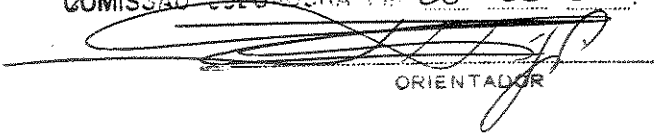


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR *Eugenia Brunilda Opazo Uribe*
E APROVADA
COMISSÃO JULGADORA EM 08 02 02.


ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Avaliação de Esquemas Discretizantes na
Solução das Equações de Navier-Stokes e
Aplicação ao Problema do Escoamento na
Região de Entrada de Canais Planos**

Autor: Eugenia Brunilda Opazo Uribe
Orientador: José Ricardo Figueiredo

14/02

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**Avaliação de Esquemas Discretizantes na
Solução das Equações de Navier-Stokes e
Aplicação ao Problema do Escoamento na
Região de Entrada de Canais Planos**

**Autor: Eugenia Brunilda Opazo Uribe
Orientador: José Ricardo Figueiredo**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Fluídos**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2002
S.P. – Brasil**

TEFE80C

UNIDADE 30
Nº CHAMADA 1/UNICAMP
Op1a
V EX
TOMBO BC: 50387
PROC 16-837/02
C DY
PREÇO R\$ 11,00
DATA 16-08/02
Nº CPD

CM00172537-6

BIB ID 253751

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Op1a

Opazo Uribe, Eugenia Brunilda

Avaliação de esquemas discretizantes na solução das equações de Navier-Stokes e aplicação ao problema do escoamento na região de entrada de canais planos / Eugenia Brunilda Opazo Uribe. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: José Ricardo Figueiredo.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

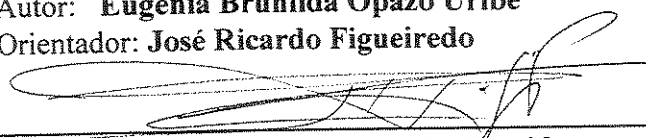
1. volumes finitos. 2. Diferenças finitas. I. Figueiredo, José Ricardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

TESE DE DOUTORADO

**Avaliação de Esquemas Discretizantes na
Solução das Equações de Navier-Stokes e
Aplicação ao Problema do Escoamento na
Região de Entrada de Canais Planos**

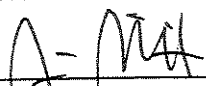
Autor: **Eugenia Brunilda Opazo Uribe**
Orientador: **José Ricardo Figueiredo**



Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo, Presidente
UNICAMP



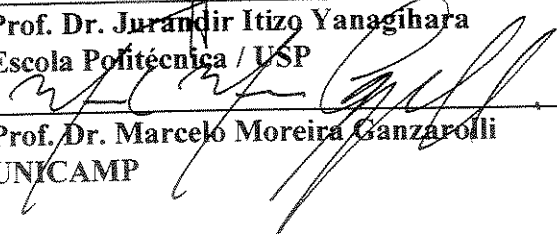
Prof. Dr. Carlos Alberto Altemani
UNICAMP



Prof. Dr. João Batista Aparecido
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira / UNESP



Prof. Dr. Jurandir Itizo Yanagihara
Escola Politécnica / USP



Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli
UNICAMP

Campinas, 08/02/2002

Resumo

URIBE, Eugenia B. O., *Avaliação de Esquemas Discretizantes na Solução das Equações de Navier-Stokes e Aplicação ao Problema do escoamento na Região de Entrada de Canais Planos*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 217 p. Dissertação (Doutorado)

Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo para a solução das equações de Navier-Stokes bidimensionais em variáveis primitivas, empregando o método de resolução semi-implícito descrito por HIRT et al.(1975). Foi utilizada malha deslocada (tipo MAC) regular, em coordenadas cartesianas. As equações de Navier-Stokes foram escritas nas formas divergente e convectiva, cujos desempenhos foram comparados no problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento, para números de Reynolds entre 100 e 3200. Para a forma divergente foi utilizado o método dos volumes finitos e quatro esquemas de discretização: central, linear a montante, QUICK, e exponencial. Para a forma convectiva foi utilizado o método das diferenças finitas e o esquema central. Os resultados foram comparados com os de GHIA et al. (1982), indicando a superioridade do esquema central divergente sobre o convectivo, bem como a superioridade dos esquemas QUICK e central sobre os esquemas exponencial e linear a montante. Foi estudado o problema da região de entrada em canais planos, com contração abrupta, considerando dois casos: a região de entrada de um canal plano a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado um caso de contração plana com razão de contração infinita e o caso de razão de contração finita 2:1. Para o caso da razão de

contração finita, resultados obtidos para números de Reynolds entre 10 e 426, foram comparados com os dados experimentais de DURST et al. (1985). Os resultados obtidos mostraram que entre os quatro esquemas de discretização utilizados os que se mostraram mais confiáveis e acurados para este problema foram os esquemas QUICK e exponencial. Encontramos diferenças significativas entre os dados experimentais e os dados obtidos pelo algoritmo em torno do plano de contração, que foram atribuídos aos erros experimentais que apontaram diferenças de até 10% nos fluxos de massa. Para o caso da razão de contração infinita foi utilizada a solução do escoamento de Jeffery-Hamel, como condição de contorno não trivial para a região de entrada. Resultados obtidos para números de Reynolds 100, 200 e 400, mostraram-se qualitativamente compatíveis com a descrição de PANTON (1984).

Palavras Chave

Diferenças finitas, Volumes finitos.

Abstract

URIBE, Eugenia B. O., *Evaluation of the Discretization Schemes in the Solution of the Navier-Stokes Equation and Application to the Problem of the Entrance Region in Plane Channels*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 217 p. Dissertação (Doutorado)

An algorithm for the two-dimensional solution of the Navier-Stokes equations was developed in primitive variables employing the partially implicit method described by HIRT et al (1975). A regular staggered MAC mesh was used in cartesian coordinates. The Navier-Stokes equations were written in both divergent and convective forms, whose performance were compared in the problem of the moving sliding square cavity for Reynolds numbers between 100 and 3200. The finite volume method was adopted for the divergent form using four discretization schemes: central differencing, upwind, QUICK and exponential. The finite difference method was adopted for the convective form using the central differencing. The results were compared with those due to GHIA et al (1982), indicating the superior performance of the divergent form central differencing over its convective counterpart, as well as the superior performance of the QUICK and the central differencing over the exponential and the upwind schemes. The problem of the entrance region in plane channels with abrupt contraction was studied considering two cases: the entrance region of the channel after a huge reservoir, which can be considered as a plane contraction of infinite ratio, and the case of a contraction with the finite ratio 2:1. For the case of contraction with results obtained with Reynolds number between 10 and 426 were

compared with the experimental data due to DURST et al (1985). The results obtained indicated that the schemes QUICK and exponential the most accurate and reliable for this problem. Significant differences with the experimental data were obtained around the plane of contraction, which were attributed to the experimental errors which have shown differences up to 10% in the mass flow rates. For the contraction with infinite ratio the Jeffery-Hamel solution was imposed as non-trivial boundary condition in the entrance. Results obtained for Reynolds numbers 100, 200 and 400 were qualitatively compatible with the description of PANTON (1984).

Key Words

Finite Difference, Finite Volume.

Dedicatória

À minha família, em especial a Natalia.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo, que orientou o presente trabalho.

Ao Ciro, aos meus pais e irmãos, pelo apoio em todos os momentos.

A Carlos, Ludwig e família, Rubén e família, pela amizade e apoio recebido durante os bons e maus momentos.

Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas do Campus de Três Lagoas da UFMS, que sempre apoiaram e incentivaram este trabalho.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Índice

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	xi
Nomenclatura	xii
1. Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Descrição do Trabalho	4
2. Formulação Matemática	6
2.1 Introdução	6
2.2 Equações Governantes	6
2.2.1 Equação de Conservação da Massa	8
2.2.2 Equações de Conservação do Momento	9
2.3 Forma Divergente e Forma Convectiva	14
2.4 Adimensionalização	18
3. Método Numérico e Algoritmo	21
3.1 Introdução	21
3.2 Localização das Variáveis - Malha Deslocada	22
3.3 Discretização da Equação de Navier-Stokes na Forma Divergente – Método dos Volumes Finitos	25

3.4	Discretização da Equação de Navier-Stokes na Forma Convectiva – Método das Diferenças Finitas	30
3.4	3.4.1 Caso Geral	30
	3.4.2 Interpolação Parabólica no Contorno	32
3.5	Formulação Discreta da Equação de Navier-Stokes	34
3.6	Discretização Temporal - Método Semi-implícito SOLA	34
3.7	Solução do Sistema	37
3.8	Estabilidade Numérica	38
3.9	Crítério de Convergência	39
3.10	Algoritmo	40
4.	Problema Teste: Cavidade Quadrada com Parede Superior em Movimento	41
4.1	Introdução	41
4.2	Geometria e Condições de Contorno	44
4.3	Resultados e Discussão	45
	4.3.1 Efeito da Escolha do Esquema de Discretização para o Termo Convectivo	46
	4.3.1.1 Forma Divergente - Volumes de Controle	46
	4.3.1.2 Forma Convectiva - Diferenças Finitas	56
	4.3.2 Efeito da Escolha da Forma da Equação	64
4.4	Tempos médios de CPU	71
	4.4.1 Forma Divergente - Volumes de Controle	73
	4.4.2 Forma Convectiva - Diferenças Finitas	77
4.5	Conclusões	81
5.	Contração Plana com razão Finita	82
5.1	Introdução	82
5.2	Trabalho de Durst et al	84
5.3	O presente trabalho	88
	5.3.1 Geometria, Condições de Contorno e Condições Iniciais	88
5.4	Resultados e discussão	91

5.4.1	Resultados para número de Reynolds baixo	91
5.4.2	Evolução com o refinamento. Tempos médios de CPU	94
5.4.3	Comparação de resultados com os de Durst et al	104
5.5	Conclusões	120
6.	Contração Plana com Razão Infinita	124
6.1	Introdução	124
6.2	Escoamento de Jeffery-Hamel	125
6.2.1	Exemplos de Soluções do Escoamento de Jeffery-Hamel	134
6.3	Escoamento de Jeffery-Hamel como Condição de Contorno de Entrada	139
6.3.1	Geometria e Condições de Contorno	141
6.3.2	Resultados e Discussão	142
6.3.2.1	Evolução com o Refinamento	143
6.3.2.2	Comparação do Desempenho dos Esquemas QUICK e Exponencial	153
7.	Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos	160
7.1	Conclusões	160
7.2	Sugestões para futuros trabalhos	165
	Referências Bibliográficas	167
	Apêndice	175

Lista de Figuras

2.1	Volume de controle fixo para derivação das equações governantes	8
3.1	Malha deslocada. Volume de controle principal para a pressão	23
3.2	Malha deslocada. Volumes de controle secundários para as velocidades	24
3.3	Posições para a pressão e para as componentes da velocidade. Distâncias entre os pontos	24
3.4	Diagrama de blocos do algoritmo	40
4.1	Geometria e notação utilizada para o problema da cavidade quadrada	44
4.2	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 100$	46
4.3	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 100$	47
4.4	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 400$	47
4.5	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 400$	48
4.6	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 1000$	48
4.7	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 1000$	49
4.8	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 3200$	49
4.9	Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 3200$	50
4.10	Desvio percentual para a forma divergente e componente u . $Re = 100$	52
4.11	Desvio percentual para a forma divergente e componente v . $Re = 100$	52
4.12	Desvio percentual para a forma divergente e componente u . $Re = 400$	53
4.13	Desvio percentual para a forma divergente e componente v . $Re = 400$	53

4.14	Desvio percentual para a forma divergente e componente u . $Re = 1000$	54
4.15	Desvio percentual para a forma divergente e componente v . $Re = 1000$	54
4.16	Desvio percentual para a forma divergente e componente u . $Re = 3200$	55
4.17	Desvio percentual para a forma divergente e componente v . $Re = 3200$	55
4.18	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 100$	57
4.19	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 100$	57
4.20	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 400$	58
4.21	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 400$	58
4.22	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 1000$	59
4.23	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 1000$	59
4.24	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 3200$	60
4.25	Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 3200$	60
4.26	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 100$	61
4.27	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 400$	62
4.28	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 1000$	62
4.29	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 3200$	63
4.30	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 100$	64
4.31	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 100$	65
4.32	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 400$	65
4.33	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 400$	66
4.34	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 1000$	66

4.35	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 1000$	67
4.36	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 3200$	67
4.37	Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 3200$	68
4.38	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 100$	69
4.39	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 400$	69
4.40	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 1000$	70
4.41	Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 3200$	71
4.42	Resíduo versus número de iterações. Esquema central	72
4.43	Resíduo versus número de iterações. Esquema QUICK	72
4.44	Resíduo versus número de iterações. Esquema linear a montante	73
5.1	Esquema do equipamento utilizado para testes por DURST et al	85
5.2	Geometria utilizada para testes numéricos por Durst et al	86
5.3	Geometria para o problema da contração plana com razão finita	89
5.4	Perfil de velocidade para a componente u em $x = -0.15$. $Re = 10$	91
5.5	Perfil de velocidade para a componente u em $x = -0.075$. $Re = 10$	92
5.6	Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0$. $Re = 10$	92
5.7	Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.075$. $Re = 10$	93
5.8	Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.15$. $Re = 10$	93
5.9	Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.3$. $Re = 10$	94
5.10	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema exponencial. $x = -0.15$, $Re = 426$	95
5.11	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = -0.15$, $Re = 426$	96

5.12	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema central. $x = -0.15$, $Re = 426$	96
5.13	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema exponencial. $x = -0.075$, $Re = 426$	97
5.14	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = -0.075$, $Re = 426$	97
5.15	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema central. $x = -0.075$, $Re = 426$	98
5.16	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema exponencial. $x = 0.$, $Re = 426$	98
5.17	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.$, $Re = 426$	99
5.18	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema central. $x = 0.$, $Re = 426$	99
5.19	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema exponencial. $x = 0.3$, $Re = 426$	100
5.20	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.3$, $Re = 426$	100
5.21	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema central. $x = 0.3$, $Re = 426$	101
5.22	Perfis de velocidade em $x = -0.15$. $Re = 107$	105
5.23	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 107$	106
5.24	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 107$	106
5.25	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 107$	107
5.26	Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 107$	108
5.27	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 208$	108
5.28	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 208$	109
5.29	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 208$	109
5.30	Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 208$	110
5.31	Perfis de velocidade em $x = -0.15$. $Re = 426$	110

5.32	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 426$	111
5.33	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 426$	111
5.34	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 426$	112
5.35	Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 426$	112
5.36	Perfis de velocidade obtidos por Durst et al. Dados experimentais e numéricos. $x = 0.02$. $Re = 426$	114
5.37	Perfis de velocidade obtidos por Durst et al. Dados experimentais e numéricos. $x = 0.05$. $Re = 426$	114
6.1	Geometria do escoamento de Jeffery-Hamel	126
6.2	Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 30^\circ$ <i>Runge-Kutta / Newton Raphson - $f''(0) = 0$.</i>	135
6.3	Soluções do escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 60^\circ$ <i>Runge-Kutta / Newton-Raphson - $f''(0) = 0$.</i>	135
6.4	Soluções do escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$ <i>Runge-Kutta / Newton-Raphson - $f''(0) = 0$.</i>	136
6.5	Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$. Solução Aproximada para Altos Números de Reynolds.	137
6.6	Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 30^\circ$. $Re = 1400$.	138
6.7	Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 60^\circ$. $Re = 300$.	138
6.8	Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$. $Re = 160$	139
6.9	Geometria para o problema da contração plana com razão infinita	141
6.10	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = -0.075$. $Re = 100$	143
6.11	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0$. $Re = 100$	144
6.12	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.075$. $Re = 100$	144
6.13	Evolução do perfil de velocidade com refinamento, esquema QUICK. $x = 0.15$. $Re = 100$	145

6.14	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 0.3$, $Re = 100$	145
6.15	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 3$, $Re = 100$	146
6.16	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = -0.075$. $Re = 200$	146
6.17	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0$. $Re = 200$	147
6.18	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.075$. $Re = 200$	147
6.19	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.15$. $Re = 200$	148
6.20	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 0.3$, $Re = 200$	148
6.21	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 3$, $Re = 200$	149
6.22	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = -0.075$. $Re = 400$	149
6.23	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0$. $Re = 400$	150
6.24	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.075$. $Re = 400$	150
6.25	Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK. $x = 0.15$. $Re = 400$	151
6.26	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 0.3$, $Re = 400$	151
6.27	Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK $x = 3$. $Re = 400$	152
6.28	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 100$	154
6.29	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 100$	154

6.30	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 100$	155
6.31	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 200$	155
6.32	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 200$	156
6.33	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 200$	156
6.34	Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 400$	157
6.35	Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 400$	157
6.36	Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 400$	158

Lista de Tabelas

4.1	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 100$	74
4.2	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 400$	75
4.3	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 1000$	76
4.4	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 3200$	77
4.5	Tempos médios de CPU. Forma convectiva - $Re = 100$	78
4.6	Tempos médios de CPU. Forma convectiva - $Re = 400$	79
4.7	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 1000$	79
4.8	Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 3200$	80
5.1	Tempos médios de CPU. $Re = 107$	103
5.2	Tempos médios de CPU. $Re = 208$	103
5.3	Tempos médios de CPU. $Re = 426$	104
5.4	Fluxos de massa. $Re = 107$	116
5.5	Fluxos de massa. $Re = 208$	117
5.6	Fluxos de massa. $Re = 426$	117
5.7	Diferenças dos fluxos de massa. $Re = 107$.	119
5.8	Diferenças dos fluxos de massa. $Re = 208$.	119
5.9	Diferenças dos fluxos de massa. $Re = 426$.	120

Nomenclatura

Letras Latinas

$a_{i,j}, b_{i,j}$	coeficientes da equação discretizada
$\bar{a}$	aceleração
A	matriz de coeficientes
C, C_1, C_2	constantes reais
$CONV(u), CONV(v)$	termos convectivos nas direções x e y , respectivamente
$DIFF(u), DIFF(v)$	termos difusivos nas direções x e y , respectivamente
$Desvio\%$	desvio percentual
D	altura do canal antes da contração
d	altura do canal depois da contração
e, n, w, s	pontos médios das faces dos volumes de controle principais para localização das componentes de velocidade.
dux_i, dvy_j	distâncias entre as velocidades $u_{i,j}, u_{i+1,j}$ e $v_{i,j}, v_{i,j+1}$, respectivamente
dpx_i, dpy_j	distâncias entre as pressões $p_{i,j}, p_{i+1,j}$ e $p_{i,j}, p_{i,j+1}$, respectivamente
$\bar{F}$	força total

$\bar{f}$	força de campo por unidade de massa
F_r	fator de relaxação para o Δt corrigido
$F(\theta)$	função definida para o escoamento de Jeffery-Hamel
f	função adimensional definida para o escoamento de Jeffery-Hamel
FU, FV	soma dos termos convectivo e difusivo nas direções x e y , respectivamente
g	aceleração de gravidade
G	matriz triangular de Cholesky
H_c	altura da cavidade
$\bar{i}, \bar{j}$	vetores unitários nas direções x e y , respectivamente
L	comprimento característico
L_c	largura da cavidade
m	massa
$\bar{n}$	vetor unitário normal à superfície
np_x, np_y	número total de pontos da malha nas direções x e y , respectivamente
O, E, N, W, S	centro dos volumes de controle principais para localização da pressão
p	pressão
Pe	número de Peclet
Q	fluxo volumétrico
r	coordenada radial
Re	número de Reynolds
t	tempo
t^*	tempo adimensional
u, v	componentes da velocidade
U_0	velocidade característica
U_p	velocidade da parede superior da cavidade

$\vec{v}$	velocidade
$\forall$	volume de controle
x, y, z	coordenadas cartesianas
XL	comprimento total do canal
$XL1, XL2$	comprimento do canal antes e depois da contração, respectivamente
$xp(i), yp(j)$	vetores que armazenam as posições da pressão
$xu(i), yv(j)$	vetores que armazenam as posições das componentes de velocidade
YL	altura do canal antes da contração
$YL2$	altura do canal depois da contração

Letras Gregas

α	ângulo de inclinação das paredes no escoamento de Jeffery-Hamel
δ_{ij}	função delta de Kronecker
Δt	intervalo de tempo
Δx	espaçamento da malha na direção x
ϕ	função parabólica interpolante
η	variável adimensional definida para o escoamento de Jeffery-Hamel
λ	segundo coeficiente de viscosidade
μ	viscosidade dinâmica
ν	viscosidade cinemática
θ	coordenada tangencial
ρ	densidade
Σ	superfície de controle
τ_{ij}	campo de tensões

Superescritos

n	instante de tempo atual
$*$	variáveis adimensionais
t	transposta de uma matriz

Subscritos

cal	valor calculado pelo algoritmo
i, j	índice nodal ao longo do eixo x e y , respectivamente
max	valor máximo
med	valor médio
min	valor mínimo
r	radial
ref	valor de referência

Abreviaturas

JH	Jeffery-Hamel
LDA	Laser-Doppler Anemometer
MAC	Marker-and-Cell
NR	Newton-Raphson
RK	Runge-Kutta

Capítulo 1

Introdução

Para resolver numericamente problemas de escoamento de fluidos devemos, na maioria dos casos, resolver as equações de Navier-Stokes. Quando classificamos estas equações (SMITH, 1978), (AMES, 1969) encontramos que elas são de natureza elíptica nas coordenadas x , y e z , porém parabólicas no tempo, portanto para obter soluções devemos desenvolver métodos específicos para este tipo de equações.

Existe uma diversidade de métodos que permitem obter soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, dentre eles foram escolhidos dois métodos para o desenvolvimento deste trabalho: o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos, amplamente utilizados na literatura.

Foi dada uma atenção especial ao termo convectivo das equações do momento, utilizando vários esquemas de discretização para a aproximação das equações.

Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo básico para a resolução das equações de Navier-Stokes bidimensionais, em variáveis primitivas, empregando procedimento explícito para estabelecimento do campo de velocidades após a determinação implícita do campo de pressão,

utilizando a malha deslocada tipo MAC. Este algoritmo foi testado no problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento, posteriormente foi utilizado na obtenção de resultados para o problema do escoamento na região de entrada em canais planos.

Nas operações de transporte de fluidos com frequência encontramos o problema de escoamento de fluidos através de algum tipo de conduto fechado. Na entrada de um conduto geralmente encontramos uma mudança brusca na geometria que pode ser, por exemplo, uma expansão ou uma contração. Conhecer o comportamento do fluido na região de entrada dos condutos é fundamental para poder estudar o que acontece posteriormente com o fluido no interior do conduto.

Foram considerados apenas canais planos restritos ao caso em que a região de entrada do canal apresenta uma contração repentina na geometria. Foram estudados dois casos: aquele em que a razão de contração é finita (para o presente trabalho foi considerada uma razão de contração de 2:1) e o caso em que a razão de contração é infinita. Neste último caso foi dada especial importância às condições de contorno na região de entrada, utilizando a solução do escoamento de Jeffery-Hamel como condição de contorno não trivial para a região de entrada.

Se adotarmos a aproximação da camada limite, teremos que o gradiente normal à superfície é muito superior ao gradiente na direção do escoamento, obtendo assim uma simplificação da equação do momento. Agora ao classificar esta equação aproximada encontramos que ela é do tipo parabólico.

A maioria dos trabalhos desenvolvidos anteriormente para o estudo na região de entrada de condutos fechados utiliza métodos parabólicos de solução, baseados justamente nesta aproximação de camada limite. Como foi dito anteriormente o método utilizado neste trabalho é elíptico; ele permite o conhecimento detalhado da região de entrada do canal, enquanto nos métodos parabólicos o perfil de entrada precisa ser pré-especificado.

A construção do algoritmo básico utilizado neste trabalho teve origem num curso de estudos especiais oferecido pelo Professor Dr. Gilmar Mompean Munhoz da Cruz, onde foi começada a construção do algoritmo básico utilizando os esquemas Linear a montante e QUICK e alguns resultados foram obtidos para o caso da cavidade quadrada com parede superior em movimento. Deste curso frutificaram também outros trabalhos, como os dos colegas BEZERRA(1993) e TEIXEIRA (1993).

1.1 Objetivos

Neste trabalho foram considerados os seguintes objetivos:

1. Comparar o desempenho das formas convectiva e divergente das equações de Navier-Stokes.
2. Comparar o desempenho dos esquemas de discretização Exponencial, Linear a montante, QUICK e Central.

Para fazer as comparações mencionadas nos itens anteriores foram utilizados o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento como problema teste e os dados numéricos fornecidos por GUIA et al. (1982) como referência.

3. Utilizar a forma da equação e o esquema de discretização que apresentaram melhor desempenho para obter soluções para o problema da contração plana.

O problema da contração plana foi estudado considerando separadamente o caso da razão de contração finita 2:1 e o caso da entrada de um canal plano que pode ser visto como uma contração plana com razão de contração infinita. Os resultados obtidos para o caso da contração plana de razão 2:1 foram comparados com os dados experimentais de DURST et al. (1985). Finalmente para o caso da contração plana com razão de contração infinita (entrada de um canal plano) são apresentados perfis de velocidade em vários pontos do canal, dando principal atenção ao perfil de velocidade no plano de contração.

1.2 Descrição do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta a formulação matemática, isto é, as equações governantes para o estudo do escoamento de um fluido viscoso incompressível, é mostrado que as equações governantes podem ser escritas na forma convectiva ou na forma divergente, e é feita também a adimensionalização das equações.

O Capítulo 3 descreve o método numérico e o tipo de malha utilizados. É feita a discretização das equações governantes, tanto na forma convectiva como na forma divergente. São apresentados os esquemas de discretização utilizados: Exponencial, Linear a montante, QUICK e Central. É descrita a solução do sistema de equações discretizadas, apresentado o critério de estabilidade que permite corrigir o intervalo de tempo, estabelecido o critério de convergência e apresentado um esquema básico do algoritmo utilizado.

O Capítulo 4 apresenta resultados para o caso teste da cavidade quadrada com parede superior em movimento, para números de Reynolds variando entre 100 e 3200, e para os quatro esquemas de discretização descritos no Capítulo 3. É feita uma comparação com os dados de GHIA et al. (1982), considerados como marco de referência. São apresentados gráficos que mostram perfis de velocidades para as componentes u e v , gráficos que mostram a variação do desvio percentual com o refinamento da malha e também tabelas que mostram o esforço computacional exigido por cada um dos esquemas utilizados. É apresentada uma comparação entre o desempenho das formas convectiva e divergente para o esquema central.

No Capítulo 5 é estudado o problema da contração plana com razão de contração finita. São apresentados resultados para números de Reynolds variando entre 10 e 426. É feita uma comparação dos perfis de velocidade obtidos no presente trabalho, para os esquemas Exponencial e QUICK, com aqueles obtidos experimentalmente por DURST et al. (1985) utilizando um equipamento laser-Doppler.

No Capítulo 6 é estudado o problema da região de entrada de um canal, que pode ser considerado como um caso de contração plana com razão de contração infinita. Soluções do escoamento de Jeffery-Hamel para canais convergentes com ângulo máximo de 180° entre as paredes são utilizadas como condições de contorno na região de entrada do canal. São apresentados resultados para números de Reynolds entre 100 e 400 utilizando os esquemas Exponencial e QUICK.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões gerais, assim como sugestões para futuras investigações.

No Apêndice é apresentada uma listagem do algoritmo para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento.

Capítulo 2

Formulação Matemática

2.1 Introdução

As relações necessárias para descrever o movimento de um fluido são deduzidas a partir dos princípios fundamentais da mecânica clássica e termodinâmica para a conservação da massa, momento e energia, complementados com as equações constitutivas (WHITE, 1974), (ANDERSON, 1982), (PANTON, 1984), (WENDT, 1992). A aplicação destes princípios fundamentais a um modelo adequado de escoamento nos leva às equações governantes para as propriedades do fluido.

2.2 Equações Governantes

Para a obtenção das equações governantes podem ser empregados três modelos de escoamento:

- Abordagem por volumes de controle finitos: o campo de escoamento é dividido em um número finito de volumes de controle aos quais se aplicam os princípios físicos fundamentais.

Daqui são obtidas diretamente equações integrais para as propriedades dos fluidos, de maneira indireta podem ser obtidas equações diferenciais.

- Abordagem por elementos infinitesimais de fluido: neste caso o campo de escoamento é dividido em elementos infinitesimais de fluido, aos quais são aplicados os princípios fundamentais e assim podem ser obtidas diretamente equações diferenciais para as propriedades dos fluidos.
- Abordagem molecular: neste caso os princípios fundamentais são aplicados diretamente às moléculas de fluido. Isto leva a uma equação de Boltzmann, a partir da qual podem ser obtidas as equações diferenciais governantes.

CURRIE (1974), descreve este último modelo como elegante e apropriado para ser usado em escoamentos de gases menos densos, situações em que a hipótese do contínuo não é válida. Adverte que esta teoria é incompleta para gases mais densos e para líquidos.

Neste trabalho será utilizado como modelo de escoamento a aproximação por volumes de controle finitos. Consideraremos um campo de escoamento como representado pelas linhas de corrente na figura 2.1 e um volume de controle finito (de volume $\forall$ e superfície Σ) fixo no espaço com o fluido se movendo através dele.

Como estamos interessados na solução do problema hidrodinâmico, consideraremos apenas as equações de conservação da massa e do momento.

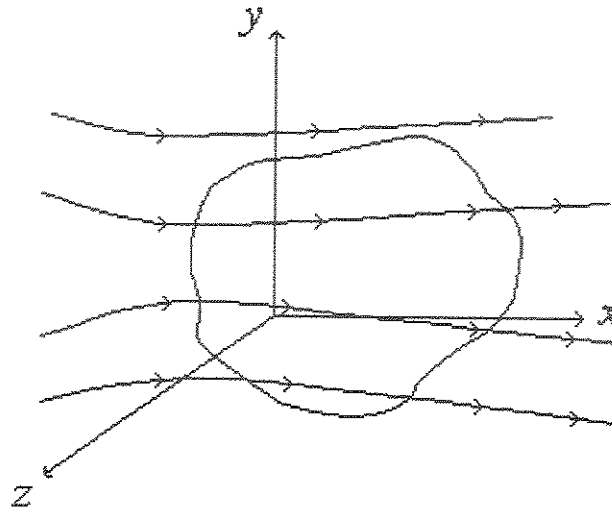


Fig.2.1 *Volume de controle fixo para derivação das equações governantes.*

2.2.1 Equação de Conservação da Massa

Esta equação é também chamada de equação da continuidade. O princípio fundamental da equação é a conservação da massa. Este princípio de conservação nos diz que o influxo de massa resultante através da superfície de controle deve ser igual à taxa de aumento de massa dentro do volume de controle, o que matematicamente pode ser representado como

$$-\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido e $\vec{V}$ é a sua velocidade. A equação (2.1) representa a formulação integral do princípio de conservação da massa quando aplicado a um escoamento de fluido. Esta é uma equação geral, que se aplica a escoamentos compressíveis e incompressíveis, viscosos ou não viscosos. Utilizando o Teorema de Gauss, podemos transformar a integral de superfície na equação (2.1) em integral de volume

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\forall} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\forall \quad (2.2)$$

combinando as equações (2.1) e (2.2), obtemos

$$\int_{\forall} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] d\forall = 0 \quad (2.3)$$

Como a escolha do volume de controle é arbitrária a única forma que a equação (2.3) seja verdadeira é que o integrando seja zero em cada ponto, assim

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.4)$$

que representa a formulação diferencial da equação de conservação da massa.

2.2.2 Equação do Momento

A equação do momento se baseia na segunda Lei de Newton. O princípio físico envolvido nesta equação é a conservação do momento: *a taxa temporal de variação de momento linear de um corpo é igual a soma das forças exercidas sobre ele*. Isto pode ser representado matematicamente como

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F} \quad (2.5)$$

ou para massa constante $\vec{F} = m\vec{a}$.

Para escrever esta equação em termos de mecânica dos fluidos, utilizaremos a abordagem por volumes de controle como no caso da equação de conservação da massa.

Primeiro calculamos a soma das forças ou força total sobre o volume de controle, encontramos dois tipos de força:

- forças de campo, que atuam sobre o fluido dentro do volume de controle tais como as forças gravitacionais ou eletromagnéticas.
- forças de superfície, que atuam sobre a superfície do volume de controle e que podem ter duas origens: pressões e tensões viscosas sobre a superfície.

Assim, a força total sobre o volume de controle pode ser representada matematicamente como

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{f} dV - \int_{\Sigma} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) d\Sigma \quad (2.6)$$

onde $\vec{f}$ representa a força de campo por unidade de massa e o último termo do lado direito representa as forças de superfície que atuam na superfície de controle.

Para calcular o lado esquerdo da equação (2.5), devemos observar que esta equação (assim como todas as leis da mecânica) está escrita para sistemas, isto é, quantidade de massa arbitrária de identidade fixa. Por esta razão, usaremos o Teorema de Transporte de Reynolds que permite converter a análise de sistema para uma análise de volume de controle. Desta forma, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \int_{\Sigma} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma) \vec{V} + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV \quad (2.7)$$

onde o primeiro termo do lado direito representa o fluxo de momento através da superfície de controle e o segundo termo representa a variação de momento, com o tempo, dentro do volume de controle. Finalmente, igualando esta expressão (Eq. 2.7) àquela obtida para força total (Eq. 2.6), obtemos

$$\int_{\Sigma} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma) \vec{V} + \int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) d\forall = \int_{\forall} \rho \vec{f} d\forall + \int_{\Sigma} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) d\Sigma \quad (2.8)$$

Esta última equação representa a forma integral da equação do momento completa, válida para fluidos viscosos e não viscosos.

Para obter a formulação diferencial desta equação devemos transformar as integrais de superfície em integrais de volume, para isto utilizamos o teorema de Gauss e assim, a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$\int_{\forall} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) d\forall + \int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) d\forall = \int_{\forall} \rho \vec{f} d\forall + \int_{\forall} (\nabla \cdot \tau) d\forall \quad (2.9)$$

daqui obtemos

$$\int_{\forall} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) d\forall + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \tau \right] d\forall = 0 \quad (2.10)$$

Como o volume de controle é arbitrário, esta equação só será satisfeita se o seu integrando for nulo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \tau \quad (2.11)$$

Esta equação representa a forma diferencial da equação do momento válida para fluidos viscosos ou não viscosos.

Para que esta equação possa ser tratada analiticamente ou numericamente é necessário relacionar o campo de tensões, τ , com a taxa de deformação das partículas através do campo de velocidades. Esta relação é obtida através das equações constitutivas.

Assumindo que,

- quando o fluido é estacionário, a tensão assume a forma: $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$, onde p é a pressão termodinâmica e δ_{ij} é o delta de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$
- campo de tensões é uma função linear da taxa de deformação,
- fluido é isotrópico, isto é, suas propriedades independem da direção,
- campo de tensões é simétrico,

pode-se mostrar (CURRIE, 1974), (WHITE, 1974), (FUNG, 1994) que o tensor de tensões pode ser escrito como

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

onde p é a pressão termodinâmica, μ é identificada como sendo a viscosidade dinâmica do fluido, λ é denominado segundo coeficiente de viscosidade e seu valor numérico pode ser determinado através da hipótese de Stokes

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.13)$$

esta relação é válida apenas para gases monoatômicos. De qualquer maneira, para fluidos incompressíveis a equação (2.12) mostra que a hipótese de Stokes não é necessária neste caso, pois o termo que envolve λ é zero em vista da equação da continuidade.

A equação (2.12) representa a equação constitutiva para um fluido Newtoniano. Substituindo esta equação na equação do momento na forma diferencial (Eq. 2.11), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \nabla \cdot [\lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{V} + \mu \nabla \vec{V}] \quad (2.14)$$

que representa a forma diferencial da equação do momento para um fluido Newtoniano, na sua forma mais geral, válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis, viscosos ou não viscosos.

Se o escoamento for incompressível, temos $\nabla \cdot \vec{V} \equiv 0$. Considerando ainda propriedades constantes a equação (2.14) pode ser simplificada de maneira considerável

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f} \quad (2.15)$$

onde ν é a viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$).

Nesta equação o lado esquerdo representa os termos convectivos ou de transporte de momento, os dois primeiros termos do lado direito representam as forças de superfície e o segundo termo do lado direito representa as forças de campo.

Esta é uma equação escrita em notação vetorial e por isso ela tem a vantagem de não estar limitada a um sistema de coordenadas particular. Ela representa um sistema de três equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem, que são conhecidas como equações de Navier-Stokes em reconhecimento ao francês M. Navier e ao inglês G. Stokes que obtiveram as equações na primeira metade do século XIX. Na literatura moderna da Dinâmica dos Fluidos Computacional, esta terminologia foi estendida para incluir o sistema inteiro de equações para a solução de um escoamento viscoso (equação de conservação da massa, momento e energia).

Para o presente trabalho serão consideradas as hipóteses de escoamento incompressível, fluido Newtoniano, propriedades físicas constantes, escoamento laminar e caso bidimensional em coordenadas retangulares, sendo a força gravitacional a única força de campo presente. Com estas hipóteses podemos rescrever a equação de conservação da massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

e escrever a equação de conservação do momento para as componentes x e y

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \quad (2.17b)$$

2.3 Forma Divergente e Forma Convectiva

As equações do momento apresentadas acima estão escritas na *forma divergente* (chamada assim porque, na forma vetorial da equação, os termos de transporte devido à convecção e difusão aparecem dentro do operador divergência). Existe uma outra forma de escrever estas equações que é chamada de *forma convectiva*.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.18)$$

Notemos que a única diferença entre ambas as formas de escrever as equações do momento está no termo convectivo, que ao mesmo tempo é o termo que introduz a não linearidade nas equações.

A forma convectiva da equação pode ser obtida diretamente utilizando como modelo de escoamento um sistema ou um elemento de fluido infinitesimal se movimentando junto com o fluido (WENDT, 1992). Ela pode ser rescrita para as componentes x e y , respectivamente, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.19a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \quad (2.19b)$$

Ambas as formas de escrever as equações governantes são válidas e podem ser obtidas uma da outra. Da álgebra vetorial, temos que

$$\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{V} (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.20)$$

e utilizamos a equação de conservação da massa (Eq. 2.16), para obter

$$\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (2.21)$$

Substituímos esta última igualdade na equação (Eq. 2.15), obtendo assim a forma convectiva da equação do momento (Eq. 2.18).

Vemos que ambas as formas de escrever as equações de Navier-Stokes são analiticamente equivalentes, mas numericamente elas apresentam diferenças. É baseado nestas diferenças que, na literatura de Dinâmica dos Fluidos Computacional, a forma divergente é também chamada de “forma conservativa” e a forma convectiva é também chamada de “forma não conservativa”.

ROACHE (1982) define a conservatividade como uma propriedade possuída por alguns métodos de diferenças finitas de preservar certas relações integrais. Adverte que conservação não necessariamente implica em acuidade, exceto em relação a esta propriedade integral, e que soluções instáveis das equações conservativas ainda mantém a propriedade conservativa. Com base em algumas citações da literatura diz que a experiência tem mostrado que, em geral, esquemas conservativos fornecem resultados mais acurados que os não conservativos.

ANDERSON (em WENDT 1992), afirma que a forma das equações governantes é fundamental para quem trabalha em Dinâmica dos Fluidos Computacional, pois o uso das equações em uma forma pode levar a um resultado satisfatório, enquanto o uso da outra pode levar a resultados numéricos em que oscilações estejam presentes ou instabilidade. Por isto, são derivadas e discutidas as duas formas das equações governantes, apontando as suas diferenças e similaridades, refletindo nas possíveis implicações na sua aplicação à Dinâmica dos Fluidos Computacional.

Entre os autores que realizam pesquisas numéricas, o uso da forma divergente ou conservativa é quase consenso. Numericamente a forma divergente não é mais complicada que a forma convectiva e geralmente fornece resultados mais acurados. Existem muitos trabalhos que comparam numericamente ambas as formas da equação, utilizando diferentes esquemas de discretização; como exemplo, citamos alguns deles a seguir.

BOZEMAN e DALTON (1973), obtiveram soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes no caso do escoamento bidimensional em regime laminar dentro de uma cavidade retangular. Foi utilizado o método de Diferenças Finitas na formulação Vorticidade-Função Corrente. As equações de Navier-Stokes foram escritas na forma convectiva e na forma divergente. Para a discretização do termo convectivo foram utilizados os esquemas central e linear a montante. Foram utilizadas malhas regulares com 10×10 , 20×20 , 30×30 , 40×40 e 50×50 pontos nodais. Seus resultados indicam que, para $Re = 100$ ou menor utilizar a forma divergente e esquema central gera soluções mais acuradas. Para $Re = 1000$ não foi obtida convergência com nenhum dos procedimentos de diferenças finitas centrais; utilizando o esquema upwind na forma divergente obtém-se uma solução fisicamente consistente enquanto utilizando a forma convectiva a convergência leva a uma solução não real.

GUPTA (1981) obteve soluções numéricas das equações de Navier-Stokes na forma convectiva e na forma divergente, utilizando os esquemas de discretização central e linear a montante. Foi utilizado o Método de Diferenças Finitas dentro da Formulação Vorticidade-Função Corrente. O problema da Cavidade Quadrada com parede superior em movimento foi utilizado

como caso teste. Foram obtidas soluções para os quatro esquemas para vários números de Reynolds na faixa $Re = 1 - 5000$, utilizando malhas regulares com espaçamentos de $1/20$ e $1/32$. Para números de Reynolds pequenos todos os esquemas convergem satisfatoriamente. Quando o número de Reynolds aumenta, dois destes esquemas apresentam problemas de convergência. Para o esquema central e forma convectiva não foram obtidas soluções acima de $Re = 1000$. O esquema linear a montante e forma divergente apresenta um comportamento oscilatório para $Re > 1000$, com precisão simples, com precisão dupla pode-se conseguir convergência monotônica para $Re = 5000$. Os esquemas a montante na forma convectiva e central na forma divergente convergiram para todos os números de Reynolds testados. Conclui que as soluções obtidas usando a forma divergente são amplamente superiores a aquelas obtidas usando a forma convectiva quando o esquema central é usado, especialmente para altos números de Reynolds. Quando o esquema a montante é usado as soluções das duas formulações são quase equivalentes em acuidade, a forma convectiva tem uma pequena vantagem sobre a forma divergente para pequenos números de Reynolds.

TAFTI (1996), utiliza as formas convectiva e divergente para escrever os termos convectivos e faz uma comparação do seu desempenho utilizando aproximações de quinta ordem de aproximação. A comparação é feita para cinco casos teste, entre eles o problema da cavidade quadrada; no caso da cavidade é utilizado $Re = 1000$ e malhas de 8×8 , 16×16 , 32×32 e 64×64 pontos nodais, os resultados são comparados com aqueles de Ghia et al. (1982). Ele conclui que a forma convectiva exibe a melhor acuidade para malhas muito refinadas, mas se deteriora rapidamente quando o refinamento diminui. Exceto no problema da cavidade não existe outra evidência que a forma divergente tenha qualquer vantagem sobre a forma convectiva.

Neste trabalho serão feitos alguns testes comparando o desempenho de ambas as formas da equação de Navier-Stokes para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento.

2.4 Adimensionalização

A adimensionalização das equações utilizadas é feita considerando duas dimensões características do problema: L e U_0 que representam um comprimento característico e uma velocidade característica do problema, respectivamente.

Definimos as variáveis adimensionais

$$u^* = \frac{u}{U_0}, \quad v^* = \frac{v}{U_0} \quad (2.22a)$$

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L} \quad (2.22b)$$

$$t^* = \frac{t}{(L/U_0)} = \frac{U_0 t}{L} \quad (2.22c)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U_0^2} \quad (2.22d)$$

$$g^* = \frac{g}{(U_0^2/L)} = \frac{gL}{U_0^2} \quad (2.22e)$$

Introduzindo estas variáveis adimensionais nas equações do momento e definindo o Número adimensional de Reynolds como

$$\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (2.23)$$

obtemos a equação da continuidade adimensionalizada

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.24)$$

ou na forma vetorial

$$\nabla \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (2.25)$$

Obtemos também as equações do momento adimensionalizadas, para as componentes x e y na forma divergente

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right) \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^*v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2} \right) + g^* \quad (2.26b)$$

ou na forma vetorial

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\vec{V}^* \vec{V}^*) = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^* + \vec{f}^* \quad (2.27)$$

Para a forma convectiva, as equações do momento adimensionalizadas para as componentes x e y , podem ser escritas como

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right) \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2} \right) + g^* \quad (2.28b)$$

ou na forma vetorial

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + (\vec{V}^* \cdot \nabla) \vec{V}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^* + \vec{f}^* \quad (2.29)$$

No seguinte capítulo será feita a discretização das equações de Navier-Stokes, tanto na forma convectiva como na forma divergente. Para isto serão utilizadas as equações adimensionalizadas; que, daqui para frente, serão escritas sem utilizar a notação com (*).

Capítulo 3

Método Numérico e Algoritmo

3.1 Introdução

No capítulo anterior foram apresentadas as equações governantes para o escoamento de fluidos, tanto na formulação integral como na formulação diferencial. Foi mostrado também que estas equações podem ser escritas de duas formas: convectiva e divergente.

As equações governantes, na formulação integral ou diferencial, representam o ponto de partida para a obtenção de uma solução numérica. Para isto, devemos obter equações algébricas que aproximem as equações governantes, o que é feito através da discretização destas equações.

Existem várias possibilidades para a formulação do problema; entre elas, variáveis primitivas, vorticidade-função corrente e velocidade-vorticidade. A formulação em variáveis primitivas oferece menos complicações para estender o caso bidimensional para tridimensional. Neste trabalho é utilizada a formulação em variáveis primitivas.

As equações governantes foram escritas na forma divergente ou conservativa e também na forma convectiva ou não conservativa. Para a discretização das equações, na forma convectiva, é utilizado o método das Diferenças Finitas. No caso da equação na forma divergente foi utilizado o método dos Volumes Finitos (PATANKAR, 1980). Por isto, o ponto de partida neste trabalho serão as equações de Navier-Stokes na forma diferencial, já adimensionalizadas, apesar de que no caso do método dos Volumes Finitos o trabalho poderia ser iniciado diretamente da formulação integral das equações de Navier-Stokes.

É utilizada malha intercalada regular e o procedimento tipo MAC, de HARLOW e WELSH (1965), aprimorado no procedimento de HIRT et al. (1975), para a obtenção da solução em regime permanente.

3.2 Localização das Variáveis - Malha Deslocada

A malha deslocada emprega pontos nodais diferentes para cada variável dependente, foi utilizada inicialmente por HARLOW e WELSH (1965) no procedimento MAC e é recomendada por PATANKAR (1980).

Na figura 3.1 as linhas tracejadas indicam as faces dos volumes de controle principais. Utilizamos a seguinte convenção: consideramos um dos volumes de controle da figura 3.1 e marcamos os pontos médios de cada face, denotando-os por e, n, w, s . Denotamos por O o centro do volume de controle considerado e por E, N, W, S os centros dos volumes de controle adjacentes, por analogia à notação geográfica. A pressão é localizada no centro dos volumes de controle principais (na figura 3.1 O, E, N, W ou S) e as componentes u e v da velocidade são localizadas nas faces do volume de controle (na figura 3.1 w ou e , n ou s respectivamente).

Os volumes de controle secundários utilizados para as velocidades são ilustrados na figura 3.2. Se a pressão $p_{i,j}$ é localizada no ponto O , então as velocidades $u_{i,j}$ e $v_{i,j}$ são localizadas nas faces w e s , respectivamente.

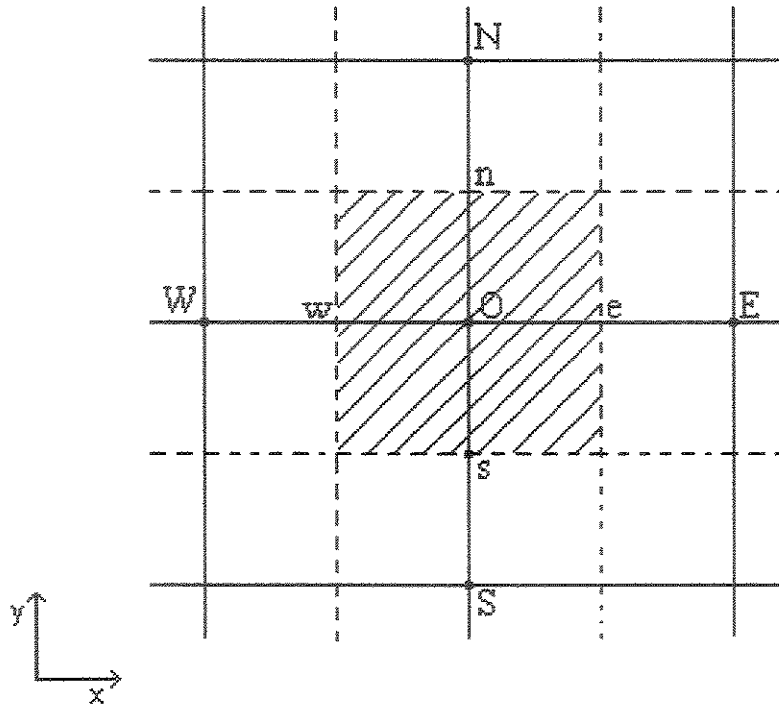


Fig. 3.1 *Malha deslocada. Volume de controle principal para a pressão*

Para efeitos do trabalho computacional será necessário armazenar as posições da pressão, o que será feito em vetores denotados por $xp(i)$ e $yp(j)$. Será necessário armazenar também as posições das componentes da velocidade, o que será feito em vetores denotados por $xu(i)$ e $yv(j)$; a posição da componente u na direção y coincide com a posição da pressão, assim como a posição da componente v na direção x . Denotaremos por dux_i a distância entre as posições de armazenamento das velocidades $u_{i,j}$ e $u_{i+1,j}$, dvy_j denotará a distância entre as posições das velocidades $v_{i,j}$ e $v_{i,j+1}$, dpx_i e dpy_j denotarão as distâncias entre as posições das pressões $p_{i,j}$, $p_{i+1,j}$ e $p_{i,j}$, $p_{i,j+1}$, respectivamente. Ver figura 3.3. O número total de pontos na direção x será denotado por np_x e o número total de pontos na direção y será denotado por np_y .

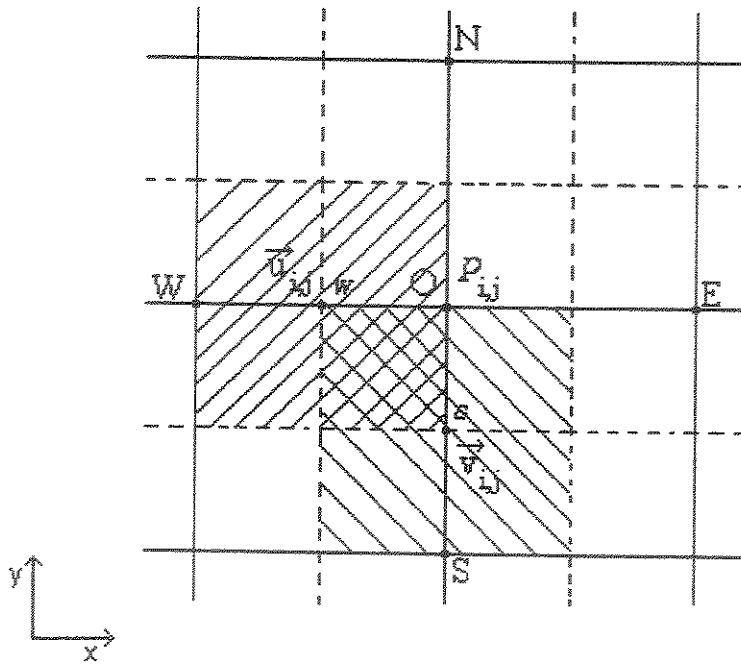


Fig. 3.2 Malha deslocada. Volumes de controle secundários para as velocidades

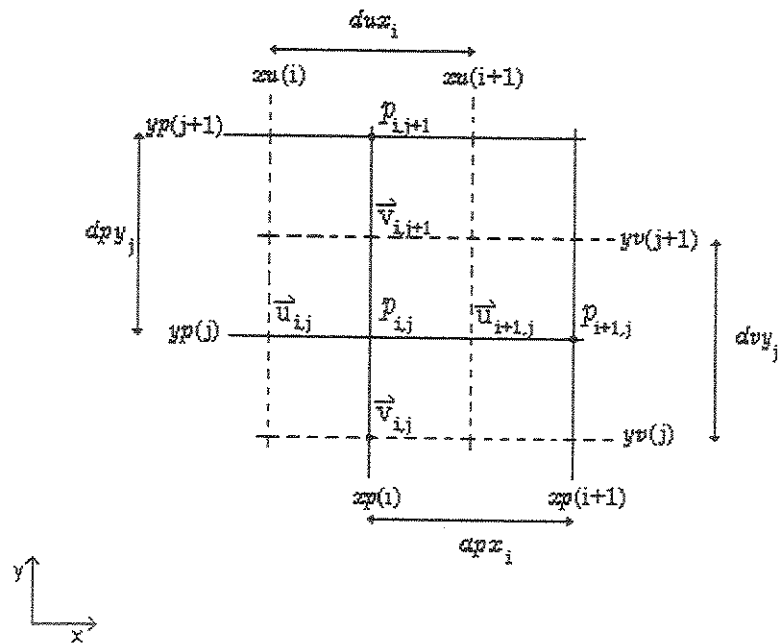


Fig. 3.3 Posições para a pressão e para as componentes da velocidade.

Distâncias entre os pontos.

3.3 Discretização da Equação de Navier-Stokes na Forma Divergente - Método dos Volumes Finitos

Para obter a forma discretizada da equação de Navier-Stokes, utilizando o método dos Volumes Finitos, é necessário dividir o domínio em um número de volumes de controle não sobrepostos de tal maneira que cada volume de controle possua em seu interior um único ponto nodal (figura 3.1). A equação diferencial é integrada sobre cada volume de controle, depois as integrais são aproximadas utilizando os diferentes esquemas de discretização.

Integrando a equação do momento na forma divergente (Eq. 2.27c) sobre o volume de controle, obtemos

$$\int_{\forall} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) d\forall = - \int_{\forall} \nabla p d\forall + \int_{\forall} \vec{f} d\forall + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\forall} \nabla^2 \vec{V} d\forall \quad (3.1)$$

Usamos o teorema de Gauss para transformar algumas destas integrais em integrais de superfície

$$\int_{\forall} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\forall + \int_{\Sigma} \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Sigma} \nabla \vec{V} d\Sigma + \int_{\forall} \vec{f} d\forall \quad (3.2)$$

Daqui, temos uma equação para a componente u e uma para a componente v

$$\int_{\forall} \frac{\partial u}{\partial t} d\forall + \int_{\Sigma} u (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} (p \vec{i} \cdot \vec{n}) d\Sigma + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Sigma} (\nabla u \cdot \vec{n}) d\Sigma + \int_{\forall} f_u d\forall \quad (3.3a)$$

$$\int_{\forall} \frac{\partial v}{\partial t} d\forall + \int_{\Sigma} v (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} (p \vec{j} \cdot \vec{n}) d\Sigma + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Sigma} (\nabla v \cdot \vec{n}) d\Sigma + \int_{\forall} f_v d\forall \quad (3.3b)$$

Agora, transformaremos estas equações em equações algébricas. Para isto, cada umas das integrais nas equações (3.3) será aproximada utilizando os diferentes esquemas de discretização. Como foi notado no capítulo 2, para o caso $\mu = cte.$ que é considerado neste trabalho, a única diferença entre a forma convectiva e a forma divergente das equações do momento está no termo convectivo, os outros termos são idênticos para ambas as formas da equação. Além disso a não linearidade da equação do momento é introduzida pelos termos convectivos. Por isto, consideraremos primeiro os termos transiente, de pressão, difusivo e fonte; o termo convectivo será tratado separadamente.

A seguir apresentamos as aproximações feitas para obter a forma discretizada da equação do momento para a componente v (Eq. 3.3 a), para o caso da equação para a componente u o tratamento é análogo.

- termo transiente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V v dV \approx \sum_i \Delta x_i \Delta y_{j-1} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \quad (3.4)$$

onde os superescritos n e $n+1$ indicam dois instantes de tempo consecutivos.

- termo de pressão

$$\int_{\Sigma} (p \vec{j} \cdot \vec{n}) d\Sigma \approx \sum_i \Delta x_i (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \quad (3.5)$$

- termo difusivo [$DIFF(v)$]

$$\frac{1}{Re} \int_{\Sigma} (\nabla v \cdot \vec{n}) d\Sigma \approx \frac{1}{Re} \sum_i f_i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} \right]_i \quad (3.6)$$

onde f_i representa a área frontal da face do volume de controle. Assim,

$$DIFF(v) = \frac{1}{Re} \left[dpy_{j-1} \left(\frac{v_{i,j} - v_{i+1,j}}{dpx_i} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dpx_{i-1}} \right) + dux_i \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j+1}}{dvy_j} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{dvy_{j-1}} \right) \right] \quad (3.7)$$

▪ termo fonte

$$\int_V g dV \approx dux_i dpy_{j-1} g_{i,j} \quad (3.8)$$

O tratamento numérico do termo convectivo $[CONV(u)]$ é de grande influência na obtenção de resultados acurados; por isso ele será tratado separadamente e serão utilizados vários esquemas de discretização para fazer a aproximação: central, linear a montante (upwind), quadrático a montante (QUICK). Será utilizado também o esquema exponencial, que discretiza simultaneamente os termos convectivos e difusivos.

O esquema central utiliza uma interpolação linear entre dois pontos nodais, isto é, considera que o valor da propriedade transportada entre dois pontos nodais é o valor médio entre os dois pontos. Este esquema freqüentemente conduz a problemas de instabilidade para altos números de Reynolds, este problema pode ser corrigido utilizando um espaçamento nodal suficientemente pequeno, mas freqüentemente isto leva a uma quantidade muito grande de pontos nodais; por isto outras formulações têm sido empregadas na literatura para obter soluções para altos números de Reynolds. Entre eles, os esquemas a montante, exponencial, “power-law”, híbrido, etc.

No esquema linear a montante (upwind) são utilizadas diferenças para trás quando as velocidades são positivas e para frente quando as velocidades são negativas, isto é o valor da propriedade transportada na interface é considerada o valor a montante do ponto em questão. Este esquema conduz a resultados estáveis, mas introduz erros de primeira ordem que operam como difusão numérica ou falsa difusão.

O esquema exponencial tem sido amplamente usado na Dinâmica dos Fluidos Computacional, ele utiliza as funções de interpolação obtidas da solução exata do problema unidimensional de convecção-difusão. Este esquema consegue a estabilidade do esquema linear a montante e também fornece resultados mais acurados. Existem duas dificuldades no uso deste esquema: a primeira, é que os cálculos das exponenciais requerem de muito tempo computacional, o que foi resolvido por uma variante do esquema exponencial chamada de esquema power-law que é descrita por PATANKAR (1980). A segunda dificuldade é que ele perde em acuidade para os esquemas de alta ordem. Leonard e Drummond (1995) criticam o uso de esquemas baseados no exponencial, segundo eles estes esquemas não deveriam ser usados para cálculos práticos da Dinâmica dos Fluidos Computacional, especialmente para processos que modelam transferência de massa e calor, deveriam ser considerados apenas pelo interesse histórico na evolução dos esquemas numéricos. Defendem o uso de esquemas de discretização de alta ordem que permitiriam obter soluções mais acuradas e fisicamente corretas.

O esquema quadrático a montante (QUICK), desenvolvido por LEONARD (1979), produz resultados mais estáveis que o esquema central e diminui a difusão numérica pois apresenta erro de truncamento de segunda ordem. O esquema consiste em uma interpolação quadrática sobre três pontos, que pode ser interpretada como um termo linear corrigido por um termo de curvatura calculado sempre a montante. Como o esquema QUICK precisa de uma interpolação sobre três pontos, ele não pode ser utilizado nos volumes de controle adjacentes ao contorno. Vanka (1987), utiliza o esquema linear a montante nestes volumes de controle. Thakur e Shyy (1993), testam duas práticas diferentes: a primeira usa um esquema de dois pontos (linear a montante ou central) nas duas faces do volume de controle adjacente ao contorno. A segunda considera a direção do fluxo em cada face do volume de controle, nas faces em que dois vizinhos são conhecidos utiliza um esquema de três pontos, caso contrário é utilizado um esquema de dois pontos. Os resultados obtidos por eles mostram que o QUICK é bastante robusto e apresenta perfis muito similares para ambos os tratamentos. Neste trabalho será utilizado o esquema linear a montante para os volumes de controle adjacentes ao contorno.

Exemplificamos estas diferentes abordagens considerando a discretização do termo convectivo $\partial(u^2)/\partial x$

$$\left. \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} \approx \frac{(\tilde{u}_{i+1,j} u_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j} u_{i,j})}{\Delta x_i} \quad (3.9)$$

onde

$$\tilde{u}_{i,j} = (u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}) / 2 \quad (3.10)$$

e o valor de $u_{i,j}$, por exemplo, depende de cada esquema. Para o esquema central

$$u_{i,j} = \tilde{u}_{i,j} \quad (3.11)$$

para o esquema linear a montante

$$u_{i,j} = \begin{cases} u_{i-1/2,j} & \text{se } \tilde{u}_{i,j} > 0 \\ u_{i+1/2,j} & \text{se } \tilde{u}_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

para o esquema QUICK

$$u_{i,j} = \begin{cases} \tilde{u}_{i,j} - (u_{i-3/2,j} + u_{i+1/2,j} - 2u_{i-1/2,j}) / 8 & \text{se } \tilde{u}_{i,j} > 0 \\ \tilde{u}_{i,j} - (u_{i+3/2,j} + u_{i-1/2,j} - 2u_{i+1/2,j}) / 8 & \text{se } \tilde{u}_{i,j} < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

e para o esquema exponencial

$$u_{i,j} = u_{i-1/2,j} + \frac{u_{i-1/2,j} - u_{i+1/2,j}}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad (3.14)$$

onde Pe é o número de Peclet, definido por

$$Pe = \tilde{u}_{i,j} \Delta x_i Re$$

3.4 Discretização da Equação de Navier-Stokes na forma Convectiva - Método das Diferenças Finitas

3.4.1 Caso Geral

O método de diferenças finitas é amplamente usado em Dinâmica dos Fluidos Computacional. A idéia básica deste método é usar quocientes de diferenças para substituir as derivadas parciais nas equações governantes, obtendo assim o sistema algébrico de equações para as variáveis dependentes em cada ponto nodal (WENDT, 1992).

Neste método não há necessidade de integrarmos a equação diferencial, as derivadas são aproximadas diretamente utilizando aproximações polinomiais ou, equivalentemente, séries de Taylor truncada. Exemplificamos estas aproximações utilizando a equação para a componente v (Eq. 2.9), o tratamento da equação para a componente u é análogo.

- termo transiente

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.15)$$

- termo de pressão

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y_{i-1}} \quad (3.16)$$

- termo fonte

$$g \approx g_{i,j} \quad (3.17)$$

A malha considerada é regular para os pontos internos da velocidade e é irregular nos contornos; por isto, a discretização dos termos difusivo e convectivo para os pontos internos é diferente de aquela usada para os pontos externos.

- termo difusivo [*DIFF*(v)]

para os pontos internos: $i = 3, npx; j = 3, npy + 1$ tem-se

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \approx \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{dpx_i^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{dvy_j^2} \right] \quad (3.18)$$

e para os pontos nas faces laterais: $i = 2; j = 3, npy + 1; \quad i = npx + 1; j = 3, npy + 1$, tem-se

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \approx \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{v_{i+1,j} - (1 + S_x^2)v_{i,j} + S_x^2 v_{i-1,j}}{dpx_i^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{dvy_j^2} \right] \quad (3.19)$$

onde

$$S_x = dpx_i / dpx_{i-1}.$$

- termo convectivo [*CONV*(v)]

Para a aproximação do termo convectivo é utilizado o esquema central. Para os pontos internos: $i = 3, npx; j = 3, npy + 1$ tem-se

$$CONV(v)_{i,j} = \hat{u}_{i,j} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dpx_i} \right) + v_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2dvy_j} \right) \quad (3.20)$$

onde $\hat{u}_{i,j} = (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) / 4$.

Para os pontos nas faces laterais: $i = 2; j = 3, n_{py} + 1; \quad i = n_{px} + 1; j = 3, n_{py} + 1$ tem-se

$$CONV(v)_{i,j} = \hat{u}_{i,j} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{dpx_i + dpx_{i-1}} \right) + v_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2dvy_j} \right) \quad (3.21)$$

e $\hat{u}_{i,j}$ como definido acima.

3.4.2 Interpolação Parabólica no Contorno

A irregularidade da malha no contorno gera um erro de primeira ordem. Para tentar corrigir isto e obter uma aproximação de segunda ordem, é proposta uma interpolação parabólica para o contorno.

Consideremos os pontos genéricos x_{i-1}, x_i, x_{i+1} e uma função parabólica interpolante

$$\Phi(x) = Ax^2 + Bx + C$$

As derivadas de Φ

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 2A$$

Ajustando a função aos valores nodais e resolvendo o sistema encontrado, obtemos os valores de A e B , assim

$$\left. \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{2(\Phi_{i+1} - \Phi_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} + \frac{2(\Phi_{i-1} - \Phi_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{d \Phi}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{(\Phi_{i+1} - \Phi_i)(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} - \frac{(\Phi_{i-1} - \Phi_i)(x_{i+1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (3.23)$$

Portanto, podemos rescrever a discretização dos termos convectivo e difusivo para o caso do esquema central e equação na forma convectiva.

▪ termo difusivo [$DIFF(v)$]

Para os pontos internos, a expressão é análoga à anterior (Eq. 3.17), enquanto para os pontos nas faces laterais: $i = 2; j = 3, n_{py} + 1$ e $i = n_{px} + 1; j = 3, n_{py} + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} DIFF(v)_{i,j} = & \frac{2}{Re} \left[\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{dpx_i(dpx_i + dpx_{i-1})} + \frac{v_{i-1,j} - v_{i,j}}{dpx_{i-1}(dpx_i + dpx_{i-1})} \right] + \\ & + \frac{2}{Re} \left[\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{dvy_j(dvy_j + dvy_{j-1})} + \frac{v_{i,j-1} - v_{i,j}}{dvy_{j-1}(dvy_j + dvy_{j-1})} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

▪ termo convectivo [$CONV(v)$]

Para os pontos internos, a expressão é análoga à anterior (Eq. 3.20), para os pontos nas faces laterais: $i = 2; j = 3, n_{py} + 1$ e $i = n_{px} + 1; j = 3, n_{py} + 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
CONV(v)_{i,j} = \hat{u}_{i,j} & \left[\frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})dpx_{i-1}}{dpx_i(dpx_i + dpx_{i-1})} - \frac{(v_{i-1,j} - v_{i,j})dpx_i}{dpx_{i-1}(dpx_i + dpx_{i-1})} \right] + \\
& + v_{i,j} \left[\frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j})dvy_{j-1}}{dvy_j(dvy_j + dvy_{j-1})} - \frac{(v_{i,j-1} - v_{i,j})dvy_j}{dvy_{j-1}(dvy_j + dvy_{j-1})} \right]
\end{aligned} \quad (3.25)$$

e $\hat{u}_{i,j}$ como definido anteriormente (Eq. 3.20).

3.5 Formulação Discreta da Equação do Momento

A partir das aproximações feitas nas seções 3.3 e 3.4 obtemos as equações

$$dpx_{i-1}dvy_j \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + CONV(u)_{i,j} + DIFF(u)_{i,j} = dvy_j(p_{i-1,j} - p_{i,j}) \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned}
dux_i dpy_{j-1} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + CONV(v)_{i,j} + DIFF(v)_{i,j} = dux_i(p_{i,j-1} - p_{i,j}) + dux_i dpy_j g_{i,j}
\end{aligned} \quad (3.26b)$$

que representam a formulação discreta das equações do momento, para as componentes de velocidade nas direções x e y , respectivamente. Elas são acopladas pela pressão, mas não existe uma equação própria para esta variável. Para contornar esta dificuldade é utilizado o método de resolução semi-implícito SOLA de HIRT et al.(1975).

3.6 Discretização Temporal - Método Semi-implícito SOLA

A idéia básica deste método consiste em obter, explicitamente a partir da equação do momento (Eq. 3.26), as velocidades nas quatro faces do volume de controle e substituí-las na equação de conservação da massa, obtendo assim, uma equação implícita para a pressão.

Consideremos t^n e $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ dois instantes consecutivos. Para cada instante de tempo, a equação de conservação da massa pode ser escrita na forma totalmente implícita:

$$dux_i(v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) + dvy_j(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) = 0 \quad (3.27)$$

As equações do momento (Eq. 3.26) são escritas numa forma semi-implícita. Obtemos uma equação para cada face do volume de controle:

$$dp_{x_{i-1}} dvy_j \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + CONV(u)_{i,j}^n + DIFF(u)_{i,j}^n = dvy_j (p_{i-1,j} - p_{i,j})^{n+1} \quad (3.28a)$$

$$dp_{x_i} dvy_j \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n}{\Delta t} \right) + CONV(u)_{i+1,j}^n + DIFF(u)_{i+1,j}^n = dvy_j (p_{i,j} - p_{i+1,j})^{n+1} \quad (3.28b)$$

$$dux_i dpy_{j-1} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + CONV(v)_{i,j}^n + DIFF(v)_{i,j}^n = dux_i (p_{i,j-1} - p_{i,j})^{n+1} + dux_i dpy_j g_{i,j}^{n+1} \quad (3.28c)$$

$$dux_i dpy_j \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j+1}^n}{\Delta t} \right) + CONV(v)_{i,j+1}^n + DIFF(v)_{i,j+1}^n = dux_i (p_{i,j} - p_{i,j+1})^{n+1} + dux_i dpy_j g_{i,j+1}^{n+1} \quad (3.28d)$$

fazendo

$$FU_{i,j} = CONV(u)_{i,j} + DIFF(u)_{i,j}$$

$$FV_{i,j} = CONV(v)_{i,j} + DIFF(v)_{i,j}$$

e rearranjando os termos, obtemos as velocidades nas quatro faces do volume de controle:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{dp_{x_{i-1}}} (p_{i-1,j} - p_{i,j})^{n+1} + \Delta t \left[\frac{-FU_{i,j}^n}{dp_{x_{i-1}} dvy_j} + \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} \right] \quad (3.29a)$$

$$u_{i+1,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{dp_{x_i}} (p_{i,j} - p_{i+1,j})^{n+1} + \Delta t \left[\frac{-FU_{i+1,j}^n}{dp_{x_i} dvy_j} + \frac{u_{i+1,j}^n}{\Delta t} \right] \quad (3.29b)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{dp_{y_{j-1}}} (p_{i,j-1} - p_{i,j})^{n+1} + \Delta t \left[\frac{-FV_{i,j}^n}{dux_i dp_{y_{j-1}}} + g_{i,j}^{n+1} + \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t} \right] \quad (3.29c)$$

$$v_{i,j+1}^{n+1} = \frac{\Delta t}{dp_{y_j}} (p_{i,j} - p_{i,j+1})^{n+1} + \Delta t \left[\frac{-FV_{i,j+1}^n}{dux_i dp_{y_j}} + g_{i,j+1}^{n+1} + \frac{v_{i,j+1}^n}{\Delta t} \right] \quad (3.29d)$$

Agora, substituímos as velocidades (Eq. 3.29) na equação de conservação da massa (Eq. 3.27), obtendo assim uma equação para a pressão

$$a_{i,j} p_{i,j} - a_{i,j+1} p_{i,j+1} - a_{i,j-1} p_{i,j-1} - a_{i+1,j} p_{i+1,j} - a_{i-1,j} p_{i-1,j} = b_{i,j} \quad (3.30)$$

onde os a são coeficientes que dependem apenas dos parâmetros geométricos da malha e são definidos da seguinte forma

$$a_{i,j+1} = dux_i / dp_{y_j} \quad (3.31a)$$

$$a_{i,j-1} = dux_i / dp_{y_{j-1}} \quad (3.31b)$$

$$a_{i+1,j} = dvy_j / dp_{x_i} \quad (3.31c)$$

$$a_{i-1,j} = dvy_j / dp x_{i-1} \quad (3.31d)$$

$$a_{i,j} = a_{i,j+1} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i-1,j} \quad (3.31e)$$

enquanto o termo $b_{i,j}$, no lado direito, depende do campo de velocidade no tempo anterior e do passo de tempo Δt , ele é definido como

$$\begin{aligned} b_{i,j} = & dux_i \left[\left(\frac{-FV_{i,j}^n}{dux_i dpy_{j-1}} + g_{i,j}^{n+1} + \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{-FV_{i,j+1}^n}{dux_i dpy_j} + g_{i,j+1}^{n+1} + \frac{v_{i,j+1}^n}{\Delta t} \right) \right] + \\ & + dvy_j \left[\left(\frac{-FU_{i,j}^n}{dp x_{i-1} dvy_j} + \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{-FU_{i+1,j}^n}{dux_i dpy_j} + \frac{u_{i+1,j}^n}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dessa maneira, obtemos um sistema algébrico de equações lineares que pode ser resolvido utilizando métodos diretos ou iterativos.

3.7 Solução do Sistema

A matriz de rigidez é de banda, simétrica e positiva definida. Dadas as características da matriz é escolhido o método direto de Cholesky (GOLUB e LOAN, 1985), (EVANS, 1980) para a resolução do sistema.

Segundo o teorema da Decomposição de Cholesky, se A é uma matriz quadrada de ordem n , simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular inferior G da mesma ordem de A com elementos da diagonal positivos tal que A pode ser decomposta como o produto $A = GG^t$. A decomposição $A = GG^t$ é conhecida como decomposição de Cholesky e G é chamada de triângulo de Cholesky.

À decomposição da matriz A em GG^t segue-se a solução das duas equações matriciais triangulares, que devem ser feitas a cada passo do processo iterativo.

Como os elementos da matriz dependem unicamente de parâmetros geométricos da malha, a decomposição da matriz é feita uma única vez no início do programa.

3.8 Estabilidade Numérica

Quando são realizados experimentos numéricos freqüentemente encontramos oscilações tanto no espaço como no tempo ou em ambos. Este comportamento oscilatório é chamado de instabilidade numérica. Para tentar evitar este tipo de instabilidade devemos impor algumas restrições ao definir os incrementos da malha Δx , Δy e ao incremento do tempo Δt .

Para garantir acuidade, os incrementos da malha devem ser escolhidos suficientemente pequenos para resolver as variações espaciais requeridas em todas as variáveis dependentes. Isto as vezes torna-se impraticável devido à quantidade de memória e ao tempo computacional requeridos e por isto deve-se ter um cuidado especial na hora de interpretar os resultados obtidos.

Uma vez definida a malha deve-se definir o incremento de tempo Δt . Para garantir estabilidade devemos impor duas restrições:

- não pode existir transporte de matéria em mais do que uma célula em uma etapa de tempo, por isto deve ser satisfeita a seguinte desigualdade

$$\Delta t < \min \left\{ \frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta y}{|v|} \right\} \quad (3.33)$$

onde o mínimo é tomado em relação a todas as células da malha.

- quando é utilizado um valor de viscosidade cinemática diferente de zero não deve ser difundido momento mais do que uma célula em uma etapa de tempo. Uma análise de estabilidade linear mostra que esta limitação implica

$$\Delta t < \frac{1}{2\nu} \left\{ \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right\} \quad (3.34)$$

O Δt escolhido deve satisfazer estas duas desigualdades (HIRT et al., 1975), (JALURIA e TORRANCE, 1986).

Os diferentes testes numéricos realizados mostraram que o Δt que satisfaz estas duas desigualdades é apenas um valor de referência e na maioria dos casos é necessário relaxar este valor, por isso o incremento de tempo Δt foi calculado como

$$\Delta t = F_r \cdot \min\{\Delta t_c, \Delta t_D\} \quad (3.35)$$

onde F_r é um fator de relaxação tal que $0 < F_r \leq 1$. Foram realizados alguns testes numéricos para diferentes valores de F_r , o valor que se mostrou mais adequado para todos os casos foi $F_r = 0.8$ e por isto ele foi utilizado para a obtenção de todos os resultados apresentados neste trabalho.

3.9 Critério de Convergência

Os critérios de convergência baseados unicamente na variação das variáveis principais podem tornar-se pouco rigorosos quando o intervalo de tempo é pequeno, ou seja, para grades refinadas. Para abstrair este fator adotou-se o seguinte critério

$$\max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right| \leq 10^{-3} \quad (3.36)$$

3.10 Algoritmo

A seguir apresentamos um esquema do algoritmo utilizado para o desenvolvimento do trabalho.

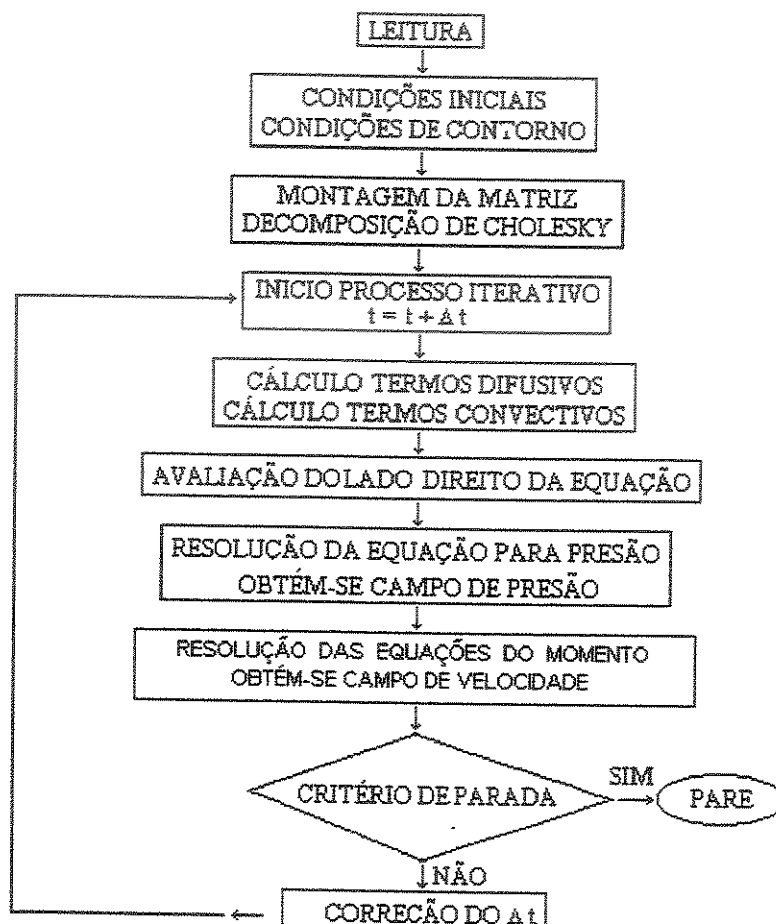


Fig. 3.4 Diagrama de blocos do algoritmo

Este algoritmo foi testado para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento, os resultados obtidos são apresentados no capítulo seguinte. O algoritmo foi utilizado também para obter soluções numéricas para o problema da contração plana com razões de contração finita e infinita, os resultados obtidos para estes dois casos são apresentados nos capítulos 5 e 6 respectivamente.

Capítulo 4

Problema Teste: Cavity Quadrada com Parede Superior em Movimento

4.1 Introdução

O Algoritmo é testado para o caso do escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada com parede superior em movimento constante. Este é um problema teste padrão, devido, por um lado à complexidade do escoamento gerado, que envolve regiões de recirculação, de camada limite e de canto vivo, e por outro lado, à simplicidade da geometria. Muitos pesquisadores têm usado o problema da cavidade para testar e comparar esquemas numéricos; a seguir são citados alguns deles.

Uma solução clássica do problema foi obtida por BURGGRAF (1966) utilizando a formulação vorticidade-função corrente e um método de relaxação modificado. São apresentados resultados para números de Reynolds de 0 a 400.

Após Burggraf, uma formulação vorticidade-função corrente foi usada por BOZEMAN e DALTON (1973) para comparar os esquemas central e linear a montante utilizando as equações governantes escritas na forma convectiva e divergente. Os resultados apresentados mostram que,

para números de Reynolds baixos o esquema central na forma divergente fornece resultados mais acurados. Para $Re = 1000$, só foi obtida convergência quando utilizado o esquema linear a montante, mas os autores afirmam que as soluções obtidas são fisicamente consistentes na forma divergente e na forma convectiva não.

GUPTA e MANOHAR (1980) obtiveram resultados para números de Reynolds até 1000 utilizando também a formulação vorticidade-função corrente. Apresentam uma comparação do desempenho dos esquemas central e linear a montante. Concluem que para números de Reynolds baixos ($Re \leq 100$), os resultados obtidos com ambos os esquemas são comparáveis. Quando o número de Reynolds aumenta, mantendo o espaçamento da malha fixo, os resultados começam a se deteriorar, mas é possível estender a faixa de Reynolds diminuindo o espaçamento da malha.

GUPTA (1981) estendeu o número de Reynolds estudado até 5000, utilizou a formulação vorticidade-função corrente para comparar o desempenho dos esquemas de discretização central e linear a montante nas formas convectiva e divergente. Conclui que a forma divergente produz resultados superiores a aqueles da forma convectiva para o caso do esquema central, especialmente para altos números de Reynolds. Quando o esquema linear a montante é usado, as soluções das duas formas são quase equivalentes em acuidade.

GHIA et al. (1982) obtiveram resultados mais refinados (malha 129×129) utilizando a formulação vorticidade-função corrente e o método multigrid. O trabalho apresenta resultados para números de Reynolds entre 100 e 10000 e com frequência o encontramos na literatura utilizado como referência para a validação de métodos numéricos. (SHYY et al., 1992), (THAKUR e SHYY, 1993), (TAFTI, 1996) dentre outros.

NISHIDA e SATOFUKA (1992) apresentaram um novo método de alta ordem. As derivadas espaciais das equações de Navier-Stokes são discretizadas por meio do método de quadratura diferencial modificada (MDQ), o sistema resultante de equações diferenciais ordinárias no tempo é integrado pelo esquema de Runge-Kutta-Gill de quarta ordem (RKG), a equação de Poisson é resolvida por meio de um novo método multi-grid de ordem variável. A principal vantagem deste método é que tem ordem arbitrária de acuidade no espaço mudando

somente um parâmetro. Obtiveram resultados numéricos com até décima ordem de acuidade espacial, para números de Reynolds até 3200, utilizando uma malha refinada de 129×129 . Os resultados mostram algumas diferenças com aqueles do Ghia et al. (1982), os valores da função corrente no centro do vórtice primário são maiores que aqueles obtidos por Ghia et al. para todos os números de Reynolds apresentados; para $Re = 3200$, a localização do centro do vórtice é diferente. Eles acreditam que estes resultados são mais confiáveis que os de Ghia et al. devido à alta ordem de acuidade utilizada.

SHYY et al. (1992) utilizaram a formulação variáveis primitivas para comparar o desempenho de três esquemas a montante de segunda ordem com o esquema central. Apresentam resultados para números de Reynolds até 3200. Concluem que o melhor desempenho dos esquemas a montante de segunda ordem é obtido quando é utilizado a formulação de volumes finitos e que o esquema a montante de segunda ordem é mais acurado que o esquema central, apesar de não ter encontrado oscilações com nenhum dos dois esquemas.

THAKUR e SHYY (1993) compararam os esquemas linear a montante, central, a montante de segunda ordem e QUICK utilizando o método dos volumes finitos na formulação variáveis primitivas. Concluem que os esquemas QUICK e a montante de segunda ordem tem melhor desempenho que os esquemas central e linear a montante, o que compensaria o maior tempo computacional necessário para obter a convergência.

TAFTI (1996) compara as formas convectiva e divergente utilizando aproximações de quinta ordem de aproximação. Ele conclui que a forma convectiva exibe a melhor acuidade para malhas muito refinadas, mas se deteriora rapidamente quando o refinamento diminui. Exceto no problema da cavidade não existe outra evidência que a forma divergente tenha qualquer vantagem sobre a forma convectiva.

GOYON (1996) utiliza a formulação vorticidade-função corrente empregando um método de multi-nível de diferenças finitas chamado "Incremental Unknowns", ele obtém soluções para números de Reynolds até 12500. São obtidas soluções para regime permanente e comparadas com os resultados de Ghia et al. (1982), para números de Reynolds menores que 10000 eles estão

muito próximos. O refinamento da malha de 129×129 pontos nodais é suficiente para números de Reynolds até 3200, para números de Reynolds mais altos utiliza uma malha de 257×257 .

4.2 Geometria e Condições de Contorno

Consideremos uma cavidade bidimensional de altura H_c e largura L_c , em cujo interior escoar um fluido com viscosidade cinemática ν . O fluido é mantido em movimento pela velocidade constante U_p da parede superior. A figura 4.1 mostra a cavidade em estudo e a notação utilizada.

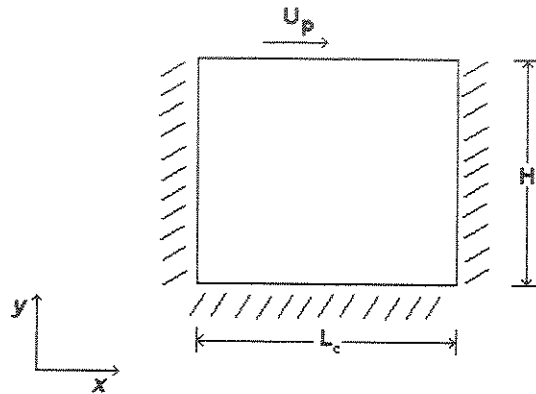


Fig. 4.1 Geometria e notação utilizada para o problema da cavidade quadrada

As condições de contorno para a cavidade mostrada na figura são:

- paredes laterais e inferior, condições de não deslizamento e parede impermeável: $u = 0$, $v = 0$
- parede superior, velocidade especificada e parede impermeável: $u = U_p$, $v = 0$

O número de Reynolds para a cavidade é definido como

$$Re = \frac{U_p L_c}{\nu}$$

Os erros percentuais entre as soluções calculadas usando o algoritmo e os valores de referência obtidos na literatura são calculados da seguinte maneira

$$Desvio\% = \left| \frac{u_{ref} - u_{cal}}{u_{ref}} \right| 100\%$$

onde, *Desvio%* é o desvio percentual, u_{ref} é o valor fornecido pela literatura (GHIA et al., 1982) e u_{cal} é a velocidade calculada pelo algoritmo correspondente à mesma posição da velocidade u_{ref} , interpolando quando necessário. O desvio percentual é calculado no ponto de máxima velocidade no fluxo reverso, que se mostrou o ponto onde os resultados passo a passo variam mais destacadamente.

4.3 Resultados e Discussão

Para a discretização do termo convectivo foram utilizados os esquemas exponencial, linear a montante, QUICK e central. Foram utilizadas malhas regulares e o número de pontos nodais foi 10×10 , 20×20 , 40×40 e 80×80 , empregando números de Reynolds variando entre 100 e 3200. É mostrado o efeito do refinamento da malha, da escolha do esquema de discretização para o termo convectivo assim como da escolha da forma da equação, apresentando gráficos que comparam os perfis de velocidade para as componentes u e v obtidos com o algoritmo com os dados apresentados por GHIA et al. (1982). Estas componentes de velocidade são tomadas nas linhas vertical e horizontal, respectivamente, no centro geométrico da cavidade. Também são apresentados graficamente os percentuais de erro com o refinamento da grade.

4.3.1 Efeito da Escolha do Esquema de Discretização para o Termo Convectivo

4.3.1.1 Forma Divergente - Volumes de Controle

As figuras 4.2 a 4.9 mostram os perfis de velocidade obtidos com os 4 esquemas de discretização utilizados com a forma divergente, para $Re = 100$, 400, 1000 e 3200. A malha utilizada é de 40×40 no caso de Reynolds 100 e de 80×80 para os outros números de Reynolds.

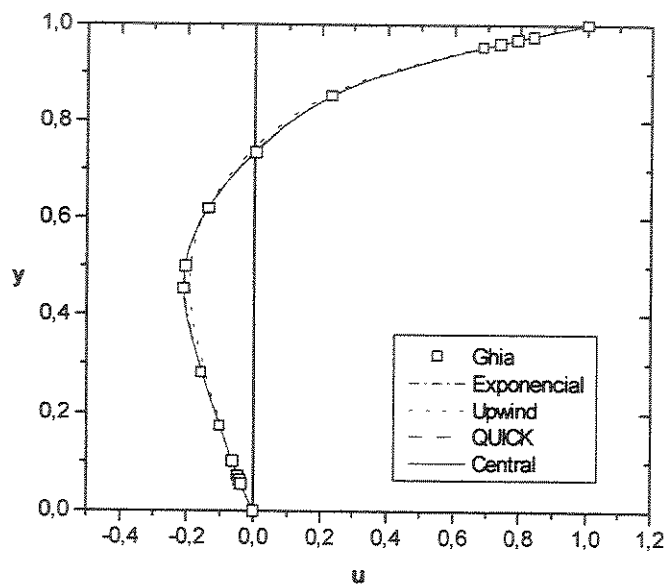


Fig. 4.2 Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 100$

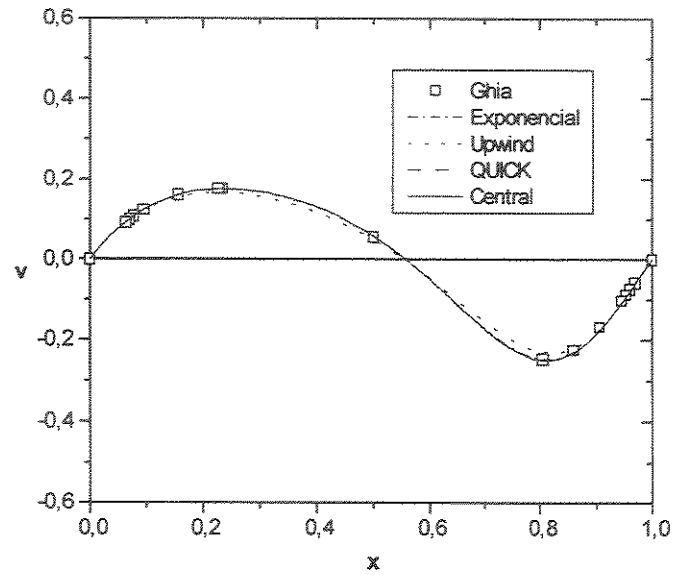


Fig. 4.3 Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 100$

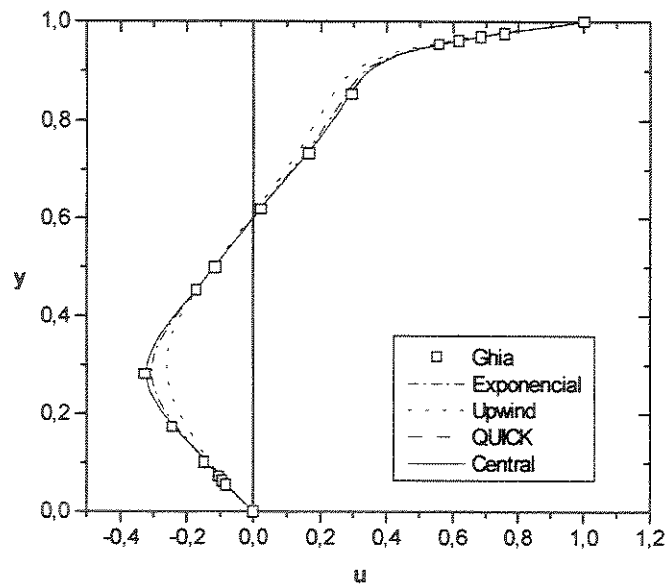


Fig. 4.4 Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 400$

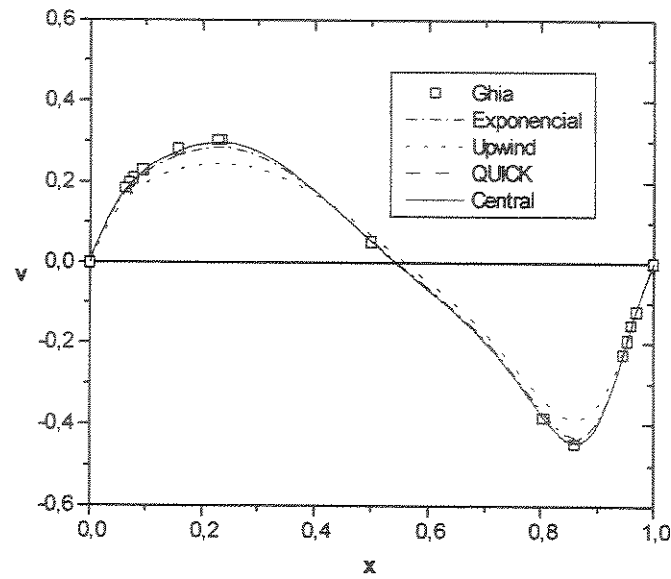


Fig. 4.5 *Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 400$*

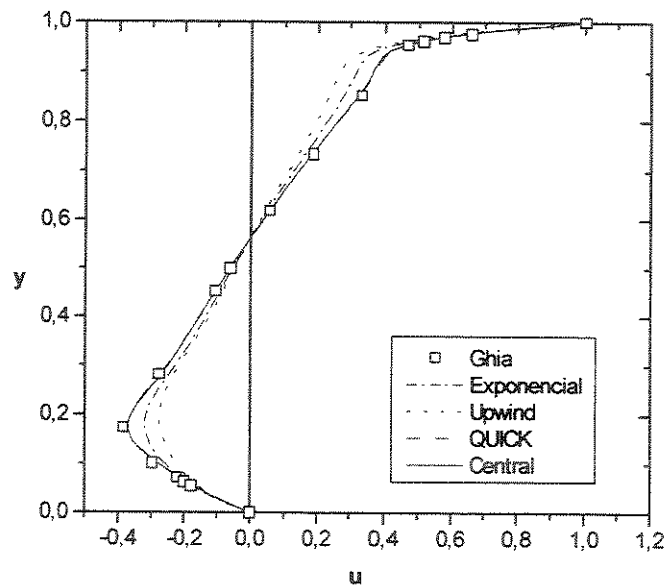


Fig. 4.6 *Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 1000$*

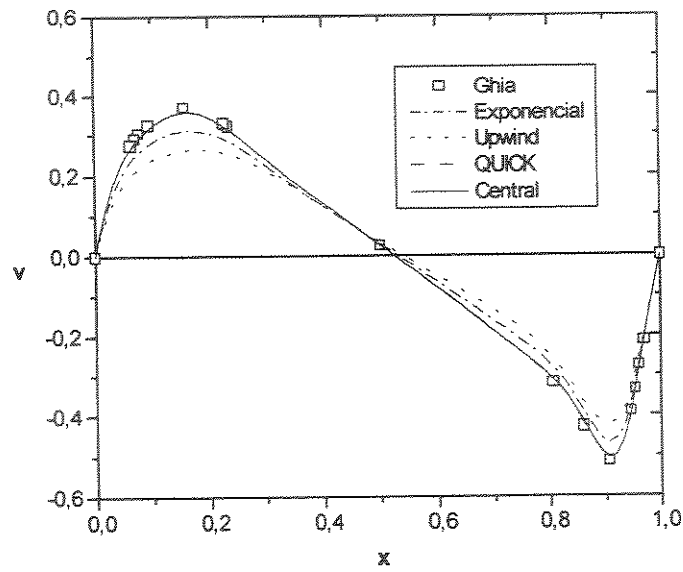


Fig. 4.7 Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 1000$

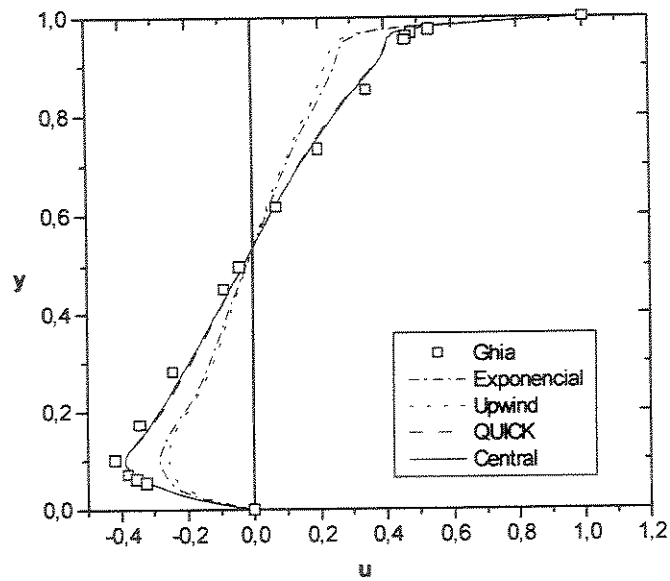


Fig. 4.8 Perfis de velocidade para a forma divergente e componente u . $Re = 3200$

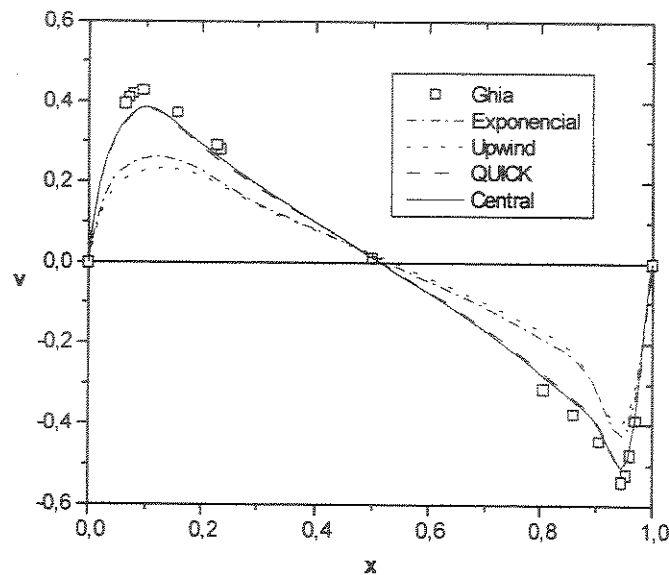


Fig. 4.9 *Perfis de velocidade para a forma divergente e componente v . $Re = 3200$*

Podemos observar que quando o número de Reynolds é baixo, neste caso $Re = 100$, uma malha de 40×40 pontos nodais é suficiente para obter resultados muito bons. Os esquemas exponencial, QUICK e central apresentam excelentes resultados, praticamente coincidentes com os valores de referência. O esquema linear a montante também apresenta resultados muito próximos aos valores de referência.

Quando o número de Reynolds aumenta, a partir de $Re = 400$, é necessário um refinamento maior para a obtenção de bons resultados, por isso é utilizada uma malha de 80×80 pontos nodais. Observamos que os perfis apresentados pelos esquemas exponencial e linear a montante se afastam daqueles apresentados pelos esquemas central e QUICK que apresentam excelente desempenho, fornecendo valores muito próximos aos de GHIA et al. (1982) para $Re = 400$ e $Re = 1000$.

Para $Re = 3200$, o afastamento dos esquemas exponencial e linear a montante é mais marcado ainda. Os esquemas central e QUICK apresentam perfis de velocidade muito próximos um do outro, mas seria necessário um refinamento maior para obter resultados mais acurados. Devemos ressaltar que o algoritmo com o qual foram obtidos os resultados utiliza uma malha regular de no máximo 80×80 pontos nodais, enquanto os resultados de GHIA et al. (1982) foram obtidos para uma malha 129×129 pontos nodais e um procedimento multigrid.

As figuras 4.10 a 4.17 apresentam uma comparação entre os desempenhos dos esquemas de discretização, mostrando o comportamento do erro com o refinamento da malha para todos os números de Reynolds estudados.

Novamente observamos que os esquemas central e QUICK produzem melhores resultados que os outros dois esquemas, para todos os números de Reynolds estudados. O esquema linear a montante é o que apresenta o menor decaimento do desvio percentual com o refinamento da malha. Para números de Reynolds altos (neste caso, $Re = 3200$) os decaimentos dos desvios percentuais com o refinamento da malha para os esquemas linear a montante e exponencial é muito próximo. Pode-se observar que para os esquemas central e QUICK os decaimentos dos desvios percentuais com o refinamento da malha são muito próximos para todos os números de Reynolds estudados. Pode-se observar também a convergência assintótica quadrática dos esquemas central e QUICK.

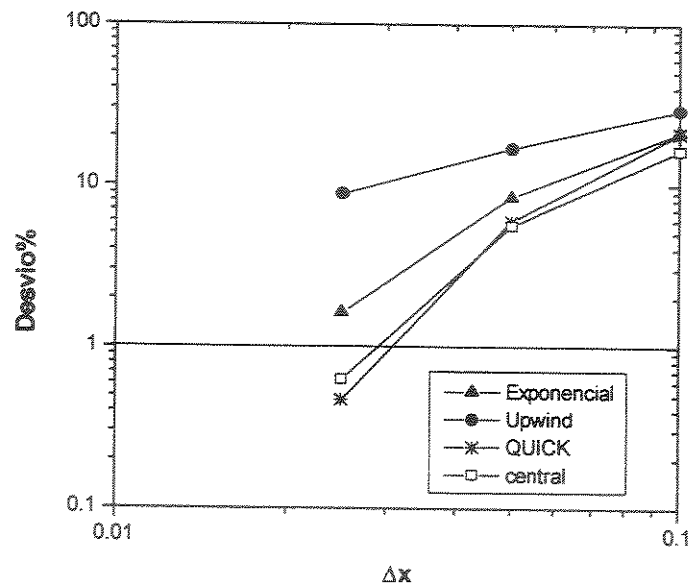


Fig. 4.10 Desvio percentual para a forma divergente e componente u. $Re = 100$

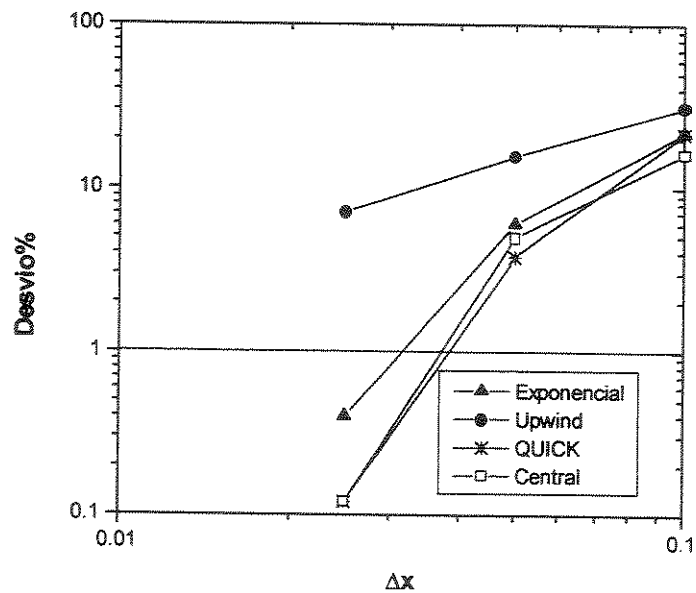


Fig. 4.11 Desvio percentual para a forma divergente e componente v. $Re = 100$

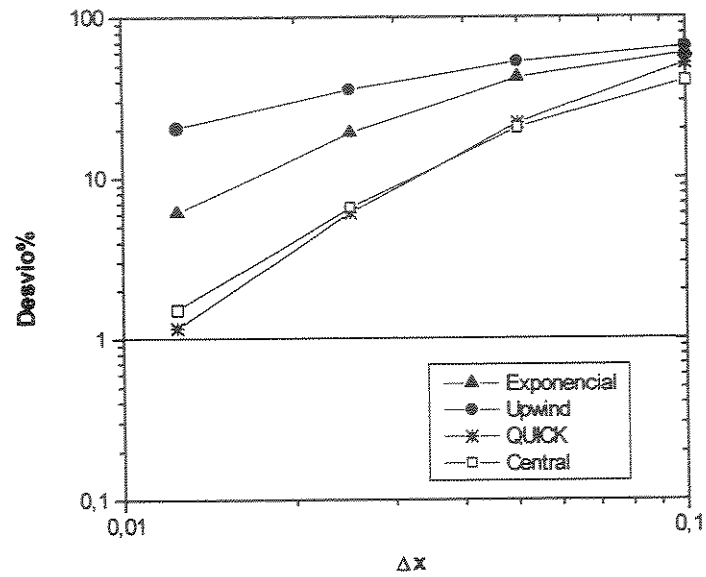


Fig. 4.12 Desvio percentual para a forma divergente e componente u. $Re = 400$

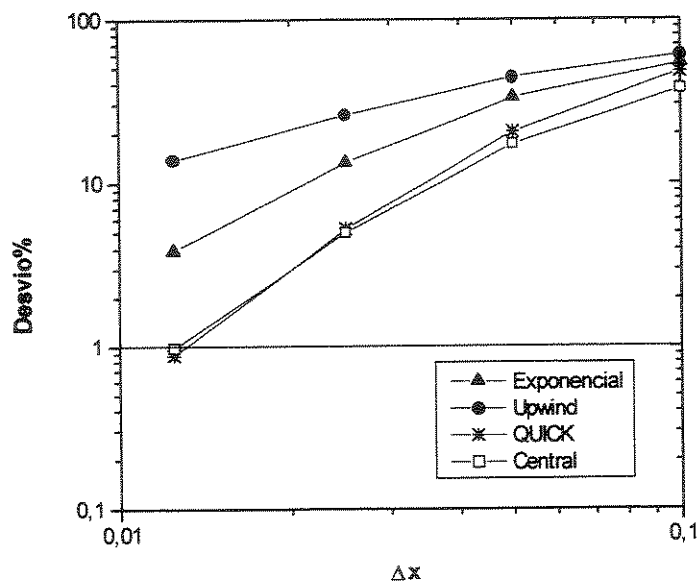


Fig. 4.13 Desvio percentual para a forma divergente e componente v. $Re = 400$

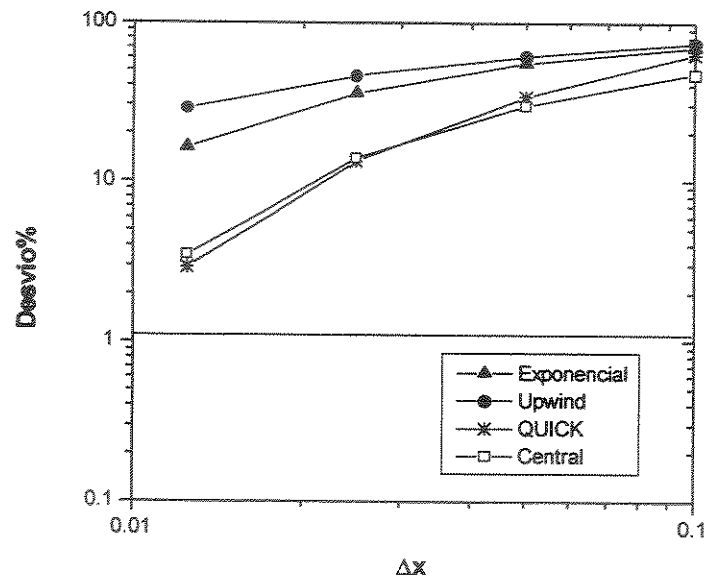


Fig. 4.14 Desvio percentual para a forma divergente e componente u . $Re = 1000$

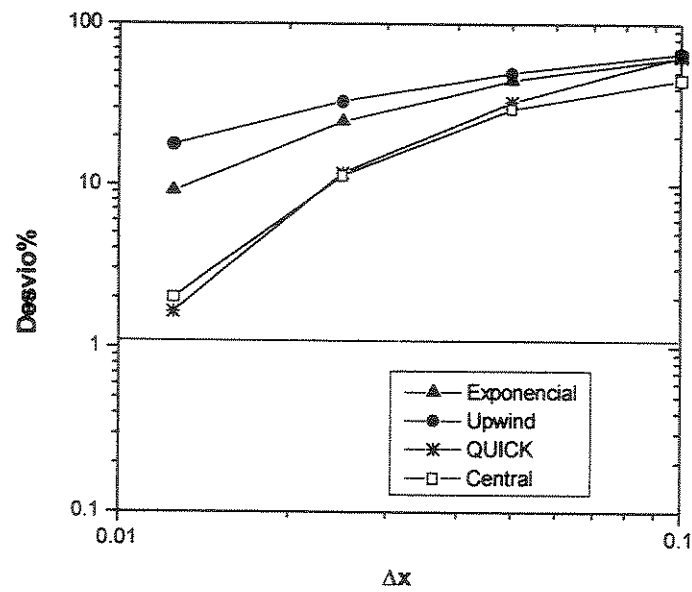


Fig. 4.15 Desvio percentual para a forma divergente e componente v . $Re = 1000$

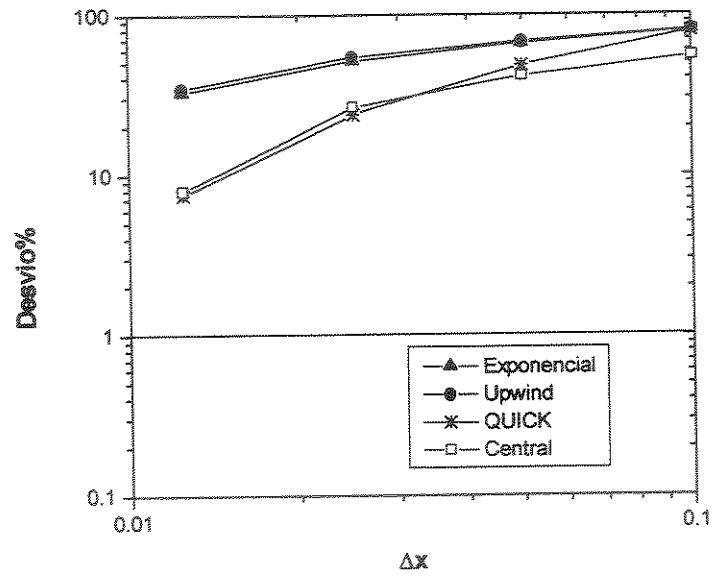


Fig. 4.16 Desvio percentual para a forma divergente e componente u. $Re = 3200$

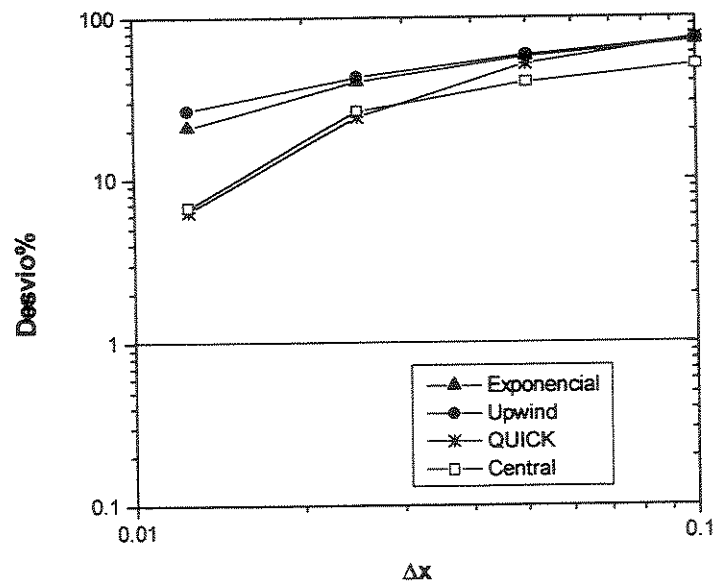


Fig. 4.17 Desvio percentual para a forma divergente e componente v. $Re = 3200$

4.3.1.2 Forma Convectiva - Diferenças Finitas

As figuras 4.18 a 4.25 mostram os perfis das componentes de velocidade u e v , para toda a faixa de números de Reynolds estudada, obtidos utilizando a forma convectiva e o esquema central com aproximações de primeira e de segunda ordem na fronteira (nos gráficos denotados como convec1 e convec2, respectivamente). A malha utilizada novamente é de 40×40 pontos nodais para $Re = 100$ e de 80×80 pontos nodais para os outros números de Reynolds.

Podemos observar que para número de Reynolds baixo, neste caso para $Re = 100$, tanto o esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira como aquele com aproximação de segunda ordem apresentam bons resultados, muito próximos dos dados de referência.

Quando o número de Reynolds aumenta, vemos que os perfis de velocidade obtidos utilizando o esquema central com as duas aproximações começam a se afastar um do outro, apesar de manterem formatos muito parecidos.

Para $Re = 400$, pode-se observar uma pequena diferença entre os perfis de velocidade obtidos com as duas aproximações, mas ambas as aproximações ainda estão muito próximas dos resultados de Ghia et al. (1982)

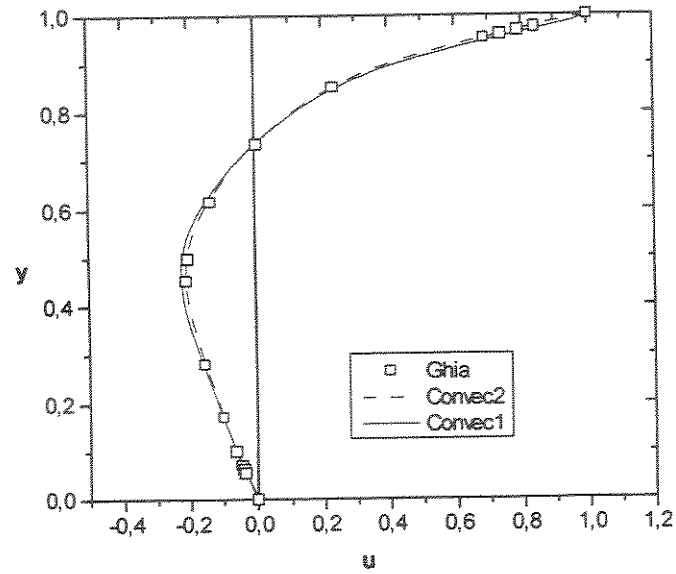


Fig. 4.18 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 100$.*

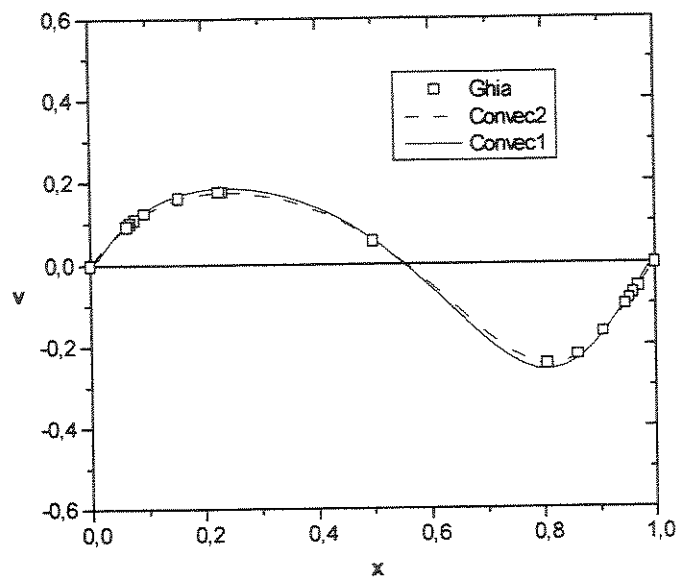


Fig. 4.19 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 100$.*

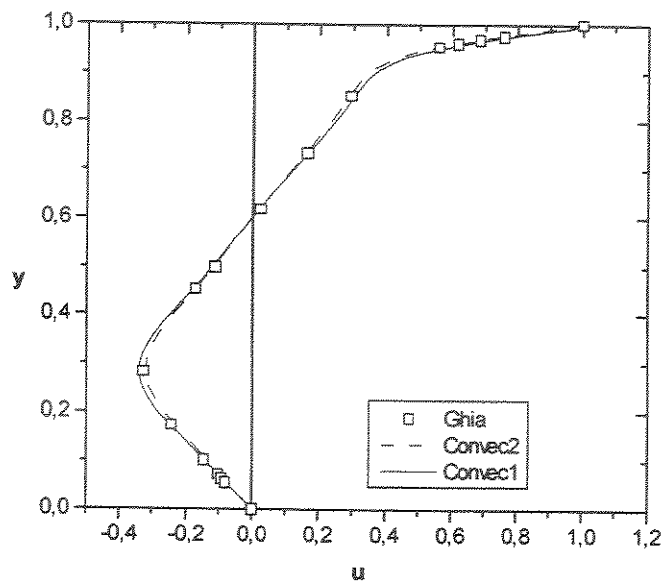


Fig. 4.20 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 400$.*

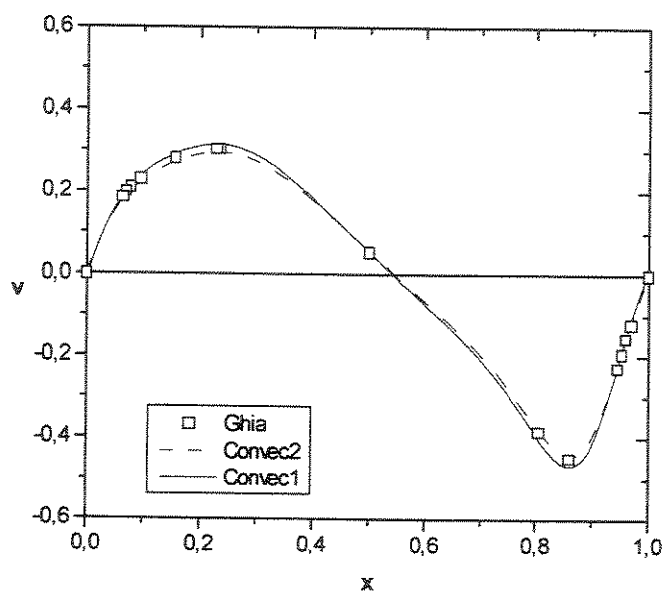


Fig. 4.21 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 400$.*

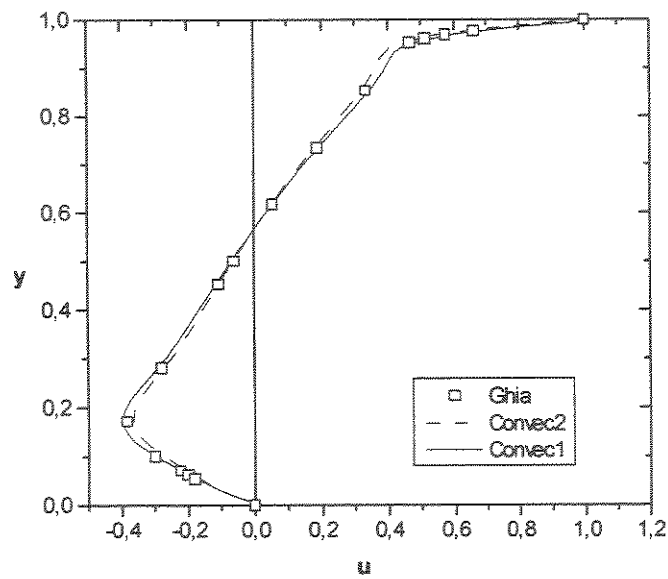


Fig. 4.22 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 1000$.*

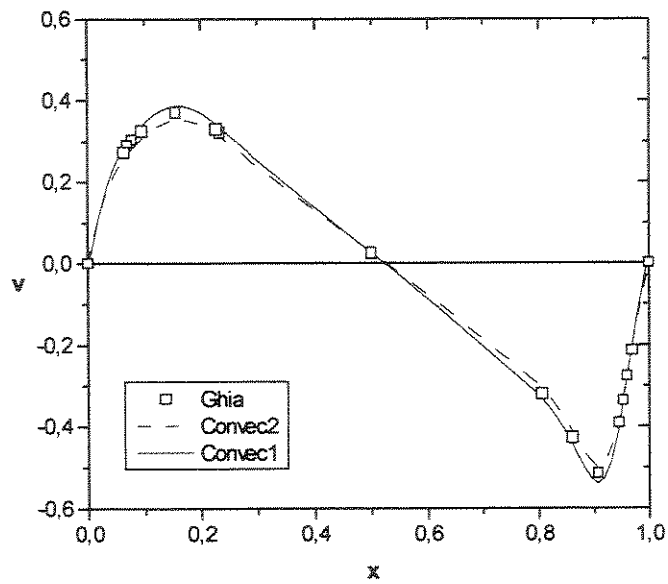


Fig. 4.23 *Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 1000$.*

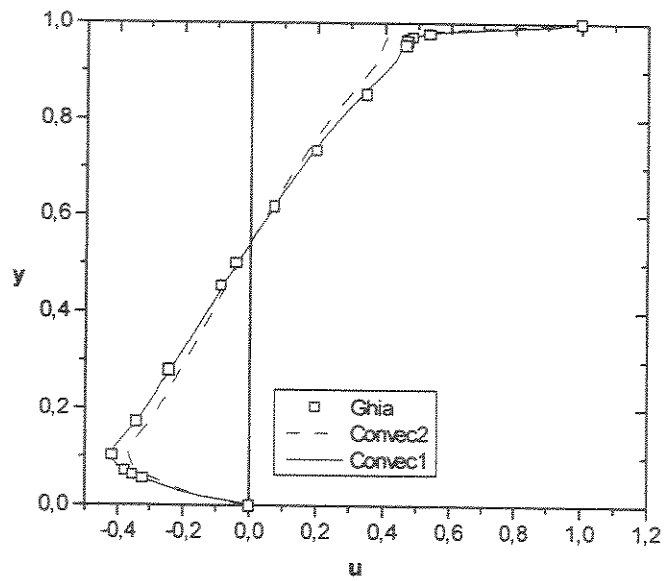


Fig. 4.24 Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente u . $Re = 3200$.

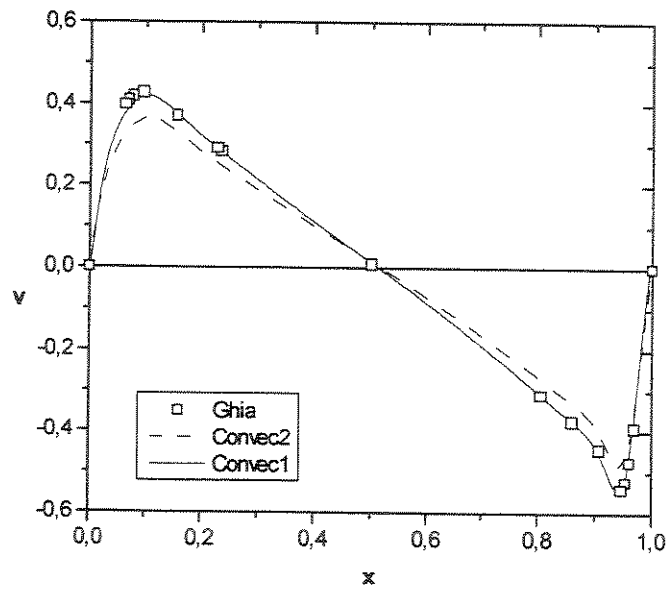


Fig. 4.25 Perfis de velocidade para a forma convectiva e componente v . $Re = 3200$.

Para números de Reynolds 1000 e 3200, observamos que os resultados obtidos com o esquema central utilizando aproximação de primeira ordem na fronteira estão mais próximos aos dados de referência que aqueles obtidos utilizando aproximação de segunda ordem. Isto poderia levar à conclusão de que é preferível utilizar uma aproximação de primeira ordem na fronteira, mas uma análise mais cuidadosa indica que esta conclusão é falsa.

Para obter um resultado mais completo, é feita uma comparação do desempenho das duas aproximações estudando o comportamento dos erros percentuais com o refinamento da malha para toda a faixa de número de Reynolds estudada.

As figuras 4.26 a 4.29 mostram os desvios percentuais para as componentes da velocidade u e v obtidos utilizando a forma convectiva e o esquema de discretização central com aproximações de primeira e de segunda ordem na fronteira.

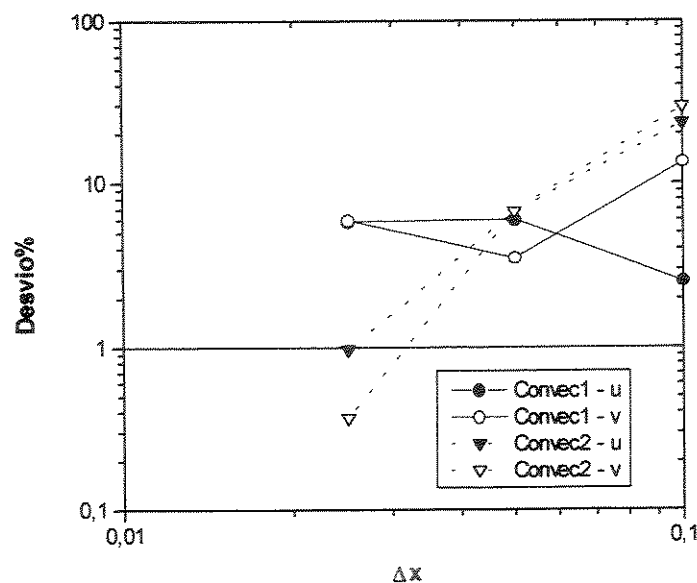


Fig. 4.26 Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 100$.

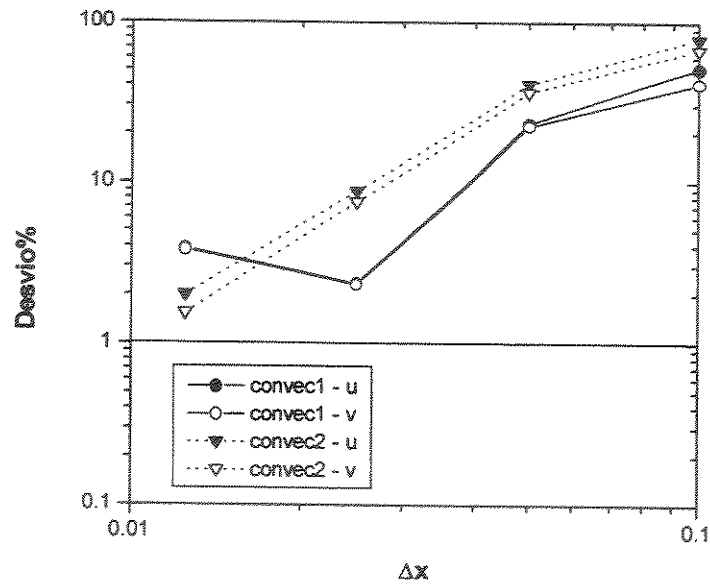


Fig. 4.27 Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 400$.

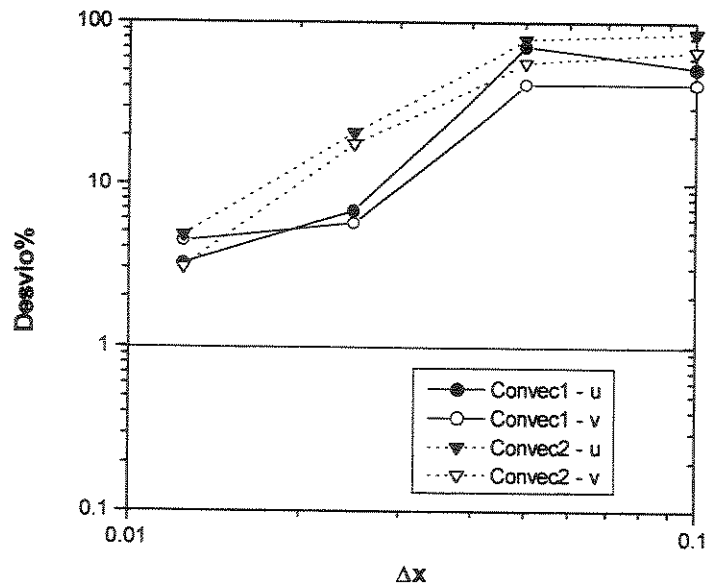


Fig. 4.28 Desvio percentual para as componentes da velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 1000$.

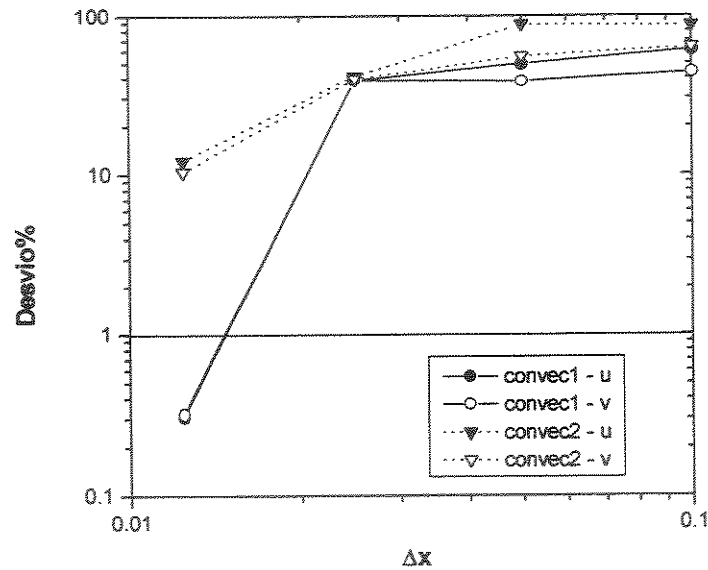


Fig. 4.29 Desvio percentual para as componentes de velocidade u e v , na forma convectiva. $Re = 3200$.

Podemos observar nas figuras acima que quando utilizamos a forma convectiva e o esquema central com aproximação de segunda ordem na fronteira obtemos uma convergência espacial monotônica, isto não ocorre quando é utilizado o esquema central com aproximação de primeira ordem. Para toda a faixa de Reynolds estudada o esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira apresenta convergência não monotônica. Isto já tinha sido observado e reportado (URIBE et al., 1994).

4.3.2 Efeito da Escolha da Forma da Equação

Nas figuras 4.30 a 4.37 são comparados os perfis de velocidade para as componentes u e v , obtidos utilizando as formas convectiva e divergente. O esquema de discretização utilizado para a comparação é, em ambos os casos, o esquema central. No caso da forma convectiva é utilizado o esquema central com aproximação de segunda ordem na fronteira, cujos resultados se mostraram acurados e mais confiáveis que aqueles obtidos com o esquema central e aproximação de segunda ordem na fronteira. As malhas utilizadas são 40×40 para $Re = 100$ e 80×80 para os outros números de Reynolds.

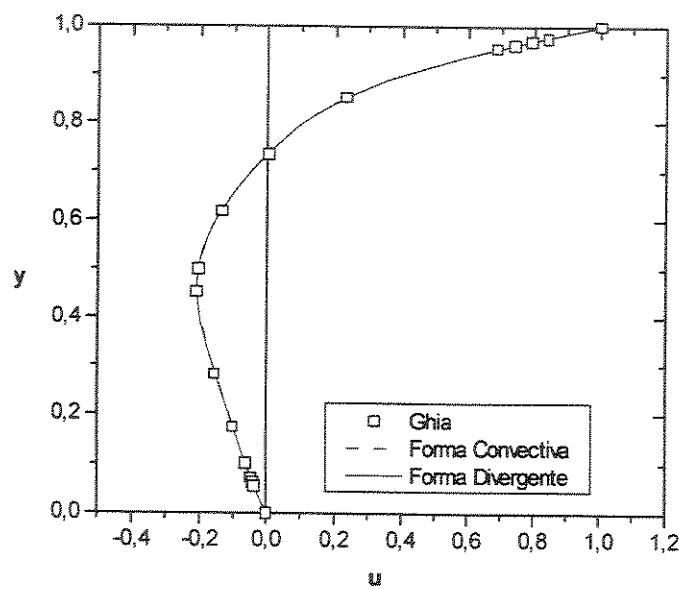


Fig. 4.30 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 100$.*

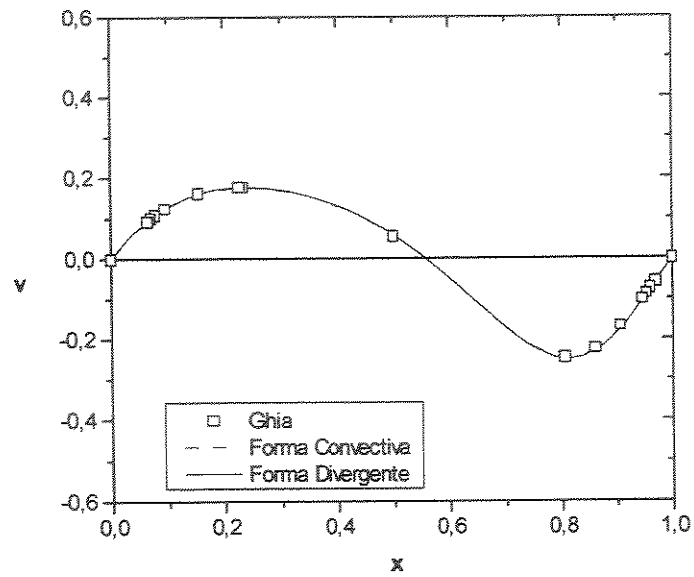


Fig. 4.31 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 100$.*

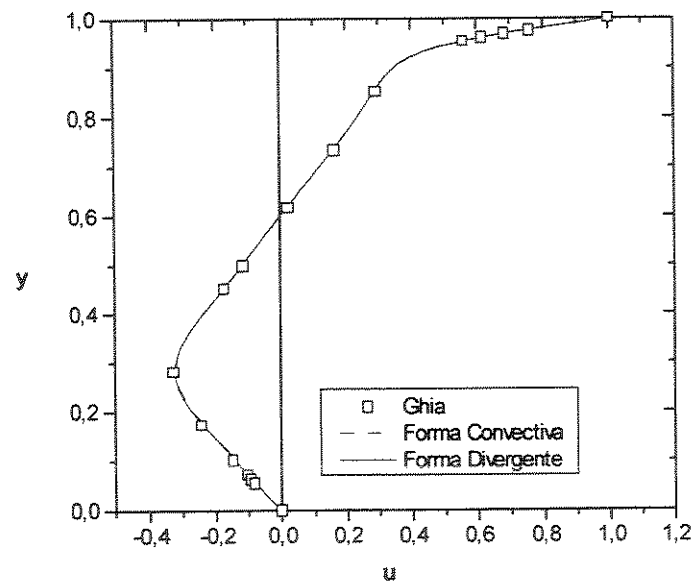


Fig. 4.32 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 400$.*

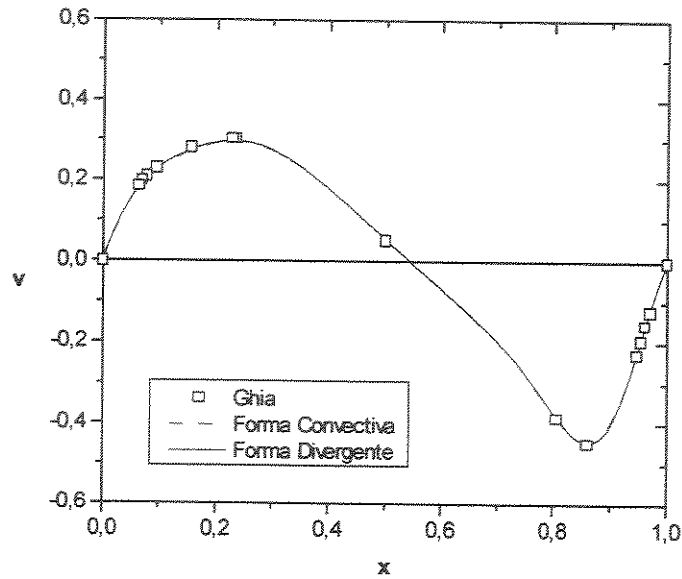


Fig. 4.33 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 400$.*

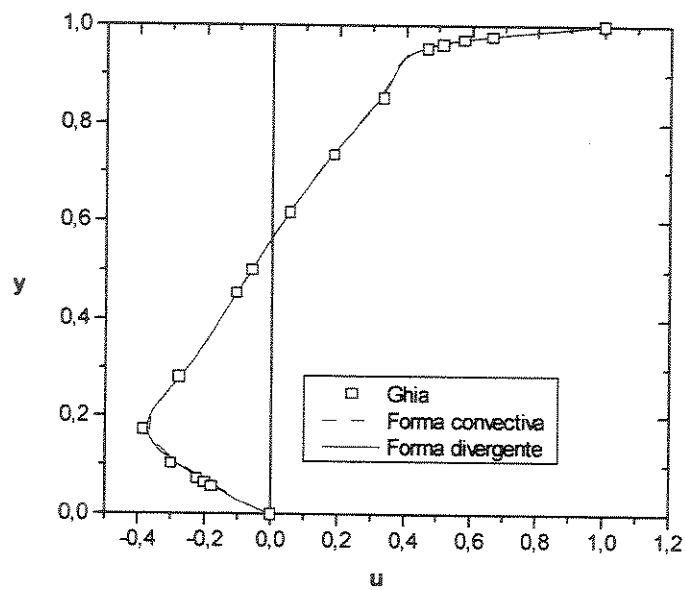


Fig. 4.34 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 1000$.*

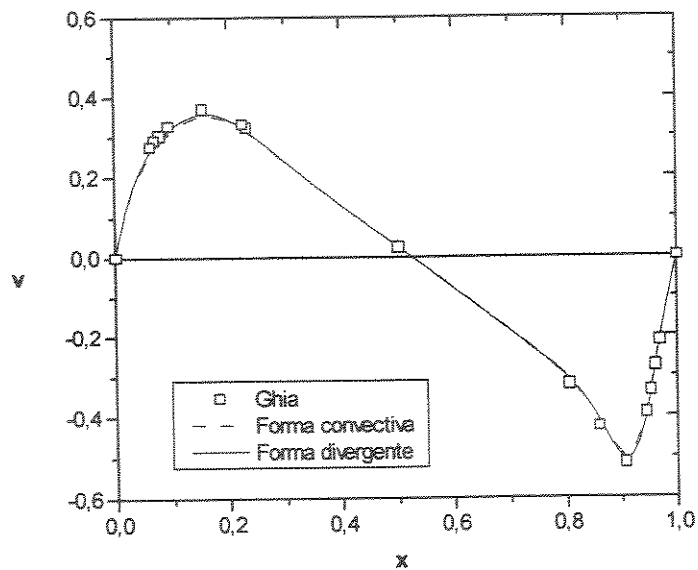


Fig. 4.35 Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v . $Re = 1000$.

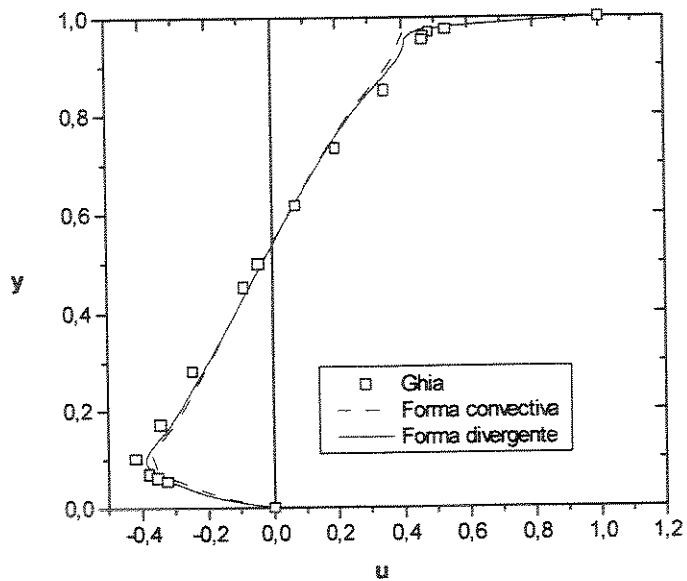


Fig. 4.36 Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente u . $Re = 3200$.

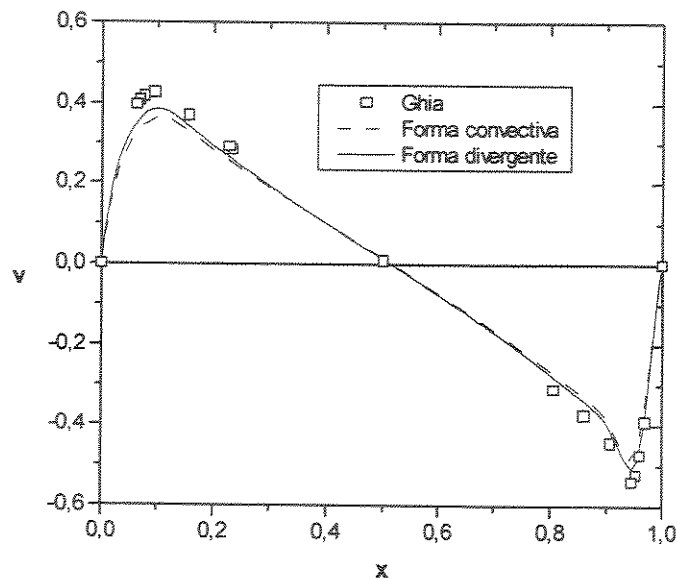


Fig. 4.37 *Perfis de velocidade para as formas convectiva e divergente, componente v. Re = 3200.*

Os resultados obtidos mostraram que, para números de Reynolds baixos ou moderados ($Re \leq 400$), os perfis de velocidade para ambas as formas da equação praticamente coincidem um com outro e concordam muito bem com os dados utilizados como referência. Para $Re = 1000$, os perfis obtidos com ambas as formas da equação ainda são muito próximos um do outro e dos dados de referência. Para $Re = 3200$, a diferença entre os perfis obtidos com as duas formas é mais marcada, podemos observar que existe uma pequena vantagem da forma divergente. De qualquer maneira, para altos números de Reynolds, as duas formas utilizadas precisariam de um refinamento maior da malha para fornecer resultados mais acurados.

As figuras 4.38 a 4.41 mostram os desvios percentuais para as componentes de velocidade u e v obtidos com o esquema de discretização central, para as formas convectiva e divergente.

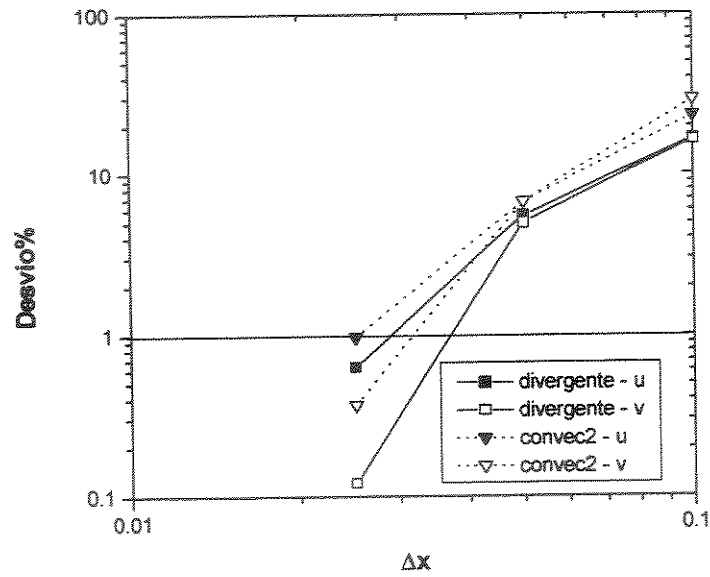


Fig. 4.38 Desvio percentual para as componentes da velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 100$.

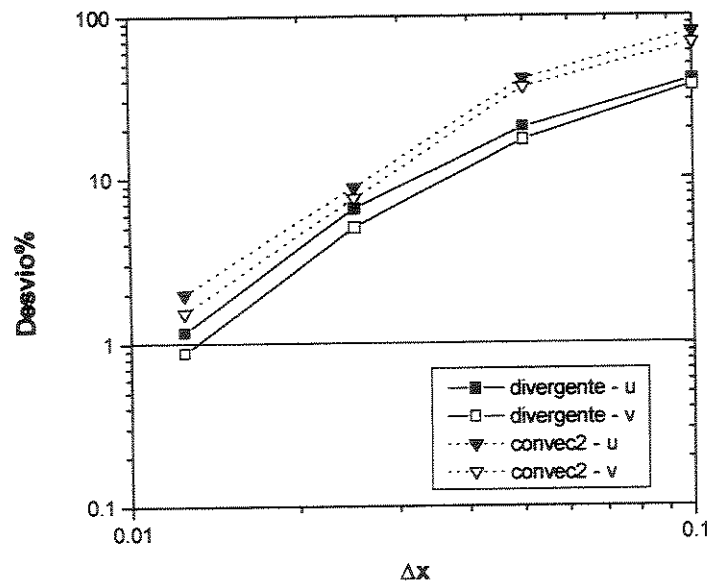


Fig. 4.39 Desvio percentual para as componentes da velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 400$.

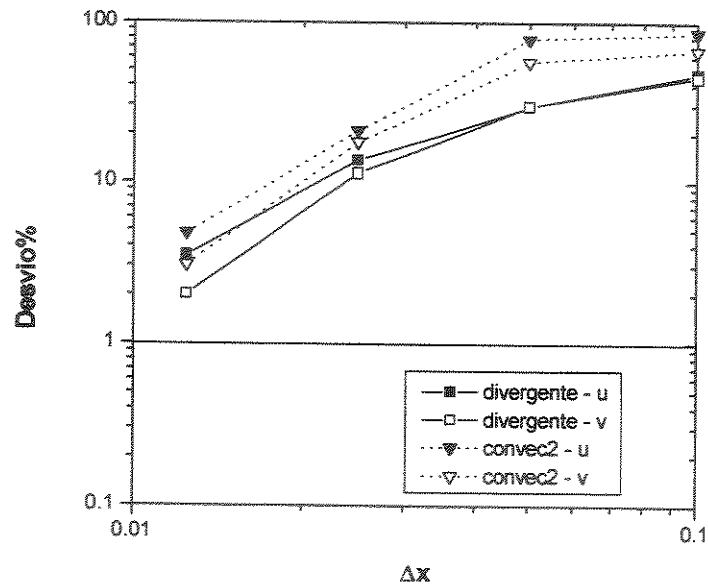


Fig. 4.40 Desvio percentual para as componentes da velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 1000$.

Observa-se que, ambas as formas mostram convergência espacial monotônica, com uma superioridade visível para a forma divergente.

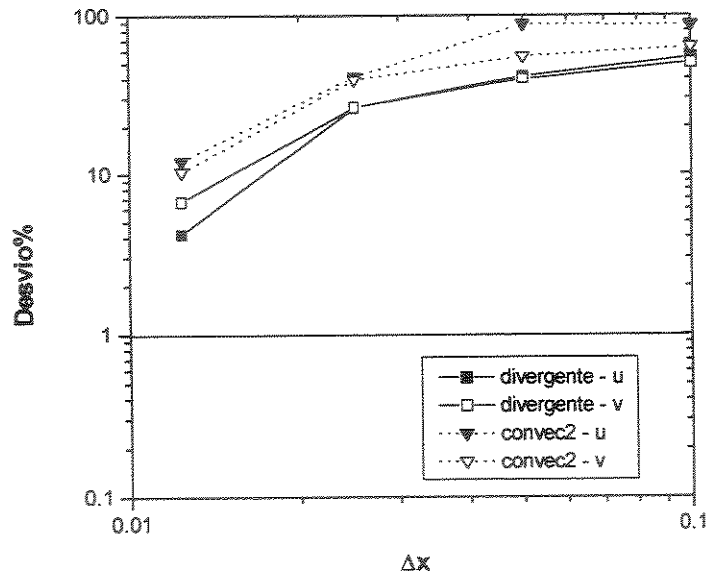


Fig. 4.41 Desvio percentual para as componentes da velocidade u e v , para as formas convectiva e divergente. $Re = 3200$.

4.4 Tempos Médios de CPU

Nesta seção são apresentadas tabelas que mostram os tempos médios de CPU para cada um dos esquemas, malhas e números de Reynolds utilizados, assim como o número de iterações requeridas em cada caso para alcançar o critério de convergência estabelecido. É apresentado também o número de oscilações ao longo do processo temporal, obtido com cada um dos esquemas, assim como a porcentagem que ele representa em relação ao número total de iterações. Para ilustrar o que representam estas oscilações são apresentados 3 gráficos do resíduo versus número de iterações (figuras 4.42 a 4.44). Para mostrar o efeito das oscilações ao longo do processo temporal, foi escolhido o caso para $Re = 1000$, malha 10×10 e esquemas central, QUICK e linear a montante que apresentaram diferente número de oscilações.

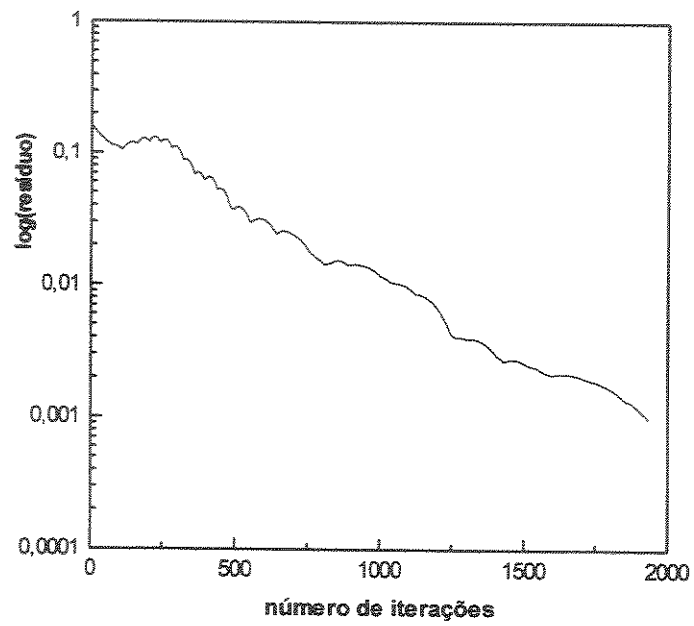


Fig. 4.42 *Resíduo versus número de iterações. Esquema central.*

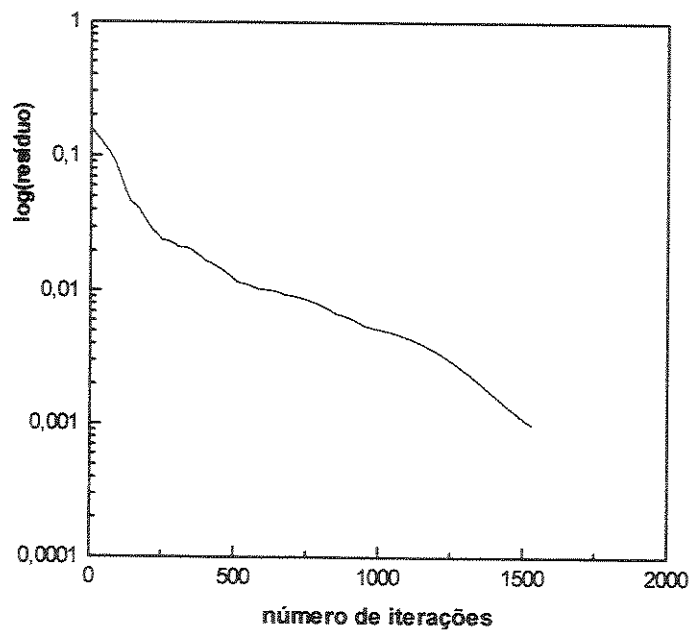


Fig. 4.43 *Resíduo versus número de iterações. Esquema QUICK.*

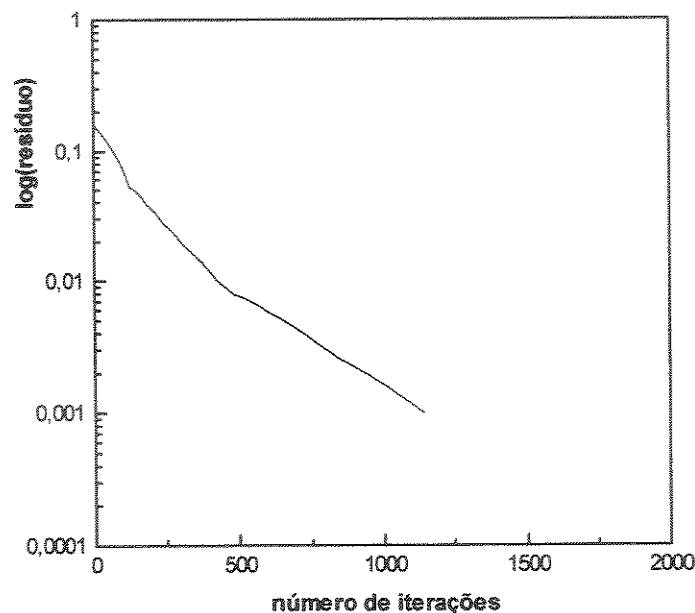


Fig. 4.44 *Resíduo versus número de iterações. Esquema linear a montante.*

Como será mostrado na tabela 4.3, para uma malha 10×10 , o esquema central apresentou um alto número de oscilações, o esquema QUICK apresentou um número baixo de oscilações enquanto o esquema linear a montante não apresentou nenhuma oscilação. Nas figuras apresentadas podemos observar que somente no caso do esquema linear a montante o resíduo diminui de uma maneira uniforme; nos outros dois casos o resíduo diminui desordenadamente aumentando em alguns momentos para tornar a diminuir depois, sendo mais acentuado este comportamento para o caso do esquema central.

4.4.1 Forma Divergente - Volumes de Controle

Dos quatro esquemas estudados para a forma divergente o que exige o menor esforço computacional é o esquema linear a montante, ele é o que utiliza o menor número de iterações assim como o menor tempo de CPU. No caso dos outros três esquemas devemos considerar separadamente o número de iterações e os tempos de CPU necessários para alcançar o critério de convergência estabelecido. O esquema exponencial é o que requer menor número de iterações,

seguido do central e o QUICK, muito próximos. Se analisarmos o tempo de CPU utilizado, vemos que o central é o que requer menor tempo de CPU, seguido do QUICK e finalmente o exponencial que em todos os casos requer um tempo de CPU muito maior que os outros esquemas. Em todo caso, devemos destacar que o número de iterações necessárias para alcançar a convergência não varia muito entre os esquemas.

Re = 100				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Exponencial	423	0 - 0%	1.32
	A montante	357	0 - 0%	0.69
	QUICK	449	0 - 0%	1.08
	Central	459	0 - 0%	0.76
20x20	Exponencial	894	0 - 0%	10.44
	A montante	781	0 - 0%	5.70
	QUICK	924	0 - 0%	9.14
	Central	924	0 - 0%	5.61
40x40	Exponencial	1841	0 - 0%	100.13
	A montante	1682	0 - 0%	56.34
	QUICK	1859	0 - 0%	84.40
	Central	1859	0 - 0%	52.09
80x80	Exponencial	3713	0 - 0%	1274.11
	A montante	3527	0 - 0%	899.30
	QUICK	3723	0 - 0%	1139.00
	Central	3723	0 - 0%	879.51

Tabela 4.1 *Tempos médios de CPU. Forma divergente - Re = 100*

Para $Re = 100$ (Tabela 4.1), todos os esquemas se mostram estáveis, nenhum deles apresenta oscilações ao longo do processo temporal. Para $Re = 400$ (Tabela 4.2), o esquema central apresenta algumas oscilações que desaparecem com o refinamento da malha.

Re = 400				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Exponencial	885	0 - 0%	2.81
	A montante	783	0 - 0%	1.49
	QUICK	1108	0 - 0%	2.67
	Central	1075	32 - 2.98%	1.70
20x20	Exponencial	1987	0 - 0%	24.09
	A montante	1759	0 - 0%	12.83
	QUICK	2291	0 - 0%	22.49
	Central	2268	5 - 0.22%	13.55
40x40	Exponencial	4323	0 - 0%	243.70
	A montante	3935	0 - 0%	132.01
	QUICK	4695	0 - 0%	213.29
	Central	4654	0 - 0%	131.44
80x80	Exponencial	9031	0 - 0%	3010.99
	A montante	8319	0 - 0%	2120.02
	QUICK	9323	0 - 0%	2994.61
	Central	9279	0 - 0%	2217.43

Tabela 4.2 Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 400$

Quando o número de Reynolds aumenta, também aumenta a tendência a oscilações dos esquemas. Para $Re = 1000$ (Tabela 4.3), o único esquema que não apresenta oscilações é o esquema linear a montante, o esquema exponencial apresenta algumas oscilações (menos que

1%). Os esquemas que apresentam maior número de oscilações são o central e o QUICK, a medida que aumenta o refinamento da malha estas oscilações tendem a diminuir em relação ao número total de iterações. Para $Re = 3200$ (Tabela 4.4) todos os esquemas apresentam oscilações, o esquema linear a montante é o que apresenta menor número de oscilações (menos de 3%), seguido do esquema exponencial (menos de 10%). Os esquemas QUICK e central são os que apresentam maior número de oscilações (mais de 20%) e o refinamento de 80×80 é insuficiente para diminuir estas oscilações.

Re = 1000				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Exponencial	1240	1 - 0.08%	3.90
	A montante	1140	0 - 0%	2.14
	QUICK	1528	12 - 0.79%	4.77
	Central	1931	385 - 19.94%	3.06
20x20	Exponencial	2419	0 - 0%	29.95
	A montante	2339	0 - 0%	16.78
	QUICK	3512	101 - 2.88%	34.15
	Central	3510	480 - 13.68%	20.54
40x40	Exponencial	5380	9 - 0.17%	368.11
	A montante	5114	2 - 0.04%	164.41
	QUICK	6477	148 - 2.29%	286.93
	Central	6378	178 - 2.79%	175.02
80x80	Exponencial	11502	65 - 0.57%	5659.38
	A montante	10706	0 - 0%	4634.85
	QUICK	12807	163 - 1.27%	7130.55
	Central	12689	157 - 1.24%	5137.05

Tabela 4.3 Tempos médios de CPU. Forma divergente - $Re = 1000$

Re = 3200				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Exponencial	1965	42 - 2.14%	6.08
	A montante	1862	48 - 2.58%	3.46
	QUICK	2718	423 - 15.56%	6.52
	Central	4175	1655 - 39.64%	6.50
20x20	Exponencial	3437	103 - 2.96%	44.39
	A montante	3346	12 - 0.36%	24.15
	QUICK	8089	2432 - 30.07%	80.40
	Central	9549	3274 - 34.29%	57.91
40x40	Exponencial	8221	864 - 10.51%	459.87
	A montante	7182	162 - 2.26%	232.04
	QUICK	15939	4453 - 27.94%	697.52
	Central	13434	3466 - 25.80%	358.72
80x80	Exponencial	17256	1270 - 7.36%	8542.28
	A montante	14889	333 - 2.24%	6437.57
	QUICK	29681	9187 - 30.95%	16493.65
	Central	42247	16803 - 39.77%	17093.82

Tabela 4.4 *Tempos médios de CPU. Forma divergente - Re = 3200*

4.4.2 Forma Convectiva - Diferenças Finitas

Podemos observar que o desempenho do esquema central com as duas aproximações não é muito diferente. De qualquer maneira, o esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira utiliza um número de iterações um pouco menor que aquele utilizado pelo esquema central quando utilizada aproximação de segunda ordem na fronteira. Em termos de CPU também vemos que o esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira é sempre mais rápido que aquele com aproximação de segunda ordem, exceto no caso em que o número de

oscilações faz aumentar muito o tempo de CPU.

Re = 100				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Central 1	406	0 - 0%	0.63
	Central 2	459	0 - 0%	0.65
20x20	Central 1	889	0 - 0%	5.23
	Central 2	912	0 - 0%	5.32
40x40	Central 1	1829	0 - 0%	50.60
	Central 2	1853	0 - 0%	51.08
80x80	Central 1	3695	0 - 0%	857.17
	Central 2	3720	0 - 0%	866.40

Tabela 4.5 *Tempos médios de CPU. Forma Convectiva - Re = 100*

Para $Re = 100$, tanto o esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira como o esquema central com aproximação de segunda ordem na fronteira se apresentam estáveis, em nenhum dos dois casos encontramos oscilações. Para $Re = 400$ (Tabela 4.6), O esquema central com aproximação de primeira ordem na fronteira apresenta algumas oscilações para $Re = 400$ que diminuem, em relação ao número total de iterações, com o refinamento da malha e que desaparecem para a malha mais refinada de 80×80 .

Re = 400				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Central 1	1013	8 - 0.79%	1.56
	Central 2	1133	0 - 0%	1.74
20x20	Central 1	2553	8 - 0.31%	14.93
	Central 2	2754	0 - 0%	15.73
40x40	Central 1	4538	3 - 0.07%	125.11
	Central 2	4787	0 - 0%	130.56
80x80	Central 1	9078	0 - 0%	2148.38
	Central 2	9340	0 - 0%	2214.82

Tabela 4.6 *Tempos médios de CPU. Forma Convectiva - Re = 400*

Re = 1000				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Central 1	1578	265 - 16.79%	2.44
	Central 2	2017	237 - 11.75%	3.32
20x20	Central 1	3790	133 - 3.51%	21.65
	Central 2	6073	76 - 1.25%	33.99
40x40	Central 1	6732	143 - 2.12%	173.27
	Central 2	7370	133 - 1.80%	206.64
80x80	Central 1	12292	172 - 1.40%	2862.55
	Central 2	12893	155 - 1.20%	3029.23

Tabela 4.7 *Tempos médios de CPU. Forma Convectiva - Re = 1000*

Re = 3200				
Malha	Esquema	N°. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
10x10	Central 1	4045	1563 - 038.64%	6.09
	Central 2	3541	1403 - 39.62%	5.81
20x20	Central 1	8640	3320 - 38.43%	49.44
	Central 2	9360	1957 - 20.91%	55.23
40x40	Central 1	16500	5740 - 34.79%	438.08
	Central 2	15492	5467 - 35.29%	446.42
80x80	Central 1	45947	18544 - 40.36%	10752.40
	Central 2	37817	12.527 - 33.13%	9060.97

Tabela 4.8 *Tempos médios de CPU. Forma Convectiva - Re = 3200*

Para $Re = 1000$ (Tabela 4.7), os dois esquemas apresentam oscilações ao longo do processo temporal que diminuem com o refinamento da malha chegando a ser menos de 2% para uma malha de 80x80. Para $Re = 3200$ (Tabela 4.8), os dois esquemas apresentam alto número de oscilações (mais de 20%) e o refinamento da malha de 80x80 não é suficiente para diminuir essa instabilidade.

Comparando o desempenho das formas divergente e convectiva com aproximação de segunda ordem na fronteira, em termos de CPU e número de iterações necessárias para obter a convergência, vemos que: para $Re = 100$, o desempenho de ambas as formas é praticamente equivalente tanto em número de iterações como em tempos de CPU, ambas as formas apresentam-se estáveis sem oscilações ao longo do processo temporal. Quando o número de Reynolds aumenta, começa a aparecer uma pequena diferença no desempenho de ambas as formas. A forma convectiva na maioria dos casos requer um número maior de iterações e também um tempo maior de CPU para obter a convergência. No caso de $Re = 3200$ precisa praticamente o dobro de tempo de CPU que a forma divergente.

4.5 Conclusões

Em vista dos resultados apresentados neste capítulo pode-se concluir que, para o exemplo estudado, a forma divergente é preferível à forma convectiva. A forma divergente se mostra acurada nos gráficos de perfis de velocidade concordando muito bem com os dados de referência. Nos gráficos de desvios percentuais com a forma divergente é obtida uma convergência espacial monotônica. Além de tudo, ela precisa de menor esforço computacional que a forma convectiva quando aumenta o número de Reynolds.

Por estas razões a forma divergente será utilizada nos capítulos seguintes para estudar a região de entrada em canais planos.

Capítulo 5

Contração Plana com Razão Finita

5.1 Introdução

Escoamento de fluidos através de condutos fechados são encontrados em quase todos os problemas de transporte de fluidos. A região de entrada do conduto é de grande interesse porque conhecer o comportamento do fluido nesta região permite estudar mais facilmente o que acontece com o fluido no interior do conduto.

Na entrada de um conduto encontramos com frequência mudanças na geometria que podem ser, por exemplo, expansões ou contrações.

O presente trabalho se restringe a estudar o escoamento na região de entrada de canais planos que apresentam contrações simétricas, neste capítulo será estudado o caso particular em que a razão de contração é 2:1.

Estudos têm sido feitos usando diferentes razões de contração, entre eles destacam-se os trabalhos de DURST e LOY (1985) e DURST et al. (1985,1987).

DURST e LOY (1985) apresentam resultados numéricos e experimentais para o caso de escoamento laminar em um tubo com uma contração na seção transversal. Em seguida, DURST et al. (1985, 1987) apresentam resultados para o caso de uma contração plana de razões 2:1 e 4:1. Resultados experimentais foram obtidos utilizando um equipamento laser-Doppler, de uma maneira complementar utilizaram também um programa computacional para obter resultados numéricos. Resultados experimentais e numéricos são apresentados e comparados para números de Reynolds variando de 53 a 1326, mostrando detalhes da variação de velocidade na vizinhança do ponto de contração.

COELHO et al. (1991) apresentam resultados para o problema da contração plana de razão 4:1, utilizando um método de volumes finitos na formulação variáveis primitivas co-localizadas. É empregada uma técnica chamada “grid-embedding”, onde uma malha grosseira simples cobre o domínio todo e é feito um refinamento local nas regiões de altos gradientes sem mudanças na estrutura básica da malha, conseguindo desta forma um refinamento maior nas proximidades da contração.

É conveniente lembrar que neste trabalho é utilizado um método elíptico de solução para as equações de Navier-Stokes, isto é as equações governantes são resolvidas sem aproximações adicionais, procurando uma solução que satisfaça as equações em cada ponto do domínio sujeita a certas condições de contorno. Desta forma podemos conhecer em detalhe o comportamento da solução obtida na região de entrada do canal.

O estudo da região de entrada em canais tem sido feito na maioria das vezes utilizando a aproximação da camada limite, com esta hipótese temos que o gradiente normal à superfície é muito superior ao gradiente na direção do escoamento, obtendo desta forma uma simplificação da equação de conservação do momento. Assim as equações de Navier-Stokes que são equações elípticas são transformadas em equações parabólicas e em consequência são utilizados métodos parabólicos de resolução, neste caso o perfil de entrada precisa ser pré-especificado. Em (MAIA, 1996) é encontrado um resumo sobre métodos parabólicos.

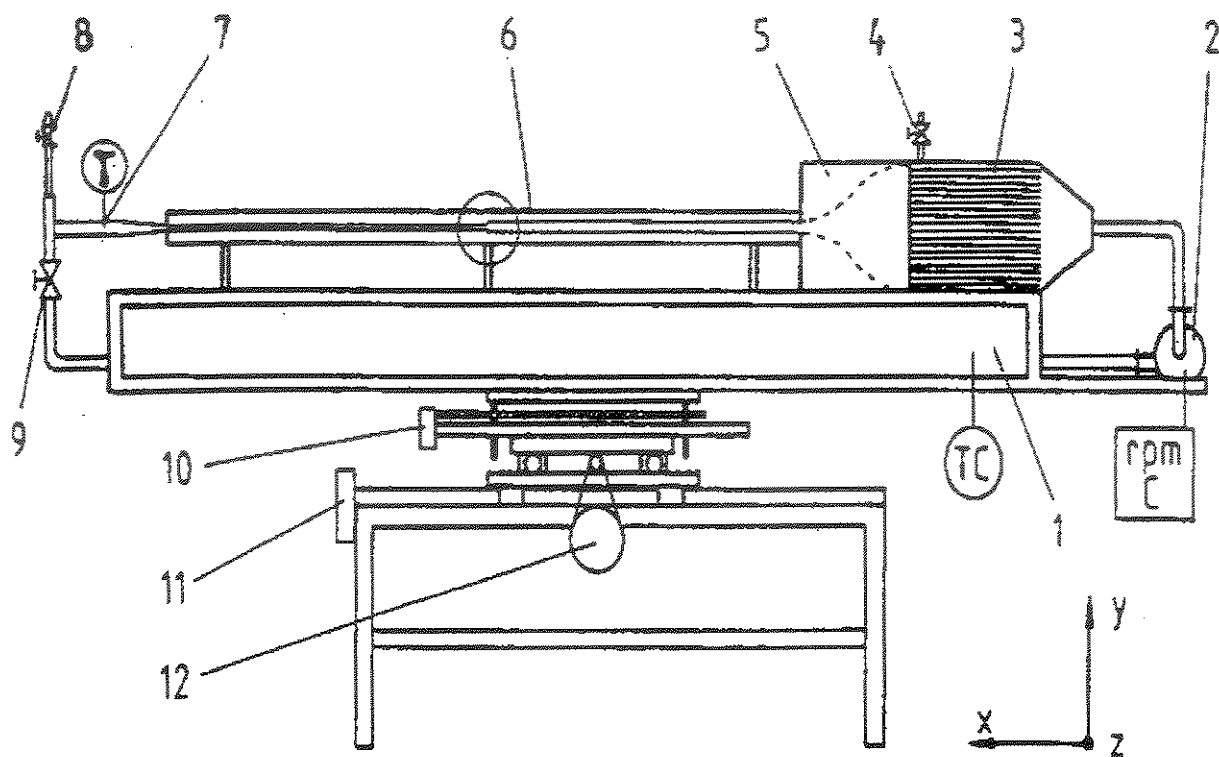
5.2 Trabalho de DURST et al.

O fluido (água em todos os experimentos realizados) foi armazenado em um tanque, que permitiu a instalação de um trocador de calor para controlar a temperatura do fluido dentro de uma margem de $\pm 0,1^{\circ}C$, para garantir que as propriedades do fluido se mantivessem constantes durante os experimentos. A temperatura escolhida para a realização dos experimentos foi de $20,4^{\circ}C$. Para levar o fluido do tanque de armazenamento através do canal foi empregada uma bomba rotatória equipada com um mecanismo de controle de velocidade para manter a velocidade da bomba dentro de $\pm 0,5\%$ da velocidade determinada para cada teste. Desta forma, o número de Reynolds do escoamento foi mantido constante dentro de uma margem de $\pm 0,5\%$.

Para enviar o fluido da bomba ao canal foi utilizado um cano de saída da bomba que foi dividido em quatro canos conectores, estes entram na parte de trás de uma câmara que contém um mecanismo para endireitar e homogeneizar o escoamento garantindo assim um escoamento de baixo nível de turbulência para entrar na seção de teste. Ver figura 5.1.

A seção de teste consistia de um canal bidimensional de $10mm$ de altura e $180mm$ de largura. Este canal foi feito de placas inferiores e superiores metálicas e paredes laterais de vidro para permitir o aceso óptico dentro do canal, necessário para o raio laser do anemômetro Doppler. Espaçadores foram usados na parte externa de toda a seção teste para garantir que a altura se mantivesse constante dentro de uma tolerância de $\pm 0.01mm$. Esta medida foi também utilizada como tolerância para o canal inteiro.

A entrada da seção de teste foi de $600mm$, isto foi calculado previamente à construção da seção teste para garantir perfis laminares plenamente desenvolvidos antes da contração, para todos os números de Reynolds utilizados. A contração foi feita de duas placas de alumínio anodizado que foram montadas no interior do canal para permitir obter razões de contração 2:1 e 4:1, deixando a altura do canal de $5mm$ e $2,5mm$ depois do plano de contração, respectivamente.



- | | | | |
|-----|---------------------------|-------|---------------------|
| 1 | Tanque | 6 | Seção de teste |
| 2 | Bomba rotatória | 7 | Termômetro |
| 3 | Retificador de escoamento | 9 | Válvula de afogador |
| 4/8 | Válvula de escape de ar | 10 | Ajuste vertical |
| 5 | Bocal | 11/12 | Ajuste x/z |

Fig. 5.1 Esquema do equipamento utilizado para testes por DURST et al.

Para obter as medidas de velocidades locais foi utilizado um equipamento laser-Doppler, que é descrito em detalhe no relatório técnico de DURST et al. (1985). O trabalho experimental foi complementado com testes numéricos. A figura 5.2 mostra a geometria utilizada por DURST et al. (1985), para obter estes resultados.

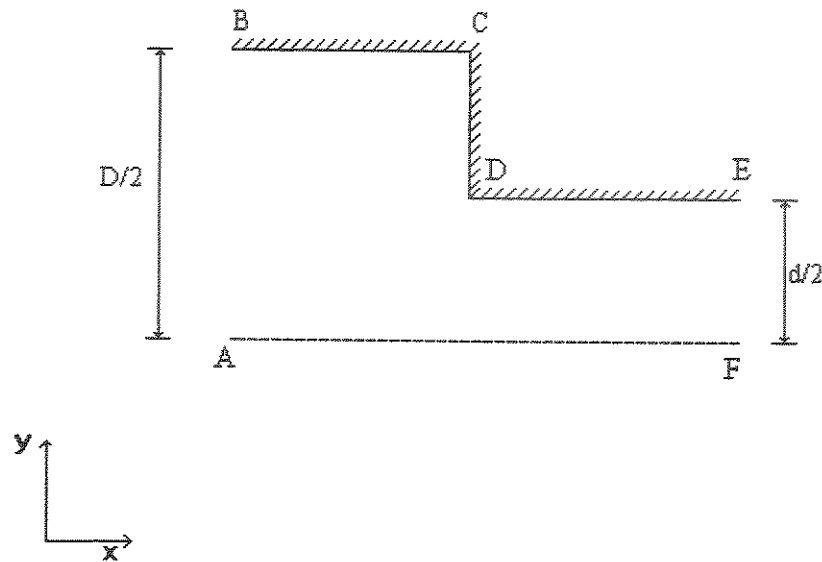


Fig. 5.2 Geometria utilizada para testes numéricos por DURST et al.

As condições de contorno utilizadas foram as seguintes:

- Ao longo da linha AB, a velocidade de entrada foi prescrita como um perfil parabólico.
- Ao longo das paredes BC, CD, DE foram aplicadas condições de não deslizamento.
- Na linha de saída EF foram aplicadas duas condições de contorno: a primeira, condição de escoamento plenamente desenvolvido

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

a distância de saída foi tomada como 1,5 vezes a altura do canal na seção de entrada. A segunda condição de contorno, considerando a mesma distância de saída, foi descrita por um perfil de velocidades medido experimentalmente. Os perfis de velocidade resultantes do uso de ambas condições de contorno foram comparados em vários pontos dentro do canal, eles observaram nas experiências realizadas que a condição de contorno na saída teve pouca influência sobre os resultados finais. Neste caso, os desvios entre as soluções obtidas utilizando as duas condições de contorno foram menores que 2%, por isto a condição de contorno utilizada na saída para a obtenção de todos os resultados numéricos foi aquela descrita em (5.1).

- Ao longo do eixo de simetria AF, foram utilizadas condições de derivada nula para a componente de velocidade u e velocidade nula para a componente de velocidade v

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \quad (5.2)$$

Para obter os resultados numéricos foi utilizado o programa computacional TEACH (PATANKAR, 1980), onde as equações de conservação da massa e momento são resolvidas na formulação variáveis primitivas utilizando o método dos volumes finitos e malha deslocada. Para a discretização do termo convectivo é utilizado o esquema de discretização Híbrido. Para resolver as equações de diferenças foi utilizado um método iterativo linha a linha com subrelaxação. Foi utilizada uma malha não regular em ambas as direções com um número máximo de 50 pontos nodais, tendo sido colocado um maior número de pontos nos locais em que ocorrem as maiores variações de velocidade e pressão.

O número de Reynolds é definido como

$$Re = \frac{u_{med} D}{\nu} \quad (5.3)$$

onde u_{med} é a velocidade media na seção transversal, D é a altura do canal antes da contração e ν é a viscosidade cinemática. Para os testes numéricos foram utilizados números de Reynolds variando entre 53 e 1326.

5.3 O Presente Trabalho

Com o objetivo de testar o algoritmo desenvolvido e comparar os resultados com aqueles obtidos por DURST et al. (1985) foi implementado também o problema da contração plana com razão finita.

Para isto foi utilizado o algoritmo já desenvolvido adaptado à nova geometria. Foi utilizada apenas a forma divergente da equação de Navier-Stokes com o método dos volumes de controle, porque para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento os resultados obtidos foram melhores que aqueles obtidos utilizando a forma convectiva, tanto em termos de acuidade como de estabilidade, utilizando também um menor tempo computacional quando o número de Reynolds aumenta. Os esquemas de discretização utilizados foram idênticos àqueles usados no caso da cavidade quadrada, a saber: exponencial, linear a montante (Upwind), quadrático a montante (QUICK) e central. Foram obtidos resultados para $Re = 10, 107, 208$ e 426 e malhas regulares de 20×40 , 40×80 e 80×160 pontos nodais.

5.3.1 Geometria, Condições de Contorno e Condições Iniciais

A figura 5.3 mostra a geometria e a notação utilizada no presente trabalho, onde $XL1 = XL2 = 0.015m$, $YL1 = YL2 = 0.0025m$, $XL = XL1 + XL2$ e $YL = YL1 + YL2$.

Todos os dados foram adimensionalizados utilizando os seguintes dados característicos de comprimento e velocidade

$$L = 2 * YL, \quad U_0 = u_{med}$$

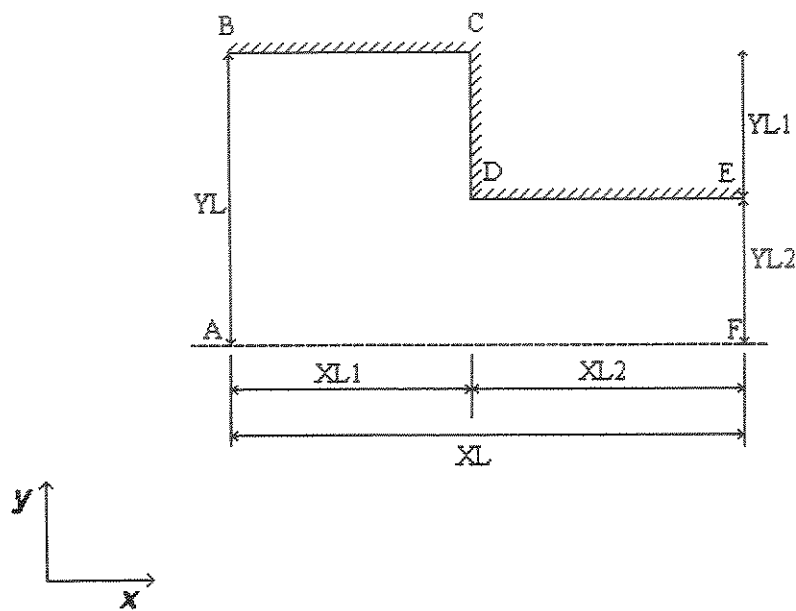


Fig. 5.3 Geometria para o problema da contração plana com razão finita

Assim, o plano de contração é localizado em $x = 0$, as seções de entrada e saída se encontram nos pontos $x = -1.5$ e $x = 1.5$ (valores já adimensionalizados), respectivamente. A razão de contração é de 2:1.

As condições de contorno utilizadas pelo algoritmo foram

- paredes (linhas BC, CD, DE): condição de não deslizamento e parede impermeável

$$u = 0, v = 0 \quad (5.4)$$

- linha de simetria (linha AF): derivada nula para a componente de velocidade u e velocidade especificada nula para a componente de velocidade v

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \quad (5.5)$$

- seção de entrada (linha AB): perfil parabólico (BURMEISTER, 1983), (PANTON, 1984)

$$u = \frac{3}{2} u_{med} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (5.6)$$

onde

$$u_{med} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u dy$$

- seção de saída (linha EF): escoamento plenamente desenvolvido

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

Foram utilizados dois tipos de condições iniciais, ambas sem sentido físico, caracterizando o método de integração temporal como pseudo-transiente. No começo foi utilizada velocidade inicial constante em todo o domínio; a seguir foi implementada um segundo tipo de condição inicial de tal maneira a manter constante o fluxo Q em todo o domínio, esta condição se mostrou muito mais eficiente, em termos de economia de tempo computacional.

5.4 Resultados e Discussão

5.4.1 Resultados para Número de Reynolds Baixo

Para testar o desempenho do algoritmo com a nova geometria foram obtidos resultados para um número de Reynolds muito baixo, neste caso $Re = 10$, utilizando uma malha regular de 40×80 . As figuras 5.4 a 5.9 mostram os perfis de velocidade para a componente u , obtidos com os quatro esquemas de discretização utilizados, correspondentes aos pontos $x = -0.15$, $x = -0.075$, $x = 0.$, $x = 0.075$, $x = 0.015$ e $x = 0.3$.

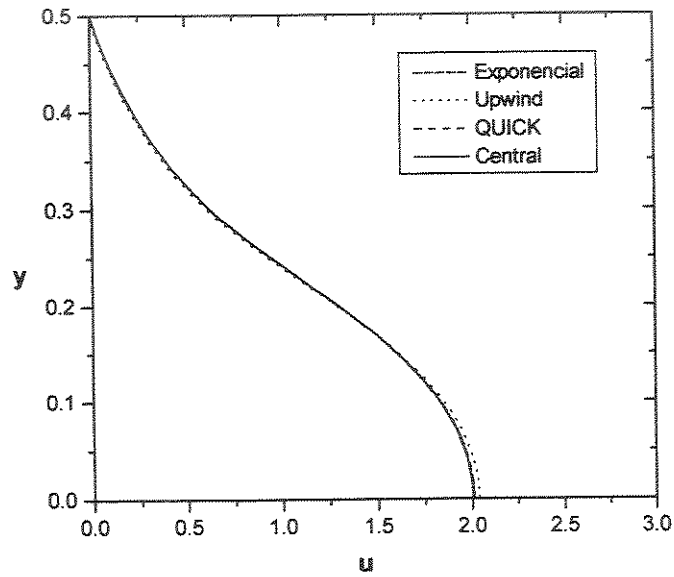


Fig. 5.4 Perfil de velocidade para a componente u em $x = -0.15$. $Re = 10$.

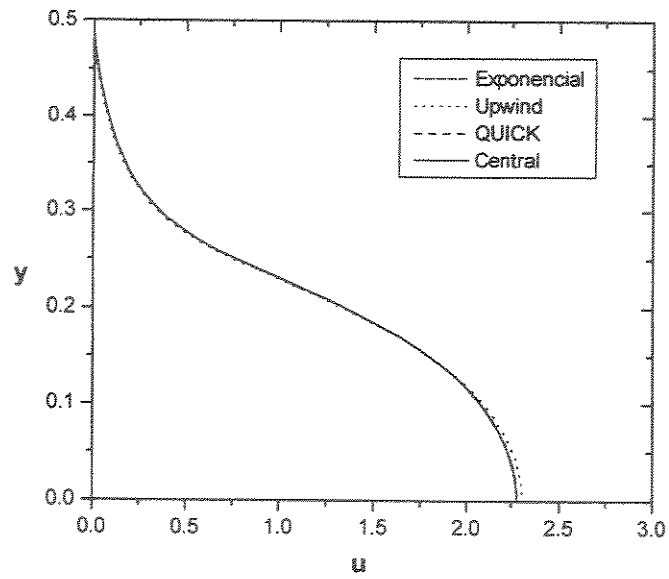


Fig. 5.5 Perfil de velocidade para a componente u em $x = -0.075$. $Re = 10$.

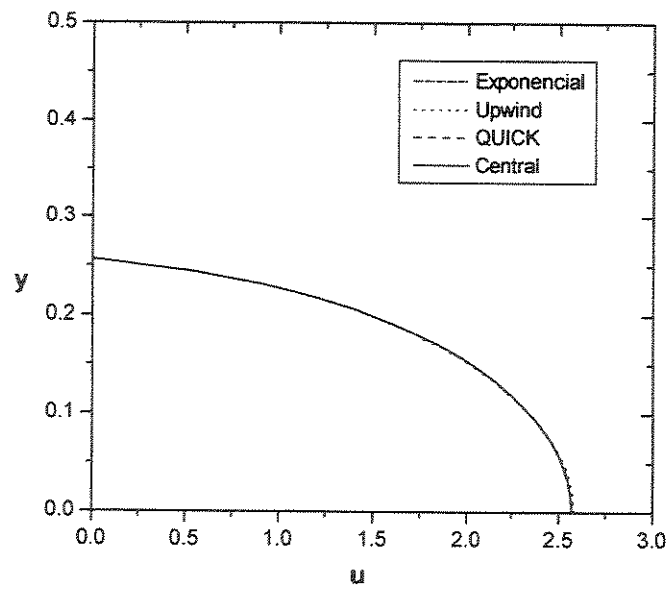


Fig. 5.6 Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0$. $Re = 10$.

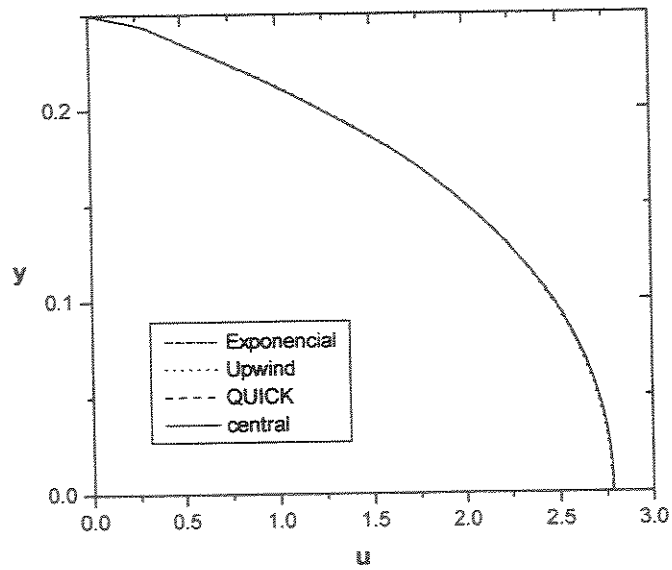


Fig. 5.7 Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.075$ $Re = 10$.

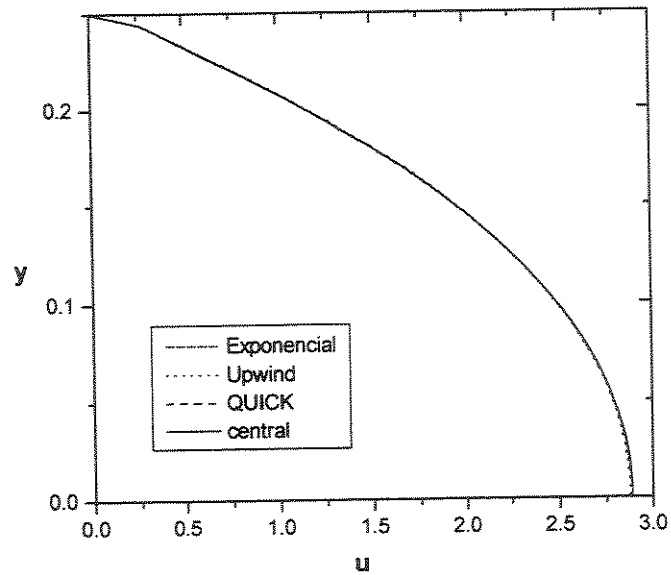


Fig. 5.8 Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.15$. $Re = 10$.

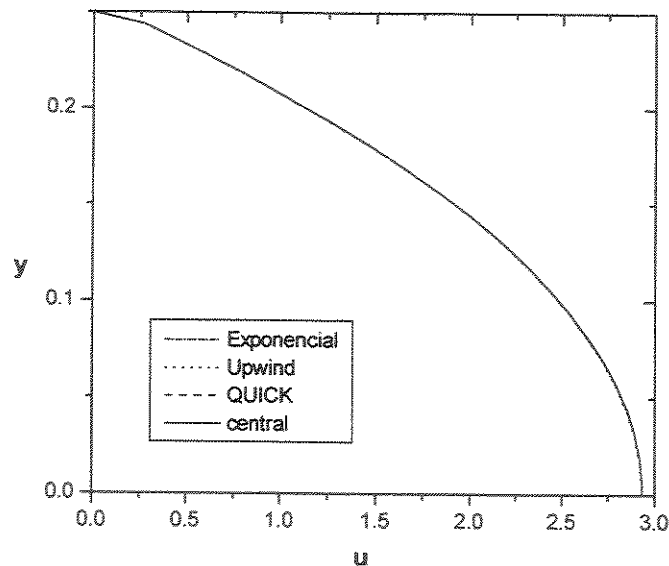


Fig. 5.9 Perfil de velocidade para a componente u em $x = 0.3$. $Re = 10$.

Os resultados obtidos nos mostram que todos os esquemas de discretização utilizados convergem para um perfil praticamente coincidente, o único que se afasta um pouco dos outros esquemas é o esquema Linear a Montante, o que já era esperado depois dos resultados obtidos para o problema da cavidade quadrada analisados no capítulo 4. Por isto os resultados mostrados nas seções a seguir não incluem o esquema Linear a Montante, apenas os outros três esquemas.

No plano $x = -0.075$, antes do plano de contração, foi encontrada uma pequena recirculação nos pontos próximos ao contorno superior, que foi detectada apenas pelos esquemas exponencial, linear a montante e QUICK, o esquema central não mostra indícios de recirculação.

5.4.2 Evolução com o Refinamento. Tempos Médios de CPU

Foi observado que as maiores mudanças de velocidade ocorrem numa região muito próxima ao plano de contração, nestes pontos também é mais marcada a diferença de comportamento entre os esquemas de discretização. Por isto nestes pontos é possível detectar com maior clareza se o refinamento da malha é suficiente para considerar os resultados aceitáveis.

Nesta seção são apresentados alguns gráficos que mostram os perfis de velocidade para a componente u , que permite observar a evolução do perfil obtido com cada um dos esquemas utilizados a medida que a malha é refinada.

As figuras 5.10 a 5.21 mostram a evolução com o refinamento dos esquemas Exponencial, QUICK e Central para $Re = 426$ e malhas de 20×40 , 40×80 e 80×160 pontos nodais. Os perfis apresentados correspondem aos pontos $x = -0.15$ e $x = -0.075$, $x = 0$ e $x = 0.3$.

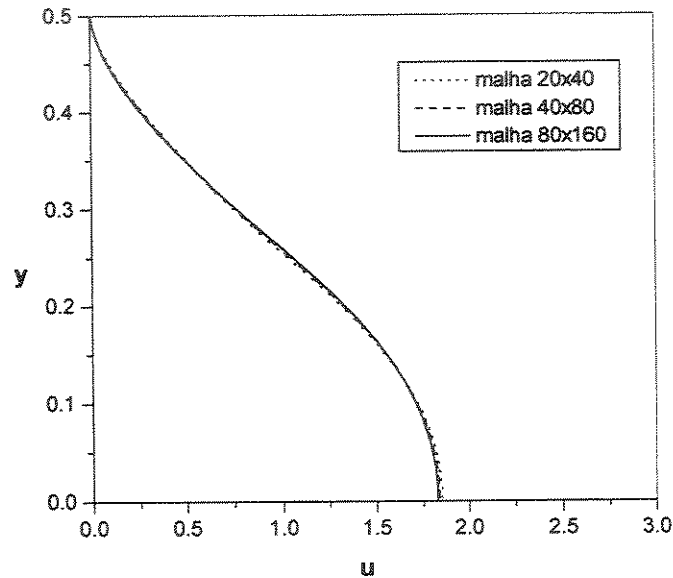


Fig. 5.10 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Exponencial.*
 $x = -0.15$, $Re = 426$

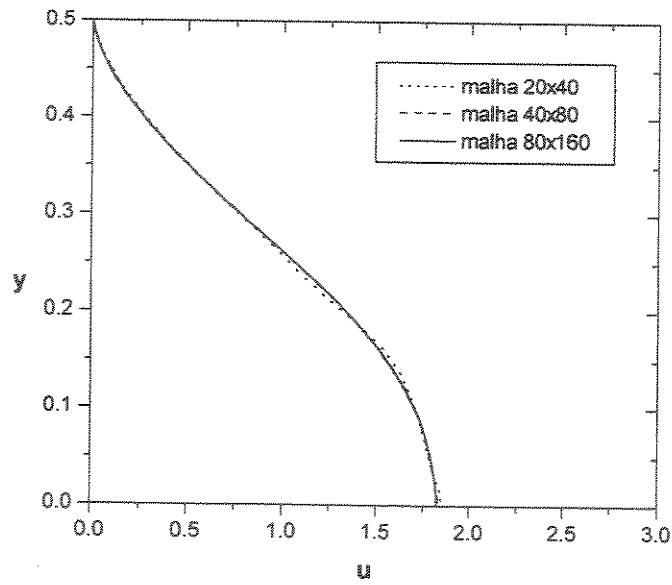


Fig. 5.11 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK.*
 $x = -0.15$, $Re = 426$

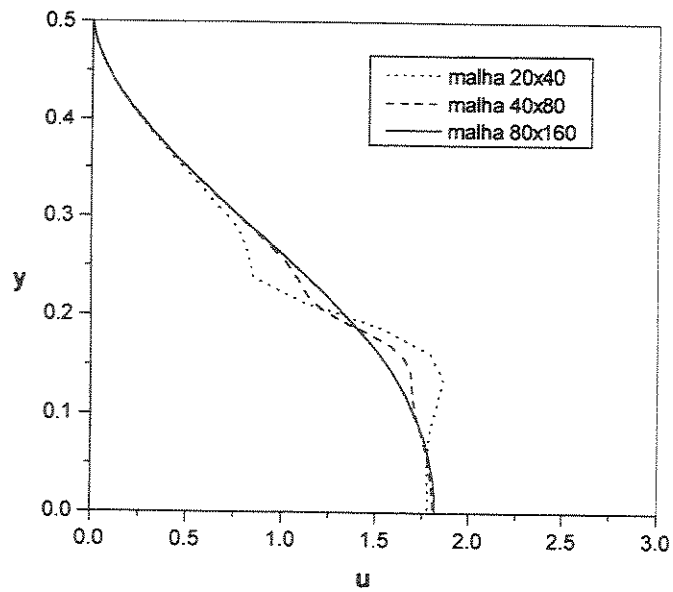


Fig. 5.12 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Central.*
 $x = -0.15$, $Re = 426$

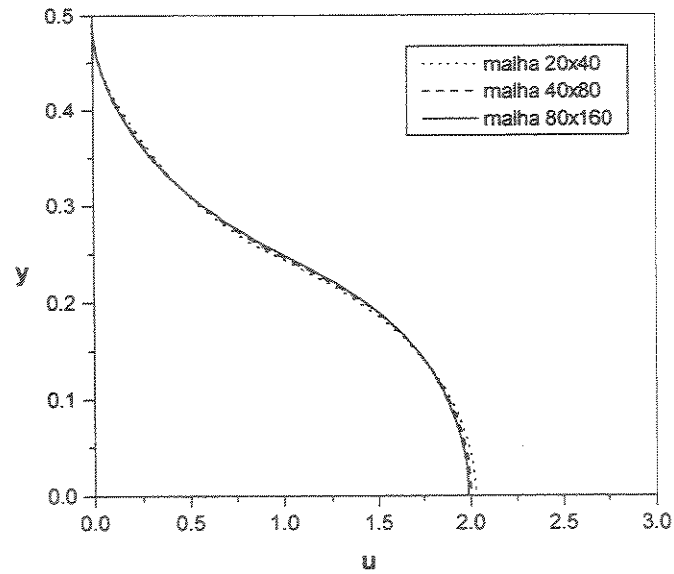


Fig. 5.13 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Exponencial.*
 $x = -0.075$, $Re = 426$

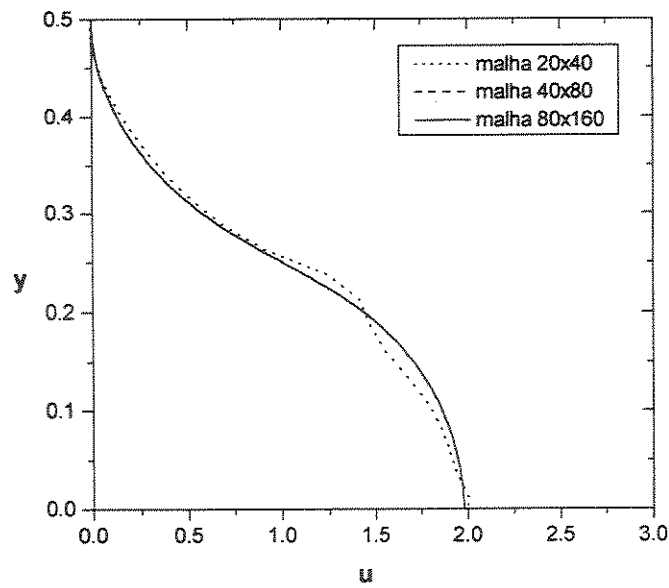


Fig. 5.14 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK.*
 $x = -0.075$, $Re = 426$

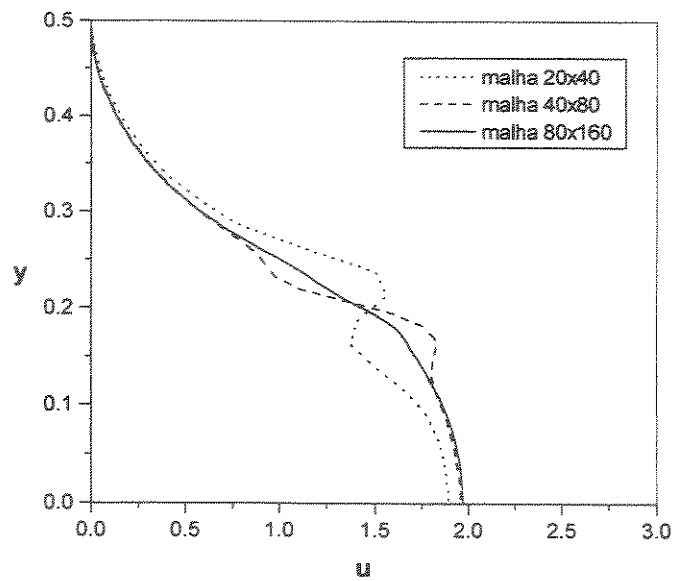


Fig. 5.15 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Central.*
 $x = -0.075$, $Re = 426$

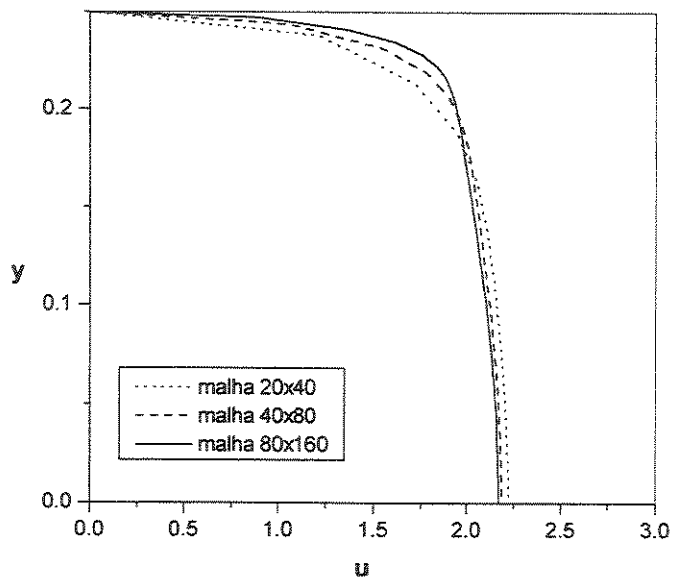


Fig. 5.16 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Exponencial.*
 $x = 0.$, $Re = 426$

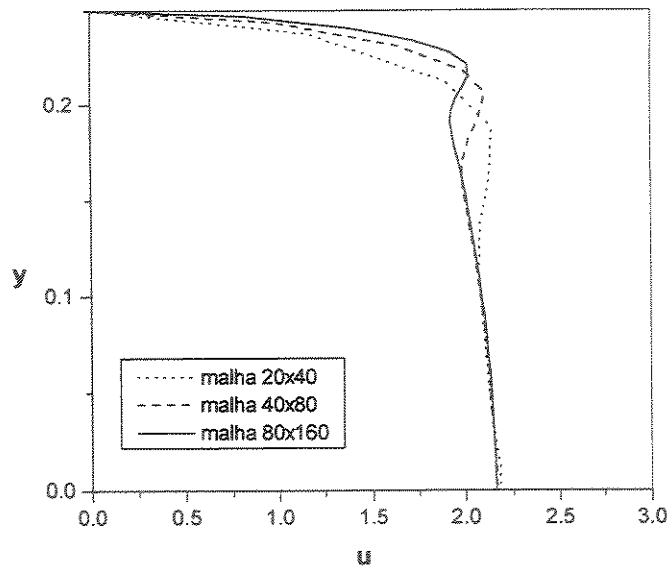


Fig. 5.17 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK.*
 $x = 0.$, $Re = 426$

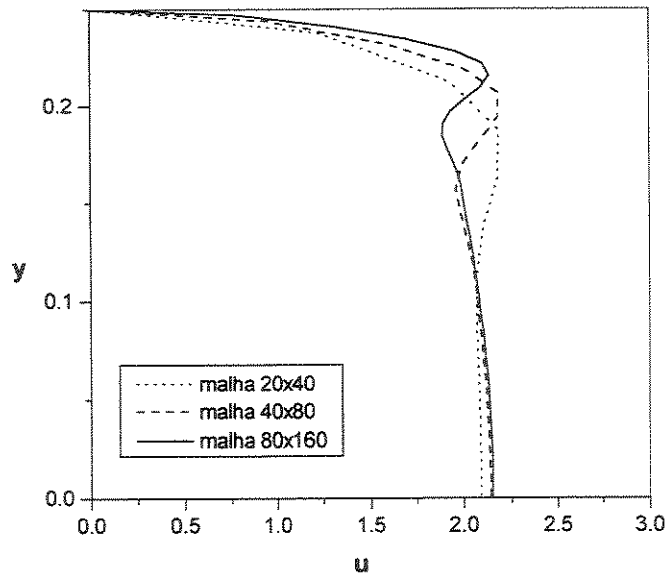


Fig. 5.18 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Central.*
 $x = 0.$, $Re = 426$

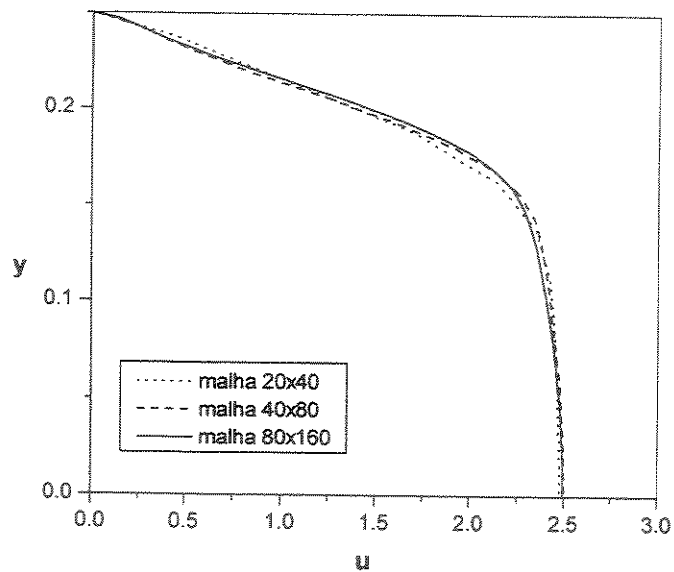


Fig. 5.19 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Exponencial.*
 $x = 0.3$, $Re = 426$

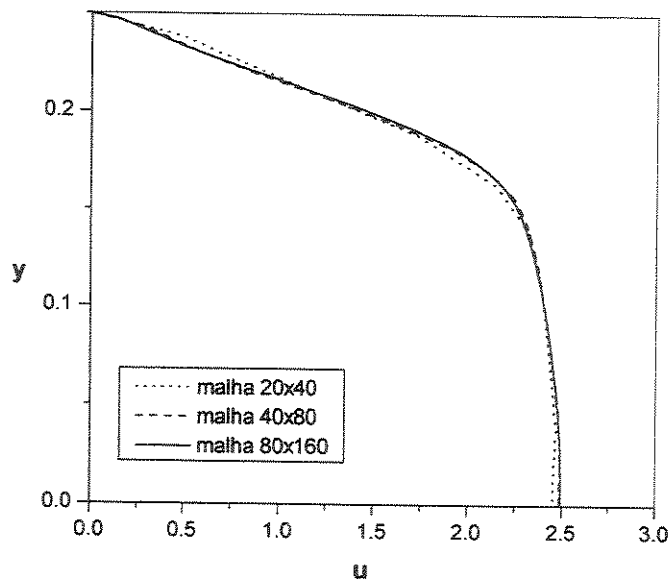


Fig. 5.20 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema QUICK.*
 $x = 0.3$, $Re = 426$

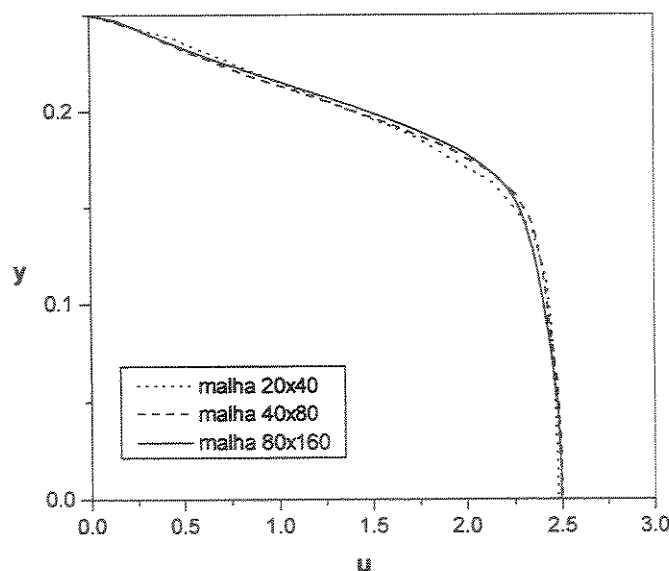


Fig. 5.21 *Evolução do perfil de velocidade com o refinamento, esquema Central.*
 $x = 0.3$, $Re = 426$

Podemos observar nos perfis de velocidade apresentados que em alguns pontos do escoamento (antes do plano de contração) o esquema Central nos leva a soluções não realistas, precisando de uma malha muito mais refinada para obter um perfil de velocidades aceitável. Isto não ocorre com os outros dois esquemas, que apresentam resultados razoáveis ainda para malhas menos refinadas.

Analisando os gráficos para os planos antes da contração vemos que em $x = -0.15$ os perfis de velocidade obtidos com os esquemas exponencial e QUICK são praticamente coincidentes para todas as malhas utilizadas. Quando observamos os gráficos no plano $x = -0.075$, podemos ver que o perfil de velocidade obtido utilizando a malha 20×40 se afasta um pouco dos perfis obtidos com as outras malhas principalmente no caso do esquema QUICK. No plano de contração, $x = 0.$, podemos observar que para todos os esquemas utilizados os perfis de velocidade obtidos com as diferentes malhas se encontram bastante afastados um dos outros, demonstrando assim que seria necessário um refinamento maior para obter resultados independentes da malha neste plano; isto também foi observado para os planos $x = 0.075$ e

$x = 0.15$, somente no plano $x = 0.3$ encontramos perfis de velocidade que se encontram próximos um dos outros para todas as malhas utilizadas tanto com o esquema QUICK como com o esquema Exponencial, no caso do esquema QUICK os perfis de velocidade obtidos com as malhas 40×80 e 80×160 são praticamente coincidentes.

Encontramos uma pequena recirculação nos pontos próximos ao contorno superior no plano $x = -0.075$, antes do plano de contração. A recirculação foi detectada pelos três esquemas utilizados, no caso dos esquemas exponencial e QUICK a recirculação aparece para todas as malhas enquanto no caso do esquema central ela aparece apenas para as malhas 40×80 e 80×160 .

São apresentadas também algumas tabelas (tabelas 5.1 a 5.3) mostrando os tempos médios de CPU para cada um dos esquemas, malhas e números de Reynolds utilizados, assim como o número de iterações requeridas por cada um dos esquemas para obter soluções convergidas. É apresentado também o número de oscilações ao longo do processo temporal, obtido com cada um dos esquemas, assim como a porcentagem que ele representa em relação ao número total de iterações.

Podemos observar que o esquema Exponencial se apresenta estável para todos os números de Reynolds estudados, é o que sofre menor número de oscilações entre os três esquemas estudados (menos que 1%). O esquema QUICK também se apresenta estável para toda a faixa de Reynolds considerada, o número máximo de oscilações não ultrapassa os 5% e tende a diminuir com o refinamento da malha. O esquema Central é o mais instável dos esquemas considerados, apresenta um alto número de oscilações inclusive para números de Reynolds relativamente baixos como é o caso de $Re = 107$ e $Re = 208$, para $Re = 426$ o número de oscilações aumenta ainda mais e como consequência requer um tempo de CPU maior que o requerido pelos outros dois esquemas, para alcançar uma solução convergida. O número de oscilações diminui com o refinamento da malha, mas não o suficiente pois ainda com uma malha de 80×160 o número de oscilações alcança a quase 8%.

Re = 107				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
20 × 40	Exponencial	578	1 - 0.17%	11.86
	QUICK	599	5 - 0.83%	10.80
	Central	816	80 - 9.80%	10.59
40 × 80	Exponencial	1291	1 - 0.08%	149.61
	QUICK	1347	10 - 0.74%	145.08
	Central	1442	23 - 1.60%	121.55
80 × 160	Exponencial	2636	1 - 0.04%	2086.54
	QUICK	2694	3 - 0.11%	2073.19
	Central	2771	11 - 0.40%	1859.57

Tabela 5.1 *Tempos médios de CPU. Re = 107*

Re = 208				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
20 × 40	Exponencial	652	1 - 0.15%	13.62
	QUICK	677	16 - 2.36%	12.14
	Central	1427	448 - 31.39%	18.24
40 × 80	Exponencial	1498	1 - 0.07%	173.87
	QUICK	1590	40 - 2.52%	172.14
	Central	1733	402 - 23.20%	147.82
80 × 160	Exponencial	3309	1 - 0.03%	2663.75
	QUICK	3465	27 - 0.78%	2718.67
	Central	3642	60 - 1.65%	2588.87

Tabela 5.2 *Tempos médios de CPU. Re = 208*

Re = 426				
Malha	Esquema	Nº. Iterações	Oscilações	Tempo CPU(s)
20 × 40	Exponencial	739	1 - 0.14%	15.12
	QUICK	737	30 - 4.07%	13.32
	Central	5439	2685 - 49.37%	70.75
40 × 80	Exponencial	1740	1 - 0.06%	205.92
	QUICK	1845	88 - 4.77%	198.60
	Central	5132	2358 - 45.95%	433.31
80 × 160	Exponencial	3964	18 - 0.45%	3201.23
	QUICK	4280	108 - 2.52%	3315.88
	Central	4609	354 - 7.68%	3139.39

Tabela 5.3 *Tempos médios de CPU. Re = 426*

Vimos nos gráficos que apresentam a evolução do perfil de velocidade com o refinamento, para os diferentes esquemas, que o esquema Central pode nos levar a soluções não realistas se considerarmos malhas pouco refinadas; além disso, este esquema apresenta um alto número de oscilações, muito acima dos outros dois esquemas considerados, requerendo assim um maior tempo computacional. Isto nos leva a considerar mais confiáveis os resultados obtidos com os esquemas Exponencial e QUICK, por esta razão estes serão os únicos esquemas considerados para fazer a comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo para o problema da contração plana de razão finita com os dados de DURST et al. (1985).

5.4.3 Comparação de Resultados com os de DURST et al.

Os resultados obtidos pelo algoritmo foram comparados com os dados experimentais obtidos por DURST et al. (1985), para os seguintes números de Reynolds: Re = 107, 208 e 426. Para fazer esta comparação foram utilizados os esquemas de discretização Exponencial e QUICK. Foram utilizadas malhas regulares de 20 × 40, 40 × 80 e 80 × 160. Os resultados são

apresentados em pontos próximos à região de contração por ser o local onde ocorrem as maiores mudanças de velocidade.

As figuras 5.22 a 5.35 apresentam perfis de velocidade obtidos para a componente u , nos planos $x = -0.15, -0.075, 0., 0.075, 0.15$, utilizando os esquemas Exponencial e QUICK para $Re = 107, 208$ e 426 e malha 80×160 .

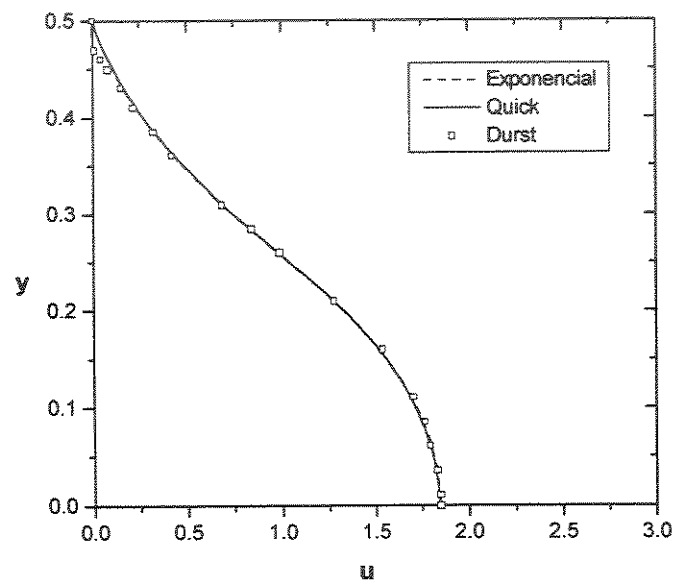


Fig. 5.22 *Perfis de velocidade em $x = -0.15$. $Re = 107$*

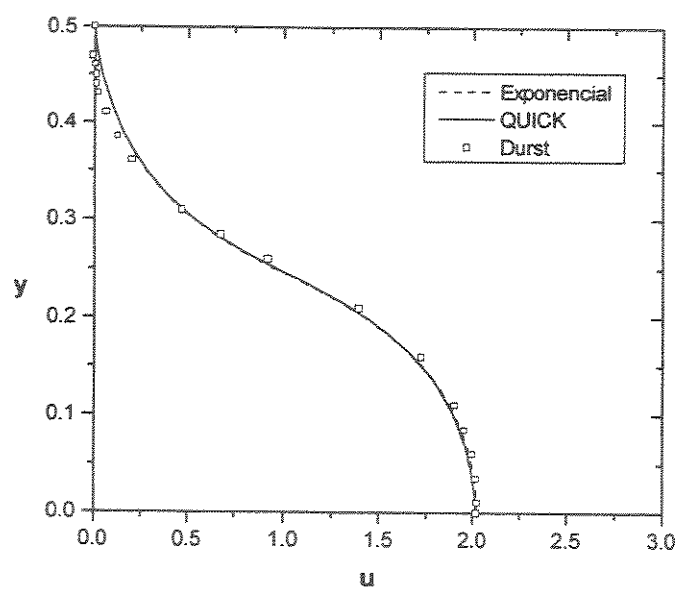


Fig. 5.23 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 107$*

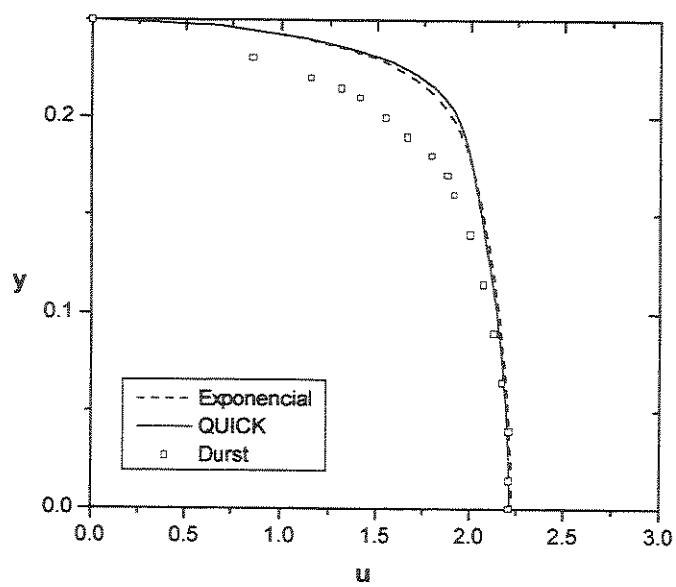


Fig. 5.24 *Perfis de velocidade em $x = 0.$. $Re = 107$*

Ao observarmos estes primeiros gráficos podemos perceber que existe um problema quanto a conservação da massa, os perfis de velocidades obtidos experimentalmente por DURST et al. (1985) não estão mantendo constante o fluxo de massa, isto fica evidente também nos outros gráficos que serão apresentados a seguir. Como uma forma de comprovar esta afirmação os dados de velocidade, experimentais e numéricos, foram integrados numericamente, utilizando a regra do trapézio, para obter os fluxos de massa em cada um dos planos considerados dentro do canal. Os resultados destes cálculos mostram que os dados obtidos pelo algoritmo utilizado neste trabalho apresentam diferenças da ordem de 1%, enquanto os dados experimentais usados como referência apresentam diferenças de até 10%. Estes resultados serão apresentados em forma de tabela logo após a comparação dos resultados do presente trabalho com aqueles de DURST et al.

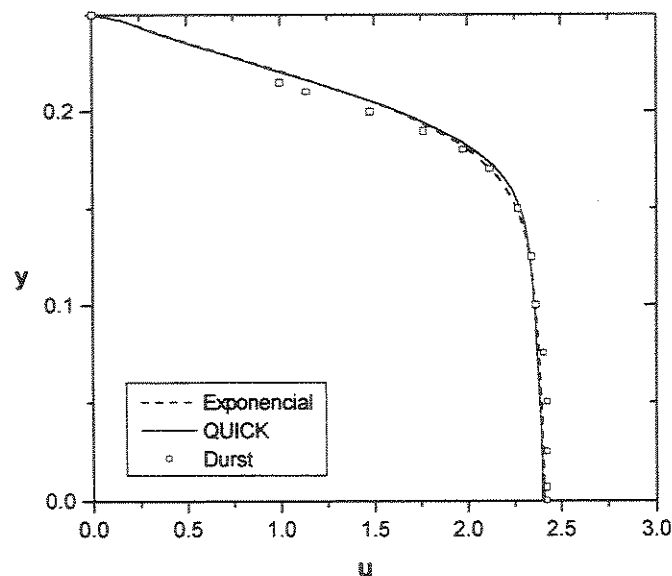


Fig. 5.25 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 107$*

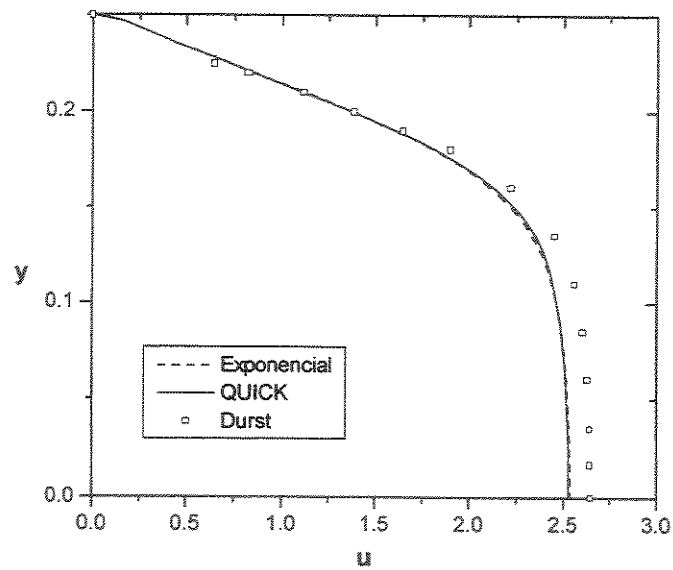


Fig. 5.26 *Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 107$*

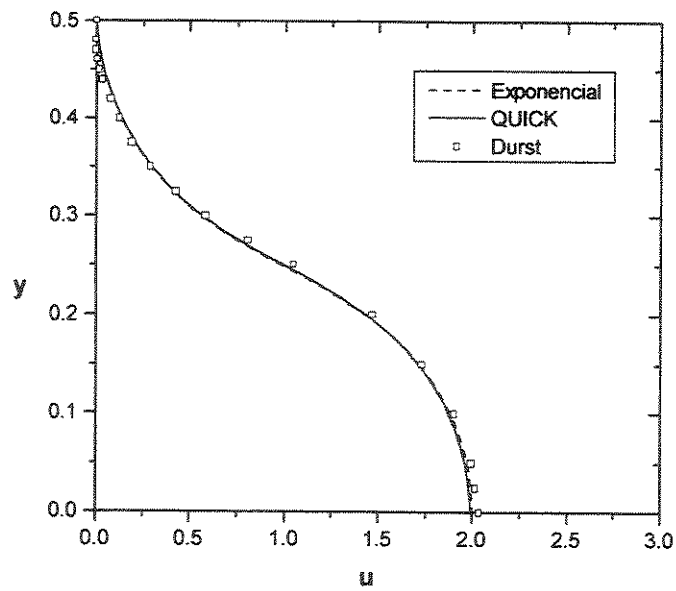


Fig. 5.27 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 208$*

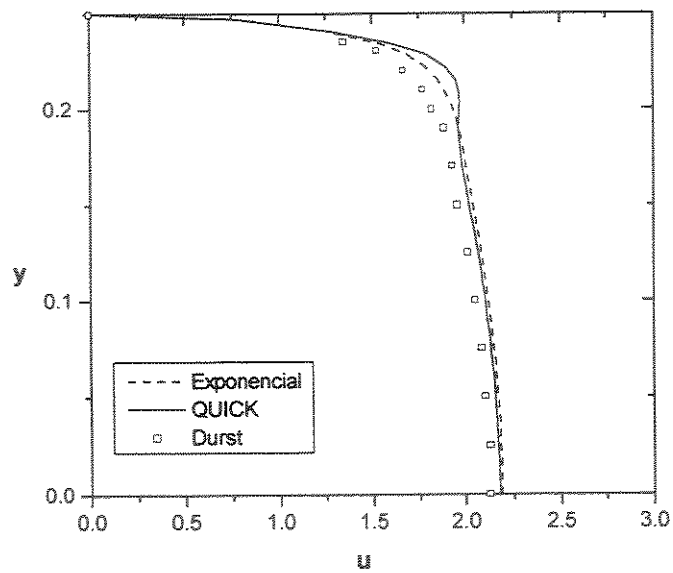


Fig. 5.28 *Perfis de velocidade em $x = 0.$ $Re = 208$*

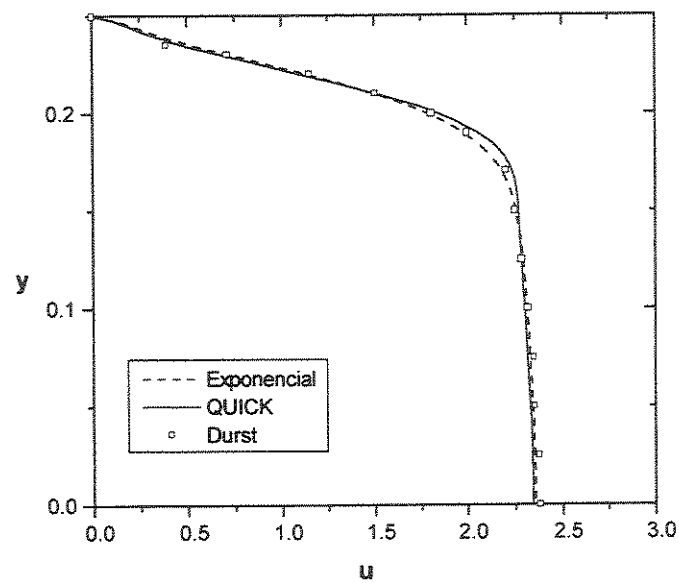


Fig. 5.29 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 208$*

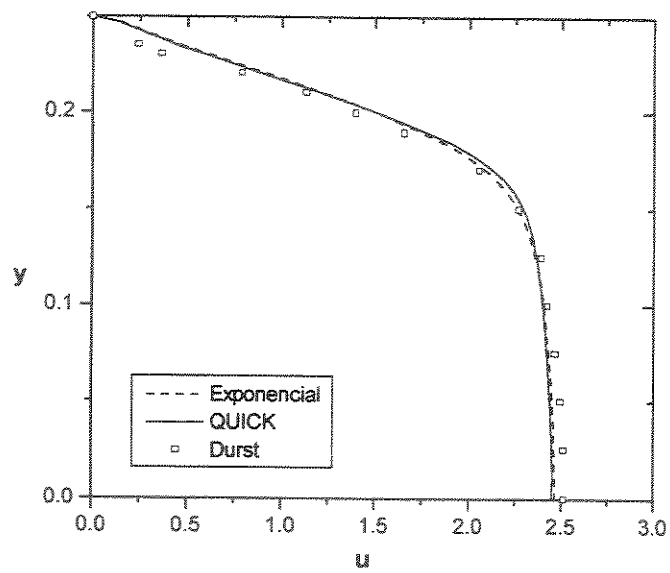


Fig. 5.30 *Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 208$*

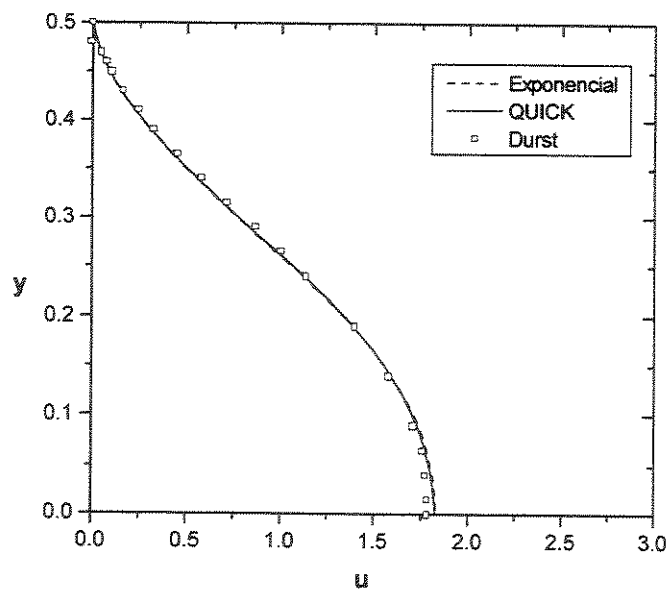


Fig. 5.31 *Perfis de velocidade em $x = -0.15$. $Re = 426$*

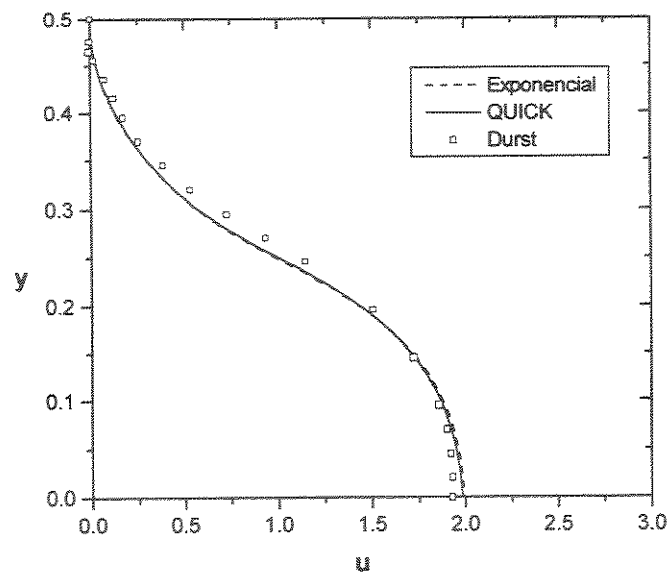


Fig. 5.32 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 426$.*

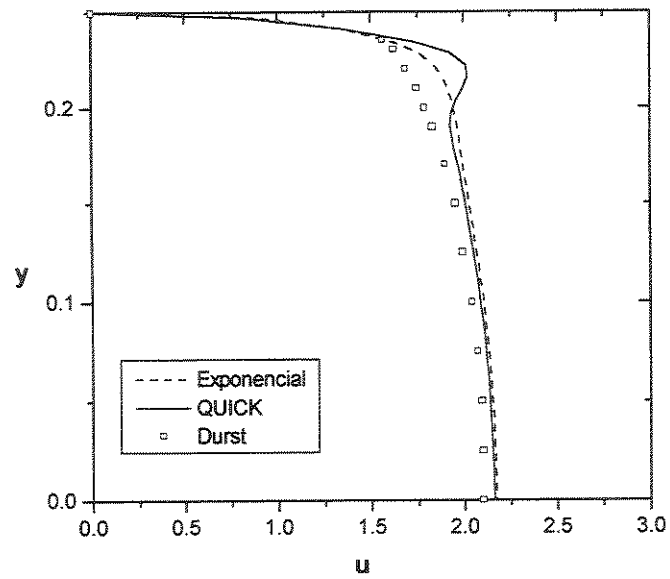


Fig. 5.33 *Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 426$.*

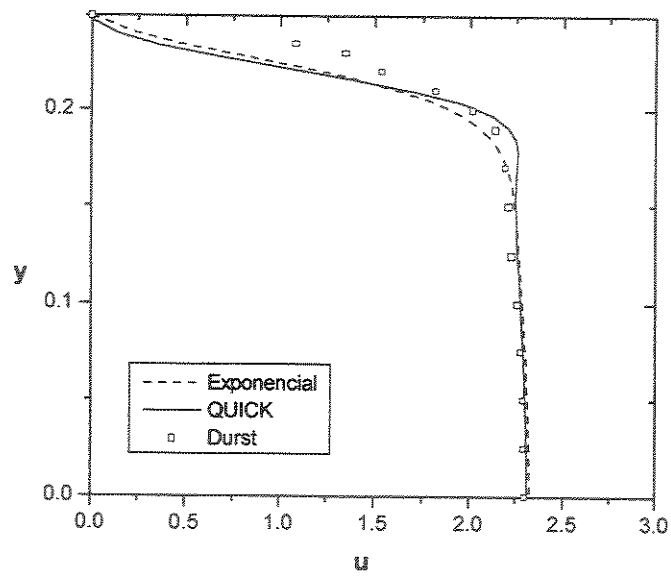


Fig. 5.34 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 426$.*

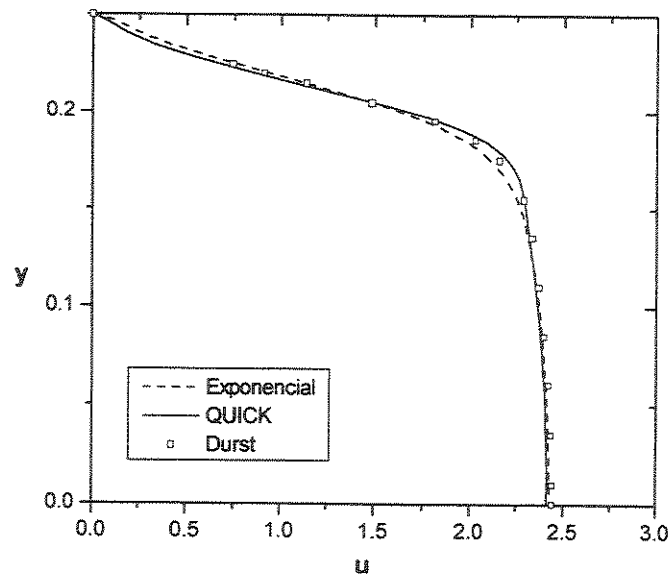


Fig. 5.35 *Perfis de velocidade em $x = 0.15$. $Re = 426$.*

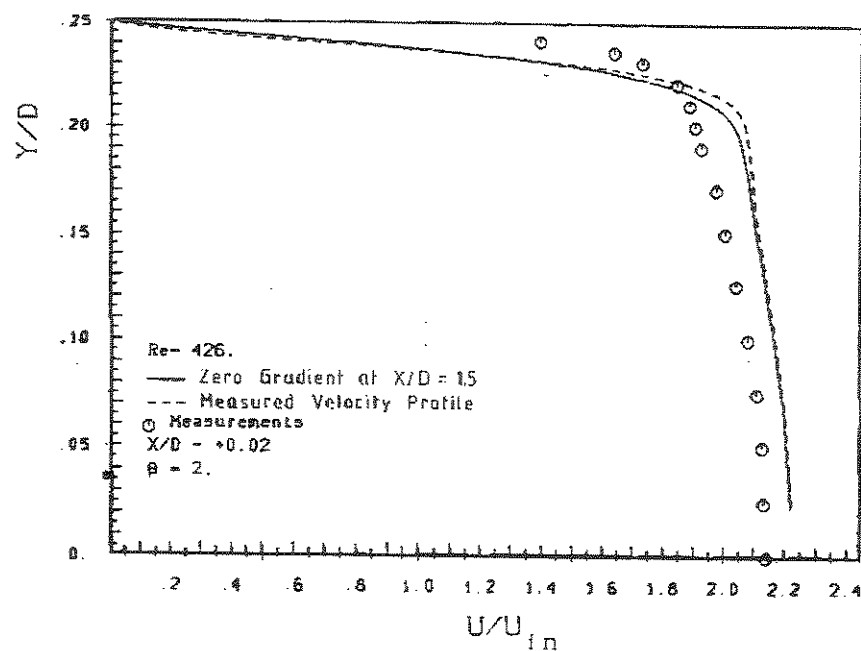
Para analisar os gráficos apresentados nesta seção consideraremos separadamente três regiões: antes do plano de contração, o plano de contração e depois do plano de contração, já que os resultados obtidos são diferentes para cada um destes casos.

Ao analisarmos os perfis de velocidade obtidos antes do plano de contração podemos observar que no caso de $x = -0.15$ os resultados são muito próximos daqueles fornecidos por DURST et al. (1985) para os números de Reynolds 107 e 426, para Reynolds 208 não são apresentados perfis de velocidade neste plano porque os dados não são fornecidos por DURST et al. Podemos observar também que no plano $x = -0.075$ os perfis de velocidade obtidos pelo algoritmo fornecem resultados próximos daqueles usados para referência, existindo algumas diferenças que são mais marcadas para o caso de $Re = 426$. Podemos ver que em ambos os planos as maiores diferenças entre os dados utilizados como referência e aqueles obtidos pelo algoritmo utilizado neste trabalho estão nos pontos próximos ao contorno superior. Nestes pontos, no plano $x = -0.075$, os dados fornecidos pelo relatório de DURST et al. mostram uma muito pequena recirculação para todos os números de Reynolds apresentados aqui, que não é detectada pelo algoritmo para os números de Reynolds 107 e 208, apenas para $Re = 426$. Os dados de DURST et al. também mostram uma pequena recirculação no plano $x = -0.15$ nos pontos próximos ao contorno superior para o caso de $Re = 426$ que também não é detectada pelo algoritmo. Estas diferenças encontradas nos dados obtidos com o algoritmo podem ser devidas ao fato de estarmos utilizando uma malha regular o que exigiria um refinamento maior para poder detectar pequenas mudanças no escoamento. Também pode ser que os dados utilizados como condição de contorno de entrada afetem de alguma forma os perfis de velocidade resultantes em regiões próximas da entrada, precisando assim considerar uma distância maior de entrada para poder utilizar um perfil parabólico como condição de contorno.

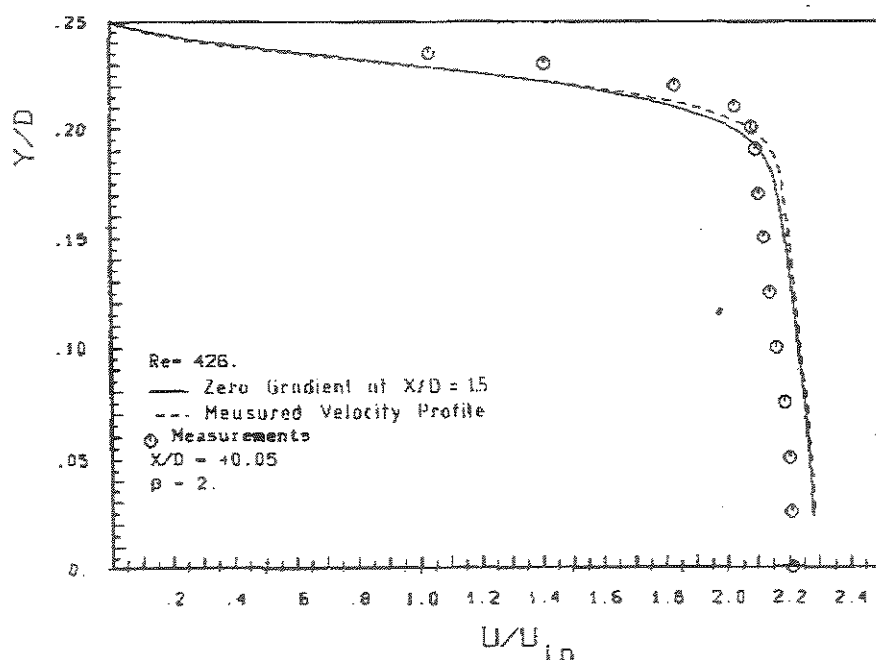
As diferenças mais significativas entre os dados utilizados como referência e aqueles obtidos pelo algoritmo as encontramos no plano de contração $x = 0$. e elas estão presentes para todos os números de Reynolds estudados, sendo mais marcadas para Reynolds 107, isto pode ser explicado porque para o caso de números de Reynolds mais altos seria necessário um refinamento maior para considerar os resultados independentes da malha, como foi mostrado na seção 5.3.3 onde foi apresentada a evolução dos perfis de velocidade a medida que a malha é refinada.

Depois da contração, nos planos $x = 0.075$ e $x = 0.15$, os perfis de velocidade obtidos com o algoritmo são próximos dos resultados usados como referência, existindo algumas diferenças que também neste caso se apresentam mais marcadas no caso de Reynolds 107.

A diferença entre os resultados obtidos pelo algoritmo utilizado neste trabalho e os dados experimentais usados como referência principalmente nos plano de contração e depois da contração não são tão surpreendentes, porque no mesmo relatório do qual foram extraídos estes dados experimentais são apresentados alguns gráficos que mostram o desempenho das soluções numéricas obtidas por DURST et al. (1985) para o caso de Reynolds 426. Estes gráficos mostram diferenças entre dados experimentais e dados obtidos numericamente; as figuras 5.36 e 5.37 apresentam, como ilustração, uma cópia de dois destes gráficos.



5.36 Perfil de velocidade obtido por Durst et al. Dados experimentais e numéricos.
 $x = 0.02$. $Re = 426$



5.37 Perfil de velocidade obtido por Durst et al. Dados experimentais e numéricos. $x = 0.05$. $Re = 426$

Eles comentam que uma possível razão para estas diferenças pode ser o tamanho finito do volume de controle LDA de $200\mu m$ e a incerteza no posicionamento horizontal e vertical é de $\pm 50\mu m$. Como os maiores gradientes de velocidade ocorrem perto do plano de contração, pequenos desvios no posicionamento em x podem causar as diferenças mostradas nas figuras. Afirmam que as diferenças entre os resultados experimentais e numéricos são “comparativamente” pequenas e por isto estaria justificado o uso de um algoritmo para obter informações adicionais que não poderiam ser obtidas com o equipamento laser-Doppler.

Podemos observar também que existem diferenças entre os resultados obtidos com o esquema exponencial e aqueles obtidos com o esquema QUICK. Estas diferenças são pequenas para $Re = 107$ e são mais marcadas a medida que o número de Reynolds aumenta. Novamente encontramos que em todos os casos as maiores diferenças entre os resultados obtidos com ambos

os esquemas estão nas proximidades do plano de contração, isto é justamente na região de entrada do canal.

Foram calculados também os fluxos de massa para os dados experimentais apresentados por DURST et al. (1985) em cada um dos planos em que são apresentados perfis de velocidades. Para isto foi utilizada a regra do trapézio, conhecido método de integração numérica (PRESS, 1988). Os dados experimentais usados como referência são apresentados com 3 casas decimais e por isto os fluxos de massa foram calculados também com 3 casas decimais. Os fluxos de massa obtidos a partir dos dados fornecidos pelo algoritmo utilizado neste trabalho também foram calculados por este método, para poder estabelecer uma comparação. Estes resultados são apresentados nas tabelas 5.4 a 5.6 para os números de Reynolds 107, 208 e 426.

Re = 107			
<i>x</i>	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	0.493	0.497	0.497
-0.150	0.494	0.497	0.497
-0.075	0.491	0.497	0.497
0.	0.449	0.494	0.494
0.075	0.467	0.497	0.496
0.150	0.495	0.495	0.495
0.300	0.490	0.495	0.495

Tabela 5.4 *Fluxos de massa. Re = 107.*

Re = 208			
x	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	0.496	0.497	0.497
-0.150	---	0.497	0.497
-0.075	0.493	0.497	0.497
0.	0.460	0.494	0.494
0.075	0.486	0.496	0.496
0.150	0.482	0.496	0.496
0.300	0.492	0.495	0.495

Tabela 5.5 *Fluxos de massa.* Re = 208.

Re = 426			
x	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	0.495	0.497	0.497
-0.150	0.493	0.497	0.497
-0.075	0.492	0.497	0.497
0.	0.457	0.493	0.494
0.075	0.501	0.496	0.496
0.150	0.488	0.496	0.496
0.300	0.489	0.496	0.496

Tabela 5.6 *Fluxos de massa.* Re = 426.

Como pode ser visto nas tabelas apresentadas os dados obtidos com o algoritmo utilizado neste trabalho mostram um valor praticamente uniforme para os fluxos de massa tendo variação apenas na terceira cifra significativa, enquanto os dados utilizados como referência apresentam variação já na primeira cifra significativa.

O fluxo de massa para os dados obtidos pelo algoritmo também foram calculados baseados na integração associada ao método numérico utilizado, obtendo um resultado constante para cada um dos planos determinados pelos pontos nodais: o fluxo de massa calculado pelo algoritmo baseado no método numérico utilizado é de 0.5, cabe destacar aqui que este resultado foi obtido com 10 casas decimais.

Compararemos os resultados obtidos para os fluxos de massa calculados com a regra do trapézio com o valor do fluxo de massa calculado pelo algoritmo. Estimaremos a diferença, em termos de porcentagem, dos dados em relação a este valor e apresentaremos os resultados nas tabelas 5.7 a 5.9 a seguir.

Pode ser observado nestas tabelas que para todos os números de Reynolds, os dados obtidos pelo algoritmo utilizado neste trabalho apresentam diferenças da ordem de 1% em todos os planos considerados; a maior diferença se encontra no plano de contração e varia entre 1.2% e 1.4%, em todos os outros planos a diferença mantém uma ordem inferior a 1%. Já os dados utilizados como referência apresentam, na maioria dos casos considerados, diferenças superiores a 1% e no plano de contração a diferença aumenta ficando entre 8% e 10% para todos os números de Reynolds considerados.

Re = 107			
x	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	1.4	0.6	0.6
-0.150	1.2	0.6	0.6
-0.075	1.8	0.6	0.6
0.	10.2	1.2	1.2
0.075	6.6	0.6	0.8
0.150	1.0	1.0	1.0
0.300	2.0	1.0	1.0

Tabela 5.7 *Diferenças dos Fluxos de massa. Re = 107.*

Re = 208			
x	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	0.8	0.6	0.6
-0.150	---	0.6	0.6
-0.075	1.4	0.6	0.6
0.	8.0	1.2	1.2
0.075	2.8	0.8	0.8
0.150	3.6	0.8	0.8
0.300	1.6	1.0	1.0

Tabela 5.8 *Diferenças dos Fluxos de massa. Re = 208.*

Re = 426			
x	DURST et al.	Exponencial	QUICK
-0.300	1.0	0.6	0.6
-0.150	1.4	0.6	0.6
-0.075	1.6	0.6	0.6
0.	8.6	1.4	1.2
0.075	0.2	0.8	0.8
0.150	2.4	0.8	0.8
0.300	2.2	0.8	0.8

Tabela 5.9 *Diferenças dos Fluxos de massa. Re = 426*

Como mostrado nas tabelas acima os resultados experimentais utilizados como referência não estão conservando o fluxo volumétrico, apresentando diferenças de até 10%, indicando assim erro experimental ou modelo físico inadequado, mas esta última possibilidade está descartada desde que se verifica que o número de Mach é muito menor do que 0.1, por exemplo, para $Re = 426$, a velocidade máxima no plano de contração é 8.983 cm/s e assim temos que o número de Mach é $M = 2.6 \times 10^{-4}$; portanto é válido usar a hipótese de escoamento incompressível (PANTON, 1984), (LANDAU e LIFSCHITZ, 1989). Os dados obtidos com o algoritmo utilizado neste trabalho mantém diferenças inferiores a 1.4% no caso do esquema exponencial e inferiores a 1.2% no caso do esquema QUICK.

5.5 Conclusões

Foi mostrado neste capítulo, através de gráficos que apresentam perfis de velocidade para baixos números de Reynolds, a evolução destes perfis com o refinamento e sua comparação com dados experimentais, além de tabelas que mostram o esforço computacional requerido pelos

quatro esquemas de discretização utilizados neste trabalho; os que se mostraram mais confiáveis e acurados para o problema em estudo foram os esquemas QUICK e exponencial.

Também foi mostrado que o algoritmo utilizado neste trabalho conserva o fluxo de massa, mantendo um valor constante de 0.5, este valor foi calculado em todos os planos determinados pelos pontos nodais. Além disso, foram apresentadas tabelas que mostram os fluxos de massa, calculados utilizando a regra do trapézio, em vários planos dentro do canal, para os diferentes números de Reynolds estudados. Estes resultados são importantes porque eles mostram que em todos os dados apresentados neste trabalho existe conservação do fluxo de massa, tanto com o esquema exponencial como com o esquema QUICK. O que não acontece com os dados utilizados como referência que apresentam diferenças de até 10% nos fluxos de massa. Esta análise garante ainda mais a confiabilidade dos resultados obtidos com o algoritmo utilizado neste trabalho e aponta erro experimental nos dados utilizados como referência.

De qualquer maneira existem diferenças entre os resultados obtidos com o esquema exponencial e aqueles obtidos com o esquema QUICK, estas diferenças se acentuam no plano de contração e ficam mais marcadas a medida que aumenta o número de Reynolds.

Ao analisarmos os gráficos que apresentam a evolução do perfil de velocidade com o refinamento, podemos observar que utilizando o esquema QUICK obtemos perfis de velocidade praticamente coincidentes para as malhas 40×80 e 80×160 em todos os planos do canal considerados, exceto no plano de contração onde, como já foi dito, ocorrem as maiores mudanças no escoamento; isto não ocorre para o caso do esquema exponencial, existindo diferenças dos perfis de velocidade ao utilizarmos malhas 40×80 e 80×160 em todos os planos do canal considerados.

Baseados nos resultados obtidos para o problema da cavidade quadrada no capítulo 4, assim como nos gráficos que apresentam a evolução do perfil de velocidade com o refinamento para o problema da contração, acreditamos que os resultados obtidos com o esquema QUICK são mais acurados que aqueles obtidos com o esquema exponencial. Como a região de entrada de um canal

é uma região em que acontecem grandes mudanças no escoamento, o esquema exponencial não seria suficientemente sensível para conseguir captar estas mudanças. Isto fica mais claro quando comparamos os perfis de velocidade obtidos com ambos os esquemas no plano de contração.

O plano de contração é o ponto do canal em que encontramos as maiores mudanças no escoamento, é neste local onde são mais marcadas as diferenças entre os esquemas Exponencial e QUICK utilizados no algoritmo desenvolvido neste trabalho, assim como também encontramos as maiores diferenças entre os dados obtidos pelo algoritmo e aqueles utilizados como referência.

Podemos observar nos gráficos que mostram os perfis de velocidade para os esquemas exponencial e QUICK comparados com os dados obtidos por DURST et al. (Fig. 5.23 à 5.36), que no plano de contração o perfil de velocidade obtido com o esquema QUICK apresenta saliências na parte superior do canal, próximo à parede, para $Re = 208$ e $Re = 426$ e tornando-se achatado na parte central do canal. Esta diferença no perfil de velocidade para o plano de contração não é perceptível com o esquema exponencial, nem com os dados experimentais usados como referência. PANTON (1984) descreve este fenômeno comentando que deveríamos obter um perfil de velocidade achatado no centro do canal e com protuberâncias de velocidades maiores nas regiões próximas à parede. Ele explica este comportamento do fluido baseado no estudo das linhas de corrente e a pressão exercida sobre cada partícula nesta região do escoamento. Quando o fluido passa pelo plano de contração as linhas de corrente se tornam curvadas, assim para forçar as partículas a seguir este novo caminho deve existir uma força de pressão normal. A pressão de fora da linha de corrente em direção à linha de centro é maior que a pressão de dentro da linha de corrente em direção à parede. Como existe uma relação inversa entre velocidade e pressão, deveríamos obter velocidades maiores em regiões próximas à parede e menores na região central do canal. SUN e ZHU (2000) obtiveram resultados para o problema da contração plana de razão 2:1 e 4:1, utilizando o método de quadratura diferencial (DQM), eles apresentam resultados para números de Reynolds 0.1, 10 e 1000 e concluem que o perfil de velocidades no plano de contração é levemente diferente ao do escoamento plenamente desenvolvido no caso de baixo número de Reynolds, mas é quase chato para o caso de números de Reynolds mais altos. Eles comentam que existem concavidades nos perfis de velocidades

obtidos para o plano de contração para altos números de Reynolds e mostram nos gráficos que estas concavidades seriam mais acentuadas no caso de aumentar a razão de contração.

A pesar de que os resultados obtidos para os perfis de velocidade com o esquema QUICK apresentam claramente uma tendência a evoluir para os perfis descritos por PANTON (1984) e SUN e ZHU (2000), podemos ver que o perfil de velocidade no plano de contração deveria ser mais achatado na parte central tendo as maiores velocidades numa região perto da parede. Isto pode ser devido ao fato de estarmos utilizando uma malha regular que impede ter um refinamento maior nas regiões em que acontecem as maiores mudanças. Outro fator que pode afetar o resultado é a utilização de um perfil parabólico como condição de contorno de entrada, o que afetaria os perfis de velocidade em regiões próximas à entrada sendo necessário utilizar uma distância maior entre a entrada e o plano de contração para o uso desta condição de contorno.

No capítulo 6 será estudada a região de entrada em canais planos a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado um caso de contração plana com razão de contração infinita.

Em vista dos resultados apresentados neste capítulo, para o caso da contração plana de razão infinita será dada uma particular atenção às condições de contorno de entrada, já que acreditamos que elas são de muita importância na obtenção de resultados acurados. Será utilizado apenas o esquema de discretização QUICK, porque consideramos que os dados obtidos com este esquema são confiáveis e mais acurados.

Capítulo 6

Contração Plana com Razão Infinita

6.1 Introdução

No capítulo anterior foi estudado o problema da contração plana com razão de contração finita, mais especificamente, foram apresentados alguns resultados para o caso em que a razão de contração é 2:1. Neste capítulo, o problema em estudo será o escoamento na região de entrada de um canal a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado um caso da contração plana com razão infinita.

Os testes numéricos foram realizados utilizando basicamente o mesmo algoritmo que no caso da contração plana com razão de contração finita. A única diferença reside nas condições de contorno utilizadas para a região de entrada do canal. Para evitar a necessidade de um domínio computacional muito grande antes da contração, os valores utilizados no contorno são fornecidos pela solução do escoamento de Jeffery-Hamel, para o caso de um canal convergente com um semi-ângulo de inclinação das paredes de 90° .

6.2 Escoamento de Jeffery-Hamel

O escoamento de Jeffery-Hamel faz parte do pequeno conjunto de soluções exatas conhecidas das equações de Navier-Stokes. O problema em questão é o escoamento viscoso laminar bidimensional de um fluido entre duas placas planas não paralelas, sob a hipótese de que todo escoamento é direcionado radialmente em relação à interseção das paredes, que é admitida como fonte ou sorvedouro pontual. Nas paredes é admitida a condição usual de não deslizamento.

É conveniente ressaltar que além de ser uma solução matemática, o escoamento de Jeffery-Hamel é também uma solução fisicamente aceitável exceto na vizinhança do ponto de singularidade. No escoamento convergente, a solução de Jeffery-Hamel leva a um escoamento radial uniforme no centro e a uma camada limite junto às paredes. No caso divergente, a direcionalidade admitida poderia ser considerada uma hipótese arbitrária que excluiria, por exemplo, alguns escoamentos recirculantes observados em difusores reais sob certas condições. Mesmo assim, esta recirculação é detectada de alguma forma, apesar da direcionalidade imposta, como comenta Figueiredo (1988).

O estudo foi iniciado por JEFFERY (1915) e separadamente por HAMEL (1916), estes trabalhos serviram como ponto de partida para outros autores que pesquisaram aspectos específicos do escoamento. Entre eles destacam-se ROSENHEAD (1940) e MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953).

ROSENHEAD (1940) demonstrou que para cada par de valores de ângulo entre as paredes e número de Reynolds o número de soluções matematicamente possíveis é infinito, estas soluções podem ser ou não simétricas com relação à linha central do canal, e podem envolver escoamento puramente convergente, puramente divergente ou uma combinação de ambos os tipos de escoamentos. As soluções são dadas em termos de funções Weierstrassianas para propósitos de simplicidade matemática, mas recomenda usar funções elípticas de Jacobi para propósitos de cálculo numérico.

MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953) descrevem as soluções do escoamento em termos das funções elípticas de Jacobi. São dadas soluções numéricas para o caso em que o ângulo entre as paredes é de 10° , estas soluções são citadas como exemplo na maioria dos livros textos, entre eles SCHLICHTING (1960), HANSEN (1964), BATCHELOR (1967) e WHITE (1974). Eles também obtiveram a distribuição de temperatura neste escoamento para casos em que as paredes são mantidas a temperatura constante.

FRAENKEL (1962) discute a extensão das soluções do escoamento de Jeffery-Hamel para o caso em que as paredes têm uma pequena curvatura.

MARSHALL (1979) apresenta um sumário de fórmulas para perfis simétricos expressos em termos das funções elípticas de Jacobi. É apresentado também um conjunto de soluções para o caso em que o ângulo entre as paredes é de 60° .

A figura 6.1 mostra a configuração do escoamento de Jeffery-Hamel para o caso de canal convergente. O ângulo entre as paredes é 2α . O sistema de coordenadas utilizado para esta configuração é o das coordenadas cilíndricas r, θ e z .

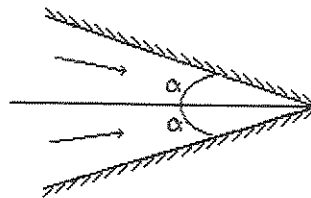


Fig. 6.1 Geometria do escoamento de Jeffery-Hamel

Como estamos supondo um escoamento direcionado radialmente em relação à interseção das paredes, temos que das três componentes de velocidade somente a componente radial v_r será diferente de zero, e esta componente de velocidade dependerá apenas de r e θ , assim a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \quad (6.1)$$

esta equação nos diz que rv_r é independente de r ; assim, a equação da continuidade só será satisfeita se:

$$rv_r = F(\theta) \quad (6.2)$$

Por outro lado, a equação de conservação do momento radial reduz-se a:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (6.3)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.4)$$

e a equação de conservação do momento tangencial a:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (6.5)$$

As equações (6.3) e (6.5) podem ser reduzidas a uma única equação, formando derivadas cruzadas de p ; isto é, derivando a equação do momento radial em relação a θ e a equação do

momento tangencial em relação a r . Subtraindo a equação resultante da derivação de (6.5) da equação resultante de (6.3) eliminamos o termo de pressão e obtemos assim:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = v \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) - v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (6.6)$$

Substituindo agora a equação (6.2) na equação (6.6), podemos obter:

$$v F'''(\theta) + 4v F'(\theta) + 2F(\theta) F'(\theta) = 0 \quad (6.7)$$

onde as (') indicam diferenciação em relação a θ . Desta forma, as equações diferenciais parciais de conservação de massa e momento foram reduzidas a uma única equação diferencial ordinária não linear de terceira ordem cujas soluções devem satisfazer o problema físico desde que sejam estabelecidas as condições de contorno apropriadas. Neste caso temos que v_r deve-se anular nas paredes (condição de não deslizamento), isto é para $\theta = \pm \alpha$, devemos ter $F(\theta) = 0$.

Integrando a equação (6.7) temos que:

$$F^2(\theta) + 4v F(\theta) + v F''(\theta) + K = 0 \quad (6.8)$$

A solução da equação (6.8) é dada por MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953) em termos das funções elípticas de Jacobi. Cabe destacar aqui que a equação (6.8) descreve dois tipos diferentes de escoamentos. O primeiro tipo é o escoamento em canais divergentes (velocidades positivas) no qual é suposta a existência de uma fonte na origem do canal. O segundo tipo é o escoamento em canais convergentes (velocidades negativas), neste caso é admitida a existência de um sorvedouro na origem do canal. As soluções para cada um dos tipos de escoamento são de naturezas muito diferentes.

Para o presente trabalho serão consideradas apenas soluções do tipo puramente convergente (BATCHELOR, 1967), isto é, em todos os pontos do canal as velocidades, assim como o número

de Reynolds, devem ser negativos e o perfil de velocidades deve ter apenas um máximo no canal. Além disso serão admitidas somente distribuições de velocidades simétricas com relação à linha central do canal ($\theta = 0$).

Desta forma, podemos definir

$$F_0 = F(\theta = 0) = v_{\max} r \quad (6.9)$$

Agora introduzimos as variáveis adimensionais

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha}, \quad f(\eta) = \frac{F(\theta)}{F_0} = \frac{v_r}{v_{\max}} \quad (6.10)$$

Assim, podemos escrever uma equação para o fluxo volumétrico:

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} v_r r d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(\theta) d\theta \quad (6.11)$$

Substituindo nesta equação as variáveis adimensionais definidas em (6.10), temos que o fluxo volumétrico pode ser rescrito como:

$$Q = v_{\max} r \alpha \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (6.12)$$

Não existe consenso na literatura sobre a definição do Número de Reynolds, encontramos as seguintes definições:

- GOLDSTEIN (1938) define o número de Reynolds como o produto de r e o valor médio da velocidade, dividido por v ; comenta que para o caso de escoamentos puramente divergentes ou puramente convergentes, pode ser usado o valor máximo da velocidade em lugar do valor

médio.

- MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953), definem o Número de Reynolds como

$$Re_1 = F_0 = \frac{v_r(r,0)r}{\nu} \quad (6.13)$$

- ROSENHEAD (1940) adota uma definição baseada na taxa de fluxo volumétrico através do canal:

$$Re_2 = \frac{Q}{\nu} = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(\theta) d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} v_r r d\theta \quad (6.14)$$

esta definição também é adotada por FRAENKEL (1962).

- BATCHELOR (1967) e WHITE (1974) definem o número de Reynolds como:

$$Re_3 = \frac{\alpha F_0}{\nu} = \frac{\alpha r v_r(r,0)}{\nu} \quad (6.15)$$

- MARSHALL (1979) adota também a definição do BATCHELOR para o número de Reynolds:

$$Re_4 = \alpha F_0 = \frac{\alpha r v_r(r,0)}{\nu} \quad (6.16)$$

e comenta que ele considera que este é um número de Reynolds fisicamente apropriado pois αr representa uma medida de largura do canal.

É conveniente destacar aqui que a definição de F_0 não é a mesma para todos os autores,

pois na hora de definir $F(\theta)$ alguns deles, como MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953), MARSHALL (1979) e ROSENHEAD (1940) incorporam na definição a viscosidade cinemática ν ; BATCHELOR (1967), WHITE (1974) e GOLDSTEIN (1938) utilizam $F(\theta)$ como definido na equação 6.2.

Neste trabalho será adotado o número de Reynolds definido por Batchelor e será denotado como $Re\alpha$. Agora substituímos esta definição e as variáveis adimensionais definidas em (6.10) na equação (6.7), obtendo assim:

$$f'''(\eta) + 4\alpha^2 f'(\eta) + 2Re\alpha f(\eta)f'(\eta) = 0 \quad (6.17)$$

Integrando analiticamente a equação acima obtemos:

$$f'' + Re\alpha f^2 + 4\alpha^2 f = C \quad (6.18)$$

Multiplicando esta equação por f' e integrando novamente, temos

$$\frac{1}{2}f'^2 + \frac{1}{3}Re\alpha f^3 + 2\alpha^2 f^2 = cf + d \quad (6.19)$$

agora usamos as condições de contorno $f(\pm 1) = 0$, $f(0) = 1$ para obter a constante d :

$$d = \frac{Re\alpha}{3} + 2\alpha^2 - c$$

substituindo na equação (6.19) e reorganizando os termos, obtemos

$$f'^2 = (1-f) \left[\frac{2}{3}Re\alpha(f^2 + f) + 4\alpha^2 f + c + \frac{2}{3}Re\alpha + 4\alpha^2 \right] \quad (6.20)$$

Definimos uma nova constante C como

$$C = c + \frac{2}{3} \text{Re} \alpha + 4\alpha^2$$

e desta maneira podemos rescrever a equação (6.20)

$$f'^2 = (1-f) \left[\frac{2}{3} \text{Re} \alpha (f^2 + f) + 4\alpha^2 f + C \right] \quad (6.21)$$

Esta equação pode ser integrada novamente pois as variáveis são separáveis, e desta forma tentar calcular o valor da constante C , mas encontramos integrais que podem ser divergentes.

Existem soluções analíticas aproximadas para o caso especial de altos números de Reynolds, apresentadas por vários autores, entre eles GOLDSTEIN (1938) e BATCHELOR (1967). Será aqui considerado o caso de escoamentos puramente convergentes.

Se Re é muito alto ($\text{Re} \rightarrow -\infty$), com α fixo e $0 \leq \eta \leq 1$, pode ser usado um valor assintótico para a constante C :

$$C = -\frac{4}{3} \alpha \text{Re}$$

como uma aproximação (válida para altos números de Reynolds). Desta forma as integrais encontradas não são divergentes. Substituindo este valor aproximado de C na equação (6.21) podemos obter:

$$f'^2 = (1-f)^2 \left(-\frac{2}{3} \text{Re} \alpha \right) (f+2) \quad (6.22)$$

integrando esta equação, temos

$$1 - \eta = \left(-\frac{2}{3} \operatorname{Re} \alpha \right)^{-1/2} \int_0^f \frac{df}{(1-f)(f+2)^{1/2}} \quad (6.23)$$

Esta integral pode ser calculada usando mudança de variáveis e desta forma obtemos uma expressão para a velocidade, que chamaremos de solução aproximada para altos números de Reynolds.

$$\frac{v_r}{v_{\max}} = \frac{F}{F_0} = f = 3 \tanh^2 \left[(1 - \eta) \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \alpha \right)^{1/2} + \operatorname{arctanh} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \right] - 2 \quad (6.24)$$

Agora, denotando por

$$C_1 = \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \alpha \right)^{1/2}, \quad C_2 = \operatorname{arctanh} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2}$$

temos que f pode ser escrita como:

$$f = 3 \tanh^2 [C_1(1 - \eta) + C_2] - 2 \quad (6.25)$$

Desta equação podemos obter expressões para a primeira e a segunda derivadas de f :

$$f' = -6C_1 \{ \tanh [C_1(1 - \eta) + C_2] - \tanh^3 [C_1(1 - \eta) + C_2] \} \quad (6.26)$$

$$f'' = 6C_1^2 \{ 1 - 4 \tanh^2 [C_1(1 - \eta) + C_2] + 3 \tanh^4 [C_1(1 - \eta) + C_2] \} \quad (6.27)$$

estas expressões serão utilizadas no algoritmo que obtém soluções do escoamento de Jeffery-Hamel.

6.2.1 Exemplos de Soluções do Escoamento de Jeffery-Hamel

Para obter soluções do escoamento de Jeffery-Hamel foi montado um algoritmo que utiliza basicamente duas formas de resolução: A primeira resolve, para baixos e médios números de Reynolds, a equação 6.17 com as condições iniciais $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 0$, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, corrigindo o valor inicial da segunda derivada por meio do método de Newton-Raphson. A segunda forma de solução utiliza a equação aproximada 6.24, que é adequada para altos números de Reynolds.

Foram obtidos vários conjuntos de resultados, somente para o caso de canal convergente, variando o ângulo de inclinação das paredes e o número de Reynolds, utilizando ambas as formas de resolução, comparando os resultados obtidos para tentar achar o limite de cada uma delas.

No caso em que o método de Runge-Kutta (incorporando o método de Newton-Raphson) foi utilizado, foi obtido um primeiro conjunto de resultados impondo como valor inicial $f''(0) = 0$ para o método de Newton-Raphson. Obtidas soluções convergidas para alguns números de Reynolds, foi observado que a medida que o semi-ângulo de inclinação das placas (α) aumentava, diminuía os números de Reynolds para os quais eram obtidas soluções convergidas. Por exemplo: para $\alpha = 30^\circ$ foram obtidas soluções para números de Reynolds até $Re = 700$ ($Re\alpha = 366.51$), para $\alpha = 60^\circ$ foram obtidas soluções até $Re = 150$ ($Re\alpha = 157.08$) e para $\alpha = 90^\circ$ foram obtidas soluções até $Re = 70$ ($Re\alpha = 109.95$). Algumas das soluções obtidas para estes ângulos são mostradas nas figuras 6.2 a 6.4.

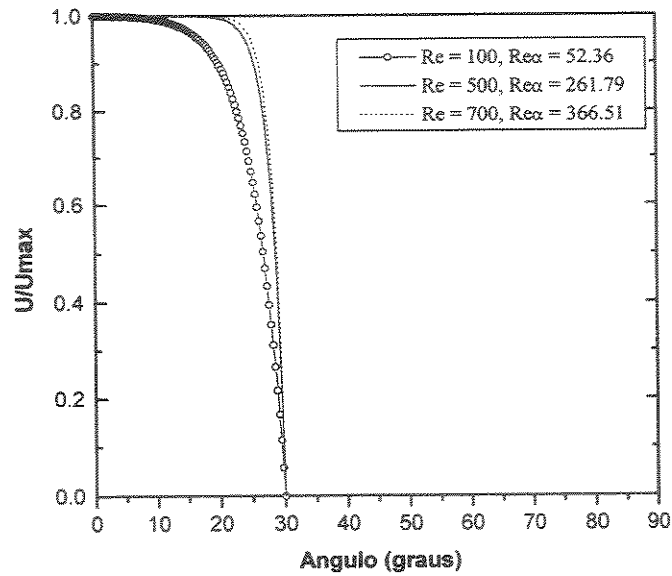


Fig. 6.2 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 30^\circ$.
Runge-Kutta / Newton Raphson - $f''(0) = 0$.

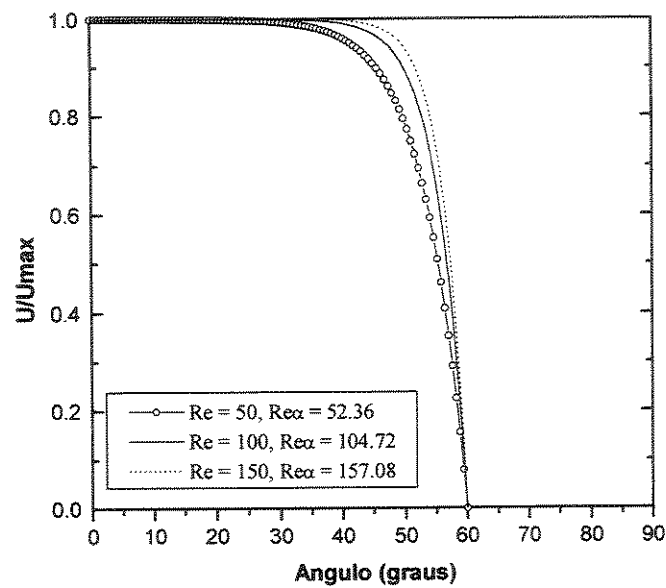


Fig. 6.3 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 60^\circ$.
Runge-Kutta / Newton-Raphson - $f''(0) = 0$.

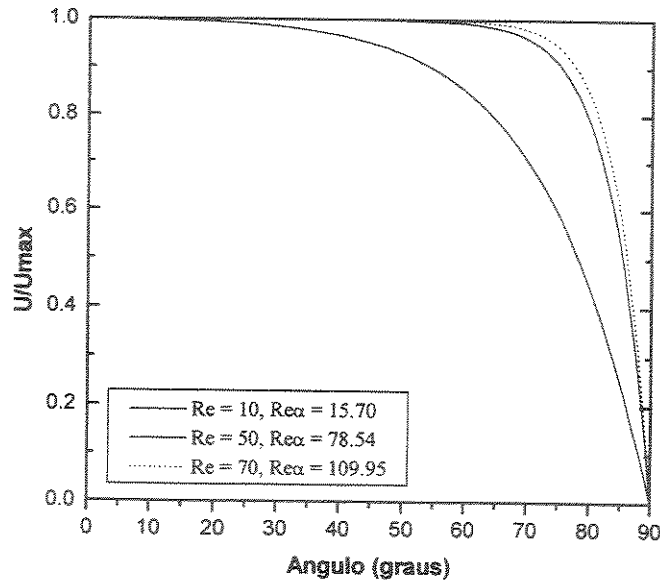


Fig. 6.4 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$.
Runge-Kutta / Newton-Raphson - $f''(0) = 0$.

Pode-se observar, nas figuras apresentadas acima, que o aumento do número de Reynolds produz um achatamento do perfil no centro do canal com um forte gradiente perto das paredes. Este comportamento da solução é descrito amplamente na literatura, SCHLICHTING (1968), HANSEN (1964) e MILLSAPS e POHLHAUSEN (1953), por exemplo, apresentam perfis de velocidade para um semi-ângulo de 5° e diferentes valores de números de Reynolds; MARSHALL (1979) apresenta perfis de velocidade para um semi-ângulo de 30° para vários números de Reynolds.

Para tentar contornar a dificuldade descrita anteriormente e obter soluções para números de Reynolds mais altos foi obtido um segundo conjunto de dados utilizando o método de Runge-Kutta, desta vez o valor inicial para $f''(0)$, foi calculado utilizando a solução aproximada para altos números de Reynolds. Com esta mudança os números de Reynolds para os quais foram obtidas soluções convergidas aumentaram. Por exemplo: para $\alpha = 30^\circ$ foram obtidas soluções para números de Reynolds até $Re = 1400$, para $\alpha = 60^\circ$ foram obtidas soluções até $Re = 300$ e para $\alpha = 90^\circ$ soluções foram obtidas até $Re = 160$.

A segunda forma utilizada para obter soluções do escoamento de Jeffery-Hamel utiliza apenas a solução aproximada para altos números de Reynolds (equação 6.24), assim temos um terceiro conjunto de resultados. Foi observado que desta vez não existiam as limitações para o número de Reynolds como nos casos anteriores. Para todos os ângulos estudados foram obtidas soluções para números de Reynolds até $Re = 5000$. Como ilustração é apresentado um gráfico para $Re = 1000$, $Re = 2000$ e $Re = 5000$, na figura 6.5 a seguir.

A próxima etapa foi comparar as soluções obtidas utilizando a aproximação para altos números de Reynolds e aquelas obtidas utilizando o método de Runge-Kutta com o valor inicial de $f''(0)$ calculado utilizando também a solução aproximada para altos números de Reynolds. Em todos os casos elas foram visualmente coincidentes, como mostram as figuras 6.6, 6.7 e 6.8, onde são comparados os perfis de velocidade obtidos com ambos os métodos para $\alpha = 30^\circ$ e $Re = 1400$, $\alpha = 60^\circ$ e $Re = 300$, $\alpha = 90^\circ$ e $Re = 160$, respectivamente.

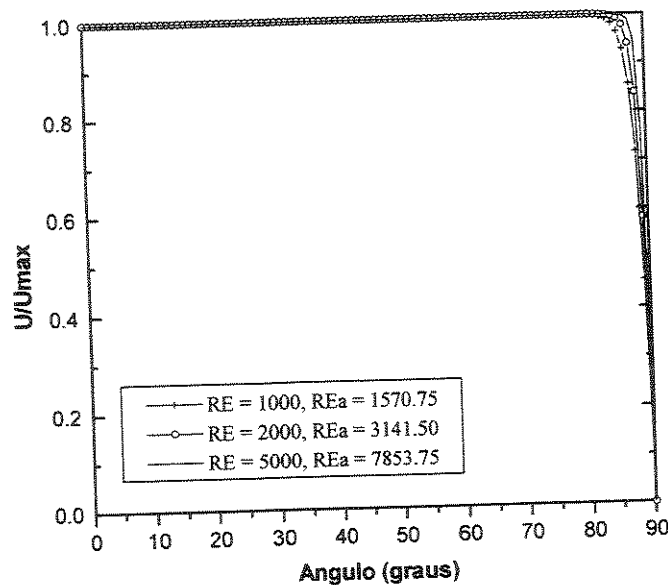


Fig. 6.5 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$.
Solução Aproximada para Altos Números de Reynolds.

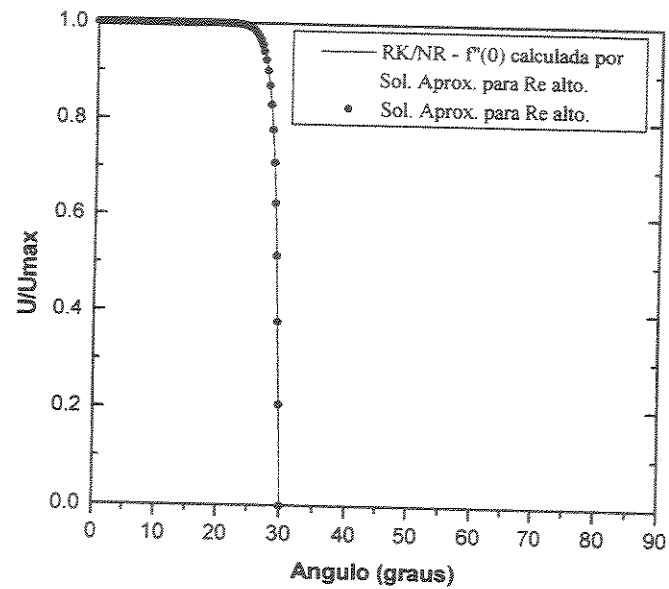


Fig. 6.6 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 30^\circ$. $Re = 1400$.

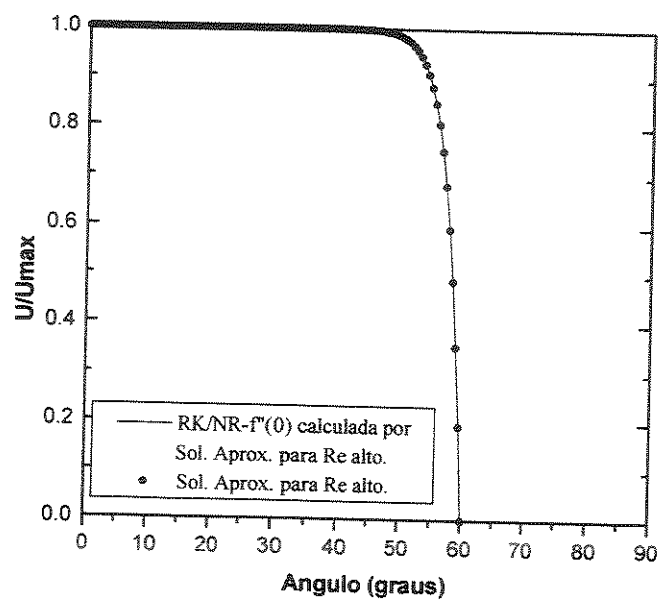


Fig. 6.7 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 60^\circ$. $Re = 300$.

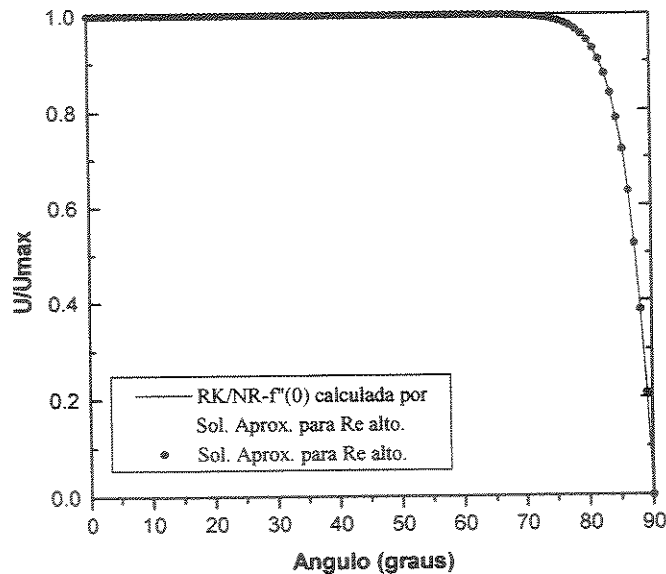


Fig. 6.8 Soluções para o escoamento de Jeffery-Hamel. $\alpha = 90^\circ$. $Re = 160$

Esta coincidência das soluções analítica aproximada e numérica indica que a solução analítica aproximada pode ser usada com segurança para os casos de números de Reynolds altos e a solução numérica pode ser usada com segurança para obter soluções para números de Reynolds mais baixos que aqueles para os quais existe uma solução analítica aproximada.

6.3 Escoamento de Jeffery-Hamel como Condição de Contorno de Entrada

O problema em estudo será o escoamento na região de entrada de um canal a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado como o caso de uma contração plana com razão de contração infinita. Convém destacar aqui que estaremos usando condições de contorno à montante da entrada do canal definidas pelas soluções do escoamento de Jeffery-Hamel, para o caso de um canal convergente com um semi-ângulo de inclinação das paredes de 90° . O fato de utilizarmos uma solução exata das equações de Navier-Stokes para obter os valores de contorno é muito importante porque desta forma podemos diminuir a região utilizada como domínio computacional, reduzindo o número de pontos nodais e o tempo de CPU, sem perda de acuidade.

NAYLOR et al. (1991), utilizaram soluções do escoamento de Jeffery-Hamel como condição de contorno na região de entrada para o problema de convecção natural entre placas verticais isotérmicas. Os estudos numéricos foram feitos usando um código de elementos finitos (FIDAP), utilizaram uma malha cartesiana na região interna do canal e na região de entrada é utilizada uma malha diferente que é definida pelas coordenadas polares. É utilizado um método elíptico de resolução das equações e é feita uma comparação dos resultados obtidos desta forma com aqueles obtidos para métodos parabólicos. Reproduziram a solução de camada limite para o canal vertical isotérmico com o objetivo de poder fazer comparações detalhadas com a solução elíptica, tentando investigar as limitações das soluções tipo camada limite. Apresentam gráficos que comparam perfis de velocidade e perfis de temperatura para números de Rayleigh 2,917 e 291,7. Em ambas figuras os perfis parabólicos diferem substancialmente dos perfis elípticos perto da entrada. Estas diferenças diminuem quando o escoamento se aproxima da saída. Na saída, tanto os perfis de velocidade como os perfis de temperatura são muito próximos para ambos os métodos, o que mostra como a solução parabólica é insensível às condições de contorno de entrada. É apresentado também um gráfico que mostra a distribuição de pressão para vários valores de números de Rayleigh. Para números de Rayleigh baixos, as soluções parabólicas e elípticas estão muito próximas através de todo o canal. Para número de Rayleigh mais altos existe uma diferença muito grande perto da entrada do canal que é devida aos efeitos do escoamento de entrada. Para altos números de Rayleigh a separação do fluido na entrada tem um efeito “venturi” sobre o escoamento principal, causando uma redução local na pressão. Como a solução parabólica não detecta separação do escoamento de entrada, ela prediz altas pressões. Os autores concluem desta comparação que uma solução totalmente elíptica é necessária para conseguir quantidades locais acuradas perto da entrada do canal.

Convém esclarecer que, neste trabalho, apesar de estar utilizando a solução analítica do escoamento de Jeffery-Hamel, obtida em coordenadas polares, para a obtenção das soluções numéricas continua-se empregando uma malha cartesiana. Assim, temos uma abordagem mais simples que aquela utilizada por NAYLOR et al., pois é usado um só tipo de malha, enquanto que NAYLOR et al. usam uma malha retangular dentro do canal e uma malha curvada na região de entrada.

6.3.1 Geometria e Condições de Contorno

A figura 6.9 mostra a geometria e a notação utilizada para os testes numéricos realizados no caso da contração plana com razão de contração infinita

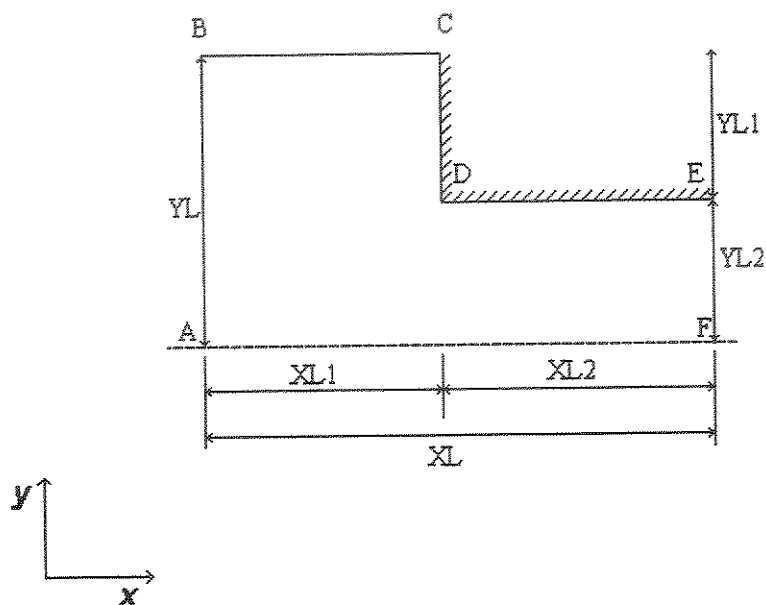


Fig. 6.9 Geometria para o problema da contração plana com razão infinita

onde $XL1 = XL2 = 0.015m$, $YL1 = YL2 = 0.0025m$, $XL = XL1 + X2$ e $YL = YL1 + YL2$. Todos os dados foram adimensionalizados utilizando os seguintes dados característicos de comprimento e velocidade:

$$L = 2 * YL2, \quad U_0 = u_{\max}$$

onde u_{max} é a velocidade máxima para o escoamento de Jeffery-Hamel, no plano central do canal na seção de entrada.

Assim, o plano de contração é localizado em $x = 0$., as seções de entrada e saída se

encontram nos planos $x = -3$. e $x = 3$., respectivamente.

As condições de contorno utilizadas pelo algoritmo foram

- paredes (linhas CD, DE): condição de não deslizamento e parede impermeável

$$u = 0, v = 0$$

- linha de simetria (linha AF): derivada nula para a componente de velocidade u e velocidade especificada nula para a componente de velocidade v

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0$$

- seção de saída (linha EF): escoamento plenamente desenvolvido

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

- seção de entrada (linhas AB, BC): perfil de velocidades obtido a partir da solução do escoamento de Jeffery-Hamel para um semi-ângulo de inclinação das placas de $\alpha = 90^\circ$.

Foi utilizada apenas um tipo de condição inicial, de tal maneira a manter constante o fluxo Q em todo o domínio. Esta condição já tinha se mostrado mais eficiente no caso da contração plana com razão finita, tanto em termos de acuidade de resultados como de economia de tempo computacional.

6.3.2 Resultados e Discussão

O algoritmo utilizado para os testes numéricos é o mesmo que no caso da contração plana

com razão de contração finita. O esquema de discretização utilizado é o quadrático a montante (QUICK). Foram obtidos resultados para números de Reynolds 100, 200 e 400. Em todos os casos foram utilizadas malhas regulares de 20×40 , 40×80 e 80×160 pontos nodais.

Serão apresentados gráficos que mostram a evolução dos perfis de velocidade com o refinamento e também serão comparados os resultados obtidos com o esquema QUICK com resultados obtidos com o esquema exponencial em planos próximos ao plano de contração.

6.3.2.1 Evolução com o Refinamento

As figuras 6.10 a 6.27 mostram a evolução dos perfis de velocidade, para a componente u , com o refinamento da malha utilizando o esquema QUICK e números de Reynolds 100, 200 e 400. São apresentados resultados nos planos $x = -0.075$, $x = 0$, $x = 0.075$, $x = 0.15$, $x = 0.3$ e $x = 3$.

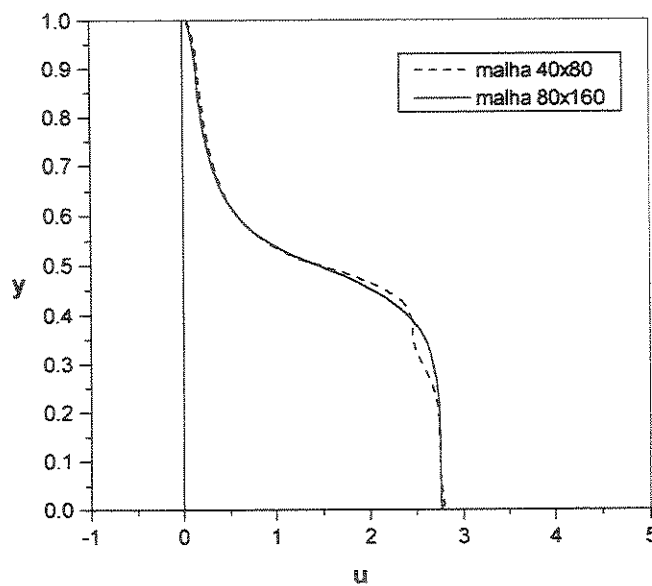


Fig. 6.10 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = -0.075$, $Re = 100$

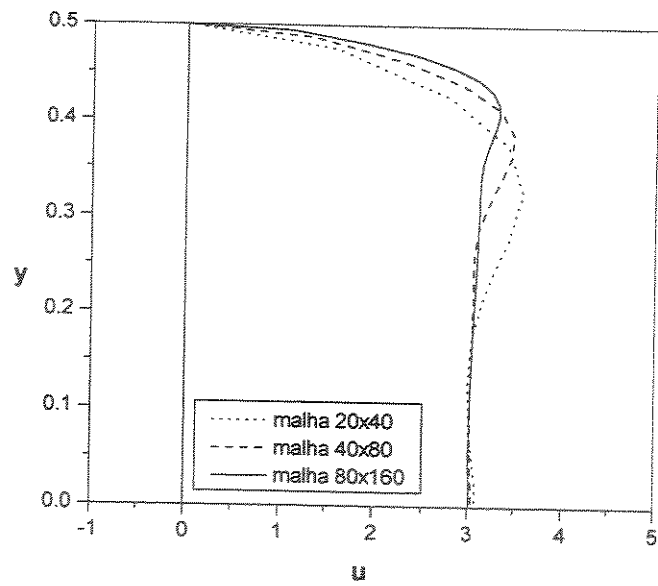


Fig. 6.11 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0$, $Re = 100$

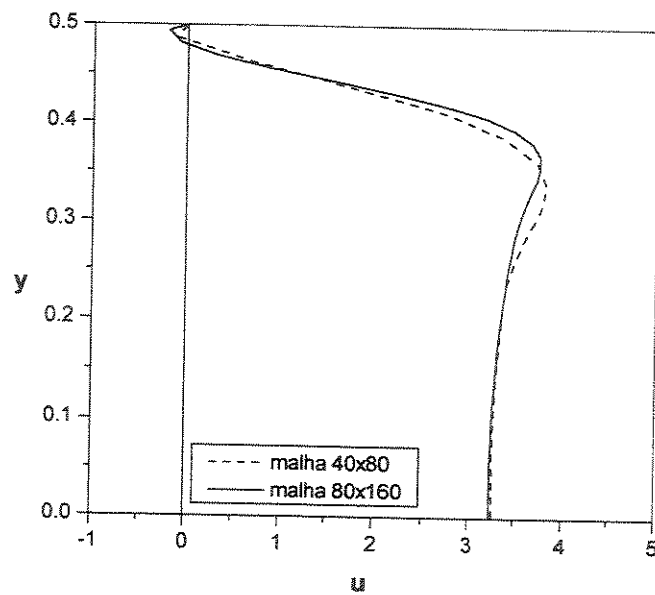


Fig. 6.12 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.075$, $Re = 100$

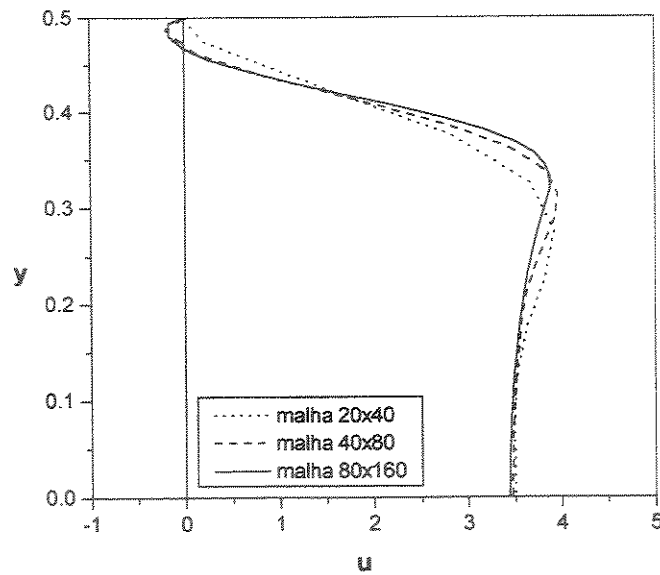


Fig. 6.13 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.15$, $Re = 100$

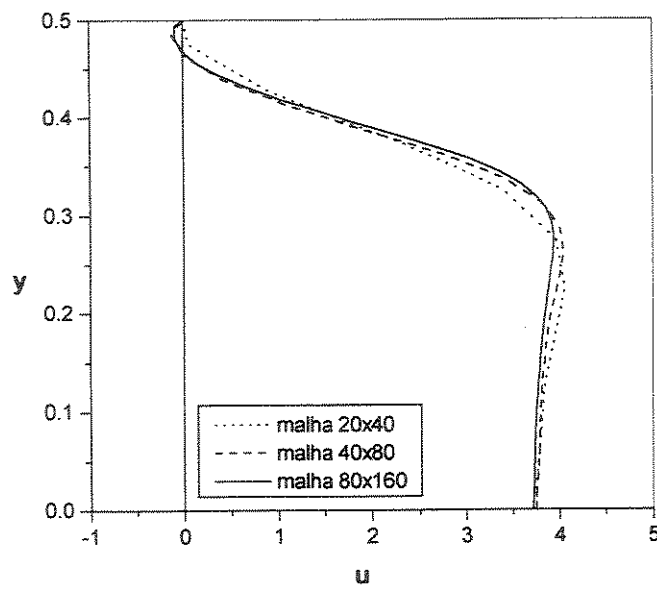


Fig. 6.14 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.3$, $Re = 100$

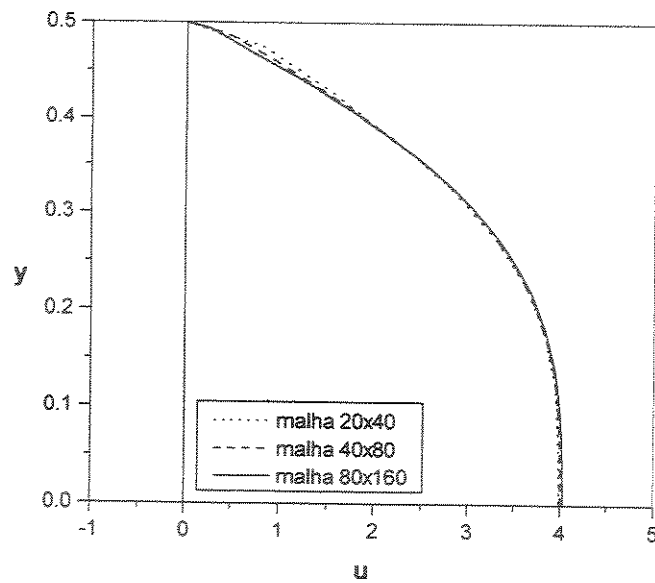


Fig. 6.15 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 3.$, $Re = 100$

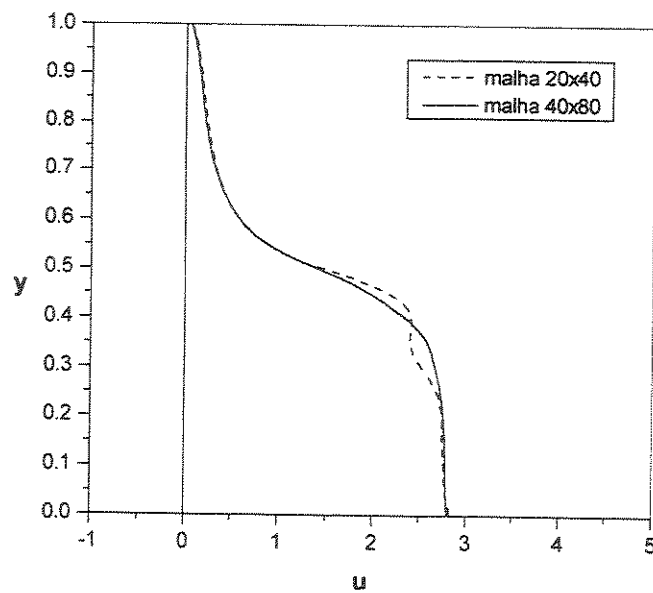


Fig. 6.16 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = -0.075$, $Re = 200$

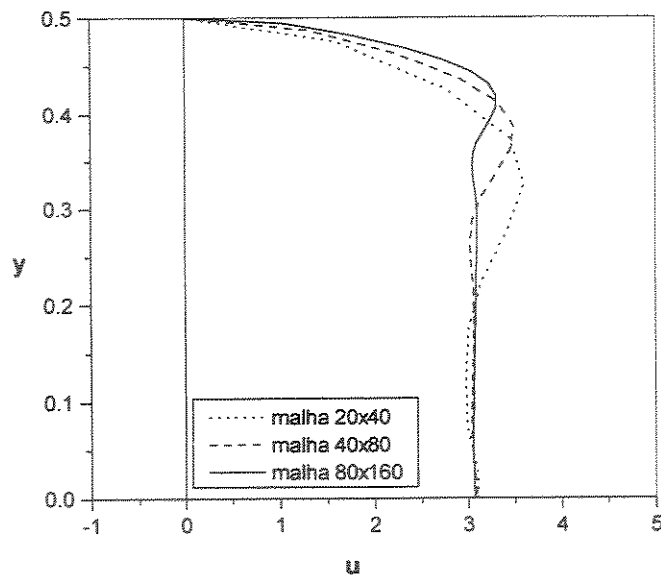


Fig. 6.17 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.$, $Re = 200$

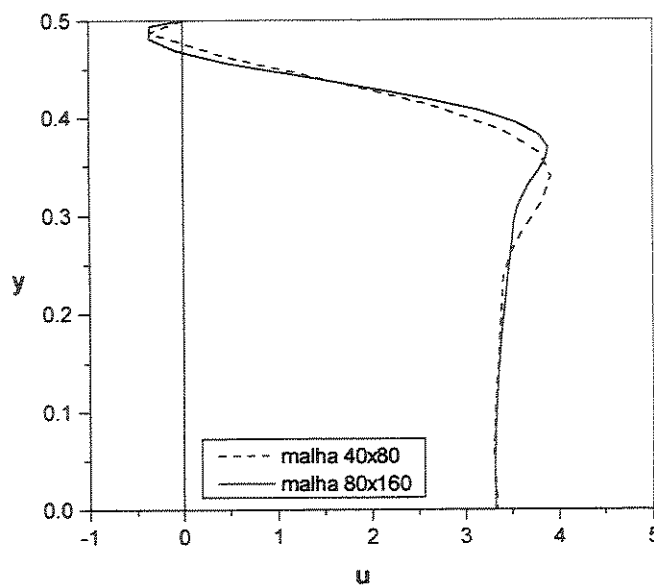


Fig. 6.18 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.075$, $Re = 200$

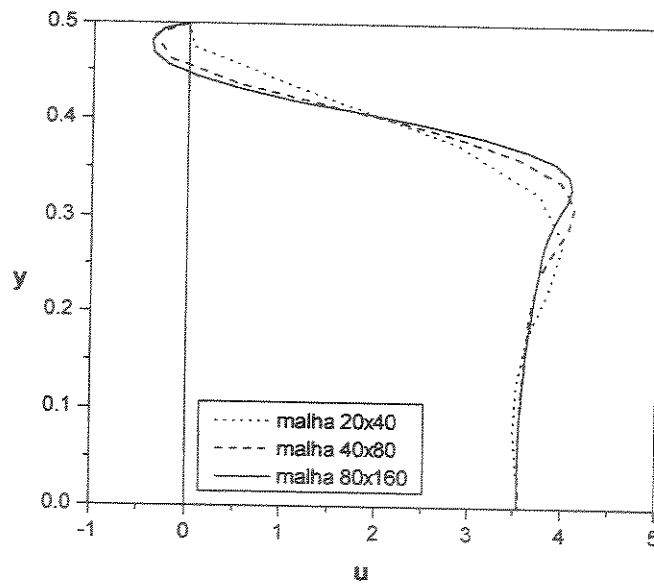


Fig. 6.19 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.15$, $Re = 200$

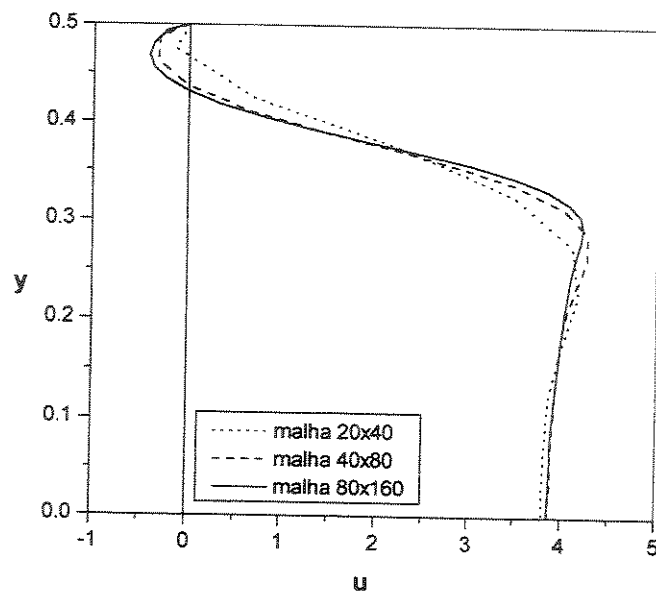


Fig. 6.20 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.3$, $Re = 200$

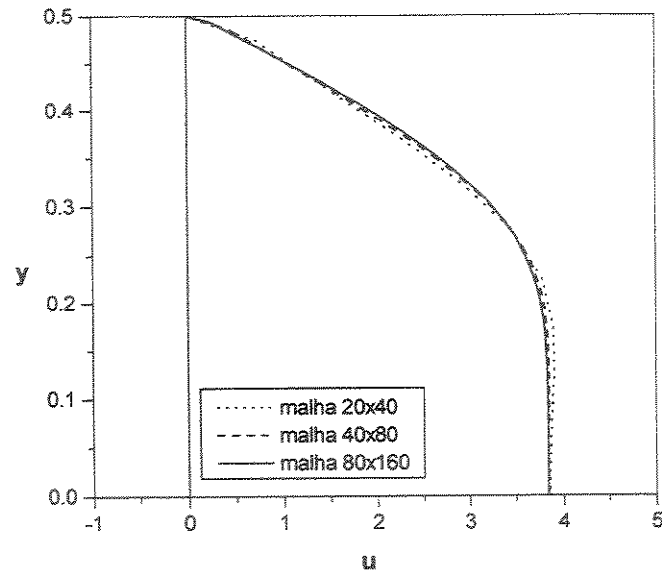


Fig. 6.21 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 3.$, $Re = 200$

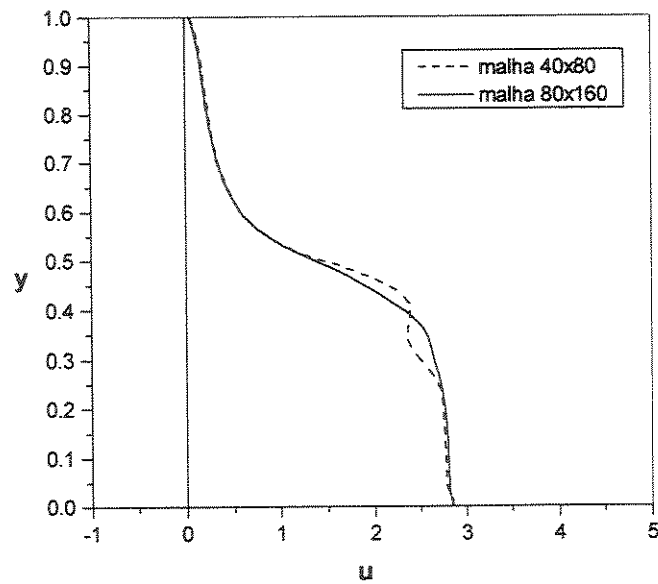


Fig. 6.22 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = -0.075$, $Re = 400$

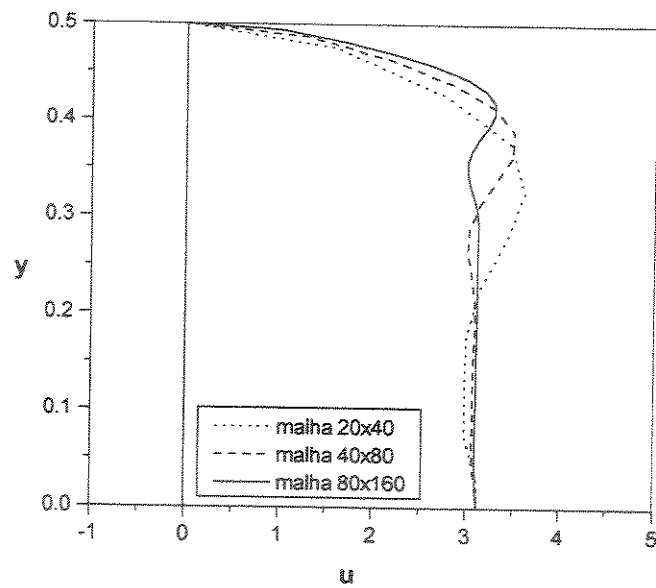


Fig. 6.23 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.$, $Re = 400$

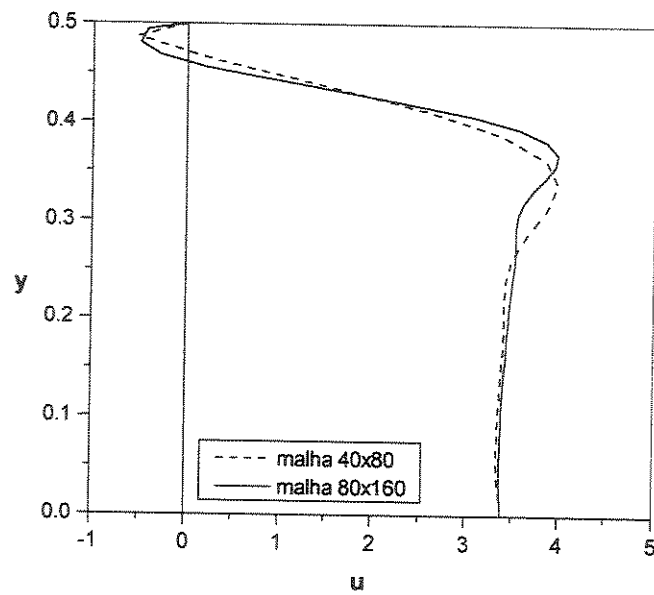


Fig. 6.24 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.075$, $Re = 400$

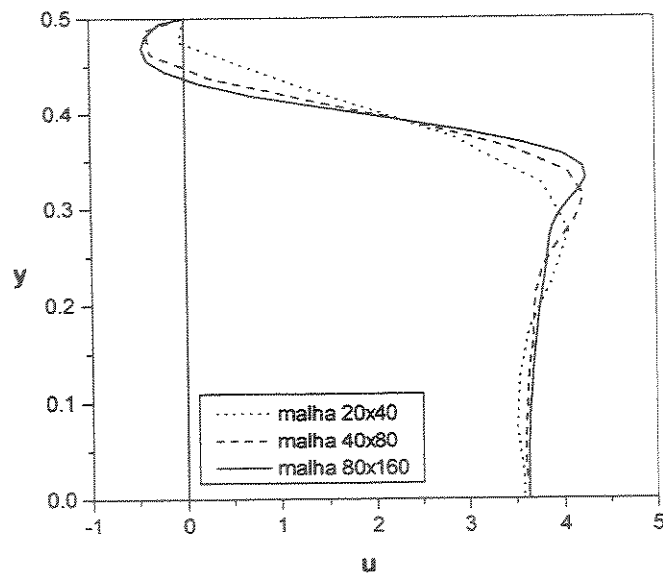


Fig. 6.25 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.15$, $Re = 400$

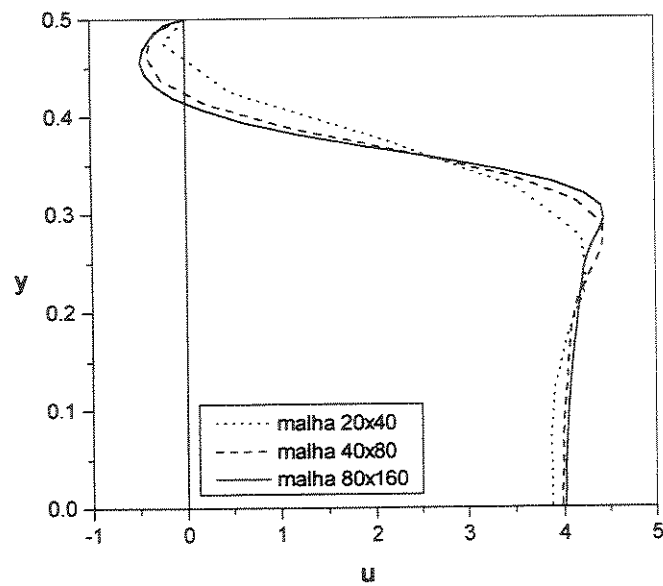


Fig. 6.26 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 0.3$, $Re = 400$

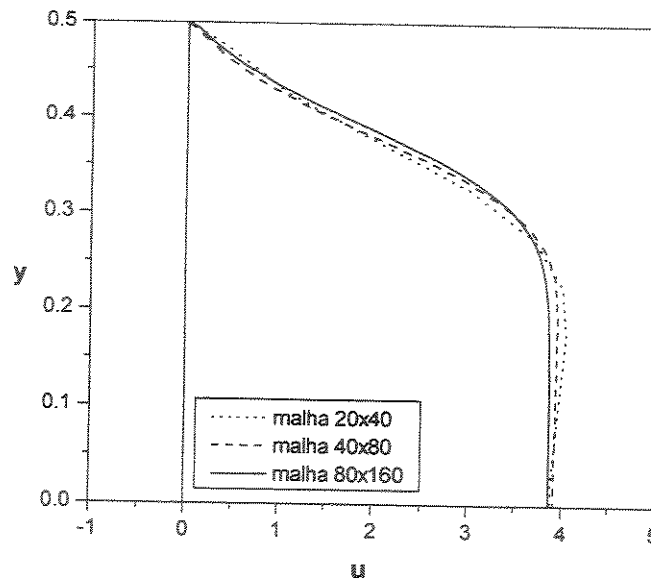


Fig. 6.27 *Evolução do perfil de velocidade com Refinamento, esquema QUICK*
 $x = 3$. $Re = 400$

Podemos observar nos gráficos apresentados anteriormente que o perfil de velocidade sofre uma mudança brusca após o plano de contração, apresentando saliências na parte superior do canal, próximo à parede, e tornando-se achatado na parte central do canal, a partir do plano de contração $x = 0$, e até o plano $x = 0.3$ após a contração. Este comportamento já era esperado em vista dos resultados obtidos no capítulo 5 para o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1. A diferença entre estas duas situações é que os perfis de velocidade obtidos no capítulo 5 para o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1 mostravam apenas uma tendência a perfis achatados com saliências próximas à parede, mas não era obtido claramente como é o caso dos resultados obtidos neste capítulo. O caso da razão de contração infinita mostra mais nitidamente os efeitos referidos por PANTON (1984).

Podemos observar também que encontramos uma região de recirculação após o plano de contração, que pode ser detectada nos gráficos que apresentam os perfis de velocidade para os planos $x = 0.075$, $x = 0.15$ e $x = 0.3$. Esta recirculação é encontrada para todos os números de Reynolds estudados ($Re = 100$, $Re = 200$ e $Re = 400$). Os perfis de velocidade obtidos para o

problema da contração plana com razão de contração finita 2:1 não mostram esta recirculação.

Os gráficos que apresentam os perfis de velocidade no plano $x = 3.$, isto é, o plano de saída do escoamento, mostram que o escoamento não se encontra plenamente desenvolvido e assim o perfil de velocidade utilizado como condição de contorno na saída do escoamento não seria o mais adequado. O então, que a distância utilizada entre o plano de contração e o plano de saída do canal não é suficiente para garantir um perfil plenamente desenvolvido, por esta razão seria necessário fazer novos testes numéricos que forneçam dados que permitam estudar o comprimento de saída do canal que deveria ser utilizado para obter resultados que garantam um perfil plenamente desenvolvido na saída.

6.3.2.2. Comparação do Desempenho dos Esquemas QUICK e Exponencial

Nos capítulos 4 e 5 foi feita uma comparação entre os diferentes esquemas de discretização utilizados neste trabalho quando é usada a forma divergente das Equações de Navier-Stokes, obtendo resultados que indicavam maior acuidade e confiabilidade nos resultados obtidos com o esquema QUICK. O esquema exponencial se mostrou estável e apresentou resultados confiáveis para baixos números de Reynolds. No problema da contração plana com razão de contração finita 2:1 observamos que para regiões afastadas da contração os perfis de velocidade obtidos com os esquemas QUICK e exponencial são muito próximos, enquanto que nas regiões próximas à contração existiam grandes diferenças nos perfis de velocidade obtidos com ambos os esquemas, diferenças que são mais marcadas na parte superior do escoamento, próximo à parede.

Apresentamos nas figuras 6.28 a 6.36 a seguir, uma comparação dos perfis de velocidade obtidos com os esquemas de discretização QUICK e exponencial, nos planos $x = -0.075$, $x = 0.$ e $x = 0.075$, para todos os números de Reynolds estudados, com o objetivo de mostrar como é que cada um destes esquemas detecta as mudanças ocorridas no escoamento nos planos próximos à contração.

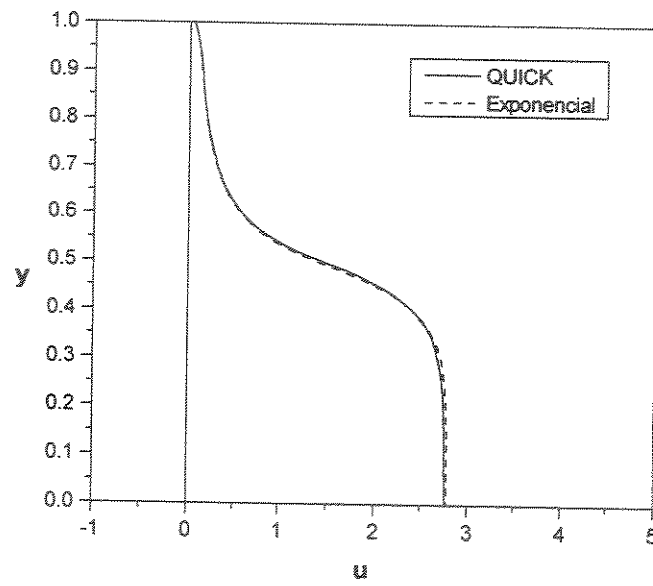


Fig. 6.28 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 100$*

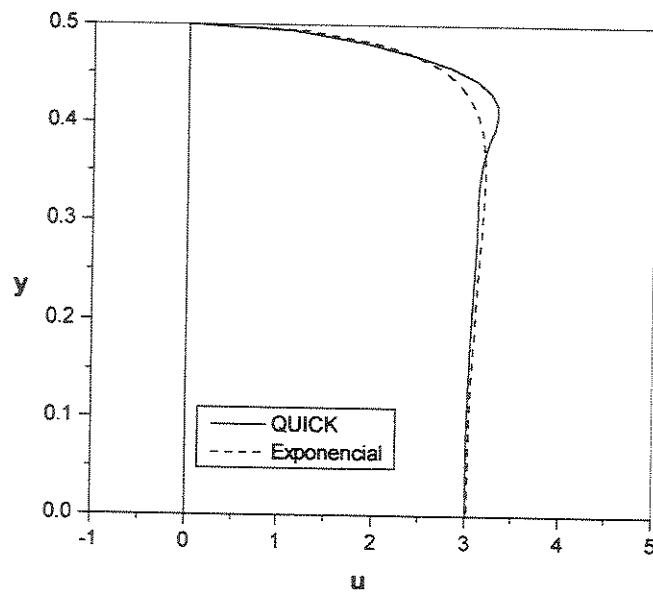


Fig. 6.29 *Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 100$*

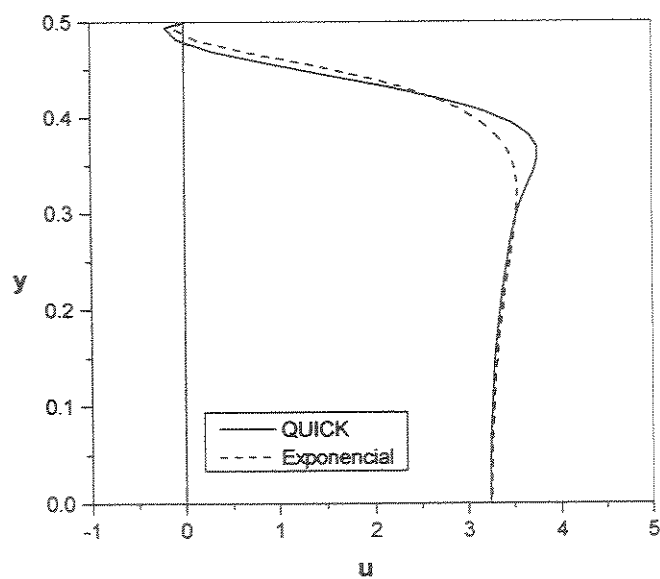


Fig. 6.30 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 100$*

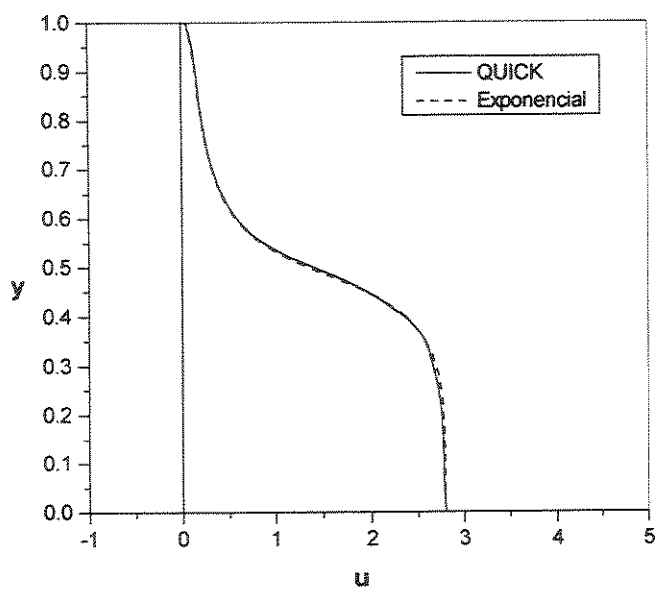


Fig. 6.31 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 200$*

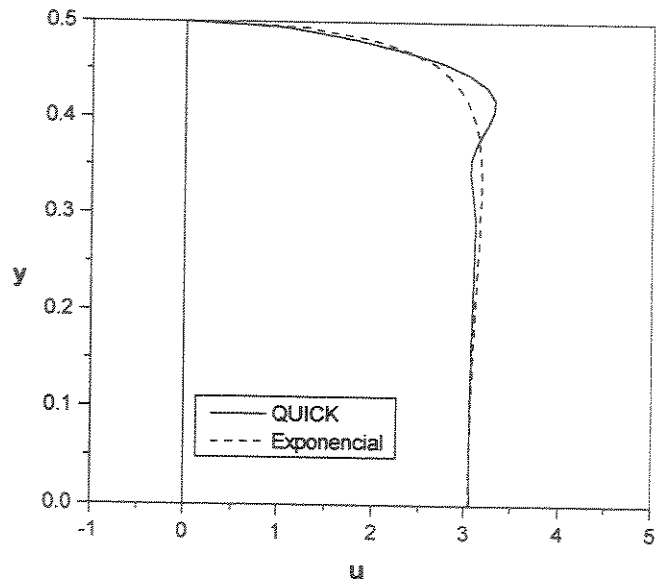


Fig. 6.32 *Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 200$*

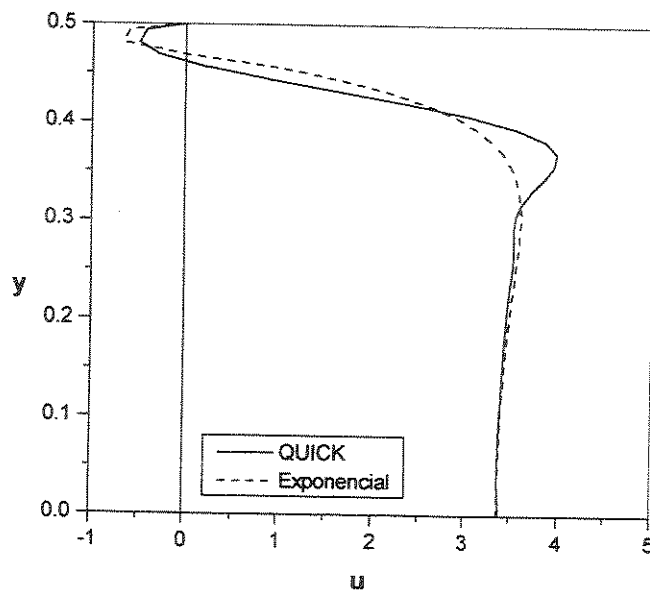


Fig. 6.33 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 200$*

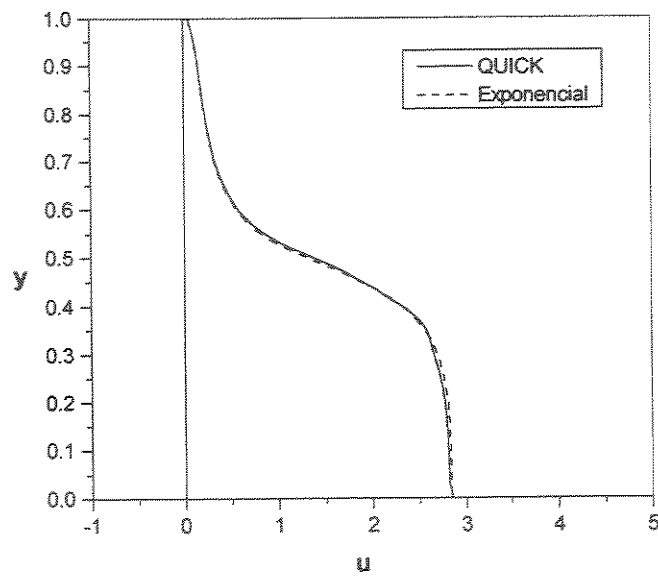


Fig. 6.34 *Perfis de velocidade em $x = -0.075$. $Re = 400$*

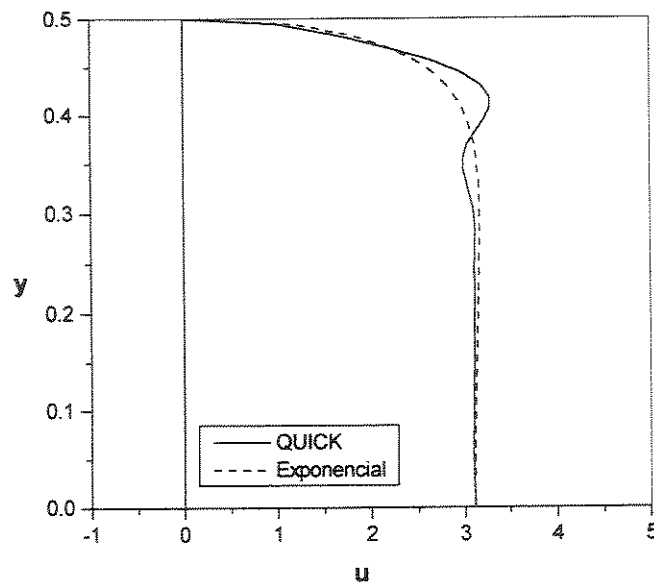


Fig. 6.35 *Perfis de velocidade em $x = 0$. $Re = 400$*

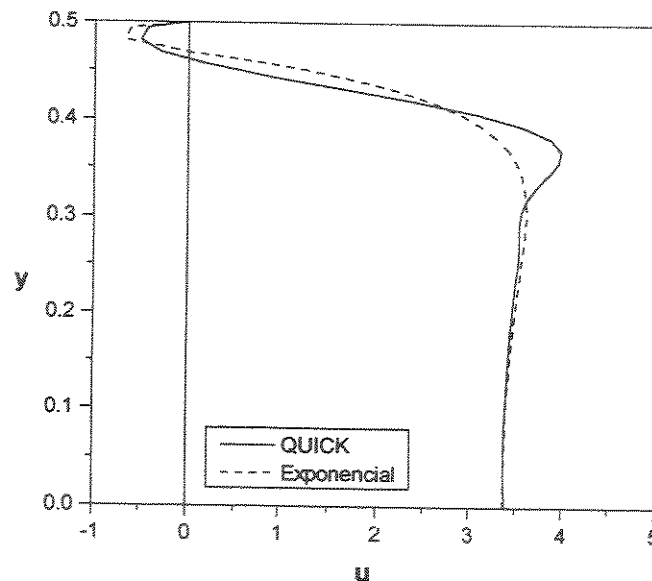


Fig. 6.36 *Perfis de velocidade em $x = 0.075$. $Re = 400$*

Nas figuras apresentadas acima, podemos ver o comportamento dos esquemas exponencial e QUICK em regiões muito próximas do plano de contração. Podemos observar que num plano anterior ao plano de contração, $x = -0.075$, ambos os esquemas têm comportamentos muito próximos obtendo perfis de velocidade praticamente coincidentes para todos os números de Reynolds estudados. Ao compararmos os perfis de velocidade obtidos com os esquemas QUICK e exponencial, no plano de contração e num plano imediatamente após a contração, podemos perceber que estes perfis são praticamente coincidentes no centro do canal mostrando claramente um perfil achatado na região central do canal. Mas, existem diferenças grandes entre os perfis de velocidade se comparamos a região superior do escoamento, próxima à parede. Enquanto o esquema QUICK descreve claramente um perfil achatado com saliências na parte superior do escoamento próximo à parede, o esquema exponencial descreve um perfil achatado no centro do canal e não mostra a protuberância do perfil de velocidade na parte superior do escoamento próximo à parede. Baseados nas comparações feitas no capítulo 4 e capítulo 5 do desempenho dos esquemas QUICK e exponencial, para os problemas da cavidade quadrada com parede superior em movimento e o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1, além

dos resultados obtidos neste capítulo para o problema da contração plana com razão de contração infinita podemos afirmar que o esquema exponencial fornece resultados confiáveis, mas é necessário trabalhar com uma malha muito refinada para que a descrição do perfil de velocidade obtida com este esquema seja adequada em regiões onde acontecem grandes mudanças no escoamento. Também podemos concluir que o esquema QUICK fornece resultados mais confiáveis e que descrevem o escoamento de uma maneira realista mostrando adequadamente o comportamento do fluido ainda em regiões onde acontecem grandes mudanças como é o plano da contração e planos próximos a ela.

Podemos observar nos gráficos que apresentam os perfis de velocidade num plano imediatamente após a contração que o esquema exponencial também mostra uma região de recirculação próximo à parede, que já tinha sido observada nos perfis de velocidade obtidos com o esquema QUICK.

No próximo capítulo são apresentadas as principais conclusões deste trabalho assim como algumas sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

7.1 Conclusões

No presente trabalho foi desenvolvido um algoritmo para a solução das equações de Navier-Stokes bidimensionais, em variáveis primitivas, utilizando o método de resolução semi-implícito descrito por HIRT et al.(1975). Foi utilizada malha deslocada (tipo MAC) regular, em coordenadas cartesianas.

Como caso teste foi escolhido o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento. A faixa de Reynolds estudada foi de 100 a 3200. As equações de Navier-Stokes foram escritas na forma divergente e na forma convectiva e foram realizados vários testes para comparar o desempenho de ambas as formas neste problema em particular. Para a forma divergente foi utilizado o método dos volumes finitos e foram implementados quatro esquemas de discretização para o termo convectivo, a saber, esquema central, esquema linear a montante, esquema QUICK, e esquema exponencial. Para a forma convectiva foi utilizado o método das diferenças finitas e o esquema central. Foram analisados perfis de velocidade, comportamento do erro com o refinamento da malha e tempos de CPU para toda a faixa de Reynolds estudada, utilizando malhas de 20×20 , 40×40 e 80×80 pontos nodais. Os resultados obtidos para os perfis de velocidade foram comparados com os de GHIA et al. (1982).

Foi estudado também o problema da região de entrada em canais planos, restrito ao caso em que a região de entrada do canal apresenta uma contração repentina na geometria. Foram estudados dois casos: a região de entrada de um canal plano a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado um caso de contração plana com razão de contração infinita e o caso em que a razão de contração é finita (para o presente trabalho foi considerada uma razão de contração de 2:1). Para o caso da razão de contração finita 2:1, foram obtidos resultados para números de Reynolds variando entre 10 e 426, utilizando malhas de 20×40 , 40×80 e 80×160 pontos nodais. Estes resultados foram comparados com os dados experimentais de DURST et al. (1985). Para o caso da razão de contração infinita foi dada especial importância às condições de contorno na região de entrada, utilizando a solução do escoamento de Jeffery-Hamel, para o caso de um canal convergente com um ângulo de inclinação de 90° , como condição de contorno para a região de entrada. Foram obtidos resultados para números de Reynolds 100, 200 e 400 e malhas de 20×40 , 40×80 e 80×160 pontos nodais.

A seguir apresentamos as principais conclusões obtidas neste trabalho.

Em primeiro lugar, no que se refere ao desempenho dos esquemas de discretização, para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento foi possível observar que até para $Re = 1000$, os esquemas central e QUICK apresentam excelentes resultados, fornecendo valores muito próximos aos resultados de GUIA et al. (1982), utilizados como referência. Enquanto os perfis apresentados pelos esquemas exponencial e linear a montante se afastam daqueles apresentados pelos esquemas central e QUICK. Este comportamento dos esquemas exponencial e linear a montante é mais marcado para $Re = 3200$. Os esquemas central e QUICK apresentam perfis de velocidade muito próximos um do outro, mas seria necessário um refinamento maior para obter resultados mais acurados. Analisando os gráficos que mostram o comportamento do erro com o refinamento encontramos que os esquemas central e QUICK produzem novamente os melhores resultados.

Quanto ao efeito da escolha da forma da equação de Navier-Stokes: convectiva ou divergente, comparamos o desempenho de ambas as formas em termos de tempo de CPU e

número de iterações necessárias para obter a convergência, assim como apresentando perfis de velocidade para as componentes u e v de velocidade. A forma divergente se mostra acurada nos gráficos de perfis de velocidade concordando muito bem com os dados de referência. Nos gráficos de desvios percentuais com a forma divergente é obtida uma convergência espacial monotônica. Além de tudo, ela precisa de menor esforço computacional que a forma convectiva quando aumenta o número de Reynolds. Por isto, podemos concluir que, para o problema da cavidade quadrada com parede superior em movimento, a forma divergente é preferível à forma convectiva.

Para o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1, também foi comparado o desempenho dos esquemas de discretização QUICK, exponencial, central e linear a montante, através de gráficos que apresentam perfis de velocidade para número de Reynolds baixo, gráficos que mostram a evolução destes perfis com o refinamento, além de tabelas que mostram o esforço computacional requerido pelos quatro esquemas de discretização. Os resultados obtidos mostraram que entre os quatro esquemas de discretização utilizados os que se mostraram mais confiáveis e acurados para o problema em estudo foram os esquemas QUICK e exponencial. Os resultados obtidos com os esquemas QUICK e exponencial são praticamente coincidentes nos planos anteriores à contração, mas apresentam diferenças marcadas no plano da contração e após a contração. O esquema QUICK apresenta saliências na parte superior do canal próximo à parede e se torna achatado na parte central do canal, o que não é perceptível para o esquema exponencial. Estas diferenças diminuem a medida que nos afastamos do plano de contração. Baseados nas descrições feitas na literatura (PANTON, 1984 e SUN e ZHU, 2000) para perfis de velocidade na entrada de um canal ou após uma contração, afirmamos que o perfil de velocidade obtido utilizando o esquema QUICK representa melhor as mudanças que ocorrem no escoamento após uma contração e que o esquema exponencial não seria suficientemente sensível para conseguir captar as mudanças ocorridas no escoamento. De qualquer maneira, ambos esquemas precisariam de um refinamento maior principalmente na região de contração para descrever de maneira mais precisa as mudanças ocorridas no escoamento devido à mudança na geometria. Os resultados obtidos para este problema também foram comparados com os dados experimentais de DURST et al. (1985), novamente encontramos que os perfis de velocidade estão próximos no plano antes da contração, mas existem diferenças muito grandes no plano de

contração e nos planos imediatamente após a contração. Foi verificado que os dados experimentais apresentam diferenças de até 10% nos fluxos de massa, apontando erro experimental.

Para o escoamento na região de entrada de um canal plano a partir de um reservatório de grandes dimensões, que pode ser considerado um caso de contração plana com razão de contração infinita foram realizados testes numéricos utilizando basicamente o mesmo algoritmo que no caso da contração plana com razão de contração finita. A única diferença reside nas condições de contorno utilizadas para a região de entrada do canal. Para evitar a necessidade de um domínio computacional muito grande antes da contração, os valores utilizados no contorno são fornecidos pela solução do escoamento de Jeffery-Hamel, para o caso de um canal convergente com um semi-ângulo de inclinação das paredes de 90° .

Foi dada especial atenção à região próxima à contração, por ser onde ocorrem as maiores mudanças no escoamento. Foram obtidos perfis de velocidade que se mostram achatados na parte central do canal e que apresentam saliências na parte superior do canal, próximo à parede. Este comportamento pode ser verificado a partir do plano de contração $x = 0$, e até o plano $x = 0.3$ após a contração, para todos os números de Reynolds estudados. O perfil de velocidade obtido neste capítulo para o problema da contração plana com razão de contração infinita mostra mais nitidamente os efeitos referidos por PANTON (1984).

Podemos observar também que encontramos uma região de recirculação após o plano de contração, que pode ser detectada nos gráficos que apresentam os perfis de velocidade para os planos $x = 0.075$, $x = 0.15$ e $x = 0.3$. Esta recirculação é encontrada para todos os números de Reynolds estudados ($Re = 100$, $Re = 200$ e $Re = 400$). Os perfis de velocidade obtidos para o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1 não mostram esta recirculação.

Os gráficos que apresentam os perfis de velocidade no plano $x = 3$, isto é, o plano de saída do escoamento, mostram que o escoamento não se encontra plenamente desenvolvido e assim o perfil de velocidade utilizado como condição de contorno na saída do escoamento não seria o

mais adequado. O então, que a distância utilizada entre o plano de contração e o plano de saída do canal não é suficiente para garantir um perfil plenamente desenvolvido.

Finalmente apresentamos alguns perfis de velocidade que comparam o desempenho dos esquemas QUICK e exponencial em regiões muito próximas do plano de contração. Podemos observar que num plano anterior ao plano de contração, $x = -0.075$, ambos os esquemas têm comportamentos muito próximos obtendo perfis de velocidade praticamente coincidentes para todos os números de Reynolds estudados. Ao compararmos os perfis de velocidade obtidos com os esquemas QUICK e exponencial, no plano de contração e num plano imediatamente após a contração, podemos perceber que estes perfis são praticamente coincidentes no centro do canal mostrando claramente um perfil achatado na região central do canal. Mas, existem diferenças grandes entre os perfis de velocidade se comparamos a região superior do escoamento, próxima à parede. Enquanto o esquema QUICK descreve claramente um perfil achatado com saliências na parte superior do escoamento próximo à parede, o esquema exponencial descreve um perfil achatado no centro do canal e não mostra as protuberâncias do perfil de velocidade na parte superior do escoamento próximo à parede. Baseados nas comparações feitas no capítulo 4 e capítulo 5 do desempenho dos esquemas QUICK e exponencial, para os problemas da cavidade quadrada com parede superior em movimento e o problema da contração plana com razão de contração finita 2:1, além dos resultados obtidos neste capítulo para o problema da contração plana com razão de contração infinita podemos afirmar que o esquema exponencial fornece resultados confiáveis, mas é necessário trabalhar com uma malha muito refinada para que a descrição do perfil de velocidade obtida com este esquema seja adequada em regiões onde acontecem grandes mudanças no escoamento. Podemos concluir que o esquema QUICK fornece resultados mais confiáveis que o esquema exponencial.

Podemos observar nos gráficos que apresentam os perfis de velocidade num plano imediatamente após a contração que o esquema exponencial também mostra uma região de recirculação próximo à parede, que já tinha sido observada nos perfis de velocidade obtidos com o esquema QUICK.

7.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

Para o problema da contração plana com razão de contração infinita verificamos que o perfil no plano de saída do escoamento não estava plenamente desenvolvido, isto nos leva a que o perfil de velocidade utilizado como condição de contorno na saída do escoamento não seria o mais adequado, pelo menos para a geometria utilizada neste trabalho. Portanto seria necessário fazer novos testes numéricos estendendo o domínio computacional para ter um comprimento de saída maior e assim garantir um perfil plenamente desenvolvido na saída do escoamento.

Verificamos que tanto no problema da contração plana com razão de contração finita como o problema da contração plana com razão de contração infinita as maiores mudanças no escoamento ocorrem em regiões próximas ao plano de contração. Para poder estudar em detalhe a região de contração e obter resultados independentes da malha, seria praticamente impossível continuar a trabalhar com uma malha regular. Faz-se necessário implementar algum tipo de malha irregular que permita diminuir o número de pontos nodais utilizados. Um tipo de malha que seria interessante para este problema seria uma malha em PG, que permitiria diminuir o número de pontos nodais utilizados e ao mesmo tempo concentrar os pontos nodais na região próxima à contração. Ao utilizar este tipo de malha devemos fazer algumas considerações para manter a ordem da convergência espacial dos esquemas (RIVAS, 1972).

Quanto a comparação dos esquemas de discretização, para os problemas estudados o esquema QUICK foi o que mostrou um melhor desempenho. Mas existe outras comparações que ainda podemos fazer, como por exemplo comparar o desempenho do esquema QUICK e o esquema UNIFAES (FIGUEIREDO, 1997; FIGUEIREDO e LLAGOSTERA, 1999; FIGUEIREDO e LLAGOSTERA, 2000) para o problema da contração plana. O esquema UNIFAES foi comparado ao esquema central, exponencial e LOADS, mostrando excelentes resultados e estabilidade incondicional.

Ao estudarmos o problema da contração infinita encontramos uma região de recirculação após o plano de contração, os resultados obtidos indicam que a extensão desta região deve variar com o número de Reynolds. Esta região deveria ser estudada em detalhe, fazendo novos testes

numéricos para saber, por exemplo, a partir de que número de Reynolds esta região é encontrada e tentar descrever sua extensão, para os números de Reynolds trabalhados.

Finalmente, no problema da contração (finita ou infinita) existe um assunto de interesse para muitos problemas da engenharia que não foi abordado neste trabalho e é o problema das diferenças de pressão que existem dentro do canal, causadas justamente pela mudança de geometria. Este assunto seria interessante de ser abordado como uma continuação a este trabalho, visto que temos em mãos um algoritmo que nos permitiria obter resultados confiáveis utilizando o esquema que apresenta melhor desempenho nos testes já realizados.

Referências Bibliográficas

- AMES, W. F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Thomas Nelson and Sons LTD., 1969.
- ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow. With Historical Perspective*. Mc Graw-Hill, 1982. 1ª ed. Cap. 2: Integral Forms of the Conservation Equations for Inviscid Flows, p.26-37. Cap. 6: Differential Conservation Equations for Inviscid Flows, p.152-171.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1979, 6ª ed. Cap. 5: Flow at Large Reynolds Number: Effects of Viscosity, p. 294-302.
- BEZERRA, C. *Desenvolvimento de um Código de Cálculo Utilizando o Método dos Volumes Finitos e o Modelo de Turbulência $k - \varepsilon$ para Soluções de Problemas Bidimensionais*. Campinas: Departamento de Energia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1993. 130 p. Tese (Mestrado).
- BOZEMAN, J. D. , DALTON C. Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity. *Journal of Computational Physics*, v.12, p.348-363, 1973.

- BURGGRAF, O. R. Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows. *Journal of Fluid Mechchamics*, v.24, Part 1, p.113-151, 1966.
- BURMEISTER, L. C. Convective Heat Transfer, 1983, Cap. 5: One-Dimensional Solutions, p. 158-206.
- COELHO, P., PEREIRA, J. C. F., CARVALHO, M. G. Calculation of Laminar Recirculating Flows Using Local Non-Staggered Grid Refinement System. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.12, p.535-557, 1991.
- CURRIE, I. G. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, 1974. 1^a ed. Cap. 1: Basic Conservation Laws, p.3-36.
- DURST, F., LOY, T. Investigations of Laminar Flow in a Pipe with Sudden Contraction of Cross Sectional Area. *Computers and Fluids*, v.13, N° 1, p.15-36, 1985.
- DURST, F., SCHIERHOLZ, W. F., WUNDERLICH, A. M. Experimental and Numerical Investigations of Plane Duct Flows with Sudden Contraction. *Technical Report N° LSTM 93/EN/85, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, University of Erlangen-Nürnberg*, 1985.
- DURST, F., SCHIERHOLZ, W. F., WUNDERLICH, A. M. Experimental and Numerical Investigations of Plane Duct Flows with Sudden Contraction. *Journal of Fluids Engineering*, v.109, p.376-383, 1987.
- EVANS, D. J. Numerical Methods for Incompressible Flow Studies in Two Dimensions. *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, edited by C.Taylor, K.Morgan, v.1, p.203-244, 1980.

- FIGUEIREDO, J. R. *Generalização e Aproximação do Esquema Discretizante de Allen para Equações de Transporte em Fluidos*. Campinas: Departamento de Energia, Faculdade de Engenharia de Campinas, Universidade Estadual de Campinas, 1988. 479 p. Tese (Doutorado).
- FIGUEIREDO, J. R. A Unified Finite-Volume Finite-Differencing Exponential-Type Scheme for Convective-Diffusive Fluid Transport Equations. *RBCM – J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, v.XIX, N° 3, p.371-391, 1997.
- FIGUEIREDO, J. R., LLAGOSTERA, J. Comparative Study of the Unified Finite Approach Exponential-Type Scheme (UNIFAES) and its Application to Natural Convection in a Porous Cavity. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 35, p.347-367, 1999.
- FIGUEIREDO, J. R., LLAGOSTERA, J. Application of the UNIFAES Discretization Scheme to Mixed Convection in a Porous Layer with a Cavity, Using the Darcy Model. *Journal of Porous Media*, v.3(2), p.139-154. 2000.
- FRAENKEL, L. E. Laminar Flow in Symmetrical Channels with Slightly Curved Walls. I. On the Jeffery-Hamel solutions for Flow Between Plane Walls. *Proc. Roy. Soc. London, A* 267, p.119-138, 1962.
- FUNG, Y. C. *A First Course in Continuum Mechanics*. 3^a ed. Prentice-Hall, 1994. Cap. 6: Velocity Fields and Compatibility Conditions, p.145-153. Cap. 7: Constitutive Equations, p.154-164. Cap. 8: Isotropy, p.165-180.
- GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C. T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid metho. *Journal of Computational Physics*, v.48, p. 387-411, 1982.

- GOLDSTEIN, S. *Modern Develoments in Fluid Dynamics*. Oxford Univ. Press, 1938.
- GOLUB, G. H., VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. 4^a ed. The Johns Hopkins University Press, 1985. Cap. 5: Special Linear Systems, p.81-135.
- GOYON, O., High-Reynolds Number Solutions of Navier-Stokes Equations Using Incremental Unknowns, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 130, p.319-335, 1996.
- GUPTA, M. M., MANOHAR, R. P. On The Use of Central Difference Scheme for Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.557-573, 1980.
- GUPTA, M. M. A Comparison of Numerical Solutions of Convective and Divergence Forms of the Navier-Stokes Equations for the Driven Cavity Problem. *Journal of Computational Physics*, v.43, p.260-267, 1981.
- HAMEL, G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flssigükeiten. *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, v.25, p. 34, 1916.
- HANSEN, A. G. *Similarity Analysis of Boundary Value Problems in Engineering*. Prentice-Hall, 1964.
- HARLOW, F. H., WELCH, J. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *The Physics of Fluids*, v.8, N° 12, p.2182-2189, 1965.
- HIRT, C. W., NICHOLS, B. D., ROMERO, N. C. SOLA - Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow. *Los Alamos Laboratory, Report LA-5852*, 1975.

- HUANG, H., SEYMOUR, B. R. A Finite Difference Method for Flow in a Constricted Channel. *Computers and Fluids*, v. 24, N° 2, p.153-160. 1995.
- JALURIA, Y., Torrance, K. E. *Computational Heat Transfer*. 1.ed. Hemisphere Publishing Corporation, 1986. Cap. 6: Numerical Methods for Convection Heat Transfer, p.149-241.
- JEFFERY, G. B. Steady Motion of a Viscous Fluid. *Phil. Mag.*, Ser. 6, v.29, p.455-465, 1915.
- LANDAU, L. D., LIFSCHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1989. 2ª ed. Cap. 4: Boundary Layers, p.157-191.
- LEONARD, B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.19, p.59-88, 1979.
- LEONARD, B. P. Order of Accuracy of QUICK and Related Convection-Diffusion Schemes. *Appl. Math. Modelling*. V.19, p.640-653, 1995.
- LEONARD, B. P., DRUMMOND, J. E. Why you Should not Use 'Hybrid', 'Power-Law' or Related Exponential Schemes for Convective Modelling - There are Much Better Alternatives. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.20, p.421-442, 1995.
- MAIA, M. C. *Região Hidrodinâmica de Entrada no escoamento Axial Anular Concêntrico*. Campinas: Faculdade de Engenharia de Alimentos. Universidade Estadual de Campinas, 1996. 106 p. Tese (Doutorado).
- MARSHALL, R. S. Symmetrical Velocity Profiles for Jeffery-Hamel Flow. *Journal of Applied Mechanics*, v.46, p.214-215, 1979.

- MILLSAPS, K., POHLHAUSEN, K. Thermal Distributions in Jeffery-Hamel Flows Between Nonparallel Plane Walls. *Journal of the Aerospace Society*, v.20, p.187-196, 1953.
- NAYLOR, D., FLORYAN, J.M., TARASUK, J.D. A Numerical Study of Developing Free Convection Between Isothermal Vertical Plates. *Journal of Heat Transfer*, v.113, p.620-626, 1991.
- NISHIDA, H., SATOFUKA, N. Higher-Order Solutions of Square Driven cavity Flow using a Variable-Order Multi-grid Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.34, p.637-653, 1992.
- PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1^a ed. Hemisphere Publishings Corporation, 1980. Cap. 3: Discretization Methods, p.25-40. Cap. 5: Convection and Diffusion, p.79-110.
- PANTON, R. L. *Incompressible Flow*. 1^a ed. John Wiley & Sons, 1984. Cap. 5: Basic Laws, p.102-135. Cap.6: Newtonian Fluids and the navier-Stokes Equations, p.139-155.
- PRESS, W. H., FLANNEY, B. P., TEUKOLSY, S. A., VETTERLING, W. T. *Numerical Recipes*. 4^a ed. Cambridge University Press, 1988. Capítulo 13: Statistical Description of Data, p.454-497.
- RIVAS, E. K. de, On the Use of Non-Uniform Grids in Finite-Difference Equations. *J. Comput. Phys.*, v. 10, p.202-210, 1972.
- ROACHE, P. J. *Computational Fluid Dynamics*. 5^a ed. Hermosa Publichers, 1982. Cap. 3: Basic Computational Methods for Incompressivel Flow, p.15-207.
- ROSENHEAD, R. L. The Steady Two-Dimensional Radial Flow of a Viscous Fluid Between Two Inclined Plane Walls. *Proc. Roy. Soc. London*, v.175, p.436-467, 1940.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. 6^a ed. Mc Graw-Hill, 1968.

SHYY, W., THAKUR, S., WRIGHT, J. Second-Order Upwind and Central Difference Schemes for Recirculating Flow Computation. *AIAA Journal*, v.30, N° 4., p.923-932, 1992.

SMITH, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 2^a ed. Oxford University Press, 1978.

SUN, J., SHU Z. Upwind Local Differential Quadrature Method for Solving Incompressible Viscous Flow. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 188, p.495-504, 2000

TAFTI, D. Comparison of Some Upwind-Biased High-Order Formulations with a second-Order Central-Difference Scheme for Time Integration of the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer and Fluids*, v.25, N° 7, p.647-665, 1996.

TEIXEIRA, A. *Aplicação do Método Volumes Finitos SOLA para Cavidade Recirculante com Transferência de Calor*. Campinas: Departamento de Energia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1993. 85 p. Tese (Mestrado).

THAKUR, S., SHYY, W. Some Implementational Issues of Convection Schemes for Finite-Volume Formulations. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v.24, p.31-55, 1993.

URIBE, E. B., FRANCO, A., FIGUEIREDO, J. R. Comparação entre Esquemas Discretizantes no Problema da cavidade Recirculante, em *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, p.321-324, São Paulo, 1994.

VANKA, S. P. Second-Order Upwind Differencing in a Recirculating Flow. *AIAA Journal*, v.25, N°11, p.1435-1441, 1987.

- VILLAND, M. TRIO-VF - Note de Presentation de la Version Octobre 86. *Centre d'Etudes Nucleaires de Grenoble*, França, 1986.
- WENDT, J. F. *Computational Fluid Dynamics, an Introduction*. 1^a ed. Springer-Verlag, 1992. Cap. 2: Governing Equations of Fluid Dynamics, p.15-51. Cap. 11: Introduction to Finite Volume Techniques in Computational Fluid Dynamics, p.261-288.
- WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 1^a ed. McGraw-Hill, 1974. Cap. 2: Fundamental Equations of Compressible Viscous Flow, p.61-109. Cap. 3: Solutions of the Newtonian Viscous-Flow Equations, p.110-240.

Apêndice

LISTAGEM DO PROGRAMA EM FORTRAN

CASO TESTE: Cavity Quadrada Com Parede Superior Em Movimento.

```

C -----
C
C Problema teste: cavidade quadrada com parede superior em
C movimento
C -----
C Declaração das variáveis
C -----
PARAMETER(NMAX=614050)
PARAMETER(NMAX1=85)
PARAMETER(NMAX2=7225)
REAL*4 DTIME,ARRAY(2),CPU
REAL*8 RE,G,EPS,FR
REAL*8 T,DT
REAL*8 PI,PREF
REAL*8 U0,UI,VI,UREF
REAL*8 XL,YL,XREF
REAL*8 DIFMAX,DIFA,RESM,POSC
REAL*8 A(NMAX),SP(NMAX2)
REAL*8 XU(NMAX1),YV(NMAX1),DUX(NMAX1),DVY(NMAX1)
REAL*8 XP(NMAX1),YP(NMAX1),DPX(NMAX1),DPY(NMAX1)
REAL*8 U(NMAX1,NMAX1),V(NMAX1,NMAX1)
REAL*8 SU(NMAX1,NMAX1),SV(NMAX1,NMAX1)
REAL*8 CU(NMAX1,NMAX1),CV(NMAX1,NMAX1)
REAL*8 CP(NMAX1,NMAX1)
INTEGER KDIAG(NMAX2),NPX,NPY,N,IT,NIT,ESQ,MET
INTEGER IAF,NOSC,IB,IOSC
CHARACTER*15 SAIDA
C
C NAMELIST/ESCOAMENTO/ RE,G,U0,UI,VI,PI
C NAMELIST/PRECISAO/ EPS,DT,NIT,FR
C NAMELIST/GEOMETRIA/ XL,YL,NPX,NPY
C NAMELIST/METODO/ ESQ,MET,IAF,IB,IOSC
C NAMELIST/ARQUIVO/ SAIDA
C
C Inicio da contagem
C -----
C CPU = DTIME(ARRAY)
C
C Leitura de dados
C -----
OPEN(UNIT=15,FILE='adados.dat',STATUS='OLD')
  READ(15,ESCOAMENTO)
  READ(15,PRECISAO)
  READ(15,GEOMETRIA)
  READ(15,METODO)
  READ(15,ARQUIVO)
CLOSE(UNIT=15)
C Abertura do arquivo de saída
C -----
OPEN(UNIT=20,FILE=saida,STATUS='UNKNOWN')
C
C Criação da malha
C -----
CALL MALHA(NPX,NPY,N,XL,YL,XREF,XU,YV,DUX,DVY,DPX,DPY,XP,YP)
C

```

```

C      Condições iniciais
C      -----
C      CALL INICIAL(NMAX1,NPX,NPY,DT,U0,UI,VI,PI,UREF,PREF,XREF,U,V,
!      CU,CV,CP,DIFA,NOSC)

C      Condições de contorno
C      -----
C      CALL CONTORNO(NMAX1,NPX,NPY,U0,U,V,CU,CV)

C      Montagem da matriz
C      -----
C      CALL MATRIZ(N,NPX,NPY,DUX,DVY,DPX,DPY,KDIAG,A)

C      Decomposição da matriz pelo método de Cholesky
C      -----
C      CALL CHOLESKY(N,KDIAG,A)

C      Inicio do processo iterativo
C      -----
C      DIFMAX = 10.
C      IT = 0
C      T = 0.
C      DO WHILE((DIFMAX.GT.EPS).AND.(IT.LE.NIT))
C      T = T + DT
C      IT = IT + 1

C      Calculo dos termos difusivos e convectivos
C      -----
C      IF(MET.EQ.1) THEN
C      Método: Volumes de Controle
C      -----
C      IF(ESQ.EQ.1) THEN
C      Esquema UPWIND
C      -----
C      CALL FLUXU(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,SU,
!      SV)
C      ELSE
C      IF(ESQ.EQ.2) THEN
C      Esquema QUICK
C      -----
C      CALL FLUXQ(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,
!      SU,SV)
C      ELSE
C      IF(ESQ.EQ.3) THEN
C      Esquema CENTRAL
C      -----
C      CALL FLUXC(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,
!      SU,SV)
C      ELSE
C      Esquema exponencial
C      -----
C      CALL FLUXEXP(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,
!      DT,SU,SV)
C      ENDIF
C      ENDIF
C      ENDIF
C      ELSE

```

```

C      Método: Diferenças Finitas
C      -----
C      Esquema CENTRAL
C      -----
C      CALL FLUXDFC(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,IAF,
!      G,DT,SU,SV)
C      ENDIF
C
C      Montagem do vetor com os termos independentes
C      -----
C      CALL TINDEP(NMAX1,N,NPX,NPY,DUX,DVY,U,V,DT,SP,SU,SV)
C
C      Determinação do campo de pressão
C      -----
C      CALL SOLVE(N,KDIAG,A,SP)
C      CALL CPRE(NMAX1,NPX,NPY,SP,CP)
C
C      Determinação do campo de velocidade
C      -----
C      CALL CVEL(NMAX1,NPX,NPY,DPX,DPY,SU,SV,CU,CV,CP,DT)
C
C      Calculo do resíduo
C      -----
C      CALL RESIDUO(NMAX1,NPX,NPY,CU,CV,DUX,DVY,RESM)
C
C      Critério de parada
C      -----
C      CALL TEST(NMAX1,NPX,NPY,CU,CV,U,V,DIFMAX,DIFA,NOSC,IOSC,IT,DT)
C
C      Correção do dt
C      -----
C      CALL DELTAT(NMAX1,NPX,NPY,RE,FR,DUX,DVY,CU,CV,DT)
C
C      ENDDO
C
C      Impressão de resultados
C      -----
C      CALL IMPRESS(NMAX1,NPX,NPY,MET,ESQ,IAF,IT,NOSC,RE,POSC,DT,T,
!      RESM,DIFMAX,XL,YL,CU,CV,CP,XP,YP)
C
C      Fim da contagem
C      -----
C      CPU = DTIME(ARRAY)
C      WRITE(20,10) CPU
10  FORMAT(//,T5,'TEMPO DE CPU = ',F14.2)
C
C      CLOSE(UNIT=20)
C
C      STOP
C      END
C
C      -----
C      SUBROTINA CRIA UMA MALHA IRREGULAR
C      -----
C      SUBROUTINE MALHA(NPX,NPY,N,XL,YL,XREF,XU,YV,DUX,DVY,DPX,DPY,
!      XP,YP)
C

```

```

C   Declaração das variáveis
C   -----
REAL*8 XU(*),YV(*),DUX(*),DVY(*),XP(*),YP(*),DPX(*),DPY(*)
REAL*8 XL,YL,DX,DY,XREF
INTEGER NPX,NPY,N
C   Dados para adimensionalização
C   -----
XREF = XL
XL = XL/XREF
YL = YL/XREF
C
C   Calculo dos intervalos em x e y
C   -----
DX = XL/NPX
DY = YL/NPY
C
C   Calculo das posições dos nos de velocidade
C   -----
XU(1) = 0.
XU(2) = 0.
DO I = 3,NPX+1
    XU(I) = XU(I-1) + DX
ENDDO
XU(NPX+2) = XL
YV(1) = 0.
YV(2) = 0.
DO J = 3,NPY+1
    YV(J) = YV(J-1) + DY
ENDDO
YV(NPY+2) = YL
C
C   Calculo da distancia entre os nos de velocidade
C   -----
DO I = 1,NPX+1
    DUX(I) = XU(I+1) - XU(I)
ENDDO
DO J = 1,NPY+1
    DVY(J) = YV(J+1) - YV(J)
ENDDO
C
C   Calculo das posições dos nos de pressão
C   -----
XP(1) = 0.
DO I = 2,NPX+1
    XP(I) = 0.5*(XU(I+1) + XU(I))
ENDDO
XP(NPX+2) = XL
YP(1) = 0.
DO J = 2,NPY+1
    YP(J) = 0.5*(YV(J+1) + YV(J))
ENDDO
YP(NPY+2) = YL
C
C   Calculo da distancia entre os nos de pressão
C   -----
DPX(1) = 0.5*DUX(2)
DO I = 2,NPX

```

```

      DPX(I) = XP(I+1) - XP(I)
      ENDDO
      DPX(NPX+1) = 0.5*DUX(NPX)
      DPY(1) = 0.5*DVY(2)
      DO J = 2, NPY
        DPY(J) = YP(J+1) - YP(J)
      ENDDO
      DPY(NPY+1) = 0.5*DVY(NPY)

C
C   Calculo da ordem da matriz
C   -----
      N = NPX*NPY

C
      RETURN
      END

C   -----
C   SUBROTINA ESTABELECE AS CONDICÕES INICIAIS DAS COMPONENTES DA
C   VELOCIDADE E DE PRESSÃO
C   -----
      SUBROUTINE INICIAL(NMAX1,NPX,NPY,DT,U0,UI,VI,PI,UREF,PREF,
!   XREF,U,V,CU,CV,CP,DIFA,NOSC)

C
C   Declaração das variáveis
C   -----
      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),CU(NMAX1,*),CV(NMAX1,*),
      REAL*8 CP(NMAX1,*),PI,PREF,DIFA,XREF
      REAL*8 U0,UI,VI,UREF,DT
      INTEGER NPX,NPY,NOSC

C
C   Adimensionalização
C   -----
      UREF = U0
      U0 = U0/UREF
      UI = UI/UREF
      VI = VI/UREF
      PREF = 1.
      PI = PI/PREF
      DT = (DT*UREF)/XREF

C
C   Definição dos parâmetros para calcular o número de oscilações
C   -----
      DIFA = 1000.
      NOSC = 0

C
C   Condições iniciais para a velocidade
C   -----
      DO J = 1, NPY+2
        DO I = 1, NPX+2
          U(I,J) = UI
          CU(I,J) = UI
          V(I,J) = VI
          CV(I,J) = VI
        ENDDO
      ENDDO

```

```

C      Condições iniciais para a pressão
C      -----
      DO J = 1, NPY+1
        DO I = 1, NPX+1
          CP(I, J) = PI
        ENDDO
      ENDDO

C      RETURN
C      END

C      -----
C      SUBROTINA ESTABELECE AS CONDICÕES DE CONTORNO
C      -----
      SUBROUTINE CONTORNO (NMAX1, NPX, NPY, U0, U, V, CU, CV)

C      Declaração das variáveis
C      -----
      REAL*8 U (NMAX1, *), V (NMAX1, *), CU (NMAX1, *), CV (NMAX1, *), U0
      INTEGER NPX, NPY

C      Condições de contorno para U
C      -----
C      Pontos nas faces laterais
C      -----
      DO J = 2, NPY+1
        U(2, J) = 0.
        CU(2, J) = 0.
        U(NPX+2, J) = 0.
        CU(NPX+2, J) = 0.
      ENDDO

C      Pontos nas faces superior e inferior
C      -----
      DO I = 2, NPX+2
        U(I, NPY+2) = U0
        CU(I, NPY+2) = U0
        U(I, 1) = 0.
        CU(I, 1) = 0.
      ENDDO

C      Condições de contorno para V
C      -----
C      Pontos nas faces inferior e superior
C      -----
      DO I = 1, NPX+2
        V(I, 2) = 0.
        CV(I, 2) = 0.
        V(I, NPY+2) = 0.
        CV(I, NPY+2) = 0.
      ENDDO

C      Pontos nas faces laterais
C      -----
      DO J = 3, NPY+1
        V(1, J) = 0.
        CV(1, J) = 0.
        V(NPX+2, J) = 0.

```

```

      CV(NPX+2,J) = 0.
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
-----
C      SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE COEFICIENTES GEOMETRICOS A(I,J)
C
-----
C      SUBROUTINE MATRIZ(N,NPX,NPY,DUX,DVY,DPX,DPY,KDIAG,A)
C
C      Declaração das variáveis
C
-----
C      REAL*8 A(*),DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 F
C      INTEGER N,NPX,NPY,KDIAG(*),IK,L,KL,K
C
C      Calculo do vetor KDIAG(I)
C
-----
C      KDIAG(1) = 1
C      DO I = 2,NPX
C          KDIAG(I) = KDIAG(I-1) + I
C      ENDDO
C      DO I = NPX+1,N
C          KDIAG(I) = KDIAG(I-1) + NPX + 1
C      ENDDO
C
C      DO I = 1,KDIAG(N)
C          A(I) = 0.
C      ENDDO
C
C      Montagem da matriz
C
-----
C      Canto inferior esquerdo
C
-----
C      K = 1
C      A(1) = F(DUX(2),DPY(2))+F(DVY(2),DPX(2))
C      A(2) = -F(DVY(2),DPX(2))
C
C      Face inferior
C
-----
C      DO I = 3,NPX
C          K = K + 1
C          IK = KDIAG(K)
C          A(IK) = F(DVY(2),DPX(I-1))+F(DUX(I),DPY(2))+
C          !           F(DVY(2),DPX(I))
C          L = IK + I - 1
C          A(L) = -F(DVY(2),DPX(I))
C      ENDDO
C
C      Canto inferior direito
C
-----
C      K = K+1
C      IK = KDIAG(K)
C      A(IK) = F(DVY(2),DPX(NPX))+F(DUX(NPX+1),DPY(2))
C

```

```

DO J = 3,NPY
C   Face lateral esquerda
C   -----
      K = K + 1
      IK = KDIAG(K)
      A(IK) = F(DUX(2),DPY(J))+F(DUX(2),DPY(J-1))+
!           F(DVY(J),DPX(2))
      L = IK + NPX
      A(L) = -F(DVY(J),DPX(2))
      KL = IK - NPX
      A(KL) = -F(DUX(2),DPY(J-1))

C
C   Pontos internos
C   -----
      DO I = 3,NPX
        K = K + 1
        IK = KDIAG(K)
        A(IK) = F(DVY(J),DPX(I-1))+F(DUX(I),DPY(J))+
!           F(DUX(I),DPY(J-1))+F(DVY(J),DPX(I))
        L = IK + NPX
        A(L) = -F(DVY(J),DPX(I))
        KL = IK - NPX
        A(KL) = -F(DUX(I),DPY(J-1))
      ENDDO

C
C   Face lateral direita
C   -----
      K = K + 1
      IK = KDIAG(K)
      A(IK) = F(DVY(J),DPX(NPX))+F(DUX(NPX+1),DPY(J))+
!           F(DUX(NPX+1),DPY(J-1))
      KL = IK - NPX
      A(KL) = -F(DUX(NPX+1),DPY(J-1))
      ENDDO

C
C   Canto superior esquerdo
C   -----
      K = K + 1
      IK = KDIAG(K)
      A(IK) = F(DUX(2),DPY(NPY))+F(DVY(NPY+1),DPX(2))
      L = IK + NPX
      A(L) = -F(DVY(NPY+1),DPX(2))
      KL = IK - NPX
      A(KL) = -F(DUX(2),DPY(NPY))

C
C   Face superior
C   -----
      DO I = 3,NPX
        K = K + 1
        IK = KDIAG(K)
        A(IK) = F(DVY(NPY+1),DPX(I-1))+F(DUX(I),DPY(NPY))+
!           F(DVY(NPY+1),DPX(I))
        L = IK + NPX
        A(L) = -F(DVY(NPY+1),DPX(I))
        KL = IK - NPX
        A(KL) = -F(DUX(I),DPY(NPY))
      ENDDO

```

```

C
C      Ponto no canto superior direito
C      -----
C      K = K + 1
C      IK = KDIAG(K)
C      A(IK) = F(DVY(NPY+1),DPX(NPX))+F(DUX(NPX+1),DPY(NPY))
C      KL = IK - NPX
C      A(KL) = -F(DUX(NPX+1),DPY(NPY))
C
C      RETURN
C      END
C      -----
C      REAL*8 FUNCTION F(A,B)
C
C      REAL*8 A,B
C
C      F = A/B
C
C      RETURN
C      END
C      -----
C      SUBROTINA CALCULA OS FLUXOS
C      FORMULAÇÃO VOLUMES DE CONTROLE
C      -----
C
C      ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO: UPWIND
C      -----
C      SUBROUTINE FLUXU(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,SU,
C      !  SV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),SU(NMAX1,*),SV(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 CONVU,CONVV,DIFFU,DIFFV,FU,FV,RE,DT,G
C      INTEGER NPX,NPY
C
C      DO J = 2,NPY+1
C        DO I = 3,NPX+1
C          CALL CONVUU(NMAX1,I,J,U,V,DVY,DPX,CONVU)
C          CALL DIFUSU(NMAX1,I,J,U,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFU)
C          FU = CONVU + DIFFU
C          SU(I,J) = -FU/(DPX(I-1)*DVY(J))+U(I,J)/DT
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      DO J = 3,NPY+1
C        DO I = 2,NPX+1
C          CALL CONVUV(NMAX1,I,J,U,V,DUX,DPY,CONVV)
C          CALL DIFUSV(NMAX1,I,J,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFV)
C          FV = CONVV+DIFFV
C          SV(I,J) = G-FV/(DUX(I)*DPY(J-1))+V(I,J)/DT
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      RETURN

```

```

C      END
C      -----
C      ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO: QUICK
C      -----
C      SUBROUTINE FLUXQ(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,
!      SU,SV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),SU(NMAX1,*),SV(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 CONVU,CONVV,DIFFU,DIFFV,FU,FV,RE,DT,G
C      INTEGER NPX,NPY
C
C      DO J = 2,NPY+1
C        DO I = 3,NPX+1
C          IF((I.GE.4.AND.I.LE.NPX).AND.
!          (J.GE.3.AND.J.LE.NPY)) THEN
C            CALL CONVQU(NMAX1,I,J,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,CONVU)
C          ELSE
C            CALL CONVUU(NMAX1,I,J,U,V,DVY,DPX,CONVU)
C          ENDIF
C          CALL DIFUSU(NMAX1,I,J,U,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFU)
C          FU = CONVU+DIFFU
C          SU(I,J) = -FU/(DPX(I-1)*DVY(J))+U(I,J)/DT
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      DO J = 3,NPY+1
C        DO I = 2,NPX+1
C          IF((I.GE.3.AND.I.LE.NPX).AND.
!          (J.GE.4.AND.J.LE.NPY)) THEN
C            CALL CONVQV(NMAX1,I,J,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,CONVV)
C          ELSE
C            CALL CONVUV(NMAX1,I,J,U,V,DUX,DPY,CONVV)
C          ENDIF
C          CALL DIFUSV(NMAX1,I,J,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFV)
C          FV = CONVV+DIFFV
C          SV(I,J) = G-FV/(DUX(I)*DPY(J-1))+V(I,J)/DT
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      RETURN
C      END
C      -----
C      ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO: CENTRAL
C      -----
C      SUBROUTINE FLUXC(NMAX1,NPX,NPY,U,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,G,DT,
!      SU,SV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),SU(NMAX1,*),SV(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 DIFFU,DIFFV,CONVU,CONVV,FU,FV,RE,DT,G
C      INTEGER NPX,NPY

```

```

DO J = 2, NPY+1
  DO I = 3, NPX+1
    CALL CONVUCU(NMAX1, I, J, U, V, DVY, DPX, CONVU)
    CALL DIFUSU(NMAX1, I, J, U, DUX, DVY, DPX, DPY, RE, DIFFU)
    FU = CONVU+DIFFU
    SU(I, J) = -FU/(DPX(I-1)*DVY(J))+U(I, J)/DT
  ENDDO
ENDDO
C
DO J = 3, NPY+1
  DO I = 2, NPX+1
    CALL CONVCV(NMAX1, I, J, U, V, DUX, DPY, CONVV)
    CALL DIFUSV(NMAX1, I, J, V, DUX, DVY, DPX, DPY, RE, DIFFV)
    FV = CONVV+DIFFV
    SV(I, J) = G-FV/(DUX(I)*DPY(J-1))+V(I, J)/DT
  ENDDO
ENDDO
C
RETURN
END
C
-----
C
C          FORMULAÇÃO DIFERENCAS FINITAS
C
C          ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO: CENTRAL
C
C          -----
SUBROUTINE FLUXDFC(NMAX1, NPX, NPY, U, V, DUX, DVY, DPX, DPY, RE, IAF,
! G, DT, SU, SV)
C
C  Declaração das variáveis
C  -----
REAL*8 U(NMAX1, *), V(NMAX1, *), SU(NMAX1, *), SV(NMAX1, *)
REAL*8 DUX(*), DVY(*), DPX(*), DPY(*)
REAL*8 CONVU, CONVV, DIFFU, DIFFV, FU, FV, RE, DT, G
INTEGER NPX, NPY, IAF
C
DO J = 2, NPY+1
  DO I = 3, NPX+1
    IF(IAF.EQ.1) THEN
      CALL CONVDFCU(NMAX1, NPY, I, J, U, V, DUX, DPY, CONVU)
      CALL DIFFDFU(NMAX1, NPY, I, J, U, DUX, DPY, RE, DIFFU)
    ELSE
      CALL CONVDFCU2(NMAX1, NPY, I, J, U, V, DUX, DPY, CONVU)
      CALL DIFFDFU2(NMAX1, NPY, I, J, U, DUX, DPY, RE, DIFFU)
    ENDIF
    FU = CONVU - DIFFU
    SU(I, J) = -FU+U(I, J)/DT
  ENDDO
ENDDO
C
DO J = 3, NPY+1
  DO I = 2, NPX+1
    IF(IAF.EQ.1) THEN
      CALL CONVDFCV(NMAX1, NPX, I, J, U, V, DVY, DPX, CONVV)
      CALL DIFFDFV(NMAX1, NPX, I, J, V, DVY, DPX, RE, DIFFV)
    ELSE
      CALL CONVDFCV2(NMAX1, NPX, I, J, U, V, DVY, DPX, CONVV)
      CALL DIFFDFV2(NMAX1, NPX, I, J, V, DVY, DPX, RE, DIFFV)

```

```

      ENDIF
      FV = CONV - DIFFV
      SV(I,J) = G - FV + V(I,J)/DT
    ENDDO
  ENDDO

C
  RETURN
END

-----
C
C      SUBROTINA CALCULA OS TERMOS DIFUSIVOS
C      FORMULAÇÃO VOLUMES DE CONTROLE
C
C      SUBROUTINE DIFUSU(NMAX1,I,J,U,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFU)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 RE,DF1,DF2,DF3,DF4,DIFFU
C      INTEGER I,J
C
C      DF1 = (1./RE)*(DVY(J)/DUX(I))*(U(I,J) - U(I+1,J))
C      DF2 = (1./RE)*(DPX(I-1)/DPY(J))*(U(I,J) - U(I,J+1))
C      DF3 = (1./RE)*(DVY(J)/DUX(I-1))*(U(I,J) - U(I-1,J))
C      DF4 = (1./RE)*(DPX(I-1)/DPY(J-1))*(U(I,J) - U(I,J-1))
C      DIFFU = DF1 + DF2 + DF3 + DF4
C
C      RETURN
C      END
C
C      SUBROUTINE DIFUSV(NMAX1,I,J,V,DUX,DVY,DPX,DPY,RE,DIFFV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 V(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),DPX(*),DPY(*)
C      REAL*8 RE,DF1,DF2,DF3,DF4,DIFFV
C      INTEGER I,J
C
C      DF1 = (1./RE)*(DPY(J-1)/DPX(I))*(V(I,J) - V(I+1,J))
C      DF2 = (1./RE)*(DUX(I)/DVY(J))*(V(I,J) - V(I,J+1))
C      DF3 = (1./RE)*(DPY(J-1)/DPX(I-1))*(V(I,J) - V(I-1,J))
C      DF4 = (1./RE)*(DUX(I)/DVY(J-1))*(V(I,J) - V(I,J-1))
C      DIFFV = DF1 + DF2 + DF3 + DF4
C
C      RETURN
C      END
C
C      FORMULAÇÃO DIFERENÇAS FINITAS
C
C      SUBROUTINE DIFFDFU(NMAX1,NPY,I,J,U,DUX,DPY,RE,DIFFU)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*),DUX(*),DPY(*)
C      REAL*8 DIFFU,RE,R,SY,SY1,SY2
C      INTEGER I,J,NPY

```

```

C
  IF(J.NE.2.AND.J.NE.NPY+1) THEN
    SY2 = 2.
    SY1 = 1.
  ELSE
    SY = DPY(J)/DPY(J-1)
    SY1 = SY*SY
    SY2 = 1.+SY1
  ENDIF
  R = 1./RE
C
  DIFFU = R*((U(I+1,J)-2.*U(I,J)+U(I-1,J))/(DUX(I)*DUX(I))+
!          (U(I,J+1)-SY2*U(I,J)+SY1*U(I,J-1))/(DPY(J)*DPY(J)))
  RETURN
  END
C
  -----
  SUBROUTINE DIFFDFU2(NMAX1,NPY,I,J,U,DUX,DPY,RE,DIFFU)
C
C  Declaração das variáveis
C  -----
  REAL*8 U(NMAX1,*),DUX(*),DPY(*)
  REAL*8 DIFFU,RE,R,SDUX,SDPY
  INTEGER I,J,NPY
C
  R = 1./RE
  SDUX = DUX(I)+DUX(I-1)
  SDPY = DPY(J)+DPY(J-1)
  IF(J.NE.2.AND.J.NE.NPY+1) THEN
    DIFFU = R*((U(I+1,J)-2.*U(I,J)+U(I-1,J))/(DUX(I)*DUX(I))+
!          (U(I,J+1)-2.*U(I,J)+U(I,J-1))/(DPY(J)*DPY(J)))
  ELSE
    DIFFU = 2.*R*((U(I+1,J)-U(I,J))/(DUX(I)*SDUX)+
!          (U(I-1,J)-U(I,J))/(DUX(I-1)*SDUX)+
!          (U(I,J+1)-U(I,J))/(DPY(J)*SDPY)+
!          (U(I,J-1)-U(I,J))/(DPY(J-1)*SDPY))
  ENDIF
C
  RETURN
  END
C
  -----
  SUBROUTINE DIFFDFV(NMAX1,NPX,I,J,V,DVY,DPX,RE,DIFFV)
C
C  Declaração das variáveis
C  -----
  REAL*8 V(NMAX1,*),DVY(*),DPX(*)
  REAL*8 SX,SX1,SX2,RE,R,DIFFV
  INTEGER I,J,NPX
C
  IF(I.NE.2.AND.I.NE.NPX+1) THEN
    SX2 = 2.
    SX1 = 1.
  ELSE
    SX = DPX(I)/DPX(I-1)
    SX1 = SX*SX
    SX2 = 1.+SX1
  ENDIF
  R = 1./RE

```

```

C      DIFFV = R*((V(I+1,J)-SX2*V(I,J)+SX1*V(I-1,J))/
!          (DPX(I)*DPX(I))+(V(I,J+1)-2.*V(I,J)+V(I,J-1))/
!          (DVY(J)*DVY(J)))
C
C      RETURN
C      END
C
C      -----
C      SUBROUTINE DIFFDFV2(NMAX1,NPX,I,J,V,DVY,DPX,RE,DIFFV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 V(NMAX1,*),DVY(*),DPX(*)
C      REAL*8 RE,R,DIFFV,SDPX,SDVY
C      INTEGER I,J,NPX
C
C      R = 1./RE
C      SDPX = DPX(I)+DPX(I-1)
C      SDVY = DVY(J)+DVY(J-1)
C      IF(I.NE.2.AND.I.NE.NPX+1) THEN
C          DIFFV = R*((V(I+1,J)-2.*V(I,J)+V(I-1,J))/(DPX(I)*DPX(I))+
!              (V(I,J+1)-2.*V(I,J)+V(I,J-1))/(DVY(J)*DVY(J)))
C      ELSE
C          DIFFV = 2.*R*((V(I+1,J)-V(I,J))/(DPX(I)*SDPX)+
!              (V(I-1,J)-V(I,J))/(DPX(I-1)*SDPX)+
!              (V(I,J+1)-V(I,J))/(DVY(J)*SDVY)+
!              (V(I,J-1)-V(I,J))/(DVY(J-1)*SDVY))
C      ENDIF
C
C      RETURN
C      END
C
C      -----
C      SUBROTINA CALCULA O VETOR COM OS TERMOS INDEPENDENTES
C      -----
C      SUBROUTINE TINDEP(NMAX1,N,NPX,NPY,DUX,DVY,U,V,DT,SP,SU,SV)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),SU(NMAX1,*),SV(NMAX1,*)
C      REAL*8 DUX(*),DVY(*),SP(*),DT
C      INTEGER NPX,NPY,N,K
C
C      K = 0
C
C      Ponto no canto inferior esquerdo
C      -----
C      SP(1)=DUX(2)*(V(2,2)/DT-SV(2,3))+DVY(2)*(U(2,2)/DT-SU(3,2))
C
C      Pontos na fase inferior
C      -----
C      DO I = 3,NPX
C          SP(I-1) = DUX(I)*(V(I,2)/DT-SV(I,3))+DVY(2)*(SU(I,2)
!              -SU(I+1,2))
C      ENDDO
C
C      Ponto no canto inferior direito
C      -----

```

```

      SP(NPX) = DUX(NPX+1)*(V(NPX+1,2)/DT-SV(NPX+1,3))+DVY(2)*
      !      (SU(NPX+1,2)-U(NPX+2,2)/DT)
C
      DO J = 3,NPY
C      Pontos na fase lateral esquerda
C      -----
      K = NPX*(J-2) + 1
      SP(K) = DUX(2)*(SV(2,J)-SV(2,J+1))+DVY(J)*(U(2,J)/DT-
      !      SU(3,J))
C
C      Pontos interiores
C      -----
      DO I = 3,NPX
      K = K+1
      SP(K) = DVY(J)*(SU(I,J)-SU(I+1,J))+DUX(I)*
      !      (SV(I,J)-SV(I,J+1))
      ENDDO
C
C      Pontos na fase lateral direita
C      -----
      K = K+1
      SP(K) = DUX(NPX+1)*(SV(NPX+1,J)-SV(NPX+1,J+1)) + DVY(J)*
      !      (SU(NPX+1,J)-U(NPX+2,J)/DT)
      ENDDO
C
C      Ponto no canto superior esquerdo
C      -----
      K = K+1
      SP(K) = DUX(2)*(SV(2,NPY+1)-V(2,NPY+2)/DT) + DVY(NPY+1)*
      !      (U(2,NPY+1)/DT - SU(3,NPY+1))
C
C      Pontos na fase superior
C      -----
      DO I = 3,NPX
      K = K+1
      SP(K) = DUX(I)*(SV(I,NPY+1)-V(I,NPY+2)/DT)+DVY(NPY+1)*
      !      (SU(I,NPY+1)-SU(I+1,NPY+1))
      ENDDO
C
C      Ponto no canto superior direito
C      -----
      SP(N) = DUX(NPX+1)*(SV(NPX+1,NPY+1)-V(NPX+1,NPY+2)/DT) +
      !      DVY(NPY+1)*(SU(NPX+1,NPY+1)-U(NPX+2,NPY+1)/DT)
C
      RETURN
      END
C
C      -----
C      SUBROTINA DETERMINA O CAMPO DE PRESSÃO
C      -----
C      SUBROUTINE CPRE(NMAX1,NPX,NPY,P,CP)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
      REAL*8 P(*),CP(NMAX1,*)
      INTEGER NPX,NPY,K
C
      K = 0

```

```

DO J = 2, NPY+1
  DO I = 2, NPX+1
    K = K + 1
    CP(I,J) = P(K)
  ENDDO
ENDDO
C
RETURN
END
C
-----
C      SUBROTINA DETERMINA O CAMPO DE VELOCIDADES
C
-----
C      SUBROUTINE CVEL(NMAX1,NPX,NPY,DPX,DPY,SU,SV,CU,CV,CP,DT)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 DPX(*),DPY(*),SU(NMAX1,*),SV(NMAX1,*),CU(NMAX1,*),
C      REAL*8 CV(NMAX1,*),CP(NMAX1,*),DT
C      INTEGER NPX,NPY
C
C      Determinação do campo de velocidade u
C      -----
C      DO J = 2, NPY+1
C        DO I = 3, NPX+1
C          CU(I,J) = DT*((CP(I-1,J)-CP(I,J))/DPX(I-1)+SU(I,J))
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      Determinação do campo de velocidade v
C      -----
C      DO J = 3, NPY+1
C        DO I = 2, NPX+1
C          CV(I,J) = DT*((CP(I,J-1)-CP(I,J))/DPY(J-1)+SV(I,J))
C        ENDDO
C      ENDDO
C
C      RETURN
C      END
C
C      -----
C      SUBROTINA CALCULA O RESIDUO NA EQUACAO DA CONTINUIDADE
C
C      -----
C      SUBROUTINE RESIDUO(NMAX1,NPX,NPY,CU,CV,DUX,DVY,RESM)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
C      REAL*8 CU(NMAX1,*),CV(NMAX1,*),DUX(*),DVY(*)
C      REAL*8 BM,RESM
C      INTEGER NPX,NPY
C
C      Calculo do residuo na equação da continuidade
C      -----
C      RESM = 0.
C      DO J = 2, NPY+1
C        DO I = 2, NPX+1
C          BM = DABS(DVY(J)*(CU(I+1,J)-CU(I,J))+
C          !      DUX(I)*(CV(I,J+1)-CV(I,J)))
C          IF(RESM.LT.BM) RESM = BM

```

```

      ENDDO
      ENDDO
C
      RETURN
      END
C
      -----
C      SUBROTINA ESTABELECE O CRITERIO DE PARADA
C      -----
      SUBROUTINE TEST(NMAX1,NPX,NPY,CU,CV,U,V,DIFMAX,DIFA,NOSC,IOSC,
! IT,DT)
C
C      Declaração das variáveis
C      -----
      REAL*8 U(NMAX1,*),V(NMAX1,*),CU(NMAX1,*),CV(NMAX1,*),
      REAL*8 ERROU,ERROV,DIFU,DIFV,DIFMAX,DT,DIFA
      INTEGER NPX,NPY,IT,NOSC,IOSC
C
C      Calculo do erro máximo para a velocidade
C      -----
C      Direção x
C      -----
      DIFU = 0.
      ERROU = 0.
      DO J = 2,NPY+1
        DO I = 3,NPX+1
          DIFU = DABS((U(I,J)-CU(I,J))/DT)
          IF(ERROU.LT.DIFU) ERROU = DIFU
          U(I,J) = CU(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
C
C      Direção y
C      -----
      DIFV = 0.
      ERROV = 0.
      DO J = 3,NPY+1
        DO I = 2,NPX+1
          DIFV = DABS((V(I,J)-CV(I,J))/DT)
          IF(ERROV.LT.DIFV) ERROV = DIFV
          V(I,J) = CV(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
C
C      Erro máximo
C      -----
      DIFMAX = DMAX1(ERROU,ERROV)
C
C      Calculo do numero de oscilações
C      -----
      IF(DIFMAX.GT.DIFA) THEN
        IF(IOSC.EQ.1) THEN
          WRITE(20,*) IT, DIFMAX
        ENDIF
        NOSC = NOSC + 1
      ENDIF
      DIFA = DIFMAX
C
      RETURN
      END

```

```

C -----
C          SUBROTINA PARA CALCULAR O INTERVALO DE TEMPO: DT
C -----
C SUBROUTINE DELTAT(NMAX1,NPX,NPY,RE,FR,DUX,DVY,CU,CV,DT)
C
C Declaração das variáveis
C -----
C REAL*8 DXMIN,DYMIN,UMAX,VMAX,DTC,DTD,DT,DU,DV,RE,FR,AU,AV
C REAL*8 CU(NMAX1,*),CV(NMAX1,*),DUX(*),DVY(*),DXMIN2,DYMIN2
C INTEGER NPX,NPY
C
C Calculo do dx e dy mínimos
C -----
C DXMIN = DUX(2)
C DO I = 3,NPX+1
C   IF(DXMIN.GE.DUX(I)) DXMIN = DUX(I)
C ENDDO
C DYMIN = DVY(2)
C DO J = 3,NPY+1
C   IF(DYMIN.GE.DVY(J)) DYMIN = DVY(J)
C ENDDO
C
C Calculo das velocidades máximas Umax,Vmax
C -----
C UMAX = 0.
C DO J = 2,NPY+2
C   DO I = 2,NPX+2
C     AU = DABS(CU(I,J))
C     IF(UMAX.LT.AU) UMAX = AU
C   ENDDO
C ENDDO
C VMAX = 0.
C DO J = 2,NPY+2
C   DO I = 2,NPX+2
C     AV = DABS(CV(I,J))
C     IF(VMAX.LT.AV) VMAX = AV
C   ENDDO
C ENDDO
C
C Calculo do dt convectivo
C -----
C DU = DXMIN/UMAX
C DV = DYMIN/VMAX
C DTC = 0.25*DMIN1(DU,DV)
C
C Calculo do dt difusivo
C -----
C DXMIN2 = DXMIN*DXMIN
C DYMIN2 = DYMIN*DYMIN
C DTD=(RE*DXMIN2*DYMIN2)/(2.*(DXMIN2+DYMIN2))
C
C dt corrigido
C -----
C DT = FR*DMIN1(DTC,DTD)
C RETURN
C END
C -----

```