

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDACÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR JANITO VAQUEIRO FERREIRA
E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA NO DIA 03-7-1989

Francisco

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

BALANCEAMENTO DE ROTORES FLEXÍVEIS

JANITO VAQUEIRO FERREIRA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
de Campinas - UNICAMP, como parte dos re-
quisitos exigidos para obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Campinas, 03 de Julho de 1989

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Tese de: Mestrado

Título da Tese: Balanceamento de Rotores Flexíveis

Autor: Janito Vaqueiro Ferreira

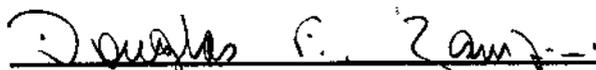
Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti

Co-orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

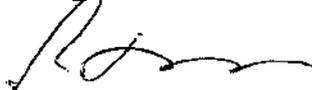
Aprovado por



Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri



Prof. Dr. Francisco Léopore Neto

Campinas, 03 de Julho de 1989

*À memória de meu pai e companheiro
Fernando Vaqueiro Ferreira
sempre se interessando e
incentivando .*

*À minha mãe
Nilza Aparecida Mazzetti Ferreira
e aos meus irmãos
Fernando Vaqueiro Ferreira Filho
Auro Antonio Vaqueiro Ferreira
Henrique Vaqueiro Ferreira*

*À minha esposa e companheira
Maria Antonia Amaral Vaqueiro Ferreira
e ao meu Filho
Janito Vaqueiro Ferreira Filho*

BALANCEAMENTO DE ROTORES FLEXÍVEIS

RESUMO

Apresentam-se as formulações matemáticas do balanceamento pelo método dos Coeficientes de Influência e pelo método Modal. Propõe-se também uma nova técnica de balanceamento modal para sistemas com alta densidade modal. Implantaram-se basicamente três programas em computador digital. Um programa é capaz de simular sistemas dinâmicos rotativos, os outros são relativos às duas técnicas de balanceamento estudadas. Utilizando esses programas foram feitas simulações de balanceamento. Os resultados destas simulações são apresentados e discutidos. Montou-se uma bancada de ensaio de balanceamento, o que possibilitou uma avaliação experimental inicial do método de balanceamento modal. Os resultados são apresentados e discutidos.

FLEXIBLE ROTOR BALANCING

ABSTRACT

It is shown the mathematical formulation of the Influence Coefficient Method and the Modal Balancing Method. A general method for balancing systems with high modal density is proposed. Three digital computer programs were installed. One is able to reproduce rotational system dynamic and the others to simulate each of the balancing methods mentioned. Several simulations of the balancing process of flexible rotors were made and the results are presented and discussed.

A balancing test was set-up in order to check experimentally the Modal Balancing method. The results are presented and discussed.

Agradecimentos

Ao meu orientador Dr. Fernando Iguti, que orientou este trabalho, desde o início, com muita disposição, interesse e atenção, pelas suas sugestões e constante incentivo.

Ao Dr. Douglas Eduardo Zampieri, co-orientador deste trabalho, pela sugestão deste tema interessante, pelo estímulo e colaboração nos procedimentos experimentais e discussão dos resultados.

À FINEP, CNPQ, UNICAMP e ao GEPRON, que patrocinaram este trabalho.

Ao Dr. José Roberto de França Arruda, pelas discussões e valiosas sugestões.

Ao professor Euripedes Gabriel de O. Nobrega e ao amigo Eng. Edson Roberto Apolinário, pelo valioso e indispensável suporte nos equipamentos eletrônicos desenvolvidos e construídos para a fase experimental.

Ao grande amigo, Alberto Luiz Serpa, pela ajuda dada na aquisição dos sinais na fase experimental.

Ao grande amigo, Renato Pavanello, pela ajuda dada na fase experimental e sugestões iniciais na elaboração deste trabalho.

Ao grande amigo, Ilmar Ferreira Santos e ao Dr. Hans Ingo Weber, pela ajuda na recuperação de alguns arquivos de dados experimentais.

Ao Júlio Cesar, e aos demais amigos pela ajuda na montagem experimental.

Ao Armando Arruda e ao Luiz Roberto Xavier Ribeiro pela presteza e qualidade dos desenhos e fotografias.

À minha mãe, Nilza Aparecida Mazzetti Ferreira, e aos meus irmãos Fernando, Auro e Henrique Vaqueiro Ferreira pelo apoio, compreensão que sempre demonstraram.

A todos os amigos que me auxiliaram de maneira direta ou indireta, em particular ao pessoal do GEPRON pelo perseverante apoio e incentivo.

Finalmente, meu agradecimento especial à minha querida esposa, Maria Antonia Amaral Vaqueiro Ferreira, mãe de Janito Filho, pelo seu amor, paciência, compreensão, e pelo seu acompanhamento durante todas as fases deste trabalho, sempre incentivando e colaborando.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Balanceamento de rotores flexíveis	1
1.2	Objetivo do trabalho	2
1.3	Apresentação do trabalho	2
2	Simulação do comportamento dinâmico de rotores flexíveis	4
2.1	Introdução	4
2.2	Características do sistema e do seu comportamento dinâmico	4
2.2.1	Modelo físico do sistema	4
2.2.2	Modelo matemático do sistema	6
2.2.3	Forças de excitação	8
2.2.4	Equação diferencial do sistema	10
2.2.5	Equação diferencial do sistema em coordenadas modais	11
2.3	Cálculo das forças de excitação modais	14
2.3.1	Resolução das equações diferenciais pela integral de convolução	16
2.3.2	Resolução da equação diferencial de movimento no domínio do tempo e frequência	21
3	Balanceamento de Rotores Flexíveis	24
3.1	Introdução	24
3.2	Método dos Coeficientes de Influência	24
3.2.1	Características	24
3.2.2	Formulação Matemática	25
3.2.3	Obtenção da matriz dos coeficientes de influência	27
3.3	Balanceamento Modal	30
3.3.1	Introdução	30
3.3.2	Formulação Matemática H	33
3.3.3	Formulação matemática \hat{H}	36
3.4	Identificação do desbalanceamento	37
3.4.1	Introdução	37

3.4.2	Implementação do Método dos Coeficientes de Influência	38
3.4.3	Implementação do método de Balanceamento Modal	39
3.4.3.a)	Algoritmo	39
3.4.3.b)	Escolha do Valor Inicial e do Critério de Convergência .	41
4	Simulação do Balanceamento de Rotores Flexíveis	42
4.1	Introdução	42
4.2	Sistema de Referência	42
4.3	Introdução à Simulação dos Métodos de Balanceamento	43
4.4	Simulação do Método de Balanceamento por Coeficientes de Influência .	44
4.4.1	Simulação 1	50
4.4.2	Simulação 2	50
4.4.3	Simulação 3	51
4.4.4	Simulação 4	55
4.4.5	Simulação 5	55
4.4.6	Simulação 6	56
4.4.7	Simulação 7	60
4.4.8	Simulação 8	64
4.4.9	Simulação 9	68
4.4.10	Simulação 10	72
4.4.11	Simulação 11	72
4.4.12	Simulação 12	73
4.4.13	Simulação 13	77
4.4.14	Simulação 14	81
4.4.15	Simulação 15	85
4.4.16	Simulação 16	89
4.4.17	Simulação 17	89
4.4.18	Simulação 18	90
4.4.19	Simulação 19	94
4.4.20	Análise das simulações	98
4.5	Simulação do Método de Balanceamento Modal H e \hat{H} para um sistema com baixa densidade modal	99
4.5.1	Simulação 20	105
4.5.2	Simulação 21	105
4.5.3	Simulação 22	106
4.5.4	Simulação 23	106
4.5.5	Simulação 24	116
4.5.6	Simulação 25	125
4.5.7	Simulação 26	134
4.5.8	Simulação 27	143

4.6	Simulação do Método de Balanceamento Modal H e \hat{H} para um sistema com alta densidade modal	155
4.6.1	Simulação 28	160
4.6.2	Simulação 29	169
4.6.3	Análise das Simulações	178
4.7	Discussão dos resultados	178
4.7.1	Método dos Coeficientes de Influência	178
4.7.2	Balanceamento Modal H e \hat{H}	179
4.8	Estudo sobre Planos de Medição	179
4.8.1	Introdução	179
4.8.2	Escolha do número de Planos de Medição	180
4.9	Estudo sobre o número de Planos de Balanceamento	186
4.9.1	Introdução	186
4.9.2	Escolha do número de Planos de Balanceamento para os métodos Coeficientes de Influência e Balanceamento Modal	186
5	Verificação Experimental do Método de Balanceamento Modal	188
5.1	Introdução	188
5.2	Descrição do Sistema Mecânico	188
5.2.1	Detalhes sobre a Bancada de Laboratório	188
5.3	Ajuste do Modelo Teórico	197
5.4	Medição dos sinais	217
5.5	Processamento do sinal	217
5.5.1	Processamento do sinal via referência interna	220
5.5.2	Processamento do sinal via referência externa	221
5.6	Curva de resposta ao desbalanceamento	227
5.7	Obtenção da massa e ângulo de balanceamento	232
5.8	Verificação da efetividade do balanceamento	250
6	Conclusões e sugestões para continuidade do trabalho	254
6.1	Conclusões	254
6.2	Sugestões	254
	Bibliografia	256

Lista de Figuras

2.1	Sistema Mecânico	5
2.2	Distribuição do desbalanceamento residual	5
2.3	Sistema Mecânico discretizado	6
2.4	Modelo teórico do Sistema Mecânico	7
2.5	Representação vetorial de \vec{U}_p e de \vec{V}_j	8
2.6	Representação vetorial da Amplitude inicial do desbalanceamento	9
2.7	Representação vetorial da Amplitude de vibração resultante	10
2.8	Amplitude de uma excitação harmônica	18
3.1	Resposta em frequência de sistemas com Baixa Densidade Modal	31
3.2	Resposta em frequência de sistema com Alta Densidade Modal	32
4.1	Modelo matemático discreto-M1	45
4.2	Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-M1	47
4.3	Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-M1	48
4.4	Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-M1	49
4.5	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S3	52
4.6	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S3	53
4.7	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S3	54
4.8	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S6	57
4.9	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S6	58
4.10	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S6	59
4.11	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S7	61
4.12	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S7	62
4.13	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S7	63
4.14	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S8	65
4.15	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S8	66
4.16	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S8	67
4.17	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S9	69
4.18	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S9	70
4.19	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S9	71

4.20	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S12	74
4.21	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S12	75
4.22	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S12	76
4.23	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S13	78
4.24	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S13	79
4.25	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S13	80
4.26	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S14	82
4.27	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S14	83
4.28	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S14	84
4.29	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S15	86
4.30	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S15	87
4.31	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S15	88
4.32	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S18	91
4.33	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S18	92
4.34	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S18	93
4.35	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S19	95
4.36	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S19	96
4.37	Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S19	97
4.38	Modelo Matemático discreto-M2	99
4.39	Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-M2	102
4.40	Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-M2	103
4.41	Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-M2	104
4.42	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S23 . .	107
4.43	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S23	108
4.44	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S23 . .	109
4.45	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S23 . .	110
4.46	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S23	111
4.47	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S23 . .	112
4.48	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S23 . .	113
4.49	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S23	114
4.50	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S23 . .	115
4.51	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S24 . .	116
4.52	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S24	117
4.53	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S24 . .	118
4.54	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S24 . .	119
4.55	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S24	120
4.56	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S24 . .	121
4.57	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S24 . .	122
4.58	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S24	123
4.59	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S24 . .	124

4.60	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S25 . . .	125
4.61	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S25	126
4.62	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S25 . . .	127
4.63	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S25 . . .	128
4.64	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S25	129
4.65	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S25 . . .	130
4.66	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S25 . . .	131
4.67	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S25	132
4.68	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S25 . . .	133
4.69	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S26 . . .	134
4.70	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S26	135
4.71	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S26 . . .	136
4.72	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S26 . . .	137
4.73	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S26	138
4.74	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S26 . . .	139
4.75	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S26 . . .	140
4.76	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S26	141
4.77	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S26 . . .	142
4.78	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S27 . . .	143
4.79	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S27	144
4.80	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S27 . . .	145
4.81	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S27 . . .	146
4.82	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S27	147
4.83	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S27 . . .	148
4.84	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S27 . . .	149
4.85	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S27	150
4.86	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S27 . . .	151
4.87	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S27 . . .	152
4.88	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S27	153
4.89	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S27 . . .	154
4.90	Modelo matemático do sistema com alta densidade modal-M3	155
4.91	Resposta em frequência do deslocamento no ponto 3-M3	157
4.92	Resposta em frequência do deslocamento no ponto 5-M3	158
4.93	Resposta em frequência do deslocamento no ponto 7-M3	159
4.94	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S28 . . .	160
4.95	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S28	161
4.96	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S28 . . .	162
4.97	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S28 . . .	163
4.98	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S28	164
4.99	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S28 . . .	165

4.100	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S28 . . .	166
4.101	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S28	167
4.102	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S28 . . .	168
4.103	Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S29 . . .	169
4.104	Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S29	170
4.105	Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S29 . . .	171
4.106	Valores de Momento de Balanceamento- u_2 Identificados Modo 2-S29 . . .	172
4.107	Valores de Empenamento- b_2 Identificados Modo 2-S29	173
4.108	Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S29 . . .	174
4.109	Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S29 . . .	175
4.110	Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S29	176
4.111	Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S29 . . .	177
4.112	$H \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2	182
4.113	$\hat{H} \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2	182
4.114	$H \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2a	183
4.115	$\hat{H} \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2a	183
4.116	$H \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2	184
4.117	$\hat{H} \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2	184
4.118	$H \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2a	185
4.119	$\hat{H} \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2a	185
5.1	Bancada de ensaio - Eixo trefilado com 3 discos	189
5.2	Disco de aço	190
5.3	Mancal principal	191
5.4	Mancal principal montado	192
5.5	Acoplamento de neoprene montado	193
5.6	Acoplamento de neoprene	193
5.7	Mancal intermediário regulador de amortecimento	194
5.8	Mancal intermediário regulador de amortecimento, montado	195
5.9	Vista geral do sistema montado	196
5.10	Esquema simplificado da aquisição e processamento na Análise Modal . . .	197
5.11	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal	198
5.12	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal	199
5.13	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal	200
5.14	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 5-Análise Modal	201
5.15	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 5-Análise Modal	202
5.16	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal	203
5.17	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal	204
5.18	Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal	205
5.19	Primeiro modo-Análise Modal	206
5.20	Segundo modo-Análise Modal	206

5.21	Terceiro modo-Análise Modal	206
5.22	Modelo discreto-M4	208
5.23	Primeiro modo teórico-M4	210
5.24	Segundo modo teórico-M4	210
5.25	Terceiro modo teórico-M4	210
5.26	Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 3-M4	211
5.27	Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 3-M4	212
5.28	Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 5-M4	213
5.29	Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 5-M4	214
5.30	Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 7-M4	215
5.31	Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 7-M4	216
5.32	Referencial fixo ao sistema	217
5.33	Senoide com 2 ⁿ pontos com 5 períodos	218
5.34	FFT do sinal em Amplitude e Fase	219
5.35	Sinal do referencial fixo superposto ao sinal de deslocamento	220
5.36	Senoide com sinal de referência	221
5.37	Sinal de referência	222
5.38	Sinal múltiplo da frequência de rotação	222
5.39	Sinal de amostragem antes e após multiplicador de frequência	223
5.40	Sinal adquirido no domínio do tempo antes e após a amostragem	224
5.41	Amplitude e Fase do sinal adquirido	225
5.42	Instrumentação utilizada	226
5.43	Esquema simplificado da aquisição e processamento dos sinais	227
5.44	Planos de medida	228
5.45	Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-Experimental	229
5.46	Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-Experimental	230
5.47	Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-Experimental	231
5.48	Valores identificados - Rigidez k1-Experimental	233
5.49	Valores identificados - Rigidez k1-Experimental	234
5.50	Valores identificados - Rigidez k1-Experimental	235
5.51	Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental	236
5.52	Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental	237
5.53	Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental	238
5.54	Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental	239
5.55	Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental	240
5.56	Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental	241
5.57	Valores identificados - Fase de u1-Experimental	242
5.58	Valores identificados - Fase de u1-Experimental	243
5.59	Valores identificados - Fase de u1-Experimental	244
5.60	Valores identificados - Empenamento b1-Experimental	245

5.61	Valores identificados - Empenamento b1-Experimental	246
5.62	Valores identificados - Empenamento b1-Experimental	247
5.63	Faixa de velocidades utilizada na identificação-Experimental	248
5.64	Resposta ao desbalanceamento no ponto 3	250
5.65	Resposta ao desbalanceamento no ponto 5	251
5.66	Resposta ao desbalanceamento no ponto 7	252

Lista de Tabelas

4.1	Frequências naturais do modelo matemático-M1	46
4.2	Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M1	46
4.3	Momentos de Balanceamento Identificados-S1	50
4.4	Momentos de Balanceamento Identificados-S2	50
4.5	Momentos de Balanceamento Identificados-S3	51
4.6	Momentos de Balanceamento Identificados-S4	55
4.7	Momentos de Balanceamento Identificados-S5	55
4.8	Momentos de Balanceamento Identificados-S6	56
4.9	Momentos de Balanceamento Identificados-S7	60
4.10	Momentos de Balanceamento Identificados-S8	64
4.11	Momentos de Balanceamento Identificados-S9	68
4.12	Momentos de Balanceamento Identificados-S10	72
4.13	Momentos de Balanceamento Identificados-S11	72
4.14	Momentos de Balanceamento Identificados-S12	73
4.15	Momentos de Balanceamento Identificados-S13	77
4.16	Momentos de Balanceamento Identificados-S14	81
4.17	Momentos de Balanceamento Identificados-S15	85
4.18	Momentos de Balanceamento Identificados-S16	89
4.19	Momentos de Balanceamento Identificados-S17	89
4.20	Momentos de Balanceamento Identificados-S18	90
4.21	Momentos de Balanceamento Identificados-S19	94
4.22	Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M2	100
4.23	Empenamento Modal-M2	101
4.24	Parâmetros Identificados-S20	105
4.25	Parâmetros Identificados-S21	105
4.26	Parâmetros Identificados-S22	106
4.27	Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M3	156
4.28	Empenamento Modal -M3	156
4.29	Frequências naturais do modelo matemático-M3	156
4.30	Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M2a	181
4.31	Empenamento Modal-M2a	181

5.1	Frequências naturais e coeficientes de amortecimento-Análise Modal . . .	207
5.2	Modos de vibração-Análise Modal	207
5.3	Propriedades dos eixos-M4	208
5.4	Propriedades dos discos-M4	208
5.5	Propriedades dos rolamentos-M4	208
5.6	Coeficientes de molas-M4	209
5.7	Frequências naturais teóricas-M4	209
5.8	Modos de vibração teóricos-M4	209
5.9	Parâmetros modais identificados-Experimental	248
5.10	Velocidades Utilizadas na Identificação-Experimental	249

Capítulo 1

Introdução

1.1 Balanceamento de rotores flexíveis

Pode-se observar que atualmente as máquinas e equipamentos rotativos, tais como motores e geradores elétricos, turbinas, compressores e ventiladores, têm revelado uma tendência de diminuição de peso concomitantemente com velocidades de operação crescentes sujeitos a restrições maiores no que diz respeito às tolerâncias dos níveis de vibração aceitáveis e são tipicamente mais flexíveis. Consequentemente é necessário reduzir o desbalanceamento nessas máquinas para que elas operem seguramente e possam ter uma vida útil satisfatória.

Dos métodos de balanceamento utilizados correntemente, nota-se que os princípios básicos não se alteraram significativamente desde o início do século. Em baixas velocidades, o projeto de muitos rotores apresentam poucos problemas que não possam ser resolvidos por meio relativamente simples, mesmo para instalações em ambientes sensíveis à vibração. Porém em altas velocidades, os métodos evoluíram no sentido de permitir o balanceamento dos rotores modernos, que operam algumas vezes em faixa de velocidades acima de dez, vinte mil rotações por minuto.

Devido as velocidades elevadas, o projeto desses rotores modernos torna-se um desafio à engenharia, que requerem soluções sofisticadas para os problemas relacionados com o projeto mecânico; com os procedimentos e técnicas de balanceamento; e com o projeto dos mancais que o suportam e, finalmente, com a estabilidade do sistema como um todo.

Isto mostra uma preocupação com o balanceamento desde a concepção do projeto conceitual até a montagem final e a operação, onde as vibrações podem atingir níveis críticos devido ao desbalanceamento.

Hoje, duas técnicas básicas de balanceamento são largamente empregadas: o balanceamento por coeficientes de influência e o balanceamento modal.

Enquanto o balanceamento modal está relacionado com algum método de identificação paramétrica, o método dos coeficientes de influência é uma técnica de identi-

ficação não paramétrica onde se deve calcular a função que relaciona o efeito de massas testes, colocadas em planos de balanceamento do rotor previamente escolhidos com os deslocamentos nos planos de medida.

Existem ainda os chamados métodos mistos [14] que agrupam os métodos dos coeficientes de influência e do balanceamento modal em uma técnica onde se incorporam as vantagens e desvantagens de ambos os métodos. O princípio desta técnica consiste em utilizar massas testes modais, fazendo com que o modo seja balanceado através do efeito desta massa de teste modal.

1.2 Objetivo do trabalho

Devido às características dos sistemas mecânicos modernos, é praticamente impossível balancear utilizando-se métodos iterativos utilizados para balanceamento de sistemas rígidos.

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento teórico básico das formulações matemáticas de duas técnicas atualmente muito empregadas, o balanceamento por coeficientes de influência e o balanceamento modal.

Para se aplicar essas técnicas com confiabilidade é interessante submetê-las a testes teóricos através de simulações computacionais que comprovem o funcionamento da implementação computacional das mesmas. Com estas simulações pode-se estudar suas limitações, características positivas e também levantar novos aspectos teóricos.

Antes de aplicar experimentalmente essas técnicas a sistemas modernos de grande porte, utilizou-se uma bancada de laboratório, onde o sistema mecânico físico a ser analisado é mais simples e de dimensões reduzidas.

Na obtenção dos sinais físicos, onde são medidos amplitude e fase dos deslocamentos, foram utilizadas técnicas de tratamento de sinais para otimizar o número de aparelhos utilizados e conseqüentemente diminuir os erros inerentes ao processo e o tempo das medições.

1.3 Apresentação do trabalho

No capítulo 2 é apresentada a formulação das equações matemáticas que regem o comportamento dinâmico de rotores flexíveis. Utilizou-se o método de decomposição modal, de aplicação genérica a qualquer tipo de sistema linear.

No capítulo 3 é desenvolvida a formulação matemática dos métodos dos coeficientes de influência e do balanceamento modal, bem como as técnicas de resolução de sistemas de equações utilizadas em cada uma delas.

O capítulo 4 apresenta algumas simulações utilizando-se cada uma das técnicas e os resultados obtidos.

O capítulo 5 descreve a bancada onde foi realizado o ensaio e mostra uma avaliação experimental do método de balanceamento modal. São apresentados, ainda, os resultados obtidos e as técnicas utilizadas para a obtenção e tratamento dos sinais de medição.

No capítulo 6 são mencionadas as conclusões obtidas e encaminhadas sugestões para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Simulação do comportamento dinâmico de rotores flexíveis

2.1 Introdução

Para se estudar e testar métodos de balanceamento, necessita-se de dados referentes à vibração do rotor para várias velocidades de rotação do sistema.

Decidiu-se por uma simulação computacional, pois a mesma permite um controle mais flexível e preciso sobre o comportamento dinâmico do sistema e portanto possibilita o estudo de aspectos puramente teóricos do método de balanceamento que se deseja analisar.

A simulação matemática do comportamento dinâmico de um sistema mecânico linear a partir das equações de movimento, em termos de parâmetros invariantes no tempo, é realizada através de algum método numérico ou, se possível, de soluções analíticas.

2.2 Características do sistema e do seu comportamento dinâmico

2.2.1 Modelo físico do sistema

O sistema mecânico a ser analisado está mostrado na figura (2.1).

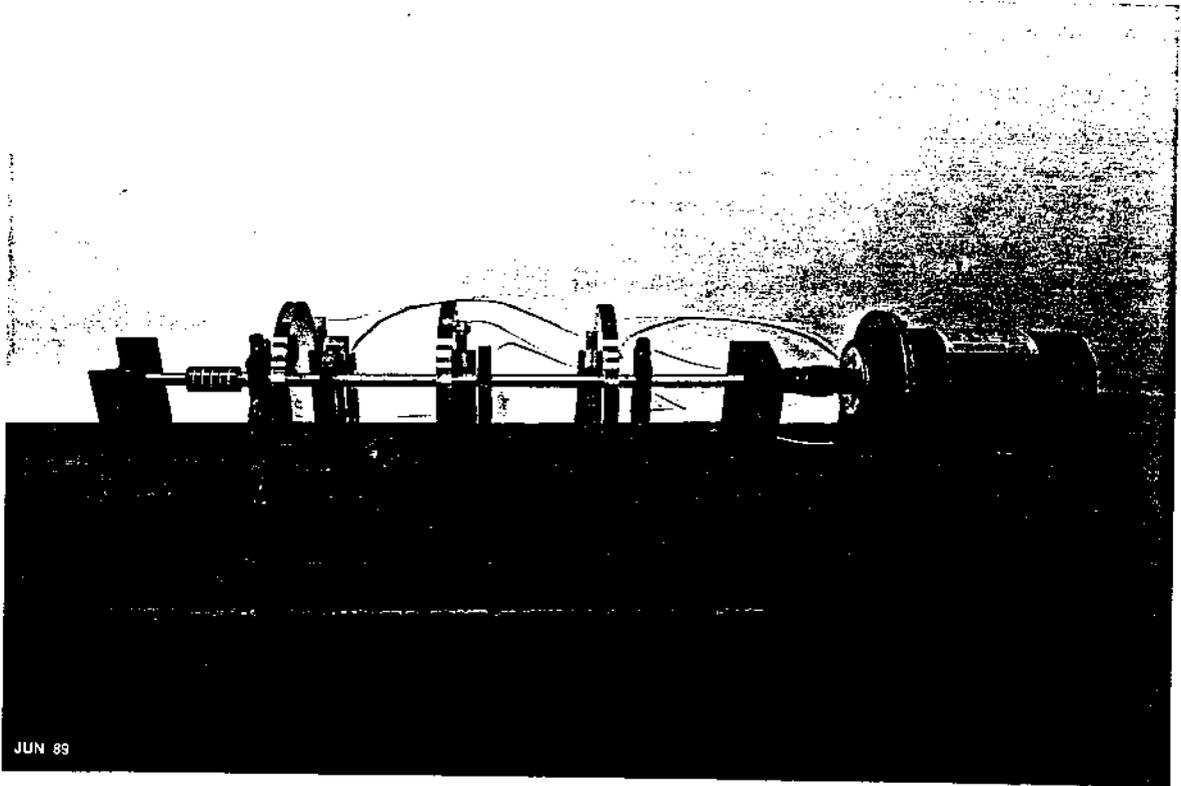


Figura 2.1: Sistema Mecânico

Ele consiste de um rotor elástico com distribuição de massa e rigidez quaisquer, excitado por forças nodais $\{F\}$ harmônicas, equivalentes às forças provocadas pelo desbalanceamento residual, geralmente distribuído ao longo do rotor, conforme mostrado na figura (2.2).

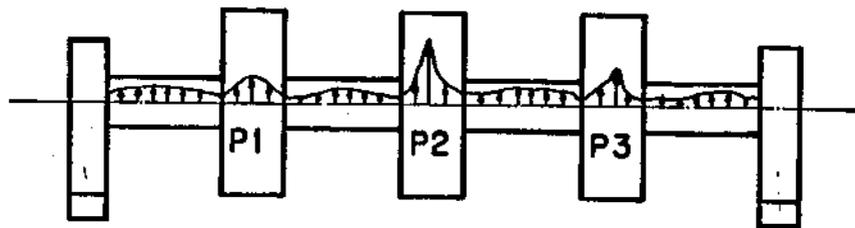


Figura 2.2: Distribuição do desbalanceamento residual

Esta distribuição é mostrada no plano do papel, mas deve ser lembrado que a mesma é em geral espacial.

2.2.2 Modelo matemático do sistema

Para se modelar matematicamente o sistema da figura (2.1), para fins de simulação computacional, é usual realizar-se uma discretização estrutural do sistema.

O sistema da figura (2.1) pode ser discretizado em elementos de massa concentrada, em elementos de viga e elementos de mola. Uma análise feita a partir do sistema real nos leva a considerar um modelo físico inicialmente discretizado, onde são enumerados os elementos conforme mostra a figura (2.3).

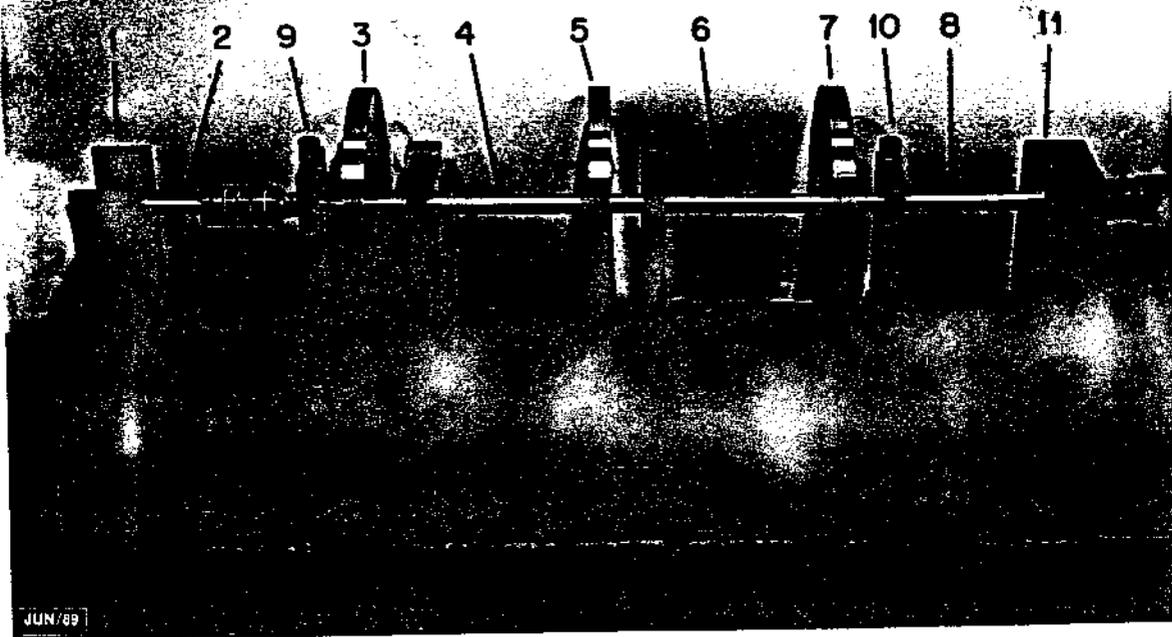


Figura 2.3: Sistema Mecânico discretizado

onde:

- 1, 11 - mancais de apoio
- 2, 4, 6, 8 - elementos de viga
- 3, 5, 7 - discos rígidos
- 9, 10 - elementos limitadores de amplitude

Na idealização da representação do modelo teórico, as características do mesmo foram obtidas através de uma análise de cada um dos elementos discretizados. Observou-se

que nas extremidades, os elementos 1 e 11 são constituídos por mancais de rolamentos envolvidos por um suporte metálico que restringem grandes deflexões em torno dos eixos x e y e os deslocamentos radiais nas direções x , y e z .

Assumiu-se inicialmente no modelo, molas de torção nas extremidades e apoio rígido nas três direções, visto que os mancais impõem restrições de rotação.

Os elementos 2, 4, 6, 8 foram modelados como elementos de viga.

Os discos 3, 5, 7 foram modelados como elementos de massa concentrada.

Os limitadores de amplitudes, que são sempre regulados conforme a necessidade, foram assumidos como molas radiais.

O modelo matemático que representa o sistema mecânico a ser analisado está representado na figura (2.4).

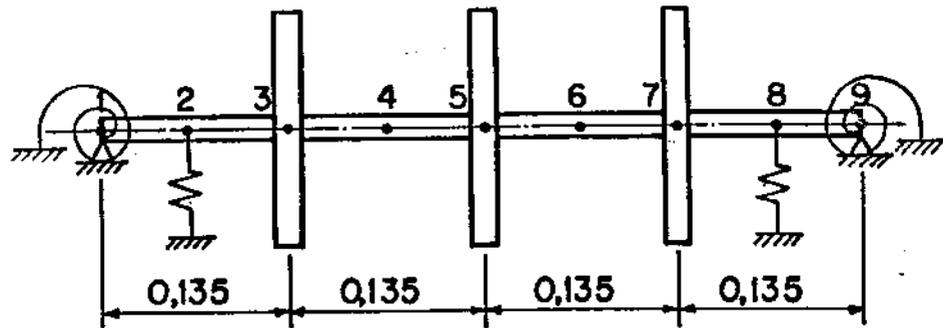


Figura 2.4: Modelo teórico do Sistema Mecânico

O desbalanceamento contínuo representado na figura (2.2) é dividido em elementos discretos de massas de desbalanceamento concentradas nos elementos do rotor, a uma distância w da linha de centro de rotação do sistema. Cada massa de desbalanceamento será representada como um vetor de momento de desbalanceamento \vec{U}_p , aplicado em um ponto p , que pode ser expresso na forma,

$$\vec{U}_p = \rho A_p \int_0^{l_p} \vec{w}(z) dz \quad (2.1)$$

onde:

- ρ - peso específico do material
- A_p - área da seção transversal do eixo considerado
- $\vec{w}(z)$ - excentricidade do rotor em função da posição z
- l_p - comprimento do elemento considerado

2.2.3 Forças de excitação

Considere-se um sistema de coordenadas (ξ, η) , o qual gira com o rotor numa velocidade Ω . Um momento de desbalanceamento \vec{U}_p fixado no sistema (ξ, η) causa um deslocamento e/ou deflexão \vec{V}_j do rotor, o qual gira com velocidade Ω em relação ao sistema de coordenadas (x, y) fixo, como é mostrado na figura (2.5)

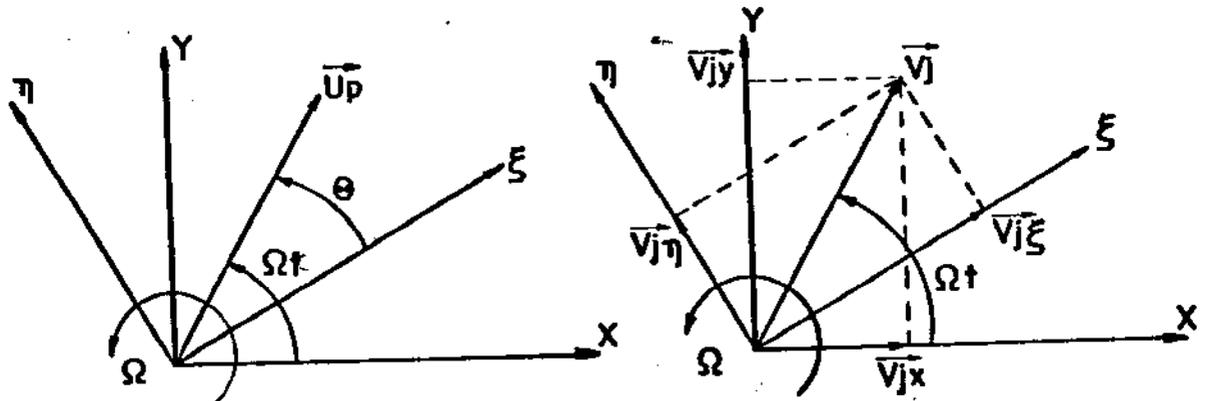


Figura 2.5: Representação vetorial de \vec{U}_p e de \vec{V}_j

O movimento resultante do rotor, no sistema fixo, é um movimento harmônico, e a amplitude da força de excitação é dada por,

$$F = m \epsilon \Omega^2 = |\vec{U}_p| \Omega^2 \quad (2.2)$$

onde:

- F - amplitude da força de desbalanceamento distribuída
- m - massa por unidade de comprimento
- ϵ - raio de excentricidade da massa
- $|\vec{U}_p|$ - módulo do momento de desbalanceamento

Na figura (2.5) as amplitudes de deslocamento ou deflexão do rotor \vec{V}_{jx} e \vec{V}_{jy} são as componentes do vetor \vec{V}_j no sistema de coordenadas (x, y) fixo e $\vec{V}_{j\xi}$ e $\vec{V}_{j\eta}$ são respectivamente as componentes do vetor deslocamento ou deflexão \vec{V}_j no sistema de coordenadas (ξ, η) móvel. Em qualquer ponto j ao longo do eixo do rotor, os deslocamentos \vec{V}_{jx} e \vec{V}_{jy} podem ser expressos em termos das componentes no sistema de coordenadas móvel,

$$V_{jx} = V_{j\xi} \cos(\Omega t) - V_{j\eta} \sin(\Omega t) \quad (2.3)$$

$$V_{jy} = V_{j\xi} \sin(\Omega t) + V_{j\eta} \cos(\Omega t) \quad (2.4)$$

O vetor \vec{V}_j pode ser expressa numa notação complexa em termos das componentes tanto no sistema de coordenadas fixo como móvel [1],

$$\vec{V}_j = V_{jx} + i V_{jy} = |\vec{V}_j| e^{i\phi} \quad (2.5)$$

$$\vec{V}_j = V_{j\xi} + i V_{j\eta} = |\vec{V}_j| e^{i\phi} \quad (2.6)$$

Na discretização assumida no modelo teórico, o desbalanceamento real está representado através dos momentos de desbalanceamento discreto em n elementos ao longo do eixo.

Considere-se um elemento de rotor do sistema em um instante qualquer, no sistema de coordenadas (ξ, η) e um vetor \vec{V}_{f0} de amplitude associado a uma vibração do sistema devido a um momento de desbalanceamento residual, figura (2.6).

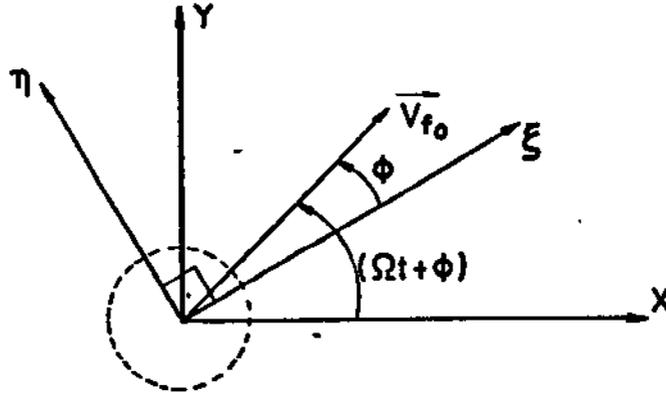


Figura 2.6: Representação vetorial da Amplitude inicial do desbalanceamento

Coloca-se numa posição p qualquer, a um ângulo β qualquer, um momento de desbalanceamento \vec{U}_p que no plano f está associado a um vetor \vec{V}_{f1} , de modo a causar uma vibração resultante caracterizado por \vec{V}_{f2} como mostra figura (2.7).

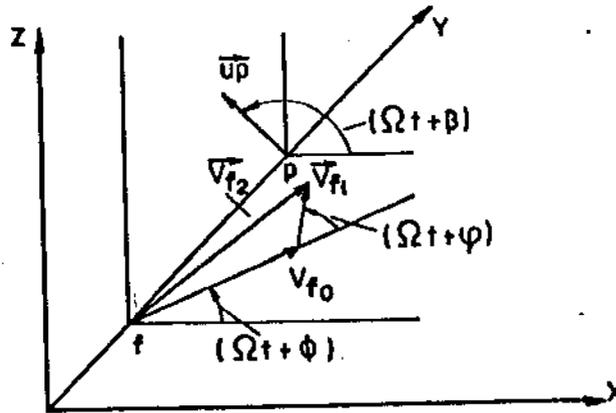


Figura 2.7: Representação vetorial da Amplitude de vibração resultante

Isto significa que massas colocadas adequadamente em posições a serem determinadas podem diminuir as amplitudes de vibração em posições pré-determinadas.

2.2.4 Equação diferencial do sistema

Se o modelo físico do sistema rotativo é conhecido, pode-se representar matematicamente o seu comportamento dinâmico por meio do sistema de equações diferenciais da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{F\} \quad (2.7)$$

onde:

- $[M]$ - matriz de massa do sistema
- $[C]$ - matriz de amortecimento viscoso
- $[K]$ - matriz de rigidez
- $\{F\}$ - vetor das forças nodais de excitação
- $\{r\}$ - vetor dos deslocamentos nodais

Na equação (2.7) todos os deslocamentos e deflexões $\vec{r}(z)$ ao longo do eixo podem ser representadas por meio de números complexos.

A força $\{F(z, t)\}$ é obtida através da força dinâmica $\{F_d(z, t)\}$, devido ao desbalanceamento e da força $\{F_b(z, t)\}$ devida à deformação inicial de montagem $r_b(z, t)$ do eixo do rotor, [10]

$$\{F(z, t)\} = \{F_d(z, t)\} + \{F_b(z, t)\} \quad (2.8)$$

A uma rotação constante Ω estas forças são dadas por

$$\{F_a(z, t)\} = \{U_e(z)\} \Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2.9)$$

$$\{F_b(z, t)\} = \{U_b(z)\} \Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2.10)$$

onde:

- $\{U_e\}$ - vetor dos momentos de desbalanceamento nodais
- $\{U_b\}$ - vetor dos momentos de desbalanceamento nodais devido à deformação inicial do eixo

Utilizando-se as equações (2.9) e (2.10) e substituindo-as em (2.7), obtém-se as equações do sistema excitado por forças de desbalanceamento de massa e/ou forças originadas das imperfeições do eixo, das imperfeições de montagem, ou imperfeições geométricas iniciais. Assim:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \Omega^2[\{U_e\} + \{U_b\}] e^{j\Omega t} \quad (2.11)$$

ou ainda agrupando

$$\{U_e\} + \{U_b\} = \{U_t\} \quad (2.12)$$

obtém-se

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \Omega^2\{U_t\} e^{j\Omega t} \quad (2.13)$$

2.2.5 Equação diferencial do sistema em coordenadas modais

Na equação (2.13) considera-se que $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes constantes reais e simétricas e que $[C]$ é uma combinação linear de $[M]$ e $[K]$, [3],

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (2.14)$$

$[K]$ e $[M]$ obtidas a partir do Método dos Elementos Finitos.

Introduzindo-se a transformação linear das coordenadas dos deslocamentos generalizados $\{r\}$ para o deslocamento modal $\{y\}$ obtém-se a expressão,

$$\{r\} = [\Phi]\{y\} \quad (2.15)$$

onde $[\Phi]$ é a matriz quadrada de ordem n . Esta matriz $[\Phi]$, por ora desconhecida, poderá ser determinada através da análise modal do sistema. O objetivo desta transformação é obter-se um novo sistema de equações desacopladas, e/ou de menor ordem.

Uma possível matriz de transformação é obtida a partir dos modos próprios de vibração, calculados a partir da equação homogênea associada à equação (2.13).

A equação ,

$$[M]\{\ddot{r}\} + [K]\{r\} = \{0\} \quad (2.16)$$

possui uma solução da forma

$$\{r\} = \{\phi\}_i \sin \omega_i(t - t_0) \quad (2.17)$$

onde:

- $\{\phi\}_i$ - é um vetor de ordem n
- t - é a variável tempo
- t_0 - é a constante de tempo inicial
- ω_i - é a constante que representa a i -ésima frequências natural de vibração do sistema

Substituindo-se a equação (2.17) em (2.16), obtém-se a equação matricial algébrica dos autovalores e autovetores,

$$[K]\{\phi\}_i = \omega_i^2[M]\{\phi\}_i \quad (2.18)$$

Aplicando-se um método numérico de resolução à equação (2.18), por exemplo o método de Jacobi [4], obtém-se n pares de soluções ω_i , $\{\phi\}_i$ e a equação (2.18) pode ser reescrita como,

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\omega^2] \quad (2.19)$$

onde $[\Phi]$ é a matriz cujas colunas são formadas pelos autovetores $\{\phi\}_i$ e $[\omega^2]$ é uma matriz diagonal formada pelos autovalores ω_i^2 .

Utilizando-se a equação (2.15) e pré-multiplicando-se a equação (2.11) por $[\Phi]^T$, obtém-se,

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{y}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{y\} = \Omega^2[\Phi]^T\{U_c + U_b\} e^{j\Omega t} \quad (2.20)$$

Da ortogonalidade da matriz $[\Phi]$ em relação a $[M]$, $[C]$ e $[K]$ resulta o desacoplamento da equação (2.20),

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \begin{cases} m_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & M_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \begin{cases} c_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & C_i & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{cases} k_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & K_i & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[\Phi]^T\{U_\epsilon\} = \{u_{\epsilon i}\} \quad (2.24)$$

$$[\Phi]^T\{U_b\} = \{u_{bi}\} \quad (2.25)$$

$$\{u_{\epsilon}\} + \{u_b\} = \{u_{ti}\} \quad (2.26)$$

onde:

- $\{M_i\}$ - matriz de massa modal
- $\{C_i\}$ - matriz de amortecimento modal
- $\{K_i\}$ - matriz de rigidez modal
- $\{u_{\epsilon i}\}$ - vetor do momento de desbalanceamento modal
- $\{u_{bi}\}$ - vetor do momento de desbalanceamento modal devido à deformação inicial modal
- $\{u_{ti}\}$ - vetor do momento de desbalanceamento modal total
- $\{y\}$ - vetor da resposta dinâmica modal

Utilizando-se (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) a equação (2.20) pode ser escrita em termos das coordenadas modais,

$$\begin{bmatrix} \dots & & \\ & M_i & \\ & & \dots \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{y} \\ \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} \dots & & \\ & C_i & \\ & & \dots \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{y} \\ \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} \dots & & \\ & K_i & \\ & & \dots \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} y \\ \end{matrix} \right\} = \Omega^2 \left\{ \begin{matrix} u_{ti} \\ \end{matrix} \right\} e^{j\Omega t} \quad (2.27)$$

Da equação (2.27) obtém-se n equações diferenciais desacopladas,

$$m_i \ddot{y}_i(t) + c_i \dot{y}_i(t) + k_i y_i(t) = \Omega^2 (u_{\epsilon i} + u_{bi}) e^{j\Omega t} \quad (2.28)$$

2.3 Cálculo das forças de excitação modais

Como foi dito anteriormente pela equação (2.13), as forças devido aos desbalanceamentos são consideradas como concentradas nos nós e dadas por:

$$\{F\}_{tempo} = \Omega^2 \{U_t\} e^{j\Omega t} = \begin{Bmatrix} A_1 \cos(\Omega t - F s_1) \\ A_2 \cos(\Omega t - F s_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(\Omega t - F s_n) \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

onde:

- $A_i = \Omega^2 U_t$ - amplitude
- $F s_i$ - fase
- n - número de graus de liberdade

A pré-multiplicação da equação (2.29) por $[\Phi]^T$ resulta nas forças modais,

$$\{f\}_{modal} = [\Phi]^T \{F\}_{tempo} \quad (2.30)$$

onde $[\Phi]^T$ e $\{f\}_{modal}$ são dadas por

$$[\Phi]_{n \times n}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \phi_{31} & \dots & \phi_{n1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{32} & \dots & \phi_{n2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \phi_{3n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\{f\}_{modal} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Substituindo-se (2.29), (2.31) e (2.32) em (2.30) obtém-se,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}_{modal} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \phi_{31} & \dots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{32} & \dots & \phi_{n2} \\ \vdots & & & & \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \phi_{3n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos(\Omega t - F s_1) \\ A_2 \cos(\Omega t - F s_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(\Omega t - F s_n) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}A_1 \cos(\Omega t + Fs_1) + \phi_{21}A_2 \cos(\Omega t + Fs_2) + \dots + \phi_{n1}A_n \cos(\Omega t + Fs_n) \\ \phi_{12}A_1 \cos(\Omega t + Fs_1) + \phi_{22}A_2 \cos(\Omega t + Fs_2) + \dots + \phi_{n2}A_n \cos(\Omega t + Fs_n) \\ \vdots \\ \phi_{1n}A_1 \cos(\Omega t + Fs_1) + \phi_{2n}A_2 \cos(\Omega t + Fs_2) + \dots + \phi_{nn}A_n \cos(\Omega t + Fs_n) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Supondo-se a equação (2.34) do tipo,

$$\{F_j\} = \{R_j \cos(\Omega t + Fase_j)\} \quad (2.35)$$

Necessita-se calcular R_j e $Fase_j$ para-se obter $\{F_j\}$. Manipulando-se os cossenos da equação (2.34) têm-se,

$$\begin{aligned} F_j = & \phi_{1j}A_1 [\cos(\Omega t) \cos(Fs_1) + \sin(\Omega t) \sin(Fs_1)] + \\ & \phi_{2j}A_2 [\cos(\Omega t) \cos(Fs_2) + \sin(\Omega t) \sin(Fs_2)] + \dots \\ & \dots + \phi_{nj}A_n [\cos(\Omega t) \cos(Fs_n) + \sin(\Omega t) \sin(Fs_n)] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Separando-se $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$ da equação (2.36) têm-se,

$$\begin{aligned} F_j = & \cos(\Omega t)(\phi_{1j}A_1 \cos(Fs_1) + \phi_{2j}A_2 \cos(Fs_2) + \dots + \phi_{nj}A_n \cos(Fs_n)) + \\ & \sin(\Omega t)(\phi_{1j}A_1 \sin(Fs_1) + \phi_{2j}A_2 \sin(Fs_2) + \dots + \phi_{nj}A_n \sin(Fs_n)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Colocando-se a expressão (2.37) na forma,

$$F_j = B_j \cos(\Omega t) + C_j \sin(\Omega t) \quad (2.38)$$

onde:

$$B_j = \sum_{k=1}^n \phi_{kj} A_k \cos(Fs_k) \quad j = 1, n \quad (2.39)$$

$$C_j = \sum_{k=1}^n \phi_{kj} A_k \sin(Fs_k) \quad j = 1, n \quad (2.40)$$

e manipulando-se o cosseno da equação (2.35) e comparando a expressão resultante com a equação (2.38) têm-se,

$$F_j = B_j \cos(\Omega t) + C_j \sin(\Omega t) = R_j \cos(Fase_j) \cos(\Omega t) + R_j \sin(Fase_j) \sin(\Omega t) \quad (2.41)$$

Da igualdade da equação (2.41) têm-se,

$$B_j = R_j \cos(\text{Fase}_j) \quad (2.42)$$

$$C_j = R_j \sin(\text{Fase}_j) \quad (2.43)$$

Pode-se calcular R_j e Fase_j através das equações (2.42) e (2.43),

$$\tan(\text{Fase}_j) = \frac{C_j}{B_j} \quad (2.44)$$

$$R_j = \frac{B_j}{\cos(\text{Fase}_j)} = \frac{C_j}{\sin(\text{Fase}_j)} = \sqrt{B_j^2 + C_j^2} \quad (2.45)$$

2.3.1 Resolução das equações diferenciais pela integral de convolução

Para simular a vibração do sistema no domínio do tempo obtido através de sensores de deslocamento, escolheu-se uma simulação digital. Este sinal é obtido através da resolução das equações, utilizando algum método numérico ou analítico, se possível.

As equações diferenciais de movimento em coordenadas modais, equação (2.28), podem ser integradas exatamente a partir da integral de convolução [5], pois as forças externas são harmônicas nos casos em que o rotor gira com velocidade constante.

Considera-se a excitação da equação (2.28), $F(t)$ aproximada por uma sequência de pulsos escada. O intervalo de cada pulso é definido como sendo um período $\Delta\tau$, que no instante τ , define uma área,

$$F(\tau) \Delta\tau \quad (2.46)$$

A resposta ao pulso descrito acima pode ser analisada como sendo o produto da resposta a um impulso unitário pela largura do pulso,

$$h(t - \tau)(F(\tau) \Delta\tau) \quad (2.47)$$

Fazendo-se a superposição da sequência de respostas ao longo do tempo temos a resposta no tempo $x(t)$,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^t h(t - \tau) F(\tau) \Delta\tau \quad (2.48)$$

No limite com $\Delta\tau$ se aproximando de zero, obtém-se da equação (2.48) a integral de convolução,

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.49)$$

A resposta $h(t-\tau)$ de um impulso a um sistema massa-mola-amortecedor é conhecida,

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \quad (2.50)$$

Substituindo-se a equação (2.50) na equação (2.49), obtém-se a resposta do sistema para uma excitação $F(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{\omega_d m} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.51)$$

Como o que se propõe é a resolução exata das equações, necessita-se calcular a integral da equação (2.51) exatamente.

Sejam as igualdades,

$$\sin \omega_d(t-\tau) = \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d \tau) - \cos(\omega_d t) \sin(\omega_d \tau) \quad (2.52)$$

$$e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} = e^{-\xi\omega_n t} e^{\xi\omega_n \tau} \quad (2.53)$$

Substituindo-se (2.52) e (2.53) em (2.51) têm-se

$$x(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d m} \int_0^t F(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} [\sin(\omega_d t) \cos(\omega_d \tau) - \cos(\omega_d t) \sin(\omega_d \tau)] d\tau \quad (2.54)$$

Da equação (2.54) têm-se,

$$x(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d m} (I_1 - I_2) \quad (2.55)$$

onde:

$$I_1 = \sin(\omega_d t) \int_0^t F(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} \cos(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.56)$$

$$I_2 = \cos(\omega_d t) \int_0^t F(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} \sin(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.57)$$

Seja uma excitação harmônica do tipo apresentado na figura (2.8).

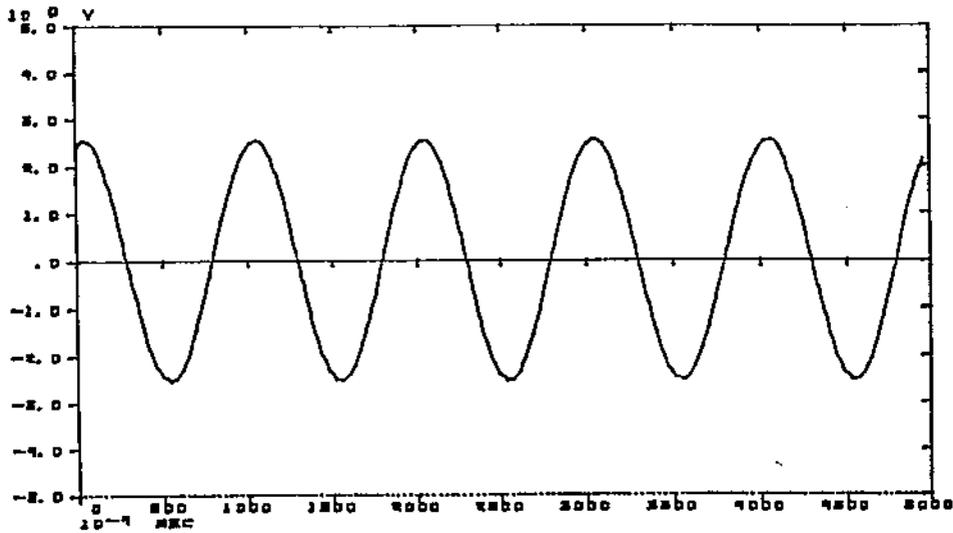


Figura 2.8: Amplitude de uma excitação harmônica

A amplitude A da força para uma rotação Ω é dada por,

$$A = m \epsilon \Omega^2 \quad (2.58)$$

A excitação $F(\tau)$ na direção x pode ser escrita como,

$$F(\tau) = A \cos(\Omega\tau + \phi) \quad (2.59)$$

Substituindo-se a equação (2.59) na equação (2.56) e (2.57), obtém-se,

$$I_1 = \sin(\omega_d t) \int_0^t A \cos(\Omega\tau + \phi) e^{\xi\omega_n\tau} \cos(\omega_d\tau) d\tau \quad (2.60)$$

$$I_2 = \cos(\omega_d t) \int_0^t A \cos(\Omega\tau + \phi) e^{\xi\omega_n\tau} \sin(\omega_d\tau) d\tau \quad (2.61)$$

Seja a igualdade,

$$\cos(\Omega\tau - \phi) = \cos(\Omega\tau) \cos(\phi) + \sin(\Omega\tau) \sin(\phi) \quad (2.62)$$

Substituindo-se a equação (2.62) nas equações (2.60) e (2.61) têm-se,

$$I_1 = \sin \omega_d t \left[\int_0^t A e^{\xi\omega_n\tau} \cos \Omega\tau \cos \phi \cos \omega_d\tau d\tau + \int_0^t A e^{\xi\omega_n\tau} \sin \Omega\tau \sin \phi \cos \omega_d\tau d\tau \right] \quad (2.63)$$

$$I_2 = \cos \omega_d t \left[\int_0^t A e^{\xi\omega_n\tau} \cos \Omega\tau \cos \phi \sin \omega_d\tau d\tau + \int_0^t A e^{\xi\omega_n\tau} \sin \Omega\tau \sin \phi \sin \omega_d\tau d\tau \right] \quad (2.64)$$

Simplificando,

$$I_1 = A \sin(\omega_d t) [\cos(\phi) B + \sin(\phi) C] \quad (2.65)$$

$$I_2 = A \cos(\omega_d t) [\cos(\phi) D + \sin(\phi) E] \quad (2.66)$$

onde:

$$B = \int_0^t A e^{\xi \omega_n \tau} \cos(\Omega \tau) \cos(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.67)$$

$$C = \int_0^t A e^{\xi \omega_n \tau} \sin(\Omega \tau) \cos(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.68)$$

$$D = \int_0^t A e^{\xi \omega_n \tau} \cos(\Omega \tau) \sin(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.69)$$

$$E = \int_0^t A e^{\xi \omega_n \tau} \sin(\Omega \tau) \sin(\omega_d \tau) d\tau \quad (2.70)$$

Resolvendo as integrais (2.67), (2.68), (2.69) e (2.70), obtém-se,

$$B = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \sin(\Omega - \omega_d) \tau + \xi \omega_n \cos(\Omega - \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] + \left[\frac{(\Omega + \omega_d) \sin(\Omega + \omega_d) \tau + \xi \omega_n \cos(\Omega + \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n \tau} \Big|_0^t \quad (2.71)$$

$$C = \left\{ \left[\frac{-(\Omega - \omega_d) \cos(\Omega - \omega_d) \tau + \xi \omega_n \sin(\Omega - \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] + \left[\frac{-(\Omega + \omega_d) \cos(\Omega + \omega_d) \tau + \xi \omega_n \sin(\Omega + \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n \tau} \Big|_0^t \quad (2.72)$$

$$D = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \cos(-\Omega + \omega_d) \tau - \xi \omega_n \sin(\Omega - \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (-\Omega + \omega_d)^2]} \right] + \left[\frac{-(\Omega + \omega_d) \cos(\Omega + \omega_d) \tau + \xi \omega_n \sin(\Omega + \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n \tau} \Big|_0^t \quad (2.73)$$

$$E = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \sin(\Omega - \omega_d) \tau + \xi \omega_n \cos(\Omega - \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] - \left[\frac{(\Omega + \omega_d) \sin(\Omega + \omega_d) \tau + \xi \omega_n \cos(\Omega + \omega_d) \tau}{2[(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n \tau} \Big|_0^t \quad (2.74)$$

Resolvendo os intervalos de (2.71), (2.72), (2.73) e (2.74), obtêm-se as expressões integradas exatamente,

$$B = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \sin(\Omega - \omega_d) t + \xi \omega_n \cos(\Omega - \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] + \left[\frac{(\Omega + \omega_d) \sin(\Omega + \omega_d) t + \xi \omega_n \cos(\Omega + \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n t} - \left\{ \frac{1}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} + \frac{1}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right\} \quad (2.75)$$

$$C = \left\{ \left[\frac{-(\Omega - \omega_d) \cos(\Omega - \omega_d) t + \xi \omega_n \sin(\Omega - \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{-(\Omega + \omega_d) \cos(\Omega + \omega_d) t + \xi \omega_n \sin(\Omega + \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n t} + \left\{ \frac{\Omega - \omega_d}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} + \frac{\Omega + \omega_d}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right\} \quad (2.76)$$

$$D = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \cos(-\Omega + \omega_d) t - \xi \omega_n \sin(\Omega - \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (-\Omega + \omega_d)^2]} \right] + \left[\frac{-(\Omega + \omega_d) \cos(\Omega + \omega_d) t + \xi \omega_n \sin(\Omega + \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n t} + \left\{ \frac{-\Omega + \omega_d}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (-\Omega + \omega_d)^2]} + \frac{\Omega + \omega_d}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right\} \quad (2.77)$$

$$E = \left\{ \left[\frac{(\Omega - \omega_d) \sin(\Omega - \omega_d) t + \xi \omega_n \cos(\Omega - \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} \right] - \left[\frac{(\Omega + \omega_d) \sin(\Omega + \omega_d) t + \xi \omega_n \cos(\Omega + \omega_d) t}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right] \right\} e^{\xi \omega_n t} - \left\{ \frac{\xi \omega_n}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega - \omega_d)^2]} - \frac{\xi \omega_n}{2 [(\xi \omega_n)^2 + (\Omega + \omega_d)^2]} \right\} \quad (2.78)$$

Se a influência das condições iniciais for considerada, a solução total $x(t)$ é obtida da superposição da equação (2.49) com a solução homogênea da equação (2.28).

Com as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, tem-se:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] + \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.79)$$

Como para o método de balanceamento é necessário que a velocidade de rotação seja constante e que o sinal medido seja o sinal correspondente ao regime permanente, no método numérico implementado, muito trabalho computacional se fez necessário para que se obtivesse o sinal em regime permanente, pois calculou-se 128 pontos de discretização por período e eram necessários vários períodos para que o transiente se reduzisse a valores não influentes na resposta do sistema. Porém se se utilizar a solução analítica basta desprezar os termos referentes ao regime transitório na equação (2.79).

2.3.2 Resolução da equação diferencial de movimento no domínio do tempo e frequência

Durante o desenvolvimento do trabalho, sentiu-se a necessidade de diminuir o tempo de cálculo computacional utilizado na simulação. Sendo o sistema excitado harmonicamente, a resposta resultante é devida a uma componente transiente superposta a uma oscilação em regime permanente com a mesma frequência Ω da excitação. Tentou-se diminuir o tempo de cálculo computacional utilizando apenas a parte da resposta correspondente ao regime permanente.

Pode-se supor que a solução particular da equação (2.28) seja da forma,

$$y = Y \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.80)$$

onde:

- Y - amplitude de oscilação
- ϕ - fase do deslocamento com relação à força de excitação.

Substituindo-se (2.80) na equação (2.28) obtém-se a amplitude de vibração em função da frequência de rotação,

$$Y(\Omega) = \frac{F_0 K}{\sqrt{[1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2]^2 + [2 \xi (\frac{\Omega}{\omega_n})]^2}} \quad (2.81)$$

$$\phi(\Omega) = \arctan \frac{2 \xi (\frac{\Omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2} \quad (2.82)$$

onde:

- $F_0 = \Omega^2 u_t$ - amplitude da força de excitação

- $F_0 = \Omega^2 u_t$ - amplitude da força de excitação
- Ω - velocidade de rotação
- ω_n - frequência natural
- ξ - fator de amortecimento

Pode-se ainda obter a amplitude de vibração em função do tempo substituindo-se (2.81) e (2.82) em (2.80),

$$y(t) = \frac{F_0/K}{\sqrt{[1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\xi(\frac{\Omega}{\omega_n})]^2}} \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.83)$$

Colocando-se (2.81) e (2.83) em função de Ω e d , têm-se,

$$Y_i(\Omega) = \frac{\Omega^2}{(\omega_i^2 - \Omega^2 + \frac{j\Omega d_i}{m_i})} \frac{u_i}{m_i} \quad (2.84)$$

$$y_i(t) = \frac{\Omega^2}{(\omega_i^2 - \Omega^2 + \frac{j\Omega d_i}{m_i})} \frac{u_i}{m_i} \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.85)$$

Agrupando-se as equações (2.15) e (2.85) obtém-se a resposta dinâmica do sistema $\{\Omega\}$, em função dos parâmetros modais,

$$\{r(t)\} = \sum_{i=1}^n y_i(t) \{\phi\}_i \quad (2.86)$$

$$\{r(\Omega)\} = \sum_{i=1}^n Y_i(\Omega) \{\phi\}_i \quad (2.87)$$

Vamos chamar de $\{B\}$ o vetor que leva em consideração todas as irregularidades geométricas do eixo e dos discos devidas à defeitos de fabricação, devidas ao desalinhamento de montagem, devidas à deformação permanente do eixo, à ovalização da secção transversal do eixo, etc... Expressa-se $\{B\}$ em termos modais em função de $\{\phi\}$, pois esta constitui uma base vetorial no espaço em questão,

$$\{B\} = [\Phi] \{b\} \quad (2.88)$$

Levando-se em conta no sistema rotativo as irregularidades geométricas devidas ao empenamento e à ovalização do eixo e dos discos expressas pela equação (2.86) e (2.87), obtém-se a resposta dinâmica do sistema,

$$\{r(\Omega)\} = \sum_{i=1}^n [b_i + Y_i(\Omega)] \{\phi\}_i \quad (2.89)$$

$$\{r(t)\} = \sum_{i=1}^n [b_i \sin(\Omega t - \beta) + y_i(t)] \{\phi\}_i \quad (2.90)$$

As equações (2.89) e (2.90) fornecem os deslocamentos nodais aproximados, nos domínios da frequência e do tempo, respectivamente. Como na maioria dos casos apenas as primeiras velocidades críticas são relevantes, o número de modos $\{\phi\}_i$ a serem considerados normalmente é baixo.

Capítulo 3

Balanceamento de Rotores Flexíveis

3.1 Introdução

Balanceamento é o processo através do qual a distribuição de massa de um corpo rotativo é modificada, de modo que o centro de gravidade do rotor permaneça tão próximo quanto possível do centro de rotação do corpo. Deste modo, a vibração do corpo em determinadas rotações será reduzida a níveis pré-estabelecidos, abaixo dos quais o rotor possa ser considerado como satisfatoriamente balanceado.

O desenvolvimento de máquinas com estruturas cada vez mais flexíveis operando em altas velocidades de rotação, geradoras ou utilizadoras de potência, levaram ao aprimoramento das técnicas de balanceamento, pois a aplicação dos métodos tradicionais mostrava-se insatisfatória.

As pesquisas sobre métodos de balanceamento de rotores flexíveis podem ser classificadas em dois grupos. A primeira delas começou em meados de 1955 e foi até 1959, e teve como principal pesquisador K. Federn [6]. A segunda geração de Métodos de Balanceamento de Rotores Flexíveis teve início em 1959, com os trabalhos de R.E.D. Bishop [7], e se desenvolve até os nossos dias. Durante esse tempo, foram desenvolvidas duas técnicas básicas de balanceamento de rotores flexíveis. A primeira técnica de balanceamento é conhecida como Método dos Coeficientes de Influência, e a segunda de Balanceamento Modal.

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática dessas duas técnicas e os métodos numéricos utilizados na implementação de cada uma delas.

3.2 Método dos Coeficientes de Influência

3.2.1 Características

O Método dos Coeficientes de Influência baseia-se na hipótese do comportamento linear do sistema rotativo ou, no mínimo, linear em determinada faixa de operação.

Na realidade o comportamento de um sistema rotativo nunca é linear devido ao efeito giroscópico, pois as características dinâmicas do sistema passam a ser dependentes da velocidade de rotação. Para sistemas operando numa larga faixa de variação da velocidade de rotação, o grau de não linearidade pode ser não desprezível. Entretanto, para uma faixa estreita de variação da velocidade de rotação, o sistema pode ser considerado como linear.

A eficácia do método não é influenciada pela presença de amortecimento no sistema, pela flexibilidade da fundação, pela anisotropia dos mancais e nem pelas irregularidades geométricas do rotor. Rotores com discos com desalinhamento angular podem ser balanceados tão rapidamente quanto os rotores com discos alinhados.

A implementação do Método dos Coeficientes de Influência é talvez a mais simples dentre os processos de balanceamento correntes. Isto porque durante os cálculos das massas de correção, o sistema é tratado como uma "caixa preta". Entretanto um conhecimento da dinâmica do sistema se faz interessante para uma melhor escolha, tanto dos planos de medida como dos planos de balanceamento.

A grande desvantagem está relacionada com o número de leituras de amplitude e fase de vibração necessárias para sua aplicação e o conseqüente tempo gasto entre as medidas, pois é necessário que o sistema entre em regime permanente em cada velocidade de rotação considerada.

A sua eficácia é salientada quando se deseja obter baixas amplitudes de vibração em pontos especificados ao longo do rotor para velocidades de rotação selecionadas, fato esse que deu origem à denominação "*Método dos Coeficientes de Influência Exato*", para uma dada velocidade de rotação, em relação a determinados planos do rotor, [1].

3.2.2 Formulação Matemática

A técnica fundamental do método consiste em colocar massas de desbalanceamento conhecidas para se determinar o efeito sobre a vibração do sistema.

Uma formalização deste procedimento [1], [2] consiste em:

- a) massas de prova são colocadas em locais selecionados ao longo do rotor
- b) são obtidos os vetores de desbalanceamento através da medição das amplitudes de vibração e seus ângulos de fase em locais convenientes ao longo do rotor.
- c) massas corretivas de balanceamento são determinadas e inseridas em locais pré-determinados.

Nos locais estabelecidos ao longo do rotor são definidos vários planos perpendiculares ao eixo do rotor. A posição geométrica onde se encontra o vetor desbalanceamento define um plano de desbalanceamento. As posições onde são medidas as vibrações definem os planos de medida. As posições onde são colocadas as massas de balanceamento definem os planos de balanceamento.

Inicialmente considera-se apenas um plano de medida e um plano de balanceamento. Submete-se o rotor a uma dada velocidade síncrona e faz-se a medida da vibração \vec{V}_{f_0} no

plano i de medida. Colocando-se um momento de desbalanceamento \vec{U}_p no plano p de balanceamento, repete-se o procedimento anterior de medição obtendo \vec{V}_{fi} . Observe-se que somente são medidas as amplitudes e seus ângulos de fase de vibração e em uma determinada velocidade de rotação.

A representação matemática da influência do momento de desbalanceamento \vec{U}_p caracterizando \vec{V}_{fi} , pode ser expressa na forma complexa como mostra figura (2.7),

$$|\vec{V}_{fi}| e^{i(\Omega t + \varphi)} = \alpha |\vec{U}_p| e^{i(\Omega t + \beta)} \quad (3.1)$$

ou ainda

$$\alpha = \frac{|\vec{V}_{fi}|}{|\vec{U}_p|} e^{i(\varphi - \beta)} \quad (3.2)$$

onde α é o coeficiente de influência complexo.

Considerando-se agora n planos de balanceamento e v o número total de deslocamentos e/ou deflexões medidos, teremos $v \times n$ coeficientes de influência α . A situação acima pode ser descrita na seguinte forma matricial,

$$\{V_j\} = [\alpha_{jp}] \{U_p\} \quad (3.3)$$

onde:

- $\{V_j\}$ - vetor dos deslocamentos e/ou deflexões de ordem $v \times 1$
- $\{U_p\}$ - vetor dos momentos de desbalanceamentos de ordem $n \times 1$
- $[\alpha_{jp}]$ - matriz dos coeficientes de influência de ordem $v \times n$

As contantes α_{jp} são coeficientes lineares complexos, que relacionam os efeitos resultantes na posição j , devido ao momento de desbalanceamento colocado na posição p .

Devido ao fato destes coeficientes poderem ser obtidos para diferentes velocidades de rotação, o número total de deslocamentos medidos, v , está relacionado com o número de planos, m , ao longo do rotor no qual os deslocamentos são medidos, com o número de velocidades de balanceamento, l . Logo a dimensão de v é dada por,

$$v = m l \quad (3.4)$$

Como os momentos de desbalanceamentos e os coeficientes de influência são complexos, pode-se escrever,

$$\vec{\alpha}_{jp} = \alpha_{xjp} + i \alpha_{yjp} = |\vec{\alpha}_{jp}| e^{i\gamma} \quad (3.5)$$

$$\vec{V}_p = V_{xp} + i V_{yp} = |\vec{V}_p| e^{i\theta} \quad (3.6)$$

$$\vec{U}_p = U_{xp} + i U_{yp} = |\vec{U}_p| e^{i\beta} \quad (3.7)$$

Atribuindo-se mais um índice devido ao número de velocidades, a equação (3.3) pode ser reescrita como,

$$\{V_j^k\} = [\alpha_{jp}^k] \{U_p\} \quad (3.8)$$

onde:

- $k = 1, \dots, l$ (número de velocidades)
- $j = 1, \dots, m$ (número de planos de medida)
- $p = 1, \dots, n$ (número de planos de balanceamento)

Como o sistema de equações é complexo, a equação (3.8) pode ser escrita em forma real matricial onde se dobra a ordem da matriz inicial,

$$\begin{bmatrix} [\alpha_{jp}^k]^R & -[\alpha_{jp}^k]^I \\ [\alpha_{jp}^k]^I & [\alpha_{jp}^k]^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_p\}^R \\ \{U_p\}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{V_j^k\}^R \\ \{V_j^k\}^I \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde:

- $[\alpha_{jp}^k]^R$ - matriz da componente real de $[\alpha]$
- $[\alpha_{jp}^k]^I$ - matriz da componente imaginária de $[\alpha]$
- $\{U_p\}^R$ - vetor da componente real de $\{U_p\}$
- $\{U_p\}^I$ - vetor da componente imaginária de $\{U_p\}$
- $\{V_j\}^R$ - vetor da componente real de $\{V_j\}$
- $\{V_j\}^I$ - vetor da componente imaginária de $\{V_j\}$

3.2.3 Obtenção da matriz dos coeficientes de influência

Primeiramente é necessário selecionar-se os m locais de medida e os n planos de balanceamento. Em seguida o rotor é posto a girar a uma rotação Ω_1 constante e mede-se, nos m planos de medida do sistema, o vetor momento de desbalanceamento através da amplitude de vibração V_{jp} ($V_{10}^1, V_{20}^1, V_{30}^1, \dots, V_{m0}^1$) e seus respectivos ângulos de fase ϕ .

Estas amplitudes \vec{V}_{jp} complexas relacionam-se com os desbalanceamentos iniciais \vec{U}_p , assumido existente e concentrado em n planos de balanceamento, através dos coeficientes de influência dependentes da velocidade Ω_1 ,

$$\begin{Bmatrix} V_{10}^1 \\ V_{20}^1 \\ \vdots \\ V_{m0}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 & \dots & \alpha_{1n}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 & \dots & \alpha_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}^1 & \alpha_{m2}^1 & \dots & \alpha_{mn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

onde \vec{V}_{jp} é escrito em função da amplitude e fase,

$$\vec{V}_{jp}^k = |\vec{V}_{jp}^k| (\cos \phi + i \sin \phi) = (V_{jp}^k)^R + i (V_{jp}^k)^I \quad (3.11)$$

Em seguida um momento de desbalanceamento \vec{T} conhecido,

$$\vec{T} = |\vec{T}| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = (T)^R + i (T)^I \quad (3.12)$$

é colocado no plano 1, em uma posição angular φ genérica. Novamente o rotor é acionado com a mesma velocidade de rotação Ω_1 e são medidos os novos momentos de desbalanceamento através de suas amplitudes V_{jp} ($V_{11}^1, V_{21}^1, \dots, V_{m1}^1$) e seus correspondentes ângulos de fase. As amplitudes \vec{V}_{jp} estão relacionadas com o momento de desbalanceamento inicial, acrescido do momento de desbalanceamento T colocado no plano 1,

$$\begin{Bmatrix} V_{11}^1 \\ V_{21}^1 \\ \vdots \\ V_{m1}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 & \dots & \alpha_{1n}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 & \dots & \alpha_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}^1 & \alpha_{m2}^1 & \dots & \alpha_{mn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 + T \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Devido ao fato das equações (3.10) e (3.13) serem montadas para uma mesma velocidade Ω_1 e desprezando-se o efeito da alteração de massa total devido a massa de prova adicionada, admite-se que ambas as matrizes de coeficientes de influência são iguais. Portanto, subtraindo-se a equação (3.13) da equação (3.10) resulta,

$$\begin{Bmatrix} V_{11}^1 - V_{10}^1 \\ V_{21}^1 - V_{20}^1 \\ \vdots \\ V_{m1}^1 - V_{m0}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 & \dots & \alpha_{1n}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 & \dots & \alpha_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}^1 & \alpha_{m2}^1 & \dots & \alpha_{mn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Observa-se que da equação (3.14) pode-se calcular a primeira coluna da matriz $[\alpha]$ isolando os coeficientes possíveis de serem calculados,

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^1 &= \frac{V_{11}^1 - V_{10}^1}{T} \\
\alpha_{21}^1 &= \frac{V_{21}^1 - V_{20}^1}{T} \\
&\vdots \\
\alpha_{m1}^1 &= \frac{V_{m1}^1 - V_{m0}^1}{T}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Em seguida o momento de desbalanceamento de prova é removido do plano 1 e colocado sucessivamente nos $(n - 1)$ planos de balanceamento e do mesmo modo que no plano 1 os coeficientes de influência são calculados. Pode-se obter uma expressão geral para os coeficientes de influência,

$$\alpha_{jp}^k = \frac{V_{jl}^k - V_{j0}^k}{T} \tag{3.16}$$

onde:

- k - índice da velocidade de rotação considerada
- j - plano de medida
- p - plano de balanceamento
- l - plano onde está sendo colocado o momento de desbalanceamento conhecido

Como pode ser observado nas equações (3.14) e (3.15), a equação (3.16) só é válida quando o plano de balanceamento p coincide com o plano onde está sendo colocado o momento de desbalanceamento T . A equação (3.16) pode ser reescrita,

$$\alpha_{jp}^k = \frac{V_{jp}^k - V_{j0}^k}{T} \tag{3.17}$$

Como as constantes α , V e T são complexas, pode-se colocar a equação (3.17) na seguinte forma,

$$(\alpha_{jp}^k)^R + i(\alpha_{jp}^k)^I = \frac{\{(V_{jp}^k)^R + i(V_{jp}^k)^I\} - \{(V_{j0}^k)^R + i(V_{j0}^k)^I\}}{(T)^R + i(T)^I} \tag{3.18}$$

Multiplicando-se e dividindo-se a equação (3.18) pelo conjugado de \vec{T} e separando-se a parte real da parte imaginária,

$$(\alpha_{jp}^k)^R = \frac{\{(V_{jp}^k)^R - (V_{j0}^k)^R\}(T)^R + \{(V_{jp}^k)^I - (V_{j0}^k)^I\}(T)^I}{T^2} \tag{3.19}$$

$$(\alpha_{jp}^k)^I = \frac{\{(V_{jp}^k)^R - (V_{j0}^k)^R\}(T)^I + \{(V_{jp}^k)^I - (V_{j0}^k)^I\}(T)^R}{T^2} \quad (3.20)$$

Observa-se da equação (3.17) que a variação da posição da colocação do momento de desbalanceamento nos n planos de balanceamento permite calcular a matriz dos coeficientes $[\alpha]$, coluna por coluna.

Com a matriz dos coeficientes de influência $[\alpha]$ determinada, para obter o desbalanceamento inicial é necessário apenas resolver o sistema de equações (3.9).

3.3 Balanceamento Modal

3.3.1 Introdução

Os métodos de Balanceamento Modal tratados neste trabalho consistem de técnicas de identificação paramétricas de forças no domínio da frequência. De um modo geral os algoritmos de extração modal para este tipo de problema são adequados para estruturas que apresentam baixa densidade modal, isto é, ressonâncias com frequências espaçadas e geralmente baixo amortecimento. Neste contexto, nas proximidades de cada ressonância, o modo em questão é predominante e pode-se desprezar as componentes dos outros modos. Uma estrutura com alta densidade modal, apresenta ressonâncias com frequências próximas, logo nas proximidades de uma destas ressonâncias, o modo em questão não é predominante, isto é, a resposta apresenta componente destes modos próximos.

A resposta em frequência (*RESPF*) de um sistema com baixa densidade modal é mostrada na figura (3.1), e com alta densidade modal e mostrada na figura (3.2).

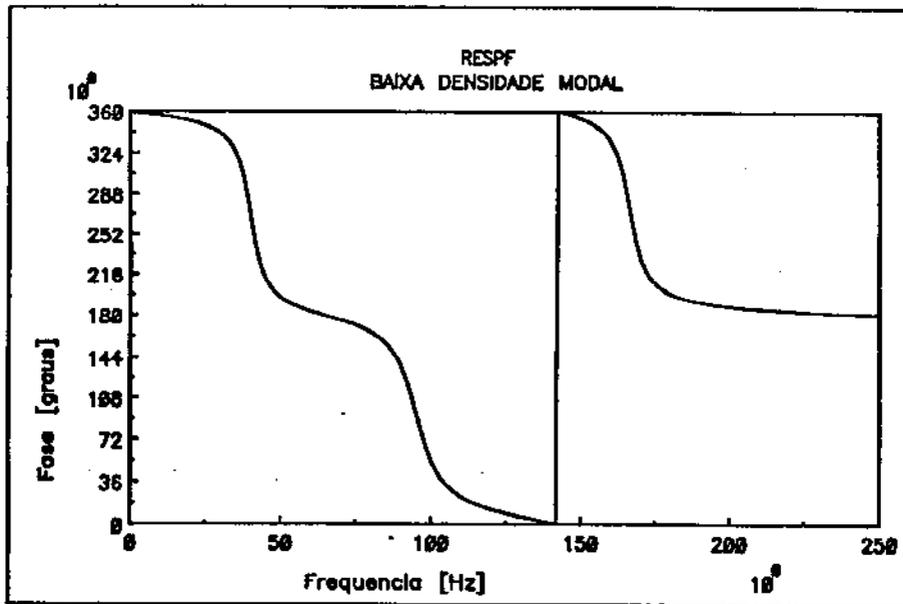
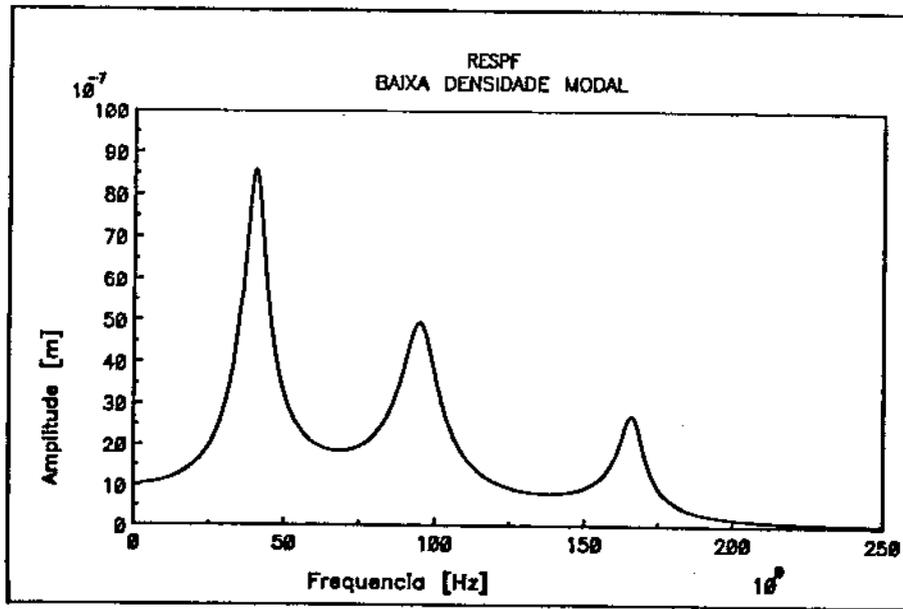


Figura 3.1: Resposta em frequência de sistemas com Baixa Densidade Modal

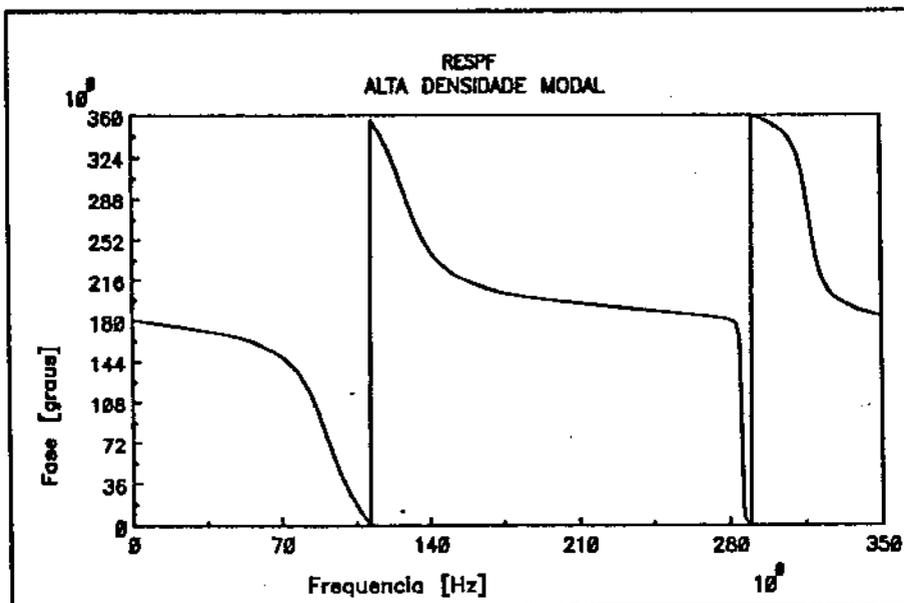
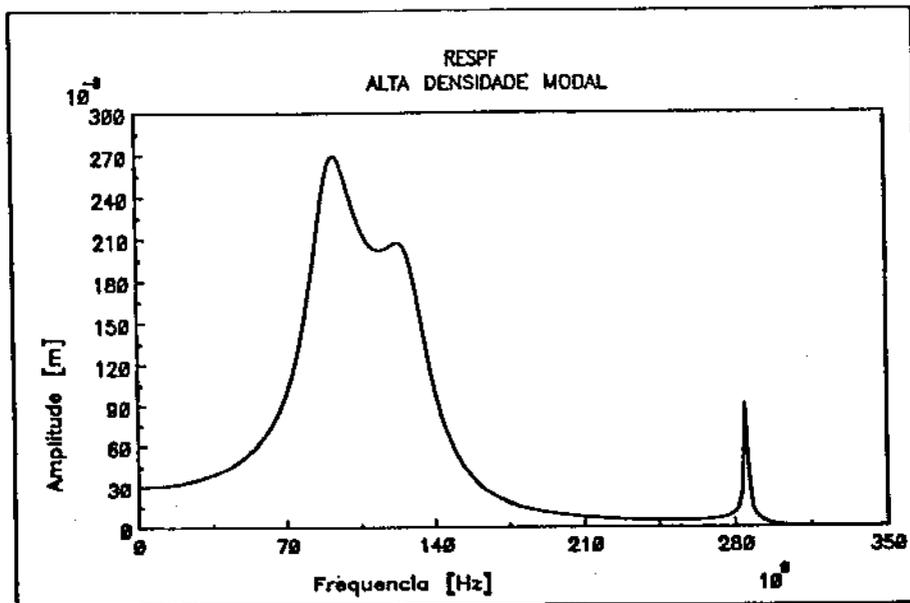


Figura 3.2: Resposta em frequência de sistema com Alta Densidade Modal

Supõe-se conhecido o modelo matemático do sistema rotativo, a geometria do sistema, a distribuição de massa e rigidez, fazendo com que seja possível calcular os modos de vibração do sistema. Se a massa ou rigidez for desconhecida, é necessário obter-se os modos através de métodos experimentais. É necessário que o sistema rotativo tenha um comportamento linear em cada velocidade de rotação. Excluem-se sistemas rotativos não lineares para velocidade de rotação constante. Para efetuar o balanceamento pode-se desconhecer a rigidez, amortecimento, desbalanceamento, deformações e irregularidades geométricas como o empenamento do eixo e a ovalização do eixo e dos discos e é conveniente medir-se as respostas em frequência em alguns planos do rotor em velocidades de rotação próximas às das velocidades críticas dos modos sendo balanceados.

Neste método é possível balancear determinado modo usando apenas um plano de medição, desde que se garanta que os modos $\{\phi\}_i$ calculados ou medidos sejam bem próximos aos modos reais do sistema, e que o plano de medição seja bem escolhido. Isto para que este plano propicie uma boa sensibilidade de medição quando comparado com outros possíveis pontos de medição. Assim evita-se que o ponto escolhido coincida ou esteja próximo de um nó do modo $\{\phi\}_i$ sendo balanceado.

3.3.2 Formulação Matemática H

Consideram-se sistemas rotativos que apresentem baixa densidade modal conforme figura (3.1), [8]. Sejam as medidas de balanceamento do modo i realizadas a uma velocidade de rotação Ω próxima da frequência de ressonância ω_i ($\Omega \cong \omega_i$). Para um amortecimento modal pequeno, o modo i predominará sobre os demais e a equação (2.89) pode ser escrita na forma,

$$\{r(\Omega)\} = (b_i + Y_i(\Omega)) \{\phi\}_i + \{q\}_i \quad (3.21)$$

onde $\{q\}_i$ é um vetor que leva em consideração os erros de medição e a contribuição de todos os outros modos diferentes do modo i sendo balanceado, dado por,

$$\{q\}_i = \sum_{j=1}^N (b_j + Y_j(\Omega)) \{\phi\}_j + \text{erros} \quad j \neq i \quad (3.22)$$

Para uma formulação geral do método, considere-se várias estações de medida e, ainda, um método de estimação por mínimos quadrados do erro $\{q\}_i$ da equação (3.21).

Sejam $\{R_m(\Omega)\}$ as m amplitudes de vibração selecionadas entre as i -ésimas componentes disponíveis no vetor $\{r(\Omega)\}$. Sejam $\{\psi_m\}_i$ as componentes do modo próprio $\{\phi\}_i$ correspondentes aos m locais de medida. Substituindo $\{r(\Omega)\}$ por $\{R_m(\Omega)\}$ e $\{\phi\}_i$ por $\{\psi_m\}_i$ obtém-se a resposta medida em função dos parâmetros modais nas m posições selecionadas,

$$\{R_m(\Omega)\} = [b_i + Y_i(\Omega)] \{\psi_m\}_i + \{q\}_i \quad (3.23)$$

Levando-se em conta a expressão de $Y_i(\Omega)$ da equação (2.84), as variáveis a serem identificadas na equação (3.23) são as seguintes:

- b_i - variável nodal que leva em conta o empenamento e a ovalização do rotor (complexo).
- u_i - momento de desbalanceamento modal (complexo).
- d_i - amortecimento modal (real).
- ω_i - frequência natural (real).

A massa modal m_i não precisa ser identificada se os vetores próprios $\{\phi\}_i$ forem normalizados de modo que m_i seja unitária.

A equação (3.23) não é adequada para ser utilizada no algoritmo de estimação por Mínimos Quadrados por ser uma equação vetorial. A utilização da norma de $\{R_m(\Omega)\}$ também é inconveniente pois pode aumentar o grau de não linearidade do sistema de equações resultante e/ou piorar o condicionamento numérico do sistema de equações.

Neste trabalho é utilizado o procedimento adotado por *GNIELKA* [10], o qual consiste em pré-multiplicar a equação (3.23) por $\{\psi_m\}_i^T / (\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i)$,

$$\frac{\{\psi_m\}_i^T \{R_m(\Omega)\}}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} = (b_i + Y_i(\Omega)) \frac{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} + \frac{\{\psi_m\}_i^T \{q\}_i}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} \quad (3.24)$$

Desta forma obtém-se uma única equação complexa para cada velocidade de rotação de medição Ω , independente do número de planos de medida sendo utilizado.

Definindo $H_i(\Omega)$ como ,

$$H_i(\Omega) = \frac{\{\psi_m\}_i^T \{R_m(\Omega)\}}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} \quad (3.25)$$

Chamando de R a contribuição do resíduo dado por

$$R = \frac{\{\psi_m\}_i^T \{q\}_i}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} \quad (3.26)$$

Substituindo-se as equações (3.25) e (3.26) na equação (3.24) obtém-se,

$$H_i(\Omega) = b_i + Y_i(\Omega) + R \quad (3.27)$$

Substituindo-se a equação (2.84) na equação (3.27), tem-se:

$$H_i = b_i + \frac{\Omega^2 u_i}{(\omega_i^2 m_i - \Omega^2 m_i + j \Omega d_i)} + R \quad (3.28)$$

Reescrevendo-se a equação (3.28), pode-se obter a seguinte forma,

$$j \Omega d_i (H_i - b_i) + k_i (H_i - b_i) - \Omega^2 u_i - \Omega^2 m_i (H_i - b_i) = erro \quad (3.29)$$

Como a equação (3.29) é complexa, pode-se separar as componentes reais e imaginárias em,

$$E^R = -\Omega H_i^I d_i + H_i^R k_i + (\Omega^2 m_i - k_i) b_i^R + \Omega d_i b_i^I - \Omega^2 u_i^R - \Omega^2 m_i H_i^R = 0 \quad (3.30)$$

$$E^I = \Omega H_i^R d_i + H_i^I k_i - \Omega d_i b_i^R + (\Omega^2 m_i - k_i) b_i^I - \Omega^2 u_i^I - \Omega^2 m_i H_i^I = 0 \quad (3.31)$$

Considerando-se p velocidades de rotação $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p)$, as equações (3.30) e (3.31) podem ser escritas matricialmente nas formas,

$$\{G\} = \{erro\} \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Omega_1 H_i^I d_i + H_i^R k_i + (\Omega_1^2 m_i - k_i) b_i^R + \Omega_1 d_i b_i^I - \Omega_1^2 u_i^R - \Omega_1^2 m_i H_i^R \\ \vdots \\ -\Omega_p H_i^I d_i + H_i^R k_i + (\Omega_p^2 m_i - k_i) b_i^R + \Omega_p d_i b_i^I - \Omega_p^2 u_i^R - \Omega_p^2 m_i H_i^R \\ \Omega_1 H_i^R d_i + H_i^I k_i - \Omega_1 d_i b_i^R + (\Omega_1^2 m_i - k_i) b_i^I - \Omega_1^2 u_i^I - \Omega_1^2 m_i H_i^I \\ \vdots \\ \Omega_p H_i^R d_i + H_i^I k_i - \Omega_p d_i b_i^R + (\Omega_p^2 m_i - k_i) b_i^I - \Omega_p^2 u_i^I - \Omega_p^2 m_i H_i^I \end{array} \right\} = \{ erro \} \quad (3.33)$$

ou

$$[A(x)] \{x\} = \{B\} + \{erro\} \quad (3.34)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -\Omega_1 H_i^I & H_i^R & (\Omega_1^2 m_i - k_i) & \Omega_1 d_i & -\Omega_1^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Omega_p H_i^I & H_i^R & (\Omega_p^2 m_i - k_i) & \Omega_p d_i & -\Omega_p^2 & 0 \\ \Omega_1 H_i^R & H_i^I & -\Omega_1 d_i & (\Omega_1^2 m_i - k_i) & 0 & -\Omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_p H_i^R & H_i^I & -\Omega_p d_i & (\Omega_p^2 m_i - k_i) & 0 & -\Omega_p^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d_i \\ k_i \\ b_i^R \\ b_i^I \\ u_i^R \\ u_i^I \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1^2 m_i H_i^R \\ \vdots \\ \Omega_p^2 m_i H_i^R \\ \Omega_1^2 m_i H_i^I \\ \vdots \\ \Omega_p^2 m_i H_i^I \end{array} \right\} + \{ erro \} \quad (3.35)$$

Neste sistema de equações (3.35) são desconhecidos o amortecimento modal d_i , a rigidez modal k_i , o desbalanceamento modal u_i e a variável modal b_i que leva em conta as irregularidades geométricas do rotor. Adicionalmente existem dois produtos de variáveis desconhecidas que são $b_i k_i$ e $b_i d_i$, ocorrendo portanto um sistema de equações não linear. Uma vez resolvido este sistema não linear, é obtido o desbalanceamento modal u_i , deve-se, então, calcular um vetor de massas $\{\Upsilon_i\}$ que deve balancear o modo i do sistema, de maneira que não afete outro modo j já balanceado.

Seja $[\Phi_c]_i$ uma matriz composta por vetores $\{\phi_c\}_i$, obtidos do modo $\{\Phi\}_i$, referentes aos n planos de balanceamento escolhidos,

$$[\Phi_c]_i = \begin{bmatrix} \phi_{c1}(x_1) & \phi_{c2}(x_1) & \dots & \phi_{cm}(x_1) \\ \phi_{c1}(x_2) & \phi_{c2}(x_2) & \dots & \phi_{cm}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{c1}(x_n) & \phi_{c2}(x_n) & \dots & \phi_{cm}(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde $\phi_{cm}(x_n)$ é a componente do modo m na posição x_n .

Chamando de $[T]$ a matriz $m \times n$ cujas colunas são formadas pelos vetores normalizados das massas de balanceamento modal e impondo-se a condição que torna o vetor de correção normalizado $\{t\}_i$ ortogonal a $\{\phi_c\}_j$ para $i \neq j$, faz-se com que o vetor de massa de correção para o modo i não afete outro modo diferente do modo i considerado na equação (3.36). Essa condição é escrita na forma,

$$[\Phi_c]^T [T] = -[I] \quad (3.37)$$

Para $m = n$, o vetor de massas de correção normalizado é então obtido, resolvendo o sistema da equação (3.37), ou através de algum processo de ortogonalização de $[\Phi_c]$.

As massas de correção que balanceiam o modo i podem então ser calculadas a partir do produto do desbalanceamento modal pelo vetor normalizado de massas de correção,

$$\{Y\}_i = (u_i^R + j u_i^I) \{t\}_i \quad (3.38)$$

3.3.3 Formulação matemática \hat{H}

Analisando-se a formulação matemática do método H [10], observa-se que foram feitas restrições acerca da faixa de velocidade de rotação onde são realizadas as medições. Esta faixa compreende velocidades que estejam próximas às velocidades críticas, de maneira que seja válida a equação (3.28), onde se considera que o resíduo $\{q\}_i$ seja pequeno.

Substituindo-se a equação (3.22) em (3.26) obtém-se,

$$R = \frac{\{\psi_m\}_i^T \{q\}_i}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} = \sum_{j=1}^N (b_j + Y_j(\Omega)) \frac{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_j}{\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_i} + erro \quad i \neq j \quad (3.39)$$

Observa-se que a equação (3.39) não se anula, porque normalmente não existe ortogonalidade entre os vetores $\{\psi_m\}_i$,

$$\{\psi_m\}_i^T \{\psi_m\}_j \neq 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (3.40)$$

Isto mostra que no cálculo da componente H_i na equação (3.25), quando estão sendo levados em consideração as componentes de todos os outros modos, o resíduo da equação

(3.39) começa a influir no método, para velocidades de rotação Ω afastadas da faixa da velocidade crítica, onde não existe mais a predominância de um modo na resposta $\{R(\Omega)\}_i$. Para que a equação (3.39) seja nula considerando-se um determinado modo define-se um estimador de mínimos quadrados em relação a $\{q\}_i$, de forma a obter uma nova componente $\{\hat{H}_i(\Omega)\}$ que leve em consideração apenas a contribuição do modo desejado. Observa-se na equação (3.37) que a matriz $[T]$ é formada por vetores $\{t\}_i$ onde:

$$\begin{cases} \{t\}_i^T \{\psi_m\}_j = 0 & \text{para } i \neq j \\ \{t\}_i^T \{\psi_m\}_j = 1 & \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.41)$$

Definindo-se $\hat{H}_i(\Omega)$ como,

$$\hat{H}_i(\Omega) = \frac{\{t\}_i^T \{R(\Omega)\}}{\{t\}_i^T \{\psi_m\}_i} \quad (3.42)$$

A contribuição R do resíduo na equação (3.39) é reescrita na forma,

$$R = \frac{\{t\}_i^T \{q\}_i}{\{t\}_i^T \{\psi_m\}_i} = \sum_{j=1}^N (b_j + Y_j(\Omega)) \frac{\{t\}_i^T \{\psi_m\}_j}{\{t\}_i^T \{\psi_m\}_i} + \text{erro} \quad i \neq j \quad (3.43)$$

A equação (3.43) mostra que no resíduo R não existem componentes dos modos $j = 1, 2, \dots, m$, para $i \neq j$, dos m modos que compuseram a matriz $[T]$, mas tão somente erros de medição e contribuição dos modos não considerados em $[T]$.

A utilização do vetor $\{t\}_i$ no lugar de $\{\psi_m\}_i$ tem por finalidade filtrar as componentes modais não desejadas, presentes nos sinais medidos $\{R_m(\Omega)\}$.

Se um número suficiente de planos de medidas for considerado, a matriz $[T]$ será formada levando-se em conta um número suficiente de modos, de maneira que torne possível realizar balanceamentos usando velocidades não tão próximas das velocidades críticas, ou ainda balanceamento em sistemas com alta densidade modal.

3.4 Identificação do desbalanceamento

3.4.1 Introdução

Na identificação do desbalanceamento do sistema, determinam-se os valores numéricos das constantes que ocorrem em sistemas de equações lineares ou não lineares, obtidos a partir do estimador dos mínimos quadrados.

O sistema de equações (3.9) do Método de Coeficientes de Influência foi implementado utilizando-se as relações matemáticas (3.19) e (3.20). Para se determinar os parâmetros desconhecidos da equação, escolheu-se o estimador dos mínimos quadrados em conjunção com a decomposição QR .

O sistema de equações(3.35) do Balanceamento Modal foi montado a partir das equações diferenciais do movimento, equação (2.28). Escolheu-se o estimador dos mínimos quadrados em conjunção com o Método Newton-Gauss e decomposição QR .

3.4.2 Implementação do Método dos Coeficientes de Influência

Para se resolver o sistema da equação (3.9), necessita-se saber quantos planos de medida e quantos planos de balanceamento foram escolhidos. Se o número de planos de balanceamento for igual ao número de planos de medida e se o determinante da matriz $[\alpha]$ for diferente de zero, opta-se pela resolução direta do sistema (3.9)

$$\{U\} = [\alpha]^{-1} \{V\} \quad (3.44)$$

Se o determinante do sistema for igual a zero, pode-se tentar modificar os planos de balanceamento, as direções de medida, ou eliminar planos de balanceamento, ou aumentar o número de medidas em diferentes velocidades de rotação.

Se na equação (3.9) o número de planos de medida for diferente do número de planos de balanceamento opta-se pelo estimador dos Mínimos Quadrados que permite resolver sistemas de equações super-determinados. Para descrever o método, vamos considerar um vetor U_j com $j = 1, \dots, 2m$, um conjunto de momentos de desbalanceamento qualquer. Seja também $\{V\}_R$ o vetor de amplitudes de vibrações. A relação (3.9) permite o cálculo das vibrações $\{V\}_{R0}$ através do desbalanceamento e dos coeficientes de influência. Observa-se que, em geral, as amplitudes de vibração medidas $\{V\}_R$ são diferentes das amplitudes de vibração calculadas $\{V\}_{R0}$. Uma relação de otimização é obtida pela comparação entre $\{V\}_{R0}$ e $\{V\}_R$. Esta comparação é feita pelo quadrado das diferenças das amplitudes e pode ser escrita para cada equação na forma,

$$\epsilon_i^2 = (V_{iR0} - V_{iR})^2 \quad (3.45)$$

onde:

- $\epsilon_i^2 =$ erro quadrático

Substituindo-se a equação (3.9) em (3.45) pode-se escrever,

$$\epsilon_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{2m} \alpha_{ij} U_j - V_{iR} \right)^2 \quad (3.46)$$

Definindo-se η como sendo o desvio quadrático global para todas as equações do sistema,

$$\eta = \sum_{i=1}^{2n} \epsilon_i^2 \quad (3.47)$$

Substituindo-se a equação (3.45) em (3.46) obtém-se η em função das amplitudes de vibração,

$$\eta = \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{j=1}^{2m} \alpha_{ij} U_j - V_{iR} \right)^2 \quad (3.48)$$

Colocando-se a equação (3.48) na forma matricial obtém-se,

$$\eta = ([\alpha]\{U\} - \{V\}_R)^T ([\alpha]\{U\} - \{V\}_R) \quad (3.49)$$

Da equação (3.49) obtém-se

$$\eta = \{U\}^T [\alpha]^T [\alpha] \{U\} - 2\{V\}_R^T [\alpha] \{U\} + \{V\}_R^T \{V\}_R \quad (3.50)$$

Como se deseja o mínimo de η , a condição necessária para a existência do mínimo é que,

$$\frac{\partial \eta}{\partial U_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2m \quad (3.51)$$

A condição suficiente para que o ponto estacionário definido pela equação (3.51) seja efetivamente um mínimo é que exista uma função η que seja positivo-definida.

Substituindo-se a equação (3.50) em (3.51), obtém-se,

$$\{V\} = \{[\alpha]^T [\alpha]\}^{-1} [\alpha] \{V\}_R \quad (3.52)$$

3.4.3 Implementação do método de Balanceamento Modal

3.4.3.a) Algoritmo

No balanceamento modal, o sistema da equação (3.35) constitui-se num sistema de equações não lineares determinado ou super-determinado para $p \geq 3$. Optou-se pela aplicação do estimador de mínimos quadrados, em conjunção com o método iterativo de Newton-Gauss, resultando no seguinte algoritmo [20],

$$\{\alpha\}^{i+1} = \{\alpha\}^i + \{Dx\}^i \quad (3.53)$$

onde $\{Dx\}^i$ é o incremento obtido da solução,

$$[J]^i \{Dx\}^i = \{C\}^i \quad (3.54)$$

e $[J]^i$ é a matriz jacobiana dada por,

$$[J]^i = \left\{ \frac{\partial \{G\}^i}{\partial \alpha_i} \right\} \quad (3.55)$$

e $\{\alpha\}^i$ são os parâmetros do sistema na forma,

$$\{\alpha\}^i = \begin{Bmatrix} d_i \\ k_i \\ b_i^R \\ b_i^I \\ u_i^R \\ u_i^I \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

e $\{C\}^i$ é obtido da equação,

$$\{C\}^i = \{B\} - [A]^i \{\alpha\}^i \quad (3.57)$$

Se o número de velocidades p for igual a 3 o sistema pode ser resolvido diretamente,

$$\{Dx\}^i = ([J]^i)^{-1} \{C\}^i \quad (3.58)$$

Se o número de velocidades p for maior que 3 o sistema pode ser resolvido aplicando-se o estimador dos mínimos quadrados,

$$\{Dx\}^i = ([J]^{iT} [J]^i)^{-1} [J]^{iT} \{C\}^i \quad (3.59)$$

Este método para a resolução da equação (3.54) não se comportou estavelmente em termos numéricos, flutuando em torno do valor esperado.

Para uma melhor estabilidade numérica, utiliza-se a decomposição QR da matriz $[J]^i$ através do método de ortogonalização de Gram-Schmidt ou diretamente através da transformação de Householder [12],

$$[J]^i = [Q]^i [S]^i \quad (3.60)$$

onde:

- $[Q]^i$ - matriz ortogonal
- $[S]^i$ - matriz triangular superior

Substituindo-se a equação (3.60) em (3.59), obtém-se,

$$\{Dx\}^i = ([S]^{iT} [Q]^{iT} [Q]^i [S]^i)^{-1} [S]^{iT} [Q]^{iT} \{C\}^i \quad (3.61)$$

Da equação (3.61), obtém-se,

$$\{Dx\}^i = ([S]^i)^{-1} [Q]^{iT} \{C\}^i \quad (3.62)$$

A resolução através da equação (3.62) é portanto equivalente à resolução obtida através da equação (3.59).

O algoritmo dado pela equação (3.53) pode ser escrito na forma

$$\{\alpha\}^{i+1} = \{\alpha\}^i + ([S]^i)^{-1} [Q]^{iT} \{C\}^i \quad (3.63)$$

obtendo-se, desta forma, um algoritmo numericamente mais estável.

Escolha do Valor Inicial e do Critério de Convergência

Devido ao fato do sistema de equações (3.35) ser não linear sabe-se que a convergência do método de resolução iterativo de Newton-Gauss depende muito do valor inicial $\{\alpha\}$ adotado, equação (3.56). Dependendo desses valores iniciais, o algoritmo pode ou não convergir para o resultado esperado. Nota-se na equação (3.35) que a não linearidade do sistema é ocasionada pelas variáveis b_i^R e b_i^I , correspondentes às irregularidades geométricas do rotor.

Para estimar um valor aproximado $\{\alpha\}$, optou-se pela resolução do sistema (3.35) sem se considerar as variáveis b_i^R e b_i^I , reduzindo portanto o número de incógnitas do sistema para quatro, obtendo-se um sistema linear conforme mostra a equação (3.64),

$$\begin{bmatrix} -\Omega_1 H_i^I & H_i^R & -\Omega_1^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Omega_p H_i^I & H_i^R & -\Omega_p^2 & 0 \\ \Omega_1 H_i^R & H_i^I & 0 & -\Omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_p H_i^R & H_i^I & 0 & -\Omega_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ k_i \\ u_i^R \\ u_i^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_1^2 m_i H_i^R \\ \vdots \\ \Omega_p^2 m_i H_i^R \\ \Omega_1^2 m_i H_i^I \\ \vdots \\ \Omega_p^2 m_i H_i^I \end{Bmatrix} + \{ \text{erro} \} \quad (3.64)$$

O critério de convergência adotado para o algoritmo Newton-Gauss foi baseado na satisfação da equação de mínimos quadrados (3.59). Este critério consiste em calcular e verificar o valor da norma do vetor $\{Dx\}^i$. Quando a norma do vetor $\{Dx\}^i$ tende a zero observa-se da equação (3.58), que a norma de $\{C\}^i$ também tende para zero ou da equação (3.59) que a norma de $[J]^{iT} \{C\}^i$ tende para zero.

Capítulo 4

Simulação do Balanceamento de Rotores Flexíveis

4.1 Introdução

Para se estudar e validar programas e métodos de Balanceamento, foram implantados, em um computador do tipo *IBM – PC*, programas de simulação de Balanceamento de sistemas flexíveis, utilizando-se as formulações matemáticas apresentadas nos Capítulos 2 e 3.

Após a validação dos programas, várias simulações foram feitas para se comparar os métodos, para se estudar a influência do número de planos de medida, a influência do número de planos de balanceamento, a influência do número de medidas em diferentes velocidades de rotação e ainda para testar um Método Modal Modificado, onde é utilizada uma técnica de Filtragem Modal.

4.2 Sistema de Referência

Um sistema de referência fixo ao rotor se faz necessário na simulação teórica para definir o posicionamento angular das massas testes, no caso específico do método dos Coeficientes de Influência, e posteriormente a posição angular das massas de correção para os métodos de balanceamento implementados.

Em se tratando do método de Coeficientes de Influência, e em um balanceamento real em campo pode-se ou não definir um sistema de coordenadas inicialmente fixo ao rotor, dependendo da programação do método este sistema relativo poderá estar sendo levado em consideração ou não. Isto porque a posição angular das massas de correção calculadas estão relacionadas, na formulação matemática, com um sistema de referência relativo definido a partir da posição da massa teste.

Para uma maior facilidade de manipulação e funcionamento de um único programa

de balanceamento com um sistema de referência que funcione tanto para um programa de simulação como para um balanceamento real em campo, optou-se por um sistema de referência inicialmente fixo ao rotor, de modo que os programas de balanceamento que foram desenvolvidos, já estão preparados para se levar em conta este sistema de referência. Logo, a posição angular tanto da massa teste como das massas de correção estará relacionada com este sistema de referência inicialmente definido.

4.3 Introdução à Simulação dos Métodos de Balanceamento

Para simular os Métodos de Balanceamento é necessário conhecer quais são os parâmetros de entrada para cada método. Alguns dos parâmetros de entrada são os m deslocamentos nodais generalizados selecionados para uma velocidade $\{R_m(\Omega)\}$, equação (3.23). Como $\{R_m(\Omega)\}$ é um vetor girante em relação ao referencial escolhido, ele é um vetor complexo e por isto ele pode representar *Amplitude* e *Fase* de cada deslocamento nodal. O vetor $\{R_m(\Omega)\}$ é montado a partir de deslocamentos nodais generalizados para uma velocidade Ω e posições genéricas $x \{r(x, \Omega)\}$ do sistema discretizado. Os deslocamentos nodais $\{r(\Omega)\}$ foram obtidos através da equação (2.15) utilizando a transformação de coordenadas de deslocamentos físicos $\{r\}$ para deslocamentos modais $\{y\}$, equação (2.80), e os deslocamentos modais $\{y\}$ foram obtidos da resolução das equações diferenciais independentes, equação (2.28) no domínio da frequência, opção esta escolhida devido ao menor custo computacional na obtenção de $\{r(\Omega)\}$, equação (2.89). Alguns resultados foram obtidos utilizando a simulação no domínio do tempo e resolvendo a equação (2.28) pela integral de convolução,[11]. Como a equação (2.28) depende das forças de excitação, se variarmos estas forças, variamos os deslocamentos nodais $\{r(\Omega)\}$. Como no caso da simulação do Método dos Coeficientes de Influência, é necessário a utilização de massas testes, primeiramente é necessário calcular $\{r(\Omega)\}$ para as forças de desbalanceamentos iniciais e depois adicionar a massa teste em cada plano de balanceamento e recalculá-los $\{r(\Omega)\}$ respectivamente. No caso do Método Balanceamento Modal só é necessário calcular $\{r(\Omega)\}$ para as forças de desbalanceamentos iniciais.

Dependendo do método de balanceamento, este pode necessitar de outros parâmetros de entrada como distribuição de massa do sistema, autovetores, etc.

Nota-se que se o sistema discretizado utilizado em cada método de balanceamento for o mesmo, mas com forças de excitação diferentes, as curvas de resposta ao desbalanceamento em frequência serão diferentes. Por isso na simulação de cada método de balanceamento, foram calculadas as respostas ao desbalanceamento em frequência, antes e após o balanceamento. Estas duas curvas serão sempre mostradas superpostas num mesmo gráfico. Os resultados dos cálculos serão mostrados nas curvas de resposta ao desbalanceamento antes e depois de efetuado o balanceamento e para que se tenha uma idéia da sensibilidade numérica, mostra-se também alguns resultados em forma de

tabelas para algumas velocidades de balanceamento.

Para uma avaliação do método em várias faixas de velocidade, afastados e próximos das frequências naturais, simulou-se vários balanceamentos em várias velocidades e estes resultados são mostrados num único gráfico onde a abcissa correspondente á velocidade ou á média das velocidades escolhidas para o balanceamento, e a ordenada ao resultado obtido na simulação do método (desbalanceamento, fase do desbalanceamento, empenamento, fase do empenamento, rigidez e amortecimento).

Nestes graficos foram utilizadas as seguintes nomenclaturas:

- Desbalanceamento Modal = $DESB_i$
- Empenamento Modal = BOW_i
- Rigidez Modal = K_i
- Amortecimento Modal = C_i
- i = número do modo
- Metodo H = $FI * R$
- Metodo \hat{H} = $T * R$
- Grau de liberdade utilizado = VAR

Algumas das simulações foram feitas para se testar a influência das irregularidades geométricas do sistema, empenamento, no método de balanceamento. Para estes casos o empenamento introduzido nas simulações é calculado de modo a ser um empenamento formado por componentes modais, equação (2.88).

4.4 Simulação do Método de Balanceamento por Coeficientes de Influência

Na simulação do Balanceamento por Coeficientes de Influência, foi considerado um Modelo Matemático-M1 correspondente à discretização mostrada na figura (4.1), [11].

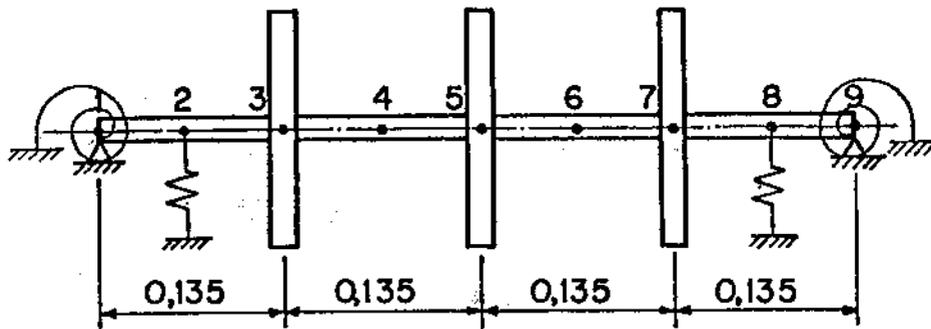


Figura 4.1: Modelo matemático discreto-M1

onde:

$$Eixo = \begin{cases} \text{Área} & - & 1,227E - 04 & (m^2) \\ IZ & - & 1,198E - 09 & (m^4) \\ E & - & 2,067E + 11 & (N/m^2) \\ \rho & - & 7.800 & (Kg/m^3) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$Disco = \begin{cases} \text{Massa} & - & 1,929 & (Kg) \\ \text{Mom. Iner.} & - & 2,713E - 03 & (m^4) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$Molas = \begin{cases} KY & - & 0 & (N/m) \\ KOZ & - & 0 & (N/m) \end{cases} \quad (4.3)$$

As frequências naturais deste modelo matemático M1 são mostradas na tabela (4.1).

Modos	1	2	3	4	5
Freq. [rad/s]	134,81	519,07	1083,67	1770,77	2312,44

Tabela 4.1: Frequências naturais do modelo matemático-M1

Na simulação em deslocamento do comportamento dinâmico do sistema com velocidade de rotação constante foi considerada uma razão de amortecimento de 5% para todos os modos, escolha adotada devido as análises modais experimentais realizadas, e momentos de desbalanceamento \vec{U}_p discretizados em cada um dos rotores, colocados a uma posição angular φ_p conforme a tabela (4.2).

Planos desb. p	3	5	7
Desb. U_p (Kg.m)	1,125E-03	1,125E-03	1,125E-03
Posição φ_p (graus)	0	120	240

Tabela 4.2: Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M1

Considerando-se estes Momentos de Desbalanceamento da tabela (4.2), obteve-se a simulação da resposta ao desbalanceamento em frequência (*RESPD*) para todos os graus de liberdade do sistema (*VAR*), sejam deflexões ou rotações, para a faixa de velocidade onde deseja-se fazer a simulação do balanceamento pelo Método dos Coeficientes de Influência.

Para observar o comportamento do método, várias simulações foram feitas. Foram utilizados em todas as simulações, momentos de desbalanceamento testes iguais a $1,125E-03$ (Kg.m) colocados em cada um dos planos de balanceamento a um ângulo de 90° , anti-horário em relação ao sistema de referência fixo no rotor. A faixa de velocidade escolhida foi entre 0 e 1500 (rad/s).

Algumas curvas das respostas ao desbalanceamento em frequência dos deslocamentos de alguns pontos do sistema discretizado são mostradas nas figuras (4.2), (4.3) e (4.4).

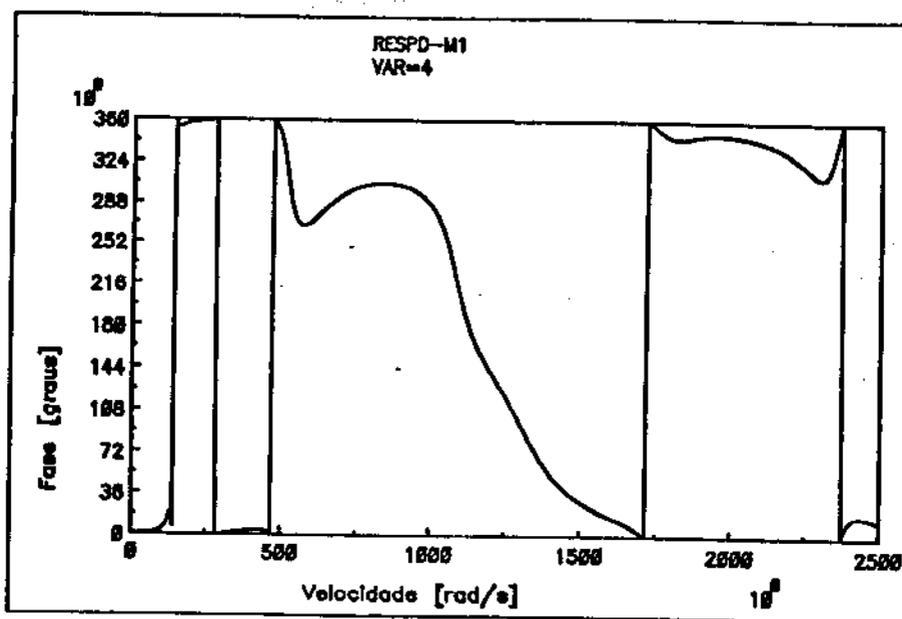
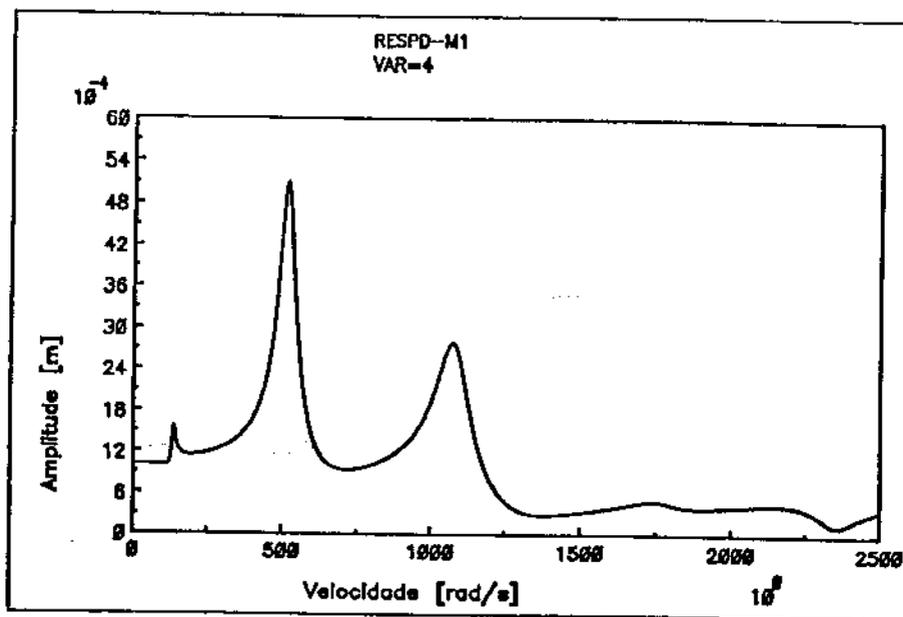


Figura 4.2: Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-M1

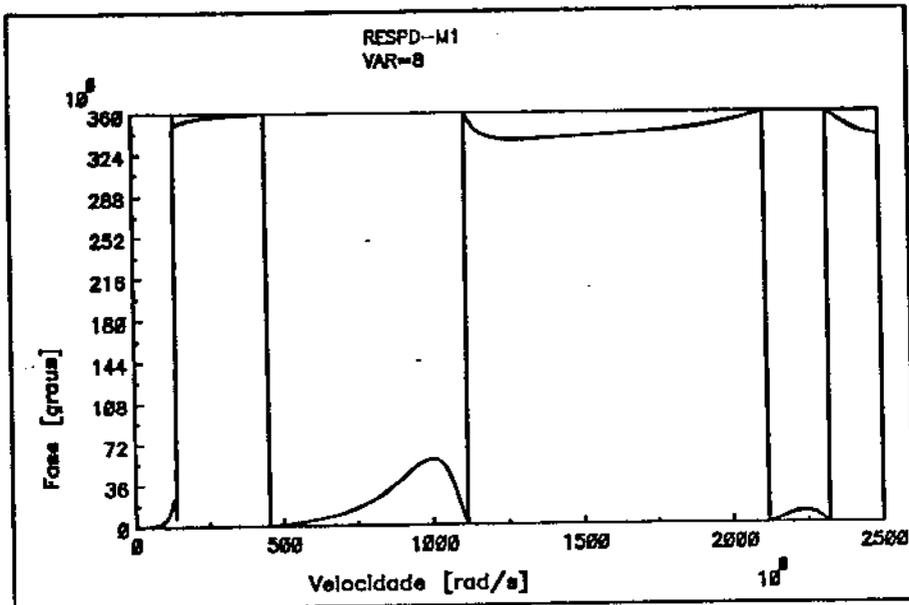
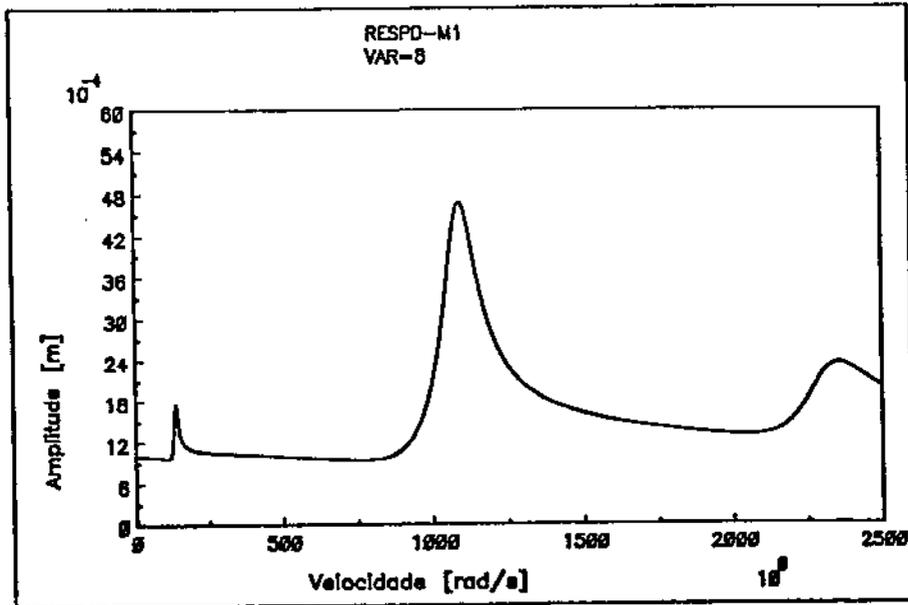


Figura 4.3: Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-M1

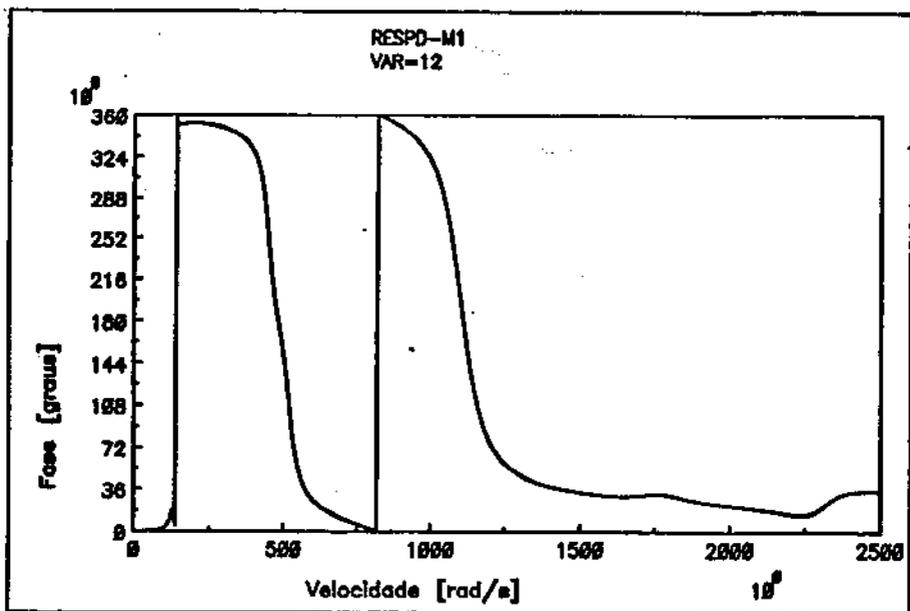
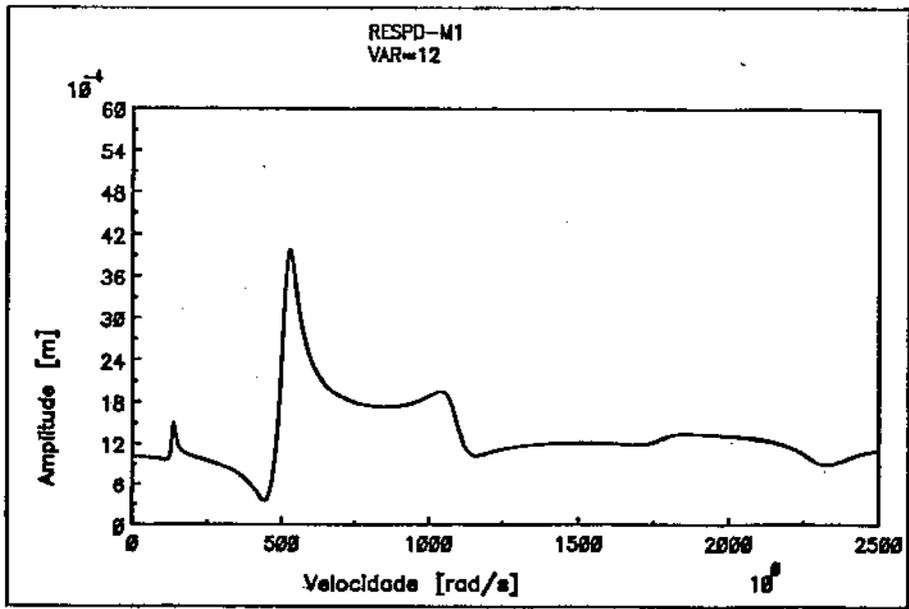


Figura 4.4: Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-M1

4.4.1 Simulação 1

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.3). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,125E-03	1,125E-03	1,125E-03
Posição φ_p (graus)	180,01	300,01	60,002

Tabela 4.3: Momentos de Balanceamento Identificados-S1

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois o resultado obtido pelo método foi praticamente exato.

4.4.2 Simulação 2

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 2, 4, 6 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.4). Observa-se que neste caso, os planos de medida não coincidem com os planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,125E-03	1,1249E-03	1,125E-03
Posição φ_p (graus)	180,01	300,01	59,999

Tabela 4.4: Momentos de Balanceamento Identificados-S2

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois o resultado obtido pelo método foi praticamente exato.

4.4.3 Simulação 3

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.5) e nos gráficos (4.5), (4.6), (4.7). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,0040E-03	0	0,99948E-03
Posição φ_p (graus)	223,43	0	16,519

Tabela 4.5: Momentos de Balanceamento Identificados-S3

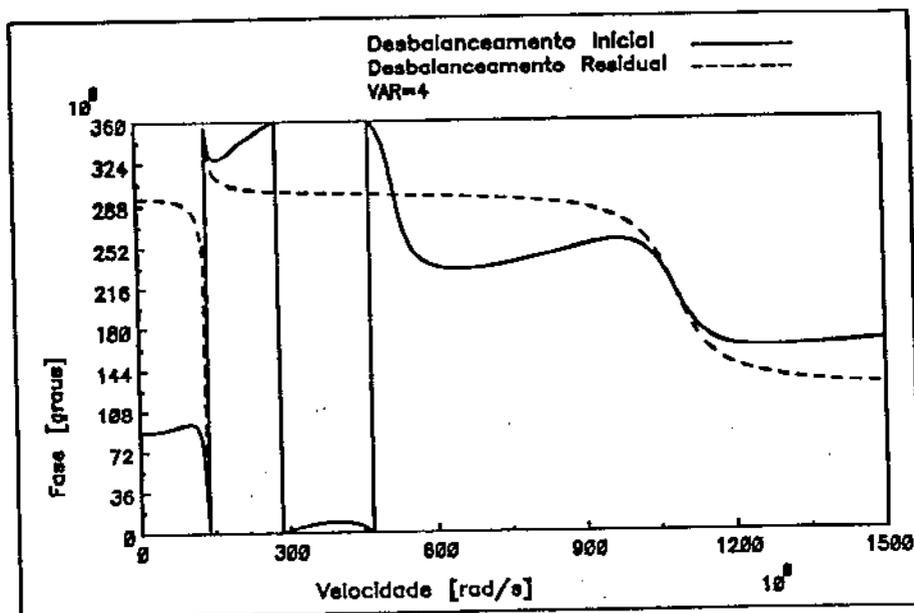
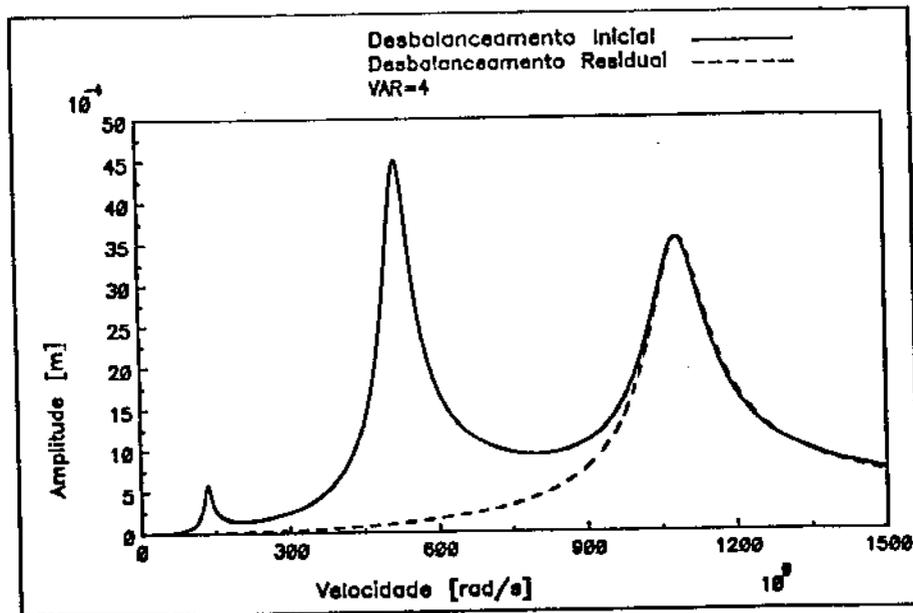


Figura 4.5: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S3

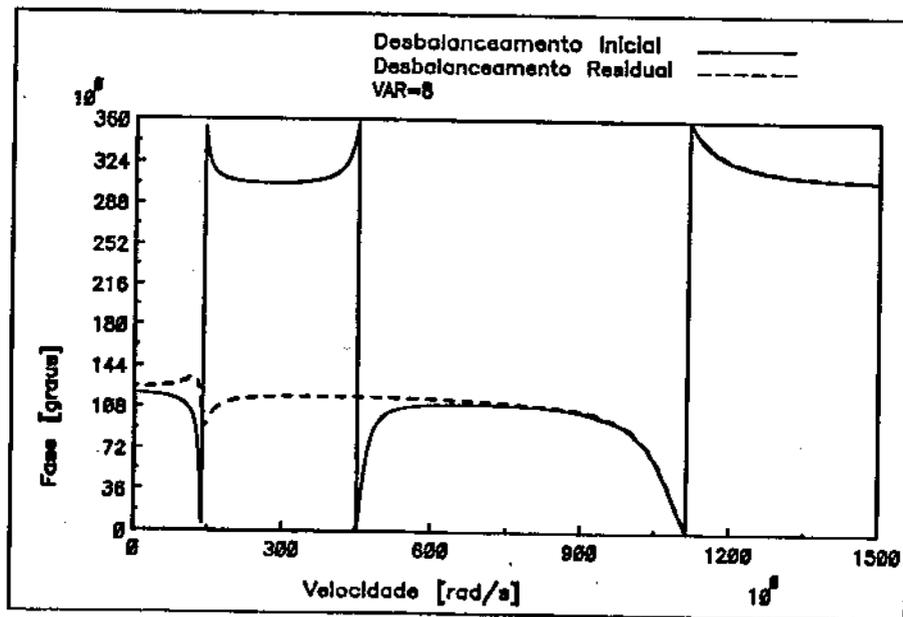
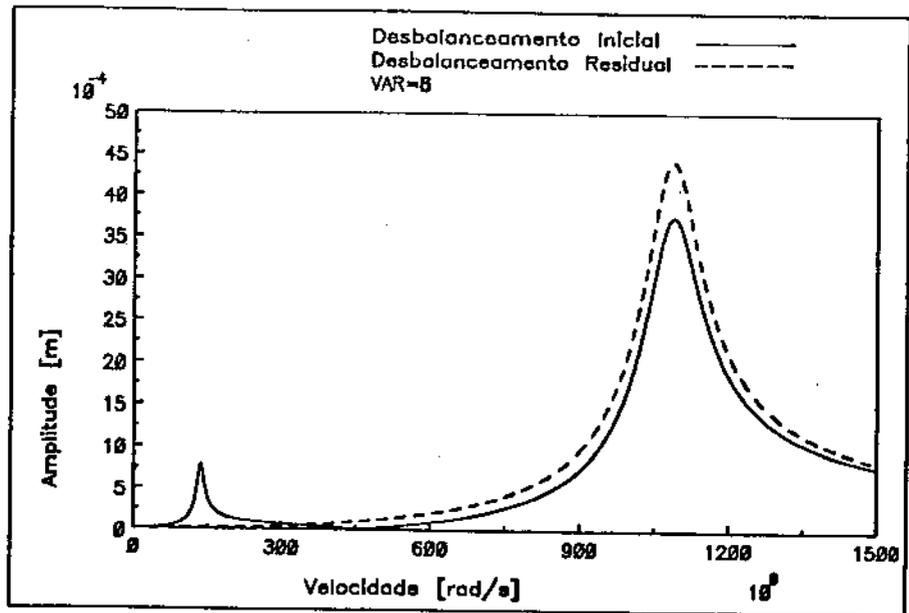


Figura 4.6: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S3

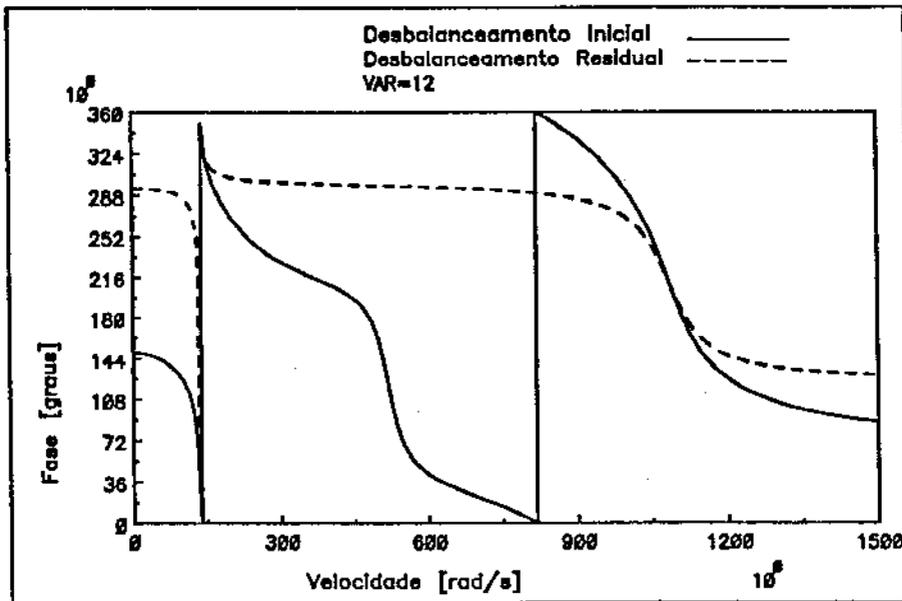
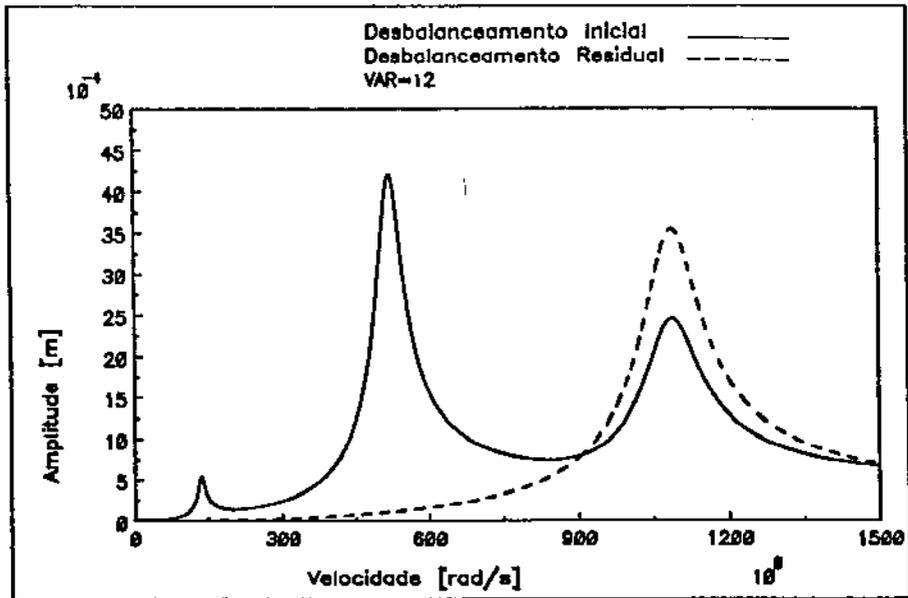


Figura 4.7: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S3

4.4.4 Simulação 4

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3,7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e 510 (*rad/s*), e os planos de balanceamento escolhidos foram 3,7. O resultado é apresentado na tabela (4.6). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em duas velocidades de rotação próximas às duas primeiras velocidades críticas do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,0055E-03	0	0,99999E-03
Posição φ_p (graus)	223,65	0	162,82

Tabela 4.6: Momentos de Balanceamento Identificados-S4

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 3.

4.4.5 Simulação 5

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3,5,7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3,7. O resultado é apresentado na tabela (4.7). Observa-se que neste caso que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,0021E-03	0	1,0019E-03
Posição φ_p (graus)	223,51	0	16,494

Tabela 4.7: Momentos de Balanceamento Identificados-S5

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 3.

4.4.6 Simulação 6

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5. O resultado é apresentado na tabela (4.8) e nos gráficos (4.8), (4.9), (4.10). Observa-se que neste caso que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,7903E-03	1,3232E-03	0
Posição φ_p (graus)	207,04	12,593	0

Tabela 4.8: Momentos de Balanceamento Identificados-S6

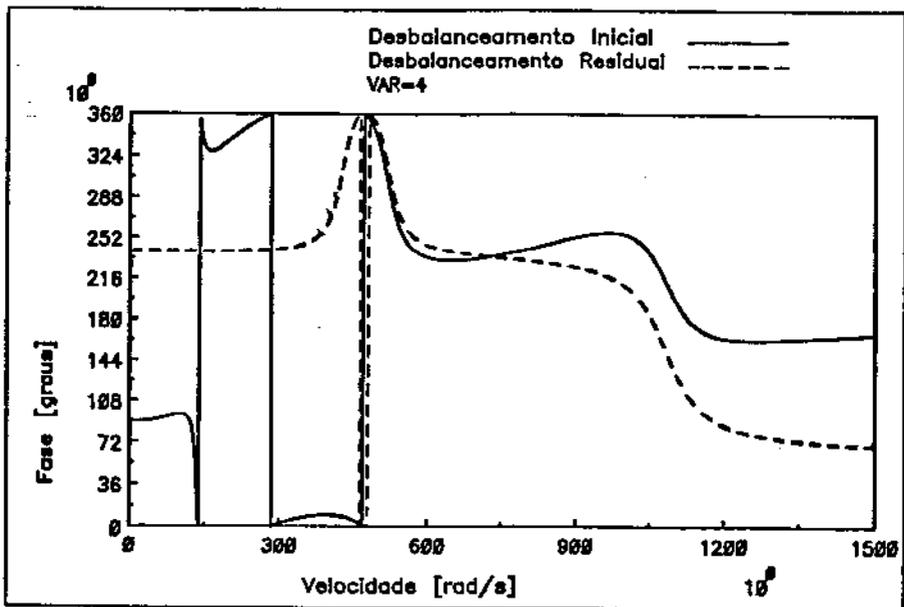
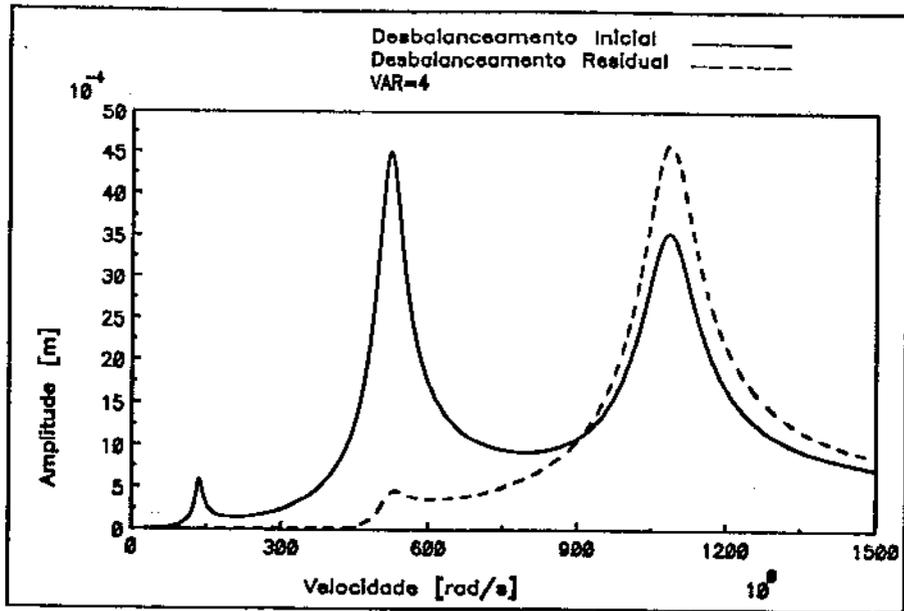


Figura 4.8: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S6

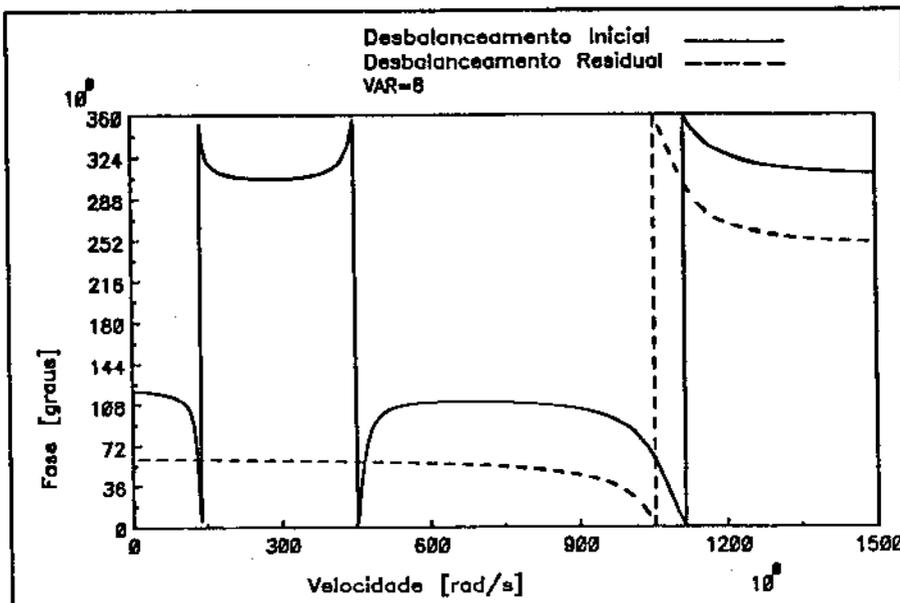
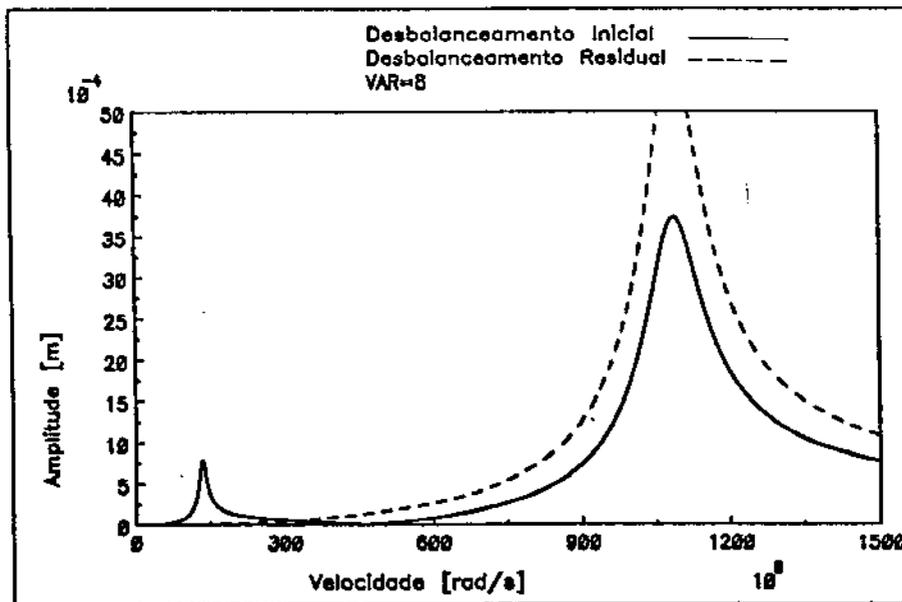


Figura 4.9: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S6

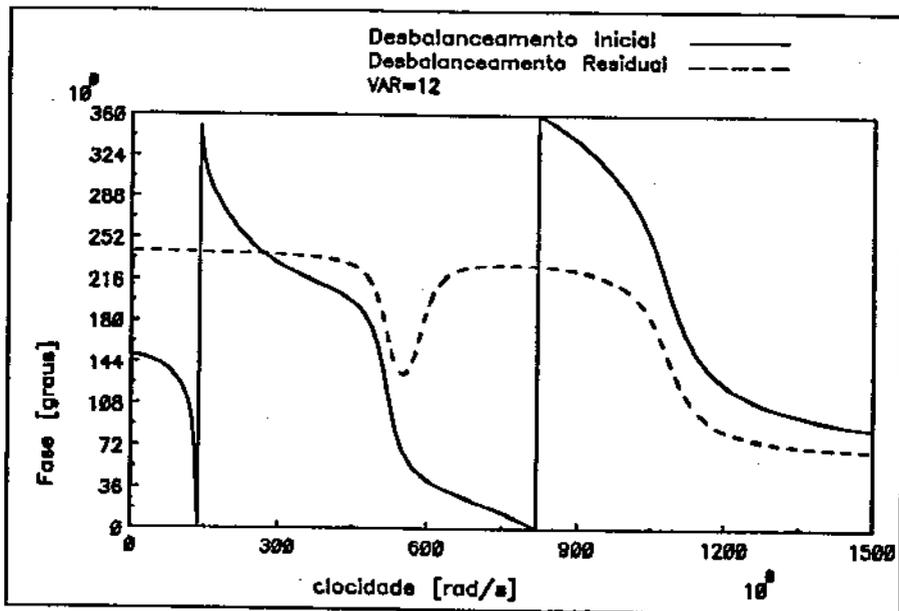
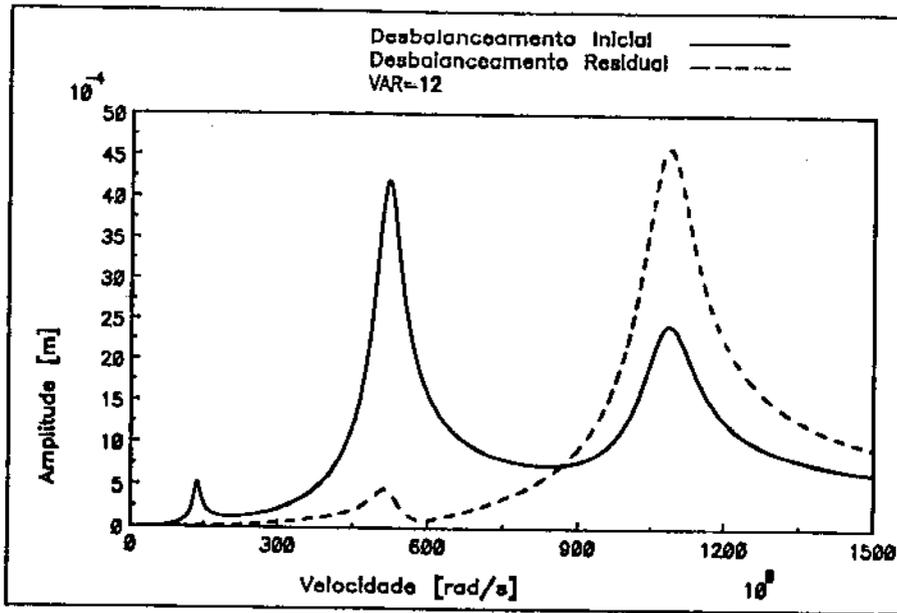


Figura 4.10: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S6

4.4.7 Simulação 7

Simulou-se um balanceamento onde os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e o plano de balanceamento escolhido foi 3. O resultado é apresentado na tabela (4.9) e nos gráficos (4.11), (4.12), (4.13). Observa-se que neste caso, existe apenas um plano de balanceamento, que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	0,46792E-03	0	0
Posição φ_p (graus)	299,96	0	0

Tabela 4.9: Momentos de Balanceamento Identificados-S7

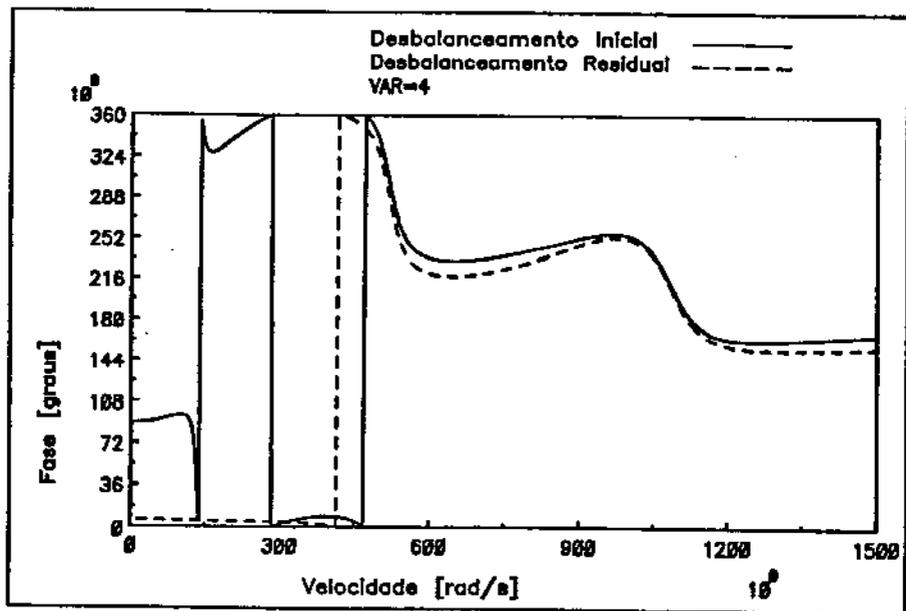
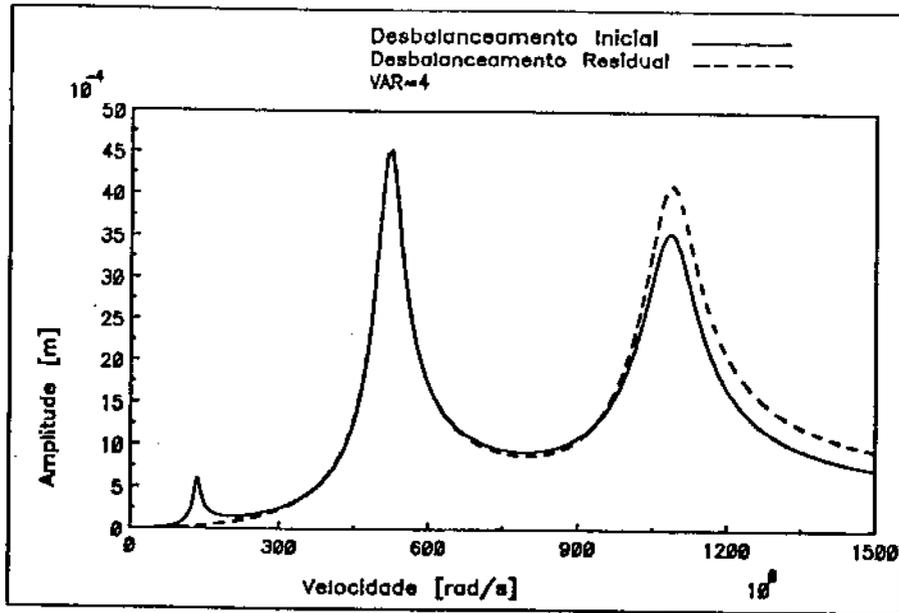


Figura 4.11: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S7

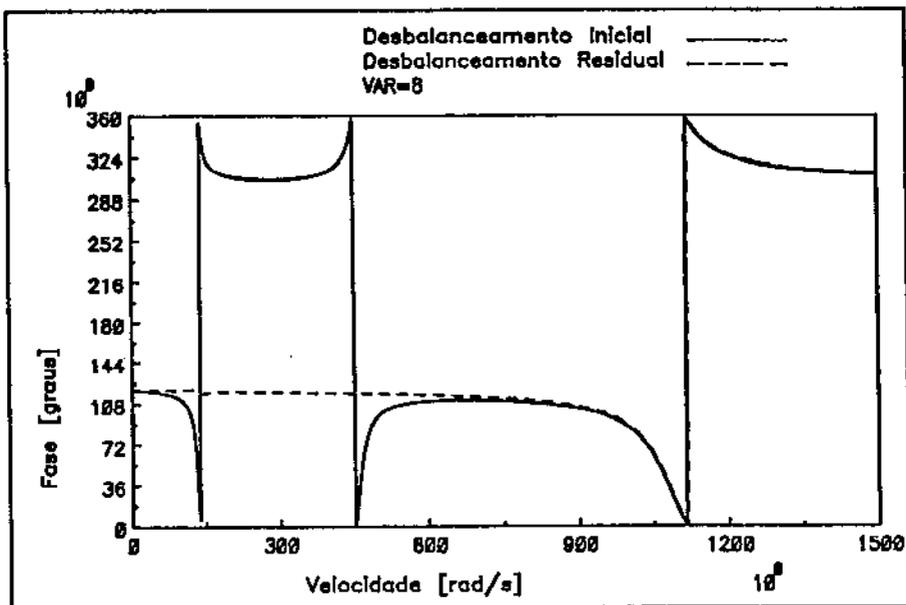
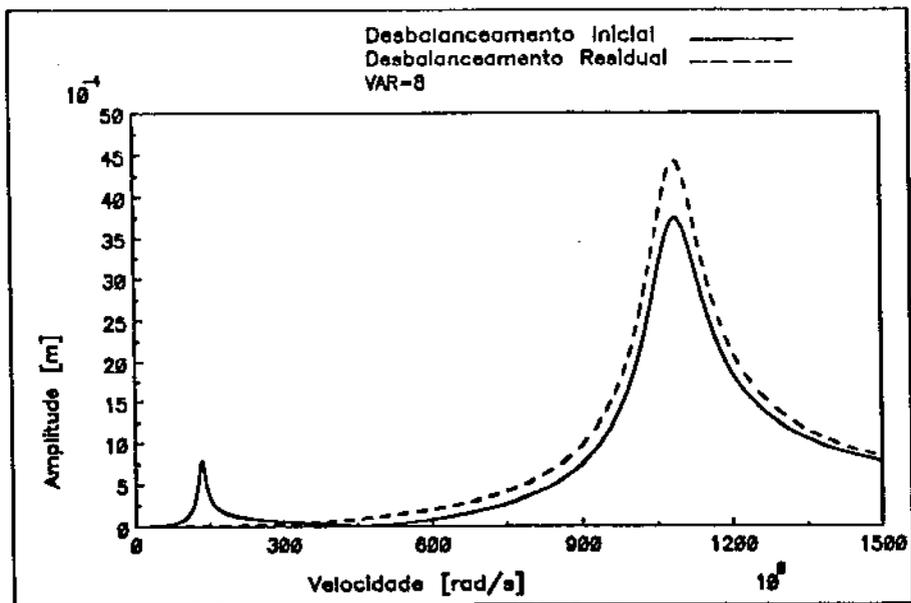


Figura 4.12: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S7

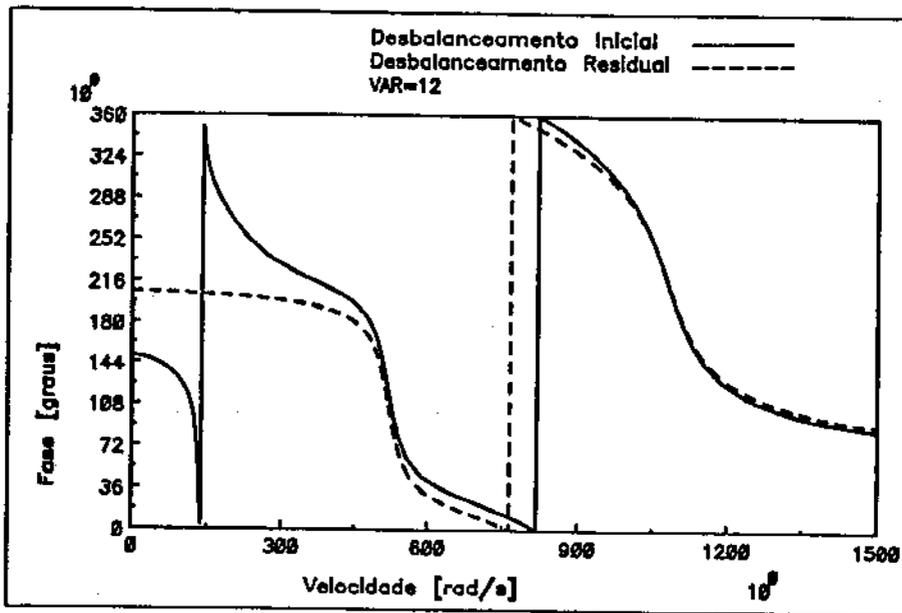
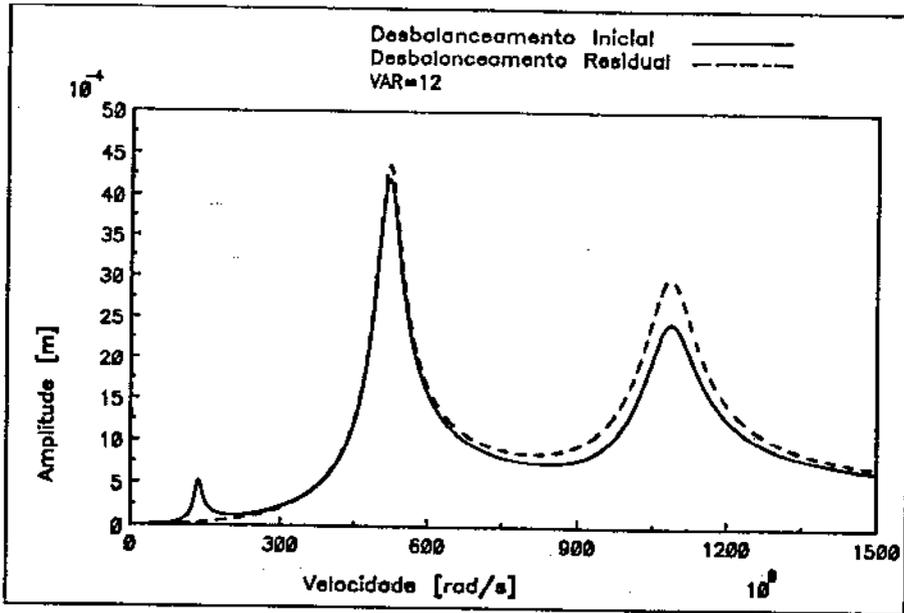


Figura 4.13: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S7

4.4.8 Simulação 8

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1^o modo de 1E-03 (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.10) e nos gráficos (4.14), (4.15), (4.16). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,1570E-03	1,2005E-03	1,0489E-03
Posição φ_p (graus)	183,51	295,48	59,483

Tabela 4.10: Momentos de Balanceamento Identificados-S8

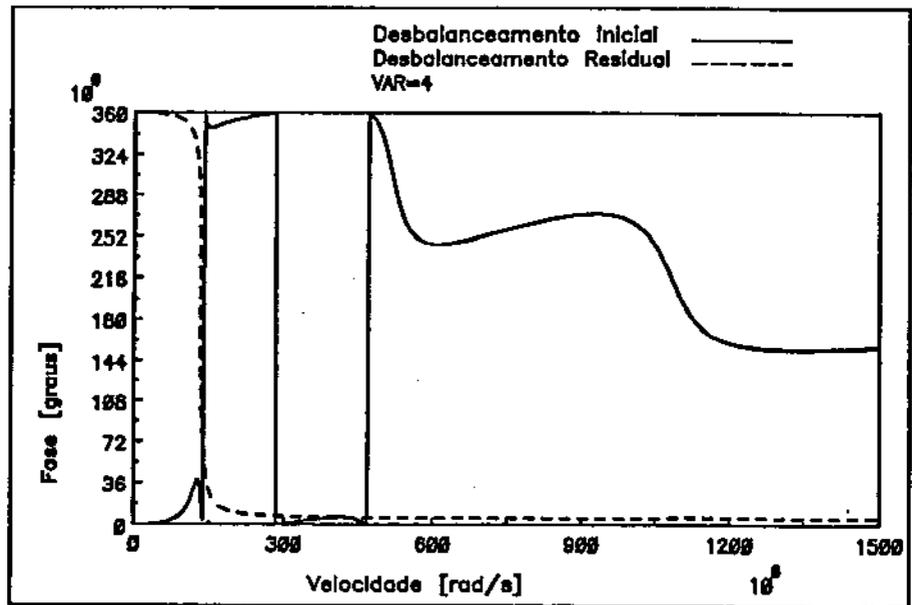
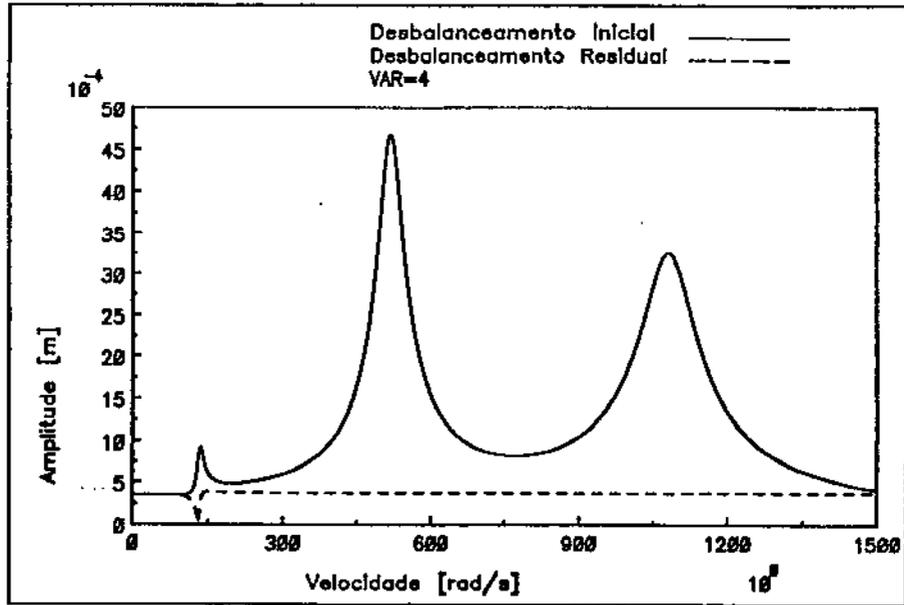


Figura 4.14: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S8

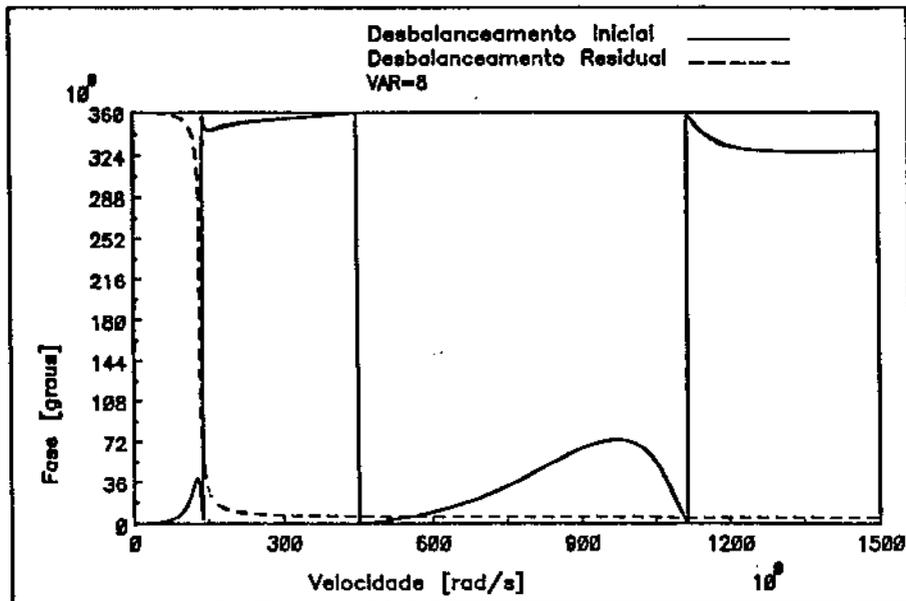
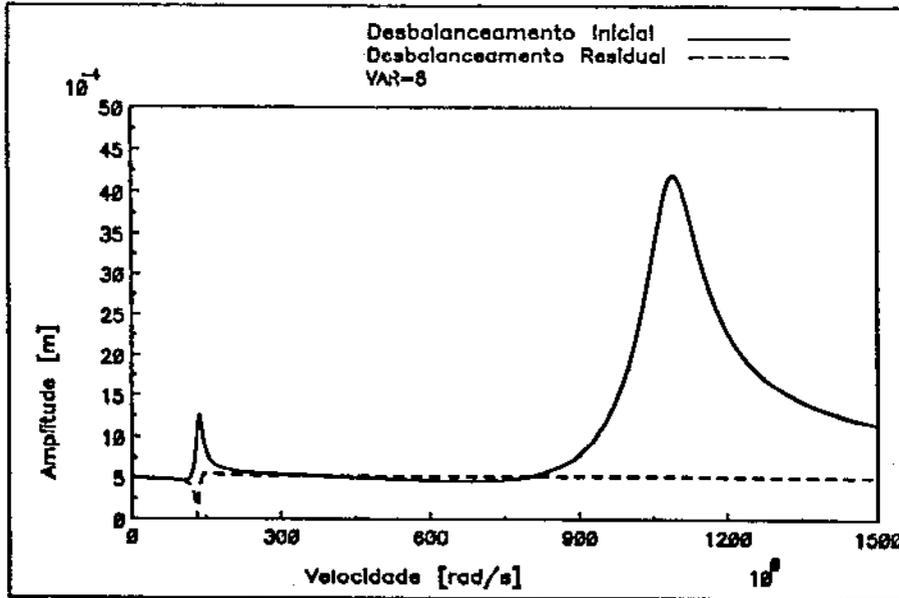


Figura 4.15: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S8

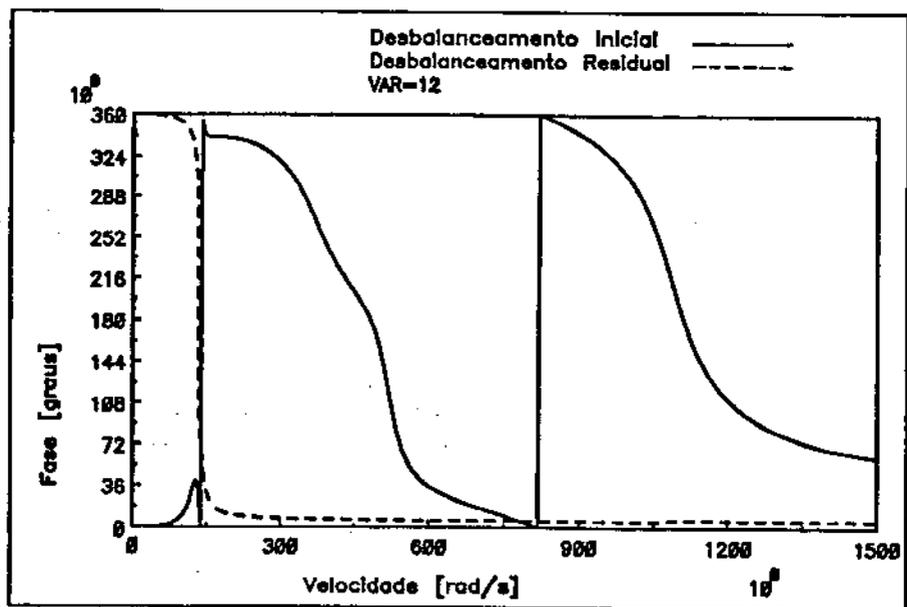
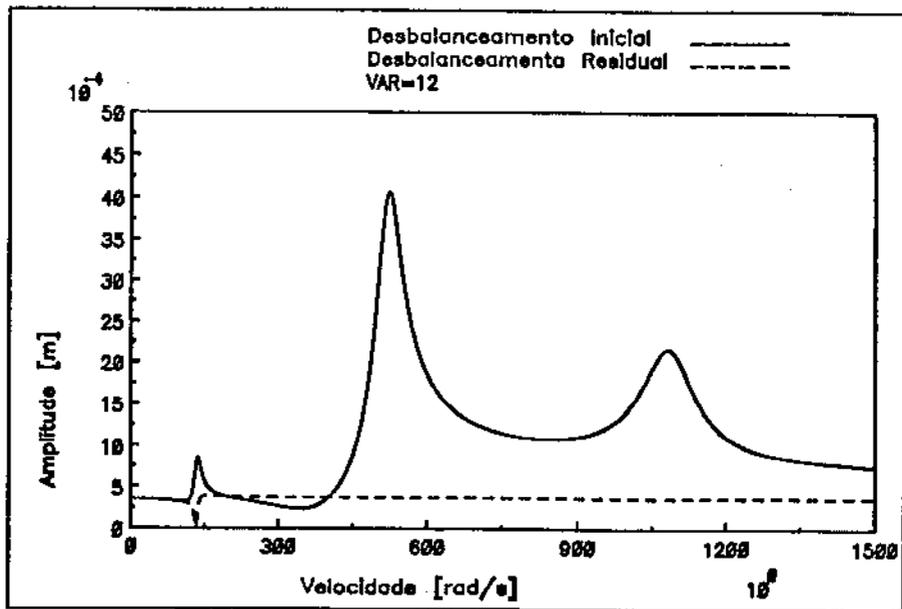


Figura 4.16: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S8

4.4.9 Simulação 9

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1º modo de $1E-03$ (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3,7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3,7. O resultado é apresentado na tabela (4.11) e nos gráficos (4.17), (4.18), (4.19). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,1532E-03	0	0,90576E-03
Posição φ_p (graus)	226,63	0	8,6441

Tabela 4.11: Momentos de Balanceamento Identificados-S9

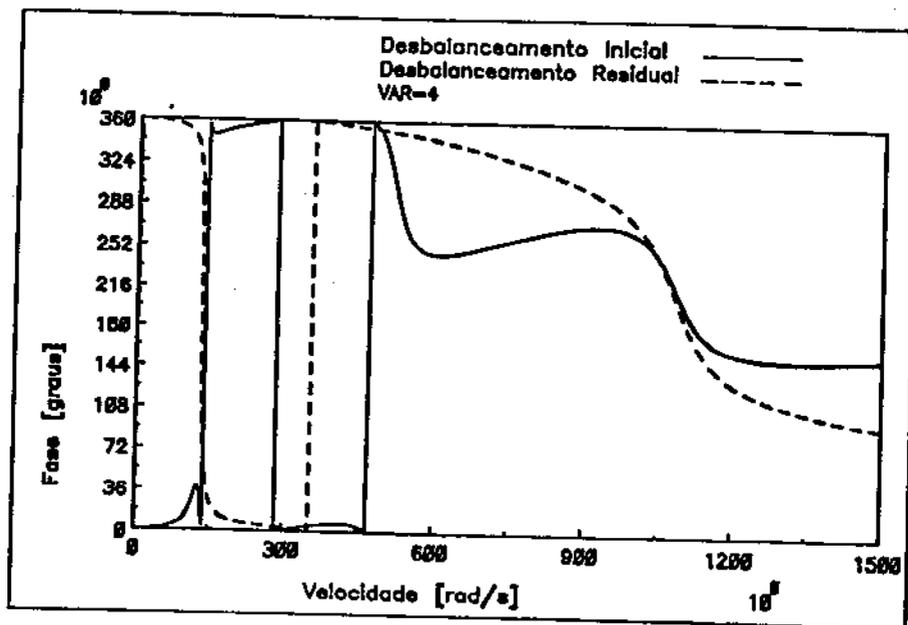
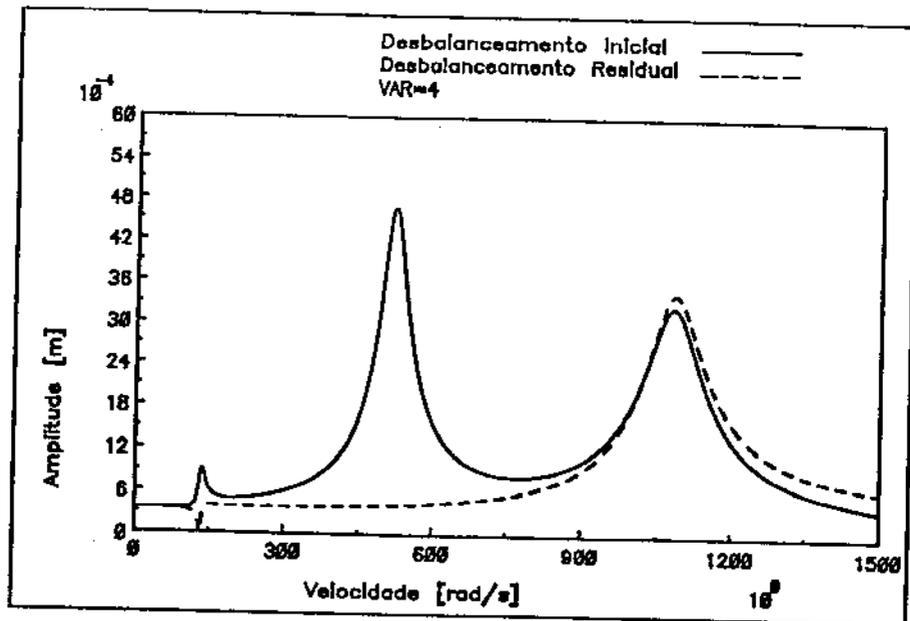


Figura 4.17: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S9

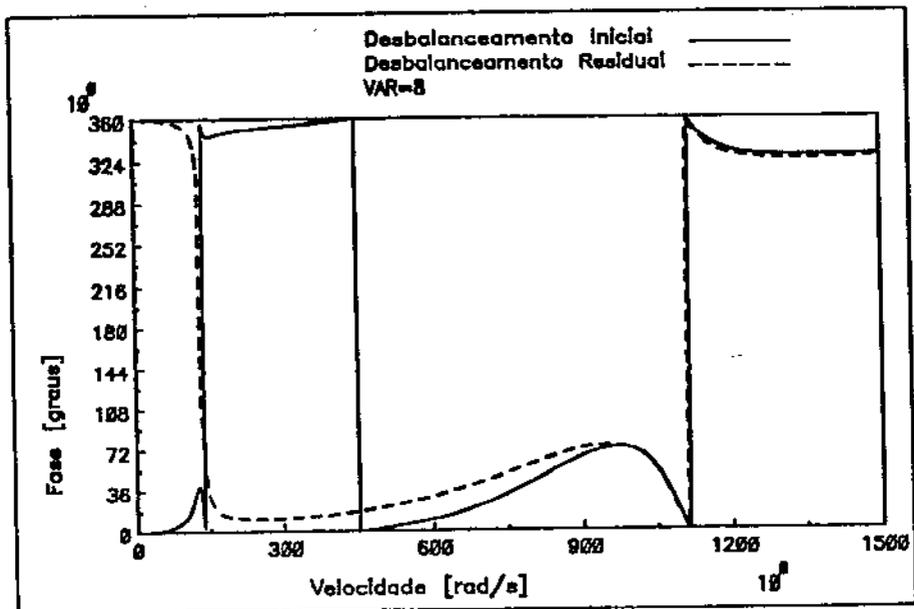
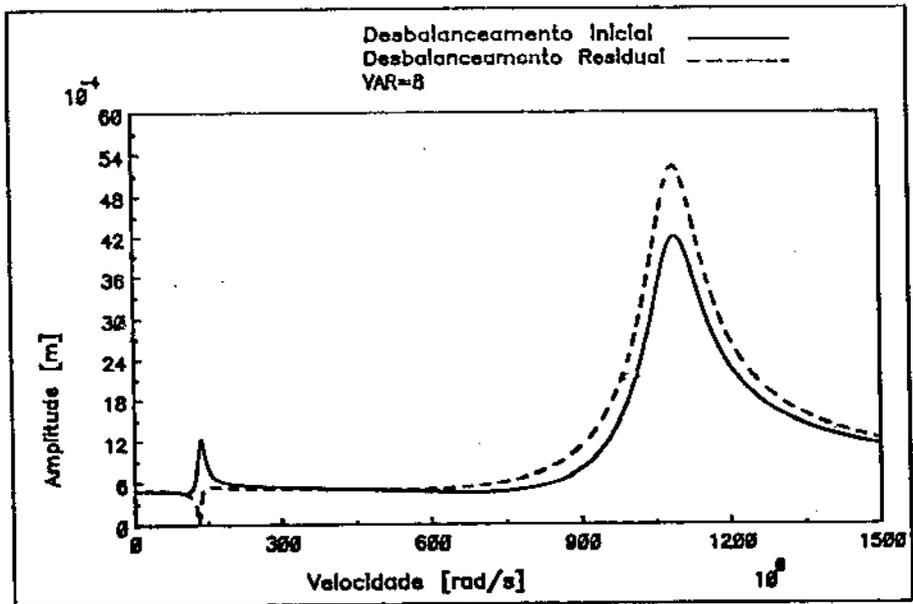


Figura 4.18: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S9

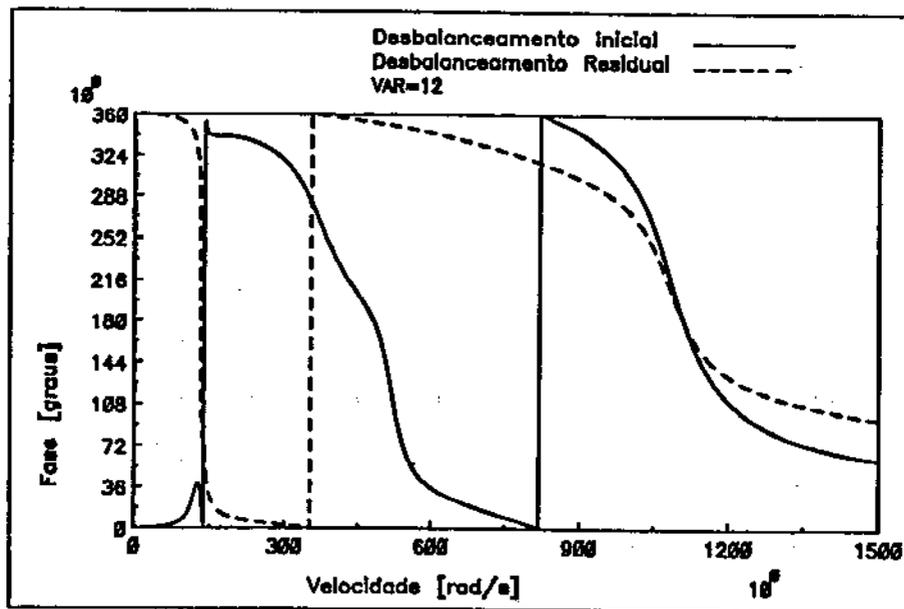
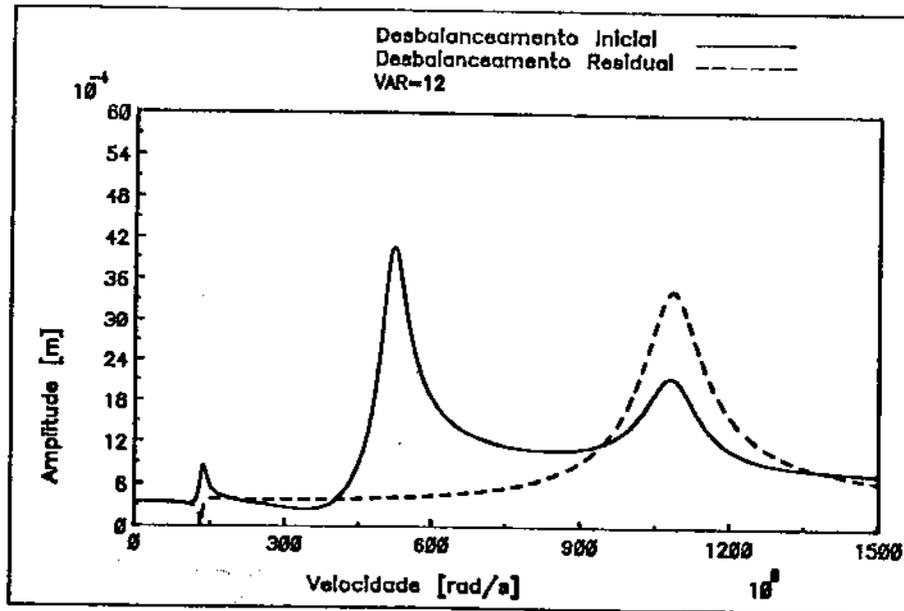


Figura 4.19: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S9

4.4.10 Simulação 10

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1º modo de 1E-03 (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e 510 (rad/s), e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.12). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em duas velocidades de rotação próximas às duas primeiras velocidades críticas do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,1448E-03	0	0,92114E-03
Posição φ_p (graus)	227,33	0	8,2761

Tabela 4.12: Momentos de Balanceamento Identificados-S10

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 9.

4.4.11 Simulação 11

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1º modo de 1E-03 (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.13) Observa-se que neste caso que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,1513E-03	0	0,90834E-03
Posição φ_p (graus)	308,00	0	8,6251

Tabela 4.13: Momentos de Balanceamento Identificados-S11

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 9.

4.4.12 Simulação 12

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1^o modo de 1E-03 (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (*rad/s*) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5. O resultado é apresentado na tabela (4.14) e nos gráficos (4.20), (4.21), (4.22). Observa-se que neste caso, o número planos de medida é maior que o número de planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,8000E-03	1,2096E-03	0
Posição φ_p (graus)	207,30	4,1399	0

Tabela 4.14: Momentos de Balanceamento Identificados-S12

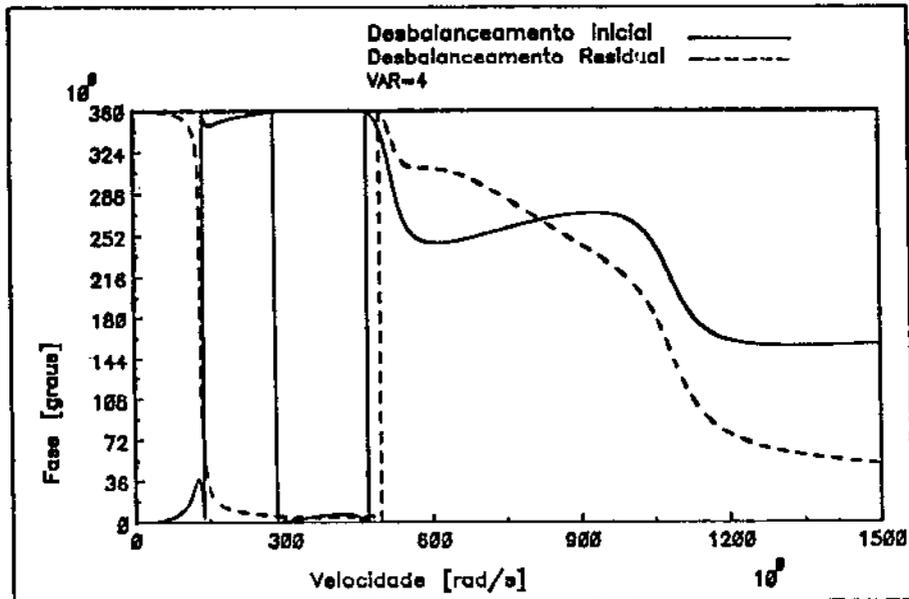
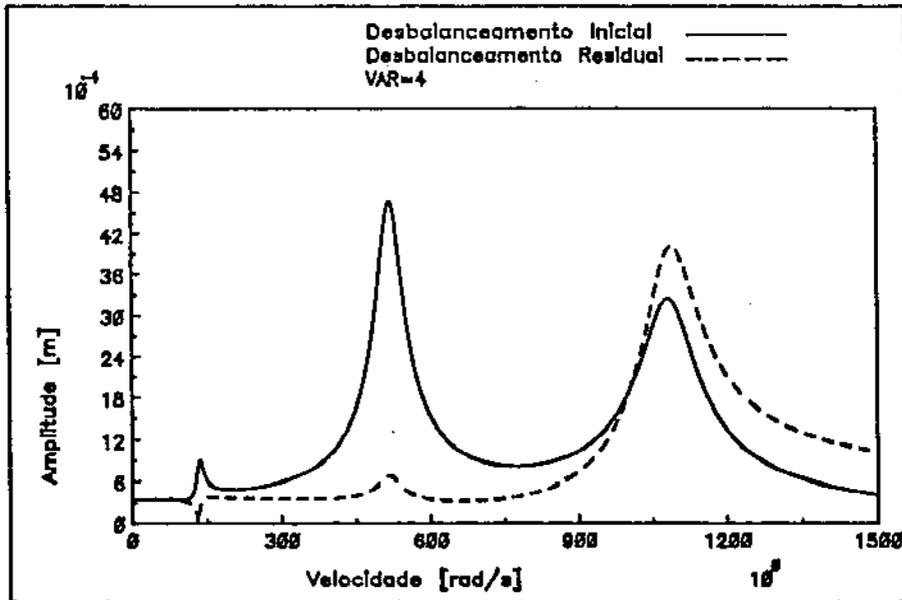


Figura 4.20: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S12

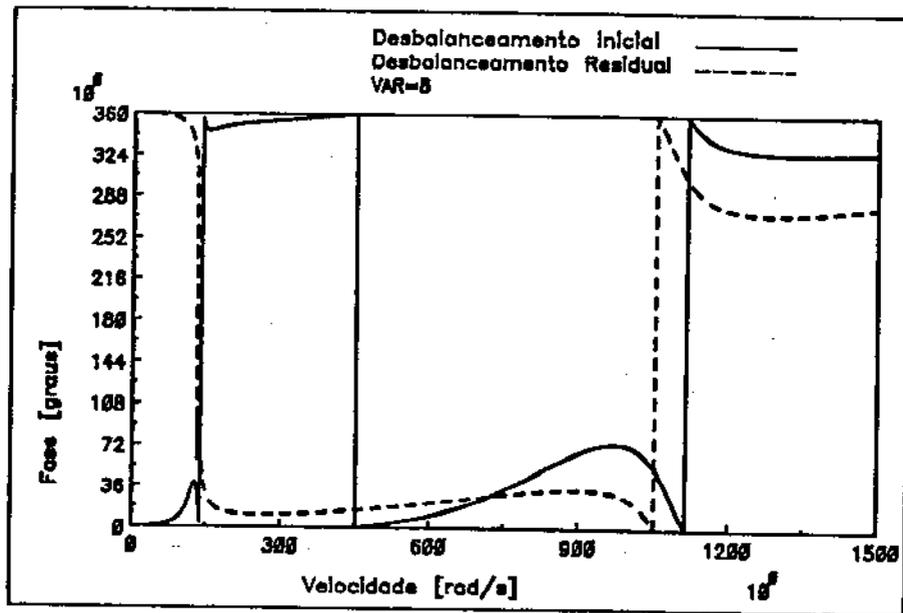
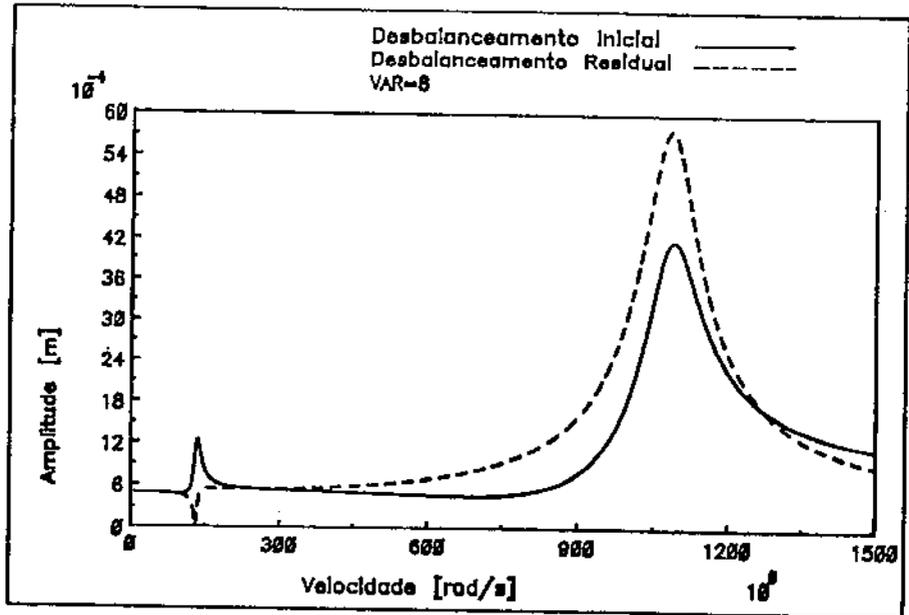


Figura 4.21: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S12

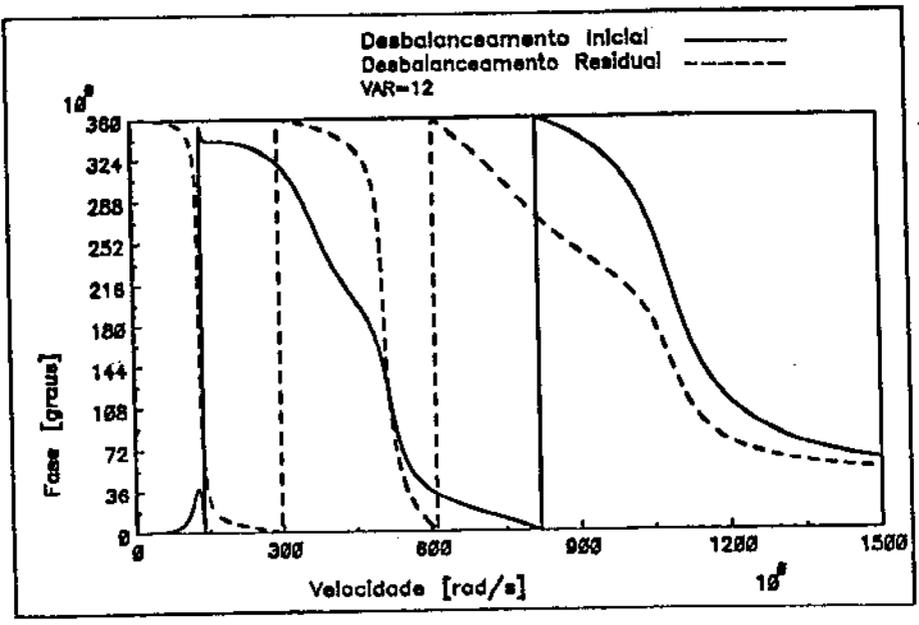
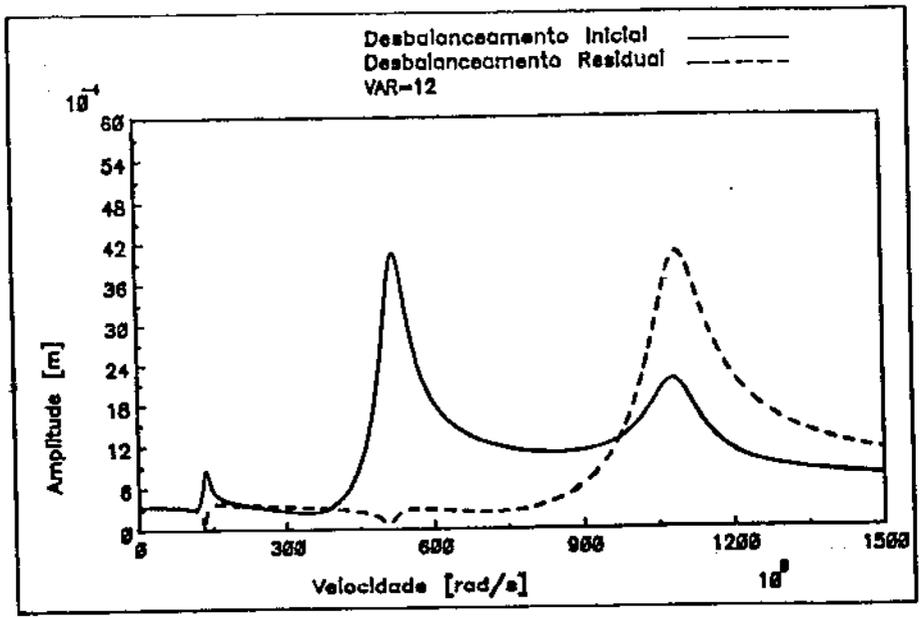


Figura 4.22: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S12

4.4.13 Simulação 13

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento modal do 1º modo de $1\text{E-}03$ (m) e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e o plano de balanceamento escolhido foi 3. O resultado é apresentado na tabela (4.15) e nos gráficos (4.23), (4.24), (4.25). Observa-se que neste caso, existe apenas um plano de balanceamento, que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	0,71021E-03	0	0
Posição φ_p (graus)	278,79	0	0

Tabela 4.15: Momentos de Balanceamento Identificados-S13

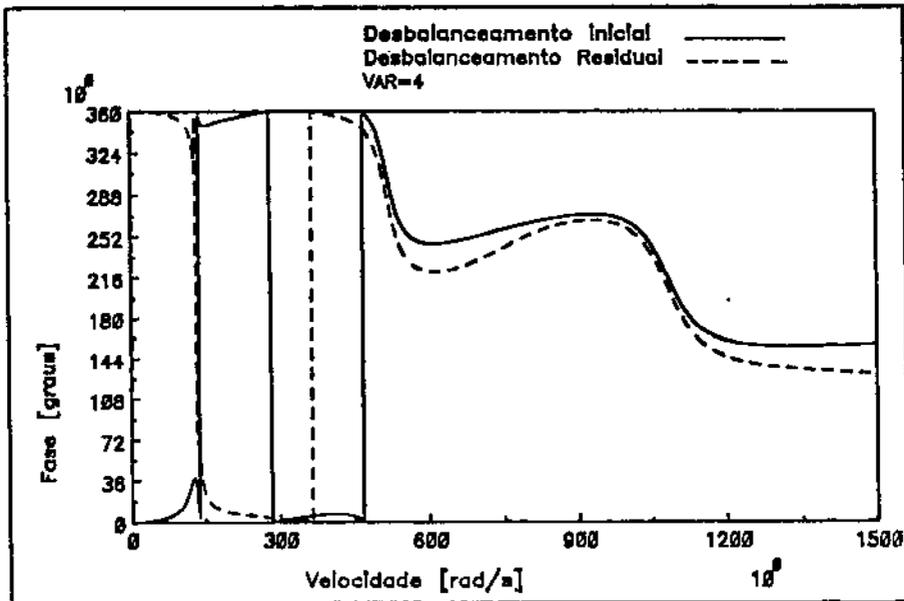
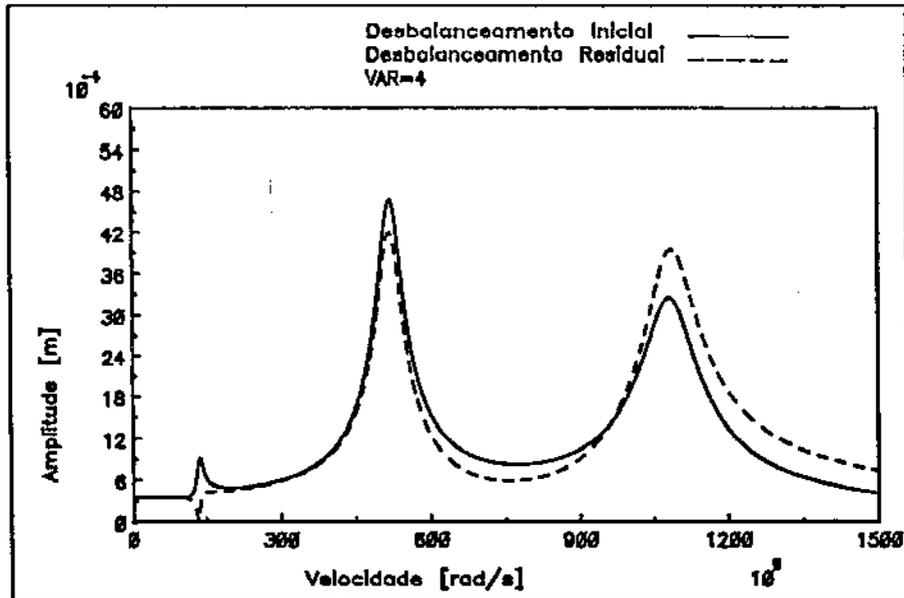


Figura 4.23: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S13

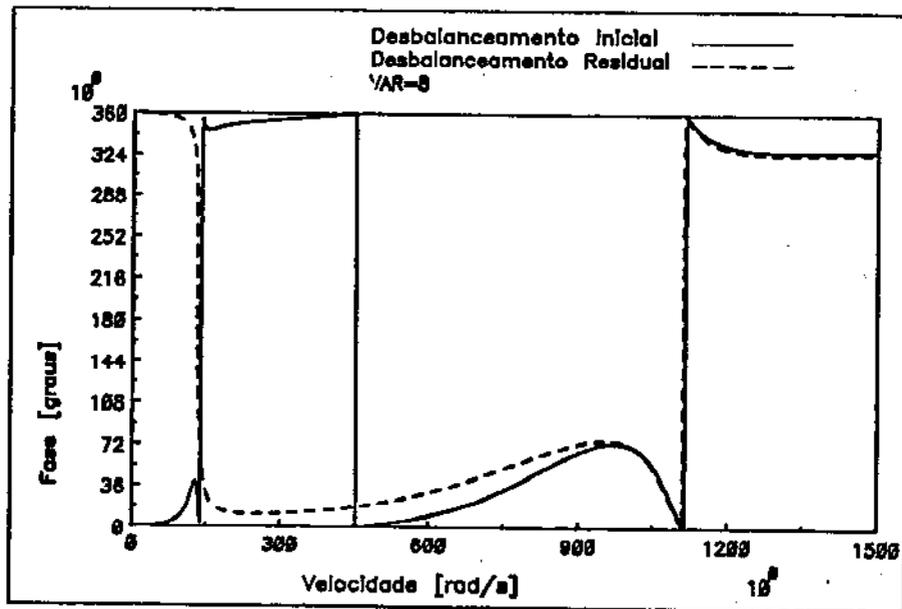
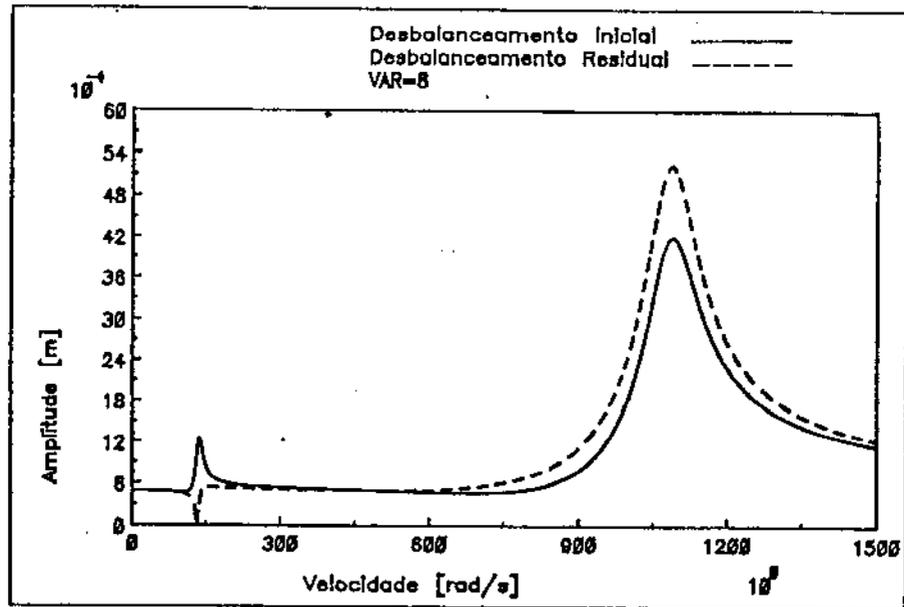


Figura 4.24: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S13

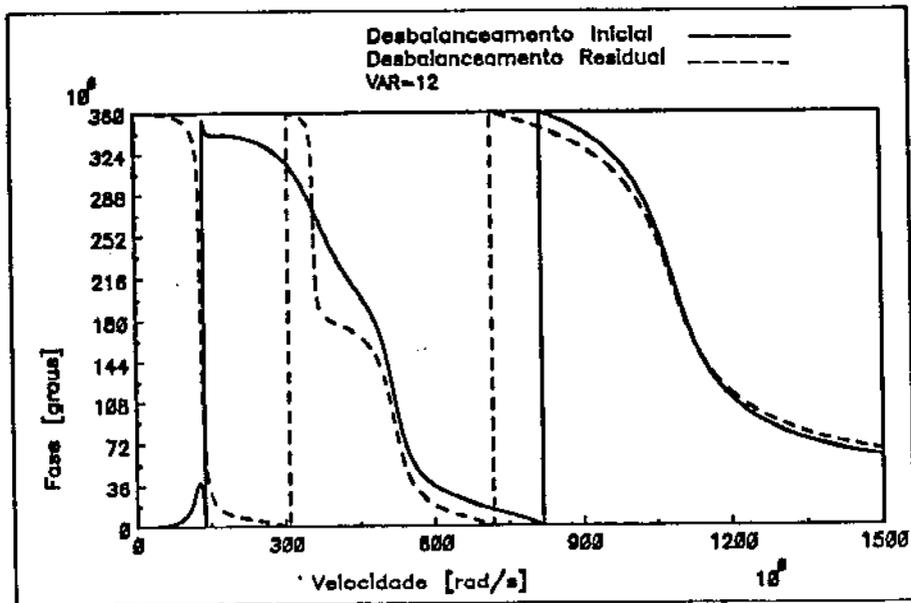
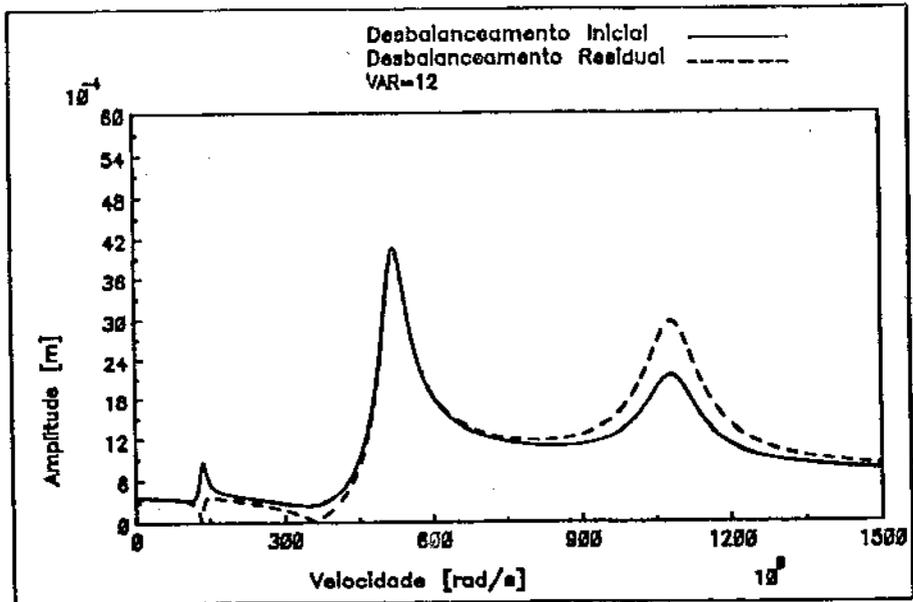


Figura 4.25: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S13

4.4.14 Simulação 14

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1\text{E-}03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.16) e nos gráficos (4.26), (4.27), (4.28). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	0,23606E-01	0,32103E-01	0,21921E-03
Posição φ_p (graus)	181,08	358,47	178,62

Tabela 4.16: Momentos de Balanceamento Identificados-S14

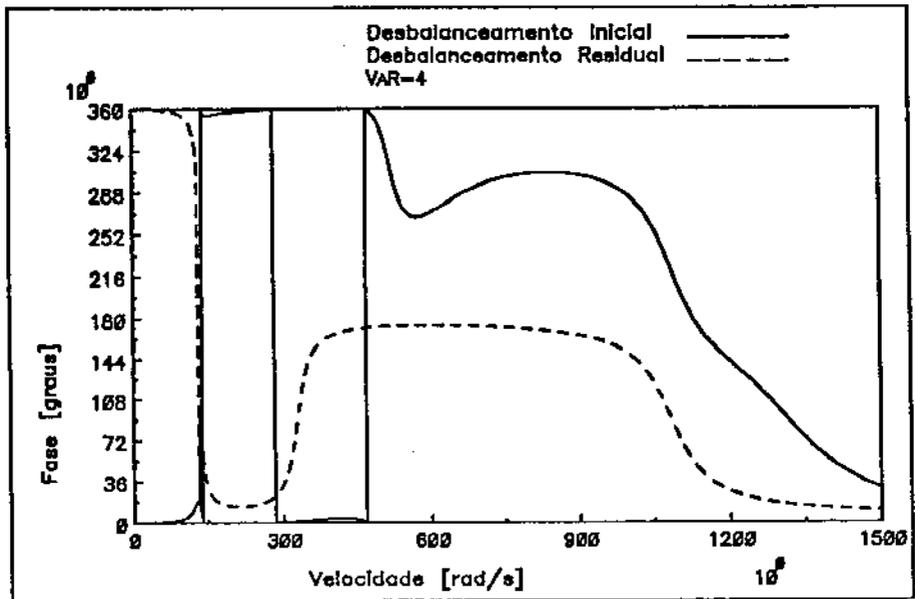
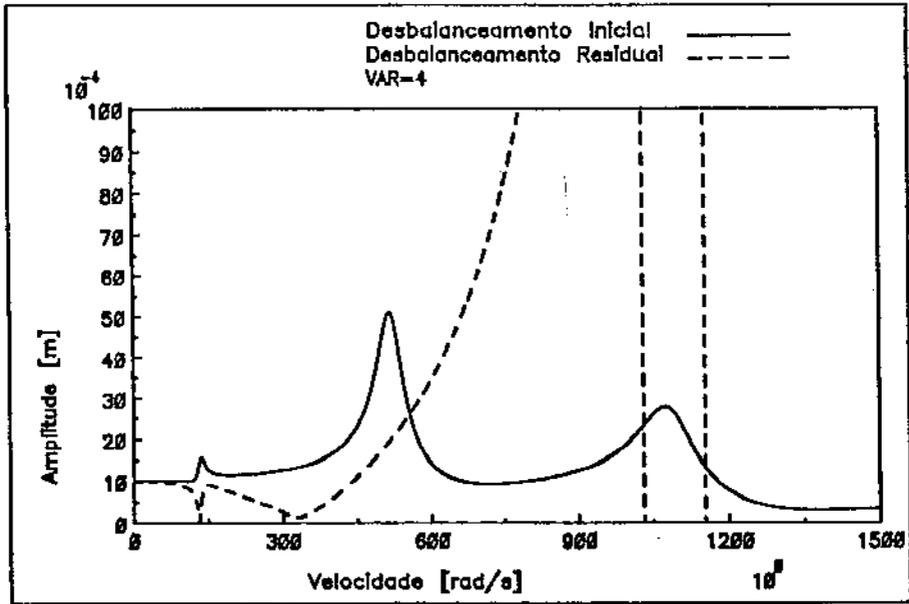


Figura 4.26: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S14

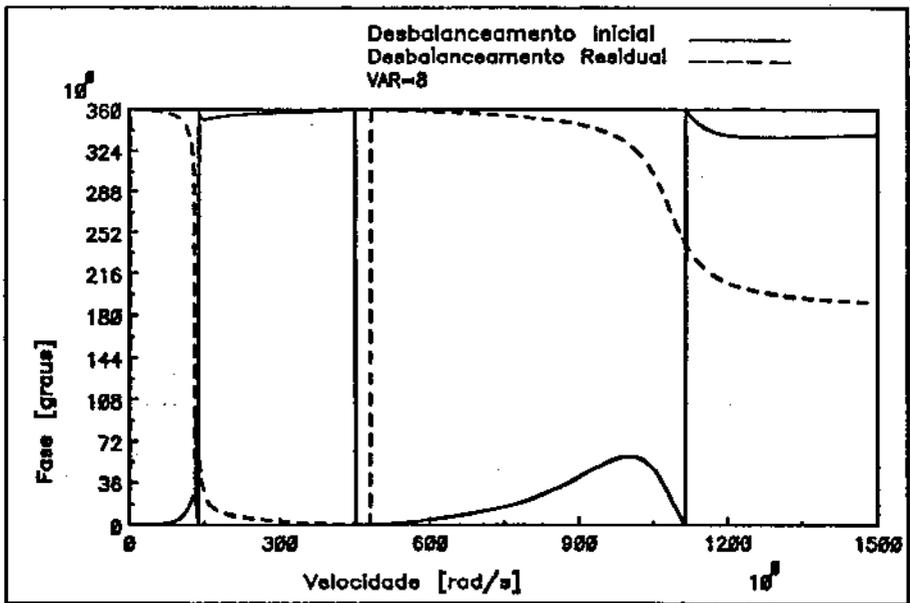
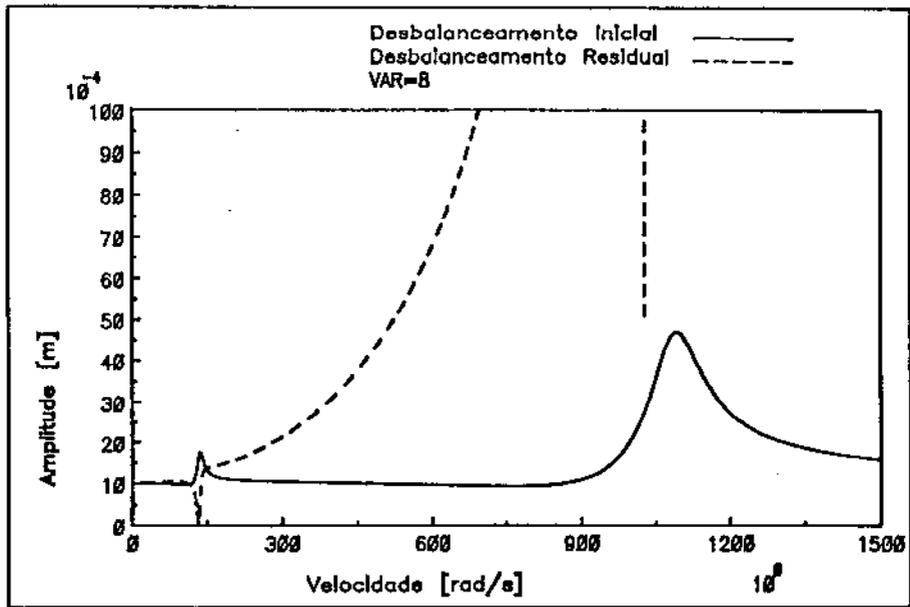


Figura 4.27: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S14

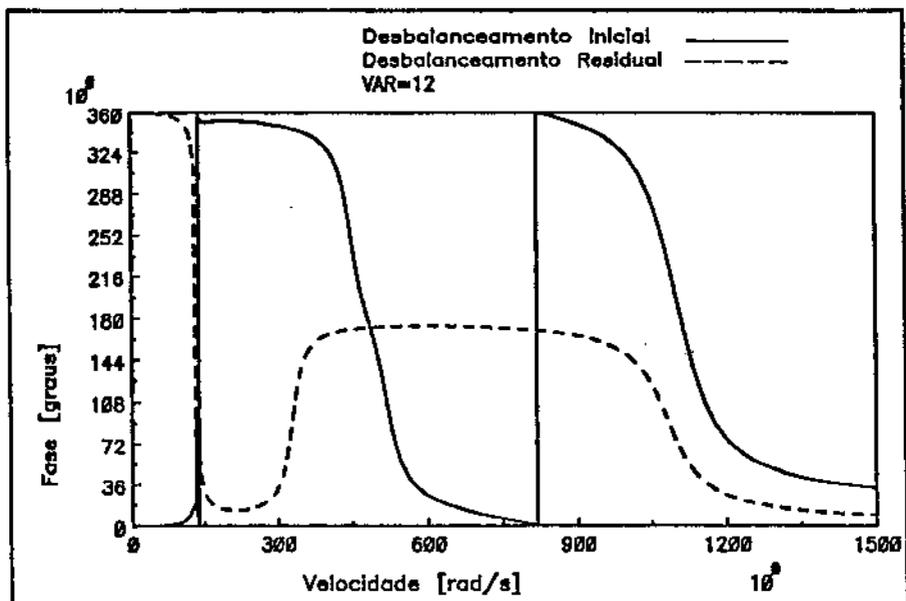
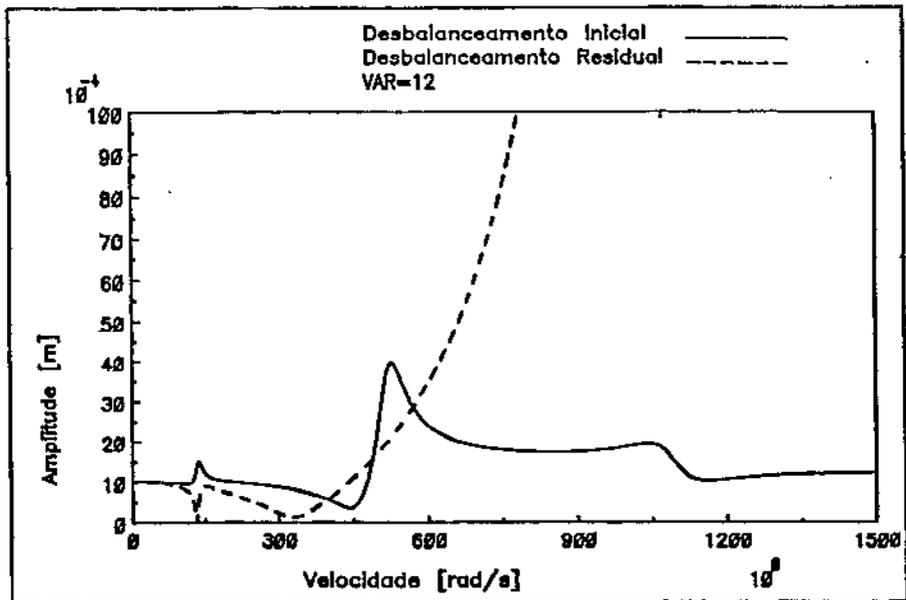


Figura 4.28: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S14

4.4.15 Simulação 15

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1\text{E-}03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.17) e nos gráficos (4.29), (4.30), (4.31). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,4438E-03	0	0,78945E-03
Posição φ_p (graus)	230,87	0	349,38

Tabela 4.17: Momentos de Balanceamento Identificados-S15

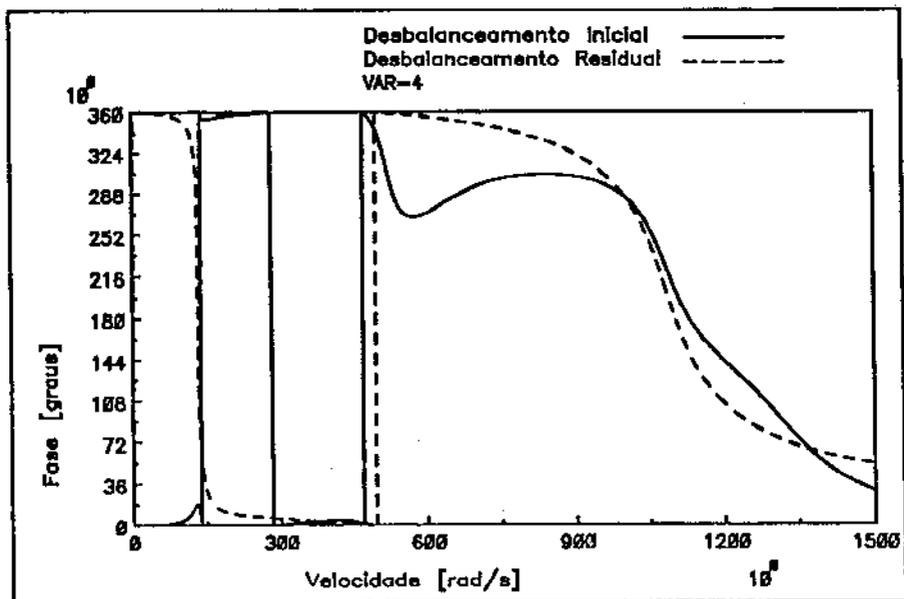
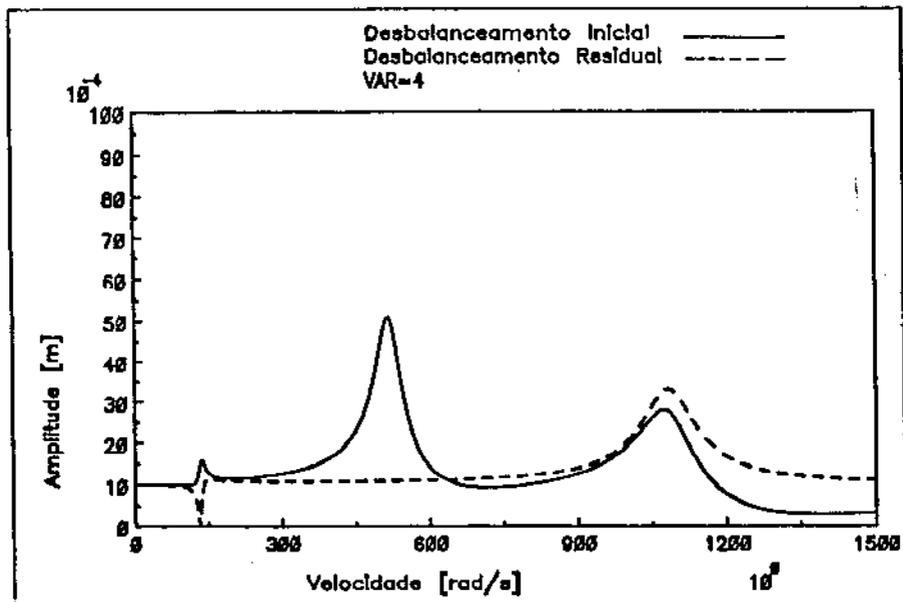


Figura 4.29: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S15

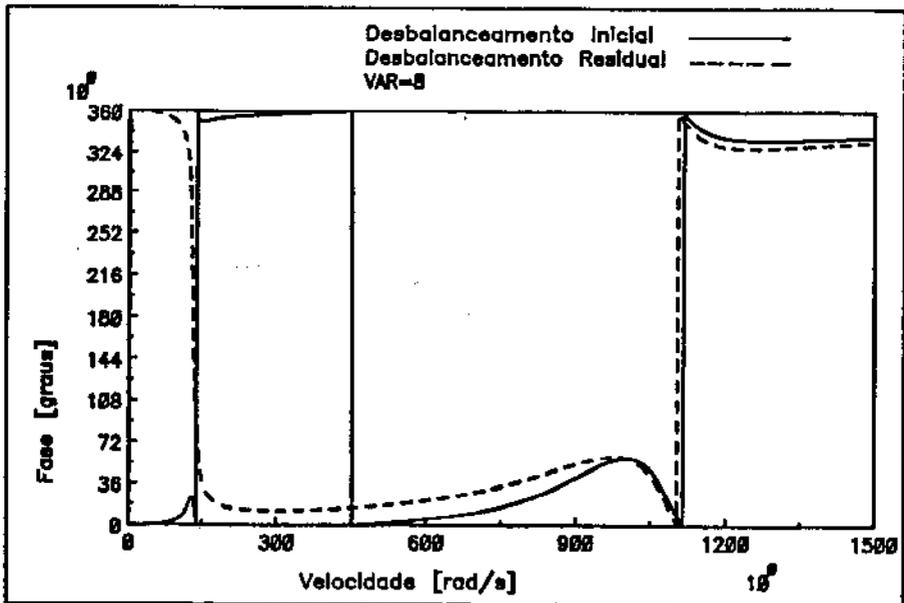
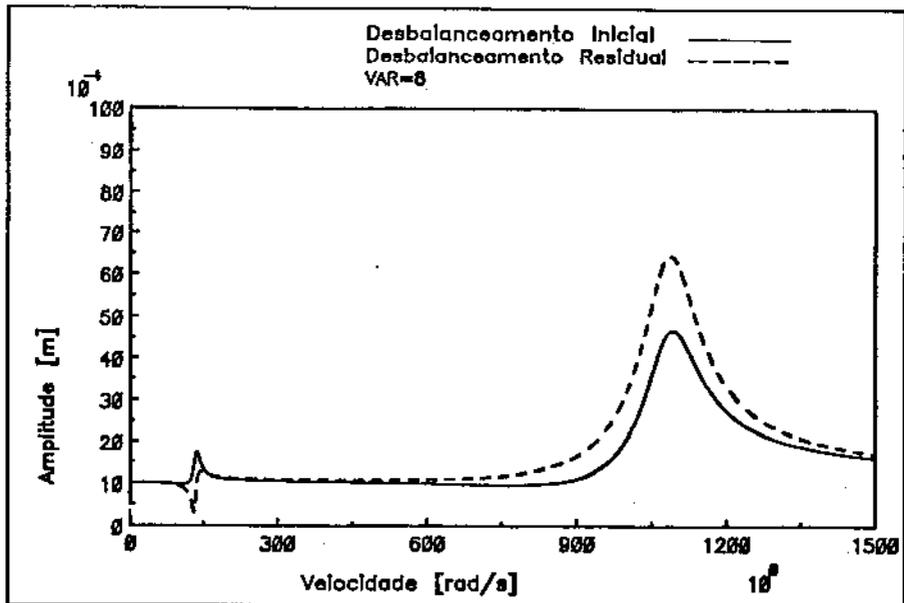


Figura 4.30: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S15

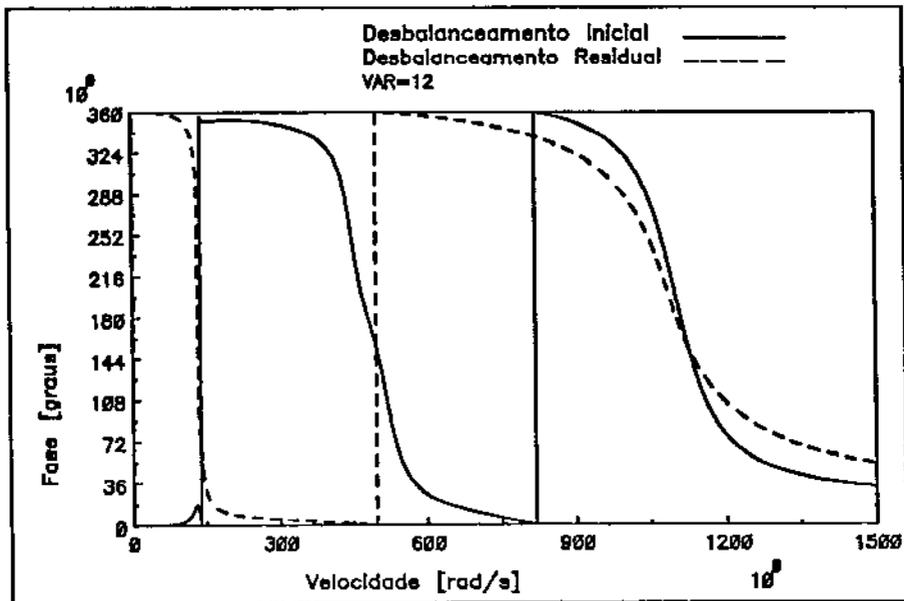
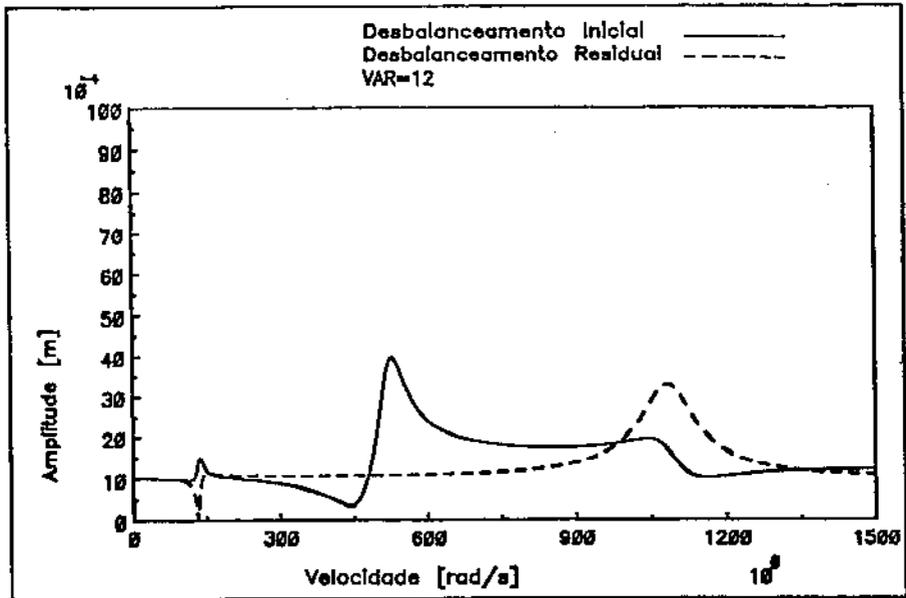


Figura 4.31: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S15

4.4.16 Simulação 16

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1\text{E-}03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e 510 (rad/s), e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.18). Observa-se que neste caso, os planos de medida coincidem com os planos de balanceamento, mas que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em duas velocidades de rotação próximas às duas primeiras velocidades críticas do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,4192E-03	0	0,83292E-03
Posição φ_p (graus)	232,30	0	349,73

Tabela 4.18: Momentos de Balanceamento Identificados-S16

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 15.

4.4.17 Simulação 17

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1\text{E-}03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 7. O resultado é apresentado na tabela (4.19). Observa-se que neste caso que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,3764E-03	0	0,80966E-03
Posição φ_p (graus)	230,17	0	354,16

Tabela 4.19: Momentos de Balanceamento Identificados-S17

Neste caso a curva resposta ao desbalanceamento em frequência não será mostrada pois após o balanceamento a curva é muito semelhante à obtida na simulação 15.

4.4.18 Simulação 18

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1E-03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e os planos de balanceamento escolhidos foram 3, 5. O resultado é apresentado na tabela (4.20) e nos gráficos (4.32), (4.33), (4.34). Observa-se que neste caso, o número planos de medida é maior que o número de planos de balanceamento e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	5,3743E-03	3,6942E-03	0
Posição φ_p (graus)	189,50	357,25	0

Tabela 4.20: Momentos de Balanceamento Identificados-S18

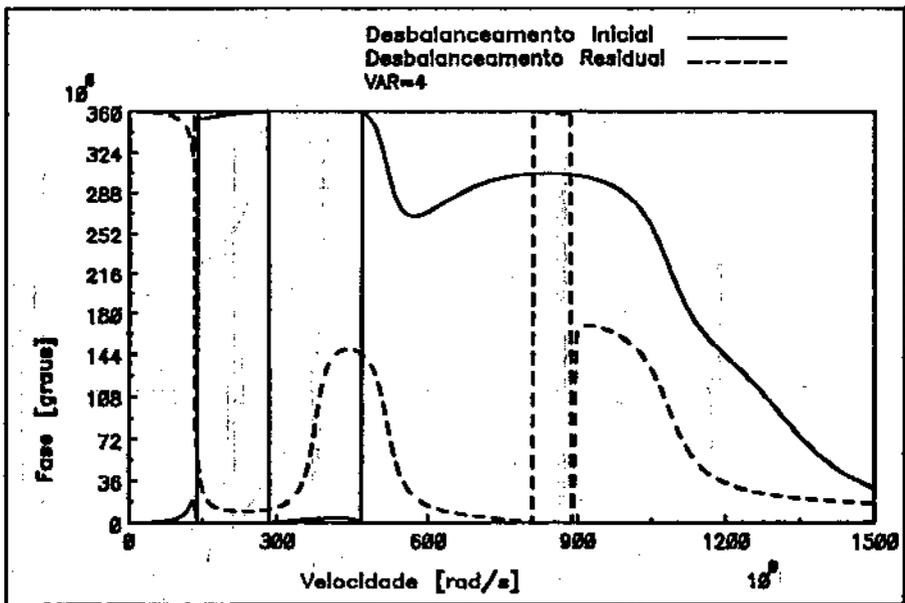
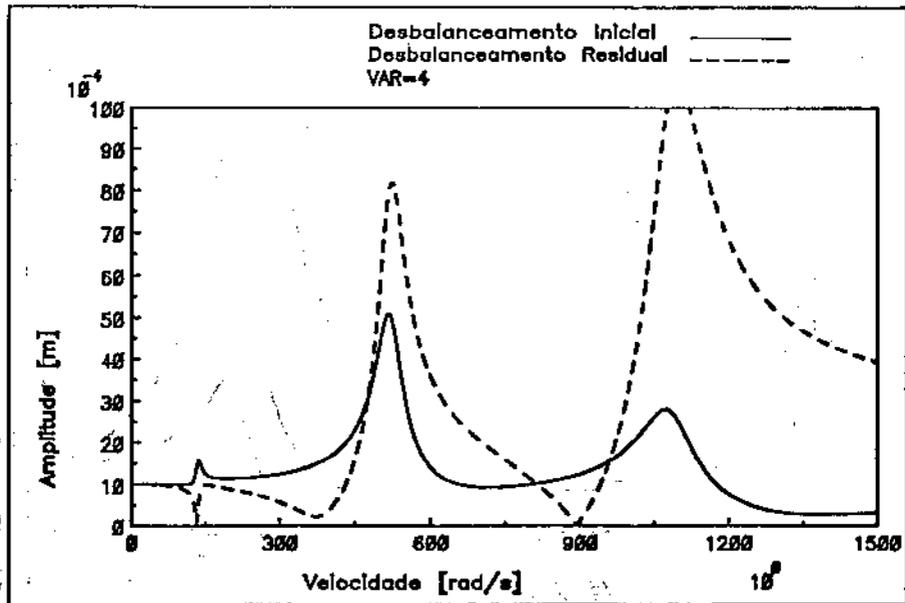


Figura 4.32: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S18

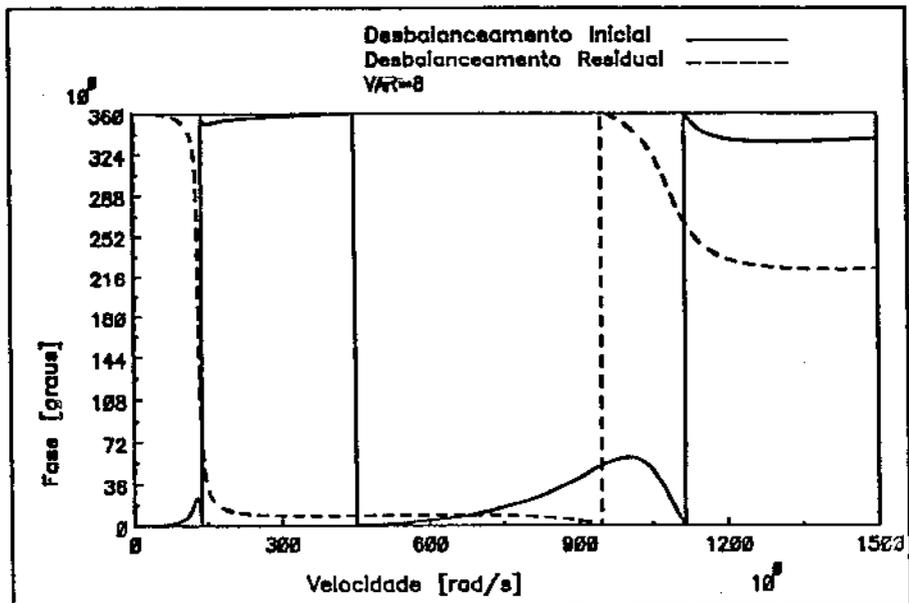
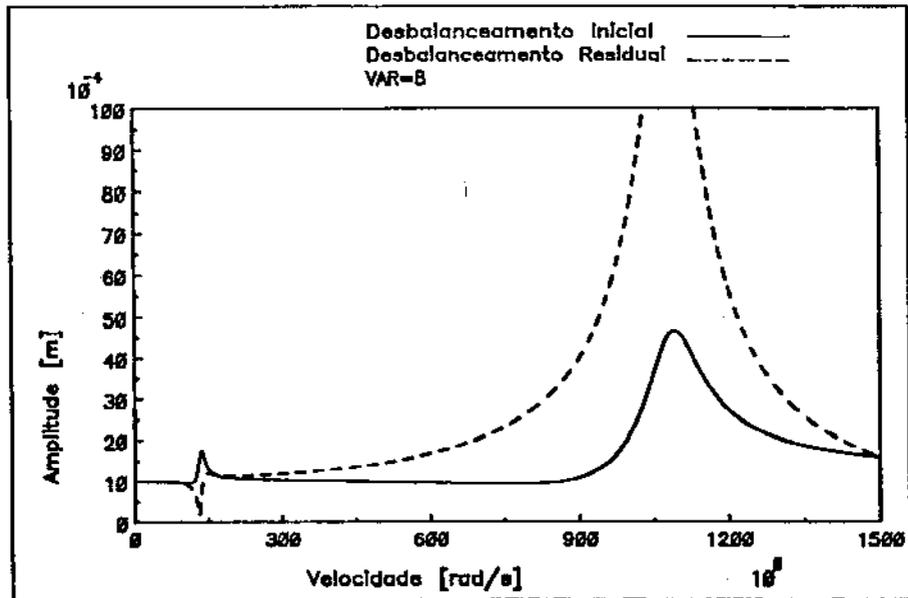


Figura 4.33: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S18

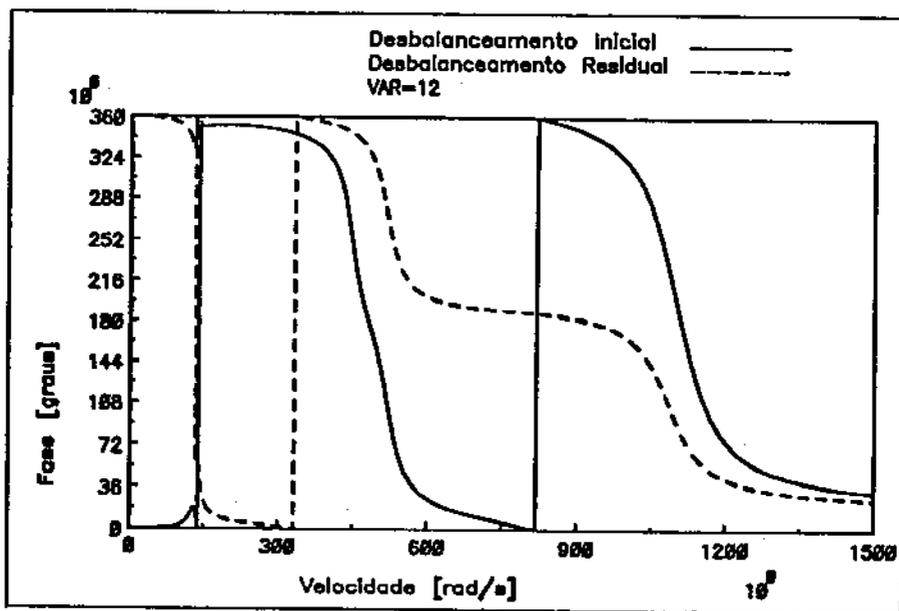
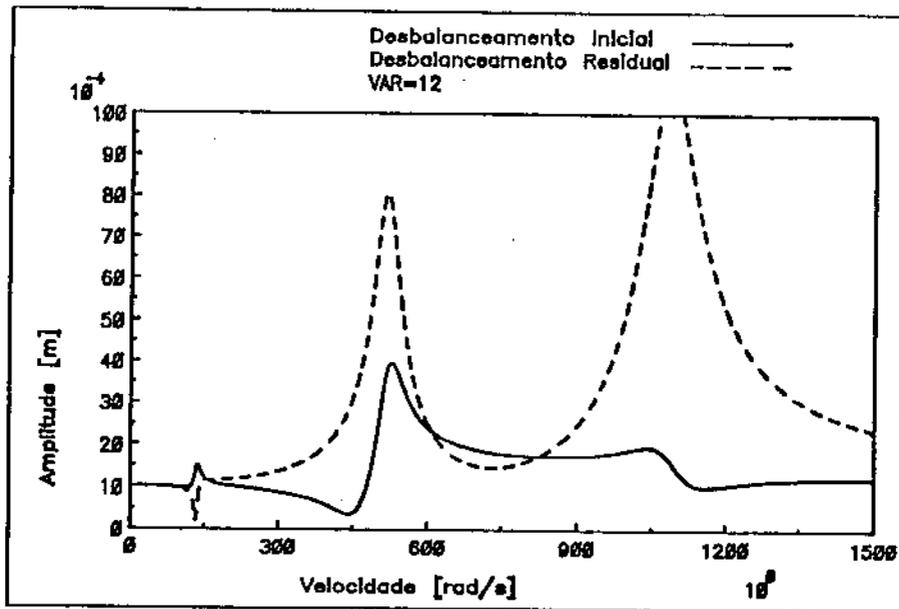


Figura 4.34: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S18

4.4.19 Simulação 19

Simulou-se um balanceamento onde o sistema apresentava um empenamento físico de $1\text{E-}03$ (m) localizado nos planos 3, 5, 7 e os sinais em deslocamento foram obtidos nos planos 3, 5, 7 a uma velocidade de rotação Ω de 132 (rad/s) e o plano de balanceamento escolhido foi 3. O resultado é apresentado na tabela (4.21) e nos gráficos (4.35), (4.36), (4.37). Observa-se que neste caso, existe apenas um plano de balanceamento, que o número de planos de balanceamento é menor que o número de planos desbalanceados e que foram consideradas as medidas em uma velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica do sistema.

Planos bal.	3	5	7
U_p (Kg.m)	1,1420E-03	0	0
Posição φ_p (graus)	266,17	0	0

Tabela 4.21: Momentos de Balanceamento Identificados-S19

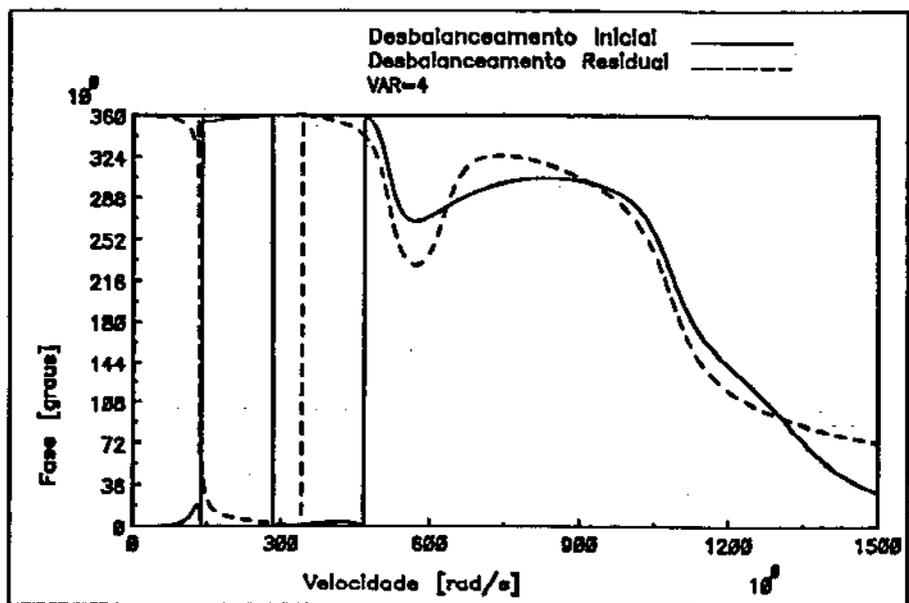
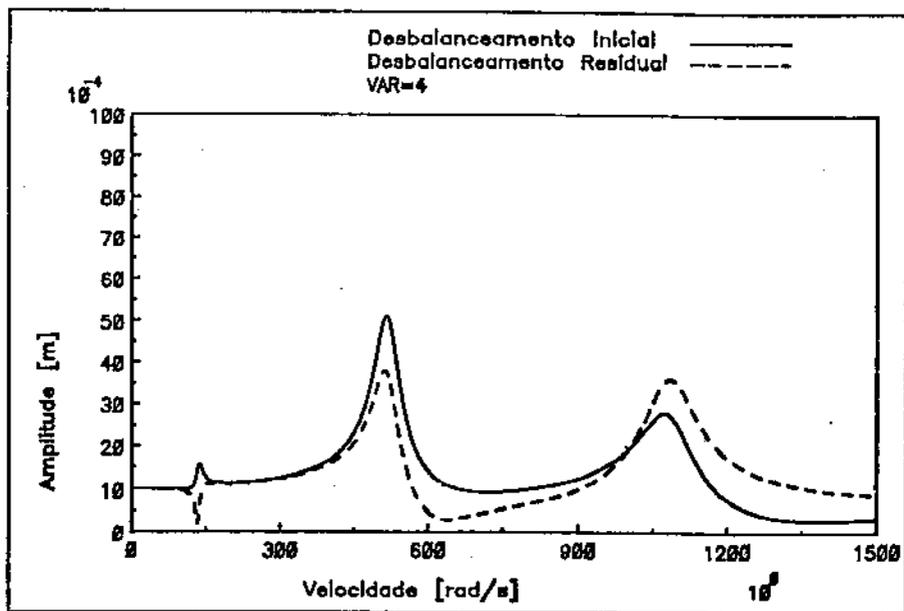


Figura 4.35: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 3-S19

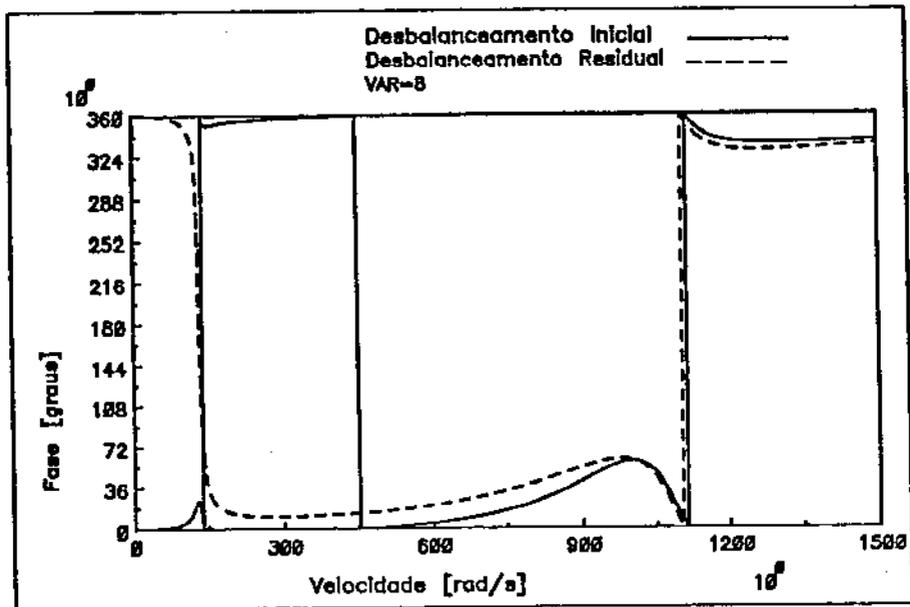
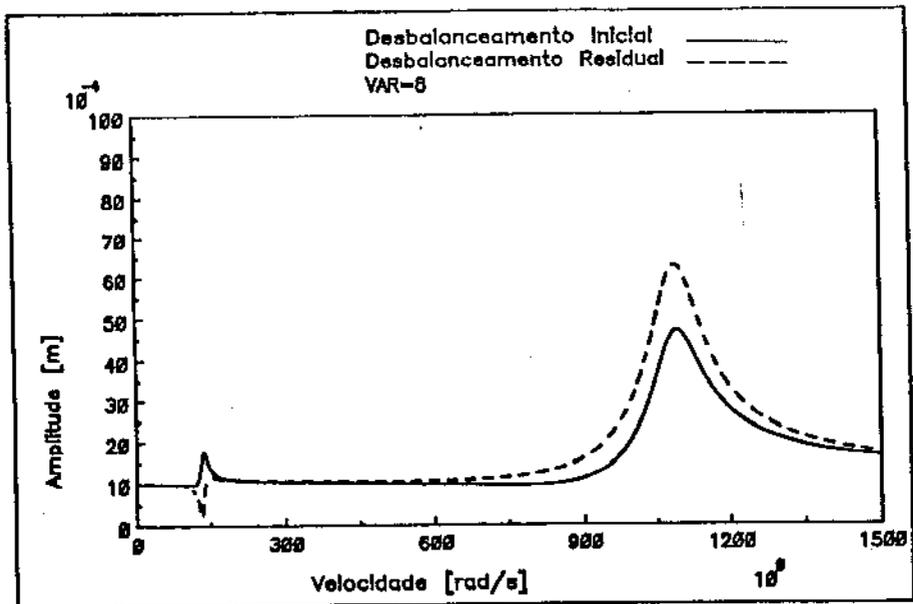


Figura 4.36: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 5-S19

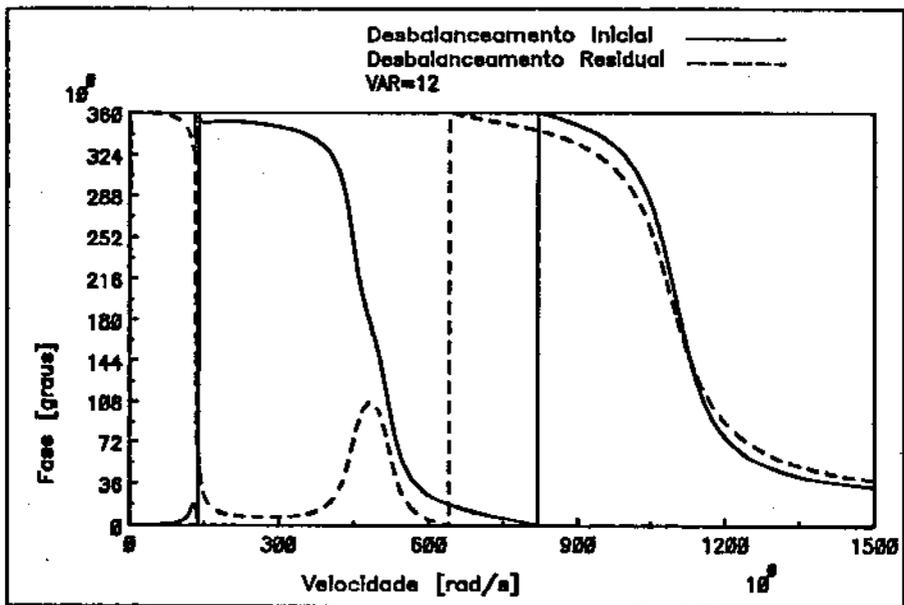
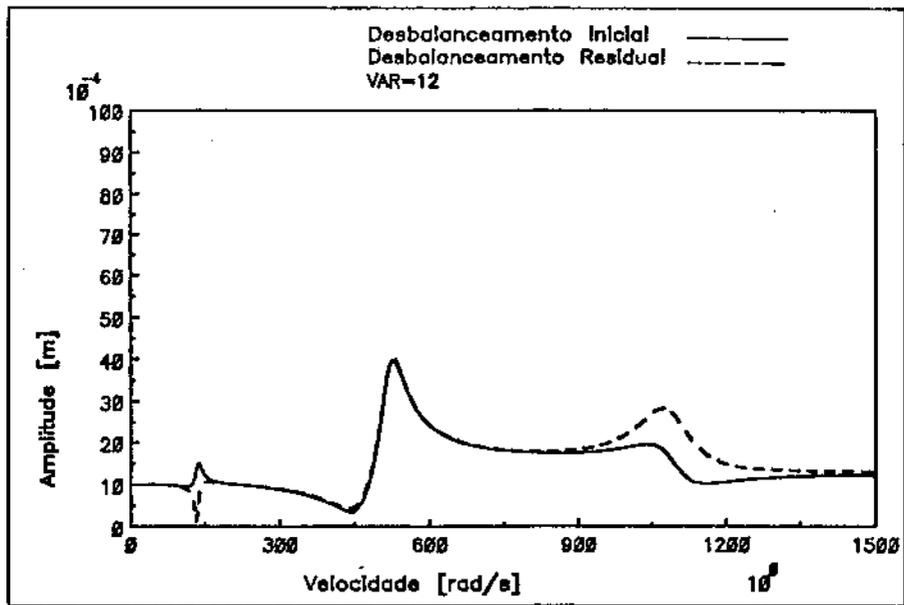


Figura 4.37: Curva de resposta ao desbalanceamento plano 7-S19

4.4.20 Análise das simulações

Das tabelas (4.3), e (4.4) nota-se que, se os planos de balanceamento coincidem com os planos de desbalanceamento discreto, não importando quais são os planos de medida, o método pode ser chamado de "Exato".

As simulações onde o número de planos de medida é superior ao número de planos de balanceamento foram feitas para estudar o Método dos Coeficientes de Influência utilizando a técnica dos Mínimos Quadrados.

As simulações 3 a 7, 9 a 13, 15 a 19, nos mostram casos mais reais, onde o número de planos de desbalanceamentos é maior que o número de planos de balanceamento, e que o balanceamento deixa de ser exato, embora as reduções das amplitudes de vibração (deslocamentos) nos planos de balanceamento sejam excelentes nas velocidades de rotação consideradas.

As simulações 3 a 19 mostram o comportamento do método nas velocidades de balanceamento.

4.5 Simulação do Método de Balanceamento Modal H e \hat{H} para um sistema com baixa densidade modal

Na Simulação do Balanceamento Modal foi considerado o Modelo Matemático-M2 correspondente a discretização mostrada na figura (4.38)

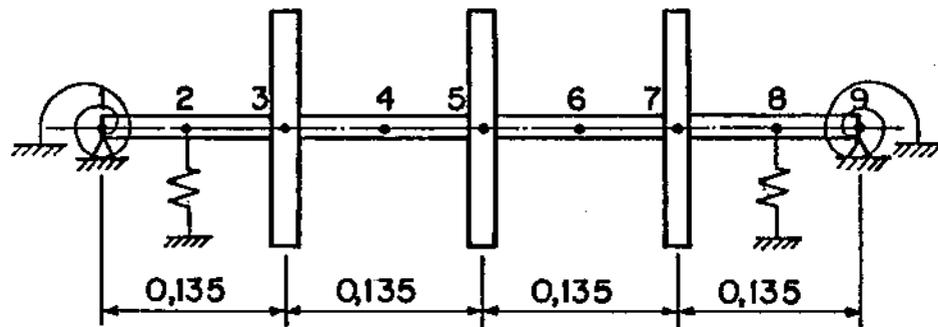


Figura 4.38: Modelo Matemático discreto-M2

onde:

$$Eixo = \begin{cases} \text{Área} & - & 1,227E - 04 & (m^2) \\ IZ & - & 1,198E - 09 & (m^4) \\ E & - & 2,067E + 11 & (N/m^2) \\ \rho & - & 7.800 & (Kg/m^3) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$Disco = \begin{cases} \text{Massa} & - & 1,929 & (Kg) \\ \text{Mom. Iner.} & - & 2,713E - 03 & (kg.m^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{Molas de torção} = \{ KOZ = 0 \quad (N.m/rad) \} \quad (4.6)$$

$$\text{Molas mancal intermediário} = \{ KY = 0 \quad (N/m) \} \quad (4.7)$$

Na simulação dos deslocamentos ao se considerar o comportamento dinâmico do sistema devido ao desbalanceamento, foi considerada uma razão de amortecimento de 5% para todos os modos.

Para se testar o método, poder-se-ia primeiramente considerar qualquer massa de desbalanceamento e obter a resposta ao desbalanceamento em frequência dos deslocamentos do sistema, e em seguida utilizando o método de balanceamento, calcular as massas corretivas e, posteriormente voltar a simular a resposta em frequência dos deslocamentos do sistema, para verificar se o resultado obtido foi satisfatório. Como isto demanda muito tempo computacional, optou-se por um desbalanceamento modal que excitasse apenas o modo i desejado, sabendo-se a priori, quando se fosse testar o método, qual seria o desbalanceamento modal a ser identificado.

Para excitar o sistema com um desbalanceamento modal é necessário que se calcule desbalanceamentos discretos que são colocados nas posições onde se localizam os deslocamentos e deflexões nodais do sistema. Para se calcular o momento de desbalanceamento discretizado $\{U_p\}_i$, multiplicou-se o momento de desbalanceamento modal u_i pelo vetor $\{t\}_i$, equação (3.37) correspondente ao modo de vibração $\{\phi\}_i$, de modo a distribuir pelos planos de desbalanceamento o desbalanceamento modal u_i correspondente ao modo i .

$$\left\{ U_p \right\}_i = u_i \left\{ t \right\}_i \quad (4.8)$$

Escolheu-se um desbalanceamento modal u_i diferente para cada modo, utilizou-se a equação (4.8) para se calcular o desbalanceamento discretizado $\{U_p\}_i$, e colocando-se este desbalanceamento em uma posição angular φ_p em relação ao referencial fixo no eixo, conforme mostra a tabela (4.22).

Modos excitados	u_i modal (Kg.m)	Fase φ_p (graus)
1	8E-03	0
2	10E-03	120
3	12E-03	240

Tabela 4.22: Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M2

Escolheu-se um empenamento modal b_i diferente para cada modo, utilizou-se a equação (2.88) para se calcular o desbalanceamento discretizado $\{B_p\}_i$, e colocando-se este desbalanceamento em uma posição angular θ_p em relação ao referencial fixo no eixo, conforme mostra a tabela (4.23).

Modos excitados	b_i modal (m)	Fase θ_p (graus)
1	2E-05	0
2	4E-05	120
3	6E-05	240

Tabela 4.23: Empenamento Modal-M2

Considerando-se estes Momentos de Desbalanceamento da tabela (4.22) e o empenamento da tabela (4.23), obteve-se a simulação da resposta ao desbalanceamento em frequência para todos os graus de liberdade do sistema, sejam deflexões ou rotações, para a faixa de velocidade onde deseja-se fazer a simulação do Balanceamento Modal.

Nestas simulações apresentadas em tabelas, foram escolhidas três velocidades próximas à velocidade crítica e medições dos deslocamentos em alguns planos de medida. Com a tabela obtida é possível visualizar os parâmetros do sistema identificados simultaneamente.

Para mostrar com maior clareza os resultados obtidos através dos Métodos H e \hat{H} , foram feitas várias simulações de identificação dos parâmetros para diversas velocidades de rotação. Como em cada identificação é necessário medidas em no mínimo três velocidades, cada parâmetro identificado é colocado no gráfico em função da média das velocidades utilizadas. A faixa de velocidade escolhida foi entre 10 (rad/s) e 2500 (rad/s). Em cada identificação de balanceamento considerou-se 3 velocidades de rotação espaçadas de 10 (rad/s) cada e entre cada identificação considerou-se um passo de 15 (rad/s) nas velocidades médias de balanceamento.

Algumas curvas das respostas ao desbalanceamento em frequência dos deslocamentos de alguns pontos do sistema discretizado são mostradas nas figuras (4.39), (4.40) e (4.41).

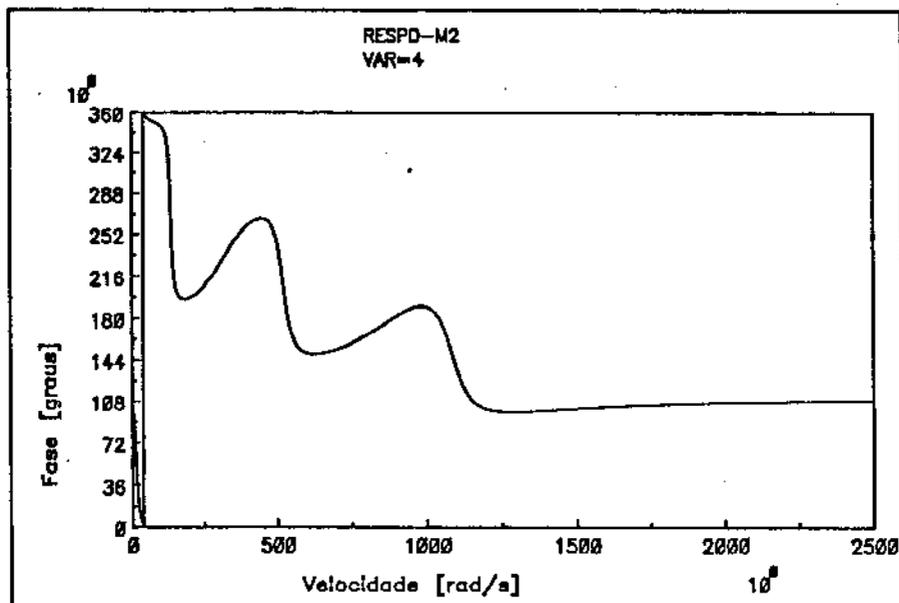
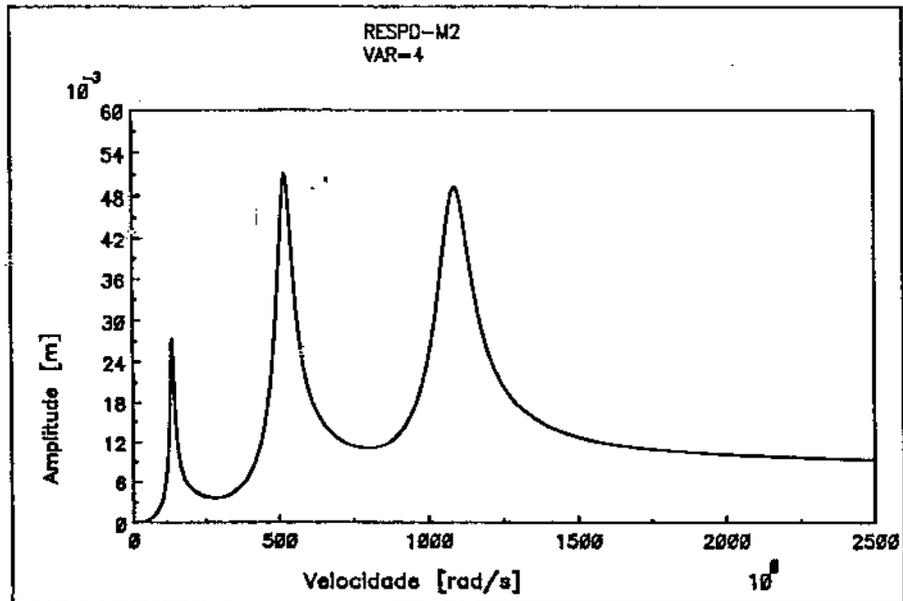


Figura 4.39: Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-M2

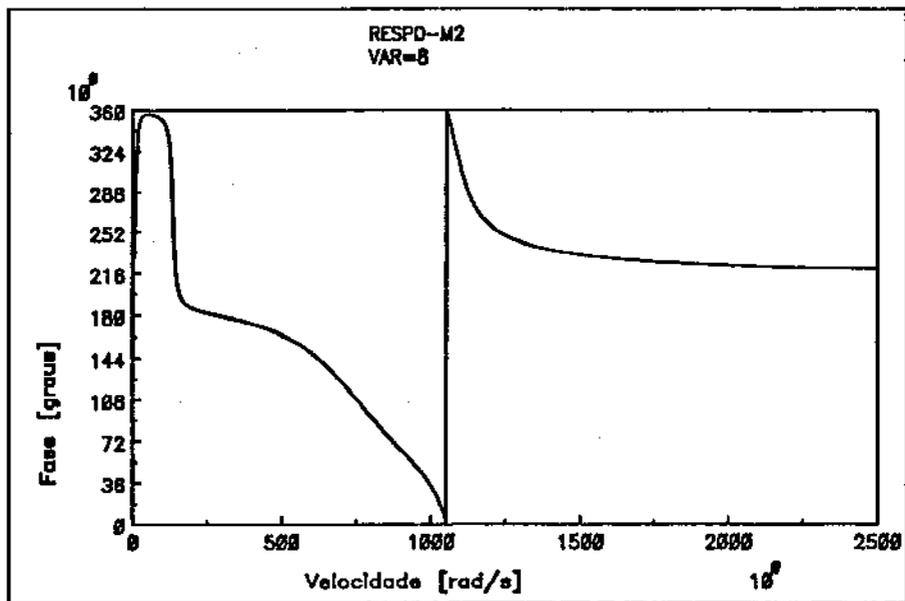
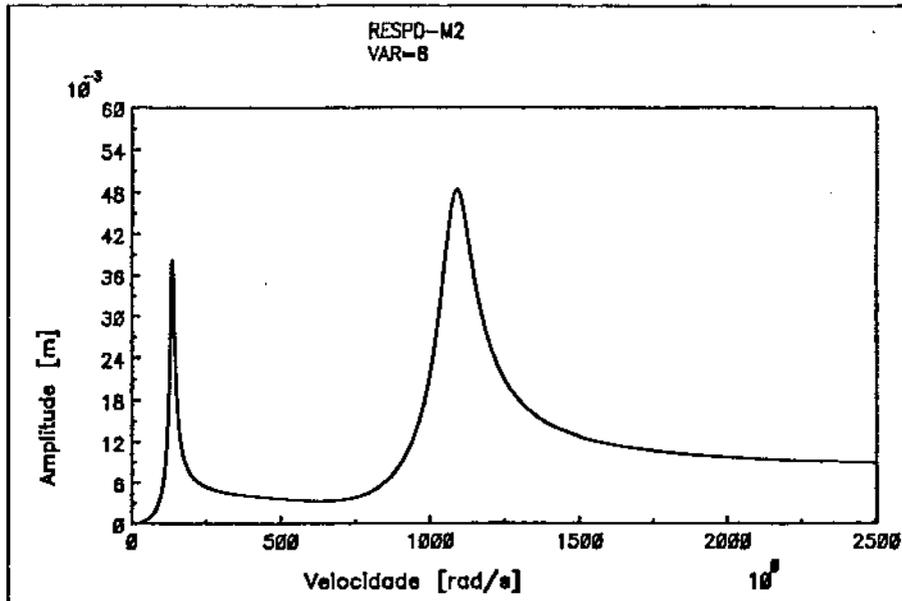


Figura 4.40: Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-M2

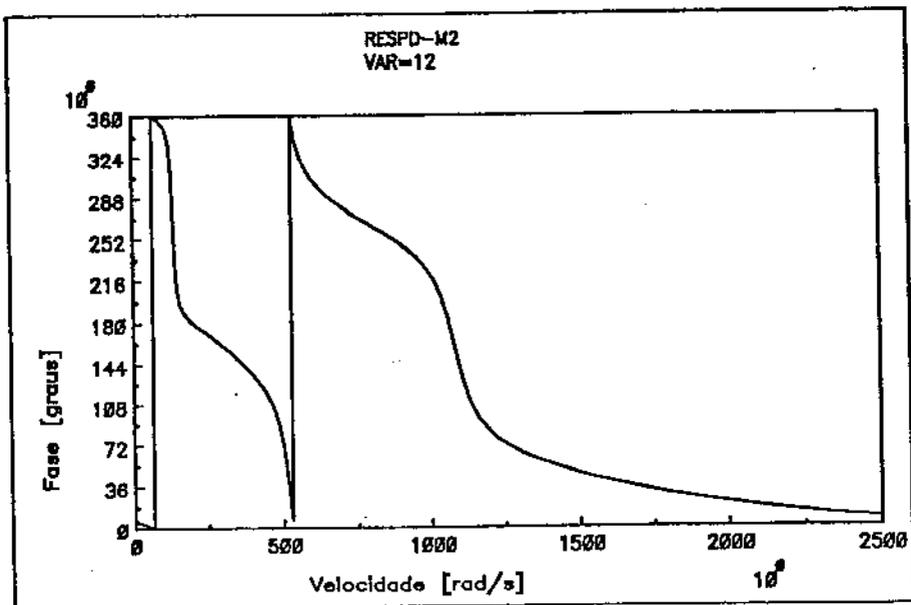
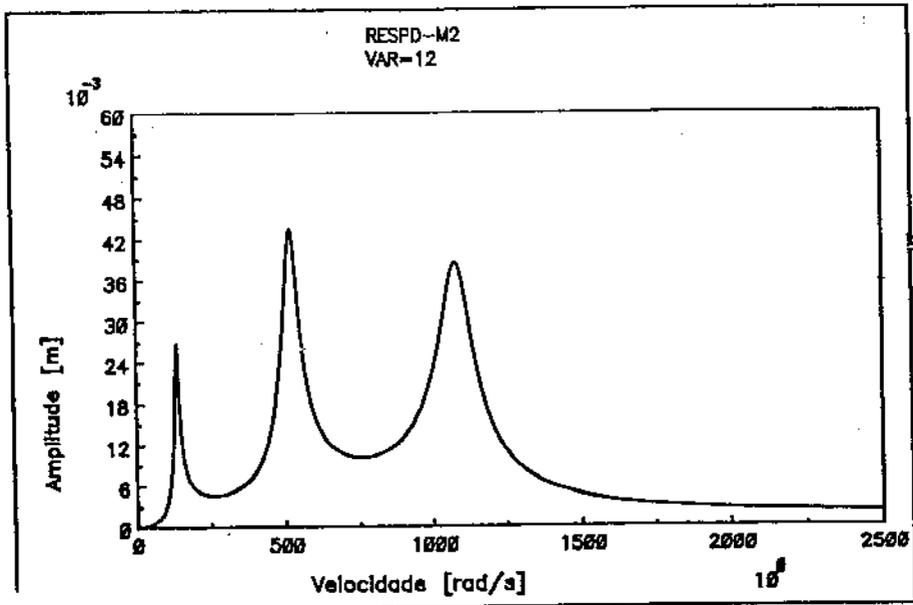


Figura 4.41: Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-M2

4.5.1 Simulação 20

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 3, 5, 7 nas velocidades de rotação Ω de 100, 120, 140 (rad/s) para balancear o 1º modo, Ω de 400, 420, 440 (rad/s) para balancear o 2º modo e Ω de 1100, 1120, 1140 (rad/s) para balancear o 3º modo. Obteve-se os resultados da tabela (4.24). Neste caso o número de planos de medidas coincide com o número de planos de desbalanceamento.

Modos	Met.	u (Kg.m)	Fs(graus)	k (N/m)	d (N.s/m)	b (m)	Fs(graus)
Modo 1	H	8,0008E-03	179,998	18175,36	13,482	2,169E-05	182,055
	Ĥ	8,0000E-03	180,005	18175,09	13,491	1,999E-05	179,957
	Teo.	8E-03	180	18174,62	13,481	2E-05	180
Modo 2	H	10,000E-03	300,008	269439,9	51,906	3,995E-05	299,877
	Ĥ	10,000E-03	300,008	269439,9	51,907	4,000E-05	300,001
	Teo.	10E-03	300	269440,0	51,907	4E-05	300
Modo 3	H	12,000E-03	60,003	1174351	108,36	5,001E-05	174,918
	Ĥ	12,000E-03	60,001	1174354	108,36	5,977E-05	60,246
	Teo.	12E-03	60	1174355	108,36	6E-05	60

Tabela 4.24: Parâmetros Identificados-S20

4.5.2 Simulação 21

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos no plano 2 nas velocidades de rotação Ω de 100, 120, 140 (rad/s) para balancear o 1º modo, Ω de 400, 420, 440 (rad/s) para balancear o 2º modo e Ω de 1100, 1120, 1140 (rad/s) para balancear o 3º modo. Obteve-se os resultados da tabela (4.25). Neste caso o o número de planos de medidas é inferior ao número de planos de desbalanceamento.

Modos	Met.	u (Kg.m)	Fs(graus)	k (N/m)	d (N.s/m)	b (m)	Fs(graus)
Modo 1	H	8,1254E-03	179,974	18178,88	13,736	39E-05	277,305
	Ĥ	8,1254E-03	179,974	18178,88	13,736	39E-05	277,305
	Teo.	8E-03	180	18174,62	13,481	2E-05	180
Modo 2	H	10,560E-03	299,664	271083,0	53,087	745E-05	5,846
	Ĥ	10,560E-03	299,664	271082,7	53,087	745E-05	5,846
	Teo.	10E-03	300	269440,0	51,907	4E-05	300
Modo 3	H	12,155E-03	59,352	1174474	109,10	2251E-05	143,361
	Ĥ	12,155E-03	59,353	1174474	109,10	2251E-05	143,359
	Teo.	12E-03	60	1174355	108,36	6E-05	60

Tabela 4.25: Parâmetros Identificados-S21

4.5.3 Simulação 22

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nas velocidades de rotação Ω de 100, 120, 140 (rad/s) para balancear o 1º modo, Ω de 400, 420, 440 (rad/s) para balancear o 2º modo e Ω de 1100, 1120, 1140 (rad/s) para balancear o 3º modo. Obteve-se os resultados da tabela (4.26). Neste caso o número de planos de medidas é superior ao número de planos de desbalanceamento. Tentou-se neste caso o maior número de medidas em deslocamento possível para a discretização utilizada.

Modos	Met.	u (Kg.m)	Fs(graus)	k (N/m)	d (N.s/m)	b (m)	Fs(graus)
Modo 1	H	8,0007E-03	179,999	18175,32	13,482	2,146E-05	181,827
	\hat{H}	8,0000E-03	180,005	18175,08	13,481	2,001E-05	180,029
	Teo.	8E-03	180	18174,62	13,481	2E-05	180
Modo 2	H	10,000E-03	300,008	269439,7	51,907	3,999E-05	300,023
	\hat{H}	10,000E-03	300,008	269440,0	51,907	4,001E-05	300,009
	Teo.	10E-03	300	269440,0	51,907	4E-05	300
Modo 3	H	12,000E-03	60,002	1174352	108,36	5,021E-05	174,897
	\hat{H}	12,000E-03	60,000	1174354	108,36	5,890E-05	60,097
	Teo.	12E-03	60	1174355	108,36	6E-05	60

Tabela 4.26: Parâmetros Identificados-S22

4.5.4 Simulação 23

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 3, 4, 6, 7 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.42), (4.43), (4.44) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.45), (4.46), (4.47) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.48), (4.49), (4.50) mostram os resultados obtidos para o 3º modo em 3 velocidades de rotação

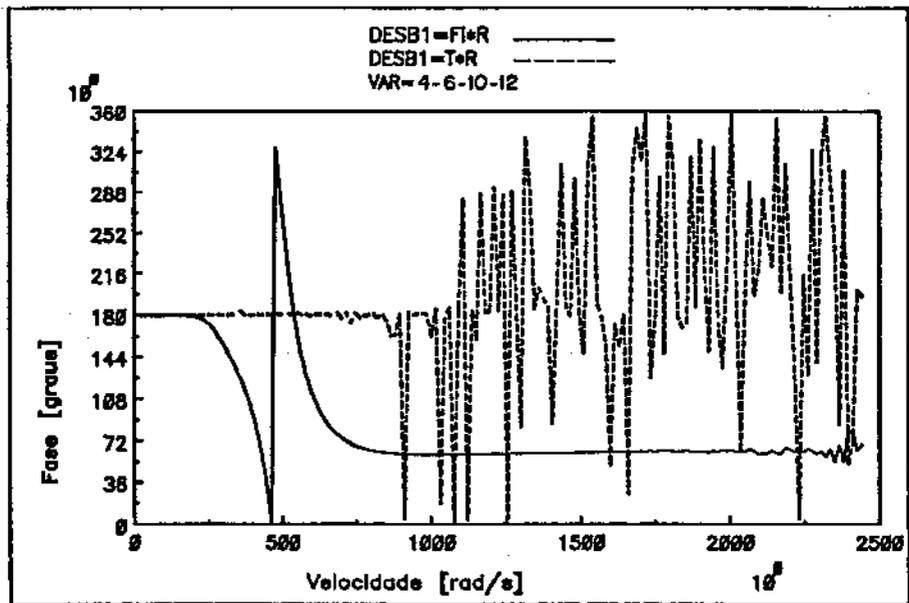
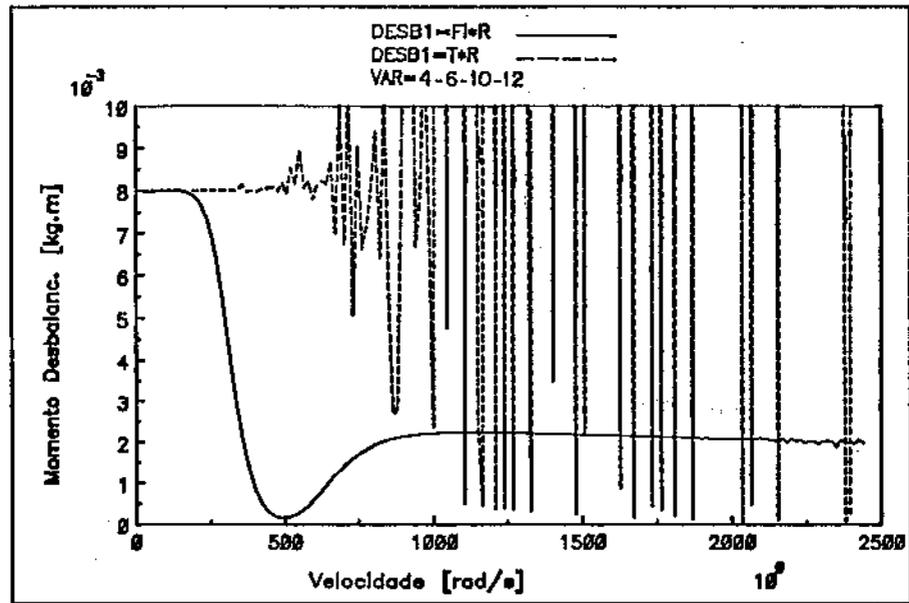


Figura 4.42: Valores de Momento de Balanceamento-u1 Identificados Modo 1-S23

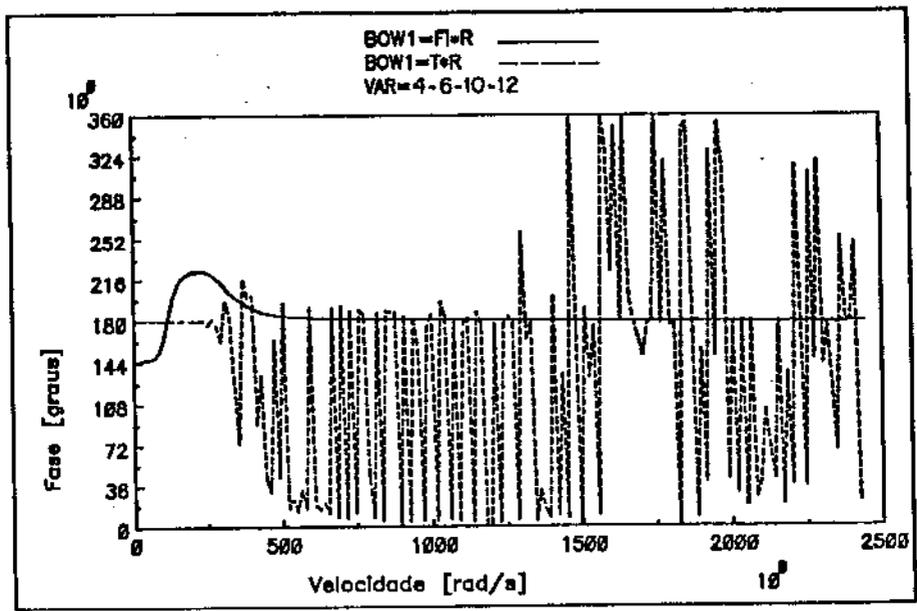
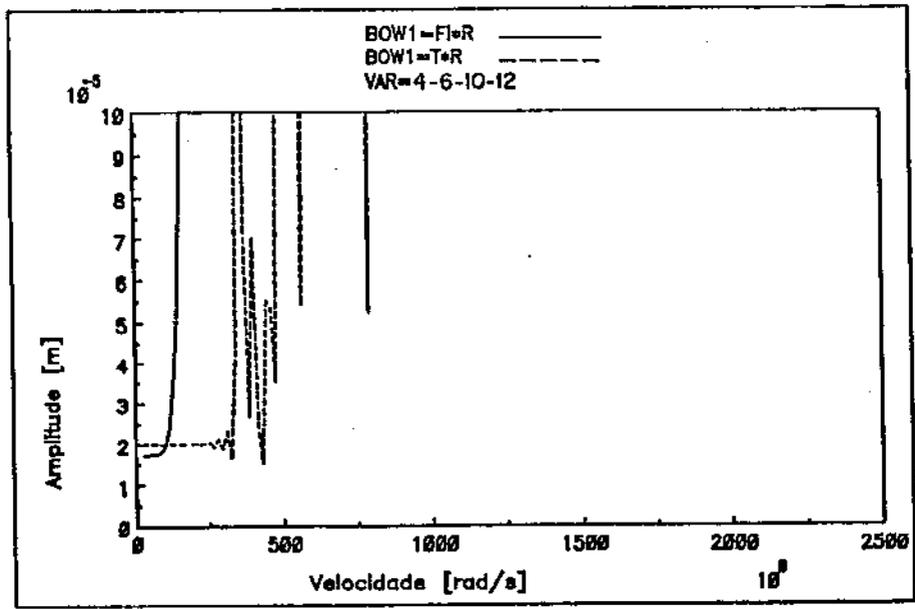


Figura 4.43: Valores de Empenamento-b1 Identificados Modo 1-S23

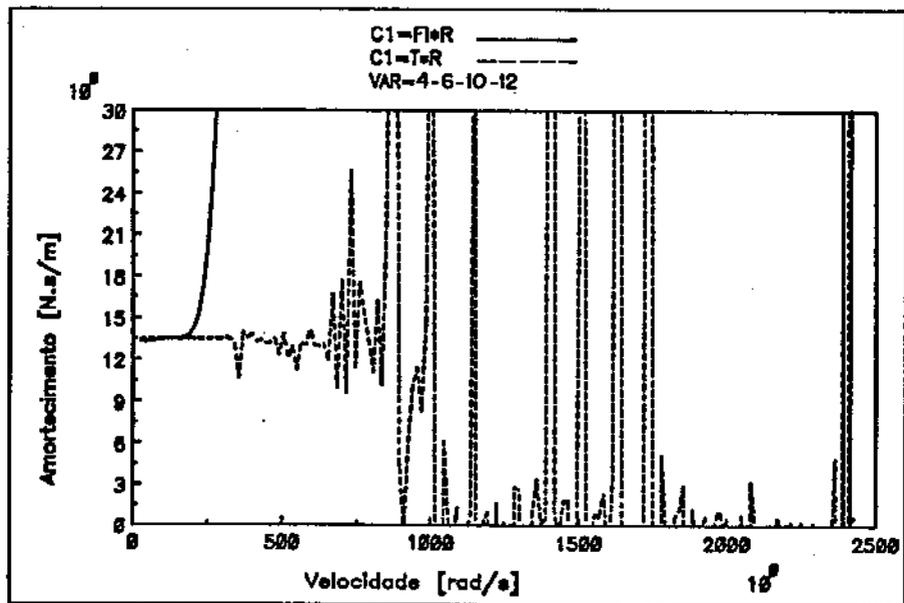
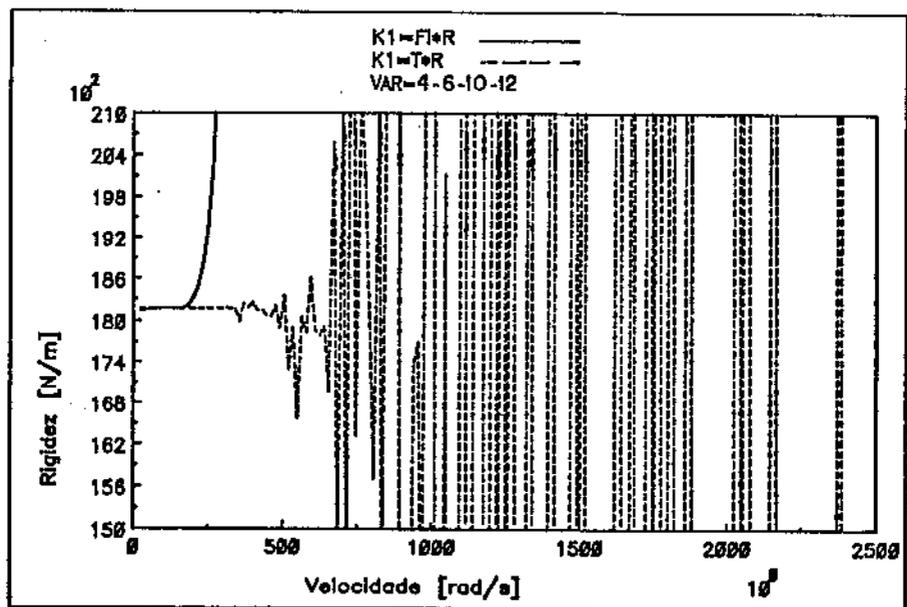


Figura 4.44: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S23

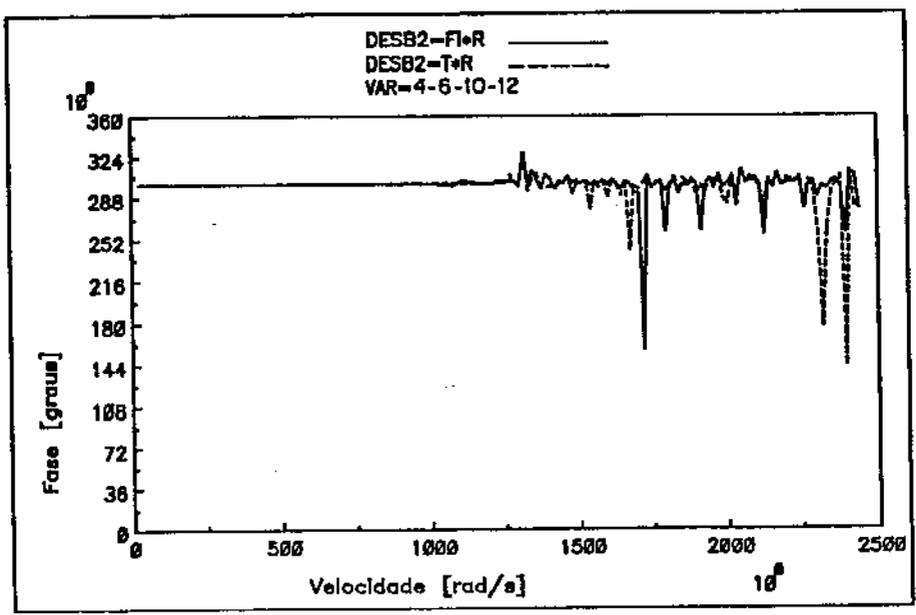
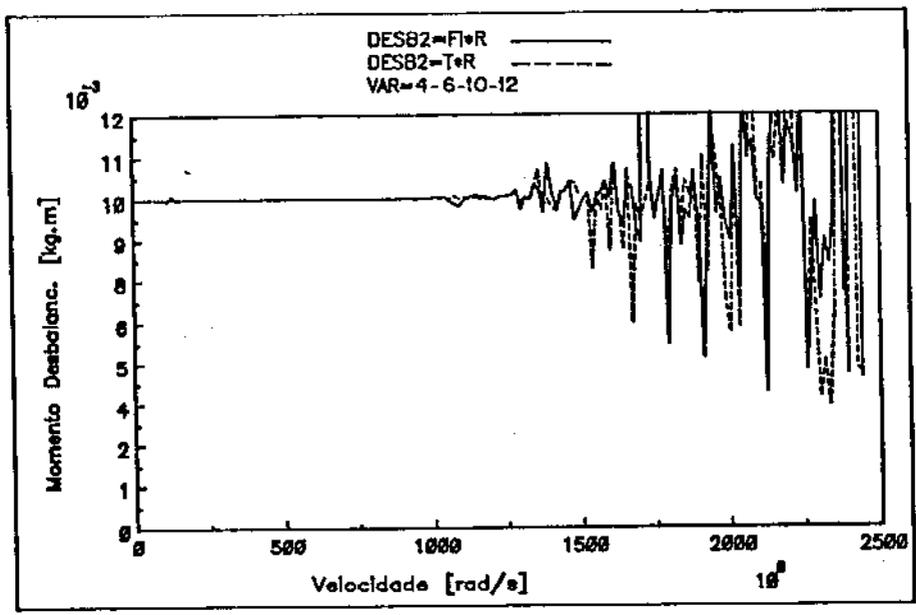


Figura 4.45: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S23

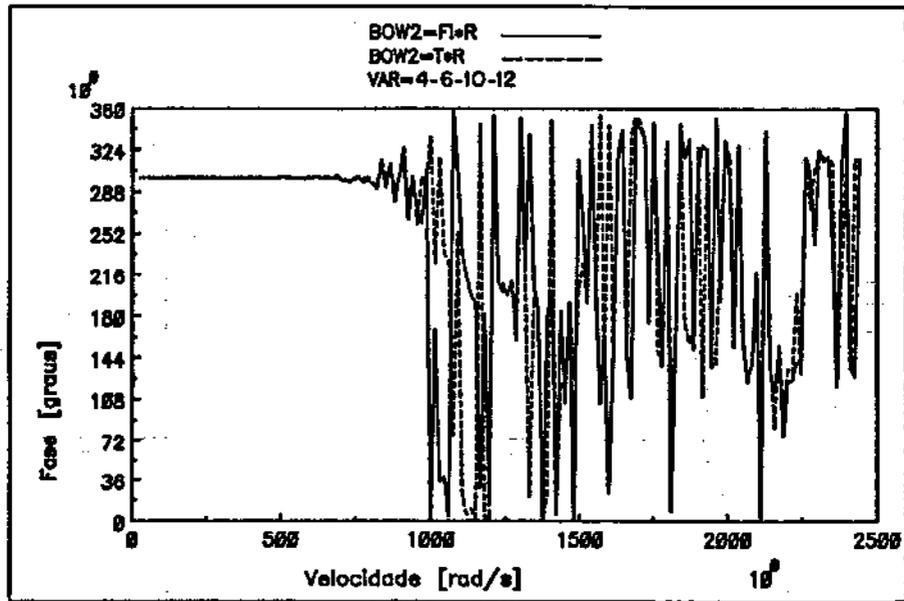
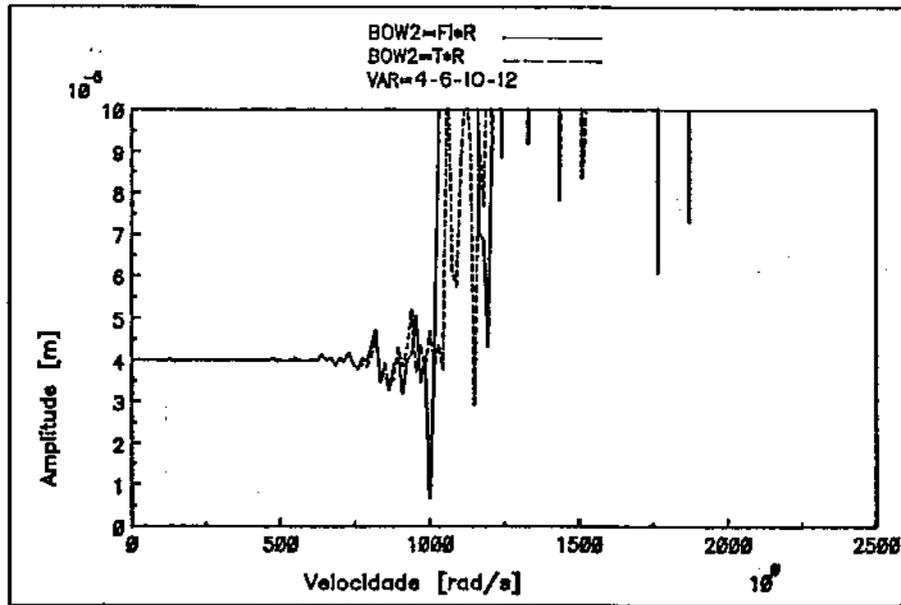


Figura 4.46: Valores de Empenamento-b2 Identificados Modo 2-S23

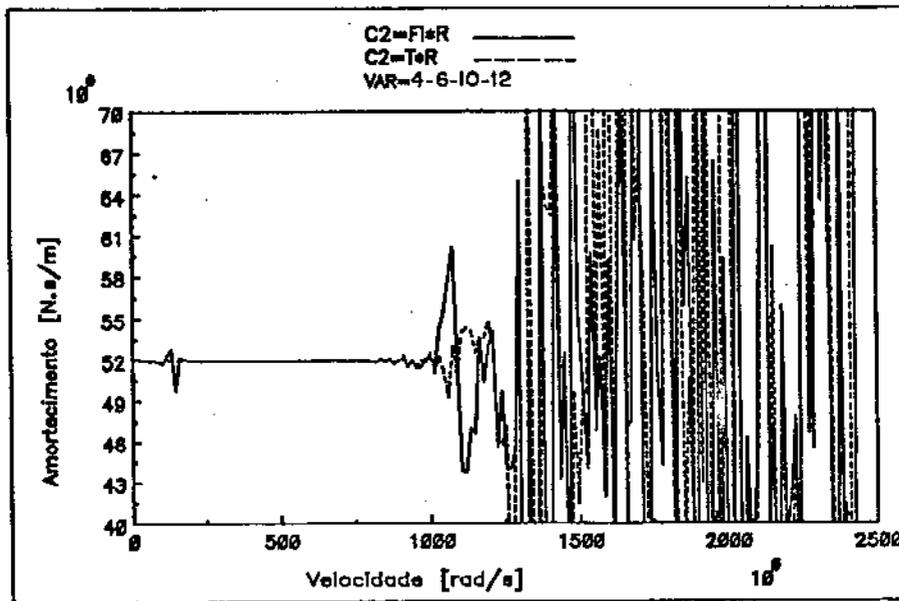
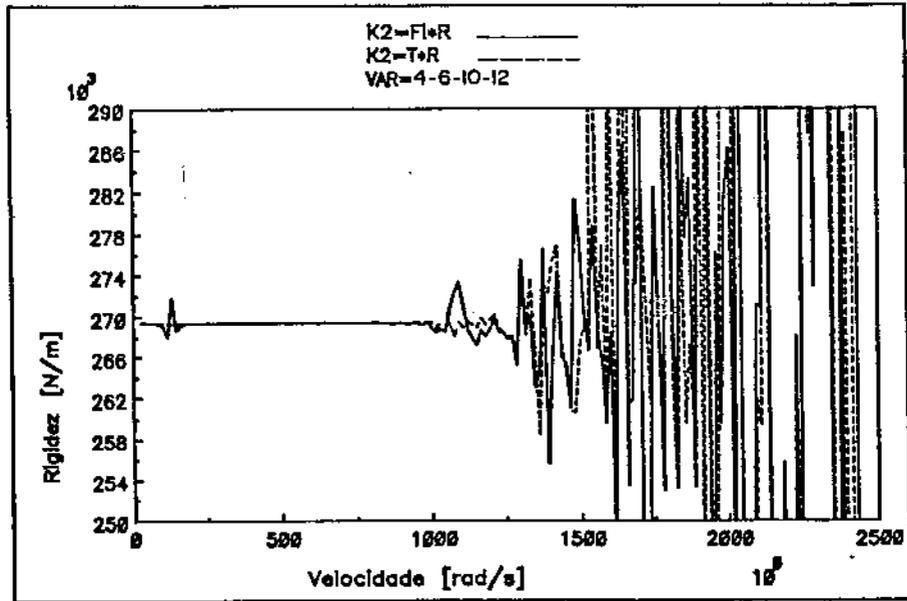


Figura 4.47: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S23

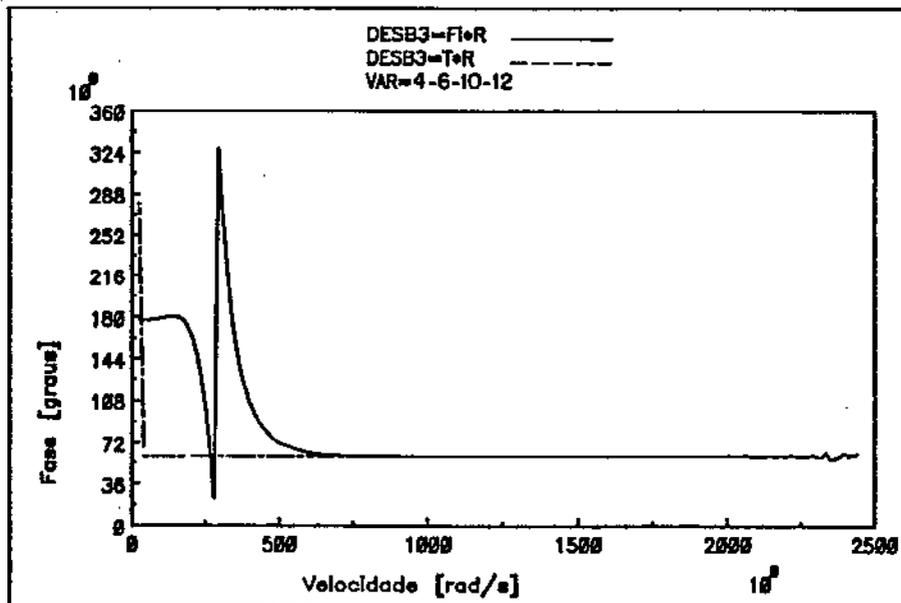
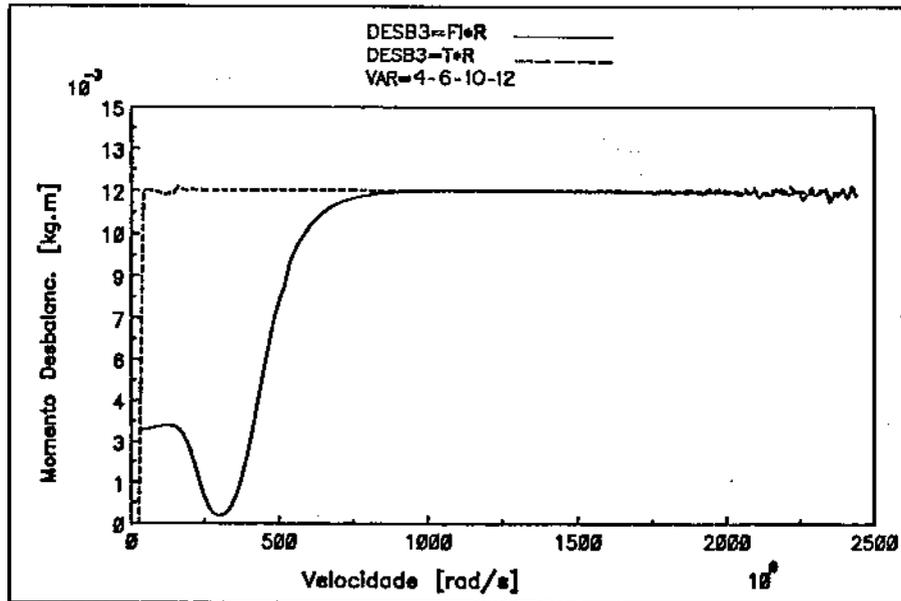


Figura 4.48: Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S23

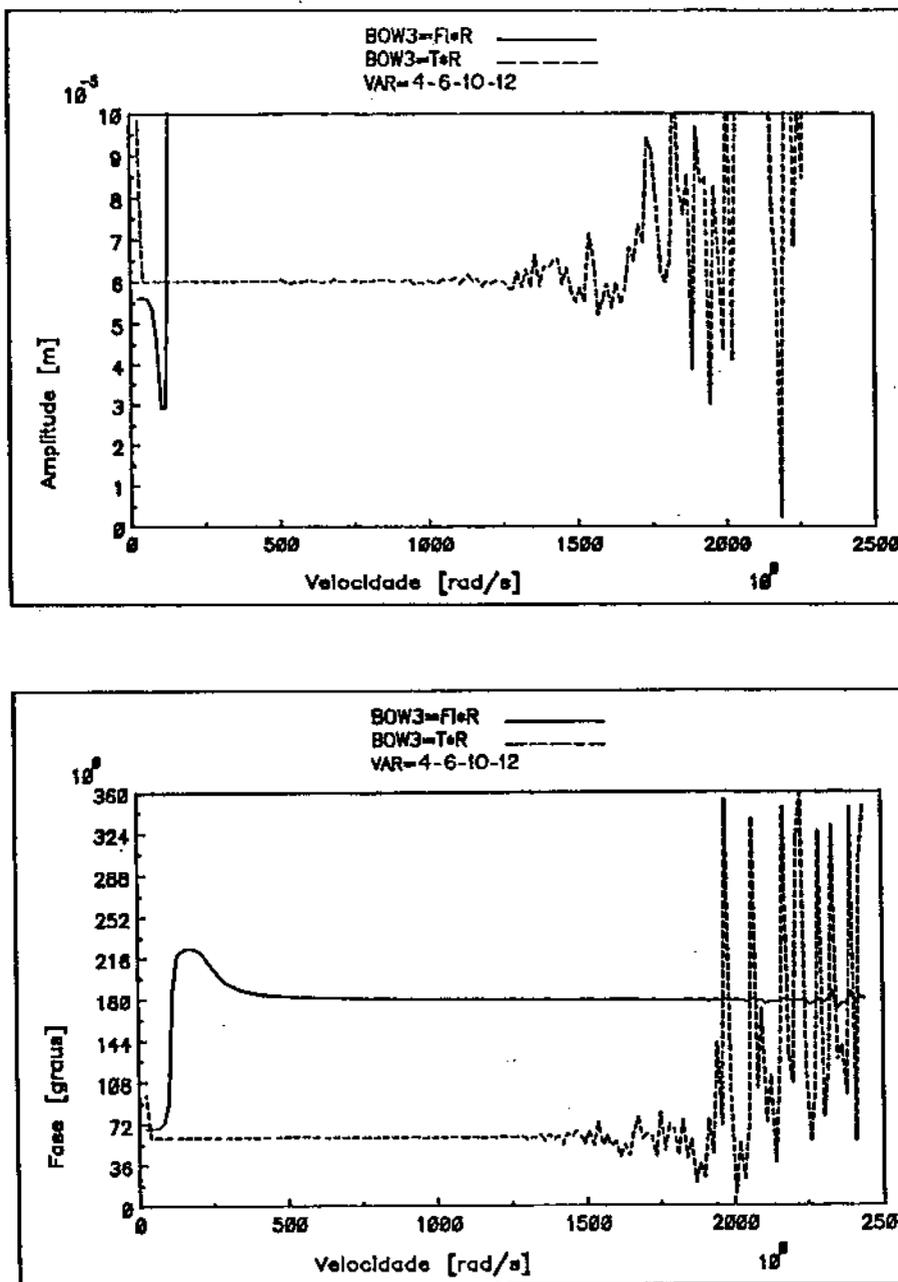


Figura 4.49: Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S23

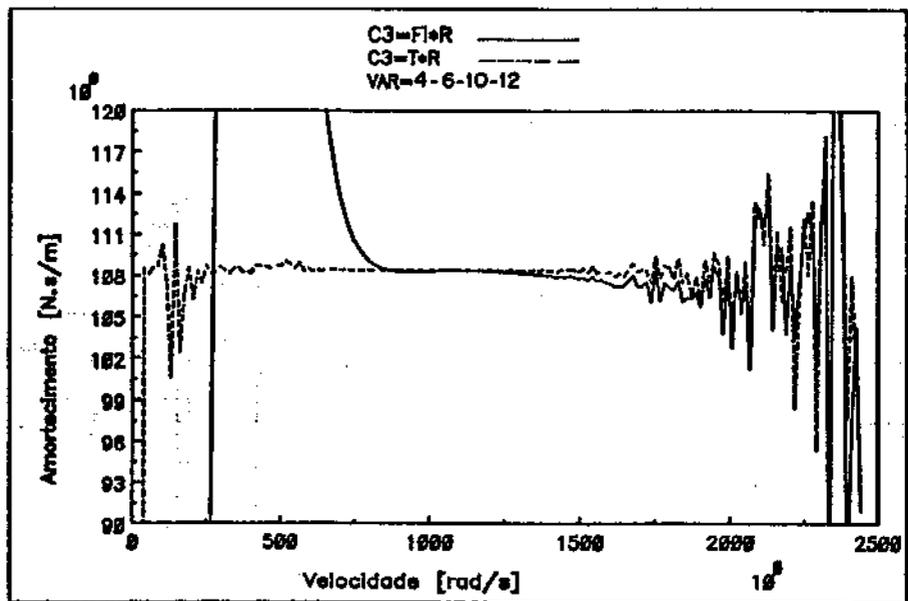
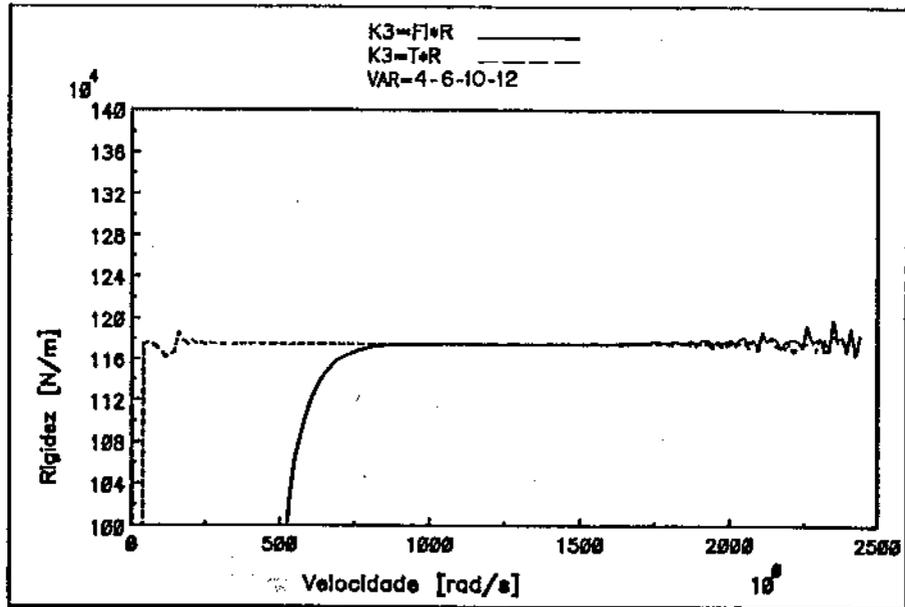


Figura 4.50: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S23

4.5.5 Simulação 24

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 2,3,4,5,6,7,8 em 4 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \bar{H} . As figuras (4.51), (4.52), (4.53) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.54), (4.55), (4.56) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.57), (4.58), (4.59) mostram os resultados obtidos para o 3º modo.

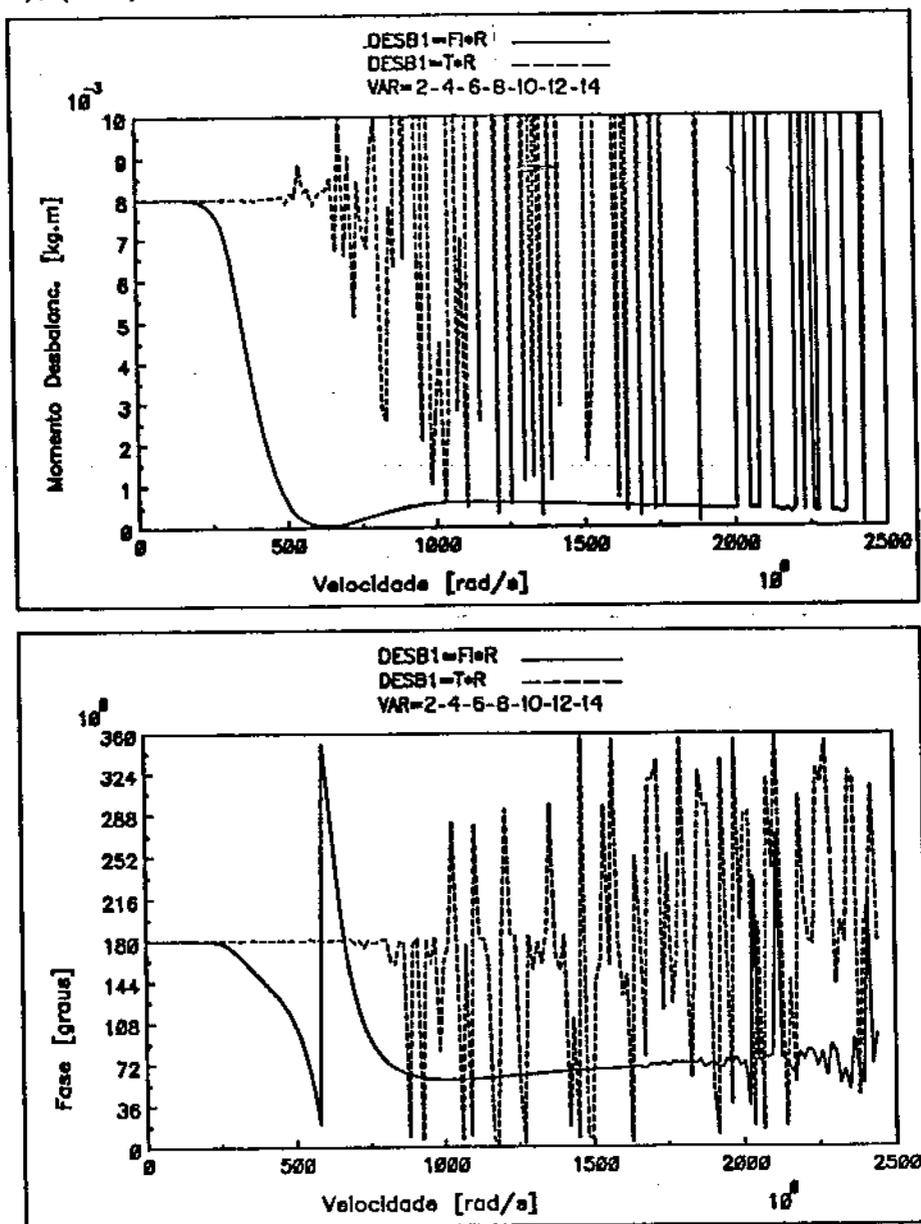


Figura 4.51: Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S24

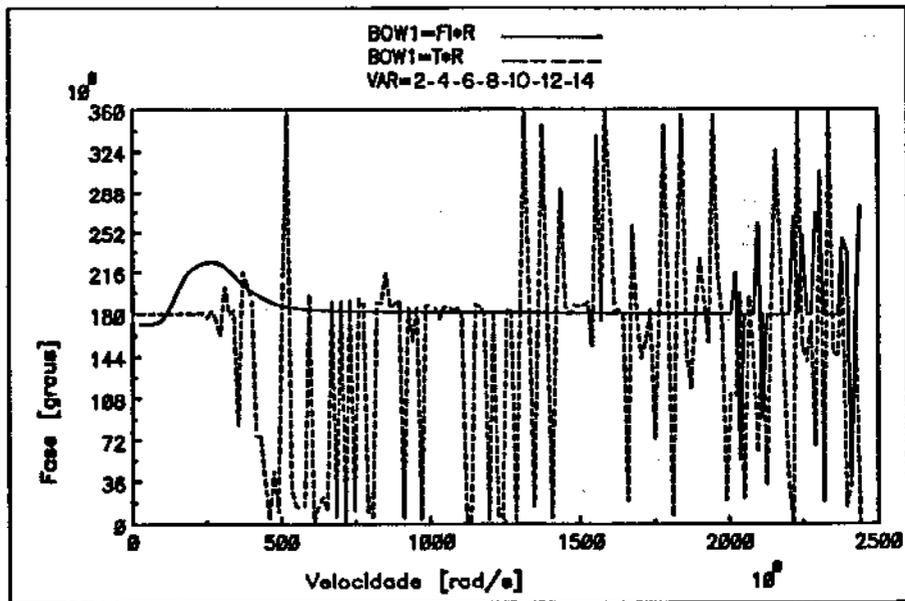
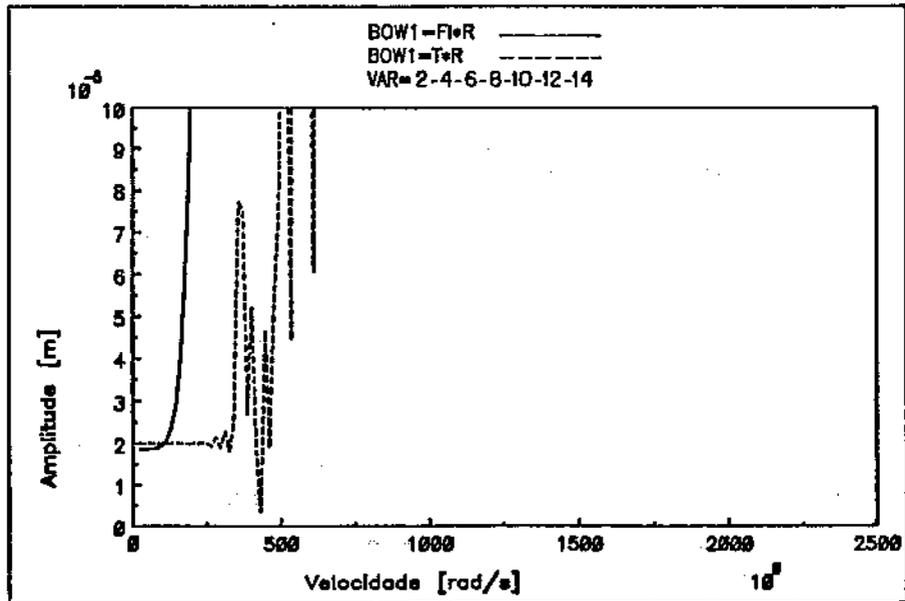


Figura 4.52: Valores de Empenamento-b1 Identificados Modo 1-S24

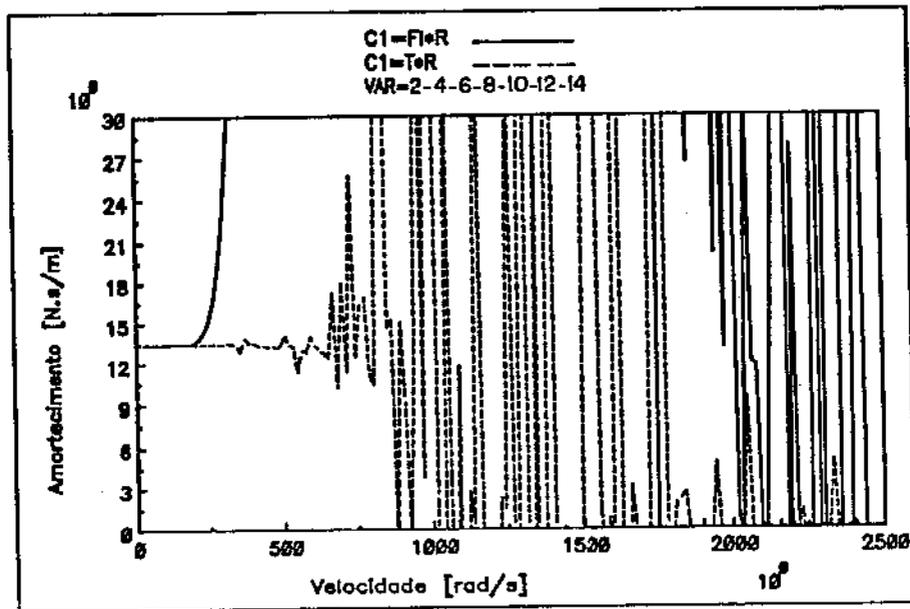
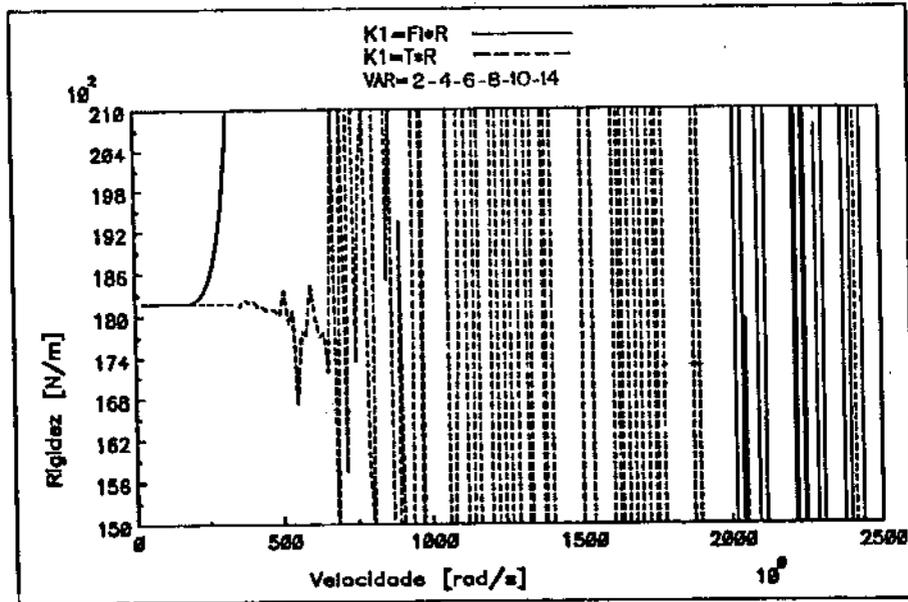


Figura 4.53: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S24

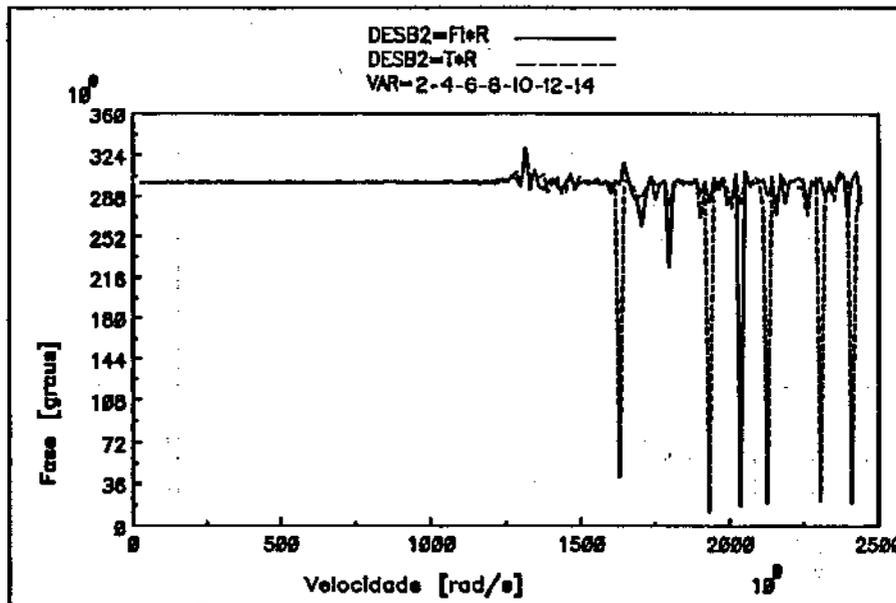
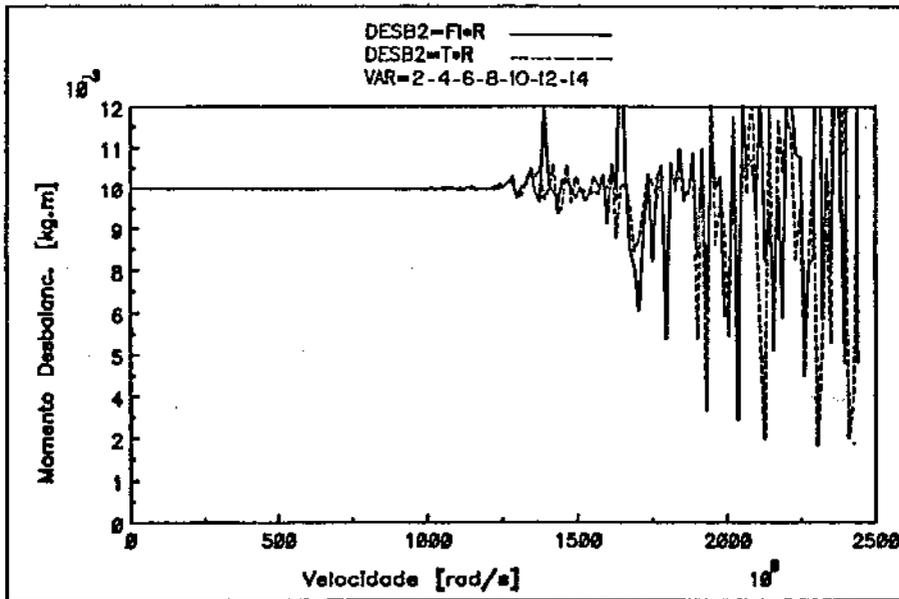


Figura 4.54: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S24

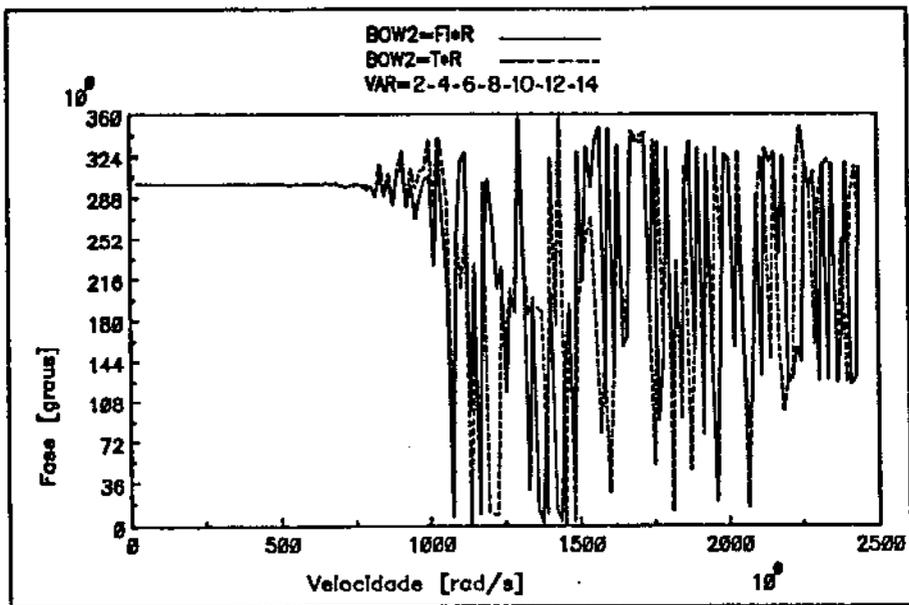
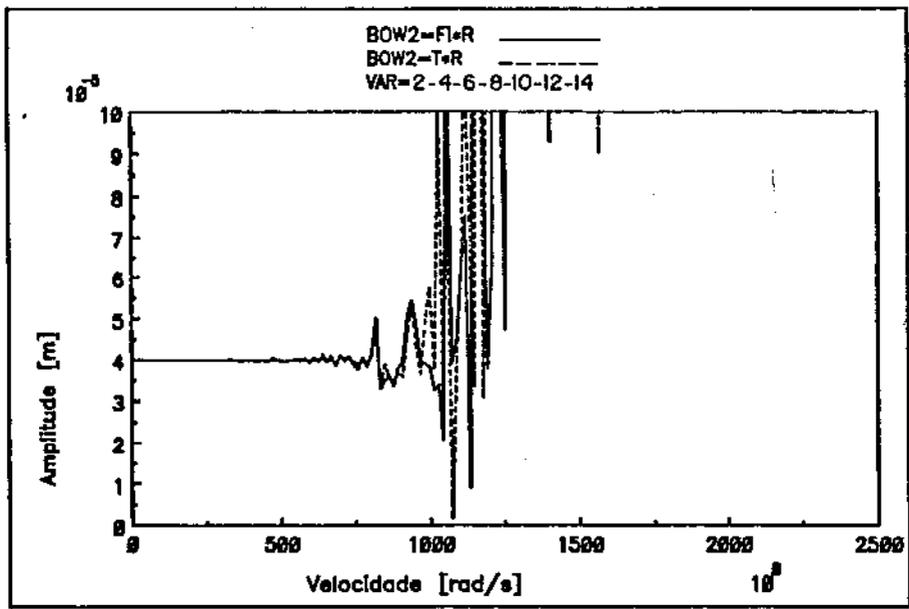


Figura 4.55: Valores de Empenamento-b2 Identificados Modo 2-S24

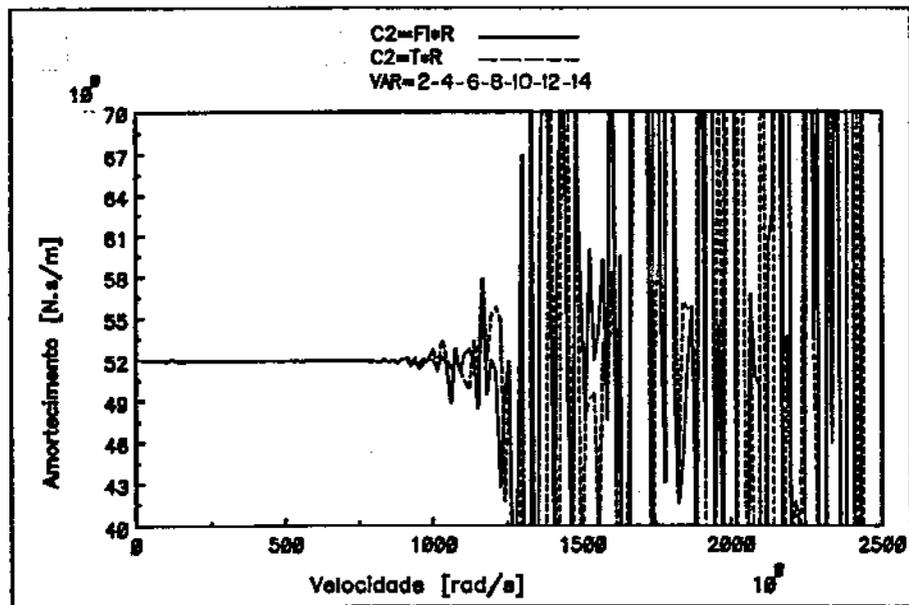
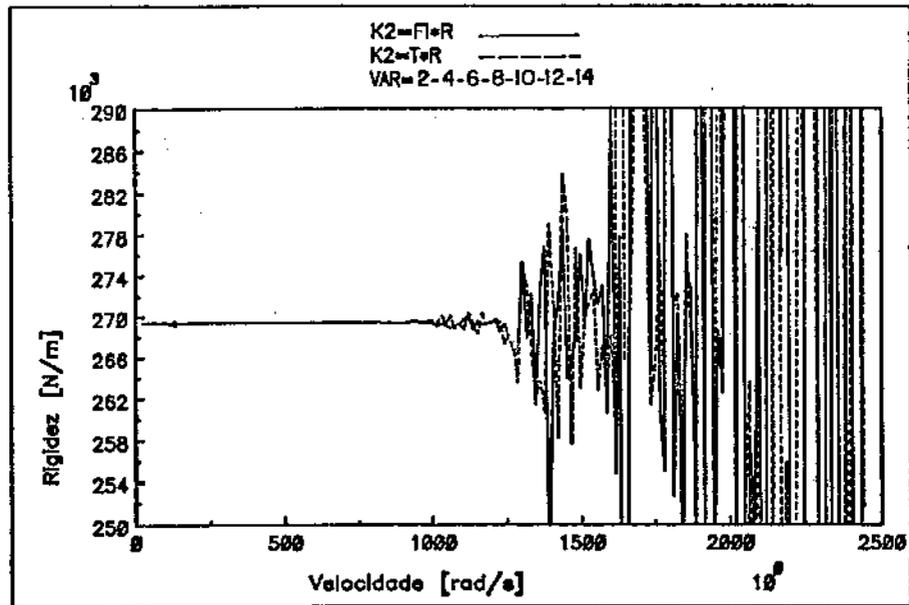


Figura 4.56: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S24

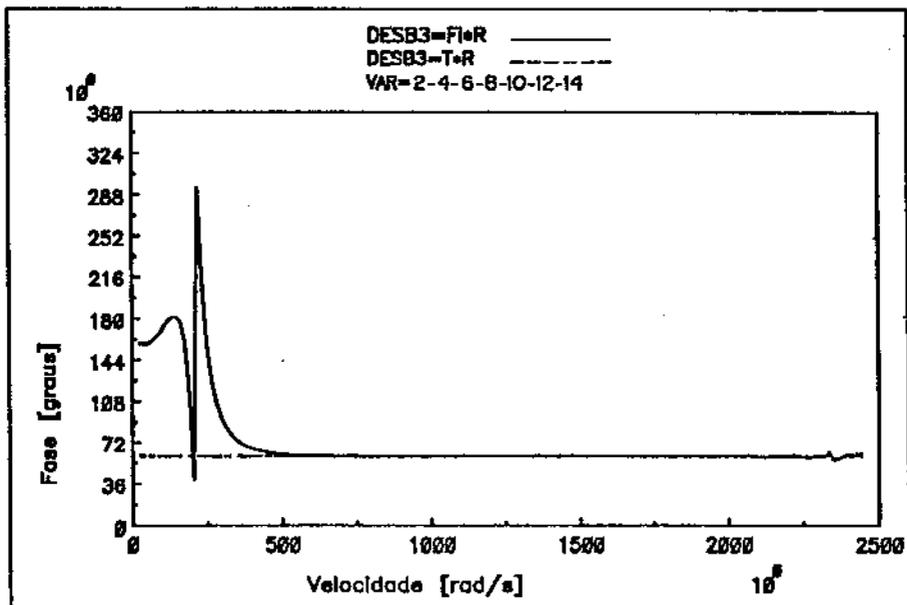
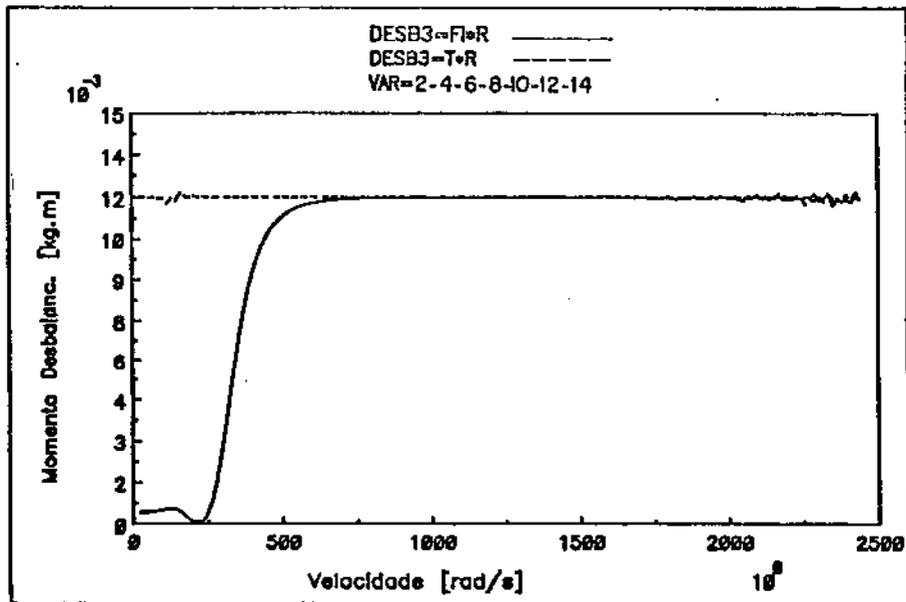


Figura 4.57: Valores de Momento de Balanceamento-u3 Identificados Modo 3-S24

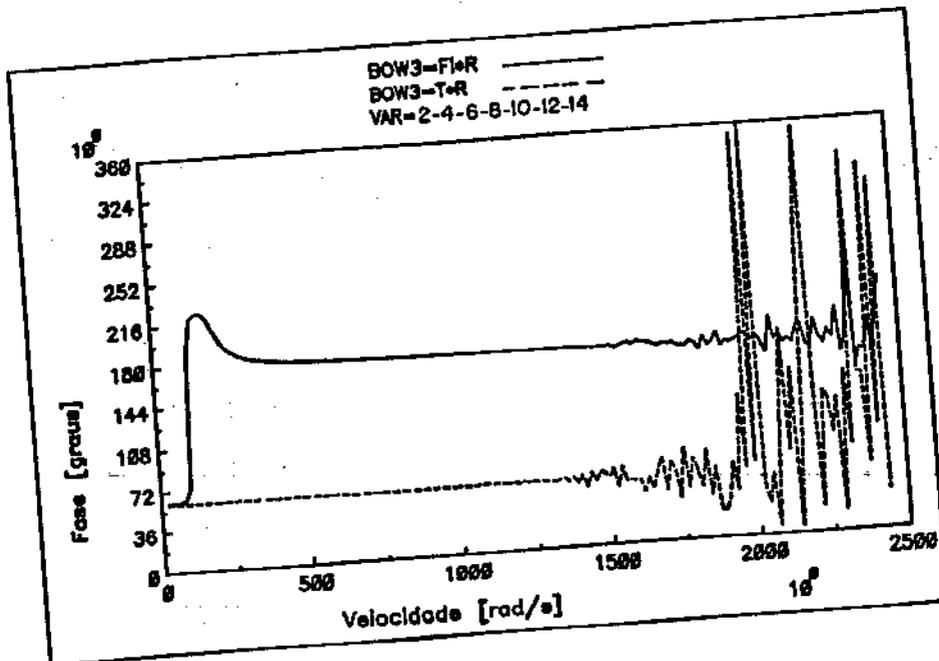
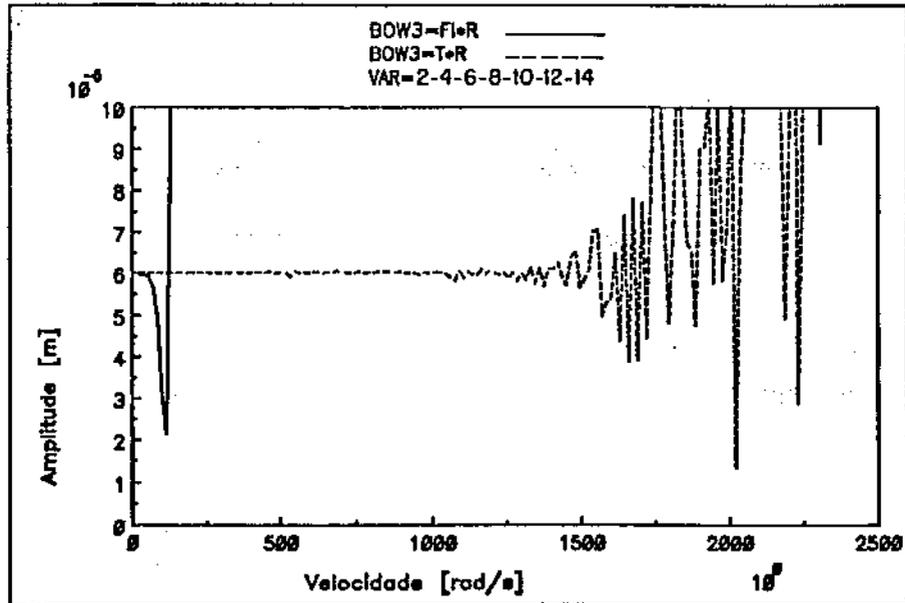


Figura 4.58: Valores de Empenamento- β_3 Identificados Modo 3-S24

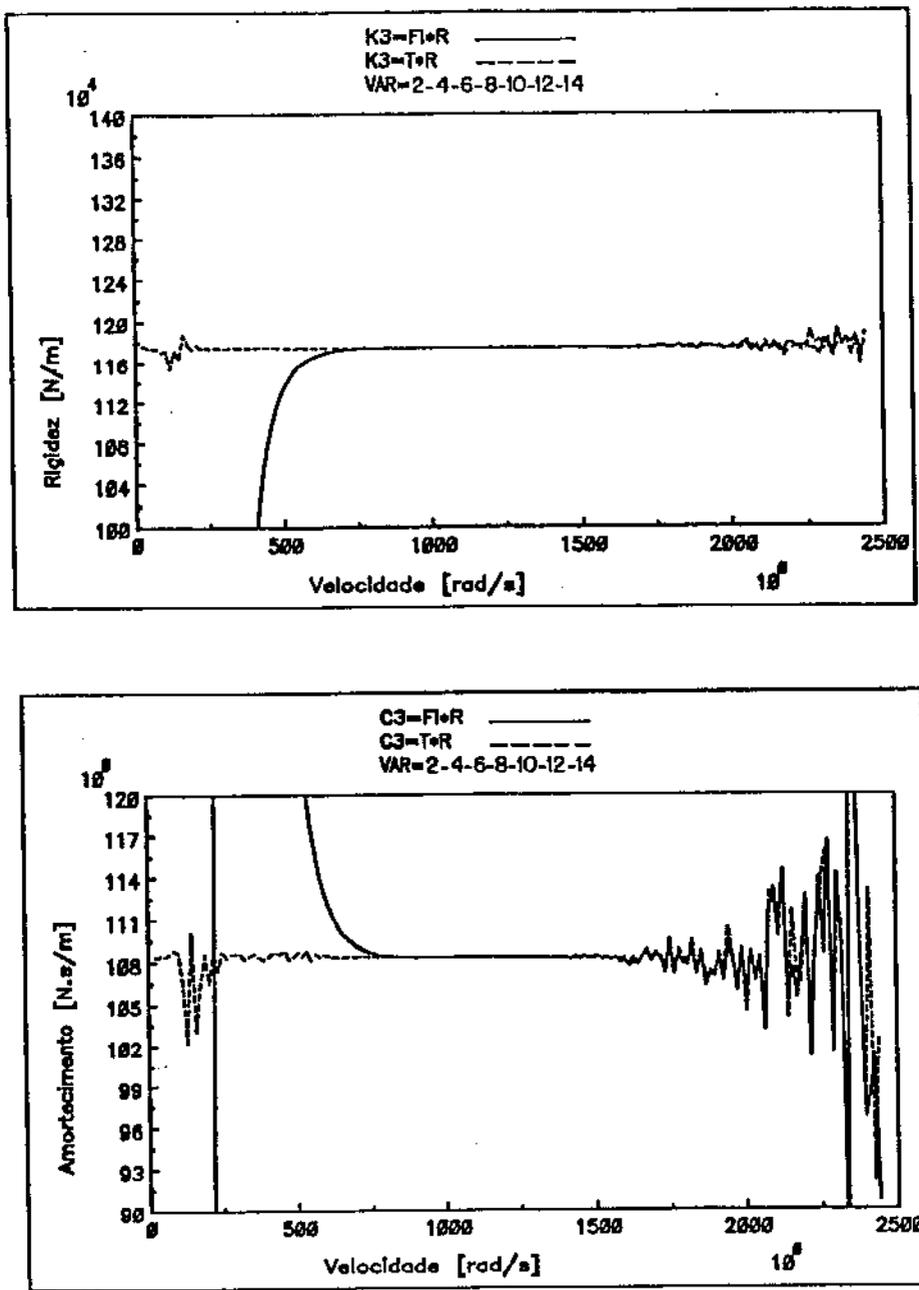


Figura 4.59: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S24

4.5.6 Simulação 25

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 2,3,4,5 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.60), (4.61), (4.62) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.63), (4.64), (4.65) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.66), (4.67), (4.68) mostram os resultados obtidos para o 3º modo.

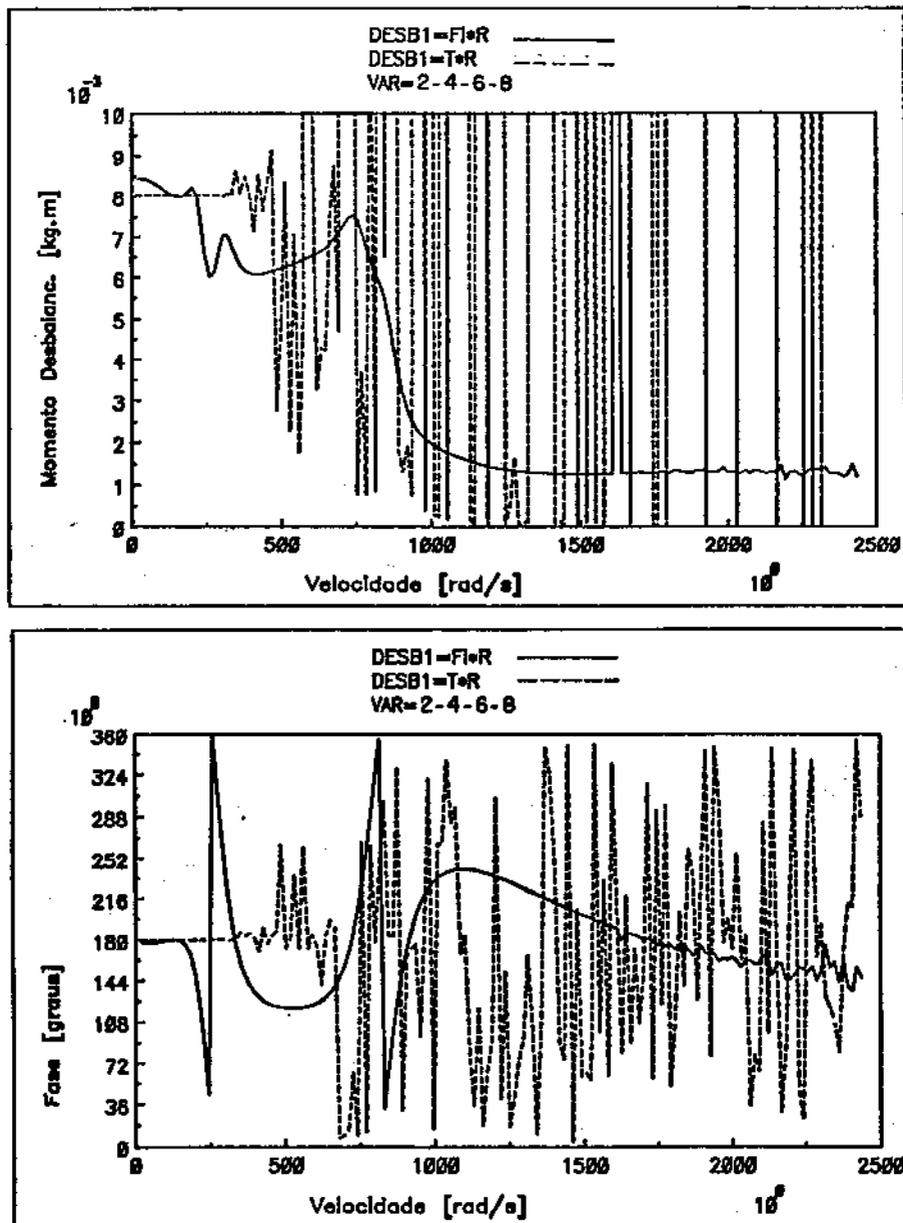


Figura 4.60: Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S25

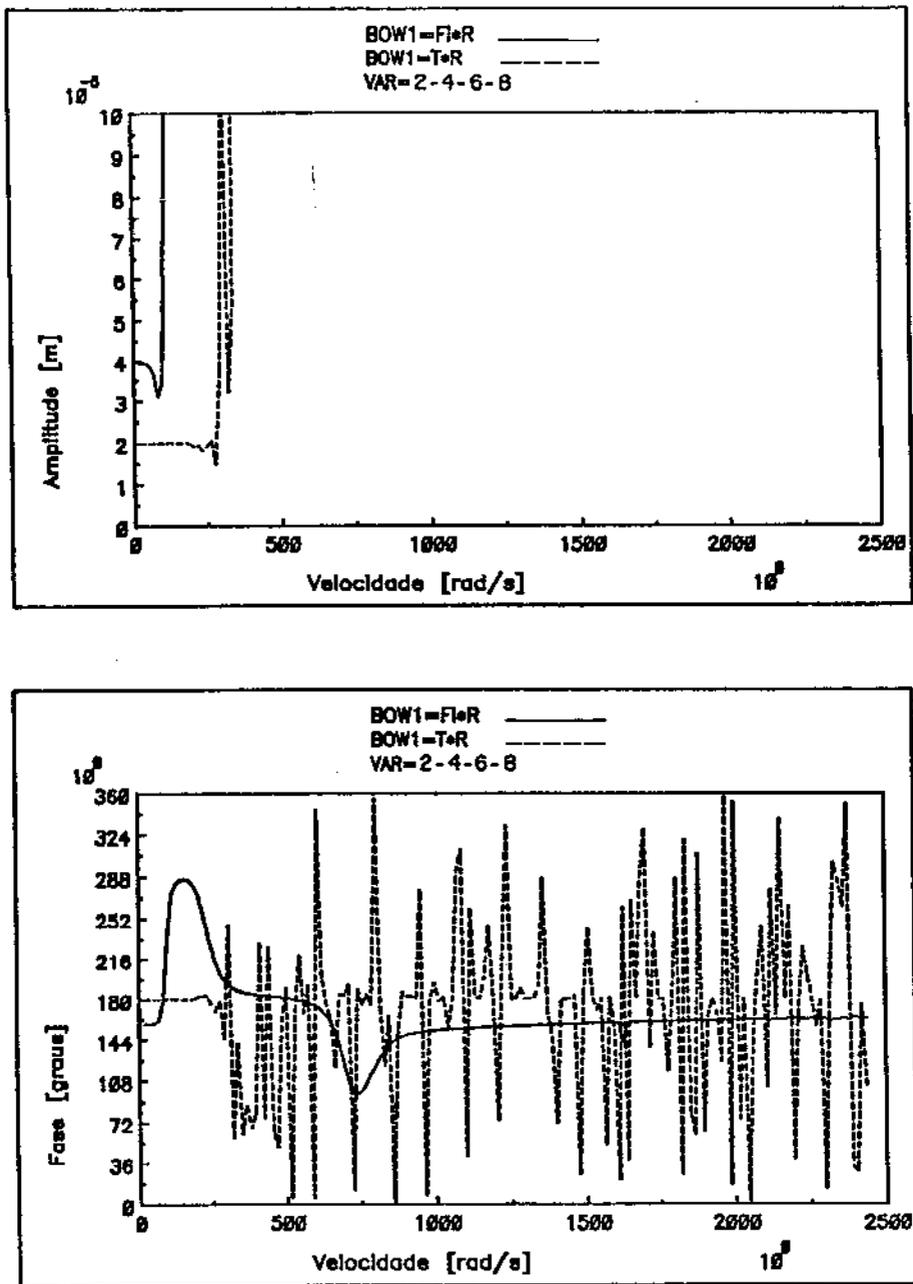


Figura 4.61: Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S25

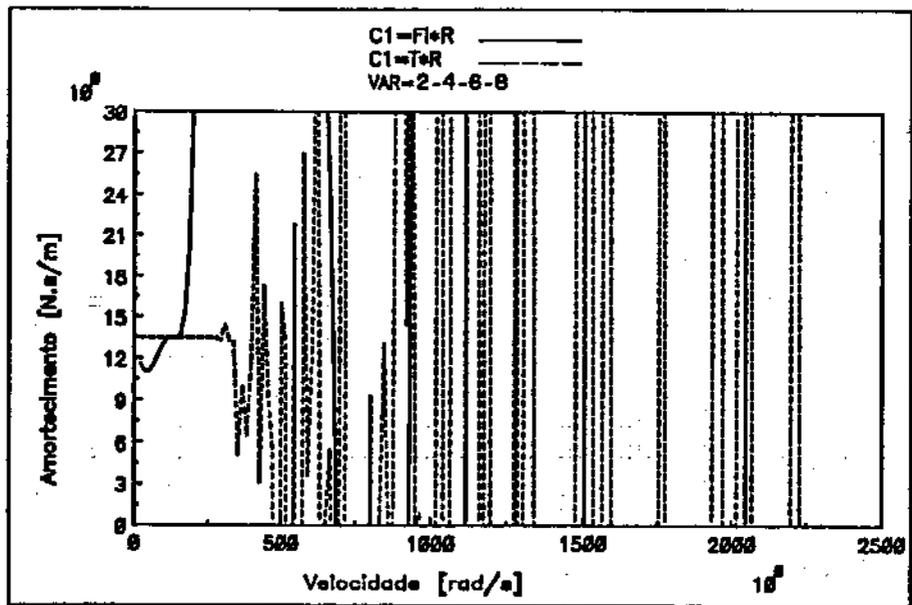
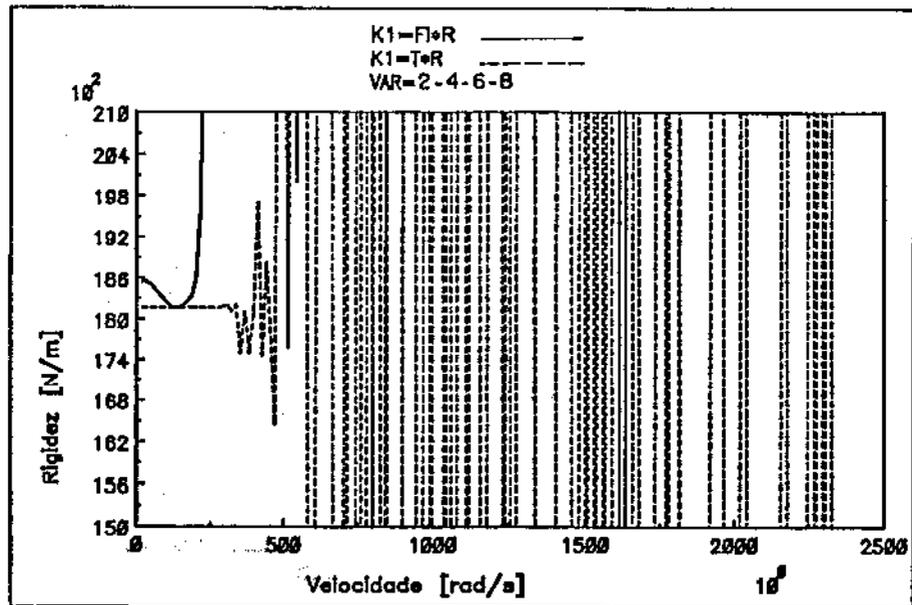


Figura 4.62: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S25

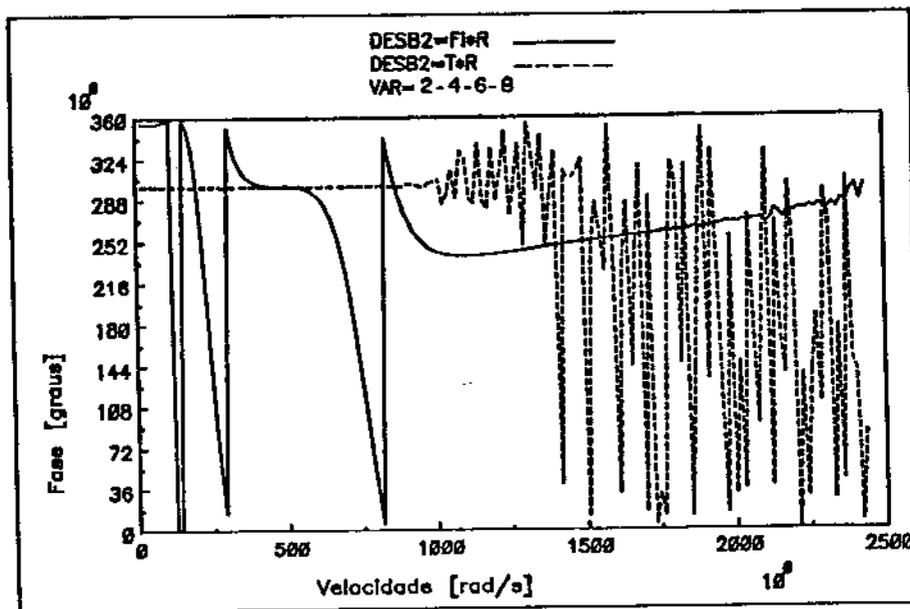
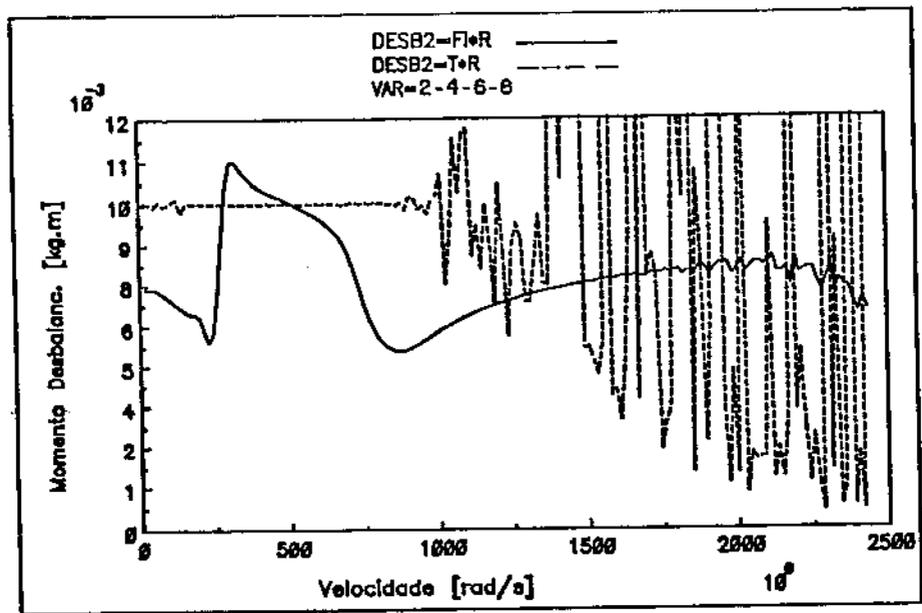


Figura 4.63: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S25

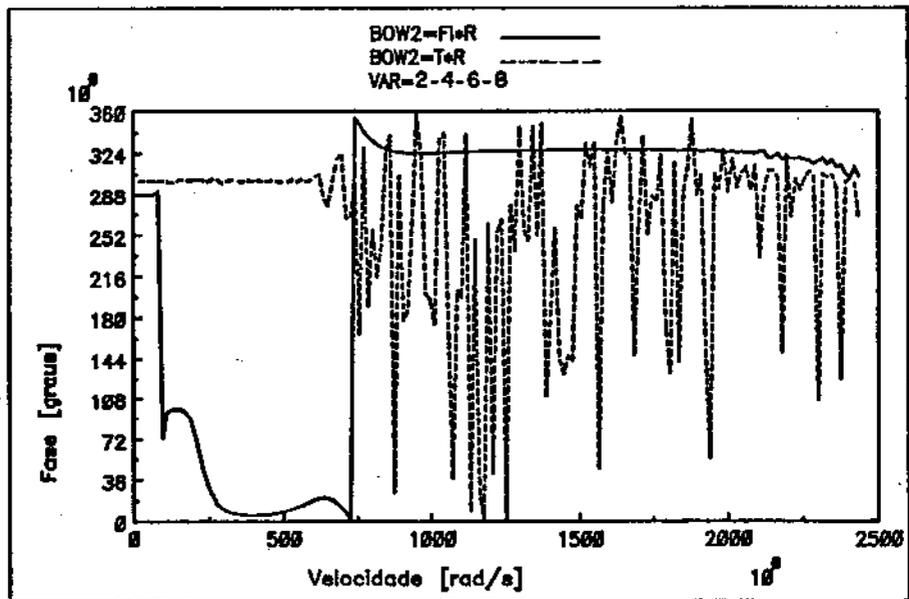
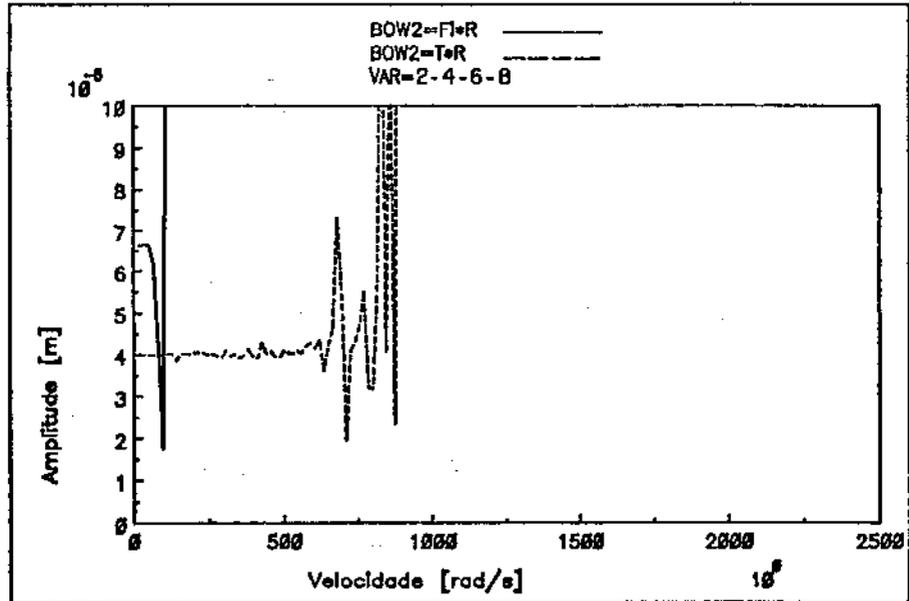


Figura 4.64: Valores de Empenamento-b2 Identificados Modo 2-S25

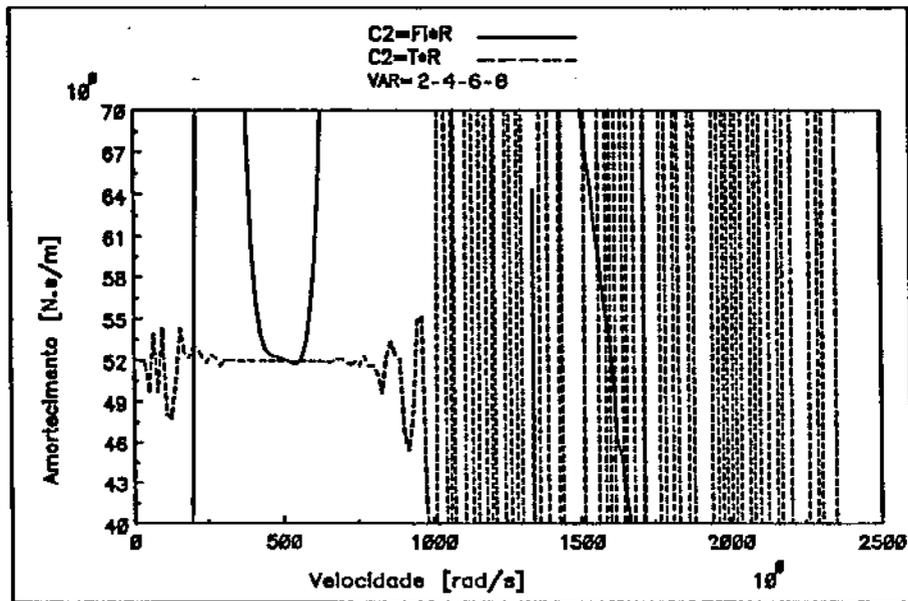
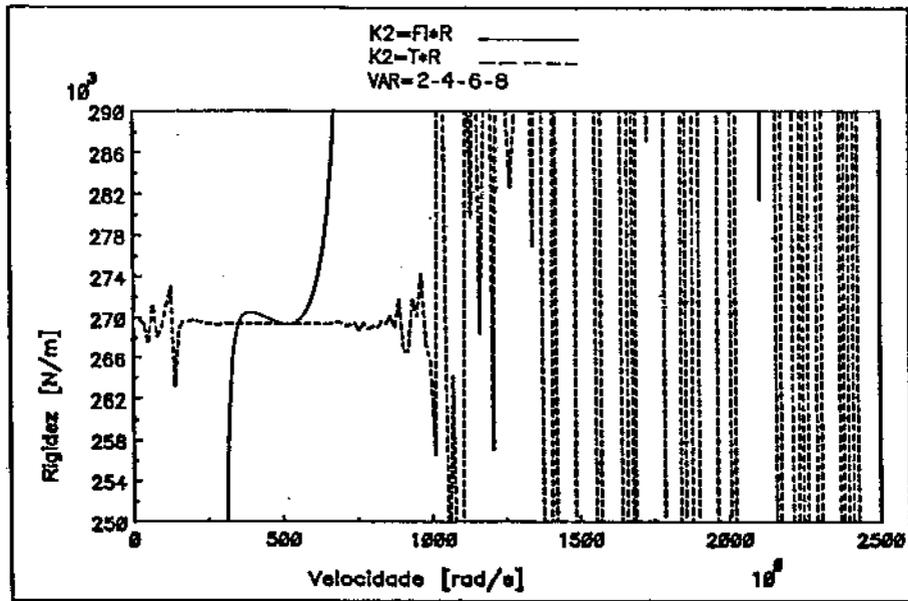


Figura 4.65: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S25

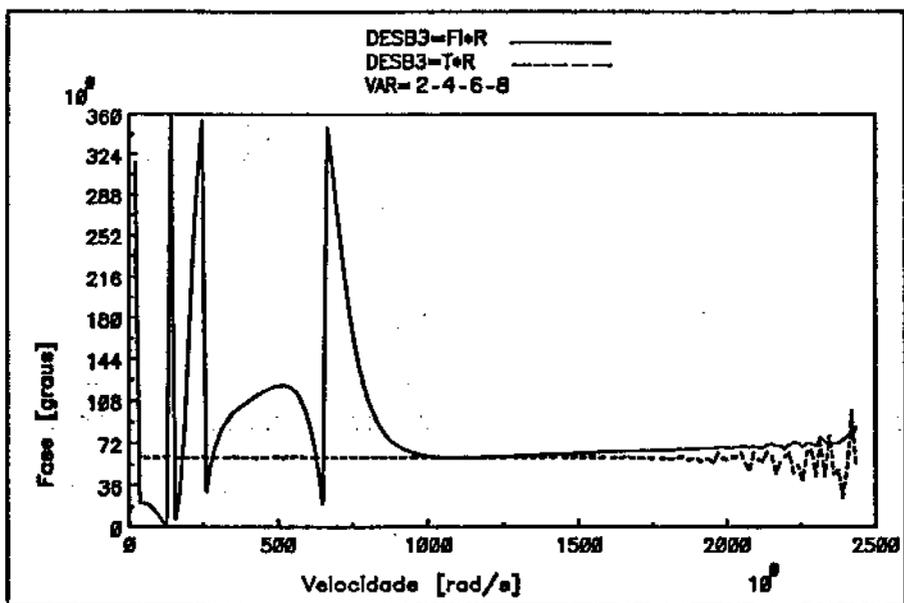
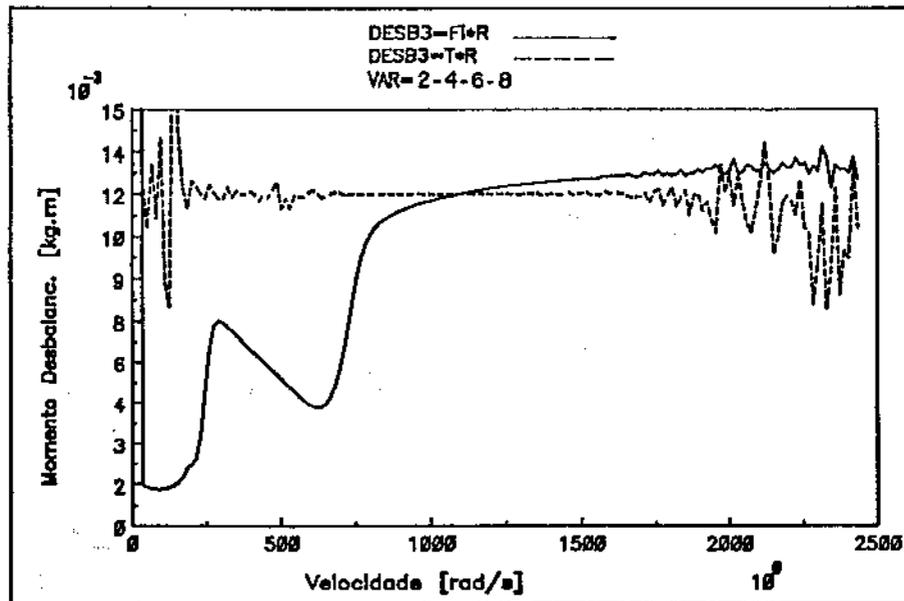


Figura 4.66: Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S25

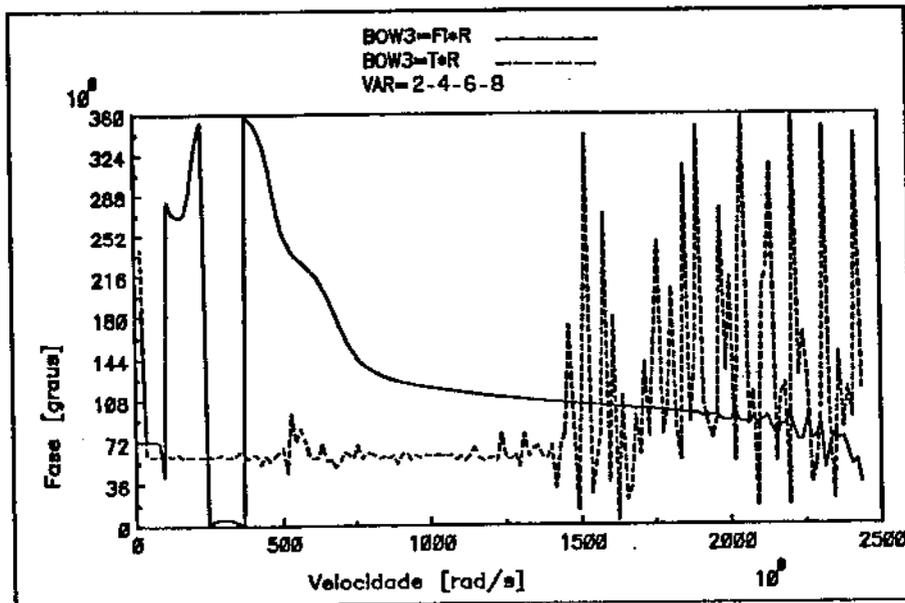
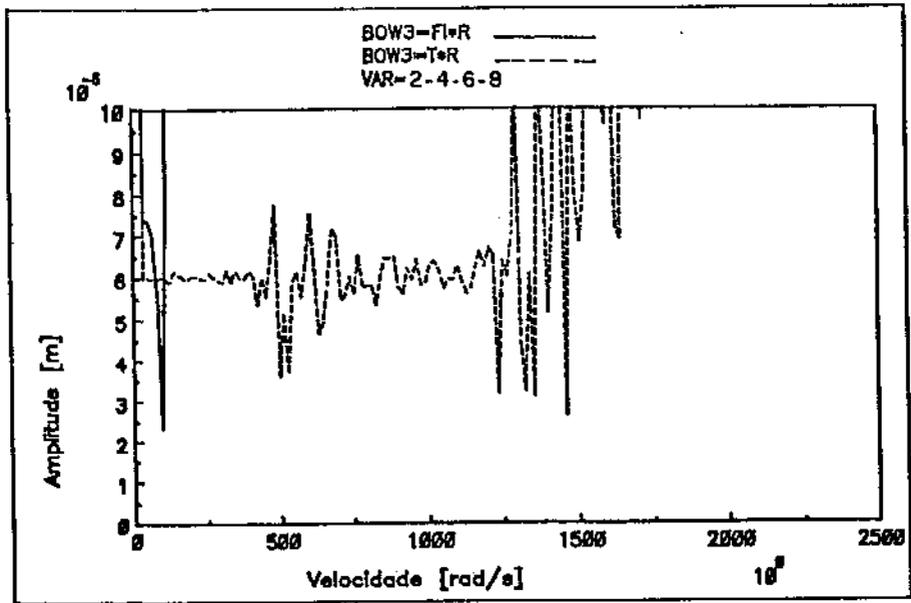


Figura 4.67: Valores de Empenamento-*b3* Identificados Modo 3-S25

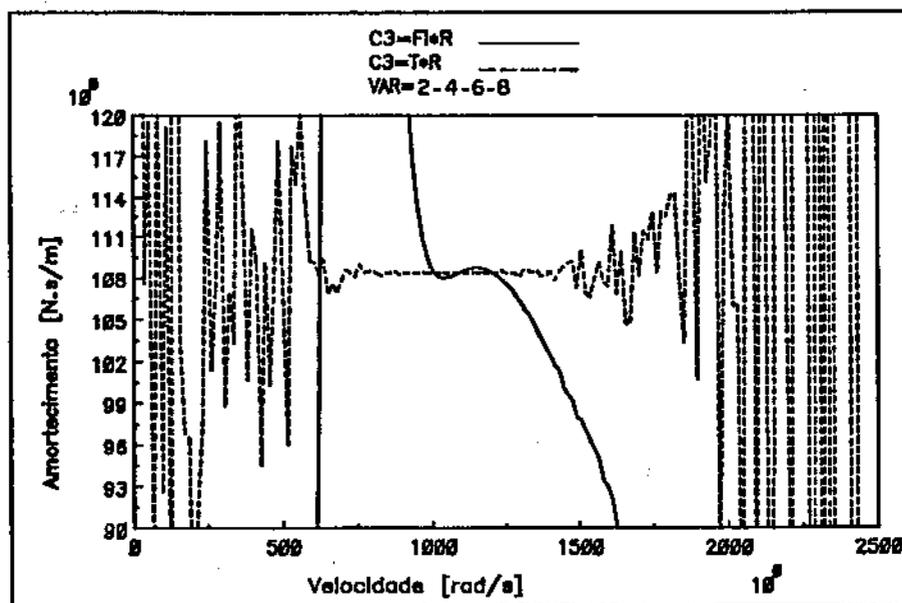
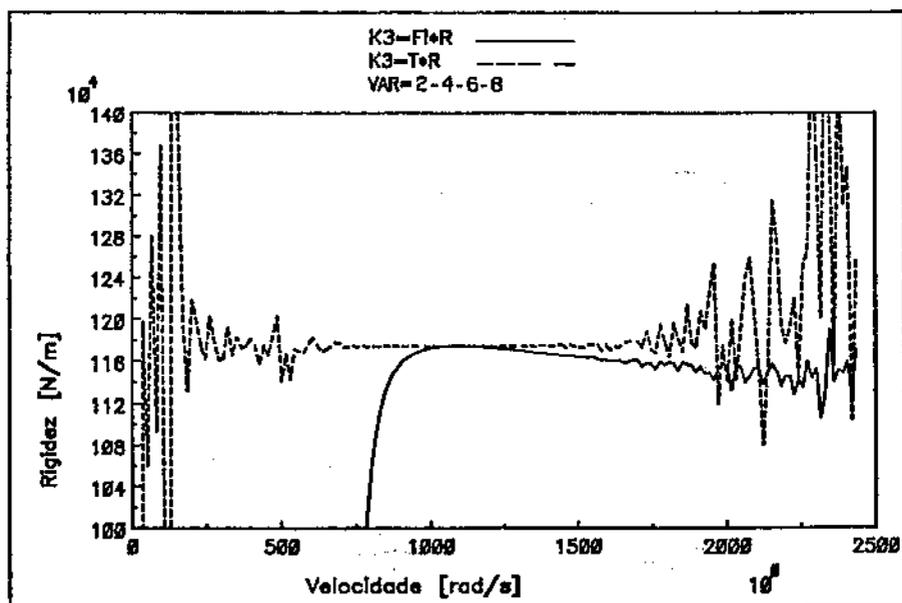


Figura 4.68: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S25

4.5.7 Simulação 26

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foi obtido no plano 3 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.69), (4.70), (4.71) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.72), (4.73), (4.74) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.75), (4.76), (4.77) mostram os resultados obtidos para o 3º modo.

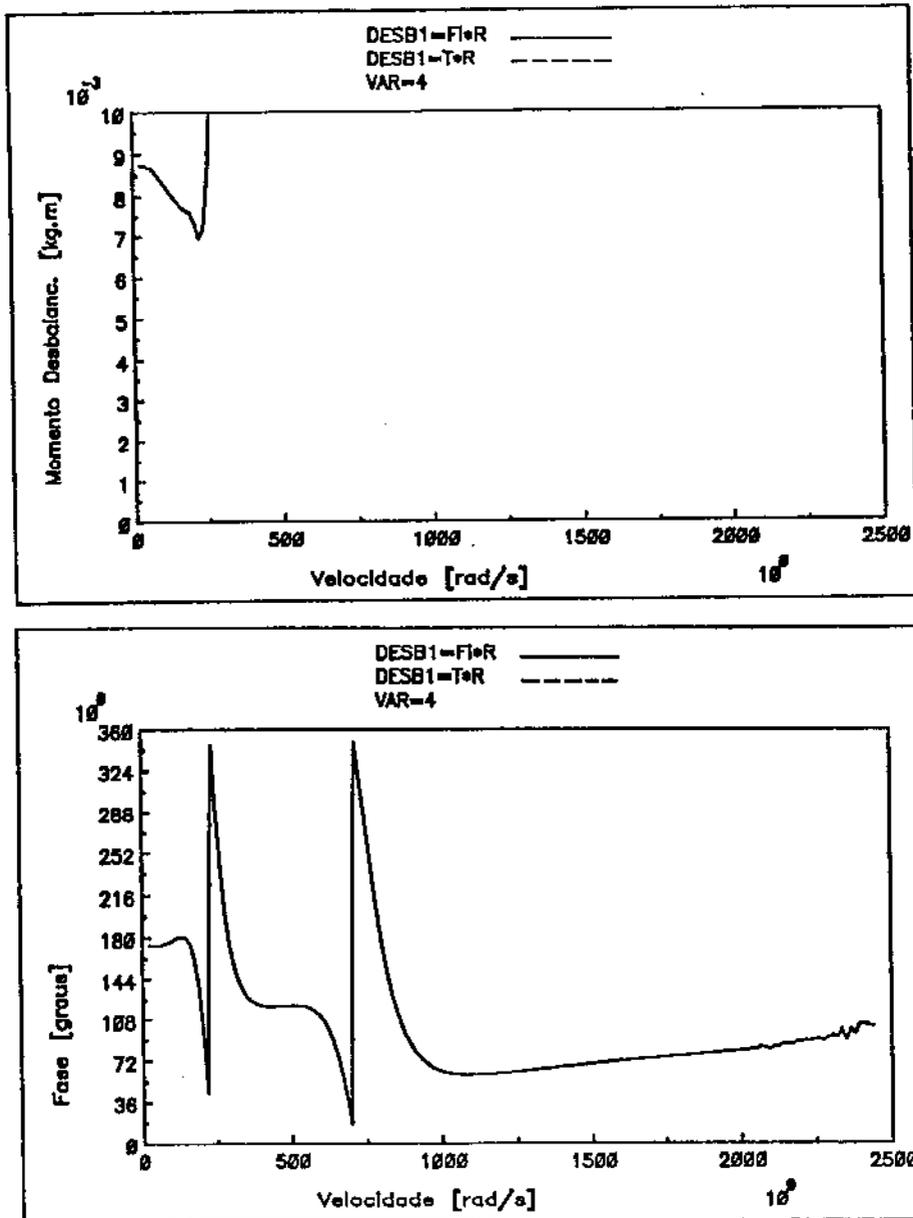


Figura 4.69: Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S26

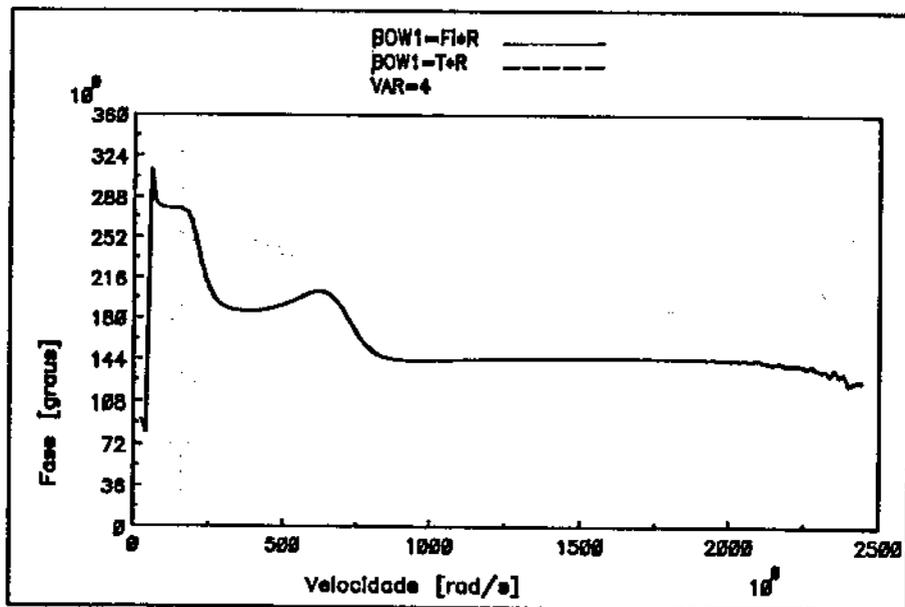
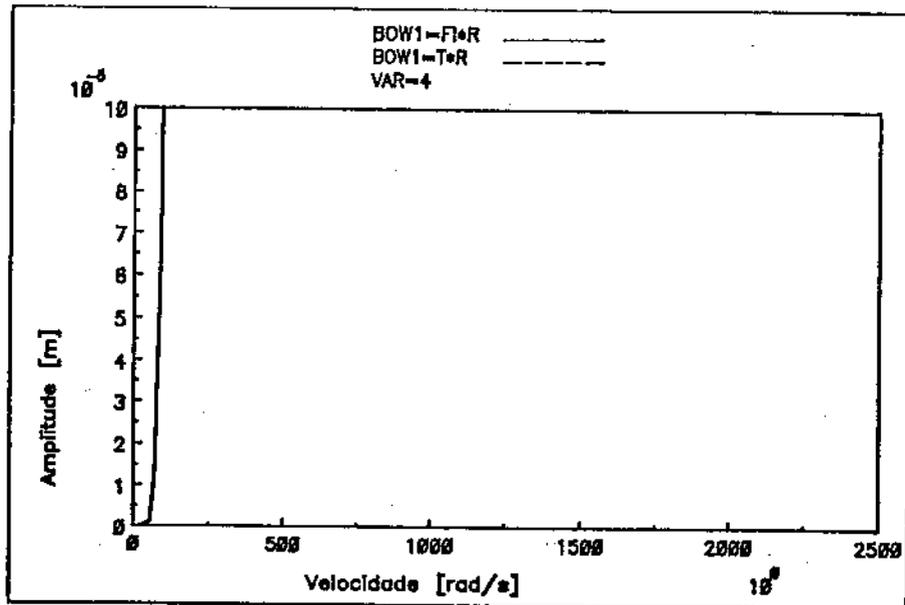


Figura 4.70: Valores de Empenamento-b1 Identificados Modo 1-S26

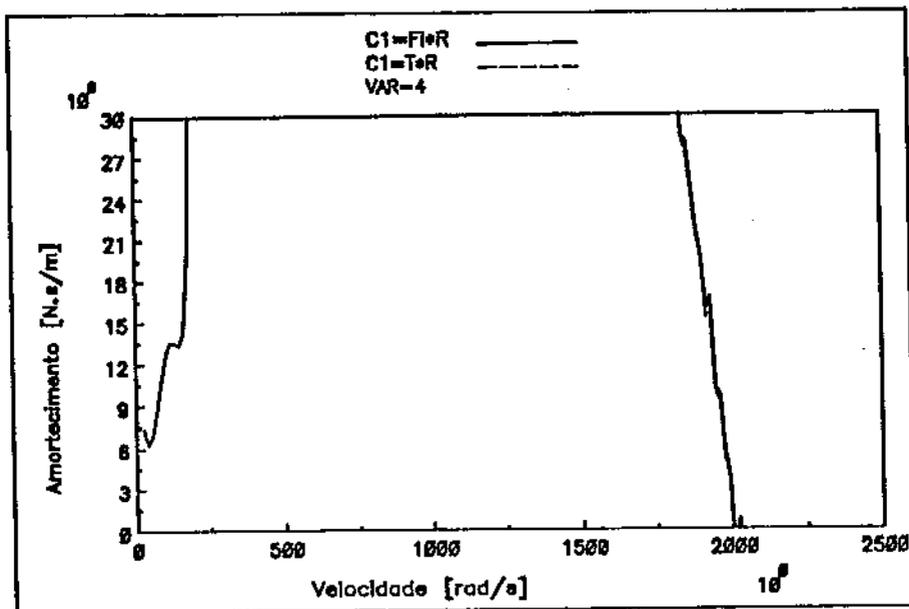
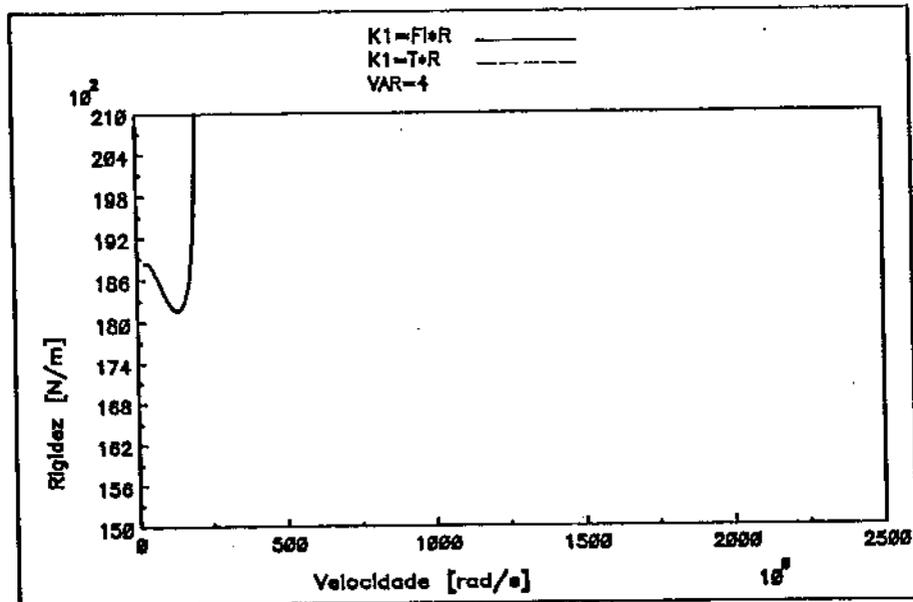


Figura 4.71: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S26

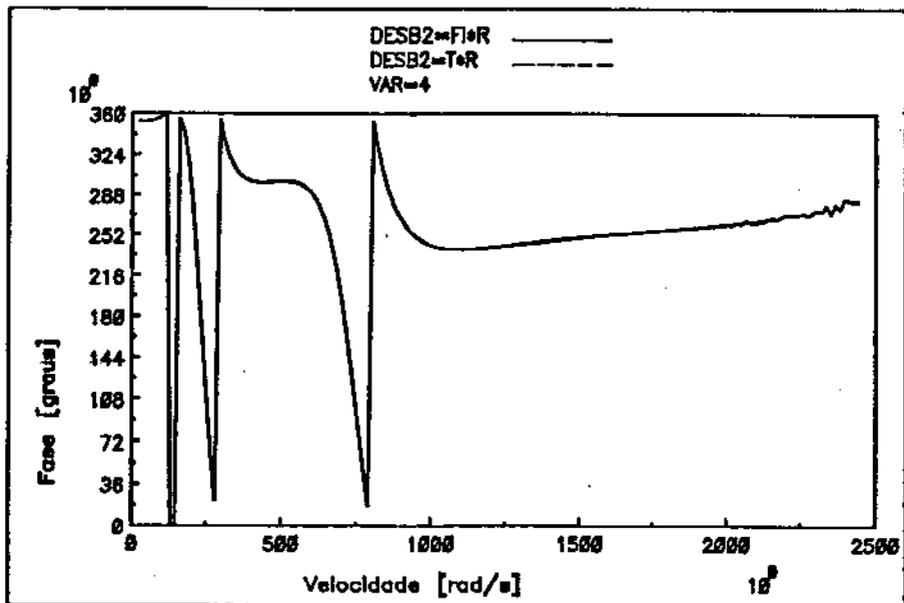
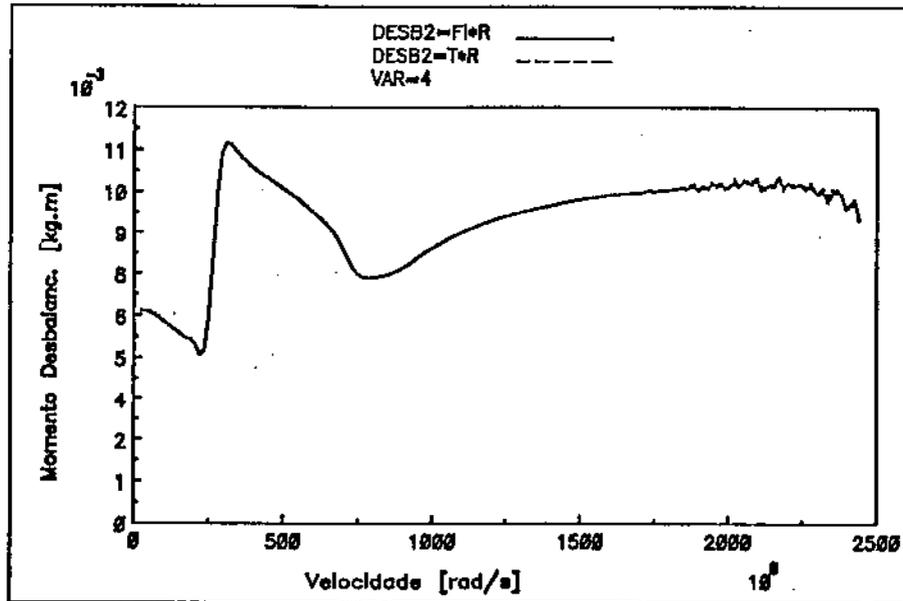


Figura 4.72: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S26

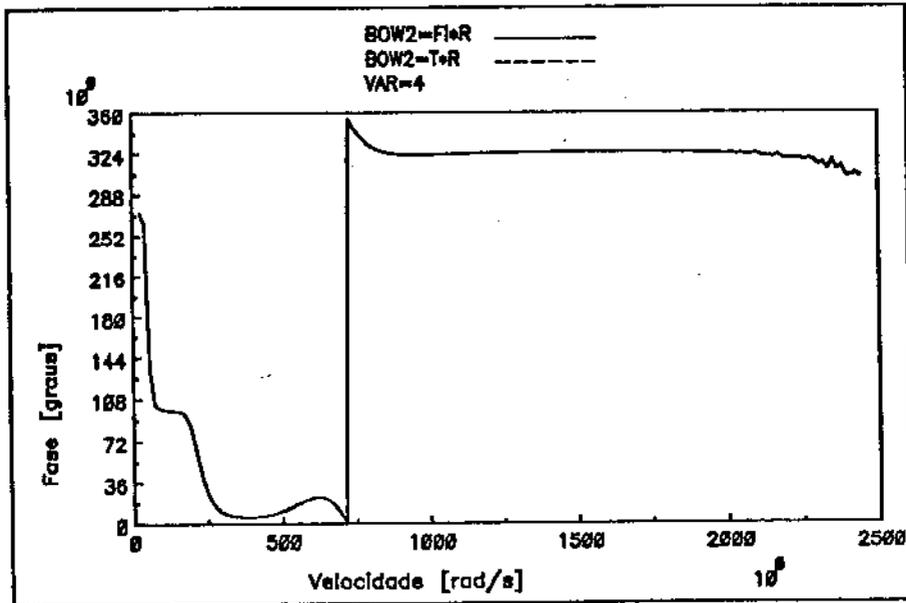
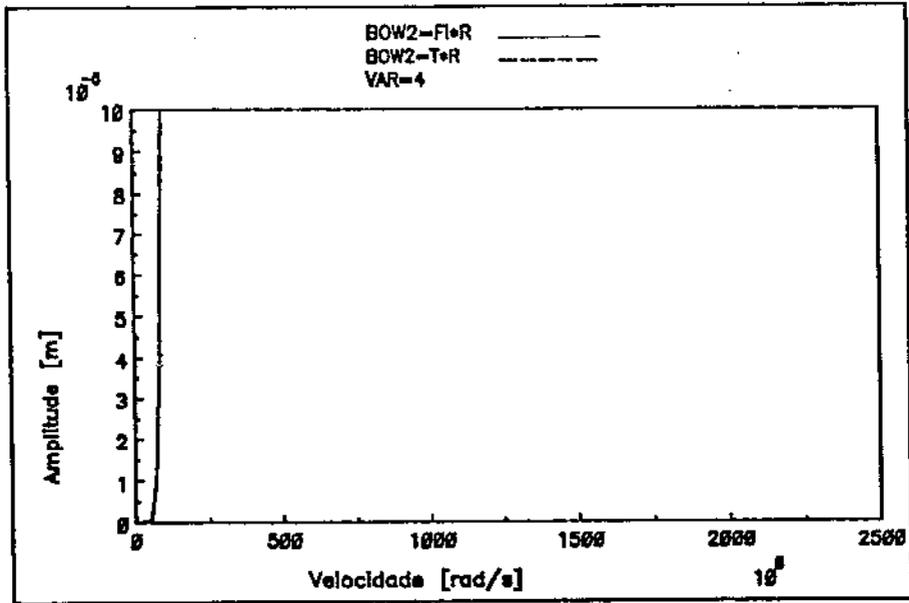


Figura 4.73: Valores de Empenamento-*b2* Identificados Modo 2-S26

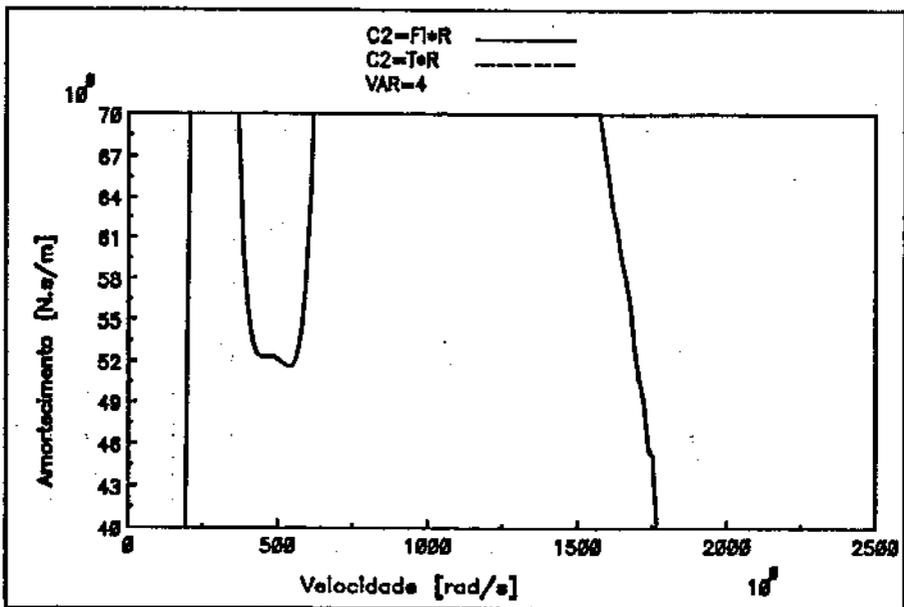
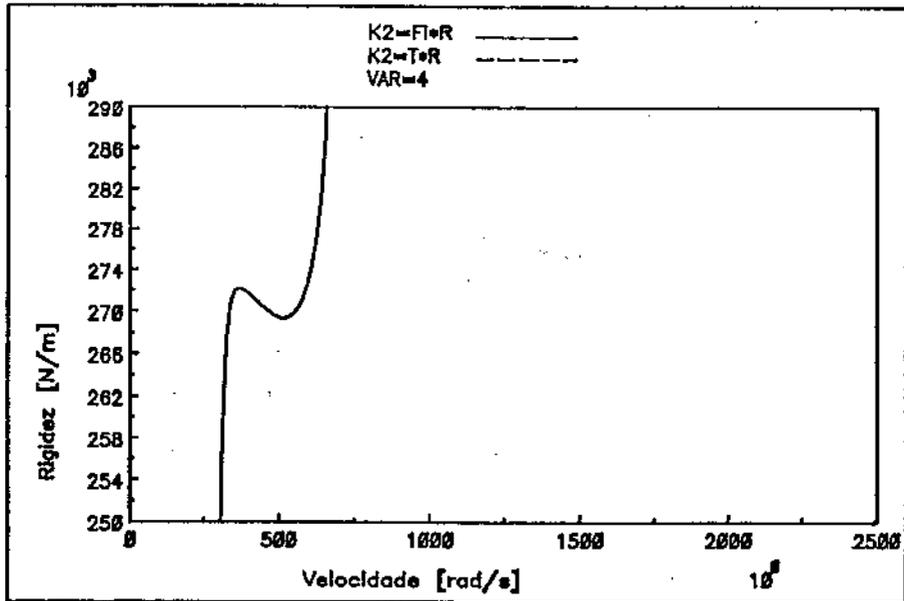


Figura 4.74: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S26

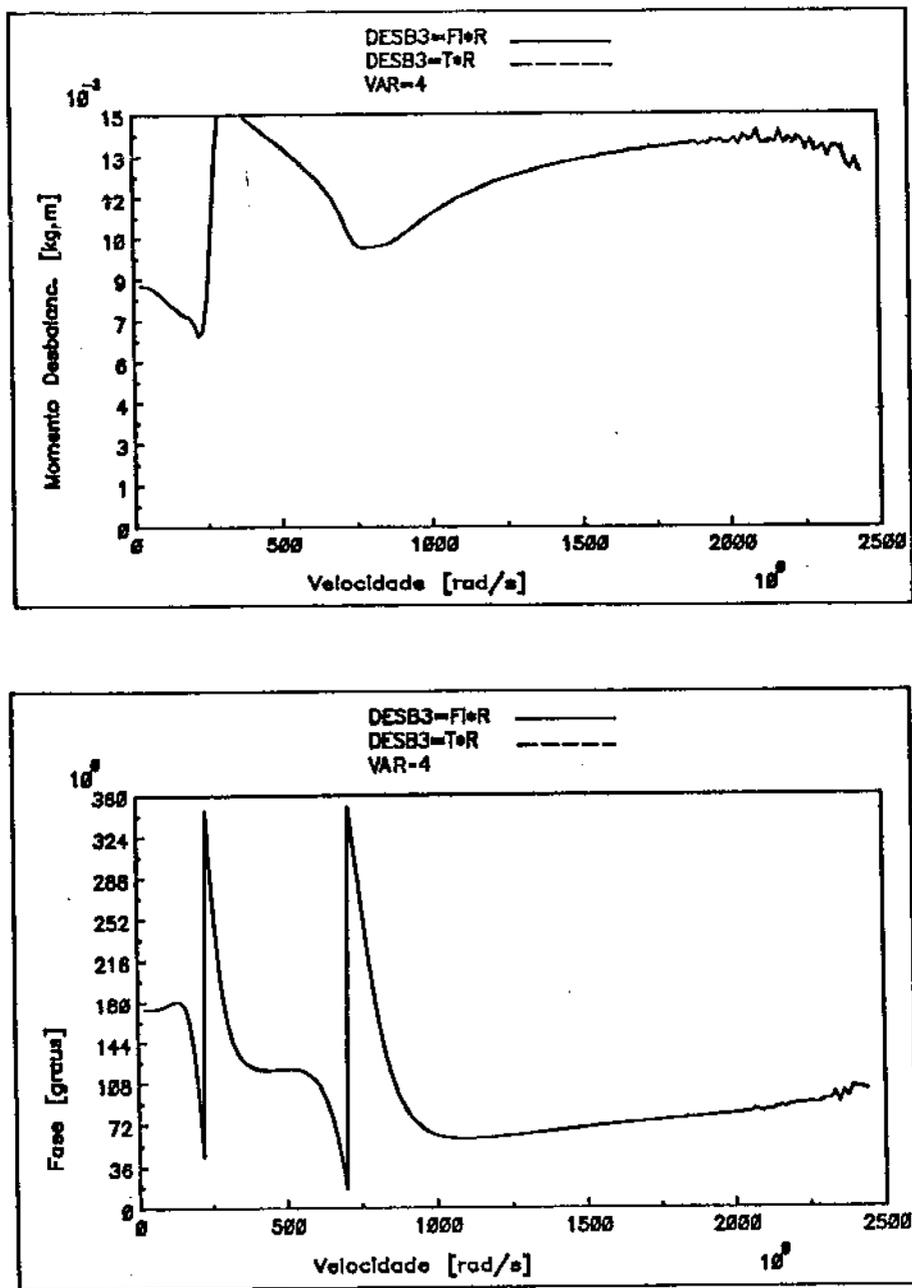


Figura 4.75: Valores de Momento de Balanceamento-u3 Identificados Modo 3-S26

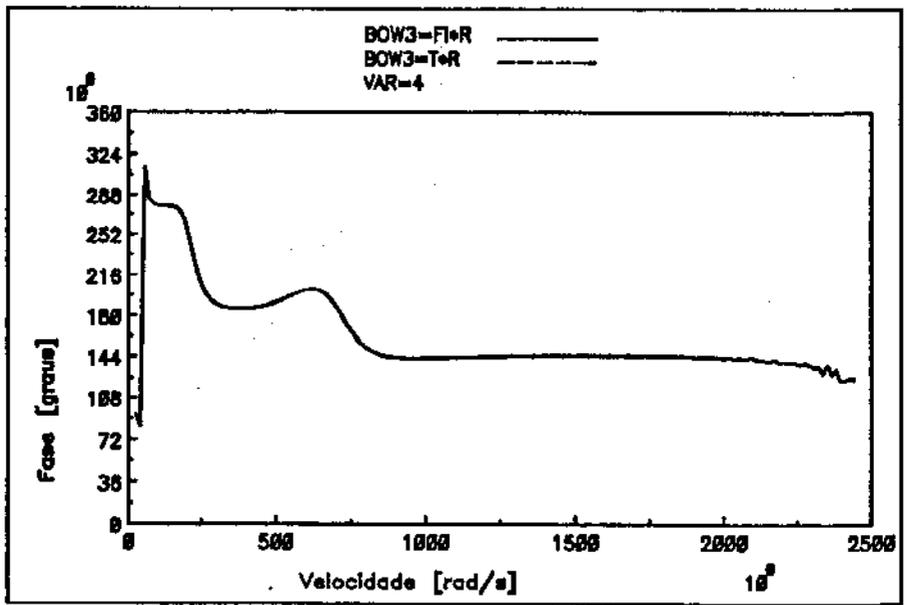
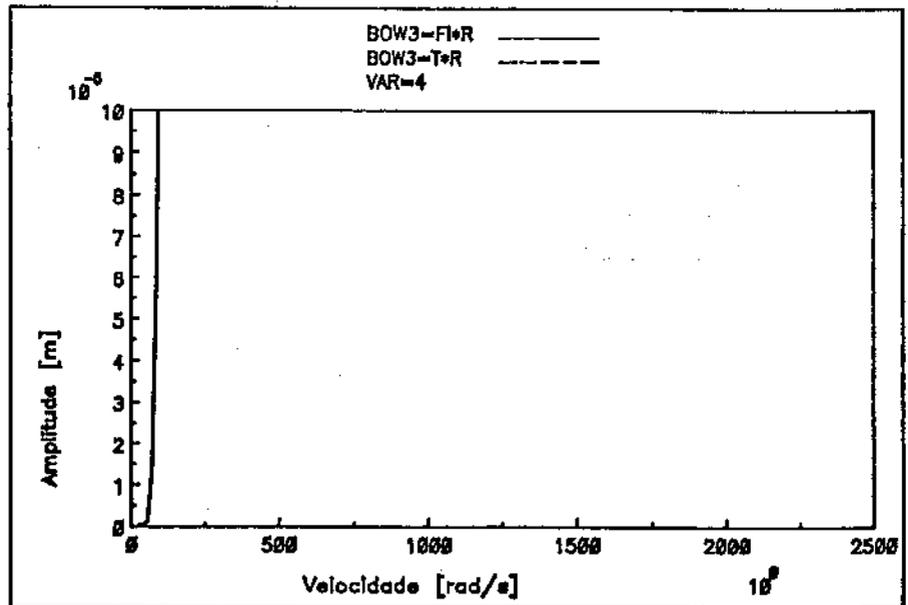


Figura 4.76: Valores de Empenamento-b3 Identificados Modo 3-S26

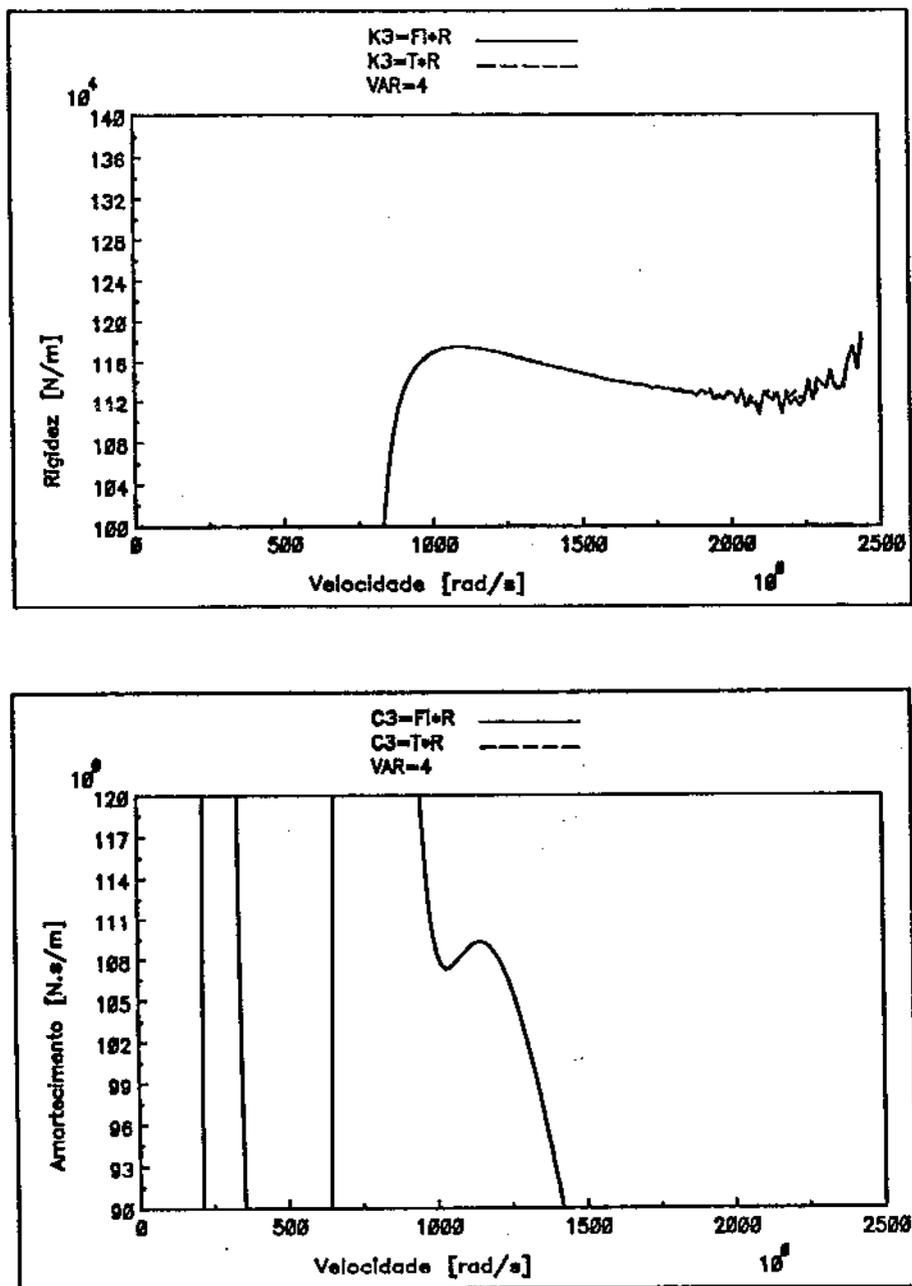


Figura 4.77: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S26

4.5.8 Simulação 27

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 3,7 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.78), (4.79), (4.80) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.81), (4.82), (4.83) mostram os resultados para o 2º modo, as figuras (4.84), (4.85), (4.86) mostram os resultados para o 3º modo onde a matriz $[T]$ foi obtida com os modos 1 e 3 e as figuras (4.87), (4.88), (4.89) a matriz $[T]$ foi obtida com os modos 2 e 3.

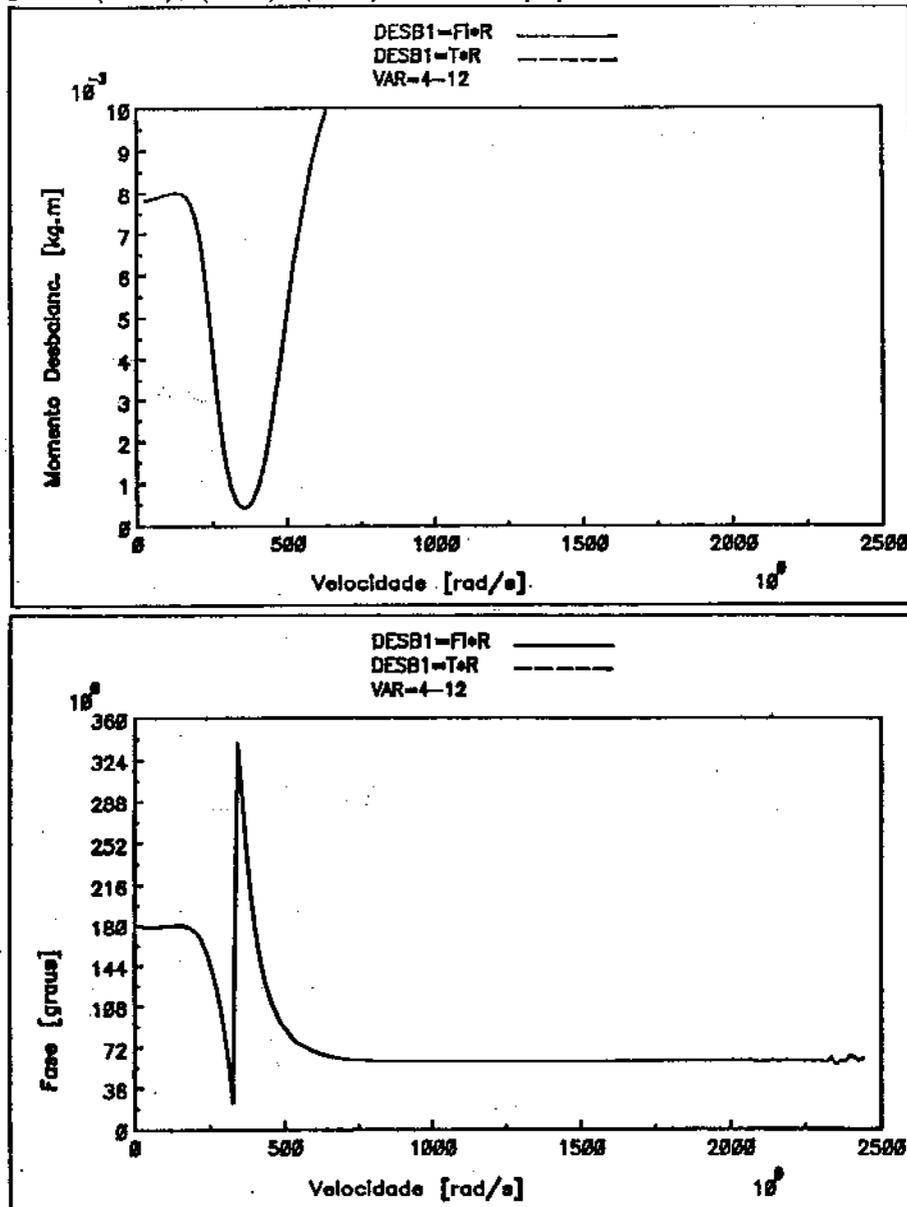


Figura 4.78: Valores de Momento de Balanceamento-u1 Identificados Modo 1-S27

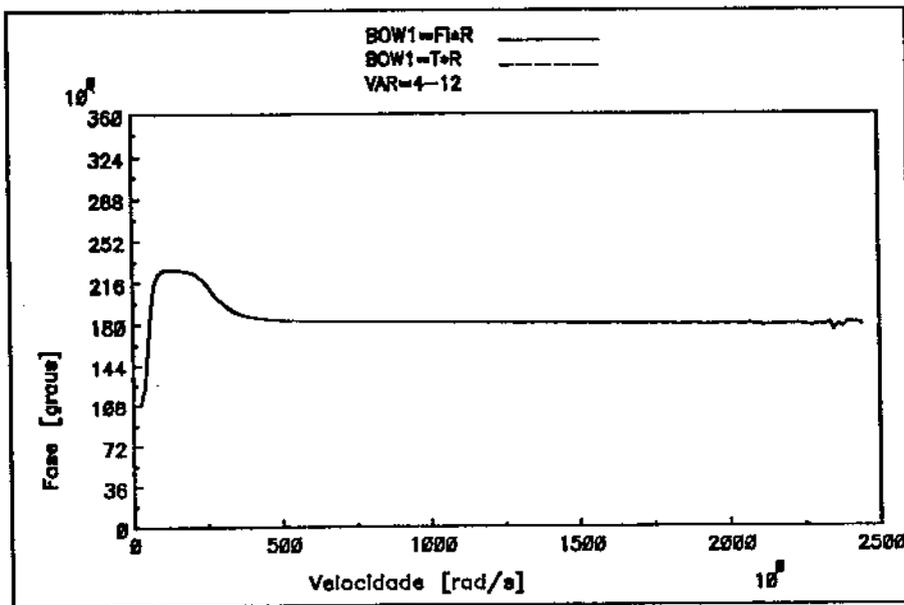
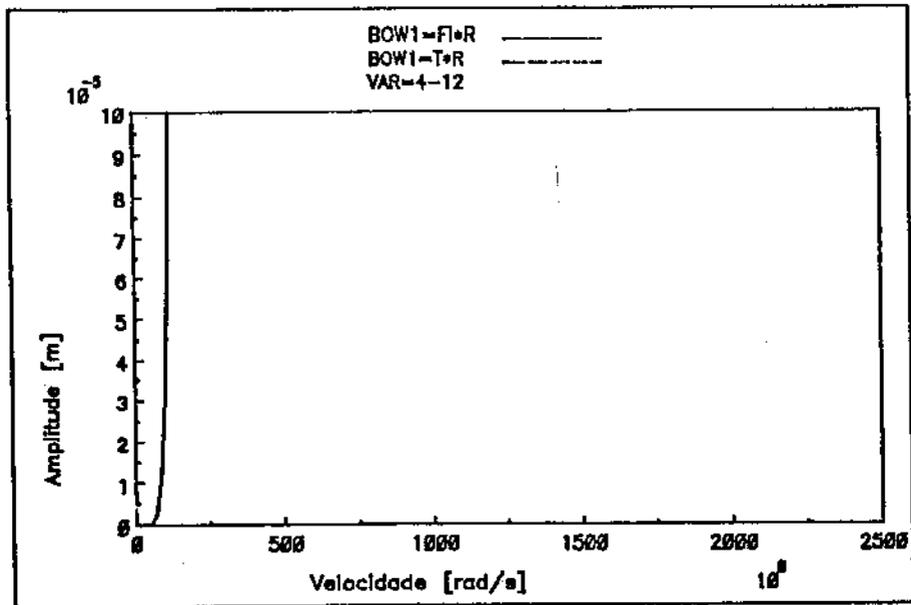


Figura 4.79: Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S27

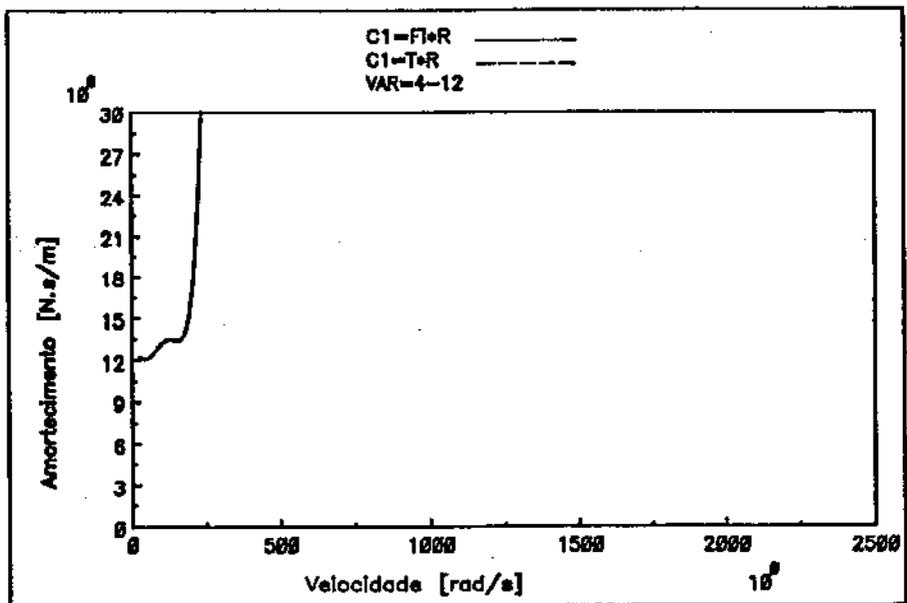
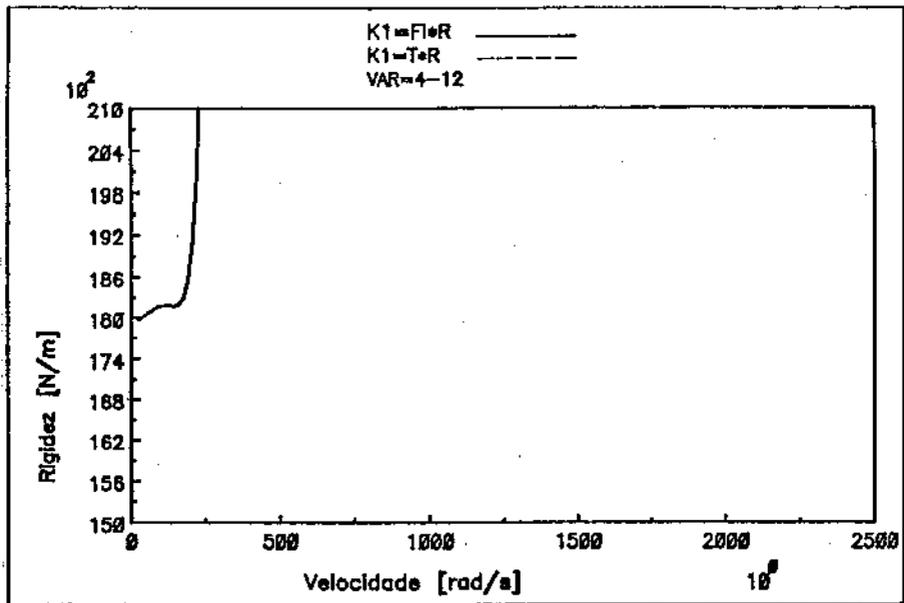


Figura 4.80: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S27

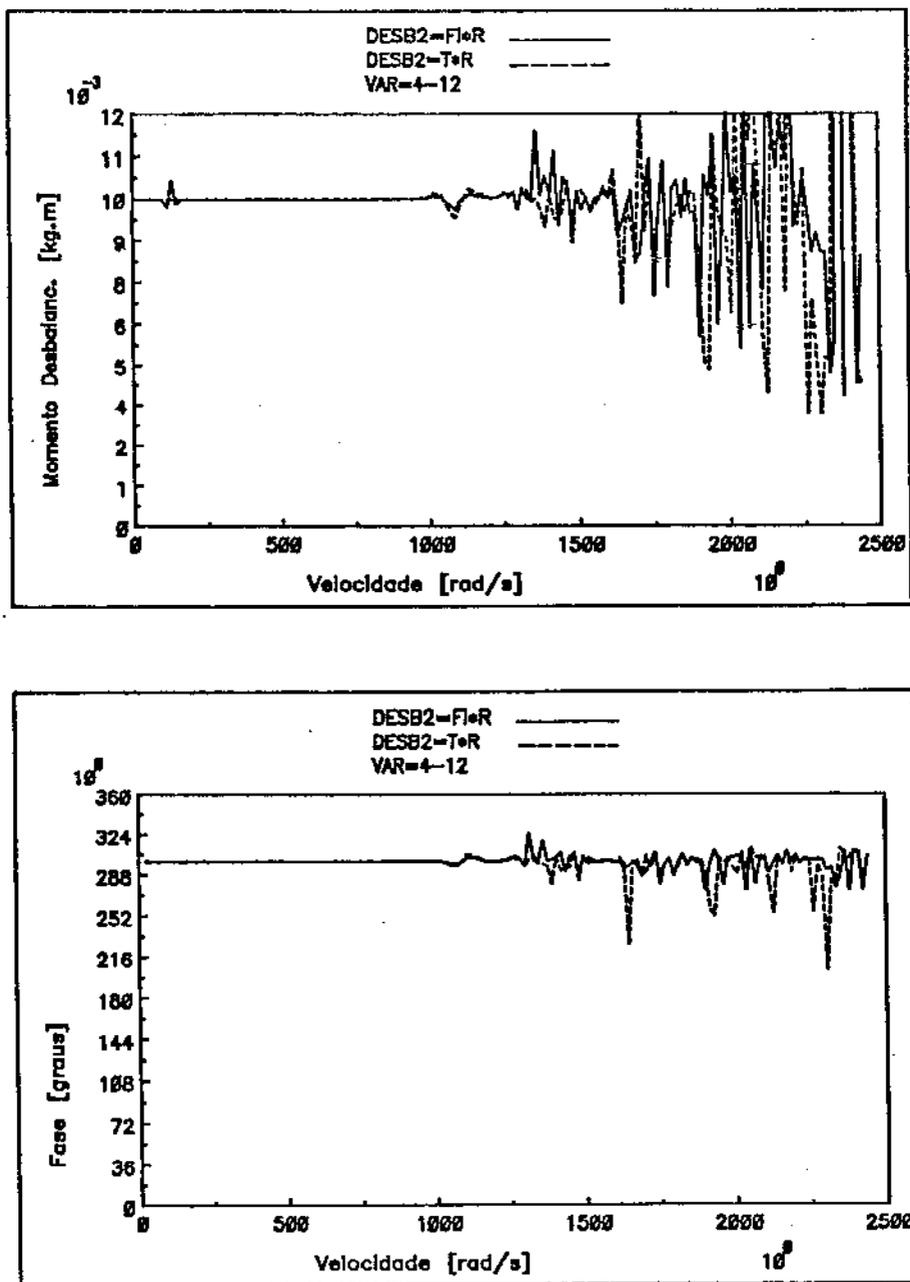


Figura 4.81: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S27

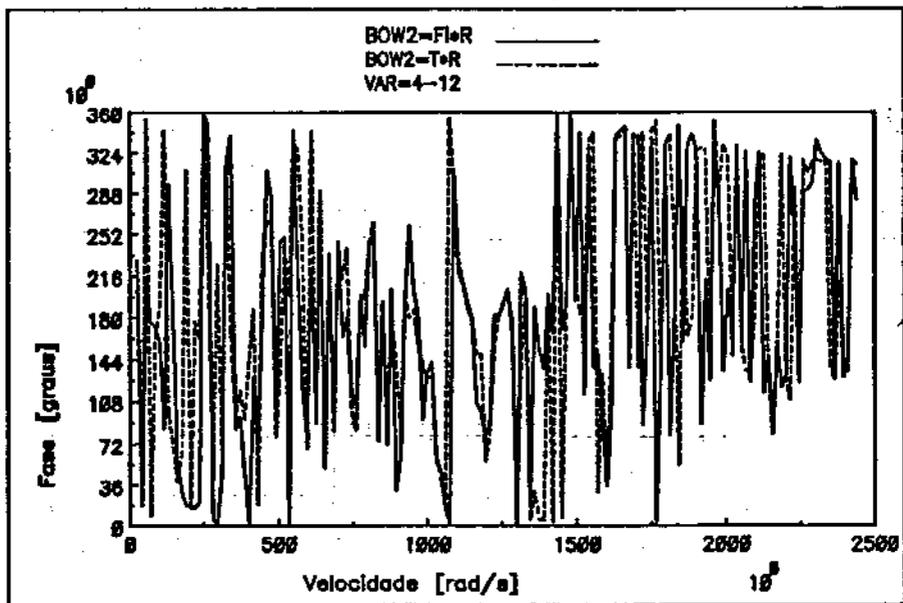
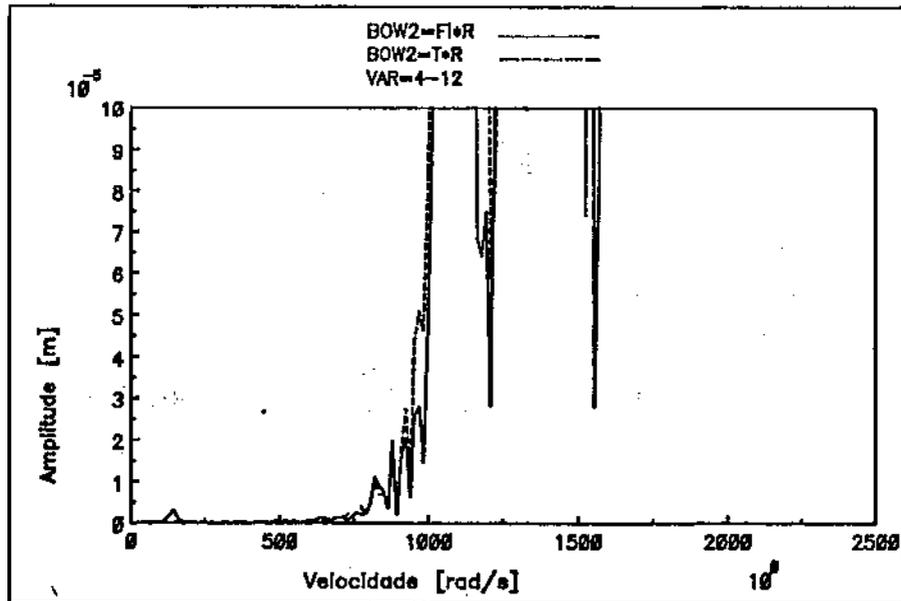


Figura 4.82: Valores de Empenamento-b2 Identificados Modo 2-S27

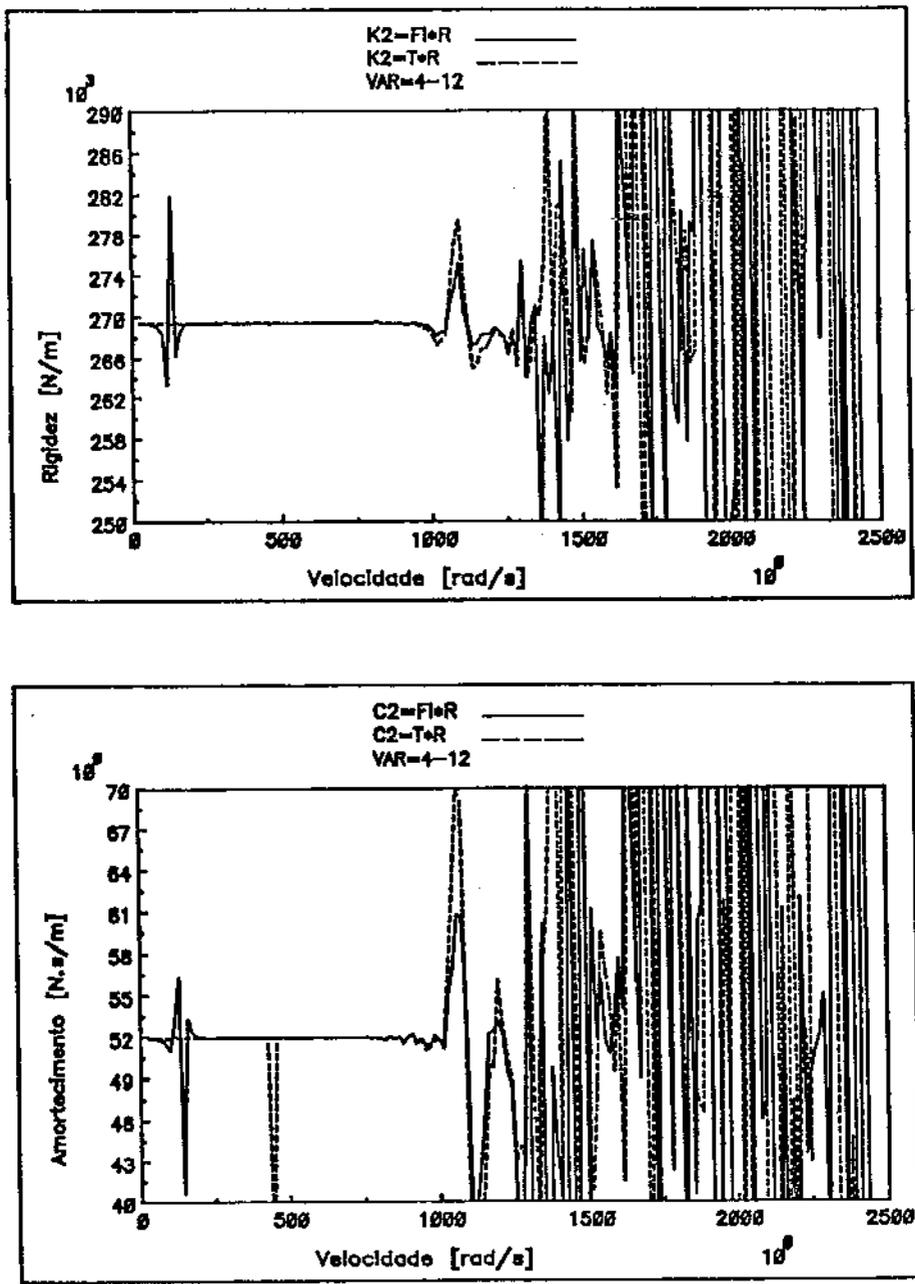


Figura 4.83: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S27

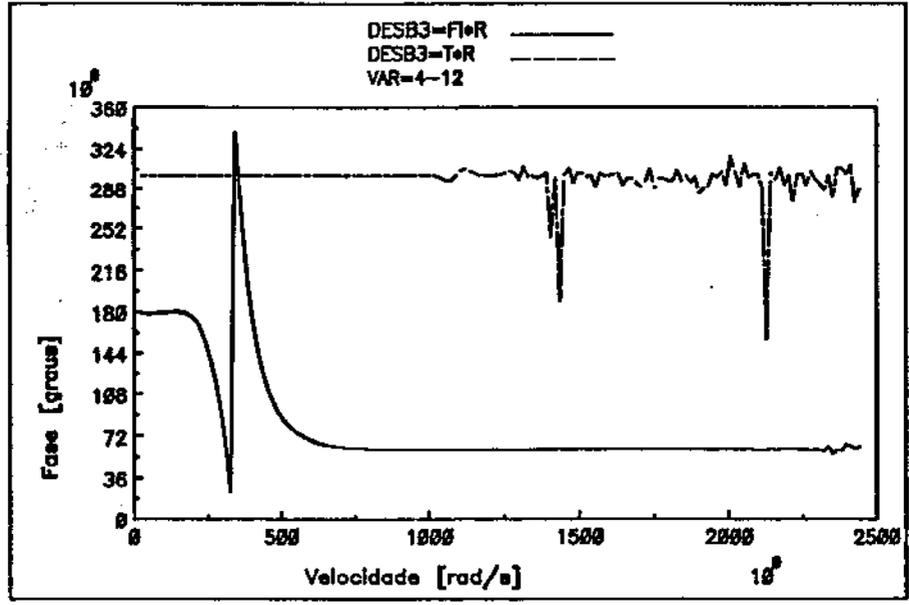
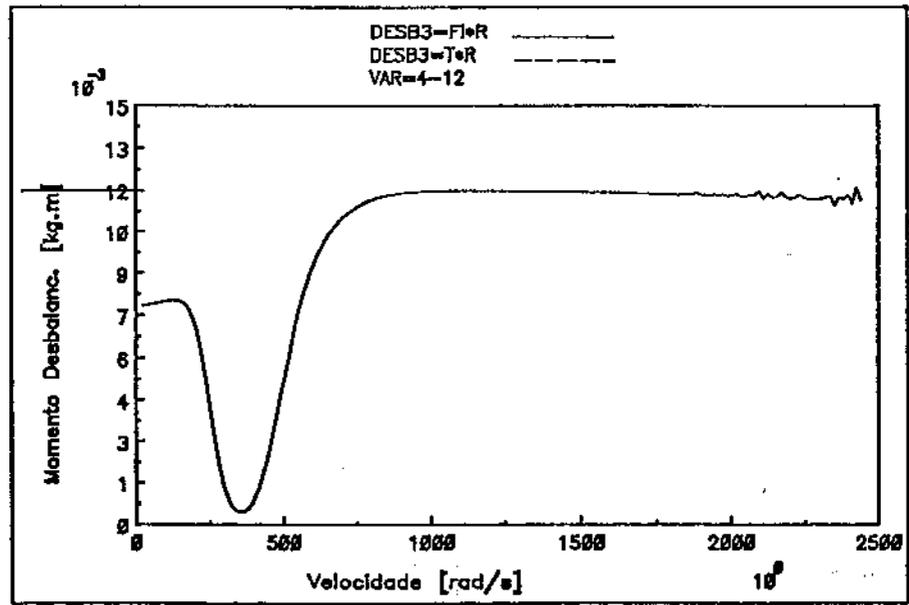


Figura 4.84: Valores de Momento de Balanceamento-u3 Identificados Modo 3-S27

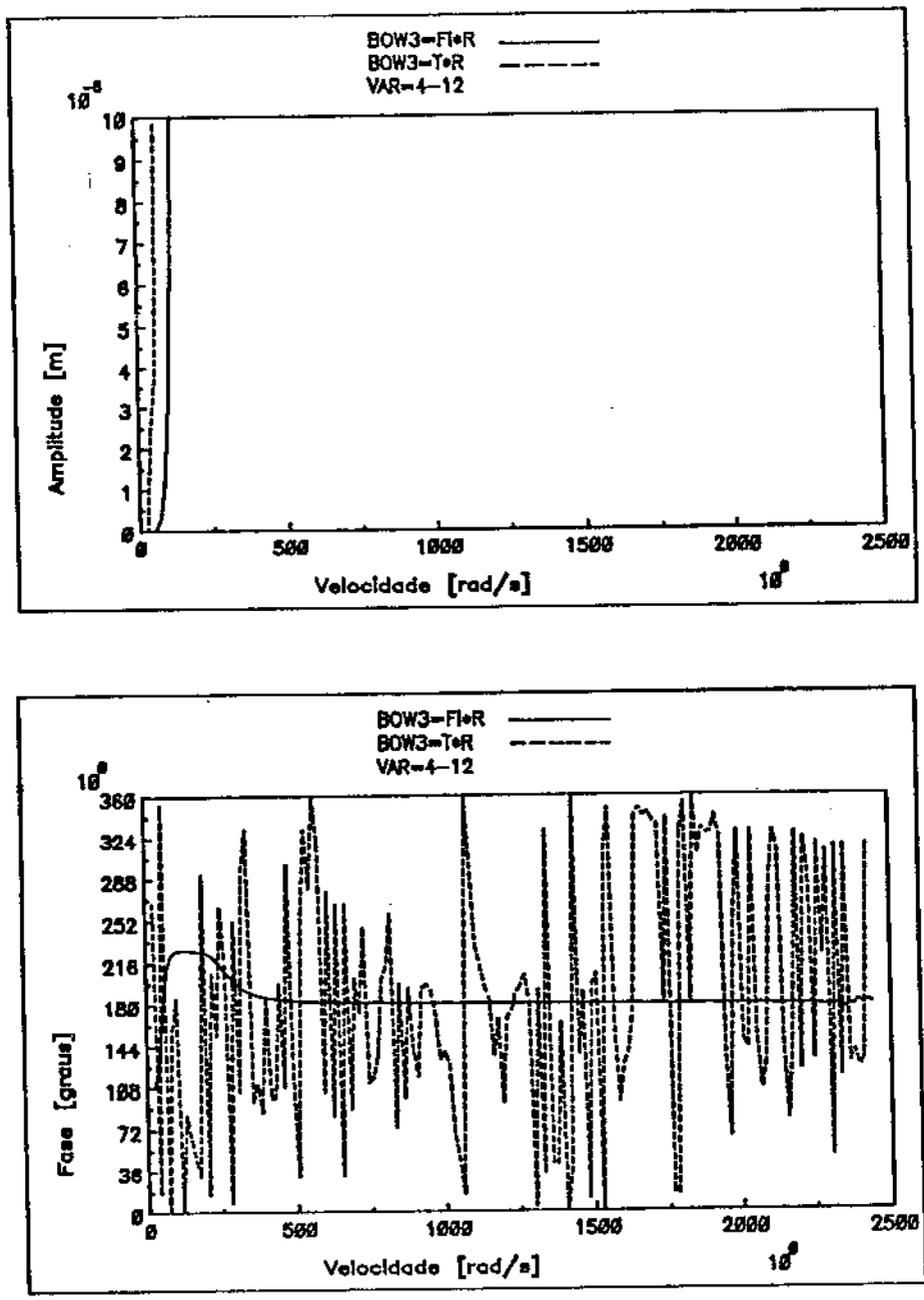


Figura 4.85: Valores de Empenamento-*b3* Identificados Modo 3-S27

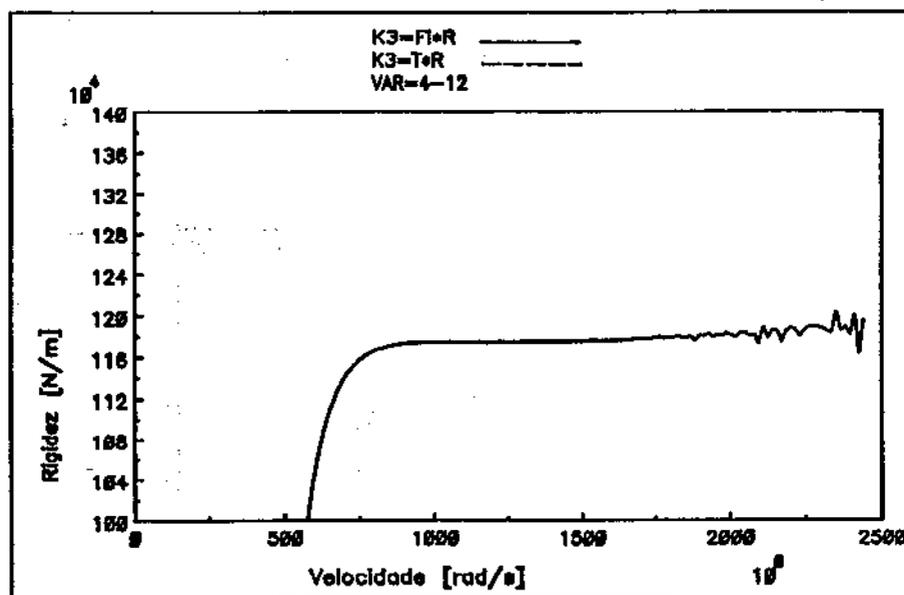
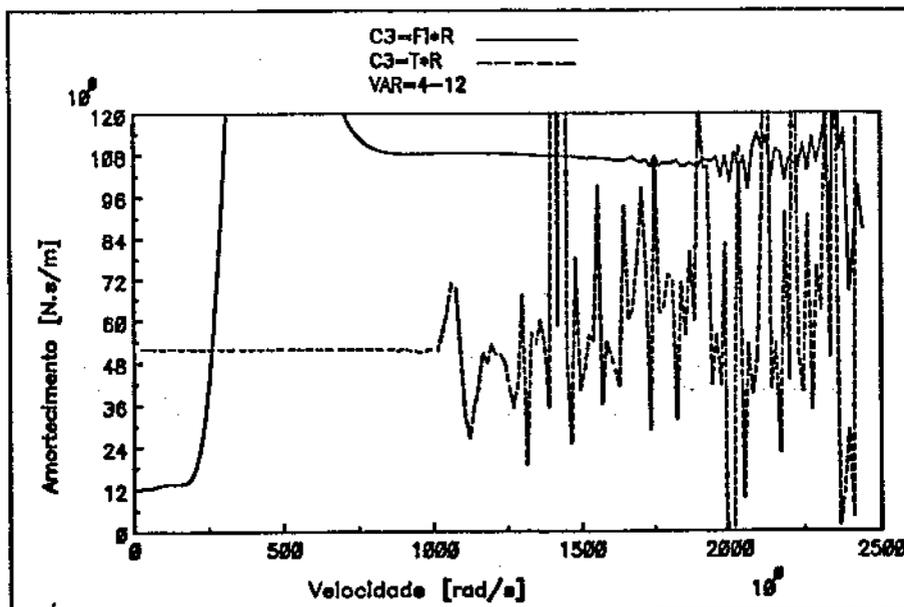


Figura 4.86: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S27

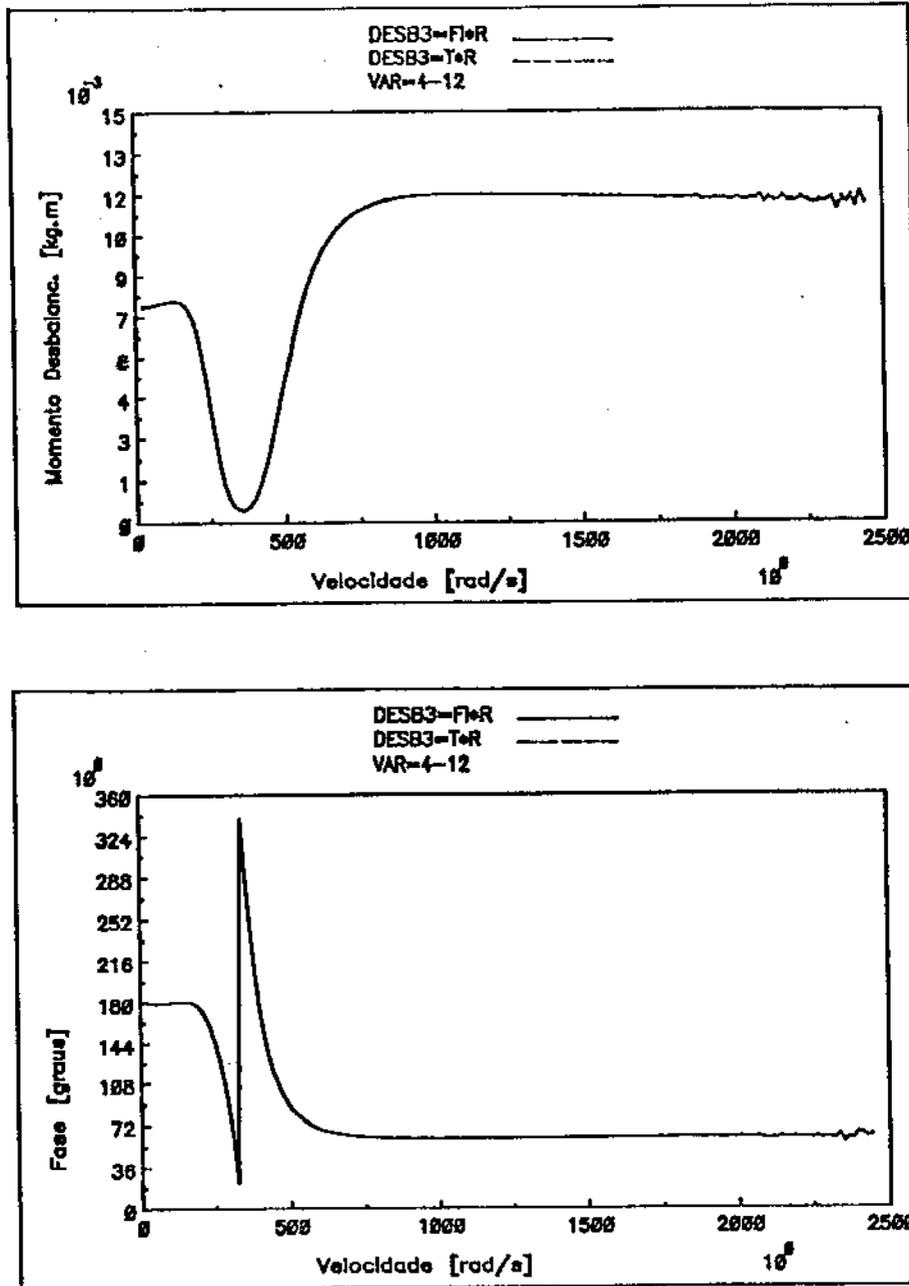


Figura 4.87: Valores de Momento de Balançamento-u3 Identificados Modo 3-S27

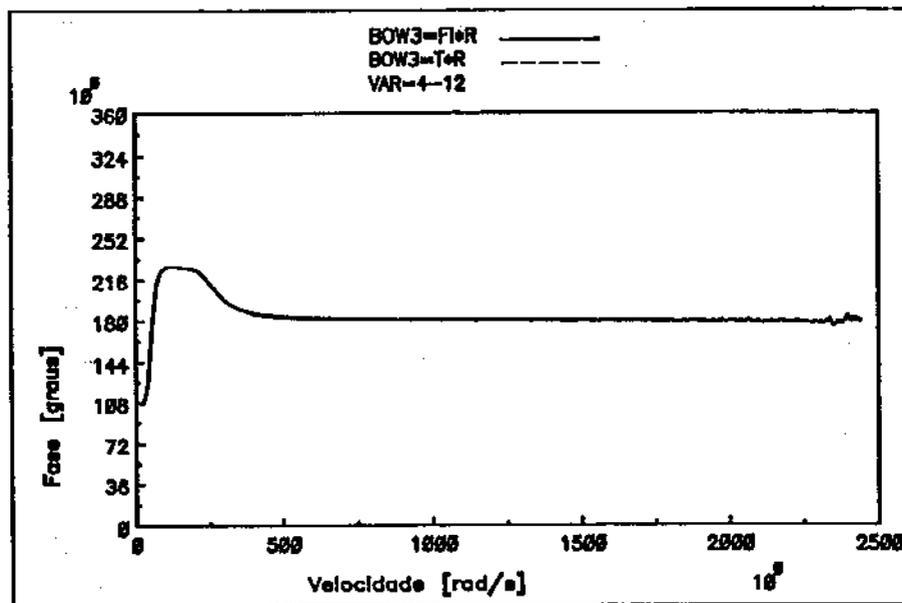
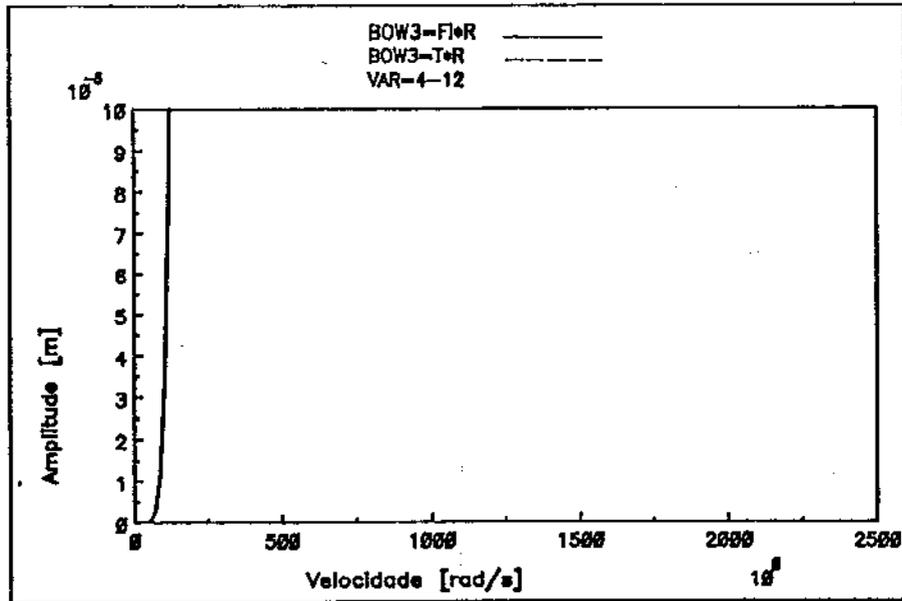


Figura 4.88: Valores de Empenamento-b3 Identificados Modo 3-S27

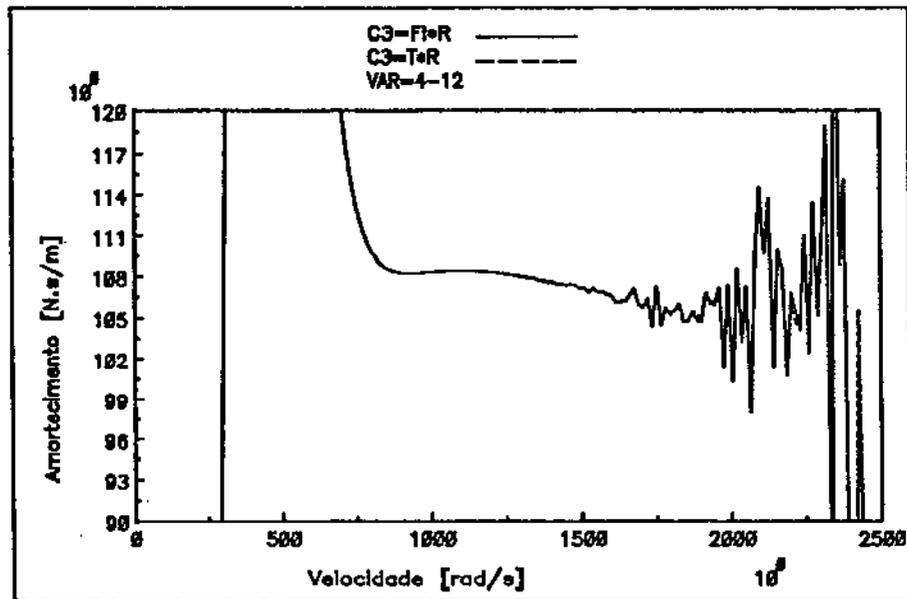
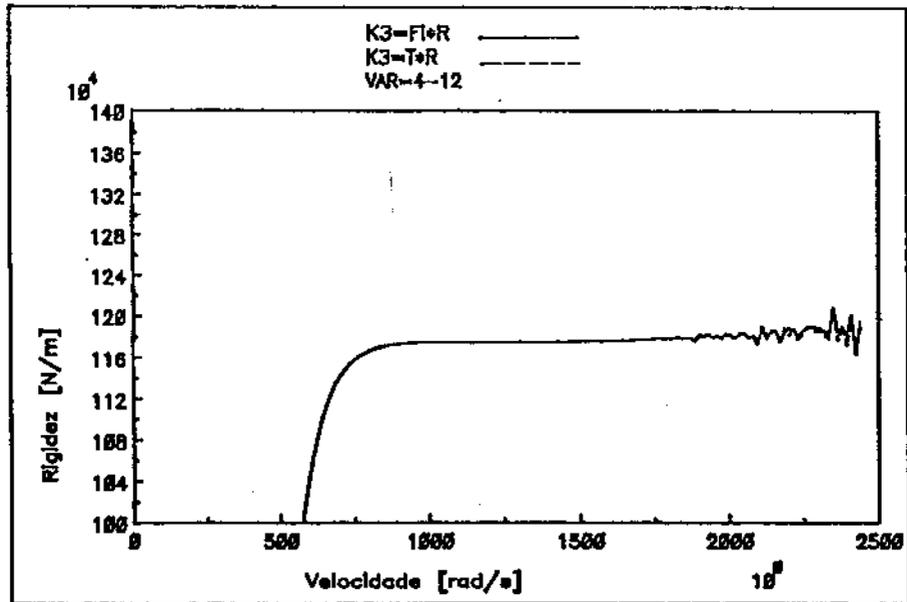


Figura 4.89: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S27

4.6 Simulação do Método de Balanceamento Modal \hat{H} e \hat{H} para um sistema com alta densidade modal

Para mostrar a eficiência do método \hat{H} em relação ao método H , modelou-se o sistema-M3 da figura (4.90) de alta densidade modal com os parâmetros mostrados na tabela (4.6).

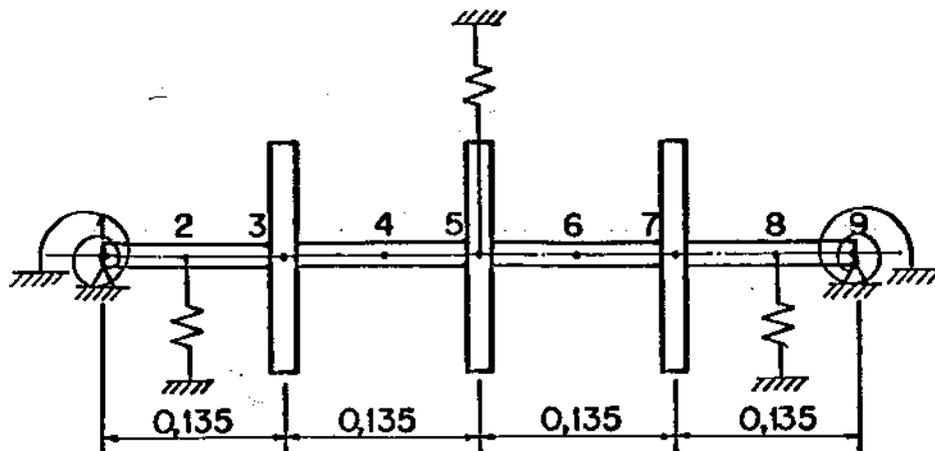


Figura 4.90: Modelo matemático do sistema com alta densidade modal-M3

$$\begin{aligned}
 \text{Eixo} &= \begin{cases} \text{Área} & - 1,227E - 04 & (m^2) \\ IZ & - 1,198E - 09 & (m^4) \\ E & - 2,067E + 11 & (N/m^2) \\ \rho & - 7.800 & (Kg/m^3) \end{cases} \\
 \text{Discos} &= \begin{cases} \text{Massa} & - 1,929 & (Kg) \\ \text{Mom. Iner.} & - 2,713E - 03 & (Kg.m^2) \end{cases} \\
 \text{Rigidez das molas} &\begin{cases} KOZ & - 1000 & (N.m/rad) \\ KY & - 100000 & (N/m) \end{cases} \\
 \text{Rigidez da mola central} &\begin{cases} KY & - 1400000 & (N/m) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Escolheu-se um desbalanceamento modal u_i diferente para cada modo. Com a equação (4.8) e colocando-se este desbalanceamento em uma posição angular φ_p em relação ao referencial fixo no eixo, obteve-se a tabela (4.27)

Modos excitados	u_i modal (Kg.m)	Fase φ_p (graus)
1	8	0
2	10	120
3	12	240

Tabela 4.27: Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M3

Escolheu-se um empenamento modal b_i diferente para cada modo, utilizou-se a equação (2.88) para se calcular o desbalanceamento discretizado $\{B_p\}_i$, e colocando-se este desbalanceamento em uma posição angular θ_p em relação ao referencial fixo no eixo, conforme mostra a tabela (4.28).

Modos excitados	b_i modal (m)	Fase θ_p (graus)
1	2E-05	0
2	4E-05	120
3	6E-05	240

Tabela 4.28: Empenamento Modal -M3

Considerando-se estes Momentos de Desbalanceamento da tabela (4.27) e o empenamento da tabela (4.28), obteve-se a simulação da resposta ao desbalanceamento em frequência para todos os graus de liberdade do sistema, sejam deflexões ou rotações, para a faixa de velocidade onde deseja-se fazer a simulação do Balanceamento Modal.

As frequências naturais deste modelo matemático são mostradas na tabela (4.29)

Modos	1	2	3	4	5
Freq (rad/s)	558,92	576,59	1252,60	1793,10	2346,21

Tabela 4.29: Frequências naturais do modelo matemático-M3

Observando-se a tabela (4.29), nota-se a proximidade proposital das ressonâncias do primeiro e segundo modo, caracterizando um sistema com alta densidade modal.

Algumas curvas das respostas ao desbalanceamento em frequência dos deslocamentos de alguns pontos do sistema discretizado são mostradas nas figuras (4.91), (4.92) e (4.93).

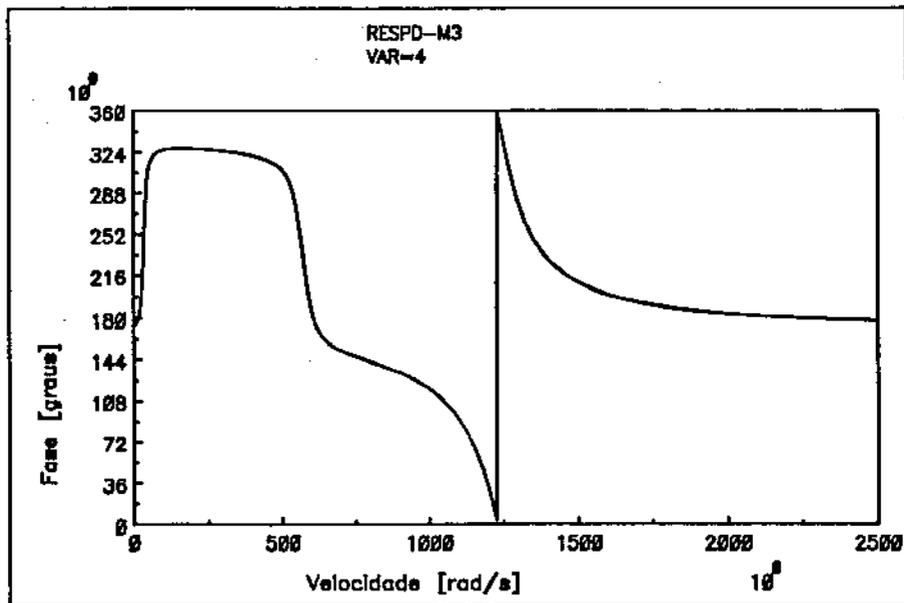
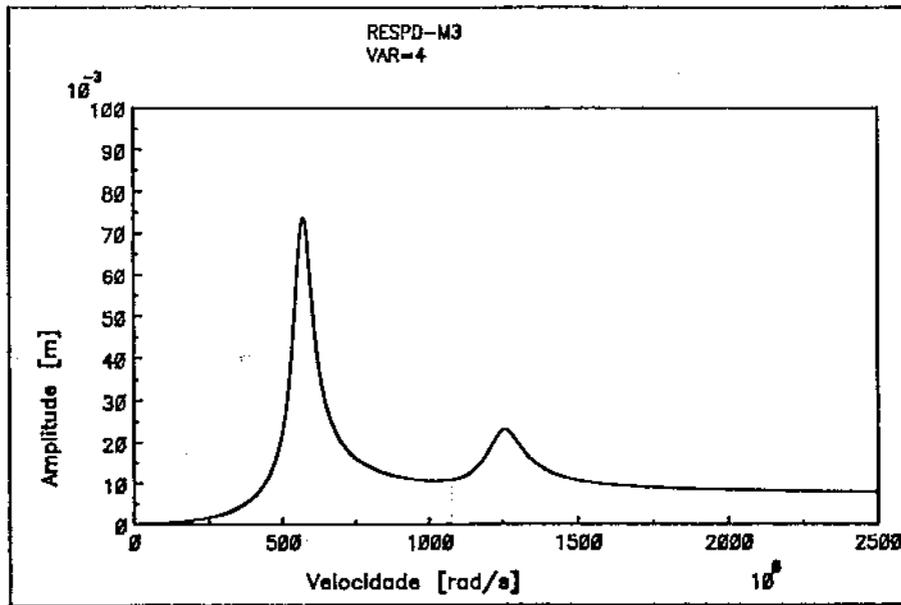


Figura 4.91: Resposta em frequência do deslocamento no ponto 3-M3

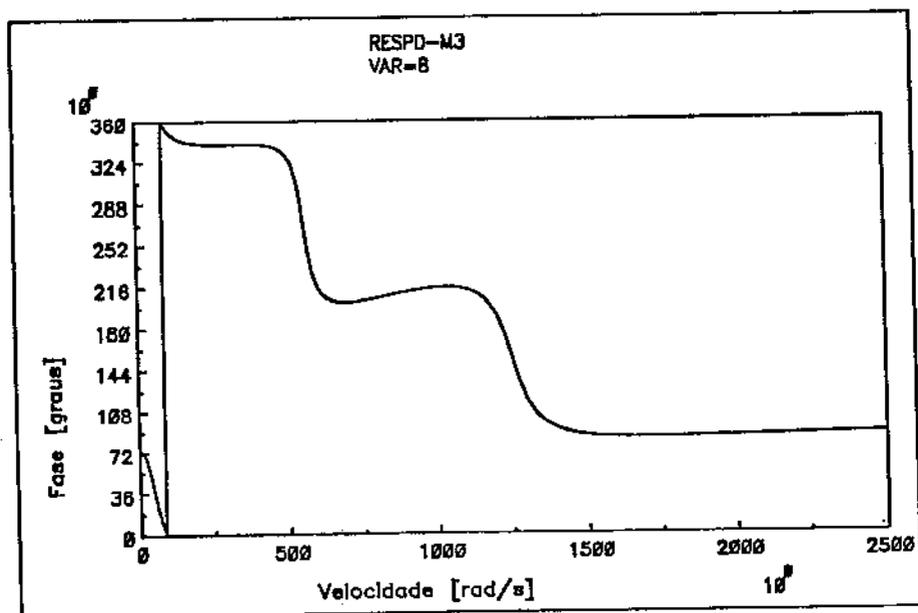
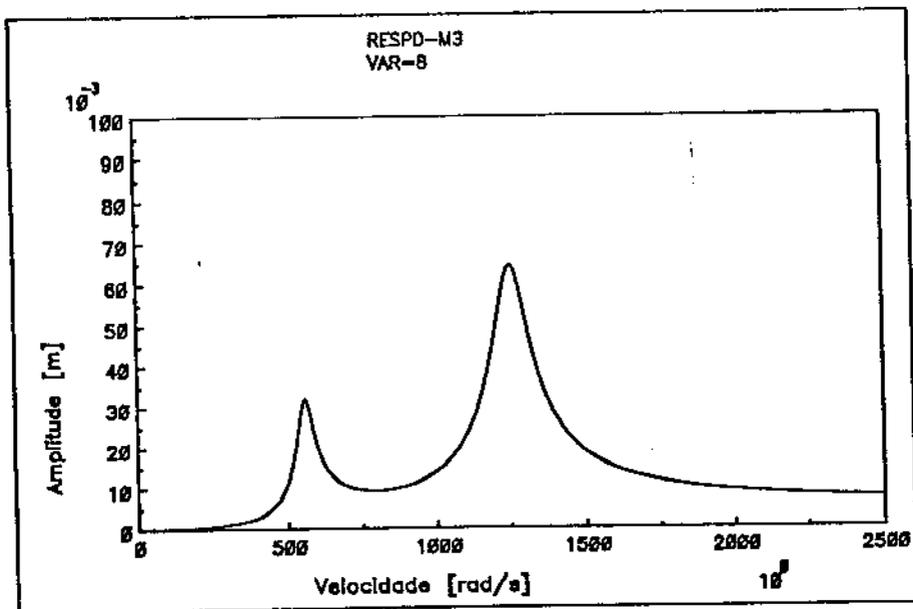


Figura 4.92: Resposta em frequência do deslocamento no ponto 5-M3

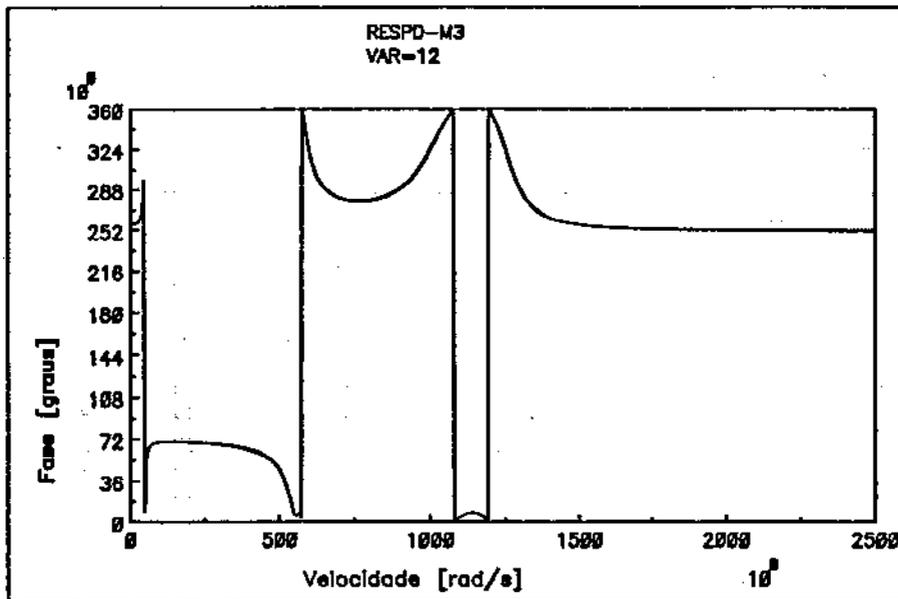
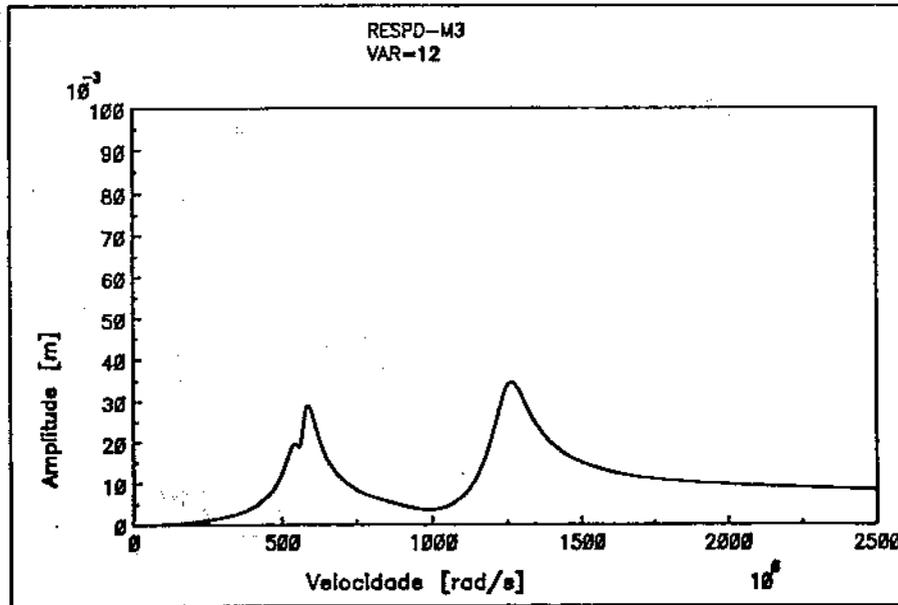


Figura 4.93: Resposta em frequência do deslocamento no ponto 7-M3

4.6.1 Simulação 28

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 2,3,4,5 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.94), (4.95), (4.96) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.97), (4.98), (4.99) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.100), (4.101), (4.102) mostram os resultados obtidos para o 3º modo.

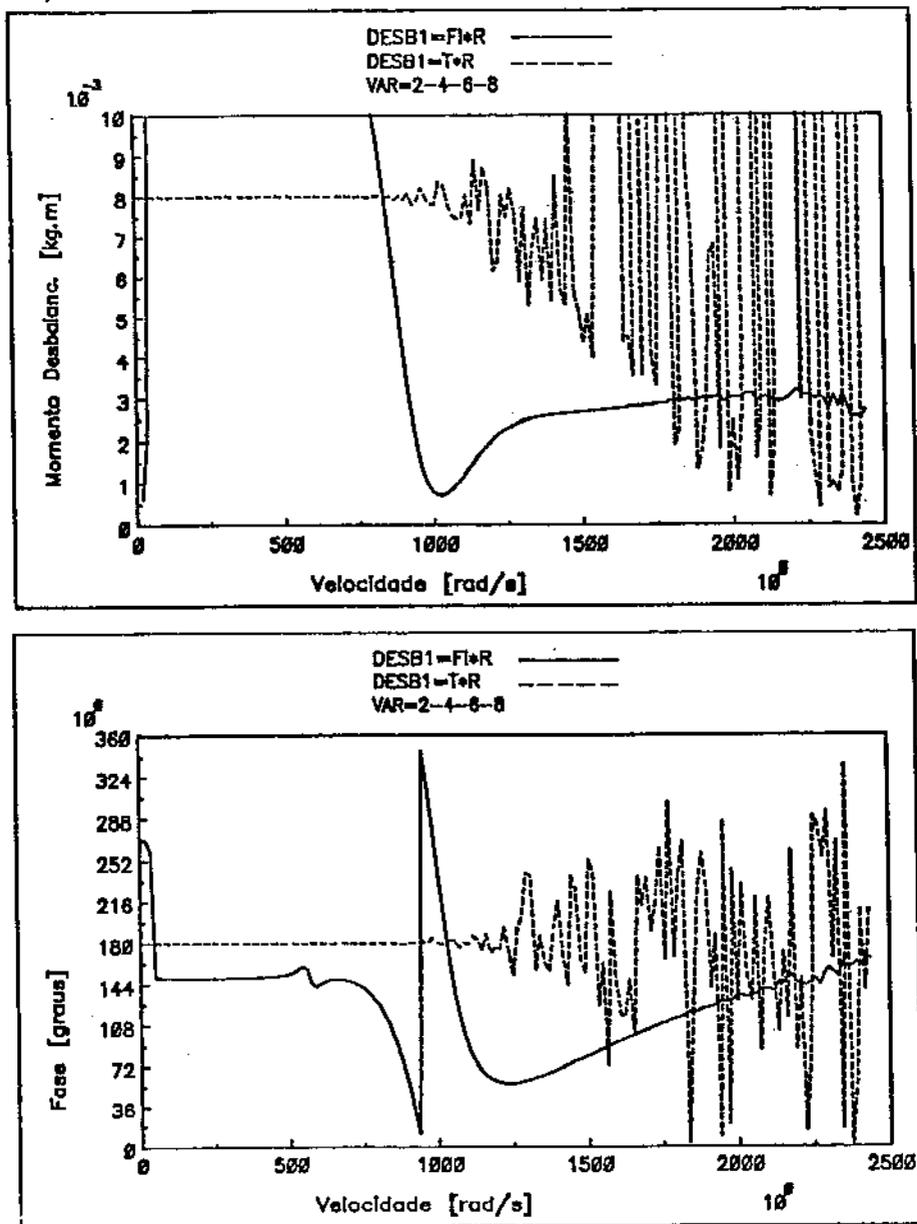


Figura 4.94: Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S28

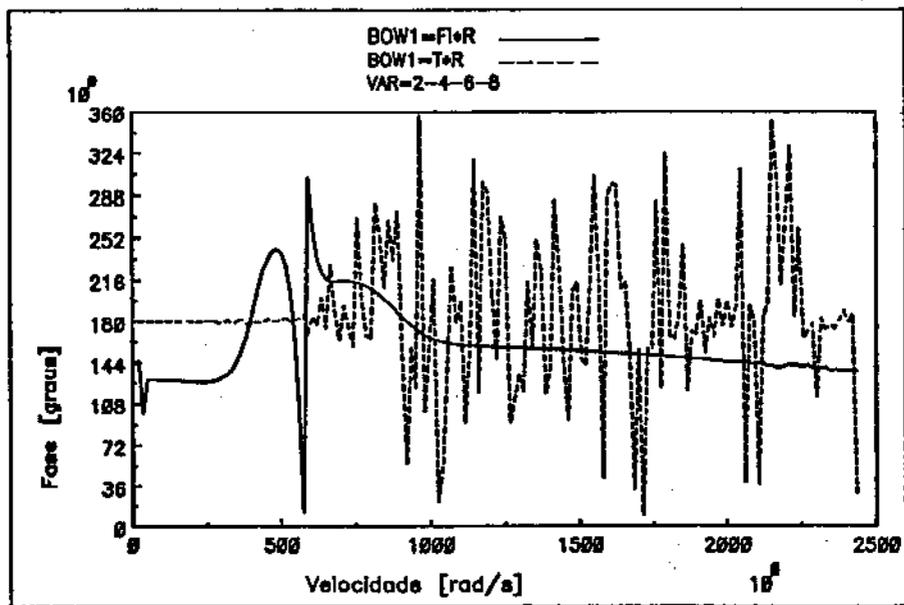
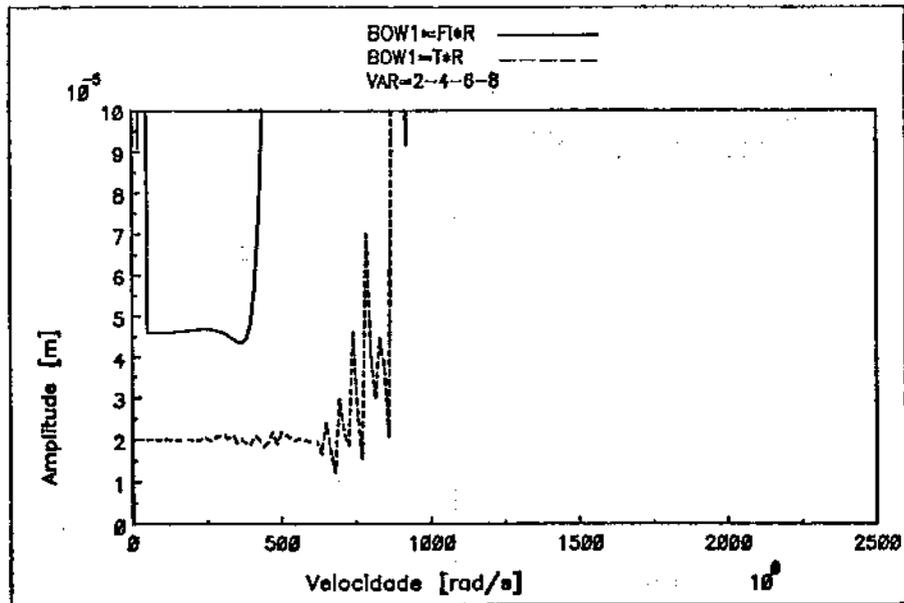


Figura 4.95: Valores de Empenamento- δ_1 Identificados Modo 1-S28

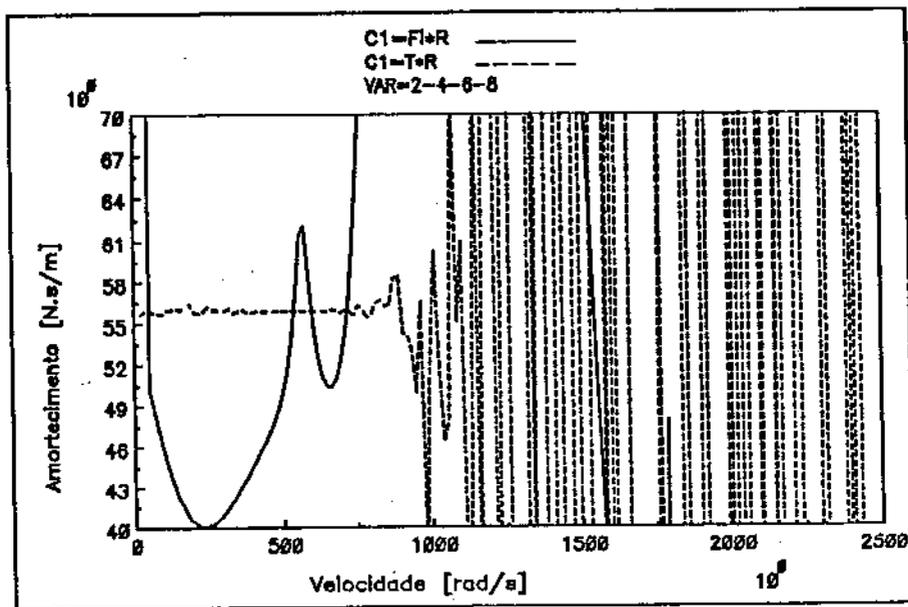
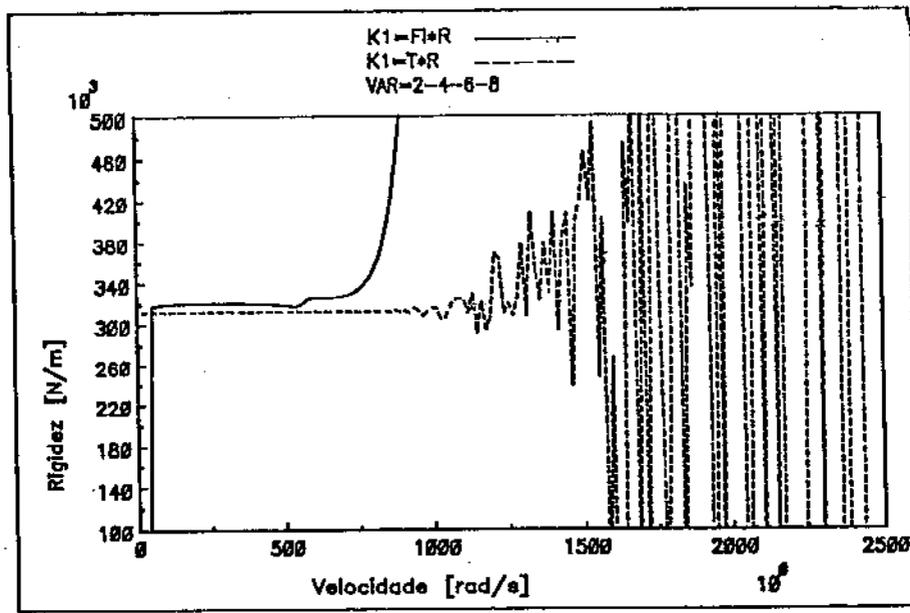


Figura 4.96: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S28

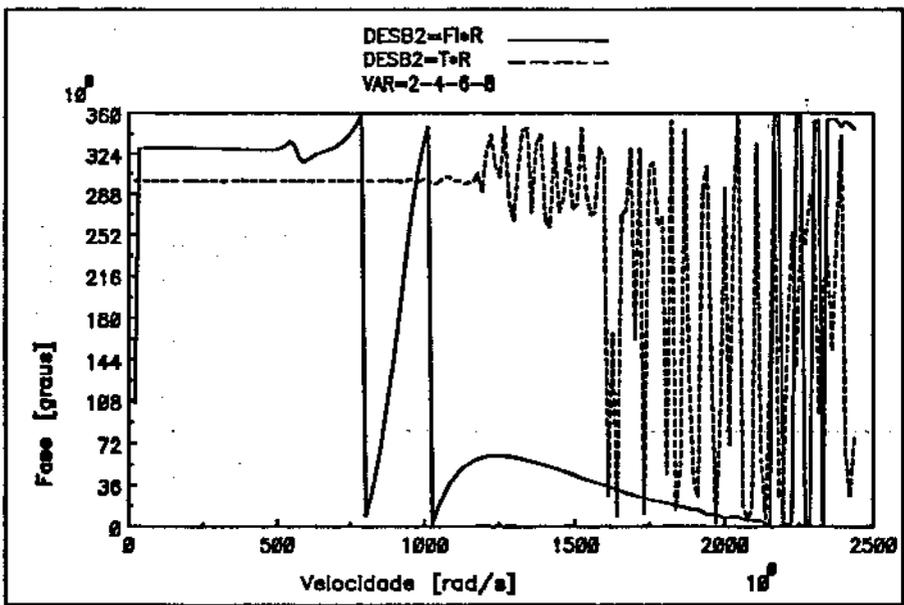
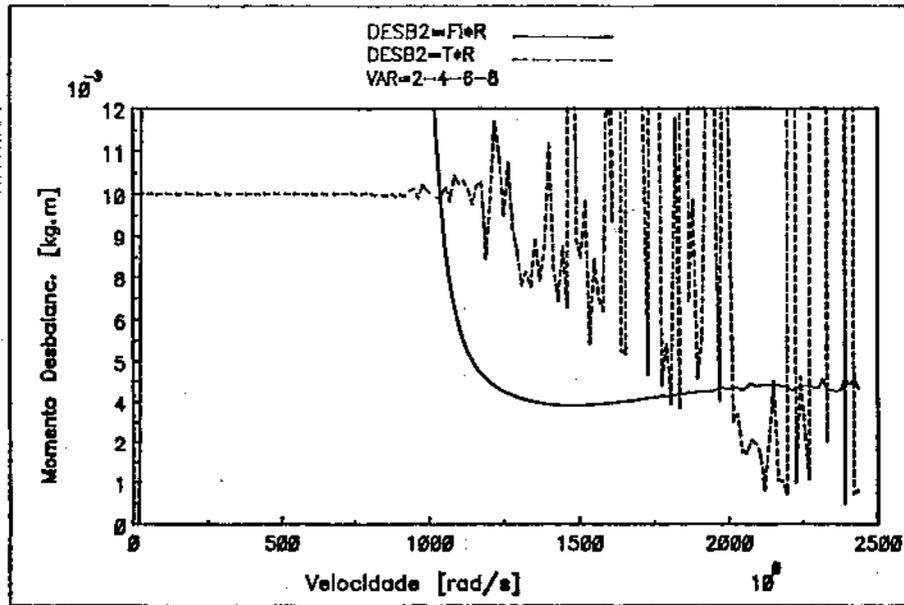


Figura 4.97: Valores de Momento de Balançamento-u2 Identificados Modo 2-S28

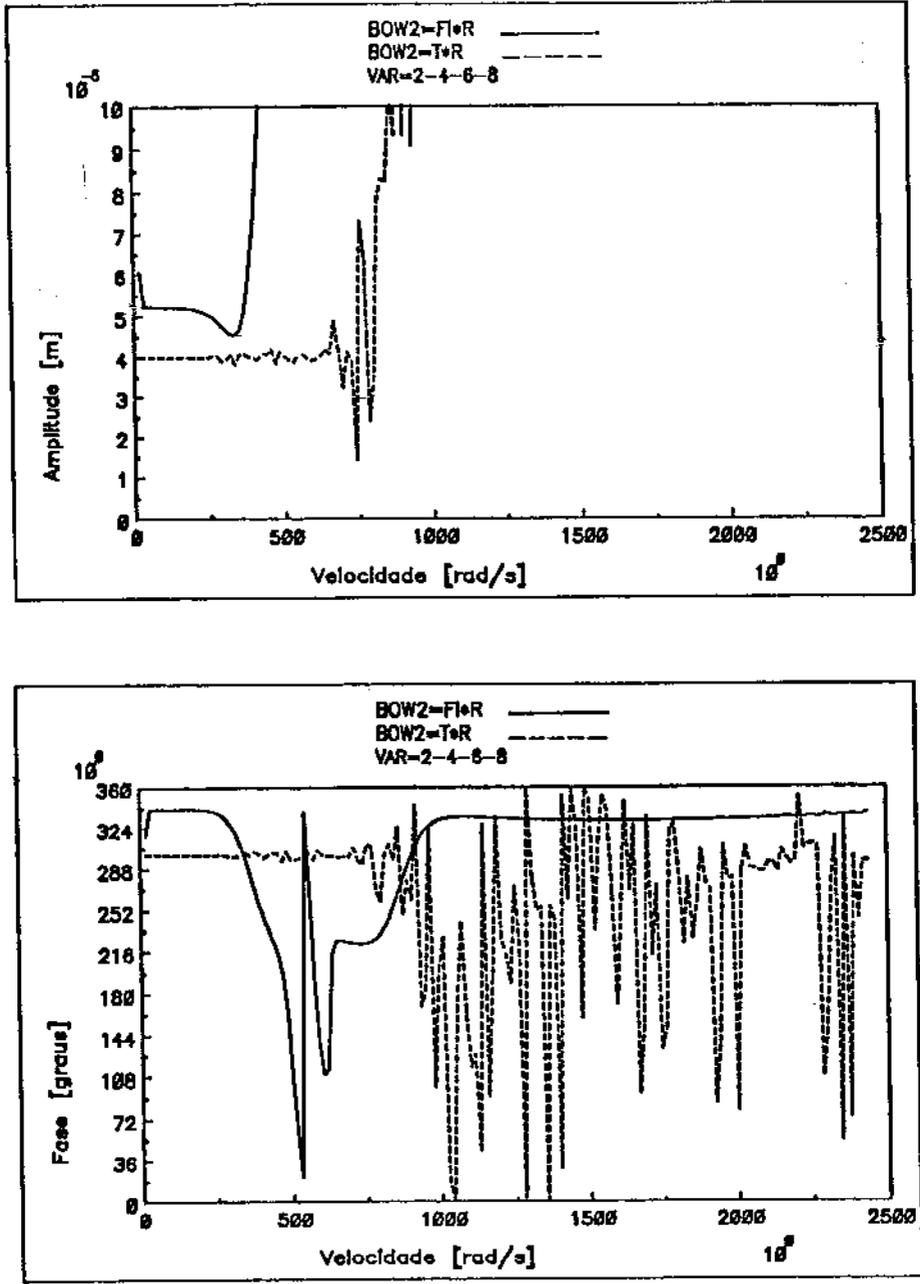


Figura 4.98: Valores de Empenamento-b2 Identificados Modo 2-S28

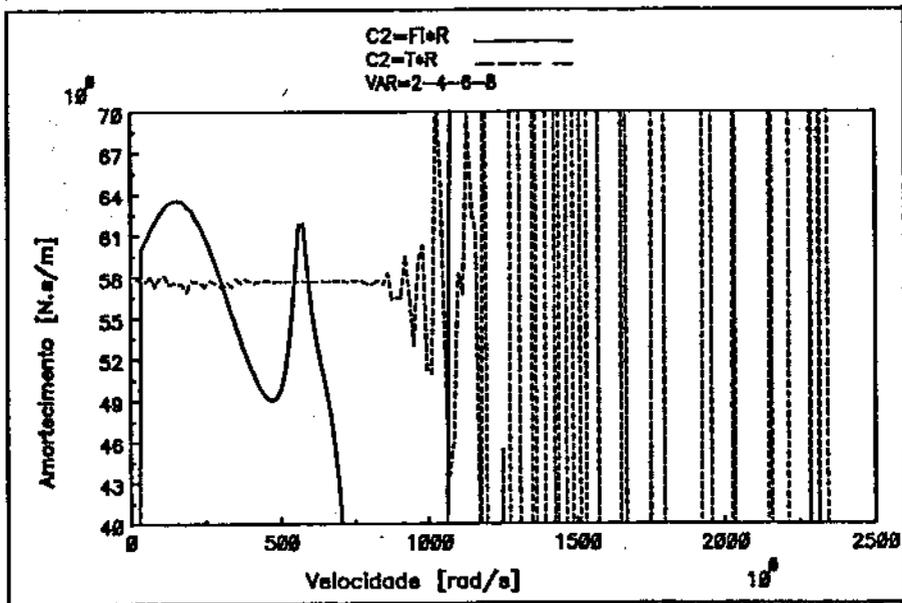
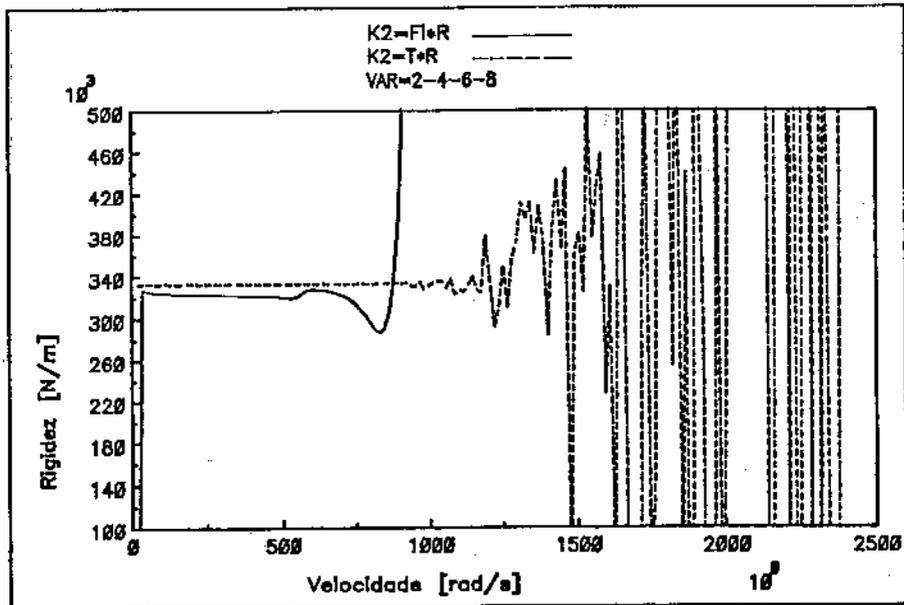


Figura 4.99: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S28

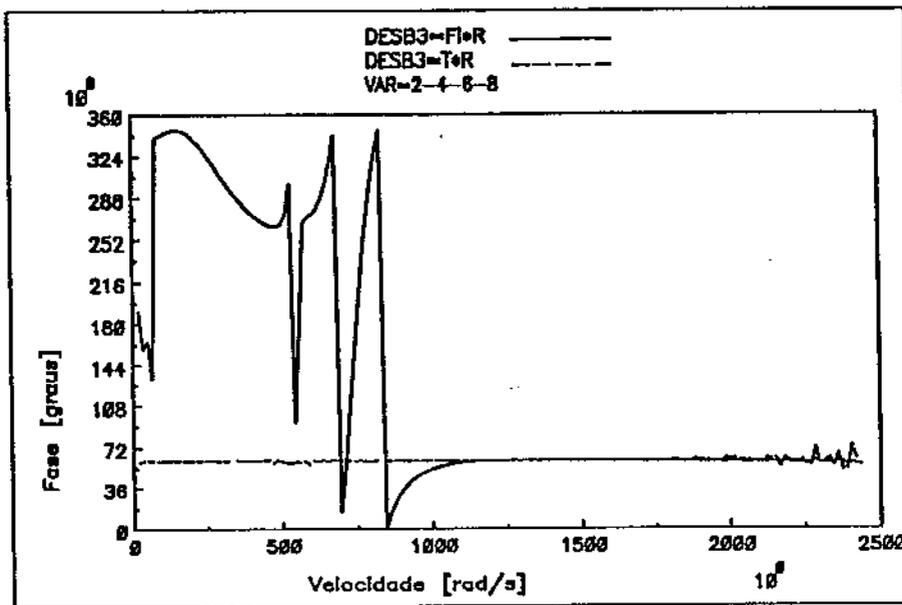
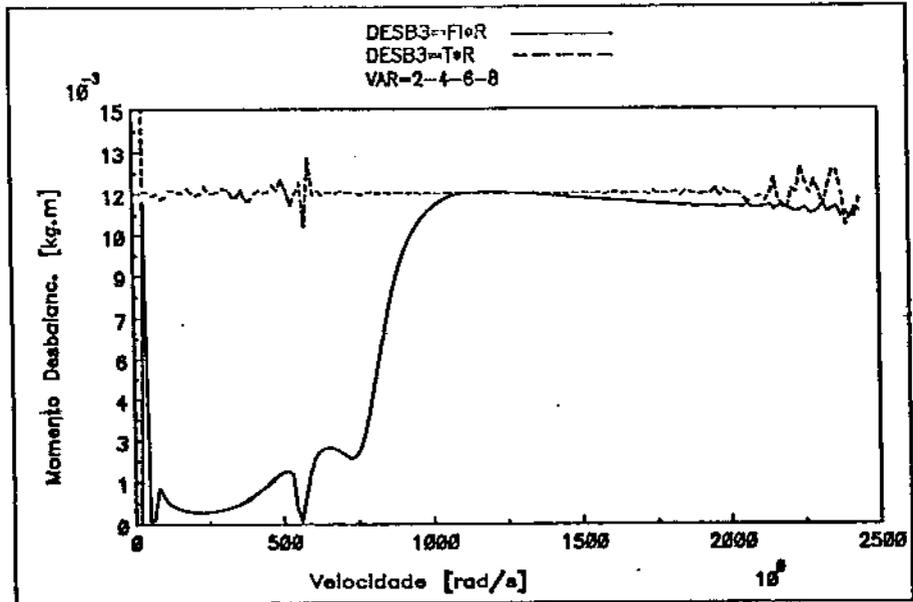


Figura 4.100: Valores de Momento de Balanceamento- u_3 Identificados Modo 3-S28

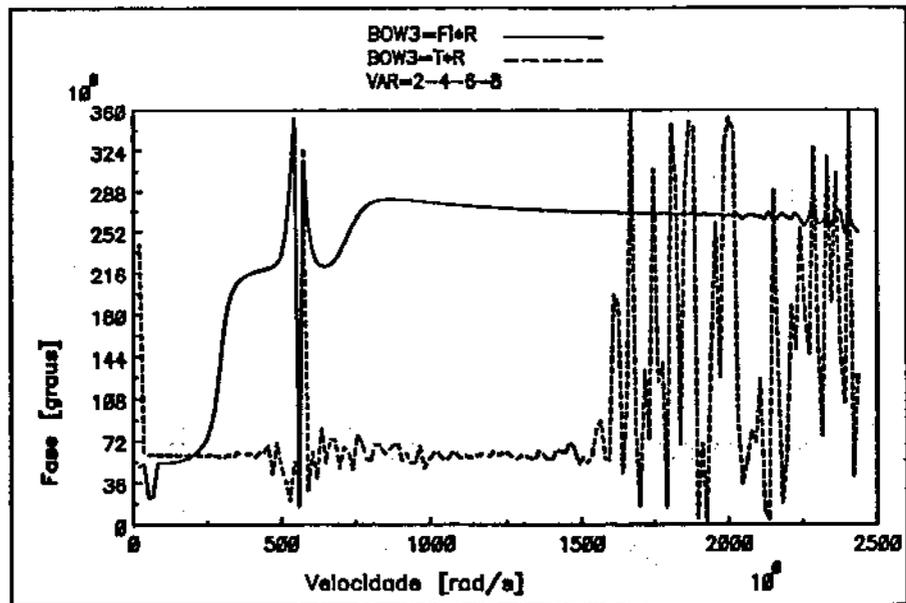
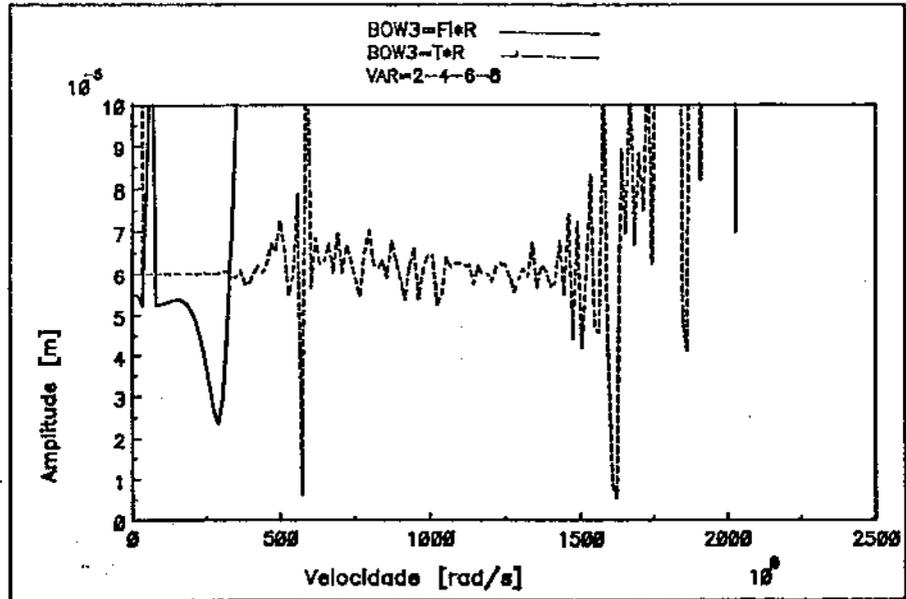


Figura 4.101: Valores de Empenamento- b_3 Identificados Modo 3-S28

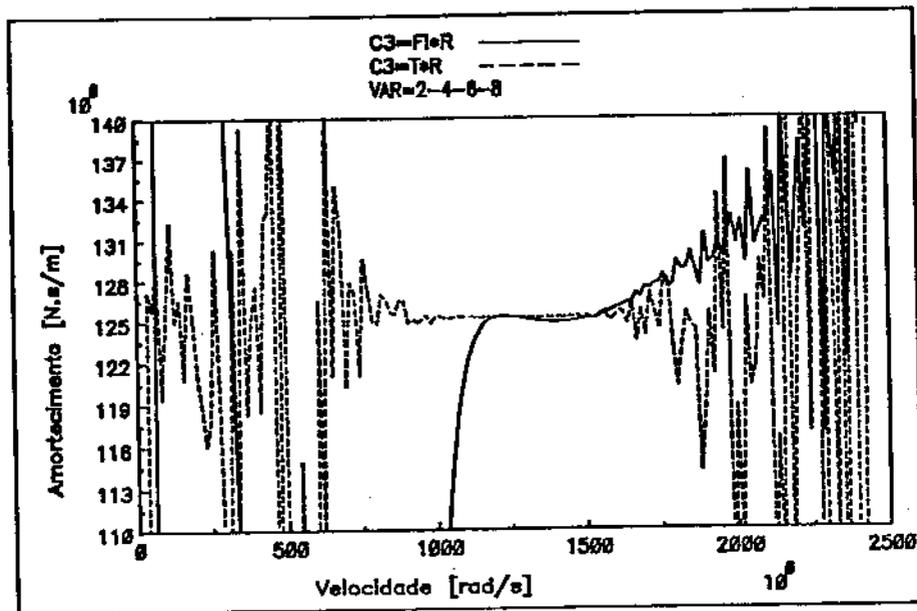
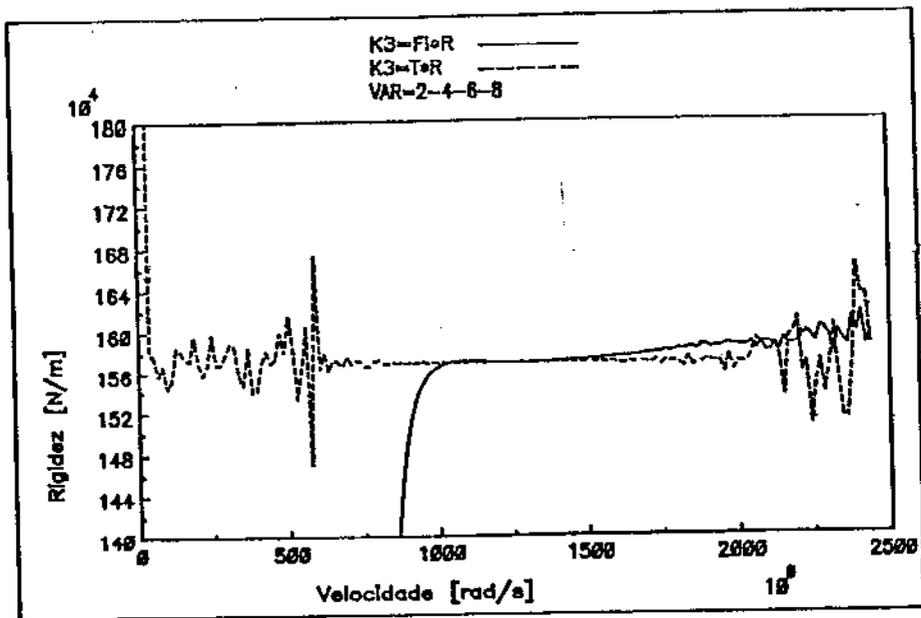


Figura 4.102: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S28

4.6.2 Simulação 29

Simulou-se um balanceamento onde os sinais dos deslocamentos foram obtidos nos planos 3, 5, 7 em 3 velocidades de rotação. Simulou-se nos dois métodos, H e \hat{H} . As figuras (4.103), (4.104), (4.105) mostram os resultados obtidos para o 1º modo, as figuras (4.106), (4.107), (4.108) mostram os resultados obtidos para o 2º modo, as figuras (4.109), (4.110), (4.111) mostram os resultados obtidos para o 3º modo.

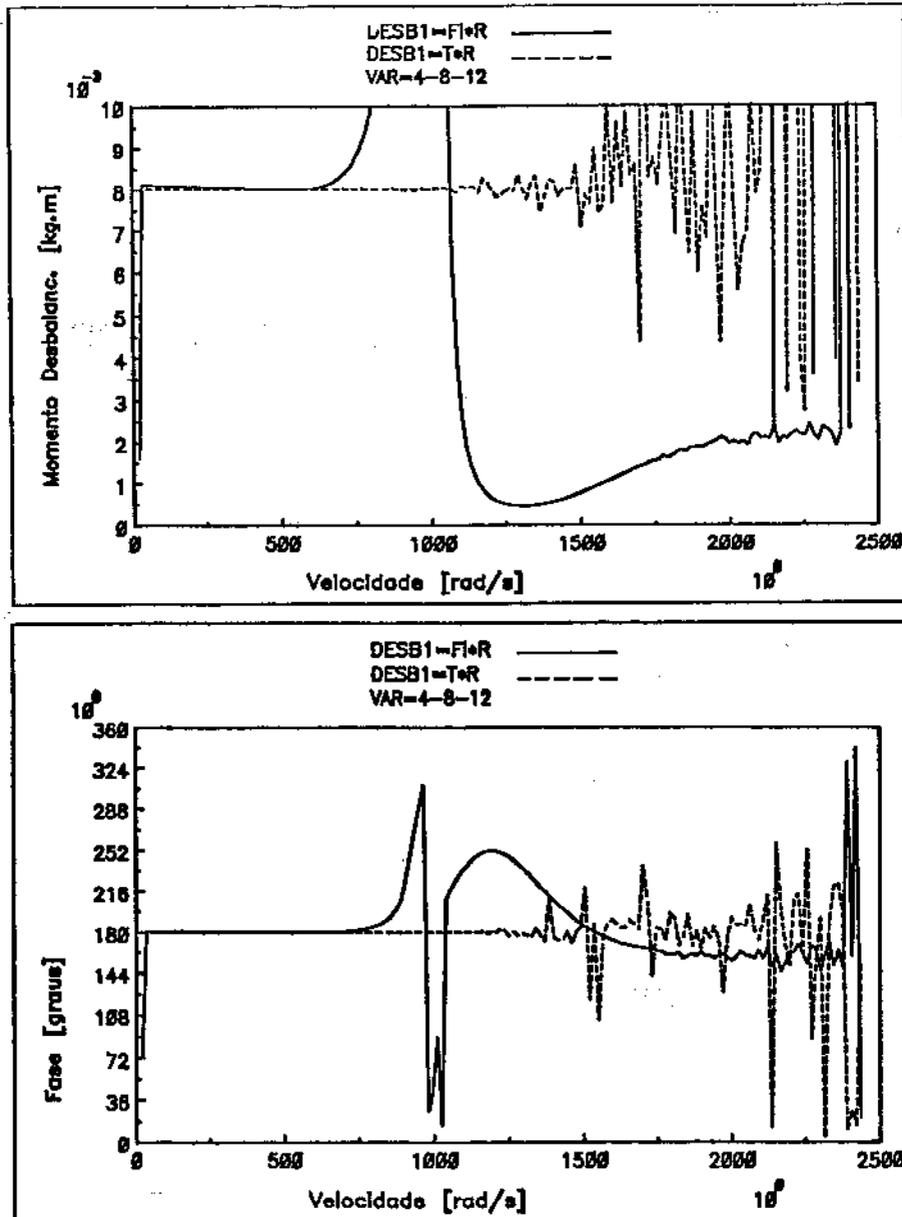


Figura 4.103: Valores de Momento de Balanceamento- u_1 Identificados Modo 1-S29

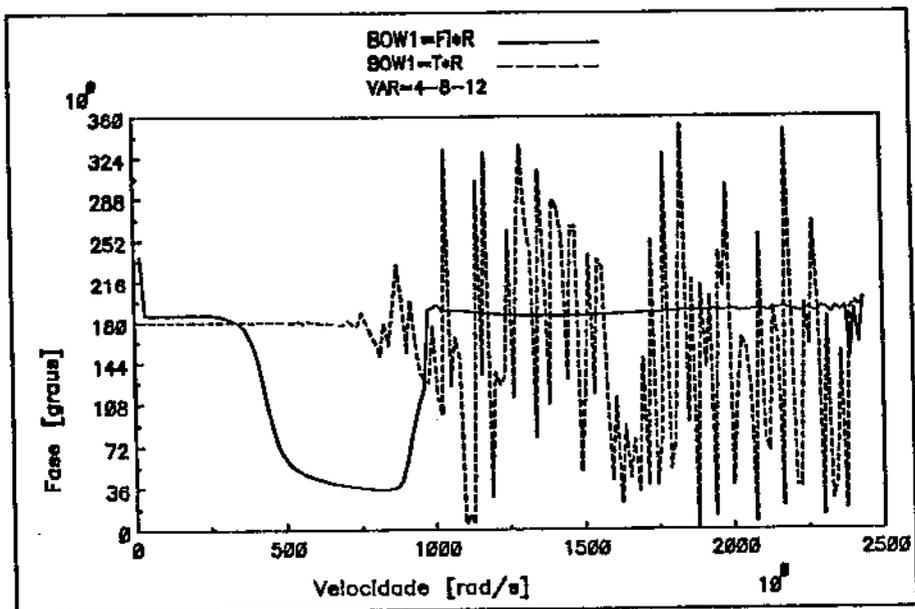
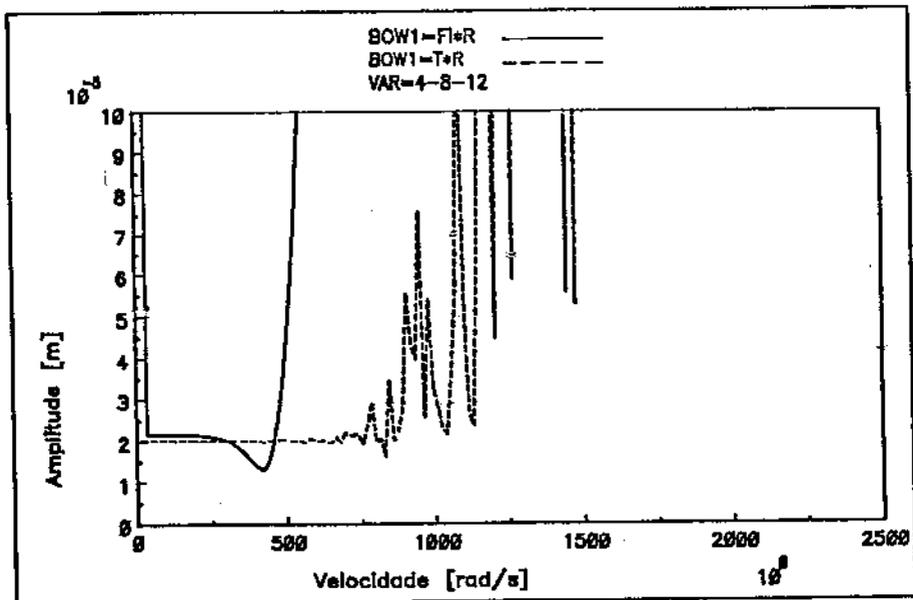


Figura 4.104: Valores de Empenamento- b_1 Identificados Modo 1-S29

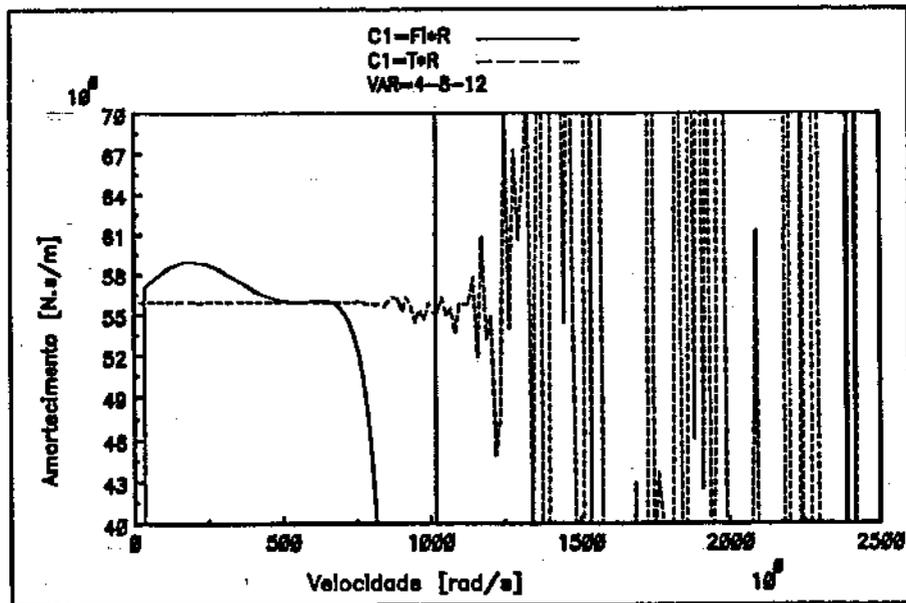
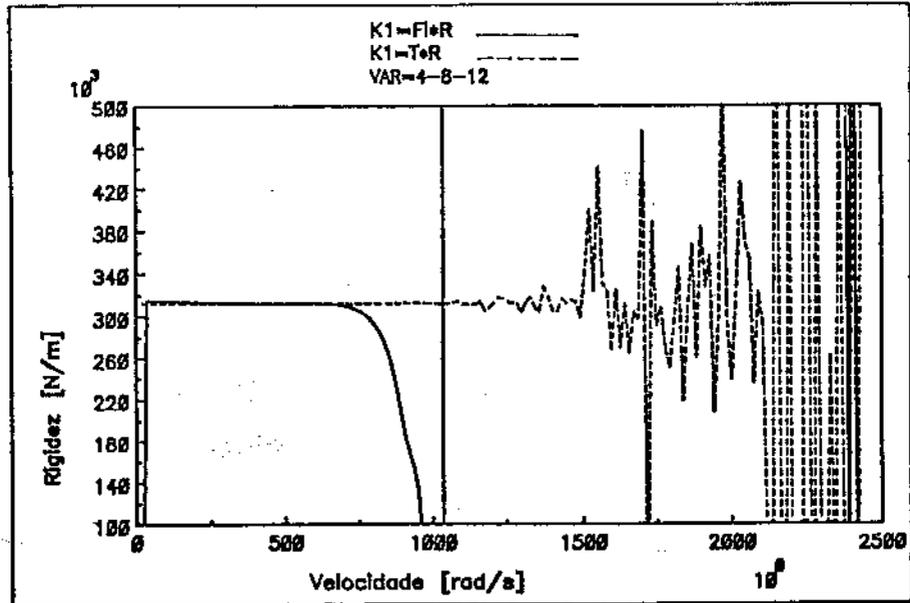


Figura 4.105: Valores de Rigidez- k_1 e Amortecimento- d_1 Identificados Modo 1-S29

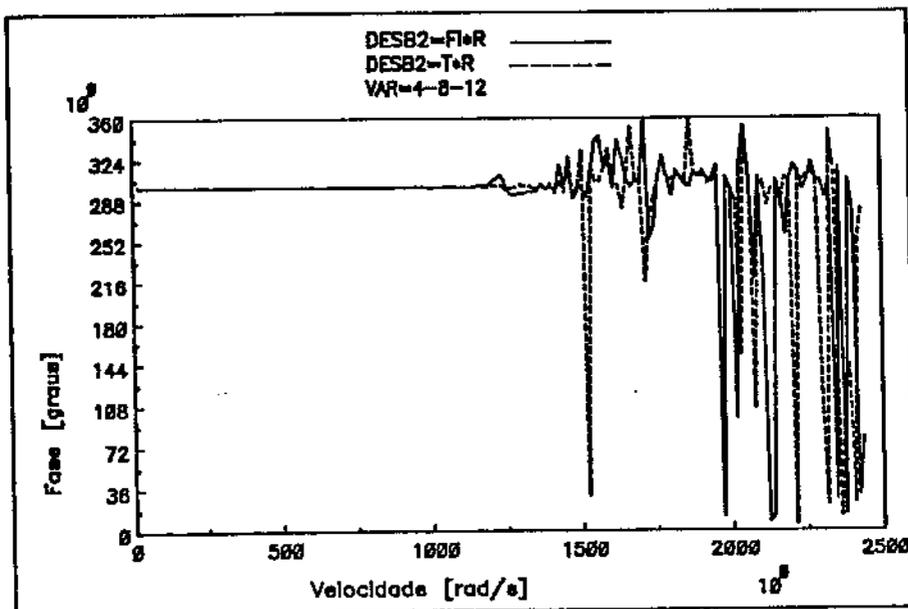
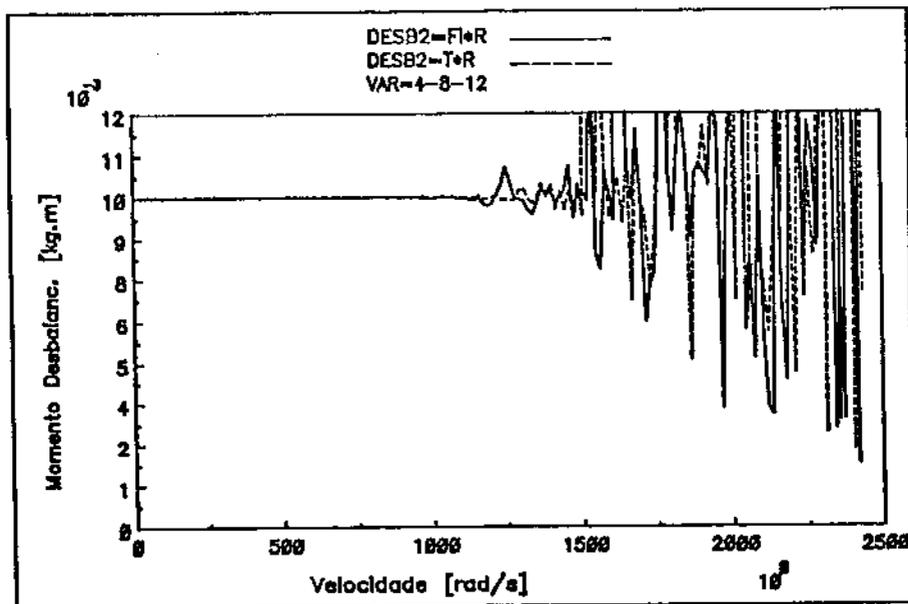


Figura 4.106: Valores de Momento de Balanceamento-u2 Identificados Modo 2-S29

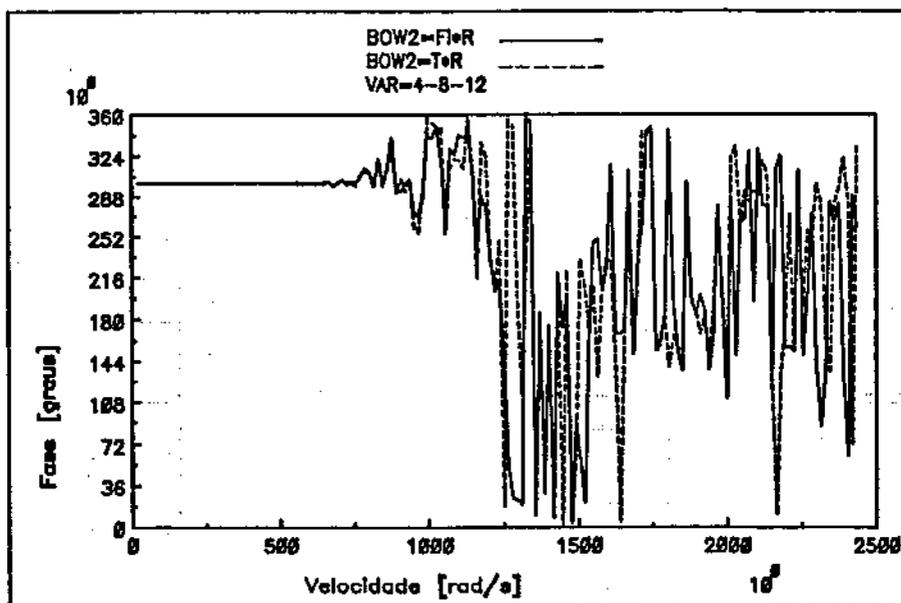
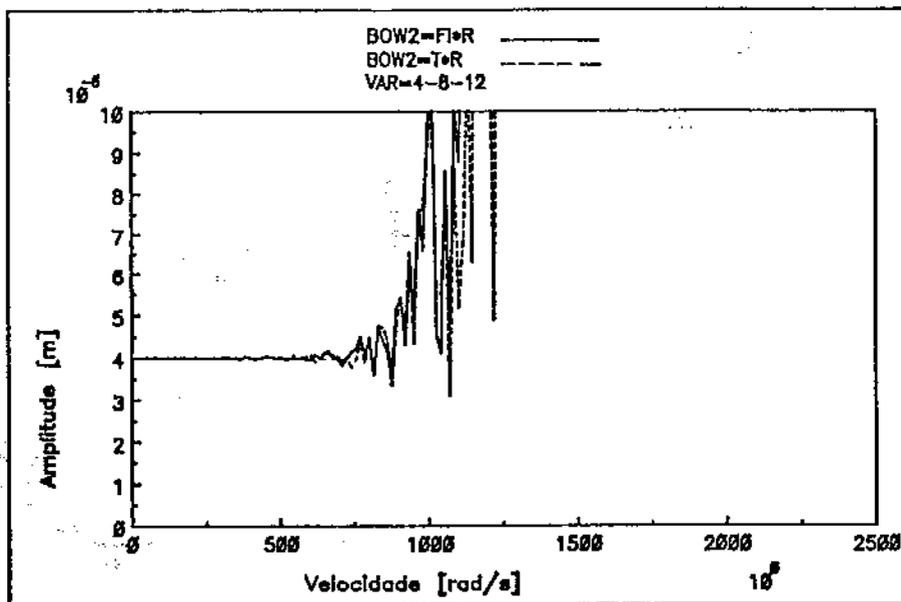


Figura 4.107: Valores de Empenamento-*b2* Identificados Modo 2-S29

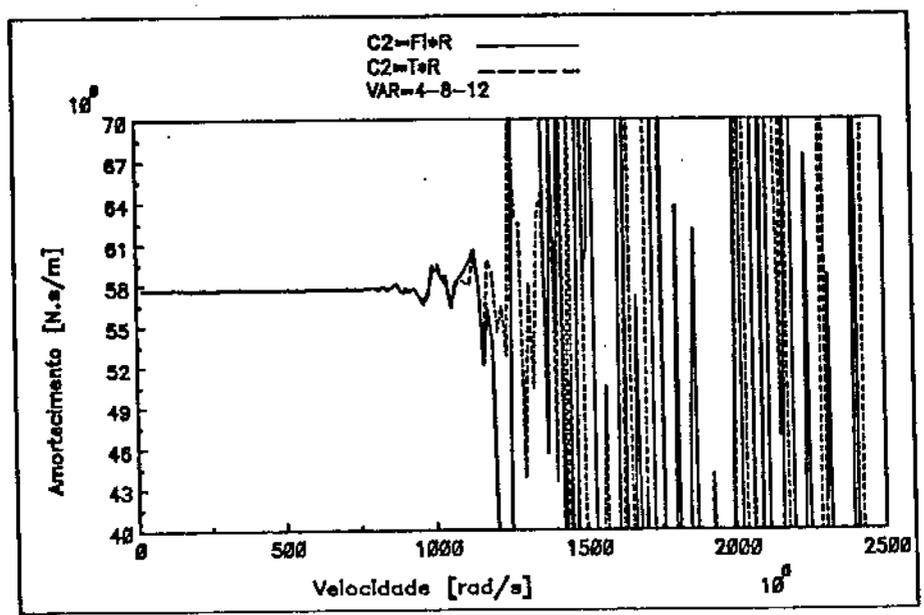
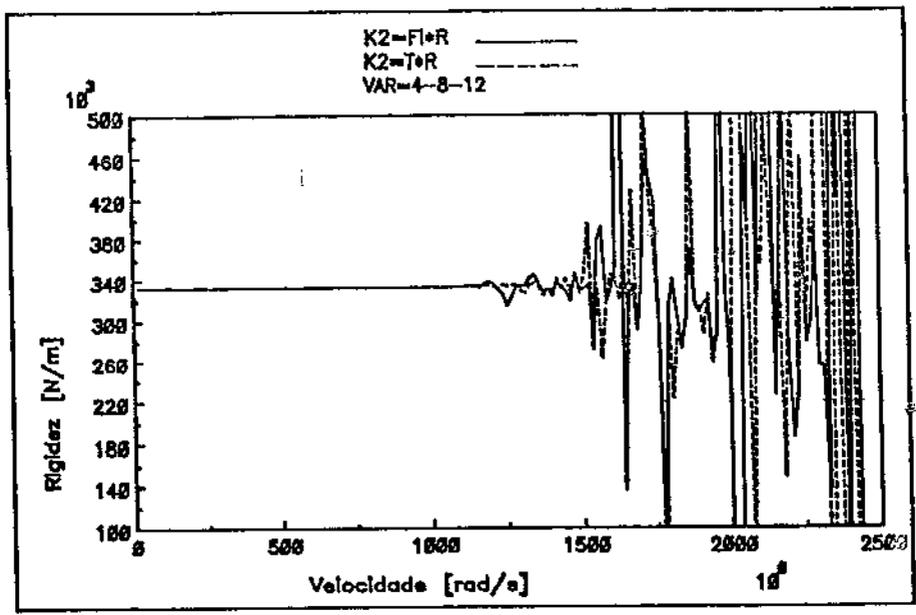


Figura 4.108: Valores de Rigidez- k_2 e Amortecimento- d_2 Identificados Modo 2-S29

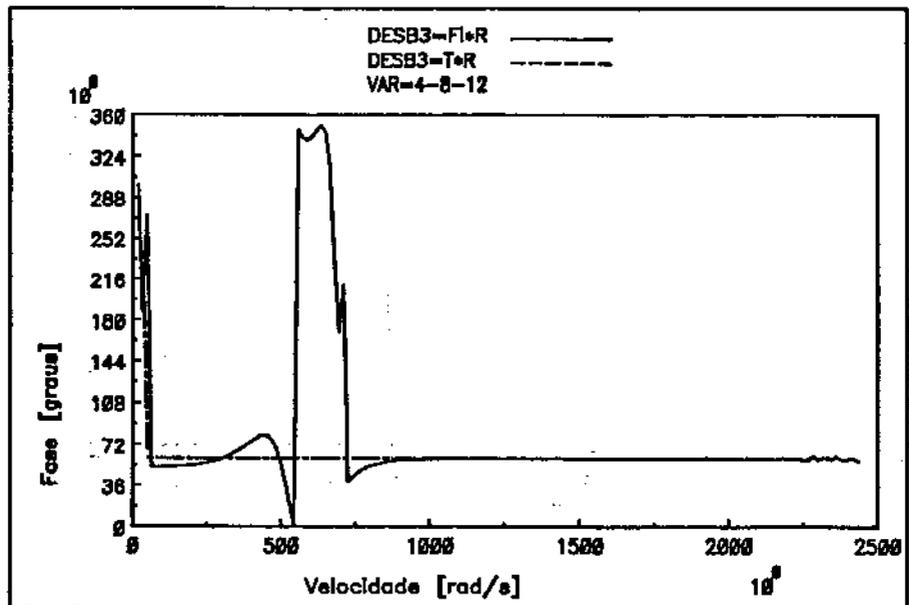
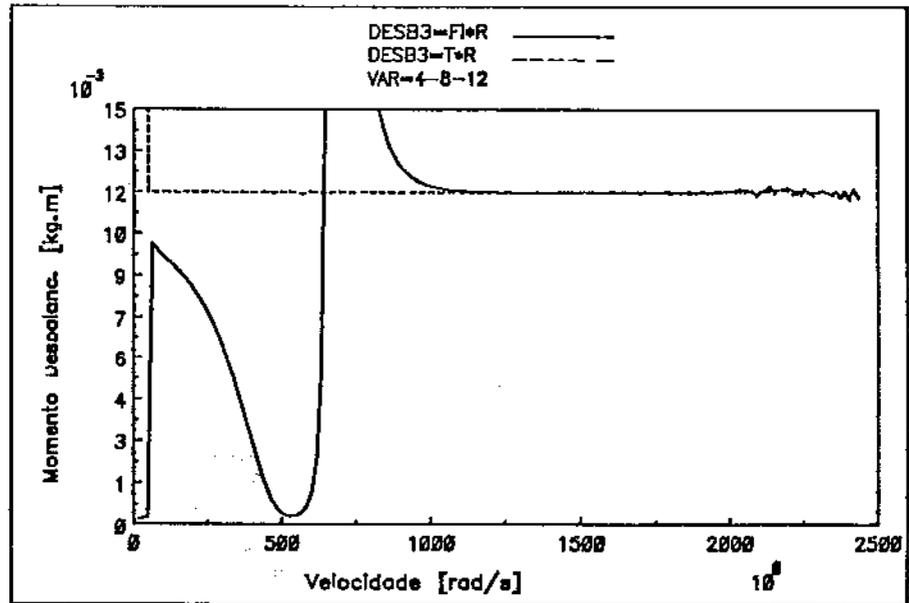


Figura 4.109: Valores de Momento de Balanceamento-u3 Identificados Modo 3-S29

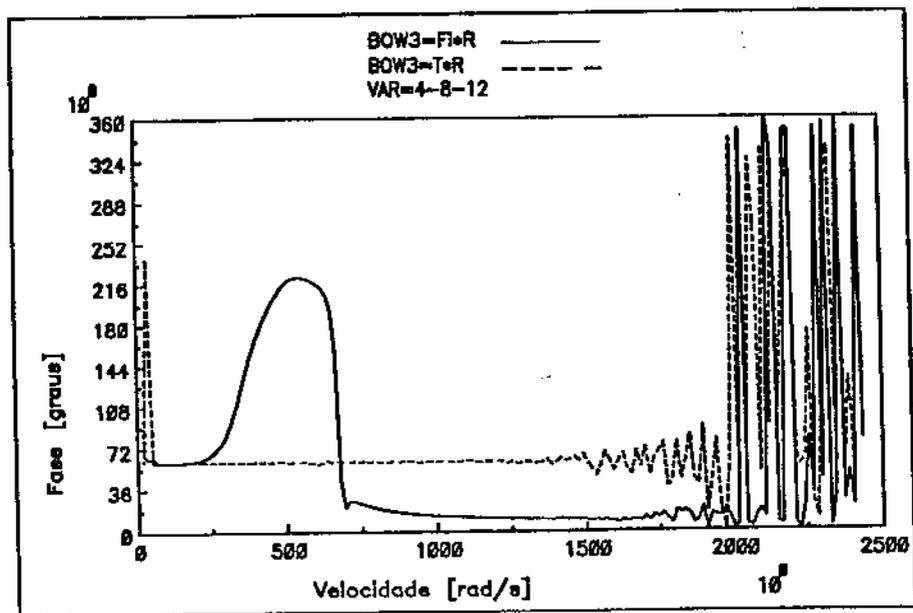
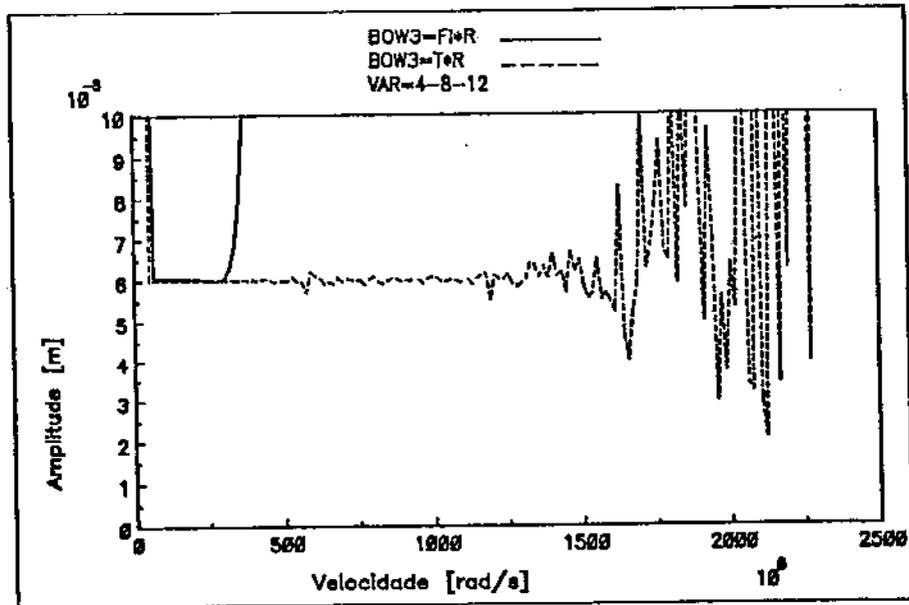


Figura 4.110: Valores de Empenamento-63 Identificados Modo 3-S29

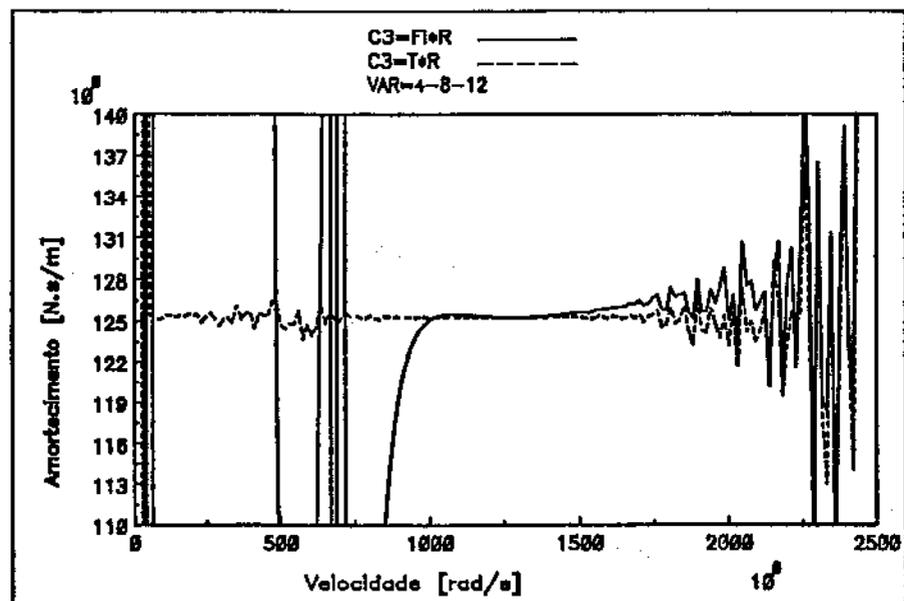
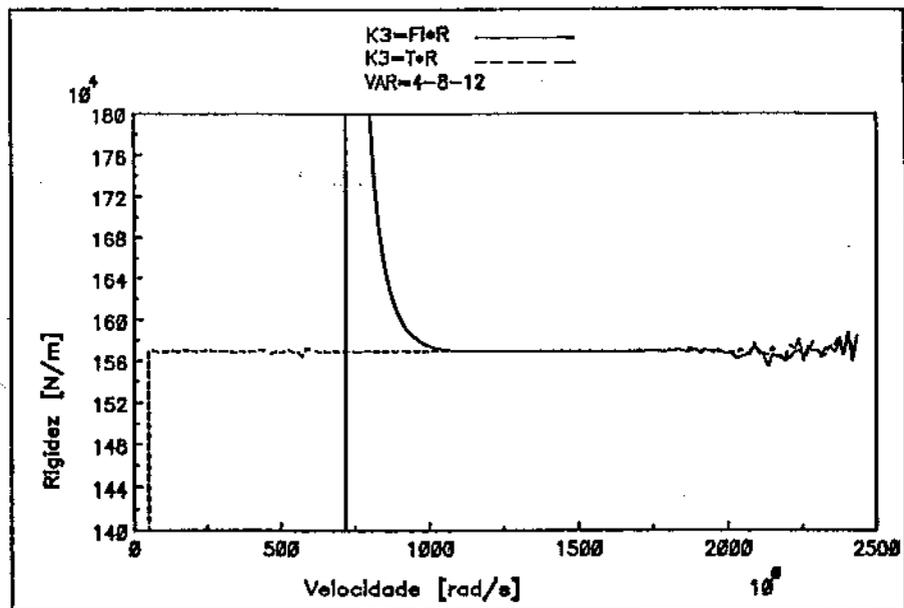


Figura 4.111: Valores de Rigidez- k_3 e Amortecimento- d_3 Identificados Modo 3-S29

4.6.3 Análise das Simulações

Uma característica do Método de Balanceamento Modal é que o número de Planos de Balanceamento a ser utilizado é independente da identificação do desbalanceamento. Na identificação do desbalanceamento, este método, por outro lado, depende do número e da localização dos planos de medição.

Analisando-se as simulações, observa-se que no Método Modal H o número de planos de medida não influenciou significativamente na identificação do desbalanceamento, isto porque os planos de medição foram bem escolhidos, através de uma análise prévia dos modos do sistema e também pelo fato do sistema apresentar baixa densidade modal.

A conclusão obtida anteriormente não pode ser confirmada na simulação 28, caso onde ocorre alta densidade modal. Nesse caso, deve-se tentar utilizar o maior número possível de planos de medida, para tentar filtrar o modo desejado, ou mesmo escolher planos de medida que, pela sua simetria, já contribuam com a ortogonalidade entre os modos $\{\psi\}_i$. Isto pode ser observado na simulação 29, ou ainda no caso para baixa densidade modal, as simulações 23, 24 comparadas com a simulação 25.

Dos gráficos de Balanceamento e Fase identificados das simulações com baixa e alta densidade modal pelo método \hat{H} , observa-se que para velocidades de rotação razoavelmente distantes da velocidade crítica, o valor identificado é tão bom quanto aquelas identificadas utilizando velocidades de rotação próximas das velocidades críticas, o que não ocorre com tanta eficiência no método H .

Note-se que a simulação não levou em conta erros e ruídos presentes nas medições de vibrações reais.

4.7 Discussão dos resultados

4.7.1 Método dos Coeficientes de Influência

O Método dos Coeficientes de Influência apresenta-se como técnica poderosa para o balanceamento, principalmente quando não se conhece matematicamente o sistema dinâmico, seja por dificuldades no modelamento do sistema ou por inviabilidade de implementação. O método dos Coeficientes de Influência trata o sistema dinâmico como uma "caixa preta", onde o processo de balanceamento é baseado apenas nas relações entre as entradas e saídas.

Um dos inconvenientes do Método refere-se ao grande número de medições necessárias para realizar o balanceamento. Outro inconveniente é a dificuldade de se levar em conta as irregularidades geométricas do sistema, por exemplo, se o rotor apresentar um empenamento do eixo. A não consideração destas irregularidades no processo de balanceamento, ocasiona acréscimo na amplitude de vibração dos planos em velocidades fora da velocidade em que foi balanceado. Como normalmente os Planos de Balanceamento não coincidem com os planos desbalanceados, o método em geral apresenta redução

de vibração principalmente nos Planos de Balanceamento, podendo também ocorrer acréscimo na amplitude de vibração dos outros planos.

4.7.2 Balanceamento Modal H e \hat{H}

Os Métodos de Balanceamento Modais baseiam-se no conhecimento do sistema dinâmico através de um modelo matemático onde são conhecidos, a distribuição de massa, a geometria do sistema e os modos próprios do sistema girante. Este método, além de identificar os parâmetros do sistema como a rigidez modal k_i , o amortecimento modal d_i , identifica também o desbalanceamento modal \bar{u}_i do sistema, assim como as irregularidades geométricas modais \bar{b}_i . Isto faz com que este método, quando aplicado a sistemas rotativos, funcione também como um estimador de irregularidades geométricas, tais como empenamento e ovalização.

Outra característica do método pressupõe a hipótese da predominância do modo a ser balanceado, nas velocidades de rotação consideradas. O nível de ruído devido às irregularidades geométricas e às contribuições de desbalanceamento de outros modos deve ser desprezível em relação à resposta dinâmica devido ao desbalanceamento do modo considerado.

Uma vantagem observada neste método é que, se o modelo está razoavelmente próximo do real, e se o sistema apresenta baixa densidade modal, com apenas um plano de medição, obtém-se resultados bastante satisfatórios.

Para que o Método Modal funcione adequadamente é necessário que os modos próprios estejam bem ajustados. Portanto, a realização de uma análise modal experimental é sempre recomendada. É interessante também levantar curvas resposta em frequência tanto para o modelo teórico, como no modelo real. Com estes resultados é possível analisar a influência dos modos nas curvas de H e \hat{H} e assim verificar a eficácia da filtragem modal.

4.8 Estudo sobre Planos de Medição

4.8.1 Introdução

Para os processos de Balanceamento, são utilizados sinais correspondentes a medidas de vibrações, sejam eles sinais em termos de medidas de deslocamento, velocidade, aceleração ou deformação. Dependendo da escolha da instrumentação, devido a sensibilidade aos níveis de vibração existentes, estes sinais obtidos poderão ser utilizados ou não no processo de Balanceamento.

No caso de Balanceamento de rotores flexíveis, alguns aspectos importantes devem ser considerados para se conseguir efetuar uma boa medida de vibração e para o cálculo do momento de Balanceamento:

- Análise preliminar dos modos de vibração, para uma escolha de planos de medida onde o nível de vibração seja compatível com a faixa de sensibilidade disponível no aparelho de medição a ser utilizado.
- Escolha do número de estações de medida

Para a escolha de planos fisicamente possíveis de serem medidos num sistema dinâmico real, é necessário um conhecimento prévio dos modos de vibração. Com esses modos é possível verificar os planos que vão apresentar grandes amplitudes de vibração, como também saber onde as medidas não poderão ser utilizadas no processo de balanceamento. Após identificar as regiões onde são aconselháveis as medições, é necessário também observar a disponibilidade física do local de medição, pois pode existir pontos ótimos de medição que não podem ser utilizados, por não haver uma pista adequada para a instalação de sensores de aproximação, por não ser possível a instalação da própria instrumentação por falta de acesso àquela região.

Para se decidir na escolha dos planos, necessita-se conhecer a ordem de grandeza dos níveis de vibração nestas regiões, pois é necessário que estes níveis sejam compatíveis com a sensibilidades dos aparelhos de medição a serem utilizados.

De um modo geral os planos de medição devem ser tais que os modos próprios de medição $\{\psi\}$; sejam, se possível, ortogonais entre si e apresentem normas com valores os mais altos possíveis.

4.8.2 Escolha do número de Planos de Medição

Dependendo do Método de Balanceamento, o número de estações de medida pode ou não ser um fator importante na obtenção de um bom balanceamento.

No caso dos Coeficientes de Influência, o número de Planos de Medida depende dos planos onde se encontram os momentos de desbalanceamentos e dos planos escolhidos como Planos de Balanceamento. Para que o método funcione bem, o número de Planos de Medida no mínimo deve ser igual ao número de Planos de Balanceamento. Observou-se que se o balanceamento é do tipo "exato", onde os Planos de Balanceamento coincidem com os planos onde existem momentos de desbalanceamento, um número maior de planos de medida em relação ao número de Planos de Balanceamento não influi de uma maneira significativa no balanceamento.

Em se tratando do Balanceamento Modal H , no caso de sistemas com baixa densidade modal, observou-se através das simulações que, uma vez obtido um modelo matemático representativo, a influência do número de Planos de Medida é em geral, muito pequena, quando utilizamos velocidades para balanceamento perto das velocidades críticas.

No Balanceamento \hat{H} , a influência do número de Planos de Medida é importante quando se deseja minimizar os erros devido à contribuição de outros modos, em velocidades de rotação onde o modo sendo balanceado não é predominante ou se o sistema apresentar alta densidade modal.

No estudo da influência da escolha e número de planos de medição utilizou-se o Modelo-M2 com os momentos de desbalanceamento e empenamentos modais descritos nas tabelas (4.22) e (4.23).

Foi apresentado outro exemplo utilizando-se o Modelo-M2 com um maior número de desbalanceamentos modais u_i excitados, Modelo-M2a, conforme mostra a tabela (4.30).

Modos excitados	u_i modal (Kg.m)	Fase φ_p (graus)
1	8E-03	0
2	10E-03	120
3	12E-03	240
4	10E-03	160
5	8E-03	80
6	6E-03	60
7	4E-03	180
8	2E-03	300

Tabela 4.30: Momentos de Desbalanceamento Iniciais-M2a

Escolheu-se um empenamento modal b_i diferente para cada modo, utilizou-se a equação (2.88) para se calcular o desbalanceamento discretizado $\{B_p\}_i$, e colocando-se este desbalanceamento em uma posição angular θ_p em relação ao referencial fixo no eixo, conforme mostra a tabela (4.31).

Modos excitados	b_i modal (m)	Fase θ_p (graus)
1	2E-05	0
2	4E-05	120
3	6E-05	240

Tabela 4.31: Empenamento Modal-M2a

Considerando-se estes Momentos de Desbalanceamento da tabela (4.30) e o empenamento da tabela (4.31), obteve-se a simulação da resposta ao desbalanceamento em frequência para todos os graus de liberdade do sistema, sejam deflexões ou rotações, para a faixa de velocidade onde deseja-se fazer a simulação do Balanceamento Modal. Depois utilizando-se as respostas ao desbalanceamento calculou-se pela equação (3.25) a componente H e a pela equação (3.42) a componente \hat{H} .

Considerando-se apenas 2 planos de medida, da ortogonalidade dos vetores $\{t\}_i$ e $\{\phi\}_i$, sabe-se que $\{t\}_1$ não terá componente do modo $\{\phi\}_2$ e portanto que $\hat{H}_1(\Omega)$ estará filtrado do modo $\{\phi\}_2$. Analogamente \hat{H}_2 não terá a componente $\{\phi\}_1$, conforme mostram as figuras (4.112), (4.113), (4.114), (4.115).

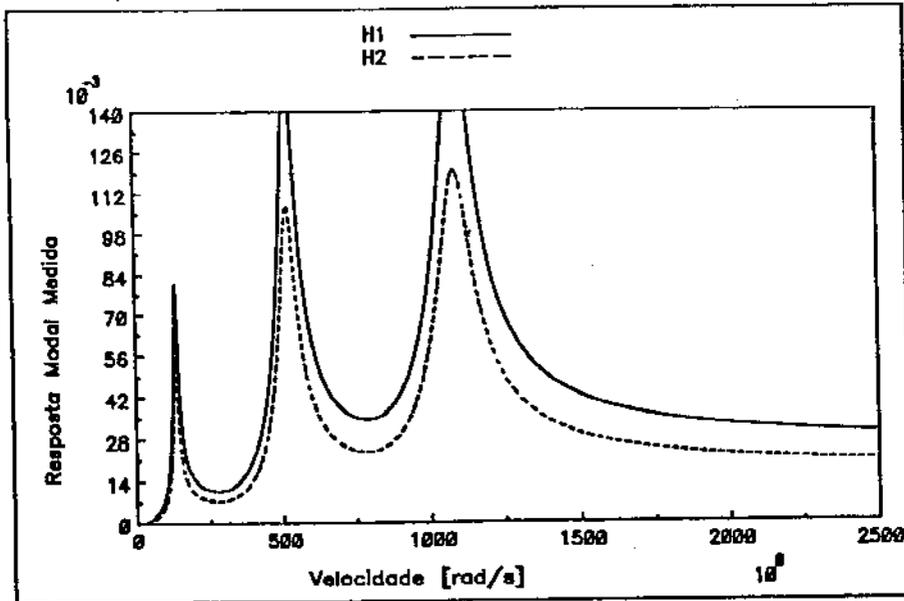


Figura 4.112: $H \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2

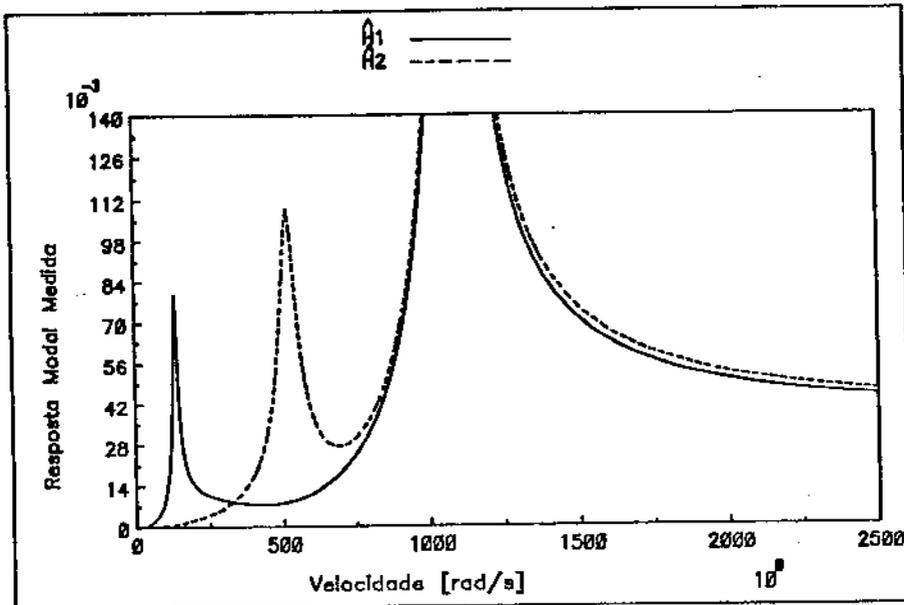


Figura 4.113: $\hat{H} \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2

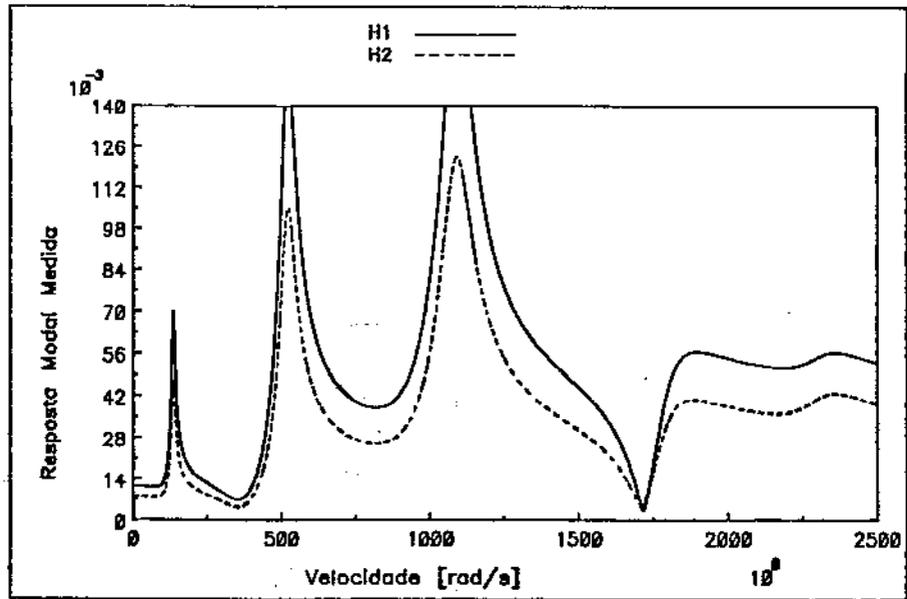


Figura 4.114: $H \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2a

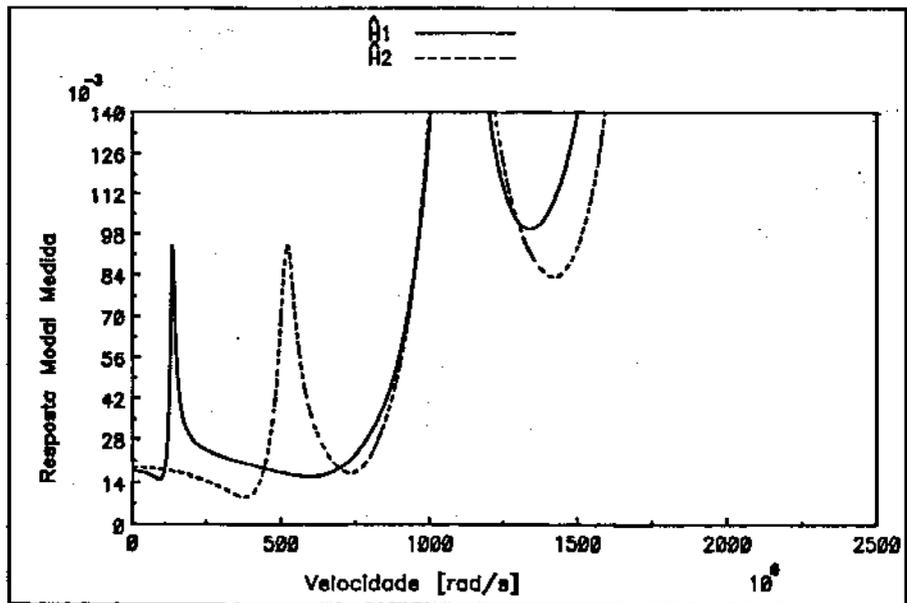


Figura 4.115: $\hat{H} \times$ Frequência, 2 planos de medida, Modelo-M2a

Considerando-se 3 planos de medida, serão 3 o número de *modos de medida* ortogonais, elimina-se a influência do 3º modo em $\hat{H}_1(\Omega)$ e $\hat{H}_2(\Omega)$, a influência do 2º modo em $\hat{H}_1(\Omega)$ e $\hat{H}_3(\Omega)$ e a influência do 1º modo em $\hat{H}_2(\Omega)$ e $\hat{H}_3(\Omega)$, restando a contribuição dos modos i maiores que 3, conforme mostram as figuras (4.116),(4.117),(4.118),(4.119).

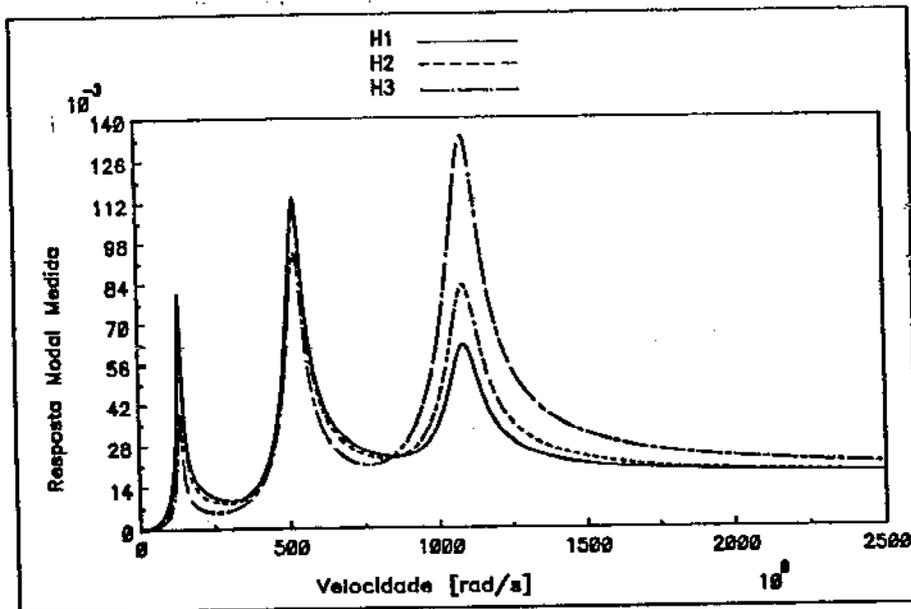


Figura 4.116: $H \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2

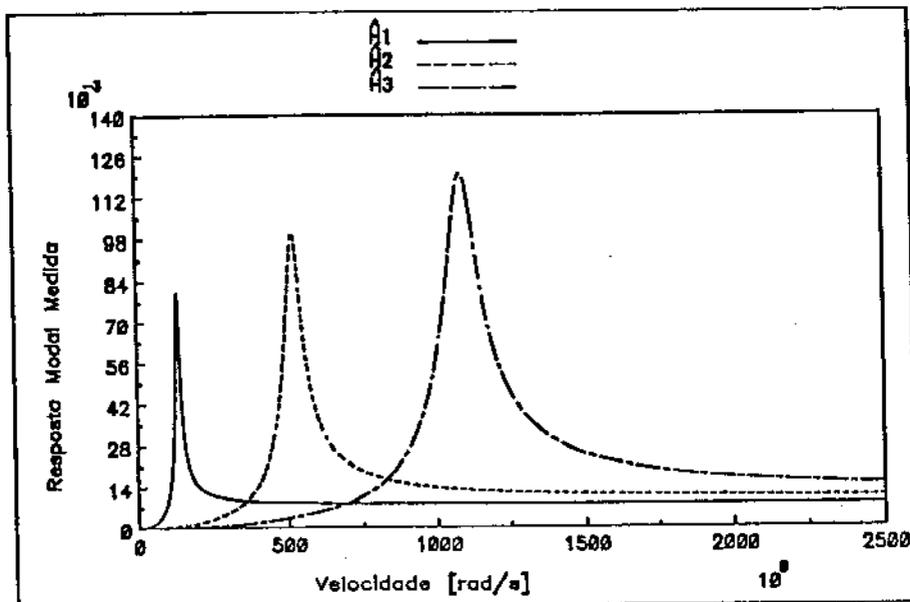


Figura 4.117: $\hat{H} \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2

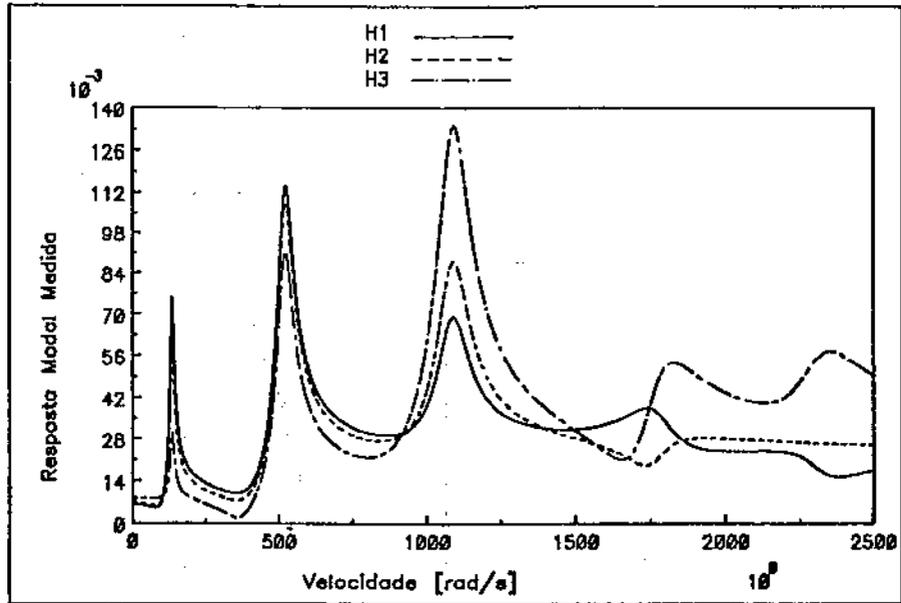


Figura 4.118: $H \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2a

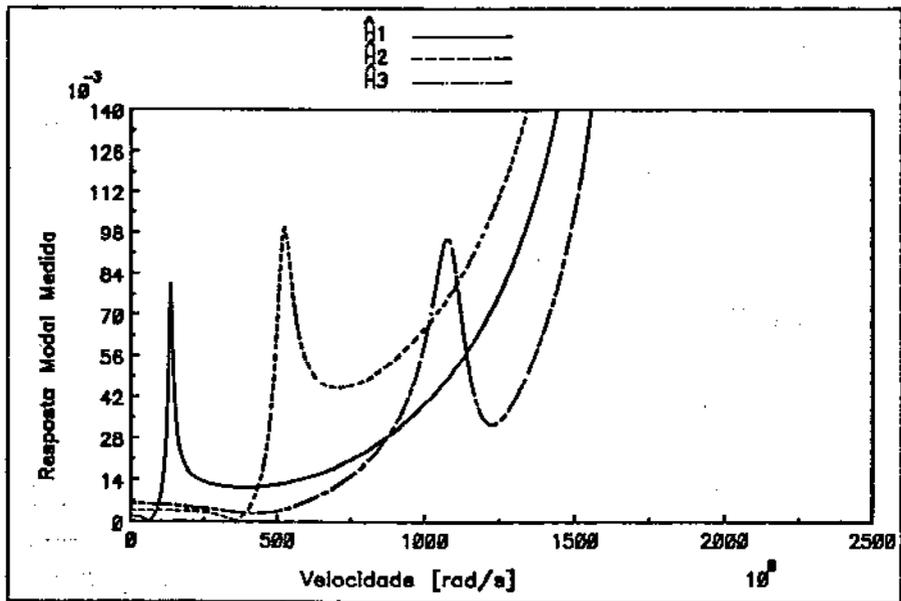


Figura 4.119: $\hat{H} \times$ Frequência, 3 planos de medida, Modelo-M2a

Assim, quanto maior o número de planos de medida, maior será a ordem de $[T]$ e devido a ortogonalidade de $\{t\}_i$ e $\{\psi\}_j$, menor a contribuição dos outros modos nos valores de $\hat{H}_i(\Omega)$ medidos. Este vetor $\{t\}_i$ funciona como um filtro modal em relação aos modos mais altos não desejados no cálculo de $\hat{H}_i(\Omega)$. Note-se que a utilização dos vetores $\{t\}_i$ pode aumentar a contribuição dos modos mais altos $\{\psi\}_j$ aos quais não foram impostas a condição de ortogonalidade. Por isso é aconselhável utilizar um número de planos de medição maior do que o número de modos a serem balanceados.

4.9 Estudo sobre o número de Planos de Balanceamento

4.9.1 Introdução

Os Planos de Balanceamento podem ser definidos como os lugares físicos onde serão colocadas ou retiradas as massas de correção a serem calculadas pelos Métodos de Balanceamento. A escolha destes planos está relacionada com os planos onde é fisicamente possível retirar ou acrescentar massas, planos onde seja maior possível o efeito do momento de desbalanceamento equivalente, planos que analisados matematicamente através dos modos de vibração, maximize a influência no modo que se deseje minimizar o desbalanceamento.

Pode acontecer do plano de balanceamento coincidir com uma região inacessível de balanceamento na faixa de velocidade desejada. Para solucionar este problema, é necessário analisar outros possíveis planos, ou pode-se ainda utilizar momentos de balanceamento provenientes de conjugados aplicados neste plano.

O fato de se escolher Planos de Balanceamentos onde teoricamente se localizam os maiores momentos de desbalanceamentos, se torna importante dependendo do método utilizado. No caso do Balanceamento por Coeficientes de Influência este é um fator indispensável para um bom balanceamento. No caso do Balanceamento Modal isto não é um fator importante, pois após descoberta a massa de correção, podem existir outros planos que balanceiam o modo desejado, sem que coincidam com os planos onde existam desbalanceamentos concentrados.

4.9.2 Escolha do número de Planos de Balanceamento para os métodos Coeficientes de Influência e Balanceamento Modal

No caso do método de Balanceamento por Coeficientes de Influência, o número de Planos de Balanceamento ideal deve ser igual ao número de planos onde ocorrem os momentos de desbalanceamentos. O que geralmente acontece são impossibilidades físicas que prejudicam o balanceamento, ou no caso do desbalanceamento distribuído, o número de planos de balanceamento é sempre menor que o número de planos desbalanceados.

No caso do Balanceamento Modal, este número está relacionado com o número de modos que se deseja balancear. Após descoberto o momento de desbalanceamento

modal, este será multiplicado pelo vetor normalizado $\{t\}_i$ ortogonal aos modos $\{\phi\}_i$, conforme equação (3.38) e a montagem de $[T]$ depende do número de modos. Logo para balancear o i -ésimo modo, necessita-se de i Planos de Balanceamento no mínimo. Com estes cálculos está sendo considerado também que as massas de balanceamento calculadas não interfiram nos modos já balanceados, ou que não interfira em um outro modo qualquer incluído na matriz $[T]$.

Capítulo 5

Verificação Experimental do Método de Balanceamento Modal

5.1 Introdução

Uma vez implementados e testados teoricamente os métodos de balanceamento, uma demonstração experimental se faz necessária para comprovar a eficácia dos mesmos quando aplicados em rotores flexíveis.

Utilizou-se uma bancada de laboratório onde é possível simular um sistema flexível.

Para obter, do sinal medido de um rotor desbalanceado, os valores da amplitude e fase das componentes harmônicas, dois métodos distintos foram utilizados, os quais são discutidos neste capítulo.

5.2 Descrição do Sistema Mecânico

5.2.1 Detalhes sobre a Bancada de Laboratório

O sistema mecânico é acionado por um motor com capacidade de atingir rotações de até 10.000 *rpm* com uma potência de 0,5 *cv*. Possui um eixo maciço de 540 *mm* de comprimento por 12 *mm* de diâmetro. Utilizou-se um eixo treilado, onde foi feito um polimento, conforme mostra figura (5.1).

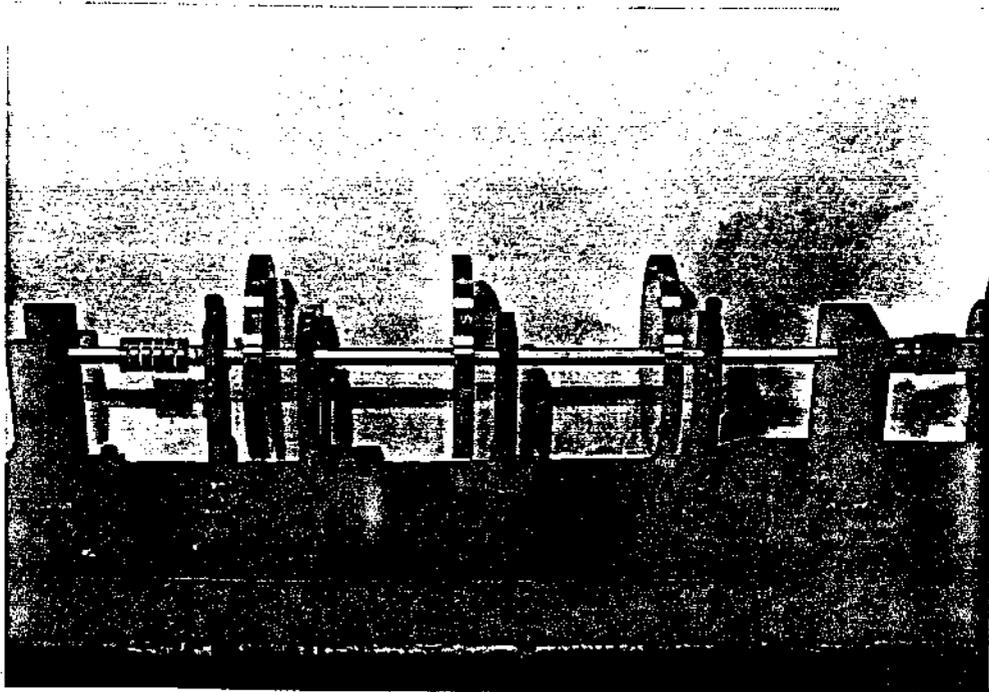


Figura 5.1: Bancada de ensaio - Eixo trefilado com 3 discos

Sobre o eixo foram montados com interferência 3 discos de aço. Cada disco possui um diâmetro de 160 *mm* por 15 *mm* de espessura. Nestes discos foram feitos furos dispostos a 60° num raio de 75 *mm*, onde podem ser colocadas as massas de desbalanceamento ou mesmo massas de balanceamento, conforme mostra figuras (5.1) e (5.2).

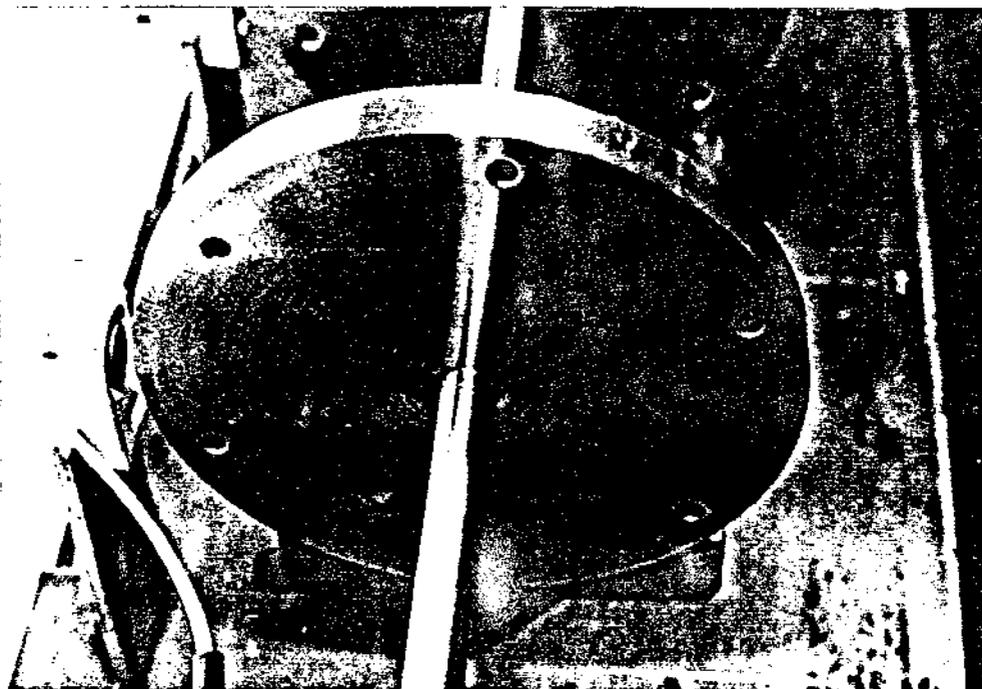


Figura 5.2: Disco de aço

O eixo está suportado em suas extremidades por 2 mancais de rolamento de esferas. Cada rolamento é alojado em um suporte rígido, fixado por interferência conforme figuras (5.3) e (5.4).



Figura 5.3: Mancal principal

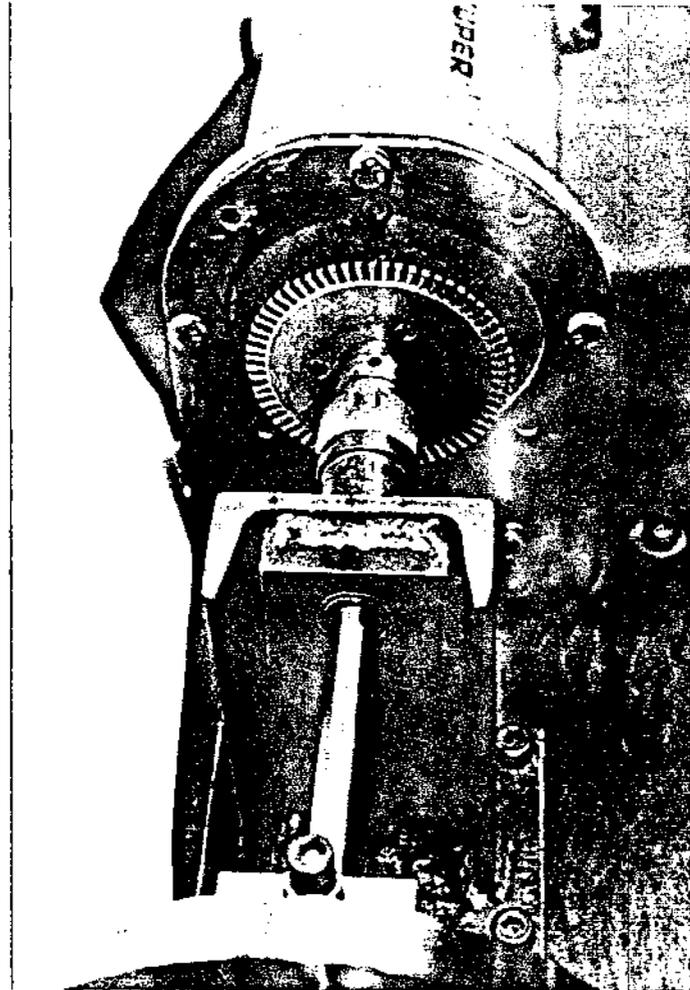


Figura 5.4: Mancal principal montado

O suporte é fixado a uma base através de 4 parafusos para que se tornasse rígido tanto em relação ao eixo x (horizontal) como em relação ao eixo y (vertical).

O eixo do sistema é ligado ao eixo do motor por meio de um acoplamento flexível para que as perturbações provenientes do motor interfiram o mínimo possível no sistema, como é mostrado na figura (5.5) e (5.6). O elemento central do acoplamento é feito de neoprene.

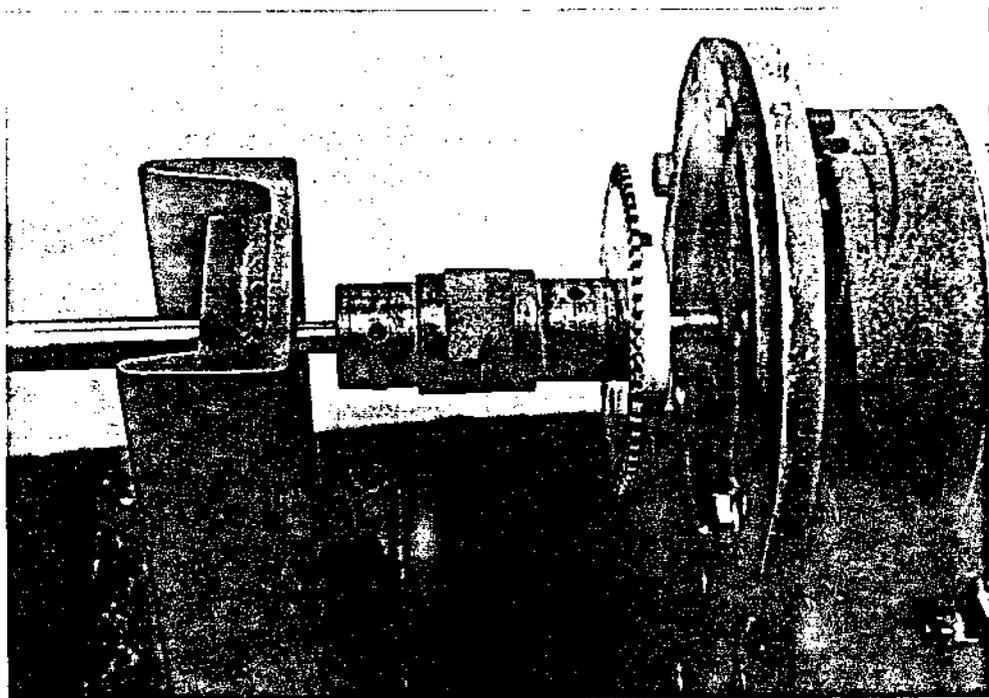


Figura 5.5: Acoplamento de neoprene montado

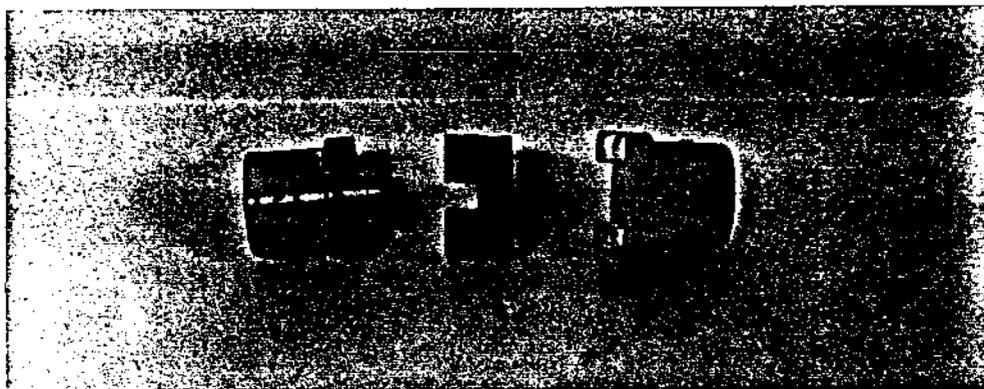


Figura 5.6: Acoplamento de neoprene

Notou-se o aparecimento indesejável de flutuação de velocidade de rotação e amplitudes de vibrações excessivas em rotações próximas das velocidades críticas, devido ao fato do sistema ser muito flexível. A solução adotada foi colocar um mancal de borracha onde foram colocados parafusos reguladores da pressão da borracha contra o eixo, que na realidade, além de colocar amortecimento no sistema, altera também a sua rigidez, aumentando-a, de modo que além de diminuir a flutuação de velocidade de rotação, se pudesse controlar estas amplitudes de vibração dentro de limites seguros. Estes mancais foram regulados utilizando dois sensores de deslocamento defazados de 90 graus para que se conseguisse monitorar a órbita num osciloscópio até que o sistema apresentasse uma órbita circular, aproximando-o a um sistema com mancais isotrópicos e ainda que suas amplitudes de vibração ficassem dentro da sensibilidade dos sensores. O mancal é ilustrado nas figuras (5.8) e (5.7).

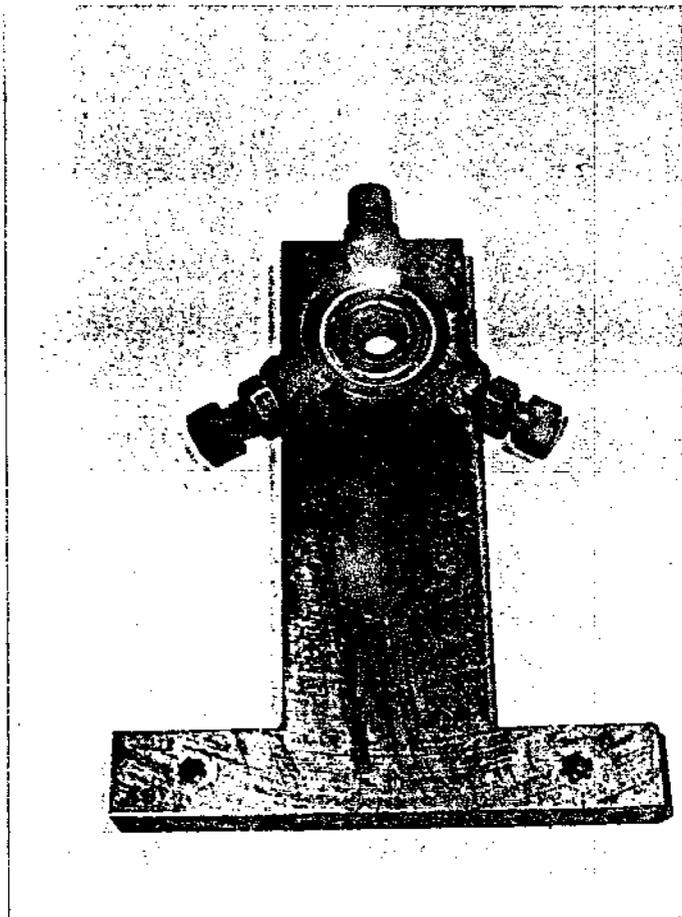


Figura 5.7: Mancal intermediário regulador de amortecimento

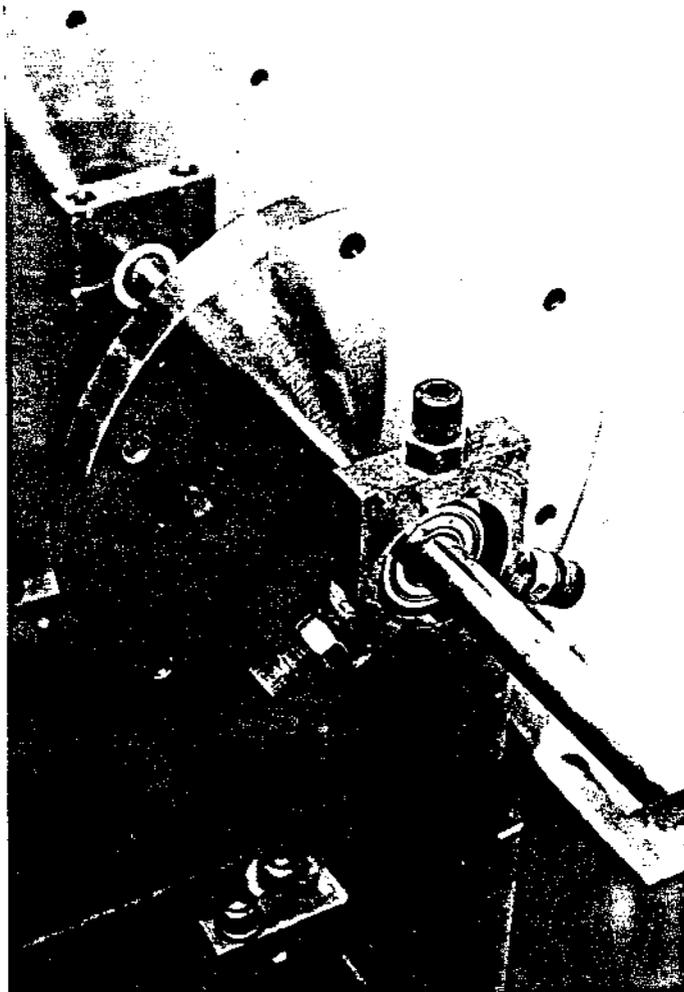


Figura 5.8: Mancal intermediário regulador de amortecimento, montado

A montagem completa, incluindo uma fundação sobre uma base inercial é mostrada na figura (5.9)

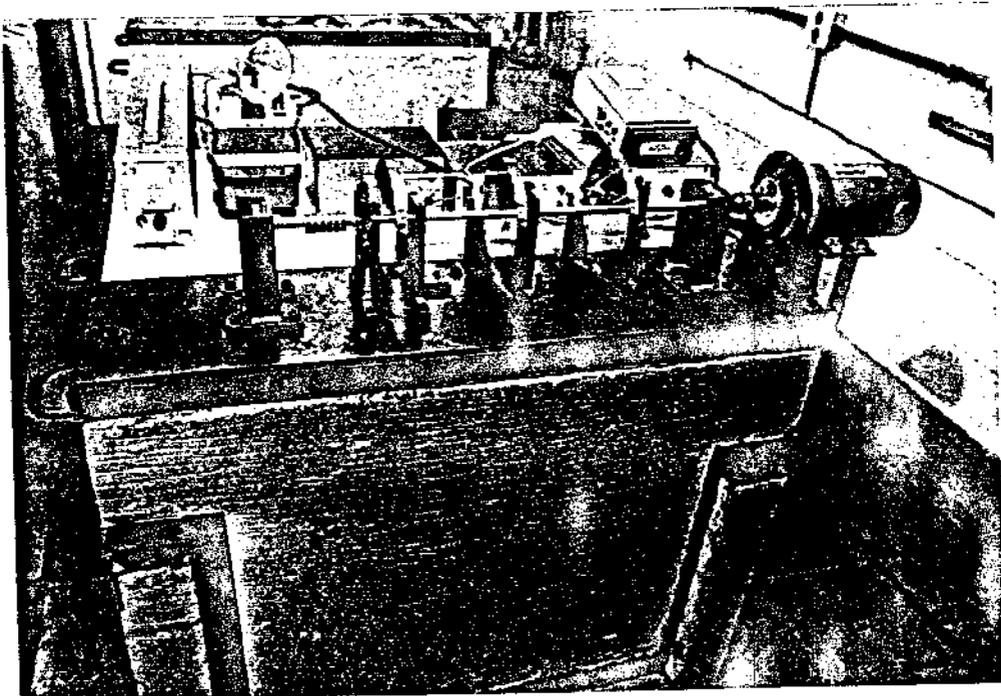


Figura 5.9: Vista geral do sistema montado

5.3 Ajuste do Modelo Teórico

Utilizando-se um programa computacional de Análise Modal existente num analisador de Fourier HP modelo 5451C, fez-se a aquisição da resposta em frequência em deslocamento, a partir de uma excitação do tipo impulso, em pontos do sistema onde se pudesse obter da análise, os 3 primeiros modos. Excitou-se no plano 3 e mediu-se os deslocamentos nos planos 3,5 e 7. A figura(5.10) mostra o esquema utilizado juntamente com os equipamentos utilizados na Análise Modal.

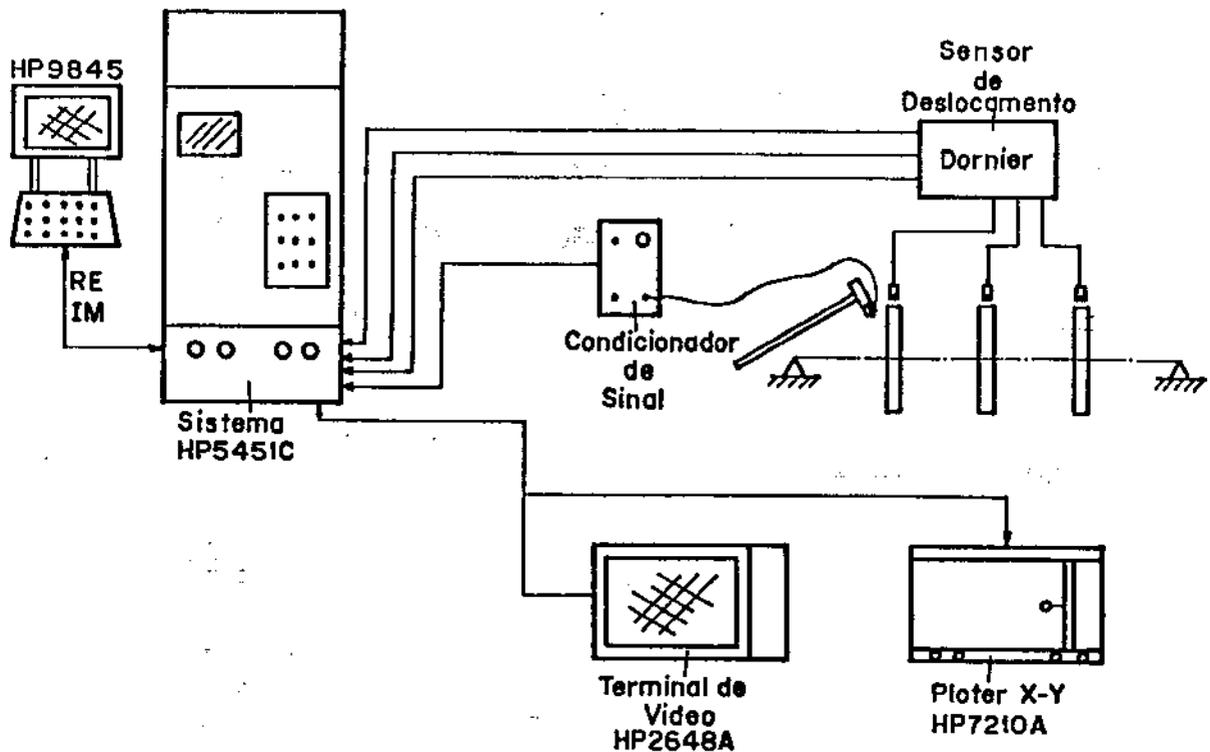


Figura 5.10: Esquema simplificado da aquisição e processamento na Análise Modal

A curva de resposta em frequência para os três pontos escolhidos é mostrado nas figuras (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) e (5.18) na forma de amplitude e fase e na forma de Nyquist.

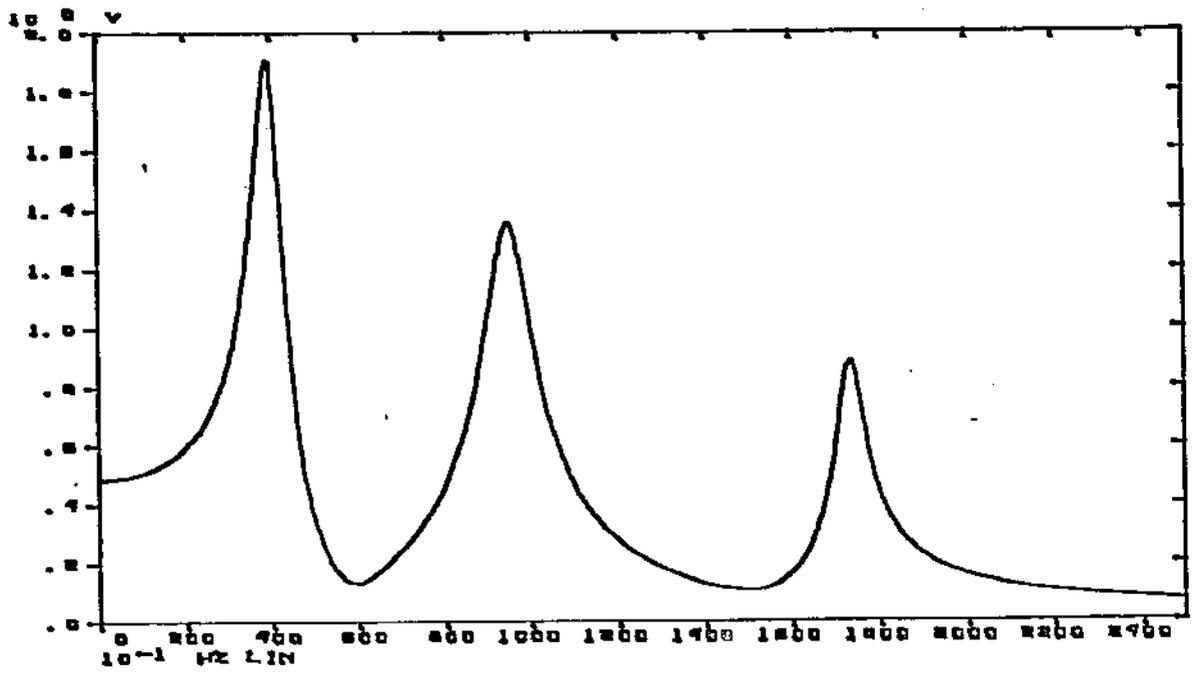
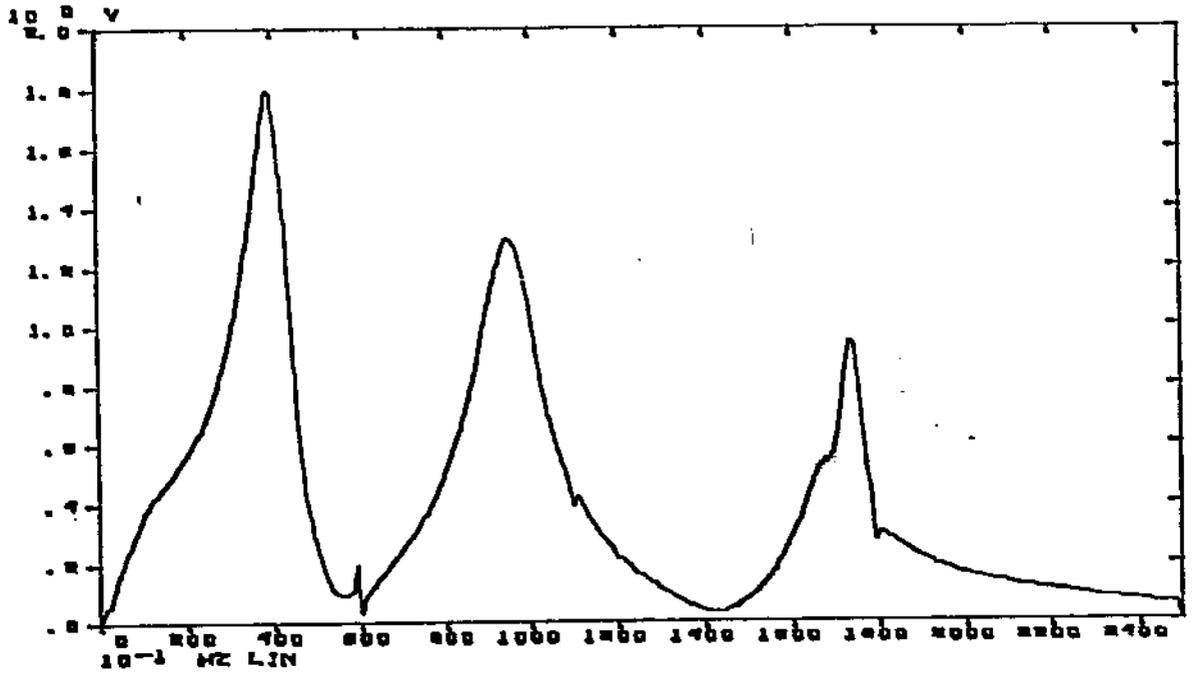


Figura 5.11: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal

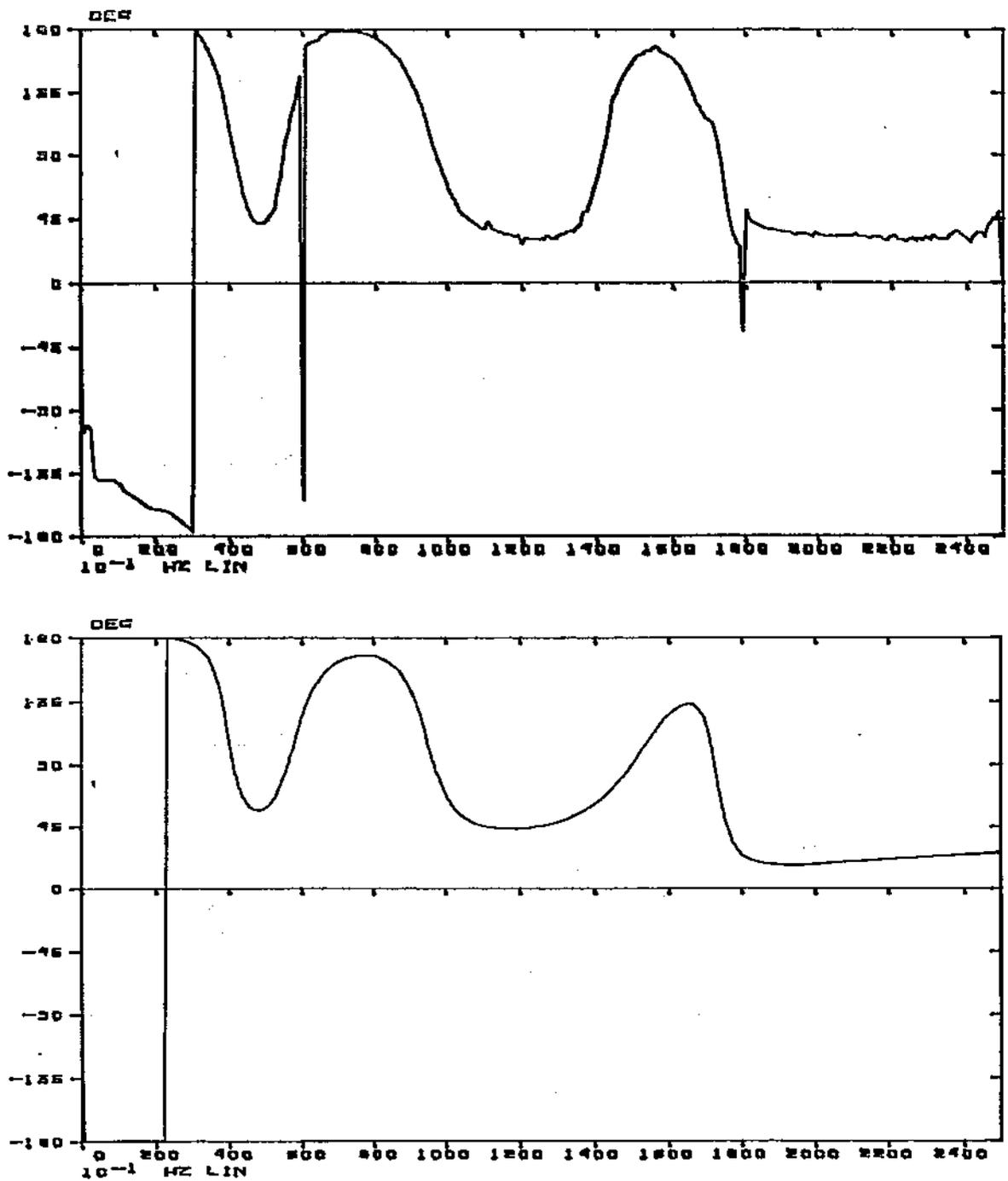


Figura 5.12: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal .

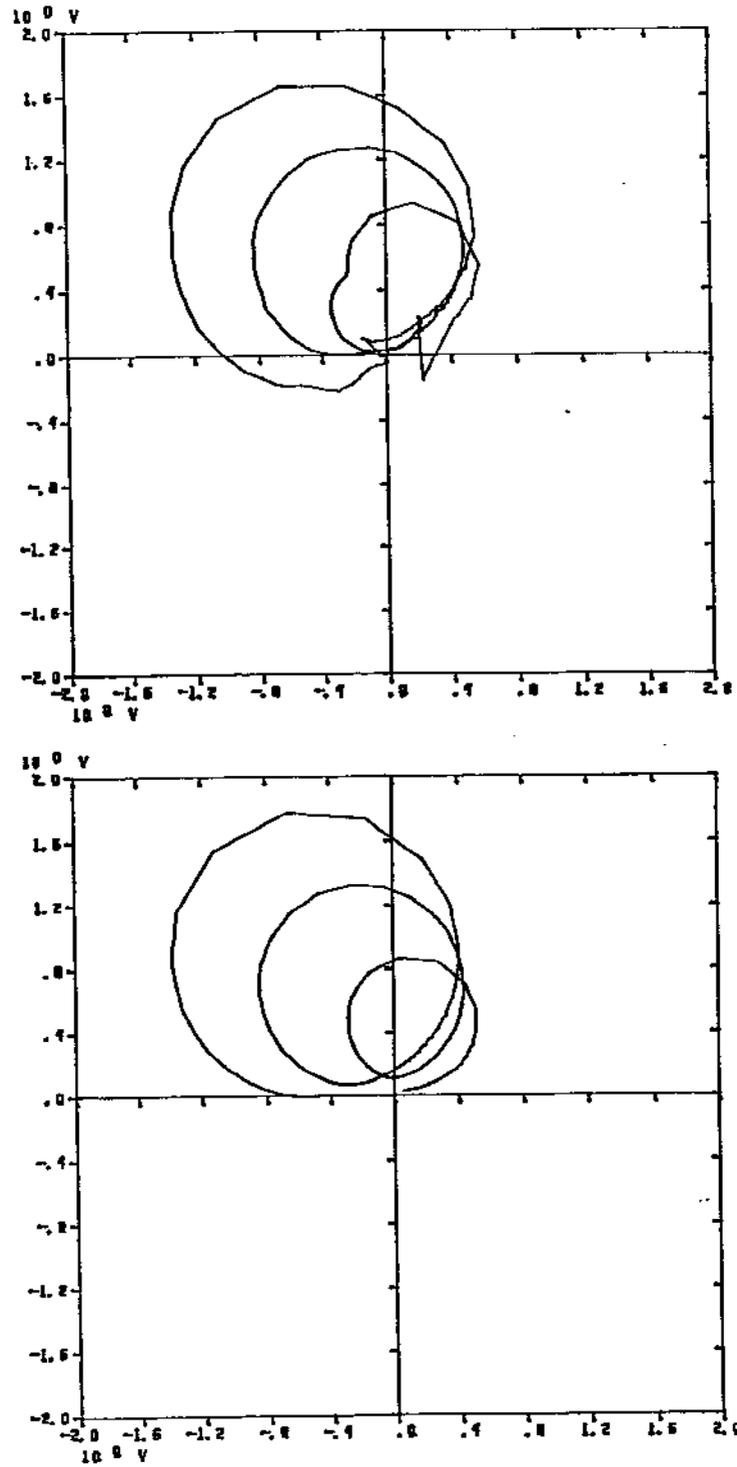


Figura 5.13: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 3-Análise Modal

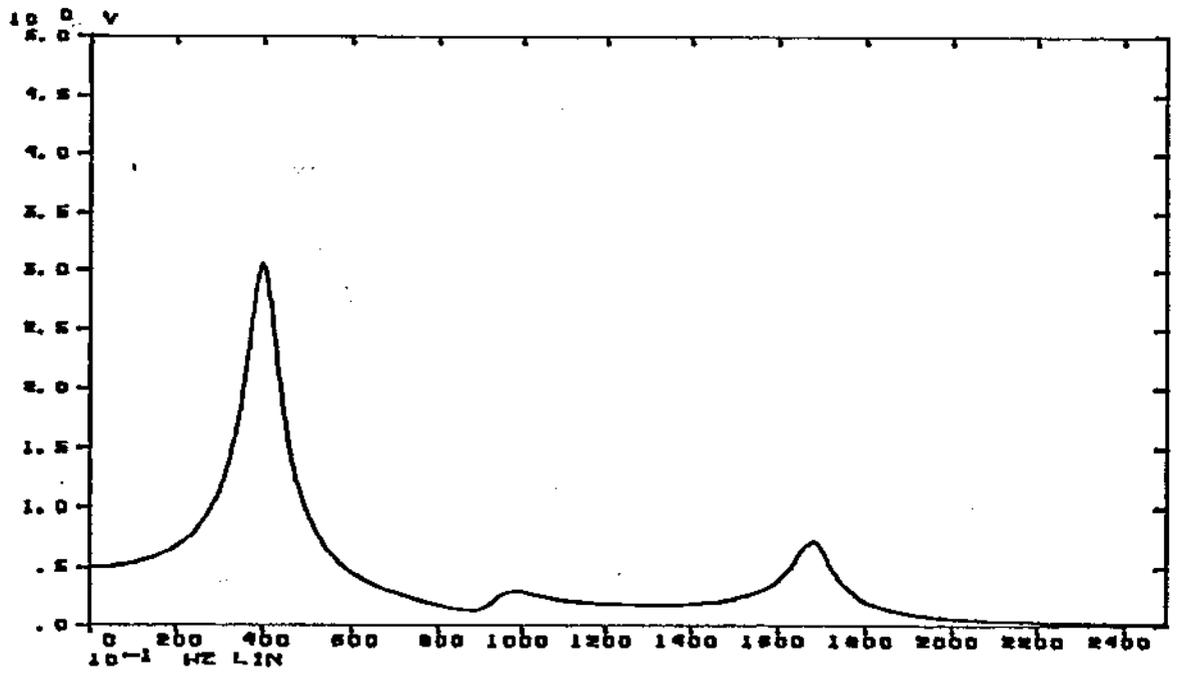
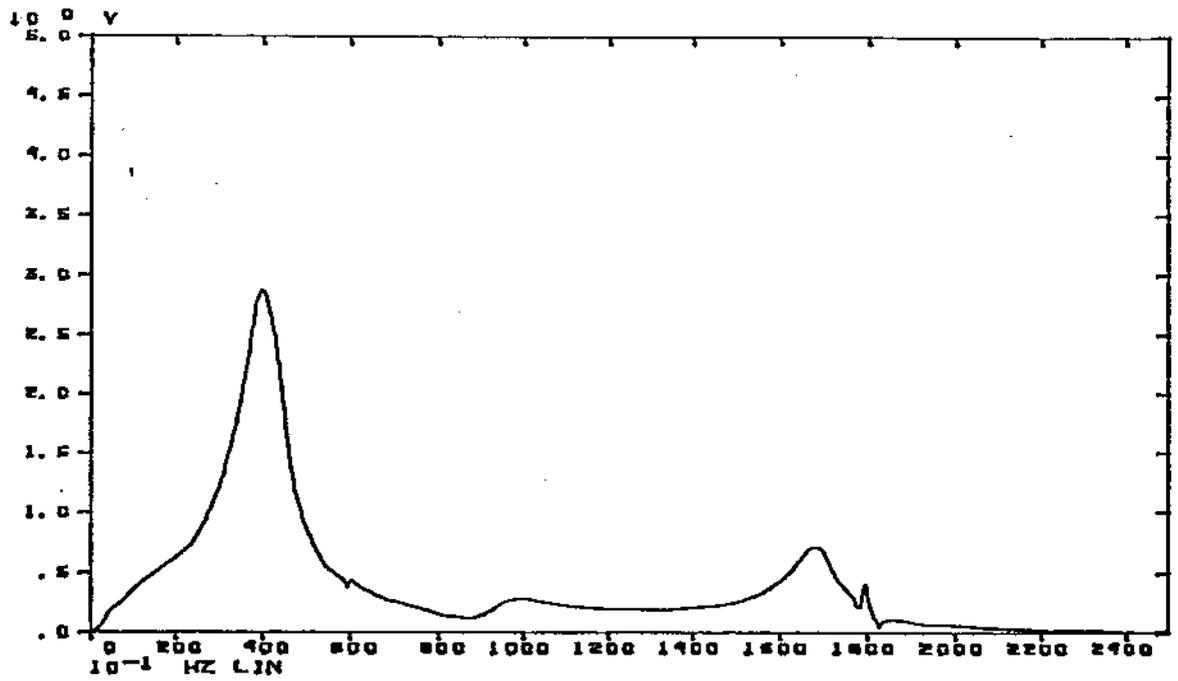


Figura 5.14: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 5-Análise Modal

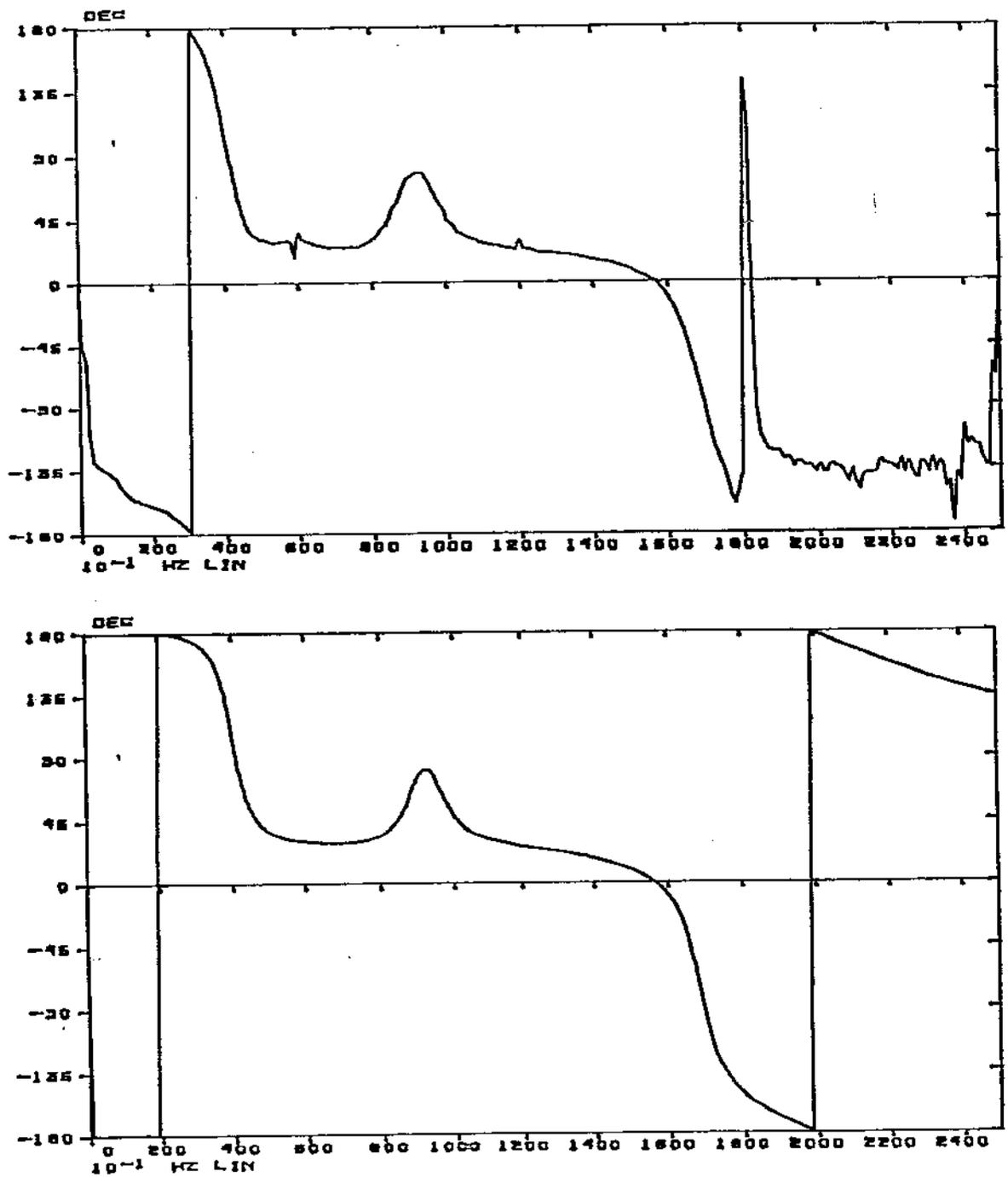


Figura 5.15: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 5-Análise Modal

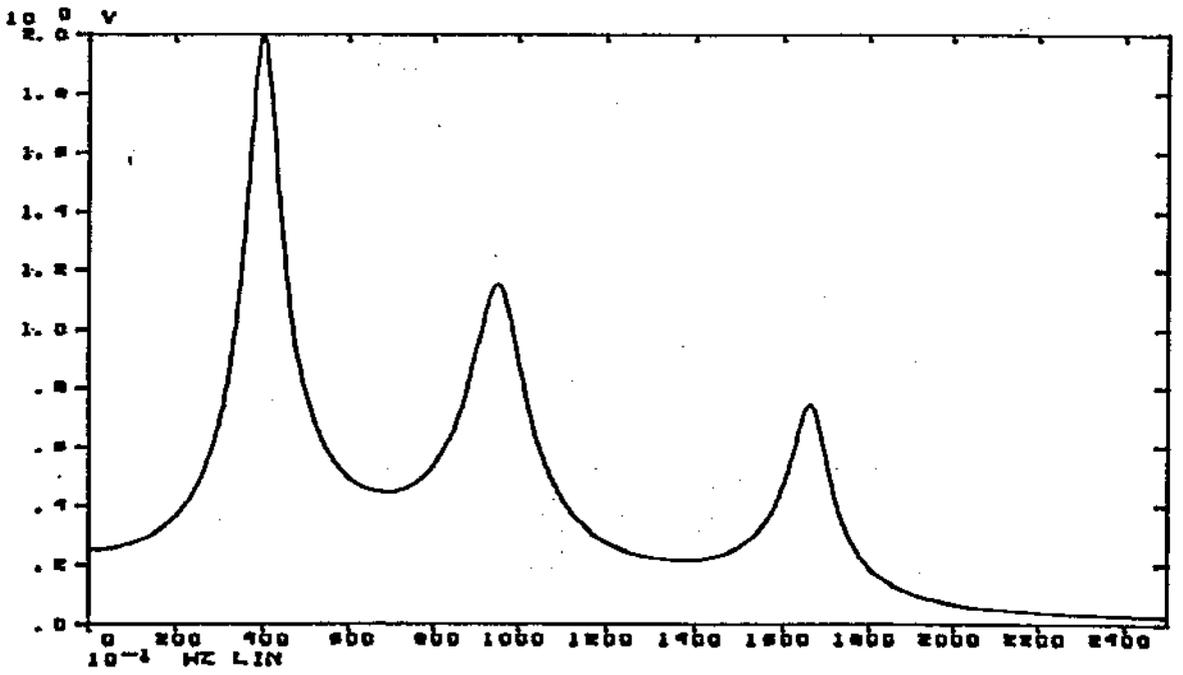
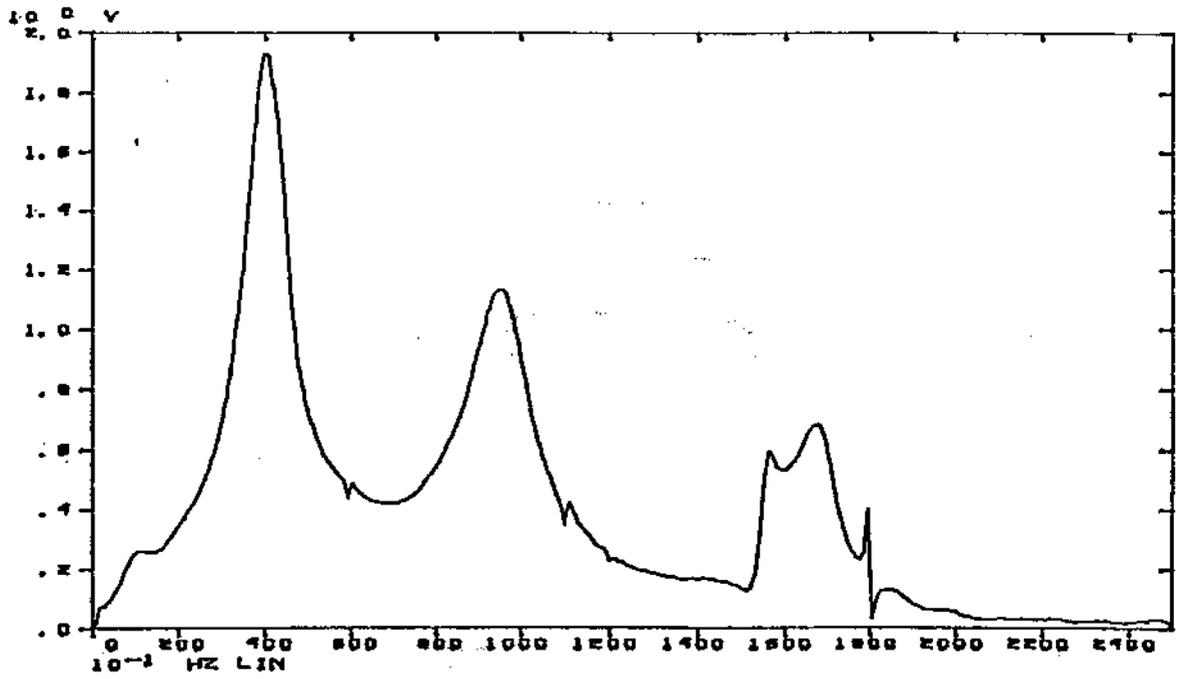


Figura 5.16: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal

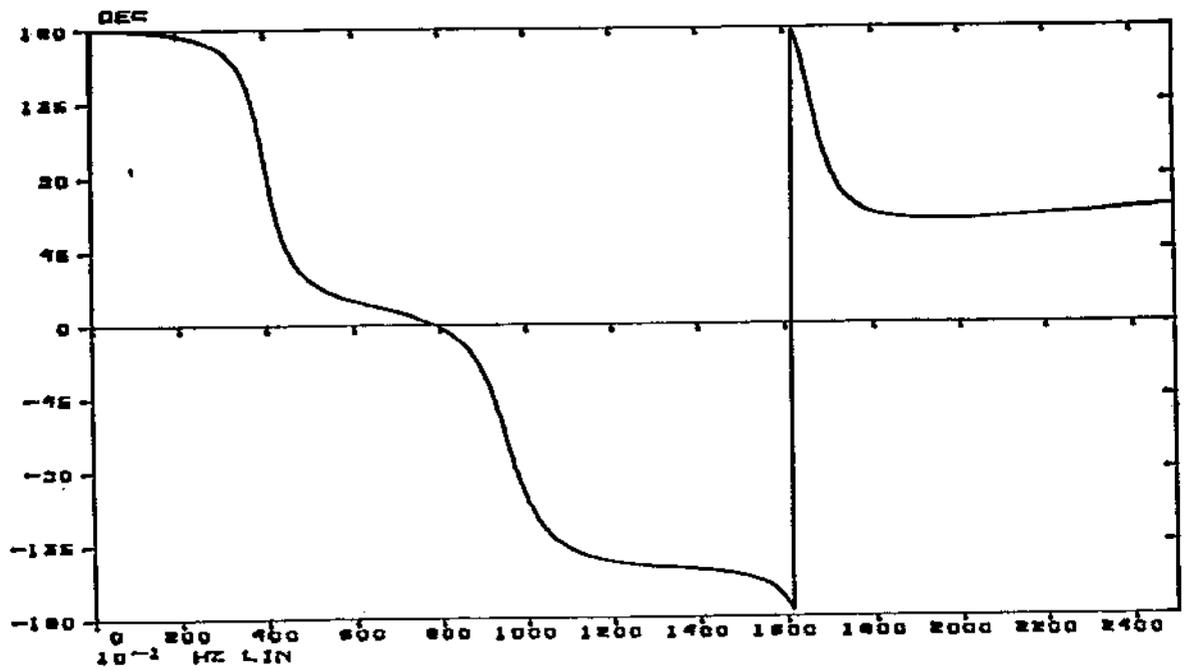
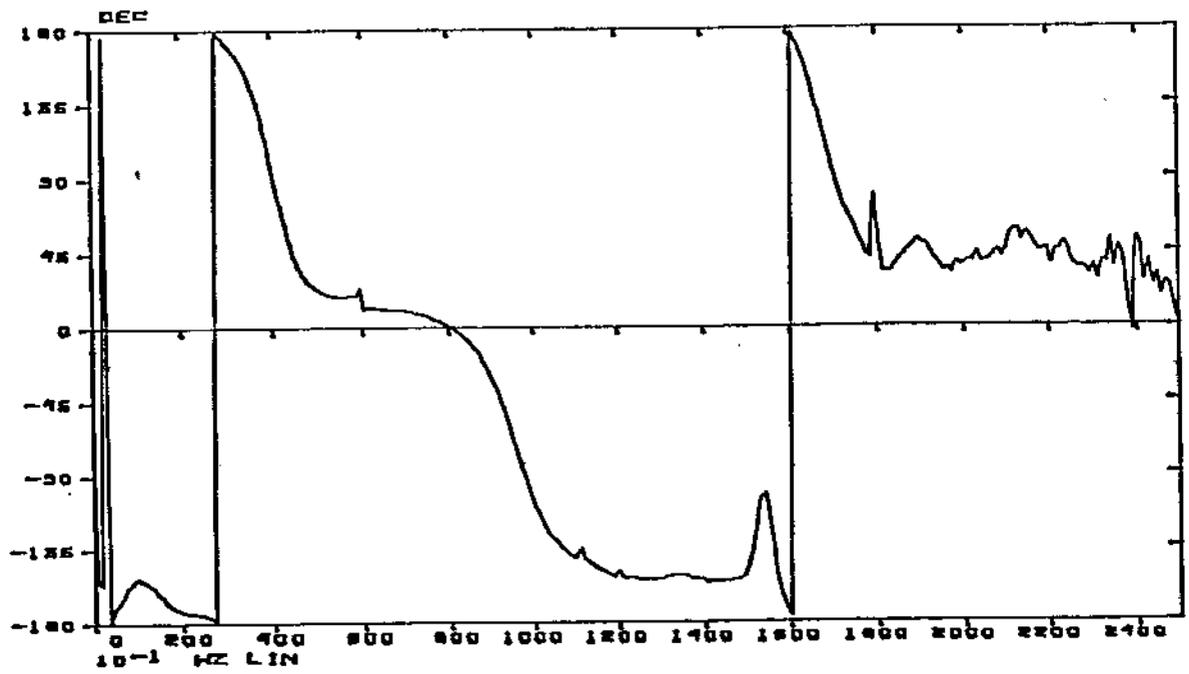


Figura 5.17: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal

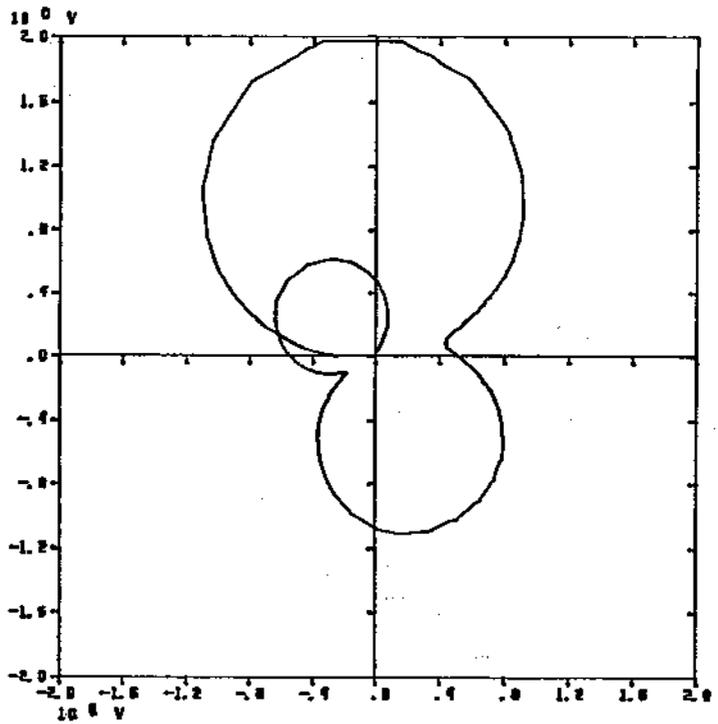
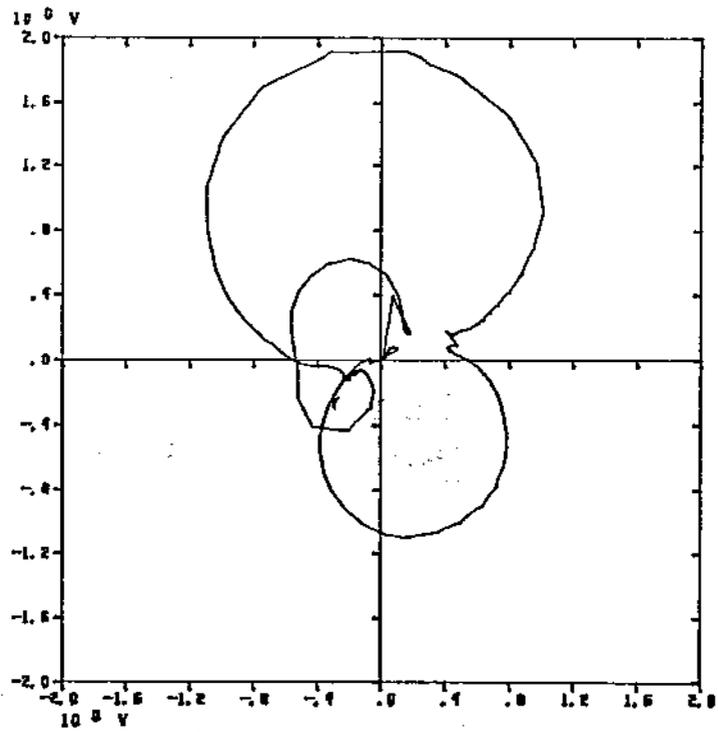


Figura 5.18: Resposta em frequência real e ajustada no ponto 7-Análise Modal

A partir desses dados pode-se extrair as frequências naturais do sistema, os modos de vibração e os coeficientes de amortecimento correspondentes, como mostrado nas figuras (5.19), (5.20) e (5.21) e nas tabelas (5.1),(5.2).



Figura 5.19: Primeiro modo-Análise Modal

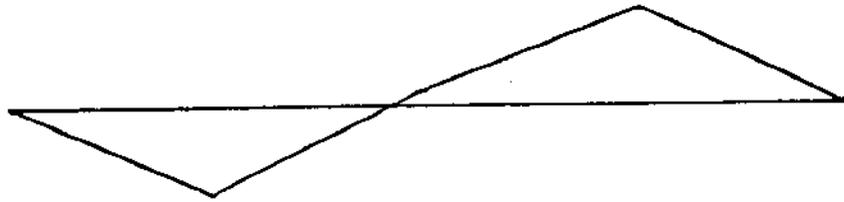


Figura 5.20: Segundo modo-Análise Modal

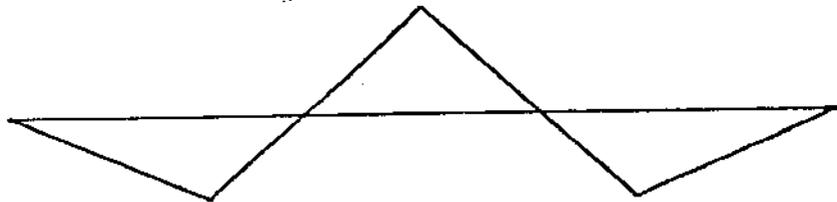


Figura 5.21: Terceiro modo-Análise Modal

Modo	ω_n (rad/s)	ξ (%)
1	40,24	8,77
2	95,35	6,18
3	169,31	2,35

Tabela 5.1: Frequências naturais e coeficientes de amortecimento-Análise Modal

Plano Medida	Modos					
	1		2		3	
	Ampl.	Fase	Ampl.	Fase	Ampl.	Fase
3	0,1722E+01	192,7	0,1263E+01	196,4	0,6735E+00	174,4
5	0,3001E+01	193,2	0,1817E+00	207,7	0,8074E+00	9,5
7	0,2080E+01	188,4	0,1180E+01	15,2	0,7797E+00	220,5

Tabela 5.2: Modos de vibração-Análise Modal

Para se obter o modelo teórico-M4, optou-se pelo método iterativo de ajustar os parâmetros do modelo idealizado, de tal modo que as frequências naturais e modos de vibração teóricos se aproximassem dos valores obtidos pela Análise Modal experimental.

Na idealização do modelo teórico-M4, algumas aproximações foram feitas a partir de uma análise do comportamento dos mancais das extremidades e dos mancais de amortecimento.

Observou-se que nas extremidades, o mancal de rolamento, juntamente com o suporte, impunham restrições rotacionais e restrição de deslocamento no sentido vertical. Por isso assumiu-se no modelo, molas de torção em torno dos eixos y e z e restrição total de deslocamento na direção vertical y , e horizontal z .

Observou-se também que nos mancais de amortecimento, o conjunto parafuso regulador de amplitude e borracha, funcionava como mola radial. Assumiu-se uma mola radial na vertical e outra na horizontal que seriam equivalentes á composição das três borrachas do mancal. A figura (5.22) mostra a discretização do modelo teórico-M4 assumido.

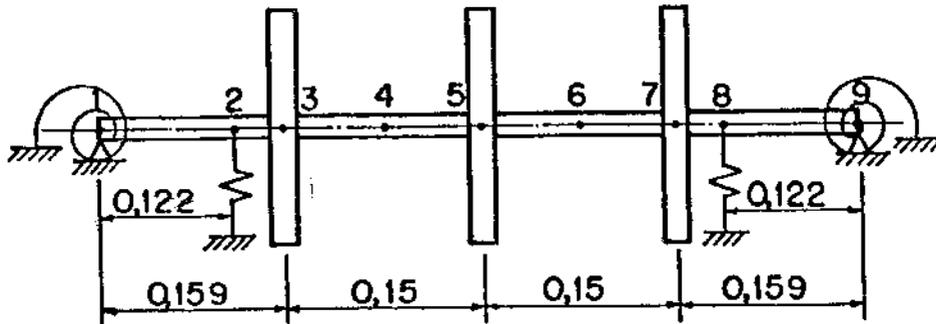


Figura 5.22: Modelo discreto-M4

Conhecidas ainda as dimensões geométricas do sistema e as propriedades relativas do material de que é constituído, pode-se determinar através do método de modelamento escolhido, Método dos Elementos Finitos, a distribuição de massa a partir da qual monta-se a matriz de massa do sistema. A partir da distribuição de rigidez monta-se a matriz de rigidez do sistema. As propriedades utilizados nos elementos considerados no modelo são mostrados nas tabelas (5.3), (5.6), (5.4), (5.5).

$$Eixo = \begin{cases} \rho = 7800 \text{ (Kg/m}^3\text{)} \\ EM = 2,067E + 11 \text{ (N/m}^2\text{)} \\ NU = 0,3 \\ AREA = 1,267E - 04 \text{ (m}^2\text{)} \\ IZ = 1,277E - 09 \text{ (m}^4\text{)} \end{cases}$$

Tabela 5.3: Propriedades dos eixos-M4

$$Disco = \begin{cases} Massa = 1,929 \text{ (Kg)} \\ Momento Inércia = 2,71E - 03 \text{ (Kg.m}^2\text{)} \end{cases}$$

Tabela 5.4: Propriedades dos discos-M4

$$Rolamento = \begin{cases} Massa = 0,023 \text{ (Kg)} \\ Momento Inércia = 1,06E - 06 \text{ (Kg.m}^2\text{)} \end{cases}$$

Tabela 5.5: Propriedades dos rolamentos-M4

A partir desses dados pode-se calcular as frequências naturais teóricas do sistema e os modos de vibração correspondentes. Para a validação deste modelo teórico, comparou-se os valores das frequências naturais, os modos do modelo teórico e as curvas resposta em frequência com os valores obtidos pela Análise Modal experimental mostrados nas tabelas (5.1), (5.2) e nas figuras (5.19), (5.20) e (5.21). Para ajustar a aproximação, variou-se principalmente os valores de rigidez dos mancais.

Após várias tentativas, chegou-se aos valores de coeficientes de mola mostrado na tabela (5.6), as frequências naturais na tabela (5.7), e aos modos próprios de vibração na tabela (5.8) e nas figuras (5.23), (5.24), (5.25). A resposta em frequência nos planos 3,5 e 7 são mostradas nas figuras (5.26), (5.27), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31).

$$Molas = \begin{cases} KOZ = 1000 \text{ (N.m/rd)} \\ KY = 345000 \text{ (N/m)} \end{cases}$$

Tabela 5.6: Coeficientes de molas-M4

Modo	ω_n teórico (Hz)	ξ utilizado (%)
1	40,21	8,77
2	95,54	6,18
3	169,93	2,35

Tabela 5.7: Frequências naturais teóricas-M4

Plano Medida	Modos					
	1		2		3	
	Ampl.	Fase	Ampl.	Fase	Ampl.	Fase
3	0,1722E+01	192,7	0,1263E+01	196,4	0,6735E+00	174,4
5	0,3001E+01	193,2	0,1817E+00	207,7	0,8074E+00	9,5
7	0,2080E+01	188,4	0,1180E+01	15,2	0,7797E+00	220,5

Tabela 5.8: Modos de vibração teóricos-M4

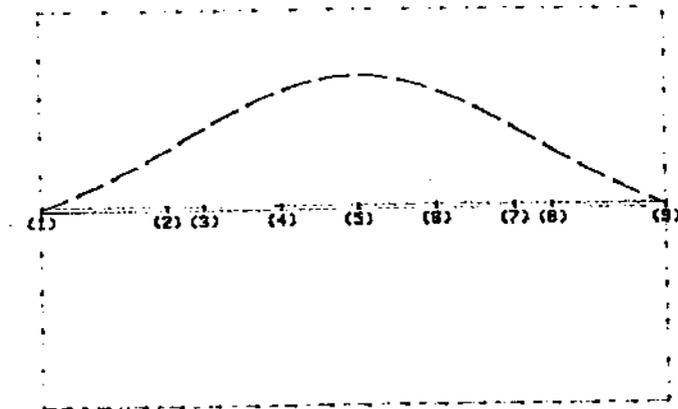


Figura 5.23: Primeiro modo teórico-M4

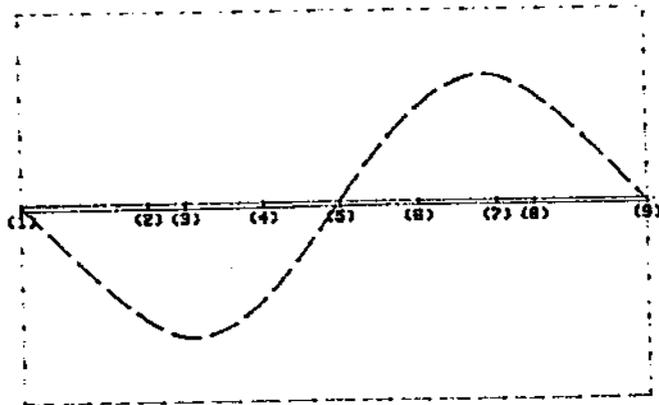


Figura 5.24: Segundo modo teórico-M4

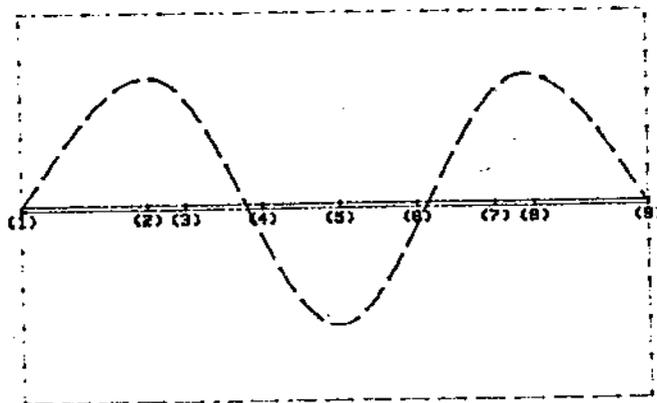


Figura 5.25: Terceiro modo teórico-M4

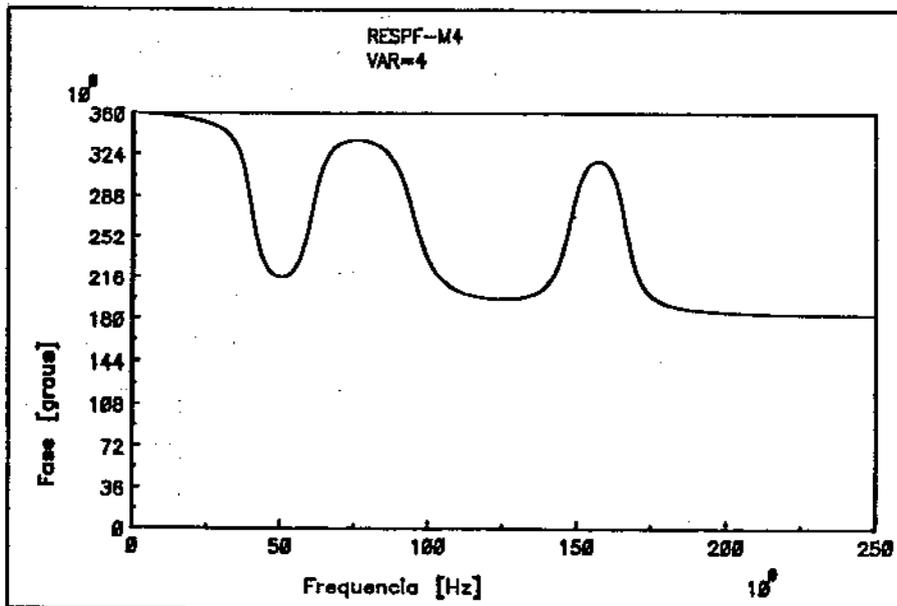
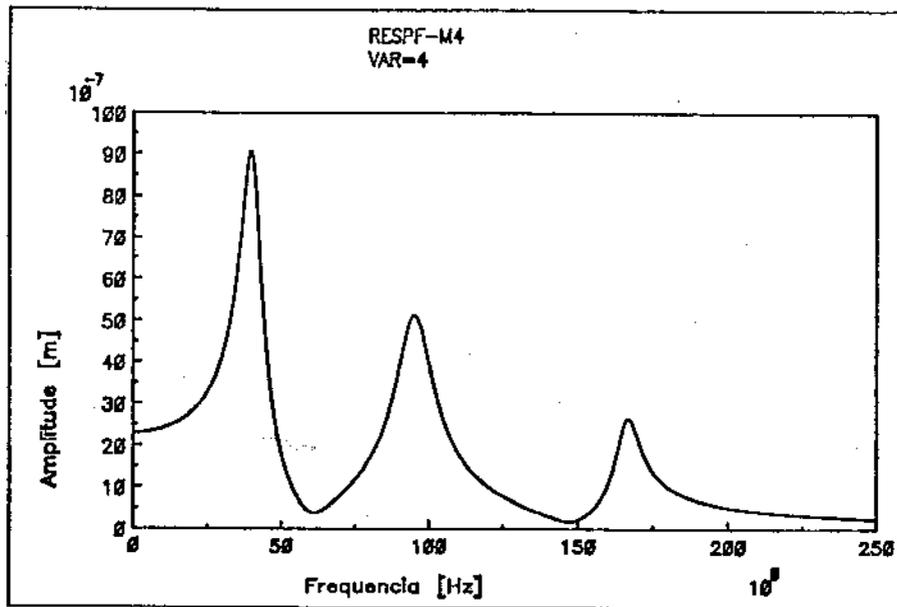


Figura 5.26: Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 3-M4

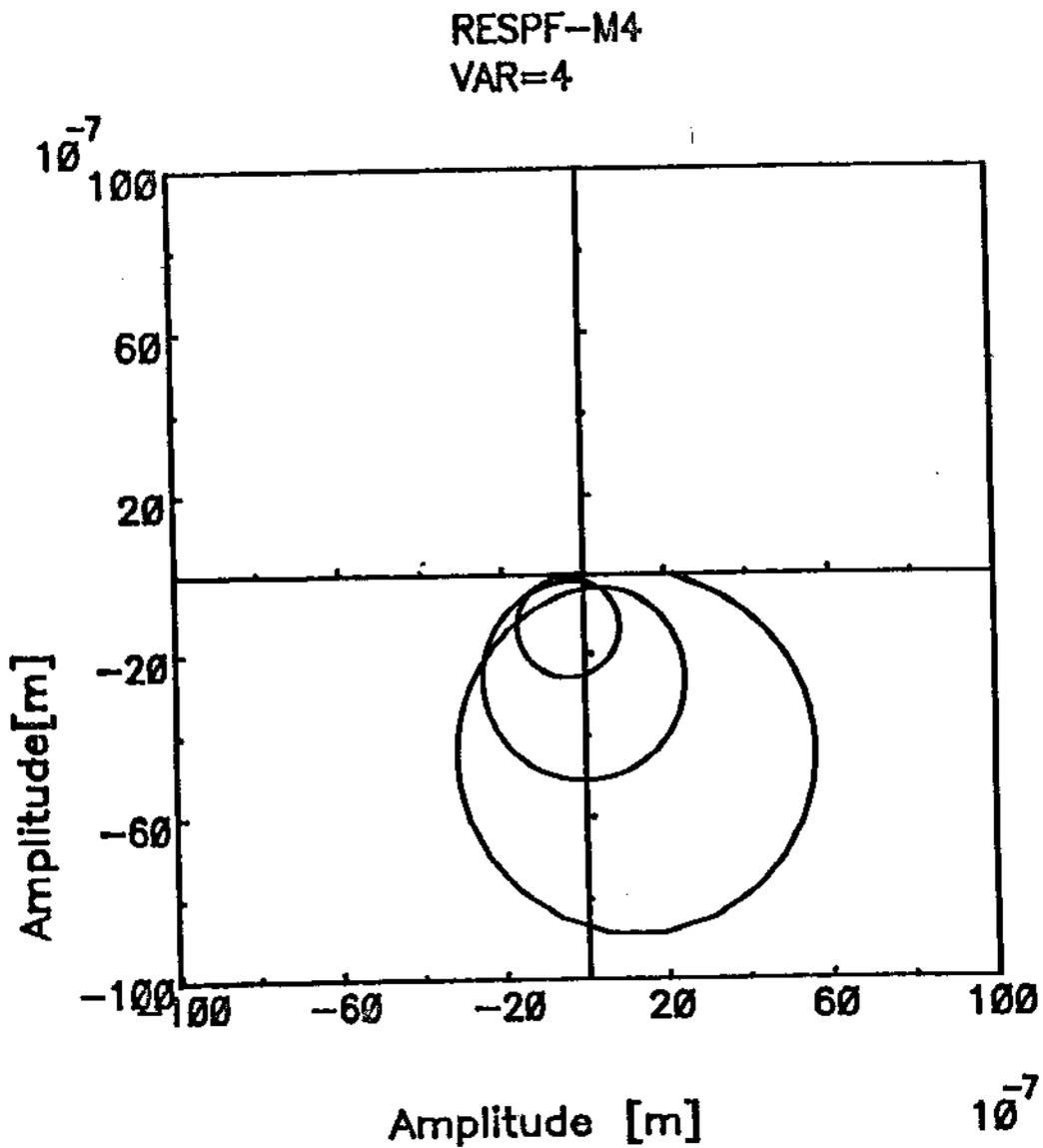


Figura 5.27: Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 3-M4

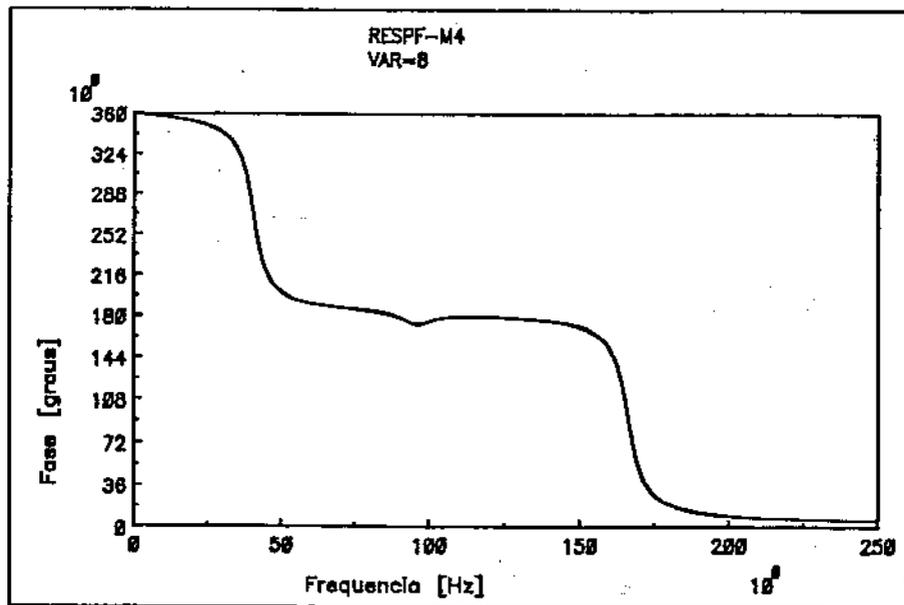
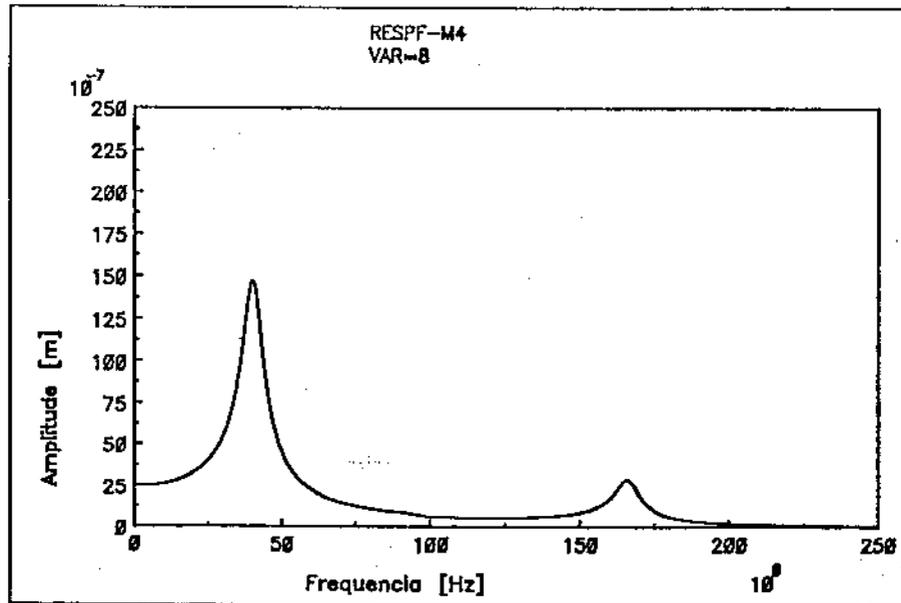


Figura 5.28: Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 5-M4

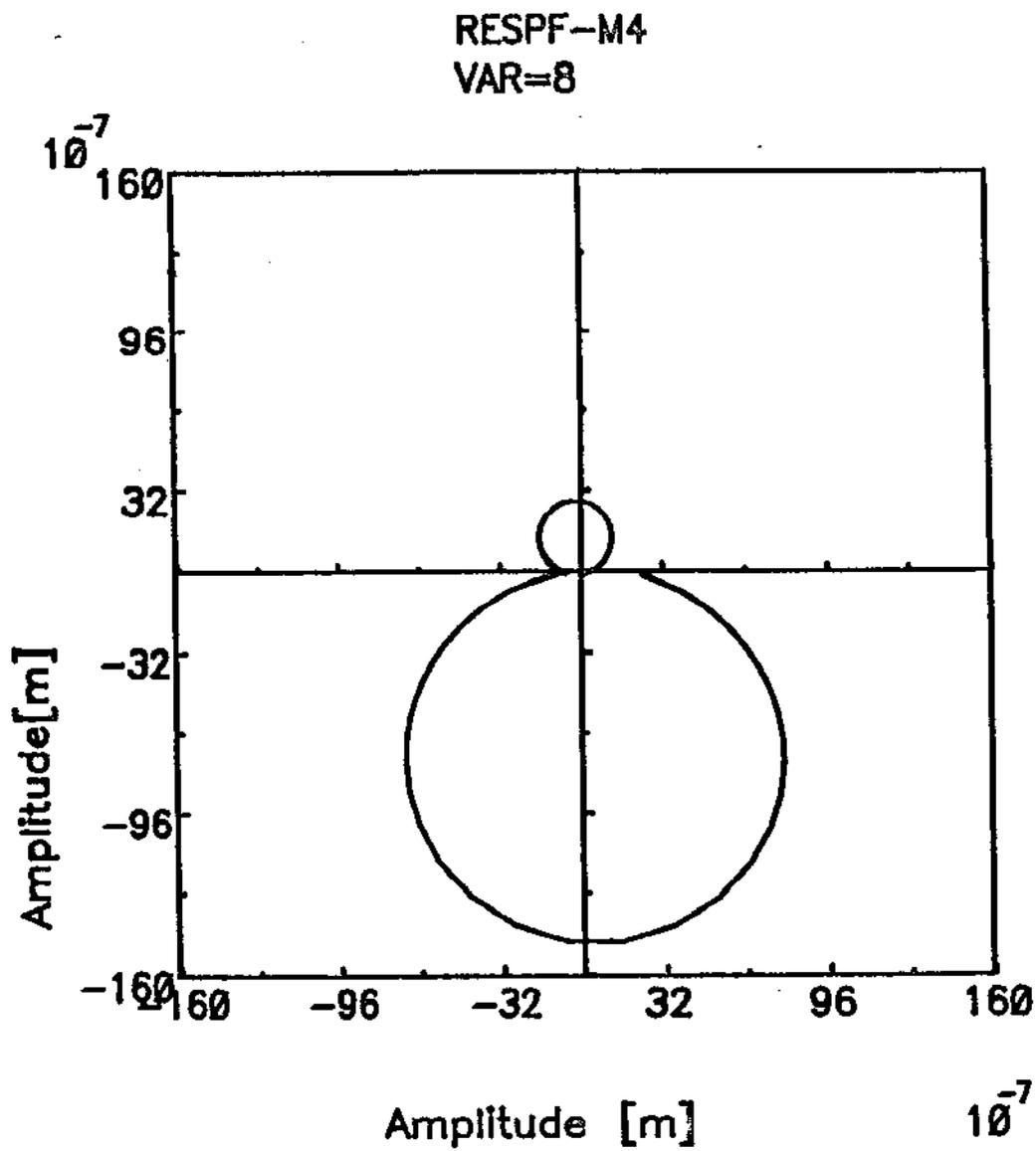


Figura 5.29: Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 5-M4

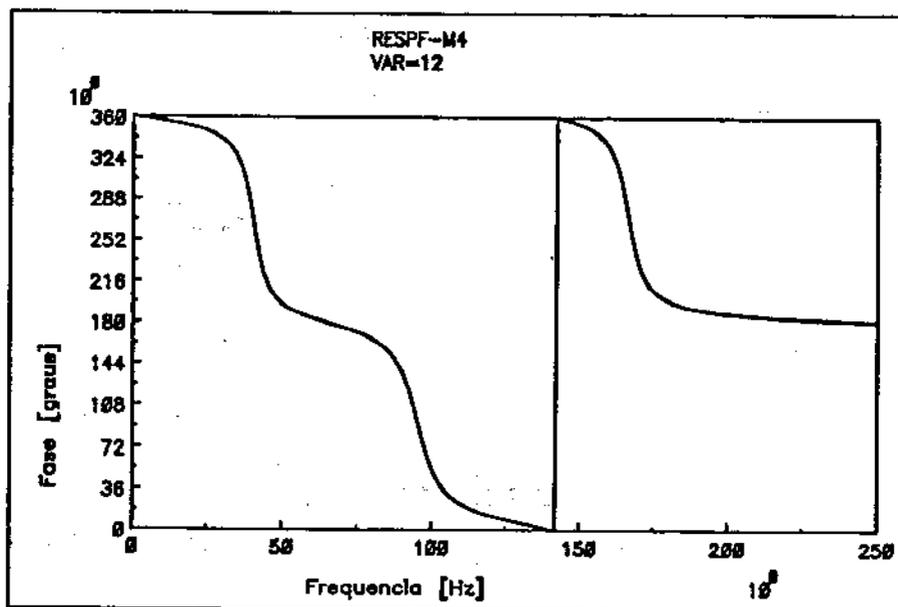
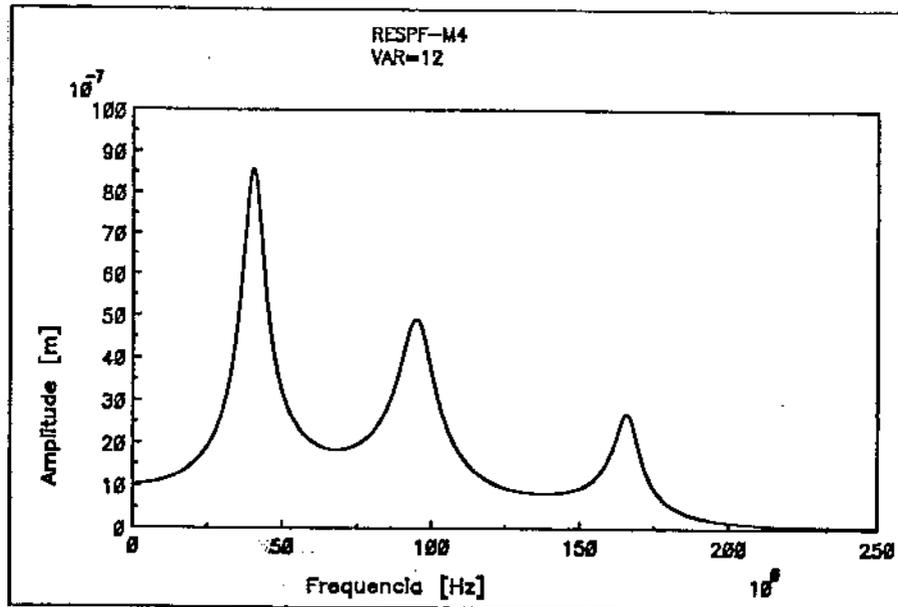


Figura 5.30: Curva Resposta em Frequência Amplitude e Fase no ponto 7-M4

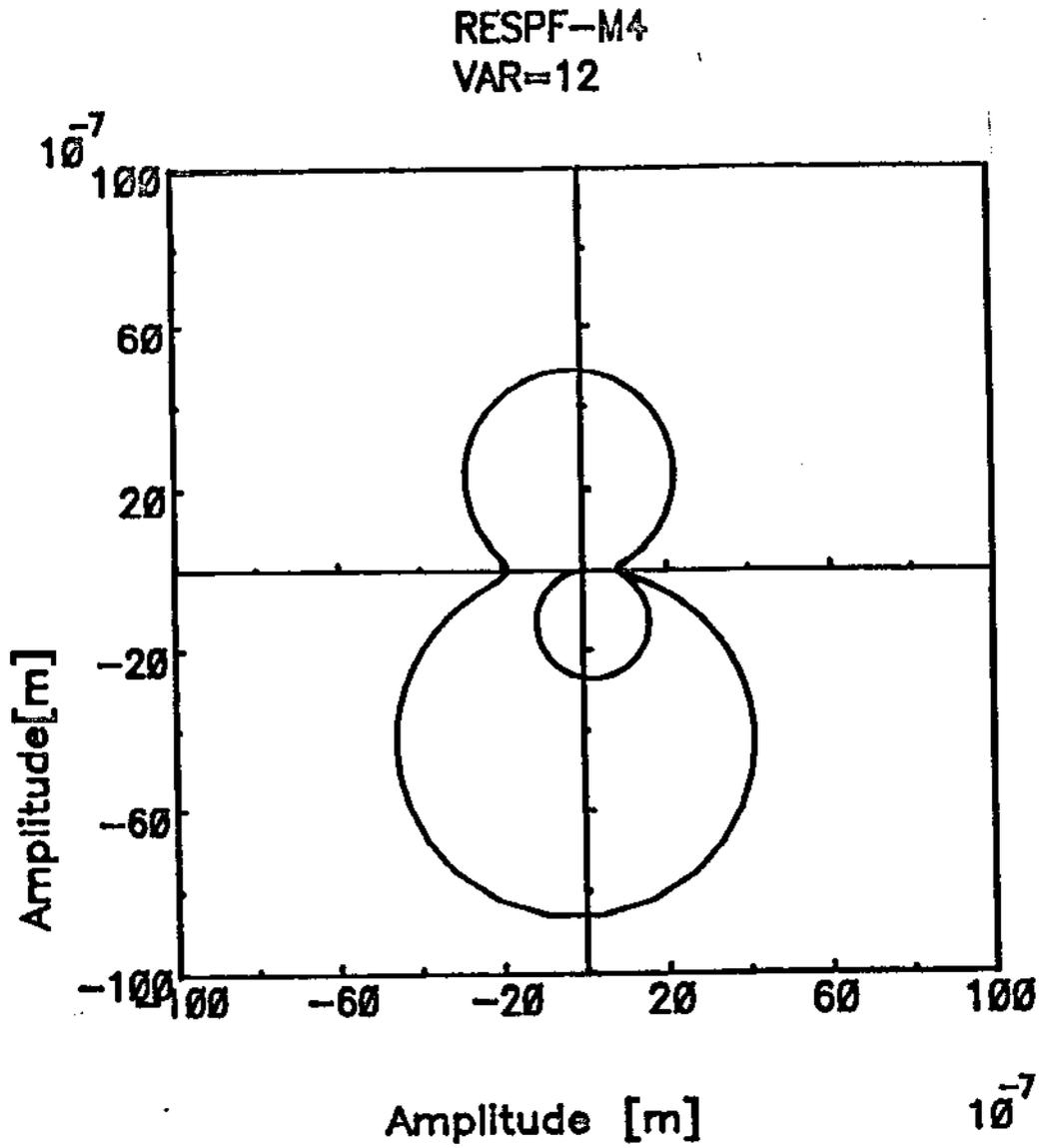


Figura 5.31: Curva Resposta em Frequência Diagrama de Nyquist no ponto 7-M4

5.4 Medição dos sinais

Para utilizar algum dos métodos de balanceamento citados, precisa-se primeiramente escolher qual o tipo de sinal, seja ele deslocamento, velocidade, aceleração ou mesmo deformação. Para as análises aqui feitas, escolheu-se o sinal de deslocamento. Os equipamentos para a medição de deslocamento utilizados são de fabricação da *Dornier*, e constitui-se de um sensor de deslocamento sem contato modelo *A11*, o qual é alimentado por um oscilador modelo *IWA - 0/10* e sua resposta é condicionada para uma saída em *Volts*. Sua faixa de linearidade se encontra entre 0 a 2,5 mm.

5.5 Processamento do sinal

O sinal obtido tem a característica de ser uma função harmônica, cuja frequência é igual à velocidade de rotação do rotor e cuja amplitude é função do desbalanceamento, das irregularidades geométricas e da velocidade de rotação

Para que se possa aplicar o processo de balanceamento aqui desenvolvido, é necessário escolher um sistema referencial fixo ao sistema eixo-disco, que gira em relação a um referencial inercial. Toda representação vetorial é feita em função deste referencial fixo no rotor. Este referencial fixo foi obtido utilizando-se de um fio de aço de secção retangular com espessura de 0,1 mm e altura de 1mm e comprimento maior que o diâmetro do sensor de proximidade como mostra a figura (5.32).

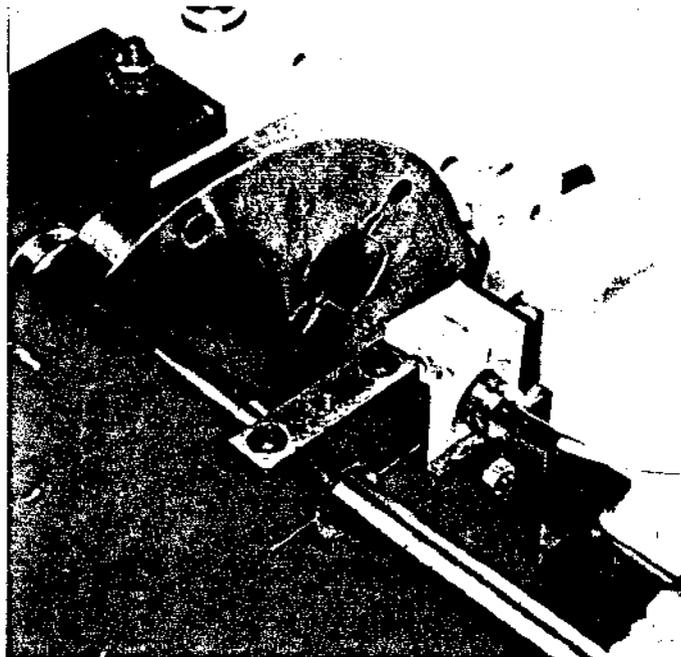


Figura 5.32: Referencial fixo ao sistema

Foram estudadas duas maneiras de se tratar numericamente o sinal medido, de modo que não fosse necessário usar um medidor de fase, já que sua utilização trás consigo uma série de problemas. Das características conhecidas do sinal medido, sabe-se que sua amplitude e fase podem ser obtidas aplicando a *FFT* (*Fast, Fourier Transform*) no sinal após o mesmo ter passado num conversor Analógico/Digital.

A vantagem de se aplicar a *FFT* em um sinal periódico, é que se este contiver um número inteiro de períodos com número de pontos de amostragem igual a 2^n , obtém-se as componentes exatas das amplitudes das senóides e suas respectivas fases. Um exemplo ilustrativo foi obtido utilizando um sinal gerado por um gerador de função. A aquisição foi feita de modo que o sinal contivesse 5 períodos inteiros, este sinal é mostrado na figura (5.33).

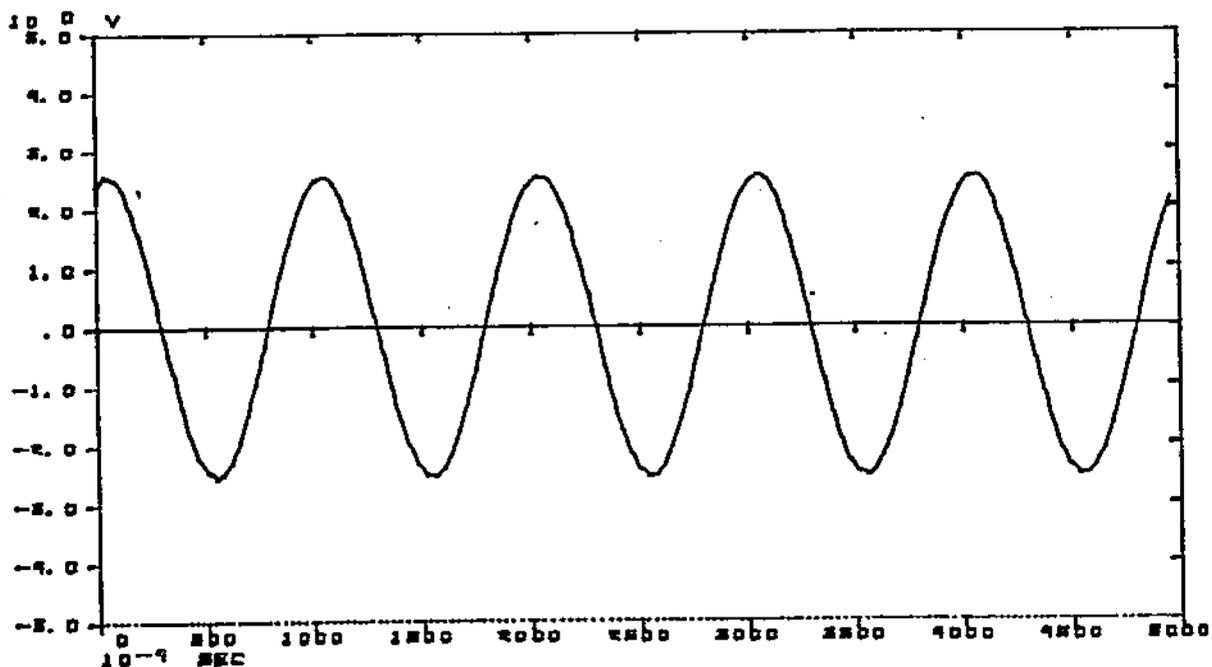


Figura 5.33: Senoide com 2^n pontos com 5 períodos

Calculou-se sua *FFT* e obteve-se a figura (5.34)

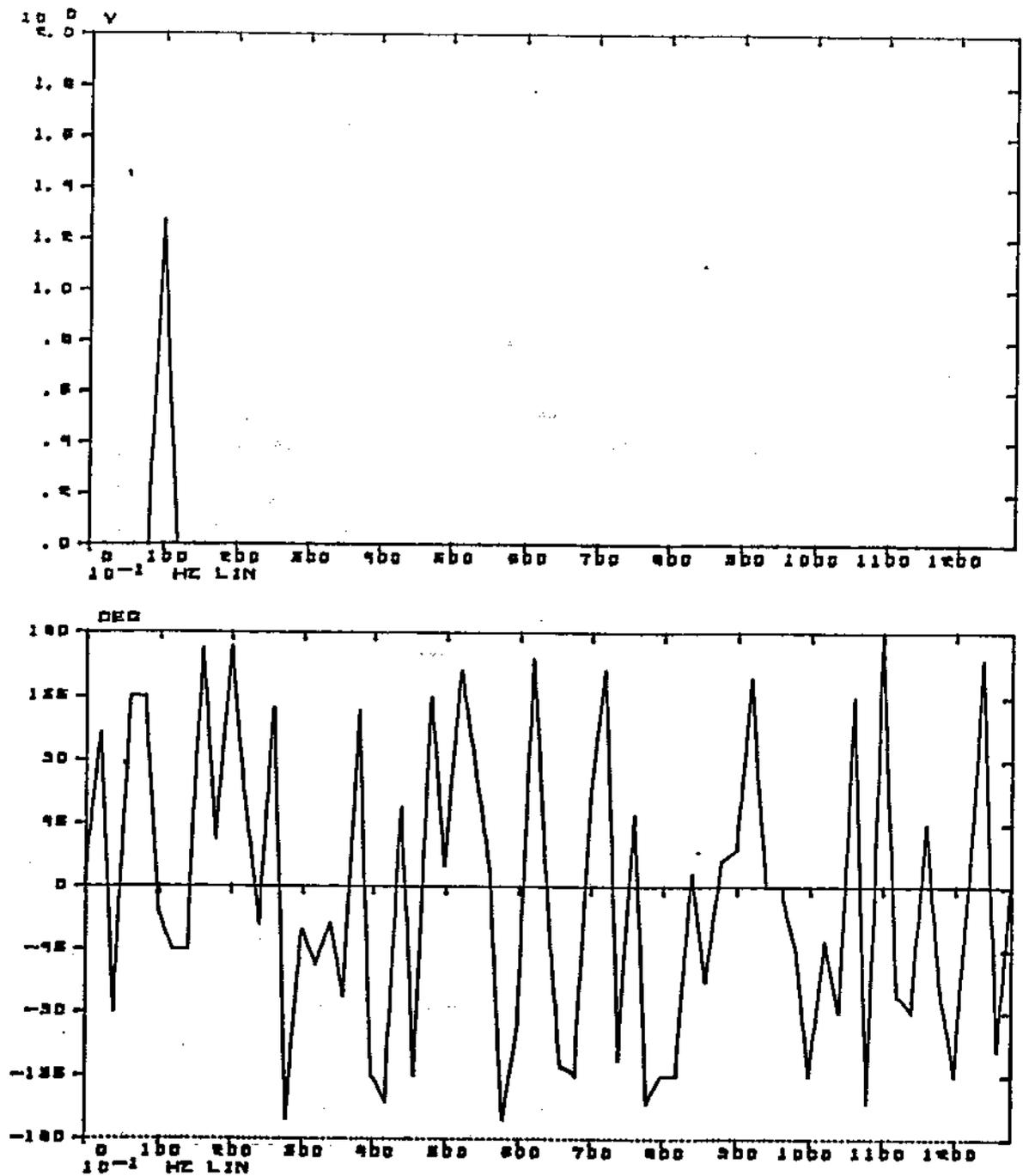


Figura 5.34: FFT do sinal em Amplitude e Fase

Ambos os processos baseiam-se na utilização da *FFT*, porém diferem no modo de fazer o tratamento do sinal; um utilizou-se de uma referência interna acoplada ao sinal, outro faz sua referência externa utilizando-se de um equipamento eletrônico, para a aquisição de um sinal periódico.

5.5.1 Processamento do sinal via referência interna

Para se obter automaticamente o número inteiro de períodos através de um programa computacional, superpôs-se, ao sinal de deslocamento medido, um sinal típico de referência, um pico por volta, que seria também o referencial fixo. Este referencial fixo foi obtido utilizando-se de um fio de aço de secção retangular com espessura de 0,1 mm e altura de 1mm e comprimento maior que o diâmetro do sensor de proximidade como mostra a figura (5.35).

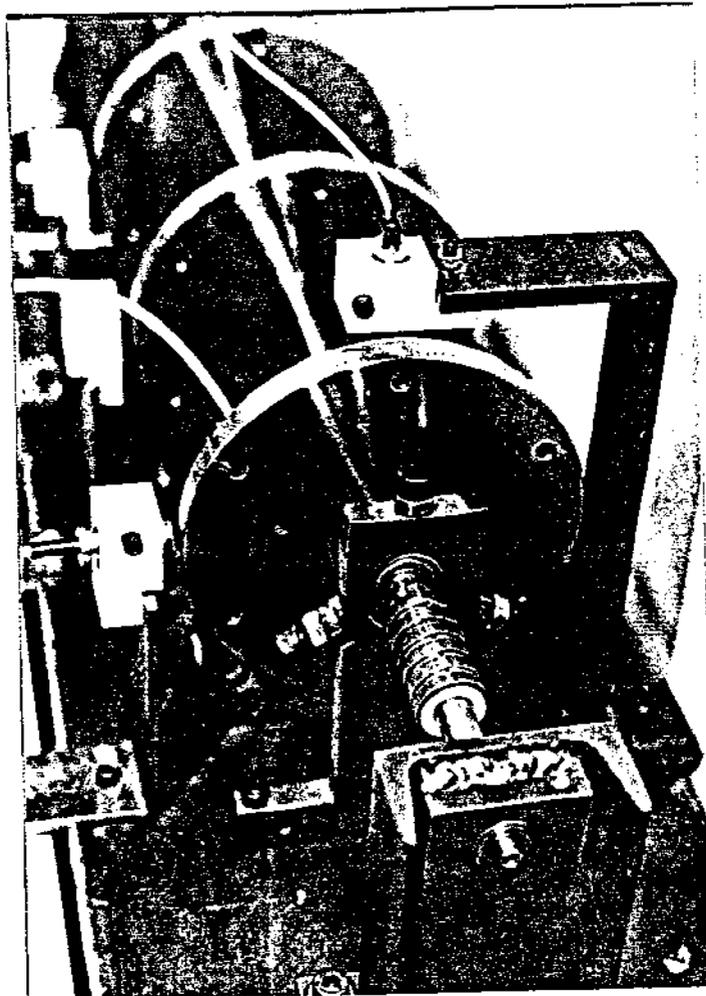


Figura 5.35: Sinal do referencial fixo superposto ao sinal de deslocamento

A figura (5.36) mostra um sinal medido experimentalmente com o sinal de referência superposto.

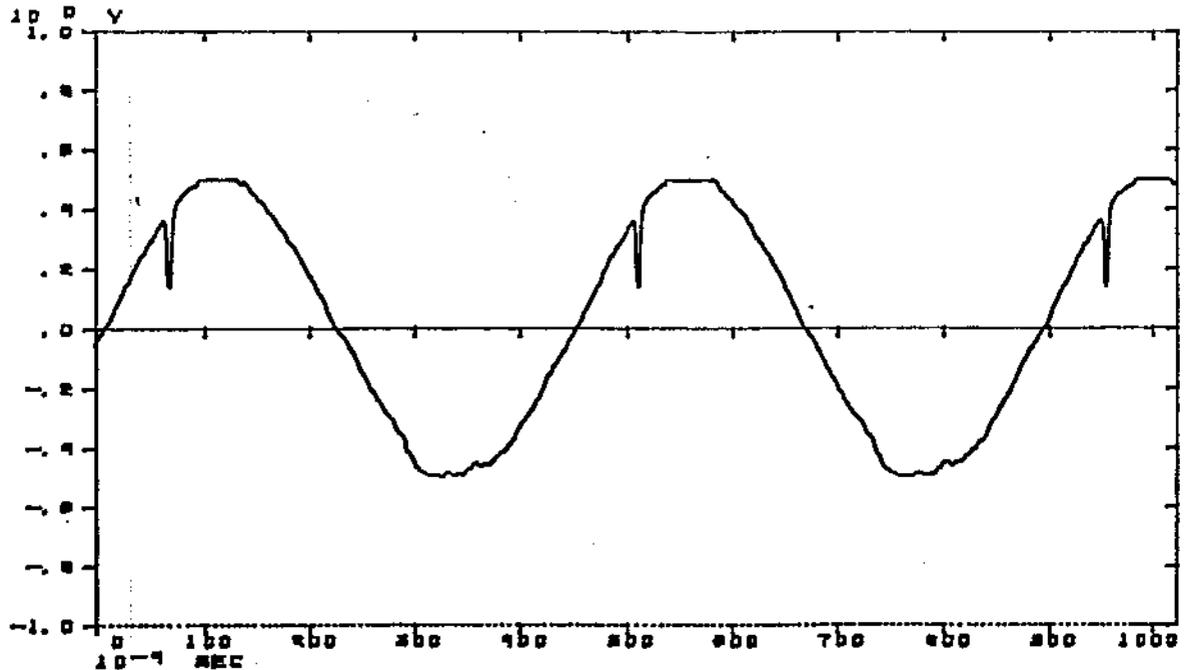


Figura 5.36: Senoide com sinal de referência

Adquiriu-se um número de períodos maior que o necessário e através de um programa computacional, localizou-se os picos de referência, e a partir da distância entre dois picos consecutivos determinou-se o período. Com este processo pode-se especificar o número de períodos desejados e também analisar a variação da velocidade de rotação do rotor.

Como a frequência de aquisição esta geralmente pré-fixada, não se tem períodos com um número de pontos proporcional a 2^n pontos de amostragem. Gerou-se então pontos intermediários que correspondessem aos 2^n pontos de amostragem, através de interpolações polinomiais. Com este sinal discretizado utilizou-se uma rotina que calcula a *FFT* e obteve-se o vetor que contém as amplitudes e fases das componentes harmônicas, em relação ao referencial inercial.

5.5.2 Processamento do sinal via referência externa

Pode-se também obter um sinal digitalizado que contém 2^n pontos de amostragem e um número inteiro de períodos em relação à velocidade de rotação, através de um circuito eletrônico utilizando-se do referencial fixo mostrado na figura (5.32).

Mediu-se com os mesmo equipamento anterior um sinal de referência, obtendo-se a figura (5.37).

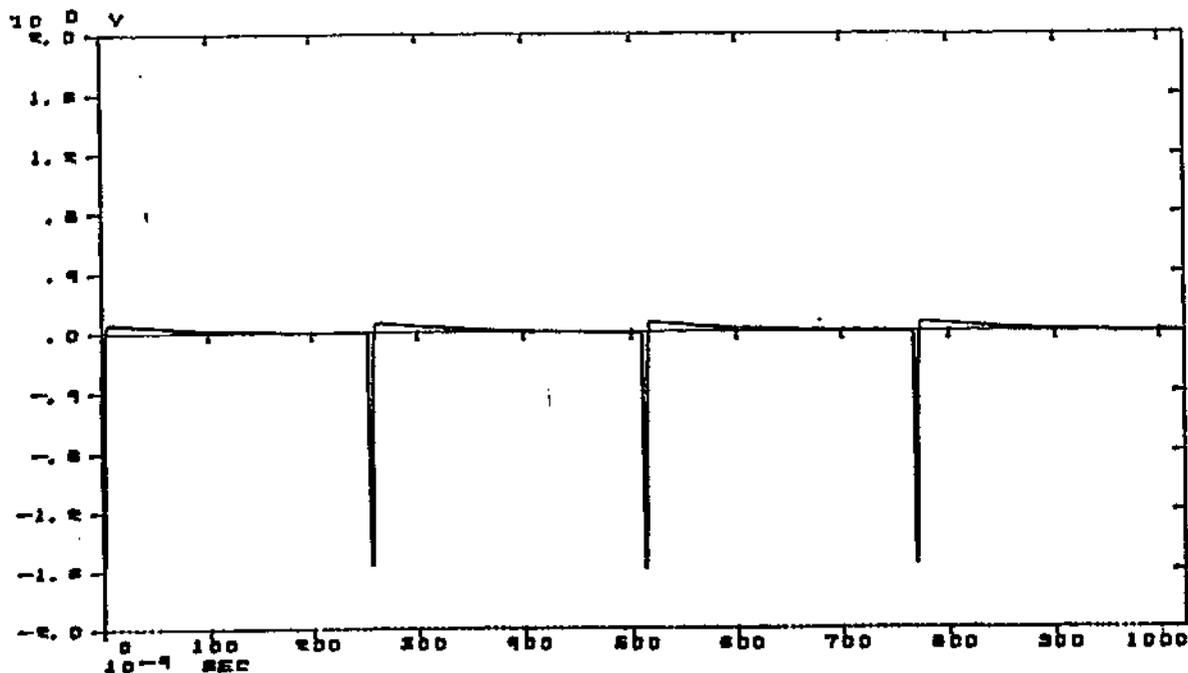


Figura 5.37: Sinal de referência

Este sinal passa por um multiplicador de frequência, servindo como um sinal base da velocidade de rotação em questão. Na saída do multiplicador de frequência, obtém-se um sinal do tipo onda quadrada com uma frequência proporcional a 2^n da frequência de rotação, figura (5.38).

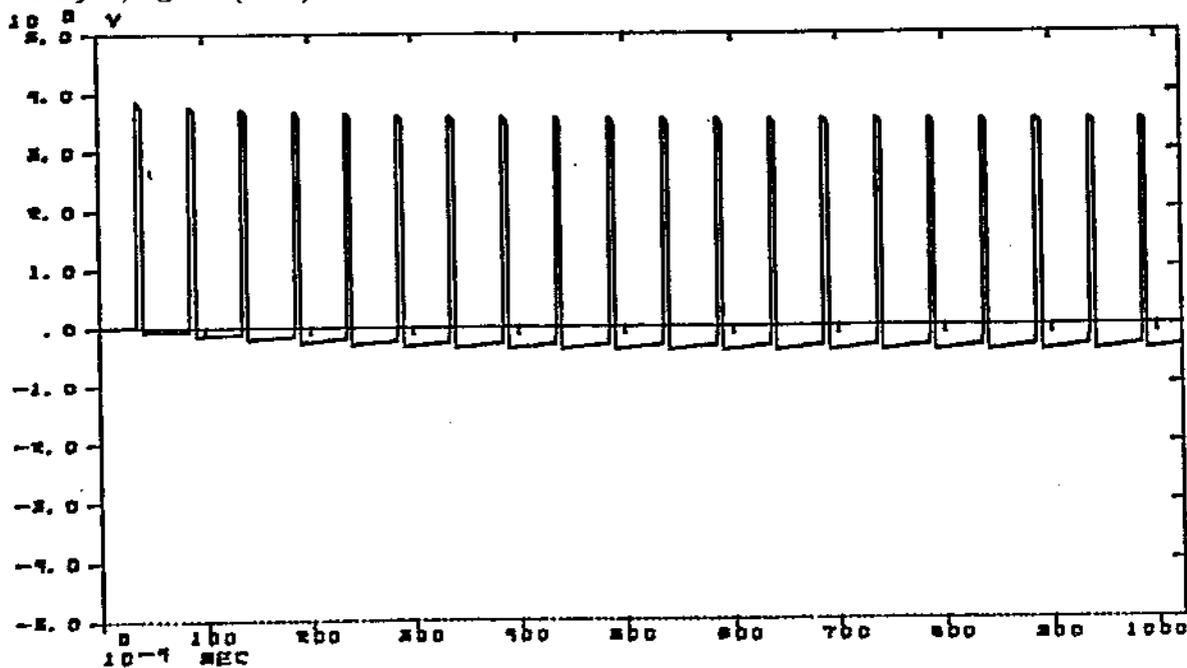


Figura 5.38: Sinal múltiplo da frequência de rotação

Para que o sinal contenha um número inteiro de períodos, foi colocado um contador que deteta o número de períodos do sinal de referência e encerra o sinal na frequência de amostragem e com o número de períodos desejados, figura(5.39).

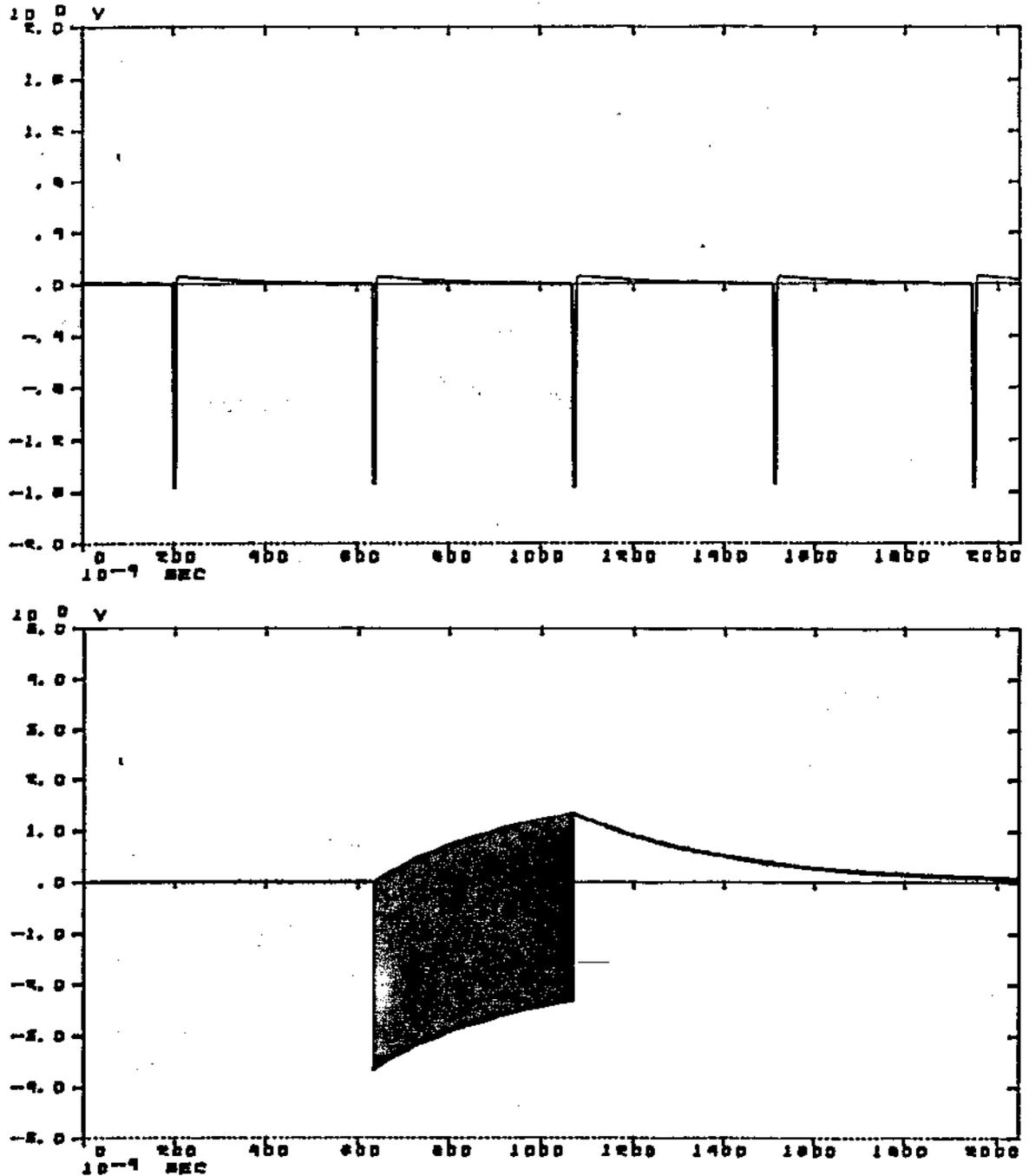


Figura 5.39: Sinal de amostragem antes e após multiplicador de frequência

O sinal de desbalanceamento adquirido antes e após a amostragem é apresentada na figura (5.40).

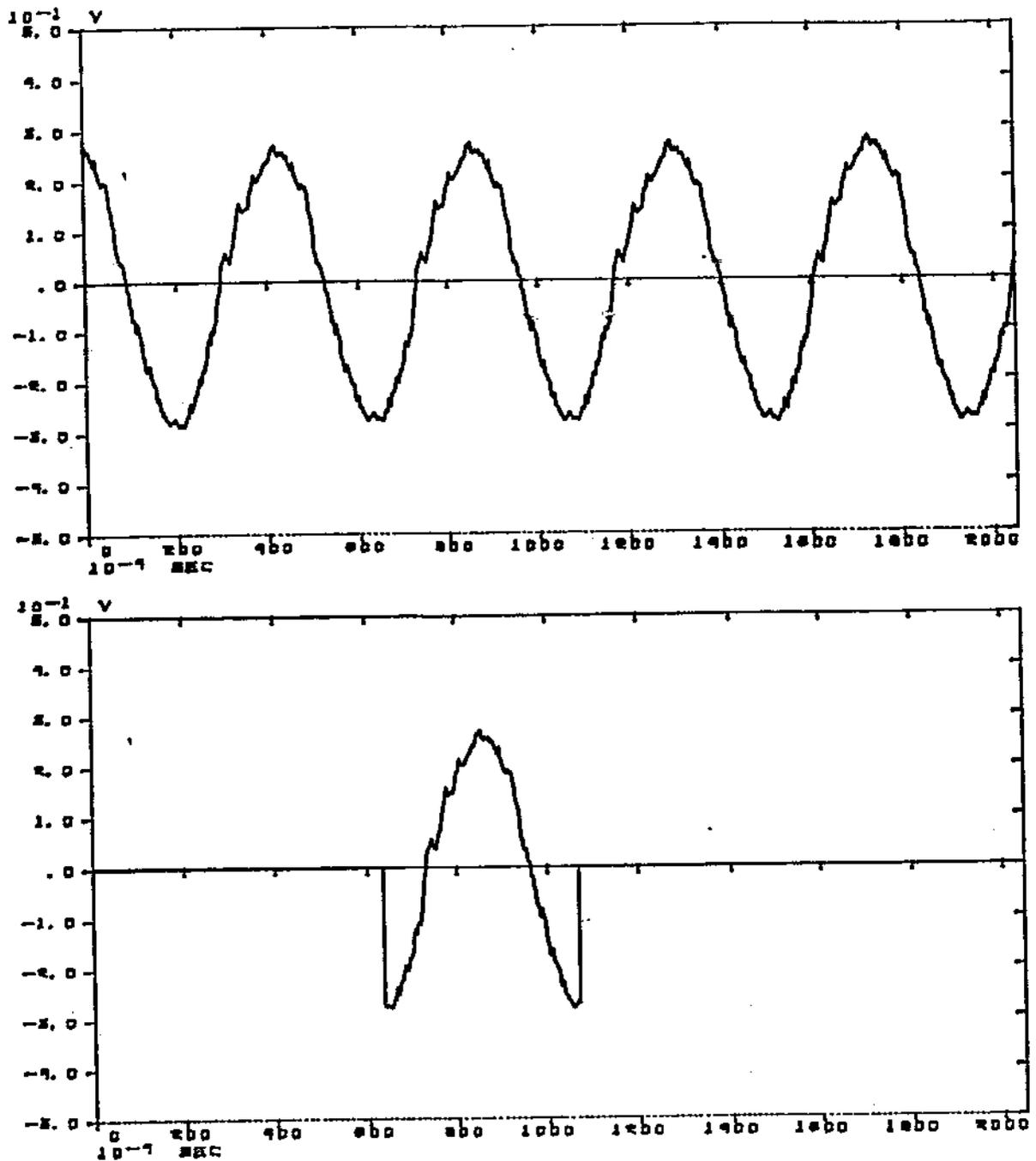


Figura 5.40: Sinal adquirido no domínio do tempo antes e após a amostragem

A FFT do sinal adquirido é apresentada na figura (5.41).

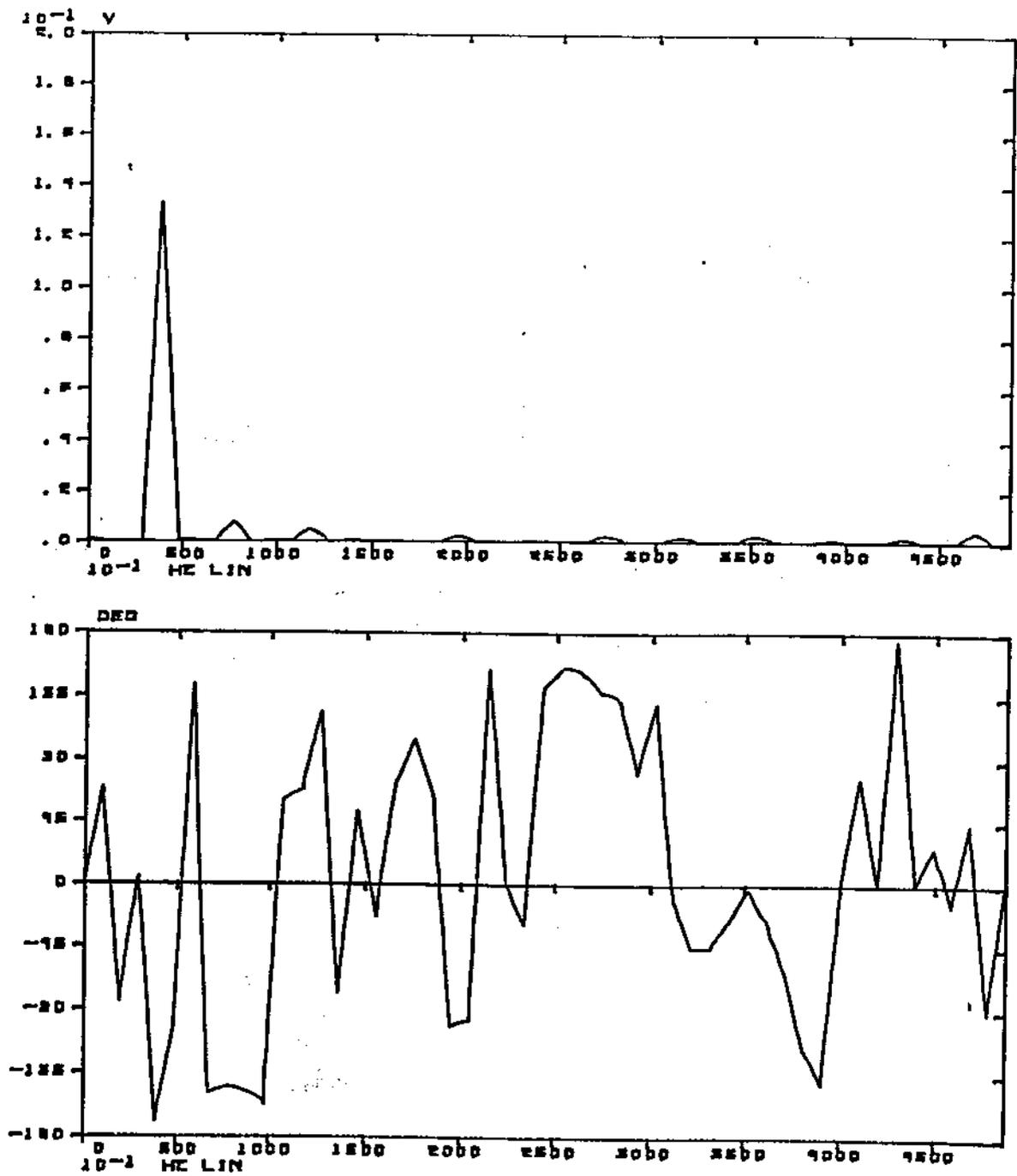


Figura 5.41: Amplitude e Fase do sinal adquirido

O equipamento desenvolvido, bem como os equipamentos utilizados para este processamento descrito é mostrado na figura (5.42)

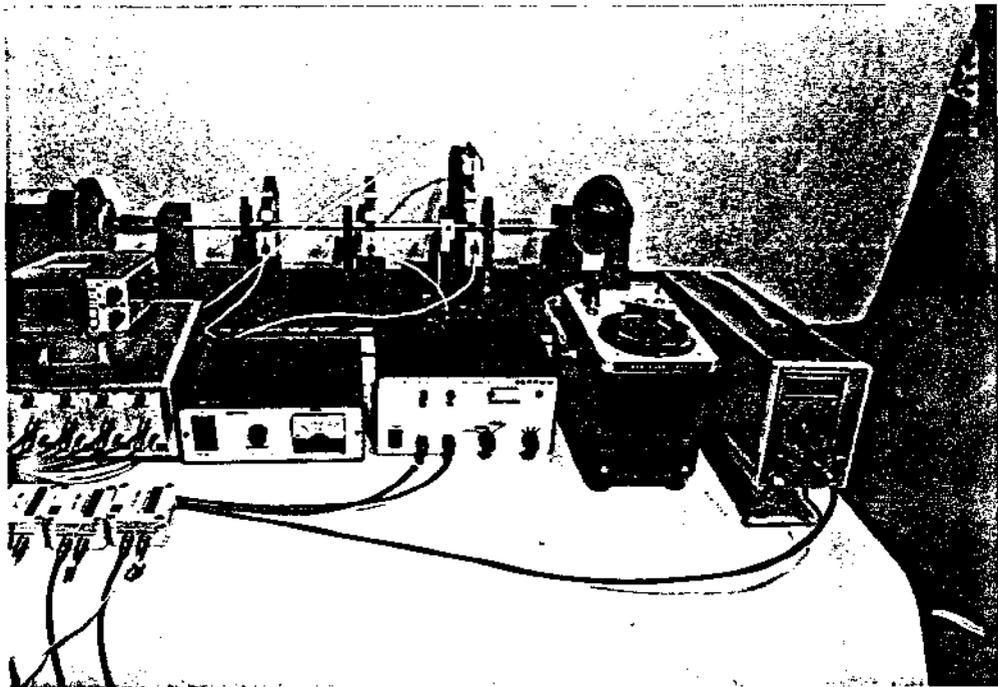


Figura 5.42: Instrumentação utilizada

5.6 Curva de resposta ao desbalanceamento

Como foi dito anteriormente, para ajustar o modelo teórico ao experimental e ainda estudar o número de velocidades de rotação de medição, e a faixa de velocidades de rotação, foi levantada a curva resposta ao desbalanceamento para cada ponto de medida. Para a obtenção dos sinais optou-se pelo processamento do sinal via referência externa.

O esquema simplificado da aquisição e processamento dos sinais é mostrado na figura (5.43).

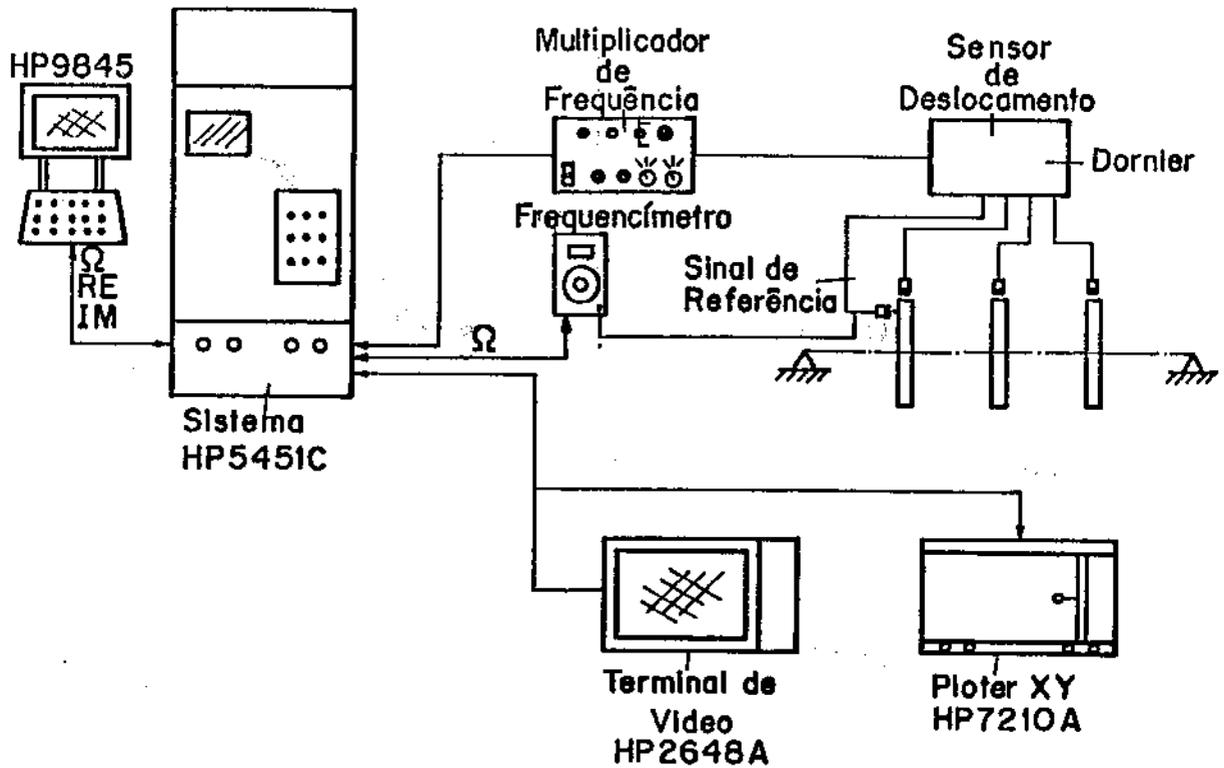


Figura 5.43: Esquema simplificado da aquisição e processamento dos sinais

Foram realizadas medidas em três planos. Os planos onde os sinais foram medidos com seus respectivos sensores de proximidade são mostrados na figura (5.44).

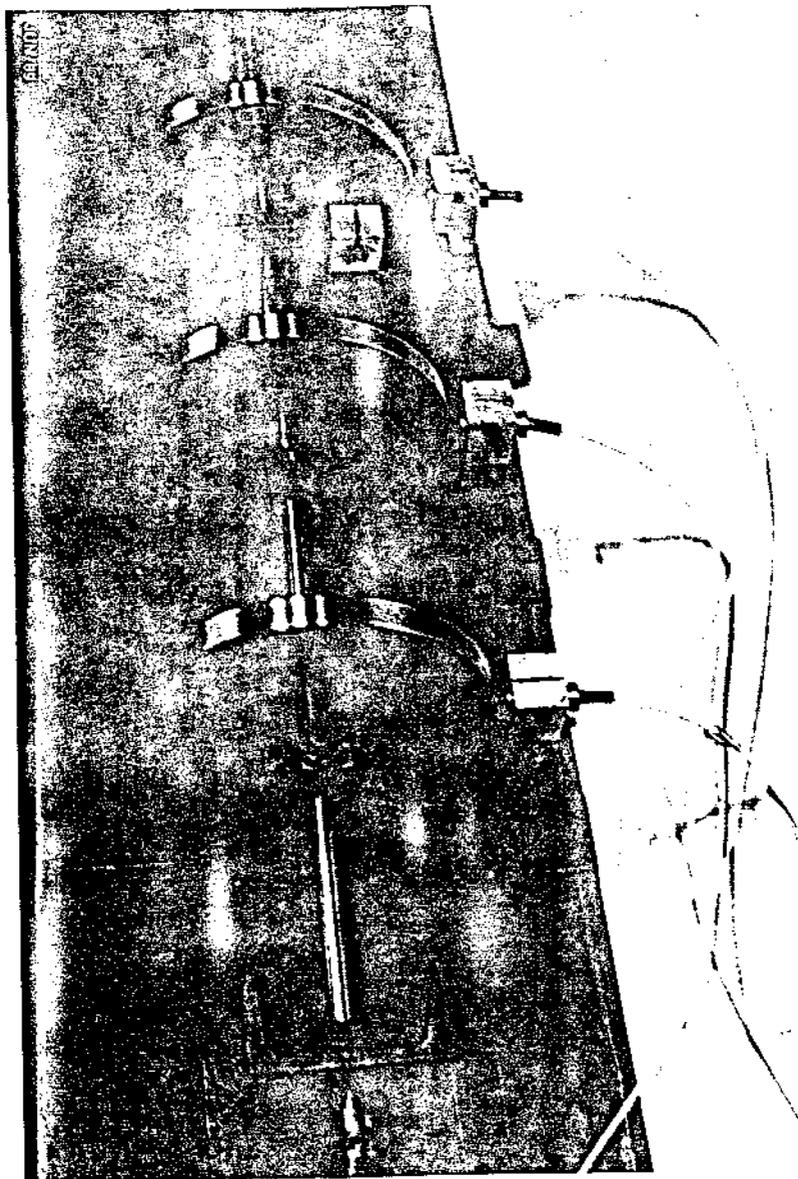


Figura 5.44: Planos de medida

As curvas da resposta ao desbalanceamento obtidas estão mostradas nas figuras (5.45), (5.46) e (5.47) e correspondem ao deslocamento no plano i devido ao desbalanceamento residual inicial.

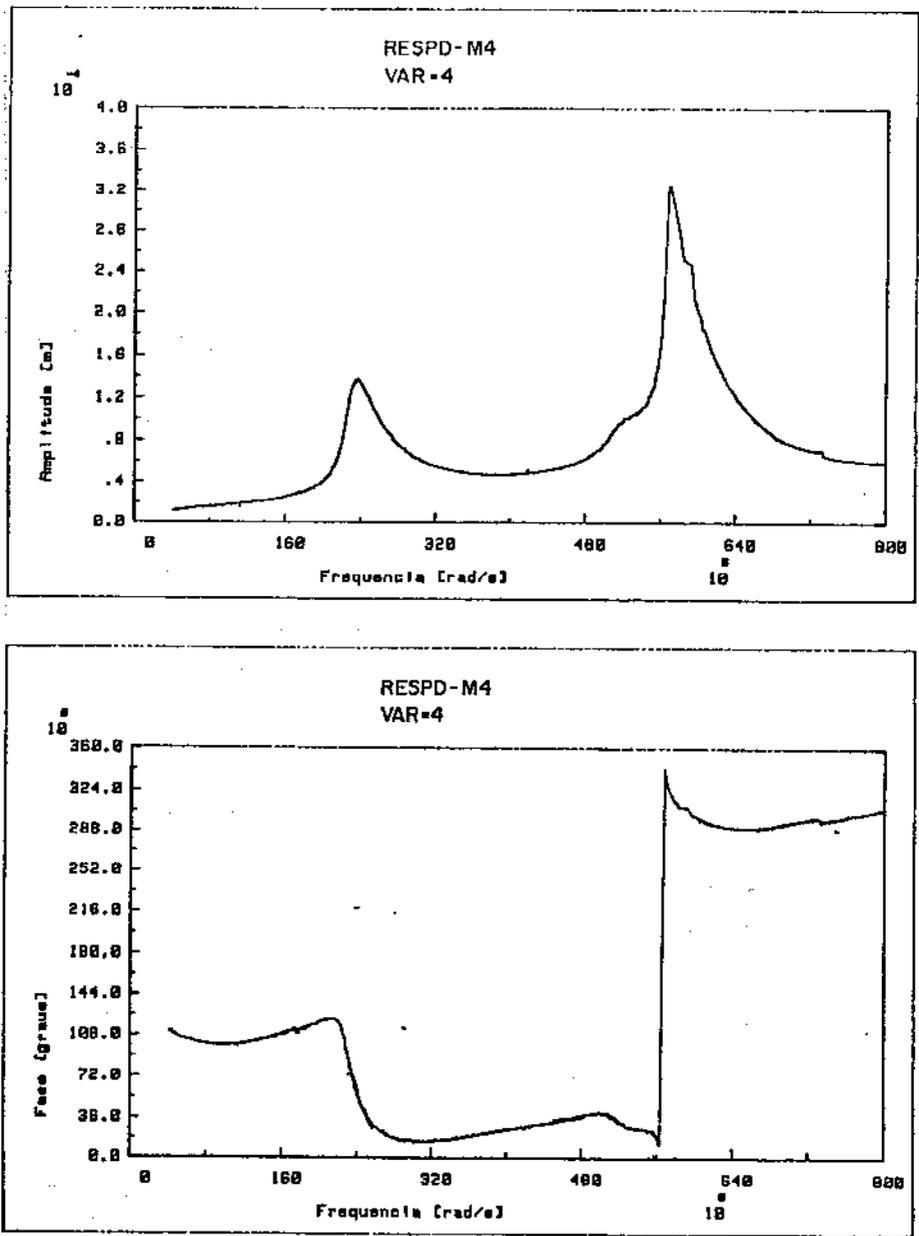


Figura 5.45: Resposta ao desbalanceamento no ponto 3-Experimental

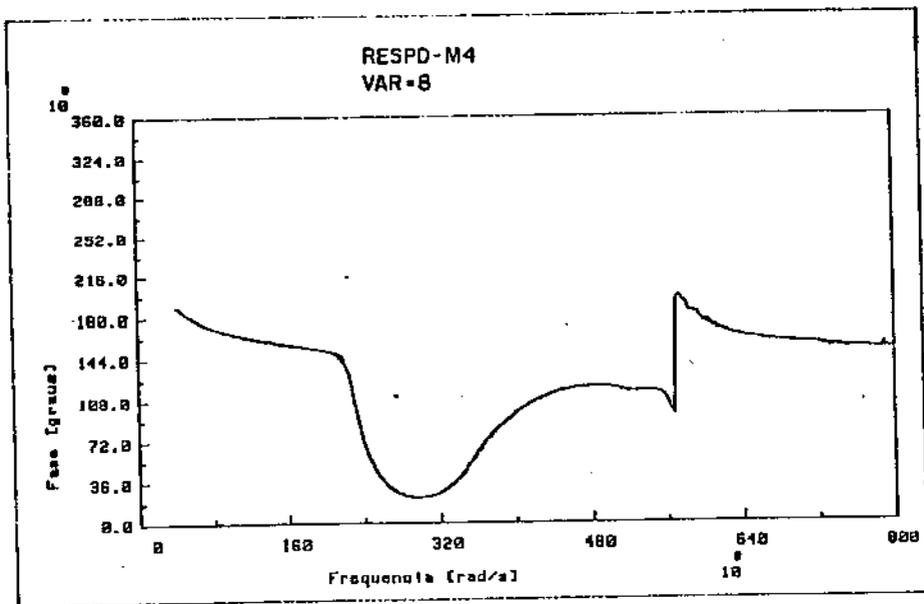
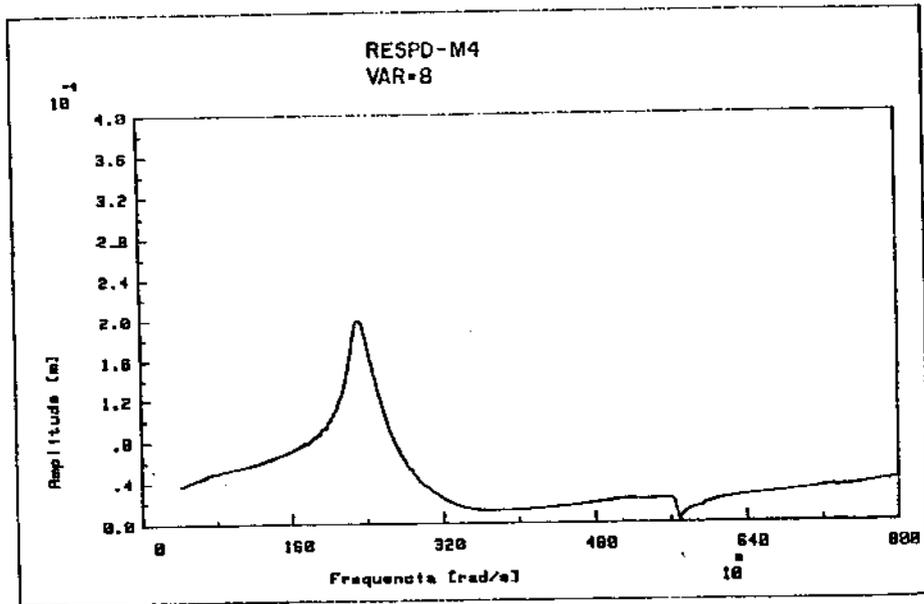


Figura 5.46: Resposta ao desbalanceamento no ponto 5-Experimental

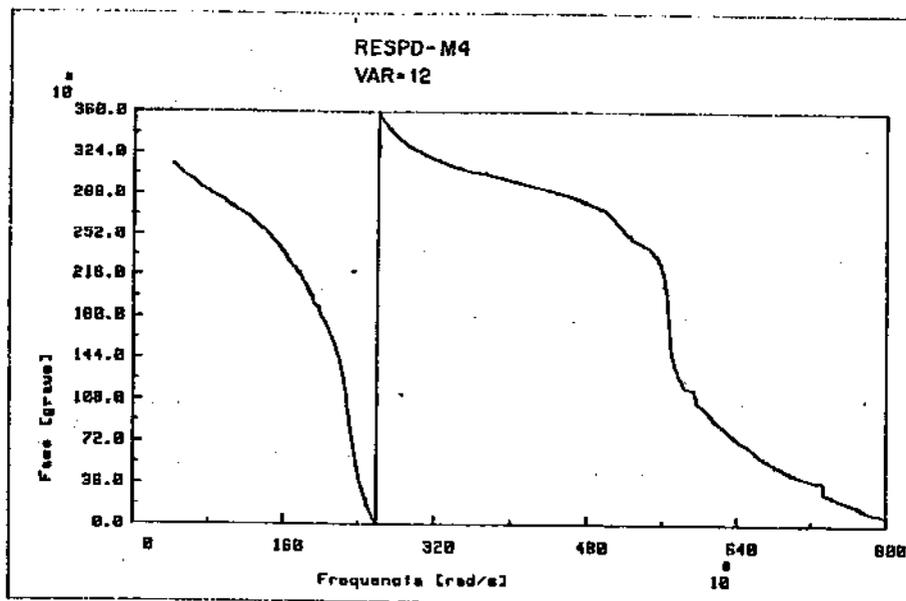
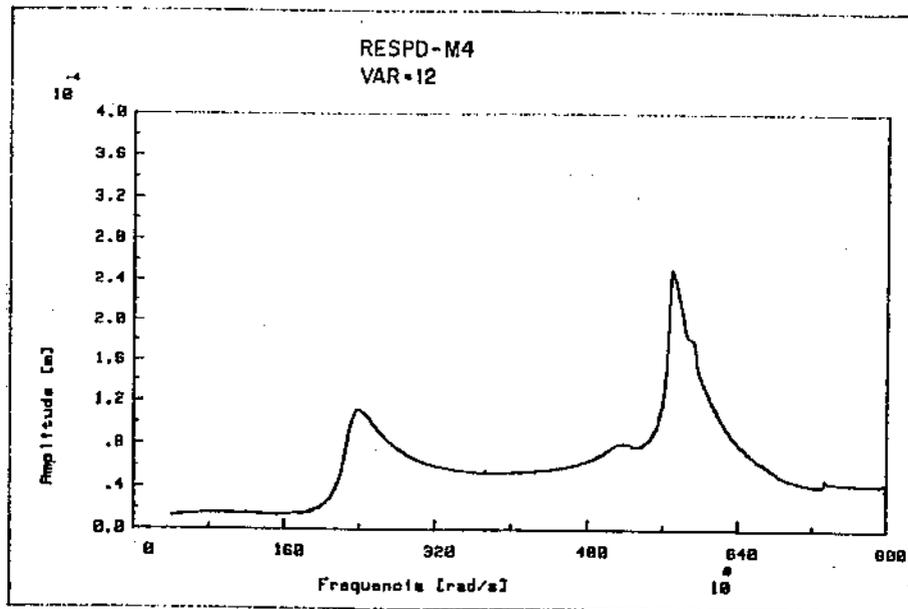


Figura 5.47: Resposta ao desbalanceamento no ponto 7-Experimental

Deste modo obtem-se maiores informações a respeito do sistema e portanto maiores informações sobre as condições de balanceamento a serem utilizadas.

Essas curvas servem também para verificar a efetividade do balanceamento feito, através da comparação com as curvas de resposta ao desbalanceamento do sistema balanceado.

Se o modelo teórico estiver perfeitamente ajustado, as curvas de resposta em frequência obtidas através da simulação computacional coincidem com as experimentais.

5.7 Obtenção da massa e ângulo de balanceamento

Para se estudar o número de velocidades de rotação de medição, e a faixa de velocidades de rotação, foi levantada a curva resposta ao desbalanceamento para cada ponto de medida. Foram realizadas medidas em três planos.

Para obtenção da massa e do ângulo de balanceamento, vários estudos sobre alguns parâmetros de entrada para os métodos de balanceamento foram feitos, para se ter maior confiança sobre o resultado obtido sobre a massa e ângulo de balanceamento.

Os parâmetros de entrada estudados foram relativos à velocidade e ao plano de medida. Analisou-se como se comportavam as variáveis identificadas em função de algumas variações nos parâmetros de entrada estudados:

- Variação da faixa de velocidades utilizada,
- Número de velocidades utilizadas no balanceamento,
- Variação do espaçamento entre as velocidades utilizadas,
- Valor das velocidades em relação às velocidades críticas,
- Número de planos de medida
- Posição dos planos de medida

Para o estudo e análise da variação dos parâmetros de entrada, optou-se por levantar os gráficos dos parâmetros identificados em função da velocidade média dentre as velocidades usadas na identificação. Esta opção também foi feita na simulação teórica, pois permite uma comparação entre os resultados para os diversos fatores considerados. O gráficos apresentados nas figuras (5.48) a (5.62), são referentes a esta comparação para uma faixa de velocidade de 195 a 265 rad/s utilizando-se os métodos de balanceamento modal H e \hat{H} . As curvas apresentam os valores de momento de desbalanceamento modal, rigidez modal, amortecimento modal e ainda irregularidades geométricas modais devido a ovalização da secção e ao empenamento do eixo para o primeiro modo em função das velocidades médias de rotação utilizadas no processo de balanceamento. Todos estes parâmetros identificados são também observados, analisando-se as suas variações (erros), para as diferentes condições de balanceamento.

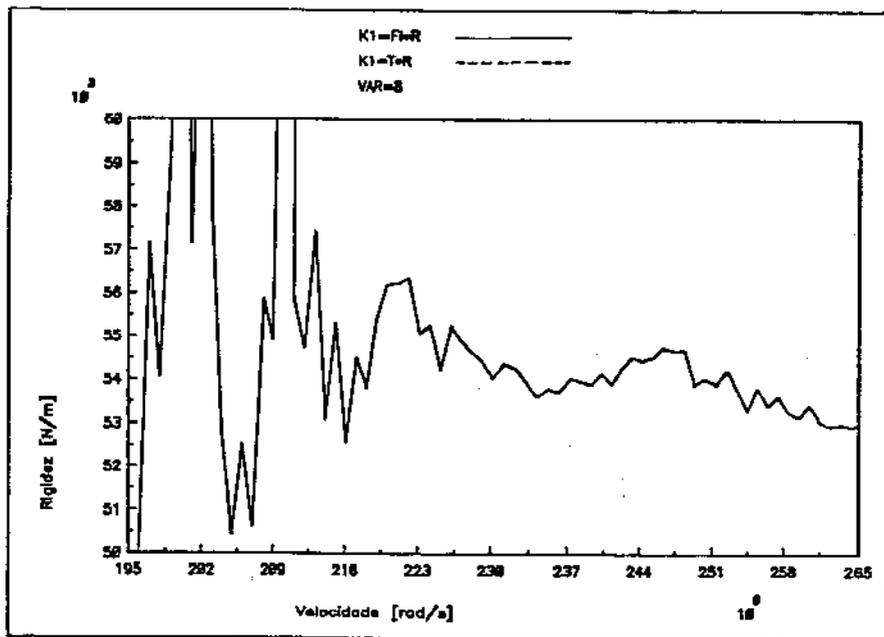
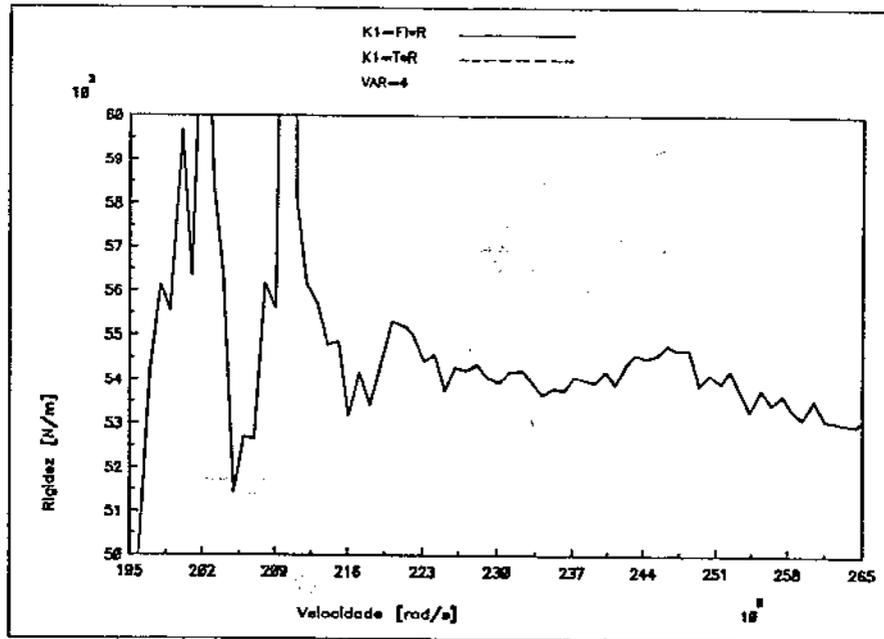


Figura 5.48: Valores identificados - Rigidez k1-Experimental

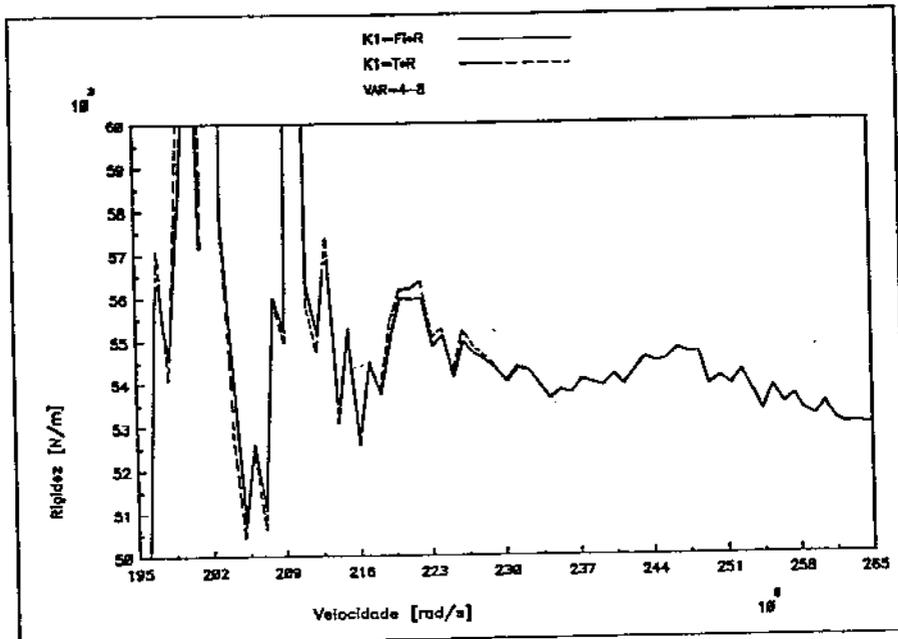
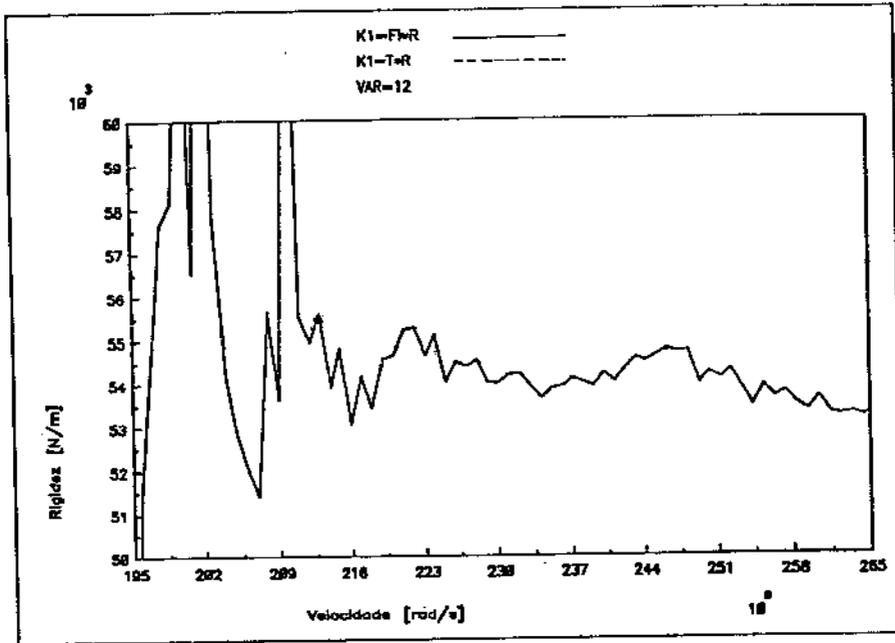


Figura 5.49: Valores identificados - Rigidez k1-Experimental

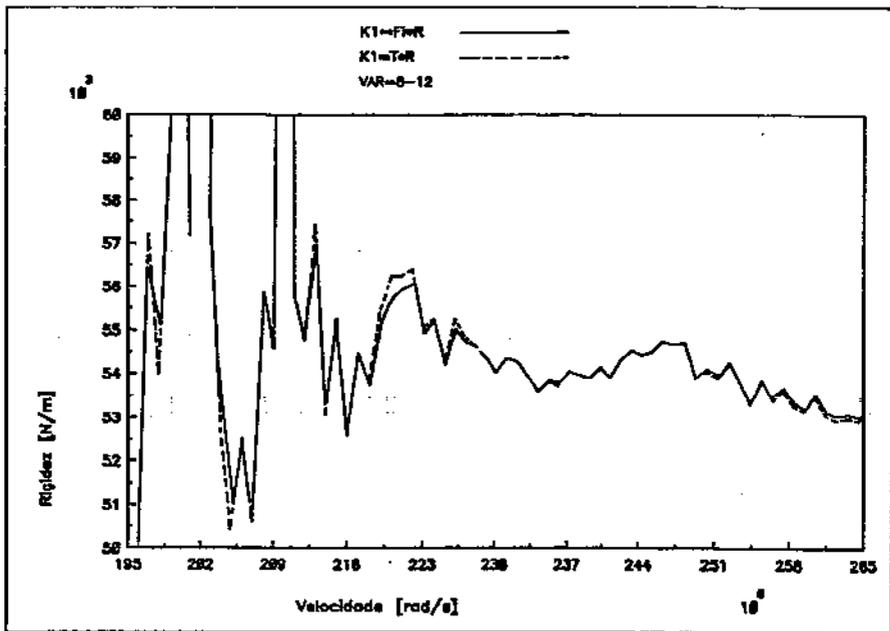
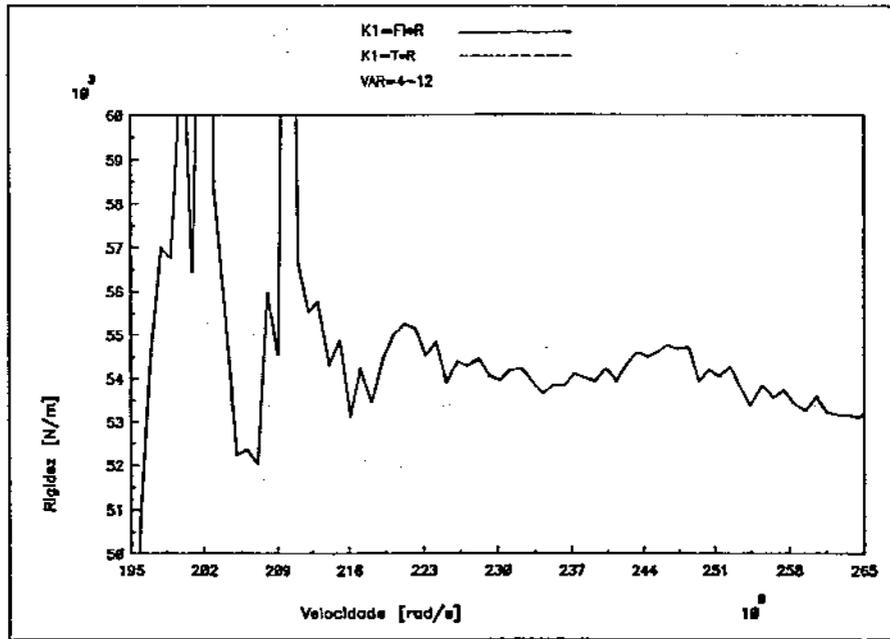


Figura 5.50: Valores identificados - Rigidez k1-Experimental

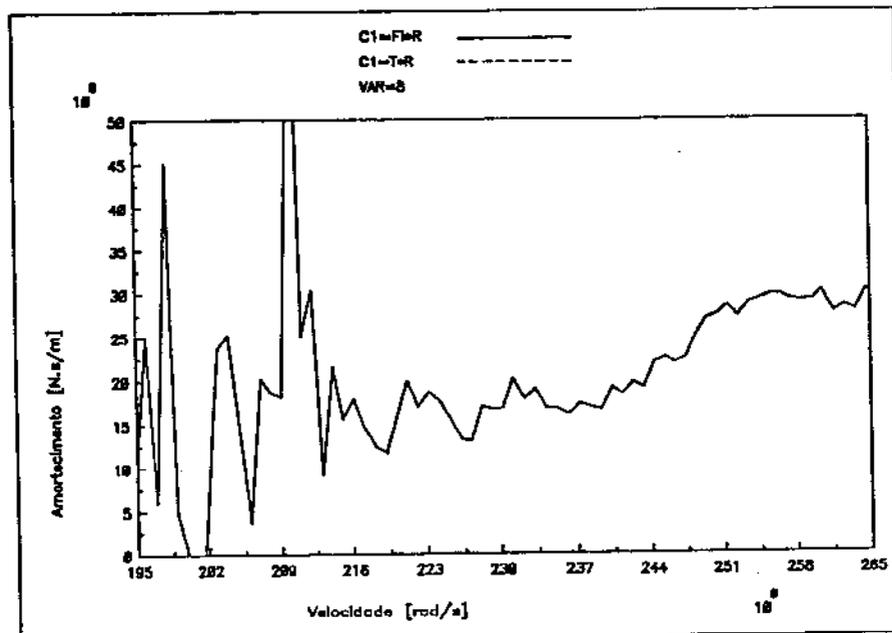
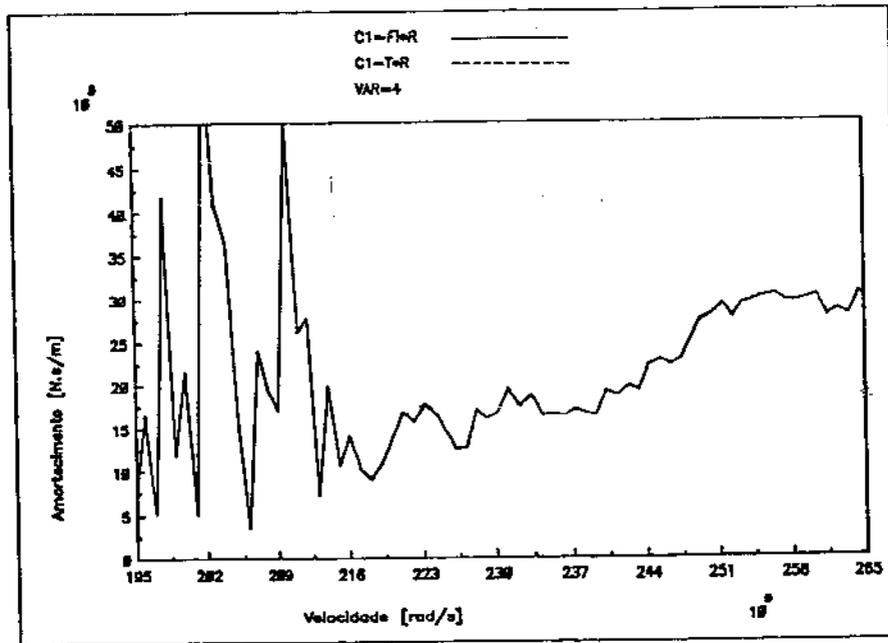


Figura 5.51: Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental

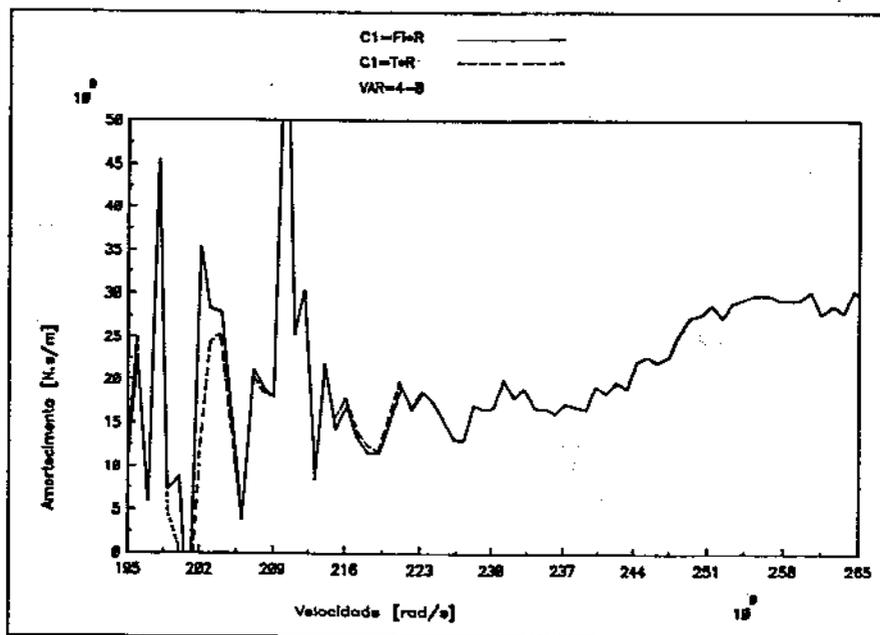
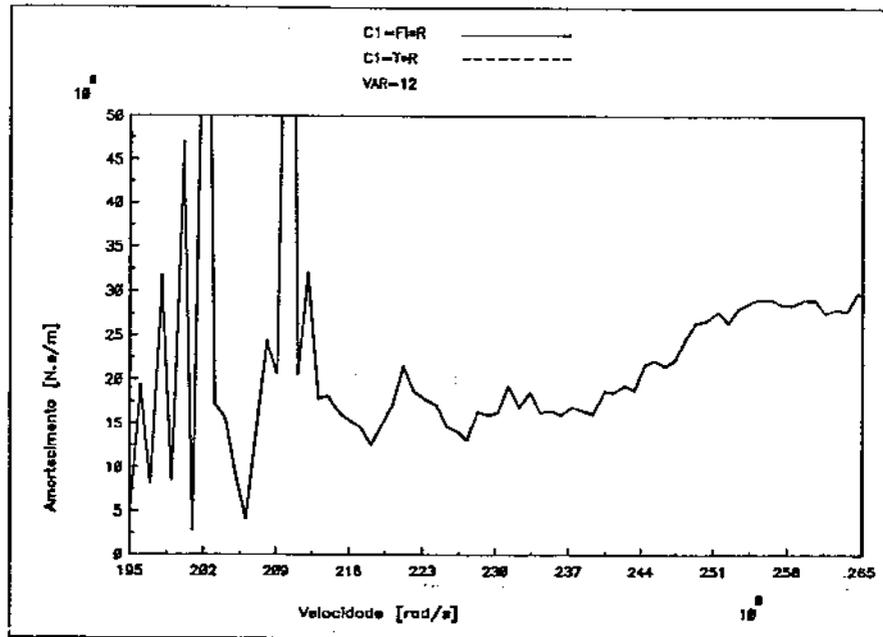


Figura 5.52: Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental

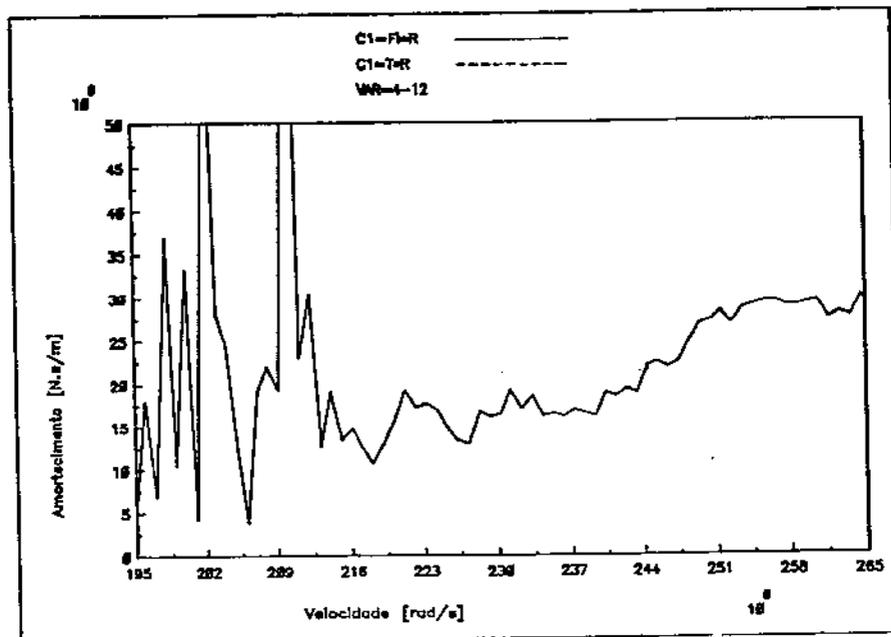
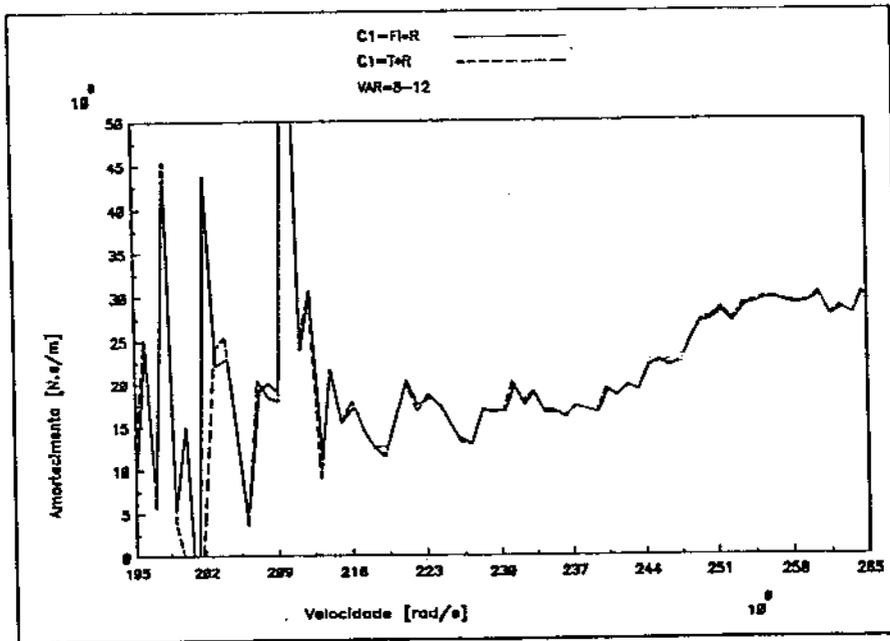


Figura 5.53: Valores identificados - Amortecimento d1-Experimental

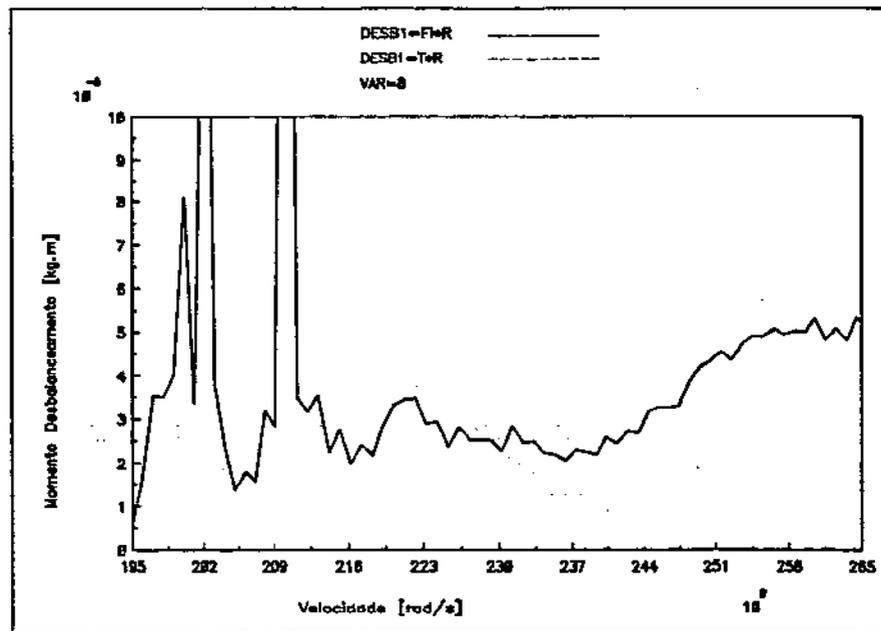
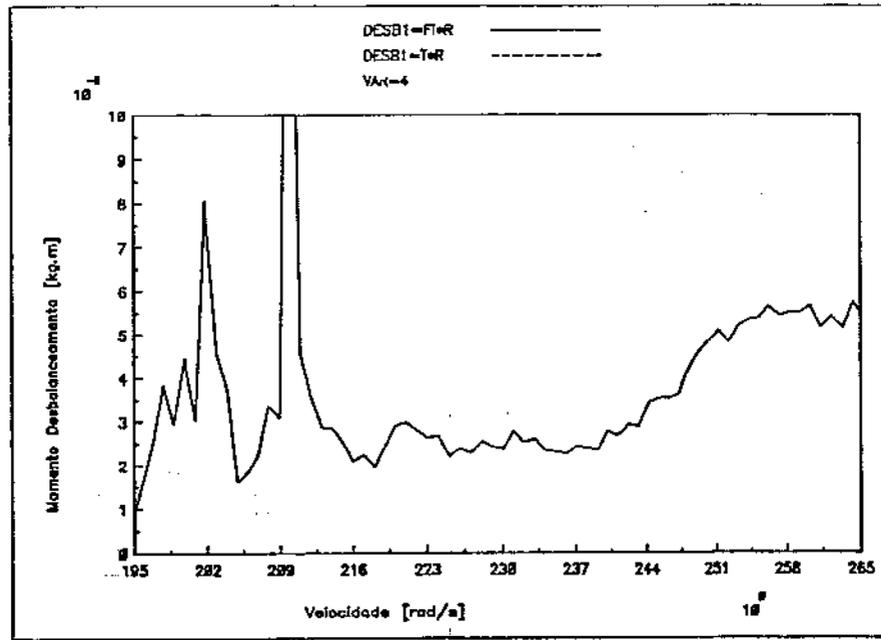


Figura 5.54: Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental

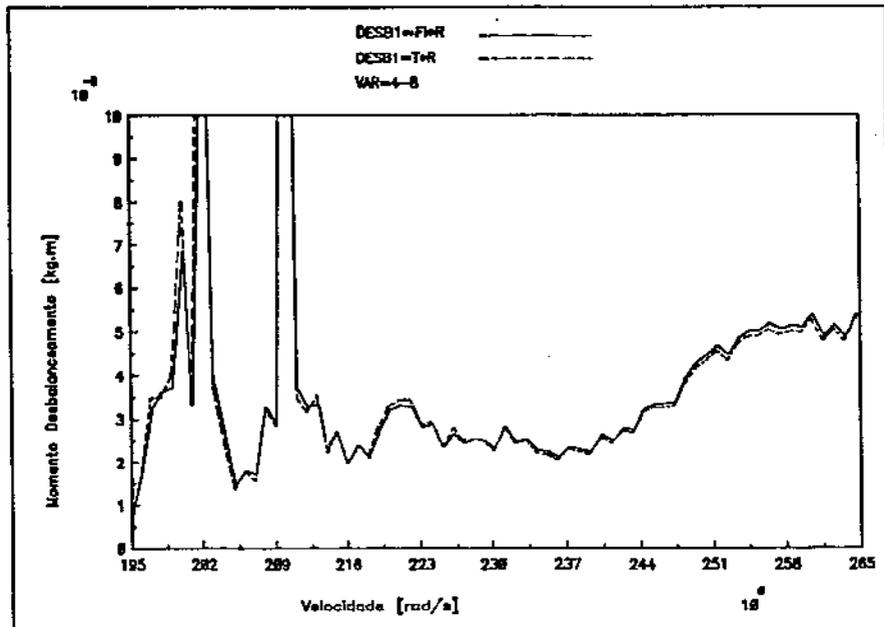
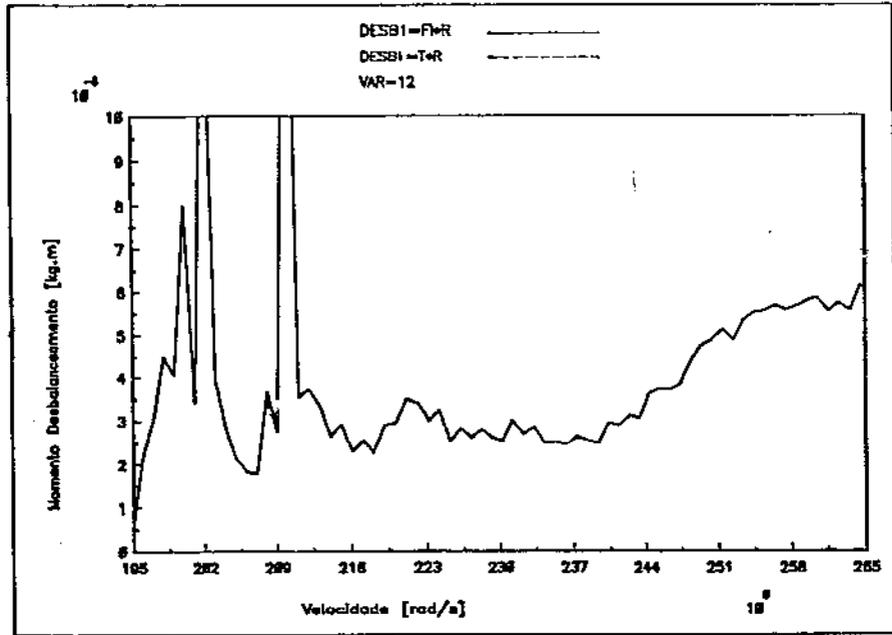


Figura 5.55: Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental

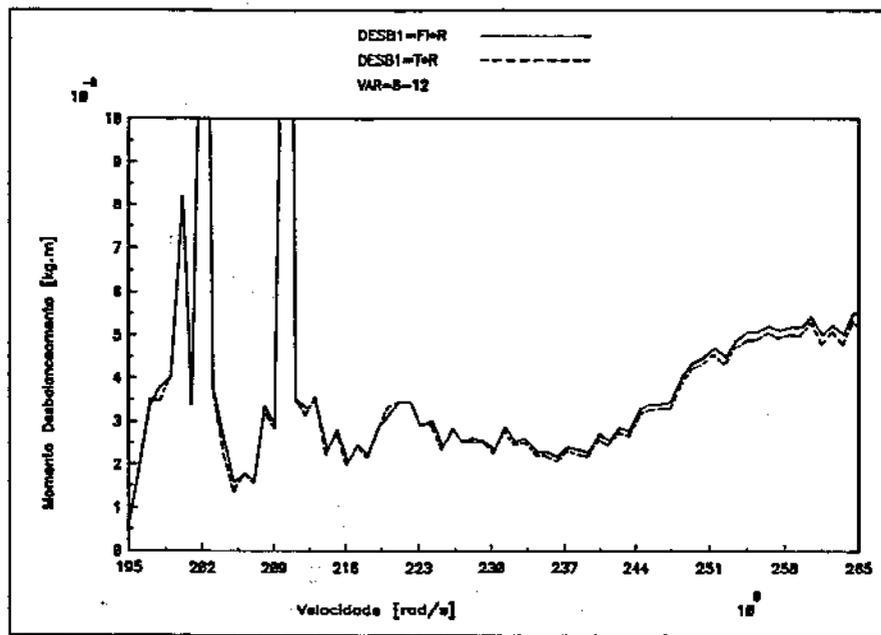
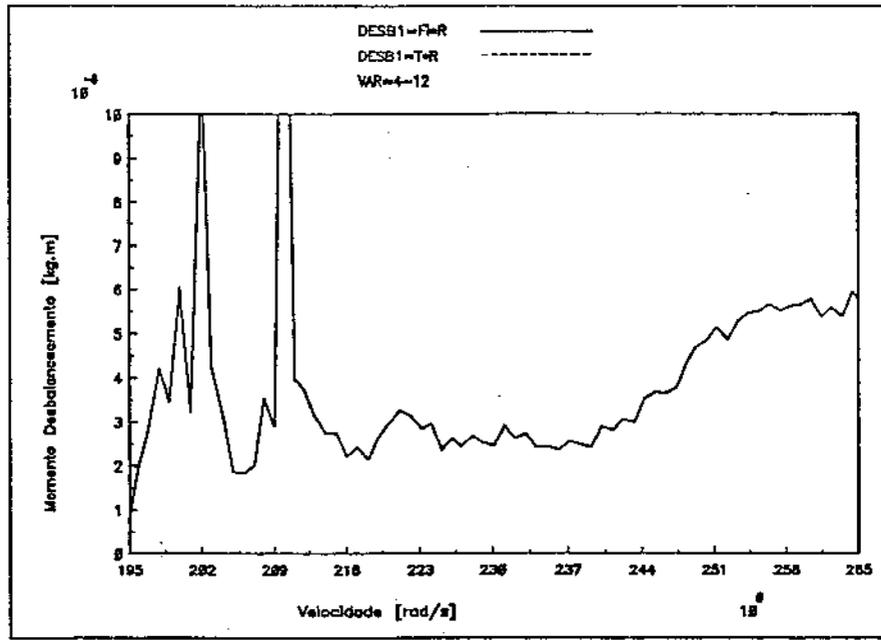


Figura 5.56: Valores identificados - Momento de desbalanceamento u1-Experimental

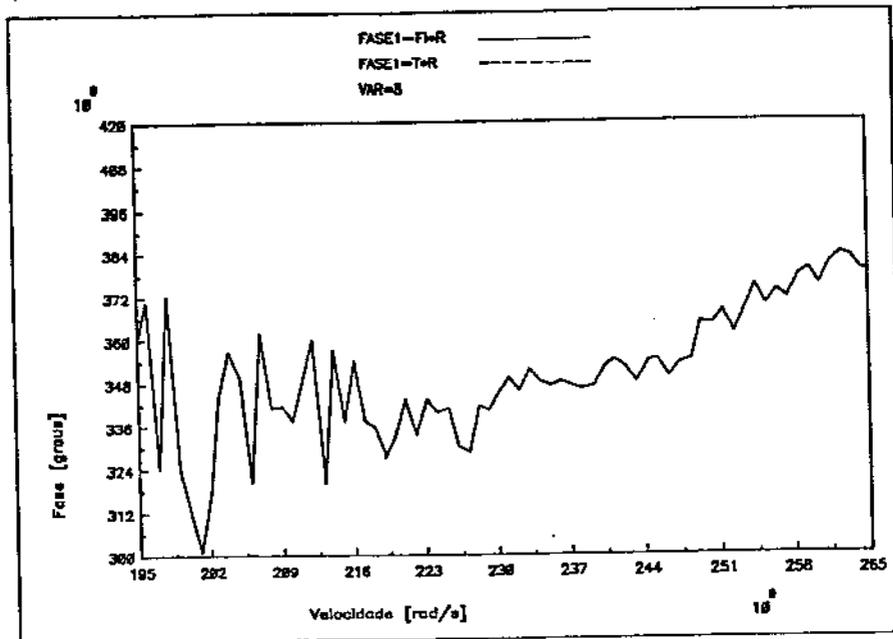
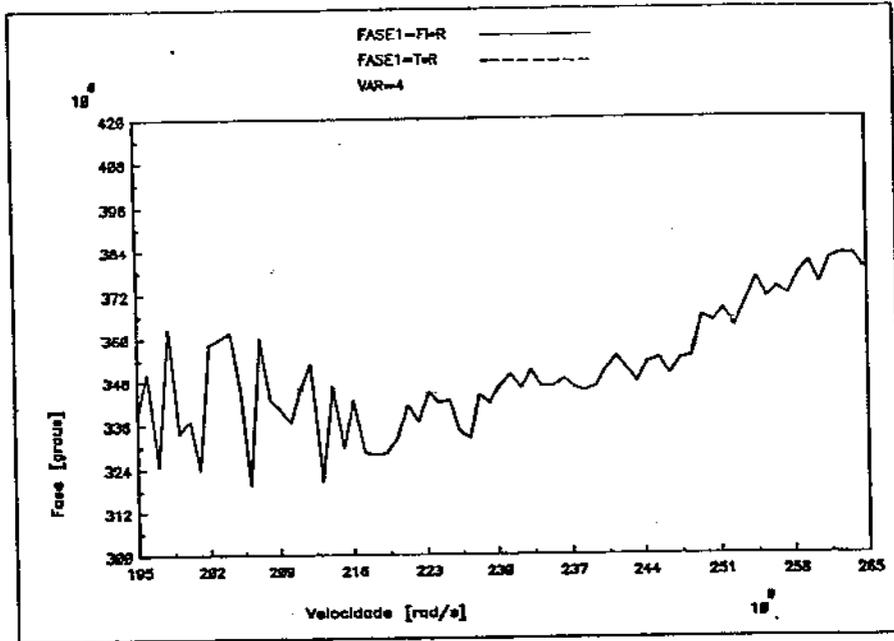


Figura 5.57: Valores identificados - Fase de u1-Experimental

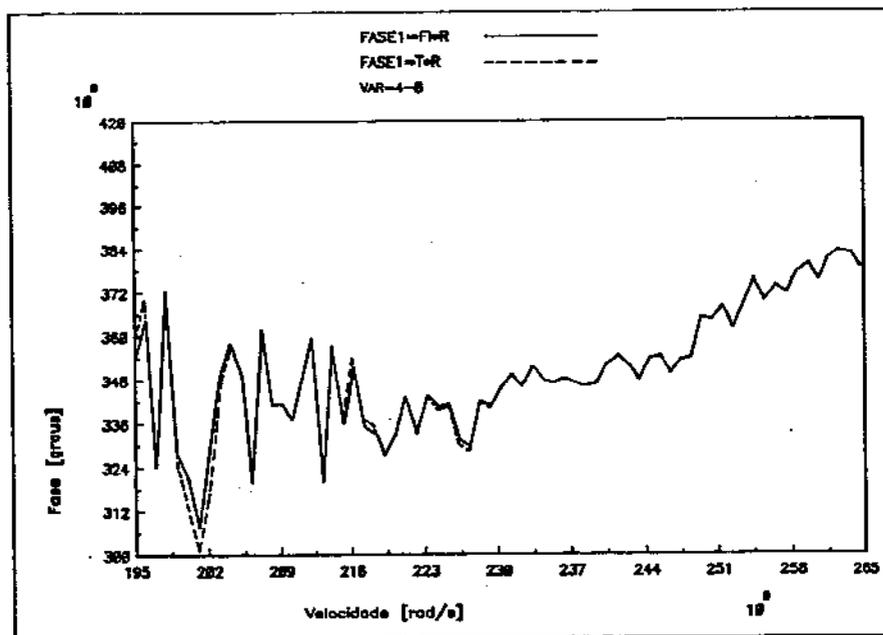
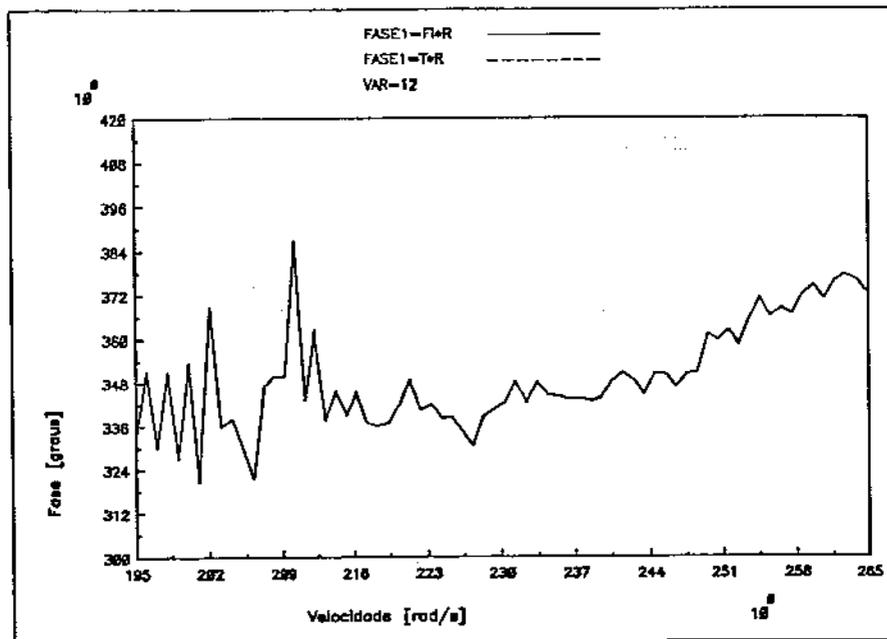


Figura 5.58: Valores identificados - Fase de u1-Experimental

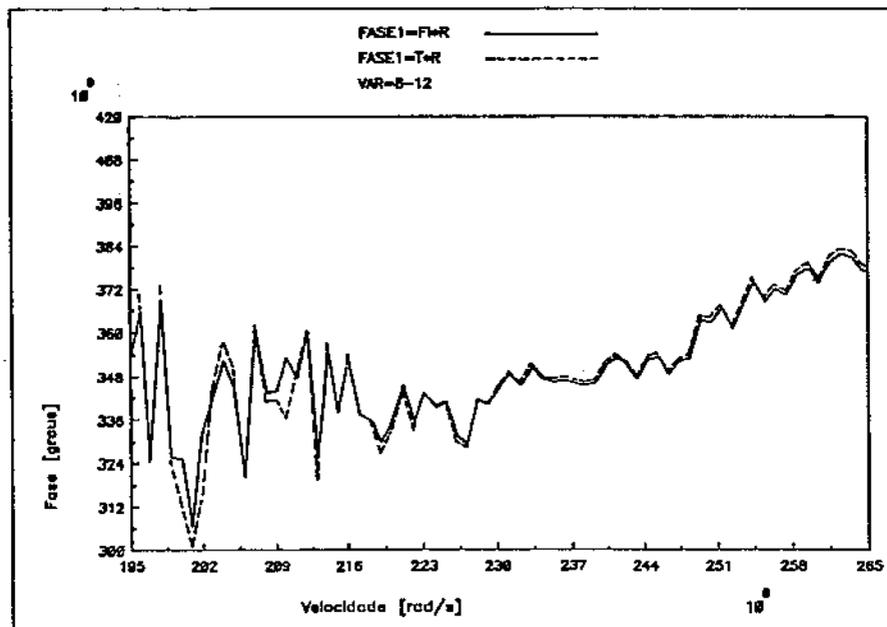
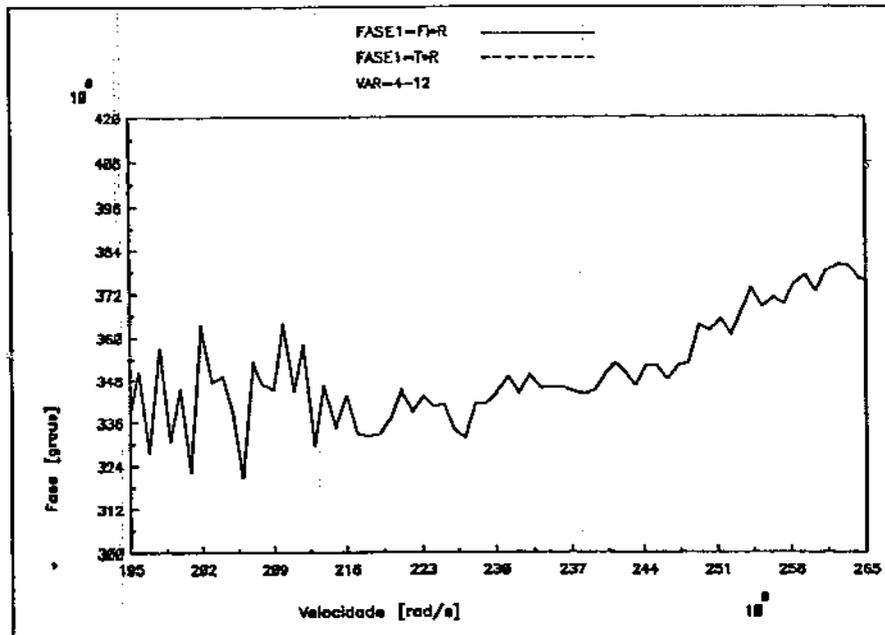


Figura 5.59: Valores identificados - Fase de u1-Experimental

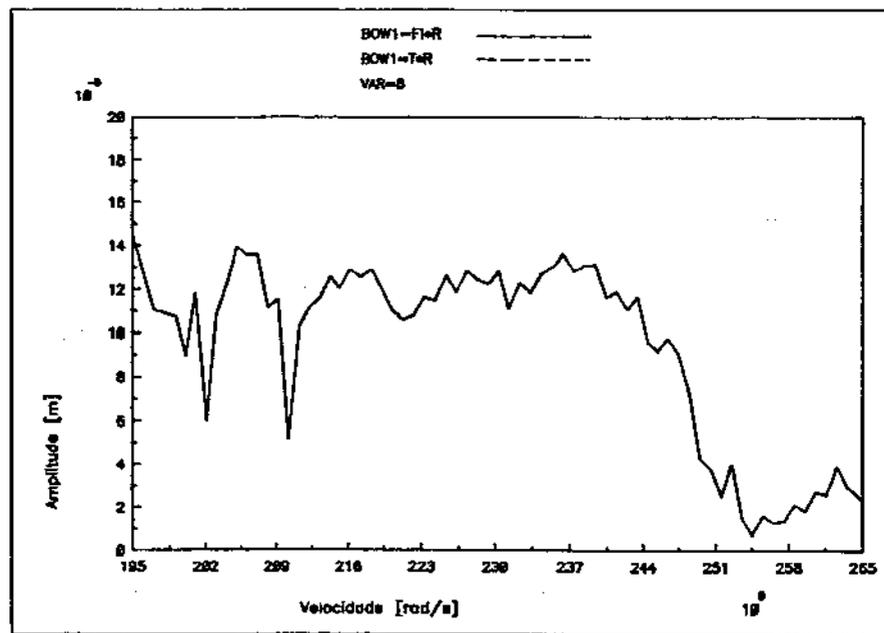
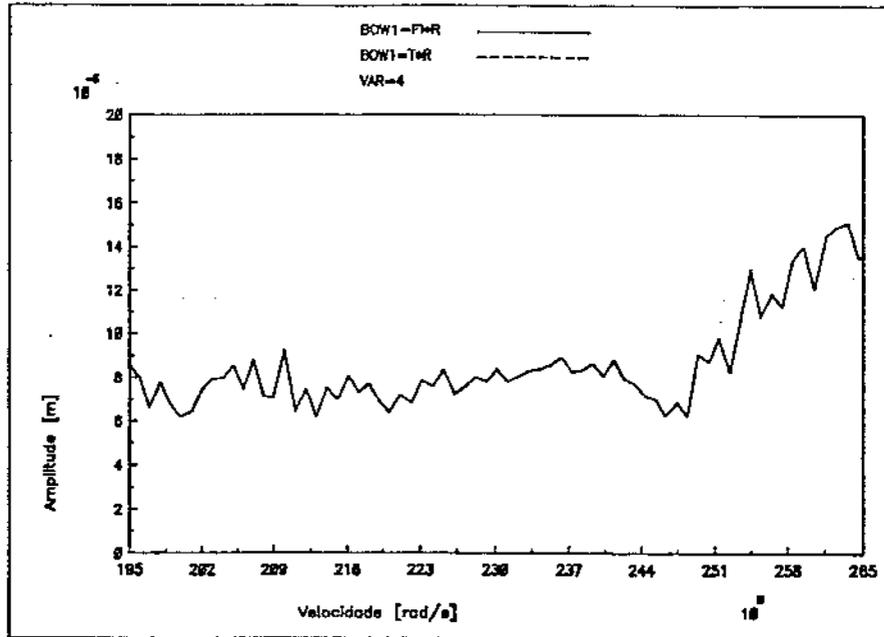


Figura 5.60: Valores identificados - Empenamento b1-Experimental

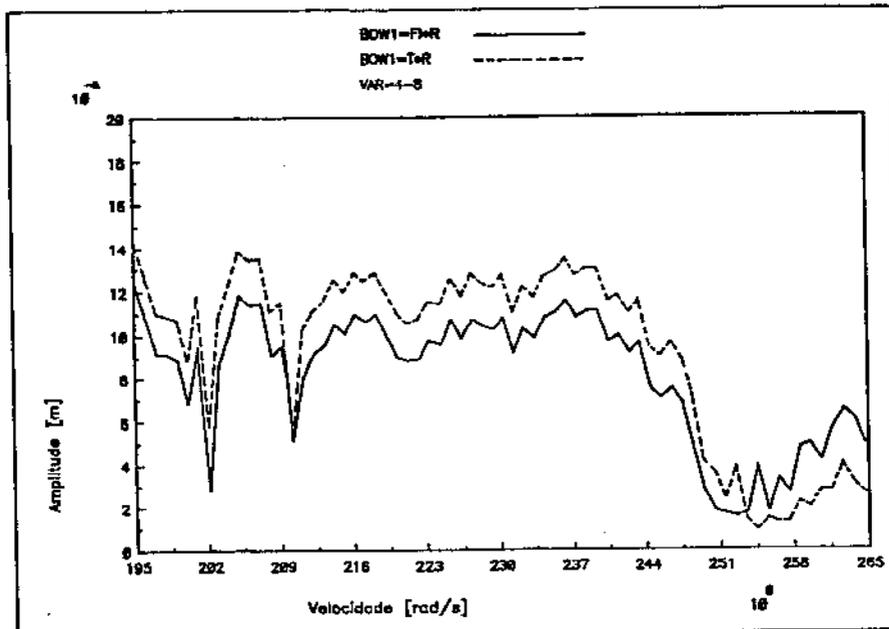
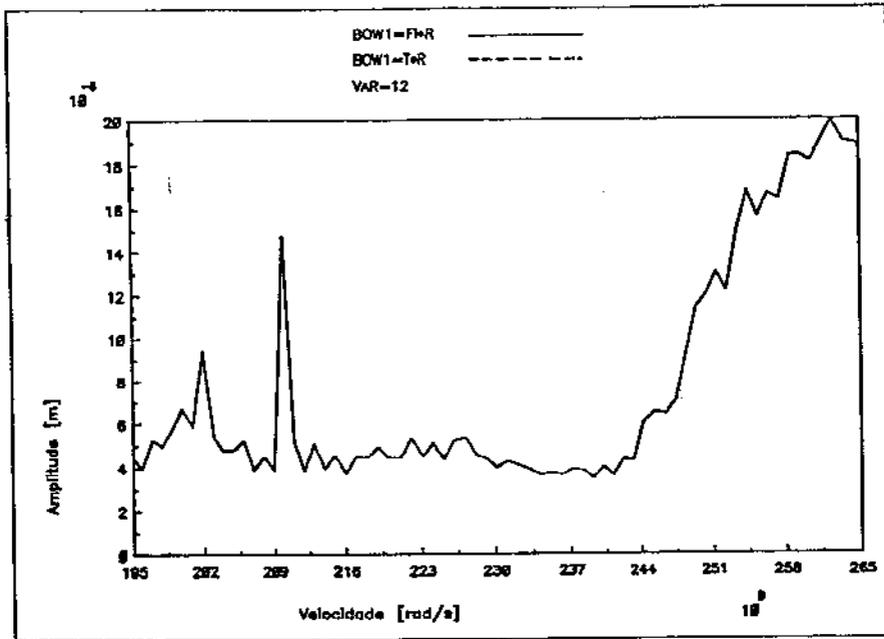


Figura 5.61: Valores identificados - Empenamento b1-Experimental

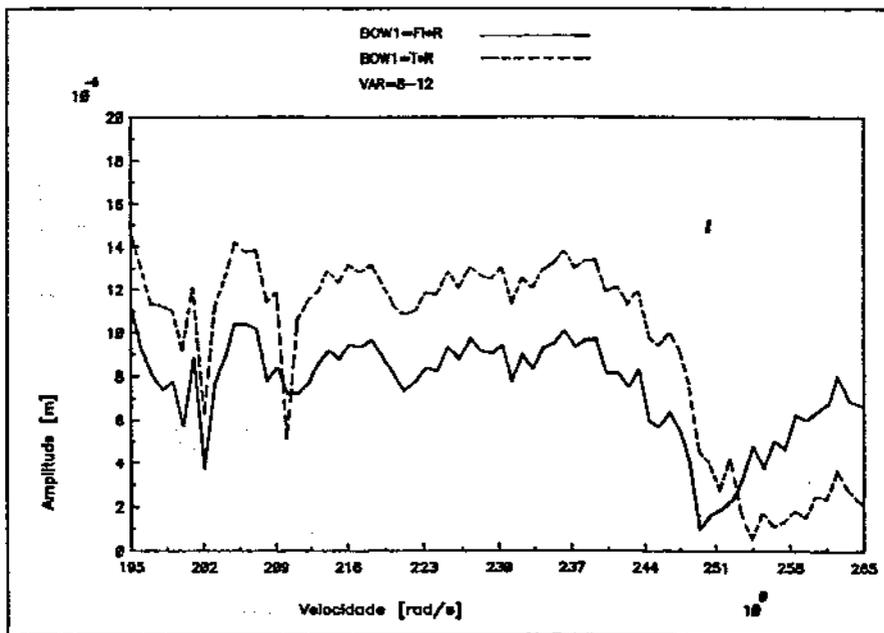
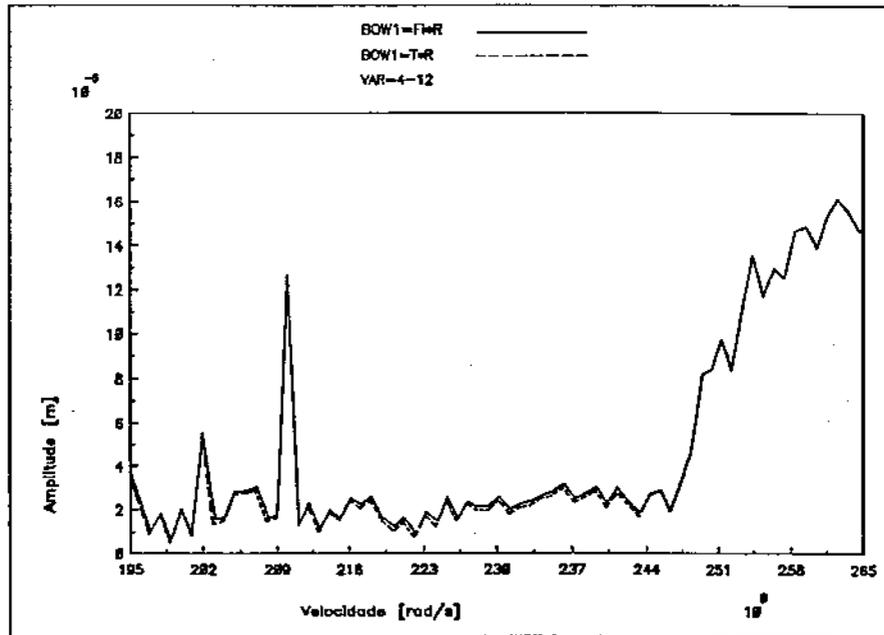


Figura 5.62: Valores identificados - Empenamento b1-Experimental

Observa-se destes gráficos que existem faixas de velocidades onde são identificados com uma certa regularidade as rigidezes modais, e nestas faixas o desbalanceamento modal, amortecimento e irregularidades geométricas modais se tornam razoavelmente constantes.

Os valores médios de parâmetros identificados nessas faixas de velocidades, onde as velocidades médias estão razoavelmente próximas da velocidade crítica do modo sendo balanceado, são considerados como os valores de balanceamento a serem adotados.

A tabela (5.9) mostra os valores dos parâmetros identificados, utilizando 20 velocidades dentro da faixa da velocidade de rotação mostrada na figura (5.63). As velocidades utilizadas são mostradas na tabela 5.10.

Modos	Met.	u (Kg.m)	Fs (graus)	k (N/m)	d (N.s/m)	b (m)
1º Modo	H	1,93E-05	138,51	60500	34,85	5,79E-05
2º Modo	H	1,81E-05	200,76	361872	51,35	5,84E-05

Tabela 5.9: Parâmetros modais identificados-Experimental

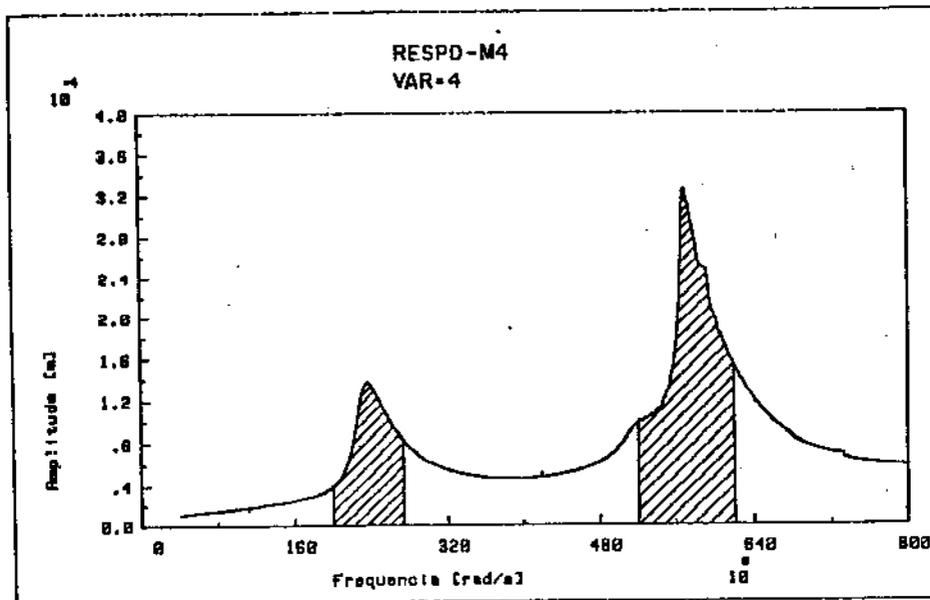


Figura 5.63: Faixa de velocidades utilizada na identificação-Experimental

	Velocidade 1 ^o Modo [rad/s]	Velocidade 2 ^o Modo [rad/s]
1	199	520
2	202	524
3	203	526
4	205	528
5	207	530
6	209	531
7	212	534
8	213	535
9	214	539
10	216	541
11	218	546
12	221	549
13	222	554
14	224	556
15	225	562
16	226	565
17	228	568
18	230	572
19	232	574
20	233	576
21	234	578
22	236	580
23	237	581
24	238	583
25	239	585
26	241	587
27	242	588
28	243	589
29	245	591
30	248	593
31	249	595
32	251	597
33	253	600
34	256	602
35	259	605
36	261	606
37	263	610
38	267	614
39	270	616
40	273	619

Tabela 5.10: Velocidades Utilizadas na Identificação-Experimental

5.8 Verificação da efetividade do balanceamento

Após a colocação das massas de correção calculadas, uma nova curva de resposta ao desbalanceamento foi obtida experimentalmente, de modo que se possa comparar com as respostas obtidas antes do balanceamento. Com isso pode-se verificar a efetividade do balanceamento realizado. As novas curvas da resposta ao desbalanceamento são mostradas superpostas as obtidas antes do balanceamento nas figuras (5.64), (5.65) e (5.66).

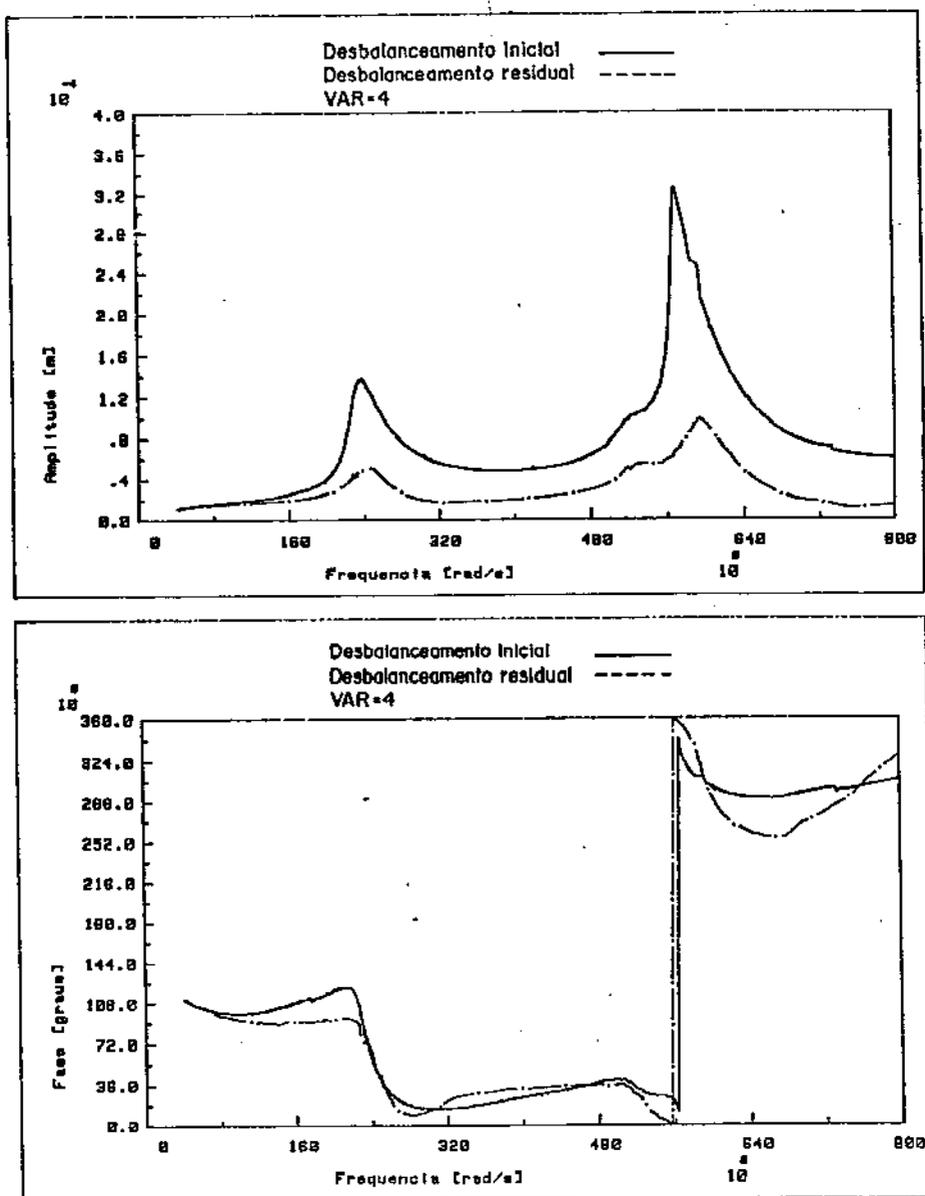


Figura 5.64: Resposta ao desbalanceamento no ponto 3

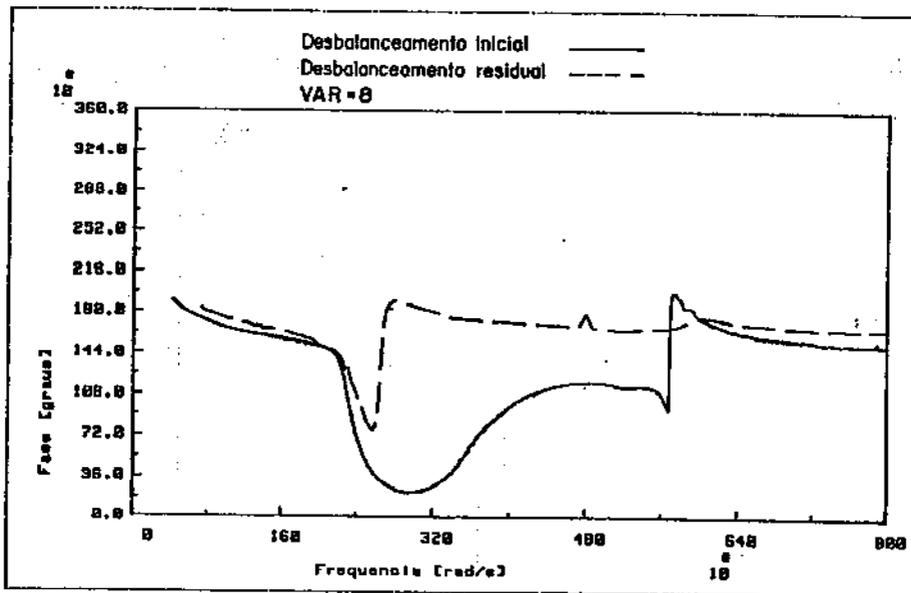
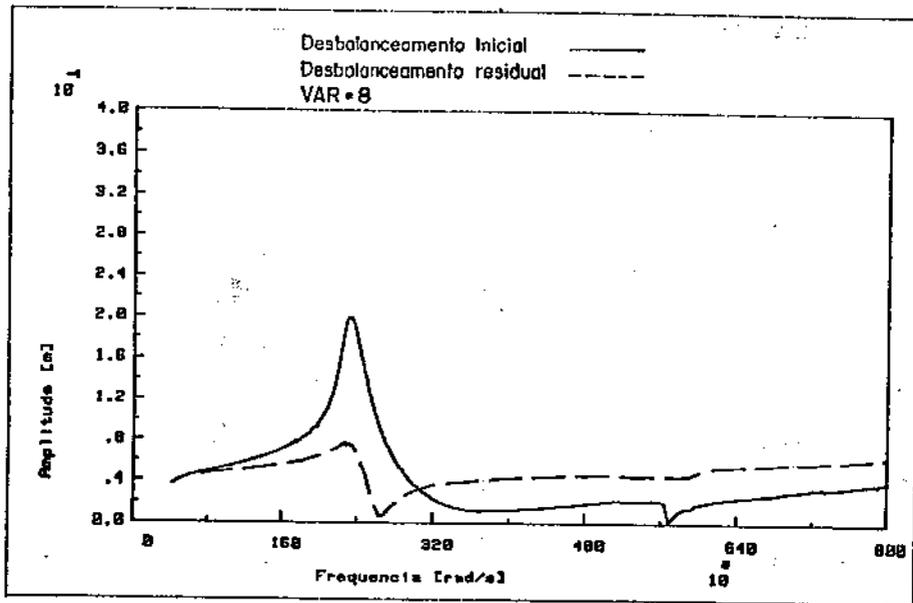


Figura 5.65: Resposta ao desbalanceamento no ponto 5

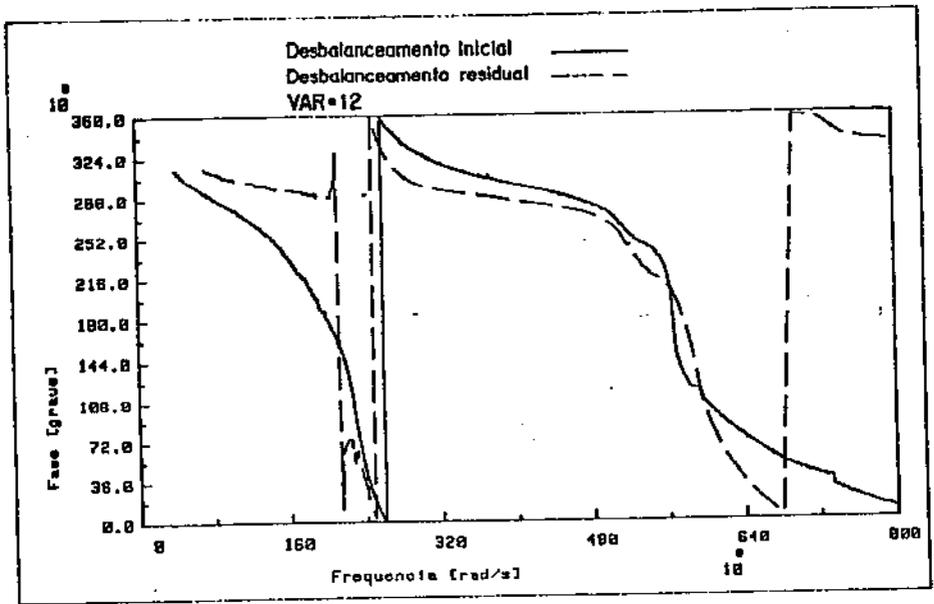
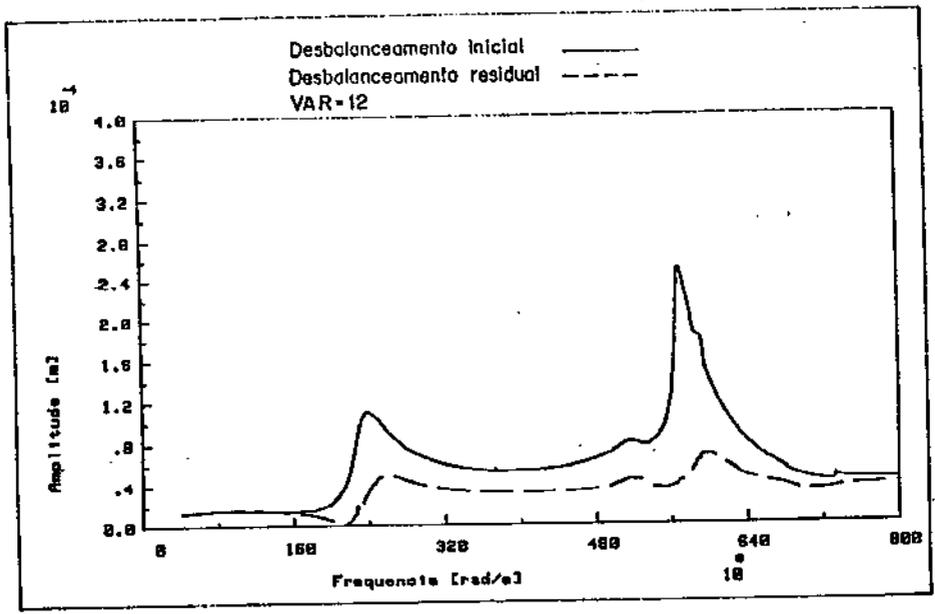


Figura 5.66: Resposta ao desbalanceamento no ponto 7

Observa-se que os resultados são bons. Note-se que não foi introduzido um desbalanceamento inicial. Esta escolha foi feita em função de se desejar utilizar a bancada para testes posteriores, onde seriam introduzidos momentos de desbalanceamentos conhecidos num rotor previamente balanceado. Nesse caso o estudo do efeito do número de velocidades, no estudo do número de planos de medida e de outros aspectos, seriam facilitados pois se saberia a priori quais os valores a serem obtidos. A idéia inicial era boa, mas tornou-se inconveniente no momento de se testar o método, pois as massas de correção a serem colocadas eram na ordem de 0,5 gramas. Isto ocasionou erros de medida de massa pois não se tinha uma balança com precisão suficiente para um bom balanceamento. Poderíamos ter obtido melhores resultados se tivéssemos partido de um desbalanceamento inicial residual maior.

Capítulo 6

Conclusões e sugestões para continuidade do trabalho

6.1 Conclusões

Neste trabalho mostrou-se, através das simulações feitas, algumas vantagens, desvantagens e características dos métodos de balanceamento implementados. Analisando-se os aspectos teóricos do balanceamento modal, procurou-se eliminar algumas de suas desvantagens propondo-se um método de balanceamento modal modificado.

Uma vez que o sistema utilizado para o balanceamento ser praticamente simétrico e apresentar uma baixa densidade modal, não foi possível observar uma diferença nas análises experimentais entre o balanceamento modal H e o balanceamento modal modificado \hat{H} .

Entretanto pode-se conhecer mais a respeito de cada uma das técnicas se algumas sugestões de estudos complementares forem implementadas.

6.2 Sugestões

a) Simular cada uma das técnicas com a introdução de ruídos nos sinais de medição e nos modos próprios de vibração.

b) Estudar a sensibilidade dos métodos a erros na fase e na amplitude da resposta ao desbalanceamento.

c) O modelo utilizado na simulação é simplificado, deve-se incluir outros efeitos no modelo matemático, como por exemplo o efeito giroscópico, ou o efeito de mancais anisotrópicos. Nesses casos passaríamos a ter modos próprios de vibração espaciais em vez de modos planos.

d) Desenvolver sistemas de aquisição de dados e software específicos para otimizar o tempo de análise, visto que são levantadas curvas de resposta ao desbalanceamento em

cada plano de medida.

e) Estudar a influência de outros tipos de medidores de vibração, por exemplo sensores de velocidade, de aceleração e de deformação [15].

f) O desenvolvimento de novas técnicas de balanceamento que façam a identificação dos parâmetros do sistema juntamente com os modos de vibração deste, ou mesmo utilizar técnicas independentes dos modos.

g) Na bancada de balanceamento do laboratório, fazer o balanceamento residual para posteriormente realizar estudos de identificação de massas de desbalanceamento introduzidas no sistema, pois deste modo já serão conhecidas a priori, o momento de desbalanceamento e a posição utilizada.

h) Como a tendência dos sistemas modernos é de serem cada vez mais flexíveis e com velocidades cada vez maiores, é necessário que se faça o estudo teórico do comportamento das técnicas modais com a presença do efeito giroscópico.

Bibliografia

- [1] J.M. Tessarzik; R.H. Badgley; W.J. Anderson. "Flexible Rotor Balancing by the Exact Point-Speed Influence Coefficient Method". Trans. ASME, Jour. Eng. Industry, (1972), pp. 148-157.
- [2] T.P. Goodman. "A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections". Trans. ASME. Jour. Eng. Industry, (1964), pp 273-279.
- [3] R.W. Clough; J. Penzien. "Dinamics of Structures". MacGraw-Hill. (1975).
- [4] K.J. Bathe, E.L. Wilson. "Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice-Hall, (1976).
- [5] F.S. Tse et Alii. "Mechanical Vibrations, Theory and Application". 2nd Ed. Allyn and Bacon, (1978).
- [6] K. Federn. "Grundlagen einer Systematischen Schwingungsentstörung Wellenelastischer Rotoren". VDI-Bericht 24, (1957), pp. 9.
- [7] R.E.D. Bishop; A.G. Parkinson. "Vibration and Balancing of Flexible Rotors". Applied Mechanics Review, May (1968), pp. 439-493.
- [8] M. Massoud. "Impedance Methods for Machine Analysis: Modal Parameters Extraction Techniques". Shock And Vibration Digest (1984), pp. 5-14.
- [9] D.L. Brown; R.J. Allemang; R. Zimmerman; M. Mergeay. "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis". SAE Trans. Paper n.79022, (1979), pp. 828-846
- [10] P. Gnielka. "Modal Balancing of Flexible Rotors without Test Runs: An Experimental Investigation", Jour. of Sound and Vibration, (1983), pp. 157-172.
- [11] J.V. Ferreira, F. Iguti, D.E. Zampieri. "Simulação do balanceamento de um rotor flexível por coeficientes de influência", Anais do VIII COBEM, ITA, São José dos Campos, (1985).
- [12] G. Strang. "Linear Algebra and its Applications". 2nd Ed. Academic Press, (1980).

- [13] W. Kellenberg. "Should a Flexible Rotor be Balanced in N or $(N+2)$ Planes ? ". Trans. ASME. Jour. Eng. Industry, (1972), pp. 548-560.
- [14] M.S. Darlow. "A Unified Approach to the Mass Balancing of Rotating Flexible Shaft". Phd Dissertation, Univ. Florida, (1980).
- [15] B. Hillary; D.J. Ewins. "The Use of Strain Gauges In Force Determination and Frequency Response Function Measurements". International Modal Analysis Conference, (1984), pp. 627-634.
- [16] R. Gasch; J. Drechsler. "Modales Auswuchten Elastischer Läufer Ohne Testgewichtssetzungen". VDI-Bericht Nr. 320, (1978), pp. 45-54.
- [17] K. Nishimoto Et Allii. "Computer Aided Balancing System for Mass-Produced Turbo-Rotors". Int. Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Univ. York, Heslington, England, sept.(1984).
- [18] M. Balba. "A New View on Balancing Flexible Rotors". Int. Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Univ. York, Heslington, England, sept.(1984).
- [19] O Matsushita Et Allii. "Aplication of Quasi-Modal Concept to Rotational Ratio Response Analysis and New Balancing". Int. Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Univ. York, Heslington, England, sept.(1984).
- [20] M. A. Wolfe. "Numerical Methods for Unconstrained Optimization". Van Nostrand Reinhold Co., (1978).