

TESE DEFENDIDA POR Amarildo Tabone
Paschoalini
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 24/08/01
Loir Afonso Moreira
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Um elemento finito quadrilateral quadrático
com refinamento hierárquico para análise
estática e dinâmica de placas e cascas**

Autor : **Amarildo Tabone Paschoalini**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

79/2001

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**Um elemento finito quadrilateral quadrático
com refinamento hierárquico para análise
estática e dinâmica de placas e cascas**

Autor : **Amarildo Tabone Paschoalini**

Orientador: **Loir Afonso Moreira**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 24 de agosto de 2001

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P262e

Paschoalini Amarildo Tabone

Um elemento finito quadrilateral quadrático com refinamento hierárquico para análise estática e dinâmica de placas e cascas / Amarildo Tabone Paschoalini. -- Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Loir Afonso Moreira.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Placas e cascas elásticas. 3. Integração numérica. 4. Análise elástica (Engenharia). I. Moreira, Loir Afonso. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

**Um elemento finito quadrilateral quadrático
com refinamento hierárquico para análise
estática e dinâmica de placas e cascas**

Autor : **Amarildo Tabone Paschoalini**

Orientador: **Loir Afonso Moreira**

**Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, Presidente
UNICAMP - Campinas - SP**

**Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior
UNESP - Ilha Solteira - SP**

**Prof. Dr. Antonio Pedro Clapis
UFU - Uberlândia - MG**

**Prof. Dr. Fernando Iguti
UNICAMP - Campinas - SP**

**Prof. Dr. Robson Pederiva
UNICAMP - Campinas - SP**

Campinas, 24 de agosto de 2001

2001/2256

Dedicatória

À minha avó Teresa, à minha mãe Delmira,
aos meus irmãos, Devanir e Márcia,
e à minha querida esposa Silmara,
com todo amor e carinho.

Agradecimentos

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Loir Afonso Moreira por todo apoio e experiência que contribuíram para que este trabalho fosse realizado com êxito.

Aos amigos do Departamento de Projeto Mecânico e Departamento de Mecânica Computacional pelo convívio profissional e incentivo.

Ao PICD da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira pelo apoio financeiro.

Aos docentes e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Ilha Solteira pela contribuição na realização deste trabalho e pelo incentivo.

À minha esposa Silmara pelo apoio, incentivo, amor e carinho.

Resumo

PASCHOALINI, Amarildo Tabone, *Um Elemento Finito Quadrilateral Quadrático com Refinamento Hierárquico para Análise Estática e Dinâmica de Placas e Cascas*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 285 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho apresenta um elemento subparamétrico hierárquico baseado na versão p do método dos elementos finitos para a análise de placas e cascas.

O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento finito quadrilateral quadrático de nove nós da família Lagrangeana, baseado na degeneração de um elemento sólido tridimensional e na formulação de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação, sucessivos refinamentos hierárquicos são usados, objetivando remover a característica de rigidez excessiva do elemento na análise de placas e cascas finas.

Tal formulação é aplicada na análise estática e dinâmica de placas e cascas (finas e moderadamente grossas). Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação. Os resultados numéricos obtidos nos exemplos de aplicação são comparados com soluções analíticas e outras técnicas numéricas, disponíveis na literatura.

Palavras Chave: método dos elementos finitos, versão p , integração numérica, placa, casca.

Abstract

PASCHOALINI, Amarildo Tabone, *A Hierarchical Quadrilateral Quadratic Finite Element for Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 285 p. Tese (Doutorado)

This research presents a subparametric hierarchical finite element based on the p -version concept for the analysis of plates and shells.

The first level of approximation for the solution is obtained through the isoparametric quadrilateral quadratic nine-node Lagrangean shell finite element, based on the degeneration of three-dimensional solid element and the Reissner-Mindlin's formulation, with consistent numerical integration. For other approximation levels, successive hierarchical refinements are used, aiming to remove the characteristic of excessive rigidity of the isoparametric element in the analysis of thin plates and shells.

Such formulation is applied to static and dynamic analysis of plates and shells (thin and moderately thick). Numerical examples are presented to show the accuracy, efficiency and advantages of present formulation. Numerical results obtained for the application examples are compared with analytical solutions and other numerical techniques, available in the open literature.

Key Words: finite element method, p -version, numerical integration, plate, shell.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA	8
2.1	Introdução	8
2.2	Formulações superparamétrica, isoparamétrica e subparamétrica.....	9
2.3	Formulação subparamétrica hierárquica.....	10
3	CAMPO DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO DE CASCA.....	17
3.1	Introdução	17
3.2	Determinação dos pontos situados sobre a superfície média.....	17
3.3	Determinação dos pontos situados fora da superfície média.....	19
3.4	Determinação do campo de deslocamento do elemento isoparamétrico	20
3.5	Determinação do campo de deslocamento do elemento paramétrico.....	26
4	ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA.....	34
4.1	Introdução	34
4.2	Estado de deformação específica com relação ao sistema local	38

5	FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA.....	48
5.1	Introdução	48
5.2	Formulação das características do elemento.....	50
5.3	Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca	55
5.3.1	Determinação da submatriz $[K_{ij}]$	56
5.3.2	Determinação da submatriz $[K_{i,mn}]$	68
5.3.3	Determinação da submatriz $[K_{kl,j}]$	75
5.3.4	Determinação da submatriz $[K_{kl,mn}]$	75
5.4	Determinação da matriz de massa do elemento de casca	80
5.4.1	Determinação da submatriz $[M_{ij}]$	81
5.4.2	Determinação da submatriz $[M_{i,mn}]$	85
5.4.3	Determinação da submatriz $[M_{kl,j}]$	87
5.4.4	Determinação da submatriz $[M_{kl,mn}]$	88
5.5	Determinação do vetor de carga do elemento de casca	89
5.5.1	Vetor de carga do elemento correspondente às cargas distribuídas $\{f q^e\}$	89
5.5.1.1	Determinação da submatriz $\{f q_i\}$	91
5.5.1.2	Determinação da submatriz $\{f q_{pk}\}$	92
5.5.2	Vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo $\{f b^e\}$	93
5.5.2.1	Determinação da submatriz $\{f b_i\}$	93
5.5.2.2	Determinação da submatriz $\{f b_{pk}\}$	95
5.5.3	Vetor de carga do elemento correspondente às cargas concentradas $\{f r^e\}$	96
5.5.3.1	Determinação da submatriz $\{r_i\}$	96
5.5.3.2	Determinação da submatriz $\{r_{pk}\}$	96
5.5.4	Vetor de carga total $\{f\}$	97
5.6	Integração numérica.....	97
6	FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA.....	98
6.1	Introdução	98
6.2	Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais	98
6.3	Análise estática	100
6.4	Análise dinâmica	103
6.5	Programa computacional	106

7 RESULTADOS NUMÉRICOS	111
7.1 Introdução	111
7.2 Análise estática	112
7.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme	112
7.2.2 Placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal	117
7.2.3 Placa circular engastada com carga concentrada central	122
7.2.4 Placa quadrada inclinada engastada com carga distribuída	127
7.2.5 Viga retorcida 90° ("twisted beam")	134
7.2.6 Casca cilíndrica submetida à ação de seu peso próprio	139
7.2.7 Cilindro puncionado com carga concentrada unitária	143
7.2.8 Casca semi-esférica puncionada com carga concentrada unitária	148
7.2.9 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos	151
7.2.10 Viga reta engastada sujeita à carregamentos variados	155
7.3 Análise dinâmica	158
7.3.1 Casca cilíndrica engastada em uma extremidade	158
7.3.2 Casca cilíndrica engastada em seus lados	169
7.3.3 Casca esférica engastada em uma extremidade	180
7.3.4 Placa circular engastada nas extremidades	186
7.2.5 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos	193
8 CONCLUSÕES.....	199
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	201
APÊNDICE A DETERMINAÇÃO DOS VETORES E VERSORES	207
A.1 Determinação dos vetores r_1 , r_2 e r_3	207
A.2 Determinação dos versores v_1 , v_2 e v_3	209
APÊNDICE B ELEMENTOS DAS MATRIZES	213
B.1 Elementos da matriz $[A(\xi, \eta)]$	213
B.2 Derivadas dos deslocamentos locais com relação às coordenadas locais	213
B.3 Elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$	215
B.4 Elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$	217
B.5 Elementos da matriz $[B_{pk}(\xi, \eta)]$	219

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Deformação de uma reta normal à superfície média do elemento de placa.	1
Figura 1.2	Elemento de casca (b) obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional (a).	3
Figura 1.3	Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.	4
Figura 1.4	Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.	5
Figura 2.1	Formulações superparamétrica (a), isoparamétrica (b) e subparamétrica (c) do elemento linear.	10
Figura 2.2	Elementos unidimensionais e funções de interpolação do tipo padrão: linear (a), quadrática (b) e cúbica (c).	13
Figura 2.3	Funções de interpolação e variáveis para as aproximações linear (a), hierárquica quadrática (b) e hierárquica cúbica (c).	16
Figura 3.1	Elemento de casca da família Lagrangeana, sua superfície média e os nós i associados a ela.	17
Figura 3.2	Vetor $\bar{r}$ que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento de casca.	18
Figura 3.3	Espessura t_i da casca no nó i e os vetores $\bar{m}_i$ e $\bar{m}$, que definem, respectivamente, os pontos P e Q, fora da superfície média.	19
Figura 3.4	Sistemas locais de referência (x' , y' , z') associados ao ponto O e ao nó i , e seus respectivos versores.	20
Figura 3.5	Deslocamento $\bar{\delta}_i$ apresentado pelo nó i , genérico, da superfície média do elemento de casca.	21
Figura 3.6	Deslocamento $\bar{\Delta}_i$ apresentado pelo ponto P.	22
Figura 3.7	Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Lagrangeana.	25

Figura 3.8	Definição dos lados do elemento.	26
Figura 3.9	Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro grau na expansão quadrática.	30
Figura 3.10	Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro e quarto graus na expansão quadrática.....	30
Figura 3.11	Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus na expansão quadrática.	31
Figura 4.1	Vetor $\vec{R}$ que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.	34
Figura 4.2	Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.	39
Figura 5.1	Estado de tensão no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.	48
Figura 6.1	Refinamentos da solução obtida na análise isoparamétrica, introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro (1ª reanálise), quarto (2ª reanálise) e quinto (3ª reanálise) graus.	102
Figura 6.2	Fluxograma do programa computacional para a análise estática de placas e cascas.	108
Figura 6.3	Fluxograma do programa computacional para a análise dinâmica de placas e cascas.	109
Figura 7.1	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.005$).	113
Figura 7.2	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.01$).	114
Figura 7.3	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.05$).	115
Figura 7.4	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.1$).	116
Figura 7.5	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.005$).	118
Figura 7.6	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.01$).	119
Figura 7.7	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.05$).	120

Figura 7.8	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.1$).	121
Figura 7.9	Placa circular engastada com carga concentrada central e malha de 12 elementos.	122
Figura 7.10	Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.005$).	123
Figura 7.11	Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.01$).	124
Figura 7.12	Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.05$).	125
Figura 7.13	Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.1$).	126
Figura 7.14	Placa quadrada inclinada engastada em uma extremidade com carga distribuída.	127
Figura 7.15	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	128
Figura 7.16	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	129
Figura 7.17	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	130
Figura 7.18	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	131
Figura 7.19	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	132
Figura 7.20	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.	133
Figura 7.21	Viga retorcida 90° (" <i>twisted beam</i> ").	134
Figura 7.22	Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.0267$).	135
Figura 7.23	Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.0267$).	136
Figura 7.24	Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.000267$).	137

Figura 7.25	Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.000267$).....	138
Figura 7.26	Casca cilíndrica submetida à ação do seu peso próprio.	139
Figura 7.27	Deslocamento v_1 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	140
Figura 7.28	Deslocamento w_2 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	141
Figura 7.29	Deslocamento w_3 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	142
Figura 7.30	Cilindro puncionado com carga concentrada unitária.	143
Figura 7.31	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades $t/R=0.01$	144
Figura 7.32	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.002$	145
Figura 7.33	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.01$	146
Figura 7.34	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.002$	147
Figura 7.35	Casca semi-esférica puncionada com carga concentrada unitária.	148
Figura 7.36	Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 18°	149
Figura 7.37	Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 0.1°	150
Figura 7.38	Placa quadrada apoiada nos quatro cantos com carga distribuída uniforme.	151
Figura 7.39	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.01$	152
Figura 7.40	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.001$	153
Figura 7.41	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.0001$	154
Figura 7.42	Malhas de discretização utilizadas na viga reta engastada.	155
Figura 7.43	Carregamentos atuantes na viga reta engastada em uma extremidade.	156
Figura 7.44	Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização regular e carregamentos variados.	157

Figura 7.45	Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização trapezoidal e carregamentos variados.....	157
Figura 7.46	Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização trapezoidal e carregamentos variados.....	157
Figura 7.47	Casca cilíndrica engastada em uma extremidade.....	158
Figura 7.48	Primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	161
Figura 7.49	Segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	161
Figura 7.50	Terceira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	162
Figura 7.51	Quarta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	162
Figura 7.52	Quinta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	163
Figura 7.53	Sexta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	163
Figura 7.54	Sétima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	164
Figura 7.55	Oitava frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	164
Figura 7.56	Nona frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	165
Figura 7.57	Décima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	165
Figura 7.58	Décima primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	166
Figura 7.59	Décima segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	166
Figura 7.60	Modos de vibrar (1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malha de discretização de 7x7 elementos.....	167

Figura 7.61	Modos de vibrar (7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malha de discretização de 7x7 elementos.	168
Figura 7.62	Primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	172
Figura 7.63	Segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	172
Figura 7.64	Terceira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	173
Figura 7.65	Quarta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	173
Figura 7.66	Quinta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	174
Figura 7.67	Sexta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	174
Figura 7.68	Sétima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	175
Figura 7.69	Oitava frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	175
Figura 7.70	Nona frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	176
Figura 7.71	Décima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	176
Figura 7.72	Décima primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	177
Figura 7.73	Décima segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.	177
Figura 7.74	Modos de vibrar (1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º) para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malha de discretização de 7x7 elementos.	178
Figura 7.75	Modos de vibrar (7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º) para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malha de discretização de 7x7 elementos.	179
Figura 7.76	Casca esférica engastada em uma extremidade.	180

Figura 7.77	Primeira frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	182
Figura 7.78	Segunda frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	182
Figura 7.79	Terceira frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	183
Figura 7.80	Quarta frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	183
Figura 7.81	Quinta frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.....	184
Figura 7.82	Modos de vibrar (1º, 2º, 3º, 4º e 5º) da casca esférica engastada em uma extremidade, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5º grau ($p = 5$) e malha de discretização 7x7 elementos.....	185
Figura 7.83	Placa circular engastada nas extremidades com malha de 12 elementos.....	187
Figura 7.84	Primeira frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	189
Figura 7.85	Segunda frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	189
Figura 7.86	Terceira frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	190
Figura 7.87	Quarta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	190
Figura 7.88	Quinta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	191
Figura 7.89	Sexta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.....	191
Figura 7.90	Placa quadrada apoiada nos quatro cantos.....	194
Figura 7.91	Primeira frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.....	195
Figura 7.92	Segunda frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.....	195

Figura 7.93	Terceira frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.	196
Figura 7.94	Quarta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.	196
Figura 7.95	Quinta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.	197
Figura 7.96	Sexta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.	197
Figura A.1	Vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média e vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes à superfície.	207
Figura A.2	Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao ponto O e versor $\vec{i}$, associado à direção X do sistema de referência global.	209
Figura A.3	Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao nó i	212

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi, \eta)$ de 3º grau ($p = 3$), 4º grau ($p = 4$) e 5º grau ($p = 5$), associadas aos lados do elemento ($k = 1, 2, 3$ e 4) e ao elemento ($k = 5$ e 6).	29
Tabela 7.1	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.005$).	113
Tabela 7.2	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.01$).	114
Tabela 7.3	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.05$).	115
Tabela 7.4	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.1$).	116
Tabela 7.5	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.005$).	118
Tabela 7.6	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.01$).	119
Tabela 7.7	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.05$).	120
Tabela 7.8	Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.1$).	121
Tabela 7.9	Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.005$).	123
Tabela 7.10	Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.01$).	124
Tabela 7.11	Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.05$).	125

Tabela 7.12	Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.1$).	126
Tabela 7.14	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.....	129
Tabela 7.15	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.....	130
Tabela 7.16	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.....	131
Tabela 7.17	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.....	132
Tabela 7.18	Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.....	133
Tabela 7.19	Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.0267$).....	135
Tabela 7.20	Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.0267$).....	136
Tabela 7.21	Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.000267$).....	137
Tabela 7.22	Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.000267$).....	138
Tabela 7.23	Deslocamento v_1 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	140
Tabela 7.24	Deslocamento w_2 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	141
Tabela 7.25	Deslocamento w_3 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.	142
Tabela 7.26	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.01$	144
Tabela 7.27	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.002$	145

Tabela 7.28	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.01$	146
Tabela 7.29	Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.002$	147
Tabela 7.30	Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 18°	149
Tabela 7.31	Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 0.1°	150
Tabela 7.32	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.01$	152
Tabela 7.33	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.001$	153
Tabela 7.34	Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.0001$	154
Tabela 7.35	Deslocamento normalizado da viga reta com malhas e carregamentos variados. .	156
Tabela 7.36	Frequências naturais normalizadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a e 6^a) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade.....	159
Tabela 7.37	Frequências naturais normalizadas (7^a , 8^a , 9^a , 10^a , 11^a e 12^a) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade.....	160
Tabela 7.38	Frequências naturais normalizadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a e 6^a) para a casca cilíndrica engastada em seus lados.	170
Tabela 7.39	Frequências naturais normalizadas (7^a , 8^a , 9^a , 10^a , 11^a e 12^a) para a casca cilíndrica engastada em seus lados.	171
Tabela 7.40	Frequências naturais normalizadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a e 5^a) para a casca esférica engastada em uma extremidade.	181
Tabela 7.41	Frequências naturais simétricas normalizadas da placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.	188
Tabela 7.43	Frequências naturais normalizadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a e 6^a) para a placa quadrada apoiada nos cantos.....	194

NOMENCLATURA

Letras latinas

$X, Y \text{ e } Z$	Eixos do sistema cartesiano de referência global.
$x', y' \text{ e } z'$	Eixos do sistema cartesiano de referência local.
$\bar{r}$	Vetor posição de qualquer ponto da superfície média do elemento.
N_i	Funções de forma isoparamétricas.
$M_{pk}(\xi, \eta)$	Funções de forma hierárquicas.
t	Espessura.
$\bar{m}$	Vetor ao longo da espessura de qualquer ponto da superfície média.
$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \text{ e } \bar{v}_3$	Versores do sistema de referência local.
$u_i, v_i \text{ e } w_i$	Componentes do deslocamento $\bar{\delta}_i$ nas direções X, Y e Z.
u_i	Translação do nó i na direção x' .
v_i	Translação do nó i na direção y' .
w_i	Translação do nó i na direção z' .
$u, v \text{ e } w$	Componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$ nas direções X, Y e Z.
$\{a\}$	Matriz coluna dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos.
$\{a_i\}$	Vetor dos deslocamentos e rotações nodais.
$\{a_{pk}\}$	Vetor dos parâmetros hierárquicos.
$a_{pk}, b_{pk} \text{ e } c_{pk}$	Componentes do vetor $\bar{\delta}_{pk}$ segundo os eixos X, Y e Z.
$[J]$	Matriz Jacobiano da transformação.
$ J $	Determinante da matriz Jacobiano.
$[B]$	Matriz das derivadas das funções de forma.
$[B_i]$	Matriz das derivadas das funções de forma isoparamétricas.
$[B_{pk}]$	Matriz das derivadas das funções de forma hierárquicas.

E	Módulo de elasticidade longitudinal.
$[D']$	Inversa da matriz das constantes elásticas do material.
$\bar{q}$	Forças de superfície.
$q_{x'}, q_{y'}$ e $q_{z'}$	Componentes das forças de superfície com relação aos eixos x', y' e z' .
$\bar{b}$	Forças de corpo.
$b_{x'}, b_{y'}$ e $b_{z'}$	Componentes das forças de corpo com relação aos eixos x', y' e z' .
$\{q'\}$	Vetor das componentes das forças de superfície.
$\{b'\}$	Vetor das componentes das forças de corpo.
δU	Energia de deformação virtual.
$\{\delta \epsilon'\}$	Vetor das deformações específicas virtuais.
$\{\sigma'\}$	Vetor de tensões, segundo o sistema de referência local.
$\{u\}$	Deslocamentos dos pontos do elemento de casca, com relação ao sistema de referência global.
$\{\delta a\}$	Vetor dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.
$[I]$	Matriz identidade.
$\{f_q^e\}$	Vetor das forças de superfície.
$\{f_b^e\}$	Vetor das forças de corpo.
$[K^e]$	Matriz de rigidez do elemento de casca.
ρ	Densidade de massa por unidade de volume do elemento.
$[M]$	Matriz de massa.
$[K]$	Matriz de rigidez.
W_p	Fator de ponderação da integração numérica.
m	Número total de pontos de integração.
$\{fq^e\}$	Vetor de carga do elemento correspondente às cargas distribuídas nas faces externas.
$\bar{q}_i$	Carga distribuída associada ao nó i .
q_{xi}, q_{yi} e q_{zi}	Componentes segundo o sistema de referência global de $\bar{q}_i$.
$\bar{q}$	Carga distribuída na superfície média do elemento.
$\{fq_i\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento isoparamétrico.

$\{fq_{pk}\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico.
$\{fb^e\}$	Vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo.
$\bar{b}$	Força de corpo.
b_x, b_y e b_z	Componentes segundo o sistema de referência global de $\bar{b}$.
$\{fb_i\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento isoparamétrico.
$\{fb_{pk}\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico.
$\{fr^e\}$	Vetor de carga do elemento correspondente às cargas concentradas.
$\{r_i\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento isoparamétrico.
$\{r_{pk}\}$	Submatriz que caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico.
ne	Número total de elementos.
$\{f_i^e\}$	Vetor de carga correspondente ao elemento isoparamétrico.
$\{f_{pk}^e\}$	Vetor de carga correspondente ao elemento hierárquico.
$\{a\}$	Vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos.
$\{\ddot{a}\}$	Vetor relacionado com as acelerações nodais e parâmetros hierárquicos.
$\{f\}$	Vetor de carga.
n_{iso}	Número de graus de liberdade da análise isoparamétrica.
n_{h3}	Número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise.
n_{h4}	Número total de variáveis hierárquicas introduzidas na segunda reanálise.
n_{h5}	Número total de variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise.
n_{hi}	Número total de variáveis hierárquicas introduzidas na i -ésima reanálise.

Letras gregas

$\bar{\delta}_i$	Deslocamento do nó i da sua superfície média.
$\bar{\Delta}_i$	Deslocamento de um ponto fora sua superfície média.
α_i	Rotação do nó i em torno do eixo y' .
β_i	Rotação do nó i em torno do eixo x' .

$\bar{\delta}_{pk}$	Vetor dos parâmetros hierárquicos.
$[\theta]$	Matriz dos cossenos diretores.
$\{\varepsilon'\}$	Matriz das deformações específicas e distorções segundo o sistema de referência local (x', y', z') .
ν	Coefficiente de <i>Poisson</i> .
$[\phi]$	Matriz das constantes elásticas do material.
$\{\sigma'\}$	Matriz das tensões atuantes segundo o sistema de referência local (x', y', z') .
$\delta u', \delta v' \text{ e } \delta w'$	Deslocamentos virtuais.
δW	Trabalho virtual.
$\{\delta u'\}$	Vetor dos deslocamentos virtuais.
δU	Energia de deformação virtual.
$\{\delta \varepsilon'\}$	Vetor das deformações específicas virtuais.
$\{\sigma'\}$	Vetor de tensões, segundo o sistema de referência local.
$\{u\}$	Deslocamentos dos pontos do elemento de casca, com relação ao sistema de referência global.
$\{\delta a\}$	Vetor dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.
ρ	Densidade de massa por unidade de volume.
ξ	Coordenada curvilínea do sistema de referência local na direção da superfície média do elemento.
η	Coordenada curvilínea do sistema de referência local na direção da superfície média do elemento.
ζ	Coordenada linear do sistema de referência local na direção da espessura do elemento.
λ	Quadrado da frequência angular.
$\{\phi\}$	Vetor de deslocamentos nodais.
ω	Frequência angular.
λ_i	Autovalores.
$\{\phi_i\}$	Autovetores.
$[\Lambda]$	Matriz diagonal que contém os autovalores.
$[\Phi]$	Matriz que contém os autovetores.

Superescritos

'	Sistema de referência local.
<i>e</i>	Elemento.

Subscritos

1	Componente nas direções X ou x' .
2	Componente nas direções Y ou y' .
3	Componente nas direções Z ou z' .
$h3$	Sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise (3º grau).
$h4$	Sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise (4º grau).
$h5$	Sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise (5º grau).
hi	Sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise.
i, j	Nó da superfície média; Elemento isoparamétrico.
iso	Análise isoparamétrica.
k	Lado do elemento ($k = 1, 2, 3$ ou 4); Elemento ($k = 5$ ou 6).
mn, kl	Elemento hierárquico.
p	Grau do polinômio.
b	Forças de corpo.
q	Forças de superfície.
r	Cargas concentradas.
x, y, z	Eixos do sistema de referência global.
x', y', z'	Eixos do sistema de referência local.

1 INTRODUÇÃO

Placas e cascas são componentes estruturais planos e curvos, respectivamente. Caracterizam-se por apresentar espessura muito menor do que suas outras dimensões. A espessura é medida na direção perpendicular à sua superfície média.

As teorias de placas e cascas se baseiam em simplificações da teoria da elasticidade tridimensional. Em essência, as distintas teorias de placas e cascas se diferenciam nas hipóteses sobre a rotação de retas normais à superfície média (Figura 1.1). Assim, a teoria clássica de placas finas de *Kirchhoff* estabelece que estas retas normais se mantêm retas e ortogonais à superfície média após a deformação [Kirchhoff, 1876]. Por outro lado, teorias como a de *Reissner-Mindlin* mantêm a condição que as retas normais se mantêm retas mas não perpendiculares à superfície média após a deformação ([Reissner, 1945], [Mindlin, 1951]).

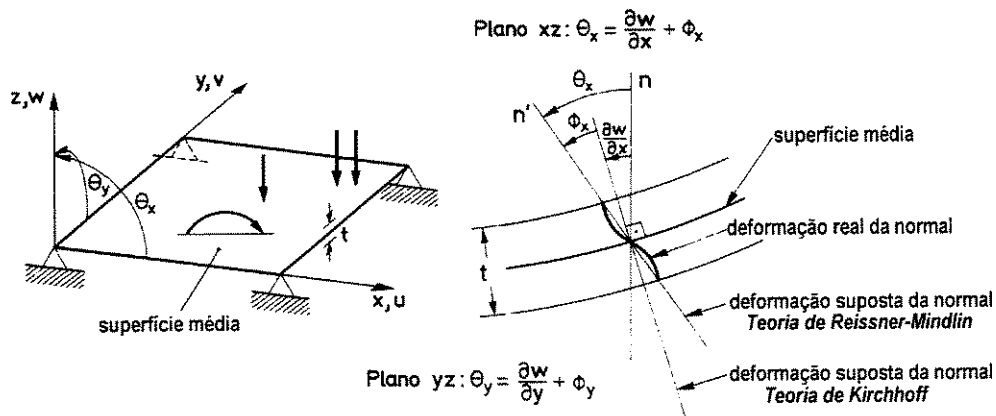


Figura 1.1 Deformação de uma reta normal à superfície média do elemento de placa.

A teoria de placas de *Kirchhoff* se baseia nas seguintes hipóteses:

- (1) Nos pontos da superfície média $u = v = 0$ (os pontos da superfície média se movem apenas verticalmente);
- (2) Todos os pontos contidos em uma normal da superfície média têm o mesmo deslocamento vertical;
- (3) A tensão normal σ_z é desprezível;
- (4) Um elemento reto da placa, normal a sua superfície média, após a deformação, permanece perpendicular àquela superfície e mantém seu comprimento inicial.

As hipóteses 1, 2 e 4 permitem definir o campo de deslocamento através da espessura da placa. A terceira hipótese afeta o estado de tensão e o estado de deformação.

Os elementos de placa baseados na teoria de *Kirchhoff* têm uma utilização restrita a placas finas, ou seja, a relação entre a espessura t e dimensão característica a é menor do que $1/20$ ($t/a < 0,05$) [Timoshenko *et al.*, 1959]. A formulação alternativa baseada na teoria de placas de *Reissner-Mindlin* é válida para placas de pequena e grande espessura, e permite observar as dificuldades dos elementos de *Kirchhoff* [Timoshenko *et al.*, 1959].

A teoria de placas de *Reissner-Mindlin* se baseia principalmente em diminuir a restrição na hipótese de ortogonalidade da normal, o que introduz o efeito de deformação por cortante transversal, permitindo a análise de placas grossas. Adicionalmente, os elementos de placa baseados na teoria de *Reissner-Mindlin* são muito mais simples que os de *Kirchhoff* e precisam unicamente de continuidade de classe C^0 . Em contrapartida, a desvantagem da utilização de elementos de placa de *Reissner-Mindlin* é que aparecem dificuldades numéricas em sua aplicação a placa de pequena espessura, obtendo soluções muito mais rígidas por causa da influência excessiva dos termos da cortante transversal (efeito de bloqueio). Estas dificuldades se resolvem com técnicas de integração reduzida e/ou utilizando campos de deformações de cortante transversal impostas e outros procedimentos similares.

A maior simplicidade dos elementos de placa de *Reissner-Mindlin* e o fato de que podem ser aplicados indistintamente a problemas de placas finas e grossas justificam a sua popularidade, como demonstra o grande número de publicações científicas sobre os mesmos ([Zienkiewicz *et al.*, 1964], [Zienkiewicz *et al.*, 1989], [Hinton *et al.*, 1988] e [Crisfield, 1986]). Muitos destes elementos têm sido incorporados com êxito na maioria dos programas comerciais para análise de estruturas pelo método dos elementos finitos [ABACUS, 1989], [ADINA, 1989], [ANSYS, 1989], [MSC/DYNA, 1989], [NASTRAN, 1972] e [SAMCEF, 1991], etc.

A teoria de placas de *Reissner-Mindlin* se obtém da de *Kirchhoff*, simplesmente rejeitando as hipóteses de ortogonalidade da normal durante a deformação da placa.

Assim, as três primeiras hipóteses da teoria de *Kirchhoff* são mantidas e a quarta hipótese sobre ortogonalidade da normal se modifica como segue:

- (4) Um elemento reto da placa, normal a sua superfície média, após a deformação permanece reto e mantém seu comprimento inicial, porém, não é mais perpendicular à superfície média.

As cascas são geralmente de superfície curva, logo, parece lógico que os elementos finitos utilizados para sua análise também o sejam. Existem três opções para a análise de cascas com elementos finitos curvos [Oñate, 1992]:

1. desenvolver elementos curvos a partir da teoria clássica de cascas;
2. utilizar elementos sólidos tridimensionais de pequena espessura;
3. desenvolver elementos curvos a partir da degeneração de elementos sólidos.

A opção 1 é bastante complexa em razão das dificuldades intrínsecas das teorias tradicionais de cascas. Os elementos desenvolvidos segundo esta opção teriam muitos graus de liberdade e derivadas de alta ordem no campo de deslocamento. Por outro lado, existem muitas teorias de cascas com diferentes expressões para as definições da geometria e campo de deslocamento, por causa da inexistência de um critério geral sobre quantos e quais termos devem ser considerados.

A opção 2 elimina em grande parte os problemas associados à multiplicidade de teorias de cascas. De fato, um dos primeiros procedimentos para análise de cascas foi a utilização direta de elementos sólidos tridimensionais de pequena espessura.

Esta alternativa tem vários inconvenientes. Além dos problemas de alto custo da solução devido a inclusão de nós através da espessura, se produz um mal condicionamento da matriz de rigidez para espessuras pequenas em razão da grande diferença entre os coeficientes de rigidez dos nós sobre a espessura e dos nós sobre a superfície. Adicionalmente, o uso de vários nós através da espessura "desperdiça", de certa maneira, a hipótese admitida para cascas de que a normal permanece reta durante a deformação. Por outro lado, em razão da pequena espessura da casca, a tensão normal da superfície média pode ser considerada nula sobre a espessura, efeito que torna desnecessária a utilização direta da teoria tridimensional.

Portanto, fazendo uso de certas hipóteses simplificativas pode-se modificar os elementos sólidos tridimensionais para obter outros mais adequados e econômicos ao comportamento real das cascas (opção 3). As hipóteses utilizadas na degeneração de elementos sólidos são essencialmente as mesmas utilizadas para os elementos de placa e casca plana de *Reissner-Mindlin*.

Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo método dos elementos finitos já se estenda por décadas, o estabelecimento de um modelo para análise estática e dinâmica, que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas), ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores.

Ahmad *et al.* (1970) apresentaram uma formulação baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, através da redução de sua dimensão na direção da espessura (Figura 1.2). Nesta formulação, considera-se que as retas normais à superfície média permaneçam retas após a deformação, sem no entanto, continuarem normais a ela. Este fato possibilita que sejam levadas em conta as tensões de cisalhamento na direção da espessura (Teoria de *Reissner-Mindlin*).

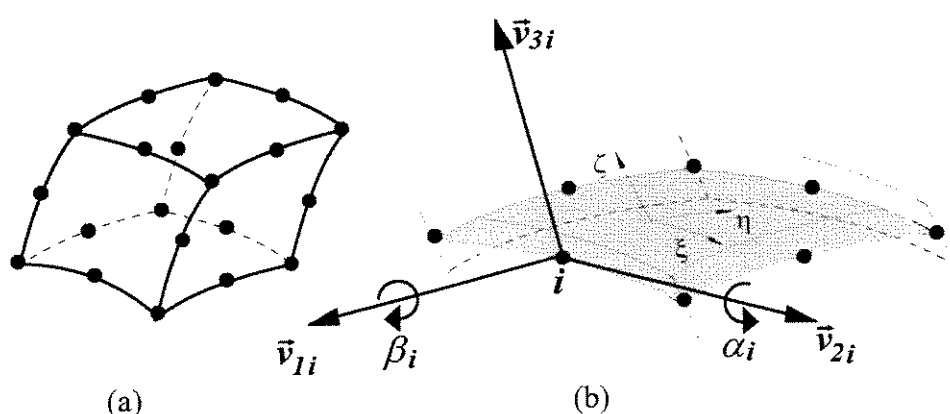


Figura 1.2 Elemento de casca (b) obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional (a).

A geometria do elemento é descrita pelas coordenadas dos nós, i , situados na superfície média e por vetores nodais $\bar{v}_{3i}$ (Figura 1.2), que definem os pontos que estão fora desta superfície.

Em cada nó, consideram-se cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos globais (u_i, v_i, w_i) e duas rotações (α_i e β_i) do vetor $\vec{v}_{3i}$ em torno de dois outros vetores: $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, normais a ele (Figura 1.2).

A matriz de rigidez do elemento é obtida da maneira usual, a partir da integração numérica da expressão:

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (1.1)$$

através da utilização de 2 pontos de integração na direção ζ (direção ao longo da espessura) e, para o caso de elemento quadrático, (3×3) pontos de integração na superfície média (ξ e η), caracterizando, assim, uma *integração numérica consistente*, uma vez que este é o número de pontos necessário para integrar exatamente a Equação (1.1) [Bathe, 1982]. As funções de forma utilizadas para a obtenção da matriz $[B]$ da equação anterior são aquelas da família Serendipity, que para o caso de elemento quadrático, consideram oito nós na superfície média (Figura 1.3).

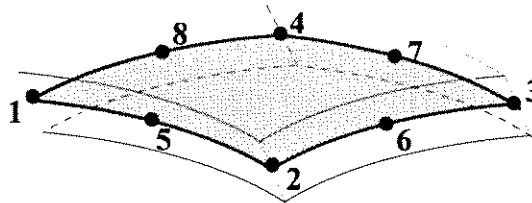


Figura 1.3 Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

Os resultados obtidos por este elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Reissner-Mindlin*. Entretanto, com a redução da espessura, os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas.

A partir de então, um grande número de autores estudaram este elemento, fazendo propostas para melhorar seu comportamento. Com a introdução da *Técnica de Integração Reduzida*, proposta por Zienkiewicz *et al.* (1971), conseguiu-se uma melhora considerável no desempenho do elemento para as aplicações de placas e cascas finas. Neste caso, para a obtenção da matriz de rigidez (Equação 1.1) em vez de (3×3) utilizam-se (2×2) pontos de integração na superfície média, caracterizando, desta forma, o que se convencionou chamar de *integração reduzida*. A *integração totalmente reduzida* mostrou resultados notáveis [Zienkiewicz *et al.*, 1971] para as situações de placas e cascas finas. Para o elemento de Zienkiewicz consideram-se também as funções de forma da família Serendipity com 8 nós na superfície média, conforme mostra a Figura 1.3.

Bathe *et al.* (1985, 1986, 2000) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

- (1) o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência;
- (2) o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
- (3) o elemento deve ser simples, barato e utilizar cinco ou seis graus de liberdade por nó;
- (4) o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo espúrio nulo, a integração numérica reduzida não deve ser utilizada;
- (5) o elemento deve estar livre do efeito de bloqueio;
- (6) o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
- (7) o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
- (8) o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana (Figura 1.4) tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas do que o elemento de oito nós ([Cook, 1981], [Verhegghe *et al.*, 1986]), e para o caso geral de flexão de placas, o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadrilaterais lineares, quadráticos e cúbicos [Pugh *et al.*, 1978]. Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução e onde a geometria é curva [Park *et al.*, 1986].

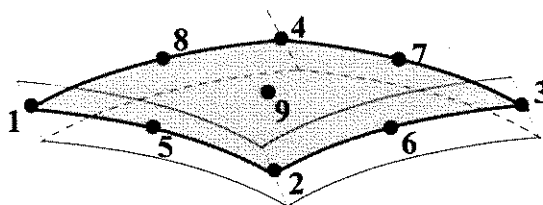


Figura 1.4 Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências [Oñate, 1992]. A integração exata do elemento quadrilateral quadrático de nove nós exige 3×3 pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e 3×3 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante (*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se

excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* (2x2 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos espúrios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, o que distorce a solução.

Processos de refinamento na análise por elementos finitos têm sido utilizados atualmente para estudar a convergência da solução de muitos problemas em engenharia. Em geral, tais processos, quando aplicados numa formulação, produzem soluções com aproximação melhorada.

No processo de refinamento convencional do método dos elementos finitos, o qual é chamado de refinamento h , a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho h dos elementos. Neste processo, o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento mantêm-se fixos. Esta é a prática comum na análise por elementos finitos, que consiste em resolver um problema várias vezes. Normalmente, a utilização deste tipo de refinamento aumenta o custo da análise, bem como produz erros relacionados a arredondamentos associados às subdivisões demasiadamente refinadas dos elementos da malha.

No segundo processo de refinamento, conhecido como refinamento p , o número e a distribuição de elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos. No entanto, o número e o grau das funções de interpolação, as quais devem ser polinômios completos de ordem p , são aumentados progressivamente.

O refinamento do tipo h tem sido extensivamente examinado na literatura matemática e utilizado, por muitos anos, nas aplicações em engenharia. Recentemente, muitas pesquisas têm sido realizadas para o desenvolvimento de processos de refinamento p ([Babuska *et al.*, 1989], [Leino *et al.*, 1994], [Campion *et al.*, 1996], [Liu *et al.*, 1998], [Paschoalini *et al.*, 1999], ...). Tem-se observado que a qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão p de refinamento oferece em relação à versão h .

O processo convencional de refinamento tipo p do método dos elementos finitos se baseia na discretização do sistema em elementos, cuja ordem é dependente das funções de interpolação. Neste caso, se novas variáveis físicas devem ser introduzidas nos elementos, novas funções de interpolação devem ser obtidas no lugar das anteriores. Desta forma, embora o número de elementos da discretização original permaneça fixo, o número total de nós deve ser aumentado progressivamente. Geralmente, esta técnica produz dificuldades em razão da necessidade da geração de novas malhas de elementos.

Para superar as dificuldades mencionadas anteriormente, nos últimos anos, têm-se estudado alguns procedimentos adaptativos de refinamento p , baseados na formulação paramétrica hierárquica do método dos elementos finitos, proposta por Zienkiewicz *et al.* (1971) e examinada por Peano (1976). Nestes procedimentos, a introdução de novas funções de interpolação de grau variável nos elementos se faz conservando inalteradas as funções de interpolação anteriores. Esta é a característica de importância fundamental em processos de refinamento hierárquico versão p do método dos elementos finitos. As funções de interpolação que apresentam esta característica são chamadas de funções de interpolação hierárquicas e os elementos cujas variáveis físicas são interpoladas por estas funções são chamados de elementos hierárquicos.

Nos processos de refinamento hierárquico, as matrizes do elemento são expandidas quando novas funções de interpolação, de grau superior às anteriores, são inseridas. Portanto, durante o

procedimento, a matriz do elemento correspondente a uma aproximação polinomial de ordem p torna-se uma submatriz da matriz correspondente à aproximação polinomial de ordem $p+1$ do elemento. Neste caso, o esforço numérico consumido na triangularização da matriz de rigidez do elemento referente a uma solução, pode ser inteiramente economizado em soluções subseqüentes.

Elementos finitos hierárquicos têm sido considerados ferramentas indispensáveis para se estudar a convergência de funções de interpolação. As condições de continuidade entre elementos vizinhos são satisfeitas, embora a ordem do polinômio das funções de interpolação possa variar de elemento para elemento [Szabo *et al.*, 1988].

Com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento apresentado por *Ahmad*, o objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um novo elemento que, mesmo considerando integração numérica consistente, refina aquela solução através de uma formulação do tipo hierárquica baseada no conceito de aproximação p . Pretende-se, portanto, partindo do elemento isoparamétrico, quadrático de 9 nós da família Lagrangeana (Figura 1.4), com integração consistente, refinar sua solução pela introdução de polinômios de terceiro, quarto e quinto graus.

A natureza hierárquica da formulação proposta apresenta a vantagem de que as matrizes de massa e rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas, evidenciando assim, um ganho de caráter computacional. Possibilita, também, empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes. Esta característica, essencial dos elementos hierárquicos, é explorada no refinamento adaptativo, onde novos graus de liberdade associados aos parâmetros hierárquicos (graus de liberdade hierárquicos) são criados somente quando requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise.

2 FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA

2.1 Introdução

Ao se aplicar o método dos elementos finitos na análise de uma estrutura, deve-se interpolar a sua geometria, ou seja, as coordenadas dos pontos, assim como a grandeza a ser calculada, como por exemplo os deslocamentos nodais.

Por simplicidade, tomando como exemplo o elemento de barra linear de n nós, o deslocamento axial em um ponto do elemento se expressa por:

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + \dots + N_i(\xi)u_i + \dots + N_n(\xi)u_n \quad (2.1)$$

na qual $N_i(\xi)$ são as funções de interpolação do campo de deslocamento, denominadas *funções de forma*. As funções $N_i(\xi)$ devem tomar o valor unitário no nó i e zero nos demais $n-1$ nós do elemento.

A deformação ε se obtém da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1(\xi)}{dx}u_1 + \frac{dN_2(\xi)}{dx}u_2 + \dots + \frac{dN_i(\xi)}{dx}u_i + \dots + \frac{dN_n(\xi)}{dx}u_n \quad (2.2)$$

A obtenção das derivadas de N_i implica nas operações seguintes:

$$\frac{dN_i(\xi)}{dx} = \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

A expressão da deformação, então, se escreve como:

$$\varepsilon = \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) u_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) u_2 + \dots + \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) u_i + \dots + \frac{dN_n(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) u_n \quad (2.4)$$

Para completar o cálculo de ε é necessário calcular $d\xi/dx$, que exige conhecer uma relação explícita entre x e ξ . Esta relação pode ser obtida através de uma interpolação paramétrica da geometria do elemento. Se as coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ de m pontos quaisquer do elemento são conhecidas, pode-se calcular a coordenada de qualquer ponto do elemento interpolando os valores das coordenadas conhecidas. Esta interpolação pode ser escrita na forma

$$x = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + \dots + N_i(\xi)x_i + \dots + N_m(\xi)x_m \quad (2.5)$$

Se deduz da equação anterior que $N'_i(\xi)$ são *funções de interpolação da geometria* que satisfazem os mesmos requisitos que as funções de forma para interpolar o campo de deslocamento, ou seja, $N'_i(\xi)$ deve tomar o valor unitário no ponto i e zero nos demais $m-1$ pontos.

Observa-se que a Equação (2.5) proporciona diretamente a relação entre as coordenadas x e ξ procuradas.

2.2 Formulações superparamétrica, isoparamétrica e subparamétrica

Como foi visto, um elemento possui duas classes de pontos: os utilizados para interpolar o campo de deslocamento (nós), que definem as funções de forma $N_i(\xi)$ e os utilizados para interpolar a geometria do elemento, que definem as funções de interpolação da geometria $N'_i(\xi)$.

Estes pontos podem não ser coincidentes dependendo da característica do problema:

- se m é maior que o número de nós n do elemento, as funções de interpolação da geometria $N'_i(\xi)$ serão polinômios de maior grau que as funções de forma $N_i(\xi)$ utilizadas para interpolar os deslocamentos, e a formulação recebe o nome de *superparamétrica*;
- se m coincide com o número de nós n do elemento, $N_i(\xi) \equiv N'_i(\xi)$, a formulação se denomina *isoparamétrica*;
- e se m é menor que o número de nós n do elemento, as funções de interpolação da geometria $N'_i(\xi)$ serão polinômios de menor grau que as funções de forma $N_i(\xi)$ utilizadas para interpolar os deslocamentos, e a formulação recebe o nome de *subparamétrica*.

A Figura 2.1 ilustra um elemento finito linear com formulações superparamétrica, isoparamétrica e subparamétrica.

□ Pontos que interpolam a geometria (m) ● Pontos que interpolam o campo de deslocamento (n)

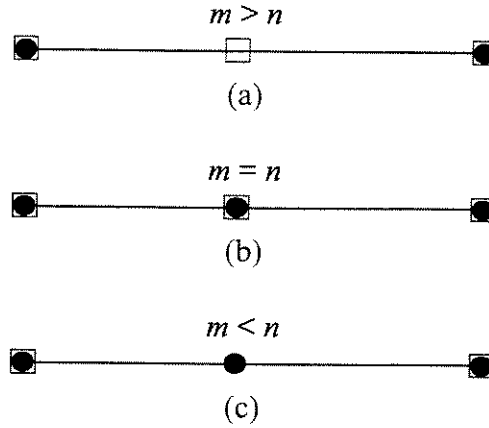


Figura 2.1 Formulações superparamétrica (a), isoparamétrica (b) e subparamétrica (c) do elemento linear.

2.3 Formulação subparamétrica hierárquica

O procedimento mais usual do método dos elementos finitos está em definir as funções de interpolação do campo de deslocamento de maneira que as incógnitas u_i representem os valores nodais do deslocamento. Este tipo de procedimento traz desvantagens quando se deseja aumentar a ordem da aproximação do elemento, pois neste caso, as funções de interpolação deveriam ser modificadas completamente. Para evitar este tipo de problema é possível definir funções de interpolação de ordem variável que, quando introduzidas na aproximação u da Equação (2.1), não alterem as funções $N_i(\xi)$ ($i=1, 2, \dots, n$) anteriormente definidas, da formulação convencional. Por adquirir esta importante característica, essas funções de interpolação $\tilde{N}_i(\xi)$ ($i>n$) de ordem variável, que são introduzidas na aproximação de u , são chamadas de *funções de interpolação hierárquicas*.

A formulação subparamétrica hierárquica do método dos elementos finitos difere da formulação convencional devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau variável ([Peano *et al.*, 1979], [Zienkiewicz *et al.*, 1983]). Essas funções são introduzidas nos elementos, principalmente, com o objetivo de se fazer refinamentos na solução obtida pelo método convencional dos elementos finitos. Na literatura ([Babuska *et al.*, 1979], [Peano *et al.*, 1976], [Babuska *et al.*, 1981]) este procedimento é denominado de versão p do método dos elementos finitos, devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau variável p .

Uma das grandes vantagens do refinamento hierárquico está no fato de que o esforço computacional torna-se menor na obtenção de novas soluções ([Rossow *et al.*, 1978]). As funções de interpolação utilizadas em um nível de aproximação de ordem p permanecem inalteradas, quando se tenta obter uma aproximação de ordem mais alta, com a introdução de novas funções de ordem $p+k$, ou seja:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{n+np} N_i(\xi) u_i \quad (2.6)$$

na qual np é o número de parâmetros hierárquicos inseridos. Por exemplo em problemas estruturais estáticos lineares se obtém o seguinte sistema de equações:

$$([K]_{n+np, n+np}) (\{u\}_{n+np}) = (\{F\}_{n+np}) \quad (2.7)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,np} \\ [K]_{np,n} & [K]_{np,np} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{u\}_{np} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_n \\ \{F\}_{np} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

na qual a matriz de rigidez $[K]_{n,n}$, o vetor deslocamento $\{u\}_{n,n}$ e o vetor carregamento $\{F\}_{n,n}$ correspondem à solução em um nível de aproximação anterior, não precisando, portanto, serem recalculados.

A Figura 2.2 mostra um conjunto de elementos unidimensionais e a forma das funções de interpolação para aproximação linear, quadrática e cúbica. Funções deste tipo são conhecidas como funções padrão pelo fato de dependerem do número de nós utilizados em um certo nível de aproximação, ou seja, elas tomam formas totalmente diferentes quando se deseja passar de um grau para outro.

A aproximação linear mostrada na Figura 2.2a é dada por

$$u(\xi) = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 \quad (2.9)$$

na qual

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad (2.10)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (2.11)$$

A aproximação quadrática mostrada na Figura 2.2b é dada por

$$u(\xi) = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 + N_3(\xi) u_3 \quad (2.12)$$

na qual

$$N_1(\xi) = \frac{\xi^2 - \xi}{2} \quad (2.13)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad (2.14)$$

$$N_3(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (2.15)$$

A aproximação cúbica mostrada na Figura 2.2c é dada por

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3 + N_4(\xi)u_4 \quad (2.16)$$

na qual

$$N_1(\xi) = \frac{9}{16} \left(\xi^2 - \frac{1}{9} \right) (1 - \xi) \quad (2.17)$$

$$N_2(\xi) = \frac{9}{16} \left(\xi^2 - \frac{1}{9} \right) (1 + \xi) \quad (2.18)$$

$$N_3(\xi) = \frac{27}{16} (\xi^2 - 1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) \quad (2.19)$$

$$N_4(\xi) = \frac{27}{16} (1 - \xi^2) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \quad (2.20)$$

Nota-se, portanto, que a dificuldade é evidente quando se deseja construir funções de interpolação do tipo padrão de alta ordem. Para evitar este tipo de problema, pode-se usar funções de interpolação hierárquicas $\tilde{N}_i(\xi)$ ($i > n$) que são independentes do número de pontos usados na definição da geometria do elemento.

Na formulação subparamétrica hierárquica do método dos elementos finitos funções de interpolação do tipo padrão são utilizadas apenas em um primeiro nível de aproximação da solução. Para outros níveis de aproximação as demais funções do tipo padrão, $N_i(\xi)$, podem ser substituídas por funções de interpolação hierárquicas, $\tilde{N}_i(\xi)$.

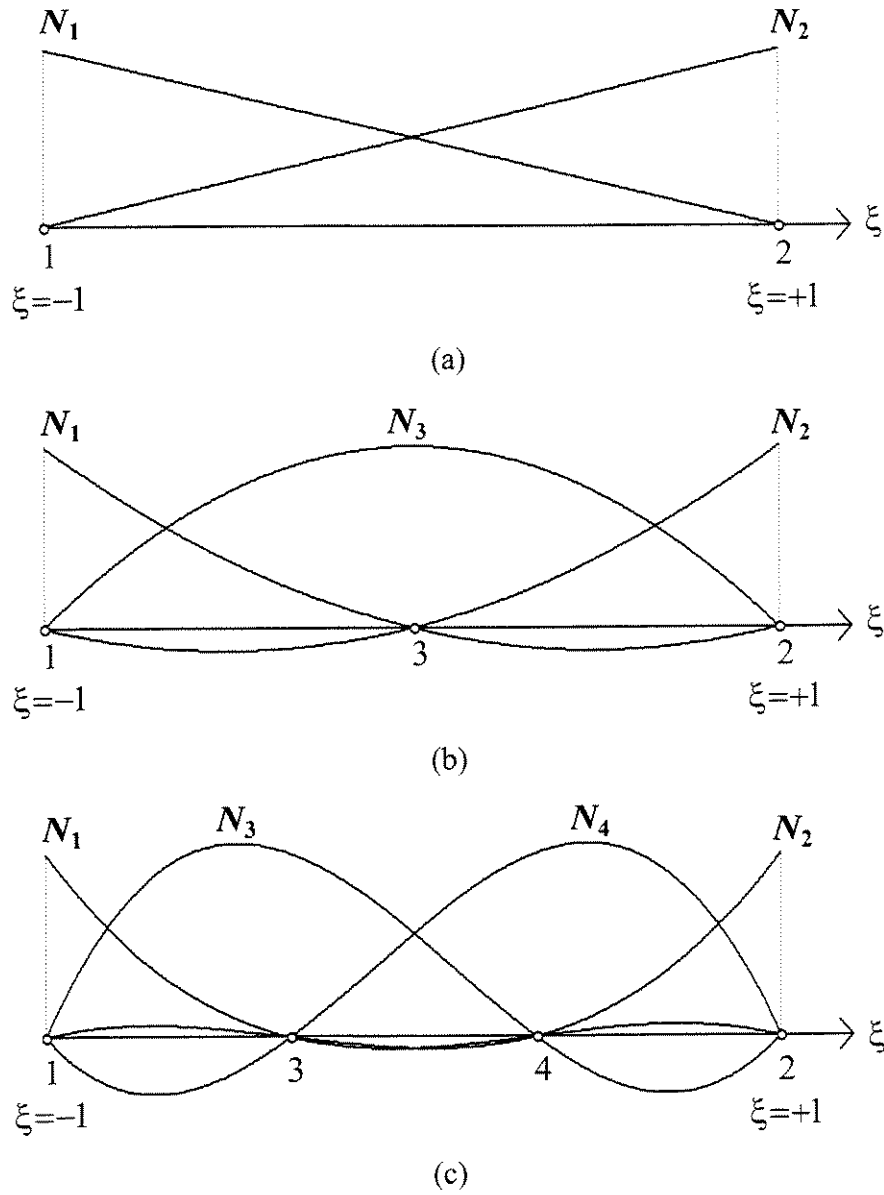


Figura 2.2 Elementos unidimensionais e funções de interpolação do tipo padrão: linear (a), quadrática (b) e cúbica (c).

Para o caso considerado do elemento unidimensional, uma aproximação quadrática hierárquica do elemento será dada por

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + \tilde{N}_3(\xi)\tilde{u}_3 \quad (2.21)$$

na qual $N_1(\xi)$ e $N_2(\xi)$ são as funções de interpolação lineares, dadas pelas Equações (2.10) e (2.11), respectivamente, e $\tilde{N}_3(\xi)$ é uma função de interpolação hierárquica de segundo grau que

satisfaça as condições $\tilde{N}_3(-1) = 0$ e $\tilde{N}_3(+1) = 0$. Desta forma, é mantida a continuidade C^0 entre elementos. Assim, uma função de interpolação hierárquica quadrática, como mostrado na Figura 2.3b, pode ser escrita como

$$\tilde{N}_3(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (2.22)$$

Esta função quando inserida na Equação (2.21) não modifica o nível de aproximação do elemento. Mas, no entanto, a incógnita $\tilde{u}_3$ deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade $\tilde{u}_3$ é um parâmetro dependente das incógnitas nodais u_1 e u_2 . Por exemplo, em $\xi = 0$, temos:

$$u(\xi = 0) = N_1(\xi = 0)u_1 + N_2(\xi = 0)u_2 + \tilde{N}_3(\xi = 0)\tilde{u}_3 = \left(\frac{1}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)u_2 + (1)\tilde{u}_3 \quad (2.23)$$

logo, o parâmetro hierárquico $\tilde{u}_3$ em $\xi = 0$ será:

$$\tilde{u}_3 = u(\xi = 0) - \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (2.24)$$

De maneira similar, para se obter uma aproximação hierárquica cúbica deve-se usar a Equação (2.21) acrescida do termo $\tilde{N}_4(\xi)\tilde{u}_4$, ou seja:

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + \tilde{N}_3(\xi)\tilde{u}_3 + \tilde{N}_4(\xi)\tilde{u}_4 \quad (2.25)$$

na qual $\tilde{N}_4(\xi)$ deve ser uma função de interpolação hierárquica cúbica que satisfaça as condições $\tilde{N}_4(-1) = 0$ e $\tilde{N}_4(+1) = 0$. Assim, uma função de interpolação hierárquica cúbica, como mostrado na Figura 2.3c, pode ser escrita como:

$$\tilde{N}_4(\xi) = (\xi - \xi^3) \quad (2.26)$$

A identificação física do parâmetro hierárquico $\tilde{u}_4$ torna-se difícil, mas esta identificação não é necessária.

Uma forma alternativa para definir funções de interpolação hierárquicas é usar os polinômios de Legendre $P_j(\xi)$ [Zienkiewicz *et al.*, 1983]. As funções de interpolação hierárquicas podem ser encontradas em termos das integrais desses polinômios. Os polinômios de grau j são definidos por:

$$P_j(\xi) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{2^{j-1}} \frac{d^j}{d\xi^j} \left[(\xi^2 - 1)^j \right] \quad (2.27)$$

e as funções de interpolação hierárquicas $\tilde{N}_{j+2}$ de ordem $p=j+1$, definidas por:

$$\tilde{N}_{j+2}(\xi) = \int_{-1}^{\xi} P_j(\xi) d\xi \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

Integrando os polinômios para $j=1, 2, 3, 4$, têm-se:

$$\tilde{N}_3(\xi) = \xi^2 - 1 \quad (2.29)$$

$$\tilde{N}_4(\xi) = 2(\xi^3 - \xi) \quad (2.30)$$

$$\tilde{N}_5(\xi) = \frac{1}{4}(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3) \quad (2.31)$$

$$\tilde{N}_6(\xi) = 7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi \quad (2.32)$$

Partindo-se de uma aproximação linear, as funções de interpolação hierárquicas dadas pelas Equações (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32), provenientes da integração dos polinômios de Legendre, apresentam a importante propriedade de ortogonalidade que conduz a sistemas de equações melhor condicionados.

De maneira similar ao caso do elemento unidimensional, pode-se definir funções de interpolação hierárquicas para o elemento bidimensional.

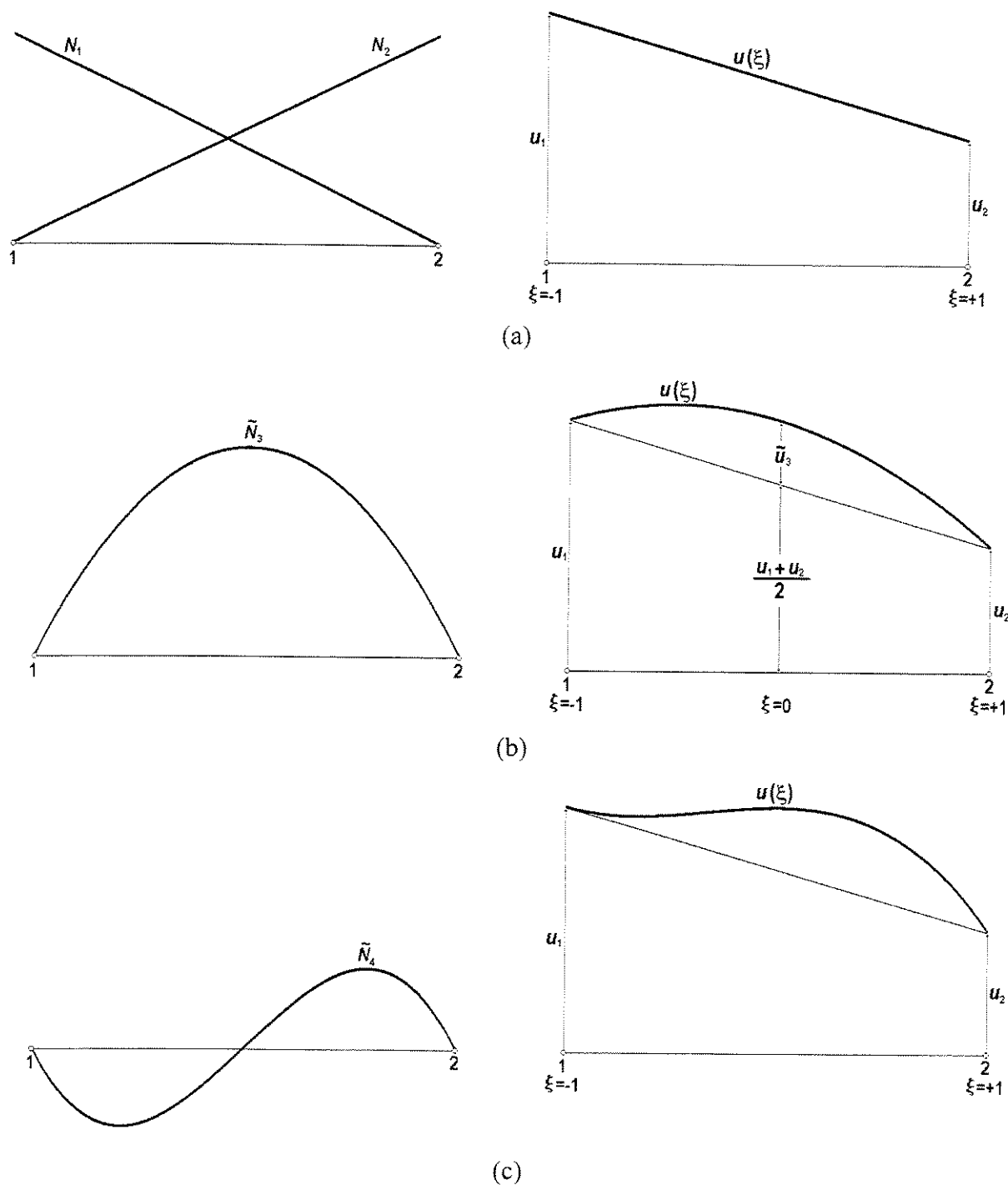


Figura 2.3 Funções de interpolação e variáveis para as aproximações linear (a), hierárquica quadrática (b) e hierárquica cúbica (c).

3 CAMPO DE DESLOCAMENTO DO ELEMENTO DE CASCA

3.1 Introdução

A Figura 3.1 apresenta um elemento de casca da família Lagrangeana. Neste elemento, as secções ao longo da espessura são geradas por linhas retas. Os nós i de 1 a 9 estão dispostos na superfície média do elemento conforme a representação. O sistema de referência local é constituído das coordenadas curvilíneas ξ e η na superfície média e da coordenada linear ζ na direção da espessura do elemento. Estas coordenadas variam entre -1 e 1 , de modo que $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ definem as faces laterais, e $\zeta = \pm 1$, as faces externas do elemento.

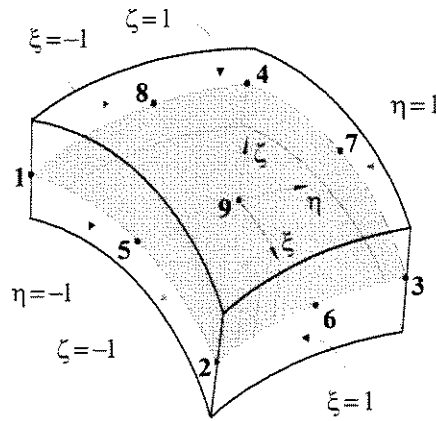


Figura 3.1 Elemento de casca da família Lagrangeana, sua superfície média e os nós i associados a ela.

3.2 Determinação dos pontos situados sobre a superfície média

Quando se associa ao elemento de casca um sistema cartesiano de referência (X, Y, Z) , denominado global, a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento será dada pelo vetor $\vec{r}$, e a posição de um nó i genérico da superfície média será dada pelo vetor $\vec{r}_i$, conforme mostra a Figura 3.2. O vetor $\vec{r}_i$ tem as componentes x_i , y_i e z_i segundo os eixos X , Y , e Z , respectivamente. Assim,

$$\vec{r}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

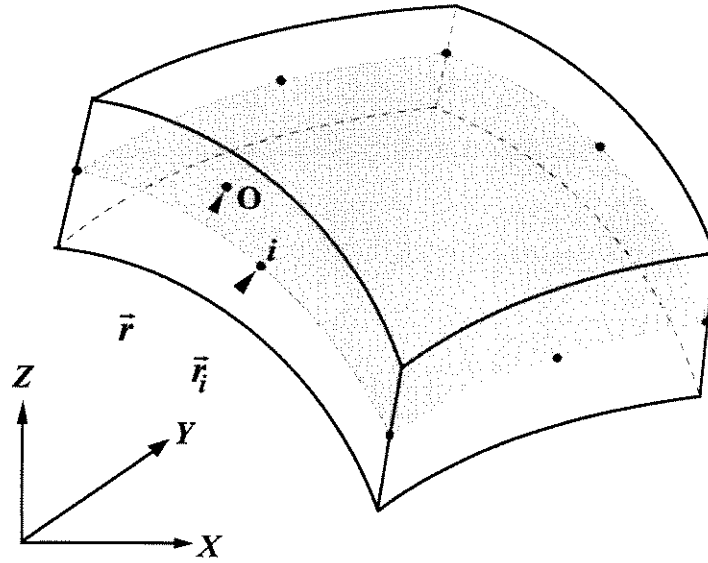


Figura 3.2 Vetor $\vec{r}$ que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento de casca.

O vetor $\vec{r}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média, pode então, ser interpolado a partir dos vetores nodais $\vec{r}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ associadas a cada um dos nós da superfície média ([Coons, 1967], [Forrest, 1968]):

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i \quad (3.2)$$

na qual, para o elemento da família Lagrangeana, n é igual a 9 e as funções de forma, dadas por [Zienkiewicz *et al.*, 1989]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi_i \eta_i \xi \eta (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{para os nós } i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta_i (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{para os nós } i = 5 \text{ e } 7 \quad (3.4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi_i (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i = 6 \text{ e } 8 \quad (3.5)$$

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \quad \text{para o nó } i = 9 \quad (3.6)$$

nas quais ξ_i e η_i são as coordenadas curvilíneas correspondentes a cada nó i .

Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes à superfície média, e o vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média, são determinados a partir do vetor $\vec{r}$ (Apêndice A).

3.3 Determinação dos pontos situados fora da superfície média

De acordo com a Figura 3.3, se t_i é a espessura da casca no nó i , qualquer ponto P ao longo desta espessura, será dado pelo vetor $\vec{m}_i$, obtido da seguinte maneira:

$$\vec{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (3.7)$$

na qual $\vec{v}_{3i}$ é um versor normal à superfície média no nó i .

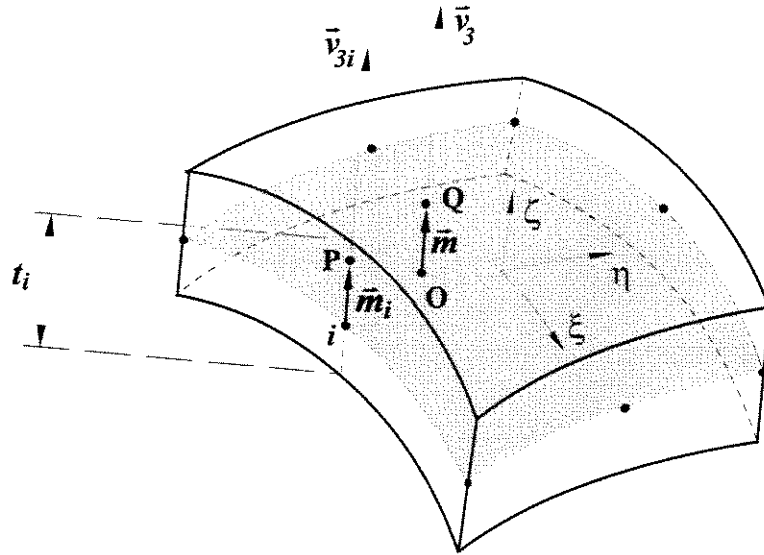


Figura 3.3 Espessura t_i da casca no nó i e os vetores $\vec{m}_i$ e $\vec{m}$, que definem, respectivamente, os pontos P e Q, fora da superfície média.

Desta forma, o vetor $\vec{m}$ (Figura 3.3) que define a posição de qualquer ponto Q fora da superfície média pode, então, ser interpolado a partir dos vetores $\vec{m}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média. Portanto,

$$\vec{m}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{m}_i \quad (3.8)$$

ou ainda, considerando a Equação (3.7),

$$\vec{m}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (3.9)$$

3.4 Determinação do campo de deslocamento do elemento isoparamétrico

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca, os eixos x', y' e z' , cujos versores são, respectivamente, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$, definem um sistema cartesiano local de referência, conforme mostra a Figura 3.4. Quando se considera o nó i , genérico, da superfície média, o sistema local de referência (x', y', z') a ele associado será definido pelos versores $\bar{v}_{1i}$, $\bar{v}_{2i}$ e $\bar{v}_{3i}$ (Figura 3.4). Os versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$ são tangentes à superfície média e os versores $\bar{v}_3$ e $\bar{v}_{3i}$ normais à ela. Os versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$ são determinados no Apêndice A.

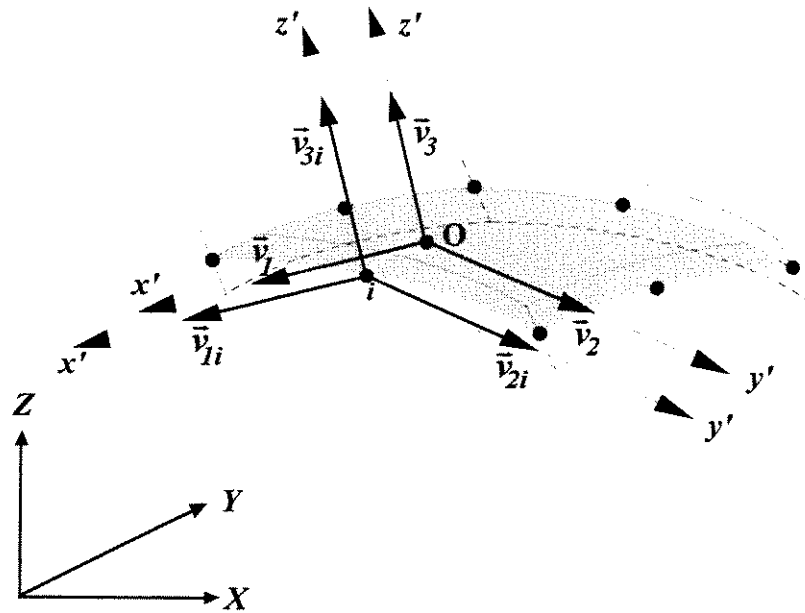


Figura 3.4 Sistemas locais de referência (x', y', z') associados ao ponto O e ao nó i , e seus respectivos versores.

Se em função de sua solicitação o elemento de casca é deformado, o nó i , genérico, de sua superfície média vai apresentar um deslocamento $\bar{\delta}_i$ (Figura 3.5), cujas componentes nas direções X, Y e Z do sistema de referência global são u_i , v_i e w_i , respectivamente.

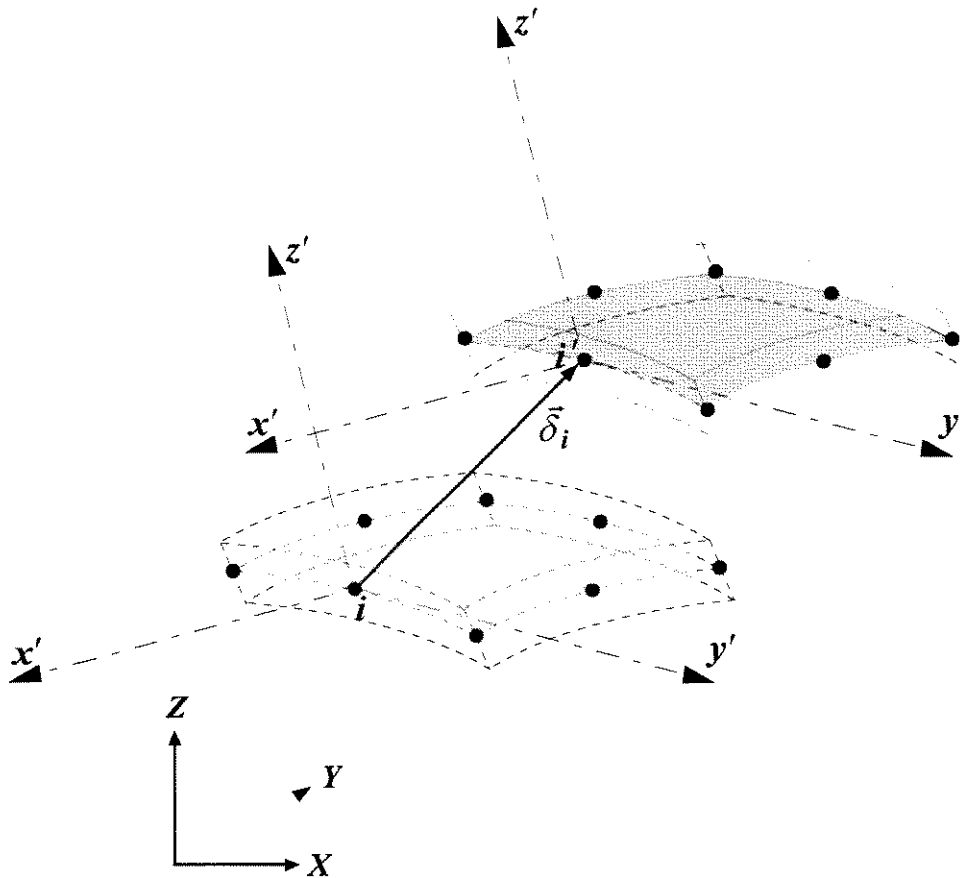


Figura 3.5 Deslocamento $\bar{\delta}_i$ apresentado pelo nó i , genérico, da superfície média do elemento de casca.

De acordo com o modelo cinemático de *Reissner-Mindlin*, que possibilita considerar também as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, se um elemento reto de casca é normal à sua superfície média, após a deformação ele permanece reto e mantém seu comprimento inicial ($\varepsilon_z = 0$), porém, não é mais normal à superfície média. Assim, o estado de deformação específica do elemento de casca, com relação ao sistema de referência local (x', y', z') , deverá conter as seguintes componentes: $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$.

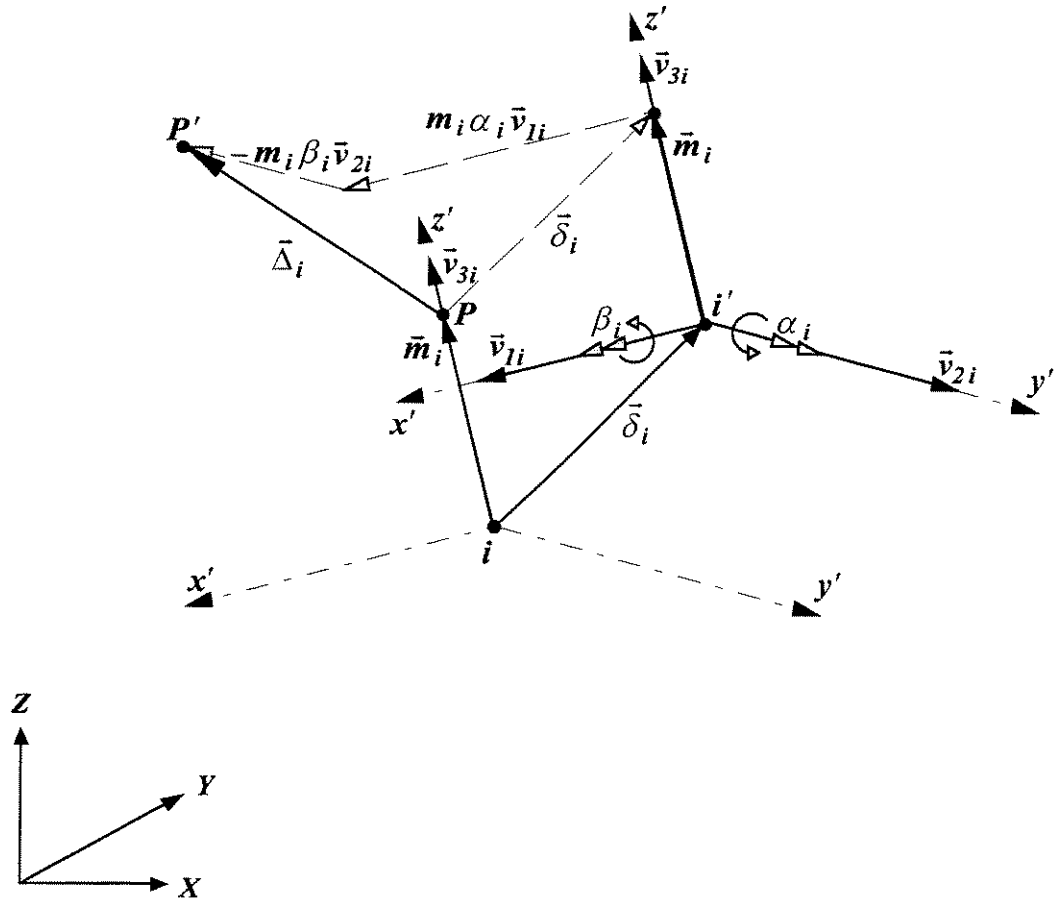


Figura 3.6 Deslocamento $\bar{\Delta}_i$ apresentado pelo ponto P.

Em função do exposto, quando se considera o vetor $\bar{m}_i$ (Figura 3.3), normal à superfície média e que define o ponto P fora desta superfície, após a deformação, ele deverá continuar reto, não mais perpendicular àquela superfície e manter seu comprimento inicial. Portanto, no caso mais geral de solicitação, deverá apresentar duas rotações (Figura 3.6): α_i e β_i , em torno dos eixos y' e x' , respectivamente. O ponto P assume, então, a posição P', apresentando, conseqüentemente, um deslocamento $\bar{\Delta}_i$, que, de acordo com a Figura 3.6 e admitindo-se a hipótese de deslocamentos e deformações pequenos, será dado por:

$$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i + m_i \alpha_i \cdot \bar{v}_{li} - m_i \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (3.10)$$

na qual $\bar{v}_{li}$ e $\bar{v}_{2i}$ são os versores tangentes à superfície média no nó i , m_i é o módulo do vetor $\bar{m}_i$, que, de acordo com a Equação (3.7), é dado por:

$$m_i = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \quad (3.11)$$

Substituindo-se este valor na Equação (3.10), tem-se que:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (3.12)$$

Esta expressão possibilita determinar o deslocamento apresentado por qualquer ponto P ao longo da espessura t_i no nó i . Pode-se, agora, interpolar o deslocamento de qualquer ponto Q (Figura 3.3) do elemento de casca a partir dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média [Zienkiewicz et al., 1989]:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.13)$$

na qual n é o número de nós da superfície média. Se o elemento é do tipo *isoparamétrico* [Desai, 1979], as funções de forma são iguais àquelas utilizadas para interpolar a geometria e dadas através das Equações (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6), para o elemento da família Lagrangeana. Portanto,

$$N'_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \quad (3.14)$$

e a Equação (3.13) pode ser reescrita como:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.15)$$

Substituindo-se $\bar{\Delta}_i$ pelo seu valor, dado a partir da Equação (3.12), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se u, v e w são, respectivamente, as componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$ nas direções X, Y e Z do sistema de referência global, u_i, v_i e w_i , as componentes do deslocamento $\bar{\delta}_i, v_{11i}, v_{12i}$ e v_{13i} , as componentes do versor $\bar{v}_{1i}$ e v_{21i}, v_{22i} e v_{23i} , as componentes do versor $\bar{v}_{2i}$, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\
&\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\
&\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\
&\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\
&\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Lagrangeana é mostrada na Figura 3.7.

1	...	cte
ξ	η	...
ξ^2	$\xi\eta$	η^2
$\xi^2\eta$	$\xi\eta^2$	
$\xi^2\eta^2$		

Figura 3.7 Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Lagrangeana.

As Equações (3.18), (3.19) e (3.20) podem ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \{a_i\} \quad (3.21)$$

na qual $[N_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (3×5) , constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e dos parâmetros (espessura t_i e componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$) referentes ao nó i :

$$[N_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{11i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{21i} \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{12i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{22i} \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{13i} & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{23i} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e $\{a_i\}$ é uma matriz coluna (5×1) , constituída dos deslocamentos e rotações relativos ao nó i :

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Desta maneira, a Equação (3.21) pode ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [N_n(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Verifica-se, portanto, que a cada nó i da superfície média do elemento de casca estão associados cinco graus de liberdade: três translações (u_i , v_i e w_i) e duas rotações (α_i e β_i).

3.5 Determinação do campo de deslocamento do elemento paramétrico

De uma forma geral, o refinamento da solução de um problema qualquer pode se dar através da utilização de elementos de ordem fixa, para os quais o tamanho h é sucessivamente reduzido (refinamento tipo h), bem como, através da utilização de elementos de forma fixa, para os quais a ordem p aumenta sucessivamente (refinamento tipo p).

No desenvolvimento deste trabalho, considera-se o refinamento tipo p , uma vez que se pretende o aprimoramento da solução sem que haja a alteração da malha de discretização. Entretanto, quando se empregam funções de forma padrão como aquelas da família Lagrangeana, a cada mudança de ordem, corresponde um aumento do número de nós do elemento gerando conseqüentemente funções de forma totalmente diferentes para cada nível de aproximação. Se este fosse o procedimento adotado, todos os cálculos já efetuados quando da análise anterior deveriam ser repetidos ocasionando um aumento do custo computacional. Portanto, é vantajoso evitar esta dificuldade e considerar a aproximação como uma série na qual as funções de forma não mais dependem dos nós do elemento. O aumento da ordem do elemento sem o conseqüente aumento do seu número de nós pode ser obtido a partir das *funções de forma hierárquicas* que representam simplesmente um refinamento de ordem superior.

Assim, o refinamento da expansão quadrática especificada pela Equação (3.16) pode ser obtido adicionando-se funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi, \eta)$ de ordem superior a dois.

Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática será feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus. Portanto, as funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são polinômios de grau p ($p = 3, 4$ ou 5) associados a cada um dos lados do elemento ($k = 1, 2, 3$ ou 4) ou são polinômios de grau p , do tipo bolha, associados ao elemento ($k = 5$ ou 6).

A Figura 3.8 mostra a definição dos lados do elemento.

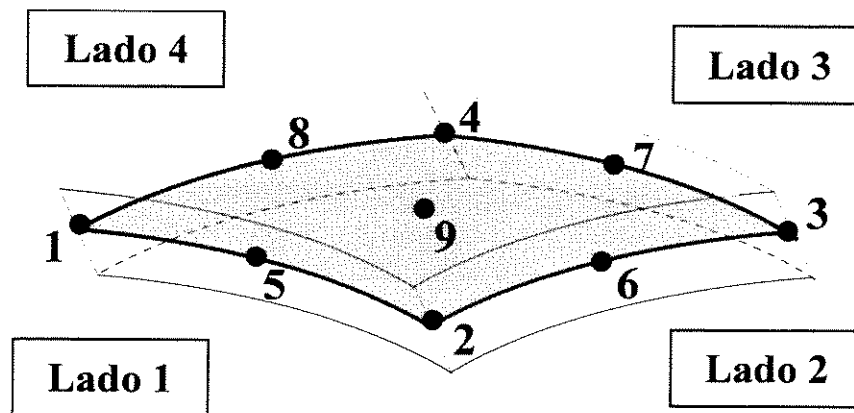


Figura 3.8 Definição dos lados do elemento.

As funções de forma hierárquicas utilizadas foram definidas em termos das integrais dos polinômios de Legendre [Szabo *et al.*, 1991] e consistem de:

- quatro funções de forma associadas aos lados do elemento para o refinamento de 3º grau (Equações 3.25, 3.26, 3.27 e 3.28 e Tabela 3.1);
- quatro funções de forma associadas aos lados do elemento para o refinamento de 4º grau (Equações 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32 e Tabela 3.1);
- quatro funções de forma associadas aos lados do elemento para o refinamento de 5º grau (Equações 3.33, 3.34, 3.35 e 3.36 e Tabela 3.1);
- duas funções de forma do tipo bolha associadas ao elemento para o refinamento de 5º grau (Equações 3.37 e 3.38 e Tabela 3.1).

$$M_{31}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\xi^3 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.25)$$

$$M_{32}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\eta^3 - \eta)(1 + \xi) \quad (3.26)$$

$$M_{33}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\xi^3 - \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (3.27)$$

$$M_{34}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\eta^3 - \eta) \cdot (1 - \xi) \quad (3.28)$$

$$M_{41}(\xi, \eta) = \frac{5}{2\sqrt{10}}\xi \cdot (\xi^3 - \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (3.29)$$

$$M_{42}(\xi, \eta) = \frac{5}{2\sqrt{10}}\eta \cdot (\eta^3 - \eta) \cdot (1 + \xi) \quad (3.30)$$

$$M_{43}(\xi, \eta) = \frac{5}{2\sqrt{10}}\xi \cdot (\xi^3 - \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (3.31)$$

$$M_{44}(\xi, \eta) = \frac{5}{2\sqrt{10}}\eta \cdot (\eta^3 - \eta) \cdot (1 - \xi) \quad (3.32)$$

$$M_{51}(\xi, \eta) = \frac{1}{8\sqrt{14}}\xi \cdot (35\xi^4 - 42\xi^2 + 7) \cdot (1 - \eta) \quad (3.33)$$

$$M_{52}(\xi, \eta) = \frac{1}{8\sqrt{14}} \eta \cdot (35\eta^4 - 42\eta^2 + 7) \cdot (1 - \xi) \quad (3.34)$$

$$M_{53}(\xi, \eta) = \frac{1}{8\sqrt{14}} \xi \cdot (35\xi^4 - 42\xi^2 + 7) \cdot (1 + \eta) \quad (3.35)$$

$$M_{54}(\xi, \eta) = \frac{1}{8\sqrt{14}} \eta \cdot (35\eta^4 - 42\eta^2 + 7) \cdot (1 + \xi) \quad (3.36)$$

$$M_{55}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}} \frac{5}{2\sqrt{10}} (\xi^3 - \xi) \cdot (\eta^2 - 1) \quad (3.37)$$

$$M_{56}(\xi, \eta) = \frac{3}{2\sqrt{6}} \frac{5}{2\sqrt{10}} (\eta^3 - \eta) \cdot (\xi^2 - 1) \quad (3.38)$$

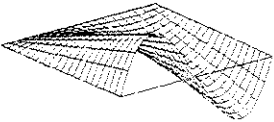
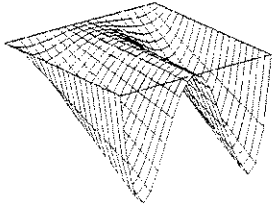
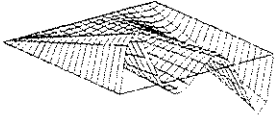
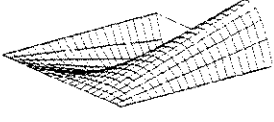
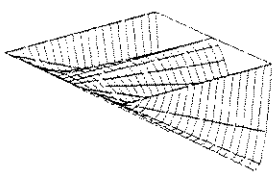
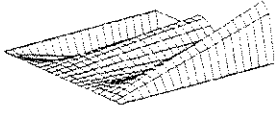
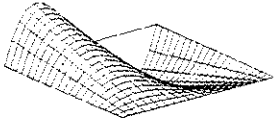
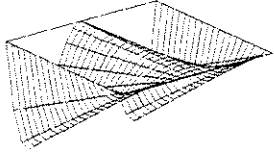
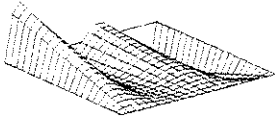
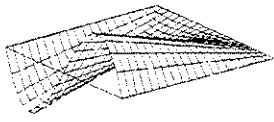
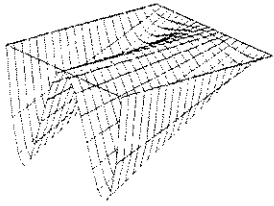
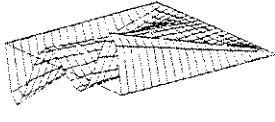
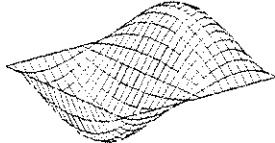
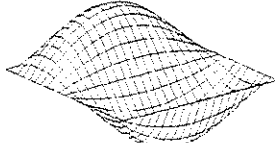
	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$k = 1$			
$k = 2$			
$k = 3$			
$k = 4$			
$k = 5$			
$k = 6$			

Tabela 3.1 Funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi, \eta)$ de 3º grau ($p = 3$), 4º grau ($p = 4$) e 5º grau ($p = 5$), associadas aos lados do elemento ($k = 1, 2, 3$ e 4) e ao elemento ($k = 5$ e 6).

As funções de forma hierárquicas de terceiro grau devem ser tais que transformam a expansão quadrática em um polinômio completo de terceiro grau (Figura 3.9), as funções de quarto grau devem ser tais que transformam a expansão cúbica em um polinômio completo de quarto grau (Figura 3.10) e as funções de quinto grau devem ser tais que transformam a expansão quarto grau em um polinômio completo de quinto grau (Figura 3.11).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \xi & & \eta \\
 & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\
 \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 &
 \end{array}$$

Figura 3.9 Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro grau na expansão quadrática.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \xi & \eta \\
 & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 & \\
 \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 & \\
 \xi^4 & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & \eta^4 & & & \\
 & \xi^4\eta & & \xi\eta^4 & & & &
 \end{array}$$

Figura 3.10 Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro e quarto graus na expansão quadrática.

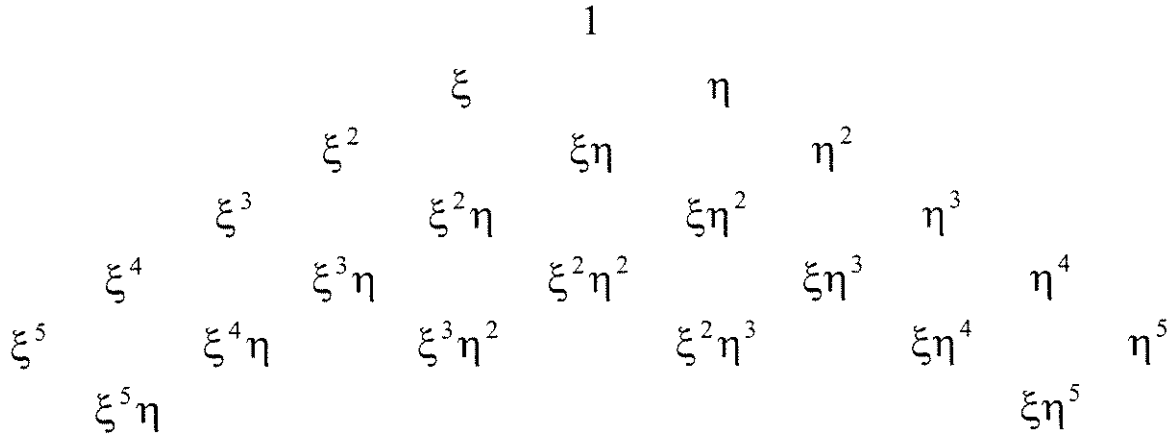


Figura 3.11 Termos da expansão polinomial obtida a partir da adição de funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus na expansão quadrática.

Desta forma, o deslocamento $\bar{\Delta}$ dado pela Equação (3.16) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \bar{\delta}_{pk} \end{aligned} \quad (3.39)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão $\bar{\delta}_{pk}$ é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos. As funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ quando inseridas na Equação 3.16 não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, a incógnita $\bar{\delta}_{pk}$ deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de $\bar{\delta}_{pk}$ são parâmetros dependentes das incógnitas nodais $\bar{\delta}_i$, α_i e β_i .

Se, respectivamente, a_{pk} , b_{pk} e c_{pk} são as componentes do vetor $\bar{\delta}_{pk}$ segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, a Equação (3.39) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot a_{pk}
 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
 v(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_{pk}
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot c_{pk}
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Estas equações podem, também ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 [M_{pk}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

na qual $[M_{pk}(\xi, \eta)]$ é uma matriz 3x3 constituída das funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi, \eta)$:

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

e a matriz $[N_i(\xi, \eta, \zeta)]$ já foi definida anteriormente através da Equação (3.22). Sendo $\{a_i\}$ a matriz coluna (5x1) definida a partir da Equação (3.23), $\{a_{pk}\}$ uma matriz coluna (3x1) constituída dos parâmetros hierárquicos:

$$\{a_{pk}\} = \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

A Equação (3.44) pode ser representada da seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N_i(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N_9(\xi, \eta, \zeta)] \\ [M_{31}(\xi, \eta)] & [M_{32}(\xi, \eta)] & \dots & [M_{pk}(\xi, \eta)] & \dots & [M_{56}(\xi, \eta)] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_9\} \\ \{a_{31}\} \\ \{a_{32}\} \\ \vdots \\ \{a_{pk}\} \\ \vdots \\ \{a_{56}\} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

De uma maneira compacta, a Equação anterior pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3.48)$$

na qual $\{u\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $\{a\}$ é uma matriz (87×1), constituída dos deslocamentos nodais u_i , v_i , w_i , α_i e β_i e dos parâmetros hierárquicos a_{pk} , b_{pk} e c_{pk} . E $[N]$ é uma matriz (3×87), constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e $M_{pk}(\xi, \eta)$:

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)] & [N_2(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N_i(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N_9(\xi, \eta, \zeta)] \\ [M_{31}(\xi, \eta)] & [M_{32}(\xi, \eta)] & \dots & [M_{pk}(\xi, \eta)] & \dots & [M_{56}(\xi, \eta)] \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

4 ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

4.1 Introdução

De acordo com a Figura 4.1, a posição de qualquer ponto Q do elemento será dada pelo vetor $\vec{R}$, que é determinado pela soma de dois outros vetores: o vetor $\vec{r}$, que define a posição de qualquer ponto O da superfície média, e o vetor $\vec{m}$ que define a posição de qualquer ponto Q fora desta superfície. Assim,

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{m} \quad (4.1)$$

Considerando as Equações (3.2) e (3.9), o vetor $\vec{R}$ pode, então, ser dado por:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (4.2)$$

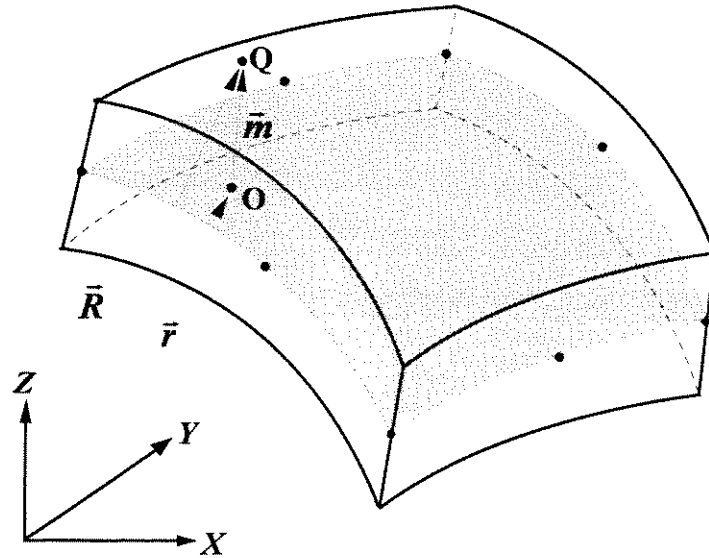


Figura 4.1 Vetor $\vec{R}$ que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.

Se x , y e z são as componentes do vetor $\vec{R}$, segundo o sistema de referência global, a Equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

ou ainda,

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (4.4)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (4.5)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (4.6)$$

Estas equações fornecem, então, as coordenadas x , y e z de qualquer ponto do elemento de casca.

No caso geral de solicitação, o estado de deformação específica do elemento de casca no ponto Q (Figura 4.1), segundo o sistema de referência global (X , Y , Z), é dado por [Przemieniecki, 1968]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (4.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.12)$$

na qual $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, com relação àquele sistema de referência. Por outro lado, como mostram as Equações (3.41), (3.42) e (3.43), os deslocamentos u , v e w são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ , assim como, as coordenadas x , y e z do ponto Q, também o são, de acordo com as Equações (4.4), (4.5) a (4.6). Portanto, as derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas globais, x , y e z , podem ser obtidas a partir de suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas e à coordenada linear, através da seguinte equação matricial [Kaplan, 1971]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

na qual $[J]$ é a *matriz Jacobiano da transformação* e é dada por [Kaplan, 1971]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Como x , y e z são as componentes do vetor $\bar{R}$ (Figura 4.1), segundo o sistema de referência global, e uma vez que este vetor é dado pela Equação (4.1), pode-se escrever que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (\bar{r} + \bar{m})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial (\bar{r} + \bar{m})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial (\bar{r} + \bar{m})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Considerando que:

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{m}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta} = \bar{0} \quad (4.16)$$

a Equação (4.15) torna-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{m}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ou ainda,

$$[J] = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{V}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

na qual $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ são os vetores tangentes à superfície média, e $\bar{V}_3$ é um vetor normal àquela superfície, obtido a partir da derivação com relação a ζ da Equação (3.9). Assim,

$$\bar{V}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (4.19)$$

Se V_{31} , V_{32} e V_{33} são as componentes do vetor $\bar{V}_3$, segundo o sistema de referência global, pode-se escrever que:

$$\bar{V}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{31}(\xi, \eta) \\ V_{32}(\xi, \eta) \\ V_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i}(\xi, \eta) \\ v_{32i}(\xi, \eta) \\ v_{33i}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Portanto,

$$V_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i}(\xi, \eta) \quad (4.21)$$

$$V_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i}(\xi, \eta) \quad (4.22)$$

$$V_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i}(\xi, \eta) \quad (4.23)$$

Tendo sido obtida a *matriz Jacobiano da transformação*, $[J]$, pode-se determinar, agora, sua inversa, $[J]^{-1}$, através da seguinte Equação [Kaplan, 1971]:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot [\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 \quad \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 \quad \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2] \quad (4.24)$$

na qual $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiano, obtido como se segue [Kaplan, 1971]:

$$|J| = \bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) \quad (4.25)$$

Resolvendo-se a Equação anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &= r_{11}(\xi, \eta) \cdot [r_{22}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta)] \\ &\quad - r_{12}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \\ &\quad + r_{13}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2 Estado de deformação específica com relação ao sistema local

O estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O (Figura 4.2), é dado por:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \quad (4.28)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (4.29)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (4.30)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad (4.31)$$

sendo u' , v' e w' os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, segundo o sistema de referência local.

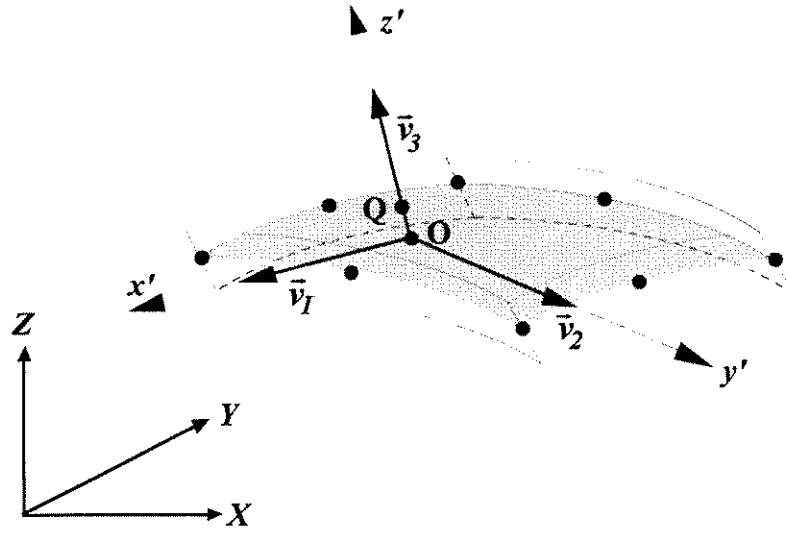


Figura 4.2 Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.

Para a determinação deste estado de deformação específica é necessário obter as derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às coordenadas locais (x' , y' , z'). Estas derivadas podem ser obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos globais (u , v e w) com relação às coordenadas globais (x , y e z), através da seguinte operação de transformação [Pipes *et al.*, 1969]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.32)$$

na qual $[\theta]$ é uma matriz quadrada constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Assim,

$$[\theta] = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] \quad (4.33)$$

Substituindo a Equação (4.13) na Equação (4.32), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.34)$$

Considerando, agora, as Equações (4.24) e (4.33), pode-se escrever que:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 & \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

ou ainda,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Uma vez que $(\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3)$ e $(\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1)$ são vetores tangentes à superfície média e $(\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2)$ é um vetor normal a ela, segue-se que:

$$\bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) = \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) = \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = 0 \quad (4.37)$$

Portanto,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

na qual

$$A_{11}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.39)$$

$$A_{21}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.40)$$

$$A_{12}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.41)$$

$$A_{22}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.42)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_1(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_2(\xi, \eta)) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot \bar{r}_3(\xi, \eta) \quad (4.43)$$

Desta forma, a Equação (4.34) pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Os valores de A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , e A_{33} , e as derivadas dos deslocamentos locais com relação às coordenadas locais são determinados no Apêndice B.

Resolvendo-se os produtos matriciais indicados na Equação (4.44), pode-se obter, então, as derivadas necessárias para a definição do estado de deformação específica do ponto Q, com relação ao sistema de referência local. Substituindo-se estas equações nas Equações (4.27), (4.28), (4.29), (4.30) e (4.31), tem-se:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{11} & A_{11}v_{12} & A_{11}v_{13} & A_{12}v_{11} & A_{12}v_{12} & A_{12}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.46)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (A_{21}v_{11} + A_{11}v_{21}) & (A_{21}v_{12} + A_{11}v_{22}) & (A_{21}v_{13} + A_{11}v_{23}) \\ (A_{22}v_{11} + A_{12}v_{21}) & (A_{22}v_{12} + A_{12}v_{22}) & (A_{22}v_{13} + A_{12}v_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.47)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{31} \quad A_{11}v_{32} \quad A_{11}v_{33} \quad A_{12}v_{31} \quad A_{12}v_{32} \quad A_{12}v_{33}] \cdot$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{11} \quad A_{33}v_{12} \quad A_{33}v_{13}] \cdot$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T$$

$$(4.48)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{31} \quad A_{21}v_{32} \quad A_{21}v_{33} \quad A_{22}v_{31} \quad A_{22}v_{32} \quad A_{22}v_{33}] \cdot$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{21} \quad A_{33}v_{22} \quad A_{33}v_{23}] \cdot$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T$$

$$(4.49)$$

Estas equações podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T$$

$$(4.50)$$

na qual

$$[d(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix}$$

$$(4.51)$$

Os elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$ são determinados no Apêndice B.

Finalmente, para a determinação do estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local, basta, obter as derivadas dos deslocamentos globais u , v e w com relação as coordenadas ξ , η e ζ . Considerando as Equações (3.41), (3.42) e (3.43), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot a_{pk} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot b_{pk} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot c_{pk} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot a_{pk} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot b_{pk} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot c_{pk} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (4.60)$$

As equações anteriores podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 [G_{pk}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

sendo que $[G_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (9×5) , dada por:

$$[G_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{23i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{23i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{11i} & -N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{12i} & -N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{13i} & -N_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$[G_{pk}(\xi, \eta)]$ é uma matriz (9×3) , dada por:

$$[G_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Substituindo a Equação (4.61) na Equação (4.50), segue-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

$$+ \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] [G_{pk}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 [B_{pk}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

na qual $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (5×5), dada por:

$$[B_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} \\ B_{31i} & B_{32i} & B_{33i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} \\ B_{41i} & B_{42i} & B_{43i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \\ B_{51i} & B_{52i} & B_{53i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$[B_{pk}(\xi, \eta)]$ é uma matriz (5x3), dada por:

$$[B_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} B_{11pk} & B_{12pk} & B_{13pk} \\ B_{21pk} & B_{22pk} & B_{23pk} \\ B_{31pk} & B_{32pk} & B_{33pk} \\ B_{41pk} & B_{42pk} & B_{43pk} \\ B_{51pk} & B_{52pk} & B_{53pk} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Os elementos das matrizes $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ e $[B_{pk}(\xi, \eta)]$ são determinados no Apêndice B.

A Equação (4.64) pode, ainda, ser dada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = [[B_1(\xi, \eta, \zeta)], [B_2(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_i(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_9(\xi, \eta, \zeta)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_9\} \\ \{a_{31}\} \\ \{a_{32}\} \\ \vdots \\ \{a_{pk}\} \\ \vdots \\ \{a_{56}\} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (4.69)$$

na qual $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas e distorções no ponto Q segundo o sistema de referência local, $[B]$ é uma matriz (5×87) constituída das derivadas das funções de forma e $\{a\}$ é uma matriz coluna (87×1) constituída dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos. A matriz $[B]$ é dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)], [B_2(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_9(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_9(\xi, \eta, \zeta)] \\ [B_{31}(\xi, \eta)], [B_{32}(\xi, \eta)], \dots, [B_{pk}(\xi, \eta)], \dots, [B_{56}(\xi, \eta)] \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

5 FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA

5.1 Introdução

O estado de tensão no ponto Q, genérico, do elemento de casca, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O (Figura 4.2), está representado na Figura 5.1.

Neste estado de tensão, de acordo com as hipóteses básicas de *Reissner-Mindlin* ([Reissner, 1945] e [Mindlin, 1951]), desconsidera-se a tensão normal na direção perpendicular à superfície média, por ser pequena em relação às outras tensões. Assim,

$$\sigma_{z'z'} = 0 \quad (5.1)$$

Admitindo-se que o material do elemento de casca seja homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico e linear [Leipholz, 1974], o estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , é dado pela *Lei de Hooke Generalizada* [Timoshenko, 1969]:

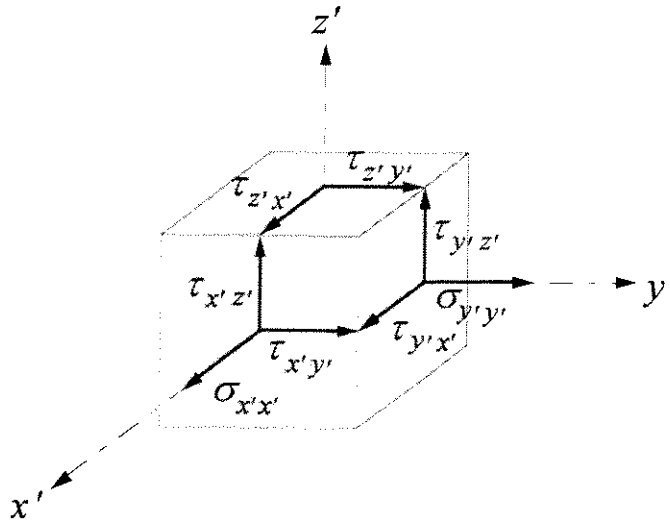


Figura 5.1 Estado de tensão no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'x'} - \nu \cdot \sigma_{y'y'}) \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'y'} - \nu \cdot \sigma_{x'x'}) \quad (5.3)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'y'} \quad (5.4)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'z'} \quad (5.5)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{y'z'} \quad (5.6)$$

nas quais, E é o *Módulo de Elasticidade Longitudinal* e ν o *Coefficiente de Poisson* do material. As equações anteriores podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [\phi'] \cdot \{\sigma'\} \quad (5.8)$$

na qual $[\phi']$ é uma matriz quadrada (5×5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1) constituída das tensões atuantes no ponto Q, segundo o sistema de referência local (x', y', z'). Resolvendo-se a equação anterior para as tensões, tem-se que:

$$\{\sigma'\} = [\phi']^{-1} \cdot \{\varepsilon'\} \quad (5.9)$$

ou ainda,

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (5.10)$$

na qual $[D']$ é a inversa da matriz $[\phi']$, e é dada por:

$$[D'] = [\phi']^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Considerando que a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento de casca não é uniforme, porém, aproximadamente parabólica [Volterra *et al.*, 1971], introduz-se um fator k de valor igual a $6/5$ nos termos de $[D']$ relacionados com as tensões de cisalhamento $\tau_{x'z'}$ e $\tau_{y'z'}$. Portanto,

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Substituindo a Equação (4.69) na Equação (5.10), obtém-se:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (5.13)$$

Esta equação fornece, então, as tensões atuantes em um ponto genérico do elemento de casca em função dos deslocamentos nodais.

5.2 Formulação das características do elemento

Considere-se o elemento de casca submetido a forças de superfície $\bar{q}$, cujas componentes com relação aos eixos x' , y' e z' do sistema de referência local são, respectivamente, $q_{x'}$, $q_{y'}$ e $q_{z'}$, e ainda, as forças de corpo $\bar{b}$, cujas componentes segundo aquele sistema, são $b_{x'}$, $b_{y'}$ e $b_{z'}$. Se os deslocamentos u' , v' e w' , apresentados pelos pontos do elemento em consequência do carregamento atuante, sofrerem, respectivamente, os incrementos $\delta u'$, $\delta v'$ e $\delta w'$, denominados *deslocamentos virtuais*, o estado de deformação específica nestes pontos, de acordo com as Equações (4.27), (4.28), (4.29), (4.30) e (4.31), apresentará os seguintes incrementos:

$$\delta \epsilon_{x'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \quad (5.14)$$

$$\delta \epsilon_{y'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial y'} \quad (5.15)$$

$$\delta \gamma_{x'y'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \quad (5.16)$$

$$\delta \gamma_{x'z'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \quad (5.17)$$

$$\delta\gamma_{y'z'} = \frac{\partial\delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial\delta w'}{\partial y'} \quad (5.18)$$

denominados *deformações específicas virtuais*. Desta forma, o *trabalho virtual* δW executado pelo carregamento externo (forças de superfície e forças de corpo), em consequência dos deslocamentos virtuais, será dado por [Przemieniecki *et al.*, 1968]:

$$\delta W = \int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV \quad (5.19)$$

na qual $\{\delta u'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos virtuais:

$$\{\delta u'\} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

$\{q'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de superfície:

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

e $\{b'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de corpo:

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

A *energia de deformação virtual*, δU , armazenada no elemento de casca, como consequência do estado de tensão em seus pontos e do estado de deformação específica virtual, correspondente, será dada por [Przemieniecki *et al.*, 1968]:

$$\delta U = \int_V \{\delta \epsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.23)$$

na qual $\{\delta \epsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas virtuais:

$$\{\delta \epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{x'} \\ \delta \epsilon_{y'} \\ \delta \gamma_{x'y'} \\ \delta \gamma_{x'z'} \\ \delta \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes nos pontos do elemento, segundo o sistema de referência local:

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Aplicando-se, agora, o *princípio dos trabalhos virtuais* [Przemieniecki *et al.*, 1968], pode-se escrever que:

$$\delta W = \delta U \quad (5.26)$$

ou ainda,

$$\int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV = \int_V \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.27)$$

A Equação (3.44) fornece os deslocamentos $\{u\}$ dos pontos do elemento de casca, com relação ao sistema de referência global. Necessita-se, entretanto, dos deslocamentos $\{u'\}$ com relação ao sistema de referência local. Estes deslocamentos podem ser obtidos através da seguinte transformação:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (5.28)$$

na qual $[\theta]$ já foi definido anteriormente através da Equação (4.33). Da mesma forma, pode-se escrever que:

$$\{q'\} = [\theta]^T \cdot \{q\} \quad (5.29)$$

e

$$\{b'\} = [\theta]^T \cdot \{b\} \quad (5.30)$$

nas quais $\{q\}$ e $\{b\}$ são, respectivamente, as forças de superfície e as forças de corpo, de acordo com o sistema de referência global. Assim,

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

e

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Considerando as Equações (5.28) e (4.69), os deslocamentos virtuais $\{\delta u'\}$ e as deformações específicas virtuais $\{\delta \epsilon'\}$ podem ser dados por [Zienkiewicz *et al.*, 1989]:

$$\{\delta u'\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{\delta a\} \quad (5.33)$$

e

$$\{\delta \epsilon'\} = [B] \cdot \{\delta a\} \quad (5.34)$$

na qual $\{\delta a\}$ é a matriz coluna constituída dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.

Substituindo as Equações (5.13) e (5.34) na Equação (5.27), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{b\} \cdot dV = \\ \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \end{aligned} \quad (5.35)$$

Como $[\theta]$ é uma matriz quadrada e ortonormal, pode-se escrever que:

$$[\theta] \cdot [\theta]^T = [I] \quad (5.36)$$

sendo $[I]$ a matriz identidade. Assim, a Equação (5.35) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \\ \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \end{aligned} \quad (5.37)$$

ou ainda, uma vez que $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes para as integrações na área e no volume:

$$\{\delta a\}^T \left(\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV \right) = \{\delta a\}^T \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.38)$$

Como a equação anterior é válida quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\{\delta a\}$, pode-se escrever que:

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.39)$$

Nesta equação,

$$\int_A [N]^T \{q\} dA = \{f_q^e\} \quad (5.40)$$

é uma matriz coluna que corresponde às forças de superfície,

$$\int_V [N]^T \{b\} dV = \{f_b^e\} \quad (5.41)$$

é uma matriz coluna que corresponde às forças de corpo e

$$\int_V [B]^T [D'] [B] dV = [K^e] \quad (5.42)$$

é uma matriz quadrada, simétrica, denominada *matriz de rigidez* do elemento de casca. Desta forma, a Equação (5.39) pode ser reescrita como se segue:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} \quad (5.43)$$

A Equação (5.43) representa o equilíbrio estático, e aplicando-se o “*Princípio de D’Alembert*”, pode-se simplificar a obtenção da equação do equilíbrio dinâmico com a inclusão da força de inércia como uma parte das forças de corpo ([Hurt *et al.*, 1964], [Meirovitch, 1985]). A força de corpo total, então, será dada por:

$$\{b_i\} = \{b\} - \rho [N] \{\ddot{a}\} \quad (5.44)$$

na qual ρ é densidade de massa por unidade de volume do elemento e $\{\ddot{a}\}$ é uma matriz coluna constituída das acelerações nodais: $\ddot{u}_i$, $\ddot{v}_i$, $\ddot{w}_i$, $\ddot{\alpha}_i$ e $\ddot{\beta}_i$ (derivada segunda em relação ao tempo dos deslocamentos nodais).

Pode-se, então, reescrever a Equação (5.39):

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T (\{b\} - \rho [N] \{\ddot{a}\}) dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.45)$$

ou ainda,

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \cdot \{\ddot{a}\} + \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.46)$$

Nesta equação,

$$\int_V \rho [N]^T [N] dV = [M^e] \quad (5.47)$$

é uma matriz quadrada, denominada *matriz de massa* do elemento. Desta forma, a Equação (5.46) pode ser reescrita como se apresenta a seguir:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} = \{f^e\} \quad (5.48)$$

que é a equação que representa o equilíbrio dinâmico do elemento, na qual $\{a\}$, $\{f_q^e\}$ e $\{f_b^e\}$ dependem do tempo. A matriz coluna $\{f^e\}$ representa o vetor de carga do elemento correspondente às forças de superfície e de corpo.

5.3 Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca

Na Equação (5.42), que possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento, o diferencial de volume é dado com relação ao sistema de referência global. Portanto,

$$dV = dx dy dz \quad (5.49)$$

Como os termos de $[B]$ são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η , e da coordenada linear ζ , o diferencial de volume deve ser dado segundo este sistema de referência. Para efetuar esta transformação será utilizado um procedimento padrão, que envolve o determinante $|J(\xi, \eta)|$ da matriz Jacobiano, dado através da Equação (4.26). Assim [Kaplan, 1971],

$$dV = |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.50)$$

e a Equação (5.42) pode ser reescrita como se segue:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.51)$$

ou ainda pela substituição da matriz $[B]$, dada a partir da Equação (4.70), tem-se que:

$$\begin{aligned}
[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [B_2(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_9(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [B_{31}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [B_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [B_{56}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot [D'] \cdot [B_1(\xi, \eta, \zeta)] [B_2(\xi, \eta, \zeta)] \dots \\
& \dots, [B_i(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_9(\xi, \eta, \zeta)] [B_{31}(\xi, \eta)] [B_{32}(\xi, \eta)], \dots \\
& \dots, [B_{pk}(\xi, \eta)], \dots, [B_{56}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
\end{aligned} \quad (5.52)$$

A Equação (5.52) uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento, que será dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1j}] & \dots & [K_{19}] & [K_{1,31}] & \dots & [K_{1,mn}] & \dots & [K_{1,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{i1}] & \dots & [K_{ij}] & \dots & [K_{i9}] & [K_{i,31}] & \dots & [K_{i,mn}] & \dots & [K_{i,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{91}] & \dots & [K_{9j}] & \dots & [K_{99}] & [K_{9,31}] & \dots & [K_{9,mn}] & \dots & [K_{9,56}] \\ \hline [K_{31,1}] & \dots & [K_{31,j}] & \dots & [K_{31,9}] & [K_{31,31}] & \dots & [K_{31,mn}] & \dots & [K_{31,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{kl,1}] & \dots & [K_{kl,j}] & \dots & [K_{kl,9}] & [K_{kl,31}] & \dots & [K_{kl,mn}] & \dots & [K_{kl,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{56,1}] & \dots & [K_{56,j}] & \dots & [K_{56,9}] & [K_{56,31}] & \dots & [K_{56,mn}] & \dots & [K_{56,56}] \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

5.3.1 Determinação da submatriz $[K_{ij}]$

A submatriz $[K_{ij}]$ está relacionada com os nós i e j , sendo que tanto i quanto j variam de 1 a 9. Esta matriz caracteriza o elemento isoparamétrico. De acordo com a Equação (5.52), a submatriz $[K_{ij}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.54)$$

ou ainda, considerando as Equações (4.66) e (5.12):

$$\begin{aligned}
 [K_{ij}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{44i} + \frac{l_i}{2} C_{44i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{35i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{45i} + \frac{l_i}{2} C_{45i} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} B_{51i} \\ B_{52i} \\ B_{53i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{54i} + \frac{l_i}{2} C_{54i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{55i} + \frac{l_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11j} & B_{12j} \\ B_{21j} & B_{22j} \\ B_{31j} & B_{32j} \\ B_{41j} & B_{42j} \\ B_{51j} & B_{52j} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} B_{13j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{14j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{15j} \\ B_{23j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{24j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{25j} \\ B_{33j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{34j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{35j} \\ B_{43j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{44j} + \frac{l_j}{2} C_{44j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{45j} + \frac{l_j}{2} C_{45j} \\ B_{53j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{54j} + \frac{l_j}{2} C_{54j} & \zeta \frac{l_j}{2} B_{55j} + \frac{l_j}{2} C_{55j} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Resolvendo a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

na qual

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41j} + B_{51i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41j} + B_{52i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41j} + B_{53i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \xi \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\xi (B_{44i} \cdot B_{41j} + B_{54i} \cdot B_{51j}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{41j} + C_{54i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \xi \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{21j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\xi (B_{45i} \cdot B_{41j} + B_{55i} \cdot B_{51j}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{41j} + C_{55i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42j} + B_{51i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42j} + B_{52i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42j} + B_{53i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{42j} + B_{54i} \cdot B_{52j}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{42j} + C_{54i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{22j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{42j} + B_{55i} \cdot B_{52j}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{42j} + C_{55i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43j} + B_{51i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43j} + B_{52i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43j} + B_{53i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{23j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{43j} + B_{54i} \cdot B_{53j}) + \\
& (C_{44i} \cdot B_{43j} + C_{54i} \cdot B_{53j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{23j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{43j} + B_{55i} \cdot B_{53j}) + \\
& (C_{45i} \cdot B_{43j} + C_{55i} \cdot B_{53j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{24j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{44j} + B_{51i} \cdot B_{54j}) + \\
& (B_{41i} \cdot C_{44j} + B_{51i} \cdot C_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{24j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{44j} + B_{52i} \cdot B_{54j}) + \\
& (B_{42i} \cdot C_{44j} + B_{52i} \cdot C_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{24j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{44j} + B_{53i} \cdot B_{54j}) + \\
& (B_{43i} \cdot C_{44j} + B_{53i} \cdot C_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{24j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{44j} + B_{54i} \cdot B_{54j}) + \\
& \zeta (B_{44i} \cdot C_{44j} + B_{54i} \cdot C_{54j}) + (C_{44i} \cdot C_{44j} + C_{54i} \cdot C_{54j})] + \\
& \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{44i} \cdot B_{44j} + C_{54i} \cdot B_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{24j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{44j} + B_{55i} \cdot B_{54j}) + \\
& \zeta (B_{45i} \cdot C_{44j} + B_{55i} \cdot C_{54j}) + (C_{45i} \cdot C_{44j} + C_{55i} \cdot C_{54j})] + \\
& \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{45i} \cdot B_{44j} + C_{55i} \cdot B_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{25j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{41i} \cdot B_{45j} + B_{51i} \cdot B_{55j}) + \\
& (B_{41i} \cdot C_{45j} + B_{51i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{25j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{42i} \cdot B_{45j} + B_{52i} \cdot B_{55j}) + \\
& (B_{42i} \cdot C_{45j} + B_{52i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
k_{35} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{25j} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{43i} \cdot B_{45j} + B_{53i} \cdot B_{55j}) + \\
& (B_{43i} \cdot C_{45j} + B_{53i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned}
k_{45} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{25j} + \\
\frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{45j} + B_{54i} \cdot B_{55j}) + \\
\zeta (B_{44i} \cdot C_{45j} + B_{54i} \cdot C_{55j}) + (C_{44i} \cdot C_{45j} + C_{54i} \cdot C_{55j})] + \\
\frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{44i} \cdot B_{45j} + C_{54i} \cdot B_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{25j} + \\
\frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{45j} + B_{55i} \cdot B_{55j}) + \\
\zeta (B_{45i} \cdot C_{45j} + B_{55i} \cdot C_{55j}) + (C_{45i} \cdot C_{45j} + C_{55i} \cdot C_{55j})] + \\
\frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{45i} \cdot B_{45j} + C_{55i} \cdot B_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.81)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração na direção ζ será feita analiticamente, enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Portanto, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\
\int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\
\int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3}
\end{aligned} \quad (5.82)$$

e ainda, considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [Zienkiewicz *et al.*, 1989]:

$$\begin{aligned}
k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \\
(\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \\
\frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \\
B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + \\
(\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.97)$$

$$k_{14} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.98)$$

$$k_{24} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.99)$$

$$k_{34} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.100)$$

$$k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.101)$$

$$k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.102)$$

$$k_{15} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.103)$$

$$k_{25} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.104)$$

$$k_{35} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.105)$$

$$k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.106)$$

$$k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.107)$$

5.3.2 Determinação da submatriz $[K_{i,mn}]$

A submatriz $[K_{i,mn}]$ caracteriza o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o elemento hierárquico e está relacionada com o nó i , o grau m e o lado ou elemento n , sendo que i varia de 1 a 9, m de 3 a 5 e n de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.52) a submatriz $[K_{i,mn}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{i,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot [D'] \cdot [B_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.108)$$

ou ainda, tendo-se em conta as Equações (4.66), (4.67) e (5.12):

$$[K_{i,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} & B_{51i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} & B_{52i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} & B_{53i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{44i} + \frac{l_i}{2} C_{44i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{54i} + \frac{l_i}{2} C_{54i} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{35i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{45i} + \frac{l_i}{2} C_{45i} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{55i} + \frac{l_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11mn} & B_{12mn} & B_{13mn} \\ B_{21mn} & B_{22mn} & B_{23mn} \\ B_{31mn} & B_{32mn} & B_{33mn} \\ B_{41mn} & B_{42mn} & B_{43mn} \\ B_{51mn} & B_{52mn} & B_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.109)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{i,mn}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

na qual

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41mn} + B_{51i} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.111)$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41mn} + B_{52i} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.112)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41mn} + B_{53i} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.113)$$

$$k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{41mn} + B_{54i} \cdot B_{51mn}) + \right. \\ \left. (C_{44i} \cdot B_{41mn} + C_{54i} \cdot B_{51mn})] \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.114)$$

$$k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{41mn} + B_{55i} \cdot B_{51mn}) + \right. \\ \left. (C_{45i} \cdot B_{41mn} + C_{55i} \cdot B_{51mn})] \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.115)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42mn} + B_{51i} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42mn} + B_{52i} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42mn} + B_{53i} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{22mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{42mn} + B_{54i} \cdot B_{52mn}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{42mn} + C_{54i} \cdot B_{52mn})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{22mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{42mn} + B_{55i} \cdot B_{52mn}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{42mn} + C_{55i} \cdot B_{52mn})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43mn} + B_{51i} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43mn} + B_{52i} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43mn} + B_{53i} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot B_{43mn} + B_{54i} \cdot B_{53mn}) + \right. \\
\left. (C_{44i} \cdot B_{43mn} + C_{54i} \cdot B_{53mn})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot B_{43mn} + B_{55i} \cdot B_{53mn}) + \right. \\
\left. (C_{45i} \cdot B_{43mn} + C_{55i} \cdot B_{53mn})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.125)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração na direção ζ será feita analiticamente, enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Portanto, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\
\int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\
\int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3}
\end{aligned} \quad (5.126)$$

e ainda, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [Zienkiewicz *et al.*, 1989]:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned}
 k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.131)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.132)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.133)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.134)$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot J \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.135)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.136)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.137)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.138)$$

$$k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.139)$$

$$k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.140)$$

$$k_{53} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.141)$$

5.3.3 Determinação da submatriz $[K_{kl,j}]$

A submatriz $[K_{kl,j}]$ caracteriza o acoplamento entre o elemento hierárquico e o elemento isoparamétrico e está relacionada com o nó j , o grau k e o lado ou elemento l , sendo que j varia de 1 a 9, k de 3 a 5 e l de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.52) a submatriz $[K_{kl,j}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{kl,j}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{kl}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot [D'] \cdot [B_j(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.142)$$

portanto,

$$[K_{kl,j}] = [K_{l,mn}]^T \quad (5.143)$$

5.3.4 Determinação da submatriz $[K_{kl,mn}]$

A submatriz $[K_{kl,mn}]$ caracteriza o elemento hierárquico e está relacionada com os graus k e m e os lados ou elementos l e n , sendo que k e m variam de 3 a 5, e l e n de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.52) a submatriz $[K_{kl,mn}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{kl,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{kl}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot [D'] \cdot [B_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.144)$$

ou ainda, tendo-se em conta as Equações (4.67) e (5.12):

$$[K_{kl,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11kl} & B_{21kl} & B_{31kl} & B_{41kl} & B_{51kl} \\ B_{12kl} & B_{22kl} & B_{32kl} & B_{42kl} & B_{52kl} \\ B_{13kl} & B_{23kl} & B_{33kl} & B_{43kl} & B_{53kl} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11mn} & B_{12mn} & B_{13mn} \\ B_{21mn} & B_{22mn} & B_{23mn} \\ B_{31mn} & B_{32mn} & B_{33mn} \\ B_{41mn} & B_{42mn} & B_{43mn} \\ B_{51mn} & B_{52mn} & B_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.145)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{kl,mn}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5.146)$$

na qual

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11kl} + \nu B_{21kl}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{11kl} + B_{21kl}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31kl} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41kl} \cdot B_{41mn} + B_{51kl} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.147)$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12kl} + \nu B_{22kl}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{12kl} + B_{22kl}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32kl} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42kl} \cdot B_{41mn} + B_{52kl} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.148)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13kl} + \nu B_{23kl}) \cdot B_{11mn} + (\nu B_{13kl} + B_{23kl}) \cdot B_{21mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33kl} \cdot B_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43kl} \cdot B_{41mn} + B_{53kl} \cdot B_{51mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.149)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11kl} + \nu B_{21kl}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{11kl} + B_{21kl}) \cdot B_{22mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31kl} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41kl} \cdot B_{42mn} + B_{51kl} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.150)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12kl} + \nu B_{22kl}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{12kl} + B_{22kl}) \cdot B_{22mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32kl} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42kl} \cdot B_{42mn} + B_{52kl} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.151)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13kl} + \nu B_{23kl}) \cdot B_{12mn} + (\nu B_{13kl} + B_{23kl}) \cdot B_{22mn} + \right. \\ \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33kl} \cdot B_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43kl} \cdot B_{42mn} + B_{53kl} \cdot B_{52mn}) \right\} \cdot \\ |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11kl} + \nu B_{21kl}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{11kl} + B_{21kl}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31kl} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot \right. \\
\left. (B_{41kl} \cdot B_{43mn} + B_{51kl} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12kl} + \nu B_{22kl}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{12kl} + B_{22kl}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32kl} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot \right. \\
\left. (B_{42kl} \cdot B_{43mn} + B_{52kl} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.154)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13kl} + \nu B_{23kl}) \cdot B_{13mn} + (\nu B_{13kl} + B_{23kl}) \cdot B_{23mn} + \right. \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33kl} \cdot B_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot \right. \\
\left. (B_{43kl} \cdot B_{43mn} + B_{53kl} \cdot B_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta
\end{aligned} \quad (5.155)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração na direção ζ será feita analiticamente, enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Portanto, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\
\int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\
\int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3}
\end{aligned} \quad (5.156)$$

e ainda, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [Zienkiewicz *et al.*, 1989]:

$$\begin{aligned}
k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{51kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.157)$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{52kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.158)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
(\nu B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
\frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \\
\frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
B_{53kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{31kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{32kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.161)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
(\nu B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
\frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \\
\frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
B_{53kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.162)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{21kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{31kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.163)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{22kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
B_{32kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.164)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. (\nu B_{13kl}(\xi_p, \eta_p) + B_{23kl}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \\
\left. B_{33kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
\left. B_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{53kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \quad (5.165)$$

5.4 Determinação da matriz de massa do elemento de casca

Na Equação (5.47), que possibilita determinar a matriz de massa do elemento, o diferencial de volume é dado pela Equação (5.50). Portanto,

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.166)$$

ou ainda, pela substituição da matriz $[N]$, dada a partir da Equação (3.49), tem-se que:

$$\begin{aligned}
[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [N_2(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_9(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [M_{31}(\xi, \eta)]^T \\ [M_{32}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{56}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot [[N_1(\xi, \eta, \zeta)] [N_2(\xi, \eta, \zeta)] \dots \\
\dots, [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \dots, [N_9(\xi, \eta, \zeta)] [M_{31}(\xi, \eta)] [M_{32}(\xi, \eta)] \dots \\
\dots, [M_{pk}(\xi, \eta)] \dots, [M_{56}(\xi, \eta)]] |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
\end{aligned} \quad (5.167)$$

Esta equação, uma vez resolvida, levará à matriz de massa do elemento, que será dada por:

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & \dots & [M_{1j}] & \dots & [M_{19}] & [M_{1,31}] & \dots & [M_{1,mn}] & \dots & [M_{1,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{j1}] & \dots & [M_{jj}] & \dots & [M_{j9}] & [M_{j,31}] & \dots & [M_{j,mn}] & \dots & [M_{j,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{91}] & \dots & [M_{9j}] & \dots & [M_{99}] & [M_{9,31}] & \dots & [M_{9,mn}] & \dots & [M_{9,56}] \\ [M_{31,1}] & \dots & [M_{31,j}] & \dots & [M_{31,9}] & [M_{31,31}] & \dots & [M_{31,mn}] & \dots & [M_{31,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{kl,1}] & \dots & [M_{kl,j}] & \dots & [M_{kl,9}] & [M_{kl,31}] & \dots & [M_{kl,mn}] & \dots & [M_{kl,56}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [M_{56,1}] & \dots & [M_{56,j}] & \dots & [M_{56,9}] & [M_{56,31}] & \dots & [M_{56,mn}] & \dots & [M_{56,56}] \end{bmatrix} \quad (5.168)$$

5.4.1 Determinação da submatriz $[M_{ij}]$

A submatriz $[M_{ij}]$ está relacionada com os nós i e j , sendo que tanto i quanto j variam de 1 a 9. Esta matriz caracteriza o elemento isoparamétrico. De acordo com a Equação (5.167), a submatriz $[M_{ij}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \cdot [N_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.169)$$

ou, ainda, tendo-se em conta a Equação (3.22):

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{11j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{21j} \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{12j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{22j} \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & \zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{13j} & -\zeta \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{23j} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.170)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \quad (5.171)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.172)$$

$$m_{12} = m_{13} = 0 \quad (5.173)$$

$$m_{14} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{11j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.174)$$

$$m_{15} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{21j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.175)$$

$$m_{21} = 0 \quad (5.176)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.177)$$

$$m_{23} = 0 \quad (5.178)$$

$$m_{24} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{12j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.179)$$

$$m_{25} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{22j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.180)$$

$$m_{31} = 0 \quad (5.181)$$

$$m_{32} = 0 \quad (5.182)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.183)$$

$$m_{34} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{13j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.184)$$

$$m_{35} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_j}{2} \cdot v_{23j} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.185)$$

$$m_{41} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.186)$$

$$m_{42} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.187)$$

$$m_{43} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.188)$$

$$m_{44} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11i} \cdot v_{11j} + v_{12i} \cdot v_{12j} + v_{13i} \cdot v_{13j}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.189)$$

$$m_{45} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11i} \cdot v_{21j} + v_{12i} \cdot v_{22j} + v_{13i} \cdot v_{23j}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.190)$$

$$m_{51} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.191)$$

$$m_{52} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.192)$$

$$m_{53} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.193)$$

$$m_{54} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot (v_{11j} \cdot v_{21i} + v_{12j} \cdot v_{22i} + v_{13j} \cdot v_{23i}) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.194)$$

$$\begin{aligned}
m_{55} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot (N_i(\xi, \eta) \cdot N_j(\xi, \eta) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{t_i \cdot t_j}{4}) \cdot \\
& (v_{21i} \cdot v_{21j} + v_{22i} \cdot v_{22j} + v_{23i} \cdot v_{23j}) \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
\end{aligned} \quad (5.195)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração na direção ζ será feita analiticamente, Equação (5.82), enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Desta forma, considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.196)$$

$$m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{15} = 0 \quad (5.197)$$

$$m_{22} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.198)$$

$$m_{21} = m_{23} = m_{24} = m_{25} = 0 \quad (5.199)$$

$$m_{33} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.200)$$

$$m_{31} = m_{32} = m_{34} = m_{35} = 0 \quad (5.201)$$

$$\begin{aligned}
m_{44} = & \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{ N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
& [v_{11i} \cdot v_{11j} + v_{12i} \cdot v_{12j} + v_{13i} \cdot v_{13j}] \cdot \\
& |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \}
\end{aligned} \quad (5.202)$$

$$\begin{aligned}
m_{45} = & -\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{ N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
& [v_{11i} \cdot v_{21j} + v_{12i} \cdot v_{22j} + v_{13i} \cdot v_{23j}] \cdot \\
& |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \}
\end{aligned} \quad (5.203)$$

$$m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0 \quad (5.204)$$

$$m_{54} = -\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot [v_{11j} \cdot v_{21i} + v_{12j} \cdot v_{22i} + v_{13j} \cdot v_{23i}] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p\} \quad (5.205)$$

$$m_{55} = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot t_i \cdot t_j \cdot \sum_{p=1}^m \{N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot [v_{21i} \cdot v_{21j} + v_{22i} \cdot v_{22j} + v_{23i} \cdot v_{23j}] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p\} \quad (5.206)$$

$$m_{51} = m_{52} = m_{53} = 0 \quad (5.207)$$

5.4.2 Determinação da submatriz $[M_{i,mn}]$

A submatriz $[M_{i,mn}]$ caracteriza o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o elemento hierárquico e está relacionada com o nó i , o grau m e o lado ou elemento n , sendo que i varia de 1 a 9, m de 3 a 5 e n de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.167) a submatriz $[M_{i,mn}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{i,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [N_i(\xi, \eta)]^T \cdot [M_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.208)$$

ou, ainda, tendo-se em conta as Equações (3.22) e (3.45):

$$[M_{i,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{mn}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{mn}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{mn}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.209)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{i,mn}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{34} \\ m_{51} & m_{52} & m_{35} \end{bmatrix} \quad (5.210)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.211)$$

$$m_{21} = 0 \quad (5.212)$$

$$m_{31} = 0 \quad (5.213)$$

$$m_{41} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.214)$$

$$m_{51} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.215)$$

$$m_{12} = 0 \quad (5.216)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.217)$$

$$m_{32} = 0 \quad (5.218)$$

$$m_{42} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.219)$$

$$m_{52} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.220)$$

$$m_{13} = 0 \quad (5.221)$$

$$m_{23} = 0 \quad (5.222)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.223)$$

$$m_{43} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.224)$$

$$m_{53} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.225)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração na direção ζ será feita analiticamente, Equação (5.82), enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Desta forma, considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.226)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{41} = m_{51} = m_{12} = 0 \quad (5.227)$$

$$m_{22} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.228)$$

$$m_{32} = m_{42} = m_{52} = m_{13} = m_{23} = 0 \quad (5.229)$$

$$m_{33} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.230)$$

$$m_{43} = m_{53} = 0 \quad (5.231)$$

5.3.3 Determinação da submatriz $[M_{klj}]$

A submatriz $[M_{klj}]$ caracteriza o acoplamento entre o elemento hierárquico e o elemento isoparamétrico e está relacionada com o nó j , o grau k e o lado ou elemento l , sendo que j varia de 1 a 9, k de 3 a 5 e l de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.167) a submatriz $[M_{klj}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{kl,j}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [M_{kl}(\xi, \eta)]^T \cdot [N_j(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.232)$$

portanto,

$$[M_{kl,j}] = [M_{l,mn}]^T \quad (5.233)$$

5.4.4 Determinação da submatriz $[M_{kl,mn}]$

A submatriz $[M_{kl,mn}]$ caracteriza o elemento hierárquico e está relacionada com os graus k e m e os lados ou elementos l e n , sendo que k e m variam de 3 a 5, e l e n de 1 a 6. De acordo com a Equação (5.167) a submatriz $[M_{kl,mn}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{kl,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot [M_{kl}(\xi, \eta)]^T \cdot [M_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.234)$$

ou, ainda, tendo-se em conta a Equação (3.45):

$$[M_{kl,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot \begin{bmatrix} M_{kl}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kl}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kl}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{mn}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{mn}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{mn}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.235)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{kl,mn}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (5.236)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot M_{kl}(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.237)$$

$$m_{21} = 0 \quad (5.238)$$

$$m_{31} = 0 \quad (5.239)$$

$$m_{12} = 0 \quad (5.240)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot M_{kl}(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.241)$$

$$m_{32} = 0 \quad (5.242)$$

$$m_{13} = 0 \quad (5.243)$$

$$m_{23} = 0 \quad (5.244)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \cdot M_{kl}(\xi, \eta) \cdot M_{mn}(\xi, \eta) \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.245)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração na direção ζ será feita analiticamente, Equação (5.82), enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989]. Desta forma, considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(M_{kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.246)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{12} = 0 \quad (5.247)$$

$$m_{22} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(M_{kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.248)$$

$$m_{32} = m_{13} = m_{23} = 0 \quad (5.249)$$

$$m_{33} = 2 \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^m \left(M_{kl}(\xi_p, \eta_p) \cdot M_{mn}(\xi_p, \eta_p) \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \right) \quad (5.250)$$

5.5 Determinação do vetor de carga do elemento de casca

Nas Equações (5.40) e (5.41), que possibilitam determinar o vetor de carga do elemento, o diferencial de volume e o diferencial de área são dados com relação ao sistema de referência global. Entretanto, uma vez que os termos da matriz $[N]$ são funções das coordenadas curvilíneas, os diferenciais de volume e área devem ser dados segundo este sistema de referência, sendo que o diferencial de volume já foi estabelecido, anteriormente, através da Equação (5.50). Para a obtenção do diferencial de área, utiliza-se um procedimento padrão que envolve o módulo do vetor $\vec{r}_3$. Portanto [Kaplan, 1971],

$$dA = r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.251)$$

5.5.1 Vetor de carga do elemento correspondente às cargas distribuídas nas faces externas $\{f q^e\}$

Admitindo-se por simplicidade que a carga esteja distribuída na superfície média do elemento, na qual $\zeta=0$, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados com os pontos

desta superfície. Se $\bar{q}_i$, de componentes q_{xi} , q_{yi} e q_{zi} segundo o sistema de referência global, é a carga distribuída associada ao nó i , a carga $\bar{q}$ distribuída na superfície média do elemento pode ser interpolada a partir das funções de forma. Assim, o vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento será dado por:

$$\{f\bar{q}^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_9(\xi, \eta)]^T \\ [M_{31}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{56}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot [[N_1(\xi, \eta)], \dots, [N_9(\xi, \eta)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_9\} \end{Bmatrix} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.252)$$

Esta equação uma vez resolvida levará ao vetor de carga do elemento correspondente à ação da carga distribuída sobre suas faces externas:

$$\{f\bar{q}^e\} = \begin{Bmatrix} \{f\bar{q}_1\} \\ \vdots \\ \{f\bar{q}_i\} \\ \vdots \\ \{f\bar{q}_9\} \\ \{f\bar{q}_{31}\} \\ \vdots \\ \{f\bar{q}_{pk}\} \\ \vdots \\ \{f\bar{q}_{56}\} \end{Bmatrix} \quad (5.253)$$

5.5.1.1 Determinação da submatriz $\{fq_i\}$

A submatriz $\{fq_i\}$ está relacionada com o nó i , sendo que i varia de 1 a 9. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento isoparamétrico* e é dada por:

$$\{fq_i\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot \{q_l\} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.254)$$

Resolvendo esta equação, obtêm-se:

$$\{fq_i\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.255)$$

na qual

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{xl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.256)$$

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{yl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.257)$$

$$f_3 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{zl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.258)$$

$$f_4 = 0 \quad (5.259)$$

$$f_5 = 0 \quad (5.260)$$

Fazendo a integração numérica nas direções ξ e η , considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação associado a este ponto e m o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.261)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.262)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.263)$$

5.5.1.2 Determinação da submatriz $\{fq_{pk}\}$

A submatriz $\{fq_{pk}\}$ está relacionada com o grau p e com o lado ou elemento k , sendo que p varia de 3 a 5 e k de 1 a 6. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico e é dada por:

$$\{fq_{pk}\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot \{q_l\} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.264)$$

Resolvendo esta equação, obtêm-se:

$$\{fq_{kj}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.265)$$

na qual

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{xl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.266)$$

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{yl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.267)$$

$$f_3 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi, \eta) \cdot q_{zl} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.268)$$

Fazendo a integração numérica nas direções ξ e η , considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação associado a este ponto e m o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.269)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.270)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^9 N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zl} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.271)$$

5.5.2 Vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo $\{fb^e\}$

Se b_x , b_y e b_z são, respectivamente, as componentes da força de corpo $\bar{b}$ segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, a Equação (5.41) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\{fb^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_9(\xi, \eta)]^T \\ [M_{31}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{56}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.272)$$

Esta equação uma vez resolvida levará ao vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo:

$$\{fb^e\} = \begin{Bmatrix} \{fb_1\} \\ \vdots \\ \{fb_9\} \\ \{fb_{31}\} \\ \vdots \\ \{fb_{pk}\} \\ \vdots \\ \{fb_{56}\} \end{Bmatrix} \quad (5.273)$$

5.5.2.1 Determinação da submatriz $\{fb_i\}$

A submatriz $\{fb_i\}$ está relacionada com o nó i , sendo que i varia de 1 a 9. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento isoparamétrico* e é dada por:

$$\{fb_i\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.274)$$

Resolvendo-se esta equação, obtêm-se que:

$$\{fb_i\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.275)$$

na qual

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.276)$$

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.277)$$

$$f_3 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.278)$$

$$f_4 = 0 \quad (5.279)$$

$$f_5 = 0 \quad (5.280)$$

Fazendo a integração numérica nas direções ξ e η , considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação associado a este ponto e m o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.281)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.282)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.283)$$

5.5.2.2 Determinação da submatriz $\{fb_{pk}\}$

A submatriz $\{fb_{pk}\}$ está relacionada com o grau p e com o lado ou elemento k , sendo que p varia de 3 a 5 e k de 1 a 6. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico e é dada por:

$$\{fb_{kj}\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.284)$$

Resolvendo esta equação, obtêm-se:

$$\{fb_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.285)$$

na qual

$$f_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.286)$$

$$f_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.287)$$

$$f_3 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.288)$$

Fazendo a integração numérica nas direções ξ e η , considerando que ξ_p e η_p são as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação associado a este ponto e m o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.289)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.290)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.291)$$

5.5.3 Vetor de carga do elemento correspondente às cargas concentradas $\{fr^e\}$

Se $\{r\}$ é uma matriz coluna constituída das componentes, segundo o sistema de referência global, das cargas concentradas atuantes nos nós do elemento, o vetor de carga correspondente às cargas concentradas pode ser escrito na seguinte forma:

$$\{fr^e\} = \begin{Bmatrix} \{r_1\} \\ \vdots \\ \{r_i\} \\ \vdots \\ \{r_9\} \\ \{r_{31}\} \\ \vdots \\ \{r_{pk}\} \\ \vdots \\ \{r_{56}\} \end{Bmatrix} \quad (5.292)$$

5.5.3.1 Determinação da submatriz $\{r_i\}$

A submatriz $\{r_i\}$ está relacionada com o nó i , sendo que i varia de 1 a 9. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao *elemento isoparamétrico* e é dada por:

$$\{r_i\} = \begin{Bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ r_{zi} \\ r_{\alpha i} \\ r_{\beta i} \end{Bmatrix} \quad (5.293)$$

na qual as forças e momentos, r_{xi} , r_{yi} , r_{zi} , $r_{\alpha i}$ e $r_{\beta i}$ são as componentes, segundo o sistema de referência global, da carga concentrada atuante no nó i .

5.5.3.2 Determinação da submatriz $\{r_{pk}\}$

A submatriz $\{r_{pk}\}$ está relacionada com o grau p e com o lado ou elemento k , sendo que p varia de 3 a 5 e k de 1 a 6. Esta submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao elemento hierárquico e é dada por:

$$\{r_{pk}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.294)$$

5.5.4 Vetor de carga total $\{f^e\}$

O vetor de carga total correspondente às ações simultâneas de todos os carregamentos descritos anteriormente (vetor de carga do elemento correspondente às cargas distribuídas nas faces externas $\{fq^e\}$, vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo $\{fb^e\}$ e vetor de carga do elemento correspondente às cargas concentradas $\{fr^e\}$) será dado por:

$$\{f^e\} = \{fq^e\} + \{fb^e\} + \{fr^e\} \quad (5.295)$$

e a Equação (5.43) pode ser reescrita com se segue:

$$\{f^e\} = [K^e] \cdot \{a\} \quad (5.296)$$

5.6 Integração numérica

Na obtenção dos vetores de carga e das matrizes de rigidez e massa foi realizada a integração numérica nas direções, ξ e η , utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* [Zienkiewicz *et al.*, 1989].

Banerjee *et al.* (1992) apresentaram uma detalhada análise da integração numérica para a versão p do método dos elementos finitos. A análise concluiu que $p-1$ números de pontos de integração são exigidos para integrar um polinômio de grau p utilizando o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* em uma dimensão. O estudo mostrou também que o número de pontos para integrar um polinômio de grau p em duas dimensões pode ser relaxado para p .

Com base neste estudo, o número de pontos de integração da *Quadratura de Gauss-Legendre* utilizados neste trabalho foram:

- 3x3 pontos de integração no refinamento hierárquico de terceiro grau ($p = 3$);
- 4x4 pontos de integração no refinamento hierárquico de quarto grau ($p = 4$);
- 5x5 pontos de integração no refinamento hierárquico de quinto grau ($p = 5$).

6 FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

6.1 Introdução

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações está baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. Como as condições de equilíbrio já foram impostas dentro de cada elemento, necessita-se, agora, estabelecer as condições para que cada nó do sistema discretizado esteja em equilíbrio. Para tanto, é estabelecido um esquema de numeração global, que identifica cada nó do sistema discretizado. Em seguida é criada a *topologia*, que especifica quais nós do sistema pertencem a quais elementos, ou seja, especifica a correspondência entre os nós do sistema discretizado e os nós dos elementos. Esta topologia, dada como entrada do programa computacional, serve para definir a *conectividade* da malha de elementos.

6.2 Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais

Para que um nó i , genérico, do sistema esteja em equilíbrio, as componentes do vetor de carga $\{f_i\}$, nele atuantes, devem ser iguais à soma das componentes das forças $\{f_i^e\}$ de cada elemento, que concorre para o nó i . Portanto,

$$f_i = \sum_{e=1}^{ne} \{f_i^e\} \quad (6.1)$$

na qual ne é o número total de elementos, que compõem o sistema estrutural discretizado e $\{f_i^e\}$ é o vetor de carga, correspondente ao sistema isoparamétrico, associado ao nó i do sistema. O mesmo procedimento é admitido para as componentes das forças $\{f_{pk}\}$, relacionada com o sistema hierárquico.

$$f_{pk} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{pk}^e\} \quad (6.2)$$

na qual $\{f_{pk}^e\}$ é o vetor de carga correspondente ao elemento hierárquico.

Considerando-se a Equação (5.48) e conhecendo a correspondência entre os nós dos elementos e os nós do sistema, pode-se escrever para cada elemento e do sistema, de forma compacta, que:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (6.3)$$

onde, $[M]$ é a matriz de massa global do sistema:

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} [M_i^e] & \sum_{e=1}^{ne} [M_{i,pk}^e] \\ \sum_{e=1}^{ne} [M_{pk,i}^e] & \sum_{e=1}^{ne} [M_{pk}^e] \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema:

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} [K_i^e] & \sum_{e=1}^{ne} [K_{i,pk}^e] \\ \sum_{e=1}^{ne} [K_{pk,i}^e] & \sum_{e=1}^{ne} [K_{pk}^e] \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$\{\ddot{a}\}$ é o vetor relacionado com as acelerações nodais e parâmetros hierárquicos do sistema:

$$\{\ddot{a}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\ddot{a}_i\} \\ \{\ddot{a}_{pk}\} \end{matrix} \right\} \quad (6.6)$$

$\{a\}$, o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos do sistema:

$$\{a\} = \left\{ \begin{matrix} \{a_i\} \\ \{a_{pk}\} \end{matrix} \right\} \quad (6.7)$$

e $\{f\}$ é o vetor de carga global:

$$\{f\} = \left\{ \begin{matrix} \{f_i\} \\ \{f_{pk}\} \end{matrix} \right\} \quad (6.8)$$

Nas Equações (6.4), (6.5), (6.6) e (6.7), $\{a_i\}$ e $\{\ddot{a}_i\}$ são, respectivamente, os deslocamentos e acelerações nodais correspondentes aos nós do sistema, $\{a_{pk}\}$ e $\{\ddot{a}_{pk}\}$ são os parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento hierárquico do sistema, $[K_i^e]$ e $[M_i^e]$ são, respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa correspondentes ao elemento isoparamétrico, $[K_{i,pk}^e]$ e $[M_{i,pk}^e]$ são, respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o elemento hierárquico, $[K_{pk,i}^e]$ e $[M_{pk,i}^e]$ são,

respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o acoplamento entre o elemento hierárquico e o elemento isoparamétrico, e $[K_{pk}^e]$ e $[M_{pk}^e]$ são, respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o elemento hierárquico,

6.3 Análise estática

A Equação (6.3) representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e, se não existem acelerações atuantes no sistema, pode-se escrever que:

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (6.9)$$

na qual $[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema, $\{f\}$ o vetor de carga global do sistema e $\{a\}$ o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos do sistema. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação da matriz de rigidez global, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminados da matriz de rigidez global a linha e a coluna correspondentes.

O processo de resolução do sistema linear consiste na obtenção do vetor $\{a\}$. Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \quad (6.10)$$

Sendo n_{iso} o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica, $[K_{iso}]$ é uma submatriz ($n_{iso} \times n_{iso}$) e $\{a_{iso}\}$ e $\{f_{iso}\}$ são submatrizes ($n_{iso} \times 1$) correspondentes ao sistema isoparamétrico.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico ($[K_{iso}]$ e $\{f_{iso}\}$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo n_{h3} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise, $[K_{iso,h3}]$ é uma submatriz ($n_{iso} \times n_{h3}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise, $[K_{h3}]$ é uma submatriz ($n_{h3} \times n_{h3}$) correspondente ao sistema hierárquico para a primeira reanálise e $\{a_{h3}\}$ e $\{f_{h3}\}$ são submatrizes ($n_{h3} \times 1$) correspondentes ao sistema hierárquico para a primeira reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quarto grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico ($[K_{iso}]$ e $\{f_{iso}\}$) e hierárquico de terceiro grau ($[K_{iso,h3}]$, $[K_{h3,iso}]$, $[K_{h3}]$ e $\{f_{h3}\}$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial e na primeira reanálise. Sendo n_{h4} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na segunda reanálise, $[K_{iso,h4}]$ é uma submatriz ($n_{iso} \times n_{h4}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise, $[K_{h3,h4}]$ é uma submatriz ($n_{h3} \times n_{h4}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise, $[K_{h4}]$ é uma submatriz ($n_{h4} \times n_{h4}$) correspondente ao sistema hierárquico para a segunda reanálise e $\{a_{h4}\}$ e $\{f_{h4}\}$ são submatrizes ($n_{h4} \times 1$) correspondentes ao sistema hierárquico para a segunda reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da terceira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quinto grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] & [K_{iso,h5}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] & [K_{h3,h5}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] & [K_{h4,h5}] \\ [K_{h5,iso}] & [K_{h5,h3}] & [K_{h5,h4}] & [K_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \\ \{a_{h5}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \\ \{f_{h5}\} \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico ($[K_{iso}]$ e $\{f_{iso}\}$), hierárquico de terceiro grau ($[K_{iso,h3}]$, $[K_{h3,iso}]$, $[K_{h3}]$ e $\{f_{h3}\}$) e hierárquico de quarto grau ($[K_{iso,h4}]$, $[K_{h4,iso}]$, $[K_{h3,h4}]$, $[K_{h4,h3}]$, $[K_{h4}]$, e $\{f_{h4}\}$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial e na primeira e segunda reanálises. Sendo n_{h5} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise, $[K_{iso,h5}]$ é uma submatriz ($n_{iso} \times n_{h5}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h3,h5}]$ é uma submatriz ($n_{h3} \times n_{h5}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h4,h5}]$ é uma submatriz ($n_{h4} \times n_{h5}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h5}]$ é uma submatriz ($n_{h5} \times n_{h5}$) correspondentes ao sistema hierárquico para a terceira reanálise e $\{a_{h5}\}$ e $\{f_{h5}\}$ são submatrizes ($n_{h5} \times 1$) correspondentes ao sistema hierárquico para a terceira reanálise.

Verifica-se que para cada reanálise é necessário apenas calcular as submatrizes relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas. As submatrizes calculadas nas análises anteriores permanecem inalteradas o que diminui o esforço computacional de maneira apreciável.

A Figura 6.1 mostra os refinamentos da solução obtida na análise isoparamétrica, introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro (1ª reanálise), quarto (2ª reanálise) e quinto (3ª reanálise) graus, e destaca as submatrizes obtidas na análise anterior, que não precisam ser recalculadas.

Análise isoparamétrica (2º grau)

$$[K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\}$$



1ª Reanálise hierárquica (3º grau)

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \end{Bmatrix}$$



2ª Reanálise hierárquica (4º grau)

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \end{Bmatrix}$$



3ª Reanálise hierárquica (5º grau)

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] & [K_{iso,h5}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] & [K_{h3,h5}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] & [K_{h4,h5}] \\ [K_{h5,iso}] & [K_{h5,h3}] & [K_{h5,h4}] & [K_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \\ \{a_{h5}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \\ \{f_{h5}\} \end{Bmatrix}$$



Submatrizes obtidas na análise anterior.

Figura 6.1 Refinamentos da solução obtida na análise isoparamétrica, introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro (1ª reanálise), quarto (2ª reanálise) e quinto (3ª reanálise) graus.

Como o algoritmo desenvolvido permite que se escolham, independentemente, os lados e elementos a serem refinados, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse, pode-se ter tantas reanálises quanto se queira. Assim, de uma forma geral, a *iésima*-reanálise pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \cdots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \cdots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{iso} \\ \vdots \\ a_{hi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{iso} \\ \vdots \\ f_{hi} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

na qual todas as submatrizes anteriores àquelas relacionadas com a reanálise i já foram obtidas. Sendo n_{hi} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na i -ésima reanálise, $[K_{iso,hi}]$, é uma submatriz ($n_{iso} \times n_{hi}$) correspondente ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise, $[K_{hi}]$ é uma submatriz ($n_{hi} \times n_{hi}$) correspondente ao sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise e $\{a_{hi}\}$ e $\{f_{hi}\}$ são submatrizes ($n_{hi} \times 1$) correspondentes ao sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise.

Encontradas as características do sistema estrutural discretizado (matriz de rigidez e vetor de carga globais), o próximo passo é resolver o sistema de equações resultantes. Neste trabalho utilizou-se o MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO $[L][D][L]^T$ com armazenamento "skyline" da matriz de rigidez global [Bathe, 1982].

Como todas as submatrizes de rigidez anteriores àquelas relacionadas com a reanálise i já foram obtidas e a decomposição $[L][D][L]^T$ destas submatrizes já foi feita, basta fazer apenas a decomposição das submatrizes de rigidez relacionadas com a i -ésima reanálise, o que diminui o custo computacional.

6.4 Análise dinâmica

A Equação (6.3) representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e, se não existem forças atuantes no sistema, tem-se o caso de vibração livre:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{0\} \quad (6.15)$$

Admitindo-se movimento harmônico, uma solução para esta equação pode ser escrita como [Zienkiewicz, 1989]:

$$\{a\} = \{\phi\} \cdot e^{i\omega t} \quad (6.16)$$

na qual $e^{i\omega t} \equiv \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, $\{\phi\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e ω a frequência angular.

A Equação (6.15) pode, então, ser reescrita na seguinte forma:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot \{\phi\} = \{0\} \quad (6.17)$$

na qual $[K]$ e $[M]$ são as matrizes de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, e λ o quadrado da frequência angular. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação das matrizes de rigidez e de massa globais, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminadas das matrizes de rigidez e massa globais a linha e a coluna correspondentes. Para um sistema estrutural com n graus de liberdade pode-se escrever que:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (6.18)$$

na qual $[K]$ e $[M]$ são as matrizes $(n \times n)$ de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, $[\Lambda]$ a matriz diagonal $(n \times n)$ que contém os n autovalores λ_i e $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_i\}, \dots, \{\phi_n\}]$ a matriz $(n \times n)$ que contém os n autovetores $\{\phi_i\}$.

O processo de resolução do problema de autovalor generalizado consiste na obtenção das matrizes $[\Lambda]$ e $[\Phi]$. Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \quad (6.19)$$

Sendo n_{iso} o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica, $[K_{iso}]$, $[M_{iso}]$, $[\Phi_{iso}]$ e $[\Lambda_{iso}]$ são submatrizes $(n_{iso} \times n_{iso})$ correspondentes ao sistema isoparamétrico. Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h3}] \\ [M_{h3,iso}] & [M_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico ($[K_{iso}]$, $[M_{iso}]$ e $[\Phi_{iso}]$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo n_{h3} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise, $[K_{iso,h3}]$, $[M_{iso,h3}]$, $[\Phi_{iso,h3}]$ e $[\Lambda_{iso,h3}]$ são submatrizes $(n_{iso} \times n_{h3})$ correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise, $[K_{h3}]$, $[M_{h3}]$, $[\Phi_{h3}]$ e $[\Lambda_{h3}]$ são submatrizes $(n_{h3} \times n_{h3})$ correspondentes ao sistema hierárquico para a primeira reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quarto grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h3}] & [M_{iso,h4}] \\ [M_{h3,iso}] & [M_{h3}] & [M_{h3,h4}] \\ [M_{h4,iso}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] & [\Lambda_{iso,h4}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] & [\Lambda_{h3,h4}] \\ [\Lambda_{h4,iso}] & [\Lambda_{h4,h3}] & [\Lambda_{h4}] \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico e hierárquico de terceiro grau ($[K_{iso}]$, $[K_{iso,h3}]$, $[K_{h3,iso}]$, $[K_{h3}]$, $[M_{iso}]$, $[M_{iso,h3}]$, $[M_{h3,iso}]$, $[M_{h3}]$, $[\Phi_{iso}]$, $[\Phi_{iso,h3}]$, $[\Phi_{h3,iso}]$ e $[\Phi_{h3}]$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial e na primeira reanálise. Sendo n_{h4} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na segunda reanálise, $[K_{iso,h4}]$, $[M_{iso,h4}]$, $[\Phi_{iso,h4}]$ e $[\Lambda_{iso,h4}]$ são submatrizes $(n_{iso} \times n_{h4})$ correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise, $[K_{h3,h4}]$, $[M_{h3,h4}]$, $[\Phi_{h3,h4}]$ e $[\Lambda_{h3,h4}]$ são submatrizes $(n_{h3} \times n_{h4})$ correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado

com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise, $[K_{h4}]$, $[M_{h4}]$, $[\Phi_{h4}]$ e $[\Lambda_{h4}]$ são submatrizes ($n_{h4} \times n_{h4}$) correspondentes ao sistema hierárquico para a segunda reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da terceira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quinto grau:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] & [K_{iso,h5}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] & [K_{h3,h5}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] & [K_{h4,h5}] \\ [K_{h5,iso}] & [K_{h5,h3}] & [K_{h5,h4}] & [K_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] & [\Phi_{iso,h5}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] & [\Phi_{h3,h5}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] & [\Phi_{h4,h5}] \\ [\Phi_{h5,iso}] & [\Phi_{h5,h3}] & [\Phi_{h5,h4}] & [\Phi_{h5}] \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h3}] & [M_{iso,h4}] & [M_{iso,h5}] \\ [M_{h3,iso}] & [M_{h3}] & [M_{h3,h4}] & [M_{h3,h5}] \\ [M_{h4,iso}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4}] & [M_{h4,h5}] \\ [M_{h5,iso}] & [M_{h5,h3}] & [M_{h5,h4}] & [M_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] & [\Phi_{iso,h5}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] & [\Phi_{h3,h5}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] & [\Phi_{h4,h5}] \\ [\Phi_{h5,iso}] & [\Phi_{h5,h3}] & [\Phi_{h5,h4}] & [\Phi_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \\
 & \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] & [\Lambda_{iso,h4}] & [\Lambda_{iso,h5}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] & [\Lambda_{h3,h4}] & [\Lambda_{h3,h5}] \\ [\Lambda_{h4,iso}] & [\Lambda_{h4,h3}] & [\Lambda_{h4}] & [\Lambda_{h4,h5}] \\ [\Lambda_{h5,iso}] & [\Lambda_{h5,h3}] & [\Lambda_{h5,h4}] & [\Lambda_{h5}] \end{bmatrix} \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico, hierárquico de terceiro e quarto grau ($[K_{iso}]$, $[K_{iso,h3}]$, $[K_{h3,iso}]$, $[K_{h3}]$, $[K_{iso,h4}]$, $[K_{h4,iso}]$, $[K_{h3,h4}]$, $[K_{h4,h3}]$, $[K_{h4}]$, $[M_{iso}]$, $[M_{iso,h3}]$, $[M_{h3,iso}]$, $[M_{h3}]$, $[M_{iso,h4}]$, $[M_{h4,iso}]$, $[M_{h3,h4}]$, $[M_{h4,h3}]$, $[M_{h4}]$, $[\Phi_{iso}]$, $[\Phi_{iso,h3}]$, $[\Phi_{h3,iso}]$, $[\Phi_{h3}]$, $[\Phi_{iso,h4}]$, $[\Phi_{h4,iso}]$, $[\Phi_{h3,h4}]$, $[\Phi_{h4,h3}]$ e $[\Phi_{h4}]$) já foram obtidas anteriormente na análise inicial e na primeira reanálise. Sendo n_{h5} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise, $[K_{iso,h5}]$, $[M_{iso,h5}]$, $[\Phi_{iso,h5}]$ e $[\Lambda_{iso,h5}]$ são submatrizes ($n_{iso} \times n_{h5}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h3,h5}]$, $[M_{h3,h5}]$, $[\Phi_{h3,h5}]$ e $[\Lambda_{h3,h5}]$ são submatrizes ($n_{h3} \times n_{h5}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h4,h5}]$, $[M_{h4,h5}]$, $[\Phi_{h4,h5}]$ e $[\Lambda_{h4,h5}]$ são submatrizes ($n_{h4} \times n_{h5}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise, $[K_{h5}]$, $[M_{h5}]$, $[\Phi_{h5}]$ e $[\Lambda_{h5}]$ são submatrizes ($n_{h5} \times n_{h5}$) correspondentes ao sistema hierárquico para a terceira reanálise.

Verifica-se que para cada reanálise é necessário apenas calcular as submatrizes relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas. As submatrizes calculadas nas análises anteriores permanecem inalteradas o que diminui o esforço computacional de maneira apreciável.

Como o algoritmo desenvolvido permite que se escolham, independentemente, os lados e elementos a serem refinados, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse, pode-se ter tantas reanálises quanto se queira. Assim, de uma forma geral, a *iésima*-reanálise pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \cdots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \cdots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \cdots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \cdots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & \cdots & [M_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [M_{hi,iso}] & \cdots & [M_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \cdots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \cdots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & \cdots & [\Lambda_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Lambda_{hi,iso}] & \cdots & [\Lambda_{hi}] \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

na qual todas as submatrizes anteriores àquelas relacionadas com a reanálise i já foram obtidas. Sendo n_{hi} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na i -ésima reanálise, $[K_{iso,hi}]$, $[M_{iso,hi}]$, $[\Phi_{iso,hi}]$ e $[\Lambda_{iso,hi}]$ as submatrizes ($n_{iso} \times n_{hi}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise, $[K_{hi}]$, $[M_{hi}]$, $[\Phi_{hi}]$ e $[\Lambda_{hi}]$ as submatrizes ($n_{hi} \times n_{hi}$) correspondentes ao sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise.

Para a resolução do sistema de equações resultantes, utilizou-se, neste trabalho, o MÉTODO DA ITERAÇÃO NO SUBESPAÇO e, como uma subrotina deste, o MÉTODO DE JACOBI GENERALIZADO. Estes dois métodos em conjunto, por serem considerados bastante eficientes, são usados extensivamente em vários programas de elementos finitos para cálculo de autovalores e autovetores [Bathe, 1982]. Enquanto muitos métodos determinam todos os autovalores e autovetores simultaneamente, o que torna excessivo o “custo computacional”, o método da iteração no subespaço determina apenas os autovalores e os correspondentes autovetores no intervalo de frequência de interesse, o que faz deste método um dos mais eficientes na análise de grandes sistemas (matrizes de rigidez e de massa globais de ordem elevada).

6.5 Programa computacional

A partir das equações estabelecidas nos capítulos anteriores desenvolveu-se um programa computacional em *Linguagem C* para a análise estática e dinâmica de placas e cascas.

O programa computacional foi desenvolvido de forma que as rotinas fossem divididas em subrotinas, manipuladas por um programa principal. Utilizou-se, também, o sistema de alocação dinâmica de memória, no qual a variável é alocada no tamanho necessário, e após a sua utilização, a mesma é desalocada, deixando este espaço de memória RAM livre para utilização posterior [Sanal, 1994]. Todas as matrizes utilizadas foram alocadas como vetores e, para as matrizes simétricas, alocou-se apenas o triângulo superior, economizando-se, desta forma, memória RAM. As matrizes de massa e de rigidez dos elementos, depois de calculadas, foram armazenadas em disco para sua utilização posterior na montagem das matrizes globais do sistema e as demais variáveis, armazenadas na memória RAM para sua utilização com uma velocidade maior.

Os fluxogramas que resumem o funcionamento do programa computacional para a análise estática e dinâmica de placas e cascas encontram-se nas Figuras 6.2 e 6.3, respectivamente. O primeiro passo realizado pelo programa é a leitura dos dados de entrada do sistema em análise (coordenadas nodais, espessura, incidência nodal, propriedades do material e condições de contorno). Com estas informações, efetua-se inicialmente para o elemento finito isoparamétrico a

montagem das matrizes de massa, das matrizes de rigidez e dos vetores de carga dos elementos, dentro de um ciclo que realiza, também, o cálculo das seguintes variáveis para cada elemento:

- cálculo das funções de forma para os nós e pontos de integração;
- cálculo dos vetores e dos versores nos nós e para os pontos de integração;
- cálculo do Jacobiano, da matriz $[A]$ e da matriz $[d]$ para cada ponto de integração;
- cálculo da matriz $[B]$ para os pontos de integração.

Após o cálculo das matrizes de massa e de rigidez dos elementos para todos elementos do sistema, efetua-se a montagem das matrizes de massa, das matrizes de rigidez e dos vetores de carga globais, levando-se em conta as condições de contorno. Por haver vários zeros nas matrizes globais, elas tomam a forma conhecida como “skyline” [Thompson *et al.*, 1980] e podem ser armazenadas de forma compacta. É conveniente, também, armazenar somente a parte superior ou inferior das matrizes globais, a partir dos elementos da diagonal, já que as matrizes são simétricas. O método utilizado para montar as matrizes globais [Bathe *et al.*, 1976] calcula a altura das colunas das matrizes a partir da conectividade dos nós e das condições de contorno do sistema.

Obtidas as matrizes de massa, as matrizes de rigidez e os vetores de carga globais para o elemento finito isoparamétrico resolve-se o sistema linear obtendo os deslocamentos nodais ou o problema de autovalor generalizado obtendo as frequências naturais e os modos de vibrar do sistema, dependendo do tipo de análise estática ou dinâmica, respectivamente.

Após a análise isoparamétrica efetua-se a primeira reanálise hierárquica escolhendo-se os lados e elementos a serem refinados, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse. O algoritmo desenvolvido permite que se faça quantas reanálises forem necessárias, ou seja, até que os resultados obtidos sejam satisfatórios.

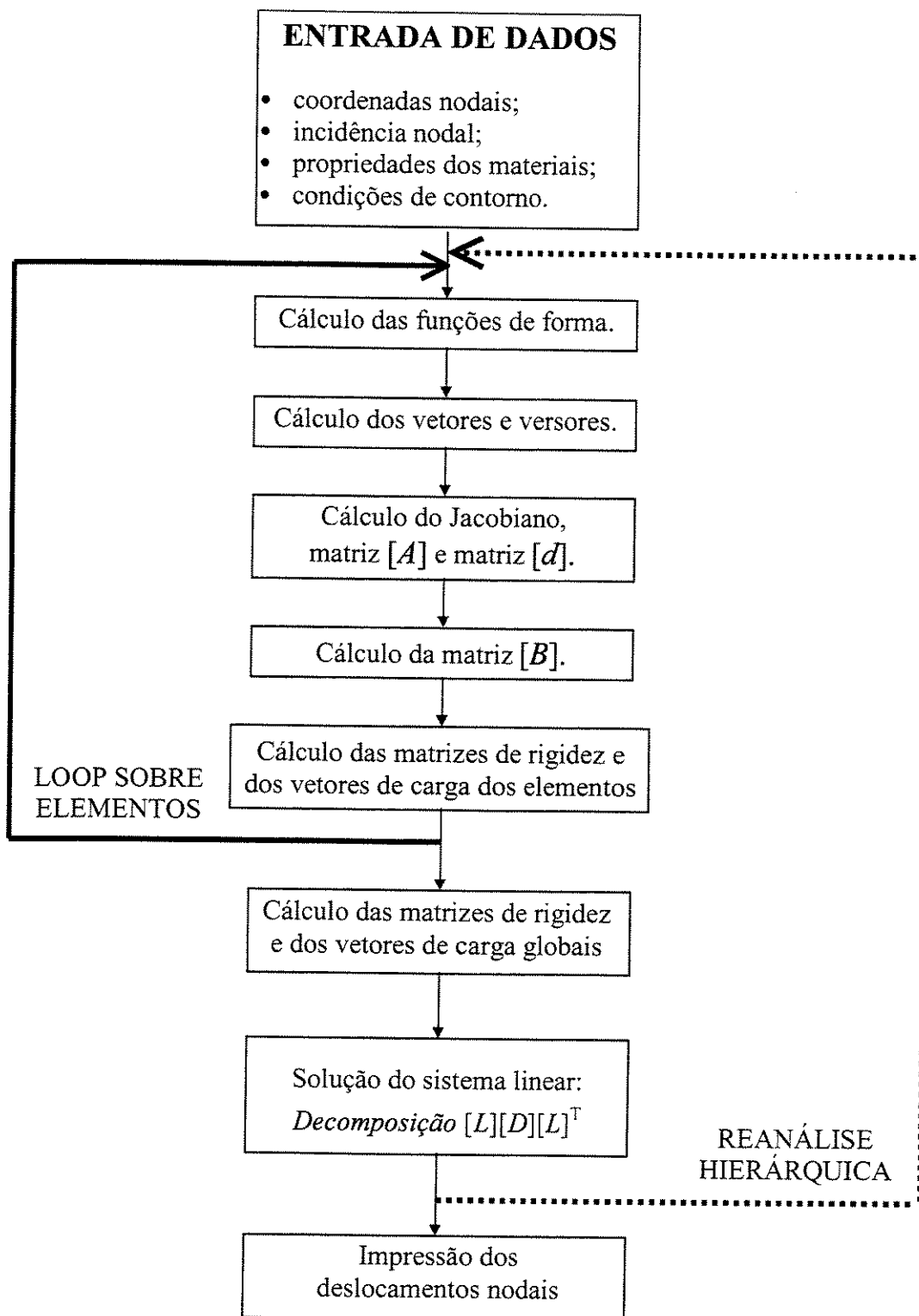


Figura 6.2 Fluxograma do programa computacional para a análise estática de placas e cascas.

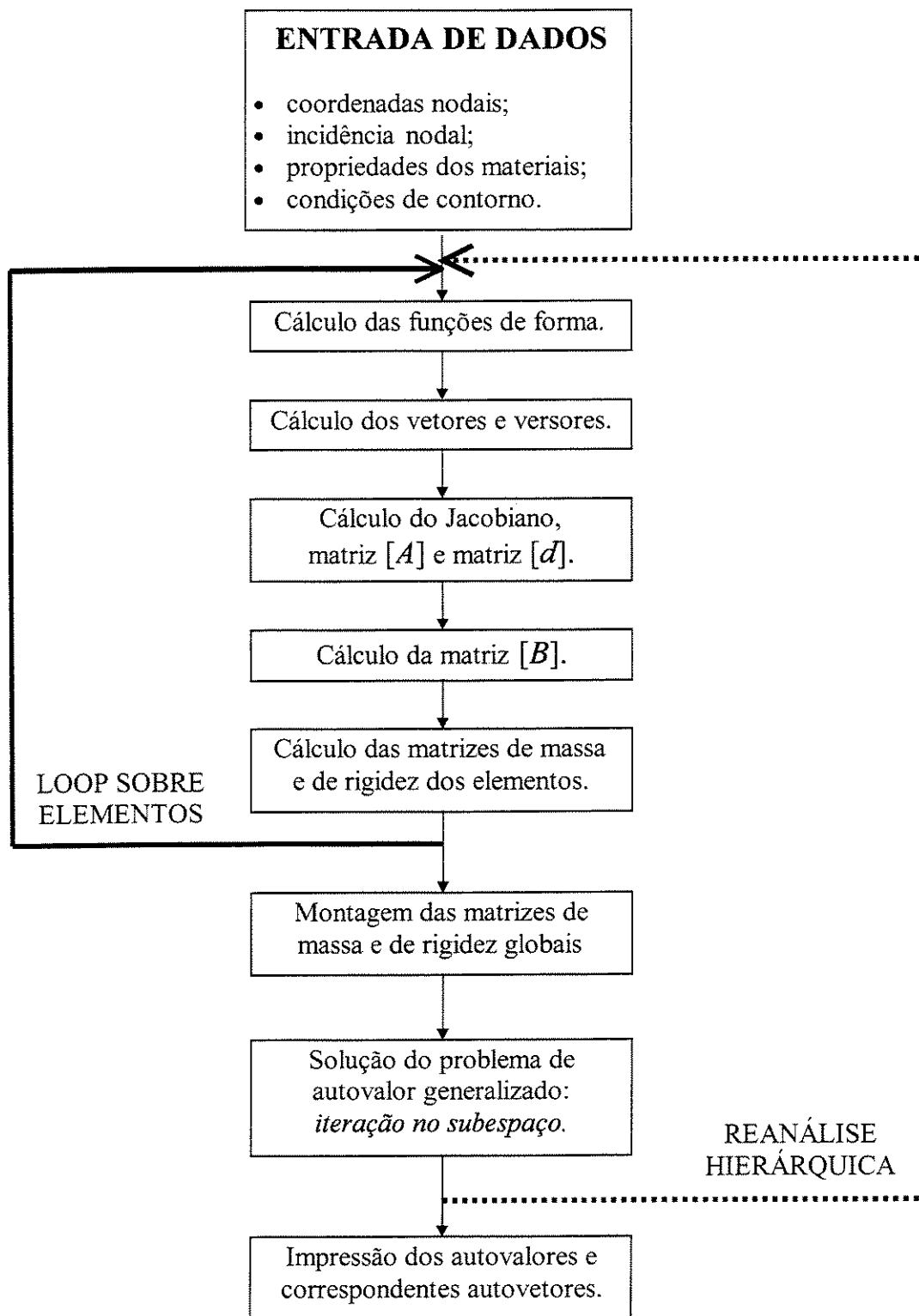


Figura 6.3 Fluxograma do programa computacional para a análise dinâmica de placas e cascas.

Em cada análise hierárquica efetua-se a montagem das matrizes de massa e de rigidez dos elementos relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas, dentro de um ciclo, que realiza, também, o cálculo das seguintes variáveis para cada elemento:

- cálculo das funções de forma hierárquicas para os lados e/ou elementos e pontos de integração;
- cálculo dos vetores e dos versores nos nós, e para os pontos de integração;
- cálculo do Jacobiano, da matriz $[A]$ e da matriz $[d]$ para cada ponto de integração;
- cálculo da matriz $[B]$ para os pontos de integração.

Após o cálculo das matrizes de massa, das matrizes de rigidez e dos vetores de carga dos elementos para todos os elementos do sistema, na reanálise hierárquica, efetua-se a montagem das submatrizes de massa e de rigidez globais relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas. As matrizes de massa, as matrizes de rigidez e os vetores de carga globais do sistema são formados através do acoplamento das submatrizes calculadas nas análises anteriores, que permanecem inalteradas, e das submatrizes calculadas na análise atual.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS

7.1 Introdução

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento finito hierárquico proposto na análise estática e dinâmica de placas e cascas com algumas configurações de condições de contorno e relações entre espessura e dimensão característica. Procurou-se avaliar a característica do elemento quanto à convergência com o refinamento da malha de discretização e sua sensibilidade quanto à distorção da malha. Foi feita, ainda, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ($p=2$) e hierárquica de 3º grau ($p=3$), 4º grau ($p=4$) e 5º grau ($p=5$), a comparação dos resultados obtidos com os elementos finitos **9URI**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós com integração totalmente reduzida, e **Shell93**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de oito nós com integração totalmente reduzida ([Ahmad *et al.*, 1970], [Cook, 1981]) disponível no "software" comercial ANSYS 5.4. Todos os resultados obtidos com os vários elementos finitos descritos acima foram comparados com os obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura.

A natureza hierárquica da formulação possibilita empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes, mas neste trabalho o refinamento adaptativo não foi explorado. O refinamento hierárquico foi efetuado empregando expansões polinomiais de mesmo grau ao longo de lados e elementos:

- no refinamento de 3º grau ($p=3$) da expansão quadrática isoparamétrica foram empregadas expansões polinomiais de 3º grau em todos os lados dos elementos;
- no refinamento de 4º grau ($p=4$) da expansão quadrática isoparamétrica e de 3º grau hierárquica foram empregadas expansões polinomiais de 4º grau em todos os lados dos elementos;
- no refinamento de 5º grau ($p=5$) da expansão quadrática isoparamétrica e de 3º e 4º graus hierárquicas foram empregadas expansões polinomiais de 5º grau em todos os lados dos elementos e em todos elementos.

Pretende-se, portanto, partindo do elemento isoparamétrico, quadrático de 9 nós da família Lagrangeana (Figura 1.3), com integração consistente, refinar sua solução pela introdução de polinômios de terceiro, quarto e quinto graus.

7.2 Análise estática

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos nos quais a confiabilidade e a eficiência, considerando a análise estática linear, do elemento finito hierárquico são analisadas através de alguns testes clássicos propostos na literatura. Os resultados apresentados foram normalizados dividindo o deslocamento calculado pelo deslocamento "exato" (obtido na literatura).

7.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme

O estudo da convergência com o refinamento da malha foi feito analisando a placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados com carga distribuída uniforme. Em função da simetria geométrica e de carregamento modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização regular de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos para várias relações entre espessura e dimensão característica: $t/a = 0.005, 0.01$ e 0.05 (placas finas) e $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa).

Apresenta-se o deslocamento normalizado no centro da placa quadrada (w/w_{exato}). O resultado w_{exato} é obtido a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* [Timoshenko *et al.*, 1959], que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas:

$$w_{exato} = \frac{\alpha q a^4}{D} \quad (7.1)$$

na qual, q é o valor da carga uniformemente distribuída, a a dimensão característica da placa e D sua rigidez:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (7.2)$$

Na Equação (7.1) os valores da constante α são os seguintes [Timoshenko *et al.*, 1959]:

- $\alpha=0.004060$ para $t/a = 0.005$;
- $\alpha=0.004061$ para $t/a = 0.01$;
- $\alpha=0.004111$ para $t/a = 0.05$;
- $\alpha=0.004263$ para $t/a = 0.1$.

As Tabelas 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4, e as Figuras 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4, apresentam o deslocamento normalizado para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2, p=3, p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9805	84	0.9857	120	0.9857	180	0.9854	48	1.0027	36	1.0001
3x3	108	0.9923	180	0.9982	252	0.9982	378	0.9982	108	1.0011	81	1.0013
4x4	192	0.9961	312	1.0001	432	1.0001	648	1.0001	192	1.0008	144	1.0012
5x5	300	0.9978	480	1.0005	660	1.0005	990	1.0005	300	1.0007	225	1.0010
6x6	432	0.9987	684	1.0006	936	1.0006	1404	1.0006	432	1.0007	324	1.0009
7x7	588	0.9992	924	1.0007	1260	1.0007	1890	1.0007	588	1.0007	441	1.0009

Tabela 7.1 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.005$).

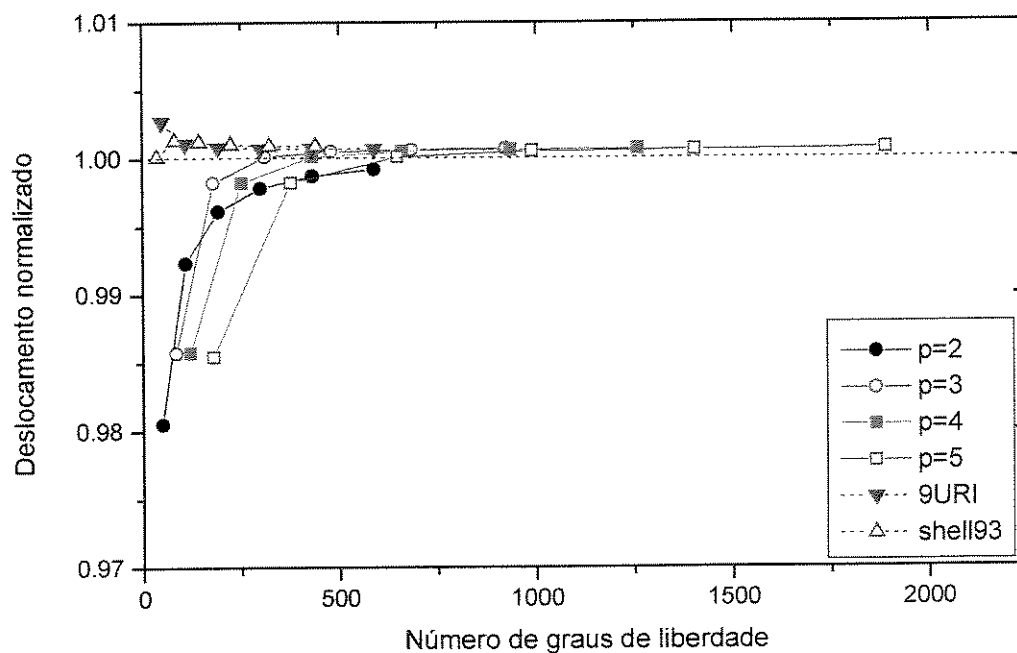


Figura 7.1 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.005$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9808	84	0.9941	120	0.9941	180	0.9941	48	1.0027	36	1.0004
3x3	108	0.9926	180	1.0000	252	1.0000	378	1.0000	108	1.0011	81	1.0014
4x4	192	0.9964	312	1.0006	432	1.0006	648	1.0006	192	1.0008	144	1.0012
5x5	300	0.9981	480	1.0007	660	1.0007	990	1.0007	300	1.0007	225	1.0011
6x6	432	0.9990	684	1.0007	936	1.0007	1404	1.0007	432	1.0007	324	1.0010
7x7	588	0.9995	924	1.0007	1260	1.0007	1890	1.0007	588	1.0007	441	1.0009

Tabela 7.2 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.01$).

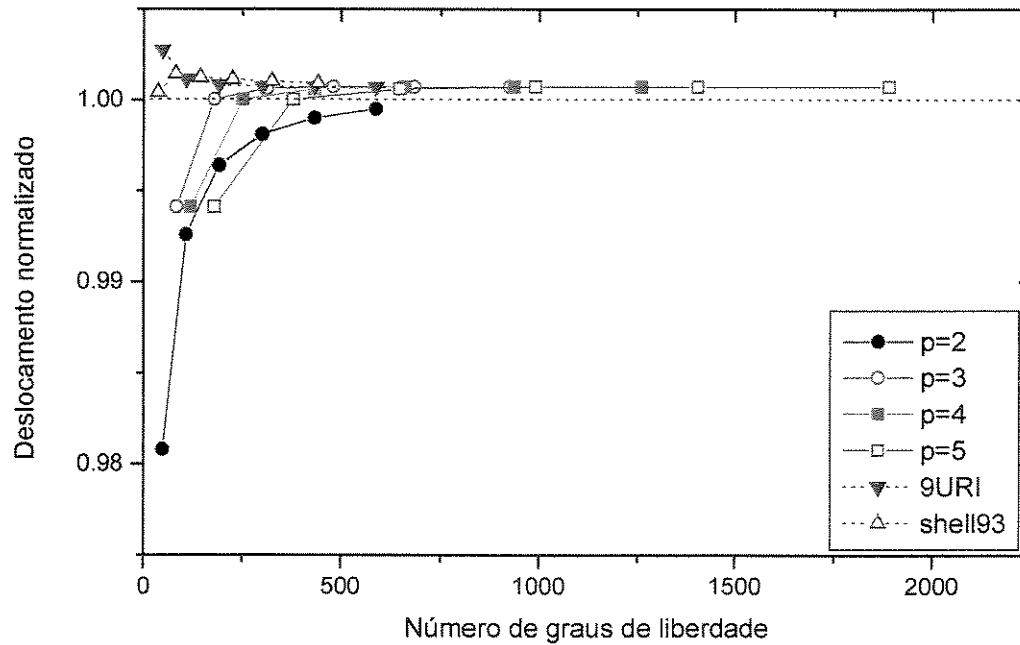


Figura 7.2 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.01$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9843	84	0.9976	120	0.9978	180	0.9977	48	0.9992	36	1.0001
3x3	108	0.9934	180	0.9973	252	0.9975	378	0.9976	108	0.9976	81	1.0009
4x4	192	0.9957	312	0.9973	432	0.9974	648	0.9974	192	0.9974	144	1.0009
5x5	300	0.9965	480	0.9972	660	0.9974	990	0.9974	300	0.9973	225	1.0010
6x6	432	0.9969	684	0.9972	936	0.9973	1404	0.9974	432	0.9973	324	1.0010
7x7	588	0.9970	924	0.9972	1260	0.9973	1890	0.9973	588	0.9972	441	1.0010

Tabela 7.3 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/\alpha=0.05$).

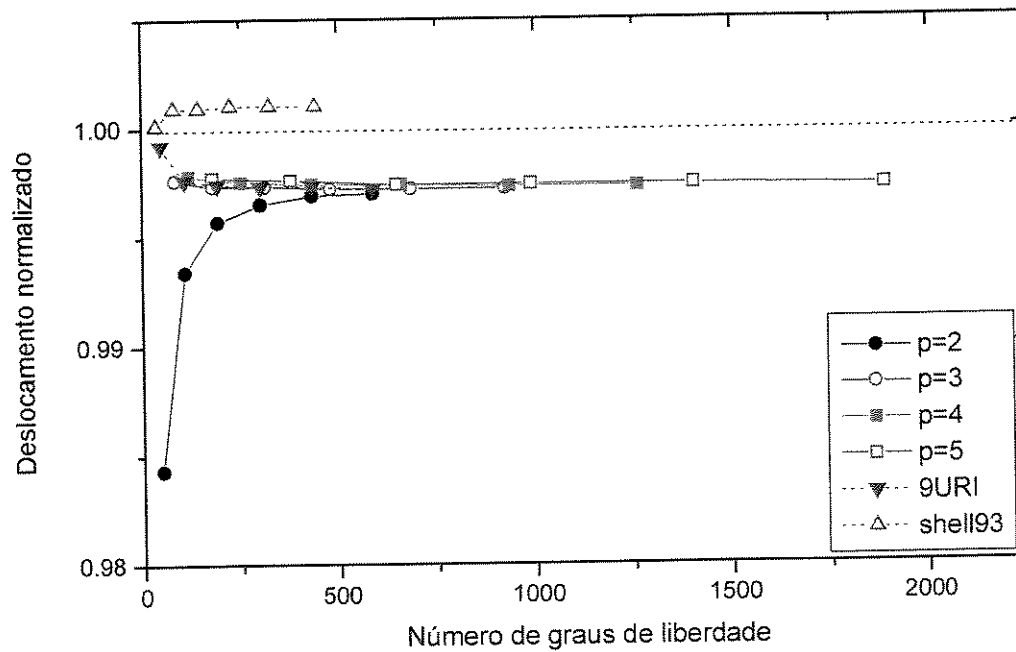


Figura 7.3 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/\alpha=0.05$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9824	84	0.9885	120	0.9893	180	0.9892	48	0.9898	36	1.0017
3x3	108	0.9866	180	0.9880	252	0.9888	378	0.9889	108	0.9883	81	1.0022
4x4	192	0.9875	312	0.9880	432	0.9885	648	0.9885	192	0.9880	144	1.0023
5x5	300	0.9877	480	0.9879	660	0.9884	990	0.9884	300	0.9880	225	1.0023
6x6	432	0.9878	684	0.9879	936	0.9883	1404	0.9883	432	0.9879	324	1.0023
7x7	588	0.9879	924	0.9879	1260	0.9883	1890	0.9883	588	0.9879	441	1.0023

Tabela 7.4 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.1$).

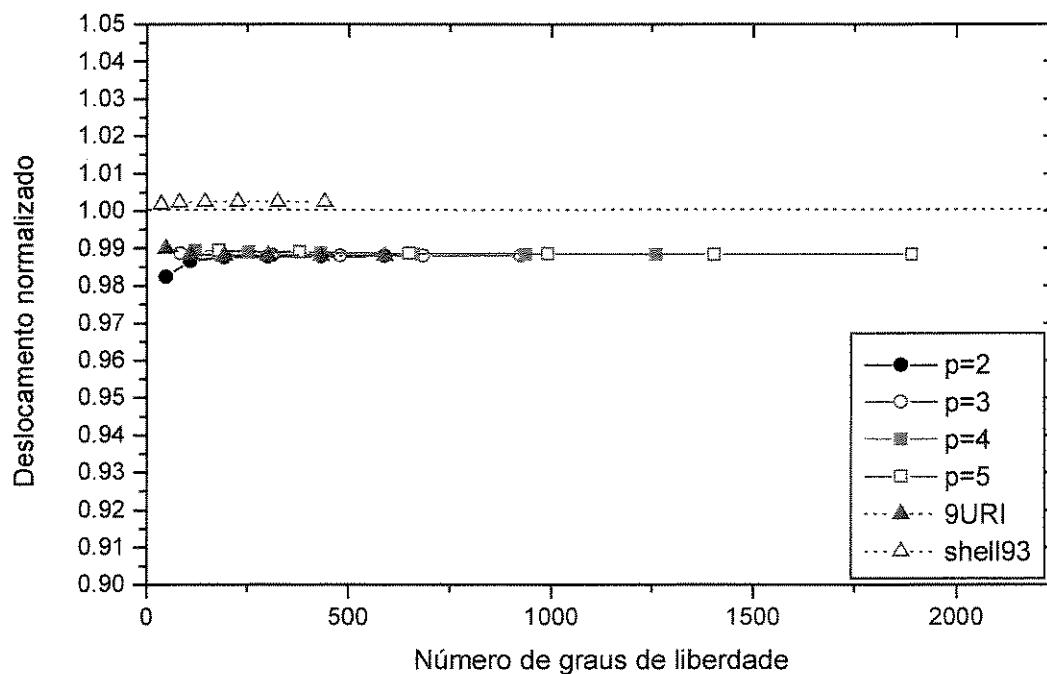


Figura 7.4 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída uniforme ($t/a=0.1$).

7.2.2 Placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal

O estudo da convergência com o refinamento da malha foi feito analisando a placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados com carga distribuída senoidal:

$$q(x, y) = q_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (7.3)$$

Em função da simetria geométrica e de carregamento modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização regular de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos para várias relações entre espessura e dimensão característica: $t/a = 0.005$, 0.01 e 0.05 (placas finas) e $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa).

Apresenta-se o deslocamento normalizado no centro da placa quadrada (w/w_{exato}). O resultado w_{exato} é obtido a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* [Timoshenko *et al.*, 1959], que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas:

$$w_{exato} = \frac{\alpha q_0 a^4}{D} \quad (7.4)$$

na qual, q_0 é o valor da carga distribuída.

Na Equação (7.4) os valores da constante α são os seguintes [Timoshenko *et al.*, 1959]:

- $\alpha=0.002566$ para $t/a = 0.005$;
- $\alpha=0.002566$ para $t/a = 0.01$;
- $\alpha=0.002598$ para $t/a = 0.05$;
- $\alpha=0.002695$ para $t/a = 0.1$.

As Tabelas 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8, e as Figuras 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8, apresentam o deslocamento normalizado para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9701	84	0.9844	120	0.9845	180	0.9847	48	0.9995	36	0.8999
3x3	108	0.9882	180	0.9977	252	0.9977	378	0.9978	108	1.0002	81	0.9560
4x4	192	0.9938	312	0.9997	432	0.9997	648	0.9998	192	1.0003	144	0.9753
5x5	300	0.9963	480	1.0002	660	1.0002	990	1.0002	300	1.0003	225	0.9843
6x6	432	0.9976	684	1.0003	936	1.0003	1404	1.0003	432	1.0003	324	0.9892
7x7	588	0.9984	924	1.0003	1260	1.0003	1890	1.0003	588	1.0003	441	0.9921

Tabela 7.5 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.005$).

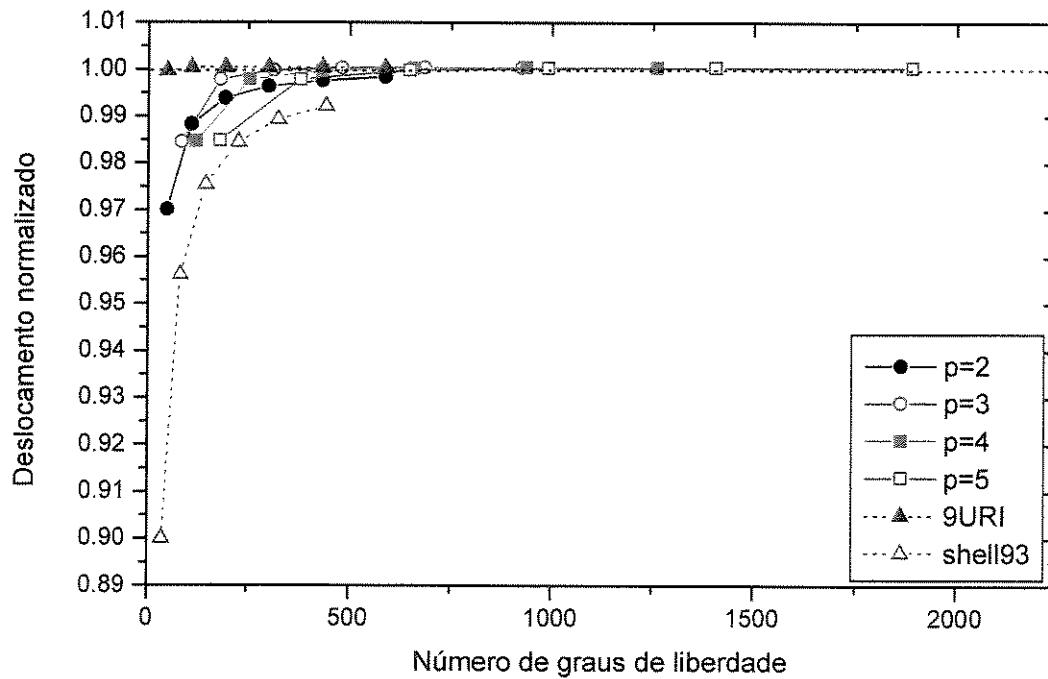


Figura 7.5 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.005$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9712	84	0.9936	120	0.9936	180	0.9937	48	0.9999	36	0.9006
3x3	108	0.9891	180	0.9998	252	0.9998	378	0.9998	108	1.0006	81	0.9564
4x4	192	0.9947	312	1.0005	432	1.0005	648	1.0005	192	1.0007	144	0.9757
5x5	300	0.9971	480	1.0007	660	1.0007	990	1.0007	300	1.0007	225	0.9846
6x6	432	0.9984	684	1.0007	936	1.0007	1404	1.0007	432	1.0007	324	0.9895
7x7	588	0.9992	924	1.0007	1260	1.0007	1890	1.0007	588	1.0007	441	0.9925

Tabela 7.6 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.01$).

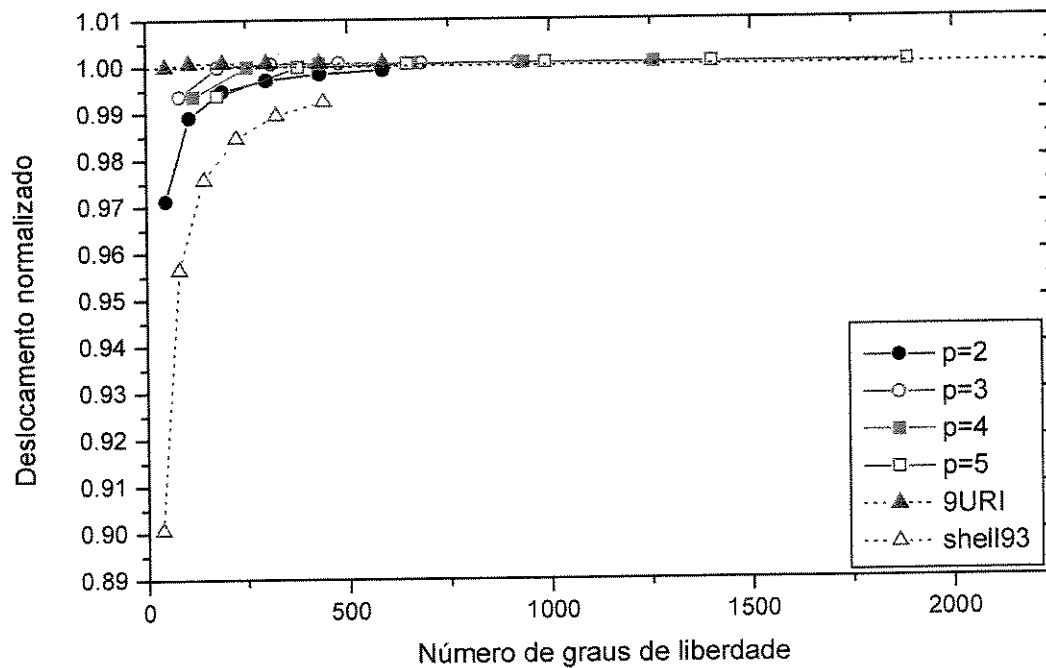


Figura 7.6 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.01$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9842	84	1.0002	120	1.0005	180	1.0005	48	1.0010	36	0.9014
3x3	108	0.9970	180	1.0015	252	1.0018	378	1.0018	108	1.0016	81	0.9566
4x4	192	1.0000	312	1.0017	432	1.0019	648	1.0019	192	1.0017	144	0.9762
5x5	300	1.0010	480	1.0018	660	1.0019	990	1.0019	300	1.0018	225	0.9854
6x6	432	1.0014	684	1.0018	936	1.0019	1404	1.0019	432	1.0018	324	0.9904
7x7	588	1.0016	924	1.0018	1260	1.0019	1890	1.0019	588	1.0018	441	0.9934

Tabela 7.7 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.05$).

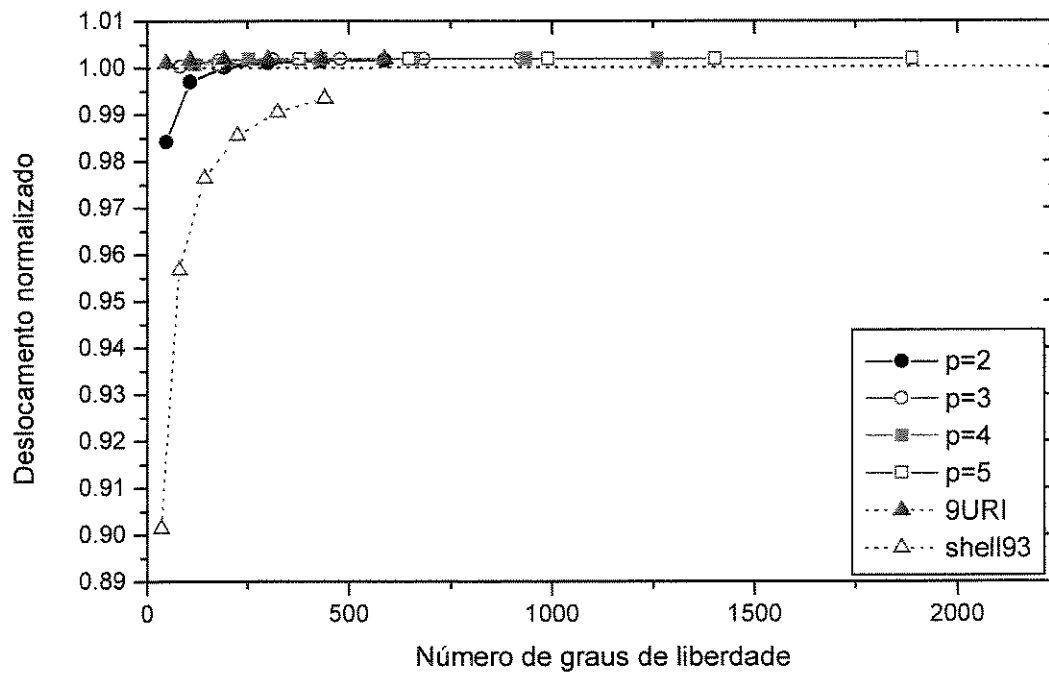


Figura 7.7 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/a=0.05$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	48	0.9983	84	1.0047	120	1.0059	180	1.0059	48	1.0053	36	0.9057
3x3	108	1.0044	180	1.0058	252	1.0067	378	1.0068	108	1.0059	81	0.9607
4x4	192	1.0055	312	1.0060	432	1.0066	648	1.0066	192	1.0060	144	0.9804
5x5	300	1.0058	480	1.0060	660	1.0065	990	1.0065	300	1.0060	225	0.9896
6x6	432	1.0059	684	1.0060	936	1.0064	1404	1.0065	432	1.0060	324	0.9946
7x7	588	1.0060	924	1.0060	1260	1.0064	1890	1.0064	588	1.0060	441	0.9976

Tabela 7.8 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/\alpha=0.1$).

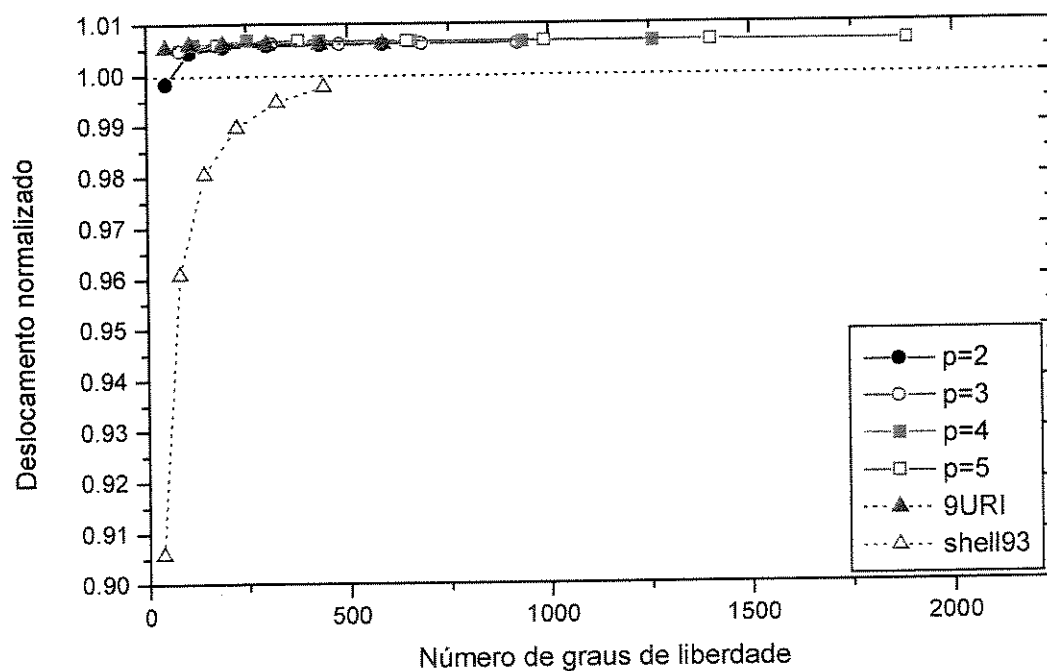


Figura 7.8 Deslocamento normalizado no centro da placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal ($t/\alpha=0.1$).

7.2.3 Placa circular engastada com carga concentrada central

Em função da simetria geométrica e de carregamento modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização de 12 elementos (Figura 7.9) para várias relações entre espessura e dimensão característica (no caso o raio R): $t/a = 0.005$, 0.01 e 0.05 (placas finas) e $t/a = 0.1$ (placa moderadamente grossa).

Apresenta-se o deslocamento normalizado (w/w_{exato}) ao longo do raio da placa nos pontos A, B, C, D, E, F e G, para várias relações entre espessura e dimensão característica. O resultado w_{exato} é obtido a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* [Timoshenko *et al.*, 1959], que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas:

$$w_{exato} = \frac{P \cdot R^2}{16 \cdot \pi \cdot D} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \log \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{8 \cdot D}{K \cdot G \cdot t \cdot R^2} \cdot \log \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (7.5)$$

na qual, P é o valor da carga concentrada, R o valor do raio da placa, $K=6/5$ (fator de correção das tensões de cisalhamento) e G é obtido a partir da seguinte expressão:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (7.6)$$

As características da placa modelada são as seguintes: $R = 5$, $E = 1.09 \times 10^6$, $\nu = 0.3$ e a carga concentrada $P = 4$.

As Tabelas 7.9, 7.10, 7.11 e 7.12, e as Figuras 7.10, 7.11, 7.12 e 7.13, apresentam os deslocamentos normalizados para cada ponto ao longo do raio da placa e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

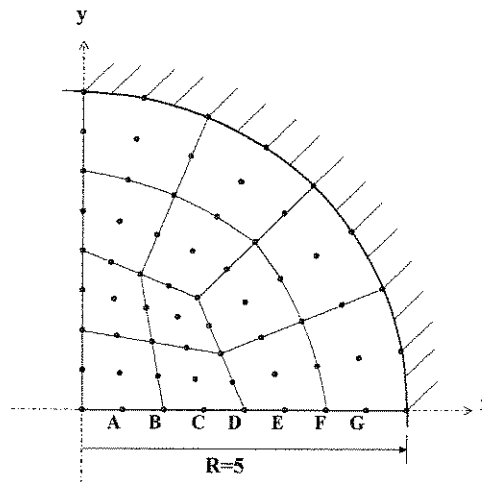


Figura 7.9 Placa circular engastada com carga concentrada central e malha de 12 elementos.

Ponto	Raio	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
A	0.625	0.9272	0.9952	0.9954	0.9989	1.0018	0.9975
B	1.250	0.9484	0.9995	0.9992	0.9991	0.9986	0.9996
C	1.875	0.9527	1.0029	1.0027	1.0026	0.9983	1.0046
D	2.500	0.9539	1.0062	1.0059	1.0087	0.9988	0.9993
E	3.125	0.9505	1.0058	1.0054	1.0058	0.9979	1.0004
F	3.750	0.9421	0.9982	0.9991	0.9939	1.0035	1.0079
G	4.375	0.9030	0.9967	0.9967	0.9933	0.9900	1.0000
NGL		140	230	320	482	140	104

Tabela 7.9 Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.005$).

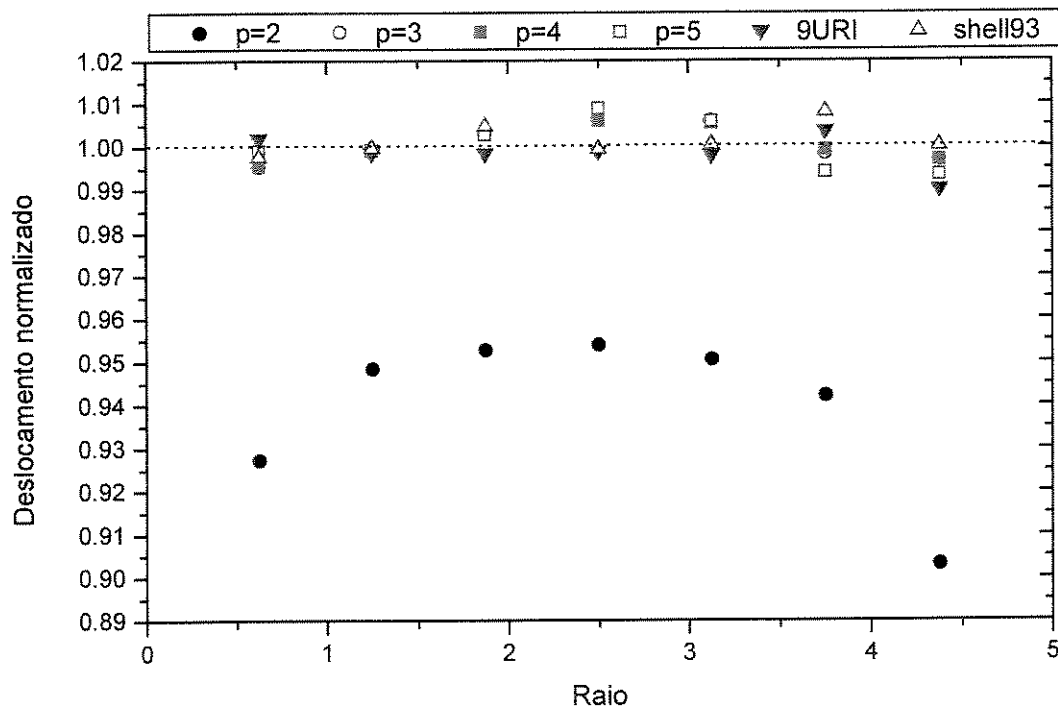


Figura 7.10 Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.005$).

Ponto	Raio	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
A	0.625	0.9439	0.9993	0.9995	1.0004	1.0016	0.9982
B	1.250	0.9642	0.9996	0.9995	0.9993	0.9988	1.0000
C	1.875	0.9673	1.0015	1.0015	1.0012	0.9981	1.0045
D	2.500	0.9658	1.0027	1.0027	1.0030	0.9990	0.9990
E	3.125	0.9591	1.0029	1.0029	1.0025	0.9979	1.0000
F	3.750	0.9491	1.0009	1.0009	1.0000	1.0044	1.0079
G	4.375	0.9097	1.0033	1.0033	1.0033	0.9900	1.0000
NGL		140	230	320	482	140	104

Tabela 7.10 Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.01$).

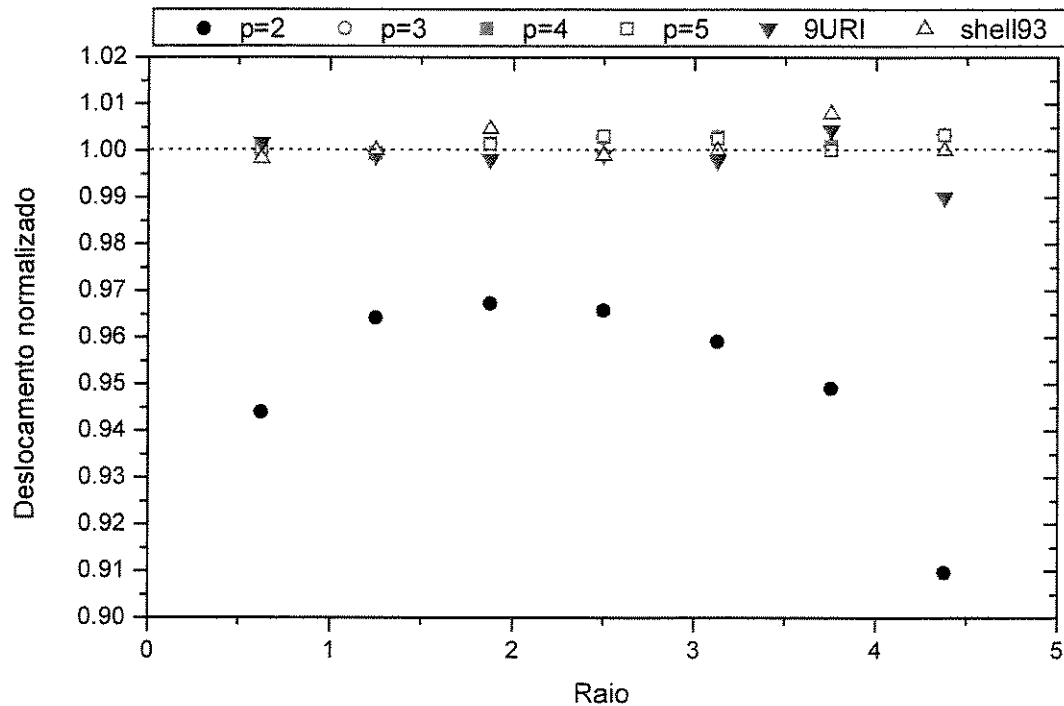


Figura 7.11 Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.01$).

Ponto	Raio	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
A	0.625	0.9661	0.9974	0.9976	0.9976	0.9944	1.0026
B	1.250	0.9754	0.9969	0.9970	0.9969	1.0034	0.9975
C	1.875	0.9774	0.9981	0.9983	0.9981	0.9924	1.0000
D	2.500	0.9745	0.9971	0.9973	0.9975	1.0047	0.9983
E	3.125	0.9698	0.9976	0.9980	0.9980	0.9890	0.9984
F	3.750	0.9619	0.9965	0.9974	0.9974	1.0173	1.0035
G	4.375	0.9316	0.9967	1.0000	1.0000	0.9609	0.9935
NGL		140	230	320	482	140	104

Tabela 7.11 Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.05$).

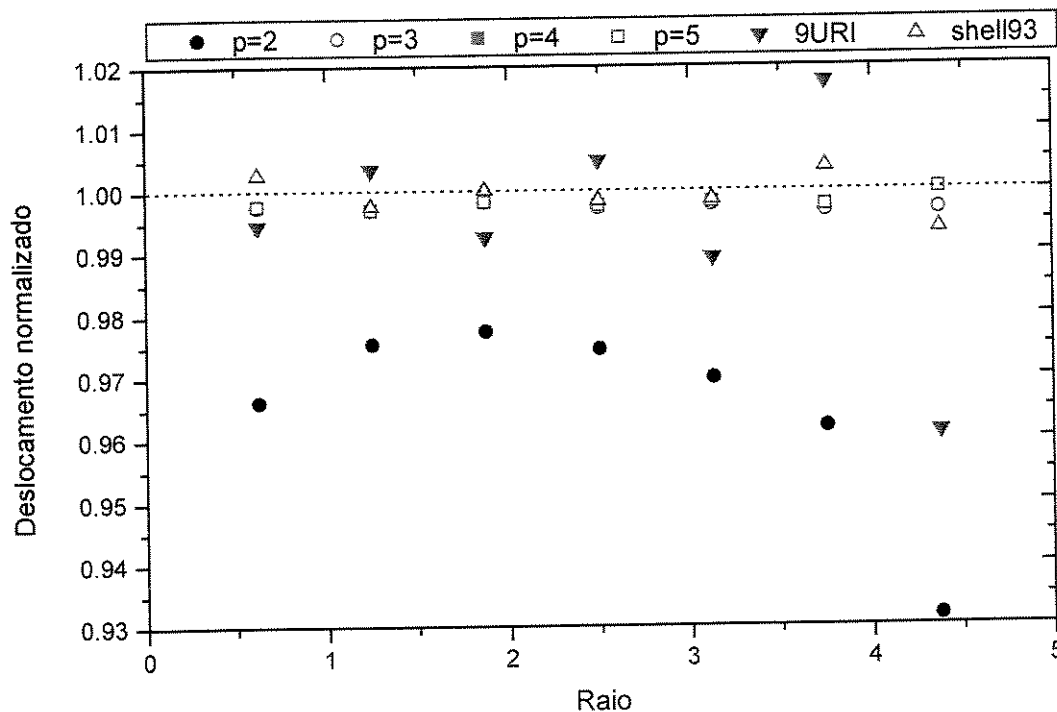


Figura 7.12 Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.05$).

Ponto	Raio	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
A	0.625	0.9732	0.9865	0.9871	0.9863	0.9727	1.0073
B	1.250	0.9778	0.9889	0.9894	0.9891	1.0163	0.9960
C	1.875	0.9799	0.9901	0.9906	0.9904	0.9744	0.9977
D	2.500	0.9764	0.9890	0.9900	0.9900	1.0215	1.0002
E	3.125	0.9743	0.9885	0.9897	0.9897	0.9632	1.0008
F	3.750	0.9676	0.9850	0.9884	0.9892	1.0556	1.0025
G	4.375	0.9424	0.9758	0.9848	0.9848	0.8939	0.9879
NGL		140	230	320	482	140	104

Tabela 7.12 Deslocamento normalizado nos pontos A, B, C, D, E, F e G ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.1$).

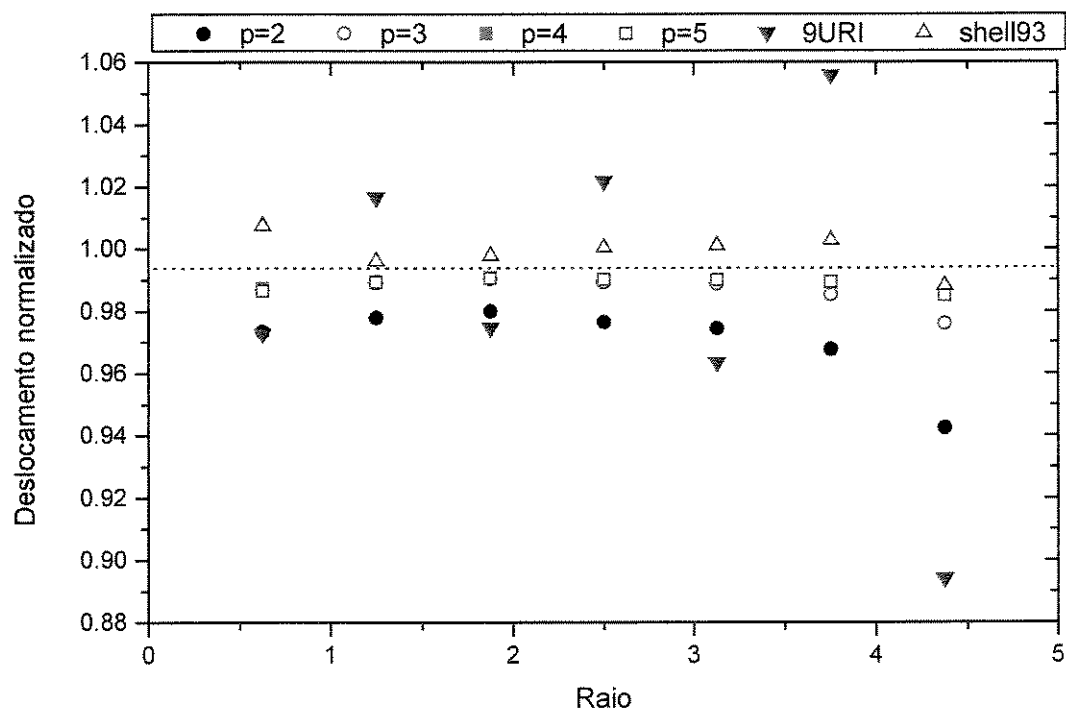


Figura 7.13 Deslocamento normalizado ao longo do raio da placa circular engastada com carga concentrada central ($t/a=0.1$).

7.2.4 Placa quadrada inclinada engastada com carga distribuída

O problema da placa quadrada inclinada engastada em uma extremidade com carga distribuída uniforme mostrado na Figura 7.14, representa um teste crítico para avaliar a sensibilidade do elemento finito quanto à distorção da malha. Modelou-se a placa com inclinações de $\beta=70^\circ$, $\beta=50^\circ$ e $\beta=30^\circ$, utilizando malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos.

Apresenta-se os deslocamentos (w_A do ponto A e w_B do ponto B) normalizados (w/w_{exato}). Os resultados analíticos w_{exato} [Razzaque, 1973] são os seguintes:

- para $\beta=70^\circ$, $w_A = 1.4275$ e $w_B = 1.0413$;
- para $\beta=50^\circ$, $w_A = 1.1720$ e $w_B = 0.5411$;
- para $\beta=30^\circ$, $w_A = 0.8128$ e $w_B = 0.1471$.

As características da placa modelada são as seguintes: $a = 100$, $E = 1.0 \times 10^2$, $\nu = 0.3$ e $t = 4$.

As Tabelas 7.13, 7.14, 7.15, 7.16, 7.17 e 7.18 e Figuras 7.15, 7.16, 7.17, 7.18, 7.19 e 7.20, apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Figura 7.14, os deslocamentos (w_A do ponto A e w_B do ponto B) normalizados [Razzaque, 1973] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

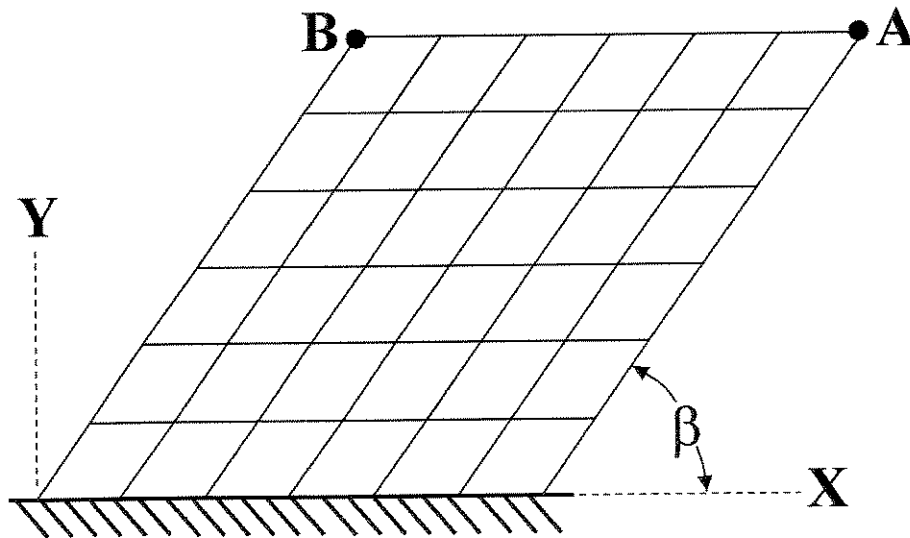


Figura 7.14 Placa quadrada inclinada engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.9153	96	0.9824	132	0.9825	192	0.9829	60	1.0200	48	0.9964
3x3	126	0.9611	198	0.9939	270	0.9940	396	0.9947	126	1.0065	99	0.9981
4x4	216	0.9969	336	0.9974	456	0.9969	672	0.9974	216	1.0036	168	0.9986
5x5	330	0.9873	510	0.9980	690	0.9981	1020	0.9985	330	1.0027	255	0.9992
6x6	468	0.9920	720	0.9987	972	0.9988	1440	0.9991	468	1.0024	360	0.9999
7x7	630	0.9948	966	0.9992	1302	0.9992	1932	0.9995	630	1.0022	483	1.0004

Tabela 7.13 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

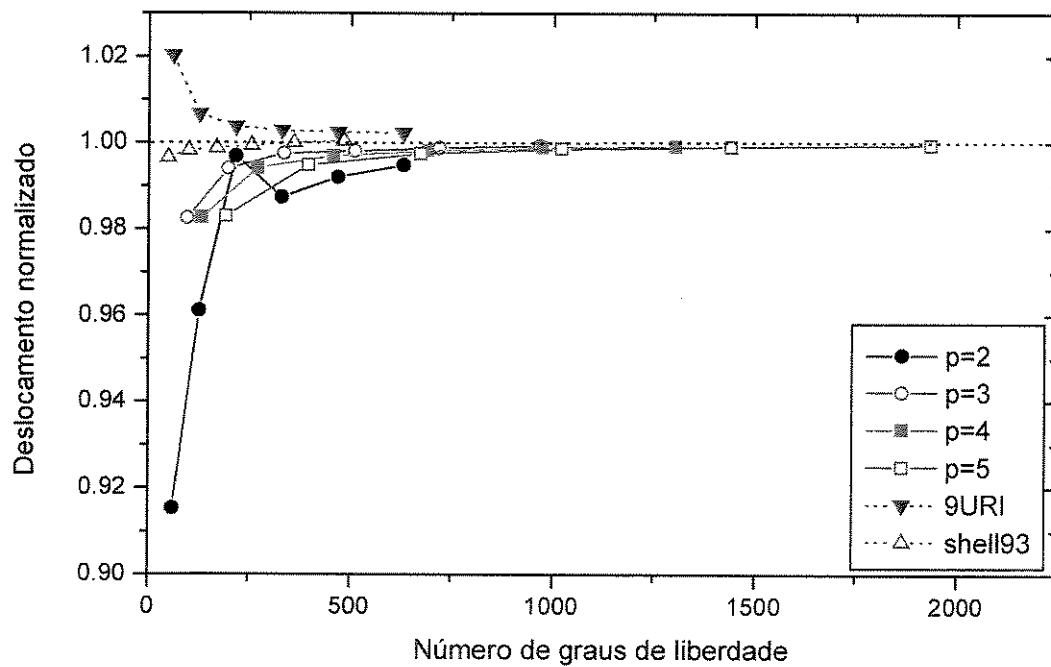


Figura 7.15 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.8876	96	0.9373	132	0.9375	192	0.9433	60	1.0577	48	0.9645
3x3	126	0.9401	198	0.9794	270	0.9795	396	0.9815	126	1.0302	99	0.9842
4x4	216	0.9677	336	0.9930	456	0.9931	672	0.9938	216	1.0223	168	0.9933
5x5	330	0.9828	510	0.9989	690	0.9990	1020	0.9993	330	1.0192	255	0.9986
6x6	468	0.9916	720	1.0022	972	1.0022	1440	1.0024	468	1.0178	360	1.0020
7x7	630	0.9971	966	1.0042	1302	1.0043	1932	1.0044	630	1.0170	483	1.0043

Tabela 7.14 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

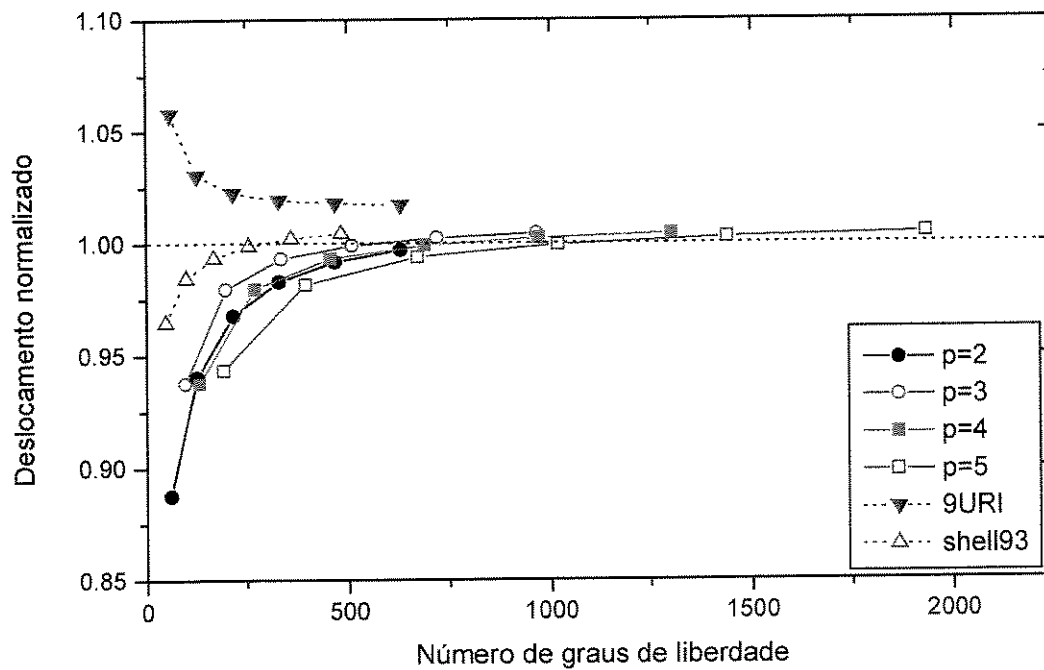


Figura 7.16 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.5902	96	0.8063	132	0.8071	192	0.8346	60	1.1603	48	0.8333
3x3	126	0.7461	198	0.9220	270	0.9227	396	0.9383	126	1.1019	99	0.9104
4x4	216	0.8448	336	0.9724	456	0.9728	672	0.9806	216	1.0832	168	0.9576
5x5	330	0.9080	510	0.9976	690	0.9979	1020	1.0017	330	1.0747	255	0.9843
6x6	468	0.9493	720	1.0119	972	1.0120	1440	1.0140	468	1.0702	360	1.0002
7x7	630	0.9767	966	1.0207	1302	1.0208	1932	1.0220	630	1.0675	483	1.0108

Tabela 7.15 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

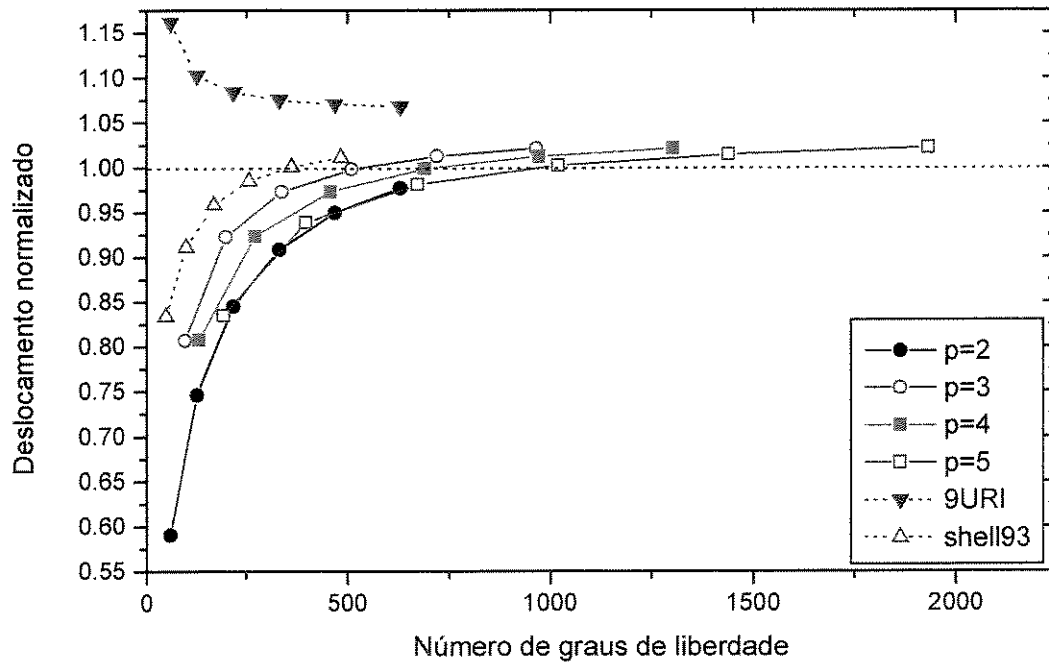


Figura 7.17 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.8789	96	0.9902	132	0.9902	192	0.9922	60	0.5394	48	0.9979
3x3	126	0.9476	198	0.9957	270	0.9958	396	0.9972	126	0.7527	99	0.9984
4x4	216	1.0270	336	1.0278	456	1.0270	672	1.0278	216	0.6184	168	0.9999
5x5	330	0.9845	510	0.9992	690	0.9992	1020	0.9999	330	0.9652	255	1.0008
6x6	468	0.9908	720	0.9999	972	0.9999	1440	1.0004	468	1.0322	360	1.0015
7x7	630	0.9944	966	1.0003	1302	1.0004	1932	1.0007	630	1.0565	483	1.0019

Tabela 7.16 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

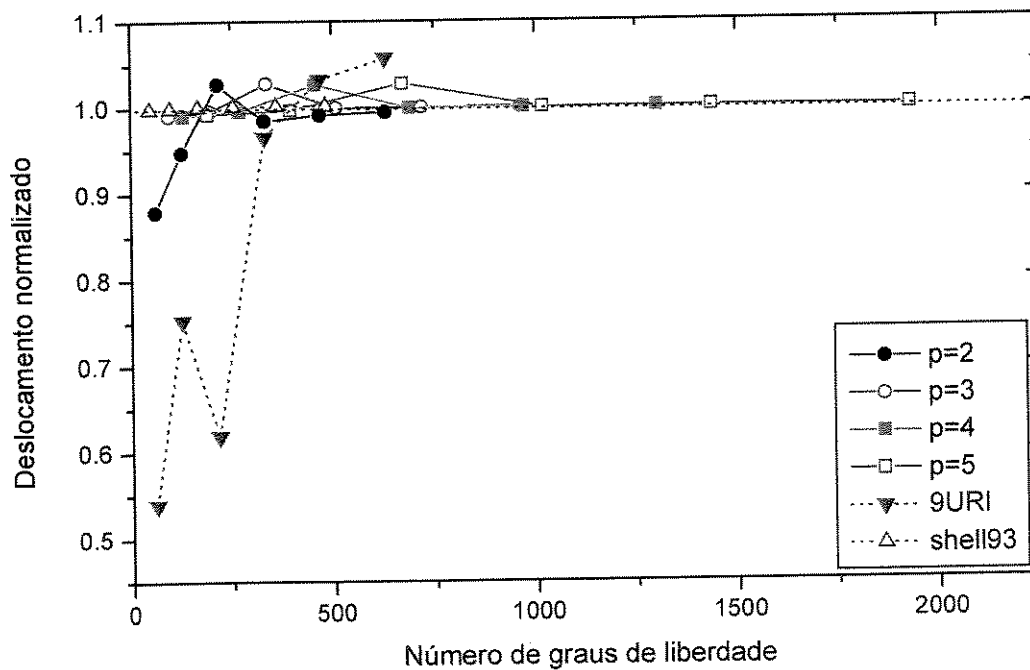


Figura 7.18 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=70^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.8524	96	0.9873	132	0.9873	192	0.9867	60	0.9478	48	0.9891
3x3	126	0.9272	198	0.9973	270	0.9973	396	0.9983	126	1.1344	99	0.9985
4x4	216	0.9624	336	1.0007	456	1.0007	672	1.0017	216	1.3914	168	1.0007
5x5	330	0.9805	510	1.0027	690	1.0027	1020	1.0036	330	1.4295	255	1.0030
6x6	468	0.9905	720	1.0041	972	1.0041	1440	1.0049	468	1.5544	360	1.0046
7x7	630	0.9965	966	1.0053	1302	1.0053	1932	1.0059	630	1.5553	483	1.0061

Tabela 7.17 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

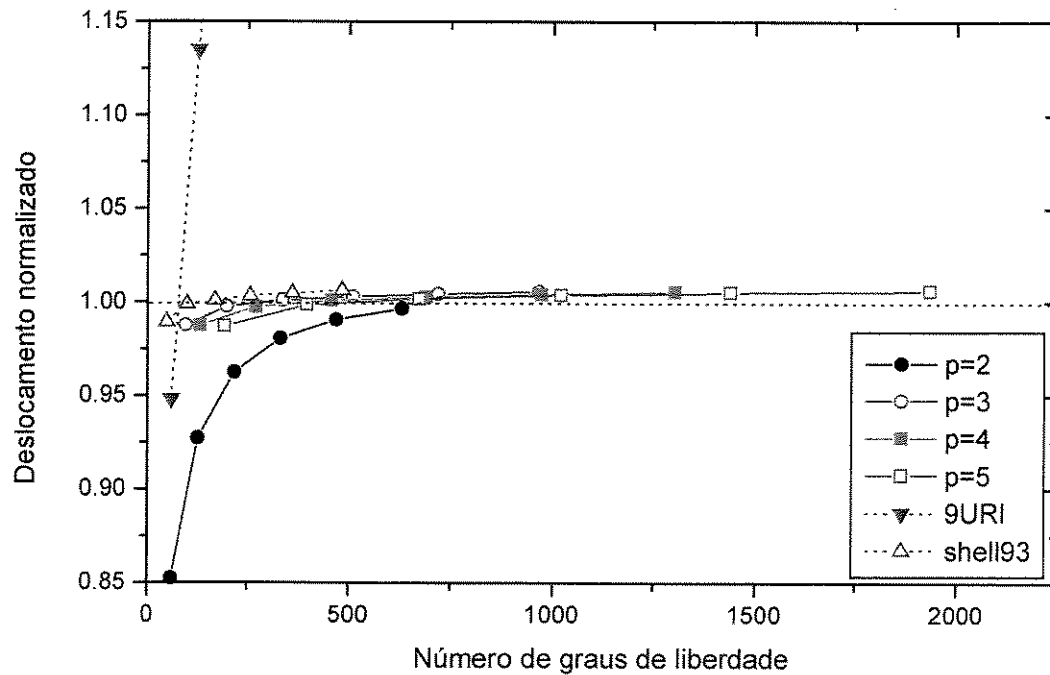


Figura 7.19 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=50^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	60	0.8737	96	0.9717	132	0.9711	192	0.9636	60	2.7059	48	0.9687
3x3	126	0.9457	198	1.0064	270	1.0059	396	1.0015	126	2.7441	99	0.9864
4x4	216	0.9887	336	1.0235	456	1.0232	672	1.0202	216	3.4842	168	1.0048
5x5	330	1.0134	510	1.0335	690	1.0333	1020	1.0312	330	3.4071	255	1.0170
6x6	468	1.0282	720	1.0402	972	1.0400	1440	1.0386	468	3.8003	360	1.0265
7x7	630	1.0376	966	1.0451	1302	1.0451	1932	1.0440	630	3.6910	483	1.0340

Tabela 7.18 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

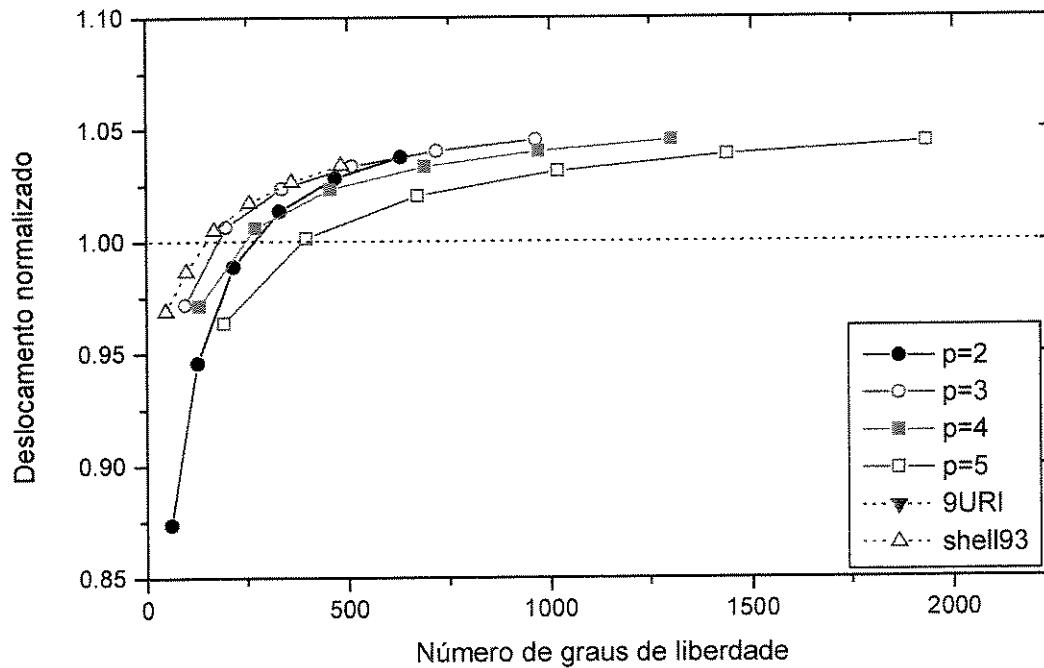


Figura 7.20 Deslocamento w_B normalizado da placa quadrada inclinada ($\beta=30^\circ$) engastada em uma extremidade com carga distribuída.

7.2.5 Viga retorcida 90° ("twisted beam")

A viga retorcida 90° ("twisted beam"), mostrada na Figura 7.21, representa um teste clássico para avaliar a sensibilidade do elemento finito quanto à torção da malha. A viga foi modelada utilizando malhas de discretização de 3×1 , 6×1 , 12×1 , 12×2 e 24×2 elementos.

Apresenta-se os deslocamentos (v_A do ponto A quando é aplicada uma força F_y no plano XY e w_A do ponto A quando é aplicada uma força F_z fora do plano XY) normalizados (w/w_{exato}). Os resultados analíticos w_{exato} [MacNeal *et al.*, 1985] são os seguintes:

- para $t = 0.32$, $v_A = 0.005424$ e $w_A = 0.001754$;
- para $t = 0.0032$, $v_A = 0.005226$ e $w_A = 0.001794$.

As características da viga modelada são as seguintes: $a = 12$, $b = 1.1$, $t = 0.32$ e 0.0032 , $E = 1.9 \times 10^7$ e $\nu = 0.22$.

As Tabelas 7.19, 7.20, 7.21 e 7.22, e as Figuras 7.22, 7.23, 7.24 e 7.25 apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Figura 7.21, os deslocamentos (v_A do ponto A quando é aplicada uma força F_y no plano XY e w_A do ponto A quando é aplicada uma força F_z fora do plano XY) normalizados [MacNeal *et al.*, 1985] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

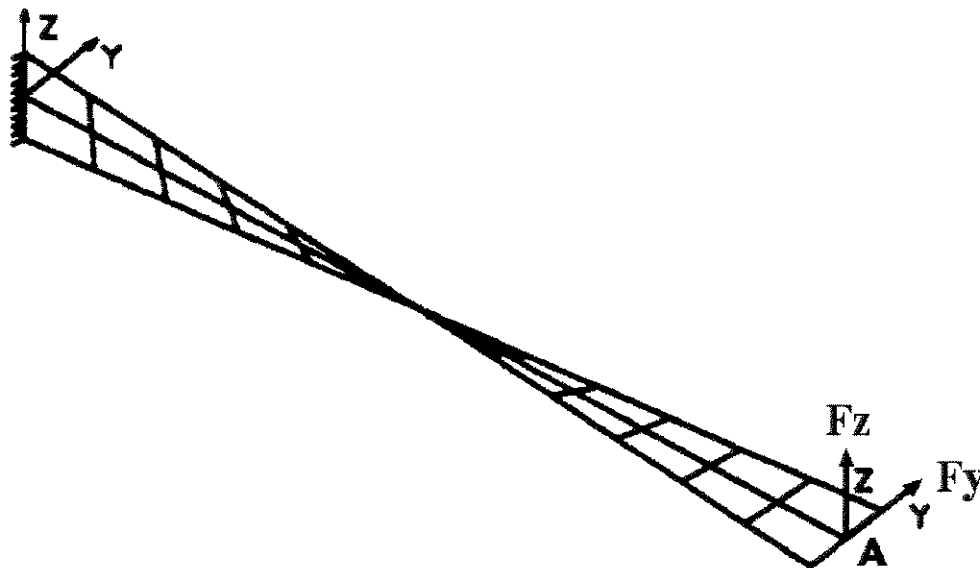


Figura 7.21 Viga retorcida 90° ("twisted beam").

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
3x1	108	0.8130	138	0.9930	168	0.9930	216	0.9943	108	1.0063	90	0.9838
6x1	216	0.9708	273	0.9967	330	0.9967	423	0.9975	216	1.0025	180	0.9946
12x1	432	0.9943	543	0.9984	654	0.9985	837	0.9996	432	1.0031	360	0.9985
12x2	720	0.9951	906	0.9973	1092	0.9975	1422	0.9977	720	1.0011	576	0.9982
24x2	1440	0.9975	1806	0.9979	2172	0.9983	2826	0.9985	1440	0.9992	1152	0.9991

Tabela 7.19 Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/\alpha=0.0267$).

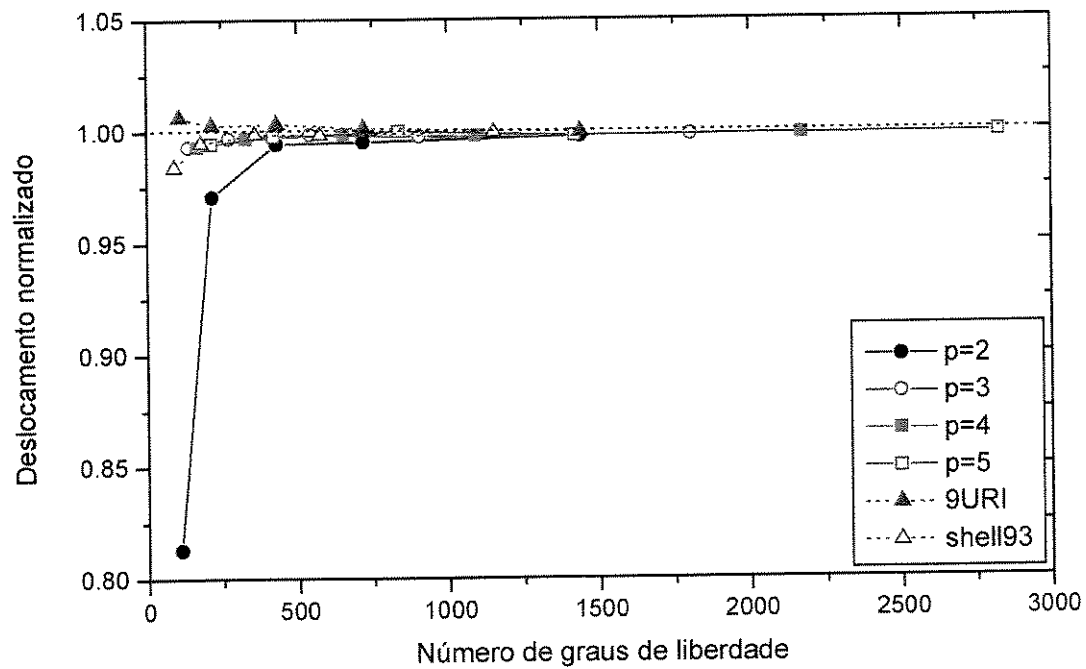


Figura 7.22 Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/\alpha=0.0267$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
3x1	108	0.8797	138	0.9948	168	0.9948	216	0.9971	108	1.0093	90	0.9842
6x1	216	0.9792	273	0.9972	330	0.9972	423	1.0005	216	0.9966	180	0.9945
12x1	432	0.9935	543	1.0000	654	1.0001	837	1.0045	432	0.9976	360	0.9967
12x2	720	0.9946	906	0.9962	1092	0.9969	1422	0.9972	720	0.9982	576	0.9983
24x2	1440	0.9960	1806	0.9967	2172	0.9980	2826	0.9985	1440	0.9984	1152	0.9992

Tabela 7.20 Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.0267$).

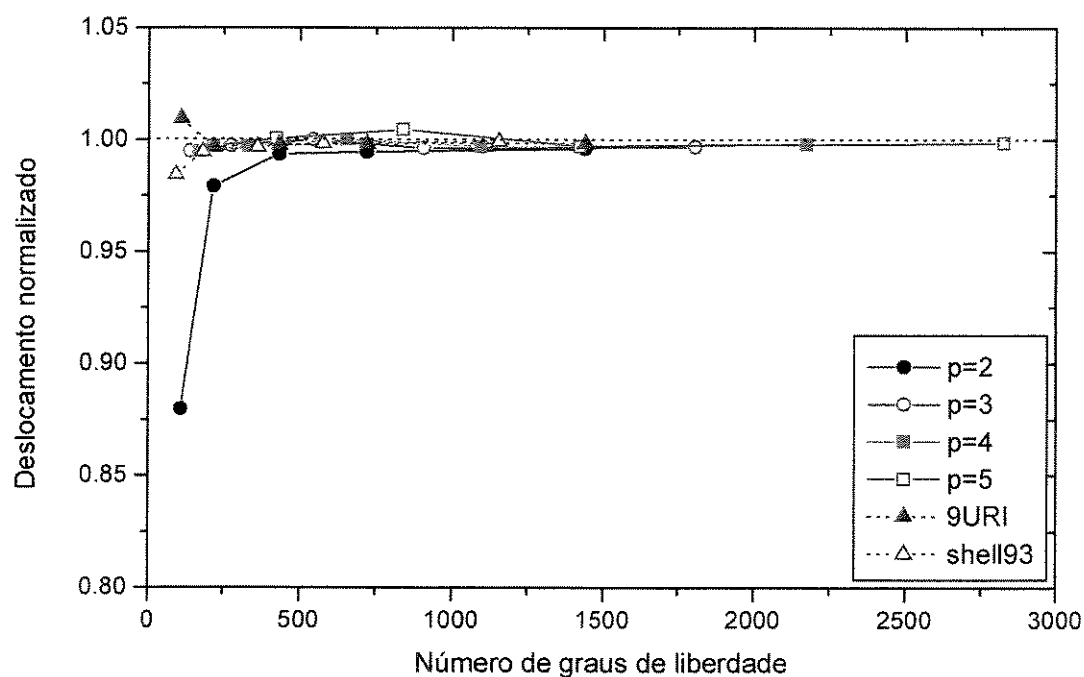


Figura 7.23 Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.0267$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
3x1	108	0.0007	138	0.8749	168	0.8761	216	0.5658	108	1.0076	90	0.9665
6x1	216	0.0066	273	0.9716	330	0.9718	423	0.9763	216	1.0101	180	0.9697
12x1	432	0.0782	543	0.9906	654	0.9906	837	1.0017	432	1.0105	360	0.9872
12x2	720	0.0831	906	0.9821	1092	0.9821	1422	0.9839	720	0.9998	576	0.9931
24x2	1440	0.4918	1806	0.9858	2172	0.9859	2826	0.9842	1440	1.0022	1152	1.0027

Tabela 7.21 Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.000267$).

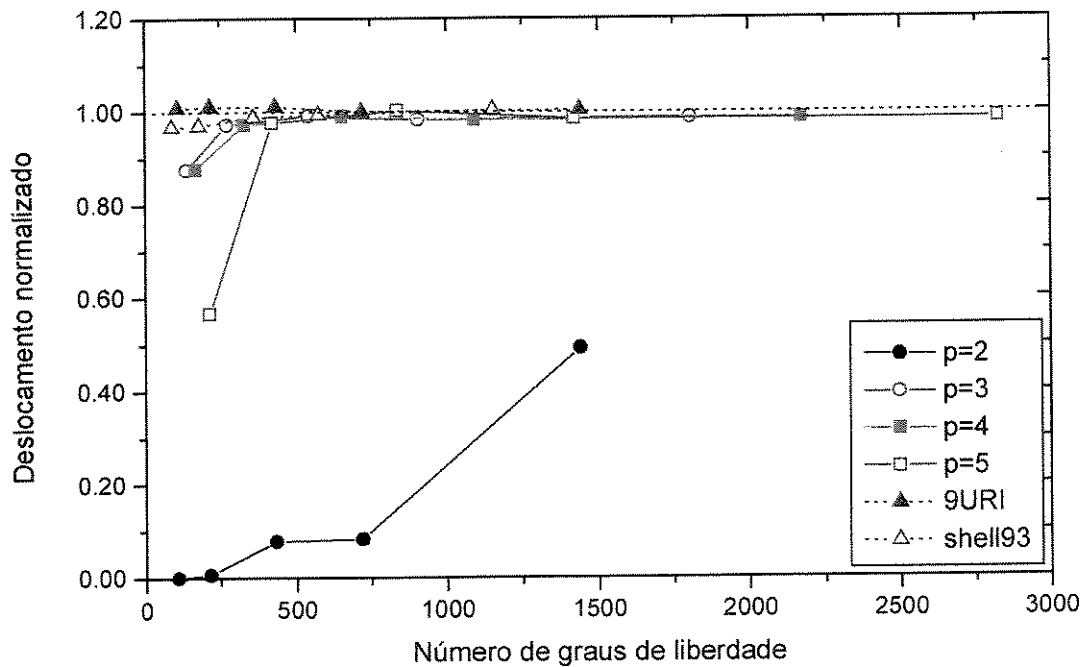


Figura 7.24 Deslocamento v_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_y ($t/a=0.000267$).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
3x1	108	0.0006	138	0.9347	168	0.9357	216	0.6342	108	1.0470	90	1.0009
6x1	216	0.0056	273	1.0328	330	1.0330	423	1.0397	216	1.0488	180	1.0112
12x1	432	0.0681	543	1.0450	654	1.0450	837	1.0492	432	1.0489	360	1.0376
12x2	720	0.0727	906	1.0349	1092	1.0349	1422	1.0355	720	1.0457	576	1.0422
24x2	1440	0.4880	1806	1.0360	2172	1.0360	2826	1.0356	1440	1.0470	1152	1.0463

Tabela 7.22 Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.000267$).

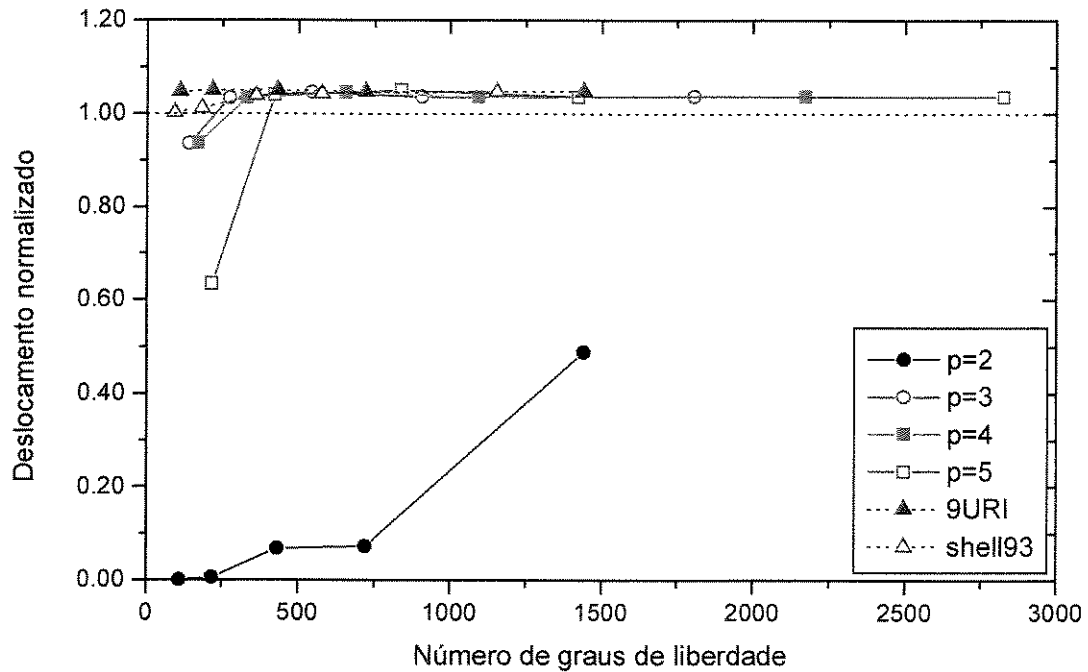


Figura 7.25 Deslocamento w_A normalizado da viga torcida 90° engastada em uma extremidade submetida à força concentrada F_z ($t/a=0.000267$).

7.2.6 Casca cilíndrica submetida à ação de seu peso próprio

O problema da casca cilíndrica "Scordelis-Lo roof", mostrado na Figura 7.26, representa um teste crítico para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana). Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca, utilizando malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 e 8×8 elementos.

Apresenta-se os deslocamentos (v_1 do nó 1, w_2 do nó 2 e w_3 do nó 3) normalizados (w/w_{exato}). Os resultados analíticos w_{exato} [Scordelis *et al.*, 1964] são os seguintes:

- $v_1 = -0.0125$;
- $w_2 = 0.0451$;
- $w_3 = 0.3008$.

As características da casca modelada são as seguintes: $L = 50$, $R = 25$, $t = 0.25$, $E = 4.32 \times 10^5$, $\nu = 0.0$ e o peso próprio $q = -0.3599$.

As Tabelas 7.23, 7.24 e 7.25, e as Figuras 7.27, 7.28 e 7.29, apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Figura 7.26, os deslocamentos (v_1 do nó 1, w_2 do nó 2 e w_3 do nó 3) normalizados [Scordelis *et al.*, 1964] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

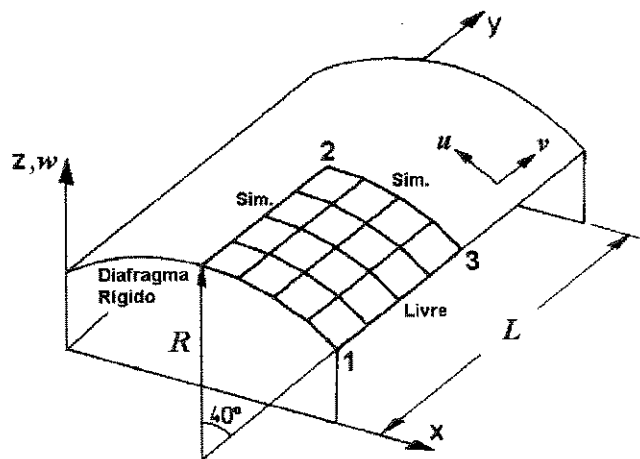


Figura 7.26 Casca cilíndrica submetida à ação do seu peso próprio.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	96	0.5789	132	0.9979	168	1.0099	228	1.0336	96	0.9972	84	0.9936
3x3	204	0.7651	276	0.9913	348	1.0011	474	1.0073	204	0.9923	180	1.0003
4x4	352	0.8858	472	0.9880	592	0.9952	808	0.9985	352	0.9893	312	0.9974
5x5	540	0.9339	720	0.9833	900	0.9899	1230	0.9906	540	0.9882	480	0.9960
6x6	768	0.9623	1020	0.9873	1272	0.9923	1740	0.9936	768	0.9879	684	0.9953
7x7	1036	0.9733	1372	0.9876	1708	0.9919	2338	0.9928	1036	0.9881	924	0.9950

Tabela 7.23 Deslocamento v_1 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

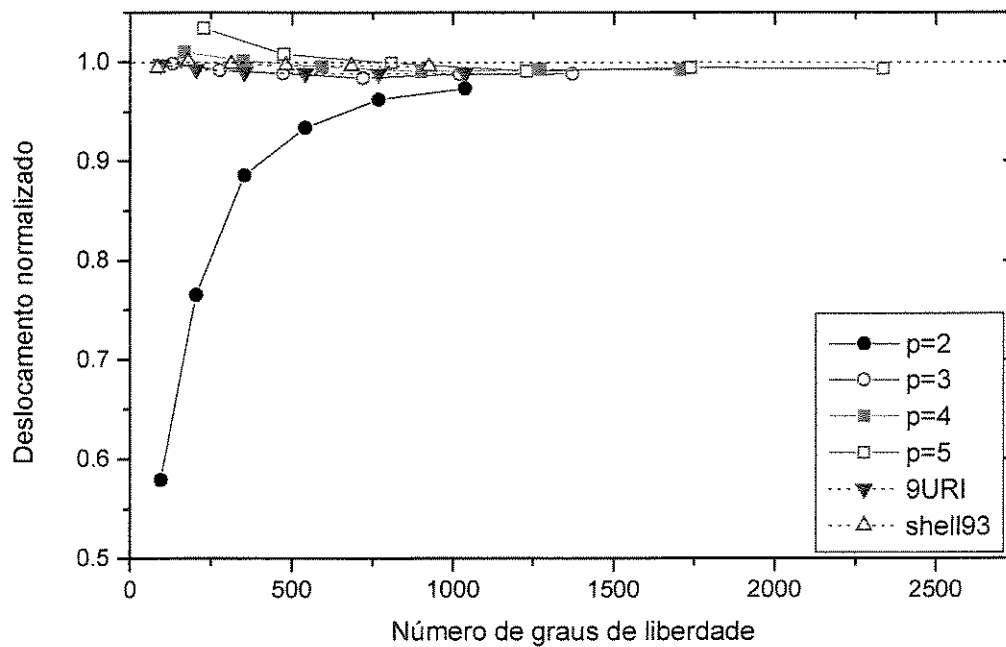


Figura 7.27 Deslocamento v_1 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	96	-0.3433	132	1.0878	168	1.0698	228	1.1183	96	1.1673	84	1.1588
3x3	204	0.2868	276	1.0822	348	1.0742	474	1.0857	204	1.1009	180	1.1414
4x4	352	0.7148	472	1.0782	592	1.0744	808	1.0801	352	1.0867	312	1.1295
5x5	540	0.8881	720	1.0611	900	1.0590	1230	1.0555	540	1.0823	480	1.1242
6x6	768	0.9886	1020	1.0777	1272	1.0766	1740	1.0785	768	1.0811	684	1.1214
7x7	1036	1.0284	1372	1.0789	1708	1.0782	2338	1.0794	1036	1.0813	924	1.1198

Tabela 7.24 Deslocamento w_2 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

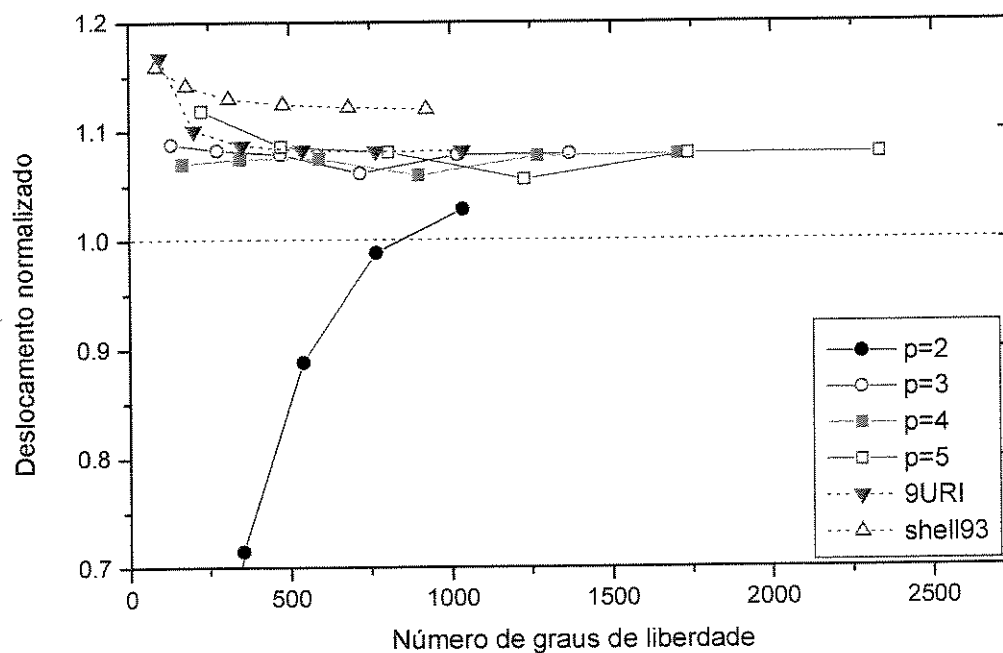


Figura 7.28 Deslocamento w_2 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	96	0.2602	132	0.9650	168	0.9682	228	0.9956	96	0.9833	84	1.0148
3x3	204	0.5772	276	0.9619	348	0.9664	474	0.9801	204	0.9665	180	1.0016
4x4	352	0.7861	472	0.9598	592	0.9644	808	0.9715	352	0.9616	312	0.9906
5x5	540	0.8679	720	0.9521	900	0.9568	1230	0.9571	540	0.9601	480	0.9858
6x6	768	0.9175	1020	0.9593	1272	0.9631	1740	0.9656	768	0.9599	684	0.9833
7x7	1036	0.9364	1372	0.9598	1708	0.9633	2338	0.9649	1036	0.9603	924	0.9819

Tabela 7.25 Deslocamento w_3 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

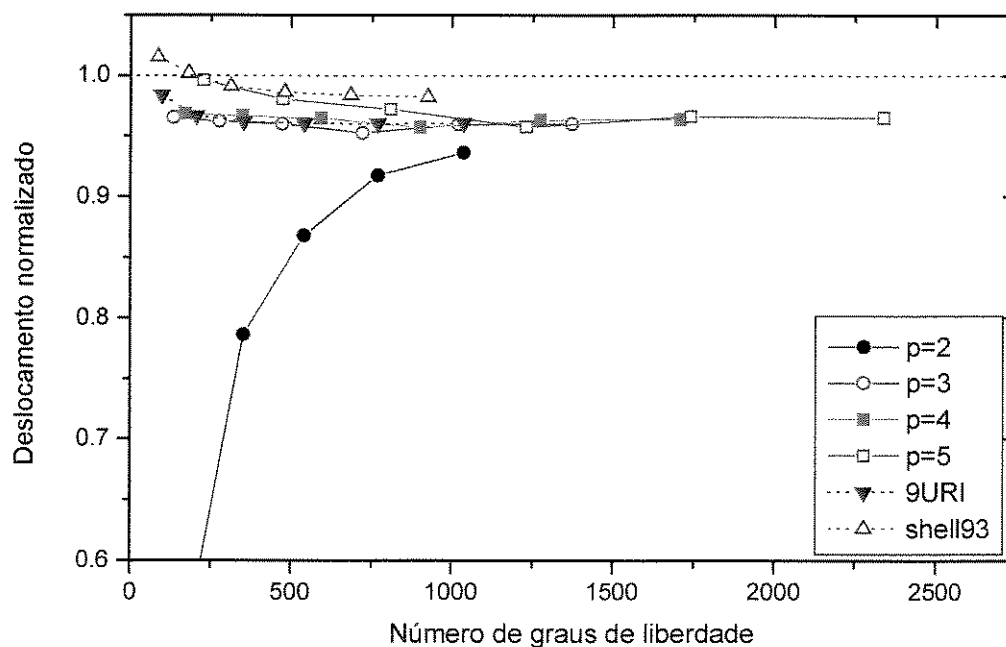


Figura 7.29 Deslocamento w_3 normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

7.2.7 Cilindro puncionado com carga concentrada unitária

O problema do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades (Figura 7.30) representa um teste severo para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana) e tensão de flexão. Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um oitavo do cilindro, utilizando malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 , 8×8 , 9×9 e 10×10 elementos.

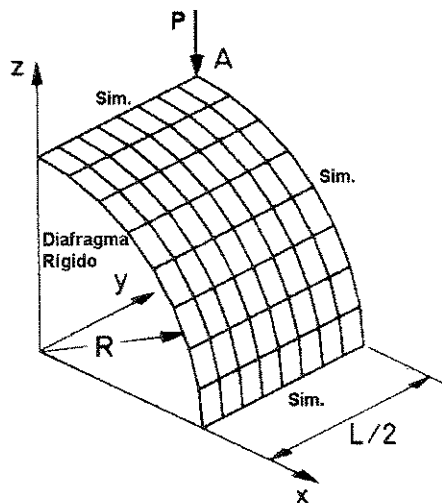


Figura 7.30 Cilindro puncionado com carga concentrada unitária.

Apresentam-se os deslocamentos normalizados (w/w_{exato}) do cilindro puncionado. O resultado w_{exato} é obtido analiticamente [Flügge, 1962]:

$$w_{exato} = \frac{\alpha P}{E t} \quad (7.7)$$

na qual, P é o valor da carga concentrada.

Na Equação (7.7) os valores da constante α são os seguintes:

- cilindro engastado: $\alpha = 137.0$ para $t/R = 0.01$ e $\alpha = 963.9$ para $t/a = 0.002$;
- cilindro suportado por diafragmas: $\alpha = 164.3$ para $t/R = 0.01$ e $\alpha = 1223.0$ para $t/a = 0.002$.

Apresentam-se os deslocamentos normalizados do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades para as relações entre espessura e raio de curvatura $t/R=0.01$ (Tabela 7.26 e Figura 7.31) e $t/R=0.002$ (Tabela 7.27 e Figura 7.32), e também, os deslocamentos normalizados do cilindro puncionado engastado em suas extremidades para as relações entre espessura e raio de curvatura $t/R=0.01$ (Tabela 7.28 e Figura 7.23) e $t/R=0.002$ (Tabela 7.29 e Figura 7.34). As características do cilindro são: $L = 600$, $R = 300$, $E = 3.0 \times 10^2$, $\nu = 0.30$ e $P = 1.0$ (carregamento unitário).

As Tabelas 7.26, 7.27, 7.28 e 7.29, e as Figuras 7.31, 7.32, 7.33 e 7.34, apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Figura 7.30, os deslocamentos w_A do ponto A normalizados [Flügge, 1962] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	96	0.0497	132	0.4390	168	0.4477	228	0.5426	96	0.7774	72	0.7447
3x3	216	0.0887	288	0.7091	360	0.7313	486	0.8591	216	0.9386	162	0.9051
4x4	384	0.1611	504	0.8259	624	0.8519	840	0.9342	384	0.9919	288	0.9573
5x5	600	0.2580	780	0.8854	960	0.9117	1290	0.9377	600	1.0113	450	0.9831
6x6	864	0.3636	1116	0.9203	1368	0.9456	1836	0.9589	864	1.0158	648	0.9904
7x7	1176	0.4680	1512	0.9425	1848	0.9663	2478	0.9750	1176	1.0181	882	0.9932
8x8	1536	0.5636	1968	0.9573	2400	0.9796	3216	0.9862	1536	1.0201	1152	0.9951
9x9	1944	0.6454	2484	0.9678	3024	0.9886	4050	0.9938	1944	1.0218	1458	0.9969
10x10	2400	0.7122	3060	0.9755	3720	0.9949	4980	0.9993	2400	1.0232	1800	0.9985

Tabela 7.26 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.01$.

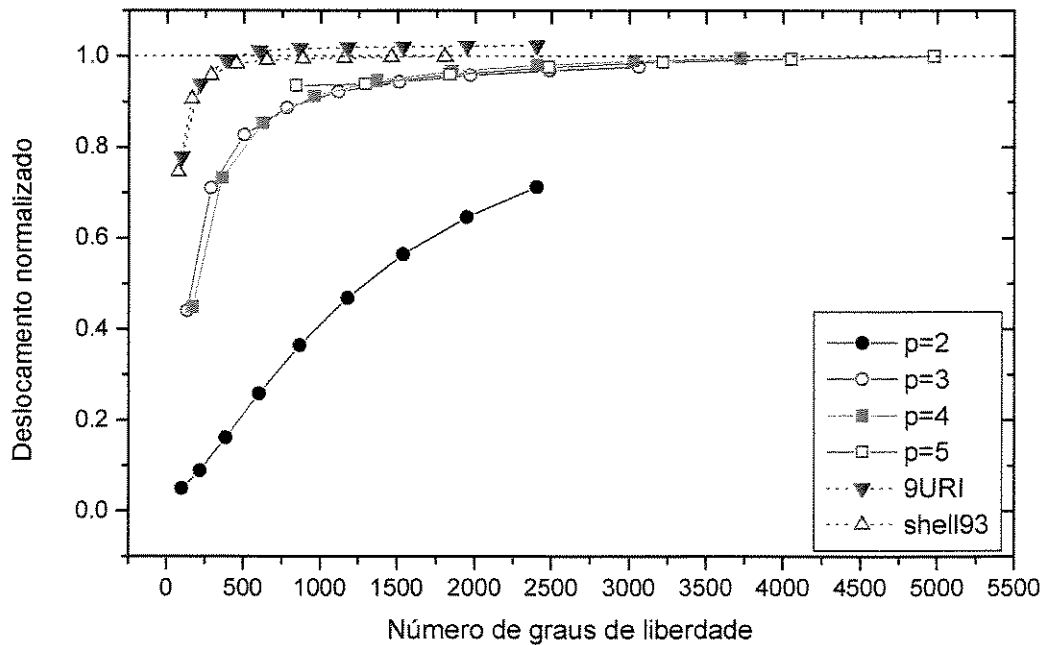


Figura 7.31 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades $t/R=0.01$.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	96	0.0067	132	0.0867	168	0.0891	228	0.0932	96	0.2941	72	0.2572
3x3	216	0.0121	288	0.3278	360	0.3359	486	0.3451	216	0.7093	162	0.6905
4x4	384	0.0225	504	0.5392	624	0.5529	840	0.5785	384	0.8390	288	0.8202
5x5	600	0.0379	780	0.6588	960	0.6772	1290	0.7003	600	0.8730	450	0.8499
6x6	864	0.0574	1116	0.7312	1368	0.7520	1836	0.9733	864	0.9259	648	0.9014
7x7	1176	0.0820	1512	0.7828	1848	0.8047	2478	0.8926	1176	0.9622	882	0.9388
8x8	1536	0.1124	1968	0.8224	2400	0.8447	3216	0.8987	1536	0.9832	1152	0.9616
9x9	1944	0.1488	2484	0.8532	3024	0.8754	4050	0.9157	1944	0.9947	1458	0.9754
10x10	2400	0.1904	3060	0.8774	3720	0.8994	4980	0.9317	2400	1.0006	1800	0.9835

Tabela 7.27 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.002$.

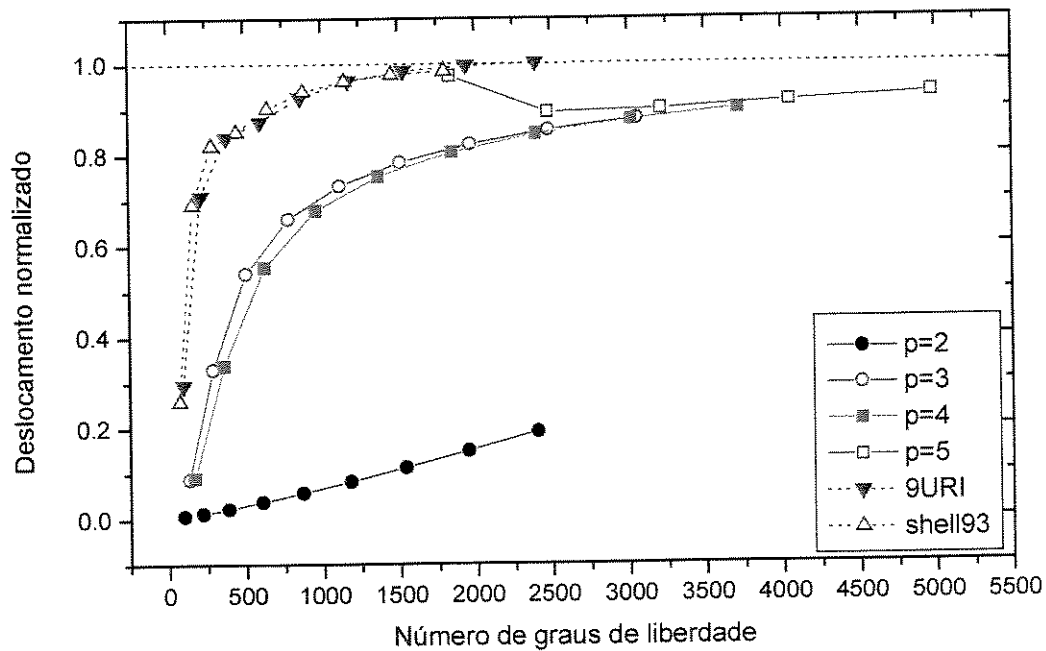


Figura 7.32 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com $t/R=0.002$.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	83	0.0531	119	0.3010	155	0.3073	215	1.9677	83	0.6370	59	0.5596
3x3	197	0.0946	269	0.6164	341	0.6336	467	1.1044	197	0.9392	143	0.9050
4x4	359	0.1650	479	0.7749	599	0.7991	815	0.8801	359	0.9822	263	0.9464
5x5	569	0.2519	749	0.8538	929	0.8797	1259	0.9083	569	1.0003	419	0.9705
6x6	827	0.3504	1079	0.8980	1331	0.9237	1799	0.9389	827	1.0065	611	0.9803
7x7	1133	0.4512	1469	0.9254	1805	0.9500	2435	0.9602	1133	1.0100	839	0.9844
8x8	1487	0.5449	1919	0.9436	2351	0.9668	3167	0.9745	1487	1.0129	1103	0.9871
9x9	1889	0.6258	2429	0.9564	2969	0.9782	3995	0.9843	1889	1.0154	1403	0.9895
10x10	2339	0.6924	2999	0.9656	3659	0.9861	4919	0.9912	2339	1.0173	1739	0.9917

Tabela 7.28 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.01$.

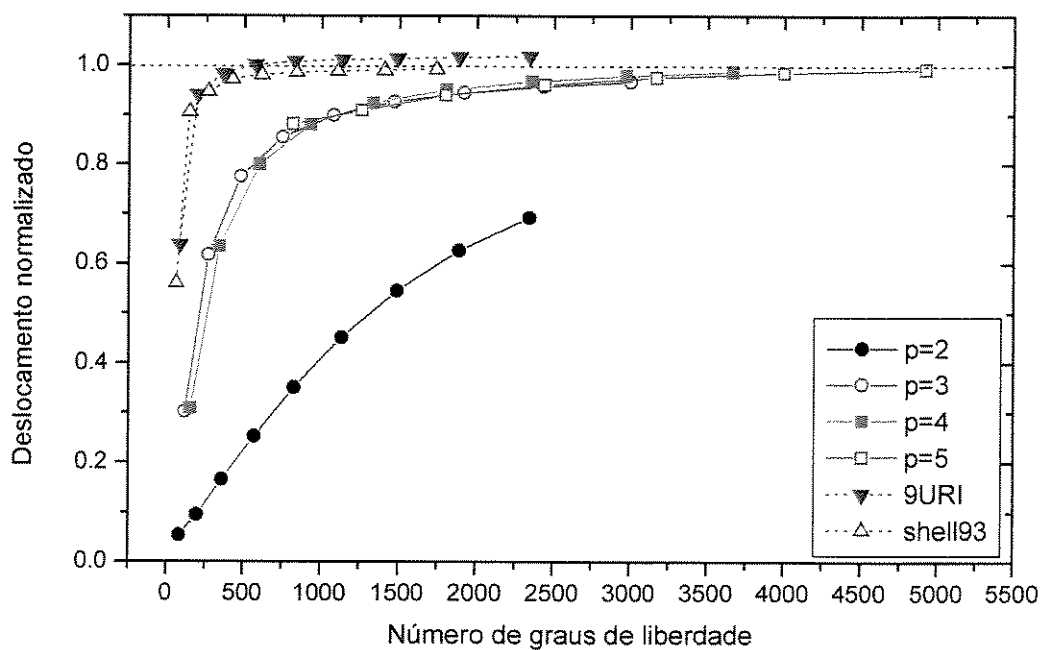


Figura 7.33 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.01$.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	83	0.0076	119	0.0489	155	0.0501	215	0.0582	83	0.1433	59	0.1278
3x3	197	0.0136	269	0.1809	341	0.1866	467	0.1917	197	0.5292	143	0.4754
4x4	359	0.0243	479	0.3902	599	0.4004	815	0.4356	359	0.8056	263	0.7735
5x5	569	0.0388	749	0.5525	929	0.5693	1259	0.5840	569	0.8839	419	0.8567
6x6	827	0.0583	1079	0.6595	1331	0.6808	1799	0.8865	827	0.9254	611	0.8964
7x7	1133	0.0831	1469	0.7325	1805	0.7562	2435	0.8539	1133	0.9640	839	0.9353
8x8	1487	0.1136	1919	0.7856	2351	0.8106	3167	0.8750	1487	0.9900	1103	0.9632
9x9	1889	0.1491	2429	0.8261	2969	0.8515	3995	0.9011	1889	1.0049	1403	0.9809
10x10	2339	0.1894	2999	0.8575	3659	0.8830	4919	0.9234	2339	1.0127	1739	0.9915

Tabela 7.29 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.002$.

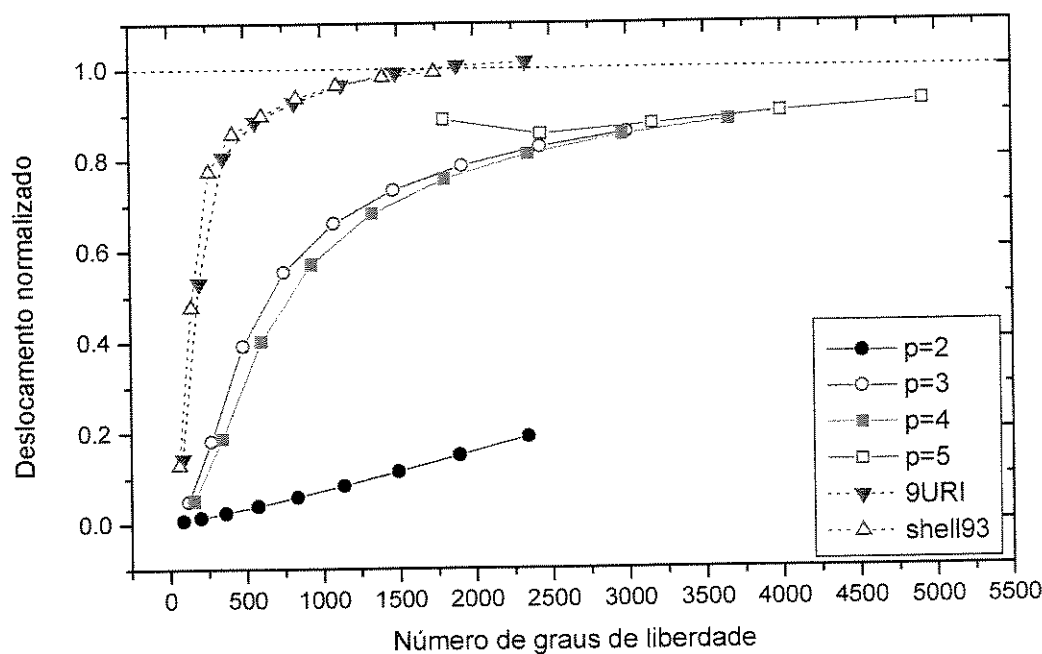


Figura 7.34 Deslocamento w_A normalizado do cilindro puncionado engastado em suas extremidades com $t/R=0.002$.

7.2.8 Casca semi-esférica puncionada com carga concentrada unitária

A casca semi-esférica puncionada com carga concentrada unitária (Figura 7.35) representa um problema que testa a capacidade do elemento finito de representar os modos de flexão. O modelo do problema é apresentado na literatura de duas formas: casca semi-esférica com furo de $\theta = 18^\circ$ [Simo *et al.*, 1989] e casca semi-esférica inteira [Belytschko *et al.*, 1989] (malha discretizada com furo de $\theta = 0.1^\circ$). Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca semi-esférica, utilizando malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 e 8×8 elementos.

Apresenta-se o deslocamento (u_A do ponto A na direção X) normalizados (w/w_{exato}). Os resultados analíticos w_{exato} são os seguintes:

- $u_A = 0.093$, para a casca semi-esférica com furo de $\theta = 18^\circ$ [Simo *et al.*, 1989];
- $u_A = 0.0924$, para a casca semi-esférica inteira [Belytschko *et al.*, 1989] (malha discretizada com furo de $\theta = 0.1^\circ$).

As características da casca são: raio $R = 10.0$, espessura $t = 0.04$, módulo de elasticidade $E = 6.825 \times 10^7$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ e carregamento unitário.

As Tabelas 7.30 e 7.31, e as Figuras 7.36 e 7.37, apresentam os deslocamentos u_A do ponto A na direção radial normalizados para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

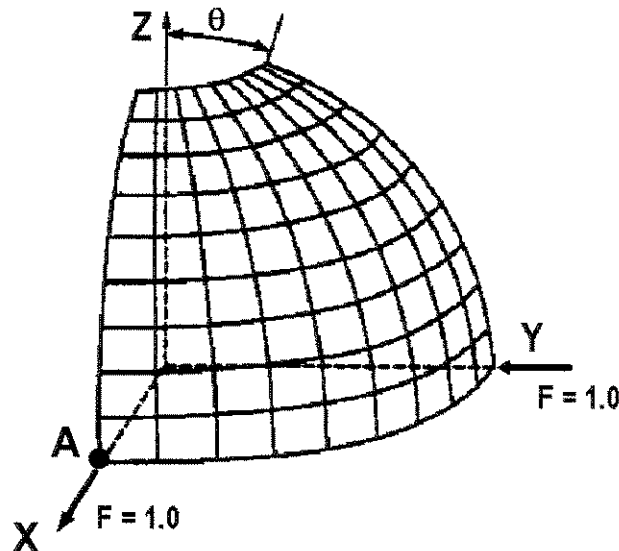


Figura 7.35 Casca semi-esférica puncionada com carga concentrada unitária.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	119	0.0065	155	0.7120	191	0.7215	251	0.5172	119	1.3169	95	0.1902
3x3	251	0.0215	323	0.9515	395	0.9547	521	0.9214	251	1.1057	197	0.5955
4x4	431	0.0435	551	0.9880	671	0.9904	887	0.9288	431	1.0650	335	0.8668
5x5	659	0.0752	839	0.9990	1019	1.0008	1349	1.0469	659	1.0471	509	0.9745
6x6	935	0.1233	1187	1.0035	1439	1.0047	1907	0.9756	935	1.0359	719	1.0015
7x7	1259	0.1908	1595	1.0052	1931	1.0059	2561	0.9902	1259	1.0284	965	1.0087
8x8	1631	0.2756	2063	1.0054	2495	1.0059	3311	1.0169	1631	1.0229	1247	1.0108

Tabela 7.30 Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 18° .

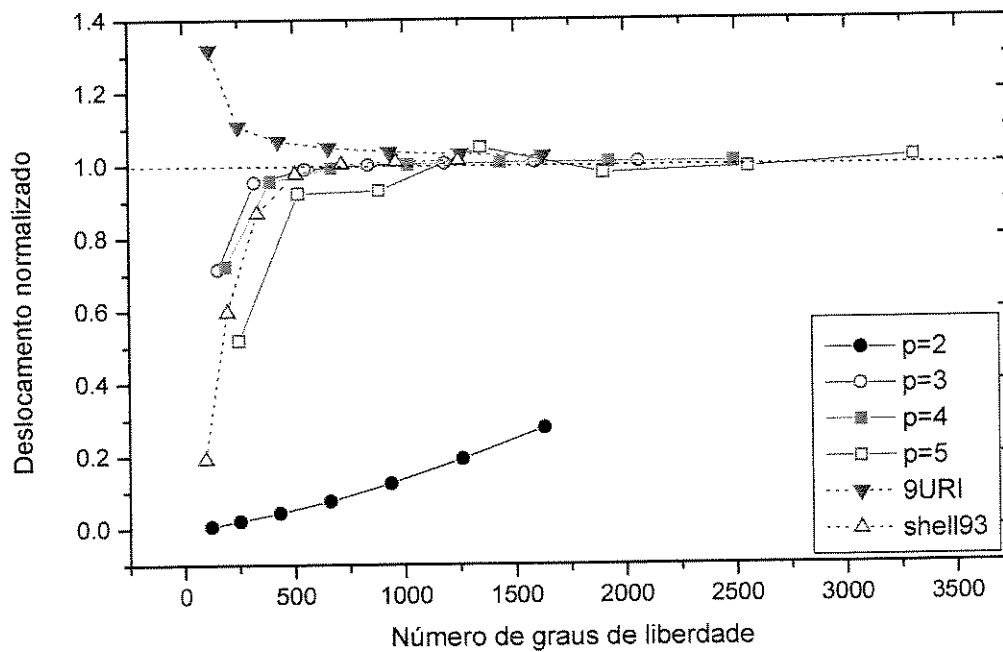


Figura 7.36 Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 18° .

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	119	0.0042	155	0.5157	191	0.5304	251	0.4644	119	1.3958	95	0.1048
3x3	251	0.0151	323	0.9076	395	0.9117	521	0.7977	251	1.1252	197	0.4677
4x4	431	0.0330	551	0.9738	671	0.9765	887	0.8721	431	1.0791	335	0.7658
5x5	659	0.0581	839	0.9889	1019	0.9913	1349	0.9343	659	1.0553	509	0.9372
6x6	935	0.0946	1187	0.9952	1439	0.9971	1907	0.9642	935	1.0402	719	0.9868
7x7	1259	0.1463	1595	0.9983	1931	0.9997	2561	0.9815	1259	1.0304	965	1.0004
8x8	1631	0.2139	2063	0.9997	2495	1.0006	3311	0.9906	1631	1.0237	1247	1.0046

Tabela 7.31 Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 0.1° .

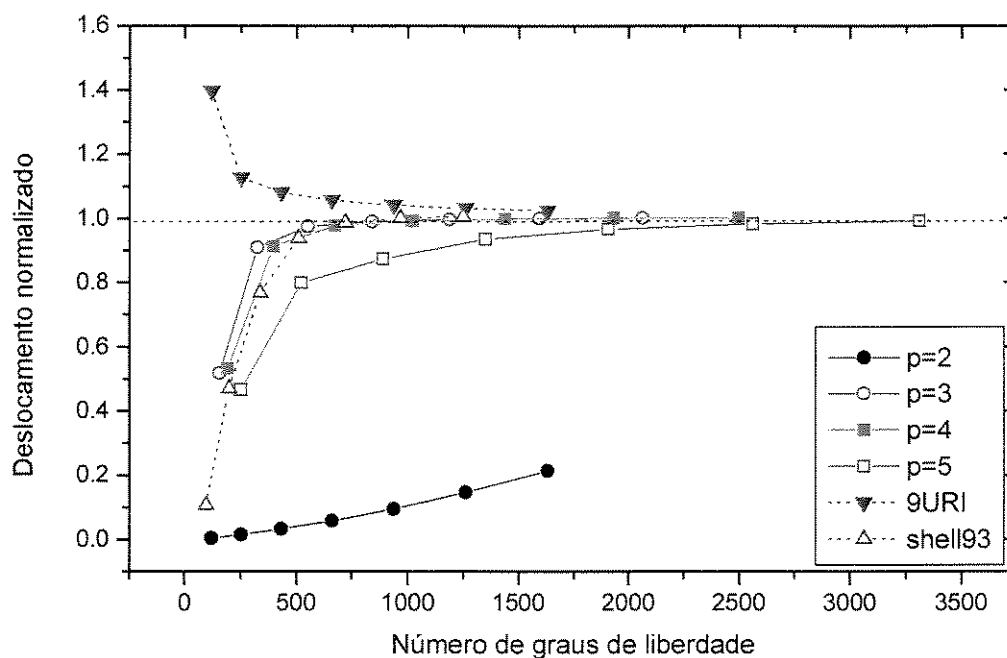


Figura 7.37 Deslocamento u_A normalizado da casca semi-esférica com furo de 0.1° .

7.2.9 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

Para verificar se o elemento finito com refinamento hierárquico gera elementos com modos espúrios propagáveis em toda malha foi feito um teste clássico proposto na literatura: a análise de uma placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme (Figura 7.38) que é extremamente sensível à existência de modos espúrios de flexão. Em função da geometria a placa foi modelada com malha de discretização regular de 2×2 , 4×4 , 6×6 e 8×8 elementos para várias relações entre espessura e dimensão característica.

Apresenta-se o deslocamento normalizado no centro da placa quadrada (w/w_{exato}). O resultado w_{exato} é obtido a partir da *Teoria de Placas Finas* [Timoshenko *et al.*, 1959], que, neste caso, fornece a solução exata para placas finas:

$$w_{exato} = \frac{0.0249 q a^4}{D} \quad (7.8)$$

na qual, q é o valor da carga uniformemente distribuída, a a dimensão característica da placa e D sua rigidez.

As Tabelas 7.32, 7.33 e 7.34, e as Figuras 7.39, 7.40 e 7.41, apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Figura 7.38, os deslocamentos w_A do ponto A normalizados [Timoshenko *et al.*, 1959] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

Deve-se verificar que os resultados obtidos com o elemento finito 9URI estão muito distantes do "exato" (os modos espúrios se propagam em toda malha distorcendo a solução) como pode se verificar nas Tabelas 7.32, 7.33 e 7.34, e por esta razão, os resultados para este elemento não aparecem nas Figuras 7.39, 7.40 e 7.41.

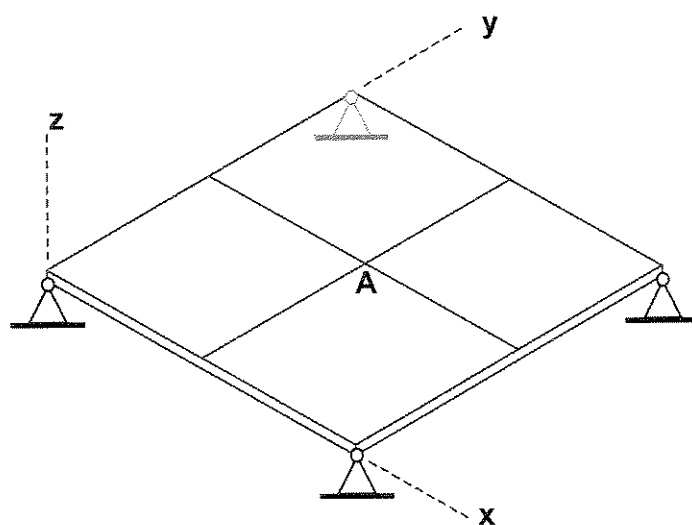


Figura 7.38 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos com carga distribuída uniforme.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	71	0.7614	107	1.0273	143	1.0273	203	1.0305	71	0.7671	59	1.1190
4x4	239	0.9567	359	1.0248	479	1.0248	695	1.0250	239	0.3626	191	1.0480
6x6	503	0.9953	755	1.0251	1007	1.0251	1475	1.0252	503	-1.011	395	1.0371
8x8	863	1.0091	1295	1.0254	1727	1.0254	2543	1.0255	863	0.0800	671	1.0336

Tabela 7.32 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.01$.

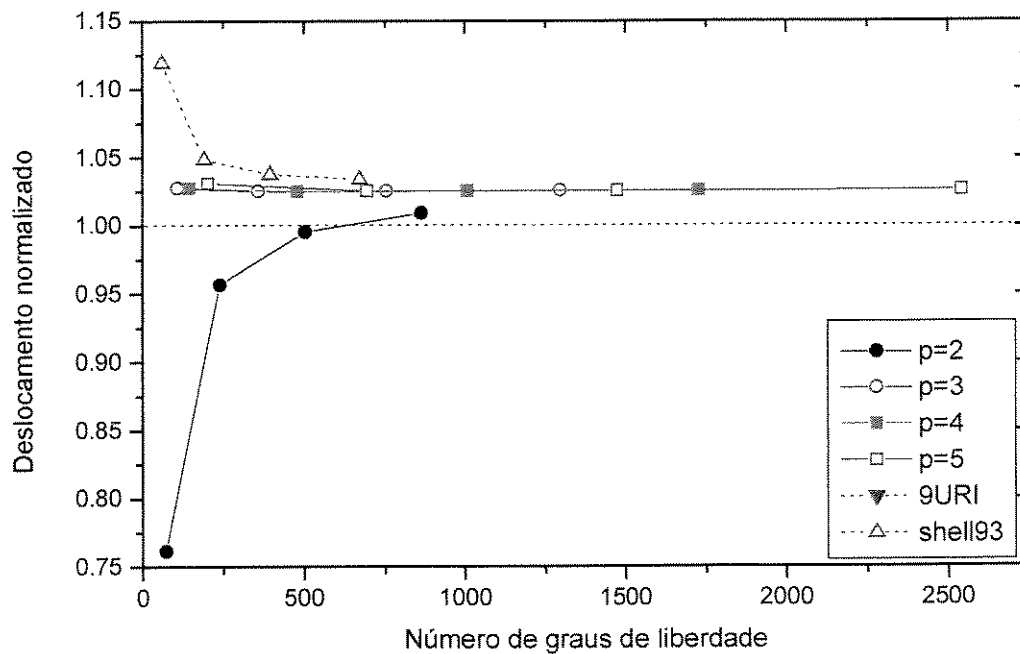


Figura 7.39 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/a=0.01$.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	71	0.7598	107	1.0269	143	1.0269	203	1.0240	71	1.1472	59	1.1185
4x4	239	0.9548	359	1.0238	479	1.0238	695	1.0236	239	0.1972	191	1.0472
6x6	503	0.9932	755	1.0240	1007	1.0240	1475	1.0239	503	2.4522	395	1.0358
8x8	863	1.0068	1295	1.0242	1727	1.0242	2543	1.0241	863	7.2265	671	1.0318

Tabela 7.33 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/\alpha=0.001$.

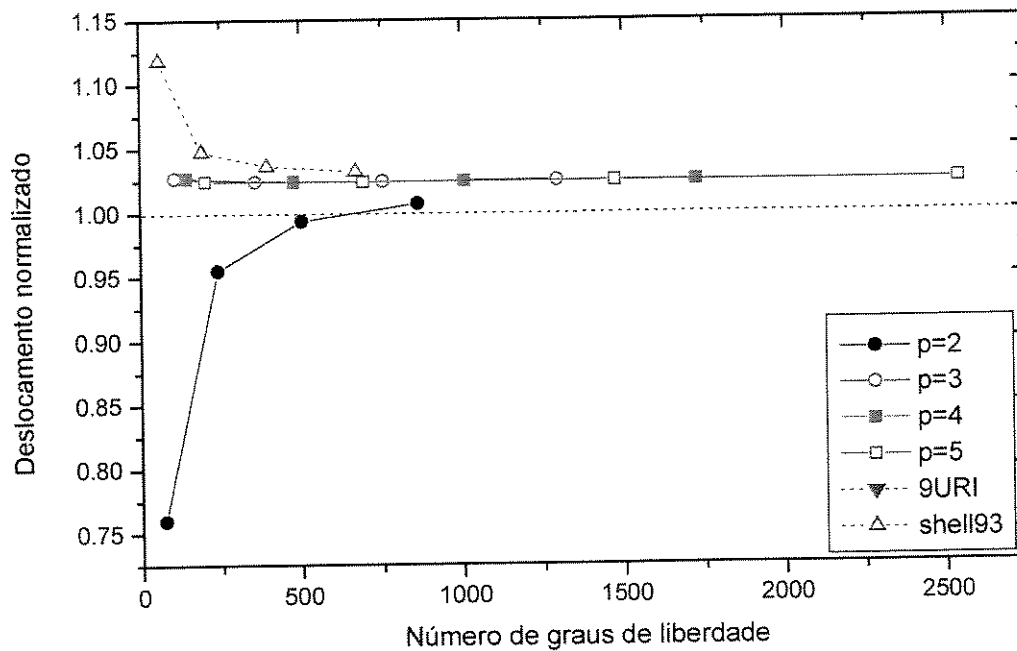


Figura 7.40 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/\alpha=0.001$.

Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
2x2	71	0.7598	107	1.0269	143	1.0269	203	1.0240	71	1.0710	59	1.1185
4x4	239	0.9548	359	1.0238	479	1.0238	695	1.0235	239	16.078	191	1.0472
6x6	503	0.9932	755	1.0240	1007	1.0240	1475	1.0240	503	0.5020	395	1.0358
8x8	863	1.0068	1295	1.0241	1727	1.0241	2543	1.0243	863	0.7696	671	1.0317

Tabela 7.34 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/\alpha=0.0001$.

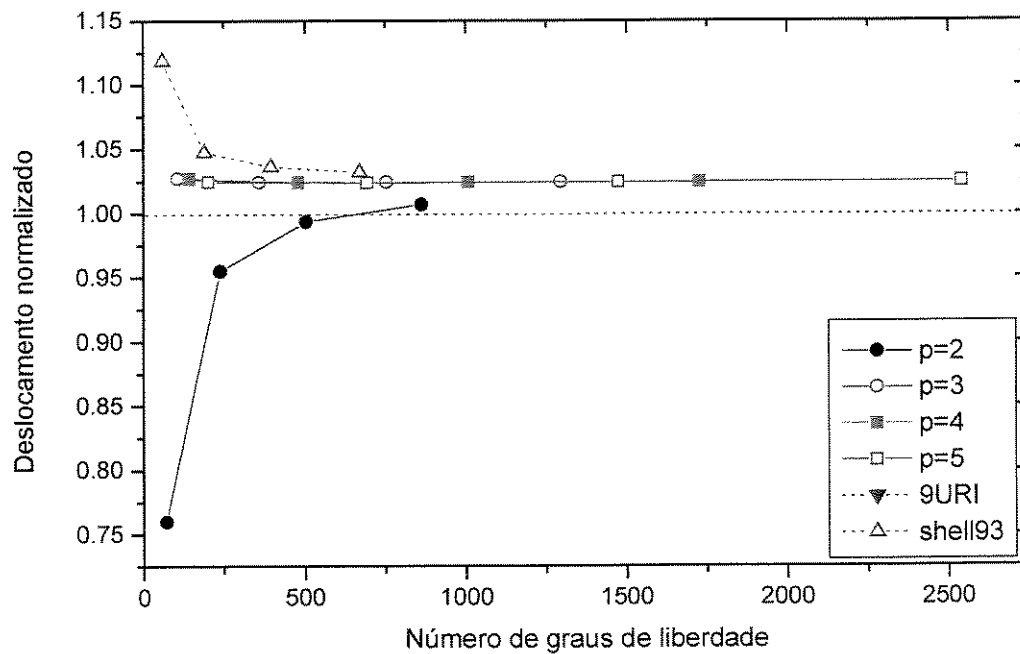


Figura 7.41 Deslocamento w_A normalizado da placa quadrada apoiada nos quatro cantos submetida a carga distribuída uniforme com $t/\alpha=0.0001$.

7.2.10 Viga reta engastada sujeita à carregamentos variados

A viga reta é um teste simples freqüentemente utilizado para avaliar a sensibilidade do elemento quanto à distorção da malha [MacNeal *et al.*, 1985]. As características da viga são: comprimento=6.0, largura=0.2, espessura $t=0.1$, $E=1.0 \times 10^7$, $\nu=0.30$ e carregamento unitário. Foram utilizadas três malhas 6x1 distintas: malha regular, malha trapezoidal e malha paralelogramo (Figura 7.42); e impostas quatro condições de carregamento: flexão pura, flexão fora do plano, flexão no plano e torção (Figura 7.43).

Apresenta-se o deslocamento normalizado (w/w_{exato}) na direção do carregamento dos nós carregados. Os resultados analíticos são os seguintes [MacNeal *et al.*, 1985]:

- $w_{exato} = 3.0 \times 10^{-5}$, para a viga submetida a flexão pura;
- $w_{exato} = 0.4321$, para a viga submetida a flexão fora do plano;
- $w_{exato} = 0.1081$, para a viga submetida a flexão no plano;
- $w_{exato} = 0.03208$, para a viga submetida a torção;

A Tabela 7.35, e as Figuras 7.44, 7.45 e 7.46, apresentam o deslocamento normalizado para cada malha de discretização e condição de carregamento, e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

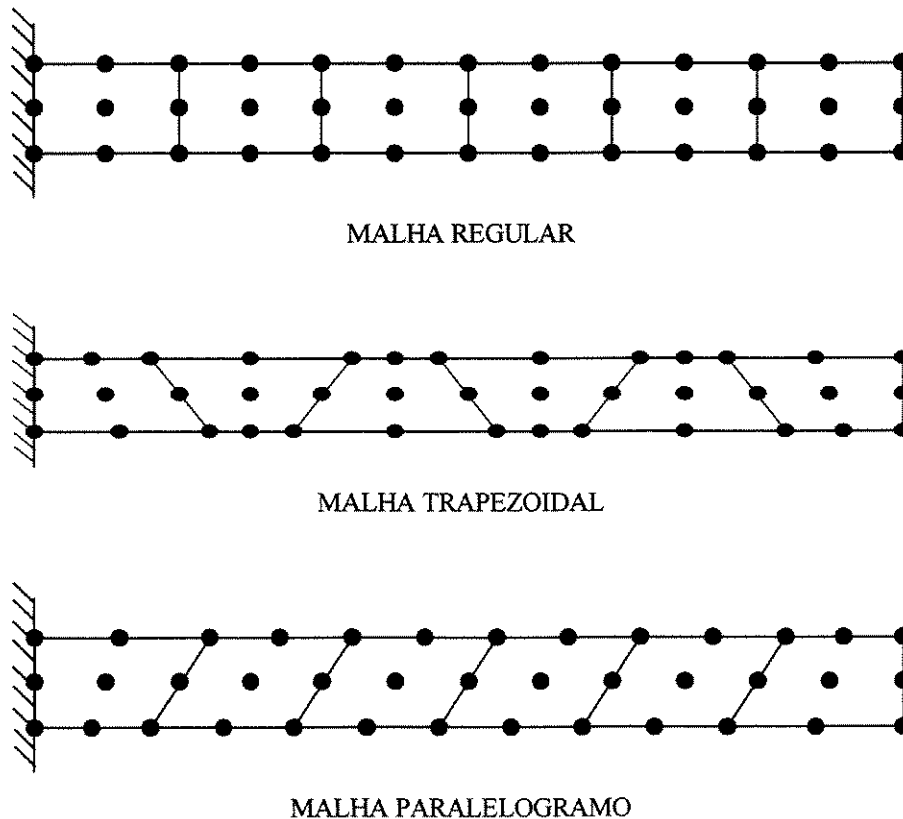


Figura 7.42 Malhas de discretização utilizadas na viga reta engastada.

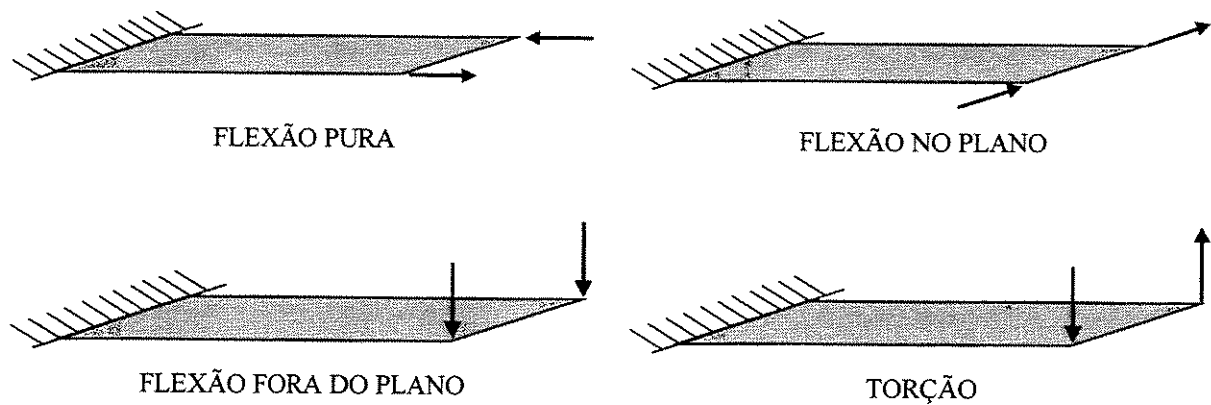


Figura 7.43 Carregamentos atuantes na viga reta engastada em uma extremidade.

MALHA	CARREGAMENTO	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
Regular	Flexão pura	0.9981	1.0000	1.0001	1.0035	1.0000	0.9957
	Flexão fora do plano	0.9883	0.9941	0.9941	0.9941	1.0001	0.9922
	Flexão no plano	0.9901	0.9968	0.9970	1.0027	0.9996	0.9869
	Torção	0.8756	0.8780	0.8801	0.8820	0.8869	0.9526
Trapezoidal	Flexão pura	0.9982	0.9996	1.0003	1.0032	1.0000	0.9369
	Flexão fora do plano	0.9206	0.9881	0.9882	0.9977	1.0010	0.9241
	Flexão no plano	0.9234	0.9962	1.0005	1.0177	1.0026	0.8723
	Torção	0.8421	0.8645	0.8913	0.8993	1.0130	1.2895
Paralelogramo	Flexão pura	0.9979	1.0008	1.0021	1.0043	1.0000	0.9894
	Flexão fora do plano	0.9360	0.9937	0.9937	0.9942	0.9992	0.9543
	Flexão no plano	0.9397	0.9981	1.0006	1.0033	1.0087	0.9833
	Torção	0.8477	0.8687	0.8899	0.8984	0.7910	0.8127
NGL (nº de graus de liberdade)		216	273	330	423	216	180

Tabela 7.35 Deslocamento normalizado da viga reta com malhas e carregamentos variados.

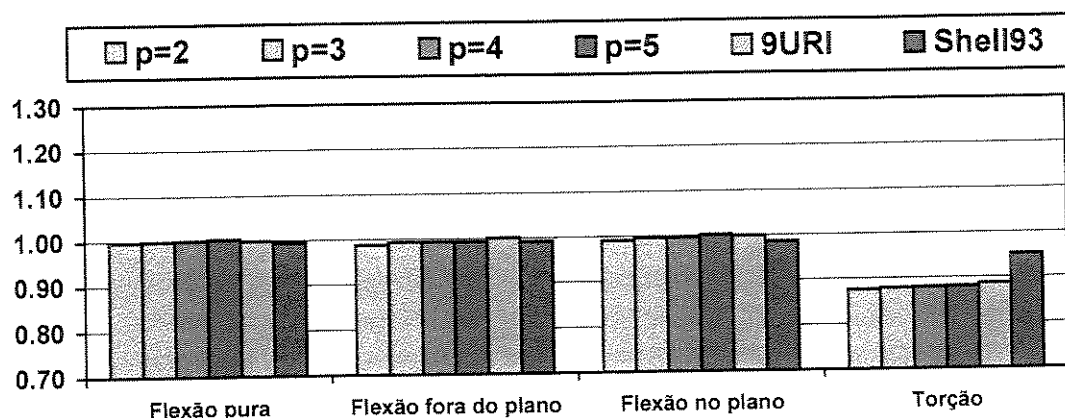


Figura 7.44 Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização regular e carregamentos variados.

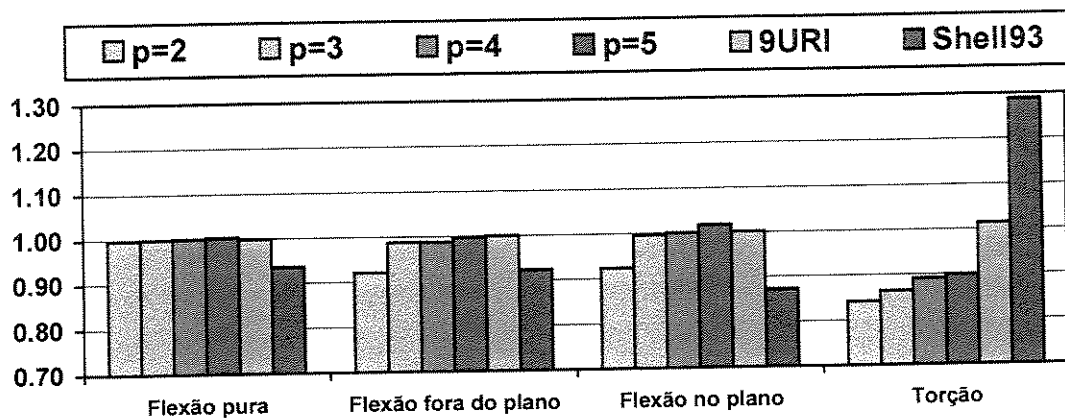


Figura 7.45 Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização trapezoidal e carregamentos variados.

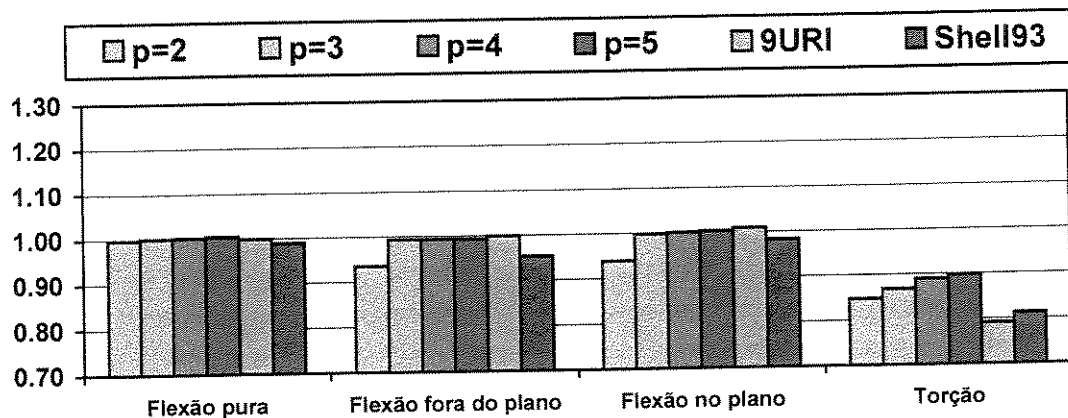


Figura 7.46 Deslocamento normalizado da viga reta engastada com malha de discretização trapezoidal e carregamentos variados.

7.3 Análise dinâmica

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos onde a confiabilidade e a eficiência, considerando a análise dinâmica (problema de autovalor generalizado: obtenção das frequências naturais e dos modos de vibrar do sistema), do elemento finito hierárquico são analisadas. Os resultados apresentados foram normalizados dividindo-se as frequências naturais calculadas pelas frequências naturais "exatas" (obtidas na literatura).

7.3.1 Casca cilíndrica engastada em uma extremidade

Em função da geometria a casca cilíndrica engastada em uma extremidade (Figura 7.47) foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos.

Apresentam-se as doze primeiras frequências naturais normalizadas (ω/ω_{exato}). Os resultados experimentais ω_{exato} [Olson *et al.*, 1971] das doze primeiras frequências naturais são, respectivamente, 85.6, 134.5, 259, 351, 395, 531, 743, 751, 790, 909, 997 e 1216 Hz.

As Tabelas 7.36 e 7.37, e as Figuras 7.48, 7.49, 7.50, 7.51, 7.52, 7.53, 7.54, 7.55, 7.56, 7.57, 7.58 e 7.59, apresentam as doze primeiras frequências naturais normalizadas [Olson *et al.*, 1971] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

As características da casca cilíndrica modelada são as seguintes: $S = L = 0.3048$ m, $R = 0.6096$ m, $t = 3.048 \times 10^{-3}$ m, $E = 2.068 \times 10^{11}$ N/m², $\rho = 7.80 \times 10^3$ Kg/m³ e $\nu = 0.3$.

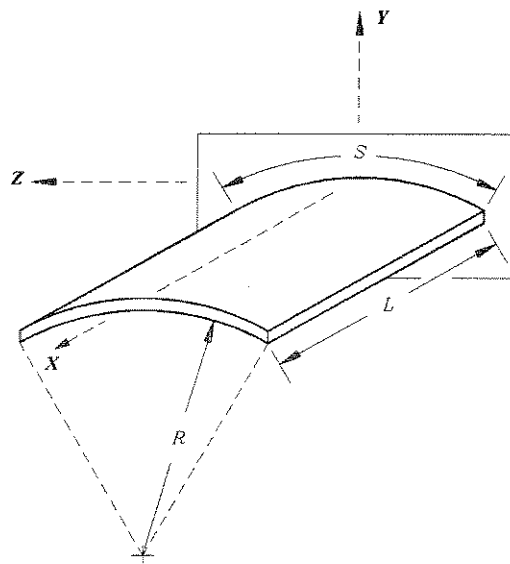


Figura 7.47 Casca cilíndrica engastada em uma extremidade.

As Figuras 7.60 e 7.61 ilustram os doze primeiros modos de vibrar da casca cilíndrica engastada em seus lados, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e malha de discretização de 7x7 elementos.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
1º MODO	2x2	120	1.2775	156	1.0470	192	1.0353	252	1.0191	120	0.9639	96	0.9834
	3x3	252	1.0855	324	1.0055	396	1.0031	522	0.9858	252	0.9993	198	0.9716
	4x4	432	1.0419	552	1.0027	672	0.9981	888	0.9871	432	1.0056	336	0.9821
	5x5	660	1.0269	840	1.0042	1020	0.9984	1350	0.9914	660	1.0072	510	0.9892
	6x6	936	1.0201	1188	1.0058	1440	0.9996	1908	0.9949	936	1.0076	720	0.9936
	7x7	1260	1.0166	1596	1.0068	1932	1.0008	2562	0.9975	1260	1.0077	966	0.9964
2º MODO	2x2	120	1.2299	156	1.0144	192	1.0071	252	0.9412	120	1.0426	96	0.9730
	3x3	252	1.1490	324	1.0197	396	1.0044	522	0.9824	252	1.0286	198	1.0028
	4x4	432	1.0972	552	1.0249	672	1.0096	888	0.9976	432	1.0296	336	1.0123
	5x5	660	1.0677	840	1.0277	1020	1.0135	1350	1.0062	660	1.0305	510	1.0185
	6x6	936	1.0528	1188	1.0293	1440	1.0165	1908	1.0116	936	1.0309	720	1.0225
	7x7	1260	1.0450	1596	1.0302	1932	1.0186	2562	1.0151	1260	1.0311	966	1.0250
3º MODO	2x2	120	2.3254	156	0.9903	192	0.9891	252	0.9242	120	0.9570	96	0.7696
	3x3	252	1.4399	324	0.9699	396	0.9637	522	0.9573	252	0.9610	198	0.8754
	4x4	432	1.1316	552	0.9631	672	0.9564	888	0.9536	432	0.9584	336	0.9084
	5x5	660	1.0361	840	0.9605	1020	0.9542	1350	0.9526	660	0.9579	510	0.9243
	6x6	936	0.9994	1188	0.9594	1440	0.9537	1908	0.9527	936	0.9578	720	0.9335
	7x7	1260	0.9828	1596	0.9590	1932	0.9538	2562	0.9531	1260	0.9578	966	0.9393
4º MODO	2x2	120	2.0902	156	1.1937	192	1.1701	252	1.1270	120	0.9666	96	0.8660
	3x3	252	1.1607	324	1.0241	396	1.0175	522	1.0030	252	0.9830	198	0.9130
	4x4	432	1.0630	552	0.9899	672	0.9871	888	0.9803	432	0.9785	336	0.9316
	5x5	660	1.0261	840	0.9811	1020	0.9790	1350	0.9741	660	0.9775	510	0.9438
	6x6	936	1.0084	1188	0.9785	1440	0.9765	1908	0.9730	936	0.9770	720	0.9525
	7x7	1260	0.9987	1596	0.9777	1932	0.9757	2562	0.9731	1260	0.9767	966	0.9584
5º MODO	2x2	120	1.9309	156	1.2481	192	1.2330	252	1.1319	120	0.9926	96	0.8827
	3x3	252	1.2452	324	1.0370	396	1.0312	522	1.0165	252	0.9815	198	0.9249
	4x4	432	1.0921	552	0.9983	672	0.9960	888	0.9894	432	0.9761	336	0.9279
	5x5	660	1.0397	840	0.9870	1020	0.9854	1350	0.9813	660	0.9766	510	0.9388
	6x6	936	1.0167	1188	0.9829	1440	0.9814	1908	0.9785	936	0.9772	720	0.9487
	7x7	1260	1.0046	1596	0.9813	1932	0.9799	2562	0.9777	1260	0.9776	966	0.9558
6º MODO	2x2	120	2.1838	156	1.1676	192	1.1656	252	1.1393	120	1.4326	96	0.8571
	3x3	252	1.5775	324	1.0204	396	1.0198	522	1.0086	252	1.0981	198	0.8460
	4x4	432	1.4023	552	1.0109	672	1.0104	888	1.0086	432	1.0330	336	0.9041
	5x5	660	1.1889	840	1.0048	1020	1.0043	1350	1.0036	660	1.0136	510	0.9338
	6x6	936	1.1045	1188	1.0021	1440	1.0016	1908	1.0012	936	1.0062	720	0.9514
	7x7	1260	1.0646	1596	1.0009	1932	1.0004	2562	1.0001	1260	1.0028	966	0.9628

Tabela 7.36 Freqüências naturais normalizadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
7º MODO	2x2	120	2.3972	156	1.1224	192	1.1150	252	1.0771	120	1.0849	96	0.7692
	3x3	252	1.5587	324	1.0429	396	1.0402	522	1.0300	252	1.0081	198	0.8459
	4x4	432	1.0608	552	1.0169	672	1.0138	888	1.0078	432	0.9930	336	0.9012
	5x5	660	1.0356	840	0.9970	1020	0.9954	1350	0.9918	660	0.9864	510	0.9237
	6x6	936	1.0214	1188	0.9881	1440	0.9874	1908	0.9850	936	0.9840	720	0.9365
	7x7	1260	1.0120	1596	0.9842	1932	0.9837	2562	0.9819	1260	0.9818	966	0.9459
8º MODO	2x2	120	2.5887	156	1.4650	192	1.4208	252	1.3253	120	1.3292	96	1.0268
	3x3	252	1.6149	324	1.0775	396	1.0696	522	1.0422	252	1.0382	198	0.8369
	4x4	432	1.1678	552	1.0087	672	1.0048	888	0.9982	432	0.9941	336	0.8944
	5x5	660	1.0770	840	0.9879	1020	0.9860	1350	0.9832	660	0.9794	510	0.9162
	6x6	936	1.0369	1188	0.9797	1440	0.9785	1908	0.9768	936	0.9739	720	0.9305
	7x7	1260	1.0156	1596	0.9761	1932	0.9752	2562	0.9741	1260	0.9725	966	0.9407
9º MODO	2x2	120	2.7869	156	1.4011	192	1.3576	252	1.2691	120	1.2681	96	1.0142
	3x3	252	1.5510	324	1.0854	396	1.0766	522	1.0301	252	1.0248	198	0.9371
	4x4	432	1.1387	552	0.9976	672	0.9940	888	0.9858	432	0.9909	336	0.9443
	5x5	660	1.0570	840	0.9850	1020	0.9826	1350	0.9787	660	0.9833	510	0.9530
	6x6	936	1.0237	1188	0.9818	1440	0.9796	1908	0.9769	936	0.9809	720	0.9595
	7x7	1260	1.0076	1596	0.9806	1932	0.9786	2562	0.9765	1260	0.9798	966	0.9639
10º MODO	2x2	120	5.0232	156	1.7362	192	1.7228	252	1.3137	120	1.6130	96	1.1791
	3x3	252	1.7348	324	1.0949	396	1.0917	522	1.0560	252	1.0787	198	0.9439
	4x4	432	1.2204	552	1.0257	672	1.0244	888	1.0193	432	1.0264	336	0.9425
	5x5	660	1.1046	840	1.0081	1020	1.0070	1350	1.0049	660	1.0076	510	0.9459
	6x6	936	1.0590	1188	1.0008	1440	0.9998	1908	0.9986	936	1.0001	720	0.9548
	7x7	1260	1.0365	1596	0.9975	1932	0.9965	2562	0.9958	1260	0.9965	966	0.9625
11º MODO	2x2	120	4.0988	156	1.6135	192	1.6083	252	1.4127	120	1.4947	96	1.1682
	3x3	252	1.6137	324	1.1354	396	1.1347	522	1.1305	252	1.2956	198	0.9194
	4x4	432	1.3469	552	1.0193	672	1.0190	888	1.0150	432	1.1248	336	0.8698
	5x5	660	1.2996	840	1.0159	1020	1.0157	1350	1.0148	660	1.0548	510	0.9138
	6x6	936	1.1832	1188	1.0101	1440	1.0100	1908	1.0096	936	1.0286	720	0.9377
	7x7	1260	1.1181	1596	1.0069	1932	1.0068	2562	1.0067	1260	1.0184	966	0.9530
12º MODO	2x2	120	3.4339	156	1.4487	192	1.4060	252	1.3447	120	1.4634	96	1.0515
	3x3	252	1.4633	324	1.0761	396	1.0723	522	1.0511	252	1.1357	198	0.8559
	4x4	432	1.2283	552	1.0377	672	1.0364	888	1.0268	432	1.0332	336	0.8627
	5x5	660	1.0828	840	1.0173	1020	1.0161	1350	1.0111	660	1.0197	510	0.9059
	6x6	936	1.0488	1188	1.0057	1440	1.0049	1908	1.0025	936	1.0120	720	0.9277
	7x7	1260	1.0396	1596	1.0000	1932	0.9996	2562	0.9982	1260	1.0056	966	0.9425

Tabela 7.37 Freqüências naturais normalizadas (7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª e 12ª) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade.

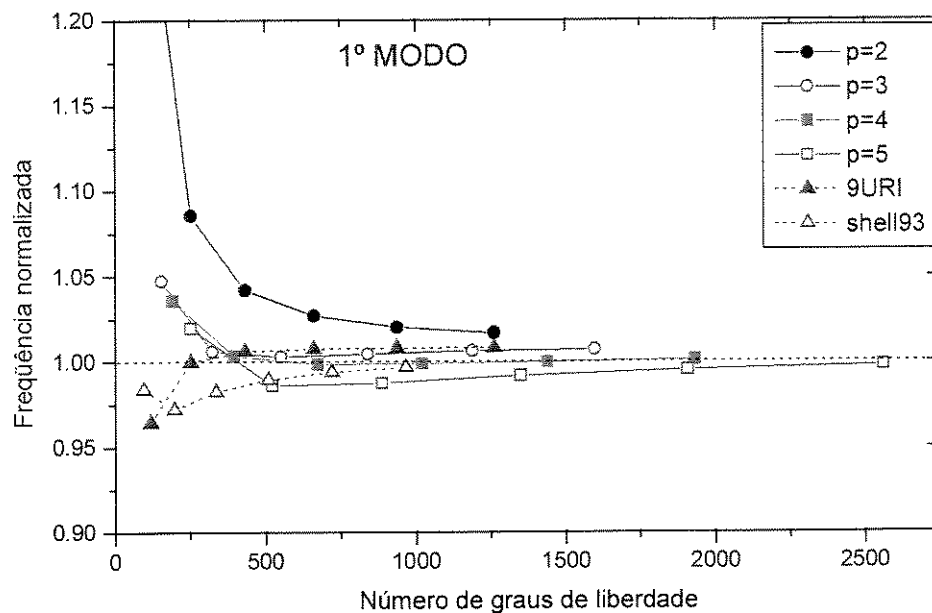


Figura 7.48 Primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

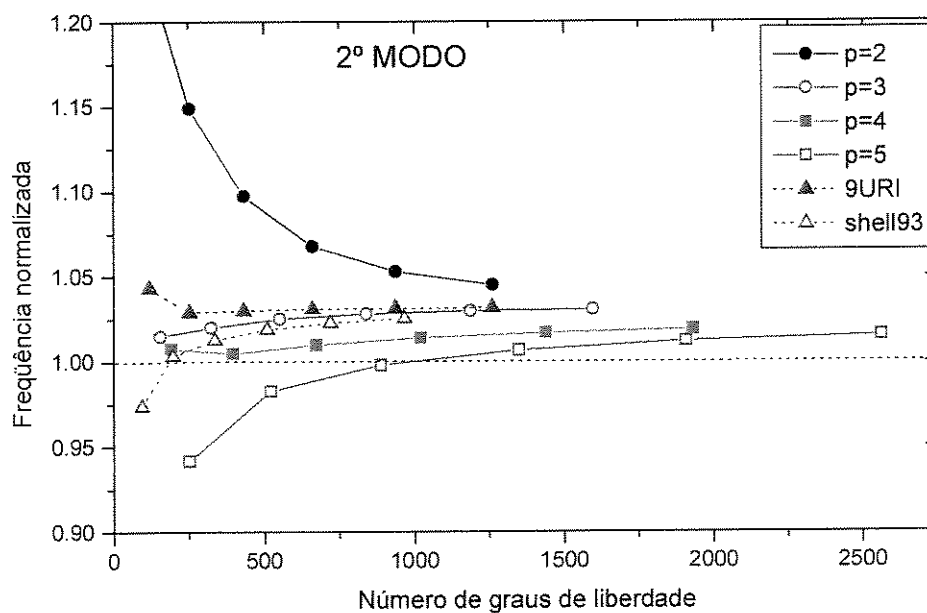


Figura 7.49 Segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

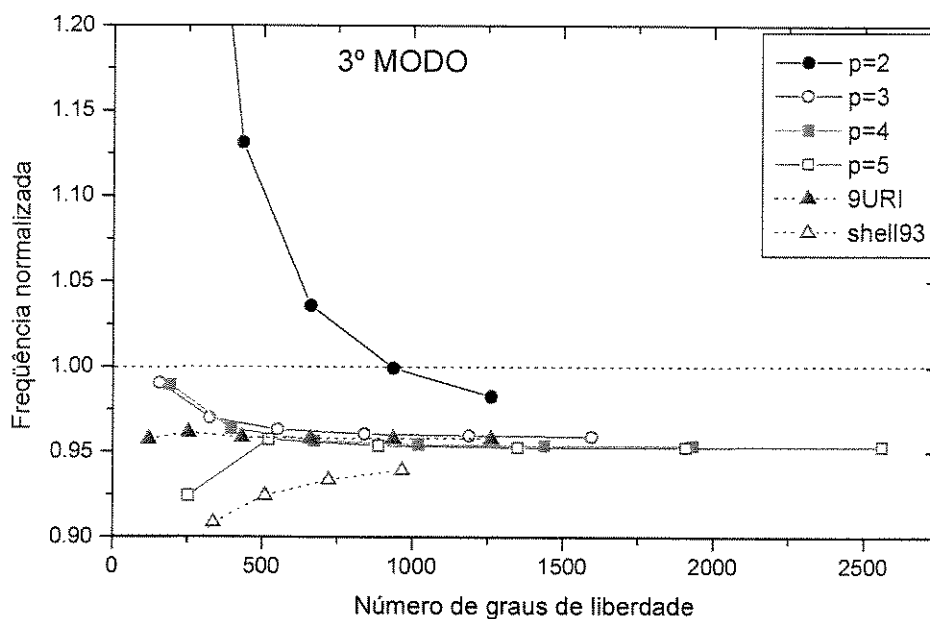


Figura 7.50 Terceira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

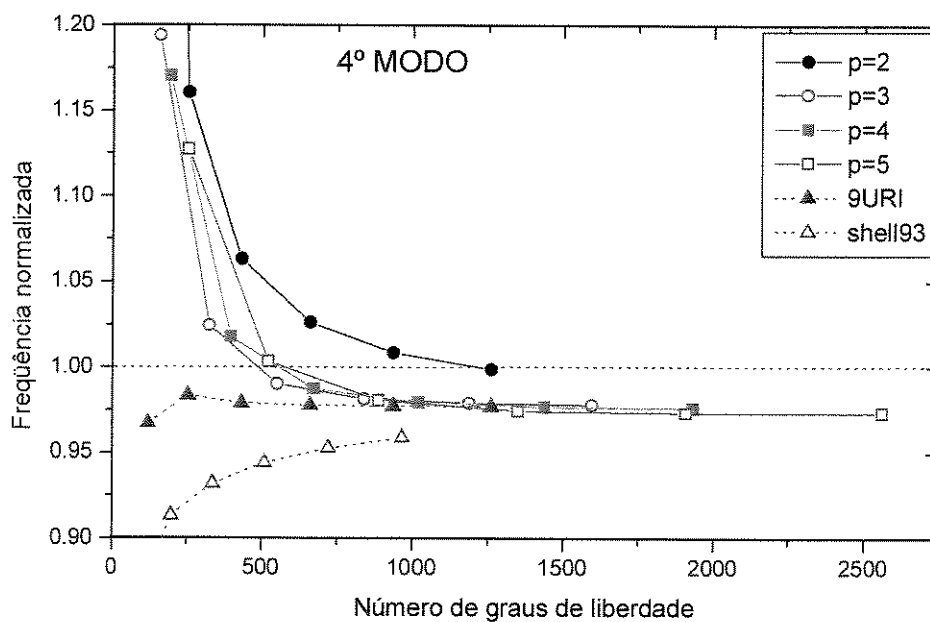


Figura 7.51 Quarta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

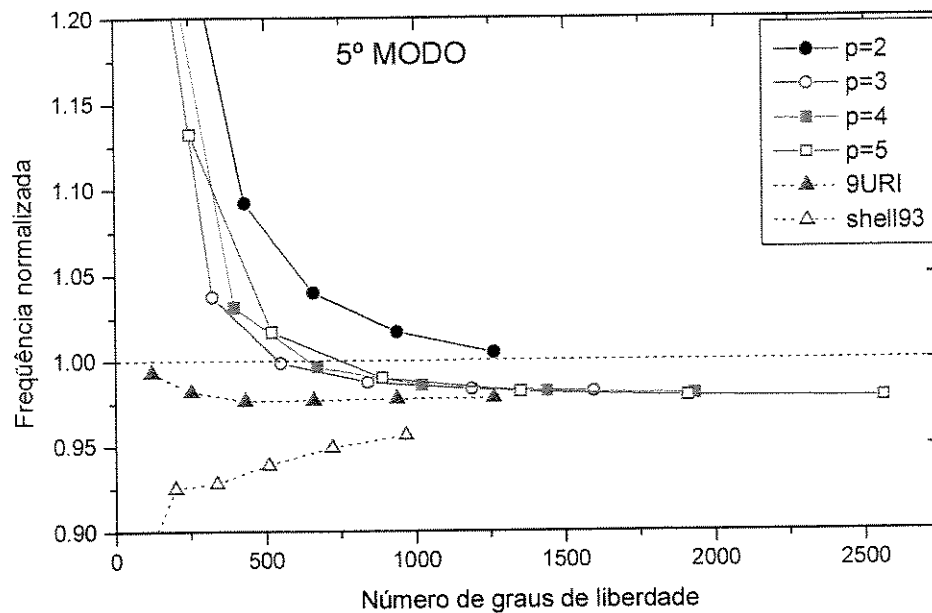


Figura 7.52 Quinta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

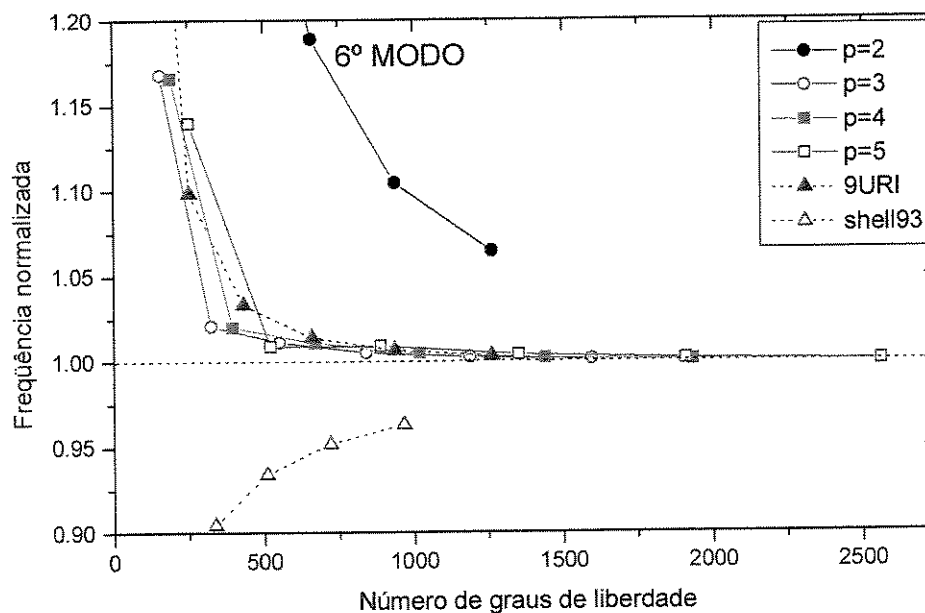


Figura 7.53 Sexta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

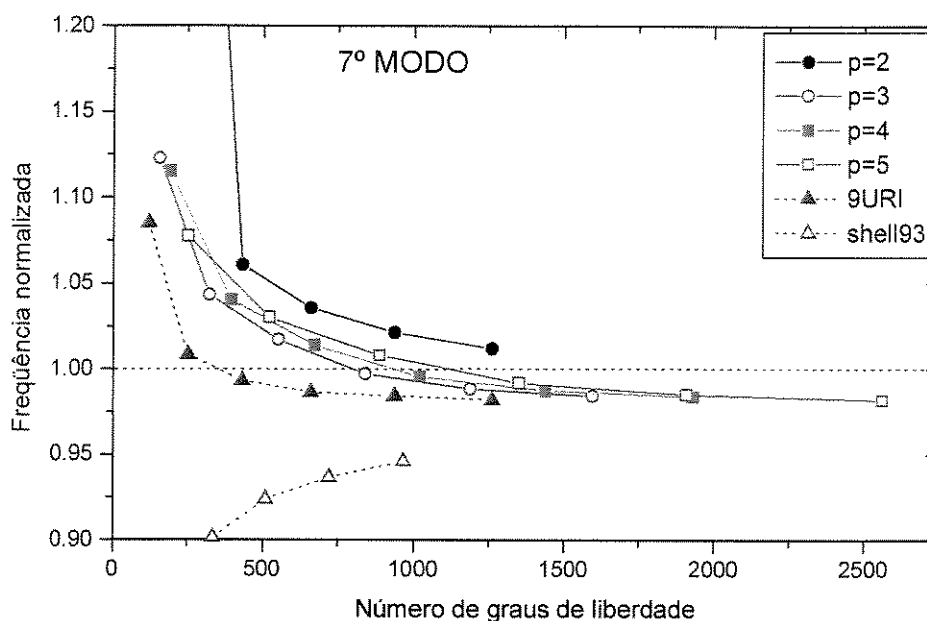


Figura 7.54 Sétima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

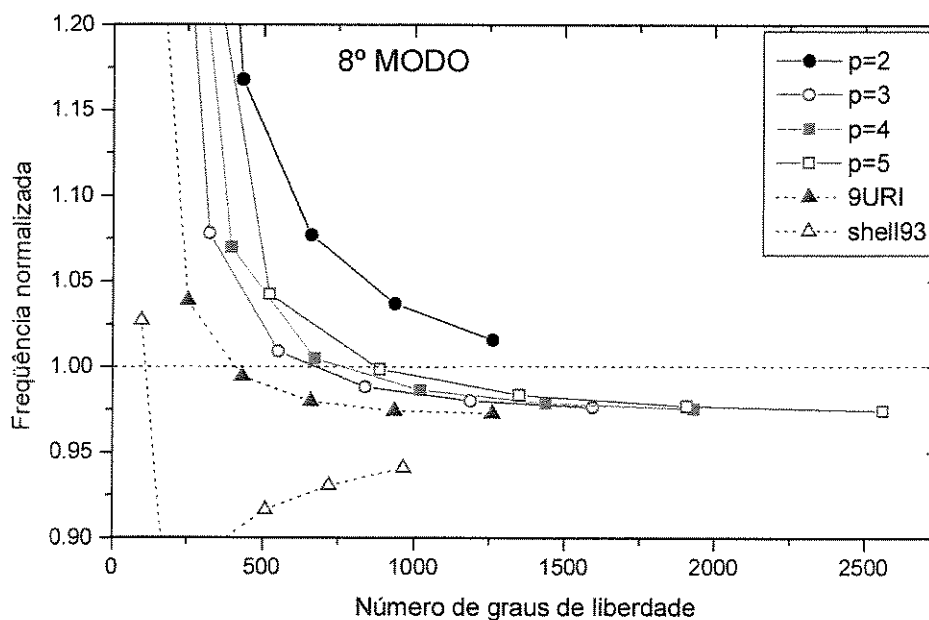


Figura 7.55 Oitava frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

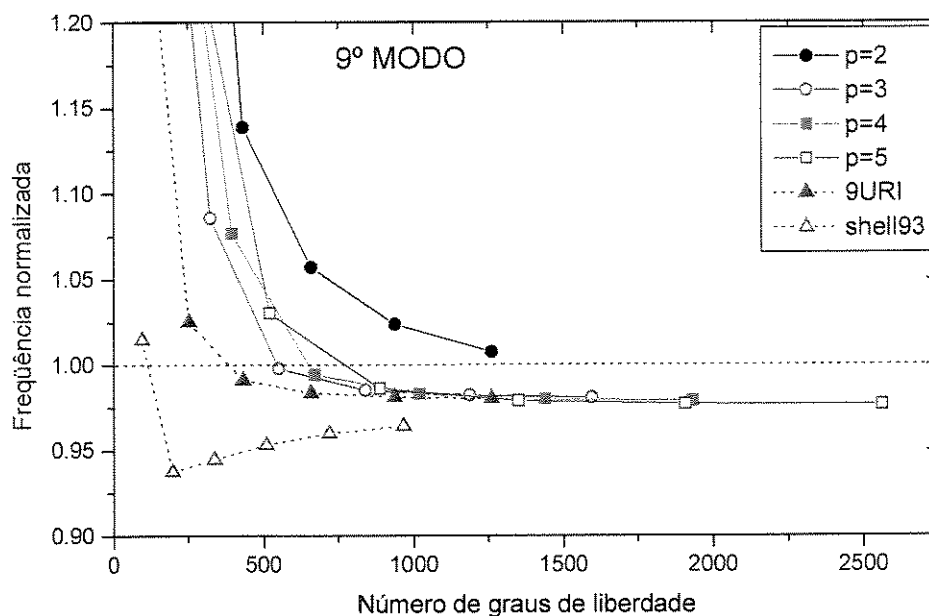


Figura 7.56 Nona frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

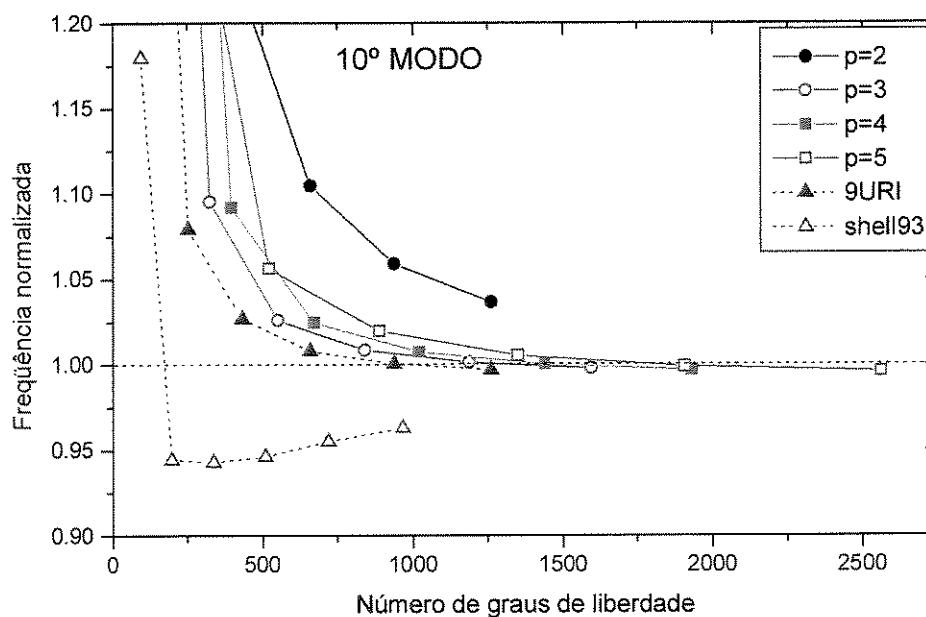


Figura 7.57 Décima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

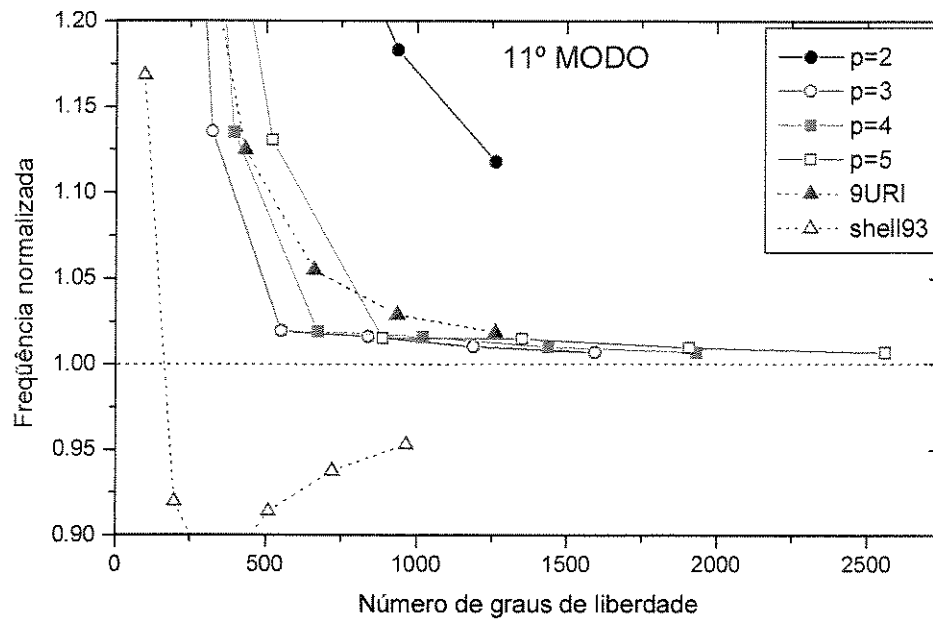


Figura 7.58 Décima primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

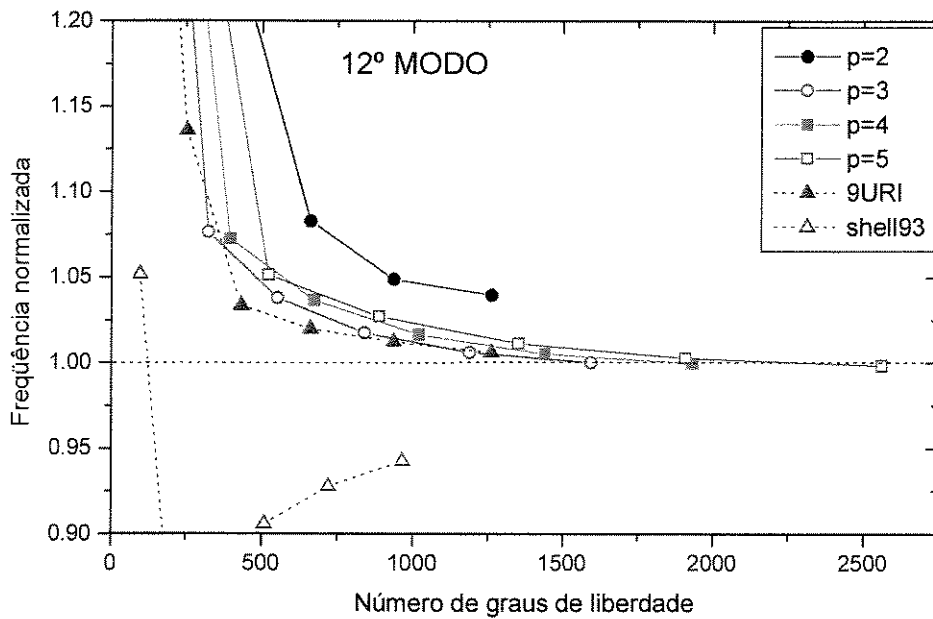


Figura 7.59 Décima segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

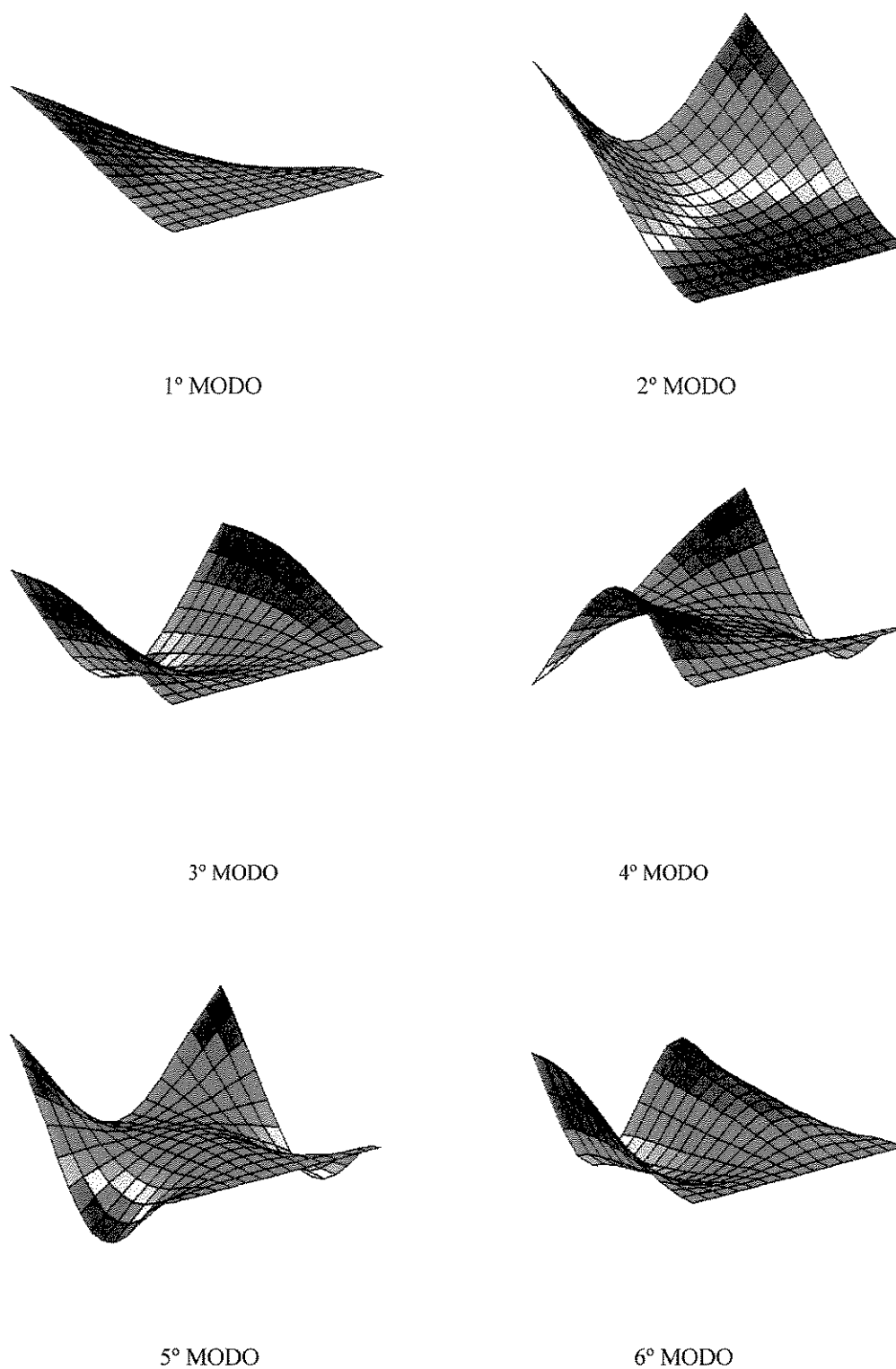
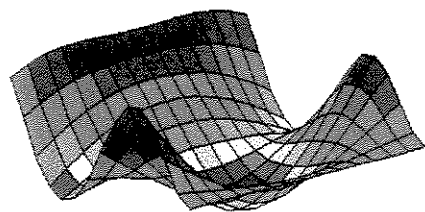
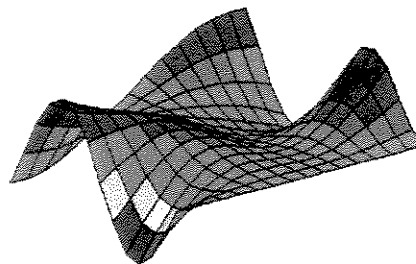


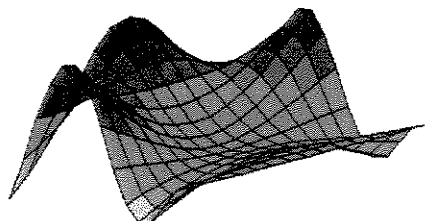
Figura 7.60 Modos de vibrar (1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malha de discretização de 7x7 elementos.



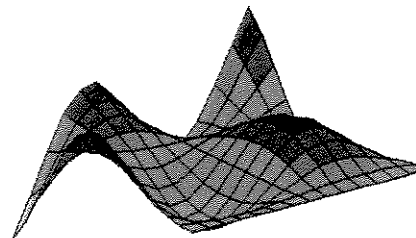
7º MODO



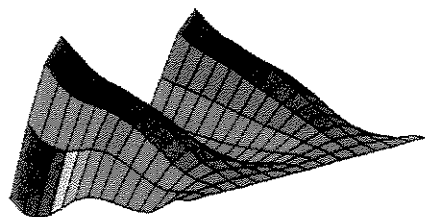
8º MODO



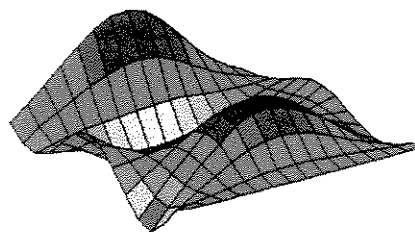
9º MODO



10º MODO



11º MODO



12º MODO

Figura 7.61 Modos de vibrar (7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º) para a casca cilíndrica engastada em uma extremidade com malha de discretização de 7x7 elementos.

7.3.2 Casca cilíndrica engastada em seus lados

Em função da geometria a casca cilíndrica engastada em seus lados foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

Apresentam-se as doze primeiras frequências naturais normalizadas (ω/ω_{exato}). Os resultados experimentais ω_{exato} [Deb Nath *et al.*, 1969] das doze primeiras frequências naturais são, respectivamente, 814, 940, 1260, 1306, 1452, 1735, 1802, 2100, 2225, 2280, 2518 e 2622 Hz.

As Tabelas 7.36 e 7.37, e as Figuras 7.62, 7.63, 7.64, 7.65, 7.66, 7.67, 7.68, 7.69, 7.70, 7.71, 7.72 e 7.73, apresentam as doze primeiras frequências naturais normalizadas [Deb Nath *et al.*, 1969] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

As características da casca cilíndrica modelada são as seguintes:

$$S = 101.6 \text{ mm}$$

$$L = 76.2 \text{ mm}$$

$$R = 762.0 \text{ mm}$$

$$t = 0.33 \text{ mm}$$

$$E = 6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2.66 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0.33$$

As Figuras 7.74 e 7.75 ilustram os doze primeiros modos de vibrar da casca cilíndrica engastada em seus lados, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5º grau ($p = 5$) e malha de discretização de 7x7 elementos.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
1º MODO	2x2	54	12.785	90	2.2486	126	2.1580	186	2.0363	54	1.3164	30	1.1732
	3x3	150	1.3421	222	1.2850	294	1.2710	420	1.2530	150	1.1300	96	1.0312
	4x4	294	1.2900	414	1.1996	534	1.1938	750	1.1828	294	1.0939	198	1.1312
	5x5	486	1.2103	666	1.1216	846	1.1166	1176	1.1128	486	1.0786	336	1.1069
	6x6	726	1.1494	978	1.0927	1230	1.0885	1698	1.0868	726	1.0727	510	1.0850
	7x7	1014	1.1208	1350	1.0799	1686	1.0762	2316	1.0753	1014	1.0700	720	1.0750
2º MODO	2x2	54	12.785	90	2.2486	126	2.1580	186	2.0363	54	1.3164	30	1.1732
	3x3	150	1.3421	222	1.2850	294	1.2710	420	1.2530	150	1.1300	96	1.0312
	4x4	294	1.2900	414	1.1996	534	1.1938	750	1.1828	294	1.0939	198	1.1312
	5x5	486	1.2103	666	1.1216	846	1.1166	1176	1.1128	486	1.0786	336	1.1069
	6x6	726	1.1494	978	1.0927	1230	1.0885	1698	1.0868	726	1.0727	510	1.0850
	7x7	1014	1.1208	1350	1.0799	1686	1.0762	2316	1.0753	1014	1.0700	720	1.0750
3º MODO	2x2	54	17.961	90	5.6018	126	5.5889	186	4.4837	54	1.3707	30	1.5238
	3x3	150	12.266	222	1.8668	294	1.8206	420	1.4358	150	1.1423	96	1.0215
	4x4	294	1.3102	414	1.1799	534	1.1770	750	1.1452	294	1.1005	198	0.9943
	5x5	486	1.2002	666	1.1125	846	1.1108	1176	1.1034	486	1.0553	336	1.0555
	6x6	726	1.1553	978	1.0705	1230	1.0663	1698	1.0603	726	1.0378	510	1.0445
	7x7	1014	1.1322	1350	1.0451	1686	1.0414	2316	1.0390	1014	1.0300	720	1.0328
4º MODO	2x2	54	20.826	90	14.831	126	14.820	186	9.0949	54	1.6862	30	2.1203
	3x3	150	14.407	222	2.3858	294	2.2633	420	2.1268	150	1.1804	96	1.0434
	4x4	294	1.4698	414	1.3466	534	1.3406	750	1.3077	294	1.0625	198	1.0472
	5x5	486	1.2781	666	1.0978	846	1.0930	1176	1.0738	486	1.0511	336	1.0480
	6x6	726	1.1658	978	1.0552	1230	1.0538	1698	1.0516	726	1.0469	510	1.0440
	7x7	1014	1.0971	1350	1.0486	1686	1.0475	2316	1.0465	1014	1.0450	720	1.0423
5º MODO	2x2	54	22.773	90	22.307	126	21.202	186	18.140	54	22.766	30	4.5270
	3x3	150	13.287	222	2.3576	294	2.3289	420	2.2812	150	1.1444	96	1.4709
	4x4	294	11.609	414	1.4007	534	1.3836	750	1.1842	294	1.0201	198	1.0256
	5x5	486	1.1827	666	1.0774	846	1.0748	1176	1.0655	486	1.0030	336	1.0432
	6x6	726	1.0856	978	1.0316	1230	1.0296	1698	1.0257	726	0.9964	510	1.0234
	7x7	1014	1.0544	1350	1.0116	1686	1.0099	2316	1.0080	1014	0.9934	720	1.0068
6º MODO	2x2	54	21.823	90	20.925	126	18.406	186	16.528	54	21.812	30	18.382
	3x3	150	14.024	222	3.7949	294	3.7610	420	2.3122	150	1.2967	96	1.5238
	4x4	294	9.7595	414	1.5567	534	1.5374	750	1.3397	294	1.0774	198	0.9988
	5x5	486	1.3349	666	1.2106	846	1.2068	1176	1.1904	486	1.0404	336	1.0001
	6x6	726	1.1945	978	1.1091	1230	1.1069	1698	1.1006	726	1.0244	510	1.0455
	7x7	1014	1.1289	1350	1.0643	1686	1.0627	2316	1.0595	1014	1.0171	720	1.0409

Tabela 7.38 Frequências naturais normalizadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª) para a casca cilíndrica engastada em seus lados.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
7º MODO	2x2	54	23.677	90	20.385	126	18.674	186	17.445	54	24.562	30	19.754
	3x3	150	13.918	222	4.9747	294	4.9522	420	3.9459	150	1.4896	96	1.6264
	4x4	294	12.156	414	1.8765	534	1.8439	750	1.6659	294	1.2446	198	1.0807
	5x5	486	1.5211	666	1.2220	846	1.2204	1176	1.1697	486	1.1045	336	1.0370
	6x6	726	1.3736	978	1.0931	1230	1.0913	1698	1.0725	726	1.0443	510	1.0405
	7x7	1014	1.2742	1350	1.0395	1686	1.0385	2316	1.0322	1014	1.0177	720	1.0163
8º MODO	2x2	54	22.622	90	19.324	126	18.572	186	16.494	54	26.435	30	17.447
	3x3	150	13.149	222	4.7401	294	4.7015	420	3.4081	150	1.3630	96	1.7331
	4x4	294	10.466	414	1.6945	534	1.6491	750	1.4445	294	1.1073	198	1.0266
	5x5	486	1.4221	666	1.0974	846	1.0920	1176	1.0224	486	1.0156	336	0.9702
	6x6	726	1.2141	978	1.0041	1230	1.0035	1698	0.9973	726	0.9964	510	0.9749
	7x7	1014	1.1125	1350	0.9895	1686	0.9891	2316	0.9871	1014	0.9879	720	0.9753
9º MODO	2x2	54	23.189	90	19.174	126	17.581	186	17.265	54	26.603	30	19.213
	3x3	150	14.090	222	4.9510	294	4.9431	420	3.8410	150	1.6090	96	1.6390
	4x4	294	10.112	414	1.9214	534	1.8479	750	1.5000	294	1.0869	198	1.1794
	5x5	486	1.6310	666	1.1832	846	1.1778	1176	1.1272	486	1.0343	336	1.0214
	6x6	726	1.2035	978	1.0757	1230	1.0741	1698	1.0560	726	1.0146	510	1.0244
	7x7	1014	1.1337	1350	1.0343	1686	1.0335	2316	1.0268	1014	1.0058	720	1.0141
10º MODO	2x2	54	22.820	90	18.899	126	19.105	186	17.992	54	27.061	30	20.258
	3x3	150	14.473	222	6.0716	294	6.0539	420	4.0038	150	1.8386	96	1.7138
	4x4	294	9.8805	414	1.9265	534	1.8697	750	1.7532	294	1.2372	198	1.1512
	5x5	486	9.8498	666	1.4393	846	1.4294	1176	1.3849	486	1.0927	336	1.0005
	6x6	726	1.3519	978	1.1902	1230	1.1867	1698	1.1592	726	1.0470	510	1.0649
	7x7	1014	1.2321	1350	1.1027	1686	1.1008	2316	1.0899	1014	1.0266	720	1.0635
11º MODO	2x2	54	22.009	90	19.357	126	18.226	186	16.967	54	24.701	30	19.314
	3x3	150	15.829	222	6.6467	294	6.5888	420	5.1037	150	1.8274	96	1.7889
	4x4	294	11.166	414	1.7766	534	1.7362	750	1.5961	294	1.1295	198	1.4300
	5x5	486	8.9710	666	1.3829	846	1.3770	1176	1.2968	486	1.0614	336	1.0672
	6x6	726	1.2582	978	1.1471	1230	1.1442	1698	1.1071	726	1.0378	510	0.9795
	7x7	1014	1.1727	1350	1.0807	1686	1.0797	2316	1.0688	1014	1.0270	720	1.0187
12º MODO	2x2	54	23.141	90	19.589	126	19.106	186	16.473	54	26.101	30	18.990
	3x3	150	17.904	222	7.4055	294	7.3379	420	5.5315	150	2.1516	96	2.4725
	4x4	294	11.155	414	1.9783	534	1.9374	750	1.8882	294	1.4442	198	1.4228
	5x5	486	8.6850	666	1.3871	846	1.3804	1176	1.2485	486	1.2534	336	1.1182
	6x6	726	1.5761	978	1.1142	1230	1.1120	1698	1.0899	726	1.1032	510	1.0413
	7x7	1014	1.3811	1350	1.0475	1686	1.0462	2316	1.0381	1014	1.0428	720	1.0299

Tabela 7.39 Frequências naturais normalizadas (7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª e 12ª) para a casca cilíndrica engastada em seus lados.

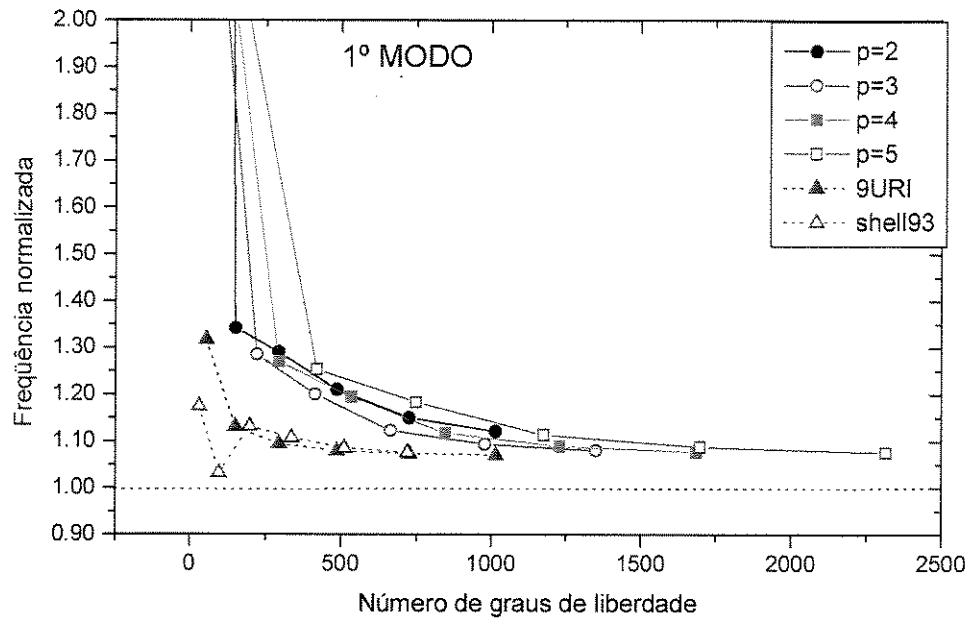


Figura 7.62 Primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

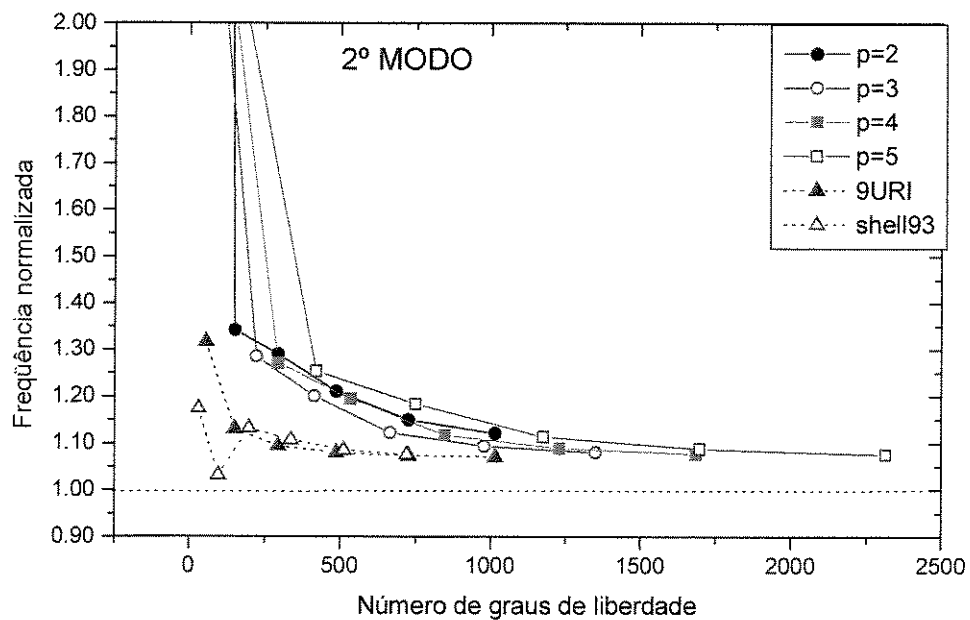


Figura 7.63 Segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

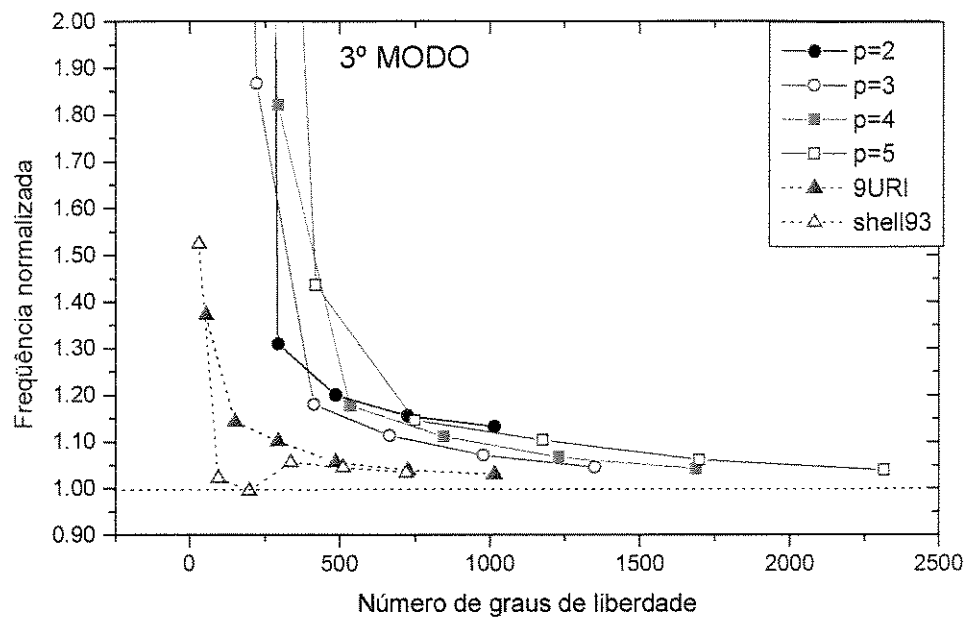


Figura 7.64 Terceira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

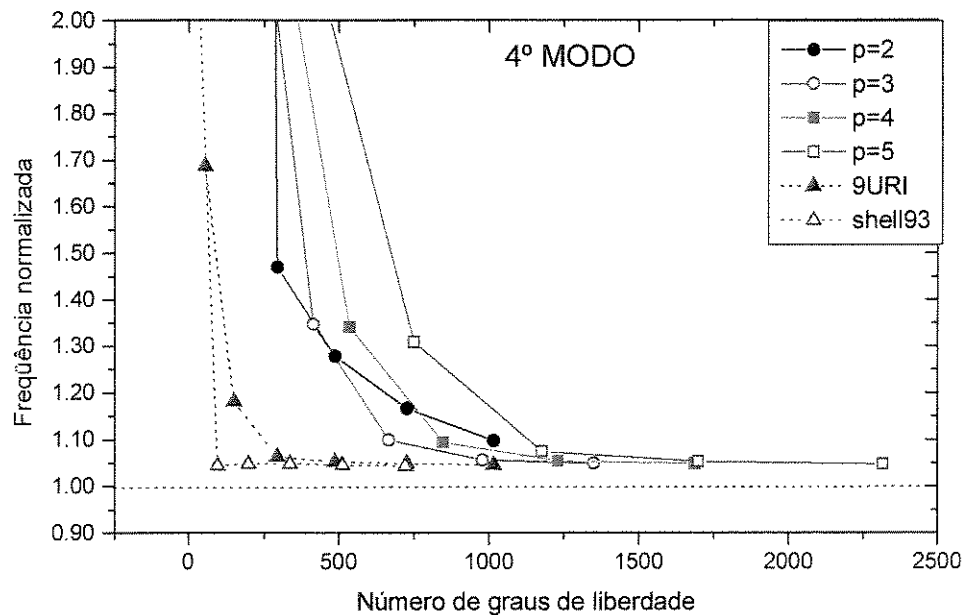


Figura 7.65 Quarta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

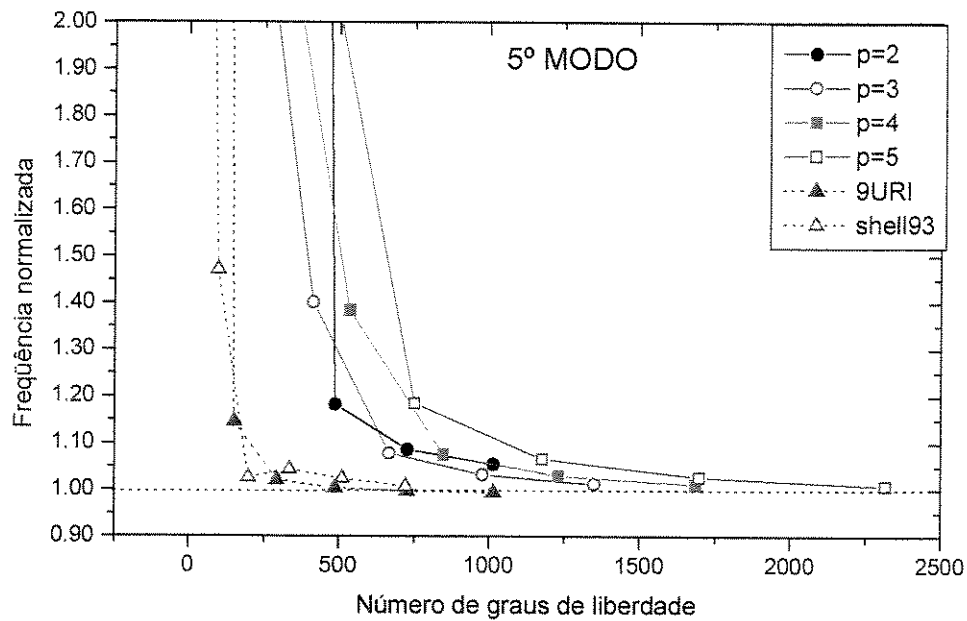


Figura 7.66 Quinta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

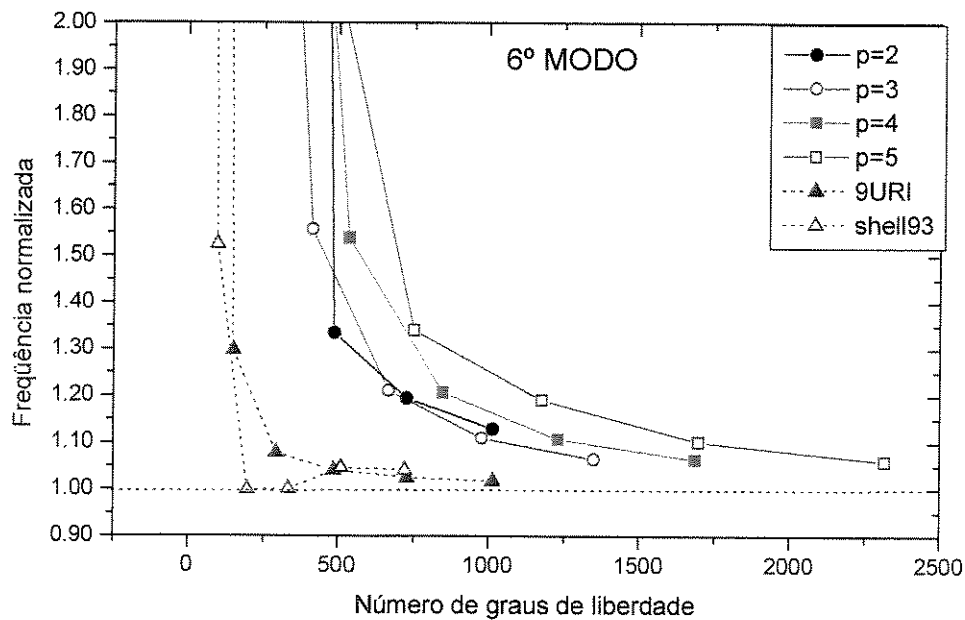


Figura 7.67 Sexta frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

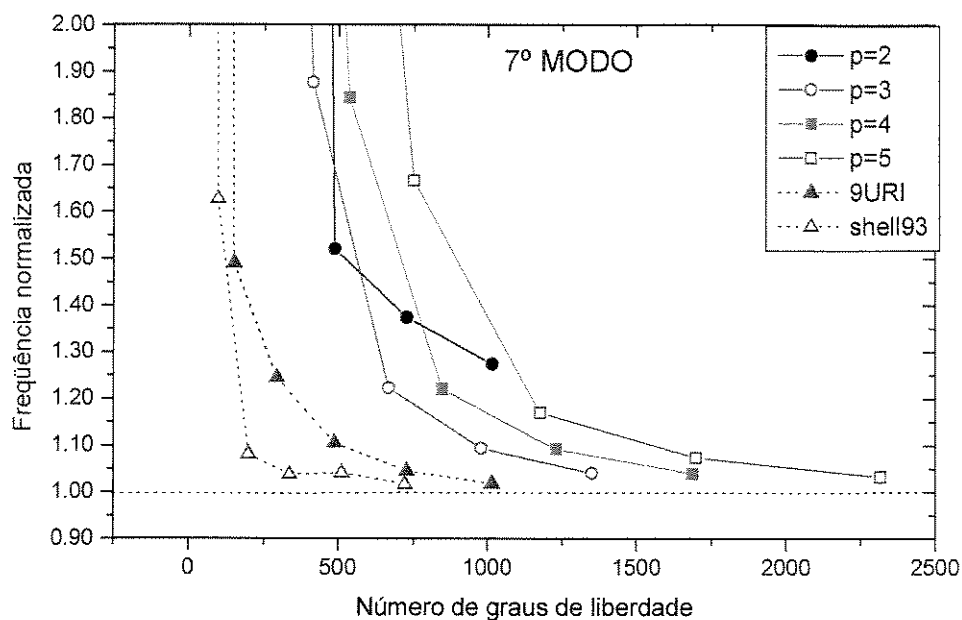


Figura 7.68 Sétima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

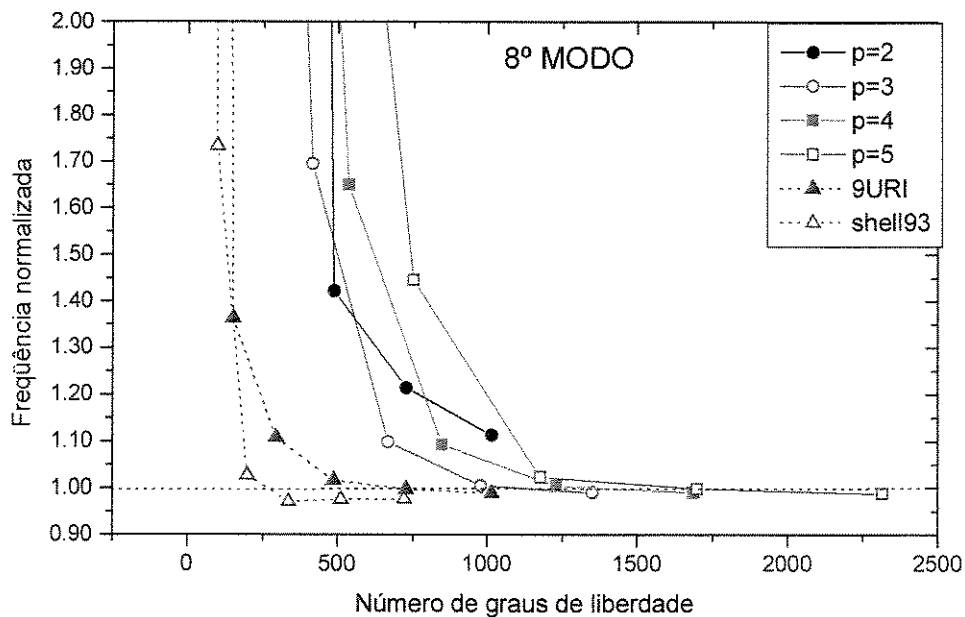


Figura 7.69 Oitava frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

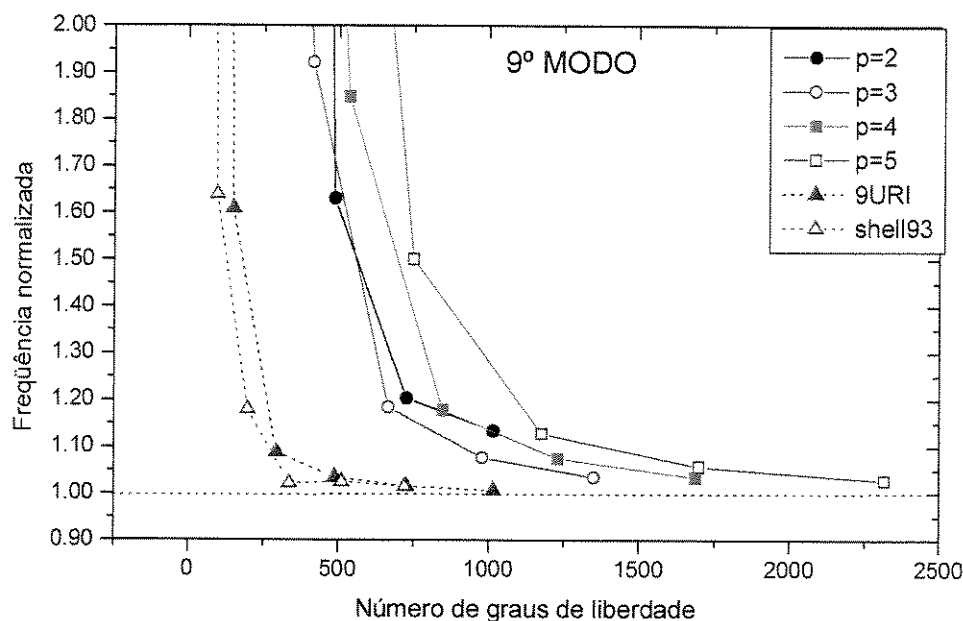


Figura 7.70 Nona frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

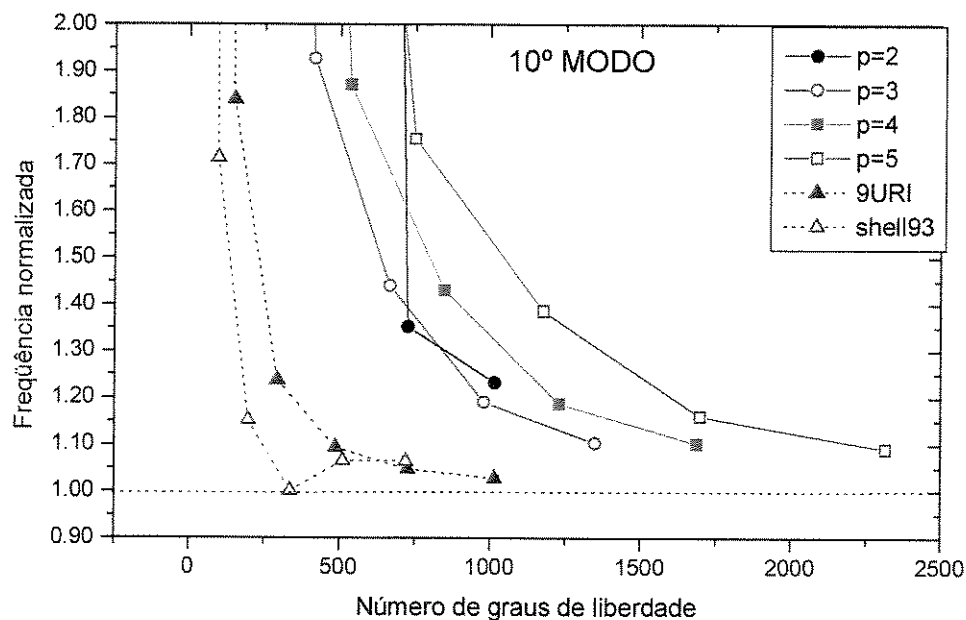


Figura 7.71 Décima frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

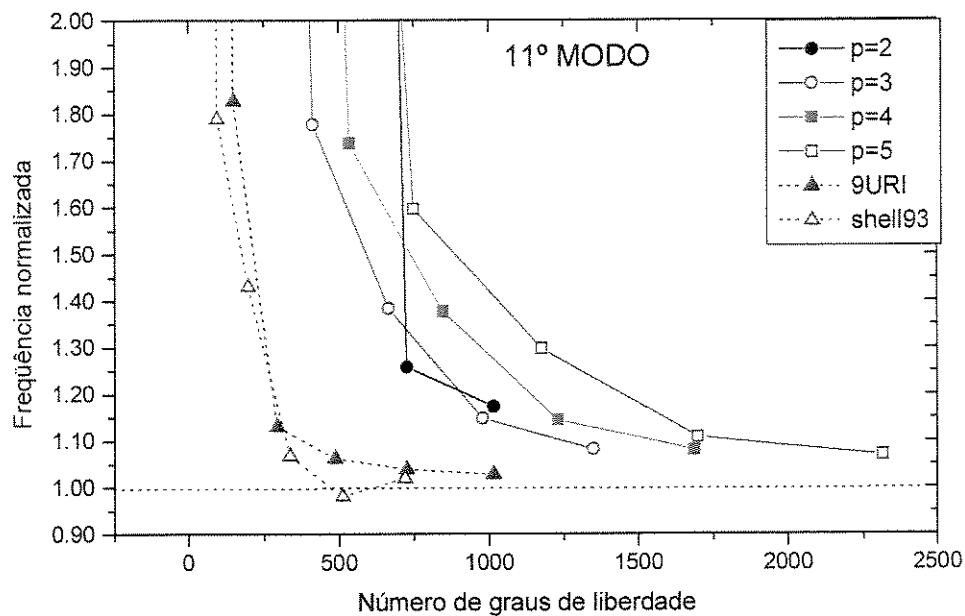


Figura 7.72 Décima primeira frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

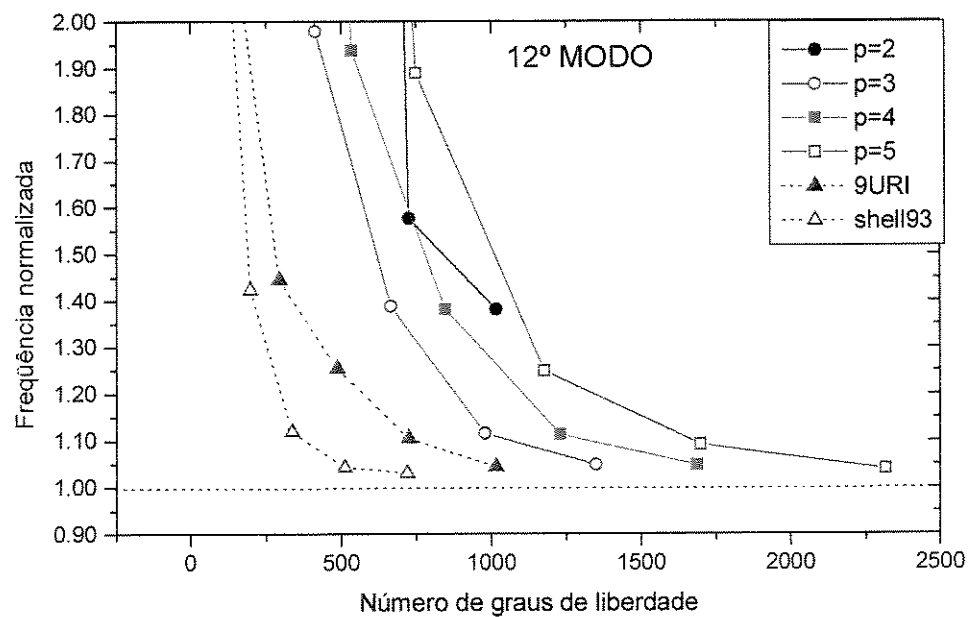
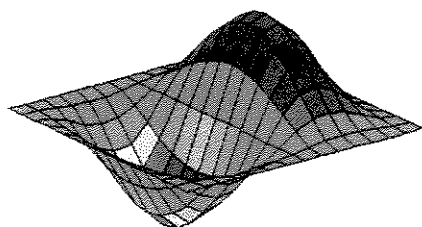
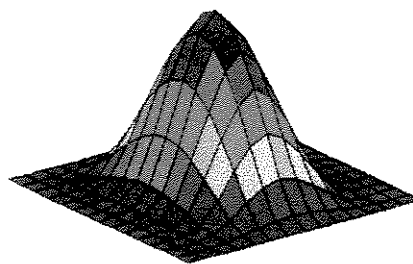


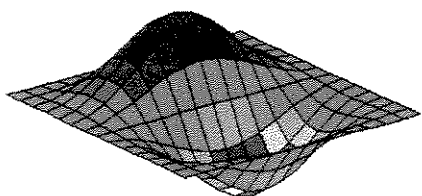
Figura 7.73 Décima segunda frequência natural normalizada para a casca cilíndrica engastada com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.



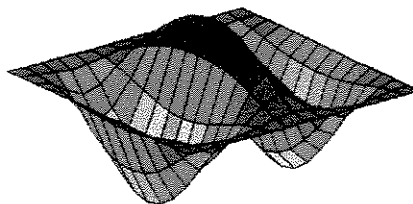
1° MODO



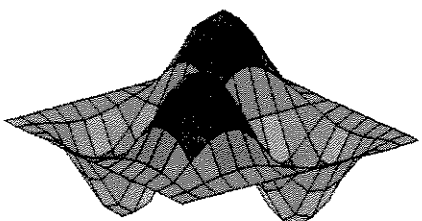
2° MODO



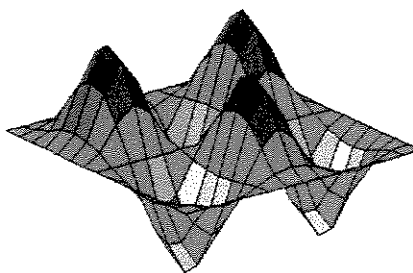
3° MODO



4° MODO

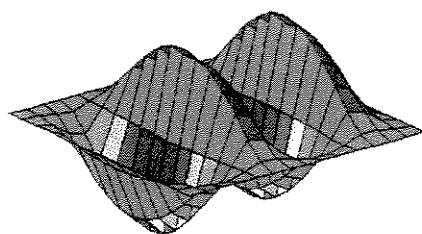


5° MODO

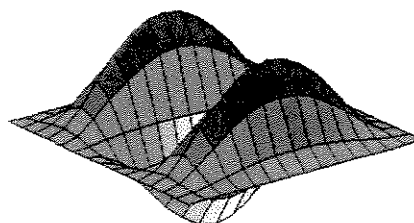


6° MODO

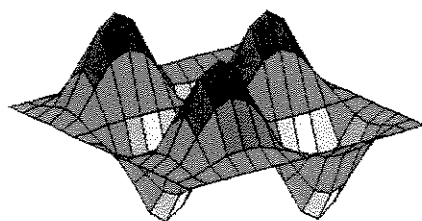
Figura 7.74 Modos de vibrar (1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°) para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malha de discretização de 7x7 elementos.



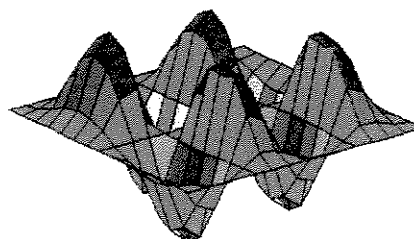
7° MODO



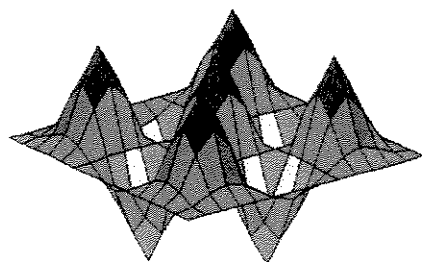
8° MODO



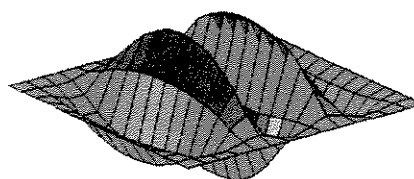
9° MODO



10° MODO



11° MODO



12° MODO

Figura 7.75 Modos de vibrar (7°, 8°, 9°, 10°, 11° e 12°) para a casca cilíndrica engastada em seus lados com malha de discretização de 7x7 elementos.

7.3.3 Casca esférica engastada em uma extremidade

Em função da geometria a casca esférica engastada em uma extremidade (Figura 7.76) foi modelada com seis malhas de discretização de 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 elementos.

Apresentam-se as cinco primeiras frequências naturais normalizadas (ω/ω_{exato}). Os resultados experimentais ω_{exato} [Leissa *et al.*, 1983] das cinco primeiras frequências naturais são, respectivamente, 47.4, 51.32, 159.92, 178.4 e 258.37 Hz.

A Tabela 7.40, e as Figuras 7.77, 7.78, 7.79, 7.80 e 7.81, apresentam as cinco primeiras frequências naturais normalizadas [Leissa *et al.*, 1983] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93). As características da casca modelada são as seguintes: $L = 18.0$, $R = 36.0$, $t = 0.18$, $E = 1.0 \times 10^7$, $\rho = 0.26 \times 10^{-3}$ e $\nu = 0.3$.

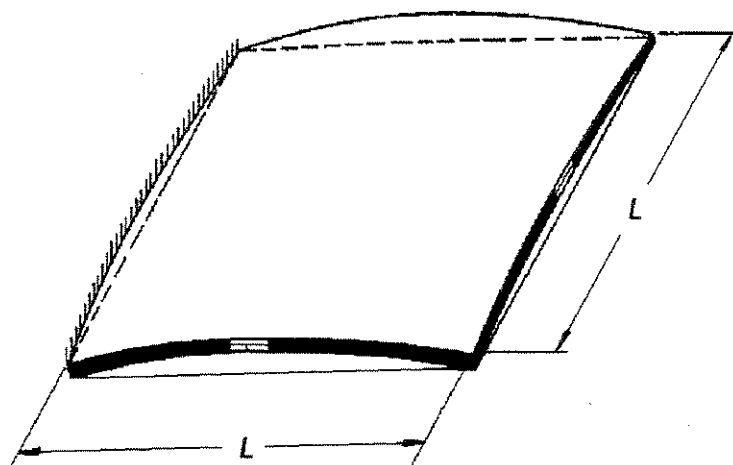


Figura 7.76 Casca esférica engastada em uma extremidade.

A Figura 7.82 ilustra os cinco primeiros modos de vibrar da casca esférica engastada em uma extremidade, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e malha de discretização de 7×7 elementos.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
1º MODO	2x2	100	2.0565	136	1.1527	172	1.1410	232	1.1167	100	0.9578	80	0.9279
	3x3	210	1.3609	282	1.0807	354	1.0782	480	1.0618	210	1.0035	165	0.9849
	4x4	360	1.1840	480	1.0664	600	1.0584	816	1.0521	360	1.0124	280	1.0035
	5x5	550	1.1223	730	1.0400	910	1.0332	1240	1.0306	550	1.0150	425	1.0071
	6x6	780	1.0955	1032	1.0287	1284	1.0232	1752	1.0218	780	1.0161	600	1.0082
	7x7	1050	1.0820	1386	1.0238	1722	1.0189	2352	1.0181	1050	1.0167	805	1.0090
2º MODO	2x2	100	2.1973	136	1.2328	172	1.2218	232	1.1433	100	0.9763	80	1.0455
	3x3	210	1.5584	282	1.0500	354	1.0385	480	1.0216	210	0.9716	165	0.9609
	4x4	360	1.2444	480	0.9857	600	0.9812	816	0.9726	360	0.9746	280	0.9549
	5x5	550	1.1023	730	0.9802	910	0.9759	1240	0.9709	550	0.9752	425	0.9577
	6x6	780	1.0361	1032	0.9780	1284	0.9738	1752	0.9707	780	0.9751	600	0.9607
	7x7	1050	1.0022	1386	0.9771	1722	0.9730	2352	0.9710	1050	0.9748	805	0.9628
3º MODO	2x2	100	3.2082	136	1.0979	172	1.0923	232	1.0467	100	1.0478	80	0.8872
	3x3	210	1.6095	282	1.0277	354	1.0180	480	1.0044	210	0.9874	165	0.8947
	4x4	360	1.2451	480	1.0039	600	0.9964	816	0.9911	360	0.9854	280	0.9202
	5x5	550	1.1137	730	0.9950	910	0.9890	1240	0.9863	550	0.9853	425	0.9405
	6x6	780	1.0578	1032	0.9911	1284	0.9860	1752	0.9844	780	0.9854	600	0.9530
	7x7	1050	1.0307	1386	0.9893	1722	0.9849	2352	0.9838	1050	0.9855	805	0.9609
4º MODO	2x2	100	3.5228	136	1.2923	172	1.2802	232	1.2517	100	1.0140	80	0.8527
	3x3	210	1.6106	282	1.0431	354	1.0391	480	1.0238	210	0.9869	165	0.9266
	4x4	360	1.2254	480	0.9986	600	0.9957	816	0.9890	360	0.9830	280	0.9377
	5x5	550	1.0993	730	0.9875	910	0.9846	1240	0.9805	550	0.9815	425	0.9465
	6x6	780	1.0477	1032	0.9839	1284	0.9811	1752	0.9784	780	0.9807	600	0.9540
	7x7	1050	1.0229	1386	0.9826	1722	0.9799	2352	0.9780	1050	0.9802	805	0.9596
5º MODO	2x2	100	2.6384	136	1.2795	172	1.2679	232	1.1531	100	1.0488	80	0.9728
	3x3	210	1.3952	282	1.0088	354	0.9995	480	0.9819	210	0.9795	165	0.9629
	4x4	360	1.1451	480	0.9861	600	0.9780	816	0.9711	360	0.9713	280	0.9312
	5x5	550	1.0602	730	0.9792	910	0.9723	1240	0.9685	550	0.9705	425	0.9357
	6x6	780	1.0240	1032	0.9763	1284	0.9703	1752	0.9678	780	0.9705	600	0.9435
	7x7	1050	1.0060	1386	0.9749	1722	0.9695	2352	0.9678	1050	0.9706	805	0.9498

Tabela 7.40 Frequências naturais normalizadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª) para a casca esférica engastada em uma extremidade.

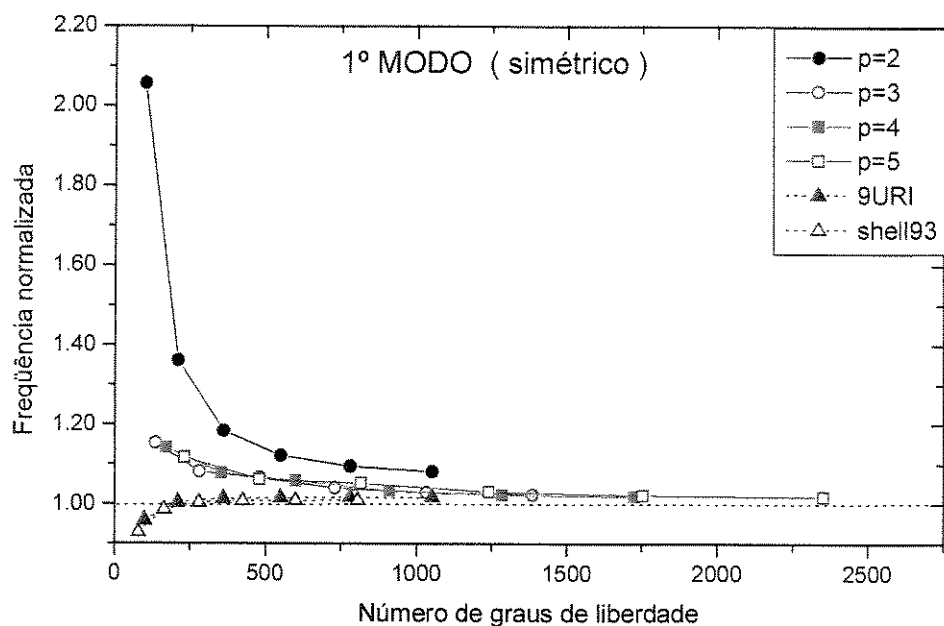


Figura 7.77 Primeira frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

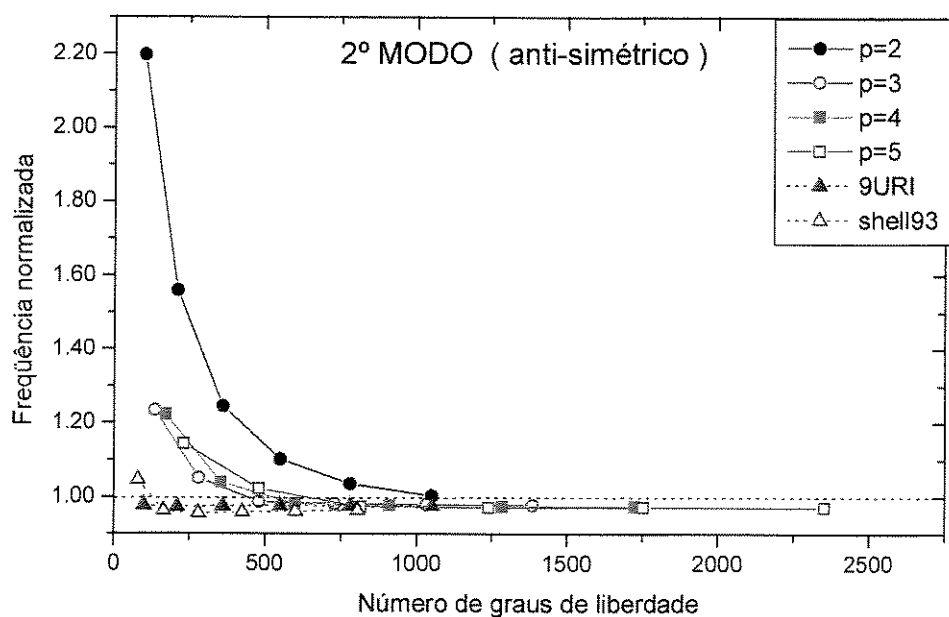


Figura 7.78 Segunda frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

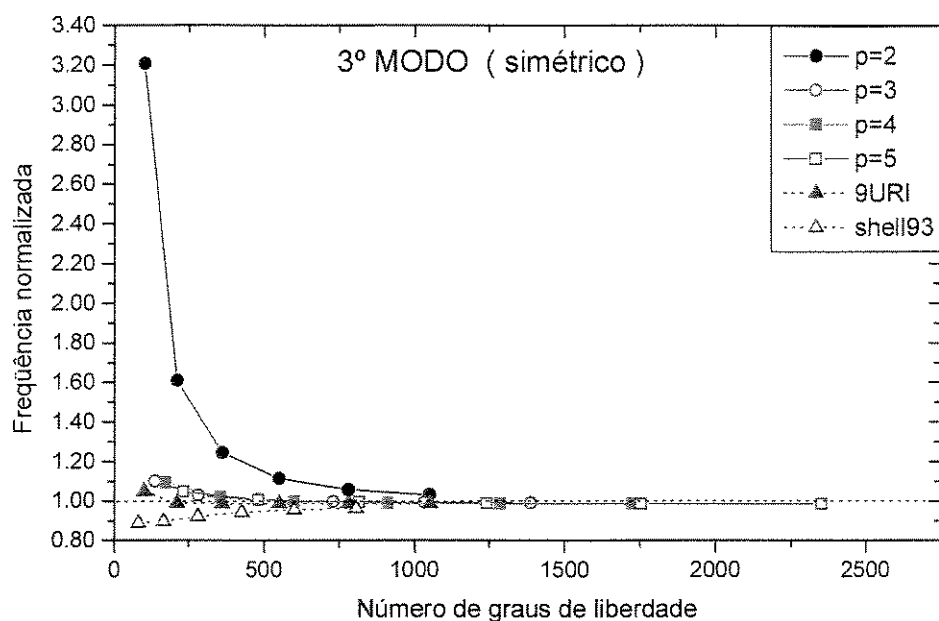


Figura 7.79 Terceira frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

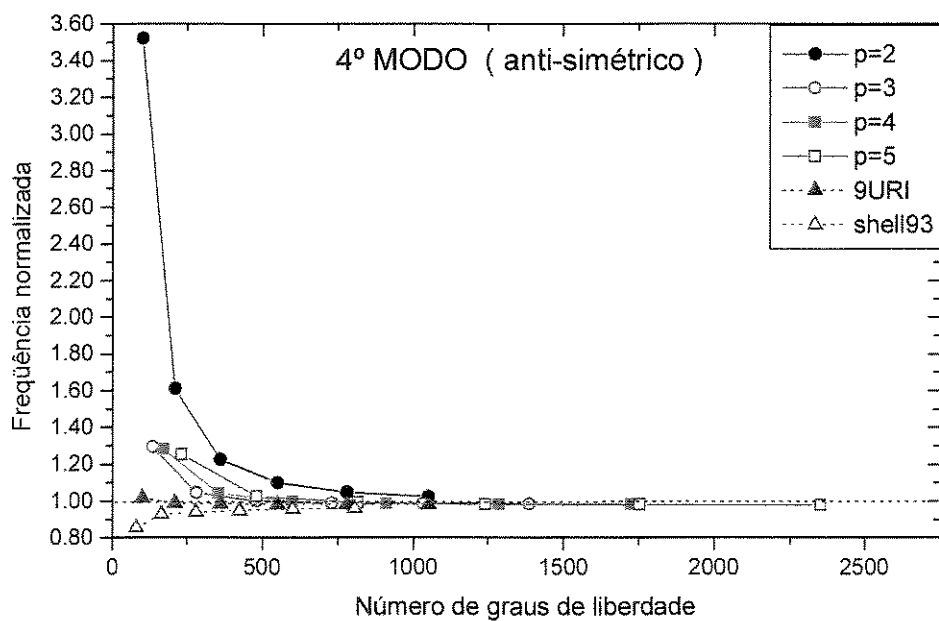


Figura 7.80 Quarta frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

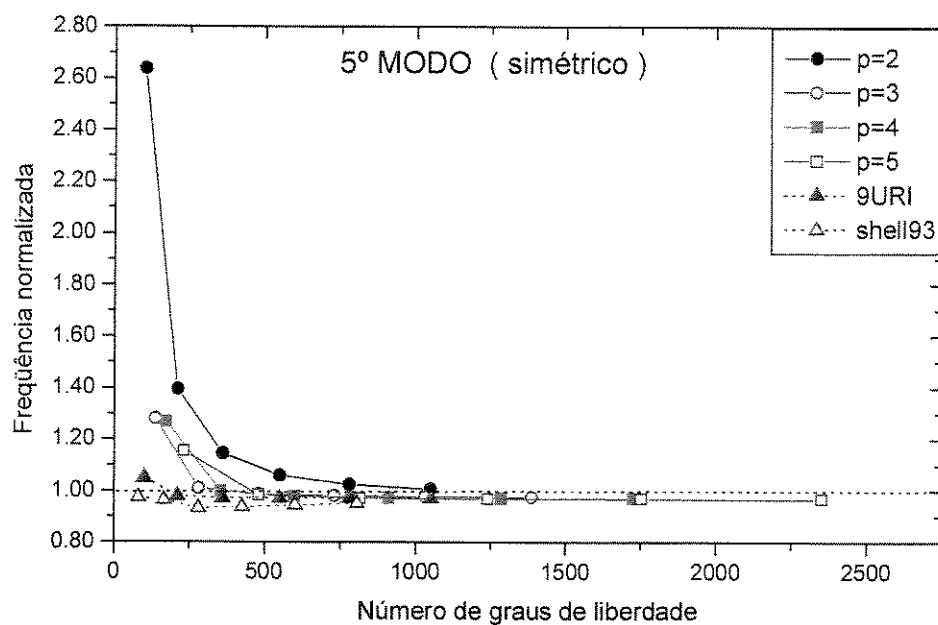


Figura 7.81 Quinta frequência natural normalizada para a casca esférica engastada em uma extremidade com malhas de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos.

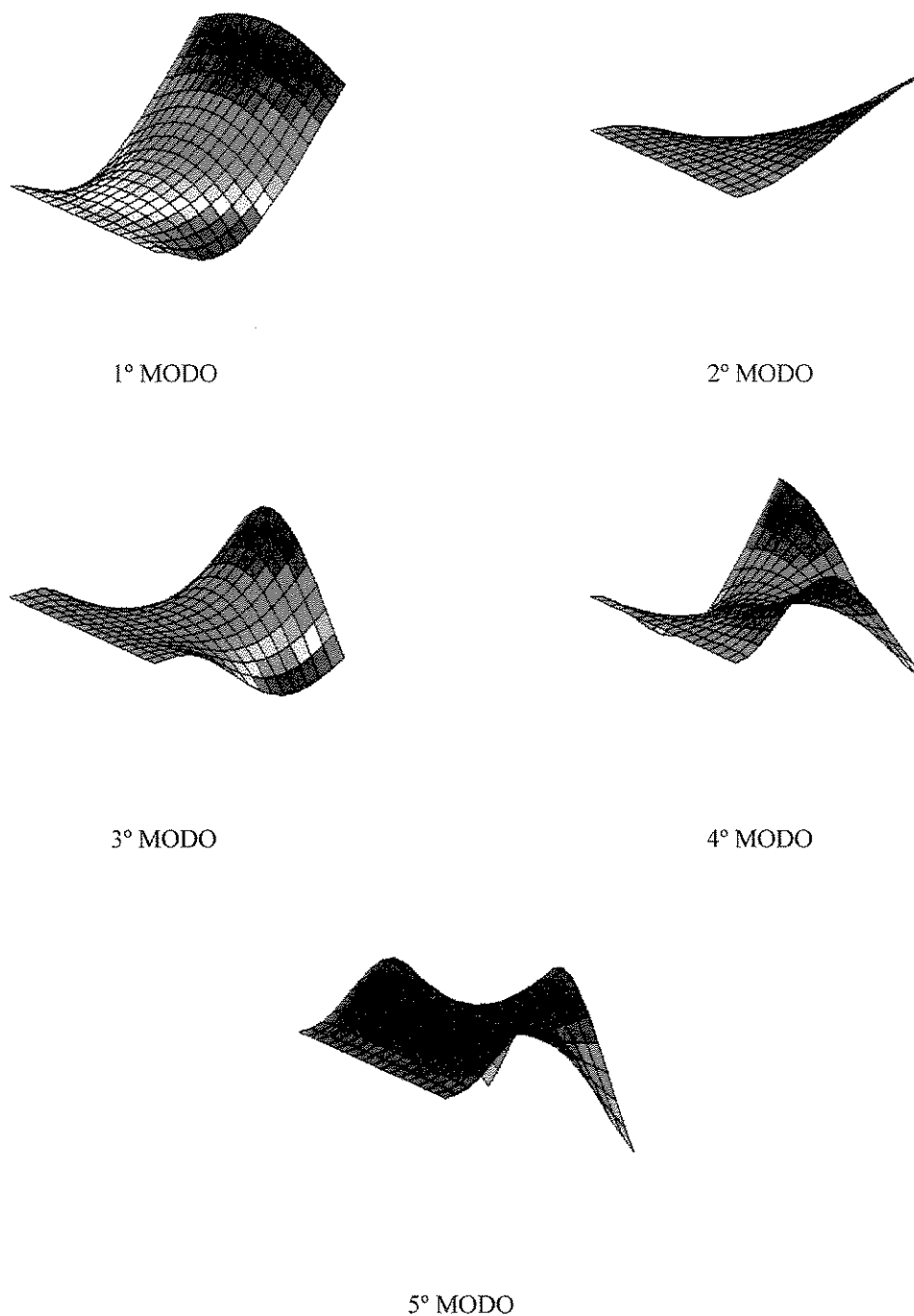


Figura 7.82 Modos de vibrar (1°, 2°, 3°, 4° e 5°) da casca esférica engastada em uma extremidade, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e malha de discretização 7x7 elementos.

7.3.4 Placa circular engastada nas extremidades

Em função da geometria modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização de 12 elementos (Figura 7.83) para várias relações entre espessura e dimensão característica (no caso o raio R): $t/a = 10^{-1}$ (placa moderadamente grossa) e $t/a = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ e 10^{-6} (placa fina).

Apresentam-se as seis primeiras frequências naturais normalizadas (ω/ω_{exato}). Os resultados ω_{exato} são obtidos a partir da *Teoria de Placas Finas* [Leissa, 1969] que, neste caso, fornece a solução exata somente para placas finas:

$$\omega_{exato} = \frac{\lambda^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}} \quad (7.9)$$

na qual, ρ é a densidade por unidade de volume, a a dimensão característica da placa, t a espessura da placa e D sua rigidez.

Na Equação (7.9) os valores da constante λ^2 para as seis primeiras frequências naturais são, respectivamente, 10.2158, 34.88, 39.771, 69.6659, 84.58 e 89.104.

A Tabela 7.41, e as Figuras 7.84, 7.85, 7.86, 7.87, 7.88 e 7.89, apresentam as seis primeiras frequências naturais simétricas normalizadas através da Teoria de Placas Finas de *Kirchhoff* [Leissa, 1969] para cada relação t/a e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

A Tabela 7.42 ilustra os seis primeiros modos de vibrar simétricos da placa circular engastada nas extremidades, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e do elemento Shell93 do ANSYS, com malha de discretização de 7x7 elementos e $t/a=10^{-3}$.

A análise da placa com o elemento finito Shell93 do ANSYS para as relações $t/a = 10^{-4}, 10^{-5}$ e 10^{-6} , não foram concluídas e o programa apresentou a seguinte mensagem de erro: "*Probably initial shift greater than first mode or Final Mode(s) is in a cluster*". E por esta razão, estes resultados não aparecem na Tabela 7.41 e nas Figuras 7.84, 7.85, 7.86, 7.87, 7.88 e 7.89.

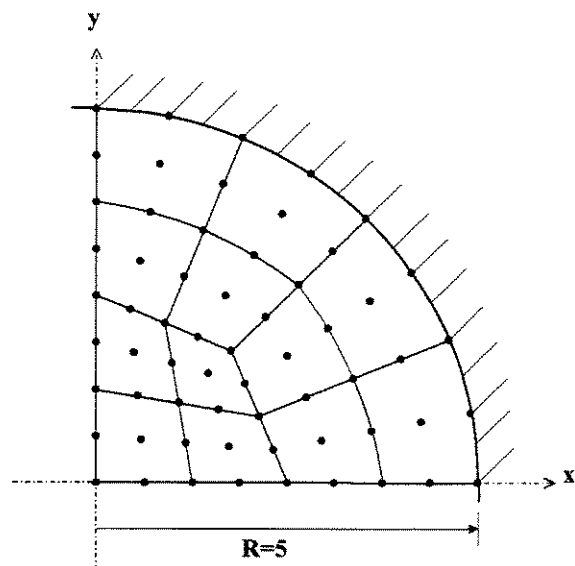


Figura 7.83 Placa circular engastada nas extremidades com malha de 12 elementos.

	t/a	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	9URI	Shell93
1º MODO	10^{-1}	0.9799	0.9735	0.9727	0.9740	0.9705	1.0270
	10^{-2}	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9949	1.0270
	10^{-3}	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	1.0010	3.7630
	10^{-4}	1.0270	1.0000	1.0000	0.9999	1.0010	*
	10^{-5}	1.0270	1.0000	1.0000	0.9999	1.0010	*
	10^{-6}	1.0270	1.0000	1.0000	0.9999	1.0010	*
2º MODO	10^{-1}	0.9485	0.9257	0.9229	0.9294	0.9208	1.1220
	10^{-2}	1.0150	1.0150	1.0100	1.0060	1.0010	1.1220
	10^{-3}	1.0150	1.0150	1.0100	1.0060	1.0070	1.2480
	10^{-4}	1.1220	1.0150	1.0150	1.0100	1.0070	*
	10^{-5}	1.1220	1.0150	1.0150	1.0100	1.0070	*
	10^{-6}	1.1220	1.0150	1.0150	1.0100	1.0070	*
3º MODO	10^{-1}	0.9485	0.9201	0.9168	0.9256	0.9335	1.1380
	10^{-2}	1.0040	1.0040	1.0030	1.0090	1.0110	1.1380
	10^{-3}	1.0040	1.0040	1.0030	1.0090	1.0100	1.2860
	10^{-4}	1.1380	1.0040	1.0040	1.0030	1.0100	*
	10^{-5}	1.1380	1.0040	1.0040	1.0030	1.0100	*
	10^{-6}	1.1380	1.0040	1.0040	1.0030	1.0100	*
4º MODO	10^{-1}	0.9043	0.8770	0.8735	0.8857	0.8669	1.1870
	10^{-2}	1.0790	1.0760	1.0420	1.0180	1.0400	1.1870
	10^{-3}	1.0790	1.0760	1.0420	1.0180	1.0200	0.8275
	10^{-4}	1.1870	1.0790	1.0760	1.0420	1.0200	*
	10^{-5}	1.1870	1.0790	1.0760	1.0420	1.0200	*
	10^{-6}	1.1870	1.0790	1.0760	1.0420	1.0200	*
5º MODO	10^{-1}	0.9211	0.8618	0.8558	0.8835	0.8461	1.3840
	10^{-2}	1.0430	1.0420	1.0260	1.0390	0.9774	1.3840
	10^{-3}	1.0430	1.0420	1.0260	1.0390	1.0410	0.8480
	10^{-4}	1.3840	1.0430	1.0420	1.0260	1.0410	*
	10^{-5}	1.3840	1.0430	1.0420	1.0260	1.0410	*
	10^{-6}	1.3840	1.0430	1.0420	1.0260	1.0410	*
6º MODO	10^{-1}	0.9293	0.8576	0.8508	0.8868	0.8446	1.4140
	10^{-2}	1.0150	1.0150	1.0090	1.0500	0.9868	1.4140
	10^{-3}	1.0150	1.0150	1.0090	1.0500	1.0520	0.9381
	10^{-4}	1.4140	1.0150	1.0150	1.0090	1.0520	*
	10^{-5}	1.4140	1.0150	1.0150	1.0090	1.0520	*
	10^{-6}	1.4140	1.0150	1.0150	1.0090	1.0520	*
	NGL	140	230	320	482	140	104

(*) ERRO: "Probably initial shift greater than first mode or Final Mode(s) is in a cluster".

Tabela 7.41 Frequências naturais simétricas normalizadas da placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

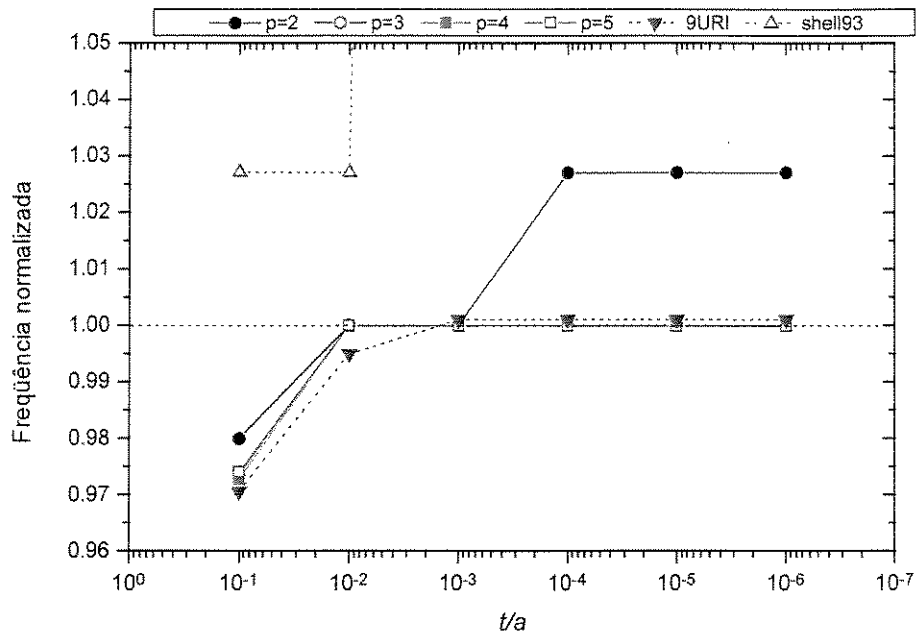


Figura 7.84 Primeira frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

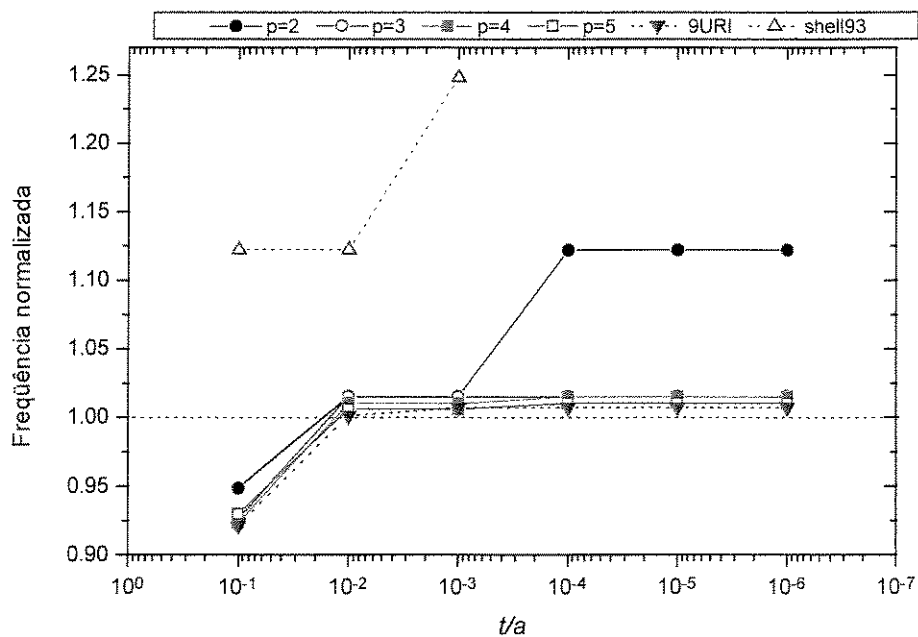


Figura 7.85 Segunda frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

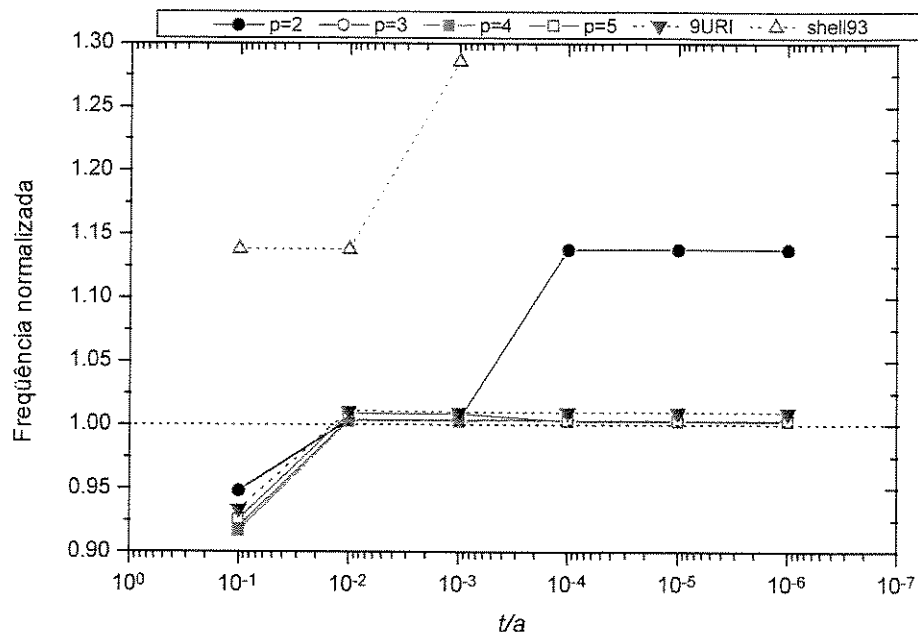


Figura 7.86 Terceira frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

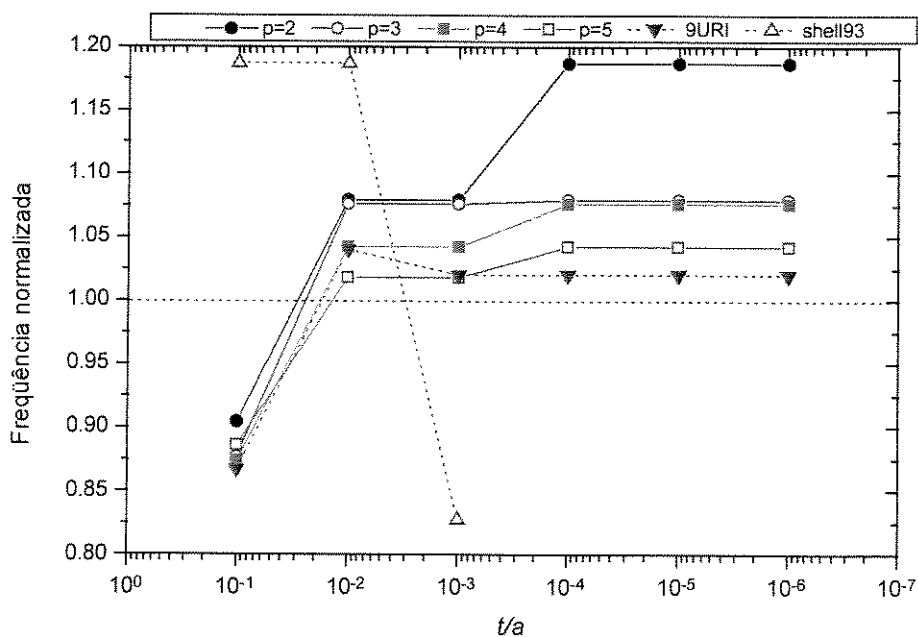


Figura 7.87 Quarta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

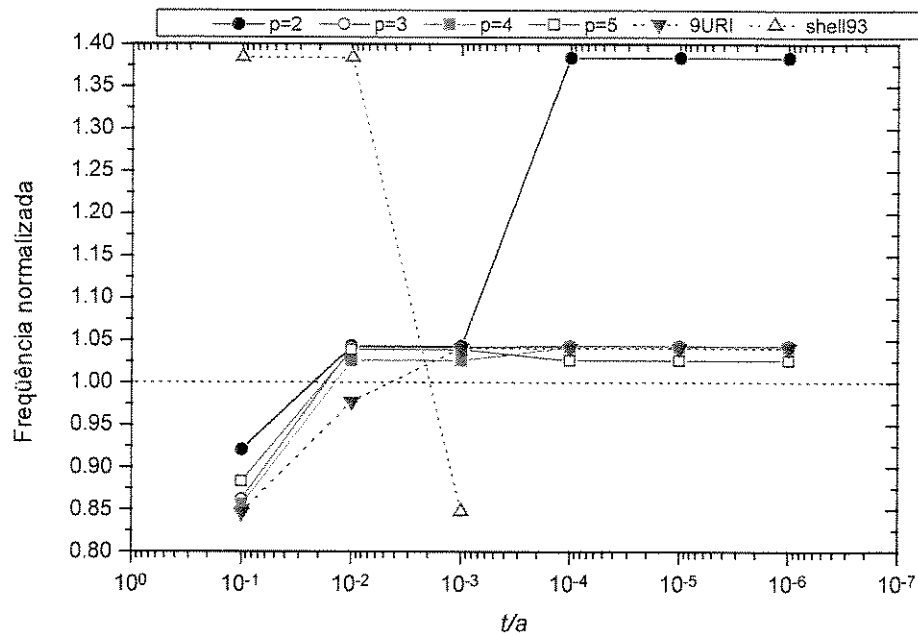


Figura 7.88 Quinta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

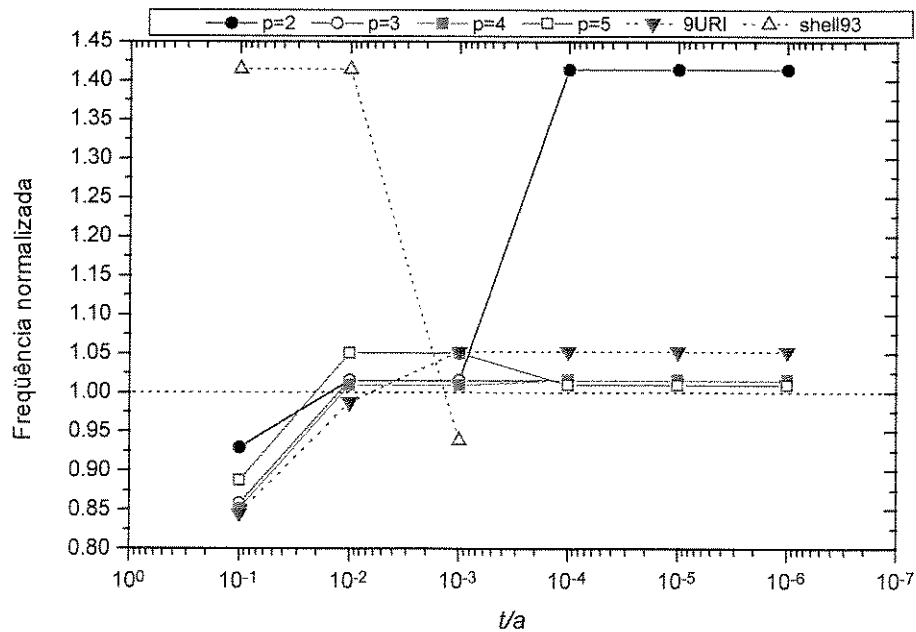


Figura 7.89 Sexta frequência natural simétrica normalizada para a placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização de 12 elementos.

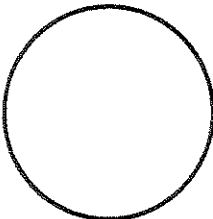
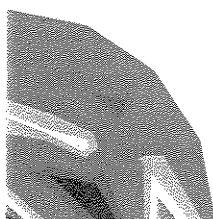
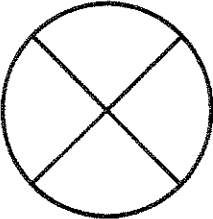
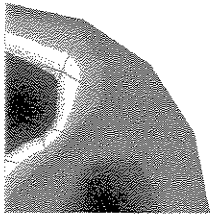
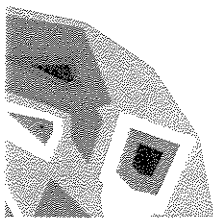
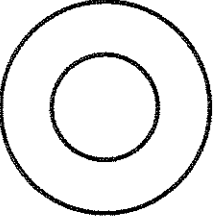
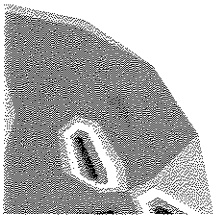
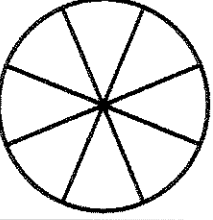
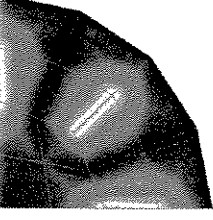
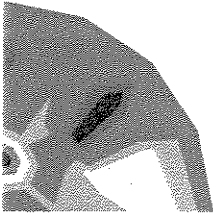
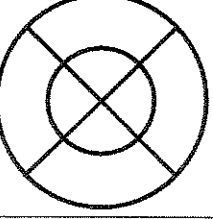
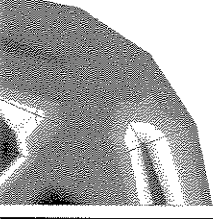
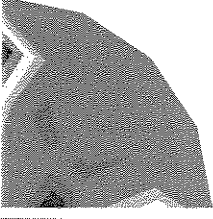
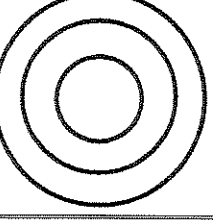
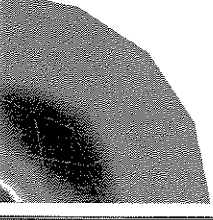
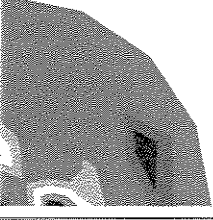
	[Leissa, 1969]	HIERÁRQUICO	ANSYS
1° MODO SIM.			
2° MODO SIM.			
3° MODO SIM.			
4° MODO SIM.			
5° MODO SIM.			
6° MODO SIM.			

Tabela 7.42 Modos de vibrar simétricos (1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°) da placa circular engastada em seus lados, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e do elemento Shell93 do ANSYS, com malha de discretização de 7x7 elementos e $t/\alpha=10^{-3}$.

7.2.5 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

Para verificar se o elemento finito com refinamento hierárquico gera elementos com modos espúrios propagáveis em toda malha foi feito um teste clássico proposto na literatura: a análise de uma placa quadrada apoiada nos quatro cantos (Figura 7.90), que é extremamente sensível à existência de modos espúrios de flexão.

Em função da geometria a placa foi modelada com malha de discretização regular de 3x3, 5x5, 7x7 e 9x9 elementos.

Apresentam-se as seis primeiras frequências naturais normalizadas (ω/ω_{exato}). Os resultados ω_{exato} são obtidos a partir da *Teoria de Placas Finas* [Leissa, 1969] que, neste caso, fornece a solução exata somente para placas finas:

$$\omega_{exato} = \frac{\lambda^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}} \quad (7.10)$$

na qual, ρ é a densidade por unidade de volume, a a dimensão característica da placa, t a espessura da placa e D sua rigidez.

Na Equação (7.10) os valores da constante λ^2 para as seis primeiras frequências naturais são, respectivamente, 7.12, 15.77, 15.77, 19.6, 38.44 e 44.4.

A Tabela 7.43 e as Figuras 7.91, 7.92, 7.93, 7.94, 7.95 e 7.96 apresentam as seis primeiras frequências naturais normalizadas [Leissa, 1969] para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade (NGL) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93). As características da placa modelada são as seguintes: $a = 1.0$, $t = 0.001$, $E = 6.89 \times 10^{10}$, $\rho = 2.66 \times 10^3$ e $\nu = 0.3$.

Os resultados obtidos com os elementos finitos 9URI e Shell93 do ANSYS estão muito distantes do resultado analítico considerado como "exato" (os modos espúrios se propagam em toda malha distorcendo a solução) como pode se verificar na Tabela 7.43 e, por esta razão, os resultados para estes elementos não aparecem nas Figuras 7.91, 7.92, 7.93, 7.94, 7.95 e 7.97.

A Tabela 7.44 ilustra os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada apoiada nos cantos, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5º grau ($p = 5$) e do elemento Shell93 do ANSYS com malha de discretização de 7x7 elementos.

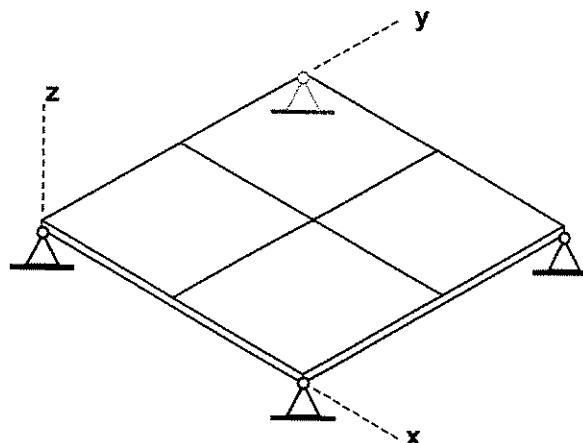


Figura 7.90 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos.

	Malha	NGL	$p=2$	NGL	$p=3$	NGL	$p=4$	NGL	$p=5$	NGL	9URI	NGL	Shell93
1º MODO	3x3	143	1.0588	215	1.0002	287	1.0002	413	1.0002	143	*	116	*
	5x5	359	1.0203	539	0.9990	719	0.9990	1049	0.9990	359	*	284	*
	7x7	671	1.0097	1007	0.9988	1343	0.9988	1973	0.9988	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0054	1619	0.9988	2159	0.9988	3185	0.9988	1079	*	836	*
2º MODO	3x3	143	1.0342	215	1.0224	287	1.0224	413	1.0224	143	*	116	*
	5x5	359	1.0138	539	1.0073	719	1.0073	1049	1.0074	359	*	284	*
	7x7	671	1.0073	1007	1.0036	1343	1.0036	1973	1.0036	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0045	1619	1.0022	2159	1.0022	3185	1.0021	1079	*	836	*
3º MODO	3x3	143	1.0342	215	1.0224	287	1.0224	413	1.0224	143	*	116	*
	5x5	359	1.0138	539	1.0073	719	1.0073	1049	1.0074	359	*	284	*
	7x7	671	1.0073	1007	1.0036	1343	1.0036	1973	1.0036	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0045	1619	1.0022	2159	1.0022	3185	1.0021	1079	*	836	*
4º MODO	3x3	143	1.0457	215	1.0030	287	1.0030	413	1.0030	143	*	116	*
	5x5	359	1.0161	539	1.0006	719	1.0006	1049	1.0006	359	*	284	*
	7x7	671	1.0082	1007	1.0001	1343	1.0001	1973	1.0001	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0049	1619	1.0000	2159	1.0000	3185	1.0000	1079	*	836	*
5º MODO	3x3	143	1.1585	215	1.0254	287	1.0254	413	1.1643	143	*	116	*
	5x5	359	1.0601	539	1.0483	719	1.0483	1049	1.0638	359	*	284	*
	7x7	671	1.0304	1007	1.0274	1343	1.0274	1973	1.0431	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0183	1619	1.0169	2159	1.0169	3185	1.0202	1079	*	836	*
6º MODO	3x3	143	1.0290	215	1.0208	287	1.0208	413	1.0208	143	*	116	*
	5x5	359	1.0167	539	1.0041	719	1.0041	1049	1.0041	359	*	284	*
	7x7	671	1.0095	1007	1.0013	1343	1.0013	1973	1.0013	671	*	524	*
	9x9	1079	1.0058	1619	1.0004	2159	1.0004	3185	1.0004	1079	*	836	*

(*) Resultados obtidos estão muito distantes da solução analítica "exata".

Tabela 7.43 Frequências naturais normalizadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª) para a placa quadrada apoiada nos cantos.

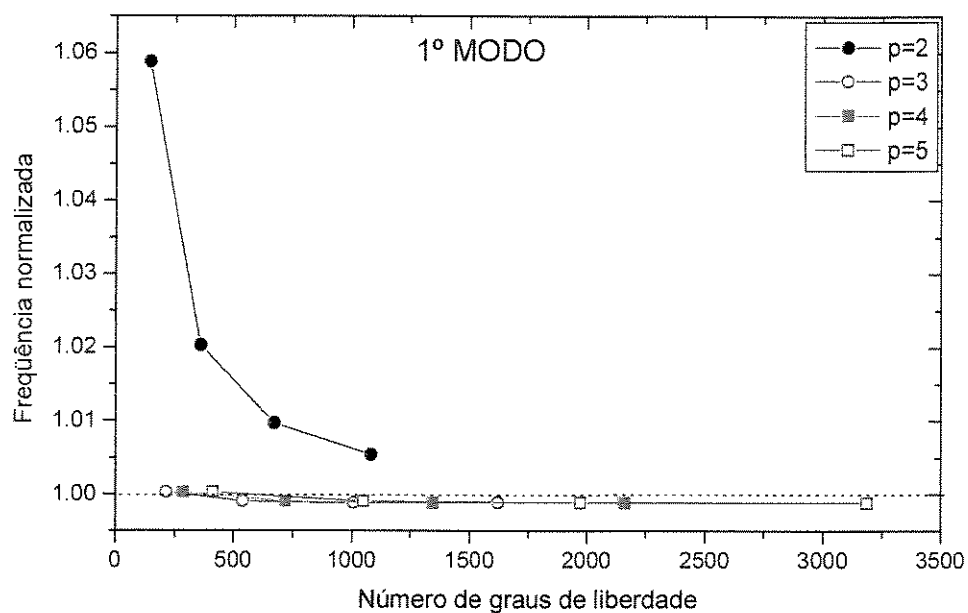


Figura 7.91 Primeira frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

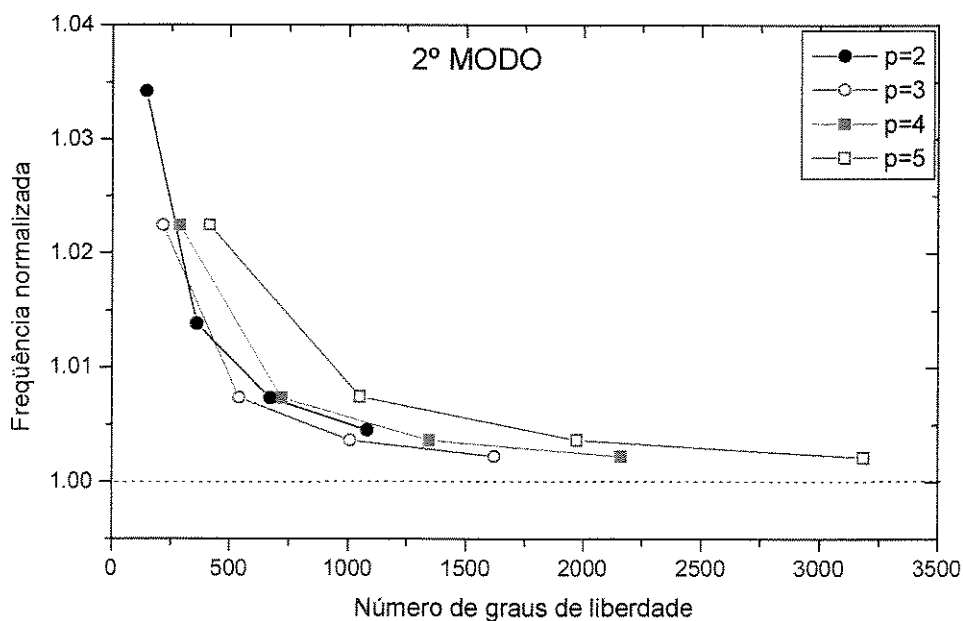


Figura 7.92 Segunda frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

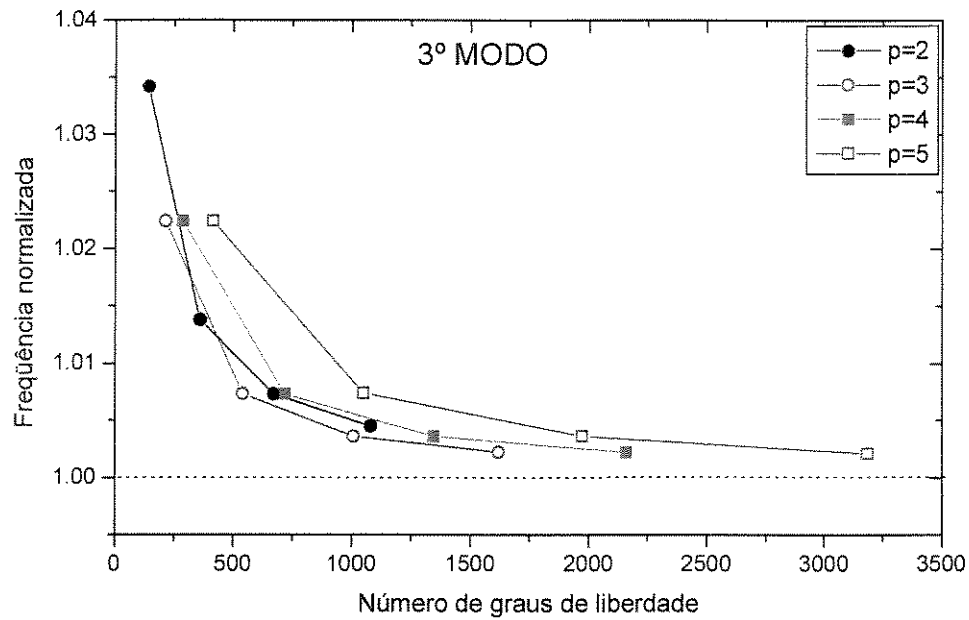


Figura 7.93 Terceira frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

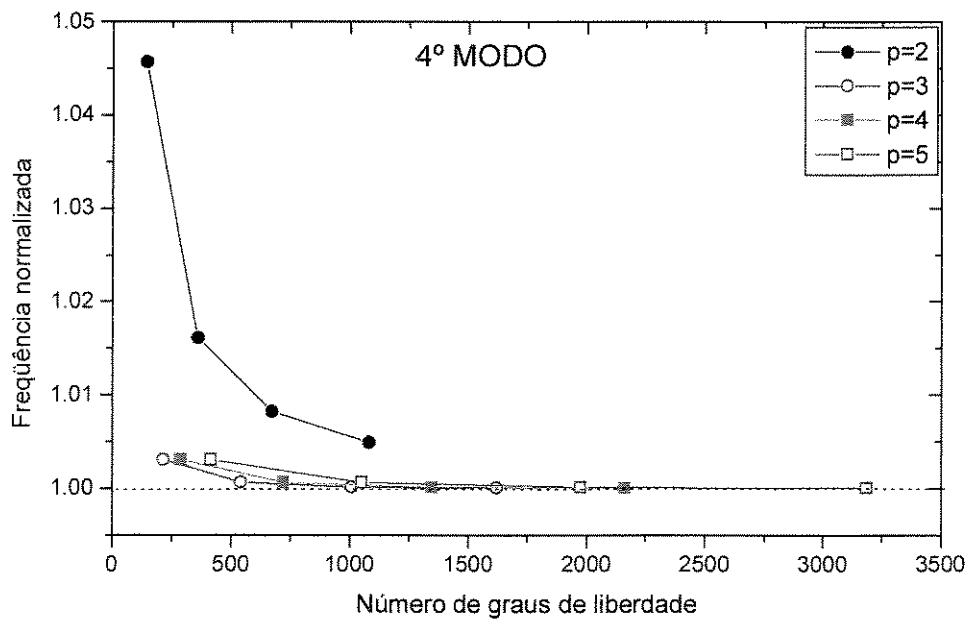


Figura 7.94 Quarta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

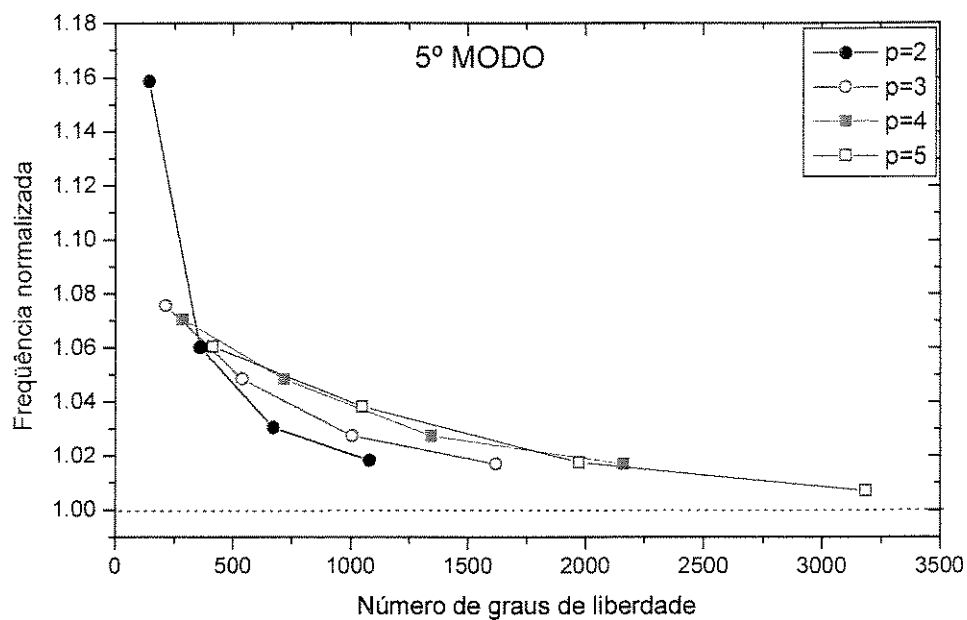


Figura 7.95 Quinta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

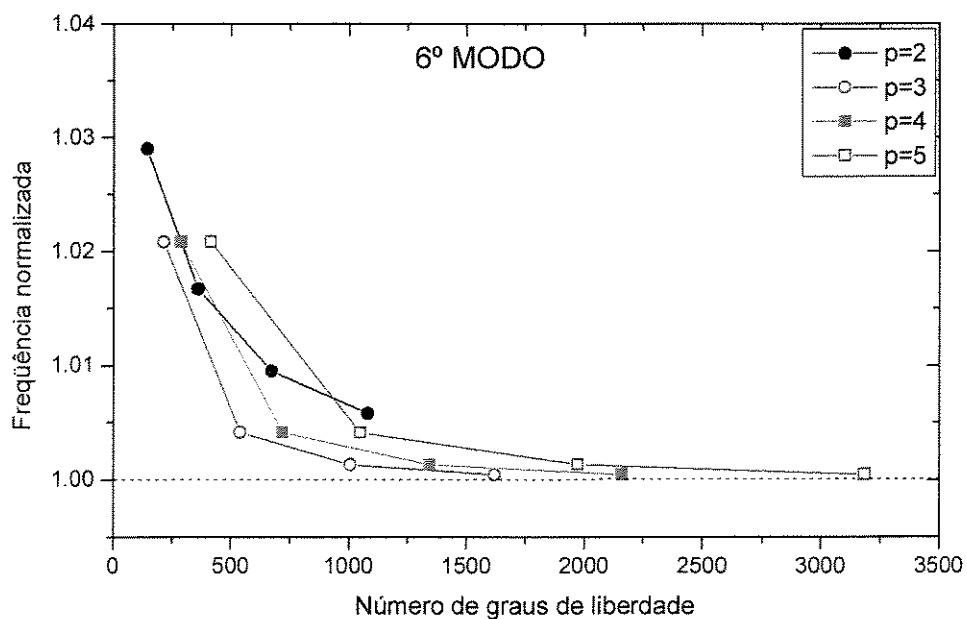


Figura 7.96 Sexta frequência natural normalizada para a placa quadrada apoiada nos cantos com malhas de discretização de 3x3, 5x5, 7x7, e 9x9 elementos.

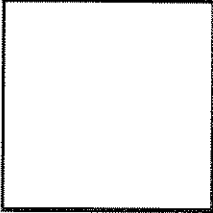
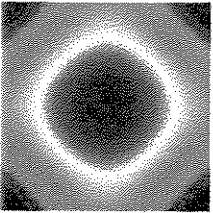
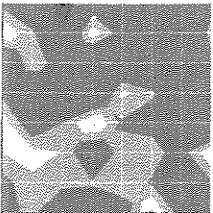
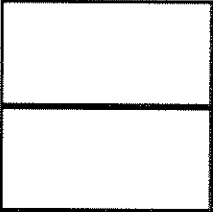
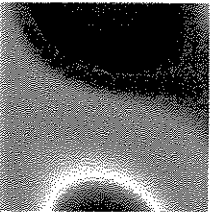
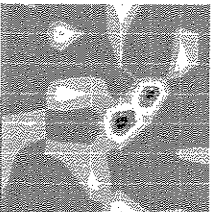
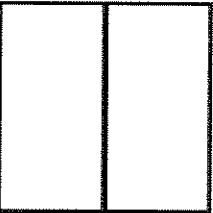
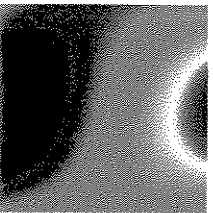
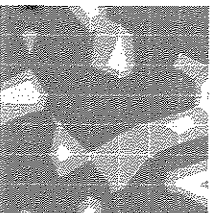
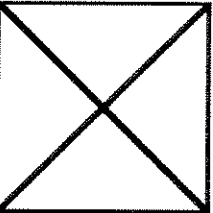
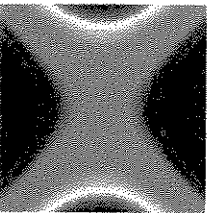
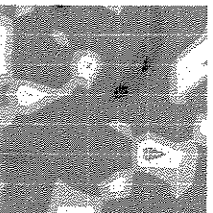
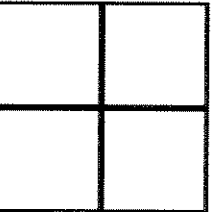
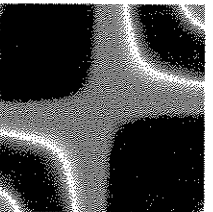
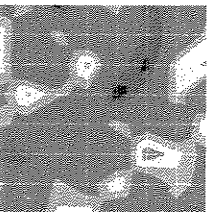
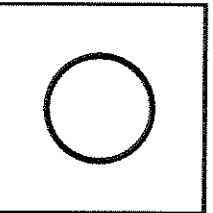
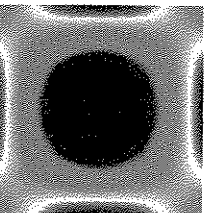
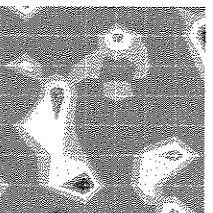
	[Leissa, 1969]	HIERÁRQUICO	ANSYS
1° MODO			
2° MODO			
3° MODO			
4° MODO			
5° MODO			
6° MODO			

Tabela 7.44 Modos de vibrar (1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°) da placa quadrada apoiada nos cantos, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5° grau ($p = 5$) e do elemento Shell93 do ANSYS, com malha de discretização de 7x7 elementos e $t/a = 0.001$.

8 CONCLUSÕES

A partir dos resultados numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico ($p=2$), através da introdução de polinômios de terceiro ($p=3$), quarto ($p=4$) e quinto ($p=5$) graus, apresenta excelentes resultados.

Constatou-se, também, que quanto mais severas as condições de contorno impostas (por exemplo, todos os lados engastados), a convergência se torna mais lenta, mas sempre, obtendo-se melhores resultados com o refinamento hierárquico.

Pode-se verificar, ainda, que os resultados obtidos pelo elemento isoparamétrico para situações de placas e cascas moderadamente grossas, são excelentes (convergência rápida) e com a redução da espessura, situações de placa e casca fina, a convergência se torna mais lenta em função do elemento apresentar um aumento excessivo de sua rigidez. O refinamento hierárquico através da inserção de polinômios de terceiro, quarto e quinto graus reduziu a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico apresentando uma excelente convergência para situações de placas e cascas finas ou moderadamente grossas.

Com o refinamento da malha os resultados obtidos com a introdução de polinômios de terceiro, quarto e quinto graus, convergem para os obtidos com integração reduzida, com a vantagem do novo elemento não gerar elementos com modos espúrios.

O elemento proposto mostrou ser relativamente insensível quanto à distorção da malha e não apresenta os problemas de bloqueio na análise de placas e cascas finas. Pode-se observar também que a convergência com o refinamento da malha é muito boa, apresentando resultados semelhantes para $p=3$, 4 e 5, o que pode representar um ganho computacional, uma vez que, bons resultados são obtidos fazendo somente o refinamento de terceiro grau.

Resumidamente, pode-se dizer que a partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico ($p=2$), através da introdução de polinômios de terceiro ($p=3$), quarto ($p=4$) e quinto ($p=5$) graus, apresenta os seguintes resultados:

- excelente convergência com $p = 3$;
- resultados semelhantes para $p = 3$, $p = 4$ e $p = 5$;
- praticamente insensível quanto à distorção da malha;
- não gera elementos com modos espúrios;
- não apresenta os problemas de bloqueio na análise de placas e cascas finas;
- com o refinamento da malha os resultados convergem para os obtidos com integração reduzida.

A natureza hierárquica da formulação possibilita empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes, mas neste trabalho o refinamento adaptativo não foi explorado. O refinamento hierárquico foi efetuado empregando expansões polinomiais de mesmo grau ao longo de lados e elementos. Utilizando-se uma formulação subparamétrica do tipo hierárquica com refinamento adaptativo, é possível identificar os lados e os elementos mais carentes de refinamento, podendo gerar novos graus de liberdade hierárquicos, sempre que requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise.

Portanto, uma proposta de continuidade deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação subparamétrica do tipo hierárquica com refinamento adaptativo utilizando estimadores de erro. Uma vez que os resultados obtidos com os refinamentos de quarto e quinto graus apresentam soluções melhoradas, mas com um alto custo computacional e muito próximas das obtidas com o refinamento de terceiro grau, a análise hierárquica de quarto e quinto graus não devem ser utilizadas no refinamento adaptativo.

Como foi mostrado neste trabalho, quando a malha de discretização era grosseira os resultados obtidos com os refinamentos hierárquicos, embora melhores que os da análise isoparamétrica, não eram satisfatórios. Portanto uma outra proposta de continuidade deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação com refinamento h - p , que é uma combinação do refinamento do tipo h (a malha é refinada através da divisão sucessiva do tamanho dos elementos) e do refinamento do tipo p hierárquico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAQUS, Version 4.8, Users Manual, Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. 1989.
- ADINA, Version 5.0, Users Manual, Adina R & D, Massachusetts, USA, 1989.
- Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. *Analysis of thick and thin shell structures by curved elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.419-451, 1970.
- ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis Systems Inc., 1996.
- Babuska, I., Rheinboldt, W.C., *Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., v.17/18, p.519-540, 1979.
- Babuska, I., Szabo, B.A., Katz, I.N., *The p-version of the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., v.18, p.515-545, 1981.
- Babuska, I., Griebel, M., Pitkäranta, J., *The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element*, Int. J. Numer. Methods Eng. v.28, p.1891-1908, 1989.
- Banerjee, U., Suri, M., *The effect of numerical quadrature in the p-version of the finite element method*, Math. Comput., v.59(199), p.1-20, 1992.
- Bathe K. J., Wilson E. *Numerical methods in finite element analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- Bathe K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., *A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components*, Int. J. Num. Meth. Engng., v.22, p.697-722, 1986.
- Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*, Int. J. Num. Meth. Eng., v.21, p.367-383, 1985.

- Bathe, K. J., *On the State of the Art of Finite Element Analysis and a Look into the Future*, Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Natal-RN, Brasil, 2000.
- Belytschko, T., Wong, B.L., Stolarski, H., *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element*, Int. J. Num. Meth. Eng., v.28, p.385-414, 1989.
- Campion, S.D., Jarvis, J.L., *An investigation of the implementation of the p-version finite element method*, Finite elements in analysis and design, v.23, p.1-21, 1996.
- Cook, W.A., *The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements*. CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computacional Aspects of the FEM, Paris, 1981.
- Cook, R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- Coons S. A. *Surfaces for computer aided design of space form*. M.I.T. Project MAC. MAC-TR-41, 1967.
- COSMOS/M, Version 2.5, Structural Research & Analysis Corp., 2000.
- Crisfield, M.A., *Finite element and solution procedures for structural analysis*. I. v.1, Pineridge Press., 1986.
- Dawe D. J., Roufaeil O. L. *Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates*. Journal of Sound and Vibration. v.69, p.345-359, 1980.
- Deb Nath J. M. *Dynamics of rectangular curved plates*. Southampton: University of Southampton, Thesis (Ph.D.), 1969.
- Desai C. S. *Elementary finite element method*. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
- Flügge, N., *Stresses in shells*, Springer-Verlag, 1962.
- Forrest A. R. *Curves and surfaces for computer aided design*. Computer Aided Design Group. Cambridge: 1968.
- Hinton, E., Owen, D.R.J., *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press., 1988.
- Hurty W. C., Rubbinstain M. F. *Dynamics of structures*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
- Kaplan W. *Advance calculus*. Addison-Wesley, 1971.

- Kirchhoff G., *Vorlesungen über mathematische physik*. v.1, Mechanik, 1876.
- Leino, Y., Pitkäranta, J., *On the membrane locking of h-p finite elements in a cylindrical shell problem*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.37, p.1053-1070, 1994.
- Leipholtz H. *Theory of elasticity*. Leyden: Noordhoof International, 1974.
- Leissa A. W. *Vibration of plates*. NASA SP-160, p.8, 1969.
- Leissa A. W. *The free vibration of rectangular plates*. Journal of Sound and Vibration. v.31, p.257-293, 1973.
- Levinson M. *Free vibration of a simply supported, rectangular plate: an exact elasticity solution*. Journal of Sound and Vibration. v.98, p.289-298, 1985.
- Liu, Y., Busby, H.R., *p-version hybrid/mixed finite element method*, Finite elements in analysis and design, v.30, p.325-333, 1998.
- MacNeal, R.H., Harder, R.L., *A proposed standard set problems to test finite element accuracy*, Finite Elements in Analysis and Design, v.1, p.3-20, 1985.
- Meirovitch L. *Introduction to dynamics and control*. John Wiley & Sons, 1985.
- Mindlin, R.D., *Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates*. Journal of Applied Mechanic. v.18, p.31-38, 1951.
- MSC/DYNA, Users Manual, Demonstration Manual and Theoretical Manual, The McNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1989.
- NASTRAN, Theoretical Manual, McNeal, R.H (Ed.), McNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1972.
- Olson M. D., Lindberg G. M., *Dynamic analysis of shallow shells with a doubly-curvature triangular finite element*. Journal of Sound and Vibration. v.19, p.299-318, 1971.
- Oñate, E., *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal*, CIMNE, Barcelona, 1992.
- Park, K.C., Stanley, G.M., *A curved C° shell element based on assumed natural-coordinate strains*, J. Appl. Mech., v.53, p.278-290, 1986.

- Paschoalini, A.T. *Estudo comparativo entre elementos finitos Isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise dinâmica de placas e cascas*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995. Dissertação (Mestrado).
- Paschoalini, A.T., Moreira, L.A., Iguti, F., *The hierarchical nine-node shell finite element*, 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 1999.
- Peano, A., *Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending*, Comp. & Maths. with Appls., v.2, p.211-224, 1976.
- Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., Sardella, L., *Adaptive approximations in finite element analysis*, Computers and Structures, v.10, p.333-342, 1979.
- Pipes L. A., Hovanessian S. A. *Matrix computer methods in engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- Przemieniecki J. S., *Theory of matrix structural analysis*. London: McGraw-Hill, 1968.
- Pugh, E., Hinton, E., Zienkiewicz, O.C., *A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration*, Int. J. Num. Meth. Engng., v.12, p.1959-1979, 1978.
- Razzaque, A., *Program for triangular bending elements with derivative smoothing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.6, p.333-343, 1973.
- Rossow, M.P., Katz, I.N., *Hierarchical finite element analysis and precomputed arrays*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.12, p.977-999, 1978.
- Reissner, E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanic. v.12. p.69-76, 1945.
- Rutishauser, H. *Computational aspects of F. L. Bauer's simultaneous iteration method*. Numerische Mathematik, v.13, p.4-13, 1969.
- SAMCEF, User's Manual, Samtech Ltd., Lieja, Belgium, 1991.
- Sanal, Z. *Finite element programming and C*. Comput. Struct. v.51, n.6, p.671-686, 1994.
- Scordelis, A.C., Lo, K.S., *Computer analysis of cylindrical shells*, J. Am. Concr. Inst., v.61, p.593-561, 1964.

- Simo, J.C., Fox, D.D., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., v.72, p.267-304, 1989.
- Szabo B. A., Sahrman G. J. *Hierarchic plate and shell models based on p-extension*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.26, p.1855-1881, 1988.
- Szabo, B.A., Babuska, I., *Finite Element Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1991.
- Thompson E., Shimazaki Y. *A frontal procedure using skyline storage*. International Journal for Numerical. Methods in Engineering. v.15, p.889-910, 1980.
- Timoshenko S. P. *Resistência dos materiais*. v.1. 3ed., Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1969.
- Timoshenko, P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill, 1959.
- Verhegghe, B., Powell, *Control of zero-energy in 9-node plane element*, Int. J. Num. Meth. Engng., v.23, p.863-869, 1986.
- Volterra E., Gaines J. H. *Advanced strength of materials*. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The finite element method*. 4ed., London: McGraw-Hill, 1989.
- Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.375-390, 1971.
- Zienkiewicz O.C., Irons, B.M, Scott, T.C., Campbell, J.S., *Three dimensional stress analysis*. Proc. IUTAM Symp. On High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, Belgium, v.1, p.413-432, 1971.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. 4ed., London: McGraw-Hill, 1989.
- Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K., *The finite element method for analysis of elastic isotropic and isotropic slabs*, Proc. Inst. Civ. Engng., v.28, p.471-88, 1964.
- Zienkiewicz, O.C., *The finite element method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.
- Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite element and approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

Zienkiewicz, O.C., Gago, J.P., Kelly, D.W., *The hierarchical concept in finite element analysis*, Computers and Structures, v.16, p.53-65, 1983.

APÊNDICE A DETERMINAÇÃO DOS VETORES E VERSORES

A.1 Determinação dos vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca (Figura A.1), considere-se a definição de um vetor $\vec{r}_3$, normal a ela, obtido a partir do produto vetorial de dois outros vetores: $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes a esta superfície:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\text{A.2})$$

Portanto,

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta) \quad (\text{A.3})$$

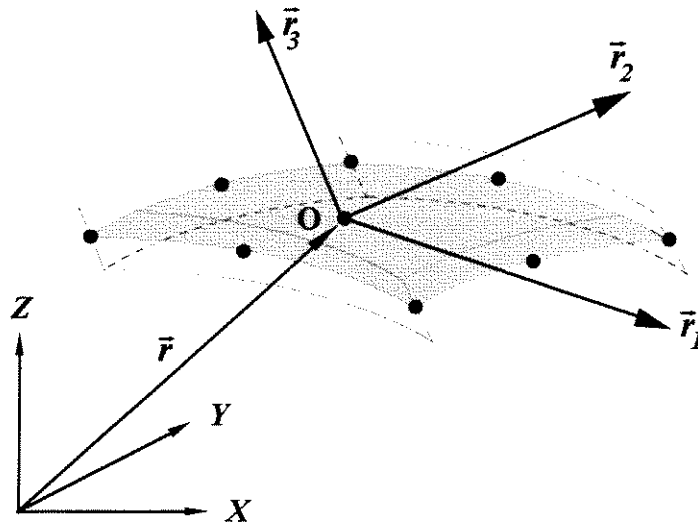


Figura A.1 Vetor $\vec{r}_3$, normal à superfície média e vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes à superfície.

Considerando-se a Equação (3.2), pode-se escrever, então, que:

$$\bar{r}_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \bar{r}_i \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \bar{r}_i \quad (\text{A.5})$$

Se r_{11} , r_{12} e r_{13} são, respectivamente, as componentes do vetor $\bar{r}_1$, segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global e, da mesma forma, r_{21} , r_{22} e r_{23} , as componentes do vetor $\bar{r}_2$, pode-se, tendo-se em conta a Equação (3.1), escrever que:

$$\bar{r}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e que:

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{21}(\xi, \eta) \\ r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Se $\bar{i}$, $\bar{j}$ e $\bar{k}$ são uma base triortogonal, associada ao sistema de referência global, o vetor $\bar{r}_3$, de componentes r_{31} , r_{32} e r_{33} , obtido a partir da Equação (A.3), será dado por:

$$\bar{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{11}(\xi, \eta) & r_{12}(\xi, \eta) & r_{13}(\xi, \eta) \\ r_{21}(\xi, \eta) & r_{22}(\xi, \eta) & r_{23}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Resolvendo-se a equação anterior e substituindo-se as componentes de $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$, dadas através das Equações (A.6) e (A.7), obtém-se que:

$$r_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (y_i z_j - y_j z_i) \quad (\text{A.9})$$

$$r_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (z_i x_j - x_i z_j) \quad (\text{A.10})$$

$$r_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (x_i y_j - y_i x_j) \quad (\text{A.11})$$

A.2 Determinação dos versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$

No ponto O, genérico, da superfície média do elemento de casca, considere-se a definição de um sistema cartesiano, local, de referência, constituído dos eixos x' , y' e z' , cujos versores são, respectivamente, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$, conforme mostra a Figura A.2.

O versor $\bar{v}_3$ é normal à superfície média e pode ser determinado a partir do vetor $\bar{r}_3$, através da seguinte expressão:

$$\bar{v}_3(\xi, \eta) = \frac{\bar{r}_3(\xi, \eta)}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \quad (\text{A.12})$$

onde $\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|$ é o módulo do vetor $\bar{r}_3$, obtido da seguinte maneira:

$$\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| = \sqrt{r_{31}^2(\xi, \eta) + r_{32}^2(\xi, \eta) + r_{33}^2(\xi, \eta)} \quad (\text{A.13})$$

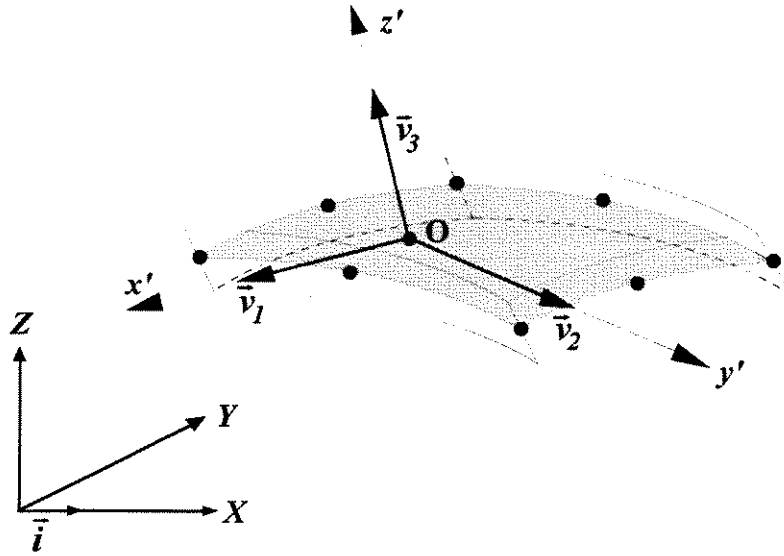


Figura A.2 Sistema, local, de referência (x' , y' , z'), associado ao ponto O e versor $\bar{i}$, associado à direção X do sistema de referência global.

Se v_{31} , v_{32} e v_{33} são as componentes do versor $\bar{v}_3$, segundo o sistema de referência global, a Equação (A.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{v}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{31}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ou, ainda,

$$v_{31}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{A.15})$$

$$v_{32}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{A.16})$$

$$v_{33}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.17})$$

Os versores $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ são tangentes à superfície média e obtidos a partir dos seguintes produtos vetoriais:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \quad (\text{A.18})$$

e

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{v}_1(\xi, \eta) \quad (\text{A.19})$$

onde $\bar{i}$ é o versor do eixo X do sistema de referência global (Figura A.2); caso, eventualmente, este versor tenha a mesma direção do versor $\bar{v}_3$, deve-se tomar o versor $\bar{j}$ do eixo Y para executar o produto vetorial estabelecido na Equação (A.18).

Se v_{11} , v_{12} e v_{13} são as componentes do versor $\bar{v}_1$, segundo o sistema de referência global e, da mesma forma, 1, 0 e 0, as componentes do versor $\bar{i}$, a Equação (A.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ou, resolvendo-se o determinante indicado na equação anterior,

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Portanto,

$$v_{11}(\xi, \eta) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.23})$$

e

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{A.24})$$

Fazendo-se, agora, o produto vetorial especificado na Equação (A.19), o versor $\bar{v}_2$ de componentes v_{21} , v_{22} e v_{23} , segundo o sistema de referência global, resulta:

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \\ v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Tendo-se, ainda, em conta que a componente v_{11} do versor $\bar{v}_1$ é nula, as componentes do versor $\bar{v}_2$ tornam-se:

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{A.26})$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = -v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{A.27})$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{A.28})$$

As Equações (A.22), (A.23), (A.24), (A.26), (A.27), (A.28), (A.15), (A.16) e (A.17) fornecem, então, as componentes dos versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$, que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z') , associado ao ponto O.

Quando se considera o nó i de coordenadas ξ_i e η_i , o sistema de referência local (x', y', z') , a ele associado (Figura A.3), será definido pelos seguintes versores:

$$\bar{v}_{1i} = \bar{v}_1(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{v}_{2i} = \bar{v}_2(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.30})$$

$$\bar{v}_{3i} = \bar{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.31})$$

Da mesma forma, as componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$, $\bar{v}_{2i}$ e $\bar{v}_{3i}$, segundo o sistema de referência global, serão dadas por:

$$v_{11i} = v_{11}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.32})$$

$$v_{12i} = v_{12}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.33})$$

$$v_{13i} = v_{13}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.34})$$

$$v_{21i} = v_{21}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.35})$$

$$v_{22i} = v_{22}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.36})$$

$$v_{23i} = v_{23}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.37})$$

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.38})$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.39})$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{A.40})$$

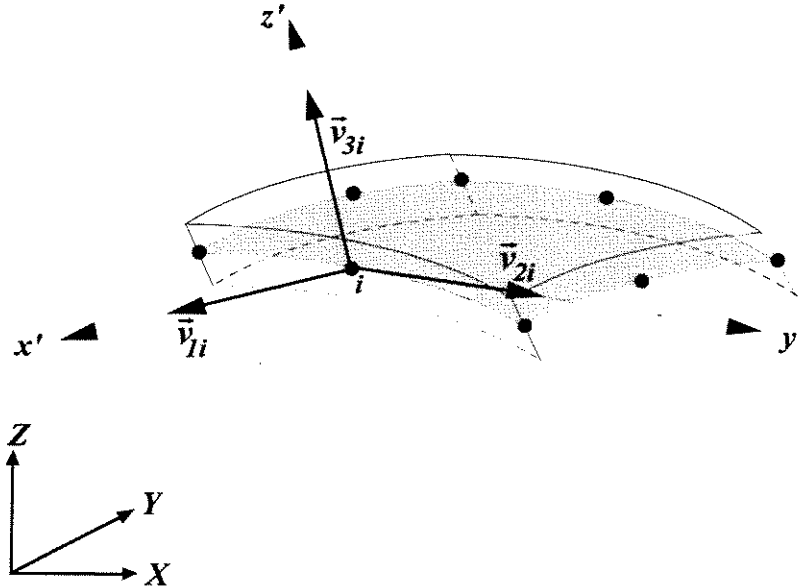


Figura A.3 Sistema, local, de referência (x', y', z') , associado ao nó i .

As Equações (A.32), (A.33), (A.34), (A.35), (A.36), (A.37), (A.38), (A.39) e (A.40) fornecem, então, as componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$, $\bar{v}_{2i}$ e $\bar{v}_{3i}$, que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z') , associado ao nó i .

APÊNDICE B ELEMENTOS DAS MATRIZES

B.1 Elementos da matriz $[A(\xi, \eta)]$

$$\begin{aligned} A_{11}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\ & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\ & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\ & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\ & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} A_{12}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\ & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\ & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\begin{aligned} A_{22}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\ & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\ & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (B.4)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{31}(\xi, \eta) + v_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{32}(\xi, \eta) + v_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (B.5)$$

B.2 Derivadas dos deslocamentos locais com relação às coordenadas locais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{11} \quad A_{11}v_{12} \quad A_{11}v_{13} \quad A_{12}v_{11} \quad A_{12}v_{12} \quad A_{12}v_{13}] \cdot \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{11} & A_{21}v_{12} & A_{21}v_{13} & A_{22}v_{11} & A_{22}v_{12} & A_{22}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{11} & A_{33}v_{12} & A_{33}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{21} & A_{11}v_{22} & A_{11}v_{23} & A_{12}v_{21} & A_{12}v_{22} & A_{12}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{21} & A_{33}v_{22} & A_{33}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{31} & A_{11}v_{32} & A_{11}v_{33} & A_{12}v_{31} & A_{12}v_{32} & A_{12}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{31} & A_{21}v_{32} & A_{21}v_{33} & A_{22}v_{31} & A_{22}v_{32} & A_{22}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{31} & A_{33}v_{32} & A_{33}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.14})$$

B.3 Elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$

$$d_{11}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.15})$$

$$d_{12}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.16})$$

$$d_{13}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.17})$$

$$d_{14}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.18})$$

$$d_{15}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.19})$$

$$d_{16}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.20})$$

$$d_{21}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.21})$$

$$d_{22}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.22})$$

$$d_{23}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.23})$$

$$d_{24}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.24})$$

$$d_{25}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.25})$$

$$d_{26}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.26})$$

$$d_{31}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.27})$$

$$d_{32}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.28})$$

$$d_{33}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.29})$$

$$d_{34}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.30})$$

$$d_{35}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.31})$$

$$d_{36}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.32})$$

$$d_{41}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.33})$$

$$d_{42}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.34})$$

$$d_{43}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.35})$$

$$d_{44}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.36})$$

$$d_{45}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.37})$$

$$d_{46}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.38})$$

$$d_{47}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.39})$$

$$d_{48}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.40})$$

$$d_{49}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.41})$$

$$d_{51}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.42})$$

$$d_{52}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.43})$$

$$d_{53}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.44})$$

$$d_{54}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.45})$$

$$d_{55}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.46})$$

$$d_{56}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.47})$$

$$d_{57}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.48})$$

$$d_{58}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.49})$$

$$d_{59}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.50})$$

B.4 Elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$

$$B_{11i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{14} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.51)$$

$$B_{21i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{24} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.52)$$

$$B_{31i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{34} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.53)$$

$$B_{41i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{44} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.54)$$

$$B_{51i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{54} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.55)$$

$$B_{12i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{15} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.56)$$

$$B_{22i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{25} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.57)$$

$$B_{32i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{35} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.58)$$

$$B_{42i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{45} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.59)$$

$$B_{52i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{55} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.60)$$

$$B_{13i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{16} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.61)$$

$$B_{23i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{26} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.62)$$

$$B_{33i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{36} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.63})$$

$$B_{43i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{46} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.64})$$

$$B_{53i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{56} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.65})$$

$$B_{14i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11} v_{11i} + d_{12} v_{12i} + d_{13} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14} v_{11i} + d_{15} v_{12i} + d_{16} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.66})$$

$$B_{24i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21} v_{11i} + d_{22} v_{12i} + d_{23} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24} v_{11i} + d_{25} v_{12i} + d_{26} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.67})$$

$$B_{34i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31} v_{11i} + d_{32} v_{12i} + d_{33} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34} v_{11i} + d_{35} v_{12i} + d_{36} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.68})$$

$$B_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41} v_{11i} + d_{42} v_{12i} + d_{43} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44} v_{11i} + d_{45} v_{12i} + d_{46} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.69})$$

$$B_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51} v_{11i} + d_{52} v_{12i} + d_{53} v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54} v_{11i} + d_{55} v_{12i} + d_{56} v_{13i}) \right] \quad (\text{B.70})$$

$$B_{15i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11} v_{21i} + d_{12} v_{22i} + d_{13} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14} v_{21i} + d_{15} v_{22i} + d_{16} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.71})$$

$$B_{25i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21} v_{21i} + d_{22} v_{22i} + d_{23} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24} v_{21i} + d_{25} v_{22i} + d_{26} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.72})$$

$$B_{35i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31} v_{21i} + d_{32} v_{22i} + d_{33} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34} v_{21i} + d_{35} v_{22i} + d_{36} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.73})$$

$$B_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41} v_{21i} + d_{42} v_{22i} + d_{43} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44} v_{21i} + d_{45} v_{22i} + d_{46} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.74})$$

$$B_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51} v_{21i} + d_{52} v_{22i} + d_{53} v_{23i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54} v_{21i} + d_{55} v_{22i} + d_{56} v_{23i}) \right] \quad (\text{B.75})$$

$$C_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{47} v_{11i} + d_{48} v_{12i} + d_{49} v_{13i}) \right] \quad (B.76)$$

$$C_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{57} v_{11i} + d_{58} v_{12i} + d_{59} v_{13i}) \right] \quad (B.77)$$

$$C_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{47} v_{21i} + d_{48} v_{22i} + d_{49} v_{23i}) \right] \quad (B.78)$$

$$C_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[N_i (d_{57} v_{21i} + d_{58} v_{22i} + d_{59} v_{23i}) \right] \quad (B.79)$$

B.5 Elementos da matriz $[B_{pk}(\xi, \eta)]$

$$B_{11pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{14} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.80)$$

$$B_{21pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{24} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.81)$$

$$B_{31pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{34} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.82)$$

$$B_{41pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{44} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.83)$$

$$B_{51pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{54} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.84)$$

$$B_{12pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{15} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.85)$$

$$B_{22pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{25} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (B.86)$$

$$B_{32\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{35} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.87})$$

$$B_{42\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{45} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.88})$$

$$B_{52\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{55} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.89})$$

$$B_{13\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{16} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.90})$$

$$B_{23\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{26} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.91})$$

$$B_{33\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{36} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.92})$$

$$B_{43\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{46} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.93})$$

$$B_{53\,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{56} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.94})$$