



Fabício Fanton

Análise de Estruturas Aeronáuticas Reforçadas por Doublers Colados

106/2012

CAMPINAS
2012



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Fabício Fanton

Análise de Estruturas Aeronáuticas Reforçadas por Doublers Colados

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FABRÍCIO FANTON E ORIENTADA PELO PROF. DR. PAULO SOLLERO.

A handwritten signature in blue ink, consisting of stylized, overlapping letters that appear to be 'P' and 'S'.

.....
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F218a Fanton, Fabrício
Análise de estruturas aeronáuticas reforçadas por
doublers colados / Fabrício Fanton. --Campinas, SP:
[s.n.], 2012.

Orientador: Paulo Sollero.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Deformação e tensões. 2. Resistência a tração. 3.
Adesivos. 4. Localização de falhas (Engenharia). 5.
Otimização. I. Sollero, Paulo, 1950-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Analysis of aeronautical structures reinforced by bonded
doublers

Palavras-chave em Inglês: Deformation and tensions, Resistance to traction,
Adhesives, Fault location (Engineering), Optimization

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Maria Campos dos Santos, Sergio Frascino Muller de
Almeida

Data da defesa: 27-07-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

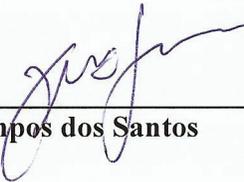
Análise de Estruturas Aeronáuticas Reforçadas por Doublers Colados

Autor: Fabrício Fanton
Orientador: Dr. Paulo Sollero

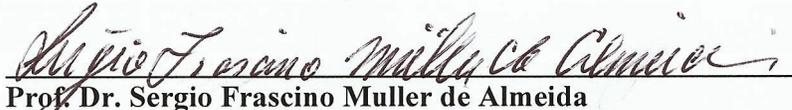
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



Prof. Dr. Paulo Sollero , Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Sergio Frascino Muller de Almeida
Instituto Tecnológico de Aeronáutica / São José dos Campos

Campinas, 27 de Julho de 2012

Aos meus pais
A minha namorada
Aos meus amigos

Agradecimentos

Agradeço a ajuda de diversas pessoas na conclusão deste trabalho, pois sem elas eu não teria conseguido:

Aos meus pais, Edécio Fanton e Maria das Graças Higino Fanton por me darem suporte durante os meus estudos.

A minha namorada Jaqueline Grazielle da Cunha por estar do meu lado em todos os momentos, além de tornar este momento da minha vida muito agradável.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram em todas as minhas decisões e me deram conselhos muito úteis nesta trajetória. Em especial meu amigo e orientador da Graduação Márcio Bazani e todos meus amigos que me acompanharam em todo este trajeto.

Um agradecimento especial aos meus amigos René Quispe, Carlos Alexandre e William Portilho que me ajudaram incondicionalmente durante todo este período de trabalho.

Ao Marcelo Ricardo Berton Rodrigues pela ajuda, pelo apoio e por instruir da melhor forma possível na conclusão deste trabalho.

Ao companheiro do LabDin Sérgio de Sousa Fleming por toda a ajuda e ensinamentos na parte experimental do trabalho. Ao companheiro da oficina do DMC, Geraldo Paladini, por toda a ajuda durante os ensaios experimentais realizados.

Ao Prof. Dr. Éder L. de Albuquerque pela ajuda e por todas as instruções durante todo o trabalho.

Ao meu orientador Paulo Sollero, pela amizade, pelas oportunidades e pela orientação deste trabalho.

“Se você quer ser bem-sucedido, é preciso ter dedicação integral, chegar ao limite e obter o melhor de si mesmo.”

Ayrton Senna

Resumo

Na indústria aeronáutica o uso de juntas coladas, rebitadas, parafusadas e soldadas na união de partes estruturais é de extrema importância no projeto das aeronaves.

No entanto, devido as suas vantagens, as juntas coladas representam uma das principais tecnologias disponíveis para a exploração de novos materiais e para o desenvolvimento de projetos inovadores de configurações estruturais.

Atualmente muitas aplicações aeronáuticas de colagem estão em estruturas e peças secundárias, contudo esta tecnologia apresenta grandes potenciais que dependem de um processo robusto e do domínio do dimensionamento e certificação. A colagem de chapas adicionais, chamadas de *doublers*, em áreas mais críticas de fuselagem e asa conduz à redução de usinagem química e mecânica, provendo um melhor aproveitamento dos materiais.

Portanto, o *doubler* colado é uma alternativa de junta bastante eficaz em substituição às outras alternativas presentes hoje na indústria aeronáutica, promovendo uma maior eficiência na transferência de carga, potencial de redução de custo, alta resistência à corrosão e à fadiga, característica de retardar a propagação de trincas e maior integração das peças.

Desta maneira, este trabalho tem como objetivo estudar estruturas aeronáuticas metálicas reforçadas por *doublers* colados, usando modelos analíticos, numéricos e experimentais, com ênfase na análise de tensões do adesivo.

Além disso, criou-se um *software* com interface amigável reunindo os modelos analíticos mais importantes na análise de *doublers* colados e o modelo analítico criado pelo autor deste trabalho, permitindo a comparação das tensões no adesivo com os modelos numéricos.

Na parte experimental, por tratar-se de um estudo relativamente novo e sem normalização específica de ensaios disponíveis, foram desenvolvidas técnicas de análise com o uso do processamento digital de imagens e da extensometria, além do projeto dos corpos de prova.

Foram também projetados e ensaiados subcomponentes utilizados para simular as aplicações reais de *doublers* colados, através do desenvolvimento de uma ferramenta de otimização paramétrica visando à redução do peso nas aeronaves.

Palavras Chave: Juntas Coladas, *Doubler*, Subcomponente e *Software de Doublers Colados*.

Abstract

In the aircraft industry the use of bonded, riveted, bolted and welded joints at the junction of structural parts are extremely important in aircraft design.

However, due their advantages, bonded joints, represent one of the main technologies available for the exploration of new materials and to the development of innovative structural configurations.

Nowadays several aircraft bonded applications are applied in structures and secondary parts, however, this kind of technology presents a huge potential that depends on a robust model, in an effective sizing process and in an accurate certification. The bonding process of additional plates, best-known as doublers, in critical fuselage areas and in wings lead to a reduction in chemical and mechanical machining, providing a better material use.

Thus, to avoid chemical milling, in some critical areas of the fuselage, are installed additional plates. These plates are called doublers, and are bonded in the base plate as a reinforcement located to reduce the stress level.

Therefore, the use of bonded doublers is a very effective alternative to replace other alternatives present today in the aviation industry, promoting greater efficiency in load transfer, lower cost, high corrosion resistance, lower crack propagation and greater integration of parts.

Thus, this work aims to study aeronautical metal structural joints reinforced by bonded doublers, through the analysis by analytical, numerical and experimental models, with emphasis on stress analysis of adhesive.

In addition, software was created with a friendly interface gathering the most important analytical models in the analysis of bonded doublers, and allowing within this software to make the comparison with numerical models.

Due the lack of standard tests and its relatively new study, new proceedings were created. These techniques were developed by the use of digital image processing and strain gage.

Several subcomponents were designed and tested to simulate the actual application of bonded doublers, through the development of an optimization process in order to reduce weight of the aircraft.

Key Words: Bonded Joints, Doubler, Subcomponents, Software of Bonded Doublers.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1: Avião ‘Mosquito’ [1].	2
Figura 2.1: Típicas configurações de juntas coladas.	7
Figura 2.2: Exemplo de caverna fixada diretamente ao revestimento.	9
Figura 2.3: Curva tensão-deformação cisalhante e modelos matemáticos.	10
Figura 2.4: Malha realizada por elementos finitos no canto do <i>doubler</i> colado.	12
Figura 2.5: Pontos de singularidade, A, C, D e F em uma junta <i>one-sided doubler</i> (a linha BE representa a linha de centro no adesivo).	13
Figura 2.6: Malha de elementos finitos para uma junta <i>double-lap</i> .	14
Figura 2.7: Canto vivo na camada de adesivo.	14
Figura 2.8: Ordem de singularidade de canto para alguns valores da razão de Poisson (Tong e Steven, 1999).	15
Figura 2.9: <i>Doubler</i> colado, representando uma parte de revestimento da estrutura aeronáutica. (a) Modelo 3D, (b) Modelo 2D.	16
Figura 2.10: Comparação entre os modelos analíticos e o modelo numérico (ABAQUS 2D) da tensão cisalhante no adesivo para uma carga de 5000 N.	21
Figura 2.11: Cargas de falha para o critério do valor máximo, Rodriguez (2010).	21
Figura 2.12: Exemplo de estrutura de fuselagem semi-monocoque metálica reforçada por <i>doubler</i> .	23
Figura 2.13: Exemplo de revestimento com usinagem química.	24
Figura 3.1: Tipos de falha das juntas coladas.	26
Figura 3.2: (a) <i>Doubler</i> sujeito a uma tensão uniaxial; (b) distribuição de tensão na placa.	26
Figura 3.3: Deformação geometricamente não-linear.	28
Figura 3.4: Deflexão do <i>one-sided doubler</i> medida no centro da <i>overlap</i> .	30
Figura 3.5: Deflexão do <i>one-sided doubler</i> ao longo da junta.	30
Figura 3.6: Geometria do <i>two-sided doubler</i> , e as terminologias utilizadas em suas análises.	32
Figura 3.7: Geometria para análise de tensão de <i>peel</i> em um <i>two-sided doubler</i> .	35
Figura 3.8: Geometria para a análise elastoplástica do <i>two-sided doubler</i> .	37
Figura 3.9: Curva típica de tensão/deformação de cisalhamento de um adesivo. Por simplificação, o adesivo é idealizado como um material elasto-perfeitamente plástico.	37
Figura 3.10: Terminologias para a análise de um <i>one-sided doubler</i> : (a) geometria do <i>doubler</i> , (b) deformação do <i>doubler</i> no momento da análise.	39
Figura 3.11: Representação do <i>one-sided doubler</i> em análise (a), transferência de carga do <i>skin</i> para o <i>doubler</i> (b) e análise de tensão cisalhante no adesivo (c).	49
Figura 3.12: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.	53
Figura 3.13: Camada de adesivo rigidamente colada ao longo dos cantos entre duas placas.	55
Figura 3.14: Configuração de um <i>spew fillet</i> .	56
Figura 3.15: Ordem de singularidade de canto no <i>spew fillet</i> (pontos A e B da Figura 3.14).	57
Figura 3.16: Máximo ângulo do <i>spew fillet</i> para singularidade de canto, θ igual a zero.	57
Figura 3.17: Variação da carga de falha com respeito à espessura para os critérios de falha elásticos (Rodriguez, 2010).	58
Figura 3.18: Pontos de medida da espessura do CDP 1.	59

Figura 4.1: Curva tensão/deformação da liga de alumínio 2024-T3 inserida nas simulações do ABAQUS (MIL – HDBK – 5H, 1998).	62
Figura 4.2: Grande deflexão da viga.	63
Figura 4.3 - Consideração da não-linearidade geométrica.	63
Figura 4.4: Controle da malha do subcomponente.	64
Figura 4.5: Superfície mestre penetrando na superfície escrava.	64
Figura 4.6: Representação do <i>two-sided doubler</i> em análise.	65
Figura 4.7: Malha utilizada no ABAQUS.	66
Figura 4.8: Distribuição da tensão de von Mises.....	67
Figura 4.9: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.....	67
Figura 4.10: Distribuição da tensão de <i>peeling</i> no adesivo.	68
Figura 4.11: Geometria do <i>one-sided doubler</i> em análise.....	68
Figura 4.12: Deformação do <i>doubler</i> na escala de 5:1 de ampliação com a aplicação da carga... 69	
Figura 4.13: Distribuição de tensão de von Mises, mostrando o valor máximo próximo ao final da zona colada.	70
Figura 4.14: Tensão de von Mises na extremidade do adesivo.	70
Figura 4.15: Distribuição da tensão de <i>peeling</i> no adesivo.	71
Figura 4.16: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.	71
Figura 5.1: Modelo analisado de <i>two-sided doublers</i>	72
Figura 5.2: Distribuição de tensão cisalhante no adesivo (lado esquerdo da simetria).	73
Figura 5.3: Distribuição de tensão de <i>peel</i> no adesivo (lado esquerdo da simetria).....	74
Figura 5.4: Comparação entre as distribuições de tensão de cisalhamento, modelo analítico e numérico.	75
Figura 5.5: Comparação entre as distribuições de tensão de <i>peeling</i> , modelo analítico e numérico.	76
Figura 5.6: Modelo elastoplástico analisado de <i>two-sided doublers</i>	77
Figura 5.7: Distribuição de tensão cisalhante no adesivo para o modelo elasto-perfeitamente plástico da Figura 5.6.	78
Figura 5.8: Geometria do <i>one-sided doubler</i> do presente exemplo.	79
Figura 5.9: Comparação da distribuição de tensão de <i>peeling</i> no adesivo de um <i>one-sided doubler</i>	82
Figura 5.10: Comparação da distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo de um <i>one-sided doubler</i>	82
Figura 5.11: Tela para a entrada dos parâmetros que definem a geometria da junta, do <i>software</i> ESACOMP.	84
Figura 5.12: Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo, calculada pelo ESACOMP.	85
Figura 5.13: Distribuição da tensão de <i>peeling</i> no adesivo calculada pelo ESACOMP.	85
Figura 6.1: Janela inicial do <i>software</i> de <i>doublers</i> colados.....	86
Figura 6.2: Janela de escolhas dos modelos de análise.	87
Figura 6.3: Janela de escolhas dos modelos analíticos.	88
Figura 6.4: Janela de entrada de dados para o modelo analítico de C.N. Duong.	89
Figura 6.5: Janela de deflexão na junta colada para os dados de entrada da Figura 6.4.	89
Figura 6.6: Procedimento realizado no <i>software</i> para as análises numéricas de <i>doublers</i> colados.	91
Figura 7.1: Representação da carga aplicada na geometria da junta reforçada por <i>doubler</i> colado.	93

Figura 7.2: Fluxograma para a obtenção da geometria do CDP.....	94
Figura 7.3: Geometria final do CDP 1.....	95
Figura 7.4: Geometria final do CDP 2.....	96
Figura 7.5: Detalhe das condições de contorno do modelo numérico.....	96
Figura 7.6: Fator de escala de deformação ampliado em 10 vezes.	97
Figura 7.7: Distribuição de tensão de von Mises na extremidade direita da zona colada do CDP 1.	97
Figura 7.8: Distribuição da tensão de <i>peel</i> na extremidade direita do adesivo.	98
Figura 7.9: Distribuição da tensão de <i>peel</i> na linha média do adesivo.....	98
Figura 7.10: Distribuição da tensão de cisalhamento na linha média do adesivo.	99
Figura 7.11: Distribuição da tensão de von Mises na linha média do adesivo.....	99
Figura 7.12: Estudo da convergência para a distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.	100
Figura 7.13: Estudo da convergência para a distribuição da tensão de <i>peel</i> no adesivo.	100
Figura 7.14: Ligação em $\frac{1}{4}$ de ponte com um terceiro fio soldado ao terminal.	104
Figura 7.15: Posicionamento dos extensômetros.	105
Figura 7.16: Posição do Extensômetro 1.....	107
Figura 7.17: Posição do Extensômetro 2.....	107
Figura 7.18: Posição do otimizada do Extensômetro 3.	108
Figura 7.19: Calibração dos extensômetros.....	111
Figura 7.20: Posicionamento dos CDPs para o ensaio experimental utilizando a extensometria.	111
Figura 7.21: <i>Setup</i> do <i>software</i> da MTS.....	112
Figura 7.22: (a) Imagem digital de 5x5 pixels, com 8 tons de cinza. (b) Representação numérica da imagem em (a).	112
Figura 7.23: Correlação entre as imagens.	114
Figura 7.24: Diagrama de funcionamento do programa DIC.....	116
Figura 7.25: Aquisição de dados para o PDI.....	117
Figura 7.26: Interface gráfica do software.....	117
Figura 7.27: Diferença dos deslocamentos longitudinais do <i>skin</i> e do <i>doubler</i>	118
Figura 7.28: Grade gerada para a obtenção dos deslocamentos do <i>doubler</i> e do <i>skin</i>	118
Figura 7.29: Seleção do deslocamento longitudinal do <i>doubler</i> colado.....	119
Figura 7.30: Seleção do deslocamento longitudinal do <i>skin</i>	120
Figura 7.31: Disposição para o ensaio experimental utilizando o processamento digital de imagens.	120
Figura 7.32: Disposição do ensaio experimental de <i>doublers</i> colados.....	121
Figura 7.33: Deslocamentos do <i>skin</i> e do <i>doubler</i> no eixo y.....	122
Figura 7.34: Deslocamentos do <i>skin</i> e do <i>doubler</i> no eixo x.....	123
Figura 7.35: Curva Força-Deslocamento do CDP 1_1.....	124
Figura 7.36: Deformação dos extensômetros.	124
Figura 7.37: Deslocamentos dos extensômetros 1 e 2.....	126
Figura 7.38: Deformações longitudinais.	127
Figura 8.1: Concentração de tensão em uma chapa furada.	130
Figura 8.2: Placa furada reforçada com um <i>doubler</i> colado em cada lado da placa.	130
Figura 8.3: Distribuição de tensão utilizando um <i>one-sided doubler</i>	131
Figura 8.4: Geometria do <i>doubler</i> ensaiado por Brett et al (2006).....	132

Figura 8.5: Análise 3D da tensão cisalhante no adesivo.	133
Figura 8.6: Validação numérica. Comparação entre o resultado obtido por Brett et al. (esquerda) e o resultado numérico obtido pelo ABAQUS (direita).	134
Figura 8.7: Comparação entre o resultado numérico e experimental.	134
Figura 8.8: Fluxograma da otimização.	137
Figura 8.9: Discretização do modelo.	138
Figura 8.10: Geometrias de subcomponentes projetados estaticamente.	142
Figura 8.11: Área representativa.	142
Figura 8.12: Pré-configuração do painel.	144
Figura 8.13: Fluxograma do procedimento utilizado.	145
Figura 8.14: Geometria do CDP de SLJ para ensaio de fadiga segundo ASTM D3166.	147
Figura 8.15: Montagem dos CDPs na MTS.	147
Figura 8.16: Sistema de controle.	148
Figura 8.17: Medidas de temperatura e umidade.	148
Figura 8.18: CDP rompido por fadiga, com carga de 40% da resistência do adesivo.	149
Figura 8.19: Curva SN ajustada.	150
Figura 8.20: Detalhe das condições de contorno do modelo numérico.	152
Figura 8.21: Pós-processamento da análise.	152
Figura 8.22: Distribuição de tensão de Von Mises no adesivo.	152
Figura 8.23: Distribuição da tensão de von Mises no adesivo.	153
Figura 8.24: Distribuição da tensão de <i>peel</i> no adesivo.	154
Figura 8.25: Distribuição da tensão cisalhante no adesivo.	154
Figura 8.26: Geometria final do subcomponente após a otimização paramétrica.	156
Figura 8.27: Refino da malha no adesivo e na região do furo.	157
Figura 8.28: Distribuição da tensão de von Mises no subcomponente para uma tensão remota de 225 Mpa.	157
Figura 8.29: Distribuição da tensão de Von Mises no adesivo.	158
Figura 8.30: Distribuição da tensão de Von Mises na linha central do adesivo.	158
Figura 8.31: Distribuição da tensão de <i>peeling</i> no adesivo.	159
Figura 8.32: Distribuição da tensão de <i>peeling</i> na linha média do adesivo.	159
Figura 8.33: <i>Software</i> de análise de <i>doublers</i> , etapa de geração da curva S-N.	160
Figura 8.34: Curva S-N (MIL-HDBK-5H).	161
Figura 8.35: Curva S-N produzida pelo <i>software</i> de <i>doublers</i>	161
Figura 8.36: Ponto de Projeto para a curva S-N obtida com $K_t = 1$	163
Figura 8.37: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 100 MPa.	164
Figura 8.38: Tensão de von Mises verificada ao longo da espessura do adesivo.	164
Figura 8.39: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 100 MPa.	165
Figura 8.40: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 225 MPa.	165
Figura 8.41: Comparação de <i>one-sided doubler</i> rebitado (esquerda) e colado (direita).	166
Figura 8.42: Projeto do <i>one-sided doubler</i> rebitado.	167
Figura 8.43: Subcomponente projetado para <i>doubler</i> colado com mais de uma camada.	167
Figura 8.44: Dimensional dos subcomponentes 1 e 2.	168
Figura 8.45: Perspectiva isométrica do subcomponente.	169
Figura 8.46: Trinca inserida no <i>skin</i>	170
Figura 8.47: Trinca inserida no adesivo.	171
Figura 8.48: Dispositivo de fixação.	173

Figura 8.49: Tipos de rosetas, $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ (a) e $0^\circ/60^\circ/120^\circ$ (b).....	174
Figura 8.50: Região de colagem das rosetas no subcomponente.	174
Figura 8.51: Colagem da roseta.....	175
Figura 8.52: Posicionamento na máquina da MTS.	175
Figura 8.53: Relação Força/deslocamento no <i>software</i> da MTS.....	177
Figura 8.54: Deformação dos extensômetros a, b e c.....	177
Figura 8.55: Relação Força/deslocamento no <i>software</i> da MTS.....	180
Figura 8.56: Deformação dos extensômetros a, b e c.....	180
Figura 8.57: Comprovação de que o subcomponente escoou.	182
Figura 8.58: Deformação dos extensômetros a, b e c.....	182
Figura 8.59: Ciclos obtidos na máquina da MTS.	184
Figura 8.60: Deformações nos extensômetros a, b e c (1000 ciclos).	185
Figura 8.61: Ciclos obtidos na máquina da MTS.	186
Figura 8.62: Deformações nos extensômetros a, b e c (80000 ciclos).	187

Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Comparação das principais características das juntas aeronáuticas.	3
Tabela 2.1: Complexidade dos métodos analíticos de 1938 a 2000.	20
Tabela 3.1: Propriedades dos materiais e dimensões de um típico <i>doubler</i>	29
Tabela 3.2: Medidas da variação da espessura do adesivo para os CDPs 1.	59
Tabela 4.1: Propriedades e parâmetros utilizados para modelar o <i>doubler</i> da Figura 4.6.	65
Tabela 4.2: Propriedades do elemento utilizado.	66
Tabela 4.3: Propriedades e parâmetros utilizados para modelar o <i>one-sided doubler</i> ABAQUS.	69
Tabela 5.1: Resultados analíticos de <i>one-sided doubler</i>	79
Tabela 7.1: Propriedades dos materiais utilizados nas análises prévias para os CDPs.	93
Tabela 7.2: Espessuras de chapas para aplicações no <i>skin</i> e no <i>doubler</i>	94
Tabela 7.3: Tabela de comparação da tensão para a variação da espessura das chapas.	101
Tabela 7.4: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 1.	107
Tabela 7.5: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 2.	108
Tabela 7.6: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 3.	108
Tabela 7.7: Expectativas dos erros experimentais.	109
Tabela 7.8: Montagem dos Extensômetros no CDP.	110
Tabela 7.9: Resultados Experimentais dos CDPs.	128
Tabela 8.1: Propriedades físicas dos materiais utilizados por Brett et al (2006).	132
Tabela 8.2: Propriedades do elemento utilizado.	133
Tabela 8.3: Divisão do problema de otimização.	136
Tabela 8.4: Resultados da otimização paramétrica.	140
Tabela 8.5: Parâmetros de teste em fadiga.	146
Tabela 8.6: Vida em fadiga para um carregamento de 80%.	149
Tabela 8.7: Vida em fadiga para um carregamento de 70%.	149
Tabela 8.8: Vida em fadiga para um carregamento de 55%.	150
Tabela 8.9: Vida em fadiga para um carregamento de 40%.	150
Tabela 8.10: Propriedades do elemento utilizado.	151
Tabela 8.11: Propriedades do elemento utilizado.	155
Tabela 8.12: Tensões de von Mises no ponto de concentração de tensão.	186

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

\bar{z} - a posição do plano neutro para a configuração de *doubler*.

t - espessura.

S - razão de rigidez.

I_t - momento de inércia na região do *doubler*.

E - módulo de elasticidade.

E' - módulo de elasticidade no estado plano de deformação.

N_0 - força de superfície.

M_0 - momento fletor.

M_l - momento fletor na região da zona colada.

w - deflexão.

u - deslocamento longitudinal.

G - módulo de cisalhamento.

V - força cortante.

D - rigidez à flexão.

d - comprimento da região elástica.

P - carregamento longitudinal aplicado por unidade de comprimento.

.....

Letras Gregas

ν - razão de Poisson.

σ^∞ - tensão remota.

γ - deformação angular.

α - coeficiente de expansão térmica.

τ - tensão de cisalhamento.

τ_Y - tensão cisalhante de escoamento.

σ - tensão de *peel*.

γ_p - máxima deformação plástica.

.....

Superescritos

(A) - referente ao adesivo.

.....

Subscritos

s - *skin*.

d - *doubler*.

a - adesivo.

p - *patch* (reparo ou *doubler*).

máx – máximo.

I - região da zona colada.

H - região fora da zona colada.

.....

Abreviações

CDP - corpo de prova.

MEF - método dos elementos finitos.

FS - fator de segurança.

Sumário

Capítulo 1	1
1 Introdução.....	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Organização do texto	5
Capítulo 2	6
2 Revisão Bibliográfica.....	6
2.1 Juntas coladas	6
2.2 Aplicação das Juntas Coladas na Indústria Aeronáutica.	8
2.3 Análise de Tensão.....	9
2.4 Método dos Elementos Finitos (MEF) para Juntas Coladas.	11
2.5 <i>Software</i> de Juntas Coladas	17
2.6 Teoria da Junta de Sobreposição Simples (<i>Single-lap</i>)	18
2.7 Introdução ao <i>Doubler</i> Colado	22
Capítulo 3	25
3 Modelos Analíticos de <i>Doublers</i> Colados 2D.....	25
3.1 Formulação Baker A. et al. (Formulação Apenas da Geometria do <i>Doubler</i>).....	26
3.1.1 Análise Linear.....	26
3.1.2 Análise Geometricamente Não-Linear	28
3.2 Modelo de Duong (2006)	31
3.2.1 Análise de Tensão Cisalhante para Two-Sided <i>Doublers</i>	31
3.2.2 Análise de Tensão de Peel para Two-Sided <i>Doublers</i>	34
3.2.3 Análise Elastoplástica para Two-Sided <i>Doublers</i>	36
3.2.4 Análise de Tensão de One-Sided <i>Doublers</i>	38
3.3 Hart-Smith, Solução para <i>One-Sided Doubler</i>	45
3.3.1 Análise da Tensão de Peel	47
3.3.2 Análise da Tensão Cisalhante.....	48
3.4 Modelo para <i>One-Sided Doubler</i> do Autor deste Trabalho.....	49
3.5 Considerações de Outros Efeitos Importantes em Estruturas Reforçadas por <i>Doublers</i> Colados.....	53
3.5.1 Condição de Tensão Livre no Final da Camada de Adesivo.....	54
3.5.2 Spew Fillet.....	55
3.5.3 Verificação do Efeito da Variação da Espessura do Adesivo	57
Capítulo 4	60
4 Modelos Numéricos para Análise de <i>Doublers Colados</i>	60
4.1 Cuidados Gerais Iniciais na Modelagem Numérica	60
4.1.1 Não-Linearidade do Material	61
4.1.2 Não-Linearidade Geométrica	62

4.1.3	Controle da Malha	63
4.1.4	Controle do Contato <i>Skin/Adesivo/Doubler</i>	64
4.2	Análise Numérica para <i>Two-Sided Doublers</i>	65
4.3	Análise Numérica para <i>One-Sided Doublers</i>	68
Capítulo 5	72
5	Resultados dos Modelos de <i>Doublers</i> Colados 2D	72
5.1	Resultados da Modelagem para <i>Two-Sided Doublers</i>	72
5.2	Resultados da Modelagem Analítica para <i>Two-Sided Doublers</i> , Modelo Elasto-Perfeitamente Plástico do Adesivo.	76
5.3	Resultados da Modelagem Analítica para <i>One-Sided Doublers</i>	78
5.4	Comparação com os Resultados do <i>Software</i> ESACOMP	83
Capítulo 6	86
6	<i>Software</i> de <i>Doublers</i> Colados.....	86
Capítulo 7	92
7	Resultados Numéricos e Experimentais dos CDPs de <i>Doublers</i> Colados	92
7.1	Análise Numérica dos CDPs de <i>Doublers</i> Colados.....	92
7.2	Análise Experimental dos CDPs de <i>Doublers</i> Colados.....	102
7.2.1	Extensometria	102
7.2.2	PDI.....	112
7.2.3	Resultados Experimentais dos CDPs de <i>Doublers</i> Colados	121
Capítulo 8	129
8	Resultados Numéricos e Experimentais dos Subcomponentes de <i>Doublers</i> Colados	129
8.1	Validação 3D	132
8.2	Otimização Paramétrica em Chapas Furadas Simples Reforçadas por <i>Doublers</i> Colados 135	
8.2.1	Modelo Estrutural	137
8.2.2	Modelo da Otimização Paramétrica	138
8.2.3	Resultados da Otimização Paramétrica e Discussão	139
8.3	Análise dos Subcomponentes	141
8.3.1	Primeira Etapa de Otimização Paramétrica	146
8.3.2	Segunda Etapa de Otimização Paramétrica	159
8.3.3	Discussão sobre os Subcomponentes.	166
8.3.4	Análise e Resultados Experimentais dos Subcomponentes.....	172
8.3.5	Ensaio Estático do Subcomponente 1	176
8.3.6	Ensaio de Fadiga do Subcomponente 2	183
Capítulo 9	189
9	Disposições Finais.....	189
9.1	Conclusões.....	189
9.2	Trabalhos Futuros.....	191

Capítulo 1

1 Introdução

1.1 Motivação

Os adesivos estruturais vêm sendo usados por muitos anos na história da humanidade. Em torno de 2000 anos A.C. adesivos eram usados na construção de rodas de carruagens, onde os raios de madeiras eram colados em compressão no aro.

No começo do século 20, adesivos sintéticos foram criados baseados em resinas de fenol-formaldeído (Schatzberg, 1999). O uso dos adesivos sintéticos marcou o rápido crescimento no uso dos adesivos para as diversas situações de demanda estrutural, particularmente na metade do século passado.

O uso das juntas adesivas está fortemente ligado ao desenvolvimento de estruturas, particularmente nas indústrias aeroespacial e aeronáutica. A primeira real aplicação com severa exigência de cargas no adesivo foi em estruturas de madeiras dos aviões. Em 1940, a introdução de adesivos poliméricos sintéticos levou à construção do avião ‘Mosquito’, Figura 1.1, o qual contemplava uma das mais bem sucedidas estruturas de madeira colada com adesivo epoxy (de Bruyne, 1957). Este foi provavelmente o primeiro passo no uso de adesivos para projetos estruturais, na direção de uma estrutura completamente livre de problemas de corrosão os quais afligiam os aviões de metal.

Durante a Segunda Guerra Mundial, a real evolução dos adesivos estruturais começou quando de Bruyne e Reyner desenvolveram um adesivo baseado na combinação de resinas fenólicas e polivinil-formol (de Bruyne, 1957). Este novo adesivo era menos frágil e permitia a união metálica com bastante eficiência.



Figura 1.1: Avião ‘Mosquito’ [1].

Depois da Segunda Guerra Mundial, os aviões de madeira se tornaram obsoletos. Estas estruturas sofreram dos efeitos de degradação devido à umidade, temperatura e delaminação.

Em 1950 as técnicas de colagem para alumínio em estruturas aeronáuticas foram desenvolvidas com êxito. Por exemplo, estes adesivos fenólicos e polivinil-formol foram extensivamente empregados pelos projetistas do ‘Comet’ jet Airlines, particularmente para dar alta resistência de acoplamento com um peso relativamente baixo da fuselagem e das asas (Kinloch, 1997).

Estes desenvolvimentos pioneiros dos anos de 1940 e 1950 levaram à construção de aeronaves modernas dependentes do uso de adesivos estruturais. Estes adesivos estruturais são baseados em polímeros sintéticos, tal como fenólicos, epoxy e acrílicos, os quais têm uma alta resistência mecânica, (Kinloch, 1997).

Geralmente a colagem de estruturas metálicas está restrita para componentes com carregamentos moderados, tal como em estruturas da cauda e fuselagens (reforçadores e *honeycomb*, Hart-Smith, 1981). Na asa a colagem é utilizada nos reforçadores para a transferência de carga, embora mais progresso esteja sendo feito nesta área em pequenos aviões (Hart-Smith, 1981).

No entanto, recentemente com um forte interesse no desenvolvimento de materiais compósitos, as juntas coladas estão se tornando a opção mais viável para estruturas com estes materiais. Especialmente para aeronaves militares, tem-se empregado extensivamente juntas

coladas para permitir operações com altas deformações e com baixo peso em relação às estruturas metálicas equivalentes (Hart-Smith, 1981).

Rebites e parafusos usados frequentemente em juntas mecânicas são pontos de alta concentração de tensão, que podem levar a uma baixa resistência estática e de fadiga da estrutura quando comparada às juntas coladas.

Assim, a principal vantagem das juntas coladas comparadas com as outras juntas mecânicas é a alta resistência à fadiga e à corrosão, juntamente com a superior resistência na união de chapas finas.

No entanto, nas juntas coladas adesivas, a extensiva preparação da superfície requerida e a resistência à degradação devido ao meio ambiente são as duas maiores desvantagens. Porém, deve-se notar que com materiais compósitos a necessidade da preparação da superfície é mínima, não aumentando a complexidade do processo de fabricação. A Tabela 1.1 compara em uma classificação relativa as principais características das juntas aeronáuticas.

Tabela 1.1: Comparação das principais características das juntas aeronáuticas.

	Junta Colada	Junta Rebitada	Junta Soldada	Junta Colada e Soldada
Exigência da preparação da superfície	Alta	Pequena	Pequena	Alta
União de materiais diferentes	Boa	Limitada	Ruim	Boa
Peso adicional na estrutura	Baixo	Alto	Moderado	Moderado
Resistência à fadiga	Alta	Baixa	Moderada	Moderada
Inspeção por ensaio não destrutivo	Muito Limitado	Adequado	Adequado	Limitado
Facilidade na desmontagem	Difícil	Fácil	Difícil	Difícil
Custo de produção	Médio	Baixo	Baixo	Alto
Resistência à degradação pelo meio ambiente	Pobre	Pobre	Moderado	Moderado
Tempo de produção	Baixo	Rápido	Moderado	Baixo

Embora muitos trabalhos teóricos estejam sendo realizados, análises de juntas coladas são muito complexas e existem ainda muitas limitações e incertezas no que se pode prever.

O projeto de juntas coladas é um processo iterativo no qual uma confiável distribuição de tensões, adequados critérios de falha, conhecimento dos efeitos ambientais e um processo de fabricação robusto são necessários para a determinação de uma adequada configuração de junta.

No entanto, o rápido desenvolvimento dos computadores tem permitido que estes problemas de engenharia sejam solucionados de forma muito mais rápida do que antes.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo estudar estruturas aeronáuticas metálicas reforçadas por *doublers* colados, através do uso de modelos analíticos, numéricos e experimentais.

Doublers são chapas adicionais unidas a uma chapa base como reforço localizado para diminuir o nível de tensão. Os *doublers* colados constituem em duas ou mais chapas sobrepostas aderidas por um filme adesivo que promovem uma maior integração das peças, e tem o potencial de aumentar o aproveitamento de matéria-prima e de reduzir o tempo de montagem.

Os objetivos específicos contidos neste trabalho são os seguintes:

- Elaborar um estudo bibliográfico, sobre os métodos analíticos para o cálculo das distribuições de tensões no adesivo em geometrias 2D de *doublers* colados.
- Estudar e implementar os principais métodos analíticos para o cálculo das distribuições de tensões no adesivo.
- Implementar modelos numéricos 2D que permitam a validação dos modelos analíticos.
- Desenvolver um *software* que reúna diversos modelos analíticos e interaja com os modelos numéricos de forma facilitada ao usuário.
- Do modelo numérico validado, desenvolver modelos mais complexos 3D.
- Elaborar metodologias experimentais para os ensaios de *doublers* colados.
- Projetar corpos de prova (CDPs) com o auxílio do modelo numérico 3D validado.
- Utilizar e modificar um *software* de Processamento Digital de Imagens, DIC, e validar com a extensometria nos ensaios experimentais.
- Ensaiar experimentalmente os CDPs e validar com os modelos analíticos e numéricos.
- Utilizar o conhecimento adquirido com os CDPs e projetar subcomponentes da estrutura aeronáutica para ensaios estáticos e em fadiga.
- Desenvolver uma metodologia de otimização paramétrica, com o intuito de diminuir o peso dos subcomponentes.

- Ensaiar experimentalmente os subcomponentes e validar com os modelos numéricos.

1.3 Organização do texto

Este trabalho está dividido em oito capítulos, descritos a seguir:

Capítulo 1 – Neste capítulo está descrito a motivação para esta dissertação e seus objetivos.

Capítulo 2 – Este capítulo faz uma revisão bibliográfica de juntas coladas e suas aplicações na indústria aeronáutica, além de uma breve introdução aos métodos de análises para estas juntas.

Capítulo 3 – Capítulo com os modelos analíticos de algumas configurações de *doublers* colados. Além disso, mostra alguns efeitos importantes na análise de *doublers* colados.

Capítulo 4 – Neste capítulo estão contidos os modelos numéricos para análise de *doublers* colados 2D.

Capítulo 5 – Capítulo com os resultados da implementação dos modelos analíticos do Capítulo 3 e comparação com os modelos numéricos do Capítulo 4.

Capítulo 6 – Este capítulo mostra resumidamente o *software* criado para análise de *doublers* colados.

Capítulo 7 – Capítulo com a aplicação prática dos estudos realizados nos capítulos anteriores. Com projeto e elaboração de metodologias experimentais para os corpos de prova (CDPs) de *doublers* colados e os resultados experimentais e numéricos destes CDPs.

Capítulo 8 – Este capítulo finaliza o trabalho com o projeto de um painel representativo de estrutura aeronáutica (subcomponente), com uma ferramenta de otimização paramétrica para a diminuição do peso. Mostra também os ensaios experimentais elaborados para os subcomponentes e seus resultados.

Capítulo 8 – Capítulo das conclusões e sugestões para a continuidade deste trabalho.

Capítulo 2

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentado um resumo da revisão bibliográfica realizada sobre o estudo do comportamento mecânicos dos adesivos em juntas coladas. Este estudo teve ênfase no cálculo das distribuições de tensões no adesivo em geometrias de *doublers* colados.

2.1 Juntas coladas

Embora a indústria aeronáutica represente uma das maiores usuárias de materiais adesivos estruturais, poucas aplicações atualmente envolvem juntas coladas estruturais. No entanto, o desenvolvimento de novos materiais e adesivos resistente, como os materiais compósitos, sugere que adesivos estruturais tenham enormes potenciais em aplicações futuras.

De fato, juntas coladas sozinhas ou em combinação com outros métodos de junção, representam uma das principais tecnologias disponíveis para a exploração de novos materiais e para o desenvolvimento de projetos inovadores de configurações estruturais.

A Figura 2.1 mostra algumas das configurações de juntas coladas típicas. Esta figura serve como uma ilustração útil para as configurações de juntas descritas posteriormente.

A junta *single-lap* é um dos projetos de juntas mais comuns empregados na indústria. Além disso, a junta *single-lap* é fácil de inspecionar por ultrassom, pois uma completa inspeção pode ser feita de apenas um lado da junta. Em adição, a junta *single-lap* é frequentemente usada para demonstrar a precisão dos cálculos teóricos de tensão no adesivo, devido a sua maior simplicidade em relação às outras configurações de juntas.

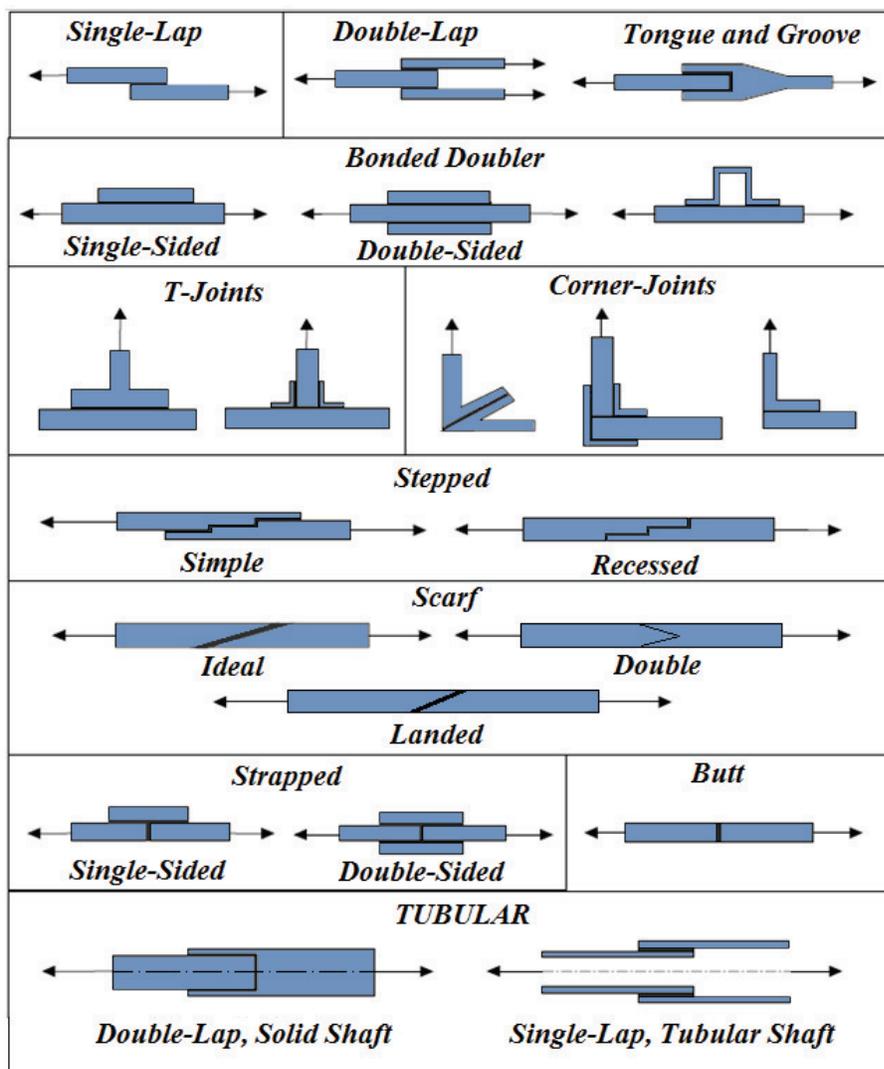


Figura 2.1: Típicas configurações de juntas coladas.

Um dos artigos mais citados na literatura em análise de tensões de juntas adesivas é Goland e Reissner (1944) em juntas *single-lap*. Este artigo foi significativamente importante por chamar a atenção aos efeitos da deflexão do aderente na tensão de *peel* (normal) e tensão de cisalhamento na camada de adesivo das juntas *single-lap*.

Apesar de consideráveis esforços de um número de pesquisadores para desenvolver modelos analíticos para as análises de juntas coladas, questões conflitantes ainda permanecem. Principalmente a respeito da carga de falha que ainda é muito difícil de prever, além de teorias incorretas mostrarem que a resistência da junta aumenta com o aumento da espessura do adesivo.

Alguns dos melhores livros para análise de juntas coladas estruturais são Tong e Steven (1999), Adams et al. (1997).

Para se analisar as juntas coladas no estágio do ciclo de projeto, importantes propriedades devem ser consideradas, como a resistência, espessura, peso e custo da junta.

Nesta revisão, a análise de juntas coladas estará limitada para os efeitos de carregamento estático, embora cargas cíclicas e fadiga dos materiais tenham sido consideradas no projeto dos subcomponentes descritos no Capítulo 8. É interessante enfatizar que no estudo das juntas coladas, o carregamento estático está recebendo as maiores atenções no desenvolvimento de modelos analíticos que descrevem o seu comportamento físico.

A revisão começa com uma descrição dos métodos de análise de tensões para juntas coladas, seguidas por:

- Aplicação das juntas coladas na indústria aeronáutica.
- Métodos de análises de tensões para configurações gerais de juntas coladas com ênfase em *doublers*.
- Revisão de *softwares* computacionais especificamente desenvolvidos para análise de tensões de juntas coladas.
- Teoria das juntas *single-lap* – uma detalhada revisão da teoria clássica de 1938-2000 (carregamento estático).
- Introdução aos *doublers* colados.

2.2 Aplicação das Juntas Coladas na Indústria Aeronáutica.

A vantagem em substituir juntas mecânicas por juntas coladas para a indústria aeronáutica está no aumento da vida da estrutura do avião e na redução do custo de manutenção.

Como exemplos de desvantagens das juntas mecânicas em relação às juntas coladas, observa-se que em juntas rebitadas e parafusadas, os furos de rebites e parafusos são pontos de concentração de tensão, onde trincas por fadiga podem formar. Outro exemplo está na utilização de juntas soldadas, onde a estrutura pode sofrer do processo de corrosão e dificultar a união de materiais diferentes.

Assim, como aeronaves modernas são agora projetadas para incluir uma grande quantidade de materiais compósitos e conexões de materiais diferentes, a junta colada tem se mostrado a melhor opção. Estas juntas coladas são usadas hoje principalmente para fixar reforçadores na

fuselagem e na asa para enrijecer a estrutura contra flambagem. A Figura 2.2, mostra um exemplo destes reforçadores fixados diretamente ao revestimento.

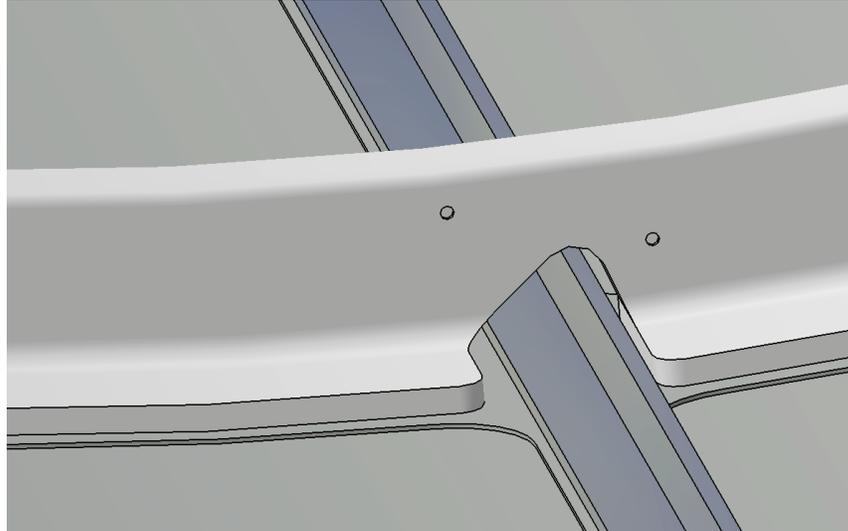


Figura 2.2: Exemplo de caverna fixada diretamente ao revestimento.

Para estruturas metálicas, a lâmina de adesivo é normalmente fina (0.1 mm – 0.5 mm) e a preparação da superfície e a seleção do adesivo são de extrema importância, tendo-se em conta que um típico avião subsônico é projetado para trabalhar em uma faixa de -55° à $+80^{\circ}$ (Higgins, 2000). No entanto, para materiais compósitos, a espessura da camada colada pode ser muito maior (na ordem de muitos milímetros).

2.3 Análise de Tensão.

O método mais atrativo para a modelagem matemática é montar um conjunto de equações diferenciais para descrever o equilíbrio de tensão na unidade de largura da junta. As variáveis que determinam a solução são as propriedades elásticas do material (Módulo de Young, Razão de Poisson e curva Tensão-Deformação) e a geometria da junta (espessura do aderente, espessura do adesivo, comprimento da zona colada e etc.).

Usando funções de tensões ou outros métodos, soluções algébricas fechadas podem ser encontradas. No entanto, análises mais complexas podem ser resolvidas numericamente com o auxílio computacional, como por exemplo, o uso do método dos elementos finitos (MEF).

Condições de deformação plana são normalmente assumidas juntamente com a variação constante/linear da tensão através da espessura do adesivo. No caso mais simples, onde o adesivo e o aderente são considerados elásticos, a solução pode ser obtida pelas condições de contorno. Porém, estes métodos podem se tornar bastantes complexos com o surgimento da não-linearidade geométrica, com geometrias mais complexas e quando efeitos de largura finita são considerados.

As consequências da não-linearidade varia do nível de deformação, rotação da junta e da plasticidade do material. No entanto, fazendo-se várias simplificações, é possível produzir soluções que possam ser usadas para várias geometrias e parâmetros de materiais, cobrindo uma grande faixa de casos.

A plasticidade é incorporada usando uma expressão matemática para aproximar a curva tensão-deformação da Figura 2.3. Um critério de escoamento é então usado para determinar com qual tensão o adesivo começa a escoar, normalmente por um critério de von Mises modificado.

Em quase todos os casos um método iterativo de solução deve ser usado. Como pode ser visto na Figura 2.3, várias possibilidades existem de modelos matemáticos para modelar o comportamento do adesivo e obter uma solução fechada do problema. Hart-Smith (1973a) obteve soluções analíticas para juntas de sobreposição simples (*single-lap*) com material não-linear, mas sujeito à muitas simplificações e não considerando a tensão de *peel* no adesivo. Ele escolheu os dois modelos seguintes para o comportamento do adesivo em tensão cisalhante:

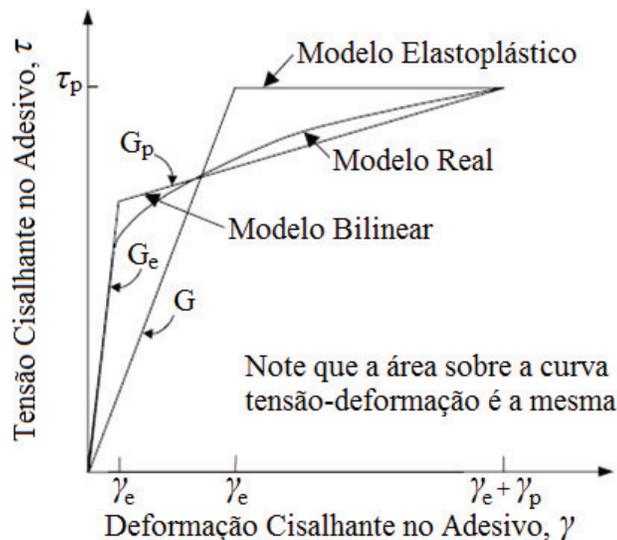


Figura 2.3: Curva tensão-deformação cisalhante e modelos matemáticos.

a) Modelo elastoplástico para comportamento da curva tensão cisalhante-deformação:

$$\tau = \begin{cases} G\gamma & \gamma \leq \gamma_e \\ \tau_p & \gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_P \end{cases} \quad (2.1)$$

b) Modelo bilinear para comportamento da curva tensão cisalhante-deformação:

$$\tau = \begin{cases} G_e\gamma & \gamma \leq \gamma_e \\ \tau_e + G_P(\gamma - \gamma_e) & \gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_P \end{cases} \quad (2.2)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do adesivo; γ é a deformação cisalhante do adesivo; τ é a tensão cisalhante no adesivo. Os índices e e P indicam a região elástica e plástica respectivamente.

Além das complexidades nos modelos analíticos, a validação experimental dessas teorias para prever a tensão no adesivo é muito difícil, devido a espessura do adesivo ser muito fina, tipicamente na ordem de 0.1 para 0.5 mm. Uma alternativa na solução desses problemas é a utilização do método numérico dos elementos finitos.

2.4 Método dos Elementos Finitos (MEF) para Juntas Coladas.

O método dos elementos finitos é uma das técnicas numéricas mais poderosas, robustas e versáteis, sendo amplamente aplicado em quase todos os campos da engenharia mecânica computacional.

Wooley e Carver (1971) e Adams e Peppiatt (1984) foram os primeiros a empregar o método dos elementos finitos para determinar a distribuição de tensão em juntas coladas.

Nos dias de hoje, o método dos elementos finitos tem sido amplamente usado na análise e projeto dessas juntas. Uma variedade de aspectos importantes, tal como geometrias complexas, propriedade do material não-linear e grandes deformações podem ser incluídas nas análise devido ao grande avanço da computação.

No entanto, não é um trabalho fácil estabelecer um modelo de elementos finitos apropriado para juntas coladas. Existem muitas questões que necessitam ser consideradas cuidadosamente para gerar um adequado modelo de junta. Por exemplo, que tipo de modelo deverá ser usado para modelar a geometria da junta? O comportamento não-linear do material deverá ser considerado no modelo? Nesta seção será feita uma breve explicação destes detalhes de modelamento.

Para prever o carregamento de falha, fazer análises detalhadas de juntas coladas ou análise de geometrias complexas, a análise por elementos finitos se torna uma das melhores opções. Além disso, resultados suficientemente precisos podem ser obtidos pelo refinamento da malha somente na região de alta concentração de tensão, Figura 2.4. No exemplo da Figura 2.4, a malha no aderente também necessita ser refinada devido à existência de um limite para a razão de aspecto.

O grande problema aqui é na interpretação dos dados devido à singularidade de tensão. Ou seja, devido à presença de um canto vivo nos modelos de juntas coladas, uma singularidade de tensão ocorrerá nos pontos A, C, D e F mostrados na Figura 2.5.

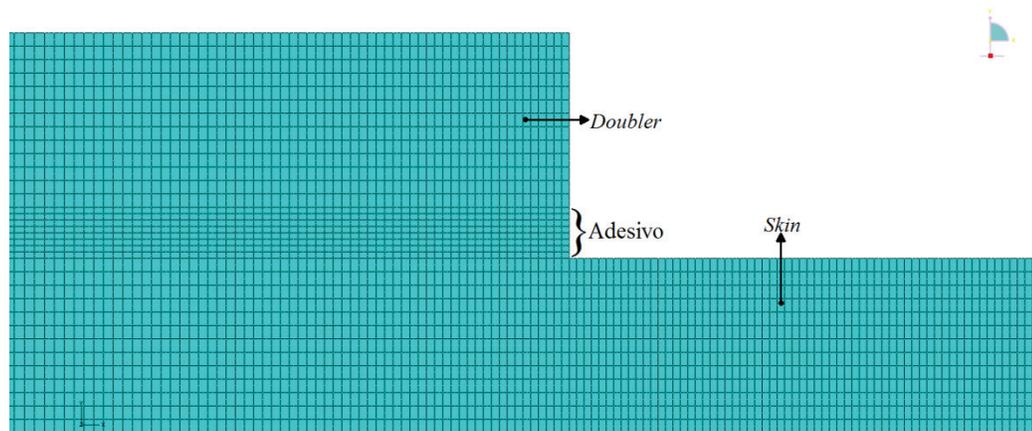


Figura 2.4: Malha realizada por elementos finitos no canto do *doubler* colado.

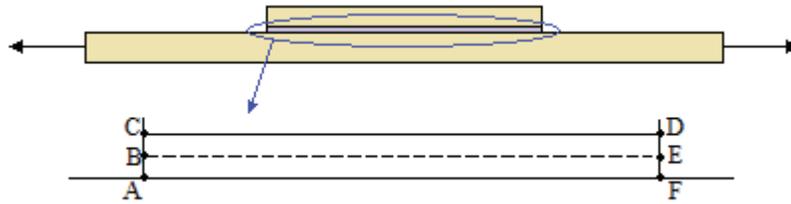


Figura 2.5: Pontos de singularidade, A, C, D e F em uma junta *one-sided doubler* (a linha BE representa a linha de centro no adesivo).

É bem conhecido que a singularidade de tensão existe em um canto entre o adesivo e os aderentes (Williams, 1952, Erdogan e Hein, 1971; Groth, 1988; Akisanya e Fleck, 1997, Tong e Steven, 1999). Os estudos mostraram também que, para juntas coladas com adesivos frágeis a intensidade de tensão da singularidade no canto da interface pode ser utilizada para prever a falha de juntas coladas (Groth, 1988; Reedy, 1990).

Para a junta adesiva mostrada na Figura 2.6, existem dois cantos com singularidade, nos pontos A e B. Para aplicar a abordagem da mecânica da fratura, tanto a ordem e a intensidade da singularidade de canto devem ser quantificadas em termos da geometria da junta e das cargas aplicadas. Enquanto a ordem de singularidade pode ser obtida a partir de uma análise assintótica (Williams, 1952; Bogy, 1971, Erdogan e Hein, 1971), a magnitude dos fatores de intensidade de tensão requerem adequar a solução assintótica com a solução externa. Um método eficiente de realizar esta análise assintótica é empregar o método de elementos finitos.

No caso do canto vivo mostrado na Figura 2.7, o fator de intensidade de tensão K é definido da seguinte forma em termos da componente de tensão normal à interface, $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pi) = \frac{K}{r^\lambda} \quad (2.3)$$

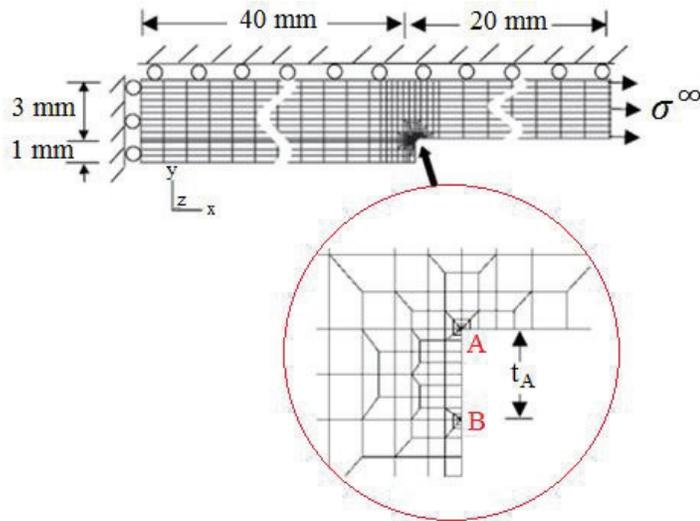


Figura 2.6: Malha de elementos finitos para uma junta *double-lap*.

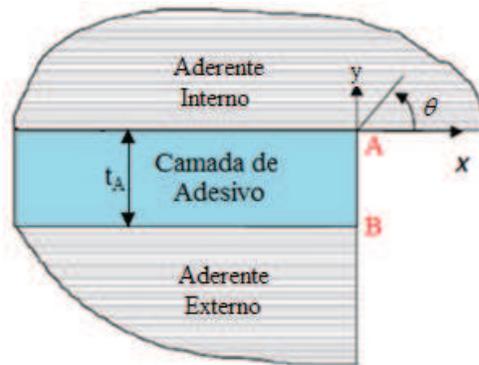


Figura 2.7: Canto vivo na camada de adesivo.

Neste caso, a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da interface (Wang e Rose, 2000) é:

$$\tau_{r\theta}(\theta = \pi) = \frac{K}{r^\lambda} v_A \quad (2.4)$$

onde o parâmetro λ indica a ordem da singularidade de canto, que é mostrado na Figura 2.8 para um canto quadrado, e v_A é a razão Poisson da camada adesiva.

A ordem da singularidade no canto quadrado pode ser expressa como:

$$\lambda = 1.29v_A(1 - 0.768v_A) \quad (2.5)$$

Enquanto o fator de intensidade de tensão é dado por:

$$K = \left[\hat{A}(v_A)\sigma_{max}^{(A)} + \hat{B}(v_A)\tau_{max}^{(A)} \right] t_A^\lambda \quad (2.6)$$

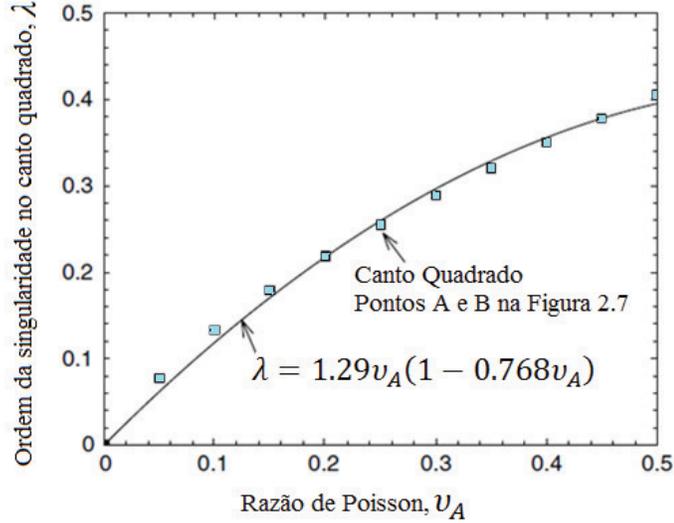


Figura 2.8: Ordem de singularidade de canto para alguns valores da razão de Poisson (Tong e Steven, 1999).

onde $\sigma_{max}^{(A)}$ e $\tau_{max}^{(A)}$ são as máximas tensões de *peel* e de cisalhamento no adesivo respectivamente, que podem ser obtidas por métodos indicados no capítulo das soluções analíticas (Capítulo 3). Os parâmetros \hat{A} e \hat{B} dependem exclusivamente da Razão de Poisson do adesivo via as seguintes equações (Wang e Rose, 2000):

$$\hat{A}(v_A) = 0.836 - 2.23v_A + 6.29v_A^2 - 9.64v_A^3 \quad (2.7)$$

$$\hat{B}(v_A) = 3.12 - 15.8v_A + 40.1v_A^2 - 37.6v_A^3 \quad (2.8)$$

A maneira mais comum de resolver o problema da singularidade de tensão em análises por elementos finitos é analisando a tensão ao longo da linha central do adesivo. Além de um refino adequado da malha neste ponto para obter uma convergência dos resultados. No entanto, esta não é a máxima tensão e pode ser descrita mais corretamente como ‘tensão média’, especialmente se a espessura do adesivo for menor que 0.2 mm.

A singularidade de tensão não está contida nas análises clássicas de juntas coladas, tal como em Goland and Reissner (1944).

Uma alternativa aproximada para se resolver a singularidade de tensão é usar os dados ao longo da linha CD da Figura 2.5 e assumir que a tensão máxima será no terceiro nó, Figura 2.6. Obviamente que a escolha do nó depende do refinamento da malha. Outra alternativa é utilizar metade da espessura do adesivo como referência na escolha do nó.

Além disso, para se modelar uma junta com muitos detalhes, existe sempre um limite onde se necessita de um compromisso entre o custo e a precisão dos resultados. Na realidade, todas as juntas são estruturas tridimensionais (3D), Figura 2.9 (a), onde as camadas de aderentes e a camada de adesivo podem ser modeladas usando elementos sólidos.

Em adição, se uma malha refinada é requerida, com dois ou mais elementos na direção da espessura, a solução com elementos sólidos se torna bastante cara. Ou seja, elementos sólidos seriam viáveis se o problema puder ser resolvido efetivamente para uma análise linear. No entanto, isto se torna inviável quando grandes deformações e propriedades não-lineares do material são requeridas para a solução.

Como altos gradientes de tensões são esperados, uma malha refinada deverá ser usada no canto perto do final da zona colada (*overlap*), na direção da largura. Na direção da espessura, a modelagem da malha camada por camada de aderentes e adesivos pode ser realizada individualmente.

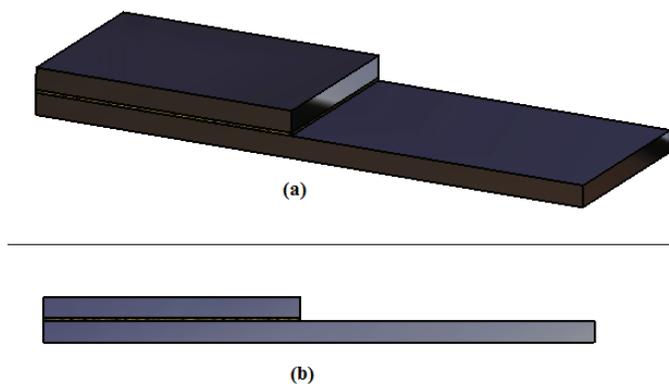


Figura 2.9: *Doubler* colado, representando uma parte de revestimento da estrutura aeronáutica.

(a) Modelo 3D, (b) Modelo 2D.

Uma questão que pode ser feita é quando uma análise bidimensional no estado plano de tensão ou no estado plano de deformação deverá ser usada ao invés de uma análise completa 3D.

Richardson et al (1993) apresentaram uma comparação entre as análises por elementos finitos bidimensionais e tridimensionais de juntas adesivas. Seus resultados mostram que para certo número de juntas coladas, uma solução bidimensional é mais do que adequada, como mostrado na Figura 2.9 (b).

Outra diferença é que um elemento sólido de 8 nós usa 9 pontos (3 por 3) no método de integração da quadratura de Gauss, enquanto o elemento quadrilateral de 4 nós emprega quatro pontos (2 por 2) na integração da quadratura Gaussiana para o cálculo da matriz de rigidez (Zienkiewicz and Taylor, 1989).

2.5 Software de Juntas Coladas

Apesar das limitações das análises de juntas coladas, um número razoável de *software* tem sido produzido a fim de aumentar a inclusão das complexidades nos problemas de análise de juntas coladas.

Muitos dos pacotes computacionais que não utilizam o método dos elementos finitos oferecem características similares para um número limitado de geometrias de juntas. As diferenças estão nas limitações no número de geometrias de juntas ou nas condições de contornos disponíveis.

Embora estes *software* forneçam ao usuário um projeto relativamente econômico, sua versatilidade para o cálculo de juntas coladas é muito limitada. Uma revisão dos *software* é dada a seguir:

Hart-Smith (1974) - Desenvolveu um programa de computador em FORTRAN para análise de várias juntas, *double-lap* e *single-lap*, com aderentes de materiais iguais ou diferentes. Este programa é desenvolvido para aplicações específicas na construção aeronáutica, e geralmente não pode ser aplicado em outras áreas da engenharia. O programa assume falha adesiva desconsiderando a falha coesiva e está incorporado no primeiro programa estrutural de juntas coladas (PABST) que foi desenvolvido entre 1976-1981.

ESDU *International* - Programa para análise de juntas *single-lap*, *double-lap* e *multi-step*. No entanto, o programa é limitado para resolver análises lineares de tensão de *peel* e

cisalhamento. O programa é desenvolvido a partir do trabalho de Volkersen (1938) e Goland and Reissner (1944).

ESAComp - É uma *software* de análise de elementos estruturais laminados com um ambiente bastante interativo. O trabalho foi desenvolvido pela *European Space Reserch and Technology Centre* (ESTEC) da *Eueopean Space Agency* (ESA) com a visão de criar um *software* aberto combinando todas as necessidades de análises de compósitos. Apesar de sua origem ser no campo aeroespacial, ESAComp tem sido desenvolvido como uma ferramenta geral de compósitos para usuários da indústria ou pesquisadores. A primeira versão do ESAComp foi realizada em Fevereiro de 1998, sendo primeiramente programado em linguagem C. As juntas coladas incluídas no ESAComp são: *single-lap*, *doublers*, *double-lap*, *single sided stepped* e *scarfed lap*.

2.6 Teoria da Junta de Sobreposição Simples (*Single-lap*)

Para juntas *single-lap* muitas teorias simplificadas tais como Goland e Reissner (1944) mostram com sucesso os efeitos da rigidez do adesivo ou do aderente, comprimento da zona colada e outros parâmetros geométricos da junta. Estas teorias podem também mostrar os parâmetros dominantes na junta e que afeta drasticamente a sua resistência, como por exemplo, prevendo de forma rápida se um adesivo diferente é melhor que um aumento do comprimento da zona colada na junta.

A principal dificuldade da teoria desses métodos é na previsão da falha e na análise de juntas coladas entre diferentes materiais (por exemplo, alumínio com aço e metal com compósito). Além disso, todas as teorias simplificadas indicam que uma espessura maior do adesivo oferece maior resistência do que uma espessura menor, no entanto, existe uma espessura ótima a partir da qual a resistência cai.

A Tabela 2.1 compara as características e simplificações assumidas de muitas análises clássicas e numéricas começando com Volkersen (1938). Nesta tabela, todas as análises têm as seguintes considerações: comportamento do material elástico, não considera *spew fillet* no adesivo, que será explicado mais adiante, aderentes isotrópicos, aderentes idênticos, largura da junta unitária e nenhuma singularidade de tensão nos resultados. Para todos os estudos de juntas coladas, estes artigos são considerados como a base do conhecimento. Rodriguez (2010) fez um

estudo detalhado para comparar o resultado dos artigos mais populares, mostrado na Figura 2.10 e Figura 2.11.

Tensão de Cisalhamento no Adesivo

Da Tabela 2.1, todas as análises, exceto Allman (1977), preveem a máxima tensão de cisalhamento na extremidade da camada de adesivo, o qual viola as condições de contorno de tensão-livre e é um resultado que ignora a variação de tensão normal através da espessura do adesivo.

Assim, analisando os resultados dos modelos da Tabela 2.1, verifica-se que o cálculo da tensão de cisalhamento máxima varia 33%, mas quando Hart-Smith (1973a) e Allman (1977) não são incluídos, este valor se reduz para 9%. Além disso, os picos de tensão na teoria de Hart-Smith e Allman são nivelados assumindo a plasticidade e a condição de tensão zero na extremidade do adesivo, e as tensões de cisalhamento previstas por Ojalvo e Eidinoff (1978) são as mais altas, isto porque, as outras teorias fornecem a tensão média através da espessura, enquanto a linha que representa a tensão máxima de cisalhamento está na interface.

Tensão de *Peel* no Adesivo

Novamente da Tabela 2.1, a análise de Delale et al. (1981), o qual considera a deformação cisalhante, prevê a maior tensão normal, aproximadamente 30% mais alta que as outras teorias. Isto está de acordo com a revisão de Carpenter (1991). No entanto, Allman (1977), o qual também considerou deformação cisalhante, tem um valor mais equivalente com as outras teorias, isto é atribuído devido à condição de tensão cisalhante nula.

Tabela 2.1: Complexidade dos métodos analíticos de 1938 a 2000.

	Plasticidade	Peel	Aderentes Ortotrópicos	Cisalhamento	Condição de Canto Livre	Efeitos Térmicos	Variação de Tensão na Espessura	Soluções Fechadas	Aderentes Diferentes
Volkersen (1938)								✓	✓
Goland and Reissner (1944)		✓						✓	
Hart-Smith (1973a)	✓	✓	✓					✓	✓
Allman (1977)		✓	✓	✓	✓		✓	✓	
Renton and Vissen (1977)		✓	✓			✓		✓	
Ojalvo and Eidinoff (1978)		✓					✓	✓	
Yuceoglu and Updike (1981)		✓	✓	✓				✓	
Delale et al. (1981)		✓	✓	✓			✓		
Chen and Cheng (1983)		✓		✓	✓		✓	✓	
Bigwood and Crocombe (1989)		✓						✓	✓
Bigwood and Crocombe (1990)	✓	✓						✓	✓
Chen and Cheng (1991)		✓		✓	✓		✓	✓	✓
Adams and Mallick (1992)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Tsia and Morton (1994)		✓	✓	✓				✓	✓
Yang and Pang (1996)		✓	✓	✓				✓	✓
Tsai ET AL. (1998)				✓				✓	
Sawa eT aL. (2000)		✓		✓			✓		✓

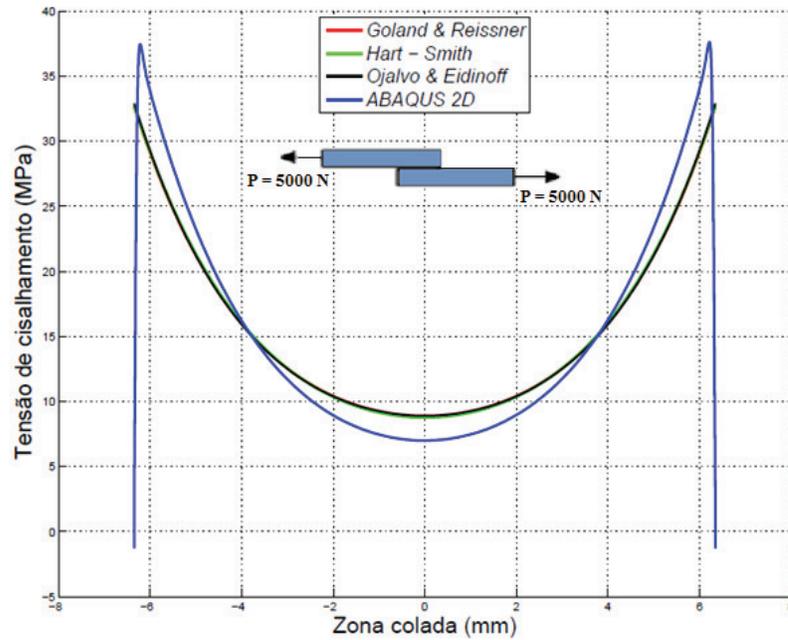


Figura 2.10: Comparação entre os modelos analíticos e o modelo numérico (ABAQUS 2D) da tensão cisalhante no adesivo para uma carga de 5000 N

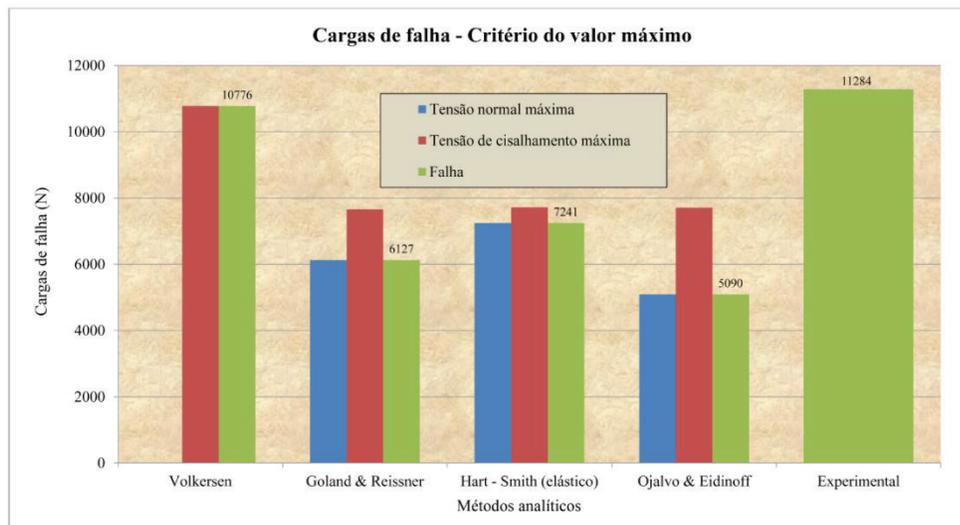


Figura 2.11: Cargas de falha para o critério do valor máximo, Rodriguez (2010).

Os resultados das teorias de juntas de sobreposição simples indicam que a resistência estática da junta aumenta com os seguintes fatores:

- Baixo módulo de cisalhamento do adesivo (por exemplo, adesivo dúctil);
- Aderentes com a máxima resistência à flexão possível;
- Para materiais compósitos, fibras orientadas na direção do comprimento da junta.

Para a colagem de materiais compósitos, a técnica de análise é essencialmente a mesma da análise com aderentes isotrópicos, embora devida atenção deva ser feita para a baixa resistência ao cisalhamento de compósitos unidirecionais.

2.7 Introdução ao *Doublers* Colado

Nos capítulos seguintes será feito um estudo detalhado dos *doublers* colados. Para facilitar a compreensão dos *doublers* colados nas estruturas aeronáuticas, será feita nesta seção uma breve introdução deste tipo de junta.

As estruturas de fuselagem da maioria das aeronaves comerciais modernas são classificadas como estruturas semi-monocoque metálicas. Elas consistem em uma casca fina ou revestimento, reforçado por vários perfis longitudinais (reforçadores) e anéis transversais (cavernas), como ilustrado na Figura 2.12.

Além desta estrutura básica, em áreas de maior concentração de tensão, como ao redor de portas e janelas, ou de aplicação de cargas concentradas, como ligação de trem de pouso e asa, existem reforços localizados e peças especiais.

O revestimento comumente é composto de diversas chapas de ligas de alumínio, unidas por emendas longitudinais e circunferenciais rebitadas, para formar a seção da fuselagem. Os reforçadores são perfis extrudados de alumínio, rebitados ao revestimento. As cavernas podem ser usinadas ou feitas de chapas conformadas de alumínio rebitadas diretamente ao revestimento, ou por meio de peças auxiliares, chamadas de *shear-clips*.

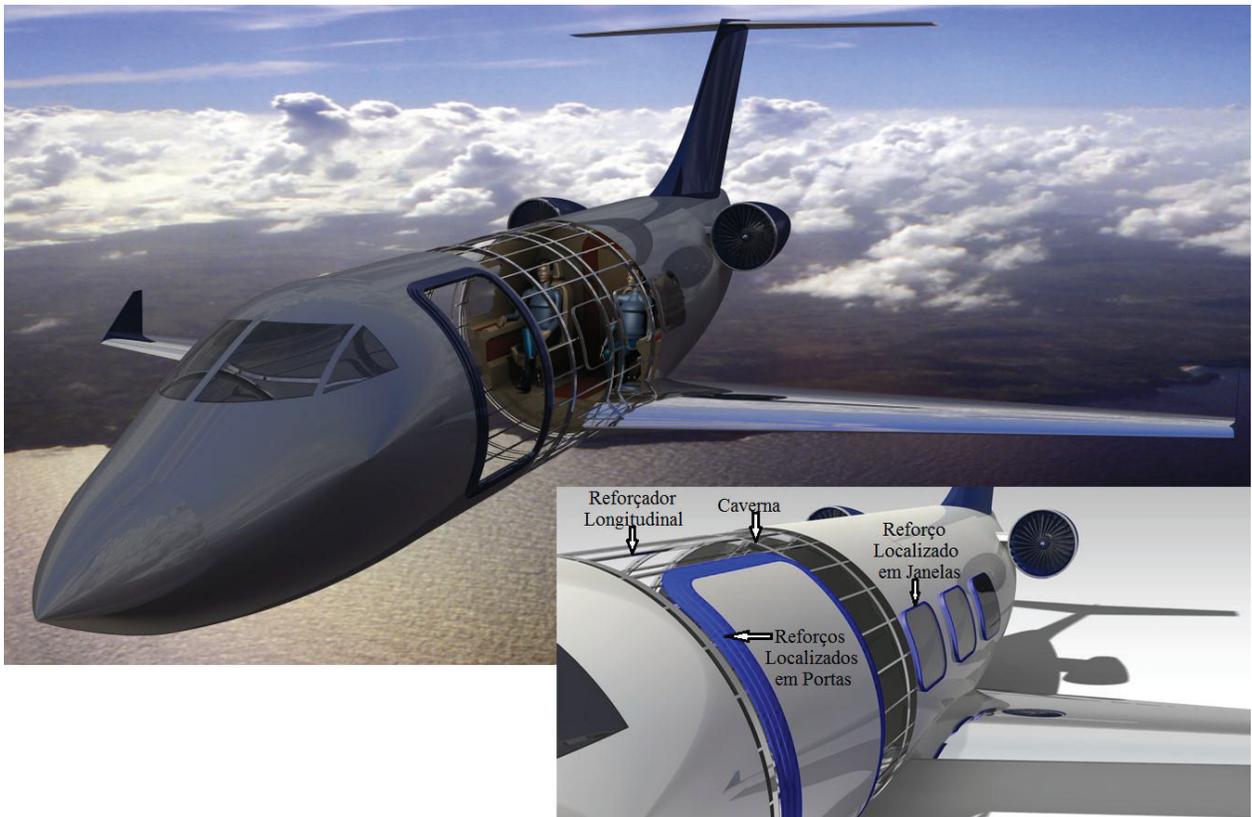


Figura 2.12: Exemplo de estrutura de fuselagem semi-monocoque metálica reforçada por *doubler*.

Em estruturas de fuselagem convencionais rebitadas, uma chapa de revestimento possui uma espessura base maior em pontos de concentração de tensão, como por exemplo, em áreas de emendas rebitadas ou cantos de portas e janelas. Esta chapa é usinada quimicamente em áreas menos críticas, visando diminuição de peso. Assim, a relação entre o peso de material que efetivamente está no produto e o peso de material comprado (*buy to fly*) diminui, resultando em maiores custos.

Em estruturas de asas integrais, onde as espessuras são maiores nas proximidades da raiz, e são usinadas ao longo da envergadura, a razão *buy to fly* pode chegar a menos de 10%. A Figura 2.13 mostra um exemplo de chapa de revestimento usinada quimicamente.

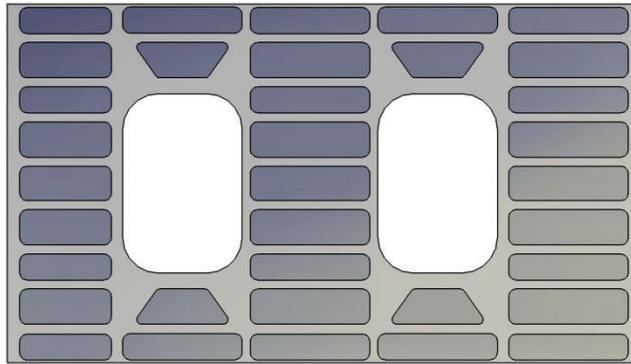


Figura 2.13: Exemplo de revestimento com usinagem química.

Assim, para se evitar a usinagem química em algumas áreas críticas da fuselagem, são instaladas chapas adicionais chamadas de *doublers*, rebitadas à chapa base como reforço localizado para diminuir o nível de tensão. Este conceito, que é o mesmo aplicado em reparos de trincas e outros danos de operação, tem a desvantagem de introduzir altas concentrações de tensão na interface com o restante da estrutura, geralmente na primeira linha de prendedores que são os mais carregados. Além disso, devido à grande quantidade de prendedores instalados manualmente, os quais muitas vezes são prendedores de titânio que exigem alta precisão de furação, o tempo e o custo de montagem são relativamente altos.

Portanto, o *doubler* colado é uma alternativa de junta bastante eficaz em substituição as outras alternativas presentes hoje na indústria aeronáutica. Como definição, os *doublers* colados consistem em duas ou mais chapas sobrepostas, unidas por um filme adesivo, que substituem os *doublers* rebitados e eliminam ou reduzem o uso de usinagem química ou mecânica.

Os *doublers* colados promovem uma maior integração das peças, aumentando a relação *buy to fly* e diminuindo o tempo de montagem, o que pode acarretar em menores custos. Estas peças coladas apresentam também uma transferência de carga mais eficiente e com menores concentrações de tensão quando bem dimensionadas, o que resulta em uma maior vida em fadiga da estrutura e em potenciais reduções de peso.

Os *doublers* colados são encontrados dentro de muitas aplicações na estrutura aeronáutica, devido a sua eficiência na transferência de carregamento, baixo custo, alta resistência à corrosão e fadiga, e característica de retardar a propagação de trincas. Entre as principais aplicações: nos cantos de portas, nas janelas, asas e em reparos de trincas e outros danos de operação, como demonstrado na Figura 2.12.

Capítulo 3

3 Modelos Analíticos de *Doublers* Colados 2D.

Uma das chaves para a compreensão da análise e projeto de *doublers* colados é o deslocamento relativo entre o *doubler* e o *skin* (aderente base que pode representar, por exemplo, uma região da fuselagem do avião). Em muitos casos, esses deslocamentos relativos são calculados aproximadamente usando a teoria unidimensional de juntas coladas reforçadas por *doublers*.

Um *doubler* representa uma multiestrutura envolvendo dois substratos (aderentes) e uma camada fina de adesivo. Os estados de tensões que existem em vários níveis em um *doubler* são muito complexos, assim, um esforço considerável tem sido dedicado a desenvolver soluções analíticas simples e precisas.

Estas teorias baseiam-se essencialmente no trabalho de Hart-Smith (1973a, b, c, 1974, 1982, 1999, 2005b) e Duong (2006) e são aplicadas aqui em *doublers*. Usando estas teorias, soluções fechadas podem ser obtidas, além de algumas características de suma importância.

Porém, alguns efeitos importantes não são considerados nessas teorias, como o efeito de borda e singularidade, exceto para o efeito de acoplamento entre a tensão de *peel* e a de cisalhamento em um *doubler* desequilibrado, que pode ser visto na solução de Duong (2006).

Além disso, dentre os modos de falha em juntas coladas, existem três tipos diferentes (Figura 3.1): falha coesiva, falha adesiva e falha do aderente.

A falha adesiva dá-se na interface entre o aderente e o adesivo e pode ser consequência de uma má preparação da junta.

A falha do aderente é a falha que ocorre no *skin* ou no *doubler* antes da falha no adesivo.

A falha coesiva dá-se no interior do adesivo, quando os aderentes e a ligação entre o adesivo e o aderente são mais fortes do que a resistência interna do adesivo. É este tipo de falha, juntamente com a falha do aderente, que os modelos analíticos e numéricos deste trabalho irão abordar.



Figura 3.1: Tipos de falha das juntas coladas.

A comparação dos principais métodos analíticos, a validação desses métodos com o método numérico e a discussão em cima dos resultados serão mostradas no capítulo dos resultados dos modelos de *doublers* colados 2D, Capítulo 5. A união destes modelos será apresentada no capítulo do *software* de *doublers* colados, Capítulo 6.

3.1 Formulação Baker A. et al. (Formulação Apenas da Geometria do *Doubler*)

Antes de iniciar a análise da distribuição de tensão no adesivo para *doublers* colados, primeiramente será mostrada uma formulação apenas para os esforços resultantes na geometria de *one-sided doublers* (Junta colada reforçada com apenas uma camada de reforçador). Isso será feito primeiramente para uma análise linear da geometria, e posteriormente para uma análise não-linear da geometria.

3.1.1 Análise Linear

Para uma análise geometricamente linear, a distribuição de tensão no *skin* e no *doubler* pode ser determinada pela teoria clássica de placas. Considerando a junta rigidamente colada e (\bar{z}) a posição do plano neutro para a configuração de *doubler* dada pela Figura 3.2.

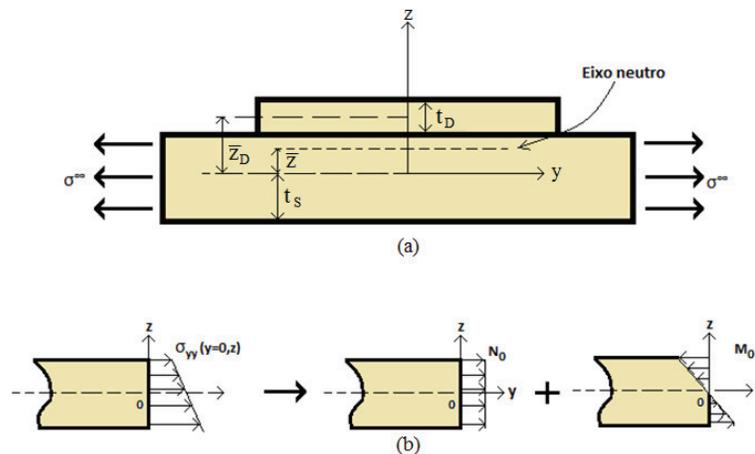


Figura 3.2: (a) *Doubler* sujeito a uma tensão uniaxial; (b) distribuição de tensão na placa.

sendo:

$$\bar{z} = \frac{S(t_S + t_D + 2t_A)}{2(1 + S)} \quad (3.1)$$

onde t representa a espessura, sendo que os índices S , D e A representam o *skin*, o *doubler* e o adesivo respectivamente. S é a razão de rigidez dada por:

$$S = \frac{1 - \nu_S^2}{1 - \nu_D^2} \frac{E_D t_D}{E_S t_S} \quad (3.2)$$

O momento de inércia na região do *doubler* (I_t) é:

$$I_t = I_S + \frac{I_D E'_P}{E'_S} \quad (3.3)$$

onde E' refere-se ao módulo de elasticidade no plano de deformação ($E' = E/(1 - \nu^2)$), e:

$$I_S = \frac{t_S^3}{12} + t_D \bar{z}^2, \quad (3.4)$$

$$I_D = \frac{t_D^3}{12} + \frac{t_D(t_S + t_D - 2\bar{z})^2}{4} \quad (3.5)$$

A distribuição de tensão no *doubler* é assumida ser linear na direção da espessura, assim, isto pode ser especificado em termos da força de superfície N_0 e o momento fletor M_0 por unidade de comprimento na direção x , como mostrado na Figura 3.2 (b).

onde:

$$N_0 = \int_{-\frac{t_S}{2}}^{\frac{t_S}{2}} \sigma_{yy}(y = 0, z) dz \equiv \frac{\sigma^\infty t_S}{1 + S} + \frac{\sigma^\infty t_S^2 \bar{z}^2}{I_t}, \quad (3.6)$$

$$M_0 = \int_{-\frac{t_S}{2}}^{\frac{t_S}{2}} \sigma_{yy}(y = 0, z) z dz \equiv \frac{\sigma^\infty t_S^4 \bar{z}^2}{12I_t} \quad (3.7)$$

3.1.2 Análise Geometricamente Não-Linear

Para grandes deformações, a teoria de análise a ser realizada para a Figura 3.3 deve considerar a não-linearidade geométrica.

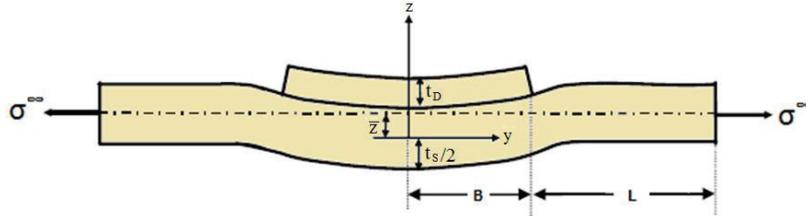


Figura 3.3: Deformação geometricamente não-linear.

Usando a aproximação que considera uma junta rigidamente colada, as equações de equilíbrio na região que contém o *doubler* e na região fora do reforço são:

$$E_S I_t \frac{d^2 w}{dy^2} = \sigma^\infty t_s (w + \bar{z}), \quad |y| \leq B, \quad (3.8)$$

$$E_S I_S \frac{d^2 w}{dy^2} = \sigma^\infty t_s w, \quad a \leq |y| \leq B + L, \quad (3.9)$$

Onde a condição de contorno é dada por:

$$w(y = B + L) = 0 \quad (3.10)$$

A solução geral da deflexão w é dada por:

$$w = \begin{cases} C_1 \cosh \chi y + C_2 \sinh \chi y - \bar{z} & (|y| \leq B), \\ C_3 \cosh \chi_S y + C_4 \sinh \chi_S y - \bar{z} & (a \leq |y| \leq B + L) \end{cases} \quad (3.11)$$

onde:

$$\chi = \left[\frac{\sigma^\infty t_s}{E_S I_t} \right]^{1/2}, \quad \chi_S = \left[\frac{\sigma^\infty t_s}{E_S I_S} \right]^{1/2}, \quad (3.12)$$

Das condições de contorno e simetria:

$$\begin{aligned} w'(y = 0) &= 0, \\ w(y = B -) &= w(y = B +), \\ w'(y = B -) &= w'(y = B +) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde as constantes são dadas por:

$$C_1 = \frac{\bar{z}}{\cosh(\chi)B \left[1 - \frac{\chi[\tanh(\chi_s)B - \tanh(\chi_s)(B + L)]\tanh(\chi_s)B}{\chi_s[1 - \tanh(\chi_s)B\tanh(\chi_s)(B + L)]} \right]}, \quad (3.14)$$

$$C_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$C_3 = C_1 \frac{\chi \sinh(\chi)B \tanh(\chi_s)(B + L)}{\chi_s \cosh(\chi_s)B [1 - \tanh(\chi_s)B \tanh(\chi_s)(B + L)]}, \quad (3.16)$$

$$C_4 = -\frac{C_3}{\tanh(\chi_s)(B + L)} \quad (3.17)$$

A deflexão no centro do *doubler* é dada por:

$$w(y = 0) = C_1 - \bar{z} \quad (3.18)$$

A solução da deflexão (w) no centro da junta $y = 0$ está mostrado na Figura 3.4, para uma representação particular dada pela Tabela 3.1 e para os comprimentos B e L iguais a 80 e 200 mm. A Figura 3.5 representa a deflexão do *one-sided doubler* ao longo da junta.

Tabela 3.1: Propriedades dos materiais e dimensões de um típico *doubler*

	Módulo de Elasticidade (GPa)	Razão de Poisson	Espessura (mm)
<i>Skin</i>	71	0.3	3.0
<i>Doubler</i>	207	0.3	1.0
<i>Adesivo</i>	1.89	0.3	0.2

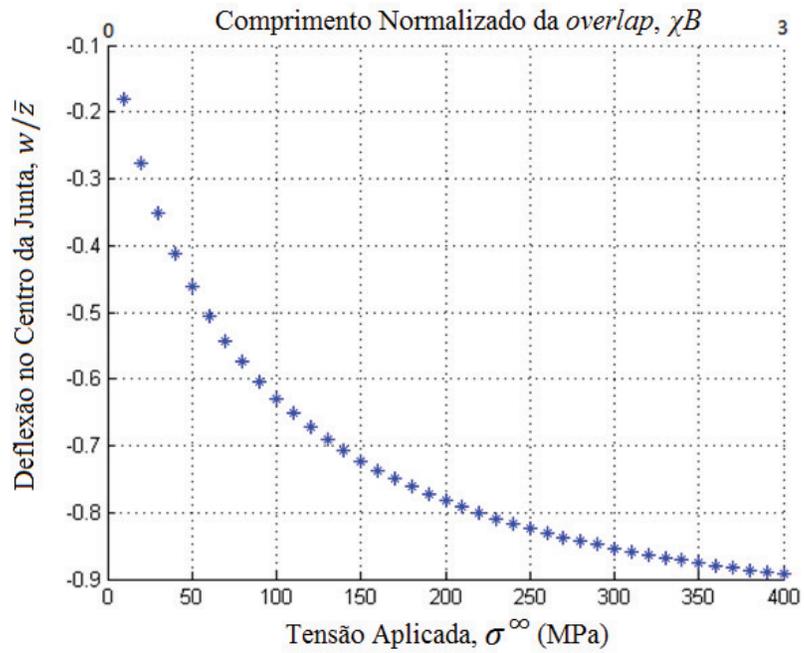


Figura 3.4: Deflexão do *one-sided doubler* medida no centro da *overlap*.

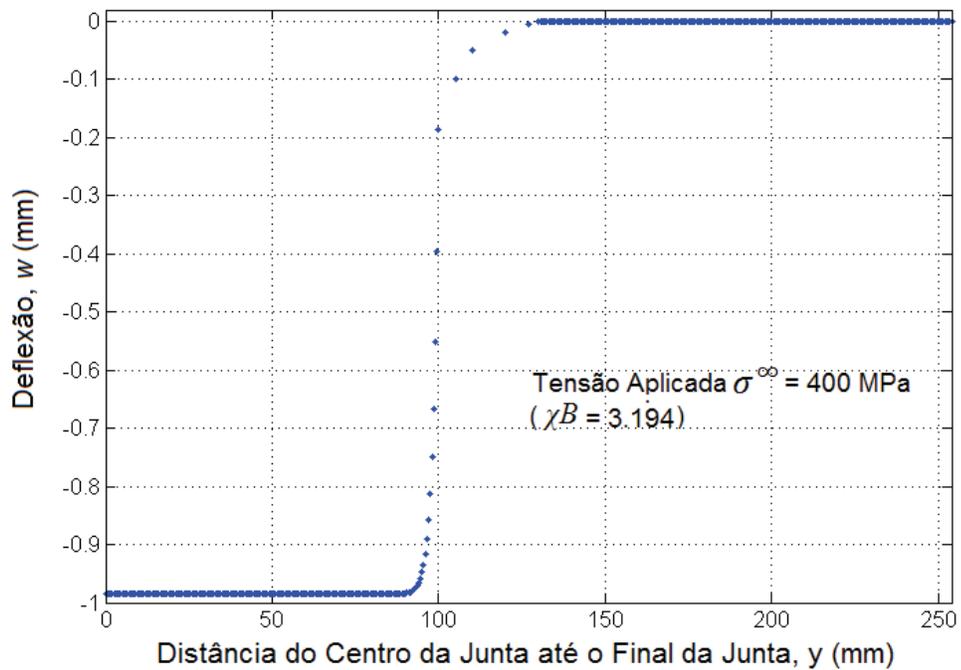


Figura 3.5: Deflexão do *one-sided doubler* ao longo da junta.

Da solução analítica, fica claro que a deflexão w no centro da junta depende de três parâmetros adimensionais, χB , $\chi S/\chi$, e L/B .

Assim, o momento fletor no centro da *overlap* é:

$$M(y = 0) = C_1 \sigma^\infty t_S, \quad (3.19)$$

A força de superfície e o momento fletor podem ser determinados como:

$$N_0 = \frac{\sigma^\infty t_S}{1 + S} + \frac{C_1 \sigma^\infty t_S^2 \bar{z}}{I_t}, \quad (3.20)$$

$$M_0 = C_1 \frac{\sigma^\infty t_S^4}{12 I_t} \quad (3.21)$$

3.2 Modelo de Duong (2006)

Nesta seção será mostrado o modelo analítico simplificado de Duong (2006), para obter a distribuição da tensão de *peel* e cisalhamento no adesivo.

Primeiramente, será abordado o modelo elástico e elastoplástico do adesivo para a geometria de *two-sided doublers* (junta com dois reforçadores colados, um em cada lado do aderente), e em seguida, será mostrado o modelo elástico para a geometria de *one-sided doubler* (junta com um reforçador colado em um lado do aderente).

A formulação mais detalhada para a geometria de *two-sided doublers* está mostrada no Apêndice A, e a formulação mais detalhada para a geometria de *one-sided doublers* está mostrada no Apêndice B.

3.2.1 Análise de Tensão Cisalhante para Two-Sided Doublers

A utilização de *doublers* nos dois lados do *skin* seria o ideal em muitas aplicações na indústria aeronáutica. Como por exemplo, a utilização desta configuração em casos de reparos, forneceria um reforço demasiadamente menor e com um número menor de camadas de *doublers* em relação à utilização do reforço em apenas um lado do *skin*.

Porém, na prática isto não é tão simples, pois na maioria dos casos é praticamente impossível realizar a colagem em dois lados do *skin*, sendo necessária a utilização de *doublers* em apenas um lado.

Primeiramente será feita uma análise elástica do adesivo no estado plano de deformação, referindo-se a Figura 3.6.

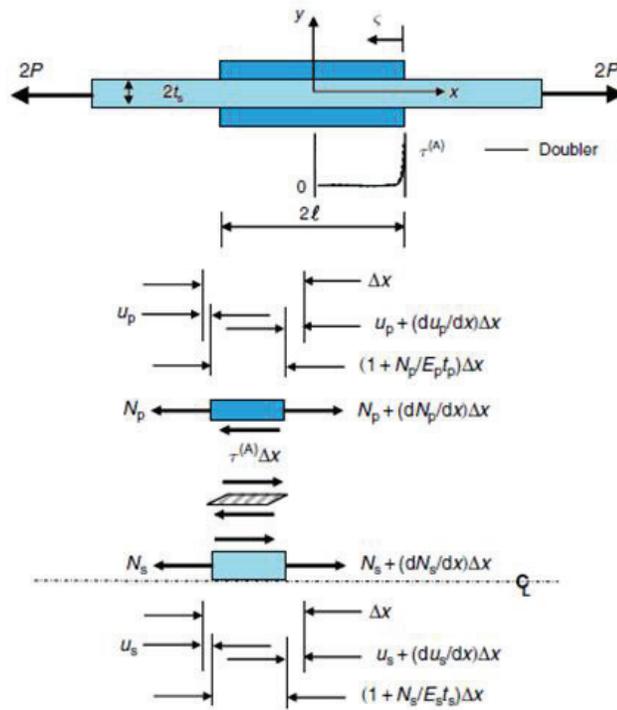


Figura 3.6: Geometria do *two-sided doubler*, e as terminologias utilizadas em suas análises.

A equação diferencial que governa a distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo é dada pela Equação (3.22).

$$\frac{d^2 \tau^{(A)}}{dx^2} - \beta_A^2 \tau^{(A)} = 0 \quad (3.22)$$

onde:

$$\beta_A^2 = \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E_p' t_p} + \frac{1}{E_s' t_s} \right) = \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1+S}{S} \right) \frac{1}{E_s' t_s}$$

$$S = \frac{E_p' t_p}{E_s' t_s} \quad (3.23)$$

$$E_{s,p}' = \frac{E_{s,p}}{1 - \nu_{s,p}^2}$$

sendo u o deslocamento longitudinal, N a carga por unidade de largura, τ a tensão de cisalhamento, γ a deformação angular, E o módulo de elasticidade, α o coeficiente de expansão térmica, t a espessura e G o módulo de cisalhamento. Os índices e subscritos s , p e a denotam o *skin*, *patch (doubler)* e adesivo, respectivamente. ΔT é a variação da Temperatura.

A solução geral da Equação (3.22) é dada pela Equação (3.24).

$$\tau^{(A)} = Ae^{\beta_A x} + Be^{-\beta_A x} \quad (3.24)$$

Das condições de contorno do Apêndice A, a condição de contorno (A.12) implica que $B = 0$, e o coeficiente A é dado por:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{G_A}{\beta_A t_A \cosh(\beta_A l)} \left[\frac{P}{E_s' t_s} + (\alpha_s - \alpha_s) \right] \Delta T \\ &= -\frac{G_A}{\beta_A t_A \cosh(\beta_A l)} \left[\frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_s - \alpha_p) \right] \Delta T \end{aligned} \quad (3.25)$$

A tensão de cisalhamento no adesivo para um grande comprimento da zona colada (*overlap*), $\beta_A l \gg 1$, se reduz para os pontos próximos ao final do *doubler*, para $x = l - |\zeta|$ e $|\zeta| \ll 1$:

$$\tau^{(A)} = -\frac{G_A e^{-\beta_A \zeta}}{\beta_A t_A} \left[\frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_s - \alpha_p) \right] \Delta T \quad (3.26)$$

O sinal negativo no lado direito da Equação (3.26) significa que a tensão de cisalhamento no adesivo τ_A está no sentido oposto ao esperado na Figura 3.6.

A primeira conclusão a ser feita, está no fato de que a Equação 3.26 sugere que o *doubler* e o *skin* se deformam juntos no interior da zona colada, com exceção das zonas perto do final da *overlap*. Isto porque, a tensão de cisalhamento no adesivo τ_A decai exponencialmente fora das zonas perto do final da *overlap* e se torna zero fora delas. Além disso, a transferência de carga entre o *skin* e o *doubler* ocorre efetivamente acima de um comprimento de ordem β_A^{-1} .

A segunda conclusão a ser tirada do caso especial $\beta_A l \gg 1$, está no fato de que uma junta rigidamente colada terá aproximadamente a mesma rigidez global com uma proporcional

diferença percentual na ordem de $1/\beta_A l$ (Rose, 1981, 1982, 988). Por conseguinte, a distribuição de tensão devido a um *doubler* colado pode ser computada usando uma pressuposta ligação rígida.

Em terceiro lugar, a partir da Equação (3.26), a tensão cisalhante máxima no adesivo $\tau_{m\acute{a}x}^{(A)}$ no final do *doubler* é dada por $-\frac{G_A e^{-\beta_A l}}{\beta_A t_A} \left[\frac{\sigma_\infty}{E_s} + (\alpha_s - \alpha_p) \right] \Delta T$. Assim, a tensão de cisalhamento máxima no adesivo é inversamente proporcional à raiz quadrada da espessura do adesivo, ou seja, $\tau_{m\acute{a}x}^{(A)} \propto \frac{1}{\sqrt{t_A}}$. Relembrando que β_A é dada pela equação (3.23).

Finalmente, observando que os termos das condições térmicas na Equação (3.38) são iguais e opostos para materiais iguais, é evidente que a tensão de cisalhamento no adesivo para o caso de carga puramente térmica será zero.

A tensão no *skin* na região da *overlap* pode ser determinada a partir da condição de deformação entre o *doubler* e o *skin* e da equação de equilíbrio da força horizontal. Na ausência de carga térmica, ou seja, $\Delta T = 0$, a tensão no *skin* é denotada por σ_o e é dada como segue:

$$\sigma_o = \sigma_s(0) = E_s' \varepsilon_s = \frac{\sigma_\infty E_s' t_s}{E_s' t + E_p' t_p} = \frac{\sigma_\infty}{1+S} \quad (3.27)$$

3.2.2 Análise de Tensão de Peel para Two-Sided Doublers

Para *doublers* espessos, o adesivo pode falhar por *peel* antes que sua resistência ao cisalhamento seja alcançada. Esta seção, portanto, apresenta uma análise que lida com as tensões de *peel* no adesivo. A geometria e a nomenclatura para estas análises estão ilustradas na Figura 3.7.

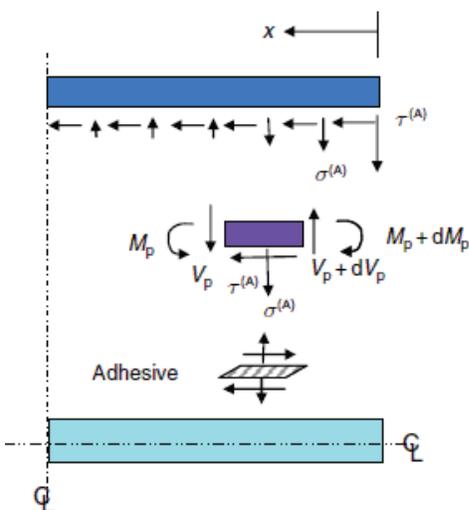


Figura 3.7: Geometria para análise de tensão de peel em um *two-sided doubler*.

A relação da tensão de peel no adesivo com sua deformação é dada pela Equação (3.28).

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma^{(A)}}{E_A} = \frac{w_p - w_s}{t_A} = \frac{w_p}{t_A} \quad (3.28)$$

onde $w_p - w_s$ é a diferença de deflexão entre o *patch (doubler)* e o *skin*. Sendo que a deflexão w_s é igual a zero, desde que a configuração do *doubler* seja simétrica em relação ao plano médio do *skin*. E_A é o módulo de elasticidade do adesivo.

A deflexão transversal do *doubler* é dada como:

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} + \frac{E_A}{D_p t_A} w_p = 0 \quad (3.29)$$

sendo D_p definido como a rigidez à flexão do *patch (doubler)*, ou seja, $D_p = \frac{E_p t_p^3}{12}$.

Para um grande comprimento da zona colada, a solução da Equação (3.29) é dada por:

$$w_p = \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{4 D_p v} \cos(vx) e^{-vx} \quad (3.30)$$

onde:

$$\hat{v} = \left(\frac{E_A}{4D_p t_A} \right)^{1/4} \quad (3.31)$$

Assim, a tensão de *peel* máxima no adesivo pode ser determinada pela solução da Equação (3.28) em $x = 0$ e com w_p dada por (3.30):

$$\sigma_{\max}^{(A)} = \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{4D_p \hat{v}^3} \frac{E_A}{t_A} = \tau_Y^{(A)} \left(\frac{3E_A t_p}{E_p t_A} \right)^{1/4} \quad (3.32)$$

onde $\tau_{\max}^{(A)}$ é a máxima tensão de cisalhamento no adesivo no final da zona colada, que é igual a $\tau_Y^{(A)}$ se o adesivo sofre uma deformação plástica neste ponto.

3.2.3 Análise Elastoplástica para Two-Sided Doublers

Enquanto a tensão cisalhante no adesivo na região elástica de comprimento d , Figura 3.8, é dada pela Equação (3.22), a tensão cisalhante no adesivo através da região plástica permanente é dada por:

$$\tau^{(A)} = -\tau_Y^A = \text{constante} \quad (3.33)$$

onde τ_Y^A é a tensão de escoamento do adesivo, sendo caracterizado pelo modelo elasto-perfeitamente plástico da Figura 3.9.

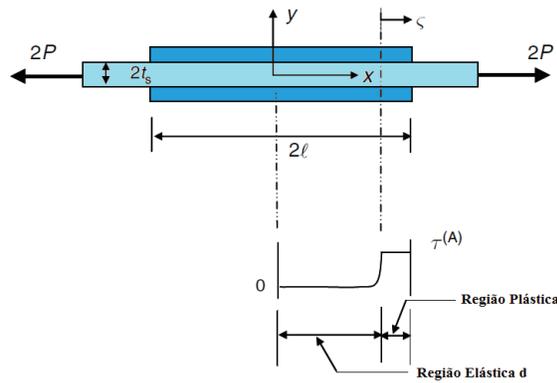


Figura 3.8: Geometria para a análise elastoplástica do *two-sided doubler*.

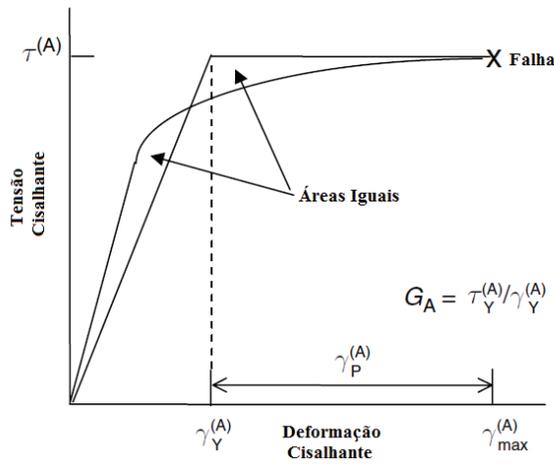


Figura 3.9: Curva típica de tensão/deformação de cisalhamento de um adesivo. Por simplificação, o adesivo é idealizado como um material elasto-perfeitamente plástico.

A equação diferencial governante do adesivo é dada pela Equação (3.34).

$$\frac{d^2\gamma^{(A)}}{dx^2} - \frac{G^{(A)}}{t_A} \left(\frac{1}{E_s' t_s} - \frac{1}{E_p' t_p} \right) \frac{\tau^{(A)}}{G_A} = 0 \quad (3.34)$$

Como já mencionado, nos *doublers* colados a zona de alta transferência de carga ocorrerá perto do final do *overlap*. Observando a Figura 3.8, a região plástica é assumida para ocorrer perto do final do *overlap*, ou seja, $|x| > d$. Enquanto a região elástica tem um comprimento d , onde d é obtido a partir da Equação (3.35).

$$\frac{\beta_A \cdot d \cdot \tanh(\beta_A \cdot d) - 1}{\tanh(\beta_A d)} = \beta_A l - \frac{1}{\beta_A t_A \gamma_Y^{(A)}} \left[\frac{\sigma_\infty}{E'_S} + (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \right] \quad (3.35)$$

A solução geral da Equação (3.35) é dada por:

$$\gamma^{(A)} = -\frac{\gamma_Y^{(A)}}{\sinh(\beta_A d)} \sinh(\beta_A x) \quad |x| \leq d \quad (3.36)$$

$$\gamma^{(A)} = -\gamma_Y^{(A)} \left[\frac{\beta_A}{\tanh(\beta_A d)} \zeta + \frac{\beta_A^2}{2} \zeta^2 \right] \quad 0 \leq \zeta \leq l - d \quad (3.37)$$

onde $\zeta = l - d$.

Quando d é negativo para uma dada tensão aplicada σ_∞ , significa que a tensão aplicada não é alta o suficiente para induzir deformação plástica no final do *doubler*.

Para um comprimento suficientemente longo da zona colada, $\tanh(\beta_A d) \rightarrow 1$, desde que $\beta_A d \gg 1$, e a carga máxima por unidade de largura que pode ser aplicada na estrutura antes do adesivo falhar, pode ser resolvida pela Equação (3.38) no pico da distribuição de deformação cisalhante do adesivo, ou seja, $\zeta = l - d$.

$$\frac{P_{max} \beta_A}{\tau_Y^A} = \left(1 + \frac{1}{S} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{2\gamma_p^{(A)}}{\gamma_Y^{(A)}} + \frac{\beta_A^2 (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T}{\tau_Y^A \left(\frac{1}{E'_s t_s + E'_p t_p} \right)}} \right] \quad (3.38)$$

onde $\gamma_p^{(A)}$ é a máxima deformação plástica permitida no adesivo, como definida na Figura 3.9.

3.2.4 Análise de Tensão de One-Sided Doublers

A análise de tensão no adesivo para a geometria de *one-sided doubler* é realizada em três estágios, seguindo a abordagem de Duong (2006) para *doublers*. Este tipo de configuração de *doubler* está mostrado esquematicamente na Figura 3.10.

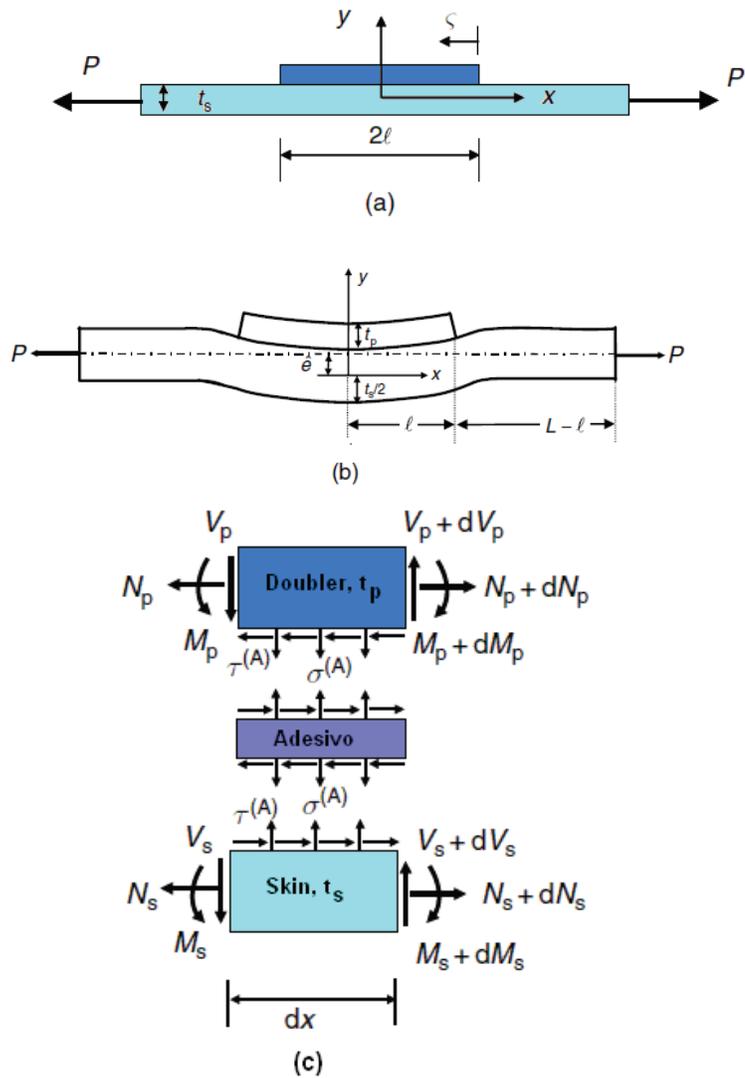


Figura 3.10: Terminologias para a análise de um *one-sided doubler*: (a) geometria do *doubler*, (b) deformação do *doubler* no momento da análise.

O primeiro passo é estabelecer o momento fletor no final do *overlap* nos aderentes. O segundo passo é a obtenção de uma expressão para a tensão de *peel* induzida no adesivo através da deflexão fora do plano, devido à excentricidade do carregamento no *doubler*. A terceira solução é para a distribuição da tensão de cisalhamento associada com a transferência de carga de um aderente para o outro. É importante notar, que esta atual solução se tornará indeterminada para carregamentos bem pequenos.

3.2.4.1 Estágio I: Solução para o Momento Fletor nas Extremidades do *Overlap*

As equações que governam as tensões no adesivo, requerem conhecimento do momento fletor nas extremidades do *overlap* como condições de contorno. Portanto, a análise começa com uma solução para esses valores, Figura 3.10 (b).

Foi mostrado nas seções anteriores, que para um *overlap* suficientemente longo, a transferência de carga entre os aderentes estão confinados nas extremidades do *overlap*. Assim, é apropriado assumir nesta parte da solução que o *doubler* é rigidamente colado ao *skin*.

O momento fletor M_H no *skin*, fora da zona colada (*overlap*), é dado por:

$$M_H = -Pw_H \quad |x| > l \quad (3.39)$$

onde w_H é a deflexão transversal fora do *overlap* e P é o carregamento longitudinal aplicado por unidade de comprimento.

Em contraste, o momento fletor M_I na região da zona colada é dado pela Equação (3.40).

$$M_I = -P\left(w_i + \hat{e}\right) + M^{therm} = -P\left(w_i + \hat{e} - \frac{M^{therm}}{P}\right) \quad |x| \leq l$$

$$\hat{e} = \frac{\left(\frac{t_s + t_p}{2}\right)S}{1 + S} \quad (3.40)$$

$$M^{therm} = F^{therm}\left(\frac{t_s + t_p}{2}\right)$$

$$F^{therm} = \frac{E'_s t_s E'_p (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T}{E'_s t_s + E'_p t_p}$$

onde, w_i é definida como a deflexão transversal dentro do *overlap*, e \hat{e} é a excentricidade, S é a razão de rigidez, e os restantes são previamente definidos.

A definição de \hat{e} pode ser compreendida pela distância entre o centroide da camada do *skin* e o centroide da combinação do *doubler* e do *skin* na zona da *overlap*.

É interessante notar que a deflexão no centro do *doubler* é dada por:

$$w_I(x=0) = C - \left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) = \frac{\left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_I l)} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_I \tanh(\xi_I l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)]}{\xi_H [1 - \tanh(\xi_H L) \tanh(\xi_H l)]}} - \cosh(\xi_I l) \right\} \quad (3.41)$$

onde:

$$C = \frac{\hat{e} - M_{therm}}{\cosh(\xi_H l)} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_I \tanh(\xi_I l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)]}{\xi_H [1 - \tanh(\xi_H L) \tanh(\xi_H l)]}} \right\}$$

$$\xi_H = \sqrt{\frac{P}{D_s}} \quad (3.42)$$

$$\xi_I = \sqrt{\frac{P}{D_I}}$$

sendo D_s e D_I definidos como a rigidez à flexão do *skin* e da junta rigidamente colada na zona da *overlap*, demonstrados nas Equações (B5) e (B6) do Apêndice B.

Para um grande comprimento do *skin*, a deflexão na zona colada pode ser aproximada pela Equação (3.43).

$$w_I(x) = \frac{\left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) \cosh(\xi_I x)}{\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \text{sen}(\xi_I l)} - \left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) \quad \text{para } L \gg 1 \quad (3.43)$$

O momento fletor na região do *overlap* é definido pela Equação (3.44).

$$M_I(x) = \frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_1 l) + \frac{\xi_1}{\xi_H} \sinh(\xi_1 l)} \cosh(\xi_1 x) \quad \text{para } L \gg 1 \quad (3.44)$$

É interessante notar da Equação (3.44) que para uma combinação de uma zona colada grande e um alto carregamento P , o momento fletor desaparece no meio do *doubler* desde que $\cosh(\xi_1 l) \gg 1$ e $\sinh(\xi_1 l) \gg 1$, para $\xi_1 l \gg 1$. Além disso, para um alto carregamento P , a combinação *skin / doubler* tenta defletir o suficiente para alinhar o seu centroide com a linha de ação da carga aplicada.

Por outro lado, o momento fletor fora da região do *overlap* é resolvido pela Equação (3.45).

$$M_H(x) = -D_s \frac{d^2 w_H}{dx^2} = -D_s \xi_H^2 B [-\tanh(\xi_H L) \cosh(\xi_H x) + \sinh(\xi_H x)] \quad (3.45)$$

onde B é dado pela Equação (B22) do Apêndice B.

3.2.4.2 Estágio II: Solução para a Tensão de *Peel* no Adesivo

A técnica de análise da Seção 3.2.1 será usada aqui, mas para um *one-sided doubler* e com diferentes condições de contorno.

Como na seção 3.2.1, assume-se que a tensão de *peel* está desacoplada de quaisquer efeitos de tensões de cisalhamento no adesivo.

A geometria e terminologia para a análise da tensão de *peel* são mostradas na Figura 3.10 (c). Em contraste com o estágio I, a presente análise contabiliza uma fina camada de adesivo.

As equações constitutivas da relação tensão-deslocamento do *skin* e do *doubler* para a tensão de *peel* e de cisalhamento do adesivo são definidas pelas Equações (3.46) e (3.47).

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma^{(A)}}{E_A} = \frac{w_p - w_s}{t_A} \quad (3.46)$$

$$\gamma^{(A)} = \frac{\tau^{(A)}}{G_A} = \frac{u_p - u_s}{t_A} \quad (3.47)$$

Os deslocamentos transversais do *doubler* (w_p) e do *skin* (w_s) podem ser expressados alternativamente pela Equação (3.48).

$$w_s = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + \frac{1}{2}(w_s + w_p) = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + w_I \quad (3.48)$$

$$w_p = -\frac{1}{2}(w_s - w_p) + \frac{1}{2}(w_s + w_p) = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + w_I$$

Note-se que o w_I da Equação (3.48) é obtido a partir do estágio I da análise, que inclui o efeito da não-linearidade geométrica. Por outro lado, a diferença $\frac{1}{2}(w_p - w_s)$ será obtida a partir do estágio II (que é linearmente geométrico).

A diferença de deflexão do *skin* e do *doubler* pode ser obtida pela solução da Equação (3.49).

$$\frac{w_s - w_p}{2} = J \cosh(\xi_I x) \quad (3.49)$$

Com o coeficiente J dado por:

$$J(\xi_I^4 + 4v^4) = -\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \xi_I^4}{(D_s - D_p) \left[\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I l) \right]} \quad (3.50)$$

onde:

$$v^4 = \frac{E_A}{t_A(D_s + D_p)} \quad (3.51)$$

A máxima tensão de *peel* é então calculada a partir das Equações (3.46) e (3.49) em $\zeta = 0$ mostrado esquematicamente na Figura 3.10:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\max}^{(A)} &= -\frac{E_A}{t_A} (w_s - w_p) \Big|_{\zeta=0} = -2 \frac{E_A}{t_A} \left\{ e^{-v\zeta} [A \cos(vx) + B \sin(vx)] + C_c e^{-\xi_I \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=0} \\
&= -\frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) E_A \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l)}{2D_s v^2 t_A \left[1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l) \right]} \\
&\quad + \frac{E_A \left(\frac{\xi_I^2}{v^2} - \frac{4v}{\xi_I} + 2 \right)}{t_A} \left[\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_I^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \right)} \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Note-se que para aderentes equilibrados, ou seja, $E_s = E_p$ e $D_s = D_p$, o segundo termo no lado direito da última Equação de (3.52) é igual a zero. O valor máximo da tensão de *peel* no adesivo, neste caso, é inversamente proporcional a raiz quadrada da espessura do adesivo, ou seja:

$$\sigma_{\max}^{(A)} \propto \frac{1}{v^2 t_A} \propto \frac{1}{\sqrt{t_A}} \tag{3.53}$$

Além disso, se as substituições numéricas das propriedades do *doubler* e do *skin* em (3.52) produzirem um valor negativo, significa que a tensão de *peel* está na direção oposta à representação mostrada na Figura 3.10.

3.2.4.3 Estágio III: Solução para tensão cisalhante no adesivo

A equação que governa a tensão de cisalhamento do adesivo segue da Equação (3.47), onde o deslocamento do *doubler* (*patch*) e o deslocamento do *skin* são obtidos pelas Equações (3.54) e (3.55) respectivamente.

$$\frac{d^2 u_p}{dx^2} = \frac{1}{E_p' t_p} \frac{dN_p}{dx} - \frac{t_p}{2D_p} \frac{dM_p}{dx} = \frac{\tau^{(A)}}{E_p' t_p} - \frac{t_p}{2D_p} \left(V_p - \frac{\tau^{(A)} t_p}{2} \right) \tag{3.54}$$

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} = \frac{1}{E'_s t_s} \frac{dN_s}{dx} + \frac{t_s}{2D_s} \frac{dM_s}{dx} = \frac{\tau^{(A)}}{E'_s t_s} + \frac{t_s}{2D_s} \left(V_s - \frac{\tau^{(A)} t_s}{2} \right) \quad (3.55)$$

Subtraindo a Equação (3.55) da (3.54) e fazendo uso da Equação (3.47) com as devidas manipulações algébricas demonstradas no Apêndice B, a distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo é obtida resolvendo a Equação (3.56).

$$\begin{aligned} \frac{t_A}{G_A} \frac{d^3 \tau^{(A)}}{dx^3} &= 4 \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} - \left(\frac{t_p}{2D_p} \frac{dV_p}{dx} + \frac{t_s}{2D_s} \frac{dV_s}{dx} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} - \sigma^{(A)} \left(\frac{t_p}{2D_p} - \frac{t_s}{2D_s} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Da Equação (3.56), o lado direito será igual à zero para aderentes equilibrados, assim:

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^{(A)} &= \frac{S}{1+S} \left(\frac{\sigma_{\infty} t_s}{l} \right) \\ &+ \frac{G_A}{2\beta_A t_A} \left[\frac{t_s M_H(l)}{2D_s} + \frac{\sigma_{\infty}}{E'_s} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right] \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta_A l} \right) - \frac{F^{therm}}{l} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

É interessante notar da Equação (3.57) que, diferentemente do caso de um *two-sided doubler*, tanto a tensão de *peel* como a de cisalhamento em uma configuração de *one-sided doubler* são proporcionais ao inverso da raiz quadrada da espessura do adesivo, para comprimentos longos do *overlap*, ou seja, para $\beta_A l \gg 1$ e $vl \gg 1$, observa-se que: $\tau_{\max}^{(A)} \propto \frac{1}{\sqrt{t_A}}$.

3.3 Hart-Smith, Solução para *One-Sided Doubler*

Por simplicidade, o *skin* e o *doubler* são assumidos com materiais isotrópicos. O primeiro passo da solução será considerar a junta rigidamente colada em uma análise do momento fletor para uma geometria não-linear.

Seguindo de forma similar ao modelo de Duong (2006), o deslocamento transversal na região do *overlap* e o momento fletor no final desta área são obtidos como:

$$\hat{w}(x) = e \left\{ 1 - \frac{\cosh(\xi_1 x)}{\left[\cosh(\xi_1 c) + \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right) \sinh(\xi_1 c) \right]} \right\} \quad (3.58)$$

e:

$$M_0 = - \frac{\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right) \tanh(\xi_1 c)}{\left[1 + \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right) \tanh(\xi_1 c) \right]} T_e \quad (3.59)$$

onde:

$$e = \frac{E_d t_d \left(\frac{t_s + t_d}{2} \right)}{E_s t_s + E_d t_d} = \frac{S}{1 + S} \left(\frac{t_s + t_d}{2} \right), \quad S = \frac{E_d t_d}{E_s t_s} \quad (3.60)$$

$$\xi_i = \sqrt{\frac{T}{D_i}}, \quad D_0 = \frac{E_s t_s^3}{12(1 - \nu_s^2)} \quad (3.61)$$

$$D_1 = \frac{E_s t_s^3}{12(1 - \nu_s^2)} + \frac{E_d t_d^3}{12(1 - \nu_d^2)} + e^2 E_s t_s + \left(\frac{t_s + t_d}{2} - e \right)^2 E_d t_d \quad (3.62)$$

onde c é a metade do comprimento do *doubler*, os subscritos s e d denotam o *skin* e o *doubler* respectivamente, a coordenada x é medida a partir do centro do *skin*, e o *doubler* é considerado balanceado, ou seja, $S=1$. O restante é definido similarmente à análise de Duong (2006).

Uma vez calculado o momento fletor e a deflexão, a tensão cisalhante e de *peel* no adesivo podem ser determinados seguindo o processo de solução dado a seguir:

3.3.1 Análise da Tensão de Peel

A tensão de *peel* no adesivo (σ_a), pode ser expressada pela diferença entre a deflexão transversal do *skin* e do *doubler* como segue:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{w_s - w_d}{t_a} \quad (3.63)$$

onde w é novamente a deflexão transversal, E_a e t_a é o módulo de elasticidade e a espessura do adesivo, respectivamente, enquanto o subscrito (a) é para o adesivo, (s) é para o *skin* e (d) para o *doubler*.

A deformação cisalhante γ_a e a tensão cisalhante no adesivo pode ser estabelecida pela diferença dos deslocamentos longitudinais do *skin* e do *doubler*:

$$\gamma_a = \frac{\tau_a}{G_a} = \frac{u_s - u_d}{t_a} \quad (3.64)$$

onde τ_a e G_a é a tensão cisalhante e o módulo de cisalhamento do adesivo respectivamente. Uma aproximação da equação governante para a tensão de *peel* no adesivo pode ser expressa como:

$$\left(\frac{D_0 + D_d}{2} \right) \frac{d^4(w_s - w_d)}{dx^4} + \frac{2E_a}{t_a} (w_s - w_d) \approx -(D_0 - D_d) \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} \quad (3.65)$$

onde, para um *doubler* balanceado, o lado direito da Equação (3.65) é igual a zero, e:

$$D_d = \frac{E_d t_d^3}{12(1 - \nu_d^2)} \quad (3.66)$$

A solução geral da Equação (3.65) pode ser aproximada por:

$$w_s - w_d \approx e^{-\chi s} (A \cos(\chi s) + B \sin(\chi s)) \quad (3.67)$$

No qual χ é definido como:

$$\chi^4 = \frac{E_a}{t_a(D_0 + D_d)} \quad (3.68)$$

onde s é a coordenada local medida a partir do canto livre do *doubler*.

Das condições de contorno, detalhadas no Apêndice B para a determinação das constantes A e B , a tensão de *peel* é dada por:

$$\sigma_a = \frac{E_a}{t_a} \frac{M_0}{2\chi^2 D_0} e^{-\chi s} (\cos(\chi s) - \text{sen}(\chi s)) \quad (3.69)$$

3.3.2 Análise da Tensão Cisalhante

A Equação governante para a tensão cisalhante tem a seguinte forma:

$$\frac{d^3 \tau_a}{dx^3} = 4\lambda^2 \frac{d\tau_a}{dx} \quad (3.70)$$

onde:

$$\lambda^2 = \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{1}{E_s t_s} + \frac{1}{E_d t_d} \right) \quad (3.71)$$

A solução da Equação (3.70) é dada por:

$$\tau_a = A_s e^{-2\lambda s} + H_s \quad (3.72)$$

Das condições de contorno para a determinação dos coeficientes A_s e H_s , a equação para a tensão cisalhante no adesivo pode ser reescrita como:

$$\tau_a = \frac{G_a}{2\lambda t_a E_s} \left(\frac{T}{t_s} - \frac{6M_0}{t_s^2} \right) e^{-2\lambda s} + \frac{1}{c} \left[T \left(\frac{S}{S+1} \right) - \frac{G_a}{4\lambda^2 t_a E_s} \left(\frac{T}{t_s} - \frac{6M_0}{t_s^2} \right) \right] \quad (3.73)$$

3.4 Modelo para *One-Sided Doubler* do Autor deste Trabalho

Este modelo é simplificado e tem o intuito de facilitar a análise para obter resultados iniciais de forma rápida. Devido a sua facilidade, este método será mostrado aqui detalhadamente.

A análise será feita considerando a configuração da Figura 3.11 (a), onde o *doubler* tem comprimento de $2B$ e espessura t_D , colado em um *skin* infinito de espessura t_S .

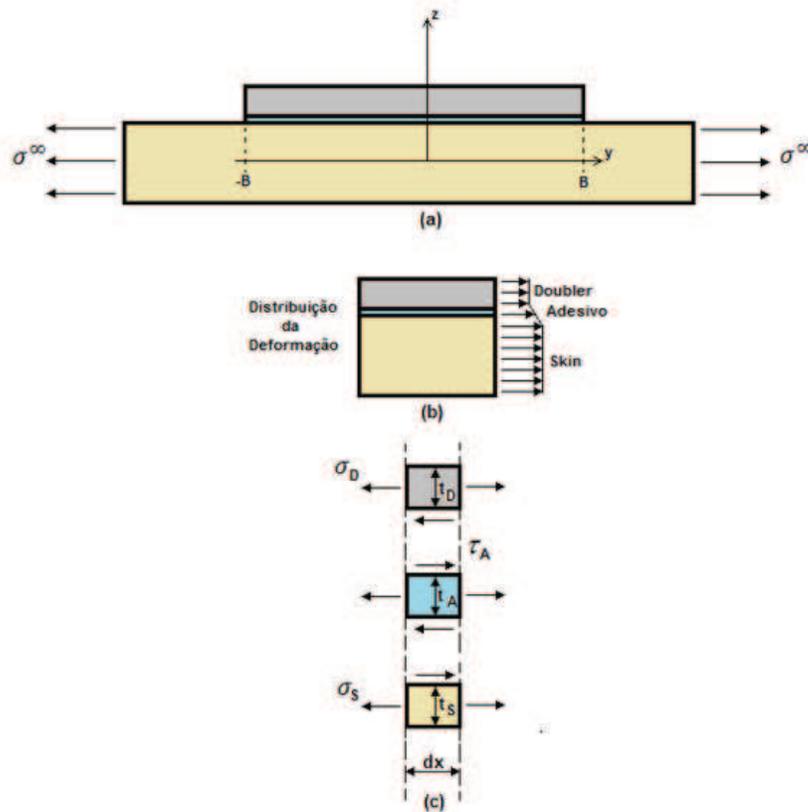


Figura 3.11: Representação do *one-sided doubler* em análise (a), transferência de carga do *skin* para o *doubler* (b) e análise de tensão cisalhante no adesivo (c).

Da teoria clássica das placas, considerando que o material é homogêneo, isotrópico e linearmente elástica, a relação tensão-deslocamento do *skin* e do *doubler* é dada respectivamente pelas equações constitutivas no estado plano de deformação:

$$\sigma_S = \frac{E_S}{1 - \nu_S^2} \varepsilon_S \equiv \frac{E_S}{1 - \nu_S^2} \frac{du_S}{dx} \quad (3.74)$$

$$\sigma_D = \frac{E_D}{1 - \nu_D^2} \varepsilon_D \equiv \frac{E_D}{1 - \nu_D^2} \frac{du_D}{dx} \quad (3.75)$$

A camada de adesivo atua como um absorvedor da tensão cisalhante, onde a tensão cisalhante no adesivo é dada pela relação constitutiva a seguir:

$$\tau_A = \mu_A \gamma_A \equiv \mu_A \frac{u_D - u_S}{t_A} \quad (3.76)$$

Fazendo o equilíbrio de forças da Figura 3.11 (c), para o *skin* e para o *doubler* respectivamente:

$$\frac{d\sigma_S}{dx} + \frac{\tau_A}{t_S} = 0 \quad (3.77)$$

$$\frac{d\sigma_D}{dx} - \frac{\tau_A}{t_D} = 0 \quad (3.78)$$

Substituindo a Equação (3.74) na Equação (3.77) e a Equação (3.75) na Equação (3.78):

$$\frac{E_S}{1 - \nu_S^2} \frac{d^2 u_S}{dx^2} + \frac{\tau_A}{t_S} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_S}{dx^2} + \frac{(1 - \nu_S^2) \tau_A}{E_S t_S} = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{E_D}{1 - \nu_D^2} \frac{d^2 u_D}{dx^2} - \frac{\tau_A}{t_D} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_D}{dx^2} + \frac{(1 - \nu_D^2) \tau_A}{E_D t_D} = 0 \quad (3.80)$$

Igualando as Equações (3.79) e (3.80):

$$\frac{E_D}{1 - \nu_D^2} \frac{d^2 u_D}{dx^2} - \frac{\tau_A}{t_S} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_D}{dx^2} + \frac{(1 - \nu_D^2) \tau_A}{E_D t_D} = 0 \quad (3.81)$$

Substituindo agora a Equação (3.76) na Equação (3.81):

$$\frac{t_A}{\mu_A} \frac{d^2 \tau_A}{dx^2} = \tau_A \left[\frac{1 - \nu_S^2}{E_S t_S} + \frac{1 - \nu_D^2}{E_D t_D} \right] \Rightarrow \frac{d^2 \tau_A}{dx^2} - \frac{\mu_A}{t_A} \left[\frac{1 - \nu_S^2}{E_S t_S} + \frac{1 - \nu_D^2}{E_D t_D} \right] \tau_A = 0 \quad (3.82)$$

Chamando de $\eta^2 = \frac{\mu_A}{t_A} \left[\frac{1 - \nu_S^2}{E_S t_S} + \frac{1 - \nu_D^2}{E_D t_D} \right]$, a Equação (3.82) se torna:

$$\frac{d^2 \tau_A}{dx^2} - \eta^2 \tau_A = 0 \quad (3.83)$$

Do princípio da superposição, sejam τ_{A1} e τ_{A2} duas soluções da Equação (3.83) no intervalo I , então a sua combinação linear também é uma solução da Equação (3.83) em I :

$$\tau_A = c_1\tau_{A1} + c_2\tau_{A2} \quad (3.84)$$

Para que este procedimento tenha sucesso, as duas soluções τ_{A1} e τ_{A2} devem ter a propriedade esquiva, onde devem ser resolvidas em termos de c_1 e c_2 , independentes de quais possam ser as condições iniciais. Desta maneira as funções τ_{A1} e τ_{A2} , devem ser linearmente independentes.

Assim, fazendo $\tau_A = e^{ry}$, e substituindo na Equação (3.83):

$$\begin{aligned} r^2 e^{ry} - \eta^2 e^{ry} &= 0, \\ (r^2 - \eta^2) e^{ry} &= 0, \\ \therefore r &= \pm\eta \end{aligned} \quad (3.85)$$

Portanto, substituindo a Equação (3.85) na Equação (3.84) resulta em:

$$\tau_A = c_1 e^{\eta y} + c_2 e^{-\eta y} \quad (3.86)$$

Sabendo que:

$$\cosh(\eta y) = \frac{1}{2} e^{\eta y} + \frac{1}{2} e^{-\eta y} \quad (3.87)$$

$$\sinh(\eta y) = \frac{1}{2} e^{\eta y} - \frac{1}{2} e^{-\eta y}$$

Então a solução conjunta das Equações (3.87) e (3.86) é dada pela solução geral:

$$\tau_A = C_1 \sinh(\eta y) + C_2 \cosh(\eta y) \quad (3.88)$$

onde C_1 e C_2 são as novas incógnitas que devem ser determinadas pelas seguintes condições de contorno:

$$\tau_A = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (3.89)$$

$$\sigma_S = \sigma^\infty \quad \text{para} \quad y = \pm B \quad (3.90)$$

$$\sigma_D = 0 \quad \text{para} \quad y = \pm B \quad (3.91)$$

Assim, da condição de contorno da Equação (3.89), obtém-se $C_2 = 0$, e das Equações (3.90) e (3.91) obtém-se:

$$C_1 = -\sigma^\infty \frac{(1 - \nu_S^2)\mu_A}{\eta t_A E_S \cosh(\eta B)} \quad (3.92)$$

Portanto a equação (3.88) se torna:

$$\tau_A = -\sigma^\infty \frac{(1 - \nu_S^2)\mu_A}{\eta t_A E_S \cosh(\eta B)} \sinh(\eta y) \quad (3.93)$$

Deve-se notar que para $\eta B \ll 1$, a tensão cisalhante no adesivo decai exponencialmente no final da *overlap*, ou seja, $y = \pm B$.

Como exemplo, a Figura 3.12 mostra distribuição de tensão cisalhante no adesivo utilizando a formulação desenvolvida nesta seção. A análise foi realizada a partir da extremidade esquerda do adesivo até a sua extremidade direita, seguindo a geometria representada pela Figura 3.11 e pelos parâmetros dados a seguir:

Aderente Isotrópico: $E_S = E_D = 68.95$ GPa, $\nu_S = \nu_D = 0.3$, $t_S = t_D = 1.27$ mm, o subscrito *S* e *D* denotam o *skin* e o *doubler* respectivamente:

Adesivo Isotrópico: $E_A = 1.793$ GPa, $G_A = 0.6895$ GPa e $t_A = 0.127$ mm.

Comprimento do *overlap* (2B): 127 mm.

Tensão remota: $\sigma^\infty = 137.9$ MPa.

$$\mu_A = \left(\frac{E_A}{2G_A} \right) - 1 = 0.3.$$

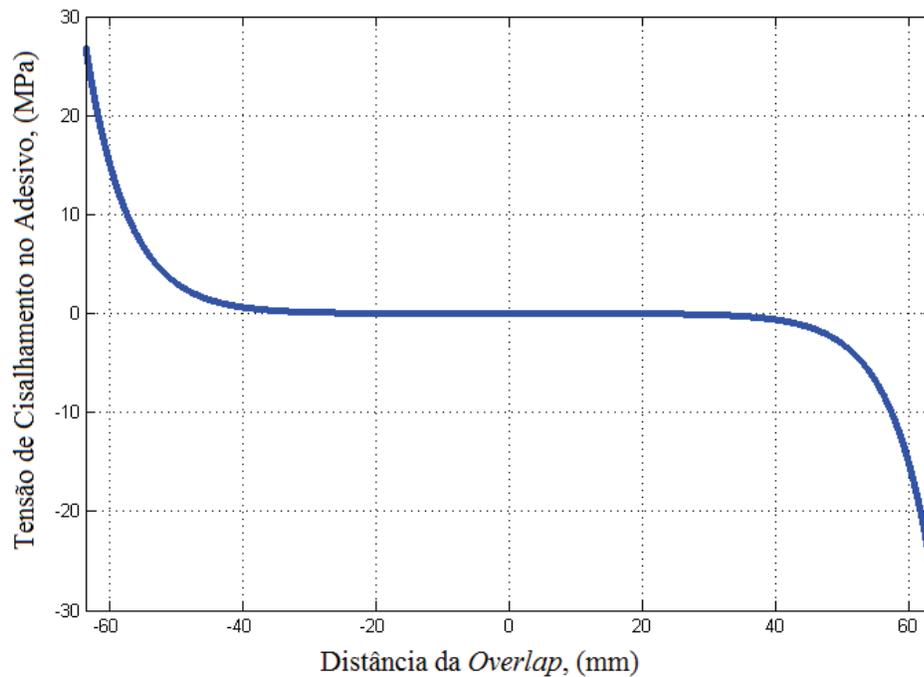


Figura 3.12: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.

3.5 Considerações de Outros Efeitos Importantes em Estruturas Reforçadas por *Doublers Colados*

Os modelos analíticos apresentados nas seções anteriores tratam a camada adesiva como infinita, com as tensões de cisalhamento e de *peel* desconectadas entre elas. Nestas teorias, tanto a tensão de cisalhamento quanto a tensão de *peel* na camada adesiva variam fortemente ao longo do comprimento do *overlap*, e atingem seus valores máximos no final do *overlap*.

Além disso, assumindo o comprimento do *overlap* suficientemente grande em comparação com o comprimento da zona de transferência de carga, as máximas tensões de *peel* e de cisalhamento tornam-se independentes do comprimento do *overlap*.

Como consequência, estas teorias sofrem de três grandes deficiências. Primeiro, a solução da tensão cisalhante no adesivo não satisfaz exatamente a condição de contorno de tensão de cisalhamento igual a zero nas extremidades da camada de adesivo (Adams e Peppiatt, 1974; Gilbert e Rigolot, 1988; Roberts, 1989; Wang et al, 1998a). Em segundo lugar, estas soluções não captam a complexidade da singularidade de tensão no final da camada de adesivo (Hein e

Erdogan, 1971; Groth, 1988; Reedy, 1990, 1993; Akisanya e Fleck, 1997; Wang e Rose, 2000). O terceiro problema é que o estado de tensão no aderente é inevitavelmente assumido ser uniforme na direção da espessura e, portanto, as concentrações de tensão são ignoradas (Wang et al., 1998a).

Foram feitas tentativas para corrigir a primeira deficiência da abordagem elástica tratando a camada adesiva como contínua e bidimensional (Allman, 1977), mantendo a aproximação da teoria das placas para os aderentes. Embora estas refinadas teorias permitam satisfazer a condição de superfície de tensão livre nas extremidades da camada adesiva, a distância que a tensão de cisalhamento no adesivo atinge seu valor de pico aparece com o dimensionamento da espessura do aderente, ao invés da espessura da camada adesiva, como indicado pela análise de FEM (Wang et al., 1998a).

Recentes avanços das três deficiências abordadas acima serão mencionados neste trabalho, onde os efeitos da singularidade de canto foram explicados na seção 2.4, e os efeitos da tensão livre na extremidade do adesivo e os efeitos do *spew fillet* serão abordados nas seções seguintes.

3.5.1 Condição de Tensão Livre no Final da Camada de Adesivo

A razão que os modelos elásticos preveem uma tensão de cisalhamento finito nas extremidades da camada adesiva, decorre do pressuposto de que a tensão de cisalhamento é proporcional ao deslocamento relativo longitudinal entre dois aderentes, mesmo em uma superfície livre de tensão. No entanto, apesar dessa deficiência e o grande número de suposições envolvidas nos modelos elásticos, as soluções de tensão de *peel* e de cisalhamento tem se mostrado com bons resultados quando comparados com as análises de elementos finitos.

Sabendo que no final da camada de adesivo é livre de tensão, a distribuição de tensão de cisalhamento perto do fim deve mudar de modo a satisfazer esta condição de contorno.

Assim, o erro na solução exata é apenas significativo na vizinhança da fronteira. Segundo o princípio de St Venant, se um corpo estiver sujeito à ação de um conjunto de forças, aplicadas numa zona limitada da sua superfície, as tensões e deformações provocadas por essas forças a uma “distância grande” do seu ponto de aplicação apenas depende da sua resultante e não da forma como estas são aplicadas. A “distância grande” costuma-se considerar uma dimensão igual

ou maior da superfície onde estão aplicadas as forças. Assim, a perturbação no campo de tensões é confinada em uma região perto das extremidades (dentro de uma distância comparável em extensão para a camada de espessura).

Segue então que o problema com a condição de canto livre de tensão pode ser resolvido pela sobreposição do campo de tensão, determinado com base na analogia da teoria elástica de placas, com um segundo campo de tensões que considera nula a tração nas extremidades.

Como a camada adesiva geralmente tem um módulo de Young muito inferior aos aderentes é interessante tratar inicialmente o modelo como uma união rígida. Em consequência o problema pode ser considerado como submetidos à tração de cisalhamento uniforme e tração normal zero em $x = 0$, como mostrado na Figura 3.13.

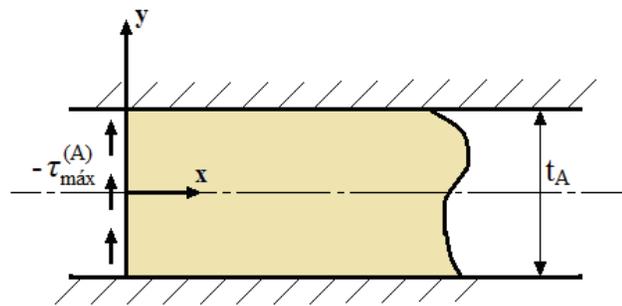


Figura 3.13: Camada de adesivo rigidamente colada ao longo dos cantos entre duas placas.

Do ponto de vista teórico, o cálculo rigoroso da tensão de cisalhamento perto da quina no final da camada de adesivo, requer a consideração das singularidades de tensão nos cantos da interface entre a camada adesiva e os aderentes. No entanto, o campo de tensão dominada pela singularidade é normalmente muito pequeno (Wang e Rose, 2000), e o efeito da singularidade de canto pode ser ignorado quando se determina a tensão de cisalhamento no plano médio da camada adesiva.

3.5.2 Spew Fillet

Estudos têm demonstrado que os *spew fillets* formados durante a colagem nas extremidades do *overlap* podem ter uma importante influência na resistência da junta (Adams e Harris, 1987;

Groth, 1988; Kairouz e Matthews, 1993; Adams et al, 1997). A formação do *spew fillet* não somente modifica a distribuição de tensão ao longo do plano médio da camada adesiva (Adams e Peppiatt, 1974), mas também pode eliminar a singularidade de canto.

Como mostrado na Figura 3.14, enquanto as tensões no canto *C* são singulares, o estado de tensão no ponto *A* depende fortemente do ângulo θ .

Assumindo que o módulo de elasticidade do adesivo é muito menor do que o do aderente, a ordem da singularidade de tensão no canto sob condições de deformação plana pode ser obtido da solução de Williams (1952), e os resultados são mostrados na Figura 3.15.

Verifica-se das análises de Williams (1952) que o *spew fillet* estaria livre de singularidades quando o ângulo do *fillet* fosse inferior a um ângulo crítico, que é dependente da razão de Poisson do adesivo.

O valor deste ângulo crítico é mostrado na Figura 3.16. O ângulo máximo absoluto o qual nenhuma singularidade de canto deverá existir para qualquer razão de Poisson é de 45 graus.

Portanto, se o ângulo de *spew fillet* pode ser controlado, seja igual ou inferior a 45 graus, as tensões nos cantos *A* e *B* na Figura 3.14 seriam reguláveis.

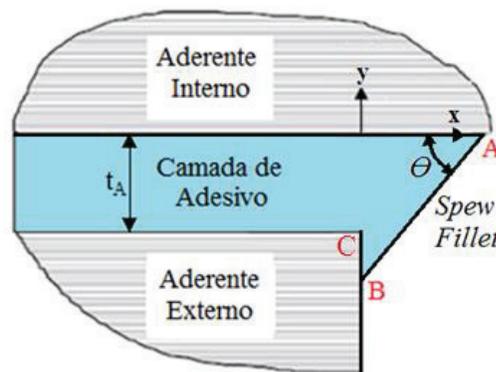


Figura 3.14: Configuração de um spew fillet.

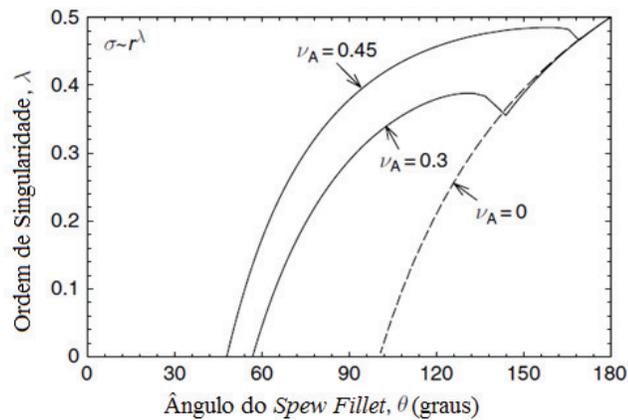


Figura 3.15: Ordem de singularidade de canto no *spew fillet* (pontos A e B da Figura 3.14).

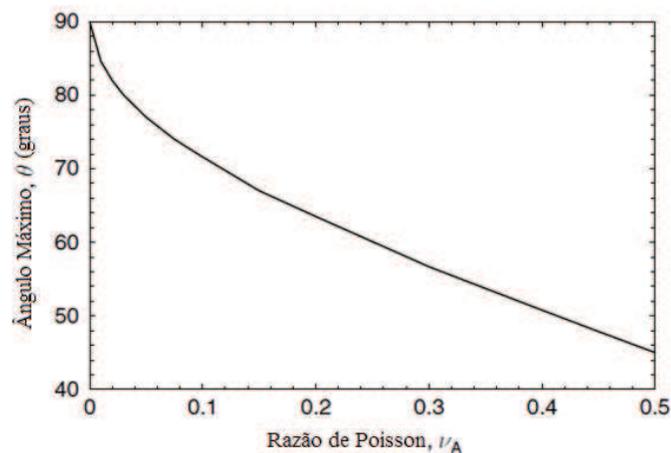


Figura 3.16: Máximo ângulo do *spew fillet* para singularidade de canto, θ igual a zero.

A partir da análise anterior, é evidente que as singularidades de canto podem ser completamente removidas se o final da camada de adesivo puder ser moldado de forma que todos os ângulos da interface sejam menores que 45 graus. No entanto é necessário mais trabalho para esclarecer a influência da espessura da camada adesiva na força da junta.

3.5.3 Verificação do Efeito da Variação da Espessura do Adesivo

É amplamente conhecido na literatura que a carga de falha diminui com o aumento da espessura do adesivo, embora os modelos analíticos elásticos considerados não conseguirem prever esse princípio, mostrando um comportamento contrário ao esperado. Um estudo similar foi realizado por Rodriguez (2010), para geometrias mais simples de *single lap joints*, conforme pode ser visto na Figura 3.17.

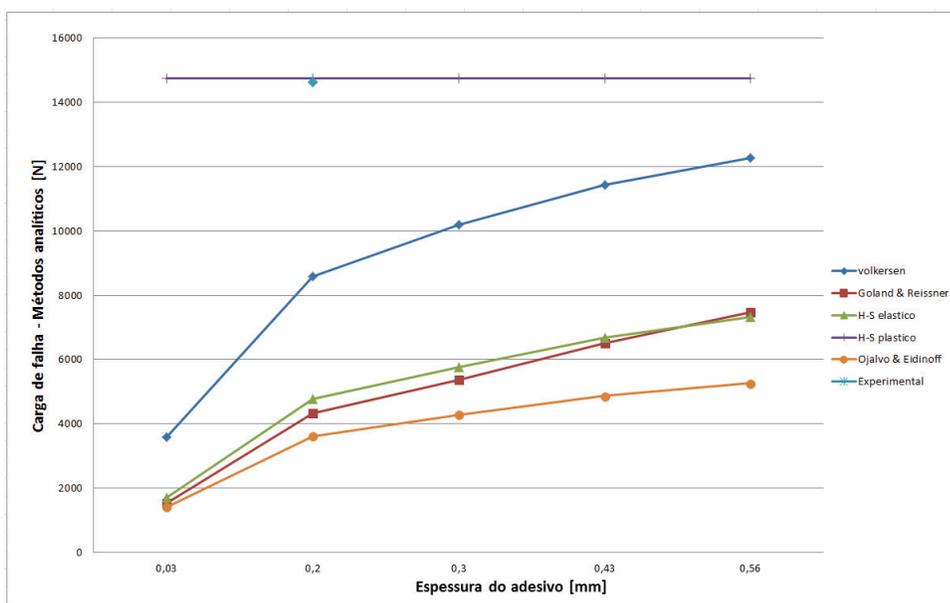


Figura 3.17: Variação da carga de falha com respeito à espessura para os critérios de falha elásticos (Rodriguez, 2010).

Além disso, no Capítulo 7 (Resultados da Análise de CDPs de *Doublers* Colados), conclui-se que um dos principais motivos para a diferença dos resultados analíticos e numéricos com os resultados experimentais foi devido à variação da espessura do adesivo durante a colagem dos CDPs.

Esta variação na espessura do adesivo nos CDPs foi devido a não utilização de um dispositivo apropriado para o controle da espessura do adesivo, o que deve sempre ser considerado em peças coladas. A Tabela 3.2 mostra as medidas para nove CDPs 1 (configuração projetada e demonstrada no Capítulo 7).

Neste registro, observa-se uma discrepância da espessura do adesivo variando de 0,15 mm a 0,53 mm, para os 7 pontos diferentes da região do *overlap*, Figura 3.18.

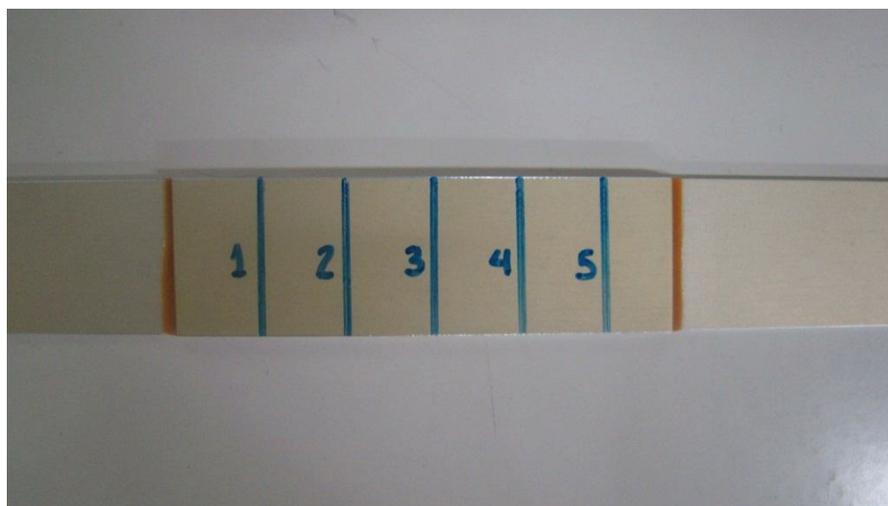


Figura 3.18: Pontos de medida da espessura do CDP 1.

Tabela 3.2: Medidas da variação da espessura do adesivo para os CDPs 1.

	Borda 1	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Ponto 4	Ponto 5	Borda 2
CDP 1	0,16	0,3	0,42	0,47	0,42	0,31	0,16
CDP 2	0,16	0,27	0,38	0,48	0,43	0,34	0,16
CDP 3	0,16	0,34	0,43	0,49	0,45	0,33	0,19
CDP 4	0,15	0,3	0,42	0,49	0,44	0,29	0,17
CDP 5	0,17	0,33	0,43	0,5	0,45	0,33	0,15
CDP 6	0,17	0,33	0,43	0,49	0,45	0,33	0,17
CDP 7	0,21	0,33	0,43	0,49	0,46	0,32	0,17
CDP 8	0,18	0,31	0,44	0,5	0,45	0,35	0,19
CDP 9	0,19	0,37	0,46	0,53	0,48	0,35	0,17

Capítulo 4

4 Modelos Numéricos para Análise de *Doublers Colados*

Devido à complexidade matemática, apenas soluções aproximadas de geometrias simples de *doublers* estão disponíveis na literatura. As soluções numéricas são, portanto, a saída para configurações de *doublers* mais complexos.

Na abordagem numérica, um conjunto de equações diferenciais e condições de contorno são modelados, e as soluções dessas equações diferenciais são obtidas por integração numérica direta.

Em uma série de artigos escritos por Thomsen (1992) e Mortensen e Thomsen (1997, 2002), uma abordagem unificada para a análise das diferentes juntas coladas de *doublers* e problemas relacionados usando o método de integração numérica estão disponíveis. Esta abordagem unificada também foi contabilizada para o efeito não-linear do adesivo. No entanto, foi limitada à análise geometricamente linear. Duong (2006) estendeu esta abordagem unificada e incluiu análises geometricamente não-lineares de *doublers*.

Este Capítulo mostra o estudo numérico realizado utilizando o *software* comercial ABAQUS pelo método dos elementos finitos, para a validação dos métodos analíticos do capítulo 3, projeto dos corpos de provas (CDPs) no capítulo 7 e projeto dos subcomponentes no capítulo 8.

O Capítulo começa mostrando alguns cuidados gerais iniciais na modelagem numérica tanto para os modelos 2D quanto para os modelos 3D.

4.1 Cuidados Gerais Iniciais na Modelagem Numérica

Em todas as análises numéricas descritas a seguir, teve-se uma preocupação especial em utilizar corretamente tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade do material. Isto porque, para as análises numéricas dos CDPs e subcomponentes nos capítulos seguintes, foi constatado que as cargas atuantes utilizadas nestas análises, ocasionariam grandes deformações e escoamento da liga de alumínio, tanto para o CDP como para o subcomponente.

É importante salientar que a consideração dos efeitos não lineares em alguns casos é essencial, pois existe a comprovação, baseada em modelos analíticos ou mesmo nos resultados de observações efetuadas, de que a realidade se afasta da hipótese simplificada. Assim, as grandes deformações e os comportamentos não-lineares elásticos e plásticos dos materiais devem ser considerados na análise de elementos finitos.

Tem sido comprovado que o método dos elementos finitos, combinado com um processo incremental de integração de algumas variáveis do problema, é um dos processos mais eficientes na solução de problemas não lineares, pois se por um lado as soluções analíticas só existem para um número limitado de aplicações, o método dos elementos finitos e em particular a sua formulação em termos de deslocamentos, torna possível o cálculo de estruturas de geometria arbitrária com quaisquer condições de contorno.

Outro fator importante incorporado nos modelos numéricos deste trabalho foi a realização da análise de convergência dos resultados, através do refino da malha e verificação da variação dos valores máximos das tensões com respeito a este refinamento.

4.1.1 Não-Linearidade do Material

Este tipo de não-linearidade é provavelmente abordado com mais profundidade na literatura. A maioria dos metais tem uma relação bastante linear tensão/deformação em valores de baixa sollicitação, mas em altas sollicitações a análise deve ser feita de forma não-linear devido ao escoamento do material.

Ao definir os dados de plasticidade no ABAQUS, devem-se usar os dados experimentais da curva tensão/deformação verdadeira. O ABAQUS exige esses valores para interpretar os dados corretamente. A curva utilizada de tensão/deformação da liga de alumínio 2024-T3 está mostrada na Figura 4.1 (MIL – HDBK – 5H, 1998).

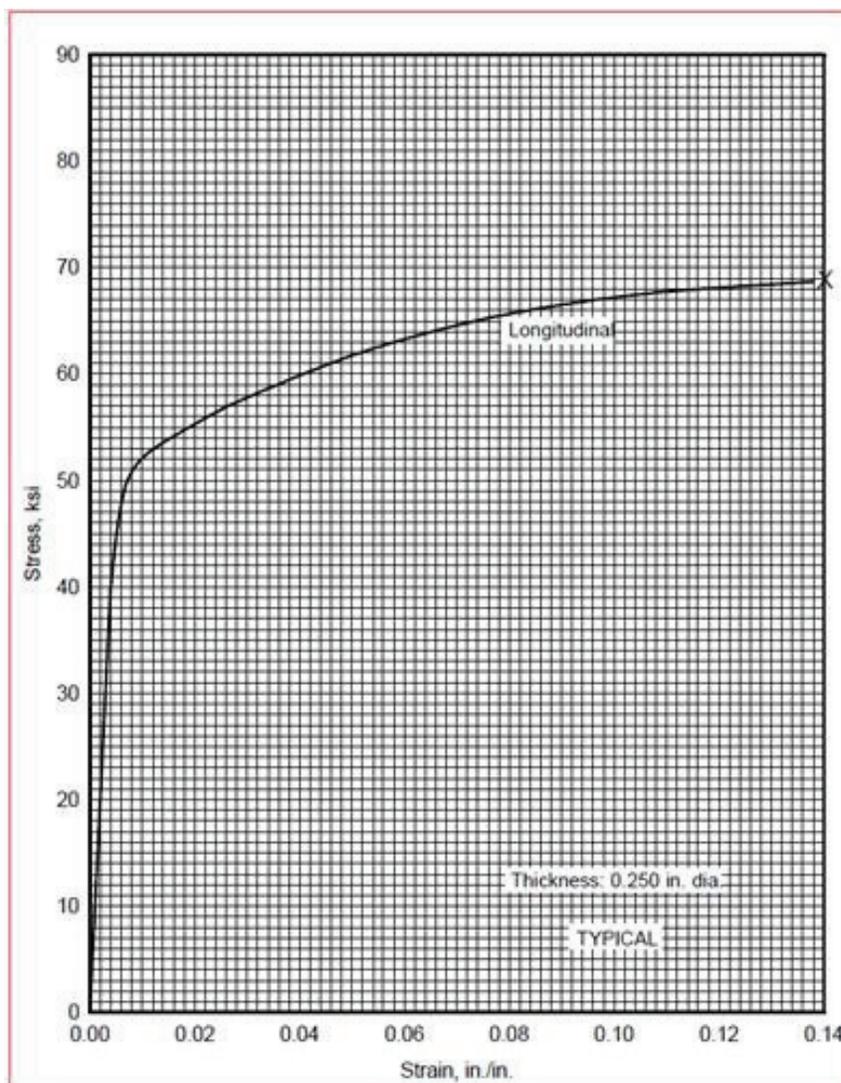


Figura 4.1: Curva tensão/deformação da liga de alumínio 2024-T3 inserida nas simulações do ABAQUS (MIL – HDBK – 5H, 1998).

4.1.2 Não-Linearidade Geométrica

Quando a magnitude dos deslocamentos afeta a resposta da estrutura, a não-linearidade geométrica deve ser considerada. Isso pode ser causado devido às grandes deflexões ou rotações, ou ainda pela mudança na linha de ação da carga.

Por exemplo, considere uma viga engastada carregada verticalmente na ponta, Figura 4.2, se as deflexões são grandes, a rigidez da estrutura muda com a mudança da geometria da estrutura. Além disso, se a carga não permanece perpendicularmente a viga, a ação da carga sobre a estrutura muda significativamente.

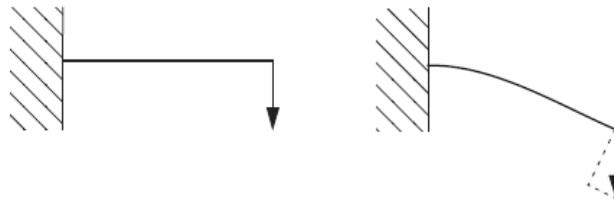


Figura 4.2: Grande deflexão da viga.

A não-linearidade geométrica é acrescentada nos cálculos por elementos finitos do ABAQUS através da seleção da opção “*nonlinear effects of large displacements*”, conforme pode ser visto na Figura 4.3 e dos seus ajustes para o problema. O método utilizado neste trabalho foi o método de Newton.

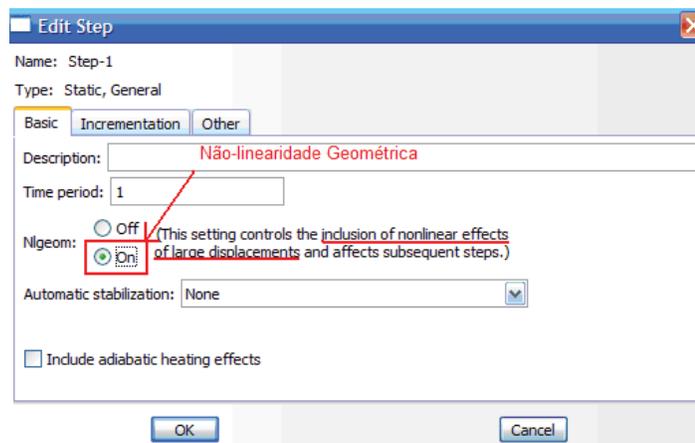


Figura 4.3 - Consideração da não-linearidade geométrica.

4.1.3 Controle da Malha

Em todas as análises, teve-se a preocupação de se trabalhar a malha de maneira que se evitassem erros durante o processamento.

A Figura 4.4 ilustra a malha modelada para o subcomponente, abordado no Capítulo 7, mostrando a preocupação em todas as análises numéricas em não obter avisos de erros e advertências durante a geração da malha.

A preocupação com o refino da malha nos pontos de concentração de tensão do adesivo será mostrada com mais detalhes no Capítulo 7 (Resultados da Análise dos CDPs de *Doublers Colados*).



Figura 4.4: Controle da malha do subcomponente.

4.1.4 Controle do Contato *Skin/Adesivo/Doubler*

Nas análises numéricas 3D, além dos cuidados já descritos anteriormente, teve-se um cuidado na geração do modelo, principalmente na região de contato de materiais diferentes.

O ABAQUS/*Standard* utiliza um algoritmo de contato mestre-escravo, e este algoritmo não impõe restrições sobre a superfície mestre, que pode penetrar na superfície escrava entre os nós. No entanto, os nós em uma superfície (o escravo) não podem penetrar nos elementos que compõem a outra superfície (a mestre), como mostrado na Figura 4.5.

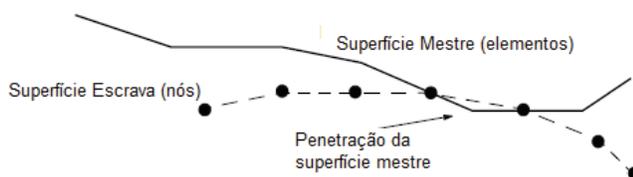


Figura 4.5: Superfície mestre penetrando na superfície escrava.

A consequência dessa formulação mestre-escravo é que se deve ter cuidado para selecionar as superfícies escravas e mestres corretamente para alcançar a melhor simulação de contato possível. Algumas regras simples para seguir são:

- A superfície escrava deve ter a malha mais refinada, e;
- Se as densidades de malha são semelhantes, a superfície escrava deve ser com o material mais dúctil.

4.2 Análise Numérica para *Two-Sided Doublers*

Esta seção tem como objetivo demonstrar os resultados obtidos da modelagem numérica para a geometria de *two-sided doubler* mostrada na Figura 4.6. Estes resultados serão comparados com os resultados obtidos analiticamente no Capítulo 5 (Resultados dos Modelos de *Doublers* Colados 2D).

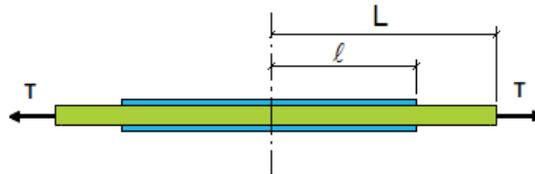


Figura 4.6: Representação do *two-sided doubler* em análise.

Para a modelagem do *doubler* no ABAQUS foram utilizados os parâmetros apresentados na Tabela 4.1, restringindo os deslocamentos no eixo *y* e a rotação com respeito ao eixo *z* nas extremidades do *skin*.

Tabela 4.1: Propriedades e parâmetros utilizados para modelar o *doubler* da Figura 4.6

Aderente Isotrópico	$E_1 = E_2 = 68,95 \text{ GPa}$ $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ $t_1 = t_2 = 1,27 \text{ mm}$
Adesivo Isotrópico	$E_a = 1,793 \text{ GPa}$ $G_a = 0,6895 \text{ GPa}$ $t_a = 0,127 \text{ mm}$
Geometria	$l = 100 \text{ mm}$ $L = 300$
Tensão	$T/t_1 = 137,9 \text{ MPa}$
* o subscrito 1 denota o aderente base e o subscrito 2 denota o <i>doubler</i> .	

A Figura 4.7 mostra o detalhe da malha modelada na extremidade direita da junta colada, onde foi utilizado um refinamento no adesivo e na extremidade da zona colada, respeitando a

razão de aspecto máxima de 3, sugerido no livro de Zienkiewicz, *The Finite Element Method - Solid Mechanics*.

Assim, o adesivo foi dividido em 10 elementos em sua espessura, com um total de 2840000 elementos na junta colada e 690000 elementos em cada adesivo. A Tabela 4.2 mostra as propriedades do elemento utilizado.

Tabela 4.2: Propriedades do elemento utilizado.

Propriedade	VALOR
Biblioteca de elementos	<i>Standard / 2D Stress</i>
Ordem geométrica	Quadrática
Tipo de elemento	Quadrilateral de 8 nós
Código	CPE8R

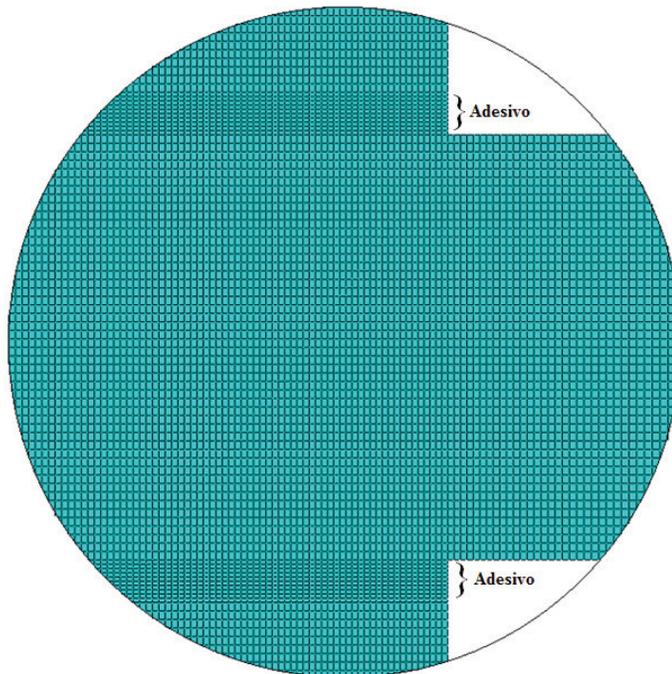


Figura 4.7: Malha utilizada no ABAQUS.

A distribuição da tensão de von Mises no conjunto *skin-doubler* é mostrada na Figura 4.8.

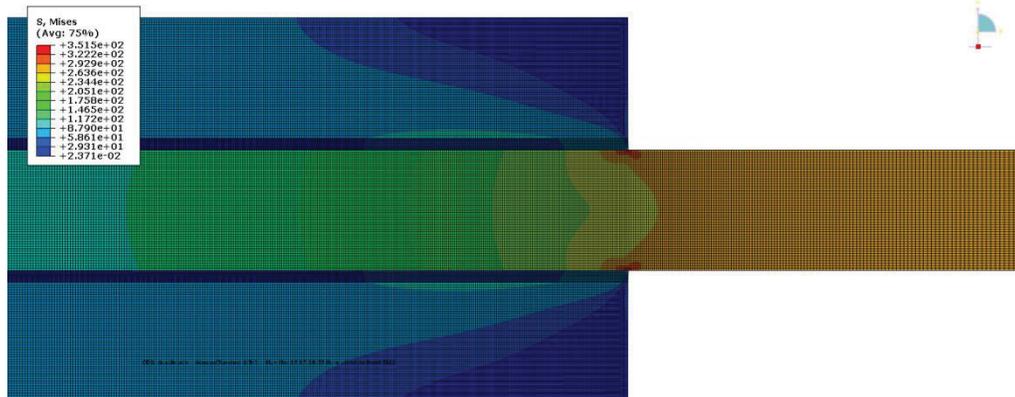


Figura 4.8: Distribuição da tensão de von Mises.

A Figura 4.9 representa a distribuição de tensão por cisalhamento no adesivo, obtida pelo método numérico. Foi considerado o efeito da tensão livre no final da camada de adesivo e o efeito da singularidade de canto na extremidade da zona colada, onde se verifica que a tensão de cisalhamento máxima atingiu 40 MPa nas extremidades do adesivo.

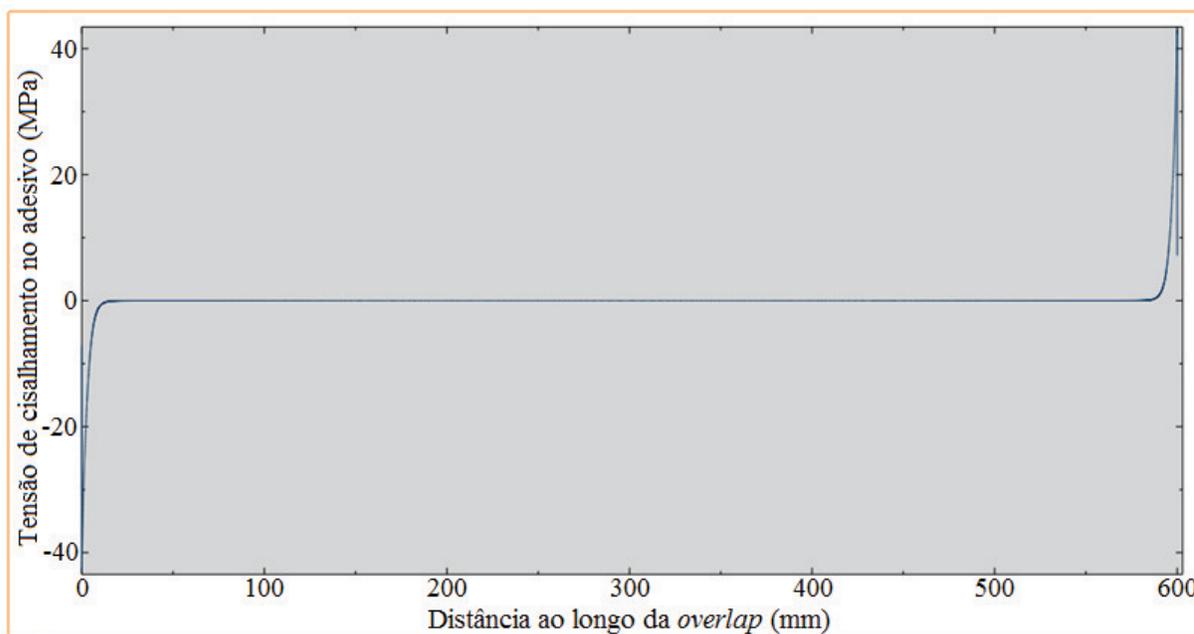


Figura 4.9: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.

A Figura 4.10 mostra a distribuição de tensão de *peeling* no adesivo. Observa-se um pico de 44 MPa nas extremidades do adesivo.

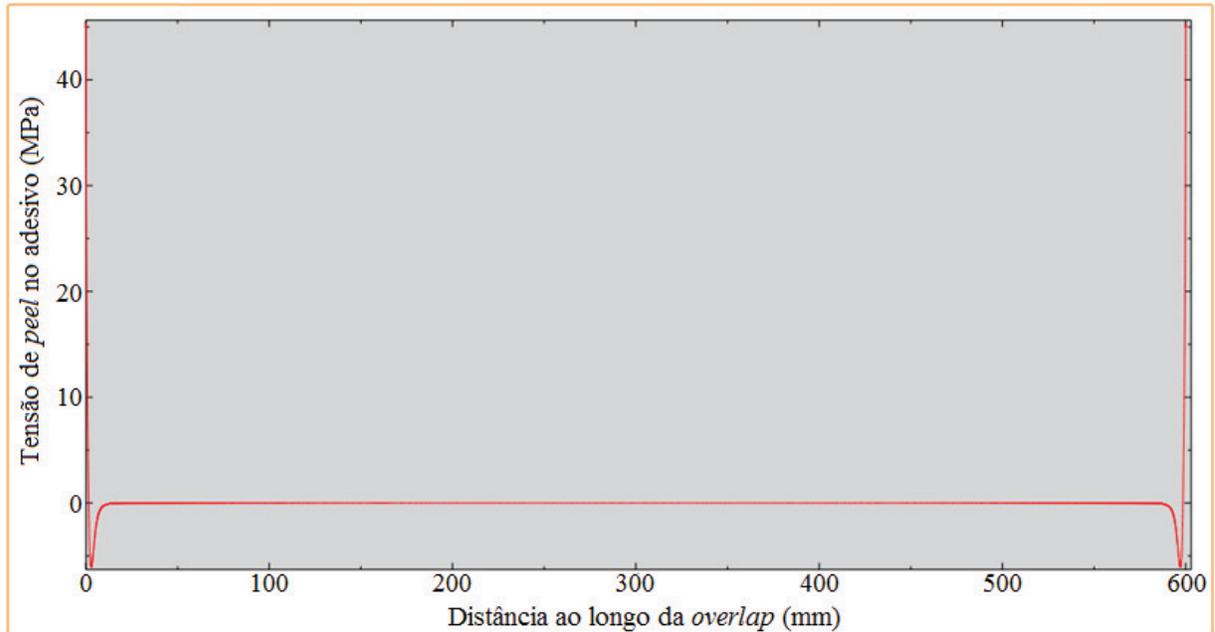


Figura 4.10: Distribuição da tensão de *peeling* no adesivo.

4.3 Análise Numérica para *One-Sided Doublers*

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos numericamente para o modelo de *one-sided doubler*, conforme mostrado na Figura 4.11. Este modelo será validado com os modelos analíticos de Duong (2006) e Hart-Smith (2005b) no capítulo 5 (Resultados dos Modelos de *Doublers* Colados 2D).

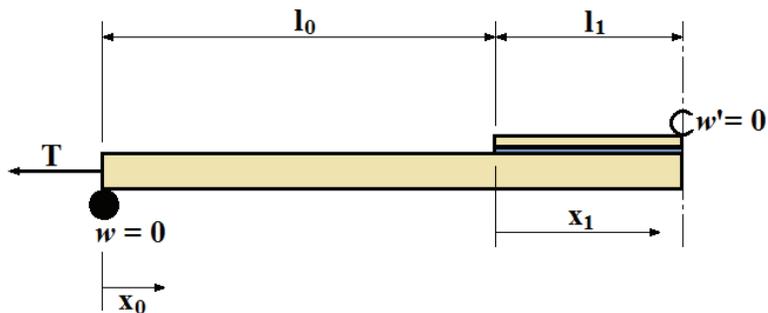


Figura 4.11: Geometria do *one-sided doubler* em análise.

Para esta análise foram utilizados 174000 elementos com as propriedades mostradas na Tabela 4.2, refinando a malha no adesivo e na extremidade da zona colada. Mostrando-se que a

convergência dos resultados ficou satisfatória com a divisão do adesivo em quatro elementos na direção de sua espessura. Uma demonstração do estudo de convergência será feita no Capítulo 7.

A Tabela 4.3 mostra os parâmetros do modelo da Figura 4.11 inseridos no modelo numérico, onde foram aplicadas como condições de contorno as restrições do deslocamento no eixo y e a rotação com respeito ao eixo z nas extremidades do *skin*.

Tabela 4.3: Propriedades e parâmetros utilizados para modelar o *one-sided doubler* ABAQUS.

Aderente Isotrópico	$E_1 = E_2 = 68,95 \text{ GPa}$ $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ $t_1 = t_2 = 1,27 \text{ mm}$
Adesivo Isotrópico	$E_a = 1,793 \text{ GPa}$ $G_a = 0,6895 \text{ GPa}$ $t_a = 0,127 \text{ mm}$
Geometria	$L_0 = 25,4 \text{ cm}$ zona colada = 6,35 cm
Tensão	$T/t_1 = 137,9 \text{ MPa}$

* o subscrito 1 denota o aderente base e o subscrito 2 denota o *doubler*.

A não-linearidade geométrica foi acrescentada nos cálculos por elementos finitos deste modelo, onde a análise de tensão de von Mises no pós-processamento do *software* ABAQUS está mostrada na Figura 4.12, com sua deformação mostrada na escala 5:1 de ampliação.



Figura 4.12: Deformação do *doubler* na escala de 5:1 de ampliação com a aplicação da carga.

A Figura 4.13 mostra a distribuição de tensão de von Mises na extremidade direita da zona colada, evidenciando a modelagem da malha utilizada com quatro elementos na direção da espessura do adesivo e refinamento nos pontos de singularidade. A tensão máxima atingiu um valor de 301 MPa no *skin*, próximo ao início da zona colada, como esperado.

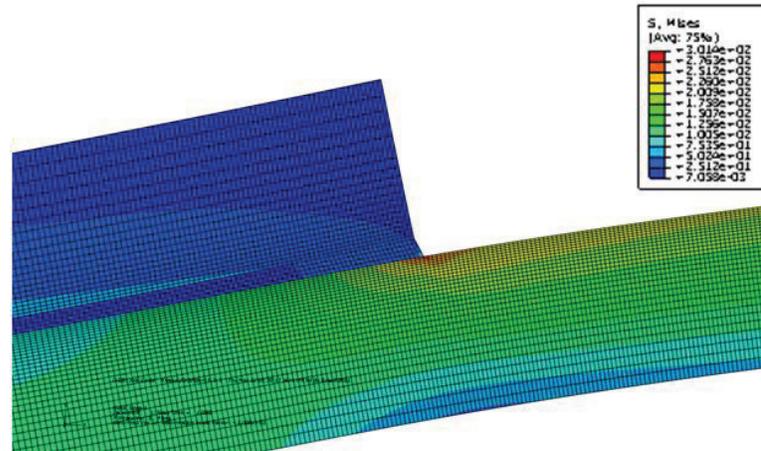


Figura 4.13: Distribuição de tensão de von Mises, mostrando o valor máximo próximo ao final da zona colada.

O isolamento do adesivo dos aderentes da Figura 4.13, juntamente com sua distribuição de tensão de von Mises pode ser visto na Figura 4.14.

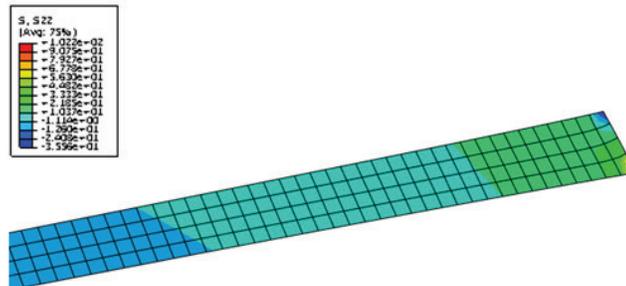


Figura 4.14: Tensão de von Mises na extremidade do adesivo.

A distribuição da tensão de *peel* e cisalhamento no adesivo na sua linha média ao longo de seu comprimento podem ser vistas nas Figura 4.15 e Figura 4.16 respectivamente. Onde a diferença de deflexão entre o *doubler* e o aderente (*skin*) gera uma tensão de *peeling* no adesivo, com concentração de tensão no final da zona colada, passando pelo eixo zero no ponto de inflexão.

Na Figura 4.16, a tensão de cisalhamento negativa indica que a tensão está no sentido negativo da coordenada de referência imposta. Esta tensão de cisalhamento ocorre pela diferença de deslocamento longitudinal entre o *doubler* e o aderente.

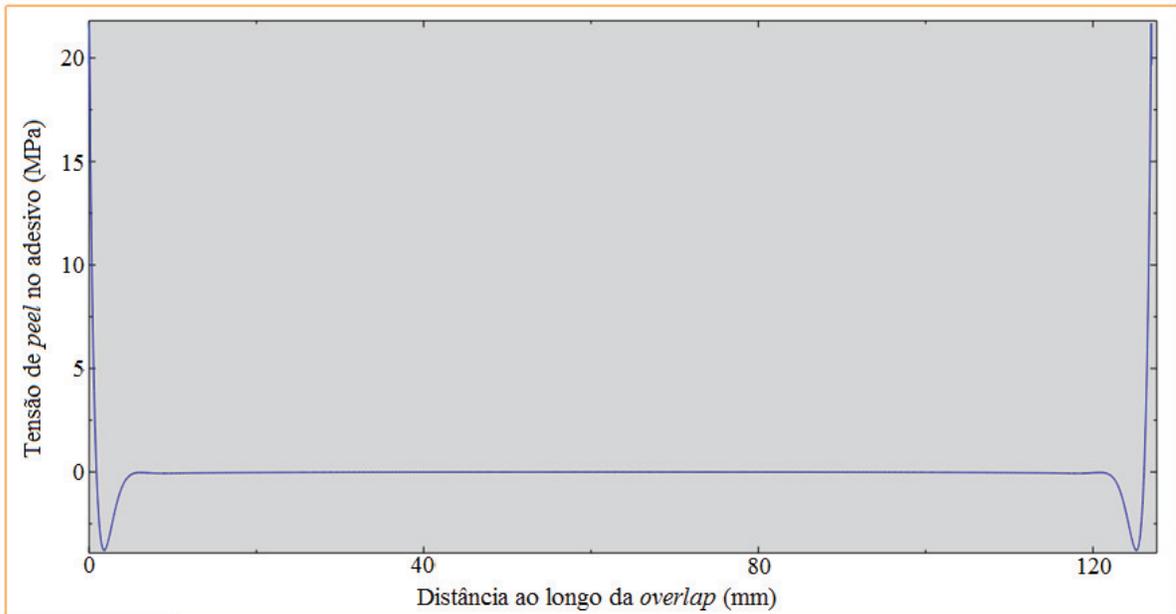


Figura 4.15: Distribuição da tensão de *peeling* no adesivo.

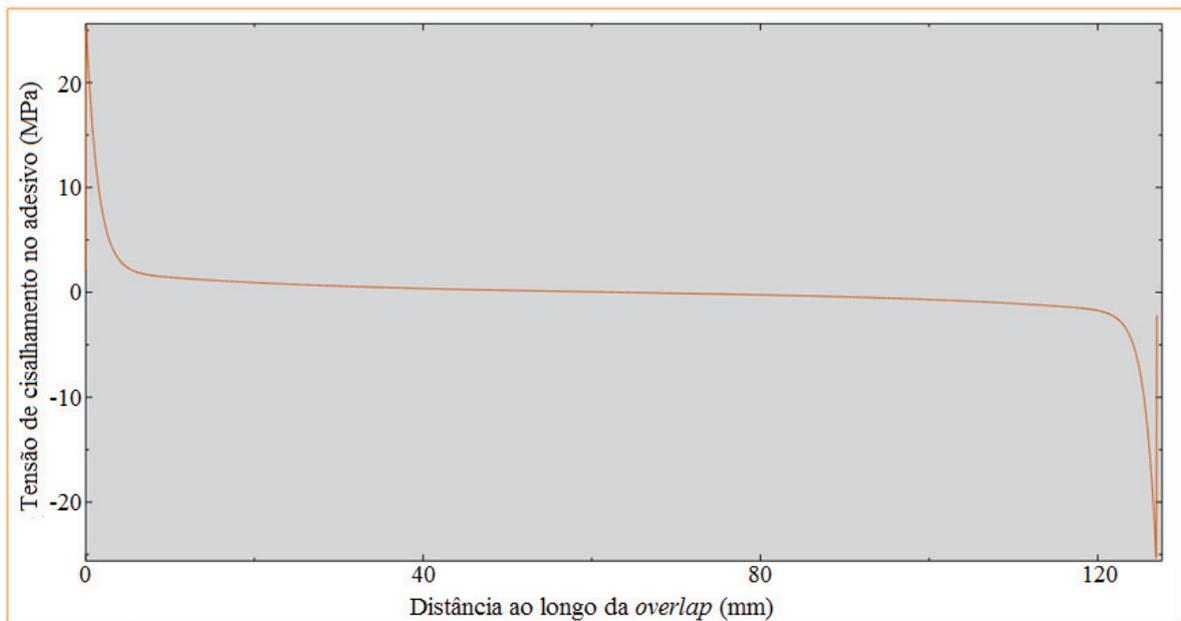


Figura 4.16: Distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.

Capítulo 5

5 Resultados dos Modelos de *Doublers* Colados 2D

Neste capítulo serão mostrados os resultados dos modelos analíticos de *doublers* colados 2D, juntamente com a comparação e validação com os resultados numéricos obtidos no Capítulo 4. Além disso, também será mostrada uma análise utilizando o *software* comercial ESACOMP para a comparação com os resultados obtidos numericamente e analiticamente.

Os resultados apresentados aqui serviram como base para o desenvolvimento dos corpos de prova (CDPs) e dos subcomponentes mostrados nos capítulos seguintes.

5.1 Resultados da Modelagem para *Two-Sided Doublers*

Nesta seção serão mostrados os resultados da implementação no MatLab do modelo analítico de *two-sided doublers* apresentado no Capítulo 3. A configuração para esta análise está mostrada na Figura 5.1 e os parâmetros utilizados são dados a seguir:

Aderente Isotrópico: $E_1 = E_2 = 68.95$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $t_1 = t_2 = 1.27$ mm, onde o subscrito 1 e 2 denotam o aderente base e o *doubler* respectivamente:

Adesivo Isotrópico: $E_a = 1.793$ GPa, $G_a = 0.6895$ GPa, $t_a = 0.127$ mm.

Geometria: $l = 300$ mm e $L = 600$ mm.

Tensão: $T/t_1 = 137.9$ MPa.

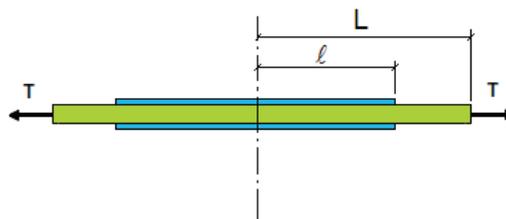


Figura 5.1: Modelo analisado de *two-sided doublers*.

A Figura 5.2 mostra a distribuição de tensão cisalhante no adesivo da extremidade esquerda do *overlap* até o seu centro de simetria, onde se verifica um pico de tensão de 30 *MPa* no final do *overlap*.

Ainda na Figura 5.2, observa-se que os deslocamentos longitudinais do *skin* e dos dois reforçadores praticamente são os mesmos, mudando exponencialmente perto da região final do *overlap*.

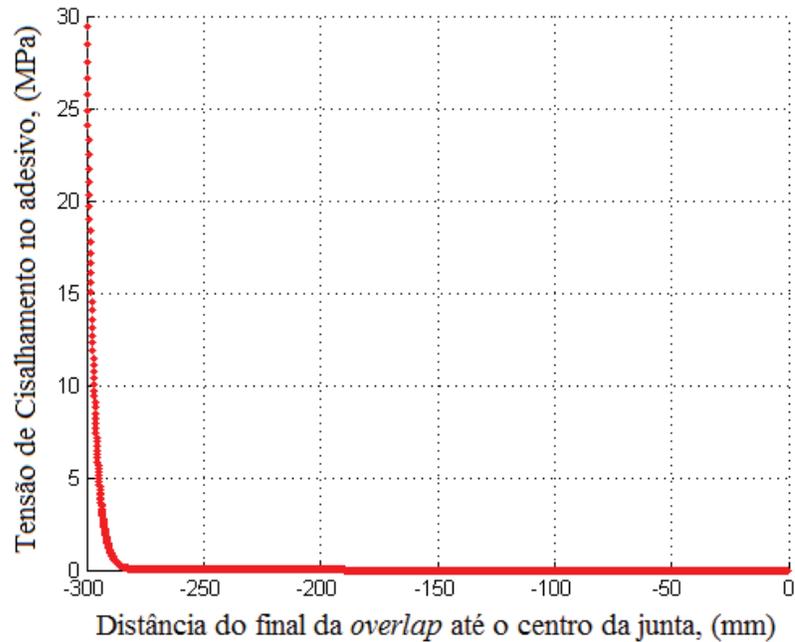


Figura 5.2: Distribuição de tensão cisalhante no adesivo (lado esquerdo da simetria).

A Figura 5.3 está representando a distribuição de tensão de *peel* no adesivo da extremidade esquerda do *overlap* até o centro de simetria, tendo um pico de tensão de 34 *MPa* e com passagem pelo eixo zero no ponto de inflexão.

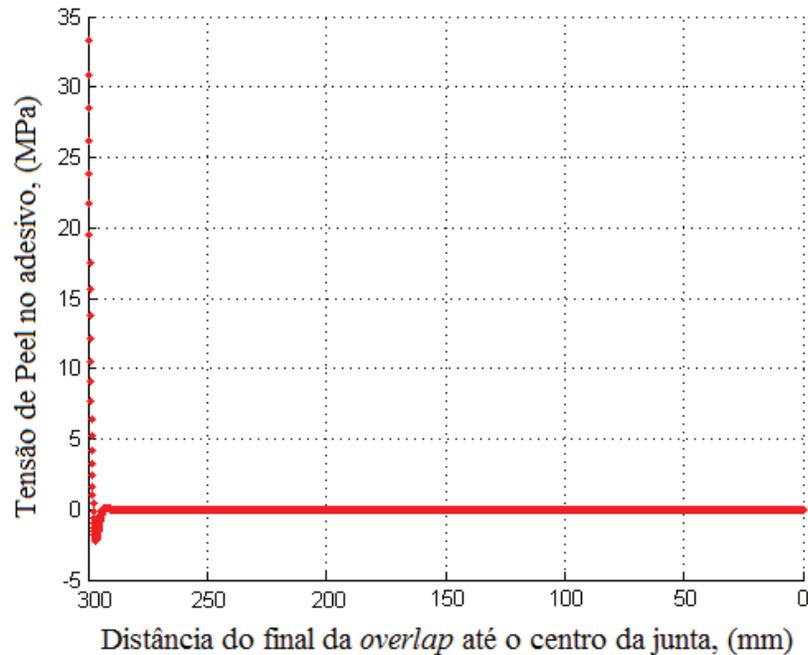


Figura 5.3: Distribuição de tensão de *peel* no adesivo (lado esquerdo da simetria).

A Figura 5.4 mostra a comparação do modelo analítico com o modelo numérico, apresentado no Capítulo 4, para a distribuição da tensão de cisalhamento no lado esquerdo do plano de simetria da junta.

Nesta comparação, observa-se que em ambos os métodos, a tensão de cisalhamento no adesivo na região central da junta é nula, e com um alto gradiente de tensão na região próxima a extremidade da zona colada. Além disso, o pico máximo de tensão no método analítico, que considera algumas simplificações já discutidas no Capítulo 3, é menor que no método numérico, mas obtendo uma tensão não nula mais longe do final da zona colada.

A Figura 5.5 mostra a mesma comparação discutida anteriormente, mas para a distribuição da tensão de *peel* no adesivo, utilizando o lado esquerdo do plano de simetria. Novamente verifica-se que a tensão de *peel* máxima no adesivo é maior no método numérico em relação ao método analítico, mas com as curvas ficando bastante próximas no ponto de inflexão.

Apesar das poucas diferenças nos resultados, pode-se concluir que para este caso de junta o método analítico se demonstrou bastante confiável, apesar de suas simplificações na física do problema. Assim, para uma análise rápida, ou projeto inicial do *two-sided doubler*, pode-se implementar o modelo analítico como forma de ganho de tempo em relação aos outros métodos.

Foi com este intuito que se desenvolveu um *software*, mostrado no capítulo 6, capaz de calcular de forma rápida e eficaz os *doublers* colados.

Cabe ressaltar, que a diferença entre os métodos se demonstrou menor para aplicações de tensões remotas menores na extremidade do *skin*.

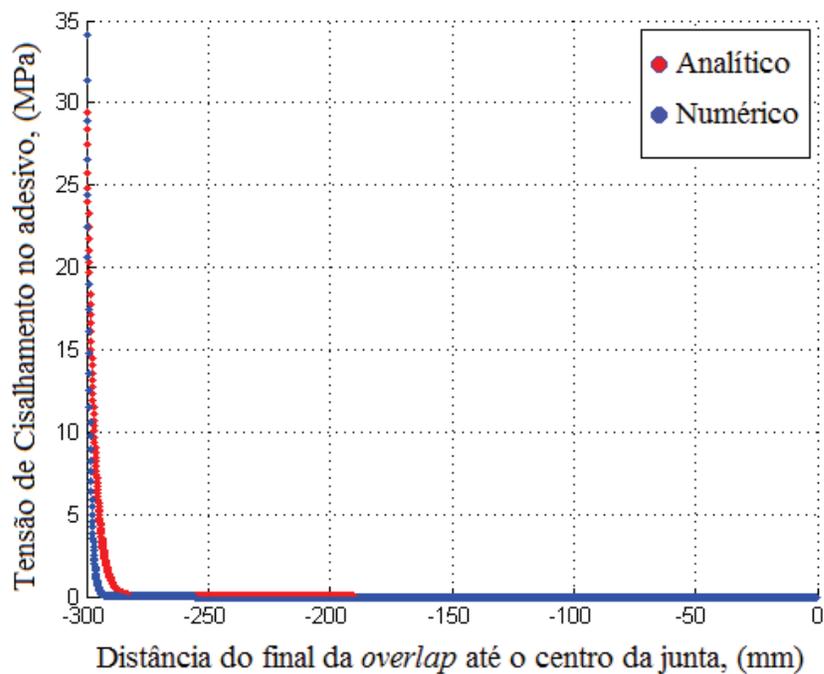


Figura 5.4: Comparação entre as distribuições de tensão de cisalhamento, modelo analítico e numérico.

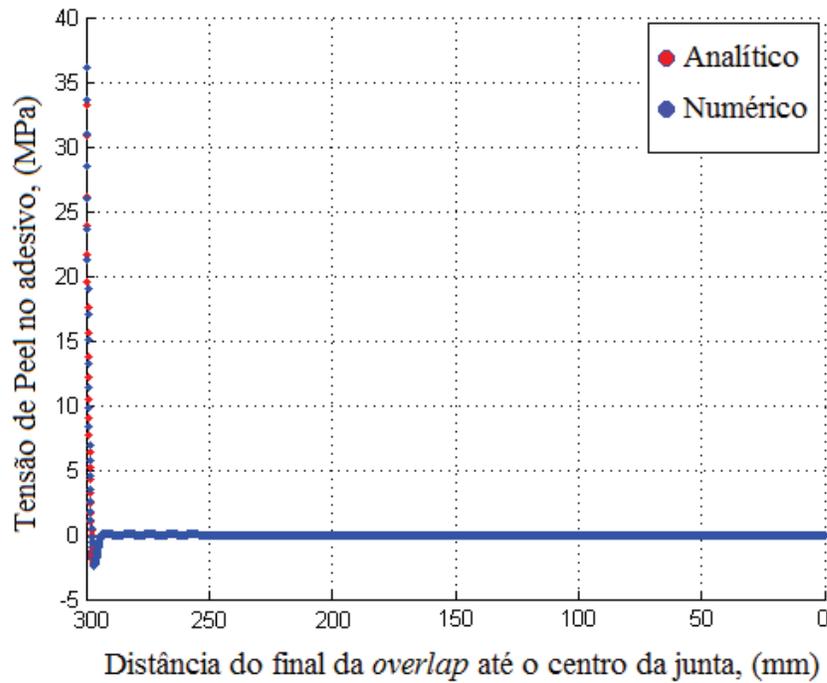


Figura 5.5: Comparação entre as distribuições de tensão de *peeling*, modelo analítico e numérico.

5.2 Resultados da Modelagem Analítica para *Two-Sided Doublers*, Modelo Elasto-Perfeitamente Plástico do Adesivo.

Nesta seção são demonstrados os resultados obtidos da implementação em MatLab do modelo analítico elastoplástico do Capítulo 3. Cabe ressaltar, que este método está presente neste trabalho apenas como uma alternativa de análise do adesivo e não como efeito de comparação com o modelo elástico.

O modelo elastoplástico de *two-sided doubler* analisado nesta seção está mostrado na Figura 5.6, e seus parâmetros são dados abaixo:

Adesivo Isotrópico: $E_a = 1.793$ GPa, $G_a = 0.6895$ GPa, $t_a = 0.127$ mm.

Deformação Plástica Inicial: 0.05 mm/mm;

Deformação Plástica Final: 0.84 mm/mm;

Aderente Isotrópico: $E_1 = E_2 = 68.95$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $t_1 = t_2 = 1.27$ mm, onde o subscrito 1 e 2 denota o aderente base e o *doubler* respectivamente.

Geometria: $l = 100$ mm.

Tensão variando de 10 até 500 MPa com um incremento de 50 MPa na zona elástica e 25 MPa na zona plástica.

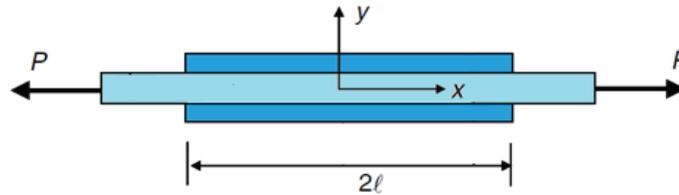


Figura 5.6: Modelo elasto-plástico analisado de *two-sided doublers*.

A Figura 5.7 mostra a distribuição de tensão cisalhante no adesivo, onde as curvas em vermelho representam que o adesivo está na zona elástica, ou seja, para este exemplo, o adesivo permaneceu na região elástica até uma tensão aplicada de 200 MPa no *skin*. As curvas em azul representam a distribuição de tensão no adesivo que entrou em uma região plástica para uma determinada tensão aplicada, ou seja, para o exemplo em questão, obteve-se para uma tensão remota no *skin* de 500 MPa um comprimento do adesivo na região plástica de 11.79 mm nas extremidades do *overlap*.

É importante observar, que a tensão no adesivo se manteve constante a partir de uma tensão remota aplicada nas extremidades do *skin* de 250 MPa, devido ao modelo assumido ser elasto-perfeitamente plástico.

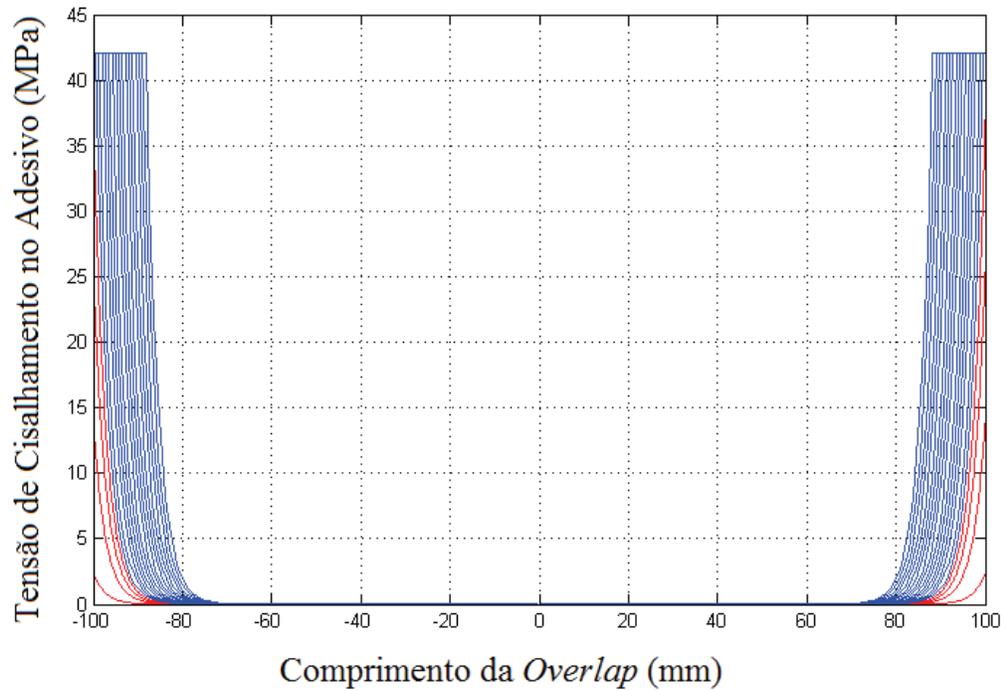


Figura 5.7: Distribuição de tensão cisalhante no adesivo para o modelo elasto-perfeitamente plástico da Figura 5.6.

5.3 Resultados da Modelagem Analítica para *One-Sided Doublers*

Para a geometria da Figura 5.8, os resultados da implementação no MatLab dos modelos analíticos de Duong e Hart-Smith do Capítulo 3 são mostrados resumidamente na Tabela 5.1.

Para esta análise foram utilizados os seguintes parâmetros:

Aderente Isotrópico: $E_1 = E_2 = 68.95$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $t_1 = t_2 = 1.27$ mm, os subscritos 1 e 2 denotam o aderente base e o *doubler* respectivamente:

Adesivo Isotrópico: $E_a = 1.793$ GPa, $G_a = 0.6895$ GPa, $t_a = 0.127$ mm.

Geometria: $l_0 = 254$ mm, com área sobreposta (l_1) de 63.5 mm.

Tensão: $T/t_1 = 137.9$ MPa.

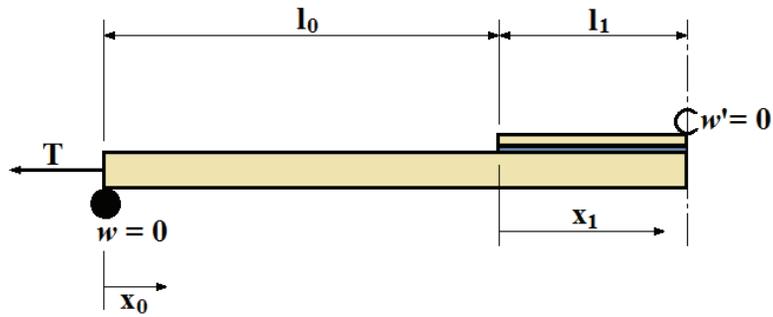


Figura 5.8: Geometria do *one-sided doubler* do presente exemplo.

Tabela 5.1: Resultados analíticos de *one-sided doubler*.

Modelo C.N. Duong	
Tensão de <i>Peel</i> no Adesivo	Tensão de Cisalhante no Adesivo
Modelo Hart-Smith	

A comparação dos modelos analíticos de *one-sided doublers* do Capítulo 3 com os resultados numéricos do Capítulo 4 estão mostrados nas Figura 5.9 e Figura 5.10, para a tensão

de *peel* e cisalhamento respectivamente. Estas análises foram realizadas no lado esquerdo do plano de simetria da junta colada.

Em relação ao método numérico, a tensão de *peeling* e de cisalhamento obtidas pelas análises de elementos finitos são computadas no plano médio da camada adesiva, que são aproximadamente iguais à média das tensões em toda a sua espessura.

Foi mostrado anteriormente, que as tensões no adesivo na extremidade da zona colada sofrem do efeito da concentração de tensão e portanto, as tensões no adesivo tornam-se dependentes da malha. A este respeito, uma comparação entre a solução analítica e o resultado numérico necessita de alguma interpretação física. A solução analítica para o pico de tensão de *peeling* e de cisalhamento no adesivo deverá ser comparada com o correspondente resultado numérico perto do final da zona colada, mas fora da região de canto com o domínio da singularidade, onde a dependência da malha traz problemas de interpretação.

Em relação às curvas obtidas, verificou-se que todos os métodos ficaram bem próximos.

A análise de tensão no adesivo, proposta por Duong (2006) e Hart-Smith (2005b) é geometricamente linear, com todas as condições de contorno impostas equivalentes no final da zona colada, embora o primeiro passo da análise para a determinação do momento fletor ao longo da junta seja não-linear. Portanto, as suas soluções para tensão de *peeling* devem ser semelhantes, verificando-se também uma equivalência com o resultado numérico com solução não-linear.

Por outro lado, a solução de tensão de cisalhamento no adesivo foi obtida através da utilização da mesma condição de contorno de momento no final da zona colada, bem como a implicação do momento fletor no meio do *doubler* como zero. Esta condição de momento zero na metade do *doubler* é obtida a partir da primeira etapa da análise para configurações de *doublers* geometricamente não-lineares e com um grande comprimento da zona colada.

No entanto, se a segunda etapa é realizada dentro de uma teoria linear, a presente aproximação não será necessariamente a mesma condição de contorno zero para o momento fletor no meio da zona colada, para o caso extremo de uma zona colada longa e com uma alta carga aplicada. Isso ocorre porque a condição para o meio da junta pode ser determinada unicamente considerando o equilíbrio estático do momento na área da zona colada sem resolver explicitamente as equações diferenciais. Isto explica a maior diferença entre os métodos nas curvas quando se aproximam do meio da zona colada. Assim, a solução analítica de Hart-Smith se afasta da solução numérica no centro da junta.

É importante notar na física do problema, que para uma alta rigidez à flexão dos aderentes, um comprimento relativamente menor da zona colada e uma espessura menor dos aderentes, o efeito da não-linearidade é mais acentuado. Isto porque, a inclusão da não-linearidade soluciona de forma mais correta o efeito do alinhamento do plano neutro do *overlap* na linha de distribuição da carga. Assim, nas análises feitas neste trabalho, verificou-se que a solução de Hart-Smith usou implicitamente, mas inconsistentemente a condição de momento fletor igual à zero no meio da junta.

Em relação ao pico de tensão de *peel* no final da zona colada, a solução de Hart-Smith foi a que se aproximou mais da solução numérica, enquanto para a tensão cisalhante, a solução de Duong foi a que ficou mais próxima da solução numérica. É interessante observar que mesmo com todas as simplificações impostas no modelo do autor deste trabalho, a tensão máxima de cisalhamento no adesivo ficou muito próxima das outras soluções, sendo esta tensão máxima a mais importante no projeto de *doublers* colados.

No sentido de analisar o pico de tensão, é também interessante notar que o acréscimo de camadas de *doublers* reduziria esta tensão máxima seguindo os mesmos conceitos descritos anteriormente. Esta demonstração foi retirada evitando um grande prolongamento nas análises de *doublers* colados.

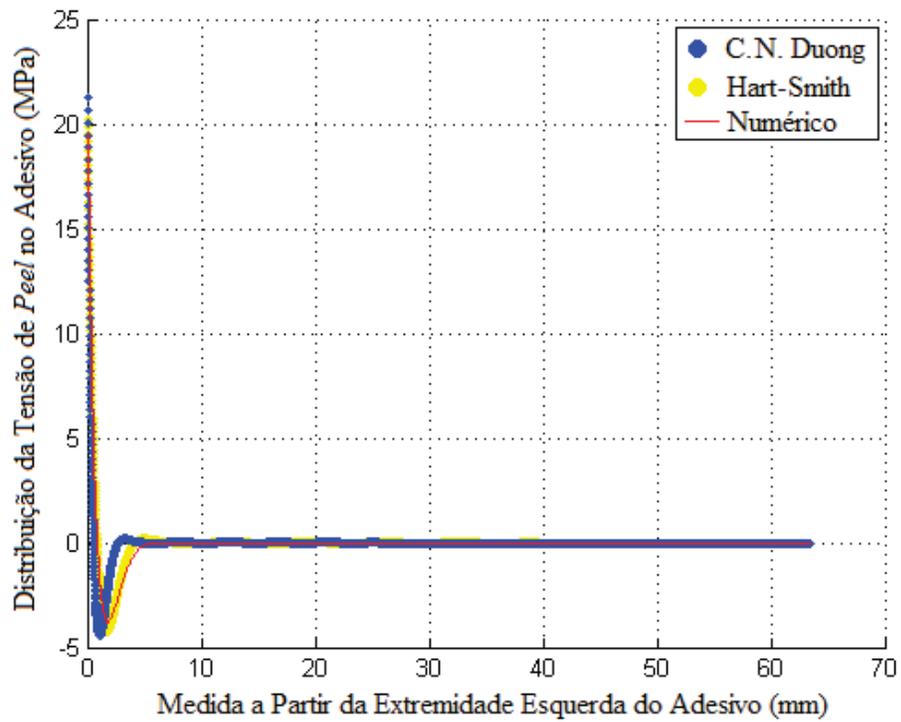


Figura 5.9: Comparação da distribuição de tensão de *peeling* no adesivo de um *one-sided doubler*.

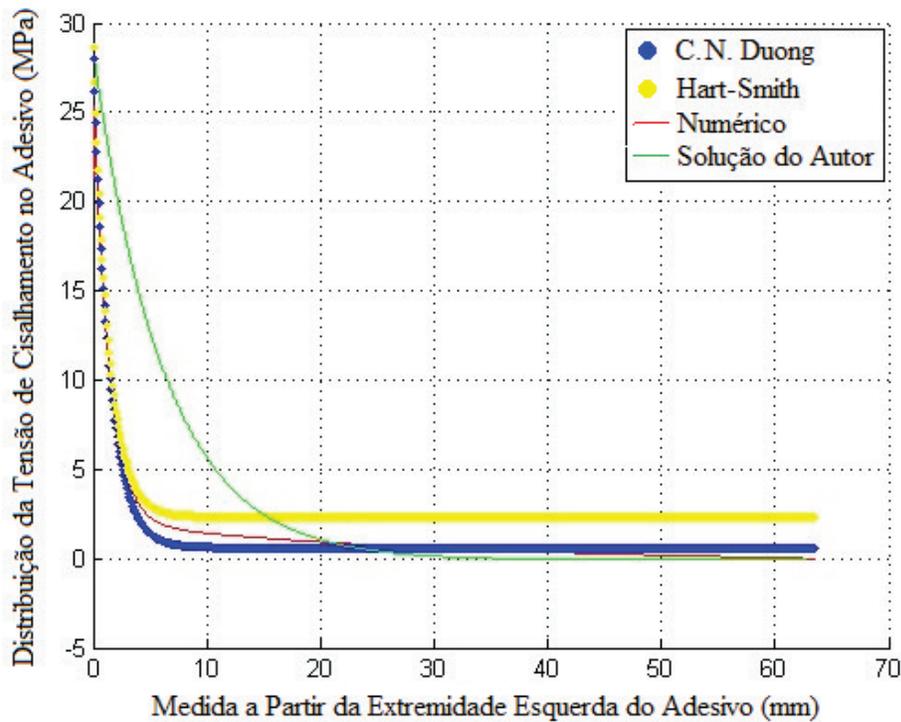


Figura 5.10: Comparação da distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo de um *one-sided doubler*.

5.4 Comparação com os Resultados do Software ESACOMP

O *software* comercial ESACOMP foi utilizado para a obtenção da distribuição de tensão no adesivo para o modelo de *one-sided doubler* mostrado na Figura 5.8, com o intuito de comparar e validar o método numérico e os métodos analíticos empregados nas seções anteriores.

O ESACOMP é um *software* para análises e projetos de materiais compósitos. Seu escopo abrange desde o projeto conceitual e preliminar das camadas estruturais dos compósitos até análises mais detalhadas.

O ESACOMP é uma ferramenta que apresenta uma interface com pacotes de *software* de elementos finitos. O banco de dados de materiais no ESACOMP forma a base para estudos de projetos, além de ter um conjunto de recursos para análises de laminados e análises de micromecânica.

Além disso, inclui ferramentas de análise de elementos estruturais como: vigas, colunas, juntas coladas e articulações mecânicas. ESACOMP é desenvolvido e suportado pela *Componeering Inc.*, Finlândia.

As juntas coladas, mais precisamente os *doublers* colados, são analisados no ESACOMP como um objeto formado por lâminas de aderentes e adesivos. A especificação da junta colada é iniciada pela seleção do tipo da junta e definição de sua estrutura. A seleção dos aderentes, do adesivo e o comprimento da zona colada são requeridos para a especificação da geometria do *doubler*, assim como todos os outros parâmetros geométricos e dos materiais compostos da junta colada.

O carregamento aplicado na junta, juntamente com as condições de contorno formam o outro requisito para a simulação da junta no *software*. Na Figura 5.11, está mostrada a janela de interface do *software* ESACOMP durante a seleção dos materiais da junta.

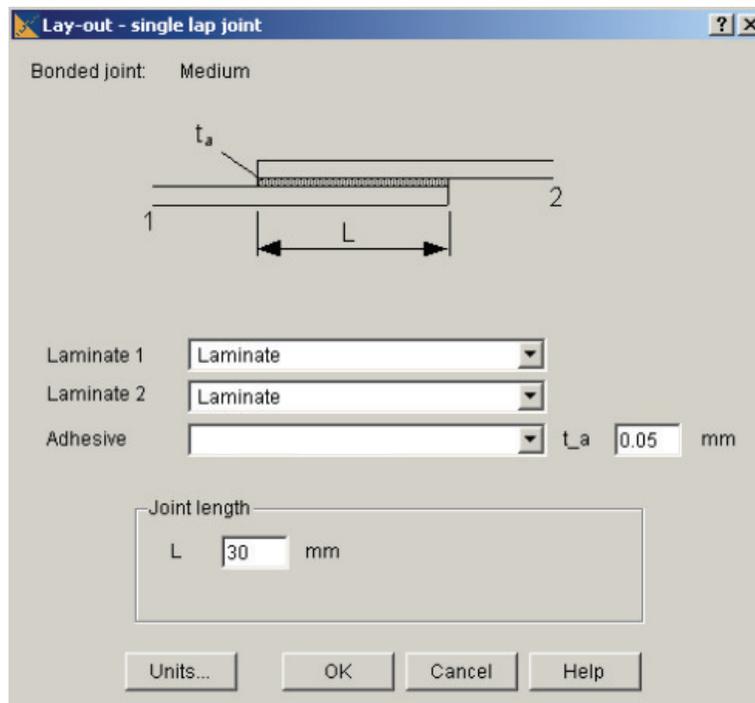


Figura 5.11: Tela para a entrada dos parâmetros que definem a geometria da junta, do *software* ESACOMP.

Para a distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo, a partir do plano de simetria até o canto direito da zona colada, o *software* obteve uma tensão máxima de 28,07 MPa, situada no fim da zona colada, como já visto nos modelos numérico e analíticos. Além disso, sua distribuição de tensão ao longo da junta colada ficou em uma faixa muito próxima dos modelos analíticos e numéricos implementados, como pode se verificar pela comparação entre a Figura 5.10 e a Figura 5.12.

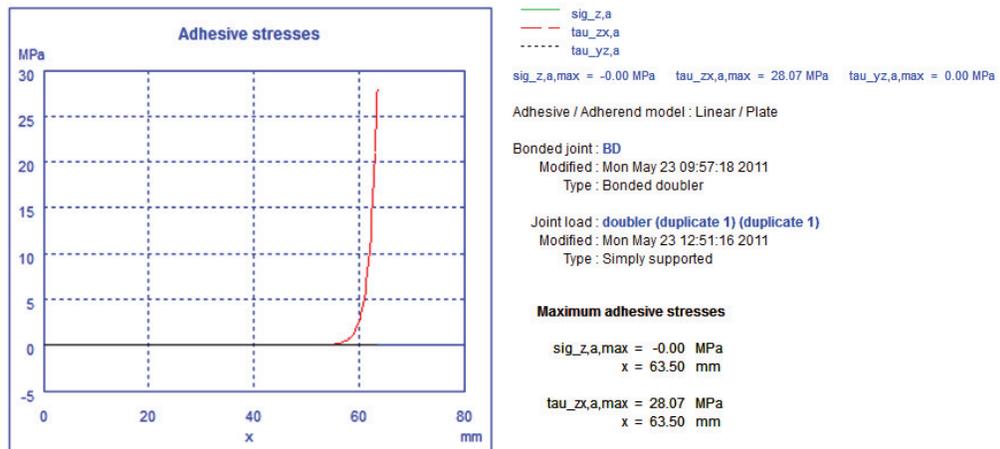


Figura 5.12: Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo, calculada pelo ESACOMP.

Na distribuição de tensão de *peel* no adesivo, foi constatada uma diferença no resultado obtido com *software* ESAComp e com os resultados obtidos neste trabalho.

Na Figura 5.13, verifica-se que o ESACOMP apresenta uma tensão de *peeling* praticamente nula no adesivo. Através da utilização dos demais métodos, verificou-se que a tensão de *peeling* no final da zona colada não é nula, pois seu valor para esta configuração de *doubler* é aproximadamente 23 MPa.

Devido à concordância da distribuição de tensão cisalhante no adesivo para a mesma análise, é provável que a solução para a tensão de *peel* no *software* ESAComp contenha algum erro. A solução deste problema está sendo solicitada junto aos desenvolvedores do *software*.

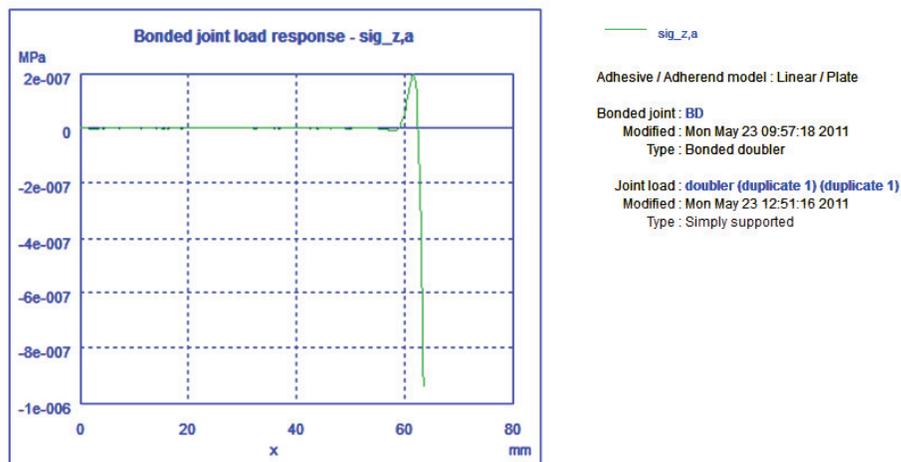


Figura 5.13: Distribuição da tensão de *peeling* no adesivo calculada pelo ESACOMP.

Capítulo 6

6 Software de *Doublers Colados*

Devido à complexidade dos modelos analíticos e às dificuldades em sua interpretação e implementação, foi desenvolvido um *software* capaz de solucionar os problemas de análises de tensões no adesivo de *doublers* colados. Este curto capítulo apresenta sucintamente o funcionamento do *software* desenvolvido neste trabalho.

Este *software* foi desenvolvido em MATLAB, utilizando uma interface gráfica que permite ao usuário utilizar os principais modelos analíticos e numéricos de forma amigável, obtendo-se rápidos resultados para pré-dimensionamento.

A Figura 6.1 mostra a janela inicial do *software* desenvolvido para análise de *doublers* colados.



Figura 6.1: Janela inicial do *software* de *doublers* colados.

Ao dar início ao programa, o usuário se deparará com a opção de escolher entre as análises de tensão do adesivo por meio dos modelos analíticos ou pelos modelos numéricos, mediante a interação do *software* com a linguagem de programação PYTHON e com o ABAQUS.

Além disso, se o usuário desejar, o *software* permite fazer a comparação dos métodos para cada geometria definida pelo usuário.

A opção de otimização, permite ao usuário definir um subcomponente de *doublers* colados representativo de estruturas aeronáuticas, visando à redução de peso na estrutura, este procedimento é realizado por meio da interação com o PYTHON e o ABAQUS e será detalhada no Capítulo 8 dos subcomponentes.

A Figura 6.2 mostra a janela de escolhas dos modelos de análise, permitindo ao usuário escolher o procedimento desejado clicando em um dos quatro botões disponíveis nesta janela: Analítico, Numérico, Comparação e Otimização.



Figura 6.2: Janela de escolhas dos modelos de análise.

Ao clicar no botão Analítico, o usuário encontrará a disposição os principais modelos analíticos descritos no Capítulo 3, Figura 6.3.

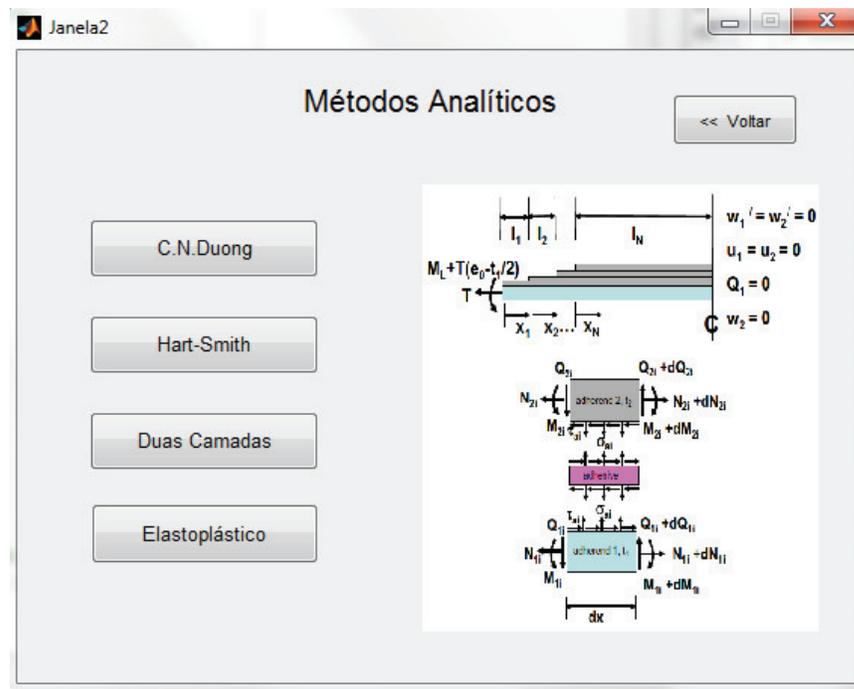


Figura 6.3: Janela de escolhas dos modelos analíticos.

Como exemplo, ao escolher o modelo de Duong, o usuário terá que definir os parâmetros de entrada da geometria e as condições de contorno do problema, mostrado na Figura 6.4. Isto pode ser feito para cada análise ou selecionando o botão novo seguido do botão carregar, para que dados de entrada salvos anteriormente possam ser carregados na tela. O botão salvar permite ao usuário salvar os novos dados de entrada definidos em um arquivo *.txt, permitindo usá-los para futuras repetições de análises ou em outros modelos analíticos.

Após definir os valores de entrada, o usuário poderá obter a distribuição de tensão cisalhante e de *peel* no adesivo, a deflexão e o momento fletor na junta colada, por meio da escolha entre quatro botões: Cisalhamento, *Peel*, Deflexão e Momento, mostrado na Figura 6.4.

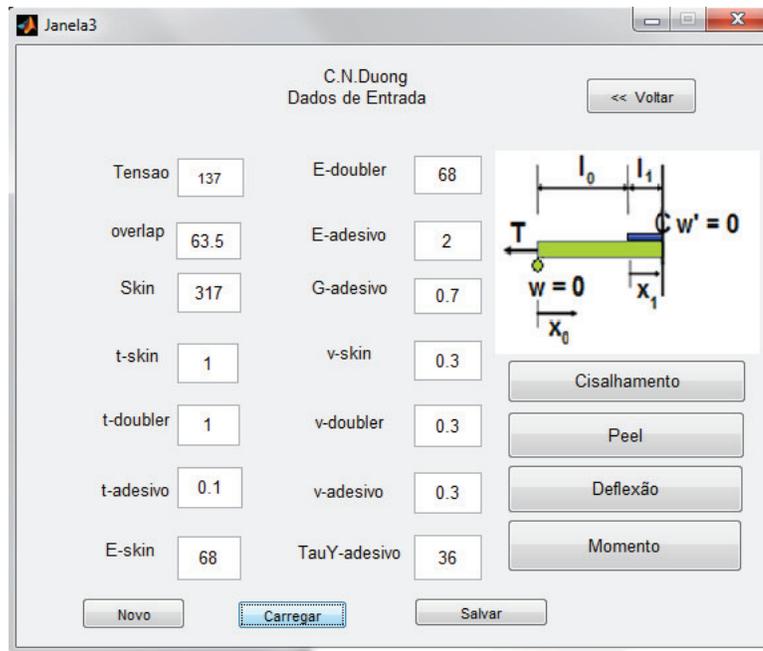


Figura 6.4: Janela de entrada de dados para o modelo analítico de C.N. Duong.

Como exemplo, ao clicar no botão Deflexão na janela da Figura 6.4, abrirá uma janela mostrando a deflexão na junta a partir do centro até a extremidade direita do *overlap*, Figura 6.5.

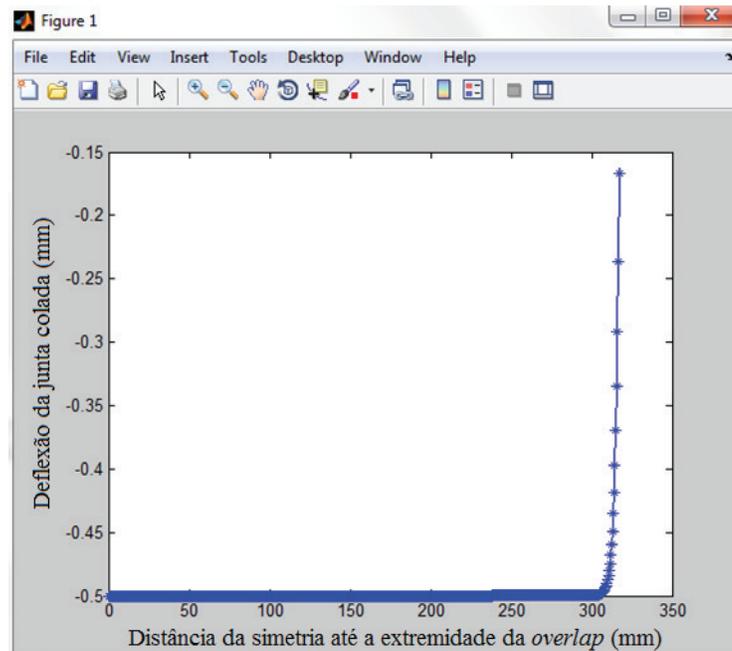


Figura 6.5: Janela de deflexão na junta colada para os dados de entrada da Figura 6.4.

Se o usuário optar pela análise numérica por elementos finitos na janela principal de escolhas dos métodos, Figura 6.2, o usuário se deparará com uma interação entre o *software* desenvolvido em MATLAB, um *script* em PYTHON e o *software* comercial ABAQUS.

A Figura 6.6 mostra uma representação do procedimento realizado no *software* para as análises numéricas de *doublers* colados.

No primeiro passo para a análise numérica no *software*, o usuário deverá inserir os valores de entrada na janela de entrada de dados do *doubler* colado, definindo a sua geometria e suas condições de contorno. Se preferir, o usuário pode carregar os dados de entrada de um arquivo *.txt gerado de análises anteriores através do botão carregar.

No segundo passo, o usuário deverá selecionar o botão Gerar txt, onde o *software* gerará um arquivo *.txt com os dados de entrada que serão utilizados em um *script* em PYTHON, já pré-programado para a análise.

No terceiro passo, o ABAQUS utilizará este *script* em PYTHON após a importação do arquivo *.txt e realizará a análise por elementos finitos do *doubler* colado definido pelo usuário na primeira janela.

No quarto passo, após o processamento por elementos finitos no ABAQUS, um novo arquivo *.txt será gerado com os resultados da análise. Este arquivo será usado pelo *software* de *doublers* colados na obtenção da distribuição de tensão de cisalhamento, *peel e von Mises* no adesivo, além da distribuição de tensão no centro da junta colada.

É importante frisar que no quarto passo, o usuário só conseguirá obter os resultados se o botão Iniciar Análise, no canto superior esquerdo for selecionado. Este botão é o responsável pela importação do arquivo *.txt com os resultados numéricos do ABAQUS. A indicação que este botão foi selecionado é através da mudança de cor de vermelho para verde de um sinalizador no canto inferior esquerdo, Figura 6.6.

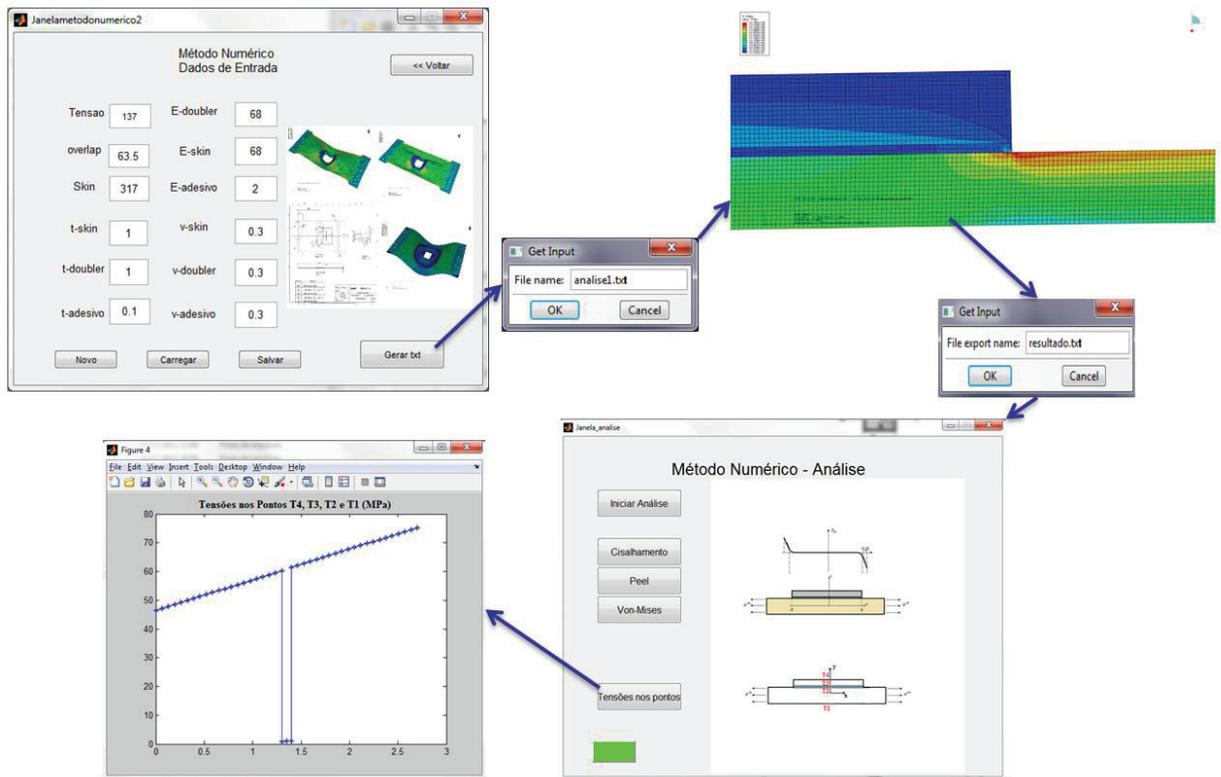


Figura 6.6: Procedimento realizado no *software* para as análises numéricas de *doublers* colados.

Na última janela da Figura 6.6 é mostrada a distribuição de tensão de von Mises em MPa no centro da junta colada, partindo da parte superior do *doubler* até a parte inferior do *skin* na direção da espessura da junta. Esta análise é interessante para a obtenção da transferência de carga do *skin* para o *doubler*, mostrando a eficiência do *doubler* colado proposto na análise.

A comparação dos resultados já foi discutida no Capítulo 5 e está disponível no *software* de *doublers* colados, e a parte de otimização do *software* será discutida mais detalhadamente no Capítulo 8, capítulo dos subcomponentes.

Capítulo 7

7 Resultados Numéricos e Experimentais dos CDPs de *Doublers* Colados

Este capítulo apresenta resumidamente algumas análises numéricas realizadas para a definição dos corpos de prova (CDPs) de *doublers* colados, além da metodologia e resultados de ensaios destes CDPs.

Como não existe nenhuma norma regulamentadora para ensaios experimentais de *doublers* colados, teve-se que criar uma metodologia de ensaio partindo desde o estudo e projetos dos CDPs até a elaboração de métodos experimentais.

A seguir, serão mostradas as análises numéricas e as dificuldades para a obtenção dos CDPs de *doublers* colados, o estudo e a elaboração das metodologias experimentais, os seus resultados e a validação com os métodos analíticos e numéricos mostrados nos capítulos anteriores.

7.1 Análise Numérica dos CDPs de *Doublers* Colados

A análise numérica para a obtenção dos CDPs de *doublers* colados foi fundamental para elaborar geometrias de CDPs adequadas para os ensaios experimentais. Evitando gastos excessivos na fabricação de CDPs que não fornecessem bons resultados durante os ensaios.

A principal dificuldade na obtenção dos CDPs de *doublers* está em suas condições de contorno. Isto porque, a carga aplicada está apenas no *skin*, Figura 7.1, fazendo com que a tensão no adesivo seja apenas devido à diferença de deformação do *skin* e do *doubler*. Assim, para obter uma carga de falha no adesivo, deve-se primeiramente evitar a falha no *skin* submetido às cargas aplicadas. Vale citar que existe uma condição de contorno para *doublers* colados onde em uma extremidade tanto o *skin* quanto o *doubler* são presos na garra da máquina de teste de tração.

A carga aplicada apenas no *skin* representa, por exemplo, os esforços sobre a fuselagem do avião que foi reparado por um reforço colado (*doubler*).

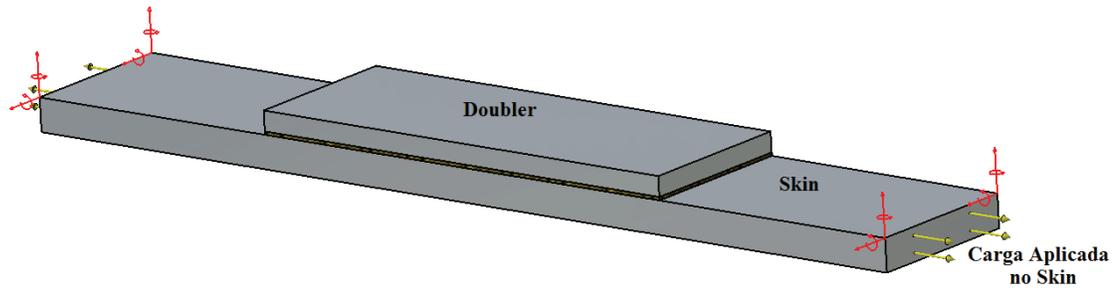


Figura 7.1: Representação da carga aplicada na geometria da junta reforçada por *doubler* colado.

Dependendo da geometria da junta colada, das cargas aplicadas e dos materiais do *skin*, do *doubler* e do adesivo, a carga de falha no adesivo pode nunca ocorrer antes que ocorra a falha no *skin*. Assim, a falha no *skin* antes do adesivo dificulta o estudo da resistência do adesivo para a configuração de *doublers* colados e principalmente na obtenção das tensões máximas no adesivo durante o ensaio experimental.

É importante salientar que a falha do revestimento antes do adesivo é desejável para componentes reais, contudo não para este estudo que visa obter tensões altas no adesivo.

A Tabela 7.1 mostra as propriedades dos materiais do adesivo e do aderente utilizados no projeto. A Tabela 7.2 mostra as espessuras de chapas para aplicações no *skin* e nos *doublers* para a utilização nos CDPs de *doublers* colados.

Tabela 7.1: Propriedades dos materiais utilizados nas análises prévias para os CDPs.

Adesivo CYTEC FM-73	Aderente alumínio 2024-T3
Módulo de Elasticidade: 2357 MPa	Módulo de elasticidade: 73,1 GPa
Razão de Poisson: 0,4	Razão de Poisson: 0,33
Espessura = 0,38 mm	

Tabela 7.2: Espessuras de chapas para aplicações no *skin* e no *doubler*.

Aplicação	Espessura mínima da chapa base (mm)
<i>Doubler</i>	0.8
	1.3
	3
<i>Skin</i>	1.3
	3

Partindo-se de uma proposta inicial, em que a geometria do CDP se aproximasse o máximo possível das configurações utilizadas no Capítulo 5, verificou-se que a tensão de cisalhamento e de *peeling* no adesivo não atingiam valores suficientemente altos para que ocorresse a ruptura do adesivo. Dessa forma, foi realizado um *script* em Python interagindo com o ABAQUS, para variar todos os parâmetros possíveis da geometria até que se atingissem tais valores e antes de se atingir a tensão de escoamento do aderente (*skin*).

O fluxograma da Figura 7.2 mostra o algoritmo base do procedimento.

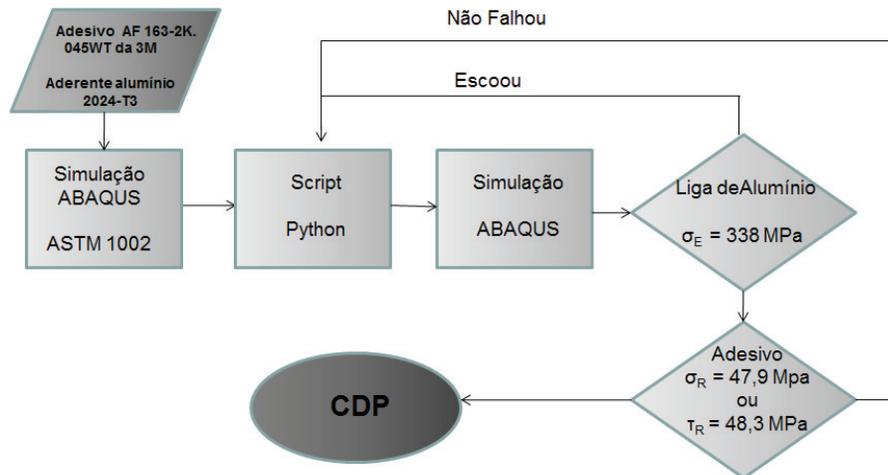


Figura 7.2: Fluxograma para a obtenção da geometria do CDP.

No entanto, em todas as análises realizadas, não foi possível alcançar a tensão de ruptura do adesivo antes do escoamento do *skin*, como poderá ser visto nas análises seguintes realizadas para o adesivo FM73 da CYTEC.

Assim, pensando nos ensaios experimentais, procurou-se obter uma geometria adequada, onde se conseguisse valores altos tanto da tensão de *peeling* quanto da tensão de cisalhamento no adesivo, não tendo influência das bordas do CDP.

Nas análises numéricas, variaram-se as espessuras e os comprimentos tanto do *skin* quanto do *doubler*, através da parametrização do modelo implementado em um *script* em Python. A partir dessas análises numéricas e com o intuito de verificar a influência da espessura do *doubler* na junta colada, duas geometrias foram propostas para os CDPs.

A Figura 7.3 mostra as dimensões finais do CDP 1 após as análises numéricas, e a Figura 7.4 mostra as dimensões finais do CDP 2.

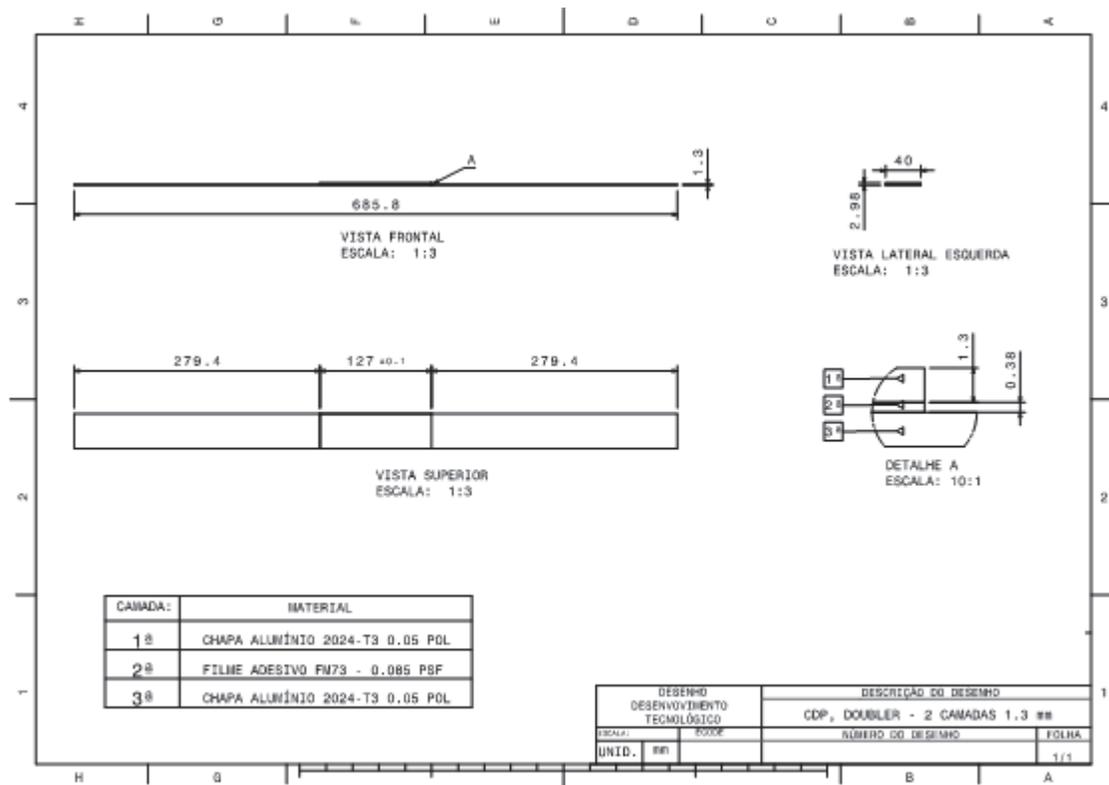


Figura 7.3: Geometria final do CDP 1.

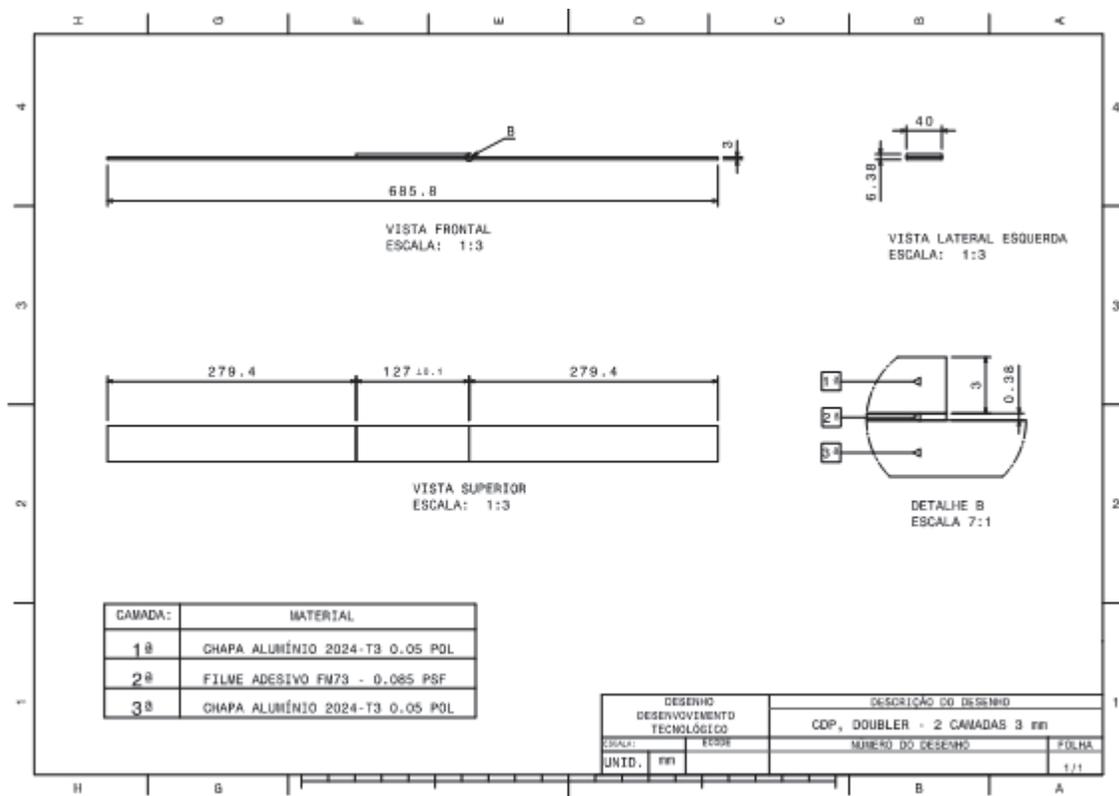


Figura 7.4: Geometria final do CDP 2.

Para a simulação numérica, utilizou-se um modelo 2D no estado plano de deformação. A modelagem da malha foi com elemento quadrilateral de 8 nós de ordem geométrica quadrática, pertencente à biblioteca *Standard/2D* do *software* comercial ABAQUS.

As condições de contorno foram aplicadas de maneira a reproduzir as condições de contorno do ensaio experimental, onde foram simulados os efeitos da área de *grip*, restringindo os deslocamentos no eixo *y* e a rotação com respeito ao eixo *z* da borda correspondente à garra. Além disso, uma tensão de 205 MPa foi aplicada nas extremidades do *skin*, como mostrado Figura 7.5.

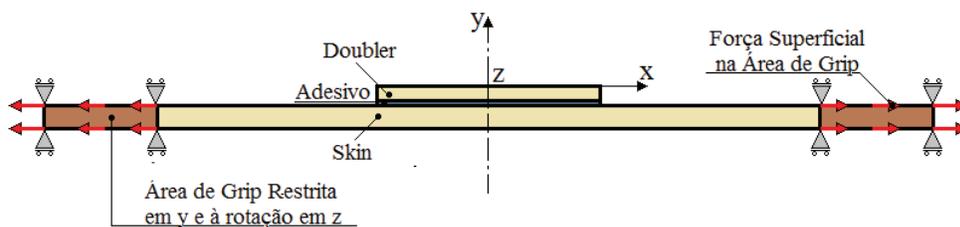


Figura 7.5: Detalhe das condições de contorno do modelo numérico.

O pós-processamento do CDP 1 com fator de escala de deformação ampliado em 10 vezes está mostrado na Figura 7.6. Observa-se na Figura 7.7 (detalhe da extremidade direita do *overlap* da Figura 7.6), que se procurou atingir uma tensão de von Mises nos aderentes o mais próximo de sua tensão de escoamento, mas sem ultrapassá-la. Desta forma, foi atingida uma tensão de von Mises de 328 MPa, próximo à tensão de escoamento da liga de alumínio 2024-T3, que é de 338 MPa.

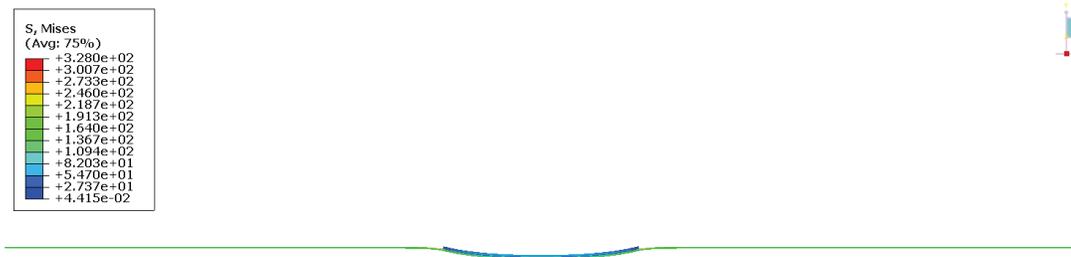


Figura 7.6: Fator de escala de deformação ampliado em 10 vezes.

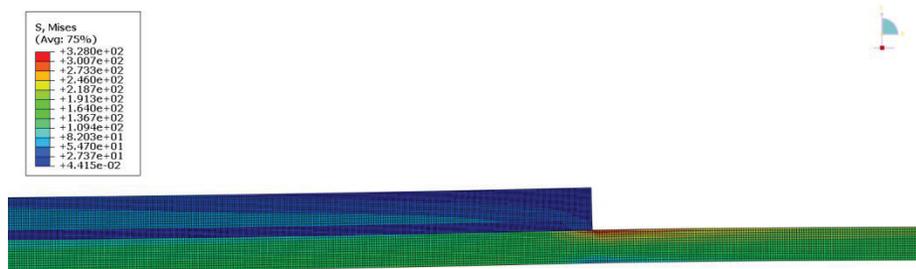


Figura 7.7: Distribuição de tensão de von Mises na extremidade direita da zona colada do CDP 1.

A análise de tensão no adesivo foi realizada em sua linha média, conforme pode ser visto na análise de tensão de *peel* na extremidade direita do adesivo, Figura 7.8.

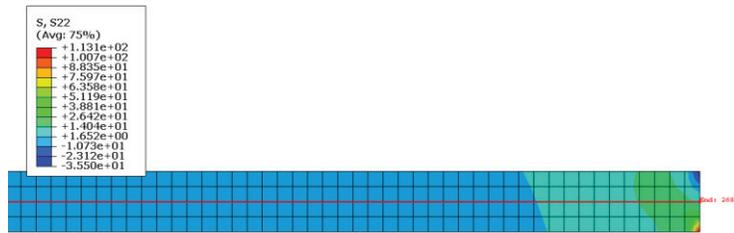


Figura 7.8: Distribuição da tensão de *peel* na extremidade direita do adesivo.

As Figura 7.9, Figura 7.10 e Figura 7.11 mostram respectivamente a distribuição de tensão de *peel*, cisalhamento e von Mises em MPa em relação à distância ao longo da linha média do adesivo em mm.

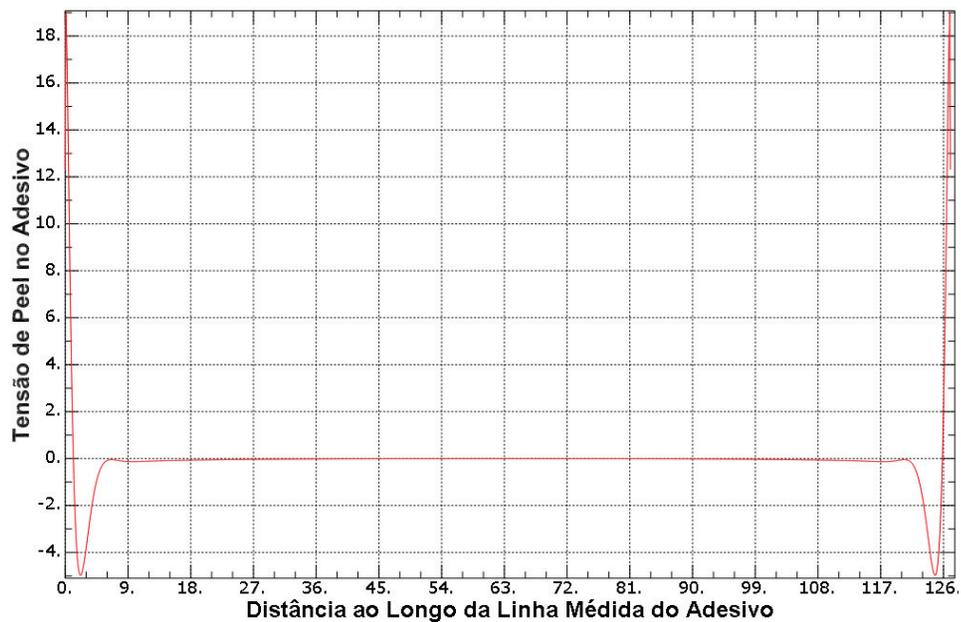


Figura 7.9: Distribuição da tensão de *peel* na linha média do adesivo.

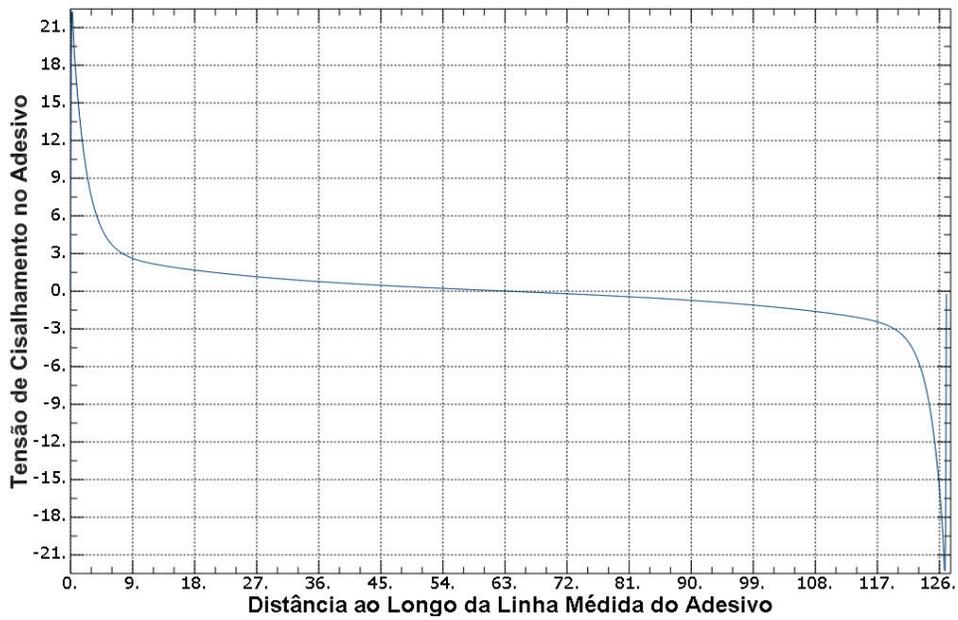


Figura 7.10: Distribuição da tensão de cisalhamento na linha média do adesivo.

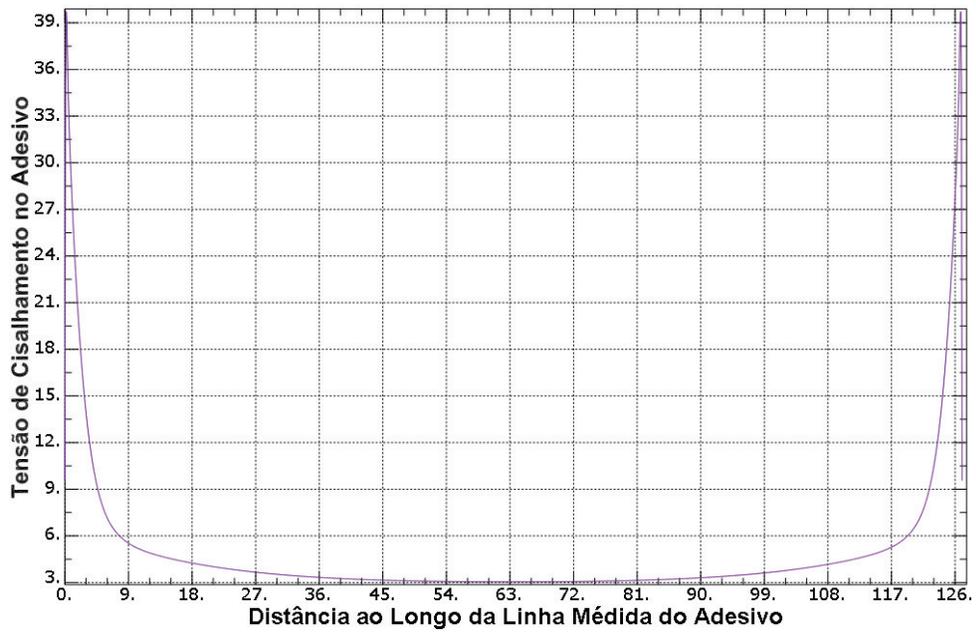


Figura 7.11: Distribuição da tensão de von Mises na linha média do adesivo.

Devido à presença da singularidade nas bordas do adesivo, em todas as análises houve um estudo de convergência dos resultados através do refinamento da malha no adesivo. Como exemplo, para a geometria do CDP 2 mostrado na Figura 7.4, notou-se que, tanto para a tensão de *peeling* como para a tensão de cisalhamento, uma malha refinada com 12000 elementos no

adesivo seria um número adequado para não gerar um custo computacional muito elevado e modelar com mais precisão a singularidade na extremidade da zona colada.

A Figura 7.12 mostra a distribuição de tensão cisalhante na linha média do adesivo do CDP 2, para 1337, 5347, 12095 e 21389 elementos no adesivo. O lado direito da Figura 7.12, representa uma amplificação no ponto de máxima tensão de *peel* no adesivo.

A Figura 7.13 mostra a distribuição de tensão de *peel* na linha média do adesivo para o mesmo processo de refinamento de malha da Figura 7.12.

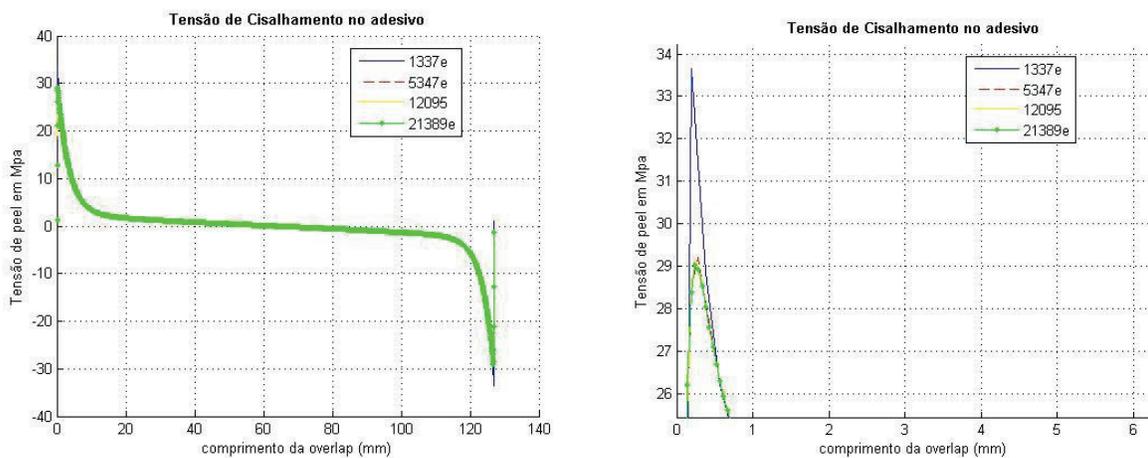


Figura 7.12: Estudo da convergência para a distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo.

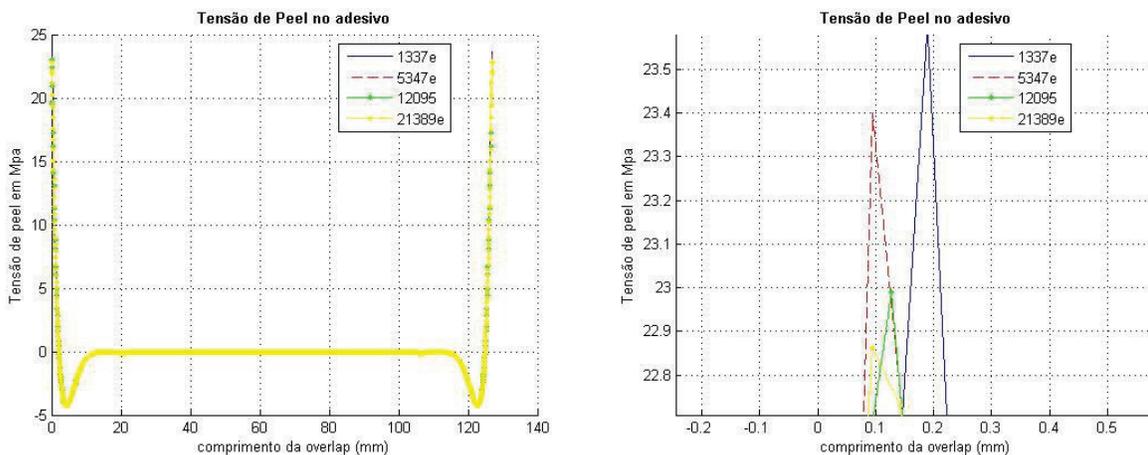
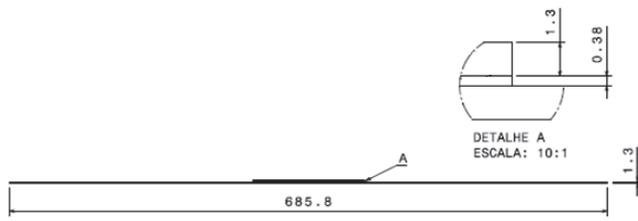


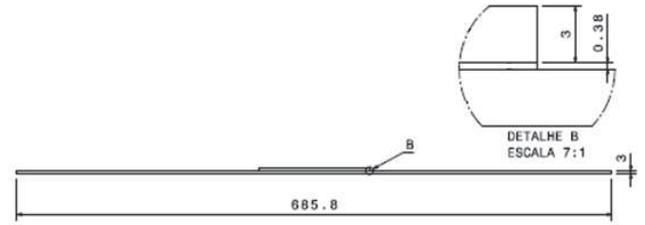
Figura 7.13: Estudo da convergência para a distribuição da tensão de *peel* no adesivo.

Um resumo das análises dos CDP 1 e CDP 2 pode ser visto na Tabela 7.3, onde verifica-se que para um aumento da espessura no aderente, aumenta-se a tensão no adesivo.

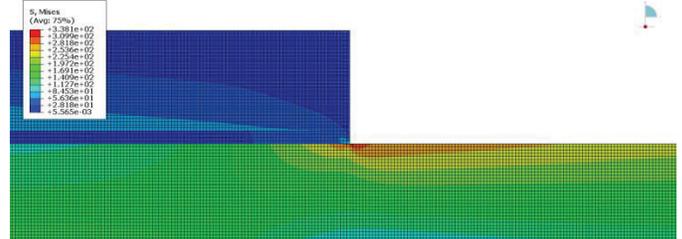
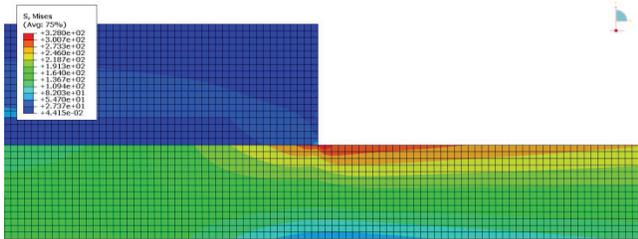
Tabela 7.3: Tabela de comparação da tensão para a variação da espessura das chapas.



Geometria e dimensões do CDP 1

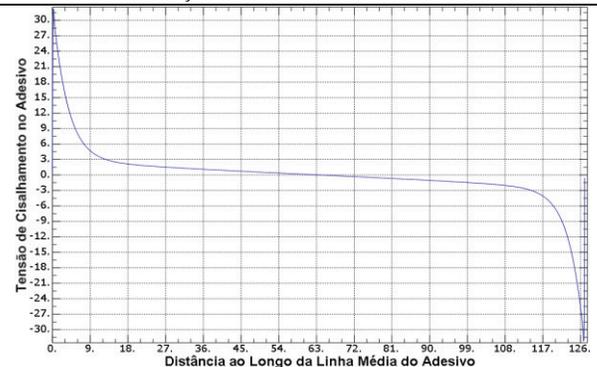
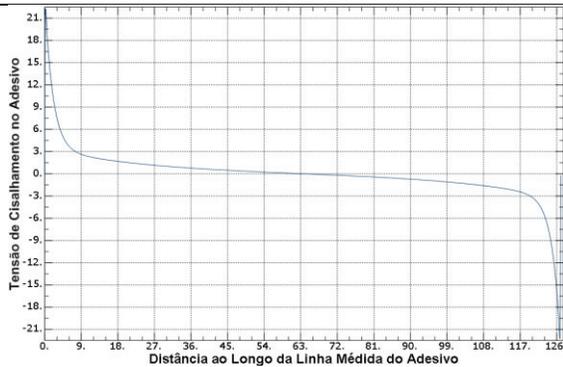


Geometria e dimensões do CDP 2



Distribuição de tensão de Von Mises

Distribuição de tensão de Von Mises

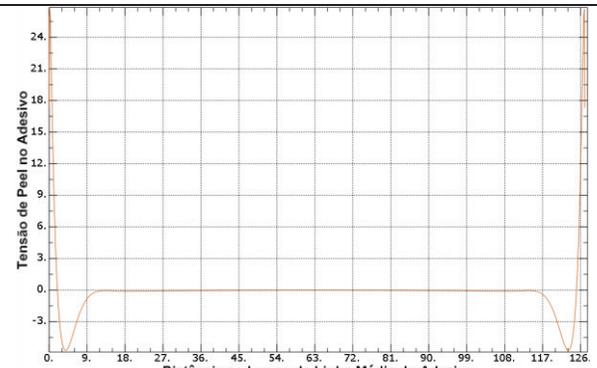
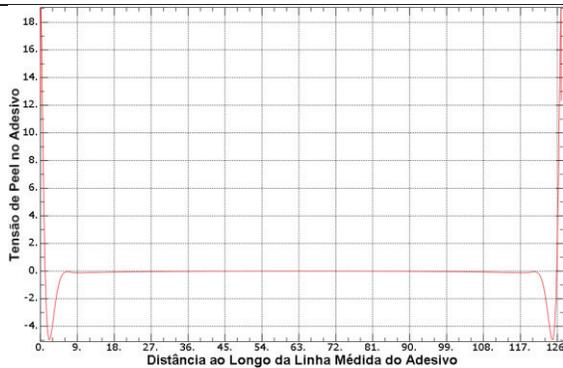


Distribuição da tensão de cisalhamento

Distribuição da tensão de cisalhamento

Tensão máxima de 21 MPa

Tensão máxima de 31 MPa



Distribuição da tensão de *peeling*

Distribuição da tensão de *peeling*

Tensão máxima de 19 MPa

Tensão máxima de 27 MPa

7.2 Análise Experimental dos CDPs de *Doublers* Colados

Na prática, existe certa dificuldade de se medir os valores das tensões no adesivo. Isto porque, devido à geometria do *doubler* em estudo, a obtenção das cargas de falha no adesivo não ocorreria antes da falha do aderente.

Assim, pra se estudar as tensões no adesivo e validar os métodos analíticos e numéricos descritos nos capítulos anteriores foram encontradas duas soluções: uso da extensometria e uso do processamento digital de imagens.

Estas soluções foram as mais viáveis para o projeto na obtenção da diferença dos deslocamentos longitudinais e das deflexões do *skin* e do *doubler*. Dessa forma é possível obter as tensões de *peel* e de cisalhamento no adesivo como mostrado respectivamente de forma resumida nas Equações (7.1) e (7.2).

$$\sigma_A = E_A \frac{w_{skin} - w_{doubler}}{t_A} \quad (7.1)$$

$$\tau_A = G_A \frac{u_{skin} - u_{doubler}}{t_A} \quad (7.2)$$

onde w é a deflexão, u é o deslocamento longitudinal, E_A é o módulo de elasticidade do adesivo, G_A é o módulo de cisalhamento do adesivo, t_A é a espessura do adesivo, σ_A e τ_A são as tensões de *peeling* e cisalhamento do adesivo respectivamente.

A seguir, será detalhado o procedimento utilizado para o uso da extensometria e do Processamento Digital de Imagens na análise de *doublers* colados.

7.2.1 Extensometria

Extensômetros são usados para medir deformações em diferentes estruturas. A medida é realizada colando um extensômetro nestas estruturas, convertendo a deformação causada em uma quantidade elétrica (voltagem) e amplificando-a para a leitura em um lugar remoto.

Assim, com os extensômetros, as deformações em várias partes de uma estrutura real sob condições de serviço, podem ser medidas com boa precisão sem que a estrutura seja destruída.

Desta maneira, a extensometria leva a uma análise quantitativa da distribuição de deformação sob condições reais de operação.

No entanto, como neste trabalho o objetivo é verificar a diferença de deslocamentos entre o *doubler* e o *skin*, é necessário utilizar o conceito do funcionamento dos extensômetros elétricos para fazer a conversão da deformação em deslocamentos. Como o extensômetro é baseado no fato de que os metais mudam sua resistência elétrica quando sofrem uma deformação, o deslocamento pode ser obtido pela deformação real da grade do extensômetro.

Assim, colando um extensômetro relativamente pequeno no ponto onde se quer medir o deslocamento, obtém-se um deslocamento pontual aproximado pela seguinte equação:

$$\Delta l = (e^\varepsilon - 1)l_0 \quad (7.3)$$

onde ε é a deformação medida pelo extensômetro e l_0 é a medida inicial do comprimento da grade do extensômetro, mostrado na Figura 7.14. No caso do extensômetro utilizado neste trabalho, $l_0 = 0.3$ mm.

Estes extensômetros são montados em um circuito elétrico, a ponte de Wheatstone, que é capaz de realizar a medição de variação de resistências elétricas em seus braços do circuito.

A ponte de Wheatstone pode ser montada de diversas formas ($\frac{1}{4}$ de ponte, $\frac{1}{2}$ ponte, ponte completa e $\frac{1}{2}$ ponte diagonal) dependendo do número de extensômetros utilizados. O circuito é alimentado por uma corrente elétrica através de uma fonte de energia e a variação da resistência elétrica do extensômetro, devido à deformação ocorrida na peça, provoca um desequilíbrio na ponte. Ocorre assim, uma variação de tensão de saída da ponte devido ao seu reequilíbrio, que passa por um amplificador de voltagem e é lido em uma placa de aquisição de dados.

Para o caso dos CDPs, todos os extensômetros foram ligados em um quarto de ponte com um terceiro fio soldado ao extensômetro, para se medir as deformações em uma dada direção e permitindo que o ponto de leitura da tensão de saída seja o terminal do extensômetro, Figura 7.14. Mais detalhes da configuração utilizada para o ensaio será descrita na seção 7.2.1.2 (procedimentos experimentais).

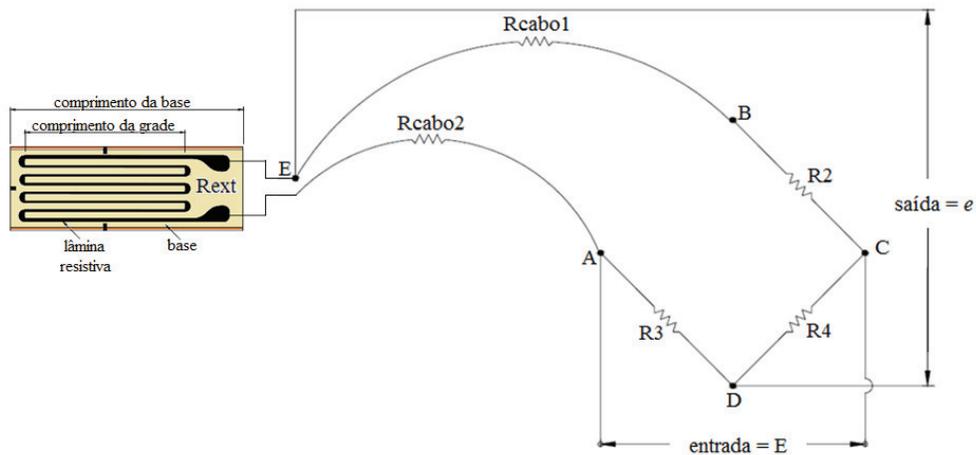


Figura 7.14: Ligação em $\frac{1}{4}$ de ponte com um terceiro fio soldado ao terminal.

7.2.1.1 Materiais Utilizados.

- 18 *strain gages* de folha com configuração unidirecional, Modelo HBM 1-LY11-0.3/120;
- Sistema de Aquisição de sinais LMS SCADAS *Mobile* SCM01, com oito canais com aquisição dupla para extensômetros e acelerômetros;
- Lente Ernstleitz GmbH Wetzlar 8x R-JMO 2/9;
- Cola HBM;
- Silicone;
- Ferro de solda, estanho e fios.
- MTS *Landmark Servohydraulic Test System*.

O uso dos extensômetros elétricos para estes corpos de prova, podem gerar erros elevados devido ao posicionamento dos extensômetros nos CDPs, esta discussão será tratada no procedimento do ensaio.

Uma maneira de evitar estes erros e ao mesmo tempo conseguir realizar as medições no plano e fora do plano é com a utilização do extensômetro laser. No entanto, devido ao alto custo destes extensômetros, este método se tornou inviável devido ao planejamento de gastos para o projeto.

7.2.1.2 Procedimento Experimental para o Uso da Extensometria nas Análises dos CDPs de *Doublers*.

Para o caso dos ensaios experimentais dos CDPs de *doublers*, seria ideal a colocação de um extensômetro na camada de adesivo entre as chapas coladas. Contudo isso é impossível devido a espessura do adesivo. Desta forma, opta-se por instrumentar as chapas de alumínio, e obter indiretamente as tensões no adesivo. Uma análise das posições ótimas dos extensômetros e a observação da viabilidade da extensometria para este caso é dada a seguir.

A Figura 7.15 mostra o posicionamento viável dos extensômetros para a obtenção da deflexão e deslocamento longitudinal do *skin* e do *doubler*. Assim, para se obter a deflexão de ambas as chapas, optou-se por utilizar um extensômetro de referência (extensômetro 3), que supostamente daria a deformação longitudinal pura do *skin*.

No entanto, este extensômetro teria que ficar em uma posição ótima que diminuiria o erro da análise, isto porque, a deformação é puramente longitudinal quanto mais afastada da área de colagem, no entanto, a sua deformação é maior quanto mais se aproxima da zona de tração.

Desta forma, a partir da utilização do extensômetro 3, a deformação por flexão pura do *skin* seria pela subtração da deformação do extensômetro 3 menos a deformação medida pelo extensômetro 2 (extensômetro colado no *skin* alinhado com o final do *overlap*, Figura 7.15).

Após a obtenção das deformações longitudinais e de flexão do *skin* separadamente, a sua relação de deformação seria multiplicada pela a deformação do extensômetro 1 (extensômetro colado no *doubler* no final do *overlap*, Figura 7.15), afirmando que estes resultados seriam as deformações longitudinais e de flexão do *doubler* de forma separada.

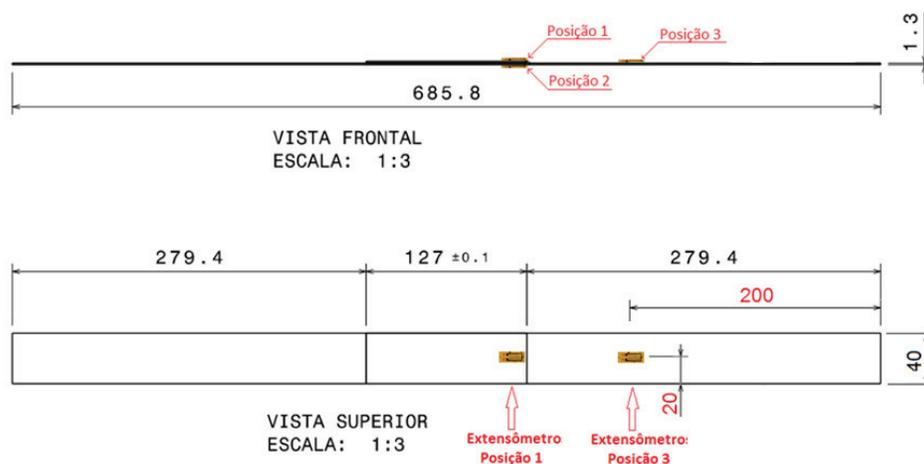


Figura 7.15: Posicionamento dos extensômetros.

Contudo, pode-se verificar que para a obtenção destas deformações, seriam utilizadas aproximações que poderiam gerar diversos erros nos ensaios experimentais.

Assim, uma análise numérica foi realizada simulando as estimativas das deformações totais, fornecidas pelos extensômetros no ensaio experimental, e comparando-as com as deformações individuais de flexão e longitudinal obtidas numericamente, simulando assim o que de fato ocorreria na extremidade do *skin* e do *doubler*.

Uma das vantagens da análise numérica é a sua utilização na previsão dos acontecimentos experimentais, diminuindo deste modo o custo e o tempo. Sendo assim, o método numérico foi utilizado para verificar se a disposição proposta dos extensômetros nos CDPs dariam resultados satisfatórios.

Uma melhor explicação deste procedimento e uma estimativa do erro prático obtido por este método será demonstrado a seguir, para uma análise usando as mesmas condições de contorno e discretização da seção 7.1.

A Figura 7.16 mostra o posicionamento do Extensômetro 1, colado em cima do *doubler* no final da zona colada. Na prática, este extensômetro informaria a deformação total mostrada na última coluna e última linha da Tabela 7.4. Numericamente, a posição deste extensômetro pode informar de forma direta todas as informações contidas na Tabela 7.4, como os deslocamentos longitudinais (x) e por flexão (y) separadamente.

Os valores dos deslocamentos e deformações contidos nas Tabela 7.4, Tabela 7.5 e Tabela 7.6 são dados em mm e em $\mu\text{m}/\text{m}$ respectivamente.

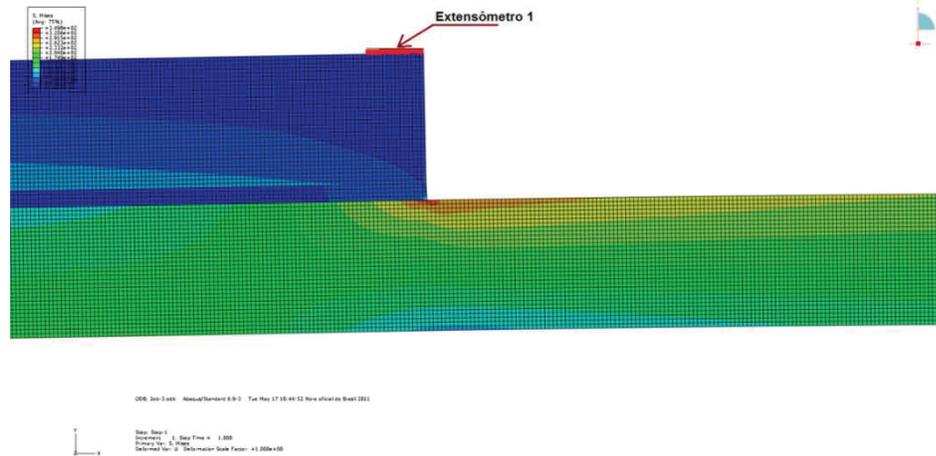


Figura 7.16: Posição do Extensômetro 1.

Tabela 7.4: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 1.

	x	y	z	Magnitude
Deslocamento	8.33930e-001	-1.45699e-001	0	8.46562e-001
Deformação				1.44298e-06

A Figura 7.17 mostra o posicionamento do Extensômetro 2, situado abaixo do *skin* e no final da zona colada. Os valores obtidos por este extensômetro numericamente e simulando um ensaio prático por sua magnitude é mostrado na Tabela 7.5.

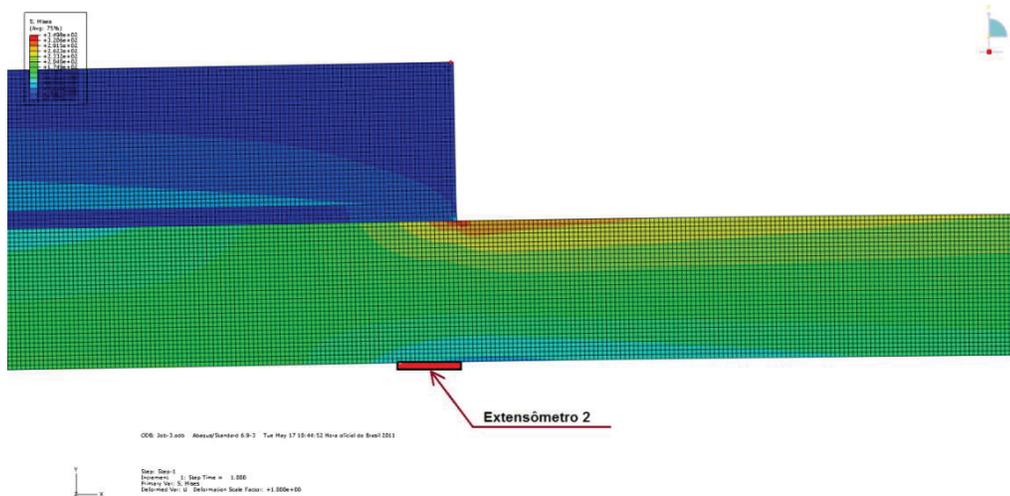


Figura 7.17: Posição do Extensômetro 2.

Tabela 7.5: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 2.

	x	y	z	Magnitude
Deslocamento	9.09047e-001	-1.45286e-001	0	9.20583e-001
Deformacao				1.45878e-03

A posição otimizada do Extensômetro 3, para um menor erro na análise experimental, está mostrado na Figura 7.18. Além disso, a Figura 7.18 permite observar que o extensômetro 3 foi posicionado em uma região com deslocamento longitudinal muito próximo da região da zona colada.

Os valores das magnitudes obtidos numericamente pelo extensômetro 3, simulando um ensaio real, estão mostrados na Tabela 7.6, onde a partir destes valores, pode-se observar que o posicionamento do extensômetro 3 garantiu um deslocamento no eixo y praticamente nulo.



Figura 7.18: Posição do otimizada do Extensômetro 3.

Tabela 7.6: Deslocamentos e deformações do Extensômetro 3.

	x	y	z	Magnitude
Deslocamento	1.06368e+000	7.82807e-004	0	1.06368e+000
Deformacao				0.00250185

Os cálculos simulando os resultados experimentais para o posicionamento otimizado dos extensômetros são dados a seguir. A estimativa do erro experimental é dada na Tabela 7.7.

- Extensômetro 1: Deslocamento total = 0.846562
- Extensômetro 2: Deslocamento total = 0.920583
- Extensômetro 3: Deslocamento total = 1.06368

Portanto,

- Deslocamento longitudinal do *skin* = Deslocamento total do Extensômetro 3 = 1.06368
- Deslocamento Transversal do *skin* = Deslocamento do Extensômetro 3 - Deslocamento do Extensômetro 2 = 0,143097
- Relação de Deslocamentos do Extensômetro 2 = 88.1% de Deslocamento Longitudinal e 11.9% de Deslocamento Transversal
- Deslocamento Longitudinal do Doubler = 0.881 * Deslocamento Total do Extensômetro 1 = 0.74582
- Deslocamento Transversal do Doubler = 0.119 * Deslocamento Total do Extensômetro 1 = 0.100740

Tabela 7.7: Expectativas dos erros experimentais.

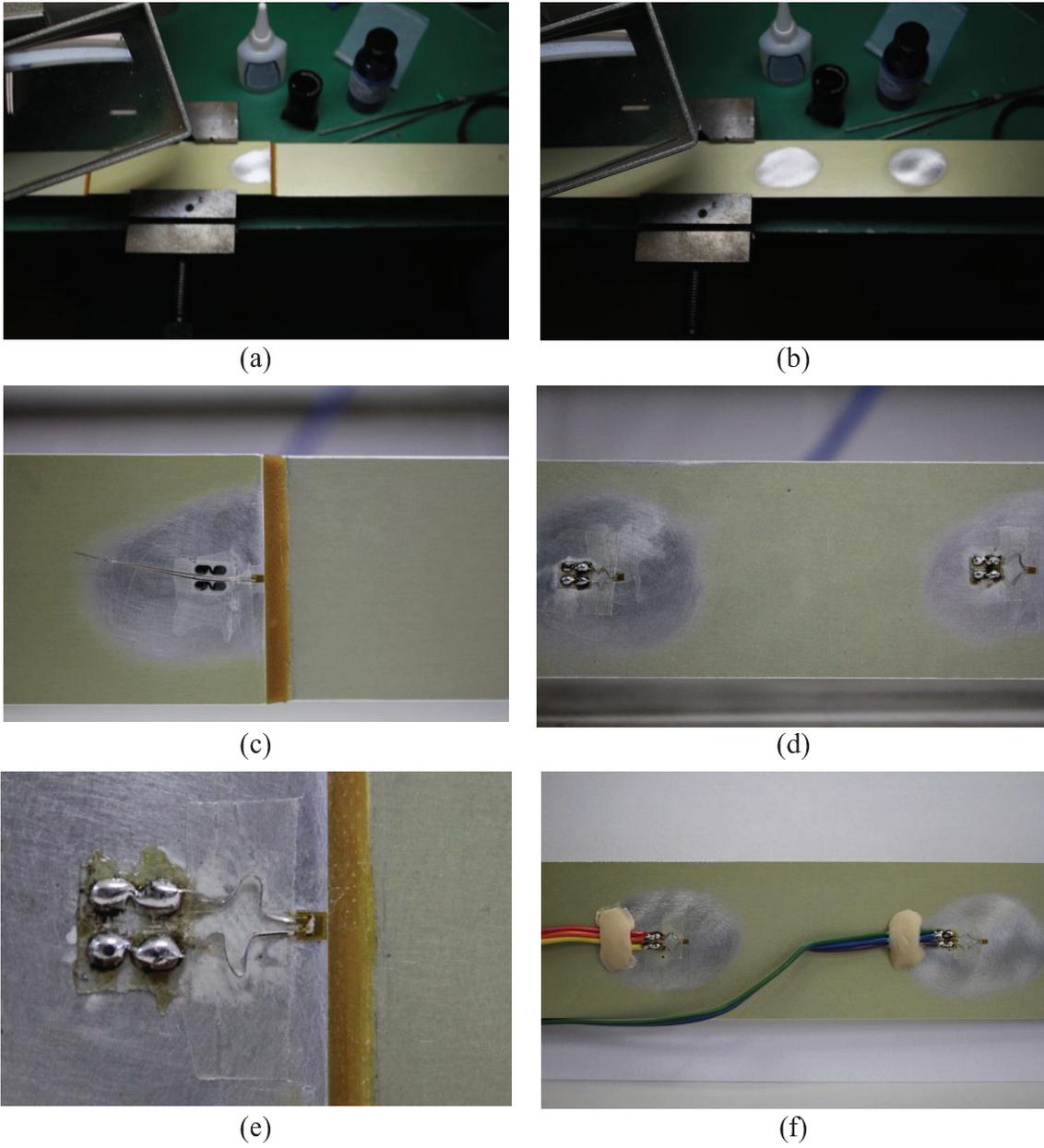
Deformação	Transversal		Longitudinal		Erro	
	No nó	Calculado	No nó	Calculado	Transversal	Longitudinal
Skin	0.14529	0.14310	0.90905	1.06368	1.51%	14.54%
Doubler	0.14570	0.10074	0.83393	0.74582	30.86%	10.57%

Mesmo com o posicionamento otimizado do Extensômetro 3, o erro para a obtenção dos deslocamentos transversais no *doubler* continuou alto. Porém, esta técnica continua sendo uma das técnicas mais viáveis para o projeto, juntamente com o processamento digital de imagens (PDI).

A montagem dos extensômetros pode ser vista na Tabela 7.8, e sua sequência descrita a seguir:

- 1) (a) e (b) – Lixamento dos CDPs com lixa de granulação 360 para posterior marcação das posições.
- 2) (c) – Limpeza e Colagem dos Extensômetros e Terminais.
- 3) (d) e (e) – Soldagem e isolamento dos terminais.
- 4) (f) – Soldagem dos fios nos terminais.

Tabela 7.8: Montagem dos Extensômetros no CDP.



Após a montagem dos extensômetros nos CDPs, os extensômetros foram calibrados juntos ao *software* da LMS, Figura 7.19. A Figura 7.20 mostra o posicionamento dos CDPs na máquina da MTS de forma a realizar o ensaio.

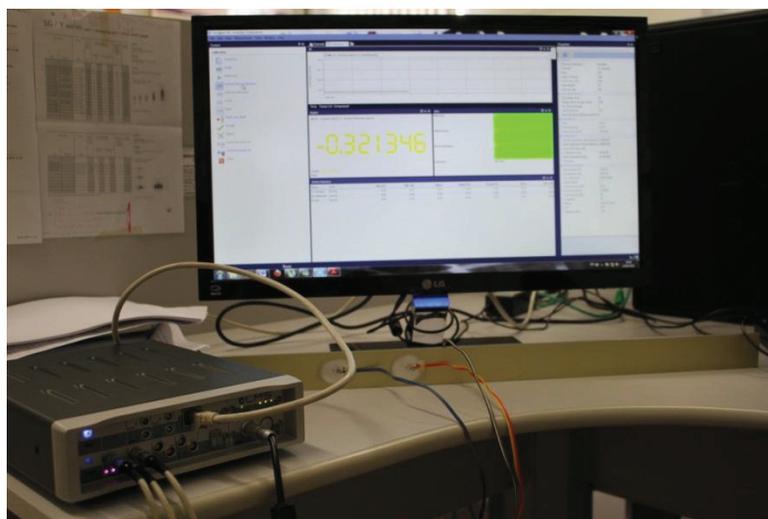


Figura 7.19: Calibração dos extensômetros.

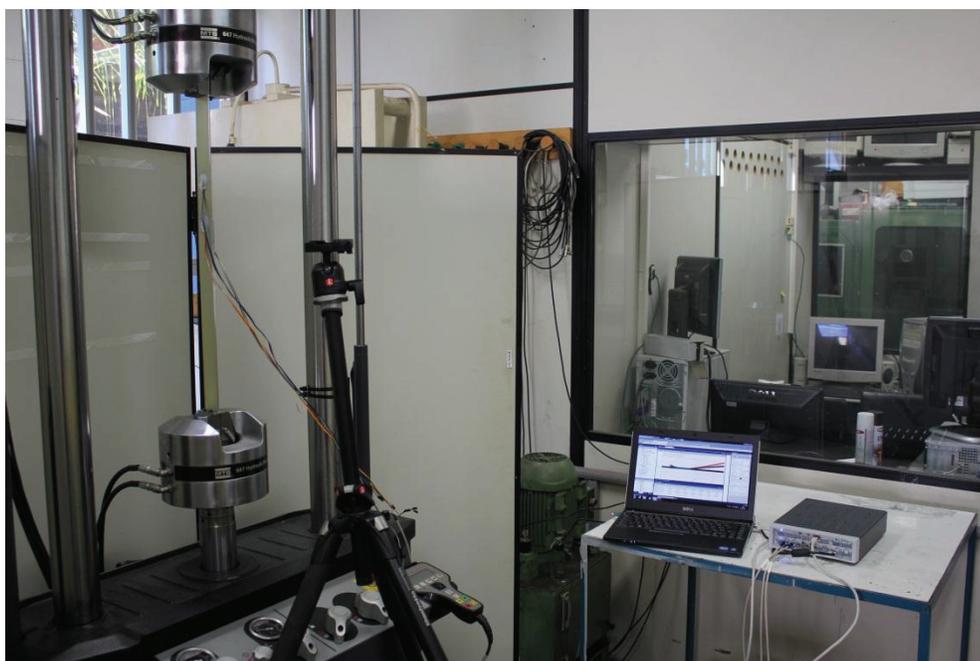


Figura 7.20: Posicionamento dos CDPs para o ensaio experimental utilizando a extensometria.

Para o ensaio experimental, a máquina da MTS foi ajustada para o CDP 1 e para o CDP 2, ambos com taxa de 2500 N/min e Força de 10.7 KN e 24.6 KN respectivamente, de forma a validar as análises numéricas.

É importante observar, que durante o ajuste de força da máquina da MTS e durante um ensaio teste, a região da zona elástica dos CDPs ficou exatamente dentro da tensão estabelecida para o ensaio nas análises numéricas, Figura 7.21.

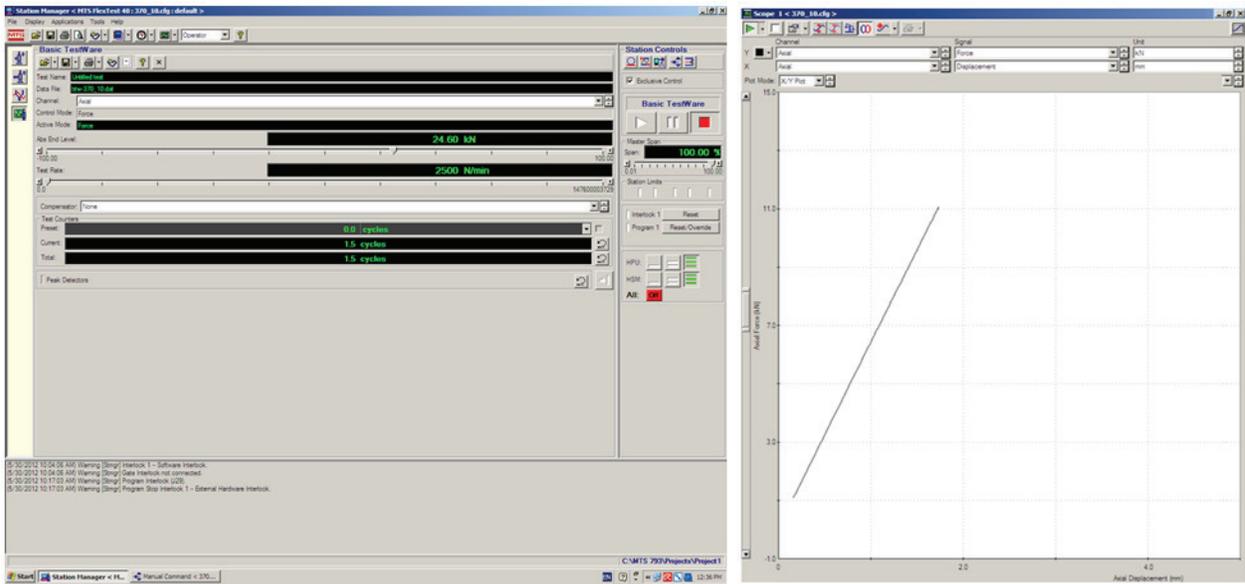


Figura 7.21: Setup do software da MTS.

7.2.2 PDI

Por Processamento Digital de Imagens (PDI) entende-se a manipulação de uma imagem por computador de modo que a entrada e a saída do processo sejam imagens. O objetivo de se usar processamento digital de imagens é melhorar o aspecto visual de certas feições estruturais para o analista humano e fornecer outros subsídios para a sua interpretação, inclusive gerando produtos que possam ser posteriormente submetidos a outros processamentos (SPRING, 1996).

As operações que caracterizam um PDI são realizadas sobre a informação descritiva da imagem, ou seja, são realizadas sobre a matriz de luminosidade desta imagem, Figura 7.22.

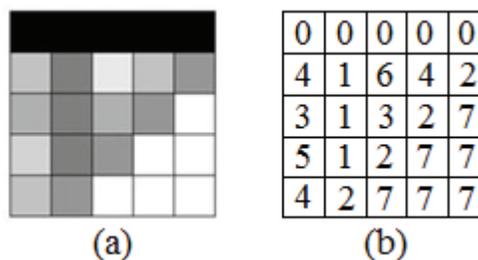


Figura 7.22: (a) Imagem digital de 5x5 pixels, com 8 tons de cinza. (b) Representação numérica da imagem em (a).

O processamento de imagens, quando associado a sistemas experimentais, é bastante dependente do problema a ser resolvido. As fases de pré-tratamento (sejam na imagem ou fora dela, como por exemplo, o controle da iluminação externa) podem ter um peso importante quando queremos aumentar a performance computacional do sistema. Um sistema de processamento de imagens pode ser de uma maneira geral dividido nas seguintes etapas:

1. Tratamento fora da imagem: correção de iluminação;
2. Aquisição da imagem: amostragem, armazenamento e compactação;
3. Melhoramento (“*image enhancement*”): pré-tratamento digital da imagem;
4. Segmentação da informação: extração dos “objetos” do “fundo” da imagem;
5. Parametrização: determinação de grandezas sobre cada “objeto”, como área e forma;
6. Reconhecimento: classificação dos “objetos”;
7. Análise quantitativa: associação das grandezas ao problema.

Assim, durante o processamento digital da imagem, cada pixel na imagem digital representa na realidade uma medida da absorção da luz. Um pixel (“*picture element*” ou “*pel*”) é o elemento básico em uma imagem.

A forma mais comum para o pixel é a forma retangular ou quadrada. O pixel é também um elemento de dimensões finitas na representação de uma imagem digital. Frequentemente, a organização de uma imagem sob a forma de uma matriz de pixels é feita em uma simetria quadrada, por exemplo, na forma de um tabuleiro de xadrez. Isto se deve a facilidade de implementação eletrônica, seja dos sistemas de aquisição seja dos sistemas de visualização de imagens.

Em análise de formas e principalmente nas transformações de distâncias (na transformação de distância cada ponto da imagem ao invés de representar uma intensidade luminosa, representa uma distância de um dado ponto de referência ao ponto calculado), a solução da imagem é a correção dos valores calculados através de máscaras (pequenas matrizes) que ajustam ou ponderam estas distâncias em função da direção.

Um conceito importante em processamento de imagens é a região de interesse. Entende-se como região de interesse a região definida automaticamente a partir de parâmetros obtidos na própria imagem (ou por um usuário) onde o processamento estará totalmente concentrado.

Para o problema do presente trabalho, a determinação do campo de deslocamentos é realizada através da correlação entre duas imagens do mesmo corpo: a imagem de referência, que corresponde à imagem do corpo não deformado, e a imagem alvo, que corresponde à imagem do corpo deformado.

A correlação é feita em uma área específica ao redor de cada ponto de controle, como mostrado na Figura 7.23. Os pontos de controles são definidos a partir de uma grade gerada na superfície do corpo e na região de interesse, onde os deslocamentos serão determinados.

Cada área ao redor dos pontos de controles será definida como funções bidimensionais que serão utilizadas na correlação, uma explicação mais detalhada deste método pode ser encontrada em Ozelo (2010).

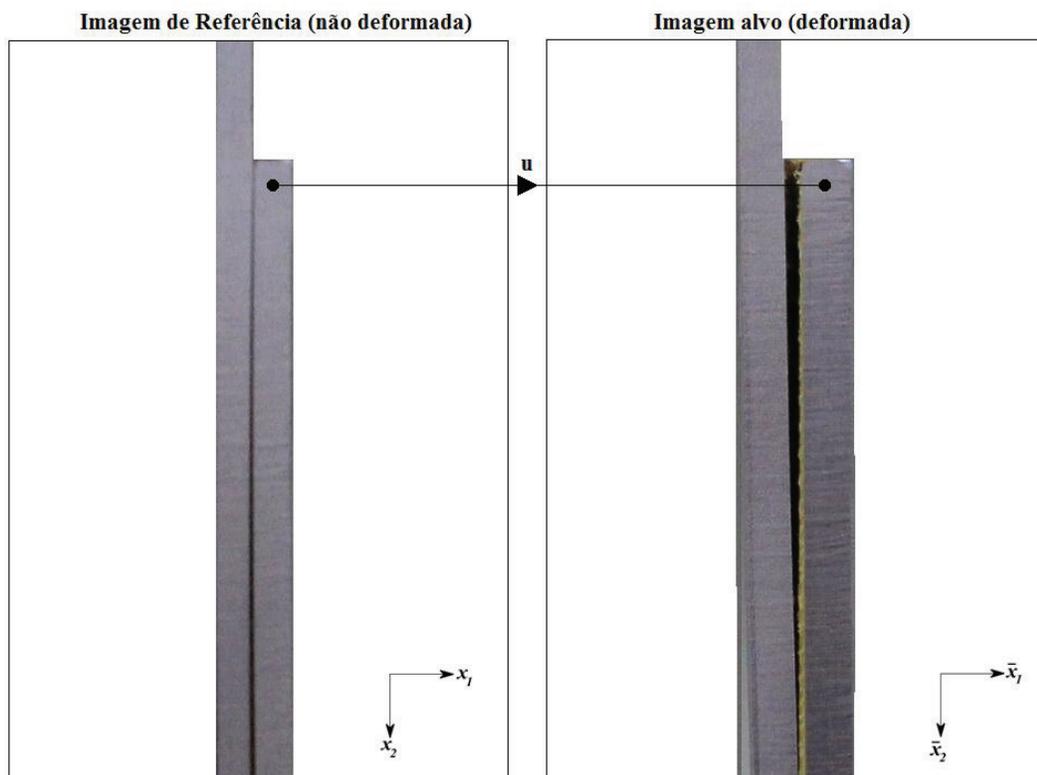


Figura 7.23: Correlação entre as imagens.

Em relação aos filtros lineares, eles são geralmente descritos através de matrizes de "convolução". Não iremos aqui entrar em detalhes de filtros lineares, pois este assunto foge ao escopo deste trabalho.

Para construir um sistema de decisão que seja capaz de identificar na imagem o plano de fundo e o objeto, deve-se segmentar a imagem em regiões: objeto e fundo. Como exemplo, os objetos de uma imagem podem corresponder às áreas dos pixels situados na região escura de uma imagem, enquanto o fundo corresponde àqueles pixels situados nas áreas claras da imagem. Esta etapa é realizada através da criação de uma imagem binária onde é classificada dois níveis, aqueles correspondentes ao objeto e ao fundo.

Nestes objetos, definidos ainda por uma área contígua de pixels, podem-se aplicar algoritmos que executem medidas específicas, como deslocamento e deformação.

7.2.2.1 Principais Materiais Utilizados no Ensaio com PDI.

- Câmera Digital Canon EOS 60D, com Kit de lentes macro EF-S 18-55 IS;
- Sistema de fixação da câmera Manfrotto 055XPROB;
- *Software* DIC, desenvolvido por Ozelo (2010) com colaborações e melhorias no trabalho de Sato (2009) e desenvolvido e adaptado para o caso dos ensaios em *doublers*;
- MTS *Landmark Servohydraulic Test System*;
- Tinta branca e preta.

7.2.2.2 Procedimento Experimental Utilizando o PDI.

A determinação do campo de deslocamentos é realizada através da correlação entre duas imagens do mesmo corpo: a imagem de referência, que corresponde à imagem do corpo não deformado, e a imagem alvo, que corresponde à imagem do corpo deformado. A correlação é feita em uma área específica ao redor de cada ponto de controle.

Os pontos de controles são definidos a partir de uma grade gerada na superfície do corpo, onde os deslocamentos serão determinados. Cada área ao redor dos pontos de controles será definida como funções bidimensionais que serão utilizadas na correlação.

Basicamente, o programa funciona conforme o esquema mostrado na Figura 7.24. O algoritmo é composto por quatro funções principais: gerar_lista, gerar_grade, processamento e pós-processamento. Uma breve descrição sobre cada uma das funções é realizada a seguir:

- gerar_lista: definição das imagens que serão utilizadas no processamento.
- gerar_grade: definição dos pontos de controle onde serão calculados os deslocamentos.
- processamento: responsável por realizar a correlação entre as imagens contidas na lista gerada pela função gerar_lista.
- pós-processamento: realiza os cálculos dos deslocamentos e deformações através da análise dos arquivos de saída gerados pela função processamento, para cada ponto de controle definido pela função gerar_grade.

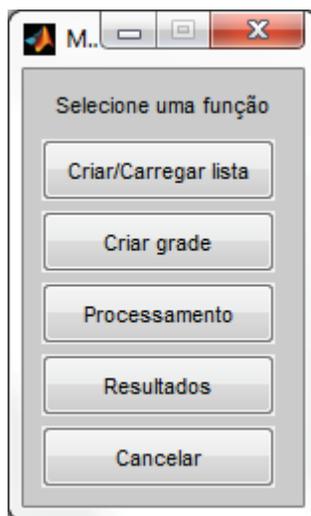


Figura 7.24: Diagrama de funcionamento do programa DIC.

Para a utilização do PDI, corpos de prova de *doublers* colados, apenas para um ensaio do método antes do ensaio definitivo, foram dispostos na máquina da MTS, submetidos a uma carga de 210 Mpa. A câmera fotográfica foi posicionada próxima à vista lateral do CDP, Figura 7.25.



Figura 7.25: Aquisição de dados para o PDI

A Figura 7.26 mostra a interface gráfica do *software* utilizado para a obtenção dos deslocamentos e deformações na junta colada.

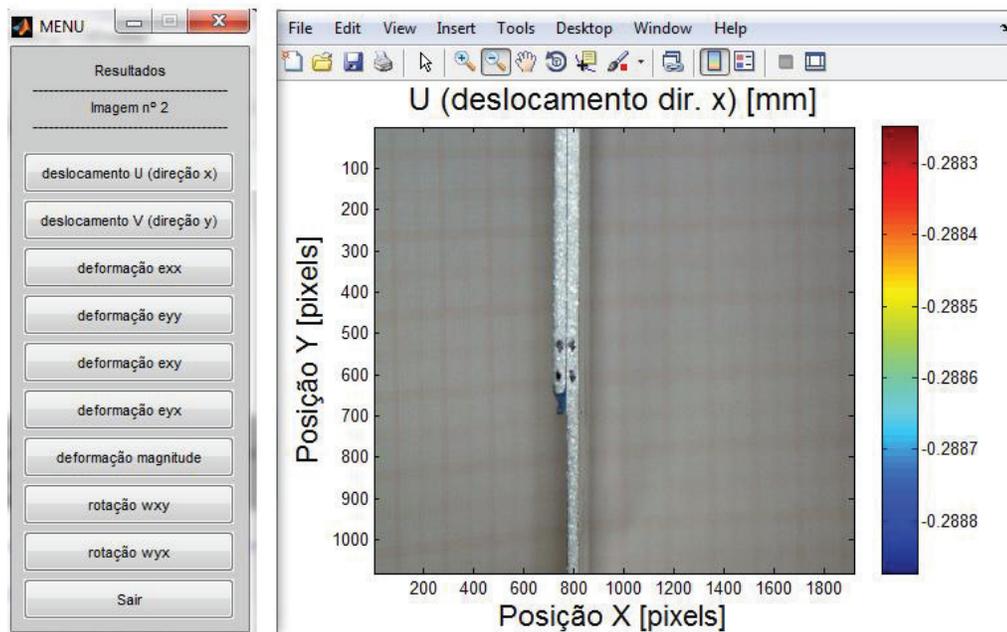


Figura 7.26: Interface gráfica do software.

Na Figura 7.27, verifica-se, ainda que não calibrado e utilizando uma câmera não apropriada para este tipo de trabalho, que o método permite informar a diferença de deslocamentos longitudinais, sendo na linha média ou na interface da cola. Assim, pela imagem, verifica-se um maior deslocamento em y na linha média do *skin* (cor vermelha) em relação à

linha média do *doubler* (cor azul), esta diferença de deslocamento gera a tensão de *peel*, que poderá ser calculada em toda a extensão da junta através deste método.

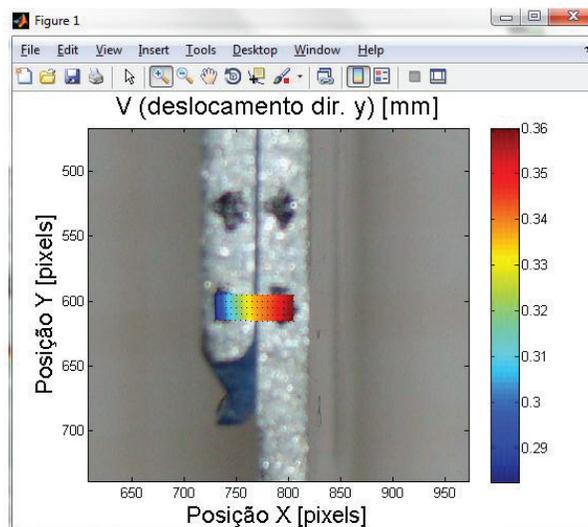


Figura 7.27: Diferença dos deslocamentos longitudinais do *skin* e do *doubler*.

Para o ensaio dos *doublers* colados, teve-se que melhorar a precisão do *software* na geração da grade e na aquisição dos dados, para a interpretação dos deslocamentos a partir de imagens sucessivas dos ensaios de tração nos CDPs. A Figura 7.28 mostra a geração da malha para a aquisição dos dados.

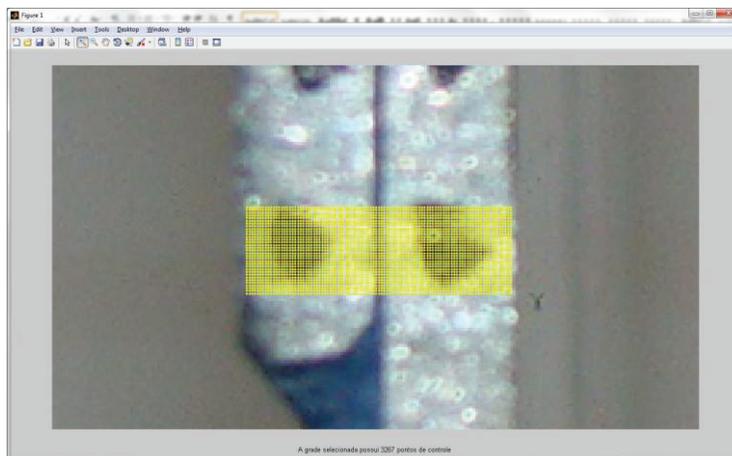


Figura 7.28: Grade gerada para a obtenção dos deslocamentos do *doubler* e do *skin*.

Com o novo procedimento de aquisição dos dados, o usuário poderá escolher entre obter as diferenças de deslocamentos do *skin* e do *doubler* diretamente nas interfaces do adesivo ou na linha média do *skin* e do *doubler*.

A Figura 7.29 mostra o método implementado para os ensaios de *doublers* na determinação do deslocamento longitudinal em um ensaio de tração, onde o primeiro ponto foi selecionado na interface do adesivo colado ao *doubler*, e o programa automaticamente interpola os valores dentro da grade e informa o deslocamento deste ponto.

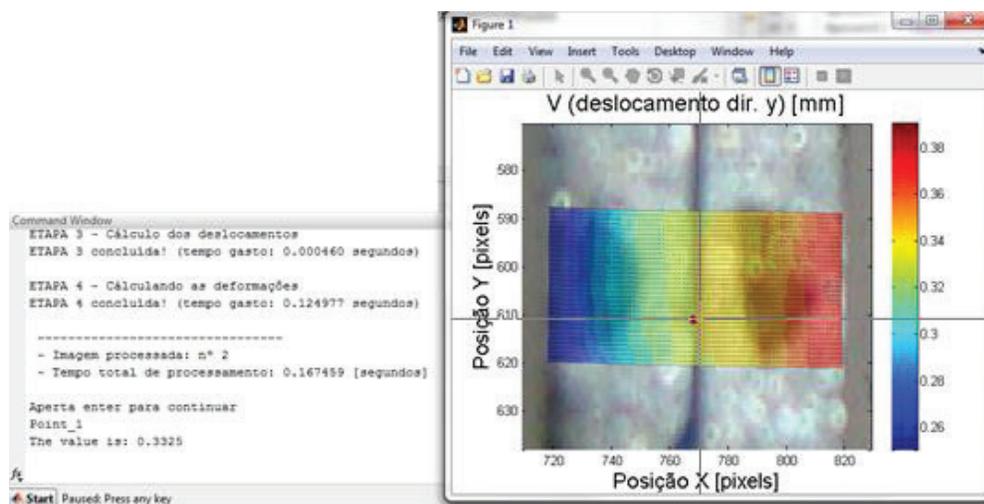


Figura 7.29: Seleção do deslocamento longitudinal do *doubler* colado.

A Figura 7.30 mostra a seleção do segundo ponto para a determinação do deslocamento longitudinal do *skin*, onde este ponto foi selecionado na interface do adesivo colado ao *skin* e alinhado ao primeiro ponto selecionado. Assim, o *software* informará ao usuário os deslocamentos longitudinais do *skin* e do *doubler*, podendo agora por intermédio da Equação 7.2, obter a tensão de cisalhamento neste ponto do adesivo.

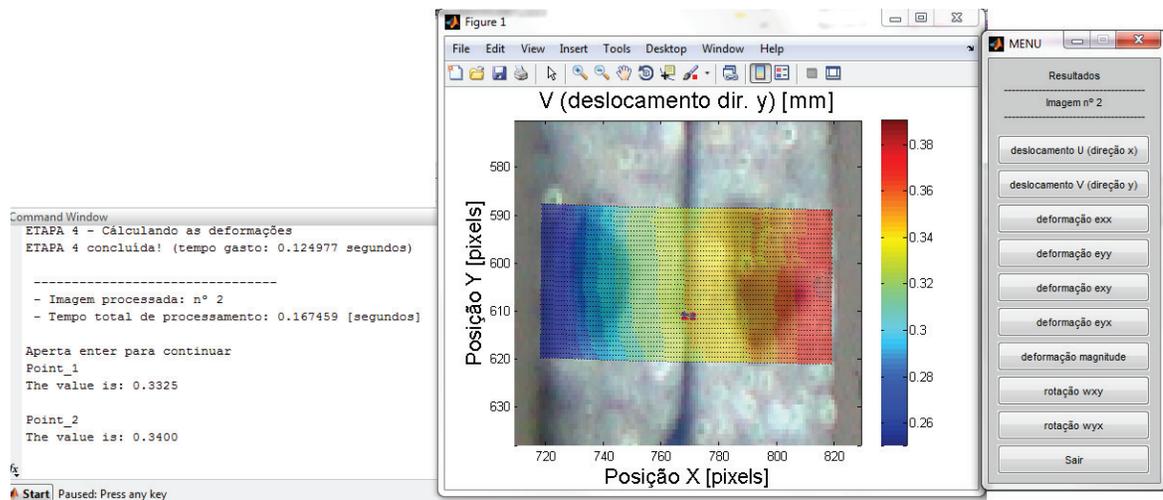


Figura 7.30: Seleção do deslocamento longitudinal do *skin*.

Para o ensaio definitivo do processamento digital, os CDPs foram colocados na máquina da MTS com a câmera digital Canon EOS 60D disposta em frente a lateral dos CDPs, Figura 7.31 (a). Além disso, estas laterais foram pintadas de branco com pulverização de tinta preta para definir os pontos de controle no processamento, Figura 7.31 (b).

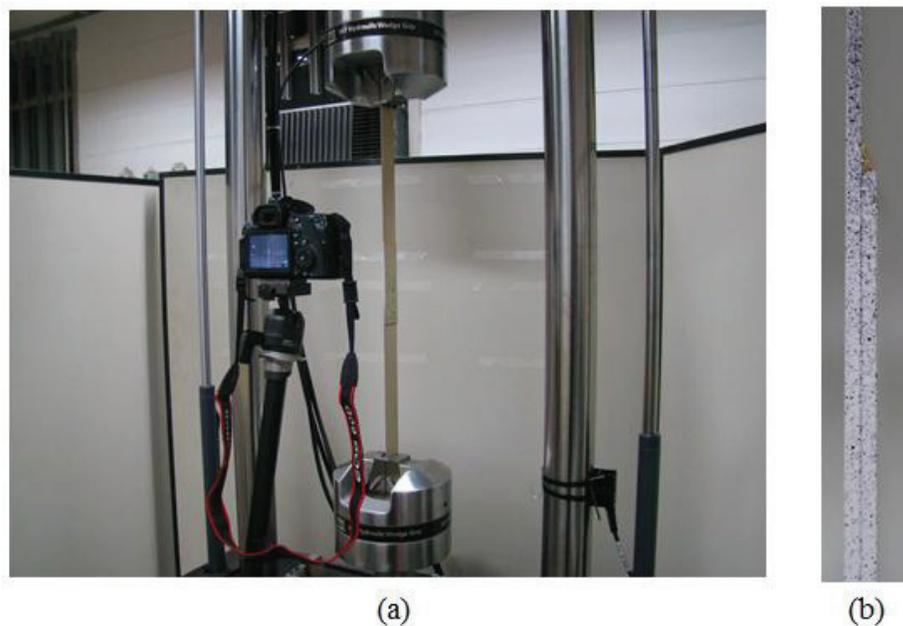


Figura 7.31: Disposição para o ensaio experimental utilizando o processamento digital de imagens.

7.2.3 Resultados Experimentais dos CDPs de Doublers Colados

Para a obtenção dos resultados experimentais dos CDPs, o processamento digital de imagens foi realizado simultaneamente com a extensometria, com o intuito de calibrar modelos e comparar as técnicas, como mostrado na Figura 7.32.

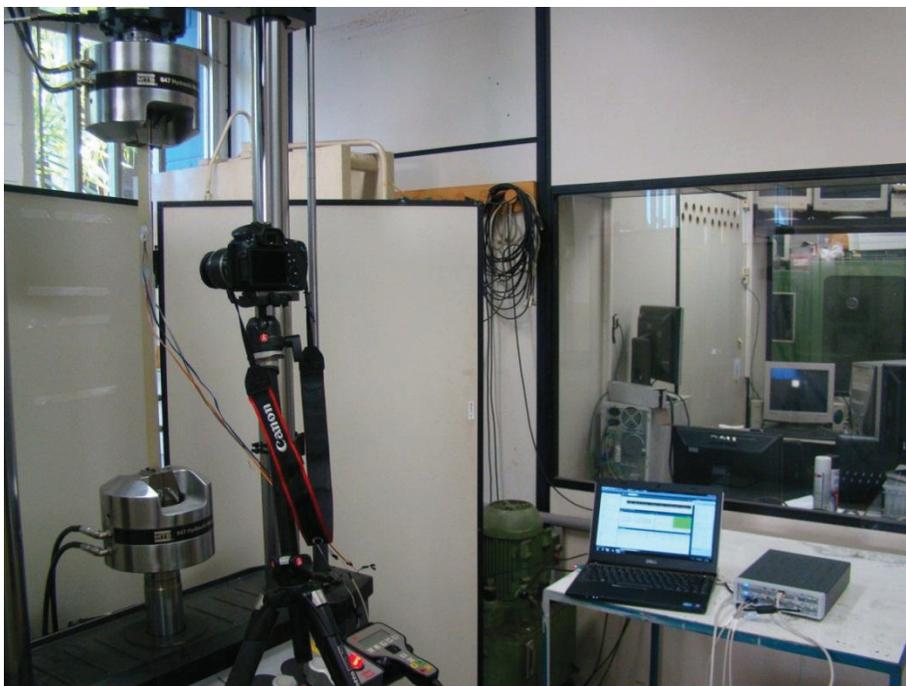


Figura 7.32: Disposição do ensaio experimental de *doubliers* colados.

Como exemplo, será detalhado a seguir o ensaio do primeiro CDP de espessura de 1.3 mm (CDP 1_1, Figura 7.3). Os resultados dos outros CDPs e a comparação com os outros métodos serão mostrados na Tabela 7.9.

Com a imagem inicial e final do CDP 1_1 adquiridas durante o ensaio, as tensões máximas de *peel* e cisalhamento puderam ser obtidas indiretamente pelo processamento digital de imagens.

O lado esquerdo da Figura 7.33 mostra os deslocamentos longitudinais do *doubler* e do *skin* no eixo *y*, além dos pontos escolhidos na interface do adesivo. Estes dois pontos foram selecionados bem próximos do final do *overlap*.

É importante ressaltar, que os pontos foram selecionados próximos ao final do *overlap*, mas não exatamente no final. Este critério foi estabelecido devido a algumas limitações do processamento digital de imagens na identificação das fronteiras dos objetos.

Desta forma, para o ponto no lado do *skin*, o programa interpolou os valores dentro da grade e indicou um deslocamento de 0.887 mm, lado direito da Figura 7.33. Da mesma forma foi feito para o ponto do lado do *doubler*, indicando um deslocamento de 0.880 mm.

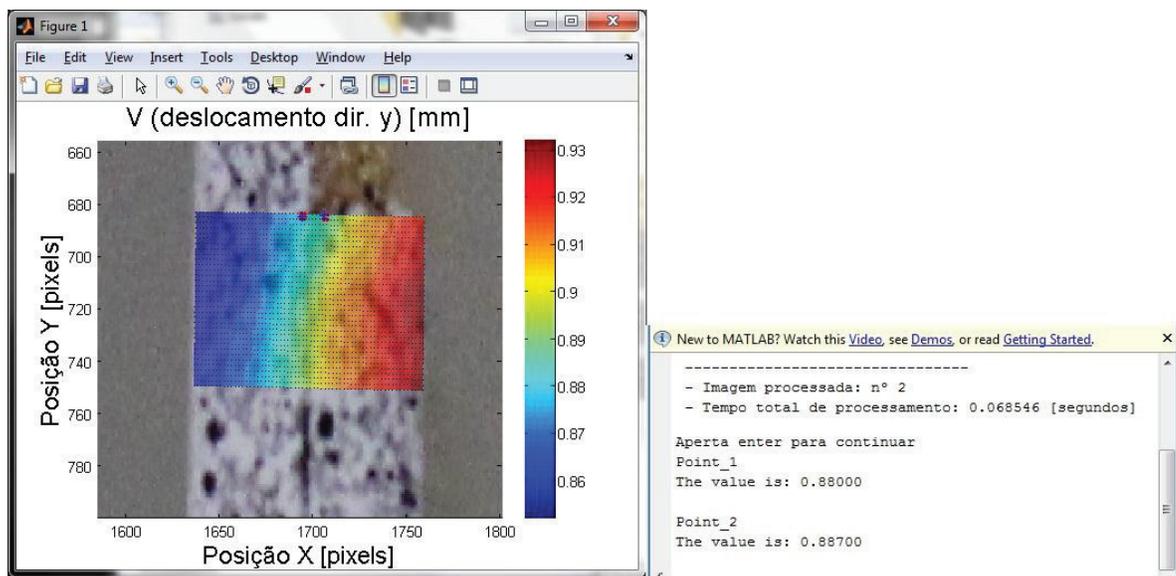


Figura 7.33: Deslocamentos do *skin* e do *doubler* no eixo y.

A partir da Equação 7.2, a tensão de cisalhamento máxima foi obtida dos dados da Figura 7.33:

$$\tau_A = G_A \frac{u_{skin} - u_{doubler}}{t_A} = 841.780 \text{ MPa} \frac{(0.887 - 0.880) \text{ mm}}{0.380 \text{ mm}} = 15.506 \text{ MPa}$$

Comparando com a tensão de cisalhamento obtida numericamente, a tensão obtida experimentalmente ficou 3.48 MPa abaixo.

Da mesma forma foi feito para a obtenção da tensão de *peel* no adesivo, a partir da diferença dos deslocamentos no eixo x do *skin* e do *doubler*, Figura 7.34. O lado direito da Figura 7.34 indica nos pontos próximos do final do *overlap* e na interface do adesivo um deslocamento no eixo x de 0.274 mm do *skin* e 0.277 mm do *doubler*.

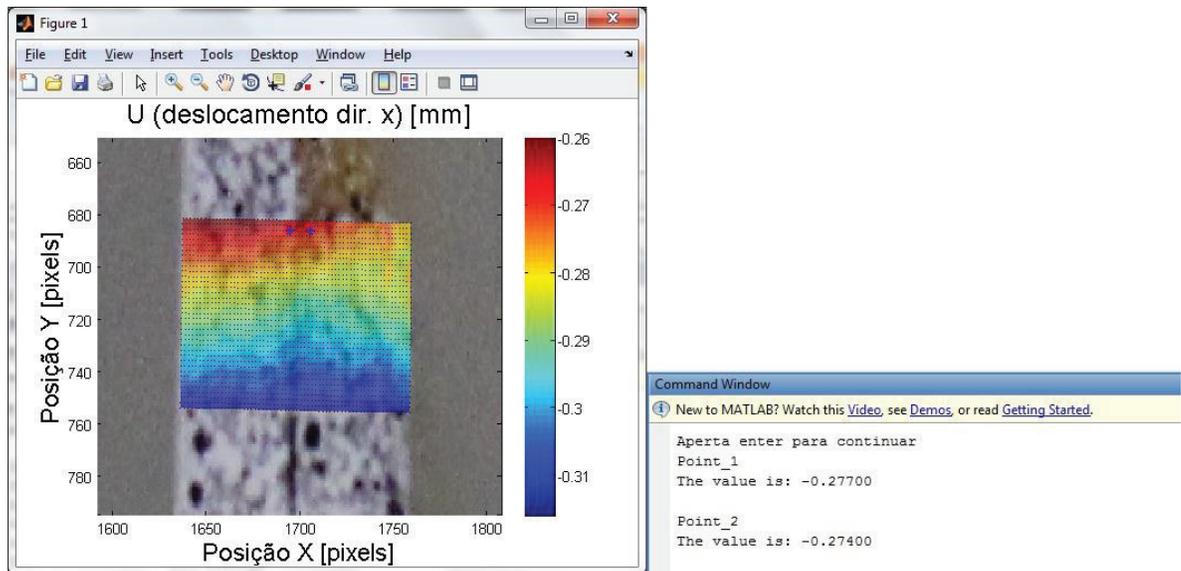


Figura 7.34: Deslocamentos do *skin* e do *doubler* no eixo x.

A partir da Equação 7.1, a tensão de *peel* máxima foi obtida a partir dos dados da Figura 7.34:

$$\sigma_A = E_A \frac{w_{skin} - w_{doubler}}{t_A} = 2357 \text{ MPa} \frac{(0.277 - 0.274) \text{ mm}}{0.380 \text{ mm}} = 18.608 \text{ MPa}$$

Comparando com a tensão de *peel* obtida numericamente, a tensão obtida experimentalmente ficou 2.39 Mpa acima.

No mesmo CDP, foi realizado simultaneamente o método da extensometria. A Figura 7.35 mostra através do *software* da MTS que o CDP ficou dentro da região elástica, como determinado numericamente.

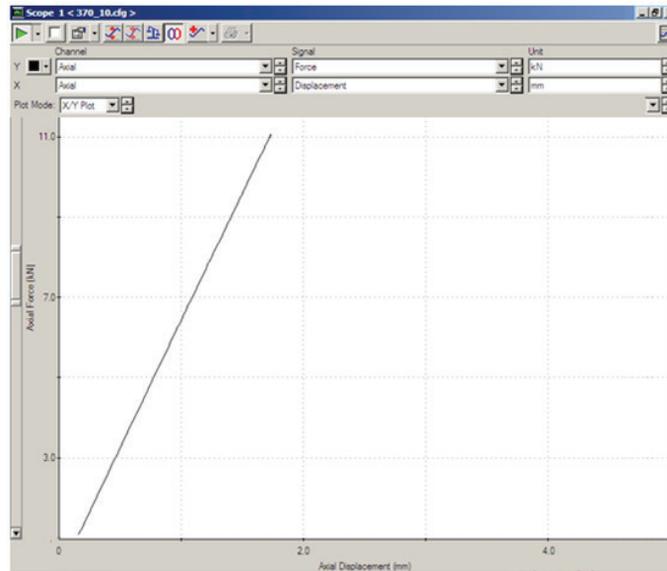


Figura 7.35: Curva Força-Deslocamento do CDP 1_1.

A Figura 7.36 mostra o gráfico das deformações dos três extensômetros colados no CDP e seus respectivos valores máximos das deformações obtidas no *software* da LMS. Onde a curva em preto representa o extensômetro colado no *doubler* (extensômetro 1), a curva em laranja representa a deformação do extensômetro colado no *skin* no final do *overlap* (extensômetro 2) e a curva em verde representa a deformação do extensômetro colado no *skin* como referência (extensômetro 3).

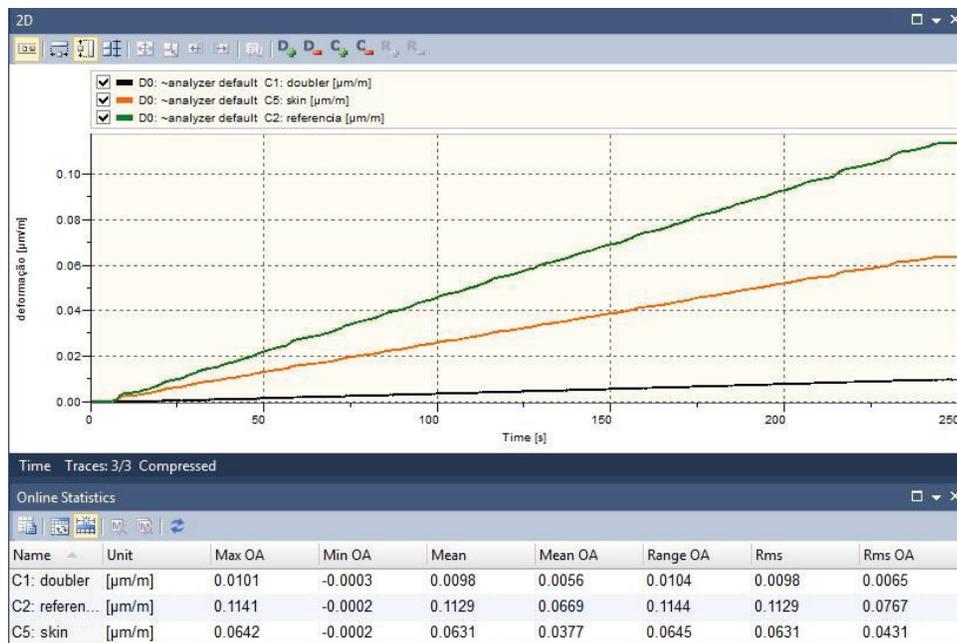


Figura 7.36: Deformação dos extensômetros.

Portanto, a partir da Figura 7.36, as deformações longitudinais e por deflexão dos extensômetros 1 e 2 são calculadas a seguir.

- Extensômetro 1: deformação total = 0,0101 $\mu\text{m}/\text{m}$
- Extensômetro 2: deformação total = 0.0642 $\mu\text{m}/\text{m}$
- Extensômetro 3: deformação total = 0.1141 $\mu\text{m}/\text{m}$

Portanto,

- Deformação longitudinal do *skin* (ϵ_{xS}) = deformação total do Extensômetro 3 = 0,1141 $\mu\text{m}/\text{m}$.
- Deformação por flexão do *skin* (ϵ_{yS}) = deformação do Extensômetro 3 - deformação do Extensômetro 2 = 0.0499 $\mu\text{m}/\text{m}$.
- Relação de deformação do Extensômetros 2 = 30.43 % de deformação por flexão e 69.57 % de deformação longitudinal.

Considerando a relação de deformação do extensômetro 1 igual ao do extensômetro 2, a relação de deformação dos extensômetros 1 e 2 é de: 30.43% de deformação por flexão e 69.57% de deformação longitudinal.

Como o *software* da LMS converte as deformações dos extensômetros diretamente em deslocamentos, os deslocamentos dos extensômetros 1 e 2 foram obtidos diretamente durante o ensaio. Para separar os deslocamentos em deslocamentos transversais e longitudinais foi utilizada a relação de deformação obtida no passo anterior.

A Figura 7.37 mostra o deslocamento obtido no extensômetro 1 (linha preta) e o deslocamento no extensômetro 2 (linha laranja).

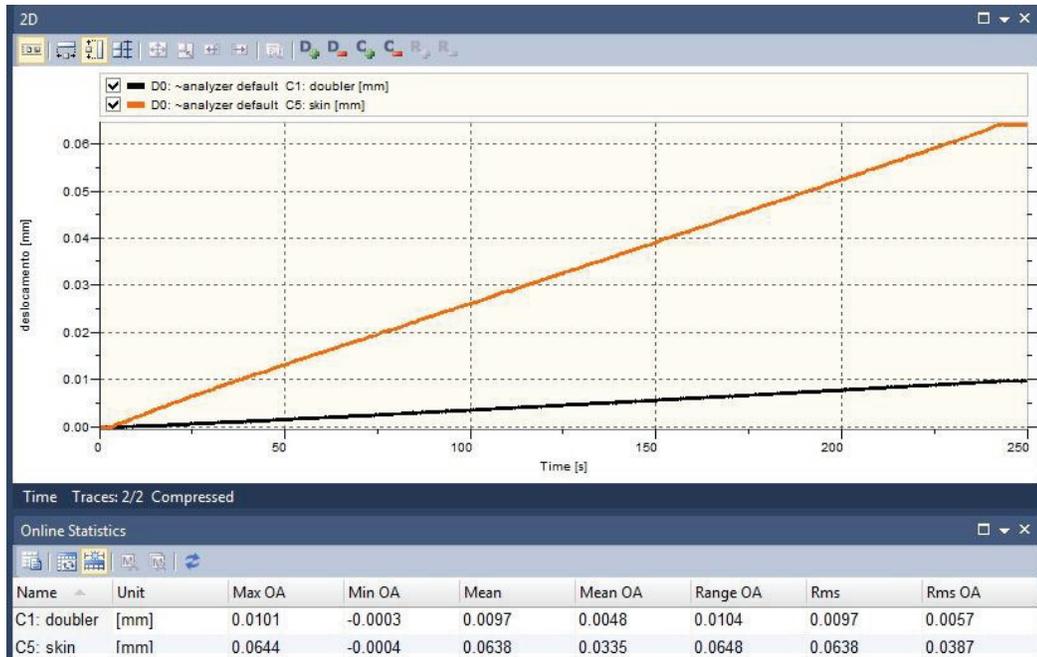


Figura 7.37: Deslocamentos dos extensômetros 1 e 2.

A partir dos deslocamentos obtidos na Figura 7.37 e da relação de deformação/deslocamento obtida no passo anterior, as diferenças dos deslocamentos longitudinais e das deflexões do *skin* e do *doubler* são respectivamente:

$$u_s - u_D = 0.0374 \text{ mm}$$

$$w_s - w_D = 0.0168 \text{ mm}$$

No entanto, devido à baixa transferência de carga do *skin* para a superfície superior do *doubler* no final do *overlap*, as diferenças das deformações/deslocamentos obtidas pelos extensômetros colados ficariam muito maiores em relação às diferenças na interface do adesivo. Sendo assim, numericamente ou pelo processamento digital de imagens pode-se determinar a proporção desse aumento para cada tipo de CDP.

A Figura 7.38 mostra que a diferença da deformação longitudinal obtida pelos extensômetros é 26% maior do que a diferença na interface do adesivo.

Portanto, as tensões máximas de cisalhamento e *peel* no adesivo obtidas pelo método da extensometria são respectivamente:

$$\tau_A = G_A \frac{u_{skin} - u_{doubler}}{t_A} = 841.780 \text{ MPa} \frac{(0.0374)0.26\text{mm}}{0.380\text{mm}} = 21.54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = E_A \frac{w_{skin} - w_{doubler}}{t_A} = 2357 \text{ MPa} \frac{(0.0168)0.26\text{mm}}{0.380\text{mm}} = 27.09 \text{ MPa}$$

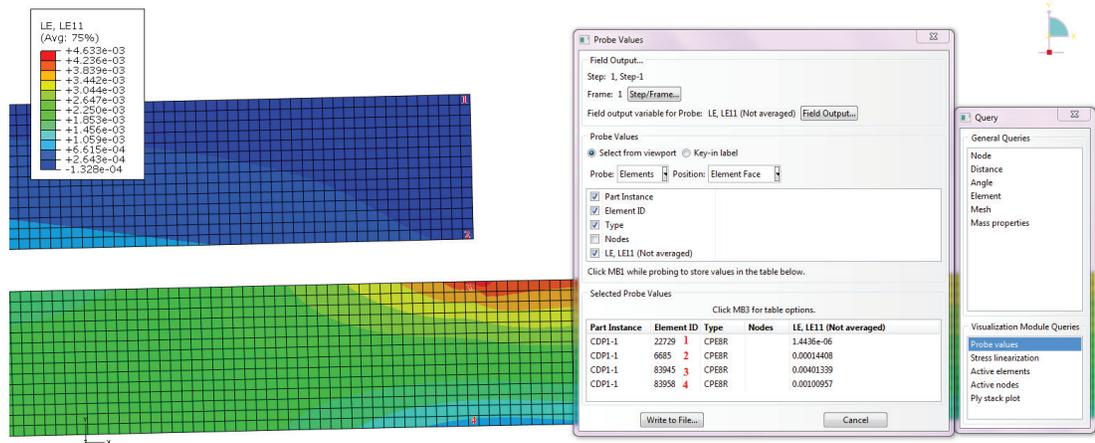


Figura 7.38: Deformações longitudinais.

A Tabela 7.9 mostra um resumo dos resultados obtidos nos dois métodos. É importante observar, que os deslocamentos obtidos com o processamento digital de imagens são bem maiores do que com a extensometria. Isto porque, o deslocamento obtido pelo PDI utiliza um eixo de coordenadas absoluto, obtendo valores próximos ao deslocamento do cilindro da máquina da MTS e os deslocamentos obtidos com a extensometria utiliza eixo de coordenadas relativo, acompanhando o extensômetro. No entanto, a diferença dos deslocamentos, devem dar tensões equivalentes entre os métodos.

Tabela 7.9: Resultados Experimentais dos CDPs.

		Deslocamento do <i>Doubler</i> (mm)		Deslocamento do <i>Skin</i> (mm)		Tensão de Peel no Adesivo (Mpa)	Tensão de Cisalhamento no Adesivo (Mpa)
		u	w	u	w		
CDP 1_1	PDI	0.8800	0.2740	0.8870	0.2770	18.61	15.51
	EXT.	0.0069	0.0031	0.0444	0.0199	27.09	21.54
CDP 1_2	PDI	0.8820	0.2750	0.8880	0.2770	12.41	13.29
	EXT.	0.0077	0.0038	0.0424	0.0185	23.71	19.99
CDP 1_3	PDI	0.878	0.2740	0.8850	0.2780	24.81	15.51
	EXT.	0.0072	0.0037	0.0403	0.0176	22.42	23.71
				Numérico :		21	19
CDP 2_1	PDI	0.4530	0.4840	0.4690	0.4890	31.01	35.44
	EXT.	0.0008	0.0004	0.0354	0.0175	45.58	33.74
CDP 2_2	PDI	0.4510	0.4820	0.4680	0.4870	31.01	37.66
	EXT.	0.0008	0.0004	0.0361	0.0178	47.49	34.41
CDP 2_3	PDI	0.4530	0.4840	0.4660	0.4880	24.81	28.80
	EXT.	0.0018	0.0009	0.0384	0.0189	46.69	35.67
				Numérico :		31	27

Como conclusão para os resultados da Tabela 7.9, além de verificar que os resultados experimentais ficaram bastante próximos dos resultados numéricos, verificou-se que o PDI, devido as suas dificuldades nas análises de fronteira, é mais viável em CDPs de espessuras grossas e o método da extensometria aplicado é mais viável em estudos de CDPs com espessuras mais finas, devido ao fato da menor diferença de deformação das superfícies internas e externas dos aderentes.

Capítulo 8

8 Resultados Numéricos e Experimentais dos Subcomponentes de *Doublers* Colados

Os subcomponentes são painéis representativos de uma parte da fuselagem de uma aeronave real, construídos com *doublers* colados. Estas estruturas simulam chapas furadas e são de relevância técnica significativa.

O subcomponente proposto, como a maioria das peças estruturais, contém uma descontinuidade que altera a distribuição de tensão. As regiões em que estas descontinuidades ocorrem são conhecidas como área de concentração de tensão. No caso do subcomponente, a concentração de tensão surge devido ao furo de retrabalho, não inerente ao membro, ou devido aos furos de portas e janelas.

Para auxiliar na compreensão desse efeito, pode-se examinar a Figura 8.1, onde se observa que as trajetórias de tensão são uniformes em todos os locais, exceto nas proximidades do furo onde essas linhas de força têm de se curvar para dar a volta.

Assim, a concentração de tensão é um efeito altamente localizado e a tensão na placa sob tração é máxima na borda do furo no plano A-A. Essa tensão cai rapidamente à medida que pontos mais afastados da beira do furo são examinados, e de imediato, torna-se uniforme novamente.

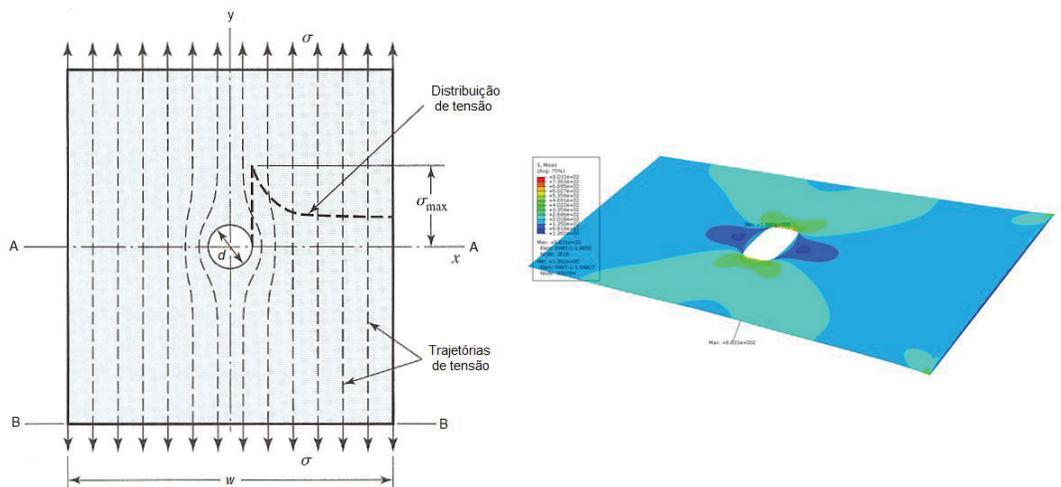


Figura 8.1: Concentração de tensão em uma chapa furada.

Um fator de tensão teórico, ou geométrico, K_t ou K_{ts} é utilizado para relacionar a máxima tensão real na descontinuidade à tensão nominal, Equações 8.1 e 8.2.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \quad (8.1)$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_0} \quad (8.2)$$

onde K_t é utilizado para tensões normais e K_{ts} para tensões de cisalhamento.

Assim, para diminuir este efeito da concentração de tensão, como em furos em estruturas aeronáuticas, usam-se geralmente reforçadores dos dois lados da fuselagem, como mostrado na Figura 8.2, onde o tamanho e o formato do *doubler* são, em geral, determinados pelo número de rebites requeridos no reparo.

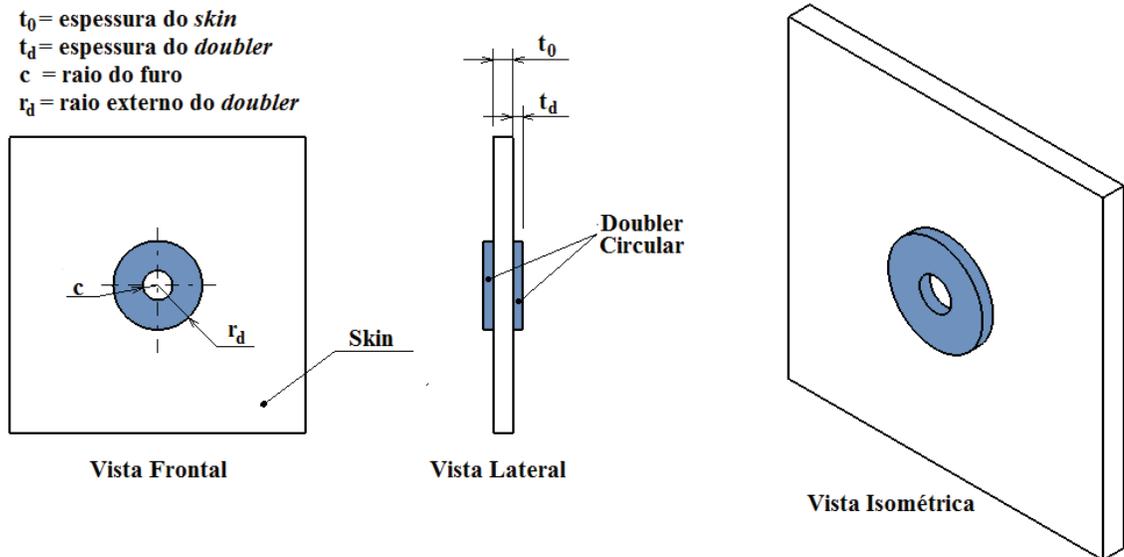


Figura 8.2: Placa furada reforçada com um *doubler* colado em cada lado da placa.

No entanto, em muitos casos é praticamente impossível utilizar-se de reforçadores dos dois lados da placa, necessitando de reforçadores em apenas um lado, como mostrado na Figura 8.3, e como proposto no subcomponente em estudo.

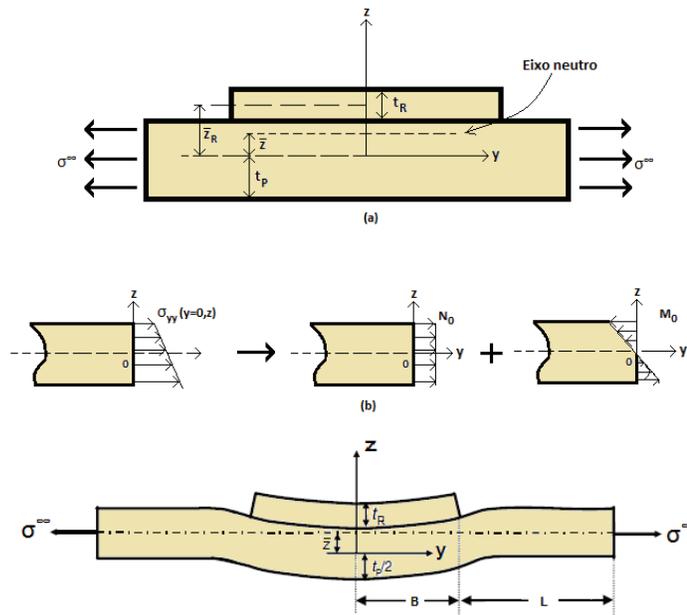


Figura 8.3: Distribuição de tensão utilizando um *one-sided doubler*.

Assim, observando a Figura 8.3, verifica-se que, devido à flexão fora do plano induzida pela excentricidade do carregamento, a distribuição de tensão ao longo da placa é maior do que em um correspondente reparo colado dos dois lados. Conseqüentemente, devido à mudança do plano neutro, o reparo de apenas um lado deverá não somente aumentar a força que a placa está transmitindo, mas também gerar um momento fletor secundário, ambos contribuindo para um considerável aumento da intensidade de tensão.

Além disso, as exigências crescentes para estruturas modernas em termos de baixo peso e alta resistência levam para a questão de um projeto de reforço ideal. Assim, é necessário criar um modelo de otimização, bem como um modelo estrutural adequado para se obter respostas estruturais (deslocamentos, tensões etc). Neste trabalho, o método dos elementos finitos tem sido aplicado para as abordagens de análises.

Desta maneira, um procedimento de otimização paramétrica foi utilizado para se obter uma série de alternativas diferentes de *doublers* em vários casos de cargas. Neste caso, o procedimento numérico executado teve boa confiabilidade e eficiência na obtenção de projetos ideais de *doublers*. Os resultados obtidos ilustram a necessidade e utilidade da aplicação deste procedimento para a obtenção das geometrias finais dos subcomponentes.

Antes das simulações em subcomponentes, foi realizado uma validação do método numérico para análises 3D de *doublers* colados e um estudo de otimização paramétrica em chapas simples furadas reforçadas por *doublers*.

As análises 3D dos subcomponentes são análises mais complexas, para as quais não foi encontrada uma solução fechada analítica na literatura consultada. Assim, após o método numérico ter sido validado com o método analítico de modelos mais simples, geometrias mais complexas poderiam ser estudadas através do modelo numérico.

8.1 Validação 3D

Para fazer a validação numérica de geometrias 3D de *doublers* colados, foi realizada uma análise numérica por elementos finitos da geometria proposta por Brett et al. (2006), Figura 8.4. Para esta simulação foi utilizado o *software* ABAQUS.

As propriedades físicas dos materiais utilizados por Brett et al. (2006) nos seus ensaios são mostrados na Tabela 8.1.

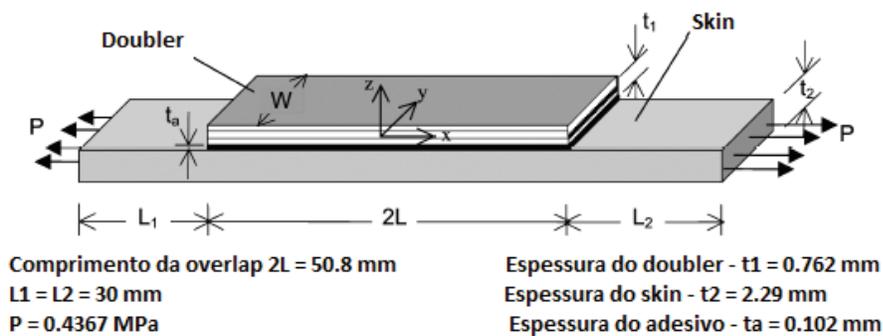


Figura 8.4: Geometria do *doubler* ensaiado por Brett et al (2006).

Tabela 8.1: Propriedades físicas dos materiais utilizados por Brett et al (2006).

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Módulo de Cisalhamento (GPa)	Razão de Poisson
Doubler	223.4	8.48	0.23
Skin	68.95	26.5	0.30
Adesivo	3.07	1.138	0.35

A Figura 8.5 mostra a distribuição de tensão cisalhante no adesivo para uma análise com 12954 elementos no adesivo, com dois elementos na direção da espessura do adesivo e deixando livre apenas o deslocamento na direção x . A carga aplicada foi de 0.4367 Mpa, diretamente nas extremidades do *skin*. As propriedades do elemento utilizado estão na Tabela 8.2.

Tabela 8.2: Propriedades do elemento utilizado.

Propriedade	VALOR
Biblioteca de elementos	<i>Standard / 3D Stress</i>
Ordem geométrica	Quadrática
Tipo de elemento	Hexaédrico de 20 nós

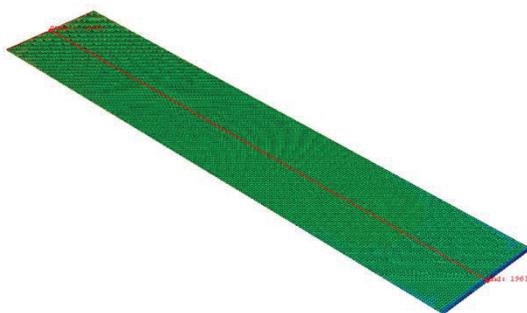


Figura 8.5: Análise 3D da tensão cisalhante no adesivo.

Para a análise da distribuição de tensão na linha média do adesivo mostrada na Figura 8.5, a Figura 8.6 mostra a comparação entre o resultado obtido por Brett et al. (2006) e o resultado obtido numericamente pelo ABAQUS.

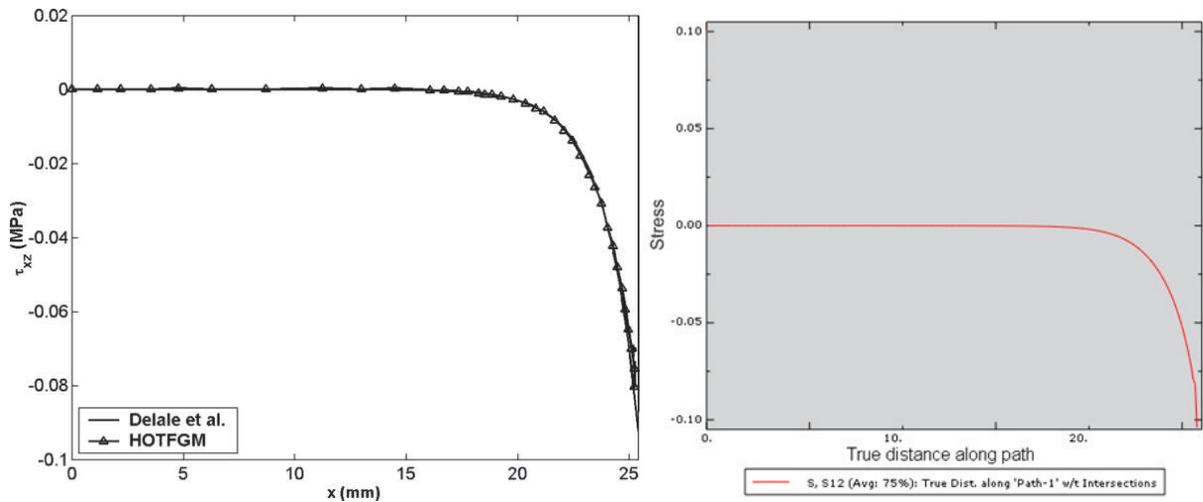


Figura 8.6: Validação numérica. Comparação entre o resultado obtido por Brett et al. (esquerda) e o resultado numérico obtido pelo ABAQUS (direita).

Passando para o MatLab o resultado obtido pelo ABAQUS, assim como a curva obtida por Brett et al. (2006), através de um programa de vetorização de figuras, pode-se verificar que o método de elementos finitos empregado e as condições de contorno utilizadas estão de acordo com a teoria presente, Figura 8.7.

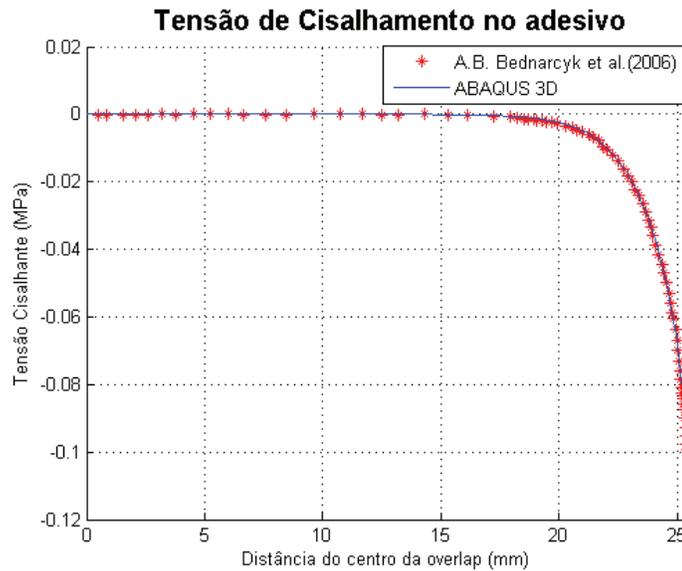


Figura 8.7: Comparação entre o resultado numérico e experimental.

8.2 Otimização Paramétrica em Chapas Furadas Simples Reforçadas por *Doublers* Colados

O modelo estrutural proposto nesta seção, como estudo inicial para os subcomponentes, foi de uma placa isotrópica infinita com um furo circular em seu centro. Pois para este modelo, soluções analíticas estão disponíveis para a distribuição de tensões nas vizinhanças do furo e serviram como auxílio na validação do método. Esta placa foi reforçada por dois *doublers* colados de raios externos variáveis, Figura 8.2.

O principal objetivo deste estudo é determinar o melhor *doubler* (espessura e demais dimensões geométricas apropriadas) com o mínimo de peso possível e atendendo aos critérios de resistência. Para isto, foi gerado um modelo de parametrização das variáveis por elementos finitos.

Para a situação idealizada em uma placa infinita, o problema pode ser resolvido pelo método dos elementos finitos, com uma adequada discretização para uma solução convergente.

As exigências de peso mínimo e máxima resistência levam à questão de um apropriado projeto de reforçador por *doubler*. Para este propósito, o mínimo peso e as dimensões ideais podem ser determinadas pela formulação de um problema de otimização paramétrico claramente definido.

O aumento das demandas por estruturas mecânicas justifica o uso sistemático de procedimentos de otimização. Para isso, primeiro é necessário ter um modelo matemático para a estrutura investigada, seja por meios analíticos ou numéricos. Depois é necessária a definição matemática do problema de otimização, que inclui as condições de contorno e as respectivas variáveis geométricas que são requeridas, objetivando maior resistência com o mínimo de peso.

A otimização paramétrica pode ser dividida em três partes, como mostrado na Tabela 8.3.

Tabela 8.3: Divisão do problema de otimização.

Modelo estrutural	Modelo de otimização paramétrica	Algoritmo de otimização
Método analítico		
<ul style="list-style-type: none"> • Solução exata • Solução aproximada 	<ul style="list-style-type: none"> • Definição das variáveis • Definição das condições de contorno 	Modelo iterativo
Método numérico		
<ul style="list-style-type: none"> • Método dos elementos finitos 		

O modelo estrutural representa todas as variáveis do modelo e condições de contorno. A análise estrutural pode ser resolvida por diferentes métodos, como uma solução fechada pelo método analítico, ou por métodos numéricos, como os elementos finitos.

O modelo de otimização paramétrica representa a ligação entre a análise estrutural e o método de otimização, e consiste nas mudanças de variáveis possíveis para se chegar à forma otimizada do modelo.

Para a solução do problema, o algoritmo de otimização gera um processo iterativo, que no caso deste trabalho, utiliza a comunicação entre a linguagem de programação em Python produzindo a interatividade com o ABAQUS na solução por elementos finitos do problema.

O atual método numérico implementado, pode ser visto no fluxograma da Figura 8.8. O fluxograma mostra como se chega a uma forma final otimizada parametricamente a partir de um desenho inicial. O procedimento é finalizado através do critério de convergência estabelecido.

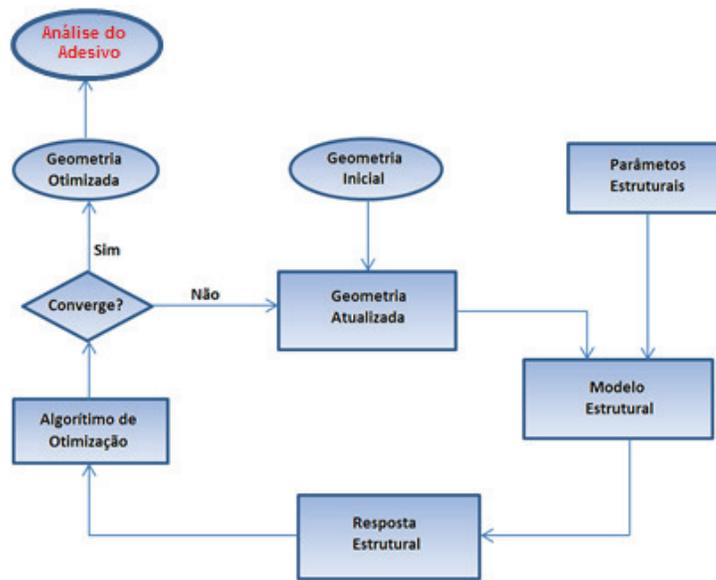


Figura 8.8: Fluxograma da otimização.

8.2.1 Modelo Estrutural

Como descrito anteriormente, o modelo estrutural proposto nesta seção foi de uma placa isotrópica infinita com um furo central e reforçada por dois *doublers* colados, um de cada lado da placa, Figura 8.2. Este modelo estrutural foi discretizado utilizando o *software* comercial ABAQUS e sua malha correspondente está mostrada na Figura 8.9, onde-se utilizou 20260 elementos estruturados. As propriedades dos elementos utilizados estão mostradas na Tabela 8.2.

A investigação da convergência mostra que uma malha relativamente refinada nos contornos do furo é necessária para a obtenção de resultados corretos de tensão.

A análise por elementos finitos é feita dentro do *software* ABAQUS, que juntamente com um *script* em PYTHON permite a parametrização do contorno do reforçador, e consequentemente, permite automaticamente a variação das dimensões da geometria do *doubler* durante o processo de otimização paramétrica, até a obtenção de sua geometria ideal.

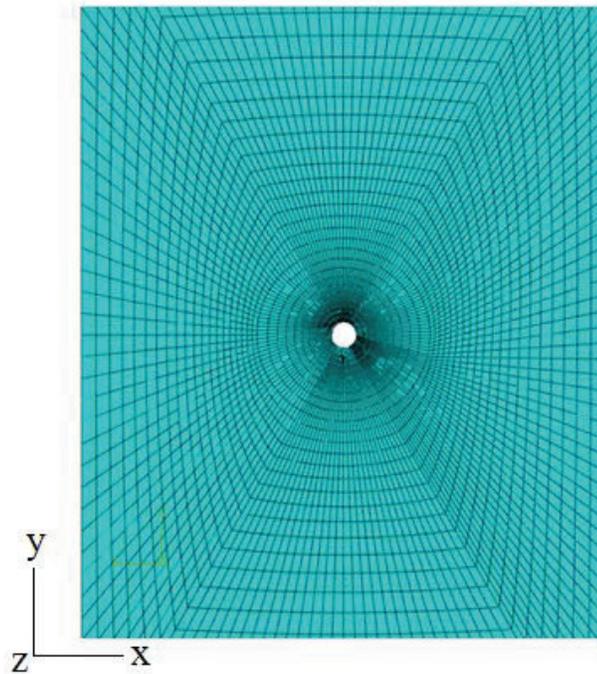


Figura 8.9: Discretização do modelo.

8.2.2 Modelo da Otimização Paramétrica

O objetivo desta seção é otimizar as dimensões do *doubler*, tendo como critério o limite de escoamento do aderente. Esta restrição foi adotada devido aos baixos níveis de tensão no adesivo, quando comparadas aos dos aderentes. A função objeto desta análise está relacionada com a minimização da massa do *doubler*.

Em simples palavras, o objetivo da otimização paramétrica é minimizar a massa do *doubler* $m(x)$ através de uma aplicável seleção de formatos variados, enquanto satisfaz os limites de resistência.

As restrições da resistência para os contornos do furo são formuladas como segue:

$$\sigma_{equ,i} \leq \sigma_u, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.3)$$

onde $\sigma_{equ,i}$ é a tensão de von Mises equivalente no elemento finito i no contorno do furo ($r = c$), Figura 8.2; n é o número de elementos finitos ao longo do contorno do furo; e σ_u é a tensão de escoamento pelo critério adotado.

A seleção das diversas opções de geometria depende de uma particular alternativa de *doubler*. Considerando o caso do *doubler* circular, o raio r_d para o *doubler* é determinado como uma variável em sua geometria.

Por razões numéricas, é vantajoso usar raios dentro de padrões normalizados como:

$$\frac{r_d}{c} \quad (8.4)$$

onde c é o raio do furo.

No entanto, para se manter longe de soluções inapropriadas, o raio do *doubler* é restringido por:

$$1,5 \leq \frac{r_d}{c} \leq 20 \quad (8.5)$$

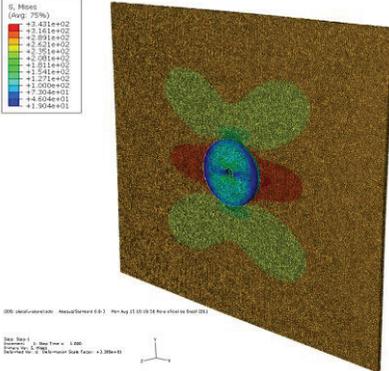
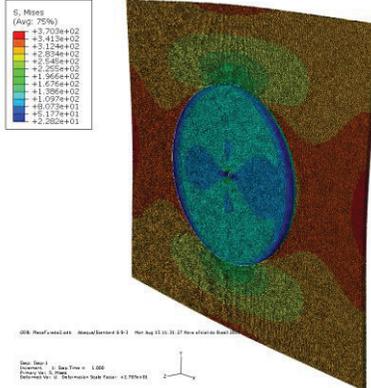
8.2.3 Resultados da Otimização Paramétrica e Discussão

Assumindo as placas serem rigidamente coladas, a Tabela 8.4 mostra o resultado da tensão circunferencial $\sigma_\varphi(r = c)$ ao longo do contorno do furo, a tensão equivalente σ_{equ} ao longo do contorno interior e exterior do reforçador e a geometria do *doubler* otimizado para cada carregamento uniaxial σ_0 , onde:

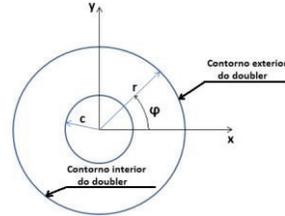
$$\frac{\sigma_0}{\sigma_u} = 0,80 \quad , \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_u} = 0,90 \quad (8.6)$$

onde σ_0 é a tensão uniaxial aplicada, e σ_u é a tensão de escoamento do material.

Tabela 8.4: Resultados da otimização paramétrica.

Carregamento	Tensão circunferencial $\sigma_\varphi(r = c)$ ao longo do furo	Tensão máxima equivalente σ_{equ} ao longo do contorno interior e exterior do reforçador. Para um critério de 380 MPa como tensão máx.	
		$\frac{t_d}{t_0}$	$\frac{r_d}{c}$
$\frac{\sigma_0}{\sigma_u}$			
0,8		343	1,0 8,3
0,9		370	1,0 18,0

Tensão máxima equivalente σ_{equ} ao longo do contorno interior e exterior do reforçador. Para um critério de 380 MPa como tensão máx.



As últimas duas colunas da Tabela 8.4, representam a razão de aspecto da otimização, onde a concentração de tensão nas vizinhanças do furo afeta as dimensão geométricas do *doubler* substancialmente. Em cada caso, a máxima tensão $\sigma_\varphi(r = c) = \sigma_u$ ocorre em um ângulo de 0° mostrado referencialmente na terceira coluna da Tabela 8.4, cujo aumento da tensão aplicada leva a um excessivo aumento do volume do reforçador.

Obviamente, o volume do *doubler* pode ser reduzido considerando no procedimento de otimização paramétrica a espessura t_d do *doubler*.

8.3 Análise dos Subcomponentes

Após o estudo em chapas simples furadas, a proposta foi a obtenção de componentes representativos de estruturas aeronáuticas, tais como o reforço de um furo de passagem de cabos/tubos de sistema, ou uma janela de inspeção por exemplo.

Com a otimização paramétrica destes componentes, conseguiu-se uma maior transferência de carga do *skin* para os reforçadores e uma maior tensão nos adesivos para efeito de análises práticas do adesivo. Além disso, neste processo evitou-se a interferência do efeito de borda na região do furo.

O dimensionamento inicial destes componentes foi realizado seguindo apenas critérios estáticos, obtendo diversas geometrias iniciais, como mostrado na Figura 8.10. A inclusão de critérios por fadiga para o dimensionamento foi realizada posteriormente, sendo realizado um novo estudo para a elaboração de uma proposta de subcomponente cuja geometria possa validar os seguintes tópicos:

- *Doubler* otimizado;
- Cargas aplicadas e geometria do rasgo que sejam representativas de uma estrutura aeronáutica;
- Validação para cargas em ensaios de fadiga.

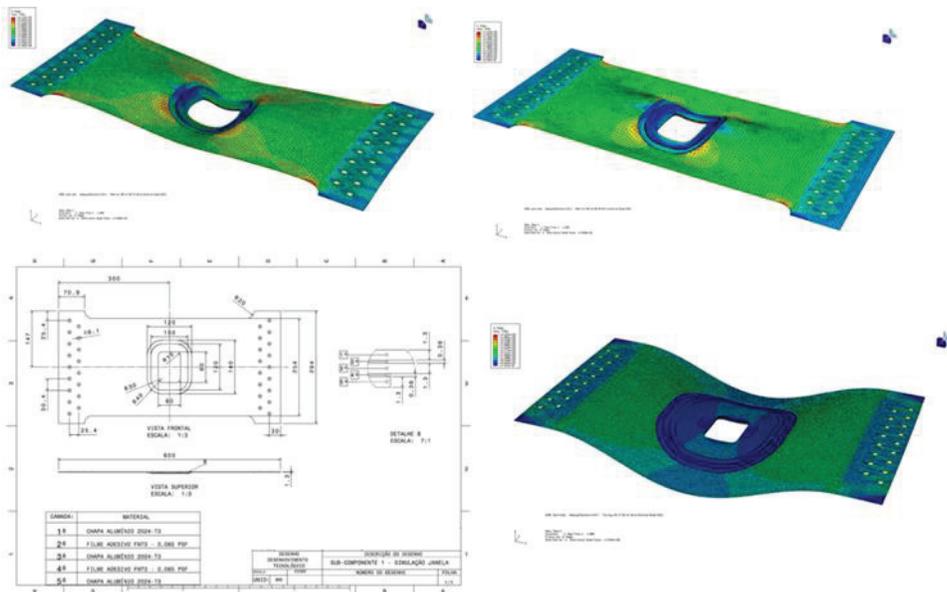


Figura 8.10: Geometrias de subcomponentes projetados estaticamente.

O procedimento para o projeto do subcomponente utilizando uma metodologia de otimização paramétrica, inicia-se com uma pré-configuração a partir das restrições e cargas atuantes do painel superior de fuselagem, em estação atrás da asa, como mostrado na Figura 8.11. Onde neste ponto, a flexão para baixo (*down-bend*) é mais crítica, causando tensões de tração mais críticas do que as tensões de compressão.



Figura 8.11: Área representativa.

Desta maneira, nas cargas atuantes, o subcomponente submetido à carga limite (cargas críticas, referentes ao envelope de operação da aeronave), não pode ter escoamento dos aderentes, ou seja, com uma tensão atuante (tensão remota) de 150 MPa o subcomponente não deve escoar.

Com o subcomponente submetido à carga última (carga limite x fator de segurança de 1,5), não deve ocorrer ruptura do aderente, ou seja, com uma tensão atuante (tensão remota) de 225 MPa o subcomponente não deve apresentar trincas em seus aderentes.

Para as cargas operacionais usadas no dimensionamento em fadiga, o subcomponente está submetido a todos os ciclos de tensões atuantes, à ordem e à frequência que estes ciclos ocorrem ao longo da operação da aeronave. No entanto, para a estimativa da vida em fadiga utilizando-se curva SN, a ordem dos ciclos não importa, apenas a frequência.

Para o dimensionamento simplificado em fadiga, são utilizadas cargas de fadiga críticas resumidas com 80000 ciclos de 0 a 100 MPa (tensão remota).

A geometria básica do painel de fuselagem para o projeto do subcomponente partiu dos seguintes dados disponíveis para a utilização:

- Espessura do revestimento = 0,8 mm e/ou 1,3 mm;
- Espessura do *skin* = 1,3 mm.

A geometria básica do furo de retrabalho de trinca ou dano está mostrada na Figura 8.12. Onde as suas dimensões básicas são dadas a seguir:

- Comprimento: $a = 76$ mm mínimo; preferencialmente $a \geq 100$ mm;
- Largura: $b \leq \text{comprimento} / 2$;
- Raio de canto: $R = 10$ mm;
- *Doubler*: 2 chapas contínuas de 0,8 mm ou 1 chapa contínua de 1,3 mm fechando o furo de retrabalho.

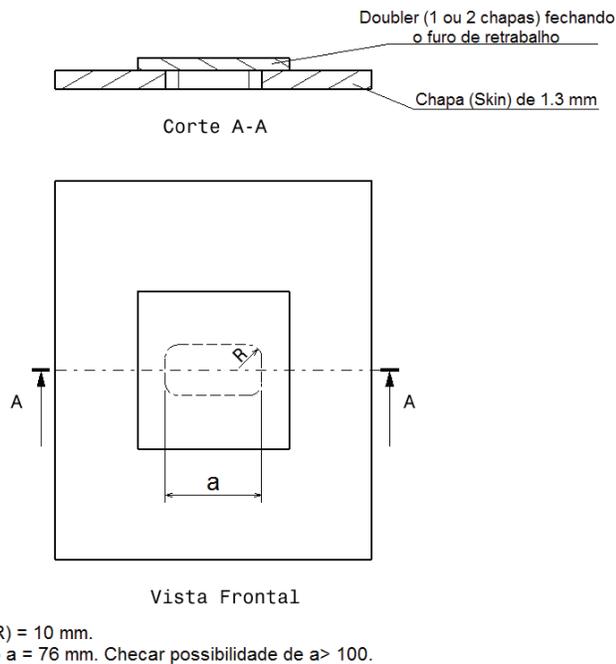


Figura 8.12: Pré-configuração do painel.

Os materiais utilizados para o projeto do subcomponente foram:

- *Doubler*: Al 2024-T3 Bare
- *Skin*: Al 2024-T3 Bare
- Adesivo: Cytec FM 73

Para o critério de dimensionamento, visou-se a otimização paramétrica dos *doublers*, tensões atuantes no adesivo e nos aderentes para o ensaio estático e de fadiga.

Um resumo das etapas presentes do procedimento utilizado de otimização paramétrica do subcomponente, pode ser visto no fluxograma da Figura 8.13.

O procedimento da otimização paramétrica é executado em duas etapas:

- Primeira Etapa de Otimização Paramétrica: a função objeto desta etapa é projetar o menor *doubler* colado, com base na resistência do adesivo, sem que ocorra a falha do aderente;

- Segunda Etapa de Otimização Paramétrica: a função objeto desta etapa é projetar o menor *doubler* colado com base na resistência dos aderentes, caso a Primeira Etapa de Otimização não ocorra.

Além disso, a Primeira Etapa de Otimização Paramétrica é subdividida em três passos:

- Análise experimental segundo a norma ASTM D3166: nesse passo se obtém a curva S-N do adesivo para o CDP normalizado;
- Análise numérica segundo a norma ASTM D3166: nesse passo se obtém a tensão de falha no adesivo, a partir dos dados do passo anterior;
- Análise numérica do subcomponente: nesse passo se obtém o dimensional do menor *doubler* colado, com base na resistência do adesivo.

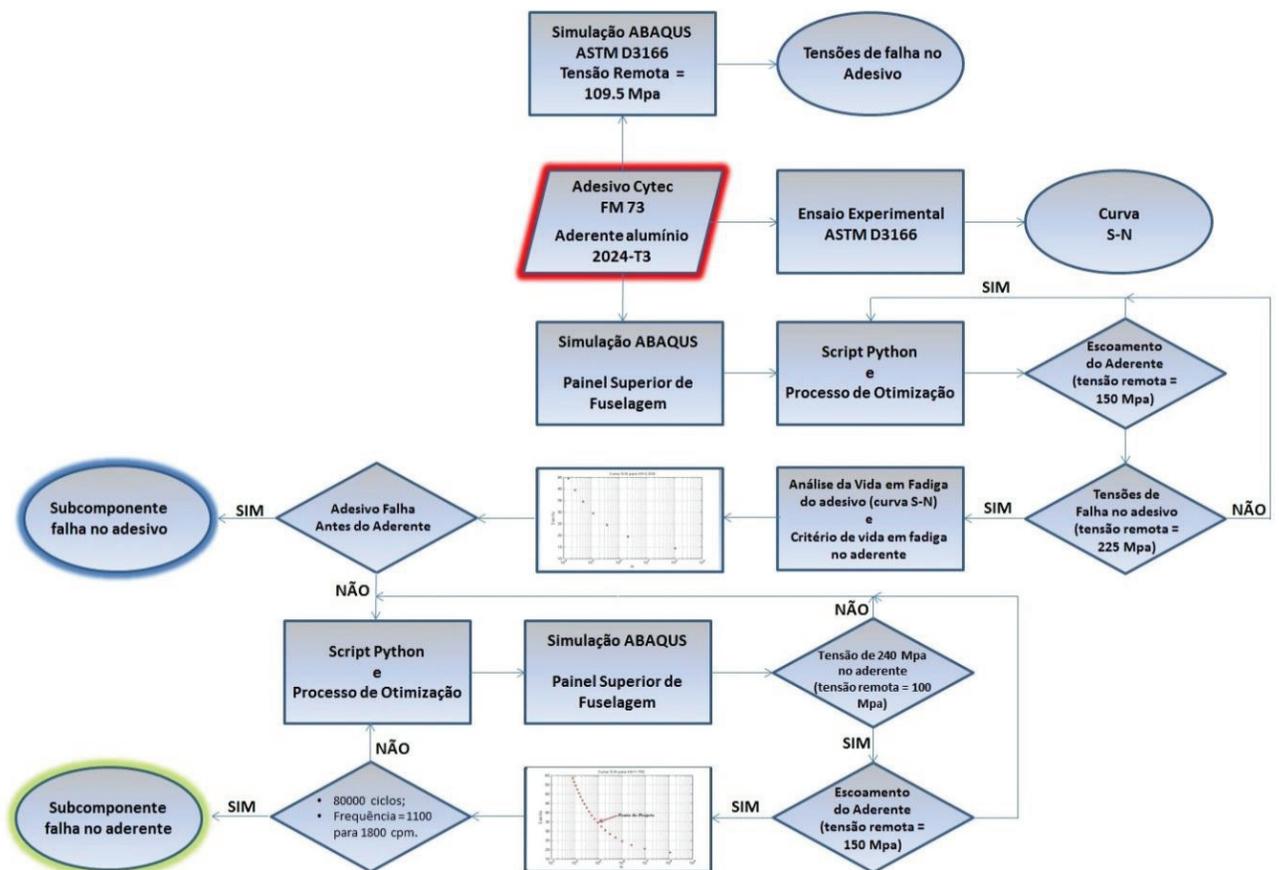


Figura 8.13: Fluxograma do procedimento utilizado.

As duas etapas, com seus respectivos passos, serão explicadas detalhadamente nas seções seguintes.

8.3.1 Primeira Etapa de Otimização Paramétrica

Na Primeira Etapa de Otimização Paramétrica o subcomponente é projetado visando o menor *doubler* colado, com base na resistência do adesivo, sem que ocorra a falha do aderente. São utilizados os resultados obtidos a partir das informações da curva S-N do ensaio experimental, da análise numérica para o CDP sugerido pela norma ASTM D3166 e da otimização numérica do subcomponente.

8.3.1.1 Passo 1: Análise experimental do CDP - ASTM D3166

Foram realizados ensaios de fadiga em CDPs de SLJ de acordo com a norma ASTM D3166. Neste passo é levantada a curva S-N do adesivo, a partir dos resultados obtidos nos ensaios experimentais.

Para isto, foram selecionados cinco níveis de carregamento em fadiga de acordo com a resistência ao cisalhamento do adesivo obtido no *Technical Data Sheet da CYTEC*, buscando cobrir o que foi sugerido pela norma. No total foram ensaiados 25 CDPs, sendo cinco para cada nível de carga. A Tabela 8.5 mostra os principais parâmetros que foram programados na máquina de ensaios da MTS.

Tabela 8.5: Parâmetros de teste em fadiga.

Teste	Nº de CDPs	% Carga	Razão de Carga	Carga média	Amplitude	Frequência
1	5	80%	0,1	4985 N	4079 N	30 Hz
2	5	70%	0,1	4382 N	3585 N	30 Hz
3	5	55%	0,1	3458 N	2829 N	30 Hz
4	5	40%	0,1	2493 N	2039 N	30 Hz
5	5	25%	0,1	1568 N	1283 N	30 Hz

A Figura 8.14 mostra o desenho da geometria do CDP proposto pela norma.

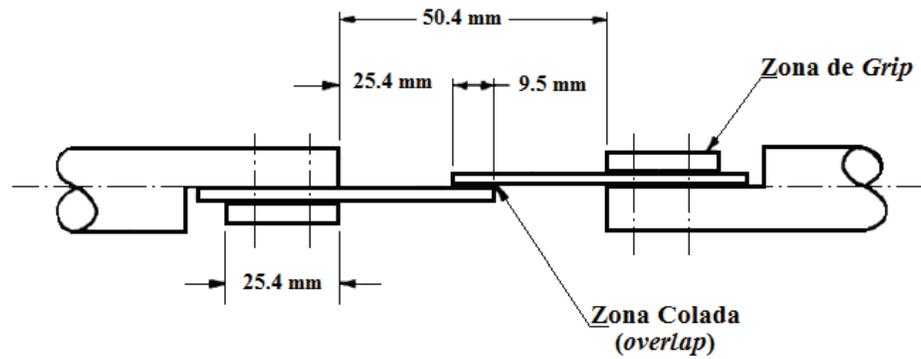


Figura 8.14: Geometria do CDP de SLJ para ensaio de fadiga segundo ASTM D3166.

A disposição dos CDPs na máquina de ensaios é mostrada na Figura 8.15.



Figura 8.15: Montagem dos CDPs na MTS.

O sistema de controle, onde foi utilizado um compensador PVC para manter as amplitudes de carga corretas no ciclo de fadiga, é mostrado na Figura 8.16.

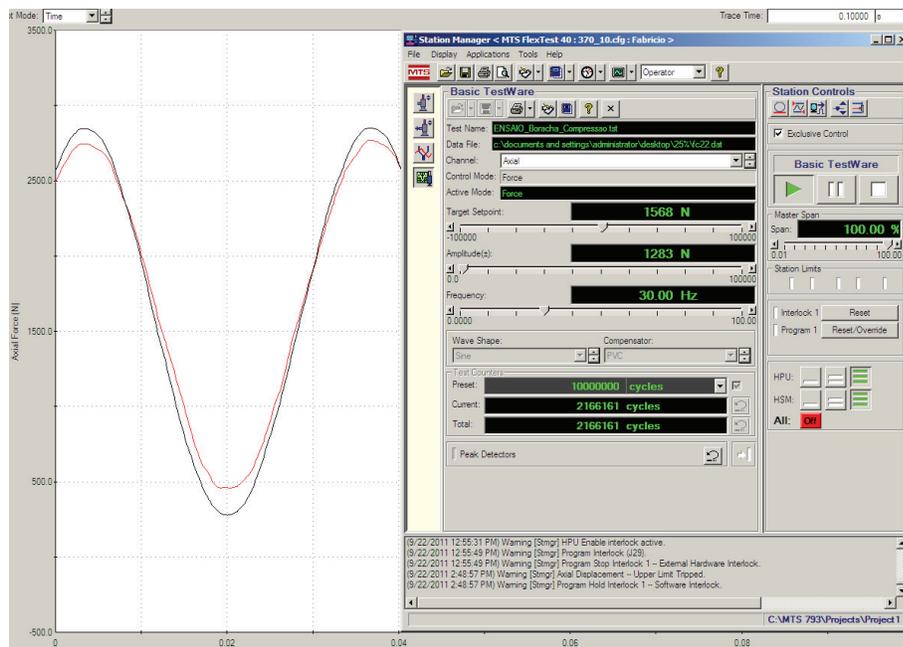


Figura 8.16: Sistema de controle.

Foram registradas as medidas de temperatura e a umidade relativa do ar do ambiente de teste, de acordo com a recomendação da norma. Devido ao fato de não contarmos com um ambiente controlado, específico para a realização de ensaios experimentais, esses valores variaram bastante no decorrer dos vários ensaios (Figura 8.17).



Figura 8.17: Medidas de temperatura e umidade.

Durante o ensaio, a norma recomenda que o ensaio seja levado até 10.000.000 de ciclos. Se o CDP atingir um valor superior a esse considera-se vida infinita. Nos ensaios realizados na UNICAMP todos os CDPs falharam antes desse limite. Foi registrado o número de ciclos até a falha para a elaboração de uma curva S-N simples. A Figura 8.18 mostra um dos CDPs depois da falha coesiva.

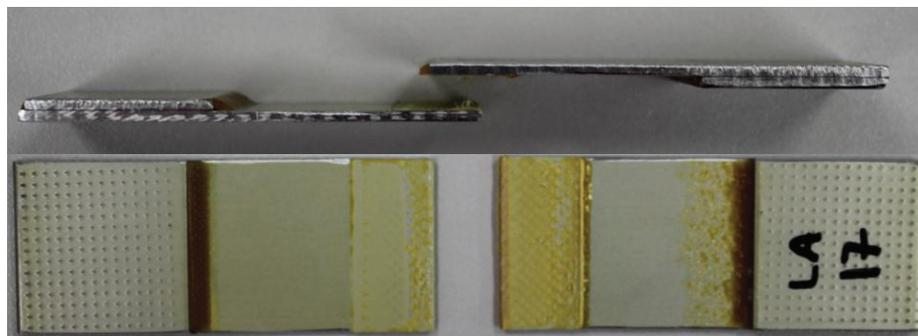


Figura 8.18: CDP rompido por fadiga, com carga de 40% da resistência do adesivo.

A Tabela 8.6, Tabela 8.7, Tabela 8.8 e Tabela 8.9 mostram a vida em fadiga de cada CDP e uma média para cada lote de cinco CDPs representando cada um dos cinco níveis de carregamento.

Tabela 8.6: Vida em fadiga para um carregamento de 80%

Lote 1 – 80%			
CDP	Nº de ciclos até a falha	Média	Desvio Padrão
2	2619	2009	389,184
3	1590		
4	1785		
5	1965		
6	2087		

Tabela 8.7: Vida em fadiga para um carregamento de 70%

Lote 2 – 70%			
CDP	Nº de ciclos até a falha	Média	Desvio Padrão
7	5273	5448	1957,1
8	8786		
9	4299		
10	5076		
11	3808		

Tabela 8.8: Vida em fadiga para um carregamento de 55%

Lote 2 – 55%			
CDP	Nº de ciclos até a falha	Média	Desvio Padrão
12	27191		
13	45083		
14	39847	33961	9103,8
15	22725		
16	34949		

Tabela 8.9: Vida em fadiga para um carregamento de 40%

Lote 2 – 40%			
CDP	Nº de ciclos até a falha	Média	Desvio Padrão
17	166738		
18	252122		
19	304843	178040	100030
20	96594		
21	69880		

Dos dados gerados foi possível construir uma curva S-N simplificada, utilizando um programa de ajuste de curvas. A Figura 8.19 mostra essa curva.

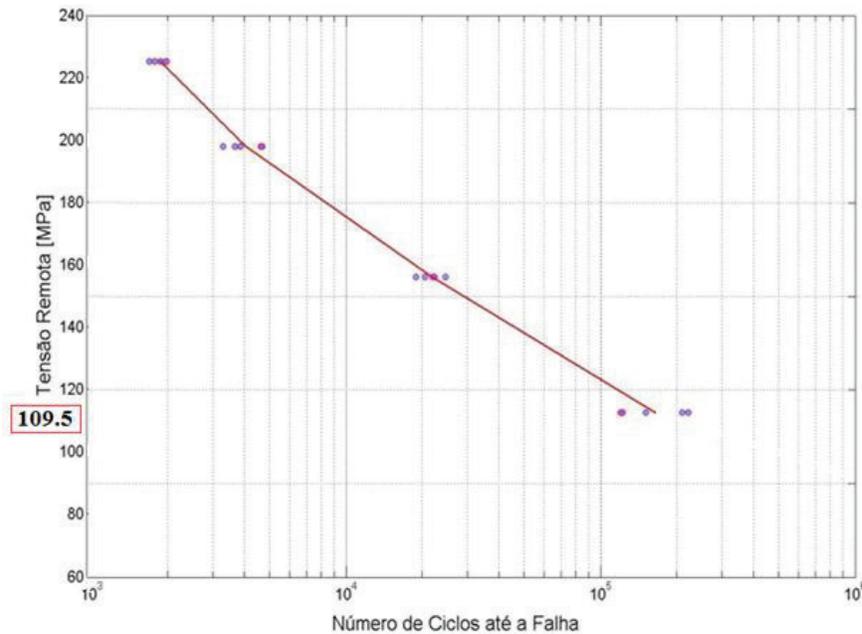


Figura 8.19: Curva SN ajustada.

A partir dessa curva, estabeleceu-se a vida em fadiga do subcomponente para falha no adesivo. Assim, para uma vida de 200000 ciclos o subcomponente teria que falhar no adesivo.

Esta vida em fadiga foi escolhida devido ser a informação referente à menor tensão remota aplicada no CDP, ou seja, durante as análises dos subcomponentes, quanto maior for a tensão remota maior o risco de falha no aderente antes do adesivo.

8.3.1.2 Passo 2: Análise Numérica do CDP utilizado no ensaio ASTM D3166

Os modelos desenvolvidos para esta análise foram modelos 2D, seguindo a geometria da Figura 8.14. As propriedades do elemento utilizado estão mostradas na Tabela 8.10, onde a análise utilizada foi no estado plano de deformações.

Tabela 8.10: Propriedades do elemento utilizado

Propriedade	VALOR
Biblioteca de elementos	<i>Standard / 2D Stress</i>
Ordem geométrica	Quadrática
Tipo de elemento	Quadrilateral de 8 nós
Código	CPE8R
Número de elementos	87960

Devido à presença do concentrador de tensão nas bordas do adesivo, refinou-se a malha de modo que a variação dos valores máximos das tensões convergisse, obtendo esta tensão na linha média do adesivo.

Assim, para a vida em fadiga estabelecida, analisaram-se as tensões de cisalhamento, tensões de *peel* e tensões de von Mises no adesivo, para a tensão remota de 109.5 Mpa.

Novamente, as condições de contorno foram aplicadas de maneira a reproduzir as condições de contorno do ensaio experimental. Foram simulados os efeitos da área de *grip* restringindo os deslocamentos no eixo y e a rotação com respeito ao eixo z da borda correspondente à garra. A carga aplicada foi considerada como uma carga superficial e aplicada nas bordas, como mostrado Figura 8.20.

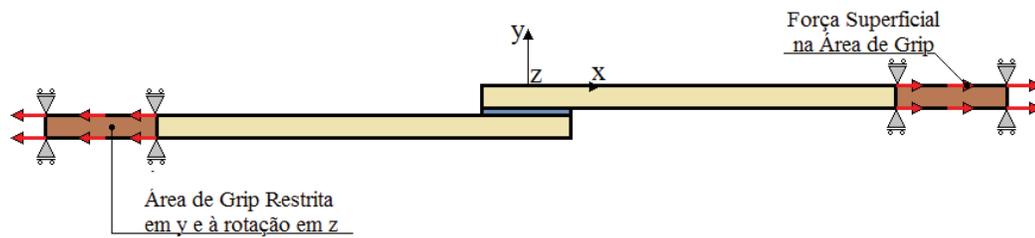


Figura 8.20: Detalhe das condições de contorno do modelo numérico.

O pós-processamento da junta colada pode ser visto na Figura 8.21, onde a máxima tensão de von Mises permaneceu longe da tensão de ruptura da liga de alumínio.



Figura 8.21: Pós-processamento da análise.

A distribuição de tensão de von Mises no adesivo e o *path* utilizado para a obtenção das tensões críticas no adesivo estão mostrados na Figura 8.22. O *path* foi escolhido de maneira a obter a distribuição de tensão na linha média do adesivo e longe da singularidade.



Figura 8.22: Distribuição de tensão de Von Mises no adesivo.

A Figura 8.23 mostra a distribuição de tensão no adesivo na linha do *path*. A tensão máxima de von Mises de 66 MPa será utilizada para o critério de falha na obtenção da geometria final do subcomponente, onde a tensão de von Mises na linha média do adesivo do

subcomponente deverá atingir este valor para uma tensão aplicada na extremidade do *skin* de 225 MPa.

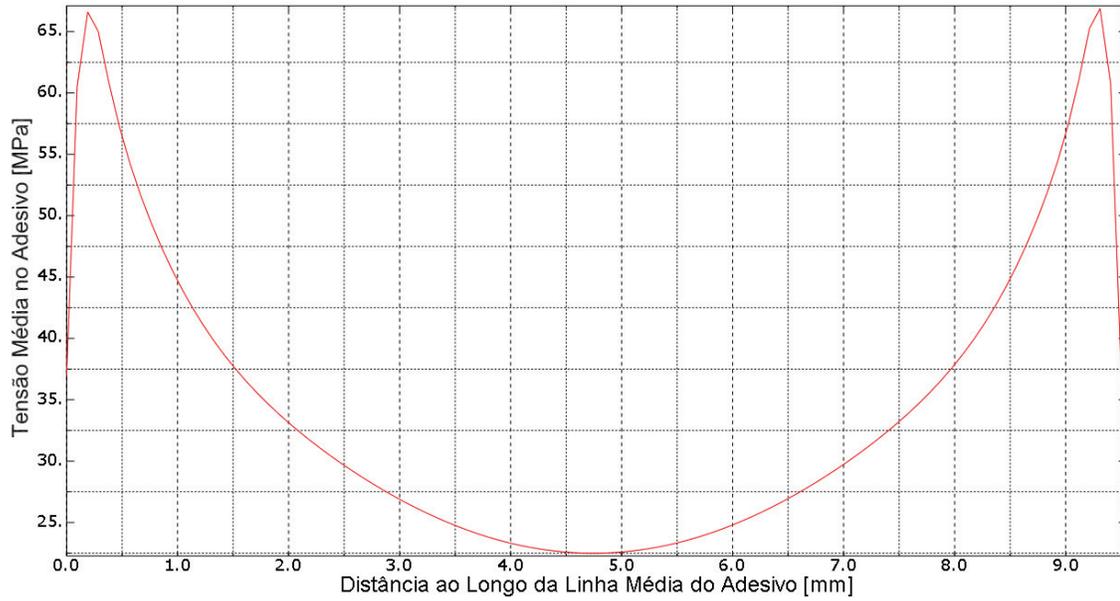


Figura 8.23: Distribuição da tensão de von Mises no adesivo.

As Figura 8.24 e Figura 8.25 mostram a distribuição de tensão de *peel* e de cisalhamento na linha central do adesivo, onde foram obtidas as tensões críticas utilizadas para o critério de otimização paramétrica do subcomponente.

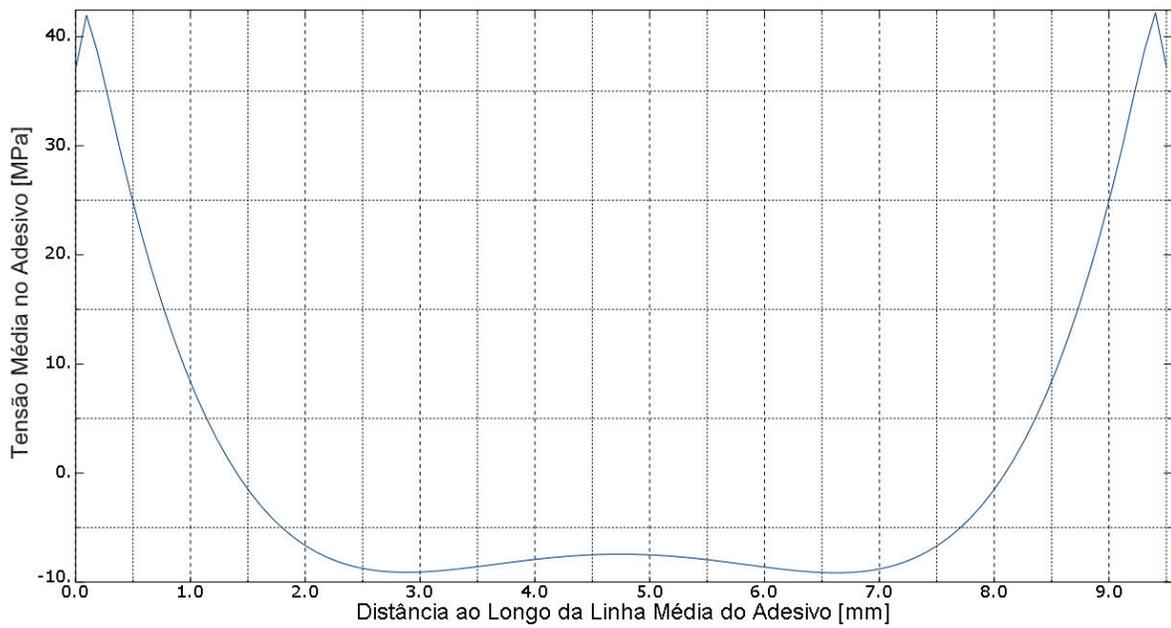


Figura 8.24: Distribuição da tensão de *peel* no adesivo.

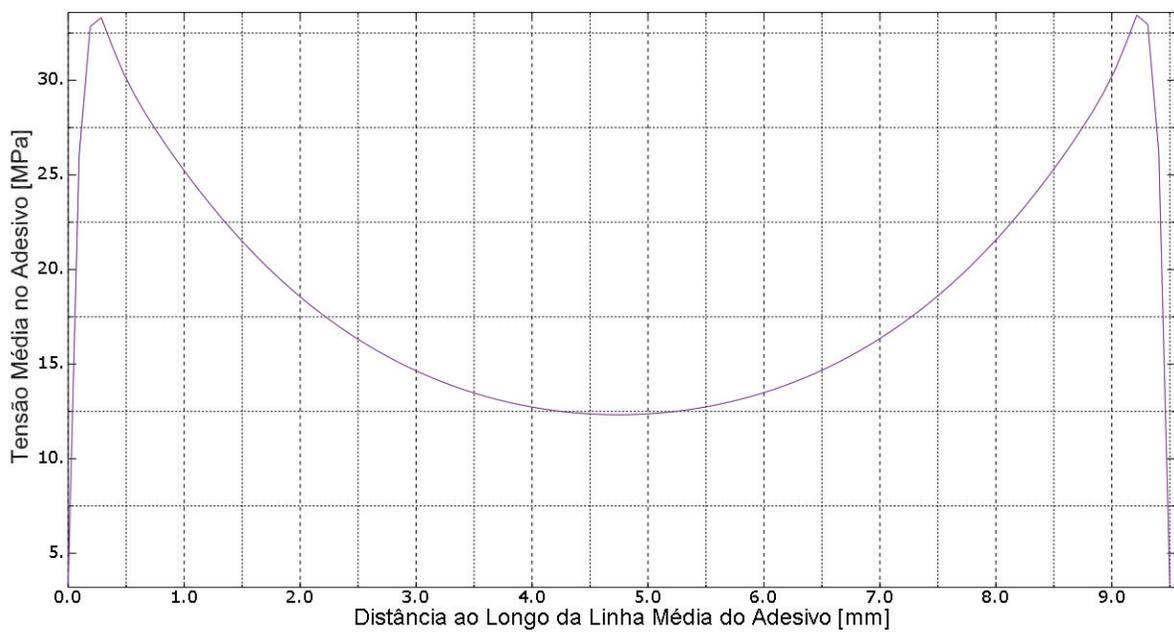


Figura 8.25: Distribuição da tensão cisalhante no adesivo.

8.3.1.3 Passo 3: Análise numérica do subcomponente *one-sided doubler*

Os modelos de subcomponentes desenvolvidos foram modelos 3D, e as propriedades do elemento utilizado estão mostradas na Tabela 8.11.

Além disso, e dos cuidados numéricos descritos anteriormente, foram utilizados para esta análise elementos estruturados, visando menor custo computacional e integração reduzida que além de uma maior economia computacional devido ao menor número de pontos de Gauss, permite que o elemento fique mais flexível, compensando o comportamento rígido associado a uma configuração de deslocamentos pré-estabelecida.

Outra alternativa utilizada para a diminuição do custo computacional foi a utilização da simetria do subcomponente, onde se analisou apenas $\frac{1}{4}$ da geometria em estudo.

As condições de contorno para esta geometria seguiram o padrão utilizado para a análise dos CDPs, simulando a área de *grip* utilizada no ensaio experimental e restringindo os deslocamentos no eixo y e a rotação com respeito ao eixo z da borda correspondente à garra. A carga aplicada foi considerada como uma carga superficial e aplicada nas bordas.

Tabela 8.11: Propriedades do elemento utilizado.

Propriedade	VALOR
Biblioteca de elementos	<i>Standard / 3D Stress</i>
Ordem geométrica	Quadrática
Tipo de elemento	Hexaédrico de 20 nós

A geometria final após o algoritmo de otimização paramétrica está mostrada na Figura 8.26 e a respectiva análise para esta geometria será detalhada a seguir.

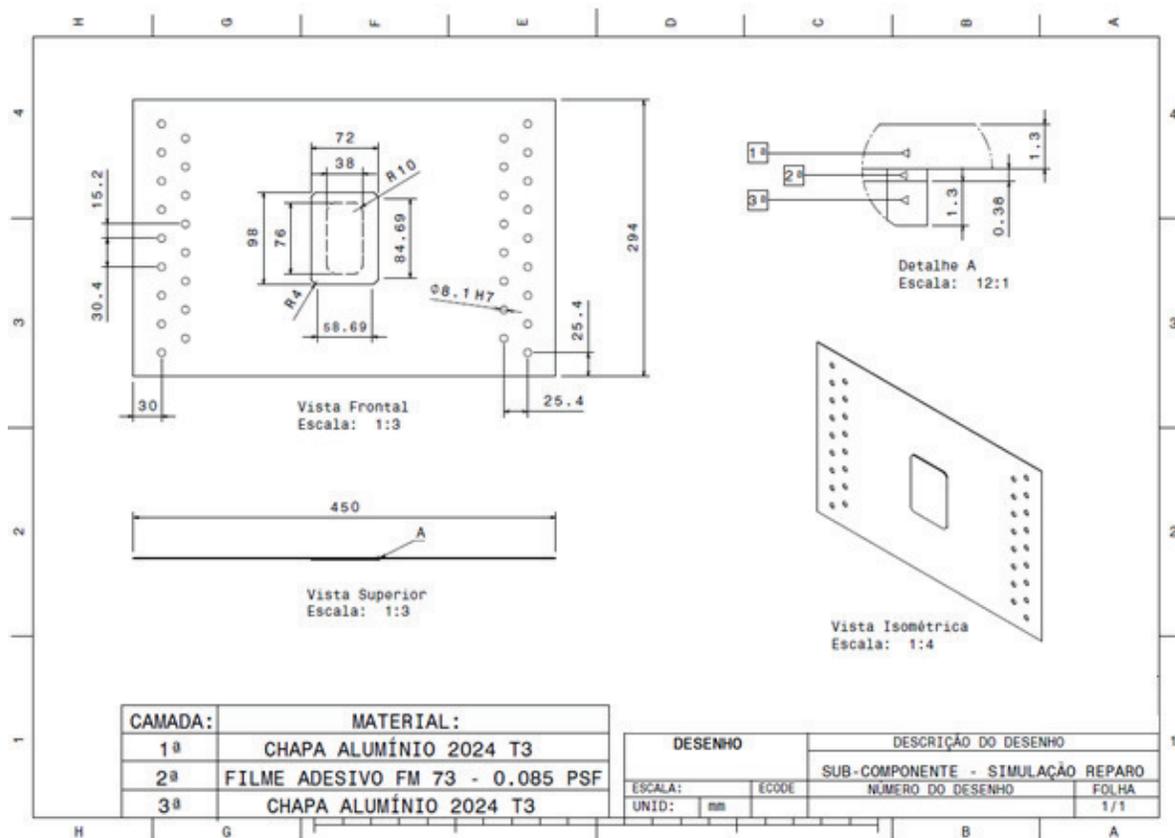


Figura 8.26: Geometria final do subcomponente após a otimização paramétrica.

Devido à presença de concentração de tensão nas bordas do adesivo, refinou-se a malha de modo que a variação dos valores máximos das tensões próximas a borda do adesivo convergisse, obtendo esta tensão na linha média do adesivo.

Analisaram-se as tensões de cisalhamento, tensões de *peeling* e tensões de von Mises para uma tensão remota de 150 MPa (verificação do escoamento dos aderentes) e 225 MPa (verificação das tensões de falha no adesivo), para a primeira etapa de otimização.

A quantidade de elementos utilizados para esta análise está descrita a seguir, e a malha formada sem nenhum aviso de advertência com refinamento no local do furo e no adesivo está mostrada na Figura 8.27.

- *Skin* - 41364 elementos;
- Adesivo - 16350 elementos;
- *Doubler* - 3960 elementos.

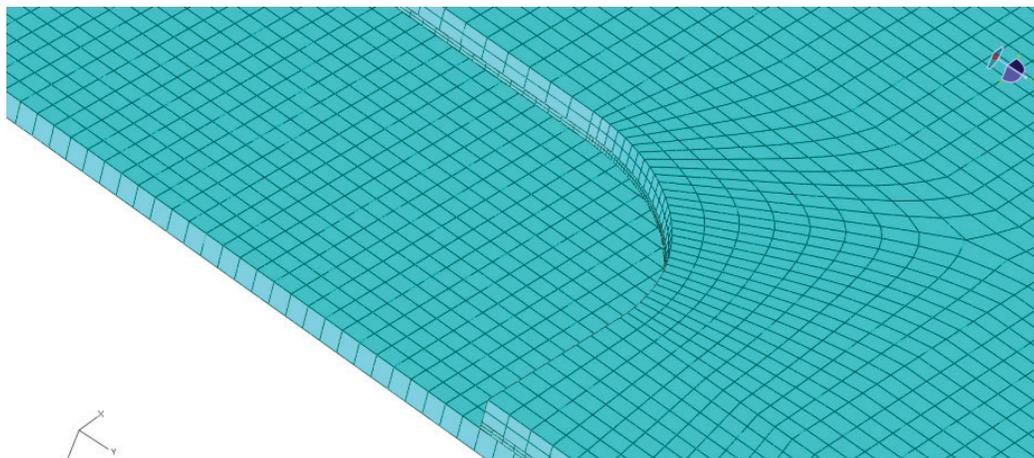


Figura 8.27: Refino da malha no adesivo e na região do furo.

Como já explicado anteriormente, nesta etapa de otimização paramétrica, o procedimento visa a falha no adesivo com a menor geometria do *doubler*, atingindo a tensão de von Mises de 66 MPa no adesivo e verificando também as tensões críticas de *peeling* e cisalhamento obtidas do ensaio numérico do CDP da norma ASTM D3166. Com este procedimento, o subcomponente está projetado para a vida em fadiga de 200000 ciclos com falha no adesivo.

Uma amostra do pós-processamento desta análise está mostrada na Figura 8.28, onde foi analisada a distribuição de tensão de von Mises em $\frac{1}{4}$ do subcomponente para uma tensão remota de 225 Mpa.



Figura 8.28: Distribuição da tensão de von Mises no subcomponente para uma tensão remota de 225 Mpa.

A distribuição de tensão de von Mises no adesivo está mostrada na Figura 8.29 (a), no entanto, a maneira recomendada de se analisar a distribuição de tensão no adesivo é obtendo estes valores a partir da linha central do adesivo, como mostrado na Figura 8.29 (b).

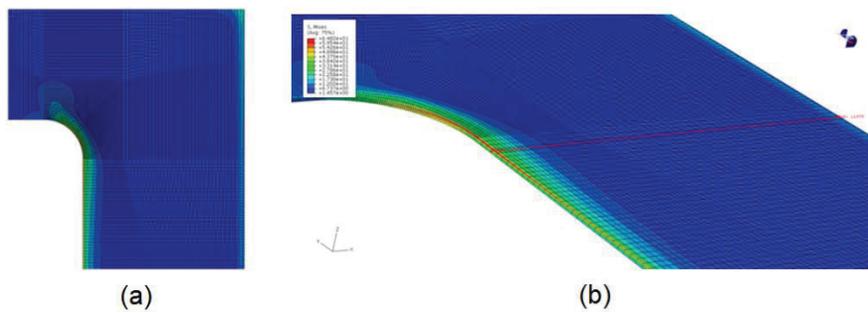


Figura 8.29: Distribuição da tensão de Von Mises no adesivo.

A distribuição de tensão de von Mises nos nós demarcados na Figura 8.29 está mostrada na Figura 8.30, onde se conseguiu obter uma tensão máxima de 66 MPa na linha média do adesivo, conseguindo concluir o requisito de falha no adesivo.

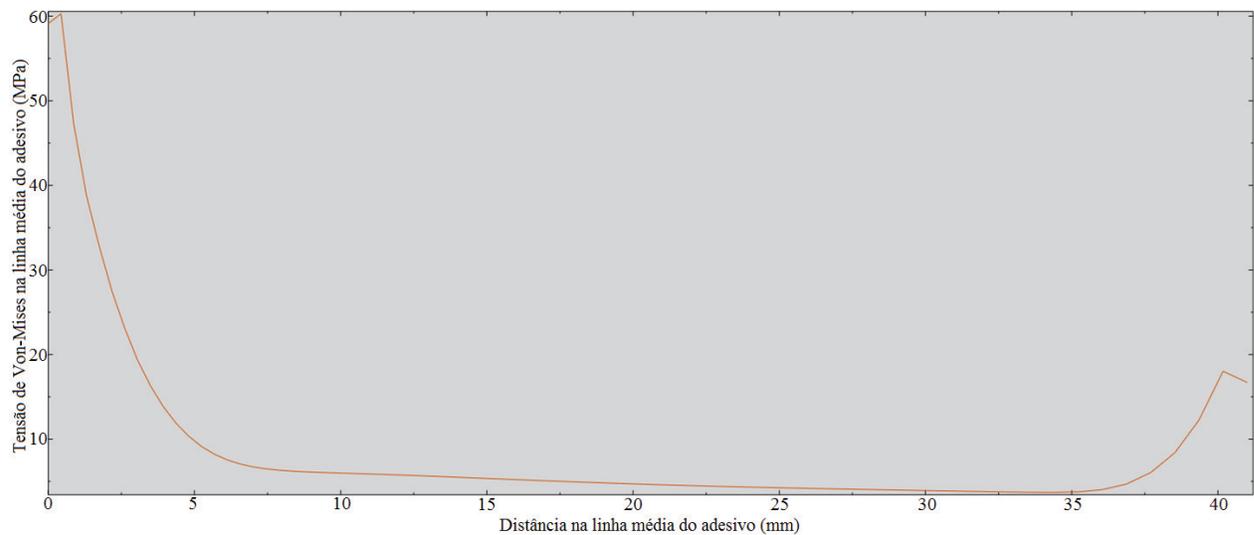


Figura 8.30: Distribuição da tensão de Von Mises na linha central do adesivo.

A tensão de *peeling* no adesivo está mostrada na Figura 8.31 e a distribuição de tensão de *peeling* na linha média do adesivo está mostrada na Figura 8.32, onde quase se conseguiu atingir a tensão crítica (40 Mpa), calculada no CDP da norma ASTM D3166.

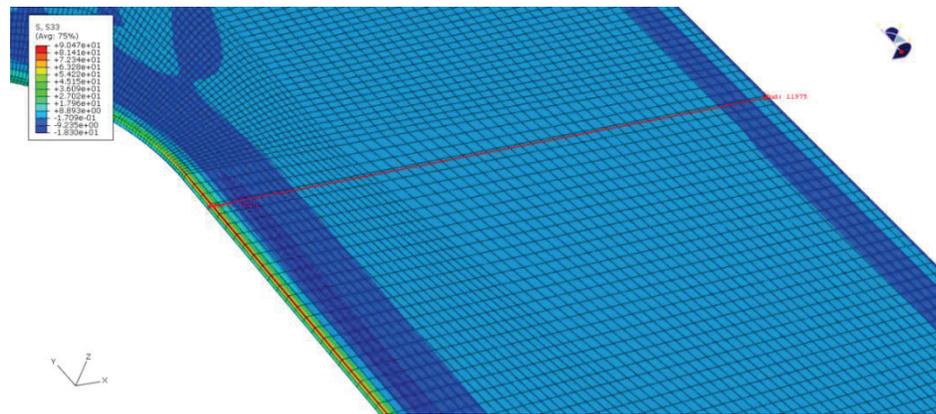


Figura 8.31: Distribuição da tensão de *peeling* no adesivo.

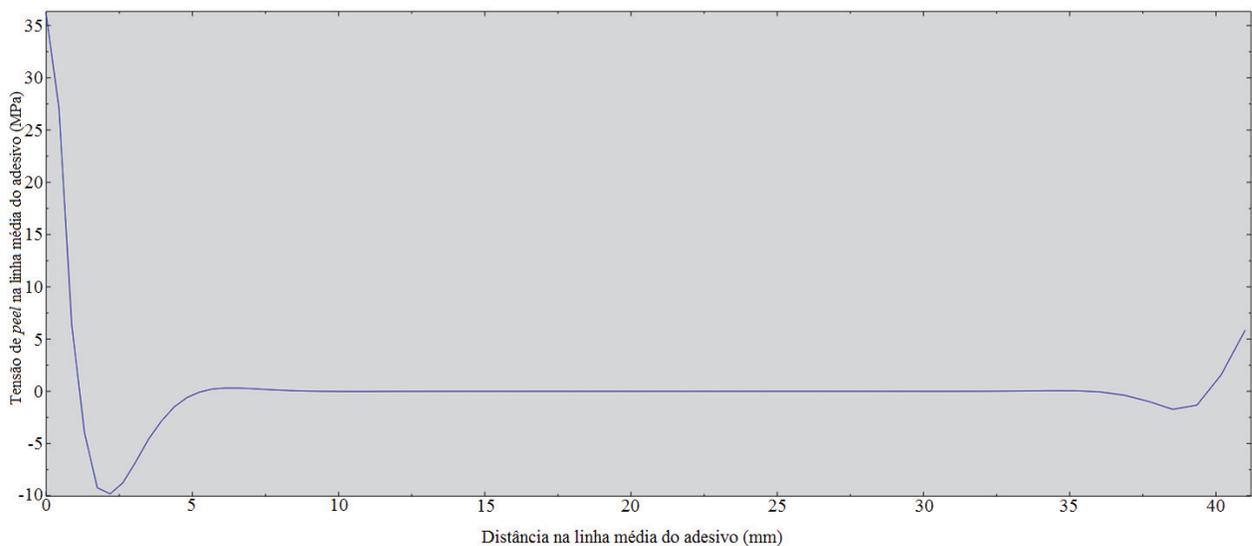


Figura 8.32: Distribuição da tensão de *peeling* na linha média do adesivo

No entanto, mesmo conseguindo atingir as tensões críticas no adesivo para o subcomponente, foi constatado ainda na primeira etapa, através da curva S-N da liga Al 2024-T3, que mesmo exigindo o adesivo ao máximo e o mínimo do aderente, a falha será no aderente, ou seja, o aderente falha antes dos 200000 ciclos. Desta maneira, o processo de otimização entra no segundo ciclo de projeto do subcomponente, para o cálculo da falha no aderente.

8.3.2 Segunda Etapa de Otimização Paramétrica

Nesta etapa, o processo da otimização paramétrica do subcomponente é inicializada após constatação da falha no aderente. Nesta etapa, os seguintes requisitos deverão ser atendidos:

- Aderente suporta cargas limites sem escoar (338 MPa) - Tensão remota de 150 MPa.
- Aderente suporta cargas últimas sem falhar (478 MPa) - Tensão remota de 225 MPa.
- Vida em fadiga com *scatter factor* 4 é garantida - no caso escolhido 20.000 ciclos x 4 = 80000 ciclos, com frequência de 1100 para 1800 cpm e com Fator de Segurança de 1.5.
- Projeto otimizado com menor uso de material possível, diminuindo pesos significativos em relação ao reparo rebitado.
- O aderente não falha precocemente em áreas de fixação com *grip* de ensaio, ou fora da área de interesse.

O primeiro passo do novo procedimento foi validar o *software* de geração da curva S-N, Figura 8.33, através dos métodos analíticos e curvas S-N obtidas do MIL-HDBK-5H.

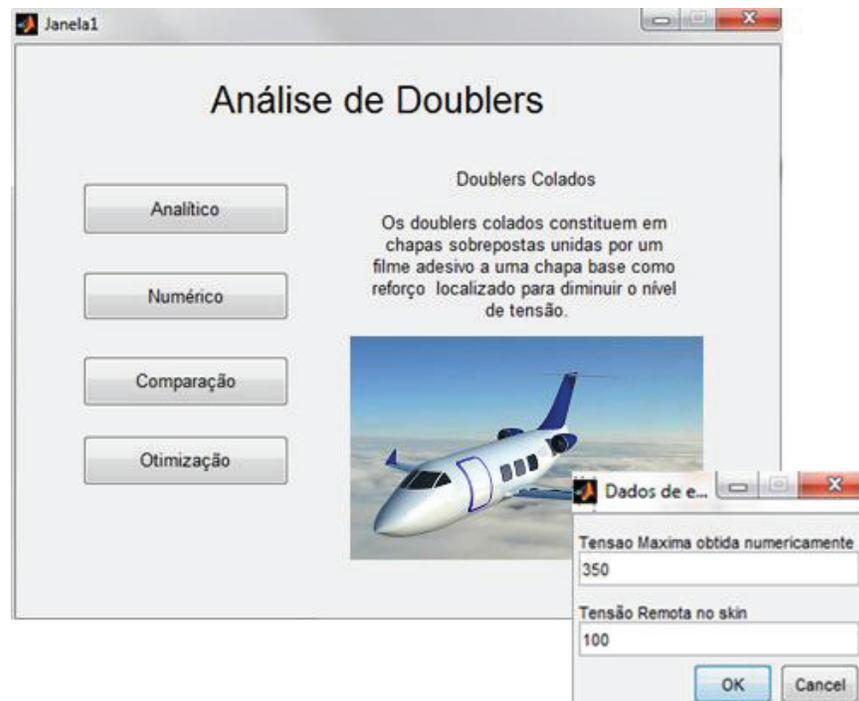


Figura 8.33: *Software* de análise de *doublers*, etapa de geração da curva S-N.

A Figura 8.34 mostra a curva S-N retirada do MIL-HDBK-5H, para um $Kt = 2$ e uma tensão média de 20 ksi. Esta curva é comparada com a curva implementada no MatLab nas mesmas condições, como mostrado na Figura 8.35 e com estimativa do erro padrão igual a $\text{Log}(N_f) = 0,27$.

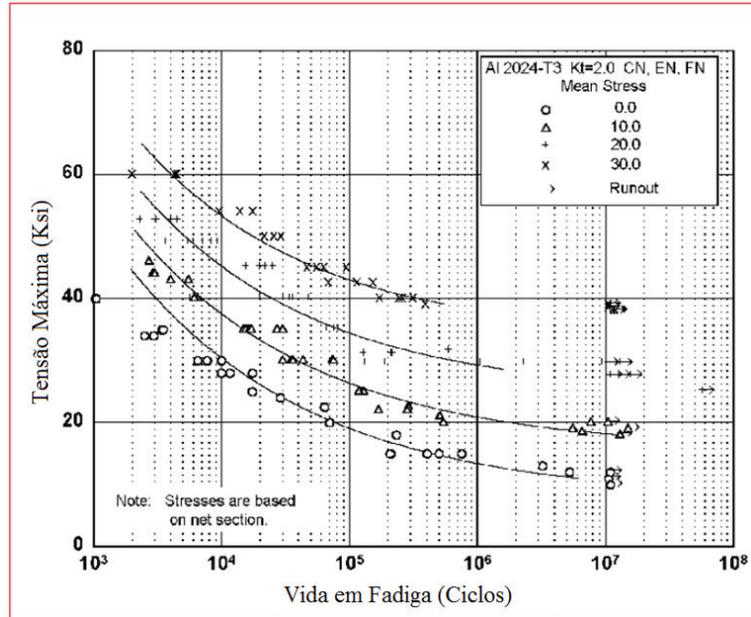


Figura 8.34: Curva S-N (MIL-HDBK-5H).

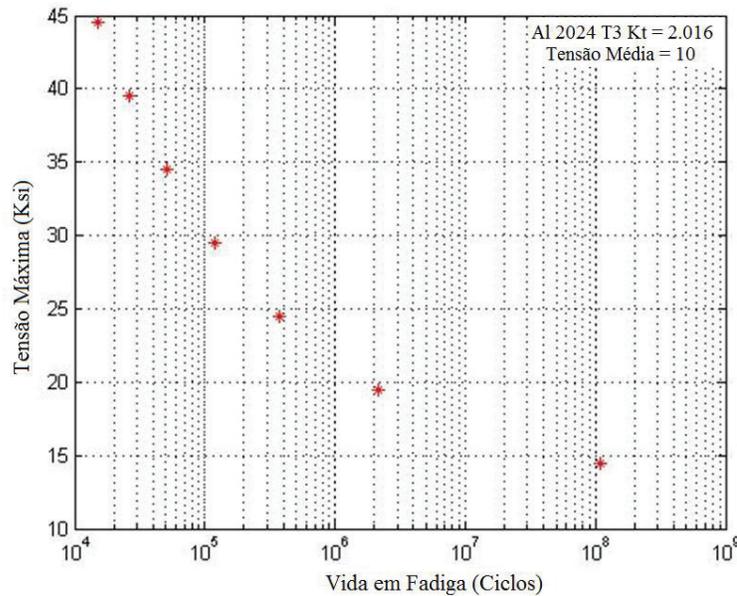


Figura 8.35: Curva S-N produzida pelo *software* de *doublers*.

Após a validação da curva S-N, foi determinado a vida em fadiga do subcomponente para 80000 ciclos, com frequência de 1100 para 1800 cpm e com Fator de Segurança de 1.5.

Para a obtenção da curva S-N do subcomponente, fatores modificadores da resistência à fadiga foram levados em consideração, pois o limite de fadiga ou a resistência a fadiga de um componente real não é igual ao limite de fadiga obtido em laboratório (normalmente menor) para um pequeno corpo de prova polido; entre as principais diferenças estão à composição, fabricação, ambiente e fatores operacionais.

Para se estimar a resistência à fadiga ou o limite de fadiga de um componente real, a partir da curva S-N de um corpo de prova polido e conhecendo-se os requisitos operacionais e ambientais, usa-se a equação de Marin:

$$S_f = K_a K_b K_c K_d S'_f \quad (8.7)$$

onde:

K_a é o fator de modificação de condição de superfície

K_b é o fator de modificação de tamanho;

K_c é o fator de modificação de carga;

K_d é o fator de modificação de temperatura;

S'_f é a resistência à fadiga do espécime de teste do tipo viga rotativa;

S_f é a resistência à fadiga no local crítico do subcomponente;

Seguindo os dados apresentados no livro Projeto de Engenharia Mecânica, Shigley et al. (2005), os fatores modificadores da resistência à fadiga são dados a seguir.

Devido a usinagem do furo de retrabalho, o fator de modificação da condição de superfície é dado por:

$$K_a = a S_{ut}^b = 4,51(483)^{-0.265} = 0.877 \quad (8.8)$$

Aproximando para um carregamento axial puro, não há efeito de tamanho, de modo que $K_b = 1$ e o fator de carregamento $K_c = 0.85$.

Como o ensaio foi realizado em temperatura ambiente, o fator de temperatura foi considerado como unitário, $K_d = 1$.

Em relação ao fator de concentração em fadiga K_f , foi utilizado de forma conservadora $K_f = K_t$, devido às incertezas na obtenção da sensibilidade ao entalhe do material.

No entanto, devido às recomendações em projetos aeronáuticos, o limite de resistência do subcomponente foi determinado com fator de segurança de 1.5 e obtido para uma vida de 80000 ciclos, a partir da curva S-N modificada para o subcomponente. Assim, a curva foi realizada no MATLAB com $K_t = 1$, razão de tensão de 0.05 e frequência de 20 Hz, Figura 8.36.

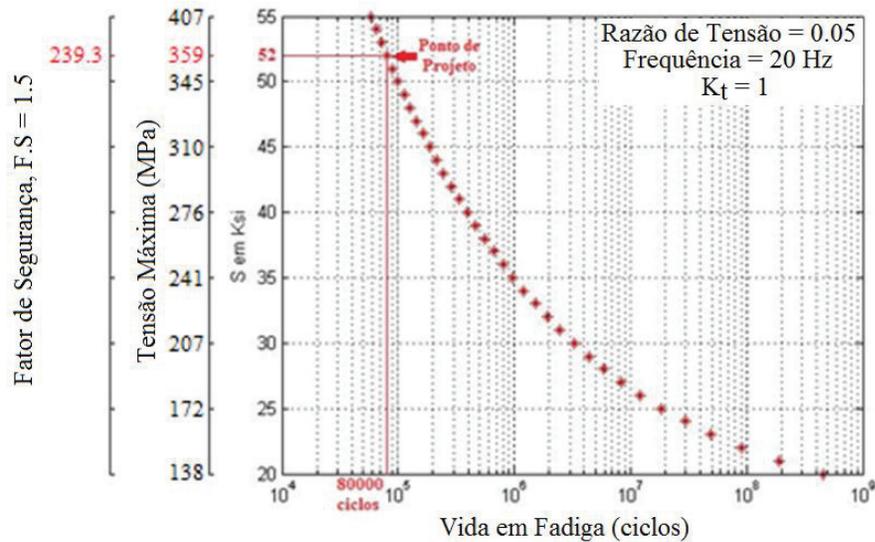


Figura 8.36: Ponto de Projeto para a curva S-N obtida com $K_t = 1$.

A verificação das etapas do processo de otimização com seus requisitos de carga é dada a seguir.

8.3.2.1 Vida em Fadiga: 80000 Ciclos - Tensão Remota: 100 MPa - Fator de Segurança: 1.5

Para o ponto de projeto da Figura 8.36, a tensão máxima no *skin* deve ser de 239 MPa, para uma tensão remota de 100 MPa e FS de 1.5.

Assim, o subcomponente otimizado parametricamente obteve uma tensão máxima de 239 MPa no *skin*, após ter passado pelo processo de otimização do adesivo e do aderente, como mostrado na Figura 8.37.

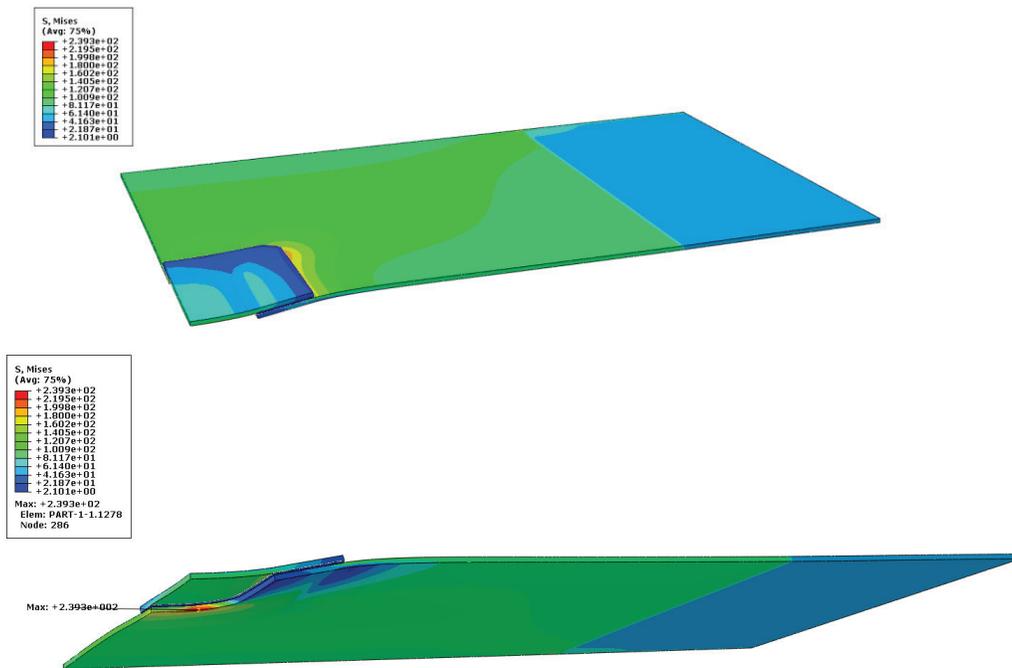


Figura 8.37: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 100 MPa.

A tensão máxima de von Mises no plano central do adesivo foi de 28 MPa, Figura 8.38, com o gráfico da tensão ao longo da espessura do adesivo na região de máxima tensão.

As tensões de *peeling* e cisalhamento no adesivo também foram verificadas, além da transferência de carga para o *doubler*, sabendo que a vida em fadiga do adesivo é de 200000 ciclos para uma tensão de von Mises de 66 MPa e/ou para uma tensão de *peeling* de 42 MPa.

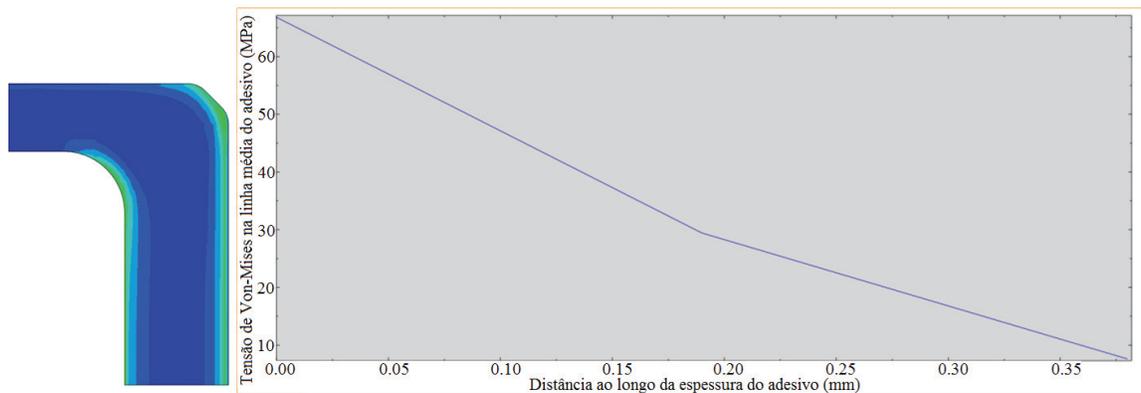


Figura 8.38: Tensão de von Mises verificada ao longo da espessura do adesivo.

8.3.2.2 Aderente sob Carga limite sem escoamento: 338 MPa - tensão remota: 150 MPa

Para uma tensão remota de 150 MPa, a tensão máxima no *skin* foi de 323 MPa, obedecendo ao critério de ficar inferior à tensão de escoamento de 338 MPa, como mostrado na Figura 8.39.

Os critérios no adesivo e no *doubler* também foram verificados e atendidos.

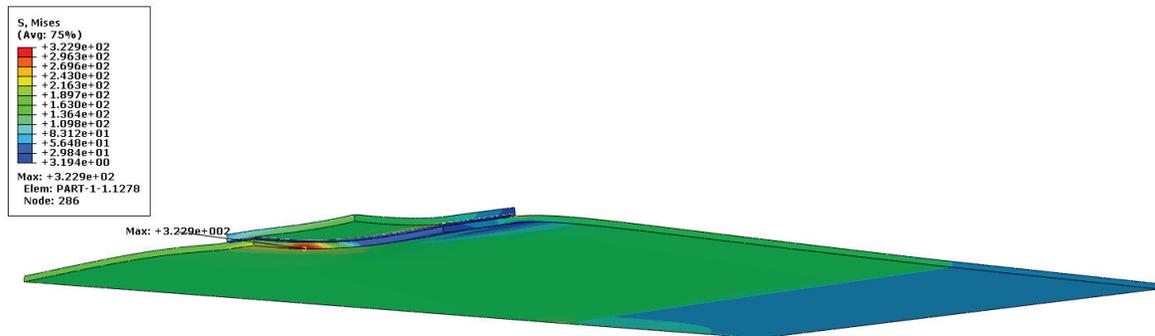


Figura 8.39: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 100 MPa.

8.3.2.3 Aderente sob Carga Última sem Falha: 478 MPa - Tensão Remota: 225 MPa

Para uma tensão remota de 225 MPa, a tensão máxima no *skin* foi de 339 MPa, obedecendo ao critério de ficar menor que a tensão última de 478 MPa, como mostrado na Figura 8.40.

Os critérios no adesivo e no *doubler* também foram verificados e atendidos.

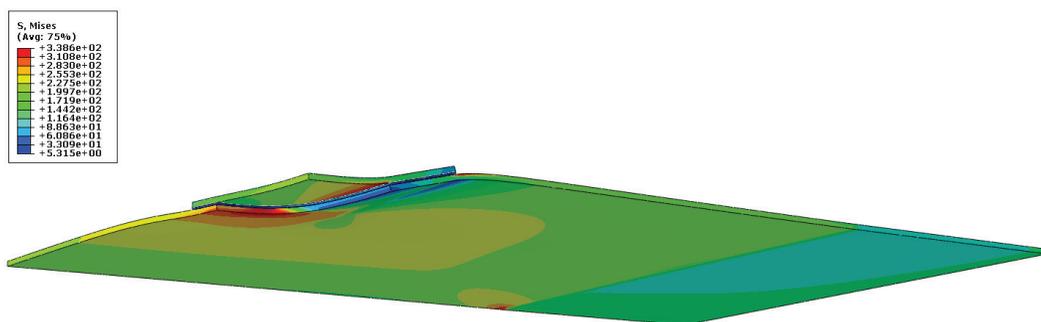


Figura 8.40: Tensão máxima de von Mises para uma tensão remota de 225 MPa.

8.3.3 Discussão sobre os Subcomponentes.

Na definição final da proposta do subcomponente, a geometria mais interessante para o ensaio experimental foi a geometria da Figura 8.26, pois além de ter passado pelo processo de otimização paramétrica descrito nos tópicos anteriores, é a forma de geometria mais utilizada em reparos aeronáuticos rebitados. Esta forma de geometria proporciona uma boa concentração de rebites dentro da área crítica de tensão, eliminando concentrações perigosas e sendo muito simples de construir.

Assim, esta geometria é a mais interessante como efeito comparativo com reparos rebitados, a fim de provar a vantagem da utilização de juntas coladas sobre as juntas rebitadas.

Esta comparação está mostrada na Figura 8.41, onde o *doubler* colado otimizado (lado direito) é bem menor do que o *doubler* rebitado (lado esquerdo). O *doubler* rebitado foi projetado seguindo as recomendações de reparos estruturais em aeronaves, Figura 8.42.

Além disso, do ponto de vista de projeto é mais interessante o subcomponente ser obtido na segunda etapa de otimização paramétrica, pois o aderente falhando antes do adesivo é o ideal, uma vez que:

- Sabemos prever melhor a propagação de trincas na liga de alumínio;
- A falha no aderente é de mais fácil detecção.

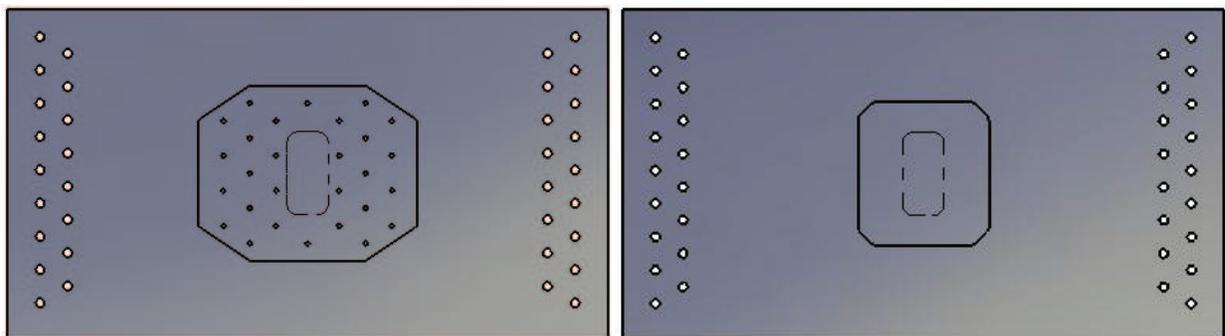


Figura 8.41: Comparação de *one-sided doubler* rebitado (esquerda) e colado (direita).

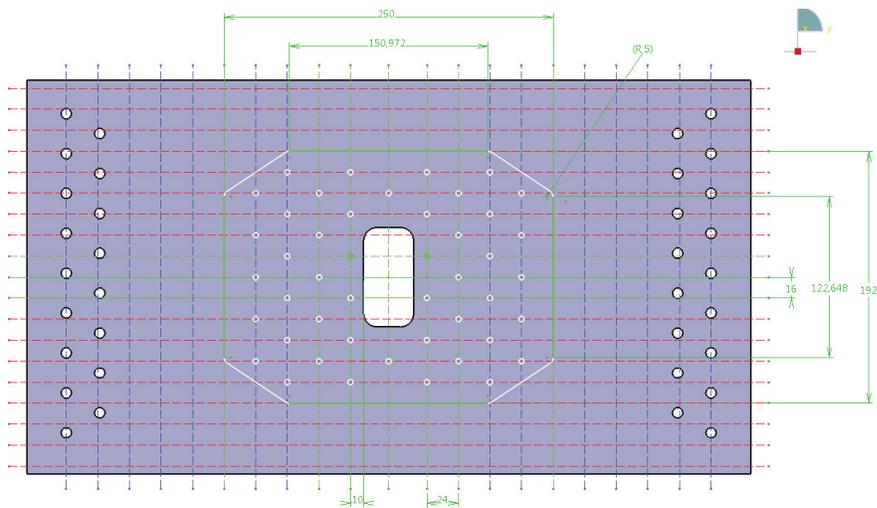


Figura 8.42: Projeto do *one-sided doubler* rebitado.

Apenas como efeito de demonstração, a otimização paramétrica também foi realizada para *doublers* com mais de uma camada, como mostrado na Figura 8.43. No entanto, esta configuração não se demonstrou tão atraente devido ao fato da maior complexidade de comparação com *doublers* rebitados.

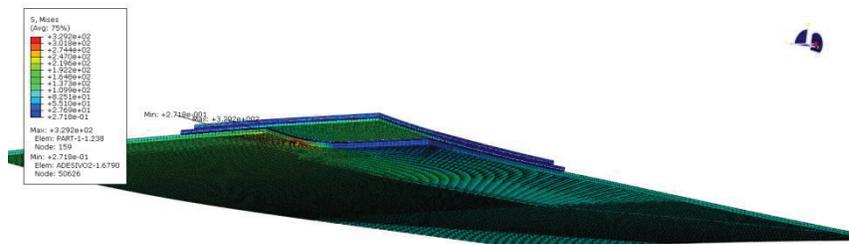


Figura 8.43: Subcomponente projetado para *doubler* colado com mais de uma camada.

Assim, para efeito de ensaios experimentais, chegou-se a conclusão que seria interessante realizar quatro ensaios diferentes de subcomponentes, partindo do subcomponente otimizado descrito anteriormente como base para os demais. Os desenhos finais desses subcomponentes são dados a seguir.

8.3.3.1 Subcomponentes 1 e 2

Os subcomponentes 1 e 2 foram obtidos pelo processo de otimização paramétrica para um reparo com furo de compensação. Embora a geometria seja a mesma, a classificação de subcomponente 1 ou 2 está no fato de um ensaio ser estático e outro de fadiga.

As dimensões destes subcomponentes estão mostradas na Figura 8.26 e repetidas na Figura 8.44 por conveniência. A sua representação em perspectiva isométrica está mostrada na Figura 8.45.

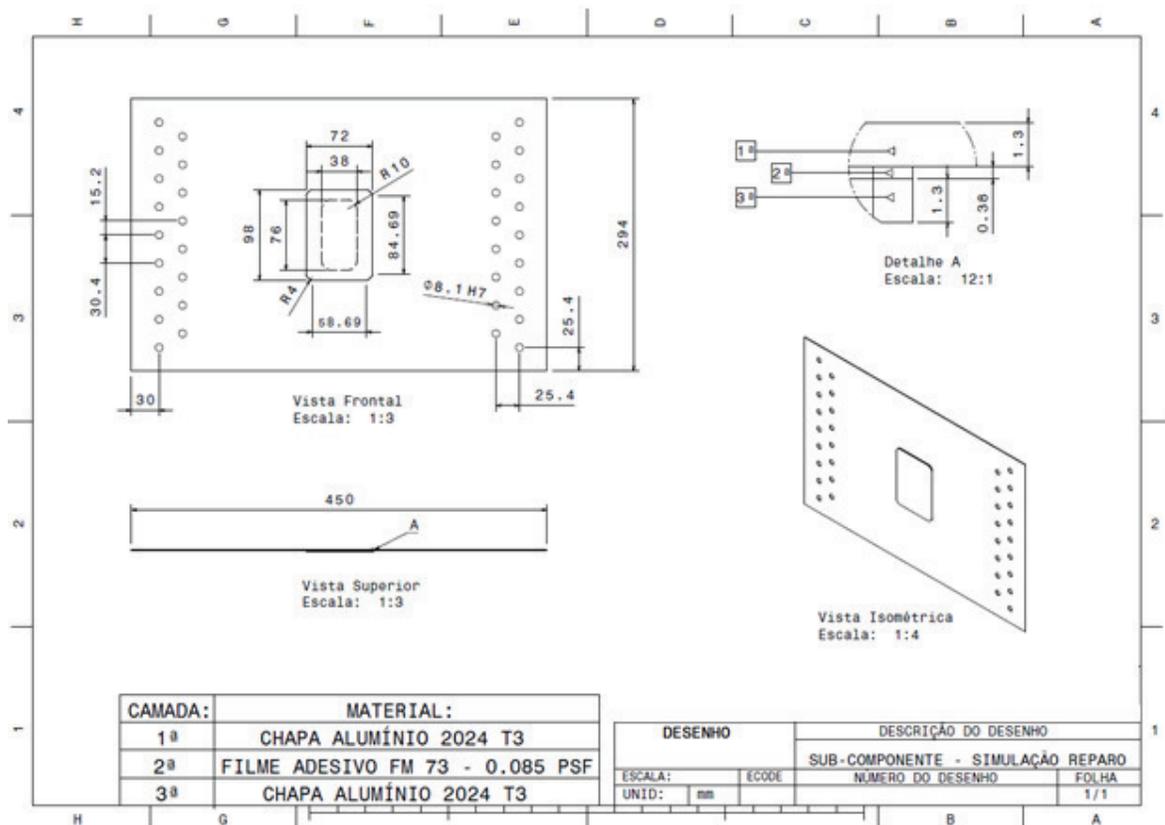


Figura 8.44: Dimensional dos subcomponentes 1 e 2.

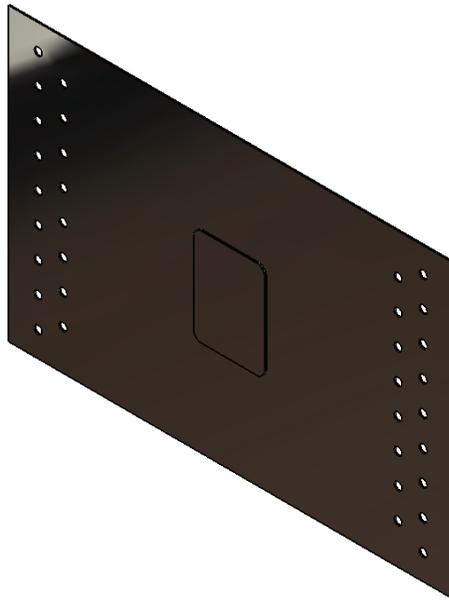


Figura 8.45: Perspectiva isométrica do subcomponente.

8.3.3.2 Subcomponente 3

As medidas destes subcomponentes são iguais às medidas do subcomponente otimizado mostrado na Figura 8.44, porém, foi inserida uma trinca na parte inferior do *skin* com o intuito de verificar a propagação desta trinca e verificar a eficiência do *doubler* em retardar esta propagação.

As dimensões da trinca e seu posicionamento no *skin* estão mostrados na Figura 8.46.

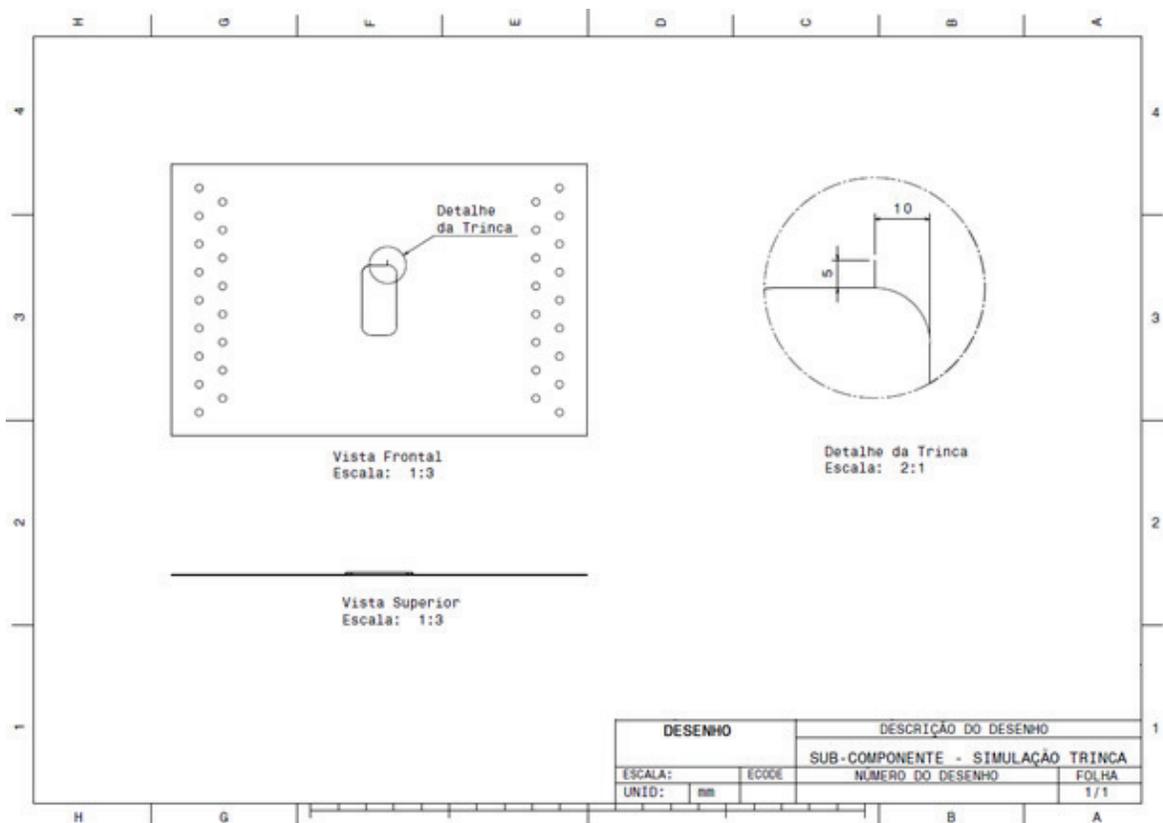


Figura 8.46: Trinca inserida no *skin*.

8.3.3.3 Subcomponente 4

As medidas destes subcomponentes são iguais às medidas do subcomponente otimizado mostrado na Figura 8.44, porém, foi inserida uma trinca no adesivo com o intuito de verificar o processo de delaminação do adesivo.

As dimensões da trinca e seu posicionamento no adesivo estão mostrados na Figura 8.47.

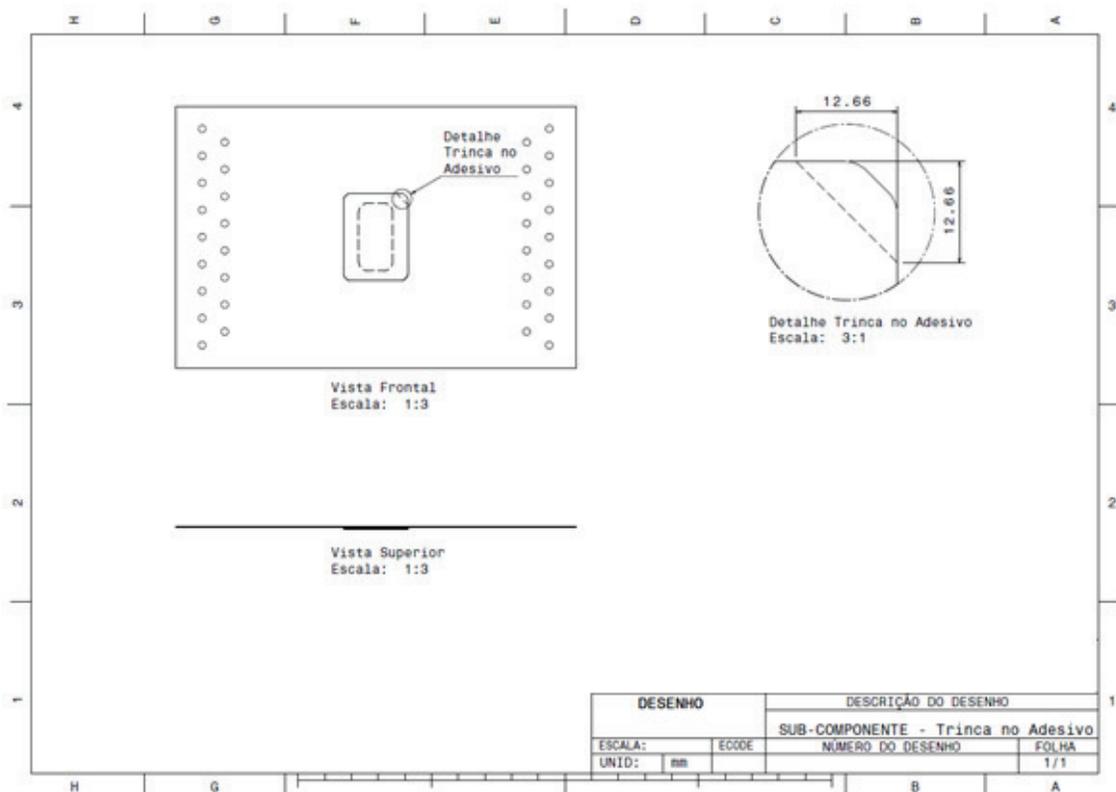


Figura 8.47: Trinca inserida no adesivo.

Assim, para o propósito deste trabalho é interessante ensaiar os seguintes subcomponentes:

- 3 subcomponentes otimizados (Figura 8.44) em fadiga – validando o processo de otimização paramétrico;
- 2 subcomponentes otimizados (Figura 8.44) em um ensaio estático – validando o processo de otimização paramétrico.

Os ensaios dos subcomponentes 3 e 4 não serão realizados na UNICAMP e portanto, seus resultados não entrarão neste trabalho. No entanto, o objetivo da proposta dos ensaios desses subcomponentes é a de levar o ensaio até a falha total, onde é interessante medir o crescimento da trinca no aderente a cada n ciclos, assim como a delaminação do adesivo. Estes ensaios serão realizados em dois grupos:

- 2 subcomponentes em fadiga (Figura 8.46) – verificando a propagação da trinca no aderente e verificando a eficiência do *doubler* em retardar esta propagação;
- 2 subcomponentes em fadiga (Figura 8.47) – para verificar o processo de delaminação do adesivo.

A análise experimental dos subcomponentes é descrita a seguir.

8.3.4 Análise e Resultados Experimentais dos Subcomponentes

Experimentalmente, a obtenção dos valores das tensões no adesivo nos subcomponentes é ainda mais complexa em relação aos corpos de prova devido a sua geometria. Portanto, o uso do processamento digital de imagens se torna inviável para este caso. Assim, se a falha prevista fosse no adesivo, um método viável seria com o monitoramento das acelerações em dois acelerômetros, um colado no *doubler* e o outro colado no *skin*, ambos na região crítica do adesivo.

Como o subcomponente foi projetado para falha no aderente (*skin*), foram utilizados extensômetros múltiplos dispostos em rosetas com ângulos de 0°/45°/90°. Estas rosetas foram coladas no ponto de concentração de tensão do subcomponente, para validar o modelo de otimização e verificar se a tensão neste ponto equivale à tensão limite estabelecida no projeto.

Outra forma encontrada de verificar se o projeto do subcomponente e o processo de otimização estão adequados, foi levando o subcomponente até a falha e verificando no *software* do equipamento da MTS se o número de ciclos está de acordo com o projetado.

Para a fixação do subcomponente no equipamento da MTS, teve-se que utilizar um dispositivo de fixação mostrado na Figura 8.48.

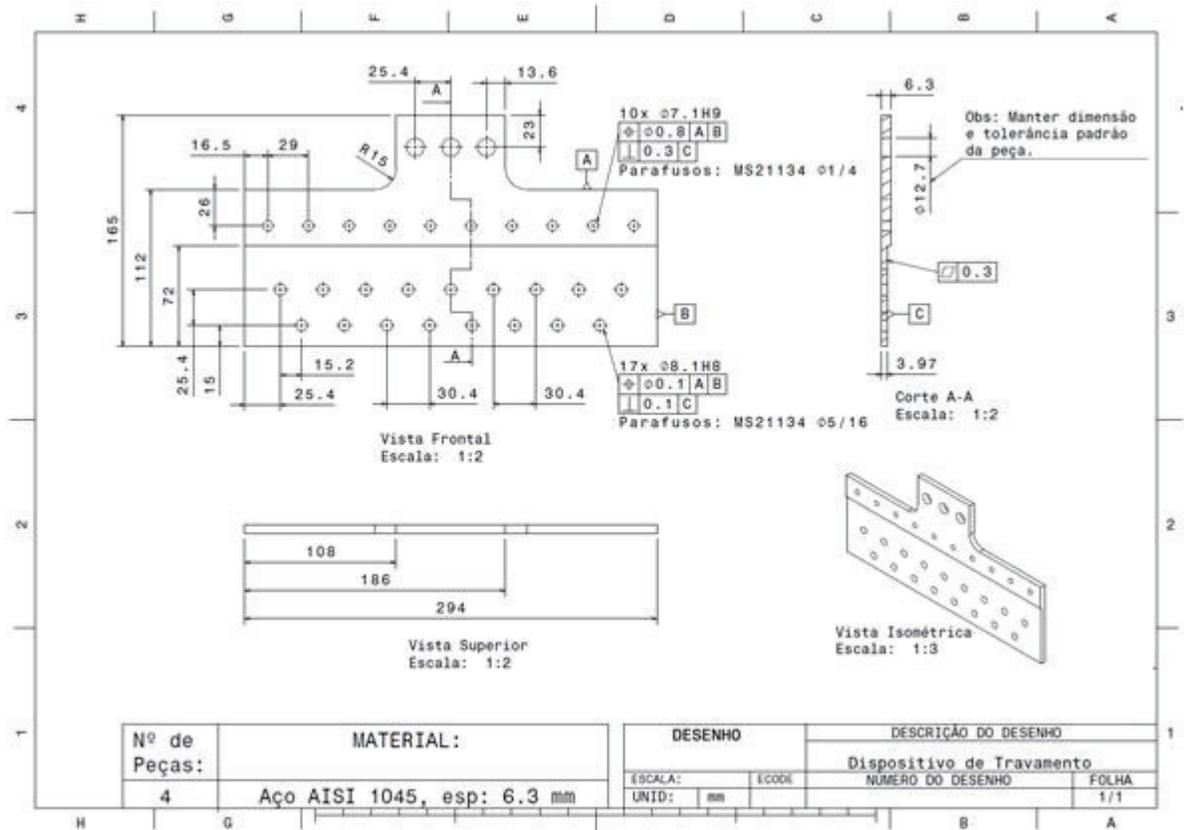


Figura 8.48: Dispositivo de fixação.

Os materiais utilizados para o procedimento utilizando a extensometria foram:

- 5 rosetas de folha com configuração de 0°/45°/90°, Modelo HBM 1-RY85-3/120;
- Sistema de Aquisição de sinais LMS SCADAS Mobile SCM01, com oito canais com aquisição dupla para extensômetros e acelerômetros;
- Lente Ernstleitz GmbH Wetzlar 8x R-JMO 2/9;
- Cola HBM;
- Silicone;
- Ferro de solda, estanho e fios;
- MTS Landmark Servohydraulic Test System.

No procedimento experimental, as rosetas utilizadas neste trabalho foram rosetas do tipo “R”. Estas rosetas são dispostas basicamente em duas configurações, com ângulos de $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ e $0^\circ/60^\circ/120^\circ$ entre as grades, Figura 8.49. No caso deste trabalho foi utilizada a primeira configuração. As diferentes variações de posições de cada grade podem receber denominações particulares. Essas rosetas são aplicadas quando não se conhecem as direções das tensões principais no ponto de medição.

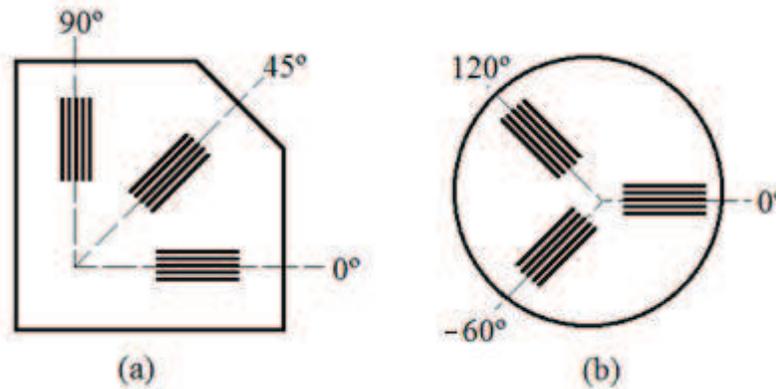


Figura 8.49: Tipos de rosetas, $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ (a) e $0^\circ/60^\circ/120^\circ$ (b).

As rosetas serão coladas no ponto de concentração de tensão no lado inferior do *skin*, nas regiões vermelhas mostradas na Figura 8.50.

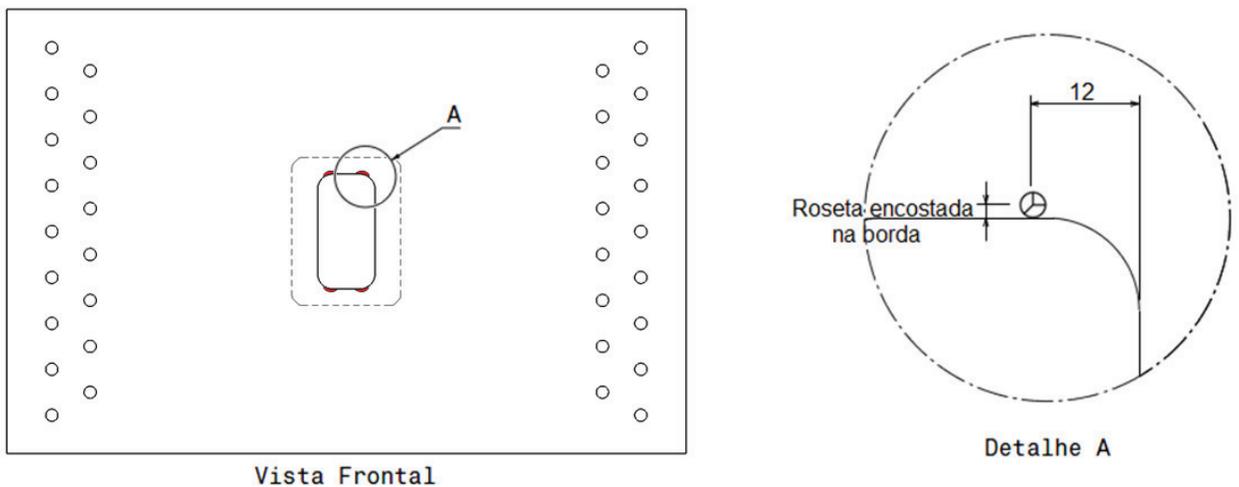


Figura 8.50: Região de colagem das rosetas no subcomponente.

A Figura 8.51 mostra a roseta colada no ponto de concentração de tensão do *skin*, com os extensômetros a, b e c posicionados em ângulos de 45°, 90° e 135° no sentido anti-horário com a linha de aplicação da carga. Da mesma forma que nos ensaios dos CDPs, os extensômetros das rosetas foram soldados com três fios para a ligação em ¼ de ponte no sistema de aquisição de sinais LMS SCADAS Mobile SCM01.

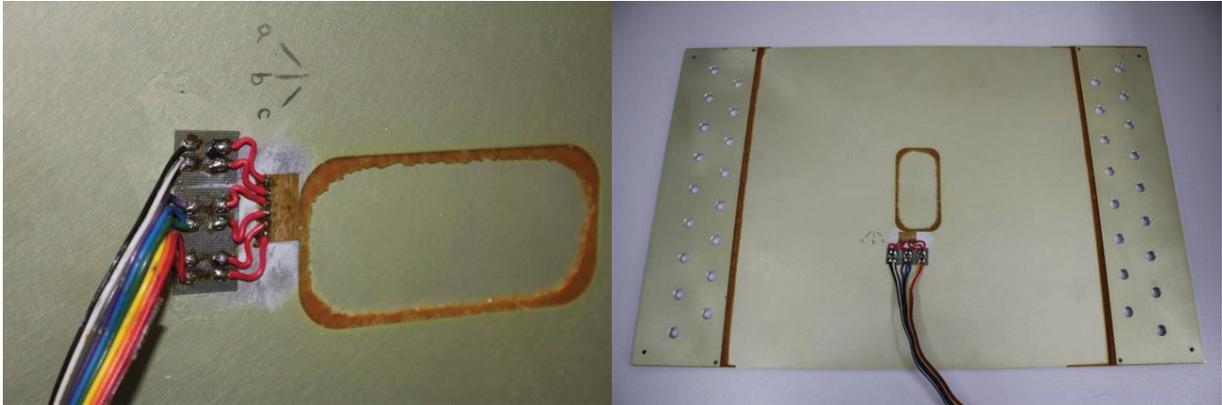


Figura 8.51: Colagem da roseta.

A fixação do subcomponente na máquina da MTS está mostrada na Figura 8.52.



Figura 8.52: Posicionamento na máquina da MTS.

Os resultados experimentais para a verificação das etapas do processo de otimização paramétrica, mostradas na seção 8.3.2, serão apresentados aqui.

A primeira parte mostrará os ensaios estáticos dos subcomponentes otimizados (subcomponente 1, mostrado na Figura 8.44), validando o processo de otimização em todos os requisitos de cargas considerados.

A segunda parte mostrará os ensaios em fadiga dos subcomponentes otimizados (subcomponente 2, mostrado na Figura 8.44).

8.3.5 Ensaio Estático do Subcomponente 1

Os resultados dos ensaios estáticos do subcomponente 1 serão mostrados nesta seção divididos em três etapas. Cada etapa representa os requisitos de cargas impostas na seção 8.3.2.

8.3.5.1 Primeira Etapa de Validação do Ensaio Estático

O objetivo desta etapa de validação é verificar se o subcomponente otimizado e projetado com fator de segurança de 1.5, atingirá valores da tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão próximos à 239 MPa. Este resultado foi obtido numericamente na seção 8.3.2.1, Figura 8.37.

Para este ensaio foi aplicado nas extremidades do *skin* uma tensão remota de 100 MPa. Assim, a máquina da MTS foi ajustada para aplicar uma carga de 38.220 kN e com uma taxa de 3000 N/min.

A primeira verificação foi realizada no *software* da MTS, onde o subcomponente permaneceu na região elástica, conforme pode ser visto na Figura 8.53.

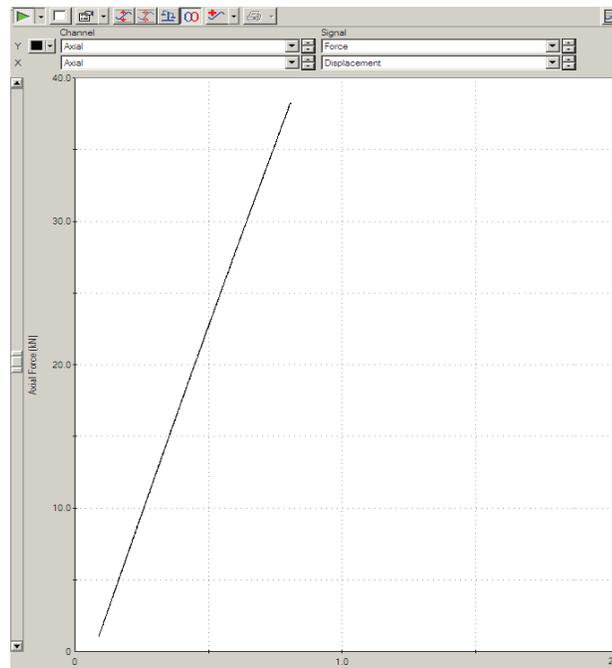


Figura 8.53: Relação Força/deslocamento no *software* da MTS.

A Figura 8.54 mostra as deformações nos extensômetros a, b e c obtidas no *software* da LMS.

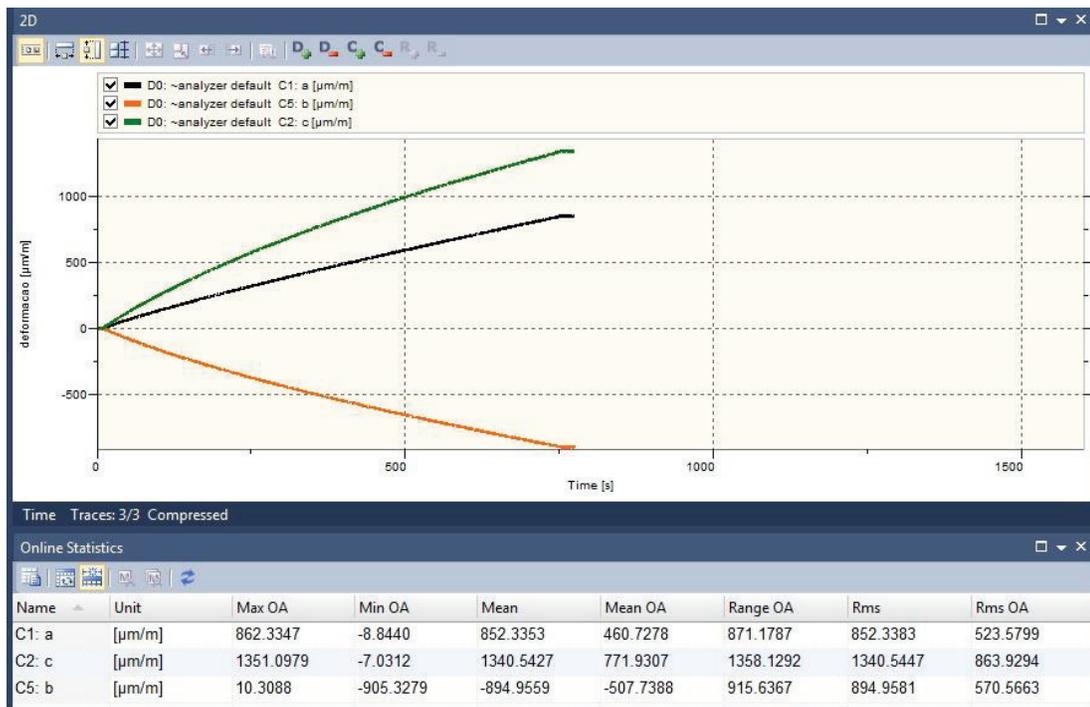


Figura 8.54: Deformação dos extensômetros a, b e c.

Com os dados das deformações nos extensômetros a, b e c, a tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão foi determinada com a seguinte metodologia:

- Cálculo do Estado de Deformação

O estado de deformação em relação às coordenadas xy , no ponto de concentração de tensão na superfície do *skin* (local da roseta), pode ser determinado pela solução do sistema dado pela Equação (8.9).

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2(\theta_a) + \epsilon_y \sin^2(\theta_a) + \gamma_{xy} \sin(\theta_a) \cos(\theta_a) \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2(\theta_b) + \epsilon_y \sin^2(\theta_b) + \gamma_{xy} \sin(\theta_b) \cos(\theta_b) \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2(\theta_c) + \epsilon_y \sin^2(\theta_c) + \gamma_{xy} \sin(\theta_c) \cos(\theta_c)\end{aligned}\tag{8.9}$$

Os ângulos dados no sentido anti-horário dos extensômetros a, b e c são dados respectivamente por:

$$\theta_a = 45^\circ, \theta_b = 90^\circ, \theta_c = 135^\circ$$

As deformações obtidas nos extensômetros a, b e c, mostradas na Figura 8.54, são dadas respectivamente por:

$$\epsilon_a = 0.862(10^{-3}), \epsilon_b = -0.905(10^{-3}), \epsilon_c = 1.351(10^{-3})$$

portanto,

$$\epsilon_x = 3.100(10^{-3}), \epsilon_y = -0.905(10^{-3}), \gamma_{xy} = -0.488(10^{-3})$$

- Cálculo do Estado de Tensão

O cálculo do estado de tensão pode ser obtido pela relação constitutiva dada pela Equação (8.10) e pelos dados do material da liga de alumínio 2024 T3 fornecidos na Tabela 7.1.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{8.10}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 231.05 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 10.18 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -13.39 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Cálculo da Tensão de von Mises

Seguindo o critério de falha da energia de distorção, o cálculo da tensão efetiva ou tensão de von Mises é dado pela Equação (8.11).

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}\tag{8.11}$$

portanto,

$$\sigma' = 227.31 \text{ MPa}$$

Desta maneira, verificou-se que a tensão obtida de 227.31 MPa ficou muito próxima da tensão de 239 MPa obtida numericamente. Esta diminuição da tensão no ponto de concentração de tensão pode ser devido ao *spew fillet* gerado no processo de fabricação.

8.3.5.2 Segunda Etapa de Validação do Ensaio Estático

Esta etapa tem como objetivo verificar se o subcomponente não tem escoamento no ponto de concentração de tensão, para uma tensão remota de 150 MPa. Ou seja, ajustando a máquina da MTS para uma carga de 57.330 kN e taxa de 3000 N/min, a tensão de von Mises no ponto de colagem da roseta deve ficar inferior à 338 MPa.

A comparação com o método numérico pode ser vista na seção 8.3.2.2, Figura 8.39.

Novamente a primeira verificação foi realizada no *software* da MTS, onde o subcomponente permaneceu na região elástica, Figura 8.55.

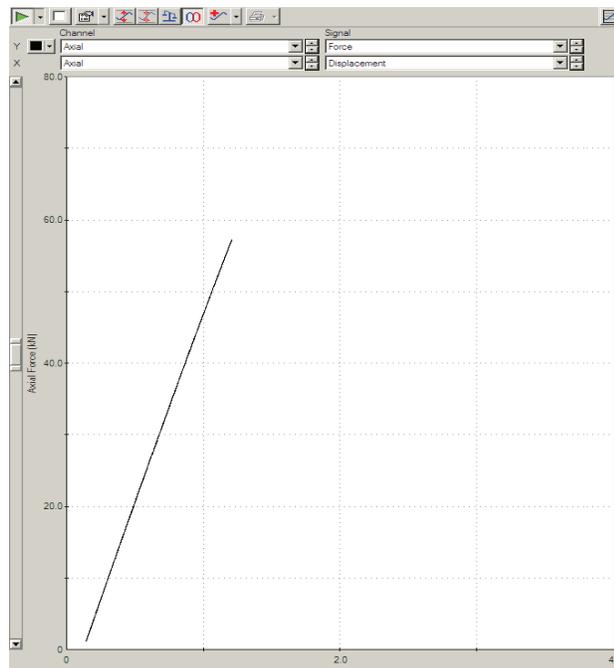


Figura 8.55: Relação Força/deslocamento no *software* da MTS.

A Figura 8.56 mostra as deformações nos extensômetros a, b e c obtidas no *software* da LMS.



Figura 8.56: Deformação dos extensômetros a, b e c.

O cálculo da tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão é realizado da mesma forma da primeira etapa, e resumida aqui por conveniência.

- Cálculo do Estado de Deformação

$$\theta_a = 45^0, \theta_b = 90^0, \theta_c = 135^0$$

$$\epsilon_a = 1.206(10^{-3}), \epsilon_b = -1.242(10^{-3}), \epsilon_c = 1.791(10^{-3})$$

portanto,

$$\epsilon_x = 4.200(10^{-3}), \epsilon_y = -1.200(10^{-3}), \gamma_{xy} = -0.585(10^{-3})$$

- Cálculo do Estado de Tensão

$$\sigma_x = 313.69 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 12.85 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -16.05 \text{ MPa}$$

- Cálculo da Tensão de von Mises

$$\sigma' = 308.72 \text{ MPa}$$

Portanto, para uma tensão remota de 150 MPa, a tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão ficou inferior à tensão de escoamento do aderente e bem próxima ao resultado obtido numericamente.

8.3.5.3 Terceira Etapa de Validação do Ensaio Estático

A terceira e última etapa de validação do ensaio estático para o projeto do subcomponente otimizado, tem como objetivo verificar se o subcomponente não falha quando aplicado uma tensão remota de 225 MPa. Ou seja, pelo critério estabelecido, a tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão deverá ficar inferior à 478 MPa.

Para este ensaio, a máquina da MTS foi ajustada para uma carga de 86 kN e taxa de 3000 N/min.

Neste ensaio, verificou-se no *software* da MTS que o subcomponente entrou na região plástica, Figura 8.57.

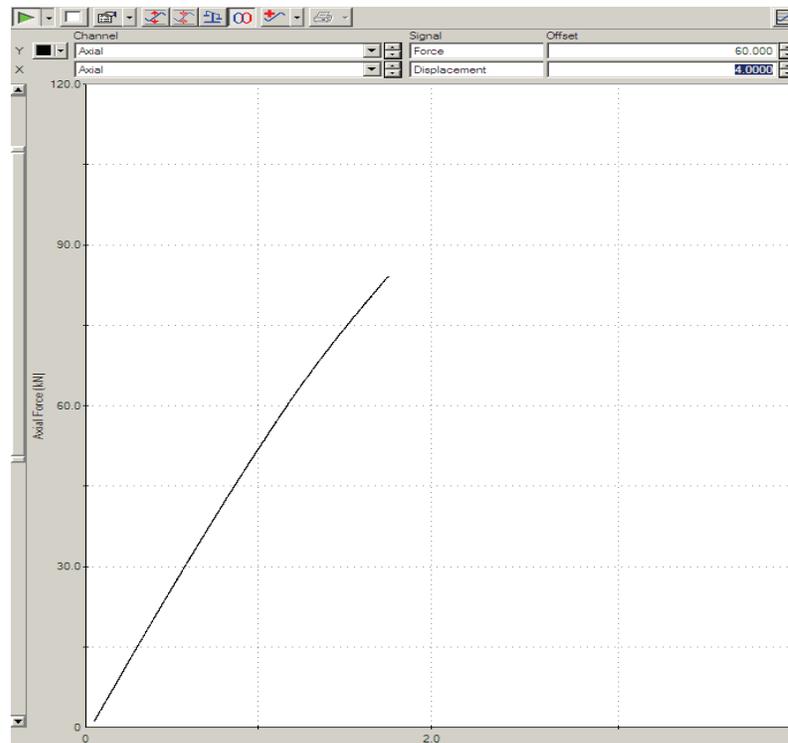


Figura 8.57: Comprovação de que o subcomponente escoou.

A Figura 8.58 mostra as deformações nos extensômetros a, b e c obtidas no *software* da LMS.



Figura 8.58: Deformação dos extensômetros a, b e c.

Novamente o cálculo da tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão é realizado da mesma forma da primeira etapa, mas resumida aqui por conveniência.

- Cálculo do Estado de Deformação

$$\theta_a = 45^0, \theta_b = 90^0, \theta_c = 135^0$$

$$\epsilon_a = 1.679(10^{-3}), \epsilon_b = -1.703(10^{-3}), \epsilon_c = 2.374(10^{-3})$$

Portanto,

$$\epsilon_x = 5.8(10^{-3}), \epsilon_y = -1.700(10^{-3}), \gamma_{xy} = -0.695(10^{-3})$$

- Cálculo do Estado de Tensão

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 425.5 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 16.1 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -19.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Cálculo da Tensão de von Mises

$$\sigma' = 418.99 \text{ MPa}$$

Assim, com uma tensão remota de 225 MPa, o subcomponente ficou com uma tensão de von Mises inferior à 478 MPa.

Desta forma, o subcomponente passou por todos os critérios estabelecidos para os ensaios estáticos.

8.3.6 Ensaio de Fadiga do Subcomponente 2

Devido ao tempo restrito para o ensaio de fadiga, os ensaios foram realizados apenas até a verificação do número de ciclos em que ocorresse escoamento no aderente.

Para uma análise mais severa, foi estabelecido para este ensaio um aumento da tensão remota de 100 MPa para 160 MPa.

Portanto, para este ensaio a máquina da MTS foi ajustada para os seguintes valores:

- Carga Máxima Aplicada – 61.152 kN;
- Carga Mínima Aplicada – 3.058 kN;
- Carga Média - 32.1 kN;
- Amplitude - 29.05 kN;
- Razão de Tensão - 0.05;
- Frequência – 20 Hz.

As inspeções foram realizadas no início do ensaio e a cada 20000 ciclos.

8.3.6.1 Inspeção 1 (1000 ciclos)

O ajuste do *software* da MTS, a quantidade de ciclos do ensaio, a curva Força/Tempo e Deslocamento/Tempo podem ser vistas na Figura 8.59.

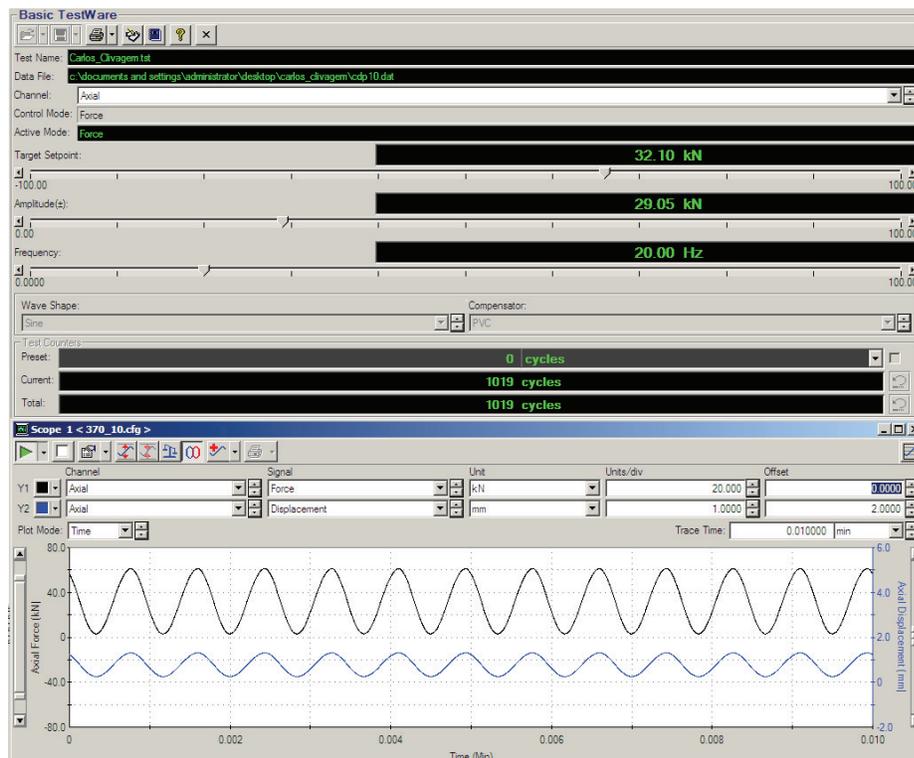


Figura 8.59: Ciclos obtidos na máquina da MTS.

As deformações dos extensômetros a, b e c com 1000 ciclos são mostradas na Figura 8.60.

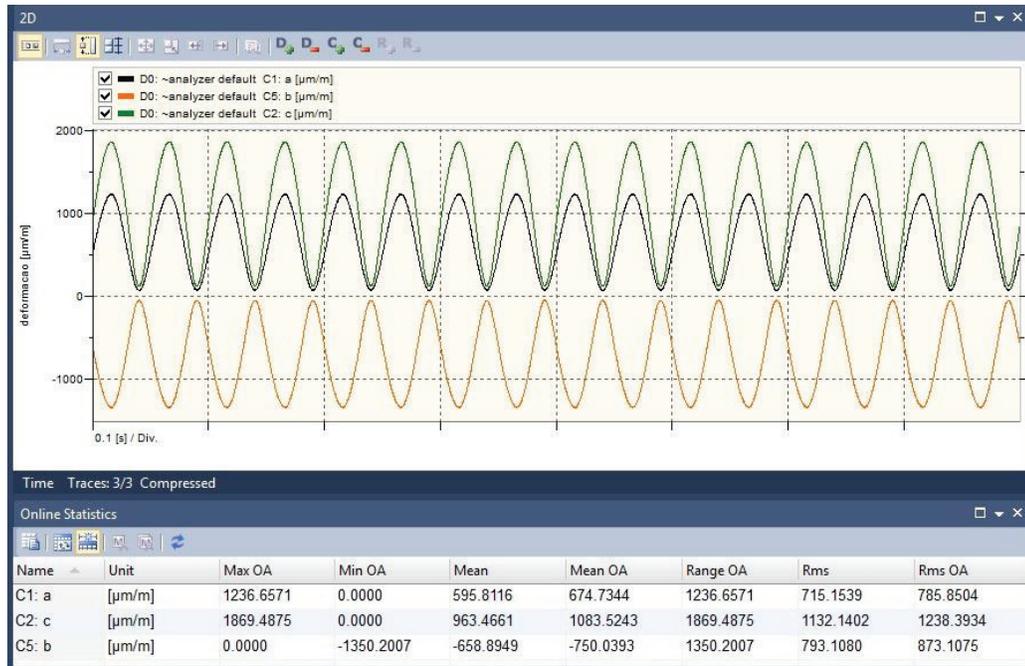


Figura 8.60: Deformações nos extensômetros a, b e c (1000 ciclos).

Para as deformações dos extensômetros a, b e c mostradas na Figura 8.60, a tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão é dada por:

- Cálculo do Estado de Deformação

$$\theta_a = 45^0, \theta_b = 90^0, \theta_c = 135^0$$

$$\epsilon_a = 1.237(10^{-3}), \epsilon_b = -1.350(10^{-3}), \epsilon_c = 1.869(10^{-3})$$

Portanto,

$$\epsilon_x = 4.5(10^{-3}), \epsilon_y = -1.300(10^{-3}), \gamma_{xy} = -0.632(10^{-3})$$

- Cálculo do Estado de Tensão

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 328.55 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 9.87 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -17.34 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- Cálculo da Tensão de von Mises

$$\sigma' = 325.11 \text{ MPa}$$

8.3.6.2 Inspeção 2, 3, 4 (20000, 40000 e 60000 ciclos)

Os valores das tensões de von Mises no ponto de concentração de tensão para 20000, 40000 e 60000 ciclos são apresentados na Tabela 8.12.

Tabela 8.12: Tensões de von Mises no ponto de concentração de tensão.

Nº da Inspeção	Nº de Ciclos	Tensão de von Mises (MPa)
2	20000	329.63
3	40000	333.11
4	60000	335.26

8.3.6.3 Inspeção 5 (80000 ciclos)

A inspeção para 80000 ciclos foi evidenciada nesta seção, devido ao fato de ocorrer escoamento no subcomponente (tensão maior que 338 MPa). O ajuste do *software* da MTS, a quantidade de ciclos do ensaio, a curva Força/Tempo e Deslocamento/Tempo podem ser vistas na Figura 8.61.

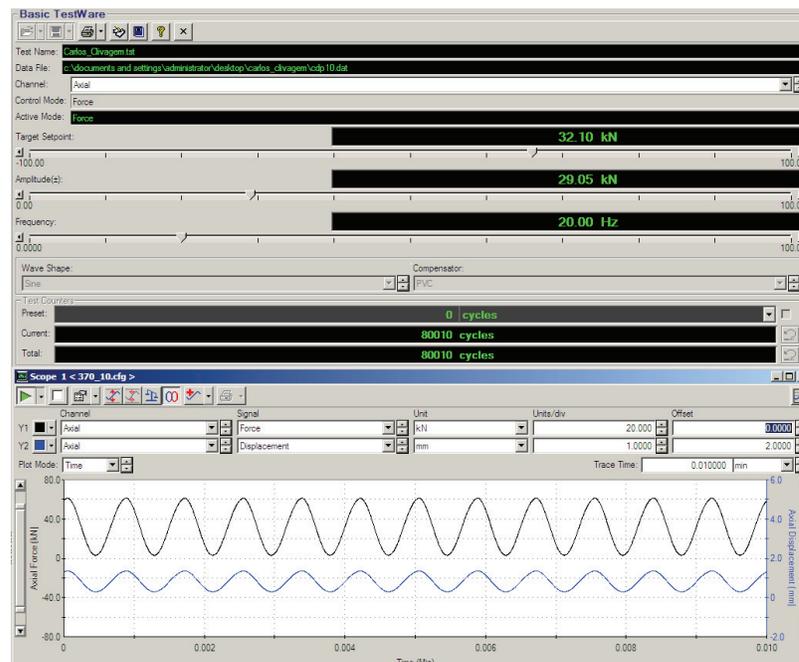


Figura 8.61: Ciclos obtidos na máquina da MTS.

As deformações dos extensômetros a, b e c com 80000 ciclos são mostradas na Figura 8.62.

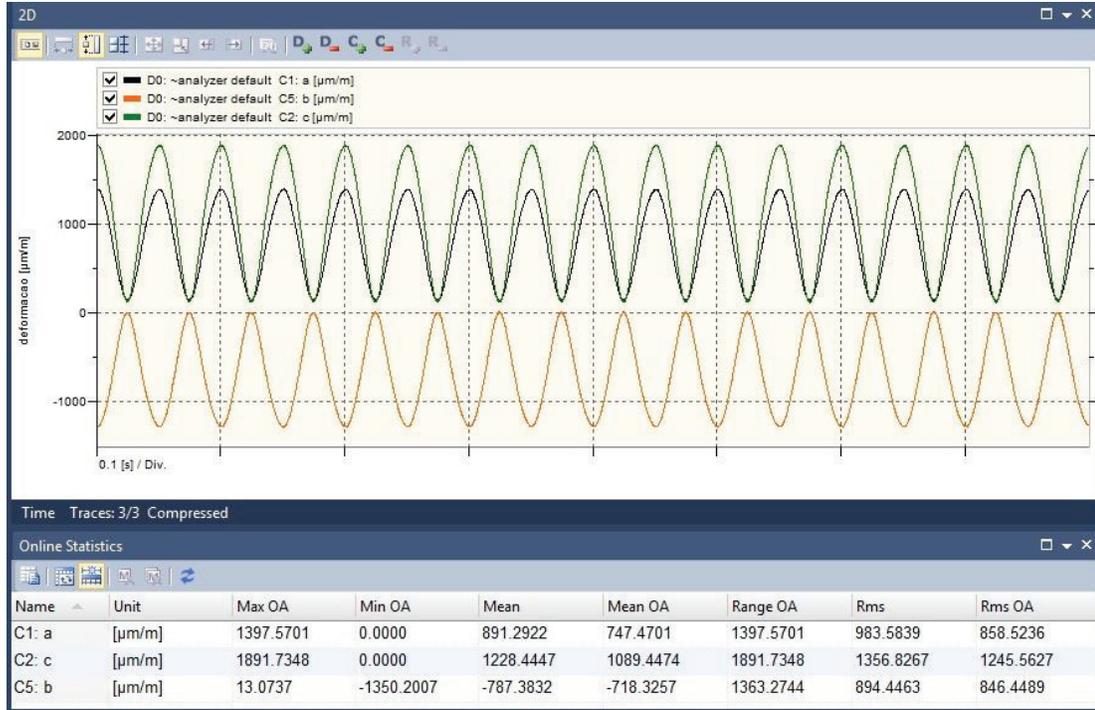


Figura 8.62: Deformações nos extensômetros a, b e c (80000 ciclos).

Para as deformações dos extensômetros a, b e c mostradas na Figura 8.62, a tensão de von Mises no ponto de concentração de tensão é dada por:

- Cálculo do Estado de Deformação

$$\theta_a = 45^0, \theta_b = 90^0, \theta_c = 135^0$$

$$\epsilon_a = 1.398(10^{-3}), \epsilon_b = -1.350(10^{-3}), \epsilon_c = 1.892(10^{-3})$$

Portanto,

$$\epsilon_x = 4.600(10^{-3}), \epsilon_y = -1.300(10^{-3}), \gamma_{xy} = -0.494(10^{-3})$$

- Cálculo do Estado de Tensão

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 343.63 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 14.84 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -13.56 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Cálculo da Tensão de von Mises

$$\sigma' = 338.26 \text{ MPa}$$

Para o ensaio de fadiga, foi verificado que ocorreu escoamento no subcomponente com 80000 ciclos, para uma tensão remota de 160 MPa. Adotando o escoamento como critério de falha, este subcomponente falhou exatamente com 80000 ciclos.

É importante observar, que a carga aplicada no ensaio, gerou uma tensão no ponto de concentração próxima à tensão de escoamento do aderente. O aumento de tensão neste ponto durante os ciclos pode ter ocorrido pelo efeito de histerese, por alguma falha no adesivo alterando a transferência de carga, ou devido algum defeito extrínseco do material.

Capítulo 9

9 Disposições Finais

Neste capítulo são apresentadas as conclusões de todo o conteúdo deste trabalho. Além disso, é feito um resumo das discussões feitas em cima dos resultados de cada capítulo.

Na seção 9.2 são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros para o aprimoramento e continuidade deste trabalho.

9.1 Conclusões

Na análise de juntas coladas, existem diversos estudos sendo realizados com a obtenção de algumas soluções fechadas. No entanto, o estudo de *doublers* colados é relativamente um estudo novo, e devido à complexidade matemática, apenas soluções aproximadas de geometrias simples de *doublers* estão disponíveis na literatura.

Sendo assim, o presente trabalho contribuiu reunindo e analisando os principais modelos analíticos para o cálculo das distribuições de tensão em *doublers* colados.

Uma das principais contribuições foi um *software* de *doublers* colados feito em Matlab, que reúne os principais modelos analíticos e permite ao usuário compará-los entre si e com análises numéricas, realizadas em paralelo no *software* comercial ABAQUS. Este *software*, foi desenvolvido com uma interface prática e fácil, sem a necessidade do usuário entrar em detalhes na complexidade da formulação ou no processo de implementação.

Mesmo que os modelos analíticos disponíveis terem apenas soluções aproximadas, poucas diferenças nos resultados foram encontradas em relação aos modelos numéricos demonstrados neste trabalho, assim, pode-se concluir que o método analítico se demonstrou bastante confiável apesar de suas simplificações na física do problema.

Desta forma, para uma análise rápida do problema, ou projeto inicial de *doublers* colados, os modelos analíticos dentro do *software* podem ser vistos como forma de ganho de tempo em relação aos outros métodos, além de uma economia nos custos computacionais nos modelos numéricos e nos custos dos procedimentos experimentais.

Por isso, pensando na praticidade dos modelos analíticos, foi desenvolvido um modelo simplificado para a obtenção da distribuição da tensão de cisalhamento no adesivo de *single-sided doublers*, tratando a camada adesiva como infinita, com as tensões de cisalhamento e de *peel* desconectadas entre elas e com modelos lineares do material e da geometria, obtendo resultados satisfatórios pela proposta do modelo.

Para configurações mais complexas de *doublers* colados, a solução numérica por elementos finitos com o *software* ABAQUS foi a mais apropriada, embora os resultados numéricos necessitem de alguns cuidados e interpretações físicas nas análises de juntas coladas demonstradas neste trabalho.

Portanto, modelos numéricos de geometrias mais simples foram antes validadas com os modelos analíticos de *doublers* colados. Verificando através das curvas obtidas, que para a distribuição de tensão de *peeling* e cisalhamento no adesivo, todos os métodos ficaram bem próximos.

É importante verificar que o pico de tensão de *peeling* e de cisalhamento no adesivo pelos métodos analíticos foi comparado com o correspondente resultado numérico perto do final da zona colada, mas fora da região de canto com o domínio da singularidade, onde a dependência da malha traz problemas de interpretação.

Além da validação dos modelos analíticos e numéricos, foi realizado uma comparação com os resultados obtidos com o *software* comercial ESAComp, constatando um resultado da distribuição de tensão cisalhante no adesivo bastante equivalente. No entanto, para a tensão de *peel* no adesivo, verificou-se uma incoerência do *software* ESAComp com uma tensão nula no adesivo.

Em relação à parte experimental, como não existe nenhuma norma regulamentadora para ensaios experimentais de *doublers* colados, teve-se que criar uma metodologia de ensaio partindo desde o estudo e projetos dos corpos de prova até a elaboração de métodos experimentais.

Além disso, devido à dificuldade de se medir os valores das tensões no adesivo e validar os métodos analíticos e numéricos, foram encontradas duas soluções: uso da extensometria e uso do processamento digital de imagens, cujo os resultados ficaram dentro do esperado, devido a forma indireta de obtenção das tensões no adesivo que poderiam ocasionar alguns erros de medições.

Para projetar partes da estrutura que simulam as aplicações reais de *doublers* colados, foi criado um procedimento de otimização paramétrica para obter uma série de alternativas

diferentes de *doublers* em vários casos de cargas. Neste caso, o procedimento numérico executado teve boa confiabilidade e eficiência na obtenção de projetos ideais de *doublers*. Os resultados obtidos ilustram a necessidade e utilidade da aplicação do procedimento de otimização para a obtenção das dimensões finais dos subcomponentes, levando para a questão de um projeto de reforço ideal em estruturas modernas em termos de baixo peso e alta resistência.

Na parte experimental dos subcomponentes, como também não existe nenhuma norma regulamentadora para estes ensaios experimentais, teve-se que elaborar novamente um procedimento de ensaio. No entanto, como o projeto destes subcomponentes envolveram a inclusão de critérios por fadiga para o dimensionamento, foi necessária também a realização do ensaio ASTM D3166.

A partir dos resultados experimentais dos subcomponentes, pode-se verificar que o subcomponente obedeceu a todos os critérios estabelecidos no projeto. No entanto, uma análise mais detalhada deve ser feita nos ensaios de fadiga, não entrando neste trabalho devido ao curto período do projeto.

9.2 Trabalhos Futuros

Segue abaixo algumas sugestões para a continuidade deste trabalho:

- Introduzir modelos viscoelásticos no adesivo para uma maior aproximação da realidade;
- Aprimorar o *software* de *doublers* colados, aumentando o número de modelos;
- Aprimorar o método de otimização dos subcomponentes, permitindo maior flexibilidade na mudança de geometria;
- Aprimorar a metodologia dos ensaios de *doublers* colados, utilizando equipamentos mais adequados;
- Aplicar algumas considerações importantes nos modelos analíticos e numéricos, como por exemplo, o efeito do *spew fillet* no adesivo;
- Introduzir o método da mecânica da fratura nos ensaios dos subcomponentes;
- Aplicar diferentes critérios de falha e testar vários tipos de adesivos;
- Realizar a inspeção dos efeitos ambientais.

Referências Bibliográficas

ABAQUS. User's manual, Version 5.6, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc, Rhode Island, 1997.

Adams, R.D.; Peppiatt, N.A. Stress Analysis of Adhesive-Bonded Lap Joints. *J. Strain Analysis*, 1974, p. 185-196.

Adams, R.D.; Wake. *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Elsevier Applied Science Publishers, London, 1984.

Adams, R. D.; Harris, J. A. The influence of local geometry on the strength of adhesive joints. *International Journal of Adhesion and Adhesive*, 7, 69–80, 1987.

Adams, R.D.; Comyn, J.; Wake, W.C. *Structural Adhesive Joints in Engineering*, Chapman and Hall, 1997, 2nd edn.

Akisanya, A.R. On the singular stress field near the edge of bonded joints. *J. Strain Analysis*, 32(4), 301-311, 1997.

Allman, D.J. A Theory for Elastic Stresses in Adhesive Bonded Lap Joints. *Q. Jl. Mech. Appl. Math.* 30, 415-436, 1977.

ASTM D3166-99, Standard Test Method for Fatigue Properties of Adhesives in Shear by Tension Loading (Metal/Metal).

Bogy, D. B. Two edge-bonded elastic wedges of dissimilar materials and wedge angles under surface traction. *Journal of Applied Mechanics*, 38, 377–386, 1971.

Brett, A. et al. Analysis tools for adhesively bonded composite joints, Part 1: Higher-order theory. *AIAA JOURNAL*, Vol. 44, No. 1, January 2006.

Carpenter, W.C. Comparison of Numerous Lap Joint Theories for Adhesively Bonded Joints, *J. Adhesion* 35, 55-73, 1991.

Crocombe, A.D.; Richardson, G. A Unified Approach for Predicting the Strength of Cracked and Non-Cracked Adhesive Joints. *J. Adhesion* 49,211-244, 1995.

Duong, C. N. A unified approach to geometrically nonlinear analysis of tapered bonded joints and doublers. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 3498–3526, 2006.

de Bruyne, N.A. Fundamentals of adhesion. *Proceedings of Conference on Bonded Aircraft Structures*, pp. 1-9, 1957.

Delale, F.; Erdogan, F.; Aydinoglu, M.N. Stresses in Adhesively Bonded Joints: A Closed-Form Solution. *J. Composite Materials* 15, 249-271, 1981.

Erdogan, F.; Ratwani, M. Stress Distribution in Bonded Joints. *J. of Composite Materials* 5, 378-393, 1971.

Gilbert, Y.; Rigolot, A. Determination of stress distribution in double-lap joints, matched asymptotic expansions and conformal mapping. *Adhesively Bonded Joints: Analysis and Design*, ASTM STP 981, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 145–159, 1988.

Goland, M.; Reissner, E. The Stresses in Cemented Joints. *J. of Applied Mechanics*, A-17-A-27, 1944.

Groth, H.L. Stress singularities and fracture at interface corners in bonded joints. *Int. J.. Adhesion and Adhesives* 8(2), 107/113, 1988.

Harris, J.A.; Adams, R.D. Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods. *Int. J. Adhesion and Adhesives* 4(2), 65-78, 1984.

Hart-Smith, L.J. Adhesive-bonded single lap joints. NASA CR-112236, 1973a.

Hart-Smith, L. J. Adhesive-Bonded Single-Lap Joints. NASA CR-112236, 1973b.

Hart-Smith, L. J. Adhesive-Bonded Scarf and Stepped-Lap joints. NASA CR-112237, 1973c.

Hart-Smith, L. J. Analysis and Design of Advanced Composite Bonded Joints. NASA CR 2218, 1974.

Hart-Smith, L.J. Design and analysis of bonded repairs for fibrous composite aircraft structures. Douglas Aircraft Company Paper 7133, presented at international workshop on defence applications of advanced repair technology for metal and composite structures, Naval Research Laboratory, Washington, D.C, 1981.

Hart-Smith, L. J. Induced Peel Stresses in Adhesively Bonded Joints, Douglas Aircraft Company. MDC J9422A, 1982.

Hart-Smith, L. J. Nonlinear closed-form analyses of stresses and deflections in bonded one-sided splices and patches. The Proceedings of the 3rd Aging Aircraft Conference, New Mexico, 1999.

Hart-Smith, L. J. Analyses of adhesive peel and shear stresses in bonded single strap joints and one-sided patches and doublers, accounting for thermal mismatch effects. To be published, 2005b.

Hein, V. L.; Erdogan, F. Stress singularities in a two-material wedge. International Journal of Fracture Mechanics, 7, 317–330, 1971.

Higgins, A. Adhesive bonding of aircraft structures. Int. J. Adhesion and Adhesives 20, 367-376, 2000.

Hofstede, J. Adhesive bonded nodes in automotive spaceframes. Master Thesis, Aerospace Faculty, Delft University of Technology, The Netherlands, 2001.

Kairouz, K. C.; Matthews, F. L. Strength and failure modes of bonded single lap joints between cross-ply substrates. Composites, 24, 475–484, 1993.

Kinloch, A.J. Adhesion and Adhesives”, Chapman and Hall, London, ISBN 0412274440X, 1987.

Kinloch, A.J. Adhesives in Engineering”, Proc Instm Mech Engs, 1997, vol 211, Part G, p. 307-334.

Kochan, A. Lotus: aluminium extrusions and adhesives. *Assembly Automation*, 1996, vol 16(4), 19-21.

McGregor, I.J.; Nardini, D.; Gao, Y.; Meadows, D.J. The development of a joint design procedure for bonded aluminium structure. *Third international conference on Structural Adhesives in Engineering III*, Bristol, UK, 1992.

MIL-HDBK-5H, MILITARY HANDBOOK: METALLIC MATERIALS AND ELEMENTS FOR AEROSPACE VEHICLE STRUCTURES, 1998.

Mortensen, F.; Thomsen, OT. A simple unified approach for the analysis and design of adhesive bonded composite laminates. *Proc. of Eleventh International Conference on Composite Materials*, VI 18, 1997, pp. 129–139.

Mortensen, F.; Thomsen, OT. Analysis of adhesive bonded joints: A unified approach, *Composites Science and Technology*, Vol. 62, No. 7–8, 2002, pp. 1011–1031.

Ojalvo, U.; H.L.Eidinoff . Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints. *AIAA JOURNAL* 16(3), 204-211, 1978.

Ozelo, Renan R. de Mello. Propagação de trincas Interfaciais e fadiga em compostos de borracha submetidos a envelhecimento. 2010. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Reedy, E. D. Jr. Intensity of the stress singularity at the interface corner between a bonded elastic and rigid layer. *Engineering Fracture Mechanics*, 36, 575–583, 1990.

Richardson, G.; Crocombe, A.D.; Smith, P.A. A comparison of two- and three-dimensional finite element analysis of adhesive joints. *Int. J. Adhesion and Adhesives*, 13 (3) p.193-200, 1993.

Roberts, T. M. Shear and normal stresses in adhesive joints. *Journal of Engineering Mechanics*, 115, 2460–2479, 1989.

Rodrigues, René Q. Análise de tensões e critérios de falha para juntas coladas de estruturas aeronáuticas metálicas coladas. 2011. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Rose, L. R. F. An application of the inclusion analogy. *International Journal of Solids and Structures*, 17, 827–838, 1981.

Rose, L. R. F. A cracked plate repaired by bonded reinforcements. *International Journal of Fracture*, 18, 135–144, 1982.

Rose, L. R. F. Theoretical analysis of crack patching. In *Bonded Repair of Aircraft Structure*, A. A. Baker and R. Jones (eds). Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 77–106, 1988.

Sato, Marcel. Modelagem de problemas da mecânica da fratura e propagação de trincas em fadiga, 2009. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Schatzberg, E. *Wings of Wood, Wings of Metal*”, Princeton University Press, UK, 1999.

SPRING. Integrating remote sensing and GIS by object-oriented data modeling. *Computers & Graphics*, 20: (3) 395-403, May-Jun 1996.

Thomsen, OT. Elasto-static and elasto-plastic stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints. *Composite Structures*, 21, pp. 249–259, 1992.

Tong, L. and Steven, G.P. *Analysis and Design of Structural Bonded Joints*”, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1999.

Volkens, O. Die niekraftverteilung in zugbeanspruchten mit konstanten laschenquerschnitten. *Luftfahrtforsch*, 15, 41–47, 1938.

Wang, C. H.; Rose, L. F. R. Bonded repair of cracks under mixed mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 2749–2773, 1998.

Wang, C. H.; Rose, L. R. F. Compact solutions for the corner singularity in bonded lap joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 20, 145–154, 2000.

Williams, M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, 19, 526–528, 1952.

Wooley, G.R.; Carver, D.R. Stress concentration factors for bonded lap joints. *J. Aircraft*, 8 817-820, 1971.

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. *The Finite Element Method*, 4th Edition. McGraw-Hill Book Company, England, 1989.

[1] www.batalhapelomundo.com.br - 08/02/12, 16:32.

Apêndice A - Modelo de C.N.Duong (2006) para *Two-Sided Doublers*

Nesta seção será mostrado o modelo analítico pra se obter a distribuição de tensão de *peel* e cisalhamento no adesivo para a configuração de *two-sided doubler*.

A.1 *Análise de Tensão Cisalhante para Two-Sided Doublers*

Primeiramente será feita uma análise elástica do adesivo no estado plano de deformação.

Referindo-se a Figura 3.6, as equações diferenciais básicas são:

Equilíbrio da Força Horizontal

$$\frac{dN_p}{dx} - \tau^{(A)} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dN_s}{dx} + \tau^{(A)} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Relação tensão deformação no aderente

$$\frac{du_p}{dx} = \frac{N_p}{E_p t_p} + \alpha_p \Delta T \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{du_s}{dx} = \frac{N_s}{E_s t_s} + \alpha_s \Delta T \quad (\text{A.4})$$

$$E'_{s,p} = \frac{E_{s,p}}{1 - \nu_{s,p}^2} \quad (\text{A.5})$$

Relação tensão deformação no adesivo

$$\tau^{(A)} = G_A \gamma^{(A)} = -\frac{G_A}{t_A} (u_s - u_p) \quad (\text{A.6})$$

onde u é o deslocamento longitudinal do aderente; N é a carga por unidade de largura; τ é a tensão de cisalhamento e γ é deformação angular; E , α , t e G é o módulo de elasticidade,

coeficiente de expansão térmica, espessura e módulo de cisalhamento, respectivamente; os índices e subscritos s , p e a denotam o *skin*, *patch (doubler)* e adesivo, respectivamente, ΔT é a variação da Temperatura.

Derivando a Equação (A.6) uma vez e substituindo em (A.3) e (A.4), a equação resultante é:

$$\frac{d\tau^{(A)}}{dx} = -\frac{G_A}{t_A} \left(\frac{du_s}{dx} - \frac{du_p}{dx} \right) = -\frac{G_A}{t_A} \left[\frac{N_s}{E_s' t_s} - \frac{N_p}{E_p' t_p} + (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \right] \quad (\text{A.7})$$

A equação diferencial que governa a distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo segue pela diferenciação da Equação (A.7) e eliminação de $\frac{dN_s}{dx}$ e $\frac{dN_p}{dx}$ obtidas das equações (A.1) e (A.2).

$$\frac{d^2\tau^{(A)}}{dx^2} - \beta_A^2 \tau^{(A)} = 0 \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$\beta_A^2 = \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E_p' t_p} + \frac{1}{E_s' t_s} \right) = \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1+S}{S} \right) \frac{1}{E_s' t_s} \quad (\text{A.9})$$

e S é a relação de rigidez entre o *doubler* e o *skin*.

$$S = \frac{E_p' t_p}{E_s' t_s} \quad (\text{A.10})$$

A solução geral da Equação (A.8) é:

$$\tau^{(A)} = A e^{\beta_A x} + B e^{-\beta_A x} \quad (\text{A.11})$$

Na forma trigonométrica hiperbólica da solução geral, as constantes A e B são resolvidas pelas condições de contorno em $\frac{d\tau^{(A)}}{dx}$ e $\tau^{(A)}$.

Escolhendo a origem da coordenada x como o meio do *doubler*, então:

$$\tau^{(A)}(0) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$N_s(l) = P \quad (\text{A.13})$$

$$N_p(l) = 0$$

A condição (A.12) implica que $B = 0$. Resolvendo a Equação (A.7) na condição $x = l$, utilizando a condição (A.13) e utilizando o resultado $B = 0$ e $\tau^{(A)}$ dados por (A.12) fornecem:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{G_A}{\beta_A t_A \cosh(\beta_A l)} \left[\frac{P}{E_s' t_s} + (\alpha_s - \alpha_s) \right] \Delta T \\ &= -\frac{G_A}{\beta_A t_A \cosh(\beta_A l)} \left[\frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_s - \alpha_p) \right] \Delta T \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Notando que $P = \sigma_\infty t_s$. E utilizando as seguintes aproximações:

$$\sinh(\beta_A l) \approx \cosh(\beta_A l) \approx \frac{e^{\beta_A l}}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{\sinh(\beta_A l)} \approx \frac{1}{\cosh(\beta_A l)} \approx 0 \quad \text{Para } \beta_A l \gg 1 \quad (\text{A.16})$$

A tensão de cisalhamento no adesivo para um grande comprimento da zona colada (*overlap*), $\beta_A l \gg 1$, se reduz para os pontos próximos ao final do *doubler*, para $x = l - |\zeta|$ e $|\zeta| \ll 1$:

$$\tau^{(A)} = -\frac{G_A e^{-\beta_A \zeta}}{\beta_A t_A} \left[\frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_s - \alpha_p) \right] \Delta T \quad (\text{A.17})$$

O sinal negativo no lado direito da Equação (A.17) significa que a tensão de cisalhamento no adesivo τ_A está no sentido oposto ao esperado na Figura 3.6.

A tensão no *skin* na região da *overlap* pode ser determinada a partir da condição de deformação entre o *doubler* e o *skin* e da equação de equilíbrio da força horizontal. Na ausência de carga térmica, ou seja, $\Delta T = 0$, a tensão no *skin* é denotado por σ_0 e é dada como segue:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_p \quad (\text{A.18})$$

$$E'_s \varepsilon_s t_s + E'_p \varepsilon_p t_p = \sigma_\infty t_s \quad (\text{A.19})$$

então,

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_\infty t_s}{E'_s t_s} + E'_p t_p \quad (\text{A.20})$$

$$\sigma_o = \sigma_s(0) = E'_s \varepsilon_s = \frac{\sigma_\infty E'_s t_s}{E'_s t_s + E'_p t_p} = \frac{\sigma_\infty}{1+S} \quad (\text{A.21})$$

A.2 Análise de Tensão de Peel para Two-Sided Doublers

Para *doublers* espessos, o adesivo pode falhar por *peel* antes que sua resistência ao cisalhamento seja alcançada. Esta seção, portanto, apresenta uma análise que lida com as tensões de *peel* no adesivo. A geometria e a nomenclatura para estas análises estão ilustradas na Figura 3.7.

As equações diferenciais para o *doubler* são:

Equilíbrio de Momento Fletor

$$\frac{dM_p}{dx} = V_p - \frac{\tau^{(A)} t_p}{2} \quad (\text{A.22})$$

Equilíbrio de Forças

$$\frac{dV_p}{dx} = \sigma^{(A)} \quad (\text{A.23})$$

Relação Deflexão-Momento

$$\frac{d^2 w_p}{dx^2} = -\frac{M_p}{D_p} \quad (\text{A.24})$$

Relação Tensão-Deformação no Adesivo

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma(A)}{E_A} = \frac{w_p - w_s}{t_A} = \frac{w_p}{t_A} \quad (\text{A.25})$$

onde w_s é igual a zero, desde que a configuração do *doubler* seja simétrica em relação ao plano médio do *skin*, E_A é o módulo de elasticidade do adesivo, D_p é a rigidez à flexão do *patch* (*doubler*), ou seja, $D_p = \frac{E_p t_p^3}{12}$, V_p é a força cortante vertical que age sobre o plano de secção transversal do *patch*, e os restantes são previamente definidos.

Para desacoplar as equações diferenciais que governam a tensão de *peel* e de cisalhamento, a tensão de cisalhamento $\tau^{(A)}$ na Equação (A.22) é definida constante. Esta simplificação é justificada sempre que as cargas são tão elevadas que induzem deformação plástica e, assim, uma tensão de cisalhamento constante $\tau_Y^{(A)}$ no adesivo.

A partir das Equações (A.21)-(A.25), a deflexão transversal do *doubler* é dada como:

$$\frac{d^4 w_p}{dx^4} + \frac{E_A}{D_p t_A} w_p = 0 \quad (\text{A.26})$$

Deve-se ressaltar que as soluções até aqui foram obtidas aproximadamente, e a solução para a tensão de *peel* obtida nesta seção pode não satisfazer exatamente todas as condições de contorno necessárias.

Para simplificar a manipulação algébrica, é conveniente assumir que a zona colada é longa, pois na prática é o caso que evita a falha por uma resistência ao cisalhamento insuficiente. A solução da tensão de *peel*, portanto, será realizada especialmente para os pontos perto do final da zona colada.

Para um grande comprimento da zona colada, a solução da Equação (A.26) é dada por:

$$w_p = Ae^{-\hat{v}x} \cos(\hat{v}x) + Be^{-\hat{v}x} \text{sen}(\hat{v}x) \quad (\text{A.27})$$

onde:

$$\hat{v} = \left(\frac{E_A}{4D_p t_A} \right)^{1/4} \quad (\text{A.28})$$

onde x é agora medido a partir do final da *overlap*, como mostrado na Figura 3.7.

As condições de contorno que definem as constantes A e B são:

$$M_p = -D_p \frac{d^2 w_p}{dx^2} = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (\text{A.29})$$

E $V_p = 0$ em $x = 0$, onde das Equações (A.22) e (A.24).

$$\frac{dM_p}{dx} = -\frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{2} = D_p \frac{d^3 w_p}{dx^3} \quad \text{em } x = 0 \quad (\text{A.30})$$

Onde $\tau^{(A)}$ na Equação (A.22) foi definida para um limite de escoamento no adesivo $\tau_Y^{(A)}$ devido à deformação plástica que ocorre no final da zona colada. Assim, a condição (A.29) exige que:

$$\left. \frac{d^2 w_p}{dx^2} \right|_{x=0} = 2\hat{v}^2 e^{-\hat{v}x} \left[A \sin(\hat{v}x) - B \cos(\hat{v}x) \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.31})$$

ou:

$$B = 0 \quad (\text{A.32})$$

Da condição (A.30)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3 w_p}{dx^3} \right|_{x=0} &= 2A\hat{v}^3 \left[-\sin(\hat{v}x) + \cos(\hat{v}x) \right] e^{-\hat{v}x} + 2B\hat{v}^3 \left[\cos(\hat{v}x) + \sin(\hat{v}x) \right] e^{-\hat{v}x} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{2D_p} = 2\hat{v}^3 (A + B) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Substituindo (A.32) em (A.33):

$$A = \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{4D_p v^3} \quad (\text{A.34})$$

E da equação (A.27):

$$w_p = \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{4D_p v} \cos(vx) e^{-vx} \quad (\text{A.35})$$

Assim, a tensão de *peel* máxima no adesivo pode ser determinada pela solução da equação (A.25) em $x = 0$ com w_p dada por (A.35) como:

$$\sigma_{\max}^{(A)} = \frac{\tau_Y^{(A)} t_p}{4D_p v^3} \frac{E_A}{t_A} = \tau_Y^{(A)} \left(\frac{3E_A t_p}{E_p t_A} \right)^{1/4} \quad (\text{A.36})$$

Mesmo que a Equação (A.36) foi derivada do pressuposto de que significativa deformação plástica ocorre nas extremidades da *overlap*, isto também é utilizado por Hart-Smith para o caso de que a tensão de cisalhamento no adesivo é ainda inferior à tensão de escoamento como:

$$\sigma_{\max}^{(A)} = \tau_{\max}^{(A)} \left(\frac{3E_A t_p}{E_p t_A} \right)^{1/4} \quad (\text{A.37})$$

onde $\tau_{\max}^{(A)}$ é a máxima tensão de cisalhamento no adesivo no final da zona colada, que é igual a $\tau_Y^{(A)}$ se o adesivo sofre uma deformação plástica neste ponto.

A.3 Análise Elastoplástica para Two-Sided Doublers

Neste caso, a relação tensão-deformação no adesivo, Equação (A.6), deve ser modificada.

Como antes, a deformação cisalhante do adesivo é dada por:

$$\gamma^{(A)} = -\frac{u_s - u_p}{t_A} \quad (\text{A.38})$$

Enquanto a tensão cisalhante no adesivo na região elástica (de comprimento d da Figura 3.8) é dada pela Equação (A.6). No entanto, através da região plástica permanente, a tensão cisalhante no adesivo é dada como:

$$\tau^{(A)} = -\tau_Y^A = \text{constante} \quad (\text{A.39})$$

onde τ_Y^A é a tensão de escoamento do adesivo sendo caracterizado pelo modelo elasto-perfeitamente plástico da Figura 3.9.

A equação de equilíbrio e a relação de tensão-deformação para o caso elastoplástico já está especificada pelas Equações (A.11) - (A.5). Derivando uma vez a Equação (A.38) e substituindo nas Equações (A.3) e (A.4), obtém-se:

$$\frac{d\gamma^{(A)}}{dx} = -\frac{1}{t_A} \left[\frac{N_s}{E'_s t_s} - \frac{N_p}{E'_p t_p} + (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \right] \quad (\text{A.40})$$

A equação diferencial governante do adesivo segue da diferenciação da Equação (A.40) com a eliminação de $\frac{dN_s}{dx}$ e $\frac{dN_p}{dx}$ das Equações (A.1) e (A.2).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma^{(A)}}{dx^2} - \frac{\tau^{(A)}}{t_A} \left(\frac{1}{E'_s t_s} - \frac{1}{E'_p t_p} \right) &= 0 \\ \frac{d^2\gamma^{(A)}}{dx^2} - \frac{G^{(A)}}{t_A} \left(\frac{1}{E'_s t_s} - \frac{1}{E'_p t_p} \right) \frac{\tau^{(A)}}{G_A} &= 0 \\ \frac{d^2\gamma^{(A)}}{dx^2} - \beta_A^2 \frac{\tau^{(A)}}{G_A} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

É interessante notar que a Equação (A.41) será a mesma que a Equação (A.7) quando o adesivo permanecer elástico. A Equação (A.41) tem a seguinte solução geral:

$$\begin{aligned}
\gamma^{(A)} &= A \sinh(\beta_A x) + B \cosh(\beta_A x) & \text{se } |\tau^{(A)}| < \tau_Y^{(A)} \\
\gamma^{(A)} &= -\frac{\beta_A^2 \tau_Y^{(A)}}{2G_A} x^2 + Cx + F & \text{se } |\tau^{(A)}| = \tau_Y^{(A)}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Como já mencionado, nos *doublers* colados a zona de alta transferência de carga ocorrerá perto do final da *overlap*. Observando a Figura 3.8, a região plástica é assumida para ocorrer perto do final da *overlap*, ou seja, $|x| > d$ enquanto a região elástica tem um comprimento d , onde d é também parte da solução procurada.

Por manipulação algébrica, a solução geral da Equação (A.42) será reescrita como segue:

$$\gamma^{(A)} = A \sinh(\beta_A x) \quad |x| \leq d \tag{A.43}$$

e:

$$\gamma^{(A)} = -\frac{\beta_A^2 \tau_Y^{(A)}}{2G_A} \zeta^2 + C\zeta + F \quad |x| > d \text{ ou } 0 \leq \zeta \leq l - d \tag{A.44}$$

onde da Figura 3.8, $\zeta = x - d$ e a constante B é zero devido a assimetria para a tensão cisalhante no adesivo elástico. As condições de contornos são dadas a seguir:

$$\gamma^{(A)} = -\frac{\tau_Y^{(A)}}{G_A} = -\gamma_Y^A \quad \text{em } |x| = d \text{ e } \zeta = 0 \tag{A.45}$$

$$\frac{d\gamma^{(A)}}{dx} = -\frac{d\tau_Y^{(A)}}{d\zeta} \quad \text{em } |x| = d \text{ e } \zeta = 0 \tag{A.46}$$

e

$$\frac{d\gamma^{(A)}}{d\zeta} = -\frac{1}{t_A} \left[\frac{\sigma_\infty}{E'_s} + (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \right] \quad \text{em } \zeta = l - d \tag{A.47}$$

Da Equação (A.40) com $N_s(\zeta = l - d) = P = \sigma_\infty t_s$ e $N_p(\zeta = l - d) = 0$. Segue:

$$A = -\frac{\gamma_Y^A}{\sinh(\beta_A d)} \quad (\text{A.48})$$

$$F = -\gamma_Y^A \quad (\text{A.49})$$

$$C = -\frac{\beta_A \gamma_Y^A}{\tanh(\beta_A d)} \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\beta_A \cdot d \cdot \tanh(\beta_A \cdot d) - 1}{\tanh(\beta_A d)} = \beta_A l - \frac{1}{\beta_A t_A \gamma_Y^{(A)}} \left[\frac{\sigma_\infty}{E'_s} + (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \right] \quad (\text{A.51})$$

então,

$$\gamma^{(A)} = -\frac{\gamma_Y^{(A)}}{\sinh(\beta_A d)} \sinh(\beta_A x) \quad |x| \leq d \quad (\text{A.52})$$

$$\gamma^{(A)} = -\gamma_Y^{(A)} \left[\frac{\beta_A}{\tanh(\beta_A d)} \zeta + \frac{\beta_A^2}{2} \zeta^2 \right] \quad 0 \leq \zeta \leq l - d \quad (\text{A.53})$$

onde d é determinado pela Equação (A.51).

Quando d é negativo para uma dada tensão aplicada σ_∞ , significa que a tensão aplicada não é alta o suficiente para induzir deformação plástica no final do *doubler*.

Para um comprimento suficientemente longo da zona colada, $\tanh(\beta_A d) \rightarrow 1$, desde que $\beta_A d \gg 1$. A carga máxima por unidade de largura que pode ser aplicada na estrutura antes do adesivo falhar, pode ser resolvida pela Equação (A.53) no pico da distribuição de deformação cisalhante do adesivo, ou seja, $\zeta = l - d$, que pode ser expressa em termos da deformação cisalhante do adesivo como:

$$\frac{P_{max} \beta_A}{\tau_Y^A} = \left(1 + \frac{1}{S} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{2\gamma_p^{(A)}}{\gamma_Y^{(A)}} + \frac{\beta_A^2 (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T}{\tau_Y^A \left(\frac{1}{E'_s t_s} + \frac{1}{E'_p t_p} \right)}} \right] \quad (\text{A.54})$$

onde $\gamma_p^{(A)}$ é a máxima deformação plástica permitida no adesivo como definida na Figura 3.9.

Apêndice B - Análise de Tensão de *One-Sided Doublers*

A análise de tensão de *one-sided doublers* é realizada em três estágios, seguindo a abordagem de C.N. Duong para *doublers*. Este tipo de configuração de *doublers* está mostrado esquematicamente na Figura 3.10.

B.1 Estágio I: Solução para o Momento Fletor nas Extremidades da *Overlap*

As equações que governam as tensões no adesivo, requerem conhecimento do momento fletor nas extremidades da *overlap* como condições de contorno. Portanto, a análise começa com uma solução para esses valores, Figura 3.10 (b).

Foi mostrado nas seções anteriores, que para uma *overlap* suficientemente longa, a transferência de carga entre os aderentes estão confinados nas extremidades da *overlap*. Assim, é apropriado assumir nesta parte da solução que o *doubler* é rigidamente colado com o *skin*.

O momento fletor M_H no *skin*, fora da *overlap*, é expressado por:

$$M_H = -Pw_H \quad |x| > l \quad (\text{B.1})$$

onde w_H é a deflexão transversal fora da *overlap* e P é o carregamento longitudinal aplicado por unidade de comprimento. Em contraste, o momento fletor M_I na *overlap* é dada como segue:

$$M_I = -P\left(w_i + \hat{e}\right) + M^{therm} = -P\left(w_i + \hat{e} - \frac{M^{therm}}{P}\right) \quad |x| \leq l$$

$$\hat{e} = \frac{\left(\frac{t_s + t_p}{2}\right)S}{1 + S} \quad (\text{B.2})$$

$$M^{therm} = F^{therm}\left(\frac{t_s + t_p}{2}\right)$$

$$F^{therm} = \frac{E'_s t_s E'_p (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T}{E'_s t_s + E'_p t_p}$$

onde w_i é definida como a deflexão transversal dentro da *overlap*, e \hat{e} é a excentricidade, S é a razão de rigidez, e os restantes são previamente definidos.

A definição de \hat{e} pode ser compreendida pela distância entre o centroide da camada do *skin* e o centroide da combinação do *doubler* e do *skin* na zona da *overlap*.

Similar à Equação (A.24), da clássica teoria de flexão de vigas, o momento fletor é dado pela relação:

$$M_H = -D_s \frac{d^2 w_H}{dx^2} \quad (\text{B.3})$$

$$M_I = -D_I \frac{d^2 w_I}{dx^2} \quad (\text{B.4})$$

em que:

$$D_s = \frac{E_s' t_s^3}{12} \quad (\text{B.5})$$

$$D_I = I_m \cdot D_s$$

$$I_M = I + \frac{E_s' t_s^3}{E_p' t_p^3} + \frac{\left(I + \frac{t_s}{t_p} \right)^2}{\left(1 + \frac{E_p' t_p}{E_s' t_s} \right)} \quad (\text{B.6})$$

onde D_s e D_I é a rigidez à flexão do *skin* e da junta rigidamente colada na zona da *overlap*, respectivamente. Substituindo a Equação (B.3) em (B.1) e (B.4) em (B.2) produz:

$$\frac{d^2 w_H}{dx^2} - \frac{P}{D_s} w_H = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d^2 w_I}{dx^2} - \frac{P}{D_I} w_I = \frac{P \cdot \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{D_I} \quad (\text{B.8})$$

As respectivas soluções de (B.7) e (B.8) são:

$$w_H = A \cosh(\xi_H x) + B \sinh(\xi_H x) \quad |x| > l \quad (\text{B.9})$$

$$w_I = C \cosh(\xi_H x) + F \sinh(\xi_H x) - \hat{e} + \frac{M^{therm}}{P} \quad |x| \leq l \quad (\text{B.10})$$

onde:

$$\xi_H = \sqrt{\frac{P}{D_s}} \quad (\text{B.11})$$

$$\xi_I = \sqrt{\frac{P}{D_I}} \quad (\text{B.12})$$

As quatro constantes de integração são determinadas a partir das seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{dw_I}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$w_H(l) = w_I(l) \quad (\text{B.14})$$

$$\left. \frac{dw_H}{dx} \right|_{(l)} = \left. \frac{dw_I}{dx} \right|_{(l)} \quad (\text{B.15})$$

$$w_H(L) = 0 \quad (\text{B.16})$$

A Condição da Equação (B.13) exige que:

$$F = 0 \quad (\text{B.17})$$

Por outro lado, a condição da Equação (B.16) fornece:

$$A = -B \tanh(\xi_H L) \quad (\text{B.18})$$

E a compatibilidade da Equação (B.14) exige que:

$$B[-\tanh(\xi_H L)\cosh(\xi_H l) + \operatorname{senh}(\xi_H l)] = C \cosh(\xi_I l) - \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \quad (B.19)$$

Assim:

$$C = B \frac{[-\tanh(\xi_H L)\cosh(\xi_H l) + \operatorname{senh}(\xi_H l)]}{\cosh(\xi_I l)} + \frac{\left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_I l)} \quad (B.20)$$

E o equilíbrio da deflexão, Equação (B.17) exige que:

$$\xi_I C \operatorname{senh}(\xi_I l) = B \xi_H [-\tanh(\xi_H L) \operatorname{senh}(\xi_H l) + \cosh(\xi_H l)] \quad (B.21)$$

A substituição de (B.20) em (B.21) fornece:

$$B = - \frac{\left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_H l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)] \left\{ 1 - \frac{\xi_H [1 - \tanh(\xi_H L) \tanh(\xi_H l)]}{\xi_I \tanh(\xi_I l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)]} \right\}} \quad (B.22)$$

A partir da Equação (B.20) com B dado por (B.22), C é encontrado:

$$C = \frac{\left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_H l)} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_I \tanh(\xi_I l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)]}{\xi_H [1 - \tanh(\xi_H L) \tanh(\xi_H l)]}} \right\} \quad (B.23)$$

Com as constantes de integração A , B , C e F obtidas, a análise do momento fletor no aderente para uma configuração de *doubler* é concluída.

É interessante notar a partir da Equação (B.10) que a deflexão no centro do *doubler* é dada por:

$$\begin{aligned}
w_I(x=0) &= C - \left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) \\
&= \frac{\left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_I l)} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_I \tanh(\xi_I l) [\tanh(\xi_H l) - \tanh(\xi_H L)]}{\xi_H [1 - \tanh(\xi_H L) \tanh(\xi_H l)]}} - \cosh(\xi_I l) \right\}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Para $L \gg l$, $\tanh(\xi_H L) \rightarrow 1$, e:

$$C \rightarrow \frac{\left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \operatorname{sen}(\xi_I l)} \tag{B.25}$$

De modo que w_i da Equação (B.10) é reduzido para a seguinte equação:

$$w_I(x) = \frac{\left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) \cosh(\xi_I x)}{\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \operatorname{sen}(\xi_I l)} - \left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right) \quad \text{for } L \gg 1 \tag{B.26}$$

O momento fletor na região da *overlap* segue das Equações (B.21) e (B.4) como:

$$M_I(x) = \frac{P \left(e^{-\frac{\hat{M}^{therm}}{P}} \right)}{\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \operatorname{senh}(\xi_I l)} \cosh(\xi_I x) \quad \text{para } L \gg 1 \tag{B.27}$$

É interessante notar da Equação (B.27) que para uma combinação de uma grande *overlap* e um alto carregamento P , o momento fletor desaparece no meio do *doubler* desde que $\cosh(\xi_4 c) \gg 1$, $\operatorname{senh}(\xi_4 c) \gg 1$ para $\xi_1 l \gg 1$.

Fisicamente, para um alto carregamento P , a combinação *skin / doubler* tenta defletir o suficiente para alinhar o seu centroide com a linha de ação da carga aplicada.

Por outro lado, o momento fletor fora da região da *overlap* é resolvido a partir das Equações (B.3), (B.13) e (B.18) como:

$$M_H(x) = -D_s \frac{d^2 w_H}{dx^2} = -D_s \xi_H^2 B [-\tanh(\xi_H L) \cosh(\xi_H x) + \text{sen}(\xi_H x)] \quad (\text{B.28})$$

onde B é dado por (B.22). Novamente, limitando-se para o caso $L \gg 1$, a Equação (B.28) pode ser reescrita como:

$$M_H(x) = -\frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) [\text{senh}(\xi_H x) - \cosh(\xi_H x)]}{\cosh(\xi_H l) [1 - \tanh(\xi_H l)] \left[1 + \frac{\xi_H}{\xi_I \tanh(\xi_I l)} \right]} \quad (\text{B.29})$$

Assim, o momento fletor no final do *doubler* é dado como igual a:

$$M_H(l) = \frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l)}{1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l)} \quad (\text{B.30})$$

B.2 Estágio II: Solução para a Tensão de Peel no Adesivo

Nesta seção assume-se que a tensão de *peel* está desacoplada de quaisquer efeitos de tensões de cisalhamento no adesivo.

A geometria e terminologia para a análise da tensão de *peel* são mostradas na Figura 3.10 (c). Em contraste com o estágio I, a presente análise contabiliza uma fina camada de adesivo.

O equilíbrio dos momentos requer que:

$$\frac{dM_p}{dx} = V_p - \frac{\tau^{(A)} t_p}{2} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{dM_s}{dx} = V_s - \frac{\tau^{(A)} t_s}{2} \quad (\text{B.32})$$

onde os índices p e s denotam o *patch (doubler)* e o *skin*, respectivamente.

O equilíbrio da força longitudinal requer que:

$$\frac{dN_p}{dx} - \tau^{(A)} = 0 \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{dN_s}{dx} + \tau^{(A)} = 0 \quad (\text{B.34})$$

Enquanto o equilíbrio da força transversal requer:

$$\frac{dV_p}{dx} - \sigma^{(A)} = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{dV_s}{dx} + \sigma^{(A)} = 0 \quad (\text{B.36})$$

Da teoria da flexão de vigas:

$$\frac{d^2 w_p}{dx^2} = -\frac{M_p}{D_p} \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{M_s}{D_s} \quad (\text{B.38})$$

As equações constitutivas da relação tensão-deslocamento do *skin* e do *doubler* para a tensão de *peel* e de cisalhamento do adesivo foram estabelecidos nas Equações (A.25) e (A.6) e são repetidas aqui por conveniência:

$$\varepsilon^{(A)} = \frac{\sigma^{(A)}}{E_A} = \frac{w_p - w_s}{t_A} \quad (\text{B.39})$$

$$\gamma^{(A)} = \frac{\tau^{(A)}}{G_A} = \frac{u_p - u_s}{t_A} \quad (\text{B.40})$$

Verifica-se aqui que o deslocamento longitudinal dos aderentes não é uniforme através de sua espessura. O deslocamento longitudinal u_p e u_s do *doubler* estão relacionados com as forças longitudinais e os momentos fletores, todos por unidade de largura, por:

$$\frac{du_p}{dx} = \frac{N_p}{E_p t_p} - \frac{M_p t_p}{2D_p} + \alpha_p \Delta T \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{du_s}{dx} = \frac{N_s}{E_s t_s} + \frac{M_s t_s}{2D_s} + \alpha_s \Delta T \quad (\text{B.42})$$

O primeiro termo no lado direito da Equação (B.41) ou (B.42) é a média da deformação longitudinal devido à carga axial ($= \sigma/E' = N/tE'$), enquanto o segundo termo é a deformação longitudinal devido ao momento fletor na parte inferior do *doubler* ou superior do *skin* $\left[= d^2 w / dx^2 (\pm t/2) = -\frac{M}{D} (\pm t/2) \right]$, e o último termo representa a deformação devido à diferença de temperatura.

E novamente para desacoplar as equações diferenciais que governam a tensão de *peel* e de cisalhamento no adesivo, a tensão cisalhante no adesivo nas Equações (B.31) e (B.32) são novamente dadas como constante. Assim, derivando as Equações (B.31) e (B.32) e subtraindo uma da outra:

$$\frac{d^2 M_s}{dx^2} - \frac{d^2 M_p}{dx^2} = \frac{dV_s}{dx} - \frac{dV_p}{dx} \quad (\text{B.43})$$

Os deslocamentos transversais w_p e w_s podem ser expressados alternativamente como abaixo, assumindo que o comprimento total $L \gg I$,

$$w_s = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + \frac{1}{2}(w_s + w_p) = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + w_i \quad (\text{B.44})$$

$$w_p = -\frac{1}{2}(w_s - w_p) + \frac{1}{2}(w_s + w_p) = \frac{1}{2}(w_s - w_p) + w_i$$

onde w_i é a deflexão média do *skin* e *doubler*, que é dada pela equação (B.26).

Note-se que o w_i é obtido a partir do estágio I da análise, que inclui o efeito da não-linearidade geométrica. Por outro lado, a diferença $\frac{1}{2}(w_p - w_s)$ será obtida a partir do estágio II (que é linearmente geométrico).

Usando a Equação (B.25) e a Equação (B.26) para eliminar as forças cortantes, e introduzindo as relações da Equação (B.27) e da Equação (B.28), permite que a Equação (B.43) seja reescrita na forma:

$$-D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + D_p \frac{d^4 w_p}{dx^4} + 2\sigma^{(A)} = 0 \quad (\text{B.45})$$

Das Equações (B.44) e (B.45), chega-se finalmente as seguintes equações:

$$\frac{(D_s + D_p)}{2} \frac{d^4}{dx^4} (w_s - w_p) + \frac{2E_A}{t_A} (w_s - w_p) = -(D_s - D_p) \frac{d^4 w_I}{dx^4} \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{w_s - w_p}{2} \right) + \frac{4E_A}{t_A (D_s + D_p)} \left(\frac{w_s - w_p}{2} \right) = - \frac{(D_s - D_p)}{(D_s + D_p)} \frac{d^4 w_I}{dx^4} \quad (\text{B.47})$$

A solução complementar da Equação (B.47) é:

$$\begin{aligned} \frac{w_s - w_p}{2} = & A \cosh(vx) \cos(vx) + B \operatorname{srnh}(vx) \operatorname{sen}(vx) \\ & + G \operatorname{senh}(vx) \cos(vx) + H \cosh(vx) \operatorname{sen}(vx) \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

onde:

$$v^4 = \frac{E_A}{t_A (D_s + D_p)} \quad (\text{B.49})$$

A solução particular da Equação (B.47) pode ser encontrada expressando o lado direito da Equação (B.47) e usando a Equação (B.26) como:

$$-\frac{(D_s - D_p) d^4 w_I}{(D_s + D_p) dx^4} = -\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \xi_I^4 \cosh(\xi_I x)}{(D_s + D_p) \left[\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I l) \right]} \quad (B.50)$$

Após a substituição de (B.50) em (B.47), então a solução particular de (B.47) pode ser determinada como:

$$\frac{w_s - w_p}{2} = J \cosh(\xi_I x) \quad (B.51)$$

Com o coeficiente J dado por:

$$J(\xi_I^4 + 4v^4) = -\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \xi_I^4}{(D_s - D_p) \left[\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I l) \right]} \quad (B.52)$$

ou

$$\begin{aligned} J &= -\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{(D_s + D_p) \left(1 + \frac{4v^4}{\xi_I^4} \right) \left[\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I l) \right]} \\ &= -\frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) \left(\frac{4E_A}{t_A \xi_I^4} \right) \right] \left[\cosh(\xi_I l) + \frac{\xi_I}{\xi_H} \sinh(\xi_I l) \right]} \end{aligned} \quad (B.53)$$

Para simplificar a manipulação algébrica, uma única solução para todos os *doublers* longos de comprimento $2l$ será realizada nesta seção. Para um *doubler* suficientemente longo e para pontos dentro da zona da *overlap* e perto da extremidade, a Equação (B.51) pode ser simplificada como:

$$\frac{w_s - w_p}{2} \approx - \frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_I^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \right)} e^{-\xi_I \zeta} = C_c e^{-\xi_I \zeta} \quad (\text{B.54})$$

onde $\zeta = l - x$,

$$C_c = - \frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_I^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \right)} \quad (\text{B.55})$$

Por outro lado, a solução complementar (B.48) é aproximada por:

$$\frac{w_s - w_p}{2} \approx e^{-v\zeta} [A \cos(v\zeta) + B \sin(v\zeta)] \quad (\text{B.56})$$

Assim, a solução geral para o caso de uma *overlap* longa é dada por:

$$\frac{w_s - w_p}{2} = e^{-v\zeta} [A \cos(v\zeta) + B \sin(v\zeta)] + C_c e^{-\xi_I \zeta} \quad (\text{B.57})$$

Para determinar as constantes A e B , A integral da tensão de *peel* na área colada deverá ser nula, desde que a tensão de *peel* não exerça nenhuma força normal (vertical) através da camada colada. Consequentemente, de (B.39):

$$\int_0^{\infty} \sigma^{(A)} dx = - \frac{E_A}{t_A} \int_0^{\infty} (w_s - w_p) dx = 0 \quad (\text{B.58})$$

E substituindo a Equação (B.60) em (B.58):

$$A + B + \frac{2vC_c}{\xi_I} = 0 \quad (\text{B.59})$$

A outra condição de contorno envolve o momento fletor no *skin* e no *doubler* na extremidade da *overlap*. Eles devem ser iguais aos valores fora da *overlap*,

onde o momento do *doubler* é igual a zero, enquanto o momento no *skin* é dada pela Equação (B.30) para $M_H(x=l)$. A partir das Equações (B.37), (B.38) e (B.57):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{M_p}{D_p} - \frac{M_s}{D_s} \right|_{x=l \text{ ou } \zeta=0} &= \left. \frac{d^2}{d\zeta^2} (w_s - w_p) \right|_{x=l \text{ ou } \zeta=0} \\
&= 4v^2 e^{-v\zeta} [A \operatorname{sen}(v\zeta) + B \cos(v\zeta)] + 2\xi_l^2 C_c e^{-\xi_l \zeta} \Big|_{\zeta=0} \\
&= 4v^2 B + 2\xi_l^2 C_c \\
&= -\frac{M_H(l)}{D_s}
\end{aligned} \tag{B.60}$$

Então, os coeficientes A e B são dados como:

$$B = -\frac{M_H(l)}{4D_s v^2} - \frac{\xi_l^2 C_c}{2v^2} \tag{B.61}$$

$$A = -\frac{M_H(l)}{4D_s v^2} - \frac{\xi_l^2 C_c}{2v^2} - \frac{2v C_c}{\xi_l}$$

Fazendo as adequadas substituições, obtém-se:

$$B = -\frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \frac{\xi_l}{\xi_H} \tanh(\xi_l l)}{4D_s v^2 \left[1 + \frac{\xi_l}{\xi_H} \tanh(\xi_l l) \right]} + \frac{\xi_l^2 (D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{2v^2 \left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_l^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_l}{\xi_H} \right)} \tag{B.62}$$

$$A = -\frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) \frac{\xi_l}{\xi_H} \tanh(\xi_l l)}{4D_s v^2 \left[1 + \frac{\xi_l}{\xi_H} \tanh(\xi_l l) \right]} - \left(\frac{\xi_l^2}{2v^2} - \frac{2v}{\xi_l} \right) \frac{(D_s - D_p) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_l^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_l}{\xi_H} \right)} \tag{B.63}$$

A máxima tensão de *peel* é então calculada a partir das Equações (B.39) e (B.57) em $\zeta = 0$ com coeficientes A , B e C_c já definidos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\max}^{(A)} &= -\frac{E_A}{t_A} (w_s - w_p) \Big|_{\zeta=0} = -2 \frac{E_A}{t_A} \left\{ e^{-v\zeta} [A \cos(vx) + B \sin(vx)] + C_c e^{-\xi_I \zeta} \right\} \Big|_{\zeta=0} \\
&= -\frac{P \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right) E_A \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l)}{2D_s v^2 t_A \left[1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \tanh(\xi_I l) \right]} \\
&\quad + \frac{E_A \left(\frac{\xi_I^2}{v^2} - \frac{4v}{\xi_I} + 2 \right) \left(D_s - D_p \right) \left(e^{-\frac{M^{therm}}{P}} \right)}{\left[(D_s + D_p) + \frac{4E_A}{t_A \xi_I^4} \right] \left(1 + \frac{\xi_I}{\xi_H} \right)}
\end{aligned} \tag{B.64}$$

B.3 Estágio III: Solução para Tensão Cisalhante no Adesivo

A equação diferencial que governa o comportamento ao cisalhamento do adesivo segue as Equações (B.41), (B.42), (3.106), (B.31), (B.32) e (B.33).

$$\frac{d^2 u_p}{dx^2} = \frac{1}{E'_p t_p} \frac{dN_p}{dx} - \frac{t_p}{2D_p} \frac{dM_p}{dx} = \frac{\tau^{(A)}}{E'_p t_p} - \frac{t_p}{2D_p} \left(V_p - \frac{\tau^{(A)} t_p}{2} \right) \tag{B.65}$$

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} = \frac{1}{E'_s t_s} \frac{dN_s}{dx} + \frac{t_s}{2D_s} \frac{dM_s}{dx} = \frac{\tau^{(A)}}{E'_s t_s} + \frac{t_s}{2D_s} \left(V_s - \frac{\tau^{(A)} t_s}{2} \right) \tag{B.66}$$

Subtraindo a Equação (B.66) da (B.65) e fazendo uso da Equação (B.40) fornece:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_p}{dx^2} - \frac{d^2 u_s}{ds^2} &= \frac{t_A}{G_A} \frac{d^2 \tau^{(A)}}{dx^2} \\
&= \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \tau^{(A)} - \frac{V_p t_p}{2D_p} - \frac{V_s t_s}{2D_s} + \left(\frac{t_p^2}{4D_p} + \frac{t_s^2}{4D_s} \right) \tau^{(A)} \\
&= \left(\frac{4}{E'_p t_p} + \frac{4}{E'_s t_s} \right) \tau^{(A)} - \left(\frac{V_p t_p}{2D_p} + \frac{V_s t_s}{2D_s} \right)
\end{aligned} \tag{B.67}$$

Derivando uma vez a Equação (B.67) e substituindo as Equações (B.35) e (B.36), respectivamente para $\frac{dV_p}{dx}$ e $\frac{dV_s}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{t_A}{G_A} \frac{d^3 \tau^{(A)}}{dx^3} &= 4 \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} - \left(\frac{t_p}{2D_p} \frac{dV_p}{dx} + \frac{t_s}{2D_s} \frac{dV_s}{dx} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} - \sigma^{(A)} \left(\frac{t_p}{2D_p} - \frac{t_s}{2D_s} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

ou

$$\frac{d^3 \tau^{(A)}}{dx^3} - \frac{4G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} = - \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{t_p}{2D_p} - \frac{t_s}{2D_s} \right) \sigma^{(A)} \quad (\text{B.69})$$

Da Equação (B.68), o lado direito será igual à zero para aderentes equilibrados. Por simplicidade, a Equação (B.68) será aproximada como:

$$\frac{d^3 \tau^{(A)}}{dx^3} - \frac{4G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} \approx 0 \quad (\text{B.70})$$

A equação (B.70) também pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 \tau^{(A)}}{dx^2} - \frac{4G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \frac{d\tau^{(A)}}{dx} \right] = 0 \quad (\text{B.71})$$

ou

$$\frac{d^2 \tau^{(A)}}{dx^2} - \frac{4G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E'_p t_p} + \frac{1}{E'_s t_s} \right) \tau^{(A)} = \text{constante} \quad (\text{B.72})$$

Assim a solução geral de (B.70) é dada por:

$$\tau^{(A)} = A \cosh(2\beta_A x) + B \sinh(2\beta_A x) + C \quad (\text{B.73})$$

onde:

$$\beta_A = \sqrt{\frac{G_A}{t_A} \left(\frac{1}{E_p' t_p} + \frac{1}{E_s' t_s} \right)} \quad (\text{B.74})$$

As constantes A , B e C são determinadas a partir das condições de contorno em $\frac{d\tau^{(A)}}{dx}$ e $\tau^{(A)}$. Derivando a Equação (B.73) uma vez e utilizando os resultados das Equações (B.40) e (B.42):

$$\begin{aligned} \frac{d\tau^{(A)}}{dx} &= 2\beta_A [A \sinh(2\beta_A x) + B \cosh(2\beta_A x)] = \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{du_p}{dx} - \frac{du_s}{dx} \right) \\ &= \frac{G_A}{t_A} \left(\frac{N_p}{E_p' t_p} - \frac{M_p t_p}{2D_p} - \frac{N_s}{E_s' t_s} - \frac{M_s t_s}{2D_s} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right) \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

As condições de contorno para as configurações do *doubler* são dadas abaixo:

$$\tau^{(A)}(0) = 0 \quad (\text{B.76})$$

$$N_s(l) = P \quad (\text{B.77})$$

$$N_p(l) = 0 \quad (\text{B.78})$$

e:

$$M_s(l) = M_H(l) \quad (\text{B.79})$$

$$M_p(l) = 0$$

onde $M_H(l)$ é obtido na análise do estágio I, e dada pela equação (B.30). Além disso, a carga no *doubler* em $x = 0$ deve ser igual à integral da tensão de cisalhamento ao longo do adesivo, ou seja:

$$\int_0^l \tau dx = N_p(0) \quad (\text{B.80})$$

Para uma zona colada longa, o momento fletor no meio do *doubler* tenderá a zero. Nesse caso, $N_p(0)$ pode ser calculado como segue.

Do equilíbrio da força horizontal:

$$\begin{aligned} \sigma_s(0) &= \frac{\sigma_\infty}{1+S} \\ N_s(0) &= t_s \sigma_s(0) = \frac{\sigma_\infty t_s}{1+S} \\ \varepsilon_s(0) &= \frac{\sigma_s(0)}{E'_s} = \frac{\sigma_0}{E'_s} = \frac{\sigma_\infty t_s}{E'_s(1+S)} \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

e observando que $\varepsilon_p(0) = \varepsilon_s(0)$, então:

$$N_p(0) = t_p \sigma_p(0) = E'_p t_p \varepsilon_p(0) = E'_p t_p \varepsilon_s(0) = \frac{E'_p t_p \sigma_\infty}{E'_s(1+S)} = \frac{S \sigma_\infty t_s}{(1+S)} \quad (\text{B.82})$$

Os resultados acima para $N_p(0)$ e $N_s(0)$ não conta o efeito térmico entre os dois aderentes. Quando este efeito térmico está incluído, as expressões para $N_s(0)$ e $N_p(0)$ têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_s(0) &= \frac{\sigma_\infty t_s}{(1+S)} + F^{therm} \\ N_p(0) &= \frac{S \sigma_\infty t_s}{(1+S)} - F^{therm} \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

onde F_{therm} é definido na Equação (B.2). Assim, (B.80) torna-se:

$$\int_0^l \tau^{(A)} dx = \frac{S \sigma_\infty t_s}{(1+S)} - F^{therm} \quad (\text{B.84})$$

Observa-se que para uma *overlap* longa, ou seja, $\beta_A l \gg 1$, a tensão cisalhante no adesivo $\tau^{(A)}$ na extremidade do *doubler* pode ser aproximada pela Equação (B.73) como:

$$\tau^{(A)} = B e^{-2\beta_A \zeta} + C \quad (\text{B.85})$$

onde a coordenada ζ é medida a partir do final do *doubler*. As constantes B e C são determinadas como segue. A partir da Equação (B.84), com $\tau^{(A)}$ definida pela Equação (B.85) e notando que $e^{-2\beta_s l} \approx 0$ para $\beta_A l \gg 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^l \tau^{(A)} dx &= \int_0^l \tau^{(A)} d\zeta = -\frac{B}{2\beta_A} e^{-2\beta_A \zeta} \Big|_0^l + Cl \\ &= -\frac{B}{2\beta_A} e^{-2\beta_A l} + \frac{B}{2\beta_A} + Cl \approx \frac{B}{2\beta_A} + Cl \\ &= \frac{S}{1+S} \sigma_\infty t_s - F^{therm} \end{aligned} \quad (B.86)$$

Resolvendo $\frac{d\tau^{(A)}}{dx}$ em $x=l$ ou $\zeta = 0$ a partir da Equação (B.75) com N_p e N_s determinados pelas condições (B.77)-(B.79) e via Equação (B.85), igualando os resultados, obtém:

$$\left. \frac{d\tau^{(A)}}{dx} \right|_{x=l \text{ ou } \zeta=0} = \left[-\frac{P}{E_s' t_s} - \frac{t_s M_H(l)}{D_s} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right] \frac{G_A}{t_A} = -2\beta_A B \quad (B.87)$$

Então segue que:

$$B = \frac{G_A}{2\beta_A t_A} \left[\frac{t_s M_H(l)}{2D_s} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right] \quad (B.88)$$

$$C = \frac{S}{1+S} \left(\frac{\sigma_\infty t_s}{l} \right) - \frac{1}{4\beta_A^2 t_A} \left[\frac{t_s M_H(l)}{2D_s} + \frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right] \left(\frac{G_A}{t_A} \right) - \frac{F^{therm}}{l}$$

assim:

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^{(A)} &= \frac{S}{1+S} \left(\frac{\sigma_\infty t_s}{l} \right) \\ &+ \frac{G_A}{2\beta_A t_A} \left[\frac{t_s M_H(l)}{2D_s} + \frac{\sigma_\infty}{E_s'} + (\alpha_p - \alpha_s) \Delta T \right] \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta_A l} \right) - \frac{F^{therm}}{l} \right] \end{aligned} \quad (B.89)$$