

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A
TESE DEFENDIDA POR UBATAN ALMEIDA
MIRANDA E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 25.04.02

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Aplicação de Métodos de Análise Tempo- Frequência ao Estudo de Sistemas Rotativos

Autor: Ubatan A. Miranda
Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.

12/02

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
05078-000

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Aplicação de Métodos de Análise Tempo- Frequência ao Estudo de Sistemas Rotativos

**Autor: Ubatan A. Miranda
Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002
S.P. – Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	T/UNICAMP
	M 672a
V	EX
TOMBO	BC/60J44
PROC.	16-117104
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	14/09/2004
Nº CPD	

B6 Ed 324086

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M672a Miranda, Ubatan Almeida
 Aplicação de métodos de análise tempo-freqüência ao estudo de sistemas rotativos / Ubatan Almeida Miranda. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Milton Dias Jr.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Processamento de sinais. 2. Vibração. 3. Rotores.
 I. Dias Jr., Milton. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

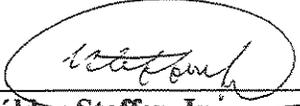
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Aplicação de Métodos de Análise Tempo- Frequência ao Estudo de Sistemas Rotativos

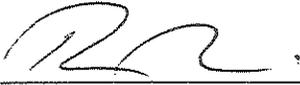
Autor: Ubatan A. Miranda
Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.



Prof. Dr. Milton Dias Jr., Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Válter Steffen Jr.
Universidade Federal de Uberlândia



Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 25 de Abril de 2002.

Dedicatória

Durante a maior parte de minha infância, me encontrava com **meus pais** apenas cedo pela manhã, ou à noite, ao voltar da escola. Eles, determinados em sua função de educadores, levavam (e ainda levam) o ensino de Física aos universitários da UFBA muito a sério. Por isto, eu e **minha irmã** passamos muito tempo dividindo o restante do dia com **minha avó** e **meus tios**, e com as aulas na escola. Sempre muito corretos, meus pais levam consigo a bandeira da ética profissional e da qualidade de ensino, pilares da educação.

Eu vivia mergulhado num clima de desejo por conhecimento. Ao som de Bach, Beethoven, Vivaldi, entre outros, sentava-me ao lado de meu pai e admirava a maneira com que ele se dedicava a seus alunos e a seu trabalho. Queria ser como ele. Mais ainda, ficava pasmo com a vontade que minha mãe tinha de ensinar, de maneira palpável e real, os conceitos básicos da Física. Mais do que a ciência, uma vez que era isso que eu respirava no escritório de casa, eu tinha vontade de conhecer. Tudo. A enciclopédia Britânica no alto da estante, os livros sobre antigas civilizações, Dom Quixote de la Mancha, Dostoiévski, enfim, muitas coisas que uma pessoa deveria ter a chance de pelo menos ver algum dia, tudo aquilo estava a meu alcance. Pena que eu não soube aproveitar muito. Mas foi-me dado o legado.

A ciência me fascinava pelo desejo de saber o como e o porquê das coisas. Em casa, eu tinha a inspiração: meus pais e todo o arsenal de fontes de conhecimento. Fora de casa, tinha o complemento. Realmente, tenho sorte pela **família** que tenho. E é aos destaques acima que dedico este trabalho. Por tudo. Pela dedicação, pela convivência, pelo aprendizado, pela educação, pelo amor e carinho, e principalmente pela postura. Por terem me ensinado a ver que nenhuma riqueza é maior que esta, sou eternamente grato. Esta declaração de amor é pra vocês. Obrigado.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

A minha família pelo incentivo, dedicação e carinho em todos os momentos da minha vida.

A minha amada Maira, talvez a pessoa mais importante durante este Mestrado. Primeiramente por ser um dos motivos de eu ter aceitado realizá-lo. Depois por todo seu amor, compreensão, paciência e apoio nos momentos mais difíceis. Também à sua família, que com carinho, me fez sentir em casa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Milton Dias Jr., pela amizade e ajuda nos momentos decisivos.

Aos professores e colegas do DPM e do DMC, que de alguma forma ajudaram para que este trabalho fosse concluído.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao SDRL, da Universidade de Cincinnati, E.U.A., pelo uso da bancada experimental.

A todos aqueles que, mesmo indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“O choro pode durar uma noite, mas a alegria vem pela manhã”.

Salmo 30:5

Resumo

MIRANDA, Ubatan Almeida, *Aplicação de Métodos de Análise Tempo-Frequência ao Estudo de Sistemas Rotativos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 121 p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho apresenta-se uma aplicação de técnicas de análise de sinais no domínio tempo-frequência a sistemas rotativos. É de grande importância o conhecimento das características de um sistema rotativo operando em condições não estacionárias, como por exemplo, durante a partida ou parada de uma máquina. Com este intuito, este trabalho apresenta uma visão geral a respeito das características particulares das distribuições tempo-frequência, bem como sobre os aspectos computacionais associados à sua implementação. Discutem-se algumas particularidades inerentes às distribuições pertencentes à classe de Cohen, como os termos de interferência. As distribuições de Wigner e de Choi-Williams e a Transformada de Fourier de Curta Duração são discutidas em detalhes. Os resultados numéricos da aplicação das distribuições de Wigner e de Wigner direcional a rotores Jeffcott isotrópicos e anisotrópicos excitados pelo desbalanceamento são apresentados. Resultados experimentais da identificação de movimentos simultâneos de precessão direta e retrógrada também são mostrados.

Palavras Chave

Distribuições tempo-frequência, sistemas rotativos, sinais não-estacionários, classe de Cohen.

Abstract

MIRANDA, Ubatan Almeida, *On the Application of Time-Frequency Analysis to the Study of Rotating Systems*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, 100 p. Dissertação (Mestrado)

This work presents an application of signal analysis techniques in time-frequency domain to rotating systems. It's of great importance the knowledge of the inherent characteristics of a rotating machine operating under non-stationary conditions such as during the run up or shut down. For this reason, this dissertation presents a global overview of the particular properties of time-frequency distributions, and also over the computational aspects involved with their numerical implementation. Some characteristics of the Cohen's class distributions are discussed, like the interference terms. The Wigner and the Choi-Williams distributions as well as the Short Time Fourier Transformation are detailed discussed and analyzed. The Wigner and the directional Wigner distributions were applied to the unbalance response of isotropic and anisotropic Jeffcott rotors and the numerical results are also presented. As an experimental application of the time-frequency distributions, in its directional version, it was studied the phenomenon of simultaneous forward and backward whirling of flexible rotors supported by anisotropic bearings.

Key Words

Time-frequency distributions, rotating systems, Cohen's class, non-stationary signals

Índice

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vi
Nomenclatura	vii
1. Introdução	1
1.1 Motivação	4
1.2 Objetivos	4
1.3 Descrição do trabalho	5
2. Revisão da Literatura	7
2.1 Aspectos teóricos	8
2.2 Aspectos computacionais	10
2.3 Aplicações	13
2.4 Tendências	15
3. Análise de sinais no domínio tempo-freqüência.	19
3.1 Descrição dos sinais	19
3.2 Alguns conceitos necessários às representações tempo-freqüência	22
3.3 Classe geral de distribuições tempo-freqüência	27
3.3.1 A classe geral de Cohen	28

3.3.2 Propriedades básicas da função núcleo	29
3.4 Distribuição de Wigner	33
3.5 Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT)	39
3.6 Distribuições com interferência reduzida	46
3.7 Distribuição de Choi-Williams	48
4. Implementação numérica	51
4.1 Discretização de sinais contínuos	51
4.2 Transformada de Fourier discreta	52
4.3 Distribuição de Wigner discreta	54
4.3.1 Um processo de discretização	54
4.4. Classe de Cohen para sinais discretos	59
5. Aplicações e resultados simulados	67
5.1 Sinal analítico	68
5.2 Resolução das distribuições tempo-freqüência	69
5.3 Análise quantitativa	73
5.4 Aplicação ao estudo de sistemas rotativos	77
6. Resultados experimentais	89
6.1 Modos operacionais mistos	89
6.2 Descrição da bancada experimental	91
6.3 Verificação numérica	92
6.4 Resultados experimentais	96
6.4.1 Ensaios com rotação constante	96
6.4.2 Ensaios com rotação variável	99
7. Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros	109

7.1 Conclusões	109
7.2 Sugestões para trabalhos futuros	110
Referências Bibliográficas	113
Apêndice A	123

Lista de Figuras

3.1	Cálculo da distribuição de Wigner	34
3.2	Forma da distribuição de Wigner	35
3.3	Cálculo da distribuição pseudo-Wigner	38
3.4	Forma da distribuição pseudo-Wigner utilizando uma senóide	39
4.1	Discretização de sinais no domínio do tempo e seu efeito no domínio da frequência	53
4.2	Processo de expansão de um sinal real contínuo	57
4.3	Processo de superamostragem e dizimação de um sinal	58
4.4	Espectros dos sinais analíticos do sinal original do sinal expandido	59
4.5	Tipos de amostragem da função de autocorrelação temporal e seus espectros	62
5.1	Sinal multicomponente e seu espectro	68
5.2	Espectrograma, distribuição de Wigner e distribuição de Choi-Williams de um sinal multicomponente	70
5.3	Influência do tamanho da janela no resultado do espectrograma	72
5.4	Influência do parâmetro σ na resolução da distribuição de Choi-Williams	73
5.5	Distribuição de Wigner para a soma de dois sinais senoidais	75
5.6	Distribuição de Choi-Williams para um sinal original e modificado	75
5.7	Espectrograma para um sinal original e modificado	76
5.8	Movimento orbital em coordenadas complexas	78
5.9	Ilustração de um rotor Jeffcott	81
5.10	Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y	81
5.11	dPWD da resposta de um rotor isotrópico amortecido	82
5.12	Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y	83

5.13	dPWD da resposta de um rotor isotrópico amortecido	83
5.14	Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y	85
5.15	dPWD da resposta de um rotor isotrópico	86
5.16	Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y	86
5.17	dPWD da resposta de um rotor isotrópico	87
6.1	Bancada experimental	91
6.2	Modelo de elementos finitos do rotor	93
6.3	Amplitudes da resposta ao desbalanço para as estações 5 e 15	95
6.4	<i>SDI Plot</i> e modos operacionais de deflexão para algumas velocidades de rotação	95
6.5	Influência da distribuição espacial do desbalanço ao longo do rotor	97
6.6	Progressão das órbitas das estações para algumas velocidades de rotação	99
6.7	Filtro passa-banda Chebyshev utilizado nos sinais medidos	100
6.8	Distribuição pseudo-Wigner direcional experimental da estação 1	103
6.9	Distribuição pseudo-Wigner direcional experimental da estação 2	104
6.10	Distribuição pseudo-Wigner direcional experimental da estação 3	105
6.11	Distribuição pseudo-Wigner direcional experimental da estação 4	106
A.1	Processos de dizimação e interpolação	124
A.2	Espectros durante dizimação por fator 2	126
A.3	Espectros durante interpolação por fator 3	127

Lista de Tabelas

1.1	Relações entre defeitos em máquinas rotativas e direcionalidade da órbita	03
6.1	Correspondência entre o intervalo de pontos e o intervalo de tempo de análise na duração do sinal	98

Nomenclatura

Letras Latinas

Δt	Intervalo de tempo.
$\Delta \omega$	Intervalo de frequência.
$\langle t \rangle, \langle \omega \rangle$	Tempo e frequências médios de um sinal e sua transformada de Fourier.
A	amplitude de uma função senoidal.
$A_h(-\theta, \tau)$	Função ambigüidade da janela de observação.
$A_s(\theta, \tau)$	Função ambigüidade de um sinal.
$A_z(t)$	Amplitude do sinal analítico
$C(t, \omega)$	Classe de Cohen.
c_{xy}, c_{yx}	Amortecimento nas direções xy .
c_{xx}, c_{yy}	Amortecimento nas direções x e y .
f_i	Frequência instantânea.
f_a	Frequência de amostragem.
f_{Nyq}	Frequência de Nyquist.
$f_{m\acute{a}x}$	Frequência máxima de um sinal.
\mathcal{F}	Transformada de Fourier.
$h(\tau)$	Janela de observação no tempo
$H(\omega)$	Transformada de Fourier da janela de observação.
$H[]$	transformada de Hilbert.
j	$\sqrt{-1}$
k_{xy}, k_{yx}	Rigidez nas direções xy .
k_{xx}, k_{yy}	Rigidez nas direções x e y .
m	Massa do rotor.
$M(\theta, \tau)$	Função característica.
$M_{espec}(\theta, \tau)$	Função característica do espectrograma.
N, M	Número de componentes, número de pontos.
$P_{WIG}(t, \omega)$	Distribuição de Wigner.

\hat{P}_{WIG_f}	Distribuição de Wigner discreta.
$P_{STFT}(\omega)$	Transformada de Fourier de curta duração.
$P_{espec}(t, \omega)$	Espectrograma.
$P_{CW}(t, \omega)$	Distribuição de Choi-Williams.
$P(t)$	Margem no tempo.
$P(\omega)$	Margem na frequência.
$P(t, \omega)$	Densidade no domínio tempo-frequência.
$\text{Re}\{ \}$	Parte real de uma grandeza.
$R_s(t, \tau)$	Função de autocorrelação temporal contínua.
$R_s(n, m)$	Função de autocorrelação temporal discreta.
$R_s(\omega, \theta)$	Função de autocorrelação espectral contínua.
r_d	Amplitude da componente direta.
r_r	Amplitude da componente retrógrada.
$s_r(\tau)$	Sinal modificado pela presença da janela.
$s[n]$	Seqüência de amostras de um sinal no tempo.
$s(t), x(t), y(t), h(t)$	sinal no tempo.
$S(\omega), S(f)$	transformada de Fourier do sinal $s(t)$.
$ s(t) ^2, S(\omega) ^2$	densidade de energia do sinal $s(t)$.
t, u	Tempo.
T	Período de amostragem.
$z(t)$	sinal analítico correspondente de $s(t)$.
$z_d(t)$	Componente direta do sinal complexo.
$z_r(t)$	Componente retrógrada do sinal complexo.
$\hat{z}(nT)$	Sinal complexo amostrado.

.....

Letras Gregas

(θ, τ)	Domínio da ambigüidade.
$\delta(t)$	Função delta de Dirac.
ε	Excentricidade da massa em desbalanço.
$\phi(\theta, \tau)$	Função núcleo no domínio da ambigüidade.
$\phi_{WIG}(\theta, \tau)$	Função núcleo da distribuição de Wigner.
$\phi_{espec}(\theta, \tau)$	Função núcleo do espectrograma.
$\phi_{CW}(\theta, \tau)$	Função núcleo da distribuição de Choi-Williams.
$\psi(t, \omega)$	Função núcleo no domínio tempo-frequência.
$\varphi(t)$	Fase do sinal analítico.
$\mathcal{P}(t)$	fase ou argumento de uma função senoidal generalizada.

θ	<i>Lag</i> na frequência, ângulo.
σ	Parâmetro que controla os termos de interferência da distribuição de Choi-Williams.
σ_t	Desvio padrão de um sinal no tempo.
σ_ω	Desvio padrão da transformada de Fourier de um sinal.
τ	<i>Lag</i> no tempo.
ω	domínio da frequência.
ω_0	frequência de uma função senoidal.

.....

Superescritos

*	complexo conjugado, convolução.
<i>f</i>	Produto completo das amostras da função de autocorrelação.
<i>h</i>	Metade das amostras do produto da função de autocorrelação.
<i>d</i>	Produto duplo das amostras da função de autocorrelação.

.....

Subescritos

<i>k, l</i>	Índice das componentes de um sinal.
<i>CW</i>	Choi-Williams.
<i>espec</i>	Espectrograma.
<i>WIG</i>	Wigner

.....

Abreviações

<i>espec</i>	Espectrograma.
<i>CW</i>	Choi-Williams.
<i>WIG</i>	Wigner

.....

Siglas

dWD	Distribuição de Wigner direcional
dPWD	Distribuição pseudo-Wigner direcional.

FFT	Transformada rápida de Fourier.
SDI	Índice de forma e direcionalidade.
STFT	Transformada de Fourier de curta duração.
TFD	Distribuição tempo-freqüência.

.....

Capítulo 1

Introdução

A análise espectral, através da transformada de Fourier, é uma técnica amplamente utilizada para auxiliar na descrição do comportamento de máquinas e equipamentos. Entretanto, ela não é capaz de fornecer informações a respeito da localização, no tempo, das componentes espectrais de um sinal. Isto faz com que esta técnica torne-se inadequada para extrair as informações de sinais cujos conteúdos de frequência ou a amplitude das diversas componentes variem com o tempo, como ocorre em sinais não-estacionários. Estes tipos de sinais podem trazer informações importantes a respeito das condições operacionais de uma máquina. Desta forma, para tratar de sinais de natureza não-estacionária, é preciso utilizar outro tipo de ferramenta que forneça informações mais completas e que permita uma extração mais rica das características temporais e espectrais do sinal. As distribuições tempo-frequência enquadram-se exatamente nesta categoria. Através delas, é possível verificar como o conteúdo de energia de um sinal está distribuído, simultaneamente, nos domínios do tempo e da frequência, e assim pode-se identificar quando cada componente espectral do sinal ocorreu e também quais as componentes espectrais estão presentes num determinado instante.

Embora o desenvolvimento das distribuições tempo-frequência tenha se iniciado no campo da física quântica por volta da década de 30 com a distribuição de Wigner, verificou-se, mais recentemente, que estas técnicas poderiam ser muito úteis se aplicadas à análise de sinais não estacionários. O pioneirismo da distribuição de Wigner e da transformada de Fourier de curta duração (STFT) possibilitou que novos estudos se seguissem, permitindo que novas distribuições,

como as pertencentes à classe de Cohen, pudessem ser introduzidas. A aplicação intensiva destas técnicas na análise de sinais tornou-se efetiva a partir da década de 80. Desde então, muitos dos problemas encontrados nas distribuições, como a presença dos termos de interferência, foram sucessiva e intensivamente estudados com o objetivo de se chegar a uma distribuição que apresentasse resultados satisfatórios quando aplicada a qualquer tipo de sinal. Embora este objetivo ainda não tenha sido alcançado, uma vez que a escolha da distribuição depende do tipo de sinal a ser analisado, muitos resultados valiosos puderam ser obtidos, como, por exemplo, a utilização de distribuições dependentes do sinal (Baraniuk e Jones, 1993).

Atualmente, pode-se verificar a aplicação das distribuições tempo-frequência em uma grande variedade de situações das mais diversas áreas, como biomedicina, geologia, telecomunicações, radares e sonares e engenharia (Cohen, 1995). Neste último caso, é oportuno mencionar a grande importância da identificação das características de sistemas mecânicos através da localização temporal de seus conteúdos espectrais.

Dentre as diversas aplicações das distribuições tempo-frequência na área da engenharia mecânica, uma que tem se mostrado bastante promissora é na análise de sistemas girantes. Apesar da grande maioria dos trabalhos nesta área estarem voltados para as questões de monitoramento e detecção de falhas em máquinas rotativas, alguns estudos têm sido realizados no sentido de utilizar esta ferramenta para estimação da resposta ao desbalanceo e identificação de sistemas rotativos, na análise vibracional e acústica de componentes automotivos, e até na análise e estimação de parâmetros de sistemas não estacionários, entre outras. Vale a pena ressaltar o fato de que, com o auxílio das distribuições tempo-frequência, pode-se analisar sistemas operando em condições reais e, portanto, submetidos às cargas dinâmicas presentes durante o seu funcionamento. Este é o caso, por exemplo, de caixas de transmissões automotivas que operam, constantemente, com rotações variáveis e/ou mudanças de marchas e cujo comportamento vibratório e acústico dependem das cargas dinâmicas existentes durante estas condições fortemente não estacionárias.

Quando se estuda máquinas rotativas, é muito importante para o projetista ou analista ser capaz de extrair da resposta do sistema as informações relativas às componentes diretas e

retrógradas do movimento de precessão do rotor. Estas informações são valiosas e podem fornecer dados importantes a respeito do comportamento dinâmico da máquina, da sua condição real de operação e de possíveis falhas que o sistema possa apresentar. A Tabela 1.1, reproduzida de Goldman e Muszynska (1999), mostra algumas relações entre defeitos em máquinas rotativas e a direcionalidade da órbita.

Tipo de defeito	Componente em frequência	Direta	Retrógrada
Desbalanceamento	1X	+	Na presença de anisotropia na rigidez dos suportes
Carga radial unidirecional	1X	+	+
	2X	+	+
Fissura/trinca no rotor/eixo	1X	+	-
	2X	+	-
Contato completo para resposta auto-excitada	Frequência natural do sistema rotor-selagem	-	+

Tabela 1.1 – Relações entre defeitos em máquinas rotativas e direcionalidade da órbita. Os símbolos (+) e (-) representam a predominância das componentes direta e retrógrada, respectivamente. (Goldman e Muszynska, 1999 - modificado).

Mesmo durante a fase de projeto da máquina rotativa é importante conhecer a contribuição das componentes de precessão direta e retrógrada na resposta total de cada uma das estações do rotor. Isto se deve ao fato de que não é recomendável operar na condição de precessão retrógrada por um longo período de tempo, sob o risco de sofrer uma falha por fadiga precoce, tendo em vista que o eixo está submetido, nesta condição, a tensões alternadas.

Estes fatos ilustram bem a necessidade de se conhecer as características da direção do movimento de precessão de um sistema rotativo, operando em condições estacionárias ou não. Apesar de alguns programas comerciais já serem capazes de separar a resposta total nas componentes diretas (na faixa de frequências positivas) e retrógradas (na faixa de frequências negativas) em um único gráfico, chamado de *full spectrum*, eles ainda se baseiam no algoritmo da transformada de Fourier rápida que, como será discutido no Capítulo 3, não é uma ferramenta apropriada para analisar sinais não estacionários, como ocorre durante a partida e a parada da máquina, por exemplo. Neste caso, as distribuições tempo-frequência e, principalmente, as

distribuições tempo-frequência direcionais, surgem como alternativas interessantes para a caracterização destes sistemas mecânicos.

1.1 Motivação

Como pode-se perceber, pelo que foi apresentado anteriormente, as distribuições tempo-frequência abrem diversas novas possibilidades de análise de sistemas mecânicos operando em condições reais, muitas vezes não estacionárias. Infelizmente, esta ferramenta apresenta muitas restrições que ainda devem ser investigadas. Por outro lado, ela também possui características muito interessantes que acabaram por motivar o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

Na verdade, a motivação/objetivo deste trabalho encontra-se, hoje, muito além do escopo desta dissertação e do próprio estudo mais aprofundado das distribuições tempo-frequência. A idéia é desenvolver um conjunto de ferramentas integradas e complementares capazes de analisar o comportamento de uma máquina, estrutura ou componente mecânico mais (mas não somente) baseado na caracterização da resposta deste sistema quando opera em condições reais do que baseado em modelos, que muitas vezes assumem a linearidade do sistema e sua condição invariante com o tempo. Mais que isso, imagina-se que seja possível a utilização destas técnicas no auxílio ao aperfeiçoamento do modelo a partir dos parâmetros obtidos por estas ferramentas.

Assim, este trabalho faz parte das atividades do Grupo de Estudos em Dinâmica de Estruturas e Máquinas – GEDEM – do Laboratório de Vibrações do Departamento de Projeto Mecânico da Unicamp. Alguns outros trabalhos em desenvolvimento por membros deste grupo e que têm forte ligação com o tema desta dissertação de mestrado são: estudo de sistemas rotativos através das técnicas de análise de ordem, avaliação psico-acústica de componentes automotivos, estimação de parâmetros modais de sistemas operando em condições não estacionárias e/ou sem conhecimento da excitação, identificação e caracterização de não linearidades, entre outras.

1.2 Objetivos

Dentre os objetivos principais deste trabalho, pode-se destacar o estudo das potencialidades e limitações das distribuições tempo-freqüência, e suas versões direcionais, para a análise, qualitativa e quantitativa, de sinais de vibração de máquinas ou estruturas operando em condições reais, preferencialmente não estacionária.

Evidentemente, para atingir este objetivo e ampliar o leque de aplicações das distribuições tempo-freqüência, é preciso se aprofundar na formulação matemática e rever, detalhadamente, as condições sobre as quais estas distribuições se baseiam. Mais que isto, este estudo foi conduzido com o intuito de compreender o significado físico destas transformações e dos fenômenos associados a ela como, por exemplo, os termos de interferência. Estes termos estão presentes nas distribuições devido à não-linearidade destas e serão discutidos em detalhe no Capítulo 3.

1.3 Descrição do trabalho

Neste trabalho, a formulação matemática e as informações inerentes a cada distribuição utilizada serão descritas. Além disso, é necessário que sejam conhecidos os aspectos numéricos que tornam possível a utilização computacional desta ferramenta. Por fim, serão mostradas simulações numéricas visando consolidar a base teórica discutida, bem como resultados numéricos e experimentais de aplicações a sistemas rotativos. Uma breve descrição do conteúdo de cada um dos capítulos deste trabalho é apresentada a seguir.

No Capítulo 2 é feita uma revisão da literatura, desde a utilização destas ferramentas à análise de sinais, passando pela implementação computacional, as aplicações das distribuições tempo-freqüência em áreas relacionadas à engenharia mecânica – como detecção de falhas, identificação de modos de precessão, entre outras – e as tendências da pesquisa neste tema.

No Capítulo 3, apresenta-se a teoria que envolve as distribuições tempo-freqüência, suas características e propriedades, seu desenvolvimento matemático, bem como peculiaridades

inerentes a cada uma das três distribuições estudadas neste trabalho. Neste capítulo, será fornecida toda a base teórica necessária ao entendimento destas ferramentas.

No Capítulo 4, analisa-se a implementação computacional das distribuições tempo-frequência e discutem-se questões relacionadas ao *aliasing* e à reamostragem do sinal. Serão revistos alguns conceitos de análise de sinais, bem como os cuidados e precauções que se devem ter ao se realizar uma análise. Serão estudadas algumas premissas a respeito das distribuições tempo-frequência discretas.

No Capítulo 5 são mostradas algumas aplicações das distribuições tempo-frequência bem como alguns resultados importantes para a consolidação das características de algumas delas. A aplicação principal destas técnicas para a realização desta dissertação será evidenciada, e os resultados de sinais de resposta de máquinas rotativas utilizando-se uma distribuição tempo-frequência serão ilustrados.

No Capítulo 6, é apresentado um procedimento experimental utilizando-se uma bancada de testes que possui um rotor flexível apoiado sobre mancais anisotrópicos. Este sistema é analisado através da aplicação de distribuições tempo-frequência aos sinais de resposta durante sua partida e parada. A intenção é verificar experimentalmente a identificação de movimentos simultâneos de precessão direta e retrógrada em rotores flexíveis.

No Capítulo 7, são elucidadas as principais conclusões a que se chegou com a interpretação dos resultados obtidos. Além disso, as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas, no sentido de dar-se continuidade ao trabalho aqui mostrado.

Finalmente, é apresentada uma relação contendo as referências bibliográficas utilizadas, bem como um apêndice que trata de processos de mudança da taxa de amostragem de um sinal discreto.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

O histórico das pesquisas realizadas a respeito das distribuições tempo-frequência se inicia com o trabalho de Wigner, em 1932, quando ele introduz a distribuição que leva seu nome. Ville, no final da década de 40, aplica a distribuição de Wigner ao processamento de sinais e introduz o chamado sinal analítico. Apesar de não se saber ao certo quando ocorreu, acredita-se que o espectrograma - e a transformada de Fourier de curta duração - também é contemporâneo à distribuição de Wigner. É importante ressaltar também o trabalho de Cohen, em 1966, quando ele introduz, no contexto da mecânica quântica, a classe generalizada de distribuições bilineares denominada classe de Cohen. Acredita-se que este tenha sido um dos trabalhos mais relevantes em todo o desenvolvimento histórico das distribuições tempo-frequência. Somente depois que Ville utilizou as distribuições tempo-frequência na área de análise de sinais é que se buscou uma diversificação maior nas aplicações destas distribuições. Esta diversificação foi mais significativa a partir dos anos 80, quando foram desenvolvidas inúmeras novas utilizações das distribuições tempo-frequência.

A seguir, apresenta-se uma revisão dos trabalhos existentes na literatura sobre distribuições tempo-frequência em geral e procura-se situar o presente trabalho dentro daquilo que tem sido feito na área. Esta revisão foi dividida, para melhor compreensão dos diversos aspectos do desenvolvimento das distribuições tempo-frequência, em quatro grandes partes: aspectos teóricos, aspectos computacionais, aplicações e tendências. Alguns dos trabalhos consultados e citados podem não ter sido explicitamente utilizados durante o tempo desta pesquisa, porém têm sua

importância no sentido de que servem de ferramentas para o conhecimento e podem mostrar sua utilidade em trabalhos futuros. Além disso, a principal finalidade de sua inserção nesta parte é mostrar a diversidade de técnicas, características e propriedades que abrangem estas distribuições.

2.1 Aspectos teóricos

Os artigos de Cohen (1989) e Hlawatsch & Bartels (1992) podem ser considerados como referências no que diz respeito aos conceitos teóricos básicos das distribuições tempo-freqüência. Estes trabalhos apresentam as características básicas das distribuições tempo-freqüência, com ênfase nas distribuições quadráticas bilineares da classe de Cohen. O trabalho de Cohen (1989) faz uma revisão desta classe de distribuições, descrevendo suas propriedades e discutindo algumas de suas características inerentes. No trabalho de Hlawatsch & Bartels (1992), os autores mostram algumas particularidades de distribuições lineares - como a transformada de wavelets e a transformada de Fourier de curta duração (STFT) - e quadráticas - representadas pelos membros da classe de Cohen. Da mesma forma que no trabalho de Cohen, este traz algumas características e propriedades das distribuições, bem como algumas aplicações na área de acústica.

Os três trabalhos de Claasen & Mecklenbräuker (1980) são pioneiros no estudo e análise mais aprofundados das distribuições tempo-freqüência. Cada um deles trata da distribuição de Wigner sob um aspecto diferente. No primeiro, eles relatam a teoria que envolve a distribuição de Wigner para um sinal contínuo no tempo. A segunda parte introduz uma forma de se obter a distribuição de Wigner discreta, a partir de um sinal amostrado, e que talvez seja a primeira versão. Finalmente, o terceiro artigo mostra as relações entre a distribuição de Wigner e outras distribuições que também pertencem à classe de Cohen.

A introdução das distribuições positivas foi realizada por Cohen e Posch (1985). Ao contrário da maioria das distribuições da classe de Cohen, que, por serem bilineares, apresentam partes negativas, os autores consideram, neste trabalho, a possibilidade de construir distribuições que sejam estritamente positivas. Além disso, estas distribuições, que podem ser aplicadas a quaisquer sinais, além de atenderem a algumas propriedades importantes nas distribuições tempo-

freqüência, como as condições marginais, por exemplo. Este artigo mostra também que, neste tipo de distribuição, a função núcleo passa a ser dependente do sinal.

O trabalho de Flandrin & Hlawatsch (1987) mostra alguns aspectos interessantes a respeito dos termos de interferência, que são umas das principais características das distribuições bilineares quando aplicadas a sinais que possuem mais de uma componente espectral. Ao utilizar a distribuição de Wigner para este estudo, fazem também uma comparação da generalidade desta distribuição, ao analisar a influência de certos parâmetros de uma distribuição de Wigner generalizada na geometria de interferência da distribuição.

Ainda a respeito dos termos de interferência, Choi & Williams (1989) introduzem a distribuição Exponencial (ED), mas que, na literatura, leva o nome dos autores – distribuição de Choi-Williams. Ao fazer uma análise dos termos de interferência a partir da função ambigüidade, propõem uma função núcleo na forma exponencial, que suprime os termos cruzados e valorizam os termos próprios da distribuição bilinear, reduzindo o efeito - por vezes indesejável - das interferências. A distribuição de Choi-Williams possui um parâmetro na sua função núcleo que controla a intensidade dos termos de interferência, mantendo uma boa resolução no tempo e na freqüência. Uma generalização desta distribuição foi feita por Diethorn (1994), que modificou a distribuição de Choi-Williams colocando valores arbitrários no expoente das variáveis da função núcleo. O trabalho apresenta alguns exemplos nos quais pode-se perceber uma melhoria da resolução e redução dos termos de interferência em relação à distribuição de Choi-Williams.

Muitos estudos seguiram-se a este no intuito de encontrar uma função núcleo que produzisse uma distribuição que satisfizesse propriedades básicas como as margens e o suporte finito, possuísse boa resolução no tempo e na freqüência e, simultaneamente, amenizasse os efeitos dos termos de interferência. Algumas novas funções núcleo foram propostas para este fim, dentre elas aquela descrita por Zhao, Atlas & Marks (1990), chamada função núcleo cônica (*cone-shaped*), e a desenvolvida por Costa & Bartels (1995) para gerar a chamada distribuição exponencial multiforme e moldável (*multiform, tiltable, exponential distribution - MTED*). Além destas, foi introduzido por Jeong & Williams (1992) um novo grupo de distribuições que visam reduzir as interferências, além de proporcionar boa resolução de tempo e na freqüência. As

chamadas distribuições de interferência reduzida (RID) foram introduzidas a partir de uma análise da função ambigüidade, de forma que a função núcleo, para estas distribuições, funcione como um filtro passa-baixas no plano ambigüidade. Sabendo-se que, neste plano, os termos próprios localizam-se próximos à origem e que os termos cruzados estão afastados dela, uma função núcleo com esta característica diminui o efeito dos termos de interferência e proporciona boa resolução tempo-freqüência.

Ainda no âmbito dos termos de interferência, Jeong & Williams (1992) estudam o efeito destes termos de interferência no espectrograma. Muitos acreditam que o espectrograma não possua termos de interferência, imaginando que esta não seja uma distribuição bilinear. Porém, como esta distribuição pode ser escrita com um membro da classe de Cohen, ela é bilinear e, portanto, possui termos de interferência. Estes termos não são notados nos espectrogramas simplesmente porque se considera que eles sejam filtrados no plano ambigüidade por um filtro passa-baixas, como consequência do uso da janela aplicada ao sinal analisado.

A relação entre resolução e intensidade dos termos de interferência nas distribuições tempo-freqüência sempre desempenharam um papel importante nas pesquisas realizadas nesta área. Em trabalho recente de Lee, Kim & Kim (2001), é introduzida uma nova abordagem para a distribuição de Wigner, que passa a ser chamada de distribuição de Wigner melhorada (*enhanced WD*). Ela é melhor aplicada a sistemas, uma vez que é definida como o resultado da convolução entre a WD do sinal de entrada e a WD da função de resposta ao impulso do sistema. Por ser definida desta forma, esta versão proporciona uma melhor identificação das componentes espectrais do sinal, uma vez que os termos de interferência são reduzidos, da mesma forma que na distribuição de Wigner modificada (*smoothed WD*), porém com melhor resolução que esta última.

2.2 Aspectos computacionais

Como será visto no Capítulo 4, os métodos de implementação das distribuições tempo-freqüência assumem um papel importante no cálculo destas transformadas. Pode-se dizer que o maior problema encontrado para se obter, computacionalmente, os resultados destas

representações é o fenômeno do *aliasing*. Evidentemente, quando se pensa em desenvolver uma distribuição tempo-frequência discreta, tem-se como objetivo obter uma distribuição que possua as mesmas características e apresente, se não todas, a maioria das propriedades da distribuição contínua. Pensando desta forma, Claasen & Mecklenbräuer (1980) introduziram a primeira versão discreta de uma representação tempo-frequência. A distribuição de Wigner proposta por eles, para sinais discretos, possui algumas propriedades diferentes das comumente visualizadas na transformada de Fourier como, por exemplo, a periodicidade do espectro neste plano a cada π amostras normalizadas, quando na transformada de Fourier esta periodicidade é de 2π . Por isto, verifica-se que esta versão apresentará o fenômeno de *aliasing* a menos que o sinal seja superamostrado por um fator 2. Este artigo também apresenta a relação entre esta versão da distribuição de Wigner discreta com a versão contínua.

Em 1983, Claasen & Mecklenbräuer descrevem as características necessárias de uma distribuição de Wigner discreta como sendo a manutenção das propriedades da versão contínua, a ausência de *aliasing* e a facilidade computacional. Baseados nestas características desejáveis para a obtenção das representações discretas, os autores fazem comparações numéricas para verificar a eficácia de diversas versões de implementações computacionais. Primeiramente, descrevem uma versão baseada num procedimento de interpolação, sendo então livre de superposição espectral, mas não satisfazendo algumas propriedades importantes. Em seguida, utilizam os resultados obtidos em seu trabalho anterior (Claasen & Mecklenbräuer (1980)) e reafirmam que, para evitar o *aliasing*, o sinal deve ser superamostrado ou interpolado. Contudo, neste caso, nem todas as propriedades da versão contínua são satisfeitas. Finalmente, consideram um trabalho de Nuttall e concluem que a versão proposta por este não evita o fenômeno de *aliasing* e que, mesmo modificada para evitar o *aliasing*, esta não satisfaz a todas as propriedades. Assim, os autores concluem que não há maneira direta de se obter uma distribuição discreta a partir da contínua, mantendo as características e propriedades desta última.

Uma definição unificada para a distribuição de Wigner em tempo discreto, frequência discreta e tempo-frequência discretos é proposta por Peyrin & Prost (1986). Neste trabalho, a versão em tempo discreto é definida, via teorema da amostragem, a partir da utilização de um sinal amostrado na versão contínua da distribuição de Wigner. O resultado final mostra uma

conclusão já citada anteriormente: a distribuição de Wigner tem periodicidade correspondente à metade da periodicidade obtida pela transformada de Fourier. Desta forma, o sinal deve ser superamostrado por um fator 2. A distribuição discreta na frequência é calculada considerando-se a simetria existente entre o sinal e seu espectro, que mostra uma dualidade entre as representações no tempo e na frequência. Já uma versão discreta tanto no tempo quanto na frequência é obtida, mas possui a característica de não poder ser livre de *aliasing*.

A utilidade do uso do sinal analítico na versão discreta da distribuição de Wigner é evidenciada na publicação de Boashash (1988). Neste trabalho, o autor mostra que o fato deste tipo de sinal eliminar as componentes de frequências negativas auxilia na eliminação do *aliasing* quando se utilizam sinais discretos. É mostrado um exemplo em que o espectro de um sinal discreto contém *aliasing*, enquanto o espectro do sinal analítico não contém. Isso mostra como este tipo de sinal auxilia a obtenção da distribuição de Wigner livre deste efeito.

Como pode-se perceber, todos os trabalhos citados até o momento se propunham a obter uma versão discreta da distribuição de Wigner. Isto ocorreu porque esta é, de certa forma, uma distribuição simples no seu conceito, e por ter sido, historicamente, a primeira a ser aplicada à teoria de sinais. Contudo, depois que Cohen (1966) conseguiu agrupar um conjunto de distribuições com características diferentes dentro de uma classe única, vislumbrou-se a possibilidade de se tentar desenvolver versões discretas para toda a classe de Cohen e não apenas para a distribuição de Wigner. Uma destas tentativas de se calcular a versão discreta desta classe generalizada, com a característica principal de estar livre de *aliasing*, foi proposta por Jeong & Williams (1992) e foi chamada de distribuição tempo-frequência generalizada discreta livre de *aliasing* (*alias-free generalized discrete time-frequency distributions* - AF-GDTFD). Utilizando-se do conceito de função de autocorrelação generalizada do sinal, os autores utilizam-se de artifícios para garantir que esta função não contenha *aliasing*. A classe de Cohen discreta é então calculada como a transformada de Fourier desta função de autocorrelação generalizada. Também são discutidas as propriedades necessárias à função núcleo para que se possa calcular esta versão livre de *aliasing*.

Cunningham & Williams (1994) introduziram uma metodologia para realizar cálculos das distribuições tempo-freqüência generalizadas com menor custo computacional. Foi utilizada a decomposição em espectrogramas como aproximação para uma distribuição generalizada, que permite uma relação entre tempo computacional e erro nas aproximações.

Num trabalho interessante, Costa & Bartels (1994) fazem uma comparação entre alguns das mais importantes versões de representações tempo-freqüência existentes, com o intuito de descobrirem a mais eficiente. Expondo as principais características dos métodos comparados, realizam simulações numéricas para verificarem quais as definições para distribuição de Wigner discreta que realmente apresentam ausência de *aliasing*. Este trabalho foi mais amplamente explorado na publicação de Costa & Bartels (1999).

2.3 Aplicações

Como já foi mencionado, as distribuições tempo-freqüência surgiram inicialmente no campo da mecânica quântica, primeiramente com a distribuição de Wigner e, tempos depois, com a classe proposta por Cohen. Depois que se pôde associar a noção de posição e momento da física quântica com a noção de tempo e freqüência na teoria de sinais (Cohen, 1985), as aplicações propostas para as distribuições tempo-freqüência foram inúmeras e em diversas áreas, tais como: acústica, biomedicina, biomecânica, telecomunicações, sismologia, processamento de imagem, dinâmica de máquinas e estruturas entre outras. Mais especificamente na área de mecânica, estas ferramentas têm sido aplicadas com sucesso para detecção de falhas em máquinas e equipamentos, como demonstram Meng & Qu (1991), que aplicam a distribuição de Wigner com esta finalidade. Estes autores mostram alguns exemplos em que esta técnica é aplicada, como é o caso da detecção de uma falha na pista de um mancal de rolamentos - já que é possível localizar no tempo as freqüências correspondentes à falha - ou da identificação de um dente quebrado em uma engrenagem.

Lee e White (1997) propõem o uso da distribuição de Wigner juntamente com as chamadas estatísticas de alta ordem (*HOS*) para analisar sinais de vibração impulsiva em máquinas rotativas. Este método é aplicado a sinais de motores de automóveis e engrenagens com o

objetivo de identificar falhas nestes componentes. Mostra-se que os espectros de Wigner de alta ordem levam vantagem sobre a distribuição de Wigner tradicional no monitoramento e detecção de falhas para os casos analisados, uma vez que conseguem suprimir os efeitos dos termos de interferência.

Uma nova aplicação das distribuições tempo-freqüência é mostrada por Bucher & Ewins (1997), no qual eles utilizam o espectrograma para decompor sinais vibratórios de máquinas rotativas dependentes da velocidade. A decomposição da resposta vibratória é feita em função dos movimentos de precessão direta e retrógrada do sistema girante, do conteúdo em freqüência, do comprimento de onda e velocidade de rotação. Para o caso de vibrações de um eixo, apenas dois sensores dispostos perpendicularmente são necessários para separar as componentes direta e retrógrada. No caso de um disco girante, mais sensores são necessários para decompor a resposta em comprimentos de onda espaciais e também em suas direções de precessão.

A aplicação de técnicas de distribuições tempo-freqüência na identificação da direcionalidade de máquinas rotativas é mostrada por Lee & Han (1998). Neste trabalho, os autores introduzem a chamada distribuição de Wigner direcional (dWD). O procedimento inicia-se com as medições dos sinais de resposta de uma máquina rotativa, com sensores dispostos perpendicularmente entre si, através dos quais pode-se calcular a resposta deste rotor em coordenadas complexas. Em seguida, dois sinais analíticos são computados e as distribuições de Wigner destes sinais são obtidas. Este método faz com que as freqüências positivas contenham apenas as componentes referentes ao movimento de precessão direta, enquanto que as freqüências negativas contenham as componentes de precessão retrógrada. Uma consequência direta deste procedimento é que não serão obtidos termos de interferência entre freqüências positivas e negativas da distribuição tempo-freqüência direcional. Os autores mostram que a auto-dWD mostra a forma e directividade do movimento plano instantâneo enquanto a dWD cruzada indica o ângulo de inclinação deste movimento. Esta técnica é utilizada em casos como o de um rotor durante sua partida ou de um motor de automóvel durante sua partida, estabilização e parada, por exemplo.

Baseada nesta técnica descrita anteriormente, Lee, Robb, Besant (2001) propuseram uma nova distribuição, chamada distribuição de Choi-Williams direcional (dCWD), que tem o objetivo de proporcionar os mesmos resultados da distribuição de Wigner direcional, ou seja, separar as componentes diretas das retrógradas em sistemas rotativos. Os resultados obtidos para sinais simulados são comparativamente melhores que os da distribuição de Wigner e da distribuição de Choi-Williams tradicionais.

Ainda utilizando a dWD, Lee & Han (1999) aplicam esta distribuição a sinais de resposta de um rotor para a realização da análise de ordem (*order tracking*). O método consiste em obter a frequência de rotação instantânea através da dWD e integrá-la em relação ao tempo, resultando no deslocamento angular instantâneo. Este, por sua vez, é interpolado para se chegar ao sinal reamostrado que será necessário para se fazer a análise de ordem. Este método faz com que seja desnecessário o uso de um tacômetro para se obter um sinal síncrono à rotação do rotor. Desta forma, como a dWD apresenta boa resolução no plano tempo-frequência, é possível obter resultados confiáveis caso em que não seja possível obter o sinal de pulso proveniente do tacômetro.

2.4 Tendências

Como foi dito anteriormente, um dos maiores problemas encontrados na teoria das distribuições tempo-frequência bilineares é a dependência desta ferramenta ao tipo de aplicação e também à presença de termos de interferência na análise de sinais multicomponentes. Uma das tentativas para se contornar esta última dificuldade é através de distribuições com interferência reduzida. Contudo, estas distribuições têm o inconveniente de não satisfazerem algumas propriedades das TFDs generalizadas e também de diminuem a resolução. Surgiram então as chamadas distribuições tempo-frequência dependentes do sinal, que utilizam as funções núcleo adaptativas. Jones & Parks (1990) introduzem um tipo de distribuição adaptativa de alta resolução que supera as limitações da STFT e elimina os termos cruzados. A representação baseia-se na STFT e utiliza funções gaussianas que variam sua largura no tempo e na frequência. Esta distribuição apresenta boa resolução e concentração no plano tempo-frequência para todas as componentes do sinal.

Buscando uma distribuição que melhor se adeque a várias aplicações, Baraniuk & Jones (1993) introduzem um método para a criação de uma função núcleo ótima. Esta nova classe de distribuições se adapta a cada sinal, oferecendo boa performance para uma grande variedade de sinais. A formulação é baseada num problema de otimização e resulta num programa linear, cuja solução, de acordo com o sinal analisado, dá origem à função núcleo ótima, e conseqüentemente, à distribuição tempo-freqüência. Um algoritmo rápido para o cálculo destas distribuições também foi proposto por Baraniuk & Jones (1994) para resolver o problema linear com uma complexidade computacional da mesma ordem que a utilizada para se calcular distribuições com funções núcleo independentes. Jones & Baraniuk (1995) introduzem uma nova função núcleo adaptativa (*Adaptive Optimal Kernel* – AOK) baseada numa função gaussiana, mas que possibilita um processamento em tempo real e traça corretamente as componentes de um sinal variante no tempo. Embora o custo computacional seja maior que numa distribuição com função núcleo fixo (independente do sinal), sua eficácia e performance são melhores.

Atualmente, a análise modal é uma ferramenta bastante difundida na indústria e amplamente utilizada para estimação de parâmetros modais de sistemas mecânicos. Mais recentemente, surgiram algumas técnicas que permitem a identificação destes parâmetros modais através dos modos operacionais ou sem o conhecimento da força de excitação. Contudo, estas técnicas pressupõem que o sistema esteja operando em condições estacionárias, o que, em muitos casos, não é uma consideração razoável. Assim, quando encontram-se características não estacionárias no sistema, as técnicas tradicionais de análise modal não mais se aplicam para obter tais resultados e as técnicas baseadas nas distribuições tempo-freqüência surgem como uma alternativa para análise de tais sistemas.

Bonato *et al* (1997) aplicam as distribuições de Choi-Williams e de Wigner na análise de estruturas da construção civil submetidas à excitação natural, geralmente desconhecida, em condições de serviço. Freqüências naturais, modos de vibrar e não-linearidades são detectados a partir destas técnicas e de algumas propriedades da função ambigüidade, que levam à utilização de filtros modais no domínio do tempo. Foi concluído também que o uso da correlação cruzada instantânea pode solucionar alguns problemas de acoplamento de modos. Mais recentemente,

Bonato *et al* (2000) introduzem um novo método que propõe aplicar distribuições próprias e cruzadas da classe de Cohen em sistemas sob condições de serviço e sem conhecimento da excitação. Os sinais medidos a partir da estrutura são utilizados para identificar seus modos de vibrar. Neste trabalho, definem-se estimadores no domínio tempo-freqüência, gerando resultados que mostram ser possível separar freqüências modais de componentes de excitação. Em termos de resolução, esta técnica também apresenta vantagens sobre as mais tradicionais, e parece ser mais robusto na presença de excitações não-estacionárias e condições fracamente não-lineares.

Uma maneira de se extrair os parâmetros modais de um sistema se dá através da resposta ao impulso deste sistema. Uma comparação entre a transformada de wavelets e os métodos tradicionais FFT é feita por Robertson, Park & Alvin (1998). O método por eles proposto se mostra eficiente na determinação das funções de resposta ao impulso de sistemas sujeitos a excitações harmônicas e a sinais contendo descontinuidades. Quando o sistema é sujeito a uma excitação do tipo *burst random*, o método proposto apresenta resultados tão satisfatórios quanto os tradicionais, e ainda com maior eficiência computacional. Ao ser utilizada a excitação completamente aleatória, os métodos apresentam dificuldades, porém o método baseado em wavelets apresenta-se melhor ao traçar os modos fundamentais de resposta do sistema.

Capítulo 3

Análise de Sinais no Domínio Tempo-Freqüência

Neste capítulo, são introduzidas as bases teóricas e matemáticas que definem as distribuições tempo-freqüência. Assim, apresenta-se inicialmente uma breve descrição sobre análise de sinais e introduz-se o conceito de sinal analítico. Em seguida, expõem-se alguns conceitos importantes necessários para caracterizar as distribuições tempo-freqüência e, finalmente, discute-se cada uma das distribuições utilizadas neste trabalho.

3.1 Descrição dos sinais

Um dos sinais mais simples variantes com o tempo tem a forma senoidal. Este sinal é particularmente interessante, pois é solução de diversas equações de movimento fundamentais e é uma boa aproximação para alguns fenômenos observados na prática. Este tipo de sinal tem como características uma freqüência constante, ω_0 , e uma amplitude, também constante, A , e pode ser expresso por:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t), \quad (3.1)$$

Este sinal pode ser generalizado para o caso da freqüência e amplitude variantes com o tempo:

$$s(t) = A(t) \cos \mathcal{G}(t), \quad (3.2)$$

em que $\vartheta(t)$ é a fase do sinal e $A(t)$ a sua amplitude, ambos variantes com tempo.

Como se sabe, estes sinais também podem ser analisados no domínio da frequência. A importância da análise do sinal neste domínio pode ser constatada observando-se, por exemplo, que é possível conhecer características intrínsecas do sinal, ou mesmo do sistema que o gera, a partir do seu espectro, como se verifica nas aplicações de análise espectral para detecção de falhas em estruturas girantes, ou na análise modal; outra razão pode ser apresentada ao se notar que a propagação das ondas num meio depende da frequência da onda.

A transformação de um sinal estacionário do domínio do tempo, como o da Equação 3.1, para o domínio da frequência é feita através da transformada de Fourier, que pode ser representada pela seguinte equação:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) e^{-j\omega t} dt^{(1)}, \quad (3.3)$$

e sua inversa, que leva o sinal de volta para o domínio do tempo, é dada por

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.4)$$

Quando os sinais são não estacionários, como aquele descrito pela Equação 3.2, este par de transformações não se aplica (ou, pelo menos, fornecem resultados incorretos) e outras ferramentas devem ser utilizadas para transformá-los do domínio do tempo para o da frequência e vice-versa.

Como se sabe, o espectro de um sinal real, $s(t)$, satisfaz $S(-\omega) = S^*(\omega)$ e, sendo assim, sua densidade espectral de energia, $|S(\omega)|^2$, será sempre simétrica em relação à origem. Desta forma, a frequência média do sinal será sempre zero, o que não contribui para uma boa

⁽¹⁾ Durante todo o trabalho, considerar limites de integração de $-\infty$ a $+\infty$ sempre que estes limites forem suprimidos das equações.

interpretação do comportamento do sinal ou sistema. Assim, pode ser interessante, em alguns casos - que serão descritos mais adiante neste capítulo -, construir um novo sinal, a partir do sinal real $s(t)$, que contenha o mesmo espectro na faixa de frequências positivas e seja nulo para a faixa de frequências negativas.

Assim, considerando-se um sinal real mensurável, $s(t)$, cujo espectro é $S(\omega)$, o sinal $z(t)$ que contém o mesmo espectro de $s(t)$ na faixa de frequências positivas e seja nulo para a faixa de frequências negativas é obtido através da transformada de Fourier inversa de $S(\omega)$, integrando-se apenas nas frequências positivas, ou seja,

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.5)$$

Introduzindo a transformada de Fourier nesta expressão, chega-se a

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j\omega t'} e^{j\omega t} dt' d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{j\omega(t-t')} dt' d\omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Utilizando a relação (Cohen, 1995)

$$\int_0^{+\infty} e^{j\omega x} d\omega = \pi\delta(x) + \frac{j}{x}, \quad (3.7)$$

obtem-se

$$z(t) = \frac{1}{\pi} \int s(t') \left[\pi \delta(t-t') + \frac{j}{t-t'} \right] dt', \quad (3.8)$$

e, finalmente,

$$z(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int \frac{s(t')}{t-t'} dt', \quad (3.9)$$

que é o chamado sinal analítico. Como pode-se perceber, $z(t)$ é um sinal complexo e sua parte imaginária é formada pela transformada de Hilbert de $s(t)$, definida por

$$H[s(t)] = \frac{1}{\pi} \int \frac{s(t')}{t-t'} dt'. \quad (3.10)$$

Ou seja, o sinal analítico é dado por

$$z(t) = s(t) + jH[s(t)], \quad (3.11)$$

que na forma exponencial pode ser calculado por

$$z(t) = A_z(t) \cdot e^{j\varphi(t)}, \quad (3.12)$$

em que $A_z(t)$ é a amplitude e $\varphi(t)$ é a fase do sinal analítico.

3.2 Alguns conceitos necessários às representações tempo-freqüência

Na análise de sinais estacionários, em que o conteúdo de freqüência é invariante no tempo, a transformada de Fourier se aplica muito bem para obter informações corretas a respeito do sinal no domínio da freqüência. Tanto o sinal temporal quanto seu espectro carregam suas informações completas, embora nenhuma destas representações revele explicitamente o espectro de freqüência num instante particular, nem o instante em que ocorre uma componente espectral. Caso, ao contrário, um sinal apresente seu conteúdo de freqüência variando com o tempo, não se pode afirmar com absoluta certeza, utilizando-se esta mesma técnica, que todas as informações observadas sejam corretas ou completas. Surge daí a necessidade de se examinar estes sinais

através de uma ferramenta mais poderosa, que permita mostrar maiores detalhes a respeito do conteúdo do sinal. Uma técnica deste tipo é a análise de distribuições tempo-frequência, que visa desenvolver uma função que descreva como o conteúdo de energia de um sinal está distribuído simultaneamente nos domínios do tempo e da frequência, permitindo uma localização do espectro no tempo.

A seguir são apresentadas algumas definições que envolvem a análise tempo-frequência e que são necessárias para um melhor entendimento desta ferramenta.

Densidades. Sendo $|s(t)|^2$ a densidade de energia de um sinal por unidade de tempo, num dado instante t , a densidade de energia durante um intervalo de tempo Δt será dada por $|s(t)|^2 \Delta t$. No domínio da frequência, se a densidade de energia por unidade de frequência, em uma frequência ω , é dada por $|S(\omega)|^2$, então a densidade de energia num intervalo de frequência $\Delta\omega$ será dada por $|S(\omega)|^2 \Delta\omega$. Por fim, como se deseja obter a distribuição de energia num plano tempo-frequência, considera-se que a densidade de energia num instante t e numa frequência ω seja dada por $P(t, \omega)$. Assim, a densidade de energia contida numa célula de dimensões Δt e $\Delta\omega$ será $P(t, \omega) \Delta t \Delta\omega$.

As grandezas que serão discutidas neste trabalho são as densidades (ou distribuições) de energia de um sinal no tempo e na frequência, ou seja, são densidades bidimensionais. Uma densidade bidimensional será tratada como uma quantidade de energia por unidade de tempo e por unidade de frequência num ponto (t, ω) do plano tempo-frequência, de forma que a energia total seja dada por

$$\text{Energia Total} = \iint P(t, \omega) d\omega dt = 1. \quad (3.13)$$

Esta quantidade é normalizada a 1 para que um valor qualquer da densidade corresponda a uma fração do total.

Nestas condições, o termo densidade é facilmente compreendido. Em certas áreas, porém, o termo **distribuição** é utilizado com o mesmo significado, pois também é uma maneira de indicar como uma grandeza pode estar distribuída. Estes tipos de representações aqui estudados surgiram no campo da mecânica quântica, onde os termos “densidade de probabilidade” ou “distribuição” são propriamente aplicados, já que esta área é inerentemente probabilística. Para sinais determinísticos, em que não há nenhuma consideração probabilística associada, deve-se imaginar as distribuições como “intensidades” ou “densidades”, no verdadeiro sentido das palavras, ou mesmo da forma em que a energia do sinal está distribuída no plano tempo-freqüência.

Funções Características. A função característica é um conceito importante no estudo e construção das densidades, uma vez que muitas das características das distribuições podem ser obtidas através delas. Sua importância será melhor explorada na seção 3.3. Uma função característica é definida como a transformada de Fourier da distribuição tempo-freqüência, ou seja,

$$M(\theta, \tau) = \iint e^{j\theta t + j\tau \omega} P(t, \omega) dt d\omega. \quad (3.14)$$

Os parâmetros θ e τ possuem unidades de freqüência e tempo, respectivamente. Como os pares da transformada de Fourier são unicamente relacionados, ou seja, um pode ser calculado diretamente a partir do outro, é possível obter a distribuição a partir da transformação inversa da função característica, através da expressão

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint M(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau \omega} d\theta d\tau. \quad (3.15)$$

Margens. Somando-se a distribuição de energia para todas as freqüências num determinado instante de tempo, obtém-se a potência instantânea ou densidade de energia no tempo. Da mesma maneira, somando-se a distribuição de energia para todos os instantes de tempos numa determinada freqüência, obtém-se a densidade espectral de energia. Idealmente, uma densidade em tempo-freqüência deve satisfazer as seguintes condições:

$$\int P(t, \omega) d\omega = P(t) = |s(t)|^2 \quad (3.16)$$

$$\int P(t, \omega) dt = P(\omega) = |S(\omega)|^2. \quad (3.17)$$

Estas são as chamadas condições marginais no tempo e na frequência, respectivamente. Nota-se que caso as condições marginais sejam satisfeitas, a distribuição satisfaz o requerimento de energia total do sinal,

$$E = \iint P(t, \omega) d\omega dt = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.18)$$

Frequência instantânea. Quando se trata de sinais não-estacionários, a noção de frequência do sinal perde um pouco o sentido, exigindo a introdução de um importante conceito, o de frequência instantânea. Pode-se dizer que este parâmetro define a localização do pico espectral de um sinal variante no tempo. Fisicamente, este conceito somente tem significado para sinais monocomponentes, em que existe apenas uma frequência, ou uma pequena faixa de frequências, e que variam com o tempo. Para sinais multicomponentes, a noção de frequência instantânea única torna-se sem sentido, sendo necessário um desmembramento em suas componentes.

Como já foi mencionado, um sinal estacionário $s(t)$ pode sempre ser representado por uma soma ponderada de sinais harmônicos, ou seja, uma soma de senos e cossenos. Sua decomposição espectral é obtida utilizando-se a transformada de Fourier do sinal, e sua transformada inversa para sintetizar o sinal. Este par de transformadas só tem significado para este tipo de sinais, ou seja, cujo espectro, $S(\omega)$, seja constante a qualquer instante de tempo. Assim, qualquer sinal estacionário pode ser representado como uma soma ponderada de senos e cossenos, com frequências, amplitudes e fases particulares.

No que se refere a sinais não-estacionários, a frequência instantânea, f_i , é definida como a taxa de variação do ângulo de fase do sinal analítico num instante t , ou seja,

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.19)$$

Assim, do ponto de vista de distribuições tempo-freqüência, a freqüência instantânea é considerada como sendo a freqüência média em um instante particular. Para melhor visualização e interpretação da freqüência instantânea, ver Boashash (1992)

Princípio da Incerteza de Heisenberg. Na análise de sinais, este princípio expressa uma relação fundamental entre o desvio padrão σ_t , de um sinal $s(t)$, e o desvio padrão σ_ω de sua transformada de Fourier $S(\omega)$. Como já foi definido, densidade de um sinal no tempo é $|s(t)|^2$ e a densidade na freqüência é $|S(\omega)|^2$. Especificamente, as variâncias são calculadas como

$$\sigma_t^2 = \iint (t - \langle t \rangle)^2 P(t, \omega) dt d\omega \quad (3.20a)$$

$$\sigma_\omega^2 = \iint (\omega - \langle \omega \rangle)^2 P(t, \omega) dt d\omega \quad (3.20b)$$

em que $\langle t \rangle$ e $\langle \omega \rangle$ são o tempo e a freqüência médios, respectivamente. O Princípio da Incerteza de Heisenberg afirma que:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

Nota-se que o Princípio da Incerteza aplica-se especificamente a funções que sejam pares de transformadas de Fourier. Além disso, o sinal é uma função apenas do tempo, e seu espectro uma função apenas da freqüência. Uma interpretação do princípio da incerteza indica que uma função temporal estreita, ou seja, de curta duração, proporciona um espectro largo, e vice-versa, de forma que um sinal e seu espectro não podem ser arbitrariamente pequenos ao mesmo tempo.

De uma outra maneira, este princípio mostra uma relação que diz respeito apenas às margens de uma distribuição tempo-freqüência. Pode-se verificar que uma distribuição que

obedeça às condições marginais será consistente com o Princípio da Incerteza. Neste caso, em que as margens estão funcionalmente relacionadas, uma mudança em uma das margens implica na mudança da outra. Porém, não se pode concluir com isto que as variáveis da distribuição sejam dependentes, ou que exista alguma relação entre elas. Na análise de sinais não-estacionários, o Princípio da Incerteza não está relacionado com a medida da densidade de energia em pontos do plano tempo-freqüência, mas relaciona apenas o produto dos desvios padrão das margens, e assim não tem relação com a resolução de uma distribuição no plano.

Suporte Finito. Diz-se que uma distribuição tem suporte finito fraco quando, matematicamente, ela satisfaz os seguintes requerimentos:

$$\begin{aligned}
 P(t, \omega) = 0 & \quad \text{para } t \text{ fora do intervalo } (t_1, t_2), \text{ se } s(t) = 0 \text{ fora de } (t_1, t_2), \\
 P(t, \omega) = 0 & \quad \text{para } \omega \text{ fora do intervalo } (\omega_1, \omega_2), \text{ se } S(\omega) = 0 \text{ fora de } (\omega_1, \omega_2).
 \end{aligned}$$

Os valores t_1 e t_2 são os instantes inicial e final do sinal, e ω_1 e ω_2 são as freqüências do sinal nos instantes correspondentes.

Diz-se que uma distribuição tem suporte finito forte quando:

$$\begin{aligned}
 P(t, \omega) = 0 & \quad \text{se } s(t) = 0 \text{ para um instante particular;} \\
 P(t, \omega) = 0 & \quad \text{se } S(\omega) = 0 \text{ para uma freqüência particular.}
 \end{aligned}$$

3.3 Classe geral de distribuições tempo-freqüência

As distribuições tempo-freqüência começaram a se tornar mais conhecidas e utilizadas com o surgimento da transformada de Fourier de curta duração (STFT) e com a aplicação da distribuição de Wigner à análise de sinais. A partir de então, novas idéias foram sendo desenvolvidas no sentido de enriquecer a aplicação deste tipo de ferramenta para a análise de sinais. Muitas das distribuições existentes, com suas características peculiares, podem ser representadas de maneira unificada, com a vantagem de que suas propriedades podem ser facilmente obtidas e analisadas. Esta unificação se dá na forma de uma classe geral de

distribuições introduzida por Cohen (Cohen, 1966), em que cada representação é identificada por uma função núcleo (*kernel*). As propriedades da distribuição são obtidas pelo simples exame ou a partir de restrições nas características da função núcleo. Conseqüentemente, a escolha da função núcleo determina as características da distribuição. Além disso, um método geral que represente todas as distribuições tem a vantagem de possibilitar o desenvolvimento de representações apropriadas, adequadas a cada caso, já que as distribuições geralmente dependem das características do sinal analisado.

3.3.1 A classe geral de Cohen.

A grande maioria das distribuições tempo-freqüência podem ser calculadas a partir da expressão desenvolvida por Cohen,

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau \omega + j\theta u} du d\tau d\theta, \quad (3.22)$$

em que $\phi(\theta, \tau)$ é a função núcleo.

Numa breve analogia com a análise de sinais estacionários, via transformada de Fourier, pode-se dizer que a função núcleo desempenha um papel semelhante, porém não igual, ao das janelas de observação. Isto porque cada distribuição pode ser obtida a partir da substituição de uma determinada função núcleo na equação da classe geral. Desta forma, pode-se dizer, do ponto de vista matemático, que a função núcleo é responsável pelo modo como o conteúdo de energia do sinal é distribuído no plano tempo-freqüência, uma vez que fornece as características inerentes a cada representação.

Existem várias maneiras de se expressar a classe de Cohen (Claasen e Mecklenbräuker, 1980c; Jeong e Williams, 1992; Hlawatsch e Bartels, 1992). Uma delas pode ser identificada ao lembrar-se que a função característica é a dupla transformada de Fourier de uma distribuição (Equação 3.14). Sendo assim, a classe de Cohen também pode ser calculada através da equação

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint M(\theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau \omega)} d\theta d\tau, \quad (3.23)$$

em que

$$M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau) \int s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{j\theta u} du, \quad (3.24)$$

ou seja,

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi(\theta, \tau) A(\theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau \omega)} d\theta d\tau, \quad (3.25)$$

sendo que

$$A(\theta, \tau) = \int s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{j\theta u} du, \quad (3.26)$$

é chamada de função ambigüidade.

3.3.2. Propriedades básicas da função núcleo.

Algumas propriedades básicas das distribuições são discutidas e analisadas de forma que seja possível entender como elas podem estar relacionadas com algumas restrições nas características da função núcleo.

Bilinearidade das distribuições. Com relação à bilinearidade das distribuições, pode-se dizer que caso o núcleo não dependa explicitamente do sinal, então este entra duas vezes na expressão da classe de Cohen e a distribuição é dita bilinear. Assim, um efeito bastante claro desta característica é visualizado ao se calcular a distribuição para a soma de dois sinais, $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. A partir da Equação 3.22, tem-se que

$$\begin{aligned} C(t, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \iiint \left(s_1(u + \frac{\tau}{2}) + s_2(u + \frac{\tau}{2}) \right) \left(s_1^*(u - \frac{\tau}{2}) + s_2^*(u - \frac{\tau}{2}) \right) \phi(\theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau \omega - \theta u)} d\theta d\tau du \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iiint \left(s_1 s_1^* \phi(\theta, \tau) + s_1 s_2^* \phi(\theta, \tau) + s_1^* s_2 \phi(\theta, \tau) + s_2 s_2^* \phi(\theta, \tau) \right) e^{-j(\theta t + \tau \omega - \theta u)} d\theta d\tau du \\ &= C_{11}(t, \omega) + C_{22}(t, \omega) + C_{12}(t, \omega) + C_{21}(t, \omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Uma distribuição cruzada pertencente à classe de Cohen é complexa, entretanto $C_{12}(t, \omega) = C_{21}^*(t, \omega)$, logo $C_{12}(t, \omega) + C_{21}(t, \omega)$ é real. Assim, o resultado final da distribuição para a soma de dois sinais é dado pela seguinte equação,

$$C(t, \omega) = C_{11}(t, \omega) + C_{22}(t, \omega) + 2 \operatorname{Re}\{C_{12}(t, \omega)\}. \quad (3.28)$$

Percebe-se que uma distribuição pertencente à classe de Cohen, calculada para a soma de dois sinais, não é igual à soma das distribuições de cada sinal, mas contém um termo adicional, que geralmente é chamado de termo cruzado ou de interferência. Do ponto de vista prático, estes termos são problemáticos pois podem ser confundidos com os auto-termos, ou termos próprios das componentes do sinal, dificultando a visualização e interpretação de uma distribuição tempo-frequência.

Estes termos não têm significado físico, mas são inerentes a qualquer distribuição bilinear, de forma que deve-se estar ciente de sua existência para que se possa interpretar uma representação tempo-frequência como uma distribuição da energia. Uma distribuição provavelmente apresenta valores negativos, associados ao caráter oscilatório dos termos de interferência, que devem aparecer nas distribuições bilineares, ou então propriedades como margens, princípio da incerteza ou frequência instantânea não serão satisfeitas (Hlawatsch e Bartels, 1992).

Generalizando para a soma de vários sinais,

$$s(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t), \quad (3.29)$$

tem-se que a classe geral apresenta a seguinte forma

$$C(t, \omega) = \sum_{k=1}^N C_{kk}(t, \omega) + \sum_{\substack{k, l=1 \\ l \neq k}}^N C_{kl}(t, \omega), \quad (3.30)$$

em que

$$C_{kl}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint s_l(u + \frac{\tau}{2}) s_k^*(u - \frac{\tau}{2}) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau \omega + j\theta u} du d\tau d\theta. \quad (3.31)$$

Vale ressaltar que a classe geral de Cohen pode apresentar os termos de interferência ou não, dependendo do tipo da função núcleo utilizada. A seção 3.6 irá abordar mais profundamente outros aspectos dos termos cruzados.

Margens da classe geral de Cohen. No que diz respeito às margens, ao integrar a distribuição da classe geral em relação à frequência, encontra-se como resultado o valor $2\pi \delta(\tau)$ (Cohen, 1995). Então, tem-se que

$$\begin{aligned} C(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \iiint \delta(t) s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta(t-u)} du d\tau d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint \phi(\theta, 0) |s(u)|^2 e^{-j\theta(t-u)} du d\theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para que a margem no tempo seja satisfeita, o resultado da Equação 3.32 deve ser igual a $|s(t)|^2$. Para que isto ocorra, é preciso obedecer a seguinte condição,

$$\frac{1}{2\pi} \int \phi(\theta, 0) e^{-j\theta(t-u)} d\theta = \delta(t-u). \quad (3.33)$$

A única maneira para que a Equação 3.33 seja satisfeita é o caso em que

$$\phi(\theta, 0) = 1. \quad (3.34)$$

Esta é a condição da função núcleo para que a margem temporal seja satisfeita. De maneira similar, para que a margem da frequência seja satisfeita, deve-se ter

$$\phi(0, \tau) = 1. \quad (3.35)$$

Se as margens são satisfeitas, então a energia total da distribuição será igual à energia do sinal. A condição da função núcleo para que isso aconteça é

$$\phi(0, 0) = 1. \quad (3.36)$$

Como a condição para que uma distribuição tempo-frequência obedeça ao princípio da incerteza é que ela satisfaça as margens, as restrições para a função núcleo são as mostradas nas Equações 3.34 e 3.35.

Para uma distribuição ser real, o núcleo deve satisfazer a seguinte condição (Claasen e Mecklenbräuker, 1980),

$$\phi(\theta, \tau) = \phi^*(-\theta, -\tau). \quad (3.37)$$

Suporte finito. Como já foi discutido anteriormente, o suporte finito fraco é garantido quando um sinal de duração finita possui uma distribuição nula antes do seu início e depois do seu final. Para a classe de Cohen, isso pode ser verificado através da relação:

$$\int \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta = 0, \text{ para } |\tau| \leq 2|t|. \quad (3.38)$$

Para um sinal limitado em frequência, a distribuição deve ser nula fora do intervalo da banda,

$$\int \phi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} d\tau = 0, \text{ para } |\theta| \leq 2|\omega|. \quad (3.39)$$

Já o suporte finito forte é assegurado quando a distribuição é nula para valores nulos do sinal ou de seu espectro. Isso implica que

$$\int \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta = 0, \text{ para } |\tau| \neq 2|t|, \quad (3.40)$$

e

$$\int \phi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} d\tau = 0, \text{ para } |\theta| \neq 2|\omega|. \quad (3.41)$$

Transformação entre distribuições. A classe de Cohen agrupa praticamente todas as distribuições tempo-freqüência, que são diferenciadas apenas pela função núcleo. É possível relacionar as diferentes distribuições que fazem parte desta classe através das relações entre suas funções núcleo. Utilizando-se uma distribuição a partir da qual um sinal possa ser reconstruído, ou seja, calculando-se a transformação inversa da distribuição, pode-se calcular qualquer outra distribuição para este mesmo sinal. Isto indica que existe uma relação entre as distribuições, como apresentado por Cohen (1995). Pode-se imaginar duas distribuições, C_1 e C_2 , cujos núcleos sejam, respectivamente, ϕ_1 e ϕ_2 , de tal forma que

$$C_1(\theta, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \frac{\phi_1(\theta, \tau)}{\phi_2(\theta, \tau)} C_2(t', \omega') e^{-j\theta(t'-t) - j\tau(\omega'-\omega)} d\theta d\tau dt' d\omega'. \quad (3.42)$$

Desta forma, pode-se perceber que todas as distribuições pertencentes à classe geral de Cohen podem ser obtidas a partir de qualquer outra distribuição da mesma classe, desde que a expressão da distribuição C_2 esteja disponível.

3.4 Distribuição de Wigner

A distribuição de Wigner de um sinal temporal, $s(t)$, é dada por

$$P_{WIG}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\tau\omega} d\tau. \quad (3.43)$$

É possível representar a distribuição de Wigner através da classe de Cohen comparando-se a Equação 3.43 com a equação da classe geral (Equação 3.22). Desta forma, a função núcleo para a distribuição de Wigner é expressa por (Cohen, 1989; Hlawatsch e Bartels, 1992)

$$\phi_{WIG}(\theta, \tau) = 1. \quad (3.44)$$

Pode-se perceber que a distribuição de Wigner, calculada em um instante particular, é obtida pela soma de parcelas constituídas pelo produto entre o sinal num instante passado e o sinal num instante futuro, sendo que os intervalos para o passado e para o futuro são iguais (Cohen, 1995). Em outras palavras, esta distribuição utiliza igualmente valores do sinal em instantes próximos e afastados do instante de análise. Por esta razão, diz-se que ela é uma distribuição altamente não-local. A Figura 3.1 ilustra como é calculada a distribuição de Wigner.

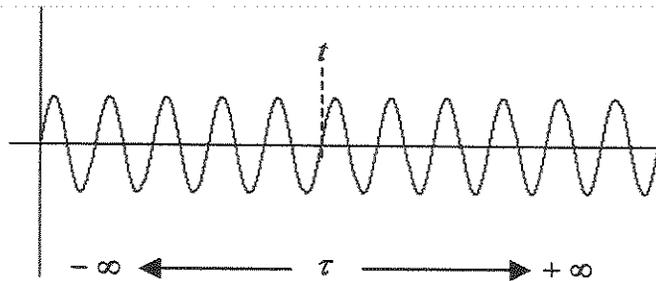


Figura 3.1 – Ilustração do cálculo da distribuição de Wigner.

Sendo assim, a amplitude da distribuição de Wigner apresenta um crescimento linear até a metade da duração do sinal, como mostra a Figura 3.2. Esta característica é inerente à distribuição.

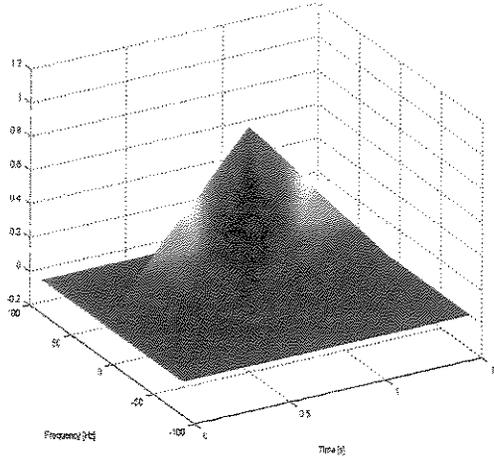


Figura 3.2 – Ilustração da forma da distribuição de Wigner. O sinal analisado é uma senóide.

Propriedades gerais. Numa breve discussão a respeito das propriedades gerais da distribuição de Wigner, pode-se dizer que ela é sempre real, mesmo que o sinal seja complexo. Isto pode ser verificado considerando o complexo conjugado de $P_{WIG}(t, \omega)$:

$$\begin{aligned}
 P_{WIG}^*(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int s(t - \frac{\tau}{2}) s^*(t + \frac{\tau}{2}) e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= P_{WIG}(t, \omega)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

A condição de suporte finito fraco também é satisfeita, ou seja,

$$\begin{aligned}
 P_{WIG}(t, \omega) &= 0 && \text{para } t \text{ fora do intervalo } (t_1, t_2), \text{ se } s(t) = 0 \text{ fora de } (t_1, t_2), \\
 P_{WIG}(t, \omega) &= 0 && \text{para } \omega \text{ fora do intervalo } (\omega_1, \omega_2), \text{ se } S(\omega) = 0 \text{ fora de } (\omega_1, \omega_2),
 \end{aligned}$$

em que t_1 e t_2 são os instantes inicial e final do sinal, e ω_1 e ω_2 são as frequências inicial e final da banda do espectro.

Outra característica que se pode identificar é a simetria deste tipo de distribuição. Como, para sinais reais, o espectro é simétrico, a distribuição também será simétrica no domínio da frequência, ou seja,

$$\text{sinais reais} \Rightarrow \text{espectro simétrico, } S(\omega) = S(-\omega) \Rightarrow P_{WIG}(t, \omega) = P_{WIG}(t, -\omega)$$

As margens da distribuição de Wigner também são satisfeitas,

$$\int P_{WIG}(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2, \quad (3.46)$$

$$\int P_{WIG}(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2, \quad (3.47)$$

o que pode ser verificado por

$$\begin{aligned} P(t) &= \int P_{WIG}(t, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau d\omega \\ &= \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \delta(\tau) d\tau \\ &= |s(t)|^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pode-se chegar à mesma conclusão para a margem na frequência. Sendo assim, como as margens são satisfeitas, a condição para energia total também será, e a distribuição irá respeitar o princípio da incerteza.

Distribuição de Wigner para a soma de dois sinais. A distribuição de Wigner cruzada, obtida a partir da soma de dois sinais, $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$, é dada por

$$P_{WIG}(t, \omega) = P_{WIG11}(t, \omega) + P_{WIG22}(t, \omega) + P_{WIG12}(t, \omega) + P_{WIG21}(t, \omega), \quad (3.49)$$

em que

$$P_{WIG12}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s_1^*(t - \frac{\tau}{2}) s_2(t + \frac{\tau}{2}) e^{-j\tau\omega} d\tau. \quad (3.50)$$

Como já foi visto na seção 3.3.2, a distribuição cruzada da classe de Cohen é complexa. Assim, a distribuição de Wigner cruzada também será complexa e apresentará os termos de interferência, de forma que,

$$P_{WIG}(t, \omega) = P_{WIG11}(t, \omega) + P_{WIG22}(t, \omega) + 2\text{Re}\{P_{WIG12}(t, \omega)\}. \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que estes termos são responsáveis pela existência de valores negativos na distribuição.

Distribuição pseudo-Wigner. Como já foi discutido anteriormente, a distribuição de Wigner para um dado instante pondera igualmente tempos anteriores e posteriores a este instante, estejam eles próximos ou afastados. Similarmente, para uma dada frequência ela pondera todas as frequências acima e abaixo da frequência considerada. Existem duas razões para se querer modificar esta característica da distribuição de Wigner. Primeiramente, pode não ser possível, na prática, realizar a integração de $-\infty$ a $+\infty$. Sob o aspecto computacional, este cálculo é extremamente inviável. É necessário, então, estudar os efeitos da imposição de limites finitos à distribuição. Segundo, no cálculo da distribuição para um instante t , pode-se desejar enfatizar apenas as propriedades próximas deste instante. Para conseguir isto, deve-se ter em mente que a distribuição de Wigner para um dado instante é a transformada de Fourier de $s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2})$ em relação a τ , que é chamada de variável de atraso (*lag*). Então, como se deseja enfatizar o sinal em torno de um instante t , multiplica-se este produto por uma função janela, $h(\tau)$, centrada em $t = 0$, para definir a distribuição pseudo-Wigner, dada pela seguinte expressão:

$$P_{PWIG}(t, \omega) = \int h(\tau) s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.52)$$

Como já foi dito, a distribuição de Wigner é altamente não-local e o efeito do janelamento da variável τ diminui esta condição. Uma das conseqüências disso é que a distribuição pseudo-Wigner omite, por uma certa extensão, os termos cruzados para sinais multicomponentes. Em contrapartida, ela também acaba por destruir algumas propriedades desejáveis da distribuição de Wigner, como condição de satisfazer as margens, por exemplo. Uma ilustração de como se dá o cálculo da distribuição pseudo-Wigner está mostrada na Figura 3.3. Para o instante inicial do sinal, $\tau = 0$, a janela consegue modular um pedaço do sinal. À medida que ela desliza para a direita, consegue capturar pedaços cada vez maiores do sinal, até que toda sua extensão apresente amostras do sinal. Desta forma, como os limites da integração são os limites inferior e superior da janela, a distribuição pseudo-Wigner não apresenta a forma ilustrada pela Figura 3.2, embora ainda apresente um crescimento linear no início e final do sinal, como mostra a Figura 3.4.

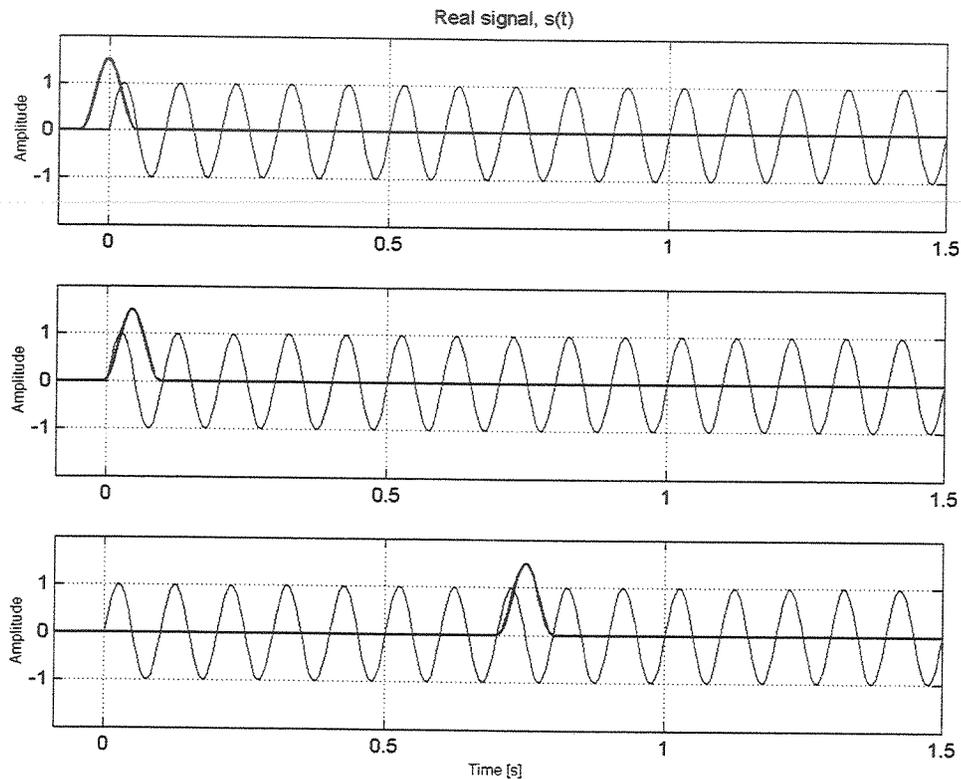


Figura 3.3 – Ilustração do cálculo da distribuição pseudo-Wigner.

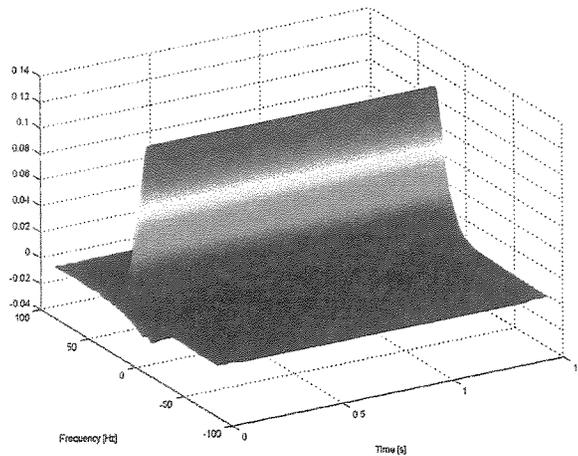


Figura 3.4 – Ilustração da forma da distribuição pseudo-Wigner utilizando uma senóide.

3.5 Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT).

Este é um dos métodos mais utilizado para a análise de sinais não-estacionários devido a sua simplicidade e funcionalidade. O método propõe a divisão do sinal não-estacionário em intervalos pequenos o suficiente de modo que se possa assumir estacionaridade em cada um deles. Assim sendo, a transformada de Fourier pode ser aplicada sem restrições. A totalidade dos espectros de cada intervalo mostra como o conteúdo de frequência do sinal está variando com o tempo. Matematicamente, faz-se uso de uma janela de observação, $h(t)$, centrada em t , para enfatizar o sinal apenas nas proximidades do instante de tempo que se deseja analisar, ou seja,

$$s_t(\tau) = s(\tau) h(\tau - t). \quad (3.53)$$

O sinal modificado, $s_t(\tau)$, é uma função de dois instantes de tempo: o tempo fixo, t , no qual se tem interesse, e o tempo no qual a janela corre, τ , ou tempo corrente. A função janela é escolhida de modo a deixar o sinal praticamente inalterado ao redor do tempo t , mas nulo em instantes mais afastados do tempo de interesse, ou seja,

$$s_t(\tau) \square \begin{cases} s(\tau), & \text{para } \tau \text{ próximo de } t \\ 0, & \text{para } \tau \text{ afastado de } t \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier ao sinal modificado, pode-se ter uma idéia das características espectrais apresentadas pelo sinal nas proximidades daquele instante. Esta transformação pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 P_{STFT}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s_t(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau) h(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Desta forma, é possível verificar que as propriedades do sinal original são mescladas às propriedades da janela que o divide e modula, e isto pode dar uma visão distorcida do que está acontecendo.

Uma grande restrição deste método é que ele apresenta interpretações diferentes para o princípio da incerteza. Nas distribuições bilineares da classe de Cohen, tal princípio está relacionado apenas com o atendimento às margens, como foi visto na seção 3.2. Não existe nenhuma relação entre o princípio e a resolução da distribuição no plano tempo-freqüência. Porém, a STFT é uma distribuição linear, e a divisão do sinal para visualizar a variação de seu espectro faz com que o princípio da incerteza, neste caso, também se relacione com a análise de Fourier de cada intervalo. Ou seja, além de existir um princípio da incerteza válido para o sinal original, há um princípio da incerteza que se aplica a cada pequeno intervalo, e que define a resolução no plano tempo-freqüência. Desta forma, não se pode dividir o sinal em intervalos arbitrariamente pequenos em detrimento da má resolução em freqüência. Após algumas divisões, o espectro obtido para cada sinal de curta duração não mostrará nenhum significado e nenhuma relação com o espectro original do sinal.

Esta situação é inerente a este método, que pode se aplicar bem a alguns casos, como para sinais cujo conteúdo em freqüência varie lentamente com o tempo.

O Espectrograma e suas características. A densidade de energia espectral a cada instante t , chamada de espectrograma, é calculada como o quadrado do valor absoluto da STFT, e por isto

não se espera que apresente valores negativos. O espectrograma pode ser calculado através da equação:

$$P_{espec}(t, \omega) = |P_{STFT}(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau) h(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau \right|^2. \quad (3.55)$$

A função característica do espectrograma pode ser obtida a partir da Equação 3.14, e é dada por:

$$\begin{aligned} M_{espec}(\theta, \tau) &= \iint |P_{STFT}(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau \omega} dt d\omega \\ &= A(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau), \end{aligned} \quad (3.56)$$

sendo

$$A(\theta, \tau) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\theta t} dt, \quad \text{e} \quad (3.57)$$

$$A_h(\theta, \tau) = \int h\left(t + \frac{\tau}{2}\right) h^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\theta t} dt \quad (3.58)$$

as funções ambigüidade do sinal e da janela, respectivamente. Analisando-se as Equações 3.57 e 3.58, conclui-se que $A(-\theta, \tau) = A^*(\theta, -\tau)$.

As características e propriedades mais importantes do espectrograma devem ser consideradas antes de se escolher este método para realizar uma análise. A seguir, algumas destas propriedades são apresentadas e discutidas.

Margens. Seja um sinal complexo, $s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ e uma janela $h(t) = A_h(t)e^{j\varphi_h(t)}$, com suas respectivas transformadas de Fourier, $S_i(\omega) = B(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ e $H_i(\omega) = B_H(\omega)e^{j\psi_H(\omega)}$. A margem no tempo é obtida integrando-se o espectro do sinal na frequência, tem-se a margem no tempo,

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \int |P_{STH}(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int s(\tau) h(\tau-t) s^*(\tau') h^*(\tau'-t) e^{-j\omega(\tau-\tau')} d\tau d\tau' d\omega \\
 &= \int s(\tau) h(\tau-t) s^*(\tau') h^*(\tau'-t) \delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' \\
 &= \int |s(\tau)|^2 |h(\tau-t)|^2 d\tau \\
 &= \int A^2(\tau) A_h^2(\tau-t) d\tau. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Similarmente, a margem na frequência pode ser calculada, e sua expressão é dada por (Cohen, 1995):

$$P(\omega) = \int B^2(\omega') B_H^2(\omega - \omega') d\omega'. \tag{3.60}$$

Como se pode ver, as margens do espectrograma geralmente não satisfazem às margens corretas, $|s(t)|^2$ e $|S(\omega)|^2$, ou seja,

$$P(t) \neq A^2(t) = |s(t)|^2 \tag{3.61}$$

$$P(\omega) \neq B^2(\omega) = |S(\omega)|^2. \tag{3.62}$$

A razão para isso é que o espectrograma mescla a energia do sinal com a energia da janela, e conseqüentemente não satisfazem o principio da incerteza.

Pode-se verificar também que a margem no tempo do espectrograma depende apenas das amplitudes do sinal e janela, e não de suas fases. O mesmo ocorre para a margem na frequência, que utiliza apenas as amplitudes das transformada de Fourier do sinal e da janela.

Suporte Finito. Como já foi visto na discussão a respeito do suporte finito, na seção 3.2, a distribuição para um sinal de duração finita é nula antes de seu início e depois do seu término. Particularmente, o espectrograma, calculado num instante t antes do início do sinal ou depois do seu final, não será necessariamente nulo, uma vez que a janela de observação pode compreender um parte do sinal. Em outras palavras, mesmo que $s(t)$ seja zero num instante t , o sinal modificado $s(\tau)h(\tau-t)$ pode não ser nulo neste mesmo instante. A presença destas janelas faz com que este efeito ocorra para instantes de tempo próximos do início ou final do sinal. O mesmo pode se dizer para o domínio da frequência. Estes fatos conduzem à conclusão de que o espectrograma não satisfaz a condição de suporte finito.

Espectrograma via classe de Cohen. Para representar o espectrograma através da classe de Cohen, deve-se fazer uso de sua função característica. Como foi mostrado na Equação 3.56, $M_{espec}(\theta, \tau) = A_h(-\theta, \tau) A(\theta, \tau)$. Assim, das Equações 3.24 e 3.26, conclui-se que:

$$\phi_{espec}(\theta, \tau) = \frac{M_{espec}(\theta, \tau)}{A(\theta, \tau)} = \frac{A_h(-\theta, \tau) A(\theta, \tau)}{A(\theta, \tau)} = A_h(-\theta, \tau), \quad (3.63)$$

ou seja, a função núcleo para o espectrograma é dada pela função ambigüidade da janela aplicada ao sinal, com $-\theta$ no lugar de θ . Isto resulta em

$$\phi_{espec}(\theta, \tau) = \int h\left(u + \frac{\tau}{2}\right) h^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\theta u} du. \quad (3.64)$$

Fazendo as investigações necessárias na função núcleo, pode-se chegar à conclusão que o espectrograma possui as mesmas características e propriedades já mencionadas anteriormente. Examinando a energia do sinal, por exemplo, tem-se que

$$\phi_{espec}(0,0) = \int |h(u)|^2 du, \quad (3.65)$$

que deve ser igual a $\phi_{espec}(0,0) = 1$ para satisfazer a condição de energia total, conforme visto na seção 3.3.2. Para satisfazer as margens, as condições $\phi(\theta,0) = 1$ e $\phi(0,\tau) = 1$ devem ser atendidas. Porém, para o espectrograma, tem-se que as equações

$$\phi_{espec}(\theta,0) = \int |h(u)|^2 e^{-j\theta u} du \quad (3.66a)$$

$$\phi_{espec}(0,\tau) = \int |H(\omega)|^2 e^{-j\tau \omega} d\omega, \quad (3.66b)$$

só irão satisfazer as condições marginais caso a janela escolhida seja tal que o quadrado de seu valor absoluto se aproxime de um impulso. Para tanto, esta janela deve ser muito estreita e, conseqüentemente, a resolução em freqüência será de má qualidade, pelo princípio da incerteza.

Termos cruzados no espectrograma. A STFT é uma transformação linear, e não apresenta termos cruzados entre as componentes do sinal. Porém, o espectrograma, definido como o quadrado do valor absoluto da STFT, apresenta termos cruzados devido a sua bilinearidade. Na literatura, entretanto, pouco se discute o fato de como o espectrograma parece não apresentar estes termos de interferência. Dependendo da estrutura do sinal e da janela utilizada, os termos cruzados podem ser influentes ou não (Jeong e Williams, 1992).

Como já foi evidenciado, o espectrograma depende de uma janela de observação que percorre o sinal no tempo, e cuja largura implica na relação entre a resolução no tempo e na freqüência. Para analisar a presença dos termos de interferência no espectrograma, será utilizada uma interpretação no domínio (θ, τ) . Considerando esta distribuição como membro da classe de Cohen, pode-se dizer que sua função núcleo é dada pela Equação 3.64. Utilizando a Equação 3.25, o espectrograma pode então ser calculado por:

$$P_{espec}(t, \omega) = 2\pi \int \int A_s(\theta, \tau) A_h(\theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau \omega)} d\tau d\theta. \quad (3.67)$$

A forma e a largura da janela controlam a resolução no tempo e na frequência, uma vez que $A_h(\theta, \tau)$ pode ser considerado um filtro bidimensional passa-baixa, centrado na origem do plano (θ, τ) . Se a janela for simétrica, as margens de $A_h(\theta, \tau)$ serão relacionadas com a janela, $h(t)$, e sua transformada de Fourier, $H(\omega)$, pelas seguintes expressões

$$2\pi \int A_h(\theta, \tau) d\tau = |H(\theta/2)|^2 \quad (3.68a)$$

$$\int A_h(\theta, \tau) d\theta = |h(\tau/2)|^2. \quad (3.68b)$$

Assim, considerando-se o princípio da incerteza, a função núcleo, $A_h(\theta, \tau)$, não pode ser arbitrariamente estreita nas duas direções, θ e τ , simultaneamente.

No domínio (θ, τ) , chamado domínio da ambigüidade, os auto-termos estão localizados próximos à origem, e os termos cruzados se mantêm afastados dela (Hlawatsch e Bartels, 1992; Jeong e Williams, 1992). Como o núcleo do espectrograma é um filtro bidimensional passa-baixas, os termos de interferência serão reduzidos, e até mesmo eliminados, exceto quando estiverem próximos à origem, uma vez que não é possível estreitar o núcleo simultaneamente nas duas direções.

Uma outra abordagem pode ser mostrada através do cálculo do espectrograma para a soma de sinais (Kadambe e Bartels, 1992). Um sinal multicomponente pode ser representado pela Equação 3.29, que é reproduzida a seguir por conveniência:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t). \quad (3.69)$$

A STFT calculada para cada sinal que compõe a soma, $s_k(t)$, é complexa, podendo ser representada como

$$P_{STFT_s}(t, \omega) = \left| P_{STFT_{s_i}}(t, \omega) \right| \cdot e^{j \varphi_{s_i}(t, \omega)}. \quad (3.70)$$

Desta forma, a distribuição de energia do sinal multicomponente, $s(t)$, é calculada a partir da seguinte expressão:

$$P_{espec}(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \left| P_{STFT_{s_i}}(t, \omega) \right|^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \left| P_{STFT_{s_k}}(t, \omega) \right| \left| P_{STFT_{s_l}}(t, \omega) \right| \cdot \cos \left[\varphi_{s_k}(t, \omega) - \varphi_{s_l}(t, \omega) \right], \quad (3.71)$$

O segundo termo do lado direito da Equação 3.71 demonstra a existência dos termos cruzados e mostra que estes dependem do produto $\left| P_{STFT_{s_k}}(t, \omega) \right| \left| P_{STFT_{s_l}}(t, \omega) \right|$. Assim, se $P_{STFT_{s_k}}(t, \omega)$ e $P_{STFT_{s_l}}(t, \omega)$ não se cruzarem no domínio tempo-freqüência, então o produto será zero e não haverá termos de interferência. Isso leva a uma outra conclusão de que só há termos de interferência em espectrogramas caso haja superposição entre os espectros dos auto-termos (Hlawatsch e Bartels, 1992; Kadambe e Bartels, 1992). Os termos de interferência do espectrograma são estruturas oscilatórias presentes restritamente nas regiões do plano tempo-freqüência onde os auto-termos se cruzam.

3.6 Distribuições com interferência reduzida

Como já foi visto na seção 3.3.2, existem termos geralmente indesejáveis quando se realiza uma análise de sinais multicomponentes. Eles estão presentes com grande intensidade em algumas distribuições tempo-freqüência pertencentes à classe de Cohen. A tentativa de reduzir o efeito destes termos no plano tempo-freqüência é o alvo principal das chamadas distribuições de interferência reduzida (*Reduced Interference Distribution, RID*)

Nesta seção, serão discutidas as restrições feitas à função núcleo para que os termos de interferência de sinais multicomponentes sejam minimizados, sendo de interesse, porém, que se tenha conhecimento de algumas características destes termos. Eles causam redundância na informação fornecida e podem obscurecer a distribuição real de energia no plano tempo-

freqüência. Entretanto, também contribuem para formar a distribuição, pois não se pode considerar uma distribuição tempo-freqüência que não satisfaça suas propriedades desejáveis e ao mesmo tempo não possua os termos cruzados. Em muitos casos, termos de interferência oscilatórios e parcialmente negativos devem estar presentes na distribuição, ou propriedades marginais e de freqüência instantânea não serão satisfeitas.

Mecanismo dos termos de interferência. A quantidade e forma das interferências em determinada distribuição são controladas por sua função núcleo. Para os mecanismos das interferências, será feito um estudo dos termos cruzados a partir da função ambigüidade (Equação 3.26).

A análise dos auto-termos e dos termos cruzados na função ambigüidade mostra que os auto-termos se concentram próximos à origem do plano (θ, τ) , enquanto os termos cruzados se mantêm afastados dela (Steeghs, 1997). Conseqüentemente, a soma dos auto-termos de um sinal sempre terá seu valor máximo de energia na origem deste plano. Para preservar a energia dos auto-termos de uma distribuição tempo-freqüência, deve-se escolher uma função núcleo que esteja concentrada nas proximidades da origem. Já os termos cruzados têm suas propriedades determinadas pelas componentes dos sinais que dão origem a eles. Desta forma, suas localizações no plano (θ, τ) dependem fortemente do sinal analisado. Entretanto, um termo cruzado está sempre localizado em regiões afastadas da origem, e ao mesmo tempo se encontram aproximadamente numa região intermediária aos auto-termos, no plano tempo-freqüência. Assim, para reduzir a energia dos termos cruzados, é natural pensar em impor ponderações mais altas à função núcleo para valores próximos dos eixos de origem do plano (θ, τ) , e pesos baixos para valores mais afastados. Num caso geral, a função núcleo deve ter picos tanto no eixo θ como no eixo τ . Deve também atender as condições $\phi(\theta, 0) = 1$ e $\phi(0, \tau) = 1$ para que as margens sejam satisfeitas. Segundo Jeong e Williams (1992), a função núcleo para que a interferência seja reduzida deve obedecer à seguinte condição

$$\phi(\theta, \tau) \ll 1 \text{ para } \theta\tau \gg 0, \quad (3.72)$$

o que atende à restrição de que seus valores devem ser pequenos em pontos afastados dos eixos θ e τ comparados a valores próximos a estes eixos.

3.7 Distribuição de Choi-Williams

A distribuição de Choi-Williams foi uma das primeiras a ser desenvolvida com o intuito de reduzir o efeito dos termos de interferência. Ela é obtida com o uso da função núcleo

$$\phi_{CW}(\theta, \tau) = e^{-\frac{\theta^2 \tau^2}{\sigma}} \quad (3.73)$$

na equação da classe de Cohen (Equação 3.22). O parâmetro σ controla os termos de interferência e também a resolução no plano tempo-freqüência, e pode assumir valores reais e positivos. Esta função núcleo satisfaz às condições marginais $\phi(\theta, 0) = \phi(0, \tau) = 1$, para qualquer valor de σ , e também proporciona valores reais para a distribuição, já que

$$\phi(\theta, \tau) = \phi^*(-\theta, -\tau). \quad (3.74)$$

Como foi mencionado anteriormente, as propriedades da distribuição podem ser facilmente modificadas com o manejo adequado do termo σ . Se para ele for usado um valor excessivamente alto, então a distribuição se aproxima da distribuição de Wigner. Para valores baixos de σ , a distribuição de Choi-Williams satisfaz a condição de interferência reduzida.

Ao substituir a função núcleo na expressão da classe de Cohen e realizar uma integração em θ , a distribuição de Choi-Williams é descrita através da seguinte expressão

$$P_{CW}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \iint \frac{1}{\sqrt{\tau^2/\sigma}} e^{-\frac{(u-t)^2}{4\tau^2/\sigma} - j\omega\tau} s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) du d\tau. \quad (3.75)$$

Para melhor entender seu comportamento, considera-se o caso da soma de dois sinais senoidais (Cohen, 1995; Choi e Williams, 1989),

$$s(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}. \quad (3.76)$$

A distribuição pode ser então calculada como

$$P_{CW}(t, \omega) = A_1^2 \delta(\omega - \omega_1) + A_2^2 \delta(\omega - \omega_2) + 2 A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma), \quad (3.77)$$

em que

$$\eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi(\omega_1 - \omega_2)^2}} e^{\frac{[\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)]^2}{4(\omega_1 - \omega_2)^2/\sigma}}. \quad (3.78)$$

Para valores de σ altos, tem-se a seguinte condição,

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma) = \delta(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)), \quad (3.79)$$

ou seja, a distribuição vai ter um pico infinito em $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, o que define precisamente a distribuição de Wigner. Enquanto σ é mantido finito, os termos cruzados serão também finitos e não estarão concentrados em um único ponto (Cohen, 1995).

A partir da Equação 3.78, percebe-se que a função η controla a amplitude dos termos cruzados de tal forma que para um determinado valor de σ , a amplitude dos termos cruzados é inversamente proporcional a $(\omega_1 - \omega_2)$, ou seja, a amplitude dos termos de interferência depende das componentes em frequência dos sinais sob análise. Além disso, a quantidade de interferências decresce exponencialmente com a distância $\left[\omega - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \right]^2$ (Choi, Williams, 1989).

A função núcleo desta distribuição no domínio da ambigüidade possui um formato que proporciona uma supressão da energia localizada em regiões distantes dos eixos θ e τ . Isto torna a

distribuição eficiente para sinais com energia dos auto-termos localizada paralelamente aos eixos e próxima deles.

Para concluir, pode-se reafirmar que o parâmetro σ determina uma relação entre boa resolução dos auto-termos e uma redução dos termos de interferência. Para obter uma boa resolução dos autotermos, σ deve ter um valor alto. Já para que os termos cruzados sejam reduzidos, σ deve ser baixo. Entretanto, um valor alto para σ é recomendado para sinais cuja amplitude e frequência variem relativamente rápido, e um valor baixo para σ é mais indicado para variações mais lentas da amplitude e frequência do sinal (Choi, Williams, 1989). A escolha, entretanto de um valor ótimo para o parâmetro s depende muito da experiência do analista, embora os autores acima citados indiquem que estes valores devem estar entre 0,1 e 10.

Capítulo 4

Implementação numérica

No capítulo anterior, foi mostrada a teoria que envolve as distribuições no domínio tempo-freqüência. Foram discutidas características particulares de algumas delas, bem como a generalização destas distribuições através da classe proposta por Cohen. O seu desenvolvimento no campo teórico, entretanto, não permite que se possa aplicar estas representações a casos práticos da análise de sinais discretos. Para isto, é necessário que se faça uso de ferramentas computacionais para calcular os resultados das distribuições.

Neste capítulo, será feita uma breve revisão de alguns métodos conhecidos para a obtenção das versões discretas das distribuições tempo-freqüência, bem como as dificuldades e limitações encontradas. É apresentada também a metodologia utilizada para a obtenção das distribuições que mostram os resultados propostos neste trabalho.

4.1 Discretização de sinais contínuos

Os sinais podem ser definidos como funções que contêm informações a respeito do estado ou comportamento de um sistema físico. Em geral, são representados matematicamente por funções de uma ou mais variáveis independentes, que podem ser contínuas ou discretas. Os sinais em tempo discreto podem surgir a partir da amostragem do sinal contínuo, ou podem ser gerados diretamente a partir de algum processo de discretização no tempo. Assim, os sinais discretos são

representados por uma seqüência de números que correspondem aos valores do sinal contínuo nos instantes de tempo definidos por suas amostragens.

Pode-se obter um sinal discreto através da multiplicação de um sinal contínuo, $s(t)$, por uma função trem de impulsos, e podem ser representados matematicamente como uma seqüência de números. Uma seqüência de números s , por exemplo, cuja n -ésima amostra é dada por $s[n]$, é totalmente descrita por

$$s = \{s[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (4.1)$$

em que n é um número inteiro. O espaçamento entre cada amostra do sinal é chamado tempo de amostragem, T , e a seqüência pode ser então redefinida como

$$s[n] = s(nT). \quad (4.2)$$

4.2 Transformada de Fourier discreta

Para obter as características do sinal discreto no domínio da freqüência, faz-se uso da transformada de Fourier discreta, que pode ser definida como

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j2\pi f n}. \quad (4.3)$$

Sua inversa recupera o sinal discreto,

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} S(f) e^{-j2\pi f n} df. \quad (4.4)$$

A transformada de Fourier discreta proporciona, no domínio da freqüência, um espectro contínuo, porém, periodizado, como mostra a Figura 4.1.

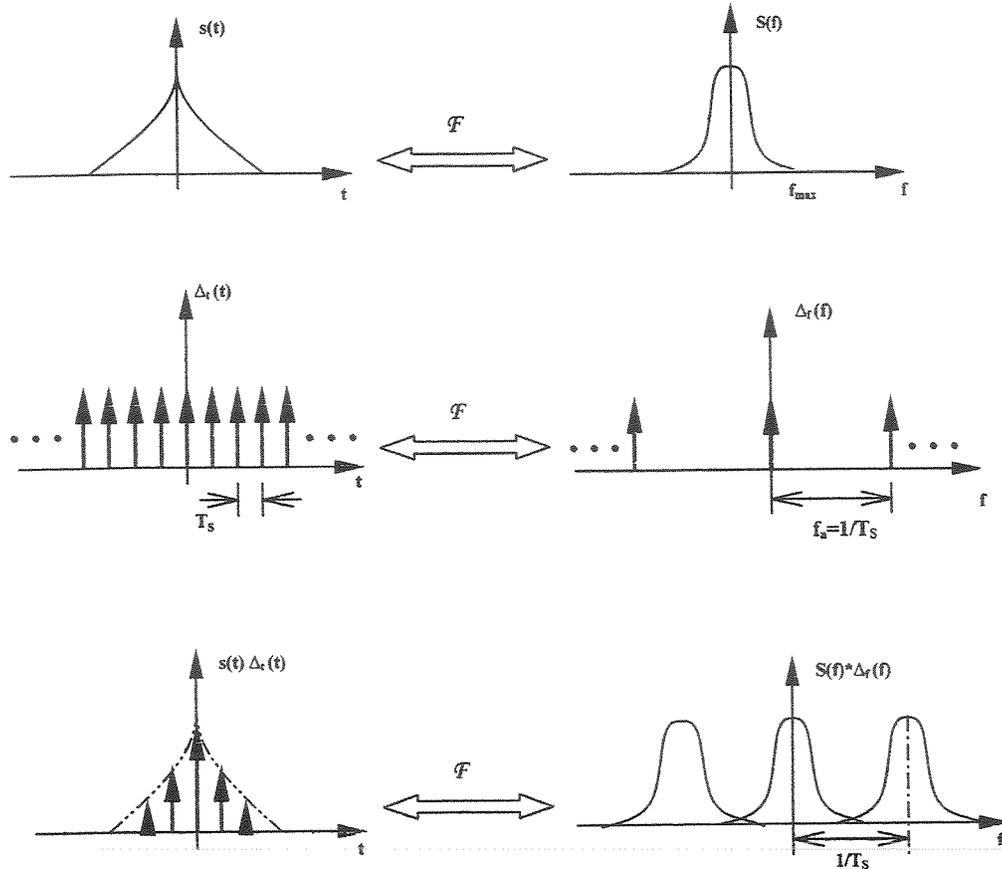


Figura 4.1 - Discretização de sinais no domínio do tempo e seu efeito no domínio da frequência.

Como já foi comentado, um sinal discreto no tempo pode ser determinado através do produto do sinal contínuo no tempo pela função trem de impulsos. Assim, a transformada de Fourier deste produto corresponde, no domínio da frequência, a uma convolução do espectro do sinal contínuo com o espectro da função trem de impulsos. Este último espectro, entretanto, também é um trem de impulsos, porém com uma frequência de amostragem igual ao inverso do período de amostragem do sinal temporal. Pode-se dizer, então, que é devido à periodicidade do espectro que surge a preocupação com o fenômeno de *aliasing*. Este fenômeno ocorre quando a periodicidade no domínio da frequência é pequena o suficiente para fazer com que os espectros se sobreponham em certas regiões. Para que isto seja evitado, deve-se amostrar o sinal de forma que a frequência de amostragem, $f_a = 1/T$, seja no mínimo igual a duas vezes o valor da maior componente em frequência presente no sinal. A esta frequência de amostragem dá-se o nome de frequência de Nyquist ($f_{Nyq} = 2 \cdot f_{máx}$).

4.3 Distribuição de Wigner discreta

Como foi visto na seção 4.2, a discretização de sinais contínuos no tempo deve ser feita com a cautela necessária para evitar fenômenos indesejados quando se pretende utilizar a transformada de Fourier discreta. Porém, mesmo quando se deseja utilizar ferramentas como as distribuições tempo-freqüência, também é preciso tomar certo cuidado, uma vez que, da mesma forma que para a transformada de Fourier, os resultados a serem obtidos neste novo domínio são dependentes de um auxílio computacional para o cálculo das distribuições. Ou seja, é necessário que também se utilizem sinais discretos para se chegar aos resultados das representações tempo-freqüência. Uma das formas de comparação entre a análise de Fourier e as distribuições tempo-freqüência é o fato de que nem sempre a transformada de Fourier discreta é capaz de gerar valores exatos, uma vez que a duração do sinal digital deve ser finita para que este seja processado. O mesmo pode se pensar das distribuições tempo-freqüência. Ainda assim, as representações discretas no domínio tempo-freqüência devem, de preferência, ser obtidas através de conceitos simples, além de preservar pelo menos a maioria das propriedades básicas requeridas pelas distribuições tempo-freqüência contínuas.

Historicamente, a distribuição de Wigner (ou Wigner-Ville, para o caso de sinais analíticos) foi uma das primeiras a ser utilizada para sinais discretos. Por se tratar de uma distribuição que possui uma função núcleo relativamente simples e que atende à maioria das propriedades necessárias a uma distribuição tempo-freqüência, a distribuição de Wigner tem sido comumente analisada em sua versão discreta.

4.3.1 Um processo de discretização

A busca por uma versão eficiente da distribuição de Wigner discreta foi iniciada por Claasen & Mecklenbräuker (1980). Seguindo-se a este trabalho, muitos outros autores (Martin & Flandrin, 1985; Peyrin & Prost, 1986; Boashash, 1988; Harms, 1991) direcionaram seus estudos para melhorar a qualidade de implementação destas ferramentas, no sentido de diminuir os efeitos indesejáveis do tratamento de um sinal discreto. O principal destes efeitos é o fenômeno de *aliasing*, já discutido anteriormente, mas que volta a chamar a atenção pelo fato de que,

mesmo que um sinal seja amostrado à frequência de Nyquist, isto não garante a eliminação deste efeito (Claasen e Mecklenbräukeer, 1980; Peyrin e Prost, 1986).

Para melhor entender as conseqüências do processo de discretização da distribuição de Wigner, pode-se considerar um sinal complexo $z(t)$, contínuo no tempo. Considerando também que $\hat{z}(nT)$ é sua versão amostrada a uma taxa T , tem-se então, pelo teorema da amostragem,

$$\hat{z}[n] = z(t) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT). \quad (4.5)$$

Desta forma, a seqüência que representa o sinal temporal amostrado é

$$\hat{z}[n] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(nT) \cdot \delta(t - nT). \quad (4.6)$$

Substituindo a Equação 4.6 na expressão da distribuição de Wigner dada pela Equação 3.43, tem-se então

$$P_{WIG_z}(t, f) = \int_{\mathfrak{R}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} z(kT) \cdot \delta\left(t + \frac{\tau}{2} - kT\right) \right] \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} z^*(lT) \cdot \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - lT\right) \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \quad (4.7)$$

e, para que os trens de impulsos nos dois colchetes representem amostragens iguais, deve-se ter $\tau = (k - l)T$, o que leva a

$$P_{WIG_z}(t, f) = \sum_k \sum_l z(kT) z^*(lT) \delta\left(t - (k+l)\frac{T}{2}\right) e^{-j2\pi f(k-l)T}. \quad (4.8)$$

Fazendo $k + l = n \Rightarrow l = n - k$, a distribuição de Wigner em tempo discreto fica agora

$$P_{WIG_z}(t, f) = \sum_k \sum_l z(kT) z^*((n-k)T) \delta\left(t - \frac{nT}{2}\right) e^{-j2\pi f(2k-n)T}. \quad (4.9)$$

A partir da Equação 4.9, pode-se considerar que a distribuição de Wigner de um sinal discreto é amostrada no tempo a uma taxa duas vezes menor ($T/2$) que a taxa de amostragem do sinal (T). Definindo a distribuição de Wigner discreta, \hat{P}_{WIG_z} , como sendo a ponderação da função delta de Dirac, chega-se a

$$\hat{P}_{WIG_z}(n, f) = \sum_k z(kT) z^*((n-k)T) e^{-j2\pi f(2k-n)T}, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$P_{WIG_z}(t, f) = \sum_n \hat{P}_{WIG_z}(n, f) \cdot \delta(t - \frac{nT}{2}). \quad (4.11)$$

Pode-se chegar também a uma relação entre a distribuição de Wigner contínua e a distribuição de Wigner de um sinal amostrado, como sendo

$$P_{WIG_z}(t, f) = \frac{1}{2T} \sum_{n,l} (-1)^{nl} P_{WIG_z}(t, f - \frac{l}{2T}) \cdot \delta(t - \frac{nT}{2}), \quad (4.12)$$

donde pode-se concluir que:

1. a distribuição de Wigner tem resolução no tempo duas vezes menor ($T/2$) que o sinal (T);
2. a distribuição de Wigner é repetida na frequência (propriedade similar à da transformada de Fourier discreta) com período $1/2T$. Percebe-se aqui que este período é metade do que seria o período do espectro do sinal discreto. Isto sugere que o sinal deve ser superamostrado a duas vezes a frequência de Nyquist para que todas as amostras estejam disponíveis no cálculo da distribuição de Wigner, evitando assim o fenômeno do *aliasing* (Claasen & Mecklenbräuker, 1983).

Igualando as Equações 4.11 e 4.12, pode-se escrever a distribuição de Wigner em tempo discreto (DTWD) em função da distribuição de Wigner contínua como

$$\hat{P}_{WIG_z}(n, f) = \frac{1}{2T} \sum_l (-1)^{nl} P_{WIG_z}\left(\frac{nT}{2}, f - \frac{l}{2T}\right), \quad (4.13)$$

donde também se conclui que a DTWD é igual à distribuição de Wigner contínua amostrada no tempo à metade da taxa de amostragem do sinal, e repetida periodicamente na frequência, com período igual a $1/2T$.

Utilizando as deduções anteriores, realizadas por Peyrin & Prost (1986), pode-se agora prever a ocorrência do fenômeno de *aliasing* na distribuição de Wigner discreta no tempo. A abordagem utilizada foi descrita por Boashash (1988), considerando a necessidade de se obter os valores intermediários ($T/2$) às amostras do sinal, como requer a distribuição de Wigner. Para suprir esta necessidade, sugere-se que seja feita uma superamostragem do sinal a pelo menos duas vezes a frequência de Nyquist. Desta forma, a duração do sinal será mantida, porém a frequência de amostragem irá aumentar. Existe uma outra forma, entretanto, de superamostrar um sinal discreto, mantendo a mesma frequência de amostragem do sinal, sendo necessário, contudo, que se faça uma expansão do sinal. Este será o caso aqui utilizado, conforme está ilustrado na Figura 4.2.

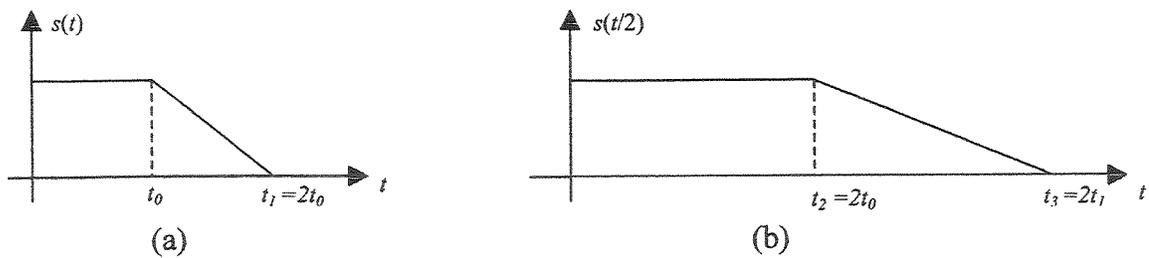


Figura 4.2 – Processo de expansão de um sinal real contínuo, mostrando (a) o sinal original, e (b) o sinal expandido por um fator 2.

Um sinal real, $s(t)$, ao ser amostrado à frequência de Nyquist gera uma seqüência $s(n)$, como mostra a Figura 4.3a. Por ser uma representação discreta, sua transformada de Fourier, $S(f)$, é periódica com período igual a $1/T$ no eixo das frequências, e seu espectro é ilustrado como na Figura 4.3b. Sendo assim, caso os sinais $s(t)$ e $s(t/2)$ sejam amostrados à mesma taxa, o número de amostras de $s(t/2)$ será duas vezes maior que o $s(t)$, como mostra as Figuras 4.3a e 4.3c.

Assim, para se obter amostras correspondentes nos dois sinais, é necessário que se faça uma decimação no sinal expandido com o mesmo fator da superamostragem (ver Apêndice A). Este recurso de mudança da taxa de amostragem de um sinal digital altera as características do espectro do sinal, como mostra a Figura 4.3.

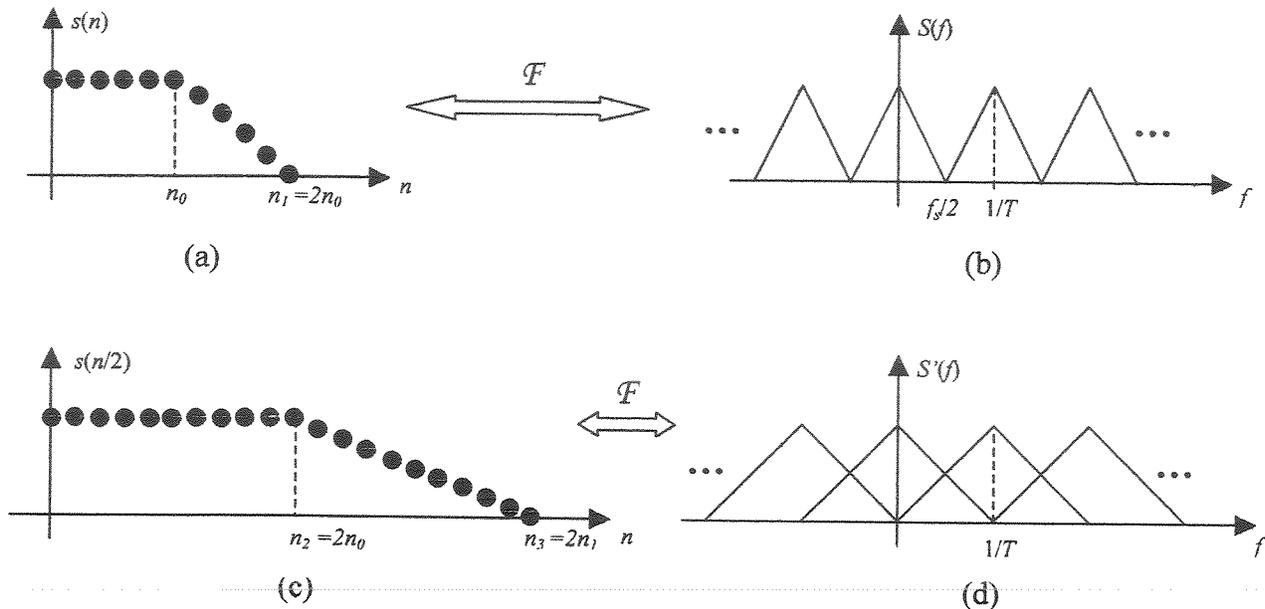


Figura 4.3 – Processo de superamostragem (por expansão) e dizimação de um sinal, e suas consequências nos seus espectros.

A Figura 4.3d mostra o espectro do sinal expandido (logo, superamostrado) e decimado, apresentando o fenômeno de *aliasing*, ao contrário do que se esperava. O resultado da superamostragem seguida de decimação não deveria alterar o espectro do sinal original, pois seriam utilizadas as mesmas amostras, e o espectro tomaria a forma da Figura 4.3b. Porém, o fato de se ter feito uma expansão do sinal para então realizar a amostragem com a mesma taxa do sinal original, mantém a periodicidade do espectro embora a frequência máxima seja alterada pelo mesmo fator de superamostragem.

Uma maneira de eliminar o *aliasing* no caso de um sinal superamostrado por expansão é o uso do sinal analítico, já discutido no Capítulo 3. O espectro do sinal analítico de $s(t)$ é mostrado na Figura 4.4a, e o espectro do sinal analítico expandido, ilustrado na Figura 4.4b, é obtido analogamente a $S(f)$.

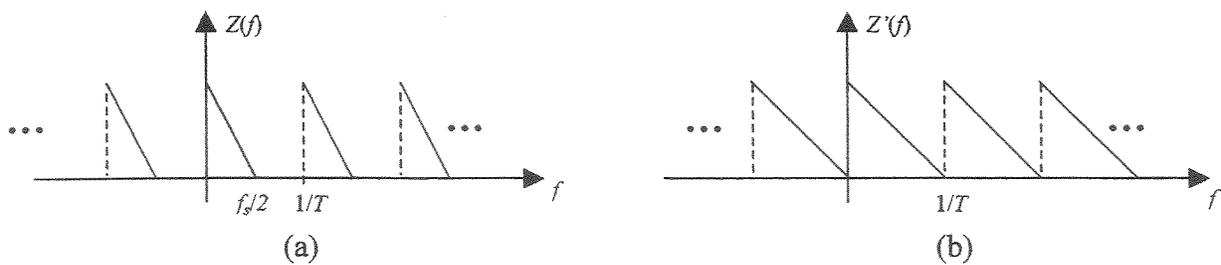


Figura 4.4 – Espectros dos sinais analíticos (a) do sinal original e (b) do sinal expandido.

Como já foi visto, o sinal analítico elimina as componentes do espectro referentes às frequência negativas. Sendo assim, o espectro de um sinal analítico discreto é composto pelas componentes de frequências positivas periodizadas. Calculando, então, o espectro do sinal analítico referente ao sinal expandido, eliminam-se as componentes das frequências negativas que estavam se sobrepondo às componentes referentes às frequências positivas. Pode-se verificar isto comparando as Figuras 4.3 e 4.4.

4.4. Classe de Cohen para sinais discretos

A partir de agora, serão investigados os métodos utilizados neste trabalho para computar as distribuições tempo-freqüência pertencentes à classe de Cohen, aplicando a elas sinais discretos. Para discutir as formas de se calcular as distribuições tempo-freqüência, parte-se de uma abordagem comparativa com a transformada de Fourier. Os métodos utilizados para calcular o espectro de sinais contínuos e discretos são similares, porém não são idênticos. As propriedades da transformada de Fourier para estes dois tipos de sinal também não são idênticas. Considera-se como exemplo o produto de dois sinais contínuos. A transformada de Fourier deste produto é igual à convolução linear de seus espectros. Já o produto de dois sinais discretos tem como espectro uma convolução circular das amostras dos espectros individuais (Oppenheim, 1989). Assim, pode-se imaginar que, pela diferença existente entre os espectros de sinais contínuos e discretos, é bastante provável que também existam diferenças entre as distribuições tempo-freqüência calculadas para sinais contínuos e discretos.

A teoria da classe de Cohen foi formulada para sinais contínuos, de forma que sua extensão para sinais discretos não é direta. Um breve exemplo foi visto na seção anterior com a distribuição de Wigner. Esta, por sua vez, assume um papel fundamental na análise da classe de Cohen, uma vez que pode ser escrita como

$$P_{WIG}(t, \omega) = \int R_s(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.14)$$

em que,

$$R_s(t, \tau) = s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (4.15)$$

que é a função de autocorrelação temporal. Pode-se mostrar que a classe de Cohen pode ser calculada em função da distribuição de Wigner (O'Neill, 1997),

$$C(t, \omega) = \iint P_{WIG}(t', \omega') \psi(t - t', \omega - \omega') dt' d\omega', \quad (4.16)$$

sendo

$$\psi(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint \phi(\theta, \tau) e^{-j(\tau\omega + \theta t)} d\tau d\theta. \quad (4.17)$$

Na prática, os sinais medidos não são contínuos, e uma versão discreta se faz necessária. Seja $s[n]$ uma seqüência real discreta composta por amostras do sinal contínuo em intervalos regulares, e obedecendo a taxa de amostragem de Nyquist. Partindo da hipótese de se trabalhar com a distribuição de Wigner como base para se chegar às distribuições tempo-freqüência discretas, é preciso obter valores para $R_s(t, \tau)$. Para isto, é necessário que as amostras do sinal discreto, $s[n]$, também estejam disponíveis. Pode-se dizer que uma versão amostrada da função de autocorrelação, $R_s(t, \tau)$, é dada por

$$R_s(n, m) = s\left(n + \frac{m}{2}\right) s^*\left(n - \frac{m}{2}\right). \quad (4.18)$$

Esta versão discreta pode ser calculada caso $n \pm m/2 \in Z$ e $m \in Z$, e isto ocorrerá em duas situações: quando $n \in Z$ e m for par, ou quando $n \in Z + \frac{1}{2}$ e m for ímpar. Desta forma, pode-se obter valores inteiros para $s(n \pm m/2)$.

Utilizando-se esta versão de $R_s(n, m)$ para calcular amostras da versão contínua da distribuição de Wigner, chega-se a uma expressão análoga à Equação (4.14):

$$P_{WIG_s}(n, \omega) = \sum_m R_s(n, m) e^{-j\omega m}. \quad (4.19)$$

Esta expressão, contudo, somente irá representar as amostras da distribuição de Wigner caso o sinal esteja amostrado a duas vezes a frequência de Nyquist, conforme visto na seção anterior. Se esta condição não for satisfeita, ocorre o indesejável fenômeno do *aliasing*.

Uma das maneiras de se calcular amostras de $R_s(t, \tau)$ se dá pela utilização da Equação 4.18, calculando-se valores de $R_s(n, m)$ quando $n \in Z$ e m é par. Este método é denominado semi-produto, uma vez que apenas metade das amostras disponíveis são utilizadas para formar o produto, e é expresso por $R_s^h(n, m)$. Além disso, possui a característica de ter suas amostras distribuídas numa malha retangular, como mostra a Figura 4.5.

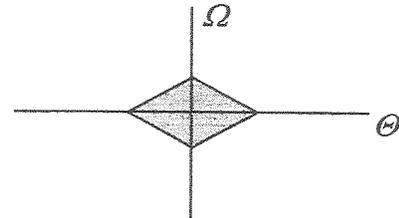
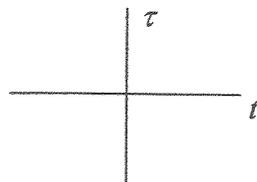
Um segundo método consiste em se tomar as amostras de $R_s(t, \tau)$ para amostras definidas quando $n \in Z + \frac{1}{2}$ e m é ímpar, e $n \in Z$ e m é par. Este método é chamado produto completo e é identificado por $R_s^f(n, m)$. Neste caso, todas as amostras disponíveis no sinal discreto são utilizadas, e as amostras de $R_s^f(n, m)$ estão distribuídas numa malha hexagonal.

Um novo método, aqui chamado de produto duplo e expresso por $R_s^d(n, m)$, é obtido para valores de $n \in Z + \frac{1}{2}$ e $m \in Z$, e tem suas amostras distribuídas numa malha retangular. Cabe aqui observar que esta função de autocorrelação é exatamente igual ao $R_s^h(n, m)$ quando este é

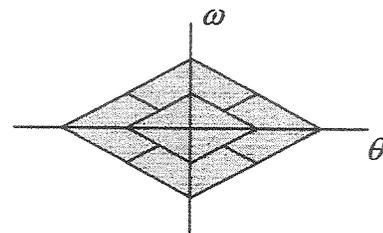
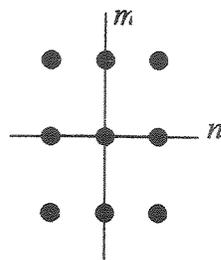
superamostrado por um fator 2 nas duas direções, n e m . Para isto ocorrer, o sinal deve ser amostrado a duas vezes a frequência de Nyquist.

Função de autocorrelação temporal

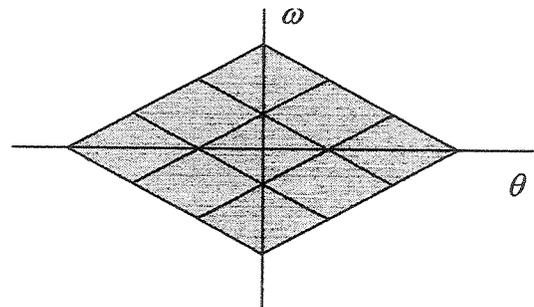
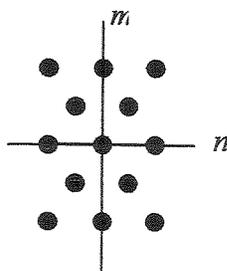
Função de autocorrelação espectral



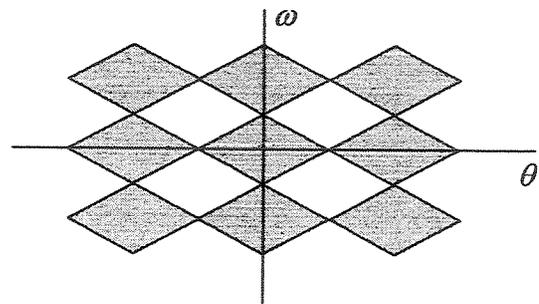
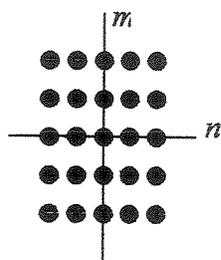
(a) Caso contínuo



(b) Amostragem meio produto



(c) Amostragem produto completo



(d) Amostragem produto duplo

Figura 4.5 – Esquema mostrando os tipos de amostragem da função de autocorrelação temporal e seus espectros (O'Neill, 1997).

Como tem sido extensivamente mencionado, o problema do *aliasing* é o que mais preocupa quando se fala em distribuições tempo-freqüência discretas. Portanto, pode-se analisar a ocorrência do *aliasing* verificando sua existência na função $R_s(\omega, \theta)$, que é o espectro da função de autocorrelação temporal. Para um sinal contínuo e limitado em freqüência, a função $R_s(\omega, \theta)$ tem a forma de um losango centrado na origem, conforme ilustra a Figura 4.5. Quando a função $R_s(t, \tau)$ é discretizada, seu espectro $R_s(\omega, \theta)$ se repete periodicamente, de forma que, caso haja alguma superposição entre estes espectros, ocorre o *aliasing*. Se for considerada a função $R_s^h(n, m)$, os losangos de seu espectro se sobrepõem, caracterizando o *aliasing*. Já com as amostras de $R_s^f(n, m)$, os losangos são adjacentes uns aos outros, não gerando *aliasing*. Pode-se considerar, portanto, que esta versão apresenta superamostragem em relação à taxa de Nyquist. As amostras de $R_s^d(n, m)$ também não apresentarão *aliasing*, uma vez que existem espaços entre os espectros periodizados, devido à superamostragem de $R_s(t, \tau)$.

Pode-se obter a distribuição de Wigner através da transformada de Fourier de $R_s(t, \tau)$. Desta forma, de acordo com o que foi descrito anteriormente, é possível obter então três formas de se calcular a distribuição de Wigner discreta, e que são designadas por $P_{WIG_s}^h(n, \omega)$, obtida através de $R_s^h(n, m)$; $P_{WIG_s}^f(n, \omega)$, calculada a partir de $R_s^f(n, m)$; e $P_{WIG_s}^d(n, \omega)$, resultante da utilização de $R_s^d(n, m)$ na Equação 4.14. Analisando-se cada uma destas versões, pode-se dizer que a primeira citada, $P_{WIG_s}^h(n, \omega)$, não irá corresponder a amostras da distribuição de Wigner uma vez que a função de autocorrelação correspondente apresenta *aliasing*. Mesmo não apresentando este fenômeno, a segunda versão, $P_{WIG_s}^f(n, \omega)$, também não corresponde a uma versão amostrada da distribuição de Wigner, uma vez que, como foi explicado por Claasen & Mecklenbräuker (1983), não satisfaz algumas propriedades desta distribuição. Já as amostras descritas por $P_{WIG_s}^d(n, \omega)$ correspondem à distribuição de Wigner discreta, uma vez que a função de autocorrelação correspondente não apresenta o fenômeno de *aliasing*, pois está superamostrada.

Pode-se entender melhor como isto ocorre considerando-se um sinal contínuo que seja nulo fora do intervalo $[0, NT]$, em que T é o tempo de amostragem, e corresponde ao princípio de amostragem de Nyquist. A seqüência correspondente a este sinal, $s[n]$, terá N amostras e $P_{WIG_s}^d(n, \omega)$ será correspondente às amostras no tempo da distribuição de Wigner contínua, ou seja,

$$P_{WIG_s}^d\left(\frac{n}{2}, \omega\right)\Big|_{\omega \in [0, 2\pi]} = P_{WIG_s}\left(\frac{nT}{2}, \frac{\omega}{T}\right), \quad (4.20)$$

para $n \in \{0, \dots, 2N - 1\}$, já que esta versão é definida para $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Considerando então que o sinal tem duração finita, pode-se também amostrar o eixo da frequência. Para evitar o *aliasing*, o período de amostragem na frequência deve ser menor que π/N . Assim, pode-se representar a distribuição de Wigner como uma matriz $2N \times 2N$ cujas amostras são dadas por

$$P_{WIG_s}^d\left(\frac{n}{2}, \frac{2k\pi}{2N}\right)\Big|_{\omega \in [0, 2\pi]} = P_{WIG_s}\left(\frac{nT}{2}, \frac{2k\pi}{2NT}\right), \quad (4.21)$$

para $n, k \in \{0, \dots, 2N - 1\}$. Desta forma, pode-se reconstruir a distribuição de Wigner a partir destas amostras.

A partir de agora, pode-se apresentar um método para calcular amostras das distribuições tempo-frequência da classe de Cohen. A obtenção destas amostras é feita a partir da aplicação do já conhecido teorema de amostragem do processamento digital de sinais. Sabe-se, por exemplo, que um sinal discreto amostrado à frequência de Nyquist pode gerar de volta o sinal contínuo. Da mesma forma, é de se esperar que uma distribuição tempo-frequência contínua seja obtida a partir das amostras desta distribuição no plano tempo-frequência discreto.

Uma distribuição tempo-frequência bilinear pode ser interpretada como sendo a convolução bidimensional da distribuição de Wigner contínua com a função núcleo também contínua, conforme foi mostrado pela Equação 4.16. Para se calcular amostras de uma distribuição tempo-

freqüência deste tipo, deve-se fazer uma convolução bidimensional equivalente utilizando amostras da distribuição de Wigner e da função núcleo.

No caso de sinais unidimensionais, sabe-se que se $y(t) = x(t) * h(t)$, então para se calcular amostras de $y(t)$ a partir de amostras de $x(t)$ e de $h(t)$, deve-se realizar a operação $y(n) = x(n) * h(n)$, em que $x(n)$ e $h(n)$ são seqüências sem *aliasing*, e têm comprimentos M e N , respectivamente. Assim, o resultado desta operação, $y(n)$, tem comprimento $M + N - 1$.

Desejando-se agora calcular as amostras de uma distribuição tempo-freqüência bilinear de um sinal $s(n)$ com N amostras, pode-se considerar uma seqüência de cálculo que obedeça a seguinte ordem:

1. Cálculo da distribuição de Wigner discreta, $P_{WIG_s}^d(n, \omega)$, através da Equação 4.21, resultando numa matriz $2N \times 2N$;
2. Cálculo das amostras da função núcleo $\psi(t, \omega)$. A taxa de amostragem utilizada não precisa ser necessariamente a mesma utilizada para o sinal ou para a distribuição de Wigner. Atribui-se, portanto, uma matriz das amostras desta função núcleo com dimensão $M \times M$;
3. Inserção de zeros na matriz da distribuição de Wigner, $P_{WIG_s}^d(n, \omega)$, e na matriz da função núcleo, $\psi(t, \omega)$, até que ambas possuam dimensão $(2N + M - 1) \times (2N + M - 1)$;
4. Cálculo da convolução bidimensional destas duas matrizes resultantes utilizando um algoritmo FFT.

É importante observar que este procedimento, introduzido por O'Neill (1997), é computacionalmente mais dispendioso, uma vez que as matrizes utilizadas no cálculo da convolução possuem dimensões maiores, porém o resultado final possui a vantagem de não apresentar o fenômeno de *aliasing* devido à superamostragem da função de autocorrelação temporal utilizada na obtenção da distribuição de Wigner.

Capítulo 5

Aplicações e resultados simulados

As distribuições tempo-freqüência mostram, do ponto de vista matemático, uma grande utilidade quando aplicadas à teoria de sinais. Na prática, porém, ainda é preciso explorar mais os resultados que estas representações fornecem. Pelo que se tem mostrado na literatura, estas técnicas, quando utilizadas para analisar o comportamento de sistemas mecânicos, se aplicam mais comumente ao monitoramento e detecção de falhas em máquinas e equipamentos como caixas de engrenagem, mancais de rolamento, eixos de rotores, dentre outros casos. Além de identificar a presença do defeito no funcionamento da máquina, através da identificação da freqüência característica da falha, é possível localizar o instante em que este defeito ocorreu, e sendo assim, possibilitar maior conhecimento do funcionamento do sistema em operação.

Os resultados aqui apresentados visam contribuir para o entendimento das principais características e propriedades inerentes a estas técnicas. Primeiramente é feita uma verificação de alguns dos fundamentos principais das distribuições de Wigner, Choi-Williams e do espectrograma. Além disso, alguns resultados numéricos são apresentados visando ilustrar fenômenos inerentes a alguns sistemas rotativos, bem como verificar a aplicabilidade das distribuições tempo-freqüência como ferramentas eficientes no estudo destes sistemas. Mais precisamente, é feita uma análise da resposta de um rotor Jeffcott sendo acelerado e passando pela velocidade crítica. Os resultados da aplicação da distribuição pseudo-Wigner direcional serão avaliados no intuito de identificar as características de sistemas rotativos através do estudo de seu movimento de precessão.

5.1 Sinal analítico

Como foi comentado nos Capítulos 3 e 4, os sinais analíticos apresentam algumas vantagens sobre o sinal real correspondente quando se deseja calcular distribuições tempo-frequência bilineares, como as da classe de Cohen. Os sinais reais digitais possuem um espectro simétrico em relação à origem, e esta característica é identificada também no plano tempo-frequência. Isto faz com que existam termos de interferência entre as componentes de frequência positiva e negativa presentes no sinal. Embora os termos cruzados possam trazer algumas informações úteis em alguns casos, eles são indesejáveis na presente aplicação. Ao eliminar as componentes do espectro referentes às frequências negativas, os sinais analíticos têm a capacidade de suprimir os termos de interferência entre frequências positivas e negativas. Além disso, seu uso implica numa vantagem do ponto de vista computacional, uma vez que não se faz necessário superamostrar o sinal para evitar o *aliasing*.

Para visualizar o efeito do uso do sinal analítico, apresenta-se, a seguir, um exemplo numérico. A Figura 5.1(a) mostra um sinal temporal composto pela soma de dois *chirps* (varredura senoidal) – um variando de 20 a 100 Hz e o outro de 60 a 10 Hz – e de uma senóide a 50 Hz. A Figura 5.1(b) apresenta o espectro deste sinal multicomponente obtido através da transformada de Fourier rápida (FFT). A partir destas figuras, pode-se perceber as limitações do uso da FFT na análise de um sinal não-estacionário: o espalhamento espectral e a incapacidade de fornecer informações localizadas no tempo.

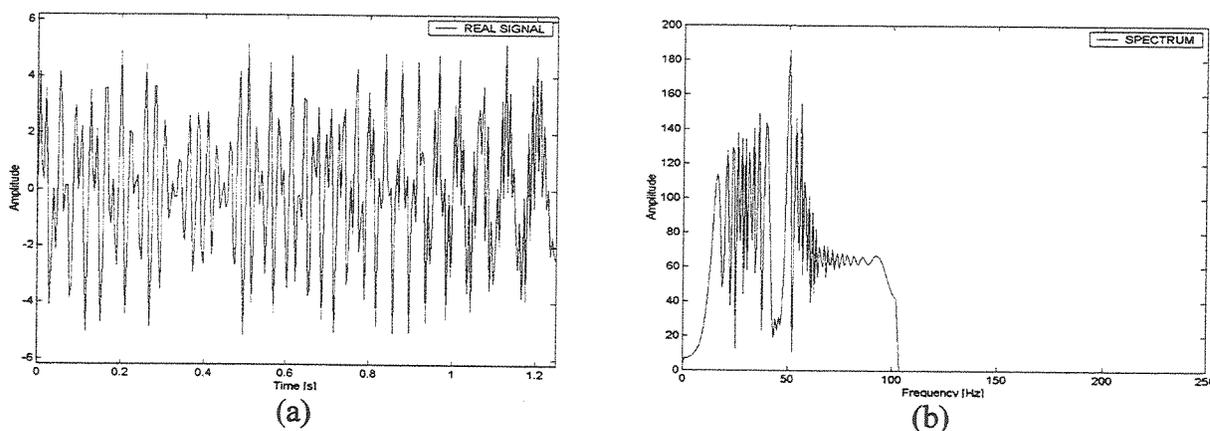


Figura 5.1 – Sinal multicomponente (a) e seu espectro (b).

A Figura 5.2 mostra uma comparação entre as distribuições de Wigner, de Choi-Williams e o espectrograma, para os sinais real e analítico. Observando as Figuras 5.2(a) e (b), pode-se verificar que o espectrograma, apesar de pertencer à classe de Cohen, não apresenta termos de interferência muito acentuados, uma vez que dependem da forma e tamanho da janela utilizada (Jeong & Williams, 1992). Em virtude da presença da janela, a resolução não apresenta boa qualidade, porém é possível identificar com clareza as componentes das frequências do sinal.

As Figuras 5.2(c) e (d), mostram a distribuição de Wigner. É possível identificar claramente, na Figura 5.2(c), os termos de interferência entre frequências positivas e negativas. Estes termos são tão acentuados que se confundem com as verdadeiras componentes do sinal. Já na Figura 5.2(d), os termos cruzados existentes estão localizados apenas entre as componentes das frequências positivas, confirmando o fato de o sinal analítico eliminar os termos entre frequências positivas e negativas.

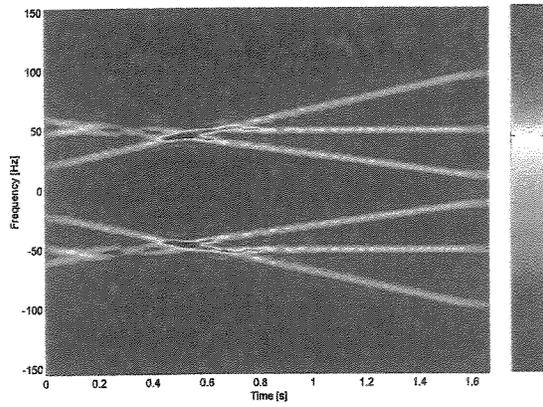
Finalmente, as Figuras 5.2(e) e (f) mostram a distribuição de Choi-Williams, que minimiza os efeitos dos termos de interferência, como esperado, mantendo ainda resolução razoável no plano tempo-frequência. É interessante salientar que o termo correspondente à componente harmônica dificilmente é localizado em qualquer uma das figuras, mesmo para o sinal analítico, uma vez que sua amplitude é bem menor comparada às dos outros sinais. Pode-se verificar também que os termos cruzados estão sempre presentes exatamente entre os auto-termos, fato que foi evidenciado por Hlawatsch & Bartels (1992).

Uma vez que são evidentes as vantagens de se utilizar os sinais analíticos para o cálculo das distribuições tempo frequência, estes sinais serão usados em todas as simulações apresentadas neste trabalho.

5.2 Resolução das distribuições tempo-frequência

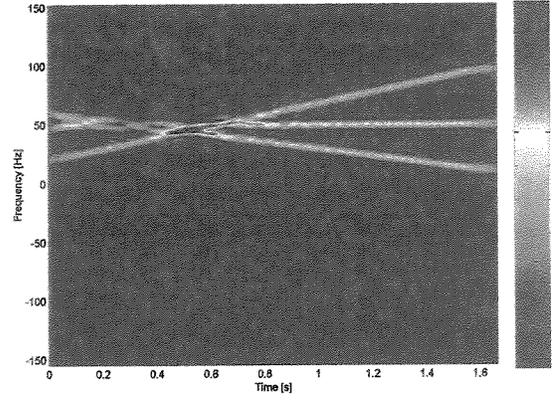
A resolução de uma distribuição tempo-frequência é uma das características mais discutidas destas representações, uma vez que define o quão precisamente uma distribuição identifica as componentes de frequência instantânea de um sinal. Para analisar esta importante propriedade,

Sinal real

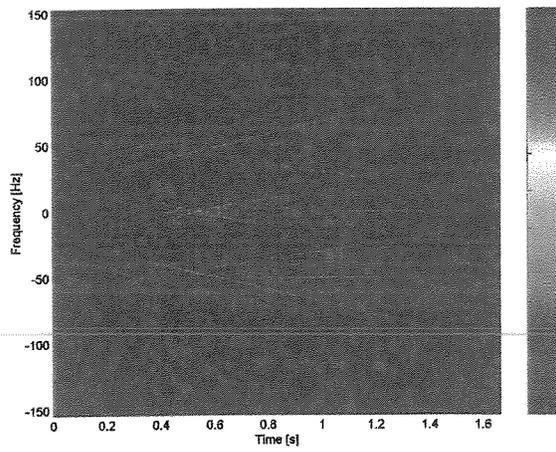


(a)

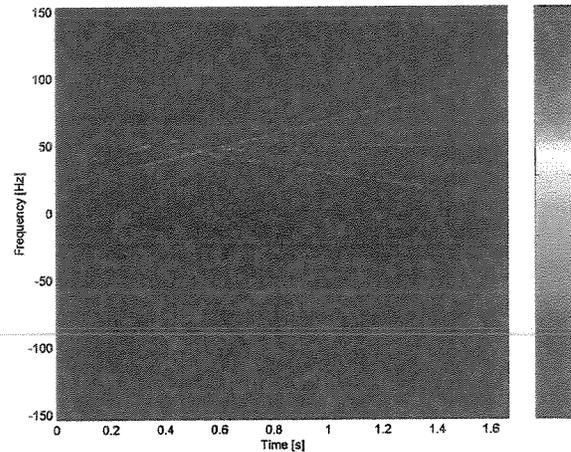
Sinal analítico



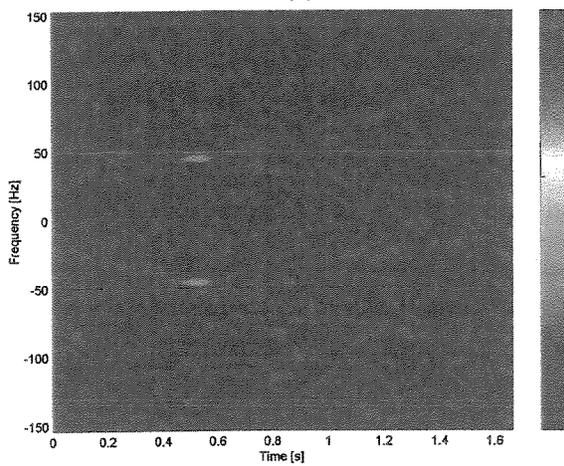
(b)



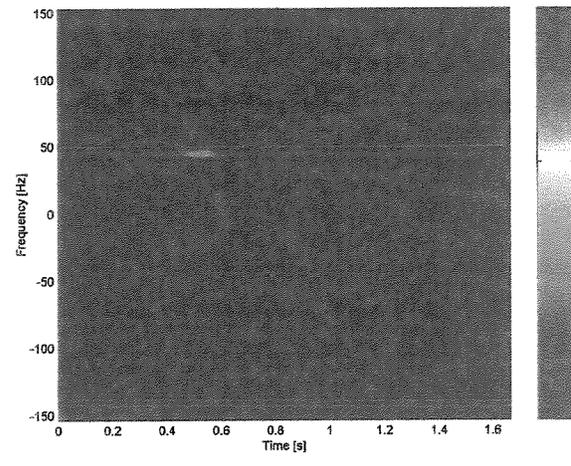
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.2 – (a) e (b): espectrograma; (c) e (d): Wigner; (e) e (f): Choi-Williams.

será analisado um sinal de um rotor Jeffcott durante sua partida, acelerando até acima da velocidade crítica. Estes resultados estão mostrados nas Figura 5.3 e 5.4 que apresentam a distribuição tempo-freqüência, a sua esquerda, o espectro do sinal e abaixo, o sinal no tempo.

Transformada de Fourier de curta duração (STFT). A STFT nada mais é que a combinação seqüencial das transformadas de Fourier calculadas em pequenos pedaços do sinal original, nos quais pode-se assumir a estacionaridade. O uso de janelas adequadas para dividir o sinal é fundamental para a redução de erros de *leakage*. Além disso, as características da distribuição são altamente dependentes do tipo, forma e tamanho da janela utilizada, uma vez que a função núcleo do espectrograma é obtida em função da janela. As Figuras 5.3 mostram o espectrograma calculado para uma janela gaussiana com diferentes comprimentos, os quais variam de um valor bem pequeno, Figura 5.3(a), até um valor bem elevado, Figura 5.3(d). Analisando apenas as Figuras 5.3(a) e (d) nota-se que uma boa resolução no tempo, obtida com o uso de janela de comprimento pequeno, não oferece boa resolução na freqüência. A Figura 5.3(d) mostra que, caso o valor para o comprimento da janela seja muito elevado, a resolução da distribuição diminui. Portanto, o valor adequado para o comprimento da janela não pode ser arbitrariamente muito pequeno ou muito grande, em detrimento da má resolução que se verifica no plano, de acordo com o princípio da incerteza.

Distribuição de Choi-Williams. A resolução da distribuição de Choi-Williams é controlada, basicamente, pelo parâmetro σ presente em sua função núcleo. Na verdade, este parâmetro controla duas importantes características desta distribuição: os termos de interferência (Choi & Williams, 1989) e o espalhamento espectral, ou resolução propriamente dita. Infelizmente a escolha de um valor para este parâmetro não é trivial e depende da habilidade do usuário, e varia de acordo com sua necessidade. Da mesma forma que a janela traz limitações ao espectrograma, o valor do σ ideal não consegue atender simultaneamente às características de boa resolução no plano e ausência de interferência entre componentes.

Para visualizar o efeito da variação do valor de σ nos resultados da distribuição de Choi-Williams, foi utilizado o mesmo sinal temporal do caso anterior. A Figura 5.4(a) mostra a DCW

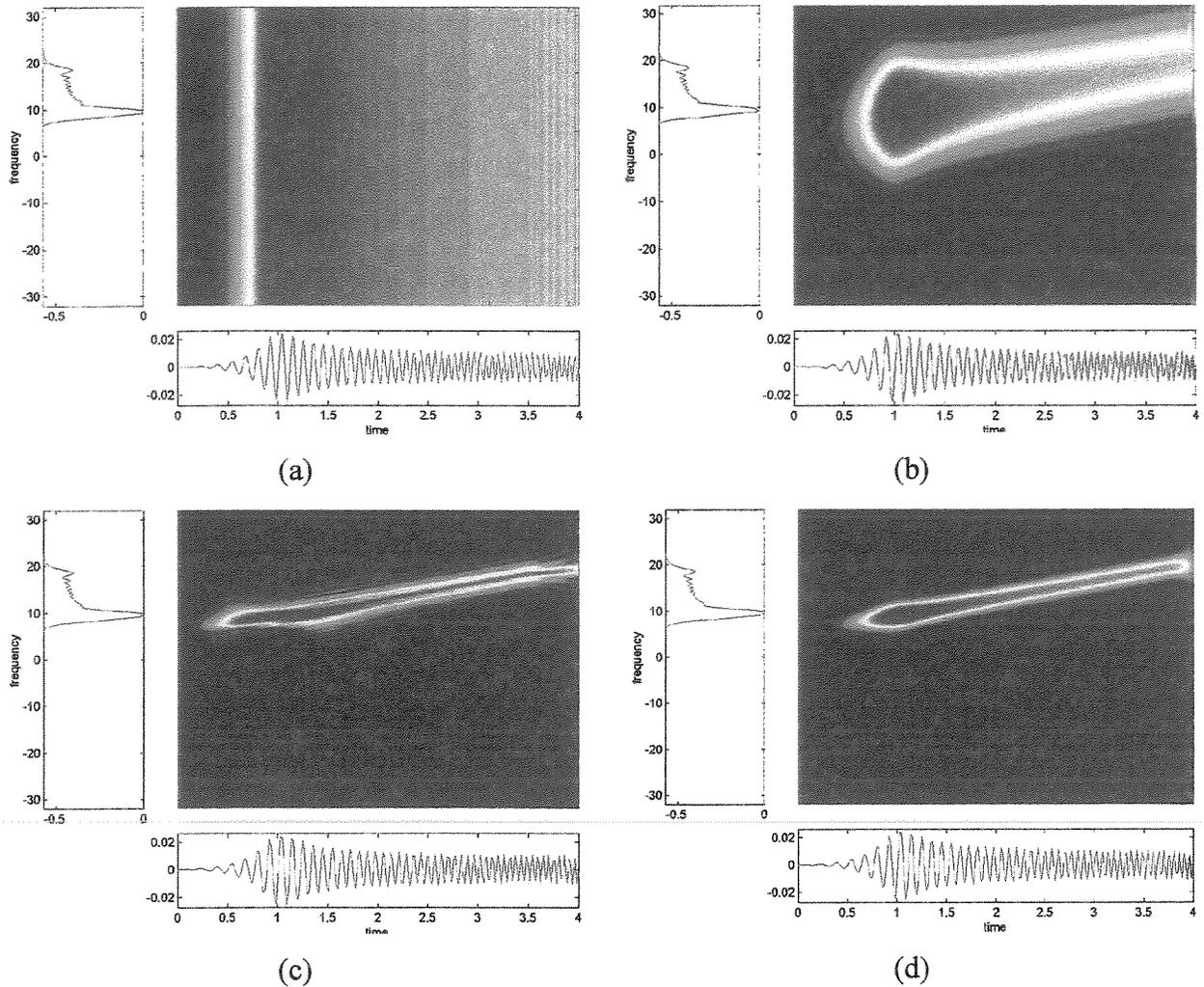


Figure 5.3 – Influência do tamanho da janela no resultado do espectrograma. De (a) a (d) o comprimento da janela cresce.

para um valor de σ menor que 0,1, o que resulta numa distribuição completamente distorcida, em que nenhuma componente pode ser localizada. Na medida em que este valor vai aumentando, Figuras 5.4(b)-(d), a distribuição começa a tomar forma e identifica as componentes de frequência. Isto indica que quanto maiores forem os valores assumidos para σ , mais a distribuição de Choi-Williams se aproxima da distribuição de Wigner. Para verificar isto, basta analisar matematicamente a função núcleo. Como a utilização desta distribuição depende muito da aplicação a que se destina, a escolha do valor de σ varia de caso a caso.

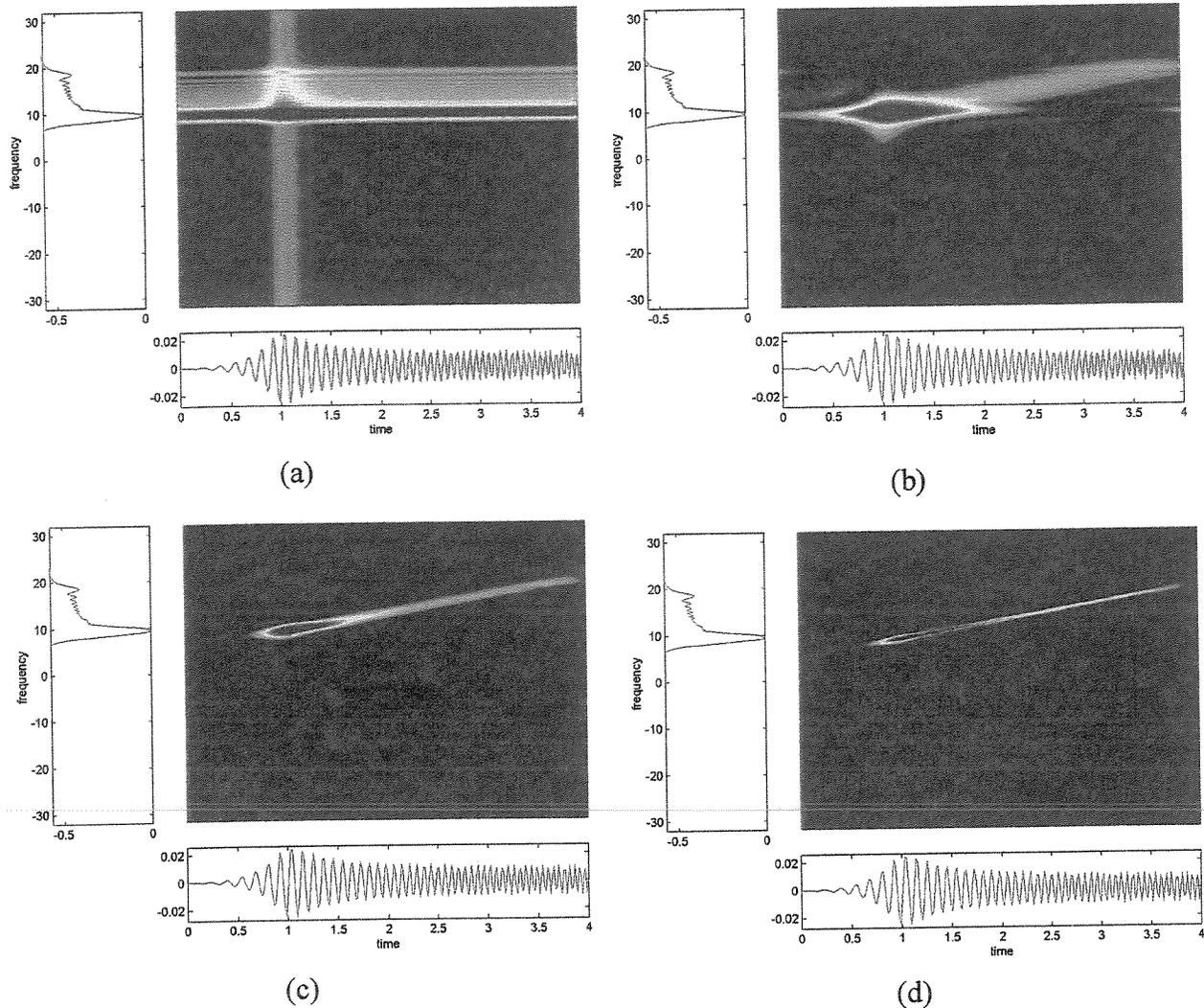


Figura 5.4 – Influência do parâmetro σ na resolução da distribuição de Choi-Williams. De (a) a (d) o valor de σ cresce melhorando a resolução.

5.3 Análise quantitativa

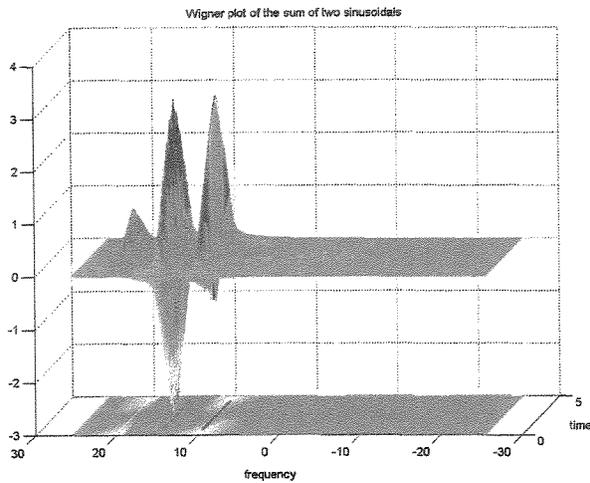
Nos dias de hoje, a identificação dos parâmetros modais de um sistema rotativo é realizada, na maioria das vezes, com a máquina operando a uma velocidade constante. Os resultados obtidos nesta situação, gerados a partir da aplicação da transformada de Fourier, são corretamente computados. Seria interessante, portanto, imaginar uma forma de se obter distribuições em que a amplitude das componentes do sinal no plano tempo-freqüência também fornecessem resultados corretos. Contudo, não se sabe ao certo o quão precisas são as informações quantitativas que estas distribuições apresentam.

Uma vez que grande parte das aplicações das distribuições tempo-freqüência a sistemas mecânicos está voltada para o monitoramento e detecção de falhas em equipamentos (Meng e Qu, 1991; Bucher, I., 2001; Silva, 1999), a obtenção de resultados quantitativamente corretos poderia facilitar a identificação de parâmetros modais de sistemas girantes, por exemplo, sendo necessário para isto apenas a realização de medições durante a partida ou parada da máquina. As pesquisas a respeito das distribuições tempo-freqüência vêm mostrando, nos últimos anos, um enorme esforço no sentido de se obter representações que apresentem uma redução de algumas características, como a negatividade e os termos de interferência, que podem influenciar na análise quantitativa dos resultados. Como já foi mencionado, os termos de interferência têm-se tornado alvo de estudos que visam sua redução através do uso de distribuições com função núcleo adaptativa.

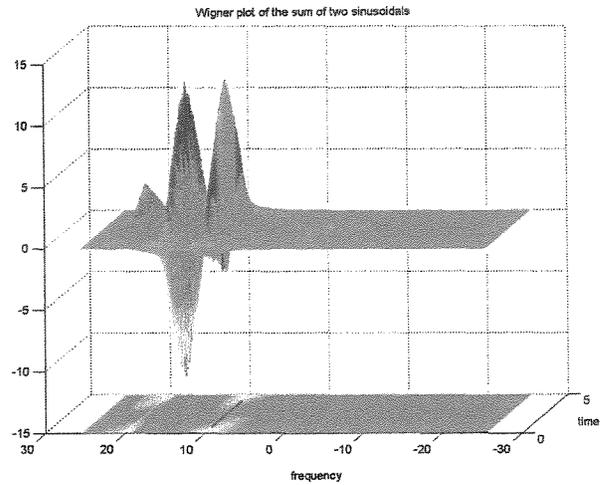
A seguir, apresenta-se uma análise quantitativa simples do uso das distribuições de Wigner, Choi-Williams e espectrograma aplicadas a um sinal multicomponente. Primeiramente, dois sinais, $s_1(t) = 2 \sin(20\pi \cdot t)$ e $s_2(t) = \sin(40\pi \cdot t)$ com amplitudes e freqüências diferentes, são somados. Em seguida, os sinais harmônicos que compõem o sinal descrito anteriormente têm o valor de suas amplitudes dobrado, ou seja, $s_1'(t) = 4 \sin(20\pi \cdot t)$ e $s_2'(t) = 2 \sin(40\pi \cdot t)$.

Espera-se então verificar o comportamento das três distribuições com relação à amplitude da distribuição do conteúdo de energia no plano tempo-freqüência. Os resultados da aplicação da distribuição de Wigner estão mostrados na Figura 5.5. Pode-se perceber que as componentes apresentam valores de amplitude diferentes para os sinais originais e modificados, mantendo porém, a proporcionalidade entre as amplitudes das componentes.

A distribuição de Wigner mostra uma forte presença dos termos de interferência. Como estes termos possuem valores negativos e positivos, imagina-se (mas não há na literatura comprovação matemática disto) que seu efeito na energia total do sinal seja aproximadamente nulo, ou seja, valores positivos e negativos se anulam!



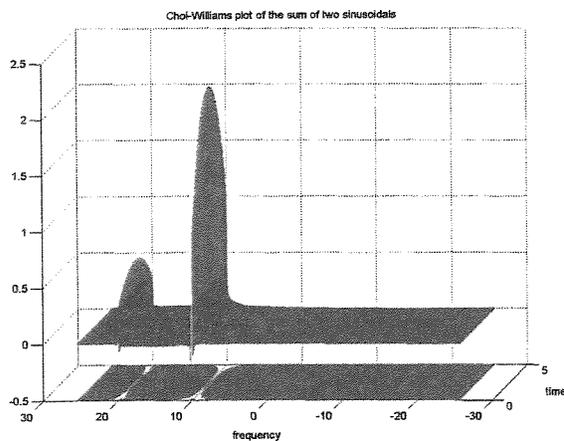
(a) original



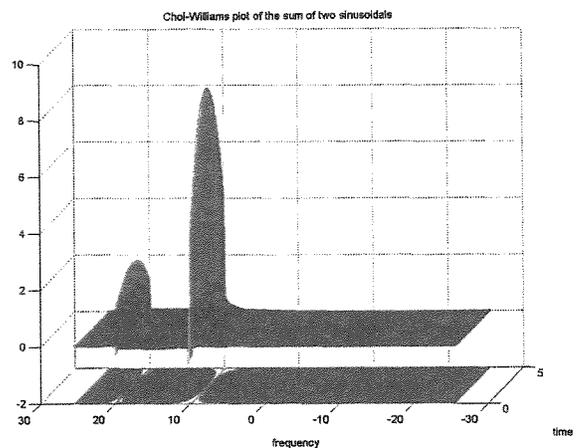
(b) modificado

Figura 5.5 – Distribuição de Wigner para a soma de dois sinais senoidais.

A Figura 5.6 apresenta os resultados obtidos através da distribuição de Choi-Williams, utilizando os mesmos sinais que foram analisados pela distribuição de Wigner. A Figura 5.6(a) representa a distribuição de Choi-Williams aplicada ao sinal original, e mostra que, embora as componentes do sinal apresentem proporcionalidade entre as amplitudes das componentes, os valores das amplitudes diferem dos encontrados para a distribuição de Wigner. Isto se deve basicamente às características da distribuição, que são dependentes da função núcleo.



(a)



(b)

Figura 5.6 – Distribuição de Choi-Williams para o sinal (a) original, e (b) modificado.

Finalmente, o espectrograma também é utilizado para os mesmos sinais e os resultados obtidos apresentam certa semelhança com os das distribuições discutidas anteriormente, no que diz respeito à proporcionalidade verificada entre as amplitudes das componentes, como mostra a Figura 5.7. Como era de se esperar, a distribuição não apresenta valores negativos e a resolução em frequência é pior que nos casos anteriores. Porém, estes valores diferenciam-se dos encontrados nas outras distribuições devido à presença da janela na função núcleo. Como as distribuições tempo-frequência devem satisfazer as margens para que a energia distribuída no plano tempo-frequência seja corretamente calculada, não se pode esperar que o espectrograma forneça, nesta primeira análise, resultados quantitativos corretos, uma vez que as margens não são satisfeitas para esta distribuição.

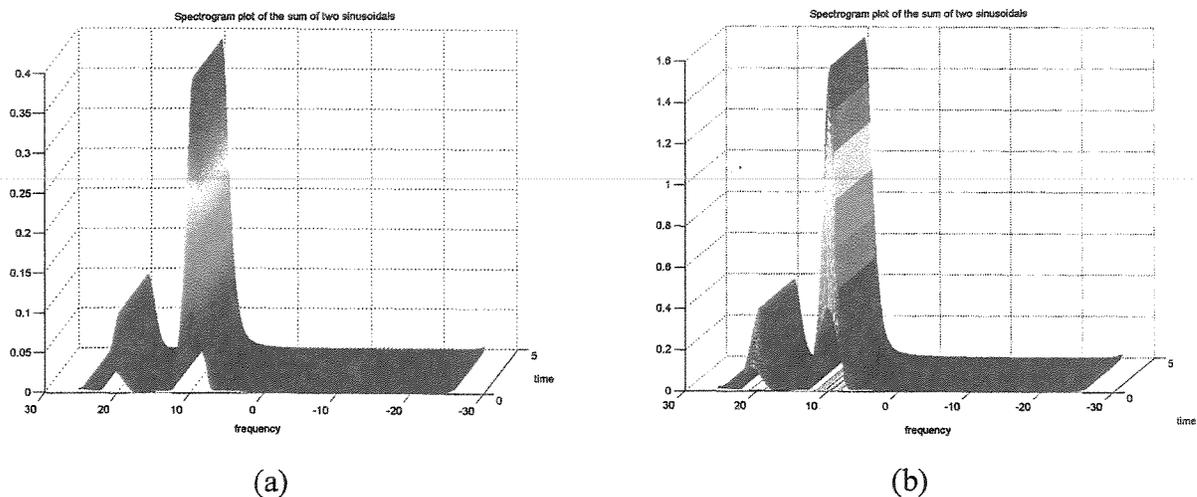


Figura 5.7 – Espectrograma para o sinal (a) original e (b) modificado.

De um modo geral, chega-se à conclusão que as distribuições analisadas, todas pertencentes à classe de Cohen, apresentam amplitudes diferentes uma das outras, muito provavelmente em razão das características da função núcleo de cada uma. Mesmo assim, todas elas mostraram que as componentes apresentam uma proporcionalidade mesmo com a variação da amplitude do sinal analisado. Portanto, não se pode afirmar, neste caso, que o valor da amplitude da distribuição seja correto, porém a proporcionalidade entre as amplitudes das componentes no plano tempo-frequência é mantida corretamente.

5.4 Aplicação ao estudo de sistemas rotativos

Um dos objetivos deste trabalho é a aplicação das distribuições tempo-freqüência a sinais provenientes de estruturas rotativas. O modelo escolhido para a realização da análise numérica é um rotor Jeffcott, que consiste num disco rígido apoiado no centro de num eixo flexível suportado por mancais nas suas extremidades. Serão estudados os casos de um rotor Jeffcott sujeito ao desbalanceamento e apoiado sobre suportes isotrópicos e anisotrópicos. Particularmente, será utilizada a distribuição pseudo-Wigner direcional para analisar os resultados, uma vez que esta possui bons resultados em termos de resolução no plano tempo-freqüência. A distribuição é direcional, pois consegue separar as componentes de precessão direta das de precessão retrógrada no plano tempo-freqüência. Para que se possa aplicar esta distribuição a um sistema que apresente condições não-estacionárias, será analisado um rotor acelerando através de sua velocidade crítica.

Distribuição de Wigner direcional. Para a análise de máquinas rotativas com velocidade de rotação variante no tempo, foi desenvolvida por Lee e Han (1998) a distribuição de Wigner direcional (dWD). Esta formulação baseia-se na utilização de coordenadas complexas para descrever o movimento de precessão de uma estação do rotor.

Matematicamente, dois sinais harmônicos reais e ortogonais, $x(t)$ e $y(t)$, são associados formando sinais complexos,

$$z(t) = x(t) + j y(t); \quad z^*(t) = x(t) - j y(t). \quad (5.1)$$

Pode-se associar o sinal complexo $z(t)$ a um vetor girante tomado a partir da origem e cujas componentes real e imaginária correspondam às respostas do movimento nas direções x e y , respectivamente, como mostra a Figura 5.8.

Através de uma expansão em séries de Fourier (Kessler, 1999), o sinal complexo descrito pela Equação 5.1 pode ser representado na forma polar, que separa as componentes de freqüência diretas e retrógradas,

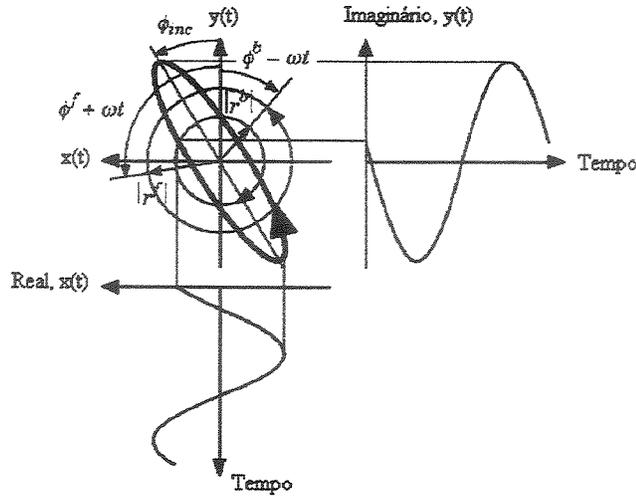


Figura 5.8 – Movimento orbital em coordenadas complexas (modificado de Han e Lee,1999).

$$z(t) = r_d e^{j\omega t} + r_r e^{-j\omega t} . \quad (5.2)$$

Esta equação é característica de um movimento elíptico no plano complexo. Este movimento pode ser interpretado como o vetor resultante da soma de dois vetores girantes em sentidos opostos, nas direções direta e retrógrada, e com diferentes amplitudes. A forma e directividade do movimento plano elíptico são determinados através do importante conceito do Índice de Forma e Directividade (SDI), calculado por:

$$-1 \leq SDI = \frac{|r_d| - |r_r|}{|r_d| + |r_r|} \leq 1 . \quad (5.3)$$

sendo que:

- se $|r_d| = 0 \Rightarrow SDI = -1$: movimento circular retrógrado;
- se $|r_d| < |r_r| \Rightarrow -1 < SDI < 0$: movimento elíptico retrógrado;
- se $|r_d| = |r_r| \Rightarrow SDI = 0$: movimento retilíneo;
- se $|r_d| > |r_r| \Rightarrow 0 < SDI < 1$: movimento elíptico direto;
- se $|r_r| = 0 \Rightarrow SDI = 1$: movimento circular direto.

A distribuição de Wigner calculada para um sinal complexo pode ser expressa como (Lee & Han, 1998),

$$P_{WIGz}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau = P_{WIGz_d z_d} + P_{WIGz_r z_r} + \left(P_{WIGz_d z_r} + P_{WIGz_r z_d} \right) \quad (5.4)$$

Pelo fato da distribuição de Wigner ser bilinear, sua utilização num sinal deste tipo, composto por mais de uma componente, provoca a ocorrência dos termos de interferência.

Para analisar a resposta de um sistema rotativo descrito em coordenadas complexas, faz-se uso do conceito de sinal analítico, já discutido no Capítulo 3. Um sinal analítico associado a um sinal complexo pode ser definido como sendo composto pelo sinal complexo original, $z(t)$, e pela transformada de Hilbert deste sinal complexo. Os sinais analíticos de precessão direta e retrógrada são definidos, respectivamente, por

$$z^d(t) = \frac{\{z(t) + j H[z(t)]\}}{2} \text{ e } z^r(t) = \frac{\{z(t) - j H[z(t)]\}}{2}, \quad (5.5)$$

As transformadas de Fourier destes sinais analíticos direcionais são dadas por

$$Z^d(\omega) = \{Z(\omega) + (\text{sign}\omega) Z(\omega)\} / 2 = \begin{cases} Z(\omega), & \text{para } \omega > 0 \\ Z(\omega) / 2, & \text{para } \omega = 0 \\ 0, & \text{para } \omega < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

$$Z^r(\omega) = \{Z(\omega) - (\text{sign}\omega) Z(\omega)\} / 2 = \begin{cases} 0, & \text{para } \omega > 0 \\ Z(\omega) / 2, & \text{para } \omega = 0 \\ Z(\omega), & \text{para } \omega < 0 \end{cases}$$

em que

$$\text{sign}\omega = \begin{cases} +1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Pode-se verificar, através das Equações 5.6 e 5.7, que o sinal analítico de precessão direta é definido apenas para as frequências positivas, enquanto o de precessão retrógrada, para as frequências negativas.

A distribuição de Wigner direcional foi desenvolvida para eliminar estes termos de interferência entre as componentes positivas e negativas do sinal, ou seja, entre as componentes diretas e retrógradas do rotor. A distribuição de Wigner direcional é definida como

$$dWD(t, \omega) = \begin{cases} dW_{z^d}(t, \omega) = \int z^d(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{d*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega > 0 \\ dW_{z^r}(t, \omega) = \int z^r(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{r*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Para proporcionar uma redução no tempo computacional da distribuição de Wigner, será utilizada a distribuição pseudo-Wigner, através da inclusão de uma janela temporal na Equação 5.8. Então, esta distribuição pseudo-Wigner direcional (dPWD) pode ser calculada por:

$$dPWD(t, \omega) = \begin{cases} dPW_{z^d}(t, \omega) = \int h(\tau) z^d(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{d*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega > 0 \\ dPW_{z^r}(t, \omega) = \int h(\tau) z^r(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{r*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Rotor Jeffcott. As equações de movimento de um rotor Jeffcott, mostrado na Figura 5.9, para suportes anisotrópicos podem ser encontradas na literatura (Genta, 1997) e são dadas por:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_{xx}\dot{x} + k_{xx}x = m\varepsilon\{\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + \ddot{\theta} \sin(\theta)\} \\ m\ddot{y} + c_{yy}\dot{y} + k_{yy}y = m\varepsilon\{\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta)\} \end{cases} \quad (5.10)$$

sendo θ o deslocamento angular do rotor. A solução da Equação 5.10, ou seja, a resposta do sistema nas direções x e y , foi calculada por integração numérica, e representa o deslocamento do eixo.

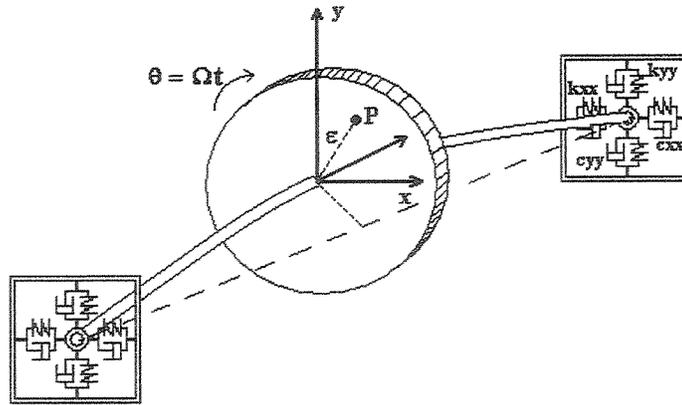
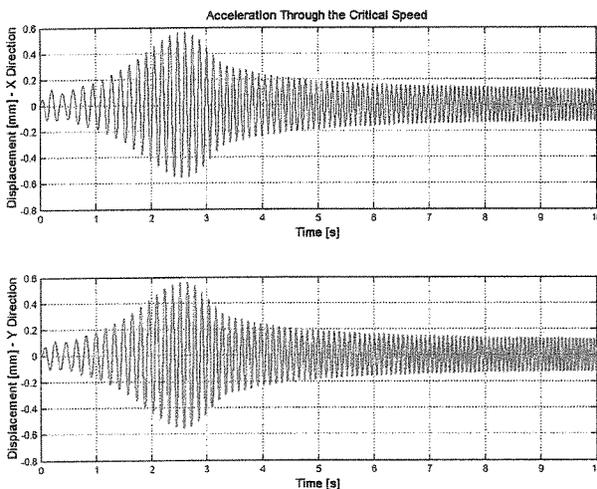
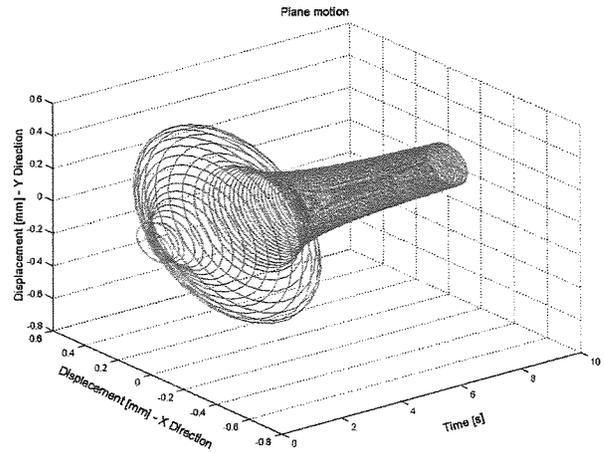


Figura 5.9 – Ilustração de um rotor Jeffcott.

Inicialmente, foi feita a análise de um rotor isotrópico de massa $m = 5 \text{ kg}$, excentricidade $\varepsilon = 0,0001 \text{ m}$, rigidez nos mancais $k_{xy} = k_{yx} = 0$, e $k_{xx} = k_{yy} = 10.000 \text{ N/m}$, amortecimento nos mancais $c_{xy} = c_{yx} = 0$, e $c_{xx} = c_{yy} = 40 \text{ N.s/m}$ ($\xi = 8,9\%$). Neste caso, o rotor foi acelerado linearmente de 30 rad/s (286 rpm) a 100 rad/s (955 rpm) em 10 segundos, e o sinal foi amostrado com 1024 pontos. As respostas do rotor nas duas direções perpendiculares e o movimento plano do centro do eixo são mostradas na Figura 5.10, enquanto que a dPWD é apresentada na Figura 5.11.

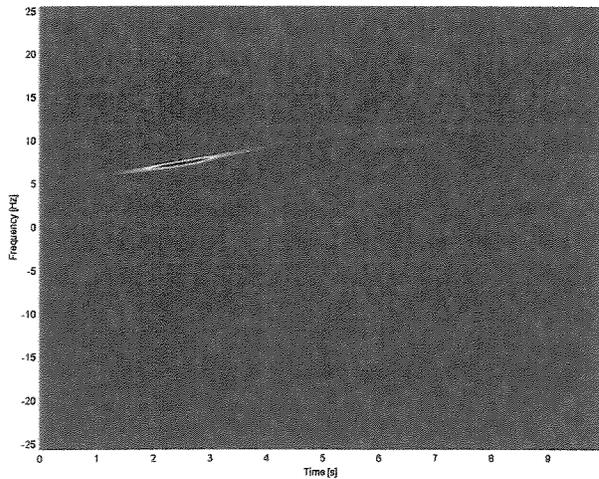


(a)

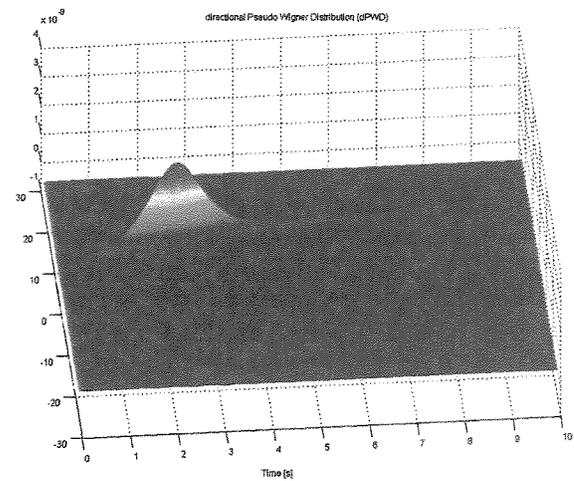


(b)

Figura 5.10 – Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y.



(a)

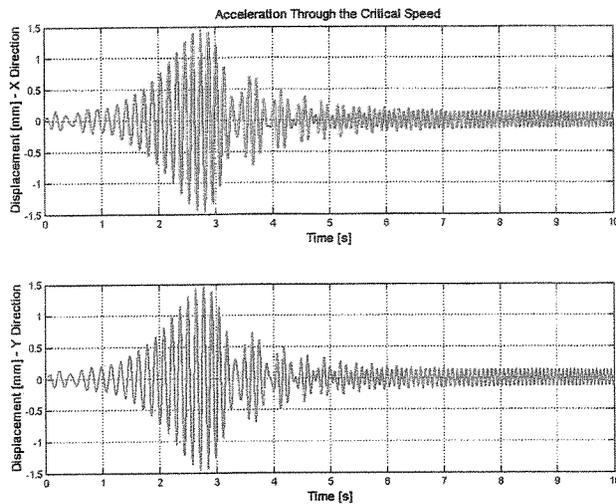


(b)

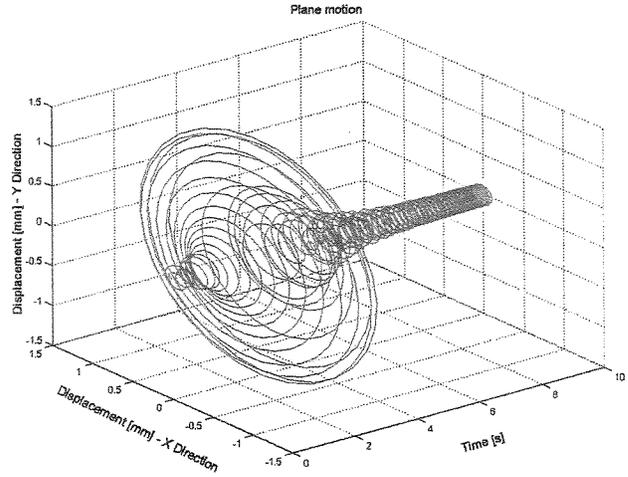
Figura 5.11 – dPWD da resposta de um rotor isotrópico amortecido.

É possível verificar, a partir da dPWD, que apenas a componente direta está presente na resposta do sistema. Este resultado confirma o fato de o desbalanceamento não excitar a precessão retrógrada em rotores isotrópicos.

Uma outra análise de rotores isotrópicos foi proposta para estudar a influência da diminuição do amortecimento do sistema. Os novos valores são $c_{xy} = c_{yx} = 0$, e $c_{xx} = c_{yy} = 10 \text{ N.s/m}$ ($\xi = 2,2\%$), com os demais parâmetros do sistema permanecendo inalterados. A Figura 5.12 mostra a resposta, nas duas direções, do sistema sendo acelerado, além do movimento orbital do rotor durante a aceleração. Percebe-se que após passar pela velocidade crítica há um comportamento diferente daquele observado na simulação anterior, sendo que, neste caso, surgem algumas oscilações na amplitude do sinal de resposta do rotor.



(a)



(b)

Figura 5.12 – Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y .

Os resultados da dPWD são mostrados na Figura 5.13. Analisando-se atentamente esta figura, percebe-se, após a passagem pela velocidade crítica, a existência de duas componentes no plano tempo-freqüência (além dos termos de interferência entre estas): a primeira, variando linearmente com o tempo, corresponde à rotação do rotor; e a segunda, constante no tempo, coincide com a freqüência natural do sistema! Este fenômeno pode ser explicado fisicamente lembrando-se que, como este rotor está operando sempre em uma condição não estacionária, ao passar pela velocidade crítica, as características próprias do sistema serão excitadas. Após este instante, o sistema passa a oscilar, por algum tempo, também em sua freqüência natural, uma vez que o amortecimento é pequeno. A excitação forçada, por sua vez, continua variando sua freqüência linearmente com o tempo. A existência, em um determinado intervalo de tempo, de duas componentes de freqüências próximas, faz surgir o fenômeno de batimento. Após passado algum tempo, este fenômeno desaparece pois a resposta transiente do rotor é atenuada e/ou porque as componentes em freqüência (rotação e freqüência natural) se afastam. Percebe-se, neste caso, que a visualização do sinal no plano tempo-freqüência auxilia a interpretação física do fenômeno.

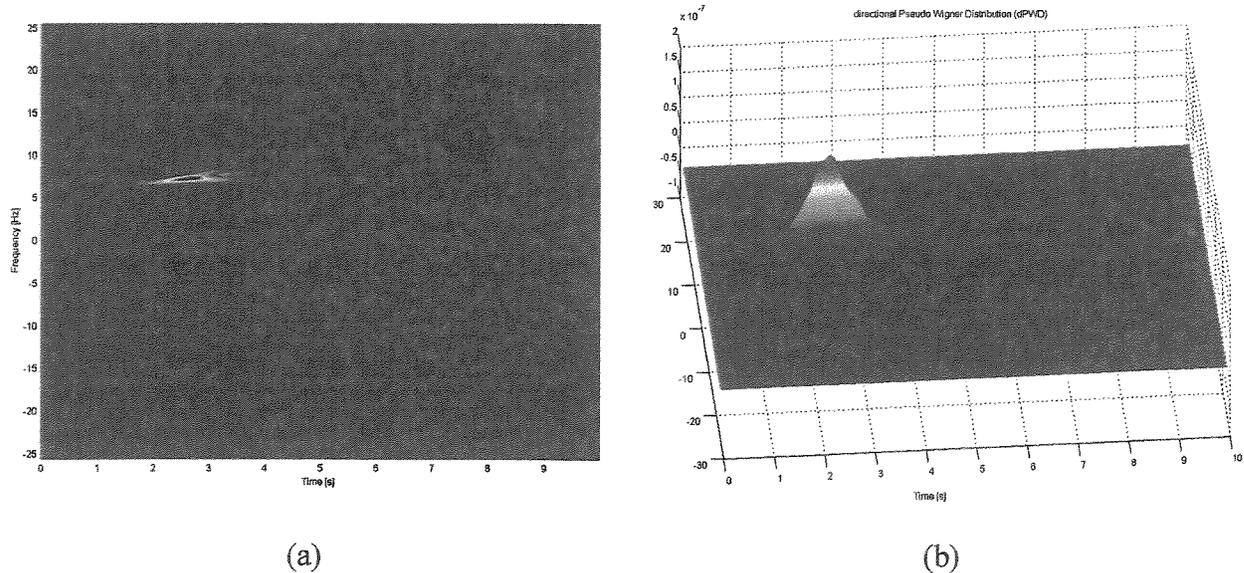


Figura 5.13 – dPWD da resposta de um rotor isotrópico pouco amortecido.

Como já se sabe, os movimentos de precessão retrógrada só serão excitados pelo desbalanceamento caso os suportes sejam anisotrópicos. Desta forma, analisa-se um rotor de Jeffcott anisotrópico com as seguintes propriedades: massa - $m = 5$ kg; excentricidade - $\varepsilon = 0,0001$ m; rigidez - $k_{xy} = k_{yx} = 0$, e $k_{xx} = 10.000$ N/m e $k_{yy} = 20.000$ N/m, e amortecimento - $c_{xy} = c_{yx} = 0$, e $c_{xx} = 40$ N.s/m ($\xi = 8,9\%$) e $c_{yy} = 50$ N.s/m ($\xi = 7,9\%$). Neste caso, as condições de aceleração e amostragem do sinal permaneceram as mesmas que nos casos anteriores.

A resposta do rotor nas duas direções está ilustrada na Figura 5.14(a), enquanto a Figura 5.14(b) mostra o movimento das órbitas ao longo do tempo, em que é possível identificar a mudança de movimento direto para retrógrado.

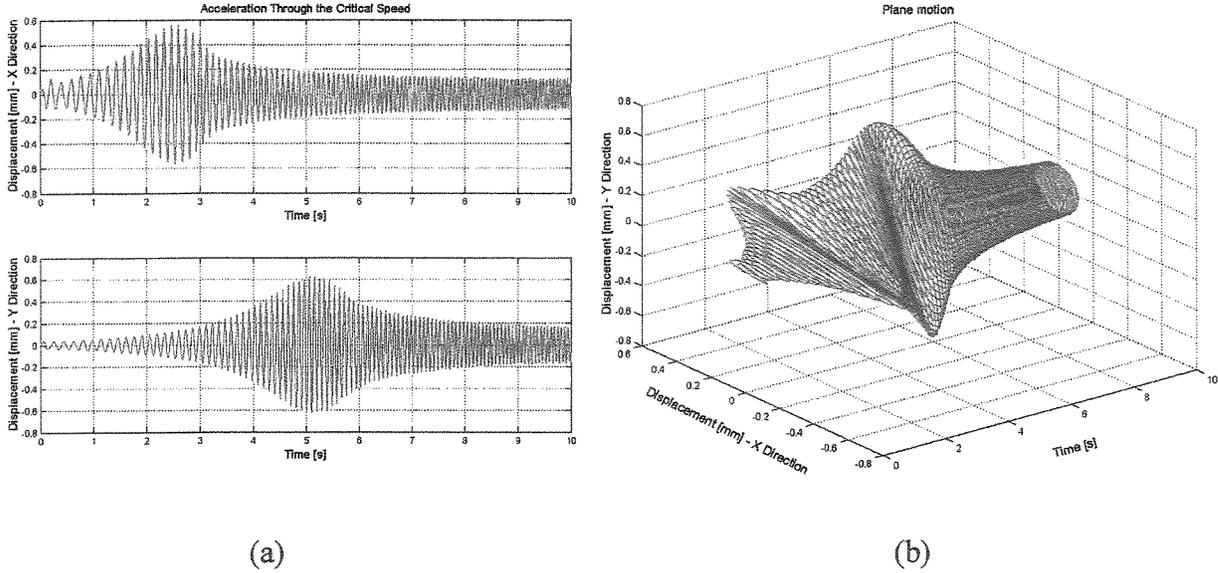
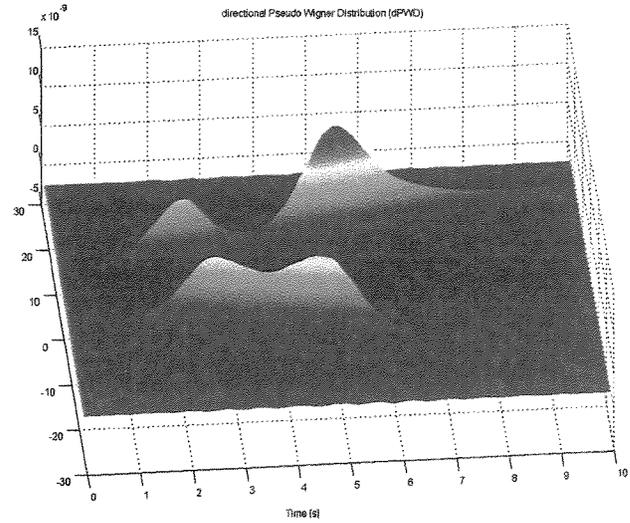
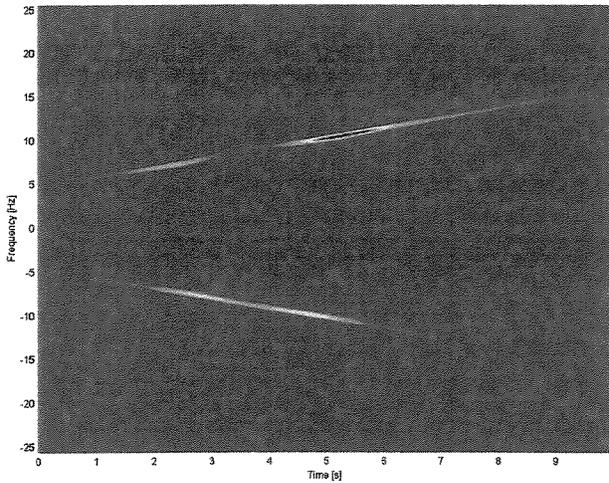


Figura 5.14 – Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y .

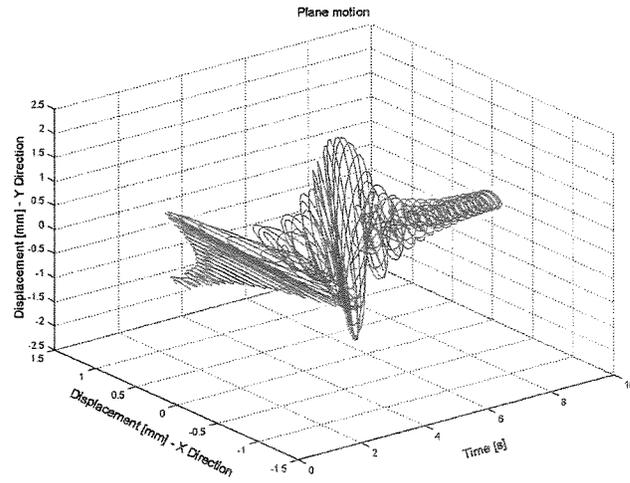
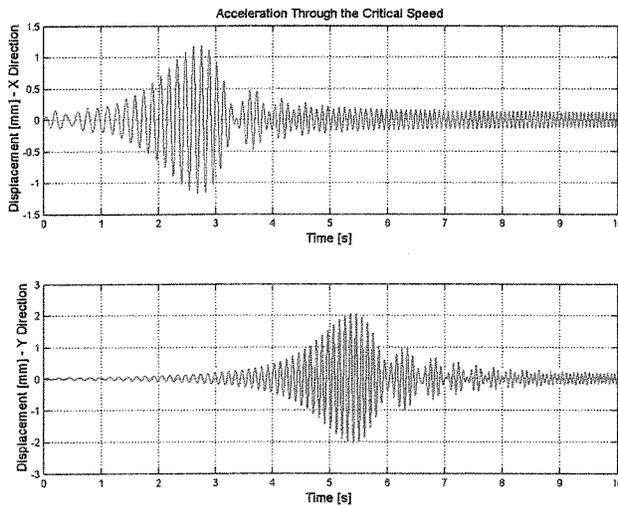
A distribuição pseudo-Wigner direcional é mostrada na Figura 5.15. Verifica-se que as componentes de frequência positivas e negativas são separadas e, além disso, não existem termos de interferência entre elas. É possível que sejam claramente visualizadas as componentes de movimento de precessão direta e retrógrada nas frequências positivas e negativas, respectivamente. Ainda mais, a direção do movimento resultante do rotor pode ser identificada ao se comparar as amplitudes destas duas componentes. Deduz-se que, no início do movimento (até aproximadamente 3 segundos), o rotor apresenta movimento de precessão direta, já que a componente das frequências positivas apresenta amplitude maior que a componente de frequências negativas. Depois de passar pela primeira velocidade crítica, a direção do movimento se inverte e o modo retrógrado passa a dominar até que se alcance a segunda velocidade crítica, quando o rotor passa a descrever seu movimento de precessão direta novamente.

Uma nova análise do rotor anisotrópico será feita no intuito de verificar as mudanças na resposta do sistema quando este possui pouco amortecimento nos mancais. Os novos valores para estes parâmetros são: $c_{xy} = c_{yx} = 0$, e $c_{xx} = 15 \text{ N.s/m}$ ($\xi = 3,3\%$) e $c_{yy} = 10 \text{ N.s/m}$ ($\xi = 1,6\%$),



(a) (b)
 Figura 5.15 – dPWD da resposta de um rotor anisotrópico.

sendo que os demais coeficientes permaneceram inalterados. Desta forma, para a mesma variação de velocidade de rotação, e no mesmo intervalo de tempo, têm-se os resultados mostrados na Figura 5.16, em que os sinais da resposta nas duas direções laterais são mostrados juntamente com o progresso do movimento orbital no tempo.



(a) (b)
 Figura 5.16 – Resposta da aceleração do rotor através da velocidade crítica nas direções x e y.

Verifica-se que o rotor anisotrópico apresenta o mesmo fenômeno que o rotor isotrópico: ocorrem oscilações na modulação da amplitude das respostas após o sistema passar pela

velocidade crítica. A dPWD é ilustrada na Figura 5.17. As conclusões apresentadas para o caso de rotor com mancais isotrópicos aplicam-se integralmente a este caso.

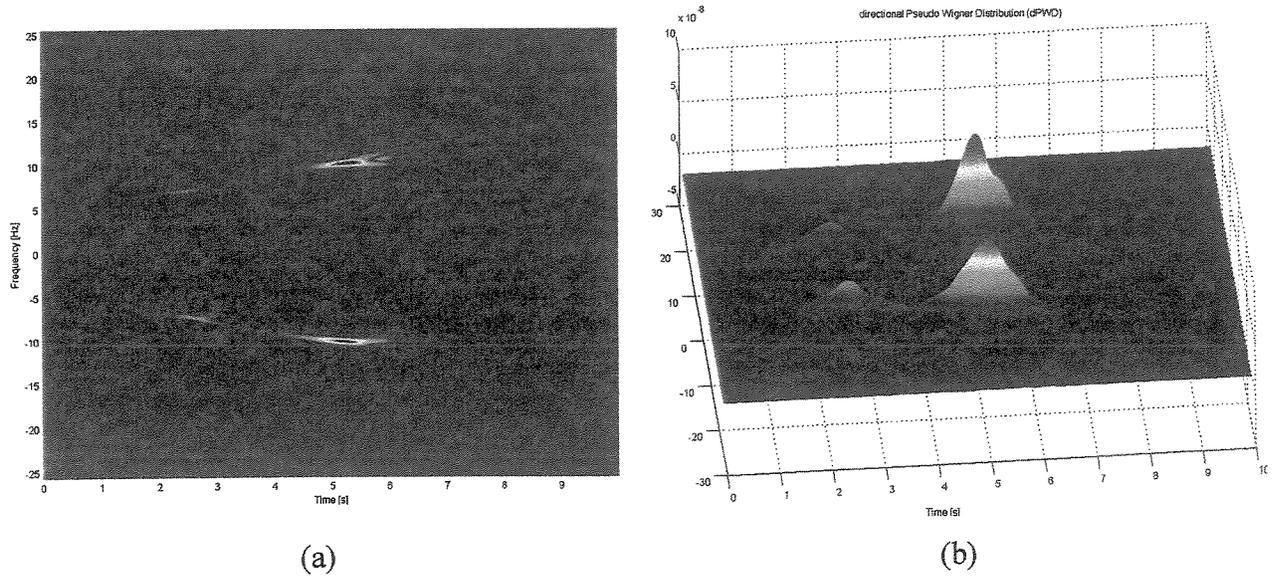


Figura 5.17 – dPWD da resposta de um rotor anisotrópico.

Capítulo 6

Resultados experimentais

Os resultados das simulações numéricas apresentadas no capítulo anterior mostram que rotores do tipo Jeffcott apoiados sobre mancais anisotrópicos podem descrever movimentos de precessão direta ou retrógrada, dependendo da faixa de rotação. Neste capítulo, investiga-se a existência do fenômeno de modos operacionais mistos em rotores flexíveis, situação caracterizada pela ocorrência simultânea de movimentos de precessão direta e retrógrada em diferentes estações do rotor. Assim, inicialmente apresenta-se uma breve discussão a respeito das causas e da existência deste fenômeno. Em seguida, faz-se uma descrição da bancada utilizada para a realização dos ensaios. Como será visto mais adiante, existem condições específicas sob as quais o fenômeno dos modos operacionais mistos pode ocorrer. Assim, para garantir que o rotor estudado apresentaria, em algumas faixas de rotação, os modos operacionais mistos, investigou-se sua ocorrência, primeiramente, através de um programa de elementos finitos. Os resultados destas simulações também são incluídos neste capítulo. Finalmente, os testes realizados são descritos e os resultados obtidos, analisados.

6.1 Modos operacionais mistos

Uma grande quantidade de rotores que compõem máquinas rotativas é suportada por mancais anisotrópicos, nos quais a rigidez nas duas direções laterais ortogonais possuem valores diferentes. Neste caso, as diversas estações do rotor descrevem órbitas elípticas dentro de uma grande faixa de velocidades de rotação. A anisotropia nos suportes é geralmente incorporada ao

projeto de máquinas rotativas para aumentar a estabilidade do rotor (Ehrich, 1992). Contudo, esta solução pode introduzir movimentos indesejáveis de precessão retrógrada, uma vez que estes movimentos só serão excitados pelo desbalanceamento se os suportes forem anisotrópicos (Muszynska, 1996; Dias e Allemang, 2000). Este tipo de movimento pode causar falha por fadiga devido a tensões reversas no rotor. O grau de amortecimento no sistema rotor/mancais também afeta a existência dos movimentos de precessão retrógrada, de maneira que quanto mais amortecido for o sistema, menor será a faixa de velocidades de rotação em que este movimento pode ocorrer (Muszynska, 1996; Dias e Allemang, 2000).

Lee (1993) e Muszynska (1996) afirmam que as regiões de velocidade de rotação em que a precessão retrógrada ocorre são relativamente pequenas e estão próximas das regiões de ressonância, que são normalmente evitadas como velocidades operacionais. Contudo, Dias e Allemang (2000) demonstraram que, dependendo das características do sistema rotativo – grau de anisotropia dos mancais, quantidade de amortecimento no sistema, entre outras – e da distribuição espacial das forças de desbalanceamento ao longo do rotor, as faixas de velocidade de rotação em que ao menos uma estação apresenta movimento de precessão retrógrada podem ser bastante largas. Este fato também foi verificado por Lund (1974), que identificou a presença de precessão retrógrada em pelo menos uma parte do rotor, numa faixa de rotação distante da velocidade crítica. O autor, entretanto, não chamou à atenção para este fenômeno. De qualquer forma, sempre haverá perigo durante a partida ou parada da máquina, principalmente no caso de algumas turbomáquinas que têm que obedecer a uma determinada curva de partida – que, às vezes, pode ser composta por diversos patamares de rotação em que a máquina deve operar por algum tempo até atingir a rotação de trabalho – devido às restrições do processo no qual a máquina está inserida (como em refinarias de petróleo, por exemplo).

Um tipo específico de movimento de um rotor flexível, chamado modo operacional misto, pode ocorrer quando uma parte do rotor gira em precessão direta e, ao mesmo tempo, outra estação precessiona no sentido retrógrado (Radeş, 1995). Embora a compreensão destes modos seja de grande importância, poucos trabalhos foram realizados com o intuito de estudar o fenômeno. Muszynska (1996) atribui este tipo de movimento a uma distribuição particular de desbalanceamento ao longo do rotor. Além disso, mostra experimentalmente que a massa de

desbalanço, juntamente com uma deflexão do eixo, pode levar a este movimento. Dias e Allemang (2000) analisaram numericamente rotores flexíveis suportados por mancais anisotrópicos e verificaram que a existência e extensão deste fenômeno são influenciadas diretamente por diversos fatores. O nível de anisotropia dos suportes, a distribuição espacial das forças de desbalanceamento, as dissimilaridades entre os mancais, a distribuição de massa ao longo de eixo e a quantidade de amortecimento nos mancais afetam a ocorrência dos modos mistos.

6.2 Descrição da bancada experimental

A parte experimental deste trabalho foi realizada utilizando-se a bancada mostrada na Figura 6.1. O rotor consiste em dois discos montados num eixo flexível, que é apoiado por dois suportes: um isotrópico e outro anisotrópico. Ao observar a Figura 6.1(c), percebe-se que os discos possuem divisões radiais por toda sua circunferência. Cada uma destas divisões corresponde a $22,5^\circ$, e serão úteis na variação da posição angular de um disco em relação ao outro, proporcionando, assim, diferentes distribuições espaciais de desbalanço.

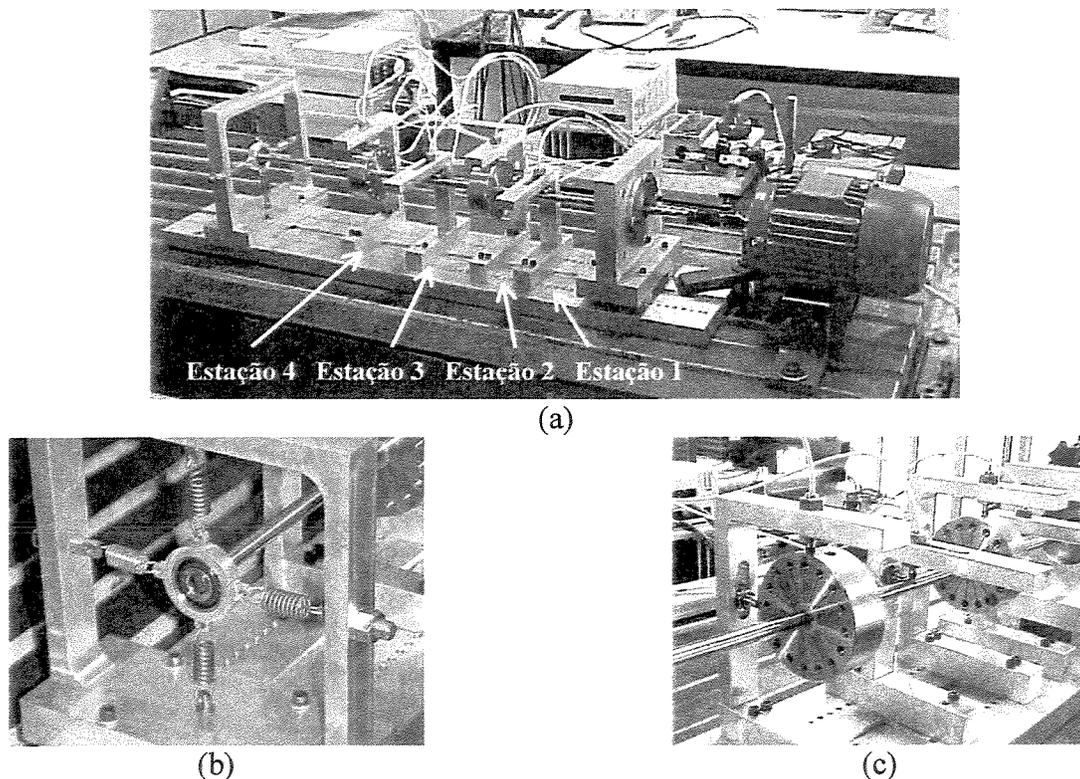


Figura 6.1 – (a) Visão geral da bancada experimental, (b) detalhe do suporte anisotrópico e (c) detalhe dos discos.

O rotor é acionado por um motor Weg trifásico de 0,16HP, com velocidade máxima de rotação de 3600rpm e controlado por um controlador também de fabricação Weg. Quatro estações do rotor são monitoradas, simultaneamente, por oito sensores de proximidade de fabricação Bentley e com sensibilidade de 12,5V/mm. Os sinais provenientes dos sensores foram adquiridos utilizando-se uma placa de aquisição de 16 canais da National Instruments e um programa gerado em ambiente Matlab®.

6.3 Verificação numérica

Apesar do objetivo principal deste capítulo ser a utilização de distribuições tempo-frequência na identificação experimental de modos mistos em um rotor flexível operando em condições não estacionárias (velocidade de rotação variável), optou-se por apresentar os resultados de algumas simulações numéricas que foram realizadas por diversos motivos, dentre os quais pode-se destacar:

- como já foi dito, a existência, ou não, dos modos operacionais mistos dependem de fatores como o grau de anisotropia dos mancais, o nível de amortecimento no sistema, a distribuição espacial das forças de desbalanceamento ao longo do rotor entre outros. Portanto, é muito difícil saber se determinado rotor vai apresentar este fenômeno ou não. Assim, utilizou-se a simulação numérica para verificar a possibilidade de ocorrência dos modos operacionais mistos no sistema experimental disponível e/ou determinar quais as modificações necessárias para garantir a existência do mesmo;
- uma vez verificada a possibilidade de ocorrência de movimentos simultâneos de precessão direta e retrógrada no rotor real, utilizou-se a simulação numérica para determinar em que faixas de rotação dever-se-ia procurar por este fenômeno;
- a análise numérica possibilita ainda uma melhoria na compreensão física dos modos operacionais mistos e do comportamento vibratório do sistema rotativo quando opera nestas condições e
- finalmente, entende-se que estes resultados numéricos auxiliarão na interpretação dos resultados experimentais.

As simulações foram realizadas utilizando-se o programa *X-Rotor*, desenvolvido por Dias e Allemang. Trata-se de um programa de modelagem de máquinas rotativas baseado no método dos elementos finitos e que permite a modelagem do sistema tanto em coordenadas reais como em coordenadas complexas. Como se sabe, uma das maiores vantagens do uso das coordenadas complexas no estudo de máquinas rotativas é a simplicidade com que se pode analisar os movimentos de precessão direta e retrógrada. Desta forma, este conjunto de coordenadas foi utilizado para calcular a resposta ao desbalanceamento em regime permanente de um rotor com as mesmas características geométricas do rotor real. Vale ressaltar que os valores de rigidez dos mancais utilizados no modelo de elementos finitos não foram ajustados para representar a rigidez dos suportes da bancada de testes (apesar de serem muito próximos), uma vez que esta não era uma exigência primordial para a validação do estudo que se pretendia realizar.

O modelo de elementos finitos utilizado para estas simulações é mostrado na Figura 6.2 e, como já foi dito, foi desenvolvido buscando ser similar ao sistema real já descrito anteriormente. Este rotor possui um eixo com 0,61m de comprimento e diâmetro de 0,01m. Os dois discos desbalanceados são idênticos, possuindo diâmetro igual a 0,08m e espessura de 0,0254m. Os três suportes ilustrados na Figura 6.2 representam o acoplamento elástico entre motor e eixo (à esquerda), os suportes isotrópico (elemento 18) e anisotrópico (elemento 19). Neste modelo não está se considerando o amortecimento nos mancais, pois a introdução deste pode reduzir ou eliminar a ocorrência dos movimentos de precessão simultâneos. O efeito giroscópico está incluído

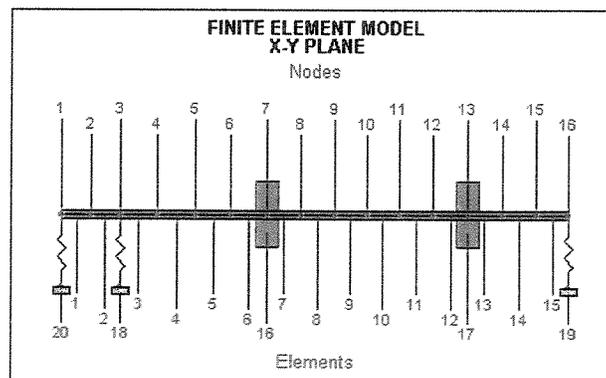


Figura 6.2 – Modelo de elementos finitos do rotor.

A análise numérica foi realizada submetendo-se o sistema ao desbalanceamento, de modo a obter as respostas em regime permanente do rotor, com este girando a velocidades constantes. Foi considerada a mesma massa de desbalanço nos dois discos e não houve mudança na posição angular dos discos. Os resultados desta análise – para as estações 5 e 15 do modelo de elementos finitos – são mostrados na Figura 6.3. Analisando-se estes gráficos pode-se determinar o sentido do movimento de precessão de cada estação do rotor através da comparação das amplitudes das componentes direta e retrógrada da resposta ao desbalanço. Assim, caso a componente direta seja maior que a retrógrada, o movimento será de precessão direta e, caso contrário, será precessão retrógrada. Desta forma, pode-se facilmente concluir que, na faixa de 2800 a 3550rpm, ocorre o fenômeno dos modos operacionais mistos uma vez que cada uma das estações descreve seus movimentos de precessão em sentidos contrários.

Apesar do resultado apresentado na Figura 6.3 ser bastante útil, este tipo de análise torna-se pouco prática quando se deseja investigar o comportamento de todas as estações de rotores complexos, dentro de uma grande faixa de rotação. O *Shape and Directivity Index Plot*, ou *SDI Plot*, desenvolvido por Dias e Allemang (2001), é uma ferramenta bastante interessante e que resolve este problema.

Para construir o *SDI Plot* é necessário calcular o valor do *SDI*, já definido no Capítulo 5, para todas as estações do rotor e para cada velocidade de rotação considerada na resposta ao desbalanço do sistema. A partir destes dados, gera-se uma figura bidimensional – o *SDI Plot* – cujas cores representam os valores do *SDI*, que podem variar de -1 a 1 . A relação entre as cores utilizadas no *SDI Plot* e os valores do *SDI* é apresentada no mapa de cores presente ao lado direito da figura. Através da análise do *SDI Plot* é possível identificar facilmente as rotações em que cada estação do rotor descreve o movimento de precessão no sentido direto ou retrógrado.

A Figura 6.4 mostra o resultado da resposta ao desbalanço do sistema rotativo já mencionado através do gráfico *SDI Plot*. Como pode-se perceber, este rotor, com estes valores de rigidez dos mancais e com esta distribuição de espacial do desbalanceamento, apresenta modos

mistos na faixa de 2800 a 3550rpm, conforme já tinha sido concluído anteriormente, mas apenas analisando-se as estações 5 e 15 do rotor.

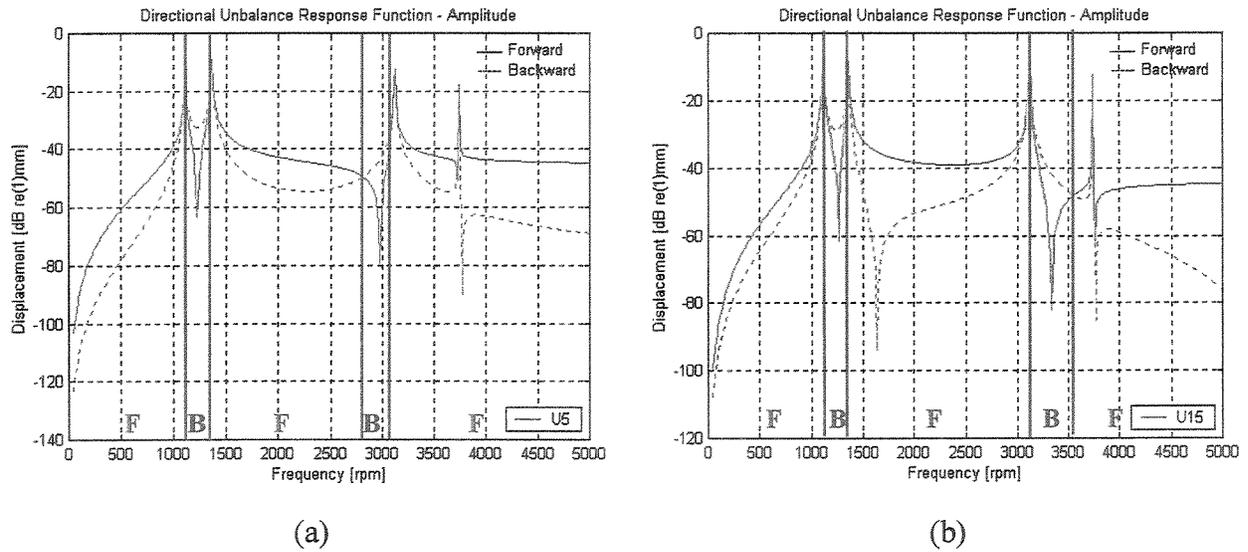


Figura 6.3 – Amplitudes da resposta ao desbalanceamento para as estações (a) 5 e (b) 15.

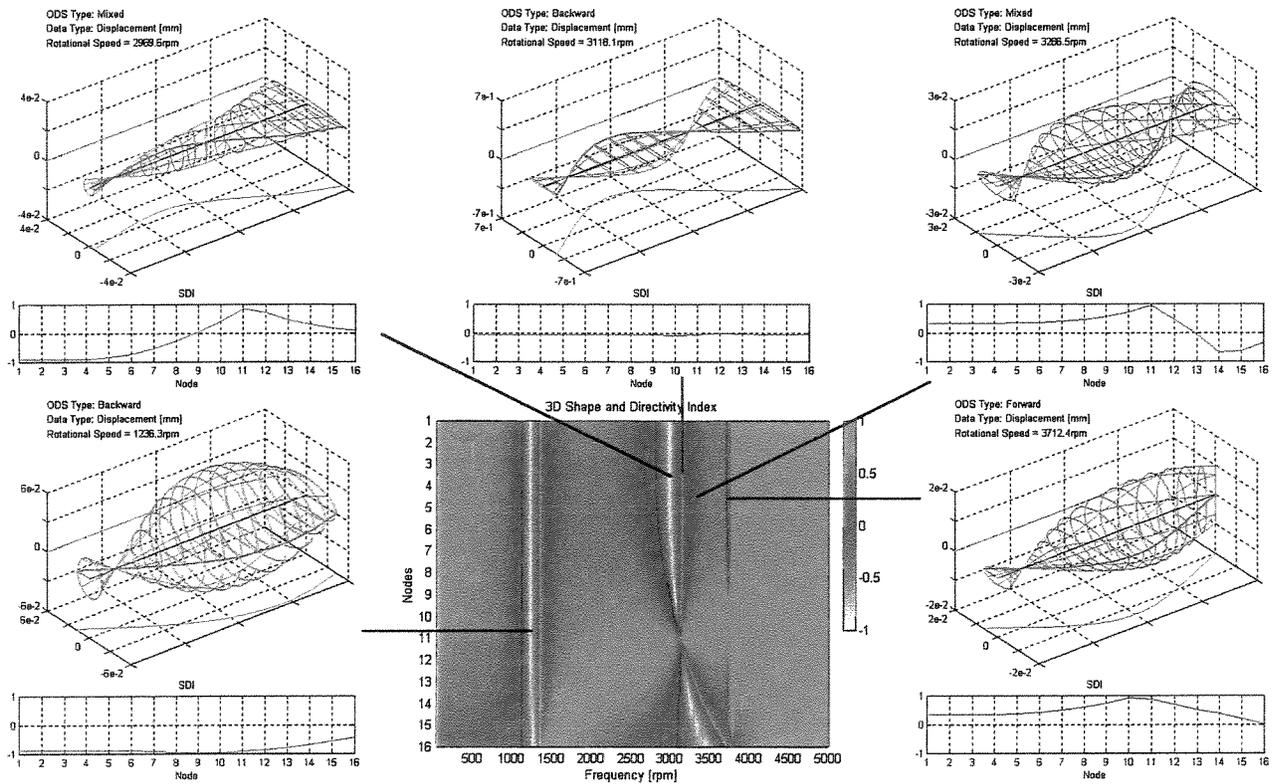


Figura 6.4 - *SDI Plot* e modos operacionais de deflexão para algumas velocidades de rotação.

A Figura 6.4 apresenta também os modos operacionais do sistema para cinco diferentes velocidades de rotação. Nestes casos, é possível verificar a forma da órbita descrita por cada estação do rotor. Pode-se confirmar, por exemplo, que o movimento se torna uma linha reta no ponto de transição do modo direto para o retrógrado e vice-versa.

6.4 Resultados experimentais

Os ensaios experimentais foram realizados com o objetivo de identificar a presença de modos mistos operacionais no sistema apresentado pela Figura 6.1. Vale lembrar que os parâmetros do modelo de elementos finitos utilizado anteriormente não foram ajustados para corresponder precisamente aos parâmetros reais existentes na bancada experimental. Por isto, não se espera reproduzir os resultados numéricos, mas apenas verificar experimentalmente a existência dos modos operacionais mistos.

Os testes experimentais foram divididos em duas partes. Na primeira, foram adquiridos os sinais de resposta nas 4 estações do rotor (2 sensores perpendiculares entre si em cada estação), com este operando a velocidades constantes. Espera-se que os resultados indiquem o tipo de movimento apresentado por cada estação, e conseqüentemente, a presença dos modos mistos e a que velocidades eles ocorrem. A segunda parte do experimento foi realizada com a variação da velocidade de rotação do rotor. Neste caso, foi utilizada uma distribuição tempo-freqüência para identificar o movimento simultâneo de precessão direta e retrógrada a partir da análise dos sinais não-estacionários adquiridos.

6.4.1 Ensaio com rotação constante

A partir dos resultados obtidos numericamente através do programa *X-Rotor*, pôde-se ter uma idéia da faixa de velocidades de rotação em que ocorrem os modos mistos para este sistema. Sendo assim, vários testes foram realizados adquirindo-se os sinais de resposta do rotor operando a velocidades constantes, dentro da faixa de, aproximadamente, 2500 a 3600rpm. Além disso,

buscou-se analisar a influência da posição angular de um disco em relação ao outro (*phase lag* ou diferença angular entre os discos). Assim, conforme os resultados apresentados na Figura 6.5, vê-se que é possível detectar a presença dos modos mistos para algumas distribuições espaciais do desbalanceamento.

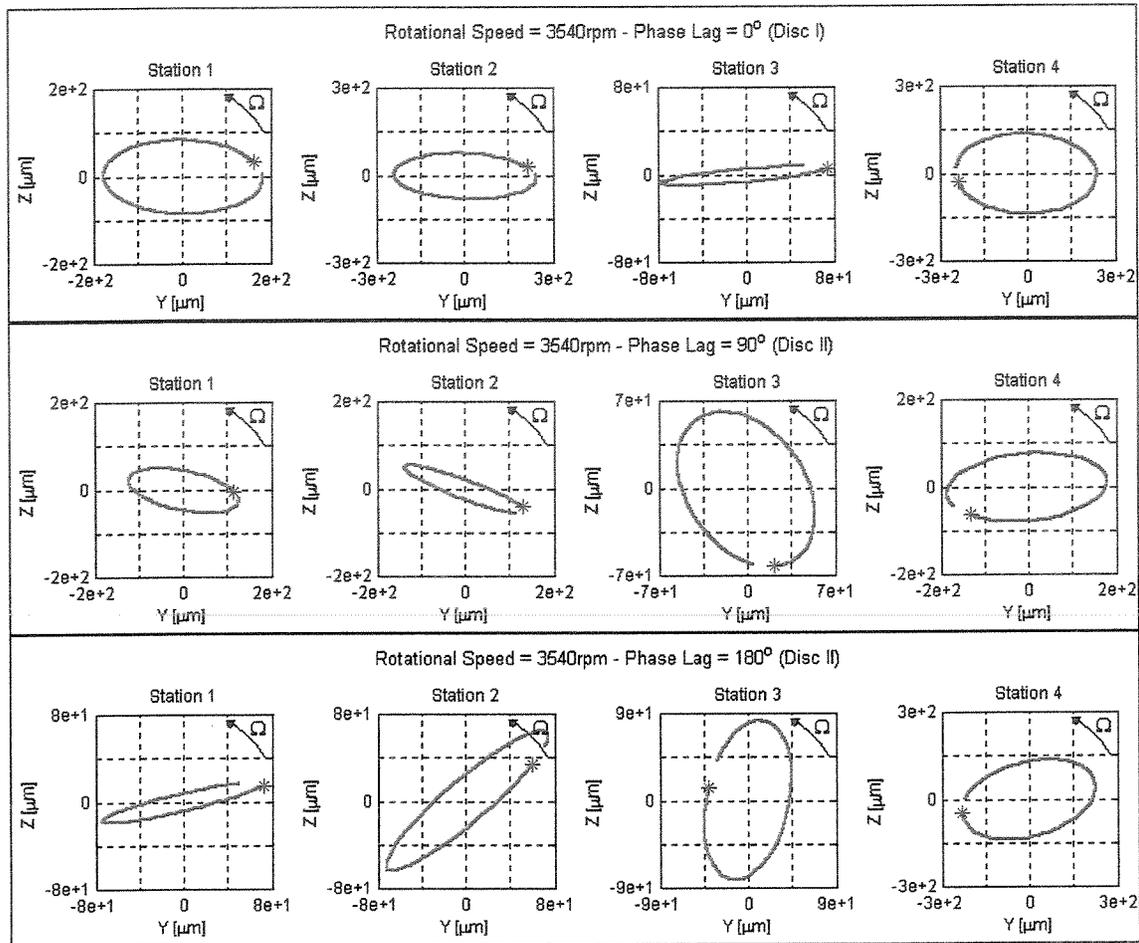


Figura 6.5 – Resultados experimentais da influência da distribuição espacial do desbalanceamento ao longo do rotor (velocidade de rotação = 3540 rpm). O símbolo * indica o início da órbita.

Uma análise da Figura 6.5 mostra que o sistema operando a 3540rpm apresenta o fenômeno dos modos mistos em duas situações de distribuição espacial do desbalanceamento. Numa delas, os dois discos se encontram em suas posições angulares originais (*phase lag* = 0°), e as estações 1, 2 e 4 apresentam precessão direta enquanto a estação 3 se move em precessão retrógrada. Na outra situação, os discos estão dispostos a 180° de diferença em relação a suas posições angulares originais (*phase lag* = 180°). Neste caso, as estações 1 e 2 operam em movimento direto,

enquanto as estações 3 e 4 se movem em precessão retrógrada. Entretanto, caso os discos estejam dispostos a 90° um do outro em suas posições angulares, todas as estações apresentam movimento de precessão direta.

A Figura 6.6 mostra a progressão das órbitas das estações para diferentes velocidades de rotação, sem considerar, contudo, a posição angular entre os discos, que se mantém fixa em 180° , valor para o qual já foi verificada a presença de modos mistos. Para todas as velocidades de rotação mostradas, a estação 1 apresenta movimento de precessão retrógrada enquanto as estações 3 e 4 se movem em precessão direta.

A estação 2, entretanto, apresenta comportamento diferente. Quando o rotor gira a 3420rpm, o movimento desta estação é de precessão direta. Ao atingir 3438rpm, a órbita da estação 2 apresenta a forma de uma linha reta, movimento característico da mudança da direção do movimento. Este fato é confirmado ao se verificar o comportamento da órbita para velocidades mais altas, como em 3480 e 3540rpm, nas quais a estação apresenta movimento de precessão retrógrada.

Estes últimos resultados indicam que o tipo de movimento precessional das órbitas do rotor dependem da velocidade de rotação. Sendo assim, dar-se-á seguimento aos testes experimentais com a realização da segunda parte, já descrita anteriormente, em que os sinais de resposta do rotor serão adquiridos com este sendo submetido a uma aceleração e uma desaceleração.

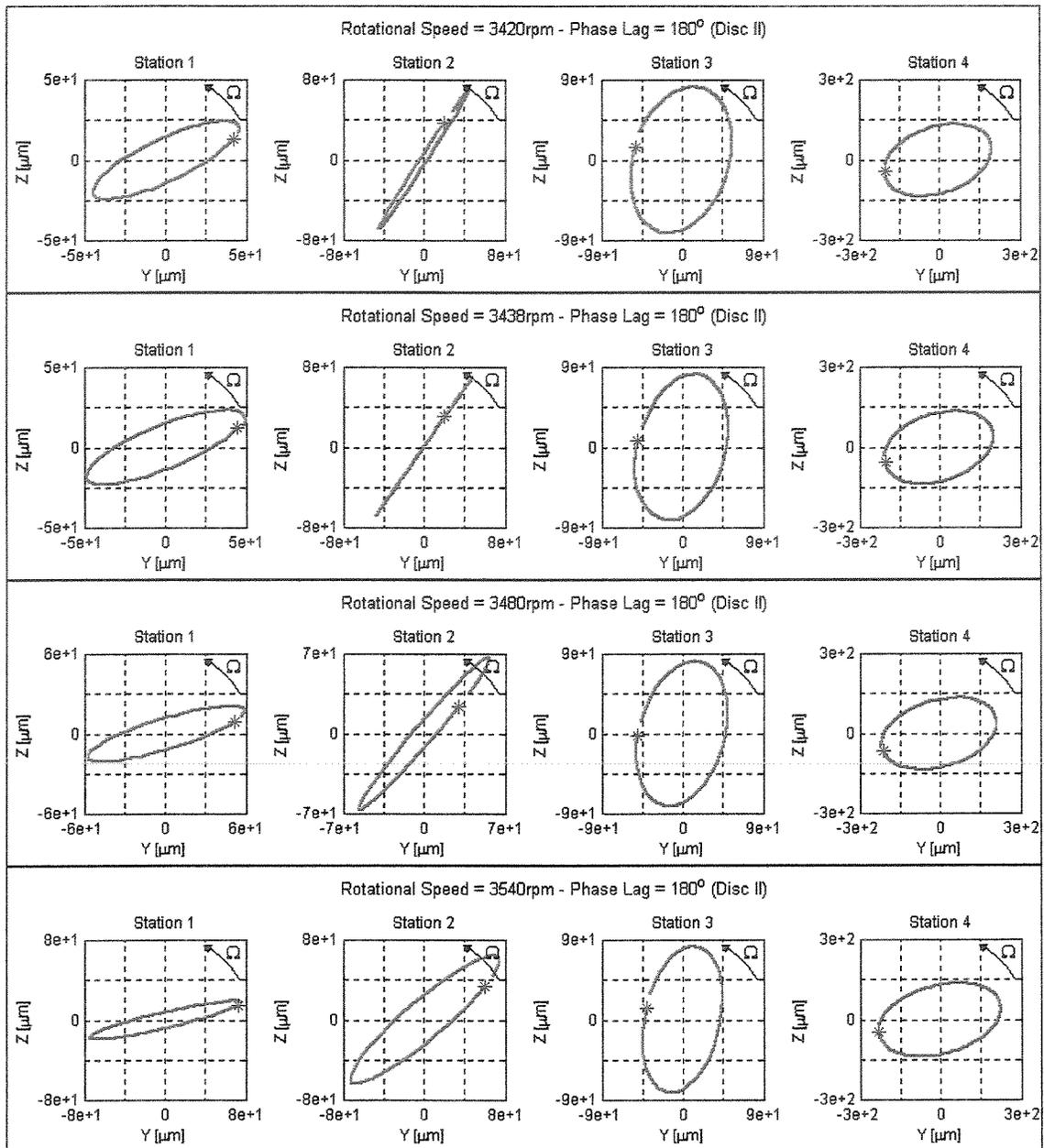


Figura 6.6 – Progressão das órbitas das estações para algumas velocidades de rotação.

6.4.2 Ensaio com rotação variável

A distribuição utilizada para analisar os sinais da resposta do rotor foi a distribuição Pseudo-Wigner direcional, que já foi apresentada no Capítulo 5. Esta distribuição apresenta um menor custo computacional – quando comparada à distribuição de Wigner – e, mesmo com a

presença da janela, não se verifica uma perda significativa da resolução no plano tempo-freqüência. Por conveniência, a expressão desta distribuição é novamente apresentada:

$$dPWD(t, \omega) = \begin{cases} dPW_{z^d}(t, \omega) = \int h(\tau) z^d(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{d*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega > 0 \\ dPW_{z^r}(t, \omega) = \int h(\tau) z^r(t + \frac{\tau}{2}) \cdot z^{r*}(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, & \text{para } \omega < 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Após uma análise inicial dos resultados obtidos anteriormente, pôde-se ver que os modos mistos estão presentes em freqüências próximas a 60Hz (3600rpm). Desta forma, como o interesse é obter respostas predominantemente devidas ao desbalanço, foi utilizado um filtro Chebyshev passa-banda, cujas características estão mostradas na Figura 6.7. Utilizou-se freqüências de corte em 45 e 65Hz, para assegurar que as componentes relativas ao desbalanço iriam predominar no plano tempo-freqüência na faixa de velocidades de interesse.

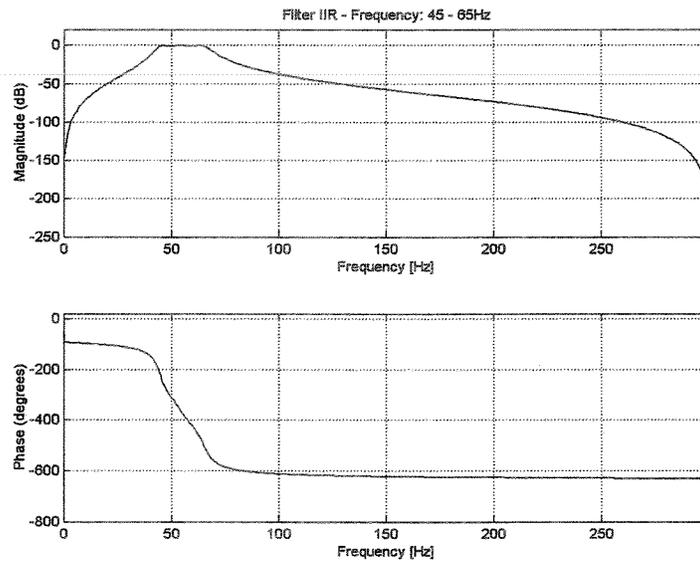


Figura 6.7 – Características em freqüência do filtro Chebyshev passa-banda.

Os sinais do rotor a serem analisados correspondem a sua resposta durante uma aceleração até a velocidade de 3600rpm, permanecendo por alguns instantes nesta velocidade, e sendo desacelerado. Por limitações do motor elétrico utilizado, não foi possível operar acima dos 3600rpm. Os sinais são referentes ao deslocamento de cada uma das estações, para cada uma das

duas direções laterais ortogonais. O deslocamento angular entre os discos é de 180° , uma vez que já foi verificada a existência de modos mistos nesta condição.

Cada um dos sinais adquiridos contém um total de 3072 pontos. A dPWD foi calculada em intervalos de 512 pontos, uma vez que, mesmo tendo um menor custo computacional, o cálculo desta distribuição para um grande número de pontos é muito demorado. Na prática, estes 512 pontos correspondem a um intervalo de tempo de aproximadamente 0,85s. A Tabela 6.1 relaciona os intervalos de pontos e o tempo correspondente.

	Intervalo de pontos	Intervalo de tempo correspondente [s]	Faixa de Rotação [rpm]
Parte 1	1 – 512	0 – 0,85	~2700 – ~3300
Parte 2	513 – 1024	0,85 – 1,7	~3300 – 3600
Parte 3	1025 – 1536	1,7 – 2,55	3600
Parte 4	1537 – 2048	2,55 – 3,4	3600
Parte 5	2049 – 2560	3,4 – 4,25	3600 – ~3000
Parte 6	2561 – 3072	4,25 – 5,1	~3000 – ~2700

Tabela 6.1 – Relação entre o intervalo de pontos e o intervalo de tempo de análise.

As Figuras 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11 mostram os resultados da aplicação da dPWD aos sinais adquiridos das estações 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Os resultados obtidos mostram os primeiros 1024 pontos correspondentes ao rotor no estágio de aceleração e estabilização em 60Hz (Partes 1 e 2). Os 1024 pontos seguintes (Partes 3 e 4) correspondem à resposta a uma velocidade constante de 3600rpm, e os últimos 1024 pontos analisados (Partes 5 e 6) são os da desaceleração do rotor. Percebe-se o funcionamento do filtro aplicado aos sinais adquiridos, uma vez que só são observadas as componentes que estão dentro da faixa de 45 a 65Hz.

Os resultados da Figura 6.8(a) mostram o comportamento da estação 1 durante a primeira parte do movimento. Percebe-se que esta estação gira em precessão direta, permanecendo com este tipo de movimento na maior parte do intervalo mostrado pela Figura 6.8(b). Somente no final deste período o movimento da estação muda para a direção retrógrada, assim ficando durante o intervalo mostrado pelas Figuras 6.8(c) e (d). O modo de precessão volta a ser direto somente na última parte do sinal, mostrada pela Figura 6.8(f).

A Figura 6.9(a) mostra a estação 2 sendo acelerada com movimento direto, e a Figura 6.9(b) mostra esta estação mudando seu movimento para precessão retrógrada. Segundo a análise

realizada na seção 6.5.1, esta mudança ocorre a 3438rpm (aproximadamente 57Hz). As Figuras 6.9(c) e (d) mostram um movimento predominantemente retrógrado durante o intervalo de tempo em que o rotor se mantém a uma velocidade de rotação constante. Pode-se verificar também que a componente retrógrada é bastante superior à direta, indicando que a órbita descrita por esta estação é aproximadamente circular. Observando novamente as Figuras 6.8(c) e (d), a estação 1 mostra uma proximidade das amplitudes das duas componentes, o que indica uma órbita quase coincidente com uma linha reta. Finalmente, as Figuras 6.9(e) e (f) mostram o comportamento da estação durante a desaceleração, em que seu movimento muda de retrógrado para direto.

Os resultados mostrados na Figura 6.10 indicam que a estação 3, durante todo o intervalo analisado, mantém-se em precessão direta, uma vez que esta componente é muito maior que a retrógrada.

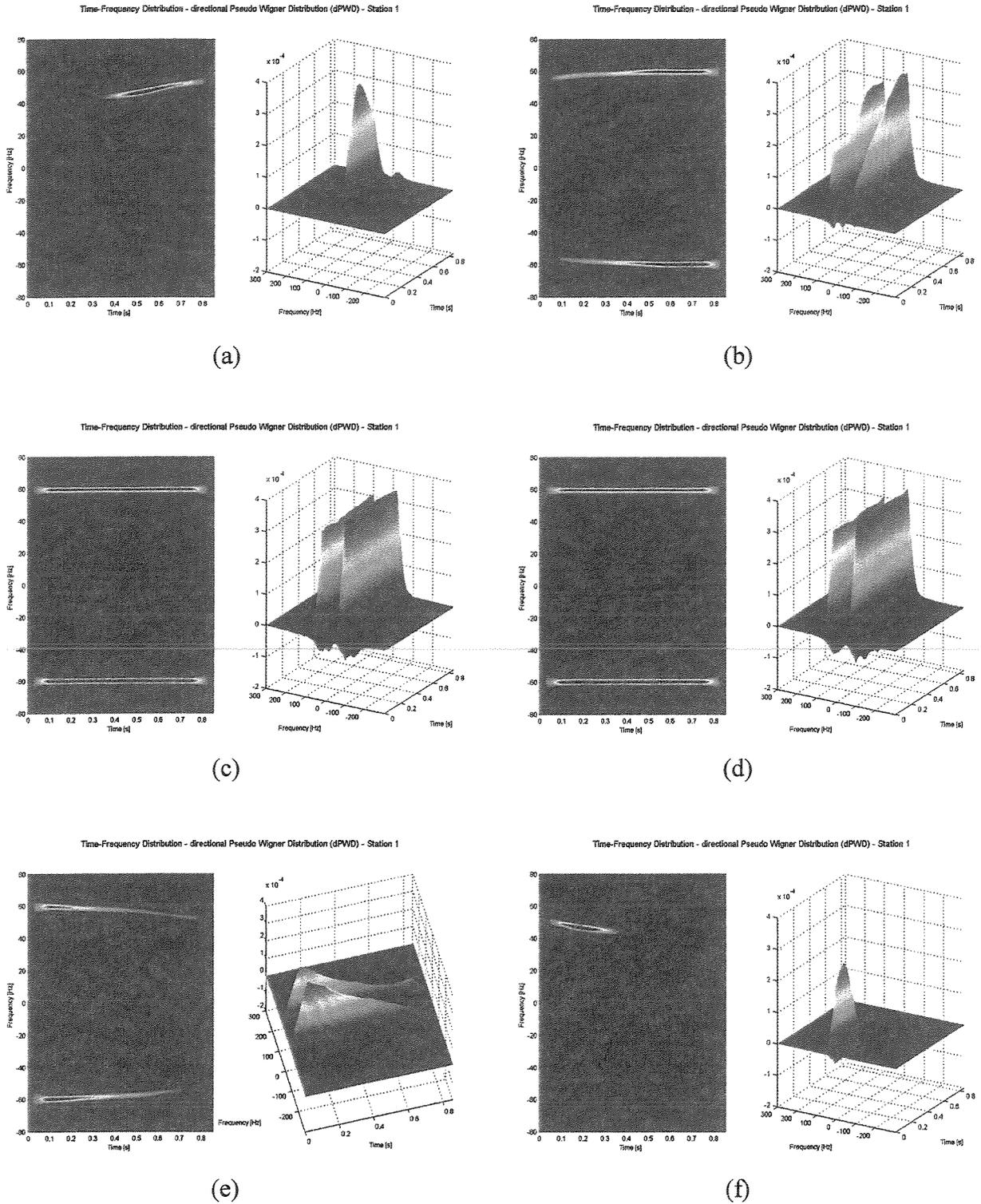
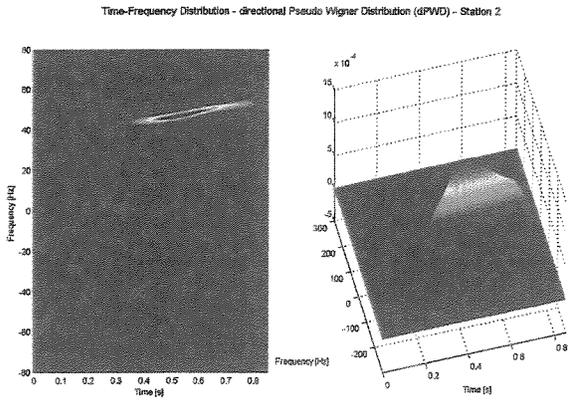
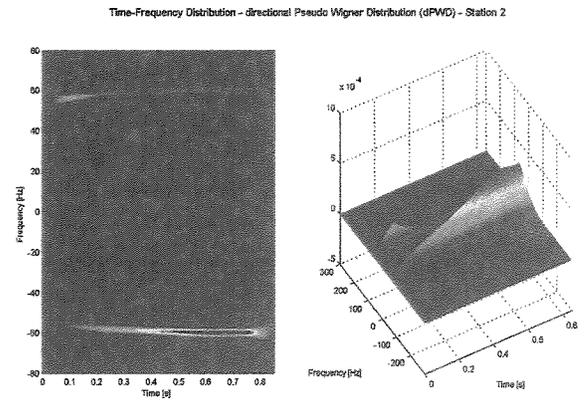


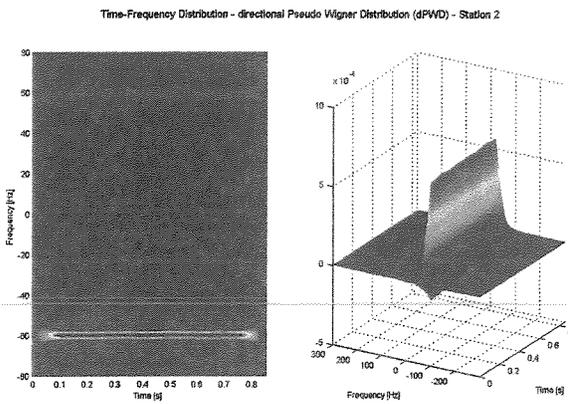
Figura 6.8 – Distribuição pseudo-Wigner direcional da estação 1 para as Partes 1 a 6 do sinal.



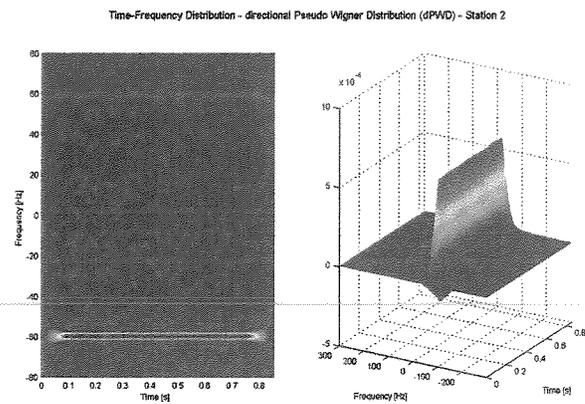
(a)



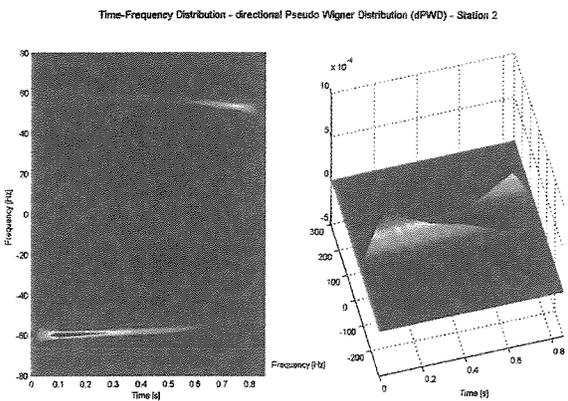
(b)



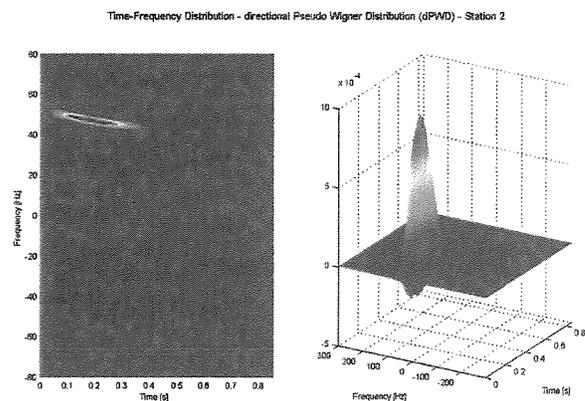
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.9 – Distribuição pseudo-Wigner direcional da estação 2 para as Partes 1 a 6 do sinal.

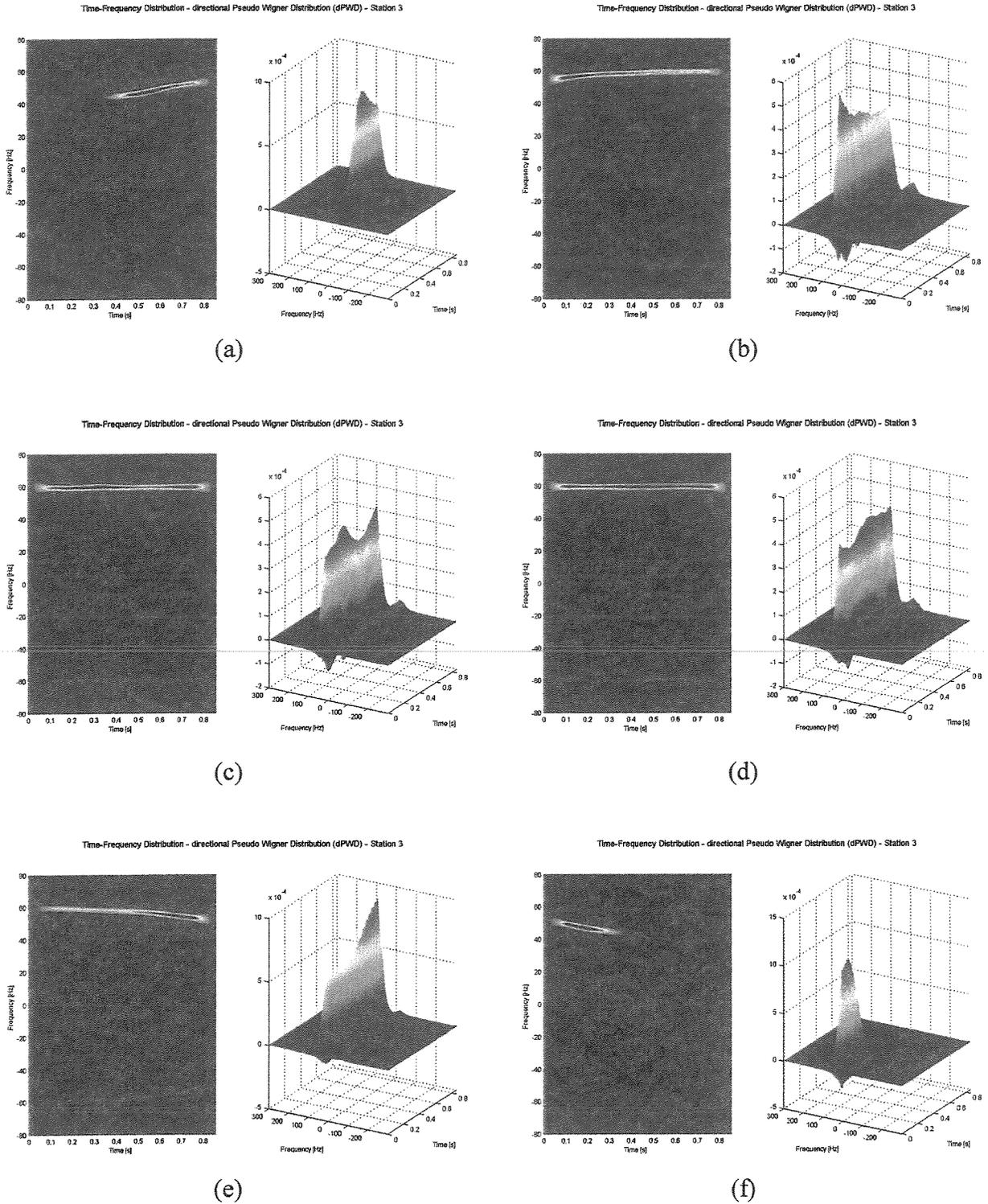


Figura 6.10 – Distribuição pseudo-Wigner direcional da estação 3 para as Partes 1 a 6 do sinal.

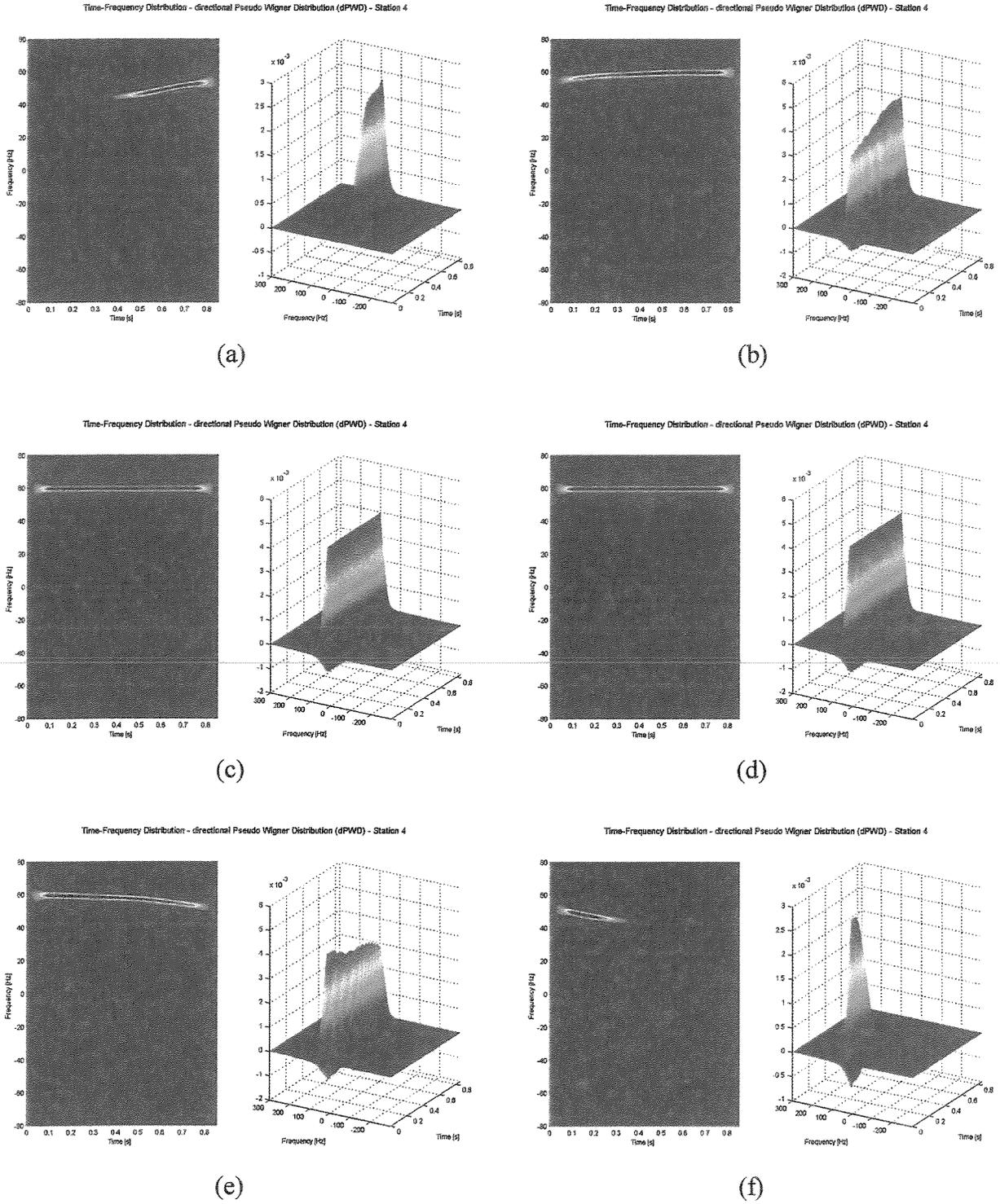


Figura 6.11 – Distribuição pseudo-Wigner direcional da estação 4 para as Partes 1 a 6 do sinal.

Finalmente, os resultados da aplicação da dPWD à resposta da estação 4 estão mostrados na Figura 6.11. Assim como a estação 3, esta também mostra o movimento de precessão direta predominando durante toda a extensão do sinal.

Diante destes resultados apresentados, pode-se chegar à conclusão clara da existência simultânea de movimentos de precessão direta e retrógrada nas estações 2 e 3. Este fenômeno torna-se mais visível ainda quando o rotor gira a uma velocidade constante, conforme ilustram as Figuras 6.9(c) e (d), e 6.11(c) e (d), por exemplo. Entretanto, mesmo antes de atingir a velocidade de 3600rpm, verifica-se a presença dos modos mistos entre estas duas estações, confirmando a análise realizada na seção 6.5.1, que identificou estes modos entre as estações 2 e 4 em aproximadamente 57 Hz.

De maneira geral, pode-se concluir, de forma qualitativa, que o fenômeno de modos mistos, em que movimentos de precessão direta e retrógrada existem simultaneamente num rotor flexível, pode ser identificado eficientemente através de distribuições tempo-frequência aplicadas a sinais reais obtidos de uma bancada experimental. Além disto, pode-se ter uma idéia da forma das órbitas a partir da comparação das amplitudes das componentes direta e retrógrada.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Neste trabalho, foi dada ênfase especial à base teórica necessária para garantir um bom entendimento dos fundamentos das distribuições tempo-frequência. Desta forma, foram apresentados os conceitos mais importantes e as propriedades básicas das distribuições da classe de Cohen. Mais ainda, foi feita uma análise dos aspectos computacionais relativos às versões discretas destas distribuições, em que foram discutidas as questões relativas à ocorrência de *aliasing*, à reamostragem do sinal e aos diversos métodos de implementação das distribuições. Os trabalhos divulgados internacionalmente mostram que as dificuldades de se obter uma representação discreta ideal ainda é foco de estudos mais profundos.

Foi realizada a verificação numérica de algumas características discutidas a partir da teoria das distribuições tempo-frequência, como a utilização dos sinais analíticos via transformada de Hilbert, e também a existência dos termos de interferência. Neste sentido, as três distribuições utilizadas para que suas características fossem comparadas mostraram resultados condizentes com os esperados. A distribuição de Wigner apresentou a melhor resolução no plano tempo-frequência, mantendo, porém, elevado nível de interferência entre as componentes do sinal analisado. O espectrograma apresentou pior resolução no plano, porém manteve uma representação livre de interferência. Já a distribuição de Choi-Williams forneceu resultados

intermediários entre as duas anteriores, uma vez que apresentou resolução melhor que o espectrograma, porém ainda sendo possível observar a existência dos termos cruzados.

A utilização das distribuições tempo-freqüência aplicadas a sistemas rotativos mostrou que estas técnicas se aplicam bem para caracterizar a direcionalidade dos movimentos existentes nestes sistemas. Resultados numéricos mostraram que as características de um rotor acelerando através de sua velocidade crítica podem ser bem interpretadas a partir dos resultados obtidos. São identificados os modos de precessão direta e retrógrada, bem como uma comparação dos resultados do sistema quando está submetido a diferentes valores de aceleração ou de amortecimento dos suportes.

Os resultados experimentais também mostraram a eficiência da distribuição pseudo-Wigner direcional na identificação dos movimentos de precessão direta e retrógrada de um rotor flexível anisotrópico. Mais ainda, foi possível identificar a existência de modos operacionais mistos, em que precessões direta e retrógrada ocorrem simultaneamente em diferentes estações do rotor. Resultados mostrando a existência destes modos através da análise das órbitas comprovam a eficácia da distribuição pseudo-Wigner direcional nesta aplicação.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Evidentemente, este trabalho cobriu uma parte específica da aplicação das distribuições tempo-freqüência em problemas de máquinas e componentes rotativos. A partir dos resultados obtidos e da experiência adquirida ao longo do desenvolvimento deste trabalho, pôde-se imaginar inúmeras aplicações e utilidades para estas ferramentas, inclusive no campo industrial, face à diversidade de problemas que surgem freqüentemente, como na indústria automobilística, aeroespacial, petrolífera, entre outras. No intuito de estimular a pesquisa nesta área, apresentam-se, a seguir, algumas sugestões de trabalhos futuros que têm, certamente, um grande apelo prático e grande valor científico:

- Utilizar as distribuições dependentes do sinal, baseadas em funções núcleo adaptativas, para obter a resposta ao desbalanço de sistemas rotativos. Aplicar

técnicas de estimação de parâmetros a esta função para identificar as características do sistema.

- Analisar, comparar e propor técnicas de identificação da frequência instantânea do sinal. Estes resultados seriam muito úteis na realização da análise de ordem em sistema em que não fosse possível ter acesso ao sinal de um tacômetro, por exemplo.
- Aplicar as distribuições tempo-frequência direcionais para o estudo de falhas em componentes rotativos que operam em condições não estacionárias e submetidos a carregamentos reais. Verificar e quantificar as relações entre defeitos em máquinas rotativas e a direcionalidade da órbita.
- Utilizar as distribuições tempo-frequência tradicional e direcional, juntamente com as técnicas de análise de ordem, na investigação de problemas de vibração e acústica de componentes automotivos.

Referências Bibliográficas

- Amin, M. G., 1994, "Spectral decomposition of time-frequency distribution kernels", IEEE Trans. on Signal Processing, v.42, n.5, pp.1156-1165.
- Boashash, B., 1988, "Note on the use of the Wigner distribution for time-frequency signal analysis", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.36, n.9, pp. 1518-1521.
- Boashash, B., 1991, "Time-frequency signal analysis", in *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*, Cap.09, pp.418-517, v.01, S. Haykin ed., Prentice-Hall.
- Boashash, B., 1992, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal – Part I: Fundamentals", Proceedings of the IEEE, v.80, n.4, pp.520-538.
- Bonato, P., Ceravolo, R., De Stefano, A., Molinari, F., 2000, "Use of cross-time-frequency estimators for structural identification in non-stationary conditions and under unknown excitation", Journal of Sound and Vibration, v.237, n.5., pp.775-791.
- Brigham, E. O., 1974, *The fast Fourier transform*, Prentice-Hall, 252p.

- Bucher, H. F., Magluta, C., 1999, "Utilização de técnicas tempo-freqüência no auxílio à interpretação de sinais em engenharia", XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 22-26 de Novembro, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, editoração eletrônica.
- Bucher, I., 2001, "Rotating machinery, modal testing and signal processing: some new results", Proceedings of the IX DINAME, 05-09 de Março, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, pp. 573-587.
- Bucher, I., Ewins, D. J., 1997, "Multidimensional decomposition of time-varying vibration response signals in rotating machinery", Mechanical Systems and Signal Processing, v.11, n.4, pp.577-601.
- Choi, H. -I., Williams, W. J., 1989, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.37, n.6, pp.862-871.
- Claasen, T. A. C. M., Mecklenbräuker, W. F. G., 1980a, "The Wigner distribution – a tool for time-frequency signal analysis, Part III: Relations with other time-frequency signal transformations", Philips Journal of Research, v.35, n.6, pp.372-389.
- Claasen, T. A. C. M., Mecklenbräuker, W. F. G., 1980b, "The Wigner distribution – a tool for time-frequency signal analysis, Part I: continuous-time signals", Philips Journal of Research, v.35, n.3, pp.217-250.
- Claasen, T. A. C. M., Mecklenbräuker, W. F. G., 1980c, "The Wigner distribution – a tool for time-frequency signal analysis, Part II: discrete-time signals", Philips Journal of Research, v.35, ns.4/5, pp.276-300.

- Claasen, T. A. C. M., Mecklenbräuker, W. F. G., 1983, "The aliasing problem in the discrete-time Wigner distribution", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v.31, n.5, pp.1067-1072.
- Cohen, L., 1966, "Generalized phase-space distribution functions", *Journal of Mathematical Physics*, v.7, n.5, pp.781-786.
- Cohen, L., 1989, "Time-frequency distributions – a review", *Proc. of the IEEE*, v.77, n.7, pp.941-981.
- Cohen, L., 1995, *Time-Frequency Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 299p.
- Cohen, L., Posch, T. E., 1985, "Positive time-frequency distribution functions", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v.33, n.1, pp.31-38.
- Costa, A. H., Boudreaux-Bartels, G. F., 1994, "A comparative study of alias-free time-frequency representations", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 76-79, Philadelphia, PA.
- Costa, A. H., Boudreaux-Bartels, G. F., 1995, "Design of time-frequency representations using a multiform, tiltable, exponential kernel", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v.43, n.10, pp.2283-2301.
- Costa, A. H., Boudreaux-Bartels, G. F., 1999, "An overview of aliasing errors in discrete-time formulations of time-frequency representations", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v.47, n.5, pp.1463-1474.
- Dias Jr., M., Allemang, R. A., 2000, "Some insights into the simultaneous forward and backward whirling of rotors", *Proceedings of the 19th IMAC - International Modal Analysis Conference*, Bethel - USA, 2001.

- Dias Jr., M., Mesquita, A. L. A., Idehara, S. J., Miranda, U. A., 2002, "On the Simultaneous Forward and Backward Whirling of Flexible Rotors: Numerical Analysis and Experimental Verification", trabalho submetido ao IFToMM 6th International Conference on Rotor Dynamics, a ser realizada em 30 de Setembro a 03 de Outubro, Sydney, Austrália.
- Diethorn, E. J., 1994, "The generalized exponential time-frequency distribution", IEEE Trans. on Signal Processing, v.42, n.5, pp.1028-1037.
- Døssing, O., 1998, "Uncertainty in time/frequency domain representations: how accurate can we know when and how often?", Sound and Vibration, pp.14-24, January.
- Flandrin, P., Hlawatsch, F., 1987, "Signal representations geometry and catastrophes in the time-frequency plane", in *Mathematics in Signal Processing*, Durrani, T., Abbiss, J., Hudson, J., Madan, R., McWhirter, J., Moore, T., Eds. Oxford: Clarendon, pp.3-14.
-
- Genta, G., 1993, *Vibration of Structures and Machines: Practical Aspects*, Springer-Verlag, 452p.
- Goldman, P., Muszynska, A., 1999, "Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics", Orbit, Bently Nevada Corporation, v.19, n.1, pp.17-21.
- Hammond, J. K., White, P. R., 1996, "The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods", Journal of Sound and Vibration, v. 190, n.3, pp.419-447.
- Harms, B., 1991, "Computing time-frequency distributions", IEEE Trans. on Signal Processing, v.39, n.3, pp.727-729.
- Hlawatsch, F., Boudreaux-Bartels, G. F., 1992, "Linear and quadratic time-frequency signal representations", IEEE Signal Processing Magazine, pp.21-67, April.

- Jeong, J., Williams, W. J., 1992a, "Alias-free generalized discrete-time time-frequency distributions", IEEE Trans. on Signal Processing, v.40, n.11, pp.2757-2764.
- Jeong, J., Williams, W. J., 1992b, "Kernel design for reduced interference distributions", IEEE Trans. on Signal Processing, v.40, n.2, pp.402-412.
- Jeong, J., Williams, W. J., 1992c, "Mechanism of the cross-terms in spectrograms", IEEE Trans. on Signal Processing, v.40, n.10, pp.2608-2613.
- Jones, D. L., Baraniuk, R. G., 1995, "An adaptive optimal-kernel time-frequency representation", IEEE Trans. on Signal Processing, v.43, n.10, pp.2361-2371.
- Jones, D. L., Parks, T. W., 1990, "A high resolution data-adaptive time-frequency representation", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.38, n.12, pp.2127-2135.
- Jones, D. L., Parks, T. W., 1992, "A resolution comparison of several time-frequency representations", IEEE Trans. on Signal Processing, v.40, n.2, pp. 413-420.
- Kadambe, S., Boudreaux-Bartels, G. F., 1992, "A comparison of the existence of 'cross-terms' in the Wigner distribution and the squared magnitude of the wavelet transform and the short-time Fourier transform", IEEE Trans. on Signal Processing, v.40, n.10, pp.2498-2517.
- Kessler, C., 1999, "Complex modal analysis of rotating machinery", Ph.D. Thesis, Cincinnati, Department of Mechanical, Industrial, and Nuclear Engineering, USA, 108 p.
- Kessler, C., Kim, J., 1998, "Complex modal analysis and interpretation for rotating machinery", Proceedings of the 16th Int. Modal Analysis Conference – IMAC, pp.782-787.

- Lee, C. W., 1991, "A complex modal testing theory for rotating machinery", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.5, n.2, pp.119-137.
- Lee, C. W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers, 332p.
- Lee, C. W., Han, Y.-S., 1998, "The directional Wigner distribution and its applications", *Journal of Sound and Vibration*, v.216, n.4, pp.585-600.
- Lee, C. W., Han, Y.-S., 1999, "Directional Wigner distribution for order analysis in rotating/reciprocating machines", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.13, n.5, pp.723-737.
- Lee, J. H., Kim, J., Kim, H. J., 2001, "Development of enhanced Wigner-Ville distribution function", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.15, n.2, pp.367-398.
- Lee, S. U., Leontopoulos, C., Besant, C., 1999, "Backward whirl investigations in isotropic and anisotropic systems with gyroscopic effects", *Proceedings of the 17th Int. Modal Analysis Conference – IMAC*, v.2, pp. 1692-1698, Kissimmee, Florida.
- Lee, S. U., Robb, D., Besant C., 2001, "The directional Choi-Williams distribution for the analysis of rotor-vibration signals", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.15, n.4, pp.789-811.
- Loughlin, P. J., Bernard, G.D., 1997, "Cohen-Posch (positive) time-frequency distributions and their application to machine vibration analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.11, n.4, pp.561-576.
- Loughlin, P. J., Pitton, J. W., Atlas, L. E., 1992, "Proper time-frequency energy distributions and the Heisenberg uncertainty principle", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp.151-154.

- Loughlin, P. J., Tacer, B., 1997, "Instantaneous frequency and the conditional mean frequency of a signal", *Signal Processing*, v.60, pp.153-162.
- Lund, J. W., 1974, "Modal response of a flexible rotor in fluid-film bearings", *Journal of Engineering for Industry*, May, 1974, pp.525-533.
- Meng, Q., Qu, L., 1991, "Rotating machinery fault diagnosis using Wigner distribution", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.5, n.3, pp.155-166.
- Miranda, U. A., Dias Jr., M., Mesquita, A. L. A., 2001, "Comparison between different methods of time-frequency representations", trabalho apresentado no XXII Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia – CILAMCE, 07-09 de Novembro, Campinas, São Paulo, Brasil, editoração eletrônica.
- Miranda, U. A., Dias Jr., M., Idehara, S. J., Mesquita, A. L. A., 2002, "On the application of directional time-frequency distributions to the identification of simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors", trabalho submetido ao IFToMM 6th International Conference on Rotor Dynamics, a ser realizada em 30 de Setembro a 03 de Outubro, Sydney, Austrália.
- Morris, J. M., Wu, D., 1996, "On alias-free formulations of discrete-time Cohen's class of distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v.44, n.6, pp.1355-1364.
- Muszynska, A., 1996, "Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor", *Journal of Sound and Vibration*, v.192, n.1, pp.207-222.
- O'Neill, J. C., 1997, "Shift covariant time-frequency distributions of discrete signals", Ph.D. thesis, University of Michigan.

O'Neill, J. C., Williams, W. J., 1996, "Aliasing in the AF-GDTFD and the discrete spectrogram", Proceedings of the IEEE International Congress on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.5, pp.2610-2613, May 07-10, Atlanta, GA.

Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W., 1989, *Discrete-time signal processing*, Prentice-Hall.

Peyrin, F. Prost, R., 1986, "A unified definition for the discrete-time, discrete-frequency, and discrete-time/frequency Wigner distribution", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.34, n.4, pp.858-866.

Radeş, M., 1995, "Mixed precession modes of rotor-bearing systems", Schwingungen in Rotierenden Maschinen, 2-3 de março, Universidade de Kaiserslautern, Alemanha,

Rao, C., Bhat, R. B., Xistris, G. D., 1997, "Simultaneous forward and backward whirling in a Jeffcott rotor supported on dissimilar hydrodynamic bearings", Journal of Sound and Vibration, v.203, n.4, pp.707-716.

Rao, J. S., 1982, "Conditions for backward synchronous whirl of a flexible rotor in hydrodynamic bearings", Mechanism and Machine Theory, v.17, n.2, pp.143-152.

Robertson, A. N., Park, K. C., Alvin, K. F., 1998, "Extraction of impulse response data via wavelet transform for structural system identification", Transactions of the ASME Journal of Vibration and Acoustics, v.120, pp.252-260.

Silva, A. A., 1999, "Detecção e análise dinâmica de falhas em rolamentos", Tese de Doutorado, 244p., Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos, Brasil.

Souto, C. A., 2000, "Estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da análise modal complexa", Dissertação de Mestrado, 143p., Unicamp, São Paulo, Brasil.

Steeghs, T. P. H., 1997, "Local power spectra and seismic interpretation", Ph.D. thesis, 223p., Delft TU, Netherlands.

Van der Auweraer, H., Leuridan, J., Vold, H., 1994, "Analysis of nonstationary noise and vibration signals", 19th Int. Seminar on Modal Analysis – Tools for noise and vibration analysis, v.1, pp.385-405, 12-14 September, Leuven, Belgium.

Zhao, Y., Atlas, L. E., Marks, R. J., 1990, "The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, v.38, n.7, pp.1084-1091.

Apêndice A

Mudança da taxa de amostragem de sinais discretos

Um procedimento de importância para o entendimento das dificuldades do processo de obtenção das amostras de distribuições tempo-freqüência é a mudança da taxa de amostragem do sinal. Este processo pode ser dividido em duas formas: a decimação (ou dizimação) e a interpolação. Enquanto a decimação é um processo que diminui o número de amostras envolvidas nos cálculos, a interpolação, ao contrário, cria novas amostras para que seja possível realizar as operações desejadas, como mostra a Figura A1. Como consequência, uma redução do número de amostras reduz a quantidade de cálculos realizados pela CPU, possibilitando a realização de novas tarefas. Além disso, pode-se relaxar as especificações de sistemas como, por exemplo, filtros de recuperação do sinal analógico.

Decimação. Neste processo, também conhecido como dizimação, a taxa de amostragem é reduzida (*downsampling*), gerando uma nova seqüência, $s_d[n]$, a partir da seqüência original, $s[n]$, através da eliminação sistemática de parte das amostras. Neste caso,

$$s_d[n] = s[Mn], \quad (\text{A.1})$$

em que M é um inteiro que determina o fator de redução da taxa. O sinal contínuo original depois de amostrado a uma taxa T , pode ser escrito da seguinte forma

$$s[Mn] = s_c(MnT) = s_c(nT'), \quad (\text{A.2})$$

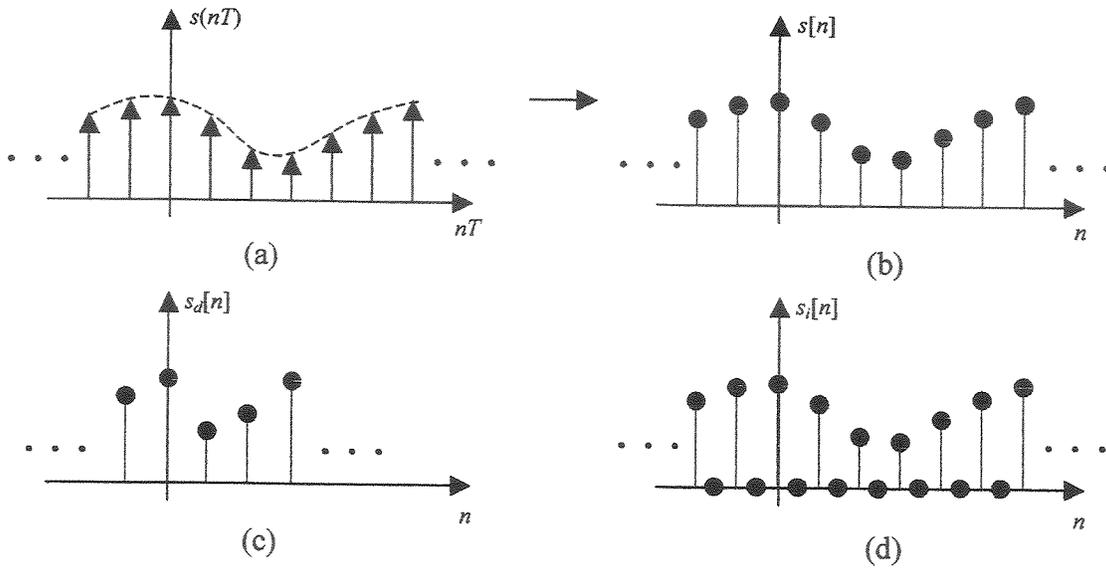


Figura A1 – (a) Sinal contínuo amostrado, (b) sua seqüência, amostras do sinal após (c) decimação e (d) interpolação por fator 2.

em que T' pode ser interpretado como o novo intervalo entre as amostras após a decimação. Assim, se $s[n]$ é a seqüência de amostras de $s_c(t)$ para $t=nT$, então $s_d[n]$ é a seqüência de $s_c(t)$ para $T'=MT$. Sabe-se que se $s_c(t)$ está limitado a uma faixa Ω_{max} , e se $2\pi/T \geq 2\Omega_{max}$, então $s[n]$ representará $s_c(t)$. De maneira similar, pode-se dizer que $s_d[n]$ representará $s_c(t)$ se $2\pi/T' \geq 2\Omega_{max}$, em que $T'=MT$, ou seja, caso $2\pi/T \geq 2M\Omega_{max}$. Isto mostra que para que um sinal seja decimado por um fator M , ele deve ser superamostrado pelo mesmo fator M para que não ocorra o fenômeno de *aliasing*.

Para chegar ao resultado da decimação, é interessante obter a expressão matemática para o espectro do sinal decimado, $S_d(e^{j\omega})$, em função do espectro do sinal original, $S(e^{j\omega})$. Para isto, seja

$$S_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_d[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[Mn] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n/M}, \quad (\text{A.3})$$

com n sendo múltiplo de M . Para se chegar ao resultado correto, deve-se supor

$$\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j2\pi l n/M} = \begin{cases} 1; & \text{se } n \text{ for múltiplo de } M \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando este resultado na Equação A.3, chega-se a

$$\begin{aligned} S_d(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n/M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \left[\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j2\pi l n/M} \right] e^{-j\omega n/M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\left(\frac{2\pi l}{M} + \frac{\omega}{M}\right)n} \right] = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} S\left(e^{j\left(\frac{2\pi l}{M} + \frac{\omega}{M}\right)}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Portanto, pode-se concluir que $S_d(e^{j\omega})$ é uma soma ponderada de M espectros $S(e^{j\omega})$, cada um deslocado de $\Delta\omega = 2\pi l$ e expandido por um fator M . A Figura A.2 ilustra um exemplo em que o sinal tem $2\pi/T = 6\Omega_{max}$ (ou seja, $\Omega_{max} = \pi/3T$) e é decimado por um fator $M = 3$.

Relacionando o espectro decimado com o espectro do sinal contínuo, tem-se

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{MT}\right), \quad (\text{A.6})$$

ou seja, $S_d(e^{j\omega})$ é composto por réplicas de $S_c(\Omega)$ no eixo normalizado $\omega = \Omega T'$, espaçadas de 2π . É possível verificar que o espectro foi alargado pelo fator $M = 3$, portanto deve-se ter cuidado ao realizar esta operação, pois caso $2\pi/T \leq 2M\Omega_{max}$, então ocorrerá superposição espectral.

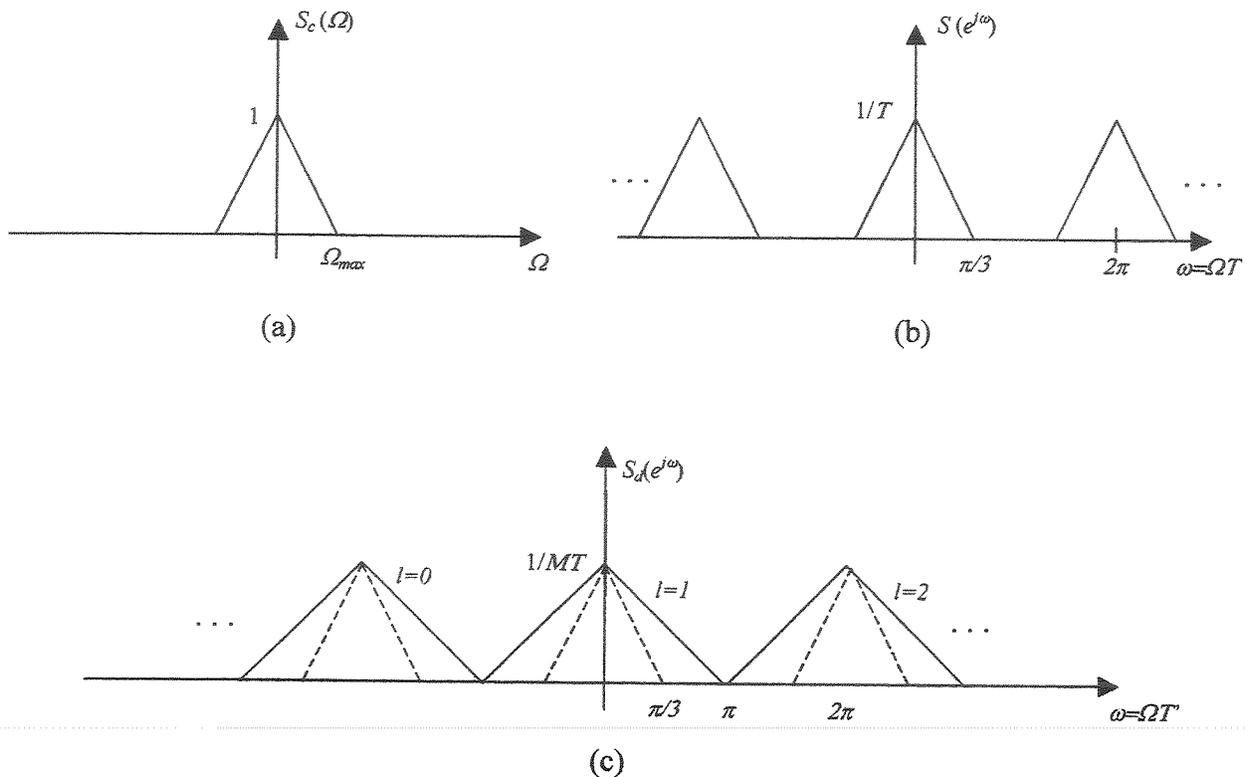


Figura A.2 – Ilustração dos espectros durante uma decimação por fator 2: (a) espectro do sinal contínuo; (b) espectro do sinal discreto; (c) espectro do sinal dizimado por fator $M=3$.

Interpolação. Este processo de aumento da taxa de amostragem (*upsampling*) consiste na geração de uma nova seqüência, $s_e[n]$, a partir da seqüência original, $s[n]$, através da inserção de amostras nulas, segundo a seguinte regra:

$$s_e[n] = \begin{cases} s[n/L]; & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \text{ (} n \text{ múltiplo de } L\text{)} \\ 0; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

em que L é um inteiro escolhido e que determina o fator de aumento da taxa. É possível estudar o efeito do aumento da taxa no domínio da freqüência através do cálculo de $S_e(e^{j\omega})$ em função de $S(e^{j\omega})$,

$$S_c(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_c[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega l \cdot n} = S(e^{j\omega l}). \quad (\text{A.8})$$

Logo, $S_c(e^{j\omega})$ é igual a $S(e^{j\omega})$, porém comprimido por um fator L , o que provocará o surgimento de componentes espectrais na faixa de zero a π , que não fazem parte do espectro do sinal original ou da seqüência correspondente. Estes componentes deverão ser eliminadas através de um filtro passa-baixas adequado. A Fig. A.3 ilustra o processo de interpolação para o caso em que $L=3$ e com amostragem tal que $2\pi/T=2\Omega_{max}$.

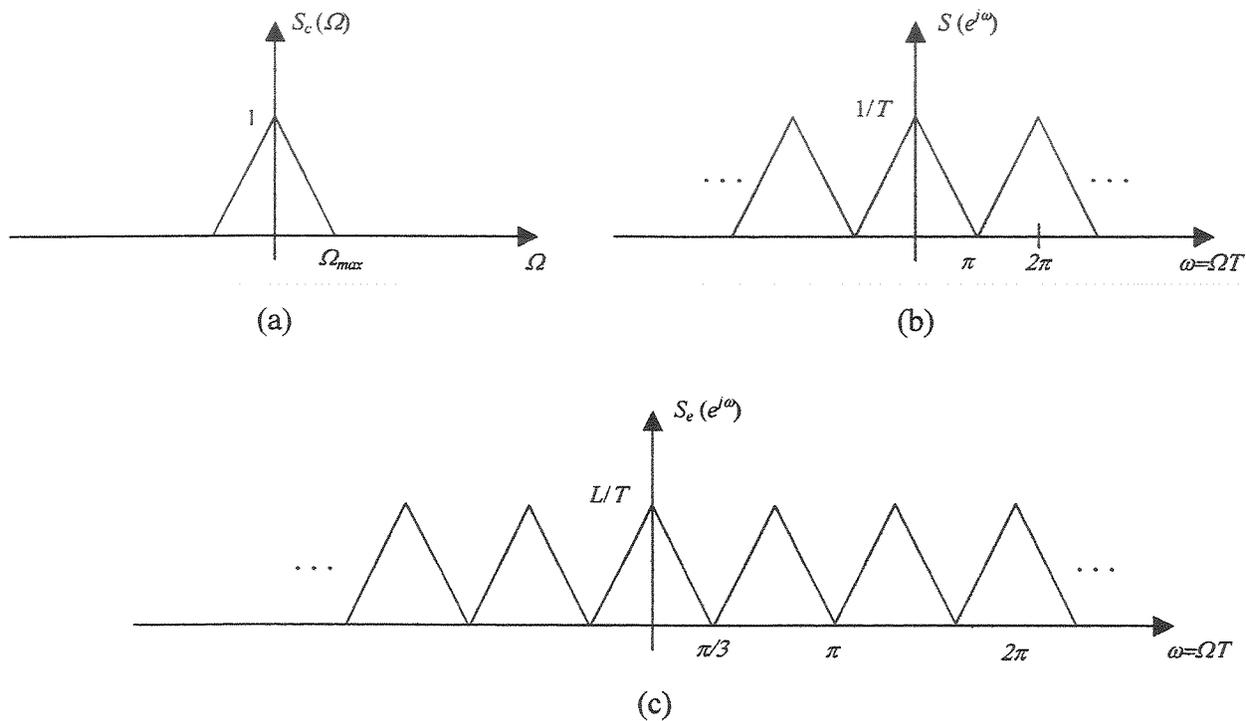


Figura A.3 – Processo de interpolação: (a) espectro do sinal contínuo; (b) espectro do sinal discreto; (c) espectro do sinal interpolado por fator $L=3$.