UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

Análise Wavelet Aplicada a Sinais Geofísicos

Autor: **João Marcelo Brazão Protázio**
Orientador: **Armando Zaupa Remacre**

15/02

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

Análise Wavelet Aplicada a Sinais Geofísicos

Autor: **João Marcelo Brazão Protázio**
Orientador: **Armando Zaupa Remacre**

Curso: Ciências e Engenharia de Petróleo
Área de Concentração: AB – Reservatório e Gestão

Dissertação de mestrado apresentada à Sub-Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

Campinas, 2002
S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise Wavelet Aplicada a Sinais Geofísicos

Autor: **João Marcelo Brazão Protázio**
Orientador: **Armando Zaupa Remacre**

____
Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre, Presidente
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – UNICAMP

____
Prof. Dr. Adalberto da Silva
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE - UFF

____
Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – UNICAMP

Campinas, 16 de abril de 2002

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Protázio, João Marcelo Brazão
P946a	Análise wavelet aplicada a sinais geofísicos / Ricardo Marinho.--Campinas, SP: [s.n.], 2001.
	Orientador: Armando Zaupa Remacre.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências.
	1. Wavelets (Matemática). 2. Processamento de sinais. I. Remacre, Armando Zaupa. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências. III.Título.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa e meus filhos: um na terra e outro no céu.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas ás quais presto minha homenagem:

Aos meus pais pelos incentivos em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

A todos os professores, colegas e funcionários dos departamento do IG e da FEM que de forma direta e indireta muito ajudaram na conclusão deste trabalho.

À ANP e ao CEPETRO/Unicamp pela concessão de bolsa de estudo, importante para minha manutenção ao longo do curso.

Aos membros da banca pelas correções e sugestões apresentadas quando da defesa da tese.

As crianças não devem chorar
mil crianças representam mil sorrisos
o mundo ainda não entende
e mata, e mata, e mata, e mata suas crianças
as crianças não devem morrer
não antes de poderem sorrir
não antes... de poderem nascer

Mosaico de Ravena – Banda Paraense da Década de 90

Resumo

PROTÁZIO, João Marcelo Brazão, *Análise Wavelet Aplicada a Sinais Geofísicos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 150 p. Dissertação (Mestrado)

A classe de funções chamadas wavelets surgiu pela primeira vez na tese apresentada pelo físico inglês Alfred Haar em 1910. Desde então, depois de muito formalismo matemático, na segunda metade da década de 80, esta ferramenta começou a ser aplicada em várias áreas da Ciência. Sua capacidade singular de obtenção de localização tanto no tempo quanto na freqüência mostra-se uma característica bem adaptada para o tratamento de sinais não estacionários. A proposta principal deste trabalho é a utilização da Transformada Wavelet como uma ferramenta utilizada no processamento de sinais geofísicos em geral e é apresentada através de duas abordagens, uma no caso 1D (perfis geofísicos), onde o método é utilizado na transferência de escalas e outra no caso 2D (imagens sísmicas) onde o método é utilizado como uma ferramenta de filtragem. Este caso é comparado então com o método da Krigagem Fatorial.

Palavras Chave

Transformada Wavelet, Análise Wavelet, Sinais Geofísicos, Processamento de Sinais

Abstract

PROTÁZIO, João Marcelo Brazão, *Wavelet Transform Applied in Geophysical Signals*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 150 p. Dissertação (Mestrado)

The class of functions called wavelets appeared for the first time in the thesis presented by the English physicist Alfred Haar, in 1910. Ever since, after a lot of mathematical formalism, in the second half of the 80´s decade, this tool began to be applied in several areas of the Science. Its singular capacity of obtaining of so much location in the time as in the frequency a characteristic is shown well adapted for the treatment of non stationary signals. The main proposal of this work is the use of Wavelet Transform as a tool used in general in the processing of geophysical signals and it is presented through two approaches, one in the case 1D (geophysical well log), where the method is used in the transfer of scales and another in the case 2D (seismic imaging) where the method is used as a tool filtering. This case is compared then with Fatorial Kriging´s method.

Key Words

Wavelet Transform, Wavelet Analysis, Geophysical Signals, Signal Processing

Índice

Lista de Figuras

Nomenclatura

WFT Transformada de Fourier de curta duração, do Inglês *Windowed Fourier Transform*

FFT Transformada rápida de Fourier, do Inglês *Fast Fourie Transform*

CWT Transformada Wavelet Contínua, do Inglês *Continuous Wavelet Transform*

FT Transformada de Fourier, do Inglês *Fourier Transform*

WT Transformada Wavelet, do Inglês *Wavelet Transform*

DWT Transformada Wavelet Discreta, do Inglês *Discrete Wavelet Transform*

Capítulo 1

Introdução

A transformada wavelet[1] é uma transformação integral onde os núcleos de integração usados são denominados de wavelets. Estas wavelets são essencialmente usadas de duas maneiras no estudo de processos ou sinais: (i) como um núcleo de integração para analisar a extração de informações sobre um processo, e (ii) como uma base de representação ou caracterização do mesmo. De forma evidente, em toda análise ou representação, a escolha da função base (ou núcleo) determina o tipo de informação que pode ser extraída de um processo. Isto implica também nas seguintes questões: qual o tipo de informação que se pode extrair usando as wavelet ? e como pode-se obter uma representação ou descrição de um processo por meio das mesmas ?

A resposta para a primeira questão recai em uma das propriedades mais importantes das wavelets, que é sua capacidade de obter localização tanto no tempo quanto na freqüência. A idéia por trás desta representação é a separação do sinal de interesse em várias partes e analisar cada uma delas separadamente, ou seja, usar as grandes escalas para mostrar as características mais globais do sinal e as pequenas escalas para mostrar os detalhes (características locais) do mesmo. Esta propriedade é de extrema utilidade na análise de sinais que possuam as seguintes características: não estacionaridade, componentes transientes de curta duração e singularidades em várias escalas diferentes.

A resposta para a segunda questão é baseada na utilização das wavelets como blocos

1 Que literalmente significa "pequena onda"

elementares de construção usados para a decomposição ou expansão de um processo em uma série, de maneira similar como é efetuada através da série de Fourier. Assim, uma representação de um processo através das wavelets é obtida por meio de uma expansão em uma série infinita de versões dilatadas (ou comprimidas) e transladadas de uma wavelet-mãe (também chamada de wavelet básica) e multiplicadas por um coeficiente apropriado.

Sendo assim, a Transformada Wavelet é capaz de revelar aspectos em um sinal que não foram possíveis de serem obtidas através de outras técnicas de processamento, aspectos estes como: tendências, pontos de descontinuidade, descontinuidades em derivadas superiores e auto-similaridade. Além do método obter uma maneira diferente de representar um sinal, em comparação com outros métodos usuais de processamento, a análise obtida através da Transformada Wavelet pode frequentemente comprimir ou filtrar um sinal sem uma degradação considerável e com grande economia de memória.

Com estas características singulares e bem adaptadas à análise de sinais, a Transformada Wavelet provavelmente mostrar-se-á uma técnica com grande potencialidade no estudo de sinais geofísicos.

1.1 Objetivos

A motivação principal deste trabalho é aplicação da Análise Wavelet na análise de sinais geofísicos. A pesquisa feita sobre o assunto na literatura atual disponível é bastante extensa e com muitas aplicações em áreas tão diversas como matemática, geofísica, física, economia, estatística, música, processamento de sinais e imagens, engenharia elétrica, medicina, entre outras. Entretanto, ela tem mostrado que a quantidade de trabalhos publicados especificamente e aplicados à Geociências é ainda muito pequena. Buscou-se, na medida do possível, a utilização e a adaptação de métodos existentes ou mesmo a criação de métodos híbridos, onde a Análise Wavelet é utilizada em combinação com outros métodos usuais de tratamento de sinais e imagens, como a Geoestatística e a Transformada de Fourier Clássica.

Os objetivos básicos do trabalho são a adaptação e implementação de métodos numéricos aplicados à transferência de escala para o caso de sinais geofísicos 1D e à supressão e/ou eliminação de ruídos em sinais geofísicos 2D.

1.2 Organização da dissertação

A presente disssertação está organizada da seguinte forma: o **Capítulo 1** apresenta as razões que motivaram este trabalho, expondo os objetivos pretendidos.

O **Capítulo 2** traz a revisão bibliográfica que focaliza trabalhos que fazem uso da Transformada Wavelet em algumas áreas da ciência, assim como trabalhos relevantes aplicados ao processamento de sinais gerais e em problemas de transferência de escala de propriedades petrofísicas de rochas de reservatório.

Os fundamentos teóricos da Análise Wavelet, assim como a comparação da mesma com outros métodos clássicos usualmente aplicados em processamento de sinais dentre eles, a Transformada de Fourier Clássica ou **FT** (do inglês, Fourier Transform) e a Transformada de Fourier de Curta Duração ou **WFT** (do inglês, Windowed Fourier Transform) estão contidos no **Capítulo 3**.

No **Capítulo 4,** a Análise Wavelet é utilizada na transferência de escalas em um sinal de uma dimensão (perfis geofísicos obtidos de um campo real). Este processo vai ser utilizado em perfis de densidade total (**rhoB**) e tempo de trânsito sônico (**dt**), perfis esses obtidos de poços existentes no Campo de Namorado da Petrobrás. Este processo de transferência de escala têm por objetivo reduzir, por filtragem, a informação geológica às bandas de freqüência compatíveis com a aquisição sísmica, procedimento este adotado para obtenção de sismogramas sintéticos utilizados na amarração poço-sísmica.

No **Capítulo 5** a Análise Wavelet é aplicada na supressão de ruído em uma imagem de uma amostra contendo traços de elemento fósforo altamente contaminada por ruído.

No **Capítulo 6,** a Análise Wavelet será aplicada à supressão de ruídos em imagens de atributos petrofísicos (imagens sísmicas). A qualidade do método será então comparada com resultados obtidos através de técnicas de filtragem da Geoestatística, no caso, a Krigagem Fatorial.

No **Conclusão**, finalmente, serão sumarizadas as principais conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O conceito de Transformada Wavelet foi formalizado pela primeira na década de 80 através de uma série de artigos escritos por Morlet (1981). Entretanto, foi no início do século passado, em 1910, que o físico Alfred Haar introduziu um sistema completo de funções ortogonais com muitas propriedades e características que fazem das wavelets, atualmente, uma das ferramentas matemáticas com um vasto campo de aplicações nas ciências mais diversas.

Foi contudo na segunda metade da década de 80 que foram definidos com rigor os conceitos que permitem compreender de uma forma clara a natureza deste tipo de funções, estabelecendo as suas propriedades e permitindo as construção e geração de outras famílias de wavelets. Envolvidos neste trabalho pioneiro estiveram vários pesquisadores, destacando-se, entre outros, Meyer (1989a), Mallat (1989) e Daubechies (1992). Após décadas de formalismo matemático, finalmente a transformada wavelet foi utilizada de forma pioneira na análise de sinais geofísicos mais diversos (Kumar & Foufoula, 1994).

Graps (1995) apresenta uma abordagem mais teórica das wavelets e apresenta a sua potencialidade de aplicações em várias áreas. Mostrou-se que as wavelets são funções matemáticas que separam um sinal em suas componentes de diferentes freqüências e estuda cada uma das componentes com a resolução compatível para esta escala. Este método possui vantagens sobre a Transformada de Fourier na análise de situações físicas onde o sinal contém descontinuidades e pulsos.

Boa parte da teoria wavelet foi desenvolvida de forma independente em vários campos da ciência, tais como: matemática, física quântica, engenharia elétrica e sísmica. Contribuições entre estes campos específicos durante os últimos dez anos têm levado a um número maior de aplicações, como: processamento e compressão de imagens, turbulência, visão humana, radar, entre outras. Outro trabalho com esta abordagem teórica foi também apresentado por Astaf'eva (1996). A teoria básica da Transformada Wavelet é apresentada e mostra-se uma ferramenta adequada e bem adaptada para a investigação e análise de processos não estacionários envolvendo um grande número de escalas. Em contraste com a Transformada de Fourier, a Transformada Wavelet é bem localizada tanto no tempo quanto na freqüência. O potencial do método é ilustrado pela análise de vários modelos de séries, tais como: harmônicos, fractal e as mesmas séries contaminadas com vários tipos de singularidades.

No trabalho de Prokoph & Barthelmes (1996), a análise obtida através da Transformada Wavelet foi utilizada na detecção e localização de descontinuidades, eventos e sequências cíclicas periódicas e caóticas em uma sucessão sedimentar marinha. A Transformada Wavelet também foi utilizada na localização exata das transições e mudanças abruptas das sucessões sedimentares, permitindo assim uma suficiente e simples localização das mesmas do conjunto de dados. Já no trabalho de Liu (1996), a análise do espectro obtido através da Transformada Wavelet foi aplicada a um conjunto de dados de ventos oceânicas, coletados durante o programa SWADE (Surface Wave Dynamics Experiment) de 1990. Resultados novos foram obtidos e que não seriam evidentes se fosse utilizada metodologia tradicional através da Transformada de Fourier.

O trabalho de Chu (1996) apresenta uma nova forma de obtenção de "upscaling" em alternativa às numerosas técnicas existentes na literatura especializada. A obtenção de métodos razoavelmente precisos e eficientes para a obtenção das propriedades equivalentes de rochas do reservatório em escalas mais finas permanecem ainda um problema de difícil solução. Devido a natureza das heterogeneidades multiescalas inerentes aos reservatórios de petróleo, as propriedades de rocha e fluido equivalentes irão variar com a escalas de heterogeneidade. A análise realizada através da Transformada Wavelet é um método de decomposição multi-resolução (ou multiescala) e, portanto, adequada para realizar o "upscaling" de propriedades de rochas e fluxo em um reservatório com heterogeneidades em várias escalas. Na mesma linha de pesquisa, o trabalho de Kumar & Farmer (1997) mostra que o "upscaling" de propriedades petrofísicas gerais é necessário, pois importantes informações sobre o reservatório são obtidas em escalas mais finas que os blocos de discretização utilizados para simular o reservatório. Este artigo apresenta algumas novidades que tornam os métodos de "upscaling" mais eficientes, dentre elas, uma visão geral da geração de um modelo de simulação e a hierarquia de modelagem, a eficácia dos métodos de médias simples comparados com as técnicas de solução de pressão direta para fluxos mono e bifásico e, finalmente, uma técnica mais rápida de "upscaling" para a permeabilidade relativa. Mais recentemente, Jansen (1998) mostra que modelos geológicos gerados em uma escala mais fina determinam modelos de reservatório contendo centenas de milhares de blocos de discretização.

Mesmo para computadores de alto desempenho, este tipo de discretização é muito custosa e não justifica a sua utilização na simulação de reservatórios. A Transformada Wavelet tem a capacidade de preservar estruturas locais em conjuntos de dados espaciais. Para diminuir o esforço computacional foi utilizada a Transformada Wavelet para realizar o "upscaling" dos valores das propriedades em escala mais fina para uma escala maior em 2 ou 3 dimensões.

No trabalho de Torrence & Compo (1997), um guia prático, passo a passo, para análise através da Transformada Wavelet é apresentado, com exemplos obtidos de séries temporais das oscilações do ENSO (El Niño Southern Oscillation). Este guia abrange uma comparação do método com a **WFT**, a escolha da função wavelet apropriada, os efeitos de borda devido ao comprimento finito das séries temporais e a relação entre as escalas wavelet e a freqüência de Fourier.

Jansen & Kelkar (1997) mostram que dados de produção são uma das maiores fontes de informação disponíveis sobre o comportamento do reservatório e do poço. Vários trabalhos têm mostrado como a correlação cruzada entre pares de poços pode fornecer informação sobre a direção de fluxo em um reservatório, mas geralmente, o cálculo da mesma têm-se mostrado problemática. Isto se deve principalmente à natureza não linear e não estacionária das relações entre poços. A relação entre poços é uma função das condições de contorno impostas pelos próprios poços e das propriedades do reservatório. A Transformada Wavelet é mostrada como uma nova ferramenta, que diferente da Transformada de Fourier, permite um tratamento de dados não estacionários. Isto abre novas possibilidades com respeito a obtenção de correlaçoes cruzadas mais robustas entre poços e a utilização destes dados para uma determinação mais consistente das causas do comportamento do poço e sua influência nos poços ao seu redor.

Por outro lado, a análise obtida através da Transformada Wavelet é um método sensível para detecção automática e distinção de descontinuidades abruptas, tais como falhas, descontinuidades, ciclicidades e mudanças graduais na taxa de sedimentação (Prokoph & Agterberg, 2000). A Transformada Wavelet foi aplicada a perfis reais de raio gama e utilizada na avaliação da distribuição espaço-temporal das rochas reservatório e para estimar as taxas de acumulação em uma bacia sedimentar.

De forma pioneira, Oliver, Bosch & Slocum (2000) usaram a decomposição através da Transformada Wavelet para descrever e localizar um amplo espectro de freqüências simultâneamente e, então, filtrá-las através da decomposição multi-resolução obtida através da Transformada Wavelet. O método foi aplicado e comparado com a filtragem obtida pelo uso da Krigagem Fatorial, com resultados satisfatórios.

Silva (2001) mostra que nos métodos usuais utilizados na obtenção de sismogramas sintéticos, o sinal de perfil sofre uma conversão de escala do domínio do espaço para o domínio do tempo, é filtrado (com bandas de freqüência de corte derivadas do espectro do sinal sísmico) e convolvido num traço sísmico sintético. Geralmente, o controle da filtragem utiliza o sinal sísmico, com espectro mais empobrecido e de menor resolução espacial, mas que, por outro lado possui uma cobertura espacial mais adequada ao reconhecimento das informações geológicas. Neste trabalho propõe-se um enfoque alternativo, decompondo e analisando o espectro (utilizando a Transformada de Fourier) do sinal de perfis de poço previamente à sua transformação para a escala do tempo e reduzindo por filtragem a informação geológica às bandas de freqüência compatíveis com a aquisição sísmica. Neste procedimento a escala natural da natureza é preservada, permitindo o controle eficaz das rotinas de filtragem com base no conhecimento da geologia do reservatório, em grande parte derivada da própria interpretação dos perfis.

Capítulo 3

Aspectos Teóricos

3.1 Análise no tempo e na freqüência

A motivação original para a criação da teoria de wavelet foi o desenvolvimento de um método de aquisição, transformação e armazenagem de um traço sísmico (função de uma variável no domínio do tempo) e que também satisfizesse as seguintes propriedades:

- A contribuição de cada uma das diferentes bandas de freqüência devem ser razoavelmente separadas (no domínio da frequência)
- Esta separação deve ser alcançada sem a perda excessiva de resolução na variável tempo (sujeito, claro, à limitação imposta pelo princípio da incerteza de Heisenberg[2]).
- A reconstrução da função original a partir de sua representação ou transformada deve ser obtida por um método que seja capaz de oferecer uma alta precisão e que ao mesmo tempo seja robusto, ou seja, que o mesmo seja estável ante à pequenas perturbações.

As duas primeiras condições caracterizam essencialmente a propriedade conhecida como localização no tempo e na freqüência.

2 Em 1927 Werner Heisenberg formula um método para interpretar a dualidade da quântica, o princípio da incerteza. Segundo ele, pares de variáveis interdependentes, como tempo e energia, velocidade e posição, não podem ser medidos com precisão absoluta.

3.2 Transformada de Fourier

3.2.1 Definição

Os profissionais responsáveis pela análise de sinais já tem à sua disposição uma grande quantidade de ferramentas. Talvez a mais bem conhecida de todas elas seja a Transformada de Fourier, que separa o sinal em suas componentes (cossenos e senos) de diferentes freqüências. Outra maneira de se pensar na Transformada de Fourier é como uma técnica matemática para transformar o sinal observado no domínio do tempo (ou do espaço, sem perda alguma de generalidade) para o domínio da frequëncia (número de onda, no caso espacial).

Para muitos sinais, a Transformada de Fourier é extremamente útil, pois o conteúdo de freqüência é de extrema importância. Por que , então, se faz necessário o uso de outras técnicas de análise, tal como a Transformada Wavelet?

A Transformada de Fourier possui uma peculiaridade indesejável. Na transformação do sinal do domínio do tempo para o domínio da freqüência, perde-se totalmente a informação sobre a localização temporal (ou espacial). Quando olhamos para a Transformada de Fourier de um sinal, é impossível dizer onde um evento em particular está localizado, pois o que é obtido são apenas as freqüências que compõem o sinal.

Se um sinal "não se altera no tempo", ou seja, se é um sinal dito "estacionário", esta peculiaridade não tem importância alguma. Entretanto, a maioria dos sinais contém numerosas características não estacionárias ou transitórias, tais como: tendências, mudanças abruptas e o início ou final de eventos. Estas características são geralmente as partes mais importantes de um sinal e a Transformada de Fourier é incapaz de detectar tais processos.

Formalmente, a Transformada de Fourier de uma função $f(t)$, é definida em Kumar & Foufolla (1994) como

$$\boldsymbol{F}\, f \equiv \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad \textbf{(3.1)}$$

e fornece informações sobre o conteúdo de freqüência de um processo ou sinal, mas não fornece informações sobre a localização destas freqüências no domínio do tempo.

No exemplo mostrado na **Figura 3.1(a,b)** têm-se dois sinais, o primeiro consistindo de duas freqüências (sen10t e sen20t) superpostas para toda duração do sinal e o segundo, consistindo das mesmas freqüências, mas cada uma aplicada separadamente em cada metade do sinal. Na **Figura 3.1(c,d)** tem-se o espectro de energia, $|f(\omega)|^2$, destes dois sinais, respectivamente. Como se observa, o espectro é incapaz de fazer qualquer distinção entre os dois sinais.

Variações de freqüências dependentes do tempo são muito comuns na música, voz humana, sinais sísmicos, sinais geofísicos não estacionários, entre outras. Para estudar tais sinais, deve-se efetuar uma transformada capaz de obter o conteúdo de freqüência de um sinal localmente no tempo (ou no espaço). Existem essencialmente dois métodos que foram desenvolvidos e que apresentam tais propriedades (dentro dos limites impostos pelo princípio de incerteza de Heisenberg): A *Transformada de Fourier de Curta Duração* ou **WFT** (do inglês, Windowed Fourier Transform) e a *Transformada Wavelet*. Pode-se visualizar, na **Figura 3.1(e,f)** a magnitude dos coeficientes obtidos via Transformada Wavelet Contínua ou **CWT** (do inglês, Continuous Wavelet Transform) para os sinais mostrados na **Figura 3.1(a,b)** respectivamente, e que claramente mostra a capacidade da transformada wavelet de fazer distinção entre estes sinais, ou seja, de localizar espacialmente no sinal cada uma das frequências envolvidas no mesmo.

3.3 Transformada de Fourier de Curta Duração

3.3.1 Definição

Num esforço para corrigir a deficiência encontrada na Transformada de Fourier, Dennis Gabor (1946) adaptou a Transformada de Fourier para analisar apenas uma pequena seção ou parte do sinal, aplicando uma técnica chamada de janelamento do sinal. A adaptação de Gabor, chamada de Transformada de Fourier de Curta Duração ou **WFT**, mapeia um sinal utilizando uma função bidimensional definida no tempo e na freqüência e representa uma forma de compromisso entre uma representação tanto no tempo quanto na freqüência deste sinal. Ela fornece 'alguma' informação sobre 'onde' e qual 'freqüência' de um dado evento do sinal. Entretanto, esta informação é obtida com uma precisão muito limitada, e esta precisão é determinada pelo tamanho da janela utilizada na obtenção da **WFT** do sinal (Kaiser, 1994).

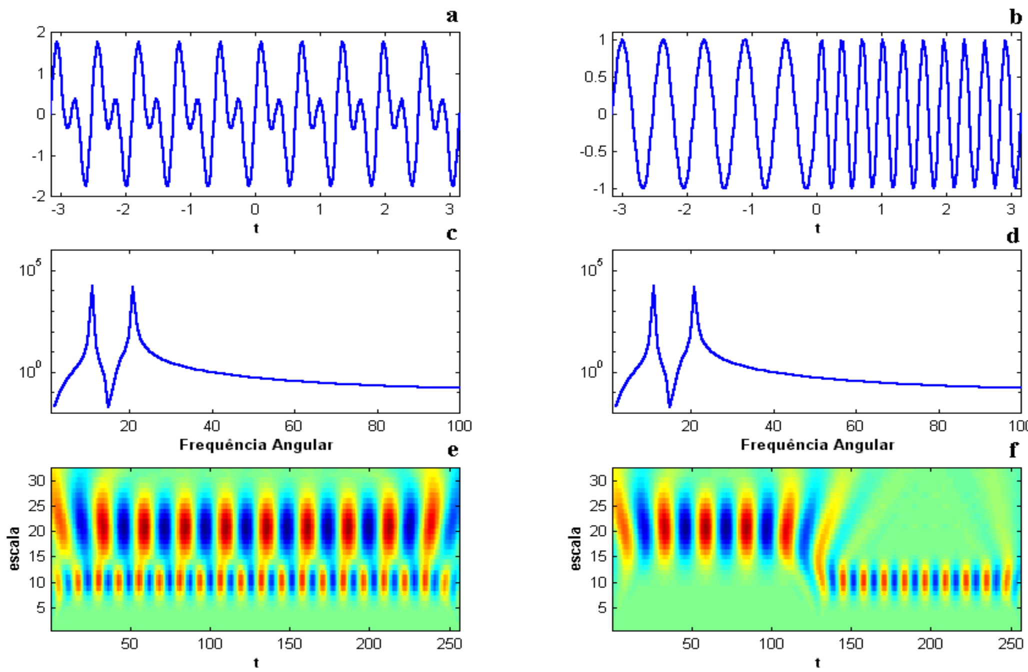


Figura 3.1 Análise espectral através da Transformada de Fourier e através da Transformada Wavelet de dois sinais. O primeiro sinal (a) consiste da superposição de duas freqüências (sen 10t e sen 20t), e o segundo consiste das mesmas freqüências aplicadas a cada uma das metades da duração do sinal (b). As Figuras (c) e (d) mostram os espectros dos dois sinais obtidos através da Transformada de Fourier, ou seja, $|f(\omega)|^2$ vs ω , de (a) e (b) respectivamente e finalmente as Figuras (d) e (e) mostram a magnitude da Transformada Wavelet dos mesmos sinais (usando para isso a wavelet de Morlet). Observe-se com isso a propriedade de localização.

Apesar da **WFT** fornecer informação sobre tempo e freqüência, a desvantagem é que quando se escolhe um tamanho particular para a 'janela' que irá percorrer o sinal, esta janela continua a mesma para todas as freqüências. Entretanto grande parte dos sinais necessitam de uma abordagem mais flexível, ou seja, precisam de uma janela de comprimento variável para que possibilite uma localização mais precisa de um determinado evento tanto no tempo quanto freqüência, pois na maioria das vezes é impossível determinar uma tamanho de janela de ótimo que consiga localizar com resolução suficiente eventos com frequências muito distintas.

Formalmente, na **WFT**, a localização temporal pode ser obtida através do janelamento do processo ou sinal $f(t)$ em vários instantes diferentes, ou seja, utilizando-se uma janela $g(t)$ e então obtendo-se a sua transformada de Fourier. Isto é, a transformada de Fourier de curta duração, $Gf(\omega,t)$, é definida em (Kumar & Foufolla, 1994) por

$$G f(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(u-t)\, e^{-i\omega u}\, du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g_{\omega,t}(u)\, e^{-i\omega u}\, du \tag{3.2}$$

onde o núcleo de integração é definido como $g_{\omega,t}(u)\equiv g(u-t)e^{-i\omega u}$. Esta transformada mede localmente e na vizinhança do ponto *t*, a amplitude da componente de onda sinusoidal de freqüência ω. A função janela $g(t)$ geralmente é escolhida de maneira que seja real, par e com a concentração máxima de energia contida nas componentes de baixa freqüência. Observe que o núcleo de integração $g_{\omega,t}(u)$ tem o mesmo suporte para todo ω em *t*, mas o número de ciclos contidos nesta janela variam com a freqüência como pode ser visualizado na **Figura 3.2**.

A representação desta função $f(t)$ em um plano (ω, *t*) é denominada de representação no espaço de fase e mede a frequência contida (com as devidas limitações) de uma determinada porção do sinal.

A **WFT** preserva a energia do sinal, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Gf(\omega, t)|^2 d\omega\, dt \ , \tag{3.3}$$

uma vêz que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 = 1$ (o que será assumido a partir de agora), e é inversível e sua transformada inversa é definida em (Kumar & Foufolla, 1994) como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Gf(\omega, u)\, g(u-t)\, e^{i\omega u}\, d\omega\, du. \tag{3.4}$$

Os parâmetros *t* e ω podem assumir valores discretos. Definindo-se então $t = nt_0$ e $\omega = n\omega_0$, sendo *n* um inteiro positivo, a *Transformada de Fourier Discreta de Curta Duração* ou **DWFT** (do inglês, Discret Windowed Fourier Transform) é definida em (Kumar & Foufolla, 1994) por

$$G_d f(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(u - nt_0)\, e^{-im\omega_0 u}\, du. \tag{3.5}$$

Para que a transformada de Fourier de curta duração discreta seja inversível, é necessário que a condição $\omega_0 t_0 < 2\pi$ seja satisfeita, fato este baseado no Princípio da Incerteza de Heisenberg (Kaiser, 1994).

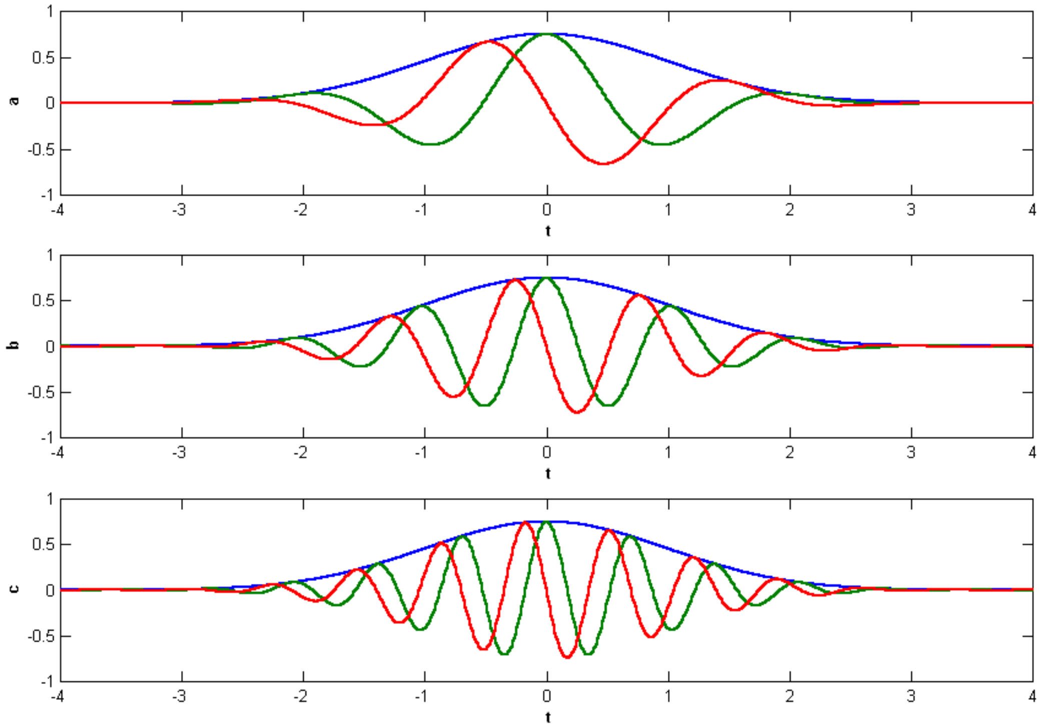


Figura 3.2 Parte real (em verde) e a parte imaginária (em vermelho) do núcleo de análise $g(t)e^{-i\omega t}$ da Transformada de Fourier de Curta Duração para diferentes freqüências: (a) ω = 3, (b) ω = 6 e (c) ω = 9. A função grafada em azul é a janela gaussiana *g*(*t*).

3.3.2 Localização no tempo e na freqüência

Para entender a propriedade da localização no tempo e na freqüência da **WFT**, precisa-se estudar as propriedades de $|g_{\omega,t}|^2$ e $|\hat{g_{\omega,t}}|^2$, visto que determinam as características que serão extraídas de $f(t)$. De fato, usando-se o Teorema de Parseval, a equação (3.2) pode ser escrita como

$$Gf(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega')\overline{\hat{g_{\omega,t}}(\omega')}\,d\omega' \quad \textbf{(3.6)}$$

sendo $\hat{g_{\omega,t}}(\omega')$ a transformada de Fourier de $g_{\omega,t}(u)$ e a barra indicando a conjugação complexa. Define-se em Kumar & Foufolla (1994) os desvios padrões das funções $g_{\omega,t}$ e $\hat{g}_{\omega,t}$ como σ_g e $\sigma_{\hat{g}}$ respectivamente, ou seja

$$\sigma_g = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u-t)^2 |g_{\omega,t}(u)|^2 du \right)^{0.5} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 g(u)^2 du \right)^{0.5} \tag{3.7}$$

e

$$\sigma_{\hat{g}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega' - \omega) |\hat{g}_{\omega,t}(\omega')| d\omega' \right)^{0.5} . \tag{3.8}$$

A função destes parâmetros é medir a dispersão das funções $|g_{\omega,t}|$ e $|\hat{g}_{\omega,t}|$ em função de t e ω respectivamente, como pode ser visualizado na **Figura 3.3**. Relacionando agora os mesmos diretamente com o princípio da incerteza, o produto de σ_g^2 e $\sigma_{\hat{g}}^2$ satisfaz a seguinte desigualdade (Kumar & Foufolla, 1994),

$$\sigma_g^2 \sigma_{\hat{g}}^2 \geqslant \frac{\pi}{2} , \tag{3.9}$$

ou seja, a escolha de uma alta precisão arbitrária tanto no tempo quanto na freqüência não pode ser obtida. A igualdade na equação (3.9) só pode ser obtida quando $g(t)$ é uma função gaussiana, ou seja,

$$g(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2} . \tag{3.10}$$

Quando a função janela $g(t)$ utilizada na Transformada de Fourier de Curta Duração é a função gaussiana, a mesma é então denominada de *Transformada de Gabor*.

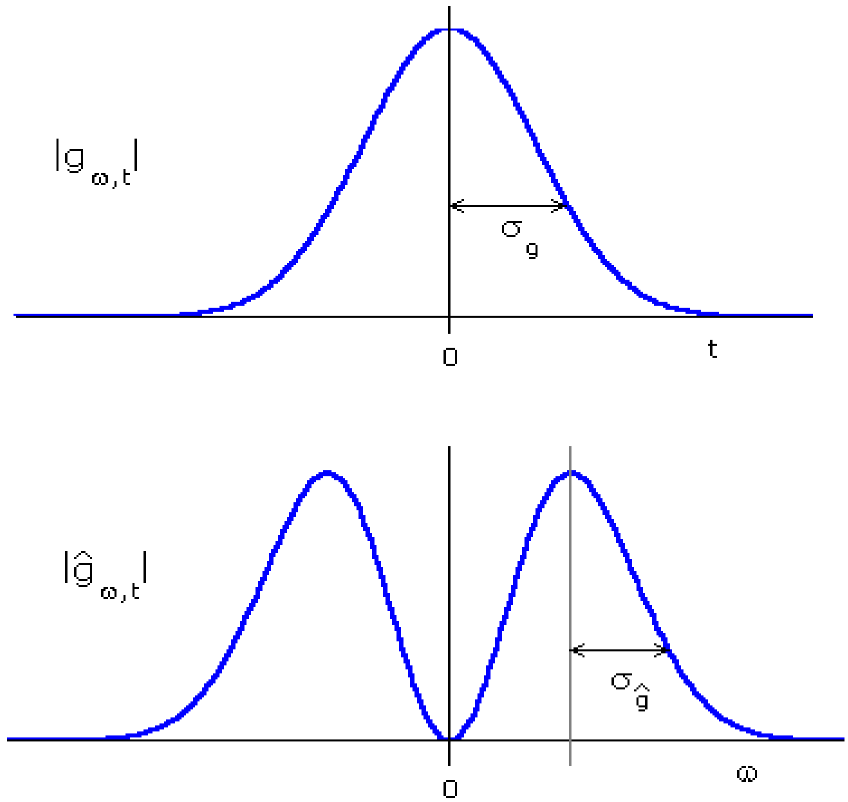


Figura 3.3 Localização das incertezas no domínio do tempo **(acima)** e no domínio da freqüência **(abaixo)** da **WFT** para uma função $g(t)$ qualquer**.**

Quando uma função $g(t)$ é escolhida, pelas equações (3.8) e (3.9), tanto σ_g e $\sigma_{\hat{g}}$ permanecem fixos. Então, para qualquer t_0 e ω_0 , a resolução no tempo e na freqüência pode ser representada por uma célula de resolução de tamanho fixo $[t_0 \pm \sigma_g \times \omega_0 \pm \sigma_{\hat{g}}]$, como pode ser visualizado na **Figura 3.4**, ou seja, a **WFT** em um dado ponto (t_0, ω_0) no espaço de fase fornece informação sobre a função *f*(*t*) que está localizada com uma incerteza de σ_g no domínio do tempo e de $\sigma_{\hat{g}}$ no domínio da freqüência, e esta localização é uniforme em todo o espaço de fase. Em outras palavras, todo o espaço de fase é uniformemente dividido em células ou blocos de resolução fixa. Isto implica em dois tipos de limitações: inicialmente se o processo possui uma componente transiente com um suporte menor que σ_g , fica difícil de localizá-la com uma precisão maior que σ_g . Por outro lado, se o processo tem características importantes com diferentes dimensões, então não é possível encontrar uma função $g(t)$ que seja ótima para analisar tal processo. Desta forma, a **WFT** é mais recomendada para a análise de processos onde todas suas freqüências possuam aproximadamente a mesma frequência.

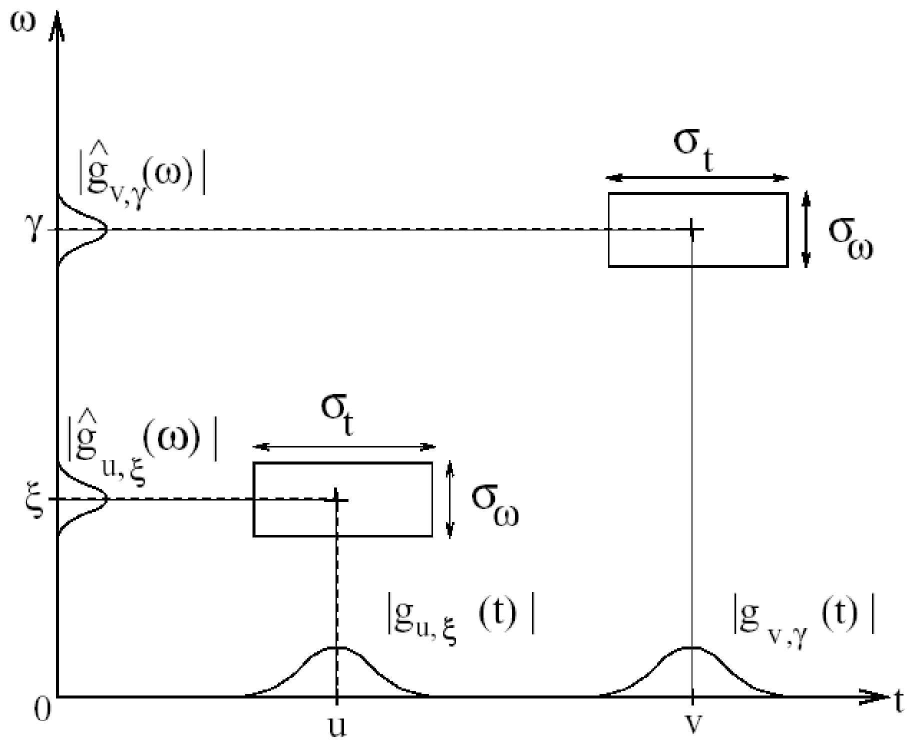


Figura 3.4 Representação em espaço de fase usando a Transformada de Fourier de Curta Duração (**WFT**)

3.4 Transformada Wavelet

A análise obtida através da Transformada Wavelet representa o próximo passo lógico: uma técnica que utiliza uma janela com regiões de dimensão variável. A Transformada Wavelet permite o uso de longos intervalos onde queremos mais precisão sobre as baixas freqüências, e regiões de tamanho menor para obter informações sobre as altas freqüências (isto deve-se ao princípio de incerteza de Heisenberg).

Na transformada de Fourier de curta duração, para todo t e ω a função de análise $g_{w,t}$ consiste de um mesmo envelope preenchido com sinusóides de freqüência ω. Devido ao tamanho fixo do envelope $g(t)$, o tamanho da célula de resolução no espaço de fase dado por $[\sigma_g \times \sigma_{\hat{g}}]$ é o mesmo para todo t e ω.

Como as características com freqüências mais altas (ou de comprimento de ondas mais curto) tem um suporte menor, seria desejável ter uma função de análise denominada $\psi(t)$, onde o seu desvio padrão σ_ψ fosse menor quando $\psi(t)$ fosse caracterizar as componentes de alta freqüência e vice-versa.

Isto foi obtido pela decomposição da função $f(t)$ usando-se uma família de funções de dois parâmetros chamadas de wavelets. Um destes parâmetros está relacionado com o parâmetro responsável pela translação (de maneira similar a transformada de Fourier de curta duração) e o outro parâmetro λ é responsável pela dilatação (em lugar do parâmetro de freqüência da Transformada de Fourier)

3.4.1 Definição

A **WT** de uma função $f(t)$ com energia finita é definida como uma transformada integral onde o núcleo é a família de funções $\psi_{\lambda,t}(u) \equiv \lambda^{-0.5}\psi\left((u-t)\lambda^{-1}\right)$ e definida por Kaiser (1994) como

$$Wf(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi_{\lambda,t}(u)\,du \qquad \textbf{(3.11)}$$

onde o símbolo λ é um parâmetro de escala, t é o parâmetro de localização e $\psi_{\lambda,t}(u)$ são funções chamadas wavelets. Mudando-se o valor de λ tem-se um efeito de dilatação ($\lambda > 1$) ou de contração ($\lambda < 1$) na função $\psi(t)$ (vide **Figura 3.5**), enquanto que mudanças no parâmetro t

tem o efeito de analisar a função $f(t)$ em torno deste ponto. A constante de normalização $1/\lambda$ é escolhida para que a igualdade

$$\|\psi_{\lambda,t}\|^2 \equiv \int |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du = \int |\psi(t)|^2 dt \qquad \textbf{(3.12)}$$

seja válida para todas as escalas λ (observe a identidade $\psi(t) \equiv \psi_{1,0}(t)$). A função $\psi(t)$ deve satisfazer a normalização $\int |\psi(t)|^2 dt = 1$.

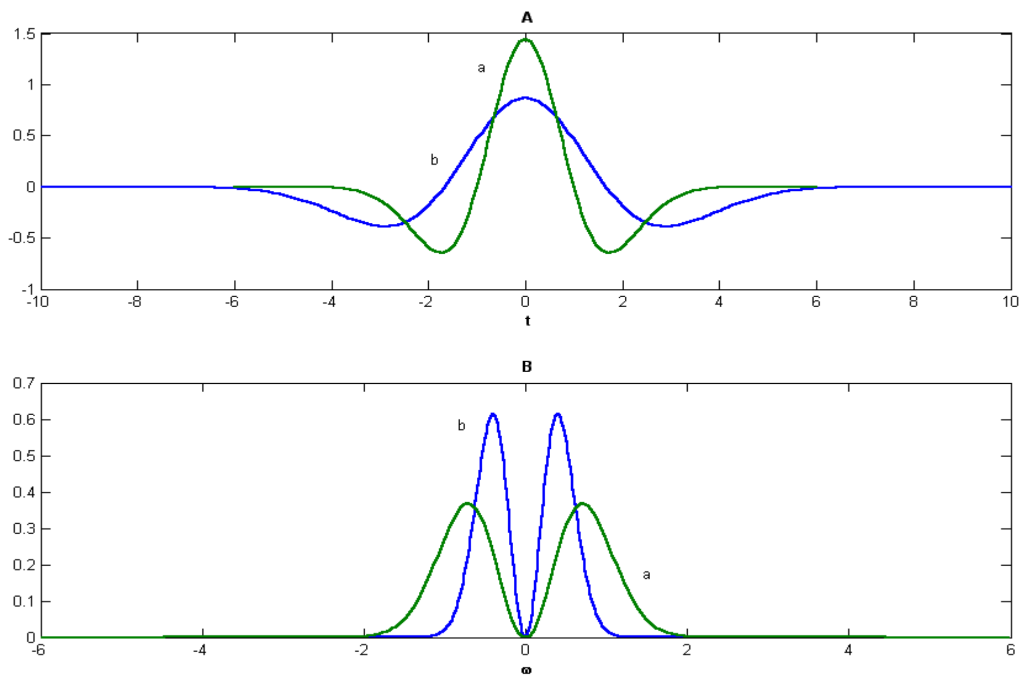


Figura 3.5 Ilustração esquemática de efeito da dilatação de um wavelet $\psi(t)$ (**acima**) e a mudança correspondente de sua Transformada de Fourier $|\hat{\psi}(\omega)|$. Quando a wavelet dilata, sua Transformada de Fourier contrai e vice-versa.

A escolha da wavelet $\psi(t)$ não é única, mas a função $\psi(t)$ deve ter energia unitária (como foi mostrado anteriormente) e deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. possuir suporte compacto, ou decaimento suficientemente rápido, para se obter boa localização espacial.

2. média zero, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0. \qquad \textbf{(3.13)}$$

Esta propriedade garante que a função $\psi(t)$ tenha caráter ondulatório, ou seja, comporte-se tal qual uma onda.

Define-se em Kumar & Foufolla (1994) a Transformada Wavelet Inversa como

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-2} \boldsymbol{W} f(\lambda, t)^2 \psi_{\lambda,t}(u)\, d\lambda\, du \qquad \textbf{(3.14)}$$

onde

$$C_\lambda = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{\omega} d\omega < \infty . \qquad \textbf{(3.15)}$$

A Transformada Wavelet também preserva energia, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-2} |\boldsymbol{W} f(\lambda, u)|^2 d\lambda\, du \qquad \textbf{(3.16)}$$

3.4.2 Localização no tempo e na freqüência

Para entender o comportamento da Transformada Wavelet no domínio da freqüência, é útil reconhecer que a transformada $\boldsymbol{W}f(\lambda, t)$ pode ser escrita como

$$\boldsymbol{W} f(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)}\, d\omega \qquad \textbf{(3.17)}$$

Então, tal como na **WFT**, precisa-se estudar as propriedades de $|\psi_{\lambda,t}(u)|^2$ e $|\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)|^2$ para se entender propriedades de localização no tempo e na freqüência da Transformada Wavelet. Mais especificamente, é necessário entender o comportamento dos desvios padrões de $|\psi_{\lambda,t}|^2$ e $|\hat{\psi}_{\lambda,t}|^2$, ou seja, obter os valores de $\sigma_{\psi_{\lambda,t}}$ e $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ respectivamente. Observa-se que, devido a equação (**3.13**), $\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega=0)=0$. Consequentemente, o centro do passa banda, $\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$, para $\psi_{\lambda,t}(t)$ é localizado distante da origem ω = 0 (vide **Figura 3.5**)

$$\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}} = \frac{\int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)|^2 d\omega} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Desta forma, o desvio padrão no domínio da freqüência (ou seja, a raiz quadrada do segundo momento central) $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ é definido como

$$\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}} = \left(\int_0^{+\infty} (\omega - \omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}})^2 |\hat{\psi}_{\lambda,t}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \qquad \textbf{(3.19)}$$

De maneira similar, o desvio padrão no domínio do tempo $\sigma_{\psi_{\lambda,t}}$ é definido como

$$\sigma_{\psi_{\lambda,t}} = \left(\int_0^{+\infty} (u - u^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}})^2 |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du \right)^{1/2}, \qquad \textbf{(3.20)}$$

onde t_0 é dado por

$$t_0 = \frac{\int_0^{+\infty} u |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du}{\int_0^{+\infty} |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du}. \qquad \textbf{(3.21)}$$

As seguintes propriedades são válidas e estão definidas em Kumar & Foufolla (1994) como

1. O desvio padrão $\sigma_{\psi_{\lambda,t}}$ satisfaz à igualdade

$$\sigma_{\omega_{\lambda,t}} = \lambda \sigma_{\omega_{1,t}} \tag{3.22}$$

2. O desvio padrão $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ satisfaz à igualdade

$$\sigma_{\hat{\omega}_{\lambda,t}} = \frac{\sigma_{\hat{\omega}_{1,t}}}{\lambda} \tag{3.23}$$

3. O centro do passa-banda $\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ correspondente a wavelet $\psi_{\lambda,t}(u)$ satisfaz a relação

$$\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}} = \frac{\omega^0_{\hat{\psi}_{1,0}}}{\lambda} \tag{3.24}$$

Pode-se notar, pelas relações mostradas acima que quando λ aumenta, ou seja, quando a função $\psi_{\lambda,t}(u)$ é dilatada, tanto $\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ quanto $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}$ diminuem, indicando que o centro do passa-banda é deslocado das componentes de baixa freqüência e a incerteza também decresce,e vice-versa (vide **Figura 3.5**). Logo, no espaço de fase, a célula de resolução para a Transformada Wavelet em torno do ponto $(t_0, \omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}})$ é dada por $[t_0 \pm \lambda \sigma_{\psi_{1,0}} \times (1/\lambda)(\omega^0_{\hat{\psi}_{1,0}} \pm \sigma_{\hat{\psi}_{1,0}})]$ (vide **Figura 3.6**) e possui dimensões variáveis dependendo do valor da escala λ. Em outras palavras, o espaço de fase é dividido em células de resolução variável e que são funções do parâmetro de escala λ e possuem área constante. Então, devido ao princípio da incerteza, um aumento na resolução no domínio do tempo implica em um aumento da incerteza na localização da freqüência.

3.4.3 Transformada Wavelet e a análise no tempo e escala

Na Transformada Wavelet, quando o parâmetro de escala λ aumenta, a wavelet se expande e carrega apenas infomação sobre o comportamento dos grandes períodos. Por meio de uma mudança de variável, a equação **(3.11)** pode ser reescrita como

$$W\, f(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\lambda}\, f(\lambda u)\, \psi\left(u - \frac{t}{\lambda}\right) du \qquad \textbf{(3.25)}$$

O mapeamento $f(t) \rightarrow f(\lambda t)$ tem o efeito de contrair $f(t)$ quando $\lambda > 1$ e de ampliar quando $\lambda < 1$, ou seja, a equação mostrada anteriormente indica que quando se aumenta a escala, uma versão contraída da função é vista através de uma filtro de tamanho fixo e vice-versa.

Em resumo, escalonar uma wavelet significa distender ou comprimir a mesma, figura abaixo. Quanto menor é a escala utilizada, mais comprimida é a wavelet, e vice-versa.

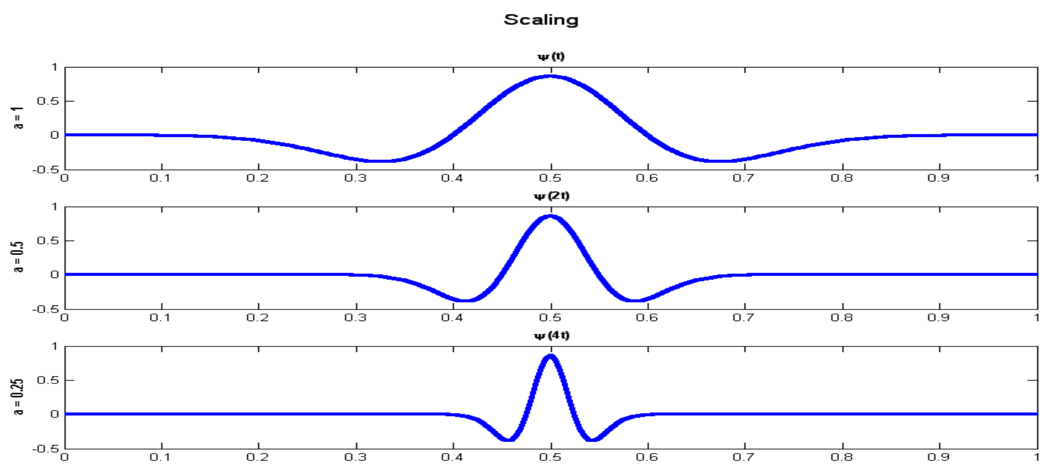


Figura 3.6 Na parte superior tem-se a wavelet distendida, no meio tem-se a wavelet no tamanho original e na parte inferior tem-se a wavelet comprimida.

E deslocar a wavelet simplesmente significa mover a mesma parar frente ou para trás no sinal. Matematicamente, o deslocamento de uma função $f(t)$ por k é representada por $f(t-k)$. Pode-se visualizar este processo na figura mostrada a seguir

3.4.4 Relação entre Frequência e Escala

Pode-se relacionar a escala wavelet com frequência (melhor definido como uma pseudo-frequência) pela relação mostrada a seguir (Abry, 1997):

$$F_a = \frac{\Delta F_c}{a} \quad \textbf{(3.26)}$$

onde a é a escala, Δ é o período da amostragem, F_c é a frequência central em Hz da wavelet (específica para cada tipo de wavelet) e F_a é a pseudo-frequência correspondente a escala a em Hz.

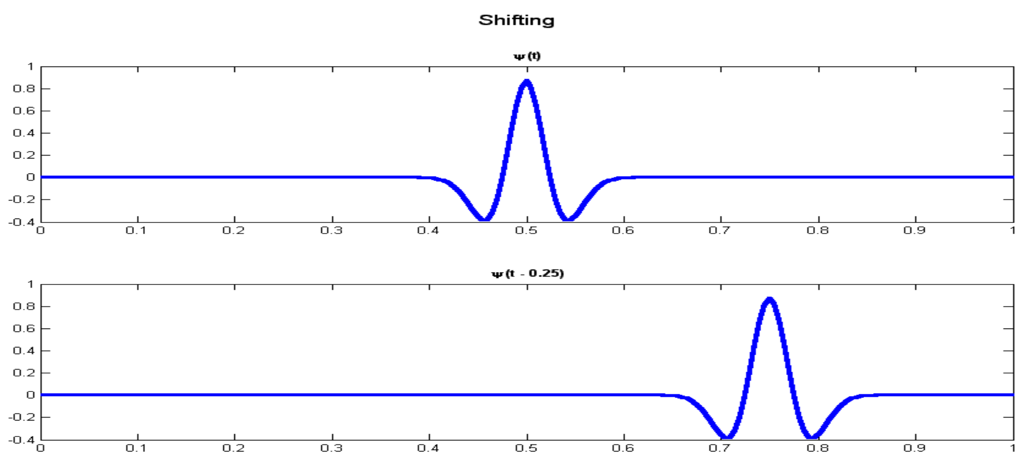


Figura 3.7 Gráfico de uma wavelet deslocada para a frente.

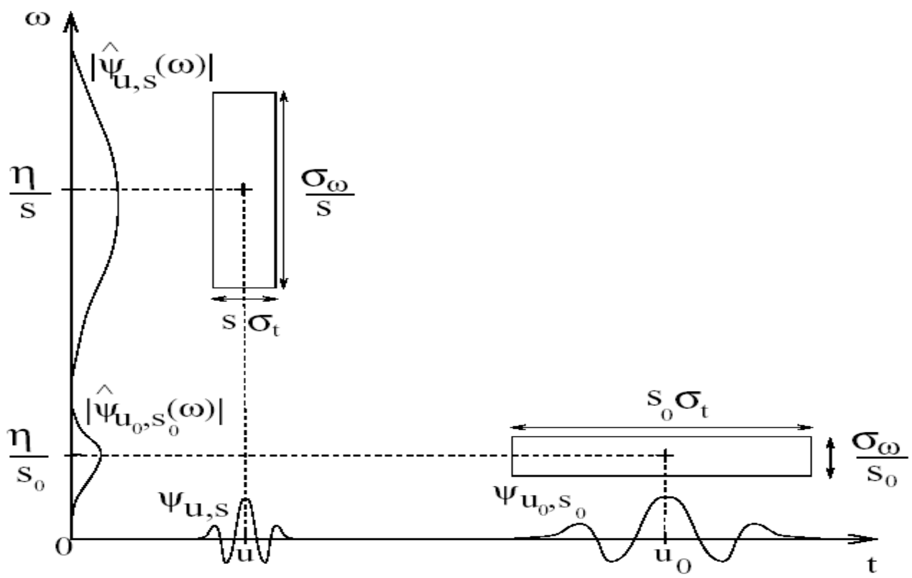


Figura 3.8 Figura mostrando a representação em espaço de fase via Transformada Wavelet.

3.5 Funções wavelets

Uma das principais críticas direcionadas à Transformada Wavelet é a escolha da função wavelet $\psi(t)$. Na escolha escolha da função wavelet, existe uma série de critérios que devem serem considerados (Torrence & Compo, 1998) e que são listados na sequência:

Ortogonais ou não ortogonais – “Na Transformada Wavelet utilizando-se famílias de wavelets ortogonais (Meyer, 1989a), o número de convoluções em cada escala é proporcional à janela da função wavelet escolhida nesta escala. Isto produz um Espectro Wavelet que contém “blocos” discretos de Energia Wavelet e é útil no processamento de sinais, pois fornece uma representação mais compacta do mesmo. Infelizmente para analisar séries temporais, um deslocamento não periódico na série produz um Espectro Wavelet diferente. Reciprocamente, a

Transformada Wavelet obtida utilizando-se famílias de wavelets não ortogonais (Meyer, 1989a) é altamente redundante em escalas maiores, onde o Espectro Wavelet em tempos adjacentes é altamente correlacionado. A Transformada Wavelet não Ortogonal é útil na análise de séries temporais (válido também para séries espacias) onde atenuações e variações contínuas na amplitude wavelet são esperadas".

Complexa ou real – "Uma função wavelet complexa irá fornecer informação da amplitude e da fase e é mais bem adaptada para capturar comportamentos oscilatórios de séries temporais. Uma função wavelet real fornace apenas informação sobre uma componente e pode ser utilizada apenas para localizar picos e descontinuidades".

Suporte – "A resolução de uma função wavelet é determinada pelo balanço entre seu suporte no espaço real e o seu suporte no espaço na freqüência. Uma função com um suporte mais compacto (mais estreita) vai ter uma boa resolução no domínio do tempo e uma resolução mais pobre no domínio da freqüência, enquanto uma função com suporte mais amplo (mais larga) terá uma resolução mais pobre no domínio do tempo e uma boa resolução no domínio da freqüência (características determinadas pelo princípio da incerteza de Heisenberg)".

Formato – "A função wavelet escolhida deve refletir o tipo de características presentes na série temporal. Para séries com picos ou descontinuidades, uma boa escolha seria a wavelet de Haar , enquanto que para séries mais suaves e com variações mais sutis deve se escolher uma função como a wavelet de Morlet. Se o interesse principal é a obtenção do Espectro de Energia Wavelet, então a escolha da função wavelet não é crítica e qualquer uma delas irá fornecer o mesmo resultado qualitativo".

3.5.1 Exemplos de waveles unidimensionais

Devido a flexibilidade de escolha das wavelets, muitas funções tem sido utilizadas como wavelets. Abaixo pode-se ter um resumo das wavelets mais utilizadas na literatura.

Wavelet de Haar – A wavelet de Haar (vide **Figura 3.9**) é a mais simples de todas as wavelets e pertence a família das wavelets ortogonais com suporte compacto e é definida (Kumar & Fourfola, 1988) como

$$\begin{aligned} \psi(t) &= +1 \quad \text{se} \quad 0 \leqslant t < 0.5 \\ \psi(t) &= -1 \quad \text{se} \quad 0.5 \leqslant t < 1 \\ \psi(t) &= \ \ 0 \quad \text{caso contrário} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.26)}$$

Em um sinal unidimensional discretamente amostrado esta wavelet pode ser vista atuando como um operador de diferenciação, ou seja, fornecendo diferenças das médias não sobrepostas da observação.

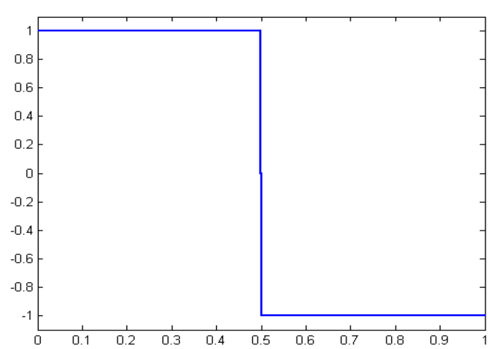


Figura 3.9 Visualização da wavelet de Haar

Wavelet Chapéu Mexicano (Mexican Hat Wavelet) – esta wavelet é a derivada segunda da função gaussiana $f(t)=e^{-1/2t^2}$, pertence a família de wavelets não ortogonais e é definida como (Kumar & Fourfola, 1988), (vide **Figura 3.10**)

$$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-0.25}(1-t^2)e^{-0.5t^2} \tag{3.27}$$

A constante é escolhida de modo que a condição $\|\psi\|^2=1$ seja satisfeita. Esta wavelet é muito utilizada na literatura principalmente na detecção de bordas.

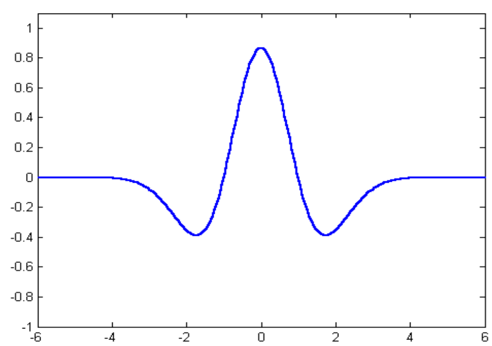


Figura 3.10 Visualização da wavelet Chapéu Mexicano (**Mexican Hat**)

Wavelet de Morlet - O conceito de wavelet na atual forma teórica foi pela primeira vêz proposto por Jean Morlet e o grupo de Física Teórica de Marseille trabalhando sobre o comando de Alex Grossmann, na França. A wavelet de Morlet pertence a família de wavelets não ortogonais e é definida (Kumar & Fourfola, 1988) como

$$\psi(t)=\pi^{-1/4}(e^{-i\omega_0 t-e^{-1/2\omega_0^2}})e^{-1/2t^2} \tag{3.28}$$

que é geralmente aproximado por

$$\psi(t)=\pi^{-1/4}e^{-i\omega_0 t}e^{-1/2t^2},\ \text{para}\ \omega_0 \geqslant 5 \tag{3.29}$$

e é geralmente utilizada no estudo de sinais geofísicos.

Desde que a condição $\omega_0 \geqslant 5$ seja satisfeita, o segundo termo na equação é negligenciável, satisfazendo ainda a condição de admissibilidade, ou seja,

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|}d\omega<\infty ¿ \tag{3.30}$$

Toda vêz que for feita referência sobre a wavelet de Morlet, usar-se-á a equação definida em **(3.43)**.

A Transformada de Fourier da equação **(3.29)** é dada por

$$\hat{\psi}(\omega)=\pi^{-1/4}e^{1/2(\omega_0-\omega)^2}. \tag{3.31}$$

A Transformada de Fourier da wavelet escalonada $\psi_{\lambda,t}(t)$ é dada por

$$\hat{\psi_{\lambda,0}}(\omega)=\lambda\pi^{-1/4}e^{-1/2(\omega_0-\lambda\omega)^2} \tag{3.32}$$

Como propriedade importante, esta wavelet possui sua Transformada de Fourier quase que inteiramente suportada no intervalo $\omega>0$, centrada em em $\omega^0_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}=\omega_0/\lambda$ com uma dispersão de $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}=1/\lambda$. A $\psi_{\lambda,t}$ é centrada em *t* com uma dispersão igual a $\sigma_{\psi_{\lambda,t}}=\lambda$.

A **Figura 3.11** mostra a parte real e imaginária da wavelet de Morlet na escala unitária assim como a sua Transformada de Fourier (lembrando que a mesmo é válido para $\omega_0 \geqslant 5$) . Pode-se então interpretar o resultado da análise de um processo assumindo valores reais usando-se esta wavelet obtendo-se o visualizando o quadrado do módulo e a fase, $|\langle f, \psi_{\lambda,t}\rangle|^2$ e

$\tan^{-1}\frac{\operatorname{Im}\langle f, \psi_{\lambda,t}\rangle}{\operatorname{Re}\langle f, \psi_{\lambda,t}\rangle}$ respectivamente, em gráficos diferentes.

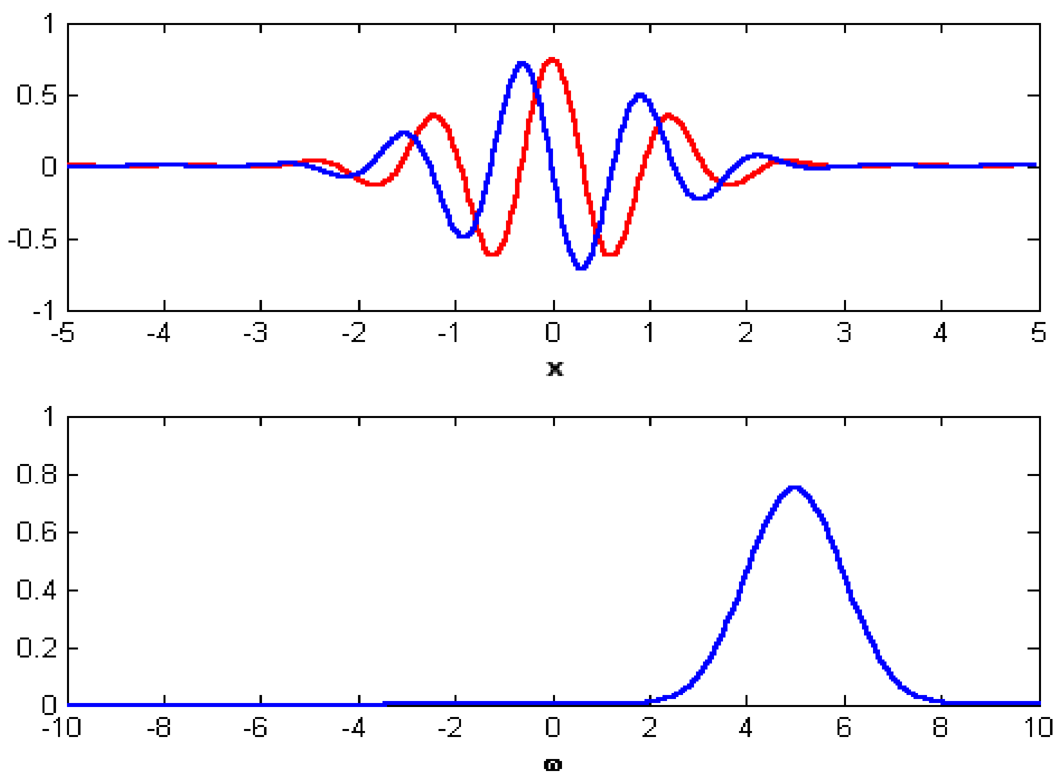


Figura 3.11 No topo têm-se a parte real e a parte imaginária da wavelet de Morlet (para $\omega_0 = 5$) em vermelho e azul, respectivamente. Embaixo têm-se o espectro da mesma wavelet de Morlet mostrada no topo.

Critério de Escolha das Escalas – Este critério é de extrema importância quando se faz a análise de um sinal através da Transformada Wavelet por meio da wavelet de Morlet, evitando-se assim o processamento de cálculos desnecessários e consequentemente minimizando o uso da memória do computador. Se Δt é o intervalo da amostragem de $f(t)$, então o centro do passa banda ω_0/λ_{min} deve ser menor ou igual a freqüência de Nyquist[3], ou seja, $\omega_0/\lambda_{min} \leqslant \pi/\Delta t$, logo

$$\lambda_{min} \geqslant \frac{\omega_0 \Delta t}{\pi}. \qquad \textbf{(3.33)}$$

A escala máxima de análise é obtida considerando-se a dispersão de $\psi_{\lambda,t}$. Sabendo-se que $|\psi_{\lambda,t}|$ chega a praticamente a 1 % de seu valor em $3\sigma_{\psi_{\lambda,t}}$, foi imposta a condição de que $3\sigma_{\psi_{\lambda,t}} \leqslant 0.5(t_{max}-t_{min})$, logo têm-se que

$$\lambda_{max} \leqslant \frac{t_{max}-t_{min}}{6}. \qquad \textbf{(3.34)}$$

Grandes valores em $|\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle|^2$ permitem facilmente obter a identificação da escala das características e sua respectiva localização no eixo *t*.

3.6 Transformada Wavelet Contínua

A Transformada Wavelet Contínua ou **CWT**(do inglês, Continuos Wavelet Transform) é definida pela equação **(3.12)** e com os parâmetros asssumindo os valores $\lambda \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Na prática, a **CWT** pode ser obtida da forma mostrada a seguir (Meyer, 1989a).

3 A frequência de Nyquist vem do Teorema da amostragem ou Teorema de Nyquist que diz ”Um sinal limitado em frequência, pode ser representado com erro nulo por amostras igualmente espaçadas de intervalo 1/2F, onde F é a maior frequência existente no sinal”.

Trasformada Wavelet Continua em cinco passos Este processo é realmente muito simples. De fato, abaixo é listado uma sequência de cinco passos de uma pequena receita para se calcular uma **CWT**.

1. Escolhe-se uma wavelet e faz-se a comparação com uma porção contida no início do sinal original (vide **Figura 3.12**).

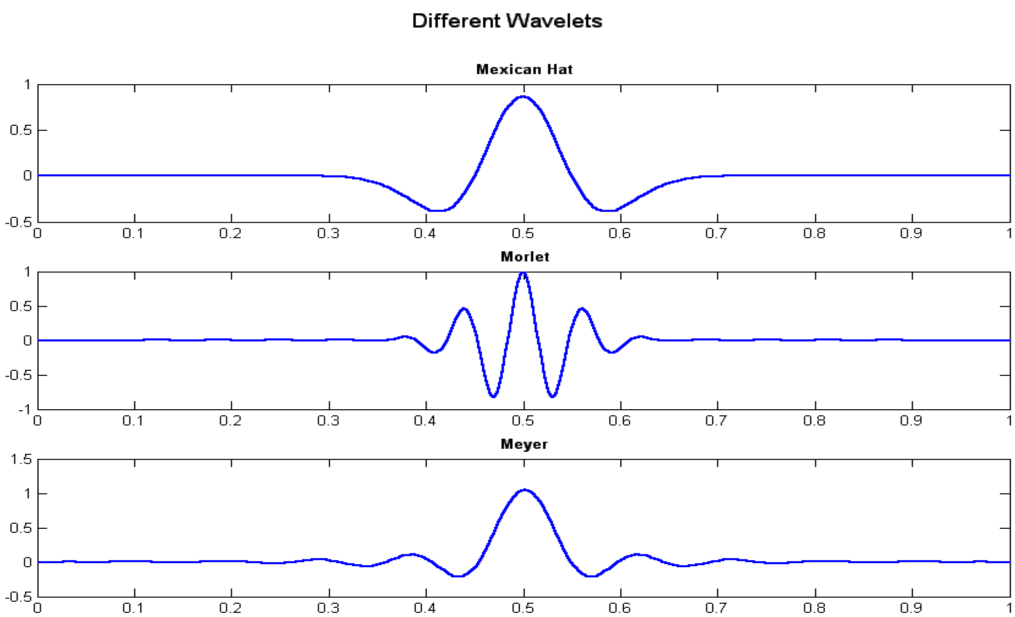


Figura 3.12 Diferentes tipos de wavelets que podem ser utilizados na obtenção da **CWT**.

2. Calcula-se então o número *C*, que representa a correlação da wavelet com a porção do sinal sendo analisado (vide **Figura 3.13**).
3. Move-se a wavelet para a direita e inicia-se novamente os passos (1) e (2) até que todo o sinal seja percorrido pela wavelet (vide **Figura 3.13**).
4. A wavelet é distendida e repetem-se os passos (1) a (3) (vide **Figura 3.14**).
5. Os passos de (1) a (4) são repetidos para todas as escalas (vide **Figura 3.15**).

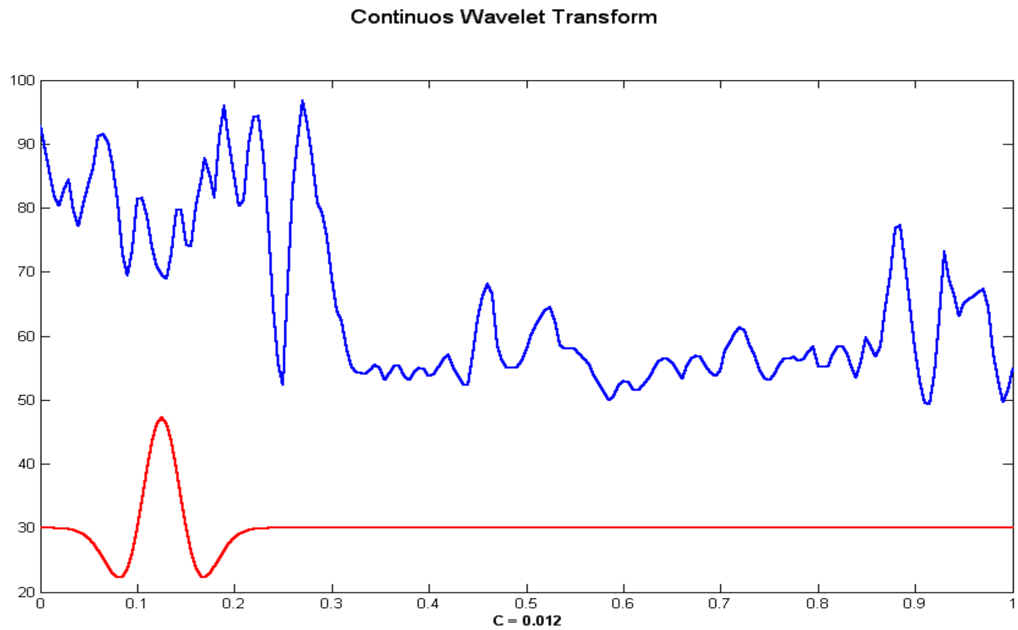


Figura 3.13 Wavelet (vermelho) comparada com o sinal (azul)

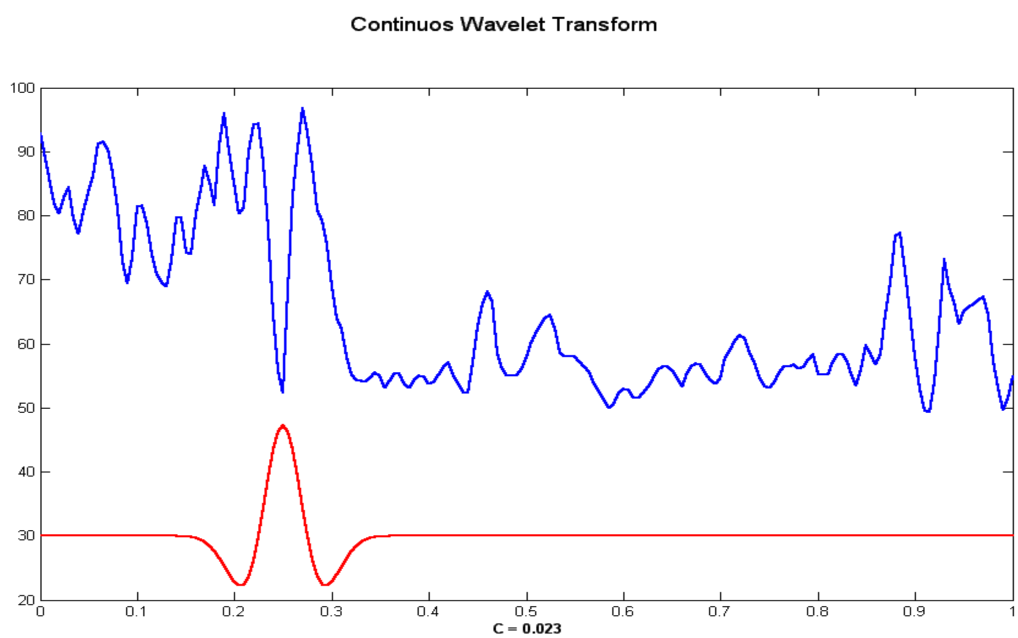


Figura 3.14 Move-se a wavelet para direita e obtenha um novo valor de *C*.

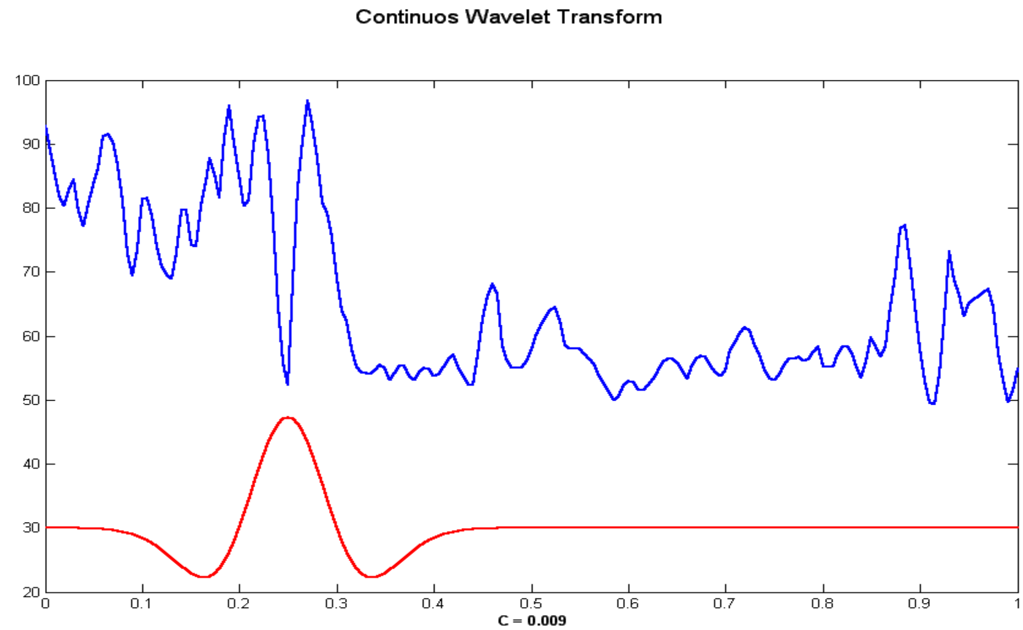


Figura 3.15 Extende-se a wavelet e repete-se o os passos (1) a (3)

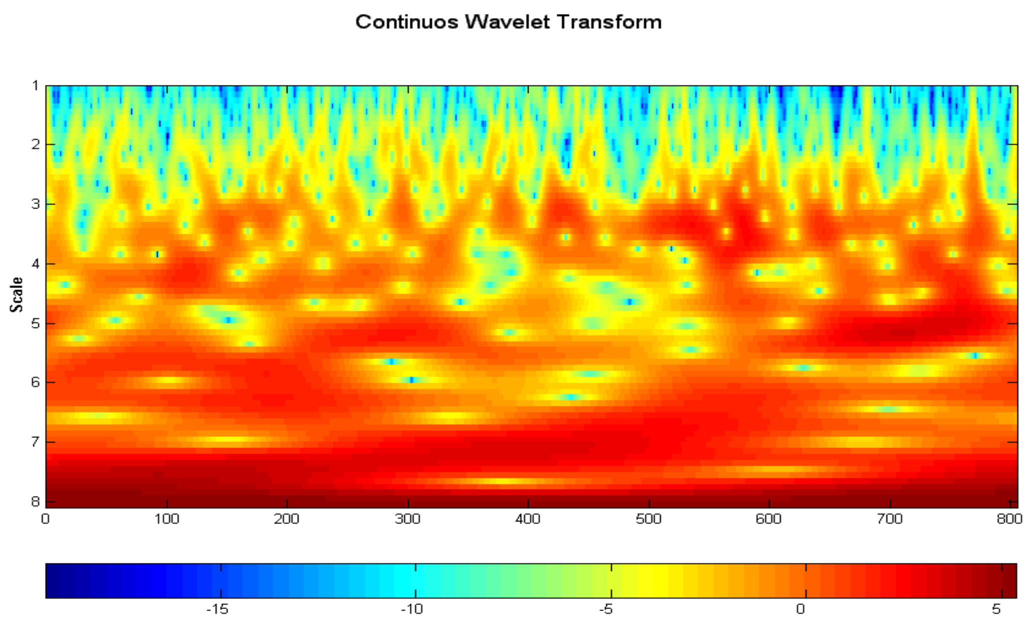


Figura 3.16 Finalmente os passos (1) a (4) são repetidos para todas as escalas. Quando o processo for finalizado, têm-se os coeficientes produzidos em diferentes escalas para diferentes seções do sinal.

3.7 Transformada Wavelet Discreta

Quando os parâmetros λ e t da Transformada Wavelet $\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle$ assumem valores contínuos, têm-se a **CWT** (como mostrado anteriormente). Para aplicações práticas, o parâmetro de escala λ e o parâmetro de localização t precisam ser discretizados. A escolha feita é $\lambda = \lambda_0^m$, onde m é inteiro e λ_0 é o passo de dilatação fixo e maior que 1. Visto que $\sigma_{\psi_{\lambda,t}} = \lambda \sigma_{\psi_{1,t}}$, pode-se escolher $t = n t_0 \lambda_0^m$ onde $t_0 > 0$ e depende de $\psi(t)$ e n é um inteiro. Escolhe-se um aumento, ou seja, λ_0^{-m} e estuda-se o processo em uma localização particular e então move-se para outra localização. Se o aumento é grande, ou seja, para analisar as pequenas escalas, move-se em pequenos passos e vice-versa, ou seja, de maneira proporcional a escala λ_0^m, como é mostrado abaixo

$$\psi_{m,n}(t) = \lambda_0^{-0.5m} \psi(\lambda_0^{-m} t - n t_0) \qquad \textbf{(3.35)}$$

Desta forma, a Transformada Wavelet

$$\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle = \lambda_0^{-0.5m} \int f(t) \psi(\lambda_0^{-m} t - n t_0) dt \qquad \textbf{(3.36)}$$

é chamada de Transformada Wavelet Discreta ou **DWT**(do inglês, Discret Wavelet Transform).

No caso da **CWT**, diz-se que $\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle$ para $\lambda > 0$ e $t \vee (-\infty, +\infty)$ caracteriza completamente a função $f(t)$ .De fato, pode-se reconstruir $f(t)$ usando a equação **(3.14)**. Usando a wavelet discreta $\psi_{m,n}$ (com ψ decrescendo rapidamente) e escolhas apropriadas de λ_0 e t_0, pode-se também obter uma caracterização completa de $f(t)$.

3.7.1 Transformada Wavelet Ortogonal

Considera-se agora a **DWT** com $\lambda_0 = 2$ e $t_0 = 1$, ou seja

$$\psi_{m,n}(t)=2^{-0.5m}\psi(2^{-m}t-n) \quad \textbf{(3.37)}$$

É possível então construir uma certa classe de wavelets $\psi(t)$ tal que $\psi_{m,n}(t)$ sejam ortogonais, ou seja

$$\int \psi_{m,n}(t)\psi_{m',n'}(t)\,dt=\delta_{mm'}\delta_{nn'} \quad \textbf{(3.38)}$$

onde δij é a função delta de Kronecker, definida como

$$\begin{aligned}\delta ij&=1 \text{ se } i=j\\ \delta ij&=0 \text{ se } i\neq j\end{aligned} \quad \textbf{(3.39)}$$

A condição acima implica que essas wavelets são ortogonais para com suas dilatações e translações. Pode-se então aproximar a função $f(t)$ até uma resolução arbitrária, por uma combinação linear de wavelets $\psi_{m,n}(t)$ (Kumar & Fourfola, 1988), ou seja

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D_{m,n}\psi_{m,n}(t) \quad \textbf{(3.40)}$$

onde o primeiro somatório é sobre as escalas (da menor para a maior) e cada escala é somada em cada uma das translações. Os coeficientes $D_{m,n}$ são obtidos como

$$D_{m,n}=\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\equiv\int f(t)\psi_{m,n}(t). \quad \textbf{(3.41)}$$

Logo, pode-se escrever a equação **(3.39)** como

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\psi_{m,n}(t) \quad \textbf{(3.42)}$$

Pela equação **(3.40)** é fácil observar como as wavelets fornecem uma representação no tempo e escala de um processo, onde a localização temporal e de escala são dadas pelos índices *n* e *m* respectivamente. A expansão em série acima é similar a série de Fourier, com algumas pequenas diferenças:

1. A série é duplamente indexada com os índices indicando escala e localização

2. A função base tem propridedades de localização de tempo e escala (equivalentes a tempo e freqüência)

Usando-se uma escala intermediária m_0 , a equação **(3.40)** pode ser separada em duas somas

$$f(t)=\sum_{m=m_0+1}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\psi_{m,n}(t)+\sum_{m=-\infty}^{m=m_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\psi_{m,n}(t) \quad \textbf{(3.43)}$$

e com isso pode-se finalmete definir as funções $\phi_{m,n}(t)$ de maneira análoga a $\psi_{m,n}(t)$, ou seja

$$\phi_{m,n}(t)=2^{-1/2m}\phi(2^{-m}t-n) \quad \textbf{(3.44)}$$

de forma que a primeira soma da série da equação **(3.43)** pode ser finalmente escrita como uma combinação linear de $\phi_{m_{0,n}}(t)$, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\phi_{m_{0,n}}\rangle\phi_{m_{0,n}}(t)=\sum_{m=m_0+1}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\psi_{m,n}(t) \quad \textbf{(3.45)}$$

e, consequentemente,

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\phi_{m_{0,n}}\rangle\phi_{m_{0,n}}(t)+\sum_{m=-\infty}^{m=m_0}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\langle f,\psi_{\lambda,t}\rangle\psi_{m,n}(t). \quad \textbf{(3.46)}$$

A função $\phi_{m,n}(t)$ é chamada de função escala e satisfaz sa condição $\int\phi(t)dt=1$, entre outras propriedades (Meyer, 1989b). Por exemplo, a função escala correspondente para a wavelet de Haar é a função característica de intervalo [0,1) dada por

$$\phi(t)=1 \text{ para } 0 \leqslant t < 1 \qquad \textbf{(3.47)}$$
$$\phi(t)=0 \text{ caso contrário}$$

As funções escala e wavelets representam um conjunto de regras na análise de processos por meio de wavelets ortogonais. Esta análise estrutural também é conhecida como Análise Wavelet multi-resolução (**MRA**) e será discutida a seguir.

3.7.2 Representação multi-resolução

A equação **(3.43)** expressa que todas as características do processo $f(t)$, que são maiores que a escala 2^{m_0}, podem ser aproximadas por uma combinação linear de translações (sobre *n*) de uma função escala $\phi(t)$ na escala fixa 2^{m_0}. Pode-se representar esta aproximação por $P_{m_0} f$, (Kumar & Fourfola, 1988) ou seja,

$$P_{m_0} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \langle f, \phi_{m_{0,n}} \rangle \phi_{m_{0,n}}(t). \qquad \textbf{(3.48)}$$

Definindo

$$Q_m f(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t), \qquad \textbf{(3.49)}$$

logo a equação **(3.42)** pode ser reescrita como

$$f(t) = P_{m_0} f(t) + \sum_{m=-\infty}^{m=m_0} Q_m f(t). \qquad \textbf{(3.50)}$$

Visto que a escala m_0 é arbitrária, temos que

$$f(t) = P_{m_0 - 1} f(t) + \sum_{m=-\infty}^{m=m_0-1} Q_m f(t). \qquad \textbf{(3.51)}$$

Uma simples operação de subtração entre as equações **(3.49)** e **(3.50)**, fornece

$$P_{m_0-1} f(t) = P_{m_0} f(t) + Q_m f(t) \qquad \textbf{(3.52)}$$

ou, de uma forma mais geral

$$P_{m-1} f(t) = P_m f(t) + Q_m f(t) \qquad \textbf{(3.53)}$$

Esta equação caracteriza a estrutura básica da decomposição wavelet ortogonal. Como mencionado antes, $P_m f(t)$ contém toda informação sobre as características em $f(t)$ que são maiores que a escala 2^m. Pela **equação (3.50)** mostra-se que quando se vai da escala 2^m para a escala menor mais próxima 2^{m-1}, adiciona-se algum detalhe em $P_m f(t)$, dado por $Q_m f(t)$. Pode-se então dizer que $Q_m f(t)$, ou de forma equivalente, a expansão wavelet de uma função em alguma escala 2^m, caracteriza a diferença entre os porcessos em duas escalas diferentes, 2^m e 2^{m-1}, ou equivalentemente em duas resoluções diferentes. Logo a representação de uma função $f(t)$ pela equação **(3.53)** é chamada de **Representação Wavelet multi-resolução**.

3.8 Transformada Wavelet Contínua para Wavelets Bidimensionais

De maneira análoga à Transformada Wavelet definida na equação **(3.12)** a versão bidimensional da mesma é obtida tratando-se $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ e $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$ como vetores. Então para o caso bidimensional têm-se

$$\langle f, \psi_{\lambda, t} \rangle \equiv \boldsymbol{W} f(\lambda, \boldsymbol{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{u}) \frac{1}{\lambda} \psi \left(\frac{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{t}}{\lambda} \right) d\boldsymbol{u} \qquad \textbf{(3.53)}$$

De forma análoga, a fórmula de inversão é dada por

$$f(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-3} \boldsymbol{W} f(\lambda, \boldsymbol{u}) \psi_{\lambda, \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t}) \, d\lambda \, d(\boldsymbol{u}) \qquad \textbf{(3.54)}$$

e as condições abaixo devem ser satisfeitas:

1. suporte compacto ou decaimento suficientemente rápido.

2. $\int\int \psi(t)\,dt=0$.

3.9 Efeitos de Borda

Classicamente a **DWT** é definida apenas para sinais com comprimento derivados da potência de dois, devido ao processo de decomposição diádica (Meyer, 1989b). Na grande maioria das vezes, os sinais com os quais vai-se trabalhar não satisfazem esta exigência e por isso deve-se de alguma forma completar este sinal de forma que ele se torne manipulável. Existem vários métodos de extensão de sinais (Strang & Nguyen, 1996) e que são listados a seguir:

- Preenchimento com zeros : Este método assume que o sinal é zero fora do seu suporte original. A sua desvantagem é a criação de descontinuidades artificiais nas bordas.

- Simetrização : Este método assume que o sinal ou imagem pode ser extendido fora de seu suporte original simplesmente assumindo os valores simétricos à sua fronteira. A sua desvantagem é de criar artificialmente descontinuidades na derivada de primeira ordem nas bordas. Por outro lado, este método funciona bem para imagens.

- Preenchimento suave : Este método assume que o sinal ou imagem pode ser extendido fora do seu suporte original por uma extrapolação utilizando-se a derivada de primeira ordem. Este método funciona bem sinais atenuados.

Capítulo 4

Análise Wavelet Aplicada na Transferência de Escala em Perfis Geofísicos

4.1 Introdução

Alguma das propriedades mais importantes na caracterização de um reservatório e que melhor definem uma unidade produtora são: porosidade, saturação de hidrocarbonetos e permeabilidade. A avaliação correta destes parâmetros é extremamente importante em todas as fases de exploração e produção de petróleo e são obtidas usualmente por meio da aquisição e da análise de perfis geofísicos. Estes perfis são utilizados principalmente na prospecção de petróleo e de água subterrânea e têm sempre como objetivo principal a determinação da profundidade e a estimativa do volume da jazida.

Neste capítulo será efetuada a transferência de escala[4] em em perfis geofísicos de densidade (**rhoB**) e sônico (**dT**) utilizando-se a Análise Wavelet. Este procedimento é adotado devido a incompatibilidade da amostragem da perfilagem, que é de 0.2 m para os perfis envolvidos neste estudo, e da menor resolução horizontal da sísmica, que no caso do levantamento 3D de Campo de Namorado é de 25 a 50 m. Este procedimento é adotado para a geração de sismogramas sintéticos (utilizados na integração poço e sísmica), que em resumo, são gerados pela convolução da refletividade obtida através dos perfis sônico (dT) e densidade (rhoB) com a wavelet derivada do dado sísmico. De maneira geral, a maioria dos métodos existentes na literatura especializada se

4 Reduzir por filtragem a informação geológica às bandas de frequência compatíveis com as da sísmica.

utiliza da Transformada de Fourier para realizar este procedimento. O método proposto é a decomposição de cada um dos perfis geofísicos através da Análise Wavelet para depois realizar a filtragem (transferência de escala) dos mesmos. Neste procedimento, a escala natural da formação também é preservada.

Uma das principais motivações para o uso da Análise Wavelet na filtragem dos perfis geofísicos é sua capacidade singular em identificar e localizar fenômenos não estacionários que ocorrem em um sinal. Vários fenômenos ocorrem em um perfil e não estão necessariamente presentes em todo o sinal. Por exemplo, quando utiliza-se a Transformada de Fourier, esta é uma característica um tanto indesejável para o mesmo, pois esta técnica consegue identificar as freqüências constituintes do sinal mas de forma alguma consegue localizá-las .

Quando uma determinada freqüência é filtrada através da Transformada de Fourier, a mesma é retirada em toda a extensão do sinal. Isto não é nem um problema quando esta frequência ocorre em todo ele (caso de sinal estacionário), mas os perfis geofísicos geralmente são sinais com características não estacionárias. Portanto, quando é realizada uma filtragem para uma freqüência específica através da Transformada de Fourier, pode-se estar tirando a freqüência de onde ela existe e/ou também retirando onde ela não existe, criando-se com isso artefatos no sinal.

Na **Figura 4.1** pode-se visualizar um exemplo de sinal não estacionário e a comparação entre a filtragem realizada pela Transformada de Fourier e pela Análise Wavelet, e na **Figura 4.2** o artefato criado pela filtragem realizada através da Transformada de Fourier para um sinal com um processo não estacionário.

4.2 Metodologia Utilizada para a Transferência de Escala em Perfis Geofísicos através da Análise Wavelet

Inicialmente foi escolhida uma familia de wavelets ortogonais para que seja efetuada a decomposição multi-resolução do sinal. Neste caso a wavelet escolhida foi a Daubechies 8 ou **db8** e esta escolha foi feita pelo fato da mesma ser bastante suave e regular, ou seja, adequada para o problema em questão.

A frequência de corte escolhida para a filtragem foi a mesma adotada no trabalho de Silva (2001), que corresponde ao comprimento de onda acima de 15 m de comprimento, ou seja, a filtragem vai preservar grande parte dos corpos com mais de 15 m de comprimento. Esta janela de resolução também é compatível com as frequências sísmicas usuais, que correspondem a uma resolução vertical de 25 a 50 m para as maiores velocidades da formação.

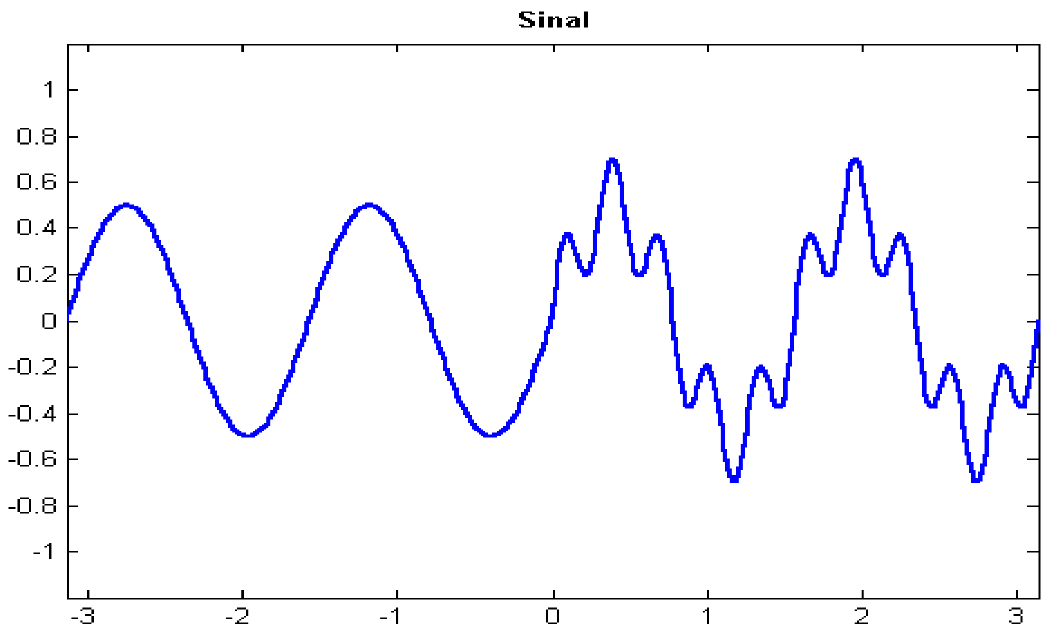


Figura 4.1 Exemplo de sinal com freqüência 5 em toda sua extensão e com freqüência 20 na segunda metade do mesmo.

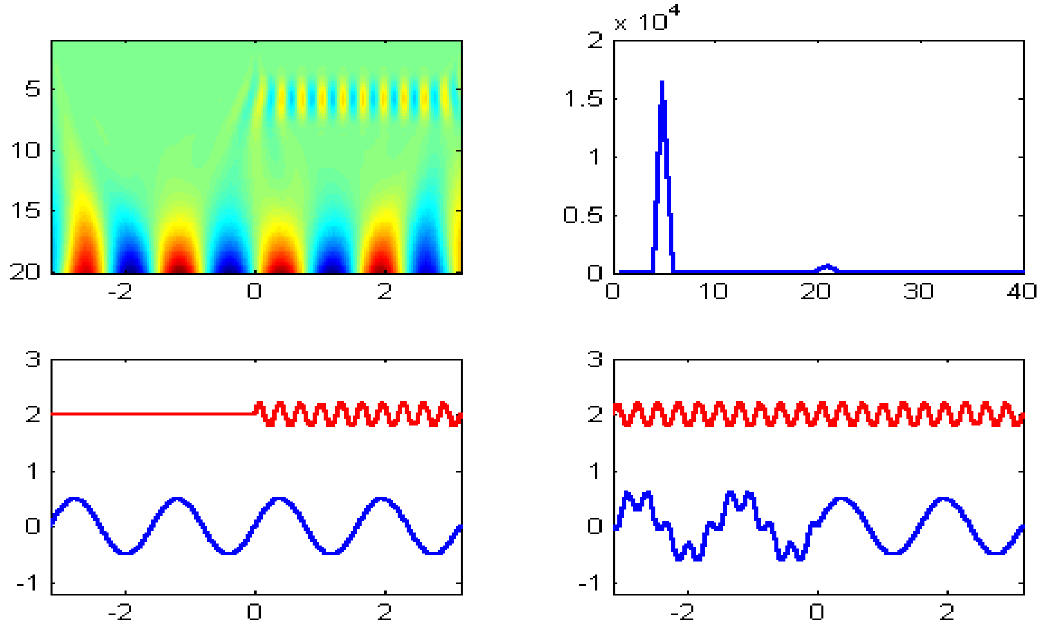
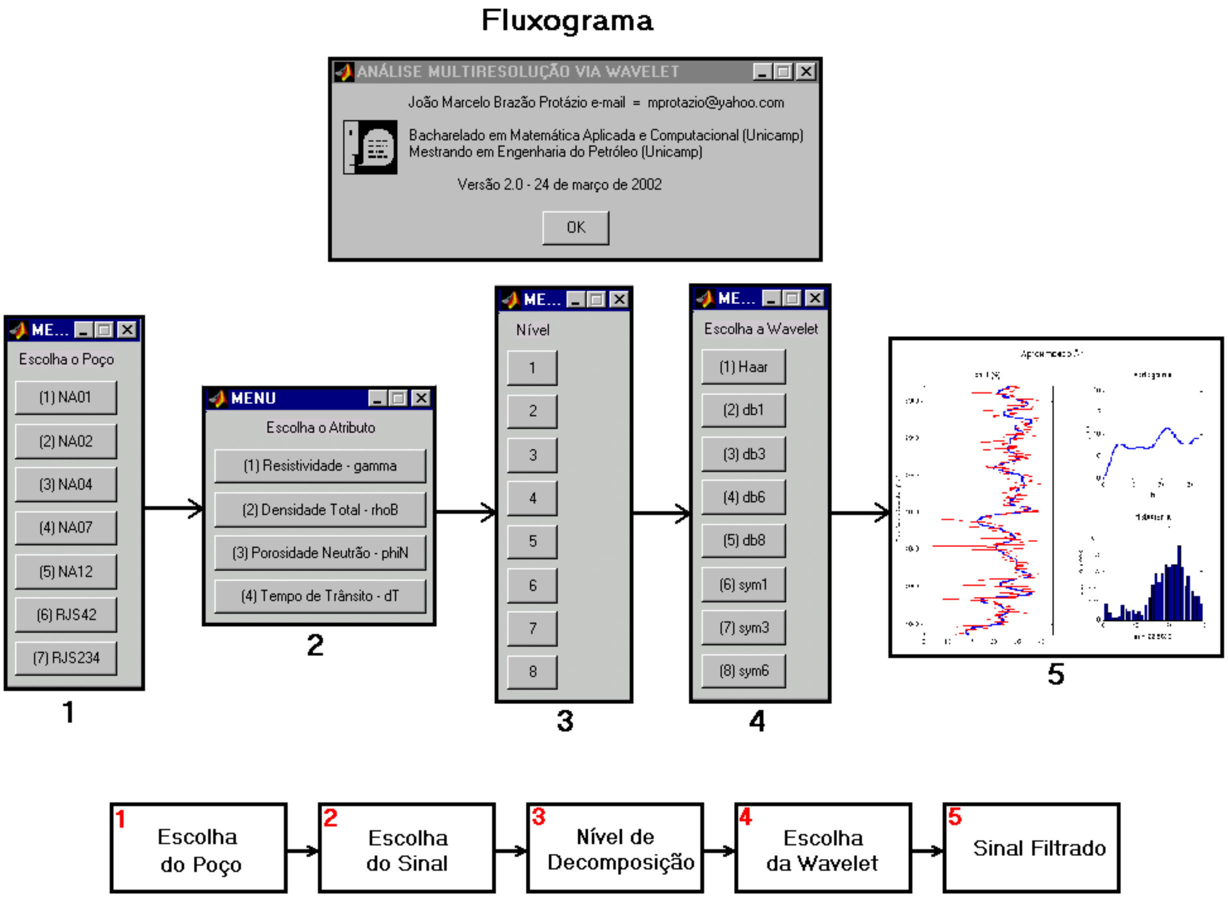


Figura 4.2 Escalograma do sinal da **Figura 4.1** (acima a esquerda) e Transformada de Fourier do mesmo (acima a direita), sinal filtrado (azul) e ruído retirado (vermelho) através da Análise Wavelet (embaixo a esquerda) e sinal filtrado (azul) e sinal retirado (vermelho) através da Transformada de Fourier (embaixo a direita). Nota-se na na figura do canto inferior esquerdo que foi filtrado o ruído da segunda metade do mesmo e foi criado um artefato na primeira metade do sinal.

A etapa ou nível da decomposição escolhido foi o 5, pois utilizando-se a **equação (3.26)** o resultado obtido para a frequência de corte para a wavelet **db8** foi 0.1048 Hz, que corresponde a um comprimento de onda de 10 metros aproximadamente, ou seja, grande maioria dos eventos do sinal com comprimento de onda menor ou igual a 10 metros foram retirados do sinal, ou seja, grande parte da escala natural da formação permanece conservada (Silva & Remacre, 2000) . No **Fluxograma A** se tem um resumo da metodologia utilizada e uma mostra do algoritmo desenvolvido para este propósito utilizando a linguagem de programação **MATLAB©,** da empresa **Mathworks**.

Não se utilizou uma decomposição a nível 6 pois a frequência de corte correspondente a este nível de decomposição é de 0.0541 Hz, que equivale a um comprimento de onda de 20 metros aproximadamente, o que retiraria do sinal os eventos com comprimento de onda menores que 20 metros, ou seja, retirando com isso os eventos com comprimento de onda de 15 metros, que tem significado geológico (Silva, 2001). Uma maneira de contornar este problema seria reamostrando os perfis, de uma taxa de amostragem de 20 cm para uma taxa de amostragem de 16 cm. Com isso agora, uma decomposição à nível 6, utilizando-se a mesma wavelet daria uma frequência de corte de 0.668 Hz que corresponde a aproximadamente ao comprimento de onda de 15 metros. Neste trabalho a abordagem de reamostragem foi deixada de lado.



Fluxograma A

Utilizou-se neste trabalho como um controle do processo de filtragem, o cálculo do variograma (**Apêndice B**) obtidos para cada uma das etapas da decomposição multi-resolução e para cada um dos sinais resultantes (aproximações e detalhes). Quando não houver no variograma do sinal resultante mais nenhuma estrutura embricada para distâncias menores ou iguais a 15 m, isso mostra que maioria dos eventos do sinal com comprimento de onda iguais ou menores a 15 m foram retirados do mesmo. Utilizou-se esta frequência em questão por motivos de comparação entre o método proposto e o trabalho de (Silva, 2001). O histograma de cada uma das aproximações também foi calculado, assim como a estatística básica dos mesmos (média e variância).

A metodologia foi aplicada à grande maioria dos poços utilizados no trabalho de Silva (2001), que utiliza também uma forma alternativa de realizar este procedimento a partir da Transformada de Fourier. Os poços utilizados foram: 3NA01, 3NA02, 3NA04, 7NA07, 7NA12, RJS42 e 4RJS234 e os atributos onde foi efetuada a transferência de escala foram densidade total (**rhoB**) e tempo de trânsito (**dT**) e finalmente os resultados foram então analisados.

4.3 Resultados Obtidos

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço NA01 na **Figura 4.3** e a **Figura 4.4,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média m = 2.34 g/m^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.14 (g/m^3)^2 para 0.12 (g/m^3)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 15 % na variância do sinal original, que é esperado, pois está-se filtrando um sinal e consequentemente diminuindo a variabilidade do mesmo. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve um aumento no número dos elementos das classes das extremidades da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço NA01 na **Figura 4.5** e a **Figura 4.6,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 87.48 ms e m = 87.47 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 11.40 (ms)^2 para 8.27 (ms)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 18 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que qualitativamente quase não houve mudança nas classes da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço NA02 na **Figura 4.7** e a **Figura 4.8,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.27 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.12 (g/cm^3)^2 para 0.09 (g/cm^3)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 42 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço NA02 na **Figura 4.9** e a **Figura 4.10,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 85.32 ms e m = 85.30 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 12.18 (ms)^2 para 4.53 (ms)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 63 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço NA04 na **Figura 4.11** e a **Figura 4.12,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.36 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.13 (g/cm^3)^2 para 0.11 (g/cm^3)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 16 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve um aumento no número dos elementos das classes das extremidades da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço NA04 na **Figura 4.13** e a **Figura 4.14,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 87.69 ms e m = 87.70 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 8.27 $(ms)^2$ para 5.51 $(ms)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 34 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que qualitativamente quase não houve mudança nas classes da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço NA07 na **Figura 4.15** e a **Figura 4.16,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.35 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.12 $(g/cm^3)^2$ para 0.09 $(g/cm^3)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 19 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve um aumento no número dos elementos das classes das extremidades da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço NA12 na **Figura 4.17** e a **Figura 4.18,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 84.78 ms e m = 84.80 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 10.26 $(ms)^2$ para 7.09 $(ms)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 41 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve um aumento no número dos elementos das classes das extremidades da distribuição.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço NA12 na **Figura 4.19** e a **Figura 4.20,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.40 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.16 $(g/cm^3)^2$ para 0.13 $(g/cm^3)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 19 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve uma movimentação dos elementos das classes à esquerda da distribuição para a direita da mesma.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço NA12 na **Figura 4.21** e a **Figura 4.22,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 85.10 ms e m = 85.13 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 12.04 $(ms)^2$ para 10.23 $(ms)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 16 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que a distribuição se tornou bimodal.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço RJS42 na **Figura 4.23** e a **Figura 4.24,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.41 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.10 (g/cm^3)^2 para 0.08 (g/cm^3)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 20 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve uma movimentação dos elementos das classes à direita da distribuição para a esquerda da mesma.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço RJS42 na **Figura 4.25** e a **Figura 4.26,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 85.91 ms e m = 85.89 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 8.14 (ms)^2 para 5.40 (ms)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 34 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve uma movimentação dos elementos das classes à esquerda da distribuição para a direita da mesma.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo rhoB do poço RJS234 na **Figura 4.27** e a **Figura 4.28,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 2.36 g/cm^3. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 0.10 (g/cm^3)^2 para 0.07 (g/cm^3)^2 respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 30 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que que houve uma movimentação dos elementos das classes mais à direita para as classes mais à esquerda.

Analisando-se a transferência de escala realizada no atributo dT do poço RJS234 na **Figura 4.29** e a **Figura 4.30,** nota-se que para o sinal original e o sinal filtrado praticamente não houve mudança no parâmetro média, valendo m = 85.10 ms e m = 85.14 ms respectivamente. A variância do sinal original e do sinal filtrado foi de 7.87 $(ms)^2$ para 4.30 $(ms)^2$ respectivamente, que corresponde a uma redução de aproximadamente 46 % na variância do sinal original. Nota-se pelo variograma da imagem original uma infinidade de estruturas embricadas para distâncias menores de 15 metros e que no variograma do sinal filtrado, grande maioria destas estruturas não estão mais presentes. A comparação entre o histograma do sinal original e do sinal filtrado mostra que houve uma movimentação dos elementos das classes à esquerda da distribuição para a direita da mesma.

4.4 Conclusões

A grande motivação do uso da Análise Wavelet no tratamento de sinais geofísicos se deve principalmente ao fato de que se está utilizando um método totalmente adaptado ao sinal com o qual se está trabalhando, ou seja, utilizou-se um método que é sensível à sinais não estacionários, no caso, os perfis geofísicos.

Sumarizando os resultados obtidos, observou-se que a média obtida para o sinal original e o sinal filtrado (praticamente para todos os poços e parâmetros), mante-se praticamente a mesma, mostrando com isso um ponto positivo do método. A variância obtida para o sinal original e o sinal filtrado alterou-se para todos os poços e parâmetros, mas esta diminuição se mostrou mais acentuada para o perfil de dT (a menos dos perfis referentes aos poços NA01 e NA12), o que pode ser notado também pelo variograma, observando a diminuição brusca do patamar do variograma do sinal filtrado em comparação ao patamar da imagem original. Isto mostra que os pequenos comprimentos de onda menores ou iguais a 15 metros são responsáveis por uma parte considerável de energia deste sinal. Também no variograma do sinal original e do sinal filtrado, observa-se que no primeiro o comportamento esférico na origem e no segundo tem-se o comportamento parabólico. Isto é um comportamento inerente de todos os filtros, ou seja, por mais que se tente evitar, sempre haverá uma atenuação do sinal original. No geral o método se mostrou eficiente, mantendo a média praticamente constante após a filtragem e conservando de alguma forma a variância original, ou seja, conservando ainda parte da variabilidade original do sinal.

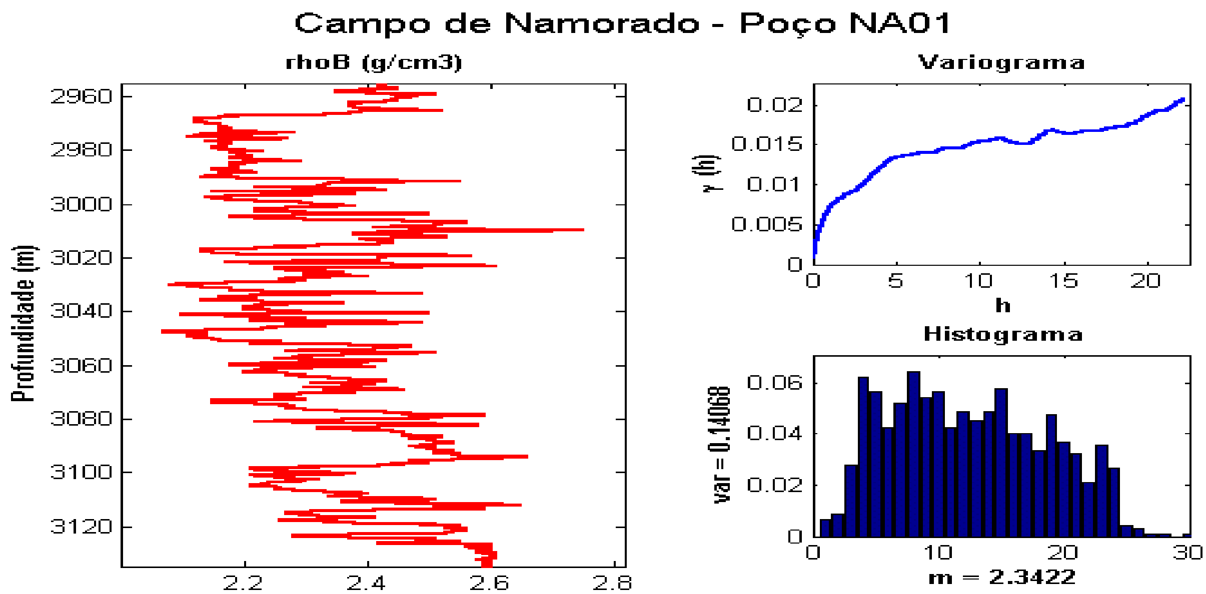


Figura 4.3 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço NA01 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

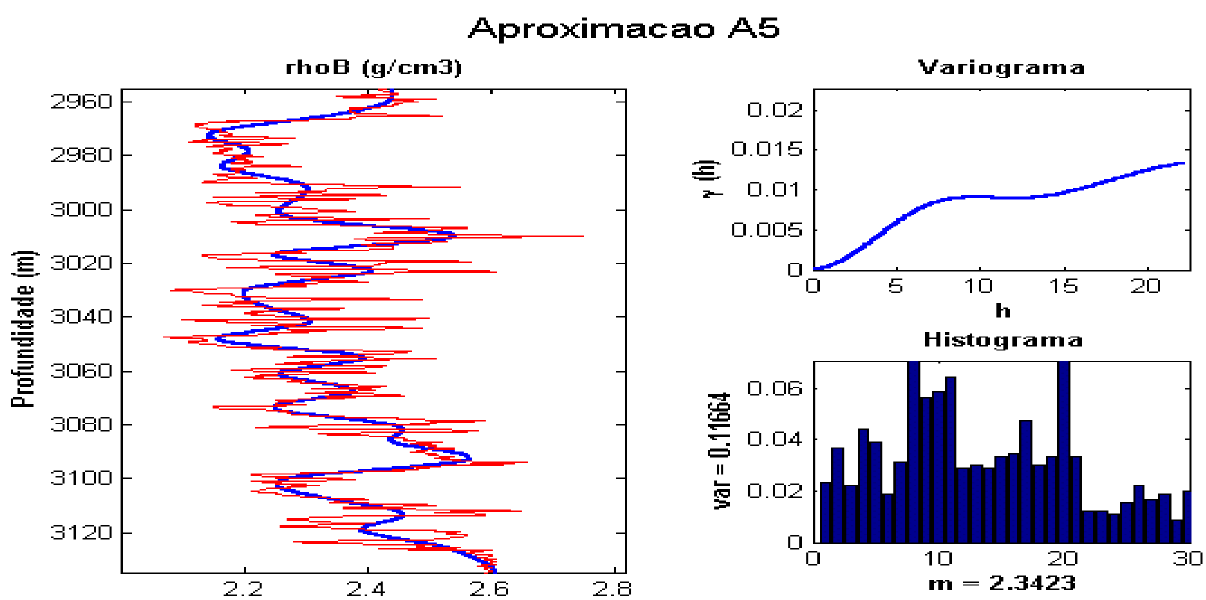


Figura 4.4 Perfil de rhoB do poço NA01 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

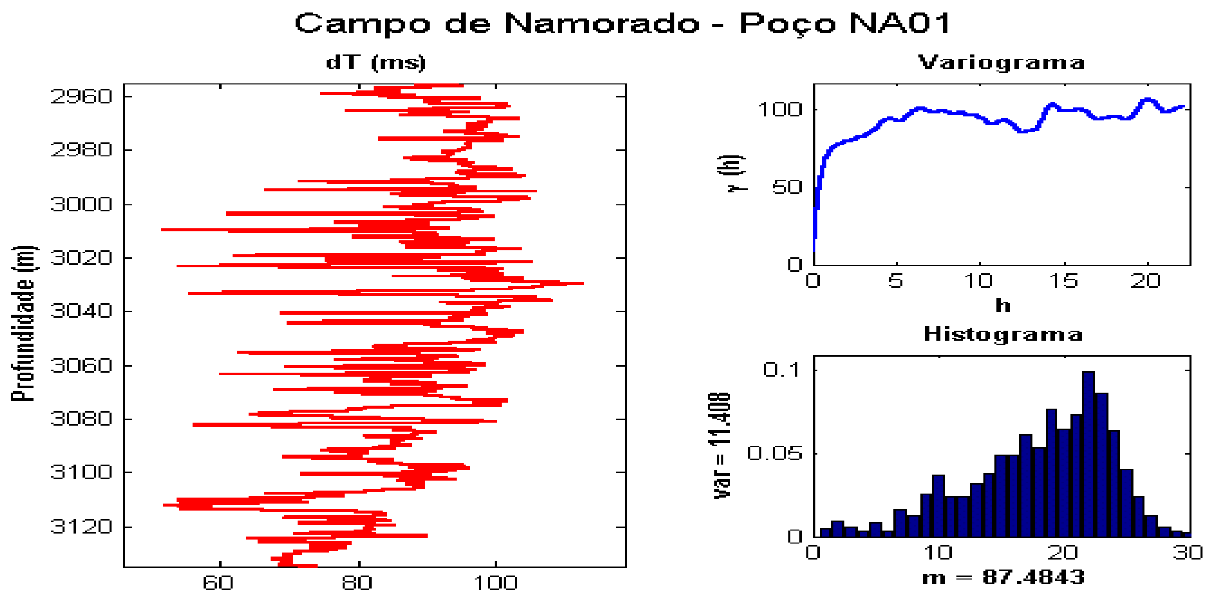


Figura 4.5 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço NA01 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

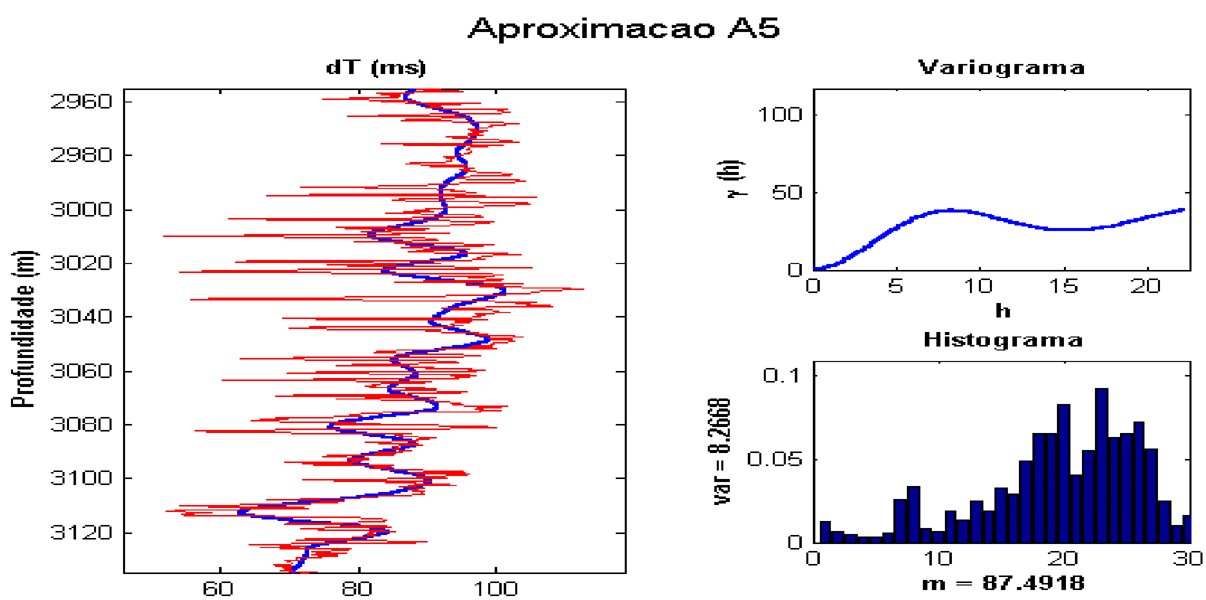


Figura 4.6 Perfil de dT do poço NA01 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

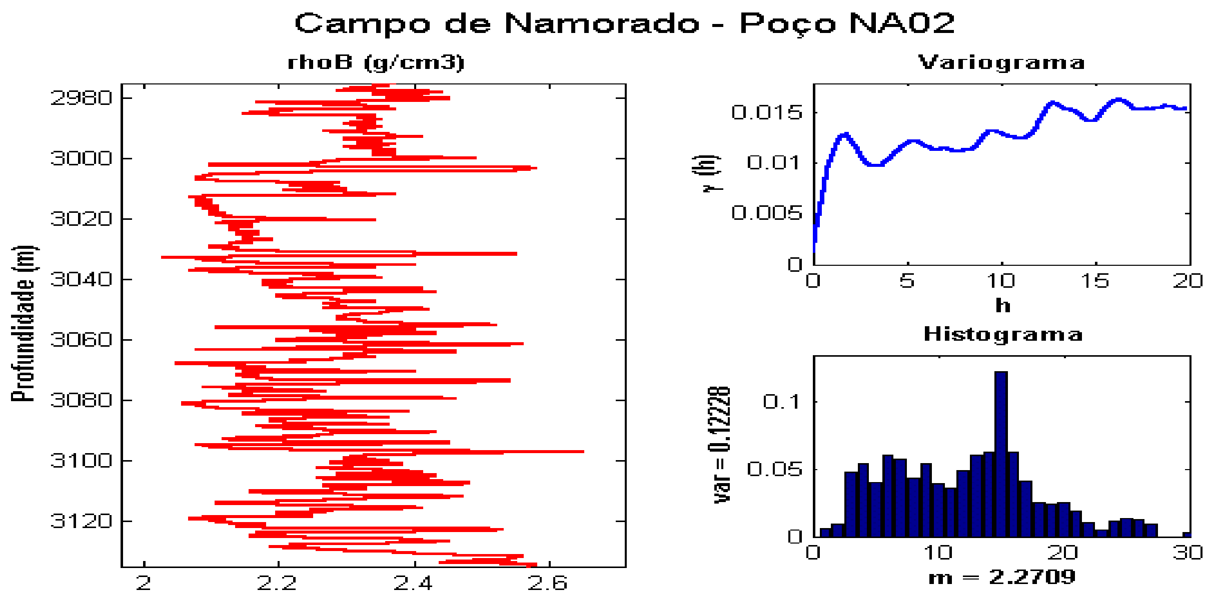


Figura 4.7 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço NA02 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

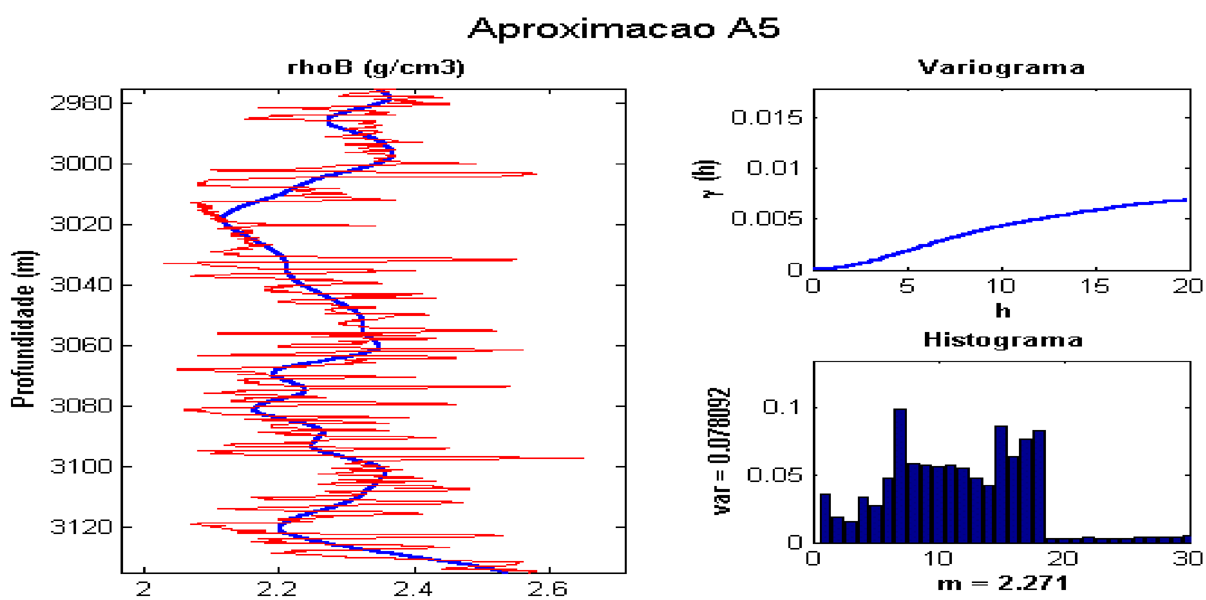


Figura 4.8 Perfil de rhoB do poço NA02 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

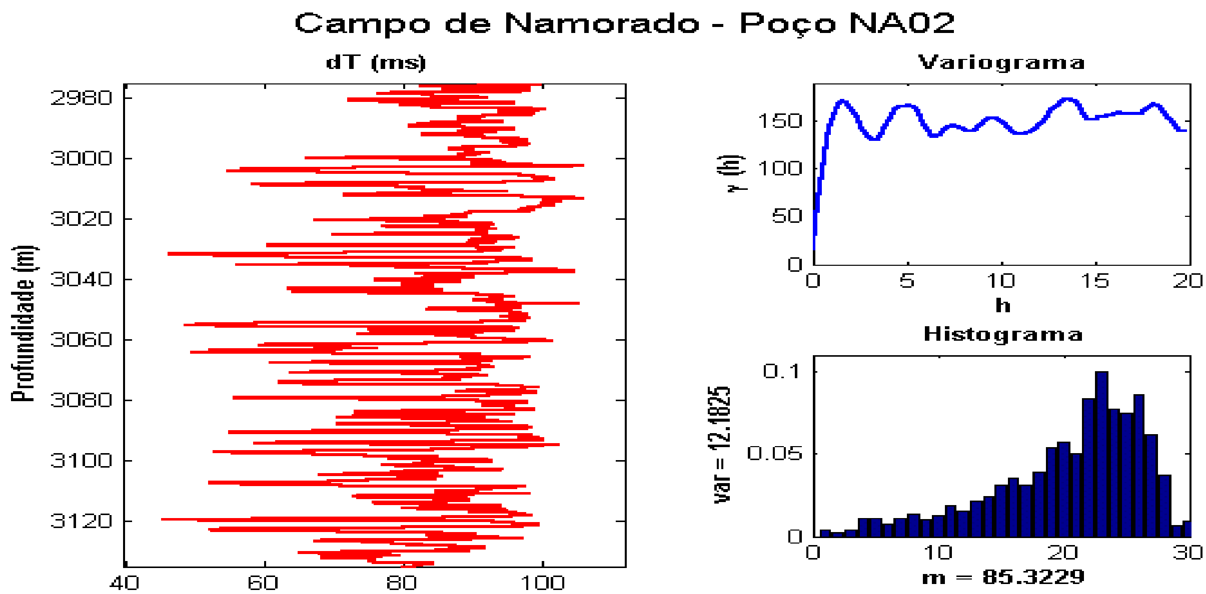


Figura 4.9 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço NA02 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

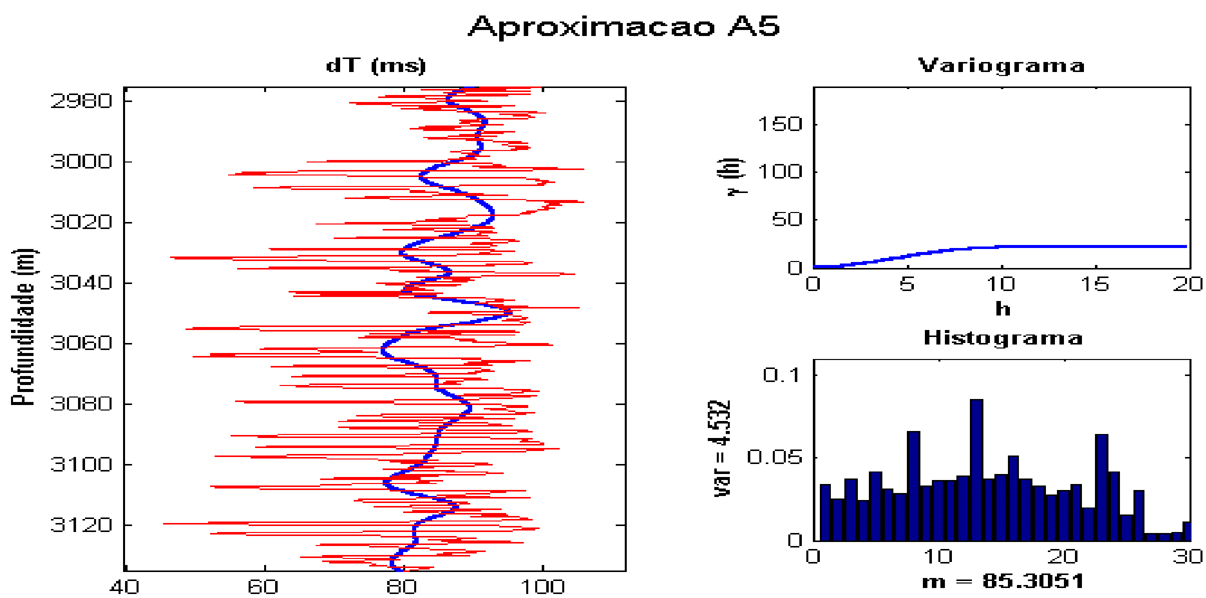


Figura 4.10 Perfil de dT do poço NA02 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

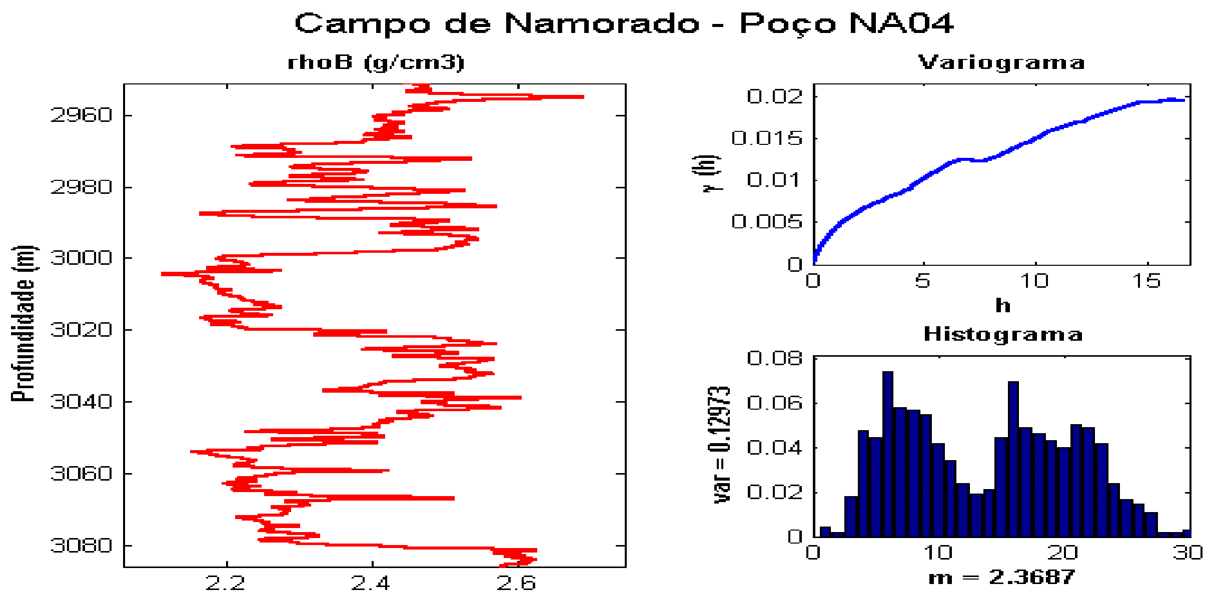


Figura 4.11 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço NA04 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

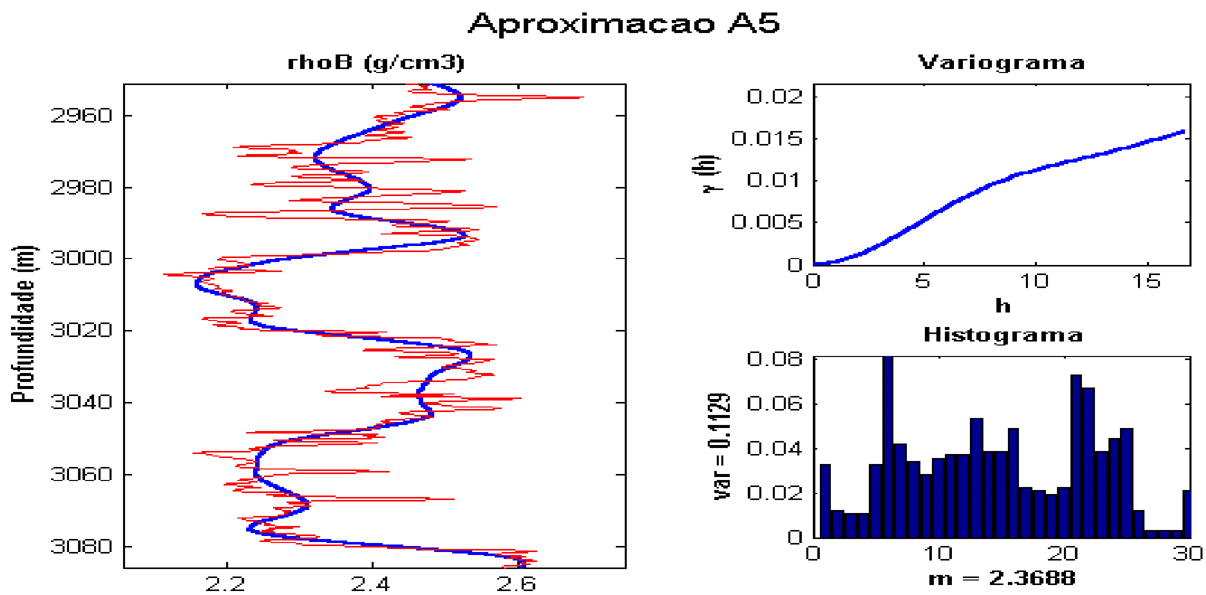


Figura 4.12 Perfil de rhoB do poço NA04 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

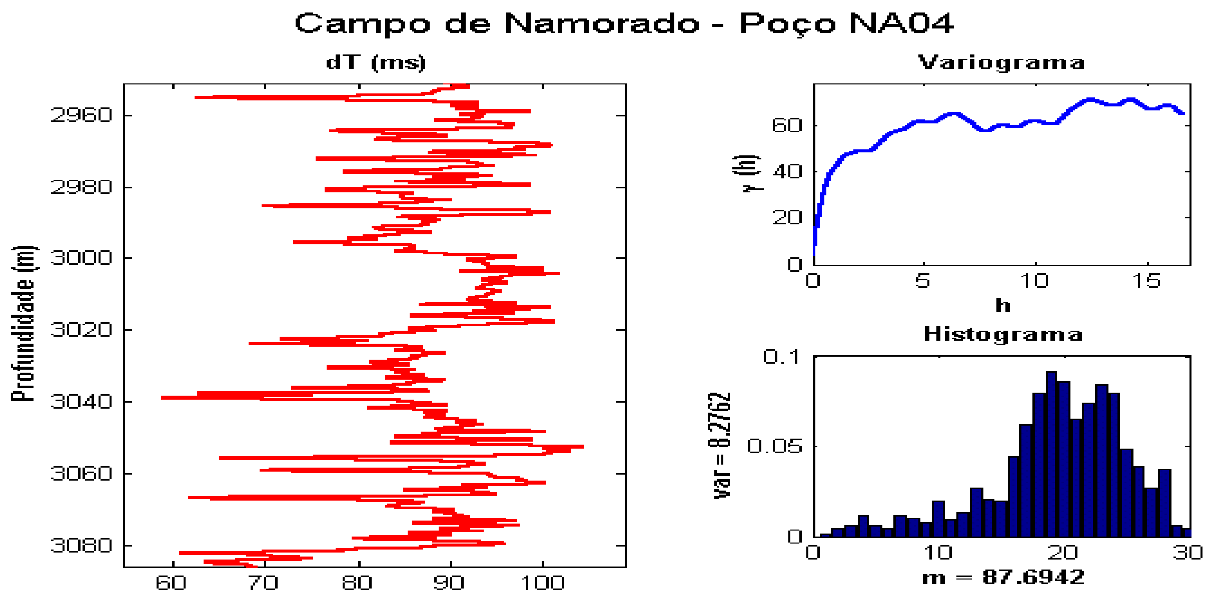


Figura 4.13 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço NA04 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

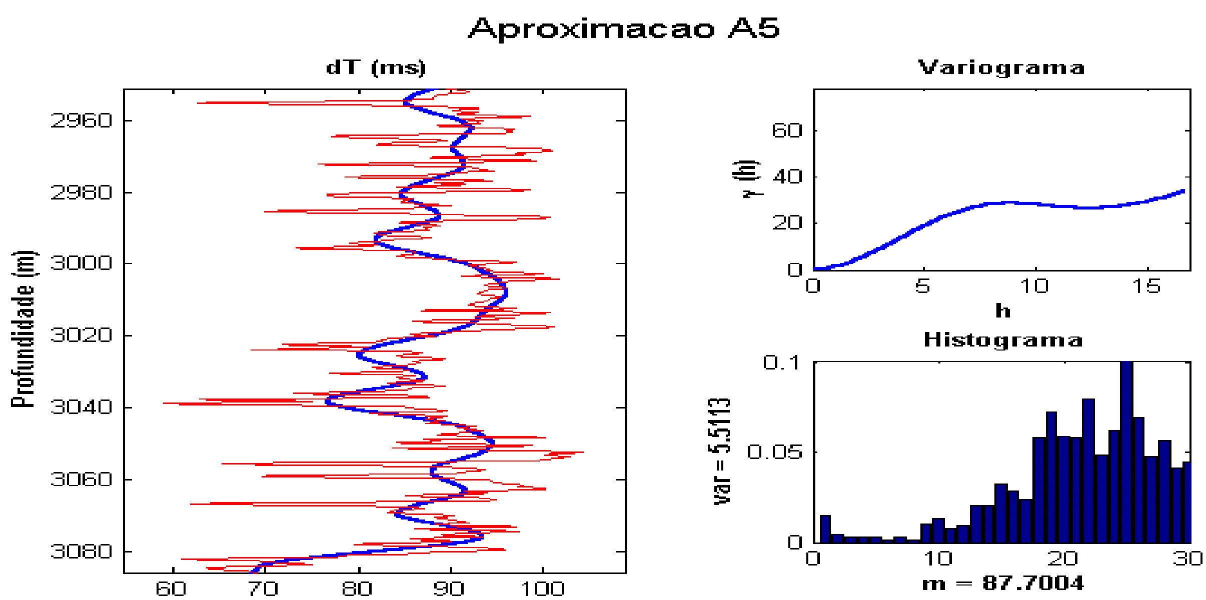


Figura 4.14 Perfil de dT do poço NA04 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

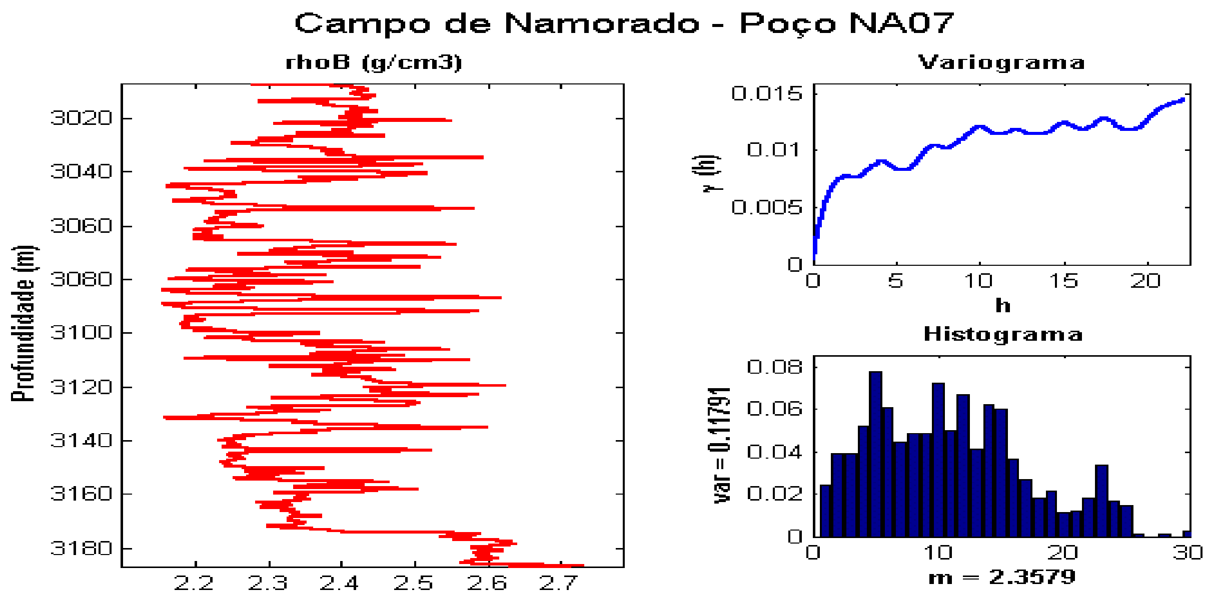


Figura 4.15 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço NA07 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

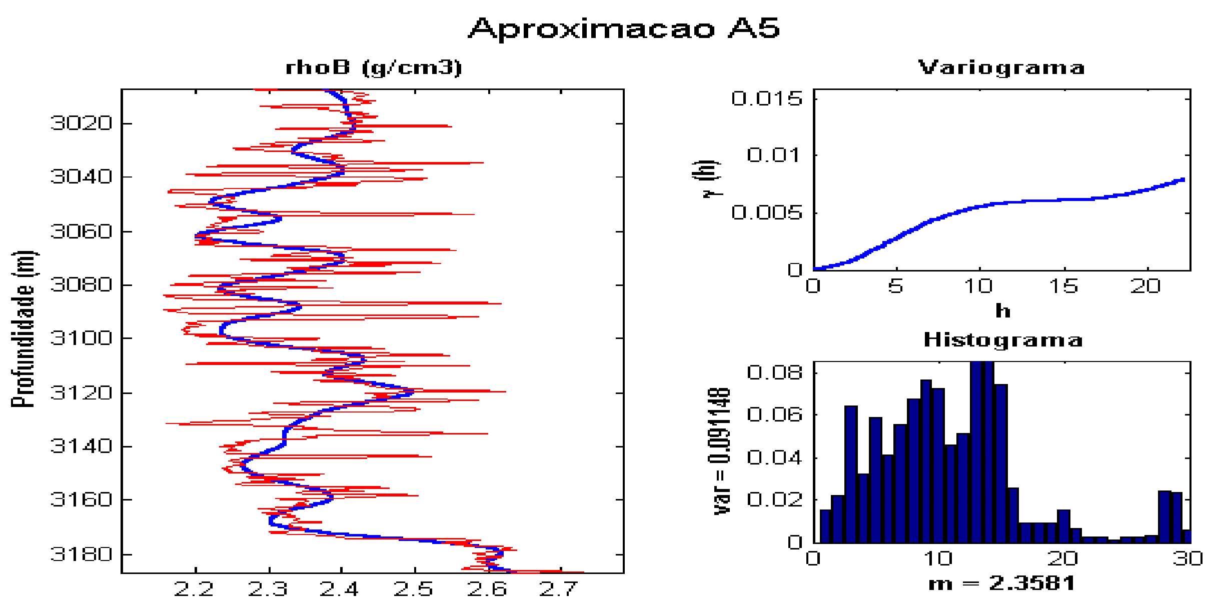


Figura 4.16 Perfil de rhoB do poço NA07 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

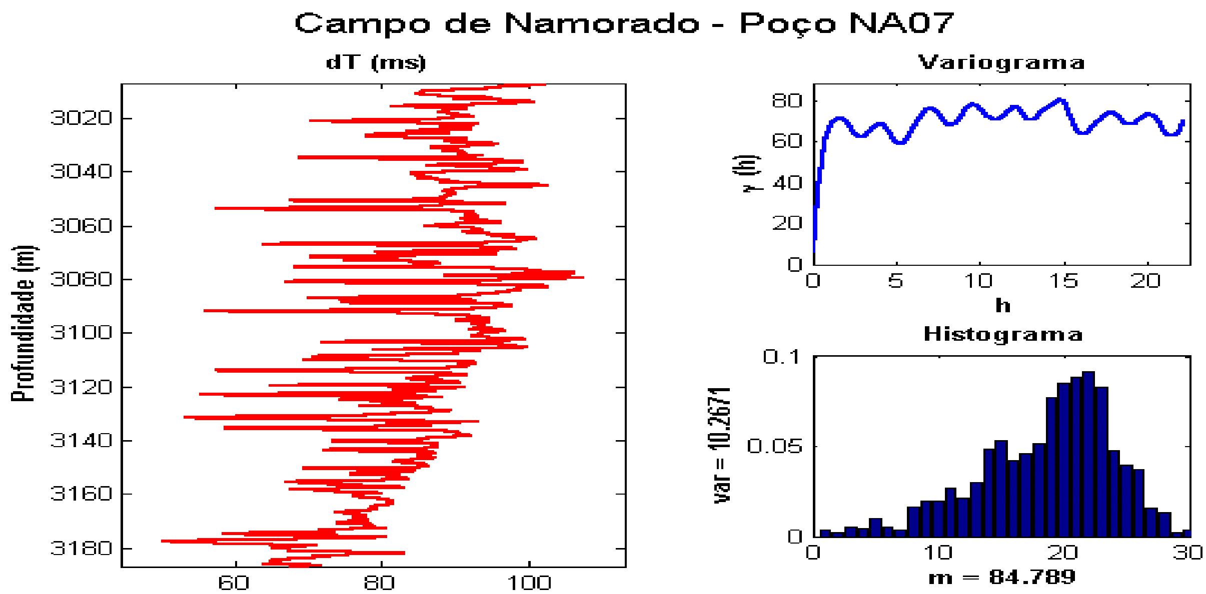


Figura 4.17 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço NA07 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

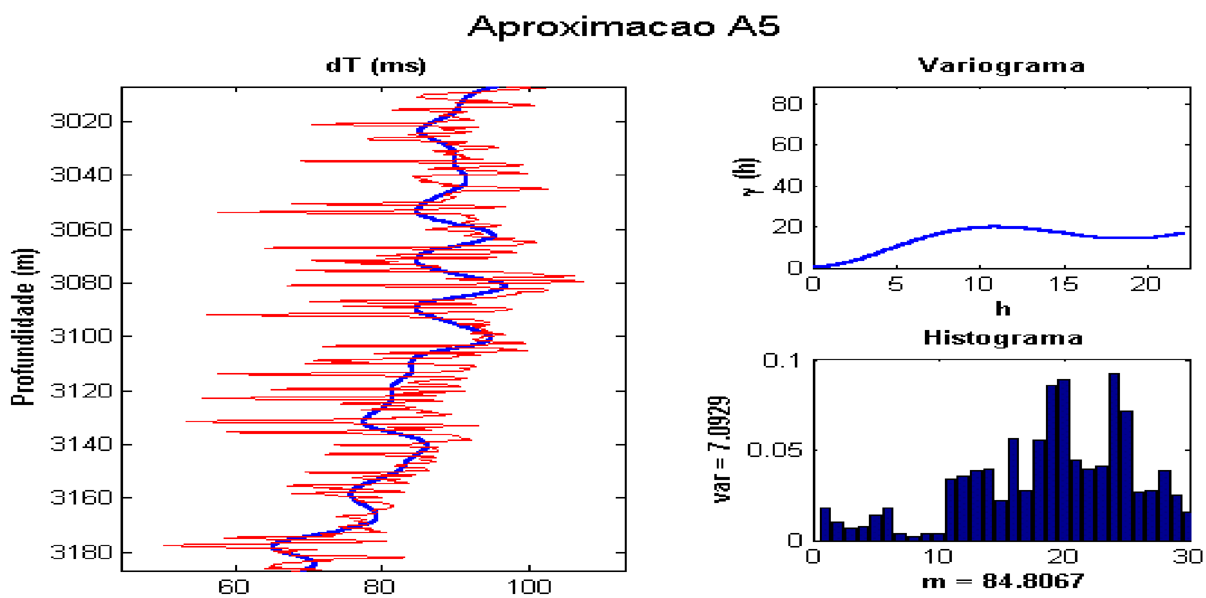


Figura 4.18 Perfil de dT do poço NA07 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

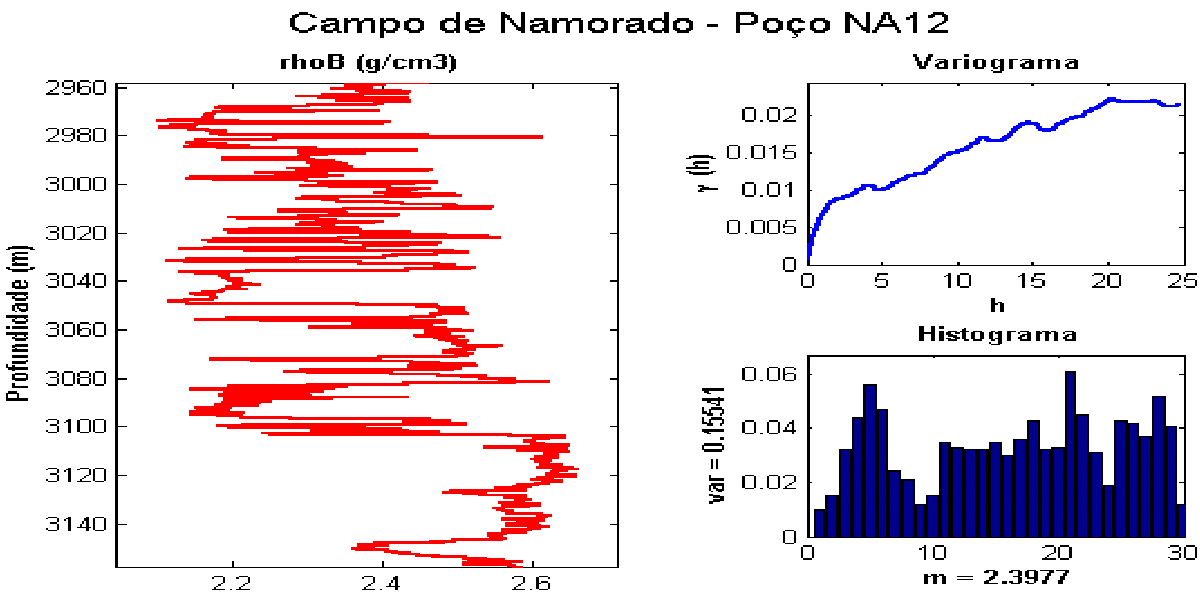


Figura 4.19 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço NA12 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

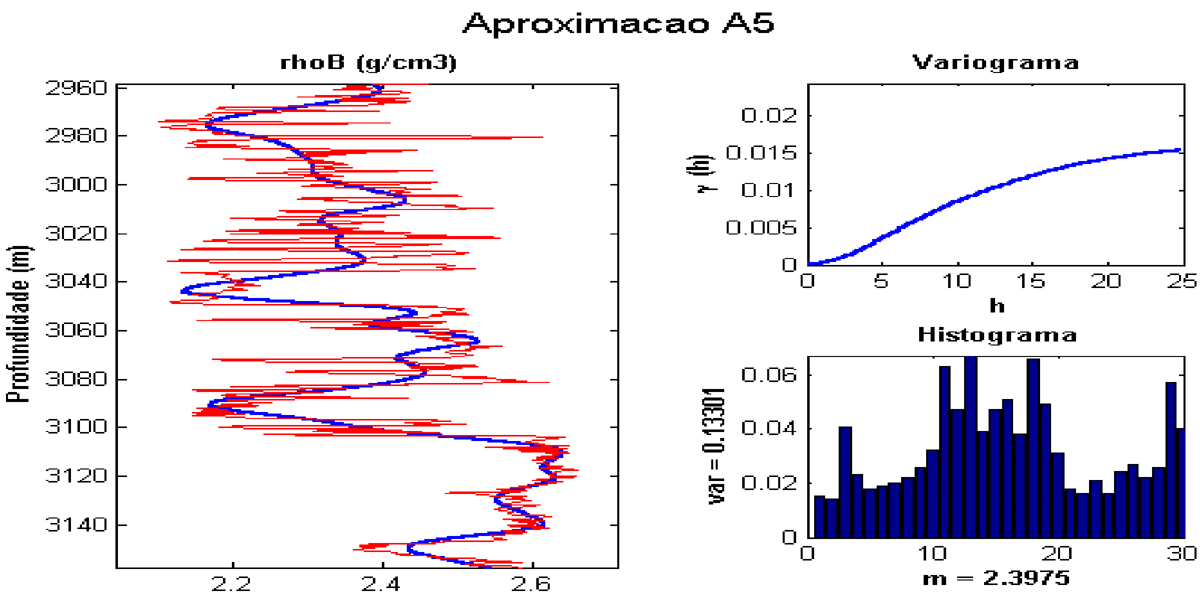


Figura 4.20 Perfil de rhoB do poço NA12 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

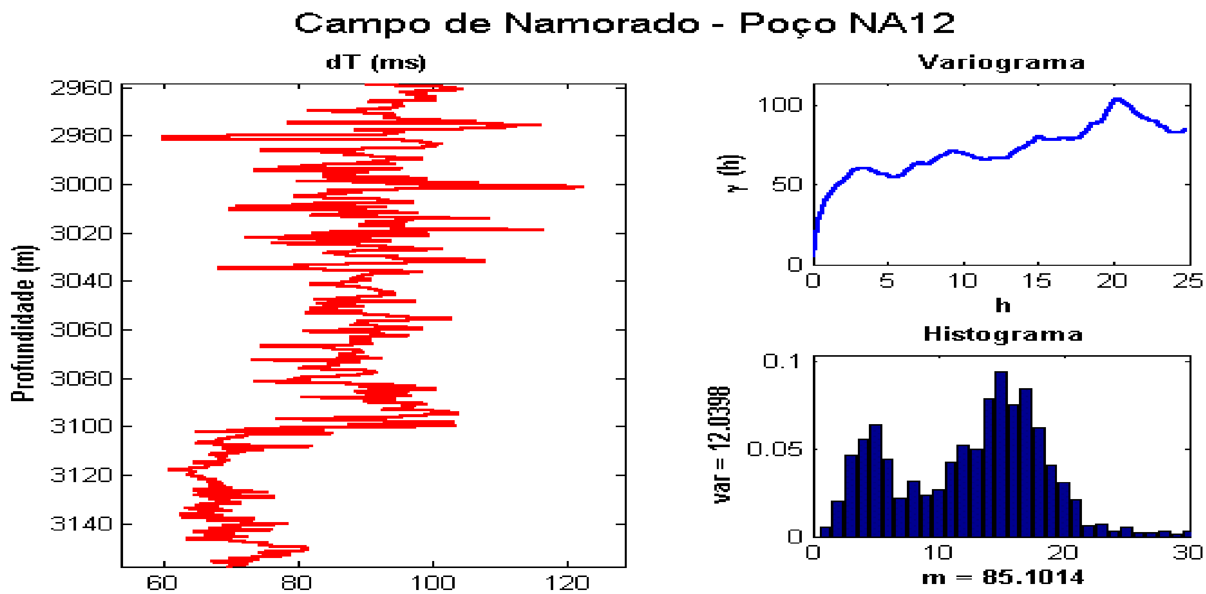


Figura 4.21 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço NA12 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

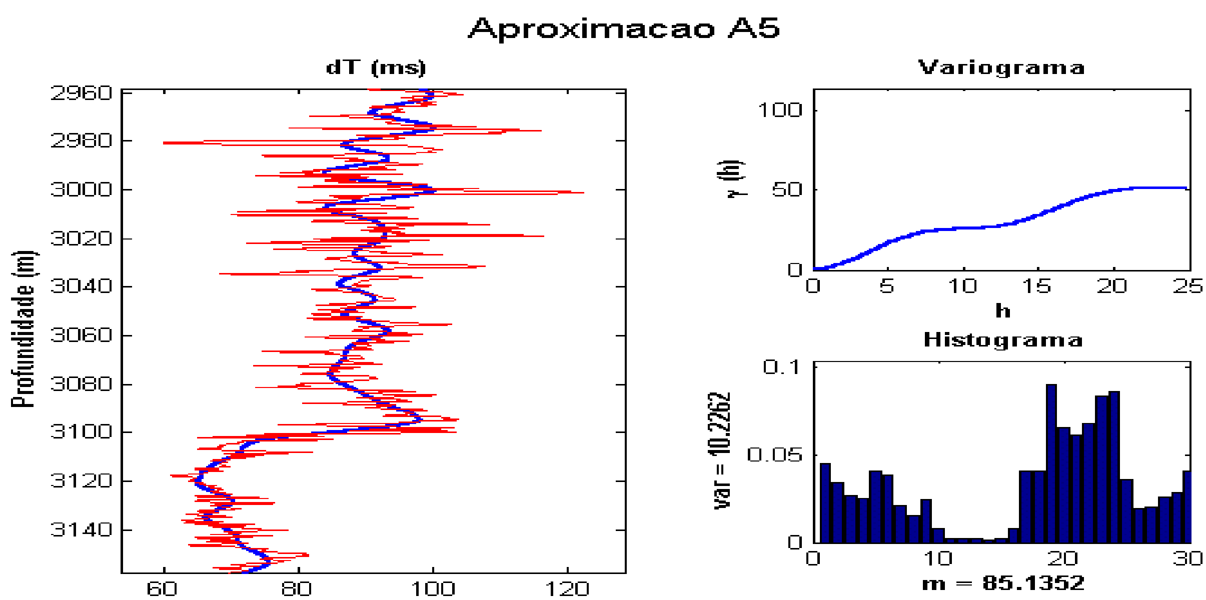


Figura 4.22 Perfil de dT do poço NA12 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

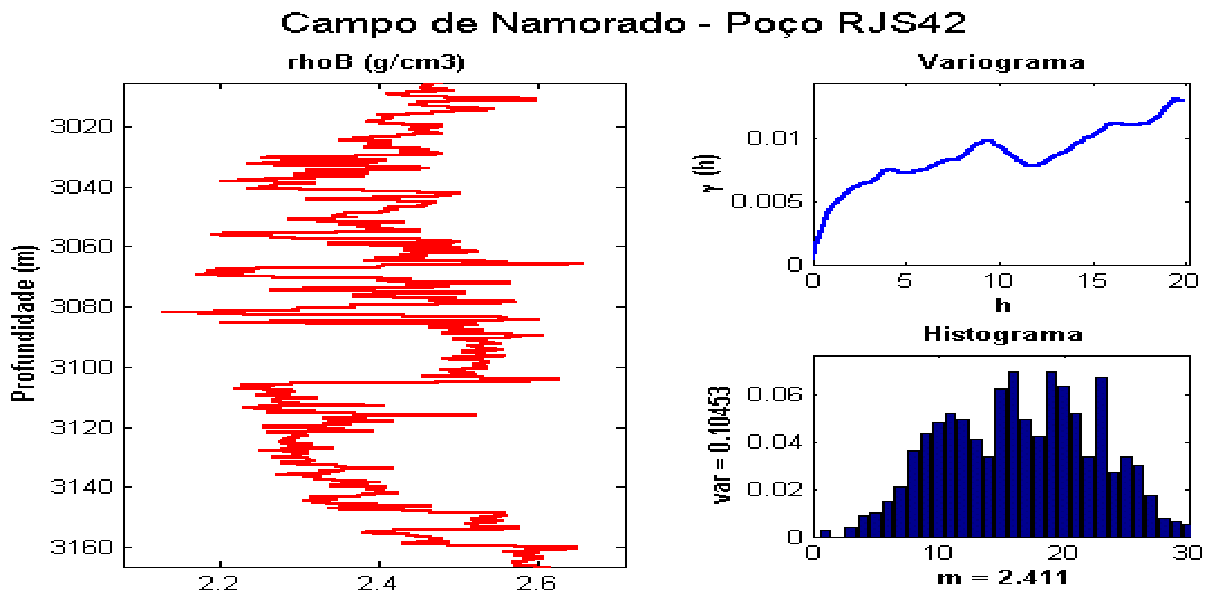


Figura 4.23 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço RJS42 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

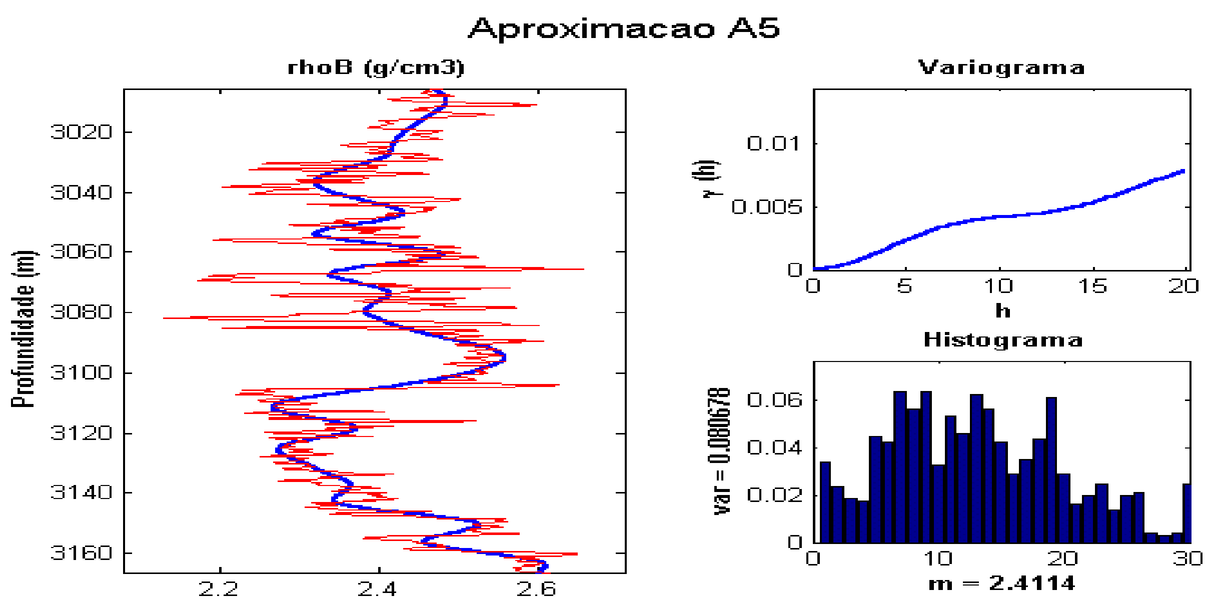


Figura 4.24 Perfil de rhoB do poço RJS42 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

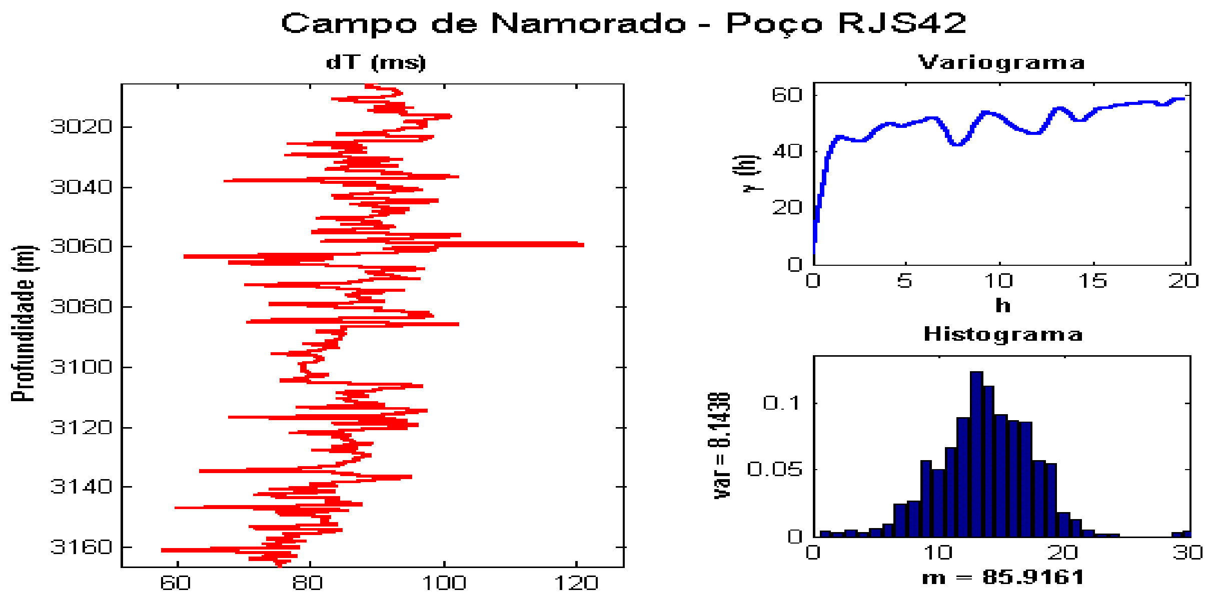


Figura 4.25 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço RJS42 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

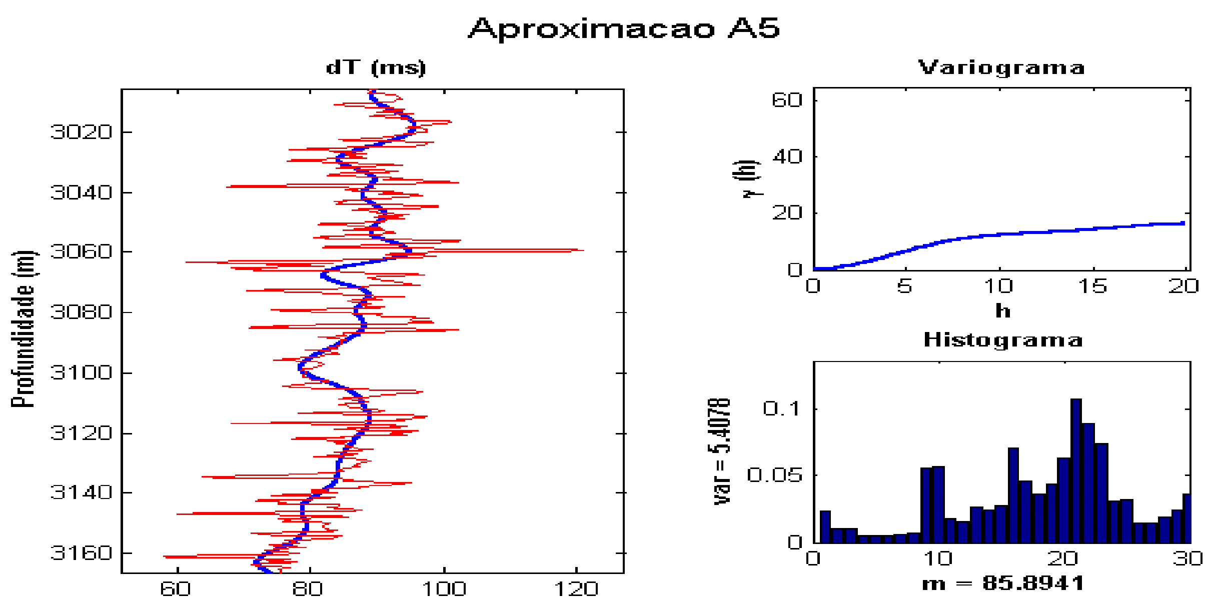


Figura 4.26 Perfil de dT do poço RJS42 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

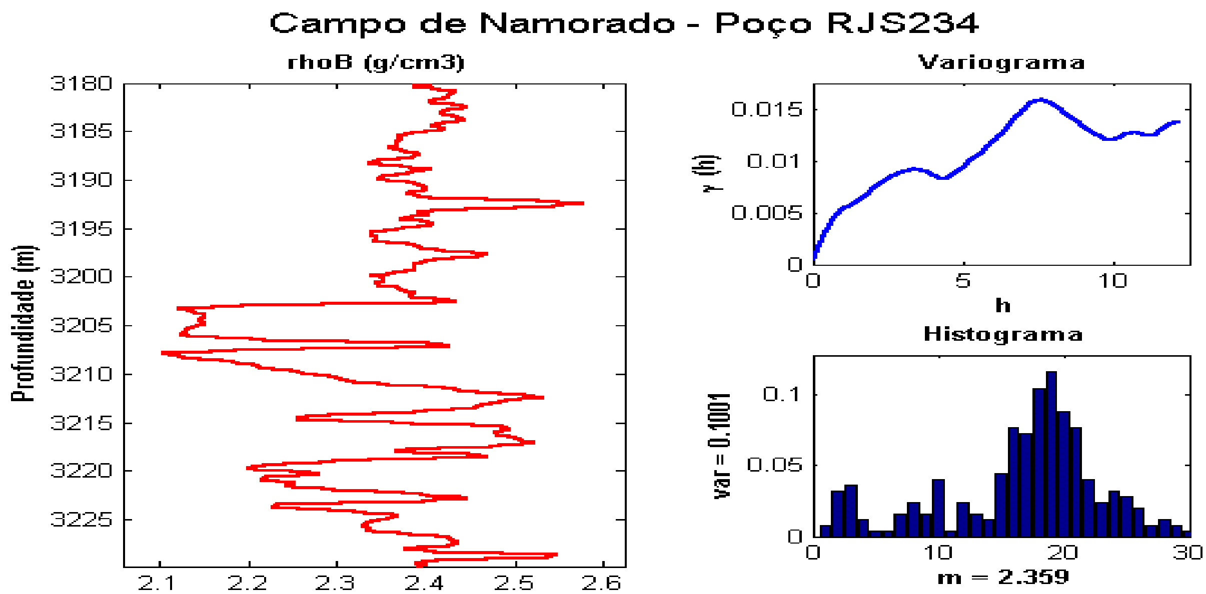


Figura 4.27 Perfil original (antes da transferência de escala) de rhoB do poço RJS234 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

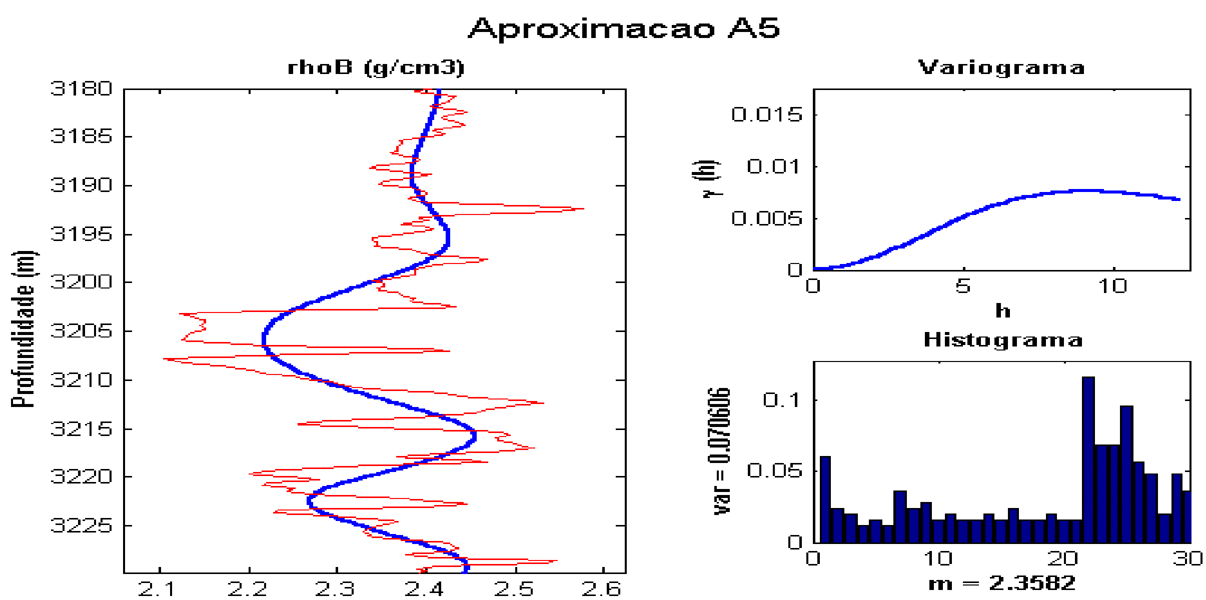


Figura 4.28 Perfil de rhoB do poço RJS234 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

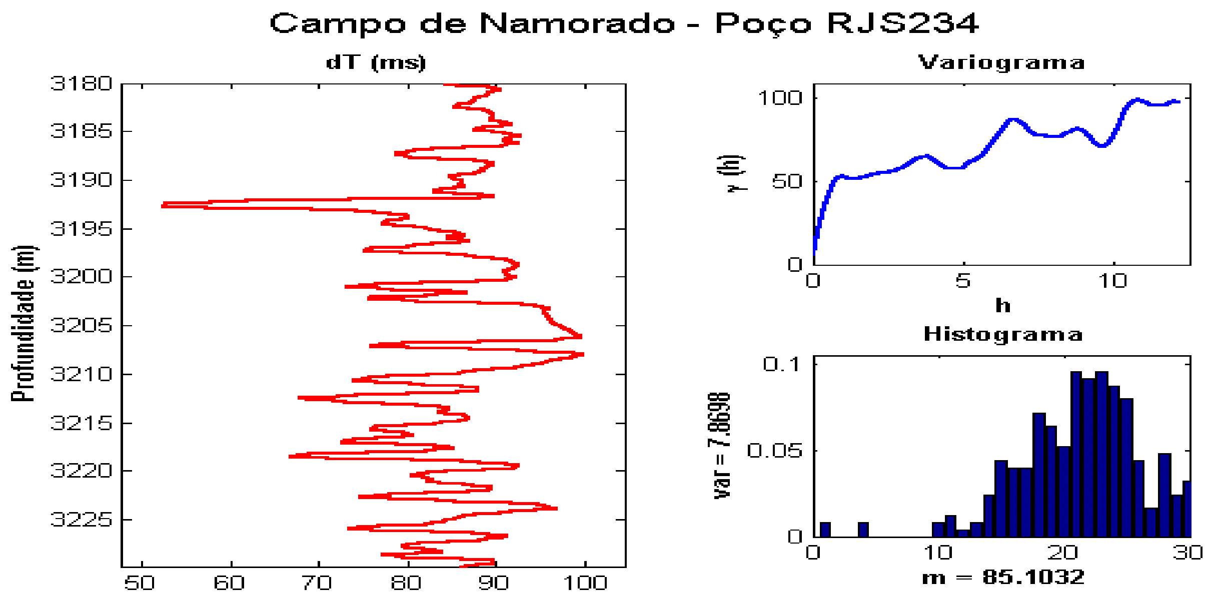


Figura 4.29 Perfil original (antes da transferência de escala) de dT do poço RJS234 (canto esquerdo), seu variograma (canto superior direito) e seu histograma (canto inferior direito).

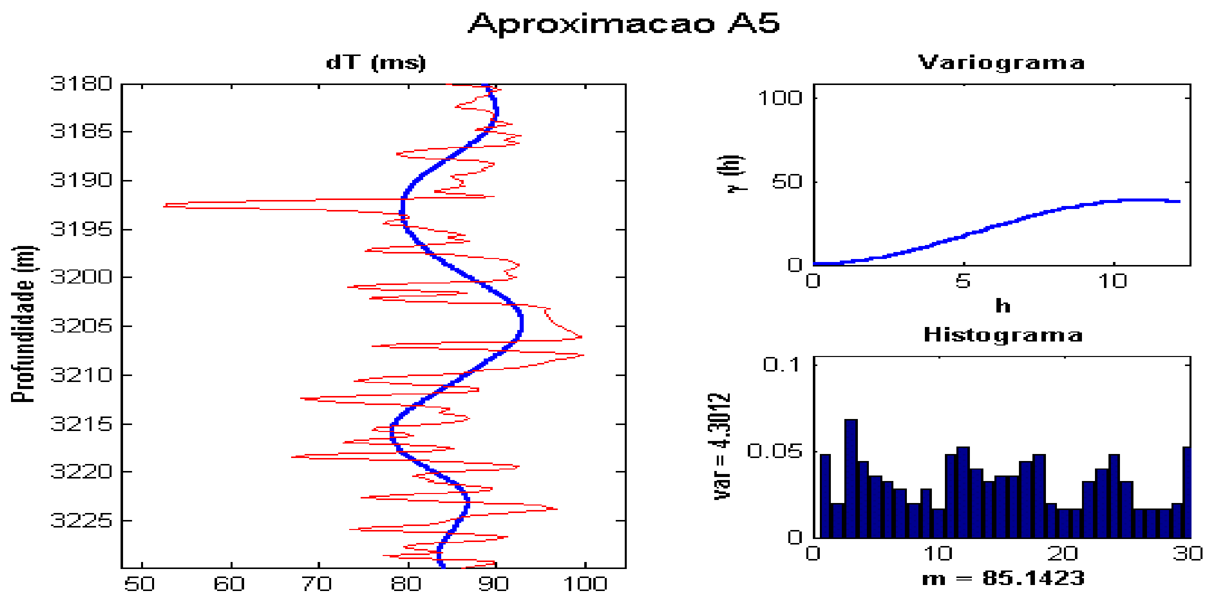


Figura 4.30 Perfil de dT do poço RJS234 após transferência de escala em azul e perfil original em vermelho (canto esquerdo), variograma (canto superior direito) e histograma (canto inferior direito) do sinal após transferência de escala.

Capítulo 5

Decomposição Multi-resolução Aplicada a Filtragem de Imagens

5.1 Introdução

A análise Wavelet permite que uma imagem (informação) seja representada em termos de um conjunto de funções básicas, $\psi_{\lambda,t}(t)$, ou seja, vetores básicos ou núcleos. As funções básicas são um conjunto de funções linearmente independentes que podem ser usadas para produzir todas as funções admissíveis f(t) (Strang and Nguyen, 1996). Além disso, o conjunto de funções básicas $\psi_{\lambda,t}(t)$ é construído via escalonamentos (2^S) e translações (u) de uma wavelet mãe $\psi(t)$ (também chamada de wavelet básica), como definido em seguida

$$\psi_{\lambda,t}(u)=2^{-0.5\lambda}\psi(2^{-0.5\lambda}t-u) \qquad \textbf{(5.1)}$$

Como os parâmetros de escala e translação podem variar, pode-se analisar um sinal (uma imagem no presente caso, sem perda alguma de generalidade) em diferentes níveis de resolução. Isto permite efetuar o que é denominado de Análise multi-resolução obtida através da Análise Wavelet. Esta análise é feita por meio da utilização das funções $\phi(t)$ (função escala) que correspondem a um filtro discreto passa-baixa e por meio das funções wavelet $\psi(t)$ que correspondem a um filtro discreto passa-alta. O filtro passa-baixa retém as baixas freqüências do sinal (atenuando o sinal) enquanto que o filtro passa-alta retém os detalhes do sinal (características de alta freqüência). Em Daubechies & Mallat (1998), os respectivos autores fornecem os detalhes para a construção das funções wavelets e seus respectivos filtros. A escolha da função básica determina o tipo de informação que pode ser extraída de um sinal. Então, de uma maneira informal, uma função $f(t)$ pode ser expressa como

$$f(t)=\sum_{\lambda}\sum_{t} b_{\lambda,t}\psi_{\lambda,t} \tag{5.2}$$

onde os coeficientes $b_{\lambda,t}$ são definidos como

$$b_{\lambda,t}=\int f(u)\psi_{\lambda,t}du \tag{5.3}$$

cuja magnitude fornece a medida da significância da sua função básica correspondente. Essas mesmas equações que agora se mostram de uma forma mais compacta, já foram mostradas nos capítulos anteriores.

Em resumo, o processo de decomposição multi-resolução consiste em separar o sinal original em duas partes: uma contendo as características de grande escala e uma contendo as características de pequena escala do sinal, que são chamada de **aproximação** e **detalhe**. De forma esquematica o processo pode ser visualizado na **Figura 5.1**.

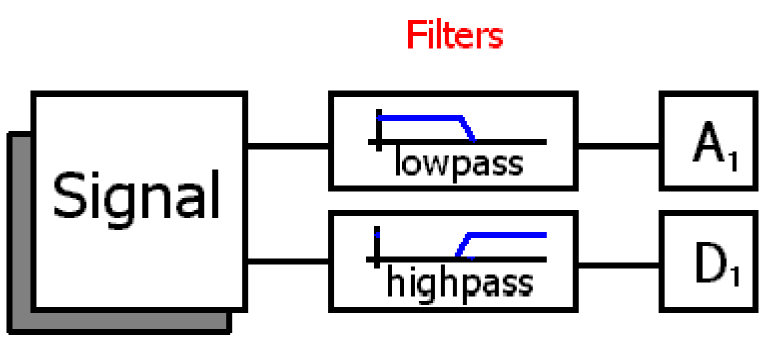


Figura 5.1 Decomposição multi-resolução efetuada na imagem original em um nível

ou seja, supondo que os filtros sejam de reconstrução perfeita (Mallat, 1998), temos a seguinte expressão:

$$\mathbf{A_0 = A_1 + D_1} \tag{5.4}$$

onde $\mathbf{A_0}$ é a imagem original, ou aproximação à nível 0, $\mathbf{A_1}$ é a aproximação da imagem original à nível 1 e $\mathbf{D_1}$ é o detalhe da imagem original à nível 1. O processo de decomposição pode ser repetido novamente utilizando-se agora a aproximação a nível 1 $\mathbf{A_1}$, ou seja

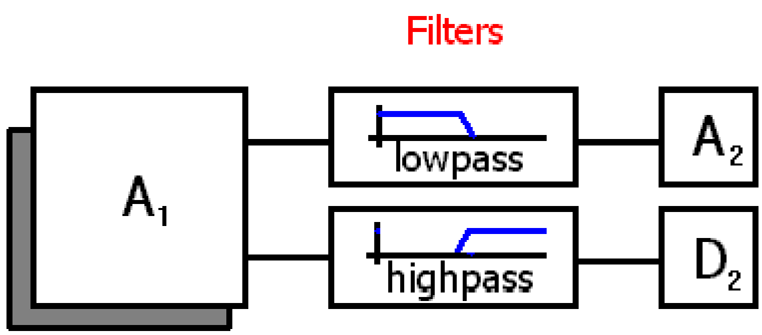


Figura 5.2 Decomposição multi-resolução efetuada na aproximação $\mathbf{A_1}$ em um nível

$$\mathbf{A_1 = A_2 + D_2} \tag{5.5}$$

onde $\mathbf{A_1}$ é a aproximação a nível 1, $\mathbf{A_2}$ é a aproximação à nível 2 e $\mathbf{D_2}$ é o detalhe à nível 1. Substituindo então esta expressão na outra obtida anteriormente tem-se que

$$\mathbf{A_0 = A_2 + D_2 + D_1} \tag{5.6}$$

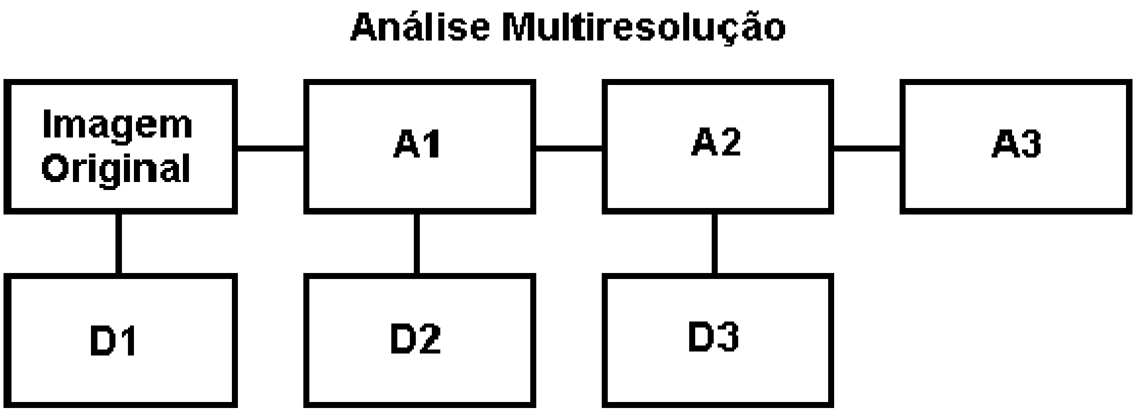
ou seja, por indução, uma decomposição realizada a nível n, tem-se a expressão da forma mostrada a seguir

$$\mathbf{A_0 = A_n + D_n + ... + D_1} \tag{5.7}$$

e para efeito de simplificação vamos definir

$$\mathbf{H_n = D_n + ... + D_1} \qquad \textbf{(5.8)}$$

Com isso, pode-se então representar uma decomposição multi-resolução a nível 3 da forma abaixo:



onde

$$\mathbf{A_0 = A_3 + D_3 + D_2 + D_1} \qquad \textbf{(5.9)}$$

ou ainda

$$\mathbf{A_0 = A_3 + H_3} \qquad \textbf{(5.10)}$$

5.2 Exemplo de filtragem realizada através da decomposição multi-resolução

No exemplo a seguir aplicou-se a decomposição multi-resolução através da decomposição multi-resolução no tratamento e supressão de ruído de uma imagem de 256 x 256 pixels contendo uma única informação primária, informação esta referente ao elemento fósforo (P) medida através de um microscópio eletrônico (amostra esta contida em uma lâmina de aço). Esta imagem faz parte de um conjunto de estudos de casos contidos no pacote geoestatístico **Isatis** da empresa

Geovariance. Devido a pequena quantidade de material (traços), a realização da fotografia (imagem) levou-se muitas horas de exposição contínua, portanto, uma grande quantidade de ruído é criada por conta deste processo. Na **Figura 5.3** pode-se visualizar a imagem original detalhada anteriormente. Nota-se bem que a imagem possui uma grande quantidade de ruído, que é responsável pela falta de clareza, ou seja, pelo aspecto difuso da mesma. O parâmetro de controle utilizado para controle da filtragem será estimando a razão sinal-ruído[5], onde para esta imagem o mesmo vale 0.75, ou seja, 75 % da energia nesta imagem está associada ao ruído.

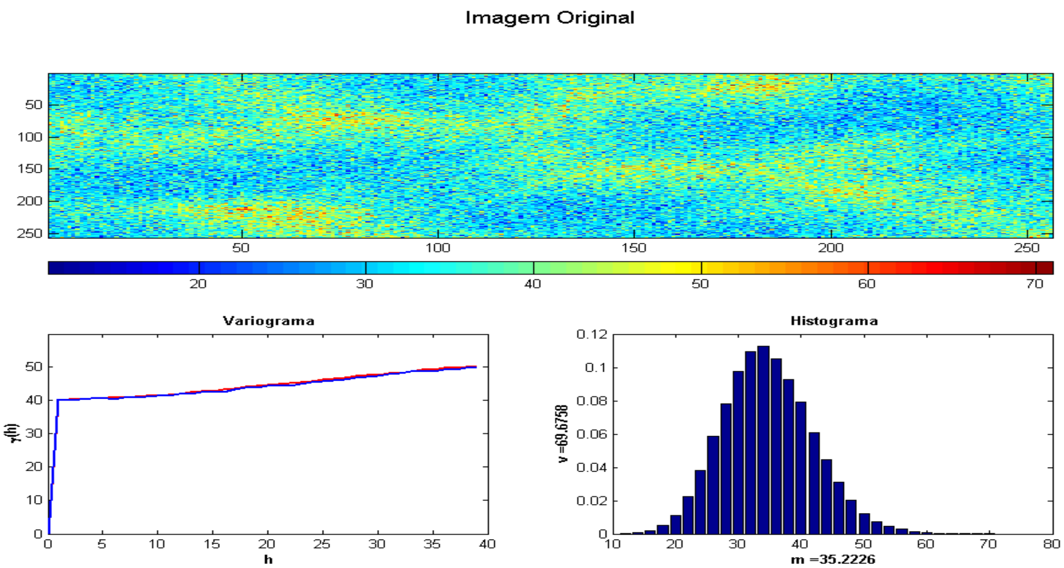


Figura 5.3 Imagem original obtida do elemento fósforo contindo em uma lâmina obtida através de microscópio eletrônico.

A metodologia adotada foi a decomposição da imagem por meio da Análise Wavelet. Obteve-se assim uma imagem atenuada em cada nível (tirando-se os detalhes para cada cada um deles), ou seja, retirando-se as altas frequências e mantendo as baixas frequências. O variograma então é obtido para cada umas das aproximações obtidas em cada uma das etapas da decomposiçao multi-resolução, quando o efeito pepita (efeito este associado ao ruído do sinal) chegar a um nível satisfatório (isto fica a critério de quem estiver utilizando a ferramenta) o

5 Que é definida pela relação $N_{SR}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, onde γ_2 é o componente sinal associado ao modelo variográfico de longo alcance e γ_1 é o componente ruído associado ao modelo variográfico de curto alcance (Mundim, 1999)

processo é interrompido. O variograma obtido para cada uma das etapas da decomposição multi-resolução é a contribuição principal do presente método, é por meio da visualização do efeito pepita, o profissional vai inferir se deve ou não interromper a filtragem.

5.2.1 Decomposição Multi-resolução através da Wavelet de Haar

A primeira análise foi efetuada usando-se a Wavelet de Haar, a pioneira e mais simples de todas wavelets (Mallat, 1998). Em cada etapa da análise (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foi obtida o variograma, histograma e estatística básica para cada aproximação obtida, e que serão os parâmetros de controle do estudo de caso. Na **Figura 5.4, Figura 5.5, Figura 5.6** e **Figura 5.7** têm-se a aproximação para o nível 1 $\mathbf{A_1}$, nível 2 $\mathbf{A_2}$, nível 3 $\mathbf{A_3}$ e nível 4 $\mathbf{A_4}$ respectivamente e o variograma, histograma e estatística básica para cada uma delas.

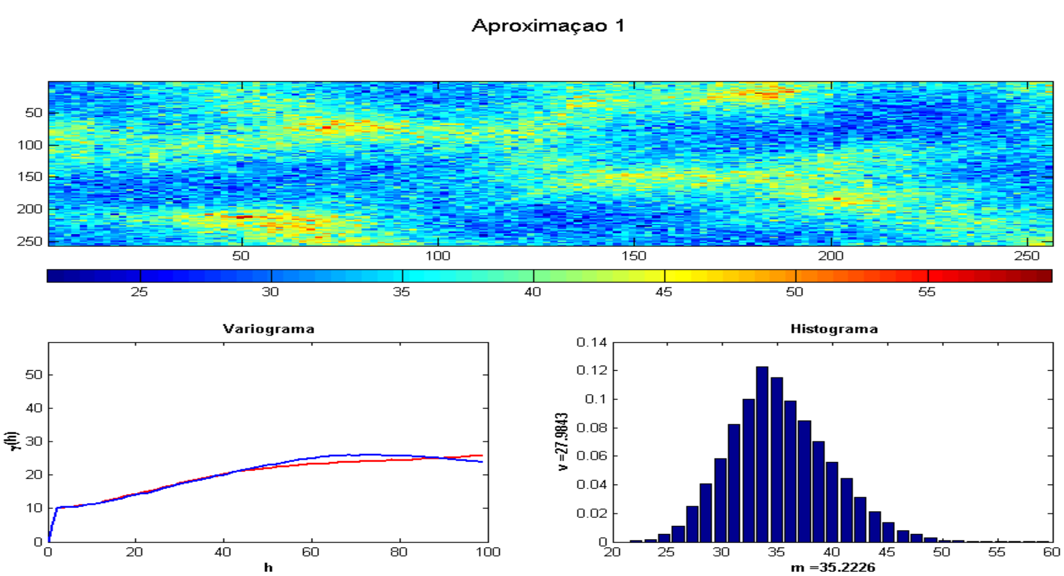


Figura 5.4 Aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.3**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

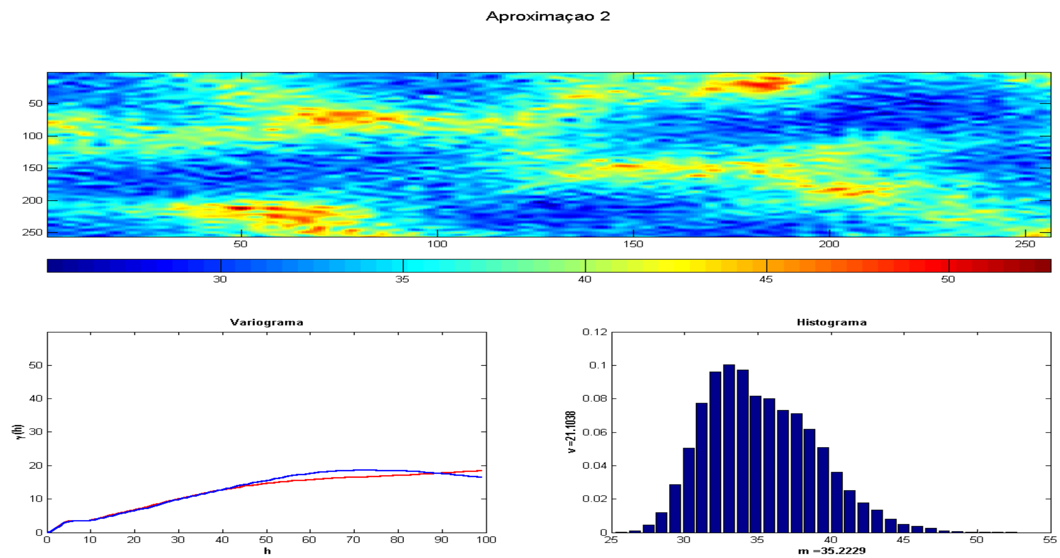


Figura 5.5 Aproximação 2 **A_2** (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.3**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

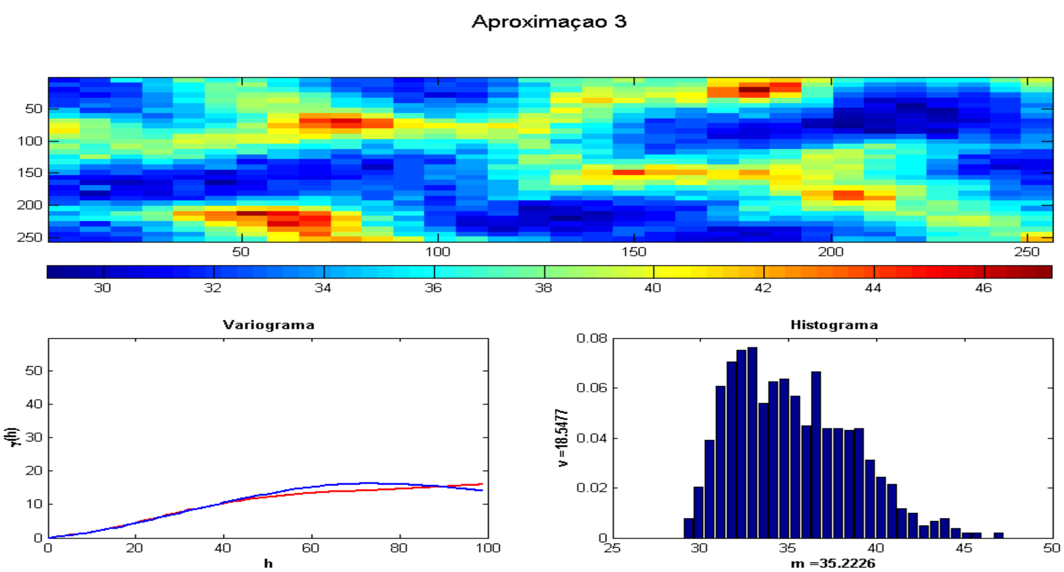


Figura 5.6 Aproximação 3 **A_3** (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.3**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

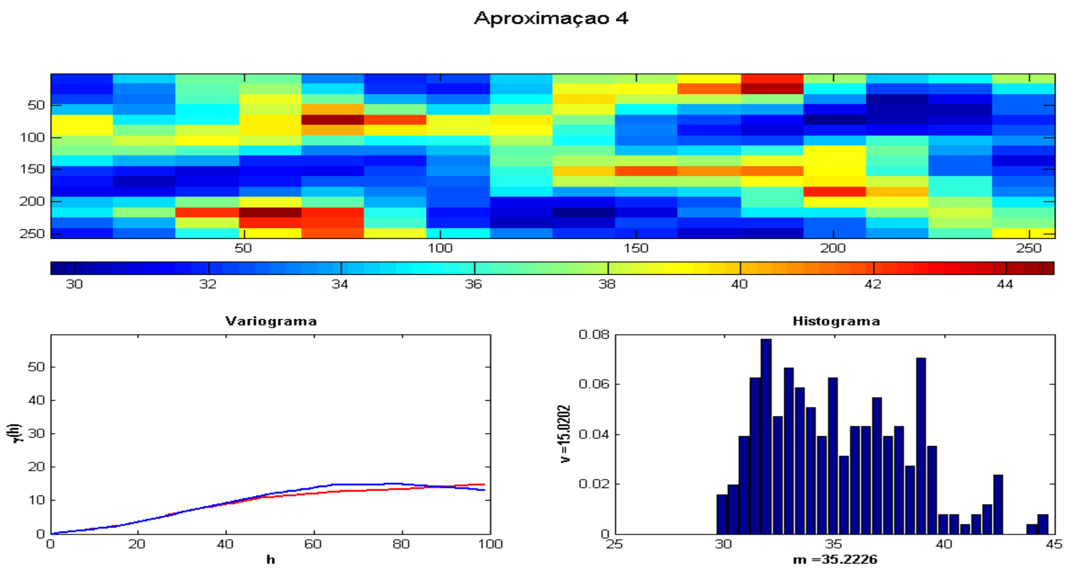


Figura 5.7 Aproximação 4 $\mathbf{A_4}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.3**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

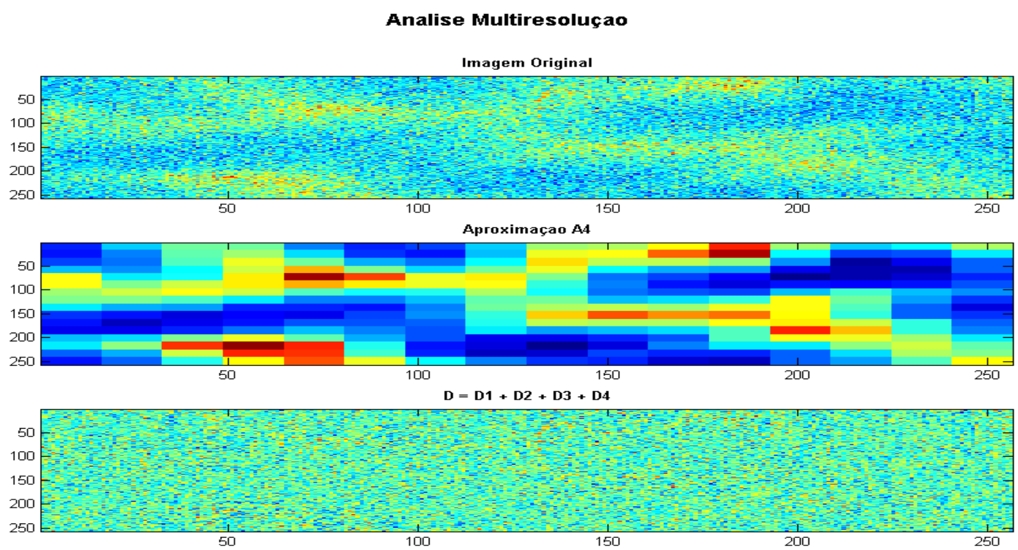


Figura 5.8 Imagem Original (parte superior), imagem filtrada através da decomposição multi-resolução (meio) e imagem contendo as baixas frequências retiradas do sinal (Imagem Original = $\mathbf{A_4 + H_4}$).

Para o exemplo anterior de decomposição multi-resolução, tem-se que

Imagem Original = A_4 + H_4

e obteve-se a tabela

Nível	*Média*	*Variância*	*Efeito Pepita*
0	35.22	69.68	40.01
1	35.22	27.98	5.03
2	35.22	21.06	0.68
3	35.22	18.55	0.16
4	35.22	15.02	0.15

De posse dos resultados acima, notou-se uma redução quase total do efeito pepita, sem mudanças no comportamento do variograma, mantendo o alcance do mesmo e sem alterações na média das imagens resultantes, que é um indicador muito forte da qualidade do método. Nota-se que na aproximação de nível 4 $\mathbf{A_4}$ a imagem ficou excessivamente grosseira e sem mais melhoras expressivas nos parâmetros efeito pepita e variância, ou seja, a análise poderia ter sido encerrada no nível 3.

Outro aspecto importante é a diminuição da dimensão da imagem original a cada etapa da análise multi-resolução, ou seja, inicialmente tinha-se uma imagem original possuindo dimensão de 256 x 256 pixels e que depois de obtida a aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ notou-se que esta nova imagem tem agora a dimensão de 128 x 128 pixels. E assim por diante tem-se que, a aproximação 2 $\mathbf{A_2}$ possui dimensão de 64 x 64 pixels, a aproximação 3 $\mathbf{A_3}$ possui dimensão 32 x 32 pixels e finalmente a aproximação 4 $\mathbf{A_4}$ possui dimensão 16 x 16 pixels. Nota-se, para este tipo de wavelet, que este processo de retirar detalhes de uma imagem automaticamente realiza o 'upscaling' da mesma, ou seja, tira-se as escalas que não interessam e fica-se somente com a escalas que são relevantes para o problema. Os métodos de 'upscaling' são muito importantes na indústria do petróleo, pois são eles responsáveis pelo processo de transferência de escalas, no caso específico do petróleo, passar da escala da geologia (escala mais fina) para uma escala mais grosseira que será utilizada no simuladores de fluxo (blocos maiores), e com a garantia de que a resposta ao fluxo de ambas seja o mais semelhante possível.

5.2.2 Decomposição Multi-resolução através da Wavelet Daubechies 8 (db8)

A segunda análise foi efetuada usando-se a Wavelet chamada db8, que é uma wavelet mais complexa e de maior continuidade (Mallat, 1998). Em cada uma das etapas da análise (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foram obtidos o variograma, histograma e estatística básica para cada uma das aproximações obtidas, e que serão os parâmetros de controle do estudo de caso. Em cada etapa da análise (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foi obtida o variograma, histograma e estatística básica para cada aproximação obtida, e que serão os parâmetros de controle do estudo de caso. Na **Figura 5.10, Figura 5.11, Figura 5.12** e **Figura 5.13** têm-se a aproximação para o nível 1 $\mathbf{A_1}$, nível 2 $\mathbf{A_2}$, nível 3 $\mathbf{A_3}$ e nível 4 $\mathbf{A_4}$ respectivamente e o variograma, histograma e estatística básica para cada uma delas.

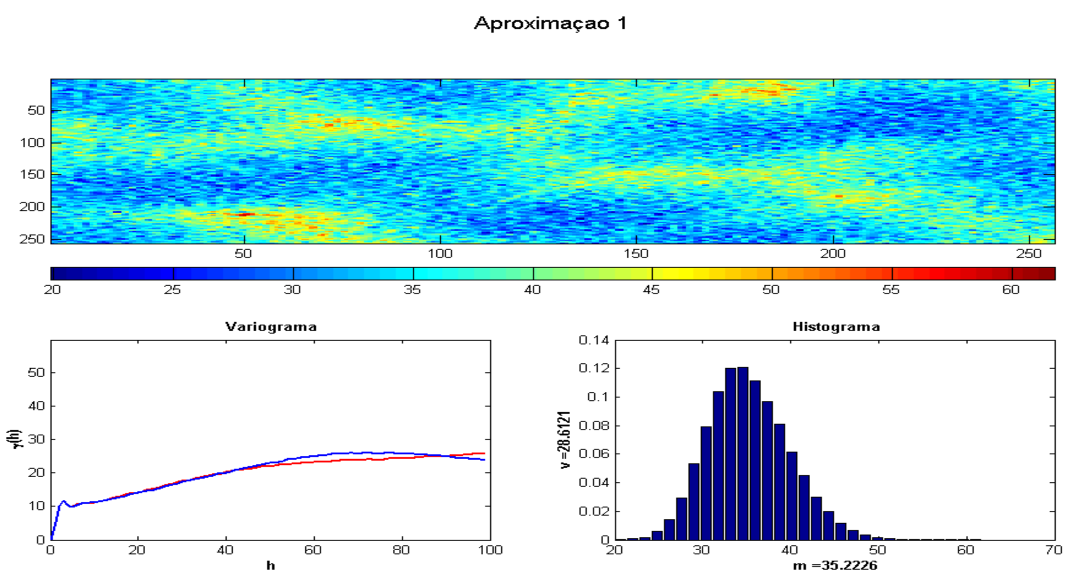


Figura 5.10 Aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.2**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

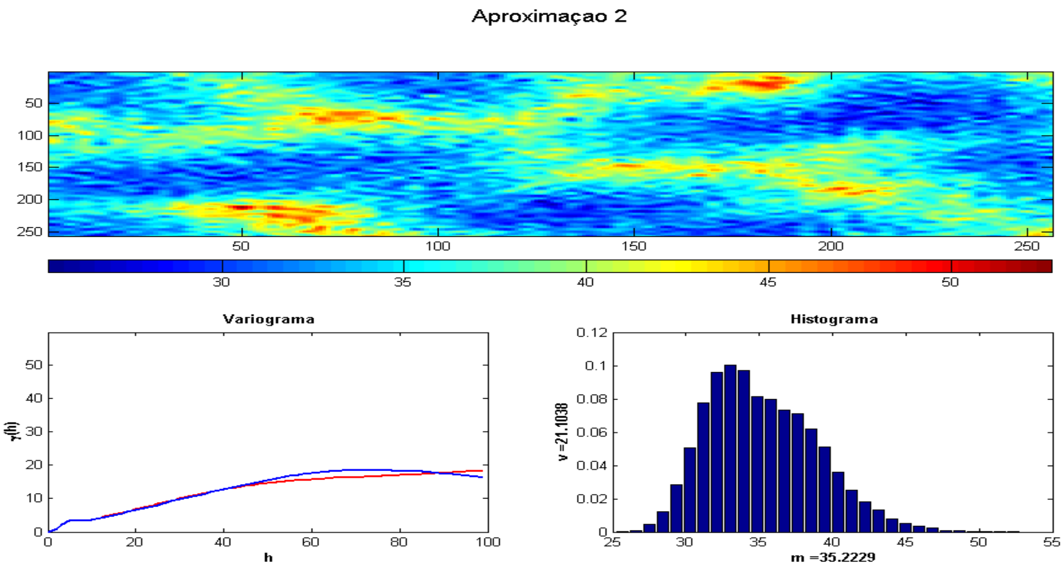


Figura 5.11 Aproximação 2 **A**$_2$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.2**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

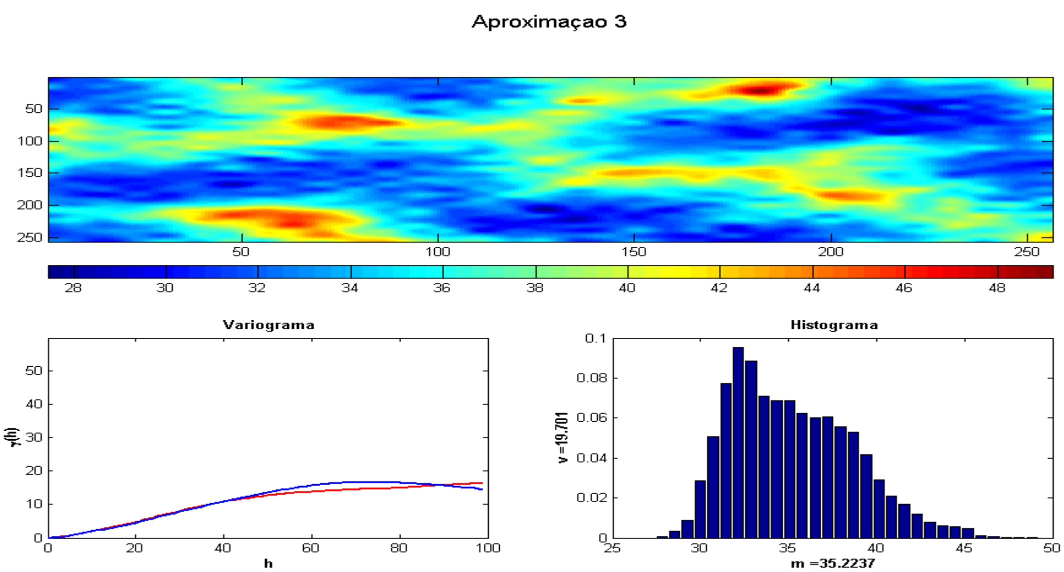


Figura 5.12 Aproximação 3 **A**$_3$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.2**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

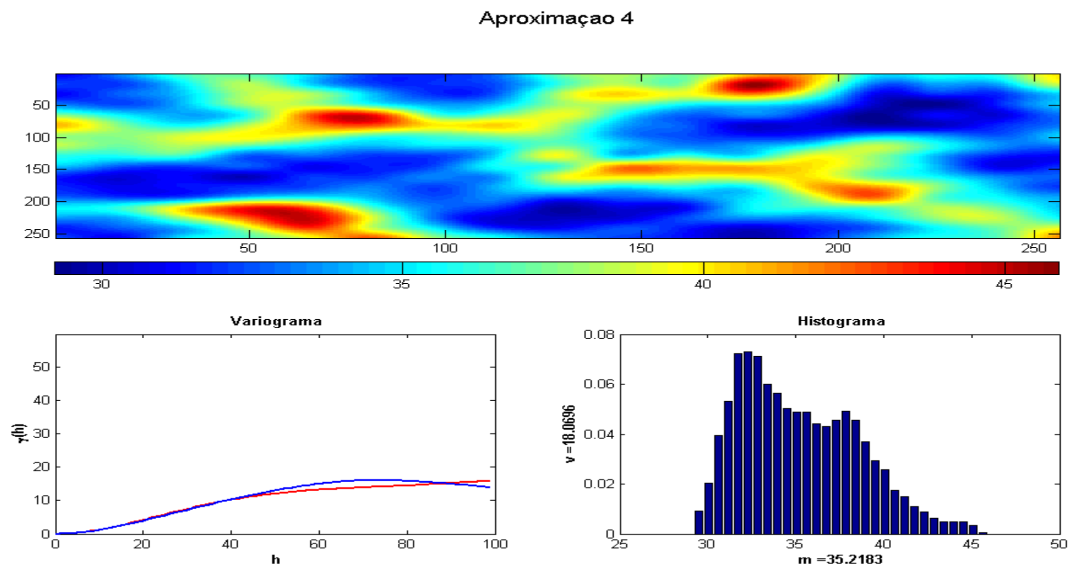


Figura 5.13 Aproximação 4 $\mathbf{A_4}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 5.2**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

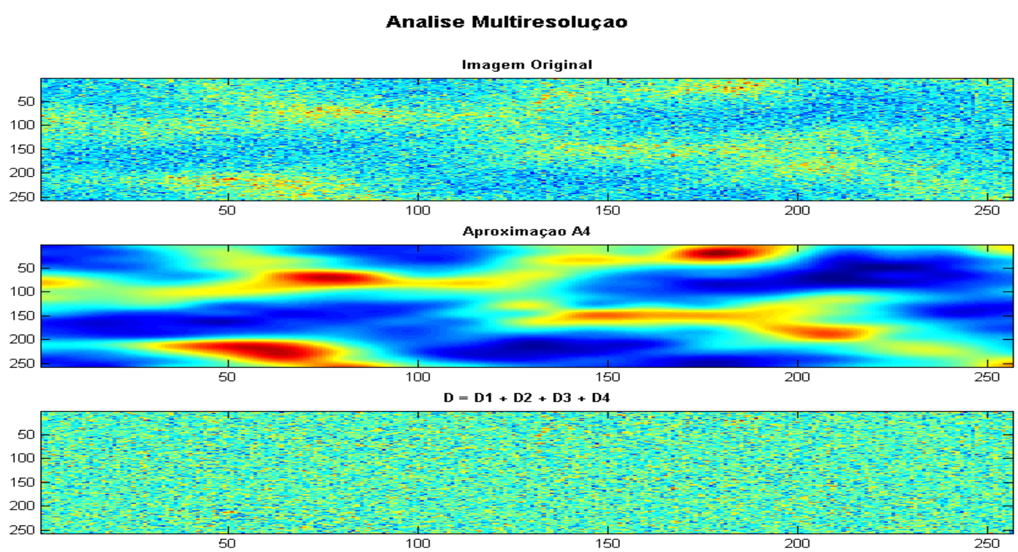


Figura 5.14 Imagem Original (parte superior), imagem filtrada através da decomposição multi-resolução (meio) e imagem contendo as baixas frequências retiradas do sinal (parte inferior, onde **Imagem Original = $\mathbf{A_4}$ + D**).

De posse dos resultados obtidos pode-se construir a seguinte tabela:

Nível	***Média***	***Variância***	***Efeito Pepita***
0	35.22	69.68	40.01
1	35.22	28.62	3.81
2	35.22	21.10	0.29
3	35.22	19.70	0.03
4	35.21	15.02	0.01

De posse dos resultados mostrados acima, notou-se uma redução quase total do efeito pepita (como no exemplo anterior), sem mudanças no comportamento do variograma, mantendo o alcance do mesmo e sem alterações na média das imagens resultantes, que é um indicador muito forte da qualidade do método. Nota-se que na aproximação de nível 4 $\mathbf{A_4}$ a imagem ficou extremamente nítida, em contraposição a imagem filtrada obtida anteriormente através da wavelet de Haar. O efeito pepita diminuiu mais consideravelmente também nesta decomposição através da wavelet db8, sem perda aparente de resolução e não ocorrendo efeito de borda (efeito este geralmente encontrado quando feita a decomposição com outro tipo de wavelet, ex: wavelet Symlet).

5.3 Conclusão

A análise feita inicialmente com a wavelet de Haar não alterou o parâmetro média (que se manteve constante durante todas as etapas da análise), mas não foi satisfatório na imagem final, que ficou cada vez mais difusa a cada etapa do processo. A variância e o efeito pepita cairam de forma expressivas. Po outro lado, a análise efetuada com a wavelet db8 obteve melhor resultado com a resolução da imagem final (aproximações de nível maior) e não alterou o parâmetro média (salvo a mudança ocorrida a nível 4, onde média = 35.21, ou seja, uma mudança praticamente inexpressiva levando-se em consideração as dimensões envolvidas no problema). Como aconteceu na análise anterior, os parâmetros variância e efeito pepita também diminuiram.

Muitos aspectos foram deixados de lado nesta primeira abordagem. O processo de filtragem foi feito simplesmente retirando-se continuamente os processos de alta freqüência, mas existem métodos de filtragem wavelet mais complexos e robustos, tal como o processo de encolhimento, também chamado de wavelet shrinkage, que tem por objetivo a redução (e remoção) do ruído presente num sinal, diminuindo ou zerando a magnitude dos coeficientes da wavelet (Mallat, 1988).

Capítulo 6

Decomposição multi-resolução aplicada a filtragem em imagens de atributos sísmicos

Neste capítulo aplicou-se a decomposição multi-resolução obtida através da Análise Wavelet na filtragem de imagens sísmicas e utilizando o método nas imagens usadas na dissertação de Mundim (1999). Assim como na filtragem à 1D realizada no **Capítulo 4** (transferência de escala) utilizou-se uma subrotina criada especialmente para esse propósito, que se utiliza das rotinas básicas de decomposição wavelet para imagens (caso 2D) da suíte matemática **Matlab©** e seu respectivo toolbox **Wavelet 3.0**, da empresa **Mathworks.**

Os variogramas calculados para cada uma das imagens originais mostraram que existe anisotropia zonal em todas elas e a existência de vários embricamentos, demonstrando que tais imagens são formadas por superposição de fenômenos, ou seja, processos com escalas distintas. De uma forma geral, foram ajustadas duas estruturas embricadas, uma de curto alcance e outra de longo alcance, de forma o que o modelo de regionalização dos fenômenos seja descrito como (Mundim, 1999):

$$\gamma(h)=\gamma_{curto}(h)+\gamma_{longo}(h) \qquad \textbf{(6.1)}$$

Neste caso utilizou-se a decomposição multi-resolução para realizar a filtragem dos fenômenos mostrados no variograma de curto alcance, que está associado com o ruído[6] contido na

6 A rigor, em geoestatística o termo ruído se refere apenas ao efeito pepita. No jargão da geofísica, o termo ruído é empregado para descrever qualquer sinal aditivo que contamine os dados, classificando–se em ruído branco e ruído coerente (Mundim, 1999)

imagem e que fisicamente é devido à influência de múltiplas.

No seu trabalho, Mundim (1999), o autor utiliza uma técnica derivada da geoestatística chamada de Krigagem Fatorial **KF** (vide **Apêndice C**) para efetuar a remoção de ruídos e realizar a otimização de imagens de atributos sísmicos. Também mostrou-se que as imagens de atributos sísmicos por ele utilizadas encontravam-se contaminadas por ruídos e, contrariadamente ao que se poderia esperar, principalmente no intervalo **Z3**, não salientam o caráter geológico dos intervalos.

6.1 Metodologia utilizada para a filtragem das imagens sísmicas através da decomposição multi-resolução através da Análise Wavelet

Inicialmente escolhe-se uma das imagens sísmicas para que a filtragem seja efetuada e então é feita a decomposição multi-resolução da mesma para **n** níveis. Para cada nível de decomposição é calculado o variograma da imagem referente a aproximação nas direções N-S (norte-sul) e L-O (leste-oeste). Este variograma é utilizado então como critério de parada, ou seja, ele é analisado e enquanto houver embricamento para distâncias menores ou iguais a **a**, distância essa igual ao alcance dos variograma de curto alcance modelados no trabalho de Mundim (1999) e que estão associados ao ruído que se deseja retirar da imagem. Um detalhe que não foi levado em consideração no presente trabalho é a anisotropia, pois como esta classe de wavelets não consegue acessar este fenômeno da imagem, a distância **a** é escolhida como o maior dos alcances (direção de maior variabilidade) do modelo de variograma anisotrópico de curto alcance . Quando não existir mais embricamento visível no variograma para a distância **a**, o processo é interrompido e a imagem resultante, última aproximação obtida, é a imagem final ou imagem filtrada.

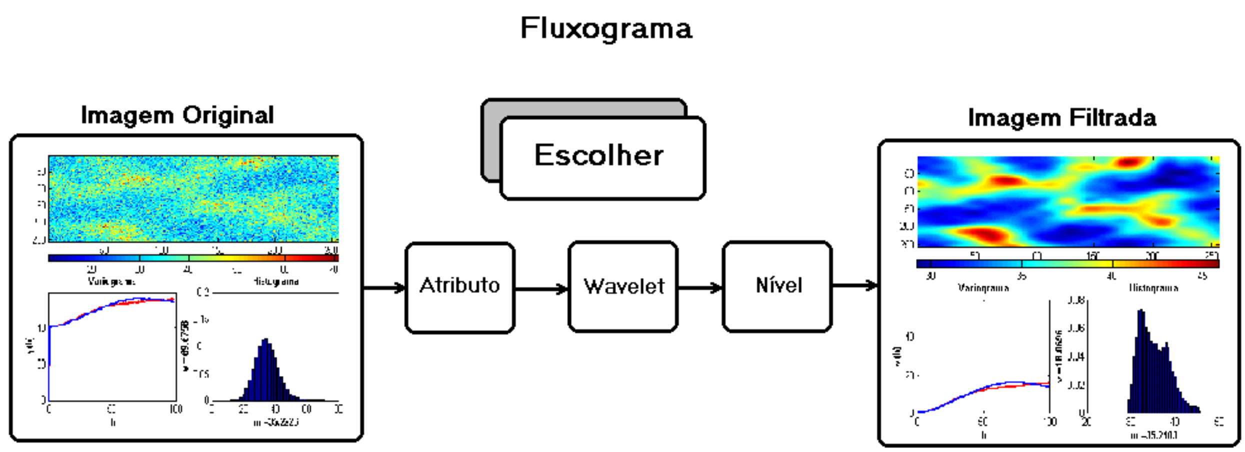
Um resumo da metodologia então adotada para efetuar a filtragem desses ruídos associados a múltiplas contidas nas imagens de sinais sísmicos é mostrada de forma gráfica no **Fluxograma B** e então sumarizada a seguir:

- Calcula-se o variograma da imagem original (para as direções N-S e L-O)

- Identificou-se no variograma o alcance **a**, este relacionado com o modelo de variograma de curto alcance, fenômeno este associado ao ruído da imagem. Para cada uma das imagens sísmicas existe um alcance específico é encontrado no trabalho de Mundim (1999).

- Inicia-se então o processo de decomposição multi-resolução, ou seja, obteve-se uma imagem tirando-se os detalhes a nível 1 da mesma, ou seja, obteve-se com isso uma imagem contendo as baixas frequências ou aproximação à nível 1.

- Calculou-se o variograma desta imagem resultante. O processo de decomposição é repetido n vezes, até que não exista mais nenhuma estrutura embricada no variograma desta imagem para uma distância igual ou menor que **a**.



Fluxograma B

6.2 Resultados Obtidos

Inicialmente é feita a escolha da wavelet a ser utilizada no processo de decomposição, como já foi mostrado anteriormente. Devido a complexidade dos fenômenos existentes nestas imagens, evitou-se a utilização da wavelet de Haar, pois a mesma causa (quando em níveis de decomposição mais altos) um excessiva difusão na mesma (tornam os blocos da matriz maiores, diminuindo com isso sua resolução). A família de wavelet foi escolhida para este caso, foi a **Daubechies**, no caso **db8**, uma wavelet bastante regular, contínua e de suporte compacto. Como já foi mostrado anteriormente, em cada uma das sequências da decomposição é gerada uma aproximação e um detalhe, **A** e **D** mostrados na figura acima, que correspondem respectivamente as baixas e altas freqüências. O processo é similar ao mostrado no **Capítulo 5**, onde retirou-se da imagem apenas as pequenas escalas e ficou-se com as grandes escalas, que é similar a metodologia adotada por Mundim (1999), que se utiliza da Krigagem fatorial para retirar os fenômenos de pequena escala modelados pelo variograma de curto alcance (fenômeno este associado ao ruído).

6.1.1 Filtragem da imagem sísmica TDT (Tempo Duplo de Trânsito) da camada Z3 do Campo de Namorado

O tempo duplo de trânsito (TDT) é um atributo que mede o tempo gasto pela energia sísmica no percurso topo-base-topo do horizonte considerado. É função da velocidade de propagação da energia sísmica no meio, sendo que a velocidade é, por sua vez, função do próprio meio e, geralmente, apresenta-se crescente na escala de rochas: arenito – folhelho – carbonato – sal (Mundim, 1999), ou seja, é um bom indicador para a litologia. A imagem do atributo sísmico TDT utilizada no trabalho foi a camada Z3 do trabalho de Mundim (1999), que corresponde a camada mais "superficial" do reservatório.

Em cada etapa da decomposição (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foi obtido o variograma, histograma e estatística básica para cada aproximação obtida e que serão os parâmetros de controle da filtragem. Na **Figura 6.2, Figura 6.3, Figura 6.4, Figura 6.5** e **Figura 6.6** têm-se a aproximação para o nível 1 $\mathbf{A_1}$**,** nível 2 $\mathbf{A_2}$**,** nível 3 $\mathbf{A_3}$**,** nível 4 $\mathbf{A_4}$ e nível 5 $\mathbf{A_5}$ respectivamente, assim como o variograma, histograma e estatística básica para cada uma delas.

O trabalho de Mundim (1999) mostra que para esta imagem sísmica, o alcance do modelo de variograma de curto alcance é de **a** = 650 metros.

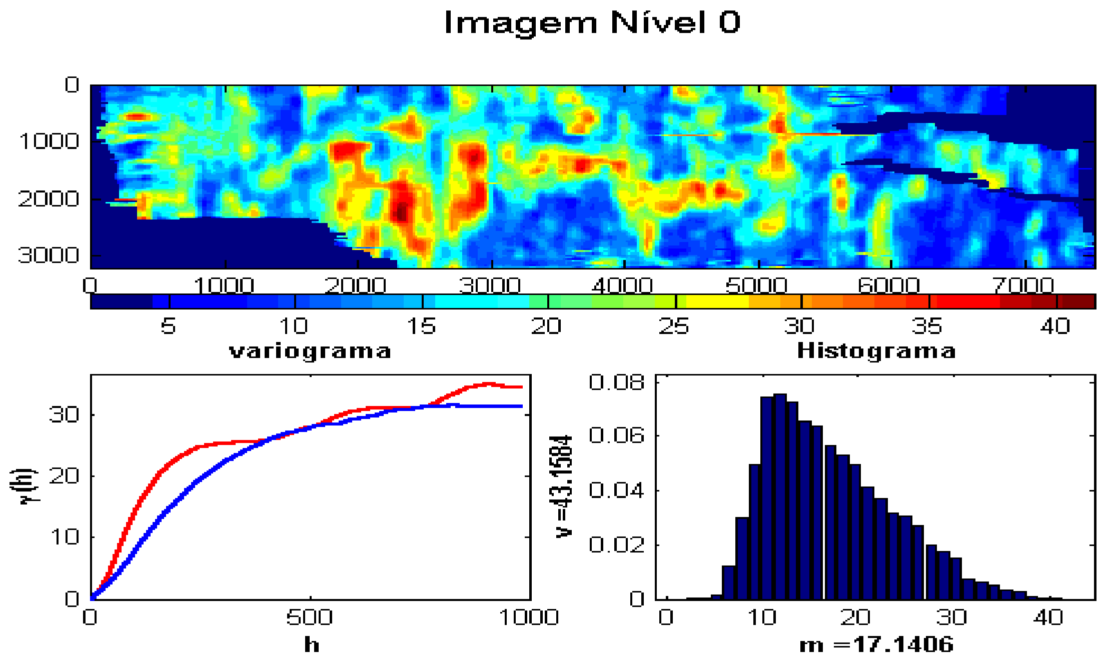


Figura 6.1 Imagem original do tempo duplo de trânsito do intervalo **Z3** do Campo de Namorado (Mundim, 1999).

Efetuou-se a decomposição multi-resolução até o nível 5 e observou-se o comportamento do variograma e do histograma para cada uma das aproximações obtidas. Notou-se com isso uma mudança bastante visível no comportamento do variograma e do histograma para a **Figura 6.4** e **Figura 6.5**. No variograma da **Figura 6.5** nota-se o desaparecimento de estruturas embricadas para alcance igual ou menor que 600 metros e com isso, pelo critério de parada escolhido, esta imagem foi a escolhida como imagem final ou imagem filtrada, ou seja, a imagem filtrada é a aproximação de nível 4 $\mathbf{A_4}$ da imagem original. Notou-se também um aumento no número de elementos das classes mais centrais da distribuição, mas este efeito já era esperado e ocorre quando da utilização de filtros. Outro parâmetro importante, a média da imagem final se manteve praticamente o mesmo da imagem final e a variância diminuiu, o que também já era esperado.

Na **Figura 6.7** pode-se então confrontar a imagem original e contaminada com ruídos com a imagem final ou filtrada obtida através da decomposição multi-resolução.

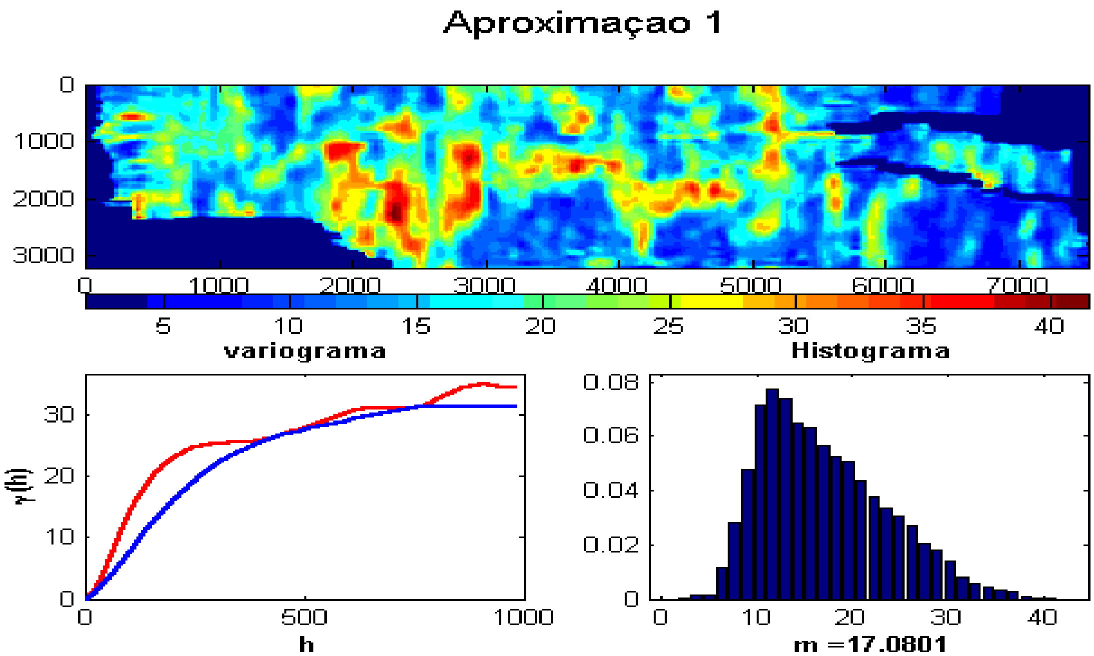


Figura 6.2 Aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.1**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

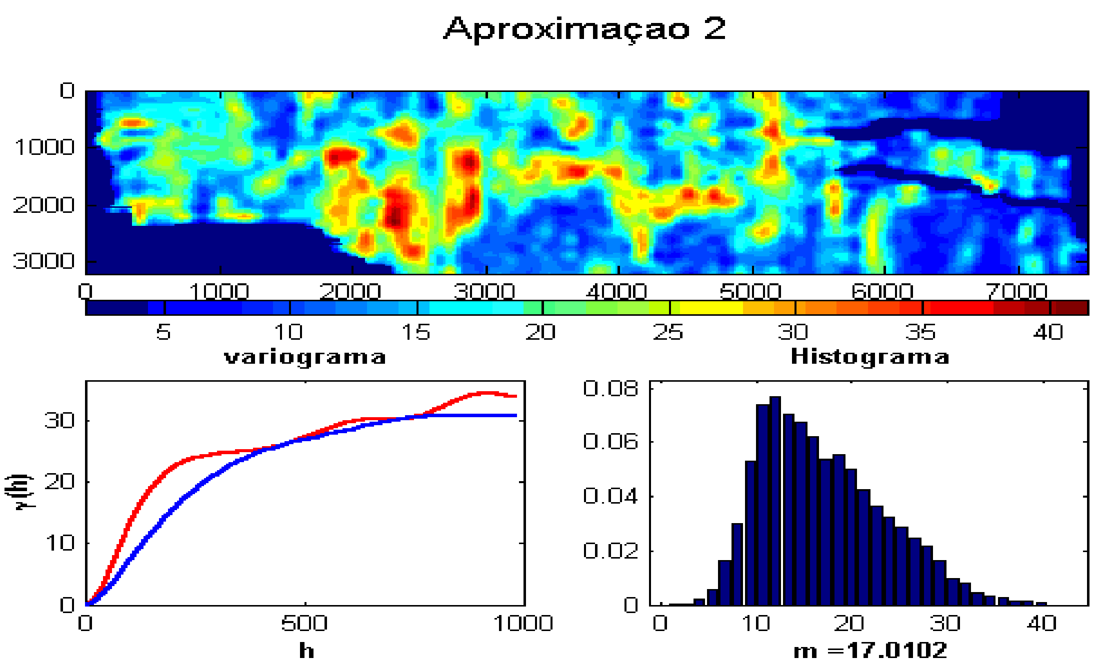


Figura 6.3 Aproximação 2 $\mathbf{A_2}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.1**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

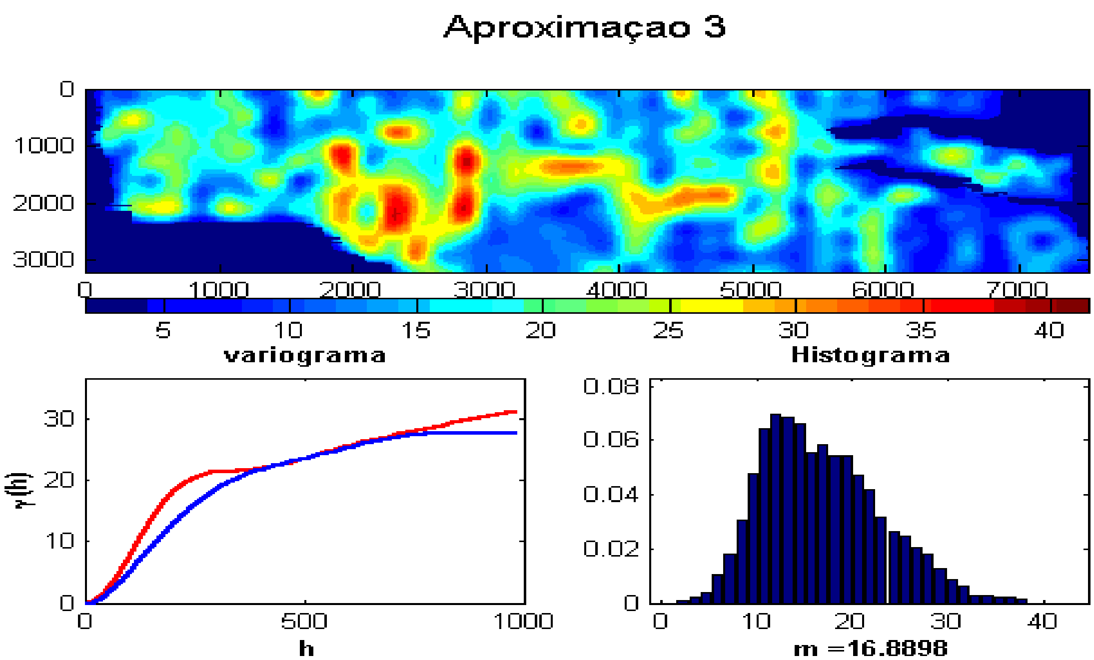


Figura 6.4 Aproximação 3 A_3 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.1**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

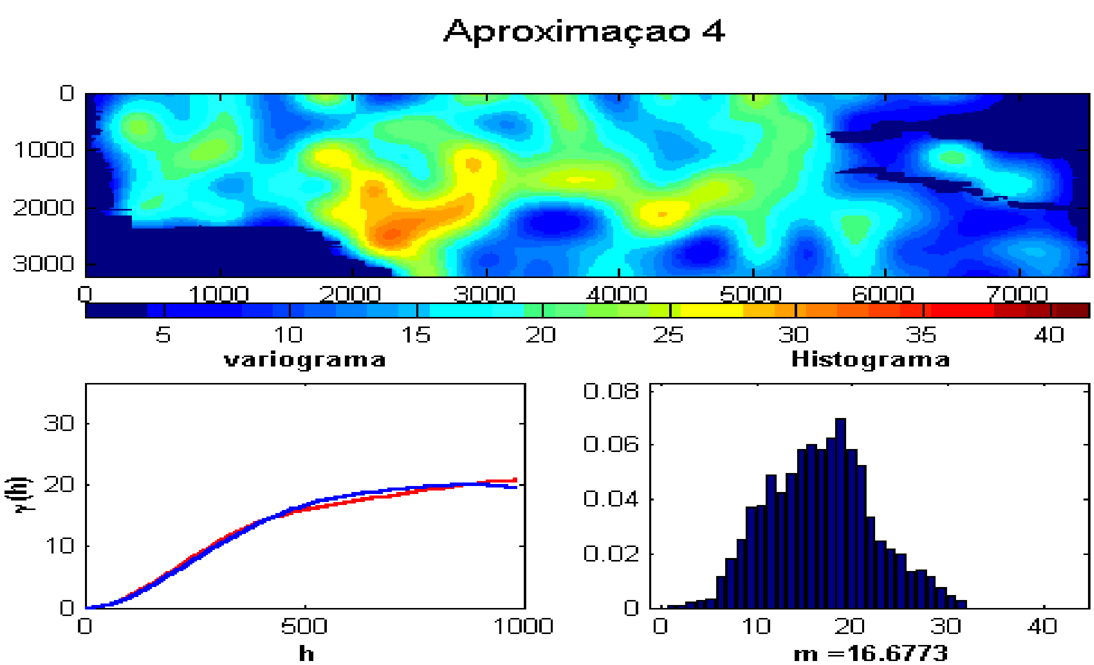


Figura 6.5 Aproximação 4 A_4 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.1**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

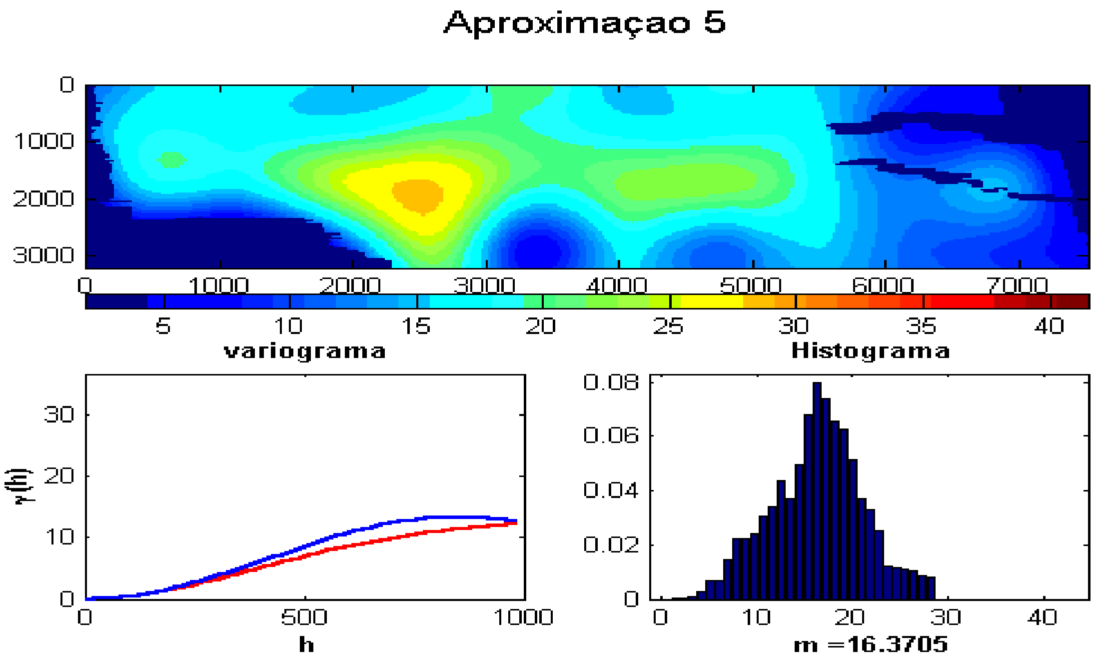


Figura 6.6 Aproximação 5 $\mathbf{A_5}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.1**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

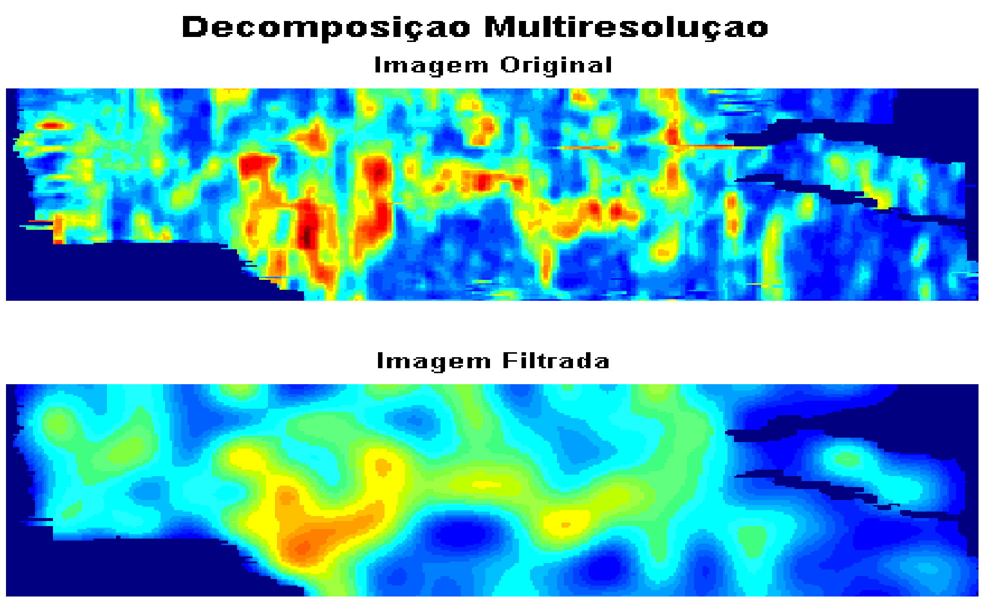


Figura 6.7 Imagem Original (parte superior), imagem filtrada através da decomposição multi-resolução (meio) e imagem contendo as baixas frequências retiradas do sinal (parte inferior, onde **Imagem Original =** $\mathbf{A_4 + H_4}$).

6.1.2 Filtragem da imagem sísmica amplitude mínima (Amp) da camada Z3 do Campo de Namorado

O coeficiente de reflexão depende da onda P, da densidade do meio e da razão de Poisson, variáveis que estão diretamente relacionadas a litologia, porosidade e ao conteúdo de fluídos das rochas em ambos os lados da interface. Por incidência normal o coeficiente de reflexão é definido como a razão da amplitude da onda refletida em relação a onda incidente e está relacionada à impedância acústica do meio Mundim (1999). A imagem do atributo sísmico Amp utilizada no trabalho foi a camada Z3 do trabalho de Mundim (1999) e corresponde a camada mais superficial do reservatório.

Em cada etapa da decomposição (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foi obtido o variograma, histograma e estatística básica para cada aproximação obtida e que serão os parâmetros de controle da filtragem. Na **Figura 6.9, Figura 6.10, Figura 6.11, Figura 6.12** e **Figura 6.13** têm-se a aproximação para o nível 1 $\mathbf{A_1}$, nível 2 $\mathbf{A_2}$, nível 3 $\mathbf{A_3}$, nível 4 $\mathbf{A_4}$ e nível 5 $\mathbf{A_5}$ respectivamente, assim como o variograma, histograma e estatística básica para cada uma delas.

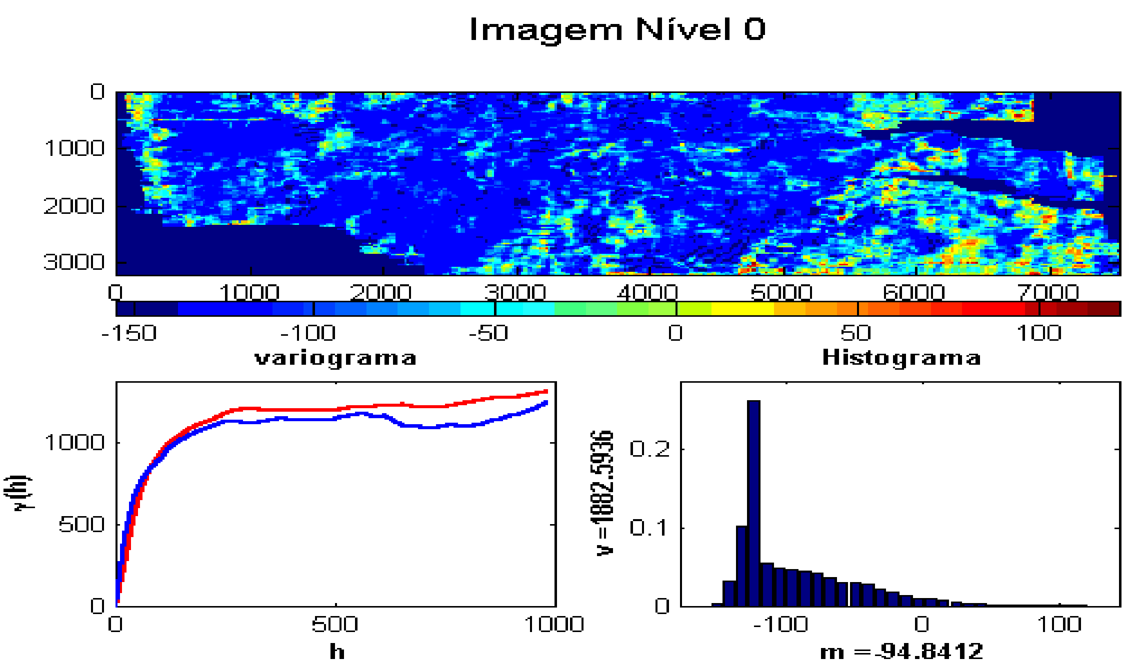


Figura 6.8 Imagem original da amplitude mínima do intervalo **Z3** do Campo de Namorado.

O trabalho de Mundim (1999) mostra que para esta imagem sísmica, o alcance do modelo de variograma de curto alcance é de **a** = 800 metros.

Como na imagem utilizada anteriormente, efetuou-se a decomposição multi-resolução até o nível 5 e observou-se o comportamento do variograma e do histograma para cada uma das aproximações obtidas. Nota-se na sequência dos variogramas da **Figura 6.8**, **Figura 6.9**, **Figura 6.10**, **Figura 6.11** e **Figura 6.12** uma diminuição gradual do patamar dos mesmos, ou seja, em cada uma das etapas da decomposição era retirada uma parte considerável de energia do sinal. Finalmente nota-se na **Figura 6.12** que não existe mais nenhum embricamento para alcance menor ou igual a 850 metros e com isso, pelo critério de parada escolhido, esta imagem foi a escolhida como imagem final ou imagem filtrada, ou seja, a imagem filtrada é a aproximação de nível 5 $\mathbf{A}_5$ da imagem original. Notou-se também um aumento no número de elementos das classes mais centrais da distribuição, mas este efeito já era esperado e ocorre quando da utilização de filtros. Outro parâmetro importante, a média da imagem final também se manteve praticamente a mesma da imagem final e a variância diminuiu, o que também já era esperado.

Na **Figura 6.13** pode-se então confrontar a imagem original e contaminada com ruídos com a imagem final ou filtrada obtida através da decomposição multi-resolução. A imagem final ou filtrada ficou notadamente mais suavizada.

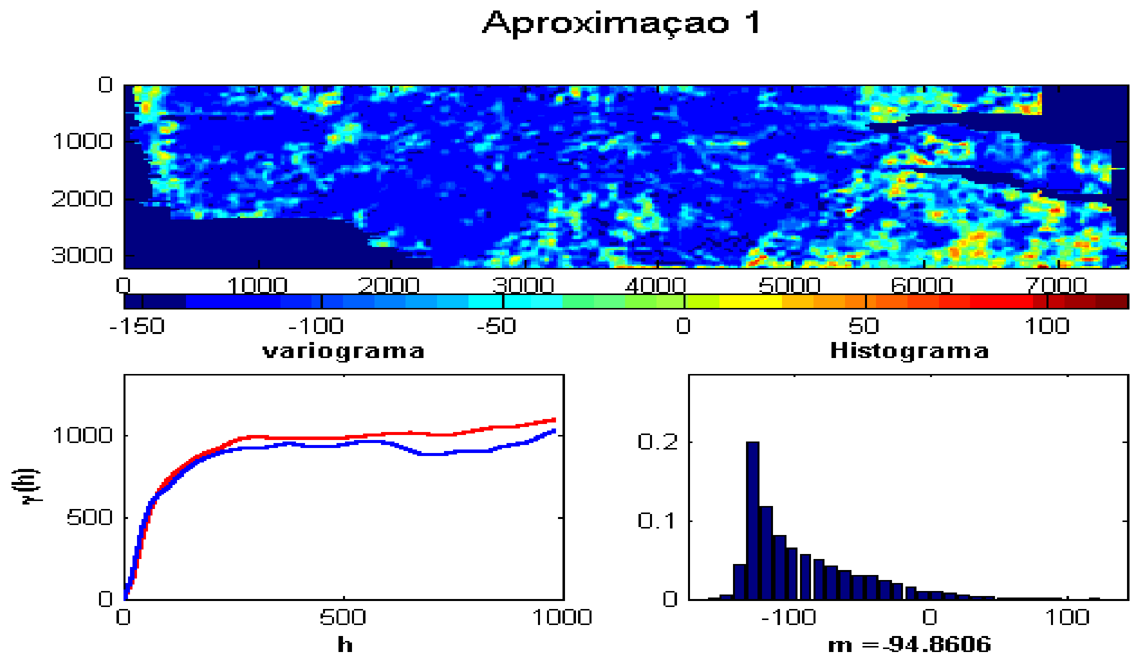


Figura 6.9 Aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.8**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

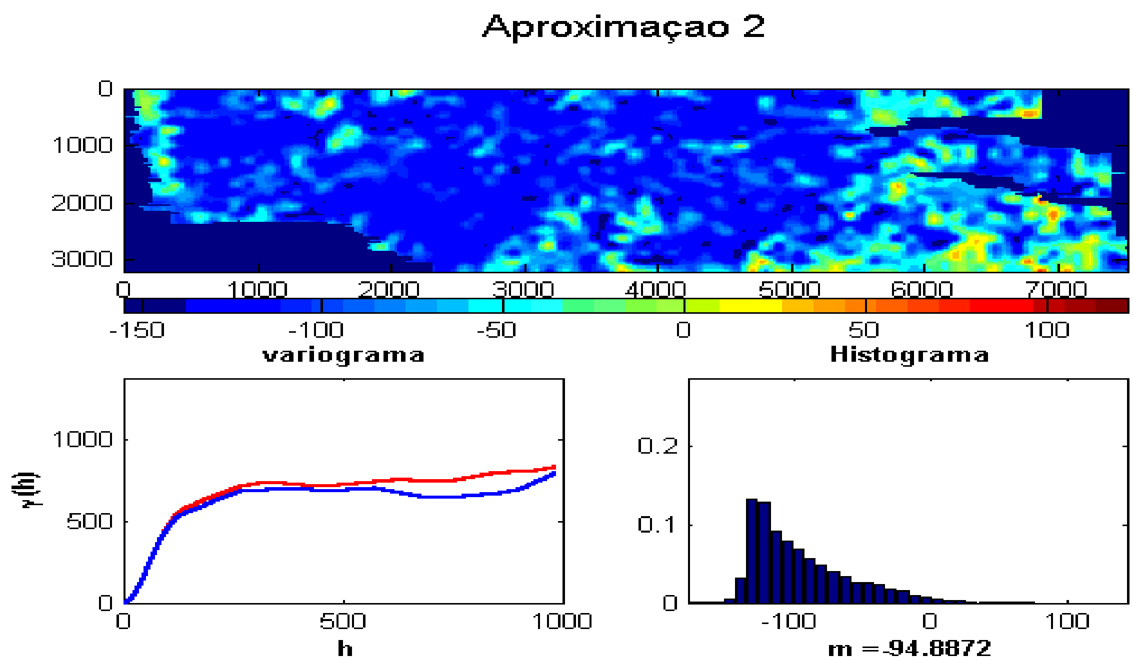


Figura 6.10 Aproximação 2 $\mathbf{A_2}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.8**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

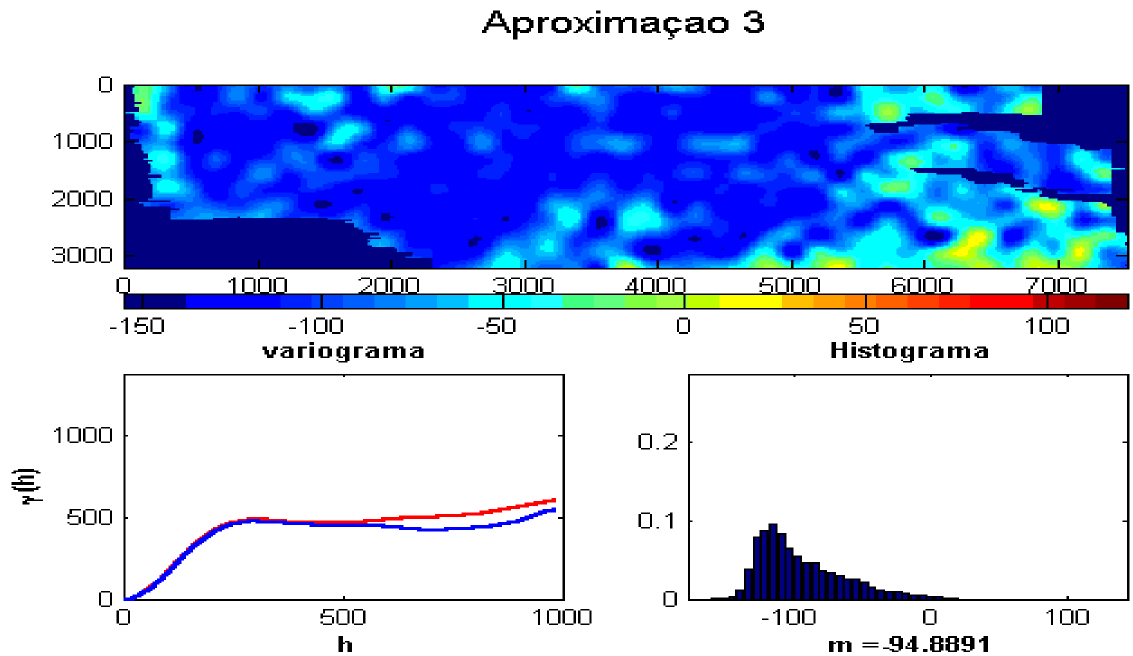


Figura 6.11 Aproximação 3 A_3 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.8**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

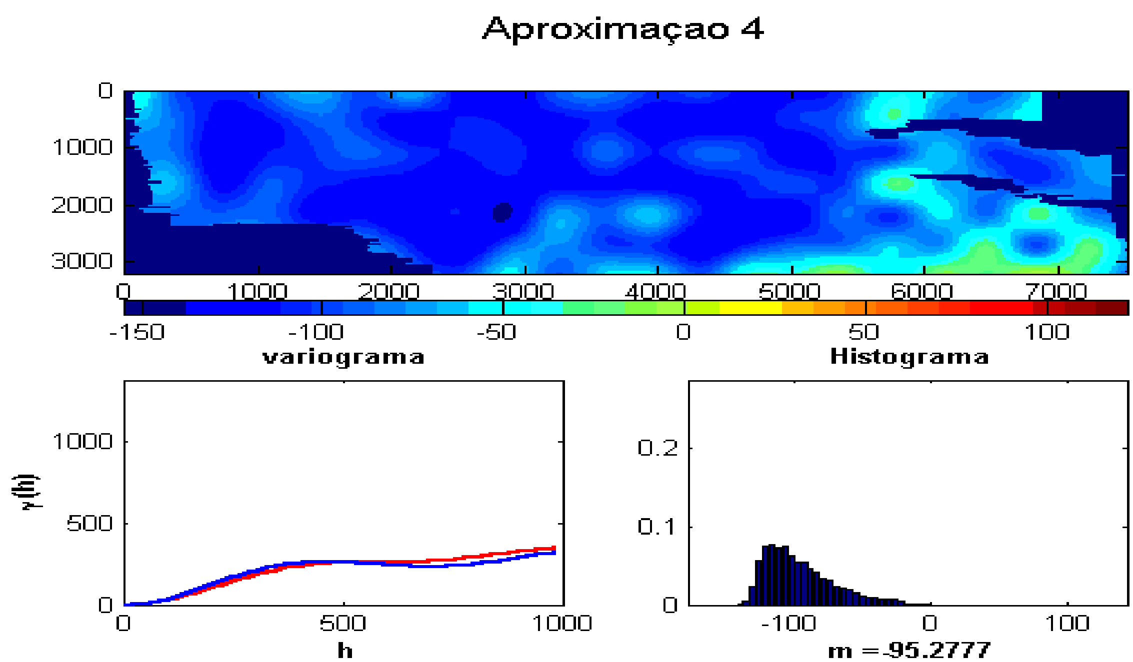


Figura 6.11 Aproximação 4 A_4 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.8**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

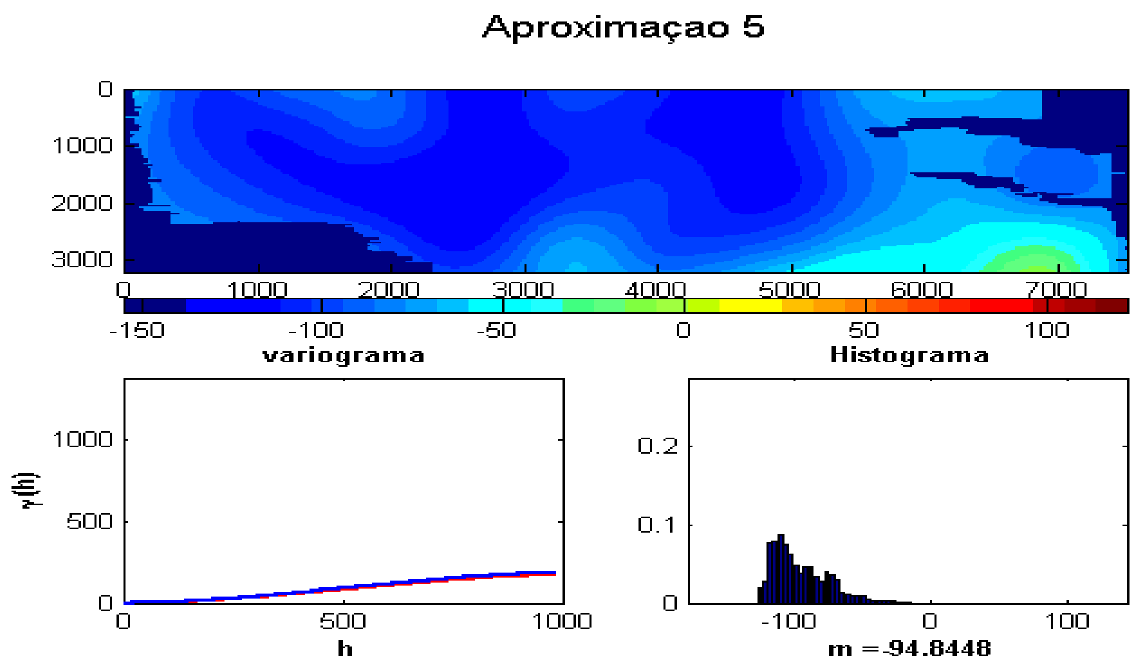


Figura 6.12 Aproximação 5 A_5 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.8**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

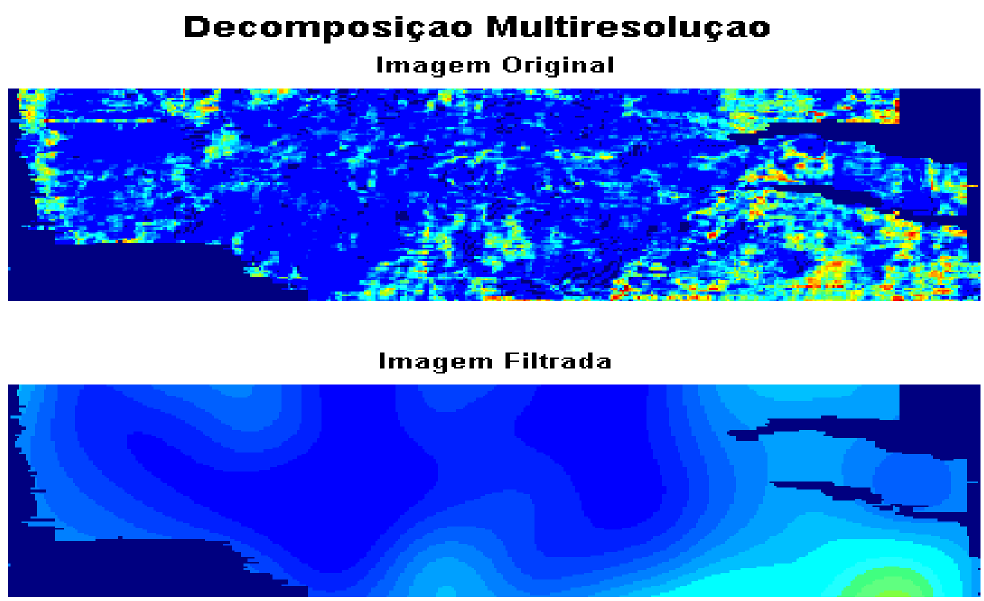


Figura 6.13 Imagem Original (parte superior), imagem filtrada através da decomposição multi-resolução (meio) e imagem contendo as baixas frequências retiradas do sinal (parte inferior, onde **Imagem Original = A_5 + H_5**).

6.1.3 Filtragem da imagem sísmica impedância acústica média (Imp) da camada Z3 do Campo de Namorado

A impedância acústica (produto da densidade pela velocidade) é um atributo obtido de um volume sísmico após inversão sismoestatigráfica. A inversão é um algoritmo que busca incorporar aos dados sísmicos bandas de frequência não mostradas a partir das informações dos perfis sônicos e de densidade obtidos nos poços. Trata-se de um atributo com forte conotação litológica, pois é função da densidade e da velocidade sísmica do meio Mundim (1999). A imagem do atributo sísmico amplitude utilizada no trabalho foi a camada Z3 do trabalho de Mundim (1999) e corresponde a camada mais superficial do reservatório.

Em cada etapa da decomposição (obtenção da aproximação e detalhe para cada nível) foi obtido o variograma, histograma e estatística básica para cada aproximação obtida e que serão os parâmetros de controle da filtragem. Na **Figura 6.15, Figura 6.16, Figura 6.17, Figura 6.18** e **Figura 6.19** têm-se a aproximação para o nível 1 $\mathbf{A_1}$**,** nível 2 $\mathbf{A_2}$**,** nível 3 $\mathbf{A_3}$**,** nível 4 $\mathbf{A_4}$ e nível 5 $\mathbf{A_5}$ respectivamente, assim como o variograma, histograma e estatística básica para cada uma delas.

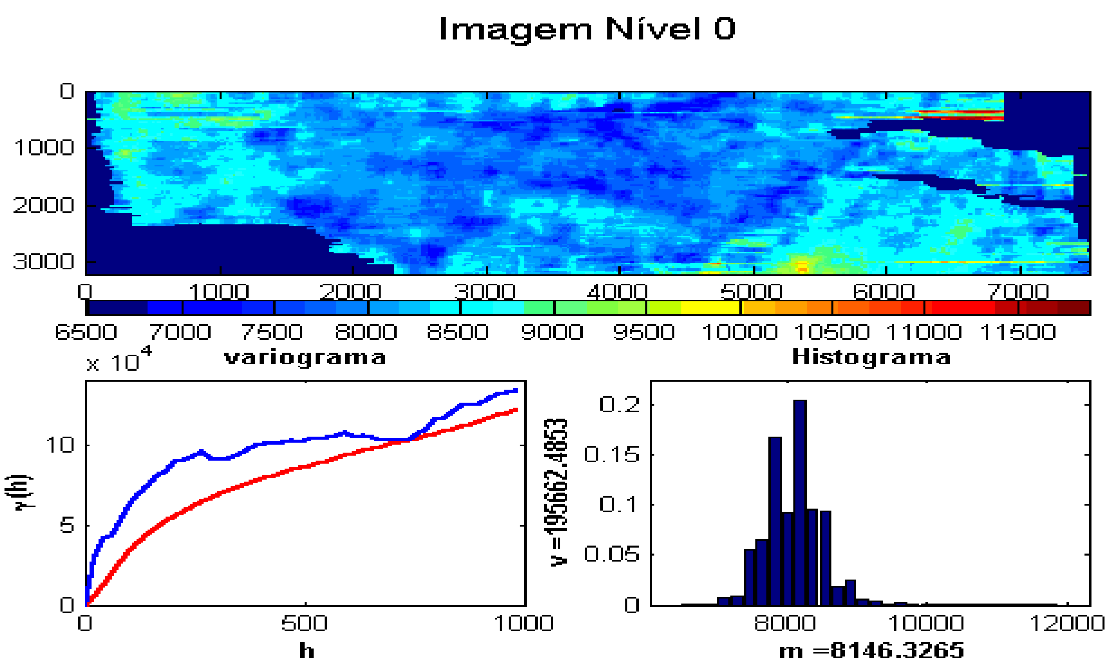


Figura 6.14 Imagem original da impedância do intervalo **Z3** do Campo de Namorado.

O trabalho de Mundim (1999) mostra que para esta imagem sísmica, o alcance do modelo de variograma de curto alcance é de **a** = 800 metros.

Da mesma forma utilizada anteriormente, efetuou-se a decomposição multi-resolução até o nível 5 e observou-se o comportamento do variograma e do histograma para cada uma das aproximações obtidas. Notou-se com isso uma mudança bastante visível no comportamento do variograma e do histograma para a **Figura 6.17** e **Figura 6.18**. No variograma da **Figura 6.18** nota-se o desaparecimento de estruturas embricadas para alcance igual ou menor que 800 metros e com isso, pelo critério de parada escolhido, esta imagem foi a escolhida como imagem final ou imagem filtrada, ou seja, a imagem filtrada é a aproximação de nível 4 $\mathbf{A_4}$ da imagem original. Notou-se também um aumento no número de elementos das classes mais centrais da distribuição, mas este efeito já era esperado e ocorre quando da utilização de filtros. Outro parâmetro importante, a média da imagem final também se manteve praticamente a mesma da imagem final e a variância diminuiu, o que também já era esperado.

Na **Figura 6.20** pode-se então confrontar a imagem original e contaminada com ruídos com a imagem final ou filtrada obtida através da decomposição multi-resolução.

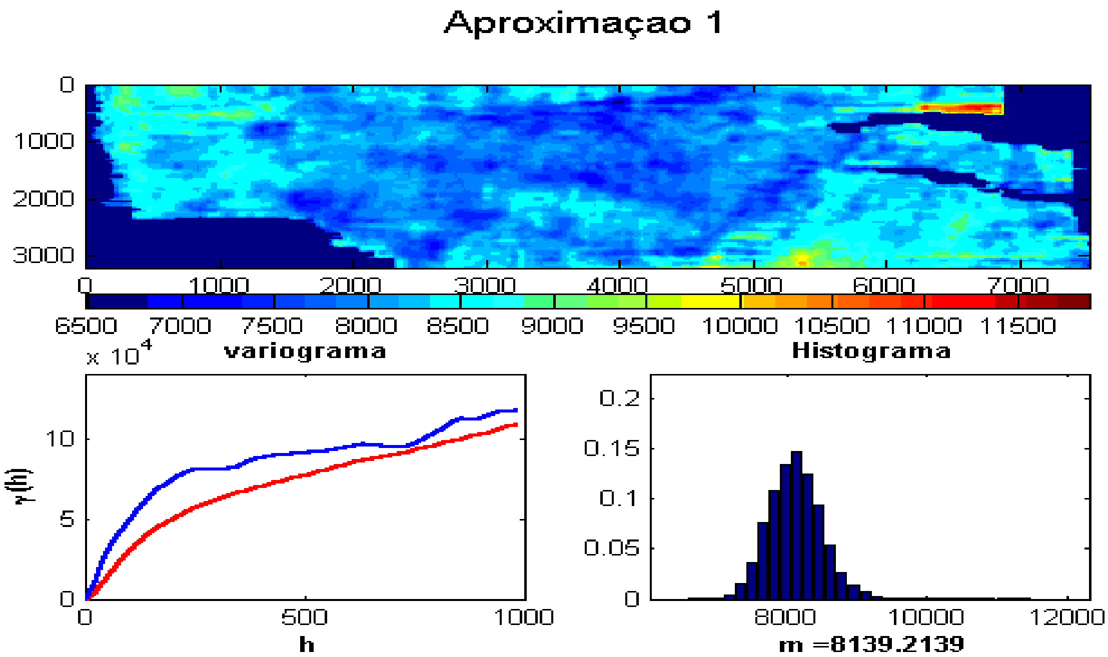


Figura 6.15 Aproximação 1 $\mathbf{A_1}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.14**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

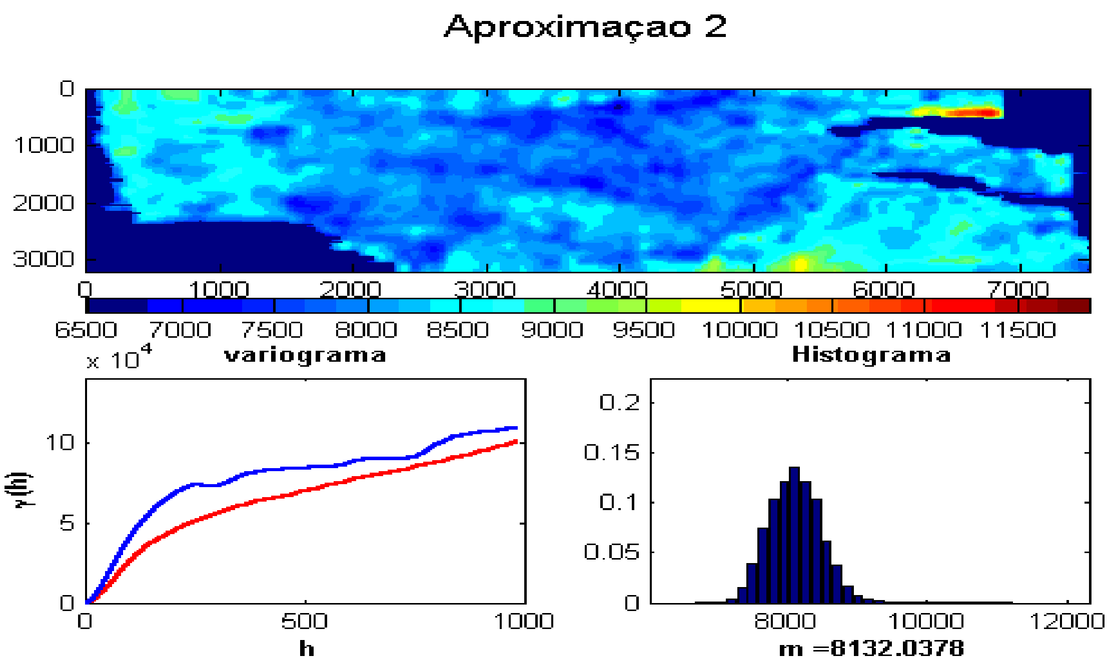


Figura 6.16 Aproximação 2 $\mathbf{A_2}$ (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.14**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

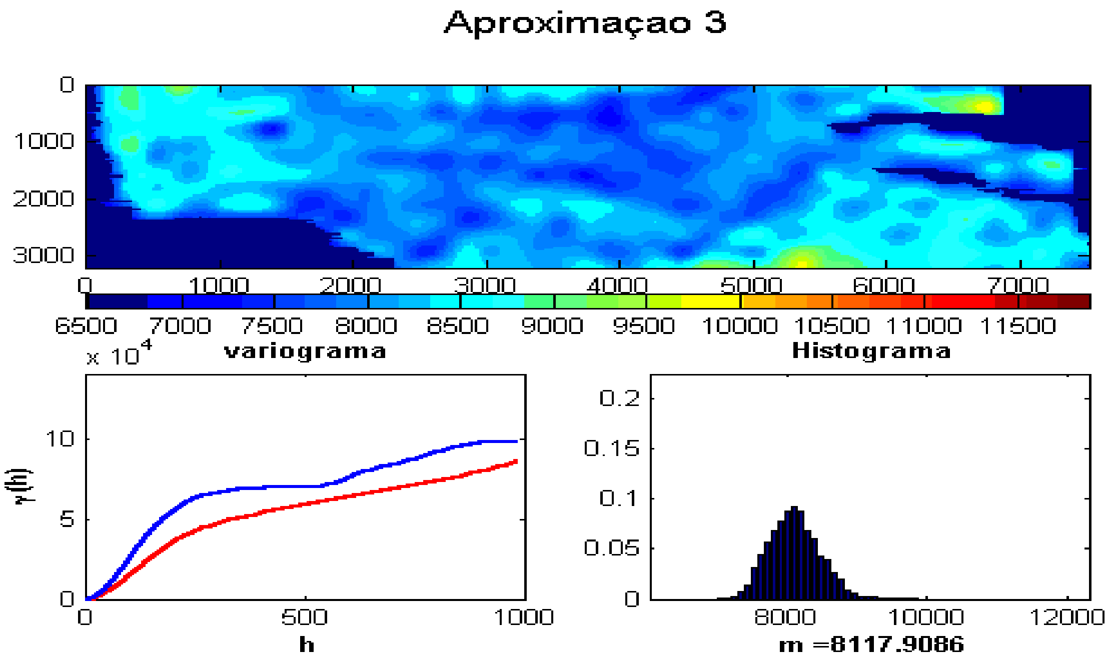


Figura 6.17 Aproximação 3 A_3 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.14**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

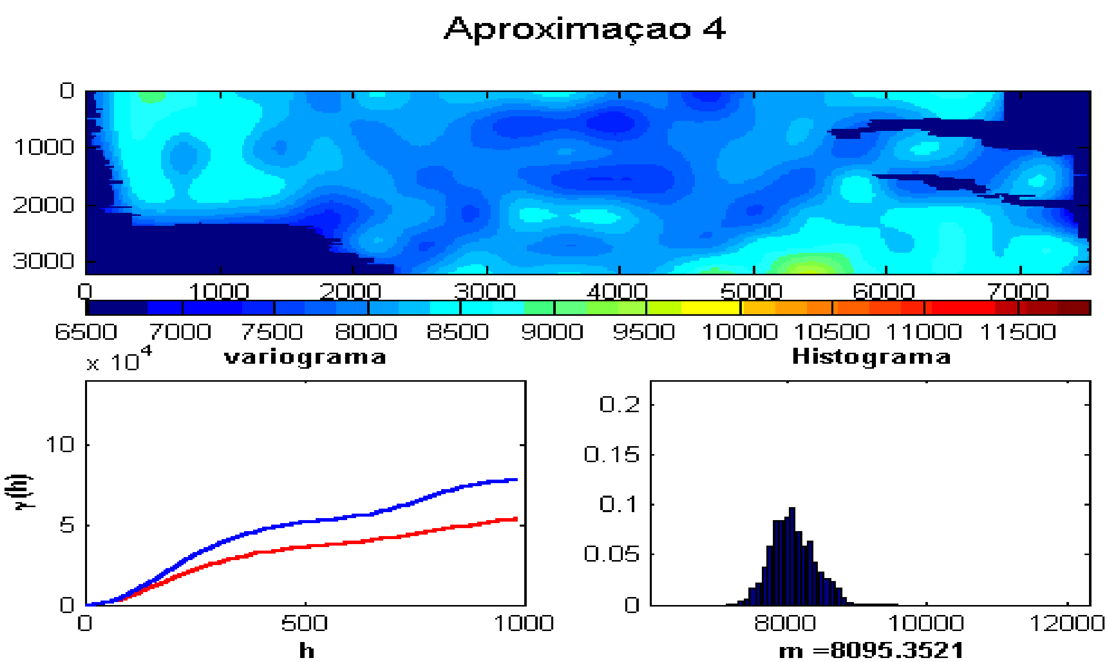


Figura 6.18 Aproximação 4 A_4 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.14**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

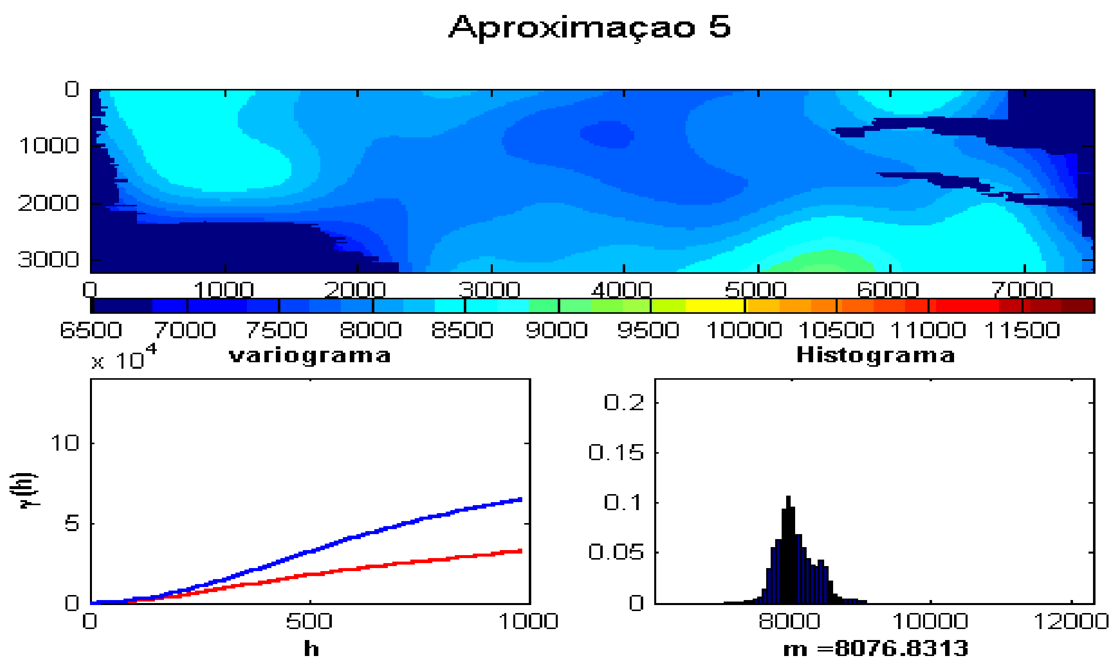


Figura 6.19 Aproximação 5 A_5 (parte superior) obtida para da imagem original mostrada na **Figura 6.14**, seu variograma (parte inferior esquerda) e seu histograma (parte inferior direita).

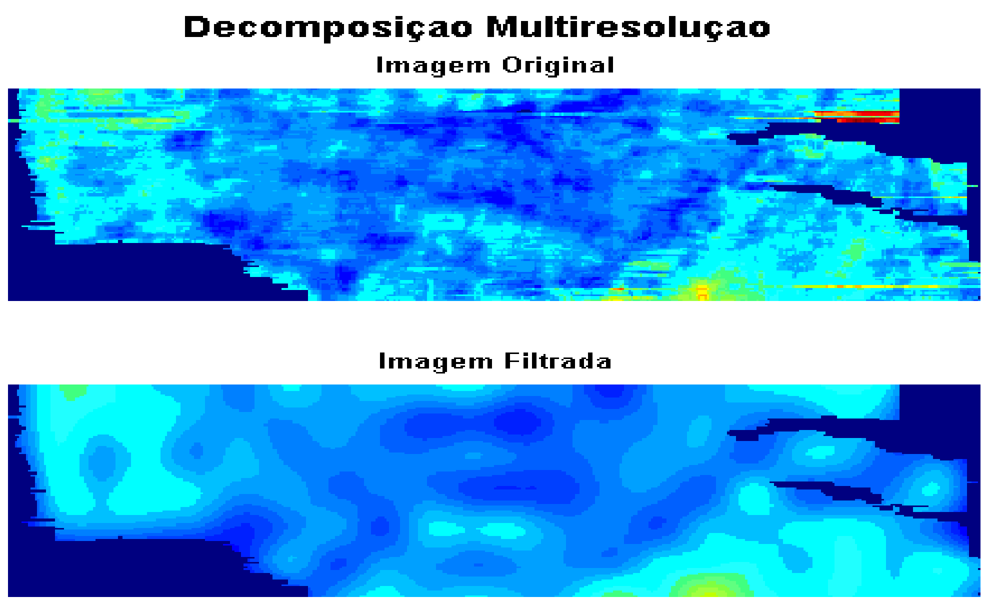


Figura 6.20 Imagem Original (parte superior), imagem filtrada através da decomposição multi-resolução (meio) e imagem contendo as baixas frequências retiradas do sinal (parte inferior, onde **Imagem Original = A_4 + H_4**).

6.3 Comparação entre a filtragem obtida através da MRA e a obtida através da KF

A seguir vai-se sumarizar os principais resultados obtidos na seção anterior e comparar os resultados obtidos da filtragem através da decomposição multi-resolução com os obtidos pela filtragem através da krigagem fatorial.

6.3.1 Estatística básica e histogramas para cada uma das imagens filtradas

A estatística básica e os histogramas das imagens tempo duplo de trânsito, impedância e amplitude estão contidas nas figuras **Figura 6.21, Figura 6.22, Figura 6.23** respectivamente.

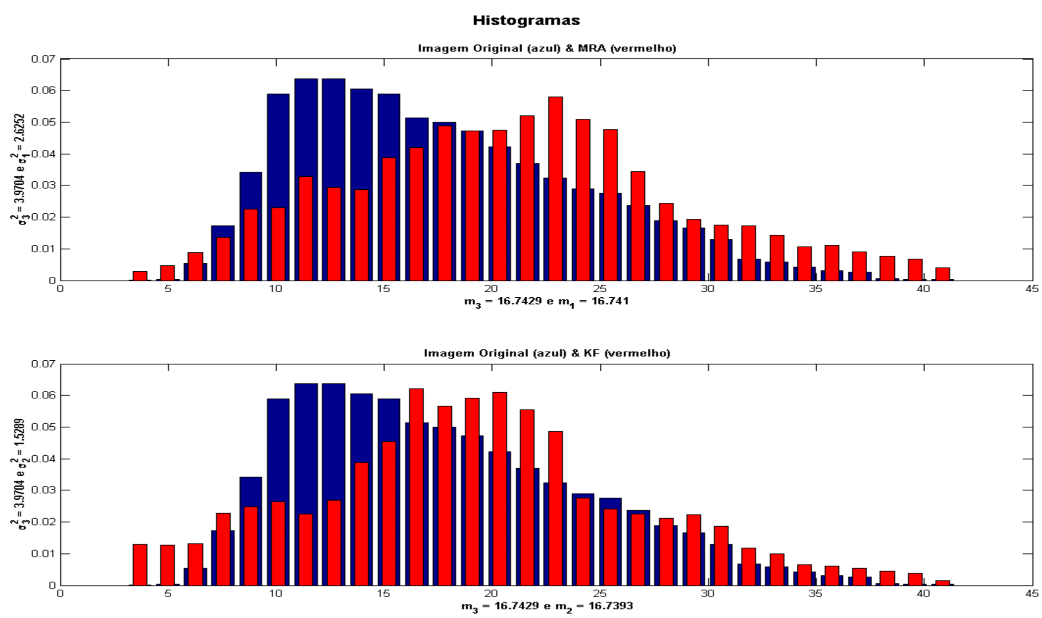


Figura 6.21 TDT - Estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem pela **MRA** (parte superior) e estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem **KF.**

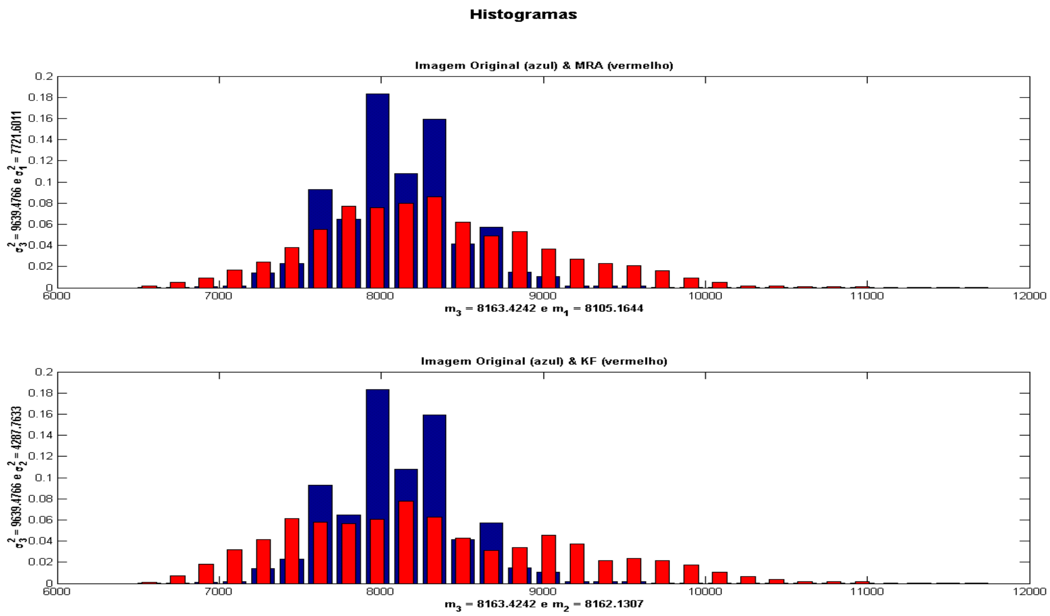


Figura 6.22 Impedância - Estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem pela **MRA** (parte superior) e estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem **KF.**

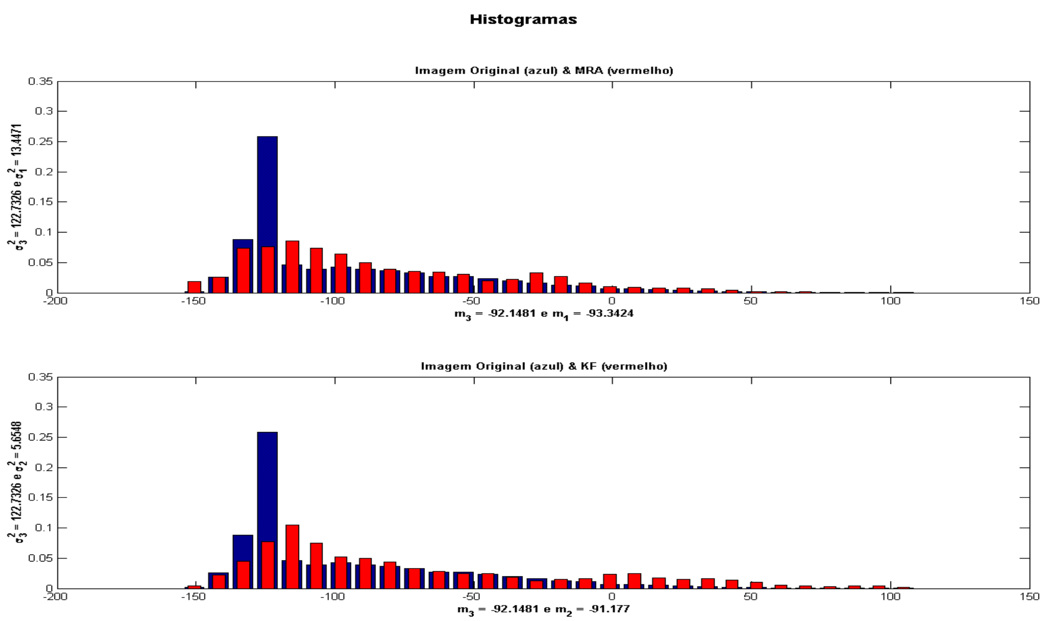


Figura 6.23 Amplitude - Estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem pela **MRA** (parte superior) e estatística básica e histogramas da Imagem original e a imagem obtida através da filtragem **KF.**

A partir dos resultados mostrados nas figuras acima obtêm-se as tabelas abaixo:

- Média e variância para a filtragem da imagem sísmica **TDT** para a imagem original e cada um dos métodos de filtragem

TDT	média	variância
Imagem Original	16.74	3.97
KF	16.74	1.53
MRA	16.74	2.63

- Média e variância para a filtragem da imagem sísmica **Imp** para a imagem original e cada um dos métodos de filtragem

Impedância	média	variância
Imagem Original	8163	9639
KF	8162	4287
MRA	8105	7722

- Média e variância para a filtragem da imagem sísmica **Amp** para a imagem original e cada um dos métodos de filtragem

Amplitude	média	variância
Imagem Original	-92.2	122.7
KF	-91.2	5.95
MRA	-93.1	13.4

Pela comparação dos resultados mostrados nas tabelas anteriores, nota-se que os métodos são praticamente equivalentes quanto ao parâmetro média da imagem final, ou seja, eles praticamente mantiveram a média da imagem original. Quanto ao parâmetro variância, o método de **MRA** de alguma forma conservou melhor a variabilidade da imagem original, isto ocorrendo em todos as imagens filtradas.

Os histogramas obtidos para ambas os métodos de filtragem se equivalem qualitativamente, sendo que os obtidos por meio das imagens filtradas através da **MRA** , mostra que o método conservou melhor os elementos situados nas caudais da distribuição.

6.3.2 Validação Cruzada para cada uma das Imagens Filtradas

Pela análise da **Figura 6.24**, **Figura 6.25, Figura 6.26, Figura 6.27**, **Figura 6.28** e **Figura 6.29** pode-se confirmar o que já foi visto anteriormente através da análise de histogramas, as validações cruzadas das imagens obtidas através da **MRA** mostram que o método conservou melhor os elementos situados nas caudais da distribuição. Em outras palavras, ele de alguma forma continua conservando parte da variabilidade da imagem original.

Comparando as validações cruzadas obtidas para a imagem sísmica tempo duplo de trânsito na **Figura 6.24** (**MRA**) e **Figura 6.25** (**KF**) nota-se que a nuvem obtida para a imagem filtrada através da **MRA** apresentou uma melhor simetria em torno da 1ª bissetriz.

Esta mesma comparação efetuada entre as validações cruzadas obtidas para a imagem impedância acústica na **Figura 6.26** (**MRA**) e **Figura 6.27** (**KF**) mostra que a nuvem obtida para a imagem filtrada através da **MRA** apresentou uma melhor simetria em torno da 1ª bissetriz, o que não acontece com a nuvem obtida para a imagem filtrada através da **KF**.

Já para as validações cruzadas obtidas para a imagem sísmica amplitude na **Figura 6.28** (**MRA**) e **Figura 6.29** (**KF**) mostra que a nuvem obtida para a imagem filtrada para ambas as imagens se mostrou bastante difusa, mas ainda assim a nuvem obtida para a imagem filtrada através da **MRA** mostra-se mais simétrica em relação à 1ª bissetriz.

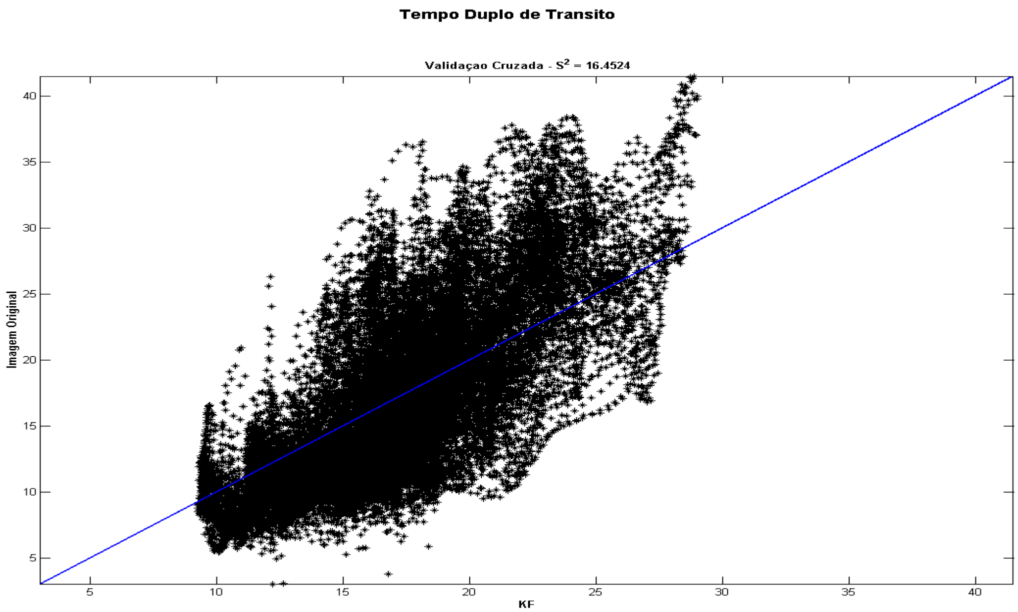


Figura 6.24 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **KF**.

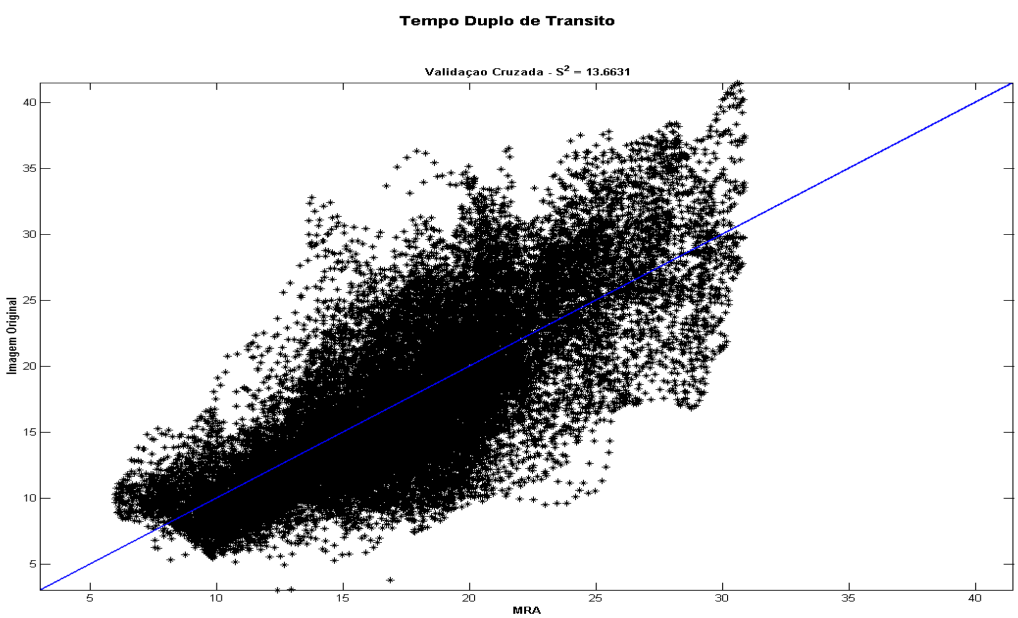


Figura 6.25 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **MRA**.

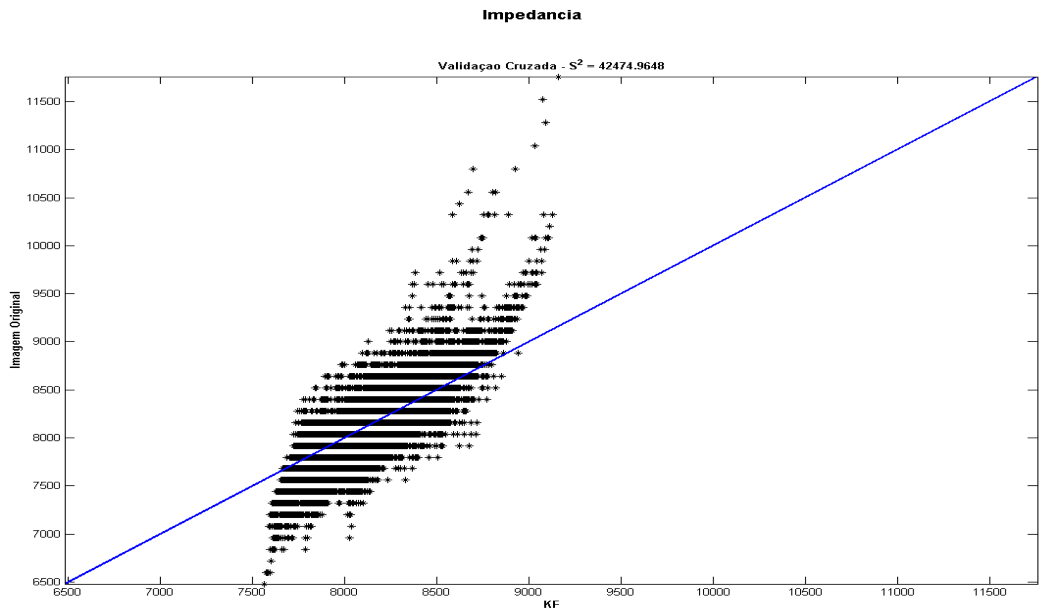


Figura 6.26 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **KF**.

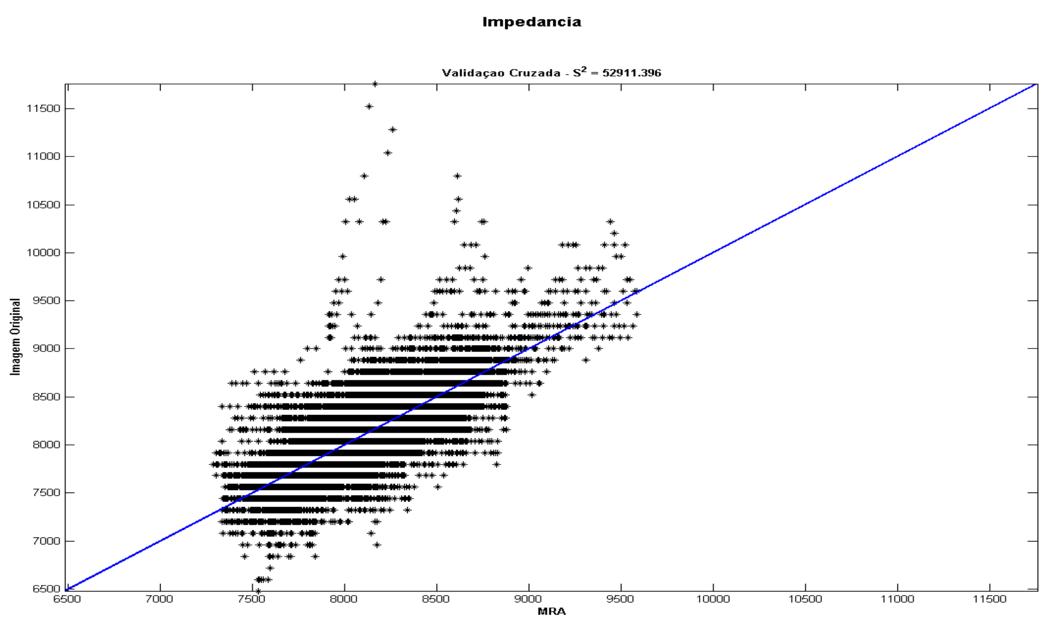


Figura 6.27 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **MRA**..

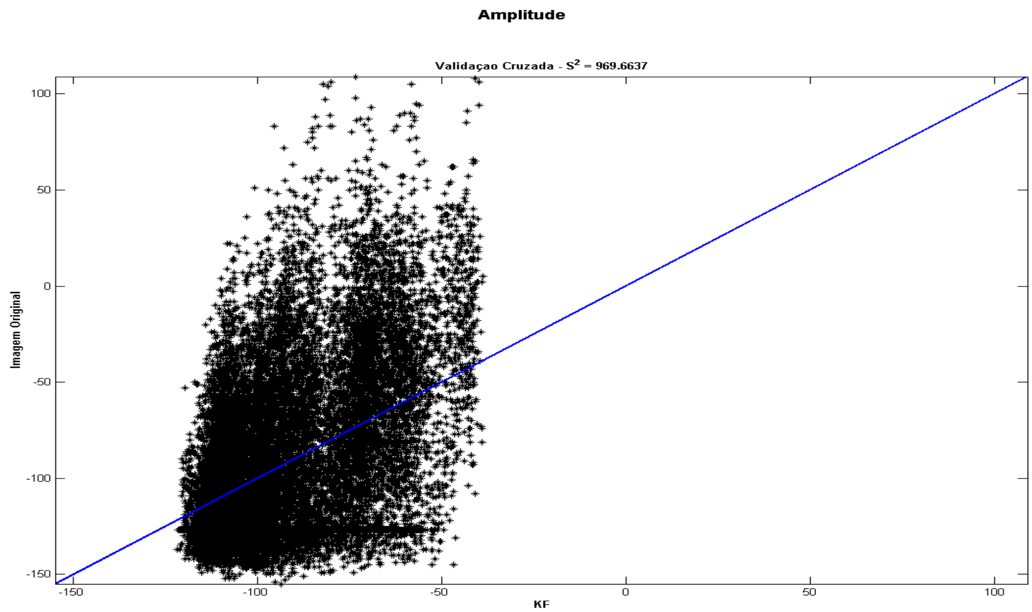


Figura 6.28 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **KF.**

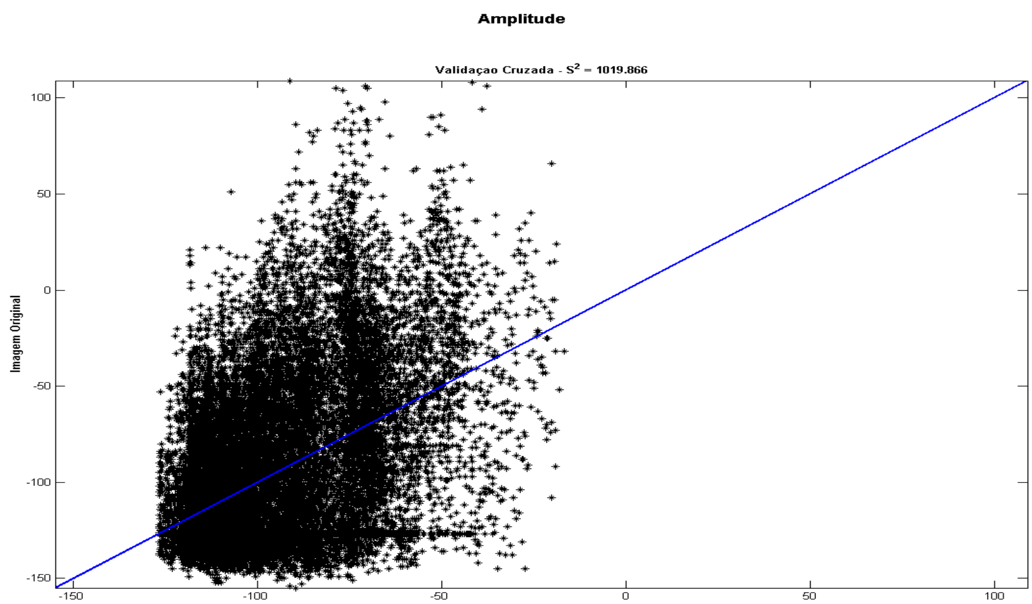


Figura 6.29 Validação cruzada entre a imagem original e a imagem filtrada obtida através da **MRA.**

Calculou-se também o parâmetro que mede a dispersão da imagem original e a imagem filtrada, definido como (Journel, 1989)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [x_i - y_i]^2$$

e que é também chamado de **dispersão em torno da primeira bissetriz** e onde x_i é um ponto da imagem original, y_i é um ponto da imagem filtrada e n é o número total de pontos da matriz imagem. Com isso obteve-se as seguintes tabelas, dispersão esta relativa a imagem original:

Dispersão	**KF**	**MRA**
TDT	16.15	13.66
Impedância	42474	52911
Amplitude	969.6	1019.8

Nota-se que de uma maneira geral, que a imagem filtrada através da **MRA** apesar de conservar a média e ainda assim conservar melhor parte da variabilidade da imagem original, de alguma forma alterou bem mais a imagem original, o que se vê com os parâmetros de dispersão acima, bem maiores do que os obtidos da imagem filtrada através da **KF**.

6.3.3 Variogramas para cada uma das Imagens Filtradas

Comparando agora os variogramas obtidos das imagens filtradas através da **MRA** e os variogramas obtidos das imagens filtradas através da **KF**, mostra também que os variogramas das imagens filtradas através da **MRA** conservam melhor a variabilidade das imagens iniciais, ou seja, estes variogramas estão mais “próximos” ao variograma da imagem original que os obtidos das imagens da **KF**.

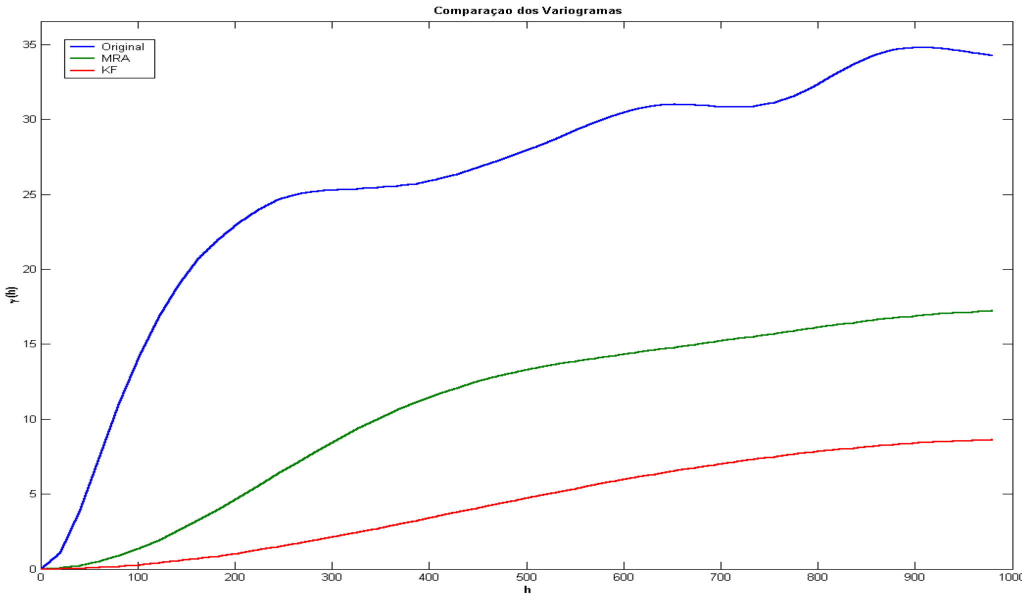


Figura 6.30 TDT **-** Variograma da Imagem original, Imagem filtrada através da **MRA** e **KF**, em azul, verde e vermelho respectivamente.

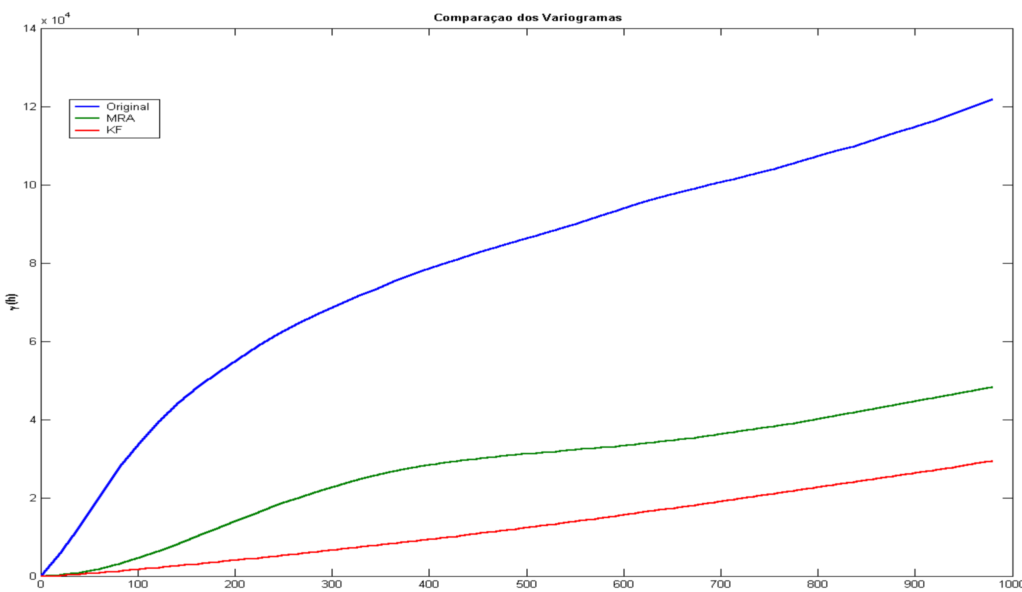


Figura 6.31 Impedância **-** Variograma da Imagem original, Imagem filtrada através da **MRA** e **KF**, em azul, verde e vermelho respectivamente.

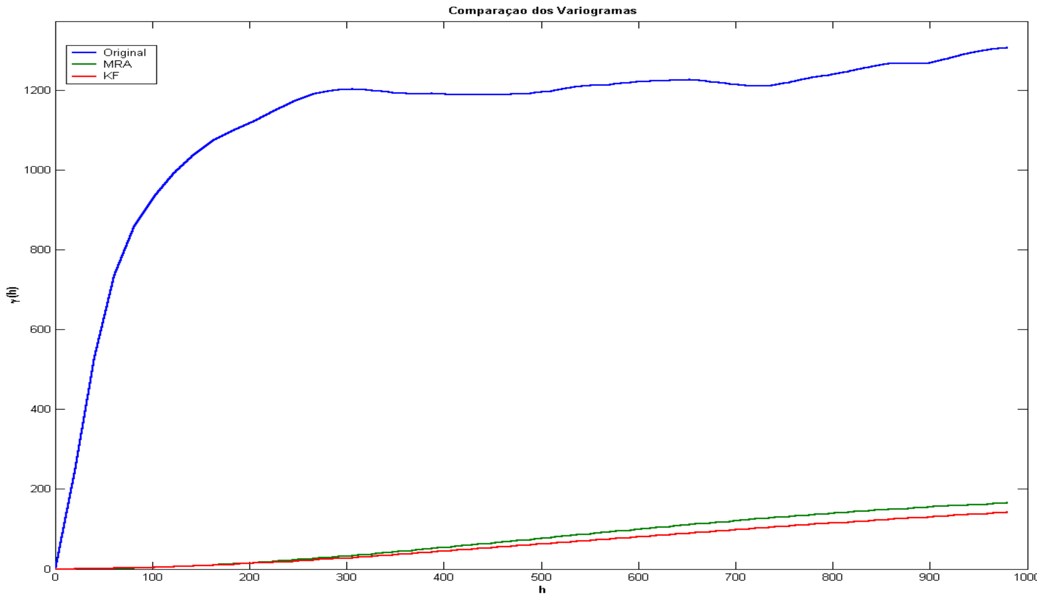


Figura 6.32 Amplitude **-** Variograma da Imagem original, Imagem filtrada através da **MRA** e **KF**, em azul, verde e vermelho respectivamente.

6.3.4 Comparação Visual entre as Filtragens

A seguir pode-se comparar de uma forma qualitativa (no visual) as imagens obtidas através da **MRA** e as obtidas através da **KF**.

Na **Figura 3.33,** que confronta a imagem filtrada do atributo sísmico **TDT** obtido através da **MRA** com a obtida através da **KF,** mostra que os resultados obtidos são qualitativamente parecidos, principalmente com respeito à parte central do reservatório, onde em ambas as imagem pode-se notar a existência de um corpo acanalado que entra pela face sul do reservatório. Nota-se entretanto que a imagem obtida através da **MRA** mostra mais detalhes, ou seja, mostra-se menos atenuada (suavizada) que a imagem obtida através da **KF**.

Já na **Figura 3.34,** que confronta a imagem filtrada do atributo sísmico **Imp** obtido através da **MRA** com a obtida através da **KF,** mostra que os resultados obtidos são visualmente diferentes, pelo menos no que diz respeito ao formato dos corpos em geral encontrados em ambas as imagens. Nota-se também que a imagem obtida através da **MRA** mostra-se mais atenuada que a imagem obtida através da **KF**.

Na **Figura 3.35,** que confronta a imagem filtrada do atributo sísmico A**mp** obtido através da **MRA** com a obtida através da **KF,** mostra que apresentam resultados qualitativamente equivalentes, pelo menos no que diz respeito ao formato dos corpos em geral encontrados em ambas as imagens. Nota-se entretanto, que neste caso, a imagem obtida através da **MRA** mostra-se bem mais atenuada que a imagem obtida através da **KF**.

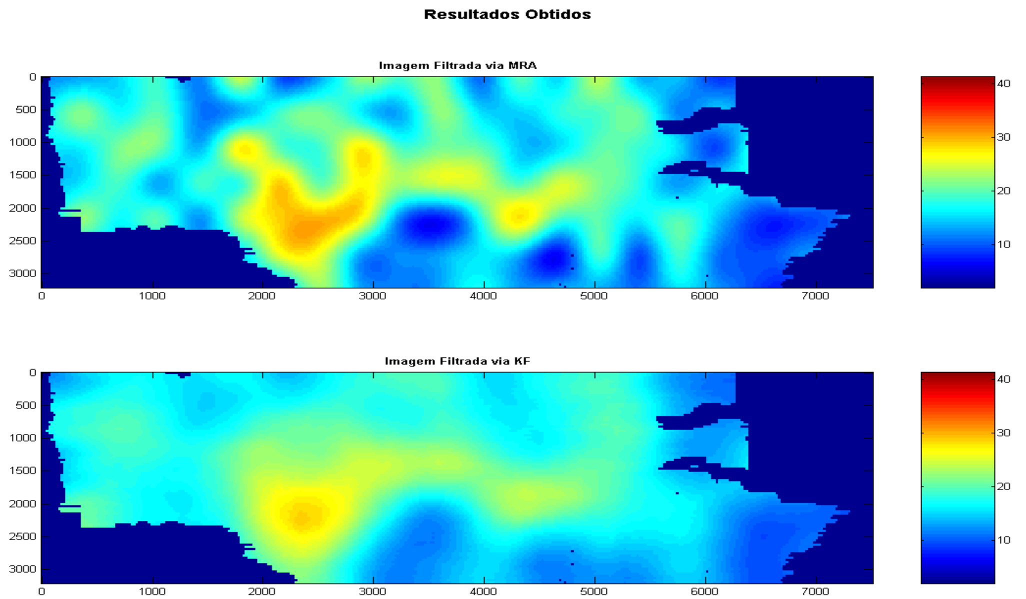


Figura 6.33 TDT **-** Imagem filtrada através da **MRA** (parte superior) e a imagem filtrada através da **KF** (parte inferior).

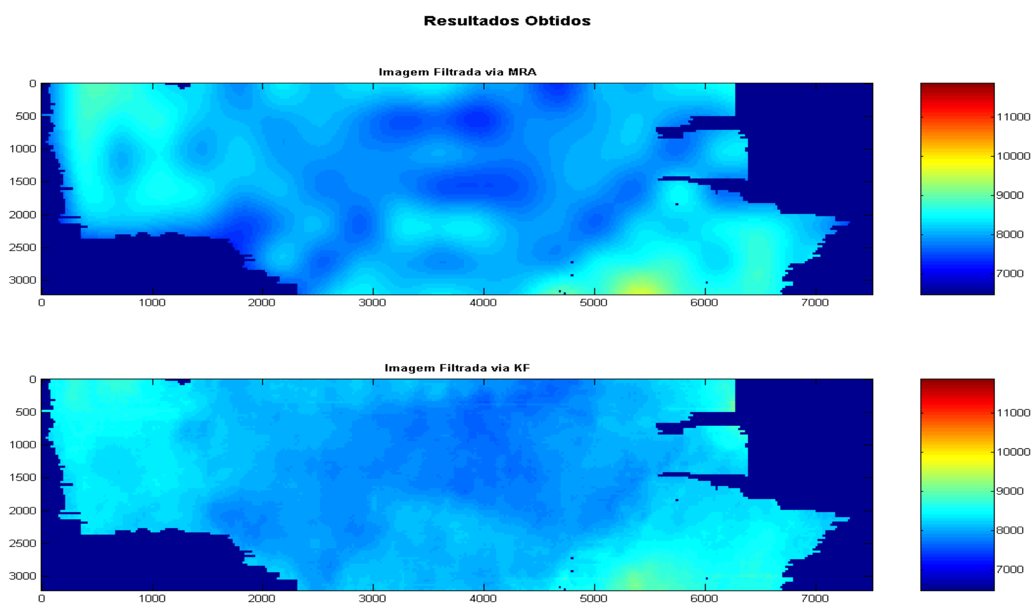


Figura 6.34 Impedância **-** Imagem filtrada através da **MRA** (parte superior) e a imagem filtrada através da **KF** (parte inferior).

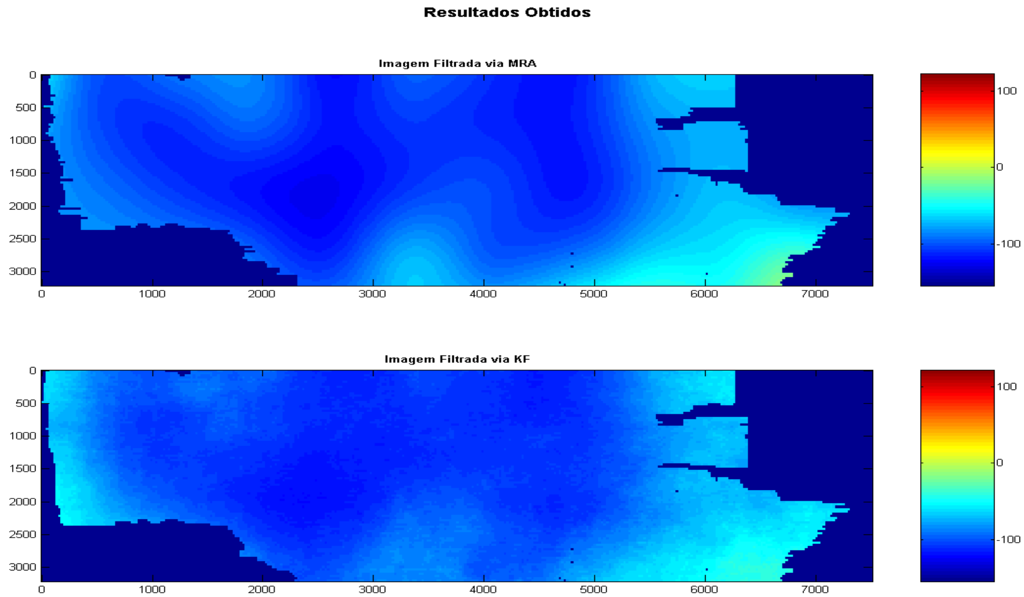


Figura 6.35 Amplitude **-** Imagem filtrada através da **MRA** (parte superior) e a imagem filtrada através da **KF** (parte inferior).

Conclusão

Esta dissertação mostra alguns fundamentos importantes da Análise Wavelet e de como a mesma se revela uma técnica importante para o processamento de sinais geofísicos (perfis geofísicos e sísmica). O método é particularmente bem adaptado tanto para a análise de processos estacionários, quanto para processos não estacionários. Em contraste com as técnicas clássicas existentes de processamento de sinais (Transformada de Fourier, Transformada de Fourier de Curta Duração, entre outras), a Análise Wavelet permite uma excepcional localização tanto no domínio do tempo, através da translação de suas wavelets, quanto no domínio da frequência, através da dilatação ou expansão das mesmas.

A aplicação da Análise Wavelet na transferência de escala em perfis geofísicos (caso 1D mostrado no **Capítulo 4**) deve-se ao fato de que a técnica é bem adaptada para o processamento de sinais não estacionários, ou seja, simplesmente utilizou-se uma técnica adequada ao sinal com o qual se está trabalhando. A literatura atual já mostra a Análise Wavelet como uma ferramenta de comprovada eficiência no tratamento de sinais 1D não estacionários, sendo assim, não houve a necessidade de comparação entre os resultados obtidos com outras filtragens obtidas através de outras técnicas clássicas de processamento de sinais (Transformada de Fourier, Transformada de Fourier de Curta Duração, entre outras).

O processo de filtragem realizado nas imagens de atributos sísmicos no **Capítulo 5** mostra a capacidade que a **MRA** tem em acessar as informações existentes em várias escalas e localizá-las espacialmente, o que é de extrema importancia no tratamento de imagens. O processo de filtragem foi realizado tendo como referência a utilização do variograma, que se mostrou uma ferramenta de controle eficiente na hora de decidir quando o processo de decomposição deve ser abortado. De uma forma geral, a filtragem obtida através da **MRA** conservou a média da imagem original (salvo pequenas flutuações), mas ainda assim reduziu a variância da mesma, o que é comum com o uso de filtros, mas essa diminuição foi bem menor que a ocorrida na filtragem através da **KF**, ou seja, a filtragem através da **MRA** está de alguma forma conservando melhor a variabilidade do conjunto de dados original (imagem inicial). Através dos histogramas das imagens filtradas pode-se observar que a filtragem através da **MRA** conservou melhor os menores e os maiores valores da imagem original, o que pode também pode ser notado nos gráficos obtidos para a validação cruzada.

Pela análise dos variogramas pode-se observar que o patamar do variograma da imagem filtrada através da **MRA** está mais próximo do patamar do variograma da imagem original, ou seja, confirmando o que já vinha sendo mostrado, que parte da variabilidade dos dados originais está sendo mantida. Mostrou-se com isso que a filtragem através da **MRA** é um método de grande potencial e aplicabilidade no tratamento de sinais geofísicos e que o uso combinado com as ferramentas da geostatística (variogramas, validações cruzadas, entre outras) se mostrou bastante eficiente.

Apêndice A

Krigagem Fatorial

A teoria geral da Análise através da Krigagem Fatorial ou **FKA (**do inglês Factorial Kriging Analysis) foi desenvolvida por Matheron (1982). A **FKA** foi utilizada por Galli, Gerdil-Neuillet & Dadou (1984) como uma técnica para separação de anomalias magnéticas. A **FKA** assume que um fenômeno regionalizado pode ser visto como uma soma linear de subfenômenos independentes atuando em diferentes escalas, cada qual apresentando seu próprio variograma ou modelo de covariância do fenômeno regionalizado. Desta forma, uma variável regionalizada com estacionaridade de segunda ordem $Z(x)$ pode ser decomposta em uma soma de sua média $m(x)$, representada por $E[Z(x)]$, com n variáveis regionalizadas não correlatas com média zero $Z_n(x)$:

$$Z(x)=Z_0(x)+...+Z_n(x)+m(x)$$

O variograma imbricado será a soma linear de seus variogramas constituintes

$$\gamma(h)=\gamma_0(h)+...+\gamma_n(h)$$

A componentes estimada $Z_n^e(x)$ é dado pela combinação linear:

$$Z_n^e(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\beta Z(x_\alpha)$$

O sistema de krigagem é resolvido em uma vizinhança com n pontos amostrados

$$\sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta \gamma(x_\alpha - x_\beta) + \mu = \gamma_n(x_\alpha - x_0)$$
$$\sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta = 0$$

com $\alpha = 1, \ldots, n$.

Apêndice B

Algoritmos Utilizados

Os algoritmos utilizados e implementados neste trabalho estão listados abaixo com um respectivo resumo de utilização do mesmo.

VARIO1D

Calcula o variograma para um conjunto de dados unidimensional e cuja sintaxe é da forma : **var = vario1d(vet)**, onde **vet** é o vetor a ser variografado (input) e **var** é o variograma calculado (output).

VARIO2D

Calcula o variograma para um conjunto de dados bidimensional e cuja sintaxe é da forma : [**var1 var2] = vario2d(mat)**, onde **mat** é a imagem a ser variografada (input) e **var1** é o variograma calculado na direção NS e **var2** é o variograma calculado na direção LO (output).

ANALISE1D

Realiza a decomposição multi-resolução do sinal (perfil). O uso do algoritmo está restrito aos perfis mostrados no trabalho. Sua utilização é bastante simples e é resumida abaixo:

1. Digite no prompt do **MATLAB** o comando **analise1d**
2. Escolha o nome do poço a ser utlizado
3. Escolha o atributo
4. Escolha a wavelet

5. Escolha o nível da decomposição

A saída é gráfica e mostra em cada uma das decomposições, e seus respectivos variograma e histograma.

FILTRAGEM2D

Assim como o algoritmo **analise1d**, este algoritmo está otimizado para trabalhar apenas com as imagens mostradas no trabalho. Posteriormente será realizada a adaptação do programa para que sua utilização seja possível com qualquer conjunto de dados bidimensional (imagens) estará disponível para download, assim como os outros algoritmos em **ftp://ftp.ige.unicamp.br/pub/prota**

Referências Bibliográficas

Abry, P., **Ondelettes et turbulence. Multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle**s, Diderot Editeur, Paris, 1997

Astaf'eva, N.M. **Wavelet Analysis: basic theory and some applications**, Physics – Uspekhi, vol. 39, no. 11, pp. 1085 – 1108, 1996

Brewer, K.E., Wheatcraft, S.W. **Including multi-scale information in the characterization of hydraulic conductivity distributions**, Wavelet in Geophysics, Efi Fourfoula-Georgiou and Praveen Kumar (eds), pp. 213 – 248, 1998

Daubechies, I. **Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets**, Comm Pure and Appl. Math,. vol. 41, no. 7, pp. 909-996, 1988.

Daubechies, I. **Ten Lectures on Wavelets**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelaphia, Pennsylvania, 1992.

Chan, Y.T. **Wavelet basics**, Boston, Kluver Academic Publisher, 1995

Chu, L., Schatzinger, R.A., Tharn, M.K. **Application of wavelet analysis to upscaling of rock properties**, SPE 36517, 1996

Doveton, J.H. **Geologic log analysis using computer methods**, AAPG Computer Applications in

Geology, #2, Tulsa, 1994

Galli, A., Gerdil-Neuillet, F., Dadou, C. **Factorial kriging analysis: A substitute to spectral analysis of magnetic data, G. Verly et al. (eds), Geostatistical for natural resources characterizatio**n, Part 1, D Raidal Publishing Company, pp. 543 – 557, 1984

Graps, A. **An Introduction to wavelets**, IEEE, vo. 2, no. 2, 1995

Grossman, A., Morlet. J., **Mathematics and Physics**, 2, L, Streit, Ed., World Scientific Publishing, Singapore, 1997

Jansen, F.E. **Upscaling of reservoir properties using wavelets**, SPE 39495, 1998

Journel, A., **Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons** (Short Course in Geology, Vol 8). Amer Geophysical Union, 1989

Kumar, A., Farmer, C.L., Jerauld, G.R.,Li, D. **Efficient upscaling from cores to simulation models**, SPE 38744 presented at the ATCE held in San Antonio, 1997.

Kumar, P., Fourfoula-Georgiou, E. **Wavelet analysis in geophysics: An introduction**, Wavelet in geophysics, Efi Fourfoula-Georgiou and Praveen Kumar (eds), pp. 213 – 248,1994

Liu, P.C. **Wavelet spectrum and ocean wind waves**, Wavelets in Geophysics, Efi Fourfoula-Georgiou and Praveen Kumar (eds), pp. 151 – 166, 1996

Mallat, S. **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: Wavelet Representation**, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intellig., no. 11, pp. 674-693, 1989

Massel, S.R. **Wavelet analysis for processing of ocean surface wave records**, Ocean Engineering, no. 28, 957 – 987, 2001

Matheron, G. **Pour une analyse krigeante de donnés régionalísées**. Internal Report, no. 732, Centre de Geostatistics, Fontainebleau, 1982

Mathworks, Inc. **Wavelet Toolbox: User's Guide**, internet, 2001

Meyer, Y. **Wavelets and Applications**, Procceedings of the International Conference, Marseille, France, May, 1989a

Meyer, Y. **Ondelletes et opérateurs**, Tome 1, Hermann Ed. (English Translation: Wavelet and operators, Cambridge University Press), 1989b

Morlet, J. **Sampling theory and wave propagation**, Proc. 51st Annu. Meet. Soc. Explor. Geophy., Los Angeles, 1981

Mundim, E.C. **Avaliação da Krigagem fatorial na filtragem de atributos sísmicos: um filtro geoestatístico aplicado à caracterização de reservatórios**, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999

Mundim, E.C., Remacre, A.Z., Johann, P. **Seismic data factorial kriging analysis: a geostatistical filtering applied to reservoir characterization**, Society Exploration Geophysicists - The Leading Edge, vol. 18, no. 7, 787, 1999

Oliver, M.A., Borch, E., Slocum, K. **Wavelets and kriging for filtering and data reconstruction**, WJ Kleingeld and DG Krige (eds), Geostats 2000, Cape Town, Copyright 2000

Panda, M.N, Mosher, C., Chopra, A.K. **Application of wavelet transform to reservoir data analysis ans scaling**, SPE 36516, 1996

Prokoph, A., Agtemberg, F.P. **Wavelet analysis off well-logging data fro oil source rock, Egret Member, Offshore eastern Canada**, AAPG Bulletin, vol. 84, no. 10, pp. 1617 – 1632, 2000

Prokoph, A., Barthelmes, F. **Detection of nonstationarities in geological time-series: Wavelet Transform of chaotic and ciclic sequences**, Computer and Geosciences, vol. 22, no. 10, pp. 1097 – 1108, 1996

Seron, F.J., Baddal, J.I., Sabadell, F.J. **Spatiall prediction procedures for regionalization and 3-D imaging of Earth structures**, Physics of the Earth and Planetary interior, vol. 123, pp. 149 – 168, 2001

Silva, A. **Análise de perfis geofísicos de poço no domínio de Fourier e sua integração com a aquisição sísmica no modelamento de reservatórios**, relatório de projeto de pesquisa (processo 99/11140-9) de Pós-doc junto ao DARM – IG / UNICAMP, FAPESP, 2001

Silva, A., Remacre, A.Z. **Geological constrained log filtering as a basis for scale transference**, SPE 69484, 2001

Strang, G., Nguyen, T. **Wavelets and filter banks**, Wellesley, Cambridge Press

Torrence, C., Compo, G.P. **A practical guide to wavelet analysis, Bulletin of the American Meteorololical Society**, vol. 79, no. 1, 61 – 78, 1998

Valens, C. **A really friendly guide to wavelets**, internet, 1999