



Fabio Santiago

**UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DUPLA EM
PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM
REGIME TRANSITÓRIO**

108/2012

CAMPINAS, 2012



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Fabio Santiago

**UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DUPLA EM
PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM
REGIME TRANSITÓRIO**

Orientador: Professor Dr. Luiz Fernando Milanez

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Térmicas e Fluidos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO
ALUNO FABIO SANTIAGO E ORIENTADA PELO
PROFESSOR DR. LUIZ FERNANDO MILANEZ

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59u Santiago, Fabio
Utilização do método da integral dupla em problemas
de condução unidimensional em regime transitório /
Fabio Santiago. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Fernando Milanez.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Calor - Transmissão. 2. Engenharia térmica. I.
Milanez, Luiz Fernando, 1950-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Utilization of the double integral method in unidimensional
conduction for transient regime problems

Palavras-chave em Inglês: Heat - Transmission, Thermal engineering

Área de concentração: Térmicas e Fluidos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Carlos Alberto Carrasco Altemani, João Frederico da Costa

Azevedo Meyer

Data da defesa: 25-07-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

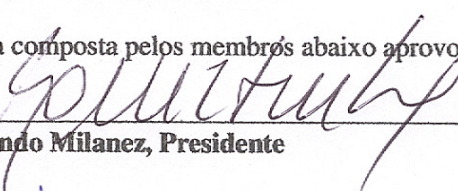
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACÂDEMICO

**Utilização do Método da Integral Dupla em
Problemas de Condução de Calor Unidimensional
em Regime Transitório**

Autor: Fabio Santiago

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez

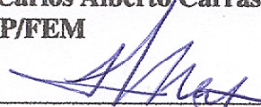
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação



Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez, Presidente
UNICAMP/FEM



Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani
UNICAMP/FEM



Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
UNICAMP/IMECC

Campinas, 25 de Julho de 2012.

Agradecimentos

A conclusão deste curso de Mestrado não seria possível sem o apoio de algumas pessoas e/ou instituições as quais, presto aqui meus agradecimentos formais:

Aos meus pais Aparecida Claudina Rosa de Moraes Santiago e Celso Santiago por sempre me apoiarem de todas as formas: incentivo; amor; atenção e financeiro em diversos momentos;

Ao meu irmão Flávio Santiago por sempre me incentivar em meus estudos,

Ao meu orientador professor Dr. Luiz Fernando Milanez por estar presente durante todo o curso de mestrado, e sempre acreditar em mim,

A todos meus grandes amigos do curso de Pós graduação em Engenharia Mecânica, pela doação de seu tempo, e sempre prontamente disponível a debater dúvidas que sem duvida contribuíram para minha formação;

A Universidade Estadual de Campinas pela vaga no curso de Mestrado em Engenharia Mecânica;

A Capes pelo financiamento da pesquisa proposta pelo orientador e desenvolvida por mim no período estabelecido.

“Conheço muitos que não puderam quando deviam, porque não quiseram quando podiam.”

François Rabelais.

Resumo

O objetivo deste trabalho é utilizar o método da integral dupla na obtenção de soluções analíticas aproximadas para problemas de condução térmica unidimensional em regime transitório. Sendo o método da integral dupla um refinamento do amplamente utilizado método da integral simples, também conhecido Karman-Pohlhausen para a camada limite ou método de Goodman para mudança de fase, inicialmente foi proposto um minucioso estudo do capítulo *Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat transfer*, cujo objetivo era compreender o funcionamento deste método, assim como selecionar os problemas apresentados neste trabalho. Posteriormente realizou-se o estudo do artigo primordial de aplicação do método da integral dupla publicado por Volkov, bem como dos principais trabalhos envolvendo o método da integral dupla. Ao todo foram selecionados seis casos do trabalho original de Goodman, os quais foram resolvidos com o uso do método da integral dupla para perfis quadrático e cúbico. A escolha de perfis polinomiais se justifica uma vez que estes são de fácil manipulação diante das operações de diferenciação e integração comum os métodos integrais, além disso, o uso de perfis de grau distinto tem como objetivo mostrar a influência da variação deste na obtenção de melhores aproximações. De modo a validar os resultados apresentados pelo método da integral dupla, estes foram comparados com as soluções analíticas exatas presente na literatura assim como, com as soluções aproximadas apresentadas por Goodman e com a solução numérica obtida pelo método de volumes de controles. Os resultados obtidos neste trabalho revelam o melhor desempenho do método da integral dupla quando comparado com os resultados obtidos por Goodman em seu trabalho anteriormente citado.

Palavras Chave: Calor de Transmissão, Engenharia Térmica.

Abstract

The objective of this work is to use the method of the double integral to obtain approximate analytical solutions for one-dimensional heat conduction problems in the transitional regime. As the method of a double integral refinement of the widely used simple integral method, also known Karman-Pohlhausen for the boundary layer or the Goodman method for phase change, was initially proposed a thorough study of Chapter Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat transfer, the objective of which was to understand the functioning of this method as well as selecting the problems presented in this paper. Subsequently we carried out the study of the primary article of the method of the double integral posted by Volkov as well as major works involving the method of double integral. In all six cases were selected from the original work of Goodman, which were solved using the method of the double integral for quadratic and cubic profiles. The choice of polynomial profiles is justified as they are easy to handle before the operations of common differentiation and integration methods, moreover, the use of profiles of different degree is intended to show the influence of the variation in obtaining better approximations. In order to validate the results presented by the method of the double integral, they were compared with the exact analytical solutions in the literature as well as with the approximate solutions presented by Goodman and the numerical solution obtained from a volume control. The present results show the improved performance of the method of the double integral compared with the results obtained by Goodman in their work cited above.

Key Words: Heat Transfer, Thermal Engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Quadrático.....	29
Figura 2 Distribuição de temperatura para o Perfil Quadrático em $t = 1$ segundo	31
Figura 3 Fluxo ao longo da Superfície em $t = 1$ segundo	31
Figura 4 Distribuição de Temperatura com Perfil Quadrático e Fronteira de Primeira Espécie $t = 3600$	32
Figura 5 Fluxo Térmico ao Longo da Placa no Instante 3600s.....	32
Figura 6 Distribuição de Temperatura para o Instante de 1 segundo	37
Figura 7 Fluxo Térmico ao Longo da Superfície para $t = 1$ segundo	37
Figura 8 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira de Primeira Espécie em 3600s	38
Figura 9 Fluxo ao Longo da Superfície no Instante 3600	39
Figura 10 Solução Numérica (Distribuição de Temperatura em $t = 3600$ s)	40
Figura 11 Fluxo Numérico ao Longo da Placa em $t = 3600$ s.....	40
Figura 12 Variação da Temperatura na Superfície com Perfil Quadrático e Fronteira de Segunda Espécie	46
Figura 13 Distribuição de Temperatura com o Perfil Quadrático e Fronteira de Segunda Espécie	47
Figura 14 Fluxo ao Logo da Placa com Condição de Segunda Espécie em $t = 3600$ s.....	48
Figura 15 Variação da Temperatura na Superfície com Perfil Cúbico e Fronteira de Segunda Espécie	51
Figura 16 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira de Segunda Espécie $t = 3600$ s.....	52
Figura 17 Fluxo ao Longo da Placa com condição de Segunda Espécie em $t = 3600$ s.....	52
Figura 18 Solução Numérica e Condição de Contorno de Segunda Espécie $t = 3600$ s.....	53
Figura 19 Distribuição do Fluxo Térmico para Condição de Segunda Espécie em $t = 3600$ s.....	54
Figura 20 Temperatura na Superfície ao Longo do Tempo para Placa de Espessura Finita.....	60
Figura 21 Distribuição de Temperatura para Placa de Espessura Finita em $t = 230$ s.....	61

Figura 22 Fluxo ao Longo da Placa de Espessura Finita em $t=230$ s	62
Figura 23 Distribuição de Temperatura com Perfil Quadrático e Fronteira Convectiva	70
Figura 24 Comparativo dos Métodos Integrais com Perfil Quadrático e Fronteira Convectiva	70
Figura 25 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira Convectiva	75
Figura 26 Comparativo dos Métodos Integrais com Perfil Cúbico e Fronteira Convectiva	75
Figura 27 Perfil de Temperatura com Polinômio Quadrático e Geração Interna	82
Figura 28 Módulo do Fluxo Térmico com Perfil Quadrático e Geração Interna	82
Figura 29 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Geração Interna	85
Figura 30 Módulo do Fluxo Térmico com Perfil Cúbico com Geração	86
Figura 31 Distribuição de Temperatura com Beta Zero e Perfil Quadrático	95
Figura 32 Distribuição de Temperatura para Beta Meio e perfil Quadrático	96
Figura 33 Distribuição de Temperatura com Beta Zero e Perfil Cúbico	101
Figura 34 Distribuição de Temperatura com Beta 0,5 e Perfil Cúbico	102
Figura 35 Comparativo dos Métodos Integrais com Beta Positivo	103
Figura 36 Volume de Controle Interno	108
Figura 37 Perfil em Degrau a Esquerda e Perfil Linear por Partes a Direita	111
Figura 38 Variação do Parâmetro f na obtenção do Método de Discretização	113
Figura 39 Condição de Contorno de Primeira Espécie	114
Figura 40 Condição de Contorno de Segunda Espécie	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Perfis de Velocidade para a Camada Limite	10
Tabela 3.2 EDOs Obtidas com o Método da Integral Simples.....	13
Tabela 3.3 Avaliação do Método da Integral Simples.....	13
Tabela 3.4 EDOs Obtidas com o Método da Integral Dupla.....	18
Tabela 3.5 Avaliação do Método da Integral Dupla	18
Tabela 3.6 Avaliação dos Métodos Integrais no Calculo da Tensão de Cisalhamento	20
Tabela 3.7 Avaliação dos Métodos Integrais no Calculo da Espessura da Camada Limite	20
Tabela 4.1 Propriedades Termfísicas do Metal de Teste	22
Tabela 4.2 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Quadrático	29
Tabela 4.3 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Cúbico	35
Tabela 4.4 Avaliação da Temperatura na Superfície com Perfil Quadrático	46
Tabela 4.5 Avaliação da Temperatura na Superfície com Perfil Cúbico	50
Tabela 4.6 Avaliação da Parede de Espessura Finita.....	60
Tabela 4.7 Comparativo do Perfil Quadrático com Propriedades Variando	94
Tabela 4.8 Comparativo do Perfil Cúbico com Propriedades Variando	100

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
3	MÉTODOS INTEGRAIS	5
3.1	Descrição do Problema da Camada Limite	6
3.2	Determinação dos Perfis	7
3.3	Método da Integral Simples	10
3.3.1	Aplicação do Método da Integral Simples	12
3.4	MÉTODO DA INTEGRAL DUPLA	14
3.4.1	Aplicação do Método da Integral Dupla ao Problema da Camada Limite.	17
3.5	Avaliação Comparativa dos Métodos Integrais.....	19
4	APLICAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DUPLA EM PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.	21
4.1	PLACA SEMI-INFINITA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE	23
4.1.1	Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico	24
4.1.2	Aplicação do Método da Integral Dupla Com perfil Quadrático e Cúbico	25
4.1.3	Resultados com Perfil Quadrático	28
4.1.4	Resultados com Perfil Cúbico	35
4.1.5	Solução Numérica.....	39

4.2 PLACA SEMI-INFINITA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE.....	41
4.2.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico	41
4.2.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico	43
4.2.3 Resultados com Perfil Quadrático	45
4.2.4 Resultados com Perfil Cúbico	50
4.2.5 Solução Numérica.....	53
4.3 PAREDE DE ESPESSURA FINITA E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE.....	54
4.3.1 Obtenção do Perfil Cúbico de Temperatura.....	55
4.3.2 Aplicando o Método da Integral Dupla com Perfil Cúbico	55
4.3.3 Avaliação dos Resultados	59
4.3.4 Solução Numérica.....	61
4.4 PLACA SEMI-INFINITA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE	63
4.4.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico	63
4.4.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico	66
4.4.3 Resultados com Perfil Quadrático	69
4.4.4 Aplicação com Perfil Cúbico	71
4.4.5 Resultado com Perfil Cúbico.....	74
4.5 CONDUÇÃO DE CALOR COM GERAÇÃO INTERNA.....	76
4.5.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico	77
4.5.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico	79
4.5.3 Resultados com Perfil Quadrático	81
4.5.4 Resultados com Perfil Cúbico	84
4.6 PROPRIEDADES TÉRMICAS DEPENDENTES DA TEMPERATURA	86
4.6.1 Determinação dos Perfis Quadrático e Cúbicos	88
4.6.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico	89
4.6.3 Resultados para o Perfil Quadrático	93

4.6.4	Resultados para o Perfil Cúbico	100
5	CONCLUSÕES	104
	REFERÊNCIA	105
	APÊNDICE A- MÉTODO DE VOLUMES DE CONTOROLE	108
A1.	Discretização da Equação da Difusão.....	108
A2.	Tratamento das Condições de Contorno	114
A2.1	Condição de Contorno de Dirichlet.....	114
A2.2	Condição de Contorno de Von Neumann.....	116

1 INTRODUÇÃO

Atualmente a proliferação de recursos numéricos e computacionais e a disponibilidade de pacotes prontos de programas têm relegado a um segundo plano os métodos analíticos para resolução de problemas de transferência de calor. Não resta dúvida que os programas computacionais representem um avanço principalmente em problemas que ocorrem em geometrias irregulares. Entretanto é importante que se estudem e desenvolvam métodos analíticos exatos e aproximados, até para que os programas computacionais sejam otimizados e demandem menos tempo de processamento.

Em contra partida a esta tendência atual, este trabalho tem como objetivo desenvolver soluções analíticas aproximadas para problemas de condução térmica unidimensional em regime transitório em corpo semi-infinito. Para tanto fará uso do Método da Integral Dupla desenvolvido por Volkov (1965) que consiste num refinamento do amplamente utilizado Método da Integral Simples, mais conhecido como Método de Karman-Pohlhausen para a camada limite ou Método de Goodman para mudança de fase.

Os problemas aqui apresentados foram extraídos do capítulo “Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat transfer” escrito por Goodman (1964). Tal escolha é justificada pelo fato que a aplicação do método da integral dupla trata das condições de contorno com o uso método da integral simples. Deste modo o trabalho de Goodman (1964) serve como referência para o tratamento das condições de contorno, assim como na avaliação dos resultados obtidos com método da integral dupla.

Ao fim deste trabalho pretende-se ter uma análise do comportamento do método da integral dupla frente às mais diversas situações físicas bem como uma avaliação de seu desempenho frente a estes casos.

De modo a cumprir os objetivos deste trabalho, foi proposto o seguinte roteiro de estudo:

1. Estudo do capítulo “Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat transfer” escrito por Goodman (1964)”, cuja finalidade é ter o completo conhecimento do método da integral simples, bem como selecionar os problemas a serem resolvidos com o uso do método da integral dupla.
2. Estudo do Artigo Refinamento do Método de Karman-Pohlhausen publicado por Volkov (1965) que consiste na aplicação fundamental do método da integral dupla.
3. Revisão bibliográfica dos principais estudos envolvendo as aplicações do Método da Integral Dupla.
4. Aplicação do Método da Integral Dupla aos problemas selecionados no item um, seguida pela convalidação dos resultados, com o uso das soluções analíticas exatas, soluções analíticas aproximadas dadas por Goodman (1964) e quando conveniente com a solução numérica obtida com o método dos volumes de controles.
5. Análise da viabilidade da aplicação do método da integral frente aos problemas escolhidos em no item um.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A aplicação primordial do método da integral dupla se deu com Volkov (1965) quando realizou um minucioso estudo sobre o amplamente utilizado método de Karman-Pohlhausen (1921) para a resolução das equações da camada limite. Em seu trabalho Volkov (1965) apontou quais condições deveriam ser satisfeitas para que o método de Karman-Pohlhausen (1921) fornecesse bons resultados, assim como qual a principal fonte de erros associada a ele. Neste artigo, Volkov (1965) também sugere que o referido método poderia ser melhorado se o cálculo do vetor gradiente no contorno fosse expresso através de uma relação integral, uma vez que melhorias resultariam devido à eliminação da diferenciação que não apareceria mais diretamente, mas apenas como parte de um integrando.

De modo a se obter essa relação integral para o tratamento do contorno, Volkov (1965) então executa uma dupla integração na equação da quantidade de movimento sendo a primeira integração envolvendo o interior do domínio e a segunda ao longo da distância fenomenológica $\delta(x)$. O uso dessa estratégia possibilita que a derivada no contorno seja expressa através de uma relação integral dada pelo método da integral simples.

Com o intuito de testar seu novo método, Volkov (1965) aplica este a um conjunto de quatro diferentes perfis de velocidade para resolver as equações da camada limite. Os resultados obtidos por ele se mostram muito bons e superiores ao método da integral simples desenvolvido por Karman-Pohlhausen (1965), e o sucesso de seu método encorajou outros autores a fazer uso deste em diversas outras aplicações.

Interessante notar que Bromley (1952) utilizou estratégia semelhante utilizada por Volkov, (1965) em um problema específico para determinar o coeficiente de transferência de calor para o caso de alta sensibilidade de calor na convecção de um filme laminar. No entanto ele não apresenta considerações significativas das características da estratégia por ele utilizada, bem como a facilidade e aumento de precisão em relação ao método da integral simples.

Tse-Fou (1976) Publicou uma série de três artigos entre 1971 e 1976 em ele se propõe a resolver a equação da quantidade de movimento onde inclui o efeito de grandes variações do numero de Prandtl. Nesse conjunto de trabalhos ele utiliza a mesma estratégia de Volkov (1965) para o cálculo do vetor gradiente na superfície.

Sucec (1977) aplicou o método da integral simples para problemas transitórios de condução de calor para variação em degrau de temperatura ou do fluxo de calor. Este trabalho é aqui citado, pois Sucec (1979) o referencia extensamente ao resolver a equação da energia para um escoamento ao longo de uma placa plana, em regime laminar, com propriedades constantes, tendo um fluxo de calor especificado na superfície. Sucec (1995) também aplicou o método da integral dupla para as equações da camada limite com o objetivo de obter soluções para a localização do ponto de separação desta.

El-Genk & Cronenberg, (1979) produziram dois artigos em 1979, o primeiro foi um teste do método para verificar a precisão da solução em problemas de mudança de fase. O sucesso da solução obtida nesse teste deu a El-Genk & Cronenberg, (1979b) confiança suficiente para a elaboração de um segundo artigo onde foi obtida uma solução aproximada para o crescimento ou encolhimento de uma espessura congelada sobre uma parede fria em uma parede com escoamento forçado.

Os trabalhos reportados na literatura seguem basicamente o mesmo formato. Seleciona-se uma situação física definida para a qual existe uma solução exata. Identifica-se a equação diferencial parcial fundamental bem como a condição inicial e de contorno. Uma integração ao longo da camada limite ou distância de penetração é efetuada para estabelecer um balanço integral do calor ou da quantidade de movimento, admite-se uma forma para os perfis de velocidade e temperatura na camada, ou vários, se o objetivo for analisar a precisão ou a sensibilidade da forma funcional. Então se efetua a substituição resultando em uma equação diferencial ordinária a qual é resolvida por métodos analíticos, ou caso não seja possível, se utiliza um método numérico. Em geral os resultados fornecidos pelo método da integral dupla se mostram melhores do que os do método da integral simples.

3 MÉTODOS INTEGRAIS

Neste capítulo serão apresentados o método da integral simples desenvolvido por Karman-Pohlhausen (1921) e o método da integral dupla desenvolvido por Volkov (1965), que consiste em um refinamento do método anterior. Estes dois métodos integrais se caracterizam por serem técnicas matemáticas que reduzem um problema de valor de contorno não linear a um problema ordinário de valor inicial, cuja solução pode ser frequentemente expressa numa forma analítica fechada.

A obtenção de soluções analíticas fechadas com o uso dos métodos integrais está associada à escolha de perfis de velocidade no caso da camada limite ou de temperatura no caso de problemas de transferência de calor. Cabe observar que esta escolha não é arbitrária, mas deve respeitar as condições de contorno do problema a ser resolvido, uma vez que ambos os métodos integrais exigem que os perfis satisfaçam essas condições em suas aplicações.

A fim de organizar o estudo de cada um dos métodos, inicialmente será feita a definição do problema da camada limite. A importância deste problema se deve ao fato que, tanto Karman-Pohlhausen (1921) quanto Volkov (1965), utilizaram este na aplicação primordial de seus métodos. No entanto, diferentemente dos artigos originais, neste trabalho será considerado que a camada limite encontra-se totalmente desenvolvida. Tal simplificação pode ser admitida uma vez que o termo associado ao desenvolvimento da camada não é uma fonte de erros associada à aplicação desses métodos.

Após a completa formulação matemática do problema da camada limite, será definido o algoritmo para a obtenção dos perfis polinomiais. A opção por polinômios é justificada pois estes são de fácil obtenção além serem de simples manipulação diante das operações de integração e diferenciação, comum aos métodos integrais.

Definida a estrutura básica comum ao método de Karman-Pohlhausen (1921) e de Volkov (1965), cada um deles será descrito e aplicado ao problema da camada limite e, como nos artigos

originais, a avaliação dos métodos será feita com o cálculo da espessura da camada limite e da tensão de cisalhamento na superfície.

3.1 Descrição do Problema da Camada Limite

O desenvolvimento da camada limite é de grande importância para a mecânica dos fluidos. Hermann Schlichting (1979) em seu livro *Boundary-Layer Theory*, faz um extenso estudo em relação a este tema. No entanto, foge do escopo deste trabalho o alto grau de detalhamento apresentado na referida literatura, uma vez que este problema será utilizado apenas para a apresentação dos métodos integrais. Como apresentado por Incropera (2002), para um escoamento laminar em regime permanente onde a dissipação viscosa possa ser negligenciada, a modelagem matemática para a camada limite é dada pelas equações da quantidade de movimento e da continuidade:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

com as condições de contorno

$$u(y = 0) = 0, \quad (3.3)$$

$$u(y = \delta) = u_{\infty}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \text{ e} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=\delta} = 0. \quad (3.6)$$

De posse da completa formulação matemática do problema da camada limite, cabe observar que, das quatro condições de contorno, três delas estão definidas em função da espessura da camada limite. Será mostrada na aplicação de ambos os métodos integrais a influencia dessas condições de contorno na precisão de cada um dos métodos integrais.

3.2 Determinação dos Perfis

A obtenção de soluções analíticas fechadas com o uso dos métodos integrais está associada à escolha de perfis de velocidade no caso da camada limite ou de temperatura no caso de problemas de transferência de calor. No entanto, a escolha dos perfis não é arbitrária, devendo estas respeitar as condições de contorno do problema a ser resolvido. Como considerado anteriormente; este trabalho fará uso apenas de perfis polinomiais; este tipo específico de perfil, permite a definição de uma sequência simples de três passos que possibilita a determinação dos mesmos em função das condições de contorno do problema a ser resolvido. A saber, são:

1. Considere um polinômio de grau n em sua forma algébrica canônica dada por
$$P(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n$$
2. Para a determinação das constantes polinomiais imponha $n + 1$ condições de contorno satisfazendo o problema.
3. Determinadas as constantes, o perfil está adequado para a aplicação do método.

De modo à demonstrar a influência do aumento do grau do polinômio na obtenção de melhores aproximações, o problema da camada limite será resolvido com polinômios de graus dois, três e de grau quatro. No entanto, em estudo realizado por Langford (1973), este demonstrou que o uso de condições de contorno adicionais pode inibir a precisão do método integral.

Determinação do Perfil Quadrático

Considerando inicialmente o perfil quadrático em sua forma canônica tem-se:

$$u(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2. \quad (3.7)$$

De acordo com o algoritmo anteriormente descrito, são necessárias três condições de contorno para a determinação das constantes. Considerando as condições de contorno dadas por, (3.3), (3.4), (3.5) e aplicando cada uma delas em (3.7) resulta:

$$\beta_0 = 0, \quad (3.8)$$

$$\beta_1 = \frac{2u_\infty}{\delta} \text{ e} \quad (3.9)$$

$$\beta_2 = -\frac{u_\infty}{\delta^2}. \quad (3.10)$$

Através de algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que o perfil quadrático (3.7) assume a seguinte forma:

$$\frac{u}{u_\infty} = \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (3.11)$$

Determinação do Perfil Cúbico

De modo análogo ao feito com o perfil quadrático, inicialmente o perfil cúbico será considerado em sua forma canônica e, em seguida, se aplicam as quatro condições de contorno fundamentais do problema da camada limite determinadas na seção (3.1)

$$u(x, y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3. \quad (3.12)$$

Ao se imporem as condições anteriormente mencionadas, têm-se:

$$\beta_0 = 0, \quad (3.13)$$

$$\beta_1 = \frac{3u_\infty}{2\delta^2}, \quad (3.14)$$

$$\beta_2 = 0 \text{ e} \quad (3.15)$$

$$\beta_3 = -\frac{u_\infty}{2\delta^3}. \quad (3.16)$$

Com algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que o perfil cúbico de velocidade assume a seguinte forma.

$$u(x, y) = u_\infty \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \quad (3.17)$$

Determinação do Perfil de Grau Quatro

A determinação do perfil de grau quatro requer o uso de cinco condições de contorno. No entanto, na descrição do problema da camada limite, foram identificadas apenas quatro condições. A quinta condição de contorno é identificada por Volkov (1965) e é igual a.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=\delta} = 0 \quad (3.18)$$

De posse do número correto de condições de contorno para a determinação das constantes do perfil, este deve ser inicialmente considerado em sua forma canônica, dada pela equação (3.19) e em seguida deve-se aplicar cada uma das condições de contorno anteriormente descritas.

$$u = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4. \quad (3.19)$$

Após a aplicação das condições de contorno têm-se:

$$\beta_0 = 0, \quad (3.20)$$

$$\beta_1 = \frac{2u_\infty}{\delta}, \quad (3.21)$$

$$\beta_2 = 0, \quad (3.22)$$

$$\beta_3 = -\frac{2u_\infty}{\delta^3} \text{ e} \quad (3.23)$$

$$\beta_4 = \frac{u_\infty}{\delta^4}. \quad (3.24)$$

Com algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que o perfil de grau quatro assume a seguinte forma.

$$u = u_\infty \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right] \quad (3.25)$$

Após a determinação de cada um dos perfis, estes se encontram organizados na Tabela 3.1 dada abaixo.

Tabela 3.1 Perfis de Velocidade para a Camada Limite

Grau	Perfil de Velocidade
2	$\frac{u}{u_\infty} = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$
3	$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$
4	$\left(\frac{u}{u_\infty} \right) = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4$

3.3 Método da Integral Simples

Desenvolvido Karman-Pohlhausen (1921) para resolução das equações da camada limite, o método da integral simples consiste em uma técnica matemática que transforma um problema de

valor de contorno não linear em um problema ordinário de valor inicial cuja solução pode ser frequentemente expressa em uma forma analítica fechada.

A estratégia empregada por Karman-Pohlhausen (1921) para a resolução das equações da camada limite consiste em inicialmente realizar uma simples integração da equação da quantidade de movimento ao longo da espessura da camada limite. Tal integração tem como objetivo eliminar desta a derivada parcial em relação a y . Então deve-se admitir uma função para o perfil velocidade que satisfaça as condições de contorno do problema a ser resolvido e introduzir esta na equação diferencial integrada, transformando assim o problema de valor de contorno não linear em um problema ordinário de valor inicial.

O potencial do método de Karman-Pohlhausen (1921) despertou o interesse de diversos pesquisadores que expandiram o uso deste às mais diversas áreas, a exemplo Landahl (1953) que aplicou o método da integral simples no campo da biofísica para análise do espalhamento de um concentrado, Merk (1954) utilizou este em um processo de fusão bidimensional em regime permanente e Goodman (1964) devota todo um capítulo na utilização do método da integral simples na resolução de problemas de transferência de calor em regime transitório.

Como observa Özisik (1980), quando uma equação diferencial parcial é resolvida por um método exato numa região submetida a condições de contorno e condição inicial especificada, a solução obtida é válida em todos os pontos da região considerada. No entanto, quando a equação é resolvida com método integral, a solução é satisfeita apenas na média para a região considerada.

De modo a sistematizar a aplicação do método da integral simples Milanez (1982) descreveu um algoritmo de quatro passos para a aplicação deste método em problemas de condução unidimensional em regime transitório sem geração interna de energia. Os passos descritos pelo referido autor serão aqui reproduzidos integralmente para a condução do calor, a saber:

1. A equação diferencial da condução do calor é integrada ao longo de uma distância fenomenológica $\delta(t)$, chamada de espessura térmica a fim de remover da equação

diferencial a derivada em relação ao espaço. A espessura térmica é definida como a distância além da qual não existe fluxo de calor. Desta forma, a distribuição inicial de temperatura permanece a mesma a partir de $\delta(t)$. A equação resultante é chamada “equação da energia”.

2. Um perfil adequado é escolhido para a distribuição de temperatura ao longo da espessura térmica. Um perfil polinomial em geral é escolhido para este propósito. A experiência mostra que não existe ganho significativo para polinômios de grau superior a 4. Os coeficientes do polinômio são determinados em função da espessura térmica $\delta(t)$ pela aplicação das condições de contorno reais.
3. Quando o perfil de temperatura assim obtido é introduzido na equação integral da energia e são executadas as operações indicadas, obtém-se uma equação diferencial ordinária para a espessura térmica $\delta(t)$ em função do tempo; a condição apropriada é $\delta(t) = 0$ para $t = 0$.
4. Uma vez conhecida $\delta(t)$, a distribuição de temperatura é obtida em função do tempo e da posição do meio.

3.3.1 Aplicação do Método da Integral Simples

Considerando inicialmente o problema da camada limite definido na seção (3.1) e integrando a equação da quantidade de movimento (3.1) ao longo da distância fenomenológica tem-se:

$$\int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (3.26)$$

O desenvolvimento da equação (3.26) com o auxílio da equação da continuidade (3.2) resulta em

$$v \frac{\partial u}{\partial y}(0) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta(x)} (u_\infty - u) u dy \right]. \quad (3.27)$$

A equação anterior também é conhecida como equação integral da quantidade de movimento da camada limite. A substituição dos perfis de velocidade determinados na seção

(3.2) em (3.27) leva à obtenção das seguintes equações diferenciais dadas na Tabela 3.2, as quais devem ser resolvidas com a condição inicial dada por $\delta(0) = 0$.

Tabela 3.2 EDOs Obtidas com o Método da Integral Simples

Perfil de Velocidade	Equação Diferencial Ordinária	Solução
$\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	$\delta(x) \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{u_\infty}$	$\sqrt{\frac{30\nu x}{u_\infty}}$
$\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	$\delta(x) \frac{d\delta}{dx} = \frac{140\nu}{13u_\infty}$	$\sqrt{\frac{21,53\nu x}{u_\infty}}$
$\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	$\delta(x) \frac{d\delta}{dx} = \frac{630\nu}{37u_\infty}$	$\sqrt{\frac{34,05\nu x}{u_\infty}}$

Os resultados apresentados na Tabela 3.3 mostram o desempenho do método da integral simples para o cálculo da tensão de cisalhamento na superfície e da espessura da camada limite para cada um dos perfis anteriormente selecionados.

Tabela 3.3 Avaliação do Método da Integral Simples

Perfil de Velocidade $\frac{u}{u_\infty}$	Espessura da Camada Limite $\delta(x) / \sqrt{\nu x / u_\infty}$	Tensão de Cisalhamento Local $\tau_0(x) / \rho \sqrt{\nu u_\infty^3 / x}$
$\frac{u}{u_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,47	0,365
$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4,64	0,323
$\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5,83	0,343
Solução Exata	5,00	0,332

A análise da Tabela 3.3 mostra boa coerência entre o método da integral simples e a solução exata. Além disso, deixa evidente a influência da utilização de perfis polinomiais de maior grau para a obtenção de melhores aproximações. Como se observa o aumento do grau favorece o cálculo da tensão de cisalhamento na superfície, e no cálculo da espessura da camada este aumento prejudica a precisão. Isto se deve ao número de condições de contorno impostas ao perfil envolvendo a espessura da camada limite.

3.4 Método da Integral Dupla

Desenvolvido por Volkov (1965), o método da integral dupla consiste em um refinamento do método de Karman-Pohlhausen (1921). Tendo como ponto de partida em seu trabalho um estudo criterioso sobre o método da integral simples, Volkov (1965) realiza diversas observações sobre o método da integral simples, indicando quais condições devem ser satisfeitas para se obter bons resultados e qual a principal fonte de erros associada a ele. De modo a facilitar as observações feitas Volkov (1965), é necessário retomar a equação integral da quantidade de movimento que é obtida após a aplicação do método de Karman-Pohlhausen,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta(x)} (u_\infty - u)u \, dy \right] = \nu \frac{\partial u}{\partial y}(0). \quad (3.28)$$

Segundo Volkov (1965), a eficácia do método aparece quando a integral do lado esquerdo de (3.28) não muda muito em valor, ou seja, quando os integrandos diferem pouco do valor real, estando a principal fonte de erros associada à necessidade de se diferenciar o assumido perfil de velocidade u , no cálculo do vetor gradiente, uma vez que a operação de diferenciação amplifica quaisquer diferenças entre a função u e a solução analítica exata.

Volkov (1965) propõe que o método poderia ser melhorado se o lado direito de (3.28) fosse expresso através de uma relação integral da função assumida para o perfil de velocidade, uma vez que melhorias decorreriam da eliminação da diferenciação, que não apareceria mais diretamente, mas apenas como parte do integrando.

De modo a eliminar o cálculo da derivada no contorno, Volkov (1965) sugere que a equação da quantidade de movimento fosse integrada duas vezes sendo a primeira integração realizada no interior do domínio e a segunda integração ao longo da espessura da camada limite, obtendo assim uma nova equação integral da quantidade de movimento.

$$\int_0^{\delta(x)} \int_0^x v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy dy = \int_0^{\delta(x)} \int_0^x u \frac{\partial u}{\partial x} dy dy + \int_0^{\delta(x)} \int_0^x v \frac{\partial u}{\partial y} dy dy. \quad (3.29)$$

O cálculo da primeira integral de (3.29) permite que o termo $-v \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$ seja colocado em evidência.

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) dy \\ = \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u^2 dy \right] dy - \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u dy \right] dy. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Volkov (1965) então recomenda que o termo $-v \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$ fosse calculado através do método da integral simples como uso da relação em (3.28), obtendo assim completa formulação de seu método.

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta(x)} (u_\infty - u)u dy \right] dy \\ = \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u^2 dy \right] dy - \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u dy \right] dy. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Importante notar que o método desenvolvido realiza melhorias que vão além da determinação implícita do vetor gradiente no contorno, pois ao se calcular o primeiro termo do lado esquerdo de (3.30) observa-se pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo que não há perdas nas características iniciais do perfil de velocidade uma vez que:

$$\int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = v[u(\delta(x)) - u(0)]. \quad (3.32)$$

Originalmente aplicada ao problema da camada limite, a técnica desenvolvida por Volkov (1965) pode ser estendida de modo totalmente análogo à resolução de problemas de transferência de calor em regime transitório. Assim, de modo a organizar a aplicação do método a este tipo de problema, o algoritmo a seguir descreve os passos fundamentais para este tipo de aplicação. Cabe observar que, em caso onde ocorra geração interna de energia ou variação das propriedades com a temperatura pequenas alterações devem ser feitas em sua estrutura.

Algoritmo do Método da Integral Dupla

1. Uma primeira integração na equação diferencial da condução do calor é realizada em relação a x no interior do domínio, ou seja, têm-se como extremo de integração os valores $x = 0$ e $x = x$, esta primeira integração tem o intuito de explicitar o vetor gradiente em $x = 0$.
2. Assim como no método da integral simples, deve-se escolher um perfil para a distribuição de temperatura, sendo que este deve satisfazer as condições de contorno do problema a ser resolvido. Como mostra a literatura, não há ganho significativo na utilização de perfis com grau maior do que três.
3. Deve-se analisar a condição de contorno em $x = 0$ e, caso se tenha uma condição de segunda espécie, esta não precisa ser aproximada implicitamente através do método da integral simples. Caso contrário, deve-se fazer uso da Sub-Rotina de tratamento da Condição de Contorno descrita a seguir.

Sub Rotina de Tratamento da Condição de Contorno

- 3.1 Considera-se novamente a equação da condução do calor e aplica-se o algoritmo do método da Integral Simples de modo a se determinar implicitamente o gradiente na superfície.
4. Substitui-se o perfil de temperatura obtido no passo 2 e realiza-se a segunda integração ao longo da distância fenomenológica $\delta(t)$ com a finalidade de remover da equação da condução a derivada parcial em relação ao espaço.
5. Obtém-se a equação diferencial ordinária para espessura térmica $\delta(t)$, a qual deve ser resolvida com condição inicial adequada dada por $\delta(0) = 0$.

6. Uma vez conhecida $\delta(t)$, a distribuição de temperatura é obtida em função do tempo e da posição do meio.

3.4.1 Aplicação do Método da Integral Dupla ao Problema da Camada Limite.

Considerando inicialmente o problema da camada limite definido na seção (3.1) e realizando uma dupla integração em relação a y na equação da quantidade de movimento. Sendo a primeira integração no interior do domínio e a segunda ao longo da espessura da camada limite tem-se,

$$\int_0^{\delta(x)} \int_0^y v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy dy = \int_0^{\delta(x)} \int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy dy + \int_0^{\delta(x)} \int_0^y v \frac{\partial u}{\partial y} dy dy. \quad (3.33)$$

Desenvolvendo a expressão (3.33) com o auxílio da equação da continuidade (3.2), resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) dy \\ = \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u^2 dy \right] dy - \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u dy \right] dy. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Realizando o tratamento da derivada no contorno através do método Karman-Pohlhausen, tem-se:

$$-v \frac{\partial u}{\partial y}(0) = -\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta(x)} u(u_\infty - u) dy \right]. \quad (3.35)$$

Voltando com a equação (3.35) em (3.34):

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta(x)} (u_\infty - u)u dy \right] dy \\ = \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u^2 dy \right] dy - \int_0^{\delta(x)} u \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^y u dy \right] dy. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A substituição dos perfis de velocidades dados na Tabela 3.2 na equação (3.36) resulta nas seguintes equações diferenciais ordinárias (Tabela 3.4), as quais devem ser resolvidas com a condição inicial de $\delta(0) = 0$.

Tabela 3.4 EDOs Obtidas com o Método da Integral Dupla

Perfil de Velocidade	Equação Diferencial Ordinária	Solução
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	$\frac{90}{7} \frac{\nu}{u_{\infty}} = \delta(x) \frac{d\delta}{dx}$	$\sqrt{\frac{25,71\nu x}{u_{\infty}}}$
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	$\frac{128\nu}{11u_{\infty}} = \delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx}$	$\frac{23,27\nu x}{u_{\infty}}$
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	$\frac{12600\nu}{773u_{\infty}} = \delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx}$	$\sqrt{\frac{32,60\nu x}{u_{\infty}}}$

Assim como no artigo original de Volkov (1965), neste trabalho também se adotará como parâmetros de avaliação o cálculo da espessura da camada limite e da tensão de cisalhamento na superfície. A Tabela 3.5 mostra o cálculo dos parâmetros anteriores para cada um dos perfis adotados.

Tabela 3.5 Avaliação do Método da Integral Dupla

Perfil de Velocidade $\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right)$	Espessura da Camada Limite $\delta(x) / \sqrt{\nu x / u_{\infty}}$	Tensão de Cisalhamento na Parede $\tau_0(x) / \rho \sqrt{\nu u_{\infty}^3 / x}$
$\frac{u}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,07	0,338
$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4,82	0,336
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5,70	0,334
Solução Exata	5,00	0,332

Como pode ser observado, o método da integral dupla é capaz de fornecer uma boa aproximação tanto para a tensão de cisalhamento quanto para a espessura da camada limite. No entanto, cabe ressaltar que uma aproximação polinomial de maior grau gera melhores resultados para o cálculo da tensão de cisalhamento, ao passo que este aumento ocasiona a perda de precisão para o cálculo espessura da camada limite. Este comportamento se deve ao fato de que a obtenção de aproximações polinomiais de maior grau requer um maior número de condições de contorno e consequentemente um maior número de restrições a ser satisfeita pelo polinômio. Neste caso, os perfis polinomiais foram determinados em função de uma única condição de contorno na superfície e de quatro condições de contorno em $\delta(x)$, ou seja a um maior número de restrições envolvendo a espessura camada limite.

3.5 Avaliação Comparativa dos Métodos Integrais

Esta seção tem como objetivo apresentar e comparar os resultados obtidos por ambos os métodos integrais nos cálculos da tensão de cisalhamento na superfície e da espessura da camada limite. A Tabela 3.6 mostra os resultados obtidos no calculo da tensão de cisalhamento para o método da integral dupla e integral simples. Como pode ser observado, para todos os perfis selecionados, o método de Volkov (1965) foi capaz de fornecer melhores aproximações do que o método Karman-Pohlhausen. Além disso, pode-se observar que no cálculo da espessura da camada limite, o método de Volkov (1965) possui baixa sensibilidade quanto à escolha do perfil, pois uso de um polinômio quadrático gerou um erro de 1,8% ao passo que o método de Karman-Pohlhausen com um perfil de grau quatro o erro foi de 3,38%, muito maior que o método da integral dupla.

Tabela 3.6 Avaliação dos Métodos Integrais no Calculo da Tensão de Cisalhamento

Perfil de Velocidade $\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right)$	Espessura da Camada Limite $\delta(x) / \sqrt{\nu x / u_{\infty}}$			
	MIS	Erro	MID	Erro
$\frac{u}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,47	9,4%	5,07	1,4%
$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4,64	7,2%	4,82	3,6%
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5,83	16,6%	5,70	14,0%
Solução Exata	5,00			

A Tabela 3.7 mostra o cálculo da espessura da camada limite para ambos os métodos integrais. Pode-se observar que método da integral dupla foi capaz de fornecer melhores resultados que o método da integral simples para todos os perfis selecionado. Além disso, este também foi capaz de reduzir os erros no uso de polinômios de maior grau.

Tabela 3.7 Avaliação dos Métodos Integrais no Calculo da Espessura da Camada Limite

Perfil de Velocidade $\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right)$	Tensão de Cisalhamento na Parede $\tau_0(x) / \rho \sqrt{\nu u_{\infty}^3 / x}$			
	MIS		MID	
$\frac{u}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	0,365	9,93%	0,338	1,8%
$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	0,323	2,7%	0,336	1,2%
$\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	0,343	3,31%	0,334	0,6%
Solução Exata	0,332			

4 Aplicação do Método da Integral Dupla em Problemas de Transferência de Calor.

Este capítulo tem como objetivo estender o uso do método da integral dupla desenvolvido por Volkov (1965) a problemas de condução de calor unidimensional em regime transitório. Todos os casos aqui estudados foram extraídos do capítulo “Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat transfer” escrito por Theodore R. Goodman (1964). Neste trabalho, o referido autor aplica o método da integral simples a diversos problemas de transferência de calor envolvendo um corpo semi-infinito, e compara suas soluções aproximadas às soluções exatas presentes na literatura ou quando estas não forem possíveis, à respectiva solução numérica.

A escolha do trabalho de Goodman (1964) como ponto de partida deste capítulo se justifica pelo fato que, ao se aplicar o método da integral dupla, o tratamento das condições de contorno deve ser feito através do método da integral simples. Deste modo o trabalho de Goodman (1964) serve como referência no tratamento das condições de contorno. Além disso, de modo a avaliar e convalidar os resultados obtidos neste trabalho, estes serão comparados tanto com as soluções analíticas, quanto com as soluções de Goodman (1964) e quando conveniente com a solução numérica.

Ao todo foram selecionados seis casos do capítulo escrito por Goodman (1964) e, para cada um deles o método da integral dupla foi aplicado, fazendo-se uso de perfis polinomiais quadrático e cúbico. No entanto, na resolução de alguns problemas, foram utilizados perfis específicos recomendados por Goodman (1964). O uso de diferentes tipos de perfis tem como objetivo mostrar a influência do aumento no grau do polinômio na obtenção de soluções de melhor precisão. Além disso, pode-se mostrar que o método da integral dupla é capaz de gerar melhores soluções com perfis quadráticos do que o método da integral simples com perfis cúbicos.

Os problemas selecionados do trabalho de Goodman (1964) foram:

- 1) Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Primeira Espécie
- 2) Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Segunda Espécie

- 3) Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Terceira Espécie
- 4) Placa Finita com Condições de Primeira e Segunda Espécies
- 5) Placa Semi-Infinita com geração interna.
- 6) Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Primeira Espécie e Propriedades Variando com a Temperatura.

Todos os problemas anteriormente citados foram resolvidos seguindo o roteiro dado abaixo.

- 1) **Definição do Problema:** Consiste na descrição da situação física a ser resolvida, identificando as condições de contorno, bem como as particularidades de cada problema.
- 2) **Obtenção dos perfis Polinomiais Quadrático e Cúbico:** A obtenção dos perfis foi feita considerando inicialmente cada um deles em sua forma canônica, seguida pela aplicação das condições de contorno para a determinação de suas constantes.
- 3) **Aplicação do Método da Integral Dupla:** Realizada para cada um dos problemas, com o uso dos perfis quadrático e cúbico.
- 4) **Avaliação dos Resultados:** Consiste em comparar a solução aproximada obtida com o método da integral dupla, com as soluções exatas presentes na literatura, assim como as soluções aproximadas apresentadas por Goodman (1964) com o método da integral simples e, quando conveniente, com a solução numérica.

A Tabela 4.1 mostra as propriedades termofísica do metal de teste que será utilizado no decorrer do trabalho.

Tabela 4.1 Propriedades Termofísicas do Metal de Teste

Condutividade e $W/m.K$	Densidade kg/m^3	Calor Específico $J/kg.K$	Difusividade m^2/s
14.9	7900.0	477.0	3.95×10^{-6}

4.1 Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Primeira Espécie

Tendo inicialmente uma placa semi-infinita que se estende ao longo do eixo $x > 0$ que tem distribuição de temperatura inicial de zero grau Celsius sendo que em sua fronteira em $x = 0$ é especificada uma temperatura T_s . Deste modo o sistema físico está bem determinado e seu modelo matemático é dado por:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x > 0, t > 0 \quad (4.1)$$

As três condições de contorno naturais para o problema são:

$$T(0, t) = T_s, \quad (4.2)$$

$$T(\delta, t) = 0 \text{ e} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) = 0. \quad (4.4)$$

No entanto, para a obtenção de resultados com perfil cúbico de temperatura é necessária uma quarta condição de contorno a qual pode ser obtida derivando-se parcialmente em relação a t a condição de contorno dada por (4.3) e em seguida avaliando-se a equação (4.1) no ponto (δ, t) , obtendo assim

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\delta, t) = 0. \quad (4.5)$$

A condição de contorno anterior (4.5) também é chamada de condição de suavização, porque ela tende a fazer o perfil ir se igualar com a temperatura inicial. Por fim, a condição inicial é igual a

$$T(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \quad (4.6)$$

4.1.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico

A obtenção dos perfis polinomial quadrático e cúbico será feita considerando inicialmente cada um deles em sua forma canônica seguida pela aplicação das condições de contorno. O número de condições a serem impostas é dado por $n + 1$ em que n é o grau do polinômio. Para o perfil quadrático as condições utilizadas são (4.2), (4.3), (4.4). Já para o perfil cúbico são as condições anteriores mais a condição adicional dada pela equação (4.5)

Perfil Quadrático

Um perfil polinomial quadrático assume a forma geral de

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (4.7)$$

Ao se imporem as condições anteriormente mencionadas determinam-se as constantes do polinômio.

$$\beta_0 = T_s, \quad (4.8)$$

$$\beta_1 = -\frac{2T_s}{\delta} \text{ e} \quad (4.9)$$

$$\beta_2 = \frac{T_s}{\delta^2}. \quad (4.10)$$

Pode-se mostrar que o perfil quadrático (4.7) assume a forma de:

$$T(x, t) = T_s \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^2. \quad (4.11)$$

Perfil Cúbico

Considerando inicialmente o perfil cúbico em sua forma canônica (4.12) e em seguida aplicando-se as condições de contorno dadas por (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) tem-se:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3. \quad (4.12)$$

Efetuada as operações anteriormente descritas obtém-se:

$$\beta_0 = T_s, \quad (4.13)$$

$$\beta_1 = -\frac{3T_s}{\delta^3}, \quad (4.14)$$

$$\beta_2 = \frac{3T_s}{\delta^3} \text{ e} \quad (4.15)$$

$$\beta_3 = -\frac{T_s}{\delta^3}. \quad (4.16)$$

Com algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que o perfil quadrático (4.11) assume a seguinte forma:

$$T(x) = T_s \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^3. \quad (4.17)$$

4.1.2 Aplicação do Método da Integral Dupla Com perfil Quadrático e Cúbico

Após o problema ter sido definido na sessão (4.1) e os perfis polinomiais terem sido obtidos em (4.1.1), nesta parte o método da integral dupla será aplicado a cada um dos perfis,

onde inicialmente será feita a aplicação para o caso quadrático bem como a avaliação de seu desempenho e, utilizando-se da mesma metodologia, será feita a aplicação com perfil cúbico.

Aplicação com Perfil Quadrático

Considerando inicialmente a equação da condução (4.1) e realizando uma dupla integração em relação a x , sendo os extremos de integração de 0 a x na primeira integral e de 0 a $\delta(t)$ na segunda integral, resulta em :

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx. \quad (4.18)$$

Calculando separadamente cada uma das integrais da equação (4.18) e trabalhando primeiramente com o lado esquerdo da expressão tem-se.

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx - \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx \quad (4.19)$$

O cálculo da primeira integral do lado direito de (4.19) é feita de modo direto substituindo-se o perfil quadrático e executando as operações

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = -T_s \alpha \quad (4.20)$$

Para o cálculo da segunda integral dada na equação (4.19) é necessário o uso do método da integral simples uma vez que o termo $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$ deve ser determinado implicitamente. Sendo assim, aplicando o método da integral simples na equação da condução (4.1), tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx \text{ e} \quad (4.21)$$

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) - \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx. \quad (4.22)$$

Considerando a condição de contorno (4.4) e substituindo-se o perfil polinomial quadrático dado em (4.11) no lado direito da equação (4.22) resulta em.

$$- \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{T_s}{3} \frac{d\delta}{dt}. \quad (4.23)$$

Substituindo o resultado obtido em (4.23) na segunda integral de (4.19), esta pode ser calculada completamente.

$$\int_0^{\delta(t)} - \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{T_s}{3} \frac{d\delta}{dt} dx = \frac{T_s}{3} \delta(t) \frac{d\delta}{dt}. \quad (4.24)$$

Voltando com os termos (4.20) e (4.24) em (4.19) resulta em

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = -\alpha T_s + \frac{T_s}{3} \delta(t) \frac{d\delta}{dt}, \quad (4.25)$$

e trabalhando com o termo do lado direito de (4.18) e aplicando o Teorema de Leibniz tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = 2T_s \frac{d\delta(t)}{dt} \left(\frac{\delta(t)}{12} \right) \quad (4.26)$$

A substituição das expressões (4.25) e (4.26) em (4.18) resulta na equação diferencial ordinária dada a seguir.

$$6\alpha = \delta(t) \frac{d\delta(t)}{dt} \text{ com} \quad (4.27)$$

$$\delta(0) = 0, \quad (4.28)$$

cuja solução é

$$\delta(t) = \sqrt{12\alpha t}. \quad (4.29)$$

Com a função $\delta(t)$ determinada, basta substituí-la no perfil assumido para a distribuição de temperatura obtendo assim a completa determinação desta.

$$T(x, t) = T_s \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\alpha t}} \right)^2. \quad (4.30)$$

4.1.3 Resultados com Perfil Quadrático

De modo a avaliar o desempenho do perfil quadrático, será utilizado o metal de teste anteriormente selecionado, calculando inicialmente o fluxo térmico na superfície com o uso da lei de Fourier,

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{2T_s k}{\sqrt{12\alpha t}} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) T_s}{\sqrt{\alpha t}}. \quad (4.31)$$

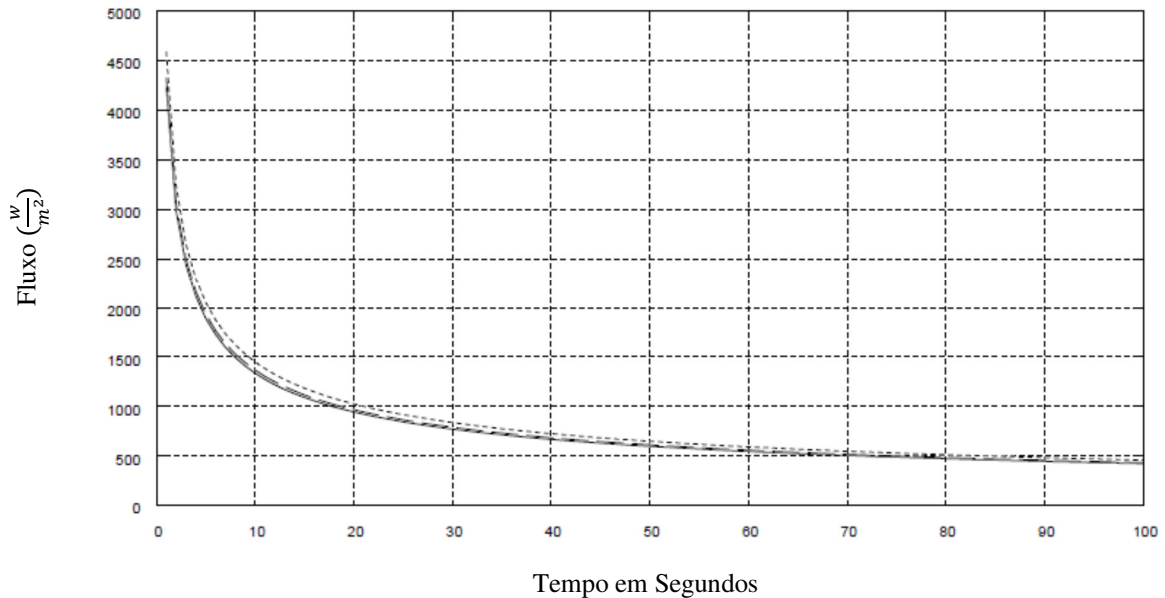
A Tabela 4.2 mostra o perfil de temperatura para o método da similaridade, método da integral simples e método da integral dupla. No cálculo do fluxo térmico (Tabela 4.2) pode-se observar que as aproximações feitas pelos métodos integrais diferem do método da similaridade apenas por uma constante. Enquanto o método analítico exato fornece como constante $\sqrt{1/\pi} = 0,5642$, o método da integral dupla fornece $\frac{2}{\sqrt{12}} = 0,5773$, ao passo que o método da integral simples com perfil cúbico resulta em $\sqrt{3/8} = 0,6123$. A comparação dos resultados deixa evidente a superioridade do método da integral dupla em relação ao método de Goodman (1964).

Tabela 4.2 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Quadrático

Método	Perfil de Temperatura $T(x, t)$	Fluxo Térmico $x = 0$	Erro Relativo
Similaridade	$T_s \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right)$	$\frac{(\sqrt{1/\pi}) T_s k}{\sqrt{\alpha t}}$	0%
Integral Dupla	$T_s \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2$	$\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{12}} \right) k T_s}{\sqrt{\alpha t}}$	2,3%
Integral Simples Perfil Cubico	$T_s \left(1 - \frac{x}{\sqrt{24\alpha t}} \right)^3$	$\frac{T_s k (\sqrt{3/8})}{\sqrt{\alpha t}}$	8,5%

A Figura 1 mostra o perfil do fluxo térmico na superfície ao longo dos cem segundos iniciais, para cada um dos métodos dados em Tabela 4.2. Como esperado, há maior concordância entre a solução analítica (linha contínua) e o método da integral dupla (linha tracejada) uma vez que esta difere da solução por similaridade apenas em 2,3%, ao passo que a solução de Goodman difere em 8,5%.

Figura 1 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Quadrático



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959),

Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático,

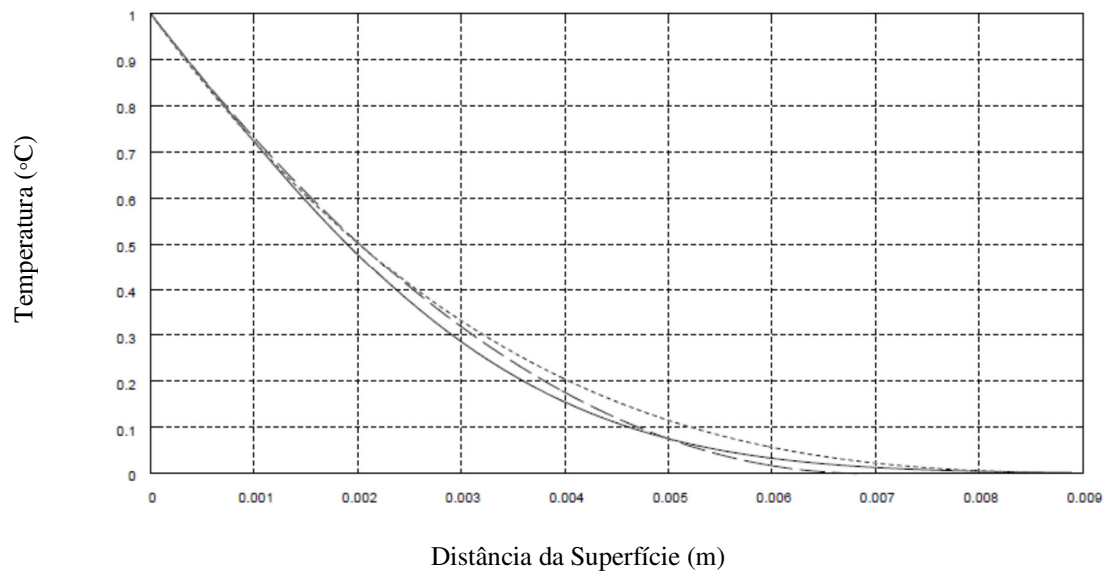
Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cubico (Goodman, 1964).

As figuras a seguir têm como objetivo mostrar a influência do tempo na precisão do método da integral dupla, uma vez que intervalos de tempos maiores ocasionam maiores distâncias de penetração e consequentemente um maior domínio a ser percorrido por uma mesma aproximação polinomial. Deste modo, inicialmente será feita uma análise da distribuição de temperatura e do fluxo térmico ao longo da placa no instante de tempo de um segundo, e de modo análogo, também será feita a análise para o instante de tempo de 3600 segundos.

Nas Figuras (4-2) e (4-3) apresentam-se respectivamente a distribuição de temperatura e do fluxo térmico no instante de tempo igual a 1 segundo ao longo do corpo. Pode-se observar na Figura 2 que o perfil de temperatura dado pelo método da integral dupla (linha tracejada) gera uma melhor aproximação em relação à solução analítica exata (linha contínua), quando comparada à solução dada por Goodman (1964). Cabe observar que em $x = 0,005m$ a solução do método da integral dupla cruza a solução analítica e, como consequência deste comportamento, a Figura 3 mostra que neste mesmo ponto, ocorre o maior erro na aproximação do fluxo térmico entre o método da integral dupla e a solução por similaridade.

De modo análogo, as figuras (4-4) e (4-5) mostram respectivamente a distribuição de temperatura e do fluxo térmico ao longo da placa para o instante de tempo de 3600 segundos. Ao se comparar as Figuras (4-2) e (4-4), observa-se que não houve perda de precisão de ambos os métodos integrais, uma vez que estes conservaram as mesmas características do instante $t = 1s$. Assim, como no caso anterior, também se pode observar (Figura 4) que a solução do método da integral dupla cruza a solução do método da similaridade no ponto $x = 0,3m$, e neste mesmo ponto a Figura 5 mostra que a aproximação do fluxo térmico feita pelo método da integral dupla é a mais grosseira em todo o domínio considerado.

Figura 2 Distribuição de temperatura para o Perfil Quadrático em t=1 segundo

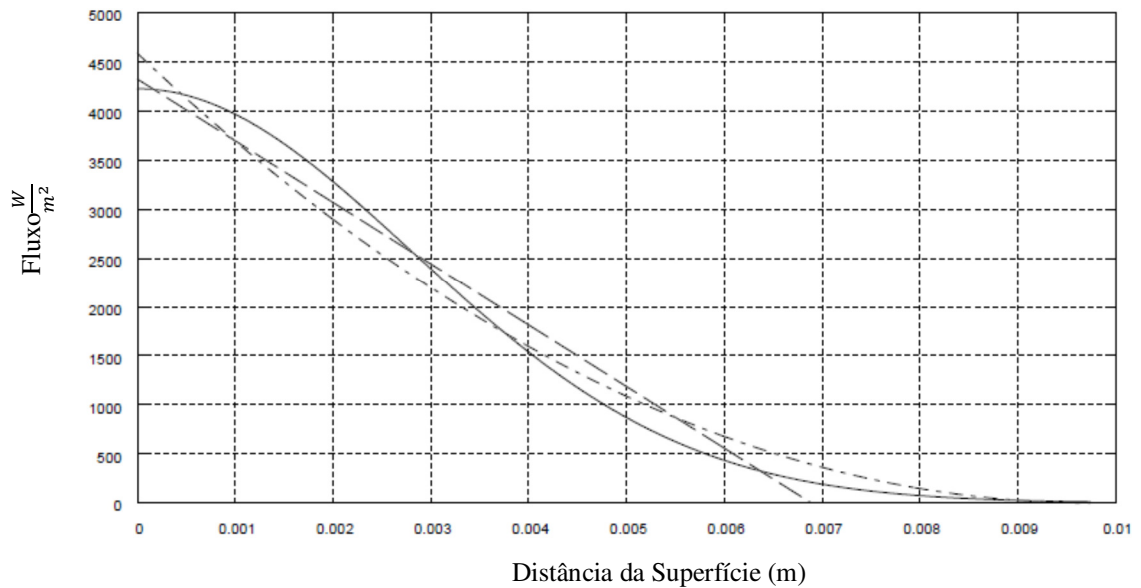


Linha Contínua: Solução de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959),

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Quadrática,

Linha Pontilhada: Método Integral Simples – Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

Figura 3 Fluxo ao longo da Superfície em t=1 segundo

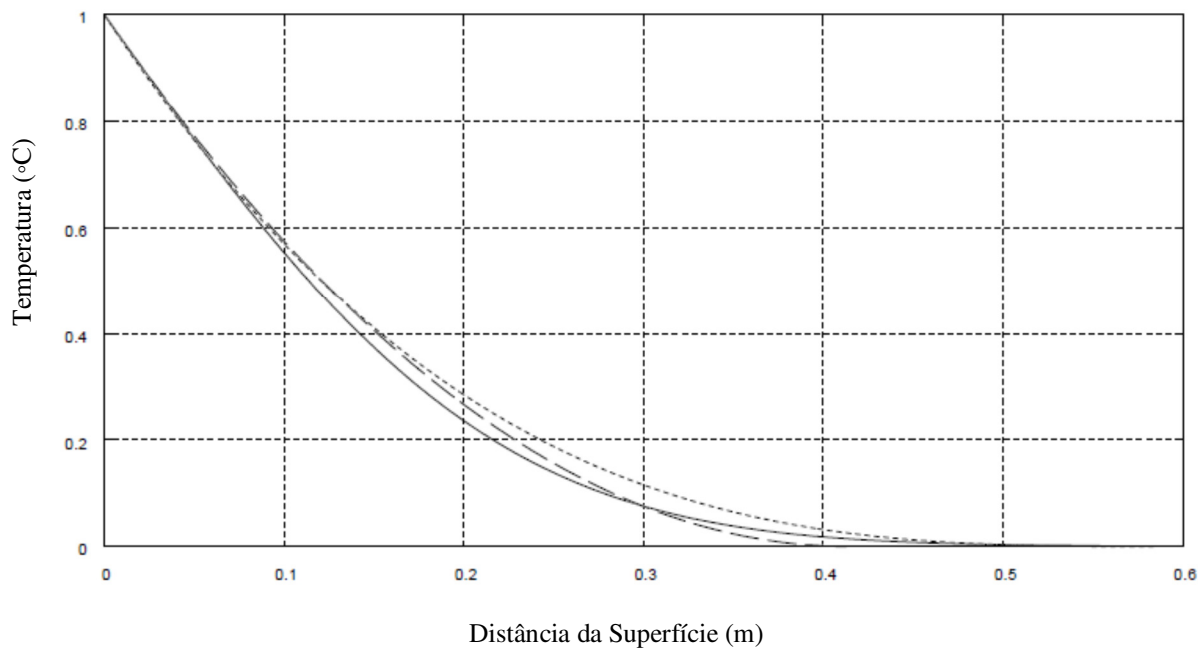


Linha Contínua: Solução de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Quadrático

Linha Pontilhada: Método Integral Simples – Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

Figura 4 Distribuição de Temperatura com Perfil Quadrático e Fronteira de Primeira Espécie $t=3600$

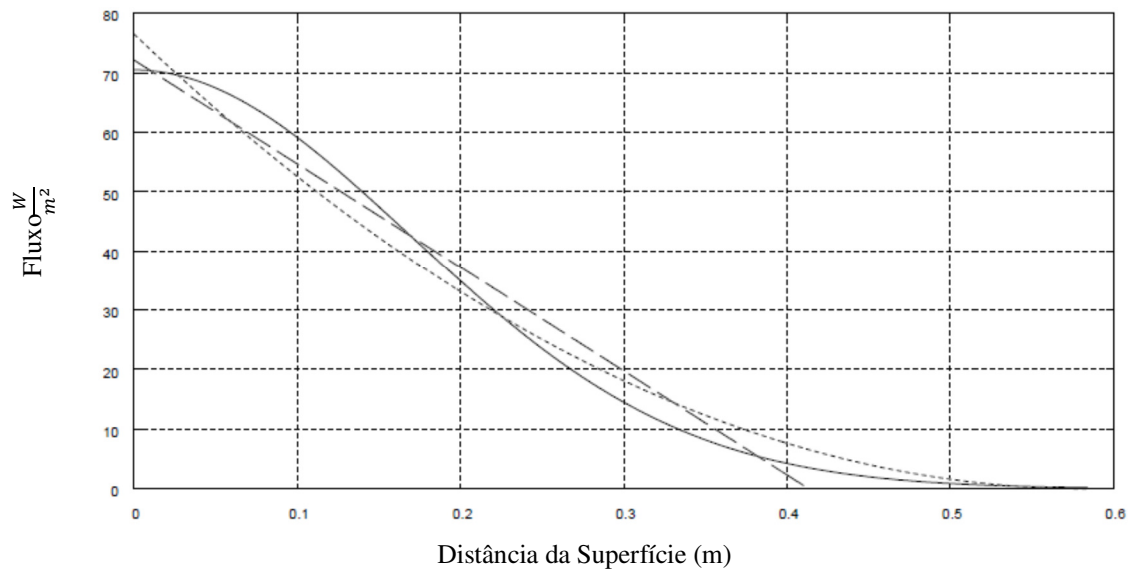


Linha Contínua: Solução de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Quadrático

Linha Pontilhada: Método Integral Simples – Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

Figura 5 Fluxo Térmico ao Longo da Placa no Instante 3600s



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw&Jaeger, 1959),

Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático,

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

a) Aplicação com Perfil Cúbico

Considerando novamente a equação da condução (4.1) e integrando esta equação duas vezes em relação a x , sendo os extremos de integração de 0 a x na primeira integração e de 0 a $\delta(t)$ na segunda, tem-se

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx, \quad (4.32)$$

Trabalhando separadamente com cada um dos termos dados na equação (4.32) e inicialmente com o lado esquerdo, vem:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx. \quad (4.33)$$

O cálculo da primeira integral do lado direito de (4.33) é feito com a substituição direta do perfil cúbico na derivada parcial e posterior integração:

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x} dx = \alpha T(\delta) - \alpha T(0) = -\alpha T_s. \quad (4.34)$$

Para o cálculo da segunda integral dada em (4.34) deve se fazer uso do método da integral simples, pois o termo $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$ é determinado implicitamente. Desse modo, aplicando-se o método da integral simples na equação (4.1) resulta

$$\alpha \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx \text{ e} \quad (4.35)$$

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) - \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx. \quad (4.36)$$

Desenvolvendo a última expressão, tem-se:

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{T_s}{4} \left(\frac{d\delta}{dt} \right). \quad (4.37)$$

Substituindo a expressão (4.37) no segundo termo de (4.33):

$$\int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{T_s}{4} \left(\frac{d\delta}{dt} \right) dx = \frac{T_s \delta(t)}{4} \left(\frac{d\delta}{dt} \right). \quad (4.38)$$

Voltando com (4.38) e (4.34) em (4.34) resulta em

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = -\alpha T_s + \frac{T_s \delta(t)}{4} \left(\frac{d\delta}{dt} \right). \quad (4.39)$$

Trabalhando com o termo do lado direito de (4.32) e efetuando a substituição do perfil cúbico (4.17) com o uso do Teorema de Leibniz tem-se.

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = \frac{3T_s \delta}{20} \frac{d\delta}{dt}. \quad (4.40)$$

Substituindo-se as expressões dadas em (4.39) e (4.40) em (4.32) resulta na seguinte equação diferencial ordinária dada a seguir:

$$10\alpha = \delta \frac{d\delta}{dt} \text{ com} \quad (4.41)$$

$$\delta(0) = 0, \quad (4.42)$$

cuja solução pode ser facilmente obtida:

$$\delta(t) = \sqrt{20\alpha t}. \quad (4.43)$$

Com a função $\delta(t)$ determinada, basta substituí-la no perfil assumido de distribuição de temperatura para sua completa determinação.

$$T(x, t) = T_s \left(1 - \frac{x}{\sqrt{20\alpha t}} \right)^3, \quad t > 0 \quad (4.44)$$

4.1.4 Resultados com Perfil Cúbico

O mesmo procedimento adotado para avaliação do perfil quadrático também será adotado ao perfil cúbico. Deste modo, calculando inicialmente o fluxo térmico na superfície com o uso da lei de Fourier, tem-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{3}{\sqrt{20} T_s k} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}. \quad (4.45)$$

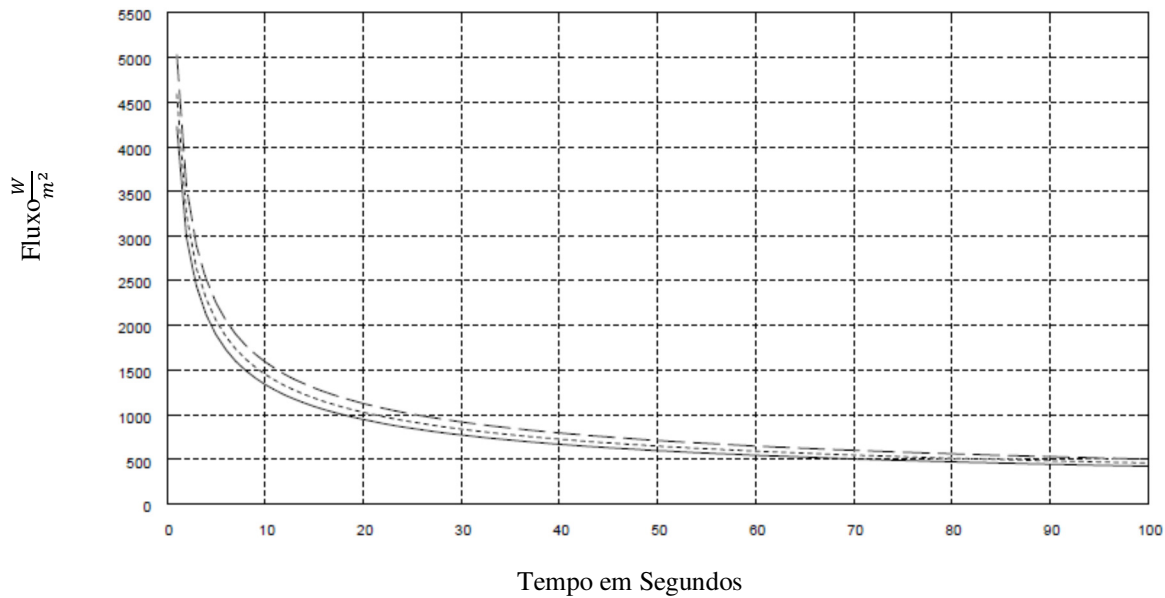
A Tabela 4.3 mostra as funções de distribuição de temperatura e o cálculo do fluxo térmico na superfície para o método da similaridade, integral simples e integral dupla. Como se observa, as aproximações do fluxo feitas pelos métodos integrais diferem do método da similaridade apenas por uma constante. Enquanto o método analítico exato fornece uma constante de $\sqrt{1/\pi} = 0,5642$, o método da integral dupla fornece $\frac{2}{\sqrt{12}} = 0,5773$, ao passo que o método da integral simples tem $\sqrt{3/8} = 0,6123$.

Tabela 4.3 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Cúbico

Método	Perfil de Temperatura $T(x, t)$	Fluxo Térmico em $x = 0$	Erro Relativo
Similaridade	$T_s \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right)$	$\frac{(\sqrt{1/\pi}) T_s k}{\sqrt{\alpha t}}$	0%
Integral Dupla	$T_s \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^3$	$\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{20}} \right) k T_s}{\sqrt{\alpha t}}$	18,8%
Integral Simples	$T_s \left(1 - \frac{x}{\sqrt{24\alpha t}} \right)^3$	$\frac{T_s k (\sqrt{3/8})}{\sqrt{\alpha t}}$	8,5%

A comparação dos resultados (Figura 4-6) deixa evidente que o método da integral dupla aproxima de modo grosseiro o fluxo na superfície.

Figura 4-6 Avaliação do Fluxo na Superfície com Perfil Cúbico



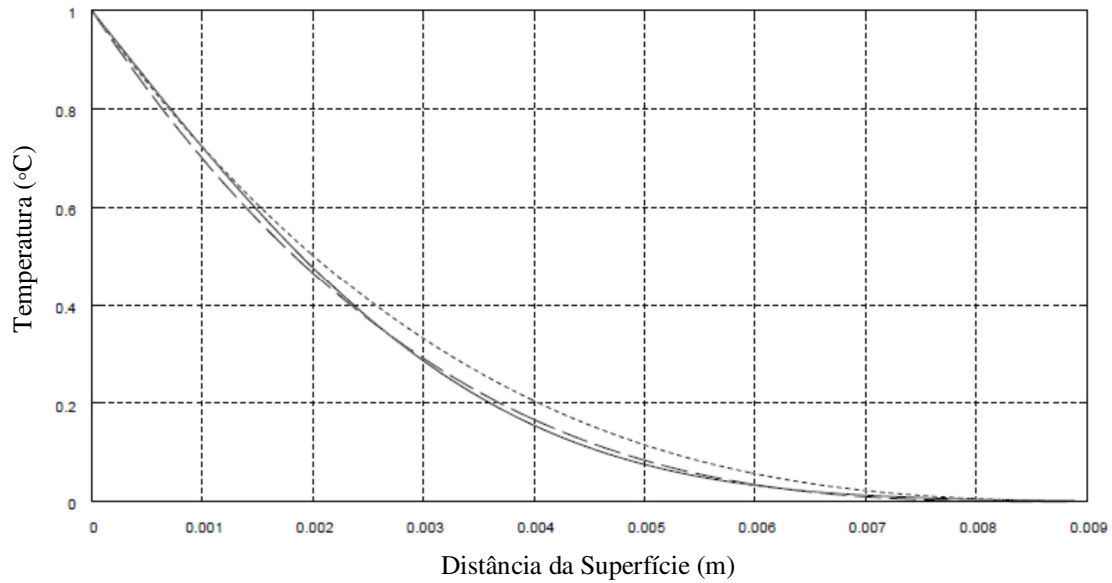
Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

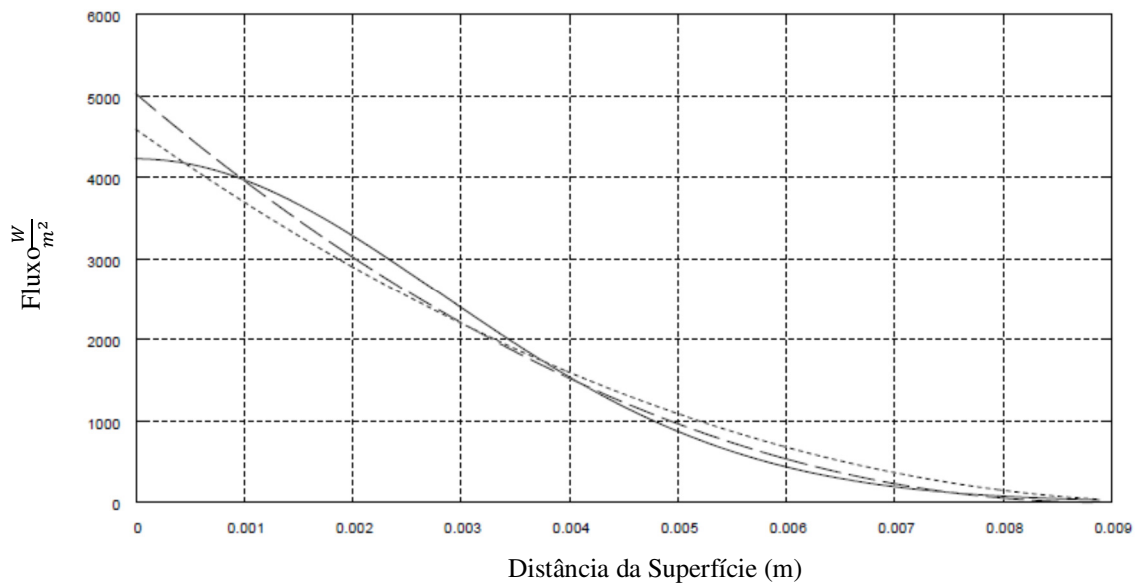
Nas Figuras (4-6) e (4-7) têm-se respectivamente a distribuição de temperatura e do fluxo térmico no instante de tempo igual a 1 segundo. Pode-se observar uma boa precisão do método da integral dupla tanto na aproximação da distribuição da temperatura quanto do fluxo térmico ao longo do corpo. Contudo, nos pontos $x \cong 0,0025$ e $x \cong 0,0065$ (Figura 6), a solução do método da integral dupla cruza a solução do método da similaridade, este comportamento se deve ao modo com que a aproximação do fluxo está sendo feita de maneira grosseira como mostrado na Figura 7, nos respectivos pontos.

Figura 6 Distribuição de Temperatura para o Instante de 1 segundo



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959),
 Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Cúbico,
 Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

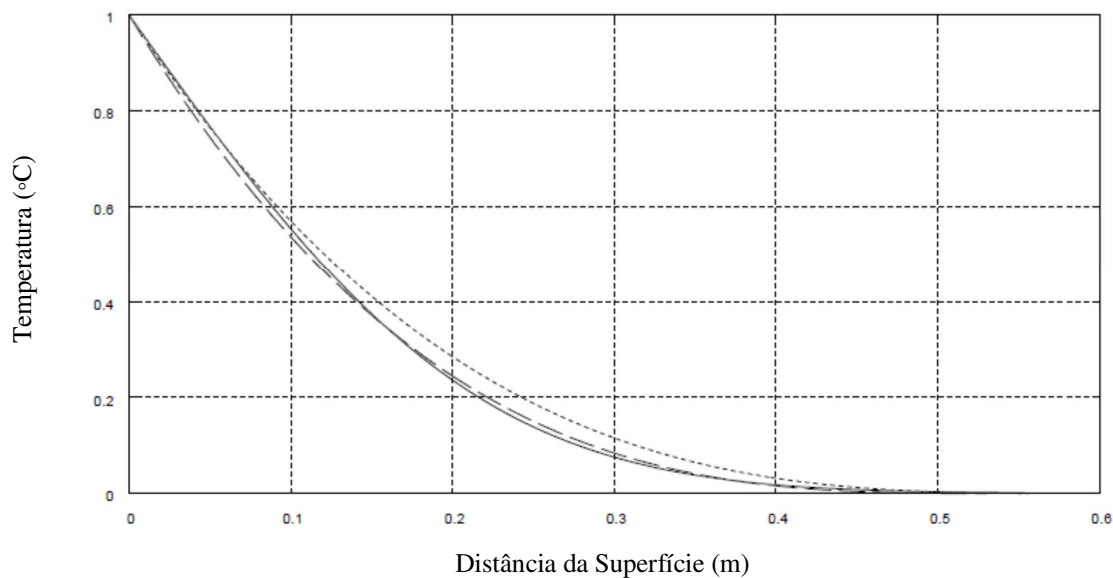
Figura 7 Fluxo Térmico ao Longo da Superfície para t=1 segundo



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).
 Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Cúbico
 Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

As Figuras (4-8) e (4-9) mostram a distribuição de temperatura e do fluxo térmico para o instante $t = 3600s$. Como pode ser observado, não houve perda de precisão de ambos os métodos integrais, uma vez que estes mantiveram as mesmas características do instante $t = 1s$. Assim como no caso anterior, também se observa (Figura 8) que a solução do método da integral dupla cruza a solução do método da similaridade em dois pontos $x \cong 0.16 m$ e $x \cong 0.35m$. Este comportamento se deve ao fato de que a aproximação do fluxo está sendo feita de modo grosseiro como observado na Figura 9, para os respectivos pontos.

Figura 8 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira de Primeira Espécie em 3600s

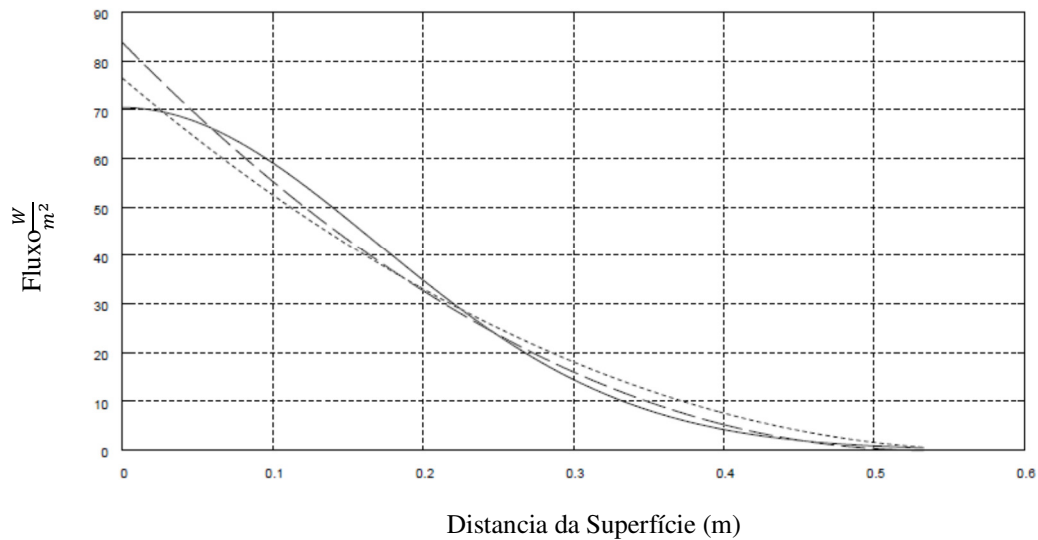


Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw&Jaeger, 1959),

Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Cúbico,

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

Figura 9 Fluxo ao Longo da Superfície no Instante 3600



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).

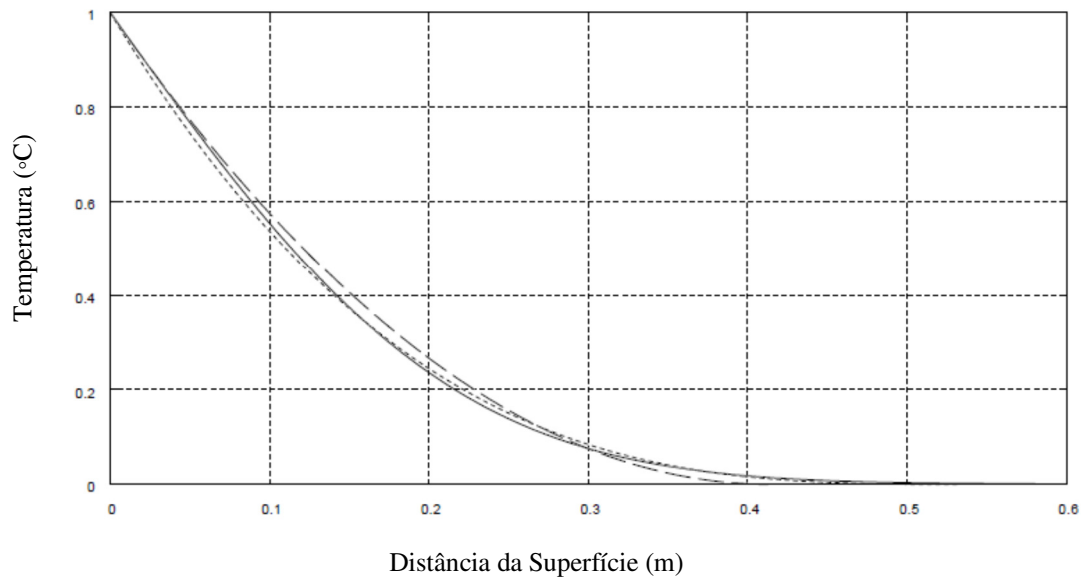
Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

4.1.5 Solução Numérica

Nesta seção as soluções apresentadas pelo método da integral dupla com perfil quadrático e cúbico serão comparadas, com a solução numérica obtida com o método dos volumes de controle (Apêndice A). Nas Figuras (4-10) e (4-11) têm-se respectivamente a distribuição de temperatura e do fluxo térmico ao longo do corpo para instante de tempo $t = 3600s$. Como mostra a Figura 10, há uma boa concordância entre o método da integral dupla e o método numérico na determinação perfil de temperatura. Assim como na comparação com a solução analítica, o método da integral dupla também cruza a solução numérica, sendo uma vez com o perfil quadrático e duas vezes com o perfil cúbico. Este comportamento se deve à aproximação grosseira realizada pelo método da integral dupla, na aproximação do fluxo nos respectivos pontos.

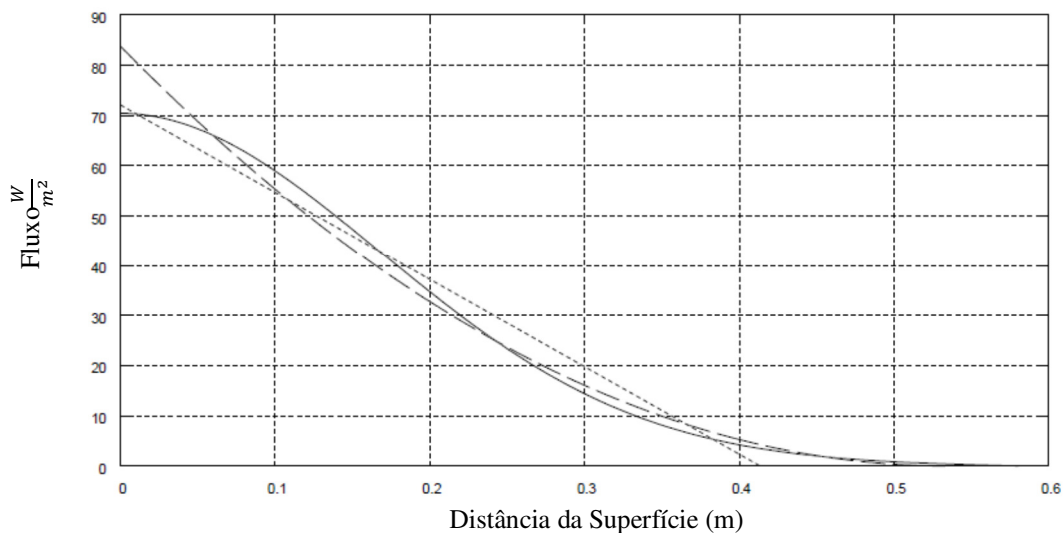
Figura 10 Solução Numérica (Distribuição de Temperatura em $t=3600s$)



Linha Contínua: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle),
 Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático,
 Linha Pontilhada: Método Integral Dupla- Perfil Cúbico .

A Figura 11 mostra a distribuição do fluxo térmico ao longo do corpo, para cada um dos métodos anteriores. Como se observa, há melhoras significativas na aproximação do fluxo térmico ao se utilizar uma aproximação cúbica em vez de uma aproximação quadrática, melhorias estas que refletem diretamente na distribuição de temperatura, como mostrado na Figura 10.

Figura 11 Fluxo Numérico ao Longo da Placa em $t = 3600s$



Linha Contínua: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle)
 Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático
 Linha Pontilhada: Método Integral Dupla- Perfil Cúbico

4.2 Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Segunda Espécie

Consideremos inicialmente uma placa semi-infinita que se estende ao longo do eixo $x > 0$ com distribuição de temperatura inicialmente de zero Celsius e que em seu contorno se tenha um fluxo térmico especificado dado por $f(t)$. Com estas condições o sistema físico está bem determinado e o modelo matemático é dado por

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (4.46)$$

As condições de contorno naturais do problema são:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -f(t), \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) = 0 \quad \text{e} \quad (4.48)$$

$$T(\delta, t) = 0. \quad (4.49)$$

A quarta condição de contorno, também conhecida por condição de contorno de suavização, é igual a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\delta, t) = 0. \quad (4.50)$$

4.2.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico

A obtenção dos perfis polinomial quadrático e cúbico é feita considerando cada um deles em sua forma canônica seguida pela aplicação condições de contorno; o número de condições a serem impostas é dado por $n + 1$ em que n é o grau do polinômio. Para o perfil quadrático as

condições utilizadas são (4. 47), (4. 48), (4. 49), já para o perfil cúbico são as mesmas condições anteriores mais a condição adicional (4. 50)

Perfil Quadrático

Um perfil polinomial quadrático assume a forma de:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (4. 51)$$

Impondo as condições de contorno anteriormente mencionadas têm-se:

$$\beta_0 = -\frac{f(t)}{\delta k} \delta - \frac{f(t)}{\delta k} \delta^2, \quad (4.52)$$

$$\beta_1 = \frac{f(t)}{2\delta k} \text{ e} \quad (4.53)$$

$$\beta_2 = -\frac{f(t)}{4\delta^2 k}. \quad (4.54)$$

Com algumas manipulações algébricas pode-se mostrar que o perfil quadrático assume a forma dada por.

$$T(x, t) = \frac{f}{2k\delta} (\delta - x)^2. \quad (4.55)$$

Perfil Cúbico

A obtenção do perfil cúbico será análoga à do perfil anterior. Deste modo, inicialmente considerando sua forma canônica,

$$T(x, t) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3. \quad (4.56)$$

Aplicando as condições de contornos (4. 47), (4. 48), (4.49) e (4.50), tem-se:

$$\beta_0 = \frac{f(t)}{3\delta^2 k} \delta^3, \quad (4.57)$$

$$\beta_1 = -\frac{f(t)}{k}, \quad (4.58)$$

$$\beta_2 = 3 \left(\frac{f(t)}{3\delta^2 k} \right) \delta \text{ e} \quad (4.59)$$

$$\beta_3 = -\frac{f(t)}{3\delta^2 k}. \quad (4.60)$$

Com algumas manipulações algébricas o perfil cúbico (4.56) pode ser expresso por:

$$T(x, t) = \frac{f(t)}{3\delta^2 k} (\delta - x)^3. \quad (4.61)$$

4.2.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico

Após o problema da placa semi-infinita com condição de contorno de segunda espécie ter sido definido em (4.2) e a determinação de ambos os perfis quadrático e cúbico ter sido feita na seção (4.2.1), nesta parte o método da integral dupla será aplicado fazendo uso de cada um deles. Inicialmente se fará a aplicação com o uso do perfil quadrático, assim como a avaliação de seu desempenho e, utilizando-se da mesma metodologia, será feita a aplicação com perfil cúbico.

a) Aplicação com Perfil Quadrático

Considerando inicialmente a equação da condução (4.1) e integrando esta duas vezes em relação a x , sendo os extremos de integração 0 e x na primeira integral e 0 e $\delta(t)$ na segunda integração;

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx. \quad (4.62)$$

Calculando separadamente cada um dos termos da equação (4.62) e trabalhando inicialmente com o lado esquerdo de (4.62),

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx - \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx. \quad (4.63)$$

Diferentemente do que foi feito para o caso da condição de contorno de primeira espécie, o fluxo na parede nesse problema não será aproximado com o uso do método da integral simples uma vez que este é definido pela condição de contorno. Deste modo, o cálculo das integrais será feito com a substituição direta do perfil quadrático de temperatura dado em (4.55).

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \alpha [T(\delta) - T(0)] = -\frac{\alpha f \delta}{2k}, \quad (4.64)$$

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = -\frac{\alpha f \delta}{k}. \quad (4.65)$$

Substituindo os dois últimos termos em (4.63) resulta em

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \frac{\alpha f \delta}{2k}. \quad (4.66)$$

Calculando o lado direito da expressão (4.62),

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = \left(\frac{5}{24k} \right) \frac{f \delta^2 d\delta(t)}{dt}. \quad (4.67)$$

A substituição dos termos (4.66) e (4.67) em (4.62) resulta na seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{\alpha f \delta}{2k} = \left(\frac{5}{24k} \right) \frac{f \delta^2 d\delta(t)}{dt} \text{ com} \quad (4.68)$$

$$\delta(0) = 0. \quad (4.69)$$

A resolução da equação diferencial anterior fornece como solução:

$$\delta(t) = \sqrt{4,8\alpha t}. \quad (4.70)$$

Voltando com (4.70) em (4. 51), determina-se completamente o perfil de distribuição de temperatura:

$$T(x, t) = \frac{f}{2k\sqrt{4,8\alpha t}} (\sqrt{4,8\alpha t} - x)^2. \quad (4.71)$$

4.2.3 Resultados com Perfil Quadrático

A avaliação do método da integral dupla com perfil quadrático será feita considerando o metal de teste (Tabela 4.1) e inicialmente se avaliará a temperatura na superfície; para tanto basta fazer $x = 0$ na expressão (4.71).

$$T(0, t) = \sqrt{1,2} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t}}{k}. \quad (4.72)$$

A Tabela 4.4 mostra a função distribuição de temperatura e a expressão para o cálculo da temperatura na superfície para os métodos de similaridade, integral simples e integral dupla. Ao se comparar as expressões para cálculo da temperatura na superfície, observa-se que elas são iguais exceto pela constante numérica. Enquanto no método da similaridade a constante é de $\sqrt{4/\pi} = 1,13$, para o método da integral dupla o valor é $\sqrt{1,2} = 1,09$, ou seja, um erro de

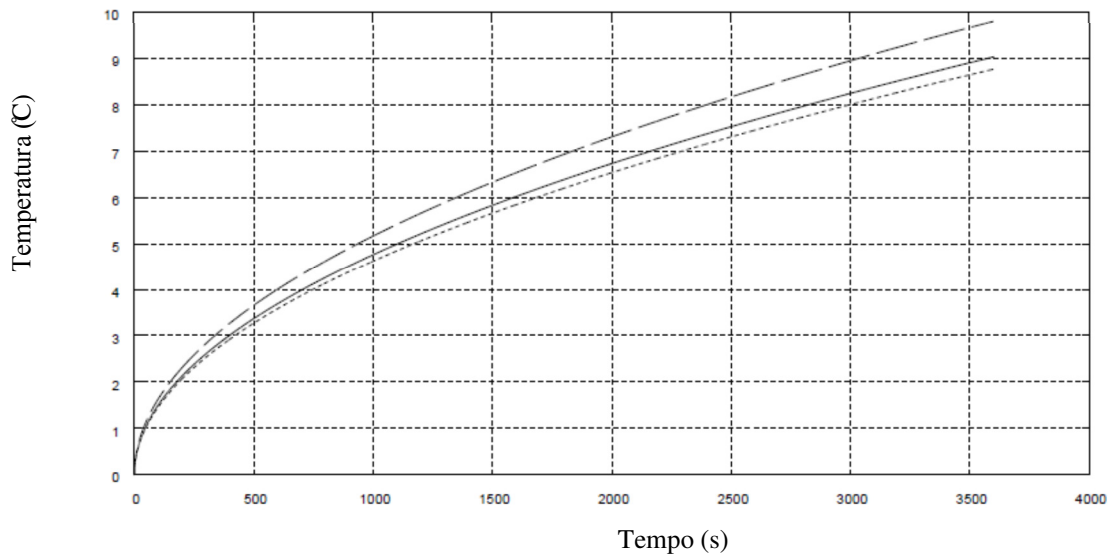
3,53%, ao passo que, para o método da integral simples, a constante é de $\sqrt{1,5} = 1,22$ e o erro se amplia para 9,0% em relação à solução analítica exata.

Tabela 4.4 Avaliação da Temperatura na Superfície com Perfil Quadrático

Método	Perfil de Temperatura $T(x, t)$	$T(0, t)$	Erro Relativo
Similaridade	$\frac{2f}{k} \left\{ \sqrt{\left(\frac{kt}{\pi}\right)} e^{-\frac{x^2}{4at}} - \frac{x}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right) \right\}$	$\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}} (\sqrt{\alpha} F \sqrt{k})}{k}$	0%
Integral Dupla	$\frac{f}{2k\delta} (\delta - x)^2$	$\sqrt{1,2} \frac{\sqrt{\alpha} F \sqrt{t}}{k}$	3,53%
Integral Simples	$\frac{f}{2k\sqrt{6\alpha t}} (\sqrt{6\alpha t} - x)^2$	$\sqrt{1,5} \frac{\sqrt{\alpha} F \sqrt{t}}{k}$	9,0%

A Figura 12 mostra o comportamento da temperatura na superfície ao longo dos 3600 segundos iniciais para cada um dos métodos anteriores. A figura abaixo reflete o comportamento da Tabela 4.4.

Figura 12 Variação da Temperatura na Superfície com Perfil Quadrático e Fronteira de Segunda Espécie

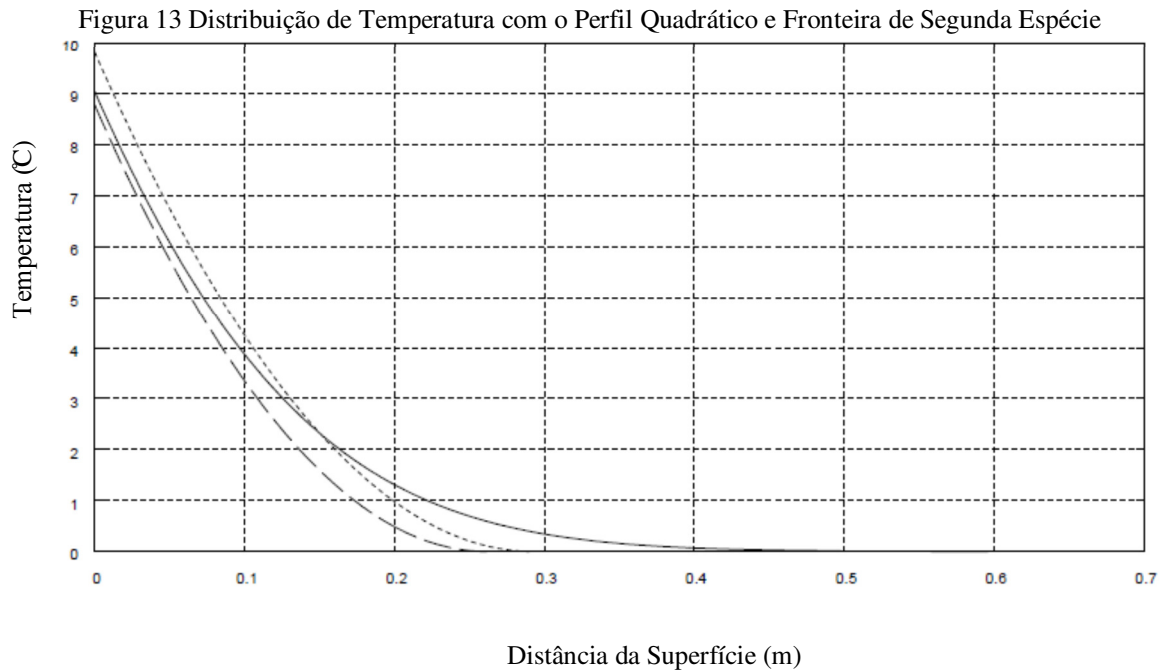


Linha Contínua: Solução Analítica (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Simples - Perfil Quadrático (Goodman, 1964).

Linha Pontilhada: Método Integral Dupla – Perfil Quadrático

Na Figura 13 tem-se a distribuição de temperatura para o instante de tempo $t = 3600s$. Observa-se que ambos os métodos integrais aproximam de forma grosseira o perfil de temperatura. No entanto, até a distância de $0,1m$, há maior precisão do método da integral dupla em relação ao método da integral simples. Esta maior proximidade com a solução analítica está ligada à maior precisão do método para cálculo do fluxo térmico até esta distância (Figura 14). Contudo, para distâncias maiores do que $0,1m$, a Figura 13 mostra que a solução do método da integral dupla começa se deteriorar ao passo que a aproximação feita pelo método da integral simples passa a melhorar. Este comportamento dos métodos integrais está estritamente ligado à deterioração ou melhora que cada um destes sofre ao realizar a aproximação para o fluxo térmico ao longo do corpo com mostrado na Figura 14.

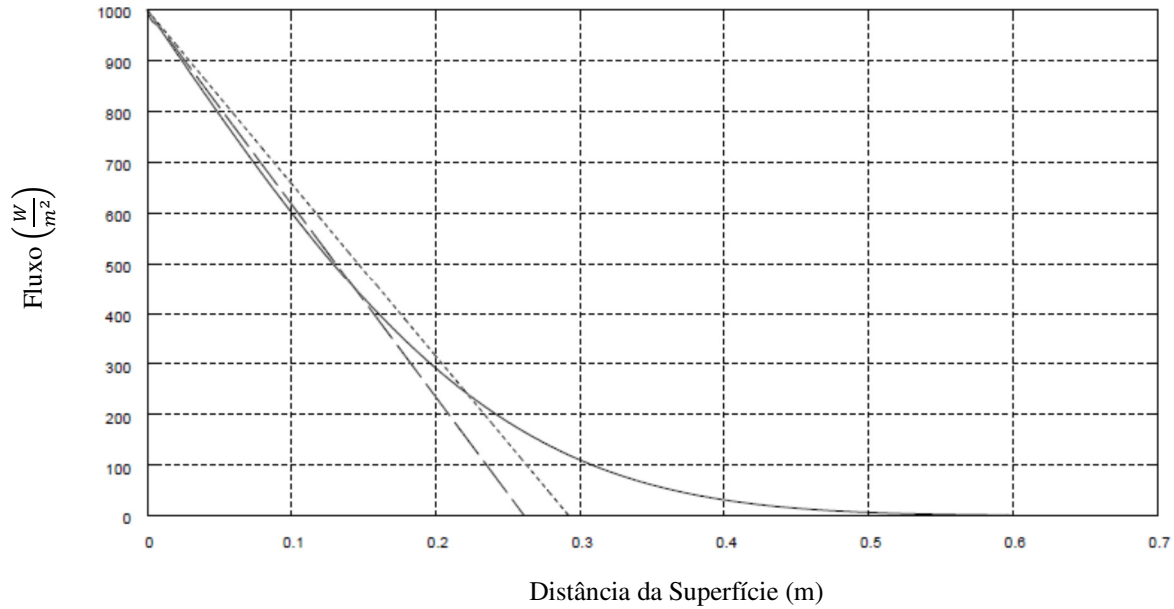


Linha Contínua: Solução Analítica (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Quadrático

Linha Pontilhada: Método Integral Simples – Perfil Quadrático (Goodman, 1964).

Figura 14 Fluxo ao Logo da Placa com Condição de Segunda Espécie em $t = 3600s$



Linha Contínua: Método de Similaridade (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Quadrático (Goodman, 1964).

b) Aplicação com Perfil Cúbico

Considerando novamente a equação da condução do calor (4.1) assim como o perfil cúbico de temperatura (4.61), integrando a equação da condução duas vezes em relação a x sendo que a primeira integração no intervalo de 0 a x e a segunda integral no intervalo de 0 a $\delta(t)$ resulta

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx. \quad (4.73)$$

Calculando separadamente cada um dos termos de (4.73), e trabalhando inicialmente com o lado esquerdo desta tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx - \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx. \quad (4.74)$$

Desenvolvendo cada um dos termos de (4.74)

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \alpha [T(\delta(t)) - T(0)] = -\frac{\alpha f \delta(t)}{3k} e \quad (4.75)$$

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = \frac{\alpha f \delta(t)}{k}. \quad (4.76)$$

Substituindo (4.75) e (4.76) em (4.74)

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \frac{2\alpha f \delta(t)}{3k}. \quad (4.77)$$

Trabalhando com o termo transitório da equação (4.73),

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = \frac{7f\delta^2(t)}{60k} \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.78)$$

Substituindo as expressões (4.77) e (4.78) em (4.73) e efetuando as operações necessárias resulta em:

$$\frac{7}{40} \delta^2(t) \frac{d\delta(t)}{dt} = \alpha \delta(t) e \quad (4.79)$$

$$\delta(0) = 0. \quad (4.80)$$

A resolução da equação diferencial anterior fornece como solução

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{80}{7} \alpha t}. \quad (4.81)$$

A substituição de (4.81) em (4.61) leva à completa determinação deste.

$$T(x, t) = \frac{f(t)}{3(\sqrt{11.428\alpha t})^2 k} (\sqrt{11.428\alpha t} - x)^3. \quad (4.82)$$

4.2.4 Resultados com Perfil Cúbico

A avaliação do perfil cúbico será feita de modo análogo a do perfil quadrático, sendo assim considerando o metal de teste (Tabela 4.1), e calculando inicialmente a temperatura na superfície; para tanto basta fazer $x = 0$ em (4.82):

$$T(0, t) = \sqrt{1,26} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t}}{k}. \quad (4.83)$$

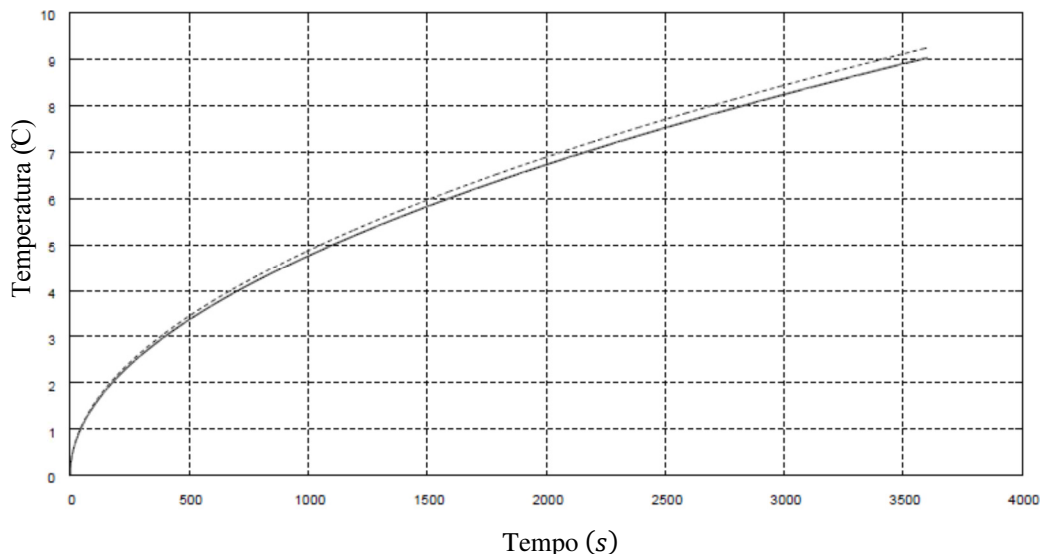
A Tabela 4.5 mostra a distribuição de temperatura e a expressão para o cálculo da temperatura na superfície em função do tempo, para os métodos da similaridade, integral dupla e integral simples. Como podem ser observadas, as expressões dos métodos integrais para o cálculo da temperatura na superfície diferem do método da similaridade apenas por uma constante numérica. Enquanto a constante no método da similaridade o valor é $\sqrt{4/\pi} = 1,13$, para o método da integral dupla o valor é $\sqrt{1,26} = 1,12$, ao passo que no método da integral simples, a constante assume o valor de $\sqrt{4/3} = 1,15$.

Tabela 4.5 Avaliação da Temperatura na Superfície com Perfil Cúbico

Método	Perfil de Temperatura $T(x, t)$	$T(0, t)$	Erro Relativo
Similaridade	$\frac{2f}{k} \left\{ \sqrt{\left(\frac{kt}{\pi}\right)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} - \frac{x}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right) \right\}$	$\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}} (\sqrt{\alpha} f \sqrt{k})}{k}$	0%
Integral Dupla	$\frac{f}{3k\delta^2} (\delta - x)^3$	$\sqrt{1,26} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t}}{k}$	0,66%
Integral Simples	$\frac{f}{3k\delta^2} (\delta - x)^3$	$\sqrt{4/3} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t}}{k}$	2,18%

A Figura 15 mostra o comportamento da temperatura na superfície ao longo dos 3600 segundos iniciais para cada um dos métodos anteriores. Como esperado, a figura abaixo reflete o comportamento da Tabela 4.5 para o cálculo da temperatura na superfície.

Figura 15 Variação da Temperatura na Superfície com Perfil Cúbico e Fronteira de Segunda Espécie



Linha Contínua: Solução Analítica –(Carslaw & Jaeger, 1959).

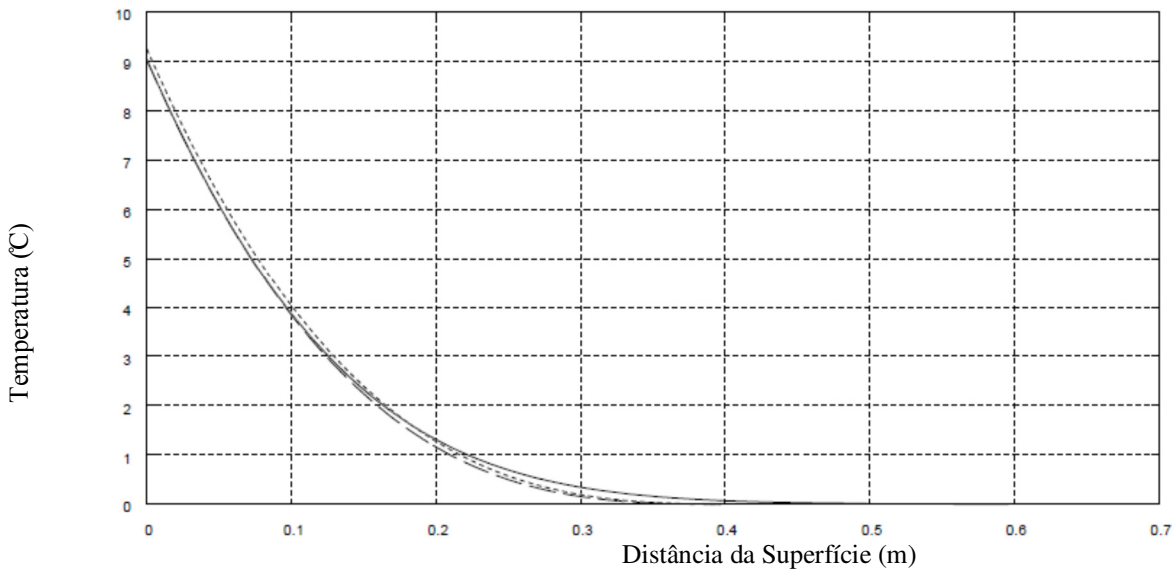
Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Simples – Perfil Cúbico –(Goodman, 1964).

Na Figura 16 tem-se a distribuição de temperatura para cada um dos métodos anteriores para o instante de tempo $t = 3600s$. Como se observa, é praticamente indistinguível a solução do método da similaridade e da integral dupla até a distância de $x = 0,1m$. Contudo, para distâncias maiores do que esta, o método da integral simples passa a se aproximar da solução analítica exata ao passo que o da integral dupla se afasta desta. E para distâncias maiores do que $0,24m$ observa-se um mesmo grau de precisão para ambos os métodos integrais. O comportamento das curvas de distribuição de temperatura dos métodos integral simples e da integral dupla está estritamente ligado à aproximação que cada um deles realiza para o fluxo térmico ao longo do corpo. Como mostra a Figura 17, o método da integral simples tem melhor precisão que método da integral dupla, na aproximação do fluxo ao longo do corpo. Deste modo, apesar do método da integral

simples aproximar de forma grosseira a temperatura na superfície, este erro acaba sendo atenuado pela correção que o fluxo realiza ao longo do domínio.

Figura 16 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira de Segunda Espécie $t=3600s$

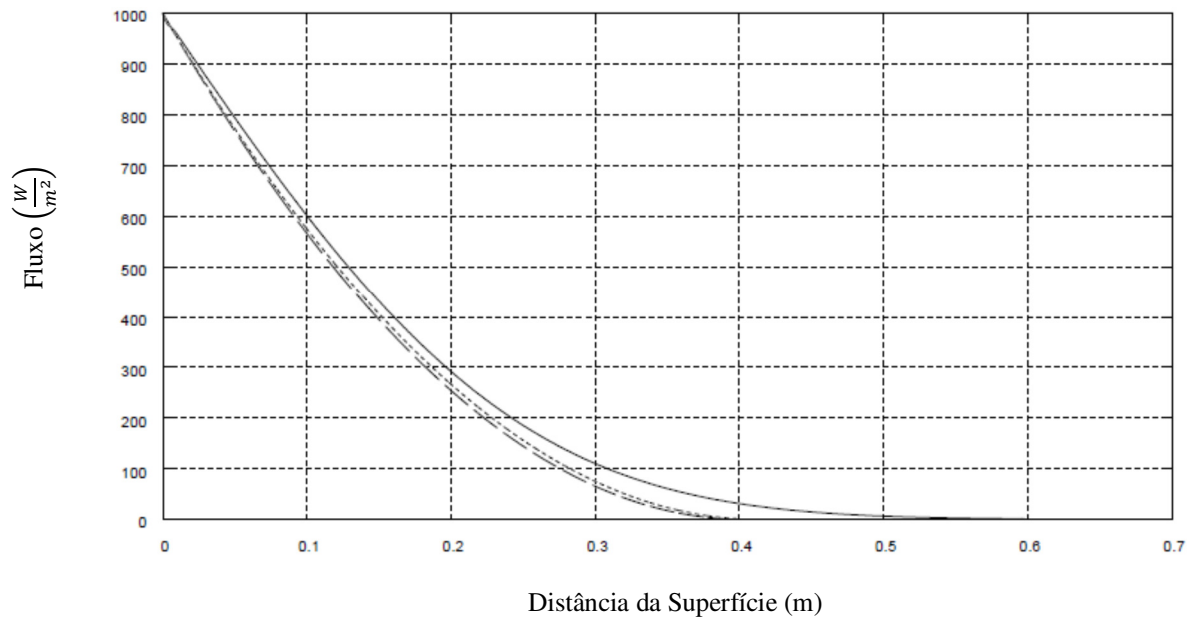


Linha Preenchida: Solução Analítica (Carslaw & Jaeger, 1959).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

Figura 17 Fluxo ao Longo da Placa com condição de Segunda Espécie em $t=3600s$



Linha Preenchida: Solução Analítica (Carslaw & Jaeger, 1959).

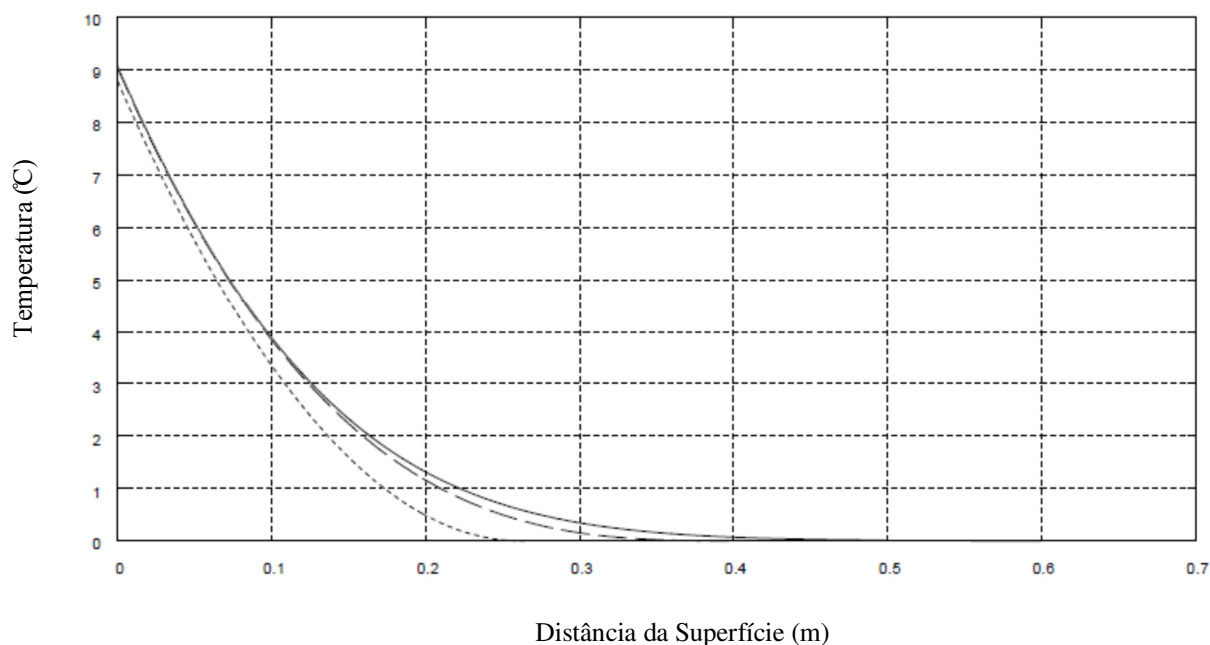
Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Simples - Perfil Cúbico (Goodman, 1964).

4.2.5 Solução Numérica

Nesta seção, as soluções apresentadas pelo método da integral dupla com perfil quadrático e cúbico serão comparadas com a solução numérica obtida através do método de volumes de controle (Apêndice A). Nas Figuras (4-18) e (4-19), têm-se respectivamente o perfil de temperatura e do fluxo térmico ao longo do corpo para o instante de tempo $t = 3600s$. Como se observa na Figura 18, a aproximação feita pelo perfil quadrático se mostra grosseira quando comparada com a solução numérica. No entanto, tem-se um ganho significativo de precisão ao se utilizar a aproximação cúbica para a distribuição de temperatura. Este ganho de precisão está estritamente ligado a melhorias na aproximação do fluxo térmico, como mostra a Figura 19. Onde a aproximação do fluxo térmico deixa feita por uma reta (perfil quadrático) e passa a ser aproximado por um perfil parabólico (caso cúbico).

Figura 18 Solução Numérica e Condição de Contorno de Segunda Espécie $t = 3600s$

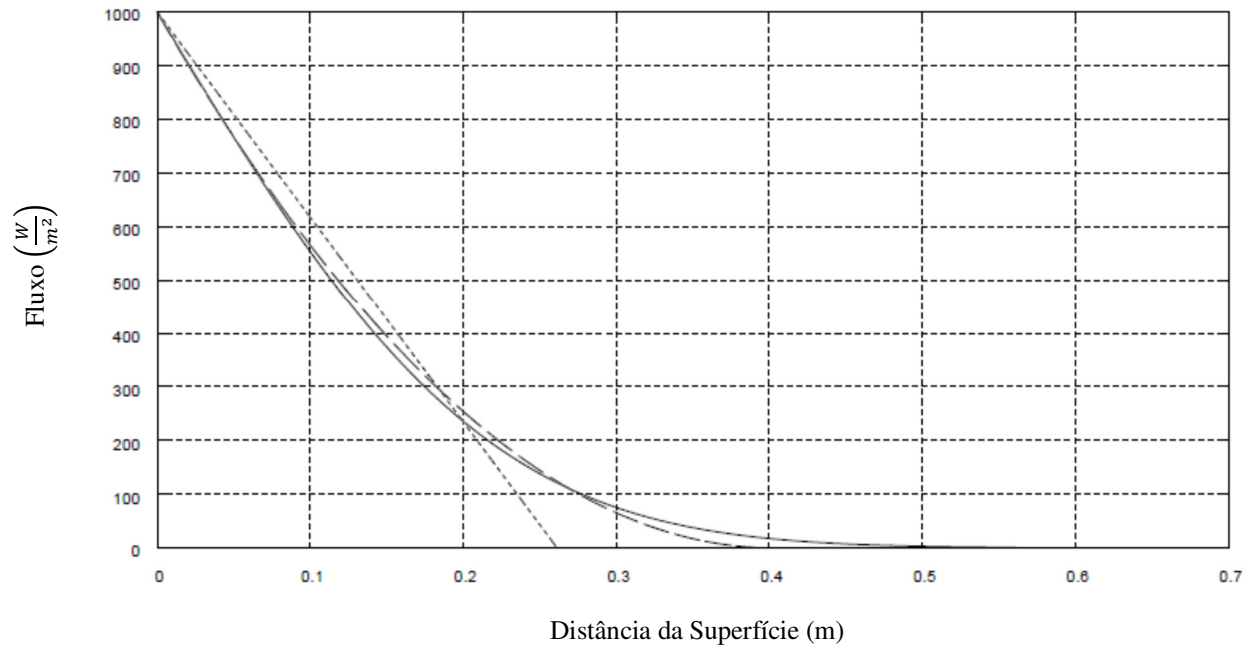


Linha Preenchida: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático

Figura 19 Distribuição do Fluxo Térmico para Condição de Segunda Espécie em $t=3600s$



Linha Preenchida: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle).

Linha Tracejada: Método Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Pontilhada: Método Integral Dupla - Perfil Quadrático

4.3 Parede de Espessura Finita e Condição de Contorno de Segunda Espécie

Nesta parte do capítulo será resolvido o problema da placa de comprimento finito que inicialmente se encontra a zero grau Celsius e está sujeita a condições de contorno de segunda espécie não homogênea em $x = 0$ e condição de contorno de primeira espécie homogênea em $x = l$. Goodman (1964) observa que em um primeiro estágio, o efeito da condição de contorno em $x = 0$ não é sentido pela outra extremidade e assim o sólido se comporta como um corpo semi-infinito. Este estágio se encerra quando a função distância de penetração $\delta(t)$ assume o valor l equivalente ao comprimento total da placa. Nesse instante, o sólido passa a se comportar como corpo espessura finita.

Neste segundo estágio, as equações que modelam o problema são equação de condução do calor (4.1) com as respectivas condições de contorno:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{f(t)}{k}, \quad (4.84)$$

$$T(l, t) = 0 \text{ e} \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(l, t) = 0. \quad (4.86)$$

4.3.1 Obtenção do Perfil Cúbico de Temperatura.

Diferentemente dos estudos anteriores, este caso será resolvido apenas com o perfil cúbico recomendado por Goodman (1964). Segundo o referido autor, nesse segundo estágio, o conceito de distância de penetração não faz mais sentido e, conseqüentemente, apenas três condições de contorno são requeridas para especificar os coeficientes do perfil. Duas destas são as condições naturais (4.84) e (4.83) e a terceira é dada pela condição de suavização (4.86). De posse das condições de contorno do problema, o perfil cúbico sugerido Goodman (1964) que satisfaz estas condições é dado abaixo.

$$T(x, t) = \left(\frac{3}{2} \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \frac{f}{k}\right) (l - x) + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{f}{k} - \frac{z}{l}\right) (l - x)^3 \quad (4.87)$$

O termo l é a espessura total da placa, f o fluxo térmico considerado constante, k a condutividade térmica e, $z(t)$ é uma notação compacta para a temperatura na superfície em $x = 0$ ao longo do tempo, ou seja, $z(t) = T(0, t)$.

4.3.2 Aplicando o Método da Integral Dupla com Perfil Cúbico

Considerando inicialmente a equação diferencial da condução do calor, e integrando esta duas vezes, sendo a primeira integração realizada dentro do domínio e a segunda integração envolvendo o contorno, tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial x} dx dx. \quad (4.88)$$

Trabalhando separadamente com cada um dos termos da equação anterior, e inicialmente com o lado esquerdo,

$$\int_0^l \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \int_0^l \alpha \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \frac{f(z, t)}{k} \right] dx = -\alpha z + \alpha \left(\frac{f(z, t)}{k} \right) l. \quad (4.89)$$

Com o desenvolvimento do lado direito da equação (4.89),

$$\int_0^l \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = \frac{4l^2}{10} \frac{dz}{dt}. \quad (4.90)$$

Voltando com (4.89) e (4.90) em (4.88) e reorganizando os termos obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{5\alpha}{2l^2} z = \frac{5\alpha}{2l} \frac{f(t)}{k} \quad (4.91)$$

A condição inicial da equação diferencial anterior é estabelecida com o encerramento do primeiro estágio, quando o corpo ainda se comporta como um sólido semi-infinito. De modo, genérico será assumido que o instante de tempo em que primeiro estágio se encerra é igual a $t = t_0$ e a temperatura na superfície é dada por $z(t_0)$. Mais à frente será mostrado como calcular cada um desses termos. A priori basta saber que essa é a condição inicial do problema em questão.

A resolução da equação diferencial (4.91) envolve o cálculo do fator de integração, o que é feito a seguir,

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{5\alpha}{2l^2} dt} = e^{-\frac{5\alpha}{2l^2} t}. \quad (4.92)$$

Multiplicando a equação (4.91) pelo fator de integração e realizando as operações necessárias, determina-se a função de temperatura na superfície.

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt_1} \left[e^{-\frac{5\alpha}{2l^2} t_1} z \right] dt_1 = \frac{5\alpha}{2l} \int_{t_0}^t e^{-\frac{5\alpha}{2l^2} t_1} \left(\frac{f(t_1)}{k} \right) dt_1, \quad t \geq t_0 \quad (4.93)$$

$$z(t) = z(t_0) e^{\frac{5\alpha}{2l^2} t_0} e^{-\frac{5\alpha}{2l^2} t} + \frac{f(t)}{k} l \left[1 - e^{\frac{5\alpha}{2l^2} t_0} e^{-\frac{5\alpha}{2l^2} t} \right], \quad t \geq t_0. \quad (4.94)$$

De posse da função de temperatura, as constantes $z(t_0)$ e t_0 devem ser determinadas. Inicialmente será determinada a constante $z(t_0)$. Para tanto, deve-se considerar novamente o perfil cúbico de distribuição de temperatura obtido para um corpo semi-infinito (equação 4.61) e então multiplicar este por $z(t_0) / z(t_0)$ obtendo assim.

$$T(x, t) = \frac{z(t_0)}{z(t_0)} \frac{f(t)}{3\delta^2 k} (\delta - x)^3. \quad (4.95)$$

Goodman (1964) define a seguinte relação para a distância de penetração,

$$\delta(t) = \frac{3z(t)}{\frac{f(t)}{k}}. \quad (4.96)$$

De posse da relação (4.96), pode-se reescrever a distribuição de temperatura (4.95) em função desta:

$$T(x, t) = z(t_0) \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^3. \quad (4.97)$$

A função apresentada em (4.97) é empregada em formulações mais genéricas, como no caso de um corpo semi-infinito com condição de contorno de terceira espécie. Neste momento, apenas nos interessa a relação (4.96), que é avaliada no instante de tempo $t = t_0$, instante este em que o sólido deixa de se comportar como um corpo semi-infinito e, portanto $\delta(t_0) = l$. Substituindo $\delta(t_0)$ na equação (4.96) resulta em

$$l = \frac{3z(t_0)}{\frac{f(t_0)}{k}}. \quad (4.98)$$

Isolando $z(t_0)$ em (4.98), tem-se:

$$z(t_0) = \frac{lf(t_0)}{3k}. \quad (4.99)$$

Após a determinação de $z(t_0)$, pode-se calcular o instante t_0 com o auxílio da Tabela 4.5 onde constam os perfis de temperatura na superfície. Utilizando a aproximação cúbica obtida com o método da integral dupla, tem-se:

$$z(t_0) = \frac{lf(t_0)}{3k} = \sqrt{1,26} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t_0}}{k}. \quad (4.100)$$

Isolando t_0 em (4.100), resulta:

$$t_0 = \frac{l^2}{11,421\alpha}. \quad (4.101)$$

Substituindo (4.101) em (4.94) e reordenado os termos:

$$z(t) = \left(\frac{f(z)}{k} \right) l \left[1 - 0,828e^{-\frac{5\alpha}{2l^2}t} \right]. \quad (4.102)$$

Poderia ser utilizado o perfil cúbico de temperatura obtido com o método da integral simples para a determinação do instante de tempo t_0 caracterizando assim um método híbrido. Realizando as operações necessárias tem-se.

$$z(t_0) = \frac{lf(t_0)}{3k} = \sqrt{4/3} \frac{\sqrt{\alpha} f \sqrt{t_0}}{k}. \quad (4.103)$$

Colocando t_0 em evidência na expressão (4.103):

$$t_0 = \frac{l^2}{12\alpha}. \quad (4.104)$$

Voltando com (4.161) em (4.94) e realizando as operações necessárias, tem-se:

$$z(t) = \left(\frac{f(z)}{k} \right) l \left[1 - 0.821 e^{-\frac{5\alpha}{2l^2}t} \right]. \quad (4.105)$$

4.3.3 Avaliação dos Resultados

A avaliação do método da integral dupla será feita considerando inicialmente a variação de temperatura na superfície em $x = 0$. Em seguida, com o uso do método de volumes de controles; se avaliará a distribuição para ambos os métodos integrais. Nestes dois testes será considerado que a placa possui espessura de $0.1m$, sendo suas propriedades termofísicas dadas na Tabela 4.1, e o fluxo térmico em $x = 0$ igual a $1000W/m^2$.

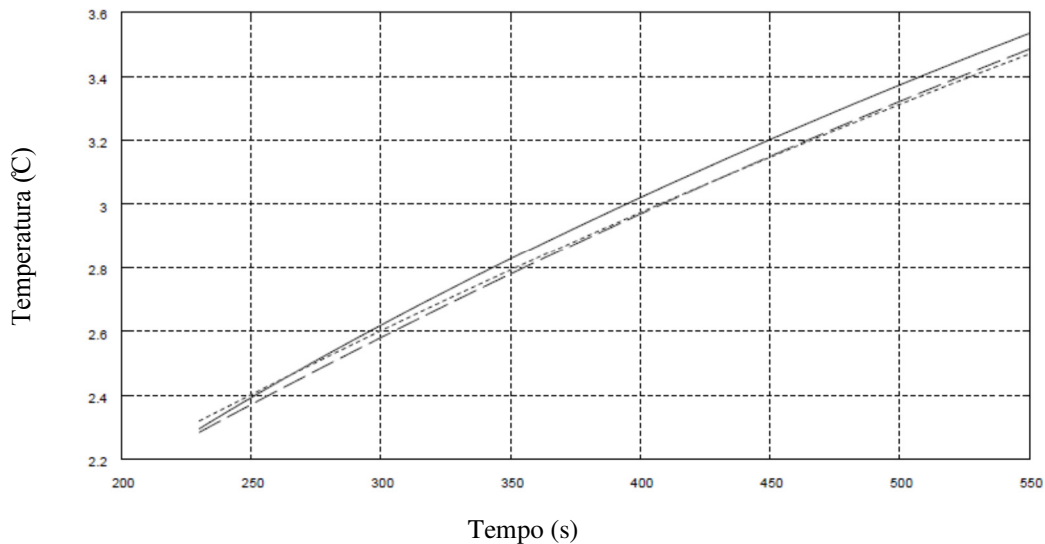
A Tabela 4.6 mostra a expressão para o cálculo da temperatura na superfície para cada um dos métodos integrais e para a solução analítica de Carslaw & Jaeger (1959). Como pode ser observado, o método da integral dupla possui melhor precisão na determinação do autovalor quando comparado com o método de Goodman (1964). No entanto, para o cálculo do coeficiente exponencial, o método da integral dupla apresenta um erro de 2,0% ao passo que para o método da integral simples o erro é de apenas 0,3%. A influência do erro cometido pelo método da integral dupla na aproximação da temperatura na superfície é mostrada na Figura 20.

Tabela 4.6 Avaliação da Parede de Espessura Finita

Método	Perfil da Solução $z(t)$	Autovalor	Erro	Coefficiente Exponencial	Erro
Separação de Variáveis	$\left[1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 \alpha}{4 l^2} t}\right]$	2,467	0%	0,811	0%
Integral Simples	$\left[1 - 0.814 e^{-\frac{12 \alpha}{5 l^2} t}\right]$	2,4	2,71%	0,814	0.3%
Integral Dupla	$\left[1 - 0.828 e^{-\frac{5 \alpha}{2 l^2} t}\right]$	2,5	1,33%	0,828	2.0%

A Figura 20 mostra a variação da temperatura na superfície em função do tempo, para o método da integral dupla, o método de Goodman e o método da separação de variáveis. O instante de tempo inicial foi obtido com o uso da expressão (4.101). Como pode ser observado, para tempos maiores do que 400 segundos, o método da integral dupla é capaz de fornecer melhores aproximações que o método da integral simples.

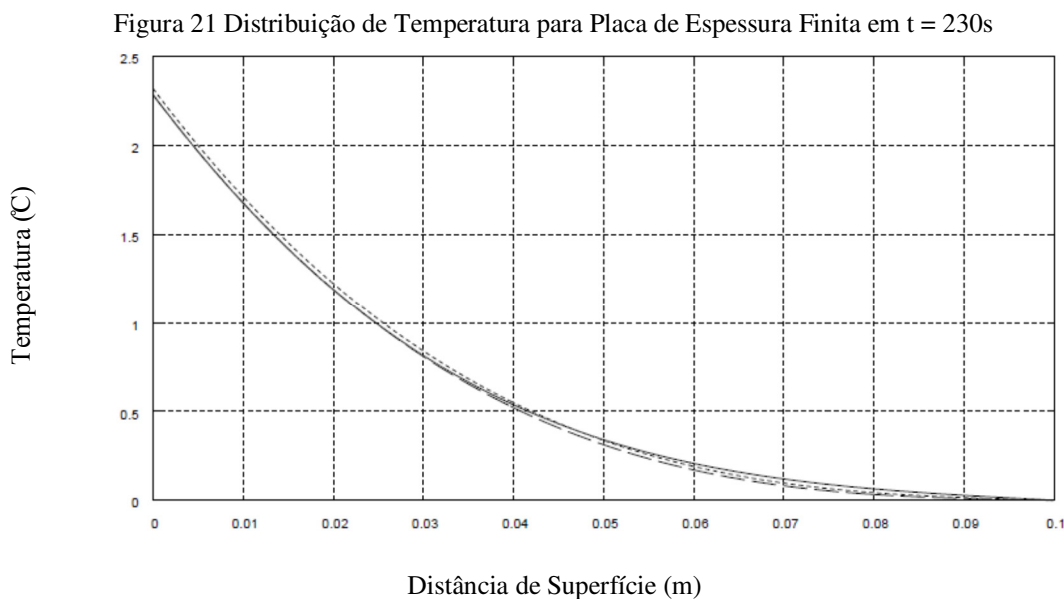
Figura 20 Temperatura na Superfície ao Longo do Tempo para Placa de Espessura Finita



4.3.4 Solução Numérica

Nesta seção os perfis de temperatura e do fluxo térmico dado pelos métodos da integral simples e integral dupla serão comparados com a solução numérica obtida através do método de volumes de controle (Apêndice A). A Figura 21 mostra a distribuição de temperatura para cada um dos métodos anteriores. Como se observa, a solução obtida pelo método da integral dupla é praticamente indistinguível da solução numérica para distâncias menores do que $0,04m$ enquanto que solução dada pelo método da integral simples se mostra grosseira para este mesmo intervalo. No entanto para distâncias maiores do que $0,04m$ o método da integral simples cruza a solução numérica e ambos os métodos integrais passam a ter praticamente a mesma precisão.

A Figura 22 mostra o fluxo térmico ao longo do corpo para cada um dos métodos anteriores. Como se observa, o perfil descrito pelo método da integral dupla possui maior precisão que o método da integral simples na maior parte do domínio. A maior precisão do método da integral dupla na descrição do fluxo se reflete na monotonicidade do perfil de temperatura em relação a solução numérica.

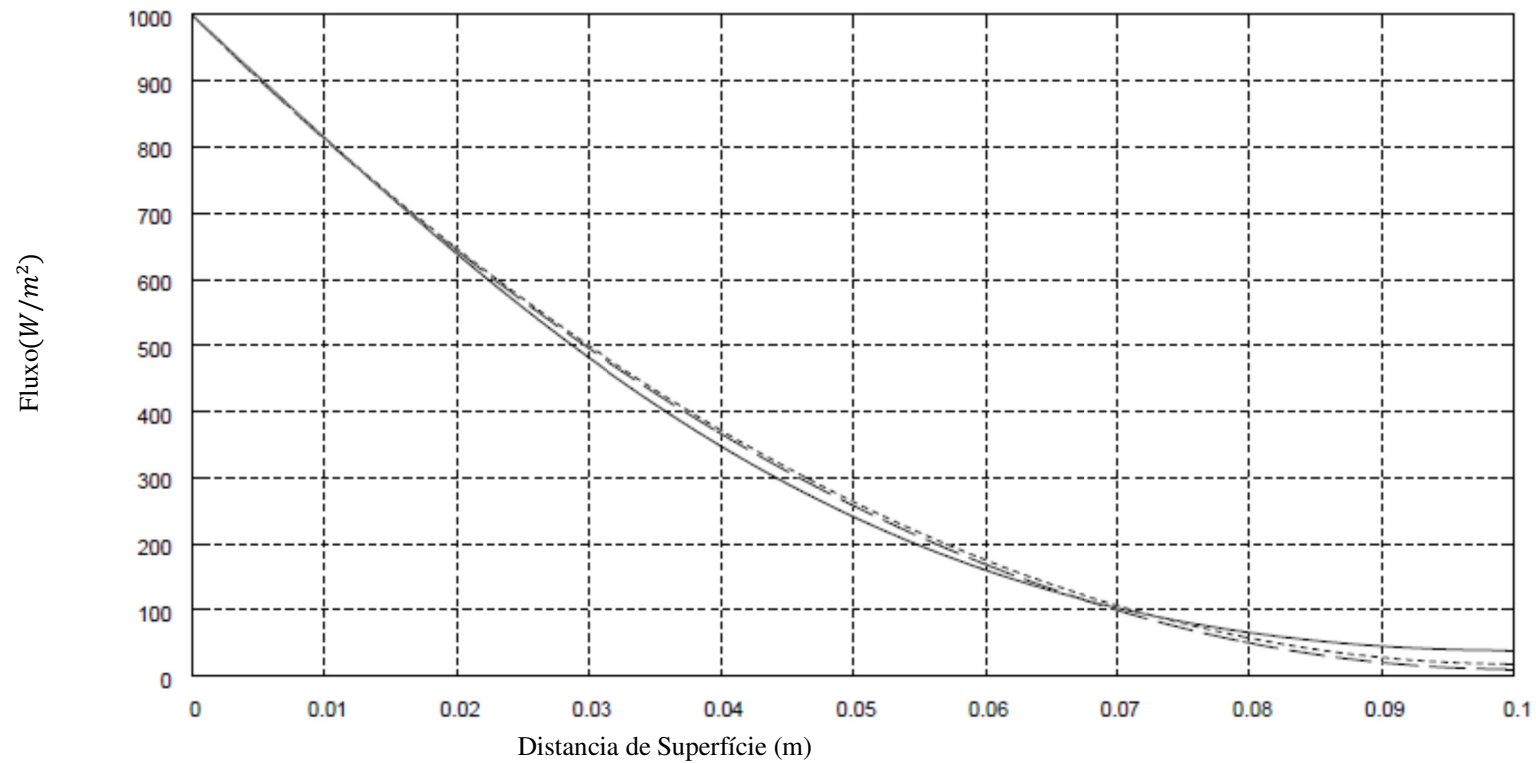


Linha Continua: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle)

Solução Tracejada: Método da Integra; Dupla (Perfil Cúbico).

Solução Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Cúbico, Goodman 1964)

Figura 22 Fluxo ao Longo da Placa de Espessura Finita em $t=230$ s



Linha Contínua: Solução Numérica (Método de Volumes de Controle)

Solução Tracejada: Método da Integra; Dupla (Perfil Cúbico).

Solução Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Cúbico, Goodman 1964)

4.4 Placa Semi-Infinita com Condição de Contorno de Terceira Espécie

Nesta parte será resolvido o problema envolvendo um corpo semi-infinito tendo condição de contorno de terceira espécie com o uso do método da integral dupla. Inicialmente se considerará que a condição de contorno assuma sua forma mais genérica sendo esta particularizada quando conveniente. Sendo assim, o problema fica bem definido com a equação da condução do calor e suas condições de contorno descritas abaixo.

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ com} \quad (4.106)$$

as três condições de contorno naturais.

$$T(\delta, t) = 0, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) = 0 \text{ e} \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -f(z, t). \quad (4.109)$$

A quarta condição de contorno, também chamada de condição de suavização, é

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\delta(t), t) = 0. \quad (4.110)$$

4.4.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico

Nesta parte serão determinados os perfis quadrático e cúbico. Para a determinação das constantes do perfil quadrático serão utilizadas as condições de contorno dadas por (4.107), (4.108) e (4.109) ao passo que, para o perfil cúbico, serão utilizadas as condições anteriores mais a condição de suavização dada em (4.110).

Perfil Quadrático

Um perfil polinomial quadrático assume a forma geral de:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (4.111)$$

Impondo cada uma das condições de contorno anteriormente mencionadas têm-se:

$$\beta_0 = \frac{f(z, t)\delta}{2}, \quad (4.112)$$

$$\beta_1 = -f(z, t) \text{ e} \quad (4.113)$$

$$\beta_2 = \frac{f(z, t)}{2\delta}. \quad (4.114)$$

Através de manipulações algébricas pode-se mostrar que o perfil de distribuição de temperatura assume a forma

$$T(x, t) = \frac{f(z, t)}{2\delta} (\delta - x)^2. \quad (4.115)$$

Definindo

$$\delta(t) = \frac{2z}{f(z, t)}, \quad (4.116)$$

pode-se reescrever a distribuição de temperatura em função de $z(t) = T(0, t)$, como

$$T(x, t) = \frac{z}{\delta^2} (\delta - x)^2 = T(0, t) \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2. \quad (4.117)$$

Perfil Cúbico

Um tratamento análogo ao caso do perfil quadrático será feito para o perfil cúbico

$$T(x, t) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3. \quad (4.118)$$

Impondo cada uma das condições de consideradas em (4.107), (4.108), (4.109) e (4.110) se determinam as constantes do polinômio:

$$\beta_0 = f(z, t), \quad (4.119)$$

$$\beta_1 = -f(z, t), \quad (4.120)$$

$$\beta_2 = \frac{f(z, t)}{3\delta} \text{ e} \quad (4.121)$$

$$\beta_3 = -\frac{f(z, t)}{3\delta}. \quad (4.122)$$

Através de manipulações algébricas pode-se mostrar que,

$$T(x, t) = \frac{f(z, t)}{3\delta^2} (\delta - x)^3. \quad (4.123)$$

Definindo

$$\delta(t) = \frac{3z}{f(z, t)}, \quad (4.124)$$

O perfil de temperatura cúbico (4.123) reescrito em função de (4.124), resulta em:

$$T(x, t) = \frac{z(t)}{\delta^3} (\delta - x)^3 = T(0, t) \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^3. \quad (4.125)$$

4.4.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico

Após o problema envolvendo a fronteira convectiva ter sido definido na sessão (4.4) e os perfis polinomiais terem sido determinados em (4.2.1), nesta seção o método da integral dupla será aplicado a cada um dos perfis determinados. Inicialmente se fará a aplicação para o caso quadrático assim como a avaliação de seu desempenho e, utilizando-se da mesma metodologia, será feita a aplicação e avaliação do perfil cúbico.

Aplicação com Perfil Quadrático

Considerando inicialmente a equação da condução (4.106) e integrando a mesma duas vezes em relação a x , sendo os extremos de integração de 0 a x na primeira integral e de 0 a $\delta(t)$ na segunda integral, tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dx. \quad (4.126)$$

Calculando separadamente cada um dos termos da equação (4.126), e trabalhando inicialmente com o lado esquerdo,

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx + \int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx. \quad (4.127)$$

O primeiro termo da equação (4.127) é calculado de forma direta com a substituição do perfil de temperatura dado em (4.115) e a execução das operações,

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \alpha [T(\delta) - T(0)] = -\alpha z. \quad (4.128)$$

Para o cálculo da segunda integral de (4.127) é necessário o uso do método da integral simples onde o termo $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$ é determinado implicitamente. Deste modo, aplicando o método da integral simples, na equação da condução(4.106) tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx. \quad (4.129)$$

Realizando as operações necessárias em (4.129) resulta em

$$-\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta(t)z}{3} \right). \quad (4.130)$$

Voltando com (4.130) ao segundo termo de (4.127),

$$\int_0^{\delta(t)} -\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \delta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta(t)z}{3} \right). \quad (4.131)$$

Deste modo determina-se completamente o lado direito de (4.126)

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx = -\alpha z + \delta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta(t)z}{3} \right). \quad (4.132)$$

Agora trabalhando com o lado direito de (4.126),

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dx \, dx = \frac{d}{dt} \left[-\frac{z\delta^2(t)}{12} \right] + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{3} \right]. \quad (4.133)$$

Voltando com os termos (4.132) e (4.133) em (4.126), se obtém a seguinte equação diferencial ordinária:

$$-\alpha z + \delta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta(t)z}{3} \right) = \frac{d}{dt} \left[-\frac{z\delta^2(t)}{12} \right] + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{3} \right]. \quad (4.134)$$

Reorganizando os termos desta expressão tem-se.

$$3\alpha z = \frac{d}{dt} \left[\frac{z^3}{f^2(z, t)} \right]. \quad (4.135)$$

A equação diferencial anterior tem solução analítica em dois casos quando f depende apenas de z ou quando f depende apenas de t . Se f independe de z , tem-se o caso de condição de contorno de segunda espécie, que já foi resolvido na seção (4.2). Quando f independe de t , tem-se a condição de contorno de terceira espécie, deste modo definindo f como

$$f(z) = \left(\frac{h}{k} \right) (z_0 - z). \quad (4.136)$$

Substituindo (4.136) em (4.135) e efetuando-se as operações resulta em

$$3\alpha z_1 = \frac{3z_1^2 f^2(z_1) \frac{dz_1}{dt} - 2z_1^3 f(z_1) \frac{df}{dz_1} \frac{dz_1}{dt}}{[f^2(z_1)]^2}. \quad (4.137)$$

A equação diferencial anterior pode ser resolvida via método de separação de variáveis como segue:

$$\int_0^t 3\alpha dt = \int_0^z \left\{ \frac{3z_1 f^2(z_1)}{[f^2(z_1)]^2} - \frac{2z_1^2 f(z) f(z_1)}{[f^2(z_1)]^2} \frac{f(z_1)}{dz_1} \right\} dz_1. \quad (4.138)$$

Calculando separadamente cada um dos termos de (4.162)

$$\int_0^t 3\alpha dt = 3\alpha t \text{ e} \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^z \left\{ \frac{3z_1 f^2(z_1)}{[f^2(z_1)]^2} - \frac{2z_1^2 f(z)}{[f^2(z_1)]^2} \frac{f(z_1)}{dz_1} \right\} dz_1 \\
&= \left(\frac{k}{h} \right)^2 \left[z_0 \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_0 - z} \right) + z_0^2 \left(\frac{1}{(z_0 - z)^2} - \frac{1}{z_0^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(\frac{z_0 - z}{z_0} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Substituindo as expressões (4.139) e (4.140) em (4.138) resulta em

$$3 \left(\frac{h}{k} \right)^2 \alpha t = \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} \right) + \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2} - 1 \right) + \ln \left(1 - \frac{z}{z_0} \right). \tag{4.141}$$

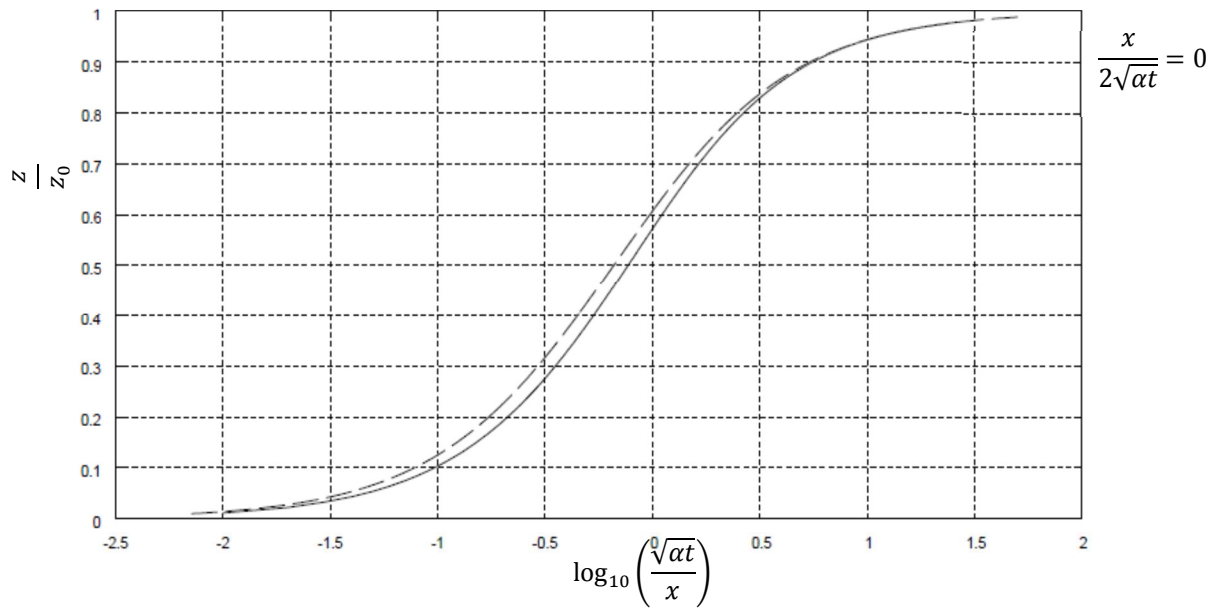
A expressão dada em (4.141), após algumas manipulações algébricas pode ser comparada com a solução analítica exata apresentada por Carslaw & Jaeger (1959). A principal característica da solução de Carslaw & Jaeger (1959) a equação (4.142), é a sua complexidade matemática em relação à expressão resultante do método da integral dupla (4.141).

$$\frac{z}{z_0} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - e^{\frac{2\sqrt{\alpha t}}{x} \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 \alpha t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{\sqrt{\alpha t}}{x} \right). \tag{4.142}$$

4.4.3 Resultados com Perfil Quadrático

A avaliação da solução apresentada pelo método da integral dupla, será feita através da comparação com as soluções do método da integral simples e de Carslaw & Jaeger (1959). A Figura 23 mostra a solução do método da integral dupla sobreposta à solução de Carslaw & Jaeger (1959). Ambos os resultados estão apresentados em função dos parâmetros adimensionais $\log_{10} \left(\frac{\sqrt{\alpha t}}{x} \right)$ e $\frac{z}{z_0}$ sendo considerado $\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0$; pode-se observar uma boa concordância entre os dois métodos. Na Figura 24 faz-se um comparativo entre os dois métodos anteriormente citados e o método da integral simples. Observa-se que o ultimo apresenta a maior discordância em relação aos outros dois.

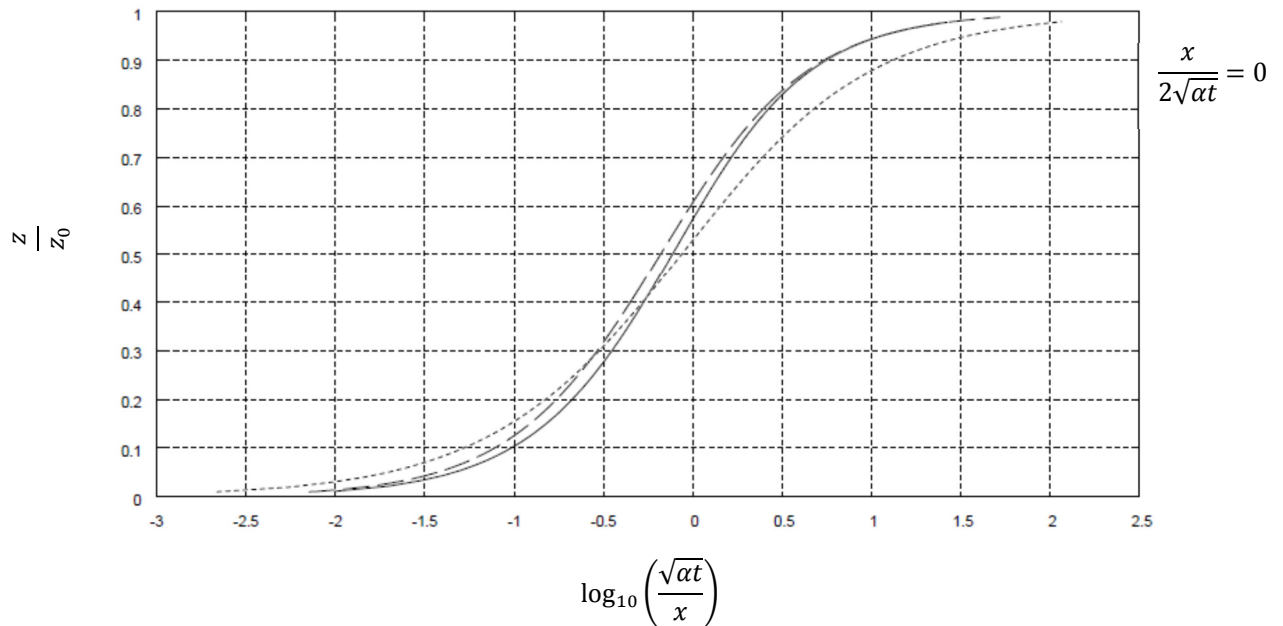
Figura 23 Distribuição de Temperatura com Perfil Quadrático e Fronteira Convectiva



Linha Contínua: Solução Analítica– Carslaw & Jaeger (1959)

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla– Perfil Quadrático

Figura 24 Comparativo dos Métodos Integrais com Perfil Quadrático e Fronteira Convectiva



Linha Contínua: Solução Analítica– Carslaw & Jaeger (1959)

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla– Perfil Quadrático

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples – Perfil Quadrático

4.4.4 Aplicação com Perfil Cúbico

Nesta seção o problema de condição de contorno de terceira espécie será resolvido com perfil cúbico de temperatura. Sendo assim, integrando a equação da condução do calor duas vezes com relação a x , sendo que a primeira integração é feita no intervalo de 0 a x e a segunda integral realizada no intervalo de 0 a $\delta(t)$,

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx. \quad (4.143)$$

Calculando separadamente cada um dos termos da equação (4.143), e trabalhando inicialmente com o lado esquerdo tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx - \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx. \quad (4.144)$$

O primeiro termo da equação (4.144) é calculado de forma direta com a substituição do perfil cúbico de temperatura e execução das operações apropriadas:

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \alpha [T\delta(t) - T(0)] = -\alpha z. \quad (4.145)$$

O segundo termo da equação (4.144) é calculado com o uso do método da integral simples; sendo assim, deve-se considerar novamente a equação da condução do calor e efetuar uma única integração em x no intervalo de $x = 0$ a $x = \delta(t)$.

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx. \quad (4.146)$$

Desenvolvendo a ultima expressão,

$$-\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{4} \right]. \quad (4.147)$$

Voltando com o resultado de (4.147) no segundo termo de (4.144);

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{4} \right]. \quad (4.148)$$

Agora, substituindo os resultados de (4.145) e (4.148) em (4.144), resulta em:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = -\alpha z + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{4} \right]. \quad (4.149)$$

Trabalhando com o lado direito de (4.143),

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx dx = -\frac{1}{20} \frac{d}{dt} [z\delta^2] + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta}{4} \right]. \quad (4.150)$$

Substituindo os resultados (4.149) e (4.150) em (4.144),

$$-\alpha z + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta(t)}{4} \right] = -\frac{1}{20} \frac{d}{dt} [z\delta^2] + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{z\delta}{4} \right]. \quad (4.151)$$

Reorganizando a expressão anterior obtém-se a seguinte equação diferencial.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{9z^3}{f^2(z, t)} \right] = 20\alpha z. \quad (4.152)$$

Do mesmo modo que foi considerado para o caso do perfil quadrático, a equação diferencial anterior apenas tem solução analítica quando f é função apenas de t ou quando f é

função apenas de z . Para que o problema caracterize uma condição de contorno de terceira espécie, f deve ser função apenas de z . Deste modo, a equação anterior torna-se.

$$\frac{\left[27z_1^2 \frac{dz_1}{dt} f^2(z_1) - 18z_1^3 f(z_1) \frac{df}{dz_1} \frac{dz_1}{dt} \right]}{f^4(z_1)} = 20\alpha z_1. \quad (4.153)$$

Aplicando a separação de variáveis na equação diferencial anterior resulta em:

$$\int_0^z \left(\frac{3z_1}{f^2(z_1)} - \frac{2z_1^2}{f^3(z_1)} df \right) dz_1 = \int_0^t \frac{20}{9} \alpha dt. \quad (4.154)$$

Assumindo que a função $f(z_1)$ seja definida como

$$f(z_1) = \left(\frac{h}{k} \right) (z_0 - z_1), \text{ e} \quad (4.155)$$

substituindo (4.155) em (4.154) e realizando os cálculos necessários resulta em :

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\frac{3z_1}{f^2(z_1)} - \frac{2z_1^2}{f^3(z_1)} df \right) dz_1 \\ = \left(\frac{k}{h} \right)^2 \left\{ \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2} - 1 \right] + \ln \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) + \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} \right] \right\} \text{ e} \end{aligned} \quad (4.156)$$

$$\int_0^t \frac{20}{9} \alpha dt = \frac{20}{9} \alpha t. \quad (4.157)$$

A substituição dos termos (4.156) e (4.157) em (4.154) fornece:

$$\frac{4}{3} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \alpha t = 0,6 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2} - 1 \right] + 0,6 \ln \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) + 0,6 \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} \right]. \quad (4.158)$$

Comparando a expressão anterior com a equação obtida por Goodman (1964) dada em (4.159), observa-se que a solução do método da integral dupla se assemelha a (4.159) diferindo apenas pelo valor da constante numérica de e pelo ultimo termo:

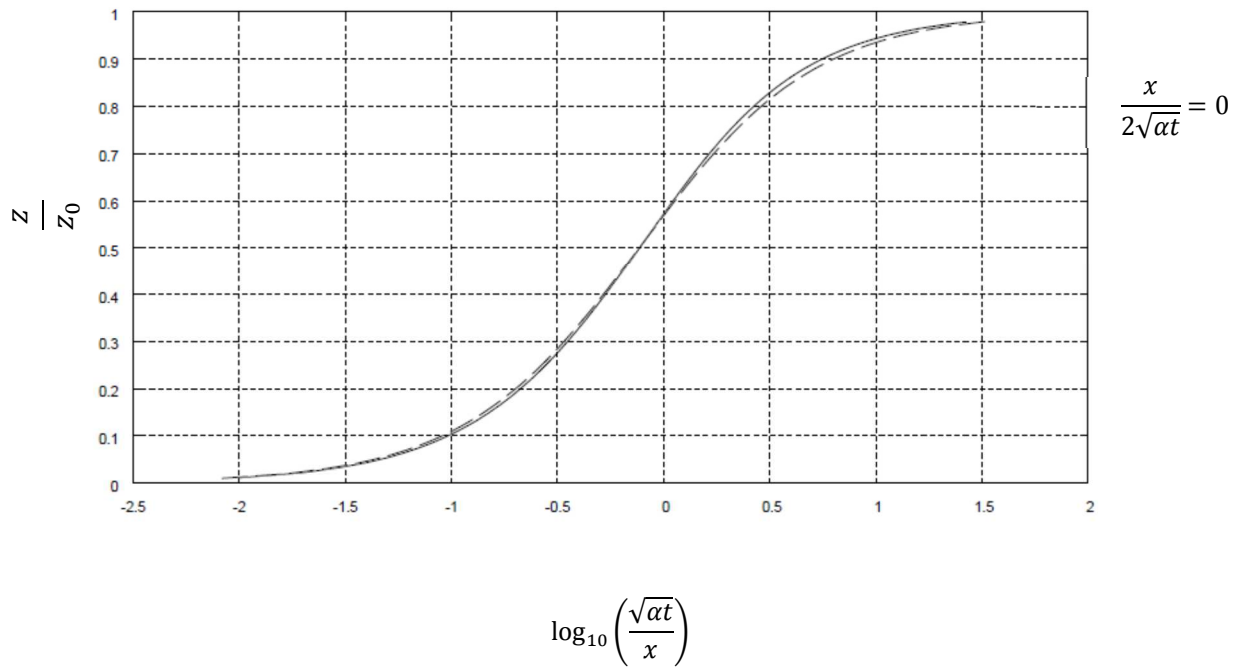
$$\frac{4}{3} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \alpha t = 0,5 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2} - 1 \right] + \ln \left(1 - \frac{z}{z_0} \right). \quad (4.159)$$

4.4.5 Resultado com Perfil Cúbico

De modo análogo ao que foi feito para o perfil quadrático, nesta seção a solução do método da integral dupla também será comparada com a soluções de Carslaw & Jaeger (1959) e de Goodman (1964). A Figura 25 mostra a distribuição de temperatura obtida por Carslaw & Jaeger (1959), assim como a obtida pelo método da integral dupla. Ambas as soluções estão escritas em função dos parâmetros adimensionais $\log_{10} \left(\frac{\sqrt{\alpha t}}{x} \right)$ e $\frac{z}{z_0}$, sendo considerado $\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0$. Como se observa, houve apenas uma pequena melhora da solução do método da integral dupla com perfil cubico em relação à solução com perfil quadrático. No entanto a análise da Figura 26 em que se têm ambos os métodos integrais com perfil cúbico, revela uma melhora significativa no perfil do método da integral simples em relação à aplicação deste com perfil quadrático.

Ao se sobrepor as soluções de ambos os métodos integrais junto à solução de Carlaw & Jaeger (1959), torna-se impossível distinguir cada um dos perfis, ou seja, tem-se um mesmo grau de equivalência entre ambos os métodos integrais.

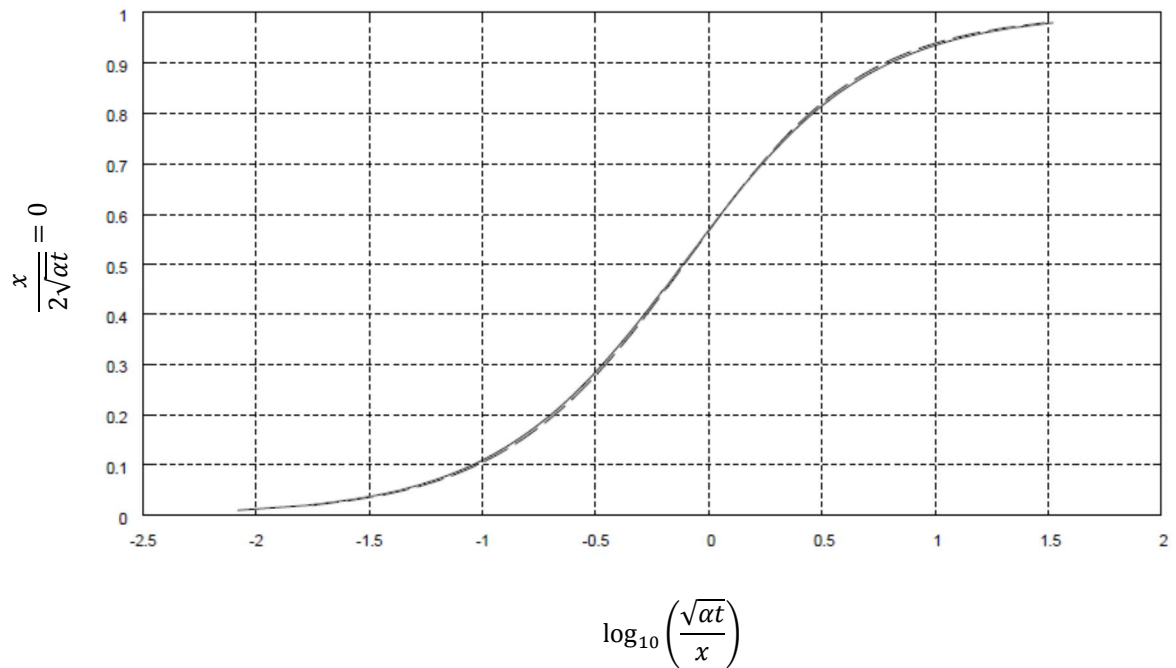
Figura 25 Distribuição de Temperatura com Perfil Cúbico e Fronteira Convectiva



Linha Contínua: Solução Analítica– Carslaw & Jaeger (1959),

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla– Perfil Cúbico.

Figura 26 Comparativo dos Métodos Integrais com Perfil Cúbico e Fronteira Convectiva



Linha Contínua: Método da Integral Dupla – Perfil Cúbico

Linha Tracejada: Método da Integral Simples – Perfil Cubico Goodman (1964)

4.5 Condução de Calor com Geração Interna

Considerando um corpo semi-infinito que se estenda ao longo do eixo $x > 0$ estando este inicialmente a zero grau Celsius, suponhamos que se tenha uma fonte interna de geração de calor $q(t)$ por unidade de tempo e unidade de volume e assumindo que em sua face em $x = 0$ a temperatura seja mantida constante e igual a zero grau Celsius. Deste modo, o problema fica bem determinado e suas equações são dadas abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{q(t)}{\rho c}. \quad (4.160)$$

Duas condições de contorno naturais para este problema são.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) = 0 \text{ e} \quad (4.161)$$

$$T(0, t) = 0. \quad (4.162)$$

A terceira condição de contorno é obtida aplicando a equação da condução com geração em um ponto longe da fronteira onde não existe gradiente de temperatura então:

$$T(\delta, t) = \frac{Q(t)}{\rho c} = \frac{1}{\rho c} \int_0^t q(t) dt. \quad (4.163)$$

Para o uso de um perfil cúbico devem-se ter quatro condições de contorno. Deste modo, a fim de se obter esta quarta condição, inicialmente se diferencia a equação (4.163) em relação a t e, em seguida, se avalia a equação da condução com geração no ponto (δ, t) , obtendo assim a condição de suavização

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\delta, t) = 0. \quad (4.164)$$

De posse desta formulação matemática do problema, os perfis quadrático e cúbico podem ser determinados.

4.5.1 Obtenção do Perfil Quadrático e Cúbico

A obtenção dos perfis polinomiais quadrático e cúbico é feita considerando cada um deles inicialmente em sua forma canônica seguida pela aplicação das corretas condições de contorno. O número de condições a serem impostas é igual a $n + 1$ em que n é o grau do polinômio. Para o perfil quadrático as condições utilizadas são (4.161), (4.162) e (4.163). Já para o perfil cúbico são as mesmas condições anteriores mais a condição adicional dada por (4.164).

Perfil Quadrático

Um perfil polinomial quadrático assume a forma geral dada por:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (4.165)$$

Ao se imporem as condições de contorno anteriormente mencionadas, determinam-se as constantes do polinômio que passam a ser dadas como.

$$\beta_0 = 0, \quad (4.166)$$

$$\beta_1 = \frac{2Q(t)}{\rho c} \delta \text{ e} \quad (4.167)$$

$$\beta_2 = \frac{2Q(t)}{\rho c}. \quad (4.168)$$

O perfil quadrático assume então a seguinte forma:

$$T = \frac{Q(t)}{\rho c} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^2 \right] \quad (4.169)$$

Perfil Cúbico

Um perfil polinomial cúbico assume a forma geral dada por:

$$T(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3. \quad (4.170)$$

Ao se imporem as condições de contorno (4.161), (4.162), (4.163) e (4.164) determinam-se as constantes do polinômio que passam a ser dadas por.

$$\beta_0 = 0, \quad (4.171)$$

$$\beta_1 = 3 \left(\frac{Q(t)}{\delta^3 \rho c} \right) \delta^2, \quad (4.172)$$

$$\beta_2 = -3 \left(\frac{Q(t)}{\delta^3 \rho c} \right) \text{ e} \quad (4.173)$$

$$\beta_3 = \frac{Q(t)}{\delta^3 \rho c}. \quad (4.174)$$

Pode-se mostrar que o perfil cúbico assume a seguinte forma:

$$T(x) = \frac{Q(t)}{\rho c} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^3 \right] \quad (4.175)$$

4.5.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico

Nesta parte, o método da integral dupla será aplicado ao problema da placa com geração interna e se fará uso de ambos os perfis quadrático e cúbico. Além disso, também será feita avaliação de cada um destes com uso do método numérico de volumes de controle.

Aplicação com Perfil Quadrático

Consideremos a equação da condução do calor com geração em sua forma canônica dada em (4.160). Fazendo uso da condição de contorno (4.163), pode-se mostrar que esta pode ser escrita da seguinte forma conveniente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.176)$$

Integrando duas vezes a equação (4.176) em relação a x , sendo a primeira integração realizada no intervalo de 0 a x e a segunda no intervalo 0 a $\delta(t)$ tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx dx = \alpha \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx. \quad (4.177)$$

Considerando o perfil quadrático de temperatura (4.169) e calculando separadamente cada um dos termos da equação anterior tem-se

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx dx = -\frac{1}{4} \frac{\delta^2(t)}{\rho c} \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{2Q(t)\delta(t)}{12\rho c} \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.178)$$

O cálculo do termo do lado direito de (4.177) envolve a determinação implícita do vetor gradiente na superfície. Deste modo, as operações a seguir serão feitas com maior detalhamento.

$$\alpha \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \, dx = \alpha \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx + \int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \, dx. \quad (4.179)$$

Calculando separadamente cada um dos termos dados em (4.179),

$$\alpha \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \alpha [T(\delta(t)) - T(0)] = \frac{\alpha Q(t)}{\rho c}. \quad (4.180)$$

O cálculo do vetor gradiente na superfície envolve o uso do método da integral simples. Sendo assim, considerando novamente a equação da condução com geração dada em sua forma conveniente (4.176) e realizando uma única integração em relação a x ao longo da distância fenomenológica tem-se.

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx. \quad (4.181)$$

O desenvolvimento da expressão anterior leva à seguinte expressão:

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} [Q(t)\delta(t)]. \quad (4.182)$$

Substituindo (4.182) no segundo termo de (4.179) e efetuando as operações necessárias tem-se

$$\int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \, dx = -\frac{\delta^2(t)}{3} \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{2Q(t)\delta(t)}{3} \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.183)$$

A substituição das equações em (4.178), (4.180) e (4.183) em (4.177) leva à seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{12} \frac{d}{dt} [\delta^2(t) Q(t)] = \alpha Q(t) \text{ com} \quad (4.184)$$

$$\delta(0) = 0, \quad (4.185)$$

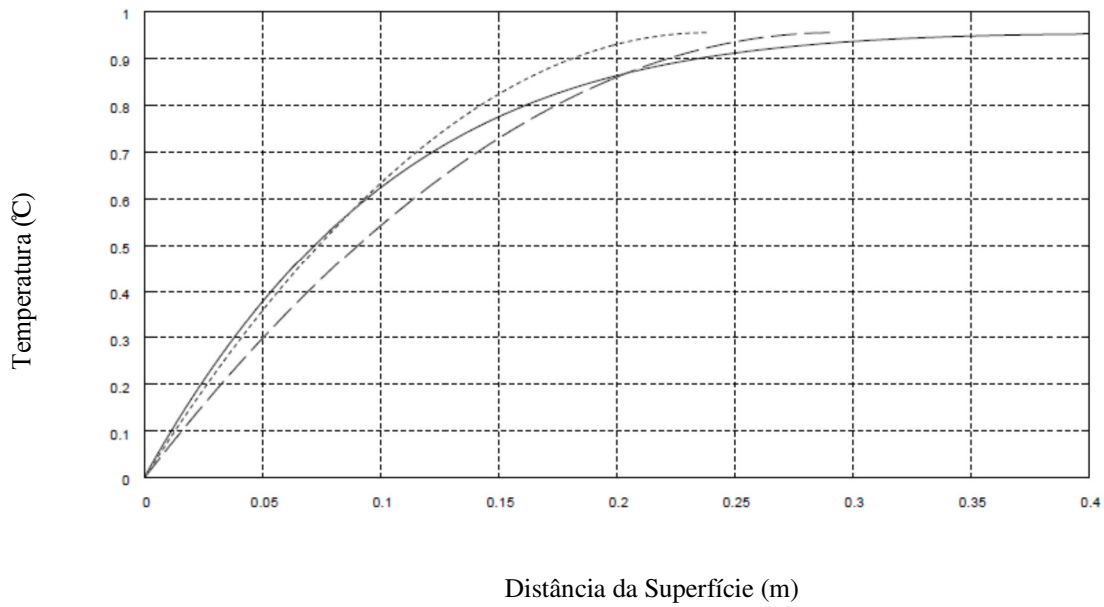
cuja solução pode ser obtida:

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{12\alpha \int_0^t Q(t_1) dt_1}{Q(t_1)}}. \quad (4.186)$$

4.5.3 Resultados com Perfil Quadrático

Nas figuras (4-27) e (4-28) têm-se respectivamente a distribuição de temperatura e do fluxo térmico no instante de tempo $t = 3600s$, para os métodos integrais e para o método de volumes de controle (Apêndice A). Como mostra a Figura 27 tanto o método da integral simples quanto o método da integral dupla aproximam de forma grosseira o perfil de temperatura quando comparados com a solução numérica. No entanto o método da integral simples admite maior precisão para distâncias inferiores a $0,1m$, ao passo que o método da integral dupla passa a ter melhor precisão para distâncias maiores que $0,15m$. Esta aproximação grosseira realizada por ambos os métodos integrais se deve à forma rudimentar que estes realizam para descreverem o fluxo térmico ao longo do corpo, como mostra a Figura 28. Enquanto a solução numérica tem um perfil parabólico para o fluxo, os dois métodos integrais aproximam-no este por uma reta.

Figura 27 Perfil de Temperatura com Polinômio Quadrático e Geração Interna

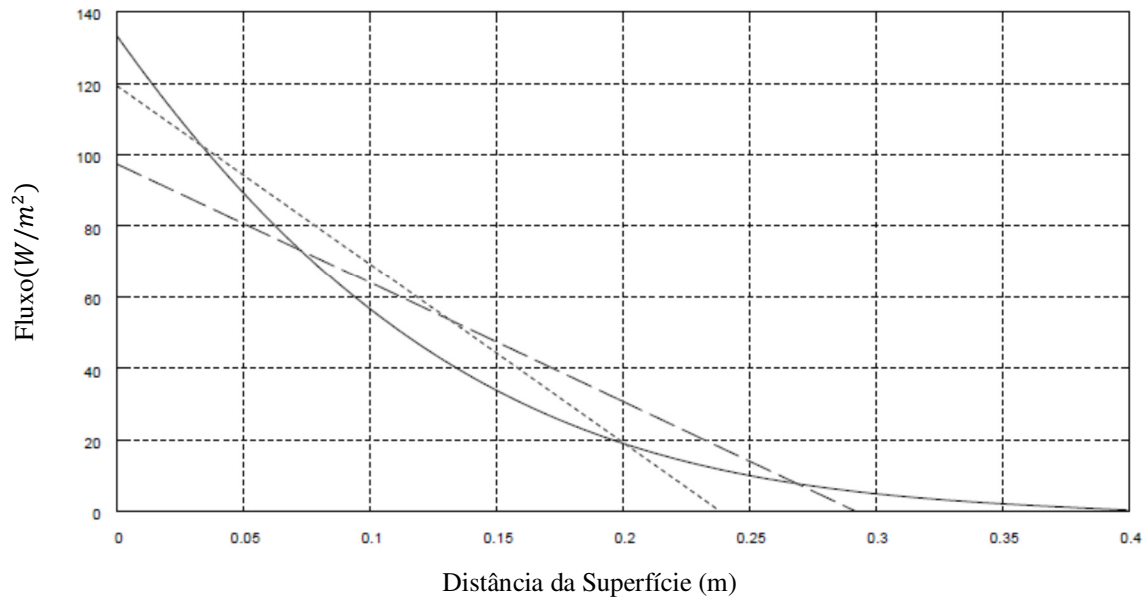


Linha Contínua: Solução Numérica

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Quadrático)

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Quadrático)

Figura 28 Módulo do Fluxo Térmico com Perfil Quadrático e Geração Interna



Linha Contínua: Solução Numérica

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Quadrático)

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Quadrático)

Aplicação com Perfil Cúbico

Considerando novamente a equação da condução com geração em sua forma conveniente dada em (4.176), realizando uma dupla integração em relação a x , sendo que a primeira integração é feita no intervalo de 0 a x e a segunda de 0 a $\delta(t)$ se obtém

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx dx = \alpha \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx. \quad (4.187)$$

Trabalhando separadamente com cada um dos termos anteriores,

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx dx = -\frac{\delta^2(t)Q(t)}{5\rho c} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{3Q(t)}{\rho c} \frac{\delta(t)}{20} \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.188)$$

O cálculo do termo do lado direito de (4.188) envolve a determinação implícita do vetor gradiente na superfície. Deste modo, as operações a seguir serão feitas com maior detalhamento.

$$\alpha \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dx = \alpha \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx + \int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx \quad (4.189)$$

Calculando cada uma das integrais do lado direito de (4.189), obtêm-se

$$\alpha \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dx = \frac{\alpha Q(t)}{\rho c}. \quad (4.190)$$

O cálculo do segundo termo de (4.189) deve ser feito com o método da integral simples. Para tanto se deve considerar novamente a equação da condução com geração interna em sua forma conveniente (4.176) e realizar uma única integração ao longo da distância fenomenológica.

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[T - \frac{Q(t)}{\rho c} \right] dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx. \quad (4.191)$$

O desenvolvimento da expressão anterior leva à seguinte relação:

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{1}{4\rho c} \frac{d}{dt} [Q(t)\delta(t)]. \quad (4.192)$$

Substituindo (4.193) no segundo termo de (4.189) e efetuando as operações necessárias se obtém:

$$\int_0^{\delta(t)} -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) dx = -\frac{\delta(t)}{4\rho c} \frac{d}{dt} (Q(t)\delta(t)). \quad (4.193)$$

A substituição das expressões (4.188), (4.190) e (4.193) em (4.187) resulta na seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{20} \frac{d}{dt} [Q(t)\delta^2(t)] = \alpha Q(t) \text{ com} \quad (4.194)$$

$$\delta(0) = 0. \quad (4.195)$$

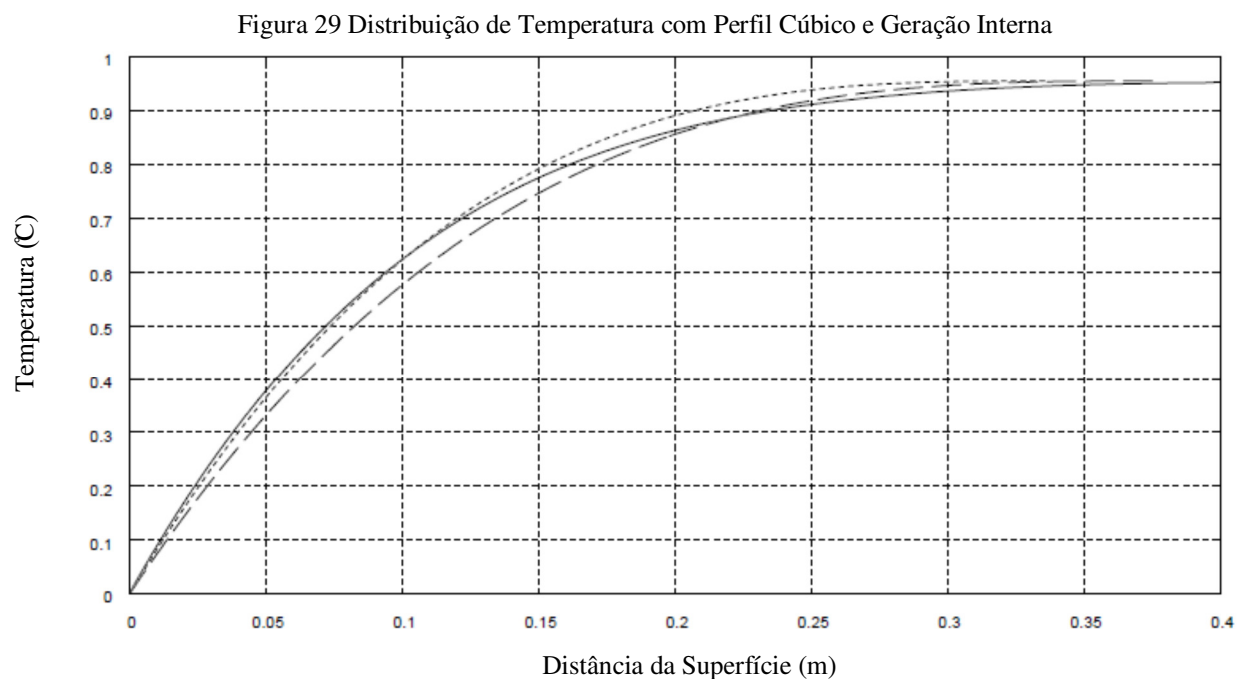
A equação diferencial ordinária anterior pode ser resolvida e sua solução é dada abaixo.

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{20\alpha \int_0^t Q(t) dt}{Q(t)}}. \quad (4.196)$$

4.5.4 Resultados com Perfil Cúbico

Nas figuras (4-29) e (4-30) têm-se respectivamente os perfis de temperatura e do fluxo térmico descrito pelos métodos integrais e pelo método de volumes de controles para o instante de tempo $t = 3600s$. Ao se comparar as figuras (4-27) e (4-29), pode se observar uma melhora significativa da precisão dos métodos integrais em descreverem o perfil de temperatura. Esta maior proximidade entre os métodos integrais e o método numérico na descrição do perfil de temperatura, se deve a melhorias também realizadas na aproximação do fluxo térmico (Figura

29), uma vez que este deixa de ser feito através de uma reta (caso quadrático) e passa a ser feito por um perfil parabólico (caso cúbico). No entanto, assim como no caso quadrático, os perfis cúbicos também cruzam a solução numérica uma única vez cada um deles, sendo em $x \cong 0,1m$ o método da integral simples e em $x \cong 0,225$ o método da integral dupla. Este comportamento apresentado pelos métodos integrais se deve à aproximação grosseira que cada deles realiza para o fluxo térmico nos respectivos pontos como se observar na Figura 30.

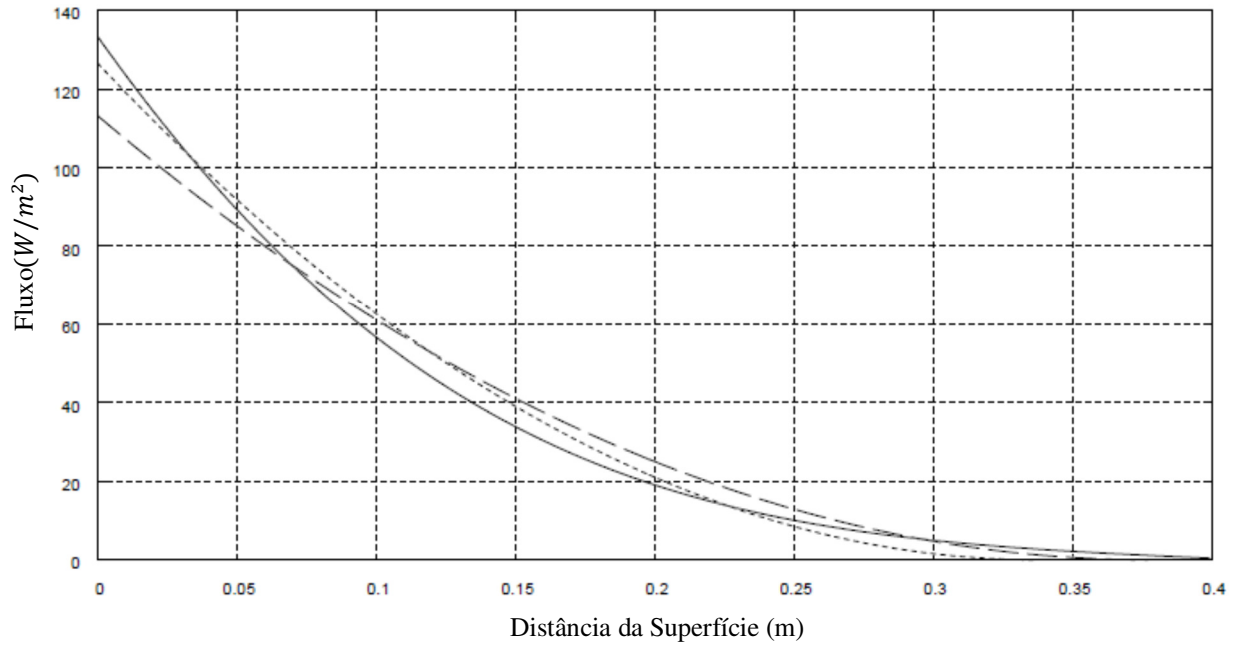


Linha Contínua: Solução Numérica

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Cúbico)

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Cúbico)

Figura 30 Módulo do Fluxo Térmico com Perfil Cúbico com Geração



Linha Contínua: Solução Numérica

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Cúbico)

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Cúbico)

4.6 Propriedades Térmicas Dependentes da Temperatura

Nesta seção, será resolvido o problema da placa semi-infinita que inicialmente se encontra a zero grau Celsius, que possui condição contorno de primeira espécie em $x = 0$ e propriedades térmicas variar com a temperatura. De posse da descrição física do problema, o modelo matemático que o descreve é dado pela equação da condução como apresentado pela equação (4.197), assim como as condições de contorno a seguir:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (4.197)$$

$$T(x, 0) = T_s, \quad (4.198)$$

$$T(x, \delta) = 0, \quad (4.199)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta, t) = 0 \text{ e} \quad (4.200)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\delta, t) = 0. \quad (4.201)$$

Como k e ρc são dependentes da temperatura, a resolução da equação (4.197) se torna muito trabalhosa. Deste modo, será adotada a mudança de variável indicada por Goodman (1965) dada por

$$v = \int_0^T \rho c \, dT \quad (4.202)$$

Ao se aplicar a mudança de variável (4.202) na equação da condução do calor bem como nas condições de contorno, estas passam a ser escrita como.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (4.203)$$

$$v(x = 0) = v_s, \quad (4.204)$$

$$v(x = \delta) = 0, \quad (4.205)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\delta, t) = 0 \text{ e} \quad (4.206)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\delta, t) = 0. \quad (4.207)$$

De posse da equação da condução do calor e das condições de contorno dadas em função da mudança de variável, podem-se determinar os perfis quadráticos e cúbicos em função destas.

4.6.1 Determinação dos Perfis Quadrático e Cúbicos

Na determinação das constantes do perfil quadrático serão utilizadas as condições de contorno dadas por (4.204), (4.205) e (4.206). Já para o perfil cúbico serão utilizadas às condições anteriores mais a condição de suavização dada em (4.207)

Perfil Quadrático

Considerando o perfil quadrático em sua forma canônica,

$$v(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \quad (4.208)$$

E impondo as condições de contorno anteriormente mencionadas se determinam cada uma de suas constantes que passam a ser dadas por:

$$\beta_0 = v_s, \quad (4.209)$$

$$\beta_1 = 3\beta_3 \delta^2 \text{ e} \quad (4.210)$$

$$\beta_2 = -3\beta_3 \delta. \quad (4.211)$$

O perfil quadrático assume então a seguinte forma

$$v(x) = v_s \left[1 - \frac{x}{\delta} \right]^2. \quad (4.212)$$

Perfil Cúbico

De modo análogo ao feito para o perfil quadrático, inicialmente se considerará o perfil cúbico em sua forma canônica e, em seguida, serão aplicados às condições de contorno, anteriormente determinadas.

$$v(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3. \quad (4.213)$$

Ao se imporem as condições de contorno tem-se

$$\beta_0 = v_s, \quad (4.214)$$

$$\beta_1 = -3 \left(\frac{v_s}{\delta^3} \right) \delta^2, \quad (4.215)$$

$$\beta_2 = 3 \left(\frac{v_s}{\delta^3} \right) \delta \text{ e} \quad (4.216)$$

$$\beta_3 = -\frac{v_s}{\delta^3}. \quad (4.217)$$

Com algumas manipulações algébricas, mostra-se que o perfil assume a forma de:

$$v(x) = v_s \left[1 - \frac{x}{\delta} \right]^3. \quad (4.218)$$

4.6.2 Aplicação do Método da Integral Dupla com Perfil Quadrático e Cúbico

Nesta seção o método da integral dupla será aplicado a cada um dos perfis anteriormente determinados. Inicialmente será considerado o perfil quadrático, seguido pela avaliação de seu desempenho e utilizando-se da mesma metodologia se avaliará o perfil cúbico.

Aplicação com Perfil Quadrático.

Considerando a equação da condução do calor (4.203), bem como o perfil quadrático, (4.212) aplicando o método da integral dupla tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx. \quad (4.219)$$

Trabalhando separadamente com cada um dos termos e inicialmente como lado esquerdo de (4.219).

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx dx = \frac{v_s \delta(t)}{6} \frac{d\delta(t)}{dt} + \frac{5\delta^2(t)}{12} \frac{dv_s}{dt}. \quad (4.220)$$

O cálculo do termo do lado direito de (4.219) envolve o tratamento da condição de contorno com o uso do método da integral simples, deste modo o cálculo deste termo será feito com maiores detalhes.

Fazendo o desenvolvimento inicial,

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dx \\ = \int_0^{\delta(t)} \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_0^{\delta(t)} \alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) dx. \end{aligned} \quad (4.221)$$

Calculando separadamente cada um dos termos de (4.221) e trabalhando inicialmente com o primeiro termo onde será utilizada a hipótese que $\alpha(v)$ assuma a maior variação possível, sendo esta dada por $\alpha_s = \text{constante}$, e que ocorre na superfície, uma vez que é neste local que há maior gradiente de temperatura, tem-se

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha_s \frac{\partial v}{\partial x} dx = \alpha_s v_s \quad (4.222)$$

O cálculo do segundo termo do lado direito de (4.221), deve ser feito com o uso do método da integral simples. Considerando a equação da condução (4.203) e realizando uma integração simples ao longo da distância fenomenológica tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial v}{\partial t} dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx \quad (4.223)$$

Desenvolvendo os termos da equação anterior se obtém

$$\alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{v_s \delta(t)}{3} \right]. \quad (4.224)$$

Voltando com (4.224) no segundo de (4.221)

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) dx = \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{v_s \delta(t)}{3} \right]. \quad (4.225)$$

Após cada um dos termos de (4.221) ter sido calculado separadamente, este termo fica completamente determinado, sendo igual a:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dx = -\alpha_s v_s + \delta(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{v_s \delta(t)}{3} \right]. \quad (4.226)$$

Agora substituindo (4.220) e (4.226) em (4.219) obtêm-se

$$\frac{v_s \delta(t)}{6} \frac{d\delta(t)}{dt} + \frac{5}{12} \delta^2(t) \frac{dv_s}{dt} = -\alpha_s v_s + \frac{\delta(t)}{3} \frac{d}{dt} [v_s \delta(t)]. \quad (4.227)$$

Reorganizando a última equação,

$$\frac{d}{dt}(\delta^2(t)v_s) = 12\alpha_s v_s. \quad (4.228)$$

Resolvendo a equação diferencial anterior com a condição inicial dada por $\delta(0) = 0$, resulta em.

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\delta^2(t)v_s)dt = \int_0^t 12v_s\alpha_s dt \quad \text{e} \quad (4.229)$$

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{12}{v_s} \int_0^t v_s \alpha_s dt}. \quad (4.230)$$

Goodman (1965) sugere como uma aplicação da equação acima supor que uma temperatura T_s seja prescrita na superfície de modo que v_s seja constante, uma vez que α_s dependa unicamente de v_s . α_s é uma constante, deste modo a relação dada pela equação (4.230) se torna.

$$\delta(t) = \sqrt{12\alpha_s t}. \quad (4.231)$$

Considerando a afirmação feita por Goodman (1965) no paragrafo anterior e substituindo a equação (4.231) no perfil quadrático de distribuição de temperatura (4.212) este pode ser reescrito como

$$\frac{v(x)}{v_s} = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{12\alpha_s t}}\right]^2. \quad (4.232)$$

Goodman (1965) afirma que ρc pode ser considerado constante, uma vez que estas propriedades variam pouco com a temperatura ao se trabalhar com sólidos. Em virtude da mudança de variável feita no início da seção em (4.202), tem-se v proporcional a $T(x, t)$, assumindo que a variação da condutividade térmica com a temperatura seja dada por

$$k = k_0 \left(1 + \beta \frac{T}{T_s} \right), \quad (4.233)$$

Em função da definição condutividade térmica, a difusividade na superfície pode ser escrita como.

$$\alpha_s = \frac{k_0(1 + \beta)}{\rho c}. \quad (4.234)$$

Definindo o parâmetro adimensional como

$$y = \frac{x\sqrt{\rho c}}{2\sqrt{k_0 t}}, \text{ e} \quad (4.235)$$

rescrevendo a equação (4.232) em função de (4.234) e (4.235) tem-se

$$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{3(1 + \beta)}} \right]^2. \quad (4.236)$$

Sendo a expressão dada em (4.236) a aproximação feita por um polinômio quadrático para a distribuição de temperatura ao longo de um corpo semi-infinito com propriedades térmicas variando com a temperatura.

4.6.3 Resultados para o Perfil Quadrático

De modo a convalidar os resultados obtidos com o método da integral dupla, estes serão comparados com os resultados de Goodman (1964) e com a solução numérica apresentada por Yang (1958). A Tabela 4.7 mostra um comparativo entre os perfis obtidos com o método da integral simples e com o método da integral dupla. Pode-se observar que ambas as aproximações assumem a mesma forma característica exceto pelos valores das constantes.

Assim como no artigo original de Goodman (1964), o critério de avaliação será a influência da variação do parâmetro beta na distribuição de temperatura. Os valores assumidos para beta serão zero e meio, e a interpretação física destes valores pode ser feita com auxílio das equações (4.233) e (4.234). Para beta igual a zero, as equações anteriormente citadas deixa claro que se tem a aplicação fundamental onde não há variação das propriedades com a variação da temperatura. Contudo, para beta igual à meio, as mesmas equações mostram que um aumento da temperatura ocasiona o aumento da condutividade térmica e da difusividade e, conseqüentemente, maior taxa na transferência de calor.

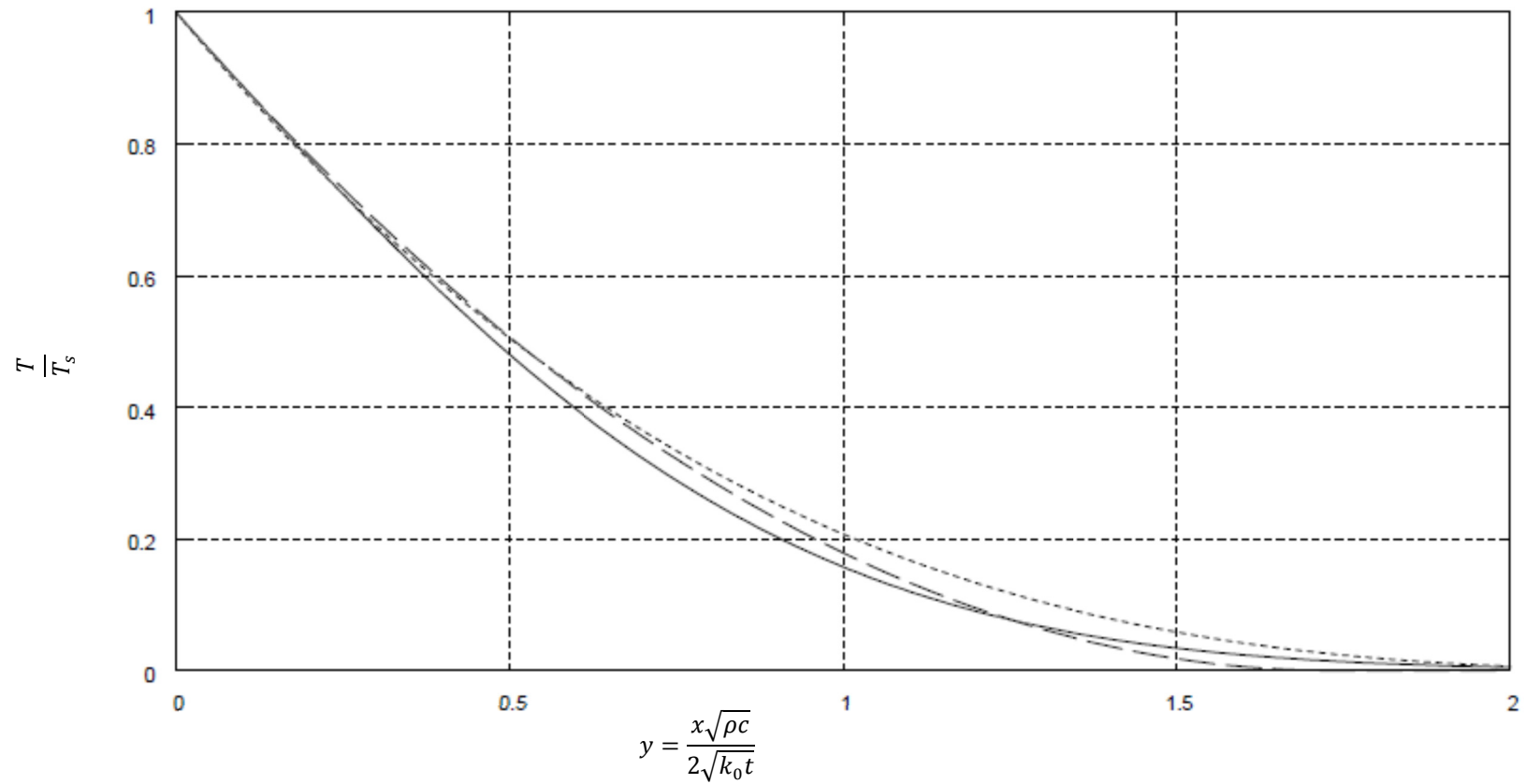
Tabela 4.7 Comparativo do Perfil Quadrático com Propriedades Variando

Método	Perfil de Temperatura
Integral Simples (Perfil Cubico)	$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{6(1 + \beta)}} \right]^3$
Integral Dupla (Perfil Quadrático)	$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{3(1 + \beta)}} \right]^2$

A Figura 31 mostra a distribuição de temperatura com beta igual a zero, para o método Goodman (1964), o método da integral dupla e o método de Yang (1958). Como pode ser observado, há melhor desempenho do método da integral dupla com perfil quadrático do que o método da integral simples com perfil cúbico. Tal resultado não é estranho, uma vez que para beta igual a zero, tem-se o caso fundamental envolvendo a condição de contorno de primeira espécie analisada no início deste capítulo.

Na Figura 32 tem-se a distribuição de temperatura para o caso em que beta é igual a meio, ou seja, tem-se um aumento do calor transferido com o aumento da temperatura. Assim como na análise anterior, aqui a distribuição de temperatura dada pelo método da integral dupla também será comparada com as soluções de Goodman (1964) e de Yang (1958). Como pode ser observado, há maior coerência entre as soluções dada pelo método da integral dupla com perfil quadrático e solução numérica de Yang (1958), mesmo com o método de Goodman (1964) estar se utilizando de uma aproximação polinomial de maior grau.

Figura 31 Distribuição de Temperatura com Beta Zero e Perfil Quadrático

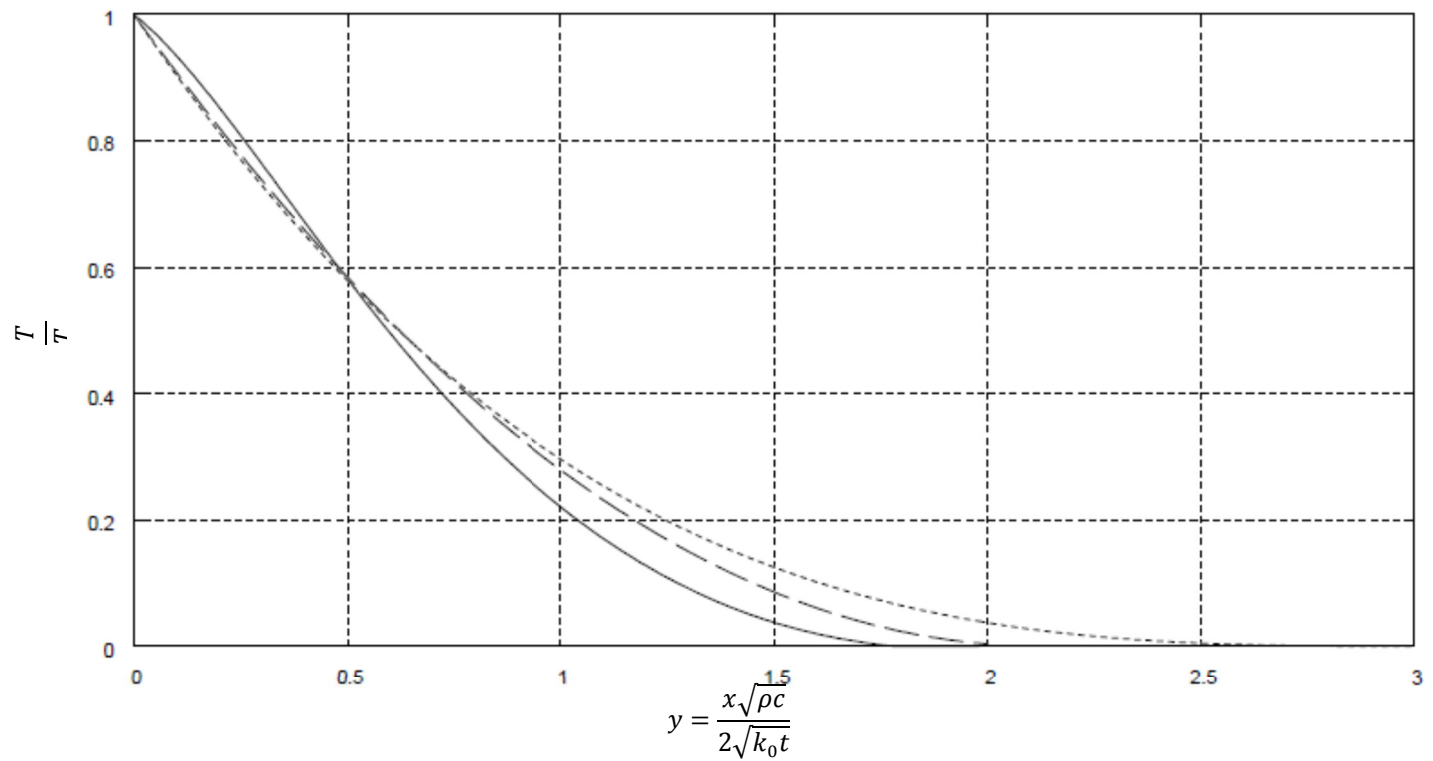


Linha Continua: Solução (K.T. Yang, Journal Appl. Mech. 1958).

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Quadrático)

Linha Pontilhada. Método da Integral Simples (Perfil Cubico, Goodman (1964))

Figura 32 Distribuição de Temperatura para Beta Meio e perfil Quadrático



Linha Continua: Solução (K.T. Yang, Journal Appl. Mech. 1958).

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Quadrático)

Linha Pontilhada: Método da Integral Simples (Perfil Cubico, Goodman 1964)

Aplicação com Perfil Cubico

Considerando a equação da condução do calor dada em (4.203) bem como o perfil cúbico de distribuição de temperatura dado em (4.218) e aplicando o método da integral dupla tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dx \quad (4.237)$$

Inicialmente trabalhando com o lado esquerdo de (4.237),tem-se

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx dx = \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial v}{\partial t} dx dx = \frac{3v_s \delta(t)}{20} \frac{d\delta(t)}{dt} + \frac{\delta^2(t)}{5} \frac{dv_s}{dt}. \quad (4.238)$$

O desenvolvimento do lado direito de (4.237) exige um pouco mais de cuidado sendo assim será feito com um maior numero de passos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dx \\ = \int_0^{\delta(t)} \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} (x, t) dx - \int_0^{\delta(t)} \alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x} (0, t) dx. \end{aligned} \quad (4.239)$$

O cálculo do segundo termo do lado direito de (4.239), deve ser feito com uso do método da integral simples. Deste modo, considerando novamente a equação da condução dada em (4.203) e realizando uma única integração ao longo da distância fenomenológica tem-se:

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial v}{\partial t} dx = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx \text{ e} \quad (4.240)$$

$$-\alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x} (0, t) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta v_s}{4} \right]. \quad (4.241)$$

Voltando com (4.241) no segundo termo de (4.239) e calculando a integral resulta em:

$$\int_0^{\delta(t)} -\alpha(v(0)) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) dx = \delta(t) \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta v_s}{4} \right]. \quad (4.242)$$

Para o cálculo do primeiro termo de (4.239) será assumido que $\alpha(v)$ tome a maior variação possível, a qual é dada por α_s , e ocorre na superfície uma vez que é neste local que existe o maior gradiente de temperatura. Então,

$$\int_0^{\delta(t)} \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dx = \int_0^{\delta(t)} \alpha_s \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dx = -\alpha_s v_s. \quad (4.243)$$

De posse dos resultados dados em (4.242) e (4.243) a expressão (4.239) fica completamente determinada, sendo igual a:

$$\int_0^{\delta(t)} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dx = \alpha_s v_s + \delta(t) \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta(t) v_s}{4} \right]. \quad (4.244)$$

Voltando com os termos (4.238) e (4.244) em (4.237) obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d}{dt} [\delta^2(t) v_s] = 20 \alpha_s v_s, \quad (4.245)$$

cuja condição inicial é

$$\delta(0) = 0. \quad (4.246)$$

A resolução da equação diferencial (4.245) sujeita à condição de contorno (4.246) resulta em:

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{d}{dt} [\delta^2(t) v_s] dt = 20 \int_0^t \alpha_s v_s dt \quad e \quad (4.247)$$

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{20}{v_s} \int_0^t \alpha_s v_s dt} . \quad (4.248)$$

Goodman (1965) sugere como uma aplicação da equação acima supor que uma temperatura T_s seja prescrita na superfície de modo que v_s seja constante. Desde que α_s dependa unicamente de v_s , α_s é uma constante, sendo assim, a relação apresentada pela equação (4.248) se torna:

$$\delta(t) = \sqrt{20\alpha_s t} \quad (4.249)$$

Considerando a afirmação feita por Goodman (1965) e substituindo a equação (4.249) no perfil cúbico de temperatura (4.218), este pode ser reescrito como

$$\frac{v(x)}{v_s} = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{20\alpha_s t}} \right]^3 . \quad (4.250)$$

Goodman (1965) afirma que para sólidos ρc pode ser considerado constante uma vez estes variam muito pouco com a temperatura. Em virtude da mudança de variável feita em (4.202) no início dessa seção, tem-se v proporcional a $T(x, t)$, ao mesmo tempo pode-se assumir que a variação da condutividade térmica com a temperatura seja dada por

$$k = k_0 \left(1 + \beta \frac{T}{T_s} \right) . \quad (4.251)$$

Em função da definição condutividade térmica, a difusividade na superfície pode ser escrita como

$$\alpha_s = \frac{k_0(1 + \beta)}{\rho c} . \quad (4.252)$$

Definindo o parâmetro adimensional

$$y = \frac{x\sqrt{\rho c}}{2\sqrt{k_0 t}}, e \quad (4.253)$$

rescrevendo a equação (4.250) em função de (4.252) e (4.253) resulta em

$$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{5(1 + \beta)}} \right]^3. \quad (4.254)$$

A expressão dada em (4.254) é uma aproximação feita com um polinômio cúbico, para a distribuição de temperatura ao longo de um corpo semi-infinito com propriedades térmicas variando com a temperatura.

4.6.4 Resultados para o Perfil Cúbico

De modo a avaliar o desempenho do perfil cúbico, se utilizará a mesma metodologia aplicada ao perfil quadrático. A Tabela 4.8 mostra o perfil de distribuição de temperatura para ambos os métodos integrais. Como pode ser observado, ambas as aproximações assume a mesma forma característica se diferenciando apenas pelas constantes numéricas.

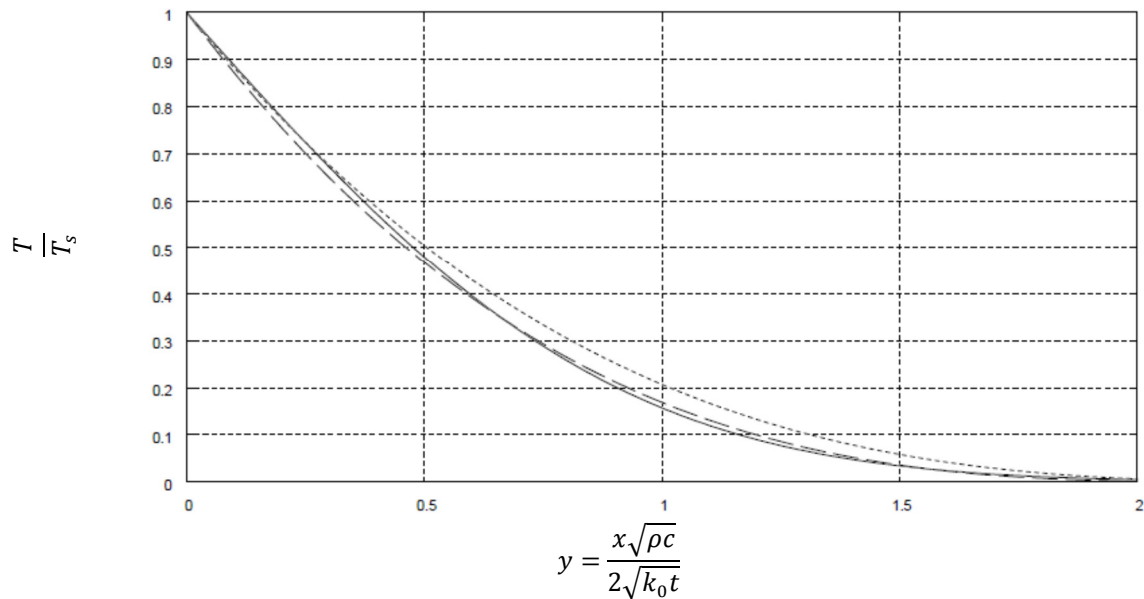
Tabela 4.8 Comparativo do Perfil Cúbico com Propriedades Variando

Método	Perfil de Temperatura
Integral Simples (Perfil Cubico)	$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{6(1 + \beta)}} \right]^3$
Integral Dupla (Perfil Cubico)	$\frac{T}{T_s} = \left[1 - \frac{y}{\sqrt{5(1 + \beta)}} \right]^3$

Assim como no caso anterior, aqui também será analisada a influência variação do parâmetro beta na distribuição de temperatura. A interpretação física deste parâmetro foi discutida na seção (4.6.3) e, portanto, não será comentada novamente.

A Figura 33 mostra a distribuição de temperatura para o caso canônico em que beta é igual à zero. Como pode ser observado, há uma melhora significativa na precisão do método da integral dupla. Importante ressaltar que este comportamento já foi estudado no início deste capítulo na seção (4.1.4).

Figura 33 Distribuição de Temperatura com Beta Zero e Perfil Cúbico

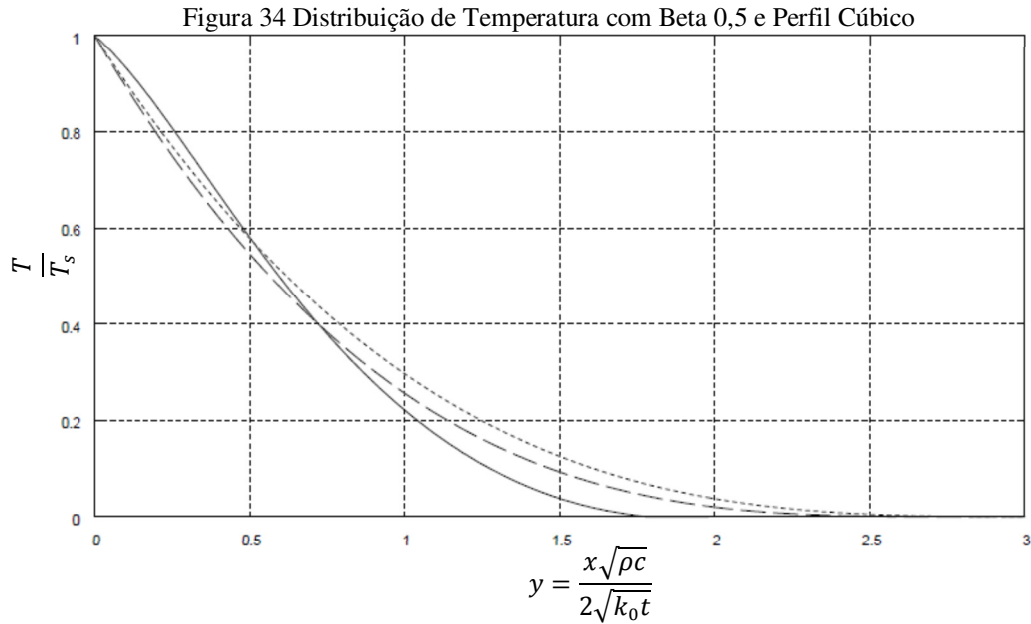


Linha Contínua: Solução (K.T. Yang, Journal Appl. Mech. 1958).

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Cúbico)

Linha Pontilhada. Método da Integral Simples (Perfil Cúbico, Goodman 1964)

A Figura 34 mostra a distribuição de temperatura com beta igual a meio, tendo ambos métodos integrais aproximações polinomiais cúbicas. Como pode ser observado há uma melhor precisão entre o método da integral dupla e a solução numérica de Yang (1958)



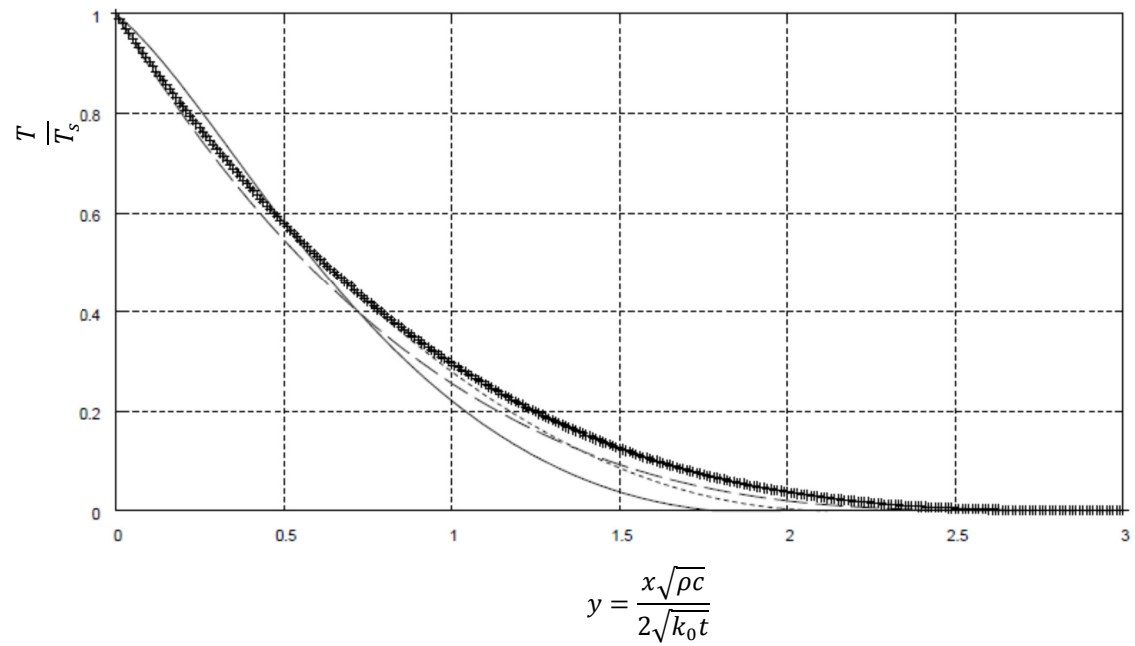
Linha Contínua: Solução (K.T. Yang, Journal Appl. Mech. 1958).

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Cúbico)

Linha Pontilhada. Método da Integral Simples (Perfil Cúbico, Goodman 1964)

O resultado apresentado anteriormente na Figura 34, apenas mostra que o método da integral dupla é capaz de gerar uma melhor aproximação com uso do perfil cúbico quando comparado com o método de Goodman (1964) com aproximação polinomial de mesmo grau. Contudo a análise da Figura 35, onde se têm as duas soluções apresentadas pelo da integral dupla com perfil quadrático e cúbico, comparadas com a solução de Yang (1958) e de Goodman (1964). Fica evidente que houve degradação da solução no método da integral dupla quando este utiliza a aproximação cúbica (linha tracejada), pois quando comparada com a aproximação realizada pelo mesmo método com perfil quadrático (linha pontilhada), Notasse que o perfil quadrático (pontilhada) tem melhor precisão.

Figura 35 Comparativo dos Métodos Integrais com Beta Positivo



Linha Continua: Solução (K.T. Yang, Journal Appl. Mech. 1958).

Linha Pontilhada: Método da Integral Dupla (Perfil Quadrático)

Linha Tracejada: Método da Integral Dupla (Perfil Cúbico)

Linha em Cruz: Método da Integral Simples (Perfil Cúbico)

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, o método da integral dupla foi aplicado a seis diferentes tipos de problemas de transferência de calor em regime transitório. A análise dos casos revelou que o método da integral dupla possui maior sensibilidade em relação ao perfil escolhido, quando se tem uma geometria plana semi-infinita com condição de contorno de primeira ou terceira espécie. A sensibilidade em relação à escolha do perfil está ligada ao fato de que esses dois problemas são do ponto de vista da matemática análogos, ao problema originalmente resolvido por Volkov (1965) no desenvolvimento do método.

Contudo, nas aplicações envolvendo corpo semi-infinito com geração interna ou condição de contorno de segunda espécie, o método da integral dupla apresentou sua sensibilidade reduzida em relação à escolha do perfil. Esta redução na sensibilidade fica evidente uma vez que, na aplicação envolvendo a condição de contorno de segunda espécie, foi necessária a utilização de um perfil cúbico para se obter uma boa aproximação para a distribuição de temperatura. Já no caso envolvendo geração interna, o uso do perfil quadrático em ambos os métodos integrais gerou soluções com o mesmo grau de precisão. No entanto, com o uso do perfil cúbico, o método da integral dupla foi capaz de gerar uma melhor aproximação da solução em relação à solução analítica exata bem como, a do método da integral simples.

As maiores dificuldades no uso do método da integral dupla foram encontradas na aplicação envolvendo uma parede de espessura finita, com condições de contorno de primeira e segunda espécie. A adversidade dentro deste exemplo se encontra no fato de que não é mais necessária a aproximação do vetor gradiente na superfície por uma relação integral e além disso, não faz mais sentido à derivação ao longo da distância fenológica, uma vez que o corpo não se comporta mais como um sólido semi-infinito. No entanto, mesmo com toda a adversidade, o método foi capaz de fornecer uma boa aproximação para o autovalor, assim como para a distribuição de temperatura. Desta forma, tem-se um método analítico aproximado de fácil aplicação e com capacidade de fornecer resultados de boa precisão quando comparado aos métodos convencionais.

Referência

ALTEMANI, C. A. C. **Notas de aulas IM 535 Método de Volumes de Controles**, Campinas, SP, 2011.

BOYCE, W. E. Elementary Equations and Boundary Value Problems. **Journal Of Optimization Theory and Applications**, v. 2, P. 260-273, 1968

BROMLEY, L. A. Effect of Heat Capacity of Condensate. In: **Ind. Eng. Chem.**, v. 44, n. 12, p. 2966–2969, 1952.

CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C. **Conduction of Heat in Solids**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1959.

EL-GENK, M. S.; CRONENBERG, A. W. On the thermal stability of a frozen crust in forced flow on an insulated finite wall. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 22, n. 12, p. 1719–1723, dez 1979b.

_____. Some improvements to the solution of Stefan-like problems. In: **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 22, n. 1, p. 167–170, jan 1979a.

GOODMAN, T. R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer. **Advances in Heat Transfer**. [S.l.]: Elsevier, 1964. v. Volume 1p. 51–122.

_____. The heating of Slabs With Arbitrary Heat Inputs. **Journal of. Aero. Sci.** P. 187-188, 1959.

_____. The Heat Balance integral and Its application to Problems Involving Change of Phase. **Transactions ASME**, p 335-345, 1958.

_____; SHEA, J.J. The Melting of Finite Slabs, **Journal Appl. Mech**, v. 32, p. 16-24, 1960.

LANGFORD, D. The Heat Balance Integral Method , **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 16, p. 2324-2328, 1973

MERK, H.J. **Applied. Scientific Research**, vol.4, Section A, p.435-452

MILANEZ, L. F. **Desenvolvimento teorico e verificacao experimental de modelos para a solidificação em geometria esférica**, 1982, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade estadual de campianças, SP.

OZISIK, M.N. **Approximate Analytic Methods, Heat Conduction**, ch.9, **John Wiley & Sons**, 1980

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York:Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

SCHLICHTING, H. **Boundary Layer Theory**, ch. 8, Seventh Edition , Ed. McGraw-Hill, 1968

SUCEC, J. **Approximate solution to a class of transient forced convection problems**. Gas Turbine Conference and Products Show. **Anais...** [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1977gatu.confR....S>>. Acesso em: 25 abr. 2012. , mar 1977

_____.The double integral method applied to separation calculation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 38, n. 15, p. 2771–2777, out 1995.

_____. Extension of a modified integral method to boundary conditions of prescribed surface heat flux. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 22, n. 5, p. 771–774, maio 1979.

STEWART, J. **Cálculo Vol. I** , Pioneira Thompson Learning, 2001

TSE-FOU, Z. Approximate analysis of heat transfer in transpired boundary layers with effects of prandtl number. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 19, n. 5, p. 513–521, maio 1976.

VOLKOV, V. N. **Journal of Engineering Physics and Thermophysics**, v. 9, n. 5, p. 371–374, 1965.

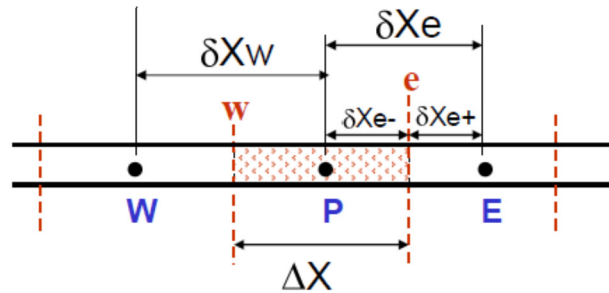
ZILL, D.G., CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**, V1 , São Paulo: Thompson Learning, 3ª Edição, 2001.

YANG, K. Transient Conduction in a Semi-Infinite Solid With Variable Thermal Conductivity.
Journal Of Applied Mechanics, Vol. 25, P. 146-147, 1958.

APÊNDICE A- MÉTODO DE VOLUMES DE CONTORLE

Este apêndice tem como objetivo apresentar o método numérico de volumes de controle utilizado na convalidação dos resultados obtidos pelos métodos da integral simples e integral dupla, o texto aqui apresentado se apoia no livro de Patankar,(1980), assim como nas notas de aulas do Professor Dr. Carlos Alberto C. Altemani. De modo a organizar a apresentação do método, inicialmente a equação da condução será discretizada a partir de um nó interno malha computacional como mostra a Figura 36**Erro! Fonte de referência não encontrada.**, posteriormente será feita a discretização das condições de contorno de primeira e segunda espécie, uma vez que neste trabalho estas condições foram tratadas através da adição de termos fonte.

Figura 36 Volume de Controle Interno



Fonte: Altemani, (2011)

A1. Discretização da Equação da Difusão

A discretização da equação da condução consiste em transformar a equação diferencial parcial em uma equação algébrica que relaciona o valor da variável dependente T num ponto nodal da grade computacional com aqueles de seus vizinhos. Deste modo, considerando inicialmente a equação da condução com geração interna em regime transitório tem-se.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (\text{A.1})$$

De modo a se obter a discretização no espaço e no tempo da equação (A.1), inicialmente deve-se integrar esta equação em relação a variável espacial e em relação a variável temporal. A integração no espaço é feita sobre um volume de controle interno da grade computacional Figura 36, já a integral na variável temporal é realizada no intervalo de tempo compreendido entre t e $t + \Delta t$, resultando assim em:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} S d\Omega dt \quad (\text{A.2})$$

Uma vez que as integrais são realizadas em domínios diferentes, estas podem ser calculadas de forma independente, ou seja, pode-se trocar a ordem de cálculo das integrais, o que será útil no cálculo do primeiro termo do lado esquerdo de (A.2). Trabalhando inicialmente com o primeiro termo do lado esquerdo de (A.2) tem-se:

$$\int_{\Omega} \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\Omega = \int_{\Omega} \rho c (T_p - T_p^0) d\Omega \quad (\text{A.3})$$

De posse do resultado apresentado em (A.3) deve-se calcular a integral envolvendo o volume, para tanto será considerado que em cada instante tempo há uma temperatura uniforme no interior do volume de controle, sendo assim:

$$\int_{\Omega} \rho c (T_p - T_p^0) d\Omega = \rho c (T_p - T_p^0) \Delta\Omega \quad (\text{A.4})$$

Voltando com (A.4) no lado esquerdo de (A.2)

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt = \rho c (T_p - T_p^0) \Delta\Omega \quad (\text{A.5})$$

Após a completa determinação do termo do lado esquerdo da expressão (A.2), A seguir são calculado os termos do lado direito dessa expressão. Trabalhando inicialmente com integral espacial:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} S d\Omega \quad (\text{A. 6})$$

Pelo Teorema da Divergência

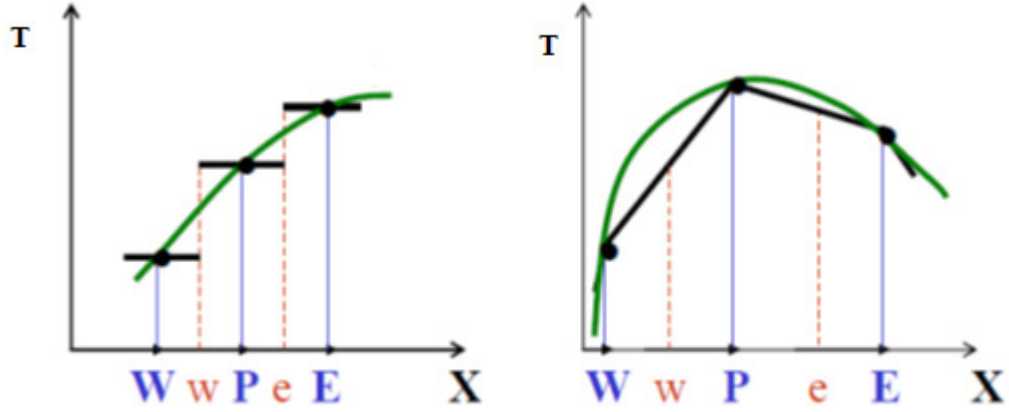
$$\oint_{SC} k \frac{\partial T}{\partial x} d\vec{A} + \int_{\Omega} S d\Omega \quad (\text{A.7})$$

Considerando o volume de controle unidimensional dado na Figura 36 e desenvolvendo a expressão anterior sobre este volume:

$$\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_{\Omega} S d\Omega = 0 \quad (\text{A.8})$$

Os dois primeiros termos da equação (A.8) indicam as taxas de transferência de calor por difusão para o interior do volume de controle através das faces e e w , o terceiro termo indica a taxa de geração associada à temperatura. E um fenômeno em regime permanente a soma destes três termos deve ser nula. Cabe observar que até o presente momento nenhuma aproximação foi feita. No entanto, a partir de agora, devem se adotar aproximações para o perfil de temperatura para que se possam obter expressões algébricas para os termos difusivos e termo fonte. O método de volume de controles permite a utilização de perfis distintos para a aproximação dos termos difusivo e termo fonte. Sendo assim se utilizará um perfil linear por partes para os termos difusivos, uma vez que este tipo de aproximação permite o cálculo da derivada nas interfaces dos volumes de controle, e se utilizará um perfil em degrau para aproximar o termo fonte, pois a integração deste perfil ao longo do domínio é mais fácil e não reque o cálculo do fluxo nas interfaces dos volumes de controle.

Figura 37 Perfil em Degrau a Esquerda e Perfil Linear por Partes a Direita



Fonte: Altemani, (2011)

Escrevendo os termos difusivos dados na equação (A.8) em função do perfil linear por partes tem-se:

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_e \approx kA \frac{(T_e - T_p)}{\delta x_e} \quad (\text{A.9})$$

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_w \approx kA \frac{(T_p - T_w)}{\delta x_w} \quad (\text{A.10})$$

Considerando o perfil em degrau para aproximação do termo de fonte da equação (A.8) tem-se:

$$\int_{\Omega} S_T d\Omega \approx \bar{S}_T \Delta\Omega \quad (\text{A.11})$$

Quando o termo fonte depende da variável T , a dependência deve ser linearizada na forma apresentada a seguir.

$$S_T = S_C + S_p T_P \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (A.12) em (A.11) resulta

$$\int_{\Omega} S_T d\Omega \approx (S_C + S_p T_p) \Delta\Omega \quad (\text{A.13})$$

Voltando com as equações (A.5), (A.9), (A.10) e (A.13) em (A.3) tem-se:

$$\begin{aligned} \rho c (T_p - T_p^0) \Delta\Omega &= \int_t^{t+\Delta t} \left[kA \frac{(T_e - T_p)}{\delta x_e} - kA \frac{(T_p - T_w)}{\delta x_w} \right] dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} (S_C + S_p T_p) \Delta\Omega dt \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

O cálculo das integrais temporais presentes no lado esquerdo da expressão (A.14) requer a adoção de um esquema particular de integração do perfil de variação da temperatura com o tempo em cada volume de controle. Deste modo, assumindo que em cada ponto nodal a variação da temperatura pode ser representada como uma combinação linear dos valores nos instantes inicial e final do intervalo de tempo considerado tem-se.

$$\int_t^{t+\Delta t} T_p dt = [f T_p + (1-f) T_p^0] \Delta t, \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (\text{A.15})$$

Aplicando a estratégia dada em (A.15) a cada uma das temperaturas de (A.14) se obtém a equação discretizada para um valor arbitrário da função f .

$$\begin{aligned} a_p T_p &= f(a_E T_E + a_W T_W) + (1-f)(a_E T_E^0 + a_W T_W^0) \\ &+ (a_p^0 - (1-f)(a_E + a_W - S_p \Delta\Omega)) T_p^0 + S_C \Delta\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde cada um dos parâmetros desta equação é dado a seguir.

$$a_E = \frac{k_e A_e}{\delta x_e} \quad (\text{A.17})$$

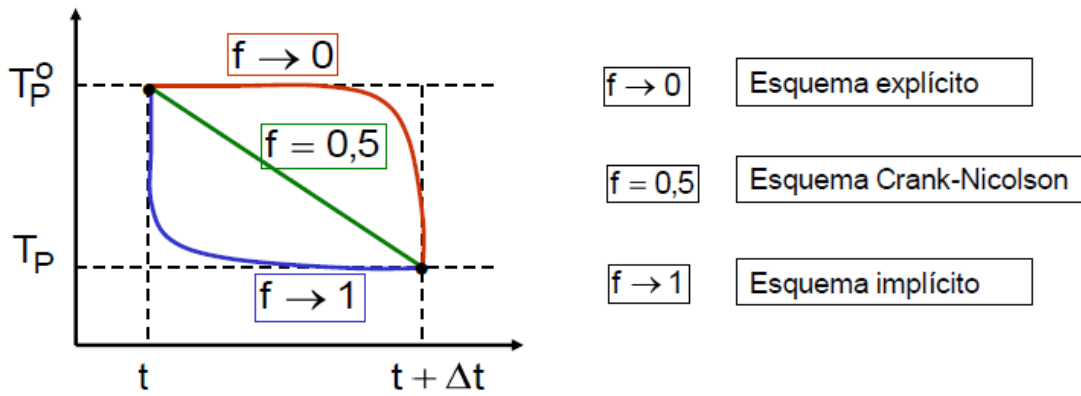
$$a_W = \frac{k_w A_w}{\delta x_w} \quad (\text{A.18})$$

$$a_p^0 = \rho c \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{A.19})$$

$$a_p = f(a_E + a_W - S_P \Delta \Omega) + a_p^0 \quad (\text{A.20})$$

A figura abaixo mostra a influência da escolha do parâmetro f na rapidez da convergência do método.

Figura 38 Variação do Parâmetro f na obtenção do Método de Discretização



Fonte: Altemani, (2011)

Substituindo $f = 1$ na equação (A.16) se obtêm a equação (A. 21) que consiste no esquema implícito de discretização. A escolha deste método se deve ao fato que este é de fácil implementação e tem-se a garantia de resultados fisicamente realistas para qualquer passo do tempo.

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + (a_p^0 T_P^0 + S_C \Delta \Omega) \quad (\text{A. 21})$$

De posse da discretização da equação da difusão no interior do domínio (A. 21), será feito agora o tratamento das condições de contorno.

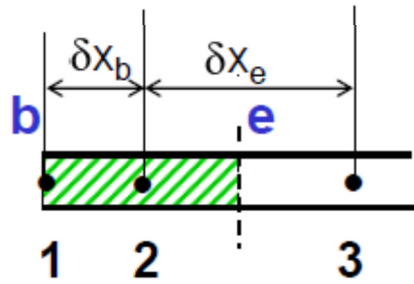
A2. Tratamento das Condições de Contorno

Neste trabalho foram utilizadas as condições de contorno Dirichlet não homogênea, Von Neumann homogênea e Von Neumann não homogênea. A seguir serão obtidas as formas de discretização para cada uma das condições de contorno.

A2.1 Condição de Contorno de Dirichlet

A Figura 39 mostra um volume de controle de fronteira onde se tem uma condição de contorno de primeira espécie. Quando o valor de T é especificado na fronteira do domínio ele deixa de ser uma incógnita na equação do volume de controle.

Figura 39 Condição de Contorno de Primeira Espécie



Fonte: Altemani, (2011)

A integração da equação da condução no volume de controle de fronteira resulta na seguinte expressão algébrica:

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx}\right)_b + \int_{\Omega} S_T d\Omega = 0 \quad (\text{A. 22})$$

Onde os termos da equação anterior são dados por:

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_e \approx kA_e \frac{(T_3 - T_2)}{\delta x_e} \quad (\text{A. 23})$$

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_b \approx kA_b \frac{(T_2 - T_1)}{\delta x_b} \quad (\text{A. 24})$$

$$\int_{\Omega} S_T d\Omega \approx (S_C + S_p T_p) \Delta\Omega \quad (\text{A. 25})$$

Voltando com os termos anteriores na equação (A. 22) se obtêm:

$$(a_E + a_W - S_p \Delta\Omega) T_2 = a_E T_3 + a_W T_1 + S_C \Delta\Omega \quad (\text{A.26})$$

Os termos desta equação referentes ao ponto nodal de fronteira $(a_W, a_W T_1)$ podem ser vistos de duas maneiras. A equação discretizada é a mesma e os resultados obtidos devem ser iguais para uma mesma grade computacional. No entanto neste trabalho se utilizara o tratamento em que se associa a condição de contorno a termos fontes adicional, esta estratégia permite se obter um número de equações discretizadas igual ao número de volumes de controles do domínio. Deste modo considerando inicialmente os termos de discretização da equação (A.26) tem-se:

$$a_E = \frac{kA_e}{\delta x_e} \quad (\text{A.27})$$

$$a_W = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$a_P = a_E - \left(-\frac{kA_b}{\delta x_b} - S_p \Delta\Omega \right) \quad (\text{A.29})$$

$$b = \frac{kA_b}{\delta x_b} T_1 + S_C \Delta\Omega \quad (\text{A. 30})$$

Definindo os termos fontes adicionais como:

$$S_{cA} = \frac{kA_b}{\delta x_b} \left(\frac{T_1}{\Delta\Omega} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$S_{pA} = -\frac{kA_b}{\delta x_b} \left(\frac{1}{\Delta\Omega} \right) \quad (\text{A.32})$$

Reescrevendo as equações (A.27), (A.28), (A.29) e (A. 30) em função de S_{pA} e S_{cA} tem-se.

$$a_p = a_E - (S_{pA} + S_p)\Delta\Omega \quad (\text{A. 33})$$

$$b = (S_{cA} + S_c)\Delta\Omega \quad (\text{A. 34})$$

Voltando com (A.32) e (A. 33) em (A.26) pode-se rescrever esta equação do seguinte modo.

$$a_p T_2 = a_E T_3 + b \quad (\text{A. 35})$$

A equação (A. 35) consiste na equação algébrica da discretização da condição de contorno de primeira espécie em função dos termos fontes adicionais.

A2.2 Condição de Contorno de Von Neumann

Neste trabalho foram utilizadas as condições de contorno de Von Neumann homogenia e Von Neumann não homogenia, o tratamento de discretização é idêntico em ambos os casos, sendo assim será assumido um fluxo arbitrário j_b o qual é particularizado para cada um dos casos quando conveniente.

Considerando um volume de controle na fronteira no qual esteja aplicado um fluxo térmico

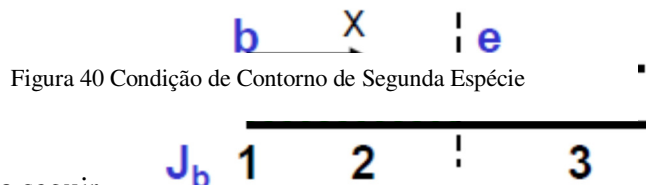
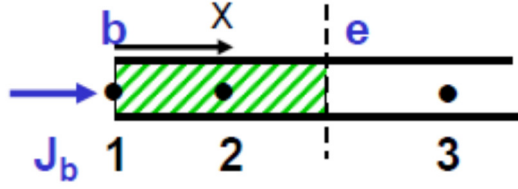


Figura 40 Condição de Contorno de Segunda Espécie

dado por j_b como mostra a dada a seguir.



Para o ponto nodal 1 tem-se:

$$-\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_b = j_b A_b \quad (\text{A. 36})$$

Considerando a expressão do balanço de energia para o volume de controle de fronteira tem-se:

$$\left(kA \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx}\right)_b + \int_{\Omega} S_T d\Omega \quad (\text{A. 37})$$

Substituindo na expressão (A. 37) o termo dado por (A. 36) e reorganizando os termos se obtêm a seguinte expressão algébrica:

$$(a_E - S_p \Delta\Omega) T_2 = a_E T_3 + \left(\frac{j_b A_b}{\Delta\Omega} + S_c\right) \Delta\Omega \quad (\text{A. 38})$$

Assim como no tratamento da condição de contorno de primeira espécie aqui também será feito o uso dos termos fontes adicionais, deste modo considerando inicialmente os termos de discretização da equação (A. 38) tem-se.

$$a_E = \frac{kA_e}{\delta x_e} \quad (\text{A. 39})$$

$$a_W = 0 \quad (\text{A. 40})$$

$$a_p = (a_E - S_p \Delta \Omega) \quad (\text{A. 41})$$

$$b = \left(\frac{j_b A_b}{\Delta \Omega} + S_c \right) \Delta \Omega \quad (\text{A. 42})$$

Definindo os termos fontes adicionais como:

$$S_{cA} = \frac{(j_b A_b)}{\Delta \Omega} \quad (\text{A. 43})$$

$$S_{pA} = 0 \quad (\text{A. 44})$$

Pode-se reescrever o parâmetro b do seguinte modo

$$b = (S_{cA} + S_c) \Delta \Omega \quad (\text{A. 45})$$

Desta forma a equação (A. 38) passa a ser escrita como dada em (A. 46) que consiste na equação algébrica da discretização da condição de contorno de segunda espécie em função dos termos fontes adicionais.

$$a_p T_2 = a_E T_3 + b \quad (\text{A. 46})$$

A discretização da equação da condução assim como das condições de contorno geram para cada volume de controle expressões algébricas que relacionam o ponto nodal central com os seus respectivos pontos nodais à esquerda e a direita. Matematicamente esta relação é expressa pela equação

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad (\text{A. 47})$$

A relação (A. 47) aplicada aos N pontos nodas geram $(N - 2)$ equações algébricas quando as condições de contorno são tratadas com o uso dos termos fontes adicionais. O algoritmo utilizado na resolução do sistema linear é o TDMA – (Tridiagonal Matrix Algorithm), uma vez que este é um algoritmo direto para a resolução desse tipo de siste