



UNICAMP

BRUNO RANGEL DE SOUSA

ANÁLISE DE TESTE EM POÇOS INCLINADOS

CAMPINAS
2012



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

BRUNO RANGEL DE SOUSA

ANÁLISE DE TESTE EM POÇOS INCLINADOS

Orientadora: Profa. Dra. Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo na área de Reservatórios e Gestão.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Bruno Rangel de Sousa e orientada pela Profa. Dra. Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno.

Orientador

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So85a Sousa, Bruno Rangel de, 1985-
 Análise de Teste em Poços Inclinados / Bruno Rangel
 de Sousa. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.

 Orientador: Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno.
 Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e
Instituto de Geociências.

 1. Engenharia de petróleo. 2. Poços de petróleo. 3.
Teste. I. Moreno, Rosângela Barros Zanoni Lopes,
1966-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de
Geociências. III. Título.

Título em Inglês: Slanted Well Test Analysis

Palavras-chave em Inglês: Petroleum engineering, Petroleum well, Test

Área de concentração: Reservatórios e Gestão

Titulação: Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

Banca examinadora: Osvaldo Vidal Trevisan, Renato de Souza Carvalho

Data da defesa: 22-08-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

ANÁLISE DE TESTE EM POÇOS INCLINADOS

Autor: Bruno Rangel de Sousa

Orientador: Prof. Dra. Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Handwritten signature of Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno in blue ink.

Prof. Dra. Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno, Presidente
DEP/FEM/UNICAMP

Handwritten signature of Osvair Vidal Trevisan in blue ink.

Prof. Dr. Osvair Vidal Trevisan
DEP/FEM/UNICAMP

Handwritten signature of Renato de Souza Carvalho in blue ink.

Prof. Dr. Renato de Souza Carvalho
PETROBRAS

Campinas, 22 de Agosto de 2012

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Lécio de Sousa e Claudicea Rangel de Sousa, por todo amor, atenção e ensinamentos. Agradeço a dedicação, paciência e todo apoio que me deram, em todos os momentos da minha vida.

Ao meu irmão Marcel, pelo amor transferido nos momentos mais difíceis da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus.

À minha orientadora, Professora Doutora Rosângela Barros Zanoni Lopes Moreno, pela dedicação e confiança ao longo destes dois anos de mestrado.

Aos professores Doutores Osvaldo Vidal Trevisan, Denis José Schiozer, Sergio Nascimento Bordalo, Antônio Carlos Bannwart e Alexandre Campana Vidal, pelas aulas ministradas e por proporcionarem um ambiente acadêmico favorável ao aprendizado.

Agradeço ao Professor Doutor Erdal Ozkan, por me disponibilizar material extra para solução derivada no domínio de Laplace e pela orientação no desenvolvimento deste modelo.

Agradeço ao Professor Doutor Martin Tygel, pela participação na banca de qualificação desta dissertação.

Em especial, agradeço ao Professor Doutor Elton Jorge Bragança Ribeiro, pela amizade e indicação ao mestrado.

As novas amizades firmadas nestes dois anos de convívio no Departamento de Engenharia de Petróleo: Beth, Carpio, Celso, Danilo Silva, Danilo Magrinho, Eduardo Altoé, Goiano, Leandro Vieira, Rachid, Rafael Salla, Zampieri e todos os amigos “Peladeiros”.

Especial lembrança aos amigos da república Velho Coiote Parrudo: Brígido, Chopp, Dudu, Fran, Funny, Marcel, Marcelão, Pega-Leve, Rafa Potter, Rafinha, Rauli, Rayane, Renatão, Tais e 91.

Ao CNPq pelo suporte financeiro que possibilitou a conclusão desta etapa da minha vida.

Aos demais amigos e colaboradores do DEP, agradeço pela paciência e apoio: Alexandre, Alice, Délcio, Fátima, Gisele, Léo, Michelle, Regina, Sônia.

*“All man’s troubles come from not knowing
how to sit still in one room”.*

Blaise Pascal (1623 – 1662)

RESUMO

SOUSA, Bruno Rangel, Análise de Teste em Poços Inclinados. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2012. 124 p. Dissertação de Mestrado.

Apresenta-se nesta dissertação um estudo sobre o comportamento transitório da pressão em poços inclinados submetidos a teste de poço. A partir de referências disponíveis na literatura, são apresentadas soluções analíticas e semi-analíticas, onde é adotado o modelo de escoamento uniforme como condição de contorno no poço. Neste estudo é considerado um reservatório de extensão radial infinita com limites verticais impermeáveis. A partir da solução analítica são apresentadas curvas típicas para diferentes ângulos de inclinação do poço e espessura adimensional da formação. As análises das curvas típicas indicam três regimes de escoamento: radial inicial, radial de transição e radial infinito, onde, no melhor conhecimento deste autor, o regime de escoamento radial de transição é introduzido nesta dissertação. A partir da solução semi-analítica, derivada no domínio de Laplace, são desenvolvidas assíntotas para tempo-curto e tempo-longo. Esta dissertação ainda apresenta um procedimento alternativo para interpretar os dados transitórios da pressão em poços inclinados. O desenvolvimento deste procedimento foi baseado na técnica TDS (*Tiab's Direct Synthesis*), onde é possível interpretar os dados de pressão através de uma análise direta da curva de derivada. As soluções aqui apresentadas fornecem uma alternativa acessível à completa modelagem numérica - utilizada em pacotes comerciais para interpretação de teste de pressão.

Palavras-Chave

Engenharia de Petróleo, Poços de Petróleo, Teste.

ABSTRACT

SOUSA, Bruno Rangel, Slanted Well Test Analysis. Campinas, Mechanical Engineering College, State University of Campinas, 2012. 124 p. Master Degree.

A study on the transient pressure behavior it is presented in this dissertation for slanted well test analysis. From references available in the literature, analytical and semi-analytical solutions are presented for the uniform flow boundary condition at the well. In this study is considered an infinite radial extent reservoir limited with vertical impermeable boundaries. Type curves are presented for different slant angles of the well and dimensionless formation thickness. From the analysis of type curves are observed three flow regimes: early time radial flow, transition radial flow and late time infinite-acting radial flow. For the best knowledge of the author, the transition radial flow regime is introduced in this dissertation for the first time. From the semi-analytical solution, derived in the Laplace domain, asymptotic solutions are developed for early-time and late-time. It is also presented an alternative procedure for interpreting pressure transient data in slanted wells. The development of this procedure was based on the TDS (Tiab's Direct Synthesis) technique, by where it is possible to interpret the pressure data through a direct analysis of the derived curve. The solutions presented here provide a feasible alternative to full numerical modeling - used in commercial packages for the interpretation of pressure tests.

Key Words

Petroleum Engineering, Petroleum Well, Test.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xxi
LISTA DE TABELAS.....	xxv
NOMENCLATURA.....	xxvii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3. TEORIA DA FUNÇÃO FONTE	12
3.1 Equação da Difusão e Função Fonte.....	12
3.2 Escoamento Transitório por Funções de Green.....	16
3.3 Princípio da Superposição e Método do Produto de Newman.....	19
4. SOLUÇÃO DA FONTE PONTUAL.....	21
4.1 Solução no Domínio do Tempo.....	21
4.2 Solução no Domínio de Laplace.....	26
5. MODELOS MATEMÁTICOS.....	30
5.1 Reservatório com Ambas as Camadas Impermeáveis – Domínio do Tempo	30
5.2 Reservatório com Ambas as Camadas Impermeáveis – Domínio de Laplace	44
6. APLICAÇÃO E RESULTADOS	54
6.1 Solução no Domínio do Tempo.....	54
6.2 Solução no Domínio de Laplace.....	73
6.3 Efeito de Estocagem e de Película.....	80
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	84
7.1 Conclusões	84
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	85
REFERENCIAS.....	86

APÊNDICE A – Comentários às Publicações SPE 5131 e SPE 66206	92
APÊNDICE B – Expressões Alternativas para Solução no Domínio de Laplace.	95
APÊNDICE C – Aproximações Assintóticas para Solução no Domínio de Laplace ($0^\circ < \psi' < 90^\circ$).....	109
onde	111
ANEXO I – Código para Geração das Curvas Típicas.....	120
ANEXO II – Código para Geração das Assíntotas para Tempo-Curto.....	122
ANEXO II – Código para Geração das Assíntotas para Tempo-Longo	123

LISTA DE FIGURAS

Figura (1.1): Ilustrativo de um poço inclinado frente à formação.	2
Figura (2.1): Esquemático do modelo para poço inclinado.	11
Figura (3.1): Notação para o domínio do reservatório.	13
Figura (4.1): Sistema de coordenadas esféricas.	22
Figura (5.1): Fonte linear inclinada, h_w , num meio poroso infinito em coordenadas cilíndricas. ...	31
Figura (5.2): Imagem da fonte linear inclinada para geração da camada impermeável em $z = 0$	34
Figura (5.3): Superposição da fonte linear inclinada para geração dos limites impermeáveis.	37
Figura (5.5): Variáveis complementares à Figura (5.1) para solução no domínio de Laplace.	47
Figura (6.1): Semi-log de p_D vs. t_D para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$	55
Figura (6.2): Semi-log de p_D vs. t_D para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 200$	56
Figura (6.3): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$	57
Figura (6.4): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 200$	57
Figura (6.5): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 500$	59
Figura (6.6): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 1000$	60
Figura (6.7): Ilustração das linhas de corrente do reservatório para um poço inclinado.	61
Figura (6.8): Regimes de escoamento em um poço inclinado num reservatório infinito com espessura adimensional $h_D = 1000$	64

Figura (6.9): Curvas típicas para poço com ângulo de inclinação $\psi = 60^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .	67
Figura (6.10): Curvas típicas para poço com inclinação $\psi = 0^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .	69
Figura (6.11): Curvas típicas para poço com inclinação $\psi = 30^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .	70
Figura (6.12): Gráfico diagnóstico dos dados sintético gerados.	71
Figura (6.13): Gráfico semi-log para o intervalo do regime de ERT.	73
Figura (6.14): Comportamento da assíntota para tempo-curto para diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.	75
Figura (6.15): Comportamento da assíntota para tempo-curto para diferentes valores de espessura adimensional, h_D , num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$.	76
Figura (6.16): Comportamento da assíntota para tempo-curto em poços de CP, $h_{wD} < h_D \cos\psi$, com inclinação $\psi = 60^\circ$ e espessura adimensional $h_D = 1000$.	77
Figura (6.17): Comportamento da assíntota para tempo-curto em poços de CT, $h_{wD} = h_D \cos\psi$, e de CP, $h_{wD} < h_D \cos\psi$, para ângulos de inclinação $\psi = 60^\circ$ e $\psi = 89^\circ$, e espessura adimensional $h_D = 1000$.	78
Figura (6.18): Comportamento da assíntota para tempo-longo para diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.	79
Figura (6.19): Validação das assíntotas para tempo-curto e tempo-longo junto à solução derivada no domínio do tempo, para ângulos de inclinação $\psi = 60^\circ$ e espessura adimensional $h_D = 100$.	80
Figura (6.20): Efeito de estocagem num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$, espessura adimensional $h_D = 1000$ e sem efeito de película.	82
Figura (6.21): Efeito de estocagem num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$, espessura adimensional $h_D = 1000$ e sem efeito de película.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela (5.1): Variáveis adimensionais.	39
Tabela (6.1): Parâmetros do reservatório/poço para o exemplo gerado.....	71
Tabela (B.1): Expressões alternativas para computação da solução no domínio de Laplace.....	108

NOMENCLATURA

- a definido pela Eq.(B.14).
- a_n definido pela Eq.(B.31).
- c definido pela Eq.(B.16).
- c_m compressibilidade do meio poroso, [Pa⁻¹].
- c_f compressibilidade do fluido, [Pa⁻¹].
- c_t compressibilidade total, $c_t = c_m + c$, [Pa⁻¹].
- C fator de estocagem, definido pela Eq. (6.7), [m³. Pa⁻¹].
- C_D constante de estocagem adimensional.
- \bar{C} definido pela Eq.(B.5).
- e definido pela Eq.(B.15).
- $f(s)$ função no domínio de Laplace para reservatório naturalmente fraturado.
- G função de Green associado ao problema de reservatório infinito.
- h espessura da formação, [m].
- h_w comprimento do intervalo aberto à produção (poço), [m].
- $I(a, b, \pm)$ definido pela Eq.(B.3).
- K_0 função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero.
- l comprimento característico, [m].
- \tilde{m} intensidade da fonte, Eq.(2.11), [Pa⁻¹. s⁻¹].
- M posição arbitrária do ponto de observação no meio poroso.
- p pressão, [Pa].
- p_i pressão inicial do reservatório, [Pa].
- Δp queda de pressão a partir de p_i , $\Delta p = p_i - p(r,t)$, [Pa].
- P posição arbitrária da fonte no poço.

\tilde{q}	vazão unitária, definido pela Eq. (3.8), [s^{-1}].
r	distância radial, [m].
r_s	raio da esfera, [m].
r_w	raio do poço, [m].
r_D^2	definido pela Eq.(5.44).
r_D'	definido pela Eq.(5.45).
r_D^*	definido pela Eq.(5.48).
R_D	definido pela Eq.(5.43).
R_{x,y_D}^2	definido pela Eq.(5.32).
s	variável do domínio de Laplace.
S	função fonte.
\tilde{S}	fator de película, [adimensional].
t	tempo, [s^{-1}].
T	temperatura, [$^{\circ}C$].
u	definido pela Eq.(5.31).
u_n	definido pela Eq.(5.39).
V_p	volume poroso, [m^3].
V_f	volume do fluido, [m^3].
$W(b, u)$	definido pela Eq.(B.4).
x	distância na direção x, [m].
y	distância na direção y, [m].
z	distância na direção z, [m].
z_w	posição do centro do poço na direção z, Fig.(4.2), [m].
z_{D1}	definido pela Eq.(5.33).

- z_{D2} definido pela Eq.(5.34).
- z_D^* definido pela Eq.(5.50).
- \ddot{z}_{D1} definido pela Eq.(B.35).
- \ddot{z}_{D2} definido pela Eq.(B.36).

Letras Gregas

- \emptyset porosidade, [fração].
- ρ massa específica do fluido, [kg.m^{-3}].
- μ viscosidade, [Pa.s].
- η coeficiente de difusividade, Eq. (2.10), [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$].
- η_l coeficiente de difusividade na direção l , sendo $l = x, y, z$ ou r , [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$].
- γ número de Euler (0.5772...).
- φ variável adicional à solução no domínio de Laplace, Fig.(5.5).
- ψ ângulo de inclinação do poço, [Graus].
- ψ' ângulo de inclinação adaptado à anisotropia, [Graus].
- θ coordenada polar positiva a partir do eixo x , [Graus] ou [radianos].
- θ^* definido pela Eq.(5.49).
- v_D variável adicional à solução no domínio de Laplace, Fig.(5.5).
- v'_D variável adicional à solução no domínio de Laplace, Fig.(5.5).

Subscrito e Sobrescrito

- D adimensional.
- w condição de poço.
- indicador da transformada de Laplace.

p ponto qualquer ao longo da fonte.

m ponto qualquer no meio poroso.

Função Integral Exponencial:

$$-\text{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, inúmeros modelos matemáticos para análise de teste de pressão em poços verticais e horizontais vêm sendo amplamente utilizados na indústria petrolífera, servindo como uma importante ferramenta na fase de exploração e desenvolvimento dos campos de petróleo. Tais modelos têm sido desenvolvidos com o propósito de interpretar dados transitórios de pressão, a fim de estimar valores de permeabilidade, porosidade e pressão média da formação, assim como avaliar condições de poço e geometria do reservatório. Estes modelos geralmente são baseados em soluções de problemas que consideram o escoamento de fluidos através de um poço com abertura igual à espessura da formação (completação total), sendo este poço perfurado perpendicularmente às camadas paralelas (planos) inferior e superior desta formação; o que nem sempre é o caso.

Na prática, a maioria dos poços não penetra a formação perpendicularmente. Ao invés disso, há um ângulo de inclinação entre a normal à camada da formação e o eixo do poço. Com o aumento da complexidade das atividades de exploração em diversos campos *onshore*¹ e *offshore*², tornou-se comum a perfuração de poços inclinados (Figura 1.1), também chamados direcionais. Esta técnica, muito utilizada em ambientes *offshore*, permite que de uma mesma plataforma se perfurem diversos poços. Em terra, em geral, tem-se por objetivo vencer obstáculos naturais que dificultam o posicionamento da sonda, como pântanos, rios ou lagos, por exemplo. Em virtude dos avanços nas técnicas de perfuração aplicadas a poços direcionais - junto ao melhor conhecimento da geologia das formações através, entre outras ferramentas, da sísmica 3D – hoje muitos dos poços exploratórios perfurados são inclinados. Esta tendência justifica-se pelos maiores índices de produtividade obtidos quando comparados aos tradicionais verticais.

Nota-se, contudo, que estudos sobre o efeito da inclinação destes poços nos dados transitórios de um teste de pressão não vem acompanhando tais avanços. Embora comuns, existe um número limitado de publicações sobre análise de teste de poços neste tipo de completção. Ainda, como prática comum, engenheiros que lidam com interpretação de testes de poço têm o costume de aproximar os dados adquiridos através de um poço inclinado para modelos verticais e/ou horizontais, a depender do ângulo de inclinação. Esta prática pode levar a resultados

¹ Termo em inglês referente às atividades de exploração e produção em terra.

² Termo em inglês referente às atividades de exploração e produção no mar.

errôneos, principalmente quando a magnitude da inclinação do poço é significativa.

As limitações de alguns modelos analíticos em lidar com poços de geometrias complexas (por exemplo, inclinados e multilaterais) têm exigido estudos cada vez mais elaborados para estes tipos de completção. Estes poços trazem um novo desafio para a área de análise de teste de poço: aplicar modelos matemáticos que tornem expedita a interpretação do transitório de pressão. Este desafio reflete a motivação para esta dissertação, onde uma investigação da resposta do transitório de pressão em poços inclinados deve contribuir para a extensão do conhecimento e aplicações práticas na análise de teste de poços. Em tempo, verifica-se que atualmente os *softwares* comerciais carecem de procedimento analítico para a interpretação dos dados provenientes destes poços. Assim como o desenvolvimento de modelos matemáticos, neste caso, é de grande importância, sua inclusão em pacotes comerciais também o é.

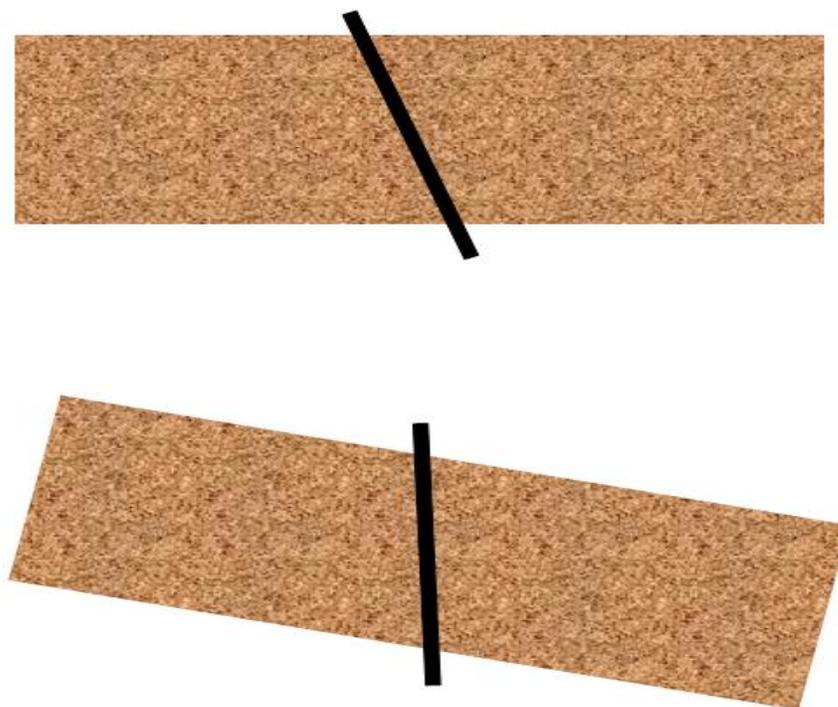


Figura (1.1): Ilustrativo de um poço inclinado frente à formação.

Assim, este trabalho tem como objetivo dissertar sobre o comportamento transitório da pressão em um reservatório submetido a um teste de poço inclinado.

Neste Capítulo 1 é feita a introdução ao trabalho, assim como a descrição do conteúdo geral do mesmo.

A seguir, o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica a respeito do comportamento transitório da pressão em poços inclinados, em paralelo à fundamentação teórica pertinente ao desenvolvimento das soluções a serem apresentadas. São ainda comentadas as hipóteses simplificadoras adotadas no equacionamento matemático do problema.

No Capítulo 3 é apresentada a teoria da função fonte, junto à equação da difusão. Ainda é apresentada uma síntese sobre a formulação da função instantânea de Green aplicada ao problema de escoamento transitório. O item seguinte descreve um sumário sobre o princípio da superposição e o método da imagem. Os conceitos apresentados neste capítulo são de grande valia para o entendimento dos modelos físicos e matemáticos empregados nesta dissertação.

No Capítulo 4 é deduzida a solução da fonte pontual. Duas soluções são apresentadas, uma no domínio do tempo e outra no domínio de Laplace. Ambas as soluções servirão como base para o desenvolvimento das soluções a serem apresentadas neste trabalho.

O Capítulo 5 apresenta o desenvolvimento dos dois modelos matemáticos aplicados a esta dissertação. Os modelos apresentados são para reservatórios com limites verticais impermeáveis, sendo o primeiro derivado no domínio do tempo (Cinco-Ley, et. al., 1975), enquanto o segundo derivado no domínio de Laplace (Ozkan e Raghavan, 2000). Ambos os modelos derivados neste capítulo consideram a hipótese de escoamento uniforme: produção por unidade de comprimento (poço) constante.

O Capítulo 6 é dedicado à apresentação dos resultados da investigação feita sobre os modelos matemáticos apresentados nas seções anteriores. Para tal foi utilizado o software *Walfram Mathematica*[®] versão 8. Neste capítulo, a análise do comportamento transitório da pressão em poços inclinados é feita através da geração de curvas típicas, associadas a diferentes parâmetros do sistema reservatório-poço. São ainda apresentadas soluções analíticas para cada regime de escoamento identificado, assim como o procedimento de interpretação para cada uma destas soluções.

O Capítulo 7 traz um sumário das principais conclusões desta dissertação. São também apresentadas algumas sugestões para eventuais estudos relacionados ao tema deste trabalho.

Seguem ainda três Apêndices e um Anexo. O Apêndice A apresenta comentários a respeito de algumas referências utilizadas, com objetivo de servir como base para eventuais trabalhos nesta linha de pesquisa. O Apêndice B descreve o desenvolvimento matemático envolvido na formulação das equações publicadas por Ozkan e Raghavan (2000), derivadas no domínio de Laplace. Em sequência, o Apêndice C apresenta o desenvolvimento matemático das assíntotas de aproximação para tempo-curto e tempo-longo. O desenvolvimento dos apêndices B e C contou a valiosa colaboração do Professor Dr. Erdal Ozkan, professor do Departamento de Engenharia de Petróleo da Colorado School Of Mines. Os Anexos I, II e III apresentam as rotinas aplicadas na computação das soluções através do software *Wolfram Mathematica*[®], versão 8.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O escoamento de fluido num reservatório de petróleo pode ser matematicamente descrito a partir de um conjunto de equações diferenciais e condições iniciais e de contorno. Para o desenvolvimento de soluções associadas a um modelo, em geral, são necessárias simplificações, pois se torna muito complicado descrever exatamente todas as variáveis de um reservatório. As considerações necessárias no desenvolvimento analítico de um modelo são muito restritivas - diversas soluções analíticas são restritas a reservatórios homogêneos e isotrópicos, por exemplo.

A equação da difusão que descreve o escoamento de fluido em meio poroso sob uma condição inicial e condições de contorno específicas pode ser resolvida por diferentes métodos. Dentre eles: transformada de Laplace (Van Everdigen e Hurst, 1949) transformada de Fourier (Andre e Bennion, 1970), ou funções de Green (Gringarten e Ramey, 1973).

Embora a utilização de funções de Green na solução de problemas de escoamento transitório em meios porosos não seja uma novidade, até o início da década de 70, a dificuldade em encontrar a função apropriada para cada caso proposto limitava sua aplicação. Mas em 1973, Gringarten e Ramey tabularam inúmeras funções-fonte instantâneas unidimensionais, viabilizando a obtenção de fontes de dimensão superior pela interseção destas fontes (ditas básicas). Assim sendo, os autores utilizaram as funções de Green para resolver a equação da difusão para escoamento transitório de um fluido levemente compressível e homogêneo em meio poroso anisotrópico. Após desenvolverem, a partir de uma fonte instantânea, a solução da queda de pressão para um reservatório unidimensional infinito, os autores investigaram a possibilidade de desenvolver uma solução geral para uma fonte contínua a partir da integração no tempo de uma fonte instantânea. Eles desenvolveram soluções para um reservatório finito com condições de contorno de vazão ou pressão constante, utilizando o método de imagem. Também foi demonstrada a aplicabilidade do método do produto de Newman, onde a solução para um reservatório tridimensional pode ser obtida a partir do produto das soluções unidimensionais do mesmo sistema. A partir desta abordagem foi possível gerar uma série de soluções para diferentes condições de contorno e diferentes geometrias de fontes. A integral de uma função de Green instantânea ao redor de uma região com uma condição de contorno específica é chamada de *função fonte*. Os autores derivaram diversas funções fonte, como: fonte plana infinita, fonte de camada infinita, fonte linear infinita, fonte com superfície cilíndrica infinita, fonte pontual, entre

outras. A partir destas funções fonte, e aplicando o método de Newman, foi possível encontrar mais soluções da equação da difusão para diferentes condições de contorno interna e externa.

Diferentes funções fonte representam diferentes características de fonte (“poço”) e/ou diferentes condições de contorno. Sabendo a função fonte de um poço específico, um modelo apropriado pode ser escolhido para analisar os dados de pressão, obtendo-se assim resultados fideis sobre a formação analisada.

A maioria das soluções que buscam representar o transitório da pressão de diferentes geometrias de poços enquadra-se em duas categorias. Na primeira, considera-se que a vazão total de produção se distribui de maneira uniforme ao longo do comprimento do poço e, portanto, a distribuição de pressão não é uniforme. Na segunda categoria estão englobadas as soluções de condutividade infinita, cuja hipótese é a de que não existe resistência ao escoamento dentro do poço. Conseqüentemente, neste caso, ao invés da vazão, a pressão se distribui uniformemente ao longo do poço. Os assuntos a respeito de escoamento uniforme e condutividade infinita foram primeiramente introduzidos por Gringarten et. al. (1973 e 1974), no desenvolvimento de soluções analíticas para estudo do comportamento da pressão em poços fraturados.

Verifica-se na literatura que a condição de contorno de escoamento uniforme é a mais utilizada, devido à facilidade do tratamento matemático deste modelo. Em tempo, a solução da pressão para condutividade infinita normalmente é aproximada pela pressão média obtida ao longo do comprimento do poço com escoamento uniforme, em contraste ao trabalho de Gringarten et. al. (1974) para fraturas verticais, que utiliza o método do ponto equivalente. Este ponto corresponde à distância ao longo do comprimento do poço na qual as respostas de pressão são idênticas tanto para a condição de contorno de escoamento uniforme quanto para a de condutividade infinita.

A solução da fonte linear há muito tempo tem sido utilizada para resolver inúmeros problemas na engenharia de petróleo. Este modelo pode ser obtido a partir das soluções da fonte pontual; como aquelas geradas para problemas de condução de calor (Carslaw e Jaeger, 1959). Para tal, a solução da fonte linear de um problema tridimensional é obtida pela multiplicação de três soluções da fonte pontual unidimensional, eventualmente integrando-a ao longo da fonte (poço) e no tempo (Cinco et. al., (1975); Economides et. al., (1996); Ozkan e Raghavan (2000)).

Uma forma alternativa de expressar a solução da fonte pontual foi introduzida por Ozkan (1988). O autor desenvolveu a solução no domínio de Laplace, com o propósito de remover as limitações do modelo de Gringarten e Ramey (1973) em considerar a estocagem e o efeito de película. Utilizando esta nova abordagem foi também possível obter a solução para um meio poroso com dupla-porosidade. A função fonte apresentada possibilitou obter soluções para diversos cenários em estudo de poços e/ou fraturas.

As funções-fonte e de Green podem ser utilizadas para resolver diversos problemas de escoamento transitório em duas e três dimensões, para diferentes geometrias de poço, tais como: completação parcial em poço verticais e/ou inclinados, poços submetidos à fraturamento hidráulico e poços horizontais. Antes de utilizar este tipo de solução para o problema a ser estudado, alguns conceitos serão apresentados: uma fonte pode ser um (a) ponto, linha, superfície ou volume, através do qual o fluido é produzido do reservatório. Em referência às bibliografias consultadas, esta dissertação utilizará o termo fonte para descrever a produção de fluidos.

Neste trabalho, as funções fonte e de Green estão diretamente relacionadas. A função de Green é definida para uma equação diferencial com condições de contorno específicas (em função de pressão ou vazão) e corresponde a uma solução da fonte pontual instantânea. A função-fonte, por outro lado, é a solução de uma dada equação diferencial com condições de contorno e geometria de fonte específica. Detalhes sobre a teoria e aplicação das funções fonte e de Green na solução de problemas de escoamento transitório em meios porosos podem facilmente ser encontrados na literatura (Carslaw e Jaeger, 1959; Gringarten e Ramey, 1973; Ozkan e Raghavan, 1991a, 1991b, 1991c; Raghavan, 1993; Barreto et. al., 1997).

O primeiro estudo sobre o efeito da inclinação de um poço foi realizado por Roemershauser e Hawkins (1955), em que foi estudado o regime de escoamento permanente num reservatório produzindo através de um poço inclinado. Eles consideraram um reservatório de extensão infinita e concluíram que a inclinação de um poço gera um aumento na produtividade do mesmo, em relação a um poço vertical. Este aumento na produtividade do poço é resultado da diminuição na resistência ao escoamento ao redor do poço, causado por um aumento da área do intervalo de produção aberta ao escoamento. Este aumento na produtividade indica que um poço inclinado cria um efeito de película negativo (estímulo). Os autores ainda apresentaram um gráfico do aumento da produtividade do poço vs. ângulo de inclinação do poço.

Cinco-Ley et. al. (1975) aparentemente foram os primeiros a investigar a distribuição do transitório de pressão gerado por um poço inclinado. Eles derivaram uma solução analítica utilizando, inicialmente, a solução da fonte pontual e assumindo que o fluido produzido ao longo do poço fosse uniformemente distribuído (hipótese do modelo de escoamento uniforme). Esta consideração leva ao comportamento não uniforme da pressão no poço. A fim de se obter uma solução para um poço de condutividade infinita ou pressão uniforme, frente ao canhoneio, a pressão foi computada num ponto específico na face do poço. Assim sendo, eles assumiram que o escoamento fosse localizado num ponto equivalente a uma elevação $z_D = 0.2h_D$ ou $z_D = 0.8h_D$. Os autores estudaram o regime de escoamento transitório de um fluido levemente compressível através de um poço inclinado num meio poroso isotrópico, homogêneo e infinito. A solução proposta se aplica a poços com ângulo de inclinação entre $0^\circ \leq \psi \leq 75^\circ$. Foi mostrado pelos autores que o escoamento transitório através de uma fonte linear inclinada apresenta dois regimes de escoamento: um regime de escoamento radial no tempo-curto e um regime de escoamento pseudoradial no tempo-longo. Eles também concluíram que a inclinação do poço cria um efeito de dano negativo, sendo este função do ângulo de inclinação e proporcional ao logaritmo da espessura da formação.

Cinco-Ley et. al. (1975b) modificaram a solução para poço inclinado apresentada anteriormente, a fim de investigar o efeito de *pseudodano* gerado pela completação parcial. Foi mostrado pelos autores que a inclinação do poço cria um *pseudodano* negativo (estímulo), sendo função da posição do intervalo de produção frente à formação e da espessura do reservatório.

Besson (1990) apresentou um método para estimativa da produtividade de poços horizontais e inclinados, em função de seu ângulo de inclinação e anisotropia. Foi mostrado que poços inclinados são menos afetados pela anisotropia do que os horizontais. Logo, poços com grandes ângulos de inclinação, em reservatórios de baixa permeabilidade vertical, podem ser mais vantajosos do que os horizontais de mesmo comprimento.

Khatta et. al. (1991) foram os primeiros a investigar a resposta do transitório de pressão em poços inclinados em reservatórios de múltiplas camadas (com e sem escoamento cruzado). Os autores ainda apresentaram resultados para o efeito de estocagem, completação parcial e heterogeneidades da formação.

Rogers e Economides (1996) apresentaram uma solução e resultados para o efeito de película em poços inclinados em reservatórios anisotrópicos. Foram apresentados gráficos e correlações do efeito de película em função do ângulo de inclinação, espessura da formação e razão de anisotropia.

Larsen (1999) apresentou um modelo numérico para determinar dados transitórios de pressão e de produtividade de poços inclinados em reservatórios com múltiplas camadas (com escoamento cruzado). O método computacional proposto, derivado no domínio de Laplace, pode ser aplicado na geração de curvas típicas para eventual análise direta dos registros de pressão, assim como na determinação do efeito de película para o cálculo da produtividade destes poços.

Ozkan e Raghavan (2000) desenvolveram um algoritmo para avaliar as respostas do transitório de pressão em poços inclinados. A solução é derivada no domínio de Laplace e, de acordo com os autores, a rotina apresentada pode ser aplicada a qualquer inclinação entre a vertical e a horizontal ($0^\circ < \psi < 90^\circ$). O algoritmo permite computar a variação de pressão no poço, assim como em qualquer ponto de observação. A grande contribuição foi eliminar duas restrições encontradas na solução apresentada por Cinco et. al. (1975): computar a queda de pressão em poços com grandes ângulos de inclinação ($> 75^\circ$) e em poços com completação parcial. Os autores ainda apresentaram aproximações assintóticas para tempo-curto e tempo-longo. A assíntota para tempo-longo é utilizada na obtenção de uma expressão geral para o pseudodano – também aplicado a qualquer ângulo de inclinação.

Sousa e Moreno (2011a) realizaram uma investigação sobre o comportamento transitório da pressão em poços inclinados e seu desempenho para diferentes ângulos de inclinação. Foi apresentada a comparação entre duas soluções disponíveis na literatura, uma derivada no domínio do tempo e outra derivada no domínio de Laplace. Embora seja evidente o bom ajuste entre os modelos, foi constatado um comportamento incomum para o modelo derivado no domínio de Laplace para pequenos ângulos de inclinação ($\psi < 30^\circ$). Contudo, o trabalho não foi conclusivo sobre a discordância peculiar do comportamento desta curva no gráfico diagnóstico³.

A TDS (*Tiab's Direct Synthesis*) é uma técnica utilizada para interpretar parâmetros do reservatório diretamente a partir das curvas de derivada da pressão. Esta técnica foi introduzida

³ O termo 'gráfico diagnóstico' faz referência ao modelo de gráfico *log-log* gerado para as curvas típicas. Também conhecido como gráfico de Bourdet (Bourdet et. al. 1983).

por Tiab (1993) e aplicada na análise de teste em reservatórios fraturados. Posteriormente, foi aplicada à análise de teste em reservatórios com fraturas hidráulicas (Tiab, 2005), fraturas inclinadas (Anh e Tiab, 2009), fraturas de inclinação assimétrica (Azeb et. al., 2010) e a reservatórios com múltiplas fraturas inclinadas (Rbeawi e Tiab, 2012). Contudo, não há indícios na literatura sobre a aplicação de tal técnica na interpretação de dados de pressão obtidos a partir de poços inclinados. Com isso, nesta dissertação também é apresentado um procedimento de análise, baseado na TDS, para cada regime de escoamento observado nas curvas típicas.

Esta dissertação tem o objetivo de apresentar um estudo sobre soluções analíticas e semi-analíticas para o comportamento transitório de pressão em poços inclinados, submetidos a um teste de pressão, e seu desempenho para diferentes ângulos de inclinação. Diversas situações como a de reservatórios com pequenas espessuras ou com alto valor de permeabilidade vertical também podem tornar os poços inclinados atrativos. Nesta dissertação será considerado um reservatório de grande extensão radial - o suficiente para não influenciar o transitório da pressão durante o intervalo de tempo de interesse – limitado verticalmente por camadas paralelas, inferior e superior ($z = 0$ e $z = h$, respectivamente), impermeáveis. Para tal serão apresentadas duas soluções distintas: uma derivada no domínio do tempo e outra no domínio de Laplace.

Em tempo, serão assumidas as seguintes premissas para solução do problema estudado:

- Fluido de compressibilidade pequena e constante,
- Viscosidade do fluido constantes e independentes da pressão,
- Escoamento isotérmico em meio poroso de compressibilidade constante,
- Reservatório de extensão radial infinita, homogêneo e isotrópico,
- Efeitos gravitacionais desprezíveis,
- Reservatório com espessura uniforme h ,
- Poço inclinado com intervalo produtor h_w , sendo seu ponto médio localizado a uma elevação z_w a partir do plano inferior da formação. O ângulo de inclinação ψ é medido a partir da normal aos planos inferior e superior da formação,
- A espessura do reservatório e o comprimento do poço devem satisfazer as seguintes condições,

$$h_w \leq \min \left\{ \frac{h}{\cos \psi}, \frac{2z_w}{\cos \psi}, \frac{2(h - z_w)}{\cos \psi} \right\}$$

- O poço produz a uma vazão constante q_w ,
- Não há escoamento através dos limites verticais (planos) inferior e superior da formação:

$$\left. \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \right)_{z=0,h} = 0$$

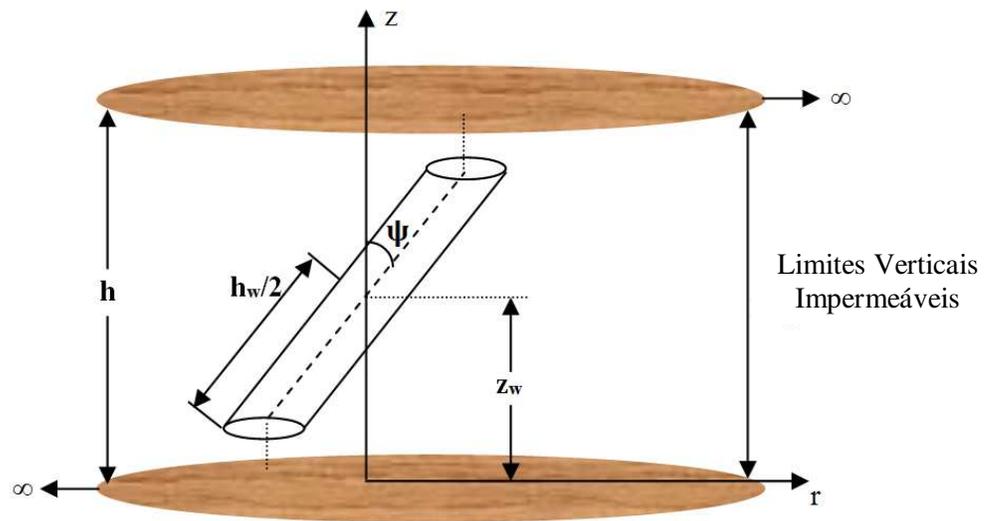


Figura (2.1): Esquemático do modelo para poço inclinado.

Na literatura de análise de teste, a maioria das soluções propostas é apresentada em termos de variáveis adimensionais. Esta dissertação também apresenta as soluções nesta forma, permitindo uma comparação direta com outros trabalhos. Nos próximos capítulos serão documentados os fundamentos matemáticos usados nas derivações dos modelos analíticos e semi-analíticos a serem apresentados e estudados aqui. Estas soluções fornecem uma alternativa acessível à completa modelagem numérica - utilizada em pacotes comerciais para Interpretação de Teste de Pressão.

3. TEORIA DA FUNÇÃO FONTE

A teoria da função de Green há tempos tem sido apresentada e discutida nas literaturas de matemática, condução de calor e escoamento de fluidos em meios porosos. Para melhor entendimento, neste capítulo é feita uma breve apresentação da teoria básica utilizada no desenvolvimento da solução da função fonte, aplicada ao comportamento transitório da pressão num reservatório.

No modelo de solução apresentado por Gringarten e Ramey (1974) - onde a teoria pode ser examinada de uma forma mais detalhada – considera-se o reservatório como um bloco no formato de um cubo, com extremidades seladas ao escoamento ou mantidas a uma pressão conhecida conforme condições de contorno específicas. Para a solução, o poço é tido como uma série de fontes pontuais produzindo sob condições pré-estabelecidas. O desenvolvimento da solução da equação diferencial é então feito pela aplicação do teorema de Green. A metodologia segue uma sequência que pode ser resumida da seguinte forma:

1. Desenvolvimento de funções de Green para reservatório infinito unidimensional;
2. Desenvolvimento das funções fontes instantâneas básicas;
3. Aplicação do método das imagens e construção das fontes instantâneas básicas para reservatório unidimensional, conforme condições de contorno do problema em questão;
4. Aplicação do método do produto (Newman) e integração em relação à dimensão espacial ao longo do poço, e em relação ao tempo.

Na aplicação da teoria de funções de Green para problemas de escoamento de fluidos em regime transitório, é conveniente introduzir funções fonte, obtidas integrando-se a função de Green sobre o volume da fonte.

3.1 Equação da Difusão e Função Fonte

Antes de apresentar o desenvolvimento da solução, algumas notações serão introduzidas, conforme Figura (3.1). Os símbolos x, y e z representam as variáveis espaciais em coordenadas cartesianas e t a variável tempo. Ω é um domínio no espaço, sendo este domínio limitado por Γ .

A posição de um ponto em Ω é definida por $M = (x, y, z)$. T representa o intervalo de tempo; $\{t|0 < t < \infty\}$. O domínio espaço-tempo, $D = \Omega \times T$, é o produto da região Ω e o intervalo de tempo T [um meio poroso ocupa Ω e um fluido (líquido ou gás) escoia através deste meio]. A porosidade da formação, $\phi(M, t)$, e a massa específica do fluido, $\rho(M, t)$, são funções escalares de M e t , para M e $t \in D$.

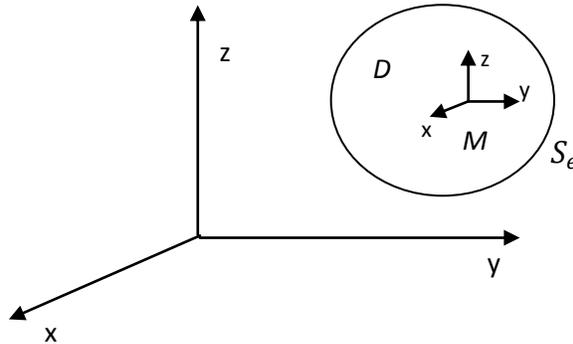


Figura (3.1): Notação para o domínio do reservatório.

Seja R um subdomínio arbitrário de Ω com superfície de controle S_e . Seja $v(M, t)$ a velocidade do fluido e $f(M, t)$ a vazão local (massa por unidade de volume por unidade de tempo) em que a massa é extraída de R . O princípio da conservação de massa diz que (Raghavan e Ozkan, 1994):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \rho \phi dM = - \int_{S_e} \rho v \cdot n d\Gamma - \int_R f(M, t) dM \quad (3.1)$$

onde n é o vetor normal a superfície S_e , com sentido positivo para fora.

Aplicando o teorema do divergente à integral de superfície na equação (3.1), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) = -\nabla \cdot (\rho v) - f ; (M, t) \in D \quad (3.2)$$

A lei de Darcy, a compressibilidade isotérmica do fluido, c_f , e a compressibilidade do meio poroso, c_m , são definidas respectivamente como:

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (3.3)$$

$$c_f = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{1}{V_f} \frac{\partial V_f}{\partial p} \right)_T \quad (3.4)$$

$$c_m = \left(\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_T \quad (3.5)$$

Fazendo a devida associação das equações (3.2) - (3.5), tem-se o comportamento da pressão devido à produção ou injeção de fluido no meio poroso. Este comportamento pode ser descrito pela equação da difusão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tilde{q} = \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.6)$$

onde se define a compressibilidade total como a soma da compressibilidade do fluido e da rocha, ou $c_t = c_f + c_m$.

Para uma formação homogênea e isotrópica com viscosidade constante, a equação (3.6) pode ser expressa como:

$$\frac{k}{\mu} \nabla^2 p - \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \tilde{q} = 0 \quad (3.7)$$

Onde o termo \tilde{q} é dado por:

$$\tilde{q} = \frac{f}{\rho} = \left[\frac{\text{vol. acumulado de fluido retirado}}{\text{tempo} \cdot \text{volume}} \right] = \text{vazão unitária} \quad (3.8)$$

Assumindo a porosidade, ϕ , e a compressibilidade, c_t , constantes, a equação (3.8) torna-se:

$$\eta \nabla^2 p - \frac{\partial p}{\partial t} - \tilde{m} = 0 \quad (3.9)$$

Onde η é a constante de difusividade, dada por:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (3.10)$$

O terceiro termo da equação (3.9), \tilde{m} , é citado na literatura como sendo a *intensidade* ou *potência* da fonte,

$$\tilde{m} = \frac{\tilde{q}}{\phi c_t} \quad (3.11)$$

Uma definição geral para o termo \tilde{q} pode ser dada como:

$$\tilde{q} = \frac{Q(\text{volume produzido})}{\text{comprimento}^n} \quad (3.12)$$

para uma fonte instantânea; ou

$$\tilde{q} = \frac{Q(\text{vazão produzida})}{\text{comprimento}^n} \quad (3.13)$$

para uma fonte contínua, onde o índice $n = 0, 1, 2,$ e 3 representam uma fonte pontual, linear, superficial e volumétrica, respectivamente. Logo, a intensidade dada pela Equação (3.11) tem unidade $[\text{pressão}].[comprimento]^{3-n}$ para fonte instantânea, ou $[\text{pressão}].[comprimento]^{3-n}$

/[tempo] para fonte contínua. Fisicamente, a intensidade da fonte instantânea é igual à queda de pressão associada à expansão do “fluido do poço” de um volume igual a Q .

3.2 Escoamento Transitório por Funções de Green

Para o desenvolvimento da solução da equação da difusão por funções de Green, primeiramente escreve-se a equação em sua forma integral. Isto nada mais é do que a aplicação dos teoremas de Green (1º e 2º), os quais podem ser escritos respectivamente nas seguintes formas (Morse e Feshbach, 1953):

$$\iiint_D (\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\chi) d\vec{r} + \iiint_D (\varphi \nabla^2 \chi) d\vec{r} = \oint_C \varphi \left(\frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \cdot dC \right) \quad (3.14)$$

$$\iiint_D (\chi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \chi) d\vec{r} = \oint_C \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right) dC \quad (3.15)$$

Tendo-se a equação na forma integral, procura-se a função de Green referente à equação diferencial e condições de contorno dadas. Se obtivermos a função de Green, então o problema tem solução na forma integral. No entanto, a dificuldade é encontrar a função de Green apropriada a cada problema, com a geometria e condições de contorno específicas. Segundo Gringarten e Ramey (1973), quando obtidas para um determinado domínio, elas fornecem soluções para qualquer condição inicial ou de contorno, integrando-as sobre os limites deste domínio.

Para um reservatório com pressão inicial p_i , a queda de pressão, $\Delta p = p_i - p(M, t)$, devido à retirada contínua de fluido de uma fonte volumétrica no subdomínio Ω com superfície de controle S_e pode ser expressa pela seguinte representação da função de Green (Gringarten e Ramey, 1973):

$$\Delta p(M, t) = \frac{1}{\varnothing c_t} \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{q}(P, \tau) G(M, P, t - \tau) dP d\tau - \eta \int_0^t \int_{S_e} \left[G(M, P, t - \tau) \frac{\partial p(P, \tau)}{\partial n} - p(P, \tau) \frac{\partial G(M, P, t - \tau)}{\partial n} \right] dS_e d\tau \quad (3.16)$$

onde $\partial/\partial n$ representa a diferenciação normal ao elemento dS_e , na qual o vetor no sentido positivo aponta para fora da superfície S_e .

A função de Green Instantânea, $G(M, P, t - \tau)$, é definida como uma função fonte pontual instantânea atuando em um ponto P e num tempo τ com intensidade unitária ($\tilde{q}/\varnothing c_t = 1$), condição inicial (queda de pressão inicial) igual a zero e condições de contorno uniformes. Ela ainda apresenta as seguintes propriedades limites:

1. G é simétrica em dois pontos M e P ; isto é, a função de Green é constante se ambas fonte e ponto de observação não variam.
2. À medida que $t \rightarrow \tau$, G extingue-se em todos os pontos no meio poroso; isto é, $\lim_{t \rightarrow \tau} G(M, P, t - \tau) = 0$, exceto na fonte ($M = P$), onde se torna infinito para que G satisfaça a propriedade da função delta:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_D f(P) G(M, P, t - \tau) dP = f(M)$$

Onde D indica o domínio do meio poroso e $f(M)$ é uma função contínua qualquer.

Como G corresponde à pressão devido a uma fonte pontual instantânea de intensidade unitária, ela satisfaz, para todo tempo $t > \tau$:

$$\int_D G(M, P, t) dP = 1$$

3. A função $G(M, P, t - \tau)$ deixa de existir no limite externo S_e , para pressão tomada num ponto M localizado neste limite. Quando o escoamento é tomado num ponto M no limite S_e , a derivada da função de Green também se extingue neste limite. Se o domínio Ω for de extensão infinita, $G(M, P, t - \tau)$ torna-se zero quando M está no infinito.

A partir destes conceitos, segue análise da equação (3.16). No segundo termo do lado direito da equação, os termos entre colchetes apresentam dois produtos entre eles, onde apenas um é diferente de zero: se o escoamento é tomado em S_e , tem-se conhecido o termo $\partial p(P, \tau)/\partial n$, porém $\partial G(M, P, t - \tau)/\partial n$ é zero – por definição da função de Green. Por outro lado, se a pressão $p(P, \tau)$ é tomada em S_e , a função de Green $G(M, P, t - \tau)$ é zero. Por fim, o segundo termo do lado direito da equação (3.16) desaparece quando o domínio do reservatório é infinito; ou para caso finito, quando se tem na condição de contorno externa escoamento ou pressão igual à zero (Gringarten e Ramey, 1973).

Para um reservatório de extensão radial infinita, limitado verticalmente por camadas paralelas impermeáveis, a equação torna-se⁴:

$$\Delta p(M, t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{q}(P, \tau) G(M, P, t - \tau) dP d\tau \quad (3.17)$$

Para uma fonte de escoamento uniforme, temos:

$$\Delta p(M, t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t \tilde{q} S(M, t - \tau) d\tau \quad (3.18)$$

onde $S(M, t, \tau)$ é a função fonte dada por,

⁴ O desenvolvimento da solução da equação da difusão, baseado em funções de Green, pode ser visto com mais detalhes em Carslaw e Jaeger (1959, pág. 353 – 386).

$$S(M, t, \tau) = \int_{\Omega} G(M, P, t - \tau) dP \quad (3.19)$$

ou seja, a queda de pressão pode ser obtida simplesmente integrando a função de Green em relação ao volume da fonte e ao tempo. Gringarten e Ramey (1973) apresentaram uma extensa biblioteca de exemplos de funções fonte para problemas de escoamento transitório.

A função instantânea de Green pode ainda ser entendida como a queda de pressão devido a uma fonte volumétrica de intensidade unitária; isto é:

$$G = \frac{\Delta p}{\tilde{m} \cdot \text{comprimento}^n} \quad (3.20)$$

onde Δp é a queda de pressão devido a intensidade (\tilde{m}) e volume da fonte (comprimento^n). Logo, a função de Green, $G(M, P, t, \tau)$, tem unidade $[1/\text{volume}]$ e $S(M, t, \tau)$ tem unidade $[\text{comprimento}]^{n-3}$.

3.3 Princípio da Superposição e Método do Produto de Newman

O princípio da superposição e o método do produto de Newman são teorias extensivamente utilizadas como base para soluções analíticas de escoamento de fluidos em meios porosos. Nesta seção segue um breve sumário de ambos os métodos.

3.3.1 Princípio da Superposição

Matematicamente, o teorema da superposição diz que qualquer soma das soluções individuais de uma equação diferencial linear de segunda ordem também é uma solução da mesma equação. Fisicamente, o teorema da superposição significa que o efeito combinado de múltiplos poços posicionados em qualquer ponto no reservatório, tendo a produção iniciada em qualquer instante, é a soma de seus efeitos individuais. Para a equação da difusão, se uma solução particular da equação é conhecida na forma $p(x, y, z, t)$, então $p(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$ também é uma solução onde as quantidades incrementadas ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$) podem ser qualquer incremento desejado. Assim, por simples adição, outra solução da equação da difusão pode ser elaborada a partir destas soluções. Isto é, $p(x, y, z, t) + p(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$ também é uma solução. O teorema da superposição também pode ser expresso na forma da integral de

convolução. Em geral, esta expressão é conhecida como o princípio de Duhamel (Carslaw e Jaeger, 1959). Pode-se afirmar que a função de Green apresentada também é uma aplicação da superposição.

O método da imagem foi primeiramente utilizado por Matthews et. al. (1954) na determinação da pressão média em reservatórios selados. O método se baseia na aplicação do teorema da superposição no espaço. Para reservatórios finitos com diversas condições de contorno, parte-se das soluções aplicadas a reservatório infinito e com o método das imagens pode-se gerar outras fontes para diversos tipos de problemas (modelos). A soma algébrica das funções fonte, e suas imagens correspondentes a um reservatório infinito, será uma função fonte de um mesmo reservatório com condições de contorno específicas. A natureza da imagem determina o sinal da função fonte na soma algébrica, e depende das condições de contorno. A condição de fronteira selada é obtida com uma imagem da mesma natureza que a fonte, já a condição de fronteira de pressão constante é obtida com uma imagem com sinal oposto ao da fonte. Dessas duas fontes instantâneas básicas, podem-se desenvolver as soluções para problemas tridimensionais através do método dos produtos (Newman).

3.3.2 Método de Newman

Gringarten e Ramey (1973) discutiram sobre a dificuldade em encontrar a função de Green apropriada para um problema tridimensional. O Método de Newman mostrou, porém, que para certos tipos de condições iniciais e de contorno, a solução de um problema tridimensional de condução do calor é igual ao produto de soluções de três problemas unidimensionais. Carslaw e Jaeger (1959, p. 33) discutiram este método para condições de contorno mais gerais. A solução dos produtos é válida se o produto das condições de contorno e das condições iniciais para problemas unidimensionais resultam nas condições iniciais e de contorno específicas aos problemas tridimensionais. Em particular, o método dos produtos de Newman é aplicável a funções fonte e de Green instantâneas. Com isso, utilizando o método de Newman, a função de Green instantânea para o escoamento tridimensional pode ser facilmente determinada a partir da solução unidimensional de um reservatório linear.

4. SOLUÇÃO DA FONTE PONTUAL

A solução da fonte pontual é aplicada e extensamente discutida por Carslaw e Jaeger (1959) na solução de problemas de condução de calor. Sua solução, aplicada a escoamento de fluido em meios porosos, é geralmente obtida determinando-se os limites da queda de pressão resultante de uma fonte esférica à medida que o volume da fonte tende a ser infinitamente pequeno.

Nesta seção serão apresentadas duas formas de solução: uma no domínio do tempo e outra no domínio de Laplace. Inicialmente, a solução no domínio do tempo é derivada a partir da equação da difusão para escoamento esférico. Fazendo as devidas substituições de variáveis, encontra-se uma solução equivalente à apresentada por Carslaw e Jaeger (1959) aplicável às condições estabelecidas. A solução da fonte pontual instantânea é então determinada tendendo o raio da esfera à zero. Em seguida, a solução contínua é obtida pela integração no tempo da função instantânea. Posteriormente, a solução tridimensional da fonte pontual instantânea é obtida através do método do produto (Newman). Por fim, a solução é transferida para o domínio de Laplace.

4.1 Solução no Domínio do Tempo

Para demonstrar a derivação da solução, considera-se o escoamento Darciano transitório de um fluido levemente compressível de compressibilidade e viscosidade constantes através de uma fonte esférica de raio $r = r_s$, num meio poroso homogêneo e infinito.

Devido à simetria esférica do problema (Fig. 4.1), a equação governante do escoamento de fluido em meio poroso é expressa da seguinte forma (Carslaw e Jaeger, 1959):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Delta p}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde $\Delta p = p_i - p(\theta, \phi, r, t)$.

Neste sistema, a posição de um ponto é determinada pela sua distância, r , a partir de sua origem, sua latitude, θ , e seu azimute, ϕ :

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta$$

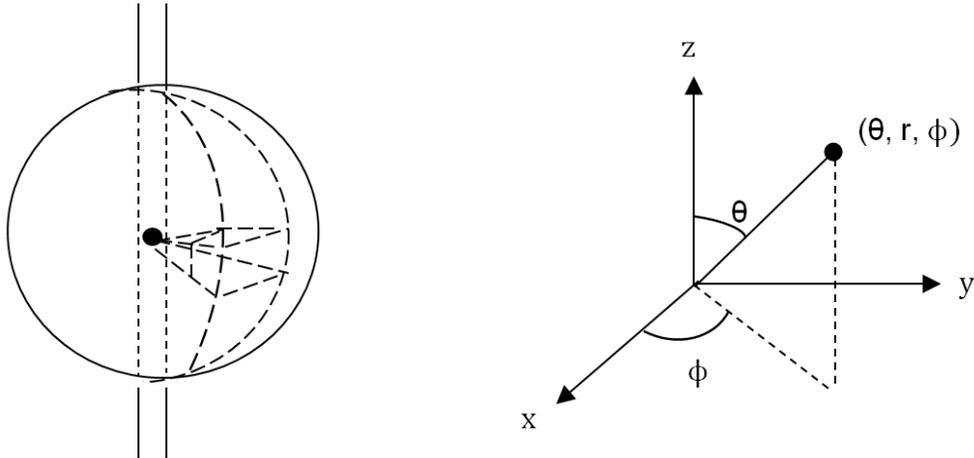


Figura (4.1): Sistema de coordenadas esféricas.

Considerando a queda de pressão numa fonte onde a condição inicial e a condição interna dependerão apenas das coordenadas r e t , têm-se $p(r, t)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Delta p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \quad (4.2)$$

As seguintes hipóteses foram consideradas na solução do problema:

1) A pressão inicial do reservatório é p_i e satisfaz as seguintes condições,

$$\Delta p(r, t = 0) = 0 \quad \text{para } r > r_s \quad (4.3)$$

2) A condição de contorno interna é,

$$\Delta p(r = r_s, t = 0) = \Delta p_i \quad (4.4)$$

3) Reservatório infinito caracteriza a condição de contorno externa,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta p(r, t) = 0 \quad (4.5)$$

Substituindo $u = r\Delta p$, as equações (4.2) - (4.4) tornam-se, respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (4.8)$$

e

$$u(r, t = 0) = 0 \quad \text{para } r > r_s \quad (4.9)$$

$$u(r = r_s, t = 0) = r\Delta p_i \quad (4.10)$$

A solução do problema descrito pelas Equações (4.8) - (4.10) é dada por (Carslaw e Jaeger, 1959, p. 257) como:

$$\Delta p(r, t) = \frac{\Delta p_i}{2r\sqrt{\pi\eta t}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right) \int_0^{r_s} r' \exp\left(-\frac{r'^2}{4\eta t}\right) \left[\exp\left(\frac{rr'}{2\eta t}\right) - \exp\left(-\frac{rr'}{2\eta t}\right) \right] dr'$$

(4.11)

Expandindo-se o termo exponencial da integral em potências de r' , desconsiderando-se os termos com potências maiores do que quatro, resolvendo-se a integral e aplicando-se os limites, tem-se:

$$\Delta p(r, t) \approx \frac{4\pi r_s^3 \Delta p_i}{24(\pi \eta t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right) \left[1 + \left(\frac{r_s^2}{40\eta t}\right) \left(\frac{r^2}{\eta t} - 6\right)\right] \quad (4.12)$$

Na Equação (4.12), $4\pi r_s^3/3 = V$ onde V é o volume da fonte esférica. Se \tilde{q} denotar o volume de fluido “liberado” como resultado da variação do volume da fonte, ΔV , como resposta à variação de pressão, Δp_i , então $\tilde{q} = -\phi \Delta V$. A partir da definição de compressibilidade, $c_t = -(1/V)(\Delta V/\Delta p_i)$, tem-se $\tilde{q} = \phi c_t V \Delta p_i$ (Lake, 2006). Logo, pode ser mostrado que:

$$\frac{4\pi r_s^3}{3} \Delta p_i = \frac{\tilde{q}}{\phi c_t} = \tilde{m} \quad (4.13)$$

Substituindo a Equação (4.13) na Equação (4.12), tem-se:

$$\Delta p(r, t) \approx \frac{\tilde{q}}{8\phi c_t (\pi \eta t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right) \left[1 + \left(\frac{r_s^2}{40\eta t}\right) \left(\frac{r^2}{\eta t} - 6\right)\right] \quad (4.14)$$

Fazendo com que o raio da fonte esférica, r_s , tenda a zero enquanto \tilde{q} permanece constante, a Equação (4.14) torna-se a solução da fonte pontual instantânea:

$$\Delta p(r, t) = \frac{\tilde{q}}{8\phi c_t (\pi \eta t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right) \quad (4.15)$$

A Equação (4.15) pode ser interpretada como a queda de pressão a uma distancia r devido a um volume de fluido, \tilde{q} , instantaneamente produzido em $r = 0$ e $t = 0$. De acordo com a definição dada pela Equação (3.12), o termo $\tilde{q}/(\phi c_t) = \tilde{m}$ é tido como a intensidade da fonte, que é a queda de pressão num volume unitário do meio poroso, gerada por uma produção instantânea de um volume de fluido, \tilde{q} (Eq. 3.14). Desta forma, o problema do escoamento transitório em meio poroso resume-se em encontrar a solução da função fonte pontual.

O método foi primeiramente aplicado na engenharia de petróleo por Nisle (1958), onde uma fonte pontual instantânea de intensidade $\tilde{q}/(\phi c_t)$ atuando num tempo $t = \tau$ num reservatório homogêneo, infinito e anisotrópico foi representada por:

$$\Delta p(M, P, t - \tau) = \frac{\tilde{q}}{8\phi c_t \sqrt{\eta_x \eta_y \eta_z} [\pi(t - \tau)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(M - P)^2}{4\tilde{\eta}(t - \tau)} \right] \quad (4.16)$$

Na Equação (4.16), M e P indicam a localização do ponto de observação e da fonte, respectivamente. Para um sistema de coordenadas cartesianas, $M = (x, y, z)$, $P = (x', y', z')$ e $(M - P)^2/\tilde{\eta} = (x - x')^2/\eta_x + (y - y')^2/\eta_y + (z - z')^2/\eta_z$, onde η_x , η_y e η_z representa as constantes de difusividades nas direções x , y e z , respectivamente.

Após obter a solução para a fonte instantânea, sob determinadas condições de contorno, a mesma é integrada para um intervalo de tempo a fim de se obter a solução da fonte contínua.

Considerando o fluido produzido a uma vazão constante, $\tilde{q}(t)$, num intervalo de 0 a t , então a queda de pressão devida a uma fonte contínua num reservatório infinito é obtida distribuindo-se as fontes pontuais de intensidade $\tilde{q}(\tau)/(\phi c_t)$ sobre o intervalo de tempo $0 \leq \tau \leq t$:

$$\Delta p(M, P, t) = \frac{1}{\phi c} \int_0^t \tilde{q}(\tau) S(M, P, t - \tau) d\tau \quad (4.16)$$

onde $S(M, P, t - \tau)$ corresponde à intensidade unitária $[\tilde{q}/(\phi c_t) = 1]$ da fonte pontual instantânea num reservatório infinito, e é dada por:

$$S(M, M', t - \tau) = \frac{1}{8\sqrt{\eta_x \eta_y \eta_z} [\pi(t - \tau)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(M - P)^2}{4\tilde{\eta}(t - \tau)} \right] \quad (4.18)$$

Como mencionado anteriormente, as funções de Green instantâneas para um reservatório de extensão infinita foram apresentadas por Gringarten e Ramey (1973), podendo ser aplicadas a problemas de diferentes regimes de escoamento na engenharia de petróleo.

4.2 Solução no Domínio de Laplace

Outra forma de obter a solução da fonte pontual, fazendo valer o método do produto de Newman, é utilizar a solução das fontes instantâneas básicas. Elas são derivadas da função de Green instantânea para reservatório linear unidimensional infinito, a qual deriva da solução fundamental de Laplace para a equação da difusão para sistemas lineares, do tipo:

$$\eta_j \frac{\partial^2 p(j, t)}{\partial j^2} - \frac{\partial p(j, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

sendo $j = x, y$ ou z . Esta hipótese diz respeito à fonte plana instantânea, apresentada por Gringarten e Ramey (1973), cuja solução é dada por:

$$G(j, j', t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \eta_j t}} \exp \left[-\frac{(j - j')^2}{4\eta_j t} \right] \quad (4.20)$$

A função fonte instantânea para uma fonte plana infinita localizada em j' em um reservatório infinito é dada então por (Gringarten e Ramey, 1973):

$$S(j, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta_j t}} \exp\left[-\frac{(j - j')^2}{4\eta_j t}\right] \quad (4.21)$$

Como apresentado no item (3.3.2), a solução para problemas tridimensionais pode ser obtida pelo método do produto (Newman). Logo, para o problema em três dimensões, a solução da equação da difusão torna-se:

$$\Delta p = p_i - p(x, y, z, t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t \tilde{q}(\tau) \cdot S_x(x, \tau) S_y(y, \tau) S_z(z, \tau) d\tau \quad (4.22)$$

onde S_x, S_y, S_z são as funções fonte instantâneas unidimensionais nas respectivas direções x, y, z .

Pela Equação (4.22), obtêm-se a solução tridimensional contínua num reservatório infinito:

$$\Delta p(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^{3/2} \sqrt{\eta_x \eta_y \eta_z}} \int_0^t \frac{\tilde{m}(\tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\left[\frac{(x - x')^2}{4\eta_x(t - \tau)} + \frac{(y - y')^2}{4\eta_y(t - \tau)} + \frac{(z - z')^2}{4\eta_z(t - \tau)}\right]\right\} d\tau \quad (4.23)$$

onde \tilde{m} é a intensidade da fonte, definida pela Equação (4.13).

$$\tilde{m}(t) = \frac{\tilde{q} \left(\frac{\text{volume}}{\text{tempo}} / \text{comprimento}^n \right)}{\phi c_t} \quad (4.24)$$

Adicionando-se as seguintes variáveis adimensionais,

$$x_D = \frac{(x - x')}{l} \sqrt{\frac{k}{k_x}} \quad , \quad y_D = \frac{(y - y')}{l} \sqrt{\frac{k}{k_y}} \quad , \quad z_D = \frac{(z - z')}{l} \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (4.24)$$

onde $k = \sqrt[3]{k_x k_y k_z}$.

$$r_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 \quad (4.25)$$

$$t_D = \frac{tk}{\mu\phi c_t l^2} = \frac{t\eta}{l^2} \quad (4.26)$$

onde l é um comprimento característico do sistema⁵, tem-se:

$$\Delta p(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^{3/2}l} \int_0^{t_D} \frac{\tilde{m}(t)}{(t_D - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r_D^2}{4(t_D - \tau)}\right] d\tau \quad (4.27)$$

A fim de evitar a integral no tempo, pode-se expressar a solução no domínio de Laplace. A transformada de Laplace é a integração infinita de uma função no tempo multiplicada por uma função exponencial no tempo:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.28)$$

Tomando a transformada de Laplace da Equação (4.27) gera-se,

⁵ Para os resultados a serem apresentados nesta dissertação, foi escolhido o raio do poço, r_w , como referência.

$$\overline{\Delta p}(x_D, y_D, z_D, s) = \frac{\overline{\tilde{m}}(s) \exp(-r_D \sqrt{s})}{4\pi\eta l r_D} \quad (4.29)$$

ou

$$\overline{\Delta p}(x_D, y_D, z_D, s) = \frac{\overline{\tilde{q}}(s)\mu \exp(-r_D \sqrt{s})}{4\pi k l r_D} \quad (4.30)$$

onde o símbolo de sobre barra, $\overline{\quad}$, e s indicam a transformada de Laplace e a variável do domínio de Laplace, respectivamente.

Considerando a intensidade constante, a Equação (4.29) e (4.30) tornam-se, respectivamente:

$$\overline{\Delta p}(x_D, y_D, z_D, s) = \frac{\tilde{m} \exp(-r_D \sqrt{s})}{4\pi\eta l s} \quad (4.31)$$

e

$$\overline{\Delta p}(x_D, y_D, z_D, s) = \frac{\tilde{q}\mu \exp(-r_D \sqrt{s})}{4\pi k l s} \quad (4.32)$$

A solução apresentada pela Equação (4.32) é utilizada como ponto de partida para solução desenvolvida no domínio de Laplace, derivada no item 5.2 desta dissertação.

5. MODELOS MATEMÁTICOS

Encontram-se na literatura dois modelos distintos para tratar como o poço produz. No primeiro, denominado escoamento uniforme, considera-se que a vazão total de produção se distribui de maneira uniforme ao longo do comprimento do poço e, portanto, a distribuição de pressão não é uniforme. No segundo modelo, denominado de condutividade infinita, admite-se que, ao invés da vazão, a pressão seja constante ao longo do poço.

Sabe-se que a condutividade no poço seria melhor representada à medida que ela tenderia ao infinito; assim a pressão, ao invés do escoamento, seria uniforme ao longo do poço (Gringarten et. al. 1974). Contudo, computar de forma rigorosa a solução da condutividade infinita no poço não é uma tarefa trivial e requer grande tempo computacional. Uma forma de contornar esta dificuldade é encontrar um ponto equivalente no poço em que as soluções que consideram escoamento uniforme e condutividade infinita gerem os mesmos valores de pressão – importante lembrar que este ponto de equivalência depende da geometria do poço. Com isso, os modelos apresentados neste capítulo foram derivados considerando a condição de escoamento uniforme; assumindo produção por unidade de comprimento (poço) constante. As soluções serão expressas em termos de variáveis adimensionais.

5.1 Reservatório com Limites Verticais Impermeáveis – Domínio do Tempo

A solução definida pela Equação (4.14, p. 24) pode ser interpretada como a queda de pressão gerada num ponto M , no tempo t , por uma fonte pontual instantânea P de intensidade $\tilde{q}/(\phi c)$; sendo r a distancia entre dois pontos (M e P). Logo, sua respectiva função fonte pode ser expressa da seguinte forma:

$$S(M, t) = \frac{1}{8(\pi\eta t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\overline{PM}^2}{4\eta t}\right) \quad (5.1)$$

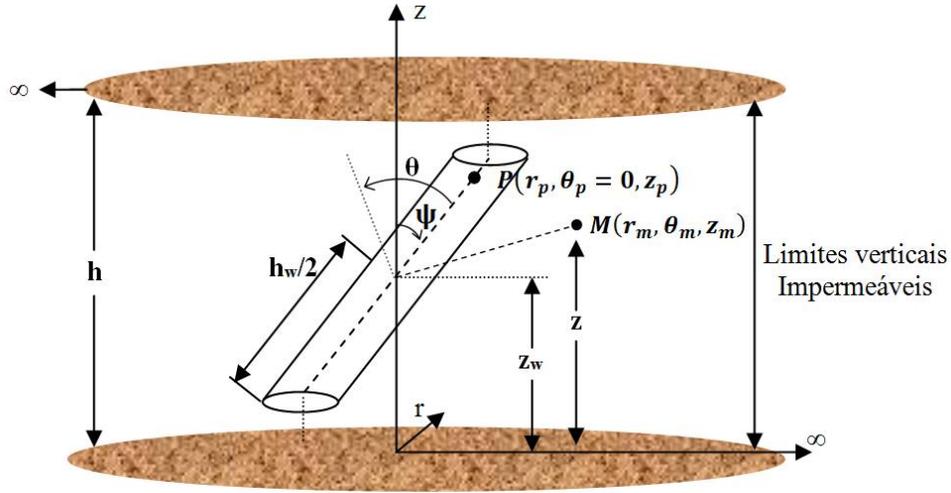


Figura (5.1): Fonte linear inclinada, h_w , num meio poroso infinito em coordenadas cilíndricas.

A partir deste ponto, considera-se o sistema de coordenadas apresentadas na Figura (5.1), onde pode ser visto que o ponto $P(r_p, \theta_p, z_p)$ é um ponto ao longo da fonte linear, e o ponto $M(r_m, \theta_m, z_m)$ é um ponto qualquer no meio poroso infinito. Note que a fonte linear mencionada, L , tem comprimento finito, h_w , e seu ponto médio está localizado em $r = 0$ e $z = z_w$. Esta fonte linear se posiciona em um plano passando por $\theta_p = 0$ e $\theta_p = \pi$.

A distância entre esses pontos é dada por:

$$\overline{PM}^2 = r_m^2 + r_p^2 - 2r_m r_p \cos(\theta_m - \theta_p) + (z_m - z_p)^2 \quad (5.2)$$

Da Fig. (5.1) tem-se o seguinte,

$$\theta_p = 0, \quad \text{para } z_p > z_w \quad (5.3)$$

e

$$\theta_p = \pi, \quad \text{para } z_p < z_w \quad (5.4)$$

Assim como:

$$r_p = (z_p - z_w)tg \psi , \quad \text{para } z_p \geq z_w \quad (5.5)$$

e

$$r_p = (z_w - z_p)tg \psi , \quad \text{para } z_w \geq z_p \quad (5.6)$$

Combinando as equações (5.2), (5.3) e (5.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{PM}^2 = r_m^2 + (z_p - z_w)^2 tg^2 \psi - 2r_m(z_p - z_w)tg \psi \cos \theta_m + (z_m - z_p)^2 \\ \text{para } z_p \geq z_w \end{aligned} \quad (5.7)$$

E substituindo as equações (5.4) e (5.6) na (5.2), tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{PM}^2 = r_m^2 + (z_w - z_p)^2 tg^2 \psi - 2r_m(z_w - z_p)tg \psi \cos(\theta_m - \pi) + (z_m - z_p)^2 \\ \text{para } z_p \leq z_w \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sabendo a relação,

$$\cos(\theta_m - \pi) = -\cos \theta_m$$

e

$$(z_w - z_p)^2 = (z_p - z_w)^2$$

A equação (5.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{PM}^2 = r_m^2 + (z_p - z_w)^2 tg^2 \psi - 2r_m(z_p - z_w)tg \psi \cos \theta_m + (z_m - z_p)^2 \\ \text{para } z_p \leq z_w \end{aligned} \quad (5.9)$$

Comparando a equação (5.9) com a (5.7), nota-se que são idênticas. Logo, a distância \overline{PM} entre qualquer ponto P , localizado ao longo da fonte linear instantânea L , e qualquer ponto M num meio poroso infinito, é dada pela equação (5.9) - desconsiderando a restrição $z_p \leq z_w$. Esta definição pode ser representada a partir da equação (5.1), onde esta fonte-linha pode ser obtida integrando-se a função fonte ao longo da “linha” L , assim:

$$S(M, t) = \frac{1}{8(\pi\eta t)^{3/2}} \int_L \exp\left(-\frac{\overline{PM}^2}{4\eta t}\right) dL \quad (5.10)$$

Considerando-se um elemento infinitesimal dL ao longo de L ; este elemento pode ser definido da seguinte forma:

$$dL = \frac{dz_p}{\cos\psi} \quad (5.11)$$

onde dz_p é um elemento infinitesimal paralelo à direção do eixo z .

Então, combinando as equações (5.1), (5.9) e (5.11), obtemos a função fonte num ponto $M(r_m, \theta_m, z_m)$ e tempo t , criada por uma fonte linear inclinada, instantânea e de comprimento finito, h_w , num meio poroso infinito; apresentada por Cinco-Ley et. al. (1975):

$$S(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \frac{1}{8(\pi\eta t)^{3/2} \cos\psi} \int_{z_w - \frac{h_w}{2} \cos\psi}^{z_w + \frac{h_w}{2} \cos\psi} \exp\left[-\frac{r_m^2 + (z_p - z_w)^2 \operatorname{tg}^2\psi - 2r_m(z_p - z_w) \operatorname{tg}\psi \cos\theta_m + (z_m - z_p)^2}{4\eta t}\right] dz_p \quad (5.12)$$

A camada impermeável inferior ($z = 0$), vista na figura (5.1), pode ser gerada utilizando o método da imagem. Logo, a queda de pressão gerada por uma fonte linear inclinada instantânea num meio semi-infinito pode ser obtida a partir da superposição do efeito de duas fontes lineares inclinadas simétricas, em relação à camada impermeável (Fig. 5.2).

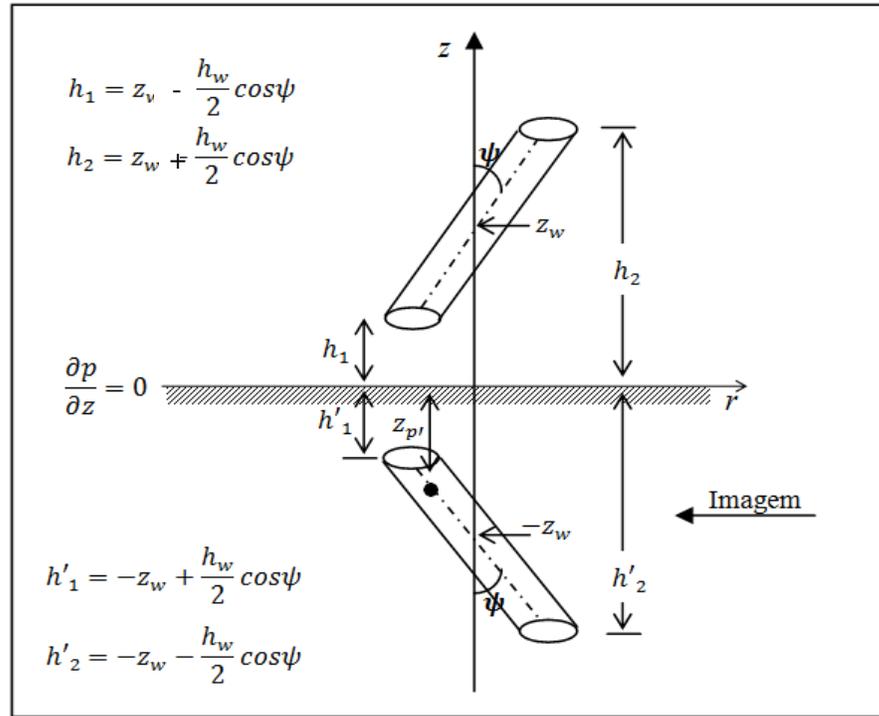


Figura (5.2): Imagem da fonte linear inclinada para geração da camada impermeável em $z = 0$.

A introdução da imagem ilustrada na figura (5.2) fornece este resultado. Logo, a solução é obtida integrando esta fonte linear ao longo de $-h$ à $+h$, e assim temos:

$$S(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \frac{1}{8(\pi \eta t)^{3/2} \cos \psi} \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{z_w - \frac{h_w}{2} \cos \psi}^{z_w + \frac{h_w}{2} \cos \psi} \exp \left[-\frac{r_m^2 + (z_p - z_w)^2 tg^2 \psi - 2r_m(z_p - z_w)tg\psi \cos \theta_m + (z_m - z_p)^2}{4\eta t} \right] dz_p \right. \\
& + \left. \int_{-z_w - \frac{h_w}{2} \cos \psi}^{-z_w + \frac{h_w}{2} \cos \psi} \exp \left[-\frac{r_m^2 + (z_w + z_{p'})^2 tg^2 \psi + 2r_m(z_w + z_{p'})tg\psi \cos \theta_m + (z_m - z_{p'})^2}{4\eta t} \right] dz_{p'} \right\} \\
& \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Definindo $z = z_p - z_w$ e $z' = z_{p'} + z_w$, reescreve-se a equação (5.12) da seguinte forma:

$$S(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{1}{8(\pi\eta t)^{\frac{3}{2}} \cos \psi} \right).$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\frac{h_w}{2} \cos \psi}^{+\frac{h_w}{2} \cos \psi} \left\{ \exp \left[-\frac{r_m^2 + z^2 tg^2 \psi - 2r_m z tg\psi \cos \theta_m + (z_m - z_w - z)^2}{4\eta t} \right] dz \right. \right. \\
& + \left. \left. \int_{-\frac{h_w}{2} \cos \psi}^{+\frac{h_w}{2} \cos \psi} \left\{ \exp \left[-\frac{r_m^2 + z'^2 tg^2 \psi - 2r_m z' tg\psi \cos \theta_m + (z_m - z_w - z')^2}{4\eta t} \right] dz' \right\} \right\} \\
& \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Ambas as integrais podem ser expressas numa única integral:

$$S(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{e^{-r_m^2/4\eta t}}{8(\pi\eta t)^{\frac{3}{2}} \cos \psi} \right).$$

$$\left\{ \int_{-\frac{h_w}{2} \cos \psi}^{+\frac{h_w}{2} \cos \psi} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi - 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m - z_w - z)^2}{4\eta t} \right] dz + \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi + 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + z_w - z)^2}{4\eta t} \right] \right\} dz' \right\} \quad (5.15)$$

A camada impermeável superior mostrada na Fig. (5.1) pode ser gerada através da superposição de um número infinito de pares do sistema fonte linear inclinada (Fig. 5.3).

Na Figura (5.3), a distância entre os pares é um múltiplo de $2h$; onde cada linha horizontal representa uma camada impermeável. Logo, a função fonte para um ponto $M(r_m, \theta_m, z_m)$ num tempo t , gerada por uma fonte linear inclinada instantânea de comprimento finito, h_w , num reservatório de extensão radial infinita e espessura h é dada por (Cinco-Ley, 1974):

$$S(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{e^{-r_m^2/4\eta t}}{8(\pi\eta t)^{3/2} \cos \psi} \right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\frac{h_w}{2} \cos \theta_w}^{+\frac{h_w}{2} \cos \theta_w} \left[\exp \left(-\frac{z^2 t g^2 \psi - 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh - z_w - z)^2}{4\eta t} \right) + \exp \left(-\frac{z^2 t g^2 \psi + 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh + z_w - z)^2}{4\eta t} \right) \right] dz \right\} \quad (5.16)$$

A integração da Eq. (5.16) é tomada sobre as variáveis espaciais. Aplicando a definição da Equação (4.16) para a queda de pressão num tempo t ,

$$\Delta p(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \frac{1}{\phi c} \int_0^t \tilde{q}(\tau) S(r_m, \theta_m, z_m, t - \tau, \psi, z_w, h_w) d\tau \quad (5.17)$$

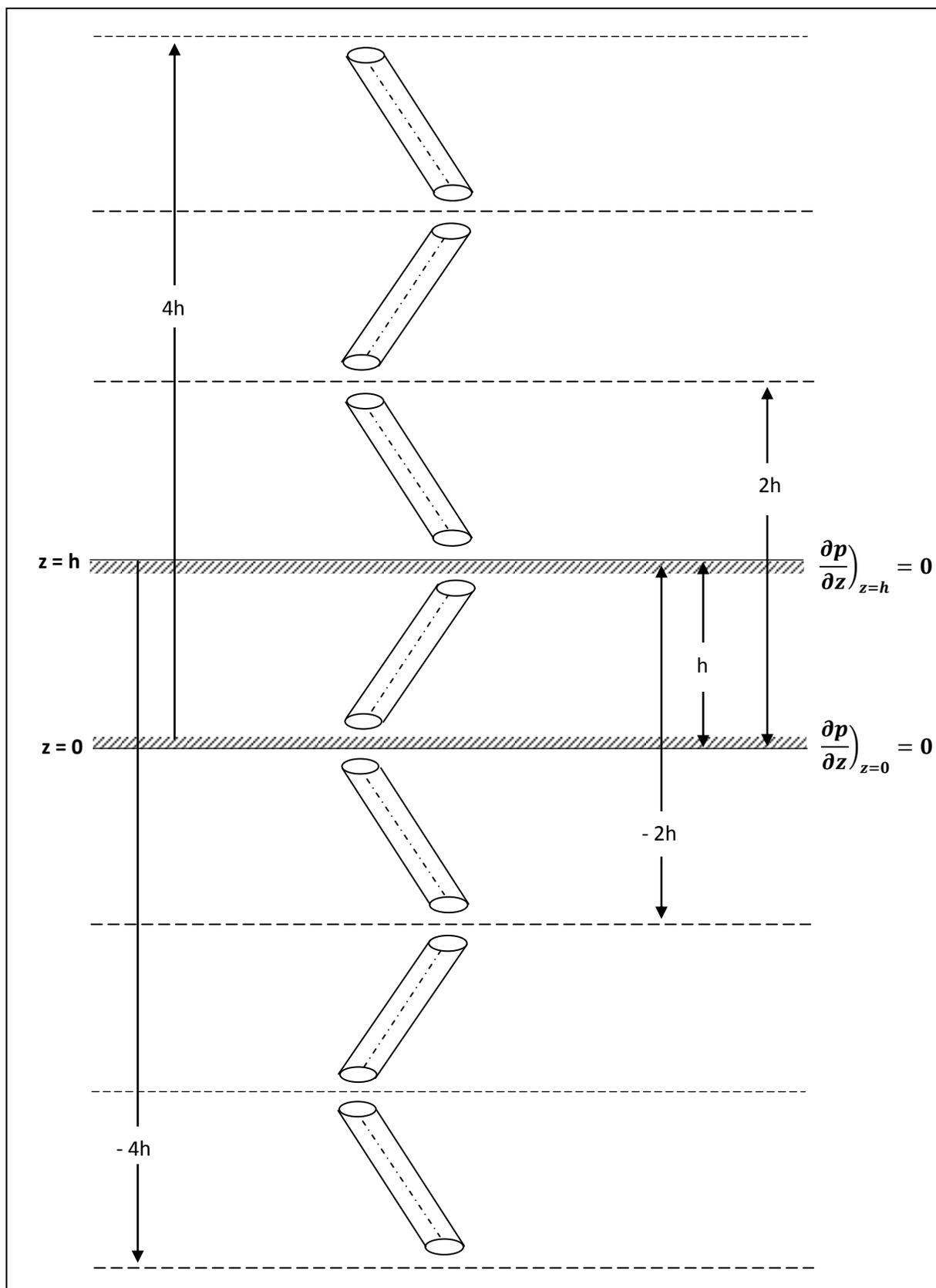


Figura (5.3): Superposição da fonte linear inclinada para geração dos limites impermeáveis.

Obtém-se a solução para a solução para a fonte linear inclinada contínua:

$$\Delta p(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{\tilde{q}}{8\phi c_t (\pi\eta)^{\frac{3}{2}} \cos\psi} \right) \int_0^t \frac{e^{-r_m^2/4\eta(t-\tau')}}{(t-\tau')^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{h_w}{2}\cos\theta_w}^{+\frac{h_w}{2}\cos\theta_w} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \theta_w - 2r_m z t g \psi \cos\theta_m + (z_m + 2nh - z_w - z)^2}{4\eta(t-\tau')} \right] + \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \theta_w + 2r_m z t g \psi \cos\theta_m + (z_m + 2nh + z_w - z)^2}{4\eta(t-\tau')} \right] \right\} dz d\tau' \quad (5.18)$$

onde \tilde{q} é a quantidade de fluido produzido por unidade de comprimento da fonte linear. Neste caso, o fluido produzido é considerado constante ao longo da fonte.

Assumindo $\tau = (t - \tau')$ e que q_w seja a vazão de líquido produzido, então a produção total, $\tilde{q}h_w$, no intervalo $(0 \text{ à } t)$, dt , é:

$$\tilde{q}h_w = q_w dt ,$$

$$\tilde{q} = \frac{q_w}{h_w} dt \quad (5.19)$$

onde q_w é a vazão total do poço.

Substituindo na eq. (5.18), tem-se:

$$\Delta p(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{q_w}{8\phi c_t h_w (\pi\eta)^{\frac{3}{2}} \cos\psi} \right) \int_0^t \frac{e^{-r_m^2/4\eta t}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \cdot$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{h_w \cos \theta_w}{2}}^{+\frac{h_w \cos \theta_w}{2}} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \theta_w - 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh - z_w - z)^2}{4\eta\tau} \right] + \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi + 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh + z_w - z)^2}{4\eta\tau} \right] \right\} dz d\tau \quad (5.20)$$

Apresentando as variáveis adimensionais (Sistema Internacional) ⁶:

Tabela (5.1): Variáveis adimensionais.

$p_D = \frac{2\pi k_r h \Delta p}{q_w \mu}$	$t_D = \frac{k_r t}{\phi \mu c_t r_w^2} = \frac{\eta t}{r_w^2}$
$h_D = \frac{h}{r_w} \sqrt{k_r / k_z}$	$r_D = \frac{r_m}{r_w}$
$z_D = \frac{z_m}{r_w} \sqrt{k_r / k_z}$	$\psi' = t g^{-1} \left(\sqrt{k_z / k_r} \cdot t g \psi \right)$
$h_{wD} = \frac{h_w}{r_w} \sqrt{\frac{k_r}{k_z} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi}$	$z_{wD} = \frac{z_w}{r_w} \sqrt{k_r / k_z}$

Na tabela acima, a definição do ângulo de inclinação adimensional, ψ' , apresenta o termo anisotrópico de forma contrária às variáveis adimensionais. Esta mudança se deve à distorção do sistema, devido à transformação de coordenadas. Vale ressaltar que as definições de h_{wD} e ψ' são resultados da transformação do sistema anisotrópico original num sistema isotrópico. Assim, por exemplo, o efeito da anisotropia aparece como uma simples contração de escala para a espessura da formação (h_D), enquanto que para h_{wD} e ψ' refletem variações tanto na escala quanto no ângulo de inclinação do poço. Para um reservatório anisotrópico, fica evidente que baixos valores

⁶ Apêndice A, item iii.

de permeabilidade vertical, k_z , refletem numa contração do ângulo de inclinação do poço, comparado com o ângulo real. Desta análise conclui-se que quanto maior a permeabilidade vertical mais rápido o transitório da pressão atingirá os limites verticais da formação – sendo este fenômeno análogo a uma progressiva diminuição da influência do ângulo de inclinação do poço.

Substituindo as variáveis adimensionais na Eq. (5.20) obtém-se a pressão adimensional em qualquer ponto (r_D, θ_m, z_D) num tempo adimensional t_D , gerado por uma fonte linear inclinada contínua, num reservatório de espessura h_D e extensão radial infinita (Cinco-Ley et. al., 1975):

$$p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi', z_{wD}, h_{wD}, h_D) = \left(\frac{h_D}{4h_{wD}\sqrt{\pi} \cos \psi'} \right) \int_0^{t_D} \frac{e^{-\frac{r_D^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \cos \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \cos \psi'} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi' - 2r_D z t g \psi' \cos \theta_m + (z_D + 2nh_D - z_{wD} - z)^2}{4\tau} \right] + \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi' + 2r_D z t g \psi' \cos \theta_m + (z_D + 2nh_D + z_{wD} - z)^2}{4\tau} \right] \right\} dz dt \quad (5.21)$$

Apresentando a fórmula de somatório de Poisson para séries infinitas (Carslaw e Jaeger, 1959, p. 275),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\xi - 2n\xi_e)^2}{4\tau} \right] = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\xi_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{n^2\pi^2\tau}{\xi_e^2} \right) \cos n\pi \frac{\xi}{\xi_e} \right] \quad (5.22)$$

Em seguida aplicando-a a Equação (5.21), tem-se:

$$p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi', z_{wD}, h_{wD}, h_D) = \frac{1}{4h_{wD} \cos \psi'} \int_0^{t_D} \frac{e^{-\frac{r_D^2}{4\tau}}}{\tau} \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \cos \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \cos \psi'} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi' - 2r_D z t g \psi' \cos \theta_m}{4\tau} \right] \cdot \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \cos \frac{n\pi(z_D - z_{wD} - z)}{h_D} \right] \right. \\
& \left. \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi' + 2r_D z t g \psi' \cos \theta_m}{4\tau} \right] \cdot \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \cos \frac{n\pi(z_D + z_{wD} - z)}{h_D} \right] \right\} dz d\tau
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Simplificando a Equação (5.23), obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi', z_{wD}, h_{wD}, h_D) &= \frac{1}{2h_{wD}} \cdot \\
& \int_0^{t_D} \frac{e^{\frac{-r_D^2 \sin^2 \theta_m}{4\tau}}}{\tau} \int_{\frac{h_{wD}}{2}}^{+\frac{h_{wD}}{2}} \exp \left[-\frac{(z t g \psi' + r_D \cos \theta_m)^2}{4\tau} \right] \cdot \\
& \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \left[\cos \frac{n\pi(z_{wD} - z - z_D)}{h_D} + \cos \frac{n\pi(z_{wD} - z + z_D)}{h_D} \right] \right\} dz' d\tau
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Utilizando a relação⁷,

$$\begin{aligned}
\cos \frac{n\pi(z_{wD} - z - z_D)}{h_D} + \cos \frac{n\pi(z_{wD} - z + z_D)}{h_D} &= \\
2 \cos \frac{n\pi z_D}{h_D} \cos \frac{n\pi(z_{wD} - z)}{h_D}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

reescreve-se a Equação (5.24):

⁷ $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b$

$$\begin{aligned}
p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi', z_{wD}, h_{wD}, h_D) &= \frac{1}{2h_{wD}} \int_0^{t_D} \frac{e^{\frac{-r_D^2 \sin^2 \theta_m}{4\tau}}}{\tau} \cdot \\
&\int_{\frac{-h_{wD}}{2}}^{\frac{+h_{wD}}{2}} \exp \left[-\frac{(z \operatorname{tg} \psi' + r_D \cos \theta_m)^2}{4\tau} \right] \cdot \\
&\left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \cos \frac{n\pi z_D}{h_D} \cos \frac{n\pi(z_{wD} - z)}{h_D} \right] dz d\tau \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Para um poço totalmente completado ao longo da espessura da formação, tem-se:

$$z_{wD} = \frac{1}{2} h_D \quad e \quad h_{wD} = \frac{h_D}{\cos \psi'} \quad (5.27)$$

Aplicando estas relações, a equação (5.26) pode ser adaptada para:

$$\begin{aligned}
p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi', h_D) &= \frac{\cos \psi'}{2h_D} \int_0^{t_D} \frac{e^{\frac{-r_D^2 \sin^2 \theta_m}{4\tau}}}{\tau} \int_{\frac{-h_D}{2 \cos \psi'}}^{\frac{+h_D}{2 \cos \psi'}} \exp \left[-\frac{(z \tan \psi' + r_D \cos \theta_m)^2}{4\tau} \right] \cdot \\
&\left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \cos \frac{n\pi z_D}{h_D} \cos n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h_D} \right) \right] dz d\tau \quad (5.28)
\end{aligned}$$

A análise da Eq. (5.28) diz que a queda de pressão não é uniforme ao longo do poço. Segundo Cinco-Ley et al (1975), esta situação é causada por dois motivos: (1) o poço foi considerado como uma fonte linear e o escoamento ao longo desta é considerado uniforme e independente do tempo e (2) a pressão ao longo da superfície cilíndrica do poço é uma função de z_D e θ_m .

Cinco-Ley et. al. (1975) mostraram que uma boa aproximação para a solução que considera condutividade infinita pode ser obtida a partir da equação (5.28). Para tal, computa-se esta equação em $z_D = 0.2h_D$ ou $z_D = 0.8h_D$, para pressão calculada ao longo do poço, h_w .

O comprimento do poço, h_w , mostrado na Figura (5.1), é representado pelas seguintes relações de coordenadas (Cinco-Ley, 1974):

$$r_D = \sqrt{\left(z_D - \frac{h_D}{2}\right)^2 tg^2\psi' + 1} \quad (5.29)$$

e

$$\theta_m = \cos^{-1} \frac{\left(z_D - \frac{h_D}{2}\right) tg \psi'}{\sqrt{\left(z_D - \frac{h_D}{2}\right)^2 tg^2\psi' + 1}} \quad (5.30)$$

Substituindo as equações (5.29) e (5.30) na equação (5.28) e simplificando para $z_D = 0.2h_D$, obtém-se:

$$p_{wD}(t_D, \psi', h_D) = \frac{1}{2h_D} \int_0^{t_D} \frac{e^{-\frac{1}{4\tau}}}{\tau} \int_{-\frac{h_D}{2}}^{+\frac{h_D}{2}} \exp\left[-\frac{tg^2\psi'(z + 0.3h_D)^2}{4\tau}\right] \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2\tau}{h_D^2}} \cos(0.8n\pi) \cos n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h_D}\right)\right] dz d\tau \quad (5.31)$$

Finalmente, a equação (5.31) expressa a queda de pressão adimensional num poço de completção total e inclinado, em um reservatório de extensão radial infinita e limites verticais impermeáveis; publicada por Cinco-Ley et. al. (1975).

5.2 Reservatório com Limites Verticais Impermeáveis – Domínio de Laplace

Existem diversas técnicas para solucionar o problema de escoamento transitório de fluidos em meios porosos. Uma delas é a aplicação da transformada de Laplace, que pode apresentar inúmeras propriedades convenientes para diferentes cenários (Van Everdingen e Hurst, 1949). Como a equação da difusão é geralmente apresentada de forma mais simples no domínio de Laplace do que no domínio do tempo, as soluções podem ser determinadas para a maioria das configurações de poços, correspondentes a diferentes condições de contorno. Investigações prévias, em especial: Ozkan (1988), Ozkan & Raghavan (1991a, 1991b, 1994a) e Raghavan & Ozkan (1994b), fornecem uma extensa referencia para soluções computacionais de uma grande variedade de problemas em análise de teste.

Existem duas vantagens em se obter a solução no domínio de Laplace. Primeiro, é possível considerar e avaliar, mais facilmente, efeitos de heterogeneidades da formação (por exemplo: dupla porosidade e fratura), assim como programar condições de vazão variável (Ozkan e Raghavan, 1991a, 1991b, 1991c, 1994, 2000). Segundo, a transformada de Laplace reduz a integral de convolução (Carslaw e Jaeger, 1959) a uma expressão algébrica e elimina a necessidade de uma discretização no tempo. Entretanto, como desvantagem, é necessário inverter os resultados utilizando um algoritmo numérico a fim de avaliá-los no domínio do tempo – como, por exemplo, o sugerido por Stehfest (1970).

Ozkan e Raghavan (2000) desenvolveram um algoritmo para computar as respostas do transitório de pressão em poços inclinados, onde a solução é derivada no domínio de Laplace. Com o propósito de apresentar uma rigorosa descrição das derivações realizadas pelos autores na obtenção desta solução, reescreve-se a equação (4.33):

$$\overline{\Delta p}(x_D, y_D, z_D, s) = \frac{\tilde{q}\mu}{4\pi kl} \frac{\exp(-r_D\sqrt{u})}{r_D s} \quad (5.32)$$

onde $r_D = (x_D - x_{wD}) + (y_D - y_{wD}) + (z_D - z_{wD})$.

A Equação (5.32) representa a solução da fonte pontual contínua, no campo de Laplace, em um reservatório infinito. O raio adimensional r_D está definido na Equação (4.26).

Na Equação (5.32), o novo parâmetro u é definido como:

$$u = \begin{cases} s & \text{para reservatórios homogêneos} \\ sf(s) & \text{reservatórios naturalmente fraturados} \end{cases}$$

Este parâmetro é adicionado à solução a fim de ilustrar a possibilidade de introduzir funções que contemplem parâmetros de heterogeneidades da formação – tais como a idealização de dupla-porosidade em reservatórios naturalmente fraturados (Hauzen et. al., 1988 e Ozkan & Raghavan, 1991a, 1991b, 1991c). Na definição de u dada acima, $f(s)$ representa qualquer formulação que expresse as variáveis de um reservatório naturalmente fraturado. Expressões apropriadas para $f(s)$ podem ser encontradas na literatura, por exemplo: Warren e Root (1963), Kazemi (1969), DeSwaan-O (1971) e Raghavan (1993).

Nesta seção, o desenvolvimento da solução segue utilizando rigorosamente a definição geral do parâmetro u . Entretanto, as análises desta dissertação se restringirão apenas a reservatórios homogêneos [$f(s) = 1$].

Analogamente ao que foi apresentado para a determinação da solução no domínio do tempo, a solução da fonte pontual num reservatório de extensão radial infinita no domínio de Laplace pode ser então obtida pelo método da imagem. Para tal, é necessário obter as imagens da fonte nos planos $z = 0$ e $z = h$, alternando uma fonte e um sumidouro para que não haja escoamento através destes planos ($dp/dz = 0$). Desta forma, tem-se uma quantidade $2n$ de imagens localizadas em $z_{wD} \pm 2nh_D$ (n de $-\infty$ a $+\infty$) na direção z . Com isso, a resposta da pressão no domínio de Laplace é a soma das soluções individuais:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{\tilde{q}\mu}{4\pi kls} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left\{ \frac{\exp \left[-\sqrt{u} \sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 + (z_D - z_{wD} - 2nh_D)^2} \right]}{\sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 + (z_D - z_{wD} - 2nh_D)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{\exp \left[-\sqrt{u} \sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 + (z_D + z_{wD} - 2nh_D)^2} \right]}{\sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 + (z_D + z_{wD} - 2nh_D)^2}} \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Denominando $R_{xy,D}^2$ como a distância horizontal entre a fonte (x_w, y_w, z_w) e o ponto de observação (x, y, z) :

$$R_{xy,D}^2 = (x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 \quad (5.34)$$

E definindo z_{D1} e z_{D2} como sendo:

$$z_{D1} = z_D - z_{wD} \quad (5.35)$$

$$z_{D2} = z_D + z_{wD} \quad (5.36)$$

Então a equação (5.33) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p} = \frac{\tilde{q}\mu}{4\pi kls} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left[\frac{\exp\left(-\sqrt{u} \sqrt{R_{xy,D}^2 + (z_{D1} - 2nh_D)^2}\right)}{\sqrt{R_{xy,D}^2 + (z_{D1} - 2nh_D)^2}} + \right. \\ & \left. \frac{\exp\left(-\sqrt{u} \sqrt{R_{xy,D}^2 + (z_{D2} - 2nh_D)^2}\right)}{\sqrt{R_{xy,D}^2 + (z_{D2} - 2nh_D)^2}} \right] \quad (5.37) \end{aligned}$$

Mais uma vez utiliza-se a fórmula de somatório de Poisson para séries infinitas (Carslaw e Jaeger, 1959, p. 275),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - 2n\xi_e)^2}{4\tau}\right] = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\xi_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\tau}{\xi_e^2}\right) \cos n\pi \frac{\xi}{\xi_e} \right] \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{\tilde{q}\mu}{2\pi k l h_D S} & \left[K_0(R_{xy,D}\sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} R_{xy,D}) \right. \\ & \left. \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v_D \cos \varphi}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v'_D \cos \psi'}{h_D}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Onde $v_D = v/l$, e

$$u_n = u + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} \quad (5.41)$$

Note que $z_D = z_{wD} + v_D \cos \varphi$. Logo, a distribuição da pressão para uma fonte linear inclinada é então computada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{\tilde{q}\mu}{2\pi k l h_D S} & \int_{-h_w/2}^{+h_w/2} \left[K_0(R_D \sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} R_D) \right. \\ & \left. \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v'_D \cos \psi'}{h_D}\right) \right] dv'_D \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ou ainda, após modificar os limites de integração:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{\tilde{q}\mu}{2\pi k h_D S} & \int_{-h_w/2l}^{+h_w/2l} \left[K_0(R_D \sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} R_D) \right. \\ & \left. \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v'_D \cos \psi'}{h_D}\right) \right] dv'_D \end{aligned} \quad (5.43)$$

Novamente utilizando a definição de \tilde{q} [dada pela equação (5.19)], considerando vazão constante, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{q_w \mu}{2\pi k h_w h_D s} \int_{-h_w/2l}^{+h_w/2l} \left[K_0(R_D \sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} R_D) \cdot \right. \\ \left. \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v'_D \cos \psi'}{h_D}\right) \right] dv'_D \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde é importante notar as seguintes relações:

$$R_D = \sqrt{r_D^2 + v_D'^2 \sin^2 \psi' - 2r_D v_D' \sin \psi' \cos \theta_m} \quad (5.45)$$

e

$$r_D^2 = (x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 = \left(\frac{r}{r_w}\right)^2 = (v_D \sin \varphi)^2 \quad (5.46)$$

Substituindo a definição da pressão adimensional (Tabela 5.1) e realizando a seguinte mudança de variável,

$$r'_D = v'_D \sin \psi' \quad (5.47)$$

reescreve-se a equação (5.44) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}_D = \frac{1}{s h_{wD} \sin \psi'} \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \sin \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \sin \psi'} \left[K_0(R_D \sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} R_D) \cdot \right. \\ \left. \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + r'_D \cot g \psi'}{h_D}\right) \right] dr'_D \end{aligned} \quad (5.48)$$

Onde pode ser feita a seguinte redefinição da equação (5.45),

$$R_D = \sqrt{r_D^2 + r_D'^2 - 2r_D r_D' \cos \theta_m} = \sqrt{(r_D \cos \theta - r_D')^2 + r_D^2 \sin^2 \theta_m} \quad (5.49)$$

Embora a Eq. (5.48) represente a solução completa para o caso estudado, ela não é computacionalmente prática de se utilizar. Na verdade, embora expressões similares possam ser encontradas na literatura, elas não têm sido aplicadas devido a dificuldades numéricas (Lu, 1997). Com isso, Ozkan e Raghavan (2000) apresentaram formas alternativas para aplicação da Eq. (5.48), a fim de tornar possíveis as avaliações numéricas para qualquer intervalo de tempo⁸.

Neste mesmo estudo, Ozkan e Raghavan (2000) também apresentaram formas limites da solução dada pela equação (5.48), com o objetivo de obter assíntotas de tempo-curto e tempo-longo. O Apêndice C desta dissertação apresenta o rigoroso desenvolvimento matemático realizado na elaboração destas assíntotas – válidas para ângulos de inclinação entre $0^\circ < \psi < 90^\circ$. Segue abaixo as expressões finais elaboradas.

A assíntota de tempo-curto é expressa pela seguinte equação:

$$\overline{\Delta p}_D(s \rightarrow \infty) = \frac{\beta h_D}{2sh_{wD} \sin \psi'} K_0 \left[\sqrt{(z_D - z_{wD} - e)^2 + r_D^2 \sin^2 \theta_m} \sqrt{u} \right] \quad (5.50)$$

Invertendo a Eq. (5.50) para o domínio do tempo, tem-se:

$$\Delta p_D = \frac{\beta h_D}{4h_{wD} \sin \psi'} E_i \left[-\frac{(z_D - z_{wD} - e)^2 + r_D^2 \sin^2 \theta_m}{4t_D} \right] \quad (5.51)$$

onde

⁸ As derivações estão detalhadas no Apêndice B.

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{para } -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ 1 & \text{para } r_D \cos \theta_m = \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \quad \text{ou } r_D \cos \theta_m = -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ 0 & \text{para } r_D \cos \theta_m < \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \quad \text{ou } r_D \cos \theta_m > \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \end{cases} \quad (5.52)$$

A expressão final para a assíntota de tempo-longo, já invertida para o domínio do tempo, é expressa pelas seguintes equações (Ozkan e Raghavan, 2000):

$$\Delta p_D = \Delta p_{Df} + F \quad (5.53)$$

onde

$$\Delta p_{Df} = 0.5(\ln t_D + 0.080907) + 1 + \frac{2}{h_{wD} \text{sen } \psi'} \sigma \left(r_D \cos \theta_m, r_D \text{sen } \theta_m, -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi', +\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) \quad (5.54)$$

sendo

$$\sigma(x_D, y_D, a, b) = \frac{1}{4} \{ (x_D - b) \ln[(x_D - b)^2 + y_D^2] - (x_D - a) \ln[(x_D - a)^2 + y_D^2] \} - \frac{y_D}{2} \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{x_D - a}{y_D} \right) - \text{tg}^{-1} \left(\frac{x_D - b}{y_D} \right) \right] \quad (5.55)$$

e

$$F = \frac{h_D}{h_{wD}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D + z_{wD} + e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D - z_{wD} - e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right) \right] - \frac{2}{\pi \text{sen } \psi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} [I_0(b_1, \infty, -) + I_0(b_2, \infty, +)] \right\} \quad (5.56)$$

Nota-se que a Equação (5.48) e a respectiva assíntota para tempo-curto não podem ser numericamente avaliadas para o caso de um poço vertical (Ozkan e Raghavan, 2000). Contudo, é possível realizar uma aproximação a partir das Equações (5.44) e (5.45). Se impusermos $\psi' = 0$ na relação dada pela expressão (5.45), teremos $R_D = r_D$. Logo, adimensionalizando a equação (5.44), tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}_D = \frac{1}{sh_{wD}} \int_{-h_{wD}/2}^{+h_{wD}/2} \left[K_0(r_D \sqrt{u}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{u_n} r_D) \cdot \right. \\ \left. \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD} + v'_D \cos \psi'}{h_D}\right) \right] dv'_D \end{aligned} \quad (5.57)$$

Por fim, resolvendo a integral:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} = \frac{1}{s} K_0(r_D \sqrt{u}) + \frac{4h_D}{\pi sh_{wD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0(r_D \sqrt{u_n}) \cdot \\ \cos\left(n\pi \frac{z_D}{h_D}\right) \cos\left(n\pi \frac{z_{wD}}{h_D}\right) \text{sen}\left(n\pi \frac{h_{wD}}{2h_D}\right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Com isso, a Equação (5.58) acima se aplica a poços verticais. Vale ressaltar que esta equação é idêntica à solução proposta por Kuchuk e Kirwan (1987).

O caso limite de um poço horizontal não será abordado aqui. Para tal, soluções analíticas e semi-analíticas podem ser encontradas na literatura. Como referência, recomenda-se: Lee et. al. (2003) e Kamal (2009).

O comportamento transitório da pressão, para o caso de um poço inclinado de condutividade infinita, pode ser obtido a partir destas equações. Para tal, a pressão é computada num ponto equivalente com coordenadas r, θ, z dadas por (Ozkan e Raghavan, 2000):

$$r_D^* = \sqrt{1 + 0.09h_w^2 \text{sen}^2 \psi'} , \quad (5.59)$$

$$\theta_m^* = \cos^{-1} \left(\frac{0.3h_{wD} \text{sen} \psi'}{r_D^*} \right) \quad (5.60)$$

e

$$z_D^* = z_{wD} \pm 0.3h_{wD} \cos \psi' \quad (5.61)$$

O sinal de mais/menos na equação (5.61) corresponde à localização do poço na parcela superior ou inferior da formação, respectivamente.

6. APLICAÇÃO E RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados da investigação feita sobre o comportamento da pressão em poços inclinados, baseados nos desenvolvimentos apresentados nas seções anteriores. O objetivo aqui é apresentar resultados teóricos relativos ao efeito de inclinação dos poços, fornecendo um melhor entendimento físico sobre os parâmetros que afetam o transitório da pressão. Além disso, será avaliada a aplicabilidade das soluções apresentadas na prática da Análise de Teste.

6.1 Solução no Domínio do Tempo

Neste item será realizada uma análise do comportamento transitório da pressão, a partir da Equação (5.31), para diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional da formação. Para as análises realizadas, foi considerado um reservatório de óleo, homogêneo, isotrópico, com extensão radial infinita e limites verticais impermeáveis. Para o poço é atribuído a hipótese de completação total ($h_{wD} = h_D / \cos \psi$), sendo a pressão computada no centro da formação, $z_{wD} = h_D / 2$.

Nota-se que na solução dada pela Equação (5.31) há um operador somatório, com o termo limite superior infinito, contido em ambas as integrais no espaço e no tempo. Com o intuito de se obter resultados satisfatórios a partir desta solução, a fim de serem geradas curvas típicas, foram utilizados diferentes valores limites para o termo limite n do somatório. Por exemplo, para geração das curvas típicas na Figura (6.3) foram utilizados para os ângulos $\psi = 30^\circ$, $\psi = 60^\circ$ e $\psi = 75^\circ$, os limites $n = 30$, $n = 40$ e $n = 60$, respectivamente. Para a curva típica de um poço vertical ($\psi = 0^\circ$) foi utilizado $n = 1$, uma vez que para este caso a solução torna-se independente do operador somatório da espessura adimensional da formação (h_D), anulando o operador somatório. Para valores de h_D maiores que aquele da Figura (6.3), os valores de n devem ser maiores.

As Figuras (6.1) e (6.2) apresentam gráficos semi-log do comportamento da pressão adimensional em relação ao tempo adimensional, para $h_D = 100$ e $h_D = 200$, respectivamente.

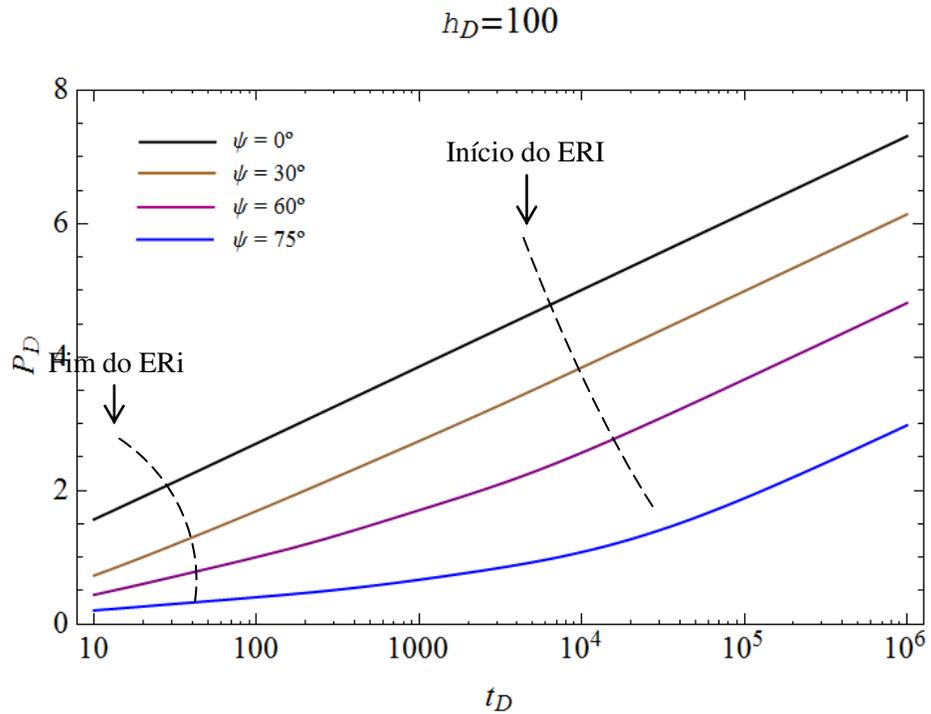


Figura (6.1): Semi-log de p_D vs. t_D para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.

A partir destas figuras observa-se que as curvas apresentam um regime de escoamento inicial (ERi) com comportamento linear, de inclinação igual a $1.151 \cos \psi'$, representado pela reta no tempo-curto. Após este regime de escoamento inicial, há um período de transição, na qual observa-se um aumento no desvio do comportamento da pressão em relação à solução da fonte linear ($\psi = 0^\circ$). Finalmente, observa-se o regime radial infinito (ERI), caracterizado por uma reta de inclinação 1.151 (independente da inclinação do poço).

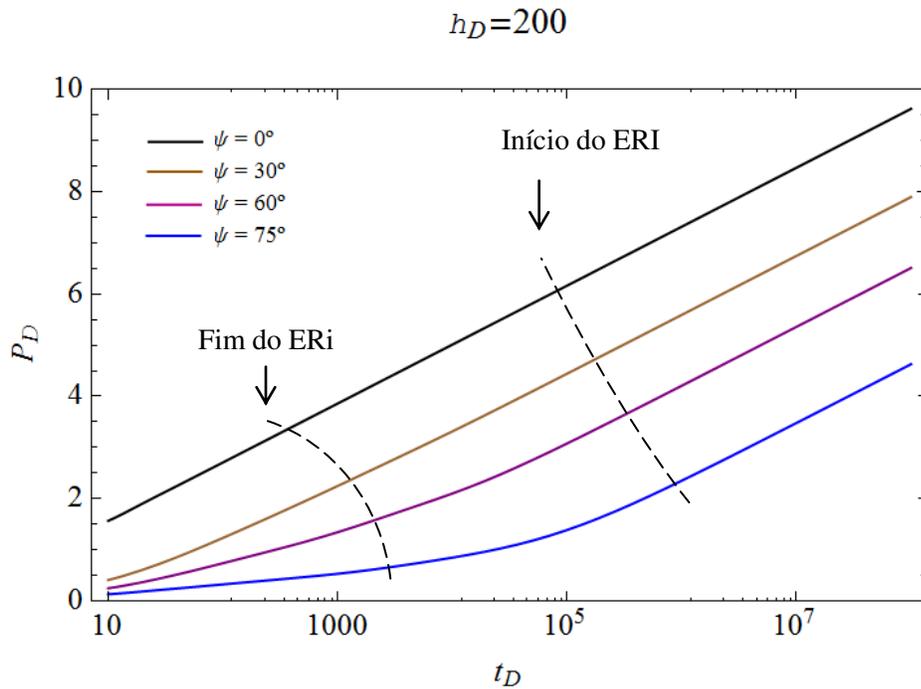


Figura (6.2): Semi-log de p_D vs. t_D para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 200$.

As Figuras (6.3) – (6.6) apresentam curvas típicas para diferentes ângulos de inclinação do poço, onde cada figura foi gerada para uma dada espessura adimensional da formação. Comparando-as, pode-se notar que quanto maior a inclinação do poço maior será a área de contato deste poço junto à formação, resultando numa menor queda de pressão adimensional. Este comportamento é análogo a um efeito de película negativo (estímulo), sendo tanto mais evidente quanto maior a espessura adimensional da formação. As figuras indicam que quando o ângulo de inclinação ψ é menor ou igual a 30° , o comportamento da solução torna-se relativamente próximo ao de um poço vertical. Entretanto, à medida que se aumenta a inclinação do poço, as diferenças são muito mais significativas. Ainda, quando $\psi = 0^\circ$, a solução para um poço vertical torna-se aplicável; uma vez que esta solução não depende de h_D .

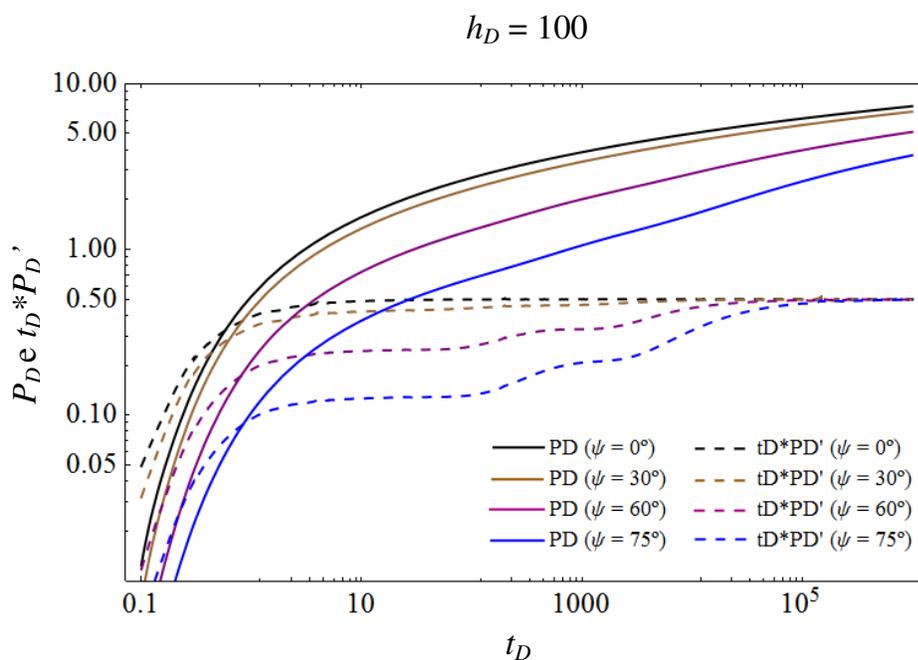


Figura (6.3): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.

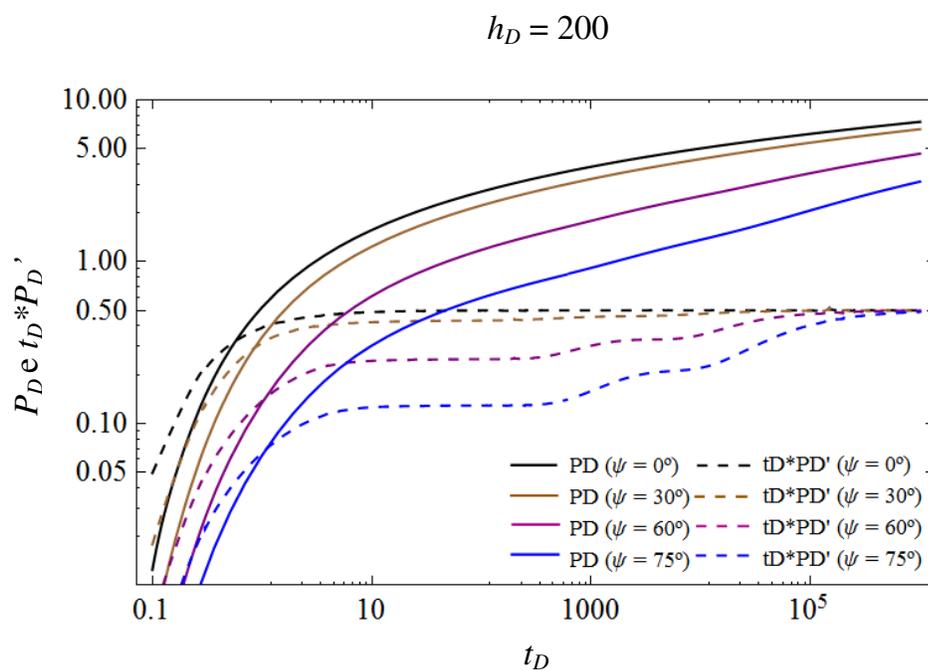


Figura (6.4): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 200$.

Pode-se observar que as curvas de derivada no tempo-curto apresentam valores menores do que no tempo-longo. No tempo-curto elas são influenciadas pelo aumento da área da formação aberta ao escoamento, devido à inclinação do poço. Logo, quanto maior a inclinação do poço menor será o valor da derivada neste intervalo. Para maiores ângulos ($\psi = 60^\circ$ e $\psi = 75^\circ$), a curva da derivada exibe, no tempo-curto, um regime de escoamento caracterizado por uma linha horizontal paralela ao radial infinito característico do tempo-longo. Classifica-se este transitório no tempo-curto como sendo o regime de escoamento radial inicial (ERi) e quanto maior o ângulo de inclinação do poço, maior será a predominância deste regime de escoamento. O comportamento da derivada neste intervalo satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{d p_{wD}}{d \ln t_D} = \left(t_D \frac{d p_{wD}}{d t_D} \right)_{ERi} = \frac{1}{2} \cos \psi \quad (6.1)$$

Nota-se, contudo, que o aumento do ângulo de inclinação resulta apenas num pequeno atraso para o fim deste regime de ERi no tempo-curto; porém, delonga o surgimento do regime de escoamento radial no tempo-longo. Ou seja, o intervalo entre o primeiro radial e o radial infinito torna-se cada vez mais longo com o aumento do ângulo de inclinação

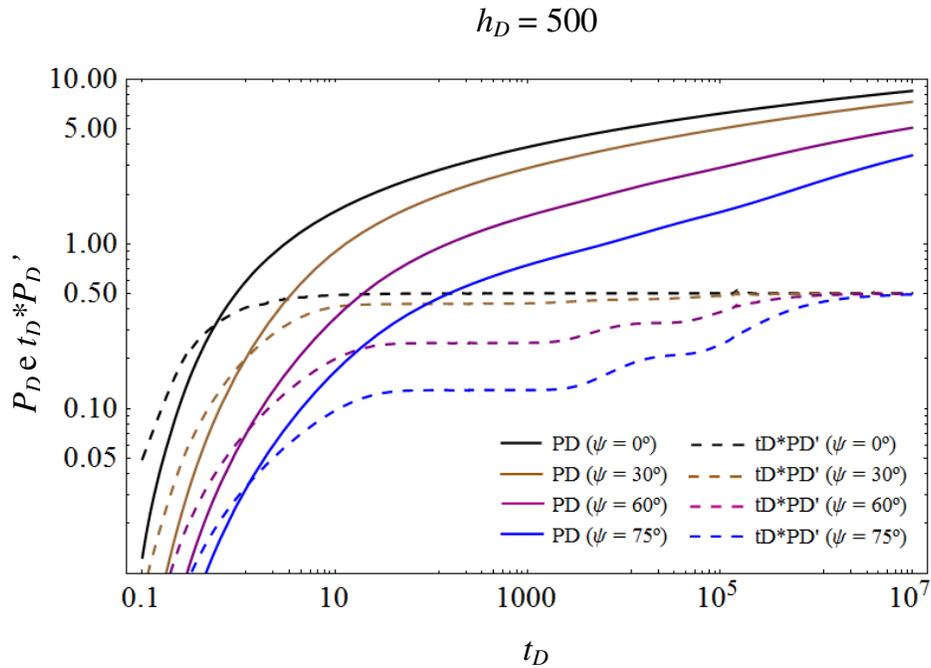


Figura (6.5): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 500$.

Ao fim do regime de ERI, observa-se um período de transição que se estende até que o regime radial infinito se estabeleça. Analisando a curva da derivada para o ângulo de inclinação $\psi = 75^\circ$ (azul tracejado), na Figura (6.6), nota-se que este período se desenvolve entre o intervalo $10^4 \leq t_D \leq 10^7$. Sobre este período de transição, não se encontra nenhuma menção na literatura para um possível regime de escoamento. Tampouco uma expressão que possa representar o comportamento do transitório da pressão durante este intervalo. No entanto, nesta dissertação foi possível observar um escoamento de característica radial durante este período. Através das Figuras (6.3) – (6.6) é possível notar um segundo patamar horizontal neste período de transição. A esta constatação foi atribuída a existência de um segundo regime de escoamento radial – sendo aqui denominado de escoamento radial de transição (ERT).

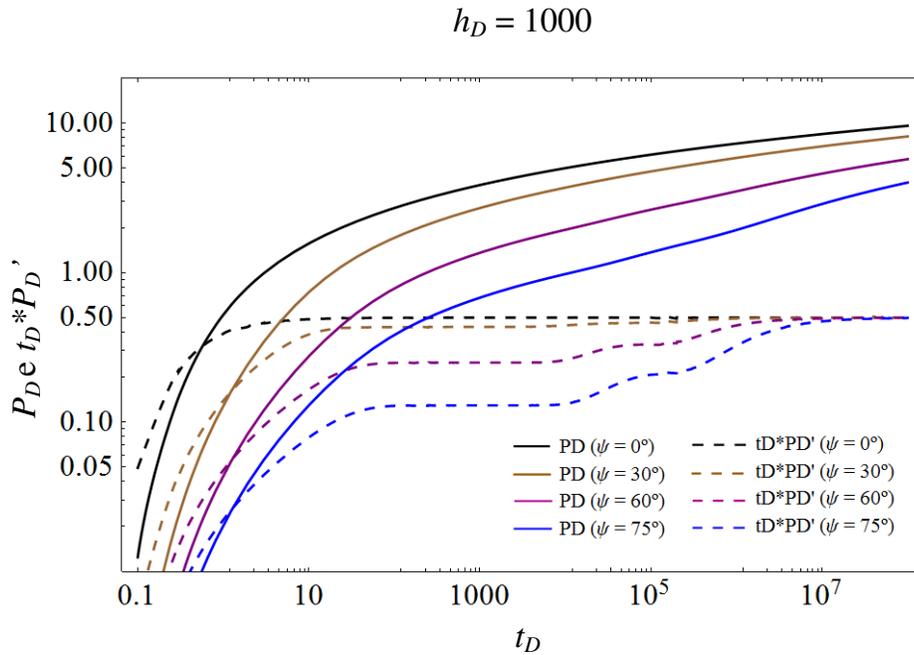


Figura (6.6): Curvas típicas para poço com diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 1000$.

Uma explicação física para o surgimento deste regime de ERT baseia-se na convergência das linhas de corrente do reservatório em direção ao poço inclinado [Figura (6.7)].

A fim de descrever o surgimento dos regimes de escoamento identificados, tomam-se como referência as curvas típicas geradas para um poço com inclinação $\psi = 60^\circ$ e $\psi = 75^\circ$ [Figuras (6.3) – (6.6)], em conjunto com a Figura (6.7).

Inicialmente, as linhas de corrente radiais predominam nas imediações do poço, onde convergem perpendicularmente ao eixo do poço - este comportamento caracteriza o primeiro radial, ou ERI.

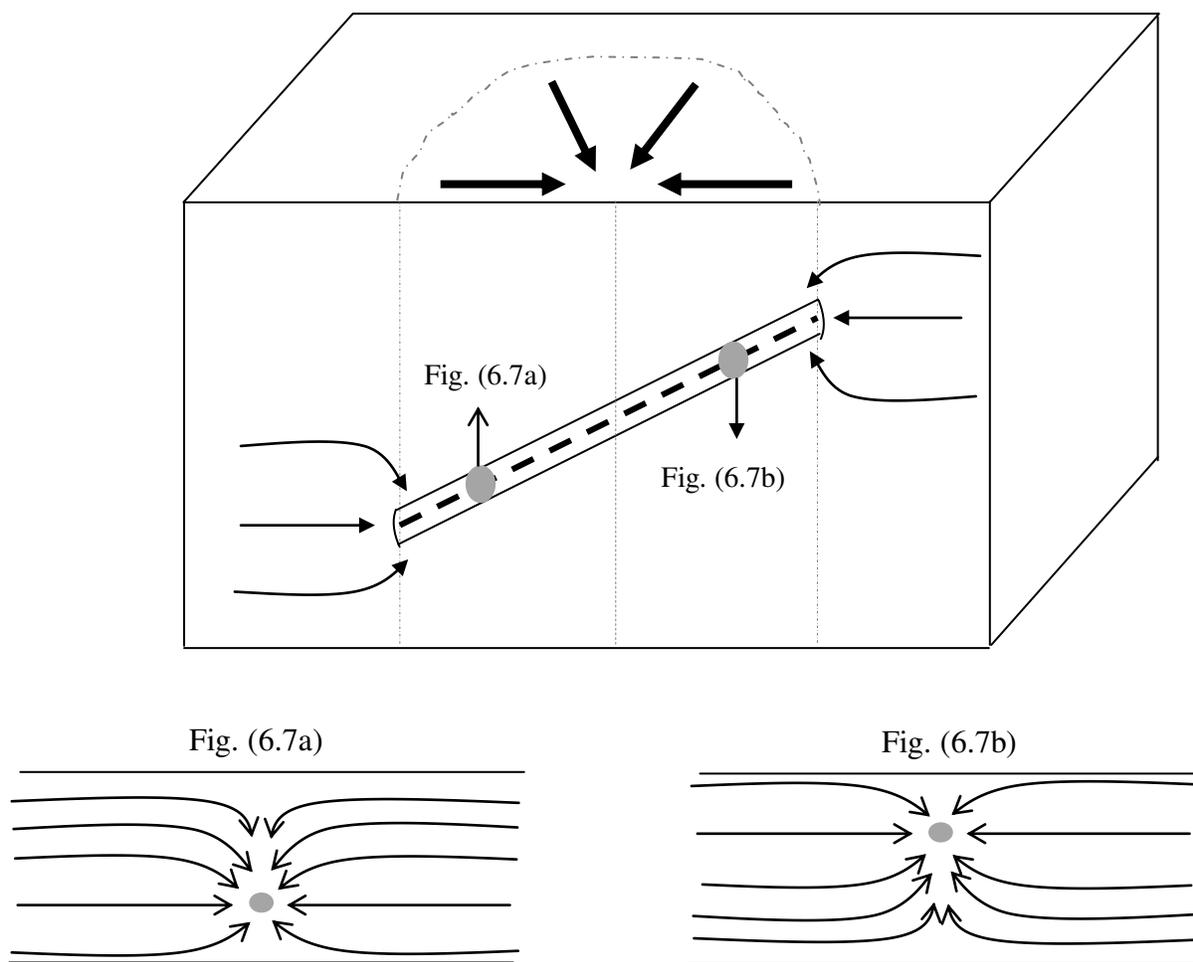


Figura (6.7): Ilustração das linhas de corrente do reservatório para um poço inclinado.

Com o decorrer do tempo, as linhas de corrente próximas às extremidades do poço passam a apresentar as primeiras linhas de convergência vertical. Estas primeiras linhas de corrente verticais surgem tanto da convergência próxima à base da formação em direção à parcela inferior do poço, quanto da convergência próximo ao topo da formação em direção à parcela superior do poço – este fenômeno descreve o primeiro ganho de inclinação na curva da derivada, logo após o fim do regime de ERI [Figuras (6.3) – (6.6)]. Após a curta duração destas linhas de convergência vertical, as linhas de corrente mais uma vez passam a convergir radialmente em direção ao poço, onde um segundo patamar horizontal é estabelecido. Este patamar foi identificado como um segundo regime de escoamento radial, denominado regime de escoamento radial de transição (ERT).

De forma análoga à descrição do parágrafo anterior, ao fim do regime de ERT, as linhas de corrente convergem para a direção radial paralela aos limites verticais, apresentando novamente um ganho de inclinação na curva da derivada antes de atingir o regime de ERI.

A validação desta existência é feita a partir de uma importante observação. A partir das curvas típicas geradas é possível notar que, quanto maior o ângulo de inclinação do poço, menor será a duração do regime de ERT. Analisando a Figura (6.6), é possível observar que para o ângulo de inclinação $\psi = 60^\circ$ o ERT se desenvolve no intervalo entre $5.10^4 \leq t_D \leq 2.10^5$, enquanto que para $\psi = 75^\circ$ o ERT se desenvolve entre $10^5 \leq t_D \leq 2,3.10^5$. Intuitivamente é de se esperar este tipo de comportamento, uma vez que quanto maior o ângulo de inclinação do poço, mais o transitório da pressão se comporta como o obtido por um poço horizontal. Neste caso limite, o regime de transição entre os ERi e ERI caracterizar-se-ia como um regime de escoamento linear – típico de poços horizontais. Em tempo, pode ser claramente notado o quanto a curva da derivada para o ângulo de 75° (azul tracejado) tende a um comportamento similar ao de poço horizontal. Os dois platôs (inicial e final) desenvolvidos estão relacionados ao regime de escoamento radial que ocorrem nesta geometria de poço. Na Figura (6.6), o primeiro platô tende a se estabilizar a um valor de $t_D * p'_D \approx 0.129$, correspondendo ao escoamento radial num poço horizontal sem o efeito de barreiras. O segundo platô estabiliza-se em $t_D * p'_D = 0.5$, representando o regime de ERI no tempo-longo.

Verifica-se que, assim como o regime de ERi, o comportamento do regime de ERT também é proporcional ao ângulo de inclinação do poço. Com isso, a partir da Equação (6.1), foi possível chegar a uma aproximação que satisfaz o comportamento da derivada neste intervalo:

$$\frac{d p_{wD}}{d \ln t_D} = \left(t_D \frac{d p_{wD}}{d t_D} \right)_{ERT} = \frac{1}{2} (\cos \psi')^{0,6} \quad (6.2)$$

Importante salientar que embora relações equivalentes à Equação (6.2) possam ser vistas na literatura (Dinh e Tiab, 2009 e Habte et. al., 2010), até o momento estas não tem sido aplicadas ao caso de poços inclinados. A constatação do regime de ERT em poços inclinados não tem sido comentada na literatura.

Seguindo a análise das curvas típicas, fica evidente que após o transitório da pressão atingir ambos os limites verticais da formação, o escoamento começa a convergir radial e paralelamente aos limites verticais em direção ao poço. Este período é conhecido como sendo o de regime de escoamento radial infinito (ERI), onde a derivada da pressão se estabelece em um valor constante:

$$\frac{d p_{wD}}{d \ln t_D} = \left(t_D \frac{d p_{wD}}{d t_D} \right)_{ERI} = \frac{1}{2} \quad (6.3)$$

Embora os modelos apresentados nesta dissertação sejam para o caso de um reservatório de extensão radial infinita, vale ressaltar que uma vez atingidos os limites radiais do reservatório, o regime de ERI chega ao fim – assim como o comportamento transitório da pressão. Neste ponto, o escoamento passa ao estado pseudopermanente (no caso de limites selados) ou permanente (para caso de limites com manutenção de pressão).

A partir deste ponto será discutida a análise direta das expressões analíticas, para cada regime de escoamento apresentado previamente. A Figura (6.8) apresenta um sumário de cada regime de escoamento analisado neste capítulo.

➤ **Escoamento Radial Inicial, ERi**

Como visto nas curvas típicas anteriormente apresentadas, se a espessura da formação (h_D) e o ângulo de inclinação do poço forem suficientemente grandes, um regime de escoamento radial se desenvolve no tempo-curto. A interpretação deste regime pode ser realizada identificando-se uma linha horizontal na curva de derivada em conjunto com a relação dada pela Equação (6.1). Substituindo as definições das variáveis adimensionais na Equação (6.1), temos:

$$(t * \Delta p')_{ERi} = \frac{q\mu \cos \psi'}{4\pi k_r h} \quad (6.4)$$

Logo, tomando qualquer ponto na curva de derivada durante o período de ERI, a Equação (6.4) pode ser aplicada tanto no cálculo da permeabilidade, k_r , quanto no ângulo de inclinação do poço, ψ - desde que se tenha de antemão o valor de uma das variáveis.

➤ **Escoamento Radial de Transição, ERT**

Como mencionado anteriormente nesta dissertação, em alguns casos, foi possível observar um regime de escoamento radial durante a transição entre o radial inicial e o radial infinito. A este regime deu-se o nome de escoamento radial de transição. Em sua análise é notada uma peculiaridade: quanto maior o ângulo de inclinação do poço, menor será o período de duração desde regime. Esta constatação pode ser vista nas Figuras (6.3) – (6.6), comparando as curvas de derivada para $\psi = 60^\circ$ e 75° . A explicação atribuída a este comportamento diz respeito ao fato de que quanto maior o ângulo de inclinação mais o transitório da pressão se aproxima do comportamento obtido para um poço horizontal.

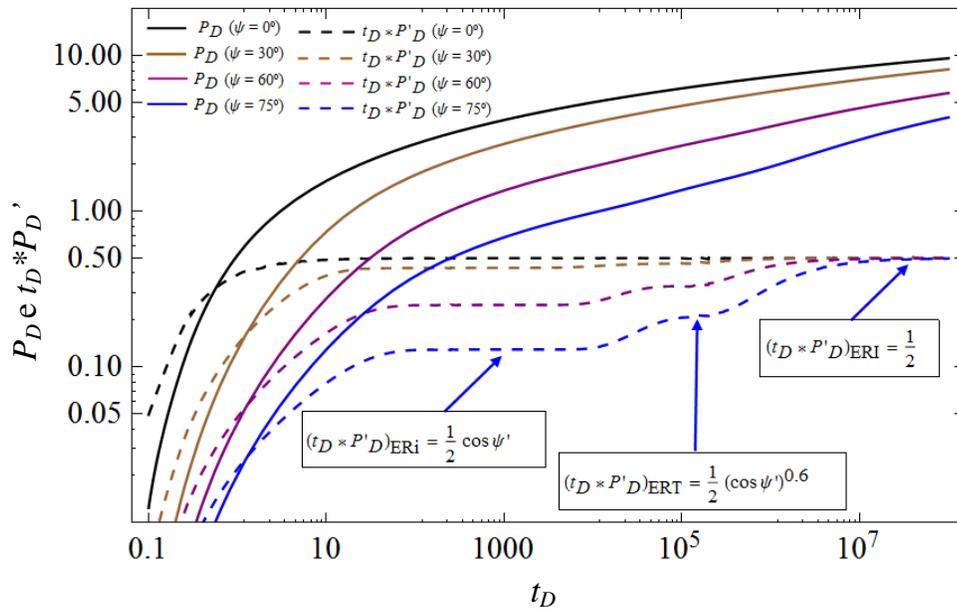


Figura (6.8): Regimes de escoamento em um poço inclinado num reservatório infinito com espessura adimensional $h_D = 1000$.

De forma análoga àquela apresentada para o ERI, a interpretação deste regime pode ser realizada identificando-se uma linha horizontal na curva de derivada em conjunto com a relação

dada pela Equação (6.2). Substituindo as definições das variáveis adimensionais na Eq. (6.2), tem-se:

$$(t * \Delta p')_{ERT} = \frac{q\mu(\cos \psi')^{0,6}}{4\pi k_r h} \quad (6.5)$$

Da mesma forma, a Equação (6.5) pode ser aplicada tanto no cálculo da permeabilidade, k_r , quanto no do ângulo de inclinação do poço, ψ - desde que se tenha de antemão o valor de uma das variáveis. Ainda, a partir da Eq. (6.5) é possível derivar a seguinte relação entre Δp e t :

$$(\Delta p)_{ERT} = \frac{2,303q\mu(\cos \psi')^{0,6}}{4\pi k_r h} \log t + C_1 \quad (6.6)$$

onde C_1 é uma constante.

A Equação (6.6) indica que um gráfico semi-log de Δp vs. t gera uma reta com a seguinte inclinação:

$$m_{ERT} = \frac{1,151q\mu(\cos \psi')^{0,6}}{2\pi k_r h} \quad (6.7)$$

Logo, a partir de uma análise da curva num gráfico semi-log (no intervalo em que se estabelece este regime de escoamento) também é possível estimar o valor da permeabilidade, ou o ângulo de inclinação.

Nota-se que a partir de uma análise deste regime de escoamento é possível estimar o valor da permeabilidade da formação, sem a necessidade de estender o teste até que o transitório atinja o radial infinito. Este aspecto proporciona uma menor duração para um Teste de Poço, resultando em menores custos operacionais.

➤ **Escoamento Radial Infinito, ERI**

Este regime de escoamento é descrito pela Equação (6.3) e é identificado pela linha horizontal no tempo-longo, com valor da derivada constante e igual a 0.5. Este regime torna-se comum a todos os ângulos de inclinação a partir do momento em que a pressão atinge ambos os limites verticais impermeáveis da formação. Substituindo as definições das variáveis adimensionais na Equação (6.3), tem-se:

$$(t * \Delta p')_{ERI} = \frac{q\mu}{4\pi k_r h} \quad (6.8)$$

A partir da relação acima é possível realizar uma estimativa direta no cálculo da permeabilidade, k_r .

A Figura (6.9) apresenta curvas típicas para diferentes valores de h_D num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$. Pode-se concluir que quanto maior a espessura adimensional da formação maior será a duração do período de regime ERi. Também pode ser notado que para maiores valores da espessura adimensional maior será o tempo para se desenvolver o regime ERI.

Outro aspecto pode ser notado na Figura (6.9), a respeito do período em que se desenvolvem os regimes de escoamento. Uma vez que, para um mesmo ângulo de inclinação do poço, o comportamento característico das curvas de derivada para os regimes ERi, ERT e ERI são independentes da espessura adimensional da formação, estes regimes se desenvolvem no mesmo patamar indicado na figura.

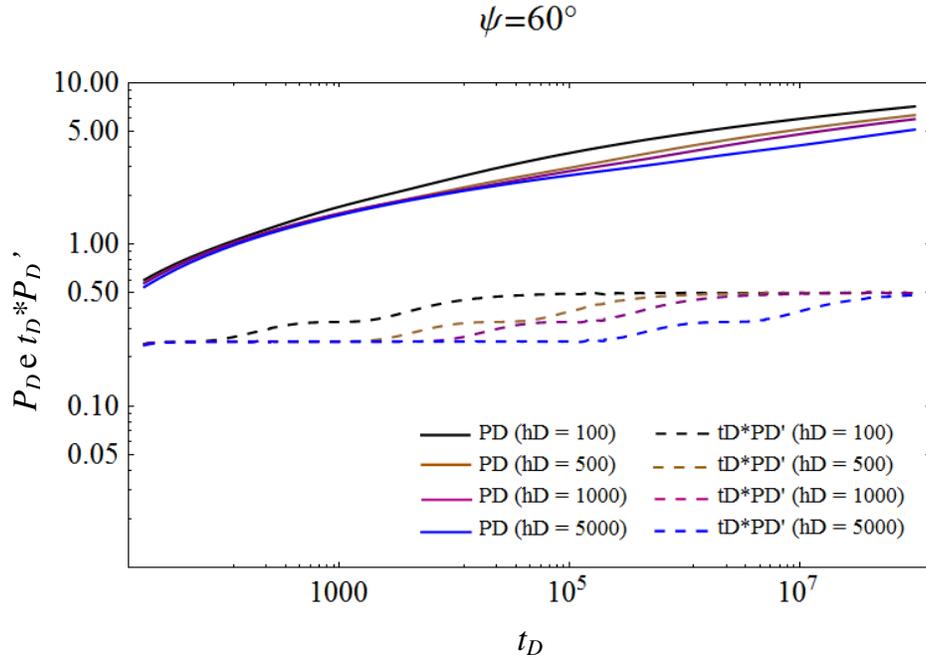


Figura (6.9): Curvas típicas para poço com ângulo de inclinação $\psi = 60^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .

Como mencionado anteriormente, quando $\psi = 0^\circ$ a solução torna-se independente de h_D ; a Figura (6.10) ilustra esta constatação. Isto é esperado, uma vez que a solução apresentada por Cinco-Ley (1974) foi derivada considerando o poço como uma fonte linear. Logo, a pressão adimensional para um poço inclinado deve gerar a solução da fonte linear quando $\psi = 0^\circ$.

Para mostrar esta constatação, partindo da solução proposta por Cinco-Ley (1974), onde ao considerar $\psi = 0^\circ$ na Equação (5.24), tem-se:

$$p_D(r_D, \theta_m, z_D, t_D, \psi' = 0, h_D) = \frac{1}{2h_D} \int_0^{t_D} e^{\frac{-r_D^2(\sin^2 \theta_m + \cos^2 \theta_m)}{4\tau}} \frac{1}{\tau} \left[h_D + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \tau}{h_D^2}} \cos \frac{n\pi z_D}{h_D} \int_{-\frac{h_D}{2}}^{+\frac{h_D}{2}} \cos n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h_D} \right) dz \right] d\tau \quad (6.9)$$

Dado que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{h_D}{2}}^{+\frac{h_D}{2}} \cos n\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h_D} \right) dz = 0 \quad (6.10)$$

Logo, a equação (6.9) torna-se:

$$p_D(r_D, t_D, \psi' = 0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_D} \frac{e^{-\frac{r_D^2}{4\tau}}}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.11)$$

que é a solução da fonte linear:

$$p_D(r_D, t_D, \psi' = 0) = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \quad (6.12)$$

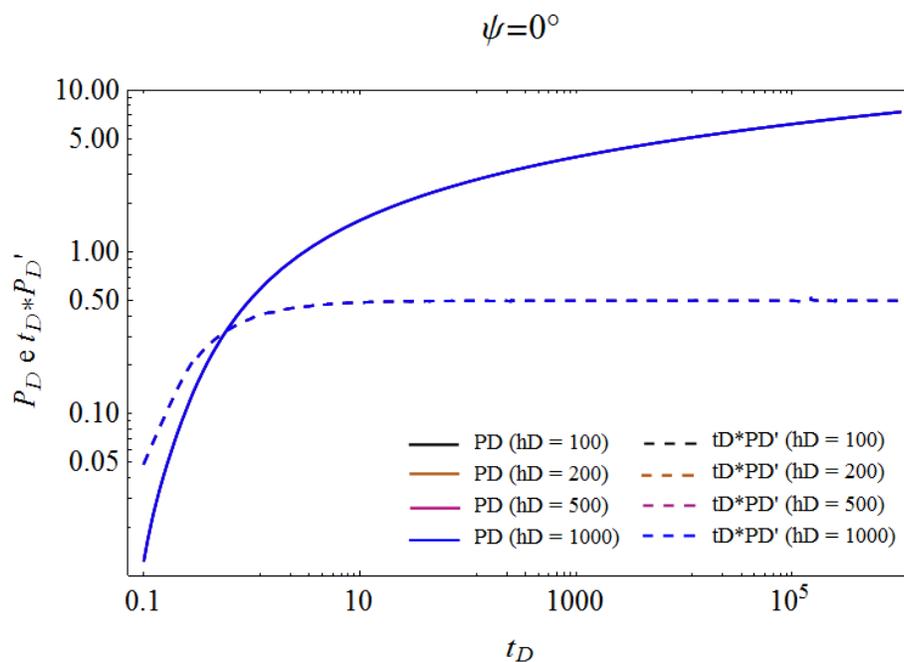


Figura (6.10): Curvas típicas para poço com inclinação $\psi = 0^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .

Para pequenos ângulos, as curvas de pressão e derivada não apresentam diferenças significativas com a variação da espessura adimensional, como pode ser visto na Figura (6.11). Desta constatação, pode-se afirmar que para poços com ângulos de inclinação menores ou iguais a 30° , a solução, assim como o comportamento transitório da pressão, torna-se muito próxima à de um poço vertical.

Até este ponto, foram apresentadas aproximações analíticas para cada um dos regimes de escoamento identificados. A partir destas expressões, é possível realizar uma interpretação direta utilizando a curva de derivada da pressão sem o auxílio de um ajuste à curva típica. Este procedimento é apresentado no item a seguir.

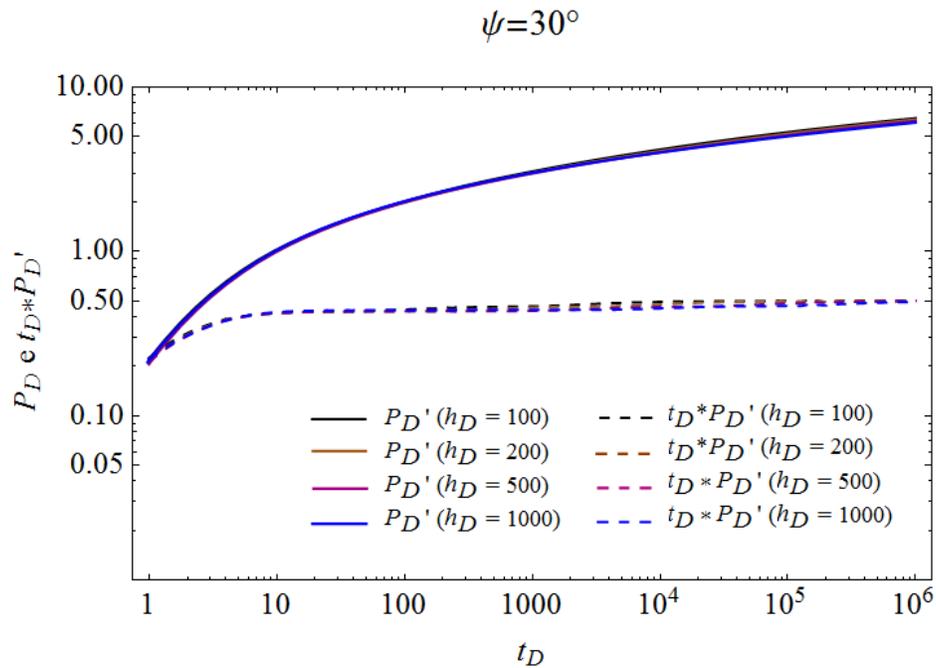


Figura (6.11): Curvas típicas para poço com inclinação $\psi = 30^\circ$ e diferentes valores de espessura adimensional, h_D .

6.1.1 Procedimento de Análise

Como mostrado pelas Equações (6.1) - (6.3), as curvas de derivada apresentam patamares distintos para cada regime de escoamento. A análise direta destas expressões num gráfico diagnóstico fornece uma rápida estimativa do valor de permeabilidade.

O exemplo a seguir tem o propósito de ilustrar o procedimento de análise baseado na TDS. Para tal, foram gerados dados sintéticos de um teste de pressão em um poço inclinado a partir da Equação (5.31). Os parâmetros utilizados para gerar os dados estão listados na Tabela (6.1).

Tabela (6.1): Parâmetros do reservatório/poço para o exemplo gerado.

PARÂMETROS	SÍMBOLOS	SISTEMA INTERNACIONAL	UNIDADES DE CAMPO
Vazão	q	$2,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$	125 bbl/d
Ângulo de inclinação do poço	ψ	60°	60°
Espessura do reservatório	h	91,44 m	300 ft
Permeabilidade radial	k_r	$4,9 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$	50 mD
Porosidade	ϕ	20%	20%
Compressibilidade total da formação	c_t	$2,9 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$	$2 \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$
Viscosidade	μ	$1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$	1,3 cP
Raio do poço	r_w	0,0762 m	0,25 ft

A Figura (6.12) apresenta o gráfico diagnóstico para os dados de pressão gerados.

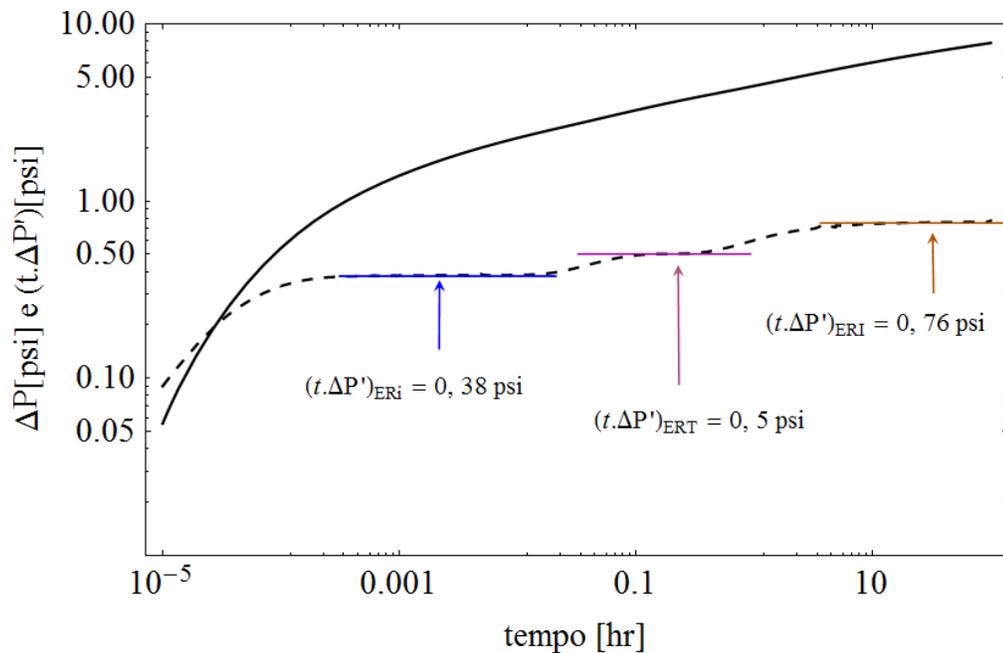


Figura (6.12): Gráfico diagnóstico dos dados sintético gerados.

A partir de cada regime de escoamento identificado (ERi, ERT e ERI), obtêm-se os respectivos valores da derivada da pressão:

$$(t * \Delta p')_{ERi} = 0,38 \text{ psi}$$

$$(t * \Delta p')_{ERT} = 0,5 \text{ psi}$$

$$(t * \Delta p')_{ERI} = 0,76 \text{ psi}$$

Utilizando as expressões para cada regime de escoamento [Eqs. (6.4), (6.5) e (6.8)], é possível estimar os valores de permeabilidade. Realizando este procedimento para o regime de ERT, a partir da Equação (6.4) em unidades de campo, tem-se:

$$k_r = \frac{70.6q\mu(\cos \psi')^{0,6}}{h(t * \Delta p')_{ERT}} = \frac{(70,6). (125). (1,3). (\cos 60^\circ)^{0,6}}{(300). (0,5)} = 50,46 \text{ mD}$$

Realizando o mesmo procedimento para os regimes de ERi e ERI, estima-se: $k_r = 50,31 \text{ mD}$ e $k_r = 50,31 \text{ mD}$, respectivamente.

Na Figura (6.12), verifica-se que o regime de ERT se estabelece num intervalo curto entre $0.1 < t < 0.4$ [hr]. A Figura (6.13) apresenta o gráfico semi-log para este período.

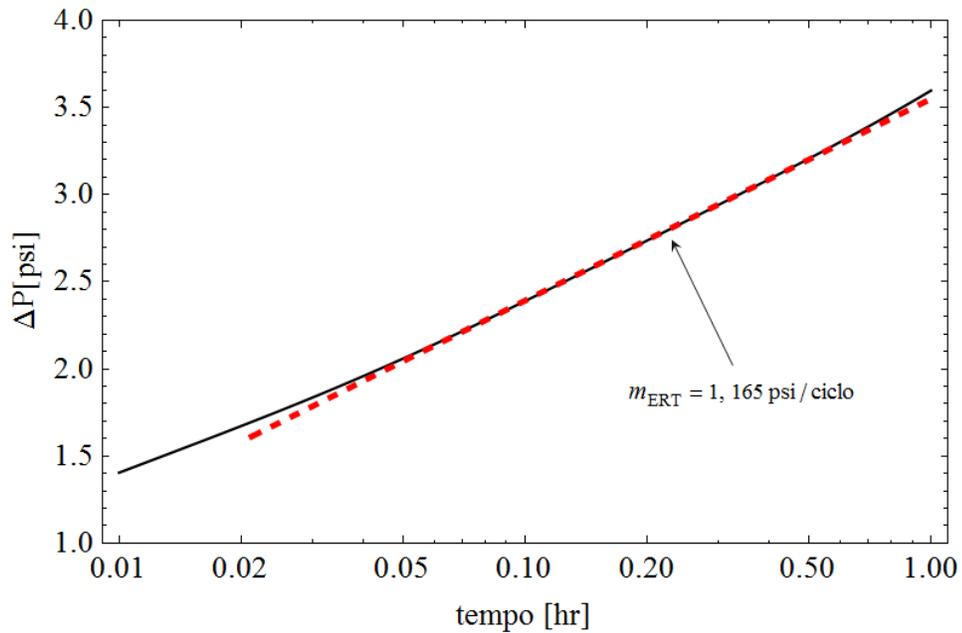


Figura (6.13): Gráfico semi-log para o intervalo do regime de ERT.

A partir da inclinação da reta, ajustada na Figura (6.12), também é possível estimar o valor da permeabilidade. Utilizando a Equação (6.7), em unidades de campo, tem-se:

$$k_r = \frac{162,56q\mu(\cos \psi')^{0,6}}{h m_{ERT}} = \frac{162,56 \cdot (125) \cdot (1,3) \cdot (\cos 60^\circ)^{0,6}}{(300) \cdot 1,165} = 50,08 \text{ mD}$$

As análises realizadas neste exemplo servem para ilustrar o quão importante é escolher os pontos no gráfico diagnóstico que melhor representem cada regime de escoamento – uma vez que a análise direta aplicada ao gráfico logarítmico faz com que o cálculo da permeabilidade seja muito sensível a este ajuste.

6.2 Solução no Domínio de Laplace

Neste item será realizada uma análise do comportamento transitório da pressão, baseada na solução derivada no domínio de Laplace. Serão avaliadas as assíntotas de aproximação para tempo-curto e tempo-longo.

Em todas as computações apresentadas aqui, e nas seções seguintes que contemplam a solução no domínio de Laplace, foi utilizado o algoritmo de inversão numérica sugerido por Stehfest (1970). A precisão dos resultados obtidos por este algoritmo é governada pelo parâmetro N . Em suma, este parâmetro determina o número de termos a serem considerados na inversão da função no domínio de Laplace para o domínio do tempo⁹. Teoricamente, a precisão da inversão numérica deveria aumentar com o aumento do valor do parâmetro N . Na prática, contudo, à medida que N torna-se muito grande, o resultado sofre de erros de arredondamento. Stehfest (1970) sugere que o valor ótimo de N seja aproximadamente proporcional ao número de dígitos usados na programação. Nesta dissertação, a inversão numérica foi realizada com valor de N igual a 8.

➤ **Aproximação para tempo-curto ($s \rightarrow \infty$)**

A Figura (6.14) a seguir ilustra o comportamento da assíntota derivada para tempo-curto para diversos valores do ângulo de inclinação (ψ). Esta figura foi gerada a partir da Equação (5.51), para um reservatório com espessura adimensional $h_D = 100$ e poço de completção total (CT), $h_{wD} = h_D / \cos \psi$.

⁹ Para mais detalhes, verificar a publicação de Stehfest (1970).

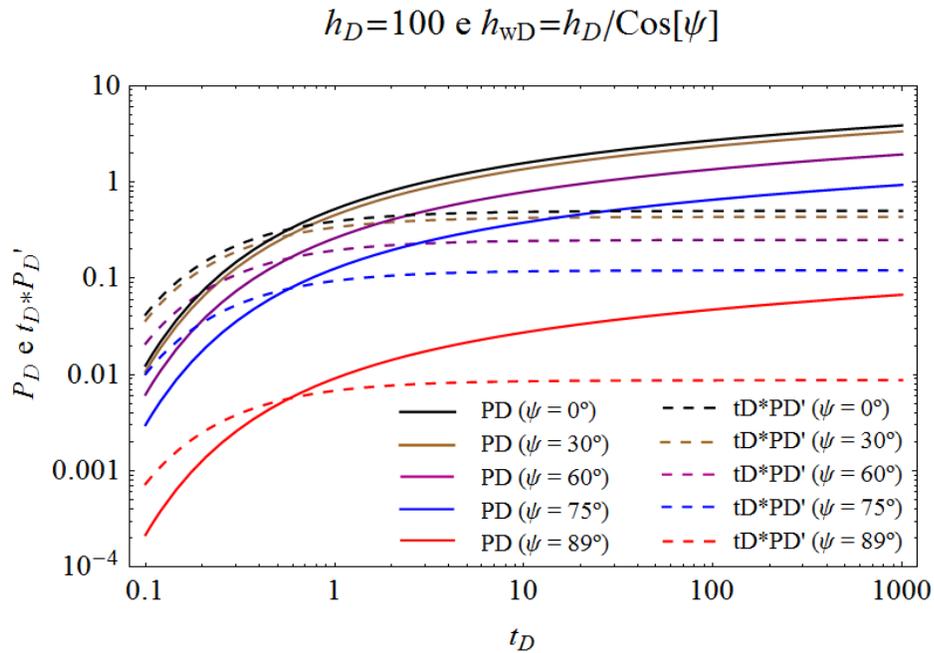


Figura (6.14): Comportamento da assíntota para tempo-curto para diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.

Na Figura (6.14), as curvas da assíntota para tempo-curto correspondem ao regime de ERI, para cada ângulo de inclinação respectivamente. Verificou-se que, assim como o modelo analítico, este regime de escoamento se estabelece em patamares que podem ser determinados pela Equação (6.1). As curvas para um poço vertical ($\psi = 0^\circ$) foram geradas a partir da Equação (5.58) – uma vez que a assíntota apresentada não é eficiente para a computação deste caso limite.

A análise realizada com a Figura (6.9) mostrou que o comportamento característico das curvas de derivada para cada regime de escoamento, para um mesmo ângulo de inclinação do poço, é independente da espessura adimensional da formação. Logo, para um dado ângulo de inclinação, o comportamento da assíntota de tempo-curto também deveria apresentar curvas típicas independentes da espessura adimensional. A Figura (6.15) apresenta o resultado para esta análise.

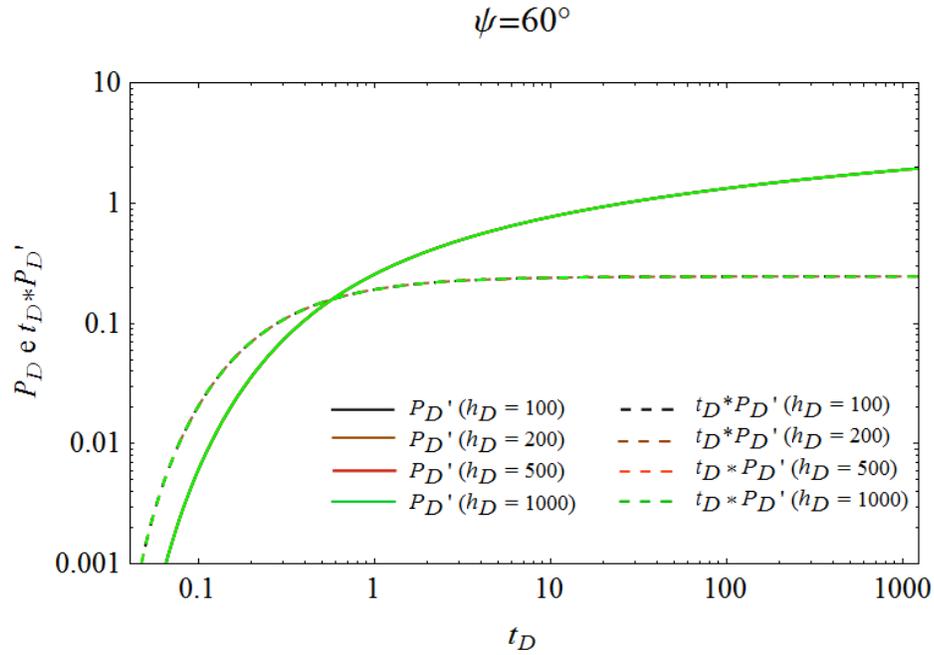


Figura (6.15): Comportamento da assíntota para tempo-curto para diferentes valores de espessura adimensional, h_D , num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$.

É importante ressaltar que a Figura (6.15) foi gerada para poços de completção total (CT), respeitando a hipótese considerada nas derivações da solução analítica. Contudo, a solução da assíntota para tempo-curto [Eq. (6.53)] é função da espessura adimensional da formação (h_D), do ângulo de inclinação (ψ) e do comprimento do poço (h_{wD}). Logo, através desta assíntota também é possível gerar curvas típicas para o caso de poços de completção parcial (CP), $h_{wD} < h_D / \cos \psi$.

A Figura (6.16) apresenta o comportamento da pressão para poços de completção parcial (CP).

$$h_D = 1000 \text{ e } \psi = 60^\circ$$

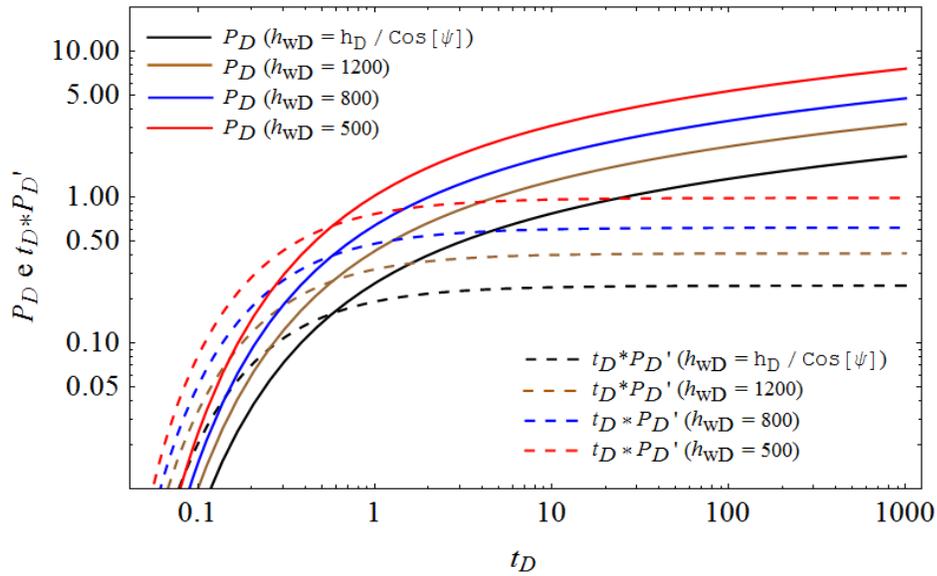


Figura (6.16): Comportamento da assíntota para tempo-curto em poços de CP, $h_{wD} < h_D / \cos \psi$, com inclinação $\psi = 60^\circ$ e espessura adimensional $h_D = 1000$.

Na Fig. (6.16), nota-se que, para um mesmo ângulo de inclinação, a derivada correspondente ao regime de ERi em poços de CP varia de acordo com o intervalo aberto à produção, h_{wD} . Desta observação, é possível chegar à seguinte relação:

$$\frac{d p_{wD}}{d \ln t_D} = \left(t_D \frac{d p_{wD}}{d t_D} \right)_{ERi} = \frac{h_D}{2 h_{wD}} \quad (6.13)$$

A partir das curvas típicas apresentadas pelas Figuras (6.3) – (6.6), foi possível notar que o aumento da inclinação do poço gera menor queda de pressão adimensional, resultando em valores menores para a derivada no regime de ERi. Esta observação condiz com a hipótese de poços de CT - uma vez que há uma maior área de contato do poço com a formação. Contudo, para um determinado ângulo de inclinação, a restrição do intervalo aberto (CP) à produção resulta numa maior queda de pressão.

A Figura (6.17) apresenta uma comparação do comportamento da pressão, no tempo-curto, entre poços inclinados de CT e de CP. Nota-se que, para um determinado ângulo de inclinação, a diminuição do intervalo aberto à produção resulta em maior queda de pressão, em comparação ao poço de CT.

Desta constatação, é possível redefinir a Eq. (6.1) da seguinte forma:

$$\frac{d p_{wD}}{d \ln t_D} = \left(t_D \frac{d p_{wD}}{d t_D} \right)_{ERiCP} = \frac{h_{wDCT}}{h_{wDCP}} \frac{1}{2} \cos \psi = \frac{\hat{\alpha}}{2} \cos \psi \quad (6.14)$$

onde $\hat{\alpha}$ representa a razão de entre o comprimento do poço totalmente completado e o comprimento real do intervalo aberto à produção (h_{wDCT}/h_{wDCP}).

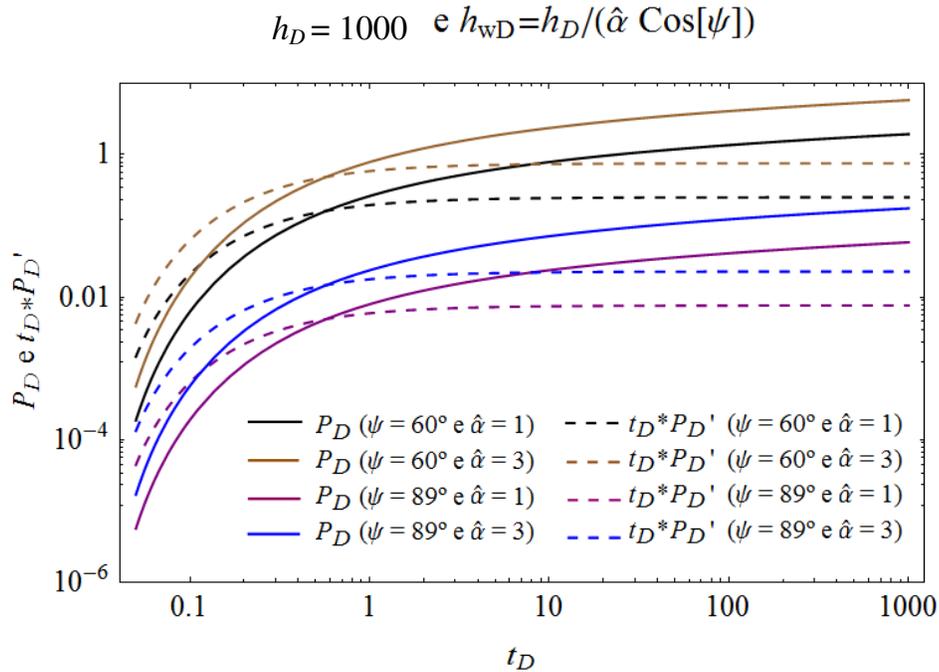


Figura (6.17): Comportamento da assíntota para tempo-curto em poços de CT, $h_{wD} = h_D / \cos \psi$, e de CP, $h_{wD} < h_D / \cos \psi$, para ângulos de inclinação $\psi = 60^\circ$ e $\psi = 89^\circ$, e espessura adimensional $h_D = 1000$.

➤ **Aproximação para tempo-longo ($s \rightarrow 0$).**

A Figura (6.18) ilustra o comportamento da assíntota derivada para tempo-longo. Esta figura foi gerada a partir da Equação (5.53), para um reservatório com espessura adimensional $h_D = 100$ e poços com diversos ângulos de inclinação e completação total ($h_{wD} = h_D / \cos \psi$). Nesta figura observa-se o desenvolvimento do regime de ERI.

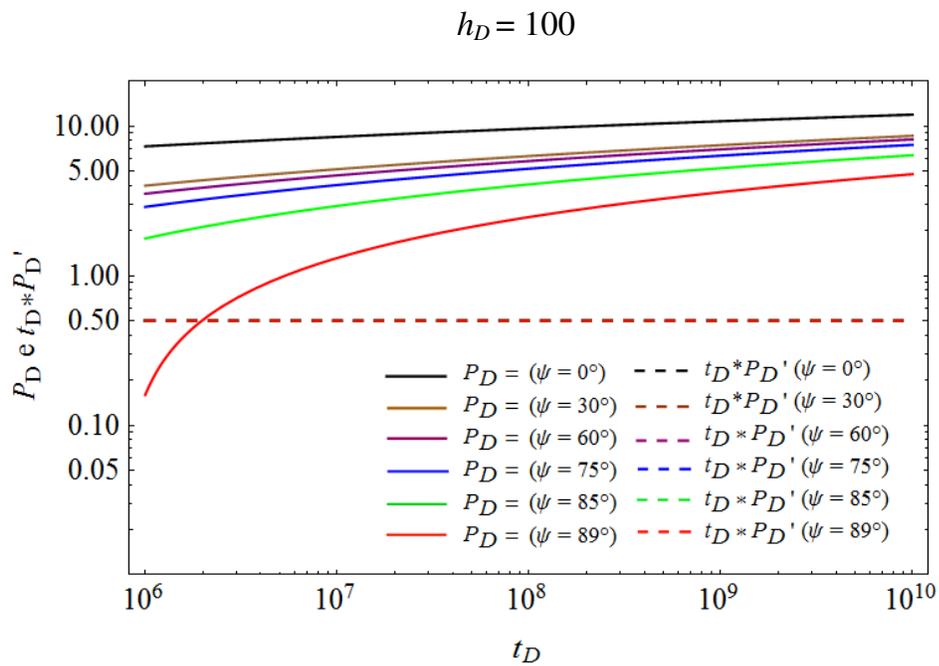


Figura (6.18): Comportamento da assíntota para tempo-longo para diferentes ângulos de inclinação e espessura adimensional $h_D = 100$.

Na Figura (6.18) é possível notar uma menor queda de pressão com o aumento do ângulo de inclinação do poço. Para as curvas da derivada, nota-se que todas se estabelecem num valor constante $(t_D * P_D') = 0,5$, característico do ERI. Ainda, as curvas para um poço vertical ($\psi = 0^\circ$) foram geradas a partir da Equação (5.58) – uma vez que a assíntota para tempo-longo apresentada não é eficiente para a computação deste caso limite.

A Figura (6.19) a seguir ilustra a validação das assíntotas derivadas para tempo-curto e tempo-longo, através de uma comparação com o resultado obtido pela solução derivada no

domínio do tempo. Nesta figura é possível notar o bom ajuste das assíntotas aos intervalos de regime de ERI e ERI, junto à curva típica gerada para um poço com inclinação $\psi = 60^\circ$. Logo, também torna-se possível realizar estimativas para o comportamento transitório da pressão a partir destas assíntotas.

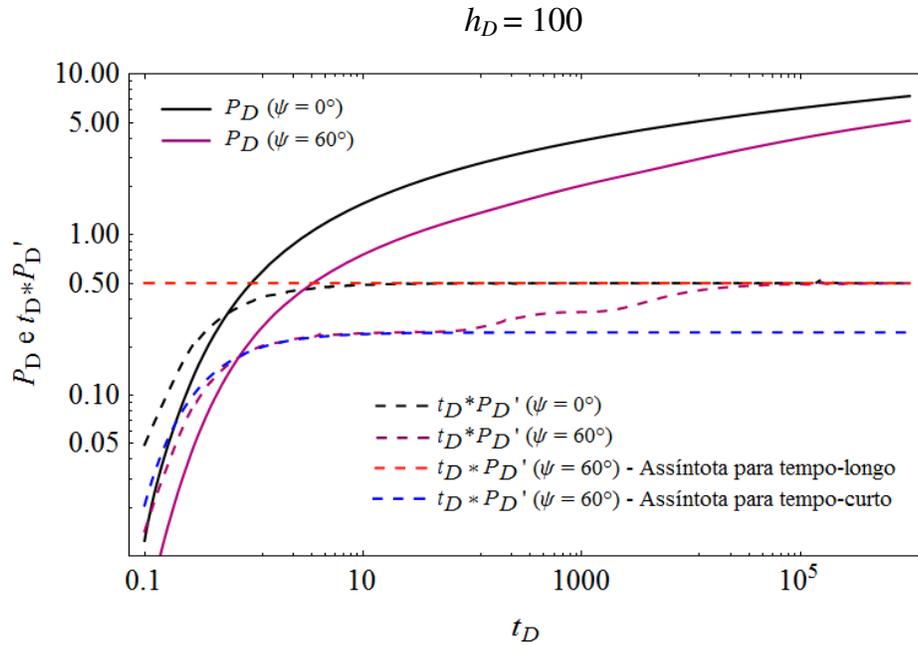


Figura (6.19): Validação das assíntotas para tempo-curto e tempo-longo junto à solução derivada no domínio do tempo, para ângulo de inclinação $\psi = 60^\circ$ e espessura adimensional $h_D = 100$.

6.3 Efeito de Estocagem e de Película

Como mencionado no início do capítulo, a proposta deste trabalho foi apresentar resultados a partir de uma abordagem teórica sobre a análise do transitório da pressão. Contudo, na prática da análise de teste, todos os dados de pressão terão implícitos efeitos de poço, devido à medição de vazão na superfície. O grau e a duração das distorções nos dados de tempo-curto dependem de inúmeros fatores. Segundo Kabir (2009), este período de distorções dos dados aumenta tanto com o aumento da compressibilidade do fluido, volume do poço e dano, quanto com a diminuição da transmissibilidade da formação. A fim de realizar uma abordagem prática à

análise de teste, neste último item será feita uma breve descrição sobre o efeito de estocagem e de película nos dados de pressão.

Com intuito de incorporar os efeitos de estocagem e de película na solução derivada no domínio de Laplace (assíntota para tempo-curto), faz-se uso da seguinte relação (Van Everdingen e Hurst, 1949):

$$\bar{p}_{wD} = \frac{s\bar{p}_{wD} + \ddot{S}}{s + C_D s^2 (s\bar{p}_{wD} + \ddot{S})} \quad (6.11)$$

onde \bar{p}_{wD} é a resposta da pressão no poço sem efeitos de estocagem e película (no domínio de Laplace), \ddot{S} é o fator de película e C_D é coeficiente de estocagem adimensional, definida por:

$$C_D = \frac{C}{2\pi\phi c_t h r_w^2} \quad (6.12)$$

onde C é a fator de estocagem e r_w é o raio do poço.

A Figura (6.20), gerada a partir da assíntota para tempo-curto, ilustra o comportamento do regime de ERi para diferentes valores de coeficiente de estocagem C_D , num poço de CT e inclinação $\psi = 60^\circ$. Nesta figura é possível notar o quanto a estocagem pode comprometer a análise dos dados de pressão no tempo-curto.

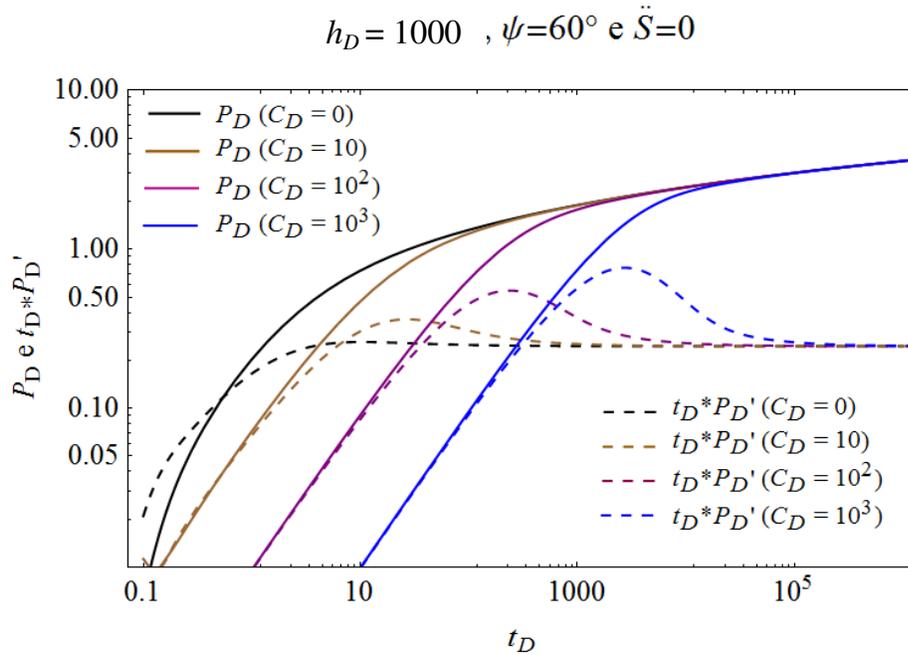


Figura (6.20): Efeito de estocagem num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$, espessura adimensional $h_D = 1000$ e sem efeito de película.

A Figura (6.21) apresenta o comportamento do regime de ERi para diferentes valores do coeficiente de estocagem C_D , num poço de CT e inclinação $\psi = 60^\circ$. Junto a esta figura encontra-se uma curva típica gerada a partir da solução derivada no domínio do tempo (linhas vermelhas: cheia e tracejada). É possível notar o quanto a estocagem pode comprometer a análise dos dados de pressão. Com base nas variáveis atribuídas a esta figura, é possível notar que a curva da derivada para $C_D = 10^2$ cobre todo o intervalo do regime de ERi, dificultando a interpretação neste intervalo. A Figura (6.22) faz uma comparação entre o efeito de película, computado à assíntota, e a curva típica gerada a partir da solução derivada no domínio do tempo (linhas azuis, cheia e tracejada). Esta figura foi gerada considerando um poço de CT, ângulo de inclinação $\psi = 60^\circ$ e sem efeito de estocagem. Nota-se que o dano acrescido à assíntota gera uma maior queda de pressão, não refletindo nenhum efeito na curva de derivada. Logo, não comprometendo o desenvolvimento do regime de ERi.

A partir destas figuras é possível inferir que a estocagem é a variável de poço que mais interfere nos dados de pressão no tempo-curto, ao ponto de impossibilitar a visualização dos regimes de ERi e ERT.

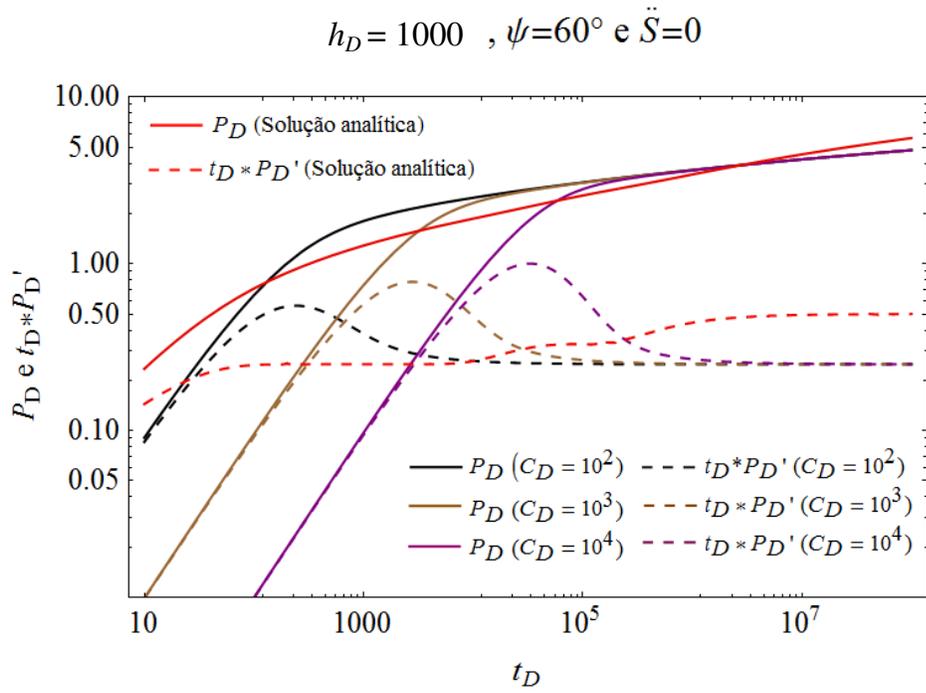


Figura (6.21): Efeito de estocagem num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$, espessura adimensional $h_D = 1000$ e sem efeito de película.

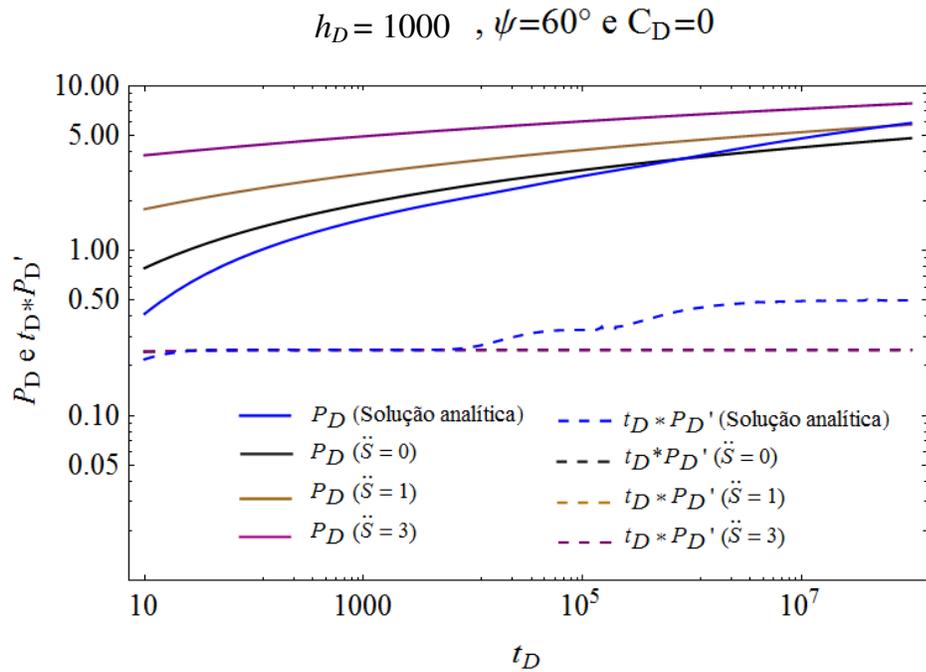


Figura (6.22): Efeito de película num poço com inclinação $\psi = 60^\circ$, espessura adimensional $h_D = 1000$ e coeficiente de estocagem $C_D = 10$.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo resumem-se as características, vantagens e desvantagens dos modelos analíticos e semi-analíticos verificados nesta dissertação. Também são apresentadas sugestões para trabalhos futuros com vista à melhoria dos modelos existentes e como estímulo às investigações não abordadas aqui.

7.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre o comportamento transitório da pressão em poços inclinados submetidos a um teste de poço. Foram estudadas duas soluções: uma analítica (derivada no domínio do tempo) e outra semi-analítica (derivada no domínio de Laplace). Ambas as soluções se aplicam a reservatórios de extensão radial infinita com limites verticais impermeáveis. A primeira solução é válida para poços com ângulo de inclinação entre $0^\circ \leq \psi \leq 75^\circ$ (Cinco-Ley, 1974), enquanto que a solução semi-analítica, além de ser válida para qualquer ângulo de inclinação no intervalo $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$, também pode ser aplicada a casos de poços com completação parcial (Ozkan e Raghavan, 2000).

A partir da solução analítica foram reproduzidos os resultados apresentados por Cinco-Ley et. al. (1975) para o comportamento da pressão. Além disso, desta solução foram desenvolvidas curvas típicas para diversos valores de ângulo de inclinação do poço (ψ) e espessura adimensional (h_D). Das análises destas curvas típicas, foram identificados três regimes de escoamento: o escoamento radial inicial (ERi), o escoamento radial de transição (ERT) e o escoamento radial infinito (ERI). Onde o regime de ERT é apresentado pela primeira vez. Foi possível notar que, para uma dada espessura adimensional, quanto maior o ângulo de inclinação do poço, menor é o valor da derivada correspondente ao ERi, sendo maior a predominância deste regime de escoamento. O estabelecimento do regime radial de transição (ERT) depende do ângulo de inclinação do poço e da espessura adimensional da formação, sendo que no limite $\psi = 90^\circ$, o ERT extingue-se e o comportamento da derivada neste intervalo tende ao do regime de escoamento linear – típico de poços horizontais.

Com base na técnica TDS (*Tiab Direct Synthesis*), foi apresentado um procedimento para a interpretação do transitório da pressão em poços inclinados. A aplicação deste procedimento foi

ilustrada para um modelo sintético gerado a partir das curvas típicas desenvolvidas neste trabalho.

Da solução semi-analítica, foram apresentadas assíntotas para tempo-curto e para tempo longo, as quais viabilizaram a validação dos resultados apresentados neste trabalho, bem como a inclusão das análises dos efeitos de estocagem, dano e de completção parcial.

Utilizando-se a assíntota para tempo-curto, foi constatado que: a queda de pressão em um poço parcialmente completado (CP) é maior do que aquela para um poço totalmente completado (CT), para um mesmo ângulo de inclinação; a derivada correspondente ao regime de ERI varia de acordo o intervalo aberto à produção, h_{wD} , enquanto que a derivada de tempo-longo independe do tipo de completção e se estabelece no valor característico do ERI; constatou-se que a estocagem pode encobrir o regime de ERI, a depender das características do sistema poço/reservatório, assim como nos modelos tradicionais de análise de teste de poço; em tempo, o dano acrescido à solução assintótica para tempo-curto resulta em uma maior queda de pressão, não alterando o comportamento das curvas de derivada.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

No item 5.2 (p. 45) foi dito que na definição de u - apresentada no desenvolvimento da solução no domínio de Laplace - $f(s)$ representa qualquer formulação que expresse as variáveis de um reservatório naturalmente fraturado. Contudo, esta dissertação se restringiu apenas a reservatórios homogêneos [$f(s) = 1$]. Com isso, segue como recomendação a extensão deste trabalho a reservatórios heterogêneos, onde a solução da equação da difusão pode ser facilmente computada no domínio de Laplace. Em tempo, diferentes soluções podem ser facilmente encontradas na literatura (Warren e Root, 1963; Kazemi, 1969; DeSwaan-O, 1971; Raghavan, 1993). Estes autores desenvolveram modelos de solução tanto para reservatórios naturalmente fraturados quanto para os que idealizam o conceito de dupla porosidade.

Neste trabalho não foram utilizados dados de campo para aplicação direta às curvas típicas geradas. Com isso, outra importante sugestão é realizar tal análise.

REFERENCIAS

AGARWAL, G. R., AL-HUSSAINY, R. JR. e RAMEY, H. J. JR. (1970): “*An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: I. Analytical Treatment*”. Artigo SPE 2466. Apresentado no 44° Annual Fall Meeting, Denver, Colorado.

ANDRE, H. E BENNION, D. W. (1970): “*A Transform Approach to the Simulation of Transient Gas Flow in Porous Media*”, Publicado no SPE Journal, 10: 135-139.

ANH, V. D. e TIAB, D. (2009): “*Transient-Pressure Analysis of a Well with an Inclined Hydraulic Fracture Using Tiab’s Direct Synthesis Technique*”. Artigo SPE 120545. Apresentado na SPE Production and Operational Symposium, Cidade de Oklahoma, Oklahoma.

AZEB, D. H. A., ANH, V. D. e TIAB, D. (2010): “*Pressure Analysis of a Well with an Inclined Asymmetric Hydraulic Fracture Using Type Curves*”. Artigo SPE 140638. Apresentado no 34th Annual SPE International Conference and Exhibition, Tinapa - Calabar, Nigeria.

BARRETO, W.S., AMADO, L.C.N., E PRIIMENKO, V.I. (1997): “*A Semi-Analytical Model for the Simulation of Horizontal and Slanted Wells*”. Artigo SPE 38975. Apresentado no 5° Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition, Rio de Janeiro, Brasil.

BOURDET, D., AYOUB, J. A. E PIRARD, Y. M. (1989): “*Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation*”. Artigo SPE 12777-PA.

BOURDET, D., WHITTLE, T. M., DOUGLAS, A. A., e PIRARD, Y. M. (1983): “*A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis*”. Publicado na World Oil, 196 (6): 95-106.

CARSLAW, H. S. E JAEGER, J. C. (1959): “*Conduction of Heat in Solids*”, Oxford U. Press, Oxford, U.K., 353-386.

CINCO-LEY, H. (1974): "Unsteady-State Pressure Distribution Created by a Slanted Well or a Well with an Inclined Fracture". Tese de PhD, Universidade Stanford, California.

CINCO-LEY, H., MILLER, F. G., E RAMEY, H. J. JR. (1975): "Unsteady-State Pressure Distribution Created By a Directionally Drilled Well". Artigo SPE 5131-PA. Publicado no Journal of Petroleum Technology.

CINCO-LEY, H., RAMEY, H. J. JR. E MILLER, F. G. (1975b): "Pseudo-Skin Factors for Partially-Penetrating Directionally-Drilled Wells". Artigo SPE 5589. Apresentado no 50th Annual Fall Meeting of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Texas.

CINCO-LEY, H. e SAMANIEGO, V. F. (1977): "Effect of Wellbore Storage and Damage on the Transient Pressure Behavior of Vertically Fractured Wells". Artigo SPE 6752. Apresentado no 52^o Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Denver, Colorado.

DESWAAN-O, A. (1976): "Analytical Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing". Publicado na Society Petroleum Engineer Journal, 117-122.

ECONOMIDES, M. J., BRAND, C. W., E FRICK, T. P. (1996): "Well Configurations in Anisotropic Reservoirs". Publicado na SPE Formation Evaluation (Dezembro) 257.

GRINGARTEN, A. C. E RAMEY, H. J., JR. (1973): "The Use of Source and Green's Functions in the Solution of Unsteady Flow Problems in Reservoirs", publicado na SPE Journal (Outubro) 285-296.

GRINGARTEN, A. C., RAMEY, H. J., JR., E RAGHAVAN, R. (1974): "Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well with a Single Infinite Conductivity Vertical Fracture". Publicado na SPE Journal (agosto) 347-360.

GRINGARTEN, A. (2008), "From Straight Lines to Deconvolution: The Evolution of The State of the Art in Well Test Analysis". Artigo SPE 102079. Publicado no SPE Reservoir Evaluation & Engineering.

GRADSHTEYN, I. S. e RYZHIK, I. M. (1980): "*Table of Integrals, Series, and Functions*". Academic Press, Inc., Orlando.

HOUZE, O. P., FLOPETROL-JOHNSTON, HORNE, R. N., RAMEY, JR. e HENRY, J. (1988): "*Pressure-Transient Response of an Infinite-Conductivity Vertical Fracture in a Reservoir with Double-Porosity Behavior*". Artigo SPE 12778. Publicado no SPE Formation Evaluation, Vol. 3, N° 3.

KABIR, C. S. (2009): "*Wellbore Effects*". Publicado em KAMAL, M. M.: "*Monograph Series: Vol. 23. Transient Well Testing*". 1ª Ed. Cap. 6, p. 91 – 131. Dallas: SPE.

KAZEMI, H. (1969): "*Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*". Publicado na Trans. AIME, Vol. 246, 451-461.

KHATTAB, H.A., YEH, N-S. e AGARWAL, R. G. (1991): "*Pressure Transient Behavior of Slanted Wells in Single and Multiple-Layered Systems*". Artigo SPE 22730. Apresentado no 66º Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, Texas.

KUCHUK, F. J. e KIRWAN, P. A. (1987): "*New Skin and Wellbore Storage Type Curves for Partially Penetrated Wells*". Publicado na SPE Formation Evaluation, 546, Dezembro.

KUCHUK, F. J., ONUR F., HOLLAENDER, F. (2010): "*Pressure Transient Formation Well Testing*" Elsevier, Developments in Petroleum Science.

LAKE, L. W. (2006): "*Petroleum Engineering Handbook*", Society of Petroleum Engineers, GENERAL ENGINEERING, Vol I, Cap. 3, p. 77-172.

LARSEN, L. (1999): "*Determination of Pressure-Transient and Productivity Data for Deviated Wells in Layered Reservoirs*". Artigo SPE 54701. Publicado na SPE Reservoir Evaluation & Engineering, Vol 2, N° 1.

LEE, W. J., ROLLINS, J. B., e SPIVEY, J. P. (2003): "*Pressure Transient Testing*". Society of Petroleum Engineers, Richardson, TX.

LU, P. (1997): “*Horizontal and Slanted Wells in Layered Reservoirs with Crossflow*”. Dissertação de mestrado, Universidade de Stanford, California.

MEDEIROS, F. JR, OZKAN, E. e KAZEMI, H. (2006): “*A Semianalytical, Pressure-Transient Model for Horizontal and Multilateral Wells in Composite, Layered, and Compartmentalized Reservoirs*”. Artigo SPE 102834. Publicado no SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, Texas.

MATTHEWS, C. S., BRONS, F., E HAZEBROEK, P. (1954): “*A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir*”. Publicado na AIME 201, p. 182-191.

MORSE, P. M. e FESHBACH, H. (1953): “*Methods of Theoretical Physics*”, Part I Tokyo. McGraw-Hill, p. 997.

NISLE, R. G. (1958): “*The Effect of Partial Penetration on Pressure Buildup in Oil Wells*”. Publicado na Trans. AIME. Vol. 213, p. 85-90.

OZKAN, E. (1988): “*Performance of Horizontal Wells*”. PhD Dissertation, The University of Tulsa, Tulsa, Oklahoma.

OZKAN, E. E RAGHAVAN, R. (1991a): “*Some New Solutions to Solve Problems in Well Test Analysis: Part I – Analytical Considerations*”. Artigo SPE 18615. Publicado na SPE Formation Evaluation, setembro.

OZKAN, E. E RAGHAVAN, R. (1991b): “*Supplement to SPE 18615, New Solutions for Well-Test-Analysis Problems: Part I – Analytical Considerations*”. Artigo SPE 18615. Publicado na SPE Formation Evaluation, setembro.

OZKAN, E. E RAGHAVAN, R. (1991c): “*Some New Solutions to Solve Problems in Well Test Analysis: Part II – Computational Considerations and Applications*”. Artigo SPE 18165. Publicado na SPE Formation Evaluation, setembro.

OZKAN, E. e RAGHAVAN, R. (1994): “*Some New Solutions to Solve Problems in Well Test Analysis: Part III – Additional Algorithms*”. Artigo SPE 28424. Apresentado no 69th Annual Technical Conference and Exhibition, Nova Orleans, LA.

OZKAN, E. E RAGHAVAN, R. (2000): “*A Computationally Efficient, Transient-Pressure Solution for Inclined Wells*”. Artigo SPE 66206-PA. Publicado na SPE Reservoir Evaluation & Engineering. 3 (5), outubro.

RAGHAVAN, R. (1993): “*Well Test Analysis*”, Prentice Hall Petroleum Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 28-31, 336-435.

RAGHAVAN, R. e OZKAN, E. (1994): “*A Method for Computing Unsteady Flows in Porous Media*”, π Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical.

RBEAWI, S. AL. e TIAB, D. (2012): “*Transient Pressure Analysis of a Horizontal Well with Multiple Inclined Hydraulic Fractures Using Type-Curves Matching*”. Artigo SPE 149902. Apresentado no SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, Lafayette, Louisiana.

ROEMERSHAUSER, A. E. E HAWKINS, M. F., JR. (1955): “*The Effect of Slant Hole, Drainhole, and Lateral Hole Drilling on Well Productivity*”, J. Pet. Tech. (Fevereiro) 11-14.

ROGERS, E. J. e ECONOMIDES, M. J. (1996): “*The Skin due to Slant of Deviated Wells in Permeability Anisotropic Reservoirs*”. Artigo SPE 37068. Apresentado na International Conference on Horizontal Well Technology, Calgary, Alberta, Canada.

SOUSA, B. R., e MORENO, R. B. Z. L. (2011a): “*Análise de Teste em Poços Inclinados*”. Apresentado no 6^o PDPETRO, Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 6^o, Florianópolis/SC.

SOUSA, B. R., e MORENO, R. B. Z. L. (2011b): “*An Investigation and Description of Pressure Transient Data Obtained From a Mini-DST*”. Apresentado no 21st COBEM. Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Natal/RN, Brasil.

STEHFEST, H. (1970): “*Numerical Inversion of Laplace Transforms*”. Publicado na ACM Communications, vol. 13 (1), 47-49.

TIAB, D. (1993):”*Analysis of Pressure Derivative without Type-Curve Matching: Vertically Fractured Wells in Closed Systems*”. Artigo SPE 26138. Apresentado na SPE Western Regional Meeting, Anchorage, Alaska.

TIAB, D. (2005):”*Analysis of Pressure Derivative Data of Hydraulic Fractured Wells by Tiab’s Direct Synthesis Technique*”. Publicado na Journal of Petroleum Science and Engineering, 49.

VAN EVERDINGEN, A. F. E HURST, W. (1953): “*The Skin Effect and Its Influence on the Productive Capacity of a Well*”. Publicado na JPT Tech (Junho) 171-176, AIME, 198.

VAN EVERDINGEN, A. F., E HURST, W. (1949): “*The Application of Laplace Transformation to Fluid Problems in Reservoir*”. Artigo SPE 949305. Publicado na AIME, 189: 305-324.

WARREN, J. E. E ROOT, P. J. (1963): “*The Behavior of Naturally Fractured Reservoir*”. Publicado na Society Petroleum Engineer Journal, 245-255.

WILLIAN, H. P., BRIAN, P. F., SAUL,A. T., WILLIAM, T. V. (1986): “*Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*”, Cambridge University Press..

WOLFRAM MATHEMATICA® 8: DOCUMENTATION CENTER. Endereço eletrônico: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>

WOLFRAM MATHEMATICA® 8: TUTORIAL COLLECTION. Arquivos em formato *pdf*, disponíveis no endereço eletrônico: <http://www.wolfram.com/learningcenter/tutorialcollection/>

APÊNDICE A – Comentários às Publicações SPE 5131 e SPE 66206

Ao longo desta pesquisa alguns equívocos foram encontrados em dois artigos que apresentam soluções para o transitório de pressão em poços inclinados: Cinco et. al. (1975) e Ozkan e Raghavan (2000). Alguns destes equívocos são provavelmente erros de digitação, porém, como recomendação para eventuais estudos, eles serão descritos neste apêndice.

➤ SPE 5131: Cinco-Ley et. al. (1975)

- i. Na equação (A-3), está faltando o coeficiente de difusividade (η) no denominador do argumento da função exponencial. Para que esteja consistente com a solução da fonte pontual, equação (A-2), ela deveria estar escrita da seguinte forma:

$$\Delta p(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \frac{\tilde{q}}{8\phi c_t (\pi \eta t)^{3/2} \cos \psi} \int_{z_w - \frac{h_w}{2} \cos \psi}^{z_w + \frac{h_w}{2} \cos \psi} \exp \left[-\frac{r_m^2 + (z_p - z_w)^2 t g^2 \psi - 2r_m (z_p - z_w) t g \psi \cos \theta_m + (z_m - z_p)^2}{4\eta t} \right] dz_p$$

- ii. Um segundo detalhe esquecido está na equação (A-7), onde está faltando um sinal negativo na primeira exponencial integrada no tempo:

$$\Delta p(r_m, \theta_m, z_m, t, \psi, z_w, h_w) = \left(\frac{q_w}{8\phi c_t h_w (\pi \eta)^{3/2} \cos \psi} \right) \int_0^t \frac{e^{-r_m^2/4\eta \tau}}{\tau^{3/2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{h_w}{2} \cos \psi}^{+\frac{h_w}{2} \cos \psi} \left\{ \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi - 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh - z_w - z)^2}{4\eta\tau} \right] \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{z^2 t g^2 \psi + 2r_m z t g \psi \cos \theta_m + (z_m + 2nh + z_w - z)^2}{4\eta\tau} \right] \right\} dz d\tau$$

- iii. Há uma incoerência na expressão da pressão adimensional. Na definição de p_D dado pelos autores, que inclui o termo $\sqrt{k_h/k_z}$, a permeabilidade vertical influencia tanto os poços verticais (ângulo zero) quanto à solução geral para o período de escoamento pseudo-radial no tempo-longo (poço inclinado). No entanto, a permeabilidade vertical não deveria influenciar a produtividade de ambos os casos. Embora listadas as condições de contorno e iniciais utilizadas por Cinco-Ley et. al. (1975) nas Equações (4) – (6), uma condição de contorno não foi apresentada. Os autores omitiram a condição de contorno interna ($r = r_w$): $q = -\frac{2\pi k_h}{\mu} \frac{dp}{dr}$. Fazendo a mudança de variáveis da coordenada z para $z' = z\sqrt{k_h/k_z}$, a fim de redefinir as equações e condições de contorno para as formas isotrópicas e homogêneas, deve-se também redefinir a condição de contorno interna. Da mesma forma que a redefinição do termo da espessura da formação considera o termo anisotrópico ($h' = h\sqrt{k_h/k_z}$) a vazão também deve ser representada por $q' = q\sqrt{k_h/k_z}$. Assim, na definição de p_D , o termo $\sqrt{k_h/k_z}$ no numerador associado com h' é cancelado com aquele associado com o termo da vazão q' ; fazendo com que a definição da p_D seja a mesma do caso homogêneo sem o termo $\sqrt{k_h/k_z}$.

➤ **SPE 66206: Ozkan e Raghavan (2000)**

- iv. A partir das derivações realizadas no Apêndice B desta dissertação, verificou-se que a equação (20), publicada por Ozkan e Raghavan (2000) no artigo SPE 66206, contém dois equívocos de digitação. Ambos os equívocos encontram-se na definição da integral da

função de Bessel, dada por $I(b, \infty, \pm)$, onde o último termo considerado deve ser o sinal de adição “+” ao invés do de subtração “-“. A expressão corrigida está documentada na equação (B.11), página 100 desta dissertação.

- v. Outro equívoco foi constatado na formulação da equação (34). Os autores dizem utilizar a relação dada pela equação (38), apresentado no mesmo artigo. Contudo, consultando a referencia citada pelos autores, verificou-se que ambas as equações citadas apresentam equívocos em suas formulações. O equívoco da equação (38) é referente ao argumento dentro do logaritmo neperiano, o qual deveria estar expresso como denominador de 1 (um) – gerando o primeiro equívoco na formulação da equação (34). Passando à análise da equação (34), verificou-se um equívoco na inclusão da variável adimensional h_D no denominador das duas primeiras funções cosseno. Posteriormente, constatou-se a falta desta mesma variável nas funções cosseno presentes dentro dos argumentos do logaritmo neperiano. Ambas as equações (38) e (34) foram corrigidas e suas expressões estão documentadas nas equações (B.39) e (B.40) – no Apêndice B desta dissertação.
- vi. A Equação (43), publicada pelos autores, traz a definição de $\sigma(x_D, y_D, a, b)$, onde um simples equívoco de digitação é visto. Na definição deste parâmetro, os autores utilizaram a definição dada por Raghavan e Ozkan [1994, p. 56, equação (9)], onde os termos entre colchetes se estendem até a definição dos ternos do segundo logaritmo neperiano – não englobando o terceiro e último termo que contém as definições dos arcos tangentes. A expressão corrigida deste parâmetro está documentada na equação (C.38) - Apêndice C desta dissertação.
- vii. O último equívoco constatado neste artigo está na expressão final da equação (45). Nela, está faltando incluir a variável h_D no denominador de ambas as funções cossenos – uma vez que os autores tiveram como referência as relações dadas pelas equações (25) e (26) de Raghavan e Ozkan (1994, p. 68). Por fim, os autores omitem o que seria a definição da variável p , presente na mesma equação. A definição desta última variável é dada no Apêndice C desta dissertação como sendo $\lambda = \frac{\pi r_D}{h_D}$.

APÊNDICE B – Aproximações Assintóticas para Solução no Domínio de Laplace ($\psi' \neq 0^\circ$).

Aqui serão introduzidos e discutidos pontos pertinentes às expressões alternativas para solução apresentada no Item 4.2 - a fim de se desenvolver uma eficiente rotina computacional. Este apêndice tem o propósito de documentar e detalhar as características envolvidas nas soluções. O desenvolvimento deste Apêndice contou com a colaboração do Professor Dr. Erdal Ozkan.

Reescrevendo a eq. (5.48), temos:

$$\overline{\Delta p}_D = \frac{1}{sh_{wD} \operatorname{sen} \psi'} \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi'} \left[K_0 \left(\sqrt{u_n} \sqrt{(r_D \cos \theta - r'_D)^2 + r_D^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\sqrt{u_n} \sqrt{(r_D \cos \theta - r'_D)^2 + r_D^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + r'_D \cotg \psi'}{h_D} \right] dr'_D$$

Onde $u_n = u + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2}$.

Antes de seguir nas derivações, por conveniência, definem-se:

$$\begin{cases} b_1 = \left(r_D \cos \theta_m + \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' \right) \\ b_2 = \left(\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' - r_D \cos \theta_m \right) \\ b_3 = \left(r_D \cos \theta_m - \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' \right) \\ b_4 = \left(-\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' - r_D \cos \theta_m \right) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

e

A partir daqui concentra-se esforços em computar a pressão no poço, dada pela equação (4.34). Para tal, inicialmente serão elaboradas expressões para os casos que seguem:

➤ Caso I: $r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$:

Neste caso, computamos a pressão como segue:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_D} \left(r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} \\ &\left[\int_0^{b_1 \sqrt{u}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) d\xi - \int_0^{b_3 \sqrt{u}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) d\xi \right] + \\ &\frac{2}{sh_{wD} \text{sen } \psi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} \\ &\left[\int_0^{b_1 \sqrt{u_n}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m - \frac{\xi}{\sqrt{u_n}} \right) \cot g \psi'}{h_D} d\xi \right. \\ &\left. - \int_0^{b_3 \sqrt{u_n}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m - \frac{\xi}{\sqrt{u_n}} \right) \cot g \psi'}{h_D} d\xi \right] \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

A equação definida acima ainda não está expressa numa forma computacionalmente eficiente. Em seqüência serão desenvolvidas as derivações para tal.

Antes de trabalhá-la, por conveniência, definimos:

$$I(a, b, \pm) = \int_a^{b\sqrt{u_n}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u_n r_D^2 \sin^2 \theta_m} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m \pm \frac{\xi}{\sqrt{u_n}} \right) \cot g \psi'}{h_D} d\xi \quad (B.3)$$

$$W(b, u) = \int_0^{b\sqrt{u}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u r_D^2 \sin^2 \theta_m} \right) d\xi \quad (B.4)$$

e

$$\bar{C} = \frac{2}{sh_{wD} \sin \psi'} \quad (B.5)$$

A partir da definição da equação (B.3) reescrevemos a equação (B.20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p}_D \left(r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \sin \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \sin \psi' \sqrt{u}} \\ [W(b_1, u) - W(b_3, u)] + \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(0, b_1, -) + I(0, b_3, -)] & \quad (B.6) \end{aligned}$$

Definindo a relação,

$$I(0, b, \pm) = I(0, \infty, \pm) - I(b, \infty, \pm) \quad (B.7)$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p}_D \left(r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \sin \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \sin \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_3, u)] \\ + \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(0, \infty, -) - I(0, \infty, -) - I(b_1, \infty, -) + I(b_3, \infty, -)] & \quad (B.8) \end{aligned}$$

Onde, $I(0, \infty, -) - I(0, \infty, -) = 0$. Simplificando a equação (B.8), temos:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}_D \left(r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_3, u)] \\ &+ \bar{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_3, \infty, -) - I(b_1, \infty, -)] \end{aligned} \quad (\text{B. 9})$$

A equação (B.9) é equivalente à apresentada por Ozkan e Raghavan (2000) e representa a solução final para este caso.

➤ Caso II: $r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$:

Seguindo as mesmas considerações apresentadas no caso anterior, computamos a pressão como segue:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}_D \left(r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_2, u) - W(b_4, u)] \\ &+ \bar{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(0, \infty, +) - I(0, \infty, +) - I(b_2, \infty, +) + I(b_4, \infty, +)] \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

Onde, $I(0, \infty, +) - I(0, \infty, +) = 0$. Simplificando a equação (B.10), temos:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}_D \left(r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_2, u) - W(b_4, u)] \\ &+ \bar{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_4, \infty, +) - I(b_2, \infty, +)] \end{aligned} \quad (\text{B. 11})$$

A equação (B.11) é equivalente à apresentada por Ozkan e Raghavan (2000) e representa a solução final para este caso.

➤ Caso III: $-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$:

Novamente, seguindo as considerações apresentadas nos casos anteriores, computamos a pressão como segue:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_D} \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)] \\ &+ \bar{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(0, \infty, -) + I(0, \infty, +) - I(b_1, \infty, -) - I(b_2, \infty, +)] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Até este ponto, as expressões (B.9) e (B.11) são equivalentes àquelas apresentadas por Ozkan e Raghavan (2000). Contudo, a equação (B.12) ainda não se apresenta numa forma computacionalmente eficiente. Em busca da adequada expressão, o próximo item apresentará as derivações pertinentes à solução deste caso.

i. Solução para: $-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$

Inicialmente reescrevemos a relação dada pela equação (B.3) da seguinte forma:

$$I = \int_0^x K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + a^2} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + e \pm c\xi}{h_D} d\xi \quad (\text{B.13})$$

onde

$$a = u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m \quad (\text{B.14})$$

$$e = r_D \cos \theta_m \cotg \psi' \quad (\text{B.15})$$

e

$$c = \frac{\cotg \psi'}{u_n} \quad (\text{B.16})$$

Ainda, é possível escrever a seguinte relação¹⁰:

$$\begin{aligned} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e \pm c\xi}{h_D} &= \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \cos n\pi \frac{c\xi}{h_D} \\ &\pm \operatorname{sen} n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \operatorname{sen} n\pi \frac{c\xi}{h_D} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Associando as equações (C.7) e (C.13), temos que:

$$I = I_1 - I_2 \quad (\text{B.18})$$

Onde

$$I_1 = \int_0^{\infty} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + a^2} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + e \pm c\xi}{h_D} d\xi \quad (\text{B.19})$$

e

$$I_2 = \int_x^{\infty} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + a^2} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + e \pm c\xi}{h_D} d\xi \quad (\text{B.20})$$

A partir das equações (C.17) e (C.19), tem-se:

$$I_1 = I_{11} \pm I_{12} \quad (\text{B.21})$$

onde

¹⁰ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$$I_{11} = \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \int_0^{\infty} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + a^2} \right) \cos n\pi \frac{c\xi}{h_D} d\xi \quad (\text{B.22})$$

e

$$I_{12} = \text{sen } n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \int_0^{\infty} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + a^2} \right) \text{sen } n\pi \frac{c\xi}{h_D} d\xi \quad (\text{B.23})$$

Gradshteyn e Ryzhik (1980, p. 736) fornecem a seguinte relação:

$$\int_0^{\infty} K_0 \left(\omega \sqrt{\xi^2 + \beta^2} \right) \cos (\gamma x) dx = \frac{\pi}{2\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \exp \left(-\beta \sqrt{\omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

para ω e β real > 0 e $\gamma > 0$

Aplicando a relação acima à equação (B.22), temos:

$$I_{11} = \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2 c^2}{h_D^2}}} \exp \left(-a \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2 c^2}{h_D^2}} \right) \quad (\text{B.25})$$

Agora, associando as equações (B.13), (B.18) - (B.21), (B.23) e (B.25), podemos reescrever a equação (B.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_D} \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)] \\ &+ \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I_{11}^{\dots} + I_{12}^{\dots} + I_{11}^{\dots} - I_{12}^{\dots} - I(b_1, \infty, -) - I(b_2, \infty, +)] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Sendo $I_{12}^{\dots} - I_{12}^{\dots} = 0$, reescreve-se a equação (B.26):

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_D} \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)] \\ + \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} & [I_{11}^{\dots} + I_{11}^{\dots} - I(b_1, \infty, -) - I(b_2, \infty, +)] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Da equação (B.27), temos:

$$\begin{aligned} I_{11}^{\dots} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 \cot^2 \psi'}{u_n h_D^2}}} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \\ &\exp \left(-u_n r_D \text{sen } \theta \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 \cot^2 \psi'}{u_n h_D^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u + (1 + \cot^2 \psi') \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2}}} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \\ &\exp \left(-r_D \text{sen } \theta \sqrt{u + (1 + \cot^2 \psi') \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Simplificando, a equação (B.27) torna-se:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta p_D} \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)] \\
&+ \bar{C} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u + \alpha_n}} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \exp(-r_D \text{sen } \theta \sqrt{u + \alpha_n}) \right\} \\
&- \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_1, \infty, -) + I(b_2, \infty, +)] \tag{B.30}
\end{aligned}$$

onde,

$$\alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2 \text{sen}^2 \psi'} \tag{B.31}$$

A fim de simplificar a equação (B.30), apresenta-se:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta p_D} \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) &= \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)] \\
&+ \bar{F}_1 - \bar{F}_2 \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Sendo,

$$\bar{F}_1 = \bar{C} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \ddot{z}_{D1} \cos n\pi \ddot{z}_{D2}}{\sqrt{u + \alpha_n}} \exp(-r_D \text{sen } \theta_m \sqrt{u + \alpha_n}) \tag{B.33}$$

e

$$\bar{F}_2 = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} [I(b_1, \infty, -) + I(b_2, \infty, +)] \tag{B.34}$$

onde

$$\ddot{z}_{D1} = \frac{z_{wD} + e}{h_D} \tag{B.35}$$

$$\ddot{z}_{D2} = \frac{z_D}{h_D} \quad (\text{B.36})$$

Por fim, para uma melhor avaliação da equação (B.33), Ozkan e Raghavan (2000) apresentaram duas expressões aproximadas a serem utilizadas para tempo-curto e tempo-longo – para grandes e pequenos valores da variável de Laplace, s , respectivamente.

Para tempo-curto, foi utilizada a seguinte relação [Raghavan e Ozkan, 1994, p. 62, eq. (7)]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi z_1 \cos n\pi z_2}{\epsilon_n} \exp(-\epsilon_n y) &= \frac{z_e}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ K_0 \left[\sqrt{(z_1 - z_2 - 2n)^2 z_e^2 + y^2} \sqrt{u + a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + K_0 \left[\sqrt{(z_1 + z_2 - 2n)^2 z_e^2 + y^2} \sqrt{u + a^2} \right] \right\} - \frac{\exp(-y \sqrt{u + a^2})}{2\sqrt{u + a^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\text{onde } \epsilon_n = \sqrt{u + \frac{n^2 \pi^2}{z_e^2} + a^2}.$$

Logo, a equação (B.33) pode ser expressa da seguinte forma para tempo-curto:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{h_D}{s h_{wD}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ K_0 \left[\sqrt{(z_D - z_{wD} - e - 2n h_D)^2 \sin^2 \psi' + r_D^2 \sin^2 \theta_m} \sqrt{u} \right] \right. \\ &\quad \left. + K_0 \left[\sqrt{(z_D + z_{wD} + e - 2n h_D)^2 \sin^2 \psi' + r_D^2 \sin^2 \theta_m} \sqrt{u} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\pi}{s \sqrt{u} h_{wD} \sin \psi'} \exp(-r_D \sin \theta_m \sqrt{u}) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Para tempo-longo, foi utilizada a seguinte relação [Raghavan e Ozkan, 1994, p. 62, eq. (9)]¹¹:

¹¹ Apêndice A Item v

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi z}{\epsilon_n} \exp(-\epsilon_n y) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi z \left[\frac{\exp(-\epsilon_n y)}{\epsilon_n} - \frac{\exp(-n\pi y/z_e)}{n\pi/z_e} \right] + \frac{z_e}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\pi y/z_e) \cos \pi z + \exp(-2\pi y/z_e)} \right] \quad (\text{B.39})$$

Através da relação acima, a equação (B.33) pode ser expressa, para tempo-longo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = & \frac{2\pi}{sh_{wD} \operatorname{sen} \psi'} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \ddot{z}_{D1} \cos n\pi \ddot{z}_{D2} \left[\frac{\exp(-r_D \operatorname{sen} \theta_m \sqrt{u + \alpha_n})}{\sqrt{u + \alpha_n}} \right. \\ & \left. - \frac{\exp(-r_D \operatorname{sen} \theta_m \sqrt{\alpha_n})}{\sqrt{\alpha_n}} \right] - \frac{h_D}{2sh_{wD}} \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \frac{\pi}{h_D} (z_{wD} + z_D + e) + \exp(-2\lambda)} \right] \right. \\ & \left. + \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \frac{\pi}{h_D} (z_{wD} - z_D + e) + \exp(-2\lambda)} \right] \right\} \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{\pi r_D \operatorname{sen} \theta_m}{h_D \operatorname{sen} \psi'}$.

As equações formuladas até aqui representam todo o desenvolvimento matemático inerente à solução geral proposta por Ozkan e Raghavan (2000) – não tendo sido reportado em nenhuma referencia prévia.

O Item a seguir fornece expressões alternativas para melhor computação das equações que apresentam a relação dada pela equação (B.3).

➤ Avaliação da Integral $\mathbf{I(a, b, \pm)}$:

Ozkan e Raghavan (2000) salientaram que antes de avaliar a integral imprópria definida pela equação (B.3) - presente em todas as soluções finais de cada caso - torna-se mais

conveniente realizar uma transformação na qual a mesma resulte numa integral de intervalos finitos.

Foi sugerida a seguinte relação [Numerical Recipes (1986), p. 120, equações (4.4.7) e (4.4.8)]:

$$t = e^{-x} \quad \text{ou} \quad x = -\ln \beta \quad (\text{B.41})$$

Logo, é possível escrever:

$$\int_{x=a}^{x=\infty} f(x) dx = \int_{\beta=0}^{\beta=e^{-a}} f(-\ln \beta) \frac{d\beta}{\beta} \quad (\text{B.42})$$

Onde as quatro distintas combinações de $I(a, b, \pm)$ tornam-se:

$$I(b_1, \infty, -) = I(0, b_1, -) = \int_0^{\exp(-b_1\sqrt{u_n})} K_0 \left(\sqrt{(-\ln \beta)^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m + \frac{\ln \beta}{\sqrt{u_n}} \right) \cotg \psi'}{h_D} \frac{d\beta}{\beta} \quad (\text{B.43})$$

$$I(b_2, \infty, +) = I(0, b_2, +) = \int_0^{\exp(-b_2\sqrt{u_n})} K_0 \left(\sqrt{(-\ln \beta)^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m - \frac{\ln \beta}{\sqrt{u_n}} \right) \cotg \psi'}{h_D} \frac{d\beta}{\beta} \quad (\text{B.44})$$

$$I(b_3, \infty, -) = I(0, b_3, -) = \int_0^{\exp(-b_3\sqrt{u_n})} K_0 \left(\sqrt{(-\ln \beta)^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m + \frac{\ln \beta}{\sqrt{u_n}} \right) \cot g \psi'}{h_D} \frac{d\beta}{\beta} \quad (\text{B.45})$$

e

$$I(b_4, \infty, +) = I(0, b_4, +) = \int_0^{\exp(-b_4\sqrt{u_n})} K_0 \left(\sqrt{(-\ln \beta)^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m - \frac{\ln \beta}{\sqrt{u_n}} \right) \cot g \psi'}{h_D} \frac{d\beta}{\beta} \quad (\text{B.46})$$

Logo, para uma eficiente programação das soluções apresentadas, faz-se necessário utilizar as redefinições apresentadas acima.

Até este ponto, foi apresentado o desenvolvimento das expressões alternativas para computação da solução apresentada pela Equação (5.48). A Tabela (B.1) traz um sumário das equações formuladas neste Apêndice.

Tabela (B.1): Expressões alternativas para computação da solução derivada no domínio de Laplace.

$r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi$	$r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi$	$-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$
$\overline{\Delta p_D} = \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}}$ $[W(b_1, u) - W(b_3, u)]$ $+\bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_3, \infty, -) - I(b_1, \infty, -)]$	$\overline{\Delta p_D} = \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}}$ $[W(b_2, u) - W(b_4, u)]$ $+\bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_4, \infty, +) - I(b_2, \infty, +)]$	$\overline{\Delta p_D} = \frac{1}{sh_{wD} \text{sen } \psi' \sqrt{u}}$ $[W(b_1, u) - W(b_2, u)] + \bar{F}_1 - \bar{F}_2$ $\bar{F}_1 = \bar{C} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi z_{D1} \cos n\pi z_{D2}}{\sqrt{u + \alpha_n}} \exp(\omega)$ $\bar{F}_2 = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_{D2}}{h_D} [I(b_1, \infty, -) + I(b_2, \infty, +)]$
$b_1 = \left(r_D \cos \theta_m + \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) ; b_2 = \left(\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' - r_D \cos \theta_m \right) ; b_3 = \left(r_D \cos \theta_m - \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) ; b_4 = \left(-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' - r_D \cos \theta_m \right)$ $I(0, b, \pm) = \int_0^{\exp(-b\sqrt{u_n})} K_0 \left(\sqrt{(-\ln \beta)^2 + u_n r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m \pm \frac{\ln \beta}{\sqrt{u_n}} \right) \text{cotg } \psi'}{h_D} \frac{d\beta}{\beta}$ $W(b, u) \int_0^{b\sqrt{u}} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + u r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) d\xi ; \bar{C} = \frac{2}{sh_{wD} \text{sen } \psi'} ; \alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2 \text{sen}^2 \psi'} ; z_{D1} = \frac{z_{wD} + e}{h_D}$ $z_{D2} = \frac{z_{wD} + u_D \cos \psi'}{h_D} = \frac{z_D}{h_D} ; e = r_D \cos \theta_m \text{cotg } \psi' ; u_n = u + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} ; \omega = -r_D \text{sen } \theta_m \sqrt{u + \alpha_n}$		

APÊNDICE C – Aproximações Assintóticas para Solução no Domínio de Laplace ($0^\circ < \psi' < 90^\circ$).

Este apêndice tem o propósito de documentar o desenvolvimento matemático envolvido na formulação das soluções assintotas para tempo-curto e tempo-longo. As soluções apresentadas neste apêndice são válidas para ângulos de inclinação do poço entre o intervalo $0^\circ < \psi' < 90^\circ$. O desenvolvimento destas assintotas para os casos limites de um poço vertical ($\psi' = 0^\circ$) e horizontal ($\psi' = 90^\circ$) não será mostrado aqui – uma vez que soluções equivalentes podem ser encontradas na literatura (Raghavan, 1993; Lee et. al., 2003 e Kamal, 2009). Assim como no Apêndice B, o desenvolvimento aqui realizado também contou com a colaboração do Professor Dr. Erdal Ozkan.

A solução geral desenvolvida até este ponto pode ser representada da seguinte forma:

$$\overline{\Delta p}_D = \overline{\Delta p}_{Df} + \overline{F} \quad (\text{C. 1})$$

Onde,

$$\overline{\Delta p}_{Df} = \begin{cases} \frac{\overline{C}}{2\sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_2, u)]; & \text{para } -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ \frac{\overline{C}}{2\sqrt{u}} [W(b_1, u) - W(b_3, u)]; & \text{para } r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ \frac{\overline{C}}{2\sqrt{u}} [W(b_2, u) - W(b_4, u)]; & \text{para } r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \end{cases} \quad (\text{C. 2})$$

e

$$\overline{F} = \begin{cases} \overline{F}_a = \overline{F}_1 - \overline{F}_2 & ; \text{ para } -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ \overline{F}_b & ; \text{ para } r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ \overline{F}_c & ; \text{ para } r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \end{cases} \quad (\text{C. 3})$$

Nas relações dadas acima, \bar{F}_1 e \bar{F}_2 são dados pelas equações (B.33) e (B.34), respectivamente. As expressões para \bar{F}_b e \bar{F}_c são:

$$\bar{F}_b = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_3, \infty, -) - I(b_1, \infty, -)] \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{F}_c = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\sqrt{u_n}} [I(b_4, \infty, +) - I(b_2, \infty, +)] \quad (\text{C.5})$$

A partir deste ponto serão desenvolvidas duas seções distintas para cada assíntota de aproximação.

➤ **Aproximação para tempo-curto ($s \rightarrow \infty$)**

Antes de apresentar o desenvolvimento deste caso, torna-se conveniente expressão a solução dada pela equação (C.1) da seguinte forma:

$$\bar{\Delta p}_D = \bar{\Delta p}_{Df} + \bar{F}$$

Onde

$$\bar{\Delta p}_{Df} = \frac{\bar{C}}{2} \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'} K_0 \left(\sqrt{u} \sqrt{(r_D \cos \theta_m - r'_D)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right) dr'_D \quad (\text{C.6})$$

e

$$\bar{F} = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'} K_0 \left(\sqrt{u_n} \sqrt{(r_D \cos \theta_m - r'_D)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \right)$$

$$\cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + r'_D \cotg \psi'}{h_D} dr'_D \quad (C.7)$$

A partir do desenvolvimento apresentado por Raghavan e Ozkan [1994, p. 56 e 57, eq. (1) - (6)], uma aproximação para $\overline{\Delta p}_{Df}$ ($s \rightarrow \infty$) pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\overline{\Delta p}_{Df} = \frac{\overline{C}\pi\beta}{2\sqrt{u}} \text{Exp}(-|r_D \text{sen } \theta_m| \sqrt{u}) \quad (C.8)$$

onde

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{para } -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ 1 & \text{para } r_D \cos \theta_m = \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \quad \text{ou} \quad r_D \cos \theta_m = -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \\ 0 & \text{para } r_D \cos \theta_m < \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \quad \text{ou} \quad r_D \cos \theta_m > \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \end{cases} \quad (C.9)$$

Com o intuito de obter a aproximação para $\overline{F}(s \rightarrow \infty)$, utiliza-se a representação integra de $K_0(z)$ [Raghavan e Ozkan, 1994, p. 55, Eq. (1)],

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Exp}\left(-\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} \quad (C.10)$$

de onde podemos reescrever a equação (C.7) da seguinte forma:

$$\overline{F} = \frac{\overline{C}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Exp}(-\xi) \text{I} \text{Exp}\left(-\frac{r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m}{4\xi} u_n\right) \frac{d\xi}{\xi} \quad (C.11)$$

Onde

$$I = \int_{-\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi'}^{+\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi'} \operatorname{Exp} \left(-\frac{(r_D \cos \theta_m - r'_D)^2 u_n}{4\xi} \right) \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + r'_D \operatorname{cotg} \psi'}{h_D} dr'_D \quad (\text{C. 12})$$

Mudando as variáveis de integração, é possível expressar a equação (C.12) da seguinte forma:

$$I = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \int_a^b \operatorname{Exp} \left(-\frac{x^2}{4\xi} \right) \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e - \frac{x \operatorname{cotg} \psi'}{\sqrt{u_n}}}{h_D} dx \quad (\text{C. 13})$$

onde $e = r_D \cos \theta_m \operatorname{cotg} \psi'$ [equação (B.15)],

$$a = \sqrt{u_n} \left(r_D \cos \theta_m - \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' \right) \quad (\text{C. 14})$$

e

$$b = \sqrt{u_n} \left(r_D \cos \theta_m + \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' \right) \quad (\text{C. 15})$$

Nota-se que para $u \rightarrow \infty$, podemos reescrever a equação (C.13) como segue:

$$I = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \int_a^b \operatorname{Exp} \left(-\frac{x^2}{4\xi} \right) \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} dx \quad (\text{C. 16})$$

Aplicando a relação trigonométrica para arco duplo¹², podemos representar a equação (C.13) da seguinte forma:

$$I = \bar{D}_1 \bar{I}_1 + \bar{D}_2 \bar{I}_2 \quad (\text{C. 17})$$

Onde

¹² $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$$\bar{D}_1 = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \quad (C.18)$$

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \sen n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \quad (C.19)$$

$$\bar{I}_1 = \int_a^b \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) \cos n\pi \frac{x \cotg \psi'}{\sqrt{u_n} h_D} dx \quad (C.20)$$

$$\bar{I}_2 = \int_a^b \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) \sen n\pi \frac{x \cotg \psi'}{\sqrt{u_n} h_D} dx \quad (C.21)$$

A partir das equações (C.14) e (C.15), nota-se que para $u \rightarrow \infty$ chegamos a três casos:

1. Se $r_D \cos \theta_m > \frac{h_{wD}}{2} \sen \psi'$, então $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $\bar{I}_1 \rightarrow 0$, $\bar{I}_2 \rightarrow 0$.
2. Se $r_D \cos \theta_m < -\frac{h_{wD}}{2} \sen \psi'$, então $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow -\infty$, $\bar{I}_1 \rightarrow 0$, $\bar{I}_2 \rightarrow 0$.
3. Se $-\frac{h_{wD}}{2} \sen \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \sen \psi'$

a) Se $r_D \cos \theta_m = -\frac{h_{wD}}{2} \sen \psi'$, então $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow 0$, então

$$\bar{I}_1 = \int_{-\infty}^0 \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) dx = \int_0^{\infty} \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) dx \quad (C.22)$$

e

$$\bar{I}_2 \rightarrow 0 \quad (C.23)$$

Conhecendo-se a relação [Gradshteyn e Ryzhik (1980, p. 307)],

$$\int_0^{\infty} \text{Exp}(-q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}, \quad [q > 0] \quad (C.24)$$

temos a seguinte expressar para a equação (C.22):

$$\bar{I}_1 = \sqrt{\pi\xi} \quad (\text{C.25})$$

b) Se $r_D \cos \theta_m = \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$, então $a = 0$, $b = 0$; e similar ao caso anterior,

$$\bar{I}_1 = \int_0^{\infty} \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) dx = \sqrt{\pi\xi} \quad (\text{C.26})$$

e

$$\bar{I}_2 = 0 \quad (\text{C.27})$$

c) Se $-\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' < r_D \cos \theta_m < \frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi'$, então temos $a = -\infty$, $b = +\infty$; e

$$\bar{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{4\xi}\right) dx = 2\sqrt{\pi\xi} \quad (\text{C.28})$$

e

$$\bar{I}_2 = 0 \quad (\text{C.29})$$

Combinando estes resultados, podemos escrever (para $s \rightarrow \infty$):

$$I = \bar{D}_1 \beta \sqrt{\pi\xi} \quad (\text{C.30})$$

onde β é definido pela equação (C.9).

Agora, substituindo a equação (C.30) na equação (C.11) temos:

$$\bar{F} = \frac{\bar{C}\beta\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \int_0^{\infty} \text{Exp}\left(-\xi - \frac{r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m u_n}{4\xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{C.31})$$

Utilizando a relação que segue [Gradshteyn e Ryzhik (1980, p. 340)],

$$\int_0^{\infty} \text{Exp}\left(-\xi - \frac{r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m u_n}{4\xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\pi} \text{Exp}(-|r_D \text{sen} \theta_m| \sqrt{u_n}) \quad (\text{C. 32})$$

reescrevemos a equação (C.31):

$$\bar{F} = \frac{\bar{C}\beta\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + r_D \cos \theta_m \cotg \psi'}{h_D} \text{Exp}(-|r_D \text{sen} \theta_m| \sqrt{u_n}) \quad (\text{C. 33})$$

Utilizando a relação dada por Raghavan e Ozkan [1994, p. 62, equação (7)]¹³, podemos escrever a equação (C.33) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \frac{\beta h_D}{2sh_{wD} \text{sen} \psi'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ K_0 \left[\sqrt{(z_D - z_{wD} - e - 2nh_D)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m \sqrt{u}} \right] \right. \\ & \left. + K_0 \left[\sqrt{(z_D + z_{wD} + e - 2nh_D)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m \sqrt{u}} \right] \right\} \\ & - \frac{\bar{C}\beta\pi}{4\sqrt{u}} \text{exp}(-r_D \text{sen} \theta_m \sqrt{u}) \quad (\text{C. 34}) \end{aligned}$$

Para $s \rightarrow \infty$, podemos assumir que todos os termos do somatório desaparecem, exceto o primeiro para $n = 0$. Logo, podemos escrever:

$$\bar{F} = \frac{\beta h_D}{2sh_{wD} \text{sen} \psi'} K_0 \left[\sqrt{(z_D - z_{wD} - e)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m \sqrt{u}} \right]$$

¹³ A mesma definida pela equação (B.37).

$$-\frac{\bar{C}\beta\pi}{4\sqrt{u}} \exp(-r_D \text{sen } \theta_m \sqrt{u}) \quad (\text{C.35})$$

Finalmente, utilizando a equação (C.8) e (C.35) na equação (C.1), obtemos a seguinte aproximação para tempo-curto (Ozkan e Raghavan, 2000):

$$\bar{\Delta p}_D(s \rightarrow \infty) = \frac{\beta h_D}{2s h_{wD} \text{sen } \psi'} K_0 \left[\sqrt{(z_D - z_{wD} - e)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m} \sqrt{u} \right] \quad (\text{C.36})$$

Invertendo a equação (C.36) para o domínio do tempo, temos:

$$\Delta p_D = \frac{\beta h_D}{4h_{wD} \text{sen } \psi'} E_i \left[-\frac{(z_D - z_{wD} - e)^2 + r_D^2 \text{sen}^2 \theta_m}{4t_D} \right] \quad (\text{C.36})$$

➤ **Aproximação para tempo-longo ($s \rightarrow 0$)**

Primeiro, vamos considerar $\bar{\Delta p}_{Df}$, dado pela equação (C.1). Utilizando a relação dada por Raghavan e Ozkan [1994, p. 56, equação (9)]¹⁴, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p}_{Df} &= \frac{1}{2s} (-\ln s + \ln 4 - 2\gamma + 2) \\ &+ \bar{C} \sigma \left(r_D \cos \theta_m, r_D \text{sen } \theta_m, -\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi', +\frac{h_{wD}}{2} \text{sen } \psi' \right) \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde γ é a constante de Euler (0.5772...) e¹⁵

¹⁴ $\bar{I} = \frac{b-a}{2s} (-\ln s + \ln 4 - 2\gamma + 2) + \frac{2}{s} \sigma(x_D, y_D, a, b)$

¹⁵ Apêndice A, Item vi.

$$\sigma(x_D, y_D, a, b) = \frac{1}{4} \{ (x_D - b) \ln[(x_D - b)^2 + y_D^2] - (x_D - a) \ln[(x_D - a)^2 + y_D^2] \} \\ - \frac{y_D}{2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_D - a}{y_D} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_D - b}{y_D} \right) \right] \quad (\text{C. 38})$$

Agora, considerando \bar{F} , dado pela equação (C.3). Para $s \rightarrow 0$, podemos escrever as seguintes relações:

$$\text{Se } r_D \cos \theta_m \geq \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi',$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{F}_b = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\frac{n\pi}{h_D}} [I_0(b_3, \infty, -) - I_0(b_1, \infty, -)] \quad (\text{C. 39})$$

$$\text{Se } r_D \cos \theta_m \leq -\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi',$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{F}_c = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\frac{n\pi}{h_D}} [I_0(b_4, \infty, +) - I_0(b_2, \infty, +)] \quad (\text{C. 40})$$

Nas equações (C.39) e (C.40),

$$I_0(x_1, x_2, \pm) = \lim_{s \rightarrow 0} I(x_1, x_2, \pm) = \\ \int_{x_1}^{x_2} K_0 \left(\sqrt{\xi^2 + \frac{n^2 \pi^2}{h_D^2} r_D^2 \operatorname{sen}^2 \theta_m} \right) \cos n\pi \frac{z_{wD} + \left(r_D \cos \theta_m \pm \frac{\xi h_D}{n\pi} \right) \operatorname{cotg} \psi'}{h_D} d\xi \quad (\text{C. 41})$$

$$\text{Se } -\frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi' \leq r_D \cos \theta_m \leq \frac{h_{wD}}{2} \operatorname{sen} \psi',$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{F}_1 = \frac{2h_D}{sh_{wD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} \cos n\pi \frac{z_{wD} + e}{h_D} \operatorname{Exp} \left(-\frac{n\pi}{h_D} r_D \right) \quad (\text{C. 42})$$

As equações (25) e (26) de Raghavan e Ozkan (1994, p. 68) fornecem as seguintes relações, respectivamente:

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{sL_D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi z_1 \cos n\pi z_2}{n} \text{Exp}(-n\pi L_D |y_D|) \quad (\text{C. 43})$$

e

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = \frac{1}{4sL_D} \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\pi L_D |y_D|) \cos \pi(z_1 + z_2) + \exp(-2\pi L_D |y_D|)} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\pi L_D |y_D|) \cos \pi(z_1 - z_2) + \exp(-2\pi L_D |y_D|)} \right] \right\} \quad (\text{C. 44}) \end{aligned}$$

A partir das equações (C.43) e (C.44) acima, reescreve-se a equação (C.42) da seguinte forma¹⁶:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \bar{F}_1 = \frac{h_D}{2sh_{wD}} \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D + z_{wD} + e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D - z_{wD} - e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right] \right\} \quad (\text{C. 45}) \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{\pi r_D}{h_D}$. Para \bar{F}_2 temos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{F}_2 = \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{z_D}{h_D}}{\frac{n\pi}{h_D}} [I_0(b_1, \infty, -) + I_0(b_2, \infty, +)] \quad (\text{C. 46})$$

onde $I_0(x_1, x_2, \pm)$ também é dado pela equação (C.41).

¹⁶ Apêndice A, Item vii.

Invertendo para o domínio do tempo, obtemos as seguintes expressões para Δp_D , Δp_{Df} , F_1 e F_2 ; para tempo-longo (Ozkan e Raghavan, 2000):

$$\Delta p_D = \Delta p_{Df} + F \quad (\text{C. 47})$$

$$\Delta p_{Df} = 0.5(\ln t_D + 0.080907) + 1 + \frac{2}{h_{wD} \sin \psi'} \sigma \left(r_D \cos \theta_m, r_D \sin \theta_m, -\frac{h_{wD}}{2} \sin \psi', +\frac{h_{wD}}{2} \sin \psi' \right) \quad (\text{C. 48})$$

$$F = F_1 - F_2 \quad (\text{C. 49})$$

$$F_1 = \frac{h_D}{2h_{wD}} \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D + z_{wD} + e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right] + \ln \left[\frac{1}{1 - 2 \exp(-\lambda) \cos \pi \left(\frac{z_D - z_{wD} - e}{h_D} \right) + \exp(-2\lambda)} \right] \right\} \quad (\text{C. 50})$$

$$F_2 = \frac{2h_D}{\pi h_{wD} \sin \psi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \frac{z_D}{h_D} [I_0(b_1, \infty, -) + I_0(b_2, \infty, +)] \quad (\text{C. 51})$$

ANEXO I – Código para Geração das Curvas Típicas

```

hD = 100;

PwD1 = (Exp[-0.25 / t] / t) * Integrate[Exp[-((Tan[0 Degree]^2) * (z + 0.3 hD)^2) / (4 * t))] *
  (1 + 2 * Sum[Exp[-((n^2) * (Pi^2) * t) / (hD^2)] * Cos[0.8 * n * Pi] *
    Cos[(n * Pi / 2) - (n * Pi * z / hD)], {n, 1, 1}]), {z, -hD / 2, hD / 2}];
PwD2 = (Exp[-0.25 / t] / t) * Integrate[Exp[-((Tan[30 Degree]^2) * (z + 0.3 hD)^2) /
  (4 * t))] * (1 + 2 * Sum[Exp[-((n^2) * (Pi^2) * t) / (hD^2)] * Cos[0.8 * n * Pi] *
  Cos[(n * Pi / 2) - (n * Pi * z / hD)], {n, 1, 30}]), {z, -hD / 2, hD / 2}];
PwD3 = (Exp[-0.25 / t] / t) * Integrate[Exp[-((Tan[60 Degree]^2) * (z + 0.3 hD)^2) /
  (4 * t))] * (1 + 2 * Sum[Exp[-((n^2) * (Pi^2) * t) / (hD^2)] * Cos[0.8 * n * Pi] *
  Cos[(n * Pi / 2) - (n * Pi * z / hD)], {n, 1, 40}]), {z, -hD / 2, hD / 2}];
PwD4 = (Exp[-0.25 / t] / t) * Integrate[Exp[-((Tan[75 Degree]^2) * (z + 0.3 hD)^2) /
  (4 * t))] * (1 + 2 * Sum[Exp[-((n^2) * (Pi^2) * t) / (hD^2)] * Cos[0.8 * n * Pi] *
  Cos[(n * Pi / 2) - (n * Pi * z / hD)], {n, 1, 60}]), {z, -hD / 2, hD / 2}];

tD = {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 2, 2.2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
  11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70,
  75, 80, 85, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500,
  550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000, 1100, 1200, 1300, 1400, 1500,
  1600, 1700, 1800, 1900, 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600, 2700, 2800,
  2900, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000, 5500, 6000, 6500, 7000, 7500, 8000, 8500,
  9000, 9500, 10000, 11000, 13000, 15000, 17000, 19000, 20000, 22000, 24000,
  26000, 28000, 30000, 35000, 40000, 45000, 50000, 55000, 60000, 65000, 70000,
  75000, 80000, 90000, 95000, 100000, 150000, 200000, 250000, 300000, 350000,
  400000, 450000, 500000, 550000, 600000, 700000, 800000, 900000, 1000000};

SetOptions[LogLogPlot, {PlotRange -> {0.01, 10}, PlotLabel -> "hD=100",
  Frame -> True, FrameLabel -> {tD, "PD e tD*PD'"}, BaseStyle -> {FontSize -> 12}}];

PD1[y_] := 1 / (2 hD) * NIntegrate[PwD1, {t, 0, y}];
Tabela1 = Table[{y, Re[PD1[y]]}, {y, tD}];
PwD1 = Interpolation[Tabela1];
P1 = LogLogPlot[{PwD1[y], y * PwD1'[y]},
  {y, 0.1, 1000000}, PlotStyle -> {{Black}, {Dashed, Black}}];
PD2[y_] := 1 / (2 hD) * NIntegrate[PwD2, {t, 0, y}];
Tabela2 = Table[{y, Re[PD2[y]]}, {y, tD}];
PwD2 = Interpolation[Tabela2];
P2 = LogLogPlot[{PwD2[y], y * PwD2'[y]},
  {y, 0.1, 1000000}, PlotStyle -> {{Brown}, {Dashed, Brown}}];

```

```

PD3[y_] := 1 / (2 hD) * NIntegrate[PwD3, {t, 0, y}];
Tabela3 = Table[{y, Re[PD3[y]]}, {y, tD}];
PwD3 = Interpolation[Tabela3];
P3 = LogLogPlot[{PwD3[y], y * PwD3'[y]},
  {y, 0.1, 1000000}, PlotStyle -> {{Purple}, {Dashed, Purple}}];
PD4[y_] := 1 / (2 hD) * NIntegrate[PwD4, {t, 0, y}];
Tabela4 = Table[{y, Re[PD4[y]]}, {y, tD}];
PwD4 = Interpolation[Tabela4];
P4 = LogLogPlot[{PwD4[y], y * PwD4'[y]},
  {y, 0.1, 1000000}, PlotStyle -> {{Purple}, {Dashed, Purple}}];

Show[P1, P2, P3, P4]

```

ANEXO II – Código para Geração das Assíntotas para Tempo-Curto

```

β = 2;
hD = 100;
ψ = 60 Degree;
hwD = hD / Cos[ψ];
rD = Sqrt[1 + 0.09 hwD^2 Sin[ψ]^2];
θ = N[ArcCos[0.3 hwD Sin[ψ] / rD]];
zWD = hD / 2;
zD = zWD + 0.3 hwD Cos[ψ];
e = rD Cos[θ] Cot[ψ];

PD[s_] = (β hD / (2 s hwD Sin[ψ])) BesselK[0, Sqrt[(zD - zWD - e)^2 Sin[ψ]^2 + rD^2 Sin[θ]^2] Sqrt[s]];

Ni = 8;
V[i_, NN_] =
  (-1)^(i+NN/2) * Sum[(k^(1+NN/2) * (2 * k)!) / ((NN / 2 - k)! * (k!)^2 * (i - k)! * (2 * k - i)!),
    {k, Floor[(i+1)/2], Min[i, NN/2]};
PD1[tD_] = Log[2] / tD * Sum[V[i, Ni] * PD[(Log[2] / tD) * i],
  {i, 1, Ni}];

LogLogPlot[y * PD1'[y], {y, 0.1, 1000000}, PlotRange -> {0.01, 10},
  PlotStyle -> {{Dashed, Red}, Thickness[0.03]}, PlotLabel -> "hD=100",
  Frame -> True, FrameLabel -> {tD, "PD e tD*PD'"}, BaseStyle -> {FontSize -> 12}]

```

ANEXO III – Código para Geração das Assíntotas para Tempo- Longo

```

β = 2;
hD = 100;
ψ = 60 Degree;
hwD = hD / Cos[ψ];
rD = Sqrt[1 + 0.09 hwD^2 Sin[ψ]^2];
θ = N[ArcCos[0.3 hwD Sin[ψ] / rD]];
zwD = hD / 2;
zD = zwD + 0.3 hwD Cos[ψ];
e = rD Cos[θ] Cot[ψ];
a = rD Sin[θ];
b1 = rD Cos[θ] + (hwD / 2) Sin[ψ];
b2 = (hwD / 2) Sin[ψ] - rD Cos[θ];

```

$$F1 = -\frac{hD}{2 hwD s} \left(\text{Log} \left[\frac{1}{1 - 2 \text{Exp} \left[-\frac{\text{Pi} rD}{hD} \right] \text{Cos} \left[\text{Pi} \frac{(zD+zwD+e)}{hD} \right] + \text{Exp} \left[-2 \text{Pi} \frac{rD}{hD} \right]} \right] + \right. \\ \left. \text{Log} \left[\frac{1}{1 - 2 \text{Exp} \left[-\frac{\text{Pi} rD}{hD} \right] \text{Cos} \left[\text{Pi} \frac{(zwD+e-zD)}{hD} \right] + \text{Exp} \left[-2 \text{Pi} \frac{rD}{hD} \right]} \right] \right);$$

$$F2 = \frac{2 hD}{s hwD \text{Sin}[\psi]}$$

$$\text{Sum} \left[\frac{\text{Cos}[n \text{Pi} zD]}{(n \text{Pi}) / hD} \left(\text{NIntegrate} \left[\text{BesselK} \left[0, \sqrt{\xi^2 + \frac{n^2 \pi^2}{hD^2}} \right] \text{Cos} \left[n \pi \frac{zwD + e - \frac{\xi hD}{n \text{Pi}} \text{Cot}[\psi]}{hD} \right], \right. \right. \\ \left. \left. \{\xi, b1, \text{Infinity}\} \right] + \text{NIntegrate} \left[\text{BesselK} \left[0, \sqrt{\xi^2 + \frac{n^2 \pi^2}{hD^2}} \right] \right. \right. \\ \left. \left. \text{Cos} \left[n \pi \frac{zwD + e + \frac{\xi hD}{n \text{Pi}} \text{Cot}[\psi]}{hD} \right], \{\xi, b2, \text{Infinity}\} \right] \right), \{n, 1, 100\} \right];$$

$$\begin{aligned}
PD[s_] = & \frac{1}{2s} (-\text{Log}[s] + \text{Log}[4] - 2 * 0.5772 + 2) + \frac{2}{s \text{ hWD Sin}[\psi]} \frac{1}{4} \\
& \left((rD \text{Cos}[\theta] - (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi]) \text{Log}[(rD \text{Cos}[\theta] - (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi])^2 + rD \text{Sin}[\theta]] - \right. \\
& \left. (rD \text{Cos}[\theta] + (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi]) \text{Log}[(rD \text{Cos}[\theta] + (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi])^2 + rD \text{Sin}[\theta]] \right) - \\
& \frac{rD \text{Sin}[\theta]}{2} \left(\text{ArcTan}\left[\frac{(rD \text{Cos}[\theta] + (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi])}{rD \text{Sin}[\theta]}\right] - \right. \\
& \left. \text{ArcTan}\left[\frac{(rD \text{Cos}[\theta] - (\text{hWD} / 2) \text{Sin}[\psi])}{rD \text{Sin}[\theta]}\right] \right) + (F1 - F2);
\end{aligned}$$

Ni = 8;

V[i_, NN_] =

$$(-1)^{i+NN/2} * \sum_{k=\text{Floor}[(i+1)/2]}^{\text{Min}[i, NN/2]} (k^{1+NN/2} * (2 * k)!) / ((NN / 2 - k)! * (k!)^2 * (i - k)! * (2 * k - i)!);$$

$$PD1[tD_] = \text{Log}[2] / tD * \sum_{i=1}^{Ni} V[i, Ni] * PD[(\text{Log}[2] / tD) * i];$$

LogLogPlot[{PD1[y], y * PD1'[y]}, {y, 100 000, 1 000 000 000}, PlotRange -> {0.01, 10},
PlotStyle -> {{Red}, {Dashed, Red}}, PlotLabel -> "h_D=100", Frame -> True,
FrameLabel -> {t_D, "P_D e t_D*P_{D}'"}, BaseStyle -> {FontSize -> 12}]}