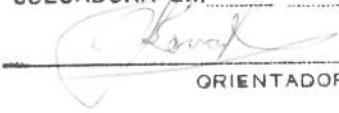


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Valter Silva Junior
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 10/03 95.

ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo Numérico de um Escoamento Bifásico,
Laminar: Padrões Anular e Estratificado**

Autor: Valter Silva Junior
Orientador: Antonio Carlos Bannwart

14/95

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade
como parte dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.

Março de 1995



UNIDADE BC
 Nº GUARDA: 1
 T/UNICAMP
 288
 V. 1 Ex. 1
 Nº DE 24 324
 PREC. 433/95
 C. 1 D. 1
 Nº DO R\$ 11,00
 DATA 03/05/95
 Nº CDO

CM-00068533-8

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL - UNICAMP

Silva Junior, Walter

5130

Estudo numerico de um escoamento bifasico, laminar : padroes
anular e estratificado / Walter Silva Junior. - - Campinas, SP :
[s.n.l, 1995.

Orientador : Antonio Carlos Bannwart.

Dissertacao (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecanica.

1. Escoamento bifasico. 2. Volumes finitos. 3. Metodos numericos. 4. Flux-Spline. 5. Malha nao-ortogonal.

1. Bannwart, Antonio Carlos. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

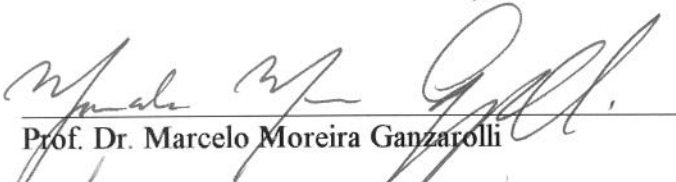
**Estudo Numérico de um Escoamento Bifásico,
Laminar: Padrões Anular e Estratificado**

Autor: Valter Silva Junior
Orientador: Antonio Carlos Bannwart

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart, Presidente



Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli



Prof. Dr. Luciano Magno Costalonga Varejão

Campinas, 10 de março de 1995.

Errata

Volvendo à anotação feita no parágrafo terceiro da página 38, uma adenda ao **Capítulo 4** é representada pelo texto a seguir:

Já aludimos à ocorrência de valores incoerentes para o perfil de velocidades. White, em “Viscous Fluid Flow”, editora McGraw-Hill (1974), páginas 125 a 128, comentando solução analítica para o escoamento interno, estacionário, laminar, plenamente desenvolvido, de uma só fase no espaço entre dois cilindros, linhas de centro não-coincidentes, cita autores que, utilizando coordenadas bipolares, propuseram soluções algo imperfeitas. A fim de investigar o erro associado ao uso de malhas não-ortogonais, o programa ATPF.FOR, apêndice A, pode ser executado para razão de viscosidades dinâmicas unitária, raio do núcleo igual a $0,1R$, e $0,89R$ de excentricidade (situação extrema de não-ortogonalidade, porém apenas uma fase escoando), verificando-se que o máximo erro relativo para W - o denominador sendo a maior amplitude do campo de velocidades exatas calculadas nos nós primários - é igual a 0,54%. Sob as mesmas condições, mas excentricidade igual a $0,45R$, em derredor de 0,32% ; e por volta de 0,16% para caso concêntrico, erro este oriundo da discretização efetuada.

Para minha família - cuja lembrança me fez
suportar o banzo, agüentar o repuxo -, com afeto.

“(...) No Piauí, no Ceará, nas Alagoas, canta Amaro, no Piauí, no Ceará, nas Alagoas o macaco voa, o macaco voa. Gostei disso: no Piauí, no Ceará, nas Alagoas o macaco voa, o macaco voa, gostei dessa, que macaco retado. Como é esse macaco que voa Amaro? Bom, tem umas asas, umas asas de macaco mesmo, umas asas de carne, como morcego, aquelas asonas de macaco, só vendo. Deixe de lorota, tu anda contando potoca, nunca ninguém me disse que macaco avoa, macaco não é avião. É no Piauí, disse Amaro, no Ceará e nas Alagoas. Bom, só se é lá, porque nunca se disse que um macaco sergipano avoa, esses tenho certeza. É no Piauí, mestre, diz Amaro. Pronto, lá possa ser. Até que se um macaco desses de aviação passasse aqui batendo asa, até que a gente podia matar um bicho desses, para ver se tinha o que comer. Cada casa parece um prato de comida, mas o melhor é ir desfastando das casas que não se sabe de quem é, porque pode dar complicação, o melhor é não trastejar na vigilância, arreceio tudo numa hora dessas. Por isso que um macaco desses piauizeiros dando uma avoadazinha pelaqui não era ruim”.

(João Ubaldo Ribeiro, no romance *Sargento Getúlio*)

Agradecimentos

A meus pais e irmãos, por tudo.

Ao professor Antonio Carlos Bannwart, pela sugestão do tema e orientação, paciência e segurança.

Aos colegas, professores e funcionários da Faculdade, pelos tempos vividos, pela acolhida.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico -, por financiar esta pesquisa.

Resumo

Uma solução numérica das equações do momentum, em duas dimensões, para um escoamento bifásico, fluido(s) Newtoniano(s), regime permanente, laminar, axial, plenamente desenvolvido, num conduto longo, na horizontal e com secção transversal circular, é levada a efeito. Os padrões anular e estratificado são considerados presumindo a interface como sendo circular-cilíndrica ou um segmento de arco de uma superfície cilíndrica, possivelmente de curvatura zero (corda). Matematicamente, o fenômeno físico é descrito por equações tipo condução e representa um escoamento potencial.

Para resolver o problema, utiliza-se do método Flux-Spline (Varejão, 1979), o qual baseia-se na formulação de volumes de controle (Patankar, 1980), porque revela-se mais acurado e econômico que outros esquemas. Além disso, foi engendrado para lidar com termos-fonte homogêneos por partes, feição particularmente interessante neste tipo de assunto.

Ademais, a presença de uma superfície de separação entre as fases, cuja posição é conhecida previamente, impõe o uso de uma estrutura de coordenadas curvilíneas generalizadas, portanto o trabalho de Hsu (1981), que estendeu o conceito supra mencionado, originalmente derivado para coordenadas Cartesianas, é empregado.

Os resultados são confrontados àqueles investigados por Bentwich (1964) e as comparações em termos de vazões volumétricas mostram muito boa concordância. Aquele autor concebeu uma solução analítica sob as mesmas premissas feitas aqui, todavia a referida técnica numérica não está restrita a tais limitações: apenas, para um problema em especial, uma malha computacional apropriada deve ser construída a fim de mapear o domínio de cálculo.

Abstract

A numerical solution of the two-dimensional momentum equations for a two-phase, Newtonian fluid(s), steady, laminar, axial, fully developed flow in a long, horizontal, circular pipe is conducted. The annular and stratified patterns are considered by assuming the interface between the phases to be either circular-cylindrical or an arc-segment of a cylindrical surface, possibly of zero curvature (chord). Mathematically, the physical phenomenon is described by conduction-type governing equations and represents a potential flow.

To solve the problem, the Flux-Spline method (Varejão, 1979), built on the basis of the control-volume formulation (Patankar, 1980), is used, because it shows to be more accurate and economic than other schemes. Besides, it was devised to handle homogeneous by parts source-terms, a feature particularly interesting in this type of question.

Moreover, the presence of the interface, whose position is known in advance, imposes the use of a general curvilinear coordinates frame, hence the work of Hsu (1981), who extended the aforementioned concept, originally derived to Cartesian coordinates, is utilized.

The results are confronted against the calculations carried out by Bentwich (1964) and comparisons in terms of volumetric flow rates show a very good match. That author constructed an analytical solution under the same assumptions made here, although the referred numerical technique is not restricted to such limitations: only, for a given problem, an appropriate computing mesh must be placed to map the domain of calculation.

Conteúdo

	Introdução	1
Capítulo 1	Revisão da Literatura	5
Capítulo 2	Formulação do Método Numérico	10
	2.1 Coordenadas Curvilíneas	10
	2.2 Conceito de Volumes de Controle	12
	2.2.1 Discretização da Integral de Superfície	14
	2.2.2 Discretização da Integral de Volume	19
	2.2.3 Forma Integrada da Equação de Conservação.....	19
	2.3 Método Flux-Spline para Problemas Difusivos.....	20
	2.4 Técnica Algébrica para Geração de Malha Computacional	28
Capítulo 3	Aplicação ao Escoamento Bifásico.....	31
	3.1 Modelo Matemático.....	31
	3.1.1 Equações de Governo	31
	3.1.2 Condições de Contorno e de Continuidade na Interface	31
	3.1.3 Adimensionalização Empregada	32
	3.1.4 Comentários.....	33
	3.2 Padrão Anular	33
	3.2.1 Discretização do Domínio	33
	3.2.2 Valor da Função no Pólo: Teorema de Green	34
	3.3 Padrão Estratificado.....	37
	3.3.1 Discretização do Domínio	37
Capítulo 4	Resultados e Discussão	38
	Conclusão e Recomendações.....	50
	Referências.....	51
	Apêndice A Listagem dos Programas Computacionais.....	53
	Apêndice B Memória de Cálculo.....	81
	Apêndice C Correção por Bloco	83

Lista de Figuras

fig. 1:	Esboço de um escoamento bifásico anular em tubo horizontal.....	1
fig. 2:	Escoamento estratificado em duto circular.....	2
fig. 3:	Fluxo secundário e permuta de massa num escoamento anular gás-líquido	3
fig. 2-1:	Volume de controle típico, em coordenadas curvilíneas.....	13
fig. 2-2:	Volume de controle unidimensional.....	21
fig. 2-3:	Varição de w nos volumes de controle e condição de continuidade.....	22
fig. 2-4:	Volume de controle e posição dos nós	29
fig. 3-1:	Padrão Anular: domínio de cálculo discretizado	34
fig. 3-2:	Linha fechada limitando região no plano e englobando o ponto M_0	35
fig. 3-3:	Padrão Estratificado: domínio de cálculo discretizado.....	37
fig. 4-1:	Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,3 R$	44
fig. 4-2:	Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,5 R$	44
fig. 4-3:	Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,7 R$	45
fig. 4-4:	Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,9 R$	45
fig. 4-5:	Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,3 R$	46
fig. 4-6:	Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,5 R$	46
fig. 4-7:	Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,7 R$	47
fig. 4-8:	Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,9 R$	47

Lista de Tabelas

Tabela 1a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,3R$ e $\gamma = 0,02$	38
Tabela 1b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,3R$ e $\gamma = 10$	39
Tabela 1c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,3R$ e $\gamma = 10^5$	40
Tabela 2a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 0,02$	40
Tabela 2b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 10$	40
Tabela 2c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 10^5$	41
Tabela 3a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 0,02$	41
Tabela 3b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 10$	42
Tabela 3c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 10^5$	42
Tabela 4a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 0,02$	43
Tabela 4b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 10$	43
Tabela 4c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 10^5$	43
Tabela 5a: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, referentes a cada fase, para interface diametral plana	48
Tabela 5b: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, referentes a cada fase, para interface posicionada a uma distância $0,5R$ acima do diâmetro horizontal, curvatura nula	48
Tabela 5c: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, adimensionais, valores numéricos, para interface plana posicionada a uma distância $0,5R$ abaixo do diâmetro horizontal	48
Tabela 6a: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, interface tangenciando o diâmetro horizontal	49
Tabela 6b: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, interface posicionada a uma distância $0,5R$ acima do diâmetro horizontal	49
Tabela 6c: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, ponto médio da interface a uma distância $0,5R$ abaixo do diâmetro horizontal	49

Lista de Símbolos

A_n, A_s, A_e, A_w	faces de um volume de controle, conforme notação dos pontos cardeais
BJ_ξ, CJ_ξ, DJ_ξ	coeficientes na equação de discretização de J_ξ
$\vec{J}$	fluxo difusivo total de w
Ja	Jacobiano da transformação de coordenadas
J_x	grandeza do componente de $\vec{J}$ na direção x
J_y	grandeza do componente de $\vec{J}$ na direção y
J_η	projeção de $\vec{J}$ na direção η
J_ξ	projeção de $\vec{J}$ na direção ξ
R	raio interno do tubo
S	fonte volumétrica de w
Sc	parte constante do termo fonte, já linearizado, S
Sp	coeficiente de $w_{i,j}$ no termo fonte linearizado
W	velocidade local, adimensionalizada
X, Y	coordenadas Cartesianas adimensionais
a_P, a_E, a_W, a_S, a_N	coeficientes na equação de discretização para w
b	termo independente da equação de discretização para w
b_{NO}	quinhão de b , oriundo da não-ortogonalidade da malha
b_S	parcela de b que contém a parte constante de S
b_{SP}	cota de b devida à técnica Flux-Spline
$\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi$	versores tangente, respectivamente, a curvas η e ξ , num ponto qualquer
h_η, h_ξ	fatores de escala, ou coeficientes métricos, nas direções η e ξ , respectivamente
$\vec{i}, \vec{j}$	vetores unitários base do plano Cartesiano, nas direções x e y , respectivamente
$\vec{k}$	versor normal ao espaço Euclidiano que contém o domínio
$\vec{n}$	versor normal a dada superfície
p	pressão hidráulica

$\vec{r}$	vetor posição de um ponto no plano
w	velocidade axial local, forma dimensional
x, y	coordenadas Cartesianas
z	direção longitudinal, ou axial
Γ	coeficiente de difusão de w
$\Delta\eta$	diferença entre as coordenadas η dos traços η_1 e η_2
$\Delta\xi$	diferença entre as coordenadas ξ dos traços ξ_1 e ξ_2
α_η, α_ξ	áreas primárias
β_η, β_ξ	áreas secundárias
γ	razão entre as viscosidades dinâmicas, igual a μ_2/μ_1
η	coordenada no plano transformado
η_1, η_2	identifica linhas coordenadas que compreendem faces de dado volume finito
μ_1, μ_2	viscosidades dinâmicas para cada fase
ξ	coordenada no plano transformado
ξ_1, ξ_2	identifica linhas coordenadas que contêm faces de dado volume finito
π	constante matemática, dada pela razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro

Subscritos

E	ponto adjacente a P , à sua direita
N	ponto contíguo a P , acima deste
P	nó principal em consideração
S	ponto vizinho a P , abaixo deste
W	ponto adjacente a P , à sua esquerda
i	posições discretas na direção ξ
j	posições discretas na direção η
nb	os coeficientes da equação de discretização para w , exceto a_P

1, 2 respectivamente, fase mais densa ou aquela que ocupa a região anular, e a outra fase

Sobrescritos

* valor assumido por uma variável na iteração prévia

^ pseudo-quantidade

→ vetor

Prefixos

d diferencial

dA elemento de área

dV elemento de volume

∂ diferencial parcial

∇ operador gradiente

∇ • divergência de um vetor

∇² operador de Laplace

Outros símbolos

• produto escalar de dois vetores

× produto vetorial

| | módulo ou magnitude de um vetor; ou módulo de um escalar

Introdução

Escoamento bifásico é entendido como o fluxo conjunto de duas fases, sendo motivo de estudo para efeito de projeto de equipamentos e processos. Ocorre em reatores, caldeiras, trocadores de calor e, também, durante produção e transporte de óleo e gás.

No sentido de dirimir dúvidas e preservar a clareza do raciocínio, é preciso tecer algumas considerações quanto ao conteúdo semântico das palavras *fase* e *componente*. À luz da Físico-Química, *fase* é cada porção do sistema, física ou quimicamente diferente, homogênea e mecanicamente separável; ao passo que o número de substâncias necessárias para descrever a composição de cada fase do sistema determina seus *componentes*. Segue-se daí que uma mistura de água com gelo picado constitui um sistema bifásico, com um só componente, e os termos objeto deste esclarecimento devem ser compreendidos nesta acepção.

As fases, em função de suas propriedades físicas, variáveis operacionais (vazões volumétricas) e parâmetros geométricos da instalação, distribuem-se ao longo de um conduto em muitas configurações - denominadas padrões de escoamento -, que diferem entre si pela distribuição espacial da(s) interface(s). Outrossim, a dinâmica e a forma desta(s) superfície(s) de separação determinam as taxas de transporte de momentum, calor e massa, e, conseqüentemente, a estabilidade do sistema.

Sucedendo ainda que um padrão de escoamento pode colapsar em outros arranjos de fases, havendo-se que estudar os critérios de transição. A integração dos vários estágios intermediários, ou fronteiras de transição, resulta em mapas que definem o domínio de existência dos diversos padrões de fluxo, o que permite o desenvolvimento de modelos semi-empíricos para a predição analítica destes.

A modelagem matemática de escoamentos bifásicos segue a abordagem da mecânica do continuum, com equações de campo para cada fase contendo termos adicionais, representativos dos mecanismos de interação entre as mesmas e que tencionam representar a verdadeira física observada nos experimentos. A solução exata de tais equações requer restrições que não existem em termos práticos, pelo que a simulação numérica, suplementada pela investigação experimental, apresenta-se como alternativa viável.

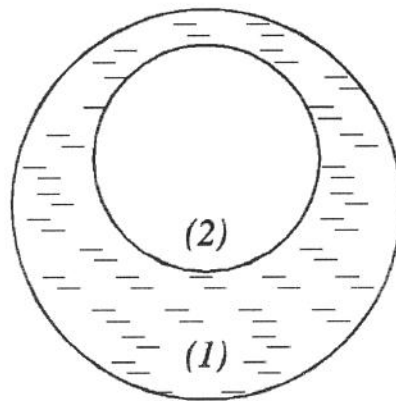


fig. 1: Esboço de um escoamento bifásico anular em tubo horizontal

O padrão de escoamento anular (fig. 1), sendo aquele de maior interesse em processos tecnológicos, e o estratificado (fig. 2), por ser topologicamente similar àquele, visto que ambas fases escoam lado a lado, havendo apenas uma superfície de separação (interface) entre elas, têm merecido a atenção dos pesquisadores em tempos recentes.

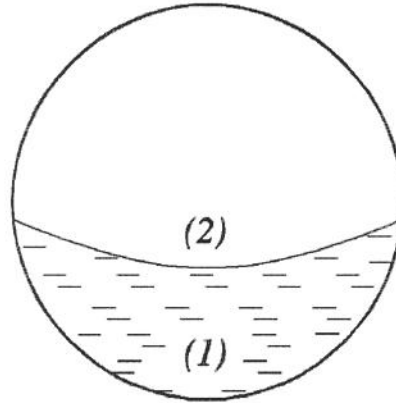


fig. 2: Escoamento estratificado em duto circular

Em escoamentos bifásicos estratificados, o efeito da gravidade sobrepuja a adesão sólido-líquido (na parede do tubo) e a tensão superficial, de tal modo que a fase mais densa ocupa a parte inferior do conduto.

A característica principal do padrão anular é a existência de uma fase constituindo o núcleo do escoamento, enquanto a outra fase forma um anel não-uniforme na região de alta tensão de cisalhamento próxima à superfície interna do tubo. Por isto, assoma como a mais atrativa forma de se obter redução na perda de pressão e economia de potência de bombeamento no transporte de óleos muito viscosos. O princípio é que uma fina película de água é introduzida entre o óleo e a parede do duto, agindo como lubrificante.

Uma outra feição do escoamento anular é que, em tubos horizontais, em razão da gravidade terrestre, há interrupção da simetria axial, resultando num filme de líquido mais espesso no fundo que no topo, e devido à qual o líquido na parte superior do duto tende a escorrer adjacientemente à parede em direção à porção inferior. Admite-se, pois, a existência de uma corrente secundária como meio de transportar líquido do fundo para o topo de modo a conter esta drenagem.

O escoamento anular gás-líquido caracteriza-se por um núcleo excêntrico de gás movendo-se em conjunção com uma película de líquido, na periferia. Quando é ultrapassado o valor crítico das velocidades superficiais das fases (definidas como a razão entre a vazão volumétrica da fase e a área de secção reta do tubo), a interface torna-se altamente agitada, ondas de perturbação aparecem e são “rasgadas” da superfície de separação entre as fases, motivando a penetração de gotículas no núcleo gasoso. Há um contínuo intercâmbio de líquido entre as duas fases: gotículas dispersas na fase gasosa, provenientes do arrasto de líquido, e deposição destas sobre a fase líquida, mantendo-a (fig. 3).

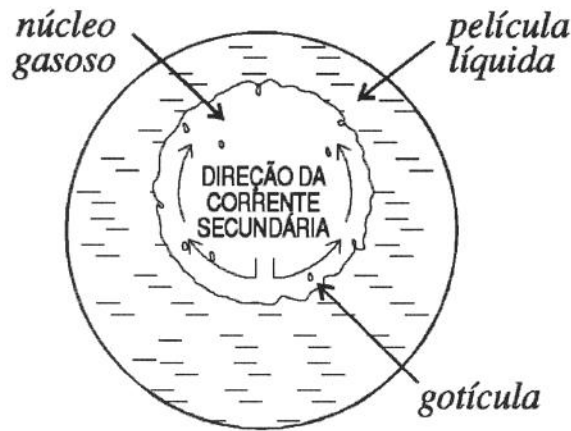


fig. 3: Fluxo secundário e permuta de massa num escoamento anular gás-líquido

Enfim, o padrão anular, líquido-líquido ou gás-líquido, com interface lisa é instável. Verificam-se, invariavelmente, ondas sobre a interface, com mudanças na amplitude, comprimento e simetria, sendo turbulento o regime de escoamento.

Nesse estudo, os padrões anular e estratificado são avaliados numericamente e o problema, univocamente definido, sob as seguintes hipóteses:

- escoamento laminar plenamente desenvolvido, ou seja, as características básicas do movimento das fases em qualquer plano são essencialmente as mesmas que em qualquer plano paralelo;
- fluxo estacionário (regime permanente), isto é, a velocidade das fases em qualquer ponto depende apenas da posição, e não do tempo;
- duto com secção reta circular e na horizontal, quer dizer, linha de simetria da tubulação perpendicular à direção do campo gravitacional;
- interface como sendo circular-cilíndrica, excêntrica, ou um segmento de arco de uma superfície cilíndrica (lisa, portanto), possivelmente de curvatura¹ nula, no caso limite;
- fluidos Newtonianos e incompressíveis.

Assim, o modelo matemático refere-se a um cilindro infinito no interior do qual escoam as fases, o qual representa um cilindro físico de tão grande comprimento que os efeitos nos extremos podem ser desprezados. Por fim, o problema é o que convencionou-se chamar “problema do valor de contorno”, de Dirichlet especificamente, posto que procura-se determinar o perfil de velocidades que satisfaçam a equação de Poisson no domínio considerado e possuam valores estabelecidos sobre a fronteira (zero, devido à condição de não

¹. Em matemática, define-se curvatura de uma superfície como sendo o inverso do seu raio de curvatura.

deslizamento na superfície interna do tubo), atendendo ainda a dois vínculos internos: na interface, continuidade da função (velocidade axial) e da tensão interfacial.

A solução numérica foi comparada com a analítica, devida a Bentwich (1964), que obteve, via Transformação Conforme (Spiegel, 1964) e em termos de coordenadas bipolares (Spiegel, 1959), as velocidades locais dadas por séries.

Por tudo o que foi dito até o momento, o trabalho ora em mãos é estritamente teórico. A pesquisa de uma ferramenta adequada para a resolução de problemas correlatos, e até outros mais complexos, que culminou com a adoção do método Flux-Spline de volumes de controle, concebido por Varejão (1979), constituiu uma das etapas da tarefa. Acresce que o emprego das coordenadas curvilíneas generalizadas para descrever o domínio é uma imposição da fronteira interna do problema, ou seja, da interface. Daí a necessidade de se aplicar a metodologia desenvolvida por Hsu (1981).

Em 1992, Torres realizou ensaios em laboratório com ar e água escoando em tubo horizontal, nos padrões anular e estratificado. Para diversas situações de vazões volumétricas, mediu a geometria real da interface através de sondas de capacitância de fios paralelos, realizando leituras de espessura do filme de líquido tomadas na direção azimutal, a cada 15° , a partir da geratriz inferior e, possivelmente (caso anular), até o topo, por admitir simetria em relação ao diâmetro vertical. A bem dizer, a meta expressa do presente estudo é aferir um método numérico aplicável ao tratamento dos vários tipos de interface por ele detectados e quejandos.

Capítulo 1

Revisão da Literatura

A tecnologia de escoamentos multifásicos em tubulações remonta às últimas quatro décadas, sendo que muitos dos avanços no ramo podem ser acrescentados ao rol das conquistas humanas ditadas pela necessidade.

Na indústria de petróleo, por exemplo, aos engenheiros cabe a tarefa de selecionar, de forma otimizada, diâmetros dos tubos e configuração das linhas que conectam os reservatórios aos equipamentos de superfície. O grau de turbulência das misturas nos primeiros poços explorados era de tal ordem que permitia-se tratá-las como homogêneas, gases e líquidos escoando essencialmente à mesma velocidade, em virtude também das grandes vazões. As equações que regem o escoamento monofásico eram utilizadas, sendo as propriedades físicas avaliadas através de regras de mistura. Na medida que os mais prolíficos campos declinaram em produtividade e outros com menor capacidade foram descobertos, ficou claro que os modelos homogêneos eram inadequados. Novos conceitos deveriam ser adotados.

Nos sistemas de refrigeração dos reatores nucleares, onde o fluxo de calor é controlado, o padrão anular líquido-vapor está presente, ocorrendo redução do filme de líquido por evaporação, assim como por arrasto. Se a taxa de deposição de gotas ao filme é menor que o efeito combinado de evaporação e arrasto, uma condição potencialmente perigosa pode ocorrer: a película de líquido tendendo a desaparecer ocasiona uma deterioração no coeficiente de transferência de calor, que, por seu turno, acarreta perda da capacidade de resfriamento e aceleração do processo de corrosão. Afortunadamente, a indústria nuclear já tinha feito certo progresso na compreensão deste e de outros mecanismos físicos presentes no fenômeno.

Para maiores informações quanto ao que foi tratado até aqui, recomenda-se a leitura de Brill e Arirachakaran (1992), onde a cronologia da técnica de fluxos multifásicos, na qual o caso bifásico é evidentemente o mais simples, é delineada.

Um artigo clássico na área, abordando o escoamento parcialmente estratificado ou anular de duas fases fluidas, viscosas, é o de Bentwich (1964), o qual foi citado na parte introdutória, posto que a solução exata foi tomada como referência a fim de verificar-se a acuidade do método numérico empregado. Até então, as premissas adotadas para a resolução de escoamentos bifásicos eram ainda mais restritivas, tornando mais idealizado o escoamento, pois impunham estratificação completa com interface diametral plana ou fluxo anular-concêntrico.

O referido autor apontou que o problema em estudo, dadas as hipóteses, representava um escoamento potencial num domínio bidimensional, com valores determinados na fronteira e uma descontinuidade, representada pela viscosidade do fluido, ao longo de uma curva (interface). Ainda, a existência de vários outros problemas caracterizados pela mesma equação de governo e condições de contorno nos campos da elasticidade, transferência de calor e eletricidade.

A utilidade da solução geral desenvolvida estendia-se ao conceito de encapsulação de sólidos numa corrente de líquido (faz-se aproximar do infinito a viscosidade do núcleo), que é uma idéia de transporte econômico de sólidos a grandes distâncias. Introduzidas nos dutos em

série, as cápsulas, as quais podem constituir inclusive mercadorias empacotadas, assemelham-se a cilindros infinitamente compridos suportados por um líquido. Tal modelo fornece um critério teórico a partir do qual o desempenho do conjunto pode ser julgado.

Mais tarde, Bentwich et al. (1970) integraram as equações obtidas para o padrão anular, resultando em expressões para as vazões volumétricas de cada fase. Apresentaram algumas medições experimentais para o caso de um longo núcleo cilíndrico, sólido, escoando livremente, verificando concordância com as predições analíticas.

Os cinco trabalhos proximalmente descritos possuem algumas facetas em comum, a saber:

- constituem um estudo experimental e teórico de escoamentos estratificados gás-líquido, plenamente desenvolvidos, em regime permanente, cujo escopo é calcular o *holdup* - fração da secção do tubo ocupada pela fase mais densa - e o gradiente de pressão axial;
- interface suposta como uma corda, ou seja, um segmento de reta cujos extremos pertencem à circunferência que constitui o contorno do domínio, porém paralelo ao diâmetro horizontal, podendo com ele coincidir;
- a posição desta superfície de separação não é conhecida *a priori*, sendo determinada a partir da apreciação das vazões volumétricas das fases, propriedades físicas tais como densidade e viscosidade, diâmetro interno e ângulo de inclinação do tubo;
- todos eles, exceto Issa (1988), efetuam um balanço de momentum nas fases e recorrem a correlações experimentais para obter os coeficientes de atrito nas expressões para as tensões cisalhantes;
- sendo o mesmo o gradiente de pressão que propela as fases, executam um procedimento iterativo que termina quando as quedas de pressão calculadas para gás e líquido são iguais, admitida certa tolerância (no artigo de Taitel e Dukler, de 1976, esta exigência está implicitamente imposta);
- a interface é admitida agir como uma superfície livre com respeito à fase líquida e como uma superfície estacionária com relação ao gás. Em outras palavras, este é tratado como escoando num canal fechado, parede do tubo e interface desempenhando papel de fronteiras rígidas, e aquele, como se estivesse num canal aberto, limitado apenas pela parede do tubo - estas premissas se fazem sentir nas definições dos diâmetros equivalentes (novamente aqui, exceção seja feita ao artigo de Issa).

O modelo de Agrawal et al. (1973) pressupõe regime turbulento de escoamento para a fase gasosa e, na fase líquida, laminar ou turbulento. Estendem parte do perfil de velocidades da situação de um escoamento monofásico à região do *holdup*, a velocidade média aí igual à da situação real. A análise foi feita para tubos horizontais.

Taitel e Dukler (1976) propuseram uma técnica bastante simples para determinar-se o nível de líquido, admitido em regime turbulento, presumindo escoamento turbulento ou laminar para a fase gasosa. Devido a tal característica, o método tem sido utilizado como primeira aproximação para o *holdup* em modelos numéricos concebidos posteriormente.

Supõe-se tubo inclinado.

No trabalho de Cheremisinoff e Davis (1979), ambas fases são consideradas em regime turbulento, tubo horizontal. A informação de como varia a difusividade turbilhonar, desenvolvida para o caso monofásico, permitiu modelar a fase líquida e computar a distribuição de velocidades, unidimensionalmente.

Shoham e Taitel (1984) imaginaram um modelo bidimensional para escoamento gás-líquido, turbulento-turbulento, em tubo inclinado, tratando a fase gasosa como “bulk flow” (movimento de massa, ou macroscópico, do fluido), resolvendo, todavia, o perfil de velocidades para o líquido, aplicando a teoria da difusividade turbilhonar para avaliar a viscosidades turbulenta. A formulação é capaz de predizer, além do campo de velocidades, o *holdup* e o gradiente de pressão axial.

A fim de lidar com a região do domínio mais próxima da parede, ao longo da qual a velocidade decresce abruptamente até zero e a natureza da turbulência muda substancialmente, valeram-se de modelo algébrico, que, aliado ao balanço do momentum nas fases e ao uso das correlações reportadas na literatura para avaliar as tensões cisalhantes médias interfacial e na parede (para o gás), permitiram calcular a velocidade friccional e, assim, determinar a escala do comprimento de mistura (que caracteriza as tensões cisalhantes turbulentas).

Enfim, o modelo clássico de viscosidade turbilhonar de Van Driest foi modificado, porque, utilizado um sistema de coordenadas bipolares, a distância em relação à parede foi calculada ao longo das circunferências que têm centro sobre o eixo horizontal. Por hipótese, já que a formulação foi concebida para escoamento monofásico, tendo significado apenas ao longo de uma distância radial, a partir de certo ponto, admitido limítrofe desta camada limite, a viscosidade turbulenta foi presumida constante.

Cometeram um erro matemático na formulação das equações de governo, pois, ao passo que a viscosidade molecular é propriedade do fluido, a difusividade turbulenta é função do escoamento, dependendo da distância em relação à parede, impossibilitando então que a viscosidade efetiva fosse posta fora da derivada. Muito embora as equações discretizadas tenham sido simplificadas - seus coeficientes ficaram dependendo apenas da distância entre os pontos nodais e o coeficiente de difusão do momentum passou a compor o termo fonte -, no artigo os autores não alertaram para tal fato. A equação do momentum, bidimensional, foi resolvida por um esquema de diferenças finitas, iterativamente, já que a altura da superfície líquida não era conhecida previamente e a malha tinha que ser ajustada a cada ciclo para conformar-se à nova posição da interface.

Confiando em dados empíricos e através da fase gasosa, o gradiente de pressão foi calculado em termos médios. Contudo, à parte o simplismo apontado no parágrafo precedente, advertiram sempre para as limitações da fórmula proposta, reconhecendo estar restrita a baixos valores do número de Reynolds (Re) e admitindo ser necessário um modelo mais próximo da realidade.

Em 1988, Issa apresentou um método para solucionar as equações do movimento, no plano, ambas fases, em tubo inclinado, também para o padrão estratificado, considerando os efeitos de turbulência através de um modelo κ - ϵ , onde κ é a energia cinética de turbulência e ϵ , a sua taxa de dissipação, conquanto não admitisse recirculação no escoamento, suposto unidirecional.

O autor implementou duas versões do modelo κ - ϵ : *padrão*, que compreende altos valores de Re , e *modificada*, para Re de baixa magnitude. O uso de um procedimento alternativo para baixos Re pode assim ser justificado: a presença da parede assegura que ao longo de uma região finita do escoamento, contudo fina, Re é pequeno o suficiente para que a viscosidade molecular influencie diretamente o processo de produção, destruição e transporte de turbulência. Estas interações viscosas, por sua vez, requerem tratamento específico.

Utilizou a formulação convencional de volumes de controle - Patankar (1980) - e discretizou as equações de governo na forma dimensional. Também aqui, a distribuição dos volumes finitos sobre a secção transversal do tubo é alterada a cada passo iterativo até a convergência.

A metodologia proposta é bem mais sofisticada, principalmente por resolver o perfil de velocidades para as duas fases e ter em conta a magnitude do número de Reynolds. Comparando seus resultados, no artigo, para o mesmo caso teste avaliado experimentalmente e numericamente por Shoham e Taitel (1984), além dos obtidos pela técnica de Taitel e Dukler (1976), todos no mesmo gráfico, percebe-se uma discrepância considerável entre os efeitos previstos pelas três proposições, que no entanto atravessam a nuvem de pontos experimentais. As diferenças acentuam-se ao notar-se que foram traçados em escala logarítmica, estando os resultados longe de serem conclusivos.

Sabe-se que os modelos de turbulência são classificados segundo o número de equações suplementares, as quais devem ser resolvidas para fornecer os parâmetros dos mesmos, e que este número varia de *zero* para o mais simples dos modelos algébricos a cerca de *doze* para os mais complexos modelos de tensão de Reynolds. Quando adotou um modelo de duas equações, não precisou recorrer ao balanço de momentum nas fases. Com efeito, sua atitude foi mais criteriosa.

James et al. (1987) avaliaram o escoamento anular, plenamente desenvolvido, adiabático, incompressível, em regime permanente, no interior de um tubo horizontal, supondo ocorrência de arraste e deposição de gotículas, admitindo, portanto, existência de fluxo secundário. Propuseram e incorporaram seu modelo às equações radial e circunferencial do momentum, confrontando as soluções com dados práticos. Concluíram razoáveis as predições para a distribuição da película de líquido, que sabidamente é de interesse técnico.

Na solução de problemas envolvendo fluidos, onde uma forma de deduzir as equações de governo é aplicar o princípio de conservação a um volume de controle infinitesimal no espaço, a escolha do método numérico de volumes finitos é muito natural. Para escoamentos bifásicos, a continuidade do fluxo nas faces em comum dos elementos de volume, feição particular da técnica, é, em virtude do acoplamento das fases pela superfície que as separa, especialmente interessante, pois implica em simplificação da modelagem numérica.

A evolução do método de volumes de controle, até o final dos anos 70, ocorria no sentido de engendrar funções de interpolação mais apropriadas, perfil da variável dependente entre os nós principais da malha, tornando-o consistente com os fenômenos físicos observados. O esquema *upwind*, por exemplo, reconhece a natureza assimétrica da convecção, onde as condições a montante do escoamento têm maior influência que aquelas a jusante.

Em oposição, Varejão (1979) concebeu uma técnica, desenvolvida em coordenadas Cartesianas, que denominou Flux-Spline, na qual a função interpolante é válida ao longo das

células, resultando fluxo e variável dependente contínuos nas interfaces e através das mesmas, e cujos testes revelaram relevantes avanços em relação à abordagem convencional, descrita em Patankar (1980). Ademais, Hsu (1981) estendeu o conceito de formulação de volumes de controle ao sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, para uma e outra técnica.

Recentemente, significantes aperfeiçoamentos têm sido feitos em nossa capacidade de observar, estudar e modelar matematicamente os fenômenos físicos governando os escoamentos multifásicos em tubulações. Medições através de *laser* ao invés de sondas, as quais interferem no fluxo, e utilização de sistemas de aquisição de dados, que permitem a coleta de informações com melhor qualidade e em maior escala, podem ser citados como avanços, assim como o advento dos métodos numéricos para solução das equações de transporte. Há predominância ainda de pesquisas experimentais, entretanto o aperfeiçoamento dos métodos teóricos abre perspectivas alvissareiras para o futuro.

Capítulo 2

Formulação do Método Numérico

O escopo de um método computacional para solução das equações diferenciais que regem os fenômenos físicos de transporte é expressar a informação contínua que as mesmas representam em termos discretos. Destarte, os valores das variáveis dependentes são computados em locais particulares da malha, designados como nós primários, sendo dirigidos por equações algébricas conhecidas como equações de discretização, que ditam a acuidade do método, derivadas das e análogas às equações de governo.

Neste capítulo, um procedimento numérico de volumes de controle é apresentado, em coordenadas curvilíneas generalizadas: a técnica Flux-Spline, devida a Varejão (1979). Muitos dos princípios básicos estabelecidos em Patankar (1980) a norteiam, sendo de bom alvitre a leitura de seus quatro capítulos iniciais. Também por isso, tal obra será amiúde referida nesse texto.

Valorizando a ética de atribuir os créditos a quem de direito, ressalve-se que os sub-itens 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 constituem descrição pormenorizada dos preceitos estabelecidos por Hsu, em 1981, e o tópico 2.3 é uma exposição sinóptica do método Flux-Spline em sua versão para problemas tipo difusão.

A contribuição do autor se encerra na aplicação destas idéias ao problema em questão. Nas seções que seguem, algum conhecimento de álgebra vetorial é requerido.

2.1 Coordenadas Curvilíneas

Transformação de Coordenadas

Sejam as coordenadas retangulares (x, y) de um ponto qualquer, as quais podem ser expressas como função de novas coordenadas (ξ, η) , de modo que:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \quad (2-1)$$

Supondo que as funções (2-1) possam ser resolvidas para ξ, η em termos de x, y , tal que:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (2-2)$$

dizemos que o conjunto das equações (2-2) define, em geral, uma conversão que estabelece uma correspondência entre os pontos dos planos $\xi\eta$ e xy . Essas relações são referidas como equações de transformação e, se a cada ponto do plano $\xi\eta$ associa-se um único ponto de xy , e

inversamente, a transformação de coordenadas é dita biunívoca.¹

Logo, dado um ponto Q em coordenadas Cartesianas (x, y) , no plano transformado suas coordenadas são agora (ξ, η) , denominadas coordenadas curvilíneas de Q .

As curvas $\xi = c_1$ e $\eta = c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes, são chamadas linhas coordenadas e, quando interceptam-se a ângulos retos, o sistema de coordenadas curvilíneas é dito ortogonal.

Vetores Unitários em Sistemas Curvilíneos

Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (com $\vec{i}$ e $\vec{j}$ vetores unitários, ou versores, na direção do eixo dos x e dos y , respectivamente) o vetor posição de um ponto Q . Então (2-1) podem ser reescritas como $\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta)$. Um vetor tangente à curva ξ em Q (fixando-se obviamente η , ou seja, η constante) é $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}$. Por conseguinte, um versor tangente nesta direção é:

$$\vec{e}_\xi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right|, \quad (2-3)$$

onde $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right|$ representa a magnitude, ou módulo, do vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}$.

A expressão (2-3) pode também ser escrita como:

$$\vec{e}_\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) / h_\xi, \quad (2-4)$$

sendo a quantidade h_ξ referida como *fator de escala*, coeficiente métrico que define comprimentos de arco ao longo das linhas coordenadas, valor dado por:

$$h_\xi = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2-5)$$

Analogamente, um vetor unitário tangente à curva η em Q é:

¹. Matematicamente, duas condições simultâneas exprimem tal situação: ξ e η continuamente diferenciáveis (funções analíticas) numa região $\mathbf{IR}$ do plano xy ; e Jacobiano diferente de zero em $\mathbf{IR}$. (Spiegel, 1964)

$$\vec{e}_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) / h_\eta, \quad (2-6)$$

com o fator de escala calculado através de:

$$h_\eta = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2-7)$$

Enquanto as direções de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ permanecem fixas, as direções dos versores $\vec{e}_\xi$ e $\vec{e}_\eta$ variam de posição a posição.

Comprimento de Arco

De $\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta)$, temos que:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = h_\xi d\xi \vec{e}_\xi + h_\eta d\eta \vec{e}_\eta.$$

Portanto, o comprimento diferencial do arco é determinado de $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$.

Ao longo de uma linha coordenada $\xi = c_1$,

$$d\vec{r} = h_\eta d\eta \vec{e}_\eta,$$

de maneira que o diferencial do comprimento de arco deste traço, em Q , é dado por:

$$ds = h_\eta d\eta. \quad (2-8)$$

Similarmente, ao longo de $\eta = c_2$,

$$d\vec{r} = h_\xi d\xi \vec{e}_\xi \quad \text{e, então,}$$

$$ds = h_\xi d\xi. \quad (2-9)$$

2.2 Conceito de Volumes de Controle

Para facilitar a apresentação e de acordo com a natureza do problema em estudo,

considere a equação de governo que segue:

$$\nabla \cdot \vec{J} = S, \quad (2-10)$$

onde:

- $\vec{J}$ é o fluxo difusivo da variável dependente w , manifesto pela igualdade $\vec{J} = -\Gamma \nabla w$;
- Γ é o coeficiente de difusão de w ;
- S é a fonte volumétrica de w .

O domínio físico, para o qual é válida a equação (2-10), é dividido em vários sub-domínios, os quais compreendem os pontos da malha onde se deseja calcular o valor da variável dependente (nós principais). Esses sub-domínios são denominados volumes de controle.

O pensamento subjacente a tal conceito é que, assegurado o princípio de conservação para cada volume de controle em particular, será satisfeito então para todo o domínio de cálculo. Esta, também, é a gênese do método.

A figura 2-1 mostra uma célula típica, em coordenadas curvilíneas, indicados nó principal, linhas coordenadas, fluxos e áreas que a limitam.

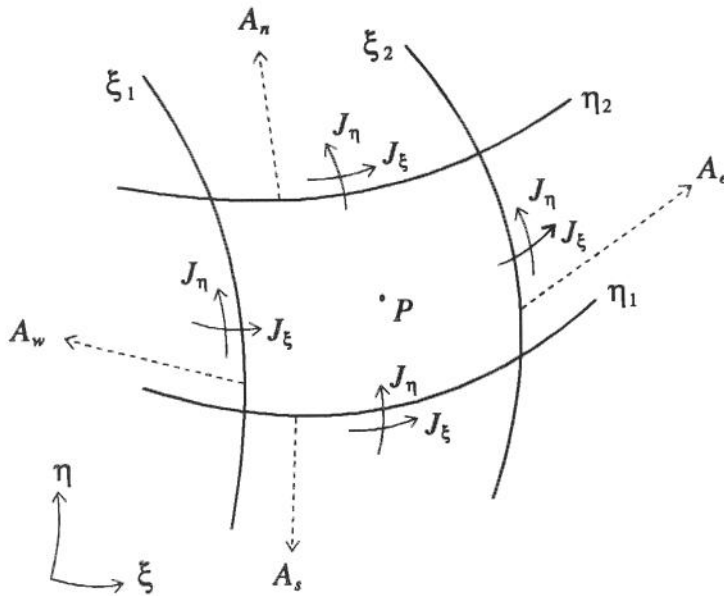


fig. 2-1: Volume de controle típico, em coordenadas curvilíneas

Assim, integrando a equação (2-10) para cada volume, resulta:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \int_V S dV. \quad (2-11)$$

O símbolo $\int_V$ denota uma integral dupla, posto que a região de cálculo é presumida ter espessura unitária, normal ao plano $\xi\eta$, de modo que áreas representam volumes e linhas implicam em áreas.

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss à equação (2-11), teremos:

$$\int_A \vec{J} \cdot \vec{n} dA = \int_V S dV, \quad (2-12)$$

de forma que $\int_A$ é uma integral referenciada às linhas de contorno do volume de controle, dA é um comprimento infinitesimal de arco e $\vec{n}$ é um versor perpendicular a dA , sentido apontando para o exterior do elemento de volume. O lado esquerdo representa o fluxo deixando (ou adentrando) o volume de controle, ao passo que o lado direito refere-se à fonte total (ou sumidouro) de “calor” gerado (ou dissipado) pelo mesmo. Um balanço, na célula, entre o influxo e o efluxo, determina S .

2.2.1 Discretização da Integral de Superfície

Agora, concentremos nossa atenção na discretização da integral de superfície, lado esquerdo da equação (2-12). O fluxo $\vec{J}$ pode ser escrito em termos de seus componentes em coordenadas Cartesianas como:

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j}, \quad \text{onde} \quad J_x = \vec{J} \cdot \vec{i} \quad \text{e} \quad J_y = \vec{J} \cdot \vec{j}.^2 \quad (2-13)$$

A grandeza e o sentido dos vetores projeção do fluxo nas direções coordenadas ξ e η são dados por:

$$J_\xi = \vec{J} \cdot \vec{e}_\xi, \quad J_\eta = \vec{J} \cdot \vec{e}_\eta. \quad (2-14)$$

² A interpretação geométrica do produto escalar entre vetores quaisquer $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$, sendo $\vec{B}$ um versor, é que tal operação é uma medida do módulo e do sentido do vetor projeção de $\vec{A}$ na direção do vetor unitário. Caso o sistema de coordenadas seja ortogonal, o vetor projetado coincidirá com o componente de $\vec{A}$ na direção do versor base.

Substituindo as equações (2-13), (2-4) e (2-6) em (2-14), podemos reescrever J_ξ e J_η na forma abaixo indicada:

$$J_\xi = \left(J_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + J_y \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) / h_\xi, \quad J_\eta = \left(J_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + J_y \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) / h_\eta, \quad (2-15)$$

cujas soluções para as incógnitas J_x e J_y , por exemplo, via regra de Cramer para resolver sistemas lineares, fornece:

$$J_x = \left(J_\xi h_\xi \frac{\partial y}{\partial \eta} - J_\eta h_\eta \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) / Ja,$$

$$J_y = \left(J_\eta h_\eta \frac{\partial x}{\partial \xi} - J_\xi h_\xi \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) / Ja. \quad (2-16)$$

O denominador em comum nestas duas equações é o Jacobiano da transformação de coordenadas, o qual pode ser expresso como:

$$Ja = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2-17)$$

A integral de superfície pode ser representada pela soma de quatro integrais de área, enumeradas consoante a figura 2-1, que doravante serão avaliadas:

Em A_e

Visto que o gradiente de ξ é um vetor normal à linha de ξ constante, apontando na direção do aumento do funcional, o versor perpendicular a A_e com sentido para o exterior do volume de controle é dado por

$$\vec{n} = \nabla \xi / |\nabla \xi|, \quad (2-18)$$

onde

$$\nabla \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \vec{j}. \quad (2-19)$$

Pode-se demonstrar que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \eta} / Ja, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} / Ja. \quad (2-20)$$

Com estas duas equações, a expressão para $\vec{n}$ é reescrita como

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{i} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{j} \right) / h_\eta. \quad (2-21)$$

A integral em A_e é avaliada através das equações (2-13), (2-21) e (2-8), levando a:

$$\int_{A_e} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_e} \left(J_x \frac{\partial y}{\partial \eta} - J_y \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta. \quad (2-22)$$

Se J_x e J_y são substituídos usando (2-16), a equação precedente pode ser reescrita na forma

$$\int_{A_e} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_e} (\alpha_\xi J_\xi - \beta_\xi J_\eta) d\eta, \quad \text{onde:} \quad (2-23)$$

$$\alpha_\xi = h_\xi h_\eta^2 / Ja, \quad (2-24)$$

$$\beta_\xi = h_\xi h_\eta^2 (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta) / Ja = \alpha_\xi (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta). \quad (2-25)$$

As grandezas α_ξ e β_ξ facilitam o cálculo do fluxo normal através de A_e via gradiente da função ao longo da linha coordenada. Possuem importantes propriedades, a saber:

- ambas têm unidade de área, podendo conceitualmente ser consideradas como tais;
- α_ξ é sempre positiva;
- β_ξ pode ser positiva, negativa ou nula. Contudo, o valor absoluto de β_ξ é sempre menor que α_ξ ;

³. Alternativamente, conforme referencial adotado (fig. 2-1),

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \times \vec{k}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \times \vec{k} \right|},$$

onde $\vec{k}$ é o versor dado pelo produto vetorial $\vec{i} \times \vec{j}$, normal ao espaço Euclidiano bidimensional que contém o domínio.

- caso as coordenadas transformadas ξ e η sejam ortogonais, $\beta_\xi = 0$ e $\alpha_\xi = h_\eta$.

Como α_ξ é maior que β_ξ em qualquer situação, são chamadas, respectivamente, área primária e área secundária. Por conveniência, podemos raciocinar J_ξ como sendo o fluxo primário através de A_e , e J_η , o fluxo secundário, que a tangencia, conquanto nem sempre a magnitude de J_ξ seja maior que a de J_η .

A integral de superfície no lado direito de (2-23) pode ser aproximada por:

$$\int_{A_e} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_e} (\alpha_\xi J_\xi - \beta_\xi J_\eta) d\eta \approx (\alpha_\xi J_\xi - \beta_\xi J_\eta)_e \Delta\eta_e, \quad (2-26)$$

onde o subscrito e indica que o integrando é avaliado no ponto médio da face A_e e $\Delta\eta_e = \eta_2 - \eta_1$.

Em A_w

As mesmas expressões derivadas no item anterior se aplicam, exceção feita à equação para o vetor normal à face, sentido apontando para o exterior do volume de controle. Assim,

$$\vec{n} = -\nabla\xi/|\nabla\xi|. \quad (2-27)$$

O procedimento de discretização para a integral de superfície em A_w também é o mesmo, então:

$$\int_{A_w} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = -\int_{A_w} (\alpha_\xi J_\xi - \beta_\xi J_\eta) d\eta \approx -(\alpha_\xi J_\xi - \beta_\xi J_\eta)_w \Delta\eta_w, \quad (2-28)$$

onde o subscrito w denota que o integrando é avaliado no ponto médio da face A_w e $\Delta\eta_w = \eta_2 - \eta_1$.

Em A_n

O vetor unitário normal a esta superfície, sentido para o exterior do volume de controle, é dado por

$$\vec{n} = \nabla\eta/|\nabla\eta|, \quad (2-29)$$

onde

$$\nabla\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}i + \frac{\partial\eta}{\partial y}j. \quad (2-30)$$

Mediante uso das relações

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial\xi}/Ja, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial\xi}/Ja, \quad (2-31)$$

a equação (2-29) pode ser reescrita como

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}i + \frac{\partial x}{\partial\xi}j \right) / h_\xi. \quad (2-32)$$

Das equações (2-13), (2-32) e (2-9), o fluxo através de A_n é expresso por

$$\int_{A_n} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_n} \left(-J_x \frac{\partial y}{\partial\xi} + J_y \frac{\partial x}{\partial\xi} \right) d\xi. \quad (2-33)$$

Os componentes do fluxo em coordenadas Cartesianas, dados por (2-16), são substituídos na equação acima, implicando em

$$\int_{A_n} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_n} (\alpha_\eta J_\eta - \beta_\eta J_\xi) d\xi, \quad \text{onde:} \quad (2-34)$$

$$\alpha_\eta = h_\eta h_\xi^2 / Ja, \quad (2-35)$$

$$\beta_\eta = h_\eta h_\xi^2 (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta) / Ja. \quad (2-36)$$

As mesmas observações no tratamento das grandezas representadas pelas equações (2-24) e (2-25) se aplicam para (2-35) e (2-36). Aqui, J_η é o fluxo primário através de A_n , e J_ξ representa o fluxo secundário nesta face.

A integral de superfície no lado direito da igualdade (2-34) pode ser aproximada por

$$\int_{A_n} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{A_n} (\alpha_\eta J_\eta - \beta_\eta J_\xi) d\xi \approx (\alpha_\eta J_\eta - \beta_\eta J_\xi)_n \Delta\xi_n, \quad (2-37)$$

onde o subscrito n indica que o integrando é avaliado no ponto médio da face A_n e $\Delta\xi_n = \xi_2 - \xi_1$.

Em A_s

A formulação apresentada para a face A_n é aplicável para A_s , com uma só diferença, qual seja:

$$\vec{n} = -\nabla\eta/|\nabla\eta|, \quad (2-38)$$

de forma que:

$$\int_{A_s} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = -\int_{A_s} (\alpha_\eta J_\eta - \beta_\eta J_\xi) d\xi \approx -(\alpha_\eta J_\eta - \beta_\eta J_\xi)_s \Delta\xi_s, \quad (2-39)$$

onde o subscrito s denota que o integrando é avaliado no ponto médio de A_s e $\Delta\xi_s = \xi_2 - \xi_1$.

2.2.2 Discretização da Integral de Volume

A integral de volume no lado direito da equação (2-12) é calculada como

$$\int_V S dV = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} S J d\xi d\eta, \quad (2-40)$$

observando que o volume elementar, espessura unitária, é dado por $dV = J d\xi d\eta$.

Por hipótese, digamos que (SJa) no ponto P , nó primário, prevaleça em todo o volume de controle. A equação (2-40) pode ser assim aproximada:

$$\int_V S dV \approx (SJa)_P \Delta\xi_P \Delta\eta_P, \quad (2-41)$$

o subscrito P indicando que (SJa) é avaliado naquele ponto, $\Delta\xi_P = \xi_2 - \xi_1$ e $\Delta\eta_P = \eta_2 - \eta_1$.

2.2.3 Forma Integrada da Equação de Conservação

Enfim, a equação de conservação integrada no volume de controle, (2-12), com a ajuda de (2-26), (2-28), (2-37), (2-39) e (2-41), pode ser discretizada em termos das projeções dos

fluxos nas coordenadas transformadas como:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{\xi} J_{\xi} - \beta_{\xi} J_{\eta})_e \Delta \eta_e - (\alpha_{\xi} J_{\xi} - \beta_{\xi} J_{\eta})_w \Delta \eta_w + \\
 & + (\alpha_{\eta} J_{\eta} - \beta_{\eta} J_{\xi})_n \Delta \xi_n - (\alpha_{\eta} J_{\eta} - \beta_{\eta} J_{\xi})_s \Delta \xi_s = (SJa)_p \Delta \xi_p \Delta \eta_p,
 \end{aligned} \tag{2-42}$$

sendo designada como forma integrada da equação de conservação.

2.3 Método Flux-Spline para Problemas Difusivos

A técnica convencional de volumes finitos, descrita por Patankar (1980), difere do método Flux-Spline (Varejão, 1979) porque pressupõe, para problemas tipo difusão, um perfil linear por partes para a variável a ser calculada e, por isso, em degrau para o fluxo, onde a descontinuidade da função J ocorre nos nós principais da malha. Na outra abordagem, de ordem superior, tanto a variável dependente como o fluxo são contínuos nas interfaces e ao longo das células.

O método Flux-Spline adota como premissa básica uma variação linear do fluxo dentro do volume de controle, aí considerando constante o coeficiente de difusão, e vale-se da continuidade de J na face em comum das unidades de cálculo, intrínseca a tal formulação. Evocando o conceito de *splines*, funções polinomiais por partes, analíticas nos pontos de junção, daí advém aquela denominação.

Desenvolvimento

Nesta seção, são obtidas as expressões para as projeções dos fluxos nas faces duma célula, que, substituídas na igualdade (2-42), resultem num sistema de equações algébricas associado com a equação diferencial de governo.

No caso bidimensional, as equações de discretização para a variável dependente decorrem da combinação de perfis calculados de forma autônoma para cada direção. Melhor explicando: constrói-se um modelo genérico unidimensional associado com a direção curvilínea ξ , que tem contrapartida na direção η , e ambos são empregados em (2-42) a fim de compor a equação geral de discretização para w . Tal idéia provém do *método de separação de variáveis*, técnica que reduz uma equação diferencial parcial em n variáveis a n equações diferenciais ordinárias.

Assim procedendo, a expressão do fluxo numa direção curvilínea ξ , para situação unidimensional, é

$$J_{\xi} = -\frac{\Gamma}{h_{\xi}} \frac{dw}{d\xi}. \tag{2-43}$$

Considere a figura 2-2 a seguir:

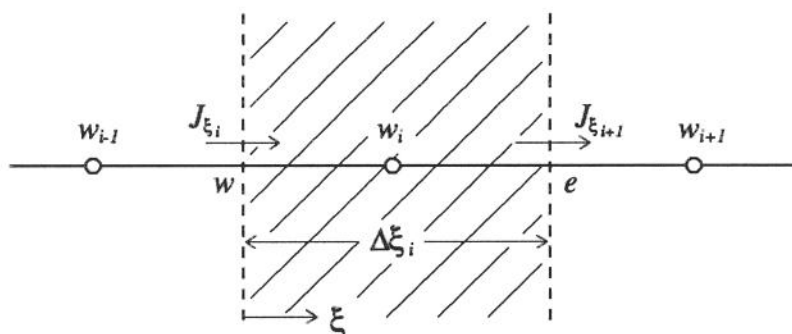


fig. 2-2: Volume de controle unidimensional

Os fluxos são armazenados nas faces dos volumes finitos, deslocados em relação às variáveis dependentes, as quais são calculadas nos nós primários. Pressupondo que uma reta indica a variação do fluxo no interior da célula, temos:

$$J_{\xi} = \frac{(J_{\xi_{i+1}} - J_{\xi_i})}{\Delta \xi_i} \xi + J_{\xi_i}, \quad (2-44)$$

onde ξ é a variável local independente, contida no intervalo $0 \leq \xi \leq \Delta \xi_i$.

• Derivação do perfil de w

Substituindo J_{ξ} da equação (2-43) em (2-44) e integrando no volume de controle hachurado da figura 2-2,

$$\int dw = -\frac{(J_{\xi_{i+1}} - J_{\xi_i})}{\Delta \xi_i} \int \frac{\xi}{(\Gamma/h_{\xi})} d\xi - J_{\xi_i} \int \frac{1}{(\Gamma/h_{\xi})} d\xi. \quad (2-45)$$

Supondo que Γ_i , coeficiente de difusão calculado no ponto referenciado pelo subscrito i , prevalece na célula, e que h_{ξ_i} é também o valor mais representativo para simplificar a integração acima,

$$w = -\frac{(J_{\xi_{i+1}} - J_{\xi_i})}{\Delta \xi_i (\Gamma_i/h_{\xi_i})} \frac{\xi^2}{2} - \frac{J_{\xi_i}}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} \xi + c, \quad (2-46)$$

onde c é uma constante a ser determinada.

A prática B (Patankar, 1980) define a posição dos nós principais no domínio, de modo que situam-se sempre no ponto médio dos volumes finitos. Logo, com a condição $w = w_i$ para $\xi = \Delta\xi_i/2$, a equação precedente resulta:

$$w = w_i - \frac{J_{\xi_i} \Delta\xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} \left[\frac{\xi}{\Delta\xi_i} - \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{(J_{\xi_{i+1}} - J_{\xi_i})}{2(\Gamma_i/h_{\xi_i})} \right] \Delta\xi_i \left[\frac{\xi^2}{(\Delta\xi_i)^2} - \frac{1}{4} \right], \quad (2-47)$$

refletindo a variação de w de uma face a outra da célula de cálculo, que é quadrática, em dependência do fluxo que a adentra e daquele que a deixa.

• Condição de continuidade de w para volumes de controle adjacentes

Atentemos para a figura 2-3 abaixo, que ilustra o perfil de w dentro de um volume de controle e a continuidade da função na interface:

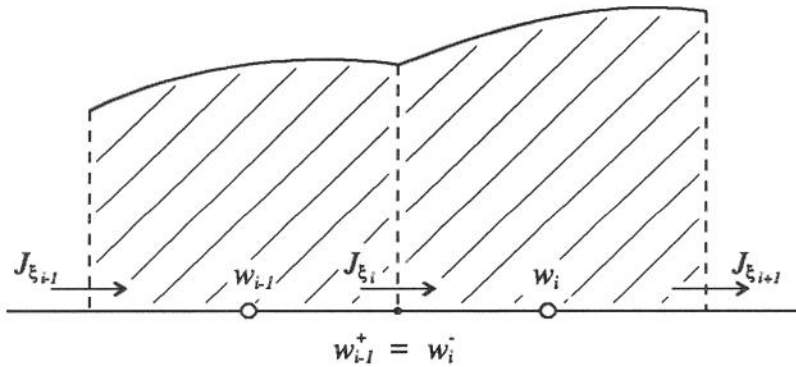


fig. 2-3: Variação de w nos volumes de controle e condição de continuidade $w_{i-1}^+ = w_i^-$

Na face em comum de dois volumes finitos, além da continuidade do fluxo, própria da formulação, o perfil interpolante (2-47) deve proporcionar um único valor para w , de forma que:

$$w_{i-1}^+ = w_i^-, \quad (2-48)$$

onde w_{i-1}^+ e w_i^- representam, respectivamente, os valores da função na interface, à direita do

nó identificado pelo índice $i - 1$ e à esquerda daquele denotado por i .

Consequentemente, a equação (2-47), para a célula ao redor do ponto $i - 1$, com $\xi = \Delta\xi_{i-1}$, fornece

$$w_{i-1}^+ = w_{i-1} - \frac{1}{8} \frac{J_{\xi_{i-1}} \Delta\xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})} - \frac{3}{8} \frac{J_{\xi_i} \Delta\xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})}, \quad (2-49)$$

e para a unidade no entorno do nó i , fazendo $\xi = 0$,

$$w_i^- = w_i + \frac{3}{8} \frac{J_{\xi_i} \Delta\xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} + \frac{1}{8} \frac{J_{\xi_{i+1}} \Delta\xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})}, \quad (2-50)$$

• Equação de discretização do fluxo

Substituindo as expressões (2-49) e (2-50) na imposição (2-48), uma equação para os fluxos é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \left[\frac{\Delta\xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} + \frac{\Delta\xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})} \right] J_{\xi_i} = \\ = -\frac{1}{8} \frac{\Delta\xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} J_{\xi_{i+1}} - \frac{1}{8} \frac{\Delta\xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})} J_{\xi_{i-1}} + (w_{i-1} - w_i), \end{aligned} \quad (2-51)$$

a qual pode ser reelaborada como

$$J_{\xi_i} = \hat{J}_{\xi_i} + DJ_{\xi_i} (w_{i-1} - w_i), \quad (2-52)$$

onde:

$$\hat{J}_{\xi_i} = BJ_{\xi_i} (J_{\xi_i} - J_{\xi_{i+1}}) + CJ_{\xi_i} (J_{\xi_i} - J_{\xi_{i-1}}) \quad (2-53)$$

e

$$DJ_{\xi_i} = 2 \left[\frac{\Delta \xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} + \frac{\Delta \xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})} \right]^{-1}, \quad (2-54a)$$

$$BJ_{\xi_i} = \frac{1}{8} \left[\frac{\Delta \xi_i}{(\Gamma_i/h_{\xi_i})} \right] DJ_{\xi_i}, \quad (2-54b)$$

$$CJ_{\xi_i} = \frac{1}{8} \left[\frac{\Delta \xi_{i-1}}{(\Gamma_{i-1}/h_{\xi_{i-1}})} \right] DJ_{\xi_i}. \quad (2-54c)$$

Decerto, da maneira que derivamos a equação (2-52), seu domínio de validade não se estende aos volumes finitos contíguos à fronteira. Desta feita, a fim de suprimir esta limitação, são construídas equações particulares para o contorno.

• Equações para J_{ξ} nos limites do domínio

A expressão (2-47) vigora para qualquer volume de controle desejado e, em particular, para aqueles nos limites do domínio. Se aplicada ao elemento junto à fronteira esquerda ($i = 2$), $\xi = 0$ implica em $w = w_1$, então:

$$w_1 = w_2 + \frac{3}{8} \frac{\Delta \xi_2}{(\Gamma_2/h_{\xi_2})} J_{\xi_2} + \frac{1}{8} \frac{\Delta \xi_2}{(\Gamma_2/h_{\xi_2})} J_{\xi_3}, \quad (2-55)$$

que pode ser reordenada como

$$J_{\xi_2} = \frac{1}{4} (J_{\xi_2} - J_{\xi_3}) + 2 \frac{(\Gamma_2/h_{\xi_2})}{\Delta \xi_2} (w_1 - w_2), \quad (2-56)$$

ou, alternativamente,

$$J_{\xi_2} = \hat{J}_{\xi_2} + DJ_{\xi_2} (w_1 - w_2), \quad (2-57)$$

onde

$$\hat{J}_{\xi_2} = BJ_{\xi_2} (J_{\xi_2} - J_{\xi_3}) \quad (2-58)$$

e

$$DJ_{\xi_2} = 2 \left[\frac{\Delta \xi_2}{(\Gamma_2/h_{\xi_2})} \right]^{-1}, \quad (2-59a)$$

$$BJ_{\xi_2} = \frac{1}{4}, \quad (2-59b)$$

$$CJ_{\xi_2} = 0. \quad (2-59c)$$

Para o volume finito vizinho à fronteira direita, processo similar pode ser empregado. No entanto, se imaginarmos um volume de controle de largura zero (“célula fantasma”) entre o mesmo e aquele contorno, $\Delta \xi_{L1} = 0$ e obtemos uma equação para $J_{\xi_{L1}}$:

$$J_{\xi_{L1}} = \hat{J}_{\xi_{L1}} + DJ_{\xi_{L1}} (w_{L2} - w_{L1}), \quad (2-60)$$

onde

$$\hat{J}_{\xi_{L1}} = CJ_{\xi_{L1}} (J_{\xi_{L1}} - J_{\xi_{L2}}) \quad (2-61)$$

e

$$DJ_{\xi_{L1}} = 2 \left[\frac{\Delta \xi_{L2}}{(\Gamma_{L2}/h_{\xi_{L2}})} \right]^{-1}, \quad (2-62a)$$

$$BJ_{\xi_{L1}} = 0, \quad (2-62b)$$

$$CJ_{\xi_{L1}} = \frac{1}{4}. \quad (2-62c)$$

• Equação de discretização para w

Expressões equivalentes às (2-52), (2-57) e (2-60), seguindo o mesmo princípio, podem ser derivadas para a direção η . De modo a plasmar, enfim, a equação de discretização para w , já adotando um termo fonte linearizado (Patankar, 1980), o conjunto delas é substituído em (2-42), resultando:

$$a_P w_{i,j} = a_E w_{i+1,j} + a_W w_{i-1,j} + a_N w_{i,j+1} + a_S w_{i,j-1} + b, \quad (2-63)$$

onde

$$a_E = (DJ_{\xi} a_{\xi})_{i+1,j} \Delta \eta_j, \quad (2-64a)$$

$$a_W = (DJ_{\xi} a_{\xi})_{i-1,j} \Delta \eta_j, \quad (2-64b)$$

$$a_N = (DJ_{\eta} a_{\eta})_{i,j+1} \Delta \xi_i, \quad (2-64c)$$

$$a_S = (DJ_{\eta} a_{\eta})_{i,j-1} \Delta \xi_i, \quad (2-64d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - Sp_{i,j} J a_{i,j} \Delta \xi_i \Delta \eta_j, \quad (2-64e)$$

$$b = b_S + b_{NO} + b_{SP}. \quad (2-64f)$$

As parcelas que compõem o termo independente, b , do nosso sistema de equações algébricas são expressas individualmente por:

$$b_S = Sc_{i,j} J a_{i,j} \Delta \xi_i \Delta \eta_j, \quad (2-65)$$

que contém a contribuição da fonte volumétrica de w ;

$$b_{NO} = [(\beta_{\xi} J_{\eta})_{i+1,j} - (\beta_{\xi} J_{\eta})_{i,j}] \Delta \eta_j + [(\beta_{\eta} J_{\xi})_{i,j+1} - (\beta_{\eta} J_{\xi})_{i,j}] \Delta \xi_i, \quad (2-66)$$

quinhão oriundo da não-ortogonalidade do sistema de coordenadas e que inclui os fluxos secundários, os quais têm direção ao longo das faces dos volumes de controle;

$$b_{SP} = [(\alpha_{\xi} \hat{J}_{\xi})_{i,j} - (\alpha_{\xi} \hat{J}_{\xi})_{i+1,j}] \Delta \eta_j + [(\alpha_{\eta} \hat{J}_{\eta})_{i,j} - (\alpha_{\eta} \hat{J}_{\eta})_{i,j+1}] \Delta \xi_i, \quad (2-67)$$

cota presente pelo uso da técnica Flux-Spline, que, no dizer do autor, “*catalisa* o cômputo da variável dependente”, conferindo acuidade aos resultados.⁴

A assertiva anterior pôde ser comprovada pelos testes por ele conduzidos, que revelaram as seguintes vantagens de sua concepção perante o método convencional, em virtude das quais, aqui, este foi preterido:

- menor número de pontos na malha para obter o mesmo resultado;
- quando o coeficiente de difusão, Γ , ou os coeficientes do termo fonte, Sc e Sp , são funções de w , as equações de discretização são não-lineares⁵, processo iterativo de solução é exigido e, fixado o erro, menos ciclos são necessários até a convergência;
- embora mais trabalho seja executado por nó em cada iteração, esta aparente inferioridade, em virtude dos benefícios precedentes, é compensada pela economia de memória computacional;
- foi projetado para lidar com fontes volumétricas homogêneas por partes, que é o caso do problema que nos propusemos a resolver.

Deve-se notar, inspecionando (2-54a), que Γ efetivo na face de um volume finito, necessário a fim de se calcular aí o fluxo difusivo, é avaliado por meio da média harmônica, como na técnica convencional. Só que acolá, como o fluxo entre os nós principais é presumido constante, esta relação é imposta, quer dizer, não provém naturalmente da dedução do método.

Os gradientes curvilíneos, derivadas parciais das variáveis x e y em relação a ξ e η , são expressos numericamente por diferenças na direção das linhas coordenadas. No Apêndice B, os coeficientes de (2-63), que os contém, são operados matematicamente e exibidos na forma em que foram programados computacionalmente.

Processo de Solução

O procedimento iterativo de solução, que é mais genérico por resolver também equações de discretização não-lineares, é o seguinte:

- (1) Estimar um campo de w ;
- (2) Construir as equações de discretização pelo método convencional e resolvê-las, usando o perfil de w resultante como estimativa inicial para os cálculos subseqüentes;
- (3) Utilizar os valores disponíveis de w para calcular os fluxos primários através de equações tais como a (2-52). Aqui, visto que as expressões contêm explicitamente mais que um fluxo primário, TDMA calculado linha a linha (Patankar, 1980) é

⁴. Em verdade, esta componente adicional nos termos independentes do sistema linear de equações constitui a diferença crucial entre os métodos convencional e Flux-Spline, impondo um novo esquema iterativo de solução.

⁵. Os termos a_p e a_{nb} dependem da geometria da malha e de Γ .

requerido: obtidos de alguma forma os valores da variável nos extremos de determinada linha, os outros são avaliados de modo recursivo. Estabelecer então os fluxos primários calculados como J_{ξ}^* e J_{η}^* ;

- (4) Usar J_{ξ}^* e J_{η}^* para calcular b_{NO} ;
- (5) Lançar mão de J_{ξ}^* e J_{η}^* para construir $\hat{J}_{\xi}^*$ e $\hat{J}_{\eta}^*$ via equação (2-53) e análoga na direção η ;
- (6) Fazer uso de $\hat{J}_{\xi}^*$ e $\hat{J}_{\eta}^*$ a fim de avaliar b_{SP} ;
- (7) Resolver a equação de discretização para w (2-63) pelo TDMA, linha a linha, utilizando Correção por Bloco (Prakash e Patankar, 1981) com o fim de acelerar a convergência. Seja, então, o novo campo de w igual a w^* ;
- (8) Corrigir os fluxos primários de w^* e $\hat{J}^*$;
- (9) Tomar os fluxos primários corrigidos do passo anterior como J_{ξ}^* e J_{η}^* , e retornar à etapa (4). O laço interno de (4) a (9) é repetido algumas poucas vezes;
- (10) Voltar ao passo (3) e repetir até a convergência.

As projeções dos fluxos efetivos através das faces dos volumes de controle na direção das linhas coordenadas que contêm cada face - J 's secundários -, presentes no termo b_{NO} , equação (2-66), são determinadas a custo de interpolação linear dos fluxos primários vizinhos.

No entanto, esta forma indireta de avaliação pode significar resultados muito diversos dos verdadeiros fluxos secundários, notadamente se a não-ortogonalidade da malha for muito pronunciada. O sistema de equações lineares identificado pelas expressões (2-52) e (2-63), aliás acopladas entre si, que pretende representar no âmbito discreto a equação diferencial de governo, pode não descrever precisamente o princípio de conservação por ela enunciado. Por isso, possíveis distorções de malha devem ser suaves e gradativas.

2.4 Técnica Algébrica para Geração de Malha Computacional

Em utilizando-se o método de volumes de controle na solução de escoamentos bifásicos, a fim de satisfazer as condições de acoplamento por intermédio da(s) superfície(s) de separação entre as fases, geometria do domínio, forma e posição da interface são requeridos como dados de entrada no código computacional. As linhas coordenadas curvilíneas, total ou parcialmente, identificam-se com o contorno do domínio físico e com a própria interface.

Definido o número de volumes de controle, a disposição destes sobre a região de cálculo segue as seguintes diretivas:

- a intersecção das linhas coordenadas define os vértices dos volumes elementares, cujas faces são parte daquelas;

- a localização das faces e nós primários (ou principais) é feita segundo a prática B, de Patankar (1980);
- então, os nós primários, onde são computados os valores da variável dependente, ficam posicionados no centro geométrico de cada uma destas células, as quais constituem quadriláteros no sentido de cálculo;
- nós auxiliares são colocados no ponto médio de cada face (ou lado) dos volumes finitos e aí são armazenados os fluxos.

Assim, o domínio do problema é denotado por um mosaico de volumes de controle. Além disso, para efeito de programação, as representações em diferenças finitas podem ser feitas utilizando-se apenas os referidos pontos, quais sejam: vértices, nós primários e auxiliares (fig. 2-4).

O local dos vértices sobre os traços contínuos, determinados pelas expressões $\xi = c_1$ e $\eta = c_2$, é obtido consoante simples relação algébrica, sugerida por Hsu (1981):

$$\overline{P_i P_1} = \overline{P_n P_1} [(i-1)/(n-1)]^m, \text{ com } 1 < i < n, \text{ onde:}$$

- P_1 e P_n são pontos terminais ou extremos de um segmento específico;
- P_i é um ponto intermediário sobre o mesmo;
- m é uma potência usada para ajustar a posição relativa de tais nós (se for unitária, estarão uniformemente espaçados, sendo este o valor aqui utilizado).

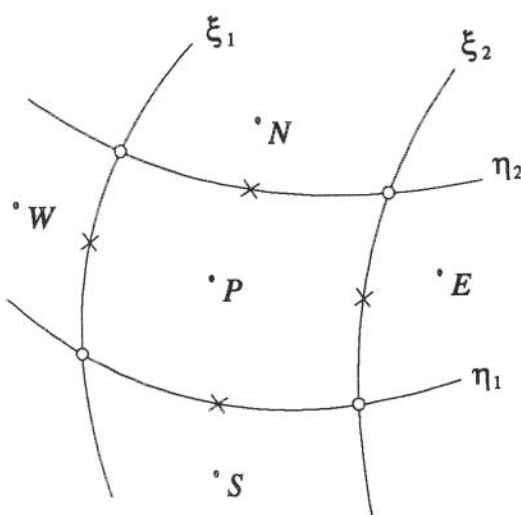


fig. 2-4: Volume de controle e posição dos nós

As derivadas espaciais, diferenciais das coordenadas retangulares em relação a ξ e a η , são aproximadas por diferenças centrais. Além do mais, as coordenadas dos nós primários e do ponto médio das faces das células são obtidas pela média aritmética da posição de seus

vértices.

O elemento de volume é limitado por quatro lados curvos, cada um dos quais sobre um traço, no qual uma das coordenadas curvilíneas é constante. A nível numérico, a junção de dois pontos consecutivos sobre uma linha coordenada (os quais, em verdade, constituem vértices de certo quadrilátero) estabelece o lugar geométrico de dada face de um volume finito. Um nó primário medeia entre as faces da célula que o contém.

Os algoritmos de construção de malhas dos programas são flexíveis ao adensamento localizado das mesmas, que podem tornar-se mais refinadas próximo da parede e da interface, e esparsas na região intermediária, permitindo-se usá-los em problemas similares onde os altíssimos gradientes que aí ocorrem sejam relevantes.

Capítulo 3

Aplicação ao Escoamento Bifásico

3.1 Modelo Matemático

3.1.1 Equações de Governo

Dadas suas premissas, o problema em apreço é similar àquele da condução de calor, em regime permanente, num meio anisotrópico, sendo as seguintes as equações de governo:

$$\mu_1 \nabla^2 w_1 = \mu_2 \nabla^2 w_2 = \frac{dp}{dz}, \quad (3-1)$$

onde:

- w é a velocidade axial;
- μ_1 e μ_2 são viscosidades dinâmicas para cada fase¹;
- $\frac{dp}{dz}$ é o gradiente de pressão na direção do escoamento.

3.1.2 Condições de Contorno e de Continuidade na Interface

Na superfície interna do tubo, não há deslizamento de fluido, então:

$$w = 0. \quad (3-2)$$

Na superfície de separação entre as fases, temos as condições de continuidade, que representam um vínculo interno do problema:

- de velocidade, quer dizer,

$$w_1 = w_2, \quad (3-3)$$

- de tensão interfacial, isto é,

¹ Se nos referenciarmos às figuras 1 e 2, na **Introdução**, o índice 1 denota a fase que forma uma região anular na periferia do tubo ou a fase mais densa, e 2 identifica a outra fase.

$$\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n}, \quad (3-4)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ indica diferenciação na direção da linha coordenada normal à interface.

3.1.3 Adimensionalização Empregada

Introduzindo as variáveis adimensionais:

- $X = \frac{x}{R};$
- $Y = \frac{y}{R};$
- $W = \frac{\mu_1 w}{R^2 \left(-\frac{dp}{dz} \right)},$

onde R é o raio interno do tubo, as equações de governo resultam:

$$\nabla^2 W_1 + 1 = 0, \text{ para a fase 1;} \quad (3-5)$$

$$\gamma \nabla^2 W_2 + 1 = 0, \text{ para a fase 2, onde } \gamma = \mu_2 / \mu_1. \quad (3-6)$$

Ainda, as condições de contorno e de continuidade ficam:

- não-deslizamento na parede do duto:

$$W = 0; \quad (3-7)$$

- na interface:

$$W_1 = W_2 \quad (3-8)$$

e

$$\frac{\partial W_1}{\partial n} = \gamma \frac{\partial W_2}{\partial n}. \quad (3-9)$$

As equações diferenciais de Poisson, (3-5) e (3-6), com as restrições (3-7), (3-8) e (3-9), são resolvidas numericamente de forma a obter a função potencial W nos nós primários da malha.

3.1.4 Comentários

O domínio é discretizado de tal forma que a interface está alinhada com o contorno de dois blocos de volumes finitos, a condição (3-8) dada pela técnica Flux-Spline. Por seu turno, a (3-9) é satisfeita pela continuidade dos fluxos nas faces das células, uma vez que eles seguem a orientação da malha computacional e, então, são perpendiculares à superfície de separação entre as fases.

Na realidade, a interface do sistema bifásico é uma região, com certa espessura, a qual funciona como uma região de transição, onde há uma variação gradual das propriedades das fases. Conceitualmente, é tratada como uma membrana de espessura infinitesimal. A média harmônica lidando com Γ efetivo nas faces dos volumes de controle é bem apropriada.

Porque o problema é simétrico em relação ao diâmetro vertical, aí impõe-se condição de Neumann, fluxo nulo, e a solução do perfil de velocidades é levada a cabo num semi-círculo.

A despeito de coeficientes e termo fonte da equação de discretização para W serem constantes, optou-se pela resolução iterativa, por ser um processo mais geral.

3.2 Padrão Anular

3.2.1 Discretização do Domínio

A partir do centro da “core phase”, denominado *pólo*, são traçados segmentos radiais com extremo oposto sobre a circunferência que delimita o domínio de cálculo, espaçamentos angulares regulares.

As coordenadas transformadas ξ e η constituem, respectivamente, as posições azimutal e radial dos nós, dispostos ao longo das linhas coordenadas.

Na região anular do escoamento, o sistema que descreve a posição dos pontos é não-ortogonal, ao passo que no outro sub-domínio temos coordenadas polares.

A origem do sistema de coordenadas Cartesianas do código computacional coincide com o centro da secção reta do tubo, cuja distância ao *pólo* denomina-se *excentricidade*.

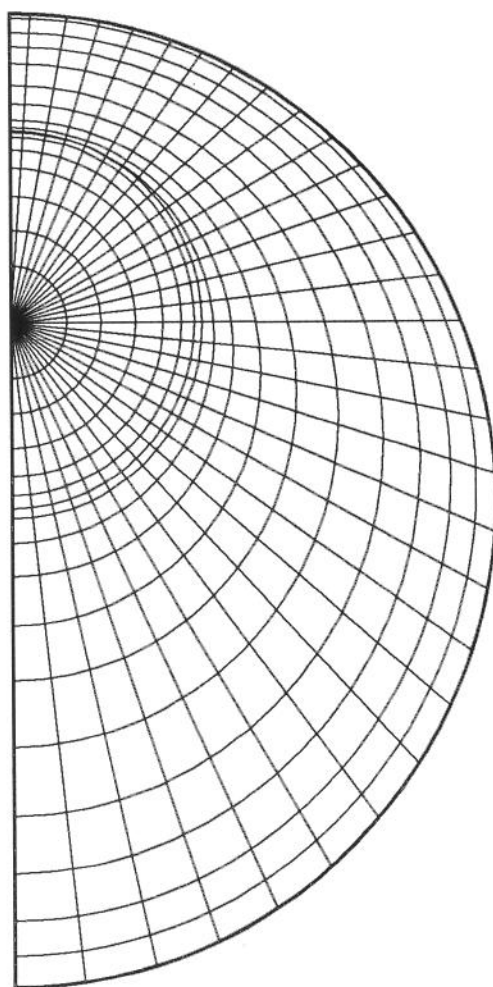


fig. 3-1: Padrão Anular: domínio de cálculo discretizado

3.2.2 Valor da Função no Pólo: Teorema de Green

Já foi dito que as linhas coordenadas $\xi = c_1$ são convergentes no *pólo*. Além disso, note-se que os volumes de controle imediatamente vizinhos àquele ponto são setores circulares.

A matriz dos W 's prescindiria do valor da função no *pólo* caso fosse desnecessário à obtenção dos fluxos. A velocidade axial aí faculta o cálculo dos J 's e, para tanto, é preciso utilizarmos do teorema de Green.²

Dessa forma, consideremos a figura a seguir:

². De modo alternativo, o próprio perfil interpolante para a variável dependente, na devida direção.

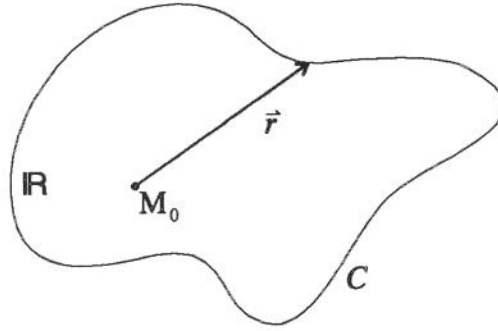


fig. 3-2: Linha fechada limitando região no plano e englobando o ponto M_0

Se a variação da função W , numa região IR definida pela curva fechada, simples, seccionalmente lisa C , é descrita pela equação de Poisson, o valor da variável dependente num ponto interior qualquer daquele domínio é dado por (Smirnov, 1970):

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(\frac{W}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \ln(r) \frac{\partial W}{\partial n} \right) dC + \frac{1}{2\pi} \int_A (\ln(r) \nabla^2 W) dA, \quad (3-10)$$

onde:

- $\oint_C$ indica integral de linha, especificamente no circuito C , curva que envolve o domínio e constitui sua fronteira;
- $\int_A$ representa uma integral de área, em IR ;
- $\ln$ exprime a função logaritmo Neperiano;
- r significa distância de um ponto sobre a fronteira até M_0 , conforme figura 3-2;
- $\frac{\partial}{\partial n}$ denota diferenciação na direção do traço normal a C .

O objetivo é obter uma equação capaz de avaliar o valor da velocidade axial no *pólo*, então adotemos uma região circular, de modo que os pontos do contorno sejam equidistantes do mesmo, longitude radial R_C . Sob a perspectiva do cálculo numérico, tais pontos constituem os nós primários das células (setores circulares) que o circundam.

Assim, a equação precedente resulta:

$$\begin{aligned}
W(M_0) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{W}{R_C} - \ln(R_C) \frac{\partial W}{\partial r} \right) (R_C d\theta) + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{R_C} \int_0^{2\pi} (\ln(r) \nabla^2 W) (r dr d\theta),
\end{aligned} \tag{3-11}$$

onde:

- $(R_C d\theta)$ é o comprimento infinitesimal de um arco sobre C ;
- $(r dr d\theta)$ é um elemento infinitesimal de área em $\mathbb{R}$;
- $\nabla^2 W = -\gamma^{-1}$, conforme verifica-se da expressão (3-6).

A segunda identidade ou teorema simétrico de Green, no plano, é enunciada por (Spiegel, 1959):

$$\int_A (V \nabla^2 W - W \nabla^2 V) dA = \oint_C \left(V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial V}{\partial n} \right) dC. \tag{3-12}$$

A escolha de V é arbitrária, por isso será suposta harmônica, igual à unidade, satisfazendo, portanto, a equação de Laplace. Logo, (3-12) fica:

$$\int_A \nabla^2 W dA = \oint_C \frac{\partial W}{\partial n} dC, \tag{3-13}$$

sendo que para a região $\mathbb{R}$ em consideração, reduz-se em

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial r} (R_C d\theta) = -\gamma^{-1} (\pi R_C^2). \tag{3-14}$$

Substituindo agora a expressão anterior em (3-11), esta avulta como:

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\theta + \frac{\gamma^{-1}}{2} R_C^2 \ln(R_C) - \gamma^{-1} \int_0^{R_C} \ln(r) r dr. \tag{3-15}$$

A integral mais remota do lado direito do sinal de igualdade é resolvida por partes. Já que o extremo inferior de integração constitui um ponto de singularidade, considera-se o limite da função ao aproximar-se do pólo. Por fim, a equação (3-15) restringe-se a:

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\theta + \frac{R_c^2}{(4\gamma)}. \quad (3-16)$$

Ao final dos passos 2 e 7 do procedimento seqüencial de solução, tal relação é utilizada a fim de atualizar o valor da velocidade axial no *pólo*. Para melhor compreendê-la, aconselha-se ler Farlow, 1982, que faz uma interessante análise do significado do operador Laplaciano.

3.3 Padrão Estratificado

3.3.1 Discretização do Domínio

Coordenadas bipolares (Spiegel, 1959) descrevem a região de cálculo, sendo aquelas que representam graficamente as linhas de campo e de potencial elétrico na região que envolve um dipolo: cargas elétricas contrárias, puntiformes, separadas por certa distância, fixas.

Superfícies equipotenciais - no plano, circunferências centradas sobre a reta que contém o local das cargas - e linhas de campo são mutuamente perpendiculares.

O eixo das abscissas do sistema de coordenadas Cartesianas adotado no programa de computador contém uma corda, a qual pode ser idêntica à interface ou ligar os extremos do arco que a constitui. No último caso, a curvatura da superfície de separação entre as fases é diferente de zero.

Um arco de circunferência substitui na prática a junção parede-interface (Shoham e Taitel, 1984).

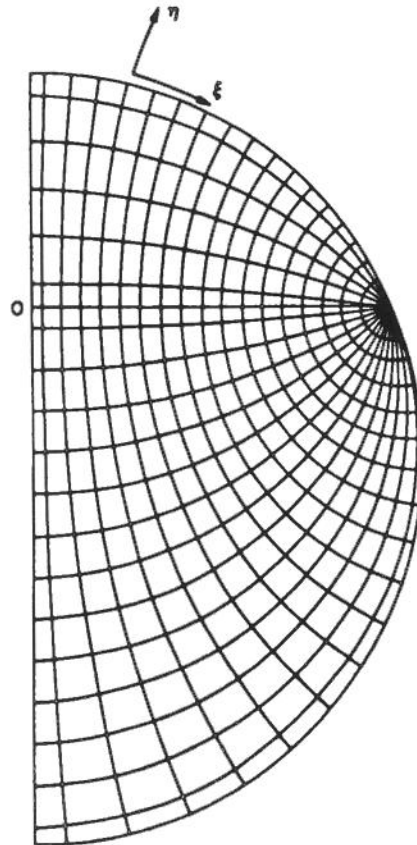


fig. 3-3: Padrão estratificado: domínio de cálculo discretizado

Capítulo 4

Resultados e Discussão

Em todos os casos-teste doravante analisados, a malha utilizada foi 40x40 volumes de controle e a convergência, sempre monotônica, já que os problemas são lineares. Como a mudança de valor da variável dependente ao longo de uma linha coordenada é igual àquela descrita pelo perfil interpolante (quadrático), independentemente de a malha ser ou não localmente refinada, os efeitos serão idênticos. Aliás, da forma que são calculados os nós e os parâmetros geométricos dos volumes finitos, intervalos não-uniformes entre as linhas coordenadas antes diminuem a taxa de convergência que amenizam os erros. Além do que degenera-se, ainda que ligeiramente, a acuidade dos resultados numéricos. Por essa razão, optou-se pelo emprego de uma malha regular.

Foram cosideradas as seguintes razões de viscosidades dinâmicas (γ): 0,02 , que representa um escoamento ar-água, isotérmico, a 25°C e à pressão atmosférica, fluidos e condições comumente utilizados em experimentos na área por razões de economia e segurança; 10 e 10⁵, caso este que se aproxima, no arranjo anular, do movimento de um longo cilindro sólido envolto por uma corrente de líquido, num tubo (aqui, como esperado, pois o núcleo trata-se de uma estrutura solidária, as velocidades locais em cada dos seus pontos têm a mesma magnitude).

Aproximando-se da geratriz superior do tubo, junto à interface ou parede, a solução analítica do modo que escrita em Bentwich (1964) fornece resultados fisicamente inconsistentes: velocidades locais negativas, quer dizer, no mesmo sentido do gradiente de pressão, indicando refluxo. Não obstante, para ambos arranjos de fases foram confeccionadas tabelas com valores adimensionais de vazões volumétricas, variável de real interesse aqui, para várias posições da interface em relação ao eixo de simetria do duto. No padrão anular, porque há solução exata (Bentwich et al., 1970), efetua-se comparação com os resultados numéricos.

As tabelas 1, 2, 3 e 4 exibem valores numéricos e analíticos das vazões volumétricas referentes a cada fase, padrão anular, para vários raios da fase do núcleo adimensionalizados pelo raio interno do tubo - 0,3; 0,5; 0,7 e 0,9 -, variando-se a excentricidade, do mesmo modo escalada por R . Observe-se a influência da parede sobre a fase que ocupa o núcleo do escoamento: sua vazão volumétrica sempre decresce na medida da progressão da excentricidade.

Tabela 1a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a 0,3 R e $\gamma = 0,02$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,32519	0,32447	0,22337	0,22358
0,05	0,32566	0,32492	0,22322	0,22343
0,1	0,32704	0,32629	0,22277	0,22299

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,15	0,32933	0,32856	0,22204	0,22225
0,2	0,33252	0,33172	0,22101	0,22122
0,25	0,33660	0,33576	0,21969	0,21991
0,3	0,34153	0,34064	0,21809	0,21832
0,35	0,34729	0,34634	0,21624	0,21646
0,4	0,35380	0,35279	0,21413	0,21435
0,45	0,36102	0,35992	0,21178	0,21200
0,5	0,36883	0,36765	0,20921	0,20944

Tabela 1b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,3R$ e $\gamma = 10$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,32519	0,32447	0,06464	0,06448
0,05	0,32509	0,32436	0,06444	0,06427
0,1	0,32476	0,32403	0,06382	0,06366
0,15	0,32422	0,32347	0,06279	0,06263
0,2	0,32346	0,32270	0,06134	0,06118
0,25	0,32248	0,32169	0,05947	0,05931
0,3	0,32126	0,32045	0,05715	0,05699
0,35	0,31979	0,31895	0,05437	0,05423
0,4	0,31805	0,31717	0,05111	0,05097
0,45	0,31599	0,31508	0,04733	0,04719
0,5	0,31356	0,31260	0,04295	0,04283

Tabela 1c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,3R$ e $\gamma = 10^5$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,32519	0,32447	0,06432	0,06416
0,05	0,32502	0,32429	0,06411	0,06395
0,1	0,32449	0,32375	0,06348	0,06331
0,15	0,32359	0,32285	0,06241	0,06225
0,2	0,32234	0,32158	0,06091	0,06075
0,25	0,32071	0,31994	0,05896	0,05880
0,3	0,31869	0,31789	0,05655	0,05639
0,35	0,31625	0,31543	0,05365	0,05350
0,4	0,31335	0,31249	0,05023	0,05009
0,45	0,30989	0,30902	0,04623	0,04609
0,5	0,30578	0,30486	0,04155	0,04144

Tabela 2a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 0,02$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,22089	0,22042	1,37445	1,37261
0,05	0,22195	0,22148	1,37415	1,37231
0,1	0,22512	0,22463	1,37325	1,37141
0,15	0,23037	0,22985	1,37176	1,36992
0,2	0,23762	0,23706	1,36971	1,36786
0,25	0,24679	0,24619	1,36710	1,36526
0,3	0,25777	0,25710	1,36398	1,36213
0,35	0,27039	0,26965	1,36037	1,35852
0,4	0,28446	0,28363	1,35632	1,35447

Tabela 2b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 10$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,22089	0,22042	0,14972	0,14934
0,05	0,22063	0,22016	0,14897	0,14859

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,1	0,21982	0,21935	0,14673	0,14635
0,15	0,21846	0,21799	0,14294	0,14258
0,2	0,21652	0,21604	0,13754	0,13719
0,25	0,21395	0,21347	0,13041	0,13008
0,3	0,21065	0,21016	0,12136	0,12105
0,35	0,20645	0,20596	0,11006	0,10978
0,4	0,20100	0,20051	0,09590	0,09568

Tabela 2c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,5R$ e $\gamma = 10^5$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,22089	0,22042	0,14726	0,14688
0,05	0,22040	0,21993	0,14644	0,14607
0,1	0,21892	0,21845	0,14397	0,14359
0,15	0,21639	0,21593	0,13978	0,13942
0,2	0,21279	0,21232	0,13376	0,13342
0,25	0,20795	0,20749	0,12575	0,12543
0,3	0,20167	0,20122	0,11543	0,11514
0,35	0,19353	0,19309	0,10226	0,10202
0,4	0,18260	0,18219	0,08516	0,08498

Tabela 3a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 0,02$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,10214	0,10193	4,91062	4,90148
0,025	0,10254	0,10233	4,91054	4,90139
0,05	0,10374	0,10353	4,91028	4,90114
0,075	0,10574	0,10552	4,90985	4,90070
0,1	0,10852	0,10829	4,90925	4,90010
0,125	0,11208	0,11183	4,90848	4,89933
0,15	0,11640	0,11614	4,90754	4,89839
0,175	0,12147	0,12119	4,90645	4,89729
0,2	0,12726	0,12696	4,90519	4,89603

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,225	0,13376	0,13343	4,90379	4,89462

Tabela 3b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 10$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,10214	0,10193	0,20569	0,20518
0,025	0,10205	0,10184	0,20514	0,20462
0,05	0,10176	0,10156	0,20344	0,20293
0,075	0,10128	0,10108	0,20059	0,20008
0,1	0,10060	0,10039	0,19654	0,19605
0,125	0,09971	0,09951	0,19125	0,19077
0,15	0,09859	0,09839	0,18461	0,18415
0,175	0,09722	0,09703	0,17651	0,17608
0,2	0,09555	0,09537	0,16677	0,16637
0,225	0,09354	0,09336	0,15511	0,15475

Tabela 3c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,7R$ e $\gamma = 10^5$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,10214	0,10193	0,19627	0,19577
0,025	0,10190	0,10169	0,19557	0,19507
0,05	0,10117	0,10097	0,19344	0,19295
0,075	0,09994	0,09974	0,18985	0,18937
0,1	0,09819	0,09799	0,18473	0,18426
0,125	0,09586	0,09568	0,17794	0,17749
0,15	0,09290	0,09273	0,16931	0,16890
0,175	0,08920	0,08904	0,15857	0,15819
0,2	0,08459	0,08446	0,14528	0,14495
0,225	0,07879	0,07869	0,12868	0,12843

Tabela 4a: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 0,02$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,01418	0,01419	13,00337	12,97521
0,025	0,01466	0,01467	13,00332	12,97516
0,05	0,01609	0,01612	13,00317	12,97502
0,075	0,01848	0,01852	13,00292	12,97477

Tabela 4b: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 10$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,01418	0,01419	0,14664	0,14627
0,025	0,01421	0,01423	0,14467	0,14431
0,05	0,01430	0,01433	0,13862	0,13828
0,075	0,01447	0,01452	0,12803	0,12773

Tabela 4c: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais relativas a cada fase segundo valores diversos de excentricidade, raio do núcleo igual a $0,9R$ e $\gamma = 10^5$

Excentricidade	Espaço Anular		Núcleo	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,0	0,01418	0,01419	0,12088	0,12057
0,025	0,01377	0,01379	0,11703	0,11673
0,05	0,01247	0,01251	0,10465	0,10439
0,075	0,00987	0,00992	0,07989	0,07975

Tomando o raio de curvatura da interface como parâmetro, foram traçados gráficos (fig 4-1, 4-2, 4-3 e 4-4) associados às tabelas precedentes. Para a escala neles utilizada, as soluções exata e analítica se sobrepõem.

Quando a excentricidade é nula, o problema é axisimétrico - a velocidade é só função da posição radial -, unidimensional, pois. Em tal escoamento perfeitamente concêntrico, a vazão volumétrica adimensional, espaço anular, não varia para dado raio do núcleo, qualquer que seja γ .

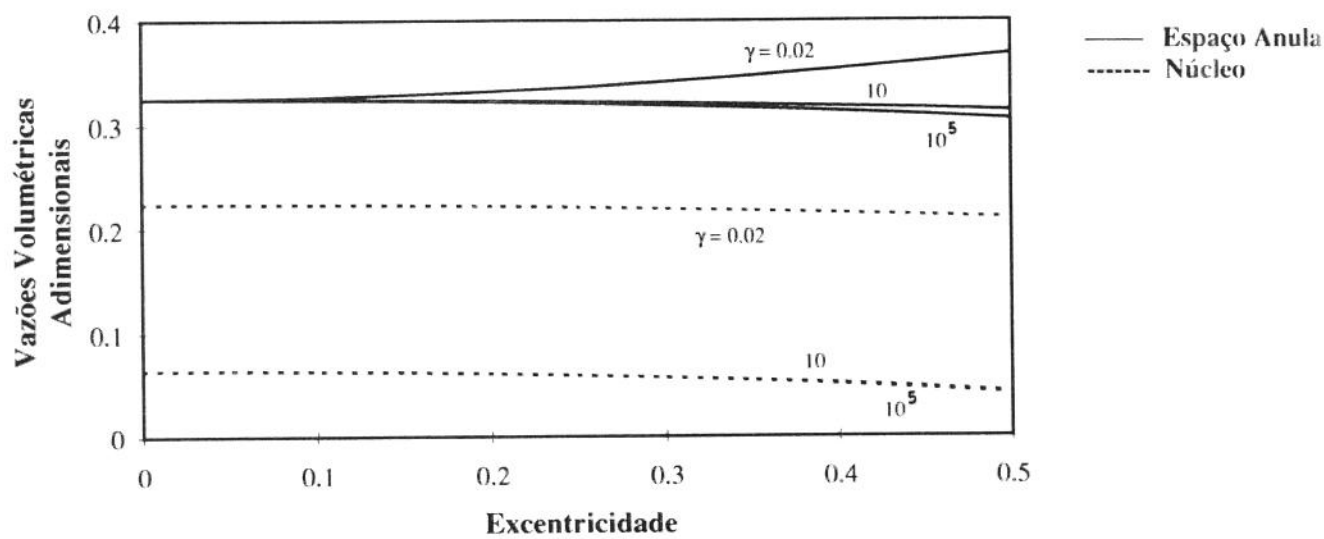


fig. 4-1: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,3 R$

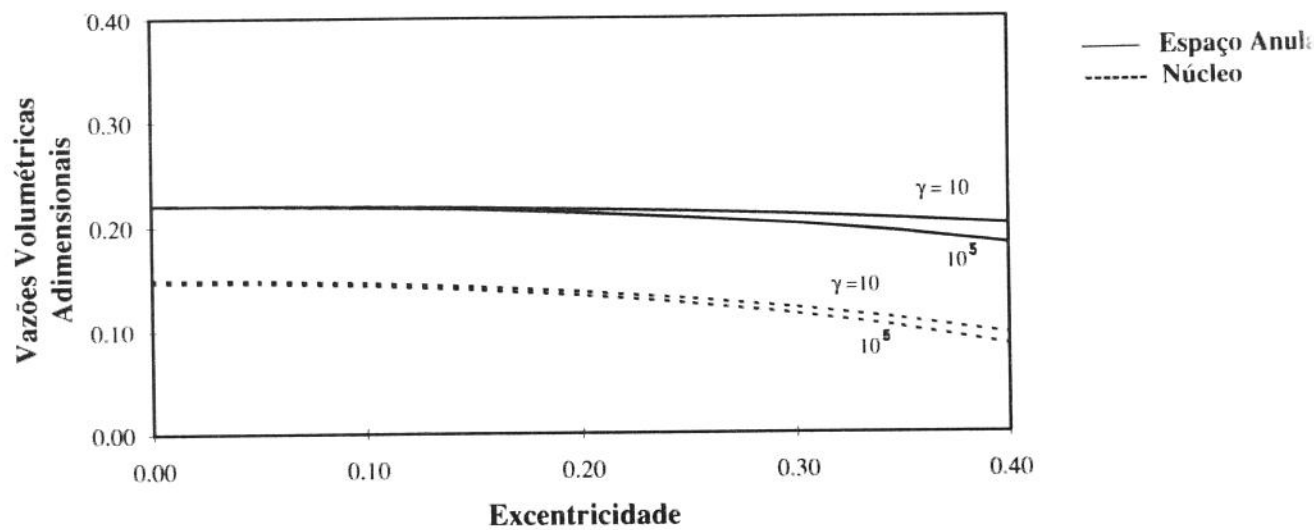


fig. 4-2: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,5 R$

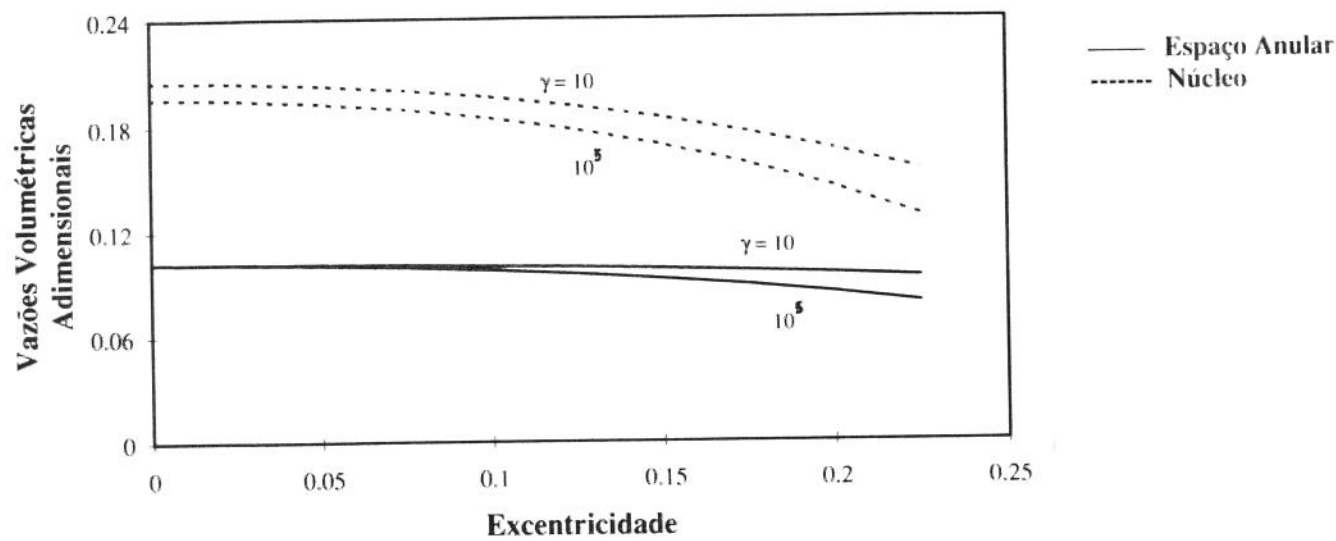


fig. 4-3: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcelo igual a $0,7 R$

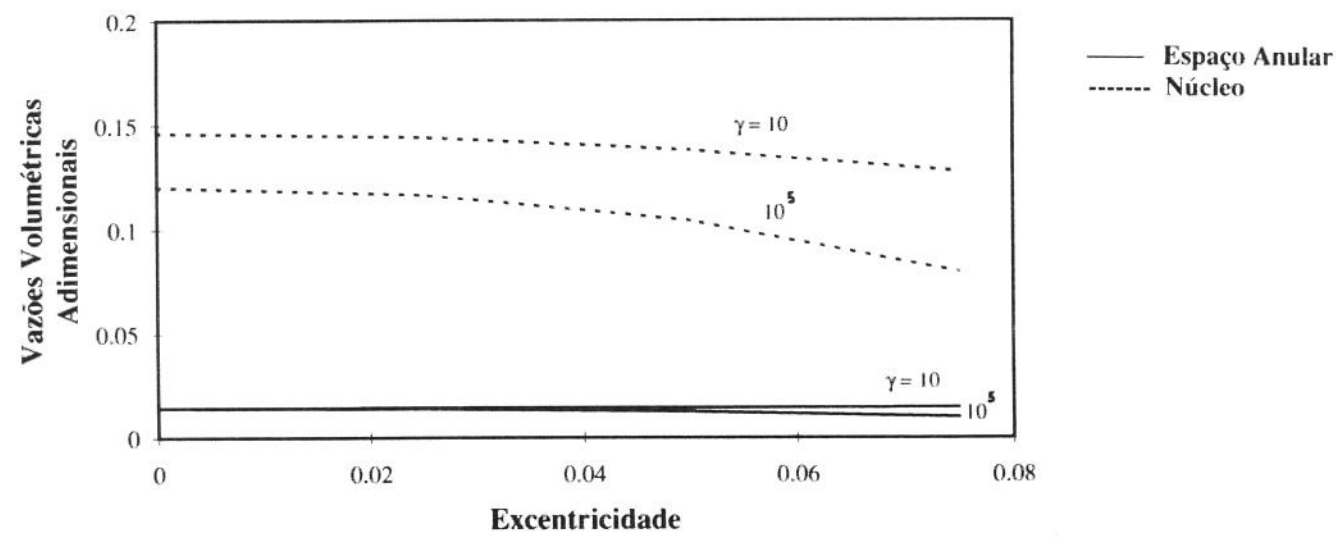


fig. 4-4: Padrão Anular: vazões volumétricas adimensionais versus excentricidade para raio do núcelo igual a $0,9 R$

Ainda no arranjo anular e em termos de erro relativo:

$$E_R = \left| \frac{Q^A - Q^N}{Q^A} \right| \times 100,$$

que representa a diferença entre valores exato e numérico, em módulo, normalizada pelo valor exato, as vazões volumétricas adimensionais para cada fase foram cotejadas com os respectivos resultados analíticos (fig 4-5, 4-6, 4-7 e 4-8).

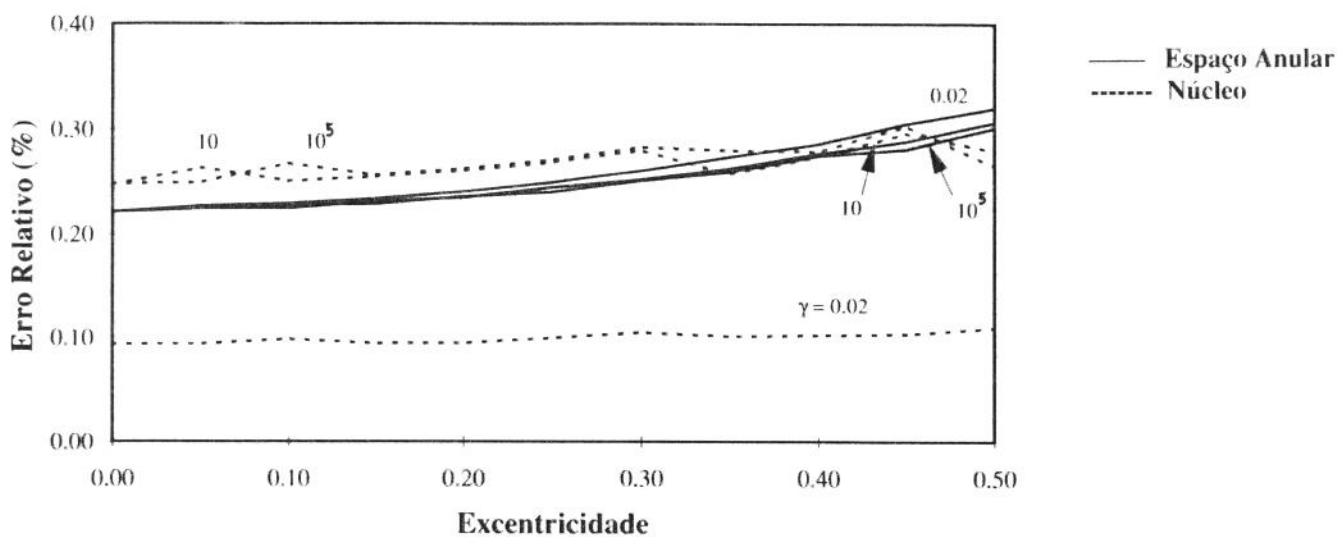


fig. 4-5: Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,3 R$

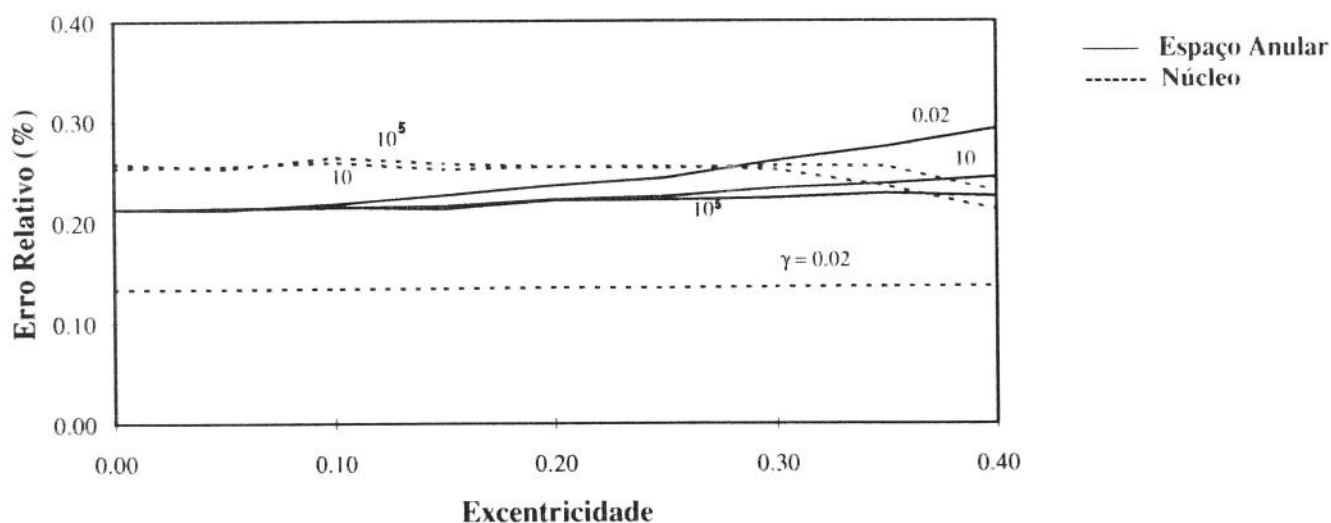


fig. 4-6: Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0,5 R$

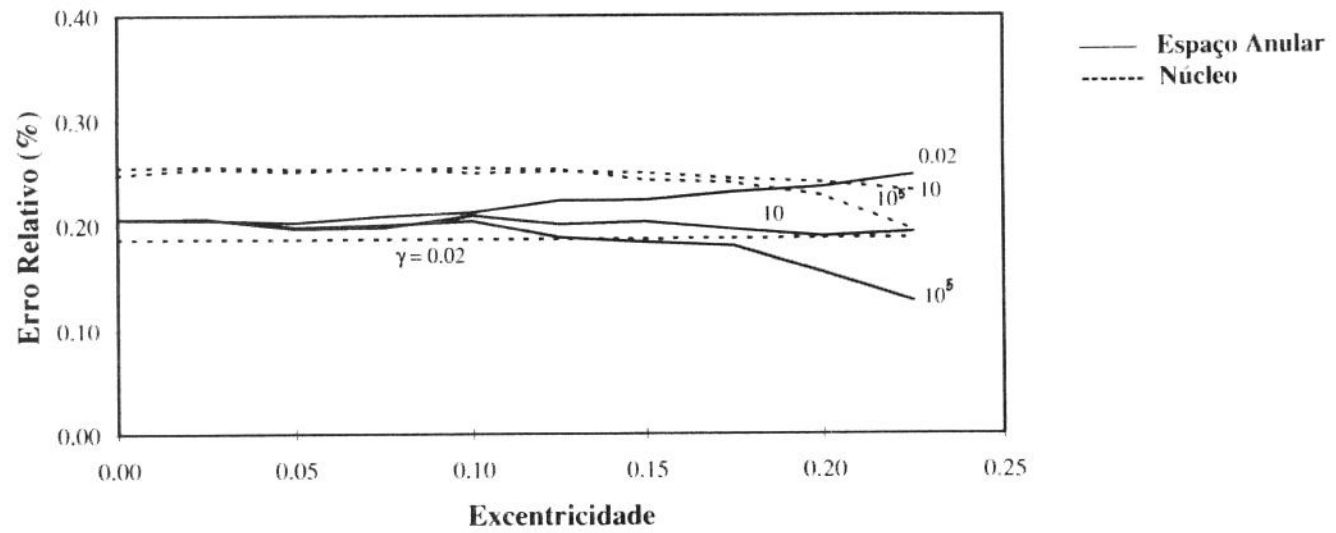


fig. 4-7: Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0.7 R$

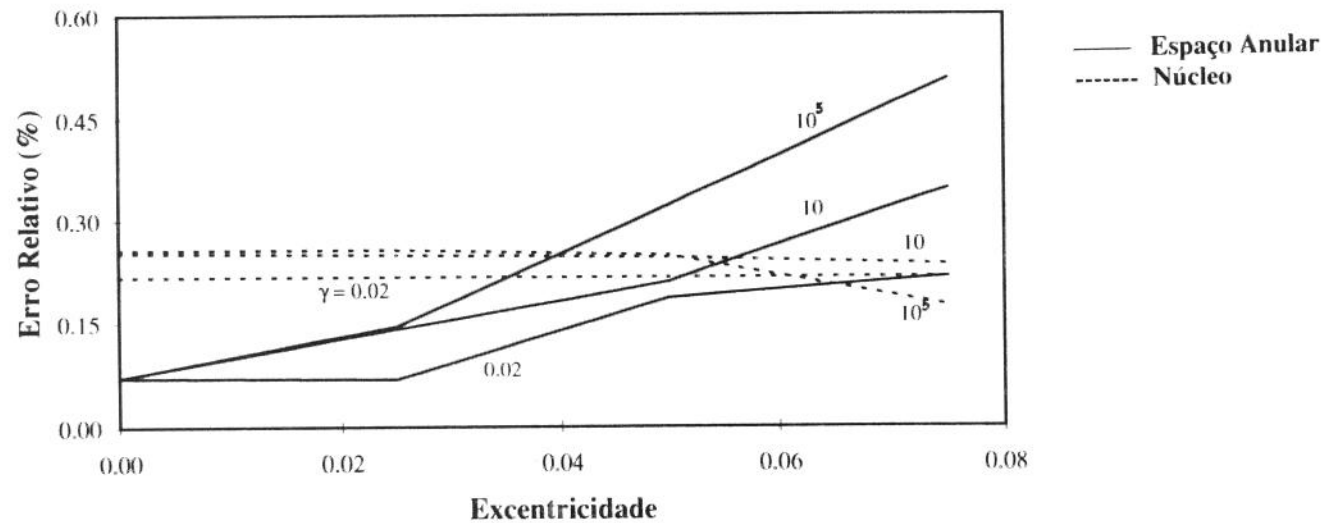


fig. 4-8: Padrão Anular: E_R versus excentricidade para raio do núcleo igual a $0.9 R$

Como se depreende desses gráficos, o erro relativo não excede cerca de 0,5%. Além disso, note-se que nas figuras 4-1 e 4-2 as curvas para o espaço anular situam-se acima daquelas do núcleo, ao passo que nas figuras 4-3 e 4-4 essa situação se inverte, ilustrando em parte - há que se ter em conta ainda a ação da parede - a relação entre as áreas da secção do duto ocupadas por cada fase.

Por fim, as tabelas 5 e 6 apresentam, para o padrão estratificado, porque não foi construída uma solução analítica para as vazões volumétricas adimensionais, apenas valores numéricos relativos a cada fase. Segundo posição e forma da interface, temos ao lado de cada quadro a correspondente configuração do sistema bifásico no interior do tubo.

Tabela 5a: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, referentes a cada fase, para interface diametral plana

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,313445	3,960596
10	0,096595	0,029606
10^5	0,074434	0,000003

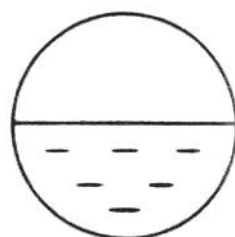


Tabela 5b: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, referentes a cada fase, para interface posicionada a uma distância $0,5R$ acima do diâmetro horizontal, curvatura nula

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,524257	0,515122
10	0,249163	0,007074
10^5	0,232666	0,000001

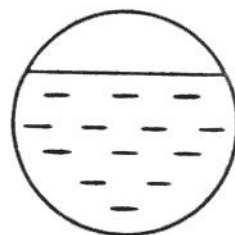


Tabela 5c: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, adimensionais, valores numéricos, para interface plana posicionada a uma distância $0,5R$ abaixo do diâmetro horizontal

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,073716	11,805923
10	0,017769	0,048932
10^5	0,008111	0,000005

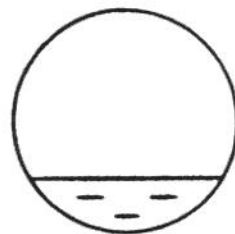


Tabela 6a: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, interface tangenciando o diâmetro horizontal

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,310599	2,816566
10	0,125518	0,030654
10^5	0,094396	0,000004

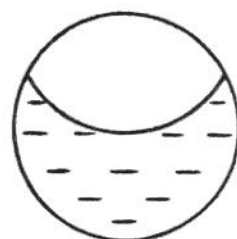


Tabela 6b: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, interface posicionada a uma distância $0,5R$ acima do diâmetro horizontal

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,462254	0,348830
10	0,271555	0,006114
10^5	0,254236	0,000001

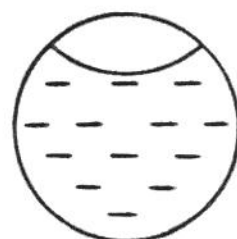
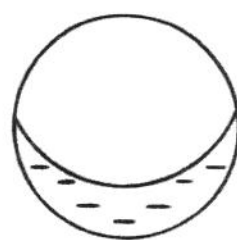


Tabela 6c: Padrão Estratificado: vazões volumétricas, numéricas, curvatura unitária, ponto médio da interface a uma distância $0,5R$ abaixo do diâmetro horizontal

γ	Fase 1 (mais densa)	Fase 2
0,02	0,081903	10,853647
10	0,023428	0,053738
10^5	0,010093	0,000006



Reportando-se às tabelas acima, caso estratificado, note-se que, para γ igual a 10^5 , a fase *menos* densa pode ser entendida como uma fronteira rígida, como constata-se das vazões volumétricas beirando o valor zero.

Conclusão e Recomendações

A solução numérica de um problema elíptico, representado pelas equações diferenciais parciais da quantidade de movimento de um escoamento bifásico, axial, plenamente desenvolvido, padrões anular e estratificado, interface circular-cilíndrica ou um segmento de arco de uma superfície cilíndrica (admitindo-se inclusive curvatura nula), num tubo horizontal, laminar e em regime permanente, foi obtida e comparada com os resultados analíticos de Bentwich (1964), visando à validação. Das premissas adotadas, as derradeiras são as mais contundentes, porque escoamentos conjuntos de duas fases são turbulentos em essência e variam com o tempo.

Foi utilizado o método *Flux-Spline* (Varejão, 1979) de volumes de controle, que fundamenta-se na formulação convencional (Patankar, 1980), porém a supera em economia e, sobretudo, acuidade. Tais técnicas eram dependentes da geometria do problema, posto que concebidas para coordenadas ortogonais, e foram desdobradas por Hsu (1981) para sistemas curvilíneos em geral.

O domínio foi tratado em conformidade com o conceito de discretização, o qual jaz no axioma matemático que afirma ser a soma das partes igual ao todo. Conquanto pudesse ser descrito em ambos padrões por coordenadas bipolares, no anular optou-se por verificar a resposta do método à não-ortogonalidade da malha, julgado perfeitamente aplicável à classe de escoamentos bifásicos conhecidos como *separated flows*, onde há uma fronteira interna bem definida, descrita pela interface, e na qual os referidos arranjos de fases são casos particulares.

Se as linhas coordenadas não se interceptam a ângulos retos, a equação de discretização para a variável dependente inclui um termo fonte extra, a qualidade dos resultados ficando em dependência de quão eficiente seja a interpolação de certas quantidades que o compõem - fluxos secundários. Para malhas muito distorcidas, pode haver um distanciamento do princípio de conservação enunciado pelas equações de governo.

Forma e posição da interface foram supostas conhecidas, malha estruturada pela técnica mais simples disponível: a algébrica. Caso fosse resolvido o problema inverso, ou seja, determinação do perfil de velocidades axiais a partir do conhecimento prévio das vazões volumétricas e formato da interface, o critério de estabilidade para a posição da superfície de separação entre as fases seria a igualdade do gradiente de pressão hidráulica que as impele. Além da aplicação de um modelo de turbulência, isso fica como sugestão, naturalmente.

Em escoamentos bifásicos, a distribuição dos volumes finitos segue tanto a geometria do domínio como o contorno e a posição da(s) interface(s). Claro esteja que, nesse trabalho, não foi construído um gerador de malhas, para possíveis testes com outras formas de interface o algoritmo devendo ser desenvolvido pelo usuário dos programas computacionais. Com o fito de minimizar os erros oriundos da discretização, aconselha-se exame de processo mais apurado.

Referências

- Agrawal, S.S., Gregory, G.A., and Govier, G.W.: “An Analysis of Horizontal Stratified Two-Phase Flow in Pipes”, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 51, pp.280-286 (1973);
- Bentwich, M.: “Two-Phase Viscous Axial Flow in a Pipe”, *Journal of Basic Engineering*, Transactions of the ASME, pp.669-672 (1964);
- Bentwich, M., Kelly, D.A.I., and Epstein, N.: “Two-Phase Eccentric Interface Laminar Pipeline Flow”, *Journal of Basic Engineering*, Transactions of the ASME, pp.32-36 (1970);
- Brill, J.P., and Arirachakaran, S.J.: “State of the Art in Multiphase Flow”, *Journal of Petroleum Technology*, pp.538-541 (1992);
- Cheremisinoff, N.P., and Davis, E.J.: “Stratified Turbulent - Turbulent Gas-Liquid Flow”, *AIChE Journal* (Vol. 25, Nº 1), pp.48-56 (1979);
- Hsu, Chia-Fu: “A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry”, Ph.D. Thesis, University of Minnesota (1981);
- Farlow, S.J.: “Partial Differential Equations for Scientists & Engineers”, John Wiley & Sons (1982);
- Issa, R.I.: “Prediction of Turbulent, Stratified, Two-Phase Flow in Inclined Pipes and Channels”, *International Journal of Multiphase Flow* (Vol. 14, Nº 2), pp.141-154 (1988);
- James, P.W., Wilkes, N.S., Conkie, W., and Burns, A.: “Developments in the Modelling of Horizontal Annular Two-Phase Flow”, *International Journal of Multiphase Flow* (Vol. 13, Nº 2), pp.173-198 (1987);
- Prakash, C., and Patankar, S.V.: “Combined Free and Forced Convection in Vertical Tubes with Radial Internal Fins”, *Journal of Heat Transfer*, Transactions of the ASME, Vol. 103, pp.566-572 (1981);
- Patankar, S.V.: “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere Publishing Corporation (1980);
- Shoham, O., and Taitel, Y.: “Stratified Turbulent - Turbulent Gas-liquid Flow in Horizontal and Inclined Pipes”, *AIChE Journal* (Vol. 30, Nº 3), pp.377-385 (1984);
- Smirnov, V.: “Cours de Mathématiques Supérieures”, Tome II, X édition, Éditions Mir Moscou (1970);

- Spiegel, M.R.: “Schaum’s Outline of Principles and Problems of COMPLEX VARIABLES with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications”, McGraw-Hill (1964);
- Spiegel, M.R.: “VECTOR ANALYSIS and an Introduction to Tensor Analysis”, Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill (1959);
- Taitel, Y., and Dukler, A.E.: “A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow”, AIChE Journal (Vol.22, Nº 1), pp.47-55 (1976);
- Torres, F. R.: “Caracterização da Interface e Determinação Experimental do Fator de Atrito Interfacial em Escoamentos Horizontais Estratificados”, Dissertação de Mestrado, UNICAMP (1992);
- Varejão, L.M.C.: “Flux-Spline Method for Heat, Mass, and Momentum Transfer”, Ph.D. Thesis, University of Minnesota (1979).


```

3      HCSI(42,42),HETA(42,42),JCSI(42,42),JETA(42,42),
4      W(42,42),VOL(42,42),GAM(42,42)
COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,LAST,NSOLVE,NTIMES
COMMON/CNST/DTETA,PI,RDP,RDV,ECC,KA,KC
COMMON/COMP/WP,WPOLD,WPNEW
COMMON/CNTL/LSTOP
REAL*8 X(42,42),Y(42,42),XV(42,42),YV(42,42),JACOB
REAL*8 AX(42,42),AY(42,42),AETA(42,42),ACSI(42,42),AW(42,42)
C-----
1      FORMAT(/,A34,/)
2      FORMAT(/,A25)
3      FORMAT(/,A34)
4      FORMAT(/,A18)
5      FORMAT(/,A30)
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
GO TO(1000,2000,3000,4000,5000) KENTRY
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
1000  CONTINUE
CCCC  ANNULAR(1)=GEOMETRY
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C---- INPUTS ----
CC
WRITE(*,1) '--- ANNULAR TWO-PHASE FLOW ---'
WRITE(*,2) 'Number of Divisions: '
READ(*,*) ND
WRITE(*,3) 'Ratio of Dynamic Viscosities: '
READ(*,*) RDV
WRITE(*,4) 'Eccentricity: '
READ(*,*) ECC
WRITE(*,5) 'Radius of the Core Phase: '
READ(*,*) RCP
CC
C----- DOMAIN DISCRETIZATION -----
CC
C---- Calculating X-vertex and Y-vertex ----
CC
L1=ND+2
M1=L1
L2=L1-1
M2=M1-1
L3=L2-1
M3=M2-1
CC
RIN = 1.0D0
CC
PI = 4.0 * DATAN(1)
DTETA= PI / ND
KA = RCP * ND + 2
CC
MAB = (M1+KA) / 2 + 1
KC = KA - 1
RDP = 1.0D-3
CC
DO I = 2, L1
XV(I,2) = 0.0
YV(I,2) = 0.0
ANGLE = (I-2) * DTETA
XV(I,3) = -RDP * DCOS(ANGLE)
YV(I,3) = RDP * DSIN(ANGLE)
XV(I,KA) = -RCP * DCOS(ANGLE)
YV(I,KA) = RCP * DSIN(ANGLE)
ENDDO
CC
XV(2,M1) = -1.0 - ECC
YV(2,M1) = 0.0
DO I = 3, L2
ANGLE = (I-2) * DTETA
IF( ANGLE.LT.PI/2 ) THEN
A = DTAN( ANGLE+PI/2 )
ELSE
A = DTAN( ANGLE-PI/2 )
ENDIF
AUX = (A**2) - (ECC**2) + 1.0
YV(I,M1) = ((-A*ECC) + DSQRT(AUX)) / (1.0+(A**2))
XV(I,M1) = A*YV(I,M1)
ENDDO
XV(L1,M1) = 1.0 - ECC
YV(L1,M1) = 0.0
CC
C---- { Eccentric Annular Phase } ----
CC
DO I = 2, L1

```

```

XD = XV(I,M1) - XV(I,KA)
YD = YV(I,M1) - YV(I,KA)
DO J = KA, M1
  IF( J.LT.MAB ) THEN
    AUX = 0.5 * (( FLOAT(J-KA) / FLOAT(MAB-KA) )**1)
  ELSE
    AUX = 1.0 - 0.5 * (( FLOAT(M1-J) / FLOAT(M1-MAB) )**1)
  ENDIF
  XV(I,J) = AUX*XD + XV(I,KA)
  YV(I,J) = AUX*YD + YV(I,KA)
ENDDO
ENDDO
CC
C----- { Core Phase } -----
CC
DO I = 2, L1
  XD = XV(I,KA) - XV(I,3)
  YD = YV(I,KA) - YV(I,3)
  DO J = 3, KC
    AUX = ( FLOAT(J-3) / FLOAT(KA-3) )
    XV(I,J) = AUX * XD + XV(I,3)
    YV(I,J) = AUX * YD + YV(I,3)
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- POSITIONS OF THE POLE, PRIMARY NODES -----
C----- AND POINTS ON THE FRONTIER -----
CC
C----- { Control Volumes in the Neighbourhood of the Pole } -----
CC
DO I=2,L2
  ANGLE = (I-2) * DTETA
  X(I,2) = -(RDP/2) * DCOS(ANGLE+DTETA/2)
  Y(I,2) = (RDP/2) * DSIN(ANGLE+DTETA/2)
ENDDO
CC
C----- { The Others Internal Control Volumes } -----
CC
DO I=2,L2
  DO J=3,M2
    X(I,J)=0.25*( XV(I,J)+XV(I+1,J) + XV(I,J+1)+XV(I+1,J+1) )
    Y(I,J)=0.25*( YV(I,J)+YV(I+1,J) + YV(I,J+1)+YV(I+1,J+1) )
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- { Centre of the Core Phase and Inner Tube Wall } -----
CC
DO I=2,L2
  X(I,1) = XV(I,2)
  Y(I,1) = YV(I,2)
  X(I,M1)=0.5*( XV(I,M1) + XV(I+1,M1) )
  Y(I,M1)=0.5*( YV(I,M1) + YV(I+1,M1) )
ENDDO
CC
C----- { Lynes of Symmetry } -----
CC
DO J=2,M2
  X(1,J) =0.5*( XV(2,J) + XV(2,J+1) )
  Y(1,J) =0.5*( YV(2,J) + YV(2,J+1) )
  X(L1,J)=0.5*( XV(L1,J) + XV(L1,J+1) )
  Y(L1,J)=0.5*( YV(L1,J) + YV(L1,J+1) )
ENDDO
CC
C----- { Centre of the Core Phase and both Nodes located in the -----
C----- intersection of the extension of the Symmetric Lines -----
C----- with the Boundary of the Domain } -----
CC
X(1,1) = XV(2,2)
Y(1,1) = YV(2,2)
X(L1,M1)= XV(L1,M1)
Y(L1,M1)= YV(L1,M1)
X(1,M1) = XV(2,M1)
Y(1,M1) = YV(2,M1)
X(L1,1) = XV(L1,2)
Y(L1,1) = YV(L1,2)
CC
C----- SCALE FACTORS AND CELLS VOLUMES -----
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,M2
    XE=0.5*( XV(I+1,J+1) + XV(I+1,J) )
    XW=0.5*( XV(I,J+1) + XV(I,J) )
    YE=0.5*( YV(I+1,J+1) + YV(I+1,J) )
    YW=0.5*( YV(I,J+1) + YV(I,J) )
    XN=0.5*( XV(I,J+1) + XV(I+1,J+1) )
    XS=0.5*( XV(I,J) + XV(I+1,J) )
    YN=0.5*( YV(I,J+1) + YV(I+1,J+1) )
  ENDDO
ENDDO

```

```

        YS=0.5*( YV(I,J) + YV(I+1,J) )
        DXDCSI = XE-XW
        DXDETA = XN-XS
        DYDCSI = YE-YW
        DYDETA = YN-YS
        HCSI(I,J)=DSQRT( (DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2 )
        HETA(I,J)=DSQRT( (DXDETA)**2 + (DYDETA)**2 )
        VOL(I,J) = DXDCSI*DYDETA - DXDETA*DYDCSI
    ENDDO
ENDDO
CC
DO I=2,L2
    HETA(I,1) =0.0
    HETA(I,M1)=0.0
    HCSI(I,1) =0.0
    HCSI(I,M1)=DSQRT( (XV(I+1,M1)-XV(I,M1))**2+
1      (YV(I+1,M1)-YV(I,M1))**2)
    ENDDO
CC
    HCSI(1,1) = 0.0
    HCSI(1,M1) = 0.0
    HCSI(L1,1) = 0.0
    HCSI(L1,M1)= 0.0
CC
DO J=2,M2
    HCSI(1,J) =0.0
    HCSI(L1,J)=0.0
    HETA(1,J)=DSQRT( (XV(2,J)-XV(2,J+1))**2+
1      (YV(2,J)-YV(2,J+1))**2)
    HETA(L1,J)=DSQRT( (XV(L1,J)-XV(L1,J+1))**2+
1      (YV(L1,J)-YV(L1,J+1))**2)
    ENDDO
CC
    HETA(1,1) = 0.0
    HETA(L1,1) = 0.0
    HETA(1,M1) = 0.0
    HETA(L1,M1)= 0.0
CC
C----- PRIMARY AND SECONDARY AREAS -----
CC
C----- { ECCENTRIC ANNULAR PHASE } -----
CC
DO J=KA,M2
    DO I=3,L2
        DXDETA = XV(I,J+1) - XV(I,J)
        DYDETA = YV(I,J+1) - YV(I,J)
        DXDCSI = X(I,J) - X(I-1,J)
        DYDCSI = Y(I,J) - Y(I-1,J)
        AUX1=(DXDETA)**2 + (DYDETA)**2
        AUX2=(DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2
        AUX3=DXDCSI*DXDETA + DYDCSI*DYDETA
        JACOB = DXDCSI*DYDETA - DXDETA*DYDCSI
        AC1(I,J) = DSQRT(AUX2)*AUX1/JACOB
        AC2(I,J) = DSQRT(AUX1)*AUX3/JACOB
    ENDDO
ENDDO
CC
DO J=KA,M2
    AC1(2,J) = HETA(1,J)
    AC1(L1,J)= HETA(L1,J)
    AC2(2,J) = 0.0
    AC2(L1,J)= 0.0
ENDDO
CC
DO I=2,L2
    DO J=KA,M1
        DXDETA = X(I,J) - X(I,J-1)
        DYDETA = Y(I,J) - Y(I,J-1)
        DXDCSI = XV(I+1,J) - XV(I,J)
        DYDCSI = YV(I+1,J) - YV(I,J)
        AUX1=(DXDETA)**2 + (DYDETA)**2
        AUX2=(DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2
        IF(J.EQ.M1) THEN
            DXDETA=DXDETA*2.0
            DYDETA=DYDETA*2.0
            AUX1=AUX1*4.0
        ENDIF
        AUX3=DXDCSI*DXDETA + DYDCSI*DYDETA
        JACOB = DXDCSI*DYDETA - DXDETA*DYDCSI
        AE1(I,J) = DSQRT(AUX1)*AUX2/JACOB
        AE2(I,J) = DSQRT(AUX2)*AUX3/JACOB
    ENDDO
ENDDO
CC
C----- { CORE PHASE } -----
CC
DO J=2,KC

```

```

DO I=2,L1
  DXDETA = XV(I,J+1) - XV(I,J)
  DYDETA = YV(I,J+1) - YV(I,J)
  AC1(I,J) = DSQRT( (DXDETA)**2 + (DYDETA)**2 )
  AC2(I,J) = 0.0
ENDDO
ENDDO
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,KC
    DXDCSI = XV(I+1,J) - XV(I,J)
    DYDCSI = YV(I+1,J) - YV(I,J)
    AE1(I,J) = DSQRT( (DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2 )
    AE2(I,J) = 0.0
  ENDDO
ENDDO
CC
C-----
  RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
2000 CONTINUE
CCCC ANNULAR(2)=COEFFICIENTS
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C---- VOLUMETRIC SOURCE of W ----
CC
  DO I = 2, L2
    DO J = 1, M2
      CON(I,J) = 1.0
    ENDDO
  ENDDO
CC
C---- DIFFUSION COEFFICIENTS ----
CC
C---- Eccentric Annular Phase ----
C---- (Unit Value) ----
CC
  DO I = 1, L1
    DO J = KA, M1
      GAM(I,J) = 1.0
    ENDDO
  ENDDO
CC
C---- Core Phase ----
C---- ( Ratio of Dynamic Viscosities ) ----
CC
  DO I = 1, L1
    DO J = 1, KC
      GAM(I,J) = RDV
    ENDDO
  ENDDO
CC
C---- COEFFICIENTS AIM,AIP,AJM,AJP and AP ----
CC
  DO J=2,M2
    AIM(2,J) = 0.0
CC
    AIP(L2,J)= 0.0
CC
    DO I=2,L3
      DI=2.0/(HCSI(I,J)/GAM(I,J)+HCSI(I+1,J)/GAM(I+1,J))
      AIP(I,J) = DI*AC1(I+1,J)
      AIM(I+1,J) = AIP(I,J)
    ENDDO
  ENDDO
CC
  DO I=2,L2
    AJM(I,2) = 0.0
CC
    DJ=2.0/( HETA(I,M2) / GAM(I,M2) )
    AJP(I,M2) = DJ*AE1(I,M1)
CC
    DO J=2,M3
      DJ=2.0/(HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J+1)/GAM(I,J+1))
      AJP(I,J) = DJ*AE1(I,J+1)
      AJM(I,J+1) = AJP(I,J)
    ENDDO
  ENDDO
CC
  DO I=2,L2
    DO J=2,M2
      CONS(I,J)= CON(I,J)*VOL(I,J)
      AP(I,J) = AIP(I,J)+AIM(I,J)+AJP(I,J)+AJM(I,J)
    ENDDO
  ENDDO

```

```

CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
3000 CONTINUE
CCCC ANNULAR(3)=ANALYTICAL
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
      IF(ECC.EQ.0.0) ECC=1.0D-35
CC
      ZS = ( 1.0 - (RCP/RIN)**2 - ECC**2 ) / ( 2.0*(RCP/RIN)*ECC )
      ZT = ( 1.0 - (RCP/RIN)**2 + ECC**2 ) / ( 2.0*ECC )
      S = DLOG( ZS + DSQRT(ZS**2-1.0) )
      T = DLOG( ZT + DSQRT(ZT**2-1.0) )
CC
C-----      CARTESIAN COORDINATES      -----
C----- (The Origin of which is at the Centre of the Tube) -----
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 1, M2
          AX(I,J) = Y(I,J)
          AY(I,J) = X(I,J) + ECC
        ENDDO
      ENDDO
CC
C----- Calculating BIPOLAR COORDINATES -----
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 1, M2
          R2 = AX(I,J)**2 + AY(I,J)**2
          AUX = (R2+1.0) - AY(I,J)*( 2.0*DCOSH(T) )
          AETA(I,J) = DATAN( (-2.0*DSINH(T)) * AX(I,J) / AUX )
          ACSI(I,J) = 0.5*DLOG( (AUX**2 + (-2.0*DSINH(T)*AX(I,J))**2)/
1              (AX(I,J)**2+(AY(I,J)-DEXP(-T))**2)**2 )
        ENDDO
      ENDDO
CC
C----- VELOCITY PROFILE -----
CC
      F1 = (1.0-1.0/RDV) * (RCP/RIN) * DSINH(S-T)
CC
      DO I = 1, L1
CC
C----- { Core Phase } -----
CC
      DO J = 1, KC
        R2 = AX(I,J)**2 + AY(I,J)**2
        M = 1
        SC = 0.0
        SCA = 0.0
        SCB = 0.0
CC
100 CONTINUE
CC
      F2 = 1.0 / ( DTANH( M*(S-T) ) + (1.0/RDV) )
      F3 = DEXP( -M * ACSI(I,J) )
      F4 = DCOS( M * AETA(I,J) )
      SCB = SC
      SC = SC + (F2*F3*F4)
      SCA = SC
      IF( ABS(SCA-SCB) .GT. 1.0D-10 ) THEN
        M = M + 1
        GO TO 100
      ELSE
        AW(I,J) = 0.25*(1.0/RDV)*(1.0-R2) + F1*(0.5+(1.0/RDV)*SC)
      ENDIF
      ENDDO
CC
C----- { Eccentric Annular Phase } -----
CC
      DO J = KA, M2
        R2 = AX(I,J)**2 + AY(I,J)**2
        M = 1
        SA = 0.0
        SAA = 0.0
        SAB = 0.0
CC
200 CONTINUE
CC
      F0 = DEXP( -M*T )
      F2 = 1.0 / ( DTANH( M*(S-T) ) + (1.0/RDV) )
      F3 = DEXP( -M * ACSI(I,J) )
      F4 = DCOS( M * AETA(I,J) )
      F5 = DCOSH( M * (ACSI(I,J)-S) )
      F6 = DCOSH( M * (T-S) )

```

```

      SAB = SA
      SA = SA + ( F2 * ( (F0*F5)/F6 - F3 ) * F4 )
      SAA = SA
      IF( ABS(SAA-SAB) .GT. 1.0D-10 ) THEN
        M = M + 1
        GO TO 200
      ELSE
        AW(I,J) = 0.25*(1.0-R2) - F1*SA
      ENDIF
    ENDDO
    AW(I,M1) = 0.0
  ENDDO

CC
C----- VOLUMETRIC FLOW RATES -----
CC
C----- { Core Phase } -----
CC
      M = 1
      QC = 0.0
      QCA = 0.0
      QCB = 0.0
      FA = (1.0/RDV) * ( (RCP/RIN)**2 ) *
1      ( 2.0 - ((RCP/RIN)**2) - 2.0*(ECC**2) )
      FM = 8.0 * ( 1.0 - (1.0/RDV) ) * ( (RCP/RIN)**3 ) * DSINH(S-T)
CC
300 CONTINUE
CC
      FS1 = 1.0 / ( DTANH( M*(S-T) ) + (1.0/RDV) )
      FS2 = DEXP(-2.0*M*S)
      QCB = QC
      QC = QC + FS1*FS2
      QCA = QC
      IF( ABS(QCA-QCB) .GT. 1.0D-10 ) THEN
        M = M + 1
        GO TO 300
      ELSE
        QCA = (PI/8.0) * ( FA + FM * (0.5 + (1.0/RDV)*QC) )
      ENDIF
CC
C----- { Eccentric Annular Phase } -----
CC
      M = 1
      QA = 0.0
      QAA = 0.0
      QAB = 0.0
      FA = ( 1.0 - ((RCP/RIN)**2) )**2 + 2*((RCP/RIN)**2)*(ECC**2)
      FM = 8.0 * ( 1.0 - (1.0/RDV) ) * (RCP/RIN) * DSINH(S-T)
CC
400 CONTINUE
CC
      FS1 = 1.0 / ( DTANH( M*(S-T) ) + (1.0/RDV) )
      FS2 = 2.0*( M*ECC*DSINH(T) - (RCP/RIN)**2 ) /
1      ( DEXP(2.0*M*T) + DEXP(2.0*M*S) ) +
2      ( (RCP/RIN)**2 ) / DEXP(2.0*M*S)
      QAB = QA
      QA = QA + FS1*FS2
      QAA = QA
      IF( ABS(QAA-QAB) .GT. 1.0D-10 ) THEN
        M = M + 1
        GO TO 400
      ELSE
        QAA = (PI/8.0) * ( FA - FM*QA )
      ENDIF
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
4000 CONTINUE
CCCC ANNULAR(4)=START
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C----- INITIAL GUESS FOR AXIAL VELOCITY -----
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 1, M2
          W(I,J) = 0.20
        ENDDO
      ENDDO

CC
C----- NO SLIP CONDITION IN THE INNER SURFACE OF THE CYLINDER -----
C----- ( The Velocity Vanishes on the Solid Wall ) -----
CC
      DO I = 1, L1
        W(I,M1) = 0.0
      ENDDO

```

```

CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
5000 CONTINUE
CCCC ANNULAR(5)=OUTPUT
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
      IF(ITER.EQ.0) THEN
        WRITE(*,51)
51      FORMAT(//////, ' ITER',12X,'AXIAL WPole')
        ELSE
        WRITE(*,52) ITER,WP
52      FORMAT(I7,F24.10)
CC
C---- Testing CONVERGENCE ----
CC
      WPNEW = WP
      IF( ABS(WPNEW-WPOLD) .LT. 1.0D-10 ) LSTOP=.TRUE.
      WPOLD = WPNEW
      ENDIF
CC
      IF(LSTOP) THEN
        OPEN(1,FILE='RESULTS.DAT',STATUS='UNKNOWN')
CC
C---- Searching for MAXIMUM and MINIMUM Analytical Axial Velocities ----
CC
      AWMAX = 0.0
      AWMIN = 1.0D30
      DO I = 2, L2
        DO J = 1, M2
          IF( AW(I,J).GT.AWMAX ) AWMAX = AW(I,J)
          IF( AW(I,J).LT.AWMIN ) AWMIN = AW(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C---- NORMALIZED QUADRATIC MEAN PERCENTAGE ERROR ----
CC
      QM = 0.0
      DO I = 2, L2
        DO J = 2, M2
          QM = QM + ( AW(I,J) - W(I,J) )**2
        ENDDO
      ENDDO
      QM = DSQRT( QM / (ND*ND) )
      EPMQN = QM / ( AWMAX - AWMIN ) * 100
CC
C---- MAXIMUM NORMALIZED PERCENTAGE ERROR ----
CC
      EPNM = 0.0
      DO I = 2, L2
        DO J = 1, M2
          EPNMNEW = ABS( (AW(I,J) - W(I,J)) / (AWMAX - AWMIN) )
          IF( EPNMNEW.GT.EPNM ) EPNM = EPNMNEW
        ENDDO
      ENDDO
      EPNM = EPNM * 100
CC
C---- VOLUMETRIC FLOW RATES ----
CC
      QC = 0.0
      QA = 0.0
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 2, KC
          QC = QC + W(I,J)*VOL(I,J)
        ENDDO
CC
        DO J = KA, M2
          QA = QA + W(I,J)*VOL(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
      QCN = 2.0 * QC
      QAN = 2.0 * QA
CC
C-----
53  FORMAT(//3X,'** VOLUMETRIC FLOW RATES **')
54  FORMAT(/,'Core Phase:')
55  FORMAT(/,'Eccentric Annular Phase:')
56  FORMAT(F20.10)
57  FORMAT(11X,'(Numerical)')
58  FORMAT(10X,'(Analytical)')
59  FORMAT(//3X,'** MAXIMUM NORMALIZED PERCENTAGE ERROR **')
511 FORMAT(//3X,'** NORMALIZED QUADRATIC MEAN PERCENTAGE ERROR **')

```

```

C-----
      WRITE(1,511)
      WRITE(1,56) EPMQN
      WRITE(1,59)
      WRITE(1,56) EPNM
CC
      WRITE(1,53)
      WRITE(1,58)
      WRITE(1,54)
      WRITE(1,56) QCA
      WRITE(1,55)
      WRITE(1,56) QAA
CC
      WRITE(1,53)
      WRITE(1,57)
      WRITE(1,54)
      WRITE(1,56) QCN
      WRITE(1,55)
      WRITE(1,56) QAN
      ENDIF
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
      END
CC
CC
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE FLUX
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
      REAL*8 JCSI, JETA
      LOGICAL LSTOP
      COMMON CON(42,42), CONS(42,42), AP(42,42),
1      AIP(42,42), AIM(42,42), AJP(42,42), AJM(42,42),
2      AC1(42,42), AC2(42,42), AE1(42,42), AE2(42,42),
3      HCSI(42,42), HETA(42,42), JCSI(42,42), JETA(42,42),
4      W(42,42), VOL(42,42), GAM(42,42)
      COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER, LAST, NSOLVE, NTIMES
      COMMON/CNST/DTETA, PI, RDP, RDV, ECC, KA, KC
      COMMON/COMP/WP, WPOLD, WPNEW
      COMMON/CNTL/LSTOP
      REAL*8 P(42), Q(42), HAT(42,42)
C-----
CC
C-----
      IF(ITER.EQ.0) THEN
C-----
CC
C---- CONSTRUCT CON-Source ----
CC
      DO I=2,L2
        DO J=2,M2
          CON(I,J)=CONS(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C-----
      CALL SOLVE
C-----
CC
C---- VALUE of W in the Centre of the Core Phase ----
C---- ( Given by the Green's Theorem ) ----
CC
      SUM = 0.0
      DO I=2,L2
        SUM = SUM + W(I,2)
      ENDDO
CC
      WP = (SUM*DTETA)/PI + ( (RDP/2)**2 )/( RDV*4 )
      DO I=1,L1
        W(I,1) = WP
      ENDDO
CC
C-----
      ELSE
C-----
CC
      NT=1
      DO WHILE ( NT.LE.NTIMES )
CC
C-----
      IF(NT.EQ.1) THEN
C-----

```

```

CC
C----- CALCULATE FLUXES FOR NT=1 -----
C----- ( by using TriDiagonal-Matrix Algorithm ) -----
CC
C----- { ALONG I } -----
CC
DO I=2,L1
  JCSI(I,1)=0.0
ENDDO
CC
DO J=2,M1
  AUX=( W(I,1)-W(I,2) ) / ( 0.5*HCSI(2,J)/GAM(2,J) )
  P(2)=-0.25/0.75
  Q(2)=AUX/0.75
  DO I=3,L2
    DI=2.0/( HCSI(I,J)/GAM(I,J)+HCSI(I-1,J)/GAM(I-1,J) )
    AUX=DI * ( W(I-1,J)-W(I,J) )
    BI=0.125 * HCSI(I,J) / GAM(I,J) * DI
    CI=0.125 * HCSI(I-1,J) / GAM(I-1,J) * DI
    AI=1.0-BI-CI
    DENOM=AI+CI*P(I-1)
    P(I)=-BI/DENOM
    Q(I)=( AUX-CI*Q(I-1) )/DENOM
  ENDDO
CC
  AUX=( W(L2,J)-W(L1,J) ) / ( 0.5*HCSI(L2,J)/GAM(L2,J) )
  Q(L1)=( AUX-0.25*Q(L2) ) / ( 0.75+0.25*P(L2) )
  JCSI(L1,J)=Q(L1)
  DO I=L2,2,-1
    JCSI(I,J)=P(I)*JCSI(I+1,J)+Q(I)
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- { ALONG J } -----
CC
DO I=1,L1
  AUX=( W(I,1)-W(I,2) ) / ( 0.5*HETA(I,2)/GAM(I,2) )
  P(2)=-0.25/0.75
  Q(2)=AUX/0.75
  DO J=3,M2
    DJ=2.0/( HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J-1)/GAM(I,J-1) )
    AUX=DJ * ( W(I,J-1)-W(I,J) )
    BJ=0.125 * HETA(I,J) / GAM(I,J) * DJ
    CJ=0.125 * HETA(I,J-1) / GAM(I,J-1) * DJ
    AJ=1.0-BJ-CJ
    DENOM=AJ+CJ*P(J-1)
    P(J)=-BJ/DENOM
    Q(J)=( AUX-CJ*Q(J-1) )/DENOM
  ENDDO
  AUX=( W(I,M2)-W(I,M1) ) / ( 0.5*HETA(I,M2)/GAM(I,M2) )
  Q(M1)=( AUX-0.25*Q(M2) ) / ( 0.75+0.25*P(M2) )
  JETA(I,M1)=Q(M1)
CC
  DO J=M2,2,-1
    JETA(I,J)=P(J)*JETA(I,J+1)+Q(J)
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS -----
C----- { Lines of Symmetry } -----
CC
DO J=2,M2
  JCSI(2,J)=0.0
  JCSI(L1,J)=0.0
ENDDO
C-----
C----- ELSE
C-----
CC
C----- CORRECT J FROM KNOWN W AND JHAT -----
CC
C----- { JCSI } -----
CC
DO J=2,M2
  DO I=3,L2
    AUX=AIP(I-1,J) / AC1(I,J) * ( W(I-1,J)-W(I,J) )
    JCSI(I,J)=JCSI(I,J)+AUX
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- { JETA } -----
CC
DO I=2,L2
  AUX=( W(I,1)-W(I,2) ) / ( 0.5*HETA(I,2)/GAM(I,2) )
  JETA(I,2)=JETA(I,2)+AUX
CC
DO J=3,M1

```

```

      AUX=AJP(I,J-1) / AE1(I,J) * ( W(I,J-1)-W(I,J) )
      JETA(I,J)=JETA(I,J)+AUX
    ENDDO
  ENDDO
C-----
  ENDIF
C-----
CC
C----- SOURCE-TERM OF THE W DISCRETIZATION EQUATION -----
CC
C----- { CON-Source } -----
CC
  DO I=2,L2
    DO J=2,M2
      CON(I,J)=CONS(I,J)
    ENDDO
  ENDDO
CC
C----- { CON-Non-Orthogonal Coordinate System } -----
C----- (Secondary-J's are interpolated from their Primary Values) -----
CC
C----- CSI-Secondary Areas and associate ETA-Fluxes -----
CC
  DO J=2,M2
    AUX = 0.5*(JETA(1,J)+JETA(1,J+1))
    AUX1= 0.5*(JETA(2,J)+JETA(2,J+1))
    AUX2= 0.5*(JETA(3,J)+JETA(3,J+1))
    P(2)= AUX*AC2(2,J)
    Q(2)= ( (HCSI(2,J)*AUX1+HCSI(3,J)*AUX2) /
1      (HCSI(2,J)+HCSI(3,J)) ) * AC2(3,J)
    CON(2,J)= CON(2,J) + Q(2)-P(2)
  CC
    DO I=3,L3
      AUX1=0.5*(JETA(I,J)+JETA(I,J+1))
      AUX2=0.5*(JETA(I+1,J)+JETA(I+1,J+1))
      P(I)=Q(I-1)
      Q(I)=( (HCSI(I,J)*AUX1+HCSI(I+1,J)*AUX2) /
1      (HCSI(I,J)+HCSI(I+1,J)) ) * AC2(I+1,J)
      CON(I,J)=CON(I,J) + Q(I)-P(I)
    ENDDO
  CC
    P(L2)=Q(L3)
    AUX = 0.5*(JETA(L1,J)+JETA(L1,J+1))
    Q(L2)=AUX*AC2(L1,J)
    CON(L2,J)=CON(L2,J) + Q(L2)-P(L2)
  ENDDO
CC
C----- ETA-Secondary Areas and associate CSI-Fluxes -----
CC
  DO I=2,L2
    AUX = 0.5*(JCSI(I,1)+JCSI(I+1,1))
    AUX1= 0.5*(JCSI(I,2)+JCSI(I+1,2))
    AUX2= 0.5*(JCSI(I,3)+JCSI(I+1,3))
    P(2)= AUX*AE2(I,2)
    Q(2)= ( (HETA(I,2)*AUX1+HETA(I,3)*AUX2) /
1      (HETA(I,2)+HETA(I,3)) ) * AE2(I,3)
    CON(I,2)= CON(I,2) + Q(2)-P(2)
  CC
    DO J=3,M3
      AUX1=0.5*(JCSI(I,J)+JCSI(I+1,J))
      AUX2=0.5*(JCSI(I,J+1)+JCSI(I+1,J+1))
      P(J)=Q(J-1)
      Q(J)=( (HETA(I,J)*AUX1+HETA(I,J+1)*AUX2) /
1      (HETA(I,J)+HETA(I,J+1)) ) * AE2(I,J+1)
      CON(I,J)=CON(I,J) + Q(J)-P(J)
    ENDDO
  CC
    P(M2)=Q(M3)
    AUX = 0.5*(JCSI(I,M1)+JCSI(I+1,M1))
    Q(M2)=AUX*AE2(I,M1)
    CON(I,M2)=CON(I,M2) + Q(M2)-P(M2)
  ENDDO
CC
C----- CALCULATE JHAT -----
CC
C----- { JCSI HAT } -----
CC
  DO J=2,M2
    AUX1=JCSI(2,J)-JCSI(3,J)
    HAT(2,J)=0.25*AUX1
    AUX1=JCSI(2,J)-HAT(2,J)
    AUX2=2.0 / ( HCSI(2,J) / GAM(2,J) )
    W(1,J)=W(2,J)+AUX1/AUX2
    HAT(2,J)=JCSI(2,J)
  CC
    AUX1=JCSI(L1,J)-JCSI(L2,J)
    HAT(L1,J)=0.25*AUX1

```

```

      AUX1=JCSI(L1,J)-HAT(L1,J)
      AUX2=2.0 / ( HCSI(L2,J) / GAM(L2,J) )
      W(L1,J)=W(L2,J)-AUX1/AUX2
      HAT(L1,J)=JCSI(L1,J)
CC
      DO I=3,L2
        DI=1.0/( 0.5*HCSI(I,J)/GAM(I,J)+0.5*HCSI(I-1,J)/GAM(I-1,J) )
        BI=0.125 * HCSI(I,J) / GAM(I,J) * DI
        CI=0.125 * HCSI(I-1,J) / GAM(I-1,J) * DI
        AUX1=JCSI(I,J)-JCSI(I+1,J)
        AUX2=JCSI(I,J)-JCSI(I-1,J)
        HAT(I,J)=BI*AUX1+CI*AUX2
      ENDDO
    ENDDO
CC
      DO J=2,M2
        DO I=2,L1
          JCSI(I,J)=HAT(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
      C----- { JETA HAT } -----
      CC
      DO I=2,L2
        AUX1=JETA(I,2)-JETA(I,3)
        HAT(I,2)=0.25*AUX1
CC
        AUX1=JETA(I,M1)-JETA(I,M2)
        HAT(I,M1)=0.25*AUX1
CC
      DO J=3,M2
        DJ=2.0/( HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J-1)/GAM(I,J-1) )
        BJ=0.125 * HETA(I,J) / GAM(I,J) * DJ
        CJ=0.125 * HETA(I,J-1) / GAM(I,J-1) * DJ
        AUX1=JETA(I,J)-JETA(I,J+1)
        AUX2=JETA(I,J)-JETA(I,J-1)
        HAT(I,J)=BJ*AUX1+CJ*AUX2
      ENDDO
    ENDDO
CC
      DO I=2,L2
        DO J=2,M1
          JETA(I,J)=HAT(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
      C----- CALCULATE CON-Spline AND SOLVE W EQUATION -----
      CC
      DO I=2,L2
        DO J=2,M2
          AUX=JCSI(I,J)*AC1(I,J) - JCSI(I+1,J)*AC1(I+1,J)+
1          JETA(I,J)*AE1(I,J) - JETA(I,J+1)*AE1(I,J+1)
          CON(I,J)=CON(I,J)+AUX
        ENDDO
      ENDDO
CC
      C-----
      CALL SOLVE
      C-----
      CC
      C----- VALUE of W in the Centre of the Core Phase -----
      C----- ( Given by the Green's Theorem ) -----
      CC
      SUM = 0.0
      DO I=2,L2
        SUM = SUM + W(I,2)
      ENDDO
CC
      WP = (SUM*DTETA)/PI + ( (RDP/2)**2 )/( RDV*4 )
      DO I=1,L1
        W(I,1) = WP
      ENDDO
CC
      NT=NT+1
      ENDDO
CC
      C-----
      ENDIF
      C-----
      CC
      ITER=ITER+1
      IF(ITER.EQ.LAST) LSTOP=.TRUE.
      RETURN
      END
CC
CC
CC

```

[illegible]

```

CC
C----- LINE-by-LINE SCHEME -----
CC
C----- { ALONG I } -----
CC
C-----
C----- FORWARD -----
C-----
CC
      DO J=2,M2
        P(1)=0.0
        Q(1)=W(1,J)
        DO I=2,L2
          DENOM=AP(I,J) - P(I-1)*AIM(I,J)
          P(I)=AIP(I,J)/DENOM
          AUX =CON(I,J) + AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1)
          Q(I)=( AUX + AIM(I,J)*Q(I-1) ) / DENOM
        ENDDO
CC
      DO I=L2,2,-1
        W(I,J)=W(I+1,J)*P(I) + Q(I)
      ENDDO
ENDDO
CC
C-----
C----- BACKWARD -----
C-----
CC
      DO J=M3,2,-1
        P(1)=0.0
        Q(1)=W(1,J)
        DO I=2,L2
          DENOM=AP(I,J) - P(I-1)*AIM(I,J)
          P(I)=AIP(I,J)/DENOM
          AUX =CON(I,J) + AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1)
          Q(I)=( AUX + AIM(I,J)*Q(I-1) ) / DENOM
        ENDDO
CC
      DO I=L2,2,-1
        W(I,J)=W(I+1,J)*P(I) + Q(I)
      ENDDO
ENDDO
C-----
CC
C----- { ALONG J } -----
CC
C-----
C----- FORWARD -----
C-----
CC
      DO I=2,L2
        P(1)=0.0
        Q(1)=W(I,1)
        DO J=2,M2
          DENOM=AP(I,J) - P(J-1)*AJM(I,J)
          P(J)=AJP(I,J)/DENOM
          AUX =CON(I,J) + AIP(I,J)*W(I+1,J) + AIM(I,J)*W(I-1,J)
          Q(J)=( AUX + AJM(I,J)*Q(J-1) )/DENOM
        ENDDO
CC
      DO J=M2,2,-1
        W(I,J)=W(I,J+1)*P(J) + Q(J)
      ENDDO
ENDDO
CC
C-----
C----- BACKWARD -----
C-----
CC
      DO I=L3,2,-1
        P(1)=0.0
        Q(1)=W(I,1)
        DO J=2,M2
          DENOM=AP(I,J) - P(J-1)*AJM(I,J)
          P(J)=AJP(I,J)/DENOM
          AUX =CON(I,J) + AIP(I,J)*W(I+1,J) + AIM(I,J)*W(I-1,J)
          Q(J)=( AUX + AJM(I,J)*Q(J-1) ) / DENOM
        ENDDO
CC
      DO J=M2,2,-1
        W(I,J)=W(I,J+1)*P(J) + Q(J)
      ENDDO
ENDDO
C-----
      NS=NS+1
ENDDO
C-----

```

```

DO I=2,L2
  DO J=2,M2
    CON(I,J)=0.0
  ENDDO
ENDDO
CC
RETURN
END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
BLOCK DATA
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
REAL*8 JCSI,JETA
LOGICAL LSTOP
COMMON CON(42,42),CONS(42,42),AP(42,42),
1   AIP(42,42),AIM(42,42),AJP(42,42),AJM(42,42),
2   AC1(42,42),AC2(42,42),AE1(42,42),AE2(42,42),
3   HCSI(42,42),HETA(42,42),JCSI(42,42),JETA(42,42),
4   W(42,42),VOL(42,42),GAM(42,42)
COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,LAST,NSOLVE,NTIMES
COMMON/CNST/DTETA,PI,RDP,RDV,ECC,KA,KC
COMMON/COMP/WP,WPOLD,WPNEW
COMMON/CNTL/LSTOP
DATA LSTOP/.FALSE./
DATA ITER,LAST/0,100/
DATA NSOLVE,NTIMES/5,5/
DATA WPOLD/0.0/
END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

Listagem 2 - STRATTPEFOR

```

PROGRAM STRATTPF
LOGICAL LSTOP
COMMON/CNTL/LSTOP
C-----C
C---- STRATIFIED TWO-PHASE LAMINAR VISCOUS AXIAL FLOW IN A PIPE ----C
C---- ( Interface as an Arc-Segment of a Cylindrical Surface, ----C
C---- possibly of zero Curvature. Besides, the Flow is taken ----C
C---- to be Fully-Developed in a Horizontal Pipe. ) ----C
C---- ( The Circular Geometry of the Pipe Cross-Section is ----C
C---- accommodated with the aid of a Bipolar Coordinate System ----C
C---- which fits the Pipe Wall as well as the Interface. ) ----C
C-----C
CALL STRAT(1)
CALL STRAT(2)
CALL STRAT(3)
CALL STRAT(4)
10 CALL STRAT(5)
IF(LSTOP) STOP
CALL FLUX
GO TO 10
END
CC
CC
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE STRAT(KENTRY)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
REAL*8 JCSI,JETA
LOGICAL LSTOP
COMMON CON(42,42),CONS(42,42),AP(42,42),
1   AIP(42,42),AIM(42,42),AJP(42,42),AJM(42,42),
2   AC1(42,42),AE1(42,42),HCSI(42,42),HETA(42,42),
3   JCSI(42,42),JETA(42,42),W(42,42),VOL(42,42),GAM(42,42)
COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,LAST,NSOLVE,NTIMES
COMMON/COMP/WOLD,WNEW
COMMON/CNTL/LSTOP
REAL*8 CSI(42),ETA(42),X(42,42),Y(42,42),XV(42,42),YV(42,42)
REAL*8 ACS(42,42),AETA(42,42),AX(42,42),AY(42,42),
1   AW(42,42),R(24),WF(24)
C-----C
1   FORMAT(/,A37,/)
2   FORMAT(/,A25)
3   FORMAT(/,A34)
4   FORMAT(/,A52)
5   FORMAT(/,A36)
C-----C
CC

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
GO TO(1000,2000,3000,4000,5000) KENTRY
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
1000 CONTINUE
CCCC STRAT(1)=GEOMETRY
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C----- INPUTS -----
CC
      WRITE(*,1) '--- STRATIFIED TWO-PHASE FLOW ---'
      WRITE(*,2) 'Number of Divisions: '
      READ(*,*) ND
      WRITE(*,3) 'Ratio of Dynamic Viscosities: '
      READ(*,*) RDV
      WRITE(*,4) 'Distance of the Arc Interface to the Pipe Axis: '
      READ(*,*) DPI
      WRITE(*,5) 'Curvature of the Arc Interface: '
      READ(*,*) CURV
CC
C----- DOMAIN DISCRETIZATION -----
CC
      L1 = ND + 2
      M1 = L1
      L2 = L1 - 1
      M2 = M1 - 1
      L3 = L2 - 1
      M3 = M2 - 1
      PI = 4.0 * DATAN(1)
C-----
      IF( CURV.EQ.0.0 ) THEN
C-----
          C = DSQRT( 1.0 - (DPI**2) )
C-----
      ELSE
C-----
          AUX = ( 1.0/CURV ) + DPI
          YCHORD = ( 1.0 + (AUX**2) - ((1.0/CURV)**2) ) / (2.0*AUX)
          C = DSQRT( 1.0 - (YCHORD**2) )
          ARROW = ABS( ABS(DPI) - ABS(YCHORD) )
C-----
      ENDIF
C-----
      BETA = DASIN( C * CURV )
      ALFA = DASIN( C )
      IF( DPI.GE.0.0 ) ALFA = PI - ALFA
CC
C----- Calculating Y-vertex on the Vertical Axis -----
CC
      AB = 1.0 - ABS(DPI)
      NAB = AB * (ND/2)
      BB = 2.0 - AB
      IF( DPI.LT.0.0 ) THEN
          AUX = AB
          AB = BB
          BB = AUX
          NAB = ND - NAB
      ENDIF
      IF( NAB.GE.ND-3 ) NAB = ND-4
CC
C-----
      IF( CURV.EQ.0.0 ) THEN
C-----
          IF( NAB.LE.3 ) NAB = 4
          KI = M1 - NAB
          KC = KI
CC
          YV(2,2) = -BB
          MBB = (2+KI) / 2 + 1
          DO J = 2, KI
              IF( J.LT.MBB ) THEN
                  AUX = 0.5 * (( FLOAT(J-2) / FLOAT(MBB-2) )**1)
              ELSE
                  AUX = 1.0 - 0.5 * (( FLOAT(KI-J) / FLOAT(KI-MBB) )**1)
              ENDIF
              YV(2,J) = AUX*BB + YV(2,2)
          ENDDO
CC
          YV(2,M1) = AB
          MAB = (KI+M1) / 2 + 1
          DO JJ = KI, M1
              IF( JJ.LT.MAB ) THEN
                  AUX = 0.5 * (( FLOAT(JJ-KI) / FLOAT(MAB-KI) )**1)
              ELSE
                  AUX = 1.0 - 0.5 * (( FLOAT(M1-JJ) / FLOAT(M1-MAB) )**1)

```

```

      ENDIF
      J = M1 + KI - JJ
      YV(2,J) = YV(2,M1) - AUX*AB
    ENDDO
C-----
      ELSE
C-----
      IF( NAB.LE.4 ) NAB = 5
      NARROW = NAB * ( ARROW / AB )
      IF( NARROW.LE.1 ) NARROW = 2
      IF( (NAB-NARROW) .LT. 3 ) NAB = NARROW + 3
      KI = M1 - NAB
      KC = KI + NARROW
CC
      YV(2,2) = -( BB + ARROW )
      MBB = (2+KI) / 2 + 1
      DO J = 2, KI
        IF( J.LT.MBB ) THEN
          AUX = 0.5 * (( FLOAT(J-2) / FLOAT(MBB-2) )**1)
        ELSE
          AUX = 1.0 - 0.5 * (( FLOAT(KI-J) / FLOAT(KI-MBB) )**1)
        ENDIF
        YV(2,J) = AUX*BB + YV(2,2)
      ENDDO
CC
      DO J = KI, KC
        AUX = ( FLOAT(J-KI) / FLOAT(KC-KI) )**1
        YV(2,J) = AUX*ARROW + YV(2,KI)
      ENDDO
CC
      MYD = (KC+M1) / 2 + 1
      YD = ABS( AB - ARROW )
      DO J = KC, M1
        IF( J.LT.MYD ) THEN
          AUX = 0.5 * ( FLOAT(J-KC) / FLOAT(MYD-KC) )
        ELSE
          AUX = 1.0 - 0.5 * (( FLOAT(M1-J) / FLOAT(M1-MYD) )**1)
        ENDIF
        YV(2,J) = AUX*YD + YV(2,KC)
      ENDDO
C-----
    ENDIF
C-----
CC
C---- Calculating X-vertex on the Horizontal Axis ----
CC
      CSI(L1) = 50.0
      XD = C * ( (1.0/DTANH( CSI(L1) )) - (1.0/DSINH( CSI(L1) )) )
      XV(L1,KC) = XD
      DO II = 2, L1
        AUX = ( FLOAT(II-2) / FLOAT(L1-2) )**1
        I = L1+2-II
        XV(I,KC) = XV(L1,KC) - AUX*XD
      ENDDO
CC
C---- Transformation from RECTANGULAR to BIPOLAR COORDINATES ----
CC
C----- { CSI } -----
CC
      CSI(2) = 0.0
      DO I = 3, L2
        CSI(I) = DLOG( (C+XV(I,KC)) / (C-XV(I,KC)) )
      ENDDO
CC
C----- { ETA } -----
CC
      ETA(KC) = 0.0
      AUX1 = C * C
C-----
      IF( DPI.GE.0.0 ) THEN
C-----
        DO J = 2, KC-1
          AUX2 = YV(2,J) * YV(2,J)
          ETA(J) = DACOS( ABS(AUX1-AUX2) / (AUX1+AUX2) )
          IF( ABS( YV(2,J) ) .GT. C ) ETA(J) = -ETA(J)
        ENDDO
CC
        DO J = KC+1, M1
          AUX2 = YV(2,J) * YV(2,J)
          ETA(J) = -DACOS( (AUX1-AUX2) / (AUX1+AUX2) )
          IF( YV(2,J) .EQ. C ) ETA(J) = -ETA(J)
        ENDDO
C-----
      ELSE
C-----
        DO J = 2, KC-1

```

```

      AUX2 = YV(2,J) * YV(2,J)
      ETA(J) = DACOS( (AUX1-AUX2) / (AUX1+AUX2) )
      ENDDO
CC
      DO J = KC+1,M1
        AUX2 = YV(2,J) * YV(2,J)
        ETA(J) = DACOS( ABS(AUX1-AUX2) / (AUX1+AUX2) )
        IF( ABS( YV(2,J) ) .LT. C ) ETA(J) = -ETA(J)
      ENDDO
C-----
      ENDIF
C-----
CC
C---- Calculating both Internal and Boundary ----
C----      X-vertex and Y-vertex      ----
CC
      DO J = 2, M1
        XV(2,J) = 0.0
      ENDDO
CC
      DO I = 3, L1
        YV(I,KC) = 0.0
        DO J = 2, KC-1
          AUX1 = DSINH( CSI(I) )
          AUX2 = DCOSH( CSI(I) )
          AUX3 = DSIN( ETA(J) )
          AUX4 = DCOS( ETA(J) )
C-----
          IF( DPI.GE.0.0 ) THEN
C-----
            IF( ABS( YV(2,J) ) .GT. C ) THEN
              XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 - AUX4 )
              YV(I,J) = ( C * AUX3 ) / ( AUX2 - AUX4 )
            ELSE
              XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 + AUX4 )
              YV(I,J) = (-C * AUX3 ) / ( AUX2 + AUX4 )
            ENDIF
C-----
          ELSE
C-----
            XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 + AUX4 )
            YV(I,J) = (-C * AUX3 ) / ( AUX2 + AUX4 )
C-----
          ENDIF
C-----
        ENDDO
CC
        DO J = KC+1, M1
          AUX1 = DSINH( CSI(I) )
          AUX2 = DCOSH( CSI(I) )
          AUX3 = DSIN( ETA(J) )
          AUX4 = DCOS( ETA(J) )
C-----
          IF( DPI.GE.0.0 ) THEN
C-----
            XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 + AUX4 )
            YV(I,J) = (-C * AUX3 ) / ( AUX2 + AUX4 )
            IF( CURV.EQ.0.0 .AND. DPI.EQ.0.0 ) YV(I,M1) = -YV(I,M1)
C-----
          ELSE
C-----
            IF( YV(2,J) .GE. C ) THEN
              XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 - AUX4 )
              YV(I,J) = ( C * AUX3 ) / ( AUX2 - AUX4 )
            ELSE
              XV(I,J) = ( C * AUX1 ) / ( AUX2 + AUX4 )
              YV(I,J) = (-C * AUX3 ) / ( AUX2 + AUX4 )
            ENDIF
C-----
          ENDIF
C-----
        ENDDO
CC
      ENDDO
CC
C---- POSITIONS OF THE PRIMARY NODES ----
C----      AND POINTS ON THE FRONTIER      ----
CC
      DO I=2,L2
        DO J=2,M2
          X(I,J)=0.25*( XV(I,J)+XV(I+1,J) + XV(I,J+1)+XV(I+1,J+1) )
          Y(I,J)=0.25*( YV(I,J)+YV(I+1,J) + YV(I,J+1)+YV(I+1,J+1) )
        ENDDO
      ENDDO
CC
      DO I=2,L2
        X(I,1) =0.5*( XV(I,2) + XV(I+1,2) )

```

```

      Y(I,1) =0.5*( YV(I,2) + YV(I+1,2) )
      X(I,M1)=0.5*( XV(I,M1) + XV(I+1,M1) )
      Y(I,M1)=0.5*( YV(I,M1) + YV(I+1,M1) )
ENDDO
CC
DO J=2,M2
  X(1,J) =0.5*( XV(2,J) + XV(2,J+1) )
  Y(1,J) =0.5*( YV(2,J) + YV(2,J+1) )
  X(L1,J)=0.5*( XV(L1,J) + XV(L1,J+1) )
  Y(L1,J)=0.5*( YV(L1,J) + YV(L1,J+1) )
ENDDO
CC
X(1,1) = XV(2,2)
Y(1,1) = YV(2,2)
X(L1,M1)= XV(L1,M1)
Y(L1,M1)= YV(L1,M1)
X(1,M1) = XV(2,M1)
Y(1,M1) = YV(2,M1)
X(L1,1) = XV(L1,2)
Y(L1,1) = YV(L1,2)
CC
C----- SCALE FACTORS AND CELLS VOLUMES -----
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,M2
    XE=0.5*( XV(I+1,J+1) + XV(I+1,J) )
    XW=0.5*( XV(I,J+1) + XV(I,J) )
    YE=0.5*( YV(I+1,J+1) + YV(I+1,J) )
    YW=0.5*( YV(I,J+1) + YV(I,J) )
    XN=0.5*( XV(I,J+1) + XV(I+1,J+1) )
    XS=0.5*( XV(I,J) + XV(I+1,J) )
    YN=0.5*( YV(I,J+1) + YV(I+1,J+1) )
    YS=0.5*( YV(I,J) + YV(I+1,J) )
    DXDCSI = XE-XW
    DXDETA = XN-XS
    DYDCSI = YE-YW
    DYDETA = YN-YS
    HCSI(I,J)=DSQRT( (DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2 )
    HETA(I,J)=DSQRT( (DXDETA)**2 + (DYDETA)**2 )
    VOL(I,J) = DXDCSI*DYDETA - DXDETA*DYDCSI
  ENDDO
ENDDO
CC
DO I=2,L2
  HETA(I,1) =0.0
  HETA(I,M1)=0.0
  HCSI(I,1) =DSQRT( (XV(I+1,2)-XV(I,2))**2+
1      (YV(I+1,2)-YV(I,2))**2)
  HCSI(I,M1)=DSQRT( (XV(I+1,M1)-XV(I,M1))**2+
1      (YV(I+1,M1)-YV(I,M1))**2)
ENDDO
CC
HCSI(1,1) =0.0
HCSI(1,M1) =0.0
HCSI(L1,1) =0.0
HCSI(L1,M1)=0.0
CC
DO J=2,M2
  HCSI(1,J) =0.0
  HCSI(L1,J)=0.0
  HETA(1,J)=DSQRT( (XV(2,J)-XV(2,J+1))**2+
1      (YV(2,J)-YV(2,J+1))**2)
  HETA(L1,J)=DSQRT( (XV(L1,J)-XV(L1,J+1))**2+
1      (YV(L1,J)-YV(L1,J+1))**2)
ENDDO
CC
HETA(1,1) =0.0
HETA(L1,1) =0.0
HETA(1,M1) =0.0
HETA(L1,M1)=0.0
CC
C----- PRIMARY AREAS -----
CC
DO I=2,L1
  DO J=2,M2
    DXDETA = XV(I,J+1) - XV(I,J)
    DYDETA = YV(I,J+1) - YV(I,J)
    AC1(I,J) = DSQRT( (DXDETA)**2 + (DYDETA)**2 )
  ENDDO
ENDDO
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,M1
    DXDCSI = XV(I+1,J) - XV(I,J)
    DYDCSI = YV(I+1,J) - YV(I,J)
    AE1(I,J) = DSQRT( (DXDCSI)**2 + (DYDCSI)**2 )

```

```

      ENDDO
    ENDDO
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
2000  CONTINUE
CCCC  STRAT(2)=COEFFICIENTS
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C----- VOLUMETRIC SOURCE of W ----
CC
      DO I = 2, L2
        DO J = 2, M2
          CON(I,J) = 1.0
        ENDDO
      ENDDO
CC
C----- DIFFUSION COEFFICIENTS ----
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 1, KI-1
          GAM(I,J) = 1.0
        ENDDO
      ENDDO
CC
      DO I = 1, L1
        DO J = KI, M1
          GAM(I,J) = RDV
        ENDDO
      ENDDO
CC
C----- COEFFICIENTS AIM,AIP,AJM,AJP and AP ----
CC
      DO J=2,M2
        AIM(2,J)=0.0
CC
        DI=2.0/( HCSI(L2,J) / GAM(L2,J) )
        AIP(L2,J) = DI*AC1(L1,J)
CC
        DO I=2,L3
          DI=2.0/(HCSI(I,J)/GAM(I,J)+HCSI(I+1,J)/GAM(I+1,J))
          AIP(I,J) = DI*AC1(I+1,J)
          AIM(I+1,J)=AIP(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
      DO I=2,L2
        DJ=2.0/( HETA(I,2) / GAM(I,2) )
        AJM(I,2) = DJ*AE1(I,2)
CC
        DJ=2.0/( HETA(I,M2) / GAM(I,M2) )
        AJP(I,M2) = DJ*AE1(I,M1)
CC
        DO J=2,M3
          DJ=2.0/(HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J+1)/GAM(I,J+1))
          AJP(I,J) = DJ*AE1(I,J+1)
          AJM(I,J+1) = AJP(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
      DO I=2,L2
        DO J=2,M2
          CONS(I,J)= CON(I,J)*VOL(I,J)
          AP(I,J) = AIP(I,J)+AIM(I,J)+AJP(I,J)+AJM(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
3000  CONTINUE
CCCC  STRAT(3)=ANALYTICAL
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C-----          CARTESIAN COORDINATES          ----
C----- (The Origin of which is at the Centre of the Tube) ----
CC
      IF( CURV.EQ.0.0 ) THEN
        AUX = DPI
      ELSE
        AUX = YCHORD

```

```

      ENDIF
CC
      DO I = 1, L2
        DO J = 2, M2
          AX(I,J) = X(I,J)
          AY(I,J) = Y(I,J) + AUX
        ENDDO
      ENDDO
CC
C---- Calculating BIPOLAR COORDINATES ----
CC
      S = -( 0.5*PI - ALFA )
      T = ( 1.5*PI - ALFA )
CC
      DO I = 1, L2
        DO J = 2, M2
          AUX1 = AX(I,J)*(DSIN(T)-DSIN(S)) + AY(I,J)*(DCOS(S)-DCOS(T))
          1      + DSIN(S-T)
          AUX2 = -AX(I,J)*(DCOS(S)+DCOS(T))-AY(I,J)*(DSIN(S)+DSIN(T))
          1      + DCOS(S-T) + ( AX(I,J)**2+AY(I,J)**2 )
          AUX3 = ( AX(I,J)-DCOS(T) )**2 + ( AY(I,J)-DSIN(T) )**2
          AETA(I,J) = DATAN( AUX1 / AUX2 )
          ACSI(I,J) = 0.5*DLOG( (AUX1**2+AUX2**2) / (AUX3**2) )
        ENDDO
      ENDDO
CC
C---- VELOCITY PROFILE ----
C---- ( by using Legendre-Gauss Quadrature ) ----
CC
C-----
CC
C---- Weight Factors ----
CC
      WF(1) = .127938195346752
      WF(3) = .125837456346828
      WF(5) = .121670472927803
      WF(7) = .115505668053726
      WF(9) = .107444270115966
      WF(11) = .097618652104114
      WF(13) = .086190161531953
      WF(15) = .073346481411080
      WF(17) = .059298584915437
      WF(19) = .044277438817420
      WF(21) = .028531388628934
      WF(23) = .012341229799987
CC
      DO K=2,24,2
        WF(K) = WF(K-1)
      ENDDO
CC
C---- Roots or Zeros of the Legendre Polynomial ----
CC
      R(1) = .064056892862606
      R(3) = .191118867473616
      R(5) = .315042679696163
      R(7) = .433793507626045
      R(9) = .545421471388840
      R(11) = .648093651936976
      R(13) = .740124191578554
      R(15) = .820001985973903
      R(17) = .886415527004401
      R(19) = .938274552002733
      R(21) = .974728555971309
      R(23) = .995187219997021
CC
      DO K=2,24,2
        R(K) = -R(K-1)
      ENDDO
C-----
CC
      F4 = (1.0-(1.0/RDV)) * DSIN(ALFA) * DSIN(ALFA-BETA)
      A = 0.0
      B = 8.0
      DO I = 1, L2
        DO J = 2, M2
          GAUSS = 0.0
          DO K = 1, 24
            U = 0.5*( (B-A)*R(K) + (B+A) )
            F0 = U
            IF( CURV.NE.0.0 ) F0 = DSINH(U*BETA) / DSIN(BETA)
            F3 = DCOS(U*ACSI(I,J)) / ( DSINH(U*PI) *
            1      ( DTANH(U*(ALFA-BETA)) + (1.0/RDV) *
            2      DTANH(U*(PI-(ALFA-BETA))) ) )
          CC
            IF( J.LE.KI-1 ) THEN
              F1 = DSINH(U*(PI+ALFA-AETA(I,J))) /

```

```

1          DCOSH(U*(ALFA-BETA))
          GAUSS = GAUSS + WF(K)*(F0*F1*F3)
          ELSE
1          F2 = DSINH(U*(AETA(I,J)-ALFA)) /
          DCOSH(U*(PI-(ALFA-BETA)))
          GAUSS = GAUSS + WF(K)*(F0*F2*F3)
        ENDIF
      ENDDO
      GAUSS = 0.5*(B-A) * GAUSS
CC
      R2 = AX(I,J)**2 + AY(I,J)**2
      IF( J.LE.KI-1 ) THEN
        AW(I,J) = (1.0-R2)/4.0 - F4*GAUSS
        ELSE
        AW(I,J) = (1.0/RDV) * ((1.0-R2)/4.0 + F4*GAUSS)
      ENDIF
    ENDDO
  ENDDO
CC
  DO I = 1, L1
    AW(I,1) = 0.0
    AW(I,M1) = 0.0
  ENDDO
CC
  DO J = 2, M2
    AW(L1,J) = 0.0
  ENDDO
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
4000 CONTINUE
CCCC STRAT(4)=START
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
C---- INITIAL GUESS FOR AXIAL VELOCITY ----
CC
      DO I = 1, L2
        DO J = 2, M2
          W(I,J) = 0.01
        ENDDO
      ENDDO
CC
C---- NO SLIP CONDITION IN THE INNER SURFACE OF THE CYLINDER ----
C---- ( The Velocity Vanishes on the Solid Wall ) ----
CC
      DO I = 1, L1
        W(I,1) = 0.0
        W(I,M1) = 0.0
      ENDDO
CC
      DO J = 2, M2
        W(L1,J) = 0.0
      ENDDO
CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
5000 CONTINUE
CCCC STRAT(5)=OUTPUT
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
      IF(ITER.EQ.0) THEN
        WRITE(*,51)
51      FORMAT(////////, ' ITER',12X,'W(4,4)')
        ELSE
        WRITE(*,52) ITER,W(4,4)
52      FORMAT(I6,F25.10)
CC
C---- Testing CONVERGENCE ----
CC
        WNEW = W(4,4)
        IF( ABS(WNEW-WOLD) .LT. 1.0D-10 ) LSTOP=.TRUE.
        WOLD = WNEW
      ENDIF
CC
      IF(LSTOP) THEN
        OPEN(1,FILE='RESULTS.DAT',STATUS='UNKNOWN')
CC
C---- Searching for MAXIMUM and MINIMUM Analytical Axial Velocities ----
CC
        AWMAX = 0.0

```

```

      AWMIN = 1.0D30
      DO I = 2, L2
        DO J = 2, M2
          IF( AW(I,J).GT.AWMAX ) AWMAX = AW(I,J)
          IF( AW(I,J).LT.AWMIN ) AWMIN = AW(I,J)
        ENDDO
      ENDDO

CC
C----- NORMALIZED QUADRATIC MEAN PERCENTAGE ERROR -----
CC
      QM = 0.0
      DO I = 2, L2
        DO J = 2, M2
          QM = QM + ( AW(I,J) - W(I,J) )**2
        ENDDO
      ENDDO
      QM = DSQRT( QM / (ND*ND) )
      EPMQN = QM / ( AWMAX - AWMIN ) * 100

CC
C----- MAXIMUM NORMALIZED PERCENTAGE ERROR -----
CC
      EPNM = 0.0
      DO I = 2, L2
        DO J = 2, M2
          EPNMNEW = ABS( (AW(I,J) - W(I,J)) / (AWMAX - AWMIN) )
          IF( EPNMNEW.GT.EPNM ) EPNM = EPNMNEW
        ENDDO
      ENDDO
      EPNM = EPNM * 100

CC
C----- VOLUMETRIC FLOW RATES -----
CC
      QBP = 0.0
      QAP = 0.0

CC
      DO I = 1, L1
        DO J = 2, KI-1
          QBP = QBP + W(I,J)*VOL(I,J)
        ENDDO
      DO J = KI, M2
        QAP = QAP + W(I,J)*VOL(I,J)
      ENDDO
    ENDDO

CC
      QBP = 2.0 * QBP
      QAP = 2.0 * QAP

CC
C-----
53   FORMAT(/,/3X,'** VOLUMETRIC FLOW RATES **')
54   FORMAT(/3X,'Above' Phase:')
55   FORMAT(/3X,'Below' Phase, which is more dense:')
56   FORMAT(F20.10)
57   FORMAT(/,/3X,'** MAXIMUM NORMALIZED PERCENTAGE ERROR **')
58   FORMAT(/3X,'** NORMALIZED QUADRATIC MEAN PERCENTAGE ERROR **')
C-----
      WRITE(1,58)
      WRITE(1,56) EPMQN
      WRITE(1,57)
      WRITE(1,56) EPNM

CC
      WRITE(1,53)
      WRITE(1,54)
      WRITE(1,56) QAP
      WRITE(1,55)
      WRITE(1,56) QBP
    ENDIF

CC
C-----
      RETURN
C-----
CC
END

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE FLUX
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
REAL*8 JCISI,JETA
LOGICAL LSTOP
COMMON CON(42,42),CONS(42,42),AP(42,42),
1     AIP(42,42),AIM(42,42),AJP(42,42),AJM(42,42),
2     AC1(42,42),AE1(42,42),HCSI(42,42),HETA(42,42),

```

```

3      JCSI(42,42),JETA(42,42),W(42,42),VOL(42,42),GAM(42,42)
COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,LAST,NSOLVE,NTIMES
COMMON/COMP/WOLD,WNEW
COMMON/CNTL/LSTOP
REAL*8 P(42),Q(42),HAT(42,42)
C-----
CC
C-----
      IF(ITER.EQ.0) THEN
C-----
      DO I=2,L2
        DO J=2,M2
          CON(I,J)=CONS(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C-----
      CALL SOLVE
C-----
CC
C-----
      ELSE
C-----
CC
      NT=1
      DO WHILE ( NT.LE.NTIMES )
CC
C-----
      IF(NT.EQ.1) THEN
C-----
CC
C-----
      CALCULATE FLUXES FOR NT=1      ----
C----- ( by using TriDiagonal-Matrix Algorithm ) ----
CC
C-----
      { ALONG I }      ----
CC
      DO J=1,M1
        AUX=( W(1,J)-W(2,J) ) / ( 0.5*HCSI(2,J)/GAM(2,J) )
        P(2)=-0.25/0.75
        Q(2)=AUX/0.75
        DO I=3,L2
          DI=2.0/(HCSI(I,J)/GAM(I,J)+HCSI(I-1,J)/GAM(I-1,J))
          AUX=DI * ( W(I-1,J)-W(I,J) )
          BI=0.125 * HCSI(I,J) / GAM(I,J) * DI
          CI=0.125 * HCSI(I-1,J) / GAM(I-1,J) * DI
          AI=1.0-BI-CI
          DENOM=AI+CI*P(I-1)
          P(I)=-BI/DENOM
          Q(I)=( AUX-CI*Q(I-1) )/DENOM
        ENDDO
CC
        AUX=( W(L2,J)-W(L1,J) ) / ( 0.5*HCSI(L2,J)/GAM(L2,J) )
        Q(L1)=( AUX-0.25*Q(L2) ) / ( 0.75+0.25*P(L2) )
        JCSI(L1,J)=Q(L1)
        DO I=L2,2,-1
          JCSI(I,J)=P(I)*JCSI(I+1,J)+Q(I)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C-----
      { ALONG J }      ----
CC
      DO I=1,L1
        AUX=( W(I,1)-W(I,2) ) / ( 0.5*HETA(I,2)/GAM(I,2) )
        P(2)=-0.25/0.75
        Q(2)=AUX/0.75
        DO J=3,M2
          DJ=2.0/(HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J-1)/GAM(I,J-1))
          AUX=DJ * ( W(I,J-1)-W(I,J) )
          BJ=0.125 * HETA(I,J) / GAM(I,J) * DJ
          CJ=0.125 * HETA(I,J-1) / GAM(I,J-1) * DJ
          AJ=1.0-BJ-CJ
          DENOM=AJ+CJ*P(J-1)
          P(J)=-BJ/DENOM
          Q(J)=( AUX-CJ*Q(J-1) )/DENOM
        ENDDO
        AUX=( W(I,M2)-W(I,M1) ) / ( 0.5*HETA(I,M2)/GAM(I,M2) )
        Q(M1)=( AUX-0.25*Q(M2) ) / ( 0.75+0.25*P(M2) )
        JETA(I,M1)=Q(M1)
CC
        DO J=M2,2,-1
          JETA(I,J)=P(J)*JETA(I,J+1)+Q(J)
        ENDDO
      ENDDO
CC
C-----
      NEUMANN BOUNDARY CONDITION      ----
C----- ( Line of Symmetry: Vertical Diameter ) ----

```

```

CC      DO J=2,M2
          JCSI(2,J)=0.0
      ENDDO
C-----
          ELSE
C-----
CC
C----- CORRECT J FROM KNOWN W AND JHAT -----
CC
C-----      { JCSI }      -----
CC
      DO J=2,M2
          DO I=3,L1
              AUX=AIP(I-1,J) / AC1(I,J) * ( W(I-1,J)-W(I,J) )
              JCSI(I,J)=JCSI(I,J)+AUX
          ENDDO
      ENDDO
CC
C-----      { JETA }      -----
CC
      DO I=2,L2
          AUX=AJM(I,2) / AE1(I,2) * ( W(I,1)-W(I,2) )
          JETA(I,2)=JETA(I,2)+AUX
CC
      DO J=3,M1
          AUX=AJP(I,J-1) / AE1(I,J) * ( W(I,J-1)-W(I,J) )
          JETA(I,J)=JETA(I,J)+AUX
      ENDDO
  ENDDO
C-----
      ENDIF
C-----
CC
C----- SOURCE-TERM OF THE W DISCRETIZATION EQUATION -----
CC
      DO I=2,L2
          DO J=2,M2
              CON(I,J)=CONS(I,J)
          ENDDO
      ENDDO
CC
C----- CALCULATE JHAT -----
CC
C-----      { JCSI HAT }      -----
CC
      DO J=2,M2
          AUX1=JCSI(2,J)-JCSI(3,J)
          HAT(2,J)=0.25*AUX1
          AUX1=JCSI(2,J)-HAT(2,J)
          AUX2=2.0 / ( HCSI(2,J) / GAM(2,J) )
          W(1,J)=W(2,J)+AUX1/AUX2
          HAT(2,J)=JCSI(2,J)
CC
          AUX1=JCSI(L1,J)-JCSI(L2,J)
          HAT(L1,J)=0.25*AUX1
CC
      DO I=3,L2
          DI=2.0/(HCSI(I,J)/GAM(I,J)+HCSI(I-1,J)/GAM(I-1,J) )
          BI=0.125 * HCSI(I,J) / GAM(I,J) * DI
          CI=0.125 * HCSI(I-1,J) / GAM(I-1,J) * DI
          AUX1=JCSI(I,J)-JCSI(I+1,J)
          AUX2=JCSI(I,J)-JCSI(I-1,J)
          HAT(I,J)=BI*AUX1+CI*AUX2
      ENDDO
  ENDDO
CC
      DO J=2,M2
          DO I=2,L1
              JCSI(I,J)=HAT(I,J)
          ENDDO
      ENDDO
CC
C-----      { JETA HAT }      -----
CC
      DO I=2,L2
          AUX1=JETA(I,2)-JETA(I,3)
          HAT(I,2)=0.25*AUX1
CC
          AUX1=JETA(I,M1)-JETA(I,M2)
          HAT(I,M1)=0.25*AUX1
CC
      DO J=3,M2
          DJ=2.0/(HETA(I,J)/GAM(I,J)+HETA(I,J-1)/GAM(I,J-1) )
          BJ=0.125 * HETA(I,J) / GAM(I,J) * DJ
          CJ=0.125 * HETA(I,J-1) / GAM(I,J-1) * DJ

```

```

      AUX1=JETA(I,J)-JETA(I,J+1)
      AUX2=JETA(I,J)-JETA(I,J-1)
      HAT(I,J)=BJ*AUX1+CJ*AUX2
    ENDDO
  ENDDO
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,M1
    JETA(I,J)=HAT(I,J)
  ENDDO
ENDDO
CC
C----- CALCULATE CON-Spline AND SOLVE W EQUATION -----
CC
DO I=2,L2
  DO J=2,M2
    AUX=JCSI(I,J)*AC1(I,J) - JCSI(I+1,J)*AC1(I+1,J)+
1     JETA(I,J)*AE1(I,J) - JETA(I,J+1)*AE1(I,J+1)
    CON(I,J)=CON(I,J)+AUX
  ENDDO
ENDDO
CC
C-----
CALL SOLVE
C-----
CC
NT=NT+1
ENDDO
CC
C-----
ENDIF
C-----
CC
ITER=ITER+1
IF(ITER.EQ.LAST) LSTOP=.TRUE.
RETURN
END
CC
CC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE SOLVE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER*4 (I-N)
REAL*8 JCSI,JETA
LOGICAL LSTOP
COMMON CON(42,42),CONS(42,42),AP(42,42),
1 AIP(42,42),AIM(42,42),AJP(42,42),AJM(42,42),
2 AC1(42,42),AE1(42,42),HCSI(42,42),HETA(42,42),
3 JCSI(42,42),JETA(42,42),W(42,42),VOL(42,42),GAM(42,42)
COMMON/INDX/L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,LAST,NSOLVE,NTIMES
COMMON/COMP/WOLD,WNEW
COMMON/CNLT/LSTOP
REAL*8 P(42),Q(42)
C-----
CC
NS=1
DO WHILE ( NS.LE.NSOLVE )
C-----
CC
C----- BLOCK-CORRECTION PROCEDURE -----
CC
P(1)=0.0
Q(1)=0.0
DO I=2,L2
  A=0.0
  B=0.0
  C=0.0
  D=0.0
  DO J=2,M2
    A=A+AP(I,J)
    IF(J.NE.M2) A=A-AJP(I,J)
    IF(J.NE.2) A=A-AJM(I,J)
    B=B+AIP(I,J)
    C=C+AIM(I,J)
    D=D + CON(I,J) + AIP(I,J)*W(I+1,J) + AIM(I,J)*W(I-1,J) +
1 AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1) - AP(I,J)*W(I,J)
  ENDDO
  DENOM=A - P(I-1)*C
  P(I)=B/DENOM
  Q(I)=( D + C*Q(I-1) ) / DENOM
ENDDO
CC
WPRIME=0.0
DO I=L2,2,-1
```

```

        WPRIME=WPRIME*P(I)+Q(I)
        DO J=2,M2
            W(I,J)=W(I,J)+WPRIME
        ENDDO
    ENDDO
C-----
P(1)=0.0
Q(1)=0.0
DO J=2,M2
    A=0.0
    B=0.0
    C=0.0
    D=0.0
    DO I=2,L2
        A=A+AP(I,J)
        IF(I.NE.L2) A=A-AIP(I,J)
        IF(I.NE.2) A=A-AIM(I,J)
        B=B+AJP(I,J)
        C=C+AJM(I,J)
        D=D + CON(I,J) + AIP(I,J)*W(I+1,J) + AIM(I,J)*W(I-1,J) +
1      AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1) - AP(I,J)*W(I,J)
    ENDDO
    DENOM=A - P(J-1)*C
    P(J)=B/DENOM
    Q(J)=( D + C*Q(J-1) ) / DENOM
ENDDO
CC
WPRIME=0.0
DO J=M2,2,-1
    WPRIME=WPRIME*P(J)+Q(J)
    DO I=2,L2
        W(I,J)=W(I,J)+WPRIME
    ENDDO
ENDDO
C-----
CC
C----- LINE-by-LINE SCHEME -----
CC
C----- { ALONG I } -----
CC
C-----
C----- FORWARD -----
C-----
CC
DO J=2,M2
    P(1)=0.0
    Q(1)=W(1,J)
    DO I=2,L2
        DENOM=AP(I,J) - P(I-1)*AIM(I,J)
        P(I)=AIP(I,J)/DENOM
        AUX=CON(I,J) + AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1)
        Q(I)=( AUX + AIM(I,J)*Q(I-1) ) / DENOM
    ENDDO
CC
DO I=L2,2,-1
    W(I,J)=W(I+1,J)*P(I) + Q(I)
ENDDO
ENDDO
CC
C-----
C----- BACKWARD -----
C-----
CC
DO J=M3,2,-1
    P(1)=0.0
    Q(1)=W(1,J)
    DO I=2,L2
        DENOM=AP(I,J) - P(I-1)*AIM(I,J)
        P(I)=AIP(I,J)/DENOM
        AUX=CON(I,J) + AJP(I,J)*W(I,J+1) + AJM(I,J)*W(I,J-1)
        Q(I)=( AUX + AIM(I,J)*Q(I-1) ) / DENOM
    ENDDO
CC
DO I=L2,2,-1
    W(I,J)=W(I+1,J)*P(I) + Q(I)
ENDDO
ENDDO
C-----
CC
C----- { ALONG J } -----
CC
C-----
C----- FORWARD -----
C-----
CC
DO I=2,L2

```


Apêndice B

Memória de Cálculo

Aqui, pretende-se explicitar como os coeficientes e termo independente das equações de discretização (fluxo e velocidade) independem das coordenadas dos nós no plano transformado, (ξ, η) , pois que são canceladas nas operações matemáticas. Assim sendo, temos que:

Coeficiente a_E

$$a_E = (DJ_{\xi} \alpha_{\xi} \Delta \eta)_e. \quad (\text{B-1})$$

Admitindo que o sobrescrito “ $\bar{}$ ” significa que o escalar está sendo tomado em termos aproximados, consoante diferenças ao longo das linhas coordenadas, consideradas apenas as coordenadas Cartesianas dos pontos:

$$DJ_{\xi_e} \cong 2 \left[\left(\frac{\bar{h}_{\xi_E}}{\Delta \xi_E} \Delta \xi_E \right) / \Gamma_E + \left(\frac{\bar{h}_{\xi_P}}{\Delta \xi_P} \Delta \xi_P \right) / \Gamma_P \right]^{-1} e \quad (\text{B-2})$$

$$\alpha_{\xi_e} \cong \left[\frac{\bar{h}_{\xi_e}}{\Delta \xi_e} \frac{(\bar{h}_{\eta_e})^2}{(\Delta \eta_e)^2} \right] / \left[\frac{\bar{J} a_e}{(\Delta \xi_e \Delta \eta_e)} \right] = \frac{\bar{h}_{\xi_e} \bar{h}_{\eta_e}^{-2}}{\bar{J} a_e} \frac{1}{\Delta \eta_e}, \quad (\text{B-3})$$

então:

$$a_E \cong DJ_{\xi_e} \left(\frac{\bar{h}_{\xi_e} \bar{h}_{\eta_e}^{-2}}{\bar{J} a_e} \right) \quad (\text{B-4})$$

e similarmente para os demais coeficientes.

Parcela b_S de b :

$$b_S = (Sc J a \Delta \xi \Delta \eta)_P. \quad (\text{B-5})$$

Entretanto,

$$(Ja\Delta\xi\Delta\eta)_P = \bar{J}a_P, \quad (\text{B-6})$$

logo:

$$b_S = (Sc\bar{J}a)_P. \quad (\text{B-7})$$

Parte $(\beta_\xi J_\eta \Delta\eta)_e$ de b_{NO}

Temos que, feitas as devidas manipulações algébricas na forma:

$$\beta_\xi = h_\xi h_\eta^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) / (h_\xi h_\eta) \right] / Ja,$$

tal expressão resulta:

$$\beta_\xi = \frac{h_\eta}{Ja} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right). \quad (\text{B-8})$$

Assim:

$$(\beta_\xi \Delta\eta)_e \equiv \frac{\bar{h}_{\eta_e}}{\Delta\eta_e} \frac{\Delta\xi_e \Delta\eta_e}{(\bar{J}a)_e} \left[\frac{(\Delta x_\xi \Delta x_\eta)_e + (\Delta y_\xi \Delta y_\eta)_e}{\Delta\xi_e \Delta\eta_e} \right] \Delta\eta_e.$$

Finalmente,

$$(\beta_\xi J_\eta \Delta\eta)_e \equiv \frac{\bar{h}_{\eta_e}}{Ja_e} [(\Delta x_\xi \Delta x_\eta)_e + (\Delta y_\xi \Delta y_\eta)_e] J_{\eta_e} \quad (\text{B-9})$$

e da mesma forma para as outras partes.

Cota $(\alpha_\xi \hat{J}_\xi \Delta\eta)_e$ de b_{SP}

De (B-3), podemos escrever:

$$(\alpha_\xi \hat{J}_\xi \Delta\eta)_e \equiv \frac{\bar{h}_{\xi_e} \bar{h}_{\eta_e}^{-2}}{(\bar{J}a)_e} \hat{J}_{\xi_e}, \quad (\text{B-10})$$

resolução válida para as restantes.

Apêndice C

Correção por Bloco

As equações do procedimento de correção por bloco são obtidas da equação de discretização para a velocidade axial, tendo em conta que os valores de w no contorno do domínio são especificados, sendo desnecessária aí qualquer forma de correção.

Assim, fixando-se um dos índices da matriz, j , digamos, é proposto que:

$$w_{i,j} = w_{i,j}^* + w'_j, \quad (C-1)$$

$$w_{i+1,j} = w_{i+1,j}^* + w'_j, \quad (C-2)$$

$$w_{i-1,j} = w_{i-1,j}^* + w'_j, \quad (C-3)$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j+1}^* + w'_{j+1}, \quad (C-4)$$

$$w_{i,j-1} = w_{i,j-1}^* + w'_{j-1}, \quad (C-5)$$

onde w^* é o valor corrente de w , alcançado no passo imediatamente anterior do processo iterativo, e w' é a correção proposta para o conjunto dos pontos nodais identificados por aquele índice j . As equações (C-1) até (C-5) são substituídas na equação de discretização para w e, então, as expressões resultantes são somadas ao longo de todos os valores internos de i , ou seja, de 2 até $L2$, resultando:

$$A_j w'_j = B_j w'_{j+1} + C_j w'_{j-1} + D_j, \quad \text{para } j = 2 \text{ até } M2, \text{ onde:} \quad (C-6)$$

$$A_j = \sum_{i=2}^{L2} (AP_{i,j} - AIP_{i,j} - AIM_{i,j}), \quad \text{com } AIM_{2,j} = 0 \text{ e } AIP_{L2,j} = 0; \quad (C-7)$$

$$B_j = \sum_{i=2}^{L2} AJP_{i,j}; \quad (C-8)$$

$$C_j = \sum_{i=2}^{L2} AJM_{i,j}; \quad (C-9)$$

$$D_j = \sum_{i=2}^{L2} (CON_{i,j} + AIP_{i,j}w_{i+1,j}^* + AIM_{i,j}w_{i-1,j}^* + \\ + AJP_{i,j}w_{i,j+1}^* + AJM_{i,j}w_{i,j-1}^* - AP_{i,j}w_{i,j}^*). \quad (C-10)$$

O sistema linear representado pelas equações (C-6) é resolvido via TDMA, obtendo-se as correções w' , uniformes para cada linha j .

É interessante notar que os D_j , termos independentes das equações, constituem o somatório dos resíduos das equações de discretização, para cada j . Quando esses resíduos forem nulos, o sistema linear a ser resolvido será homogêneo com determinante principal (associado à matriz dos coeficientes) diferente de zero, e, portanto, a única solução possível será a trivial ou nula; nenhuma correção por bloco será, obviamente, necessária.

Expressões equivalentes às anteriormente descritas podem ser derivadas ao fixarmos i .