

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Esquema FLUX-SPLINE aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural

**Autor: Paulo César Oliveira
Orientador: José Ricardo Figueiredo**

03/97

9105490

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TI/UNICAMP
	OL4e
V.	Ex.
TOMBO B.1	30364
PROC.	281197
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	22/05/97
N.º CPD	

CM-00098036-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4e

Oliveira, Paulo César

Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades
abertas com convecção natural / Paulo César Oliveira.--
Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: José Ricardo Figueiredo.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Calor - Convecção natural. 2. Dinâmica dos fluidos.
3. Spline, Teoria do. I. Figueiredo, José Ricardo. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA

TESE DEFENDIDA POR Paulo César

Oliveira E APROVADA PELA

COMISSÃO JULGADORA EM 13, 03, 97


ORIENTADOR

**Esquema FLUX-SPLINE aplicado
em Cavidades Abertas com
Convecção Natural**

Autor: **Paulo César Oliveira**

Orientador: **José Ricardo Figueiredo**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997
S.P. - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

TESE DE DOUTORADO

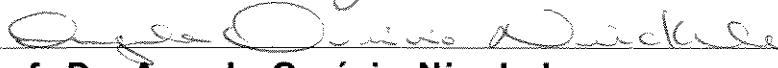
Esquema FLUX-SPLINE aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural

Autor: Paulo César Oliveira

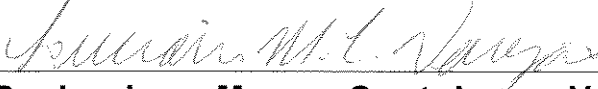
Orientador: José Ricardo Figueiredo



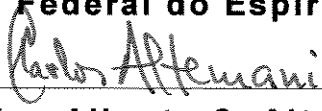
**Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo , Presidente
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. Angela Ourívio Nieckele
Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro**



**Prof. Dr. Luciano Magno Costalonga Varejão
Universidade Federal do Espírito Santo**



**Prof. Dr. Carlos Alberto C. Altemani
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. Jorge Isaías Llagostera Beltran
Universidade Estadual de Campinas**

Campinas, 13 de março de 1997

Dedicatória:

Dedico esse trabalho à memória de meus filhos Caroline e Stefan, e à minha família pela vida.

Agradecimentos

À Universidade Federal do Espírito Santo pela confiança em mim depositada.

À minha esposa Regina e minha filha Melissa, pelo amor que me sustentou nas horas difíceis.

Ao meu orientador Prof. José Ricardo Figueiredo pela paciência nas encruzilhadas ao longo desse trabalho.

Conheça teu inimigo como a si mesmo, e não precisará temer uma centena de batalhas; conheça a si mesmo, mas não ao inimigo, e em cada vitória conquistada também sofrerá uma derrota; não conheça nem ao inimigo nem a si mesmo, e sucumbirá a cada batalha.

Sun-Tzu

A Arte da Guerra

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação para a tese	1
1.2	Contribuição deste trabalho	3
2	Revisão da Literatura	6
2.1	Convecção-Difusão	7
2.2	Escoamentos Acionados por Convecção Forçada	11
2.3	Convecção Natural em Cavidades	13
2.3.1	Cavidades Fechadas	13
2.3.2	Cavidades Abertas	14
2.4	Condições de Contorno em Cavidades Abertas	17
3	Desenvolvimento Numérico do Esquema FLUX-SPLINE	19
3.1	Difusão Unidimensional em Regime Permanente	19
3.1.1	Condição de Continuidade da Variável Dependente Φ	23
3.1.2	Tratamento das Condições de Contorno na Difusão	27
3.1.2.1	Condição de 1ª Espécie (Dirichlet)	27
3.1.2.2	Condição de 2ª Espécie (Neumann)	28
3.1.2.3	Condição de 3ª Espécie (Robin)	29
3.1.3	Algoritmo de Solução para Difusão Unidimensional em Regime Permanente	30
3.2	Difusão Bidimensional em Regime Permanente	33
3.2.1	Relaxação	38
3.2.2	Tratamento das Condições de Contorno	39

3.2.3	Método de Solução	39
3.2.4	Aplicação do esquema FLUX-SPLINE à Difusão Bidimensional	41
3.2.5	Conclusões com Relação à Difusão	54
3.3	Esquema FLUX-SPLINE para Convecção-Difusão	55
3.3.1	Caso Unidimensional	55
3.3.1.1	Obtenção da Equação de Discretização de Φ	62
3.3.2	Convecção-Difusão Bidimensional	63
3.3.3	Aplicação do Esquema FLUX-SPLINE a Convecção-Difusão Bidimensional	68
3.3.4	Comentários sobre o Esquema FLUX-SPLINE na Convecção-Difusão	88
3.4	Esquema FLUX-SPLINE aplicado à Escoamentos	90
3.4.1	Equações de Governo	90
3.4.2	Equação de Discretização para Quantidade de Movimento U	93
3.4.3	Equação de Discretização para Quantidade de Movimento V	94
3.4.4	Tratamento do Acoplamento UVP	94
3.4.5	Método de Solução para Escoamento	99
3.4.6	Aplicação do esquema FLUX-SPLINE a Escoamentos	103
3.5	Abordagem de Condições de Contorno em Fronteiras Abertas	110
3.6	Aplicação do Esquema FLUX-SPLINE à Convecção Natural	117
3.6.1	Equações de Governo	117
3.6.2	Normalização das Equações de Governo	118
3.6.3	Método de Solução	121
3.6.4	Aplicação do Esquema de Solução para Convecção Natural	122
4	Aplicação a Cavidades Abertas Acionadas por Convecção Natural	128
4.1	Abordagem de Fronteira Aberta em Convecção Natural	129
4.2	Aplicação à Cavidade Aberta Acionada por Convecção Natural	131
5	Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos	154
	Referências Bibliográficas	158
	Apêndice	163

Resumo

OLIVEIRA, Paulo César, *Esquema FLUX-SPLINE Aplicado em Cavidades Térmicas Abertas*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997.196 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho, um novo procedimento de solução para as equações de escoamento discretizadas pelo esquema FLUX-SPLINE é proposto seguindo a ótica do algoritmo SIMPLER. Demonstra-se através de problemas teste, que tal procedimento produz resultados mais acurados que os fornecidos pelo procedimento original idealizado pelo autor do esquema FLUX-SPLINE. Tais modificações são usadas então para a simulação de escoamentos em cavidades abertas acionados por convecção natural, onde se faz a comparação dos resultados aos da literatura que usa o tradicional esquema POWER-LAW.

Palavras Chave

FLUX-SPLINE, Cavidades Abertas, Convecção Natural

Abstract

OLIVEIRA, Paulo César, *Esquema FLUX-SPLINE Aplicado em Cavidades Térmicas Abertas*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997.196 p. Tese (Doutorado)

In this work, a new solution procedure to fluid flow discretized equations by FLUX-SPLINE scheme is proposed following the point of view of the SIMPLER algorithm. By using test problems it is shown that this procedure yields results which are superior to those obtained using the original solution procedure idealized by the author of the FLUX-SPLINE scheme. Such modifications are used to simulate fluid flow in open cavities driven by natural convection. The numerical results are compared with reference solutions available in the literature that use the traditional POWER-LAW scheme.

Key Words

FLUX-SPLINE, Open Cavities, Natural Convection

Lista de Figuras

3.1-	Domínio unidimensional discretizado	22
3.2-	Volume de controle para difusão unidimensional	22
3.3-	Condições de contorno na difusão unidimensional	34
3.4-	Volume de controle para difusão bidimensional	34
3.5-	Placa plana sob difusão sem fonte	34
3.6-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D1	45
3.7-	Erro versus Malha - Teste D1	46
3.8-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D2	48
3.9-	Erro versus Malha - Teste D2	50
3.10-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D3	51
3.11-	Erro versus Malha para Dif. Central e FLUX-SPLINE	53
3.12-	Sistema de coordenadas e domínio para difusão	67
3.13-	Volume de controle para convecção unidimensional	67
3.13A	Distribuição de J e ρU ao longo de X	61
3.14-	Volume de controle para convecção bidimensional	67
3.15-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD1	69
3.16-	Erro versus Malha para diferentes Péclet	72
3.17-	Sistemas de coordenadas deslocados angularmente	76
3.18-	Domínio de cálculo para Teste CD4	76
3.19-	Volume de controle para quant. de movimento na direção X	76
3.20-	Distribuição da Função $A(x,y)$ - Teste CD2	77
3.21-	Distribuição da Função $A(x,y)$ - Teste CD2	77
3.22-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD3	79
3.23-	Erro versus Malha para diferentes Péclet - Teste CD3	80
3.24-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD4	82
3.25-	Erro versus Péclet - Teste CD4	84
3.25A	Solução numérica para $\Phi(X, Y)$ - $Pe=100$	85
3.25B	Solução numérica para $\Phi(X, Y)$ - $Pe=1000$	85
3.26-	Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD5	86
3.27-	Erro versus Péclet - Teste CD5	89
3.28-	Volume de controle para quant. de movimento na direção Y	95
3.29-	Domínio para escoamento em cavidade recirculante	95
3.30-	Escoamento entre dois cilindros concêntricos	105
3.31-	Erro versus Reynolds - Teste E2	106
3.32-	Streamlines para Cavidade Hidrodinâmica - Teste E3	109
3.33-	Domínio discretizado para a equação de correção de pressão	114

3.34-	Imposição de condição de contorno em cavidade aberta	114
3.35-	Cavidade aberta sob convecção forçada	114
3.36-	Domínio para cavidade hidrodinâmica	123
3.37-	Obtenção do valor médio da fonte da convecção natural	123
3.38-	Domínio para a cavidade térmica fechada	123
3.39-	Nusselt versus Malha em Cavidade Térmica Fechada	126
3.40-	Isotermas em Cavidade Térmica Fechada	127
3.41-	Linhas de corrente em Cavidade Térmica Fechada	127
4.1-	Domínio para cavidade térmica aberta inserida em parede	130
4.2-	Cavidade térmica horizontal aberta sem plenum	130
4.3-	Cavidade térmica vertical aberta sem plenum	130
4.4	Linhas de corrente para $Ra=1E+4$ - Exemplo CA1	135
4.5	Isotermas para $Ra=1E+5$ - Exemplo CA2	139
4.6	Linhas de corrente para $Ra=1E+5$ - Exemplo CA2	139
4.7	Isotermas para $Ra=1E+5$ - Exemplo CA3	145
4.8	Linhas de corrente para $Ra=1E+5$ - Exemplo CA3	145
4.9	Cavidade vertical aberta com fonte simétrica na base	148
4.10	Linhas de corrente e isotermas para $Ra=1E+5$	149
4.11	Linhas de corrente e isotermas para $Ra=1E+6$	150
4.12	Linhas de corrente e isotermas para $Ra=1E+5$ usando todo domínio em X	152
4.13	Linhas de corrente e isotermas para $Ra=1E+5$ usando todo domínio em X - Placas Isoladas	153

Lista de Tabelas

3.1-	Erro em placa bidimensional sem fonte	43
3.2-	Erro devido à aproximação da equação de contorno na placa sem fonte	44
3.3-	Erro em placa bidimensional com fonte distribuída	48
3.4-	Erro devido à aproximação na equação do contorno com fonte distribuída	49
3.5-	Comparação do erro em convecção-difusão com o esquema QUICK	70
3.6-	Comparação do erro na resolução da equação geral de transporte	75
3.7-	Comparação para as funções A e C	75
3.8-	Comparação de desempenho com método usando matrizes pentadiagonais	79
3.9-	Erro como função de Péclet para o problema de Smith-Hutton	83
3.10-	Erro para cavidade recirculante com condição de Neumann	87
3.11-	Erro para cavidade recirculante com condição de Dirichlet	87
3.12-	Erro no tratamento Standard para condição de Neumann	87
3.13-	Teste E1 para método de solução em escoamento, em cavidade fechada recirculante	104
3.14-	Teste E2 para método de solução de escoamento, entre dois cilindros concêntricos	105
3.15-	Comparação de erro com a solução de Ghia	108
3.16-	Comparação de erro no escoamento em cavidade recirculante aberta com respeito ao tipo de condição de contorno	116
3.17-	Teste do método de solução para convecção natural em cavidade térmica fechada	125
4.1-	Comparação de resultados para cavidade térmica aberta com domínio estendido	135
4.2-	Comparação de resultados para cavidade térmica horizontal aberta	138
4.3-	Comparação de resultados para cavidade vertical	143
4.4	Nusselt médio para cavidade vertical com fonte simétrica	147

Nomenclatura

Letras Latinas

A -	função real de argumento real presente no perfil interpolante	
AP-		
AIP-		
AIM-	coeficientes da equação de discretização	
AJP-		
AJM-		
BJ-		
CJ-	coeficientes da equação de discretização do fluxo total J	
DJ-		
BJX-		
CJX-	coeficientes da equação de discretização do fluxo total JX	
DJX-		
BJY-		
CJY-	coeficientes da equação de discretização do fluxo total JY	
DJY-		
Cp-	calor específico	[W.s/Kg.K]
CON-	termo fonte da equação de discretização	
G	função real de argumento real presente no perfil interpolante	
H-	comprimento na direção Y	
J-	fluxo total (convectivo + difusivo) da variável dependente	
JX-	fluxo total na direção X	
JY-	fluxo total na direção Y	
L-	comprimento na direção X	
P-	pressão ou número de Péclet	

Px-	número de Péclet baseado no fluxo mássico ρU na direção X	
Py-	número de Péclet baseado no fluxo mássico ρV na direção Y	
Q -	função real de argumento real do esquema FLUX-SPLINE	
S-	termo fonte	
Sc-	parte constante do termo fonte S	
Sp-	parte do termo fonte S função da variável dependente	
U-	componente na direção X do vetor velocidade	
V-	componente na direção Y do vetor velocidade	
X,Y-	coordenadas cartesianas adimensionalizadas	
a-	coeficiente na equação de discretização	
b-	parte constante ou linearizada da equação de discretização	
h-	coeficiente de película ou de filme	[W/m ² .K]
q-	taxa de transferência de calor	[W]
k-	condutividade térmica	[W/m.K]
r-	coordenada radial	[m]
u-	componente na direção x do vetor velocidade	[m/s]
v-	componente na direção y do vetor velocidade	[m/s]
x,y-	coordenadas cartesianas	[m]

Letras Gregas

α	difusividade térmica	[m ² /s]
β	coeficiente de expansão volumétrica	[1/K]
ΔX	comprimento do volume de controle na direção X	
ΔY	comprimento do volume de controle na direção Y	

η	direção da superfície na qual se localiza a variável dependente	
Φ	variável dependente transportada	
Γ	coeficiente de difusão	
Γ^Φ	coeficiente de difusão da variável dependente Φ	
α	parâmetro de relaxação	
μ	viscosidade absoluta do fluido	$[\text{Kg.s / m}^2]$
Ψ	função corrente adimensional	
O_{ac}	ordem de acurácia	
ε	erro porcentual absoluto	
E	erro porcentual normalizado	
ν	viscosidade relativa do fluido	$[\text{m}^2/\text{s}]$
ρ	densidade absoluta do fluido	$[\text{Kg}/\text{m}^3]$
Θ	temperatura adimensionalizada	

Superescritos

"	indica que a quantidade está distribuída por uma área
*	refere-se a valor da variável na iteração anterior ou arbitrado
o	valor da variável na iteração anterior
'	indica parâmetro de correção
^	indica uma pseudo quantidade
+	indica uma quantidade à direita ou acima da colocação da variável dependente no volume de controle
-	indica uma quantidade à esquerda ou abaixo da colocação da variável dependente no volume de controle

→ uma quantidade vetorial

Subscritos

ac acurácia do esquema

av um valor médio

c indica um valor de referência

i posição discreta em X

j posição discreta em Y

l lado esquerdo

max indica valor máximo dentro do domínio

nb indica a vizinhança do ponto p

p indica o ponto em questão do domínio discretizado

r lado direito

∞ indica um valor da variável longe do local perturbado pelo fenômeno

Abreviações

Gr - número de Grashof

Pe - número de Péclet

Pr - número de Prandtl

Ra - número de Rayleigh

Re - número de Reynolds

Siglas

LOADS- Locally Analytic Differencing Scheme

PDMA - Penta Diagonal-Matrix Algorithm

QUICK - Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics

SIMPLE- Semi Implicit Pressure Linked Equations

SIMPLEC- SIMPLE Consistent

SIMPLER- SIMPLE Revisited

SUDS- Skew Upwind Differencing Scheme

TDMA - Tri Diagonal-Matrix Algorithm

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação para a Tese

Convecção Natural pode ser definida como um fenômeno de transferência de energia, causado pela movimentação de fluido, a qual é acionada por gradientes de densidade, que por sua vez são causados pela distribuição de temperatura ao longo do escoamento.

Muitos sistemas de engenharia dependem deste modo de transferência de energia para funcionarem satisfatoriamente. Entre eles poderiam ser citados:

- sistemas de armazenamento de energia solar;
- arrefecimento de equipamento eletrônico;
- resfriamento de produtos ou dejetos oriundos de processos industriais;
- segurança de prédios com respeito à propagação de incêndios;
- isolamento térmico e conforto ambiental de prédios ou instalações industriais;
- circulação do ar sobre ruas de cidades;
- armazenamento de fluido criogênico;
- segurança de reatores nucleares.

Cavidades abertas acionadas por convecção natural estão contidas nesse universo de problemas e se constituem, em alguns deles, na sua parte mais importante.

Tais cavidades se caracterizam por apresentarem dificuldades para sua correta simulação numérica, devido ao fato do escoamento ser constituído da interação entre o fluxo interno e outro externo à cavidade. O escoamento interno pode apresentar regiões contendo recirculação e geralmente se molda pela formação de camadas limite junto às paredes, envolvendo um núcleo. É no interior dessas camadas, em alguns casos extremamente finas, onde se dão as transferências de quantidade de movimento e energia. O escoamento externo é formado por uma pluma ascendente devido ao fluido quente que sai da cavidade e do influxo de fluido frio proveniente da vizinhança. Como o escoamento externo influencia as trocas dentro da cavidade, e vice-versa, surge a necessidade para uma correta simulação do fenômeno, de se definir os limites do domínio de cálculo, para que se possa impor sobre as fronteiras, condições que juntamente com as equações diferenciais de governo, gerarão o sistema de equações a ser discretizado.

Como se verá adiante, a literatura consultada propõe em alguns casos que, para uma correta simulação do fenômeno, tais fronteiras devem estar suficientemente afastadas da região onde está a causa dos gradientes de temperatura de modo que a imposição das condições de contorno não altere a física do problema. Isso faz com que o método numérico empregado tenha que lidar ao mesmo tempo, com diferentes tipos de escoamentos ao longo de um domínio, agora com dimensões ampliadas.

Se for estabelecido através de experimentos, que para um determinado par, método numérico e problema; é suficiente empregar-se um certo grau de refinamento envolvendo com isso uma quantidade de esforço computacional, a ampliação do domínio de cálculo conduzirá a um maior dispêndio em termos de tempo de processamento e memória. Esses dois fatores; a complexidade do escoamento, aliada à extensão do domínio; fazem com que se justifique para esse tipo de problema, a procura por esquemas de discretização mais eficientes. A gradação da eficiência de um esquema de discretização é feita através de sua aplicação a problemas teste e comparação dos resultados com o desempenho de outros esquemas. Características de superioridade em termos de acurácia e tempo

de processamento foram encontradas no chamado esquema FLUX-SPLINE em vários trabalhos na literatura consultada. Este esquema apresenta facilidades na sua implementação e um desempenho que o torna suficientemente preciso e rápido comparado aos demais existentes na literatura. Foi deduzido originalmente por Varejão (1979) para o método de volumes de controle, em seu trabalho de Doutorado sendo aí inicialmente comparado ao tradicional esquema Power-Law usado por Patankar (1980) em problemas de convecção-difusão e escoamento. Posteriormente teve seu desempenho em problemas de convecção-difusão avaliado junto a vários outros esquemas da literatura por Nieckele (1985).

1.2. Contribuição deste trabalho

As condições de contorno para os problemas de cavidade aberta acionada por convecção natural podem ser de primeira ou segunda espécie; tanto para as equações de conservação de quantidade de movimento, quanto para a de energia.

O esquema Flux-Spline foi testado por aplicação a problemas de convecção-difusão e escoamento cujas condições de contorno eram de primeira espécie (Dirichlet). Para esse caso, as condições são tratadas como na convecção-difusão, onde o perfil interpolante gerado pelo esquema é aplicado aos volumes de controle de fronteira.

No caso de cavidades abertas, as condições de contorno de Neumann estão ligadas a fluxos mássicos desconhecidos entrando e/ou saindo do domínio de cálculo. Isso faz com que os contornos das equações de quantidade de movimento embora não sejam conhecidos, por imposição física e do algoritmo SIMPLER usado na solução do acoplamento UVP, tenham que satisfazer a conservação da massa no domínio de cálculo ao longo do processo iterativo. Assim, usando tal esquema, surge a necessidade de se investigar um tratamento adequado a essas fronteiras e as conseqüências de tais mudanças, no desempenho do mesmo.

Devido à melhora encontrada no que diz respeito à precisão do esquema FLUX-SPLINE na simulação de problemas teste para escoamento, o método de solução proposto por Varejão(1979), que calcula o termo fonte adicional característico do esquema depois da matriz de pressão, utilizando as velocidades diretamente calculadas das equações de quantidade de movimento, é alterado e assim utilizado para os casos de convecção natural.

Deve-se ressaltar que este trabalho não visa discutir o posicionamento do domínio de cálculo ou as condições de contorno empregadas em problemas de cavidade aberta com convecção natural, mas somente o tratamento adequado destas condições de contorno pelo esquema FLUX-SPLINE e à comparação dos resultados obtidos em termos de parâmetros de transferência como o número de Nusselt. A seguir é colocada uma breve descrição do conteúdo dos capítulos restantes.

O Capítulo 2 expõe uma revisão bibliográfica cobrindo trabalhos usados para testar a acurácia do esquema tanto na convecção-difusão quanto em escoamentos em cavidades fechadas, assim como a origem das linhas básicas do algoritmo usado e do tratamento particular aplicado às fronteiras abertas.

No Capítulo 3, o esquema FLUX-SPLINE é deduzido, comentado e testado por uma ampla gama de problemas retirados de trabalhos listados na revisão bibliográfica. A partir daí é proposta uma abordagem para cavidade aberta que será utilizada no restante do trabalho.

O Capítulo 4 consiste na aplicação do esquema e do algoritmo de solução escolhido a problemas de convecção natural em cavidades abertas, definidos por diferentes tipos de domínio e condições de contorno, sendo discutido o comportamento do método comparando-se seus resultados àqueles tomados como referência.

No Capítulo 5, expõe-se as conclusões oriundas dos resultados obtidos ao longo dos capítulos e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Uma descrição do algoritmo em FORTRAN-77, aplicado na simulação do problema de convecção natural em cavidade vertical aberta no topo, é colocada no Apêndice, contendo lista de variáveis e descrição do funcionamento de cada subrotina.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

O estudo de problemas de escoamento envolve a solução de equações diferenciais parciais acopladas, que governam o transporte de massa, quantidade de movimento, energia, etc.

Como os problemas de interesse prático descritos por essas equações possuem solução analítica apenas em casos mais simples, são então abordados através de métodos numéricos que propiciam a solução aproximada dessas equações. Tais métodos empregam esquemas de discretização que sob determinadas aproximações transformam o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. Essas aproximações surgem e são testadas num primeiro momento, em problemas de convecção-difusão. Portanto, trabalhos referentes a desenvolvimento e aplicação de esquemas de discretização a problemas dessa natureza serão comentados inicialmente. Posteriormente, a literatura que trata da aplicação de tais discretizações a escoamentos por convecção forçada e natural será abordada.

2.1. Convecção-Difusão

A geração de problemas teste se pauta em procurar, para a categoria do problema abordado, a reprodução pelo menos parcial das dificuldades a serem enfrentadas.

Os trabalhos de Phillips e Schmidt, (1984 e 1989), partem do princípio que a presença de fortes gradientes no domínio de cálculo é representativa de muitos problemas de interesse na engenharia, nos quais uma certa variável dependente é transportada por convecção-difusão. No primeiro destes trabalhos, um problema puramente difusivo é proposto sob essa ótica. Os autores utilizam para a discretização da equação de Poisson, o método das diferenças finitas, com o esquema de diferenças centrais. A distribuição da variável dependente é fornecida, de forma que através de sua substituição na equação de conservação, sejam obtidos os termos fonte. Ao serem levados ao método numérico, os termos fonte mais as condições de contorno, produzirão uma solução aproximada, que será então, comparada aos valores analíticos. Esse procedimento se estenderá a todos os problemas teste contidos nessa tese, a menos daqueles cuja solução analítica não é conhecida. No trabalho seguinte (1989), o mesmo procedimento é adotado para a equação de convecção-difusão. O método numérico usado é o de volumes de controle e são comparados em cálculos preliminares, os esquemas HYBRID, desenvolvido por Patankar e Spalding (1970) e QUICK, desenvolvido por Leonard (1979). Os autores definem as expressões para o erro com relação à solução analítica, constataam a superioridade do esquema QUICK e produzem resultados para os números de Péclet 100 e 1000. Esses dois trabalhos possibilitam a comparação imediata do esquema FLUX-SPLINE a três esquemas da literatura e por isso são mais tarde usados como comparação no desenvolvimento numérico.

Nieckele (1985) em seu trabalho de Doutorado, usando a abordagem descrita anteriormente para problemas teste, comparou vários esquemas presentes na literatura podendo-se listar entre eles:

- Diferença central
- Upwind
- Exponencial ou Power Law
- Híbrido
- SUDS
- QUICK
- FLUX-SPLINE
- LOADS

Foi desenvolvida nesse trabalho, uma evolução do esquema FLUX-SPLINE, chamada de FLUX13, que consiste em se admitir quando da obtenção do perfil interpolante, que o fluxo mássico, como também o fluxo total J , variam linearmente ao longo do volume de controle. Isso provoca o aparecimento de integrais que só possuem solução numérica, assim os coeficientes obtidos contém essas integrais, sendo portanto mais onerosos computacionalmente, que os oriundos do esquema desenvolvido originalmente por Varejão (1979). Pelos resultados encontrados ao longo dos testes, tal modificação, de acordo com a autora, se revelou não compensadora.

A idéia de que o fluxo total J , possa variar ao longo do volume de controle, fornecendo assim ao perfil interpolante, maior sensibilidade à presença de fontes e influências laterais devido à multidimensionalidade dos fenômenos; provoca então a proposta que o fluxo total e o fluxo mássico, possam variar de forma cúbica ao longo do volume de controle. Novamente aparecem integrais sem solução analítica, agora do tipo:

$$\int_0^1 \eta^N \cdot e^{-[A \cdot \eta + B \cdot \eta^2 + C \cdot \eta^3 + D \cdot \eta^4]} \cdot d\eta$$

onde $0 \leq N \leq 3$ e A , B , C e D são funções da geometria, do campo de velocidade e suas derivadas, e do coeficiente de difusão Γ .

Essas integrais, como as que aparecem no esquema FLUX13, são calculadas por Quadratura Gaussiana. Esse procedimento dá origem ao então chamado CUBIC FLUX-SPLINE, que para problemas de convecção-difusão, mostrou possuir dentre todos os esquemas testados, precisão e ordem de acurácia superiores, acompanhadas das necessárias características de estabilidade e convergência.

Os dois últimos problemas teste abordados no trabalho, consistiram de escoamentos recirculantes. Um deles foi inspirado no problema proposto por Smith e Hutton (1982), que consiste de um escoamento entrando e saindo de uma cavidade onde se distribui um escalar sob fortes gradientes. O outro é uma cavidade fechada, onde na presença de um campo de velocidades recirculante, impõe-se sobre as faces laterais leste e oeste, os valores máximo e mínimo de variável dependente e nas faces norte e sul a condição de derivada nula. Como no segundo caso, não há solução analítica, a solução de referência é fornecida pelo próprio esquema FLUX-SPLINE, usando-se malha refinada. Os resultados para esses dois casos, plotados em gráfico log-log, do erro porcentual com relação ao número de Péclet, mostram que a diferença entre o esquema FLUX-SPLINE e o CUBIC FLUX-SPLINE é pequena e com vistas a aplicação em problemas de escoamento poder-se-ia optar pela maior simplicidade do primeiro. Tais resultados em problemas que apresentam características de escoamento recirculante, que são encontradas também em problemas de cavidade aberta sob convecção natural, indicam uma adequação do esquema FLUX-SPLINE sob este aspecto.

Braga (1990) desenvolve e aplica um esquema numérico usando o método das diferenças finitas cuja molécula computacional possui nove pontos, necessitando assim do algoritmo PDMA para lidar com as matrizes pentadiagonais daí resultantes. Usa entre vários testes, um problema proposto por Gupta (1983) e apresenta os resultados comparando o seu esquema a outros tais como o UPWIND e QUICK. Esse problema será simulado pelo esquema FLUX-SPLINE e comparados os resultados aos obtidos por Braga (1990).

Um interessante gerador de problemas teste é proposto e usado por Figueiredo (1988) em seu trabalho de Doutorado.

Um escoamento numa direção X com uma velocidade constante V ao longo da mesma, transportando um escalar Φ é descrito pela equação de transporte:

$$Pe \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 ,$$

onde Pe é o número de Péclet; e nesse caso pode ser resolvida por separação de variáveis gerando equações diferenciais ordinárias; que por sua vez, possuem vários tipos de solução. Sobre esses tipos, impõe-se considerações como o valor da constante de separação (autovalor). Admitindo-se que um outro eixo coordenado possa ou não estar alinhado ao escoamento, pode-se investigar entre outras coisas, a influência da inclinação do vetor velocidade com relação à grade, para os vários tipos de solução.

Os esquemas submetidos a esses testes foram:

- Exponencial de Allen
- Exponencial de Dennis simplificado
- Diferença Central
- Pela montante (Upwind)
- Pela montante sem difusão
- Híbrido

Os resultados para tais esquemas também serão comparados aos obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE.

2.2. Escoamentos acionados por Convecção Forçada

A aplicação do esquema Flux-Spline a escoamentos recirculantes é implementada no trabalho de Patankar, Karki e Mongia (1987), ao abordar o problema da cavidade hidrodinâmica, detalhado em Ghia (1982) ; e da expansão brusca em duto (backward facing step). No caso da cavidade hidrodinâmica é introduzida a transferência de calor, sendo a face superior da cavidade aquecida e mantida na temperatura máxima, enquanto que as faces restantes são mantidas na temperatura mínima. O número de Prandtl é um. A solução de referência é gerada então pelo uso do esquema POWER-LAW operando com uma malha de 82×82 volumes de controle. Para um número de Reynolds igual a 400 e malha 22×22 elementos evidencia-se a superioridade do esquema FLUX-SPLINE frente ao POWER-LAW.

Para a expansão brusca, os resultados obtidos pelo esquema Flux-Spline mostram maior aproximação dos dados experimentais quando se opera sob um número de Reynolds igual a 715. Para esse valor de Reynolds, Flux-Spline com malha 32×32 fornece resultados próximos do esquema QUICK sob malha 53×53 .

Esquemas mais acurados são essenciais para a simulação de problemas tridimensionais, devido a uma maior mobilização nesses casos, em termos de memória e tempo de computação. Karki, Patankar e Mongia (1989A) propõe a solução do escoamento laminar tridimensional em uma cavidade hidrodinâmica cúbica para comparar os esquemas POWER-LAW e FLUX-SPLINE. Para um número de Reynolds igual a 400, as comparações em termos de velocidades mostram que FLUX-SPLINE com malha $22 \times 22 \times 12$, produz resultados mais próximos da solução de referência gerada por Ku (1987), que POWER-LAW sob malha $32 \times 32 \times 17$. Isso mostra uma razão de 3:1 volumes de controle utilizados nesse caso em particular, para obtenção de um certo nível de aproximação da solução de referência.

Karki, Vanka e Mongia (1989B) mostram que para a cavidade hidrodinâmica, com número de Reynolds igual a 100, malha de 82×82 elementos, com esquema

Flux-Spline e usando o método multigrid proposto por Brandt (1977), produz-se valores de velocidade compatíveis aos obtidos por Vanka (1986) usando o esquema híbrido em malha 321×321 .

Varejão, em seu trabalho de tese (1979) e nos artigos Varejão, Patankar e Karki (1991A e 1991B), expõe as mesmas conclusões dos trabalhos citados anteriormente. É interessante ressaltar que o esquema para um dado número de pontos, requer um esforço computacional maior que outros mais simples. Porém, estabelecido um nível de aproximação da solução analítica ou de referência, através de um valor de erro; necessita-se para atingi-lo, um menor número de pontos na malha do que os esquemas de ordem inferior. Isso redundaria em menor esforço computacional. Pode-se tomar como um exemplo representativo, o seguinte resultado obtido por Varejão (1979). A aplicação dessa condição ao problema de cavidade hidrodinâmica é feita estabelecendo-se o valor de 2% de afastamento do valor de referência do produto fator de fricção vezes o número de Reynolds ($f \cdot Re$). Para Reynolds igual a 100, a tabela 5.4, (página 191 do seu trabalho), mostra que a razão de esforço computacional entre os esquemas POWER-LAW e FLUX-SPLINE é 3,04.

Em seu trabalho de Tese de Doutorado, Hsu (1981) aborda a aplicação do método de volume finitos a domínios de geometria irregular para a solução de escoamentos, sem o uso de malhas deslocadas. Depois de estabelecida a questão da discretização do domínio sob a ótica de volumes finitos, passa à comparação dos perfis interpolantes, no caso o exponencial e FLUX-SPLINE. Suas conclusões também são pela superioridade do esquema FLUX-SPLINE em comparação ao tradicional esquema POWER-LAW.

2.3. Convecção Natural em Cavidades

Ostrach (1988), coloca a discussão sobre um grande campo de problemas de convecção natural, mostrando uma rica diversidade que inclui diferentes geometrias, condições de contorno e forças de campo. É mostrada a importância da análise de escala na convecção natural e seu uso na normalização das equações de conservação. Tais normalizações dependerão dos parâmetros adimensionais, Grashof (Gr), Prandtl (Pr) e Rayleigh (Ra) e serão utilizadas no decorrer desta tese.

Devido ao desempenho mostrado pelo esquema FLUX-SPLINE nos exemplos citados anteriormente para convecção-difusão e escoamento por convecção forçada, é justo esperar-se um comportamento similar ao se tratar de convecção natural em cavidades.

2.3.1 Cavidades Fechadas

O artigo usado para confirmar essa tendência é o de Hortmann, Peric e Scheuerer (1990), onde é tratado o problema da cavidade térmica fechada, com as laterais submetidas as temperaturas máxima e mínima e demais faces isoladas. São usadas malhas de até 640×640 volumes de controle para número de Rayleigh variando entre 10^4 e 10^6 , com Prandtl igual 0,71 (ar). O esquema usado é a diferença central e o algoritmo SIMPLE trata do acoplamento UVP.

Tomando-se os resultados para a malha mais refinada como referência, pode-se avaliar o desempenho do esquema FLUX-SPLINE, sobre parâmetros tais como velocidades e fluxo de calor (número de Nusselt).

O esquema POWER-LAW é aplicado por Lage e Bejan (1991) na mesma geometria descrita anteriormente, com Prandtl variando entre 0,01 e 10 e Rayleigh de 10^2 a 10^{11} , com o objetivo de definir o domínio laminar do escoamento.

É usada uma malha variável de 52x52 volumes de controle gerada por função exponencial, que faz com que se tenha um maior refinamento junto às paredes. O algoritmo que trata do acoplamento UVP é o SIMPLE.

2.3.2 Cavidades Abertas

Le Quere, Humphrey e Sherman (1981) mostram que para cavidade retangular aberta em uma das laterais, com as paredes restantes aquecidas, razão de aspecto W/H igual a um, número de Rayleigh variando de 10^4 a $3 \cdot 10^7$ e Prandtl igual a 0,73; o escoamento dentro da cavidade e em torno da mesma, é determinado principalmente por efeitos locais de transferência de calor na própria cavidade. Afirmam também que devido a isso, ao se posicionar o domínio de cálculo a uma distância de duas ou mais alturas (H), da abertura da cavidade, esta se torna praticamente insensível às condições de contorno. O método numérico usado foi volumes de controle, com o esquema QUICK e foi levado em consideração, a variação das propriedades com a temperatura, não se usando portanto, o modelo de Boussinesq.

Essa prática de aumentar o domínio computacional, formando dessa forma um “plenum”, sobre o qual são impostas condições de contorno aproximadas; foi usada anteriormente por Kettleborough (1972) para estudar os efeitos de entrada no escoamento acionado por convecção natural, em duto formado por duas placas planas verticais aquecidas.

Penot (1982) usando a mesma configuração no que diz respeito ao domínio de cálculo de LeQuere *et al* (1981), mostra a solução do problema da cavidade isotérmica aberta em uma das laterais, usando o método da vorticidade-função corrente. As equações de governo são modeladas sob a limitação do modelo de Boussinesq. Como em Le Quere *et al* (1981), agora para Prandtl igual a 0,7, estuda-se os efeitos da inclinação da cavidade em relação ao vetor gravitacional, na formação dos perfis de velocidade e no valor do número de Nusselt médio.

Chan e Tien (1985) investigam o problema da cavidade térmica com propriedades constantes, aberta em uma das laterais, com a oposta aquecida e as restantes isoladas. Utilizaram a mesma abordagem usada por Le Quere *et al*(1981) e Penot(1982) no que diz respeito à extensão do domínio de cálculo (plenum). Para uma cavidade quadrada e número de Prandtl igual a 1, utilizou-se uma malha não regular contendo 41 x 52 pontos, sendo destes, 20 x 20 dentro da cavidade. As condições de contorno para as velocidades, adotadas nas paredes permeáveis, assumem difusão desprezível na presença do termo convectivo, tornando a derivada primeira da variável em questão, nula. Para a temperatura, nas superfícies onde se verifique influxo de massa, se dá o valor da temperatura de referência, enquanto que naquelas onde sai massa, é assumido como nas velocidades, difusão desprezível.

É importante notar que nessas superfícies permeáveis o sentido do fluxo de massa pode se alterar durante o processo iterativo.

O método de volumes de controle com esquema POWER-LAW, forneceu resultados em termos de transferência de calor que se aproximam, para altos números de Rayleigh, daqueles para placa plana vertical isotérmica. São mostrados gráficos de velocidades e temperatura, isotermas e linhas de corrente e construída tabela da variação do número de Nusselt médio e massa deslocada como função do número de Rayleigh.

Chan e Tien (1985A) sobre a mesma cavidade quadrada, mostram que para números de Rayleigh da ordem de 10^6 em diante, a supressão da extensão do domínio com a colocação da fronteira na abertura da cavidade, fornece resultados aceitáveis em termos dos valores de Nusselt e massa deslocada. De forma similar ao caso anterior, as condições de temperatura são impostas de forma que o fluido entrando na cavidade tem temperatura de referência, enquanto que aquele que sai tem a derivada da temperatura nula. O gradiente da velocidade vertical V , na abertura de cavidade é suposto nulo, enquanto que a velocidade horizontal U é obtida através de um balanço de massa nas células de fronteira. O esquema

numérico e o algoritmo para tratar o acoplamento UVP, são os mesmos do caso anterior, com malha não-uniforme agora de 31x30 volumes de controle.

O fato que a supressão do “plenum” pode ser aceita em cavidade quadrada, para certa faixa de Rayleigh, se o objetivo da simulação numérica é a obtenção dos parâmetros Nusselt médio e massa deslocada, possibilita a utilização da mesma abordagem, em cavidades onde a razão de aspecto W/H é maior que um, visto que isso afasta a parede isotérmica da abertura da cavidade.

Assim, Chan e Tien (1985B) propoem a simulação do caso onde $W/H = 7$ com Prandtl igual a 7 (água a 72°F) e Rayleigh variando entre 10^3 e 10^6 . Utiliza-se o mesmo esquema numérico anterior sob uma malha variável de 96 x 22 volumes de controle. Os resultados de Nusselt médio e massa deslocada são colocados em tabela como funções do número de Rayleigh e compara-se os perfis de velocidade e temperatura aos obtidos experimentalmente por Chan e Tien (1986) observando-se uma boa aproximação entre os mesmos.

A cavidade térmica parcialmente aberta em uma das paredes laterais é abordada por Abib e Jaluria (1988). O escoamento é causado por uma fonte de calor distribuída na parede lateral oposta à abertura e as outras paredes (horizontais) são consideradas adiabáticas. A razão de aspecto W/H é 2 e o número de Prandtl 0,72 (ar). Usou-se o método de volumes de controle numa formulação de vorticidade-função corrente com o esquema POWER-LAW usado para a discretização da convecção-difusão enquanto que os termos restantes são discretizados por diferença central. Os resultados da simulação são colocados em termos de isotermas, linhas de corrente, distribuição de velocidades e temperatura; não sendo fornecidos valores para o número de Nusselt ou massa deslocada. A limitação do domínio à própria cavidade e a imposição das condições de contorno, são oriundos das conclusões obtidas por Chan e Tien (1985B) em cavidades delgadas.

Lage, Lin e Bejan (1992) utilizam o algoritmo SIMPLEC descrito por Van Doormaal e Raithby (1983) para tratar o acoplamento UVP, e abordam a cavidade

térmica onde a face superior é aberta, as laterais aquecidas e a face inferior adiabática. Utilizando volumes de controle e esquema POWER-LAW procuraram obter uma correlação entre o número de Nusselt e o número de Rayleigh, com vistas à solução do problema com a radiação térmica sendo levada em consideração na transferência de calor. É usada para gerar a malha a mesma função empregada anteriormente em Lage e Bejan(1991).

2.4. Condições de Contorno em Cavidades Abertas

O ponto de vista convencional, no que diz respeito a fronteiras abertas, é exposto em Patankar (1980, pág.104); e afirma que se a difusão numa fronteira aberta é desprezada e essa fronteira é posicionada numa região onde influxo de massa pode ocorrer, a solução obtida não possui significado ou consistência.

Shyy (1987) mostra que para o escoamento forçado através de uma expansão brusca bidimensional; a condição de contorno de derivada nula mesmo quando imposta numa região onde há influxo de massa, gera solução numérica que exhibe as características necessárias de estabilidade, convergência e unicidade. Ou seja, o problema pode ser bem colocado sem que sejam fornecidos os valores das velocidades nessa fronteira. A limitação dessa afirmativa ocorre quando se tem alto número de Reynolds acompanhado de vários turbilhões recirculantes nessa fronteira. Existindo apenas um turbilhão, mesmo sob altos números de Reynolds ($Re=1000$) existe solução única. O esquema usado flutua da diferença central ao híbrido, dependendo do valor do número de Reynolds da célula computacional.

Shyy (1995) mostra por comparação entre as condições de contorno $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ e

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}$, sendo Φ a variável dependente transportada e η a coordenada na qual

se posiciona uma superfície onde os efeitos difusivos são desprezados, que a

condição de derivada segunda nem sempre fornece uma solução única, não podendo portanto, ser aplicada a fronteiras abertas.

Blosh, Shyy e Smith (1993) usam os problemas da cavidade hidrodinâmica e da expansão brusca para discutir a importância de se manter durante o processo iterativo a continuidade global satisfeita, para assegurar boas taxas de convergência. Isso é feito calculando-se o afastamento com relação à continuidade global e daí impondo-se correções às velocidades na fronteira aberta sobre a qual se impõe a condição de derivada nula. Mostram que para um escoamento com fronteira aberta, a imposição da conservação global de massa, é suficiente para obter-se solução, mesmo se ocorre influxo de massa através dessa fronteira. Estabelecem essa condição como uma regra a ser obedecida ao se usar algoritmos para a solução do acoplamento UVP, do tipo SIMPLE, que se baseiam na obtenção das correções P' .

Jeng e Liou (1995) abordam o problema da expansão brusca simétrica e utilizam na fronteira aberta, várias aproximações para a condição de contorno $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$. Essas aproximações são oriundas dos trabalhos de Shyy (1987) e Liou e Liu (1993) para malhas deslocadas e adaptadas nesse trabalho para malhas não deslocadas. Mostram que a condição que assegura estabilidade ao processo numérico para esse problema é aquela que impõe na célula da fronteira aberta velocidades verticais V nulas, sempre que tal superfície seja limitada por paredes impermeáveis.

Como o algoritmo que trata do acoplamento UVP a ser usado nessa tese, será o SIMPLER, as conclusões e os procedimentos empregados pelos autores acima para convecção forçada, serão utilizados e adaptados de acordo com o problema, em se tratando de cavidades abertas acionadas por convecção natural.

Capítulo 3

Desenvolvimento Numérico do Esquema FLUX-SPLINE

O objetivo deste capítulo é apresentar o esquema FLUX-SPLINE , mostrar suas características, compará-lo a outros por meio de problemas teste e construir um método de solução para problemas de cavidade aberta respeitando as peculiaridades deste esquema.

Admite-se que o leitor esteja familiarizado com o método de volumes finitos, sendo portanto omitidos alguns passos não essenciais ao longo da derivação do esquema.

3.1 Difusão Unidimensional em Regime Permanente

O caso mais simples dos problemas de convecção-difusão é quando o vetor velocidade é nulo e a variável dependente Φ é função de somente uma coordenada espacial. Assim, a equação geral de governo:

$$\frac{\partial JX}{\partial X} + \frac{\partial JY}{\partial Y} + \frac{\partial JZ}{\partial Z} = S^{\Phi} \quad (3.1)$$

reduz-se a :

$$\frac{dJ}{dX} = S^{\Phi} \quad (3.2)$$

onde $J = -\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX}$, é o fluxo difusivo na direção X , e S^Φ a fonte de Φ distribuída ao longo do domínio..

Executando a integração da equação de governo (3.2) segundo o método dos volumes de controle descrito em Patankar (1980), sob as hipóteses que os fluxos J armazenados nas interfaces como mostrado na figura 3.1 são valores médios e que o valor do termo fonte carregado no volume de controle seja distribuído como constante ao longo do mesmo; obtém-se para um volume de controle i mostrado na figura 3.2:

$$J_{i+1} - J_i = S_i^\Phi \cdot \Delta X_i \quad (3.3)$$

Para prosseguir com a discretização, é necessário obter-se expressões para os fluxos J em termos das características do domínio tais como propriedades e malha, e da variável dependente Φ .

Admitindo-se que J varie linearmente ao longo do volume de controle i :

$$J = \left[\frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i} \right] \cdot X_i + J_i \quad (3.4)$$

Como na difusão pura, $J = -\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX}$ e assumindo-se que o coeficiente de difusão Γ seja constante ao longo do volume de controle i , obtém-se:

$$\frac{d\Phi}{dX_i} = - \frac{J_{i+1} - J_i}{\Gamma_i \cdot \Delta X_i} \cdot X_i - \frac{J_i}{\Gamma_i} \quad (3.5)$$

Procedendo-se a integração ao longo do domínio ΔX_i obtém-se:

$$\Phi = \frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i} \cdot \frac{1}{\Gamma_i} \cdot \frac{X_i^2}{2} - \frac{J_i}{\Gamma_i} \cdot X + C_i \quad (3.6)$$

Será adotado ao longo do trabalho a localização de Φ_i no centro geométrico do volume de controle i (Prática B, ver Patankar(1980)) devido aos resultados apresentados por essa disposição em Niecele(1985). Assim :

$$\Phi = \Phi_i \quad \text{em} \quad X_i = \frac{\Delta X_i}{2} \quad , \quad (3.7)$$

O cálculo da constante de integração de (3.6) usando-se (3.7) faz com que o perfil interpolante de Φ assuma a forma:

$$\Phi = \Phi_i - (J_{i+1} - J_i) \cdot \left(\frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{X_i}{\Delta X_i} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] - J_i \cdot \left(\frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \right) \cdot \left[\left(\frac{X_i}{\Delta X_i} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (3.8)$$

Essa equação fornece a distribuição da variável dependente Φ ao longo do volume de controle i , se a malha , o campo de J e a distribuição de Γ são conhecidos.

No método dos volumes de controle a equação de governo é satisfeita para cada volume discreto (e portanto para todo o domínio), e assim o termo $(J_{i+1} - J_i)$ no caso unidimensional representa a presença do termo fonte S_i^Φ .

Como o objetivo do método numérico é a obtenção da solução aproximada da equação de governo para todo o domínio e o perfil interpolante acima deduzido é válido somente para o volume de controle i , é necessário para acoplá-lo aos demais, impor-se a chamada **Condição de Continuidade** de Φ .

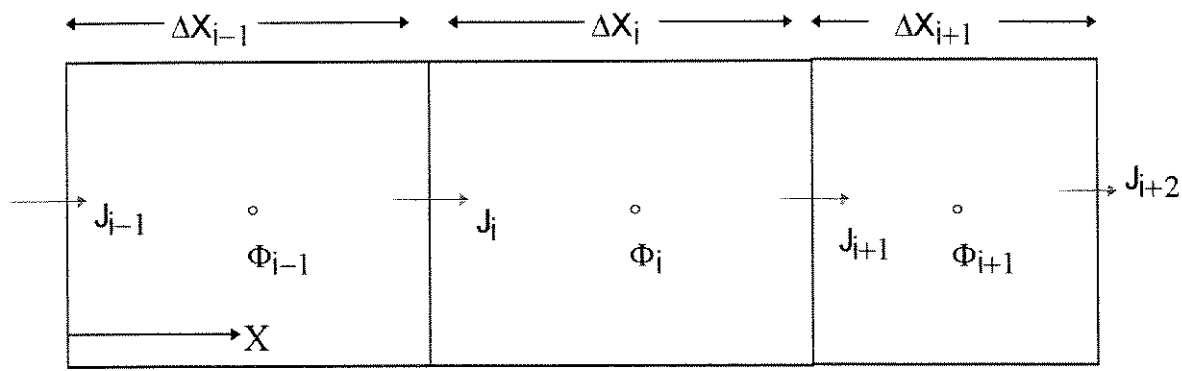


Fig. 3.1 Domínio unidimensional discretizado

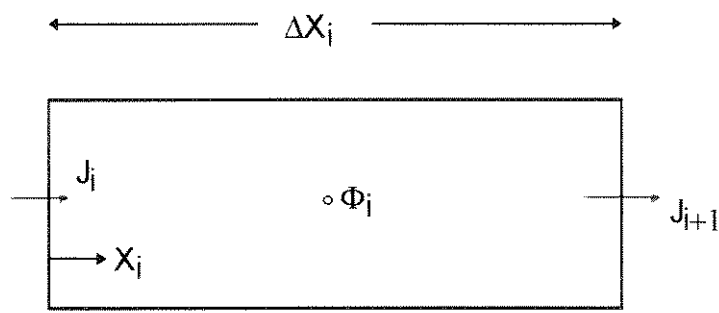


Fig. 3.2: Volume de controle para difusão unidimensional

3.1.1 Condição de Continuidade da Variável Dependente

Deve-se garantir nas interfaces por imposição física, que a variável dependente Φ , como os fluxos J , assumam um valor único. Para um volume de controle i isso se traduziria em impor a montante :

$$\Phi(X_i = 0) = \Phi(X_{i-1} = \Delta X_{i-1}) \quad (3.9)$$

Para simplificar a notação usa-se:

$$\Phi(X_i = 0) = \Phi_i^- \quad (3.10)$$

$$\Phi(X_{i-1} = \Delta X_{i-1}) = \Phi_{i-1}^+ \quad (3.11)$$

E assim a condição de continuidade será expressa por :

$$\Phi_i^- = \Phi_{i-1}^+ \quad (3.12)$$

Aplicando ao perfil interpolante para Φ as condições (3.10) e (3.11), obtém-se:

$$\Phi_i^- = \Phi_i + \frac{3}{8} \cdot J_i \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{1}{8} J_{i+1} \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \quad (3.13)$$

$$\Phi_{i-1}^+ = \Phi_{i-1} - \frac{1}{8} \cdot J_{i-1} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} - \frac{3}{8} \cdot J_i \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \quad (3.14)$$

Levando estas expressões a (3.12) obtém-se uma equação para os fluxos, que como anteriormente esperado, fornece um relacionamento entre os fluxos J , a malha, o coeficiente de difusão e a variável dependente .

$$\left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right] \cdot J_{i-1} + \left[\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} + \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \right) \right] \cdot J_i + \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \right] \cdot J_{i+1} = \Phi_{i-1} - \Phi_i \quad (3.15)$$

Esta equação expõe à primeira vista, uma dificuldade adicional característica do esquema, que seria a resolução de matrizes tridiagonais de fluxo. Para um dado campo de Φ , possuindo-se a distribuição de Γ ao longo do domínio e as características da malha, pode-se calcular os fluxos de duas formas. A primeira através de uma matriz tridiagonal, usando-se o algoritmo TDMA, como proposto por Varejão (1979), e a segunda de forma explícita; ambas dentro de um processo seqüencial e iterativo. Como adiante será proposto um algoritmo que calcula os fluxos de forma explícita, é mais cômodo escrever (3.15) na forma:

$$J_i = \hat{J}_i + DJ_i \cdot (\Phi_{i-1} - \Phi_i) \quad (3.16)$$

onde :

$$\hat{J}_i = BJ_i \cdot (J_i - J_{i+1}) + CJ_i \cdot (J_i - J_{i-1}) \quad (3.17)$$

$$DJ_i = 2 \cdot \left[\frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right]^{-1} \quad (3.18)$$

$$BJ_i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \cdot DJ_i \quad (3.19)$$

$$CJ_i = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cdot DJ_i \quad (3.20)$$

Como o objetivo do esquema é fornecer a distribuição aproximada de Φ e não J , voltaremos à equação de governo (3.3).

É prudente nesse ponto, linearizar o termo fonte de acordo com Patankar (1980), de forma que:

$$S_i^\Phi = S_c^\Phi + \Phi_i \cdot Sp_i^\Phi \quad (3.21)$$

E assim:

$$J_{i+1} - J_i = Sc_i^\Phi \cdot \Delta X_i + Sp_i^\Phi \cdot \Phi_i \cdot \Delta X_i \quad (3.22)$$

Substituindo a expressão (3.16) para os respectivos J, na equação de governo acima, obtém-se após alguns arranjos :

$$AP_i \cdot \Phi_i = AIM_i \cdot \Phi_{i-1} + AIP_i \cdot \Phi_{i+1} + CON_i \quad (3.23)$$

onde:

$$AIM_i = DJ_i \quad (3.24)$$

$$AIP_i = DJ_{i+1} \quad (3.25)$$

$$AP_i = AIM_i + AIP_i - Sp_i^\Phi \cdot \Delta X_i \quad (3.26)$$

$$CON_i = (\hat{J}_i - \hat{J}_{i+1}) + Sc_i^\Phi \cdot \Delta X_i \quad (3.27)$$

Essa equação possui junto com a equação dos fluxos, algumas características que serão comentadas agora, pois são decisivas para o melhor desempenho do esquema quando estendido a situações multidimensionais.

- DJ_i contém a média harmônica do coeficiente de difusão Γ , sendo os coeficientes AIM_i e AIP_i idênticos àqueles gerados de maneira forçada pelo método convencional; ao tratar da difusividade na interface dos volumes de controle (ver Patankar ,1980 , p45).

- Comparando-se as expressões aqui derivadas para a equação de discretização de Φ , com aquelas obtidas por Patankar (1980), nota-se que a diferença reside na presença de $(\hat{J}_i - \hat{J}_{i+1})$ no termo CON_i .
- As diferenças $(J_i - J_{i+1})$ e $(J_i - J_{i-1})$ presentes no termo $\hat{J}$ representam nos problemas unidimensionais a influência de fontes distribuídas no domínio de cálculo.

Se a equação de governo for colocada na forma:

$$\frac{\partial J}{\partial X} = -\frac{\partial J}{\partial Y} - \frac{\partial J}{\partial Z} + S^{\Phi}$$

ou

$$\frac{\partial J}{\partial X} = -S_{dim} + S^{\Phi} \quad (3.28)$$

verifica-se que essas diferenças podem conter, além das fontes, a influência de outras dimensões.

A presença destes termos no perfil interpolante, lhe confere então sensibilidade a situações multidimensionais embora tenha sido derivado a partir de um limitado caso unidimensional. Para o aproveitamento integral deste potencial é necessário que o cálculo dos $\hat{J}$ seja suficientemente acurado e feito a partir de valores de fluxo J , que satisfaçam a equação de conservação em cada iteração.

3.1.2 Tratamento das Condições de Contorno na Difusão

Como o esquema FLUX-SPLINE fornece a variação de Φ através de um perfil interpolante para qualquer volume de controle i , os volumes de controle de fronteira devem receber o mesmo tratamento. Como exemplo dessa afirmação será usado o caso da difusão unidimensional submetida a condições de contorno de 1ª, 2ª ou 3ª espécie.

3.1.2.1. Condição de 1ª espécie (Dirichlet)

Admita um domínio discretizado segundo a figura 3.3.

Se em $X = 0$ o valor de Φ_1 é conhecido, temos para esse contorno uma condição de 1ª espécie. Supondo que o algoritmo a ser proposto adiante, trate da presença dos $\hat{J}$, na equação de discretização de Φ , a dificuldade no cálculo dos coeficientes residiria no termo AIM_2 .

Usando-se o perfil interpolante (3.8) para o volume de controle que contém Φ_2 encontra-se:

$$\Phi_2^- = \Phi_2 + \frac{3}{8} \cdot J_2 \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} + \frac{1}{8} \cdot J_3 \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \quad (3.29)$$

Como $\Phi_2^- = \Phi_1$ pode-se escrever:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot J_2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot J_3 \quad (3.30)$$

Voltando à equação (3.15) de discretização dos fluxos J e admitindo que exista na fronteira considerada um volume de controle de espessura zero; ($\Delta X_1 = 0$) obtém-se :

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot J_2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot J_3 \quad (3.31)$$

que é a mesma equação obtida anteriormente através do perfil interpolante.

Devido ao fato da equação de discretização de Φ ser obtida usando-se as expressões para os fluxos J na equação de governo, basta então aplicar o mesmo procedimento à equação de Φ , para que o perfil interpolante seja respeitado.

3.1.2.2. Condição de Contorno de 2ª Espécie (Neumann)

Tais condições aparecem quando ao invés de se conhecer o valor da propriedade dependente na fronteira, se conhece o valor de sua derivada. O tratamento proposto e usado ao longo do trabalho consiste no seguinte:

- Admite-se inicialmente que as condições de contorno sejam de Dirichlet, adotando-se dessa forma, valores arbitrados no contorno com a conseqüente utilização dos volumes de controle de espessura zero.
- Após o final de cada iteração, corrige-se a fronteira usando-se as informações obtidas do interior do domínio mais a imposição da própria condição de contorno; retornando-se ao passo inicial.

Por exemplo: Se em $X = 0$

$$-\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \Big|_{X=0} = q_2''$$

$$J_2 = q_2''$$

Usando-se essa informação na equação (3.30) obtém-se:

$$\Phi_1 = \Phi_2^0 + \frac{3}{8} \cdot q_2'' \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} + \frac{1}{8} \cdot J_3^0 \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \quad (3.32)$$

onde J_3^0 e Φ_2^0 são oriundos da iteração anterior. Essa equação corrigirá o valor de Φ_1 após cada iteração. Um tratamento análogo deverá ser utilizado na fronteira leste ($X = L$), utilizando-se a equação para Φ_4^+ .

Dessa forma, como $\Phi_4^+ = \Phi_5$ e o fluxo nessa fronteira é conhecido e igual a q_5'' :

$$\Phi_5 = \Phi_4^0 - \frac{1}{8} \cdot J_4^0 \cdot \frac{\Delta X_4}{\Gamma_4} - \frac{3}{8} \cdot q_5'' \cdot \frac{\Delta X_4}{\Gamma_4} \quad (3.33)$$

3.1.2.3 Condição de Contorno de 3ª Espécie (Robin)

Uma condição de contorno de Robin aparece quando o fluxo de calor especificado é vinculado sob alguma relação com a temperatura da fronteira. Uma das mais comuns é a que aparece na convecção:

$$q_w'' = h_w \cdot (\Phi_\infty - \Phi_{bc}) \quad (3.34)$$

onde:

h_w = coeficiente de película na fronteira w

Φ_∞ = temperatura do meio não perturbado

Φ_{bc} = temperatura da fronteira em contato com o meio

O procedimento nesse caso é análogo ao adotado para a condição de Neumann. Assim se em $X = 0$ o fluxo de calor é descrito pela relação acima a expressão para Φ_2^- fica:

$$\Phi_1 = \Phi_2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \cdot h_w \cdot (\Phi_\infty - \Phi_1^0) + \frac{1}{8} \cdot J_3^0 \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_2} \quad (3.35)$$

onde Φ_1^0 é a temperatura da fronteira oeste, arbitrada no início da iteração e o par J_3^0 e Φ_2^0 ; valores de fluxo obtidos no final dessa mesma iteração.

O esquema FLUX-SPLINE, quando aplicado a problemas difusivos unidimensionais com termo fonte constante, proporcionará uma solução numérica isenta de erro com relação à solução analítica.

Devido a continuidade dos fluxos J estar assegurada nas interfaces dos volumes de controle e como tais fluxos estão aí associados à derivada da função Φ ; o esquema proporciona também a continuidade da derivada dessa função na direção considerada; advindo daí a denominação FLUX-SPLINE.

3.1.3 Algoritmo de Solução para Difusão Unidimensional em Regime Permanente

O Método de Solução aqui proposto e detalhado é baseado naquele idealizado por Varejão(1979) em seu trabalho de Doutorado, calculando-se porém os fluxos de forma explícita. Tal detalhamento é necessário pois o algoritmo será usado em sua essência para a resolução dos problemas de convecção-difusão e escoamento. Varejão(1979) partiu da constatação de que a presença de Φ na equação do fluxo J , poderia ser tratada como a pressão P nas equações de conservação de quantidade de movimento pelo algoritmo SIMPLER. Assim, se uma equação de correção das velocidades (P'); é obtida no algoritmo SIMPLER pela substituição de U e V na equação da continuidade, aqui de maneira análoga, uma

equação para correção dos J (Φ'), é obtida substituindo-se equações apropriadas de J na equação de conservação integrada. Esse raciocínio conduz ao seguinte procedimento:

Se para a solução da equação (3.16) de J :

$$J_i = \hat{J}_i + DJ_i \cdot [\Phi_{i-1} - \Phi_i]$$

é fornecido um campo imperfeito Φ^* , pode-se supor que:

$$J_i^* = \hat{J}_i^* + DJ_i \cdot (\Phi_{i-1}^* - \Phi_i^*) \quad (3.36)$$

Subtraindo (3.36) de (3.16) obtém-se:

$$J_i - J_i^* = (\hat{J}_i - \hat{J}_i^*) + DJ_i \cdot [(\Phi_{i-1} - \Phi_{i-1}^*) - (\Phi_i - \Phi_i^*)]$$

Se $\Phi - \Phi^* = \Phi'$ e $\hat{J}_i - \hat{J}_i^*$ é desprezado, então:

$$J_i = J_i^* + DJ_i \cdot [\Phi'_{i-1} - \Phi'_i] \quad (3.37)$$

Substituindo essa expressão na equação de conservação em sua forma discretizada (3.3), obtém-se uma equação para o cálculo das correções a serem aplicadas ao campo dos fluxos J . Essa equação é:

$$AP_i \cdot \Phi'_i = AIP_i \cdot \Phi'_{i+1} + AIM_i \cdot \Phi'_{i-1} + CON'_i \quad (3.38)$$

onde os coeficientes são idênticos àqueles da equação de discretização de Φ e o termo CON'_i toma a forma:

$$CON_i' = (J_i^* - J_{i+1}^*) + S_i^{\Phi^*} \cdot \Delta X_i \quad (3.39)$$

Como se pode notar o termo fonte para o cálculo das correções numa certa iteração é o resíduo da própria equação de conservação discretizada e que por imposição física deverá tender a zero na seqüência das iterações. Esse conceito será expandido para o caso da difusão bidimensional e posteriormente aplicado à convecção-difusão e escoamentos.

Deve-se lembrar que no caso de escoamento, o termo de pressão fará parte do lado direito da equação (3.39). As conseqüências disto serão discutidas adiante ao se tratar do método de solução para escoamentos.

Assim os fluxos J obtidos através da equação (3.37) satisfarão a equação de conservação, sendo usados então para o cálculo dos $\hat{J}$.

Devido a existência dos Φ' , é necessário abordar o tratamento dado às condições de contorno da equação de Φ . Se a condição de contorno para Φ é de Dirichlet, os Φ' do contorno são zero, pois a correção de algo conhecido é nula. Se a condição é de 2ª ou 3ª espécie continua-se zerando o contorno dos Φ' e corrigindo-se o contorno dos Φ , como anteriormente descrito. Isto possibilita grande simplificação na arquitetura do programa de computador.

Para difusão unidimensional, o procedimento de solução tem a seguinte forma:

1. Defina a malha, forneça Γ e arbitre um campo de Φ ;
2. Calcule os coeficientes DJ , BJ , CJ , AIP , AIM e AP ;
3. Faça os $\hat{J}$ iguais a zero;
4. Calcule os fluxos J^* usando a equação (3.36) e construa com (3.39) o termo fonte CON_i' ;
5. Resolva por TDMA a equação (3.38) dos Φ' ;

6. Use os Φ' para corrigir os J^* , obtendo os J que satisfazem a equação de conservação. Calcule então os $\hat{J}$ usando a equação (3.17) e retorne ao passo 4 até obter convergência dos mesmos.
7. Use os $\hat{J}$ convergidos e Sc^Φ para construir o termo fonte de $\Phi \rightarrow CON_i$;
8. Calcule por TDMA a matriz dos Φ ;
9. Corrigir se necessário as condições de contorno usando as equações (3.32) e (3.33);
10. Retorne ao passo 4 até a satisfação do critério de convergência de Φ .

Como se vê, o método de solução possui característica seqüencial e iterativa em contraste com métodos diretos que exigiriam grande capacidade de memória.

O número de iterações do loop interno 4-5-6-4 depende do tipo de problema (convecção-difusão ou escoamento) e pode ser controlado pelo resíduo das equações de conservação. Nos testes efetuados por Varejão (1979) usando o mesmo procedimento de solução acima descrito, foi colocada em evidência a larga superioridade do esquema FLUX-SPLINE sobre o esquema convencional adotado em Patankar(1980).

3.2 Difusão Bidimensional em Regime Permanente

Nesse caso a equação de conservação (3.1) assume a forma:

$$\frac{\partial JX}{\partial X} + \frac{\partial JY}{\partial Y} = S^\Phi \quad (3.40)$$

onde:

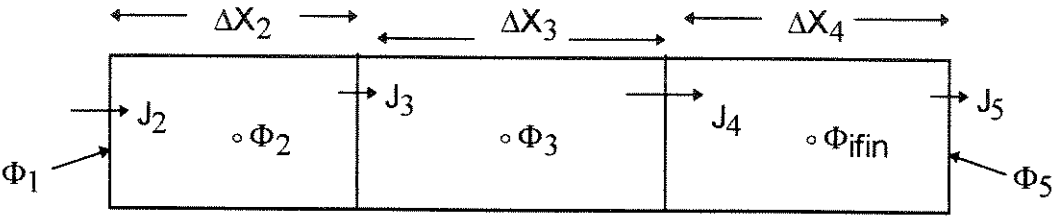


Fig. 3.3: condições de contorno para dif. unidimensional

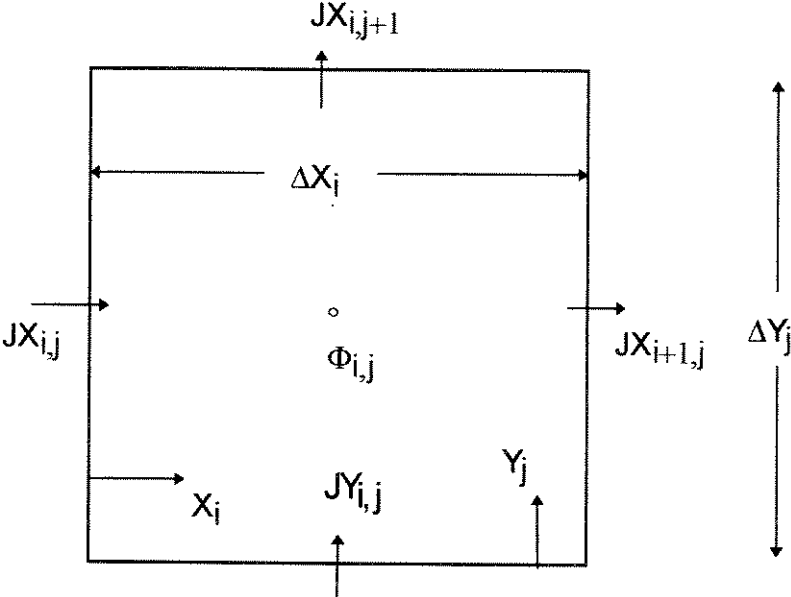


Fig. 3.4: Volume de controle bidimensional

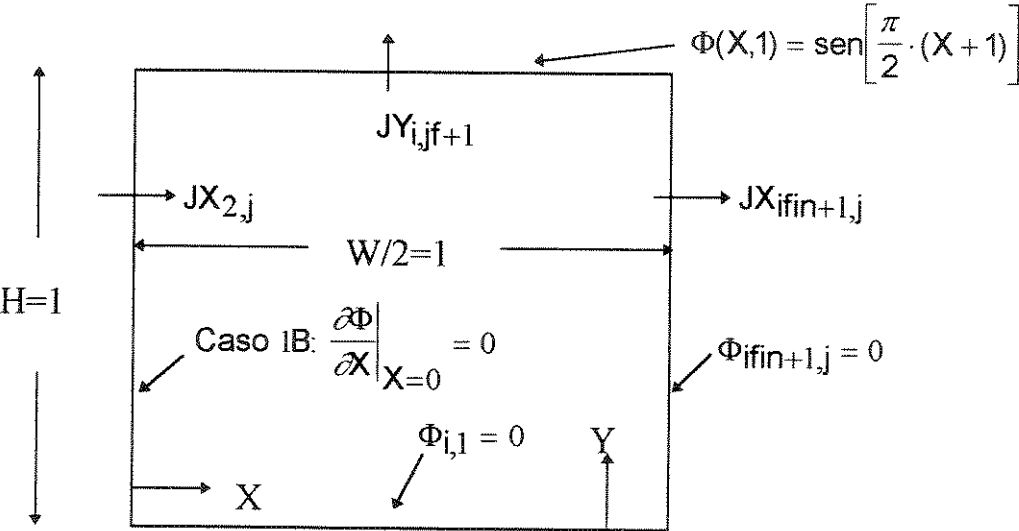


Fig. 3.5: Placa plana sem fonte

$$JX = -\Gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X}$$

$$JY = -\Gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$$

Como na difusão unidimensional, os fluxos serão armazenados nas interfaces do volume de controle e a variável dependente no centro geométrico do mesmo, como mostrado na figura 3.4.

Como a condição de Spline pode ser aplicada a cada direção independentemente; tomando-se o perfil interpolante desenvolvido para o caso unidimensional, obtém-se:

Na Direção X:

$$\Phi = \Phi_{i,j} - JX_{i,j} \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_{i,j}} \cdot \left[\frac{X_i}{\Delta X_i} - \frac{1}{2} \right] - (JX_{i+1,j} - JX_{i,j}) \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{X_i^2}{\Delta X_i^2} - \frac{1}{4} \right] \quad (3.41)$$

Na Direção Y:

$$\Phi = \Phi_{i,j} - JY_{i,j} \cdot \frac{\Delta Y_j}{\Gamma_{i,j}} \cdot \left[\frac{Y_j}{\Delta Y_j} - \frac{1}{2} \right] - (JY_{i,j+1} - JY_{i,j}) \cdot \frac{\Delta Y_j}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{Y_j^2}{\Delta Y_j^2} - \frac{1}{4} \right] \quad (3.42)$$

Para a satisfação da condição de continuidade da variável dependente Φ impõem-se nas respectivas direções:

$$\Phi_{i-1,j}^+ = \Phi_{i,j}^- \quad \text{direção X} \quad (3.43)$$

$$\Phi_{i,j-1}^+ = \Phi_{i,j}^- \quad \text{direção Y} \quad (3.44)$$

Adotando-se procedimento similar àquele usado na difusão unidimensional, essas igualdades fornecerão expressões para JX e JY a serem levadas até a forma integrada da equação de conservação (3.40).

Na direção X obtém-se:

$$JX_{i,j} = \hat{J}X_{i,j} + DJX_{i,j} \cdot (\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}) \quad (3.45)$$

onde:

$$\hat{J}X_{i,j} = BJX_{i,j} \cdot (JX_{i,j} - JX_{i+1,j}) + CJX_{i,j} \cdot (JX_{i,j} - JX_{i-1,j}) \quad (3.46)$$

$$DJX_{i,j} = 2 \cdot \left[\frac{\Delta X_i}{\Gamma_{i,j}} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1,j}} \right]^{-1} \quad (3.47)$$

$$BJX_{i,j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_{i,j}} \cdot DJX_{i,j} \quad (3.48)$$

$$CJX_{i,j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1,j}} \cdot DJX_{i,j} \quad (3.49)$$

Na direção Y:

$$JY_{i,j} = \hat{J}Y_{i,j} + DJY_{i,j} \cdot [\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}] \quad (3.50)$$

$$\hat{J}Y_{i,j} = BJY_{i,j} \cdot [JY_{i,j} - JY_{i,j+1}] + CJY_{i,j} \cdot (JY_{i,j} - JY_{i,j-1}) \quad (3.51)$$

$$DJY_{i,j} = 2 \cdot \left[\frac{\Delta Y_j}{\Gamma_{i,j}} + \frac{\Delta Y_{j-1}}{\Gamma_{i,j-1}} \right]^{-1} \quad (3.52)$$

$$BJY_{i,j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta Y_j}{\Gamma_{i,j}} \cdot DJY_{i,j} \quad (3.53)$$

$$CJY_{i,j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}}{\Gamma_{i,j-1}} \cdot DJY_{i,j} \quad (3.54)$$

Admitindo-se, como anteriormente, que o valor do fluxo nas faces do volume de controle é um valor médio, e tratando o termo fonte como na difusão unidimensional, obtém-se da integração da equação de conservação:

$$(JX_{i+1,j} - JX_{i,j}) \cdot \Delta Y_j + (JY_{i,j+1} - JY_{i,j}) \cdot \Delta X_i = Sc_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + Sp_{i,j}^{\Phi} \cdot \Phi_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j$$

Substituindo-se nessa equação as expressões (3.45) e (3.50) dos fluxos JX e JY chega-se à equação de discretização de Φ .

$$AP_{i,j} \cdot \Phi_{i,j} = AIP_{i,j} \cdot \Phi_{i+1,j} + AIM_{i,j} \cdot \Phi_{i-1,j} + AJP_{i,j} \cdot \Phi_{i,j+1} + AJM_{i,j} \cdot \Phi_{i,j-1} + CON_{i,j} \quad (3.55)$$

onde:

$$AIP_{i,j} = DJX_{i+1,j} \cdot \Delta Y_j \quad (3.56)$$

$$AIM_{i,j} = DJX_{i,j} \cdot \Delta Y_j \quad (3.57)$$

$$AJP_{i,j} = DJY_{i,j+1} \cdot \Delta X_i \quad (3.58)$$

$$AJM_{i,j} = DJY_{i,j} \cdot \Delta X_i \quad (3.59)$$

$$AP_{i,j} = AIP_{i,j} + AIM_{i,j} + AJP_{i,j} + AJM_{i,j} - Sp_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (3.60)$$

$$\text{CON}_{i,j} = \text{Sc}_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + \text{Ssp}_{i,j}^{\Phi} \quad (3.61)$$

$$\text{Ssp}_{i,j}^{\Phi} = (\hat{J}X_{i,j} - \hat{J}X_{i+1,j}) \cdot \Delta Y_j + (\hat{J}Y_{i,j} - \hat{J}Y_{i,j+1}) \cdot \Delta X_i \quad (3.62)$$

3.2.1 Relaxação

Como o esquema será posteriormente aplicado a problemas de escoamento, cujas equações de governo possuem termos não-lineares, é necessário aplicar-se sobre o processo iterativo, o chamado **fator de relaxação** α , que pode, dependendo do seu valor, acelerar ou retardar as mudanças na variável dependente. Dessa forma consegue-se a estabilidade necessária para obter convergência.

A equação para $\Phi_{i,j}$ pode ser colocada na forma:

$$A_p \cdot \Phi_p = \sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b$$

onde b é a parte constante do termo fonte e $\sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb}$ representa a somatória das influências dos demais componentes da molécula computacional sobre Φ_p e então:

$$\Phi_p = \frac{\sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b}{A_p}$$

Somando e subtraindo um valor Φ_p^* oriundo da iteração anterior obtém-se:

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \left[\frac{\sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b}{A_p} - \Phi_p^* \right]$$

O termo entre colchetes representa a variação de Φ_p para a atual iteração. É sobre esse termo que o fator de relaxação é aplicado. Assim:

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \alpha \cdot \left[\frac{\sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b}{A_p} - \Phi_p^* \right] \quad \text{e daí,}$$

$$\left(\frac{A_p}{\alpha} \right) \cdot \Phi_p = \sum a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b + (1 - \alpha) \cdot \frac{A_p}{\alpha} \cdot \Phi_p^* \quad (3.63)$$

Com α entre zero e um obtém-se uma desaceleração na mudança de Φ_p chamada de subrelaxação. Essa característica será usada na resolução do sistema de equações que governa os escoamentos.

3.2.2 Tratamento das Condições de Contorno

A imposição das condições de contorno se faz da mesma forma que no caso unidimensional, devido a independência dos perfis interpolantes. Dessa forma uma placa plana submetida a condições de Dirichlet, seria corretamente discretizada no esquema Flux-Spline, adotando-se os volumes de controle de espessura zero nas fronteiras.

3.2.3 Método de Solução

O procedimento para a obtenção da equação de correção dos fluxos JX e JY é análogo ao desenvolvido no caso unidimensional. Assim, obtém-se para os fluxos, as seguintes equações de correção:

$$JX_{i,j} = JX_{i,j}^* + DJX_{i,j} \cdot [\Phi'_{i-1,j} - \Phi'_{i,j}] \quad (3.64)$$

$$JY_{i,j} = JY_{i,j}^* + DJY_{i,j} \cdot \left[\Phi'_{i,j-1} - \Phi'_{i,j} \right] \quad (3.65)$$

Ao substituí-las na equação de conservação, obtém-se :

$$AP_{i,j} \cdot \Phi'_{i,j} = AIM_{i,j} \cdot \Phi'_{i-1,j} + AIP_{i,j} \cdot \Phi'_{i+1,j} + AJM_{i,j} \cdot \Phi'_{i,j-1} + AJP_{i,j} \cdot \Phi'_{i,j+1} + CON'_{i,j} \quad (3.66)$$

onde novamente, os coeficientes são iguais aos já deduzidos para $\Phi_{i,j}$ em (3.55) ;

e $CON'_{i,j}$ toma a forma:

$$CON'_{i,j} = S_{i,j}^{\Phi^*} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j - \left(JX_{i+1,j}^* - JX_{i,j}^* \right) \cdot \Delta Y_j - \left(JY_{i,j+1}^* - JY_{i,j}^* \right) \cdot \Delta X_i \quad (3.67)$$

$CON'_{i,j}$ possui o mesmo significado encontrado no problema unidimensional; novamente representa o resíduo da equação de conservação quando os fluxos são obtidos de uma aproximação $\Phi_{i,j}^*$, e quando a convergência se manifestar; tenderá a zero. A expansão do procedimento de solução para o caso bidimensional fornece a seqüência:

1. Estabeleça a malha, forneça $\Gamma_{i,j}$ e arbitre um campo $\Phi_{i,j}^*$;
2. Calcule coeficientes $\rightarrow DJX, BJX, CJX, DJY, BJY, CJY, AIM, AIP, AJM, AJP$ e AP
3. Faça os $\hat{J}$ iguais a zero;
4. Calcule os fluxos JX^* e JY^* usando as equações (3.45) e (3.50);
5. Calcule $CON'_{i,j}$ usando os fluxos obtidos em 4 e a parte constante do termo fonte;
6. Resolva por Line-by-Line (descrito em Patankar (1980)), a matriz dos $\Phi'_{i,j}$;
7. Use estes Φ' para obter JX e JY usando as equações (3.64) e (3.65) ;
8. Calcule $\hat{JX}$ e $\hat{JY}$ e retorne ao passo 4 até convergência dos mesmos;

9. Calcule o termo fonte $CON_{i,j}$ e resolva a matriz dos $\Phi_{i,j}$ por Line-by-Line ;
10. Corrija os valores das condições de contorno onde for necessário;
11. Retorne ao passo 4 até satisfazer o critério de convergência de $\Phi_{i,j}$.

3.2.4. Aplicação do Esquema FLUX-SPLINE à Difusão Bidimensional

Em seu trabalho de Doutorado, Varejão (1979), testou o esquema para difusão bidimensional utilizando problemas com solução analítica. Tais testes tiveram por objetivo aferir acuidade, esforço computacional e necessidade de memória frente ao chamado método convencional usado por Patankar(1980) .

Foi definido um parâmetro básico para a comparação do erro em relação à solução analítica na forma:

$$E = \frac{\Phi_{\text{exato}} - \Phi_{\text{num}}}{\Phi_{\text{exato}_{\text{max}}} - \Phi_{\text{exato}_{\text{min}}}} \cdot 100 \quad (3.68)$$

A ordem de acuidade é definida como a inclinação da curva do erro como função do refinamento da malha num gráfico log-log.

Assim:

$$O_{ac} = \frac{\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\log\left(\frac{\Delta X_1}{\Delta X_2}\right)} \quad (3.69)$$

Os resultados obtidos mostraram uma marcante superioridade do método FLUX-SPLINE quando comparado ao esquema convencional. Como as condições de contorno em tais problemas foram sempre de 1ª espécie, não ficou demonstrado se o método os trataria com a mesma performance, sob condições de contorno diferentes. Para trazer algum esclarecimento a essa questão no caso da difusão serão colocados dois testes:

TESTE D1. Condução Bidimensional em Placa Plana sem fonte.

Esse teste foi criado a partir do problema clássico da condução bidimensional onde uma placa retangular em regime permanente sem fontes mostrada na figura 3.5, é submetida as condições de contorno:

$$\Phi(X, Y=0) = \Phi(X=1, Y) = 0$$

$$\Phi(X, 1) = \text{sen}\left(\frac{\Pi}{2} \cdot (X+1)\right)$$

O domínio de cálculo varia de zero a um tanto para X como para Y. A razão de aspecto W/H é portanto igual a um. A solução analítica é :

$$\Phi(X, Y) = \frac{\text{Senh}\left(\frac{\Pi}{2} \cdot Y\right)}{\text{Senh}\left(\frac{\Pi}{2}\right)} \cdot \text{Sen}\left[\frac{\Pi}{2} \cdot (X+1)\right], \text{ e está plotada na figura 3.6.}$$

Dessa forma pode-se adotar separadamente as seguintes condições de contorno em X=0:

Caso 1A: Condição de Dirichlet em X = 0

$$\Phi(0, Y) = \frac{\text{senh}\left(\frac{\Pi}{2}\right) \cdot Y}{\text{senh}\left(\frac{\Pi}{2}\right)}$$

Caso 1B: Condição de Neumann em x =0

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X}\bigg|_{X=0} = 0, \text{ ou seja } JX_{2,j} = 0$$

Ao final de cada iteração a equação usada para corrigir Φ em $X=0$, obtida usando-se (3.32), é:

$$\Phi_{1,j} = \Phi_{2,j}^0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_{2,j}} \cdot JX_{3,j}^0$$

Os resultados para malha regular estão expostos na tabela 3.1 abaixo.

Tab. 3.1: Erro em placa plana bidimensional sem fonte						
	Caso 1B			Caso 1A		
NVC	E_{max}	O_{ac}	NIT	E_{max}	O_{ac}	NIT
3x3	$2,26 \times 10^{-1}$		35	$9,92 \times 10^{-2}$		3
6x6	$5,85 \times 10^{-2}$	1,94	71	$3,01 \times 10^{-2}$	1,72	2
12x12	$1,47 \times 10^{-2}$	1,99	134	$7,86 \times 10^{-3}$	1,93	3
24x24	$3,88 \times 10^{-3}$	1,92	264	$2,08 \times 10^{-3}$	1,91	7

Critério de Convergência usado:

$$abs(E_{max} - E_{max}^{old}) \leq 10^{-6}$$

NVC = NPXxNPY - Número de volumes de controle da malha nas direções X e Y respectivamente

NIT - Número de iterações necessárias para satisfação do critério de convergência

Observa-se que os erros para o caso 1A ficaram ligeiramente abaixo daqueles para o caso 1B, mas que o esforço computacional em termos do número de iterações é muito maior.

No método convencional exposto em Patankar (1980), o tratamento de uma condição de contorno de Neumann do tipo $JX_{2,j} = 0$, levaria à equação de fronteira:

$$\Phi_{1,j} = \Phi_{2,j}^0$$

(3.70)

Essa relação é obtida ao se desprezar na equação do contorno, a presença do termo $\frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_{2,j}} \cdot JX_{3,j}$.

O comportamento do esquema FLUX-SPLINE sob essa aproximação chamado de Caso 1C , é mostrado na tabela 3.2 abaixo.

Tab. 3.2: Erro devido à aproximação da equação de contorno - Caso 1C

NVC	E _{max}	O _{ac}	NIT
3x3	4,62		27
6x6	2,04	1,17	55
12x12	9,43x10 ⁻¹	1,11	110
24x24	4,51.10 ⁻¹	1,06	209

Observa-se que a ordem de acurácia e a precisão do método sofrem uma piora acentuada, ao se omitir o termo oriundo do esquema FLUX-SPLINE na equação de correção, que nesse caso como $S^{\Phi^*} = 0$, trata das influências laterais advindas da bidimensionalidade do fenômeno. Doravante esse tratamento aproximado das condições de contorno, será denominado de “Standard” . Deve-se lembrar que os termos S_{sp} continuam a ser calculados e usados no interior do domínio.

Os resultados contidos nas tabelas acima são plotados na figura 3.7 numa configuração log-log.

Como demonstrado acima, o esquema FLUX-SPLINE se diferencia do Método Convencional utilizado em PATANKAR (1980), não somente pela presença dos termos $\hat{J}$ em $CON_{i,j}$, mas também pela possibilidade de diferentes tratamentos das condições de contorno.

Figura 3.6: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D1

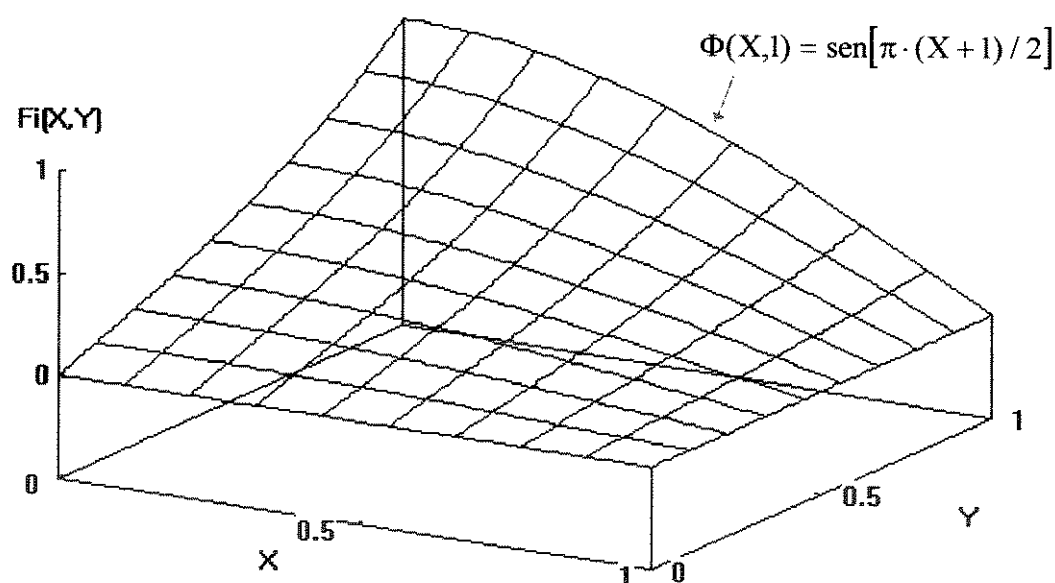
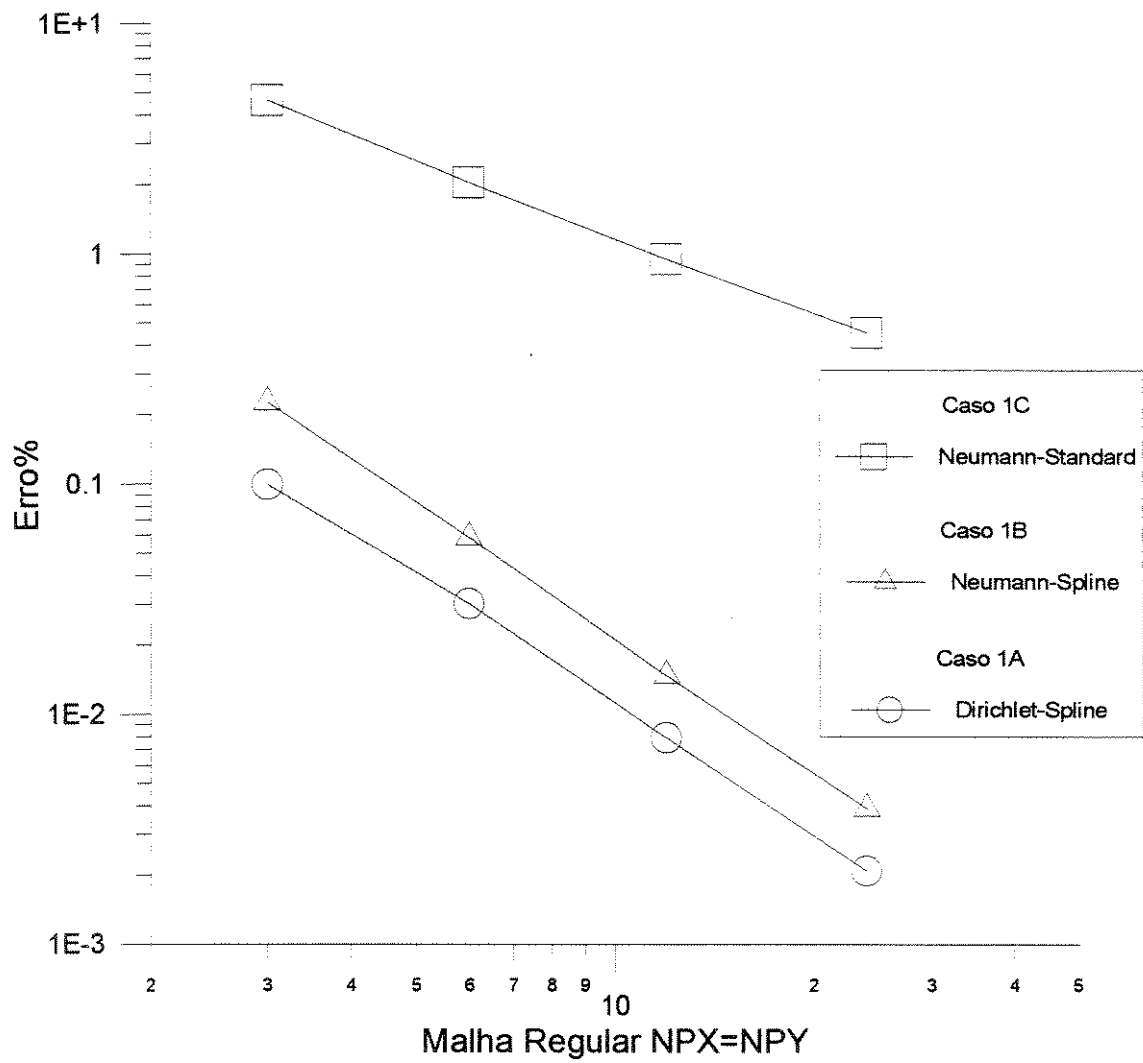


Figura 3.7
Teste D1 - Placa plana sem fonte



TESTE D2: Placa Plana com Fonte

O domínio de cálculo e o sistema de coordenadas são mostrados na figura 3.12, enquanto que a distribuição da variável dependente plotada na figura 3.8 é:

$$\Phi(X, Y) = e^X \cdot e^Y$$

$$0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1$$

Condições de Contorno:

$$\Phi(1, Y) = e^1 \cdot e^Y$$

$$\Phi(X, 0) = e^X$$

$$\Phi(X, 1) = e^1 \cdot e^X$$

$$\text{Caso 2A: em } X = 0 \rightarrow \Phi(0, Y) = e^Y$$

$$\text{Caso 2B: em } X = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{X=0} = e^Y$$

Para satisfazer a equação de governo o termo fonte (para $\Gamma = 1$) é:

$$S^\Phi = 2 \cdot e^X \cdot e^Y$$

Para o caso 2B a equação de correção de Φ em $X=0$ tem a forma

$$\Phi_{1,j} = \Phi_{2,j} + \frac{3}{8} \cdot (-e^Y) \cdot \frac{\Delta X_2}{\Gamma_{2,j}} + \frac{1}{8} \cdot JX_{3,j}$$

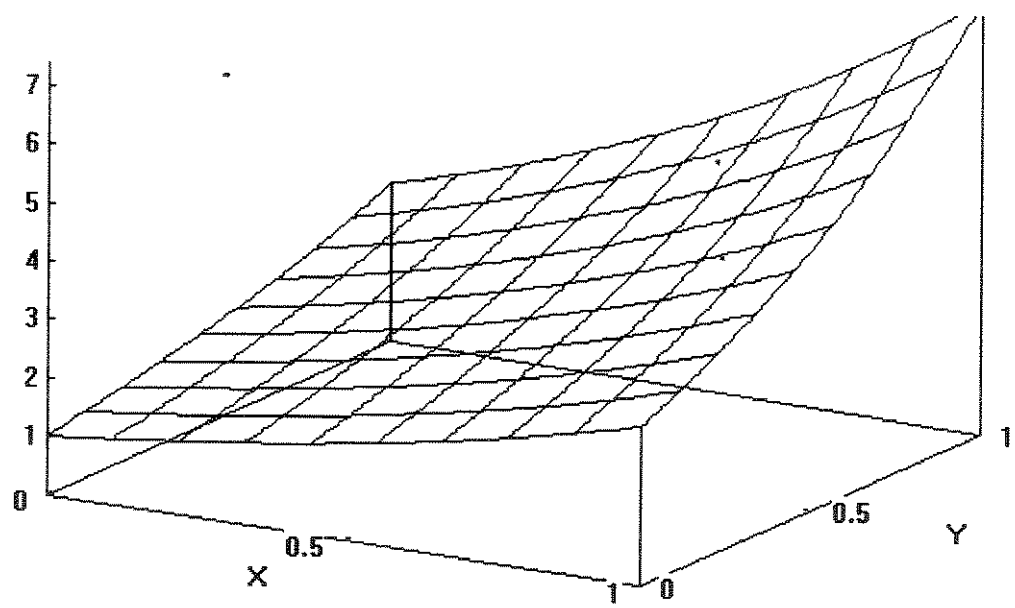
onde o termo e^Y será convenientemente discretizado por $e^{(2 \cdot j - 3) \cdot \frac{\Delta Y_j}{2}}$.

Os resultados obtidos para malha regular foram colocados na tabela 3.3 abaixo:

Tab. 3.3: Erro em placa bidimensional com fonte distribuída

	Caso 2B			Caso 2A		
NVC	$E_{\max}$	O_{ac}	NIT	$E_{\max}$	O_{ac}	NIT
3x3	1.30×10^{-1}		35	2.69×10^{-2}		2
6x6	3.26×10^{-2}	1,85	71	7.60×10^{-3}	1,82	2
12x12	8.10×10^{-3}	2,00	139	1.95×10^{-3}	1,96	3
24x24	2.18×10^{-3}	1,89	274	6.34×10^{-4}	1,62	2

Figura 3.8: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D2



Verifica-se aqui o mesmo comportamento observado no Teste 1. Isso demonstra para a difusão, a influência das condições de contorno sobre a acurácia e precisão do esquema.

Usando-se o tratamento “Standard” para o caso 2B obtém-se os resultados da tabela 3.4 denominado de Caso 2C:

Tab. 3.4: Erro devido à aproximação na equação de contorno - Caso 2C

NVC	E_{max}	O_{ac}	NIT
3x3	12,99		30
6x6	11,66	0,15	58
12x12	10,63	0,10	113
24x24	10,41	0,05	209

Esse exemplo mostra com clareza a importância do tratamento das fronteiras na difusão. Esses resultados estão expostos de forma gráfica na figura 3.9. Nota-se novamente que a supressão do termo devido ao esquema Flux-Spline, para um problema difusivo bidimensional contendo fontes, piora de forma acentuada os resultados.

TESTE D3: Placa plana submetida a fortes gradientes

Problemas de difusão que apresentam regiões com grandes gradientes são um bom desafio para a aferição da acuidade dos métodos. Com esse objetivo uma comparação com outro método numérico será agora abordada.

R.E. Phillips e F.W. Schmidt (1984) propõem um caso teste onde o domínio é aquele mostrado pela figura 3.12 e a distribuição da variável dependente Φ plotada na figura 3.10 é:

Figura 3.9

Teste D2

Difusão em Placa Plana com fonte

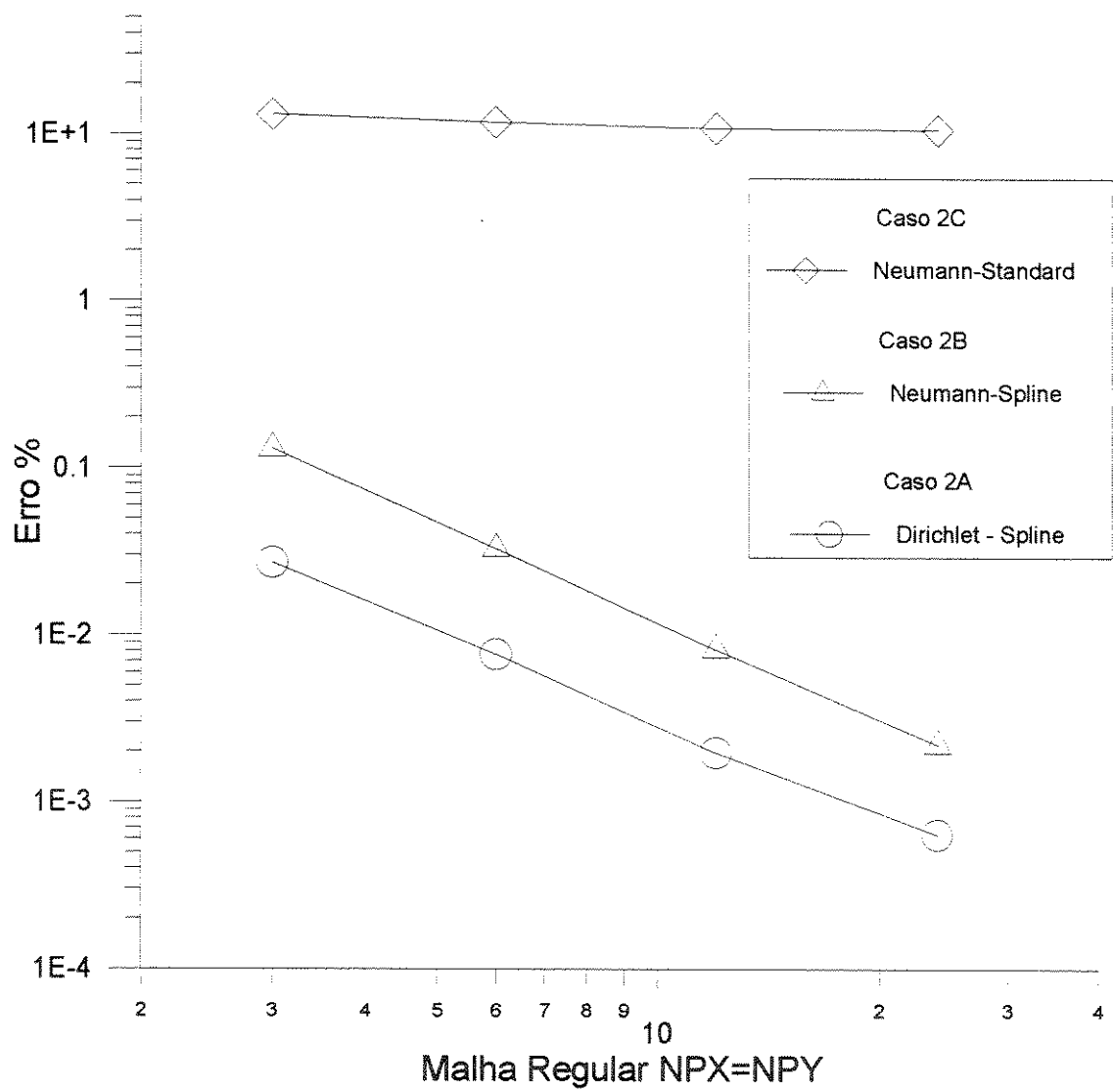
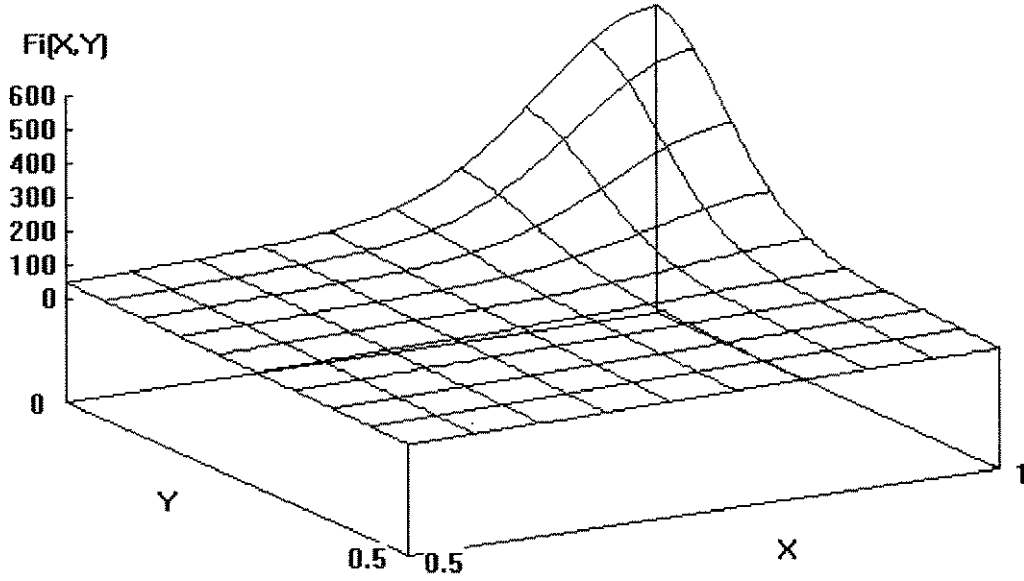


Figura 3.10: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste D3



$$\Phi(X, Y) = 500 \cdot e^{\delta} + 100 \cdot (1 - Y) \cdot X \quad \text{no domínio } 0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \text{ e}$$

$$\delta = -50 \cdot \left[(1 - X)^2 + Y^2 \right]$$

O termo fonte correspondente para Γ igual a 1 é:

$$S^{\Phi}(X, Y) = 50000 \cdot \exp^{\delta} \left\{ 100 \cdot \left[(1 - X)^2 \right] - 2 \right\} \cdot (-1)$$

Os autores utilizaram o método das diferenças finitas com o esquema de diferença central, o que forneceu a equação de discretização na forma:

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - \Delta^2 \cdot S_{i,j}^{\Phi}) \quad (3.71)$$

Onde Δ é o espaçamento numa malha regular.

Comparação dos Resultados

O erro com relação à solução analítica é definido pelos autores como:

$$E\% = 100 \cdot \text{ABS} \left[\frac{\Phi_{\text{exato}} - \Phi_{\text{num}}}{\Phi_{\text{exato}}} \right]$$

As condições de contorno são de Dirichlet. Para uma malha com 16 x 16 volume de controle, ou seja $\Delta = 1/16$ o esquema FLUX-SPLINE forneceu um erro máximo de 3,08, enquanto que o resultado fornecido pelas diferenças finitas situou-se em 6,5%. Para malha com $\Delta = 1/32$ obteve-se 0,82% contra 1,6% . A figura 3.11 é construída com esses resultados.

Se fixarmos os níveis dos erros cometidos por diferença central e buscarmos a malha necessária ao FLUX-SPLINE para atingi-los, chega-se aos seguintes resultados:

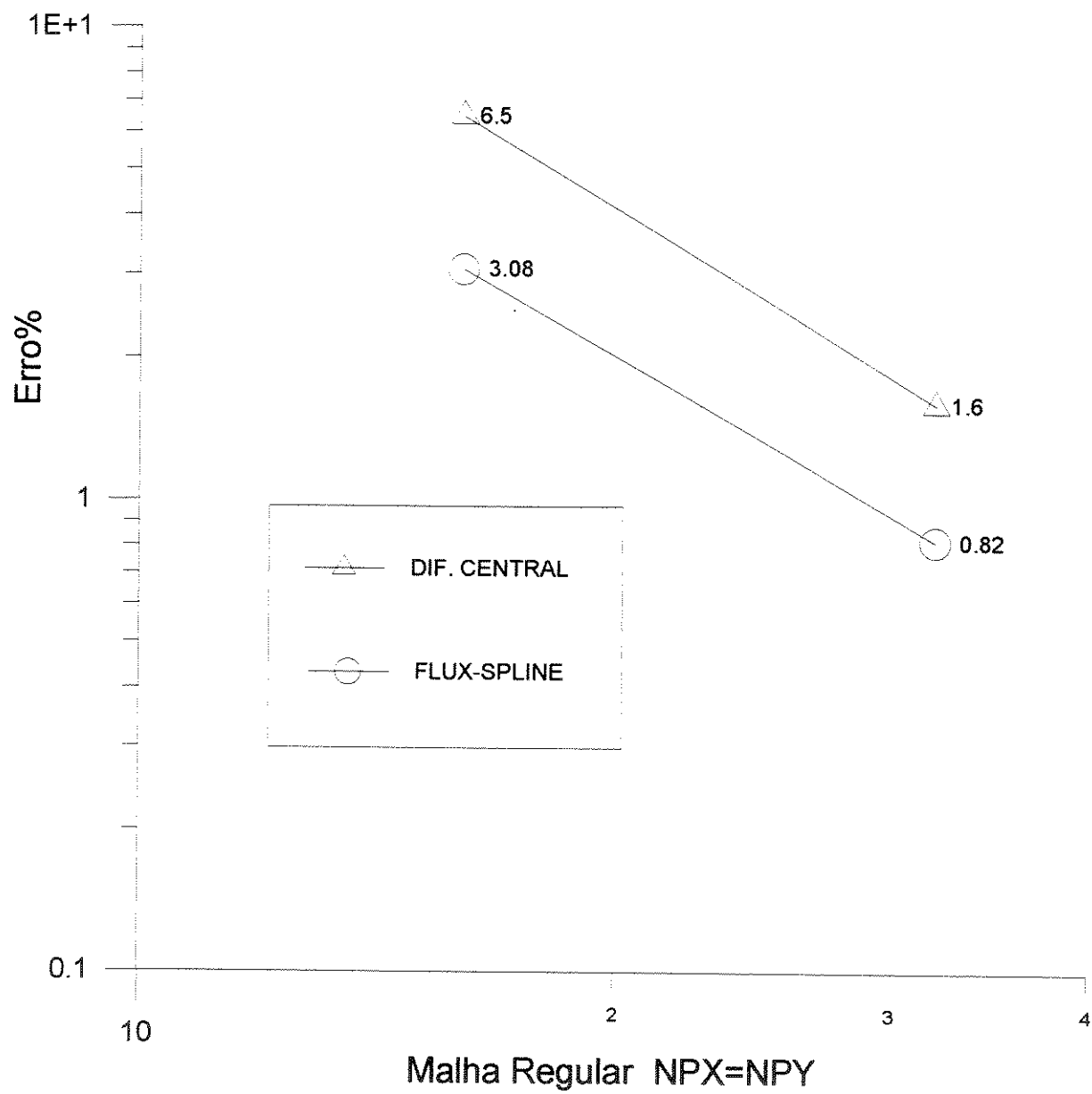
Malha 11x11 -> $E_{\text{max}} = 6,38\%$

Malha 23x23 -> $E_{\text{max}} = 1,55\%$

Figura 3.11

Teste D3

Difusão em placa plana sob fortes gradientes



3.2.5 Conclusões com relação à Difusão

O esquema Flux-Spline quando aplicado a problemas difusivos, apresenta resultados superiores aos fornecidos pelos métodos freqüentemente encontrados na literatura, como diferenças finitas e o tradicional esquema utilizado em volumes finitos. Essa superioridade em termos de acuidade e precisão, pode ser usada para que com malhas grosseiras, obtenha-se respostas que seriam encontradas às custas de maior esforço computacional por métodos tradicionais.

Varejão (1979) demonstrou com relação ao método convencional utilizado por Patankar (1980), que embora o trabalho computacional por iteração fosse maior, o método era mais rápido, pois necessitava de um número menor de iterações para convergir, pelo fato de se poder trabalhar com malhas menos refinadas na obtenção de um certo nível de erro.

Constatou-se aqui que ao se defrontar com condições de contorno de 2ª espécie, o esquema FLUX-SPLINE, embora mantenha a ordem do erro passa a necessitar de um maior número de iterações para um determinado critério de convergência. De maneira geral, pode-se afirmar que, para problemas difusivos, o tratamento das fronteiras influencia de maneira acentuada tanto a precisão como a ordem de acurácia e velocidade de convergência do esquema FLUX-SPLINE.

3.3 Esquema FLUX-SPLINE para Convecção-Difusão

A forma conservativa da equação de conservação para convecção-difusão em regime permanente é:

$$\frac{\partial}{\partial X} JX + \frac{\partial}{\partial Y} JY = S \Phi$$

onde :

$$JX = \rho U \cdot \Phi - \Gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (3.72)$$

$$JY = \rho V \cdot \Phi - \Gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \quad (3.73)$$

A obtenção do perfil interpolante para Φ na convecção-difusão se dá na mesma seqüência da difusão unidimensional com os parâmetros sendo armazenados ou definidos de acordo com a figura 3.13.

3.3.1 Caso Unidimensional

A equação geral de conservação no caso de transporte unidimensional assume a forma:

$$\frac{dJ}{dX} = S \Phi$$

$$\text{onde } J = \rho U \cdot \Phi - \Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \quad (3.74)$$

O fluxo difusivo $-\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX}$ foi tratado anteriormente, sendo necessário agora introduzir novos parâmetros geométricos devido à presença dos fluxos convectivos $\rho U \cdot \Phi$. Estes parâmetros serão definidos conforme a necessidade ao longo da

derivação, com vistas à aplicação do esquema a problemas de escoamento. Os fluxos mássicos ρU , assim como os fluxos totais J , serão posicionados nas faces do volume de controle, assumindo-se valores médios ao longo das mesmas.

Novamente, assumindo-se que o fluxo J pode variar linearmente através de um volume de controle i

$$J = \frac{(J_{i+1} - J_i)}{\Delta X_i} \cdot X_i + J_i$$

$$0 \leq X_i \leq \Delta X_i$$

Levando essa informação à expressão (3.74) do fluxo J obtém-se:

$$\rho U \cdot \Phi - \Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX_i} = (J_{i+1} - J_i) \cdot \frac{X_i}{\Delta X_i} + J_i \quad (3.75)$$

Hipóteses Simplificadoras:

O termo responsável pelo transporte convectivo ρU , é constante ao longo do volume de controle i e assim $\underline{\rho U = \rho U_i}$.

O coeficiente de difusão também é suposto constante no volume de controle i , e daí $\underline{\Gamma = \Gamma_i}$.

Graças a essas hipóteses simplificadoras, a equação (3.75) pode ser colocada na forma:

$$\frac{d\Phi}{dX_i} - \frac{\rho U_i}{\Gamma_i} \cdot \Phi = - \left(\frac{J_{i+1} - J_i}{\Gamma_i} \right) \cdot \frac{X_i}{\Delta X_i} - \frac{J_i}{\Gamma_i} \quad (3.76)$$

Com a condição de contorno

$$\Phi = \Phi_i \quad \text{em} \quad X_i = \Delta X_i^- ;$$

a solução analítica da equação diferencial linear de 1ª ordem não homogênea (3.76) é:

$$\Phi(X_i) = \Phi_i \cdot e^\delta + \frac{J_i}{\rho U_i} \cdot \left\{ 1 - e^\delta \right\} + \left(\frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i} \right) \cdot \frac{1}{\rho U_i} \cdot \left\{ X_i - \Delta X_i \cdot e^\delta + \frac{\Gamma_i}{\rho U_i} \cdot (1 - e^\delta) \right\} \quad (3.77)$$

$$\delta = \frac{\rho U_i}{\Gamma_i} \cdot (X_i - \Delta X_i^-) \quad (3.78)$$

Assim, enquanto que na difusão pura obteve-se uma parábola, aqui há uma curva interpolante do tipo:

$$\Phi = A \cdot e^{\left(\frac{\rho U X}{\Gamma} \right)} + B \cdot X + C$$

onde A, B e C são expressos em termos de J_i , J_{i+1} , Φ_i , das propriedades e dos parâmetros geométricos do volume de controle.

Para se realizar o acoplamento do volume de controle i ao restante do domínio discretizado, utiliza-se como anteriormente, a condição de continuidade de Φ que, como lá na difusão, traz a continuidade da derivada, pois ρU é contínuo nas interfaces.

Assim:

$$\Phi_i^- = \Phi_{i-1}^+$$

Com $X_i = 0$ na equação (3.77) obtém-se:

$$\Phi_i^- = \Phi_i \cdot e^{-P_i^-} + \frac{1}{A(-P_i^-)} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot J_i - \frac{1}{1+f_i^+} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot G(-P_i^-) \cdot (J_i - J_{i+1})$$

(3.79)

onde:

$$P_i^- = \rho U_i \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \quad (3.80)$$

$$f_i^+ = \frac{\Delta X_i^+}{\Delta X_i^-} \quad (3.81)$$

$$A(P) = \frac{P}{e^P - 1} \quad (3.82)$$

$$G(P) = \frac{e^P \cdot (P - 1) + 1}{P^2} \quad (3.83)$$

Aplicando-se a equação (3.77) para Φ , ao volume de controle i-1 e fazendo $X_{i-1} = \Delta X_{i-1}$ obtém-se:

$$\Phi_{i-1}^+ = \Phi_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \frac{1}{A(P_{i-1}^+)} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot J_i + \frac{1}{1+f_{i-1}^-} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot G(P_{i-1}^+) \cdot (J_i - J_{i-1})$$

(3.84)

onde:

$$P_{i-1}^+ = \rho U_i \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \quad (3.85)$$

$$f_{i-1}^- = \frac{\Delta X_{i-1}^-}{\Delta X_{i-1}^+} \quad (3.86)$$

A função $A(P)$ é a mesma que aparece no esquema convencional usado em Patankar (1980) enquanto que $G(P)$ é característica do esquema FLUX-SPLINE. O produto dessas duas funções fornece a função que Hsu(1981) chama de $Q(P)$.

Assim:

$$Q(P) = A(P) \cdot G(P)$$

$$Q(P) = \frac{e^P \cdot (P-1) + 1}{P \cdot (e^P - 1)} \quad (3.87)$$

que possui as propriedades:

$$Q(-P) = 1 - Q(P)$$

$$Q(P)_{P \rightarrow +\infty} = 1$$

$$Q(P)_{P \rightarrow -\infty} = 0$$

$$Q(P)_{P \rightarrow 0} = \frac{1}{2}$$

De agora em diante serão usadas as funções $A(P)$ e $Q(P)$. Note que nas equações (3.79) e (3.84), os termos que contém as diferenças dos fluxos, cumprirão o mesmo papel que na difusão. Na convecção, o fluxo J pode variar devido à mudança do valor do fluxo mássico que atravessa o volume de controle. De maneira que o perfil interpolante seja sensível à variação do fluxo ρU , será adicionado ao mesmo, um termo para o tratamento dessa possibilidade.

$$\text{Como: } \frac{dJ}{dX} = \frac{d}{dX} \left[\rho U \Phi - \Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \right]$$

$$\frac{dJ}{dX} = \rho U \frac{d\Phi}{dX} + \Phi \cdot \frac{d\rho U}{dX} - \frac{d}{dX} \left(\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \right)$$

$$\frac{dJ}{dX} = \rho U \frac{d\Phi}{dX} - \frac{d}{dX} \left(\Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \right) + \Phi \cdot \frac{d\rho U}{dX}$$

Tratando $\rho U \frac{d\Phi}{dX}$ como $\frac{d(\overline{\rho U} \Phi)}{dX}$, onde $\overline{\rho U}$ é encarado como constante, obtém-se:

$$\frac{dJ}{dX} = \left\{ \frac{d}{dX} \left[\overline{\rho U} \cdot \Phi - \Gamma \cdot \frac{d\Phi}{dX} \right] \right\} + \Phi \cdot \frac{d}{dX} \rho U$$

Dessa forma observa-se que a parte contida entre chaves foi discretizada e se encontra presente nas equações interpolantes. Faltaria então a discretização do termo $\Phi \cdot \frac{d}{dX} \rho U$. Considerando nesse termo, Φ como constante, impõe-se a seguinte aproximação:

$$\Phi \cdot \frac{d}{dX} \rho U = \Phi \cdot \frac{\Delta(\rho U)}{\Delta X}$$

Esse termo é então inserido junto à diferença dos fluxos J de maneira que os perfis interpolantes na forma:

$$\Phi_i^- = \Phi_i \cdot e^{-P_i^-} + \frac{1}{A(-P_i^-)} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot J_i - \frac{1}{1+f_i^+} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{Q(-P_i^-)}{A(-P_i^-)} \cdot \{\xi\} \quad (3.88)$$

$$\xi = (J_i - J_{i+1}) + (\rho U_{i+1} - \rho U_i) \cdot \Phi_i$$

para o volume de controle i , e

$$\Phi_{i-1}^+ = \Phi_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \frac{1}{A(P_{i-1}^+)} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot J_i + \frac{1}{1+f_{i-1}^-} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{Q(P_{i-1}^+)}{A(P_{i-1}^+)} \cdot \{\Omega\}$$

$$\Omega = (J_i - J_{i-1}) + (\rho U_{i-1} - \rho U_i) \cdot \Phi_{i-1} \quad (3.89)$$

para o volume de controle $i-1$; se forem aplicados ao caso onde Φ é constante e ρU varia linearmente; fornecerão solução isenta de erro para a equação de transporte. A figura 3.13A abaixo mostra como ficam então as distribuições de J e ρU ao longo dos volumes de controle numa determinada direção.

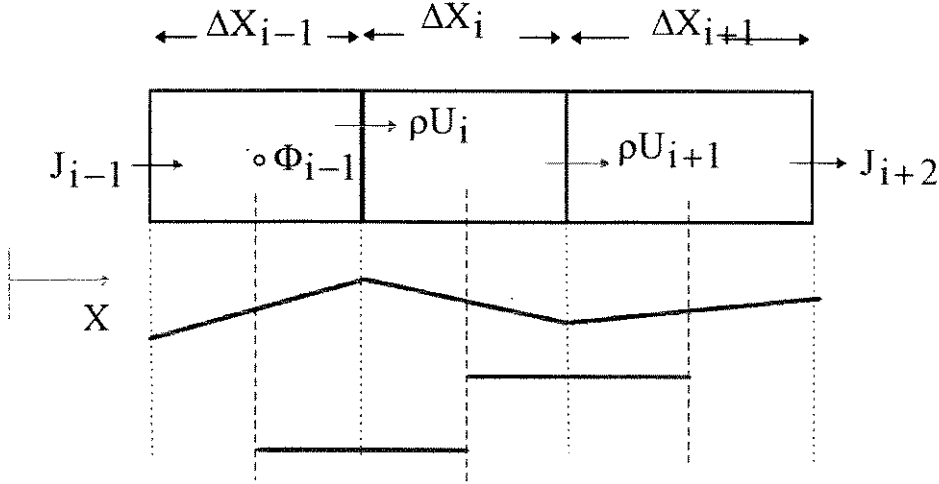


Figura 3.13A: Distribuição de J e ρU ao longo do domínio X

Impondo-se a condição de continuidade de Φ na interface obtém-se a expressão para os fluxos J :

$$J_i = \hat{J}_i + DJ_i \cdot \left\{ \Phi_{i-1} \cdot e^{P_{i-1}^+} - \Phi_i \cdot e^{-P_i^-} \right\} \quad (3.90)$$

onde:

$$DJ_i = \left[\frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{1}{A(-P_i^-)} + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{1}{A(P_{i-1}^+)} \right]^{-1} \quad (3.91)$$

$$\hat{J}_i = BJ_i \cdot [(J_i - J_{i+1}) + (\rho U_{i-1} - \rho U_i) \cdot \Phi_i] + CJ_i \cdot \{(J_i - J_{i-1}) + (\rho U_{i-1} - \rho U_i) \cdot \Phi_{i-1}\} \quad (3.92)$$

$$BJ_i = \frac{1}{1+f_i^+} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_i} \cdot \frac{Q(-P_i^-)}{A(-P_i^-)} \cdot DJ_i \quad (3.93)$$

$$CJ_i = \frac{1}{1+f_{i-1}^-} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \cdot \frac{Q(P_{i-1}^+)}{A(P_{i-1}^+)} \cdot DJ_i \quad (3.94)$$

3.3.1.1 Obtenção da equação de discretização de Φ

A integração da equação de governo (3.2) sobre o volume de controle i , de acordo com o método dos volumes finitos fornece:

$$(J_{i+1} - J_i) = Sc_i^\Phi \cdot \Delta X_i + Sp_i^\Phi \cdot \Delta X_i \cdot \Phi_i \quad (3.95)$$

A substituição das equações de J do lado esquerdo da expressão fornece depois de alguma álgebra:

$$AP_i \cdot \Phi_i = AIM_i \cdot \Phi_{i-1} + AIP_i \cdot \Phi_{i+1} + CON_i \quad (3.96)$$

$$AIM_i = DJ_i \cdot e^{P_{i-1}^+} \quad (3.97)$$

$$AIP_i = DJ_{i+1} \cdot e^{-P_{i+1}^-} \quad (3.98)$$

$$AP_i = AIP_i + AIM_i - Sp_i^\Phi \cdot \Delta X_i \quad (3.99)$$

$$CON_i = Sc_i^\Phi \cdot \Delta X_i + Ssp_i^\Phi \quad (3.100)$$

$$Ssp_i^\Phi = (\hat{J}_i - \hat{J}_{i+1}) \quad (3.101)$$

Para um campo de velocidades nulo, as expressões acima, reproduzem as obtidas na difusão pura. As condições de contorno receberão o mesmo tratamento definido na difusão, pela imposição de volumes de controle de espessura nula mais as equações de correção dos valores de fronteira (3.88) e (3.89). Assim se em $X=0$, J_2 é conhecido obtém-se da equação 3.88 a expressão:

$$\Phi_1 = \Phi_2^0 \cdot e^{-P_2^-} + \frac{1}{A(-P_2^-)} \cdot \frac{\Delta X_2^-}{\Gamma_2} \cdot J_2 - \frac{1}{1+f_2^+} \cdot \frac{\Delta X_2^-}{\Gamma_2} \cdot \frac{Q(-P_2^-)}{A(-P_2^-)} \cdot \left\{ (J_2 - J_3)^0 + (\rho U_3 - \rho U_2) \cdot \Phi_2^0 \right\}$$

O método de solução segue os mesmos princípios definidos na difusão, com o perfil de velocidade sendo fornecido no 1º passo.

3.3.2. Convecção-Difusão Bidimensional

A expansão do esquema para problemas bidimensionais se fará como na difusão pura. Os parâmetros geométricos são definidos de forma semelhante à convecção unidimensional. Os valores dos fluxos JX , JY , ρU e ρV são armazenados ao longo das faces dos volumes de controle como mostrado na figura 3.14 sendo as expressões para JX e JY geradas a partir daquela deduzida para o caso unidimensional. Assim para a direção X obtém-se:

$$JX_{i,j} = \hat{J}X_{i,j} + DJX_{i,j} \cdot \left[\Phi_{i-1,j} \cdot e^{P_{i-1,j}^+} - \Phi_{i,j} \cdot e^{-P_{i,j}^-} \right] \quad (3.102)$$

onde:

$$Px_{i,j}^- = \rho U_{i,j} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} \quad (3.103)$$

$$Px_{i-1,j}^+ = \rho U_{i,j} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1}} \quad (3.104)$$

$$DJX_{i,j} = \left[\frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{1}{A(-Px_{i,j}^-)} + \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} \cdot \frac{1}{A(Px_{i-1,j}^+)} \right]^{-1} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}X_{i,j} = & B JX_{i,j} \cdot \left\{ (JX_{i,j} - JX_{i+1,j}) + (\rho U_{i+1,j} - \rho U_{i,j}) \cdot \Phi_{i,j} \right\} + \\ & C JX_{i,j} \cdot \left\{ (JX_{i,j} - JX_{i-1,j}) + (\rho U_{i-1,j} - \rho g U_{i,j}) \cdot \Phi_{i-1,j} \right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$BJX_{i,j} = \frac{1}{1 + fx_i^+} \cdot \frac{\Delta X_i^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{Q(-Px_{i,j}^-)}{A(-Px_{i,j}^-)} \cdot DJX_{i,j} \quad (3.107)$$

$$CJX_{i,j} = \frac{1}{1 + fx_{i-1}^-} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}^+}{\Gamma_{i-1,j}} \cdot \frac{Q(Px_{i-1,j}^+)}{A(Px_{i-1,j}^+)} \cdot DJX_{i,j} \quad (3.108)$$

$$fx_i^+ = \frac{\Delta X_i^+}{\Delta X_i^-} \quad (3.109)$$

$$fx_{i-1}^- = \frac{\Delta X_{i-1}^-}{\Delta X_{i-1}^+} \quad (3.110)$$

Na direção Y:

$$JY_{i,j} = \hat{J}Y_{i,j} + DJY_{i,j} \cdot \left[\Phi_{i,j-1} \cdot e^{Py_{i,j-1}^+} - \Phi_{i,j} \cdot e^{-Py_{i,j}^-} \right] \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}Y_{i,j} = & BJY_{i,j} \cdot \left[(JY_{i,j} - JY_{i,j+1}) + (\rho V_{i,j+1} - \rho V_{i,j}) \cdot \Phi_{i,j} \right] + \\ & CJY_{i,j} \cdot \left[(JY_{i,j} - JY_{i,j-1}) + (\rho V_{i,j-1} - \rho V_{i,j}) \cdot \Phi_{i,j-1} \right] \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$Py_{i,j-1}^+ = \rho V_{i,j} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Gamma_{i,j-1}} \quad (3.113)$$

$$Py_{i,j}^- = \rho V_{i,j} \cdot \frac{\Delta Y_j^-}{\Gamma_{i,j}} \quad (3.114)$$

$$DJY_{i,j} = \left[\frac{\Delta Y_j^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{1}{A(-Py_{i,j}^-)} + \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Gamma_{i,j-1}} \cdot \frac{1}{A(Py_{i,j-1}^+)} \right]^{-1} \quad (3.115)$$

$$BJY_{i,j} = \frac{1}{1 + fy_j^+} \cdot \frac{\Delta Y_j^-}{\Gamma_{i,j}} \cdot \frac{Q(-Py_{i,j}^-)}{A(-Py_{i,j}^-)} \cdot DJY_{i,j} \quad (3.116)$$

$$CJY_{i,j} = \frac{1}{1 + fy_{j-1}^-} \cdot \frac{\Delta Y_{j-1}^+}{\Gamma_{i,j-1}} \cdot \frac{Q(Py_{i,j-1}^+)}{A(Py_{i,j-1}^+)} \cdot DJY_{i,j} \quad (3.117)$$

$$fy_j^+ = \frac{\Delta Y_j^+}{\Delta Y_j^-} \quad (3.118)$$

$$fy_{j-1}^- = \frac{\Delta Y_{j-1}^-}{\Delta Y_{j-1}^+} \quad (3.119)$$

A integração da equação de conservação conduz a:

$$(JX_{i+1,j} - JX_{i,j}) \cdot \Delta Y_j + (JY_{i,j+1} - JY_{i,j}) \cdot \Delta X_i = Sc_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + Sp_{i,j}^{\Phi} \cdot \Phi_{i,j} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_i$$

Substituindo-se as respectivas expressões para os fluxos obtém-se:

$$AP_{i,j} \cdot \Phi_{i,j} = AIP_{i,j} \cdot \Phi_{i+1,j} + AIM_{i,j} \cdot \Phi_{i-1,j} + AJP_{i,j} \cdot \Phi_{i,j+1} + AJM_{i,j} \cdot \Phi_{i,j-1} + CON_{i,j} \quad (3.120)$$

onde:

$$AIP_{i,j} = DJX_{i+1,j} \cdot e^{-Px_{i-1,j}^-} \cdot \Delta Y_j \quad (3.121)$$

$$AIM_{i,j} = DJX_{i,j} \cdot e^{Px_{i-1,j}^+} \cdot \Delta Y_j \quad (3.122)$$

$$AJP_{i,j} = DJY_{i,j+1} \cdot e^{-Py_{i,j+1}^-} \cdot \Delta X_i \quad (3.123)$$

$$AJM_{i,j} = DJY_{i,j} \cdot e^{Py_{i,j-1}^+} \cdot \Delta X_i \quad (3.124)$$

$$AP_{i,j} = \dot{A}IM_{i,j} + AIP_{i,j} + AJM_{i,j} + AJP_{i,j} - Sp_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j \quad (3.125)$$

$$CON_{i,j} = Sc_{i,j}^{\Phi} \cdot \Delta X_i \cdot \Delta Y_j + Ssp_{i,j}^{\Phi} \quad (3.126)$$

$$Ssp_{i,j}^{\Phi} = (\hat{J}X_{i,j} - \hat{J}X_{i+1,j}) \cdot \Delta Y_j + (\hat{J}Y_{i,j} - \hat{J}Y_{i,j+1}) \cdot \Delta X_i \quad (3.127)$$

O tratamento das condições de contorno e o método de solução são aqueles usados na difusão bidimensional, fornecendo-se a mais, os novos parâmetros geométricos e o campo de velocidades.

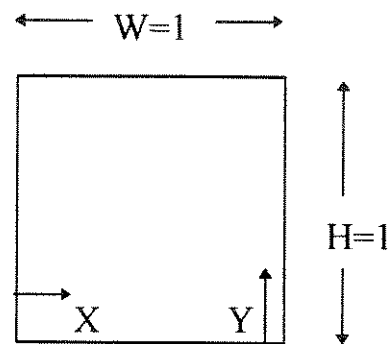


Fig. 3.12: Sistema de coordenadas e domínio para difusão

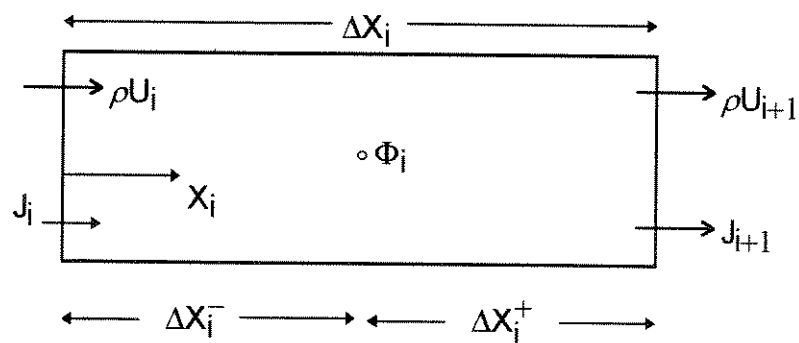


Fig. 3.13: Volume de controle para convecção unidimensional

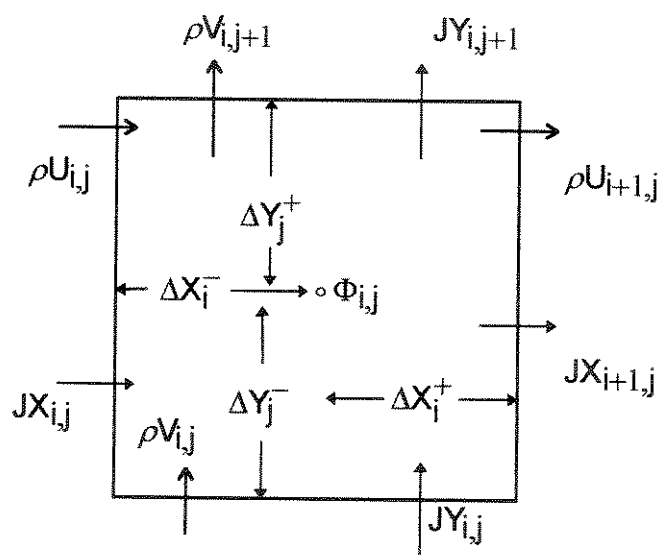


Fig. 3.14: Vol. de controle para convecção bidimensional

3.3.3 Aplicação do Esquema FLUX-SPLINE a Convecção-Difusão Bidimensional

TESTE CD1:

Seguindo a mesma proposta aplicada no caso de difusão pura, Philipps *et al* (1989) apresentam um teste para aferição de métodos numéricos quando aplicados à equação de transporte. Novamente, a presença de regiões contendo fortes gradientes da variável dependente, reunirá as dificuldades para a simulação numérica da distribuição de Φ .

O domínio de X e Y varia entre zero e um e o perfil de velocidade tem a forma:

$$U = (1 - X) \cdot V_c$$

$$V = Y \cdot V_c$$

A solução analítica abaixo para a variável dependente é plotada na figura 3.15 para $Pe=100$:

$$\Phi(X, Y) = 500 \cdot e^{\delta} + 10$$

$$\delta = -0,1 \cdot Pe \cdot (1 - X) \cdot Y$$

$$Pe = \frac{\rho \cdot V_c \cdot L_c}{\Gamma}$$

$$\Gamma = \frac{k}{C_p} = 1$$

O termo fonte correspondente à distribuição é dado por :

$$Sc^{\Phi} = 5 \cdot Pe \cdot e^{\delta} \cdot \left[(1 - X)^2 + Y^2 \right]$$

As condições de contorno são:

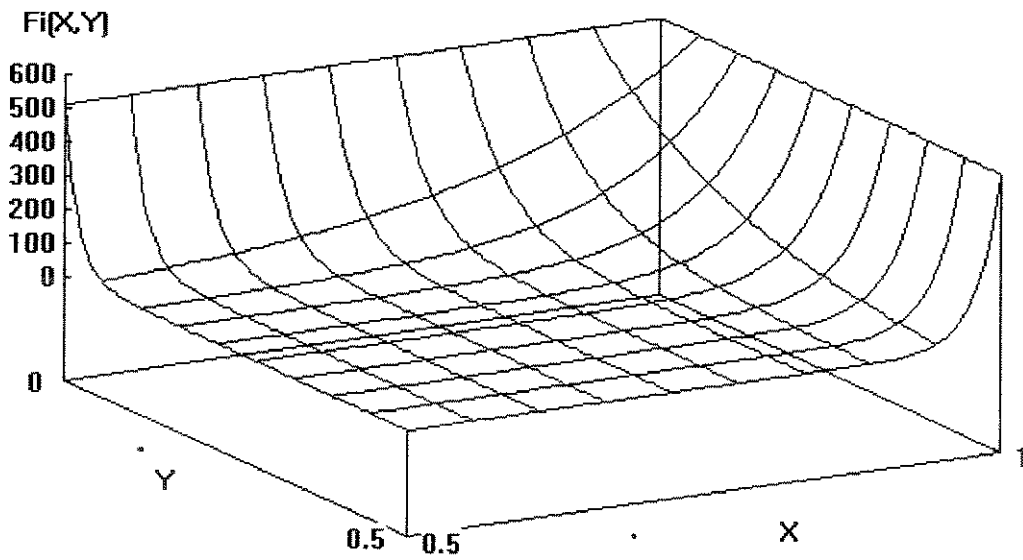
$$\Phi(0, Y) = 500 \cdot e^{-0,1 \cdot Pe \cdot Y} + 10$$

$$\Phi(1, Y) = 510$$

$$\Phi(X, 0) = 510$$

$$\Phi(X, 1) = 500 \cdot e^{-0,1 \cdot Pe \cdot (1 - X)} + 10$$

Figura 3.15: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD1



Os erros são definidos como:

$$\varepsilon_{i,j} = 100 \cdot \text{ABS} \left[\frac{\Phi_{\text{num}} - \Phi_{\text{exato}}}{\Phi_{\text{exato}}} \right]_{i,j}$$

$$E_{i,j} = 100 \cdot \text{ABS} \left[\frac{\Phi_{\text{num}} - \Phi_{\text{exato}}}{\Phi_{\text{exato}_{\text{max}}}} \right]_{i,j}$$

O esquema numérico usado é o QUICK, desenvolvido por Leonard (1979). A tabela 3.5 abaixo mostra os resultados obtidos para o valor máximo dos erros, sob uma malha 64 x 64 volumes de controle. Os resultados obtidos pelo esquema QUICK são os apresentados pelo trabalho de Philips *et al* (1989)

Tab. 3.5: Comparação em convecção-difusão com o esquema QUICK

Erro	Pe = 100		Pe = 1000	
	QUICK	FLUX-SPLINE	QUICK	FLUX-SPLINE
ε	0,095	0,0484	57	40,56
E	0,044	0,02231	3,84	2,549

Usando-se uma malha de 46 x 46 elementos, obtém-se com FLUX-SPLINE:

Para Pe = 100

$\varepsilon = 0,0926$

$E = 0,042$

Para Pe = 1000

$\varepsilon = 70,26$

$E = 3,564$

Esses resultados são plotados na figura 3.16. Novamente se é estabelecido um nível de erro, o esquema FLUX-SPLINE necessita de um menor número de volumes de controle para atingi-lo.

TESTE CD2:

Figueiredo(1988), em seu trabalho de Doutorado, estabeleceu a partir da solução analítica da equação de transporte, seis soluções elementares, que foram usadas na aferição de vários esquemas discretizantes.

São eles:

- Exponencial de Allen
- Exponencial de Dennis
- Diferença Central
- Pela montante
- Pela montante sem difusão
- Híbrido

A equação de transporte aplicada a um escoamento na direção x como mostrado na figura 3.17, sob conveniente adimensionalização toma a forma:

$$Pe \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.128)$$

$$\text{onde: } Pe = \frac{\rho L_c V_c}{\frac{k}{C_p}}$$

$$\text{e } V_c = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$$

onde u_1 e v_1 são as velocidades nas direções x_1 e y_1 respectivamente.

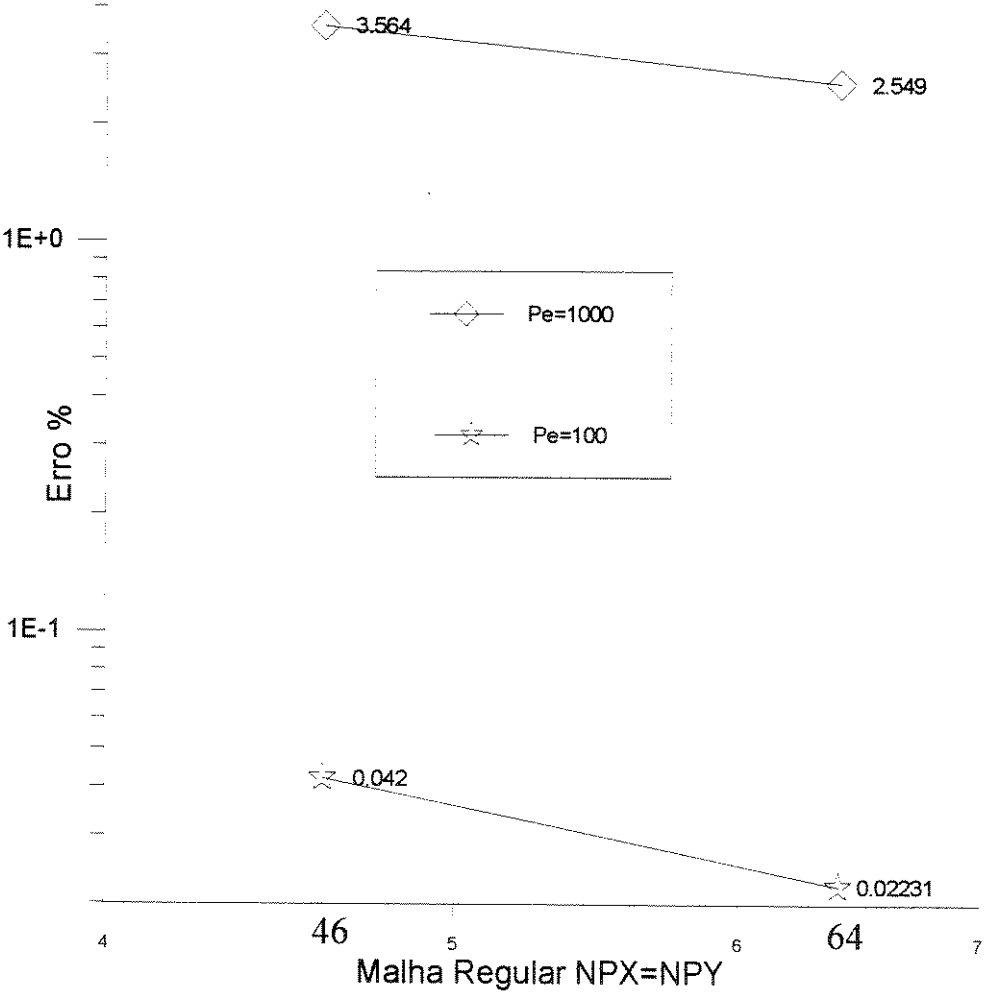
A equação (3.128) admite uma solução por separação de variáveis com:

$$\Phi(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (3.129)$$

Figura 3.16

Convecção-Difusão sob fortes gradientes

Teste CD1



Obtendo – se:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \lambda^2 Y = 0 \quad (3.130)$$

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} + Pe \cdot \frac{dX}{dx} \pm \lambda^2 X = 0 \quad (3.131)$$

Depois de algumas considerações chega-se ao conjunto de soluções elementares:

$$\Phi_A = \exp^{\delta_A} \cdot \text{sen}(\lambda \cdot y)$$

$$\delta_A = \left(Pe - \sqrt{Pe^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Phi_B = e^{\delta_B} \cdot \text{sen}(\lambda \cdot y)$$

$$\delta_B = \left(Pe + \sqrt{Pe^2 + 4 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Phi_C = e^{\delta_C} \cdot e^{\lambda \cdot y}$$

$$\delta_C = \left(Pe - \sqrt{Pe^2 - 4 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Phi_D = e^{\delta_D} \cdot e^{\lambda \cdot y}$$

$$\delta_D = \left(Pe + \sqrt{Pe^2 - 4 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Phi_{CD} = \sin(\delta_{CD}) \cdot e^{Pe \cdot \frac{x}{2}} \cdot e^{\lambda \cdot Y}$$

$$\delta_{CD} = \sqrt{4 \cdot \lambda^2 - Pe^2} \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Phi_{DC} = \cos(\delta_{DC}) \cdot e^{Pe \cdot \frac{x}{2}} \cdot e^{\lambda \cdot y}$$

$$\delta_{DC} = \delta_{CD}$$

A transformação entre as coordenadas é feita através das expressões:

$$x = x_1 \cdot \cos \alpha + y_1 \cdot \sin \alpha$$

$$y = x_1 \cdot \sin \alpha + y_1 \cdot \cos \alpha$$

Para um domínio quadrado em x_1 e y_1 com as soluções elementares, gera-se as condições de contorno e os valores do domínio interno, podendo-se então aferir o erro numérico. Os resultados de erro de Figueiredo(1988) foram normalizados previamente pela máxima distância entre os valores exatos de Φ dentro do domínio, incluindo os valores de contorno e são apresentados pela média quadrática.

$$E\% = \left[\frac{\sum_{j=2}^{J_{\max}-1} \sum_{i=2}^{I_{\max}-1} (\Phi_{\text{exato}} - \Phi_{\text{num}})^2}{(I_{\max} - 2) \cdot (J_{\max} - 2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

A tabela 6.5, página 241 do trabalho de Figueiredo(1986), apresenta o erro porcentual E definido acima, para cada tipo de função sob malha regular. Esses resultados são comparados aos obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE na tabela 3.6.

Os parâmetros adotados foram:

$Pe = 100$, $\alpha = 22,5$, $\lambda = \Pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, malha 10x10

Tab. 3.6: Comparação do erro na solução da equação de transporte

Função Tipo	Erro %			
	CD	ALLEN	DENNIS	SPLINE
A	0,14	0,68	17,2	$3,81 \times 10^{-2}$
B	0,1	1×10^{-7}	$2,5 \times 10^{-6}$	$1,29 \times 10^{-3}$
C	0,1	0,97	13,6	$3,86 \times 10^{-2}$
D	0,04	$3,6 \times 10^{-6}$	$4,4 \times 10^{-7}$	$1,99 \times 10^{-5}$

Para um valor de $\lambda = 9 \cdot \Pi \cdot \sqrt{2} / 2$ mantendo a mesma malha, selecionaremos para comparação na tabela 3.7 , as funções A e C, pois apresentaram os maiores níveis de erro. Essas funções são plotadas nas figuras 3.20 e 3.21.

Tab. 3.7: Comparação para as funções A e C

Função	CD	ALLEN	DENNIS	SPLINE
A	5,611	6,17	20,28	2,01
C	2,98	0,58	3,64	0,244

Essas comparações mostram um comportamento adequado do esquema FLUX-SPLINE em termos do nível de erro para todas as funções.



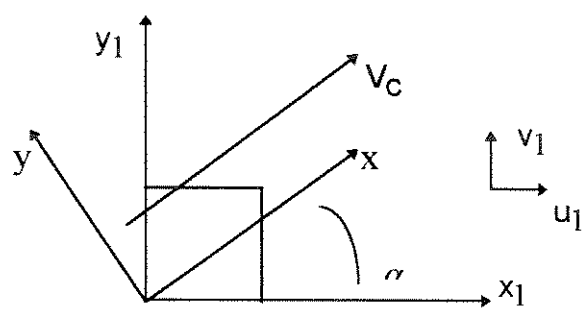


Fig. 3.17: Sistema de coordenadas para Teste

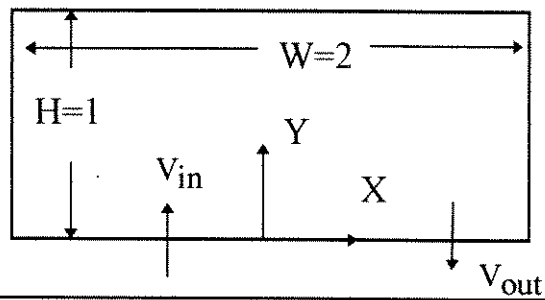


Fig.3.18:Domínio e coordenadas para Teste CD3

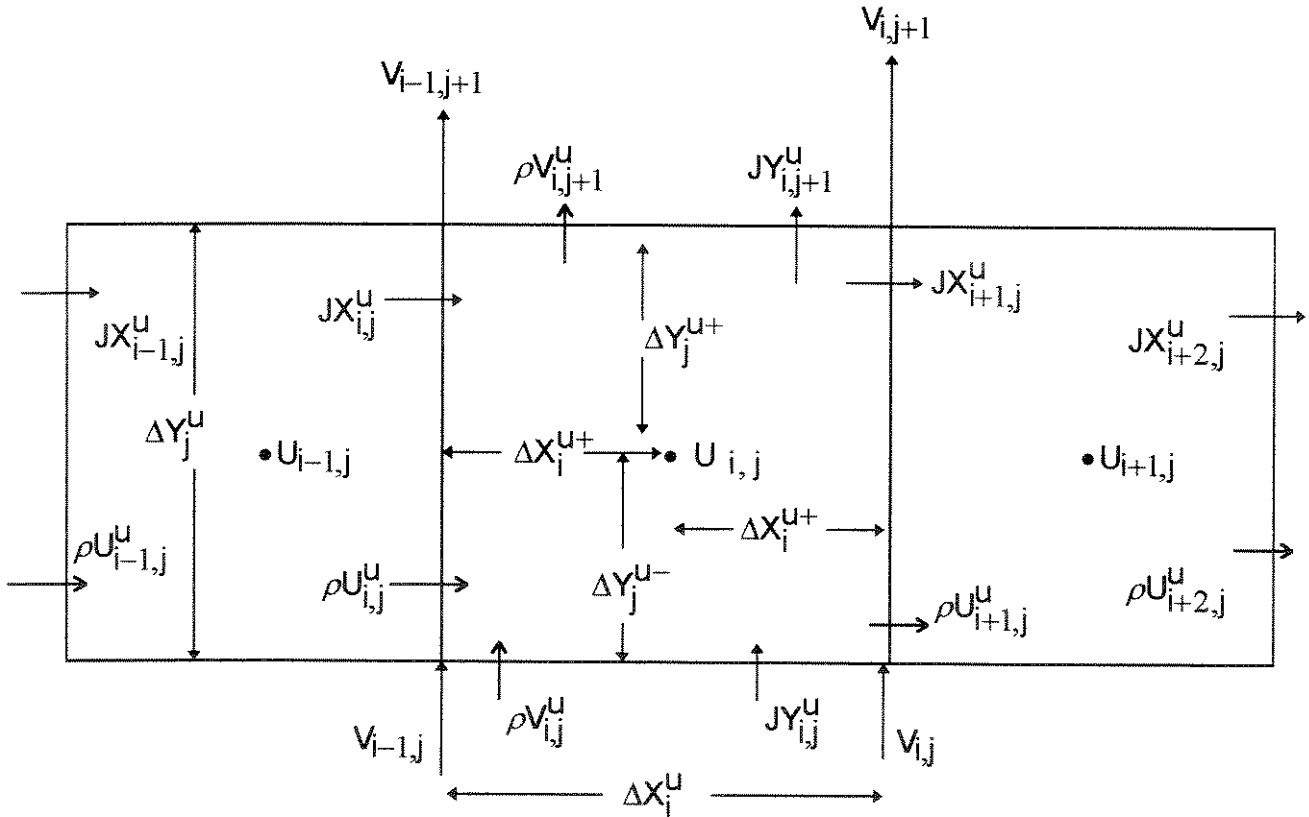


Fig.3.19: Volume de Controle para quantidade de movimento na direção X

Figura 3.20: Função $A(x,y)$

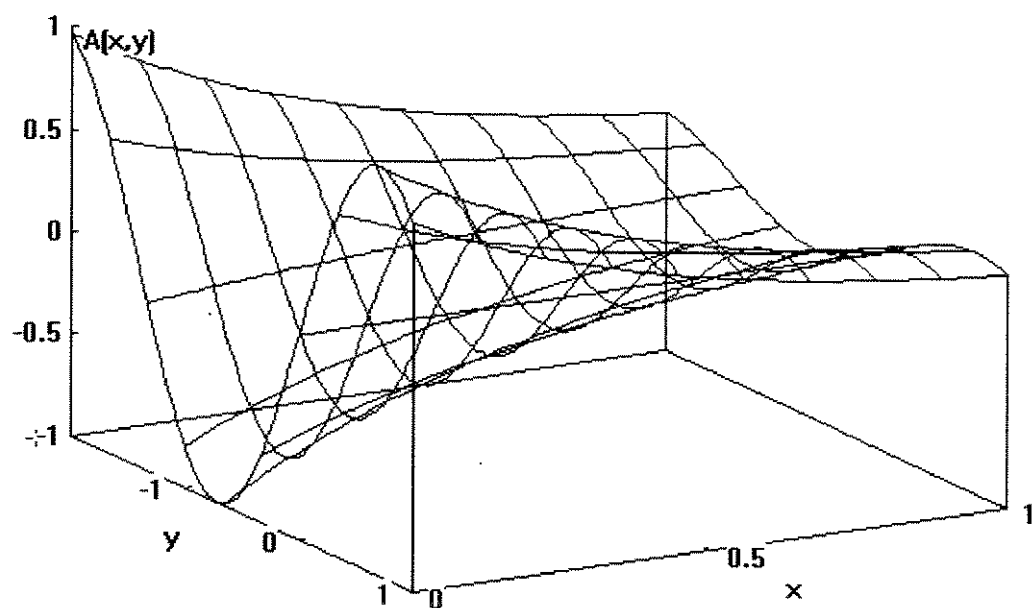
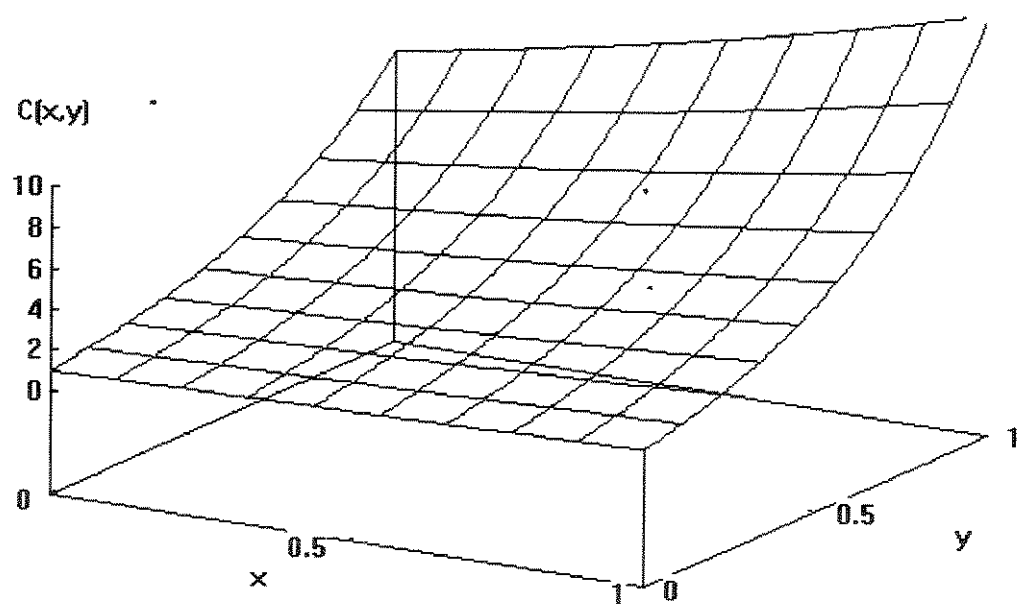


Figura 3.21: Distribuição de $C(x,y)$



TESTE CD3:

Um problema teste proposto por Gupta (1983) consiste no transporte do escalar descrito pela função:

$$\Phi(X, Y) = 2 \cdot X \cdot (X - 1) \cdot (\cos(2\pi Y) - 1) ,$$

cujo domínio e distribuição são mostrados na figura 3.22.

A equação de governo nesse caso é:

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + S \Phi$$

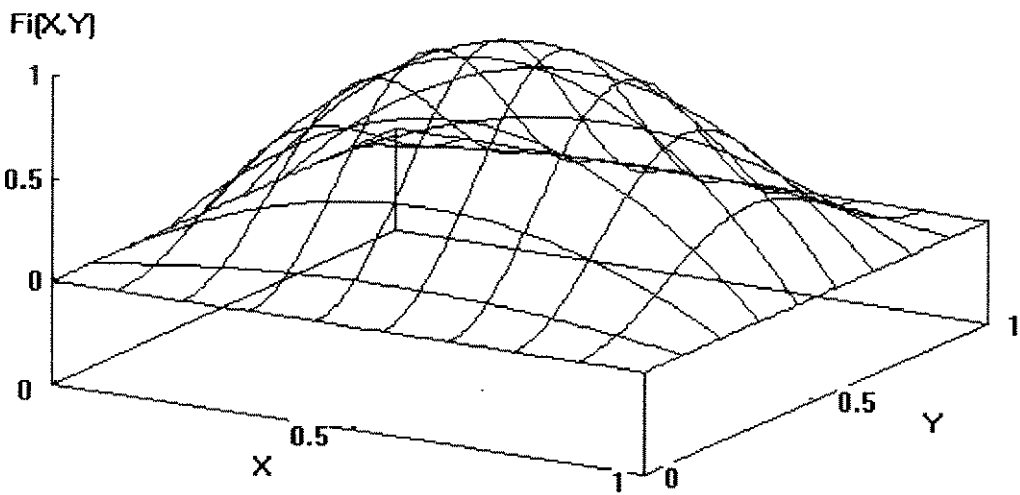
Braga (1990) usa esse problema como um dos testes para comparar o desempenho de um esquema numérico em diferenças finitas que usa uma molécula computacional de 9 pontos, (o que conduz à resolução de matrizes pentadiagonais) a outros esquemas da literatura como Upwind e QUICK .

O erro é definido nesse trabalho como:

$$E_{av} = \frac{100}{n^o \text{ de incógnitas}} \cdot \sum \left\{ \text{abs} \left[1 - \left(\frac{\Phi_{num}}{\Phi_{exato}} \right)_{i,j} \right] \right\}$$

Para uma malha de 21 x 21 elementos, Braga(1990) mostra em uma tabela a superioridade do seu esquema frente aos outros, entre os quais o QUICK. Será apresentada a comparação dos seus resultados com os obtidos com o esquema FLUX-SPLINE, para alguns pares λ_1 / λ_2 , na tabela 3.8 e na figura 3.23.

Figura 3.22: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD3



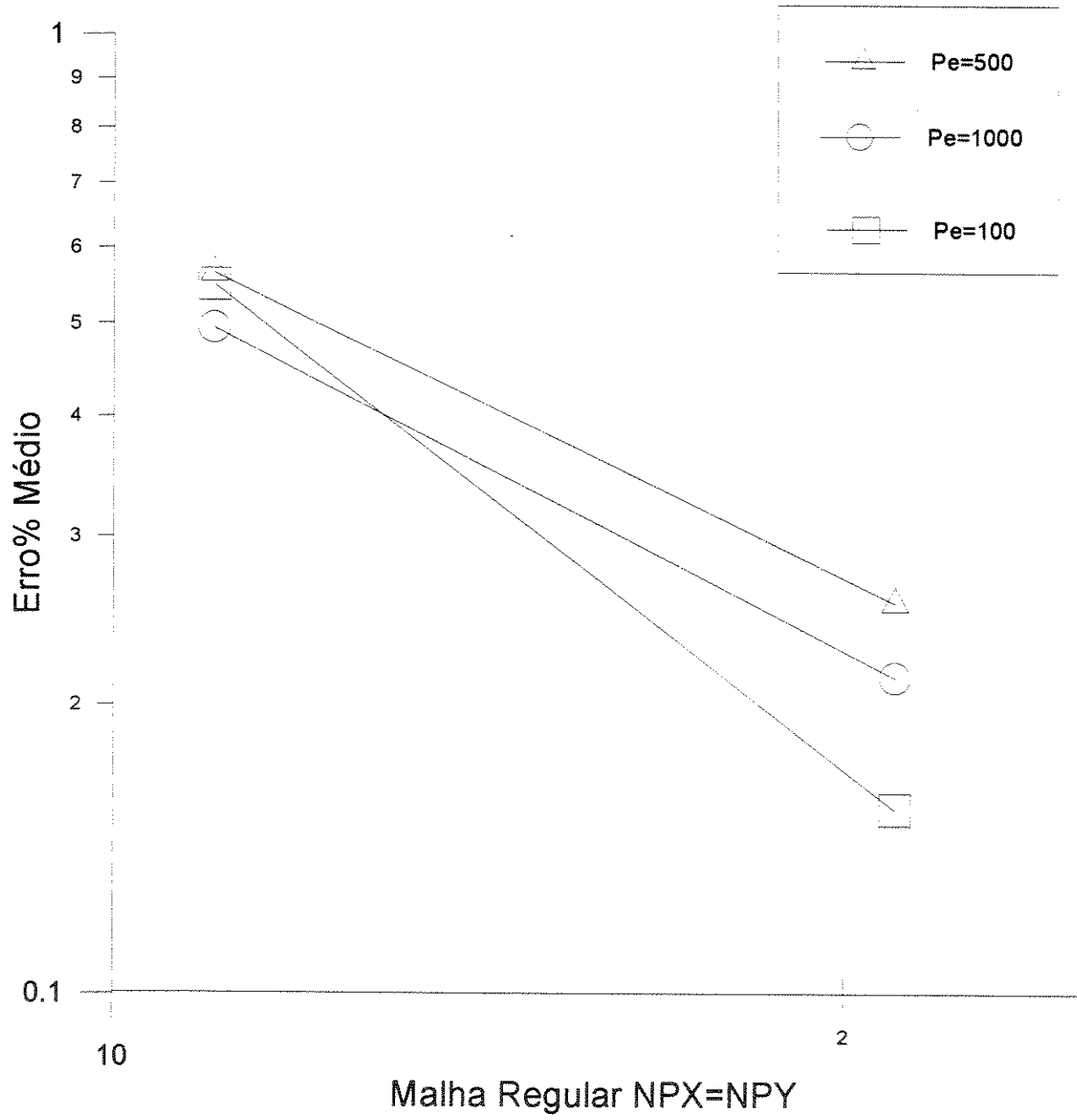
Tab. 3.8: Comparação de desempenho com método usando matrizes pentadiagonais

$\lambda_1 / \lambda_2 \rightarrow$	100/100		500/500		1000/1000	
	Braga	Spline	Braga	Spline	Braga	Spline
21 x 21	0,550	0,156	0,740	0,256	0,77	0,214
11 x 11		0,549		0,564		0,495

Nota-se um comportamento do esquema FLUX-SPLINE, apresentando pouca variação do erro com relação a λ_1 / λ_2 e nível do mesmo erro mais baixo do que o esquema proposto por Braga. Observa-se que uma malha 11 x 11 é suficiente para alcançar os níveis de erro apresentados pelo esquema proposto pelo autor com malha 21x21.

Figura 3.23

Teste CD3



TESTE CD4:

Inspirada no problema proposto por Smith e Hutton (1982), Nieckele (1985), propôs em seu trabalho de Doutorado o seguinte teste :

$$\Phi(X,Y) = 1 + \tanh(\Theta)$$

onde:

$$\Theta = 15 \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2) - 1 \right]$$

com um domínio retangular mostrado na figura 3.18 limitado por:

$$-1 \leq X \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq Y \leq 1$$

Esse perfil tem como característica uma variação abrupta da função $\Phi(X,Y)$, fornecendo assim dificuldades similares à problemas anteriormente abordados. É plotado na figura 3.24.

O perfil de velocidade tem como componentes:

$$U = 2 \cdot V_c \cdot Y \cdot (1 - X^2)$$

$$V = 2 \cdot V_c \cdot X \cdot (1 - Y^2)$$

O termo fonte necessário para a satisfação da equação de conservação para $\Gamma = 1$ é:

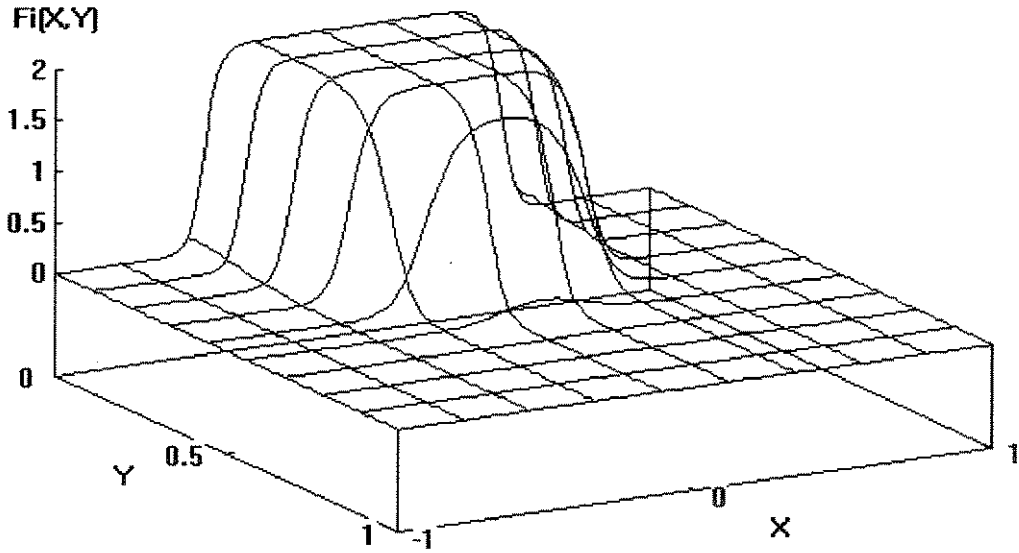
$$S^\Phi = 40 \cdot \sec^2 \Theta \cdot \left\{ (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2) + 80 \cdot \tanh \Theta \cdot \left[Y^2 \cdot (1 - X^2)^2 + X^2 \cdot (1 - Y^2)^2 \right] \right\}$$

O número de Péclet é definido como:

$$Pe = \frac{\rho \cdot V_c \cdot L_c}{\Gamma} \quad \text{onde} \quad \Gamma = \frac{K}{C_p}, \quad L_c = 1$$

A malha usada foi uniformemente espaçada com 12 volumes de controle na direção Y e 22 volumes de controle na direção X.

Figura 3.24 - Distribuição de $\Phi(X,Y)$ - Teste CD4



O erro foi definido como:

$$E_{\text{norm}_{\max}} = \max[E_n \%$$

$$E_n \% = \text{ABS} \left[\frac{\Phi - \Phi_{\text{exato}}}{\Phi_{\text{ex}_{\max}} - \Phi_{\text{ex}_{\min}}} \right] \cdot 100$$

$(\Phi_{\text{ex}_{\max}} - \Phi_{\text{ex}_{\min}})$ inclui os valores de fronteira

O resultado obtido pelo esquema FLUX-SPLINE é colocado na forma da tabela 3.9 e na figura 3.25.

Tab. 3.9: Erro como função de Péclet para problema de Smith-Hutton

Pe	10 ⁻¹	1,0	10,0	100,0	300	500	1000
E _n _{max} %	15,55	15,78	12,30	10,32	10,90	11,68	12,50

Os resultados para Pe igual a 100 e 1000 usando malha regular de 66x36 volumes de controle, foram colocados na forma gráfica e expostos nas figuras 3.25A e 3.25B. Embora não tenham sido encontradas oscilações espaciais com a distribuição daquelas mostradas no trabalho de Nieckele(1985) para altos números de Péclet, nota-se a ocorrência de "overshoot" e "undershoot" para Pe igual a 1000 o que ilustra as dificuldades enfrentadas pelo esquema na simulação numérica deste problema em particular.

TESTE CD5:

Com o objetivo de investigar o comportamento do esquema na convecção-difusão, com respeito a condições de contorno de 2ª espécie, adaptaremos o problema teste proposto por Varejão(1979), pág. 120, aproveitando a simetria presente. O campo de velocidade é tal que produz um escoamento recirculante dentro de uma cavidade quadrada. Os valores do contorno em X=0, são corrigidos usando-se a equação (3.88) para i=2.

Assim, para a cavidade aberta mostrada na figura 3.35 a variável dependente é distribuída na forma da função :

$$\Phi(X,Y) = (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2) \text{ , plotada na figura 3.26.}$$

Figura 3.25

Teste CD4

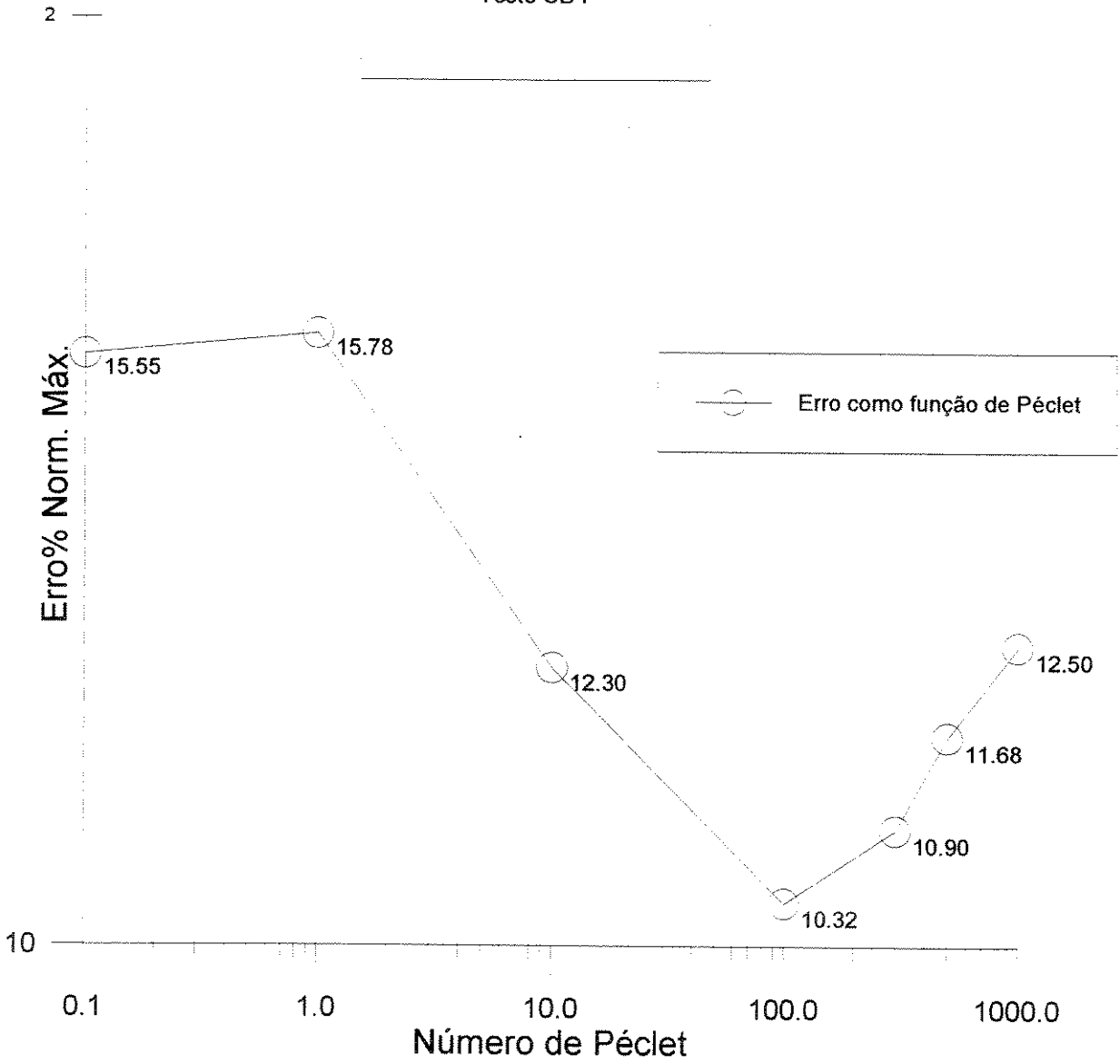


Figura 3.25A $Pe=100$

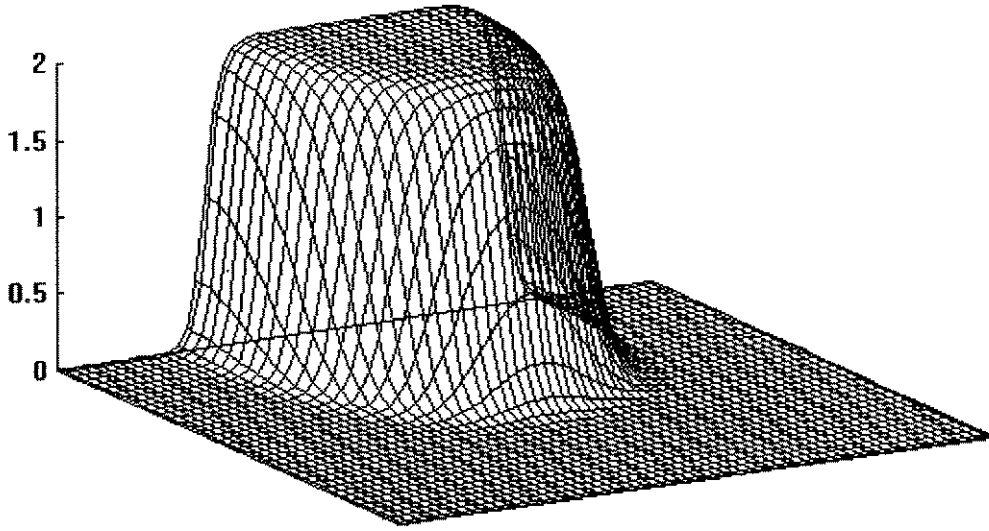
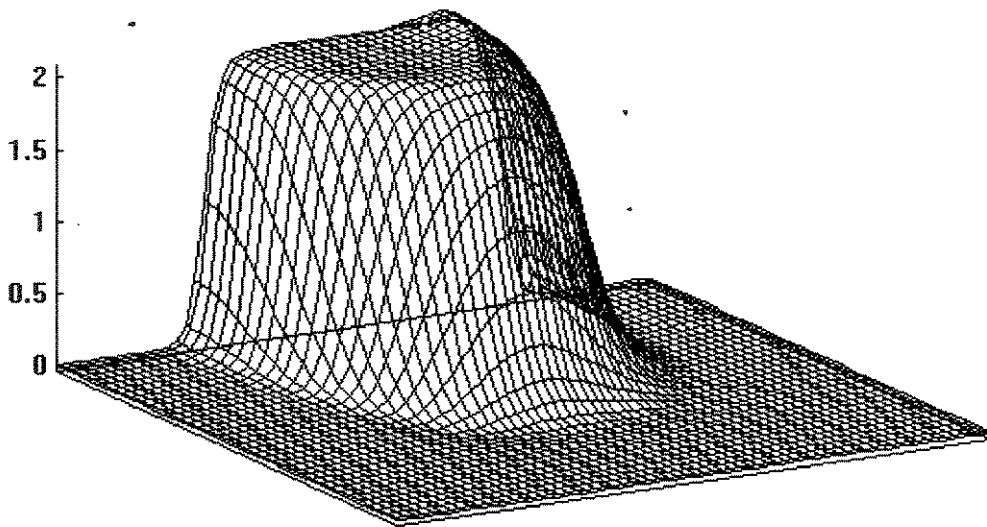


Figura 3.25B $Pe=1000$



$$U = -V_c \cdot Y \cdot (1 - Y^2) \cdot (1 - X^2)^2$$

$$V = V_c \cdot X \cdot (1 - X^2) \cdot (1 - Y^2)^2$$

$$0 \leq X \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq Y \leq 1$$

O termo fonte necessário à satisfação da equação de transporte é:

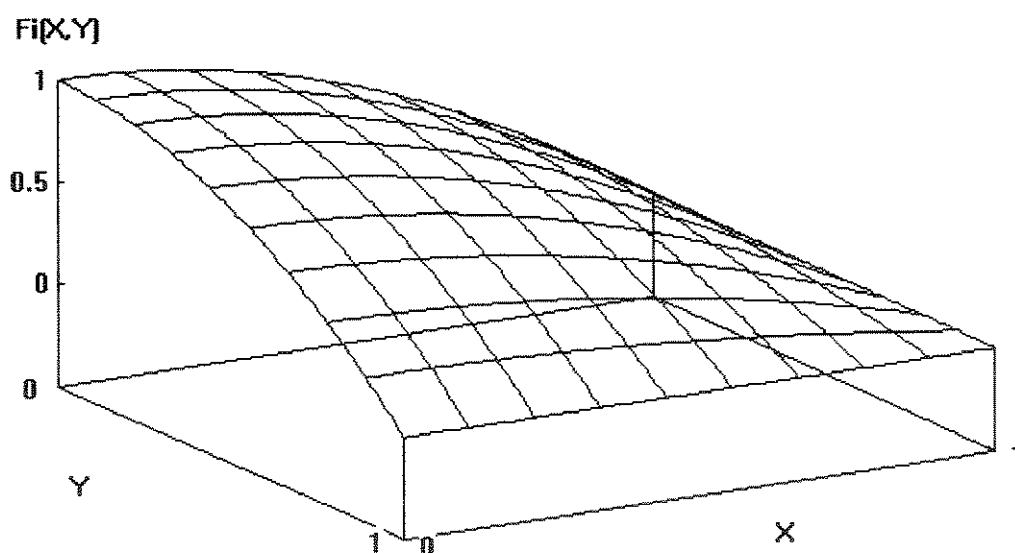
$$S^\Phi = 2 \cdot [2 - X^2 - Y^2]$$

$$Pe = \frac{\rho \cdot V_c \cdot L_c}{\Gamma} \quad \text{onde} \quad L_c = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma = \frac{K}{C_p}$$

Com o erro definido como no exemplo anterior obteve-se para malhas regulares 7 x 7 e 10 x 10 os seguintes resultados dispostos nas tabelas 3.10 e 3.11:

$$\Delta_1 = \frac{1}{7} \quad \Delta_2 = \frac{1}{10}$$

Figura 3.26: Distribuição de $\Phi(X, Y)$ - Teste CD5



Tab. 3.10: Erro para Condição de Contorno de Neumann em $X=0$

Pe	1	5	10	50	100	500
$E_{\Delta 1}$	$3,03 \times 10^{-2}$	$1,24 \times 10^{-1}$	$1,95 \times 10^{-1}$	$2,62 \times 10^{-1}$	$2,71 \times 10^{-1}$	1,10
$E_{\Delta 2}$	$1,47 \times 10^{-2}$	$6,04 \times 10^{-2}$	$9,52 \times 10^{-2}$	$1,35 \times 10^{-1}$	$1,32 \times 10^{-1}$	$3,17 \times 10^{-1}$
O_{ac}	2,02	2,01	2,01	1,89	2,01	3,48

Tab. 3.11: Erro para Condição de Contorno de Dirichlet em $X=0$

Pe	1	5	10	50	100	500
$E_{\Delta 1}$	$2,94 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$3,01 \times 10^{-2}$	$1,45 \times 10^{-1}$	$2,71 \times 10^{-1}$	1,10
$E_{\Delta 2}$	$1,21 \times 10^{-3}$	$6,27 \times 10^{-3}$	$1,26 \times 10^{-2}$	$5,20 \times 10^{-2}$	$8,67 \times 10^{-2}$	$3,17 \times 10^{-1}$
O_{ac}	2,48	2,44	2,44	2,87	3,19	3,48

Adotando-se o tratamento "Standard", para a condição de Neumann, ou seja $\Phi_{1,j} = \Phi_{2,j}$ em $X = 0$ obtém-se os valores arranados na tabela 3.12:

Tab. 3.12: Erro para tratamento Standard da condição de Neumann

Pe	1	5	10	50	100	500
$E_{\Delta 1}$	2,11	1,81	1,52	$9,18 \times 10^{-1}$	$7,95 \times 10^{-1}$	1,10
$E_{\Delta 2}$	1,43	1,21	1,01	$5,63 \times 10^{-1}$	$4,56 \times 10^{-1}$	$4,01 \times 10^{-1}$
O_{ac}	1,09	1,12	1,14	1,37	1,55	2,829

Pode-se observar pelos resultados acima que o uso da aproximação "Standard" em fronteiras submetidas à condição de 2ª espécie diminui acentuadamente o desempenho do método quanto mais se aproxima da difusão pura ($Pe \rightarrow \text{zero}$).

A figura 3.27 plotada para uma malha 10x10 facilita a visualização desse comportamento.

Assim, pode-se esperar, que em fronteiras submetidas a esse tipo de condição de contorno, onde a convecção se sobreponha à difusão, o esquema ainda forneça resultados acurados.

Observação:

Nos problemas de convecção-difusão, os valores de U e V usados nas faces dos volumes de controle são oriundos de integração com o objetivo de achar-se valores médios e daí satisfazer a equação da continuidade em cada volume de controle. Para escoamentos, as comparações serão feitas com o valor das velocidades calculadas no centro das faces.

3.3.4 Comentários sobre o esquema FLUX-SPLINE na Convecção-Difusão

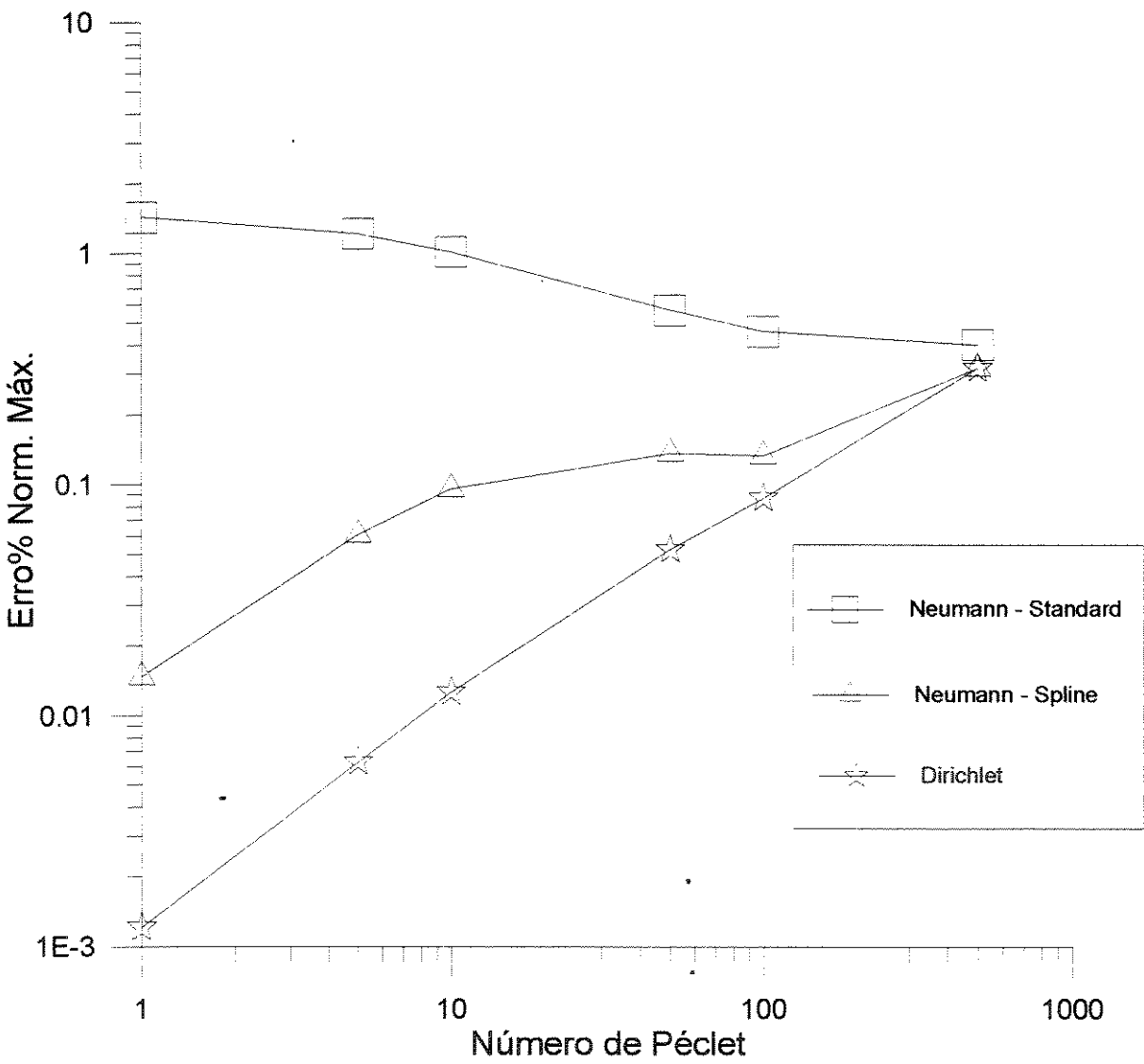
O método de solução das equações discretizadas proposto implica na resolução sequencial das matrizes Φ' (de correção dos fluxos J) e da variável dependente Φ . Deve haver a preocupação, de que o cálculo dos Φ' forneça fluxos J suficientemente acurados, de maneira a se operar com os resíduos da equação de conservação num nível aceitável e daí obter-se valores corretos de $\hat{J}$.

O desempenho do esquema é fortemente influenciado pelo tratamento das condições de contorno. O tratamento "Standard", em condições de contorno de 2ª espécie para baixos números de Peclet, deteriora a precisão e ordem de acurácia do método.

Figura 3.27

Teste CD5

Espaçamento 1/10



3.4 Esquema FLUX-SPLINE aplicado a Escoamentos

3.4.1 Equações de Governo

Problemas de escoamento se caracterizam por um sistema de equações não-lineares acopladas, onde ao lado das dificuldades inerentes às não-linearidades, se alinha a presença do termo de pressão. No caso de escoamentos laminares sem a presença de transferência de energia este sistema é composto pelas equações de Navier-Stokes, mais a equação de conservação da massa. Para um escoamento laminar bidimensional em regime permanente, num sistema cartesiano de coordenadas:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial X} \rho U + \frac{\partial}{\partial Y} \rho V = 0 \quad (3.132)$$

Quantidade de movimento Direção X

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\rho U^u \cdot U - \Gamma^U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\rho V^u \cdot U - \Gamma^U \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = S^U - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.133)$$

Quantidade de movimento Direção Y

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\rho U^v \cdot V - \Gamma^V \cdot \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\rho V^v \cdot V - \Gamma^V \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right] = S^V - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.134)$$

$$\text{onde } \Gamma^U = \Gamma^V \equiv \mu$$

A aplicação dessas equações a um domínio discretizado possui algumas peculiaridades características.

Uma delas, como exposto em Patankar (1979) é a necessidade de deslocar-se U e V da malha principal, onde até então vinha se posicionando a variável dependente Φ .

Agora, Φ poderá ser U ou V que, por serem posicionados nas faces dos volumes de controle da grade principal, darão origem a volumes de controle deslocados em relação à mesma. Torna-se necessária a definição de parâmetros geométricos pertinentes a cada malha (U, V ou Φ), assim como propor interpolações para o cálculo dos fluxos mássicos correspondentes a U e V. Como as propriedades do fluido são escalares e geralmente funções da temperatura, são armazenadas na mesma posição do escalar Φ e também necessitarão de interpolação ao se resolver o campo de velocidades. A pressão será armazenada como os escalares Φ , nos nós principais.

Para a quantidade de movimento na direção X , a viscosidade média para o volume de controle $U_{i,j}$,mostrado na figura 3.19 (pag. 80), é calculada por:

$$\bar{\mu}_{i,j} = \frac{\mu_{i,j} \cdot \Delta X_i^{u+} + \mu_{i-1,j} \cdot \Delta X_i^{u-}}{\Delta X_i^u} \quad (3.135)$$

Os fluxos mássicos na direção X e Y são obtidos por interpolação linear :

$$\rho U_{i,j}^u = \frac{m_r^u + m_l^u}{\Delta X_{i-1}^{u+} + \Delta X_i^{u-}} \quad (3.136)$$

$$m_r^u = \bar{\rho}_r \cdot U_{i,j} \cdot \Delta X_i^{u-} \quad (3.137)$$

$$\bar{\rho}_r = \frac{\rho_{i,j} \cdot \Delta X_i^{u+} + \rho_{i-1,j} \cdot \Delta X_i^{u-}}{\Delta X_i^u} \quad (3.138)$$

$$m_l^u = \bar{\rho}_l \cdot U_{i-1,j} \cdot \Delta X_{i-1}^{u+} \quad (3.139)$$

$$\text{Onde : } \bar{\rho}_l = \frac{\rho_{i-1,j} \cdot \Delta X_{i-1}^{u+} + \rho_{i-2} \cdot \Delta X_{i-1}^{u-}}{\Delta X_{i-1}^u} \quad (3.140)$$

Os fluxos mássicos laterais na direção Y são obtidos pela soma das contribuições laterais:

$$\rho V_{i,j}^u = \frac{m_r^v \cdot \Delta X_i^{u+} + m_l^v \cdot \Delta X_i^{u-}}{\Delta X_i^u} \quad (3.141)$$

$$m_r^v = V_{i,j} \cdot \bar{\rho}_r \quad (3.142)$$

$$\bar{\rho}_r = \frac{\rho_{i,j} \cdot \Delta Y_j^{u-} + \rho_{i,j-1} \cdot \Delta Y_{j-1}^{u+}}{\Delta Y_j^{u-} + \Delta Y_{j-1}^{u+}} \quad (3.143)$$

$$m_l^v = V_{i-1,j} \cdot \bar{\rho}_l \quad (3.144)$$

$$\bar{\rho}_l = \frac{\rho_{i-1,j} \cdot \Delta Y_j^{u-} + \rho_{i-1,j-1} \cdot \Delta Y_{j-1}^{u+}}{\Delta Y_j^{u-} + \Delta Y_{j-1}^{u+}} \quad (3.145)$$

3.4.2 Equação de Discretização para Quantidade de Movimento U

Serão usados superescritos nas expressões para os fluxos e parâmetros geométricos para indicar a variável em questão.

Assumindo-se novamente a hipótese que na Figura 3.19, os fluxos mássicos e totais armazenados nas faces do volume de controle são valores médios e integrando a equação (3.118), segundo o método dos volumes finitos, para o volume de controle ao redor de $U_{i,j}$, obtém-se como na convecção-difusão:

$$\left(JX_{i+1,j}^U - JX_{i,j}^U \right) \cdot \Delta Y_j^U + \left(JY_{i,j+1}^U - JY_{i,j}^U \right) \cdot \Delta X_i^U = (P_{i-1,j} - P_{i,j}) \cdot \Delta Y_j^U \cdot \delta_i^U + S_{i,j}^U \cdot \Delta X_i^U \cdot \Delta Y_j^U$$

O tratamento fornecido ao termo de pressão, sem tratá-lo como fonte é justificado por se utilizar o algoritmo SIMPLER para a abordagem do acoplamento UVP.

δ_i^U depende da malha e é definido na forma:

$$\delta_i^U = \frac{\Delta X_i^U}{\left(\Delta X_{i-1}^{\Phi+} + \Delta X_i^{\Phi-} \right) \cdot \frac{1}{2}} \quad (3.146)$$

Onde o superescrito Φ se refere a grade principal onde são armazenados a pressão ou outros escalares.

De maneira análoga à convecção-difusão, a substituição das expressões para os fluxos J na equação de conservação integrada fornece:

$$\begin{aligned} AP_{i,j}^U \cdot U_{i,j} = & AIM_{i,j}^U \cdot U_{i-1,j} + AIP_{i,j}^U \cdot U_{i+1,j} + AJM_{i,j}^U \cdot U_{i,j-1} + AJP_{i,j}^U \cdot U_{i,j+1} + CON_{i,j}^U \\ & + (P_{i-1,j} - P_{i,j}) \cdot \Delta Y_j^U \cdot \delta_i^U \end{aligned} \quad (3.147)$$

Os coeficientes possuem o mesmo formato daqueles encontrados para a convecção-difusão.

3.4.3 Equação de Discretização para Quantidade de Movimento V

Adotando-se um procedimento análogo ao usado para a quantidade de movimento na direção X, obtém-se para o volume de controle de V mostrado na figura 3.28:

$$\begin{aligned} AP_{i,j}^V \cdot V_{i,j} = & AIM_{i,j}^V \cdot V_{i-1,j} + AIP_{i,j}^V \cdot V_{i+1,j} + AJM_{i,j}^V \cdot V_{i,j-1} + AJP_{i,j}^V \cdot V_{i,j+1} + CON_{i,j}^V \\ & + (P_{i,j-1} - P_{i,j}) \cdot \Delta X_i^V \cdot \delta_j^V \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\delta_j^V = \frac{\Delta Y_j^V}{\left(\Delta Y_{j-1}^{\Phi+} + \Delta Y_j^{\Phi-} \right) \cdot \frac{1}{2}} \quad (3.149)$$

As interpolações necessárias para os fluxos mássicos e μ são feitas de forma similar àquelas para a quantidade de movimento na direção X.

3.4.4 Tratamento do Acoplamento UVP

O algoritmo usado neste trabalho para lidar com o acoplamento UVP é o SIMPLER descrito em Patankar(1980). Sua obtenção segue a descrição abaixo:

Da equação (3.147) vem:

$$U_{i,j} = \frac{[AIM_{i,j}^u \cdot U_{i-1,j} + AIP_{i,j}^u \cdot U_{i+1,j} + AJM_{i,j}^u \cdot U_{i,j-1} + AJP_{i,j}^u \cdot U_{i,j+1} + CON_{i,j}^u]}{AP_{i,j}^u} +$$

$$\frac{(P_{i-1,j} - P_{i,j}) \cdot \Delta Y_j^u \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^u}$$

$$U_{i,j} = \hat{U}_{i,j} + \frac{(P_{i-1,j} - P_{i,j}) \cdot \Delta Y_j^u \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^u} \quad (3.150)$$

onde:

$$\hat{U}_{i,j} = \frac{\sum A_{nb,i,j}^u \cdot U_{nb,i,j} + CON_{i,j}^u}{AP_{i,j}^u} \quad (3.151)$$

Da equação (3.148) para V obtém-se analogamente:

$$V_{i,j} = \hat{V}_{i,j} + \frac{\Delta X_i^v \cdot \delta_j^v \cdot (P_{i,j-1} - P_{i,j})}{AP_{i,j}^v} \quad (3.152)$$

onde :

$$\hat{V}_{i,j} = \frac{\sum A_{nb,i,j}^v \cdot V_{nb,i,j} + CON_{i,j}^v}{AP_{i,j}^v} \quad (3.153)$$

A equação de conservação da massa integrada sobre o volume de controle que circunda o escalar $\Phi_{i,j}$ fornece:

$$(\rho U_{i+1,j} - \rho U_{i,j}) \cdot \Delta Y_j^\Phi + (\rho V_{i,j+1} - \rho V_{i,j}) \cdot \Delta X_i^\Phi = 0 \quad (3.154)$$

Substituindo aí as expressões (3.147) e (3.148) para U e V, oriundas da conservação de quantidade de movimento, obtém-se uma equação para a pressão P.

Como o campo de velocidade é desconhecido, os coeficientes serão calculados por meio de valores para U e V (que satisfazem a continuidade) da iteração anterior, e assim se justifica a presença do asterisco no superescrito:

$$AP_{i,j}^{p*} \cdot P_{i,j} = AIM_{i,j}^{p*} \cdot P_{i-1,j} + AIP_{i,j}^{p*} \cdot P_{i+1,j} + AJM_{i,j}^{p*} \cdot P_{i,j-1} + AJP_{i,j}^{p*} \cdot P_{i,j+1} + CON_{i,j}^{p*} \quad (3.155)$$

Onde:

$$AIM_{i,j}^{p*} = \frac{\Delta Y_j^u \cdot \Delta Y_j^\Phi \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^{u*}} \quad (3.156)$$

$$AIP_{i,j}^{p*} = \frac{\Delta Y_j^u \cdot \Delta Y_j^\Phi \cdot \delta_{i+1}^u}{AP_{i+1,j}^{u*}} \quad (3.157)$$

$$AJM_{i,j}^{p*} = \frac{\Delta X_i^v \cdot \Delta X_i^\Phi \cdot \delta_j^v}{AP_{i,j}^{v*}} \quad (3.158)$$

$$AJP_{i,j}^{p*} = \frac{\Delta X_i^v \cdot \Delta X_i^\Phi \cdot \delta_{j+1}^v}{AP_{i,j+1}^{v*}} \quad (3.159)$$

$$AP_{i,j}^{p*} = AIM_{i,j}^{p*} + AIP_{i,j}^{p*} + AJM_{i,j}^{p*} + AJP_{i,j}^{p*} \quad (3.160)$$

$$CON_{i,j}^{p*} = (\rho \hat{U}_{i+1,j}^* - \rho \hat{U}_{i,j}^*) \cdot \Delta Y_j^\Phi + (\rho \hat{V}_{i,j+1}^* - \rho \hat{V}_{i,j}^*) \cdot \Delta X_i^\Phi \quad (3.161)$$

Para a geração da equação de correção das velocidades, parte-se da hipótese que se utilizarmos nas equações (3.147) e (3.148), um campo de pressão aproximado P^* , obtendo-se daí aproximações para a quantidade de movimento expressas por :

$$U_{i,j}^* = \hat{U}_{i,j}^* + \frac{\Delta Y_j^u \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^u} \cdot (P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*) \quad (3.162)$$

$$V_{i,j}^* = \hat{V}_{i,j}^* + \frac{\Delta X_i^v \cdot \delta_j^v}{AP_{i,j}^v} \cdot (P_{i,j-1}^* - P_{i,j}^*) \quad (3.163)$$

Subtraindo-se (3.162) de (3.150), obtém-se:

$$U_{i,j} - U_{i,j}^* = \left(\hat{U}_{i,j} - \hat{U}_{i,j}^* \right) + \frac{\Delta Y_j^u \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^u} \cdot \left[\left(P_{i-1,j} - P_{i-1,j}^* \right) - \left(P_{i,j} - P_{i,j}^* \right) \right]$$

Se por conveniência $(\hat{U}_{i,j} - \hat{U}_{i,j}^*)$ é desprezado e $P_{i,j} - P_{i,j}^* = P'_{i,j}$, então :

$$U_{i,j} = U_{i,j}^* + \frac{\Delta Y_j^u \cdot \delta_i^u}{AP_{i,j}^u} \cdot \left(P'_{i-1,j} - P'_{i,j} \right) \quad (3.164)$$

Para a quantidade de movimento na direção Y obtém-se de maneira análoga:

$$V_{i,j} = V_{i,j}^* + \frac{\Delta X_i^v \cdot \delta_j^v}{AP_{i,j}^v} \cdot \left(P'_{i,j-1} - P'_{i,j} \right) \quad (3.165)$$

A substituição das equações (3.164) e (3.165), que serão as responsáveis

pela correção das velocidades a cada iteração, na equação da continuidade, fornece:

$$AP_{i,j}^{p*} \cdot P'_{i,j} = AIM_{i,j}^{p*} \cdot P'_{i-1,j} + AIP_{i,j}^{p*} \cdot P'_{i+1,j} + AJM_{i,j}^{p*} \cdot P'_{i,j-1} + AJP_{i,j}^{p*} \cdot P'_{i,j+1} + CON_{i,j}^{p*} \quad (3.166)$$

onde os coeficientes são idênticos aos da equação de pressão (3.155) e seu termo fonte é definido por:

$$CON_{i,j}^p = - \left[\left(\rho U_{i+1,j} - \rho U_{i,j} \right) \cdot \Delta Y_j^\Phi + \left(\rho V_{i,j+1} - \rho V_{i,j} \right) \cdot \Delta X_i^\Phi \right] \quad (3.167)$$

As velocidades presentes nesta equação são calculadas pelas equações de conservação de quantidade de movimento (3.147) e (3.148). Se o algoritmo converge, existirá a tendência de ao se resolver as equações de quantidade de movimento, tender a zero satisfazendo a equação da continuidade, enquanto que $CON_{i,j}^p$ tende a uma certa distribuição ao longo do domínio de cálculo. As condições de contorno para pressão não são necessárias quando se fornecem as velocidades no contorno.

3.4.5 Método de Solução para Escoamento

Ao adotar-se a forma segregada e seqüencial de resolução das equações usando o algoritmo SIMPLER, é necessário analisar-se o termo fonte adicional S_{sp}^Φ gerado pelo esquema FLUX-SPLINE. De forma genérica, para uma variável Φ :

$$S_{sp}^\Phi = S(\hat{J}X, \hat{J}Y) \quad (3.168)$$

$$\text{mas: } \hat{J}X = \hat{J}X(\Phi, JX, U)$$

$$\hat{J}Y = \hat{J}Y(\Phi, JY, V)$$

J_X e J_Y são funções de Φ , U e V , mas devido ao cálculo dos fluxos J ser feito através de uma matriz de correção Φ' que tem como termo fonte, o resíduo da equação de conservação; passam a depender também das fontes que acionam o escoamento. Daí:

$$S_{sp}^{\Phi} = f(\Phi, U, V, S_c^{\Phi}) \quad (3.169)$$

Note que S_{sp}^{Φ} sendo uma função da variável dependente Φ , poderia ser colocada no lado esquerdo da equação de discretização de forma a constituir parte do coeficiente AP^{Φ} .

Devido à complexidade do termo S_{sp}^{Φ} , a cautela no sentido de se assegurar para AP^{Φ} valores sempre positivos, aconselhou o autor do esquema a optar pela linearização, deslocando-o para o lado direito da equação. Assim, seu cálculo é feito usando-se os valores Φ^* da iteração anterior como já descrito anteriormente.

Sob essa decisão, a equação de discretização de Φ toma a forma:

$$\left(a_p^{\Phi} = \sum a_{nb}^{\Phi} - S_p^{\Phi} \Delta X_i^{\Phi} \cdot \Delta Y_j^{\Phi} \right) \cdot \Phi_p = \sum a_{nb}^{\Phi} \cdot \Phi_{nb}^{\Phi} + S_c^{\Phi} \cdot \Delta X_i^{\Phi} \cdot \Delta Y_j^{\Phi} + S_{sp}^{\Phi} \quad (3.170)$$

No caso de escoamento; U e V são as variáveis dependentes, e durante o processo iterativo, o termo S_{sp} pode ser descrito de forma mais adequada como:

$$S_{sp}^{\Phi^*} = f(U^*, V^*, S_c^*) \quad (3.171)$$

Onde o superescrito $*$ indica que o valor se refere à iteração anterior com o termo S_c^* incluindo os termos fonte e de pressão e o campo de velocidades U^*V^* satisfazendo a continuidade. Assim, se é fornecido o valor exato para o trio

(UVP) * obtém-se valores também exatos para S_{sp}^U e S_{sp}^V . Conseqüentemente, como os termos S_{sp} fazem parte do termo CON, que por sua vez está presente no cálculo de $\hat{U}$ e $\hat{V}$, constituintes do termo fonte da equação de pressão P , pode-se esperar que a solução da mesma conduza nesse caso a:

$$[P_{i,j}] = [P_{i,j}^*]$$

Seguindo esse raciocínio, S_{sp} assume o caráter de um coeficiente que é calculado dos valores arbitrados (ou da iteração anterior) do trio UVP

No SIMPLER, isso se dá quando P' é usado para corrigir as velocidades U e V obtidas da resolução das equações de quantidade de movimento e dessa forma satisfazer a continuidade. Sob essa ótica S_{sp} será sempre calculado através de um campo de velocidades que satisfaz a continuidade.

O método de solução proposto por Varejão (1979) assume que inicialmente S_{sp} seja nulo. Calcula então a matriz de pressão e em seguida durante o cálculo das equações de quantidade de movimento, passa a calcular o termo S_{sp} num processo iterativo análogo ao empregado na convecção-difusão, utilizando portanto valores de quantidade de movimento que não satisfazem a continuidade.

O método de solução aqui usado para escoamentos é então constituído pela seqüência:

1. Defina a malha e forneça as propriedades do fluido;
2. Arbitre um campo U^*, V^*, P^* ;
3. Calcule os coeficientes para a equação da quantidade de movimento na direção X ;
4. Calcule os fluxos JX^{U^*} e JY^{U^*} ;
5. Use-os para junto com Sc^U construir a fonte de U' . Resolva a matriz U' ;

6. Corrija os fluxos JX^{U*} e JY^{U*} e calcule $\hat{J}X^{U*}$ e $\hat{J}Y^{U*}$;
7. Retorne ao passo 4 até atingir a convergência dos $\hat{J}^{U*}$;
8. Calcule a fonte adicional S_{sp}^{U*} ;
9. Use-a para calcular $\hat{U}^*$. Construa os coeficientes AIM^{P*} e AIP^{P*} da matriz de pressão;
10. Calcule os coeficientes para a equação da quantidade de movimento na direção Y usando o mesmo $U^* V^* P^*$;
11. Calcule JX^{V*} e JY^{V*} ;
12. Construa e resolva a matriz V' ;
13. Corrija os fluxos JX^{V*} e JY^{V*} e calcule $\hat{J}X^{V*}$ e $\hat{J}Y^{V*}$;
14. Retorne ao passo 11 até a convergência dos $\hat{J}^{V*}$;
15. Calcule S_{sp}^{V*} ;
16. Calcule $\hat{V}^*$ usando S_{sp}^{V*} . Construa os coeficientes AJM^{P*} e AJP^{P*} ;
17. Construa a fonte da matriz de pressão CON^{P*} ;
18. Resolva a matriz de pressão e obtenha a pressão P . Nesse ponto se foi fornecido o campo exato de UVP, como ressaltado anteriormente, a solução da matriz de pressão conduzirá ao valor arbitrado no início do processo, de acordo com a essência do algoritmo SIMPLER;
19. Usando os coeficientes calculados no passo 3, S_{sp}^{U*} calculado em 8 e o campo de pressão P , construa CON^{U*} e resolva a matriz de quantidade movimento na direção X obtendo U ;
20. Usando os coeficientes calculados no passo 10, S_{sp}^{V*} calculado em 15 e o campo de pressão P , construa CON^{V*} e obtenha V ;
21. Com U e V construa a fonte para a matriz P' . Usando os coeficientes calculados nos passos 9 e 16 calcule a matriz de correção das velocidades P' ;
22. Corrija U e V oriundos de 19 e 20. Verifique a divergência do campo de velocidade. Faça P obtido no passo 18 o próximo P^* ;

23. Corrija se necessário o contorno de U e V, satisfazendo a continuidade global. Faça dos U e V corrigidos os novos U* e V*;
24. Com os novos U*, V* e P* retorne ao passo 3 até satisfazer os critérios de convergência.

3.4.6 Aplicação do esquema FLUX-SPLINE a Escoamentos

Para verificação do método de solução proposto, será feita a comparação com problemas teste abordados encontrados na literatura.

TESTE E1:

A cavidade recirculante usada para investigar o comportamento do esquema no tratamento das condições de contorno na convecção-difusão é usada agora com um campo de pressão feito constante com a geometria definida na figura 3.29. O perfil de velocidade é aquele usado no teste CD5 (pag.87). O número de Reynolds é definido como:

$$Re = \frac{\rho \cdot U_{max} \cdot L_c}{\Gamma}$$

A substituição dos perfis de U e V nas equações de conservação fornece os termos fonte para U e V. O erro porcentual E é definido como:

$$E = 100 \cdot \text{abs} \left[\frac{\Phi_{exato} - \Phi_{num}}{\Phi_{ex\max} - \Phi_{ex\min}} \right] \quad \text{e exposto na tabela 3.13:}$$

Tab. 3.13: Método de solução para escoamento - Teste E1

Re ->	1		10		100	
malha	E _{varejao}	E _{atual}	E _{varejao}	E _{atual}	E _{varejao}	E _{atual}
17x17	0,1931	0,07816	0,2036	0,09439	1,00	0,5495
22x22	0,1174	0,04941	0,1210	0,04502	0,4241	0,2530
O _{ac}	1,93	1,77	2,01	2,168	3,32	3,00

TESTE E2:

Escoamento entre dois cilindros concêntricos como mostrado na figura 3.30. O cilindro externo gira com velocidade angular ω e o interno está em repouso. A solução analítica em coordenadas polares é:

$$V_{\theta} = \frac{2}{3} \cdot \left[R - \frac{1}{R} \right] \quad \text{para } 1 \leq R \leq 2$$

onde: $R = \frac{r}{R_1}$ e $V_{\theta} = \frac{v_{\theta}}{2 \cdot \omega \cdot R_1}$

O número de Reynolds é definido por: $Re = \frac{\rho \cdot (2R_1\omega) \cdot R_1}{\mu}$

O domínio cartesiano é definido por $0 \leq X \leq R_1 \cdot \sqrt{2}$ e $0 \leq Y \leq R_1 \cdot \sqrt{2}$ e aplicando-se sobre esse contorno as velocidades obtidas do perfil analítico, pode-se obter uma solução numérica e compará-la aos valores analíticos do domínio interno. A malha usada possui 22x22 volumes de controle. Varejão (1979) estabeleceu como critério de comparação a velocidade U no centro geométrico do domínio cartesiano de cálculo. Os resultados obtidos são expostos na tabela 3.14 e na figura 3.31 onde:

$$E = \text{abs} \left[\frac{U_{\text{excg}} - U_{\text{numcg}}}{U_{\text{excg}}} \right] \cdot 100$$

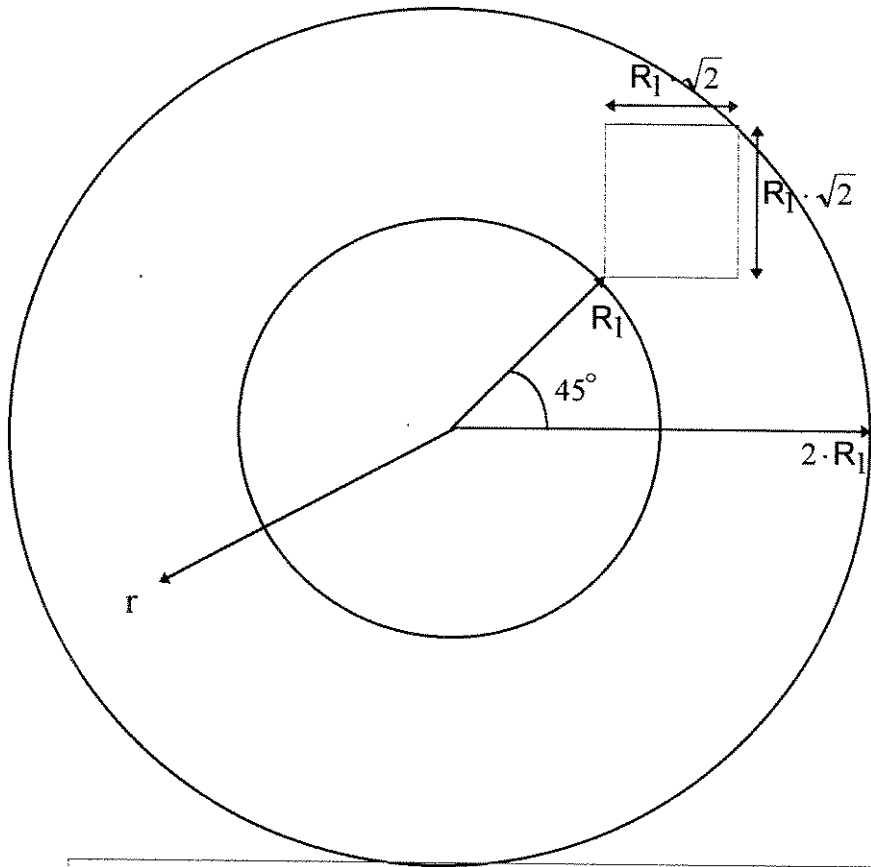


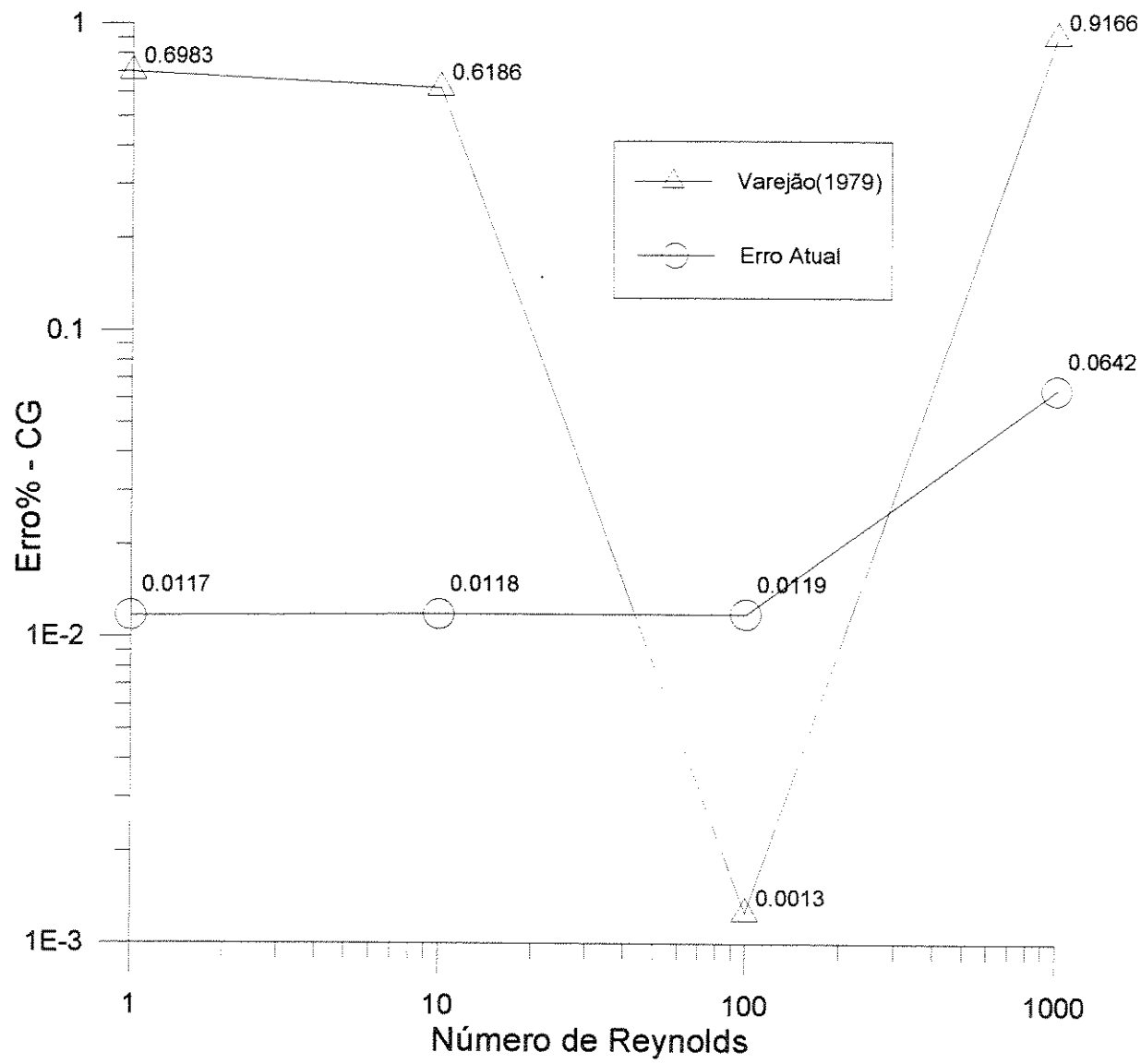
Fig. 3.30: Escoamento entre dois cilindros concêntricos

Tab. 3.14: Método de solução para escoamento - Teste E2

Re	E_{Varejao}	E_{Atual}
1,0	0,6983	0,01172
10,0	0,6186	0,01183
100,0	0,001261	0,01185
1000,0	0,9166	0,0642

Figura 3.31

Teste E2



Os resultados para os dois problemas teste anteriores, mostram uma melhora em termos do nível do erro, em comparação ao obtido no trabalho de Varejão(1979).

Com respeito ao escoamento entre dois cilindros verifica-se um comportamento mais suave do erro com o número de Reynolds. Acredita-se que esses benefícios sejam transferidos a outros problemas de escoamento a serem abordados nesse trabalho.

TESTE E3:

O problema da cavidade quadrada recirculante acionada por parede móvel (Driven Cavity) foi exaustivamente abordado pela literatura, sendo sua solução com malhas refinadas usada para aferição da acurácia de métodos numéricos.

Admite-se escoamento laminar, regime permanente e propriedades constantes.

O parâmetro relevante é o número de Reynolds definido como:

$$Re = \frac{\rho \cdot U_w \cdot L_c}{\mu}$$

$$\text{se } \frac{\rho}{\mu} = Lc = 1 \quad \rightarrow \quad Re = U_w$$

O trabalho usado como referência é o de Ghia (1982), que fornece tabelas com valores concernentes às velocidades geradas na cavidade. Nesse trabalho as equações de Navier-Stokes foram reduzidas à formulação de Vorticidade-Função corrente, sendo aplicado então um esquema de discretização por diferença central nas derivadas de 2ª ordem, e nos termos convectivos, o esquema sugerido por Rubin e Khosla (1981). Foi usada malha de 129x129 pontos. Serão comparados os valores de velocidade nas linhas horizontal e vertical, que passam pelo centro

geométrico da cavidade como mostrado na figura 3.36. A malha usada pelo esquema FLUX-SPLINE possui 42x42 volumes de controle.

Os resultados obtidos pelo esquema sob malha regular de 42x42 volumes de controle, são expostos nas duas primeiras linhas da tabela 3.15, sendo comparados com a solução de referência e os obtidos por Varejão, Patankar e Karki (1991A) para Reynolds 400 e 1000. A terceira linha expõe a comparação para uma malha de 82x82 volumes de controle com Reynolds igual a 1000.

Tab. 3.15: Comparação com a solução de Ghia (1982)

	U _{min}			V _{min}			V _{max}		
Re	VPK	Ghia	Atual	VPK	Ghia	Atual	VPK	Ghia	Atual
400 _{42x42}	-0,322	-0,327	-0,321	-0,461	-0,449	-0,438	0,295	0,302	0,295
1000 _{42x42}	-0,371	-0,382	-0,365	-0,509	-0,515	-0,492	0,361	0,370	0,353
1000 _{82x82}	-0,384	-0,382	-0,376	-0,526	-0,515	-0,513	0,371	0,370	0,363

Pode-se observar pelos resultados para Re igual a 1000, que o método aqui proposto proporciona ao esquema um comportamento adequado no sentido de se caminhar na direção dos resultados do trabalho de Ghia (1982), enquanto que os resultados de Varejão, Patankar e Karki (1991A) se colocam acima dos valores de referência.

Os valores da função corrente adimensional Ψ são obtidos pela soma dos produtos da velocidade vertical V e da dimensão horizontal de cada célula básica ao longo de uma linha horizontal. Assim:

$$\Psi(X,Y) = - \int_{X_0}^X V(X,Y) * dX + \Psi(X_0,Y)$$

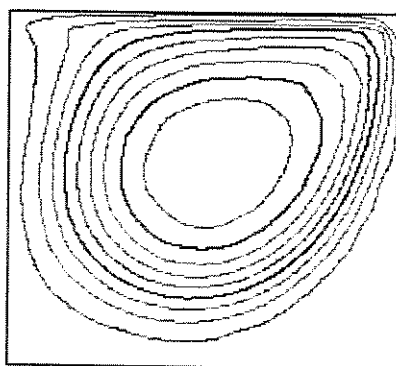
onde $\Psi(X_0, Y)$ é tomado como zero ao longo de uma fronteira vertical impermeável.

A figura 3.32 mostra as linhas de corrente para Re igual a 1000 sob uma malha regular de 20x20 volumes de controle

Figura 3.32: Linhas de Corrente para $Re=1E+3$

$$\Psi_{\min} = -0,068$$

$$\Delta\Psi = -0,008$$



3.5 Abordagem de Condições de Contorno em Fronteiras Abertas

Como agora a incógnita é o campo de velocidades, deve-se verificar se o tratamento dispensado à fronteira nos casos de convecção-difusão não entra em conflito com a seqüência imposta pelo algoritmo SIMPLER.

Tomando-se a equação de correção P' e aplicando à mesma o Teorema de Green, obtém-se:

$$\oint_s \frac{\partial P'}{\partial \eta} \cdot ds = \sum \delta \dot{m} \quad (3.172)$$

Onde $\sum \delta \dot{m}$ é a somatória das massas que entram e saem através da superfície que define o domínio de cálculo, e η a direção da superfície s

Se nas fronteiras, as velocidades são conhecidas, as condições de contorno para a equação das correções P' , são de segunda espécie (Neumann).

$$\text{Ou seja: } \frac{\partial P'}{\partial \eta} = 0 \quad (3.173)$$

Esta relação e a equação (3.172) levam à necessidade que o balanço mássico numérico $\sum \delta \dot{m}$ sobre o domínio, seja igual a zero. Só assim, o sistema de equações linearmente dependentes pela imposição de condições de contorno de Neumann, será consistente e apresentará solução.

Para ilustrar o acima exposto aplicaremos a equação de P' ao domínio discretizado como na figura 3.33. As nove equações geradas pela equação de P' para esse domínio compõe a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix}
 AP_{2,2}^p & -AIP_{2,2}^p & 0 & -AJP_{2,2}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -AIM_{3,2}^p & AP_{3,2}^p & -AIP_{3,2}^p & 0 & AJP_{3,2}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -AIM_{4,2}^p & AP_{4,2}^p & 0 & 0 & AJP_{4,2}^p & 0 & 0 & 0 \\
 -AJM_{2,3}^p & 0 & 0 & AP_{2,3}^p & -AIP_{2,3}^p & 0 & -AJP_{2,3}^p & 0 & 0 \\
 0 & -AJM_{3,3}^p & 0 & -AIM_{3,3}^p & AP_{3,3}^p & -AIP_{3,3}^p & 0 & -AJP_{3,3}^p & 0 \\
 0 & 0 & -AJM_{4,3}^p & 0 & -AIM_{4,3}^p & AP_{4,3}^p & 0 & 0 & -AJP_{4,3}^p \\
 0 & 0 & 0 & -AJM_{2,4}^p & 0 & 0 & AP_{2,4}^p & -AIP_{2,4}^p & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -AJM_{3,4}^p & 0 & -AIM_{3,4}^p & AP_{3,4}^p & AIP_{3,4}^p \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AJM_{4,4}^p & 0 & -AIM_{4,4}^p & AP_{4,4}^p
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 P_{2,2} \\
 P_{3,2} \\
 P_{4,2} \\
 P_{2,3} \\
 P_{3,3} \\
 P_{4,3} \\
 P_{2,4} \\
 P_{3,4} \\
 P_{4,4}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 (U_{3,2} - U_{2,2}) \cdot \Delta Y_2^\Phi + (V_{2,3} - V_{2,2}) \cdot \Delta X_2^\Phi \\
 (U_{4,2} - U_{3,2}) \cdot \Delta Y_2^\Phi + (V_{3,3} - V_{3,2}) \cdot \Delta X_3^\Phi \\
 (U_{5,2} - U_{4,2}) \cdot \Delta Y_2^\Phi + (V_{4,3} - V_{4,2}) \cdot \Delta X_4^\Phi \\
 (U_{3,3} - U_{2,3}) \cdot \Delta Y_3^\Phi + (V_{2,4} - V_{2,3}) \cdot \Delta X_2^\Phi \\
 (U_{4,3} - U_{3,3}) \cdot \Delta Y_3^\Phi + (V_{3,4} - V_{3,3}) \cdot \Delta X_3^\Phi \\
 (U_{5,3} - U_{4,3}) \cdot \Delta Y_3^\Phi + (V_{4,4} - V_{4,3}) \cdot \Delta X_4^\Phi \\
 (U_{3,4} - U_{2,4}) \cdot \Delta Y_4^\Phi + (V_{2,5} - V_{2,4}) \cdot \Delta X_2^\Phi \\
 (U_{4,4} - U_{3,4}) \cdot \Delta Y_4^\Phi + (V_{3,5} - V_{3,4}) \cdot \Delta X_3^\Phi \\
 (U_{5,4} - U_{4,4}) \cdot \Delta Y_4^\Phi + (V_{4,5} - V_{4,4}) \cdot \Delta X_4^\Phi
 \end{bmatrix}$$

A soma dos componentes da primeira coluna da matriz dos coeficientes fornece:

$$AP_{2,2}^p + (-AIM_{3,2}^p) + (-AJM_{2,3}^p) = AP_{2,2}^p + (-AIP_{2,2}^p - AJP_{2,2}^p) = 0 \quad (3.174)$$

Dessa forma a soma dos termos de cada coluna será zero, enquanto que a soma dos termos fontes gerará a divergência global, que por imposição física é nula, garantindo assim, a consistência do sistema de equações.

Para problemas de escoamento com fronteira aberta, deve-se verificar se o tratamento proposto para convecção-difusão mantém a divergência global nula. Lembrando que o perfil interpolante foi obtido através de uma equação diferencial linear, sob a hipótese que o fluxo mássico ρU era constante, numa situação unidimensional; pode-se concluir que a imposição desses perfis na solução de U e V , em fronteiras onde a condição de contorno é de Neumann, não garante o princípio de divergência global nula em todas as iterações. Com esse objetivo será usado o seguinte procedimento:

Para uma fronteira como a descrita pela figura 3.34, o perfil interpolante fica:

$$\Phi_2^- = \Phi_2 \cdot e^{-P_2^-} + \frac{1}{A(-P_2^-)} \cdot \frac{\Delta X_2^-}{\Gamma_2} \cdot J_2 - \frac{1}{1+f_2^-} \cdot \frac{\Delta X_2^-}{\Gamma_2} \cdot \frac{Q(-P_2^-)}{A(-P_2^-)} \cdot \left\{ (J_2 - J_3) + (\rho U_3 - \rho U_2) \cdot \Phi_2 \right\}$$

Admitindo-se que o fluxo é predominantemente convectivo, então :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0$$

$$\text{Se } \Phi \equiv U$$

$$(\rho U_3 - \rho U_2) = 0$$

$$J_2 - J_3 = 0$$

Devido a isto, e como $J_2 = \rho U_2 \cdot \Phi_1$, obtém-se:

$$\Phi_2^- = \Phi_2 \cdot e^{-P_2^-} + \frac{1}{A(-P_2^-)} \cdot \frac{\Delta X_2^-}{\Gamma_2} \cdot \rho U_2 \cdot \Phi_1$$

$$\text{onde } P_2^- = \frac{\rho U_2 \cdot \Delta X_2^-}{\Gamma_2}$$

Substituindo a expressão da função A(P) vem:

$$\Phi_2^- = \Phi_2 \cdot e^{-P_2^-} + \frac{\frac{+P_2^-}{-P_2^-}}{e^{-P_2^-} - 1} \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_2^- = \Phi_2 \cdot e^{-P_2^-} - (e^{-P_2^-} - 1) \cdot \Phi_1$$

Como:

$$\Phi_2^- = \Phi_1$$

Chega-se a:

$$\underline{\Phi_1 = \Phi_2}$$

Esta aproximação foi utilizada anteriormente na convecção-difusão para fronteiras cuja condição de contorno eram de segunda espécie, e como anteriormente mostrado, é o resultado de se desprezar o termo adicional devido ao esquema FLUX-SPLINE.

É sobre essa aproximação que será imposto o princípio de conservação global da massa.

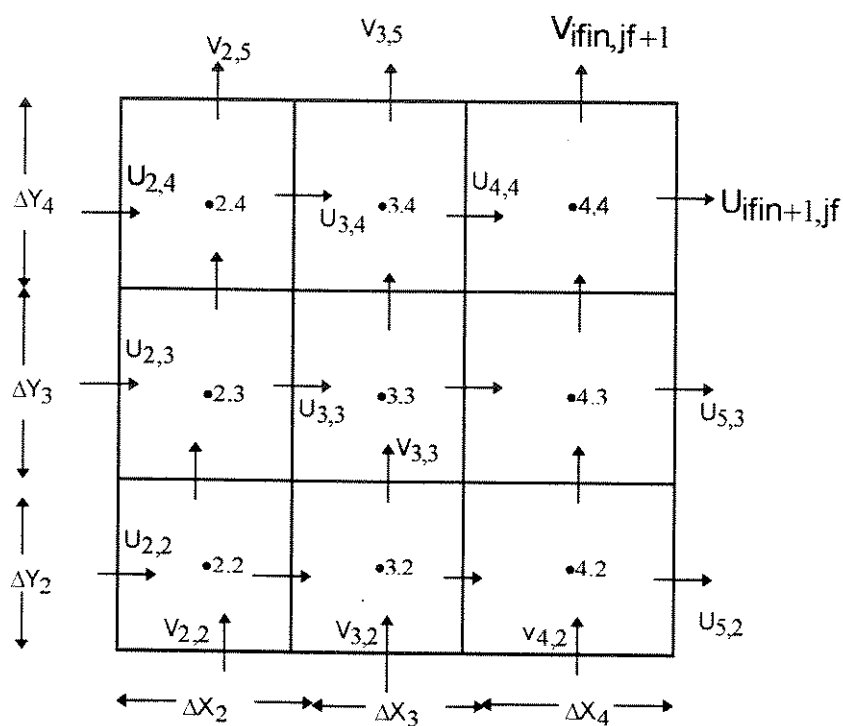


Fig. 3.33: Domínio para a equação de pressão

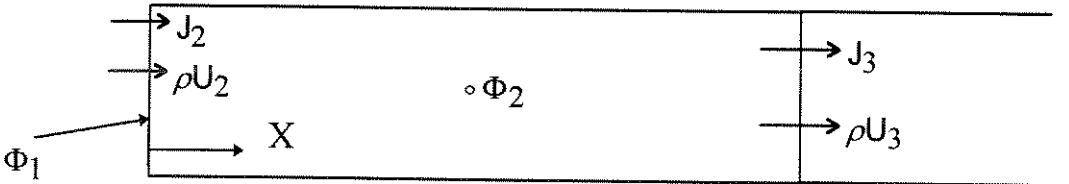


Fig. 3.34: Contorno em cavidade aberta

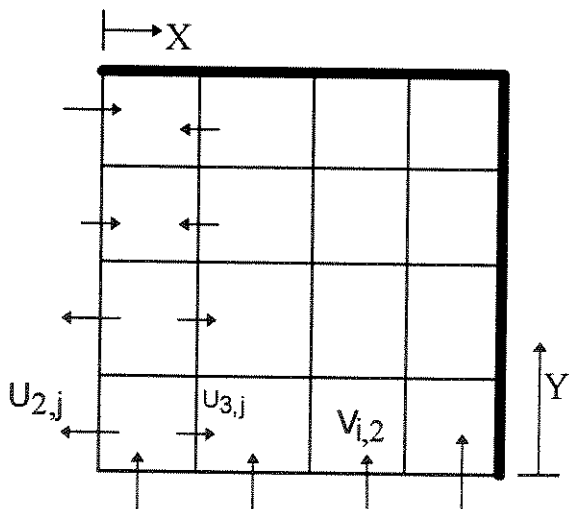


Fig. 3.35: Cavidade aberta sob convecção forçada

TESTE E4:

O problema da cavidade recirculante, abordado no Teste E1 será novamente empregado de forma que se possa investigar a questão do tratamento da fronteira sob condição de Neumann, agora em escoamentos. Como anteriormente feito na convecção, será utilizada a simetria existente com o domínio definido por:

$$0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \quad \text{com} \quad Re = \frac{\rho \cdot U_{\max} \cdot l}{\mu}$$

Dessa forma, como mostrado pela figura 3.35, pode-se impor sobre a fronteira através da qual ocorre escoamento, condições de primeira ou segunda espécie, propiciando a aferição do esquema . Assim, na fronteira permeável em $X=0$:

$$\text{Se } \left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{X=0} = 0 \quad \text{e} \quad V_{i,2} > 0$$

$$M_{inY} = \sum_{i=2}^{ifin} V_{i,2} \cdot \Delta X_i$$

$$M_{outX} = \sum_{j=2}^{jf} U_{3,j} \cdot \Delta Y_j \quad \text{se } U_{3,j} < 0$$

$$M_{inX} = \sum_{j=2}^{jf} U_{3,j} \cdot \Delta Y_j \quad \text{se } U_{3,j} > 0$$

Define-se agora a chamada fração mássica global:

$$FMG = \text{abs} \left[\frac{\text{massa que sai}}{\text{massa que entra}} \right]$$

$$FMG = \text{abs} \left[\frac{M_{outX}}{M_{inX} + M_{inY}} \right] \quad (3.175)$$

Adotando um tratamento análogo ao esquema UPWIND para o fluido que está saindo do volume de controle obtém-se:

$$U_{2,j} = U_{3,j} \qquad \text{se} \qquad U_{3,j} < 0$$
$$U_{2,j} = U_{3,j} \cdot FMG \qquad \text{se} \qquad U_{3,j} > 0$$

As velocidades obtidas pelo método numérico serão comparadas aos valores de velocidade analíticos calculados para o centro das faces do volume de controle.

- Caso 1: Condição de Dirichlet em $X = 0$
- Caso 2: Condição de Neumann em $X = 0$

Condição de Dirichlet em $Y=0$ e malha uniforme 20×20

Tab. 3.16: Comparação de erro com relação à condição de contorno

Re = 1		Re = 10		Re = 100	
Caso 1	Caso 2	Caso 1	Caso 2	Caso 1	Caso 2
0,0293	0,0283	0,0362	0,0321	0,123	0,197

Pelo comportamento apresentado pelo erro na tabela acima, observa-se que, ao contrário do que ocorre na convecção-difusão, mesmo para baixos números de Reynolds, os resultados de erro indicam uma certa independência do tipo de condição de contorno, mesmo adotando-se uma aproximação do perfil interpolante. Tomando esses resultados e os obtidos na convecção-difusão, como representativos, o procedimento acima descrito será incorporado ao esquema nas fronteiras, quando se tratar da resolução das equações de quantidade de movimento; passando-se à aplicação integral do perfil interpolante, quando do transporte de um escalar, por exemplo a temperatura no caso de convecção natural.

3.6. Aplicação do Esquema Flux-Spline a Convecção Natural

3.6.1 Equações de Governo

As equações de governo na forma conservativa, para um escoamento laminar bidimensional em regime permanente acionado por gradientes de temperatura são:

$$\frac{\partial}{\partial X}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial Y}(\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\rho U^u \cdot U - \mu \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\rho V^u \cdot U - \mu \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\rho U^v \cdot V - \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\rho V^v \cdot V - \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \rho g \quad (3.176)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\rho U \cdot C_p T - K \cdot \frac{\partial T}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\rho V \cdot C_p T - K \cdot \frac{\partial T}{\partial Y} \right] = 0 \quad (3.177)$$

Para o fluido em condições estáticas, não influenciado pelo escoamento, tem-se:

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial Y} = -\rho_\infty \cdot g \quad (3.178)$$

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial X} = 0 \quad (3.179)$$

onde P_∞ e ρ_∞ são a pressão e a densidade ambiente .

Assim, o lado direito da equação (3.176) assume a forma:

$$\frac{\partial(P - P_{\infty})}{\partial Y} - (\rho - \rho_{\infty}) \cdot g \quad (3.180)$$

Se a aproximação de Boussinesq é aí aplicada obtém-se finalmente:

$$-\frac{\partial(P - P_{\infty})}{\partial Y} + \rho_{\infty} \cdot g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty}) \quad (3.181)$$

3.6.2 Normalização das Equações de Governo

Para a convecção natural, Ostrach (1981) conclui através de análise de escala que, para as variáveis serem normalizadas de forma adequada, deve-se observar as seguintes regras:

Se $Gr \leq 1$ e $Pr \leq 1$

$$U_r = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_c^2}{\frac{\mu}{\rho}} = Gr \cdot \left(\frac{\nu}{L_c} \right) \quad (3.182)$$

Se $Gr^{0,5} > 1$ e $Pr < 1$ usar:

$$U_r = (g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_c)^{0,5} = Gr^{0,5} \cdot \left(\frac{\nu}{L_c} \right) \quad (3.183)$$

Se $Gr > 1$ e $Pr > 1$ usar:

$$U_r = \frac{(g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_c)^{0,5}}{Pr^{0,5}} = \frac{Gr^{0,5}}{Pr^{0,5}} \cdot \left(\frac{\nu}{L_c} \right) \quad (3.184)$$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_c^3}{\nu^2}$$

$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{K} = \frac{\nu}{K}$$

Assim tomando:

$$X = \frac{x}{L_c} \quad Y = \frac{y}{L_c}$$

$$U = \frac{u}{U_r} \quad V = \frac{v}{U_r}$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_H - T_\infty} \quad P = \frac{p - p_\infty}{\rho U_r^2}$$

as equações de governo ficariam na forma:

Quantidade de Movimento

$$\text{Termo de Inércia} \propto \left(\frac{\nu}{L_c} \cdot \frac{1}{U_r} \right) \cdot (\text{Termo Viscoso}) + \left(\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T}{U_r^2} \right) \cdot (\text{Termo de Empuxo}) -$$

Termo de Pressão

Conservação de energia

$$\text{Termos convectivos} \propto \left(\frac{\alpha}{L_c} \cdot \frac{1}{U_r} \right) \cdot (\text{Termos difusivos})$$

Dessa forma obtém-se para o caso onde:

$$G_r^{0,5} > 1 \text{ e } Pr < 1 \quad (Ar)$$

$$\Gamma^u = \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{0,5} = \Gamma^v \quad (3.185)$$

$$\Gamma^\Theta = \frac{1}{(Ra \cdot Pr)^{0,5}} \quad (3.186)$$

$$Sc^v = \Theta^v \quad (3.187)$$

onde $Ra = G_R \cdot P_R$

Sob essa normalização, as equações de conservação assumem a forma:

Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.188)$$

Quantidade de movimento - Direção X

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(U^u \cdot U - \Gamma^U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(V^u \cdot U - \Gamma^U \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.189)$$

Quantidade de movimento - Direção Y

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(U^v \cdot V - \Gamma^V \cdot \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(V^v \cdot V - \Gamma^V \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + Sc^v \quad (3.190)$$

Conservação de energia

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[U \cdot \Theta + \Gamma^\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[V \cdot \Theta + \Gamma^\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right] = 0 \quad (3.191)$$

Para o caso onde $Gr^{0,5} > 1$ e $Pr > 1$

$$\Gamma^U = \Gamma^V = \frac{Pr}{Ra^{0,5}} \quad (3.192)$$

$$\Gamma^\Theta = \frac{1}{Ra^{0,5}} \quad (3.193)$$

$$Sc^V = \Theta^V \cdot Pr \quad (3.194)$$

Como a malha de V é deslocada em relação à malha de Θ , como mostrado na figura 3.37, o termo Θ^V é calculado usando-se a contribuição de dois volumes de controle, através de interpolação linear.

$$\Theta_{i,j}^V = \frac{\Theta_{i,j} \cdot \Delta Y_j^{V+} + \Theta_{i,j-1} \cdot \Delta Y_j^{V-}}{\Delta Y_j^V} \quad (3.195)$$

3.6.3 Método de Solução

O algoritmo de solução para esse sistema de equações foi baseado no fato do fenômeno ser acionado devido aos gradientes de temperatura. Assim, a equação de conservação de energia, será posicionada de forma que, sendo resolvida, fornecerá a fonte necessária à resolução da quantidade de movimento.

Os passos serão:

I - Arbitre um campo de velocidade e resolva a equação da energia usando o método de solução para convecção-difusão. Corrija se necessário os valores do contorno de Θ ;

II - Resolva o Bloco UVP (Quantidade de Movimento) usando o método de solução para escoamento;

III - Retorne ao passo I com o novo campo de velocidade obtido em II, até a convergência de Θ , U e V .

3.6.4 Aplicação do Esquema de Solução para Convecção Natural

Para aferição do método de solução e do esquema de discretização neste tipo de fenômeno, será usado um problema da literatura que tenha a solução numérica estabelecida para servir de referência. Tal característica se encontra no trabalho de Hortmann, Peric e Scheuerer (1990), que aborda a cavidade quadrada com uma parede lateral aquecida e as horizontais isoladas como mostrado na figura 3.38. O esquema numérico usado é a diferença central tanto para os termos difusivos quanto para os convectivos. Foram utilizadas malhas com até 640×640 volumes de controle de forma que os resultados obtidos serão tomados como referência para aferição do desempenho do esquema neste tipo de problema.

Os parâmetros de comparação são:

$\overline{Nu}$ → número de Nusselt médio

U_{max} → máxima velocidade horizontal no plano vertical $X = 0,5$

V_{max} → máxima velocidade vertical no plano horizontal $Y = 0,5$

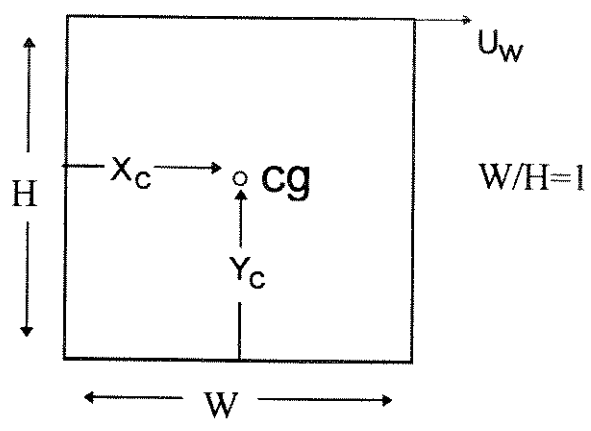


Fig. 3.36: Domínio e coordenadas para cavidade hidrodinâmica

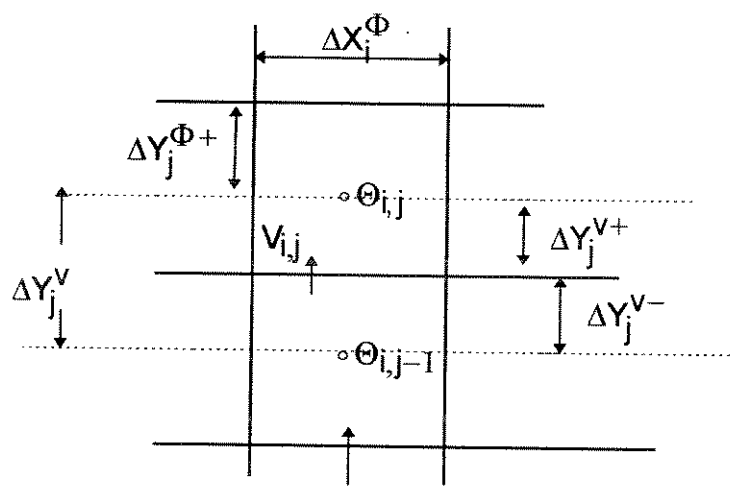


Fig. 3.37: Obtenção do termo fonte Θ^V

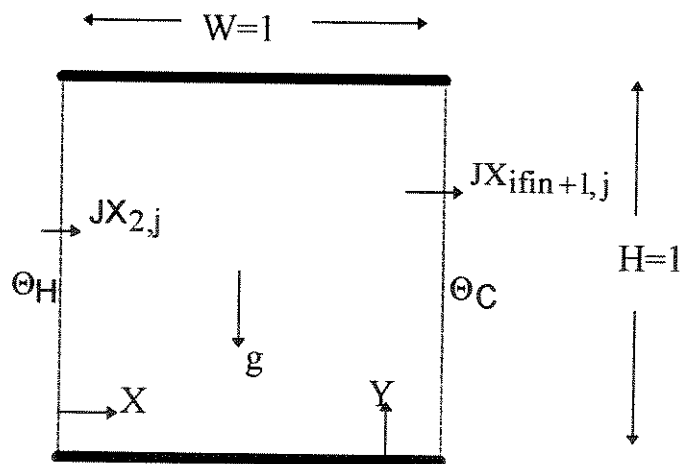


Fig. 3.38: Domínio e coordenadas para cavidade térmica fechada

As condições de contorno são:

$$\Theta(0, Y) = 1$$

$$\Theta(1, Y) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{X, Y=1} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{X, Y=0} = 0$$

Condição de não deslizamento nas paredes para U e V.

$$U(0, Y) = U(1, Y) = U(X, 0) = U(X, 1) = V(0, Y) = V(1, Y) = V(X, 0) = V(X, 1) = 0$$

O número de Nusselt médio em $X = 0$ é definido como:

$$\overline{Nu} = - \int_0^1 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} \cdot dY$$

Como o fluxo na parede oeste é dado por:

$$JX_{2,j}^{\Theta} = \rho U_{2,j} \cdot \Theta_{1,j} - \Gamma_{2,j}^{\Theta} \cdot \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{2,j}$$

sendo:

$$U_{2,j} = 0 \quad \text{e} \quad \Gamma^{\Theta} = \text{constante},$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\Gamma^{\Theta}} \cdot \int_0^1 JX_{2,j}^{\Theta} \cdot dY$$

Para $Ra = 10^5$ e $Pr = 0,71$ (Ar) com malhas uniformes, obteve-se os seguintes resultados expostos na tabela 3.17 :

Tab. 3.17: Teste do método de solução para conv. natural em cav. térm. fechada

RA=10 ⁵	U _{max}		V _{max}		Nu	
	REF	SPLINE	REF	SPLINE	REF	SPLINE
NVC						
10x10	33,498	35,517	74,774	64,033	5,507	5,154
20x20	34,581	34,752	66,404	67,678	4,902	4,678
40x40	34,739	34,809	68,843	68,484	4,616	4,559
80x80	34,749		68,560		4,545	
320x320	34,741		68,618		4,523	

Os resultados obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE para o número de Nusselt médio, (plotados na figura 3.39) mostram que usando-se malha 20x20 consegue-se aproximar do resultado da referência usando malha 40x40. Para malha 40x40 o resultado se aproxima do valor de Nu obtido pela referência com malha 80x80. As isotermas e linhas de corrente para $Ra=1E+5$ usando-se malha 10x10 estão plotadas nas figuras 3.40 e 3.41 .

O grau de acurácia apresentado pelo esquema, em todas as comparações até agora, o qualifica para aplicação a problemas de cavidade aberta, onde usando-se malhas grosseiras, possa obter-se resultados que com outros esquemas, seriam alcançados somente as custas de maior esforço computacional.

Figura 3.39
Nusselt versus Malha para Cavity Térmica Fechada

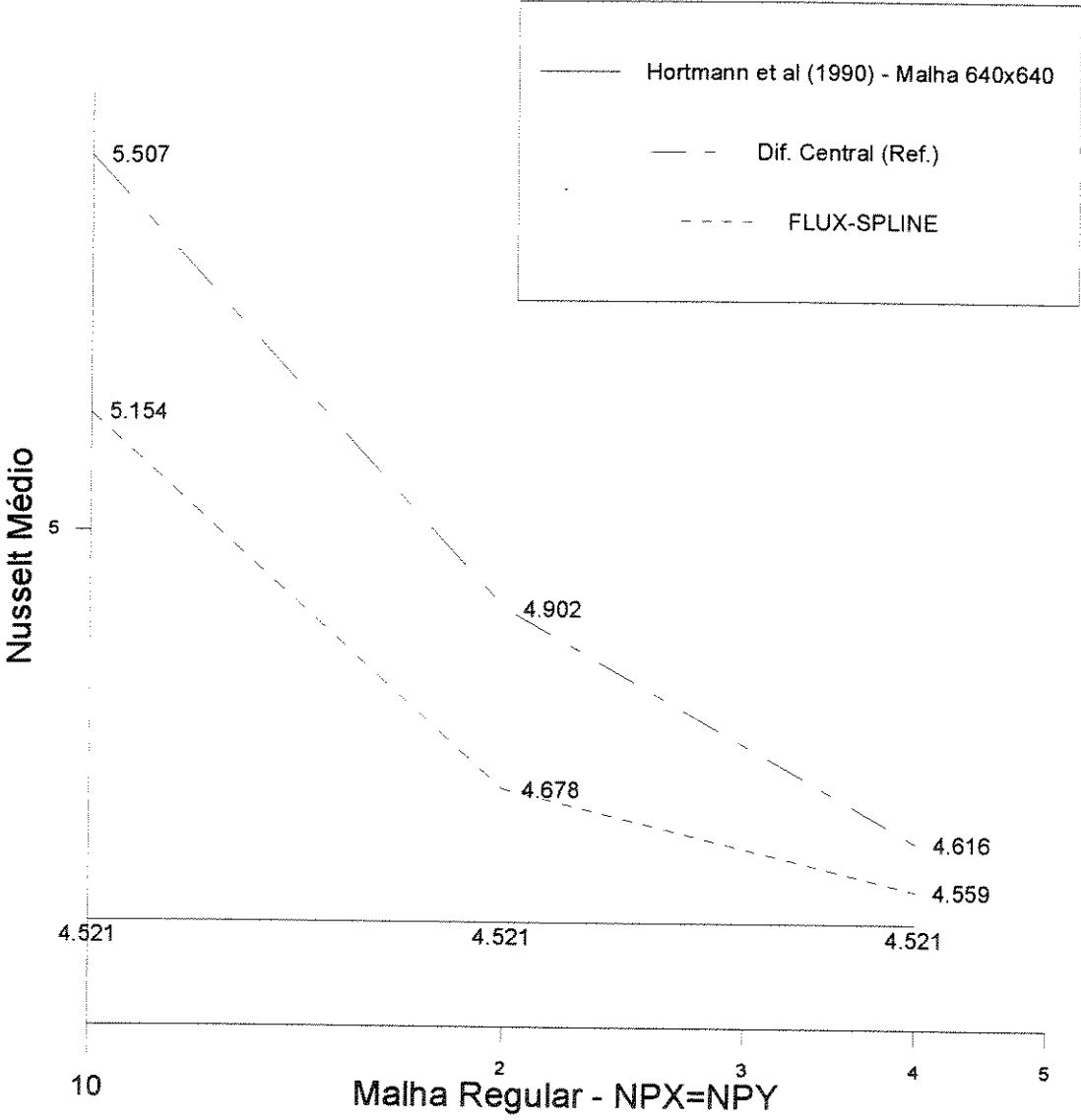


Figura 3.40: Isotermas em cavidade térmica fechada - $Ra=1E+5$

$$\Delta\Theta = 0,1$$

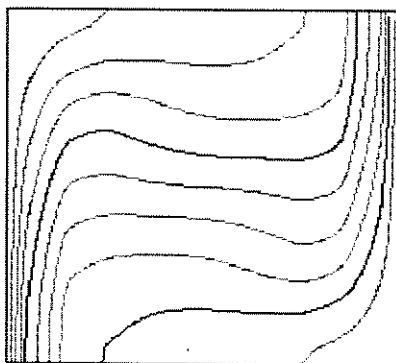
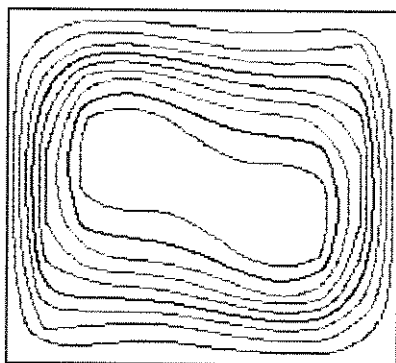


Figura 3.41: Linhas de corrente em cavidade térmica fechada

$$Ra=1E+5$$

$$\Psi_{\min} = -0,0342$$

$$\Delta\Psi = -0,0038$$



Capítulo 4

Aplicação a Cavidades Abertas Acionadas por Convecção Natural

Como já visto, este tipo de problema se caracteriza pela necessidade de se tomar em alguns casos, um domínio de cálculo ampliado, de forma que se possa impor condições de contorno de segunda espécie, tanto para as equações de quantidade de movimento, como para a equação de conservação de energia, obtendo-se da simulação numérica resultados aceitáveis do ponto de vista prático. Dessa forma, a indefinição do domínio de cálculo se torna a primeira dificuldade para a simulação do fenômeno. A literatura consultada posiciona a fronteira, pela observação da variação de um parâmetro de interesse, número de Nusselt por exemplo; como função desse posicionamento para um conjunto de valores de Rayleigh e Prandtl ao longo de simulações numéricas. Assim, o menor domínio a partir do qual, uma ampliação do mesmo não modificará o valor convergido do parâmetro de interesse, é tomado como adequado ao problema. O domínio adotado para os problemas a seguir é oriundo do procedimento acima descrito.

Quando se tratar do transporte de energia, as condições de contorno de contorno de Neumann receberão o tratamento descrito e aplicado para os problemas de convecção-difusão, enquanto que para a quantidade de movimento, como mostrado no exemplo E4 de cavidade aberta em convecção forçada, se adotará um tratamento do contorno sob a imposição do princípio da conservação global da massa

4.1 Abordagem de Fronteira Aberta em Convecção Natural

Um caso interessante para a aplicação desse princípio pode ser construído se uma cavidade aquecida inserida em uma parede vertical, for limitada por um domínio como mostrado na figura 4.1. Admitindo-se que nas faces N,S e E possa haver fluxos de massa entrando ou saindo :

$$\sum \dot{m}_{in} = \dot{m}_{inE} + \dot{m}_{inN} + \dot{m}_{inS} \quad (4.1)$$

$$\sum \dot{m}_{out} = \dot{m}_{outE} + \dot{m}_{outN} + \dot{m}_{outS} \quad (4.2)$$

onde:

$$\dot{m}_{inE} = \iint_E \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{U} \cdot d\vec{A} < 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{m}_{inN} = \iint_N \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{V} \cdot d\vec{A} < 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{m}_{inS} = \iint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{V} \cdot d\vec{A} < 0 \quad (4.5)$$

$$\dot{m}_{outE} = \iint_E \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{U} \cdot d\vec{A} > 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{m}_{outN} = \iint_N \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{V} \cdot d\vec{A} > 0 \quad (4.7)$$

$$\dot{m}_{outS} = \iint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{se} \quad \vec{V} \cdot d\vec{A} > 0 \quad (4.8)$$

Escolhendo para a aplicação do parâmetro de correção FMG, as velocidades que produzem influxo de massa, o cálculo da fração mássica global será feito através da expressão (3.175) :

$$FMG = \frac{\text{massa que sai}}{\text{massa que entra}}$$

E assim :

$$FMG = \frac{\sum \dot{m}_{out}}{\sum \dot{m}_{in}} \quad (4.9)$$

4.2 Aplicação à Cavity Aberta Acionada por Convecção Natural

EXEMPLO CA1:

Chan e Tien(1985A) tratam de um problema de convecção natural em cavidade quadrada bidimensional aberta inserida numa parede vertical. Como mostrado na figura 4.1, a parede vertical oposta à abertura da cavidade é aquecida de forma isotérmica, enquanto as paredes horizontais restantes são térmicamente isoladas. Assume-se propriedades constantes sob as limitações do modelo de Boussinesq. O domínio de cálculo sobre o qual serão impostas as condições de contorno é definido como proposto por Le Quere(1981), de forma que o mesmo é posicionado a uma distância de duas vezes a altura H da cavidade nas duas direções. As regiões sólidas são tratadas através do artifício de se fornecer valores para os coeficientes de difusão adequados a cada tipo de equação de conservação. No caso da equação de energia os valores são suficientemente pequenos de forma a se simular regiões isoladas térmicamente, enquanto que na quantidade de

movimento tais valores são suficientemente altos de forma que as velocidades sejam nulas.

As condições de contorno usadas na simulação são:

Face Leste:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \Theta_{\text{out}} = \Theta_{\text{in}} = 0$$

onde os subscritos out e in indicam se o fluxo de energia está se dando para fora ou para dentro da fronteira considerada. Assim, por exemplo, se na fronteira norte as velocidades calculadas da iteração anterior fornecerem fluxos mássicos positivos e negativos ; ao se resolver a equação de energia cada um deles terá sua respectiva condição de contorno aplicada.

Face Norte:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \Theta_{\text{out}} = \Theta_{\text{in}} = 0$$

Face Sul:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = V = \Theta = 0$$

Para se comparar os resultados obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE na simulação deste problema, será construída uma tabela onde os valores calculados por Chan e Tien(1985A) com $Pr=1$ para o número de Nusselt médio e massa deslocada como funções do número de Rayleigh, serão aceitos como referência. Tais valores foram calculados com os autores usando esquema POWER-LAW e algoritmo SIMPLER com malha variável de 41x52 pontos, dos quais 20x20 dentro da cavidade.

O número de Nusselt médio é definido como:

$$\overline{Nu} = - \int_0^H \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} \cdot dY = Nu(Ra, Pr, \frac{W}{H})$$

Utilizando-se o esquema FLUX-SPLINE esse parâmetro pode ser calculado através de:

$$\overline{Nu} = \int_0^H \frac{JX_{2,j}}{\Gamma_{2,j}^\Theta} \cdot dY \quad (4.10)$$

O fluxo mássico que entra na cavidade é calculado na forma:

$$m_{in} = - \int_0^H U_{in} \cdot dY$$

$$U_{in} = U_{X=W} \quad \text{se } U_{X=W} < 0$$

$$U_{in} = 0 \quad \text{se } U_{X=W} \geq 0$$

Para se assegurar a continuidade global ao longo das iterações foi adotada a correção do contorno segundo o procedimento anteriormente descrito em 4.1 que redundou na equação 4.9. Dessa forma pode-se afirmar que para:

Face Leste:

$$U_{ifin+1,j} = U_{ifin,j} \quad \text{se } U_{ifin,j} > 0$$

$$U_{ifin+1,j} = FMG \cdot U_{ifin,j} \quad \text{se } U_{ifin,j} < 0$$

Face Norte:

$$V_{i,jf+1} = V_{i,jf} \quad \text{se } V_{i,jf} > 0$$

$$V_{i,jf+1} = \text{FMG} \cdot V_{i,jf} \quad \text{se } V_{i,jf} < 0$$

O critério de convergência inclui o controle do resíduo de massa e energia na cavidade na forma:

$$\left| \frac{\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}}{\dot{m}_{in}} \right| \leq 10^{-3}$$

$$\left| \frac{\overline{Nu} - \overline{Nu}_{open}}{\overline{Nu}} \right| \leq 10^{-3}$$

$$\text{onde } \overline{Nu}_{open} = \frac{\int_{Y=0}^{Y=1} \left(1 \cdot U \cdot \Theta - \Gamma \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=1}}{\Gamma \Theta}$$

é o número de Nusselt calculado na abertura da cavidade incluindo portanto o transporte de energia por convecção e difusão. A decisão de se calcular os fluxos J por meio de uma equação de correção, mostra-se extremamente adequada para esse tipo de problema, onde a conservatividade é usada como controle do processo iterativo e critério de convergência. Os resultados obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE são advindos de malhas regulares, sendo indicado na tabela 4.1, o número de volumes de controle dentro da cavidade, onde $\dot{m} = \dot{m}_{in} \cdot \sqrt{Ra \cdot Pr}$.

Tab. 4.1: Comparação de resultados para cav. térmica horizontal aberta

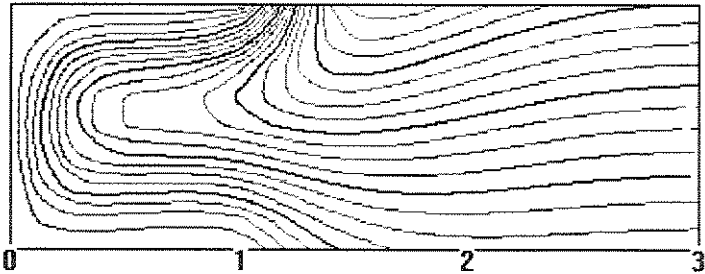
Ra	10 ³		10 ⁴		10 ⁵	
	Ref.	FS-8x8	Ref.	FS-8x8	Ref.	FS10x10
$\overline{Nu}_{open}$	1,07	1,067	3,41	3,589	7,69	8,632
$\dot{m}$	1,95	1,922	8,02	8,232	21,10	21,98

Os resultados expostos na tabela 4.1 mostram uma boa aproximação dos valores calculados pelo esquema FLUX-SPLINE com relação aos valores tomados como referência. A figura 4.4 mostra a distribuição das linhas de corrente dentro e nas proximidades da cavidade, para $Ra=1E+4$ com malha regular de 8x8 volumes de controle dentro da cavidade.

Figura 4.4: Linhas de corrente para $Ra=1E+4$

$$\Delta\Psi = -0,663$$

$$\Psi_{min} = -12,6$$



Adotando-se o procedimento de solução usado por Varejão(1979) para a simulação deste problema com os mesmos $Ra=1E+5$ e malha com 10×10 volumes de controle na cavidade obtém-se:

$$\overline{Nu}_{open} = 8,77 \text{ e } m = 22,63 .$$

Comparando-se ao resultado obtido na última coluna da tabela 4.1 confirma-se mais uma vez a adequação do procedimento de solução adotado.

Para um número de Rayleigh igual a 10^5 sob uma malha regular com 30×50 volumes de controle, ou seja, usando um quarto do número de volumes de controle utilizados pela referência dentro da cavidade, obtém-se um afastamento para o número de Nusselt médio de 12,24% enquanto que para o fluxo mássico chegou-se a 4,1%.

Nota-se que o aumento desse afastamento está ligado ao aumento do número de Rayleigh indicando que ao tornar-se predominantemente convectivo, o escoamento assume uma maior complexidade apresentando portanto maiores dificuldades à sua correta simulação.

Para a simulação de escoamentos deste tipo, sob altos números de Rayleigh como por exemplo em escoamentos turbulentos, seria recomendável trabalhar com malhas irregulares, como foi utilizado pela referência, concentrando uma maior quantidade de pontos no interior da cavidade obtendo assim um melhor aproveitamento das características do esquema utilizado.

EXEMPLO CA2:

Os resultados obtidos por Chan e Tien(1985A) , para a cavidade isotérmica quadrada com domínio estendido são reproduzidos por Chan e Tien(1985B) com um domínio de cálculo reduzido à própria cavidade como mostrado na figura 4.2. Constatam então que para altos valores de Rayleigh, a partir de 10^6 , os resultados para Nusselt médio e massa deslocada se aproximam daqueles obtidos usando-se o domínio estendido. Dessa forma, os resultados promovem uma expectativa que cavidades onde a parede aquecida está mais distante da abertura ($\frac{W}{H} > 1$), podem ser adequadamente simuladas sob a aproximação do domínio restrito à cavidade também para valores mais baixos de Rayleigh.

As condições de contorno usadas nesse caso são:

Nas paredes sólidas:

Face Oeste:

$$\Theta = 1$$

$$U = V = 0$$

Face Norte:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=H} = U = V = 0$$

Face Sul

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} = U = V = 0$$

Na face permeável (Leste)

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \Theta_{\text{out}}}{\partial X} = \Theta_{\text{in}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

A comparação dos resultados com os obtidos pelo esquema FLUX-SPLINE, usando malha regular, se fará por meio da tabela 4.2. Para esse caso, $Pr=7$ e $W/H=7$, e a malha variável utilizada pelos autores possui 96x22 pontos . O critério de convergência é o mesmo do exemplo anterior e a malha usada pelo esquema FLUX-SPLINE é regular com 48x11 volumes de controle.

Tab.4.2: Resultados para cavidade térmica horizontal aberta sem plenum

Ra	10^3		10^4		10^5	
	Ref.	FS	Ref.	FS	Ref.	FS
$\overline{Nu}_{open}$	0,147	0,145	0,616	0,565	5,30	5,35

Verifica-se neste caso que a supressão da extensão do domínio faz com que , mesmo sob malha regular, apareça um bom desempenho do esquema FLUX-SPLINE, embora haja um afastamento significativo para $Ra=1E+4$. Com o objetivo de confirmar esta discrepância a malha usada pelos autores foi utilizada com o esquema FLUX-SPLINE para Raleygh $1E+4$, fornecendo um valor de Nusselt médio igual a 0,563. Ao se limitar os cálculos à cavidade, embora ainda obtendo valores aceitáveis para o número de Nusselt , elimina-se as dificuldades devidas à extensão do domínio às custas de uma visão qualitativa do escoamento.

As isotermas e linhas de corrente calculadas usando-se malha 48x11 estão plotadas nas figuras 4.5 e 4.6 para $Ra=1E+5$.

Os gráficos estão propositalmente fora de escala para melhor visualização.

Figura 4.5: Isotermas para $Ra=1E+5$

$$\Delta\Theta = 0,1$$

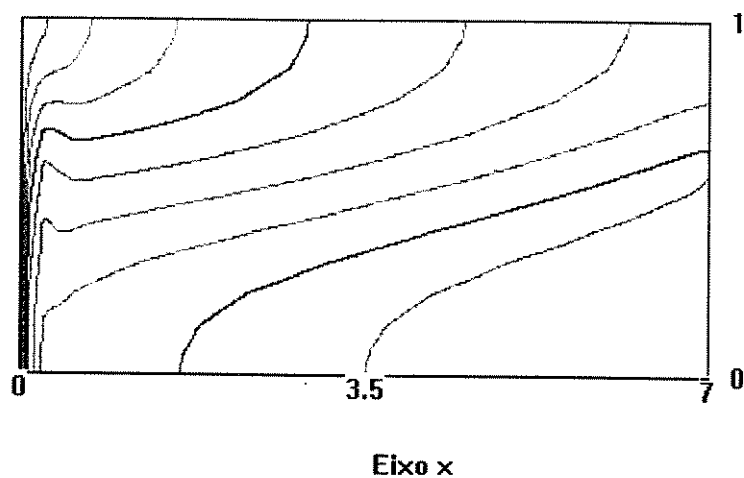
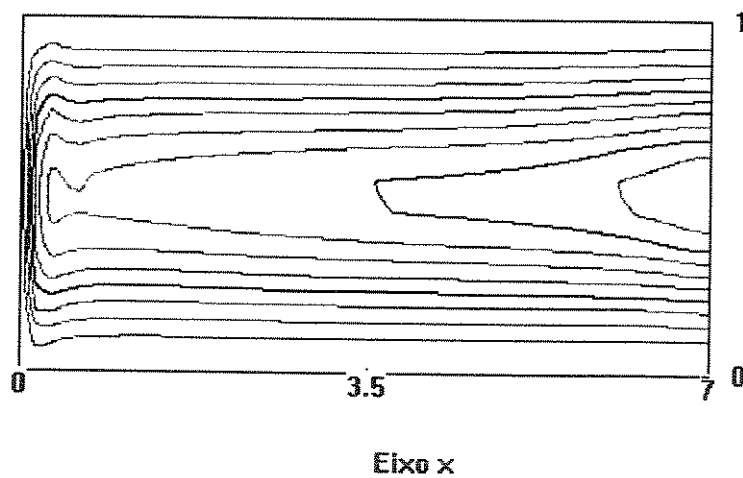


Figura 4.6: Linhas de corrente para $Ra=1E+5$

$$\Psi_{\min} = -16,9$$

$$\Delta\Psi = -1,88$$



EXEMPLO CA3:

O problema abordado por Lage, Lim e Bejan (1992), surgiu da necessidade de simular-se o resfriamento de cinza proveniente do processo de combustão em leito fluidizado de usinas termoelétricas com baixa emissão de poluentes. Esses rejeitos tem que ser depositados para resfriamento e posteriormente removidos para um tratamento final que pode incluir seu reaproveitamento por exemplo, em tijolos para construção civil.

A geometria do problema pode ser reduzida numa primeira aproximação a de uma cavidade aberta no topo, com paredes laterais aquecidas e face inferior isolada termicamente, como mostrado na figura 4.3. Dependendo dos valores de temperatura alcançados nessas paredes o escoamento poderia ser do tipo ascendente junto às mesmas e descendente pelo centro da cavidade ou, ascendente junto à parede de maior temperatura e descendente na de menor temperatura.

Os autores usaram em suas simulações o método de volumes de controle com o esquema Power-Law com malha de 52x52 volumes de controle; operando sob o algoritmo SIMPLEC proposto por Van Doormaal e Raithby (1983).

Como as camadas limites deste caso se apresentam extremamente finas, foi necessário, para suficiente acurácia, o emprego pelos autores de uma malha distribuída sob a regra:

$$S_{i+1} = S_i + \alpha_s^i \cdot \Delta \quad \text{onde } 0 \leq i \leq \frac{M}{2}$$

onde:

M é o número total de linhas da grade;

Δ é o espaçamento do primeiro volume de controle junto à parede;

α_s^i é o parâmetro de mudança da malha com $\alpha_s=1,1011$;

No caso da direção X esta equação é aplicada para uma metade da cavidade, sendo esses valores usados de forma simétrica na outra .

As condições de contorno e seu posicionamento são em parte, oriundas dos resultados obtidos por Chan e Tien (1985B), que concluíram que para uma cavidade com razão de aspecto igual a um, submetida a números de Rayleigh moderados ou altos ($10^6 \leq Ra \leq 10^9$), não é necessário considerar-se o domínio fora da cavidade. Como já visto essas aproximações são razoáveis se o objetivo é o cálculo do número de Nusselt médio e a massa deslocada pelo escoamento.

Na face superior a velocidade U é considerada nula pois existe na planta industrial uma proteção que circunda a cavidade e assim:

$$U = \left[\frac{\partial V}{\partial Y} \right]_{Y=H} = 0$$

$$\text{Se } V(X,H) > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=H} = 0$$

$$\text{Se } V(X,H) < 0 \Rightarrow \Theta|_{Y=H} = 0$$

Na face inferior:

$$U = V = \left[\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right]_{X,Y=0} = 0$$

Para $X = 0$

$$U(0, Y) = V(0, Y) = 0$$

$$\Theta(0, Y) = \Theta_1$$

Para $X=W$

$$U(W, Y) = V(W, Y) = 0$$

$$\Theta(W, Y) = \Theta_r$$

O esquema FLUX-SPLINE será aplicado com malha regular utilizando um menor número de volumes de controle de forma a se aproveitar a maior acurácia do esquema.

O critério de convergência será obtido através do balanço de energia na cavidade para uma situação de regime permanente:

$$\bar{Nu}_{\Theta_l} - \bar{Nu}_{\Theta_r} = \bar{Nu}_{open}$$

$$\bar{Nu}_{\Theta_l} = - \int_0^H \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} \cdot dY = - \int_0^H \left(\frac{JX}{\Gamma \Theta} \right)_{X=0} \cdot dY$$

$$\bar{Nu}_{\Theta_r} = - \int_0^H \left(\frac{JX}{\Gamma \Theta} \right)_{X=W} \cdot dY$$

$$\bar{Nu}_{open} = - \int_0^w \left. \frac{JY}{\Gamma \Theta} \right|_{Y=H} \cdot dX$$

O critério de convergência é então definido na forma :

$$Crit = \text{abs} \left[1 - \frac{E_{out}}{E_{in}} \right] = \text{abs} \left[1 - \frac{Nu_{open}}{Nu_{\Theta_l} - Nu_{\Theta_r}} \right] \leq 10^{-4}$$

Para efeito de comparação tomaremos os seguintes valores para os parâmetros que governam o escoamento:

$Pr=0.72$

$Ra= 10^5 \text{ e } 10^6$

$W/H=1$

$\Theta_r = \Theta_l = 1$

Os resultados para o número de Nusselt médio da cavidade $\overline{Nu}_{open}$ com relação ao número de Rayleigh são listados na tabela 4.3 abaixo.

Tab.4.3: Resultados para cavidade térmica vertical sem plenum

Ra	10^5			10^6	
Malha	FS-13x13	FS-26x26	Ref.	FS-26x26	Ref.
$\overline{Nu}$	19,35	18,19	18,12	33,70	32,98

Novamente se manifesta o comportamento observado no caso anterior CA1, no sentido que à medida que o transporte de energia por difusão, é suplantado pelo transporte convectivo ao se operar sob números crescentes de Rayleigh, o escoamento oferece maiores dificuldades para sua simulação pelo esquema numérico. Nesse caso com o aumento do número de Rayleigh as camadas limite térmicas tornam-se mais finas, tornando mais difícil a avaliação do número de Nusselt. Para a confirmação desta tendência, são expostos abaixo os resultados para malhas regulares de 52x52 e 80x80 volumes de controle.

$$Ra=1E+5$$

$$52 \times 52 - \overline{Nu}_{open} = 17,85$$

$$80 \times 80 - \overline{Nu}_{open} = 17,77$$

$$Ra=1E+6$$

$$52 \times 52 - \overline{Nu}_{open} = 32,17$$

$$80 \times 80 - \overline{Nu}_{open} = 31,58$$

Dessa forma observa-se que para a utilização de todo o potencial do esquema, seria adequado a utilização de malha variável com refinamento junto às paredes.

As isothermas e linhas de corrente para $Ra=1E+5$ calculadas com malha 13×13 estão plotadas nas figuras 4.7 e 4.8.

Figura 4.7: Isotermas para $Ra=1E+5$

$$\Delta\Theta = 0,1$$

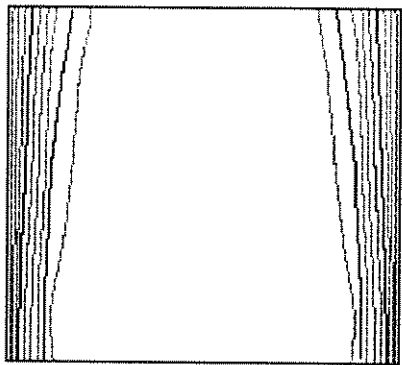
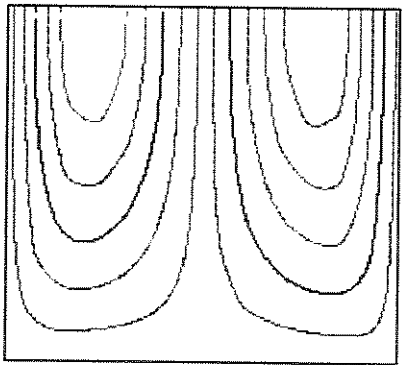


Figura 4.8: Linhas de corrente para $Ra=1E+5$

$$\Psi_{\max} = 15,3$$

$$\Psi_{\min} = -15,3$$

$$\Delta\Psi = -3,4$$



Exemplo CA 4:

A cavidade do exemplo anterior pode representar o caso de um componente eletrônico como mostrado na figura 4.9, constituído de uma base na qual são posicionadas fontes e placas verticais.

Hipóteses simplificadoras:

1- O calor gerado pelo componente ou “pastilha” posicionado simetricamente na base da cavidade é totalmente dissipado através de sua face superior que está em contato com o fluido que preenche a cavidade. Não há transferência de calor entre a placa vertical e a base.

2- A “pastilha” ocupa um quarto da base da cavidade e o restante devido ao acima descrito é assumido termicamente isolado.

3- As fontes presentes na pastilha e placa plana vertical possuem uma distribuição que as torna isotérmicas.

Sob essas hipóteses e as anteriormente utilizadas no exemplo CA3, as condições de contorno para tal problema são:

Em $X=0$

$$U = \frac{\partial \Theta}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

Em $X=0.5$

$$U = V = 0$$

$$\Theta = \Theta_{\text{placa}}$$

Em $Y=0$
 $U=V=0$

Ao longo da pastilha $\Theta_{\text{pastilha}} = 1.0$

No restante da base $\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$

Em $Y=1$, são usadas as mesmas condições anteriormente utilizadas em CA3.

O escoamento é simulado para Rayleigh $1E+5$ e $1E+6$ com a temperatura da placa assumindo os valores zero ou um. Os resultados para o número de Nusselt médio no topo da cavidade usando malha 16×32 , são mostrados a seguir na tabela 4.4

Tabela 4.4 - Nusselt médio para cavidade vertical aberta com fonte simétrica

Ra	$\Theta_{\text{placa}} = 0,0$	$\Theta_{\text{placa}} = 1,0$
1E+5	3,84	38,25
1E+6	3,85	38,39

As linhas de corrente e isotermas correspondentes a esses casos são plotadas nas figuras 4.10 e 4.11 para o lado direito da cavidade e mostram uma forte dependência do escoamento com relação à temperatura da placa.

Os resultados para o número de Nusselt, mostram em comparação com aqueles obtidos no exemplo CA3; que a transferência de calor é maior no caso da placa vertical na mesma temperatura da pastilha, principalmente para o menor número de Rayleigh. Ou seja, esse arranjo permite uma maior transferência de calor por unidade de volume sendo interessante o estudo da localização das fontes visando à maximização desse fator. Os resultados demonstram também que sob

essa configuração, o número de Nusselt médio da cavidade é praticamente independente do número de Rayleigh para uma dada temperatura da placa vertical.

Devido à já ressaltada dependência entre o perfil de velocidades e a temperatura da placa vertical, seria adequado uma simulação tratando a placa vertical como um prolongamento da base, de forma que se considerasse então o transporte de energia por condução da pastilha para a placa, que nesse caso assumiria o papel de aleta, e posteriormente um estudo do posicionamento das fontes na cavidade.

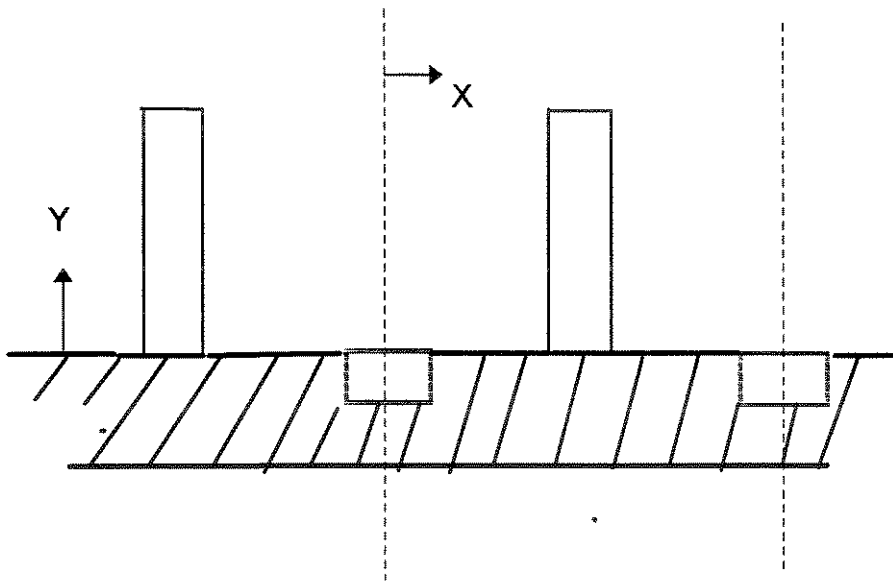


Figura 4.9: Cavidade Térmica aberta no topo
com fonte simétrica na base

Figura 4.10
Linhas de Corrente e Isotermas para Ra=1E+5

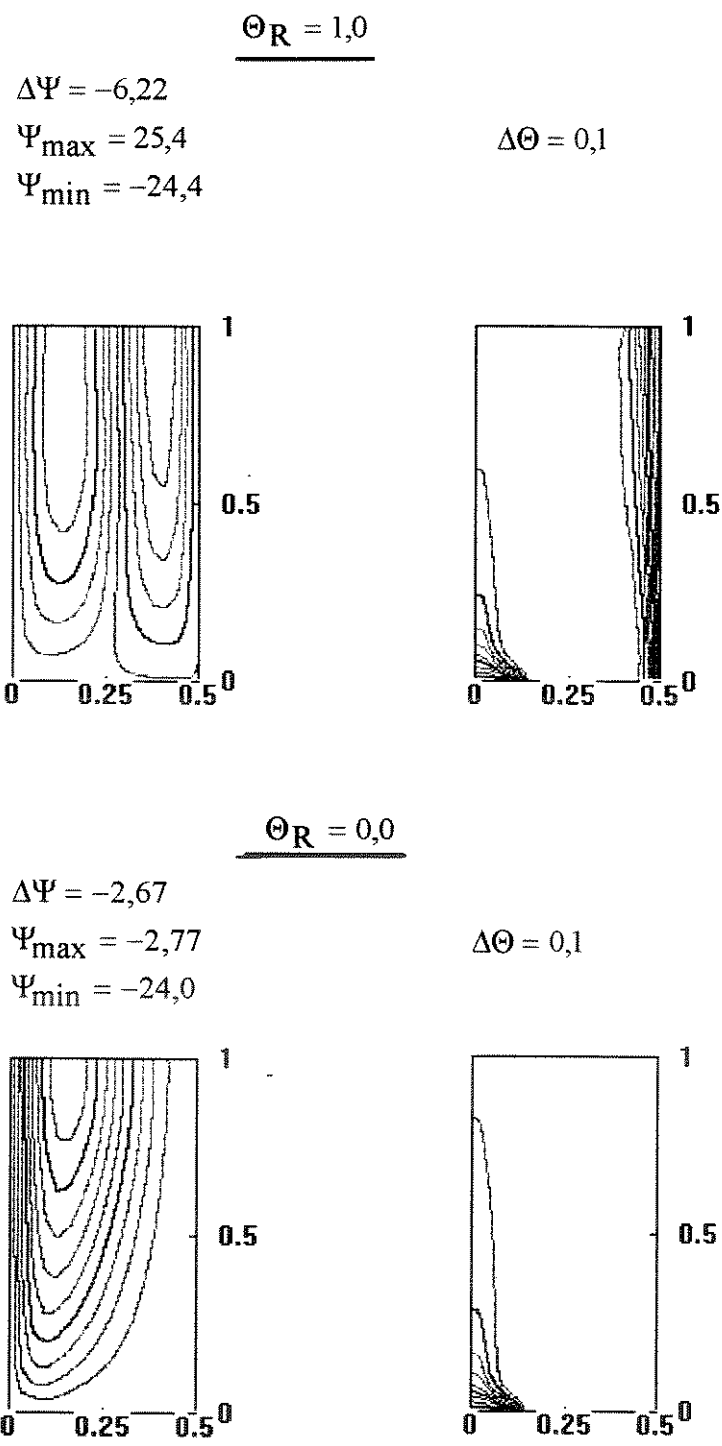
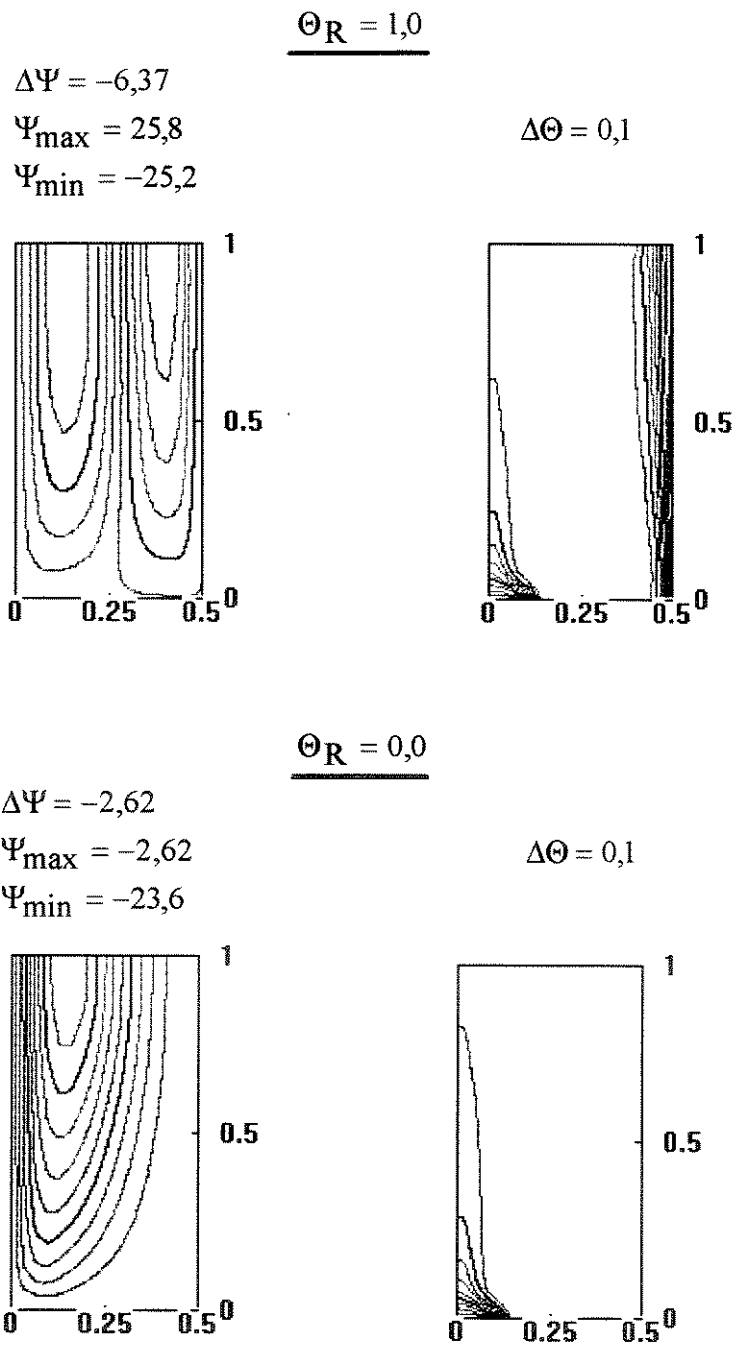


Figura 4.11
Linhas de corrente e Isotermas para $Ra=1E+6$



Ao executar a simulação deste problema tomando todo o domínio disponível em X, ou seja de uma placa vertical a outra, obteve-se com Rayleigh $1E+5$ os seguintes resultados para o número de Nusselt médio da cavidade:

$$\Theta_R = \Theta_L = 0.0 \quad - \quad \overline{Nu}_{open} = 0,93$$

$$\Theta_R = \Theta_L = 1,0 \quad - \quad \overline{Nu}_{open} = 19,58$$

Os resultados em termos de linhas de corrente e isotermas são plotados na figura 4.12.

Observa-se que a simetria presente na solução anterior desaparece por completo no caso das placas sendo mantidas na temperatura ambiente. Um escoamento ascendente junto à parede à direita da pastilha e descendente à esquerda aparece, e acoplado a esse comportamento o perfil de temperatura é distorcido na direção da placa à direita devido à dominância do transporte por convecção.

No caso das placas sendo mantidas na mesma temperatura da pastilha a observação das linhas de corrente mostra um desvio da esperada simetria que provoca a formação de um complexo campo de temperatura como mostrado pelas correspondentes isotermas, onde a energia dissipada pela pastilha é transportada em direção à placa postada à sua esquerda.

Para as placas termicamente isoladas novamente se repete o comportamento verificado nos casos anteriores, onde não há o estabelecimento de simetria. Os resultados em termos de linhas de corrente e isotermas são plotados na figura 4.13.

Essa exposição visa a mostrar que tais tipos de escoamento apresentam um alto grau de complexidade sendo extremamente sensíveis no que tange à imposição das condições de contorno e domínio de cálculo. Dessa forma, o comportamento apresentado nesses casos deve servir como motivação para uma análise mais acurada sobre tais parâmetros, para cada problema em particular.

Figura 4.12: Linhas de corrente e Isotermas para $Ra=1E+5$

Domínio de cálculo 1x1

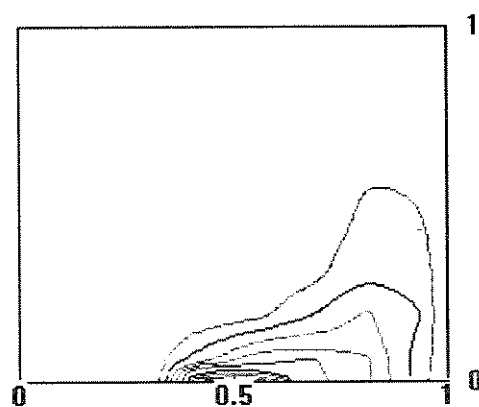
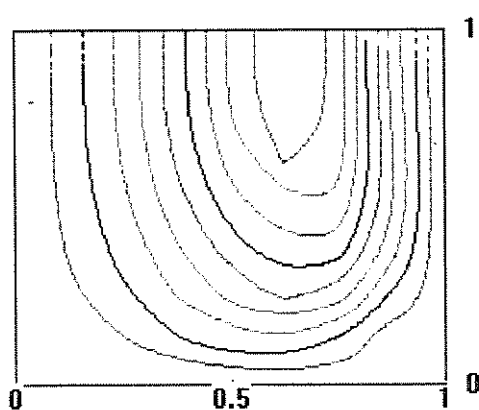
$\Theta_R = \Theta_L = 0,0$

$$\Psi_{\max} = 16,4$$

$$\Psi_{\min} = 1,82$$

$$\Delta\Psi = 1,83$$

$$\Delta\Theta = 0,1$$



$\Theta_R = \Theta_L = 1,0$

$$\Psi_{\max} = 14,1$$

$$\Psi_{\min} = -16,9$$

$$\Delta\Psi = -3,87$$

$$\Delta\Theta = 0,1$$

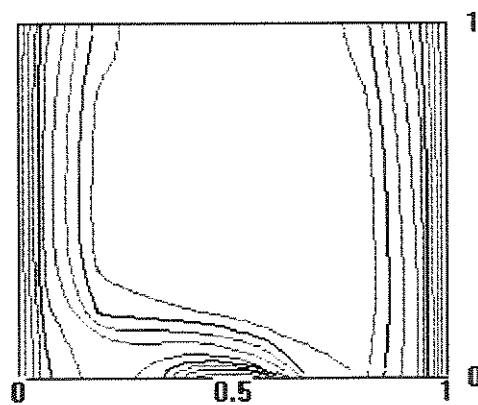
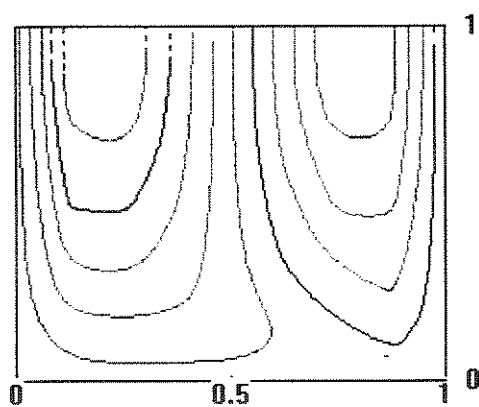
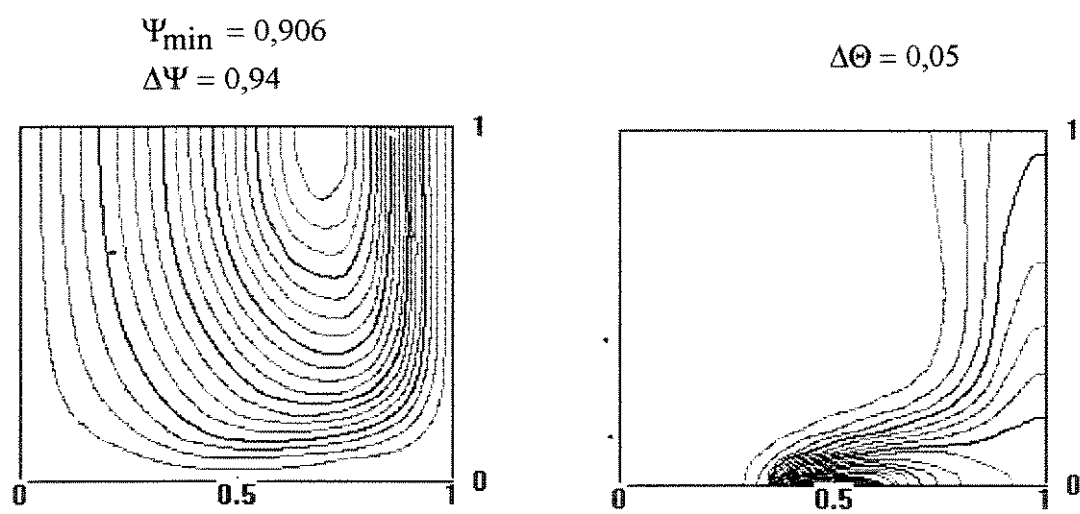


Figura 4.13 Linhas de corrente e Isotermas para $Ra=1E+5$

Placas Isoladas

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=W} = 0,0$$

Domínio de cálculo 1x1



Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Os resultados aqui obtidos nos vários problemas teste de convecção-difusão pelo esquema FLUX-SPLINE e comparados a outros anteriormente apresentados na literatura, confirmam sua habilidade em lidar com as dificuldades contidas por exemplo na simulação do transporte de uma variável dependente sob altos gradientes e campos de velocidade envolvendo recirculação, o que de certa forma, antecipava um comportamento adequado quando de sua aplicação a problemas envolvendo escoamentos.

Convecção Natural constitui o mais importante modo de transferência de energia em alguns equipamentos e processos. Quando ocorre em cavidades abertas, um conjunto de dificuldades para a simulação numérica, entre elas a extensão do domínio de cálculo e o tratamento das respectivas condições de contorno, aparece e tem que ser adequadamente tratada pelo método numérico escolhido. Devido a essas características do fenômeno, foi desenvolvido neste trabalho, um tratamento para condições de contorno de segunda espécie, que possibilitou o emprego nesses casos do esquema FLUX-SPLINE .

Outra alteração foi proposta referente ao método de solução para escoamento, motivada no sentido de se preservar a essência do algoritmo SIMPLER empregado no tratamento do acoplamento UVP, que consiste em se fornecendo um perfil de velocidade que satisfaça as equações de governo, obter-se após o cálculo da matriz de pressão, valores "exatos" de P . Devido ao comportamento apresentado em dois problemas de escoamento mostrando uma

diminuição do nível de erro e menor dependência com relação ao parâmetro Reynolds, estendeu-se sua utilização ao restante do trabalho. Tal procedimento poderia ser usado para o caso da aplicação do esquema CUBIC FLUX-SPLINE a escoamentos, sugerida por Nieckele(1985) ao final de seu trabalho. Assim, o cálculo do termo adicional característico desse esquema, seria posicionado como feito aqui para $S_{sp}^{\Phi*}$. O método de solução proposto por Varejão (1979), ao posicionar o cálculo do termo S_{sp} depois da obtenção da matriz de pressão, utilizando U e V oriundos das equações de quantidade de movimento e que portanto não satisfazem a equação da continuidade, faz com que a proposta do SIMPLER não possa ser integralmente cumprida, pois o termo S_{sp} utilizado na construção do termo fonte da matriz de pressão, passa a ser extraído da iteração anterior. O restante da literatura consultada sobre o esquema FLUX-SPLINE aplicado a escoamentos, usa esse processo evitando porém o cálculo das matrizes de correção dos fluxos.

A utilização do esquema FLUX-SPLINE no tradicional problema de convecção natural em cavidade fechada, mostrou um bom desempenho no que diz respeito ao valor do número de Nusselt mesmo com o uso de malhas regulares. Acredita-se que isso se deva, em parte, ao método de cálculo usado na obtenção dos fluxos, que usa todo o potencial do esquema aliado à conservatividade presente no método de volumes finitos.

Para a simulação de cavidades abertas, o esquema POWER-LAW empregado pelos autores dos trabalhos usados como referência necessitou do uso de malhas irregulares além de maior refinamento. Como anteriormente relatado para problemas de convecção-difusão, a utilização do esquema FLUX-SPLINE envolveu na maioria dos casos um menor número de volumes de controle para um certo nível de erro, e assim os resultados encontrados em cavidades abertas confirmam o potencial de um esquema cuja presença na literatura ainda é acanhada.

Pode-se concluir que o desempenho do esquema FLUX-SPLINE nesses casos, se deve em parte ao fato das condições de contorno usadas nas fronteiras abertas excluïrem o termo difusivo das equações de conservação, o que elimina a ocorrência das dificuldades apresentadas pelo esquema quando da simulação de problemas difusivos usando-se o que foi chamado de tratamento STANDARD das condições de contorno de Neumann.

Embora se tenha constatado que o aumento do número de Rayleigh nos problemas de cavidade aberta, conduza à necessidade de utilização de malhas irregulares, deve-se ter em mente que é comum encontrar problemas onde tais malhas não resolvem as dificuldades, por exemplo, se existem várias regiões recirculantes distribuídas ao longo do domínio. Assim, a utilização desse recurso, deve ser encarada apenas como um auxílio ao esquema empregado, e seu valor efetivo dependerá do problema abordado.

Com relação ao exemplo CA4, o aparecimento de uma solução assimétrica num caso onde se tem simetria geométrica e térmica, essa última assegurada no caso, pelas condições de contorno aplicadas sobre as placas, pastilha e topo da cavidade mostra a existência de soluções múltiplas. Para verificar-se se as soluções aqui encontradas representam o escoamento, ou são apenas soluções para um determinado instante contido em um comportamento oscilatório, é necessária uma simulação experimental. Em seguida, no caso de se constatar a presença do comportamento oscilatório, prover o sistema de equações de governo com o termo transiente, de forma que então se proceda a simulação numérica em regime transitório. Seria interessante o uso desse modelamento para aplicação em escoamentos com números de Rayleigh abaixo de 10^5 o que, por sua vez, torna necessária a extensão do domínio de cálculo através da utilização de um "plenum". A variação dos perfis das isothermas do escoamento com respeito à distribuição de temperatura imposta sobre as placas verticais mostrada pelos resultados obtidos nesse trabalho, sugere que num caso onde a pastilha for inserida numa base metálica, deva se esperar que as placas verticais agindo como aletas influenciarão fortemente o valor do número de Nusselt. Sob esse ponto de vista deveriam ser

levadas em consideração, não só a distribuição de temperatura nas placas verticais considerando-as como aletas engastadas numa base metálica como anteriormente mencionado, mas também o posicionamento das fontes dentro da cavidade.

O esquema FLUX-SPLINE envolve a solução de uma matriz n por n para cada variável dependente envolvida, de forma que em convecção natural é necessária a resolução de oito matrizes para cada iteração. Dessa forma, a incorporação ao procedimento de solução, de algoritmos otimizados para a solução das equações algébricas aqui geradas, seria recomendável para sua maior aceitação.

Finalmente, tendo em vista os resultados obtidos por este e outros trabalhos anteriores, pode-se sugerir o emprego do esquema FLUX-SPLINE na formulação de vorticidade-função corrente, para a solução das equações de convecção-difusão e particularmente na solução da equação de Poisson que rege a distribuição da função corrente ao longo do domínio, poderia ser empregado o esquema denominado por Nieckele (1985) de CUBIC FLUX SPLINE que para esse tipo de equação mostrou uma superioridade incontestável e é de fácil implementação partindo-se do esquema FLUX-SPLINE.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABIB, A.H. JALURIA, Y. Numerical simulation of the buoyancy-improved flow in a partially open cavity. *Numerical Heat Transfer*. vol. 14, p.235-254, 1988.
- BLOSH, Edwin; SHYY, Wei; SMITH, Richard. The role of mass conservation in pressure-based algorithms. *Numerical Heat Transfer*. Part B, vol. 24, p. 415-429, 1993.
- BRAGA, W. On the use of some weighted upwind schemes for strongly convective flows. *Numerical Heat Transfer*. Part B, vol. 18, p.43-60, 1990.
- BRANDT, A. Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. *Mathematics of Computation*. vol.31, p.333-390, 1977.
- CHAN, Y.L.; TIEN, C.L. A numerical study of two-dimensional natural convection in square open cavities. *Numerical Heat Transfer*. vol. 8, p. 65-80, 1985A.
- CHAN, Y.L.; TIEN, C.L. A numerical study of two-dimensional laminar natural convection in shallow open cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer*. vol. 28, p.603-612, 1985B.
- CHAN, Y.L.; TIEN, C.L. Laminar Natural Convection in Shallow Open Cavities. *Journal of Heat Transfer*. vol. 108, p.305-309, 1986.
- FIGUEIREDO, J.R. *Generalização e aproximação do esquema discretizante de Allen para equações de transporte em fluidos*. Univ. Est. de Campinas, 1988, Tese (Doutorado).

- GHIA, U.; GHIA; GHIA, K.N., SHIN, C.T. High-Re Solutions for Incompressible flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*. vol 48, p.387-411, 1982.
- GUPTA, M.M. A survey of some second-order difference schemes for the steady-state convection-diffusion equation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. vol.3, p.319-331, 1983.
- HORTMAN, M.; PERIC, M.; SHEUERER, G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-Mark Solutions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. vol. 11, p.189-207, 1990.
- HSU, C. *A curvilinear-coordinate method for momentum, heat and mass transfer in domain of irregular geometry*. University of Minnesota, EUA, 1981, Tese(Doutorado).
- JENG, Yih Nen; LIOU, Yan Chang. On the open boundary condition for the SIMPLE algorithm using nonstagered grids. *Numerical Heat Transfer*. Part. B. vol. 27, p.23-42, 1995.
- KARKI, K.C.; PATANKAR; MONGIA, H.C. Solution of Three-Dimensional flow problems using a FLUX-SPLINE Method. *AIAA-89-0687*, 1989 A .
- KARKI, K.C.; VANKA, S.P.; MONGIA, H.C. Fluid Flow Calculations using a multigrid method and an improved discretization scheme. *AIAA-89-0688*, 1989B.
- KETTLEBOROUGH, O.F. Transient laminar free convection between heated vertical plates including entrance effects. *Int. J. Heat. Mass Transfer*. vol 15. p.883-896, 1972.

- KU, H.C.; HUSH, R.S.; TAYLOR, T.D. A pseudo-spectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*. vol. 70, p.439-462, 1987.
- LAGE, J.L.; BEJAN, A. The Ra-Pr Domain of laminar natural convection in an enclosure heated from the side. *Numerical Heat Transfer. Part A*, vol. 19, p.21-41, 1991.
- LAGE, J.L.; LIN, J.S.; BEJAN, A. Natural Convection with radiation in a cavity with open top end. *Journal of Heat Transfer*. vol. 114, p. 479-486, 1992.
- LE QUERE, Patrick; HUMPHREY, Joseph, A. C.; SHERMAN, Frederick, S. Numerical Calculation of thermally driven two-dimensional unsteady laminar flow in cavities of rectangular cross section. *Numerical Heat Transfer*. vol 4, p.249-283, 1981.
- LEONARD, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* vol. 19, p.59-98, 1979.
- LIU, C.; LIU, Z. High order finite difference and multigrid methods for spatially evolving instability in a planar channel. *J. Comp. Physics*. vol. 106, p.92-100, 1993.
- NIECKELE, A.O. *Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Equations*. University of Minnesota, EUA, 1985, Tese (Doutorado).
- OSTRACH, S. Natural convection in enclosures. *Journal of Heat Transfer*. vol. 110, p. 1175-1190, 1988.

- PATANKAR, S. V.; SPALDING, D.B. *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*. 2^a ed, Intertext, London, 1970.
- PATANKAR, S.V.; KARKI, K.C. , MONGIA, H.C. Development and Evaluation of Improved Numerical Schemes for Recirculating Flows. *AIAA* 87-0061, 1987.
- PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere/McGraw/Hill, New York, 1980.
- PENOT, F. Numerical calculation of two-dimensional natural convection in isothermal open cavities. *Numerical Heat Transfer*. vol. 5, p.421-437, 1982.
- PHILLIPS, R.E.; SCHMIDT, F.W. Multigrid Techniques for the Numerical Solution of the Diffusion Equation. *Numerical Heat Transfer*. vol. 7, p.251-268, 1984.
- PHILLIPS, R.E.; SCHMIDT, F.W. Multigrid Techniques for the Solution of the Passive Scalar Advection-Diffusion Equation. *Numerical Heat Transfer*. vol.8, p.25-43, 1989.
- RUBIN, S.G. ; KHOSLA, P.K. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computational Fluids*, vol.9, p.163, 1981.
- SHYY, Wey. Effects of open boundary on incompressible Navier-Stokes flow computation: Numerical Experiments. *Numerical Heat Transfer*. vol. 12, p. 157-178, 1987.
- SHYY, Wey. Numerical outflow boundary condition for Navier-Stokes flow calculations by a line iterative method. *AIAA, J.* vol. 23, p.1847-1848, 1995.
- SMITH, R.M.; HUTTON, A.G. The Numerical Treatment of Advection: A performance comparison of current methods. *Numerical Heat Transfer*, vol. 5, p.439-461, 1982.

- VAN DOORMALL, J.P.; RATHBY, G.D. Enhancements of the SIMPLE Method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*. vol. 7, p.147-163, 1983.
- VANKA, S.P. Block implicit calculation of Navier-Stokes Equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, vol. 65, 1986, p.138-158.
- VAREJÃO, L.M.C. *Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer*. University of Minnesota, EUA, 1979, Tese (Doutorado).
- VAREJÃO, L.M.C.; PATANKAR, S.V.; KARKI, K.C. FLUX-SPLINE Method for Convection-Diffusion problems. *Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, p.161-174, 1991A .
- VAREJÃO, L.M.C.; PATANKAR, S.V.; KARKI, K.C. FLUX-SPLINE Method for conduction-type problems. *Simp. Mineiro. de Mec. Computacional*. p. 175-184, 1991B.

APÊNDICE

O programa escrito em linguagem **FORTRAN-77** é constituído de dois blocos principais e sua aplicação é limitada a domínios cartesianos, malha regular e propriedades constantes.

O bloco de energia resolve a equação de conservação de energia desde que lhe sejam fornecidas as condições de contorno e o campo de velocidade. Dessa forma pode ser empregado isoladamente para a solução de problemas de convecção-difusão.

O bloco UVP trata da resolução das equações de quantidade de movimento através da utilização do algoritmo SIMPLER.

Subrotinas de entrada e saída de dados

INPUT- é responsável pelo fornecimento aos dois blocos, das informações relativas à malha, domínio de cálculo, propriedades do fluido, coeficientes de relaxação e condições de contorno de Dirichlet.

SOURCE- é construída de maneira a fornecer os constituintes do termo fonte das variáveis dependentes U, V e teta

BOUND- é construída para tratar da correção dos valores do contorno arbitrados no início da iteração quando se tem condições de segunda espécie.

OUTPUT- é responsável pelo fornecimento dos valores de interesse como por exemplo o número de Nusselt. É através dela que se altera o número de ciclos

dos processos iterativos usados para calcular o termo adicional S_{sp} , as matrizes das correções e variável dependente.

Subrotinas Fixas

ZERO - responsável pela limpeza dos coeficientes ao se passar do cálculo de uma variável para outra.

ARGUMENTO - calcula os argumentos para o cálculo dos coeficientes.

COEF - calcula os coeficientes que constituem a molécula computacional.

FLUX - calcula o termo adicional S_{sp} para cada variável dependente por meio de processo iterativo.

SOLUVT - trata da construção do termo fonte CON para cada variável dependente e subsequente resolução da matriz correspondente e cálculo dos resíduos das equações de conservação.

COEFP - constrói os coeficientes e os componentes da fonte da equação para o cálculo da pressão.

ADI - é responsável pela solução, por **LINE by LINE**, das matrizes geradas para a correção dos fluxos e velocidades e cálculo das variáveis dependentes U , V , P e $teta$. Contém o procedimento chamado de **Block Correction**.

TDMA - Algoritmo de Thomas; está contida em ADI e executa a solução para cada linha ou coluna da matriz em questão, separadamente.

CORREÇÃO - aplica os valores de P linha com o objetivo de corrigir as velocidades oriundas das equações de quantidade de movimento.

Listagem das variáveis do programa

Serão colocadas aqui as variáveis pertencentes ao programa e que tem denominação diferente daquela apresentada ao longo do capítulo 3.

DOMX - comprimento do domínio na direção X .

DOMY - comprimento do domínio na direção Y .

DXGAMP - razão entre ΔX^+ e o coeficiente de difusão Γ do volume de controle correspondente.

DXGAMN - razão entre ΔX^- e o coeficiente de difusão Γ do volume de controle correspondente.

DYGAMP - razão entre ΔY^+ e o coeficiente de difusão Γ do volume de controle correspondente.

DYGAMN - razão entre ΔY^- e o coeficiente de difusão Γ do volume de controle correspondente.

FLAG - controle para cálculo de pressão (FLAG=1) ou velocidades (= 2)

FX - fluxo na direção X.

FY - fluxo na direção Y.

FHATX - pseudo fluxo na direção X.

FHATY - pseudo fluxo na direção Y.

FXP - razão geométrica na direção X $\Rightarrow \frac{\Delta X^+}{\Delta X^-}$

FXN - inverso de FXP.

FYP - razão geométrica na direção Y $\Rightarrow \frac{\Delta Y^+}{\Delta Y^-}$

FYN - inverso de FYP.

FIN - fluxo de massa entrando no domínio de cálculo.

FOUT - fluxo de massa saindo.

FRAC - fração mássica global

IX - deslocamento da grade na direção X

IY - deslocamento da grade na direção Y

NPX - número de volumes de controle na direção X

NPY - número de volumes de controle na direção Y

NTFLUX - número de iterações usadas para cálculo do termo Ssp.

NTADI - número de iterações usadas para cálculo das matrizes

Os valores de NTFLUX e NTADI são definidos como funções dos critérios de convergência. Para problemas de convecção-difusão observou-se ser suficiente

NTADI= NTFLUX=3

Para escoamentos em convecção forçada com o auxílio de BLOCK CORRECTION foram usados os mesmos valores.

Em escoamentos acionados por convecção natural para a obtenção dos resultados aqui apresentados usou-se:

NTADI=NTFLUX=5 a menos do exemplo CA4 onde usou-se 10x5.

NF - índice para definição das variáveis dependentes.

NF=1 - quantidade de movimento direção X.

NF=2 - quantidade de movimento direção Y.

NF=3 - temperatura.

NF=4 - pressão.

RES - resíduo das equações de conservação.

NT - controle do número de iterações para imprimir resultados na tela.

XNU - número de Nusselt na parede vertical à esquerda.

XNUR - número de Nusselt na parede vertical à direita.

XNUT - número de Nusselt na abertura da cavidade vertical.

```

c          PROGRAMA CONVECÇÃO NATURAL
c          LaLimB.
c          Esquema FLUX-SPLINE para método de vols de controle
c          MARÇO 1997
c  PROBLEMA PROPOSTO POR LAGE,LIM e BEJAN JHT VOL114 c
c          PP479-486/92
c          TAB#3 PP483
c
c*****
c          ***** PROGRAMA PRINCIPAL *****
c          IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
c
c  COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,
c
c  !ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
c  !II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
c  CALL INPUT
c  1  CALL ENERGIA
c  CALL UVP
c  CALL OUTPUT
c  GO TO 1
c  STOP
c  END
c*****
c  SUBROUTINE INPUT
c  IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
c  COMMON/INDY/P(60,60),
c  !AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
c  !UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
c  !DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
c  !CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
c  !DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),
c
c  !DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
c  !ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
c  !FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
c  !SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)
c
c  COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

```

```

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
WRITE(*,*)'GRID REGULAR'
WRITE(*,*)'NPX RA NTADI NTFLUX NTela '
READ(*,*) NPX,RA,NTADI,NTFLUX,NT

```

c coefs. de relaxação

```
ALFA=0.5
```

```
ALFAP=0.5
```

```
ALFAT=0.5
```

c propriedades

```
PR=0.72
```

```
RHO=1.0
```

```
GAMAU=SQRT(PR/RA)
```

```
GAMAV=GAMAU
```

```
GAMAT=1/SQRT(RA*PR)
```

c malha

```
NPY=NPX
```

```
IFIN=NPX+1
```

```
JF=NPY+1
```

```
DOMX=1.0
```

```
DOMY=1.0
```

c condições de contorno para teta

```
DO J=2,JF
```

```
TT(1,J)=1.0
```

```
TT(IFIN+1,J)=0.0
```

```
ENDDO
```

```
RETURN
```

```
END
```

C*****

```
SUBROUTINE SOURCE
```

```
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
```

```
COMMON/INDY/P(60,60),
```

```
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
```

```
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
```

```
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
```

```
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
```

```
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),
```

```
!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
```

```
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
```

```
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
```

```
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)
```

```
COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,
```

```
!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
IF(NF.EQ.2)THEN
```

```
c fonte para quantidade de movimento direção y
```

```
DO I=2,IFIN
```

```
DO J=4,JF-1
```

```
SC(I,J)=(TT(I,J)+TT(I,J-1))*0.5
```

```
ENDDO
```

```
SC(I,3)=TT(I,3)/3+TT(I,2)*2/3
```

```
SC(I,JF)=TT(I,JF)*2/3+TT(I,JF-1)/3
```

```
ENDDO
```

```
ENDIF
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C*****
```

```
SUBROUTINE BOUND
```

```
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
```

```
COMMON/INDY/P(60,60),
```

```
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
```

```
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
```

```
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
```

```
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
```

```
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),
```

```
!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
```

```
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
```

```
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
```

```
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)
```

```
COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,
```

```
!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
```

```
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
```

```
IF(NF.EQ.3)THEN
```

```
c cálculo dos Nusselt
```

```
SUM=0
```

```

SUMR=0
DO J=2,JF
SUM=SUM+FX(2,J)
SUMR=SUMR+FX(IFIN+1,J)
ENDDO
  XNU=SUM*(DOMY/NPY)/GAMAT/domy
  XNUR=SUMR*(DOMY/NPY)/GAMAT/domy
  SUMT=0
  DO I=2,IFIN
  SUMT=SUMT+FY(I,JF+1)
  ENDDO
  XNUT=SUMT*(DOMX/NPX)/GAMAT/domx
c  correção de teta em Y=0
DO I=2,IFIN
TT(I,1)=TT(I,2)-0.25*DYGAMN(2)*(ROV(I,3)*TT(I,2)+FY(I,2)-FY(I,3))
ENDDO
c  correção de teta em Y=H
DO I=2,IFIN
IF(V(I,JF+1).GT.0)THEN
REPY=ROV(I,JF+1)*DYGAMP(JF)
TT(I,JF+1)=TT(I,JF)+0.5*DYGAMP(JF)*(Q(REPY)/AA(-REPY))*
!(FY(I,JF+1)-FY(I,JF)+(ROV(I,JF)-ROV(I,JF+1))*TT(I,JF))
      ELSE
TT(I,JF+1)=0.0
      ENDIF
ENDDO
      ELSE
C  correção das velocidades u e v na fronteira norte
FIN=0
FOUT=0
DO I=2,IFIN
IF(V(I,JF).GT.0)THEN
FOUT=FOUT+V(I,JF)
      ELSE
FIN=FIN+V(I,JF)
      ENDIF
ENDDO
FRAC=ABS(FIN/FOUT)
DO I=2,IFIN
IF(V(I,JF).GT.0)THEN
V(I,JF+1)=V(I,JF)
      ELSE

```

```

V(I,JF+1)=V(I,JF)/FRAC
      ENDIF
ENDDO
      ENDIF
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE OUTPUT
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
COMMON/INDY/P(60,60),
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUT,nt,res
IT=IT+1
IF(IT.EQ.25)THEN
c  saída de resultados
KCONT=KCONT+1
XNUW=XNU-XNUR
CRIT=abs(1-XNUT/XNUW)
write(*,*)'Res Max=',res,' DivT=',CRIT,' NUt=',xnut
IT=0
IF(KCONT.EQ.NT)THEN
WRITE(*,*)'LaLimB-> FORNECA NTADI , NTFLUX , Ntela'
READ(*,*)NTADI,NTFLUX,NT
KCONT=0
      ENDIF
    ENDIF
RES=0
RETURN

```

END

C*****

SUBROUTINE ENERGIA

c trata da solução da equação de conservação de energia

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res

NF=3

CALL ZERO

CALL ARGUMENTO

CALL SOURCE

CALL COEF

CALL FLUX

CALL SOLUVT

RETURN

END

C*****

SUBROUTINE UVP

c trata da solução do campo de velocidade

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

```
!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)
```

```
COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,
```

```
!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
DO FLAG=1,2
DO NF=1,2
CALL ZERO
CALL ARGUMENTO
CALL SOURCE
CALL COEF
IF(FLAG.EQ.1)THEN
CALL FLUX
CALL COEFP
ELSE
CALL SOLUVT
ENDIF
ENDDO
NF= 4
CALL ZERO
DO J=2,JF
DO I=2,IFIN
AP(I,J)=(AIMP(I,J)+AIPP(I,J)+AJMP(I,J)+AJPP(I,J))
AIM(I,J)=AIMP(I,J)
AIP(I,J)=AIPP(I,J)
AJM(I,J)=AJMP(I,J)
AJP(I,J)=AJPP(I,J)
UP=UHAT(I+1,J)
UM=UHAT(I,J)
VP=VHAT(I,J+1)
VM=VHAT(I,J)
c malha para pressão
DX(I)=DOMX/NPX
DY(J)=DOMY/NPY
CON(I,J)=(-1)*((UP-UM)*DY(J)+(VP-VM)*DX(I))*RHO
IF(FLAG.EQ.1)THEN
```

```

AP(I,J)=AP(I,J)/ALFAP
CON(I,J)=CON(I,J)+AP(I,J)*(1-ALFAP)*P(I,J)
      ENDIF
ENDDO
ENDDO
CALL ADI
IF(FLAG.EQ.1)THEN
DO J=2,JF
DO I=2,IFIN
P(I,J)=PH(I,J)
ENDDO
ENDDO
      ELSE
CALL CORRECAO ! e corrigir as vels QMUnew e QMVnew usando plinha
      ENDIF
ENDDO
RETURN
END

```

C*****

```

SUBROUTINE ZERO
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
COMMON/INDY/P(60,60),
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
ALFAU=ALFA
ALFAV=ALFA
IF(NF.EQ.1)THEN
II=3

```

```

JI=2
IX=1
IY=0
      ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
II=2
JI=3
IX=0
IY=1
      ENDIF
IF((NF.EQ.3).OR.(NF.EQ.4))THEN
II=2
JI=2
IX=0
IY=0
      ENDIF
DO I=1,IFIN+1
DX(I)=0.0
DXGAMP(I)=0.0
DXGAMN(I)=0.0
  FXP(I)=0.0
  FXN(I)=0.0
ENDDO
DO J=1,JF+1
DY(J)=0.0
DYGAMP(J)=0.0
DYGAMN(J)=0.0
  FYP(J)=0.0
  FYN(J)=0.0
ENDDO
DO J=1,JF+1
DO I=1,IFIN+1
ROU(I,J)=0.0
ROV(I,J)=0.0
  PH(I,J)=0.0
  DJX(I,J)=0.0
  BJX(I,J)=0.0
  CJX(I,J)=0.0
  DJY(I,J)=0.0
  BJY(I,J)=0.0
  CJY(I,J)=0.0
  AIM(I,J)=0.0

```

```

AIP(I,J)=0.0
AJM(I,J)=0.0
AJP(I,J)=0.0
AP(I,J)=0.0
CON(I,J)=0.0
SC(I,J)=0.0
FX(I,J)=0.0
FY(I,J)=0.0
FHATX(I,J)=0.0
FHATY(I,J)=0.0
ENDDO
ENDDO
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE ARGUMENTO

c trata da obtenção dos argumentos para cálculo dos coeficientes

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res

DELTAX=DOMX/NPX

DELTAY=DOMY/NPY

IF(NF.EQ.3)THEN

DO I=2,IFIN

DX(I)=DELTAX

ENDDO

DO J=2,JF

```

DY(J)=DELTAY
ENDDO
GAMA=GAMAT
DO I=2,IFIN
DXGAMP(I)=DX(I)*0.5/GAMA
DXGAMN(I)=DXGAMP(I)
ENDDO
DO J=2,JF
DYGAMP(J)=DY(J)*0.5/GAMA
DYGAMN(J)=DYGAMP(J)
ENDDO
DO I=2,IFIN
FXP(I)=1.0
FXN(I)=1.0
ENDDO
DO J=2,JF
FYP(J)=1.0
FYN(J)=1.0
ENDDO
DO I=2,IFIN+1
DO J=2,JF
ROU(I,J)=RHO*U(I,J)
ENDDO
ENDDO
DO J=2,JF+1
DO I=2,IFIN
ROV(I,J)=RHO*V(I,J)
ENDDO
ENDDO
      ENDIF
IF(NF.EQ.1)THEN
DO I=4,IFIN-1
DX(I)=DELTAX
ENDDO
DX(3)=1.5*DELTAX
DX(IFIN)=DX(II)
DO J=2,JF
DY(J)=DELTAY
ENDDO
GAMA=GAMAU
DO I=3,IFIN-1
DXGAMP(I)=DELTAX*0.5/GAMA

```

```

ENDDO
DXGAMP(IFIN)=DELTAX/GAMA
DO I=4,IFIN
DXGAMN(I)=DELTAX*0.5/GAMA
ENDDO
DXGAMN(3)=DELTAX/GAMA
DO J=2,JF
DYGAMP(J)=DELTAY*0.5/GAMA
DYGAMN(J)=DELTAY*0.5/GAMA
ENDDO
DO J=2,JF
FYP(J)=1.0
FYN(J)=1.0
ENDDO
DO I=4,IFIN-1
FXP(I)=1.0
FXN(I)=1.0
ENDDO
FXP(3)=0.5
FXN(3)=2.0
FXP(IFIN)=2.0
FXN(IFIN)=0.5
DO J=2,JF
ROU(3,J)=RHO*U(2,J)
ROU(IFIN+1,J)=RHO*U(IFIN+1,J)
DO I=4,IFIN
ROU(I,J)=(U(I-1,J)+U(I,J))*0.5*RHO
ENDDO
ENDDO
ROV(3,2)=RHO*(V(3,2)/3+2*V(2,2)/3)
ROV(3,JF+1)=RHO*(V(3,JF+1)/3+2*V(2,JF+1)/3)
ROV(IFIN,2)=RHO*(2*V(IFIN,2)/3+V(IFIN-1,2)/3)
ROV(IFIN,JF+1)=RHO*(2*V(IFIN,JF+1)/3+V(IFIN-1,JF+1)/3)
DO I=4,IFIN-1
ROV(I,2)=RHO*(V(I,2)+V(I-1,2))*0.5
ROV(I,JF+1)=RHO*(V(I,JF+1)+V(I-1,JF+1))*0.5
ENDDO
DO J=3,JF
ROV(3,J)=(V(3,J)/3+V(2,J)*2/3)*RHO
ROV(IFIN,J)=(V(IFIN,J)*2/3 + V(IFIN-1,J)/3)*RHO
DO I=4,IFIN-1
ROV(I,J)=(V(I,J)+V(I-1,J))*0.5*RHO

```

```

ENDDO
ENDDO
    ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
DO I=2,IFIN
DX(I)=DELTAX
ENDDO
DO J=4,JF-1
DY(J)=DELTAY
ENDDO
DY(3)=1.5*DELTAY
DY(JF)=1.5*DELTAY
GAMA=GAMAV
DO I=2,IFIN
DXGAMN(I)=0.5*DELTAX/GAMA
DXGAMP(I)=0.5*DELTAX/GAMA
ENDDO
DO J=4,JF-1
DYGAMN(J)=0.5*DELTAY/GAMA
DYGAMP(J)=0.5*DELTAY/GAMA
ENDDO
DYGAMP(3)=0.5*DELTAY/GAMA
DYGAMN(JF)=0.5*DELTAY/GAMA
DYGAMN(3)=DELTAY/GAMA
DYGAMP(JF)=DELTAY/GAMA
DO I=2,IFIN
FXP(I)=1.0
FXN(I)=1.0
ENDDO
DO J=4,JF-1
FYP(J)=1.0
FYN(J)=1.0
ENDDO
FYP(3)=0.5
FYN(3)=2.0
FYP(JF)=2.0
FYN(JF)=0.5
DO I=2,IFIN
ROV(I,3)=RHO*V(I,2)
ROV(I,JF+1)=RHO*V(I,JF+1)
DO J=4,JF
ROV(I,J)=(V(I,J-1)+V(I,J))*0.5*RHO

```

```

ENDDO
ENDDO
ROU(2,3)=RHO*(U(2,3)/3+2*U(2,2)/3)
ROU(2,JF)=RHO*(2*U(2,JF)/3+U(2,JF-1)/3)
DO J=4,JF-1
ROU(2,J)=RHO*(U(2,J)+U(2,J-1))*0.5
ENDDO
ROU(IFIN+1,3)=RHO*(2*U(IFIN+1,2)/3+U(IFIN+1,3)/3)
ROU(IFIN+1,JF)=RHO*(2*U(IFIN+1,JF)/3+U(IFIN+1,JF-1)/3)
DO J=4,JF-1
ROU(IFIN+1,J)=RHO*(U(IFIN+1,J)+U(IFIN+1,J-1))*0.5
ENDDO
DO I=3,IFIN
ROU(I,3)=(U(I,3)/3+U(I,2)*2/3)*RHO
ROU(I,JF)=(U(I,JF)*2/3+U(I,JF-1)/3)*RHO
DO J=4,JF-1
ROU(I,J)=(U(I,J)+U(I,J-1))*0.5*RHO
ENDDO
ENDDO
ENDIF
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE COEF

c calcula os coeficientes

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

```

!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN+1
RENX=ROU(I,J)*DXGAMN(I)
REPX=ROU(I,J)*DXGAMP(I-1)
IF((RENX.NE.0).OR.(REPX.NE.0))THEN
DJX(I,J)=ROU(I,J)/(RENX/AA(-RENX)+REPX/AA(REPX))
BJX(I,J)=RENX*Q(-RENX)/(RENX+REPX*AA(-
RENX)/AA(REPX))/(1+FXP(I))
CJX(I,J)=REPX*Q(REPX)/(REPX+RENX*AA(REPX)/AA(-
RENX))/(1+FXN(I-1))
ELSE
DJX(I,J)=1.0/(DXGAMN(I)+DXGAMP(I-1))
BJX(I,J)=DJX(I,J)*0.5*DXGAMN(I)/(1.0+FXP(I))
CJX(I,J)=DJX(I,J)*0.5*DXGAMP(I-1)/(1+FXN(I-1))
ENDIF
ENDDO
ENDDO
DO I=II,IFIN
DO J=JI,JF+1
RENY=ROV(I,J)*DYGAMN(J)
REPY=ROV(I,J)*DYGAMP(J-1)
IF((RENY.NE.0).OR.(REPY.NE.0))THEN
DJY(I,J)=ROV(I,J)/(RENY/AA(-RENY)+REPY/AA(REPY))
BJY(I,J)=RENY*Q(-RENY)/(RENY+REPY*AA(-
RENY)/AA(REPY))/(1+FYP(J))
CJY(I,J)=REPY*Q(REPY)/(REPY+RENY*AA(REPY)/AA(-
RENY))/(1+FYN(J-1))
ELSE
DJY(I,J)=1.0/(DYGAMN(J)+DYGAMP(J-1))
BJY(I,J)=DJY(I,J)*0.5*DYGAMN(J)/(1.0+FYP(J))
CJY(I,J)=DJY(I,J)*0.5*DYGAMP(J-1)/(1.0+FYN(J-1))
ENDIF
ENDDO
ENDDO
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN
RENX=ROU(I+1,J)*DXGAMN(I+1)
AIP(I,J)=DJX(I+1,J)*EXP(-RENX)*DY(J)
REPX=ROU(I,J)*DXGAMP(I-1)
AIM(I,J)=DJX(I,J)*EXP(REPX)*DY(J)
ENDDO

```

```

ENDDO
DO I=II,IFIN
DO J=JI,JF
RENY=ROV(I,J+1)*DYGAMN(J+1)
AJP(I,J)=DJY(I,J+1)*EXP(-RENY)*DX(I)
REPY=ROV(I,J)*DYGAMP(J-1)
AJM(I,J)=DJY(I,J)*EXP(REPY)*DX(I)
ENDDO
ENDDO
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN
AP(I,J)=AIM(I,J)+AIP(I,J)+AJM(I,J)+AJP(I,J)
ENDDO
ENDDO

```

c variáveis dependentes para calc. termo fonte Bsp -> divhat(i,j,NF)

```

DO J=JI-1,JF+1
DO I=II-1,IFIN+1

```

C note que na convecção natural UVT esta acoplado bidirecionalmente

```

IF(NF.EQ.1)PH(I,J)=U(I,J)
IF(NF.EQ.2)PH(I,J)=V(I,J)
IF(NF.EQ.3)PH(I,J)=TT(I,J)
ENDDO
ENDDO
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE FLUX

c calcula a fonte adicional Ssp ->divhat(i,j,NF)

```

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
COMMON/INDY/P(60,60),
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

```

```

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

```

```
COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,
```

```
!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
  !II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
C  NOTE QUE OS VALORES DE PH(I,J) SÃO OS DA ITERAÇÃO
ANTERIOR
```

```
C      PROVENIENTES DE (U-V-P-T)*
DO KFLUX=1,NTFLUX
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN+1
RENX=ROU(I,J)*DXGAMN(I)
REPX=ROU(I,J)*DXGAMP(I-1)
FX(I,J)=DJX(I,J)*(EXP(REPX)*PH(I-1,J)-EXP(-RENX)*PH(I,J))+
!FHATX(I,J)
ENDDO
ENDDO
DO I=II,IFIN
DO J=JI,JF+1
RENY=ROV(I,J)*DYGAMN(J)
REPY=ROV(I,J)*DYGAMP(J-1)
FY(I,J)=DJY(I,J)*(EXP(REPY)*PH(I,J-1)-EXP(-RENY)*PH(I,J))+
!FHATY(I,J)
ENDDO
ENDDO
```

```
C  corrigindo os fluxos para satisfazer equação de conservação de ph(i,j)
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN
DIVF=(FX(I+1,J)-FX(I,J))*DY(J)+(FY(I,J+1)-FY(I,J))*DX(I)
IF(NF.EQ.1)THEN
PRESS=(P(I,J)-P(I-1,J))*DY(J)*DX(I)/(DOMX/NPX)
ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
PRESS=(P(I,J)-P(I,J-1))*DX(I)*DY(J)/(DOMY/NPY)
ENDIF
IF(NF.EQ.3)THEN
PRESS=0.0
ENDIF
```

```
C  fonte para cálculo das correções phlinha
CON(I,J)=SC(I,J)*DX(I)*DY(J)-DIVF-PRESS
ENDDO
```

ENDDO

- c A equação dos ph-linha é similar à do prob. da placa plana submetida
- c a condicoes de contorno ->PHbc=0 ,com fontes que tendem a zero ao longo
- c do processo iterativo.

DO J=JI-1,JF+1

DO I=II-1,IFIN+1

PH(I,J)=0.0

ENDDO

ENDDO

CALL ADI

DO J=JI,JF

DO I=II,IFIN+1

RENX=ROU(I,J)*DXGAMN(I)

REPX=ROU(I,J)*DXGAMP(I-1)

- C correção de fx(i,j)

FX(I,J)=FX(I,J)+DJX(I,J)*(PH(I-1,J)*EXP(REPX)-PH(I,J)*EXP(-RENX))

ENDDO

ENDDO

DO I=II,IFIN

DO J=JI,JF+1

RENY=ROV(I,J)*DYGAMN(J)

REPY=ROV(I,J)*DYGAMP(J-1)

- C correção de fy(i,j)

FY(I,J)=FY(I,J)+DJY(I,J)*(PH(I,J-1)*EXP(REPY)-PH(I,J)*EXP(-RENY))

ENDDO

ENDDO

- C retorno a variável dependente ph(i,j)

DO J=JI-1,JF+1

DO I=II-1,IFIN+1

IF(NF.EQ.1)PH(I,J)=U(I,J)

IF(NF.EQ.2)PH(I,J)=V(I,J)

IF(NF.EQ.3)PH(I,J)=TT(I,J)

ENDDO

ENDDO

- C cálculo de fhatx(i,j) e fhaty(i,j)

DO J=JI,JF

DO I=II,IFIN+1

FHATX(I,J)=BJX(I,J)*(FX(I,J)-FX(I+1,J)+

!PH(I,J)*(ROU(I+1,J)-ROU(I,J)))+

! C JX(I,J)*(FX(I,J)-FX(I-1,J)+

!PH(I-1,J)*(ROU(I-1,J)-ROU(I,J)))

ENDDO

```

      ENDDO
      DO I=II,IFIN
      DO J=JI,JF+1
      FHATY(I,J)=BJY(I,J)*(FY(I,J)-FY(I,J+1)+
!PH(I,J)*(ROV(I,J+1)-ROV(I,J)))+
!      CJY(I,J)*(FY(I,J)-FY(I,J-1)+
!PH(I,J-1)*(ROV(I,J-1)-ROV(I,J)))
      ENDDO
      ENDDO
      ENDDO !volte para obter conv. de fhat atraves de iteracao
      DO J=JI,JF
      DO I=II,IFIN
C    termo fonte adicional para u,v,teta
      DIVHAT(I,J,NF)=(FHATX(I+1,J)-FHATX(I,J))*DY(J) +
!      (FHATY(I,J+1)-FHATY(I,J))*DX(I)
      ENDDO
      ENDDO
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE SOLUVT
      IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
      COMMON/INDY/P(60,60),
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),
!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

      COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
      AP,
!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
C    calcular termo fonte para eqs de cons. da variavel dependente ph(i,j)
      DO J=JI,JF
      DO I=II,IFIN

```

```

IF(NF.EQ.1)THEN
FI=U(I,J)
PRESS=(P(I,J)-P(I-1,J))*DY(J)*DX(I)/(DOMX/NPX)
ALFA=ALFAU
ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
FI=V(I,J)
PRESS=(P(I,J)-P(I,J-1))*DX(I)*DY(J)/(DOMY/NPY)
ALFA=ALFAV
ENDIF
IF(NF.EQ.3)THEN
FI=TT(I,J)
PRESS=0.0
ALFA=ALFAT
ENDIF
VOL=DX(I)*DY(J)

```

C termo fonte para $ph(i,j)$ com relaxação

```

AP(I,J)=AP(I,J)/ALFA
CON(I,J)=SC(I,J)*VOL-DIVHAT(I,J,NF)-PRESS+AP(I,J)*FI*(1-ALFA)
ENDDO
ENDDO
CALL ADI
DO I=II,IFIN
DO J=JI,JF

```

c calc dos resíduos das equações de conservação

```

resto=ap(i,j)*ph(i,j)-aim(i,j)*ph(i-1,j)-aip(i,j)*ph(i+1,j)-
!ajm(i,j)*ph(i,j-1)-ajp(i,j)*ph(i,j+1)-con(i,j)
if(abs(resto).gt.res)res=abs(resto)

```

c

```

IF(NF.EQ.1)Uhat(I,J)=PH(I,J)
IF(NF.EQ.2)Vhat(I,J)=PH(I,J)
IF(NF.EQ.3)TT(I,J) =PH(I,J)
ENDDO
ENDDO
IF(NF.EQ.3)THEN
CALL BOUND
ENDIF
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE COEFP

c calcula a fonte e os coeficientes da equação de pressão

```

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
COMMON/INDY/P(60,60),
!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

```

```

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

```

```

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

```

```

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
IF(NF.EQ.1)THEN
DO J=2,JF
UHAT(2,J)=U(2,J)
UHAT(IFIN+1,J)=U(IFIN+1,J)
DO I=3,IFIN
SOMU=AIM(I,J)*U(I-1,J)+AIP(I,J)*U(I+1,J)+
! AJM(I,J)*U(I,J-1)+AJP(I,J)*U(I,J+1)
UHAT(I,J)=(SOMU+SC(I,J)*DX(I)*DY(J)-DIVHAT(I,J,1))/AP(I,J)
ENDDO
ENDDO
DO J=2,JF
RGX=DY(J)*DY(J)/(DOMX/NPX)
DO I=2,IFIN
IF(I.GT.2)THEN
AIMP(I,J)=RHO*RGX*DX(I)/AP(I,J)
ENDIF
IF(I.LT.IFIN)THEN
AIPP(I,J)=RHO*RGX*DX(I+1)/AP(I+1,J)
ENDIF
ENDDO
ENDDO
ENDIF
IF(NF.EQ.2)THEN
DO I=2,IFIN

```

```

VHAT(I,2)=V(I,2)
VHAT(I,JF+1)=V(I,JF+1)
DO J=3,JF
SOMV=AIM(I,J)*V(I-1,J)+AIP(I,J)*V(I+1,J)+
!   AJM(I,J)*V(I,J-1)+AJP(I,J)*V(I,J+1)
VHAT(I,J)=(SOMV+SC(I,J)*DX(I)*DY(J)-DIVHAT(I,J,2))/AP(I,J)
ENDDO
ENDDO
DO I=2,IFIN
RGY=DX(I)*DX(I)/(DOMY/NPY)
DO J=2,JF
IF(J.GT.2)THEN
AJMP(I,J)=RHO*RGY*DY(J)/AP(I,J)
ENDIF
IF(J.LT.JF)THEN
AJPP(I,J)=RHO*RGY*DY(J+1)/AP(I,J+1)
ENDIF
ENDDO
ENDDO
ENDIF
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE ADI

c resolve as matrizes por line by line

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

```
!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
REAL*4 A(60),B(60),C(60),F(60),TK(60)
DO KADI=1,NTADI
```

c direção x

```
N=IFIN-II+1
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN
IJ=I-IX
A(IJ-1)=AIM(I,J)*(-1.0)
C(IJ-1)=AIP(I,J)*(-1.0)
B(IJ-1)=AP(I,J)
F(IJ-1)=CON(I,J)+AJP(I,J)*PH(I,J+1)+AJM(I,J)*PH(I,J-1)
IF(I.EQ.II)F(1)=F(1)+AIM(II,J)*PH(II-1,J)
IF(I.EQ.IFIN)F(N)=F(N)+AIP(IFIN,J)*PH(IFIN+1,J)
ENDDO
CALL TDMA(A,B,C,F,N,TK)
DO I=II,IFIN
PH(I,J)=TK(I-IX-1)
ENDDO
ENDDO
SIG=1
CALL BLOCK
```

c direção y

```
N=JF-JI+1
DO I=II,IFIN
DO JK=JI,JF
JKI=JK-IY
A(JKI-1)=-AJM(I,JK)
C(JKI-1)=-AJP(I,JK)
B(JKI-1)=AP(I,JK)
F(JKI-1)=CON(I,JK)+AIP(I,JK)*PH(I+1,JK)+AIM(I,JK)*PH(I-1,JK)
IF(JK.EQ.JI)F(1)=F(1)+AJM(I,JI)*PH(I,JI-1)
IF(JK.EQ.JF)F(N)=F(N)+AJP(I,JF)*PH(I,JF+1)
ENDDO
CALL TDMA(A,B,C,F,N,TK)
DO JK=JI,JF
PH(I,JK)=TK(JK-IY-1)
ENDDO
ENDDO
SIG=2
CALL BLOCK
ENDDO
```

RETURN

END

C*****

SUBROUTINE BLOCK

c aplica o procedimento de correção por bloco

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

COMMON/INDY/P(60,60),

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res

REAL*4 A(60),B(60),C(60),F(60),TK(60)

IF(SIG.EQ.1)THEN

c block correction em x

DO I=II,IFIN

SOMAA=0

SOMAB=0

SOMAC=0

SOMAF=0

DO J=JI,JF

SOMAA=SOMAA+AIM(I,J)

SOMAB=SOMAB+AP(I,J)-AJP(I,J)-AJM(I,J)

SOMAC=SOMAC+AIP(I,J)

RS=AIP(I,J)*PH(I+1,J)+AIM(I,J)*PH(I-1,J)+

! AJP(I,J)*PH(I,J+1)+AJM(I,J)*PH(I,J-1)-AP(I,J)*PH(I,J)+CON(I,J)

SOMAF=SOMAF+RS

ENDDO

SOMAB=SOMAB+AJM(I,JI)+AJP(I,JF)

A(I-1-IX)=-SOMAA

C(I-1-IX)=-SOMAC

```

B(I-1-IX)=+SOMAB
F(I-1-IX)=+SOMAF
ENDDO
CALL TDMA(A,B,C,F,N,TK)
DO I=II,IFIN
FIC(I)=TK(I-1-IX)
ENDDO
DO J=JI,JF
DO I=II,IFIN
PH(I,J)=PH(I,J)+FIC(I)
ENDDO
ENDDO

```

```

ELSE

```

c block correction em y

```

DO J=JI,JF
SOMAA=0
SOMAB=0
SOMAC=0
SOMAF=0
DO I=II,IFIN
SOMAA=SOMAA+AJM(I,J)
SOMAB=SOMAB+AP(I,J)-AIP(I,J)-AIM(I,J)
SOMAC=SOMAC+AJP(I,J)
RS=AIP(I,J)*PH(I+1,J)+AIM(I,J)*PH(I-1,J)+
! AJP(I,J)*PH(I,J+1)+AJM(I,J)*PH(I,J-1)-AP(I,J)*PH(I,J)+CON(I,J)
SOMAF=SOMAF+RS
ENDDO
SOMAB=SOMAB+AIM(II,J)+AIP(IFIN,J)
A(J-1-IY)=-SOMAA
C(J-1-IY)=-SOMAC
B(J-1-IY)=+SOMAB
F(J-1-IY)=+SOMAF
ENDDO
CALL TDMA(A,B,C,F,N,TK)
DO J=JI,JF
FIC(J)=TK(J-1-IY)
ENDDO
DO I=II,IFIN
DO J=JI,JF
PH(I,J)=PH(I,J)+FIC(J)
ENDDO
ENDDO

```

```

        ENDIF
    RETURN
END
C*****
    SUBROUTINE CORRECAO
c    corrige as velocidades com os plinha
    IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
    COMMON/INDY/P(60,60),
    !AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),
    !UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),
    !DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),
    !CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),
    !DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

    !DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),
    !ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),
    !FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),
    !SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

    COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
    AP,

    !ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,
    !II,IFIN,JJ,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res
    DIVEL=0.0
    DO J=2,JF
    DO I=2,NPX
    U(I+1,J)=AIPP(I,J)*(PH(I,J)-PH(I+1,J))/(RHO*DOMY/NPY)+Uhat(I+1,J)
    ENDDO
    ENDDO
    DO I=2,IFIN
    DO J=2,NPY
    V(I,J+1)=AJPP(I,J)*(PH(I,J)-PH(I,J+1))/(RHO*DOMX/NPX)+Vhat(I,J+1)
    ENDDO
    ENDDO
C    CHECANDO A DIVERGENCIA IMPOSTA PELO SIMPLER
    DO J=2,JF
    DO I=2,IFIN
    DIL=(U(I+1,J)-U(I,J))*DOMY/NPY+(V(I,J+1)-V(I,J))*DOMX/NPX
    IF(ABS(DIL).GT.DIVEL)DIVEL=ABS(DIL)
    ENDDO
    ENDDO

```

```

CALL BOUND ! para correcao das velocidades nas fronteiras
RETURN
END

```

```

C*****

```

```

SUBROUTINE TDMA(A,B,C,F,N,TK)

```

```

c algoritmo de Thomas

```

```

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

```

```

COMMON/INDY/P(60,60),

```

```

!AIMP(60,60),AIPP(60,60),AJMP(60,60),AJPP(60,60),

```

```

!UHAT(60,60),VHAT(60,60),FHATX(60,60),FHATY(60,60),

```

```

!DJX(60,60),BJX(60,60),CJX(60,60),DJY(60,60),BJY(60,60),

```

```

!CJY(60,60),AIM(60,60),AIP(60,60),AJM(60,60),AJP(60,60),AP(60,60),

```

```

!DX(60),DY(60),DXGAMP(60),DXGAMN(60),

```

```

!DYGAMP(60),DYGAMN(60),FXP(60),FXN(60),FYP(60),FYN(60),FIC(60),

```

```

!ROU(60,60),ROV(60,60),U(60,60),V(60,60),

```

```

!FX(60,60),FY(60,60),CON(60,60),PH(60,60),TT(60,60),

```

```

!SC(60,60),DIVHAT(60,60,3)

```

```

COMMON/CNST/FLAG,DOMX,DOMY,NPX,NPY,RHO,GAMA,ALFA,ALF
AP,

```

```

!ALFAU,ALFAV,ALFAT,GAMAT,GAMAU,GAMAV,NTADI,NTFLUX,SIG,

```

```

!II,IFIN,JI,JF,IX,IY,NF,DIVEL,RE,PR,RA,XNU,XNUR,XNUt,nt,res

```

```

REAL*4 A(60),B(60),C(60),F(60),TK(60)

```

```

DO KI=2,N

```

```

DK=A(KI)/(B(KI-1)+EXP(-30))

```

```

B(KI)=B(KI)-C(KI-1)*DK

```

```

F(KI)=F(KI)-F(KI-1)*DK

```

```

ENDDO

```

```

TK(N)=F(N)/(B(N)+EXP(-30))

```

```

DO KI=1,N-1

```

```

JK=N-KI

```

```

TK(JK)=(F(JK)-C(JK)*TK(JK+1))/(B(JK)+EXP(-30))

```

```

ENDDO

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

C*****

```

```

FUNCTION AA(YY)

```

```

c funcoes A(P) e Q(P)

```

```

IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

```

```

IF(ABS(YY).LE.1.0E-6)THEN

```

```
AA=1.0
      ELSE
AA=YY/(EXP(YY)-1.0)+EXP(-30)
      ENDIF
RETURN
END
FUNCTION Q(ZZ)
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
IF(ABS(ZZ).LE.1.0E-6)THEN
Q=0.5
      ELSE
Q=(EXP(ZZ)*(ZZ-1.0)+1.0)/(ZZ*(EXP(ZZ)-1.0))
      ENDIF
RETURN
END
```