MARCELO MATOS MARTINS

Análise da Extrusão de Metais pelo Método dos Volumes Finitos

111/2012

CAMPINAS
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

MARCELO MATOS MARTINS

Análise da Extrusão de Metais pelo Método dos Volumes Finitos

Orientador: Professor Doutor Sérgio Tonini Button
Co-orientador: Professor Doutor José Divo Bressan

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração: Materiais e Processos de Fabricação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO MATOS MARTINS, E ORIENTADA PELO PROF. DR SÉRGIO TONINI BUTTON.

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Martins, Marcelo Matos
M366a Análise da extrusão de metais pelo método dos volumes finitos / Marcelo Matos Martins – Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientadores: Sérgio Tonini Button
Coorientador: José Divo Bressan.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Metais - Extrusão. 2. Método dos volumes finitos. 3. Mecânica dos fluidos. 4. Fluidodinâmica computacional (CFD). 5. Processos de fabricação. I. Button, Sérgio Tonini, 1958-. II. Bressan, José Divo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Metal extrusion analysis by finite volume method
Palavras-chave em Inglês: Metals - Extrusion, Finite Volume Method, Fluid mechanics, Computational fluid dynamics (CFD), Manufacturing processes
Área de concentração: Materiais e Processos de Fabricação
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Renato Pavanello, Alberto Luiz Serpa, Miguel Vaz Junior, Luciano Pessanha Moreira
Data da defesa: 10-08-2012
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS

TESE DE DOUTORADO

Análise da Extrusão de Metais pelo Método dos Volumes Finitos

Autor: Marcelo Matos Martins
Orientador: Professor Doutor Sérgio Tonini Button
Co-orientador: Professor Doutor José Divo Bressan

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

_____

Prof. Dr. Sérgio Tonini Button, Presidente
Universidade Estadual de Campinas

_____

Prof. Dr. Renato Pavanello
Universidade Estadual de Campinas

_____

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
Universidade Estadual de Campinas

_____

Prof. Dr. Miguel Vaz Junior
Universidade do Estado de Santa Catarina

_____

Prof. Dr. Luciano Pessanha Moreira
Universidade Federal Fluminense

Campinas, 10 de Agosto de 2012.

Dedico este trabalho as duas pessoas que durante esta caminha estiveram comigo, em cada instante, na minha presença ou na minha mente, em cada lugar que estava e que me deram a coragem e a força que precisei para chegar até este momento.

Denise minha amada esposa e minha linda filha Amanda.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus que me deu esperança nos momentos difíceis.

O caminho que trilhamos para conseguir realizar um trabalho como este é difícil e às vezes solitário. Porém, acabamos encontrando pessoas que tornam este caminho mais agradável. Sendo justo, então, prestar homenagem a elas neste momento. Por isso gostaria de agradecer:

A minha Esposa Denise e a minha filha Amanda pela paciência e cumplicidade em todos os momentos.

Aos meus pais Anselmo e Santina.

Aos meus irmãos Sirlene, Mara, Junior e Marcos.

A todos os meus familiares.

Ao meu Orientador Prof. Sérgio Tonini Button e co-orientador Prof. José Divo Bressan por toda ajuda e motivação nos momentos difíceis.

Aos meus colegas do laboratório da conformação plástica da Faculdade de Engenharia da Unicamp.

Aos meus colegas da University College Dublin, especialmente ao Prof. Alojz Ivankovic.

Aos meus colegas do Laboratório de tribologia e conformação mecânica da Udesc-Joinville.

A todos os professores e profissionais da Faculdade de Engenharia da Unicamp, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

“A grandeza não consiste em receber honras, mas em merece-las.”

Aristóteles

Resumo

A simulação numérica computacional é nos dia de hoje frequentemente aplicada na elaboração de projetos ou análise dos processos de conformação plástica dos metais. A extrusão de metais é um dos principais processos de conformação plástica e largamente aplicado na fabricação de produtos e peças na indústria metal-mecânica. Tradicionalmente, essas análises são feitas utilizando o Método dos Elementos Finitos. Entretanto, há um aumento no interesse dos pesquisadores na utilização do Método dos Volumes Finitos para este fim. A literatura sugere que o escoamento na extrusão de metais pode ser analisado pela formulação do escoamento plástico (flow Formulation). No qual, pode-se assumir como o escoamento de um fluido incompressível e viscoso. Essa hipótese pode ser assumida já que o processo de extrusão é um processo isocórico. O método MacCormack é geralmente aplicado para simular os escoamentos de fluidos compressíveis pelo Método do Volumes Finitos. No escoamento de um fluido incompressível ou no escoamento de metal não existe uma equação para a evolução da variável pressão, sendo necessário a utilização de um método de acoplamento entre a pressão e a velocidade. Este trabalho trata da apresentação de um novo esquema numérico para a determinação de informações sobre o escoamento de um fluido incompressível e viscoso e sobre o escoamento de metal em um processo de extrusão direta, ambos em regime permanente. As equações governantes foram discretizadas pelo Método dos Volume Finitos através do Método de MacCormack explícito para uma malha estruturada e co-localizada. O acoplamento entre a pressão e a velocidade foi feita pelo método SIMPLE. O novo esquema numérico foi aplicado em escoamentos incompressíveis e viscosos para a glicerina e em escoamento de metais em processos de extrusão direta para o chumbo e uma liga de alumínio. O escoamento da glicerina foi avaliado para o caso entre placas paralelas e em dutos circulares sob condição axissimétrica e obtiveram boa concordância em relação ao resultados analíticos. Os campos de velocidades obtidos para a extrusão de metal alcançaram rápida convergência, em torno de 20000 iterações, essa quantidade de iterações foi inferior a quantidade que a glicerina necessitou. Para todos os materiais analisados os resultados numéricos tiveram boa concordância em comparação com resultados analíticos e experimentais obtidas da literatura. O método MacCormack produziu resultados coerentes para o escoamento da glicerina e dos metais sem a necessidade da adição de

viscosidade artificial, como sugere a sua definição. Portanto, os resultados numéricos sugerem que o método MacCormack com o SIMPLE pode ser aplicado na resolução de escoamentos de fluidos incompressíveis e na conformação de metais além da sua tradicional aplicação na resolução de escoamentos compressíveis.

Palavras Chave: Metais – Extrusão; Método dos volumes finitos; Mecânica dos fluidos; Fluidodinâmica computacional (CFD); Processos de fabricação.

Abstract

Computational numerical simulation is nowadays largely applied in the design and analysis of metal forming process. Extrusion of metals is one main forming process largely applied in the manufacturing of metallic products or parts. Historically, the Finite Element Method has been applied for decades in extrusion analysis. However, recently in the academy, there is a trend to use Finite Volume Method: literature suggests that metal flow by extrusion can be analysed by the flow formulation. Thus, metal flow can be modelled such us an incompressible viscous fluid. This hypothesis can be assumed because extrusion process is an isochoric process. The MacCormack Method is commonly used to simulate compressible fluid flow by the finite volume method. However, metal extrusion and incompressible fluid flow do not present state equations for the evolution of pressure, and therefore, a velocity-pressure coupling method is necessary to obtain a consistent velocity and pressure fields. Present work proposes a new numerical scheme to obtain information about both incompressible viscous fluid flow and metal flow in the extrusion process, in steady state. The governing equations were discretized by Finite Volume Method, using the Explicit MacCormack Method to structured and collocated mesh. The SIMPLE Method was applied to attain pressure-velocity coupling. These new numerical scheme was applied to incompressible viscous fluid flow of glycerine and forward extrusion process of lead and an aluminium alloy. The numerical results for glicerine fluid flow for parallel plates and axisymmetric flow in circular tube cases had quite good agreement in relation to the analytical solutions. The incompressible metal extrusion velocity fields achieved faster convergence than for liquid glycerine after 20.000 iterations and a good agreement with analytical and experimental results obtained from literature. The MacCormack Method applied for both glycerine and metals produced consistent results without the need of artificial viscosity as employed by the compressible flow simulation approaches. Hence, the present numerical results also suggest that MacCormack Method and SIMPLE can be applied in the solution of incompressible fluid flow and metal forming processes in adition to the traditional application for compressible fluid flow.

Key Words: Metals – Extrusion; Finite Volume Method; Fluid mechanics; Computational fluid dynamics (CFD); Manufacturing processes.

Lista de Ilustrações

1.1	Comparação da quantidade de alumínio produzida anualmente e a quantidade dessa produção que foram extrudadas (Anuário Estatístico Abal 2009)	4
1.2	Percentual de consumo de alumínio na produção de produtos (Anuário Estatístico Abal 2009)	5
2.1.1	Processos de extrusão: (a) Extrusão direta; (b) Extrusão indireta ou inversa (DIETER, G.E., 1981)	13
2.1.2	Taxa de deformação para (a) Extrusão direta e (b) Extrusão indireta (VALBERG, H.S., 2010)	14
2.2.1	Distribuição de temperatura no tarugo, considerando o efeito da condução de calor no contato entre o tarugo e o container. (a) sem o contato; (b) com o contato. (PARVIAZIAN, F. *et al.*, 2009)	18
2.2.2	Distribuição da taxa de deformação equivalente na câmara de soldagem para os dois perfis de pontes. (a) pontiaguda e passo de tempo 356; (b) reta e passo de tempo 350. (KHAN, Y.A. *et al.*, 2010)	19
2.3.1	Distribuição de tensão equivalente (MPa) no final do processo de extrusão de liga de alumínio (TIERNAN, P. *et al*., 2005).	23
2.4.1	(a) Centrada no Vértice; (b) Centrada no Volume. (MALISKA, C.R., 2004).	25
2.4.2	(a) malha estruturada; (b) malha não estruturada. (MALISKA, C.R., 2004).	26
2.4.3	Comparação entre os resultados analíticos e numéricos por FVM para os deslocamentos. (HATTEL, J.H. *et al*., 1995).	28
2.4.4	Resultado para a interação fluido-sólido, onde as linha de fluxo e o prefíl de pressão na parte fluido e as tensões na parte sólido (SCHAFER, M. *et al*., 2001).	29
2.4.5	Resultado da extrusão. (1) temperatura (K) ; (2) taxa de deformação efetiva. (WILLIAMS, A.J. *et al*., 2002)	30
2.4.6	Comparação entre os resultados por FVM e experimentais para a distribuição dos contornos de velocidade (BASIC, H. *et al*., 2005).	31
2.4.7	Distribuição das componentes de velocidade nas direções x e y. Comparação entre resultados experimentais e resultados obtidos pelo FVM (BASIC et al., 2005).	32
2.4.8	Comparação entre as distribuições da taxa de deformação efetiva para FVM e FEM	32

(LOU, S. *et al*., 2008).

2.5.1 Arranjo Co-localizado. (a) Pressão e componentes da velocidade avaliados no mesmo ponto. (b) Velocidades deslocadas para as faces do volume de controle, estratégia para a solução do problema dos campos de pressão oscilatórios. 36

2.5.2 Arranjo desencontrado. Especificação dos volumes de controle para cada variável do problema. 37

2.5.3 Funções de interpolação no tempo (MALISKA, C.R., 2004). 38

2.5.4 Solução de uma equação de Burger usando o Método de MacCormack (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997). 39

3.1.1 Corpo representando um volume no espaço. 42

3.5.3.1 Ensaio uniaxial para dois tipos de carregamentos. Ponto A somente deformação elástica. Ponto B deformação elástica e plástica. 58

4.1.1 Volume de controle quadriláteral com a especificação dos vetores normais a cada lado. 79

4.2.1 Esquema representando a avaliação dos vetores de fluxo e normal para o passo Preditor. 81

4.2.2 Esquema representando a avaliação dos vetores de fluxo e normal para o passo Corretor. 82

4.2.3 Esquema representando a sequência dos vetores normais às superfícies do volume de controle. 83

4.3.1 Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008). 89

4.4.1 Representação dos volumes fantasmas em uma malha qualquer. 90

5.1.1 Fluxograma do código computacional, escrito em linguagem FORTRAN, para o cálculo dos campos de velocidade e pressão no escoamento de um fluido incompressível e viscoso em regime permanente. 94

5.1.2 Representação do esquema da geometria para o escoamento entre placas paralelas. 95

5.1.3 Malha com 110 volumes de controle na direção longitudinal (x) e 10 volumes de controle na direção transversal (y), utilizada no escoamento da glicerina. 96

5.1.4 Comparação entre o perfil de velocidade longitudinal numérica e analítica para a saída do canal no escoamento da glicerina em regime permanente. 97

5.1.5 Variação de acordo com o número de iterações dos contornos da velocidade longitudinal *Vx* numérica até o escoamento tornar-se completamente desenvolvido. 98

5.1.6	Representa o perfil da velocidade longitudinal *Vx* numérica, para o escoamento da glicerina completamente desenvolvido (iteração 323000).	98
5.1.7	Variação de acordo com o número de iterações dos contornos da pressão numérica até o escoamento tornar-se completamente desenvolvido.	99
5.1.8	Representa os contornos do campo de pressão, para o escoamento da glicerina completamente desenvolvido, considerando um gradiente de pressão de 24000 Pa.	100
5.1.9	Representação da formação do perfil parabólico, para a velocidade longitudinal numérica, na extensão do canal, considerando o escoamento da glicerina complemente desenvolvido.	100
5.1.10	Convergência para a velocidade longitudinal (*Vx*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,8), (55x8) e (107,8).	101
5.1.11	Convergência para a velocidade na direção transversal (*Vy*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,8), (55x8) e (107,8).	102
5.1.12	Redução da razão entre a correção da pressão e a pressão (*PL/P*) no mesmo volume de controle, para os volumes de controle nas posições (3,8), (55x8) e (107,8).	102
5.1.13	Variação do refinamento da malha em função da aproximação do resultado numérico em relação do resultado analítico, para a velocidade longitudinal *Vx*.	103
5.1.14	Redução do "Erro Médio quadrático" em função do aumento do número de volumes de controle, ou seja, o refinamento da malha.	104
5.1.15	Variação coeficiente de sub-relaxação α para um número de iterações igual a 323000.	104
5.1.16	O gráfico apresenta a variação do coeficiente de subrelaxação α para um mesmo gradiente de pressão, resultando exatamente nos mesmos valores de velocidade longitudinal, independente do valor de α.	105
5.1.17	Comparação entre o resultado numérico e analítico, para a velocidade longitudinal, considerando a variação do passo de tempo. Para a malha com 110x10 volumes de controle o passo de tempo que produz o melhor resultado foi o valor de 10^{-6}.	106
5.1.18	Comparação entre o "Erro Médio Qradrático", para os resultados numéricos com diferentes passos de tempo, com o resultado analítico para a velocidade longitudinal. Considerando uma malha com 110x10 volumes de controle. Pode-se perceber que o melhor resultado foi alcançado com o valor de 10^{-6}.	107
5.1.19	Comparação entre o resultado numérico e analítico, para a velocidade longitudinal, considerando a variação do passo de tempo. Para a malha com 150x14 volumes de controle o passo de tempo que produz melhor resultado foi o valor de $9.0x10^{-7}$.	107

5.1.20	Comparação entre o "Erro Médio Qradrático", para os resultados numéricos com diferentes passos de tempo com o resultado analítico para a velocidade longitudinal, considerando uma malha com 150x14 volumes de controle. Pode-se perceber que o melhor resultado foi alcançado com o valor de $9.0x10^{-7}$.	108
5.2.1	Representação do esquema da geometria da seção meridiana do duto cílindrico para o escoamento em condição axissimétrica.	109
5.2.2	Malha com 110 volumes de controle na direção axial (z) e 10 volumes de controle na direção radial (r), utilizada no escoamento da glicerina em condição axissimétrica.	110
5.2.3	Comparação entre o perfil de velocidade axial numérica e analítica para a saída do canal no escoamento da glicerina em regime permanente.	110
5.2.4	Convergência para a velocidade axial (*Vz*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,9), (55x9) e (109,9).	111
5.2.5	Convergência para a velocidade na direção radial (*Vr*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,9), (55x9) e (109,9).	112
5.2.6	Redução da razão entre a correção da pressão e a pressão (*PL/P*) no mesmo volume de controle, para os volumes de controle nas posições (3,9), (55x9) e (109,9).	112
5.3.1	Fluxograma do código computacional para o cálculo dos campos de velocidade para o escoamento na extrusão analítica, do chumbo e do alumínio.	113
5.3.3.1	Esquema de análise analítica da distribuição das velocidades em um processo de extrusão.	115
5.3.1.2	Geometria utilizada para análise da extrusão direta com matriz cônica pelo método analítico e numérico. Malha com 1200 volumes de controle.	115
5.3.1.3	Comparação entre os contornos da velocidade radial analítica ($v_{r_analítico}$) e os contornos da velocidade numérica radial ($v_{r_numérica}$), para a extrusão direta sem atrito.	116
5.3.1.4	Comparação entre os contornos da velocidade axial analítica ($v_{z_analítico}$) e os contornos da velocidade numérica axial ($v_{z_numérica}$), para a extrusão direta sem atrito.	
5.3.2.1	Convergência para a velocidade axial (*Vz*), para a malha com 1463 volumes de controle, dos volumes de controle nos pontos de posição (3,18), (34,18) e (75,18).	120
5.3.2.2	Convergência para a velocidade radial (*Vr*), para a malha com 1463 volumes de controle, nos volumes de controle nos pontos de posição (3,18), (34,18) e (75,18).	120
5.3.2.3	Convergência para a pressão (*p*), na região cônica, para as malha 1, com 1463 volumes, e para a malha 2, com 279 volumes.	121
5.3.2.4	Convergência para a velocidade axial (*Vz*), para a malha com 279 volume de controle,	122

nos volumes de controle nos pontos de posição (2,8), (16,8) e (30,8).
5.3.2.5 Convergência para a velocidade radial (*Vr*), para a malha com 279 volume de controle, nos volumes de controle nos pontos de posição (2,8), (16,8) e (30,8). 122
5.3.2.6 Comparação entre os contornos de velocidade axial numérica (*Vz*) do presente trabalho para a malha 1 (com 1463 volumes de controle) e os contornos da velocidade axial numérica (*Vz*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005). 123
5.3.2.7 Comparação entre os contornos de velocidade axial numérica (*Vz*) do presente trabalho para a malha 2 (com 279 volumes) e os contornos da velocidade axial numérica (*Vz*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005). 124
5.3.2.8 Comparação entre os contornos de velocidade radial numérica (*Vr*) do presente trabalho para a malha 1 (com 1463 volumes de controle) e os contornos da velocidade radial numérica (*Vr*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005). 125
5.3.2.9 Comparação entre os contornos de velocidade radial numérica (*Vr*) do presente trabalho para a malha 2 (com 279 volumes) e os contornos da velocidade radial numérica (*Vr*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005). 125
5.3.2.10 Comparação entre os contornos da pressão calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda). 126
5.3.2.11 Comparação entre os contornos da taxa de deformação equivalente calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda). 127
5.3.2.12 Comparação entre os contornos da tensão equivalente calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda). 127
5.3.2.13 Variação para os contornos da velocidade axial numérica (*Vz*), em relação à variação do coeficiente de atrito de Coulomb (μ). 129
5.3.3.1 Faixas geradas pela técnica "*Stripe Pattern Grid"* que mostra o escoamento do material no processo de deformação (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012). 130
5.3.3.2 Malha com 1110 volumes utilizados na simulação numérica do Al 6351. 131
5.3.3.3 Comparação entre os resultados numéricos da velocidade radial obtidos pelo Forge2008 e pelo presente trabalho, para a extrusão direta do alumínio 6351. 132
5.3.3.4 Comparação entre os resultados numéricos da velocidade axial obtidos pelo Forge2008 e pelo presente trabalho, para a extrusão direta do alumínio 6351. 133
5.3.3.5 Mostra a taxa de deformação equivalente para uma malha com 297 volumes e para uma malha com 1110 volumes considerando a extrusão direta do alumínio 6351. 133
5.3.3.6 Comparação entre os contornos das velocidades axiais experimentais (m/s) e os 134

contornos da velocidade axial numérica (m/s).

A1 Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008). 147

B1 Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008). 158

C1 Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008). 170

D1 Esquema representativo da relação entre a velocidade tangencial na região perto da interface matriz-material. 174

Lista de Tabelas

5.1.1	Propriedades da Glicerina.	95
5.3.1.1	Parâmetros utilizados para obtenção dos resultados numéricos do processo de extrusão que foram comparados com os resultados analíticos.	116
5.3.2.1	Informações para o processo numérico da extrusão direta de chumbo apresentado no artigo H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005).	118
5.3.2.2	Propriedades do material e parâmetros do processo de simulação numérica para a extrusão do chumbo.	119
5.3.3.1	Parâmetros do processo experimental e numérico utilizados na extrusão do alumínio 6351.	130

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A	-	Área	$[m^2]$
		Coeficiente da equação da correção da pressão	[ ]
		Quociente entre a massa específica e o passo de tempo	$[kg\ m^3\ s^{-1}]$
$\boldsymbol{b}$	-	Forças de corpo	[N]
B	-	Coeficiente da equação da correção da pressão	[ ]
c	-	Calor específico	$[J\ kg^{-1}\ K^{-1}]$
d	-	Derivada	[ ]
D	-	Derivada material	[ ]
		Diâmetro do duto	[m]
e	-	Energia	[J]
E	-	Módulo de Elasticidade	[Pa]
$\boldsymbol{F}$	-	Vetor de fluxo	[ ]
F		Função de escoamento	[ ]
G	-	Módulo de cisalhamento	[Pa]
h	-	Semi altura do canal	[m]
i	-	Versor do sistema cartesiano	[ ]
I	-	Tensor identidade	[ ]
j	-	Versor do sistema cartesiano	[ ]
k	-	Versor do sistema cartesiano	[ ]
		Condutividade térmica	$[J\ m^{-1}\ s^{-1}\ K^{-1}]$
K	-	Parâmetro de encruamento	[]
		Módulo de elasticidade volumétrico	
L	-	Quantidade de movimento linear	$[kg\ m\ s^{-1}]$
		Comprimento do canal	[m]
m	-	Massa de uma partícula	$[kg\ m^{-3}]$
		Fator de atrito	[]
n	-	Vetor normal	[]
p	-	Pressão	[Pa]
PL	-	Correção da pressão	[Pa]

q	-	Vetor fluxo de calor	[W m^{-2}]
Q	-	Taxa de transferência de calor	[W m^{-2}]
		Vetor das variáveis primitivas	[]
		Potencial plástico	[]
		Função potencial plástico	[]
r	-	Raio	[m]
		Direção radial	[m]
		Geração de calor	[W]
R		Raio do duto	[m]
Re	-	Número de Reynolds	[]
s	-	Vetor normal	[]
$\boldsymbol{S}$	-	Vetor termo fonte	[]
S		Estrutura metalurgica	[]
t	-	Tempo	[s]
		Iteração	[]
T	-	Temperatura	[K]
u	-	Componente do vetor velocidade na direção x	[m s^{-1}]
U	-	Taxa de variação de energia total	[]
$\boldsymbol{v}$	-	Vetor velocidade	[m s^{-1}]
v		Componente do vetor velocidade na direção y	
V	-	Volume	[m^3]
Vz	-	Componente do vetor velocidade na direção axial	[m s^{-1}]
Vr	-	Componente do vetor velocidade na direção radial	[m s^{-1}]
w	-	Componente do vetor velocidade na direção z	[m s^{-1}]
W	-	Trabalho	[J]
x	-	Direção do sistema de coordenadas cartesianas	[m]
y	-	Direção do sistema de coordenadas cartesianas	[m]
z	-	Direção do sistema de coordenadas cartesianas	[m]

Letras Gregas

$\boldsymbol{\alpha}$	-	Coeficiente de sub-relaxação	[]
$\boldsymbol{\gamma}$	-	Taxa de deformação de cisalhamento plástica	[]

$\boldsymbol{\delta}$	-	Delta de Kronecker	[]
		Distância entre os centros dos volumes de controle	[m]
Δt	-	Passo de tempo	[s]
Δx	-	Comprimento do volume de controle na direção x	[m]
Δy	-	Comprimento do volume de controle na direção y	[m]
ε	-	Deformação	[]
		Componentes do tensor de deformação	[]
		Componente do tensor taxa de deformação	[]
		Grau de deformação	[]
		Deformação equivalente	[]
		Taxa de deformação inicial	[]
θ	-	Tipo de formulação do tempo	[]
		Ângulo da matriz de extrusão	[rad]
		Direção angular no sistema de coordenadas cilíndrico	[]
λ	-	Multiplicador plástico	[]
		Constante de proporcionalidade plástica	[]
μ	-	Viscosidade dinâmica	[Pa s^{-1}]
		Segundo coeficiente de viscosidade	[]
		Coeficiente de atrito de Coulomb	[]
υ	-	Coeficiente de Poisson	[]
ρ	-	Massa específica	[kg m^{-3}]
$\boldsymbol{\sigma}$	-	Tensor de tensão	[]
σ		Componentes do tensor de tensão	[]
		Forças de superfície	[N]
		Tensão limite de escoamento	[Pa]
		Tensão desviadora	[Pa]
		Tensão equivalente	[Pa]
τ	-	Componentes de cisalhamento do tensor de tensões	[Pa]
ϕ	-	Variável genérica da função interpolção do tempo	[]

Superescritos

‘	-	Correções das variáveis primitivas
*	-	Valores estimados
.	-	Derivada em relação ao tempo
→	-	Vetor
t	-	Iteração
—	-	Valor médio
		Valor equivalente ou efetivo
p	-	Região plástica
e	-	Região elástica

Subscritos

E, W , N , S	-	Ponto no centro do volume de controle
e , w , n , s	-	Ponto na face do volume de controle
0	-	Valores iniciais
		Valores estimados
p	-	Partícula
		Pressão constante
x , y , z	-	Direções cartesianas
r , θ , z	-	Direções cilíndricas
m , n	-	Índices de posicionamento
v	-	Volume constante
i , j , k	-	Direções de um sistema de coordenadas
—	-	Valor do passo preditor
═	-	Valor do passo corretor
y	-	Limite de escoamento

Abreviações

FEM	-	Finite Element Method
FVM	-	Finite Volume Method
FDM	-	Finite Difference Method

SIMPLE - Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation

SIMPLER - Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation - Revisado

PRIME - Pressure Implicit Momentum Explicit

CFL - Courrant-Friedrichs-Lewy

TVD - Total Variation Diminishing

EMQ - Erro Médio Quadrático

Siglas

ABAL - Associação Brasileira do Alumínio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Objetivos da Tese 6

1.2 Trabalhos Apresentados e Publicados 6

2 REVISÃO DA LITERATURA 9

2.1 Extrusão de Metais 12

2.2 Análise da Extrusão pelo FEM 16

2.3 Formulação do Escoamento Plástico (*Flow Formulation*) 20

2.4 Análise da Extrusão pelo FVM 24

2.5 Método MacCormack 33

3 MODELAGEM MATEMÁTICA 41

3.1 Equação da Conservação da Massa 41

3.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento 44

3.3 Equação da Conservação da Energia 47

3.4 Forma Vetorial das Equações de Governo 50

3.5 Equações Constitutivas 55

3.5.1 Lei de Fourier da Condução de Calor 55

3.5.2 Equações Constitutivas para um Fluido 56

3.5.3 Equações Constitutivas para a Plasticidade 58

3.6 Equações para os Estudos de Caso 68

3.6.1 Equações para o Escoamento de Fluido: Caso Placas Paralelas 68

3.6.2 Equações para o Escoamento do Fluido: Caso Axissimétrico 70

3.6.3 Equações para o Escoamento do Metal: Caso Axissimétrico 72

4 MÉTODO NUMÉRICO 77

4.1 O Método dos Volume Finitos 77

4.2 O Método MacCormack.....79

4.3 Acoplamento Pressão-Velocidade 86

4.4 Condições de Contorno 90

4.4.1 Condições de Contorno para o Escoamento do Fluido.....91

4.4.2 Condição de Contorno para o Escoamento do Metal 91

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO 93

5.1 Escoamento de um Fluido Incompressível entre Placas Paralelas.....93

5.2 Escoamento de um Fluido Incompressível em Condição Axissimétrica.....108

5.3 Extrusão de Metais 113

5.3.1 Análise da Extrusão pelo Método do Limite Superior 114

5.3.2 Extrusão do Chumbo 118

5.3.3 Extrusão do Alumínio.....128

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS135

6.1 Conclusões sobre o Escoamento de Fluidos Incompressíveis e Viscosos 135

6.2Conclusões sobre o Escoamento na Extrusão de Metais 136

6.3 Sugestões de Trabalhos futuros.....137

Referências 139

APÊNDICE A – Equações das Interpolações das Velocidades nas Faces dos Volumes de Controle – Caso Bidimensional 147

APÊNDICE B – Equações das Interpolações das Velocidades nas Faces dos Volumes de Controle – Caso Axissimétrico 157

APÊNDICE C – Equação para a Correção da Pressão 169

APÊNDICE D – Modelos de Atrito 173

D1 Atrito de Coulomb 173

D2 Fator de Atrito.....175

1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica computacional no meio acadêmico e industrial é hoje uma realidade incontestável. Como pode ser visto na grande quantidade de artigos científicos publicados em revistas e congressos que abordam o tema ou dos inúmeros softwares comerciais utilizados pelas empresas em geral na elaboração de seus projetos.

No campo de atuação da conformação plástica de metais, tanto no meio acadêmico ou no meio industrial, a realidade não é diferente, pois, são inúmeros os artigos científicos e indústrias que tratam dos fenômenos, que aparecem nos processos de conformação plástica, através de softwares comerciais ou softwares desenvolvidos pelos próprios pesquisadores ou engenheiros, para a análise de problemas ou situações específicas.

Esta realidade teve início e vem se consolidando desde a década de 1950, quando os computadores começaram, gradativamente, a aumentar o seu poder de processamento. Paralelamente, os métodos numéricos utilizados, para o tratamento numérico computacional das equações matemáticas que governam os fenômenos físicos na conformação plástica de metais, aperfeiçoaram-se e adequanram-se à situações específicas. Neste caminho pode-se destacar a importância que o Método dos Elementos Finitos (FEM – Finite Elemet Method, em Inglês) teve no tratamento numérico dos processos de conformação plástica dos metais (KOBAYASHI, S. *et al*., 1989).

O FEM surgiu na década de 1950 ligados a problemas de elasticidade estrutural. Já na década seguinte o FEM começou a ser aplicado no domínio das operações de fabricação, porém, nesse período utilizava-se a *Formulação Sólida*, que é caracterizada por considerar um comportamento elasto-plástico ou elasto-viscoplástico do material. Entretanto, esta mostrou-se inadequada para analisar problemas relacionados as não-linearidades, tanto geométrica, causadas pelas grandes deformações plásticas que são típicas dos processos de conformação por deformação plástica, quanto do material (KOBAYASHI, S. *et al*., 1989).

No início da década de 1970 foi desenvolvido a *Formulação do Escoamento Plástico* (*Flow Formulation*, em Inglês). Esta formulação caracteriza o escoamento de materiais metálicos, em processos de deformação plástica, de forma similar ao do escoamento de fluidos incompressíveis e viscosos, que eram e ainda são tratados numericamente, utilizando o Método dos Volumes

Finitos (FVM – Finite Volume Method, em Inglês). A hipótese da *Formulação do Escoamento Plástico* pode ser assumida, pois, os processos de conformação plástica são considerados isocóricos, isto é, volume constante. Na *Formulação do Escoamento Plástico* o material é considerado rigido-plástico ou rígido-viscoplástico, sendo assim, as deformações elásticas são desprezadas em face das elevadas deformações plásticas que o material sofre nos processos de conformação plástica (KOBAYASHI, S. *et al*., 1989).

Desde o seu surgimento até os dias de hoje, o FEM ainda é a escolha preferêncial dos pesquisadores e engenheiros para a solução ou análise de problemas em processos de conformação plástica de metais. Porém, com a *Formulação do Escoamento Plástico* ocorreu o interesse em analisar o comportamento do escoamento de metais em processos de conformação plástica através do FVM (DEMIRDZIC, I. *et al*., 2005). O interesse vem do fato do FVM ser um método altamente ensaiado e aplicado na dinâmica dos fluidos e o conhecimento já desenvolvido possa de certa forma, ajudar a entender melhor os fenômenos que aparecem nos processos de conformação plástica dos metais. Outro aspecto é o fato de criar códigos numéricos que englobam na mesma formulação as análises tanto para sólidos quanto para fluidos ou as interações entre eles (KOBAYASHI, S. *et al*., 1989).

O FVM surgiu no início da década de 1970 com o objetivo de suprir limitações do Método das Diferenças Finitas (FDM – Finite Difference Method, em Inglês), que era o método numérico dominante nas aplicações para problemas envolvendo dinâmica dos fluidos (MALISKA, C. R., 2004). O principal aspecto que motivou o aumento da utilização do FVM foi que o mesmo satisfaz a conservação das propriedades avaliadas (tais como: massa, quantidade de movimento, entre outras) tanto a nível global como a nível discreto. Sendo assim associado a uma interpretação física mais consistente. Haja visto que, tanto o FDM quanto o FEM não satisfazem a conservação das propriedades avaliadas em nível discreto, pois, não trabalham com volumes de controle e sim com os pontos da malha computacional (MALISKA, C. R., 2004). Então, a partir da década de 1990 surgiram, na literatura, alguns trabalhos que simulam numericamente o escoamento do metal nos processos de conformação plástica, usando a *Formulação do Escoamento Plástico* e o FVM (WILLIAMS, A. J. *et al*., 2002), (LOU, S. *et al.*, 2008).

Na análise do escoamento de fluidos, geralmente, busca-se determinar os campos de velocidade, pressão e temperatura. Com essas informações pode-se ter uma visão de como é o comportamento do fluido no escoamento analisado. Em processos de conformação plática de metais, para o estudo dos escoamentos envolvidos, o raciocínio seguido deve ser o mesmo utilizado para o fluido, isto é, a determinação dos campos de velocidade, pressão e temperatura. Essas variáveis fornecem dados quantitativos importantes sobre o escoamento do metal ou do fluido e que possibilita uma análise qualitativa do processo como um todo.

A velocidade, pressão e temperatura são as variáveis que aparecem nas equações diferenciais que governam os escoamentos em fluidos. Porém, considerando que os escoamentos em metais sejam analisados pela *Formulação do Escoamento Plástico* as equações governantes devem ser as mesmas que no fluido. Essas equações são chamadas *Equações Diferenciais da Conservação da massa, movimento e energia.* A essas Equações da Conservação deve-se juntar as *Equações Constitutivas,* que caraterizam qual material especificamente está sendo estudado. Tendo assim as informações necessárias e suficientes para a aplicação de um método numérico (KHAN, A. S. *et al.*, 1995).

As *Equações da Conservação* quando discretizadas pelo FVM, considerando uma formulação explícita, geram, um conjunto de equações não-lineares (MALISKA, C. R., 2004). Os métodos de resolução desse conjunto de equações não-lineares são diversos, porém, busca-se sempre um método de resolução que tenha uma boa convergência, estabilidade e precisão. Um método de resolução que se destaca nas aplicações da dinâmica dos fluidos é o Método MacCormack.

O Método MacCormack é tradicionalmente utilizado na solução de problemas de escoamento de fluidos compressíveis em análises da aerodinâmica, pois, o mesmo consegue bons resultados na captura dos picos de discontinuidades produzidas pelas ondas de choque envolvidas neste tipo de escoamento. Este método possui ainda como características principais ser um método de dois passos e ter segunda ordem de precisão no tempo e no espaço.

Além das características citadas acima o Método MacCormack apresenta bons resultados no tratamento das não-linearidades na solução de Equações Difereciais Parciais. Como os escoamentos nos processos de conformação plástica de metais são governados pelas Equações Diferenciais da Conservação. Considerando também, que em tais processos surgem regiões de discontinuidades, como por exemplo, na entrada e saída da zonas de deformação em um processo

de extrusão direta. Então, propõe-se neste trabalho, a utilização do Método MacCormack na solução das equações governantes do escoamento em um processo de conformação plástica de extrusão direta de metais (TANNEHILL, J. C. *et al.*, 1997).

Na conformação plástica dos metais, quando se deseja a fabricação de uma peça ou produto metálico que possui um perfil constante e que pode ser produzida de forma contínua, utiliza-se o processo de extrusão (MARTINS, P. e*t al.*, 2005). Os materiais metálicos que se utiliza na fabricação de peças e produtos através do processo de extrusão são variados, mas, atualmente, os que mais se destacam são o alumínio e suas ligas por suas propriedades de leveza, resistência mecânica específica, resistência a corrosão e conformabilidade.

O alumínio tem sua aplicação na produção de produtos e componentes em diversas áreas, onde, pode-se destacar a indústria automobilística e aeronáutica. Segundo dados da ABAL – Associação Brasileira do Alumínio, publicados no Anuário Estatístico Abal 2009, pode-se perceber que na última década a produção de alumínio vem aumentando, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 1.1.

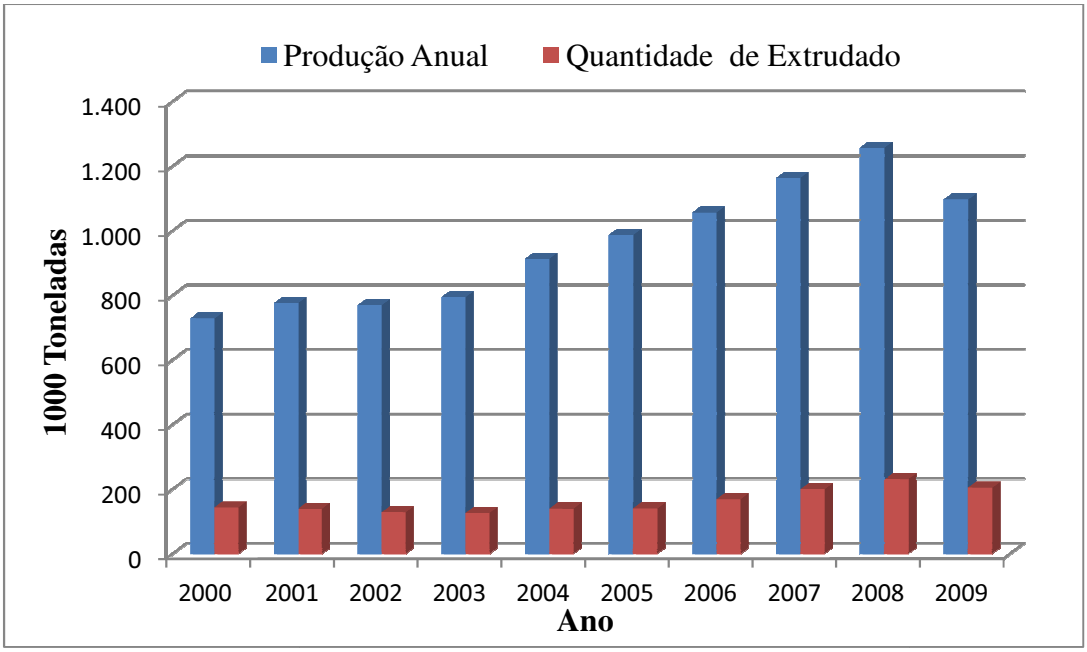


Figura 1.1 – Comparação da quantidade de alumínio produzida anualmente e a quantidade dessa produção que foram extrudadas (Anuário Estatístico Abal 2009).

O gráfico da Figura 1.1 mostra também a quantidade, em milhares de toneladas, que foram produzidas pelo processo de extrusão, em comparação com a produção anual.

De forma mais detalhada, pode-se analizar o gráfico da Figura 1.2, que mostra que o processo de extrusão ocupa a segunda posição na escala de processos mais utilizados no processamento do alumínio, onde, a extrusão corresponde à um percentual de 20% de todo o alumínio processado no Brasil no ano de 2009.

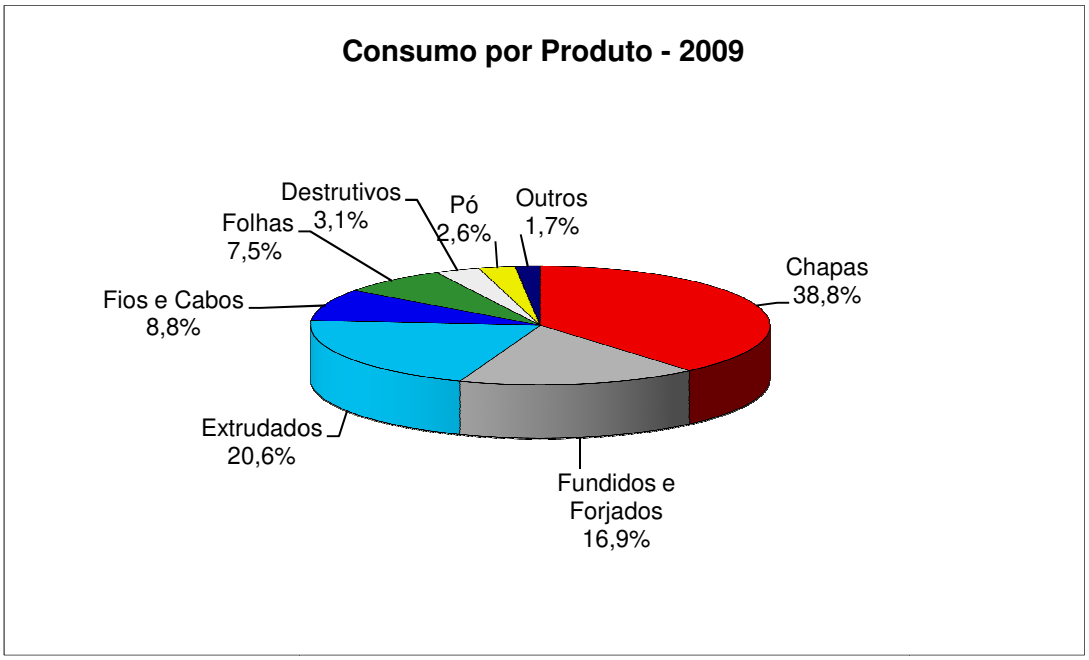


Figura 1.2 – Percentual de consumo de alumínio na produção de produtos (Anuário Estatístico Abal 2009).

Das informações citadas acima, pode-se perceber que o processo de extrusão tem um papel importante como processo de fabricação de peças e produtos na indústria metal-mecânica brasileira. Com o aumento da utilização da extrusão, tanto em termos de quantidade quanto em termos de diferentes perfis extrudados, aumenta de forma paralela a necessitade de meios que possam fornecer dados quantitativos e qualitativos que permitem conhecer melhor os processos de extrusão utilizados.

1.1 Objetivos da Tese

A motivação para a realização deste projeto de pesquisa surgiu da análise do contexto exposto na introdução desta tese e do conhecimento do método FVM que este autor adquiriu na elaboração de sua dissertação de mestrado (MARTINS, M. M., 2006), que tratou da elaboração de um programa computacional, em liguagem FORTRAN, para o cálculo da distribuição de temperatura e tensões térmicas em uma placa quando submetida a um choque térmico.

Seguindo a tendência de se utilizar o FVM e a *Formulação de Escoamento Plástico* na análise de processos de conformação plástica de metais, definiu-se que o objetivo principal desta tese de doutorado é a elaboração de um novo esquema numérico a ser utilizado no desenvolvimento de um programa computacional, em linguagem FORTRAN, utilizando o FVM e o Método MacCormack explícito para a análise do escoamento de um fluido incompressível e viscoso e que pode ser aplicado a um processo de conformação plástica de metais por extrusão.

1.2 Trabalhos Apresentados e Publicados

Esta tese de doutoramento possibilitou ao autor a elaboração e publicação dos seguintes artigos completos em congressos internacionais:

- *"Extrusion Process by Finite Volume Method Using OpenFoam Software"*: este artigo foi apresentado de forma oral no congresso internacional AMPT 2010 (Advances in Materials and Processing Technologies) realizado na Arts et Métiers Paris Tech, Paris, França no período de 24 a 27 de Outubro de 2010.
- "*Experimental Analysis of Velocity Field in Hot Extrusion of Aluminium 6351"*: este artigo foi apresentado de forma oral no congresso internacional ICEB (International Conference on Extrusion and Benchmark) realizado na cidade de Bolonha, Itália e organizado pela Universidade de Bolonha no período de 2 a 5 de Outubro de 2011.

- *"Incompressible Fluid Flow by The MacCormack Method"*: este artigo foi apresentado de forma oral no congresso internacional WCCM 2012 (10th World Congress on Computational Mechanics) realizado na cidade de São Paulo, Brasil e organizado pela Universidade de São Paulo no período de 8 a 13 de julho de 2012.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A diversidade dos materiais utilizados pela humanidade para a construção de utensílios e ferramentas para determinados fins evoluiu historicamente de forma paralela com o nosso desenvolvimento tecnológico e científico. Com a capacidade que o homem desenvolveu de retirar os metais da natureza também surgiu à necessidade de manipulá-los de maneira à transfomá-los em produtos para fins desejados. Então, a partir da inerente curiosidade do ser humano, as observações sobre o comportamento desses materiais sujeitos a esforços mecânicos começaram a ser estudados para melhor realização dessas operações (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

Segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010), antes do século XX os estudos sobre deformação plástica surgem, inicialmente, em alguns trabalhos, como, por exemplo, no livro "Two New Sciences", de Galileu Galilei, que descreve alguns problemas relacionados à mecânica e um deles tratava da resistência de rochas a flexão. Alguns anos mais tarde, surgem trabalhos mais consistentes, como o de Robert Hook que publicou em seu livro "Of Spring" que o alongamento de uma mola é proporcional a força aplicada, dando origem às bases da teoria da deformação elástica. Em 1781 Charles A. de Coulomb apresentou o seu artigo sobre a teoria do atrito estabelecendo o atrito de Coulomb.

No início do século XIX a teoria matemática sobre a elasticidade e as curvas tensão-deformação começam a surgir através de nomes como S. D. Poisson, Cloud L. Navier, A. Cauchy, G. Lamé, entre outros. H. E. Tresca a partir de 1864 apresentou uma série de artigos sobre escoamento de metal, sugerindo que o escoamento plástico se dá pela ação de forças de cisalhamento. Analisando os trabalhos de Tresca, Barré de Saint-Venant apresentou algumas idéias básicas sobre processos de deformação plástica: ele sugeriu que "o volume do material não muda durante a deformação plástica" e "as direções das deformações principais coincidem com as direções das tensões principais". Também podem ser citados os trabalhos de J. Bauschinger, O. Mohr e J. Guest, sendo que o primeiro autor mostrou que a tensão de escoamento na compressão depois de um processo de tração é significativamente menor do que a tensão de escoamento inicial. O segundo autor desenvolveu uma representação do estado de tensão através de um círculo, o conhecido círculo de Mohr, e o último apresentou um trabalho que, pela primeira vez, estabelecia diferenças entre um material frágil e dúctil.

Osakada (OSAKADA, K., 2010), afirma que o critério de escoamento de deformação plástica da máxima tensão de cisalhamento ou de Tresca teve o seu desenvolvimento durante o século XIX. O critério da energia de deformação elástica ou critério de escoamento plástico de von Mises foi estabelecido no início do século XX. Coube aos trabalhos W. Lode, G.I. Taylor e H. Quinney estabelecer as diferenças entre os dois critérios de escoamento plástico e a definição do critério de von Mises como a melhor aproximação das condições de escoamento plástico de metais. O desenvolvimento dos critérios de escoamento teve outro avanço através do trabalho de Rodney Hill (HILL, R., 1950), já em meados do século XX, que estabeleceu um critério de escoamento levando em consideração a anisotropia do material.

Outro aspecto da evolução da teoria da deformação plástica e que merece comentários é o desenvolvimento das equações constitutivas, que relacionam tensão, deslocamentos e temperatura quando um material é carregado mecanicamente. Segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010), este estudo teve início a partir do trabalho M. Lévy, em 1872, que usou uma equação constitutiva incremental e que foram apresentadas também por R. von Mises, considerando os incrementos de deformação plástica. Os trabalhos de L. Prandtl e A. Reuss estabeleceram equações contitutivas envolvendo incrementos de deformação plástica e elástica. Outro passo importante na análise das equações constitutivas foi a inversão das equações de Prandtl-Reuss, apresentada por Rodney Hill (HILL, R., 1950) e extremamente utilizada quando do surgimento das análises por elementos finitos.

A compreensão de como se procede a deformação plástica dentro dos metais começou através do estudo de como ocorre a deformação plástica em um monocristal, que segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010), se deu a partir do trabalho de M. von Laue que estabeleceu a direção das redes cristalinas através da difração de raios-X. Os pesquisadores G. I. Taylor e C. F. Elan, através de um teste de tração em monocristal de alumínio, definiram que a deformação plástica ocorre pelo deslizamento de planos cristalográficos em uma direção específica e a tensão de cisalhamento crítica neste plano foi calculada. G. Sachs apresentou que a tensão de escoamento para um metal policristalino é uma média das dos monocristais em orientações aleatórias. Foi percebido que quando um monocristal é deformado o seu plano de escorregamento tende ficar paralelo a direção de deformação, isto significa que a anisotropia é definida pela deformação plástica de um metal policristalino e W. Boas e E. Shmid foram os primeiros a estudar o fenômeno da anisotropia.

Segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010) a teoria das discordâncias começou a ser estabelecida depois que superfícies polidas de monocristais deformados plasticamente foram observadas e bandas de escorregamento foram identificadas, sugerindo que o escorregamento se dá em um número limitado de planos de escorregamento. Segundo Dieter (DIETER, G.E., 1981) e Osakada (OSAKADA, K., 2010), os autores G. I. Taylor, E. Orawan e M. Polanyi apresentaram de forma independente o conceito de discordâncias. Porém, somente nos anos de 1950 que o conceito foi realmente comprovado com a ajuda da microscopia eletrônica.

Os métodos de análise que possibilitam calcular, por exemplo, os campos de velocidades e tensões surgiram inicialmente, a partir do método dos campos das linhas de cisalhamento máximo, que segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010) e Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), foi apresentado por L. Prandtl na análise em deformação plana da indentação de um sólido rígido-plástico. Porém, o método foi chamado de campos das linhas de cisalhamento máximo (*slip-line field method*) a partir dos trabalhos apresentados por H. Hencky e depois por H. Geiringer. O primeiro autor apresentou um teorema geral sobre o estado de tensões dos campos das linhas de cisalhamento máximo e o segundo autor descreveu uma equação para o campo de velocidades, considerando a condição de incompressibilidade na deformação plástica e a relação entre a taxa de deformação e a velocidade. Outros trabalhos foram apresentados por R. Hill, V.V. Sokolovskii, W. Prager e P.G. Hodge que produziram evolução no método. Porém, com o surgimento do FEM o método dos campos das linhas de cisalhamento máximo caiu em desuso.

Outro método de análise é o método da fatia elementar (*slab method*) apresentado, primeiramente, no trabalho de E. Siebel numa análise sobre o forjamento de metal, aplicando as equações de equilíbrio em uma fina área da amostra (OSAKADA, K., 2010). Depois, do artigo de E. Siebel outros trabalhos surgiram, segundo Osakada (OSAKADA, K., 2010) e Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), e que tratavam de outros processos de deformação plástica e podem ser citados nomes como T. von Kármán e G. Sachs que aprimoraram o método. Juntamente com os métodos de análises já mencionados, pode-se juntar o método do limite superior (*Upper Bound Method*), que segundo Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005) e Osakada (OSAKADA, K., 2010), apareceu no livro "Mathematical Theory of Plasticity" de Rodney Hill (HILL, R., 1950) e que posteriormente foi aprimorado pelos trabalhos de H. Kudo, B. Avitzur, W. Johnson.

O FEM que surgiu, segundo Kobayashi (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005) e Osakada (OSAKADA, K., 2010), na década de 1960, em virtude

da sua generalidade e, posteriormente, do aprimoramento do poder de processamento dos computadores, assumiu quase toda a parte das análises de problemas de deformação plástica de metais.

Todo o desenvolvimento apresentado anteriormente sobre as teorias da deformação plástica são atualmente utilizadas e aplicadas nos processos de conformação plástica dos metais, que é uma das subdivisões dos processos de conformação mecânica dos metais e que são utilizados na fabricação de peças e produtos nas indústrias metal-mecânica (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (CALISTER JR, W.D. e*t al.*, 2005).

Os processos de conformação plástica de metais possuem como característica principal a conservação do volume inicial do material bruto. O formato da peça ou do produto que se deseja fabricar é alcançado através da deformação plástica por aplicação de esforços mecânicos por meio de máquinas específicas, tais como prensas (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

Quando o processo de conformação plástica ocorre em chapas metálicas e que não há alteração significativa da espessura e ruptura, tal processo é denominado de conformação plástica de chapa (em Inglês, *Sheet-Metal forming*). Por outro lado, quando o material inicial é um tarugo ou placa e que a deformação plástica aumenta a razão superfície-volume, tal processo é chamado de conformação plástica de massa (em Inglês, *Massive forming*) (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

Nos processos de deformação plástica mencionados acima tem-se processos específicos que são aplicados de acordo com o que se deseja produzir. Na conformação plástica de chapas podem ser citados os processos de embutimento, estiramento e dobramento, já na conformação plástica de volume podem ser citadas a laminação, forjamento, trefilação e a extrusão (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

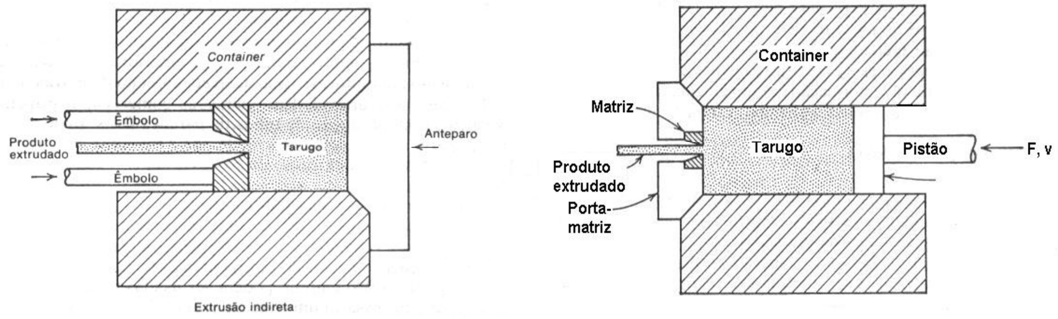
Como os processos de conformação plástica necessitam da aplicação de esforços mecânicos, e que tais esforços geram gastos, com energia, por exemplo, tem-se um maior valor agregado ao produto final. Com intuíto de reduzir as cargas aplicadas e consequentemente o custo final do produto, os processos de deformação plástica podem ser realizados “a quente”, isto é, fazendo um aquecimente prévio do material, tendo assim uma redução da tensão limite de escoamento e, por consequência, uma redução dos esforços exigidos para a deformção plástica (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

2.1 Extrusão de Metais

Quando se deseja a fabricação de uma peça ou produto na forma de barra, e que possui um perfil constante e que pode ser produzida de forma contínua, segundo Dieter (DIETER, G.E., 1981), pode-se utilizar o processo de extrusão. Segundo Johnson (JOHNSON, W. e MELLOR, P.B., 1973) e Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), o processo de extrusão é um processo de conformação plástica de volume, em que um bloco ou tarugo do material é forçado através de um orifício ou matriz gerando o perfil desejado. Dieter (DIETER, G.E., 1981) afirma que o processo de extrusão é normalmente aplicado na produção de barras cilíndricas e tubos vazados, mas perfis irregulares também podem ser produzidos. Chen (CHEN, Z.Z. e*t al.*, 2007) diz que há uma abundância de perfis de alumínio aplicados em diversos campos, tais como, estruturas usadas na aviação, no campo aeroespacial, transportes e construção civil, entre outros.

Podem-se citar alguns trabalhos que tratam da extrusão de perfis diferentes dos perfis clássicos que são usualmente extrudados. Como o trabalho de Chen *et al*. (CHEN, Z.Z. e*t al.*, 2007) que trata da simulação e otimização de perfis irregulares de extrusão de alumínio utilizando a otimização com base no método dos volumes finitos, redes neurais artificias e algoritmo genético, para aumentar a qualidade dos modelos das atuais tecnologias de computação associadas as análises dos processos de extrusão. Fiétier *et al*. (FIÉTIER, N. e*t al.*, 2009) apresentaram dois programas computacionais que tem como objetivo ajudar a estimar o desempenho e as características do processo e dos detalhes do fluxo de material na extrusão de perfis complexos. Selvaggio *et al*. (SELVAGGIO, A. e*t al.*, 2012) apresentaram um trabalho que trata de uma investigação experimental e comparações com diferentes códigos de elementos finitos para dois perfis vazados com paredes de espessuras diferentes dentro do mesmo perfil e com esses perfis sendo definidos pelo processo de solda por costura.

Dieter (DIETER, G.E., 1981), Johnson (JOHNSON, W. *et al*., 1983), Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), Valberg (VALBERG, H.S., 2010) e Bresciani Filho *et al*. (Bresciani FILHO, E. *et al*., 2011) dividem o processo de extrusão, quanto ao movimento do material, em dois tipos básicos, sendo: extrusão direta ou indireta (ou reversa). Segundo Dieter (DIETER, G.E., 1981) na extrusão direta o tarugo do material é pressionado por um êmbolo ou pistão contra



(a) (b)

Figura 2.1.1 – Processos de extrusão: (a) Extrusão direta; (b) Extrusão indireta ou inversa (DIETER, G.E., 1981).

a matriz, Figura 2.1.1(a), enquanto na extrusão indireta um êmbolo vazado conduz a matriz na direção do tarugo do material, Figura 2.1.1(b).

Para ilustrar a diferença entre os dois processos de extrusão citados acima, Valberg (VALBERG, H.S., 2010) apresenta uma comparação entre os processos de extrusão direta e indireta de alumínio a quente para uma matriz com ângulo de 90°. Usando informações experimentais e de simulação numérica axisimétrica por elementos finitos, mostrando que os campos de velocidades, taxas de deformação e taxa de deformação efetiva possuem certas diferenças nos processos. Como podem ser vistas nas Figuras 2.1.2(a) e 2.1.2(b) para o caso das taxas de defomação.

A extrusão indireta tem algumas vantagens em comparação à extrusão direta, por exemplo, a magnitude da força aplicada na extrusão indireta é menor do que a da extrusão direta. Porém, a extrusão direta é a escolha preferida nos processos de extrusão, em virtude da simplicidade do equipamento (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011). Um dos inconvenientes que acontecem no processo de extrusão indireta, por exemplo, o extrudado deve ser retirado da matriz, enquanto na extrusão direta esta etapa do processo é desnecessária (VALBERG, H.S., 2010).

Segundo Dieter (DIETER, G.E., 1981) a maioria dos materiais são extrudados a quente, aproveitando a vantagem da diminuição da tensão limite de escoamento com o aumento da temperatura. Porém, as altas temperaturas do processo, que são geradas pela temperatura inicial somada à geração de calor pela deformação plástica, podem acarretar oxidação do tarugo e do

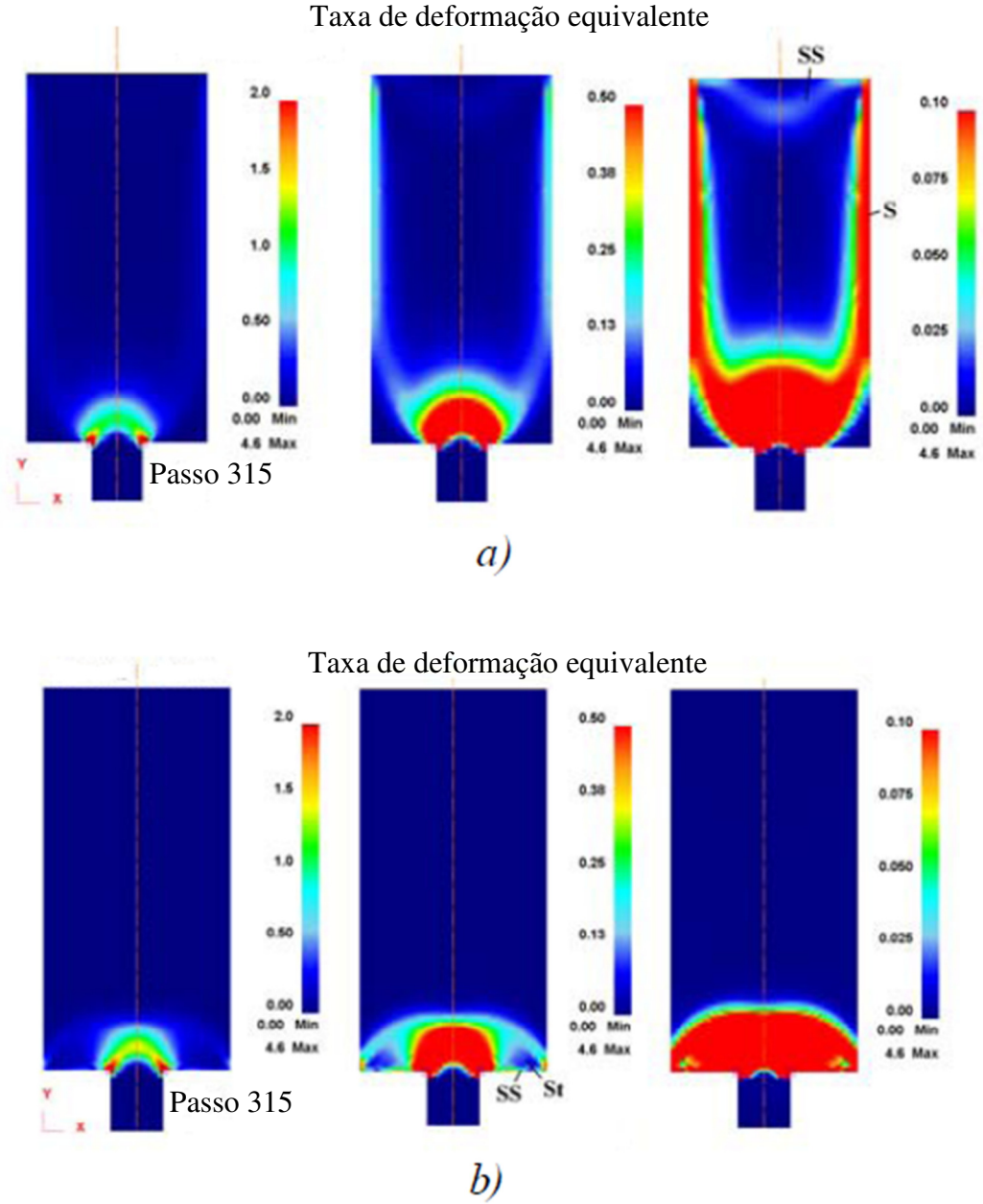


Figura 2.1.2 – Taxa de deformação para (a) Extrusão direta e (b) Extrusão indireta (VALBERG, H.S., 2010).

ferramental, além de provocar amolecimento das mesmas, exigindo o uso de uma temperatura mínima para que o material do tarugo apresente uma plasticidade adequada e traga vantagens para o processo e não provocando defeitos.

Os principais defeitos que podem aparecer no processo de extrusão tem causas provenientes da estrutura do material extrudado ou das condições de operação, assim listados por Filho *et al*. (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011), os defeitos são:

- Vazios internos na parte final do extrudado, decorrentes do problema do modo de escoamento; uma velocidade de extrusão muito grande, principalmente ao final do processo, pode acentuar a presença do defeito;
- Trincas de extrusão, de direção perpendicular a direção de extrusão, decorrentes de defeitos no lingote ou no tarugo ao ser empregada uma temperatura de trabalho muito alta, associada ou não a uma velocidade elevada de extrusão;
- Escamas superficiais, ocasionadas pela aderência de partículas de material duro na superfície das ferramentas, provenientes da ação de desgaste ou da quebra de camadas superficiais do recipiente de extrusão; esse defeito pode ser causado também pelo desalinhamento do pistão ou por excessiva temperatura de trabalho;
- Riscos de extrusão, causados por irregularidades superficiais na ferramenta ou por resíduos de óxidos metálicos retidos em sua superfície;
- Inclusão de partículas de material estranho, que são arrastadas longitudinalmente, dando uma aparência de manchas provocadas por raspagens;
- Bolhas superficiais provenientes de gases retidos na fundição do lingote para extrusão ou no tratamento térmico de aquecimento para a mesma;
- Marcas transversais provocadas pela parada da prensa e retomada do movimento;
- Manchas e perda de cores, decorrentes da oxidação e contaminação superficial com substâncias estranhas ou provenientes do lubrificante.

Esses defeitos podem ser minimizados ou até mesmo eliminados se as condições de processo forem bem controladas. Para que isso possa acontecer, conhecer bem os fenômenos que aparecem na extrusão é de suma importância e para isso é interessante utilizar métodos de análises que forneçam resultados confiáveis.

2.2 Análise da Extrusão pelo FEM

A extrusão, sendo um método de conformação plástica, pode ser analisada por meio dos diferentes métodos teóricos que se utiliza para análises dos fenômenos na conformação plástica. Segundo Kobayashi (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989) esses métodos são: Método da Energia Uniforme, Método da Fatia Elementar, Método do Limite Inferior e Superior, Método dos Campos das Linhas de Cisalhamento Máximo, Método da Visualização ou Visioplasticidade e Métodos por Simulação Numérica, tal como o FEM.

A simulação numérica assumiu um papel importante nas análises em processos de deformação plástica em virtude do surgimento e aprimoramento da capacidade de processamento do computador. De acordo com Zhang *et al*. (ZHANG, S.H. *et al.*, 2004) o FEM, depois da década de 1970, desenvolveu-se e tornou-se o principal método de análise dos processos de deformação plástica.

O FEM foi desenvolvido na década de 1950, de acordo com Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), ligado aos trabalhos de M. Turner, J.H. Argyris, S. Kelsey e R. Clough sendo este último o que primeiro usou o termo "Elemento Finito". As primeiras aplicações do método foram feitas em problemas de análise estrutural.

Segundo Valberg (VALBERG, H.S., 2010) o FEM é uma técnica numérica para encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais parciais (EDP). Kobayashi *et al*. (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989) e Valberg (VALBERG, H.S., 2010) descrevem que a aplicação do FEM a um problema específico consiste na realização de cinco passos, sendo eles: identificação do elemento no problema; estabelecimento das equações de cada elemento; definição das propriedades dos elementos; montagem das equações dos elementos para obter o sistema de equações global; solução numérica do sistema de equações global, onde, a formação das equações dos elementos segue uma das seguintes formulações: abordagem direta, método variacional, método dos resíduos ponderados e abordagem do balanço de energia.

No campo da conformação plástica dos metais, os primeiros trabalhos usando FEM, de acordo com Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), estão ligados aos trabalhos de P.V. Marçal, Y. Yamada, O.C. Zienkiewicz e S. Kobayashi, todos a partir da década de 1960. Esses

trabalhos tratavam de problemas elasto-plásticos em deformação plana ou axisimétrica em processos de indentação, compressão simples e extrusão.

O desenvolvimento do FEM fez com que muitos códigos comerciais surgissem para resolver problemas específicos envolvendo a conformação plástica de volume, de acordo com Valberg (VALBERG, H.S., 2010) os principais códigos comerciais nos dias atuais são: DEFORM^{TM}, FORGE^{TM}, SUPER-FORGE^{TM}, Q-FORM^{TM} e outros códigos comerciais mais gerais como o ANSYS^{TM} e o ABAQUS^{TM}, também podem ser aplicados para este propósito. Enquanto para a conformação plástica de chapa podem ser citados os códigos LS-Dyna^{TM} , Pam-Stamp^{TM} e AutoForm.

No processo de extrusão, as informações que usualmente desejam determinar são os campos de tensão, deformação, taxa de deformação e temperatura e o FEM tem tido sucesso neste trabalho. Como pode ser visto em diversos trabalhos publicados, tal como Lu *et al*. (LU, J. *et al*., 1998) que apresenta uma análise numérica do processo de extrusão contínua chamado Conform^{TM} (BWE International) e comparações dos resultados dos campos de tensões, deformações, taxas de deformações e temperatura com resultados experimentais, utilizando o FEM no software comercial DEFORM^{TM} e uma formulação rigido-viscoplástica.

O trabalho apresentado por Lof (LOF, J. 2001) investigou, usando o FEM bidimensional, e utilizando um modelo elasto-viscoplástico com uma formulação Euleriana-Lagrangeana, os efeitos de fenômenos como comportamento do material, coeficiente de atrito, comprimento e ângulo da área de rolamento e que aparecem na área de rolamento na extrusão de tubos de parede fina de alumínio.

Parviazian *et al*. (PARVIAZIAN, F. *et al.*, 2009) trabalharam com a modelagem por FEM de um processo de extrusão de ligas de alumínio fazendo uma análise termomecânica de aspectos do processo tais como, contato, refinamento da malha, transferência de calor dentro do tarugo, transferência de calor entre o tarugo e container, dissipação de calor no atrito, energia mecânica e radiação na superfície. Um dos resultados desse trabalho está apresentado na Figura 2.2.1, que mostra o efeito da condução de calor no contato entre o tarugo e o container.

Khan *et al*. (KHAN, Y.A. *et al.*, 2010) apresentaram uma análise numérica-experimental do processo de extrusão na criação de perfis ocos (*porthole extrusion*), considerando dois tipos de pontes (*Bridge*), uma com perfil pontiagudo e outra com perfil reto. A parte numérica foi feita usando FEM no código comercial DEFORM^{TM} e a parte experimental usou o método "*Grid*

Pattern Technique“ para analisar o fluxo do material. Mostrou-se que o perfil da ponte influencia significativamente o fluxo do material, extensão da superfície de solda e a pressão entre as superfícies soldadas. Os autores definiram que o perfil pontiagudo deve ser a melhor escolha, pois, produziu melhores resultados. O resultado para a distribuição da taxa de deformação para os dois perfis de pontes pode ser visto na Figura 2.2.2.

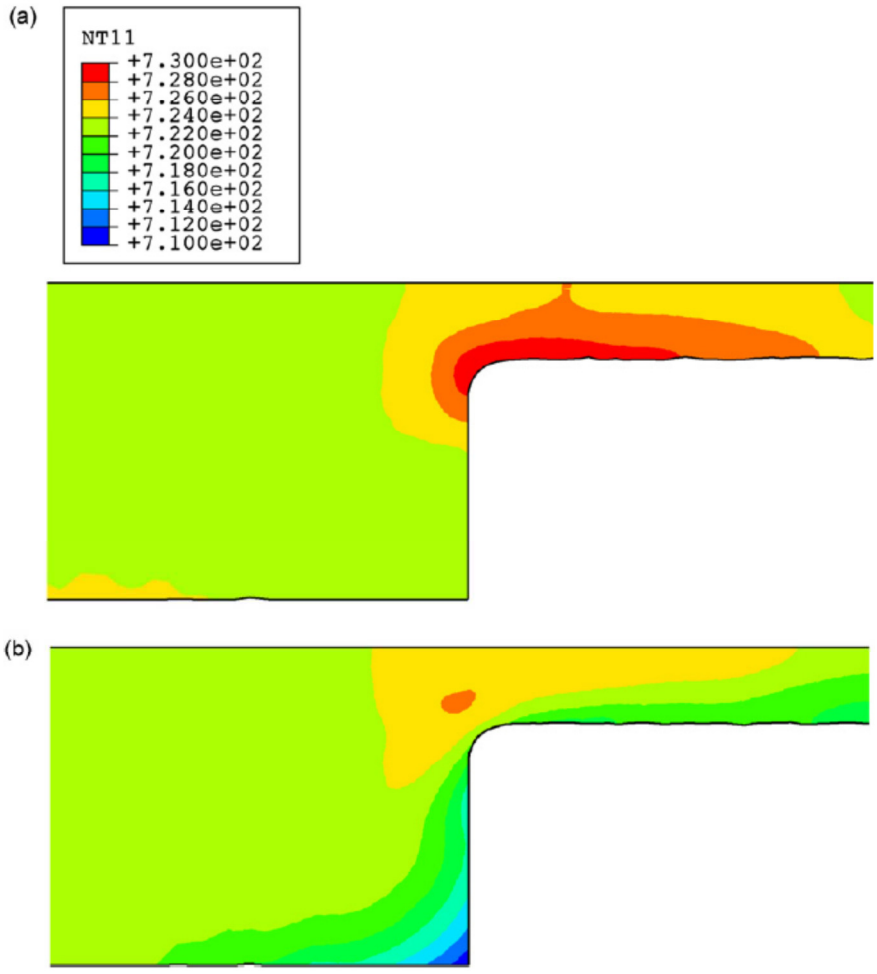


Figura 2.2.1 – Distribuição de temperatura no tarugo, considerando o efeito da condução de calor no contato entre o tarugo e o container. (a) sem o contato; (b) com o contato. (PARVIAZIAN, F. *et al.*, 2009)

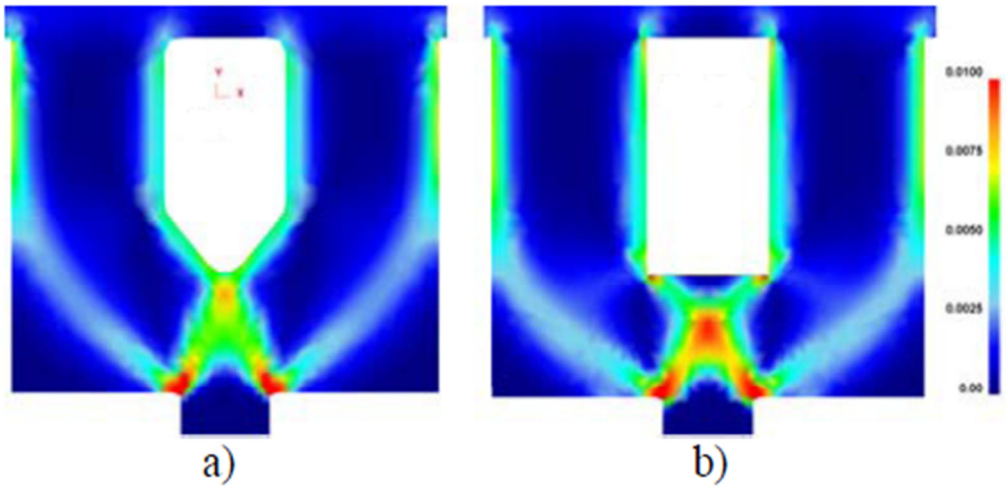


Figura 2.2.2 – Distribuição da taxa de deformação equivalente na câmara de soldagem para os dois perfis de pontes. (a) pontiaguda e passo de tempo 356; (b) reta e passo de tempo 350. (KHAN, Y.A. *et al.*, 2010)

Bastani *et al*. (BASTANI, A.F. *et al.*, 2011) utilizaram o FEM para estudar a influência da evolução da temperatura, do fluxo de material, da velocidade do punção, distribuição de temperatura inicial e a taxa de resfriamento do container na extrusão do alumínio. O trabalho estudou esses aspectos em três situações, sendo elas: (1) minimizar as variações radiais dos campos de temperatura e velocidade sobre múltiplos ciclos de pressão; (2) para a extrusão isotérmica do alumínio; (3) entender e formular efeitos indesejados do gradiente de temperatura na lateral no tarugo na velocidade de saída.

Martins *et al*. (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012) apresentaram uma comparação entre resultados experimentais e numéricos para o campo de velocidade em um processo de extrusão direta de uma liga de alumínio. Os resultados experimentais foram definidos utilizando o método "Grid Pattern Technique" para determinar o fluxo de material e os resultados numéricos foram definidos a partir do código comercial FORGE2008^{TM}, que é baseado em FEM. Os resultados da simulação numérica mostraram que as formas e curvaturas das faixas relativas aos pinos de contraste introduzidos na liga a ser extrudada são muito semelhantes aos resultados experimentais. Os resultados experimentais mostraram que os pinos de contraste de liga de alumínio AA 2011 é um excelente material de contraste para a liga extrudada de AA 6351.

Como pode ser visto nos trabalhos citados e discutidos acima, o FEM abrange uma grande faixa de fenômenos analisados nos processos de extrusão na atualidade. Sendo através de códigos criados pelos próprios engenheiros ou pesquisadores ou por meio de códigos comerciais que são utilizados tanto no meio acadêmico como no industrial.

2.3 Formulação do Escoamento Plástico (*Flow Formulation*)

A extrusão de metais, assim como outros processos de conformação plástica (por exemplo, laminação, trefilação, etc), são processos que podem ser analisados, quanto a sua cinemática, em estado estacionário. Já que somente a parte inicial e final do processo de deformação varia com o tempo. Por esse motivo, uma malha com configuração fixa no espaço pode ser utilizada, isto é, de acordo com Valberg (VALBERG, H.S., 2010) e Kobayashi (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989) a descrição do movimento pode ser Euleriana em um processo de extrusão.

Outro aspecto da extrusão de metais e que surge também em outros processos de confomação plástica, e que pode ser considerado, é que as deformações plásticas são extremamente maiores que as deformações elásticas, podendo assim esta última ser desprezada sem prejuízo para a análise. Segundo Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), os experimentos feitos por P. W. Bridgman em 1952 provaram que as deformações elásticas estão ligadas as pressões hidrostáticas geradas nesses processos. Também de forma experimental E. P. Unksov em 1961 constatou que para aços sujeitos a grandes pressões hidrostáticas a variação de volume era pequena. A partir destas constatações assumiu-se que os processos de conformação plástica de metais são isocóricos, isto é, são processos cujo volume permanece constante.

Considerando o conceito de compressibilidade de um fluido que é representado matematicamente pela equação do Módulo de Elasticidade Volumétrica:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{K} \tag{2.3.1}$$

onde, V é o volume, p a pressão e K é o módulo de elasticidade volumétrica.

A partir da Equação (2.3.1), pode-se dizer que um fluido é dito incompressível se a variação do volume for desprezível para um valor do K muito elevado. Situação esta, que acontece em processos de conformação plástica de metais. Como foi dito a variação do volume é desprezível em face da magnitude das pressões hidrostática geradas.

Portanto, segundo Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), foi proposto, no início da década de 1970, a *Formulação do Escoamento Plástico* (em Inglês, *Flow Formulation*). Os autores C.H. Lee, S. Kobayashi, G.C. Cornfield, R.H. Johnson, O.C. Zienkiewicz e P.N. Godbole assumiram que o escoamento de materiais metálicos em deformação plástica pode ser estudado de forma análoga ao de escoamento de fluidos incompressíveis e viscosos (MARTINS, P. e*t al.*, 2005).

De acordo com Marques *et al*. (MARQUES, M.J.M.B. *et al*., 1992) os autores C.H. Lee e S. Kobayashi apresentaram a formulação do escoamento plástico para materiais rigido-plástico e O.C. Zienkiewicz e P.N. Godbole apresentaram a *Formulação do Escoamento Plástico* para materiais rígido-viscoplásticos. Nestas situações, os materiais são descritos por leis constitutivas que relacionam tensão e velocidade de deformação e que são baseadas nas equações constitutivas de Levy-Mises, segundo Kobayashi (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005) e Valberg (VALBERG, H.S., 2010).

A partir do uso inicial da *Formulação do Escoamento Plástico*, muitos trabalhos usando esta formulação foram realizados e consequentemente publicados na literatura. Isto pode ser visto no trabalho de Zienkiewcz *et al*. (ZIENKIEWCZ, O.C. e*t al.*, 1988) que usou a *Formulação do Escoamento Plástico* para problemas de escoamento incompressível de metais e polímeros. Isto é, problemas não-lineares e fez à adaptação de um método apresentado por ele mesmo para estimar erros das variáveis calculadas em problemas de elasticidade linear por FEM e baseado no refinamento da malha.

Outro trabalho foi o de Marques *et al*. (MARQUES, M.J.M.B. *et al*., 1992) que apresentou uma comparação entre resultados numéricos, que foram determinados por um programa que usou FEM através da *Formulação do Escoamento Plástico* e resultados experimentais para dois processos de forjamento, onde condições diferentes de atrito foram consideradas.

Dvorkin *et al*. (DVORKIN, E.N. *et al*., 1993) apresentaram a aplicação da *Formulação do Escoamento Plástico* em FEM para desenvolver uma ferramenta computacional bidimensional confiável usando um elemento QMITC (*Quadrilateral Element based on Mixed Interpolation of*

Tensorial Components) e aplicou na análise de problemas de conformação plástica estacionários e transientes e comparou com resultados determinados a partir de métodos teóricos e experimentais.

Vucina (VUCINA, D., 1996) fez análises dos processos de laminação e extrusão, que são processos de deformação plástica estacionários ou em regime permanente. O autor usou FEM e a *Formulação do Escoamento Plástico*, generalizando o processo para a inclusão de materiais com sensibilidade à história de deformação e de condições de atrito. Sendo que a primeira foi determinada através da integração da taxa de deformação ao longo da sua respectiva trajetória e a última foi aplicada ao processo através de uma função de penalidade.

Pietrzik (PIETRZIK, M., 2000) apresentou uma breve descrição do FEM, usando a *Formulação do Escoamento Plástico* para processos de deformação plástica com grandes deformações. Posteriormente, ele mostra as tendências de aplicação desse método, tais como: otimização, evolução da microestrutura, história da deformação, localização da deformação, entre outras.

Demarco *et al*. (DEMARCO, D. *et al*., 2001) discutiram que quando se adota o modelo rígido-viscoplástico, isto é, a *Formulação do Escoamento Plástico*, em processos de deformação plástica e discretiza-se o problema usando o modelo matemático u-p ou interpolação da velocidade pelo FEM impondo a incompressibilidade via técnica da penalidade, é gerado um sistema de equações mal condicionado. Ele apresenta uma técnica iterativa para resolver sistemas com problemas de condicionamento.

Tiernan *et al*. (TIERNAN, P. *et al*., 2005) trataram de um processo de extrusão direta a frio de uma liga de alumínio através de uma investigação experimental e numérica, observando a influência do ângulo da matriz, razão de redução e a força na matriz durante o processo. Os dados experimentais foram capturados através de LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*) e a análise numérica foi feita aplicando FEM, no software ELFEN, com a *Formulação do Escoamento Plástico* e aplicado a um caso axisimétrico. Um dos resultados apresentados nesta pesquisa pode ser visto na Figura 2.3.1, onde é mostrada a distribuição de tensão equivalente no final do processo de extrusão.

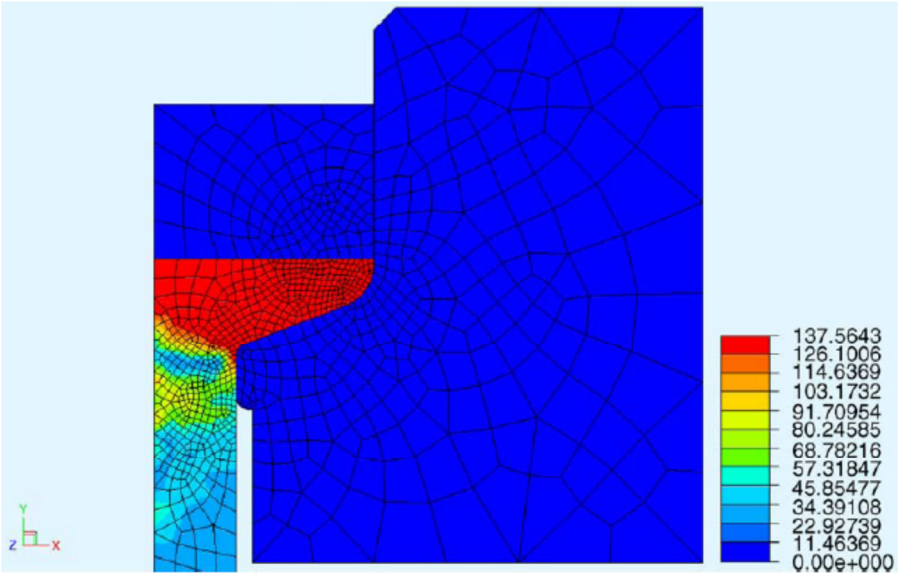


Figura 2.3.1 – Distribuição de tensão equivalente (MPa) no final do processo de extrusão de liga de alumínio (TIERNAN, P. *et al*., 2005).

Kloppenborg *et al*. (KLOPPENBORG, T. *et al*., 2012) apresentaram uma análise numérica e experimental para o escoamento do material em um processo de extrusão de alumínio com matriz com ponte (*porthole die*). A parte experimental utilizou o método da visioplasticidade com *Grid Pattern Technique* e a parte numérica usou o FEM com a *Formulação do Escoamento Plástico* através dos softwares comerciais DEFORM3D^{TM} e Hyperxtrude^{TM}, sendo que o primero utilizou uma formulação Lagrangiana e o segundo uma formulação Euleriana.

Todos os trabalhos anteriores discutidos utilizam o FEM e a *Formulação do Escoamento Plástico*, este fato mostra que este tipo de formulação vem sendo aplicada nas análises dos processos de deformação plástica de metais nas últimas décadas. Portanto, sendo em processos de extrusão ou em outro qualquer, a formulação do escoamento plástico tem o seu espaço dentro do campo de análises numéricas nos processos de conformação plástica de metais.

2.4 Análise da Extrusão pelo FVM

Como pode ser visto nas discussões anteriores, o FEM ainda tem o papel de método numérico preferencial nas análises de problemas de conformação plástica de metais, inclusive também no processo de extrusão. Porém, pode ser notado também que, da totalidade dos trabalhos publicados na literatura sobre análises numéricas por FEM em processos de conformação plástica de metais, uma parte considerável desses trabalhos utiliza a *Formulação do Escoamento Plástico*. Isto é, encarar o escoamento do metal nos processos de deformação plástica de forma similar ao escoamento de um fluido incompressível e viscoso é um procedimento aplicado nestas análises.

Assim, é compreenssível que, em algum momento, os pesquisadores dos métodos numéricos aplicados aos processos de deformação plástica, com intuíto do desenvolvimento desses métodos, iriam sentir a necessidade de buscar nos métodos numéricos aplicados à dinâmica dos fluidos recursos que já estão bem definidos e estudados nesta área. Nesse momento, a opção mais atraente foi o FVM por ser o método utilizado na mecânica dos fluidos.

Segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004), o FVM surgiu no início da década de 1970 e rapidamente adquiriu status de principal método numérico aplicado a dinâmica dos fluidos. A característica do FVM, que chamou a atenção dos pesquisadores, foi a possibilidade de associar a interpretação física do fenômeno estudado com a matemática envolvida nas equações representativas desses fenômenos, pois, o FVM satisfaz a conservação das propriedades avaliadas tanto a nível discreto como a nível global, por ser aplicado a um volume de controle.

A forma de obter as equações aproximadas no FVM, de acordo com Maliska (MALISKA, C.R., 2004), pode seguir dois caminhos diferentes, porém, que leva a mesma equação discretizada. O primeiro aplica o balanço da propriedade de interesse sobre o volume de controle e o segundo se dá através da integração no tempo e no espaço da equação diferencial na forma conservativa, que representa o fenômeno analisado, sobre o volume de controle.

Um aspecto importante na obtenção das equações discretizadas é a escolha da posição do ponto computacional em relação aos pontos da malha utilizada. O ponto computacional é o ponto onde as incógnitas ou variáveis do problema ficam armazenadas. De acordo com Maliska

(MALISKA, C.R., 2004), no posicionamento do ponto computacional no FVM podem-se seguir duas abordagens diferentes.

Para ilustrar os dois tipos de abordagens na definição do ponto computacional, considere a Figura 2.4.1. A primeira abordagem considera o ponto computacional coincidindo com os pontos da malha. Isto é, no vértice da figura geométrica plana que pode ser formado com os pontos da malha, para a malha considerada tem-se triângulos. Está abordagem é chamada de *Centrada no Vértice* (em Inglês, *cell vertex*) e está mostrada na Figura 2.4.1(a). Pode-se perceber que o volume de controle (área sombreada) é formado ao redor deste ponto. Na Figura 2.4.1(b) o ponto computacional está em uma posição diferente, isto é, no centro dos triângulos que podem ser formados com os pontos da malha, fazendo com que o volume de controle seja, exatamente, esses triângulos. Esta abordagem é chamada de *Centrada no Volume* (em Inglês, *cell center*).

Ambas as abordagens podem ser utilizadas em malhas estruturadas ou não-estruturadas, de acordo com a escolha do pesquisador. Uma malha estruturada é definida por possuir sempre o mesmo número de vizinhos e podendo assim estabelecer uma ordenação para estes volumes de controle, conforme a Figura 2.4.2(a).

Já na malha não-estruturada, os volumes de controle possuem um número variável de vizinhos, não tendo uma ordenação para os volumes de controle. Isto pode ser visto a partir da Figura 2.4.2(b).

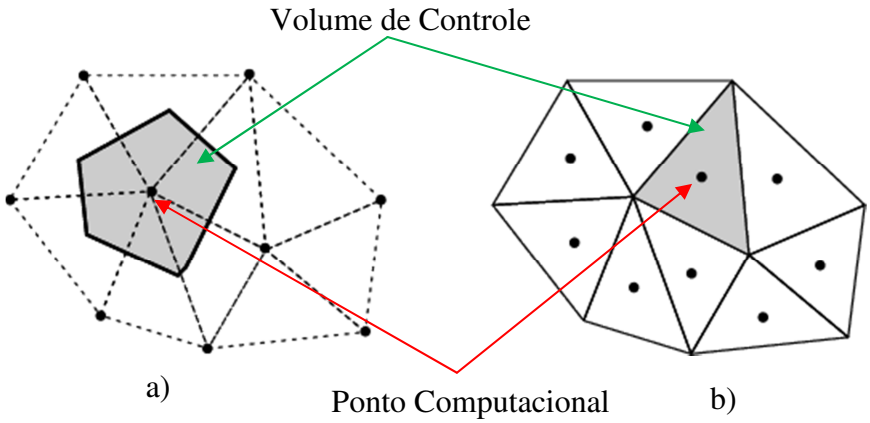


Figura 2.4.1 – (a) Centrada no Vértice; (b) Centrada no Volume. (MALISKA, C.R., 2004).

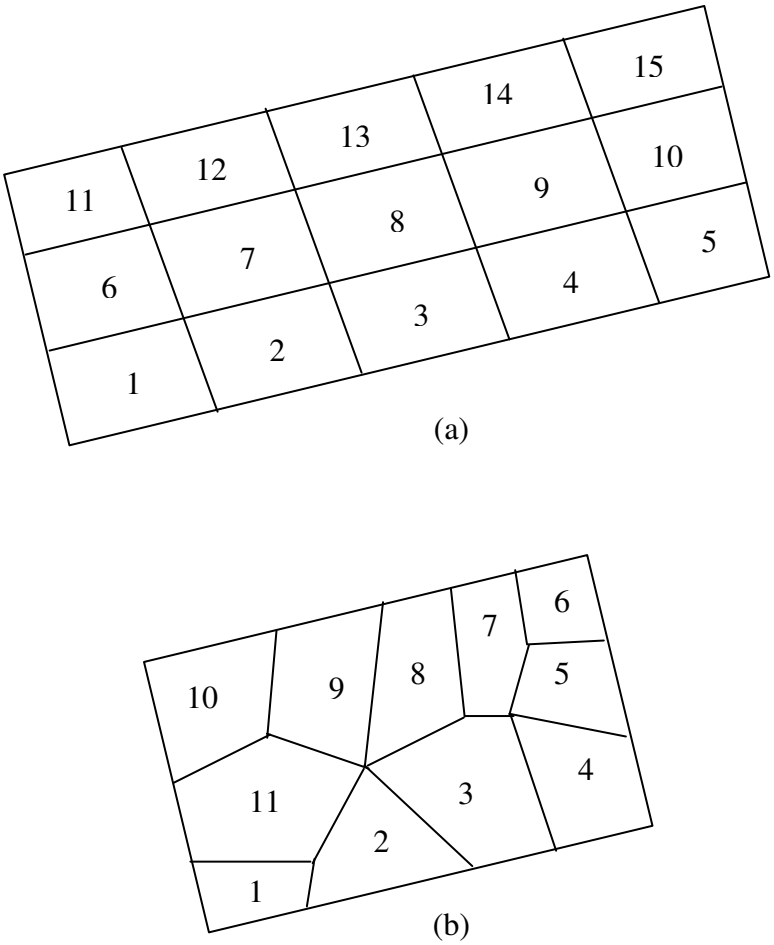


Figura 2.4.2 – (a) malha estruturada; (b) malha não estruturada. (MALISKA, C.R., 2004).

Segundo Endre (ENDRE, S., 1992), a abordagem por *Centrada no Volume* tornou-se popular a partir dos trabalhos de A. Jameson, enquanto a abordagem *Centrada no Vértice* surgiu a partir do trabalho de R.H. Ni. Muitos trabalhos foram realizados e publicados, destacando-se a comparação entre as duas abordagens. Como o trabalho de Khalil *et al*. (KHALIL, M. *et al*., 1992) que analisa o método Multigrid aplicado aos dois tipos de abordagens para estudar o seu comportamento na interface das malhas. Endre (ENDRE, S., 1992) apresentou um estudo comparativo em termos da precisão entre as abordagens para uma malha quadrilateral. O trabalho de Fallah (FALLAH, M., 2004) tratou de uma comparação entre as duas abordagens com resultados obtidos pelo FEM. Fazendo uma análise estrutural de uma placa, usando a teoria de Mindlin-Reissner, onde o deslocamento lateral, momento de flexão e a distribuição de forças de cisalhamento foram testados.

O FVM começou a ser aplicado a problemas na mecânica sólidos, segundo Fainberg *et al*. (FAINBERG, J. *et al*., 1996), a partir dos trabalhos de I. Demirdzic e D. Martinovic no final da década de 1980. Podem-se citar os trabalhos aplicados a elasticidade, como é o caso do artigo citado acima, que trata de um método numérico em FVM que prevê as tensões e os deslocamentos em um material termo-elástico anisotrópico usando o método multigrid para a solução dos sistemas de equações gerados pela discretização.

Outro trabalho que considerou uma análise na elasticidade foi o de Hattel *et al*. (HATTEL, J.H. *et al*., 1995) que tratou de um método numérico por FVM para resolver as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos, ou seja, generalizando as equações de Navier-Stokes. O trabalho apresenta algumas comparações dos resultados obtidos pelo método apresentado com resultados analíticos e numéricos, sendo este último obtido por FEM. Um resultado apresentado neste artigo está mostrado na Figura 2.4.3, onde aparecem os deslocamentos de uma viga que foi carregada por uma carga constante.

Jasak *et al*. (JASAK, H. *et al*., 2000) descreveram um *solver* para análise na elasticidade linear usando FVM, que inclui segunda ordem de precisão na discretização em volume de controle com formato poliédrico arbitrário e solução segregada dos sistemas de equações. O algoritmo foi implementado para usar computação paralela e foi validado usando a concentração de tensão ao redor de um furo e propagação de onda sobre uma barra como problemas teste.

Um procedimento usando FVM tratou da determinação dos deslocamentos, deformações e tensões elástica no trabalho de Wenke *et al*. (WENKE, P. *et al*., 2003). O procedimento foi aplicado em geometrias complexas e bidimensionais, incorporando ao deslocamento uma variável de rotação. O trabalho indica que o procedimento usando FVM foi mais preciso do que o mesmo procedimento usando FEM.

Outros aspectos da elasticidade também já foram abordados, como no trabalho de Demirdzic *et al*. (DEMIRDZIC, I. *et al*., 2005) que descreveu um procedimento em FVM para analisar problemas de deformações termoviscoelásticas e o de Martins *et al*. (MARTINS, M.M. *et al*., 2010) que apresentou um análise numérica usando FVM para determinar a distribuição de temperatura e tensões térmicas transientes no choque térmico em uma placa.

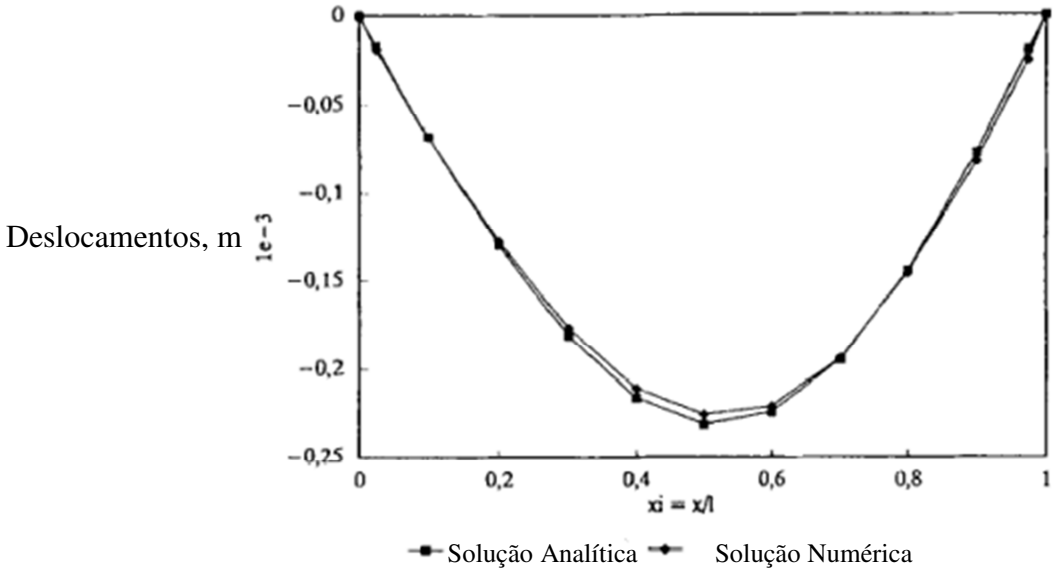


Figura 2.4.3 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos por FVM para os deslocamentos. (HATTEL, J.H. *et al*., 1995).

Com o intuíto de utilizar somente um tipo de formulação numérica para resolver problemas que envolvem interação entre fluido e estrutura, para tentar minimizar problemas que ocorrem quando se utiliza uma formulação numérica para o fluido e outra formulação numérica para a estrutura, o FVM foi aplicado com este propósito. Como pode ser visto no trabalho de Schafer *et al*. (SCHAFER, M. *et al*., 2001) que apresentou uma metodologia que unifica a análise entre fluido e sólido através do FVM, usando o método multigrid considerando geometrias complexas.

O resultado para a pressão e as linhas de fluxo para o fluido e para as tensões no sólido podem ser vistos na Figura 2.4.4, na qual também é mostrada a geometria analisada. Slone *et al*. (SLONE, A.K. *et al*., 2002) trataram da implementação de método numérico baseado em FVM para um problema da interação dinâmica fluido-estrutura usando malha não-estruturada e o algoritmo de Newmark implícito.

Para completar as possíveis aplicações do FVM, mostrando a amplitude e a generalidade do método, pode-se somar as aplicações em problemas que envolvem materiais elasto-plásticos.

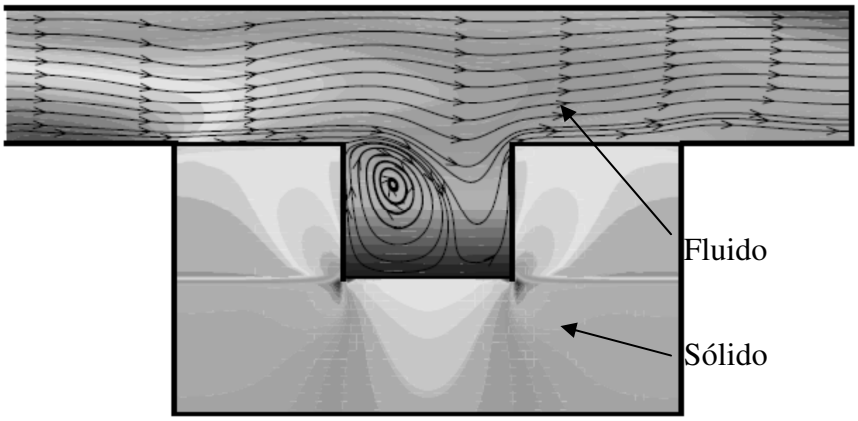


Figura 2.4.4 – Resultado para a interação fluido-sólido, onde as linha de fluxo e o prefíl de pressão na parte fluido e as tensões na parte sólido (SCHAFER, M. *et al*., 2001).

Um método numérico em FVM para calcular as tensões e os deslocamentos em materiais termo-elasto-plásticos foi apresentado por Demirdzic *et al*. (DEMIRDZIC, I. *et al*., 1993). Neste trabalho ele também comenta que a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos compartilham as mesmas equações governantes, porém, diferindo-se apenas em relação às equações consitutivas. Pode-se considerar pioneiro o trabalho de Taylor *et al*. (TAYLOR, G.A. *et al*., 1995) que apresentou um método numérico por FVM aplicado a um material elasto-visco-plástico em problemas da mecânica dos sólidos. O mesmo procedimento já havia sido aplicado a um problema considerando a elasticidade linear utilizando malha não-estruturada. As comparações dos resultados foram feitas utilizando o FEM e envolvendo precisão e tempo de processamento. O autor afirma que o FVM aparece com um método alternativo para análise de problemas envolvendo equações contitutivas elasto-visco-plástico, quando se trata de precisão e eficiência.

Completando a ampla área de aplicação do FVM podem ser citadas as aplicações em processos de conformação plástica, como no processo de extrusão. Segundo Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005) os principais objetivos de um processo de simulação numérica aplicado em um processo de conformação plástica é prever as dimensões finais da peça conformada, distribuição de temperatura, propriedades da peça, condições de atrito, vida da matriz e defeitos causados pelo escoamento do material.

Com esse propósito Williams *et al*. (WILLIAMS, A.J. *et al*., 2002) apresentaram um modelo numérico em FVM para analisar tarugo, matriz e suas interações em processos de

forjamento e extrusão, considerando o material forjado e extrudado como um material com característica de um fluido plástico. O material foi modelado considerando uma formulação Euleriana para evitar o remalhamento necessário devido à grande distorção que a malha sofre nestes tipos de processos quando se usa uma formulação Lagrangiana. Por outro lado uma formulação Lagrangiana foi utilizada na matriz devido as pequena deformação elástica não provocando distorções na malha. Um dos resultados publicados no trabalho foi à distribuição de temperatura e taxa de deformação efetiva para o processo de extrusão e que está sendo mostrado na Figura 2.4.5.

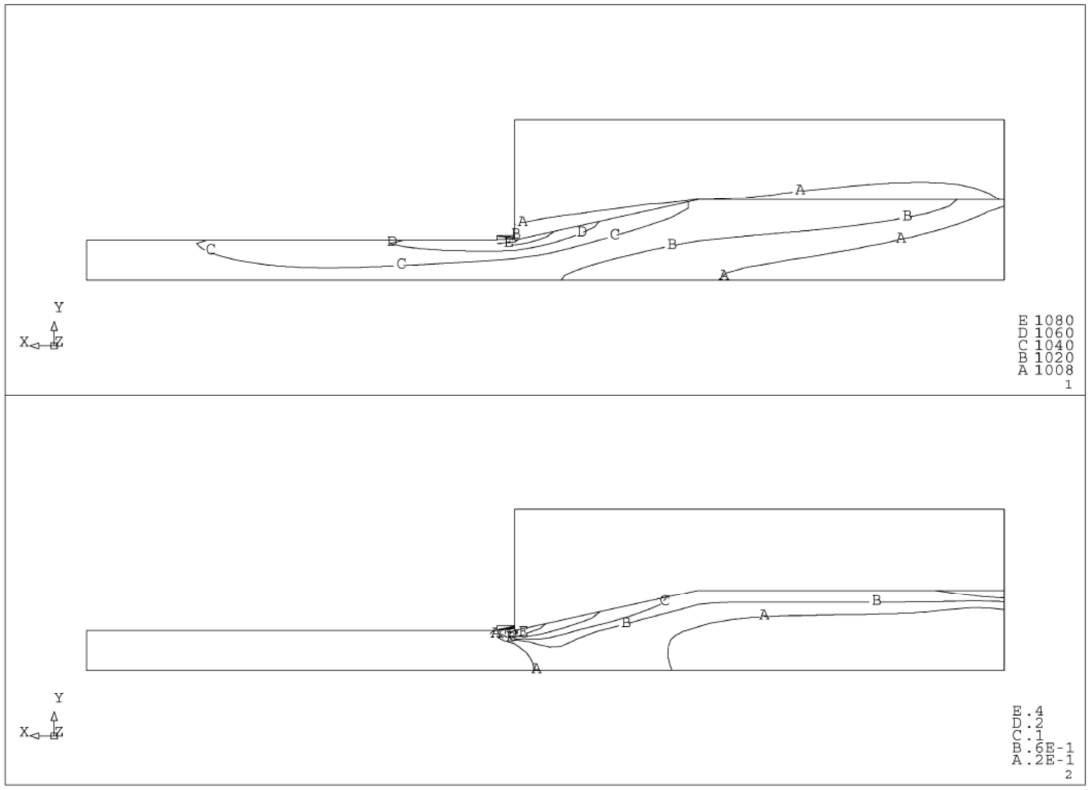


Figura 2.4.5 – Resultado da extrusão. (1) temperatura (K) ; (2) taxa de deformação efetiva. (WILLIAMS, A.J. *et al*., 2002)

Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005) apresentaram um método numérico para análise do processo de extrusão a quente e a frio usando FVM baseado na formulação Lagrangeana-Euleriana arbitrária. Os resultados foram comparados com dados experimentais e dados calculados pelo FEM. A Figura 2.4.6 apresenta a comparação entre os resultados por FVM e

resultados experimentais da distribuição dos contornos de velocidade para uma extrusão direta axissimétrica.

No mesmo trabalho pode-se destacar também os resultados das componentes de velocidade nas direções *x* e *y* e que foram calculadas num processo de extrusão em matriz cônica. A comparação apresentada na Figura 2.4.7 foi feita com dados calculados pelo FVM e por dados experimentais.

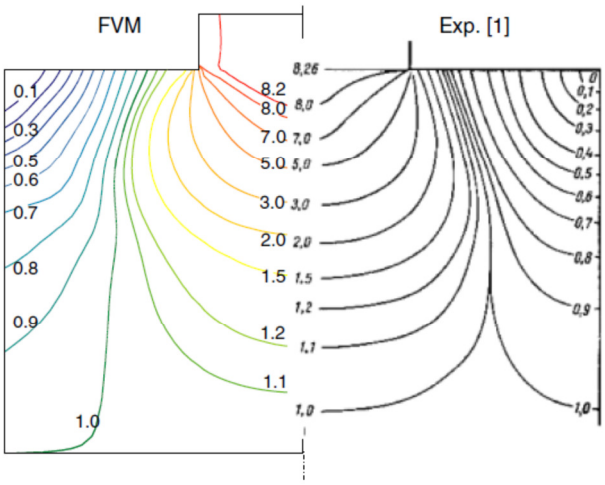


Figura 2.4.6 – Comparação entre os resultados por FVM e experimentais para a distribuição dos contornos de velocidade (BASIC, H. *et al*., 2005).

Lou *et al*. (LOU, S. *et al*., 2008) apresentaram o modelo matemático para o processo de extrusão de alumínio usando o FVM baseado na formulação Euleriana. O autor destaca que um dos aspectos fundamentais do trabalho, entre outros, é a introdução do FVM na análise do processo de extrusão. Na Figura 2.4.8 pode ser visto a comparação entre os resultados da taxa de deformação efetiva determinada a partir do modelo em FVM e FEM para uma extrusão em matriz quadrada.

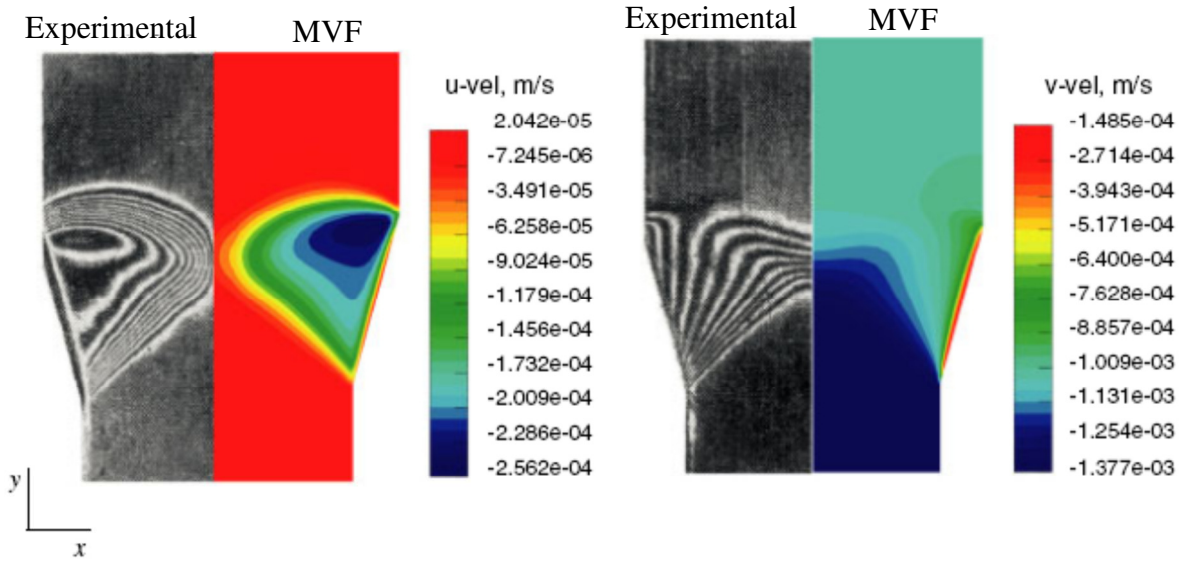


Figura 2.4.7 – Distribuição das componentes de velocidade nas direções x e y. Comparação entre resultados experimentais e resultados obtidos pelo FVM (BASIC et al., 2005).

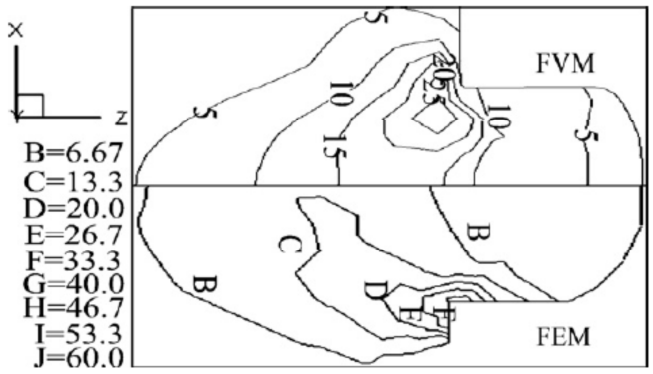


Figura 2.4.8 – Comparação entre as distribuições da taxa de deformação efetiva para FVM e FEM (LOU, S. *et al*., 2008).

Williams *et al*. (WILLIAMS, A.J. *et al*., 2010) estenderam seu trabalho apresentado no artigo (WILLIAMS, A.J. *et al*., 2002) , utilizando o mesmo método numérico baseado em FVM utilizando uma formulação Euleriana-Lagrangiana aplicada ao processo de extrusão. Nesta análise incluiram uma forma de acoplar as deformações da matriz (formulação Lagrangiana) com as deformações do extrudado (Euleriana), e desta forma as deformações da matriz irão influenciar o formato final do extrudado.

Como pode ser visto através dos trabalhos discutidos acima, o FVM tem sido aplicado no processo de extrusão em diversos aspectos das suas análises. Gerando resultados confiáveis através de comparações com resultados experimentais e também com resultados produzidos pelo FEM. Contudo, muitos aspectos ainda podem ser analisados assim abrindo um novo campo de pesquisa para os processos de deformação plástica.

2.5 Método MacCormack

Com a formulação do escoamento plástico para análise de um processo de conformação plástica, como foi declarado anteriormente, o processo pode ser encarado como um escoamento de um fluido incompressível e viscoso (MARTINS, P. e*t al.*, 2005). Um fluido é dito viscoso, segundo Potter *et al*. (POTTER, M.C. *et al*., 2004), se os efeitos da viscosidade ou das tensões de cisalhamento interno do fluido são significantes no escoamento do fluido. De acordo com Potter *et al*. (POTTER, M.C. *et al*., 2004), um fluido é dito incompressível se a massa específica de cada partícula do fluido permace relativamente constante no seu movimento através do campo de escoamento. Além da definição anterior Maliska (MALISKA, C.R., 2004) diz que o escoamento de um fluido incompressível não possui uma equação específica para a variável pressão, isto é, a massa específica não é função da pressão.

Quando se pretende analisar um escoamento incompressível, usualmente, tenta-se determinar os campos de velocidade, pressão e temperatura (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997). Essas informações são representadas matematicamente através das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia. Dentro das equações da conservação aparecem às incógnitas, que na forma primitiva, são: massa específica (ρ), as componentes da velocidade (que para o caso cartesiano tridimensional são: v_x, v_y e v_z), temperatura (T) e a pressão (p) (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), (MALISKA, C.R., 2004).

Segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004), em um escoamento compressível, as equações da conservação são resolvidas envolvendo uma equação de estado, isto é, uma equação que relaciona a massa específica com a pressão e a temperatura. Porém, se o escoamento é dito

incompressível, não há uma equação de estado que relaciona a pressão e a velocidade, e deste modo o desafio quando se pretende resolver o problema de um escoamento incompressível é extrair o campo de pressão (p) das equações da conservação da quantidade de movimento de forma que o campo de velocidade obtido satisfaça a equação da conservação da massa.

De acordo com Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), existem duas abordagens para tratar o problema da falta da equação de estado em um escoamento incompressível ou o acoplamento entre um campo de pressão e velocidade. A primeira abordagem é chamada de *Abordagem acoplada* (*Coupled Approach*), cujo objetivo é inserir nas equações uma compressibilidade artificial ou pseudo-compressibilidade, conforme foi apresenta por A.J. Chorin (CHORIN, A.J., 1967). A segunda abordagem é chamada de "Abordagem da Correção da Pressão" (*Pressure-Correction Approach*), que possui como característica o uso de uma equação derivada da equação da conservação da massa ou da quantidade de movimento para fazer a correção da pressão. Esta estratégia foi apresentada por S.V. Patankar e D.B. Spalding (PATANKAR, S.V. *et al*., 1972).

Na abordagem da correção da pressão alguns procedimentos foram desenvolvidos com o passar do tempo. Patankar (PATANKAR, S.V., 1980), Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004) apresentam e discutem os principais procedimentos que foram desenvolvidos e que são: Método SIMPLE, Método SIMPLER e Método PRIME, etc.

Dentre esses métodos de acoplamento pressão-velocidade, um método que se destaca é o método SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation*) sendo um dos primeiros a ser desenvolvido e largamente aplicado. Isto pode ser visto nos trabalhos de Chow *et al*. (CHOW, P. *et al*., 1996), Neofytou *et al*. (NEOFYTOU, P. *et al*., 2005), Darwish *et al*. (DARWISH, M. *et al*., 2009) e Holmes *et al*. (HOLMES, L. *et al*., 2011) que aplicaram o método SIMPLE para fazer o acoplamento pressão-velocidade nos métodos numéricos apresentados por eles.

Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004), para estabelecer o acoplamento entre a pressão-velocidade o método SIMPLE utiliza as seguintes equações de correção, para um caso bidimensional:

$$p = p_0 + p' \tag{2.5.1}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \tag{2.5.2}$$

onde, as variáveis p e $\boldsymbol{v}$ são os valores atuais da pressão e do vetor velocidade, respectivamente, as variáveis p_0 e $\boldsymbol{v}_0$ são os valores estimados da pressão e do vetor velocidade e as variáveis p' e $\boldsymbol{v}'$ são as correções de cada variável.

De acordo com Patankar (PATANKAR, S.V., 1980) as equações de correção da velocidade são obtidas a partir das equações da conservação do movimento enquanto que a equação da correção da pressão é estabelecida através da substituição da Equação (2.5.2), considerando as suas componenetes, na equação da conservação da massa, gerando uma equação de Poisson que deve ser resolvida, com condições de contorno apropriadas, para se obter p'.

Um aspecto importante na resolução numérica de um problema de escoamento de um fluido incompressível, pelo FVM, é a posição das variáveis p e $\boldsymbol{v}$ no volume de controle. A alternativa natural e aparentemente mais simples é armazenar todas as variáveis no mesmo ponto, segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004). Este tipo de arranjo é denominado de *Arranjo Co-localizado* (*collocated grid* ou *Nonstaggered grid*) e pode ser visto na Figura 2.5.1 (a). Segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004), a vantagem deste tipo de arranjo é a simplicidade do controle dos índices na implementação computacional, porém, esta abordagem faz surgir um problema que deve ser tratado com cuidado, que é o aparecimento de campos de pressão oscilatórios (*Checkerboard Oscillations*).

De acordo com Maliska (MALISKA, C.R., 2004) a solução para o problema dos campos de pressão oscilatório, quando se utiliza um arranjo co-localizado, resolve-se fazendo o deslocamento do ponto de avaliação das velocidades para as faces do volume de controle, como indicado na Figura 2.5.1 (b). Esse deslocamento é feito através de um esquema de interpolação. Tannehill *et al.* (TANNEHILL, J.C. *et al.*, 1997) sugere a utilização do esquema de interpolação de Rhie-Chow (RHIE, C.M. *et al.*, 1983), que realiza a interpolação aplicando a equação da conservação do movimento (*Momemtum Interpolation method*) nas velocidades no centro do volume de controle. Como pode ser visto nos trabalhos de Chow *et al.* (CHOW, P. *et al.*, 1996), Kim *et al.* (KIM, D. *et al.*, 2000), Neofytou *et al.* (NEOFYTOU, P. *et al.*, 2005) e Darwish *et al.* (DARWISH, M. *et al.*, 2009), que utilizam o método.

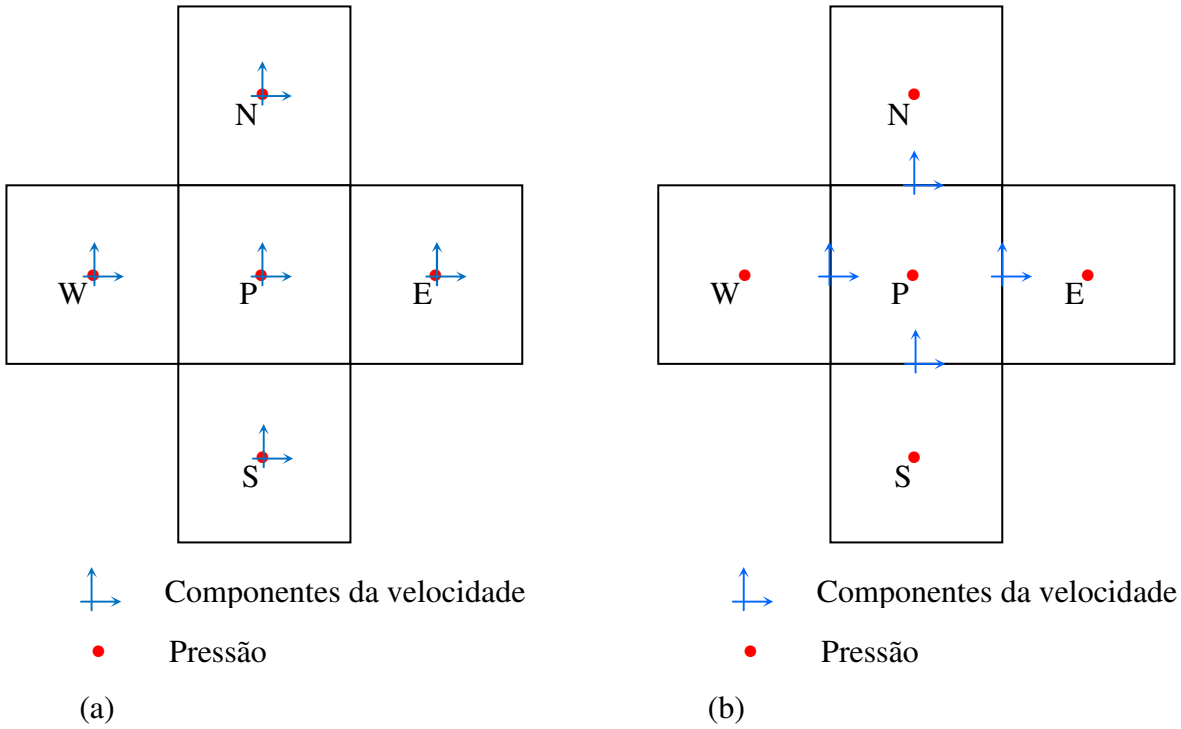


Figura 2.5.1 – Arranjo Co-localizado. (a) Pressão e componentes da velocidade avaliados no mesmo ponto. (b) Velocidades deslocadas para as faces do volume de controle, estratégia para a solução do problema dos campos de pressão oscilatórios.

Uma alternativa para o arranjo das variáveis em análises numéricas em escoamentos incompressíveis, segundo Tannehill *et al.* (TANNEHILL, J.C. *et al.*, 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004) é o *"Arranjo Desencontrado"* (*Staggered Grid*), onde, a variável pressão e cada componente da velocidade possui seu próprio volume de controle, conforme a Figura 2.5.2. Segundo Patankar (PATANKAR, S.V., 1980) este tipo de arranjo é fisicamente consistente, porém, a desvantagem desse arranjo é o controle de índices na implementação computacional, que se torna complexa em virtude da quantidade de volume de controle que se deve considerar.

Sendo o primeiro esquema de arranjo a ser utilizado, o arranjo desecontrado aparece em diversos trabalhos na literatura como nos métodos numéricos apresentados nos trabalhos de Langtangen *et al.* (LANGTANGEN, H.P. *et al.*, 2002), Piller *et al.* (PILLER, M. *et al.*, 2004) e Mompean *et al.* (MOMPEAN, G. *et al.*, 2010).

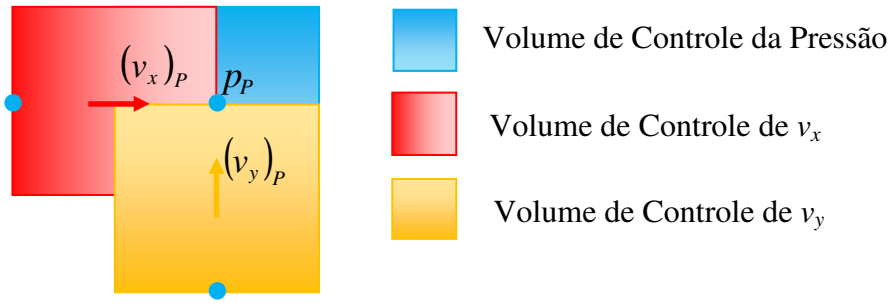


Figura 2.5.2 – Arranjo desencontrado. Especificação dos volumes de controle para cada variável do problema.

Toda a descrição do método é apresentada nos livros texto de Patankar (PATANKAR, S.V., 1980), Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004).

Outro aspecto importante na discretização das equações representativas no problema de escoamento é a definição do tipo de formulação em relação ao tempo. Maliska (MALISKA, C.R., 2004) sugere a seguinte função de interpolação no tempo:

$$\phi^{\theta} = \theta\phi + (1-\theta)\phi^{0} \tag{2.5.3}$$

onde, ϕ é a função que está sendo analizada e θ é o parâmetro que define o tipo de formulação no tempo aplicada. Isto é, se $\theta = 0$, define-se uma formulação explícita, onde todos os valores vizinhos ao ponto que se deseja calcular de ϕ foram calculados no instante anterior, gerando um conjunto de equações algébricas. Se $\theta = 1$ ou $0 < \theta < 1$ as formulações são denominadas, respectivamente, de totalmente implícita e implícita, ambas as formulações geram um sistema de equações lineares. Todas as três formulações estão representadas, graficamente, através da Figura 2.5.3.

Como comentado anteriormente, a formulação explícita no tempo gera um conjunto de equações algébricas que são resolvidas uma a uma em um processo extremamente rápido. Entretanto, para que se possa alcançar uma solução coerente em um método numérico, independente de ser implícito ou explícito, deve satisfazer as condições de consistência, estabilidade e convergência.

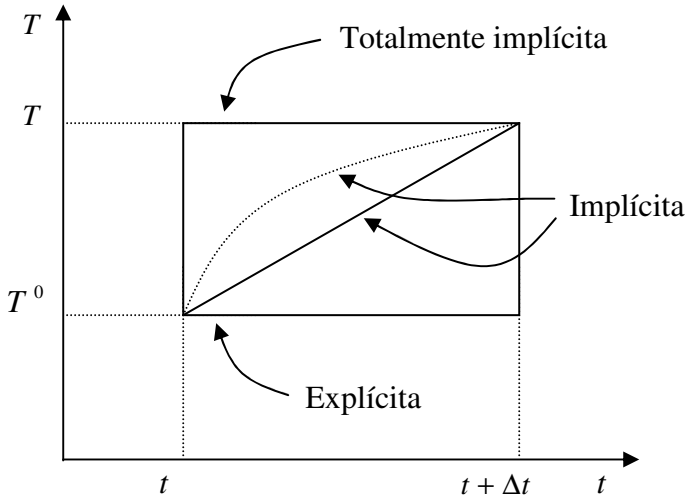


Figura 2.5.3 – Funções de interpolação no tempo (MALISKA, C.R., 2004).

Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), um método numérico dito consistente é aquele cuja solução numérica aproxima-se da solução analítica quando a malha espacial é refinada. Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) também afirma que um método numérico tem estabilidade se os erros, de qualquer origem, diminuem de um passo de tempo para o próximo passo de tempo.

Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004) afirmam que um método numérico é dito convergente se esse método é consistente e estável. Esta afirmação anterior é garantida pelo *Teorema da Equivalência de Lax*, que possui o seguinte enunciado:

"Para um problema de valor inicial bem posto e um esquema de discretização consistente, estabilidade é a condição necessária e suficiente para convergência".

De acordo com Patankar (PATANKAR, S.V., 1980), todo modelo numérico desenvolvido a partir de equações na forma conservativa e usando FVM é consistente. Então, um método numérico explícito que utiliza equações discretizadas na forma conservativa pelo FVM será consistente. Porém, a sua estabilidade será dada por uma condição chamada de CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy Condition*) (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e que depende de fatores, tais como, tamanho do passo de tempo, espaçamento da malha, entre outras informações. Então, um

método numérico explícito é chamado de *condicionalmente estável*, isto é, o método depende de uma condição para ter estabilidade.

Para resolver as equações que governam um escoamento, Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) sugerem alguns métodos numéricos explícitos, tais como, Método de Euler, Método de Lax-Wendroff, Método Brailovskaya, Método Range-Kutta, Método MacCormack, etc. Comparando esses Métodos, em algumas características, os mesmos possuem vantagens ou desvantagens entre eles. Desses métodos citados acima pode-se destacar o Método MacCormack que, segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), é largamente utilizado para resolver problemas no escomento de fluidos compressíveis.

O Método MacCormack é uma variação do método de dois passos de Lax-Wendroff, porém, mais eficiente para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs) não-lineares, gerando boas soluções para as descontinuidades dessas equações, como pode ser visto na Figura 2.5.4 que é a solução de uma equação de Burger (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997).

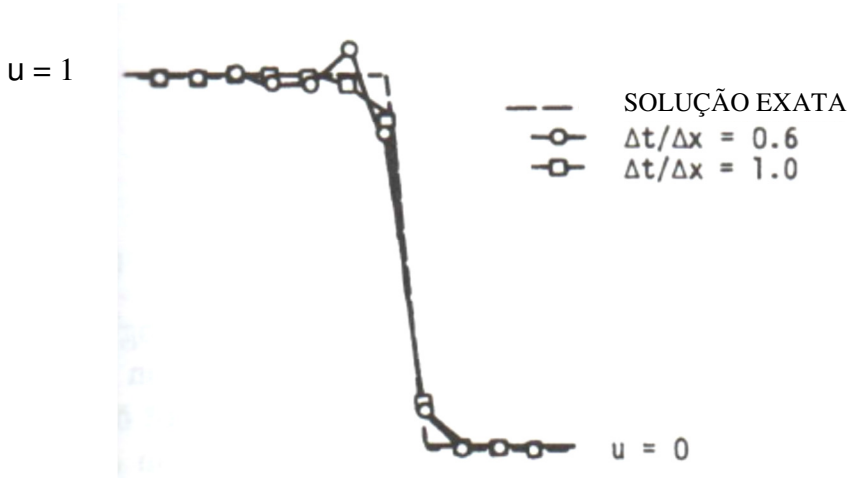


Figura 2.5.4 – Solução de uma equação de Burger usando o Método de MacCormack (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997).

De acordo com Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), o método MacCormack é um método de dois passos, isto é, ele calcula um passo *Preditor* e em seguida um passo *Corretor*, estabelecendo o valor atual da variável analisada a partir de um média aritmética entre os passos preditor e corretor. Se no passo preditor for utilizado um operador diferencial *à frente*, então no

passo corretor será utilizado um operador diferencial *a ré* para que seja garantida a segunda ordem de precisão tanto no tempo quanto no espaço, que é a sua principal característica.

A literatura sugere que o método MacCormack não necessita de um método para controlar as oscilações, pois, ele é um método oscilatório. Porém, a prática mostra que na aplicação dele em escoamentos compressíveis é necessário, para obter soluções de qualidade, de viscosidade artificial ou um esquema de TVD (*Total Variation Diminishing*) acoplado ao método (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997). Como pode ser visto nos artigos de Fort *et al*. (FORT, J. *et al*., 2001) Lin *et al*. (LIN, G.F. *et al*., 2003), que aplicam um esquema TVD acoplado ao método MacCormack ou nos artigos de Vimmr (VIMMR, J., 2003), Perízkova et al. (PORÍZKOVA, P.P. et al., 2010) e Perízkova et al. (PORÍZKOVA, P.P. et al., 2011) que utilizam um esquema de viscosidade artificial.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A análise numérica ou modelagem matemática do escoamento de um material metálico no processo de conformação plástica de extrusão pode ser tratada por meio do FVM usando a formulação do escoamento plástico. Isto é, de acordo com Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), o escoamento do material é considerado semelhante ao escoamento de um fluido incompressível e viscoso. Por sua vez, segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), o escoamento de um fluido incompressível e viscoso é representado de forma matemática por meio das equações da conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia.

Essas leis da conservação são princípios gerais ou universais que governam o movimento de corpos sólidos e fluidos submetidos a forças de superfície e de corpo sem se importar com as propriedades do material. Isto é, qualquer material submetido à deformação elástica, plástica ou viscoplástica e temperatura deve obedecer estes princípios sempre que o corpo se move ou se deforma sob a aplicação de cargas. Para isso, basear-se-a nas seguintes leis: conservação de massa, primeira lei da termodinâmica e a segunda lei de Newton.

3.1 Equação da Conservação da Massa

A equação da conservação da massa é definida pelo princípio de que a massa de um sistema permanece sempre constante. Considera-se o corpo mostrado na Figura 3.1.1, que ocupa certa região no espaço, onde A e V representam a área e o volume total do corpo, respectivamente. Assumindo que a massa específica ρ, em um tempo t, está continuamente distribuída no volume *V*, então, a massa m_e de um volume elementar pode ser determinada por:

$$m_e = \rho dV \tag{3.1.1}$$

A massa total m do volume V em um tempo t é dada por:

$$m = \int_V \rho dV \tag{3.1.2}$$

onde, ρ e dV são a massa específica e o volume elementar, respectivamente. Considerando o volume V, uma superfície infinitesimal dA, o vetor velocidade $\boldsymbol{v}$ e o vetor normal $\boldsymbol{s}$. Conforme a Figura 3.1.1 a taxa do fluxo de massa saindo do elemento de área dA, pode ser representada por:

$$\frac{dm}{dt} = \int_A \rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) dA \tag{3.1.3}$$

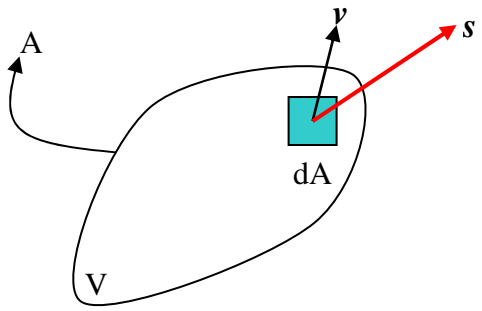


Figura 3.1.1 – Corpo representando um volume no espaço.

A taxa do fluxo de massa no volume V pode ser descrita por:

$$\frac{dm}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{3.1.4}$$

Como a conservação de massa do volume deve ser satisfeita, então:

$$\int_A \rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) dA = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{3.1.5}$$

A Equação (3.1.5) é a forma integral da equação da conservação da massa. Porém, também pode-se escrever a equação da conservação da massa na sua forma diferencial. Um caminho para isso é usar o *teorema da divergência* na Equação (3.1.5), que, para este caso, se apresenta da seguinte forma:

$$\int_A \rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}) dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dV \tag{3.1.6}$$

sendo ∇ o operador diferencial Nabla. Substituindo a Equação (3.1.6) na Equação (3.1.5), tem-se:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dV \tag{3.1.7}$$

Organizando a Equação (3.1.7), tem-se:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right) dV = 0 \tag{3.1.8}$$

Para que a Equação (3.1.8) permaneça válida para todo o volume de controle arbitrário, é necessário que o integrando seja zero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.1.9}$$

De acordo com Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) a Equação (3.1.9) é a equação da conservação da massa ou *equação da continuidade*. Segundo Malvern (MALVERN, L.E., 1969), a Equação (3.1.9) pode ser reescrita, na forma conservativa, para coordenadas retangulares ou cilíndricas para o caso tridimensional da seguinte forma:

Coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.1.10}$$

na qual v_x, v_y e v_z são as componentes cartesianas do vetor velocidade.

Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.1.11}$$

onde, v_r, v_θ e v_z são as componentes cilíndricas do vetor velocidade.

Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) afirmam que se a massa específica for considerada constante, tem-se um escoamento incompressível. Logo, as Equações (3.1.10) e (3.1.11) se reduzem, respectivamente, a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.1.12}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.1.13}$$

3.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

A lei da conservação da quantidade de movimento é definida pela segunda lei de Newton, que afirma que a força resultante agindo sobre um corpo é igual à taxa de variação da quantidade

de movimento. Então, a quantidade de movimento linear total L de um volume dV, com uma velocidade $\boldsymbol{v}$ e uma massa específica ρ, é calculada por:

$$L = \int_V \rho \boldsymbol{v} dV \tag{3.2.1}$$

A taxa de variação da quantidade de movimento linear fica representada por:

$$\frac{DL}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \boldsymbol{v} dV \tag{3.2.2}$$

Sendo DL/Dt a derivada material ou derivada substancial da quantidade de movimento linear.

Considerando que as forças que estão agindo no volume são as forças de corpo $\boldsymbol{b}$ e as forças de superfície representadas pelo Tensor de Tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, pode-se escrever que a mudança na quantidade de movimento linear é definida por:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \boldsymbol{v} dV = \int_V \rho \boldsymbol{b} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{s}\, dA \tag{3.2.3}$$

onde, $\boldsymbol{s}$ é o vetor normal à superfície A. Aplicando o teorema da divergência, pode-se escrever a Equação (3.2.3) da seguinte forma:

$$\int_V \frac{D(\rho \boldsymbol{v})}{Dt} dV = \int_V \rho \boldsymbol{b} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dV \tag{3.2.4}$$

Reorganizando a Equação (3.2.4), tem-se:

$$\int_V \left[\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} - \frac{D(\rho \boldsymbol{v})}{Dt} \right] dV = 0 \tag{3.2.5}$$

Considerando que para um volume de controle arbitrário o integrando deve ser zero, tem-se que a equação da conservação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\frac{D(\rho \boldsymbol{v})}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{3.2.6}$$

Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) a derivada material pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla(\ ) \tag{3.2.7}$$

Aplicando a derivada material representada pela Equação (3.2.7) na Equação (3.2.6), tem-se:

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{3.2.8}$$

De acordo com Maliska (MALISKA, C.R., 2004) a Equação (3.2.8) pode ser escrita em coordenadas retangulares da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho b_x \tag{3.2.9a}$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho b_y \tag{3.2.9b}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho b_z \tag{3.2.9c}$$

sendo os termos σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{zz} as tensões normais, σ_{xy}, σ_{xz} e σ_{yz} são as tensões de cisalhamento e b_x, b_y e b_z são as forças de corpo.

A Equação (3.2.8) também pode ser desenvolvida em coordenadas cilíndricas, de acordo com Malvern (MALVERN, L.E., 1969), da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho\rho_r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_r)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_r)}{\partial z}-\frac{\rho v_\theta^2}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho b_r \quad (3.2.10a)$$

$$\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho\rho_r v_\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_\theta)}{\partial z}+\frac{\rho v_r v_\theta}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+\rho b_\theta \quad (3.2.10b)$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho\rho_r v_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_z)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho b_z \quad (3.2.10c)$$

sendo os termos σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{zz} as tensões normais, σ_{rz}, $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{z\theta}$ são as tensões de cisalhamento, b_r, b_θ e b_z são as forças de corpo.

3.3 Equação da Conservação da Energia

A lei da conservação da energia é um dos princípios gerais mais importantes da ciência. Que foi postulada a partir de extensivos experimentos que mostraram que a energia não é criada e nem destruída. Isto é, uma forma de energia apenas se transforma em outra ou mais formas diferentes de energia. Este princípio é também chamado da *primeira lei da termodinâmica* (POTTER, M.C. *et al*., 2004).

Pode-se dizer que esta lei relaciona a transferência de calor, trabalho e a variação de energia dentro de um sistema ou volume de controle. Dito de outra forma, a taxa de transferência de calor para um sistema acrescido da taxa de trabalho externo que o sistema recebe é igual à taxa à qual a energia total do sistema está variando (POTTER, M.C. *et al*., 2004). Estas considerações podem ser representadas para um sistema pela seguinte equação:

$$\dot{U}=\dot{Q}+\dot{W}_{externo} \quad (3.3.1)$$

onde, $\dot{U}$ é a taxa de variação da energia total do sistema, $\dot{Q}$ é a taxa de transferência de calor através da superfície do sistema e o termo $\dot{W}_{externo}$ é a taxa de trabalho externo realizado sobre o sistema ou que cruza a fronteira do sistema (INCROPERA, F.P., et al., 2007). Considerando um volume de controle no interior do sistema, o lado esquerdo da Equação (3.3.1) pode ser representado pela integral do volume total do sistema por:

$$\dot{U} = \frac{D}{Dt}\int_V \rho e dV \tag{3.3.2}$$

na qual ρ é a massa específica do volume de controle, D/Dt é a derivada material, e é a *energia específica total* do volume de controle (energia por unidade de volume) e que pode ser composta pela energia cinética, energia potencial e a energia interna do volume de controle, tal que:

$$e = e_{cinética} + e_{interna} + e_{potencial} \tag{3.3.3}$$

A transferência de calor através da fronteira do sistema, o termo $\dot{Q}$, na Equação (3.3.1), pode ser decomposto em:

$$\dot{Q} = \int_V \rho r \, dV - \int_A \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{s} \, dA \tag{3.3.5}$$

onde, r é o calor por unidade de massa proveniente de fonte de calor gerada por irradiação eletromagnética, reações químicas, etc (INCROPERA, F.P. et al., 2007). O termo $\dot{\boldsymbol{q}}$ é o vetor de fluxo de calor por condução, convecção ou atrito na superfície do sistema por unidade de tempo e o sinal negativo indica que o fluxo de calor será de fora para dentro do sistema, A é a superfície do sistema e $\boldsymbol{s}$ o vetor normal à superfície A (INCROPERA, F.P. et al., 2007).

Por meio do princípio da potência virtual, o termo $\dot{W}_{externo}$ na Equação (3.3.1) pode ser calculado da seguinte forma:

$$\dot{W}_{externo} = \int_V \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\, dV + \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}\, dA \tag{3.3.6}$$

sendo $\boldsymbol{b}$ as forças de corpo por unidade de massa, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de contato (densidade de força) na superfície e $\boldsymbol{v}$ é o vetor velocidade.

Considerando a Equação (3.3.1) e substituindo as Equações (3.3.2), (3.3.5) e (3.3.6), pode-se ter:

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho e) dV = \int_V \rho r\, dV - \int_A \dot{q} \cdot n\, dA + \int_V \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\, dV + \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}\, dA \tag{3.3.7}$$

Aplicando o teorema da divergência de Green nos termos de integral de superfície e rearranjando os termos da Equação (3.3.7), tem-se:

$$\int_V \frac{D(\rho e)}{Dt} dV = \int_V \left[\rho r - \nabla \cdot \dot{q} + \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v})\right] dV \tag{3.3.8}$$

Igualando os integrandos e reorganizando a Equação (3.38), tem-se a equação da conservação de energia para um volume de controle arbitrário:

$$\frac{D(\rho e)}{Dt} = \rho r - \nabla \cdot \dot{q} + \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.3.9}$$

O termo do lado esquerdo da Equação (3.3.9) pode ser desenvolvido considerando a derivada material da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \boldsymbol{v}) = \rho r - \nabla \cdot \dot{q} + \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.3.10}$$

A Equação (3.3.10) é a forma geral para a equação da conservação da energia para um volume de controle válido tanto para o escoamento de fluido como de sólido. Considerando a

Equação (3.3.10) da conservação da energia e desenvolvendo em coordenadas cartesianas retangulares e em coordenadas cilíndricas, tem-se:

Coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho e v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho e v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho e v_z)}{\partial z}=\frac{\partial(v_x\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(v_y\sigma_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v_z\sigma_{xz})}{\partial x}+$$
$$\frac{\partial(v_x\sigma_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(v_y\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v_z\sigma_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(v_x\sigma_{xz})}{\partial z}+\frac{\partial(v_y\sigma_{yz})}{\partial z}+\frac{\partial(v_z\sigma_{zz})}{\partial z}- \tag{3.3.11}$$
$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}-\frac{\partial \dot{q}}{\partial z}+b_x v_x+b_y v_y+b_z v_z+\rho r$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho e v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho e v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho e v_z)}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\theta\sigma_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_z\sigma_{rz})}{\partial r}+$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial(v_r\sigma_{r\theta})}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v_z\sigma_{z\theta})}{\partial \theta}+\frac{\partial(v_r\sigma_{rz})}{\partial z}+\frac{\partial(v_\theta\sigma_{\theta z})}{\partial z}+\frac{\partial(v_z\sigma_{zz})}{\partial z}- \tag{3.3.12}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{q}_r)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{q}_\theta}{\partial \theta}-\frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}+b_r v_r+b_\theta v_\theta+b_z v_z+\rho r$$

3.4 Forma Vetorial das Equações de Governo

Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R, 2004) sugerem uma forma vetorial compacta, que pode ser utilizado para a aplicação de um algoritmo numérico na solução das equações de governo do escoamento de fluidos.

Considerando as Equações (3.1.10), (3.2.9) e (3.3.16) que são, respectivamente, a equação da massa, as três equações do movimento e a equação da energia, que são reescritas abaixo, considerando coordenadas retangulares tridimensionais,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{3.4.1a}$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x v_x-\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x-\sigma_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x-\sigma_{xz})}{\partial z}=\rho b_x \tag{3.4.1b}$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x v_y-\sigma_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_y-\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_y-\sigma_{yz})}{\partial z}=\rho b_y \tag{3.4.1c}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x v_z-\sigma_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_z-\sigma_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_z-\sigma_{zz})}{\partial z}=\rho b_z \tag{3.4.1d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho e v_x-v_x\sigma_{xx}-v_y\sigma_{xy}-v_z\sigma_{xz}+\dot{q}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho e v_y-v_x\sigma_{xy}-v_y\sigma_{yy}-v_z\sigma_{yz}+\dot{q}_y)}{\partial y}+\\ \frac{\partial(\rho e v_z-v_x\sigma_{xz}-v_y\sigma_{yz}-v_z\sigma_{zz}+\dot{q}_z)}{\partial z}=b_x v_x+b_y v_y+b_y v_y+\rho r\end{aligned} \tag{3.4.1e}$$

As Equações (3.4.1) da conservação da massa, quantidade de movimento e energia seguem uma mesma estrutura e podem ser escritas na seguinte forma compacta de matrizes:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S} \tag{3.4.2}$$

ou desenvolvendo o divergente do vetor $\boldsymbol{F}$, tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}=\boldsymbol{S} \tag{3.4.3}$$

onde, $\boldsymbol{Q}$ é o vetor que representam as variáveis (massa específica, componentes da velocidade e temperatura), $\boldsymbol{F}$ é o vetor de fluxo do material e do calor e $\boldsymbol{S}$ é o termo das forças de corpo. Esses vetores, então assumem a seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{Bmatrix} \tag{3.4.5a}$$

$$\boldsymbol{F}_x = \begin{Bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 - \sigma_{xx} \\ \rho v_x v_y - \sigma_{xy} \\ \rho v_x v_z - \sigma_{xz} \\ v_x \rho e - v_x \sigma_{xx} - v_y \sigma_{xy} - v_z \sigma_{xz} + \dot{q}_x \end{Bmatrix} \tag{3.4.5b}$$

$$\boldsymbol{F}_y = \begin{Bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \sigma_{xy} \\ \rho v_y^2 - \sigma_{yy} \\ \rho v_y v_z - \sigma_{yz} \\ v_y \rho e - v_x \sigma_{xy} - v_y \sigma_{yy} - v_z \sigma_{yz} + \dot{q}_y \end{Bmatrix} \tag{3.4.5c}$$

$$\boldsymbol{F}_z = \begin{Bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \sigma_{xz} \\ \rho v_z v_y - \sigma_{yz} \\ \rho v_z^2 - \sigma_{zz} \\ v_z \rho e - v_x \sigma_{xz} - v_y \sigma_{yz} - v_z \sigma_{zz} + \dot{q}_z \end{Bmatrix} \tag{3.4.5d}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho b_x \\ \rho b_y \\ \rho b_z \\ b_x v_x + b_y v_y + b_y v_y + \rho r \end{Bmatrix} \tag{3.4.5e}$$

Considerando as Equações (3.1.11), (3.2.10) e (3.3.17) que são, respectivamente, a equação da massa, as três equações da quantidade de movimento e a equação da energia, que são reescritas abaixo em coordenadas cilíndricas tridimensionais:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{3.4.6a}$$

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_r)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_r)}{\partial z}-\frac{\rho v_\theta^2}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho b_r \tag{3.4.6b}$$

$$\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r v_\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_\theta)}{\partial z}+\frac{\rho v_r v_\theta}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+\rho b_\theta \tag{3.4.6c}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r v_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta v_z)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\rho b_z \tag{3.4.6d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(\rho e v_r-v_r\sigma_{rr}-v_\theta\sigma_{r\theta}-v_z\sigma_{rz}+\dot{q}_r\right)\right]}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho e v_\theta-v_r\sigma_{r\theta}-v_\theta\sigma_{\theta\theta}-v_z\sigma_{z\theta}+\dot{q}_\theta\right)}{\partial \theta}+\\ \frac{\partial\left(\rho e v_z-v_r\sigma_{rz}-v_\theta\sigma_{\theta z}-v_z\sigma_{zz}+\dot{q}_z\right)}{\partial z}=b_r v_r+b_\theta v_\theta+b_z v_z+\rho r\end{aligned} \tag{3.4.6e}$$

Repetindo a forma vetorial compacta, para coordenadas cilíndricas, a equação da conservação da massa, as três equações da conservação da quantidade de movimento e a equação da conservação da energia podem ser agrupadas na seguinte equação geral:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\boldsymbol{F}_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}=\boldsymbol{S} \tag{3.4.7}$$

onde, os vetores $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F_r}$, $\boldsymbol{F_\theta}$ e $\boldsymbol{F_z}$ possuem os mesmos significados destacados para as coordenadas retangulares e $\boldsymbol{S}$ é o vetor independente. Esses vetores assumem a seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_\theta \\ \rho v_z \\ \rho e \end{Bmatrix} \tag{3.4.8a}$$

$$\boldsymbol{F}_r = \begin{Bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 - \sigma_{rr} \\ \rho v_r v_\theta - \sigma_{r\theta} \\ \rho v_r v_z - \sigma_{rz} \\ \rho e v_r - v_r \sigma_{rr} - v_\theta \sigma_{r\theta} - v_z \sigma_{rz} + \dot{q}_r \end{Bmatrix} \tag{3.4.8b}$$

$$\boldsymbol{F}_\theta = \begin{Bmatrix} \rho v_\theta \\ \rho v_\theta v_r - \sigma_{r\theta} \\ \rho v_\theta^2 - \sigma_{\theta\theta} \\ \rho v_\theta v_z - \sigma_{z\theta} \\ \rho e v_\theta - v_r \sigma_{r\theta} - v_\theta \sigma_{\theta\theta} - v_z \sigma_{z\theta} + \dot{q}_\theta \end{Bmatrix} \tag{3.4.8c}$$

$$\boldsymbol{F}_z = \begin{Bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r - \sigma_{rz} \\ \rho v_z v_\theta - \sigma_{z\theta} \\ \rho v_z^2 - \sigma_{zz} \\ \rho e v_z - v_r \sigma_{rz} - v_\theta \sigma_{z\theta} - v_z \sigma_{zz} + \dot{q}_z \end{Bmatrix} \tag{3.4.8d}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho v_\theta^2 - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r \\ \dfrac{\sigma_{r\theta} - \rho v_r v_\theta}{r} + \rho b_\theta \\ \rho b_z \\ b_r v_r + b_\theta v_\theta + b_z v_z + \rho r \end{Bmatrix} \tag{3.4.8e}$$

3.5 Equações Constitutivas

As equações constitutivas são expressões matemáticas que modelam o comportamento de um material sob condições de carregamento mecânico e/ou térmico por meio do relacionamento das variáveis da estática (dadas pelas tensões), da cinemática (dadas pelos deslocamentos, deformações e velocidades) e térmica (dado pelo fluxo térmico e a temperatura) (MALVERN, L.E., 1969).

As equações constitutivas variam para diferentes materiais, ou até mesmo para um mesmo material, quando submetidos a diferentes regimes de deformação. Em geral, pode-se agrupar o comportamento dos materiais em modelos constitutivos que incluem um ou mais comportamentos característicos, tais como, comportamento elástico, plástico, viscoso ou a combinação destas características. Para processos de conformação plástica de metais, algumas equações constitutivas específicas devem ser consideradas (KHAN, A.S. et al., 1995).

3.5.1 Lei de Fourier da Condução de Calor

A condução de calor acontece em um meio estacionário, sólido ou fluido, quando existe um gradiente de temperatura neste meio. Este processo pode ser visto como a vibração atômica e molecular e é caracterizada pela transferência de energia de uma partícula mais energética para uma partícula com menor energia. É possível quantificar o processo de condução de calor através da equação do fluxo térmico por condução. A equação do fluxo térmico por condução é dada pela *Lei de Fourier*, e está representada abaixo em coordenadas retangulares e cilíndricas:

Coordenadas Retangulares:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -k\nabla T = -k\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.5.1.1}$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -k\nabla T = -k\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{3.5.1.2}$$

onde, $\dot{\boldsymbol{q}}$ é o fluxo térmico por condução por unidade de área e $\nabla \boldsymbol{T}$ é o gradiente de temperatura. A constante de proporcionalidade k é a condutividade térmica, propriedade importante nas análises térmicas, que se define através da proporcionalidade definida pela Lei de Fourier. O sinal de menos na Equação (3.5.1.1) é conseqüência do fato de que o calor é transferido no sentido da diminuição da temperatura (INCROPERA, F.P., et al., 2007).

3.5.2 Equações Constitutivas para um Fluido

Na solução do escoamento de um fluido, as equações de governo, mais especificamente as equações da quantidade de movimento e a equação da energia, necessitam a substituição das relações entre as tensões com as taxas de deformação, isto é, as equações constitutivas. As relações para um fluido newtoniano, isto é, fluidos que possuem uma relação linear entre a tensão e o gradiente de velocidade, segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997), são dadas através da seguinte relação, demostrada em notação indicial:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij}} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij}\mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \text{ com } i,j,k = 1,2,3 \tag{3.5.2.1}$$

sendo σ_{ij} o tensor tensão de Cauchy, p é a pressão, δ_{ij} é o delta de Kronecker, v_i, v_j e v_k as componentes da velocidade, μ é o coeficiente de viscosidade ou viscosidade dinâmica e μ' é o segundo coeficiente de viscosidade. Através da condição de Stokes pode-se relacionar a viscosidade dinâmica com o segundo coeficiente da viscosidade da seguinte forma:

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu \tag{3.5.2.2}$$

Substituindo a Equação (3.5.2.2) na Equação (3.5.2.1), tem-se:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right], \text{ com } i,j,k = 1,2,3 \tag{3.5.2.3}$$

O segundo termo da Equação (3.5.2.3) representa a componente viscosa do fluido. Desenvolvendo a Equação (3.5.2.3) em coordenadas retangulares, tem-se:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \tag{3.5.2.4a}$$

$$\sigma_{yy} = -p + \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \tag{3.5.2.4b}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right] \tag{3.5.2.4c}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right] \tag{3.5.2.4d}$$

$$\sigma_{xz} = \mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right] \tag{3.5.2.4e}$$

$$\sigma_{yz} = \mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right] \tag{3.5.2.4f}$$

3.5.3 Equações Constitutivas para a Plasticidade

Para processos de deformação plástica de metais, no regime elástico, as deformações são totalmente recuperáveis logo após a remoção do carregamento e a relação entre a tensão e a deformação é linear e independente da trajetória de deformação. Isto é, as deformações são determinadas de maneira unívoca pelas tensões, e as equações constitutivas são representadas pela Lei de Hooke. Porém, no regime plástico a deformação é irrecuperável na retirada do carregamento e a relação entre a tensão e deformação não é mais linear e as deformações são dependentes das deformações anteriores, ou seja, o estado de tensão final depende da trajetória da deformação plástica (JOHNSON, W. *et al*., 1983),

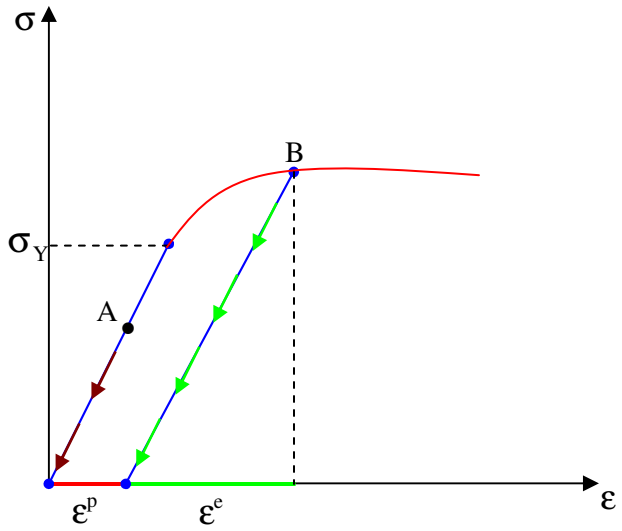


Figura 3.5.3.1 – Ensaio uniaxial para dois tipos de carregamentos. Ponto A somente deformação elástica. Ponto B deformação elástica e plástica.

(KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

Para analisar as considerações citadas acima pode-se usar um ensaio uniaxial, conforme mostrado na Figura 3.5.3.1, onde foi descrito um primeiro carregamento até o ponto A e que em seguida é removido. A parte elástica, no descarregamento, segue pelo mesmo caminho do

carregamento realizado (representado pelas flechas em marrom), mas no sentido inverso, resultando em nenhum acúmulo de deformação no processo.

Porém, considerando um segundo carregamento de um material com encruamento, que é levado até o ponto B, sendo o ponto B posicionado além da tensão de escoamento. Quando se remove o carregamento a deformação elástica, representada pelo segmento em verde sobre o eixo das deformações, é totalmente recuperado e segue a mesma inclinação da parte elástica do primeiro carregamento (representados pelas flechas em verde).

Entretanto, neste carregamento há um acúmulo de deformação que é representado pelo segmento em vermelho sobre o eixo das deformações, esta por sua vez é a deformação plástica acumulada neste segundo carregamento.

Destes dois carregamentos discutidos anteriormente, pode-se perceber que a deformação elástica é independente do histórico de carregamento, isto é, a deformação elástica é totalmente recuperada independentemente dos carregamentos anteriores. Porém, a deformação plástica é dependente desse histórico ou da trajetória da deformação plástica, isto é, a deformação plástica posterior dependerá da deformação plástica anterior (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

Na Teoria da Plasticidade existem duas grandes classes de abordagem do comportamento plástico dos metais, cujas leis constitutivas são baseadas na Teoria da Deformação Plástica e/ou Viscoplástica Incremental e na Teoria da Deformação Plástica e/ou Viscoplástica Total.

A teoria da deformação plástica incremental ou também teoria do escoamento plástico é definida pela relação entre os incrementos infinitesimais de tensões com incrementos infinitesimais de deformação. Essa teoria baseia-se em alguns princípios, tais como: o Postulado de Drucker, Postulado da Dissipação Plástica Máxima, Potencial Plástico e Lei de escoamento (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

A generalização do fenômeno da deformação plástica para um estado de tensão multiaxial pode ser representada pela superfície de escoamento dada pela Equação (3.5.3.1).

$$F(\sigma_{ij}) = K \tag{3.5.3.1}$$

onde, $F(\boldsymbol{\sigma})$ é a função que define a superfície de escoamento e K é um parâmetro do encruamento e controla a variação da superfície de escoamento. Se $F = K$ e $dF > 0$ define-se um carregamento plástico e há deformação plástica, se $F = K$ e $dF = 0$ define-se um estado de carregamento plástico neutro não havendo deformação plástica e se $F = K$ e $dF < 0$ define-se um descarga elástica. A função F é a função de escoamento plástico, definida por um critério de escoamento, por exemplo, o critério de von Mises, que para um sistema cartesiano genérico possui a seguinte forma:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_y^2 \tag{3.5.3.2}$$

sendo σ_y a tensão limite de escoamento.

O encruamento do material pode ser isotrópico ou cinemático: o primeiro é caracterizado pela expansão uniforme da superfície de escoamento e o segundo é caracterizado por preservar a forma da superfície de escoamento e por provocar sua translação no espaço das tensões. Pode haver também o encruamento combinado, onde os efeitos dos casos anteriores podem aparecer em um mesmo processo (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

Para determinar as equações constitutivas do domínio plástico para um dado material é necessário estabelecer a relação dos incrementos de tensões com os incrementos de deformação, sabendo que o critério de plasticidade fornece a combinação de tensões que estabelece o início do escoamento plástico. Para isso assume-se que o incremento de deformação plástica é proporcional ao gradiente de uma quantidade Q chamada de *Potencial Plástico*. Este quantidade Q é uma função de tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$, $Q(\boldsymbol{\sigma})$, também chamada de *Função Potencial* e que representa uma superfície no espaço das tensões principais e para o qual todos os pontos apresentam igual potencial para a deformação plástica (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \tag{3.5.3.3}$$

no qual $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade positiva chamada de *Multiplicador Plástico*. A Equação (3.5.3.3) é conhecida como *Lei Associada do Escoamento Plástico*, pois, uma vez iniciada a deformação plástica a progressão da deformação será regida por essa lei. Quando $F = Q$, isto é, a função de escoamento plástico é igual à função potencial, a teoria da plasticidade é dita *associativa*.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \tag{3.5.3.4}$$

O multiplicador plástico $d\lambda$ pode ser calculado para material isotrópico por:

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}} \tag{3.5.3.5}$$

onde, $d\bar{\varepsilon}^{p}$ e $\bar{\sigma}$ são, respectivamente, a deformação e tensão efetiva e são calculados por:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{xz}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.3.6}$$

$$d\bar{\varepsilon}^{p} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_{xx} - d\varepsilon_{yy})^2 + (d\varepsilon_{yy} - d\varepsilon_{zz})^2 + (d\varepsilon_{zz} - d\varepsilon_{xx})^2 + 6(d\varepsilon_{xy})^2 + 6(d\varepsilon_{yz})^2 + 6(d\varepsilon_{xz})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.3.7}$$

Usando a noção de potencial plástico representada pela Equação (3.5.3.3), considerando o critério de escoamento de von Mises e a hipótese de plasticidade associativa, pode-se determinar os dois tipos de relações entre o incremento de tensão e o incremento de deformação para o regime plástico (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

A primeira delas são as Equações de Levy-Mises, que foram definidas por Levy em 1871 e por von Mises em 1913 e propuseram que os incremento de deformação plástica ($d\bar{\varepsilon}^{p}$) e as tensões desviadoras ($\boldsymbol{\sigma}'$) deveriam se relacionar do seguinte modo:

$$d\bar{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}' d\lambda \tag{3.5.3.8}$$

Considerando a direção *x*, a definição de tensão desviadora e a Equação (3.5.3.5), pode-se escrever a Equação (3.5.3.8) da seguinte forma:

$$d\varepsilon_x^p = d\lambda\left[\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right] = \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}\right] = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}\right] \tag{3.5.3.9}$$

Generalizando a Equação (3.5.3.9) para as outras direções, podem-se escrever as Equações de Levy-Mises da seguinte forma:

$$d\varepsilon_{xx}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.10a}$$

$$d\varepsilon_{yy}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.10b}$$

$$d\varepsilon_{zz}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right] \tag{3.5.3.10c}$$

$$d\varepsilon_{xy}^p = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\tau_{xy} \tag{3.5.3.10d}$$

$$d\varepsilon_{yz}^p = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\tau_{yz} \tag{3.5.3.10e}$$

$$d\varepsilon_{xz}^p = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\tau_{xz} \tag{3.5.3.10f}$$

As equações de Levy-Mises representam a relação entre a tensão e a deformação para a região plástica e são usadas quando a deformação elástica pode ser negligenciada, isto é, a deformação total é igual à deformação plástica, $d\varepsilon^t = d\varepsilon^p$ (JOHNSON, W. *et al*., 1983),

(KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

O segundo tipo de equações que podem relacionar as tensões com as deformações na região plástica são as equações de Prandtl-Reuss. Prandtl em 1924 e Reuss em 1930 definiram uma generalização das equações de Levy-Mises, considerando que a deformação total é a soma da deformação elástica com a deformação plástica, $d\varepsilon^t = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$. Usando as equações da lei de Hooke generalizada, a deformação elástica fica representada por:

$$d\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{xx} - \nu\left(d\sigma_y + d\sigma_z\right)\right] \tag{3.5.3.11a}$$

$$d\varepsilon_{yy}^e = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{yy} - \nu\left(d\sigma_{xx} + d\sigma_{zz}\right)\right] \tag{3.5.3.11b}$$

$$d\varepsilon_{zz}^e = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{zz} - \nu\left(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy}\right)\right] \tag{3.5.3.11c}$$

$$d\varepsilon_{xy}^e = \frac{1}{G} d\tau_{xy} \tag{3.5.3.11d}$$

$$d\varepsilon_{yz}^e = \frac{1}{G} d\tau_{yz} \tag{3.5.3.11e}$$

$$d\varepsilon_{xz}^e = \frac{1}{G} d\tau_{xz} \tag{3.5.3.11f}$$

sendo E o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e G módulo de elasticidade de cisalhamento que é definido por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.5.3.12}$$

Considerando as Equações (3.5.3.3), que são as equações de Levy-Mises e que representam as relações tensão-deformação na região plástica e as Equações (3.5.3.11) que representam as relações tensão-deformação na região elástica, as equações de Prandtl-Reuss ficam definidas da seguinte forma:

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{xx} - \nu\left(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz}\right)\right] + \frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.13a}$$

$$d\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{yy} - \nu\left(d\sigma_{xx} + d\sigma_{zz}\right)\right] + \frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.13b}$$

$$d\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_{zz} - \nu\left(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy}\right)\right] + \frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right] \tag{3.5.3.13c}$$

$$d\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}d\tau_{xy} + \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xy} \tag{3.5.3.13d}$$

$$d\varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}d\tau_{yz} + \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{yz} \tag{3.5.3.13e}$$

$$d\varepsilon_{xz} = \frac{1}{G}d\tau_{xz} + \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xz} \tag{3.5.3.13f}$$

A partir da teoria da deformação plástica incremental descrita acima calcula-se a deformação plástica independente do tempo, senod esta inadequada para os casos em que a deformação plástica é dependente do tempo. Quando a deformação plástica é realizada "a quente" a velocidade de deformação, $\dot{\varepsilon}$, é uma variável que exerce importante influência no processo, situação inversa aos processos realizados "a frio", onde, a variável que exerce maior influência é o grau de deformação, ε (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

A teoria da deformação viscoplástica incremental é uma generalização da teoria da deformação plástica incremental e é aplicada a problemas com grandes deformações plásticas e

cujo comportamento do material seja dependente do tempo ou da velocidade de deformação. Um material que tem comportamento dependente do tempo é dito *viscoplástico* e a sua curva tensão-deformação é função da temperatura (T), da deformação ($\boldsymbol{\varepsilon}$), da velocidade de deformação ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$) e de fatores ligados indiretamente à deformação, tais como, composição química e estrutura metalúrgica (S), isto é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, S\right) \tag{3.5.3.14}$$

A teoria da deformação viscoplástica incremental é uma extensão da teoria da deformação plástica incremental, pois, ambas são baseadas na aplicação da teoria matemática infinitesimal. Na teoria da deformação plástica incremental é feito a relação entre cada incremento de tensão com cada incremento de deformação. Porém, na teoria da deformação viscoplástica incremental é feito a relação entre cada incremento de tensão com cada incremento da taxa de deformação. Em virtude disso pode-se fazer uma analogia entre o incremento de deformação plástica ($d\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$) e a taxa de deformação ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$). Sendo que o modelo mais usual para as equações constitutivas na teoria da deformação viscoplástica incremental é o modelo baseado na teoria de Perzyna definida em 1966 (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011).

As equações constitutivas para a viscoplasticidade são formalmente iguais as de Levy-Mises, definidas na plasticidade, diferindo apenas ao fato que a tensão efetiva além de ser função da temperatura, deformação, parâmetros relacionados às propriedades metalúrgicas e químicas é também função da velocidade de deformação. Admitindo-se a semelhança com a teoria da plasticidade associativa, pode-se escrever o potencial viscoplástico da seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} \tag{3.5.3.15}$$

na qual $\dot{\lambda}$ é uma constante de proporcionalidade positiva. Considerando a função de escoamento de von Mises, pode-se escrever a equação (3.5.3.15) da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}^{\pi} = \dot{\lambda}\boldsymbol{\sigma}' \tag{3.5.3.16}$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}'$ é tensão de desviadora. A constante de proporcionalidade $\dot{\lambda}$ pode ser calculada a partir da seguinte forma:

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}} \tag{3.5.3.17}$$

sendo $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ a velocidade de deformação efetiva e é calculada a partir da expressão:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\right)} \tag{3.5.3.18}$$

Portanto, nas equações de Levy-Mises, a deformação elástica pode ser desprezada que, para a viscoplasticidade, pode ser seguinte forma (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010) e (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011):

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.19a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.19b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right] \tag{3.5.3.19c}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xy} \tag{3.5.3.19d}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{yz} \tag{3.5.3.19e}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xz} \tag{3.5.3.19f}$$

As equações de Prandtl-Reuss, que consideram a deformação elástica, para a viscoplasticidade podem ser escrita da seguinte forma (JOHNSON, W. *et al*., 1983), (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989), (MARTINS, P. e*t al.*, 2005), (VALBERG, H.S., 2010), (BRESCIANI F., E. *et al*., 2011):

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{xx} - \nu\left(\dot{\sigma}_{yy} + \dot{\sigma}_{zz}\right)\right] + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.20a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{yy} - \nu\left(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{zz}\right)\right] + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}\right] \tag{3.5.3.20b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{zz} - \nu\left(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{yy}\right)\right] + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right] \tag{3.5.3.20c}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{xy} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xy} \tag{3.5.3.20d}$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{yz} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{yz} \tag{3.5.3.20e}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{xz} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\bar{\sigma}}\tau_{xz} \tag{3.5.3.20f}$$

3.6 Equações para os Estudos de Caso

As seções anteriores apresentaram as Equações da Conservação da Massa, Quantidade de Movimento e Energia que governam os processos de escoamentos de uma forma geral. Também foram apresentadas as Equações Constitutivas tanto para fluidos como para metais. Porém, essas todas essas equações foram descritas de forma geral e em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Nas próximas seções serão apresentadas as equações de governo e constitutivas para as situações específicas estudadas neste trabalho.

3.6.1 Equações para o Escoamento de Fluido: Caso Placas Paralelas

Para o caso do escoamento do fluido entre placas paralelas as equações representativas foram apresentadas na seção (3.4). A Equação (3.4.2) é a forma vetorial compacta das Equações da Conservação em coordenadas cartesianas tridimensionais. Considerando o caso bidimensional para a Equação (3.4.2), tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} = \boldsymbol{S} \qquad (3.6.1.1)$$

onde, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$ e $\boldsymbol{S}$ são vetores que assumem as formas representadas pelas Equações (3.6.1.3), considerando as seguintes simplificações: $v_z = 0$; $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$; forças de corpo nulas ($b_x = b_y = b_z = 0$) ; termo de geração de calor zero ($r = 0$) ; o termo da energia específica total sendo igual a:

$$e = cT + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \qquad (3.6.1.2)$$

sendo o primeiro termo do lado direito igual a energia térmica, onde T é a temperatura e c é o calor específico em pressão constante e volume constante, isto é, considerando um material incompressível $c = c_p = c_v$. O segundo termo do lado direito é a energia cinética sendo $\boldsymbol{v}$ o vetor velocidade. Com essas simplicações as Equações (3.6.1.3) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \end{Bmatrix} \tag{3.6.1.3a}$$

$$\boldsymbol{F_x} = \begin{Bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 - \sigma_{xx} \\ \rho v_x v_y - \sigma_{xy} \\ v_x\rho\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) - v_x\sigma_{xx} - v_y\sigma_{xy} + \dot{q}_x \end{Bmatrix} \tag{3.6.1.3b}$$

$$\boldsymbol{F_y} = \begin{Bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \sigma_{xy} \\ \rho v_y^2 - \sigma_{yy} \\ v_y\rho\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) - v_x\sigma_{xy} - v_y\sigma_{yy} + \dot{q}_y \end{Bmatrix} \tag{3.6.1.3c}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.6.1.3d}$$

Para a equação constitutiva do fluido newtoniano do caso de escoamento entre placas paralelas, considera-se um fluido incompressível, isotrópico e hipótese de Stokes. A equação que relaciona o tensor de tensões com o tensor das taxas de deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.6.1.4}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de Cauchy, p é a pressão, $\boldsymbol{I}$ tensor identidade, μ é o coeficiente de viscosidade ou viscosidade dinâmica e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o tensor das taxas de deformação.

3.6.2 Equações para o Escoamento do Fluido: Caso Axissimétrico

Para o caso do escoamento do fluido entre placas paralelas as equações representativas foram apresentadas na seção (3.4).A Equação (3.4.7) é a forma vetorial compacta das Equações da Conservação em coordenadas cilíndricas. Considerando o caso axissimétrico para a Equação (3.4.7), tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\boldsymbol{F}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z} = \boldsymbol{S} \tag{3.6.2.1}$$

onde, os vetores $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}_r$, $\boldsymbol{F}_z$ e $\boldsymbol{S}$ são vetores que assumem as formas representadas pelas Equações (3.6.2.3), considerando as seguintes simplificações: $v_\theta = 0$; $\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$; $\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{z\theta} = 0$; forças de corpo são nulas ($b_r = b_\theta = b_z = 0$) ; termo de geração de calor zero ($r = 0$) ; o termo de energia específica total sendo igual a:

$$e = cT + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \tag{3.6.2.2}$$

sendo o primeiro termo do lado direito igual a energia térmica, onde T é a temperatura e c é o calor específico em pressão constante e volume constante, isto é, considerando um material incompressível $c = c_p = c_v$. O segundo termo do lado direito é a energia cinética, sendo $\boldsymbol{v}$ o vetor velocidade. Com essas simplicações as Equações (3.6.2.3) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ \rho\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \end{Bmatrix} \tag{3.6.2.3a}$$

$$\boldsymbol{F_r} = \begin{Bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 - \sigma_{rr} \\ \rho v_r v_z - \sigma_{rz} \\ \rho v_r\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) - v_r\sigma_{rr} - v_z\sigma_{rz} + \dot{q}_r \end{Bmatrix} \tag{3.6.2.3b}$$

$$\boldsymbol{F_z} = \begin{Bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r - \sigma_{rz} \\ \rho v_z^2 - \sigma_{zz} \\ \rho v_z\left(cT + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) - v_r\sigma_{rz} - v_z\sigma_{zz} + \dot{q}_z \end{Bmatrix} \tag{3.6.2.3c}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.6.2.3d}$$

Para a equação constitutiva do fluido newtoniano do caso de escoamento axissimétrico, considera-se um fluido incompressível, isotrópico e hipótese de Stokes. A equação que relaciona o tensor de tensões com o tensor das taxas de deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.6.2.4}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de Cauchy, p é a pressão, $\boldsymbol{I}$ tensor identidade, μ é o coeficiente de viscosidade ou viscosidade dinâmica e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o tensor das taxas de deformação.

3.6.3 Equações para o Escoamento do Metal: Caso Axissimétrico

Para o caso do escoamento do metal em condição axissimétrica as equações representativas foram apresentadas na seção (3.4). A Equação (3.4.7) é a forma vetorial compacta das Equações da Conservação em coordenadas cilíndricas. Porém, para o escoamento do metal a equação da conservação da energia pode assumir uma forma específica. Isto é, considerando a Equação (3.3.7), reescrita abaixo:

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho e)dV = \int_V \rho r\, dV - \int_A \dot{q}\cdot n\, dA + \int_V \rho \boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{v}\, dV + \int_A \boldsymbol{\sigma}\cdot \boldsymbol{v}\, dA \qquad (3.6.3.1)$$

aplicando o Teorema da Divergência nas integrais de superfície e assumindo que o termo de energia é a soma da energia térmica e cinética e dada pela Equação (3.6.2.2), tem-se:

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho cT)dV + \frac{D}{Dt}\int_V \left(\frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2}\right)dV = \int_V \rho r\, dV - \int_V (\nabla\cdot \dot{\boldsymbol{q}})dV + \int_V \rho \boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{v}\, dV + \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot \boldsymbol{v})dV \qquad (3.6.3.2)$$

o quarto termo do lado direito da Equação (3.6.3.2) pode ser escrito na forma $\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla\boldsymbol{v}$, que substituido na Equação (3.6.3.2) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho cT)dV + \frac{D}{Dt}\int_V \left(\frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2}\right)dV = \int_V \rho r\, dV - \int_V (\nabla\cdot \dot{\boldsymbol{q}})dV + \int_V \boldsymbol{v}\cdot(\rho \boldsymbol{b} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \nabla\boldsymbol{v})dV \qquad (3.6.3.3)$$

reconhecendo que o terceiro termo do lado direito da Equação (3.6.3.3) é a *Equação do Movimento de Cauchy*,

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho cT)dV + \frac{D}{Dt}\int_V \left(\frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2}\right)dV = \int_V \rho r\, dV - \int_V (\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}})dV + \frac{D}{Dt}\int_V \left(\frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2}\right)dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v})\, dV \qquad (3.6.3.4)$$

subtraindo os termos semelhantes e reescrevendo a Equação (3.6.3.4):

$$\int_V \frac{D(\rho cT)}{Dt} dV = \int_V [\rho r - \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v}\,] dV \qquad (3.6.3.5)$$

Igualando os integrandos e reorganizando a Equação (3.6.3.5), tem-se a equação da conservação de energia para um volume de controle arbitrário, que é dada por:

$$\frac{D(\rho cT)}{Dt} = \rho r - \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} \qquad (3.6.3.6)$$

No terceiro termo do lado direito da Equação (3.6.3.6), tem-se $\nabla \boldsymbol{v}$, que é o gradiente do vetor velocidade e pode ser decomposto pela soma de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, que é o tensor taxa de deformação, mais $\dot{w}$, que é o tensor taxa de rotação, assim: $\nabla \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{w}$. Assumindo que o trabalho do tensor taxa de rotação é nulo ($\boldsymbol{\sigma} : \dot{w} = 0$), a Equação (3.6.3.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{D(\rho cT)}{Dt} = \rho r - \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.6.3.7)$$

Considerando que o tensor taxa de deformação pode ser decomposto em $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{plástico} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{elástico}$, onde para um meterial rigido-plástico $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{elástico} = 0$, sendo assim $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{plástico}$. Aplicando a identidade do trabalho plástico, $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\sigma}.\dot{\bar{\varepsilon}}$ e desenvolvendo a derivada material, tem-se a Equação (3.6.3.7) escrita para coordenadas cartesianas e cilíndricas:

Coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho cTv_x+\dot{q}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho cTv_y+\dot{q}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho cTv_z+\dot{q}_z)}{\partial z}=\overline{\sigma}.\dot{\overline{\varepsilon}} \tag{3.6.3.8}$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial r(\rho cTv_r+\dot{q}_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho cTv_\theta+\dot{q}_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho cTv_z+\dot{q}_z)}{\partial z}=\overline{\sigma}.\dot{\overline{\varepsilon}} \tag{3.6.3.9}$$

onde, $\overline{\sigma}$ é a tensão equivalente e $\dot{\overline{\varepsilon}}$ é a taxa de derformação equivalente, que pode ser calculadas como segue:

$$\overline{\sigma}=\left\{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6\sigma_{xy}^2+6\sigma_{yz}^2+6\sigma_{xz}^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.6.3.10}$$

$$\dot{\overline{\varepsilon}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{yy})^2+(\dot{\varepsilon}_{yy}-\dot{\varepsilon}_{zz})^2+(\dot{\varepsilon}_{zz}-\dot{\varepsilon}_{xx})^2+6(\dot{\varepsilon}_{xy})^2+6(\dot{\varepsilon}_{yz})^2+6(\dot{\varepsilon}_{xz})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.6.3.11}$$

Considerando as Equações (3.4.6a), (3.4.6b), (3.4.6c), (3.4.6d) e a Equação (3.6.3.9), que representam as Equações da Conservação da Massa, Quantidade de Movimento e Energia, respectivamente, em coordenadas cilíndricas. Que podem ser escritas na forma vetorial compacta dada pela Equação (3.4.7). Tomando o caso axissimétrico, onde deve-se ter $v_\theta=0$, $\sigma_{r\theta}=\sigma_{z\theta}=0$ e $\dot{\varepsilon}_{r\theta}=\dot{\varepsilon}_{z\theta}=0$. Assumindo que as forças de corpo são nulas, isto é, $b_r = b_\theta = b_z =$ 0. Logo, a Equação (3.4.7) assume a seguinte forma para o caso do escoamento de metal em condição axissimétrica:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\boldsymbol{F}_r)}{\partial r}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}=\boldsymbol{S} \tag{3.6.3.12}$$

onde, os vetores $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F_r}$, $\boldsymbol{F_z}$ e $\boldsymbol{S}$ assumem as seguintes formas:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ \rho c T \end{Bmatrix} \tag{3.6.3.13a}$$

$$\boldsymbol{F_r} = \begin{Bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 - \sigma_{rr} \\ \rho v_r v_z - \sigma_{rz} \\ \rho c T v_r + \dot{q}_r \end{Bmatrix} \tag{3.6.3.13b}$$

$$\boldsymbol{F_z} = \begin{Bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r - \sigma_{rz} \\ \rho v_z^2 - \sigma_{zz} \\ \rho c T v_z + \dot{q}_z \end{Bmatrix} \tag{3.6.3.13c}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ 0 \\ \overline{\sigma}.\dot{\overline{\varepsilon}} \end{Bmatrix} \tag{3.6.3.13d}$$

Para a equação constitutiva do metal no caso de escoamento axissimétrico, considera-se o metal incompressível, isotrópico e rigido-perfeito-plástico. A equação que relaciona o tensor de tensões com o tensor das taxas de deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\sigma_m + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.6.3.14}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de Cauchy, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o tensor das taxas de deformação, σ_m é a pressão hidrostática e η é a viscosidade do metal. A pressão hidrostática é calculada a partir da seguinte equação:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3} \tag{3.6.3.15}$$

onde, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ *e* σ_{zz} são as tensões principais. A viscosidade do metal η é definida a partir da *Função do Escoamento Plástico* dada pela seguinte equação:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\sigma' \tag{3.6.3.16}$$

onde, σ' é o tensor desviador e $\dot{\lambda}$ é o multiplicador plástico. A viscosidade do metal η pode ser alculada a partir da seguinte equação:

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{\overline{\sigma}}{\dot{\overline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2\dot{\lambda}} \tag{3.6.3.17}$$

na qual, $\overline{\sigma}$ é a tensão equivalente e $\dot{\overline{\varepsilon}}$ é a taxa de derformação equivalente.

4 MÉTODO NUMÉRICO

As equações que governam o escoamento de um fluido ou de um metal em deformação plástica são Equações Diferenciais Parciais, como descritas no capítulo 3 deste trabalho. Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004), essas equações possuem soluções analíticas para casos com geometria e condições de contorno restritas. Fazendo com que o engenheiro ou o pesquisador, para obter soluções de situações mais gerais, tenha de utilizar um método numérico na solução destas equações.

Nas próximas seções são apresentados os detalhes do método numérico utilizado neste trabalho para a solução das equações diferenciais parciais que governam o escoamento de um fluido. As seguintes características deste método numérico serão abordadas:

- O Método dos Volumes Finitos;
- O Método de MacCormack explícito;
- O acoplamento pressão-velocidade;
- O Método SIMPLE;
- As condições de contorno.

4.1 O Método dos Volume Finitos

Considerando a Equação (3.4.2), que representa as equações de governo, da massa, quantidade de movimento e energia, na forma diferencial, em uma estrutura vetorial compacta, é reescrita abaixo:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{S} \tag{4.1.1}$$

Integrando a Equação (4.1.1) no volume de controle, tem-se:

$$\int_V \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}\, dV + \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\, dV = \int_V \boldsymbol{S}\, dV \tag{4.1.2}$$

Para o caso de um volume de controle estacionário, o termo $\boldsymbol{Q}$ pode ser escrito como segue:

$$\int_V \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \boldsymbol{Q}\, dV \tag{4.1.3}$$

Pode-se definir um valor médio de $\boldsymbol{Q}$ para um volume de controle específico

$$\overline{\boldsymbol{Q}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{Q}\, dV \tag{4.1.4}$$

Logo

$$\int_V \boldsymbol{Q}\, dV = \overline{\boldsymbol{Q}} V \tag{4.1.5}$$

Substituindo as Equações (4.1.3) e (4.1.5) na Equação (4.1.2), tem-se:

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{Q}}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\, dV + \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{S}\, dV \tag{4.1.6}$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da Equação (4.1.6), tem-se:

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{Q}}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \int_A (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s})\, dA + \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{S}\, dV \tag{4.1.7}$$

onde, $\boldsymbol{s}$ é o vetor normal a superfície. Para discretizar a integral de superfície representada pelo primeiro termo do lado direito da Equação (4.1.7), deve-se considerar o volume de controle que

está definido em uma malha estruturada bidimensional de formato quadrilateral, considerando a abordagem *Centrada no Volume*, para o ponto computacional, e representada na Figura 4.1.1.

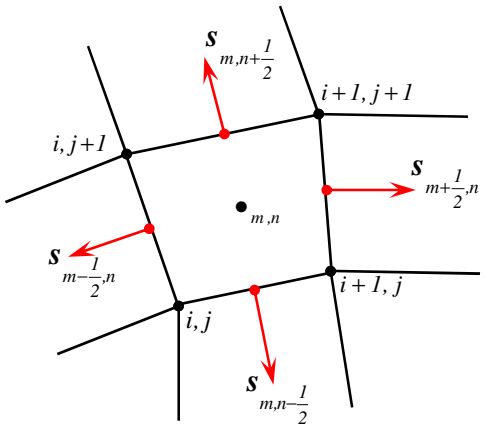


Figura 4.1.1 – Volume de controle quadriláteral com a especificação dos vetores normais a cada lado.

Desenvolvendo a integral de superfície na Equação (4.1.7), tem-se:

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{Q}}_{mn}}{\partial t} = -\frac{1}{V_{mn}}\left[\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m-\frac{1}{2},n} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m+\frac{1}{2},n} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m,n+\frac{1}{2}}\right] + \boldsymbol{S}_{mn} \tag{4.1.8}$$

onde, $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$ é o vetor de fluxo para um caso bidimensional e $\boldsymbol{s}$ é o vetor normal à superfície do volume de controle.

4.2 O Método MacCormack

A Equação (4.1.8) foi discretizada, na seção anterior, considerando o método dos volumes finitos. O esquema de MacCormack será aplicado sobre Equação (4.1.8), considerando a sua versão explícita, que por sua vez usa o método de Euler explícito para avançar no tempo, isto é:

$$\left(\frac{\partial \overline{\boldsymbol{Q}}_{mn}}{\partial t}\right)^{t} = \frac{\overline{\boldsymbol{Q}}_{mn}^{t+1} - \overline{\boldsymbol{Q}}_{mn}^{t}}{\Delta t} \tag{4.2.1}$$

sendo t a iteração atual, $t+1$ é a iteração posterior e Δt é o passo de tempo. Substituindo a Equação (4.2.1) na Equação (4.1.8) e reorganizando os termos (abandonando a barra por simplicidade de notação), tem-se:

$$\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1} = \boldsymbol{Q}_{mn}^{t} - \frac{\Delta t}{V_{mn}}\left[\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m-\frac{1}{2},n} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m+\frac{1}{2},n} + \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)_{m,n+\frac{1}{2}}\right]^{t} + \Delta t\, \boldsymbol{S}_{mn}^{t} \tag{4.2.2}$$

Para a discretização dos fluxos nas faces do volume de controle, deve-se trabalhar com o produto escalar $\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\right)$, que aparece na Equação (4.2.2). Sabendo que o método MacCormack é um esquema de dois passos, primeiramente é considerado o passo chamado de *preditor*, o qual, nesse esquema numérico, é aplicada uma discretização *à frente* ou *forward*, conforme o esquema representado na Figura 4.2.1. Nota-se, na variação do índice *m*, que o vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m+1,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m+1/2,n}$ e que vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m-1/2,n}$.

A mesma análise deve ser feita para a variação do índice *n*, isto é, o vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n+1}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m,n+1/2}$ e que vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m,n-1/2}$.

Desta forma a Equação (4.2.2) pode ser escrita para o passo *Preditor* da seguinte forma:

$$\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}} = \boldsymbol{Q}_{mn}^{t} - \frac{\Delta t}{V_{mn}}\left[\left(\boldsymbol{F}_{m+1,n}\cdot\boldsymbol{s}_{m+\frac{1}{2},n}\right) + \left(\boldsymbol{F}_{m,n}\cdot\boldsymbol{s}_{m,n-\frac{1}{2}}\right) + \left(\boldsymbol{F}_{m,n}\cdot\boldsymbol{s}_{m-\frac{1}{2},n}\right) + \left(\boldsymbol{F}_{m,n+1}\cdot\boldsymbol{s}_{m,n+\frac{1}{2}}\right)\right]^{t} + \Delta t\, \boldsymbol{S}_{mn}^{t} \tag{4.2.3}$$

onde, o termo $\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}}$ representa o passo Preditor.

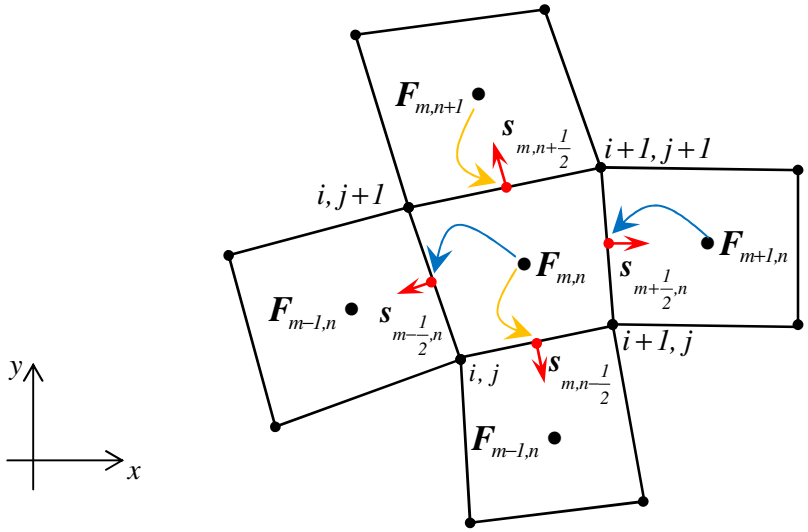


Figura 4.2.1 – Esquema representando a avaliação dos vetores de fluxo e normal para o passo Preditor.

Seguindo a mesma linha do passo *Preditor*, mas, agora considerando o segundo passo chamado de *Corretor*, uma discretização *a ré* ou *backward* é representada pelo esquema mostrado na Figura 4.2.2. Nota-se, na variação do índice *m*, que o vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m+1/2,n}$ e que vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m-1,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m-1/2,n}$. A mesma análise deve ser feita para a variação do índice *n*, isto é, o vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m,n+1/2}$ e que vetor de fluxo $\boldsymbol{F}_{m,n-1}$ está sendo avaliado com o vetor normal da face $\boldsymbol{s}_{m,n-1/2}$.

Desta forma a Equação (4.2.2) pode ser escrita para o passo *Corretor* da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}}} = \boldsymbol{Q}_{mn}^{t} - \frac{\Delta t}{V_{mn}}\left[\left(\underline{\boldsymbol{F}_{m,n}} \cdot \boldsymbol{s}_{m+\frac{1}{2},n}\right) + \left(\underline{\boldsymbol{F}_{m-1,n}} \cdot \boldsymbol{s}_{m-\frac{1}{2},n}\right) + \left(\underline{\boldsymbol{F}_{m,n}} \cdot \boldsymbol{s}_{m,n+\frac{1}{2}}\right) + \left(\underline{\boldsymbol{F}_{m,n-1}} \cdot \boldsymbol{s}_{m,n-\frac{1}{2}}\right)\right]^{t} + \Delta t\, \boldsymbol{S}_{mn}^{t} \qquad (4.2.4)$$

na qual o termo $\underline{\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}}}$ representa o passo *Corretor* e $\underline{\boldsymbol{F}_{mn}}$ são os vetores de fluxo calculados a partir dos valores obtidos no passo *Preditor*.

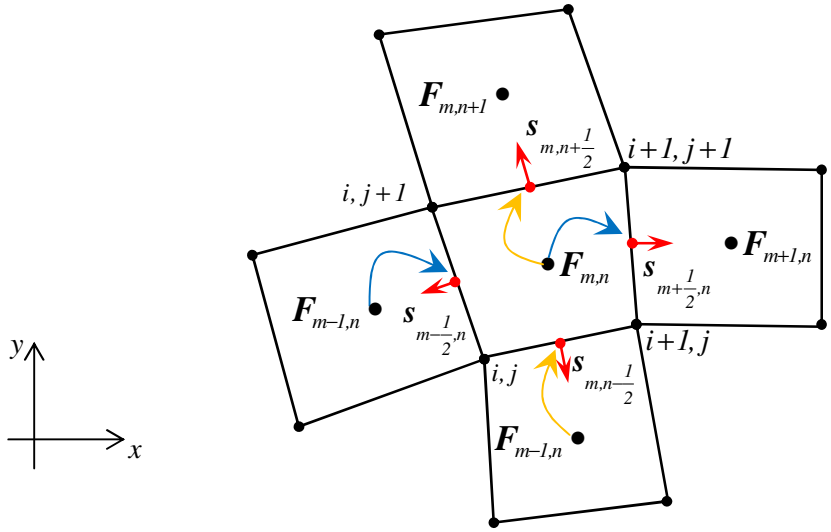


Figura 4.2.2 – Esquema representando a avaliação dos vetores de fluxo e normal para o passo Corretor.

A partir dos valores calculados dos passos Preditor e Corretor, pode-se definir o valor final do passo de tempo que está sendo calculado, fazendo uma média aritmética entre eles, conforme esquema abaixo:

$$\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1} = \frac{1}{2}\left(\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}} + \underline{\underline{\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}}}\right) \tag{4.2.5}$$

onde, $\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1}$ é o valor final para a iteração calculada.

Considerando que o vetor de fluxo e o vetor normal à superfície podem assumir, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} \tag{4.2.6}$$

$$\boldsymbol{s} = s_x\boldsymbol{i} + s_y\boldsymbol{j} \tag{4.2.7}$$

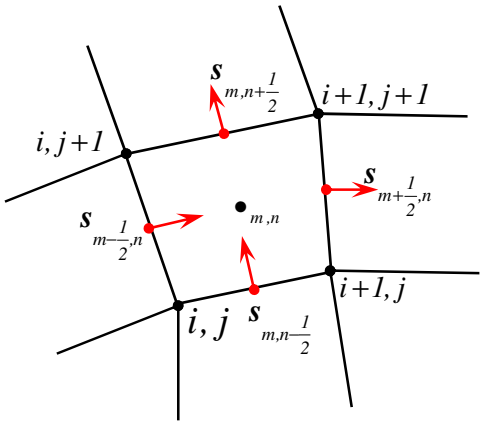


Figura 4.2.3 – Esquema representando a sequência dos vetores normais às superfícies do volume de controle.

Assumindo que os vetores normais às superfícies do volume de controle são calculados a partir do esquema mostrado na Figura 4.2.3, isto é, estipulando uma sequência de variação desses vetores, então, a partir das coordenadas dos vértices do volume de controle, isto é, $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$, tem-se:

$$(s_x)_{m+1/2,n} = y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j} \tag{4.2.8a}$$

$$(s_x)_{m-1/2,n} = y_{i,j+1} - y_{i,j} \tag{4.2.8b}$$

$$(s_x)_{m,n+1/2} = -(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}) \tag{4.2.8c}$$

$$(s_x)_{m,n-1/2} = -(y_{i+1,j} - y_{i,j}) \tag{4.2.8d}$$

$$(s_y)_{m+1/2,n} = -(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) \tag{4.2.8e}$$

$$(s_y)_{m-1/2,n} = -(x_{i,j+1} - x_{i,j}) \tag{4.2.8f}$$

$$(s_y)_{m,n+1/2} = x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} \tag{4.2.8g}$$

$$\left(s_y\right)_{m,n-1/2} = x_{i+1,j} - x_{i,j} \tag{4.2.8h}$$

Os produtos escalares entre o vetor de fluxo e o vetor normal à superfície podem ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \left(F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j}\right) \cdot \left(s_x \boldsymbol{i} + s_y \boldsymbol{j}\right) = \left(F_x \cdot s_x\right) + \left(F_y \cdot s_y\right) \tag{4.2.9}$$

Substituindo as Equações (4.2.8) e (4.2.9) nas Equações (4.2.3) e (4.2.4), tem-se as seguintes equações para os passos *Preditor* e *Corretor*, respectivamente:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{Q}}}_{mn}^{t+1} = \boldsymbol{Q}_{mn}^{t} - \frac{\Delta t}{V_{mn}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(F_x\right)_{m+1,n} \cdot \left(s_x\right)_{m+\frac{1}{2},n} + \left(F_y\right)_{m+1,n} \cdot \left(s_y\right)_{m+\frac{1}{2},n} \right] - \\ \left[\left(F_x\right)_{m,n} \cdot \left(s_x\right)_{m-\frac{1}{2},n} + \left(F_y\right)_{m,n} \cdot \left(s_y\right)_{m-\frac{1}{2},n} \right] + \\ \left[\left(F_x\right)_{m,n+1} \cdot \left(s_x\right)_{m,n+\frac{1}{2}} + \left(F_y\right)_{m,n+1} \cdot \left(s_y\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \right] - \\ \left[\left(F_x\right)_{m,n} \cdot \left(s_x\right)_{m,n-\frac{1}{2}} + \left(F_y\right)_{m,n} \cdot \left(s_y\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\}^{t} + \Delta t \, \boldsymbol{S}_{mn}^{t} \tag{4.2.9}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{Q}}}_{mn}^{t+1} = \boldsymbol{Q}_{mn}^{t} - \frac{\Delta t}{V_{mn}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\underline{F_x}\right)_{m,n} \cdot \left(s_x\right)_{m+\frac{1}{2},n} + \left(\underline{F_y}\right)_{m,n} \cdot \left(s_y\right)_{m+\frac{1}{2},n} \right] - \\ \left[\left(\underline{F_x}\right)_{m-1,n} \cdot \left(s_x\right)_{m-\frac{1}{2},n} + \left(\underline{F_y}\right)_{m-1,n} \cdot \left(s_y\right)_{m-\frac{1}{2},n} \right] + \\ \left[\left(\underline{F_x}\right)_{m,n} \cdot \left(s_x\right)_{m,n+\frac{1}{2}} + \left(\underline{F_y}\right)_{m,n} \cdot \left(s_y\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \right] - \\ \left[\left(\underline{F_x}\right)_{m,n-1} \cdot \left(s_x\right)_{m,n-\frac{1}{2}} + \left(\underline{F_y}\right)_{m,n-1} \cdot \left(s_y\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\}^{t} + \Delta t \, \boldsymbol{S}_{mn}^{t} \tag{4.2.10}$$

$$\boldsymbol{Q}_{mn}^{t+1} = \frac{1}{2}\left(\underline{\boldsymbol{Q}}_{mn}^{t+1} + \underline{\underline{\boldsymbol{Q}}}_{mn}^{t+1}\right) \tag{4.2.11}$$

onde, as componentes do vetor de fluxo $\boldsymbol{F}$ assumem o formato destacado nas Equações (3.4.5) ou (3.4.8). O volume do volume de controle, que neste caso é uma área, pois, trata-se de uma análise bidimensional, é calculado a partir das coordenadas dos vértices do volume de controle da seguinte forma:

$$V_{mn} = \frac{1}{2}\left|\left(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}\right)y_{i,j} + \left(x_{i,j} - x_{i+1,j+1}\right)y_{i+1,j} + \left(x_{i+1,j} - x_{i,j}\right)y_{i+1,j+1}\right| + \frac{1}{2}\left|\left(x_{i,j+1} - x_{i+1,j+1}\right)y_{i,j} + \left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}\right)y_{i,j+1} + \left(x_{i,j} - x_{i,j+1}\right)y_{i+1,j+1}\right| \quad (4.2.12)$$

O vetor de fluxo que aparece dentro das Equações (4.2.9) e (4.2.10), isto é, o vetor $\boldsymbol{F}$, deve ser discretizado de forma correta para ser garantida a segunda ordem de precisão no tempo e no espaço, que é uma das características do esquema de MacCormack (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997).

Para exemplificar o caminho correto de discretização, considere o seguinte termo, definido a partir do segundo termo da Equação (3.4.5b), isto é:

$$F_x = \rho v_x^2 - \sigma_{xx} \quad (3.4.13)$$

Sabendo, a partir da Equação (3.5.2.4a), que:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \quad (3.4.14)$$

Substituindo a Equação (3.4.14) na Equação (3.4.13), tem-se:

$$F_x = \rho v_x^2 + p + \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]$$

Reconhecendo que a derivada de F_x é em relação à *x* e que no passo Preditor, do esquema numérico considerado neste trabalho, essa derivada é discretizada no esquema *forward*, as derivadas que aparecem dentro de F_x devem ser discretizadas obedecendo a seguite estrutura: a derivada $\partial v_x/\partial x$ deve ser discretizada na direção oposta a do Preditor, isto é, *backwar* e as outras derivadas $\partial v_y/\partial y$ e $\partial v_z/\partial z$ devem ser discretizadas usando derivada central. Se derivadas cruzadas forem consideradas as mesmas devem ser discretizadas utilizando o esquema de

derivada central (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997). O mesmo raciocínio deve ser considerado na discretização das derivadas no passo Corretor.

4.3 Acoplamento Pressão-Velocidade

No esquema numérico desenvolvido nesse trabalho é utilizada uma malha co-localizada, isto é, todas as variáveis serão armazenadas no centro do volume de controle. Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004) na análise numérica de um escoamento que utiliza uma malha co-localizada, haverá o aparecimento de campos de pressão oscilatórios (*Checkerboard Oscillations*). Como a posição da variável pressão e da variável velocidade é no centro do volume de controle, há o desacomplamento entre os campos de pressão e velocidade. Logo, neste tipo de análise deve-se utilizar um método de acoplamento pressão-velocidade.

O método de acoplamento pressão-velocidade utilizado no esquema numérico desenvolvido neste trabalho é o método SIMPLE. O método SIMPLE faz o acoplamento entre o campo de velocidade com o campo de pressão através de correções nestas variáveis. Para esse fim, o método utiliza as seguintes equações de correção, para um caso bidimensional:

$$p = p_0 + p' \tag{4.3.1}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \tag{4.3.2}$$

na qual as variáveis p e $\boldsymbol{v}$ são os valores atuais da pressão e do vetor da velocidade, respectivamente, as variáveis p_0 e $\boldsymbol{v}_0$ são os valores estimados da pressão e do vetor velocidade e as variáveis p' e $\boldsymbol{v}'$ são as correções de cada variável.

Segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004) a equação que faz a correção das componentes das velocidades são definidas através da subtração das equações do movimento supondo a melhor

estimativa do campo de pressão com as equações do movimento supondo o campo correto de pressão, resultando nas seguintes expressões:

$$\left(v_x\right)' = -A\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{4.3.3}$$

$$\left(v_y\right)' = -A\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{4.3.4}$$

onde, A é definido com o quociente entre um incremento de tempo fictício e a massa específica, segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997).

Utilizando a malha apresentada na Figura 4.3.1 e a substituição das Equações (4.3.1) e (4.3.2) nas Equações (4.3.3) e (4.3.4), tem-se as seguintes equações para as correções das velocidades em cada uma das faces do volume de controle:

$$\left(v_x\right)'_e = \left(v_x\right)^*_e - A\left(\frac{p'_E - p'_P}{\delta x_e}\right) \tag{4.3.5a}$$

$$\left(v_x\right)'_w = \left(v_x\right)^*_w - A\left(\frac{p'_P - p'_W}{\delta x_w}\right) \tag{4.3.5b}$$

$$\left(v_y\right)'_n = \left(v_y\right)^*_n - A\left(\frac{p'_N - p'_P}{\delta y_n}\right) \tag{4.3.5c}$$

$$\left(v_y\right)'_s = \left(v_y\right)^*_s - A\left(\frac{p'_P - p'_S}{\delta y_s}\right) \tag{4.3.5d}$$

sendo que os subscritos minúsculos representam a posição na face do volume de controle e os subscritos maíusculos representam o centro do volume de controle, conforme a Figura 4.3.1.

As velocidades v_x e v_y devem ser avaliadas nas faces dos volumes de controle, isto é, deve haver um deslocamento das velocidades avaliadas no centro do volume de controle para as faces

dos volumes de controle para haja o acoplamento ideal entre o campo de velocidade e o campo de pressão. Para esse processo, foi utilizado neste trabalho, a interpolação de Rhie-Chow (RHIE, C.M. *et al*., 1983) ou a interpolação aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento (*Momemtum Interpolation method*). As equações para o caso bidimensional são desenvolvidas e apresentadas no APÊNDICE A e para o caso axissimétrico as equações são desenvolvidas e apresentadas no APÊNDICE B.

Para exemplificar esse processo, considere a velocidade na face "*e*" do volume de controle "*P*". Para determiná-la, resolve-se, primeiramente, a equação do movimento para o ponto P, encontrando $(v_x)_P$, em seguida repete-se o processo para o ponto E, encontrando $(v_x)_E$, então, realiza-se a média aritmética entre os valores $(v_x)_P$ e $(v_x)_E$ para determinar $(v_x)_e$, repetindo este processo para as caomponenetes da velocidade das outras faces do volume de controle.

Para determinar a equação de correção da pressão, isto é, a equação que calcula o valor p' deve-se substituir as Equações (4.3.5) na equação da conservação da massa, gerando uma equação de Poisson, que possui a seguinte estrutura:

$$p'_P = \left(A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_S p'_S + B\right) / A_P \tag{4.3.6}$$

onde:

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \tag{4.3.7a}$$

$$A_E = \frac{\Delta t \Delta y}{\rho \delta x_e} \tag{4.3.7b}$$

$$A_W = \frac{\Delta t \Delta y}{\rho \delta x_w} \tag{4.3.7c}$$

$$A_N = \frac{\Delta t \Delta x}{\rho \delta y_n} \tag{4.3.7d}$$

$$A_S = \frac{\Delta t \Delta x}{\rho \delta y_s} \tag{4.3.7e}$$

$$B = \left[\left(v_x \right)_w^* - \left(v_x \right)_e^* \right] \Delta y + \left[\left(v_y \right)_s^* - \left(v_y \right)_n^* \right] \Delta x \tag{4.3.7f}$$

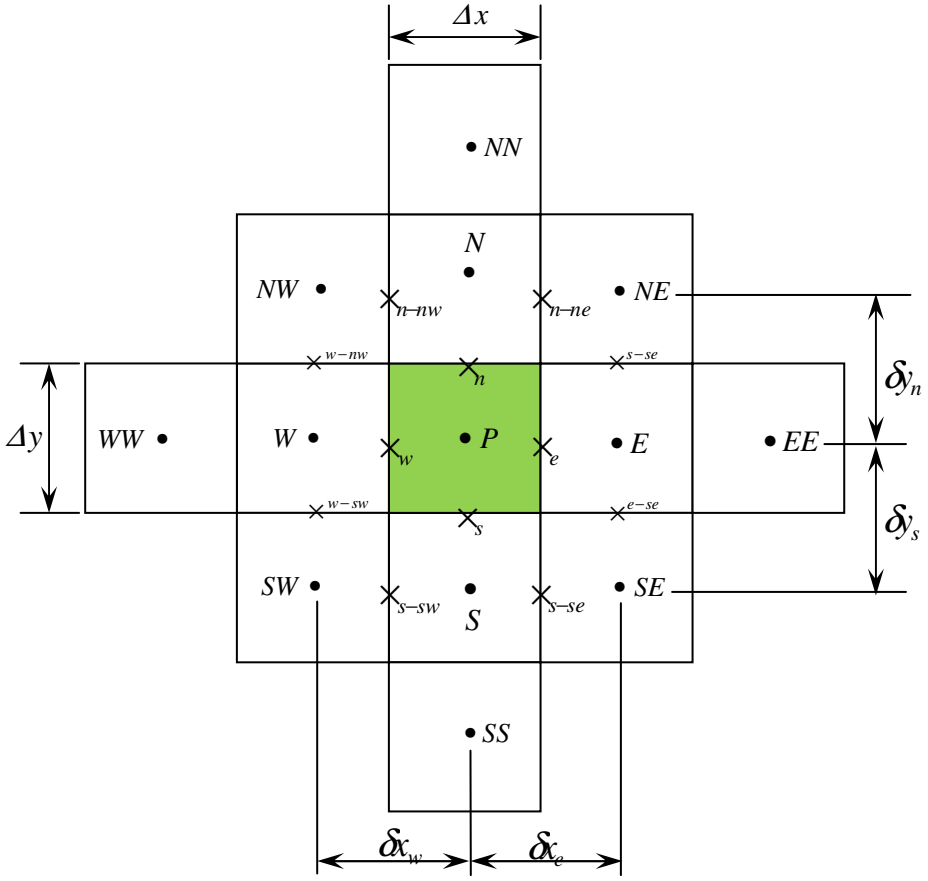


Figura 4.3.1 – Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008).

Segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997) a equação da correção da pressão, isto é, a Equação (4.3.6) tende a calcular valores superestimados de p' mesmo que os valores para a correção das velocidade sejam razoáveis. Em virtude deste fato a Equação (4.3.1) pode ser substituída pela equação abaixo:

$$p = p_0 + \alpha p' \tag{4.3.8}$$

onde, α é uma constante de sobrelaxação. Segundo Patankar (PATANKAR, S.V., 1980) e Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005) sugerem que os valores de α estejam no intervalo $0 < \alpha < 1$. A equação da correção da pressão apresentada anteriormente é para o caso bidimensional. Para o caso axissimétrico a equação da correção da pressão está apresentada no APÊNDICE C.

4.4 Condições de Contorno

No esquema numérico apresentado neste trabalho foram impostas certas condições de contorno nas paredes das geometrias analisadas. Essas condições de contorno foram aplicadas na solução das equações diferenciais que governam os escoamentos estudados utilizando o esquema de *"volumes fantasmas"*. Esta técnica cria um conjunto de volume de controle ao redor dos volumes de domínio e nesse conjunto de volumes criados são aplicadas as condições de contorno adequadas, conforme representado na Figura 4.4.1.

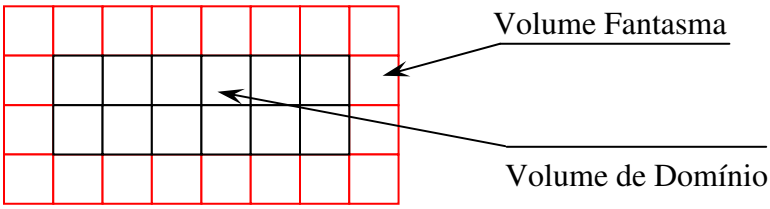


Figura 4.4.1 – Representação dos volumes fantasmas em uma malha qualquer.

Nesses volumes fantasmas podem ser aplicadas condições de contorno do tipo *Dirichlet*, que são condições de contorno em que um valor fixo da variável analisada é prescrita ou também pode ser aplicadas condições de contorno do tipo *Neumann*, que impõem um gradiente da variável analisada.

4.4.1 Condições de Contorno para o Escoamento do Fluido

Segundo Jasak (JASAK, H., 1996) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004) as condições de contorno para o escoamento de um fluido incompressível e viscoso devem ser impostas seguindo a seguinte estrutura para que a solução seja fisicamente consistente:

- **Condição de Contorno na entrada:** o campo de velocidade deve ser prescrito e para que haja consistência física deve-se prescrever um gradiente zero de pressão.
- **Condição de Contorno na saída:** para a velocidade deve-se prescrever um gradiente zero, já para a pressão deve-se, para que a conservação da massa seja satisfeita, prescrever um valor fixo ou impor também um gradiente zero de pressão.
- **Condição de Contorno na linha de simetria:** deve-se prescrever zero para os gradientes normais a superfície de simetria e para as componentes paralelas a superfície simetria deve-se assumir os valores da primeira linha do domínio.
- **Condição de contorno em parede sólida:** como não deve haver fluxo através da parede de contato o gradiente de pressão é zero e para a velocidade considera-se que é nula no contato com a parede.

4.4.2 Condição de Contorno para o Escoamento do Metal

Quando se considera o escoamento de um metal, como o que ocorre em um processo de extrusão, há uma diferença na imposição das condições de contorno em relação as condições de contorno impostas no escoamento de um fluido (BASIC, H. *et al*., 2005). Entretanto, as condições de contorno para as paredes da entrada, saída e da linha de simetria são impostas da mesma forma que no escoamento do fluido. Segundo Jasak (JASAK, H., 1996) e Maliska (MALISKA, C.R., 2004), tem-se:

- **Condição de Contorno na entrada:** o campo de velocidade deve ser prescrito e para que haja consistência física deve-se prescrever um gradiente zero de pressão.

- **Condição de Contorno na saída:** para a velocidade deve-se prescrever um gradiente zero, já para a pressão deve-se, para que a conservação da massa seja satisfeita, prescrever um valor fixo ou impor também um gradiente zero.
- **Condição de Contorno na linha de simetria:** deve-se prescrever zero para os gradientes normais a superfície de simetria e para as componentes paralelas a superfície simetria deve-se assumir os valores da primeira linha do domínio.

Porém, para a condição de contorno na parede sólida, deve-se considerar um modelo de atrito na interface material-matriz. A literatura sugere, como modelos de atrito mais utilizados na conformação plástica de metais, o modelo de Atrito de Coulomb ou o modelo do Fator de Atrito. Onde, a primeira formulação é definida pela equação abaixo:

$$\tau_{nt} = \mu \sigma_n \tag{4.4.2.1}$$

onde, τ_{nt} é a tensão de atrito, μ é o coeficiente de Coulomb e σ_n é a pressão normal. Já o fator de atrito é definido a partir da seguinte equação:

$$\tau_{nt} = mK \tag{4.4.2.2}$$

sendo τ_{nt} a tensão de atrito, m é o fator de atrito e K é o limite de elasticidade no cisalhamento. Segundo Kobayashi (KOBAYASHI, S. *et al.*, 1989) e Martins *et al*. (MARTINS, P. e*t al.*, 2005) os dois modelos podem ser utilizados, porém, o modelo do Fator de Atrito produz resultados mais coerentes em processos de extrusão. O esquema de aplicação do atrito como condição de contorno, que foi utilizado neste trabalho, está descrito no ANEXO D.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados das simulações utilizando o esquema numérico apresentado anteriormente são descritos em duas grandes seções. Sendo que primeira seção trata da validação do esquema numérico para o escoamento de um fluido incompressível e viscoso para os casos do escoamento entre placas paralelas e em condição axissimétrica. Sendo apresentados os resultados dos campos de velocidade e pressão. A segunda seção que trata da validação do eaquema numérico para o escoamento de metais em processos de extrusão direta em condição axissimétrica. São apresentados resultados sobre os campos de velocidades, campos de pressões e taxa de deformação equivalente para extrusão de chu,bo e alumínio.

5.1 Escoamento de um Fluido Incompressível entre Placas Paralelas

A partir do esquema numérico apresentado neste trabalho, foi escrito um código computacional em linguagem FORTRAN. Este código permite a obtenção dos campos de velocidade e pressão no escoamento de um fluido incompressível e viscoso entre placas paralelas e em regime permanente. Os resultados são comparados com resultados analíticos para esse tipo de escoamento, com o objetivo da validação do esquema numérico.

O código computacional está detalhado no fluxograma dado na Figura 5.1.1. O fluxograma mostra que o código computacional é iniciado pela entrada de dados, tais como: malhas, propriedades do fluido analisado, parâmetros numéricos, etc. A seguir, inicia-se o ciclo principal do código chamado de “LOOP SIMPLE”, que, quando convergido, dará os resultados dos campos de velocidade e pressão para o regime permanente. Dentro deste ciclo, como o método numérico utiliza o Método MacCormack, primeiramente, calculam-se as informações necessárias para a obtenção do passo *Preditor*. Em seguida é feita a atualização dos vetores, usando os resultados do passo *Preditor*, para que se possam obter os resultados do passo *Corretor*. A partir dos resultados dos passos *Preditor* e *Corretor*, pode-se calcular o valor final da iteração analisada, fazendo a média aritmética entre os passos *Preditor* e *Corretor*. Continuando o

processo são calculadas as correções da velocidade e da pressão, através das suas respectivas equações de correção, definidas pelo método SIMPLE. O próximo ponto testa a convergência da iteração analisada através da seguinte equação:

$$\left|\frac{v_x^{t+1} - v_x^t}{v_x^t}\right| < \varepsilon \tag{5.1.1}$$

onde, v_x^{t+1} é a velocidade na direção longitudinal no passo iterativo corrente, v_x^t é a velocidade na direção longitudinal no passo iterativo anterior e ε é a tolerância do processo.

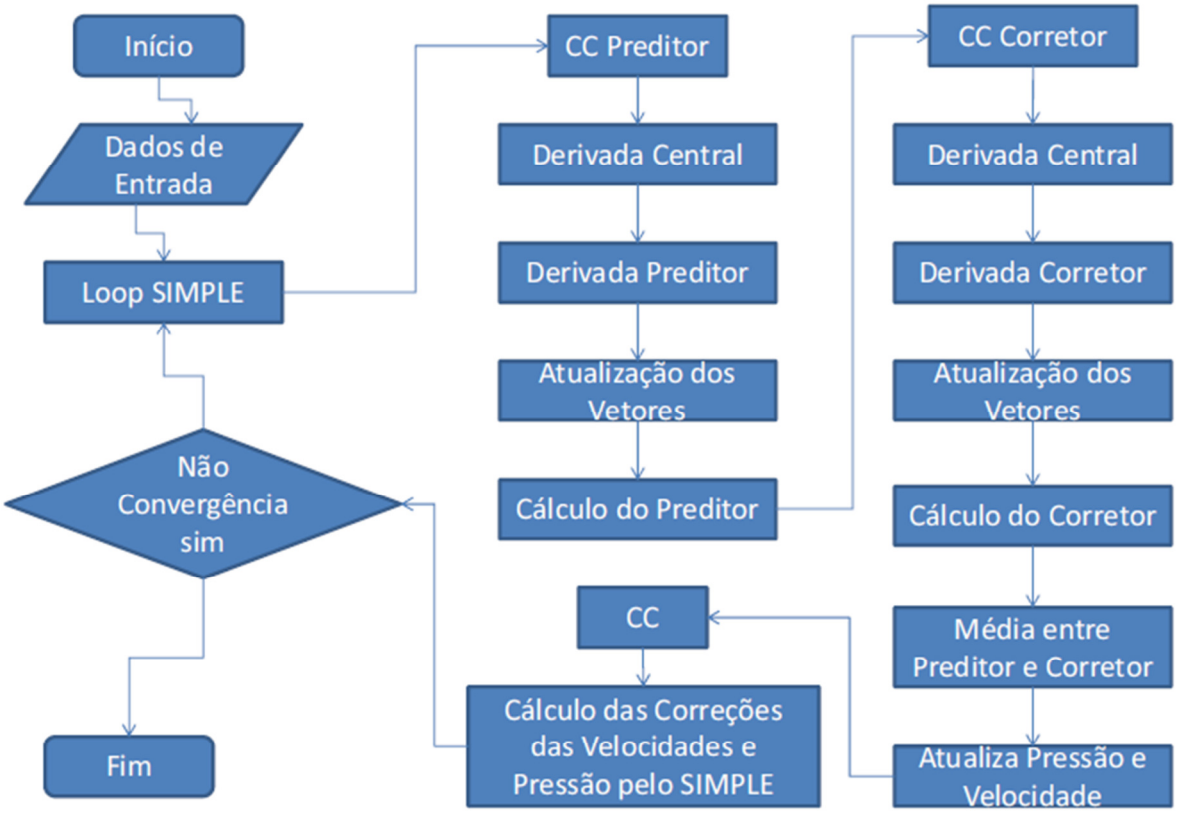


Figura 5.1.1 – Fluxograma do código computacional, escrito em linguagem FORTRAN, para o cálculo dos campos de velocidade e pressão no escoamento de um fluido incompressível e viscoso em regime permanente.

Sendo satisfeita a convergência o programa termina, caso contrário volta-se ao ciclo e repete-se o processo, considerando a próxima iteração, até que a convergência seja satisfeita dentro do critério estabelecido.

O caso do escoamento de um fluido incompressível e viscoso bidimensional analisado a seguir possui a geometria destacada no esquema da Figura 5.1.2. O perfil de velocidade na entrada é constante e representado por V_0, a distância entre as placas é dada por $2h$ e L é o comprimento das placas. O comprimento L corresponde às $10h$, sendo essa distância suficiente para garantir que o escoamento seja considerado completamente desenvolvido na seção de saída do canal. As propriedades do fluido incompressível e viscoso utilizado nas simulações foram consideradas iguais à da glicerina e estão listadas na Tabela 5.1.1.

Tabela 5.1.1 – Propriedades da Glicerina.

Propriedade	Valor	Unidade
Massa específica	1261	$kg \cdot m^{-3}$
Viscosidade Dinâmica	0,934	$Pa \cdot s$
Calor Específico	2430	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Condutividade Térmica	0,30	$J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$

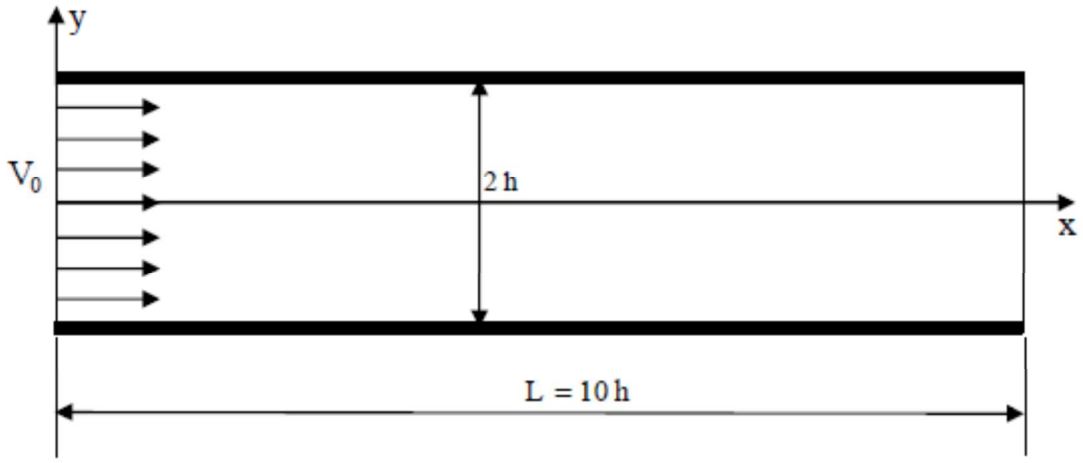


Figura 5.1.2 – Representação do esquema da geometria para o escoamento entre placas paralelas.

Os resultados numéricos, para o escoamento, foram obtidos considerando a geometria destacada na Figura 5.1.2. Sendo, neste caso, $h = 0.01$ metros e $L = 0.1$ metros e uma malha

estrutura, quadriláteral, uniforme, com razão de aspecto de aproximadamente 1, com 110 volumes de controle distribuídos na direção longitudinal, 10 volumes de controle distribuídos na direção transversal, como pode ser visto na malha representada pela Figura 5.1.3. A velocidade de entrada foi considerada constante e igual a $V_0 = 1.0$ m/s, gerando um Número de Reynolds igual a $Re = 27$, sendo esse um valor que garante um escoamento laminar. O gradiente de pressão considerado foi de 24000 Pa que foi alcançado com 323000 iterações. O passo de tempo utilizado foi igual a $\Delta t = 10^{-6}$ e o parâmetro α de sub-relaxação para a Equação (4.3.6), que é a equação da correção da pressão foi considerado igual 1.

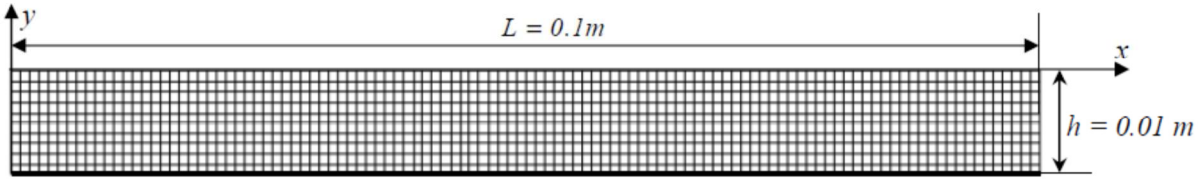


Figura 5.1.3 – Malha com 110 volumes de controle na direção longitudinal (x) e 10 volumes de controle na direção transversal (y), utilizada no escoamento da glicerina.

O resultado analítico, para a velocidade axial, foi determinado a partir da equação apresentada por Potter *et al*. (POTTER, M. *et al*., 2004) e reescrita abaixo:

$$V_{analítico} = \frac{dp}{dx}\frac{1}{2\mu}\left(h^2 - y^2\right) \tag{5.1.2}$$

Onde, dp/dx é o gradiente de pressão no canal, μ é a viscosidade, h é a semi-distância entre as placas paralelas e y é a coordenada na direção transversal.

O gráfico da Figura 5.1.4 mostra o perfil de velocidade longitudinal numérica que definiu-se parabólico, concordando com a literatura. Pode-se afirmar que houve uma boa concordância entre os resultados numérico e analítico, pois, o *Erro Médio Quadrático* (EMQ) foi de aproximadamente igual EMQ = 0.016.

A Figura 5.1.5 mostra o desenvolvimento dos contornos da velocidade longitudinal numérica até o escoamento alcançar o estado completamente desenvolvido.

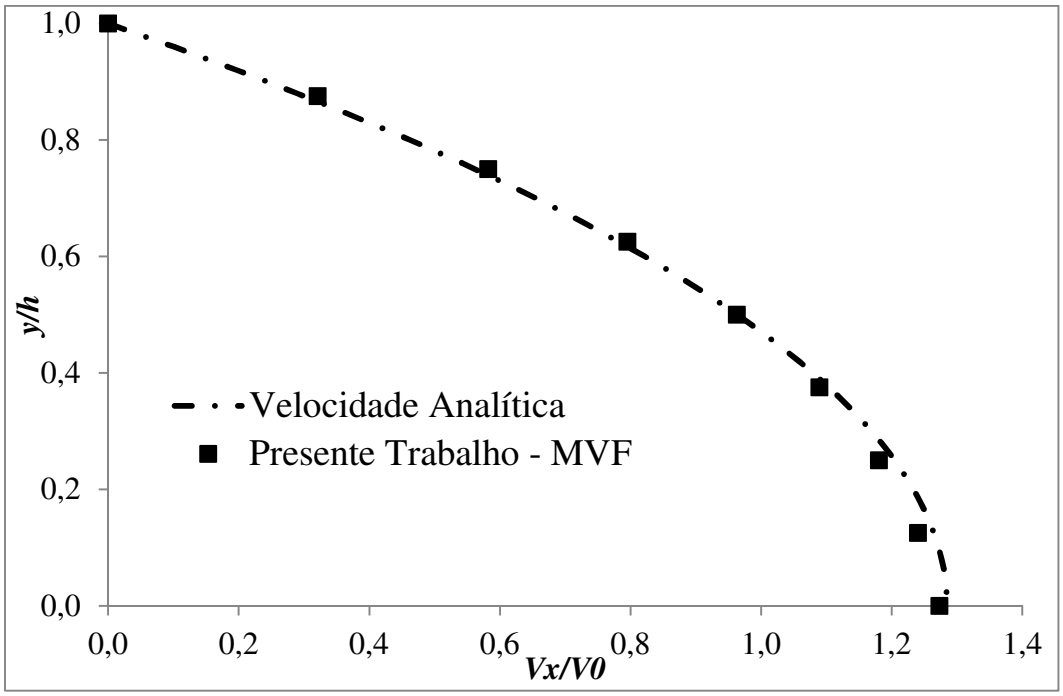


Figura 5.1.4 – Comparação entre o perfil de velocidade longitudinal numérica e analítica para a saída do canal no escoamento da glicerina em regime permanente.

Nesta Figura pode-se perceber como a velocidade comporta-se durante a sua convergência em um intervalo de iterações que vai de 1000 até 323000, sendo está última o número de iterações onde o escoamento convergiu. Pode-se perceber que as mudanças mais significativas nos contornos da velocidade longitudinal surgiram no intervalo de 1000 até 50000 iterações, sendo que acima de 50000 iterações houve apenas um refinamento do resultado para a velocidade longitudinal.

Na Figura 5.1.6 estão representados os contornos da velocidade longitudinal numérica completamente desenvolvida acompanhada de uma escala, para que se possa perceber a ordem de grandeza da velocidade longitudinal calculada numericamente. Esta ordem de grandeza foi apresentada, através da comparação entre os resultados numérico e analítico, na Figura 5.1.4. Pode-se perceber a coerência entre os valores dados no contorno da Figura 5.1.6 e os valores do perfil parabólico da Figura 5.1.4.

A sequência de imagens dadas na Figura 5.1.7 possui uma análise semelhante à análise feita na Figura 5.1.5. Porém, neste caso a variável considerada é a pressão.

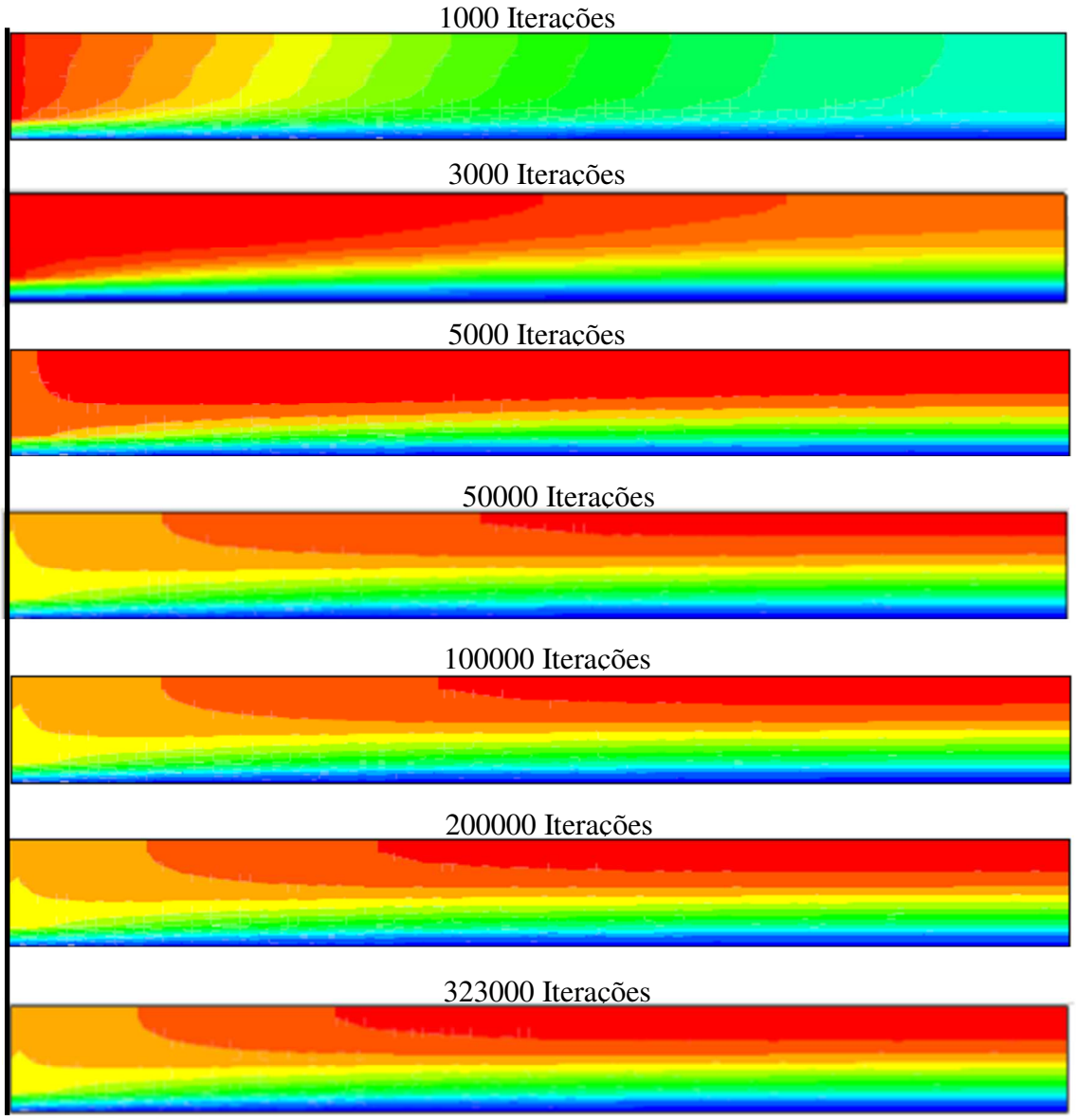


Figura 5.1.5 – Variação de acordo com o número de iterações dos contornos da velocidade longitudinal *Vx* numérica até o escoamento tornar-se completamente desenvolvido.

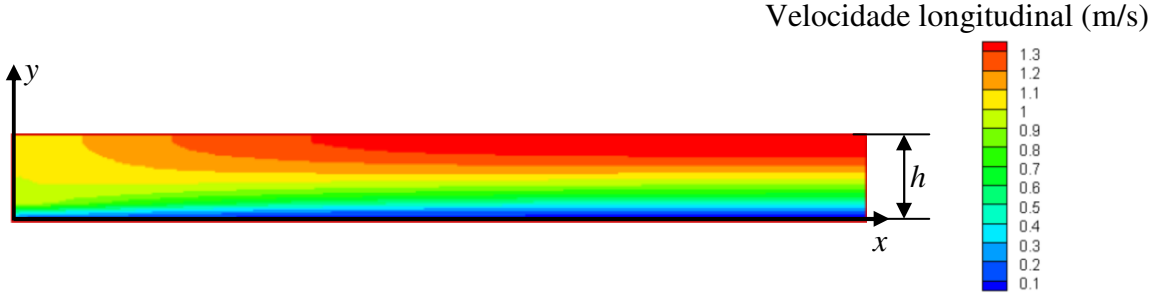


Figura 5.1.6 – Representa o perfil da velocidade longitudinal *Vx* numérica, para o escoamento da glicerina completamente desenvolvido (iteração 323000).

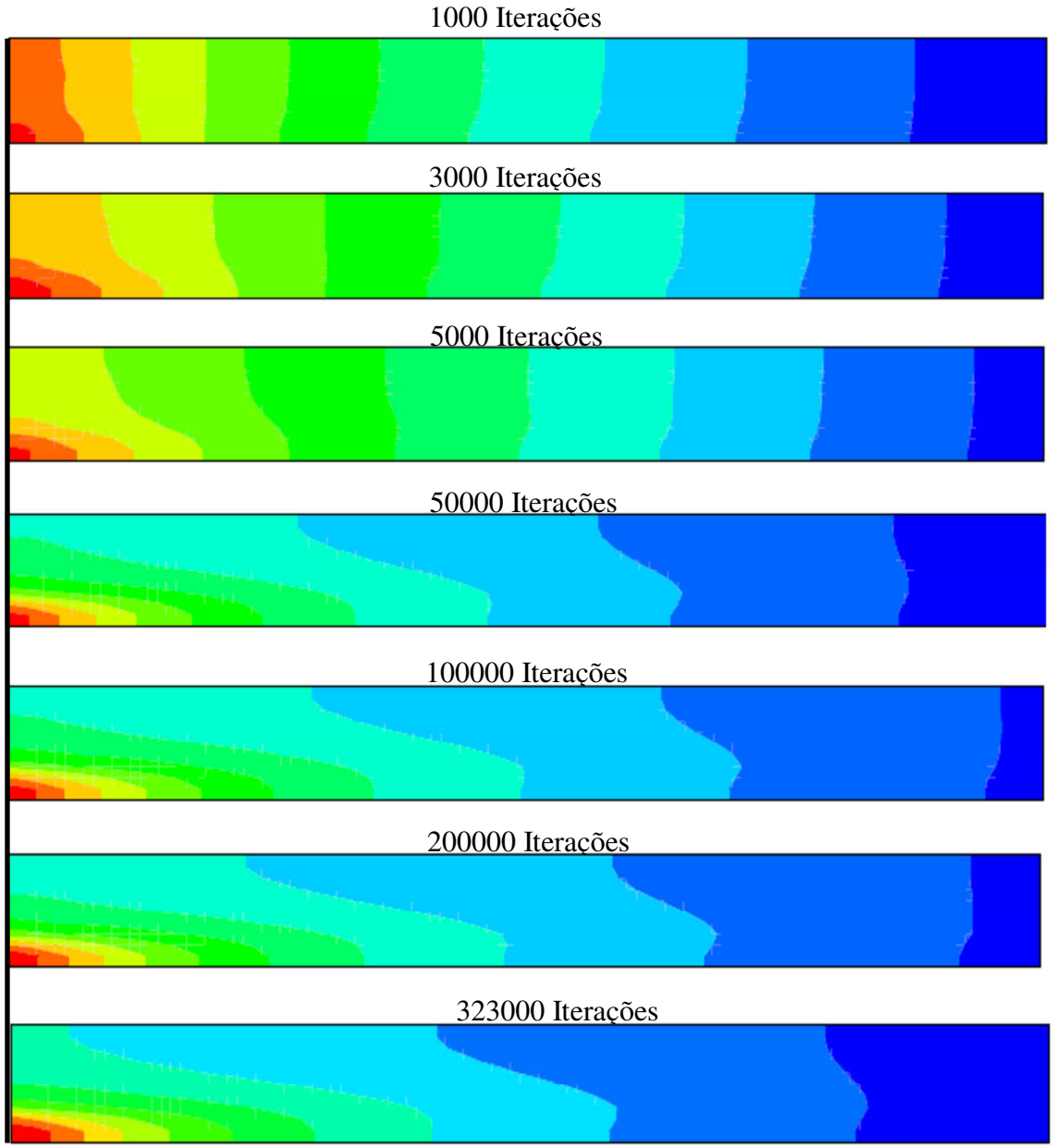


Figura 5.1.7 – Variação de acordo com o número de iterações dos contornos da pressão numérica até o escoamento tornar-se completamente desenvolvido.

Nesta, pode-se perceber a variação da pressão durante o processo de convergência no intervalo de 1000 até 323000 iterações. No caso da pressão pode-se perceber que as mudanças mais significativas no contorno aparecem durante o intervalo de 1000 até 50000 iterações, situação semelhante à que surge durante a convergência da velocidade. No escoamento convergido o gradiente de pressão alcançado é de 24000 Pa.

A Figura 5.1.8 mostra o contorno dos valores da pressão para o processo de escoamento completamente desenvolvido ou convergido. Nesta figura pode-se avaliar os valores do contorno de pressão através da escala apresentada junto a figura, onde se pode perceber que o gradiente de pressão gerado no escoamento convergido foi de 24000 Pa.

Figura 5.1.8 – Representa os contornos do campo de pressão, para o escoamento da glicerina completamente desenvolvido, considerando um gradiente de pressão de 24000 Pa.

A Figura 5.1.9 mostra o perfil parabólico da velocidade longitudinal, através da representação vetorial, gerada no escoamento do fluido dentro da extensão do canal. O resultado foi obtido depois de 323000 iterações.

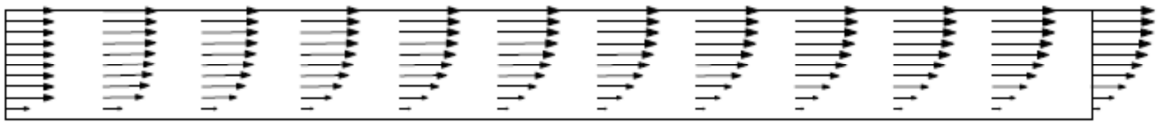


Figura 5.1.9 – Representação da formação do perfil parabólico, para a velocidade longitudinal numérica, na extensão do canal, considerando o escoamento da glicerina complemente desenvolvido.

Outro resultado que está sendo apresentado e ajuda a validar o código computacional é o gráfico da Figura 5.1.10, que fornece uma análise da convergência da velocidade longitudinal para os volumes de controle dos pontos da malha nas posições (3,8), (55x8) e (107,8), sendo a primeira posição um volume de controle na entrada do canal, o segundo um volume de controle no meio do canal e o terceiro um volume de controle na saída do canal. Pode se perceber que foi alcançada a convergência depois de aproximadamente 50000 iterações para os três volumes de controle analisados.

Na Figura 5.1.11 é mostrado um gráfico que representa a convergência da velocidade transversal para os mesmos volumes de controle analisados na Figura 5.1.10, isto é, nas posições (3,8), (55x8) e (107,8). Pode-se perceber que a convergência, para a velocidade tranversal, foi alcançada no mesmo número de iterações que a velocidade longitudinal, isto é, em torno de 50000 iterações.

O gráfico da Figura 5.1.12 mostra a redução do valor da razão formada pela correção da pressão (*PL*) e a pressão (*P*) no mesmo volume de controle, isto é, *PL/P*, em relação ao número de iterações. Pode-se perceber que os valores de *PL/P* tendem a zero para os três volumes de controle considerados, mostrando que o campo de pressão calculado está convergido.

Considerando um escoamento com as mesmas características físicas e numéricas do escoamento da glicerina analisado até este momento, porém, estabelecendo uma sequência de refinamentos da malha computacional. Pode-se perceber a partir do gráfico da Figura 5.1.13, que há, de acordo com o refinamento da malha, uma aproximação dos resultados numéricos em relação ao resultado analítico para a velocidade longitudinal *Vx*.

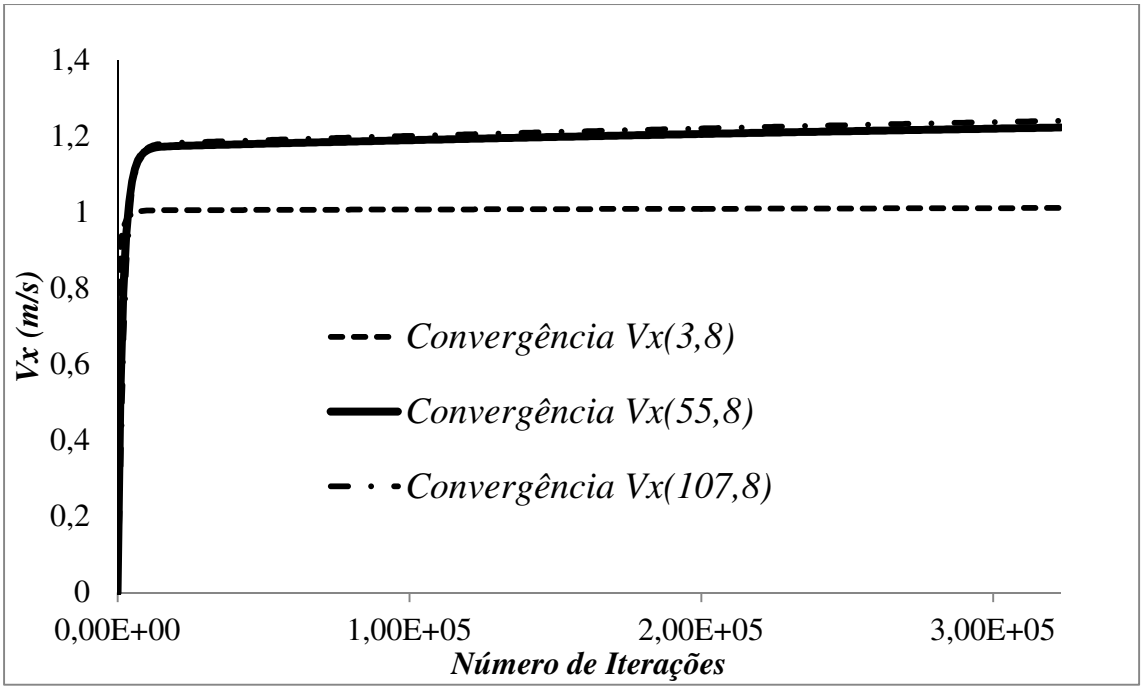


Figura 5.1.10 – Convergência para a velocidade longitudinal (*Vx*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,8), (55x8) e (107,8).

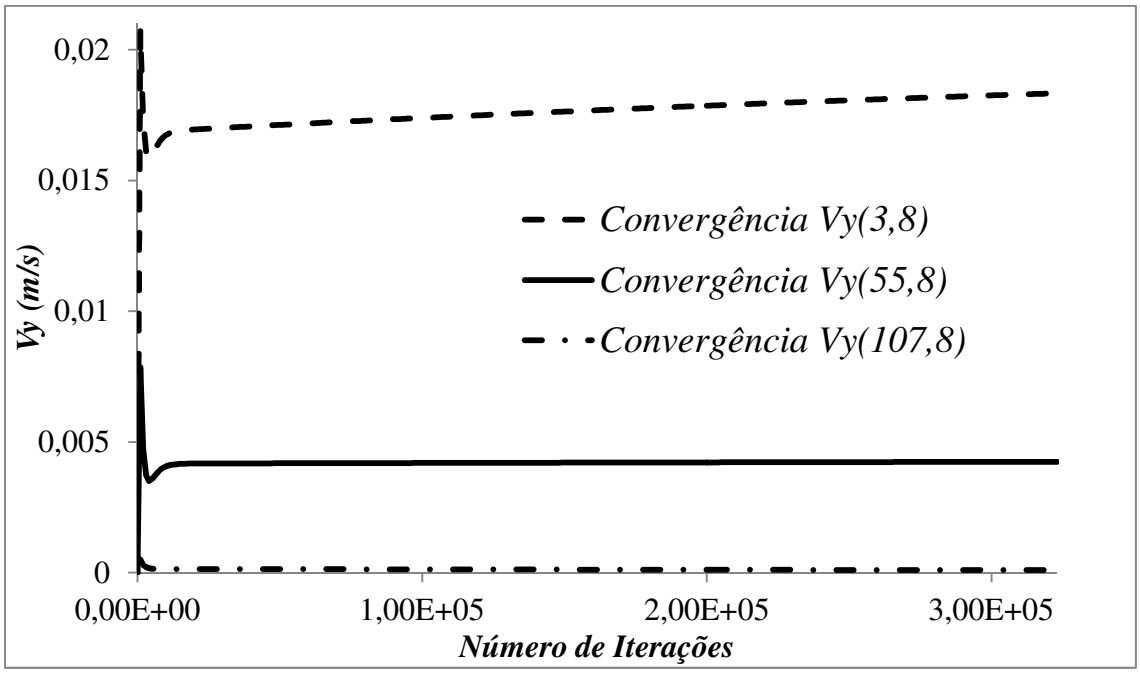


Figura 5.1.11 – Convergência para a velocidade na direção transversal (*Vy*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,8), (55x8) e (107,8).

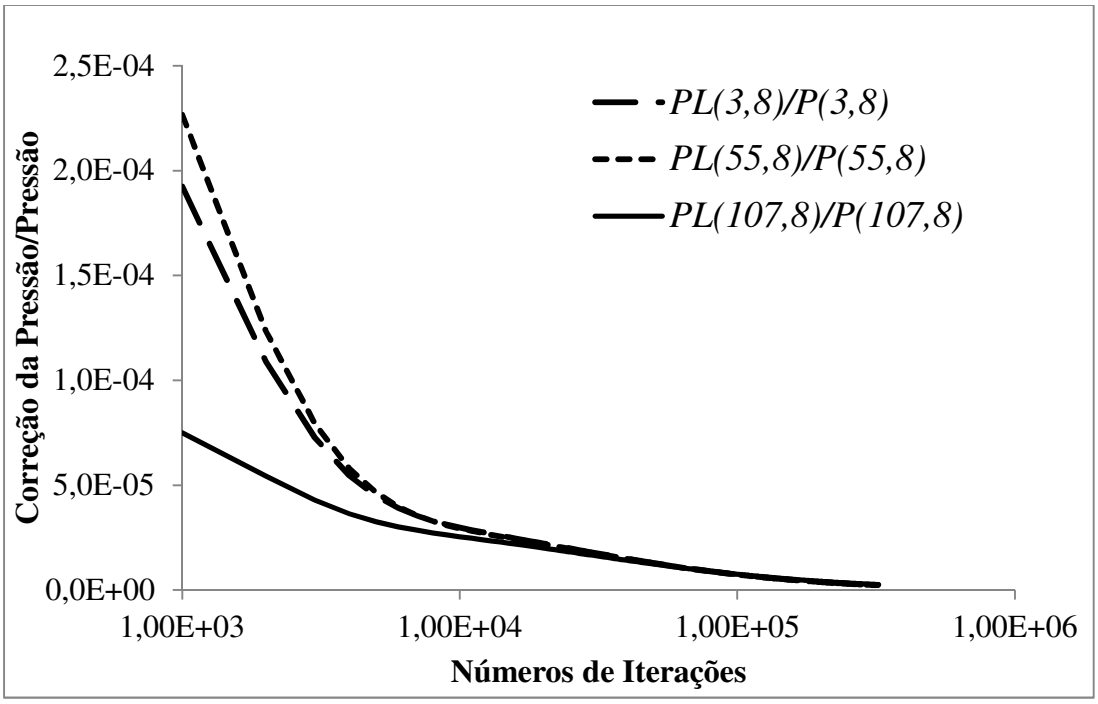


Figura 5.1.12 – Redução da razão entre a correção da pressão e a pressão (*PL/P*) no mesmo volume de controle, para os volumes de controle nas posições (3,8), (55x8) e (107,8).

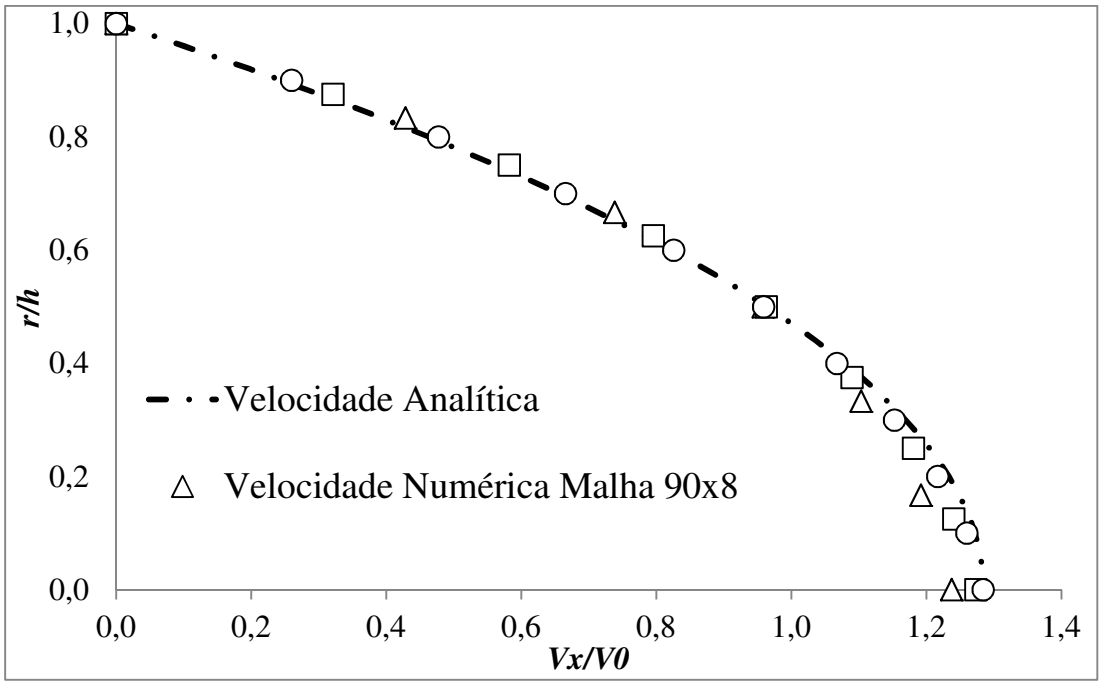


Figura 5.1.13 – Variação do refinamento da malha em função da aproximação do resultado numérico em relação do resultado analítico, para a velocidade longitudinal *Vx*.

O gráfico da Figura 5.1.14 representa a redução do EMQ em relação ao aumento do número de volumes de controle na malha, isto é, o refinamento da mesma. Sendo está análise coerente ao que sugere a literatura em relação a essa questão.

A literatura sugere que o coeficiente de sub-relaxação α, na Equação (4.3.6), que é a equação da correção da pressão, deve ser um valor que pertença ao intervalo $0.2 \leq \alpha \leq 0.3$, para que a pressão calculada não seja superestimada. O gráfico da Figura 5.1.15 mostra a comparação da variação de α com a velocidade longitudinal numérica para um mesmo número de iterações do código computacional, sugerindo que o valor de α influencia a velocidade de convergência. Como pode ser visto no gráfico da Figura 5.1.16, que mostra a variação de α para um mesmo gradiente de pressão, sugerindo que α influencia apenas na velocidade de convergência.

O método MacCormack aplicado no esquema numérico utilizado neste trabalho é explícito na sua formulação do tempo. Um método explícito, em termos da sua convergência, é chamado de condicionalmente estável, isto é, depende de certas condições numéricas para que se possa obter a sua convergência dentro de uma precisão satisfatória.

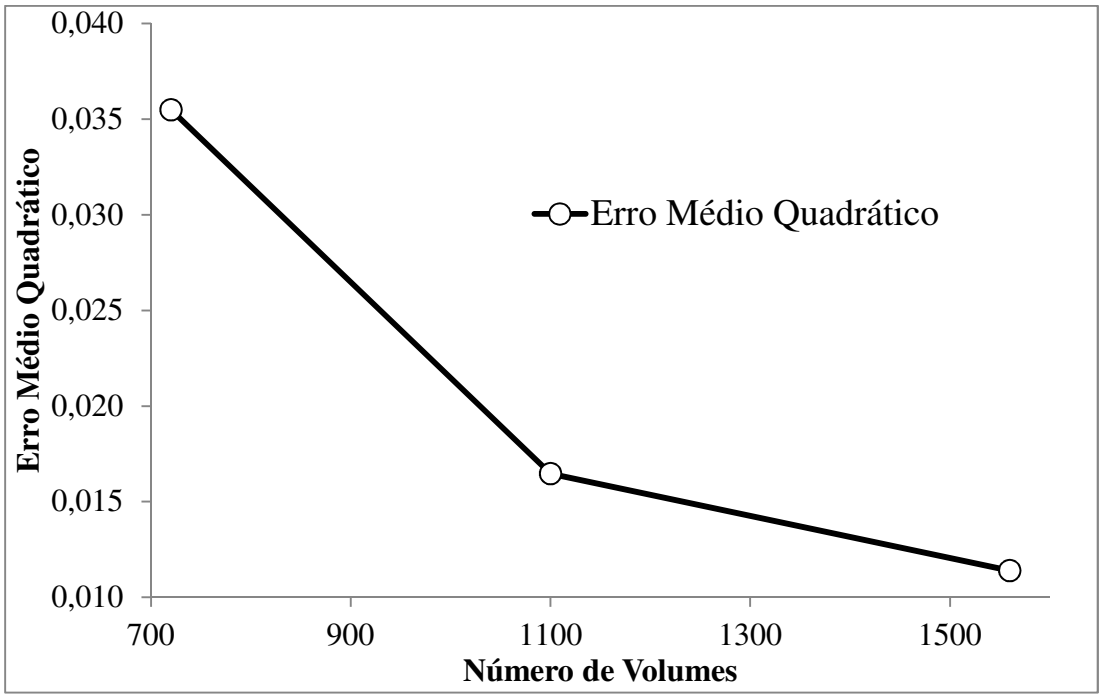


Figura 5.1.14 – Redução do "Erro Médio quadrático" em função do aumento do número de volumes de controle, ou seja, o refinamento da malha.

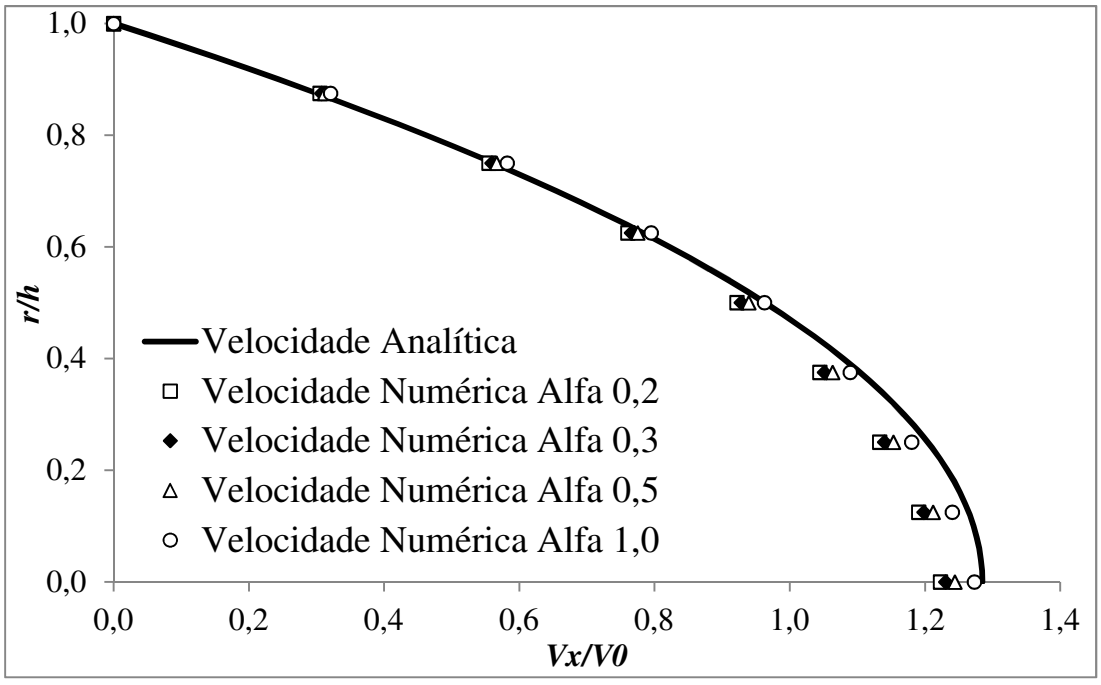


Figura 5.1.15 – Variação coeficiente de sub-relaxação α para um número de iterações igual a 323000.

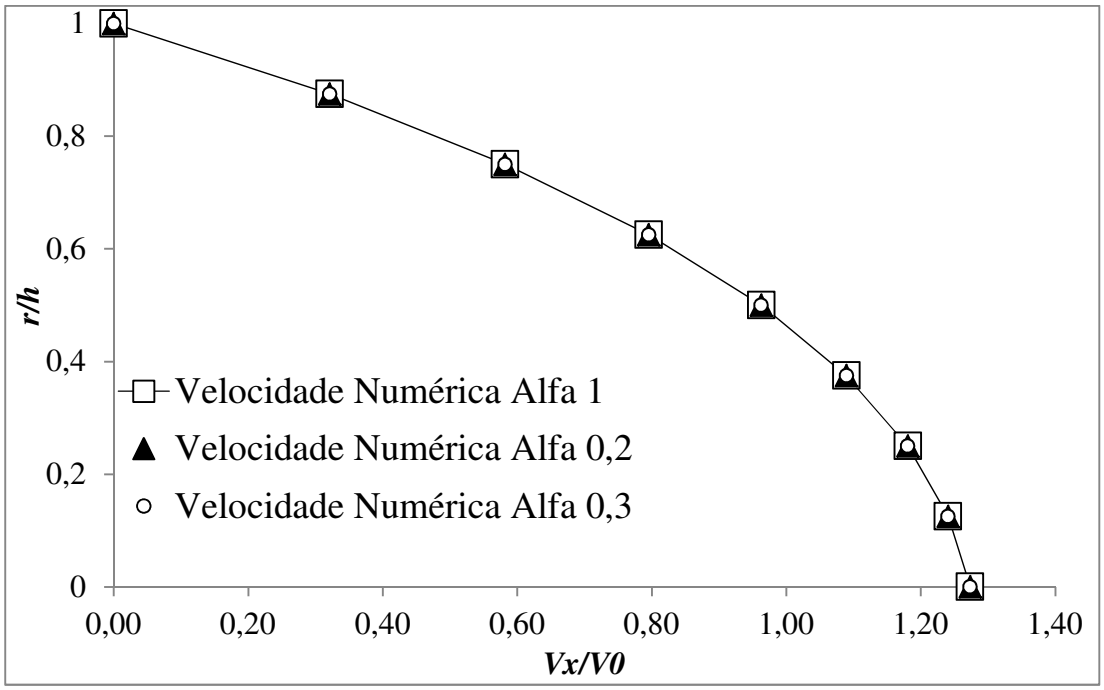


Figura 5.1.16 – O gráfico apresenta a variação do coeficiente de subrelaxação α para um mesmo gradiente de pressão, resultando exatamente nos mesmos valores de velocidade longitudinal, independente do valor de α.

Essas condições numéricas são representadas pelo número de CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy number*), que depende, principalmente, do espaçamento da malha e do passo de tempo.

Na Figura 5.1.17 o gráfico mostra a comparação dos resultados numérico e analítico para a velocidade longitudinal, considerando o escoamento da glicerina descrito anteriormente. Para uma mesma malha, com 110x10 volumes de controle, foi feito uma análise para verificar o valor ideal do passo de tempo que se deveria utilizar para se obter a convergência e a melhor precisão.

O gráfico da Figura 5.1.17 mostra que o passo de tempo que produz a melhor aproximação em relação ao resultado analítico foi o passo de tempo igual a 10^{-6}. Esse resultado é confirmado a partir do gráfico apresentado na Figura 5.1.18, que mostra o comportamento do EMQ na comparação entre cada resultado numérico da velocidade longitudinal para passos de tempo diferentes, com o resultado analítico da velocidade longitudinal, sendo que o menor valor do erro médio quadrático foi de aproximadamente de EMQ = 0,016.

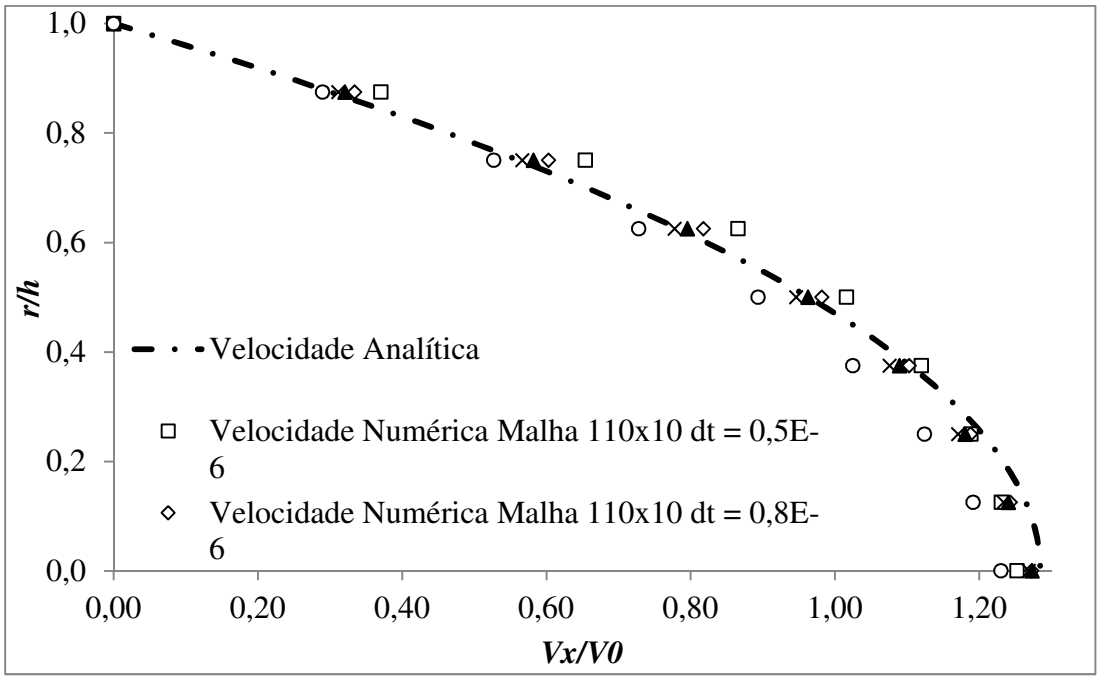


Figura 5.1.17 – Comparação entre o resultado numérico e analítico, para a velocidade longitudinal, considerando a variação do passo de tempo. Para a malha com 110x10 volumes de controle o passo de tempo que produz o melhor resultado foi o valor de 10^{-6}.

Uma análise semelhante foi feita e apresentada na Figura 5.1.19, porém, foi considerada uma malha de 150x14 volumes de controle, isto é, uma malha mais refinada em relação a utilizada anteriormente, para o escoamento da glicerina. O passo de tempo que produziu melhor precisão foi o de valor igual a 9.0×10^{-7}, como pode ser visto no gráfico da Figura 5.1.19.

Esse valor foi confirmado a partir do gráfico da Figura 5.1.20, que mostra o comportamento do EMQ, na comparação entre cada resultado numérico da velocidade longitudinal, com passos de tempo diferentes, com o resultado analítico para a velocidade longitudinal, sendo que o menor valor do erro médio quadrático foi de aproximadamente de EMQ = 0,011.

Analisando os resultados apresentados nas Figuras 5.1.17, Figura 5.1.18, Figura 5.1.19 e Figura 5.1.20, pode-se perceber que o método numérico está exigindo que, para cada malha com a sua quantidade de volumes de controle específica, deve-se estabelecer um passo de tempo específico para se obter o resultado com melhor precisão.

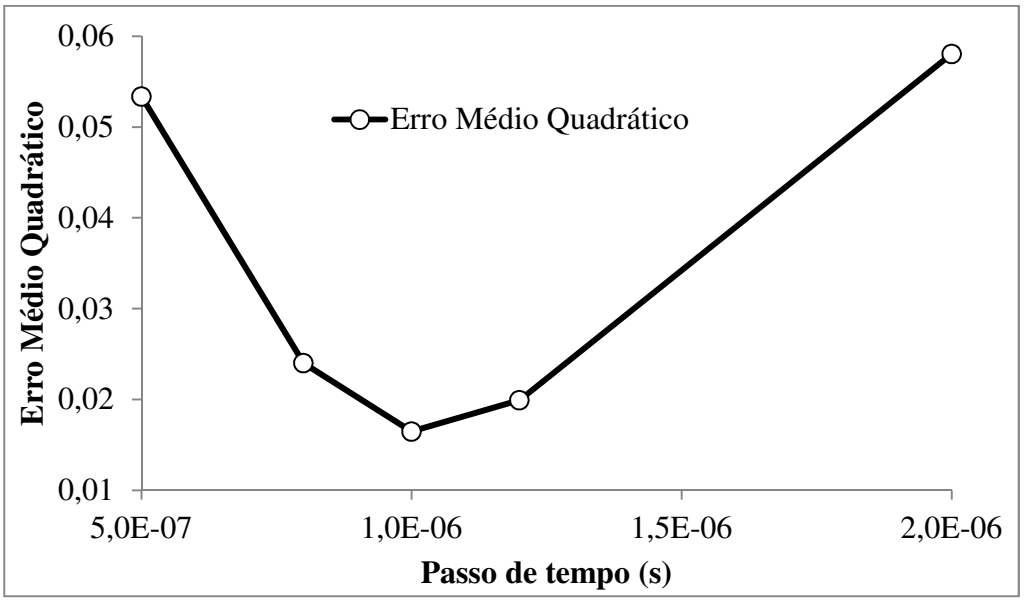


Figura 5.1.18 – Comparação entre o "Erro Médio Qradrático", para os resultados numéricos com diferentes passos de tempo, com o resultado analítico para a velocidade longitudinal. Considerando uma malha com 110x10 volumes de controle. Pode-se perceber que o melhor resultado foi alcançado com o valor de 10^{-6}.

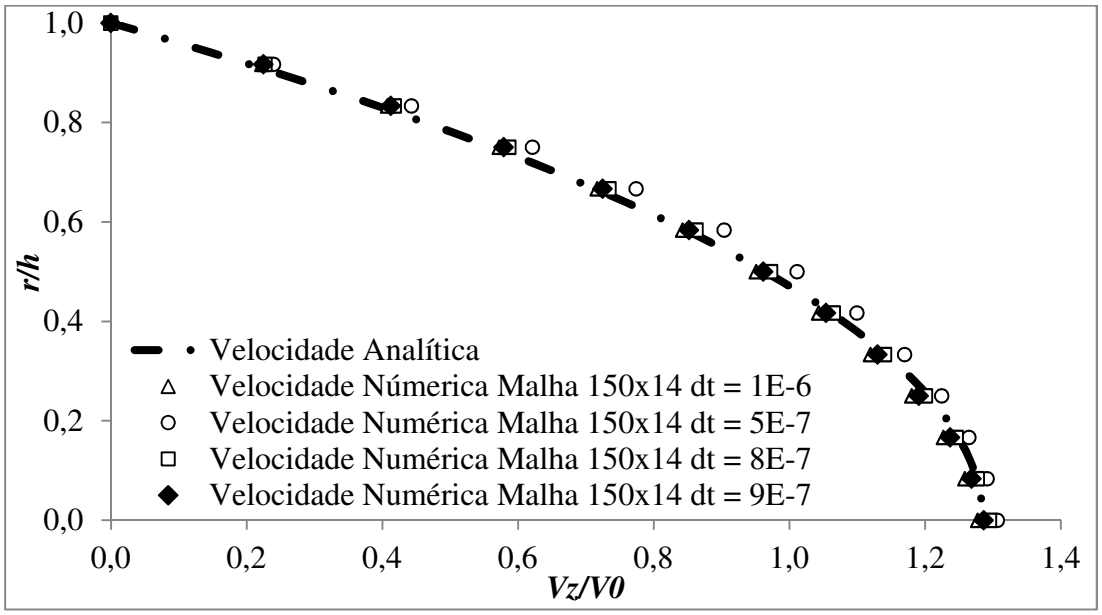


Figura 5.1.19 – Comparação entre o resultado numérico e analítico, para a velocidade longitudinal, considerando a variação do passo de tempo. Para a malha com 150x14 volumes de controle o passo de tempo que produz melhor resultado foi o valor de $9.0x10^{-7}$.

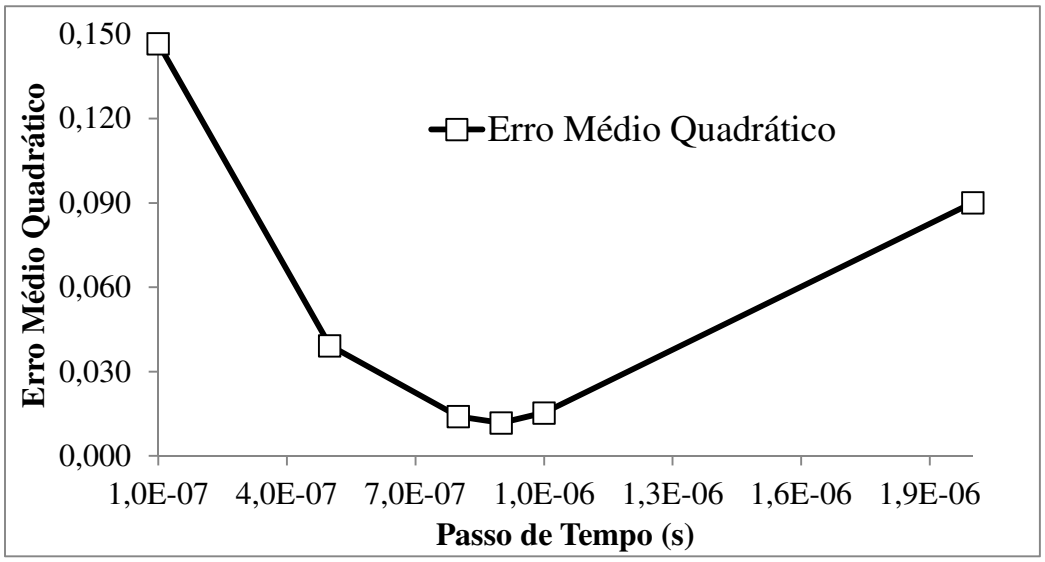


Figura 5.1.20 – Comparação entre o "Erro Médio Qradrático", para os resultados numéricos com diferentes passos de tempo com o resultado analítico para a velocidade longitudinal, considerando uma malha com 150x14 volumes de controle. Pode-se perceber que o melhor resultado foi alcançado com o valor de $9.0x10^{-7}$.

5.2 Escoamento de um Fluido Incompressível em Condição Axissimétrica

Na seção (5.1) foi feita a validação do esquema numérico apresentado neste trabalho para o caso do escoamento de um fluido incompressível e viscoso entre placas paralelas. Nesta seção são apresentados resultados que servem como validação para o esquema numérico considerando o escoamento de um fluido incompressível e viscoso para o caso axissimétrico.

Os resultados foram obtidos usando o fluido incompressível e viscoso com as mesmas características do utilizado na seção (5.1), isto é, a glicerina. Cujo as propriedades são apresentadas na Tabela 5.1.1. A geometria utilizada para a análise do escoamento em condição axissimétrica é um duto cilíndrico, cuja seção meridiana está representada na Figura 5.2.1. O esquema numérico está representado pelo fluxograma da Figura 5.1.1, porém, foram utilizadas as Equações (3.6.2.3) na elaboração do código computacional. Como pode ser visto, na Figura 5.2.1,

o perfil de velocidade na entrada é constante e representado por V_0. O diâmetro do duto é dada por D e L é o comprimento axial do duto. O comprimento L corresponde a $10D$, sendo essa distância suficiente para garantir que o escoamento seja considerado completamente desenvolvido na seção de saída do canal.

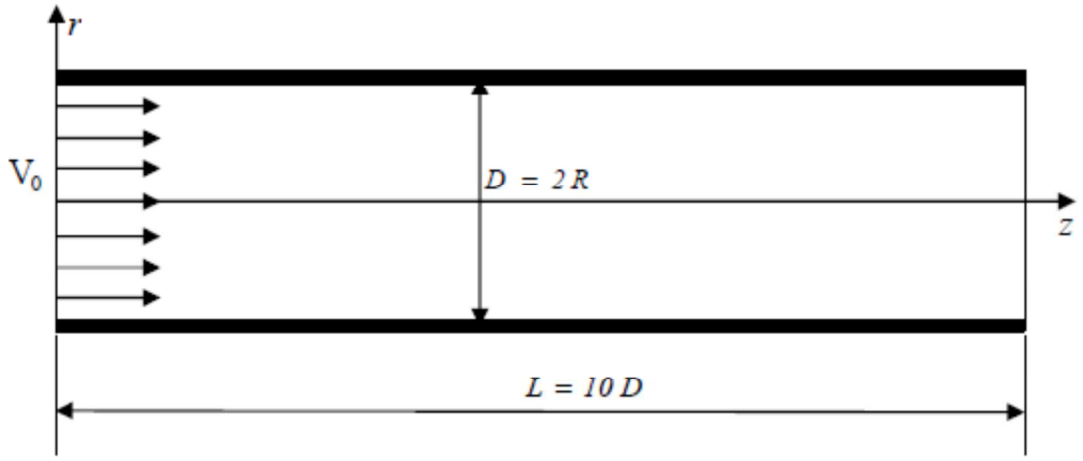


Figura 5.2.1 – Representação do esquema da geometria da seção meridiana do duto cílindrico para o escoamento em condição axissimétrica.

Considerando $D = 0.02$ metros e $L = 0.2$ metros e uma malha estrutura, quadriláteral, uniforme, com razão de aspecto de aproximadamente 1, com 110 volumes de controle distribuídos na direção axial, 10 volumes de controle distribuídos na direção radial, como pode ser visto na malha representada pela Figura 5.2.2. A velocidade de entrada foi considerada constante e igual a $V_0 = 1.0$ m/s, gerando um Número de Reynolds igual a $Re = 27$, sendo esse um valor que garante um escoamento laminar. O gradiente de pressão considerado foi de 49452 Pa que foi alcançado com 100000 iterações. O passo de tempo utilizado foi igual a $\Delta t = 2\times10^{-9}$ e o parâmetro α de sub-relaxação para a Equação (4.3.6), que é a equação da correção da pressão foi considerado igual 1.

O resultado analítico, para a velocidade axial, foi determinado a partir da equação apresentada por Potter *et al*. (POTTER, M. *et al*., 2004) e reescrita abaixo:

$$V_{analítico} = \frac{dp}{dz}\frac{1}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) \tag{5.2.1}$$

onde, *dp/dz* é o gradiente de pressão no canal, μ é a viscosidade, *R* é o raio do duto e *r* é a coordenada na direção radial.

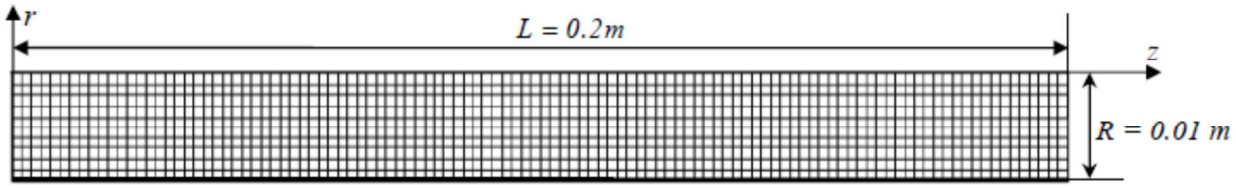


Figura 5.2.2 – Malha com 110 volumes de controle na direção axial (z) e 10 volumes de controle na direção radial (r), utilizada no escoamento da glicerina em condição axissimétrica.

O gráfico da Figura 5.2.3 mostra o perfil de velocidade axial numérica que definiu-se parabólico, concordando com o que afirma a literatura. Pode-se afirmar que houve uma boa concordância entre os resultados numérico e analítico, pois, o *Erro Médio Quadrático* (EMQ) foi de aproximadamente igual EMQ = 0.009.

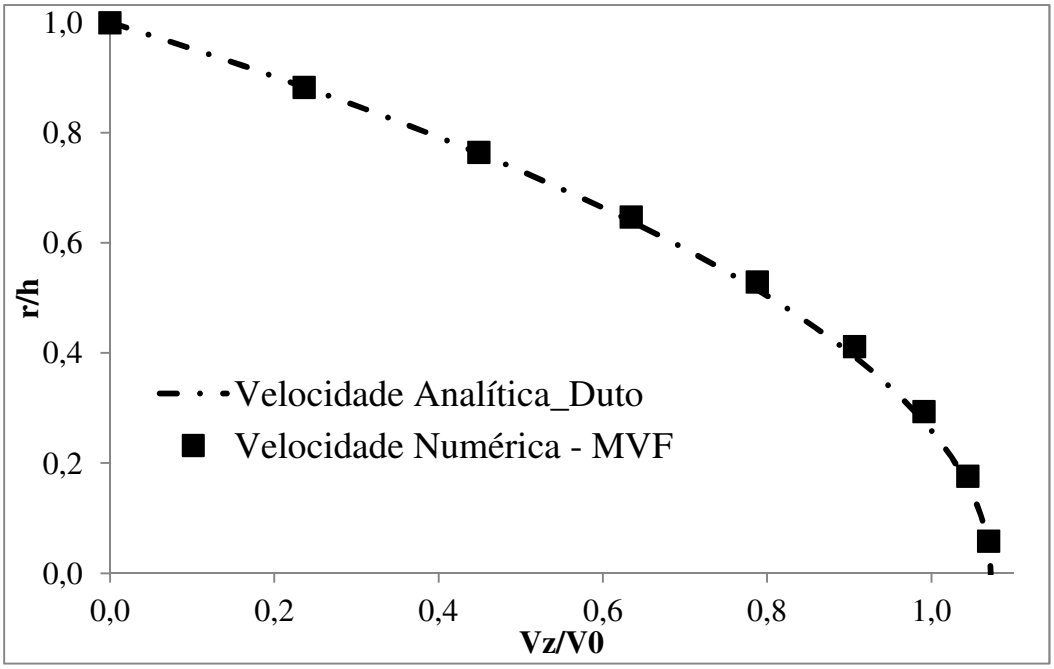


Figura 5.2.3 – Comparação entre o perfil de velocidade axial numérica e analítica para a saída do canal no escoamento da glicerina em regime permanente.

A Figura 5.2.4 fornece uma análise da convergência da velocidade axial para os volumes de controle dos pontos da malha nas posições (3,9), (55x9) e (109,9), sendo a primeira posição um volume de controle na entrada do canal, o segundo um volume de controle no meio do canal e o terceiro um volume de controle na saída do canal. Pode se perceber que foi alcançada a convergência depois de aproximadamente 30000 iterações para os três volumes de controle analisados.

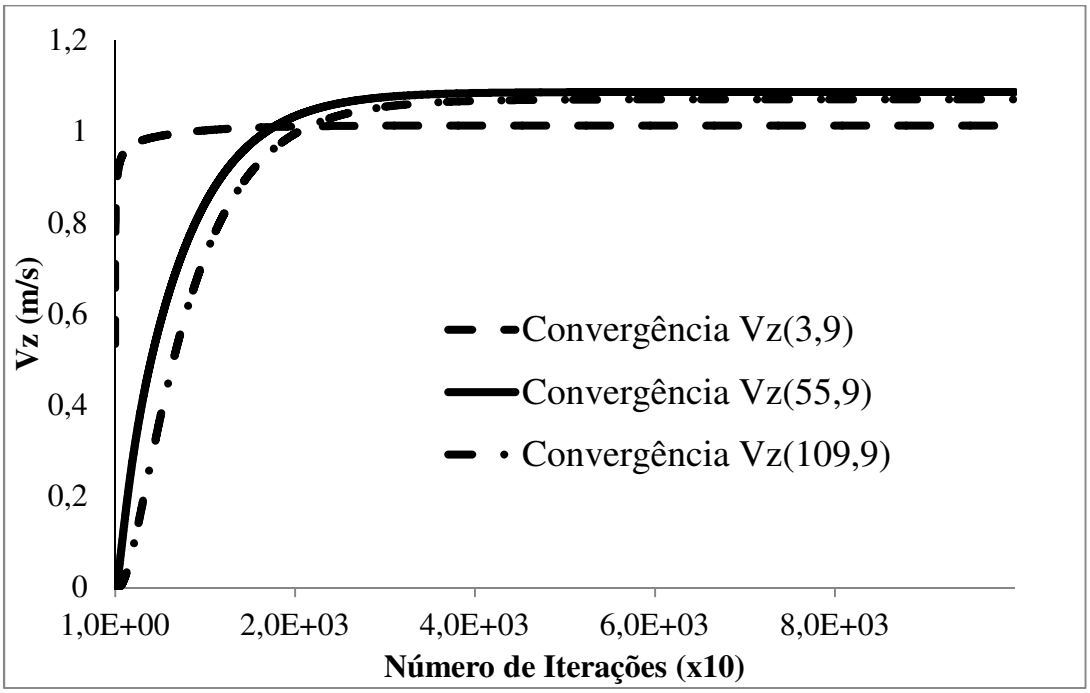


Figura 5.2.4 – Convergência para a velocidade axial (*Vz*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,9), (55x9) e (109,9).

Na Figura 5.2.5 é mostrado um gráfico que representa a convergência da velocidade radial para os mesmos volumes de controle analisados na Figura 5.2.4, isto é, nas posições (3,9), (55x9) e (109,9). Pode-se perceber que a convergência, para a velocidade radial, foi alcançada no mesmo número de iterações que a velocidade axial, isto é, em torno de 30000 iterações.

O gráfico da Figura 5.2.6 mostra a redução do valor da razão formada pela correção da pressão (*PL*) e a pressão (*P*) no mesmo volume de controle, isto é, *PL/P*, em relação ao número de iterações. Pode-se perceber que os valores de *PL/P* tendem a zero para os três volumes de controle considerados, mostrando que o campo de pressão calculado está convergido.

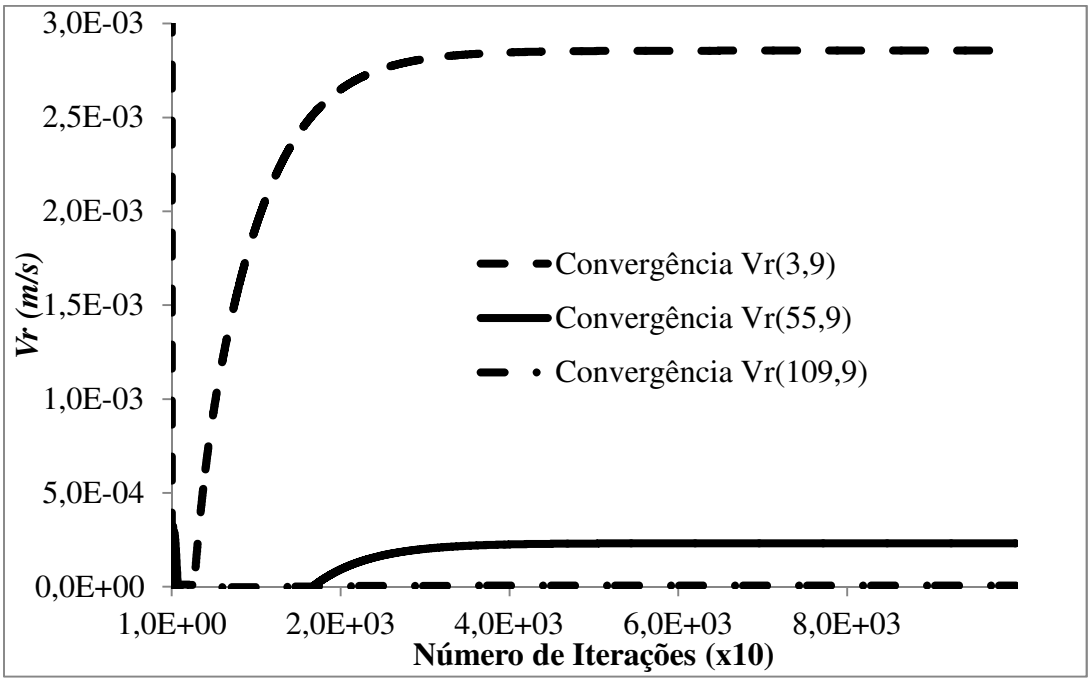


Figura 5.2.5 – Convergência para a velocidade na direção radial (*Vr*) dos volumes de controle nos pontos de posição (3,9), (55x9) e (109,9).

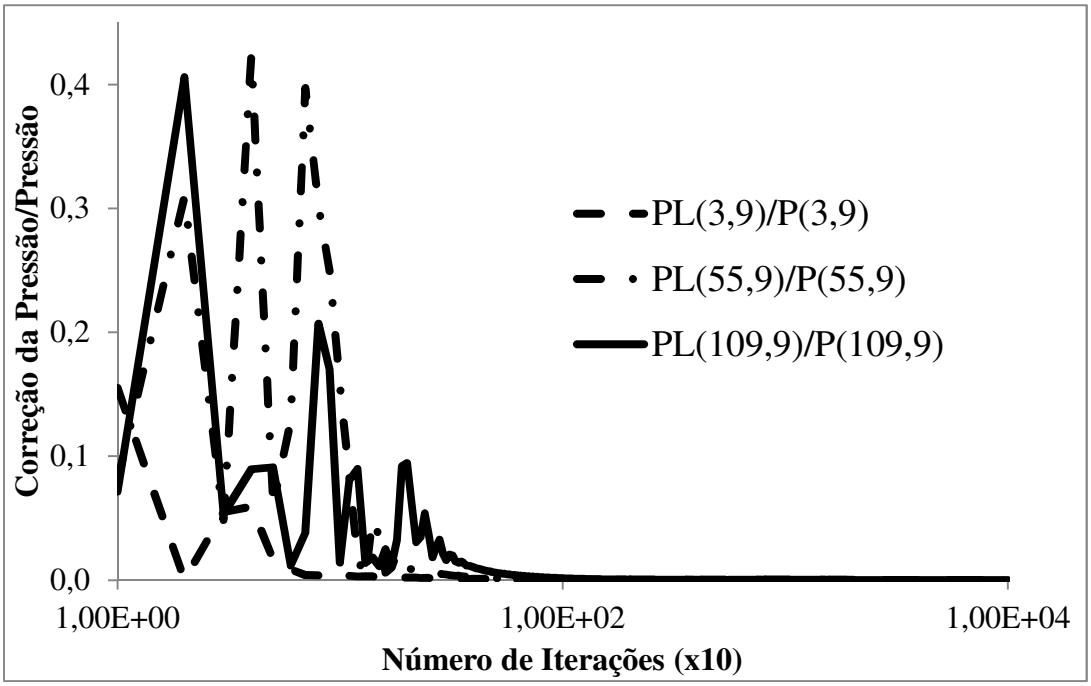


Figura 5.2.6 – Redução da razão entre a correção da pressão e a pressão (*PL/P*) no mesmo volume de controle, para os volumes de controle nas posições (3,9), (55x9) e (109,9).

5.3 Extrusão de metais

Nesta seção são apresentadas comparações entre os resultados numéricos do presente trabalho com resultados analíticos, numéricos e experimentais da literatura. Os resultados obtidos da literatura tratam de processos de extrusão direta do chumbo e alumínio. A partir do esquema numérico apresentado neste trabalho foi elaborado um código computacional, escrito em linguagem FORTRAN, cujo fluxograma está representado na Figura 5.2.1.

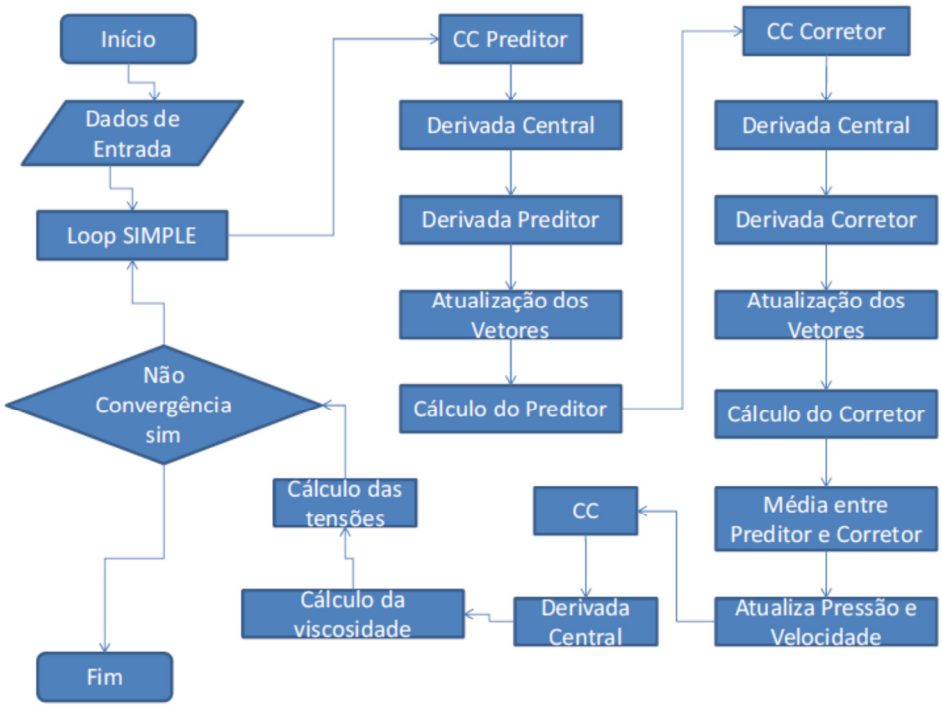


Figura 5.3.1 – Fluxograma do código computacional para o cálculo dos campos de velocidade para o escoamento na extrusão analítica, do chumbo e do alumínio.

O fluxograma mostra que o código computacional é semelhante àquele utilizado nas simulações do escoamento de fluido incompressível, destacado na seção (5.1), cujo fluxograma é representado pela Figura 5.3.1. A diferença entre os fluxogramas encontra-se no cálculo das tensões, que para o escoamento do metal são utilizadas na obtenção da pressão hidrostática.

5.3.1 Análise da Extrusão pelo Método do Limite Superior

Como destacado na revisão bibliográfica deste trabalho há alguns métodos analíticos que permitem a determinação de informações importantes de um processo de extrusão. Porém, são métodos limitados em suas aplicações em virtudes das suas simplificações geométricas e operatórias.

O método do limite superior é um desses métodos analíticos. O mesmo supõe que existindo um campo de velocidades cinematicamente admissível, a força necessária para produzi-lo é uma solução de limite superior. As hipóteses simplicativas do método do limite superior são: material deve ser homogênio, isotrópico, rigido-perfeito-plástico e condição de atrito nula. A partir da teoria sobre o método do limite superior apresentada em Mielnik (MIELNIK, E.M., 1993), Martins (MARTINS, P. e*t al.*, 2005) e Valberg (VALBERG, H.S., 2010), tem-se as seguintes equações para o cálculo dos campos de velocidades em um processo de extrusão direta:

$$v_{z_analítico} = v_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 cos^2 \theta \tag{5.3.1.1}$$

$$v_{r_analítico} = \frac{v_0}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 sen(2\theta) \tag{5.3.1.2}$$

sendo v_0 velocidade inicial, r_0 é o raio que defini a superfície de descontinuidade da velocidade na entrada da região de deformação, r é a coordenada definida sobre r_0, θ é o ângulo tomado da linha de simetria até a linha de fluxo considerada, $v_{z_analítico}$ é a componente da velocidade na direção axial e $v_{r_analítico}$ é a componente da velocidade na direção radial, como pode ser visto no esquema da Figura 5.3.1.1.

Considerando a geometria do caso de extrusão direta do chumbo, apresentado no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005), foram feitas algumas comparações entre os resultados das velocidades calculadas pelo esquema numérico do presente trabalho e resultados obtidos pelo método do limite superior.

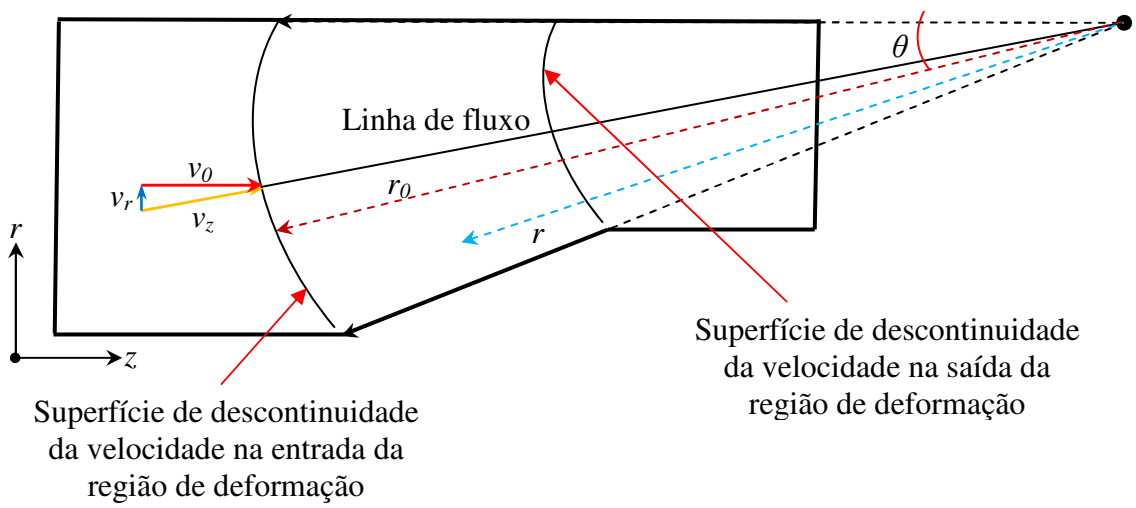


Figura 5.3.1.1 – Esquema de análise analítica da distribuição das velocidades em um processo de extrusão.

A geometria apresentada na Figura 5.3.1.2 é de uma extrusão direta com matriz cônica, descrito no trabalho de H. Basic *et al.* (BASIC, H. *et al.*, 2005) e que possui ângulo de 15°, malha com 1360 volumes de controle e redução de área igual a 25%. O caso de extrusão analisado tem as mesmas características do apresentado no artigo de H. Basic *et al.* (BASIC, H. *et al.*, 2005), porém, o atrito na região cônica foi considerado igual a zero para que haja coerência nas comparações com os resultados do método do limite superior.

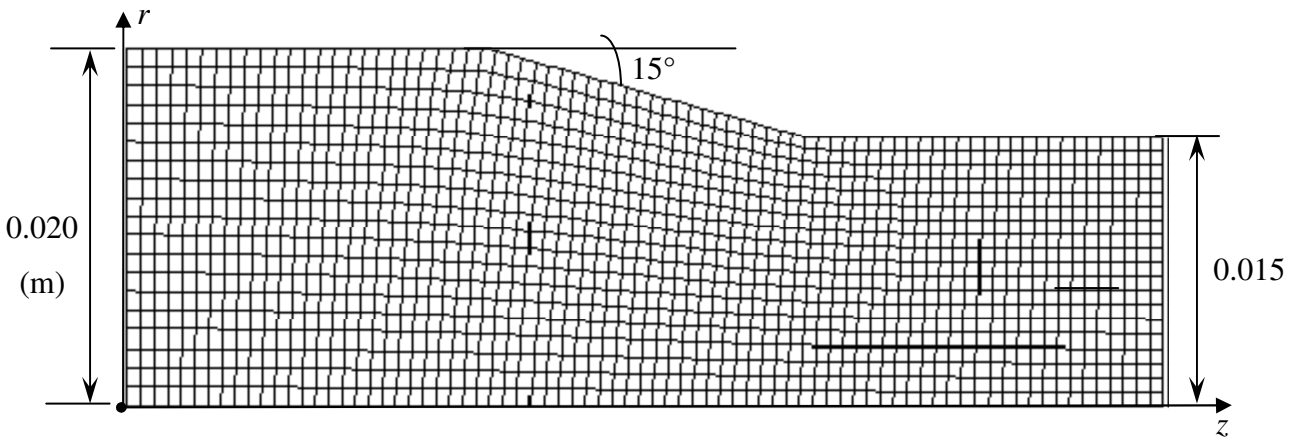


Figura 5.3.1.2 – Geometria utilizada para análise da extrusão direta com matriz cônica pelo método analítico e numérico. Malha com 1200 volumes de controle.

Tabela 5.3.1.1 – Parâmetros utilizados para obtenção dos resultados numéricos do processo de extrusão que foram comparados com os resultados analíticos.

Parâmetros	Valores
Limite de Escoamento (σ_y)	14 (Mpa)
Deformação (ε)	25 %
Velocidade Inicial (V_0)	1 (mm . s^{-1})
Taxa de Defomação Inicial ($\dot{\varepsilon}_0$)	0.9 (s^{-1})
Quantidade de Volumes de Controle	1463
Ângulo da matriz (θ)	15°
Passo de tempo (Δt)	10^{-14} (s)
Atrito zero	
Modelo do material: Rígido-perfeito-plástico	

Os resultados numéricos, calculados pelo código computacional do presente trabalho, foram obtidos considerando as infomações destacadas na Tabela 5.3.1.1.

Na Figura 5.3.1.3 pode ser visto uma comparação entre os contornos da velocidade radial

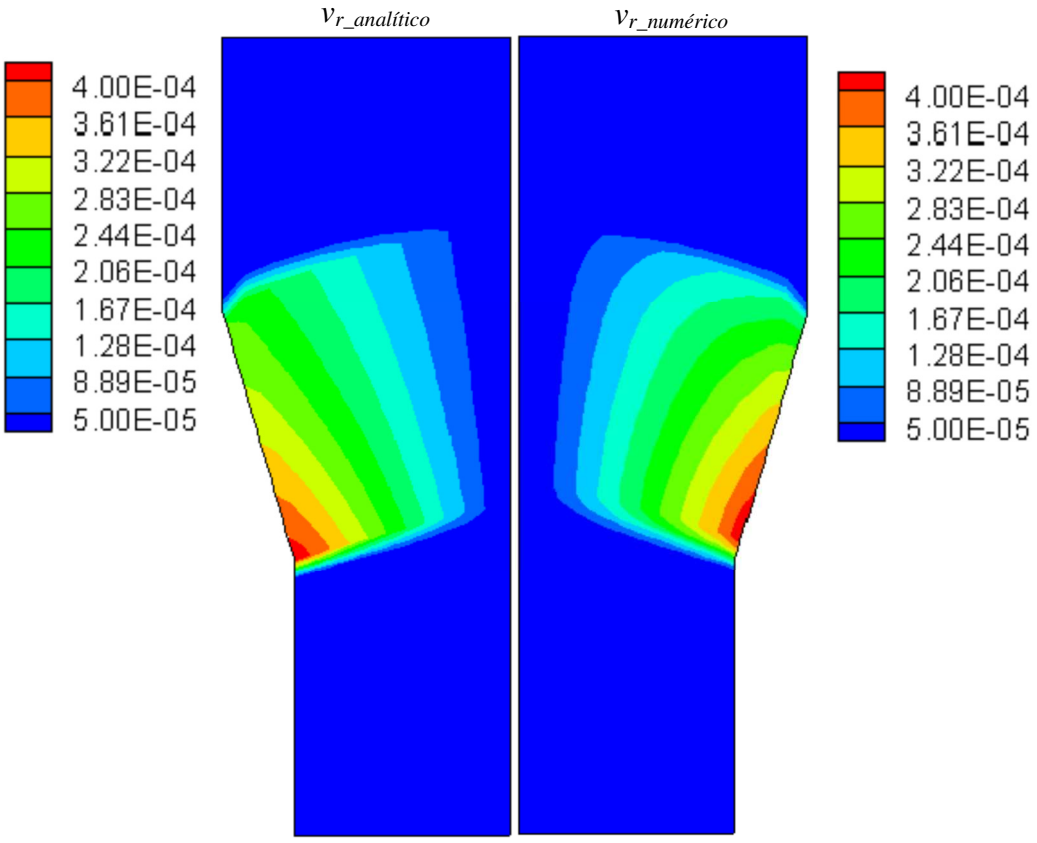


Figura 5.3.1.3 – Comparação entre os contornos da velocidade radial analítica ($v_{r_analítico}$) e os contornos da velocidade numérica radial ($v_{r_numérica}$), para a extrusão direta sem atrito.

analítica ($v_{r_analítico}$), que foram geradas pela Equação (5.3.1.1) e os contornos da velocidade radial numérica ($v_{r_numérica}$), que foram gerados pelo código computacional do presente trabalho. Como pode ser visto tanto os contornos quanto os valores da velocidade radiais estão com boa concordância.

A Figura 5.3.1.4 mostra a comparação entre os contornos da velocidade axial analítica ($v_{z_analítico}$), calculados a partir da Equação (5.3.1.2), e os contornos da velocidade axial numérica ($v_{r_numérica}$), obtidos pelo código computacional apresentado pelo presente trabalho. Novamente, os contornos entre as velocidades analítica e numérica possuem boa concordância.

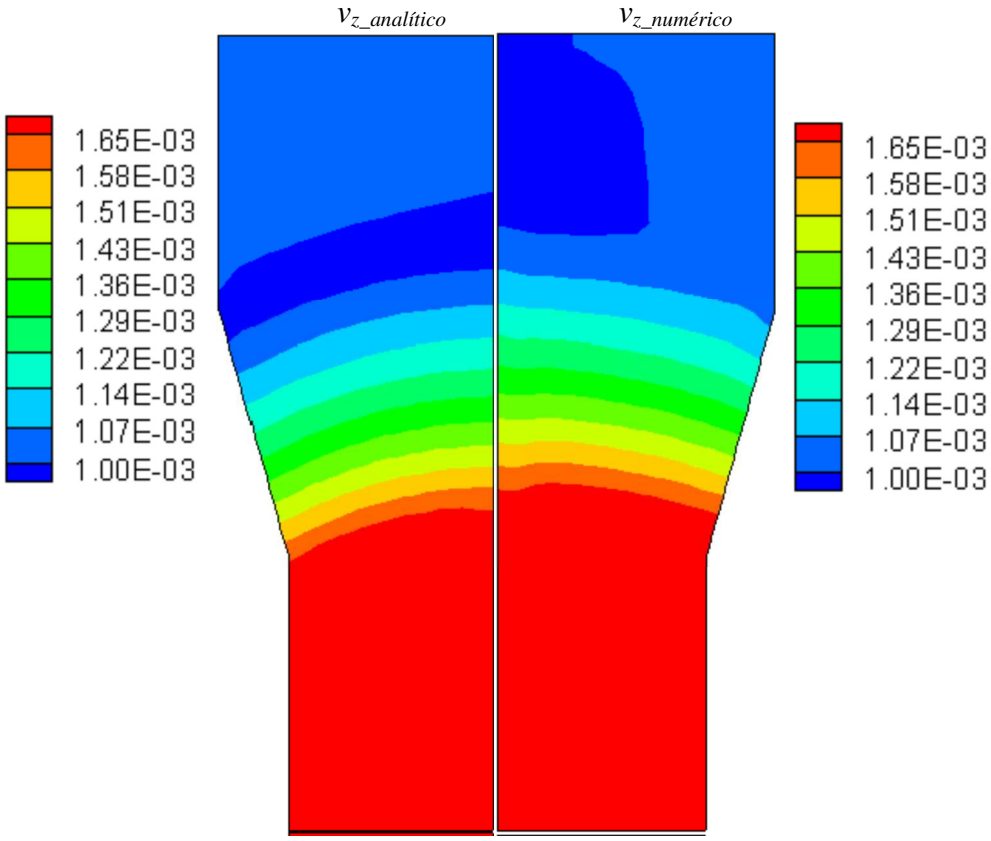


Figura 5.3.1.4 – Comparação entre os contornos da velocidade axial analítica ($v_{z_analítico}$) e os contornos da velocidade numérica axial ($v_{z_numérica}$), para a extrusão direta sem atrito.

5.3.2 Extrusão do Chumbo

Nesta seção são apresentados comparações entre resultados numéricos, que foram gerados pelo esquema numérico apresentado neste trabalho, e resultados obtidos da literatura. Estas comparações entre os resultados têm como objetivo validar o esquema numérico para o cálculo de informações sobre um processo de extrusão direta em metais.

Tomando como referência o caso de extrusão direta em matriz cônica de chumbo, apresentado no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005), cuja geometria foi destacada na Figura 5.3.1.2. Os resultados apresentados no artigo são numéricos, sendo que os paramêtros do processo estão destacados na Tabela 5.3.2.1. No processo de extrusão direta, apresentado neste artigo, foi considerado a condição de deformação plana, material rígido-perfeito-plástico e atrito de Coulomb máximo na região cônica da matriz. Os resultados numéricos foram obtidos por FVM, dentro de um esquema numérico apresentado pelo autor.

Tabela 5.3.2.1 – Informações para o processo numérico da extrusão direta de chumbo apresentado no artigo H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005).

Parâmetros	Valores
Limite de Escoamento (σ_Y)	14 (Mpa)
Deformação (ε)	25 %
Velocidade Inicial (V_0)	1 (mm . s^{-1})
Taxa de Defomação Inicial ($\dot{\varepsilon}_0$)	0.9 (s^{-1})
Ângulo da matriz (θ)	15°
Coeficiente de Atrito Máximo de Coulomb (μ)	0.5
Quantidade de Volumes de Controle	547
Material rígido-perfeito-plástico	
Condição de deformação plana	
Volumes de controle com formato poliédrico arbitrário	

A partir do código computacional, construído através do esquema numérico apresentado neste trabalho, que está representado pelo fluxograma da Figura 5.3.1, foram obtidos resultados numéricos para o processo de extrusão direta de chumbo. Foram impostas as mesmas características do processo de extrusão direta de chumbo, descritas no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005), e apresentadas na Tabela 5.3.2.2. A seguir são mostradas algumas

comparações entre os campos de velocidade numérica obtida por este trabalho e aqueles apresentados no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005).

Tabela 5.3.2.2 – Propriedades do material e parâmetros do processo de simulação numérica para a extrusão do chumbo.

Parâmetros	Valores	
Limite de Escoamento (σ_Y)	14 (Mpa)	
Deformação (ε)	25 %	
Velocidade Inicial (V_0)	1 (mm . s^{-1})	
Taxa de Defomação Inicial ($\dot{\varepsilon}_0$)	0.9 (s^{-1})	
Quantidade de Volumes de Controle	Malha 1	1463
	Malha 2	279
Coeficiente de Atrito Máximo de Coulomb (μ)	0.5	
Passo de tempo (Δt)	10^{-15} (s)	
Material rígido-perfeito-plástico		
Condição de deformação plana		

Nos gráficos mostrados na Figura 5.3.2.1, na Figura 5.3.2.2 e na Figura 5.3.2.3 estão destacados as convergências das velocidades axiais, velocidade radial e pressão numérica. Foram considerados os volumes de controle nos pontos de posições (3,18), (34,18) e (75,18) na malha 1 com 1463 volumes de controle, como destacado na Tabela 5.3.2.2. Sendo respectivamente, um ponto na entrada da matriz, um ponto no meio da matriz e um ponto na saída da matriz. Todos os pontos são tomados próximos à linha da interface material-matriz.

Como pode ser observado nas Figuras 5.3.2.1, 5.3.2.2 e 5.3.2.3, a convergência para a velocidade axial (*Vz*), velocidade radial (*Vr*) e pressão (*p*) foi alcançada durante as 20000 primeiras iterações das 50000 iterações mostradas nas figuras. Na Figura 5.3.2.1 pode ser visto que a maior velocidade axial é definida no ponto da saída da matriz, sendo a velocidade axial intermediária surgindo na região central da matriz ou zona de deformação e a menor velocidade axial surge na entrada da matriz. Na Figura 5.3.2.2 as velocidade radial, para os pontos (3,18) e (75,18), são muito próximas de zero. Pois, são pontos na entrada e saída da matriz, onde, a velocidades radiais devem ser realmente próximas de zero por estarem fora da região de deformação. A Figura 5.3.2.2 mostra que as velocidades radiais alcançam a sua maior magnitude na região cônica da matriz ou na zona de deformação.

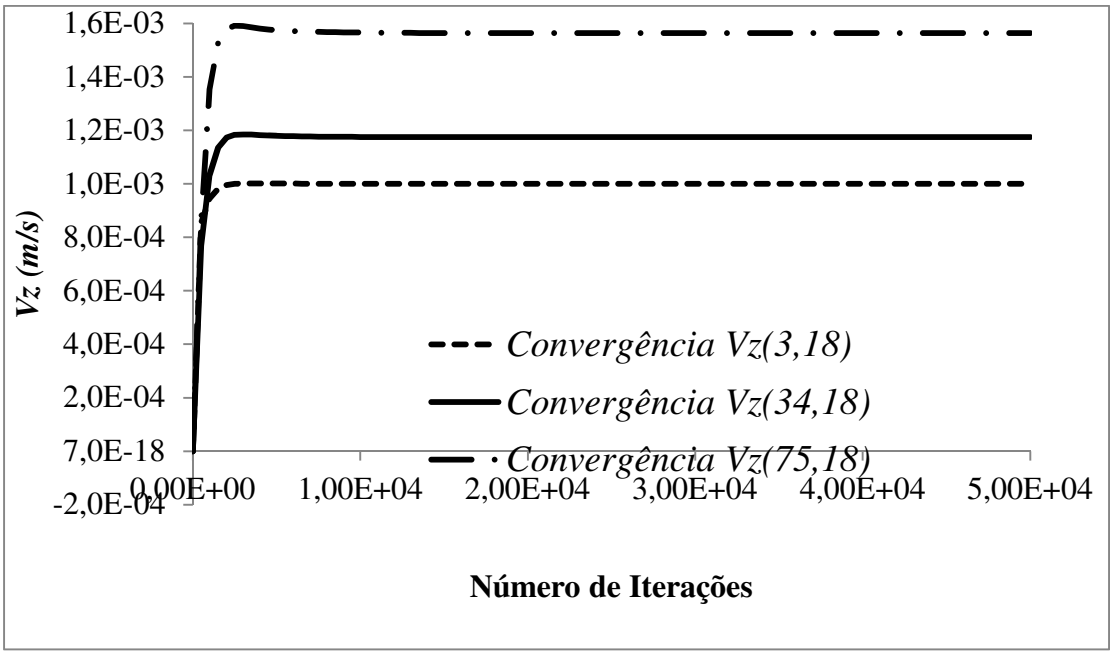


Figura 5.3.2.1 – Convergência para a velocidade axial (*Vz*), para a malha com 1463 volumes de controle, dos volumes de controle nos pontos de posição (3,18), (34,18) e (75,18).

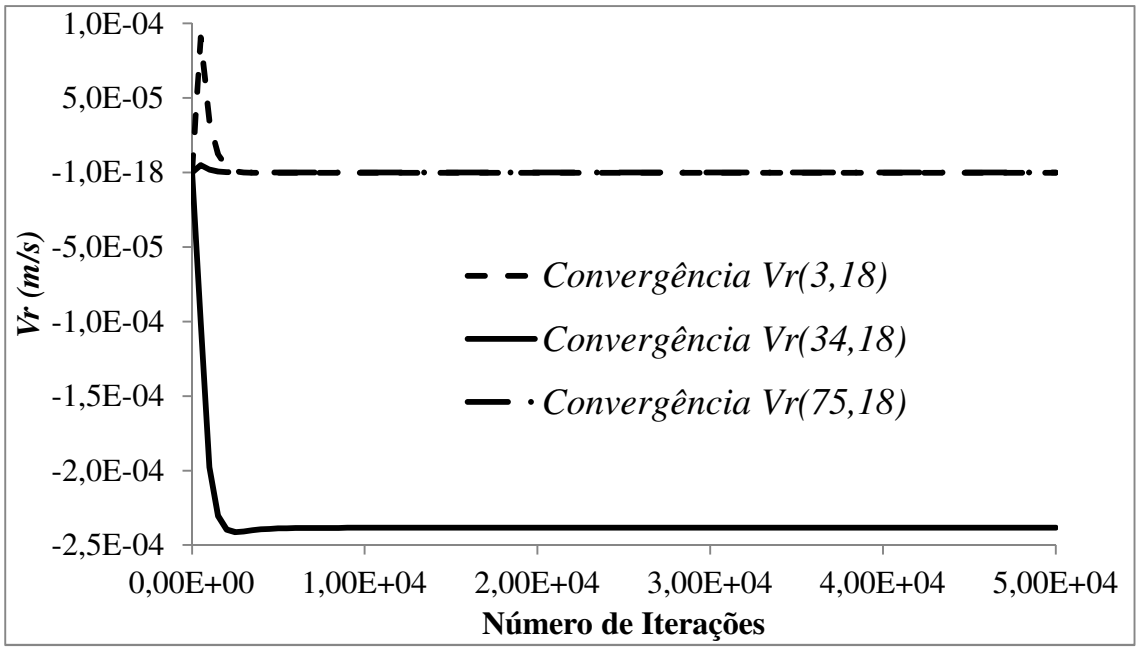


Figura 5.3.2.2 – Convergência para a velocidade radial (*Vr*), para a malha com 1463 volumes de controle, nos volumes de controle nos pontos de posição (3,18), (34,18) e (75,18).

A Figura 5.3.2.3 mostra a convergência da pressão para um ponto na região de deformação ou na região cônica da matriz. Os resultados foram obtidos para as duas malhas destacadas na Tabela 5.3.2.2. Pode-se perceber que a pressão nesta região é de compressão e a diferença entre os resultados para as malhas é explicada pelo maior refinamento da malha 1.

Os gráficos das Figuras 5.3.2.4, 5.3.2.5 e 5.3.2.6 mostram as convergências da velocidade axial e radial, porém, agora a malha utilizada para a obtenção destes resultados foi a malha 1, com 279 volumes de controle. As análises que podem ser feitas para essas figuras são as mesmas realizadas para as Figuras 5.3.2.1, 5.3.2.2 e 5.3.2.3. Os gráficos das Figuras 5.3.2.4, 5.3.2.5 e 5.3.2.6 mostram que mesmo utilizando-se uma malha mais grosseira a convergência foi alcançada nas 20000 primeiras iterações das 50000 mostradas. Na comparação entre as Figuras 5.3.2.1 e 5.3.2.4 e Figuras 5.3.2.2 e 5.3.2.5, respectivamente, da velocidade axial e da velocidade radial, para as malhas diferentes, pode-se perceber algumas diferenças em termos de valores. Estas diferenças são explicadas pela menor quantidade de volumes de controle da malha 2 em relação a malha 1.

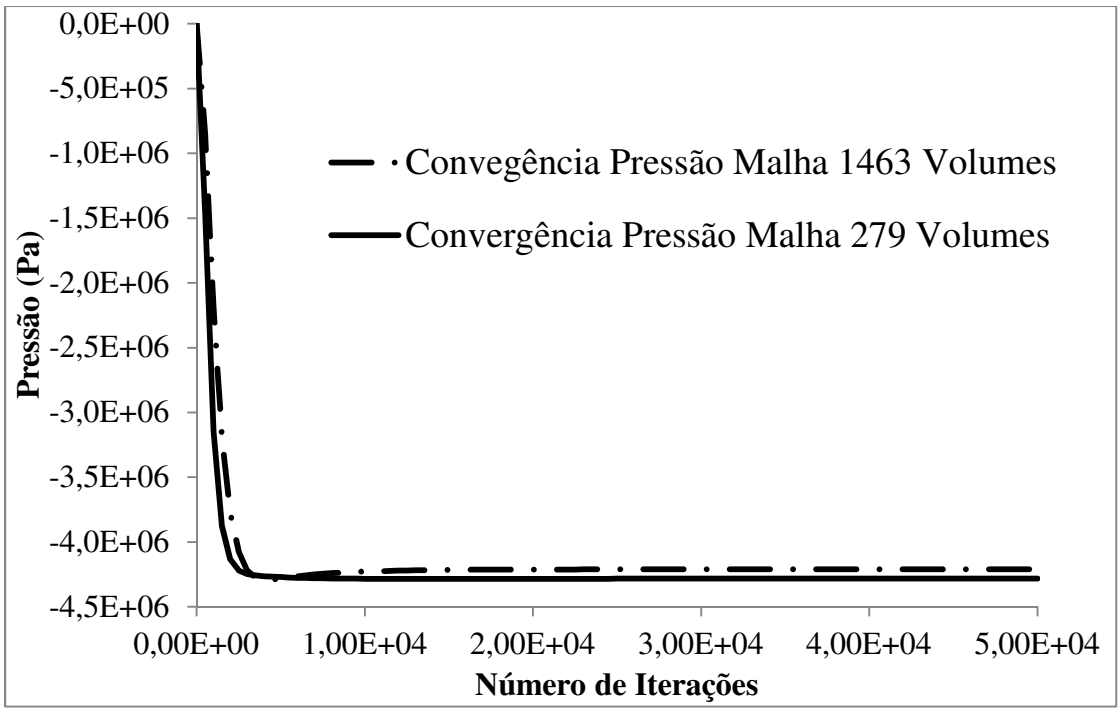


Figura 5.3.2.3 – Convergência para a pressão (p), na região cônica, para as malha 1, com 1463 volumes, e para a malha 2, com 279 volumes.

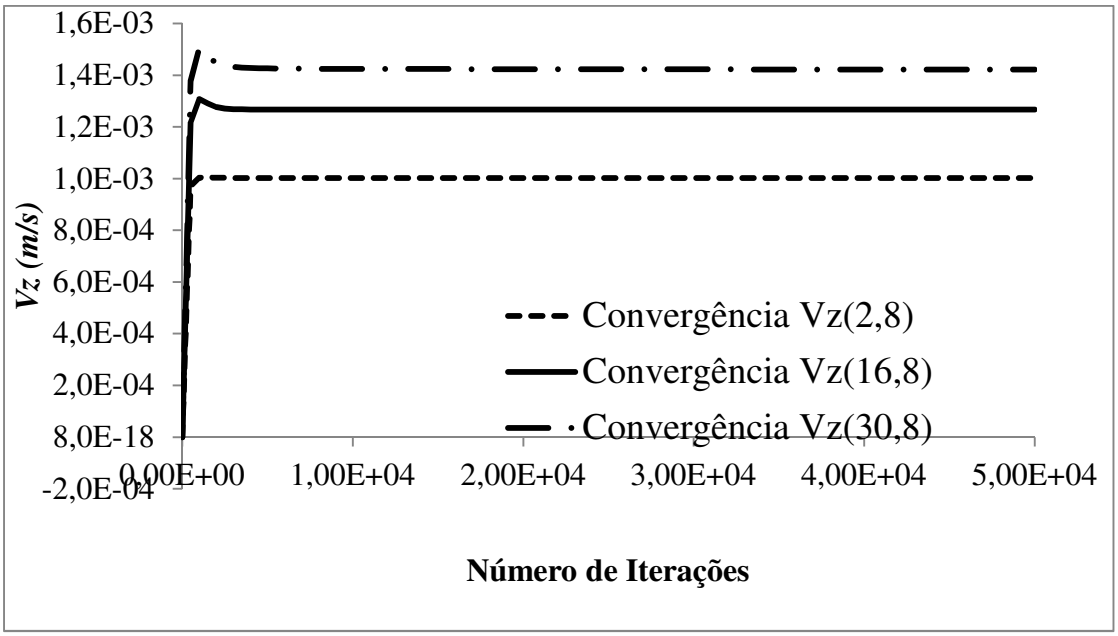


Figura 5.3.2.4 – Convergência para a velocidade axial (*Vz*), para a malha com 279 volume de controle, nos volumes de controle nos pontos de posição (2,8), (16,8) e (30,8).

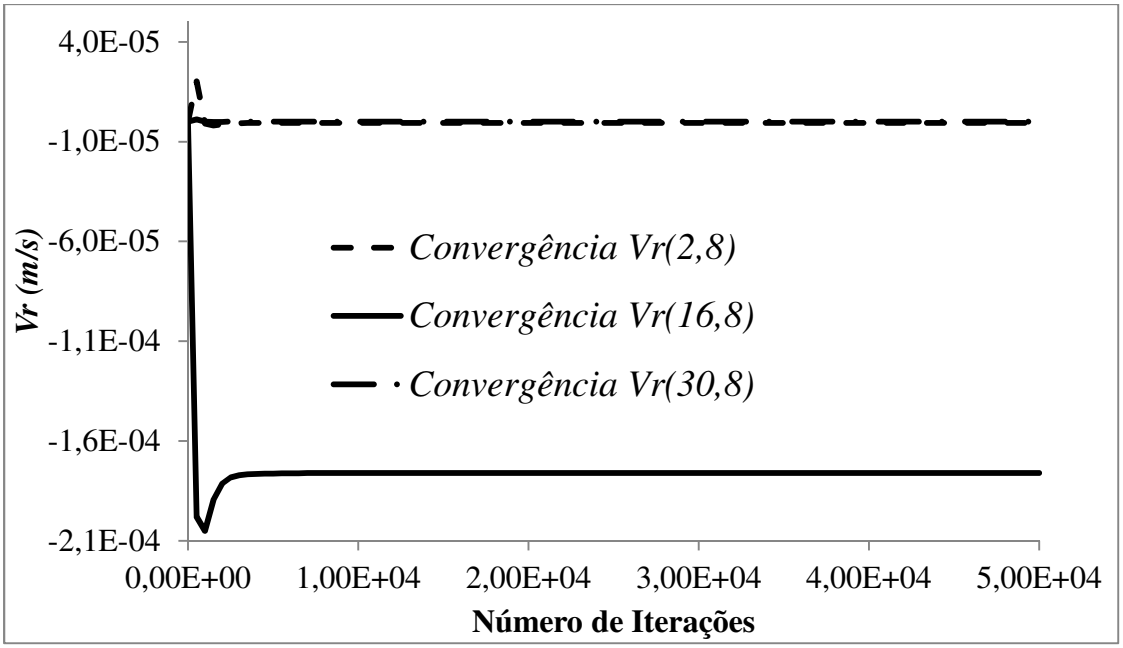


Figura 5.3.2.5 – Convergência para a velocidade radial (*Vr*), para a malha com 279 volume de controle, nos volumes de controle nos pontos de posição (2,8), (16,8) e (30,8).

Nas Figuras 5.3.2.6 e 5.3.2.7 apresentam-se as comparações entre os contornos da velocidade axial numérica do presente trabalho e da velocidade axial numérica apresentado no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005). Sendo que a Figura 5.3.2.6 representa a comparação considerando a malha 1, com 1463 volumes, e a Figura 5.3.2.7 representa a comparação para a malha 2, com 279 volumes. Pode-se perceber que os contornos e valores das velocidades axiais, mostrados na Figura 5.3.2.6, possuem melhor concordância com os resultados da literatura do que os resultados mostrados na Figura 5.3.2.7. Fato que pode ser explicado pelo maior refinamento da malha utilizado na obtenção dos resultados da Figura 5.3.2.6. A partir desta análise pode-se afirmar que qunato maior o número de volumes de controle mais preciso são os resultados.

Análise semelhante, a discutida no parágrafo anterior para a velocidade axial, está sendo representada para a velocidade radial nas Figuras 5.3.2.9 e 5.3.2.10. Que mostra a comparação entre os contornos da velocidade radial numérica (*Vr*) do presente trabalho com a velocidade

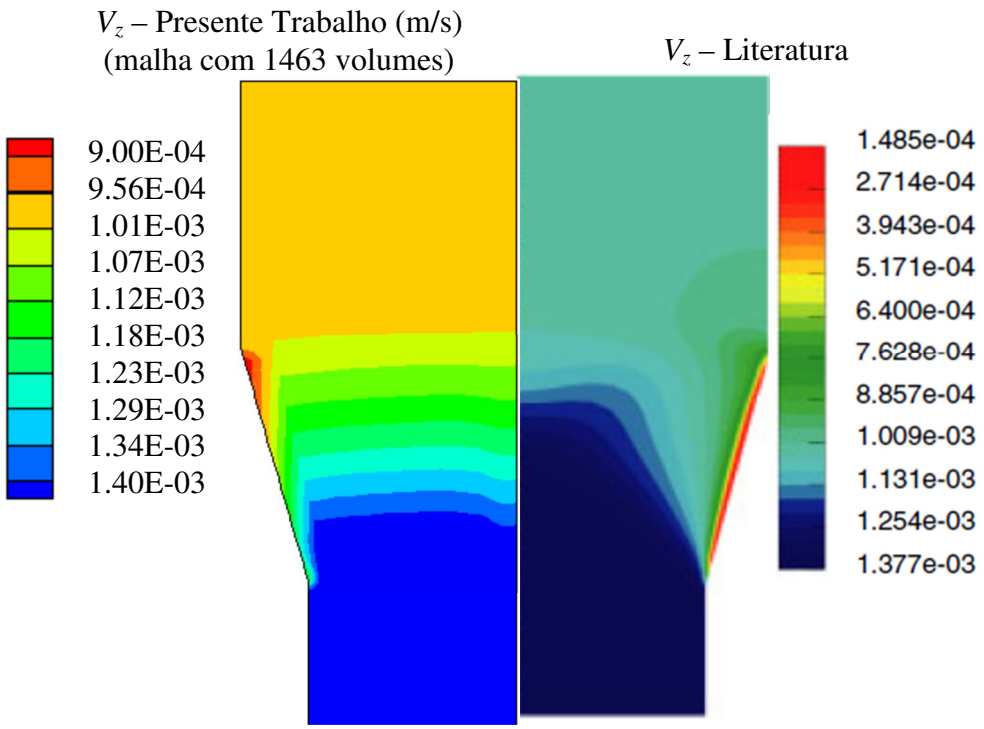


Figura 5.3.2.6 – Comparação entre os contornos de velocidade axial numérica (*Vz*) do presente trabalho para a malha 1 (com 1463 volumes de controle) e os contornos da velocidade axial numérica (*Vz*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005).

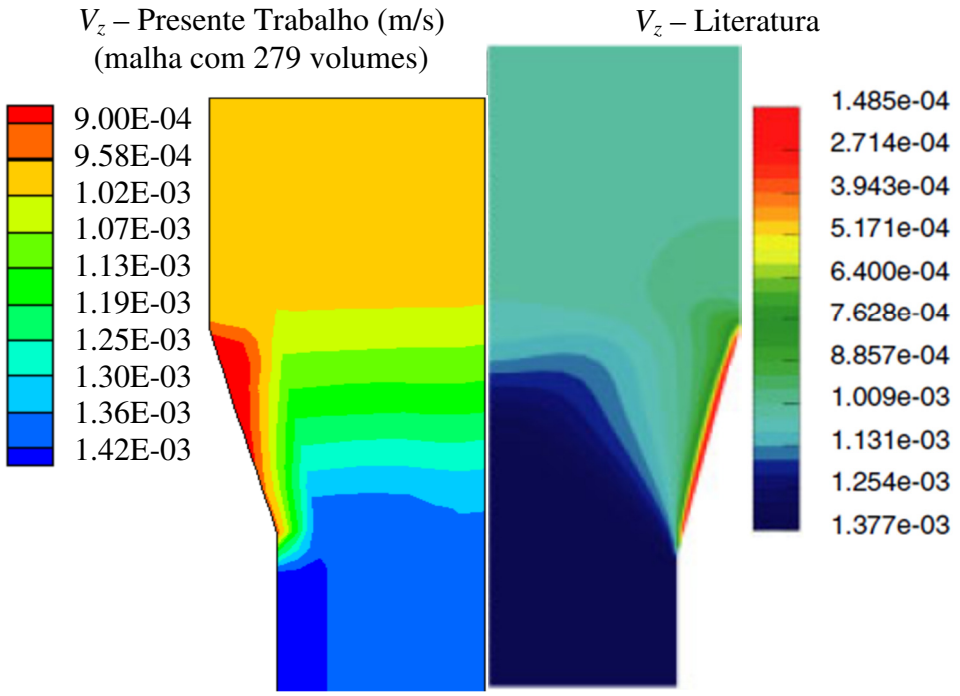


Figura 5.3.2.7 – Comparação entre os contornos de velocidade axial numérica (*Vz*) do presente trabalho para a malha 2 (com 279 volumes) e os contornos da velocidade axial numérica (*Vz*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005).

radial numérica apresentado no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005). A Figura 5.3.2.8 representa a comparação entre as velocidades radiais considerando a malha 1, com 1463 volumes, enquanto que na Figura 5.3.2.9 representa a comparação entre as velocidades radiais para a malha 2, com 279 volumes. Na comparação entre os valores das velocidades radiais a Figura 5.3.2.8 representa valores com melhor concordância com os resultados da literatura do que os resultados das velocidades radiais da Figura 5.3.2.9. Novamente este fato pode ser explicado através do maior refinamento da malha utilizada para a obtenção dos resultados da Figura 5.3.2.8.

Os contornos apresentados nas Figuras 5.3.2.8 e 5.3.2.9 são diferentes dos contornos apresentados pelos resultados do artigo. Essa diferença pode ser atribuída pela forma diferente de como foi assumido o atrito de Coulomb. Neste trabalho o atrito de Coulomb utilizou a pressão normal enquanto no artigo de H. Basic *et al*. (BASIC, H. *et al*., 2005) o atrito de Coulomb foi definido utilizando a pressão hidrostática.

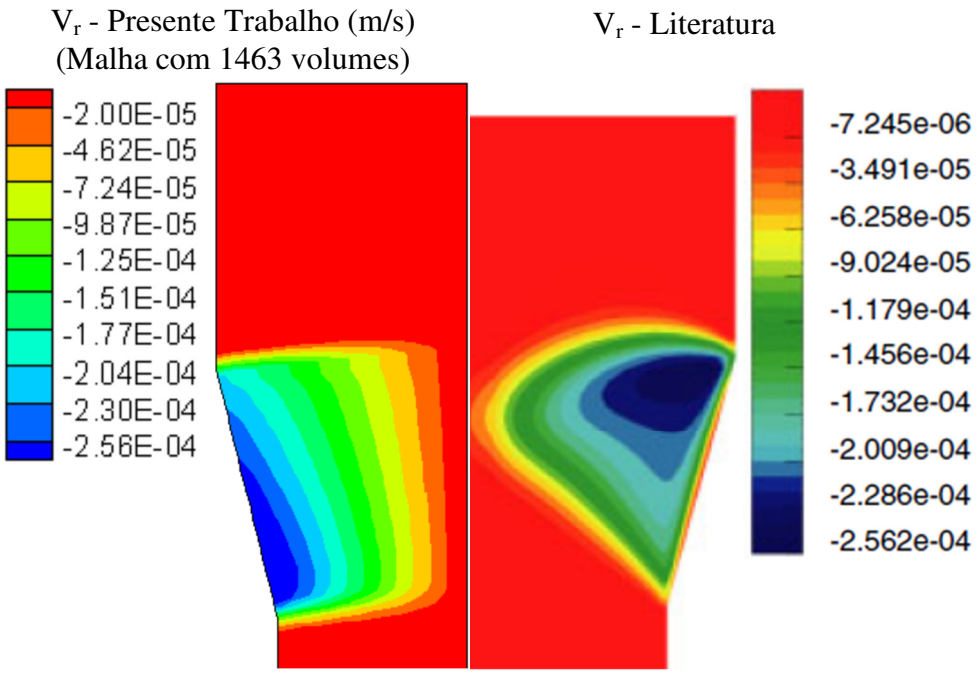


Figura 5.3.2.8 – Comparação entre os contornos de velocidade radial numérica (*Vr*) do presente trabalho para a malha 1 (com 1463 volumes de controle) e os contornos da velocidade radial numérica (*Vr*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005).

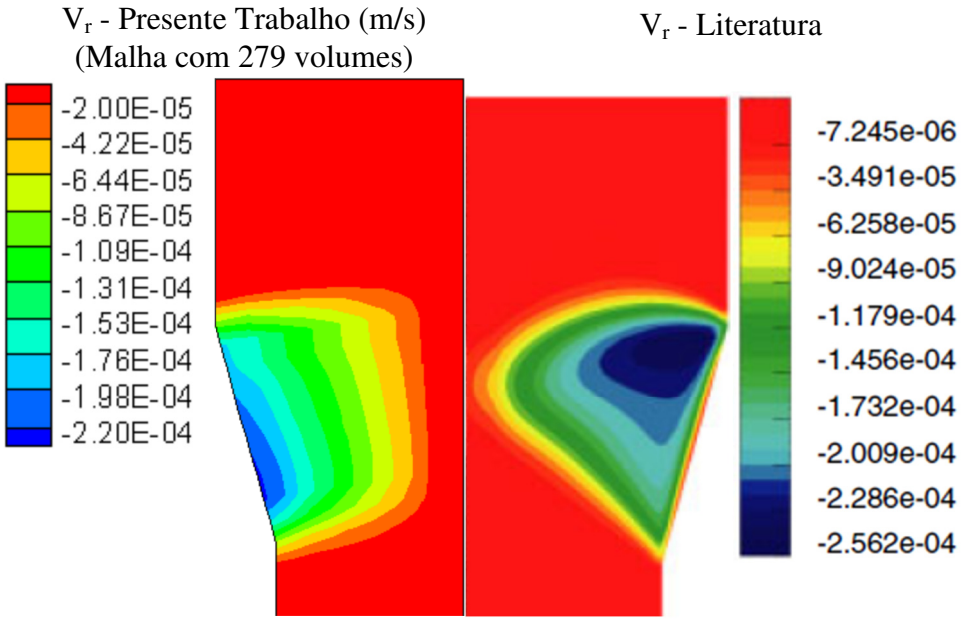


Figura 5.3.2.9 – Comparação entre os contornos de velocidade radial numérica (*Vr*) do presente trabalho para a malha 2 (com 279 volumes) e os contornos da velocidade radial numérica (*Vr*) apresentados em (BASIC, H. *et al*., 2005).

A Figura 5.3.2.10 representa os contornos da pressão calculada para as duas malhas analisadas. Pode-se perceber através dos contornos que há uma região de compressão na parte cônica da matriz, próxima a interface material-matriz. Na entrada da matriz há a definição do mesmo valor de pressão, fato coerente já que a velocidade de entrada é a mesma para as duas malhas analisadas. Porém, na região cônica ou região de deformação a malha com maior refinamento produz valores maiores sugerindo uma maior precisão desta malha.

A Figura 5.3.2.11 mostra o contorno da taxa de deformação equivalente também considerando os resultados para as duas malhas analisadas. Pode-se perceber que os maiores valores da taxa de deformação equivalente surgem na região cônica, próximo a interface material-matriz. A malha com maior refinamento mostra uma maior região aonde acontece o processo de deformação na extrusão direta.

A Figura 5.3.2.12 apresentam os contornos da tensão equivalente para as duas malhas analisadas. Através dos contornos da tensão equivalente pode-se observar as regiões rígidas do material durante o processo de extrusão direta.

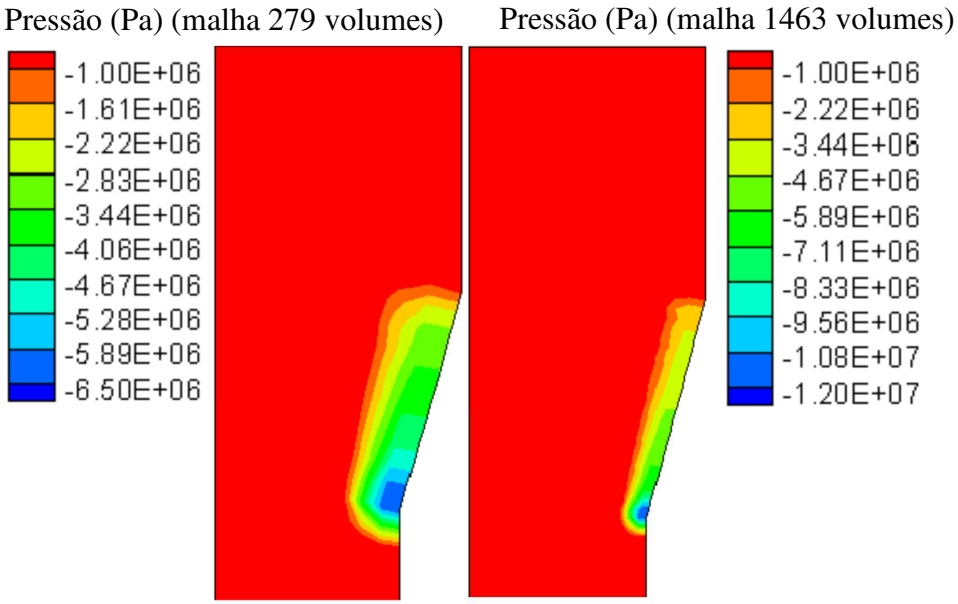


Figura 5.3.2.10 – Comparação entre os contornos da pressão calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda).

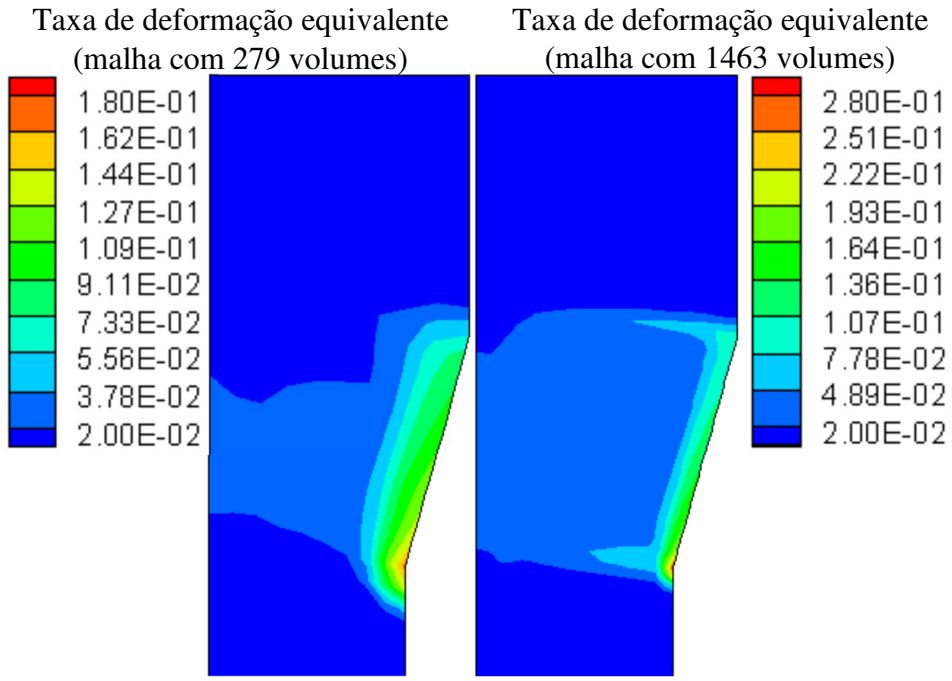


Figura 5.3.2.11 – Comparação entre os contornos da taxa de deformação equivalente calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda).

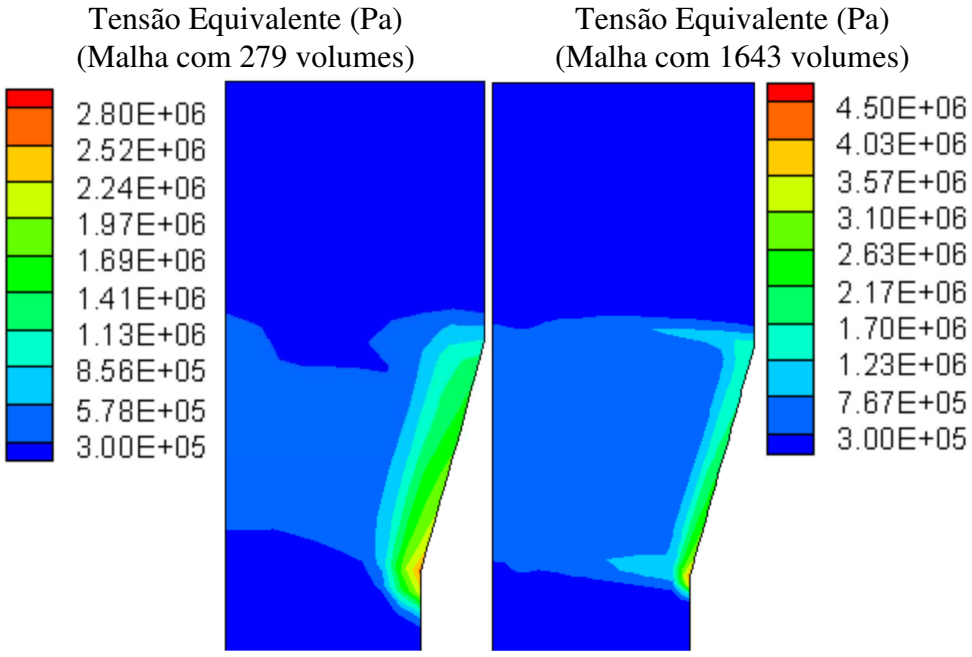


Figura 5.3.2.12 – Comparação entre os contornos da tensão equivalente calculada a partir do presente trabalho para as malha 1 (direita) e malha 2 (esquerda).

Na Figura 5.3.2.13 pode ser visto uma análise da variação dos contornos da velocidade axial numérica (Vz) em relação à variação do coeficiente de atrito de Coulomb. O atrito foi imposto na região cônica da matriz do processo de extrusão direta do chumbo para a malha 1, com 1463 volumes. A variação do coeficiente de atrito de Coulomb foi feita no intervalo de $\mu = 0$ até $\mu = 0.5$. Pode-se perceber que o contorno da velocidade axial, sobre a região cônica da matriz, altera-se significativamente com o aumento do coeficiente de atrito de Coulomb. A Figura 5.3.2.13 mostra também que as maiores mudanças nos contornos da velocidade axial acontecem no intervalo do coeficiente de atrito de Coulomb de $\mu = 0$ até $\mu = 0.15$, como sugere a literatura. Para valores do coeficiente de atrito de Coulomb maiores que $\mu = 0.15$ não acontecem alterações significativas no contorno da velocidade axial. Porém, os maiores valores das velocidades axiais tendem a diminuir com o aumento do coeficiente de atrito.

5.3.3 Extrusão do Alumínio

Nesta seção foi validado o esquema numérico apresentado neste trabalho para um processo de extrusão direta diferente daquele discutido na seção (5.3.2). Isto é, nesta seção foi considerado a geometria, parâmetros e material diferentes do utilizado na seção (5.3.2). A seguir são mostradas alguns resultados e são feitas algumas comparações entre os resultados obtidos pelo esquema deste trabalho com resultados tanto experimentais como numéricos apresentados por M. M. Martins *et al.* (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012).

No trabalho de M. M. Martins *et al.* (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012) foram apresentados resultados experimentais e numéricos para um processo de extrusão direta do alumínio 6351. Sendo que os resultados numéricos foram obtidos pelo software comercial Forge2008 e os experimentais por um método de visioplasticidade. As propriedades e parâmetros do experimento e da simulação numérica estão listados na Tabela 5.3.3.1.

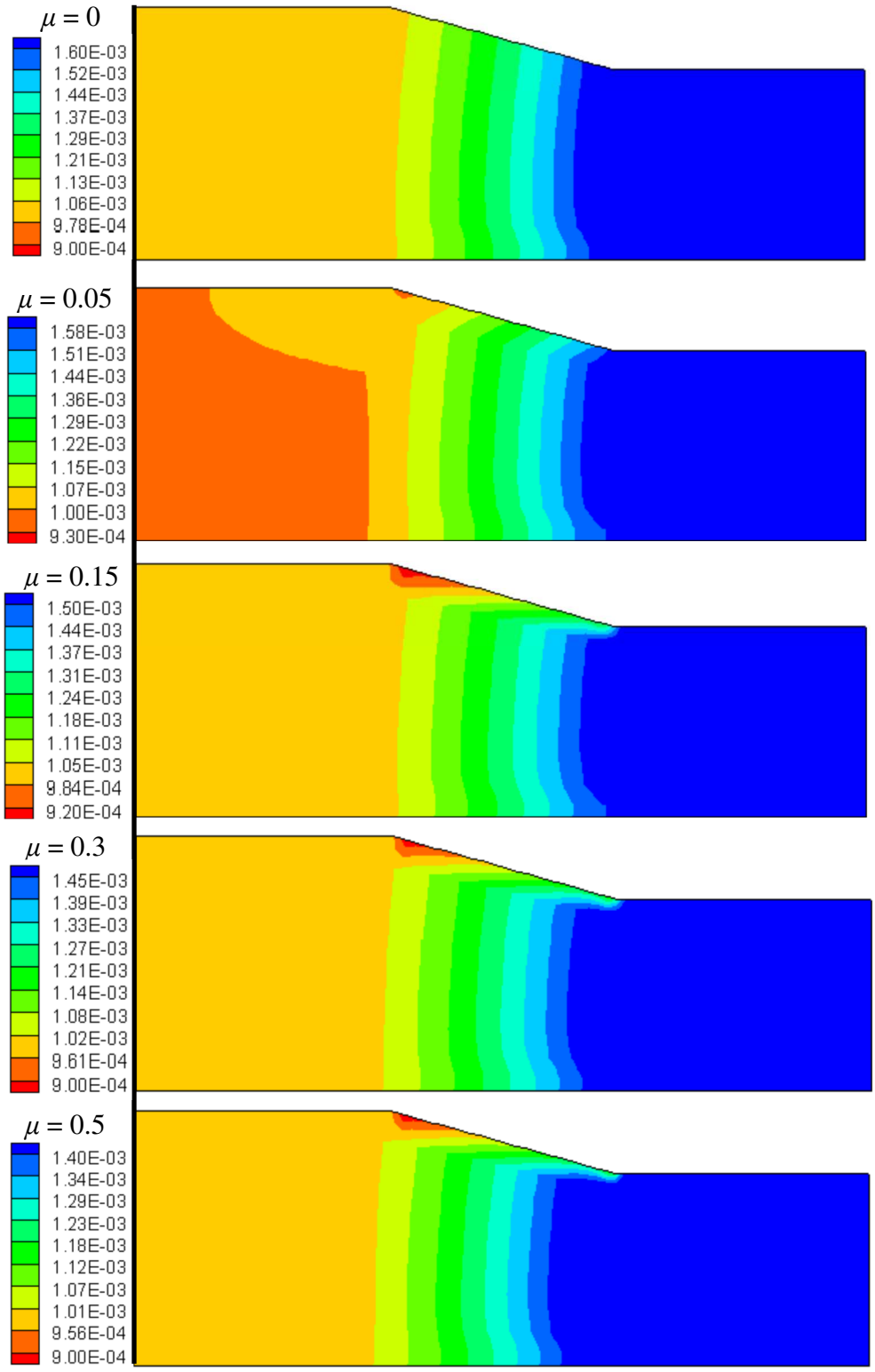


Figura 5.3.2.13 – Variação para os contornos da velocidade axial numérica (Vz), em relação à variação do coeficiente de atrito de Coulomb (μ).

No artigo citado acima os resultados experimentais foram obtidos através do método da visioplasticidade juntamente com a técnica de visualização *"Stripe Pattern Grid"* (VALBERG, H., 2010). Esta técnica consiste em inserir no tarugo inicial pinos de alumínio com outra composição, neste caso alumínio 2011. Após o processo de deformação, os pinos que foram inseridos no tarugo geram faixas que facilitam a visualização do escoamento do material, como pode ser visto na Figura 5.3.3.1. As faixas geradas pelos pinos deformados possibilita o cálculo dos contornos das velocidades axiais e radiais geradas internamente no extrudado.

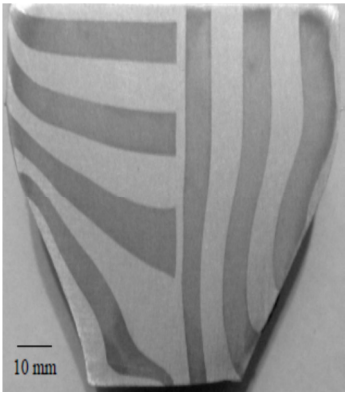


Figura 5.3.3.1 – Faixas geradas pela técnica "*Stripe Pattern Grid"* que mostra o escoamento do material no processo de deformação (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012).

Tabela 5.3.3.1 – Parâmetros do processo experimental e numérico utilizados na extrusão do alumínio 6351.

Parâmetros	Valores
Massa específica (ρ)	2710 (kg . $m^{-3)}$
Limite de Escoamento (σ_Y)	255 (Mpa)
Redução de área	89 %
Velocidade Inicial (V_0)	10 (mm . s^{-1})
Quantidade de Volume de Controle	1110
Ângulo da matriz (θ)	32.3°
Passo de tempo (Δt)	10^{-15} (s)
Coeficiente do Fator de atrito (m)	0.5
Modelo do material: Rígico-perfeito-plástico	

O mesmo código computacional utilizado na obtenção dos resultados numéricos na seção (5.3.1) e (5.3.2) e elaborado a partir do esquema numérico apresentado neste trabalho e que está representado pelo fluxograma dado pela Figura 5.2.1. Este código foi utilizado para a obtenção

dos resultados numéricos para o caso da extrusão direta de alumínio cujas informações estão descritas na Tabela 5.3.3.1. A malha utilizada está mostrada na Figura 5.3.3.2 e tem 1110 volumes de controle quadriláterais.

A simulação realizada foi do processo extrusão direta em condição axisimétrica, com formulação rigido-perfeito-plástico e em regime permanente, considerando o atrito através da formulação do fator de atrito com um coeficiente de atrito igual a $m = 0.5$.

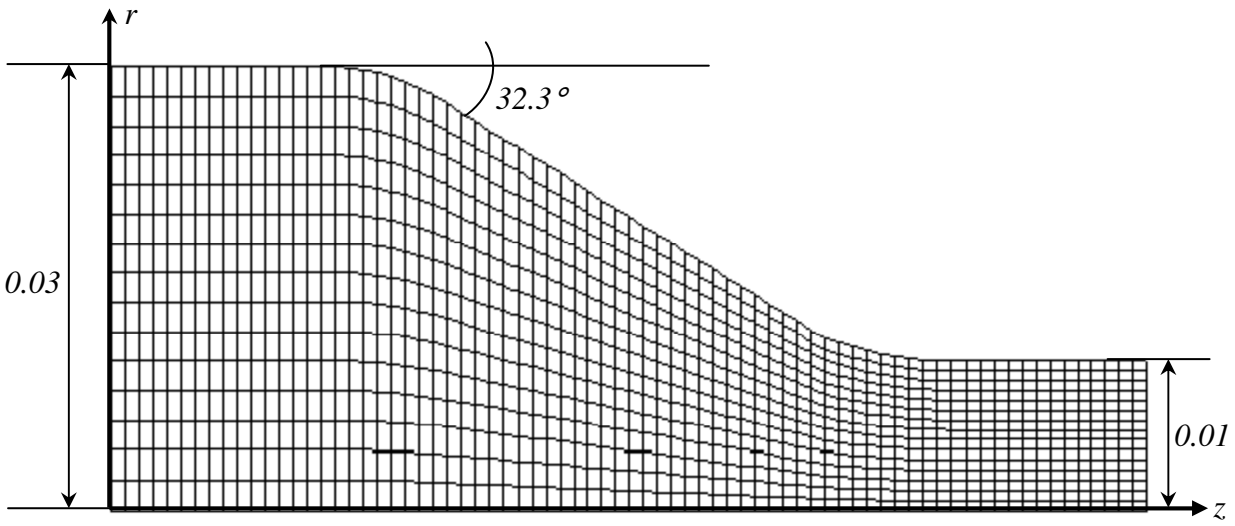


Figura 5.3.3.2 – Malha com 1110 volumes utilizados na simulação numérica do Al 6351.

A Figura 5.3.3.3 mostra a comparação entre os contornos da velocidade radial numérica que foram obtidos pelo presente trabalho e os contornos da velocidade radial numérica que foram obtidos pelo Forge2008^{TM}. Pode-se perceber que houve boa concordância em termos dos contornos, isto é, as velocidades radiais são maiores na região próxima a interface material-matriz dentro da zona de deformação.

Uma análise semelhante está sendo apresentada na Figura 5.3.3.4, porém, nesta figura os resultados dos contorno das velocidades axiais para ambos os trabalhos estão sendo comparados. Como pode ser observado os resultados apresentam boa concordância em termos de valores das velocidades axiais e em termos dos contornos. Cabe salientar que as velocidades axiais a partir da zona de deformação ou região cônica aumentam a sua magnitude e chegam ao seu valor máximo na saída da matriz.

A partir da Figura 5.3.3.5 pode ser observado aos contornos da taxa de deformação equivalente para duas malhas diferentes. Isto é, uma malha com 1100 volumes e outra malha com 297, sendo então a primeira com maior refinamento.

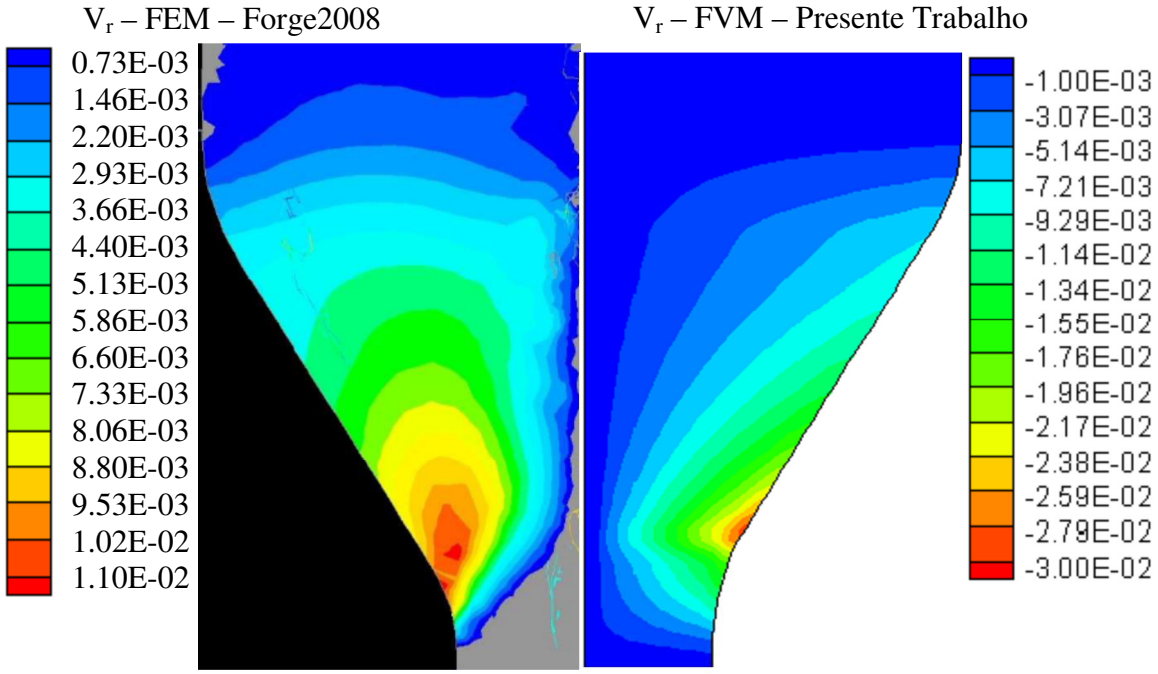


Figura 5.3.3.3 – Comparação entre os resultados numéricos da velocidade radial obtidos pelo Forge2008 e pelo presente trabalho, para a extrusão direta do alumínio 6351.

Análise que pode ser feita nesta figura é semelhante a que foi discutido na Figura 5.3.2.11 para a extrusão direta do chumbo. Na qual foi destacado que a região onde acontece as maiores deformações é a região cônica da matriz.

A Figura 5.3.3.6 mostra a comparação dos contornos da velocidade axial numérica calculado pelo presente trabalho e os resultados experimentais apresentados por M. M. Martins *et al.* (MARTINS, M.M. *et al.*, 2012). A comparação mostra boa concordância entre os resultados na entrada da matriz e na região de deformação, porém, no ponto de saída da matriz os valores das velocidades axiais numérica possuem uma maior magnitude. Tal fato pode ser explicado a partir da obtenção dos resultados experimentais no artigo, já que na comparação entre as velocidades axiais numéricas, apresentadas na Figura 5.3.3.4, as mesmas definiram boa concordância.

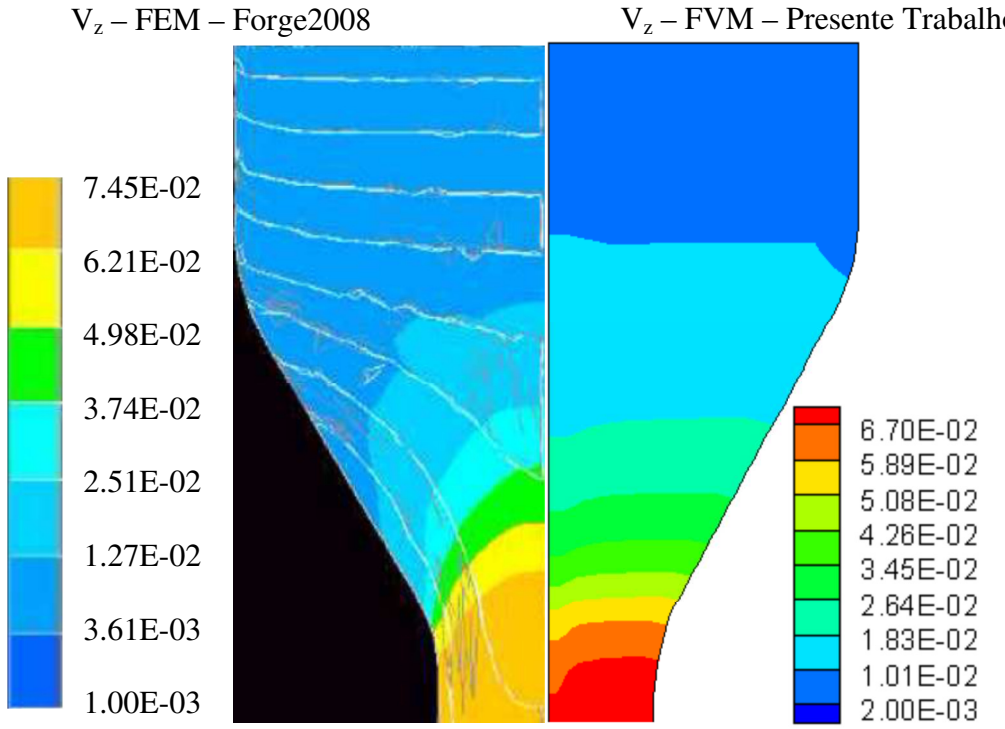


Figura 5.3.3.4 – Comparação entre os resultados numéricos da velocidade axial obtidos pelo Forge2008 e pelo presente trabalho, para a extrusão direta do alumínio 6351.

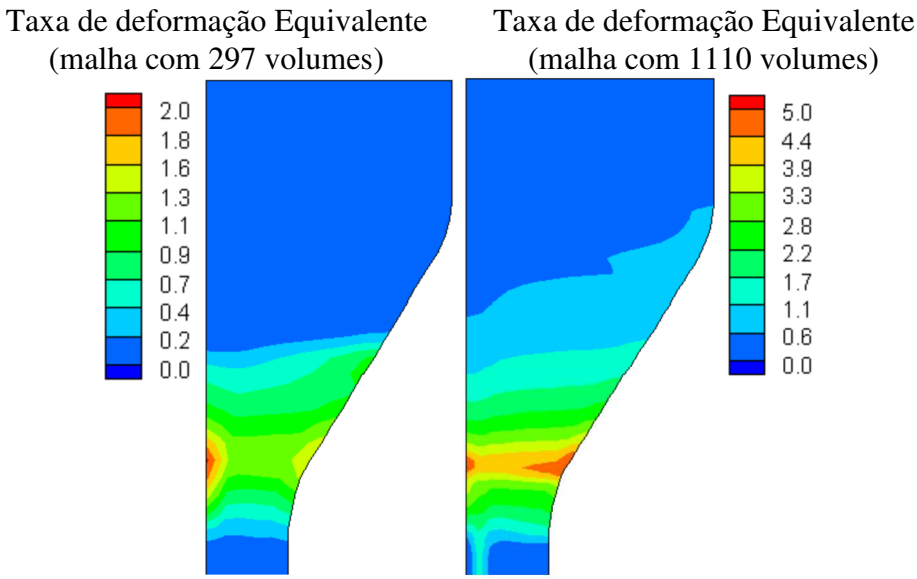


Figura 5.3.3.5 – Mostra a taxa de deformação equivalente para uma malha com 297 volumes e para uma malha com 1110 volumes considerando a extrusão direta do alumínio 6351.

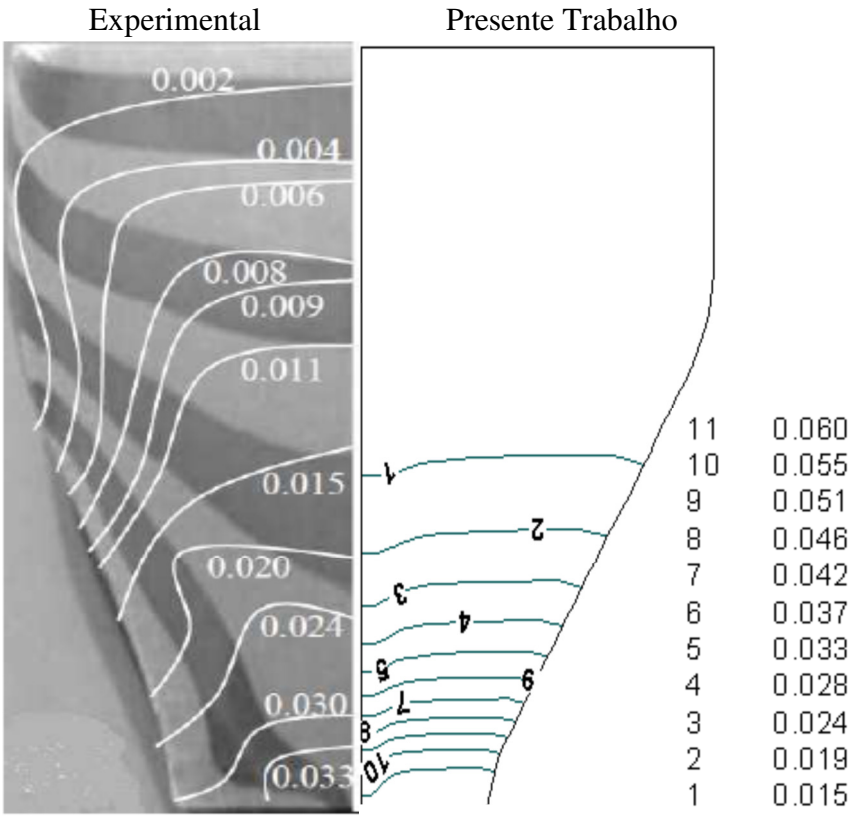


Figura 5.3.3.6 – Comparação entre os contornos das velocidades axiais experimentais (m/s) e os contornos da velocidade axial numérica (m/s).

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A presente tese de doutorado teve como objetivo principal aplicar o FVM na obtenção de informaçõe sobre o escoamento, em regime permanente, de fluidos incompressíveis e viscosos e de metais, que surgem em processos de extrusão. Para tal, foi desenvolvido um novo esquema numérico que utiliza FVM com o Método de MacCormack explícito e acoplamento da pressão com a velocidade pelo Método Simple para a solução das equações de governo do problema de escoamento. Na solução comparativa do escoamento de metais no processo de extrusão direta foi considerado um modelo rígido-perfeito-plástico e a formulação do escoamento plástico.

6.1 Conclusões sobre o Escoamento de Fluidos Incompressíveis e Viscosos

O esquema numérico, apresentado neste trabalho, quando aplicado ao escoamento de um fluido incompressível e viscoso entre placas paralelas e no escoamento num duto sob condição axissimétrica, sendo o fluido a glicerina, levou às seguintes conclusões, em relação aos resultados numéricos obtidos:

- O Método MacCormack acoplado ao Simple gerou resultados numéricos coerentes e que foram constatados pelas comparações feitas com resultados analíticos sem a necessidade da adição de viscosidade artificial, fato que coincide com a sua definição;
- O esquema numérico, para o caso do escoamento de glicerina entre placas paralelas, gerou campos de velocidades longitudinais e transversais com boa concordância em relação aos resultados analíticos obtidos da mecanica dos fluidos;
- O esquema numérico, para o caso do escoamento da glicerina no duto sob condição axissimétrica, gerou campos de velocidades axiais e radiais com boa concordância em relação aos resultados analíticos;
- Os perfis de velocidades axiais gerou perfil parabólico na seção de saída, para o fluido complemente desenvolvido, tanto para o canal quanto para o duto, coincidindo com o que sugere a solução analitica da literatura;

- Porém, o presente esquema numérico em relação a determinação dos campos de pressão, deverá ser melhorado, pois, os resultados não geraram boa concordância, em termos das isolinhas de pressão;
- O esquema numérico por utilizar um método explícito para a solução das equações de governo necessitou de uma grande quantidade de iterações para a convergência dos campos das variáveis de velocidade e pressão analisados;
- O esquema numérico por ser explícito é um método condicionalmente estável e para que seja satisfeita a condição de CFL foi necessário utilizar um passo de tempo adequado de 10^{-6}, e que é dependente da malha;
- O coeficiente de sub-relaxação α da equação de correção da pressão foi considerado igual a 1 sem prejuízo para a solução numérica. Por outro lado, a variação de α indica que o valor final convergido da velocidade é alterado;
- Mostrou-se que Método MacCormack, além de ser aplicado na solução de escoamentos compressíveis, também pode ser aplicado em escoamentos de fluidos incompressíveis;

6.2 Conclusões sobre o Escoamento na Extrusão de Metais

O presente esquema numérico, quando aplicado ao escoamento plástico de metais no processo de extrusão direta do chumbo e do alumínio, permitiram as seguintes conclusões:

- Tanto para o chumbo quanto para o alumínio, os resultados foram obtidos sem a necessiade de adição da viscosidade artificial, como sugeriu os resultados para o fluido incompressível e viscoso;
- O esquema numérico por ser explícito, é um método condicionalmente estável e, para que seja satisfeita a condição de CFL, foi necessário utilizar um passo de tempo de no mínimo 10^{-15} para ambos os metais;
- Para o caso do chumbo o modelo de atrito utilizado foi o atrito de Coulomb que respondeu de forma coerente e produziu bons resultados, como pode ser visto nas comparações com resultados experimentais da literatura;

- As velocidades axiais de ambos metais aumentaram suas magnitudes a partir da região de entrada cônica da matriz, alcaçando seus maiores valores na saída da matriz;
- As maiores magnitudes da pressão surgiram na interface material-matriz na região conica, tanto para a extrusão direta do chumbo quanto do alumínio;
- Para ambos o chumbo e o alumínio, as maiores taxas de deformação equivalente acontecem na região cônica da matriz ou nas zonas de deformação plástica severa;
- A convergência do metodo numerico foi alcançada, para as velocidades axiais e radias e as pressões, no escoamento de material na extrusão direta nas primeiras 20.000 iterações;
- O presente FVM com o Método MacCormack juntamente com a formulação de escoamento plástico produziu resultados coerentes na solução do escoamento de metal em um processo de extrusão direta;
- O presente método FVM apresentou melhores resultados ou melhor convergência com o refinamento da malha para todos os casos analisados;
- O Método MacCormack, além de ser aplicado na análise de escoamentos compressíveis, como sugere a literatura, pode também ser aplicado na análise de escoamentos de metais, como os que surgem na extrusão direta.

6.3 Sugestões de Trabalhos futuros

Como sugerido anteriormente o esquema numérico apresentado neste trabalho é o início de uma linha de pesquisa na qual se aplica o FVM na solução e análise em processos de conformação plástica. Isto sugere que outros trabalhos podem ser realizados seguindo o mesmo caminho ou simplesmente o melhoramento e a generalidade do código computacional desenvolvido e apresentado. Abaixo são citados alguns itens que podem ser estudados e talvez adicionados a este trabalho:

- Fazer a adaptação do código computacional para que o mesmo utilize malhas não estruturadas na discretização das equações de governo;

- Fazer a mudança para a utilização de um esquema implícito para a resolução das equações de governo;
- O modelo constitutivo dos metais utilizado foi rigido-perfeito-plástico, adaptar o código para a utilização de modelos constitutivos elasto/visco-plásticos;
- Desenvolver um estudo sobre como melhorar a convergência do esquema numérico;
- Fazer adaptação de outros métodos de correção da pressão e velocidade, tal como o PRIME;
- Aplicar o esquema numérico apresentado para outros processos de conformação plástica.
- Fazer o acoplamento com a solução da temperatura;
- Adaptar o código para que sejam resolvidos problemas tridimensionais.

Referências

BASIC, H. e DEMIRDZIC, I. e MUZAFERIJA, S., Finite Volume Method for Simulation of extrusion processes. **International Journal for Numerical in Engineering**, 2005, 62, p. 475 – 494.

BASTANI, A.F., AUKRUST, T. e BRANDAL, S., Optimization of Flow Balance and Isothermal Extrusion of Aluminium Using Finite-Element Simulations. **Journal of Materials Processing Technology**, 2011, 211, p. 650 – 667.

BRESSAN, J.D., MARTINS, M.M. e VAZ JR, M., Stress Evolution and Thermal Shock Computation Using the Finite Volume Method. **Journal of Thermal Stresses**, 2010, 33, p. 533 – 558.

CALLISTER, Willian D. Jr., **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. Editora: LCT. Rio de Janeiro, 2002.

CHEN, Z.Z. e LOU, Z.L. e RUAN, X.Y., Finite Volume and Mould Optimization of Aluminum Profile Extrusion. **Journal of Materials Processing Technology**, 2007, 190, p. 382 – 386.

CHORIN, A.J., A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. **Journal of Computational Physics**. 1967, 2, p 12-26.

CHOW, P., CROSS, M. e PERICLEOUS, K., A Natural Extension of the Conventional Finite Volume Method into Polygonal Unstructured Meshes in CFD Application. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 1996, 20, p 170-183.

DARWISH, M., SRAJ, I. e MOUKALLED, F., A Coupled Finite Volume Solver for the Solution of Incompressible Flow on Unstructured Grids. **Journal of Computational Physics**. 2009, 228, p 180-201.

DEMARCO, D. e DVORKIN, E.N., Modeling of Metal Forming Processes: Implementation of an Iterative Solver in the Flow Formulation. **Computers and Structures**, 2001, 79, p. 1933 – 1942.

DEMIRDZIC, I., DZAFEROVIC, E. e IVANKOVIC, A., Finite-Volume Approach to Thermoviscoelasticity. **Numerical Heat Transfer**, 2005, 47, p. 213 – 237.

DEMIRDZIC, I. e MARTINOVIC, D., Finite Volume Method for Thermo-Elastic-Plastic Stress Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1993, 109, p. 331 – 349.

DIETER, G.E., **Metalurgia Mecânica.** Editora: Guanabara Koogan S.A. Rio de Janeiro,1981.

DVORKIN, E.N. e PETOCZ, E.G., An Effective Technique for Modelling 2D Metal Forming Processes Using an Eurelian Formulation. **Engineering Computations**, 1993, 10, p. 323 – 336.

ENDRE, S., The Accuracy of Cell Vertex Finite Volume Method on Quadrilateral Meshes. **Mathematics of Computation**, 1992, 59, number 200, p. 359 – 382.

FAINBERG, J. e LEISTER, H.J., Finite Volume Multigrid Solver for Thermo-Elastic Stress Analysis in Anisotropic Materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, 137, p. 167 – 174.

FALLAH, N., A Cell-Vertex and Cell-Centred Finite Volume Method for Plate Bending Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2004, 193, p. 3457 – 3470.

FIÉTIER, N. e KRAHENBUHL, Y. e VIALARD, M., New Method for the Fast Simulations of the Extrusion. **Journal of Materials Processing Technology**, 2009, 209, p. 2244 – 2259.

BRESCIANI F., E., SILVA, I.B., BATALHA, G.F. e BUTTON, S.T. **Conformação Plástica dos Metais**. Editora: Ed. Da Unicamp. Campinas, 2011.

FORT, J., FURST, J., HALAMA, J., KOZEL, K. e PRAHA, Numerical Solution of 3D Transonic Flow Through Cascade. **Mathematica Bohemica**. 2001, 126, p 353-361.

HATTEL, J.H. e HANSEN, P.N., A Control Volume-Based Finite Diference Method for Solving the Equilibrium Equations in Terms of Displacements. **Applied Mathematical Modelling**, 1995, 19, p. 210 – 243.

HILL, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. Editora: Oxford University Press. Oxford, 1950.

HOLMES, L., FAVERO, J. e OSSWALD, T., Numerical Simulation of Three-Dimensional Viscoelastic Planar Contraction Flow Using the Software OpenFoam. **Computers and Chemical Engineering**. 2011.

INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., BERGMAN, T.L. e LAVINE, A.S., **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Editora: LCT. Rio de Janeiro, 2007.

JASAK, H. e WELLER, H.G., Application a Finite Volume Method and Unstructured Meshes to Linear Elasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000, 48, p. 267 – 287.

JASAK, Hrvoje. **Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows.** 1996. 394p. Tese (Doutorado) – Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London.

JOHNSON, W. e MELLOR, P.B. **Engineering Plasticity**. Editora: Ellis Horwood Limited. Chichester, 1983.

LOF, J., Elasto-Viscoplastic FEM Simulations of the Aluminium Flow in the Bearing Area for Extrusion of Thin-Walled Sections. **Journal of Materials Processing Technology**, 2001, 114, p. 174 – 183.

LOU, S. e ZHAO, G. e WANG, R. e WU, X., Modelling of aluminum alloy profile extrusion process using finite volume method. **Journal of Materials Processing Technology**. 2008, 206, p 481-490.

LU, J. e SALUJA, A.L. e ZHOU, Y., Computer modeling of the continuous forming extrusion process of AA6061 alloy. **Journal of Materials Processing Technology**. 1998, 79, p 200-212.

KHALIL, M., e WESSELING, P., Vertex-Centered and Cell-Centered MultiGrid Interface Problems. **Journal Computational Phisics**, 1992, 98, p. 1 – 10.

KHAN, Y.A., VALBERG, H.S. e JACOBSEN, B.O.T., Deformation Condition in the Extrusion Weld Zone When Using Pointed and Square Ended Bridge. **International Journal of Material Forming**, 2010, 3 Suppl 1, p. 379 – 382.

KHAN, A.S. e HUANG, S., **Continuum Theory of Plasticity**. Editora: John Wiley & Sons, Nova York, 1995.

KIM, D. e CHOI, H., A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids. **Journal of Computational Physics**. 2000, 168, p 411-428.

KLOPPENBORG, T., SCHWANE, M., KHALIFA, N.B., TEKKAYA, A.E. e BROSIUS, A., Experimental and Numerical Analysis of Material Flow in Porthole Die Extrusion. **Progress in Extrusion Technology and Simulation of Light Metal Alloys**, 2012, 491, p. 97 – 104.

KOBAYASHI, S., OH, S.I. e ALTAN, T., Metal Forming and the Finite Element Method. Editora: Oxford University, Londres, 1989.

MALISKA, C.R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Editora: LCT, Rio de Janeiro, 2004.

LANGTANGEN, H.P., MARDAL, K.A. e WINTHER, R., Numerical Method for Incompressible Viscous Flow. **Advances in Water Resources**. 2002, 25, p 1125-1146.

LIN, G.F., LAI, J.S. e GUO, W.D., Finite Volume Component-wise TVD Schemes for 2D Shallow Water Equations. **Advances in Water Resources**. 2003, 26, p 861-873.

MALVERN, L.E.. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Editora: Prentice-Hall. New Jersey, 1969.

MARQUES, M.J.M.B. e RODRIGUES, J.M.C, A Solution to some Metal-forming processes by the Flow Formulation. **Journal of Materials Processing Technology**, 1992, 31, p. 265 – 275.

MARTINS, M.M., BUTTON, S.T. e BRESSAN, J.D., Experimental Analysis of Velocity Fields in Hot Extrusion of Aluminium Alloy 6351. **Progress in Extrusion Technology and Simulation of Light Metal Alloys**, 2012, 491, p. 145 – 150.

MARTINS, M.M., BRESSAN, J.D., BUTTON, S.T. e IVANKOVIC, A., Extrusion Process by Finite Volume Method Using OpenFoam Software. **American Institute of Physics**. 2010, 1315, p 1461-1466.

MARTINS, P. e RODRIGUES, J., **Tecnologia Mecânica: tecnologia da deformação plástica, volume 1 fundamentos teóricos.** Editora: Escolar, Lisboa, 2005.

MIELNIK, E., **Metalworking Science and Engineering.** Editora: McGraw-Hill, New York, 1991.

MOMPEAN, G. e THAIS, L., Finite Volume Numerical Simulation of Viscoelastic Flows in General Orthogonal Coordinates. **Mathematics and Computers in Simulation**. 2010, 80, p 2185-2199.

NEOFYTUL, P., A 3rd Order Upwind Finite Volume Method for Generalized Newtonian Fluid Flows. **Advances in Engineering Software**. 2005, 36, p 664-680.

OSAKADA, K., History of plasticity and metal forming analysis. **Journal of Materials Processing Technology**. 2010, 210, p 1436-1454.

PARVIAZIAN, F. e KAYSER, T. e HORTIG, C. e SVENDSEN, B., Thermomechanical modeling and simulation of aluminum alloy behavior during extrusion and cooling. **Journal of Materials Processing Technology**. 2009, 209, p 876-883.

PATANKAR, S.V., **Numerical Heat Trasnfer and Fluid Flow**. Editora: Hemisphere. Washington D.C., 1980.

PATANKAR, S.V. e SPALDING, D.B., A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 1972, 15, p 1787-1806.

PIETRZIK, M., Finite Element Simulation of Large Plastic Deformation. **Journal of Materials Processing Technology**, 2000, 106, p. 223 – 229.

PILLER, M. e STALIO, E., Finite-Volume Compact Schemes on Staggered Grids. **Journal of Computational Physics**. 2004, 197, p 299-340.

PORÍZKOVA, P.P., KOZEL, K. e HORÁCEK J., Simulation of Unsteady Compressible Flow in a Channel with Vibrating Walls-Influence of the Frequency. **Computers & Fluids**. 2011, 46, p 404-410.

PORÍZKOVA, P.P., FURST, J. HORÁCEK J. e KOZEL, K., Numerical Solution of Unsteady Flows with Low Inlet Mach Numbers. **Mathematics and Computers in Simulation**. 2010, 80, p 1795-1805.

POTTER, M. e WIGGERT, D.C., **Mecânica dos Fluidos**. Editora: Thomson, São Paulo, 2004.

RHIE, C.M. e CHOW, W.L., A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**. 1983, 21, p 1525-1532.

SCHAFER, M. e TESCHAUER, I., Numerical Simulation of Coupled Fluid-Solid Problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190, p. 3645 – 3667.

SELVAGGIO, A. e SEGATORI, A., GUZEL, A., DONATI, L., TOMESANI, L., e TEKKAYA, A.E., Extrusion Benchmark 2011: Evaluation of Different Design Strategies on Process Conditions, Die Deflection and Seam Weld Quality in Hollow Profiles. **Progress in Extrusion Technology and Simulation of Light Metal Alloys**, 2012, 491, p. 1 – 10.

SLONE, A.K., PERICLEOUS, K., BAILEY, C. e CROSS, M., Dynamic Fluid Structure Interaction Using Finite Volume Unstructured Mesh Procedures. **Computers & Structures**, 2002, 80, p. 371 – 390.

TANNEHILL, J.C., ANDERSON, D.A. e PLETCHER, R.H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. Editora: Taylor&Francis. London, 1997.

TAYLOR, G.A., BAILEY, C. e CROSS, M., Solution of the Elastic/Visco-Plastic Constitutive Equations: A Finite Volume Approach. **Applied Mathematical Modelling**, 1995, 19, p. 746 – 760.

TIERNAN, P., HILLERY, M.T., DRAGANESCU, B. e GHEORGHE, M., Modeling of Cold Extrusion with Experimental Verification. **Journal of Materials Processing Technology**, 2005, 168, p. 360 – 366.

VALBERG, H.S. **Applied Metal Forming: Including FEM Analysis**. Editora: Cambridge University Press. Cambridge, 2010.

VALBERG, H.S., Comparison of Metal Flow in Un-Lubricated Direct and Indirect Extrusion of Aluminium Alloys. **International Journal of Material Forming**, 2010, 3 Suppl 1, p. 387 – 390.

VALBERG, H.S., Understanding Metal Flow in Aluminium Extrusion by Means of Emptying Diagrams. **International Journal of Material Forming**, 2010, 3 Suppl 1, p. 391 – 394.

VIMMR, J., Mathematical Modelling of Compressible Inviscid Fluid Flow Through a Sealing Gap in the Screw Compressor. **Mathematics and Computers in Simulation**. 2003, 61, p 187-197.

VUCINA, D., Flow Formulation FE Metal-Forming Analysis with Boundary Friction via a Penalty Function. **Journal of Materials Processing Technology**, 1996, 59, p. 272 – 277.

WENKE, P. e WHEEL, M.A., A Finite Volume Method for Solid Mechanics Incorporating Rotational Degree of Freedom. **Computers & Structures**, 2003, 81, p. 321 – 329.

WILLIAMS, A.J., SLONE, A.K., CROFT, T.N. e CROSS, M., A Mixed Eurelian-Lagrangian Method for Modelling Metal Extrusion Processes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 2010, 199, p 2123-2134.

WILLIAMS, A.J., CROFT, T.N. e CROSS, M., Computacional modeling of metal extrusion and forging processes. **Journal of Materials Processing Technology**. 2002, 125-126, p 573-582.

ZDANSKI, P.S.B., VAZ JR, M. e INÁCIO, G.R., A Finite Volume Approach to Simulation of Polymer Melt Flow in Channels. **Engineering Computations**. 2008, 25, p 233-250.

ZIENKIEWICZ, O.C., LIU, Y.C. e HUANG, G.C., Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, 1988, 25, p. 23 – 42.

ZHANG, S.H., WANG, Z.R., WANG, Z.T., XU, Y. E CHEN, K.B., Some New Features in the Development of Metal Forming Technology. **Journal of Materials Processing Technology**, 2004, 151, p. 39 – 47.

APÊNDICE A – Equações das Interpolações das Velocidades nas Faces dos Volumes de Controle – Caso Bidimensional

Para deslocar as velocidade do centro do volume de controle para as suas faces foi utilizada a interpolação de Rhie-Chow (RHIE, C.M. *et al*., 1983) ou a interpolação aplicando a equação da conservação do movimento (*Momemtum Interpolation method*).

Considerando a equação da conservação da quantidade de movimento, para o caso bidimensional de um fluido incompressível com termos viscosos, escrita para as direções x e y como segue:

Para a componente x:

$$(\rho u)^{t+1} = (\rho u)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\frac{\partial(\rho u^2 + p - \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv - \sigma_{xy})}{\partial y}\right\}^t \tag{A1}$$

Para a componente y:

$$(\rho v)^{t+1} = (\rho v)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\frac{\partial(\rho uv - \sigma_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p - \sigma_{yy})}{\partial y}\right\}^t \tag{A2}$$

onde, u e v componentes da velocidade, ρ é a massa específica, p é a pressão, t é o tempo, Δt é o passo de tempo, V é o volume e os termos σ_{xx} e σ_{yy} são tensões normais e σ_{xy} é a tensão de cisalhamento e são calculadas a partir de:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{A3}$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{A4}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{A5}$$

sendo μ a viscosidade dinâmica.

Considerando o volume de controle *P*, destacado na Figura A1, substituindo as Equações (A3), (A4) e (A5) nas Equações (A1) e (A2) e discretizando as derivadas em *x* e em *y*, tem-se:

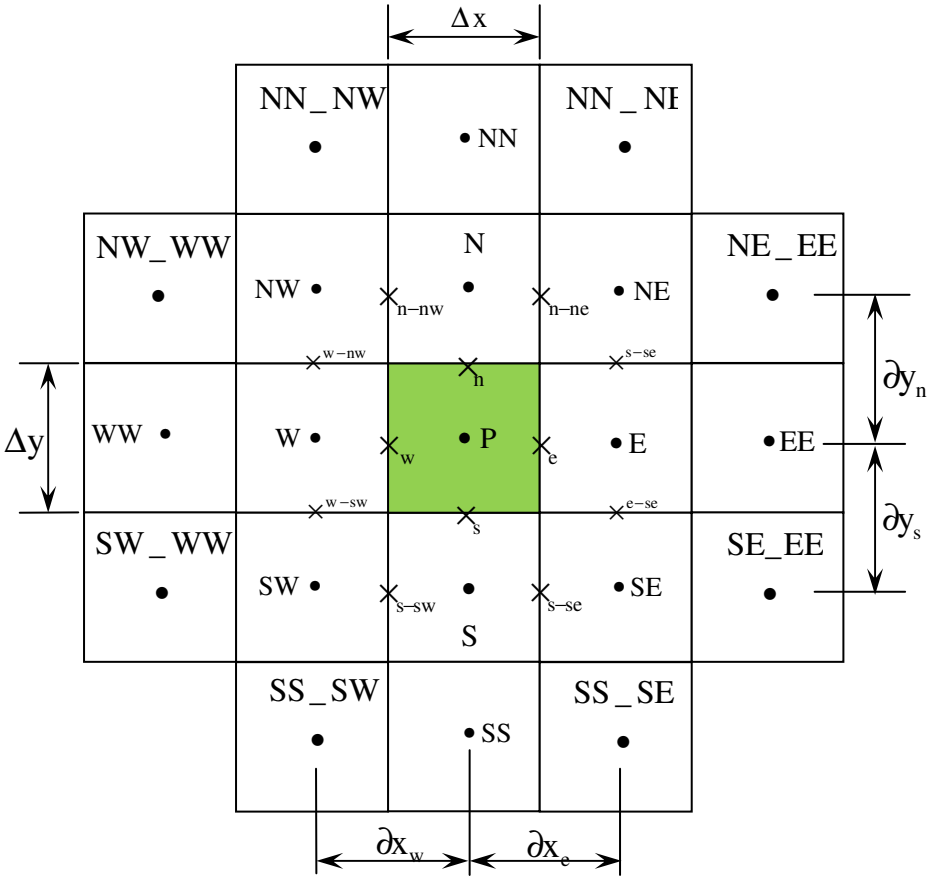


Figura A1 – Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al*., 2008).

Para a componente *x*:

$$(\rho u)^{t+1} = (\rho u)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w - \left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e\right]\Delta y + \\ \left[\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)_s - \left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)_n\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \quad \text{(A6)}$$

Para a componente *y*:

$$(\rho v)^{t+1} = (\rho v)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)_w - \left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)_e\right]\Delta y + \\ \left[\left(\rho v^2 + p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s - \left(\rho v^2 + p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_n\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \quad \text{(A7)}$$

Para a aplicação do método da interpolação da velocidade aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento, devem-se considerar as faces isoladamente.

- Interpolação das velocidades na Face "e" na direção *x*:

Para a face "*e*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A6) para o ponto "*P*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_W^2}{2} + \frac{p_P + p_W}{2} - 2\mu\left(\frac{u_P - u_W}{\partial x_w}\right)\right]_w \quad \text{(A8)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_E^2}{2} + \frac{p_P + p_E}{2} - 2\mu\left(\frac{u_E - u_P}{\partial x_e}\right)\right]_e \quad \text{(A9)}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_s=\left[\frac{\rho u_P v_P+\rho u_S v_S}{2}-\mu\left(\frac{u_P-u_S}{\partial y_s}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_E+v_{SE}}{2}-\frac{v_W+v_{SW}}{2}}{\partial x_w+\partial x_e}\right)\right]_s \tag{A10}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_n=\left[\frac{\rho u_P v_P+\rho u_N v_N}{2}-\mu\left(\frac{u_N-u_P}{\partial y_n}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_E+v_{NE}}{2}-\frac{v_W+v_{NW}}{2}}{\partial x_w+\partial x_e}\right)\right]_n \tag{A11}$$

Substituindo as Equações (A8), (A9), (A10) e (A11) na Equação (A6) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_P\right)^{t+1}=\left(\rho u_P\right)^t+\frac{\Delta t}{V_P}\left\{\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_W^2-\rho u_E^2}{2}\right)+\left(\frac{p_W-p_E}{2}\right)+2\mu\left(\frac{u_E-u_P}{\partial x_e}-\frac{u_P-u_W}{\partial x_w}\right)\end{bmatrix}\Delta y+\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_S v_S-\rho u_N v_N}{2}\right)+\mu\left(\frac{u_N-u_P}{\partial y_n}-\frac{u_P-u_S}{\partial y_s}\right)+\\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{v_{NE}-v_{SE}+v_{SW}-v_{NW}}{\partial x_e+\partial x_w}\right)\end{bmatrix}\Delta x\right\}^t \tag{A12}$$

Para a face "*e*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A6) para o ponto "*E*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w=\left[\frac{\rho u_P^2+\rho u_E^2}{2}+\frac{p_P+p_E}{2}-2\mu\left(\frac{u_E-u_P}{\partial x_w}\right)\right]_w \tag{A13}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e=\left[\frac{\rho u_E^2+\rho u_{EE}^2}{2}+\frac{p_E+p_{EE}}{2}-2\mu\left(\frac{u_{EE}-u_E}{\partial x_e}\right)\right]_e \tag{A14}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_s=\left[\frac{\rho u_E v_E+\rho u_{SE} v_{SE}}{2}-\mu\left(\frac{u_E-u_{SE}}{\partial y_s}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_{EE}+v_{SE_EE}}{2}-\frac{v_P+v_S}{2}}{\partial x_w+\partial x_e}\right)\right]_s \tag{A15}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_n=\left[\frac{\rho u_E v_E+\rho u_{NE} v_{NE}}{2}-\mu\left(\frac{u_{NE}-u_E}{\partial y_n}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_{EE}+v_{NE_EE}}{2}-\frac{v_P+v_N}{2}}{\partial x_w+\partial x_e}\right)\right]_n \tag{A16}$$

substituindo as Equações (A13), (A14), (A15) e (A16) na Equação (A6) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_E\right)^{t+1}=\left(\rho u_E\right)^t+\frac{\Delta t}{V_E}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\rho u_P^2-\rho u_{EE}^2}{2}\right)+\left(\frac{p_P-p_{EE}}{2}\right)+2\mu\left(\frac{u_{EE}-u_E}{\partial x_e}-\frac{u_E-u_P}{\partial x_w}\right)\right]\Delta y+\\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{\rho u_{SE} v_{SE}-\rho u_{NE} v_{NE}}{2}\right)+\mu\left(\frac{u_{NE}-u_E}{\partial y_n}-\frac{u_E-u_{SE}}{\partial y_s}\right)+\\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{v_{NE_EE}-v_{SE_EE}+v_S-v_N}{\partial x_e+\partial x_w}\right)\end{array}\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \tag{A17}$$

para encontrar a velocidade na face "*e*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (A12) e (A17), então:

$$\left(\rho u_e\right)^{t+1}=\frac{\left(\rho u_P\right)^{t+1}+\left(\rho u_E\right)^{t+1}}{2}$$

$$\left(\rho u_e\right)^{t+1}=\frac{\left(\rho u_P\right)^t+\left(\rho u_E\right)^t}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P}+\frac{\Delta t}{V_E}\right)\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\rho u_W^2-\rho u_E^2+\rho u_P^2-\rho u_{EE}^2}{4}\right)+\\ \left(\frac{p_W-p_E+p_P-p_{EE}}{4}\right)+\\ \mu\left(\frac{u_{EE}-u_P}{\partial x_e}-\frac{u_W-u_E}{\partial x_w}\right)\end{array}\right]\Delta y+\\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{\rho u_S v_S-\rho u_N v_N+\rho u_{SE} v_{SE}-\rho u_{NE} v_{NE}}{4}\right)+\\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{u_N-u_P+u_{NE}-u_E}{\partial y_n}-\frac{u_P-u_S+u_E-u_{SE}}{\partial y_s}\right)+\\ \frac{\mu}{4}\left(\frac{v_{NE}-v_{SE}+v_{SW}-v_{NW}+v_{NE_EE}-v_{SE_EE}+v_S-v_N}{\partial x_e+\partial x_w}\right)\end{array}\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \tag{A18}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*w*" na direção *x*:

Para a face "*w*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A6) para o ponto "*P*", procedimento esse já realizado e resultando na Equação (A12). Para a face "*w*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A6) para o ponto "*W*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w = \left[\frac{\rho u_W^2 + \rho u_{WW}^2}{2} + \frac{p_W + p_{WW}}{2} - 2\mu\left(\frac{u_W - u_{WW}}{\partial x_w}\right)\right]_w \tag{A19}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_W^2}{2} + \frac{p_P + p_{WW}}{2} - 2\mu\left(\frac{u_P - u_W}{\partial x_e}\right)\right]_e \tag{A20}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_s = \left[\frac{\rho u_W v_W + \rho u_{SW} v_{SW}}{2} - \mu\left(\frac{u_W - u_{SW}}{\partial y_s}\right) - \mu\left(\frac{\frac{v_P + v_S}{2} - \frac{v_{WW} + v_{SW_WW}}{2}}{\partial x_w + \partial x_e}\right)\right]_s \tag{A21}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_n = \left[\frac{\rho u_W v_W + \rho u_{NW} v_{NW}}{2} - \mu\left(\frac{u_{NW} - u_W}{\partial y_n}\right) - \mu\left(\frac{\frac{v_N + v_P}{2} - \frac{v_{WW} + v_{NW_WW}}{2}}{\partial x_w + \partial x_e}\right)\right]_n \tag{A22}$$

substituindo as Equações (A19), (A20), (A21) e (A22) na Equação (A6) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_W\right)^{t+1} = \left(\rho u_W\right)^t + \frac{\Delta t}{V_W}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\rho u_{WW}^2 - \rho u_P^2}{2}\right) + \left(\frac{p_{WW} - p_P}{2}\right) + 2\mu\left(\frac{u_P - u_W}{\partial x_e} - \frac{u_W - u_{WW}}{\partial x_w}\right)\right]\Delta y + \\ \left[\left(\frac{\rho u_{SW} v_{SW} - \rho u_{NW} v_{NW}}{2}\right) + \mu\left(\frac{u_{NW} - u_W}{\partial y_n} - \frac{u_W - u_{SW}}{\partial y_s}\right) + \right. \\ \left. \frac{\mu}{2}\left(\frac{v_N - v_S + v_{SW_WW} - v_{NW_WW}}{\partial x_e + \partial x_w}\right)\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \tag{A23}$$

para encontrar a velocidade na face "*w*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (A12) e (A23), então:

$$(\rho u_w)^{t+1} = \frac{(\rho u_P)^{t+1} + (\rho u_W)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho u_w)^{t+1} = \frac{(\rho u_P)^{t} + (\rho u_W)^{t}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_W}\right)\left\{\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_W^2 - \rho u_E^2 + \rho u_{WW}^2 - \rho u_P^2}{4}\right) + \\ \left(\frac{p_W - p_E + p_{WW} - p_P}{4}\right) + \\ \mu\left(\frac{u_E - u_W}{\partial x_e} - \frac{u_{WW} - u_P}{\partial x_w}\right)\end{bmatrix}\Delta y + \right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_S v_S - \rho u_N v_N + \rho u_{SW} v_{SW} - \rho u_{NW} v_{NW}}{4}\right) + \\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{u_N - u_P + u_{NW} - u_W}{\partial y_n} - \frac{u_P - u_S + u_W - u_{SW}}{\partial y_s}\right) + \\ \frac{\mu}{4}\left(\frac{v_{NE} - v_{SE} + v_{SW} - v_{NW} + v_N - v_S + v_{SW_WW} - v_{NW_WW}}{\partial x_e + \partial x_w}\right)\end{bmatrix}\Delta x\right\}^{t} \quad \text{(A24)}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*n*" na direção y:

Para a face "*n*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A7) para o ponto "*P*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_w = \left[\frac{\rho u_P v_P + \rho u_W v_W}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_N + u_{NW}}{2} - \frac{u_S + u_{SW}}{2}}{\partial y_n + \partial y_s}\right) - \mu\left(\frac{v_P - v_W}{\partial x_w}\right)\right]_w \quad \text{(A25)}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_e = \left[\frac{\rho u_P v_P + \rho u_E v_E}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NE} + u_N}{2} - \frac{u_{SE} + u_S}{2}}{\partial y_n + \partial y_s}\right) - \mu\left(\frac{v_E - v_P}{\partial x_e}\right)\right]_e \quad \text{(A26)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s = \left[\frac{\rho v_P^2 + \rho v_S^2}{2} + \frac{p_P + p_S}{2} - 2\mu\left(\frac{v_P - v_S}{\partial y_s}\right)\right]_s \quad \text{(A27)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n = \left[\frac{\rho v_P^2 + \rho v_N^2}{2} + \frac{p_P + p_N}{2} - 2\mu\left(\frac{v_N - v_P}{\partial y_n}\right)\right]_n \tag{A28}$$

substituindo as Equações (A25), (A26), (A27) e (A28) na Equação (A7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$(\rho v_P)^{t+1} = (\rho v_P)^t + \frac{\Delta t}{V_P}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E}{2}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE}}{\partial y_n + \partial y_s}\right) + \right.\\ \left.\mu\left(\frac{v_E - v_P}{\partial x_e} - \frac{v_P - v_W}{\partial x_w}\right)\right]\Delta y + \\ \left[\left(\frac{\rho v_S^2 - \rho v_N^2}{2}\right) + \left(\frac{p_S - p_N}{2}\right) + 2\mu\left(\frac{v_N - v_P}{\partial y_n} - \frac{v_P - v_S}{\partial y_s}\right)\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \tag{A29}$$

para a face "*n*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A7) para o ponto "*N*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_w = \left[\frac{\rho u_N v_N + \rho u_{NW} v_{NW}}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NN} + u_{NN_NW}}{2} - \frac{u_P + u_W}{2}}{\partial y_n + \partial y_s}\right) - \mu\left(\frac{v_N - v_{NW}}{\partial x_w}\right)\right]_w \tag{A30}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_e = \left[\frac{\rho u_N v_N + \rho u_{NE} v_{NE}}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NN_NE} + u_{NN}}{2} - \frac{u_E + u_P}{2}}{\partial y_n + \partial y_s}\right) - \mu\left(\frac{v_N - v_{NE}}{\partial x_e}\right)\right]_e \tag{A31}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s = \left[\frac{\rho v_N^2 + \rho v_P^2}{2} + \frac{p_N + p_P}{2} - 2\mu\left(\frac{v_N - v_P}{\partial y_s}\right)\right]_s \tag{A32}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n = \left[\frac{\rho v_{NN}^2 + \rho v_N^2}{2} + \frac{p_{NN} + p_N}{2} - 2\mu\left(\frac{v_{NN} - v_N}{\partial y_n}\right)\right]_n \tag{A33}$$

substituindo as Equações (A30), (A31), (A32) e (A33) na Equação (A7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$(\rho v_N)^{t+1} = (\rho v_N)^t + \frac{\Delta t}{V_N}\left\{\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_{NW} v_{NW} - \rho u_{NE} v_{NE}}{2}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{u_{NN_NE} - u_{NN_NW} + u_W - u_E}{\partial y_n + \partial y_s}\right) + \\ \mu\left(\frac{v_{NE} - v_N}{\partial x_e} - \frac{v_N - v_{NW}}{\partial x_w}\right)\end{bmatrix}\Delta y + \right.$$
$$\left.\left[\left(\frac{\rho v_P^2 - \rho v_{NN}^2}{2}\right) + \left(\frac{p_P - p_{NN}}{2}\right) + 2\mu\left(\frac{v_{NN} - v_N}{\partial y_n} - \frac{v_N - v_P}{\partial y_s}\right)\right]\Delta x\right\}^t \qquad \text{(A34)}$$

para encontrar a velocidade na face "*n*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (A29) e (A34), então:

$$(\rho u_n)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^{t+1} + (\rho v_N)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho v_n)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^t + (\rho v_N)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_N}\right)\left\{\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E + \rho u_{NW} v_{NW} - \rho u_{NE} v_{NE}}{4}\right) + \\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{v_E - v_P + v_{NE} - v_N}{\partial x_e} - \frac{v_P - v_W + v_N - v_{NW}}{\partial x_w}\right) + \\ \frac{\mu}{4}\left(\frac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE} + u_{NN_NE} - u_{NN_NW} + u_W - u_E}{\partial y_n + \partial y_s}\right)\end{bmatrix}\Delta y + \right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}\left(\frac{\rho v_S^2 - \rho v_N^2 + \rho v_P^2 - \rho v_{NN}^2}{4}\right) + \\ \left(\frac{p_S - p_N + p_P - p_{NN}}{4}\right) + \\ \mu\left(\frac{v_{NN} - v_P}{\partial y_n} - \frac{v_S - v_N}{\partial y_s}\right)\end{bmatrix}\Delta x\right\}^t \qquad \text{(A35)}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*s*" na direção *y*:

Para a face "*s*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A7) para o ponto "*P*", procedimento esse já realizado e resultando na Equação (A29). Para a face "*s*" do volume de controle "*P*", na Figura A1, deve-se aplicar a Equação (A7) para o ponto "*S*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_w=\left[\frac{\rho u_S v_S+\rho u_{SW} v_{SW}}{2}-\mu\left(\frac{\dfrac{u_P+u_W}{2}-\dfrac{u_{SS}+u_{SW_SW}}{2}}{\partial y_n+\partial y_s}\right)-\mu\left(\frac{v_S-v_{SW}}{\partial x_w}\right)\right]_w \tag{A36}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_e=\left[\frac{\rho u_S v_S+\rho u_{SE} v_{SE}}{2}-\mu\left(\frac{\dfrac{u_E+u_P}{2}-\dfrac{u_{SS}+u_{SS_SE}}{2}}{\partial y_n+\partial y_s}\right)-\mu\left(\frac{v_S-v_{SE}}{\partial x_e}\right)\right]_e \tag{A37}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s=\left[\frac{\rho v_S^2+\rho v_{SS}^2}{2}+\frac{p_S+p_{SS}}{2}-2\mu\left(\frac{v_S-v_{SS}}{\partial y_s}\right)\right]_s \tag{A38}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n=\left[\frac{\rho v_P^2+\rho v_S^2}{2}+\frac{p_P+p_S}{2}-2\mu\left(\frac{v_P-v_S}{\partial y_n}\right)\right]_n \tag{A39}$$

substituindo as Equações (A36), (A37), (A38) e (A39) na Equação (A7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho v_S\right)^{t+1}=\left(\rho v_S\right)^t+\frac{\Delta t}{V_S}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\dfrac{\rho u_{SW} v_{SW}-\rho u_{SE} v_{SE}}{2}\right)+\dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{u_E-u_W+u_{SS_SW}-u_{SS_SE}}{\partial y_n+\partial y_s}\right)+\right.\\ \left.\mu\left(\dfrac{v_{SE}-v_S}{\partial x_e}-\dfrac{v_S-v_{SW}}{\partial x_w}\right)\right]\Delta y+\\ \left[\left(\dfrac{\rho v_{SS}^2-\rho v_P^2}{2}\right)+\left(\dfrac{p_{SS}-p_P}{2}\right)+2\mu\left(\dfrac{v_P-v_S}{\partial y_n}-\dfrac{v_S-v_{SS}}{\partial y_s}\right)\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \tag{A40}$$

para encontrar a velocidade na face "*s*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (A29) e (A40), então:

$$\left(\rho u_s\right)^{t+1}=\frac{\left(\rho v_P\right)^{t+1}+\left(\rho v_S\right)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho v_s)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^t + (\rho v_S)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_S}\right)\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E + \rho u_{SW} v_{SW} - \rho u_{SE} v_{SE}}{4}\right) + \\ \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{v_E - v_P + v_{SE} - v_S}{\partial x_e} - \dfrac{v_P - v_W + v_S - v_{SW}}{\partial x_w}\right) + \\ \dfrac{\mu}{4}\left(\dfrac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE} + u_E - u_W + u_{SS_SW} - u_{SS_SE}}{\partial y_n + \partial y_s}\right)\end{array}\right]\Delta y + \\ \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho v_S^2 - \rho v_N^2 + \rho v_{SS}^2 - \rho v_P^2}{4}\right) + \\ \left(\dfrac{p_S - p_N + p_{SS} - p_P}{4}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{v_N - v_S}{\partial y_n} - \dfrac{v_{SS} - v_P}{\partial y_s}\right)\end{array}\right]\Delta x\end{array}\right\}^t \qquad \text{(A41)}$$

APÊNDICE B – Equações das Interpolações das Velocidades nas Faces dos Volumes de Controle – Caso Axissimétrico

Para deslocar as velocidade do centro do volume de controle para as suas faces foi utilizada a interpolação de Rhie-Chow (RHIE, C.M. *et al*., 1983) ou a interpolação aplicando a equação da conservação do movimento (*Momemtum Interpolation method*).

Considerando a equação da conservação da quantidade de movimento, para o caso axissimétrico de um fluido incompressível com termos viscosos, escrita para as direções z e r como segue:

Para a componente z:

$$(\rho u)^{t+1} = (\rho u)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\frac{\partial(\rho u^2 + p - \sigma_{zz})}{\partial z} + \frac{r\partial(\rho uv - \sigma_{rz})}{\partial r}\right\}^t \tag{B1}$$

Para a componente r:

$$(\rho v)^{t+1} = (\rho v)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\frac{\partial(\rho uv - \sigma_{rz})}{\partial z} + \frac{r\partial(\rho v^2 + p - \sigma_{rr})}{\partial r}\right\}^t - \Delta t\left\{\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{p}{r}\right\}^t \tag{B2}$$

onde, u e v são as componentes da velocidade, ρ é a massa específica, p é a pressão, t é o tempo, Δt é o passo de tempo, V é o volume, r é a coordenadas radial, e os termos σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ são as tensões normais e σ_{rz} é a tensão de cisalhamento e são calculadas a partir de:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{B3}$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{B4}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\frac{v}{r} \tag{B5}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{B6}$$

sendo μ a viscosidade dinâmica.

Considerando o volume de controle *P*, destacado na Figura B1, substituindo as Equações (B3), (B4), (B5) e (B6) nas Equações (B1) e (B2) e discretizando as derivadas em *z* e em *r*, tem-se:

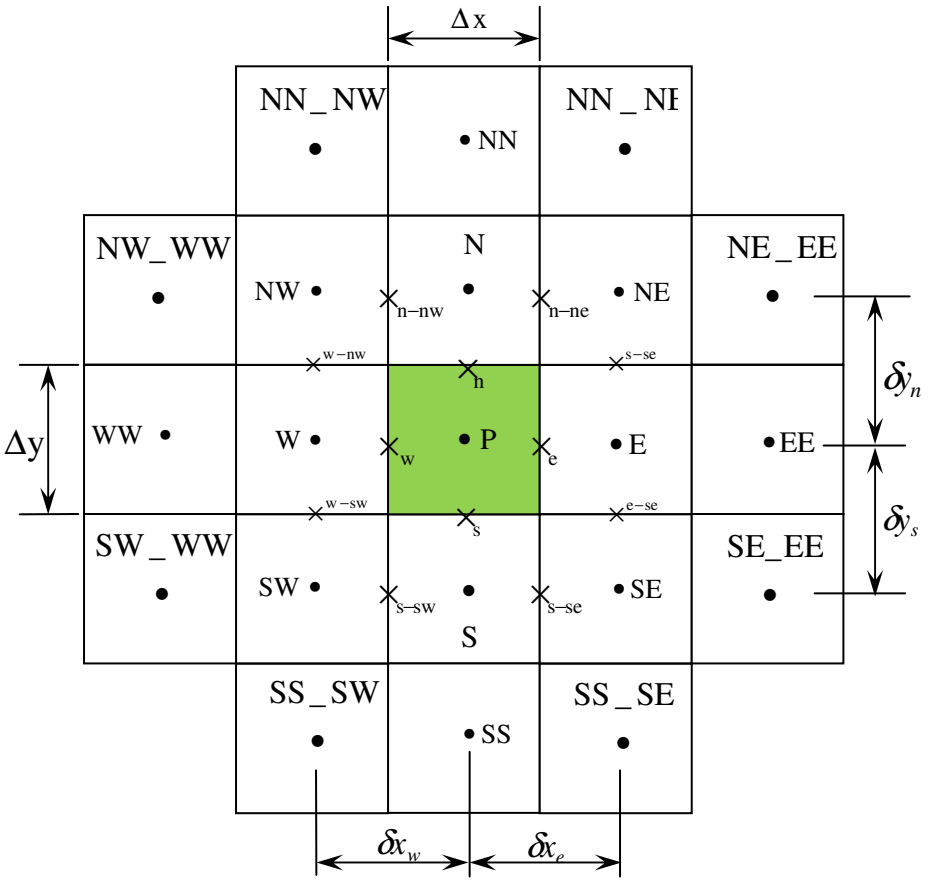


Figura B1 – Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al.*, 2008).

Para a componente z:

$$(\rho u)^{t+1} = (\rho u)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w - \left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e\right] r\Delta r + \\ \left[r_s\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right]\right)_s - r_n\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right]\right)_n\right]\Delta z\end{array}\right\}^t \quad \text{(B7)}$$

Para a componente r:

$$(\rho v)^{t+1} = (\rho v)^t + \frac{\Delta t}{V}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right]\right)_w - \left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right]\right)_e\right] r\Delta r + \\ \left[r_s\left(\rho v^2 + p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)_s - r_n\left(\rho v^2 + p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)_n\right]\Delta z\end{array}\right\}^t - \Delta t\left\{\frac{2\mu v}{r^2} - \frac{p}{r}\right\}^t \quad \text{(B8)}$$

Para a aplicação do método da interpolação da velocidade aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento, devem-se considerar as faces isoladamente.

- Interpolação das velocidades na Face "e" na direção z:

Para a face "*e*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B7) para o ponto "*P*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_W^2}{2} + \frac{p_P + p_W}{2} - 2\mu\left(\frac{u_P - u_W}{\partial z_w}\right)\right]_w \quad \text{(B9)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_E^2}{2} + \frac{p_P + p_E}{2} - 2\mu\left(\frac{u_E - u_P}{\partial z_e}\right)\right]_e \quad \text{(B10)}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_s=\left[\frac{\rho u_P v_P+\rho u_S v_S}{2}-\mu\left(\frac{u_P-u_S}{\partial r_s}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_E+v_{SE}}{2}-\frac{v_W+v_{SW}}{2}}{\partial z_w+\partial z_e}\right)\right]_s \tag{B11}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_n=\left[\frac{\rho u_P v_P+\rho u_N v_N}{2}-\mu\left(\frac{u_N-u_P}{\partial r_n}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_E+v_{NE}}{2}-\frac{v_W+v_{NW}}{2}}{\partial z_w+\partial z_e}\right)\right]_n$$

(B12)

Substituindo as Equações (B9), (B10), (B11) e (B12) na Equação (B7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_P\right)^{t+1}=\left(\rho u_P\right)^t+\frac{\Delta t}{V_P}\left\{\begin{array}{l}\left[\left[\left(\frac{\rho u_W^2-\rho u_E^2}{2}\right)+\left(\frac{p_W-p_E}{2}\right)+2\mu\left(\frac{u_E-u_P}{\partial z_e}-\frac{u_P-u_W}{\partial z_w}\right)\right]r_P\Delta r+\right.\\ \left[\left(\frac{r_s\rho u_S v_S-r_s\rho u_N v_N+\left(r_s-r_n\right)\rho u_P v_P}{2}\right)+\right.\\ \left.\left.\mu\left(\frac{r_n\left(u_N-u_P\right)}{\partial r_n}-\frac{r_s\left(u_P-u_S\right)}{\partial r_s}\right)+\right.\right.\\ \left.\left.\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_n\left(v_{NE}-v_E+v_{NW}-v_W\right)-r_s\left(v_E-v_{SE}-v_W-v_{SW}\right)}{\partial z_e+\partial z_w}\right)\right]\Delta z\end{array}\right\}^t \tag{B13}$$

Para a face "*e*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B7) para o ponto "*E*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w=\left[\frac{\rho u_P^2+\rho u_E^2}{2}+\frac{p_P+p_E}{2}-2\mu\left(\frac{u_E-u_P}{\partial z_w}\right)\right]_w \tag{B14}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e=\left[\frac{\rho u_E^2+\rho u_{EE}^2}{2}+\frac{p_E+p_{EE}}{2}-2\mu\left(\frac{u_{EE}-u_E}{\partial z_e}\right)\right]_e \tag{B15}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_s=\left[\frac{\rho u_E v_E+\rho u_{SE} v_{SE}}{2}-\mu\left(\frac{u_E-u_{SE}}{\partial r_s}\right)-\mu\left(\frac{\dfrac{v_{EE}+v_{SE_EE}}{2}-\dfrac{v_P+v_S}{2}}{\partial z_w+\partial z_e}\right)\right]_s \tag{B16}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_n=\left[\frac{\rho u_E v_E+\rho u_{NE} v_{NE}}{2}-\mu\left(\frac{u_{NE}-u_E}{\partial r_n}\right)-\mu\left(\frac{\dfrac{v_{EE}+v_{NE_EE}}{2}-\dfrac{v_P+v_N}{2}}{\partial z_w+\partial z_e}\right)\right]_n \tag{B17}$$

substituindo as Equações (B14), (B15), (B16) e (B17) na Equação (B7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_E\right)^{t+1}=\left(\rho u_E\right)^t+\frac{\Delta t}{V_E}\left\{\begin{array}{l}\left[\left[\left(\dfrac{\rho u_P^2-\rho u_{EE}^2}{2}\right)+\left(\dfrac{p_P-p_{EE}}{2}\right)+2\mu\left(\dfrac{u_{EE}-u_E}{\partial z_e}-\dfrac{u_E-u_P}{\partial z_w}\right)\right]r_E\Delta r+\right.\\ \left[\left(\dfrac{r_s\rho u_{SE}v_{SE}-r_n\rho u_{NE}v_{NE}+\left(r_s+r_n\right)\rho u_E v_E}{2}\right)+\right.\\ \mu\left(\dfrac{r_n\left(u_{NE}-u_E\right)}{\partial r_n}-\dfrac{r_s\left(u_E-u_{SE}\right)}{\partial r_s}\right)+\\ \left.\left.\dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{r_n\left(v_{NE_EE}-v_{EE}+v_N-v_P\right)-r_s\left(v_{EE}-v_{SE_EE}-v_S-v_P\right)}{\partial z_e+\partial z_w}\right)\right]\Delta z\end{array}\right\}^t \tag{B18}$$

para encontrar a velocidade na face "*e*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (B13) e (B18), então:

$$\left(\rho u_e\right)^{t+1}=\frac{\left(\rho u_P\right)^{t+1}+\left(\rho u_E\right)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho u_e)^{t+1} = \frac{(\rho u_P)^t + (\rho u_E)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_E}\right)\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_W^2 - \rho u_E^2 + \rho u_P^2 - \rho u_{EE}^2}{4}\right) + \\ \left(\dfrac{p_W - p_E + p_P - p_{EE}}{4}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{u_{EE} - u_P}{\partial z_e} - \dfrac{u_W - u_E}{\partial z_w}\right)\end{array}\right]\Delta r\,\dfrac{(r_P + r_E)}{2} + \\ \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{r_s(\rho u_S v_S + \rho u_{SE} v_{SE}) - r_n(\rho u_N v_N + \rho u_{NE} v_{NE}) + (r_s - r_n)(\rho u_P v_P + \rho u_E v_E)}{4}\right) + \\ \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{r_n(u_N - u_P + u_{NE} - u_E)}{\partial r_n} - \dfrac{r_s(u_P - u_S + u_E - u_{SE})}{\partial r_s}\right) + \\ \dfrac{\mu}{4}\left(\begin{array}{l}\dfrac{r_n(v_{NE} + v_E - v_{NW} - v_W + v_{NE_EE} + v_{EE} - v_N - v_P)}{\partial x_e + \partial x_w} - \\ \dfrac{r_S(v_E + v_{SE} - v_W - v_{SW} + v_{EE} + v_{SE_EE} - v_S - v_P)}{\partial z_e + \partial z_w}\end{array}\right)\end{array}\right]\Delta z\end{array}\right\}^t \qquad \text{(B19)}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*w*" na direção z:

Para a face "*w*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B7) para o ponto "*P*", procedimento esse já realizado e resultando na Equação (B13). Para a face "*w*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B7) para o ponto "*W*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_w = \left[\frac{\rho u_W^2 + \rho u_{WW}^2}{2} + \frac{p_W + p_{WW}}{2} - 2\mu\left(\frac{u_W - u_{WW}}{\partial z_w}\right)\right]_w \qquad \text{(B20)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_e = \left[\frac{\rho u_P^2 + \rho u_W^2}{2} + \frac{p_P + p_{WW}}{2} - 2\mu\left(\frac{u_P - u_W}{\partial z_e}\right)\right]_e \qquad \text{(B21)}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_s = \left[\frac{\rho u_W v_W + \rho u_{SW} v_{SW}}{2} - \mu\left(\frac{u_W - u_{SW}}{\partial r_s}\right) - \mu\left(\frac{\dfrac{v_P + v_S}{2} - \dfrac{v_{WW} + v_{SW_WW}}{2}}{\partial z_w + \partial z_e}\right)\right]_s \qquad \text{(B22)}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right)_n=\left[\frac{\rho u_W v_W+\rho u_{NW} v_{NW}}{2}-\mu\left(\frac{u_{NW}-u_W}{\partial y_n}\right)-\mu\left(\frac{\frac{v_N+v_P}{2}-\frac{v_{WW}+v_{NW_WW}}{2}}{\partial x_w+\partial x_e}\right)\right]_n \tag{B23}$$

substituindo as Equações (B20), (B21), (B22) e (B23) na Equação (B7) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\left(\rho u_W\right)^{t+1}=\left(\rho u_W\right)^t+\frac{\Delta t}{V_W}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\rho u_{WW}^2-\rho u_P^2}{2}\right)+\left(\frac{p_{WW}-p_P}{2}\right)+2\mu\left(\frac{u_P-u_W}{\partial z_e}-\frac{u_W-u_{WW}}{\partial z_w}\right)\right]r_W\Delta r+\\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{r_s\rho u_{SW}v_{SW}-r_n\rho u_{NW}v_{NW}+\left(r_s-r_n\right)\rho u_W v_W}{2}\right)+\\ \mu\left(\frac{r_s\left(u_{NW}-u_W\right)}{\partial r_n}-\frac{r_n\left(u_W-u_{SW}\right)}{\partial r_s}\right)+\\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{r_n\left(v_N+v_P-v_{NW_WW}-v_{WW}\right)-r_s\left(v_P+v_S-v_{SW_WW}-v_{WW}\right)}{\partial z_e+\partial z_w}\right)\end{array}\right]\Delta z\end{array}\right\}^t \tag{B24}$$

para encontrar a velocidade na face "*w*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (B13) e (B24), então:

$$\left(\rho u_w\right)^{t+1}=\frac{\left(\rho u_P\right)^{t+1}+\left(\rho u_W\right)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho u_w)^{t+1} = \frac{(\rho u_P)^t + (\rho u_W)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_W}\right)\left\{\begin{bmatrix} \left(\frac{\rho u_W^2 - \rho u_E^2 + \rho u_{WW}^2 - \rho u_P^2}{4}\right) + \\ \left(\frac{p_W - p_E + p_{WW} - p_P}{4}\right) + \\ \mu\left(\frac{u_E - u_W}{\partial z_e} - \frac{u_{WW} - u_P}{\partial z_w}\right) \end{bmatrix} \Delta r \frac{(r_P + r_W)}{2} + \right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} \left(\frac{r_s(\rho u_S v_S + \rho u_{SW} v_{SW}) - r_n(\rho u_N v_N + \rho u_{NW} v_{NW}) + (r_s - r_n)(\rho u_P v_P + \rho u_N v_N)}{4}\right) + \\ \frac{\mu}{2}\left(\frac{r_n(u_N - u_P + u_{NW} - u_W)}{\partial r_n} - \frac{r_s(u_P - u_S + u_W - u_{SW})}{\partial r_s}\right) + \\ \frac{\mu}{4}\begin{pmatrix} \frac{r_n(v_{NE} + v_E - v_{NW} - v_W + v_N + v_P - v_{NW_WW} - v_{WW})}{\partial z_e + \partial z_w} - \\ \frac{r_s(v_E + v_{SE} - v_W - v_{SW} + v_P + v_S - v_{SW} - v_{SW_WW})}{\partial z_e + \partial z_w} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Delta z \right\}^t \quad \text{(B25)}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*n*" na direção r:

Para a face "*n*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B8) para o ponto "*P*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_w = \left[\frac{\rho u_P v_P + \rho u_W v_W}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_N + u_{NW}}{2} - \frac{u_S + u_{SW}}{2}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) - \mu\left(\frac{v_P - v_W}{\partial r_w}\right)\right]_w \quad \text{(B26)}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_e = \left[\frac{\rho u_P v_P + \rho u_E v_E}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NE} + u_N}{2} - \frac{u_{SE} + u_S}{2}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) - \mu\left(\frac{v_E - v_P}{\partial z_e}\right)\right]_e$$

(B27)

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s = \left[\frac{\rho v_P^2 + \rho v_S^2}{2} + \frac{p_P + p_S}{2} - 2\mu\left(\frac{v_P - v_S}{\partial r_s}\right)\right]_s \quad \text{(B28)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n = \left[\frac{\rho v_P^2 + \rho v_N^2}{2} + \frac{p_P + p_N}{2} - 2\mu\left(\frac{v_N - v_P}{\partial r_n}\right)\right]_n \quad \text{(B29)}$$

substituindo as Equações (B26), (B27), (B28) e (B29) na Equação (B8) e reorganizando os termos, tem-se:

$$(\rho v_P)^{t+1} = (\rho v_P)^t + \frac{\Delta t}{V_P}\left\{\left[\left(\frac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E}{2}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) + \mu\left(\frac{v_E - v_P}{\partial z_e} - \frac{v_P - v_W}{\partial z_w}\right)\right] r_P \Delta r + \left[\left(\frac{r_s \rho v_S^2 - r_n \rho v_N^2 + (r_s - r_n)\rho v_P^2}{2}\right) + \left(\frac{r_s p_S - r_n p_N + (r_s - r_n) p_P}{2}\right) + 2\mu\left(\frac{r_n (v_N - v_P)}{\partial r_n} - \frac{r_s (v_P - v_S)}{\partial r_s}\right)\right] \Delta z\right\}^t - \Delta t\left\{\frac{2\mu v_P}{r_P^2} - \frac{p_P}{r_P}\right\}^t \quad \text{(B30)}$$

para a face "*n*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B8) para o ponto "*N*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_w = \left[\frac{\rho u_N v_N + \rho u_{NW} v_{NW}}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NN} + u_{NN_NW}}{2} - \frac{u_P + u_W}{2}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) - \mu\left(\frac{v_N - v_{NW}}{\partial z_w}\right)\right]_w \quad \text{(B31)}$$

$$\left(\rho uv - \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_e = \left[\frac{\rho u_N v_N + \rho u_{NE} v_{NE}}{2} - \mu\left(\frac{\frac{u_{NN_NE} + u_{NN}}{2} - \frac{u_E + u_P}{2}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) - \mu\left(\frac{v_N - v_{NE}}{\partial z_e}\right)\right]_e \quad \text{(B32)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s = \left[\frac{\rho v_N^2 + \rho v_P^2}{2} + \frac{p_N + p_P}{2} - 2\mu\left(\frac{v_N - v_P}{\partial r_s}\right)\right]_s \quad \text{(B33)}$$

$$\left(\rho u^2 + p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n = \left[\frac{\rho v_{NN}^2 + \rho v_N^2}{2} + \frac{p_{NN} + p_N}{2} - 2\mu\left(\frac{v_{NN} - v_N}{\partial r_n}\right)\right]_n \quad \text{(B34)}$$

substituindo as Equações (B31), (B32), (B33) e (B34) na Equação (B8) e reorganizando os termos, tem-se:

$$(\rho v_N)^{t+1} = (\rho v_N)^t + \frac{\Delta t}{V_N}\left\{\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_{NW} v_{NW} - \rho u_{NE} v_{NE}}{2}\right) + \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{u_{NN_NE} - u_{NN_NW} + u_W - u_E}{\partial r_n + \partial r_s}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{v_{NE} - v_N}{\partial z_e} - \dfrac{v_N - v_{NW}}{\partial z_w}\right)\end{array}\right] r_N \Delta r + \right.$$
$$\left.\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{r_s \rho v_P^2 - r_n \rho v_{NN}^2 + (r_s - r_n)\rho v_N^2}{2}\right) + \\ \left(\dfrac{r_s p_P - r_n p_{NN} + (r_s - r_n) p_N}{2}\right) + 2\mu\left(\dfrac{r_n (v_{NN} - v_N)}{\partial r_n} - \dfrac{r_s (v_N - v_P)}{\partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta z\right\}^t - \quad \text{(B35)}$$
$$\Delta t\left\{\frac{2\mu v_N}{r_N^2} - \frac{p_N}{r_N}\right\}^t$$

para encontrar a velocidade na face "*n*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (B30) e (B35), então:

$$(\rho u_n)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^{t+1} + (\rho v_N)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho v_n)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^t + (\rho v_N)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_N}\right)\left\{\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E + \rho u_{NW} v_{NW} - \rho u_{NE} v_{NE}}{4}\right) + \\ \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{v_E - v_P + v_{NE} - v_N}{\partial z_e} - \dfrac{v_P - v_W + v_N - v_{NW}}{\partial z_w}\right) + \\ \dfrac{\mu}{4}\left(\dfrac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE} + u_{NN_NE} - u_{NN_NW} + u_W - u_E}{\partial r_n + \partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta r \frac{(r_P + r_N)}{2} + \right.$$
$$\left.\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{r_s (\rho v_S^2 + \rho v_P^2) - r_n (\rho v_N^2 + \rho v_{NN}^2) + (r_s - r_n)(\rho v_P^2 - \rho v_N^2)}{4}\right) + \\ \left(\dfrac{r_s (p_S + p_P) - r_n (p_N + p_{NN}) + (r_s - r_n)(p_P + p_N)}{4}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{r_n (v_{NN} - v_P)}{\partial r_n} - \dfrac{r_s (v_S - v_N)}{\partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta z\right\}^t$$
$$- \Delta t\left[\mu\left(\frac{v_P}{r_P^2} + \frac{v_N}{r_N^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_P}{r_P} + \frac{p_N}{r_N}\right)\right] \quad \text{(B36)}$$

- Interpolação das velocidades na Face "*s*" na direção r:

Para a face "*s*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B8) para o ponto "*P*", procedimento esse já realizado e resultando na Equação (B30). Para a face "*s*" do volume de controle "*P*", na Figura B1, deve-se aplicar a Equação (B8) para o ponto "*S*" e para isso considera-se as seguintes expressões:

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_w=\left[\frac{\rho u_S v_S+\rho u_{SW} v_{SW}}{2}-\mu\left(\frac{\frac{u_P+u_W}{2}-\frac{u_{SS}+u_{SW_SW}}{2}}{\partial r_n+\partial r_s}\right)-\mu\left(\frac{v_S-v_{SW}}{\partial z_w}\right)\right]_w \tag{B37}$$

$$\left(\rho uv-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]\right)_e=\left[\frac{\rho u_S v_S+\rho u_{SE} v_{SE}}{2}-\mu\left(\frac{\frac{u_E+u_P}{2}-\frac{u_{SS}+u_{SS_SE}}{2}}{\partial r_n+\partial r_s}\right)-\mu\left(\frac{v_S-v_{SE}}{\partial z_e}\right)\right]_e \tag{B38}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s=\left[\frac{\rho v_S^2+\rho v_{SS}^2}{2}+\frac{p_S+p_{SS}}{2}-2\mu\left(\frac{v_S-v_{SS}}{\partial r_s}\right)\right]_s \tag{B39}$$

$$\left(\rho u^2+p-2\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n=\left[\frac{\rho v_P^2+\rho v_S^2}{2}+\frac{p_P+p_S}{2}-2\mu\left(\frac{v_P-v_S}{\partial r_n}\right)\right]_n \tag{B40}$$

substituindo as Equações (B37), (B38), (B39) e (B40) na Equação (B8) e reorganizando os termos, tem-se:

$$(\rho v_S)^{t+1} = (\rho v_S)^t + \frac{\Delta t}{V_S}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_{SW} v_{SW} - \rho u_{SE} v_{SE}}{2}\right) + \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{u_E - u_W + u_{SS_SW} - u_{SS_SE}}{\partial r_n + \partial r_s}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{v_{SE} - v_S}{\partial z_e} - \dfrac{v_S - v_{SW}}{\partial z_w}\right)\end{array}\right] r_S \Delta r + \\ \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{r_s \rho v_{SS}^2 - r_n \rho v_P^2 + (r_s - r_n)\rho v_S^2}{2}\right) + \left(\dfrac{r_s p_{SS} - r_n p_P + (r_s - r_n) p_S}{2}\right) + \\ 2\mu\left(\dfrac{r_n (v_P - v_S)}{\partial r_n} - \dfrac{r_s (v_S - v_{SS})}{\partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta z\end{array}\right\}^t \\ - \Delta t\left\{\frac{2\mu v_S}{r_S^2} - \frac{p_S}{r_S}\right\}^t \end{array} \tag{B41}$$

para encontrar a velocidade na face "*s*" deve-se fazer uma média aritmética entre as Equações (B30) e (B41), então:

$$(\rho u_s)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^{t+1} + (\rho v_S)^{t+1}}{2}$$

$$(\rho v_s)^{t+1} = \frac{(\rho v_P)^t + (\rho v_S)^t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{V_P} + \frac{\Delta t}{V_S}\right)\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\rho u_W v_W - \rho u_E v_E + \rho u_{SW} v_{SW} - \rho u_{SE} v_{SE}}{4}\right) + \\ \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{v_E - v_P + v_{SE} - v_S}{\partial z_e} - \dfrac{v_P - v_W + v_S - v_{SW}}{\partial z_w}\right) + \\ \dfrac{\mu}{4}\left(\dfrac{u_{NE} - u_{NW} + u_{SW} - u_{SE} + u_E - u_W + u_{SS_SW} - u_{SS_SE}}{\partial r_n + \partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta r \dfrac{(r_P + r_S)}{2} + \\ \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{r_s (\rho v_S^2 + \rho v_{SS}^2) - r_n (\rho v_N^2 + \rho v_P^2) + (r_s - r_n)(\rho v_S^2 + \rho v_P^2)}{4}\right) + \\ \left(\dfrac{r_s (p_S + p_{SS}) - r_n (p_N + p_P) + (r_s - r_n)(p_S + p_P)}{4}\right) + \\ \mu\left(\dfrac{r_n (v_N - v_S)}{\partial r_n} - \dfrac{r_s (v_{SS} - v_P)}{\partial r_s}\right)\end{array}\right] \Delta z\end{array}\right\}^t \\ - \Delta t\left[\mu\left(\frac{v_P}{r_P^2} + \frac{v_S}{r_S^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_P}{r_P} + \frac{p_S}{r_S}\right)\right] \end{array} \tag{B42}$$

APÊNDICE C – Equação para a Correção da Pressão

O método de acoplamento pressão-velocidade utilizado no esquema numérico desenvolvido neste trabalho é o método SIMPLE. O método SIMPLE faz o acoplamento entre o campo de velocidade com o campo de pressão através de correções nestas variáveis. Para esse fim, o método utiliza as seguintes equações de correção:

$$p = p_0 + p' \tag{C1}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' \tag{C2}$$

na qual as variáveis p e $\boldsymbol{v}$ são os valores atuais da pressão e do vetor da velocidade, respectivamente, as variáveis p_0 e $\boldsymbol{v}_0$ são os valores estimados da pressão e do vetor velocidade e as variáveis p' e $\boldsymbol{v}'$ são as correções de cada variável.

Segundo Maliska (MALISKA, C.R., 2004) a equação que faz a correção das componentes das velocidades é definida através da subtração das equações do movimento supondo a melhor estimativa do campo de pressão com as equações do movimento supondo o campo correto de pressão. Considerando as equações da conservação da quantidade de movimento para o caso axissimétrico, tem-se as seguintes expressões:

$$\left(v_z\right)' = -A\frac{\partial p'}{\partial z} \tag{C3}$$

$$\left(v_r\right)' = -A\frac{\partial p'}{\partial r} \tag{C4}$$

onde, A é definido com o quociente entre um incremento de tempo fictício e a massa específica, segundo Tannehill *et al*. (TANNEHILL, J.C. *et al*., 1997). Utilizando a malha apresentada na Figura C1 e a substituição das Equações (C1) e (C2) nas Equações (C3) e (C4), tem-se as

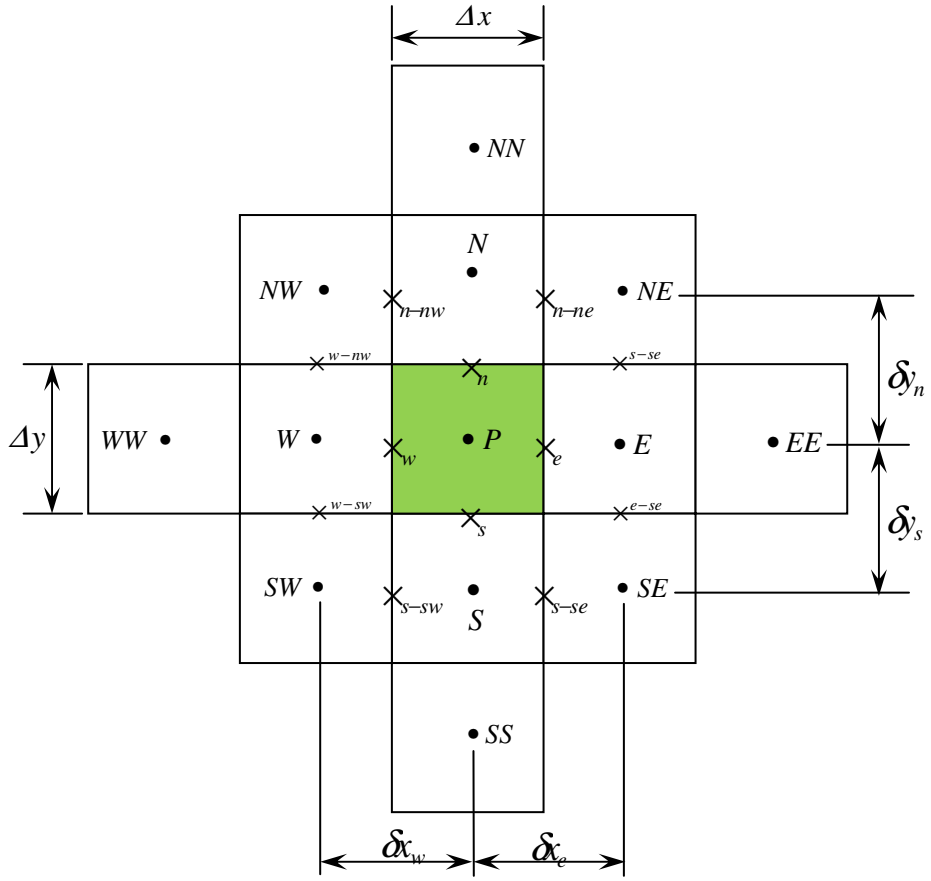


Figura C1 – Representação do volume de controle principal e seus vizinhos (ZDANSKI, P.S.B. *et al.*, 2008).

seguintes equações para as correções das velocidades em cada uma das faces do volume de controle:

$$\left(v_z\right)'_e = \left(v_z\right)^*_e - A\left(\frac{p'_E - p'_P}{\delta z_e}\right) \tag{C5a}$$

$$\left(v_z\right)'_w = \left(v_z\right)^*_w - A\left(\frac{p'_P - p'_W}{\delta z_w}\right) \tag{C5b}$$

$$\left(v_r\right)'_n = \left(v_r\right)^*_n - A\left(\frac{p'_N - p'_P}{\delta r_n}\right) \tag{C5c}$$

$$\left(v_r\right)'_s = \left(v_r\right)^*_s - A\left(\frac{p'_P - p'_S}{\delta r_s}\right) \tag{C5d}$$

sendo que os subscritos minúsculos representam a posição na face do volume de controle e os subscritos maíusculos representam o centro do volume de controle, conforme a Figura C1.

As velocidades v_r e v_z devem ser avaliadas nas faces dos volumes de controle, isto é, deve haver um deslocamento das velocidades avaliadas no centro do volume de controle para as faces dos volumes de controle para haja o acoplamento ideal entre o campo de velocidade e o campo de pressão. Para esse processo, foi utilizado neste trabalho, a interpolação de Rhie-Chow (RHIE, C.M. *et al*., 1983) ou a interpolação aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento (*Momemtum Interpolation method*). As equações para o caso bidimensional são desenvolvidas e apresentadas no APÊNDICE A e para o caso axissimétrico as equações são desenvolvidas e apresentadas no APÊNDICE B.

Para determinar a equação de correção da pressão, isto é, a equação que calcula o valor p' substitui-se as Equações (C5) na equação da conservação da massa, que para o caso axissimétrico de um escoamento incompressível é dada por:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\rho v_r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial z} = 0 \tag{C6}$$

sendo, *r* é a coordenada radial. Gerando uma equação de Poisson, que possui a seguinte estrutura:

$$p'_P = \left(A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_S p'_S + B\right) / A_P \tag{C7}$$

onde:

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \tag{C8a}$$

$$A_E = \frac{r\rho A\Delta t\Delta r}{\delta z_e} \tag{C8b}$$

$$A_W = \frac{r\rho A\Delta t\Delta r}{\delta z_w} \tag{C8c}$$

$$A_N = \frac{r_n\rho A\Delta t\Delta z}{\delta r_n} \tag{C8d}$$

$$A_S = \frac{r_s\rho A\Delta t\Delta z}{\delta r_s} \tag{C8e}$$

$$B = \left[(v_z)_w^* - (v_z)_e^*\right]\rho r\Delta r + \left[r_s(v_r)_s^* - r_n(v_r)_n^*\right]\rho\Delta z \tag{C8f}$$

$$A = \frac{\Delta t}{\rho} \tag{C8g}$$

na qual, r_n e r_s são, respectivamente, o raio sobre a face *n* e sobre a face *s* do volume de controle.

APÊNDICE D – Modelos de Atrito

D1 Atrito de Coulomb

A modelagem matemática do atrito de Coulomb tem como ponto de partida a relação da tensão de atrito com a pressão normal a superfície em que está agindo o atrito, dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{nt} = \mu \sigma_n \tag{D1.1}$$

Onde, τ_{nt} é a tensão de atrito, μ é o coeficiente de Coulomb e σ_n é a pressão normal a superfície. Considerando o material isotrópico e a Lei de Escoamento de von Mises a tensão de atrito pode ser escrita na forma:

$$\tau_{nt} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}} \dot{\gamma}_{nt} \tag{D1.2}$$

Sendo $\dot{\bar{\varepsilon}}$ é a taxa de deformação efetiva, $\bar{\sigma}$ é a tensão efetiva e $\dot{\gamma}_{nt}$ a taxa de deformação de cisalhamento plástico.

Considerando o esquema da Figura D1, que representa o perfil da velocidade tangencial perto da superfície de atrito. Na qual pode-se perceber o gradiente entre os valores das velocidades tangenciais $(v_t)_1$ e $(v_t)_2$. Da qual pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\dot{\gamma}_{nt} = \frac{\Delta v_t}{\Delta n} \tag{D1.3}$$

Na qual Δv_t é a diferença entre as velocidade tangenciais e Δn é a distância entre as duas velocidade tangenciais.

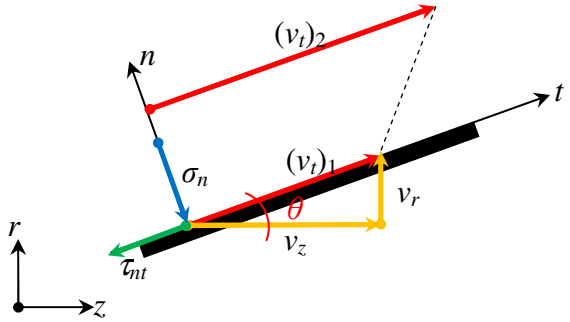


Figura D1 – Esquema representativo da relação entre a velocidade tangencial na região perto da interface matriz-material.

Substituindo as Equações (D1.2) e (D1.3) na Equação (D1.1), tem-se:

$$\frac{2\overline{\sigma}}{3\dot{\overline{\varepsilon}}}\frac{\Delta v_t}{\Delta n}=\mu\sigma_n \tag{D1.4}$$

Reorganizando a Equação (D1.4), tem-se:

$$\Delta v_t=\frac{3\dot{\overline{\varepsilon}}\mu\sigma_n\Delta n}{2\overline{\sigma}} \tag{D1.5}$$

Considerando v_t é a velocidade resultante entre v_z e v_r, então v_t pode ser excrito por:

$$v_t=\sqrt{v_z^2+v_r^2} \tag{D1.6}$$

Substituindo a Equação (D1.6) na Equação (D1.5), tem-se:

$$\Delta\left(\sqrt{v_z^2+v_r^2}\right)=\frac{3\dot{\overline{\varepsilon}}\mu\sigma_n\Delta n}{2\overline{\sigma}} \tag{D1.7}$$

Como v_r pode ser escrito da seguinte forma:

$$v_r=v_z tg\theta \tag{D1.8}$$

Onde, θ é o ângulo entre o eixo z e o eixo t na Figura D1. Substituindo a Equação (D1.8) na Equação (D1.7), tem-se:

$$\Delta\left(\sqrt{v_z^2 + v_z^2 tg^2\theta}\right) = \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}\mu\sigma_n \Delta n}{2\bar{\sigma}}$$

$$\Delta\left(v_z\sqrt{1 + tg^2\theta}\right) = \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}\mu\sigma_n \Delta n}{2\bar{\sigma}}$$

$$\Delta v_z = \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}\mu\sigma_n \Delta n \cos\theta}{2\bar{\sigma}} \tag{D1.9}$$

Considerando o gradiente entre as velocidade da direção z na linha 1 e 2, tem-se:

$$v_{z1} = v_{z2} - \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}\mu\sigma_n \Delta n \cos\theta}{2\bar{\sigma}} \tag{D1.10}$$

D2 Fator de Atrito

A modelagem matemática do Fator de atrito tem como ponto de partida a relação da tensão de atrito com o limite de elasticidade no cisalhamento, dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{nt} = mK \tag{D2.1}$$

Onde, τ_{nt} é a tensão de atrito, m é o fator de atrito e K é o limite de elasticidade no cisalhamento. Considerando o material isotrópico e a Lei de Escoamento de von Mises a tensão de atrito pode ser escrita na forma:

$$\tau_{nt} = \frac{2\overline{\sigma}}{3\dot{\overline{\varepsilon}}}\dot{\gamma}_{nt} \tag{D2.2}$$

Sendo $\dot{\overline{\varepsilon}}$ é a taxa de deformação efetiva, $\overline{\sigma}$ é a tensão efetiva e $\dot{\gamma}_{nt}$ a taxa de deformação de cisalhamento plástico.

Considerando o esquema da Figura D1, que representa o perfil da velocidade tangencial perto da superfície de atrito. Na qual pode-se perceber o gradiente entre os valores das velocidades tangenciais $(v_t)_1$ e $(v_t)_2$. Da qual pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\dot{\gamma}_{nt} = \frac{\Delta v_t}{\Delta n} \tag{D2.3}$$

na qual Δv_t é a diferença entre as velocidade tangenciais e Δn é a distância entre as duas velocidade tangenciais. Substituindo as Equações (D2.2) e (D2.3) na Equação (D2.1), tem-se:

$$\frac{2\overline{\sigma}}{3\dot{\overline{\varepsilon}}}\frac{\Delta v_t}{\Delta n} = mK \tag{D2.4}$$

reorganizando a Equação (D2.4), tem-se:

$$\Delta v_t = \frac{3\dot{\overline{\varepsilon}} mK \Delta n}{2\overline{\sigma}} \tag{D2.5}$$

assumindo que o limite de elasticidade no cisalhamento pode ser escrito por:

$$K = \frac{\overline{\sigma}}{2} \tag{D2.6}$$

considerando v_t é a velocidade resultante entre v_z e v_r, então v_t pode ser excrito por:

$$v_t = \sqrt{v_z^2 + v_r^2} \tag{D2.7}$$

substituindo as Equações (D2.6) e (D2.7) na Equação (D2.5), tem-se:

$$\Delta\left(\sqrt{v_z^2 + v_r^2}\right) = \frac{3\dot{\varepsilon} m \Delta n}{4} \tag{D2.8}$$

como v_r pode ser escrito da seguinte forma:

$$v_r = v_z tg\theta \tag{D2.9}$$

onde, θ é o ângulo entre o eixo z e o eixo t na Figura D1. Substituindo a Equação (D2.9) na Equação (D2.8), tem-se:

$$\Delta\left(\sqrt{v_z^2 + v_z^2 tg^2\theta}\right) = \frac{3\dot{\varepsilon} m \Delta n}{4}$$

$$\Delta\left(v_z\sqrt{1 + tg^2\theta}\right) = \frac{3\dot{\varepsilon} m \Delta n}{4}$$

$$\Delta v_z = \frac{3\dot{\varepsilon} m \Delta n \cos\theta}{4} \tag{D2.10}$$

considerando o gradiente entre as velocidade da direção z na linha 1 e 2, tem-se:

$$v_{z1} = v_{z2} - \frac{3\dot{\varepsilon} m \Delta n \cos\theta}{4} \tag{D2.11}$$