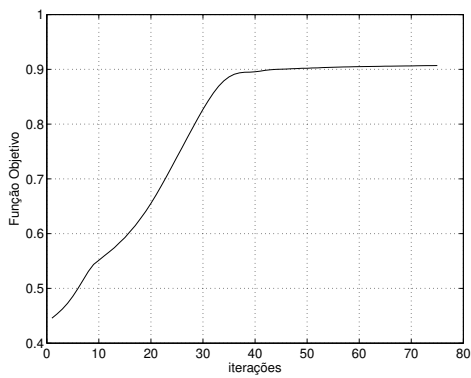


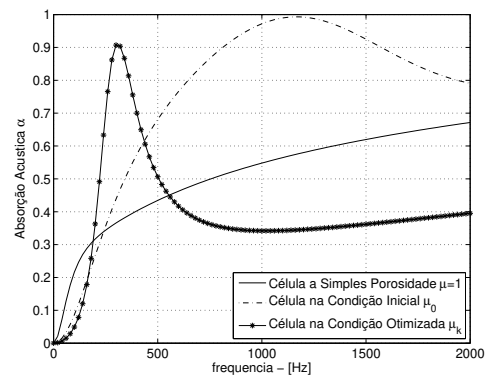
Figura 6.67: Síntese da dupla porosidade inicial a 750Hz

Observa-se neste caso, uma alteração maior na diversidade da topologia, mostrando uma certa alteração na forma da amostra, mas a presença de tons de cinza nos resultados foi considerável. Uma aplicação de um método de continuação pode ser implementado para melhorar a performance do método SIMP neste caso. Este aspecto não foi abordado neste trabalho.

Os resultados da evolução da função objetivo para estas novas sínteses, com uma configuração inicial a dupla porosidade são apresentados nas Figuras (6.68) a (6.70) a seguir.

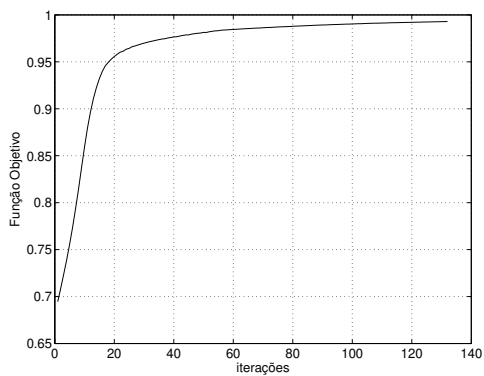


Histórico da Função Objetivo - 300 Hz

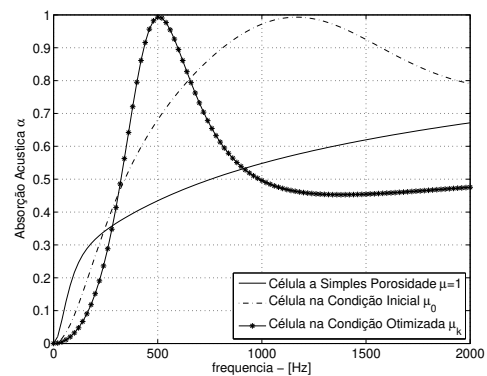


Curvas de Absorção

Figura 6.68: Evolução da Função Objetivo

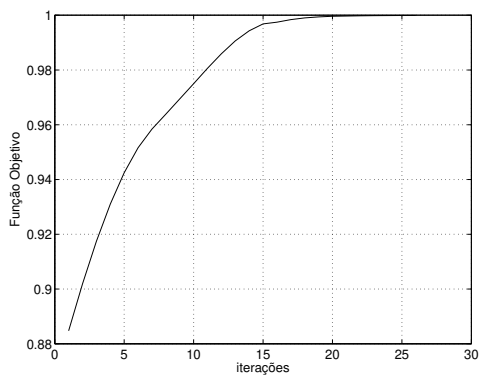


Histórico da Função Objetivo - 500 Hz

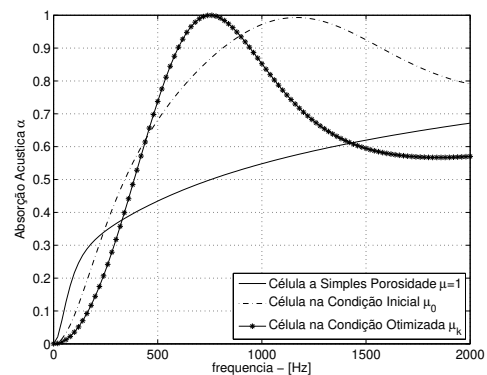


Curvas de Absorção

Figura 6.69: Evolução da Função Objetivo



Histórico da Função Objetivo - 750 Hz



Curvas de Absorção

Figura 6.70: Evolução da Função Objetivo

Para a frequência de 500 Hz, a evolução da função objetivo alcança um patamar em cerca de 20 iterações, tal fato pode evidenciar a presença de mínimos locais bem definidos para esta configuração inicial a dupla porosidade.

Verifica-se ainda que as topologias encontradas, definem algumas regiões para retirada de material, mas os tons de cinza ainda permaneceram, o que requer uma interpretação dos resultados. Estes resultados indicam também que a lei de mistura adotada para o método SIMP pode conduzir a materiais intermediários com características não consistentes, o que pode levar o algoritmo a soluções não realistas.

Com base nos resultados obtidos com o método SIMP, pode-se afirmar que esta metodologia, da forma como foi implementada, não conduz a resultados satisfatórios quando comparada a técnica evolucionária.

O principal problema a ser resolvido está associado a representação dos materiais intermediários, a qual conduz a uma poluição das respostas com tons de cinza, não permitindo que o algoritmo encontre as soluções ótimas do problema. Dentro deste panorama, optou-se em não mais avançar na aplicação do Método SIMP para os casos tridimensionais.

Em trabalhos futuros, técnicas de continuação, originários de outros modelos de homogeneização deverão ser implementados para viabilizar o uso mais efetivo do Método SIMP em projetos de dispositivos poro-acústicos.

A seguir, na Tabela (6.5), apresenta-se um resumo das aplicações numéricas feitas com a técnica de otimização implementada com modelo de material contínuo (SIMP) e descritas neste item.

Tabela 6.5: Resumo dos Resultados - Técnica SIMP

Síntese Topológica - Metodologia SIMP			
<i>Análise</i>	<i>Malha</i>	<i>Frequência</i>	<i>Resultados Obtidos</i>
Dependência da Malha (Ponto Inicial simples porosidade)	6x9 12x17 24x34	300 Hz	Topologia Otimizada Absorção Elementar Histórico da Função Objetivo Espectros de Absorção
Efeito da Redução sobre a absorção acústica ótima (5 reduções - 30% a 50%)	24x34	300 Hz	Topologia Otimizada Histórico da Função Objetivo
Maximização da Absorção Célula 2D [Fluido Equivalente]	24x34	500 Hz	Topologia Otimizada Absorção Elementar Histórico da Função Objetivo Espectros de Absorção
Maximização da Absorção Célula 2D [Mista (u,p)]	24x34	500 Hz	Topologia Otimizada Absorção Elementar Histórico da Função Objetivo Espectros de Absorção
Maximização da Absorção Célula 2D - espessura = 60mm (Ponto Inicial dupla porosidade)	48x68	300 Hz 500 Hz 750 Hz	Topologia Otimizada Absorção Elementar Histórico da Função Objetivo Espectros de Absorção

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e discussões pertinentes ao desenvolvimento desta tese de Doutorado. Algumas considerações sobre a implementação computacional do código de elementos finitos para as equações da poroelasticidade acoplada, sobre a metodologia de projeto e otimização topológica desenvolvida e aplicada em sistemas de isolamento acústica são delineadas ao longo deste capítulo. Os resultados obtidos com as técnicas de otimização empregadas também são discutidos. Ao final do capítulo, sugestões de trabalhos envolvendo o tema estudado com um maior aprofundamento em alguns tópicos são feitas.

7.1 Conclusões

Problemas que envolvam síntese e otimização de projetos envolvendo materiais poroelásticos são componentes de uma linha de pesquisa de grande aplicação acadêmica e industrial.

O Modelo de Elementos Finitos para a Poroelasticidade se constituiu em uma ferramenta útil em projetos de isolamento de cavidades acústicas. Ambas as formulações, fluido equivalente e mista (u, p) , utilizadas neste trabalho, mostraram-se adequadas à implementação realizada para a determinação da função objetivo desejada: a absorção acústica de sistemas poroelásticos.

Um método numérico como o dos Elementos Finitos aliado às técnicas de otimização topológica evolucionária, estudados e aplicados nesta tese, apresentaram-se coesos entre si, permitindo-se assim um aumento no grau de confiabilidade da implementação computaci-

onal realizada.

Sistemas com diferentes perfurações em materiais absorvedores e o efeito de combinação destes em geometrias e configurações diversas se torna uma grande possibilidade de inovação em projetos acústicos industriais.

Ainda sobre o modelo de elementos finitos de uma cavidade com material poroso dentro, o sistema Poro-Acústico acoplado a uma descrição modal (superposição) para o guia de onda, conseguiu suprir a divergência da resposta de absorção em problemas de propagação acústica não-plana e ainda sem a necessidade da discretização da cavidade em elementos acústicos.

O uso de um modelo de material artificial composto por duas fases, uma porosa e outra acústica, se mostrou de fácil implementação computacional, devido ao fato do acoplamento do meio poroelástico com o meio acústico poder ser concebido, através de algumas simplificações nas formulações, sem a necessidade das matrizes de acoplamento, uma vez que as condições de interface são naturalmente satisfeitas.

Sobre a análise de sensibilidade feita neste trabalho, o método adjunto para determinação da primeira derivada da função objetivo se mostrou muito mais eficiente em comparação ao direto e ao de diferenças finitas.

No processo de Otimização Evolucionária, mesmo com a melhoria da absorção, o desempenho do absorvedor, em valores mais altos de frequência, não foi comprometido.

Conclui-se que o problema modelado pelo método das densidades, material Poro-Acústico, no que se refere à maximização da absorção acústica, apresentou um região factível com um grande número de mínimos locais, pois variações de configurações iniciais promoviam resultados diversos.

As principais dificuldades na implementação, são as escalas de cinza presentes nos resultados do método SIMP e a dependência da malha.

Para se obter bons resultados com a técnica evolucionária, ou seja, obter-se um histórico de evolução da absorção suave, há a necessidade de malhas relativamente densas, principalmente para descrição de problemas tridimensionais. Estes foram os problemas mais comuns verificados nos resultados obtidos.

De uma forma geral, do ponto de vista das formulações, metodologias de análise de

sensibilidade da função objetivo e da aplicação das técnicas de otimização evolucionária e do método das densidades, a partir de alguns estudos de casos, pode-se concluir que várias possibilidades foram discutidas, sendo que a ferramenta desenvolvida mostrou desempenho global satisfatório.

A técnica baseada no Método Evolucionário pode ser considerada validada e adequada para o uso em projetos de Engenharia. A ferramenta baseada no método SIMP, aplicada em sistemas Poro-Acústicos, ainda necessita de desenvolvimento para ser usada em aplicações de Engenharia.

7.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Outras aplicações práticas e construções de malhas que reproduzissem problemas encontrados em indústrias a fim de aplicar a metodologia desenvolvida seria uma grande contribuição à linha de pesquisa.

O uso de novas buscas evolucionárias, como por exemplo: técnicas de buscas por regiões, visando uma maior eficiência do método de otimização evolucionária proposta, consistiria em uma aplicação interessante.

Sobre o aspecto computacional, é proposta uma adaptação dos métodos matemáticos empregados, onde uma busca do mínimo da função no método das densidades de uma forma mais robusta deva ser empregado. Um meio que pode ser utilizado para aumentar a eficiência do código de otimização, seria o uso de computação paralela, onde a divisão de tarefas independentes fosse possível. Como extensão, um trabalho futuro seria o desenvolvimento de malhas adaptativas e não conformes, o qual melhoraria a convergência dos resultados. A adaptação com domínios estruturais e fluido-estruturas acoplados, também consiste em uma outra linha de pesquisa de grande aplicação em problemas de Engenharia.

Sobre o modelo de mistura do material obtida pela técnica SIMP, sente-se a necessidade de um estudo sobre a influência da mudança de densidade sobre o comportamento do material intermediário. A dependência sobre as propriedades poroelásticas devem ser obtidas. Uma outra sugestão nesta linha de pesquisa consiste na adaptação das regras dos limites de Hashin-Shtrikman, inicialmente aplicadas em problemas estruturais, sobre as leis dos materiais Poro-Acústico em desenvolvimento.

Ainda sobre a metodologia SIMP, melhorias nos resultados podem ser alcançadas através do estudo e uso de técnicas de filtragem das sensibilidades aliada ao uso da técnica CAMD “Continuous Approximation of Material Distribution”, que corresponde na interpolação da densidade ao nível dos nós.

A técnica de Homogeneização de misturas envolvendo campos acoplados, com presença de fase poroelástica sob formulação mista (u, p) e fase acústica é outra linha de pesquisa relevante, a qual consistir-se-ia em uma ferramenta para o projeto de novos materiais absorvedores.

Outras sugestões de linha de pesquisa de continuidade desta tese são aplicações dos modelos desenvolvidos em problemas que envolvam meios infinitos, onde a técnica de DtN (“Dirichlet to Neumann”) pode ser aplicada e em dispositivos de filtragem acústica, com configurações periódicas, por exemplo: materiais fonônicos, onde a teoria de “band-gaps” possa ser utilizada.

Validações experimentais dos resultados numéricos apresentados seria um outro campo de estudo, onde a correlação de resultados numéricos e experimentais consistiria em uma boa base de decisões no projeto. Determinando assim a viabilidade de construção de certas topologias obtidas.

Desta forma, a partir de todas estas melhorias ao código, espera-se um programa mais robusto, com simulações rápidas, as quais proporcionem aos engenheiros a concepção de novos projetos de isolamento acústicas de forma confiável e eficiente.

Referências

- Allard, J. F. (1993). *Propagation of Sound in Porous Media: Modeling Sound Absorbing Materials*. Elsevier, New York.
- Allard, J. F., Castagnede, B., Henry, M., and Lauriks, W. (1994). Evaluation of tortuosity in acoustic porous materials saturated by air. *Rev. Science Instrum.*, 65(3):754–755.
- Arora, J. (2004). *Introduction to Optimum Design*. Elsevier Academic Press, San Diego.
- Arora, J., Elwakeil, O., Chahande, A., and Hsieh, C. (1995). Global optimization methods for engineering applications: a review. *Structural Optimization*, 9:137–159.
- Arora, J. and Haug, E. J. (1979). Methods of design sensitivity analysis in structural optimization. *AIAA Journal*, 17 (9):970–974.
- Arora, J., Huang, M., and Hsieh, C. (1994). Structural optimization. *Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review*, 8:69–85.
- Atalla, N., Amédin, C. K., , and Sgard, R. P. F. (2001a). Étude numérique et expérimentale de l’absorption acoustique et de la transparence acoustique des matériaux poreux hétérogènes en basses fréquences dans le but d’identifier des solutions à fort potentiel d’applicabilité. *Rapport d’études et recherches, irsst, Montreal (Quebec)*, pages 33–40.
- Atalla, N., Hamdi, M. A., and Panneton, R. (2001b). Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations. *Journal of Acoustical Society of America*, 109(6):3065–3068.
- Atalla, N., Panneton, R., and Debergue, P. (1998). A mixed displacement-pressure formulation of poroelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 104(3):1444–1452.

- Atalla, N., Panneton, R., Sgard, F., and Olny, X. (2001c). Acoustic absorption of macro-perforated porous materials. *Journal of Sound and Vibration*, 243 (4):659–678.
- Auriault, J.-L., Borne, L., and Chambon, R. (1985). Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of darcy. *Journal of Acoustical Society of America*, 77 (5):1641–1650.
- Babuska, I. (1976). Homogenization and its application. mathematical and computational problems. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, III:89–116.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New Jersey.
- Bécot, F.-X. and Sgard, F. (2006). On the use of poroelastic materials for the control of the sound radiated by a cavity backed plate. *Journal of Acoustical Society of America*, 120 (4):2055–2066.
- Bendsoe, M., Diaz, A., Lipton, R., and Taylor, J. (1995). Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 38:1149–1170.
- Bendsoe, M., Guedes, J., Haber, R., Pedersen, P., and Taylor, J. (1994). An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design. *Journal of Applied Mechanics*, 61(4):930–937.
- Bendsoe, M. and Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69:635–654.
- Bendsoe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1:193–202.
- Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71:197–224.
- Bendsoe, M. P. and Sigmund, O. (2003). *Topology Optimization*. Springer, Berlin.

- Benssousan, A., Lions, J., and Papanicoulau, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.
- Biot, M. (1941). General theory of three dimensional consolidation. *Journal Applied Physics*, 12:155–164.
- Biot, M. (1956). The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of Acoustical Society of America*, 28:168–191.
- Biot, M. (1962). Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of Acoustical Society of America*, 34:1254–1264.
- Bourbié, T., Coussy, O., and Zinszner, B. (1987). *Acoustics of Porous Media*. Institut Français du Pétrolé Publications, Paris.
- Bourgat, J. (1979). Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. *Lectures Notes in Mathematics*, 704:330–356.
- Bulman, S., Sienz, J., and Hinton, E. (2001). Comparisons between algorithms for structural topology optimization using a series of benchmark studies. *Computers and Structures*, 79:1203–1218.
- Cai, C., Hung, K., and Khan, M. (2006). Simulation-based analysis of acoustic absorbent lining subject to normal plane wave incidence. *Journal of Acoustical Society of America*, 291:656–680.
- Campos, J. C. B. (1995). *Solução de Problemas Poroelásticos através do Método dos Elementos de Contorno*. (Tese) Doutorado, Unicamp.
- Castel, F. (2005). *Modélisation numérique de matériaux poreux hétérogènes. Application à l’absorption basse fréquence*. (Tese) Doutorado, ENTPE-INSA, Lyon et L’Université de Sherbrooke.
- Champoux, Y. and Allard, J.-F. (1991). Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 70(4):1975–1979.

- Craggs, A. (1978). A finite element model for rigid porous absorbing materials. *Journal of Sound and Vibration*, 61:101–111.
- Craggs, A. (1979). Coupling of finite element acoustic absorption models. *Journal of Sound and Vibration*, 66(4):605–613.
- Craggs, A. (1985). A finite element model for acoustically lined small rooms. *Journal of Sound and Vibration*, 108(2):327–337.
- Dauchez, N., Sahaoui, S., and Atalla, N. (2001). Convergence of poreelasticity finite elements based on biot displacement formulation. *Journal of Acoustical Society of America*, 109(1):33–40.
- Davis, T. A. (2005). *UMFPACK Version 4.4 User Guide*. Dept. of Computer and Information Science and Engineering, Univ. of Florida, Gainesville, FL.
- Dazel, O., Sgard, F., Lamarque, C.-H., and Atalla, N. (2002). An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems. *Journal of Sound and Vibration*, 253(2):421–445.
- Debergue, P., Panneton, R., and Atalla, N. (1999). Boundary conditions for the weak formulation of the mixed (u,p) poroelasticity problem. *Journal of Acoustical Society of America*, 106(5):2383–2390.
- Depollier, C., Allard, J. F., and Lauriks, W. (1988). Biot theory and stress-strain equations in porous-absorbing materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 84(6):2277–2279.
- Detournay, E. and Cheng, A. H. (1991). Plane strain analysis of a stationary hydraulic fracture in a poroelastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 37(13):1645–1662.
- Eijk, J. and Zwikker, C. (1941). Absorption of sound by porous materials i. *Physica*, 8(2):149–158.

- Fillunger, P. (1998). Erdbaumechnik? (wein, selbstverlag des verfassers, 1936) 31 in apud characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 153:223–257.
- Fuchs, M. B. (1981). A move limit strategy for the slp approach to structural design. *International Journal of Mechanical Sciences*, 23 (12):733–740.
- Goransson, P. (1995a). Acoustic finite element formulation of a flexible porous material - a correction for inertial effects. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):559–580.
- Goransson, P. (1995b). A weighted residual formulation of the acoustic wave propagation through a flexible porous material and a comparison with a limp material model. *Journal of Sound and Vibration*, 182(3):479–494.
- Guedes, J. M. and Kikuchi, N. (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenisation method with adaptative finite elements methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83:143–198.
- Hassani, B. and Hinton, E. (1998). *Homogenization and Structural Topology - Theory, Practice and Software*. Springer, Swansea.
- Incropera, F. P. and DeWitt, D. P. (1996). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley.
- Jensen, J. S. and Sigmund, O. (2005). Systematic design of acoustic devices by topology optimization. In *Proc. of the Twelfth International Congress on Sound and Vibration*.
- Johnson, D., Koplik, J., and Dashen, R. (1987). Theory of dynamics permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176:379–402.
- Kang, Y. J. and Bolton, J. S. (1995). Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. *Journal of Acoustical Society of America*, 98(1):635–643.

- Labanowski, A., Fancello, E. A., and Novotny, A. A. (2004). Simp, eso e tsa: Uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade 2d. In *Anais do Congresso Ibero-Latino Americano de Mecânica Computacional - Cilamce*.
- Leclaire, P., Kelders, L., and Lauriks, W. (1996a). Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air. *Journal of Applied Physics*, 80(4):2009–2012.
- Leclaire, P., Kelders, L., Lauriks, W., Glorieux, C., and Thoen, J. (1996b). Determination of the viscous characteristic length in air-filled porous materials by ultrasonic attenuation measurements. *Journal of Acoustical Society of America*, 99(4):1944–1948.
- Nunes, A. (2001). Estudo teórico e experimental da acústica de cavidades com absorção sonora. (Dissertação) Mestrado, Unicamp.
- Olny, X. (1999). *Absorption acoustique des milieux poreux a simple et double porosite à Modélisation et validation expérimentale*. (Tese) Doutorado, ENTPE-INSA, Lyon.
- Olny, X. and Boutin, C. (2003). Acoustic wave propagation in double porosity media. *Journal of Acoustical Society of America*, 114 (1):73–89.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1996). Numerical prediction of sound transmission through multilayer systems with isotropic poroelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 100:346–354.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1997a). An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustic. *Journal of Acoustical Society of America*, 101(6):3287–3298.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1997b). Low-frequency approximations for acoustic porous materials: Linearisation of the poroelastic eigenvalue problem. *Transactions of the CSME*, 4:401–413.
- Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1976). Some basic stress-diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. In *Reviews of Geophysics and Space Physics*, volume 14, pages 227–241.

- Rigobert, S., Sgard, F., and Atalla, N. (2004). A two-field hybrid formulation for multilayers involving poroelastic, acoustic and elastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 115 (6):2786–2797.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127*. Springer-Verlag, New York.
- Sgard, F., Atalla, N., and Nicolas, J. (2000). A numerical model for the low frequency diffuse field sound transmission loss of double-wall sound barriers with elastic porous linings. *Journal of Acoustical Society of America*, 108 (6):2865–2872.
- Sgard, F., Olny, X., Atalla, N., and Castel, F. (2005). On the use of perforations to improve the sound absorption of porous materials. *Applied Acoustics*, 66:625–651.
- Sigmund, O. (2001a). A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structure Multidisciplinary Optimization*, 21:120–127.
- Sigmund, O. (2001b). Design of multiphysics actuators using topology optimization - part i: One-material structures. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 190:6577–6604.
- Sigmund, O. (2001c). Design of multiphysics actuators using topology optimization - part ii: Two-material structures. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 190:6605–6627.
- Sigmund, O. and Clausen, P. (2007). Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 196:1874–1889.
- Sigmund, O. and Jensen, J. S. (2003). Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophy Transactions of Royal Society*, 361:1001–1019.
- Silva, F. and Pavanello, R. (2003). Numerical analysis of the coupled poroelasticity using the finite element method. In *Anais do XVII Cobem*, page to appear.

- Silva, F. and Pavanello, R. (2004a). Estudo de formulações simétricas da poroelasticidade. In *Anais do III Conem*.
- Silva, F. and Pavanello, R. (2004b). Implementação computacional de um modelo acústico-poroelástico usando o método dos elementos finitos. In *Anais do V Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*.
- Silva, F. I. (2003). Modelagem e implementação computacional da poroelasticidade acoplada. (Dissertação) Mestrado, Unicamp.
- Susuki, K. and Kikuchi, N. (1991). A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93:291–318.
- Teradaa, K., Rob, T., and Kikuchi, N. (1998). Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 153:223–257.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Thomsen, J. (1992). Topology optimization of structures composed of one or two materials. *Structural Optimization*, 5:108–115.
- Truesdell, C. and Toupin, R. (1960). *The classical field theories; in: S. Flügge, ed., Principles of Classical Mechanics and Field Theory, (in Handbuch der Physik), Vol. III/1*. Springer-Verlag, Berlin.
- Xie, Y. and Steven, G. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 49 (5):885–896.
- Xie, Y. and Steven, G. (1996). Evolutionary structural optimization for dynamic problems. *Computers and Structures*, 58 (6):1067–1073.
- Xie, Y. and Steven, G. (1997). *Evolutionary Structural Optimization*. Springer Verlag.
- Yang, R. J. and Chuang, C. H. (1994). Optimal topology design using linear programming. *Computers and Structures*, 52 (2):265–275.

- Zheng-Dong, M. and Hagiwara, I. (1991). Sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems part ii: Direct frequency response and its sensitivities. *AIAA Journal*, 29:1796–1801.
- Zwikker, C. (1941). Absorption of sound by porous materials iv. *Physica*, 8(10):1102–1107.
- Zwikker, C., Eijk, J. V. D., and Kosten, C. (1941a). Absorption of sound by porous materials ii. *Physica*, 8(5):469–476.
- Zwikker, C., Eijk, J. V. D., and Kosten, C. (1941b). Absorption of sound by porous materials iii. *Physica*, 8(10):1094–1101.
- Zwikker, C. and Kosten, C. W. (1949). *Sound Absorbing Materials*. Elsevier Publishing Company.

Anexo A

Ondas de compressão e cisalhamento no material poroelástico - Teoria de Biot

A partir das equações da onda, apresentadas nos ítems (3.2.2) e (3.2.3), escritas agora em sua forma dinâmica e com o uso de potenciais escalares para descrever as dilatações sólida e fluida. Pode-se então determinar as constantes de onda compressivas que existem no material poroelástico.

$$u_i = \psi_{,i}^s \quad (\text{A.1})$$

$$U_i = \psi_{,i}^f \quad (\text{A.2})$$

As equações da onda nos materiais poroelásticos, descritas anteriormente, em sua forma dinâmica podem ser reescritas da seguinte forma, Equação (A.3):

$$P\psi_{,ii}^s + Q\psi_{,ii}^f = -\omega^2(\tilde{\rho}_{11}\psi^s + \tilde{\rho}_{12}\psi^f) \quad (\text{A.3})$$

$$Q\psi_{,ii}^s + R\psi_{,ii}^f = -\omega^2(\tilde{\rho}_{22}\psi^f + \tilde{\rho}_{12}\psi^s) \quad (\text{A.4})$$

Fazendo as seguintes simplificações matriciais:

$$[\psi] = [\psi^s \quad \psi^f]^t \quad (\text{A.5})$$

A Equação (A.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[M]\nabla^2[\psi] = -\omega^2[\rho][\psi] \quad (\text{A.6})$$

onde $[M]$ e $[\rho]$ são as seguintes matrizes descritas a seguir:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & \tilde{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A Equação (A.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nabla^2[\psi] = -\omega^2[M]^{-1}[\rho][\psi] \quad (\text{A.9})$$

Tal equação é interpretada como um problema de autovetor e autovalor. Sendo k_1^2 e k_2^2 os autovalores e $[\psi_1]$ e $[\psi_2]$, os seus respectivos autovetores relacionados pelas seguintes equações:

$$-k_1^2[\psi_1] = \nabla^2[\psi_1] \quad (\text{A.10})$$

$$-k_2^2[\psi_2] = \nabla^2[\psi_2] \quad (\text{A.11})$$

Os autovalores k_1^2 e k_2^2 são números complexos quadrados e representam os números de onda compressivas que se propagam no material poroelástico, e são dados pelas seguintes expressões:

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)} \left[P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)} \left[P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta} \right] \quad (\text{A.13})$$

onde Δ é:

$$\Delta = (P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2) \quad (\text{A.14})$$

Os autovetores podem ser escritos como sendo:

$$[\psi_1] = \begin{bmatrix} \psi_1^s \\ \psi_1^f \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$[\psi_2] = \begin{bmatrix} \psi_2^s \\ \psi_2^f \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

A determinação dos autovetores $[\psi_i]$ é feita através da substituição dos resultados dos autovalores, Equação (A.12), nas equações descritas em Equação (A.10), obtendo-se a seguinte relação válida:

$$\frac{\psi_i^f}{\psi_i^s} = \mu_i = \frac{Pk_i^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{22} - Qk_i^2} \quad (\text{A.17})$$

onde a variação $i = 1, 2$ deve ser admitida.

A Equação (A.17) indica a razão entre as velocidades da fase fluida e da sólida. Quatro relações de impedâncias características podem ser definidas. Ambas as ondas se propagam simultaneamente nas fases fluida e sólida do material poroelástico.

A definição geral de impedância em um fluido é a razão entre as amplitudes de pressão e velocidade da onda fluida na direção i . Para um sólido a impedância mecânica é razão entre a tensão normal na direção i e a velocidade da onda elástica na mesma direção. Nas suas formas dinâmicas, as impedâncias Z^f e Z^s são dadas como sendo:

$$Z^f = \frac{p}{j\omega u_i^f} \quad (\text{A.18})$$

$$Z^s = \frac{\sigma_{ii}^s}{j\omega u_i^s} \quad (\text{A.19})$$

Para um material poroelástico, as equações descritas em Equação (A.18) resultam nas seguintes impedâncias, Equações (A.20) e (A.21), para a fase fluida e Equações (A.22) e (A.23), para a fase sólida, respectivamente.

sólida, respectivamente.

$$Z_1^f = (R + Q/\mu_1) \frac{k_1}{h\omega} \quad (\text{A.20})$$

$$Z_2^f = (R + Q/\mu_2) \frac{k_2}{h\omega} \quad (\text{A.21})$$

$$Z_1^s = (P + Q\mu_1) \frac{k_1}{\omega} \quad (\text{A.22})$$

$$Z_2^s = (P + Q\mu_2) \frac{k_2}{\omega} \quad (\text{A.23})$$

A caracterização da onda de cisalhamento como uma onda rotacional, pode ser obtida através do uso de operadores potenciais vetoriais, ϕ_i^s e ϕ_i^f . As equações de Biot em uma descrição temporal podem ser reescritas em sua forma dinâmica, como se segue:

$$-\omega^2(\tilde{\rho}_{11}\phi_i^s + \tilde{\rho}_{12}\phi_i^s) = N\nabla^2\phi_i^s \quad (\text{A.24})$$

$$-\omega^2(\tilde{\rho}_{12}\phi_i^s + \tilde{\rho}_{22}\phi_i^s) = 0 \quad (\text{A.25})$$

Através da combinação linear destas duas equações, pode-se escrever a equação da onda rotacional como sendo:

$$\nabla^2\phi_i + \frac{\omega^2}{N} \left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \phi_i = 0 \quad (\text{A.26})$$

O número de onda é dado como sendo:

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{N} \left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \quad (\text{A.27})$$

e a relação entre os as amplitudes dos deslocamentos da fases fluida e sólida é:

$$\frac{\phi_i^i}{\phi_i^s} = \mu_3 = -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (\text{A.28})$$

O comprimento de onda é um importante parâmetro em análises de elementos finitos, pois constitui-se como fator direto da discretização e convergência do problema, tal valor é dado para cada tipo de onda como sendo:

$$\lambda_i = \Re \left(\frac{2\pi}{k_i} \right), i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.29})$$

Para se ter uma noção física da influência da frequência no valor do comprimento de onda em um material poroelástico com comportamento regido pelo modelo de Biot-Allard, um exemplo com parâmetros descritos na Tabela (A.1) é avaliado:

Tabela A.1: Propriedades do material poroelástico

Material	α_∞	$\rho_1(kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$N(kPa)$	ν_b	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
Espuma A	7.8	30	25000	0.90	800(1+i0.25)	0.4	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$

A influência da frequência no valor do comprimento de onda em um material poroelástico com comportamento regido pelo modelo de Biot-Allard, (Dauchez et al., 2001) é apresentado na Figura (A.1). Nesta figura são mostrados os comprimentos de onda para ondas de tração e pressão planas e ondas de cisalhamento da fase sólida do material poroso.

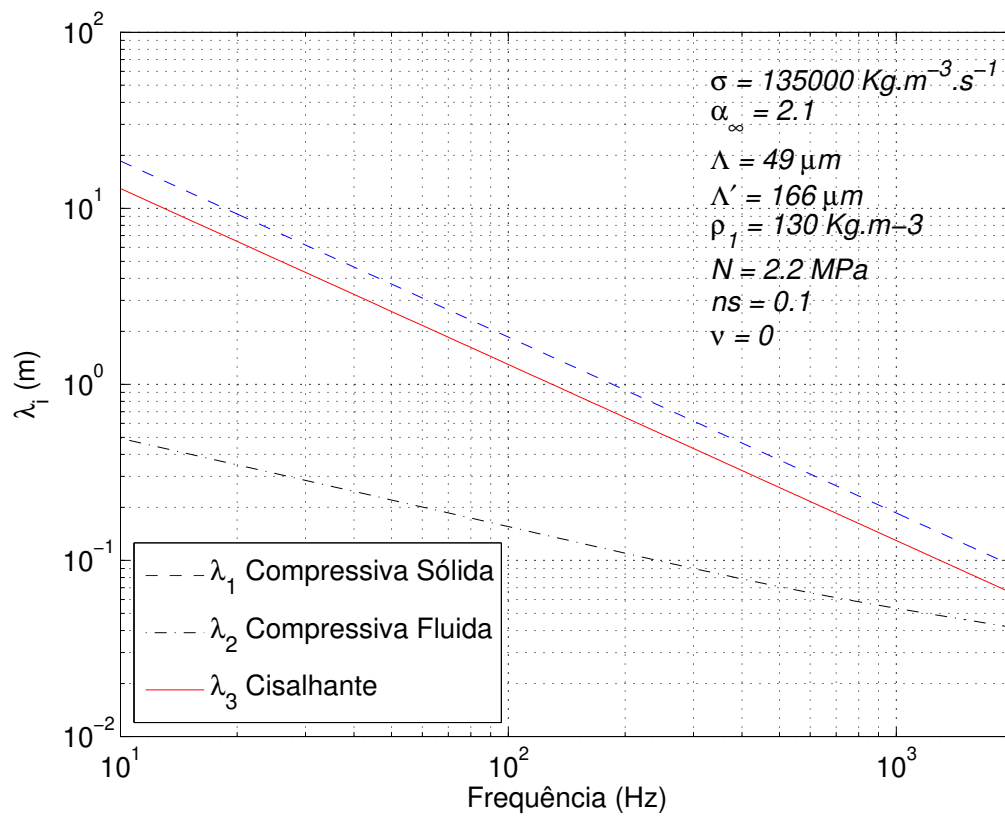


Figura A.1: Influência da frequência sobre o comprimento de onda

Anexo B

Formulação Micro-Macro da Poroelasticidade

Uma idealização da geometria de um poro é usada para se construir um modelo micro representativo. Tal parâmetro serve de base para modelos experimentais e simulações computacionais. A predição exata de propriedades como a densidade efetiva e o módulo de rigidez volumétrico do fluido saturado em espaços intergranulares de materiais porosos é praticamente impossível devido a complexidade e disposição da geometria dos poros em um material.

Para tanto, utilizam-se micro-modelos geométricos e físicos que levam em consideração o comportamento de um fluido saturado ao nível granular. No trabalho de (Johnson et al., 1987), os poros são tratados como cilindros dispostos em uma determinada orientação.

Para o modelo micro-macro de Biot-Allard, a dependência da tortuosidade com a frequência leva a um cálculo direto da densidade complexa efetiva. Uma expressão simplificada para a tortuosidade dinâmica é construída a partir de várias hipóteses, entre elas, a de que o fluido é considerado incompressível a nível microscópico (Champoux e Allard, 1991). Acrescido ao modelo de viscosidade, a variação de temperatura é um efeito que pode ser levado em consideração. Em fluidos como o ar, tal efeito se torna mais notável. Ao nível microscópico tal variação acarreta na dependência do módulo de rigidez volumétrico do fluido com a frequência, e tal relação deve ser conhecida a fim de se modelar corretamente a propagação do som através dos poros.

O objetivo deste item é discutir a modelagem de dois fenômenos básicos da teoria proposta por Allard (Allard, 1993), as quais se referem aos efeitos de viscosidade e térmicos

que aparecem devido à interação entre as fases sólida e fluida.

B.1 Modelo Hidrodinâmico de um poro cilíndrico flexível

Seja o elemento infinitesimal descrito na Figura (B.1), o qual consiste em um tubo cilíndrico de raio R , preenchido pelo fluido ar. O objetivo é avaliar os efeitos da presença do fluido que interage com a estrutura sólida através da propagação de ondas elásticas e acústicas. As variações de pressão, deslocamento e temperatura (variáveis de estado do problema visco-térmico-elástico) são lineares e consistem em pequenas flutuações sobre uma posição de equilíbrio.

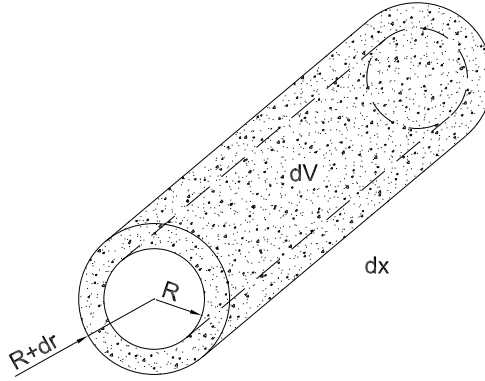


Figura B.1: Modelo volumétrico infinitesimal dV para um poro cilíndrico

onde R representa o raio interno do poro e considerando-se uma variação para r de $R < r < R + dr$.

Inicialmente, os problemas viscoso e térmico são analisados de forma isolada. Os seus efeitos, em uma primeira aproximação são considerados como independentes. Tais efeitos, posteriormente superpostos aos efeitos clássicos de amortecimento, são tratados no contexto da teoria e da fenomenologia dos mecanismos de dissipação viscosa e térmica dos materiais poroelásticos utilizados em acústica, já considerando a homogeneização das amostras.

O volume infinitesimal dV , considerando um referencial em coordenadas cilíndricas, é dado através da Equação (B.1).

$$dV = 2\pi r dr dx \quad (\text{B.1})$$

onde r é o vetor distância do centro do poro até um ponto qualquer do domínio poroso e x é o vetor posição no sentido longitudinal do tubo, portanto dr é a espessura da parede do cilindro e dx o seu comprimento.

A força resultante F_r sobre o elemento é considerada radial e proporcional a variação de pressão na direção x , (Zwicker e Kosten, 1949).

$$F_r = -\frac{\partial p}{\partial x} dx 2\pi r dr \quad (\text{B.2})$$

onde p é a pressão intersticial do interior do tubo em $[N/m^2]$ no Sistema Internacional (SI).

Na condição de equilíbrio, tem-se que as forças de dissipação viscosa e as forças de inércia são descritas nas Equações (B.3) e (B.4), respectivamente.

$$F_{vis} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-2\pi r \eta dx \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr \quad (\text{B.3})$$

onde η representa a viscosidade do fluido intersticial $[Pa \cdot s]$ e v é a velocidade da partícula fluida, cuja direção é a axial x $[m/s]$.

$$F_{iner} = j\omega\rho_0 2\pi r dr dx v \quad (\text{B.4})$$

onde ω é a frequência do sistema em rad/s e ρ_0 é a massa específica do fluido presente no interior do tubo em kg/m^3 , j é o número imaginário e v é a mesma velocidade da partícula introduzida na Equação (B.3)

Aplicando a segunda lei de Newton, uma expressão para o equilíbrio das forças é dado através da Equação (B.5) descrita a seguir.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = j\omega\rho_0 v - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (\text{B.5})$$

Tal equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) - \frac{j\omega\rho_0}{\eta} v \quad (\text{B.6})$$

ou ainda:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + k^2 v \right] \quad (\text{B.7})$$

onde:

$$k^2 = -\frac{j\omega\rho_0}{\eta} \quad (\text{B.8})$$

A solução da equação diferencial descrita em (B.7), para a variável ordinária v , utiliza-se da definição da Função de Bessel de ordem 0, J_0 , dada conforme descrição a seguir:

$$v = \frac{1}{\eta k^2} \frac{\partial p}{\partial x} + A \cdot J_0(kr) \quad (\text{B.9})$$

onde A é uma constante de integração e pode ser determinada com a utilização da condição de contorno, $v(r = R) = 0$, como se segue:

$$0 = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A \cdot J_0(kR) \quad (\text{B.10})$$

o que implica em:

$$A = \frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{J_0(kR)} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo o valor da constante A , Equação (B.11), chega-se a seguinte expressão para a velocidade da partícula v .

$$v = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \quad (\text{B.12})$$

Para a determinação da densidade modificada, os valores médios devem ser determinados. A velocidade média $\bar{v}$ sobre o volume infinitesimal é dada como sendo:

$$\bar{v} = \frac{\int v dA}{\int dA} \quad (\text{B.13})$$

Para se determinar a velocidade média $\bar{v}$, basta-se descobrir a média da função de Bessel de ordem 0 aplicada no produto kr .

$$\bar{J}_0(kr) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R J_0(kr) 2\pi r dr \quad (\text{B.14})$$

Para a solução desta integral, a propriedade da função de Bessel de ordem 1, J_1 , pode ser utilizada, conforme descrito na Equação (B.15).

$$\int_0^a x J_0(x) dx = x J_1(x) \Big|_0^a = a J_1(a) \quad (\text{B.15})$$

resultando em:

$$\bar{J}_0(kr) = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R J_0(kr) r dr \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{2}{R^2} \int_0^{kR} J_0(x) \frac{x}{k} \frac{dx}{k} \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{2}{kR} J_1(kR) \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, chega-se na seguinte expressão para a velocidade média, Equação (B.19):

$$\bar{v} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} \right) \quad (\text{B.19})$$

De uma forma geral, a equação da continuidade, aplicada no problema do fluido presente no tubo infinitesimal, pode ser expressa conforme a seguinte expressão:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (\text{B.20})$$

Para os problemas harmônicos, a aceleração média ou a primeira derivada temporal da velocidade média é dada através da Equação (B.21), descrita a seguir:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = j\omega \bar{v} \quad (\text{B.21})$$

A seguinte igualdade é utilizada para simplificação das expressões obtidas:

$$kR = \mu \sqrt{-j} \quad (\text{B.22})$$

e assim definindo-se a constante μ :

$$\mu = \left(\frac{\omega \rho_0}{\eta} \right)^{1/2} \quad (\text{B.23})$$

Como expressão final para a densidade modificada ρ do fluido, é obtida a seguinte expressão:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{2}{\mu \sqrt{-j}} \frac{J_1(\mu \sqrt{-j})}{J_0(\mu \sqrt{-j})} \right)} \quad (\text{B.24})$$

A Equação (B.24) consiste no modelo de densidade complexa e dinâmica do poro e é baseada no modelo de permeabilidade dinâmica no poro preenchido por um fluido viscoso. Esta equação será utilizada na construção do mecanismo de dissipação viscosa.

B.2 Modelo Térmico de um poro cilíndrico flexível

Para o problema térmico, as seguintes definições são pertinentes e apresentadas a seguir.

Seja um problema de pequenas flutuações sobre uma posição de equilíbrio de pressão p_0 , temperatura T_0 e densidade ρ_0 . Tais flutuações de pressão, temperatura e densidade são aqui representadas respectivamente, por δp , δT e $\delta \rho$.

Uma outra definição é a variável adimensional condensação s , definida pela variação de densidade pelo seu valor de equilíbrio, Equação (B.25):

$$s = \frac{\delta\rho}{\rho_0} \quad (\text{B.25})$$

De forma análoga para a variável de temperatura, a Equação (B.26), expressa o coeficiente térmico θ' :

$$\theta' = \frac{\delta T}{(\gamma - 1) T_0} \quad (\text{B.26})$$

onde a relação entre os calores específicos γ é dado por:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{B.27})$$

sendo c_p o calor específico do ar a pressão constante e c_v o calor específico do ar a volume constante.

Um número adimensional para a propriedade de condutividade térmica do fluido, o qual leva em consideração o fenômeno de condução térmica, é apresentado na Equação (B.28).

$$h = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p} \quad (\text{B.28})$$

onde κ é o coeficiente de condutibilidade térmica do ar.

A partir destas definições, pode-se escrever as relações de equilíbrio, conservação de massa e energia para o sistema fluido, já em condições linearizadas, (Eijk e Zwikker, 1941). Tais relações são descritas a seguir:

$$\nabla \cdot v = -\frac{\partial s}{\partial t} \quad (\text{B.29})$$

$$p = p_0 (s + (\gamma - 1) \theta') \quad (\text{B.30})$$

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + h \nabla^2 \theta' \quad (\text{B.32})$$

A relação entre a pressão p e condensação s , Equação (B.30), é originária da lei de Boyle-Gay-Lussac. Admitindo-se uma compressão adiabática, a seguinte relação entre as variáveis de estado pode ser utilizada, Equação (B.33):

$$\frac{T}{p^{\gamma-1}} = \text{constante} \quad (\text{B.33})$$

o que resulta em:

$$\frac{\delta T}{T_0} = (\gamma - 1) \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{B.34})$$

Mais uma vez admitindo-se variações harmônicas para a pressão e temperatura, as relações derivadas temporais, descritas na Equação (B.32) podem ser reescritas como sendo:

$$h \nabla^2 \theta' - j\omega \theta' + j\omega s = 0 \quad (\text{B.35})$$

Rearrmando os termos, a seguinte equação diferencial para o número relativo à temperatura θ' é determinada, Equação (B.36):

$$\begin{aligned} h \nabla^2 \theta' - j\omega \theta' + j\omega \left(\frac{p}{p_0} - (\gamma - 1) \theta' \right) &= 0 \\ h \nabla^2 \theta' - j\omega \theta' (1 + \gamma - 1) + j\omega \frac{p}{p_0} &= 0 \\ \nabla^2 \theta' - \frac{j\omega}{h} \gamma \theta' + \frac{j\omega}{h} \frac{p}{p_0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Como no caso anterior do problema hidrodinâmico, uma solução baseada nas funções de Bessel, é descrita na Equação (B.37) apresentada a seguir:

$$\theta' = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} + A J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega \gamma}{h}} \right) \quad (\text{B.37})$$

onde A é uma constante de integração e determinada através do uso da condição de contorno: $\theta'(r = R) = 0$, resultando no seguinte desenvolvimento, Equação (B.38):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} + A J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) \\
A &= -\frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \frac{1}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}
\end{aligned} \tag{B.38}$$

Substituindo o valor da constante A na relação de θ' , Equação (B.37), chega-se à seguinte expressão:

$$\theta' = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right) \tag{B.39}$$

Da relação de Boyle-Gay-Lussac, pode-se exprimir o valor da condensação s como sendo:

$$s = \frac{p}{p_0} - (\gamma - 1) \theta' \tag{B.40}$$

A Equação (B.40) representa a relação constitutiva para o fluido. Substituindo o valor de θ' , determinado na Equação (B.39), chega-se ao seguinte desenvolvimento, uma segunda expressão para a condensação s :

$$\begin{aligned}
s &= \frac{p}{p_0} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right) \\
&= \frac{p}{p_0} - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right) \\
&= \frac{p}{p_0} - \frac{p}{p_0} + \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} + (\gamma - 1) \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \left(\frac{J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right)
\end{aligned} \tag{B.41}$$

resultando em:

$$s = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right] \quad (\text{B.42})$$

A relação constitutiva do fluido reflete uma relação de rigidez entre as forças (resistências) internas do fluido, representadas aqui pelo campo de pressão, com a sua inércia. Tal coeficiente, denominado de K_f é o módulo de compressibilidade do fluido presente no material poroso e apresentado na Equação (B.43) na forma de sua definição geral:

$$K_f = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{p}{s} \quad (\text{B.43})$$

Como K_f é uma propriedade do fluido não variante do sistema, a relação entre as médias das variáveis de estado, também é válida, Equação (B.44):

$$\bar{p} = K_f \bar{s} \quad (\text{B.44})$$

Para se determinar a média da variável $\bar{s}$, deve-se achar a média do operador de Bessel J_0 , aplicado a uma função que se constitui das propriedades físicas e geométricas, Equação (B.45).

$$\bar{J}_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) 2\pi r dr \quad (\text{B.45})$$

Resultando no seguinte desenvolvimento matemático:

$$\begin{aligned} \bar{J}_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) &= \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R J_0 \left(r \sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) r dr \\ &= -\frac{2}{R^2} \int_0^{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}} J_0(x) \frac{x}{\frac{j\omega\gamma}{h}} dx \\ &= \frac{2}{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}} J_1 \left(R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Substituindo tal resultado na expressão da média da condensação, $\bar{s}$, chega-se ao seguinte resultado.

$$\bar{s} = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{p_0} \left[1 + \frac{2}{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}} (\gamma - 1) \frac{J_1 \left(R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)}{J_0 \left(R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} \right)} \right] \quad (\text{B.47})$$

Admitindo um processo onde a pressão não varie, ou seja $p = \text{constante}$, ou ainda $\bar{p} = p$, a seguinte relação, Equação (B.48), pode ser utilizada para se determinar o módulo de compressibilidade do fluido.

$$K_f = \frac{\bar{p}}{\bar{s}} \quad (\text{B.48})$$

o que resulta, com a combinação da Equação (B.47), em:

$$K_f = \frac{\gamma p_0}{\left[1 + \frac{2}{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}} (\gamma - 1) \frac{J_1}{J_0} \frac{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}}{R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}}} \right]} \quad (\text{B.49})$$

A seguinte relação entre as constantes físicas e geométricas é apresentada na Equação (B.50), descrita a seguir:

$$R\sqrt{-\frac{j\omega\gamma}{h}} = B\mu\sqrt{-j} \quad (\text{B.50})$$

Sendo o valor de μ aqui reescrito:

$$\mu = \left(\frac{\omega \rho_0}{\eta} \right)^{1/2} \quad (\text{B.51})$$

e a constante B , a qual representa o número de Prandt com a dependência das propriedades do fluido, dada por:

$$B = \left(\frac{\eta\gamma}{h\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\eta c_p^2}{\kappa c_v} \right)^{1/2} \quad (\text{B.52})$$

Substituindo a Equação (B.50), na expressão determinada para o módulo de compressibilidade do fluido, K_f , Equação (B.49), chega-se a uma relação final, Equação (B.53), que é definida por:

$$K_f = \frac{\gamma p_0}{\left[1 + \frac{2}{B\mu\sqrt{-j}} (\gamma - 1) \frac{J_1(B\mu\sqrt{-j})}{J_0(B\mu\sqrt{-j})} \right]} \quad (\text{B.53})$$

Esta última relação para K_f corresponde ao modelo de permeabilidade térmica dinâmica utilizada para escoamento potencial de fluidos com variação térmica em poros cilíndricos flexíveis. Tal relação será utilizada na construção do mecanismo de dissipação térmica.