

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Carlos Eduardo Leite
Pereira E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 25 / 02 / 2002
Marco Lúcio Bittencourt
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Formulação Variacional e Aproximação por Elementos Finitos dos Modelos de Placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin

Autor: Eng. Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

07/02

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

**Formulação Variacional e Aproximação por Elementos
Finitos dos Modelos de Placa de Kirchhoff e
Reissner-Mindlin**

Autor: Eng. Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 2002
SP - BRASIL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P414f Pereira, Carlos Eduardo Leite
 Formulação variacional e aproximação por elementos
 finitos dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-
 Mindlin / Carlos Eduardo Leite Pereira.--Campinas, SP:
 [s.n.], 2002.

 Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

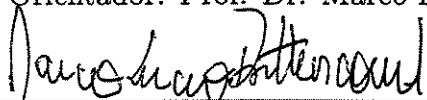
 1. Placas e cascas elásticas. 2. Método dos elementos
 finitos. 3. Mecânica dos meios contínuos. 4. Placas
 (Engenharia). 5. Resistência dos materiais. I.
 Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
 Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Formulação Variacional e Aproximação por Elementos
Finitos dos Modelos de Placa de Kirchhoff e
Reissner-Mindlin**

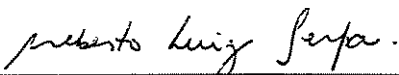
Autor: Eng. Carlos Eduardo Leite Pereira
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM



Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan
DES/FEC



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM

Campinas, 25 de fevereiro de 2002.

200239572

Agradecimentos

Aos meus pais e parentes pelo apoio dado durante toda minha vida acadêmica.

Aos meus colegas Wallace, Luciano, Maurício, Alberto e Cláudio pelo companherismo durante todo o curso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt pelo apoio dado durante a realização deste trabalho.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, pela oportunidade que me foi oferecida.

À Capes - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo auxílio oferecido e pela confiança em meu trabalho.

A imaginação é mais importante que o conhecimento.
Albert Einstein (1879-1955)

Resumo

PEREIRA, Carlos Eduardo Leite, *Formulação Variacional e Aproximação por Elementos Finitos dos Modelos de Placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 120p. Dissertação (Mestrado)

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver a formulação variacional dos modelos de placa de Kirchhoff, incluindo o efeito de membrana, e de Reissner-Mindlin. Ambos os modelos são formulados utilizando-se a mesma metodologia. Primeiramente, definem-se as hipóteses cinemáticas dos modelos, considerando-se pequenos deslocamentos. Em seguida, deduzem-se os campos de deformação e de movimentos rígidos compatíveis com a cinemática. O conceito de trabalho interno é utilizado com o objetivo de encontrar os esforços internos compatíveis com a cinemática dos modelos. Em seguida, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é utilizado, a fim de caracterizar os esforços externos e os Problemas de Valor de Contorno (PVC) de equilíbrio. Conhecidos esses PVCs, a equação constitutiva de um material elástico, linear, isotrópico e homogêneo é utilizada para obter as relações entre os campos de tensão e de deformação dos modelos de placa, assim como os PVCs ou forma forte em termos da cinemática. As formas fracas das equações diferenciais dos modelos são então aproximadas pelo Método dos Elementos Finitos. Finalmente, considerações sobre os elementos de placa são apresentadas.

Palavras Chave

-Placas, Kirchhoff, Mindlin, Reissner, Elementos Finitos, Formulação Variacional

Abstract

PEREIRA, Carlos Eduardo Leite, *Variational Formulation and Finite Element Approach of the Kirchhoff and Reissner-Mindlin Plate Models*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 120p. Dissertação (Mestrado)

The present work aims to present the variational formulation of the Kirchhoff plate model with membrane effect and the Reissner-Mindlin plate model. Both models are formulated using the same methodology. First, it is defined the kinematic hypotheses of the models for small displacements. After that, the strain and rigid displacement fields compatible with the kinematic hypotheses are obtained. The internal work concept is used to find the internal forces compatible with the kinematic hypotheses of the models. The Virtual Work Principle is used to find the external forces and the equilibrium Boundary Value Problems (BVP). The constitutive equation of the elastic, linear, isotropic and homogeneous material is used to obtain the relations between the stress and strain fields. Based on that, BVPs in terms of the kinematics are obtained. The weak forms of the differential equation are approximated by Finite Element Method. Finally, comments about plate elements are presented.

Keywords

-Plates, Kirchhoff, Mindlin, Reissner, Finite Element Method, Variational Formulation

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Revisão Histórica	2
1.2	Objetivos	5
1.3	Organização do Texto	7
2	Modelo de Placa de Kirchhoff	8
2.1	Formulação	8
2.1.1	Definição da Cinemática	8
2.1.2	Deformação	12
2.1.3	Movimentos de Corpo Rígido	20
2.1.4	Determinação do Esforços Internos	22
2.1.5	Determinação dos Esforços Externos	36
2.1.6	Aplicação da Equação Constitutiva	40
2.2	Aproximação	45
2.2.1	Forma Forte	45
2.2.2	Forma Fraca	46
2.2.3	Aproximação da Forma Fraca	51
2.2.4	Elementos Finitos de Placa	56
3	Modelo de Placa de Reissner-Mindlin	66
3.1	Formulação	67
3.1.1	Definição da Cinemática	67
3.1.2	Deformação	71
3.1.3	Movimentos de Corpo Rígido	76
3.1.4	Determinação dos Esforços Internos	78
3.1.5	Determinação dos Esforços Externos	83
3.1.6	Aplicação da Equação Constitutiva	86
3.1.7	Fator de Cisalhamento	89
3.2	Aproximação	92
3.2.1	Forma Forte	92
3.2.2	Forma Fraca	93
3.2.3	Aproximação da Forma Fraca	95
3.2.4	Elementos Finitos de Placa	99

3.2.5 Travamento devido ao Cisalhamento	100
4 Comentários Finais	102
Referências Bibliográficas	104
A Esforços no Contorno num Sistema de Coordenadas Normal Tangencial	108
B Polinômios Cúbicos Unidimensionais de Hermite	112

Lista de Figuras

1.1	Superfície de referência numa placa plana.	2
2.1	Cinemática da flexão pura do modelo de Kirchhoff.	9
2.2	Cinemática do modelo de Kirchhoff segundos os plano xz e yz	10
2.3	Cinemática das normais AB e CD da placa.	13
2.4	Cinemática relativa entre pontos de normais à superfície média no modelo de Kirchhoff em flexão pura.	14
2.5	Distorção no plano da superfície de referência.	18
2.6	Movimentos rígidos relativos à flexão da placa de Kirchhoff.	21
2.7	Interpretação das integrais ao longo da espessura na placa de Kirchhoff.	25
2.8	Momentos fletores e torçores e forças normais na placa (Szabó e Babuska, 1991).	28
2.9	Forças cortantes Q_x e Q_y e carga distribuída q_i (Szabó e Babuska, 1991).	30
2.10	Sistema de coordenadas ntz no contorno de uma placa não-retangular (Szabó e Babuska, 1991).	32
2.11	Pontos em descontinuidades geométricas da superfície média.	34
2.12	Esforços internos e externos devido ao efeito de flexão e membrana.	36
2.13	Esforços presentes no contorno de uma placa de Kirchhoff.	39
2.14	Distribuição de tensões na placa de Kirchhoff.	45
2.15	Triângulo de Pascal para elementos quadrangulares (Taroco e Feijóo, 1983).	57
2.16	Elementos quadrangulares.	59
2.17	Elemento quadrangular de 4 nós.	59
2.18	Funções de Hermite para o primeiro nó de um elemento quadrangular de 4 nós e 4 graus de liberdade por nó.	61
2.19	Domínio de integração real e de referência.	62
2.20	Triângulo de Pascal para elementos triangulares.	64
3.1	Cinemática do modelo de Mindlin.	67
3.2	Cinemática do modelo de Mindlin segundo os planos xz e yz	69
3.3	Cinemática das normais AB e CD da placa do modelo de Reissner-Mindlin.	71
3.4	Componentes de deformação normal no modelo de Mindlin.	72
3.5	Componentes de deformação cisalhante na placa de Mindlin.	74
3.6	Momento devido à cortante distribuída V_{xz}	82
3.7	Esforços internos e externos na placa de Mindlin.	83
3.8	Distribuições constante e parabólica de tensão cisalhante na espessura da placa de Mindlin.	90
3.9	Distribuições de tensão na espessura da placa de Mindlin.	92

3.10	Pontos de integração num elemento quadrado bilinear de 4 nós.	101
B.1	Elemento finito unidimensional de dois nós.	112
B.2	Polinômios cúbicos de hermite unidimensionais.	115

Lista de Tabelas

2.1	Componentes de deformação devido à flexão pura e efeito de membrana. . .	20
2.2	Condições de Contorno no Modelo de Placa de Kirchhoff.	39
3.1	Esforços internos do modelo de placa de Reissner-Mindlin.	79

Nomenclatura

Letras Latinas

- a, b, c, w - deslocamento transversal na direção do eixo z
 c - deslocamento longitudinal nodal na direção do eixo x dos pontos da superfície de referência no modelo de Kirchhoff
 d - deslocamento longitudinal nodal na direção do eixo y dos pontos da superfície de referência no modelo de Kirchhoff
 f_{xi} - força distribuída interna tangente à superfície de referência na direção x
 f_{yi} - força distribuída interna tangente à superfície de referência na direção y
 f_x - força distribuída externa na direção de x tangente à superfície de referência da placa
 f_y - força distribuída externa na direção de y tangente à superfície de referência da placa
 f_{nn} - força distribuída interna normal à superfície lateral do contorno da placa
 f_{nt} - força distribuída interna tangencial à superfície lateral do contorno da placa
 $\bar{f}_{nn}$ - força distribuída externa normal à superfície lateral do contorno da placa
 $\bar{f}_{nt}$ - força distribuída externa tangencial à superfície lateral do contorno da placa
 k - fator de correção da distribuição da tensão de cisalhamento
 $\bar{m}_{nn}$ - momento interno distribuído na direção do vetor tangente t no contorno
 m_{zx} - momento fletor externo distribuído por unidade de área na direção do eixo x
 m_{zy} - momento fletor externo distribuído por unidade de área na direção do eixo y
 $\bar{m}_{nn}$ - momento fletor externo distribuído paralelamente no contorno da placa
 $\bar{m}_{nt}$ - momento torçor externo distribuído perpendicularmente no contorno da placa
 n_x - componente na direção do eixo x do vetor normal à espessura
 n_y - componente na direção do eixo y do vetor normal à espessura
 $\bar{q}$ - força distribuída externa transversal à superfície média definida no contorno
 q_i - carga interna distribuída perpendicular à superfície de referência na direção z
 q - carga externa distribuída perpendicular à superfície de referência na direção z
 $\bar{q}_n$ - carga externa distribuída no contorno da placa na direção do eixo z
 t - espessura da placa
 t_i - densidade de trabalho interno
 u - deslocamento longitudinal na direção do eixo x

u_0 - deslocamento longitudinal na direção do eixo x dos pontos da superfície de referência
 u_{0n} - deslocamento longitudinal na direção do eixo n dos pontos da superfície de referência
 v - deslocamento longitudinal na direção do eixo y ; função teste pertencente ao domínio do operador diferencial que satisfaz as condições de contorno do problema
 v_0 - deslocamento longitudinal na direção do eixo y dos pontos da superfície de referência
 v_{0t} - deslocamento longitudinal na direção do eixo t dos pontos da superfície de referência
 $v_n, \bar{v}$ - função teste aproximada
 $w_n, \bar{w}$ - deslocamento aproximado transversal na direção do eixo z
 A - área da superfície de referência da placa
 D - módulo de rigidez devido ao efeito de flexão
 D_{Af} - domínio do operador diferencial do efeito de flexão
 D_{Am} - domínio do operador diferencial do efeito de membrana
 E - módulo de elasticidade
 G - módulo de elasticidade transversal
 M_{xx} - momento fletor interno por unidade de comprimento na direção do eixo y
 M_{yy} - momento fletor interno por unidade de comprimento na direção do eixo x
 M_{xy}, M_{yx} - momento torçor interno por unidade de comprimento
 M_{nn} - momento fletor interno por unidade de comprimento descrito no sistema (n, t, z)
 M_{nt} - momento torçor interno por unidade de comprimento descrito no sistema (n, t, z)
 M_{nt}^+, M_{nt}^- - forças concentradas interna nos pontos de descontinuidade geométrica
 N - número de pontos de descontinuidade geométrica
 N_{xx} - força interna normal por unidade de comprimento na direção do eixo x
 N_{yy} - força interna normal por unidade de comprimento na direção do eixo y
 N_{xy}, N_{yx} - força interna tangencial por unidade de comprimento na direção do eixo y e x respectivamente
 N_{nn} - força interna normal à espessura da placa descrita no sistema (n, t, z)
 N_{nt} - força interna tangente à espessura da placa descrita no sistema (n, t, z)
 P_i - pontos de descontinuidade geométrica
 Q_{xz} - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano xz na direção do eixo z
 Q_{yz} - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano yz na direção do eixo z
 Q_n - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano nz na direção do eixo z
 R_{p_i} - forças externas concentradas na direção transversal da placa atuando nos pontos P_i do contorno
 T - módulo de rigidez devido ao efeito de membrana

T_i - trabalho interno
 T_e - trabalho externo
 V - volume da placa
 V_{xz} - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano xz na direção do eixo z
 V_{yz} - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano yz na direção do eixo z
 V_n - força cortante interna por unidade de comprimento paralela ao plano nz na direção do eixo z

Letras Latinas em Negrito

$\{\mathbf{f}^f\}$ - vetor de carregamento devido ao efeito de flexão
 $\{\mathbf{f}^m\}$ - vetor de carregamento devido ao efeito de membrana
 $\mathbf{j}$ - inverso da matriz Jacobiana
 $\mathbf{n}$ - versor normal à espessura da placa
 $\mathbf{t}$ - versor tangente à espessura da placa
 $\mathbf{u}(x, y, z)$ - campo vetorial de deslocamento
 $[\mathbf{B}^f]$ - matriz de deformação devido ao efeito de flexão
 $[\mathbf{B}^m]$ - matriz de deformação devido ao efeito de membrana
 $[\mathbf{B}^c]$ - matriz de deformação devido ao efeito de cisalhamento
 $[\mathbf{D}]$ - matriz de elasticidade devido ao estado plano de tensão
 $[\mathbf{D}^f]$ - matriz de elasticidade devido ao efeito de flexão
 $[\mathbf{D}^c]$ - matriz de elasticidade devido ao efeito de cisalhamento
 $\mathbf{J}$ - matriz Jacobiana
 $[\mathbf{K}^f]$ - matriz de rigidez devido ao efeito de flexão
 $[\mathbf{K}^m]$ - matriz de rigidez devido ao efeito de membrana

Letras Gregas

α_{xz} - ângulo de rotação no plano xz devido ao efeito de flexão
 α_{yz} - ângulo de rotação no plano yz devido ao efeito de flexão
 β_{xz} - ângulo de rotação no plano xz devido ao cisalhamento
 β_{yz} - ângulo de rotação no plano yz devido ao cisalhamento
 $\bar{\gamma}_{xy}$ - distorção total no plano xy
 $\bar{\gamma}_{xz}$ - distorção total no plano xz

$\bar{\gamma}_{yz}$ - distorção total no plano yz
 γ_1, γ_2 - ângulo de distorção no plano xy
 γ_3, γ_4 - ângulo de distorção no plano xz
 γ_5, γ_6 - ângulo de distorção no plano yz
 ε_{xx}^f - deformação na direção do eixo x devido ao efeito de flexão
 ε_{yy}^f - deformação na direção do eixo y devido ao efeito de flexão
 ε_{xx}^m - deformação na direção do eixo x devido ao efeito de membrana
 ε_{yy}^m - deformação na direção do eixo y devido ao efeito de membrana
 ε_{xx} - deformação total na direção do eixo x devido à flexão
 ε_{yy} - deformação total na direção do eixo y devido à flexão
 ε_{zz} - deformação na direção do eixo z
 $\theta_{xz}, \varphi_{xz}$ - ângulo de rotação total no plano xz
 $\theta_{yz}, \varphi_{yz}$ - ângulo de rotação total no plano yz
 $\bar{\theta}_{xz}, \bar{\varphi}_{xz}$ - ângulo de rotação total aproximado no plano xz
 $\bar{\theta}_{yz}, \bar{\varphi}_{yz}$ - ângulo de rotação total aproximado no plano yz
 θ_{nn} - ângulo de rotação total no plano
 θ_{nt} - ângulo de rotação total no plano
 ν - coeficiente de Poisson
 σ_{xx}^f - tensão normal na direção do eixo x devido ao efeito de flexão
 σ_{yy}^f - tensão normal na direção do eixo y devido ao efeito de flexão
 τ_{xy}^f - tensão cisalhante no plano xy devido ao efeito de flexão
 σ_{xx}^m - tensão normal na direção do eixo x devido ao efeito de membrana
 σ_{yy}^m - tensão normal na direção do eixo y devido ao efeito de membrana
 τ_{xy}^m - tensão cisalhante no plano xy devido ao efeito de membrana
 σ_{xx} - tensão normal total na direção do eixo x
 σ_{yy} - tensão normal total na direção do eixo y
 τ_{xy} - tensão cisalhante total no plano xy
 τ_{xz} - tensão cisalhante total no plano xz
 τ_{yz} - tensão cisalhante total no plano yz
 ϕ_i, ϕ_j - funções de interpolação
 ∂A - contorno da superfície de referência da placa

Capítulo 1

Introdução

Elementos estruturais de placa têm aplicações nos mais variados ramos da engenharia, tais como, engenharia civil, naval, aeronáutica e mecânica.

Consideram-se placas como componentes estruturais planos que apresentam a espessura bem menor que as demais dimensões. Essa característica geométrica básica permite tratar tais componentes a partir de sua superfície média de referência. Reduz-se, assim, um problema originalmente tridimensional para um problema bidimensional. Assim, o domínio de interesse num problema de placa é a superfície média de referência indicada na Figura 1.1.

Nos próximos capítulos, apresentam-se a formulação e a aproximação pelo Método de Elementos Finitos (MEF) dos modelos bidimensionais de Kirchhoff e Reissner-Mindlin para o tratamento de placas. O primeiro modelo considera apenas o efeito de flexão pura da placa e não inclui o efeito do cisalhamento transversal. Já o modelo de Reissner-Mindlin considera o efeito de cisalhamento transversal. Em ambos os casos, obtêm-se equações diferenciais em termos do deslocamento transversal $w(x, y)$ ao longo do eixo z dos pontos (x, y) da superfície de referência. Os modelos de Kirchhoff e Reissner-Mindlin são análogos, respectivamente, às vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

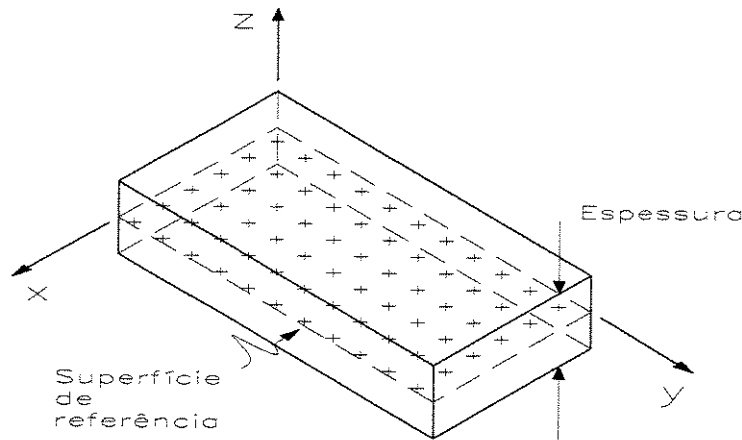


Figura 1.1: Superfície de referência numa placa plana.

1.1 Revisão Histórica

A seguir, apresenta-se uma breve revisão histórica dos modelos de placa baseada nos trabalhos (de Andrade, 2001) e (Júnior, 2000).

A primeira formulação descrevendo a flexão de placa acredita-se ter sido proposta por volta de 1823 por **Navier** (Love, 1944). Neste modelo, a rigidez à flexão é definida em termos de uma constante elástica, sendo necessárias três condições de contorno naturais para garantir a solução do problema. Posteriormente, **Bernoulli** (Love, 1944) obteve uma equação diferencial para placas baseada num sistema aproximado de duas vigas. Em 1829, **Poisson** (Poisson, 1829) chegou a construir uma formulação que exigia três condições de contorno naturais.

Um grande avanço em termos de modelo foi conseguido em 1850 com **Kirchhoff** (Kirchhoff, 1850) ao propor as hipóteses fundamentais da teoria de placa. Para isso, utilizou o cálculo da energia potencial de uma viga fletida e fez uso do princípio dos trabalhos virtuais com o intuito de obter a equação diferencial que rege o problema de placa.

Kirchhoff mostrou que o módulo de rigidez à flexão da placa é função do módulo de *Young*, do coeficiente de *Poisson* e da espessura da placa. Comparando com o trabalho desenvolvido por Poisson, Kirchhoff mostrou que as condições de contorno podem ser reduzidas

a duas condições naturais, e que as condições de contorno propostas por Poisson não eram compatíveis com a natureza da equação diferencial de quarta ordem. Porém, neste modelo, não é levado em conta o efeito da distorção da seção transversal causada pela cortante. Por isso, este modelo está restrito a descrever o comportamento de placas finas, pois a distorção ocorrida na seção transversal é desprezível.

Em 1899, **Levy** (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959) discutiu os problemas de flexão de placas retangulares com duas bordas opostas simplesmente apoiadas, e sugeriu a solução da equação diferencial em forma de séries.

Pelo fato da teoria de **Kirchhoff** oferecer bons resultados para valores no centro da placa, ou no meio do contorno de uma placa, mas não atingir bons resultados para a distribuição das tensões para os demais pontos do domínio e do contorno, **Reissner** (Reissner, 1944) desenvolveu uma teoria aproximando o problema de flexão de placas à teoria tridimensional da elasticidade. Em 1944, **Reissner** (Reissner, 1944) formulou sua teoria assumindo uma distribuição de tensões internas e considerando o efeito da deformação por cortante. Assim, obteve um sistema de equações diferenciais que pode ser condensado em uma equação diferencial de sexta ordem, que satisfaz as três condições de contorno, ao invés de apenas duas, como na teoria clássica de **Kirchhoff**.

Segundo **Reissner** (Reissner, 1947), a redução das três condições de contorno a duas condições na teoria clássica foi resultado da omissão da deformação cisalhante transversal.

Em 1951 **Mindlin** (Mindlin, 1951a) formulou um modelo muito próximo daquele de **Reissner** para a análise de placas. Sua dedução teve como base as equações de equilíbrio da teoria da elasticidade tridimensional para um corpo em movimento, considerando-se o efeito da inércia rotatória e da vibração cisalhante. Assumindo constante as distorções que ocorrem na espessura, as tensões foram obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais é condensado a uma equação diferencial de sexta ordem e satisfaz as três condições de contorno requeridas.

Em 1960, **Salerno & Goldberg** (Salerno e Goldberg, 1960) apresentaram uma solução do problema de placas reduzindo o sistema de três equações diferenciais de **Reiss-**

ner a uma equação diferencial de quarta ordem semelhante à da teoria de Kirchhoff e uma equação diferencial de segunda ordem para determinar uma função de tensão. Os resultados obtidos foram próximos à teoria clássica de Kirchhoff.

Em 1969, **Panc** (Panc, 1975) apresentou um tratado onde discutiu as diversas formulações disponíveis para a análise estática de placas. Quatro anos depois, **Cheng** (Cheng, 1979) deduziu a teoria estática de placas diretamente da teoria da elasticidade tridimensional. Um dos destaques do trabalho de **Cheng** é o caminho sistemático de desenvolvimento de teorias bidimensionais aproximadas a partir da teoria fundamental tridimensional para vários problemas físicos.

Em 1988, **Barrett & Ellis** (Barrett e Ellis, 1988) apresentaram o problema de placa submetida a um carregamento transversal como uma perturbação singular. No mesmo trabalho mostraram como sua teoria se relaciona com as teorias de **Kirchhoff**, **Mindlin** e **Reissner** e uma discussão detalhada nas especificações das condições de contorno com base no trabalho de **Gregory & Wan** (Gregory e Wan, 1985).

Reissner (Reissner, 1986), em 1986, apresentou uma "generalização" das equações para a análise de placas com grandes deformações incluindo a deformabilidade da placa por cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de décima ordem, na forma de duas equações simultaneamente de quarta ordem, suplementadas por uma equação de segunda ordem. No ano seguinte, **Reissner** (Reissner, 1987) demonstrou uma teoria abordando placas moderadamente espessas, cujo sistema de equações diferenciais aparece na décima segunda ordem, mostrando consistência de resultados com a teoria clássica.

Foi proposta, em 1988, uma versão da teoria de Reissner para o caso de placas homogêneas, isotrópicas, com quaisquer condições de contorno. Os autores deste trabalho são **Ladevèze & Pécastaings** (Ladevèze e Pécastaings, 1988). A diferença deste trabalho em relação à teoria de Reissner está no valor considerado para o fator de deformabilidade por cisalhamento transversal e pelas condições de contorno.

Em 1991, **Reissner** (Reissner, 1991) apresentou um trabalho onde mostra o conceito de apoio "soft" como uma condição para a transição suave da teoria de sexta ordem para a

teoria clássica de quarta ordem.

Em 1997, foi publicada a teoria de placas espessas com base nas soluções genéricas da elasticidade de Papkovitch-Neuber. Este trabalho foi realizado por **Wang & Shi** (Wang e Shi, 1997). Wang teve grande contribuição na publicação de trabalhos com ênfase nas placas transversalmente isotrópicas (1985) e problemas de dinâmica de placas isotrópicas e micropolares (1988). Nos estudos de **Cheng** (Cheng, 1977), **Gregory & Wan** (Gregory e Wan, 1985) e **Wang** (Wang, 1990), pode-se notar a grande influência da espessura da placa nos deslocamentos através da teoria elástica dos corpos tridimensionais. Demonstra-se nestes trabalhos a boa estabilidade da conexão entre as teorias de flexão de placas finas (Kirchhoff) com a de flexão de placas moderadamente grossas por deslocamento imposto (Mindlin) ou por tensões impostas (Reissner). Assim, pode-se comprovar a precisão dos resultados para placas finas quando analisadas pelas teorias de Mindlin ou Reissner.

Devido à dificuldade matemática em se encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais que regem a flexão e o efeito de membrana das placas, a aplicação prática de tais modelos só veio a ter grande repercussão a partir dos anos 70 com o início da utilização prática do MEF, devido aos avanços ocorridos na tecnologia dos computadores digitais.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo apresentar a formulação dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, assim como a aproximação desses modelos pelo MEF.

Para deduzir os modelos, emprega-se a formulação variacional através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Nesse sentido, os seguintes passos básicos são adotados:

1. Definição das hipóteses cinemáticas do modelo,
2. Determinação das componentes de deformação compatíveis com as hipóteses cinemáticas,
3. Determinação dos movimentos de corpo rígido,

4. Caracterização dos esforços internos compatíveis com as hipóteses cinemáticas,
5. Determinação dos esforços externos compatíveis com os esforços internos,
6. Aplicação da equação constitutiva do material.

Considera-se o caso de pequenas deformações e material elástico linear isotrópico.

No que se refere à aproximação pelo MEF, empregam-se também alguns passos básicos, ou seja,

1. Indicação da forma forte,
2. Determinação da forma fraca do problema,
3. Aproximação da forma fraca,
4. Definição dos elementos finitos a serem empregados.

A vantagem de se aplicar essas seqüências de passos é que qualquer modelo mecânico pode ser formulado e aproximado empregando tais seqüências.

O objetivo inicial desse trabalho era o de estudar a otimização estrutural em modelos de placa considerando variáveis de projeto relacionadas à parâmetros discretos e à forma. Para isso, torna-se necessário usar os conceitos de análise de sensibilidade dos modelos de placa. Uma dificuldade surgiu ao se procurar referências que apresentassem de forma clara a dedução de modelos de placa. Para superar essa dificuldade, resolveu-se partir para a formulação dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. Essa tarefa se mostrou bastante árdua, mas ao mesmo tempo muito interessante sob o ponto de vista de construção de modelos mecânicos através da formulação variacional.

Em (Taroco e Feijóo, 1983) e (de Souza Neto, 1989), tem-se a apresentação de modelos de placa e cascas empregando uma notação tensorial. Apesar da vantagem de uso de tensores no sentido de compactar a notação de modelos de mecânica, tem-se uma maior dificuldade na interpretação das várias grandezas envolvidas. Assim, neste trabalho, resolveu-se não

utilizar tensores e apresentar a formulação dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin empregando um sistema de coordenadas cartesianas. Em outros textos, tais como (Reddy, 1993), (Szabó e Babuska, 1991), (Cook et al., 1989), (Washizu, 1982) e (Szilard, 1974), a formulação está apresentada de forma resumida.

O texto tem por objetivo auxiliar os interessados no estudo de modelos de placa. Para isso, procurou-se apresentar os vários conceitos envolvidos e as suas interpretações de forma detalhada. Espera-se que essa seja a principal contribuição do trabalho, servindo também como fonte para material didático.

1.3 Organização do Texto

Esse texto está organizado na seguinte forma. No Capítulo 2, apresentam-se a formulação variacional e a aproximação pelo MEF do modelo de placa de Kirchhoff. No Capítulo 3, considera-se o modelo de placa de Reissner-Mindlin, comparando-se alguns aspectos com a placa de Kirchhoff. O Capítulo 4 contém os comentários finais e perspectivas futuras desse trabalho. Nos Apêndices A e B mostram-se, respectivamente, as deduções de esforços no contorno de uma placa segundo um sistema de referência normal-tangencial e dos polinômios unidimensionais de Hermite.

Capítulo 2

Modelo de Placa de Kirchhoff

Nesse capítulo, apresenta-se, inicialmente, a formulação variacional do modelo de placa de Kirchhoff incluindo o efeito de membrana. Para isso, definem-se as hipóteses cinemáticas do modelo e deduzem-se as componentes de deformação, movimentos de corpo rígido e esforços internos e externos compatíveis com a cinemática dada. Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), chega-se ao Problema de Valor de Contorno (PVC) de equilíbrio. Aplica-se, então, o modelo constitutivo de Hooke, obtendo-se a equação diferencial em termos do deslocamento transversal. Posteriormente, considera-se a aproximação da forma fraca de Kirchhoff, determinando-se a matriz de rigidez do elemento de placa.

2.1 Formulação

2.1.1 Definição da Cinemática

O sistema de referência cartesiano adotado para a formulação do modelo de placa de Kirchhoff está ilustrado na Figura 1.1.

A cinemática de placa consiste em ações de deslocamento que causam a sua flexão. No modelo de Kirchhoff, as ações de movimento são tais que as normais à superfície de referência indeformada permanecem normais à superfície de referência deformada e não sofrem variação

de comprimento. Assim, as deformações cisalhantes transversais são nulas. Este modelo de placa é análogo à viga em flexão pura de Euler-Bernoulli.

Para ilustrar a cinemática de flexão de Kirchhoff, considere a placa da Figura 2.1. Seja AB uma normal à superfície de referência que dista x e y unidades da origem do sistema de referência cartesiano adotado, conforme mostrado na Figura 2.1(a). Após a flexão da placa, a normal AB gira de tal maneira a permanecer perpendicular à superfície de referência deformada como ilustrado na Figura 2.1(b). Especificamente, os pontos da normal AB sofrem um deslocamento rígido ou translação w na direção z . A partir daí, a normal AB gira em torno dos eixos x e y de tal forma a manter-se perpendicular à superfície de referência deformada.

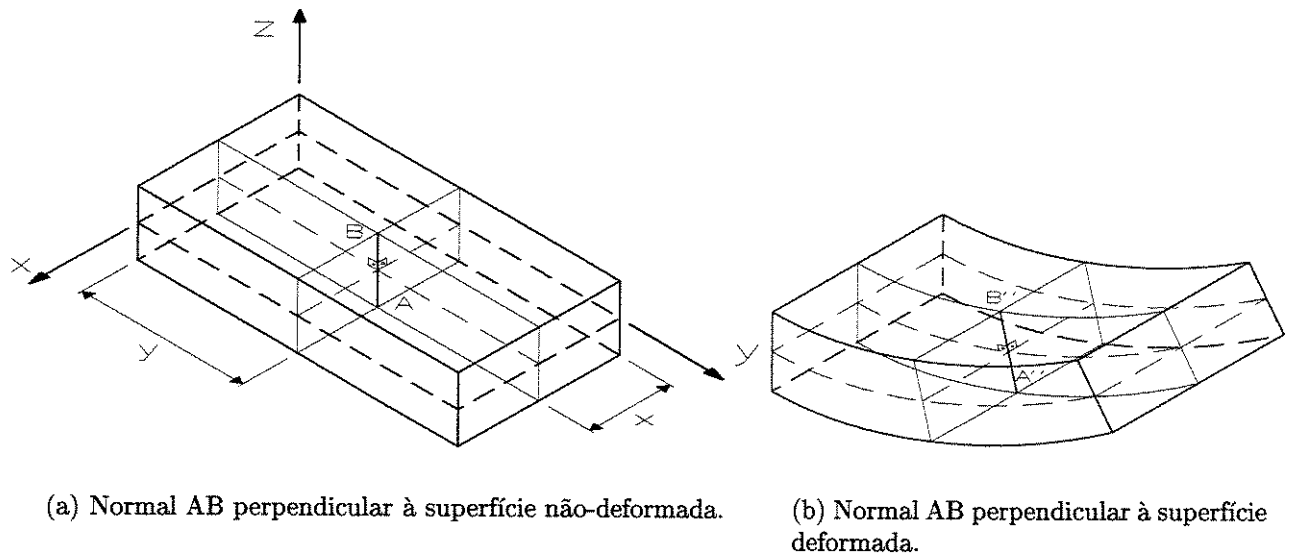
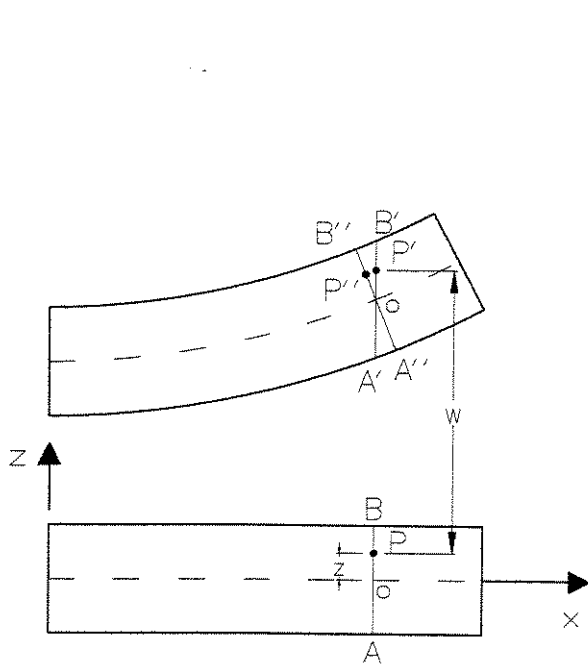


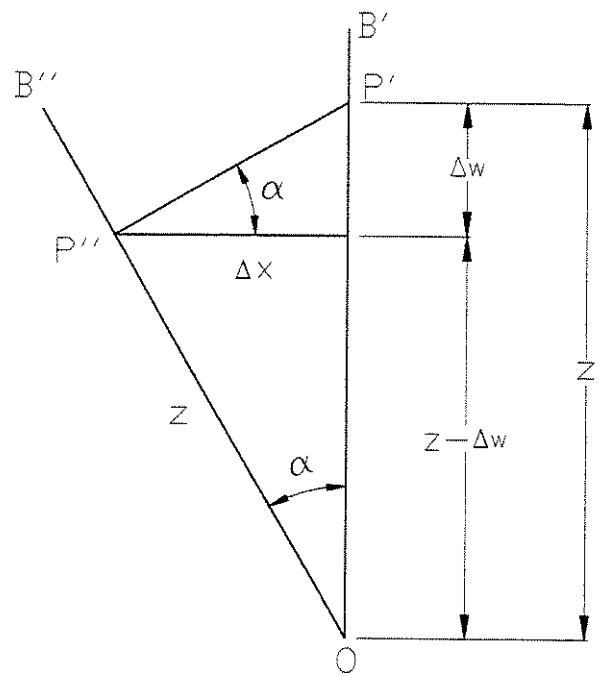
Figura 2.1: Cinemática da flexão pura do modelo de Kirchhoff.

Para caracterizar os deslocamentos dos pontos da normal AB para uma flexão da placa, a Figura 2.2 ilustra a normal AB segundo os planos xz e yz . Como pode ser visto, devido ao deslocamento transversal $w(x, y)$, a normal AB passa para a posição $A'B'$. A partir daí, ocorrem rotações rígidas com ângulos α e β , respectivamente, em torno dos eixos y e x de tal forma que a posição final $A''B''$ seja perpendicular à superfície de referência deformada.

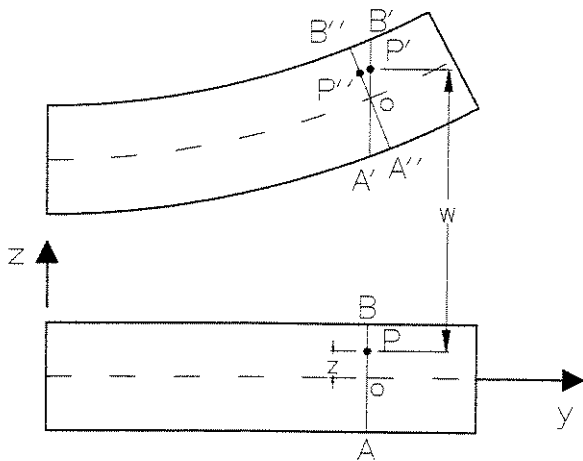
Considere agora um ponto P com coordenadas iniciais (x, y, z) . Observa-se que as coordenadas x e y determinam a normal AB , enquanto a coordenada z indica o ponto P sob a normal AB . A posição final P'' , após a flexão da placa, é indicada por $(x - \Delta x, y - \Delta y, z + w)$,



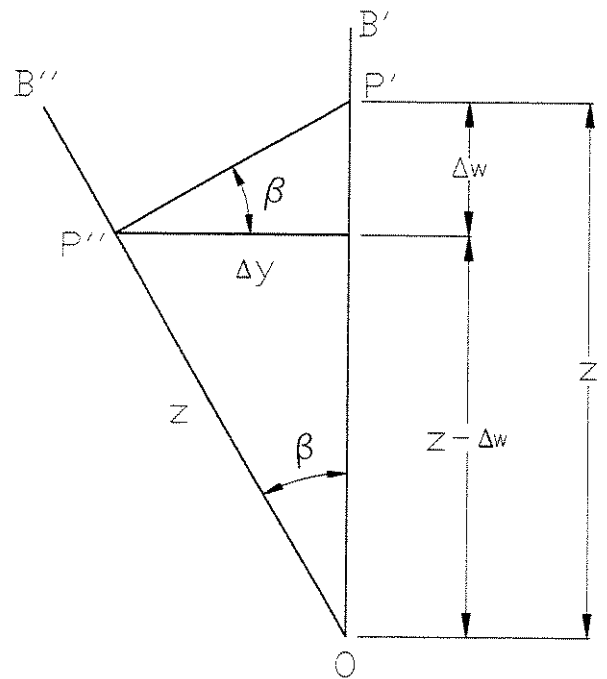
(a) Plano xz .



(b) Normal deformada no plano xz .



(c) Plano yz .



(d) Normal deformada no plano yz .

Figura 2.2: Cinemática do modelo de Kirchhoff segundos os plano xz e yz .

como pode ser visto na Figura 2.2. Assim, além do deslocamento transversal w , o ponto P tem componentes de deslocamento u e v , respectivamente, nas direções x e y . Estes deslocamentos são dados pela diferença entre as posições final e inicial do ponto P, ou seja,

$$u(x, y, z) = x - \Delta x - x = -\Delta x, \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z) = y - \Delta y - y = -\Delta y. \quad (2.2)$$

Como a normal AB não sofre variação de seu comprimento, tem-se que as arestas OP' e OP'', indicadas na Figura 2.2(a), possuem o mesmo comprimento z . Logo, a partir da Figura 2.2(a), as seguintes relações trigonométricas são válidas

$$\text{sen } \alpha = \frac{\Delta x}{z}, \quad (2.3)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta w}{\Delta x}. \quad (2.4)$$

Assumindo o caso de pequenos deslocamentos, tem-se $\text{sen } \alpha \approx \alpha$, $\tan \alpha \approx \alpha$ e Δx pequeno. Portanto, da equação (2.4), o ângulo α é expresso como

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

O limite do lado direito representa a definição de derivada. Como w é uma função de duas variáveis (x, y) , ou seja, $w = w(x, y)$, tem-se, na verdade, uma derivada parcial em x . Logo,

$$\alpha = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.1) e (2.5) em (2.3), e lembrando que $\text{sen } \alpha \approx \alpha$, vem que

$$u(x, y, z) = -z\alpha = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Analogamente, a partir da Figura 2.2(b), tem-se que

$$\text{sen } \beta = \frac{\Delta y}{z}, \quad (2.7)$$

$$\tan \beta = \frac{\Delta w}{\Delta y}. \quad (2.8)$$

Assumindo pequenos deslocamentos, vem que

$$\beta = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2.9)$$

Portanto, a partir de (2.2), (2.7) e (2.9), o deslocamento v do ponto P é dado por

$$v(x, y, z) = -z\beta = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Até agora, considerou-se a cinemática de flexão pura supondo que a superfície média de referência sofre somente um deslocamento transversal w . Incluem-se agora os deslocamentos longitudinais $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ dos pontos da superfície de referência. Tais deslocamentos são comumente chamados de efeito de *membrana*. Para a teoria linear, baseada em deformações infinitesimais, os deslocamentos longitudinais no plano (x, y) estão desacoplados do deslocamento transversal (Reddy, 1993), ou seja, o efeito de membrana não depende da variável w .

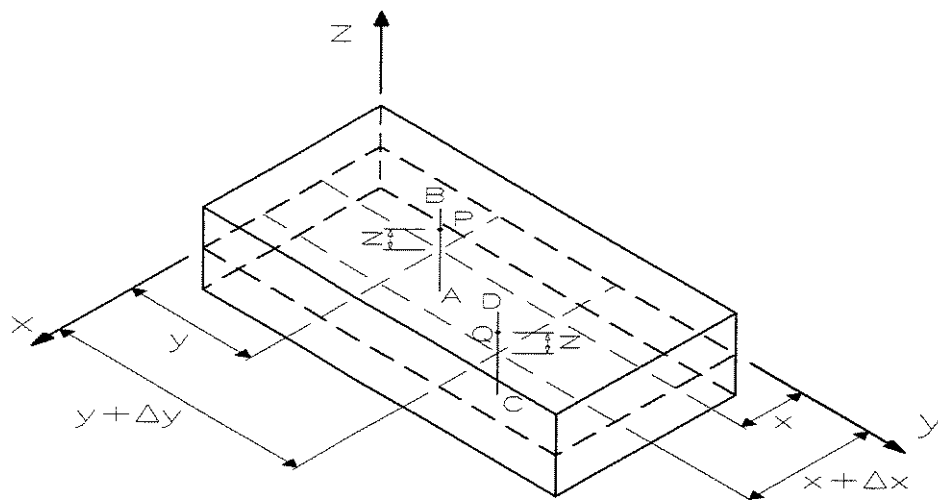
Desta forma, a cinemática da placa plana de Kirchhoff, levando-se em conta os efeitos de flexão e membrana, é dada pelo campo vetorial de deslocamentos $\mathbf{u}(x, y, z)$ com as seguintes componentes

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

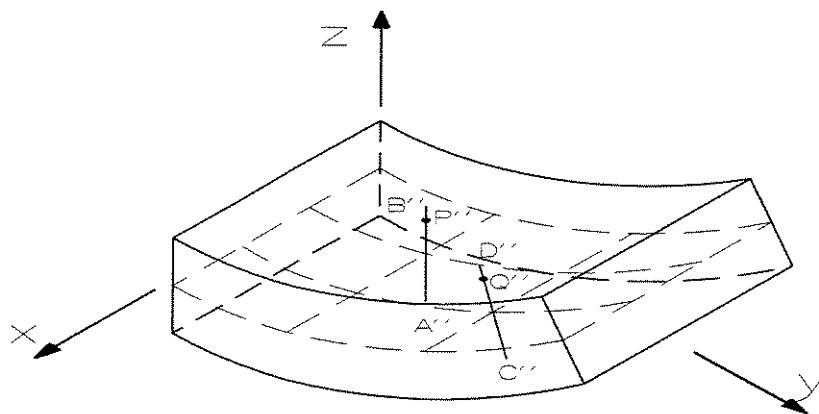
Observa-se então que os deslocamentos u e v devidos à flexão da placa variam linearmente com a coordenada z .

2.1.2 Deformação

Para se determinar o estado de deformação em cada ponto da placa, compatível com a cinemática (2.11), consideram-se as variações dos deslocamentos entre os pontos P e Q de duas normais arbitrárias AB e CD da superfície de referência, conforme mostrado na Figura 2.3(a). Estas normais distam, respectivamente, (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ da origem do sistema de referência adotado.



(a) Normais AB e CD antes da flexão.



(b) Normais AB e CD após a flexão.

Figura 2.3: Cinemática das normais AB e CD da placa.

Considere os pontos $P(x, y, z)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ sob as normais AB e CD ilustrados na Figura 2.3(a). Estes pontos possuem a mesma coordenada transversal z antes da flexão da placa. Após a flexão, os pontos P e Q apresentam, respectivamente, deslocamentos $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y))$ e $(u(x + \Delta x, y + \Delta y, z), v(x + \Delta x, y + \Delta y, z), w(x + \Delta x, y + \Delta y, z))$ nas direções coordenadas x, y, z . Assim, os pontos P e Q assumem as respectivas posições finais $P''(x - u(x, y, z), y - v(x, y, z), z + w(x, y))$ e $Q''(x + \Delta x - u(x + \Delta x, y + \Delta y, z), y + \Delta y - v(x + \Delta x, y + \Delta y, z), z + w(x + \Delta x, y + \Delta y, z))$ mostradas na Figura 2.3(b).

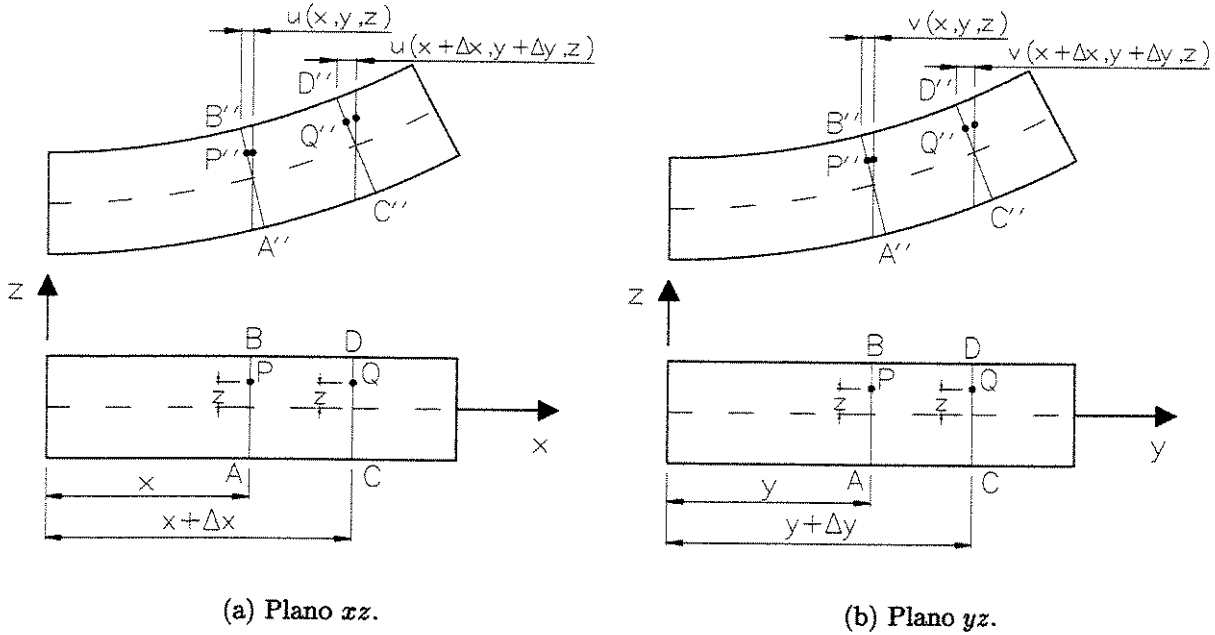


Figura 2.4: Cinemática relativa entre pontos de normais à superfície média no modelo de Kirchhoff em flexão pura.

Deseja-se caracterizar as componentes de deformação em cada ponto da placa. Para isso, comparam-se os deslocamentos relativos entre os dois pontos arbitrários P e Q . Para se determinar o deslocamento relativo Δu na direção x , considere o plano xz da placa antes e após a flexão, conforme ilustrado na Figura 2.4(a). De acordo com a cinemática dada em (2.11), os deslocamentos $u(x, y, z)$ e $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ dos pontos P e Q na direção x são funções dos deslocamentos transversais $w(x, y)$ e $w(x + \Delta x, y + \Delta y)$, respectivamente.

Assim, da equação (2.11), vem que

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \\ u(x + \Delta x, y + \Delta y, z) &= u_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - z \frac{\partial w(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Desta maneira, a variação de deslocamento Δu na direção x entre os pontos P e Q é dada por

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - u(x, y, z) \\ &= [u_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - u_0(x, y)] - z \left[\frac{\partial w(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right] \\ &= [u_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - u_0(x, y)] - z \frac{\partial}{\partial x} [w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y)] \\ &= \Delta u_0 - z \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w). \end{aligned}$$

A variação de deslocamento específica é obtida dividindo-se Δu por Δx , ou seja,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u_0}{\Delta x} - \frac{z \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w)}{\Delta x} = \frac{\Delta u_0}{\Delta x} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right). \quad (2.12)$$

A deformação normal específica ε_{xx} no ponto (x, y, z) é obtida tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta x \rightarrow 0$. Logo,

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta u_0}{\Delta x} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right) \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_0}{\Delta x} - z \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

De acordo com a definição de derivada parcial de uma função em relação a x , tem-se que a expressão anterior é reescrita como

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

Pode-se reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \varepsilon_{xx}^m(x, y) + \varepsilon_{xx}^f(x, y, z), \quad (2.14)$$

sendo

$$\varepsilon_{xx}^m(x, y) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xx}^f(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

as componentes de deformação normal em x devidas ao efeito de membrana e de flexão, respectivamente.

Da mesma maneira, devido à flexão da placa, os pontos P e Q apresentam deslocamentos $v(x, y, z)$ e $v(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ na direção y conforme mostrado na Figura 2.4(b). Estes deslocamentos são dados de acordo com (2.11) por

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y, z) &= \frac{\partial v_0(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Neste caso, a variação de deslocamento Δv é expressa como

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - v(x, y, z) \\ &= [v_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - v_0(x, y)] - z \left[\frac{\partial w(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right] \\ &= [v_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - v_0(x, y)] - z \frac{\partial}{\partial y} [w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y)] \\ &= \Delta v_0 - z \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \end{aligned}$$

A variação de deslocamento específica é obtida dividindo-se Δv por Δy , ou seja,

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\Delta v_0}{\Delta y} - \frac{z \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w)}{\Delta y} = \frac{\Delta v_0}{\Delta y} - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right). \quad (2.15)$$

A deformação normal específica ε_{yy} na direção y é obtida tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta y \rightarrow 0$. Logo,

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta v_0}{\Delta y} - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right) \right\} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta y} - z \frac{\partial}{\partial y} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y}.$$

De acordo com a definição de derivada parcial de uma função em relação a y , tem-se que a expressão anterior é reescrita como

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}. \quad (2.16)$$

Da mesma maneira feita para ε_{xx} , reescreve-se a equação acima como

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \varepsilon_{yy}^m(x, y) + \varepsilon_{yy}^f(x, y, z), \quad (2.17)$$

sendo

$$\varepsilon_{yy}^m(x, y) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{yy}^f(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

as componentes de ε_{yy} devidas ao efeito de membrana e de flexão, respectivamente.

De forma análoga a componente de deformação normal específica ε_{zz} na direção transversal z é dada por

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y)}{\Delta z} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial z}.$$

Lembrando que o deslocamento transversal $w(x, y)$ é constante para todos os pontos da normal à superfície média situada na coordenada (x, y) , tem-se que $\frac{\partial w(x, y)}{\partial z} = 0$. Portanto,

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = 0.$$

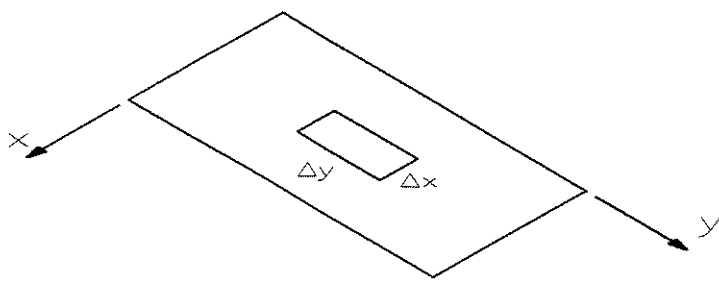
Esse resultado está de acordo com a hipótese inicial do modelo de placa de Kirchhoff que as normais à superfície média permanecem indeformadas.

Como já mencionado, o comprimento de uma normal AB antes e depois da flexão da placa é o mesmo, ou seja, ε_{zz} é nulo. Não há deformação cisalhante transversal, ou seja, as componentes de distorção total $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ são também nulas. Mas existe a componente de distorção $\bar{\gamma}_{xy}$ no plano xy da superfície de referência, conforme ilustrado na Figura 2.5. Tomando-se dois elementos infinitesimais formando um ângulo reto na superfície indeformada, observa-se que após a flexão da placa este ângulo deixa de ser reto. A distorção total no plano $\bar{\gamma}_{xy}$ é dada pela soma dos ângulos γ_1 e γ_2 , ou seja,

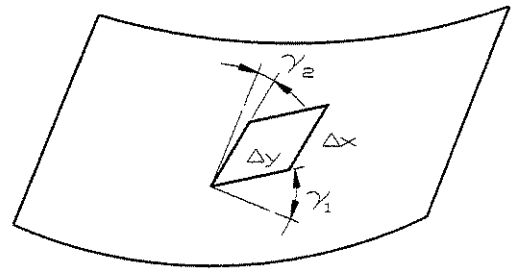
$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

A partir das Figuras 2.5(c) e 2.5(d), as seguintes relações trigonométricas são válidas

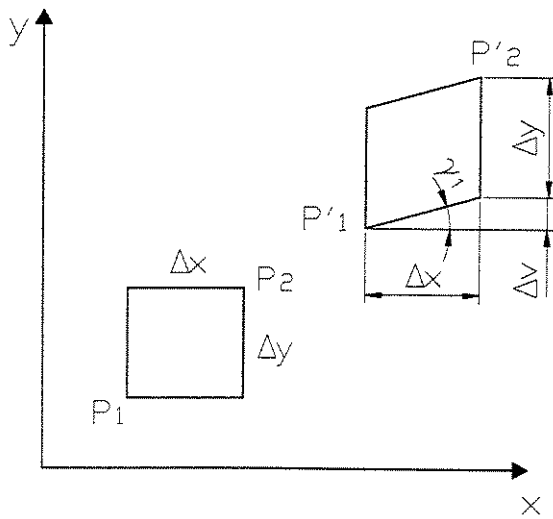
$$\tan \gamma_1 = \frac{\Delta v}{\Delta x},$$



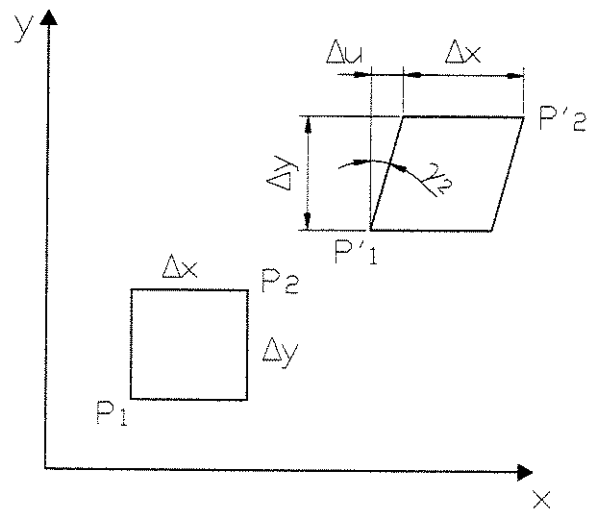
(a) Superfície média antes da flexão.



(b) Superfície média após a flexão.



(c) Distorção γ_1 .



(d) Distorção γ_2 .

Figura 2.5: Distorção no plano da superfície de referência.

$$\tan \gamma_2 = \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

Tomando-se o caso de pequenos deslocamentos, tem-se que $\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$ e $\tan \gamma_2 \approx \gamma_2$.

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}, \\ \gamma_2 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Substituindo a cinemática dada em (2.11), vem que

$$\gamma_1 = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.18)$$

Portanto, a distorção total no plano xy é dada por

$$\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.19)$$

É interessante separar os efeitos de membrana e flexão para a distorção no plano (x, y) .

Desta forma, tem-se

$$\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = \bar{\gamma}_{xy}^m(x, y) + \bar{\gamma}_{xy}^f(x, y, z), \quad (2.20)$$

sendo

$$\bar{\gamma}_{xy}^m(x, y) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \bar{\gamma}_{xy}^f(x, y, z) = -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

as componentes de distorção $\bar{\gamma}_{xy}$ devido ao efeito de membrana e flexão, respectivamente.

Assim, observa-se que o estado de deformação em cada ponto da placa de Kirchhoff é caracterizado por duas componentes de deformação normal $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ e $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ e uma distorção total $\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z)$.

Com base nas equações (2.14), (2.17) e (2.20), pode-se resumir as componentes de deformação específica e distorção para os efeitos de membrana e flexão, conforme a Tabela 2.1.

Efeito de Membrana	Efeito de Flexão
$\varepsilon_{xx}^m(x, y) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x}$	$\varepsilon_{xx}^f(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$
$\varepsilon_{yy}^m(x, y) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}$	$\varepsilon_{yy}^f(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$
$\bar{\gamma}_{xy}^m(x, y) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y}$	$\bar{\gamma}_{xy}^f(x, y, z) = -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$

Tabela 2.1: Componentes de deformação devido à flexão pura e efeito de membrana.

2.1.3 Movimentos de Corpo Rígido

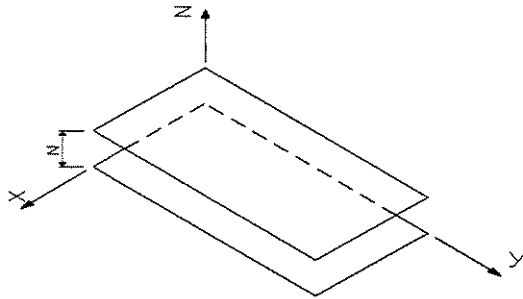
Um movimento de corpo rígido é aquele para o qual a distância entre dois pontos quaisquer do corpo permanece constante para qualquer ação de movimento. Isto significa que todas as componentes de deformação são nulas.

Para se obter as componetes de movimento rígido devido ao efeito de flexão pura, deve-se anular cada componente de deformação de flexão, ou seja,

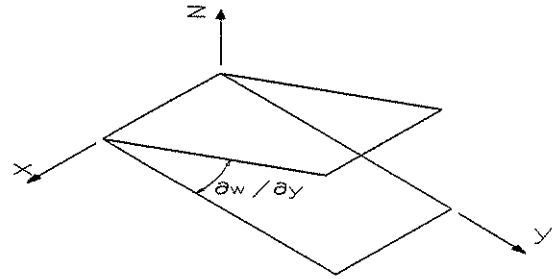
$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^f(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0, \\
\varepsilon_{yy}^f(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0, \\
\bar{\gamma}_{xy}^f(x, y, z) &= -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

As três equações anteriores são satisfeitas se $w(x, y) = w = cte$ ou $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = cte$ e $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = cte$. A primeira condição ($w = cte$) implica numa translação da placa na direção do eixo z . A segunda e terceira condições $\left(\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = cte\right)$ representam, respectivamente, rotações rígidas em torno dos eixos x e y . Estes movimentos rígidos estão ilustrados, respectivamente nas Figuras 2.6(a), 2.6(b) e 2.6(c).

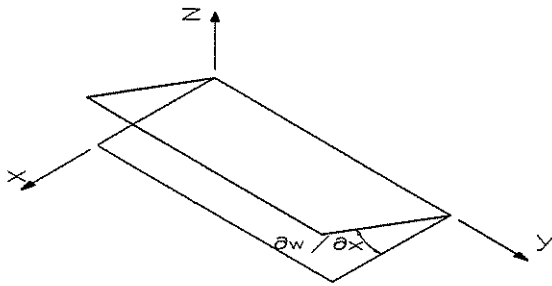
Da mesma forma, para se determinar as componentes de movimento rígido devido ao efeito de membrana, anulam-se as componentes de deformação de membrana da placa, isto



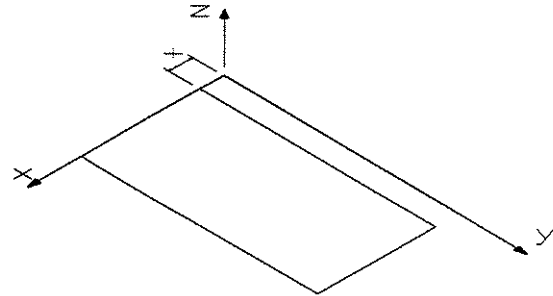
(a) Translação em z .



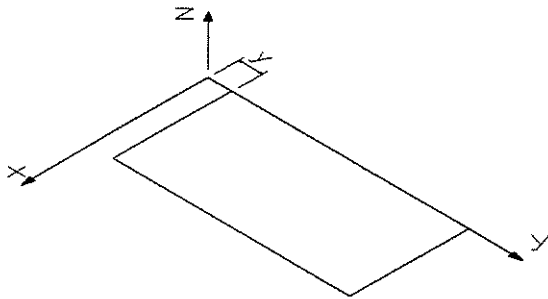
(b) Rotação rígida em torno do eixo x .



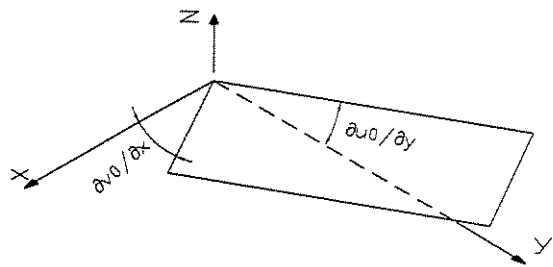
(c) Rotação rígida em torno do eixo y .



(d) Translação rígida ao longo de x .



(e) Translação rígida ao longo de y .



(f) Rotação rígida em torno do eixo z .

Figura 2.6: Movimentos rígidos relativos à flexão da placa de Kirchhoff.

é,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^m(x, y) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_{yy}^m(x, y) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} = 0, \\ \gamma_{xy}^m(x, y) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

A primeira e a segunda equações em (2.22) serão satisfeitas se e somente se $u_0 = cte$ e $v_0 = cte$, respectivamente. Fisicamente, essas condições implicam em translações rígidas ao longo dos eixos x e y do sistema cartesiano adotado, como pode-se observar nas Figuras 2.6(d) e 2.6(e)

Já a terceira expressão em (2.22) será satisfeita se $\frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial y}$. Isto implica em uma rotação rígida em torno do eixo z , como pode ser visualizado na Figura 2.6(f).

2.1.4 Determinação do Esforços Internos

Associadas às componentes de deformação normal $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ e $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ em cada ponto da placa, têm-se as respectivas componentes de tensão normal $\sigma_{xx}(x, y, z)$ e $\sigma_{yy}(x, y, z)$ representando o estado das forças internas em cada ponto da placa nas direções x e y . Da mesma maneira, associada à distorção $\gamma_{xy}(x, y, z)$, tem-se a componente de tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x, y, z)$ fornecendo o estado das forças cisalhantes no plano xy em cada ponto da placa. A soma do produto das tensões pelas suas respectivas componentes de deformação representa a densidade de trabalho interno t_i em cada ponto da placa, ou seja,

$$t_i(x, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) \varepsilon_{xx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z) \varepsilon_{yy}(x, y, z) + \tau_{xy}(x, y, z) \gamma_{xy}(x, y, z).$$

Para se obter o trabalho interno total, deve-se somar a densidade de trabalho interno de todos os pontos da placa. Sendo a placa um meio contínuo tridimensional, emprega-se uma integral de volume para representar esta soma infinita. Desta forma, obtém-se o trabalho interno de deformação da placa como

$$T_i = - \int_V t_i(x, y, z) dV\tag{2.23}$$

$$= - \int_V [\sigma_{xx}(x, y, z) \varepsilon_{xx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z) \varepsilon_{yy}(x, y, z) + \tau_{xy}(x, y, z) \gamma_{xy}(x, y, z)] dV,$$

sendo V o volume da placa. O sinal negativo é incluído apenas para se manipular grandezas positivas ao se usar o Princípio dos Trabalhos Virtuais na próxima seção.

Introduzindo-se as expressões das componentes de deformação deduzidas ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} na seção anterior, vem que

$$\begin{aligned} T_i = & - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \sigma_{yy}(x, y, z) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) + \\ & \left. \tau_{xy}(x, y, z) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como as componentes de deslocamento u_0 , v_0 e w variam apenas com as coordenadas x e y , a integral de volume da equação (2.24) pode ser separada em integrais ao longo da espessura t da placa e da área do plano xy . Logo, para cada um dos integrandos, tem-se

$$\begin{aligned} \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \left(z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \right] dV &= \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz \right) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} dA, \\ \int_V \left[\sigma_{yy}(x, y, z) \left(z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \right] dV &= \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{yy}(x, y, z) dz \right) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} dA, \\ 2 \int_V \left[\tau_{xy}(x, y, z) \left(z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \right] dV &= 2 \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy}(x, y, z) dz \right) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} dA, \\ - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right) \right] dV &= - \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(x, y, z) dz \right) \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} dA, \\ - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] dV &= - \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(x, y, z) dz \right) \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} dA, \\ - \int_V \left[\tau_{xy}(x, y, z) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] dV &= \\ - \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}(x, y, z) dz \right) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) dA. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Interpreta-se agora o significado físico de cada uma das integrais ao longo da espessura,

presentes na expressão anterior.

A Figura 2.7 ilustra um elemento diferencial de volume $dx dy dz$ situado a uma distância z da superfície de referência da placa. A partir da Figura 2.7(a), observa-se que o produto $\sigma_{xx} dy dz$ indica uma força dF_x no elemento diferencial na direção do eixo x . Multiplicando-se esta força por z , tem-se o respectivo momento $dM_{xx} = z dF_x = z \sigma_{xx} dy dz$ na direção do eixo y . O termo $\sigma_{xx} dz$ representa uma força por unidade de comprimento na direção x . Quando multiplicada pela distância z , resulta no momento $dM_{xx} = z \sigma_{xx} dz$ por unidade de comprimento na direção y . Tomando-se os infinitos elementos diferenciais do tipo $dy dz$ ao longo da espessura e somando a contribuição de cada um deles, ou seja, integrando-se ao longo da espessura, tem-se o momento fletor por unidade de comprimento em relação ao eixo y em cada ponto da superfície de referência. Logo,

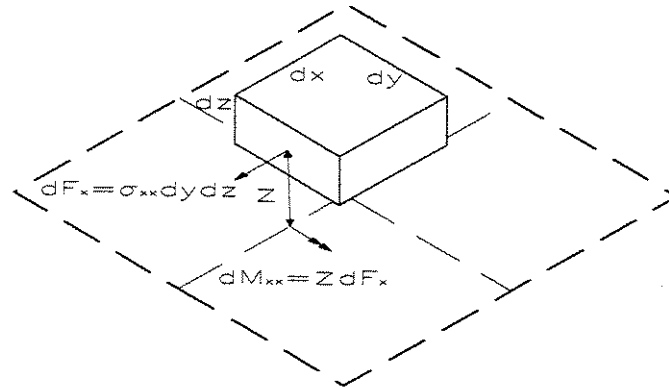
$$M_{xx}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz. \quad (2.26)$$

Apesar de o momento fletor ser na direção do eixo y , utiliza-se o símbolo M_{xx} para ficar compatível com a componente de tensão σ_{xx} que originou o momento fletor. A idéia de se empregar um momento por unidade de comprimento vem do fato que a integral anterior é calculada apenas ao longo da espessura t da placa.

Verifica-se ainda que, devido à inclusão do efeito de membrana no modelo, a força por unidade de comprimento $\sigma_{xx} dz$, integrada na espessura da placa, resulta numa força normal por unidade de comprimento na direção x , a qual é denotada por $N_{xx}(x, y)$ e dada pela seguinte expressão

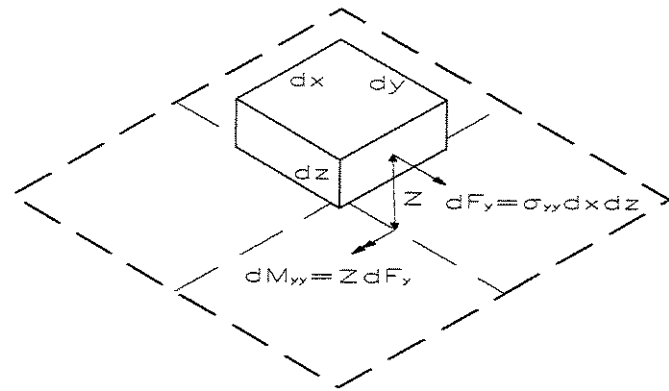
$$N_{xx}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(x, y, z) dz. \quad (2.27)$$

A partir da Figura 2.7(b), observa-se que o produto $\sigma_{yy} dx dz$ indica uma força dF_y na direção do eixo y . Ao se multiplicar esta força pelo braço z , tem-se o momento fletor $dM_{xx} = z dF_y = z \sigma_{yy} dx dz$ na direção do eixo x . Assim, o momento fletor por unidade de comprimento na direção do eixo x , denotado por M_{yy} , para ficar compatível com a tensão



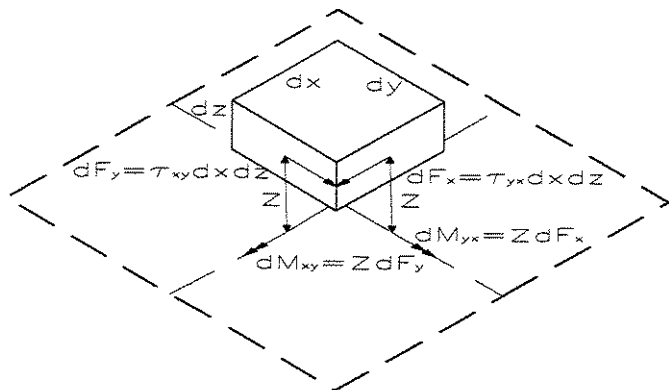
Superfície de referência

(a) Momento fletor M_{xx} .



Superfície de referência

(b) Momento fletor M_{yy} .



Superfície de referência

(c) Momentos torçores M_{xy} e M_{yx} .

Figura 2.7: Interpretação das integrais ao longo da espessura na placa de Kirchhoff.

σ_{yy} que a originou, é dado por

$$M_{yy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{yy}(x, y, z) dz. \quad (2.28)$$

A força por unidade de comprimento $\sigma_{yy}dz$ integrada ao longo da espessura resulta na força normal por unidade de comprimento $N_{yy}(x, y)$ dada por

$$N_{yy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy}(x, y, z) dz. \quad (2.29)$$

Para interpretar a terceira integral ao longo da espessura em (2.25), considere a Figura 2.7(c). Verifica-se que os termos $dF_x = \tau_{yx}dx dz$ e $dF_y = \tau_{xy}dy dz$ representam, respectivamente, forças nas direções x e y . Ao se multiplicar estas forças por z , tem-se, respectivamente, os momentos torçores ou volventes $dM_{yx} = z dF_x = z \tau_{yx}dx dz$ e $dM_{xy} = z dF_y = z \tau_{xy}dy dz$ no elemento diferencial nas direções y e x . Por sua vez, os produtos $\tau_{xy} z dz$ e $\tau_{yx} z dz$ representam os momentos torçores ou volventes por unidade de comprimento no elemento diferencial. Observe na Figura 2.7(c) que o efeito destes momentos é provocar torção no elemento diferencial. De forma análoga aos casos anteriores, os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} por unidade de comprimento são obtidos integrando-se os respectivos momentos diferenciais por unidade de comprimento ao longo da espessura da placa, ou seja,

$$M_{xy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy}(x, y, z) dz, \quad (2.30)$$

$$M_{yx}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{yx}(x, y, z) dz. \quad (2.31)$$

Finalmente, as forças por unidade de comprimento $\tau_{yx}dz$ e $\tau_{xy}dz$, quando integradas na espessura da placa, resultam em forças tangenciais por unidade de comprimento nos pontos da superfície de referência, ou seja,

$$N_{xy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}(x, y, z) dz \quad \text{e} \quad N_{yx}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx}(x, y, z) dz, \quad (2.32)$$

Como as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} são, em geral, iguais (na ausência de momentos de corpo (Lai et al., 1993)), vem que

$$M_{xy}(x, y) = M_{yx}(x, y), \quad (2.33)$$

$$N_{xy}(x, y) = N_{yx}(x, y). \quad (2.34)$$

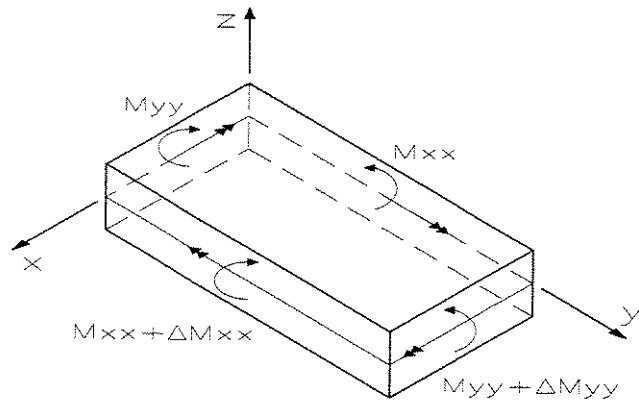
As Figuras 2.8(a), 2.8(b) e 2.8(c) ilustram, respectivamente, os momentos fletores M_{xx} e M_{yy} , os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} e as forças normais N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} e N_{yx} num elemento diferencial de placa $dxdydz$.

A partir de (2.26) a (2.32), a expressão do trabalho interno (2.24) pode ser reescrita como

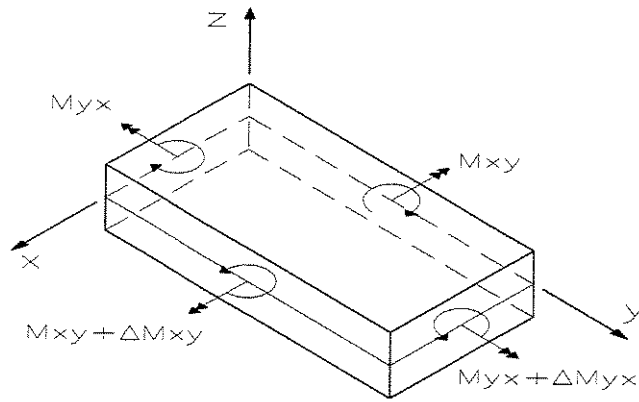
$$\begin{aligned} T_i = & \int_A M_{xx}(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} dA + \int_A M_{yy}(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} dA \\ & + 2 \int_A M_{xy}(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} dA - \int_A N_{xx}(x, y) \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} dA \\ & - \int_A N_{yy}(x, y, z) \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} dA - \int_A N_{xy}(x, y, z) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) dA. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na expressão anterior, o deslocamento $w(x, y)$ possui derivadas de ordem 2. Já os deslocamentos $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ possuem derivadas de ordem 1. Deseja-se obter uma relação contendo apenas $w(x, y)$, $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$. Para isso, integram-se duas vezes por partes os termos contendo $w(x, y)$ e uma vez os termos com $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ da equação (2.35). A primeira integração por partes fornece

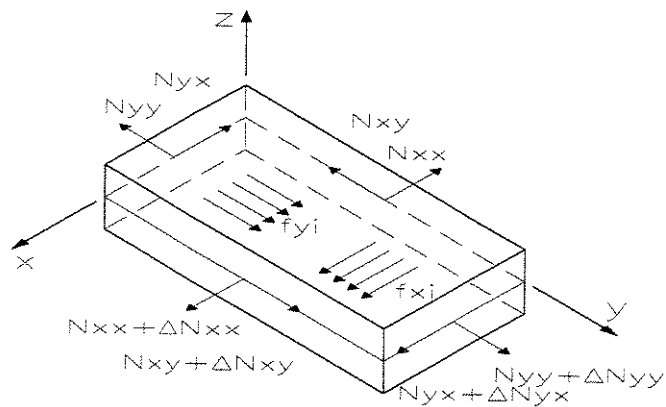
$$\begin{aligned} T_i = & - \int_A \frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dA + \oint_{\partial A} M_{xx}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} n_x(x, y) d\partial A \\ & - \int_A \frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} dA + \oint_{\partial A} M_{yy}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} n_y(x, y) d\partial A \\ & - \int_A \left(\frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) dA \\ & + \oint_{\partial A} \left(M_{xy}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} n_x(x, y) + M_{xy}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} n_y(x, y) \right) d\partial A \\ & + \int_A \frac{\partial N_{xx}(x, y)}{\partial x} u_0(x, y) dA - \oint_{\partial A} N_{xx}(x, y) u_0(x, y) n_x(x, y) d\partial A \\ & + \int_A \frac{\partial N_{yy}(x, y)}{\partial y} v_0(x, y) dA - \oint_{\partial A} N_{yy}(x, y) v_0(x, y) n_y(x, y) d\partial A \end{aligned}$$



(a) Momentos fletores M_{xx} e M_{yy} .



(b) Momentos torçores M_{xy} e M_{yx} .



(c) Forças normais N_{xx} , N_{yy} e N_{yx} .

Figura 2.8: Momentos fletores e torçores e forças normais na placa (Szabó e Babuska, 1991).

$$\begin{aligned}
& + \int_A \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial x} v_0(x, y) dA - \oint_{\partial A} N_{xy}(x, y) v_0(x, y) n_x(x, y) d\partial A \\
& + \int_A \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial y} u_0(x, y) dA - \oint_{\partial A} N_{xy}(x, y) u_0(x, y) n_y(x, y) d\partial A.
\end{aligned}$$

Tem-se que $n_x(x, y)$ e $n_y(x, y)$ são as componentes do vetor normal em cada ponto de coordenadas (x, y) do contorno ∂A da superfície média da placa. As integrais ao longo do contorno ∂A são tratadas como condições de contorno. Integrando-se por partes os termos com $w(x, y)$ pela segunda vez e rearranjando o resultado, tem-se

$$\begin{aligned}
T_i = & \int_A \left(\frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} \right) w(x, y) dA \\
& - \oint_{\partial A} \left(\frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} \right) n_x(x, y) w(x, y) d\partial A \\
& - \oint_{\partial A} \left(\frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} \right) n_y(x, y) w(x, y) d\partial A \\
& + \oint_{\partial A} (M_{xx}(x, y) n_x(x, y) + M_{xy}(x, y) n_y(x, y)) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} d\partial A \\
& + \oint_{\partial A} (M_{xy}(x, y) n_x(x, y) + M_{yy}(x, y) n_y(x, y)) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} d\partial A \tag{2.36} \\
& + \int_A \left(\frac{\partial N_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial y} \right) u_0(x, y) dA \\
& + \int_A \left(\frac{\partial N_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial x} \right) v_0(x, y) dA \\
& - \oint_{\partial A} (N_{xx}(x, y) n_x(x, y) + N_{xy}(x, y) n_y(x, y)) u_0(x, y) d\partial A \\
& - \oint_{\partial A} (N_{xy}(x, y) n_x(x, y) + N_{yy}(x, y) n_y(x, y)) v_0(x, y) d\partial A.
\end{aligned}$$

Interpreta-se agora o significado físico de cada um dos integrandos de área da expressão anterior. Suponha que as forças estejam dadas em Newtons (N) e as unidades de comprimento em metros (m). A análise dimensional do termo

$$\left[\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \right] = \frac{\frac{Nm}{m}}{m^2} = \frac{N}{m^2},$$

revela que o mesmo representa uma carga distribuída transversal, pois M_{xx} é um momento em y que dividido por x^2 resulta numa força distribuída em z . O mesmo ocorre para os demais termos no primeiro integrando da expressão (2.40). Assim, a soma dos termos no primeiro integrando resulta numa carga distribuída interna $q_i(x, y)$ na direção z , ou seja,

$$q_i(x, y) = \frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2}. \quad (2.37)$$

A Figura 2.9 ilustra a carga distribuída interna q_i .

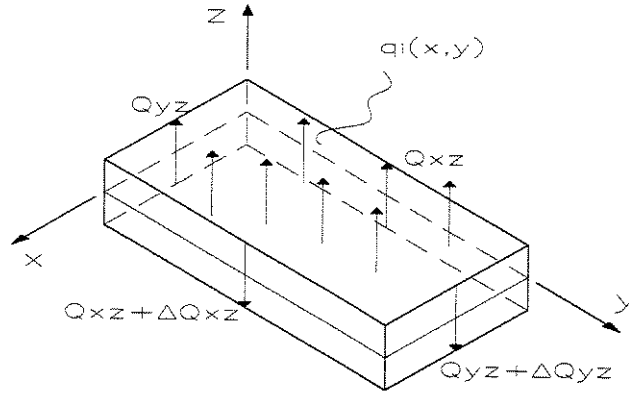


Figura 2.9: Forças cortantes Q_x e Q_y e carga distribuída q_i (Szabó e Babuska, 1991).

O termo $\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}$ representa fisicamente uma força cortante por unidade de comprimento na direção z , pois M_{xx} é um momento fletor por unidade de comprimento na direção y que dividido por x resulta numa força em z . Tem-se a seguinte análise dimensional

$$\left[\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right] = \frac{\frac{Nm}{m}}{m} = \frac{N}{m},$$

comprovando-se que $\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}$ representa de fato uma força por unidade de comprimento.

Da mesma maneira, $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ representa uma força cortante em z , pois M_{xy} é um momento torçor na direção x que quando dividido pelo braço y resulta numa força em z . Assim, define-se a força cortante Q_{xz} através da seguinte relação

$$Q_{xz}(x, y) = \frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Analogamente, a força cortante Q_{yz} é definida como

$$Q_{yz}(x, y) = \frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x}. \quad (2.39)$$

As forças cortantes Q_{xz} e Q_{yz} estão ilustradas na Figura 2.9. Apesar das cortantes serem na direção transversal z , a denominação como Q_{xz} e Q_{yz} é apenas para ficar compatível com a notação dos momentos fletores M_{xx} e M_{yy} que originaram as respectivas forças.

Considerando agora as integrais de área em termos das forças normais, observa-se, a partir da análise dimensional do termo $\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}$, ou seja,

$$\left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \right] = \frac{\frac{N}{m}}{m} = \frac{N}{m^2},$$

que as derivadas das normais definem forças distribuídas tangentes à superfície de referência. Definem-se, então, as seguintes componentes de intensidade de carregamento distribuído nas direções x e y .

$$\begin{aligned} f_{xi}(x, y) &= \frac{\partial N_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial y}, \\ f_{yi}(x, y) &= \frac{\partial N_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Estas componentes estão ilustradas na Figura 2.8(c).

A partir das expressões (2.37) a (2.40), o trabalho interno (2.36) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} T_i &= \int_A q_i(x, y) w(x, y) dA \\ &\quad - \oint_{\partial A} (Q_{xz}(x, y) n_x(x, y) + Q_{yz}(x, y) n_y(x, y)) w(x, y) d\partial A \\ &\quad + \oint_{\partial A} (M_{xx}(x, y) n_x(x, y) + M_{xy}(x, y) n_y(x, y)) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} d\partial A \\ &\quad + \oint_{\partial A} (M_{xy}(x, y) n_x(x, y) + M_{yy}(x, y) n_y(x, y)) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} d\partial A \\ &\quad + \int_A f_{xi}(x, y) u_0(x, y) dA + \int_A f_{yi}(x, y) v_0(x, y) dA \\ &\quad - \oint_{\partial A} (N_{xx}(x, y, z) n_x + N_{xy}(x, y)) n_y(x, y) u_0(x, y) d\partial A \\ &\quad - \oint_{\partial A} (N_{xy}(x, y) n_x + N_{yy}(x, y)) n_y(x, y) v_0(x, y) d\partial A. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para placas não-retangulares, torna-se essencial indicar os integrandos no contorno ∂A em (2.41) através das direções normal (n) e tangencial (t) em cada ponto do contorno, conforme ilustrado na Figura 2.10. Sendo α o ângulo entre os eixos x e n , as seguintes relações são válidas entre os deslocamentos u_{0n} e u_{0t} , nas direções normal e tangencial, e os deslocamentos u_0 e v_0 , nas direções x e y , (veja Figura 2.10)

$$\begin{aligned} u_{0n}(x, y, z) &= u_0(x, y, z)n_x + v_0(x, y, z)n_y, \\ u_{0t}(x, y, z) &= -u_0(x, y, z)n_y + v_0(x, y, z)n_x \end{aligned} \quad (2.42)$$

sendo $n_x = \cos \alpha$ e $n_y = \sin \alpha$ os cossenos diretores do versor $\mathbf{e}_n$ na direção n .

Dada uma função $v(x, y)$, as suas derivadas parciais em relação a x e y podem ser expressas em função das direções normal (n) e tangencial (t) como (Reddy, 1993)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial n}n_x - \frac{\partial v}{\partial t}n_y, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t}n_x + \frac{\partial v}{\partial n}n_y. \quad (2.44)$$

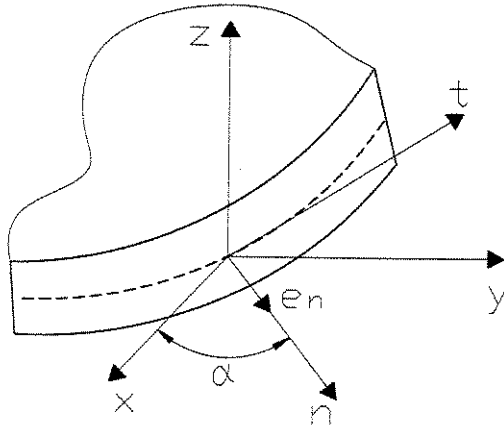


Figura 2.10: Sistema de coordenadas ntz no contorno de uma placa não-retangular (Szabó e Babuska, 1991).

De acordo com o Apêndice A, a força cortante Q_n , o momento fletor M_n na direção normal n e o momento torçor M_{nt} estão relacionados com as componentes cartesianas dos esforços internos através das seguintes expressões

$$Q_n = Q_{xz}n_x + Q_{yz}n_y, \quad (2.45)$$

$$M_{nn} = M_{xx}n_x^2 + M_{yy}n_y^2 + 2M_{xy}n_xn_y, \quad (2.46)$$

$$M_{nt} = (M_{yy} - M_{xx})n_xn_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2). \quad (2.47)$$

De forma semelhante, as forças tangenciais N_{xx} , N_{yy} e N_{xy} podem ser reescritas no sistemas de coordenadas (n, t, z) como

$$N_{nn} = N_{xx}n_x^2 + N_{yy}n_y^2 + 2N_{xy}n_xn_y, \quad (2.48)$$

$$N_{nt} = (N_{yy} - N_{xx})n_xn_y + N_{xy}(n_x^2 - n_y^2), \quad (2.49)$$

A relação (2.45) permite indicar o primeiro integrando no contorno em (2.41) através da força cortante Q_n , ou seja,

$$\oint_{\partial A} (Q_{xz}n_x + Q_{yz}n_y) w \, d\partial A = \oint_{\partial A} Q_n w \, d\partial A. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.43) e (2.44) e as relações (2.46) e (2.47) no segundo integrando no contorno em (2.41), verifica-se que

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial A} \left[(M_{xx}n_x + M_{xy}n_y) \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{xy}n_x + M_{yy}n_y) \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\partial A \\ &= \oint_{\partial A} \left[M_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} + M_{nt} \frac{\partial w}{\partial t} \right] d\partial A. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Igualmente substituindo (2.48) e (2.49) nas integrais no contorno dos termos referente ao efeito de membrana, tem-se

$$\oint_{\partial A} [(N_{xx}n_x + N_{xy}n_y) u_0 + (N_{xy}n_x + N_{yy}n_y) v_0] d\partial A = \oint_{\partial A} [N_{nn}u_{0n} + N_{nt}u_{0t}] d\partial A. \quad (2.52)$$

Substituindo (2.50), (2.51) e (2.52) em (2.41) vem que

$$\begin{aligned} T_i &= \int_A q_i(x, y) w(x, y) dA + \int_A f_{xi}(x, y) u_0(x, y) dA + \int_A f_{yi}(x, y) v_0(x, y) dA \\ &+ \oint_{\partial A} \left[M_{nn}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} + M_{nt}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial t} \right] d\partial A \\ &+ \oint_{\partial A} Q_n(x, y) w(x, y) d\partial A - \oint_{\partial A} (N_{nn}(x, y) u_{0n}(x, y) + N_{nt}(x, y) u_{0t}(x, y)) d\partial A. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pode-se ainda integrar por partes o termo referente a M_{nt} , ou seja,

$$\oint_{\partial A} M_{nt}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial t} d\partial A = M_{nt} w|_1^2 - \oint_{\partial A} \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t} w(x, y) d\partial A,$$

sendo 1 e 2 pontos do contorno ∂A entre os quais não há descontinuidades geométricas conforme mostrado na Figura 2.11. Supondo a existência de N pontos P_i de ∂A com descontinuidades geométricas, a expressão anterior é reescrita como

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} M_{nt}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial t} d\partial A = & - \oint_{\partial A} \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t} w(x, y) d\partial A \\ & + \sum_{i=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) w(x, y) \right]_{P_i}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Neste caso, M_{nt}^+ e M_{nt}^- representam, respectivamente, os valores à direita e à esquerda do ponto P_i quando circulando em ∂A no sentido positivo da direção tangente t , conforme ilustrado na Figura 2.11.

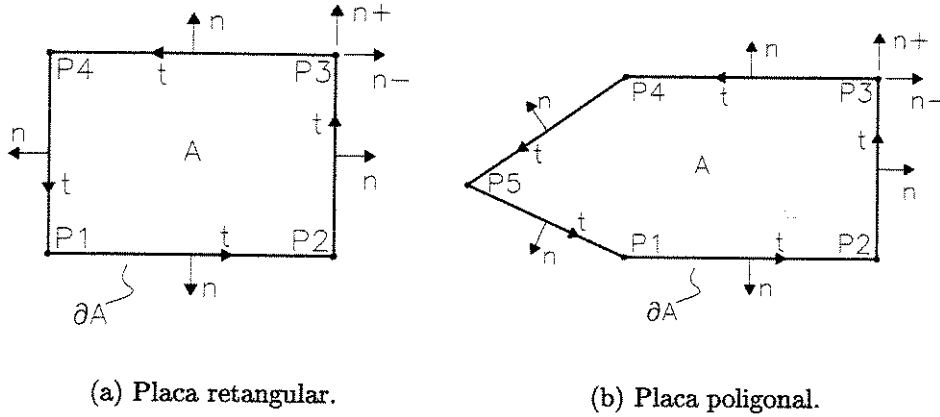


Figura 2.11: Pontos em descontinuidades geométricas da superfície média.

Substituindo (2.54) em (2.53), a expressão do trabalho interno passa a ser dada por

$$\begin{aligned} T_i = & \int_A q_i(x, y) w(x, y) dA + \int_A f_{xi}(x, y) u_0(x, y) dA + \int_A f_{yi}(x, y) v_0(x, y) dA \\ & - \oint_{\partial A} \left[Q_n(x, y) + \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t} \right] w(x, y) d\partial A + \oint_{\partial A} M_{nn}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} d\partial A \\ & - \oint_{\partial A} [N_{nn}(x, y) u_{0n}(x, y) + N_{nt}(x, y) u_{0t}(x, y)] d\partial A \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) w(x, y) \right]_{P_i}.$$

De forma análoga a (2.38), a força cortante Q_n é dada por

$$Q_n(x, y) = \frac{\partial M_{nn}(x, y)}{\partial n} + \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t}. \quad (2.56)$$

Observa-se que M_{nn} representa um momento fletor por unidade de comprimento na direção tangente t . A partir daí, a derivada $\frac{\partial M_{nn}}{\partial n}$ indica uma força transversal por unidade de comprimento na direção z . Analogamente para o termo $\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$. Logo, denota-se por

$$V_n(x, y) = Q_n(x, y) + \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t} = \frac{\partial M_{nn}(x, y)}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{nt}(x, y)}{\partial t} \quad (2.57)$$

a força interna transversal por unidade de comprimento na direção z presente no contorno da superfície média. Logo, a expressão final do trabalho interno para a placa de Kirchhoff é escrita como

$$\begin{aligned} T_i = & \int_A q_i(x, y) w(x, y) dA + \int_A f_{xi}(x, y) u_0(x, y) dA + \int_A f_{yi}(x, y) v_0(x, y) dA \\ & - \oint_{\partial A} V_n(x, y) w(x, y) d\partial A + \oint_{\partial A} M_{nn}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} d\partial A \\ & - \oint_{\partial A} (N_{nn}(x, y) u_{0n}(x, y) + N_{nt}(x, y) u_{0t}(x, y)) d\partial A \\ & + \sum_{i=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) w(x, y) \right]_{P_i}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Assim, os esforços internos presentes no modelo de placa de Kirchhoff incluindo o efeito de membrana são os seguintes:

- q_i : carga distribuída interna transversal à superfície média da placa proveniente dos momentos fletores (M_{xx} e M_{yy}) e torçores (M_{xy} e M_{yx}) por unidade de comprimento presentes nos pontos internos;
- V_n : força cortante por unidade de comprimento na direção do eixo z presente nos pontos do contorno;

- M_{nn} : momento fletor por unidade de comprimento na direção tangente t presente nos pontos dos contornos;
- M_{nt}^+ e M_{nt}^- : forças internas concentradas transversais atuando à direita e à esquerda dos pontos P_i do contorno da placa onde há descontinuidades geométricas;
- f_{xi} e f_{yi} : cargas distribuídas internas tangentes à superfície média da placa proveniente das forças normais (N_{xx} e N_{yy}) e cisalhantes (N_{xy} e N_{yx}) por unidade de comprimento presente nos pontos internos;
- N_{nn} : força normal por unidade de comprimento presente nos pontos dos contornos normal à superfície lateral da placa;
- N_{nt} : força tangencial por unidade de comprimento presente nos pontos dos contornos tangente à superfície lateral da placa.

Esses esforços internos estão ilustrados na Figura 2.12(a).

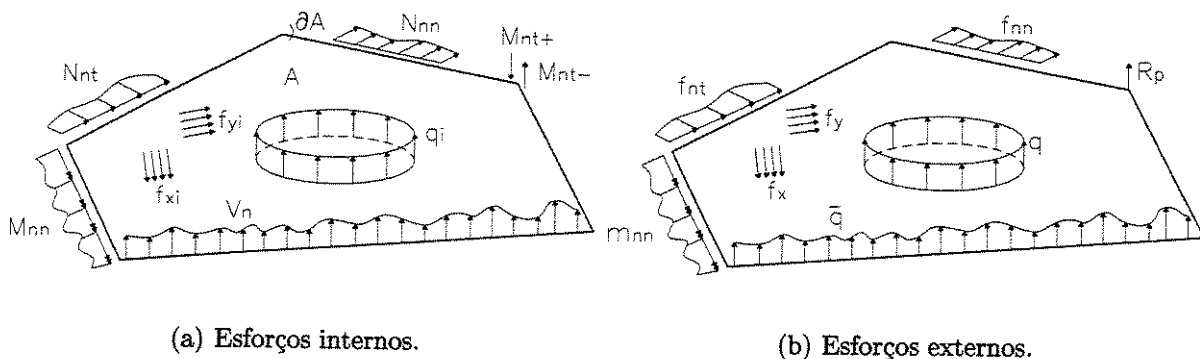


Figura 2.12: Esforços internos e externos devido ao efeito de flexão e membrana.

2.1.5 Determinação dos Esforços Externos

Deseja-se agora caracterizar o conjunto de esforços externos compatíveis com a cinemática definida para o modelo de Kirchhoff. Posteriormente, aplica-se o Princípio dos Trabalhos Vir-

tuais (PTV) para deduzir o Problema de Valor de Contorno (PVC) de equilíbrio para a placa de Kirchhoff.

Os esforços externos presentes no modelo de Kirchhoff são apenas aqueles que podem ser equilibrados pelos respectivos esforços internos definidos na seção anterior. Desta forma os esforços externos são os seguintes:

- q : força distribuída externa transversal à superfície média da placa;
- $\bar{q}$: força distribuída transversal à superfície média definida no contorno ∂A ;
- $\bar{m}_{nn}$: momento distribuído na direção do vetor tangente t no contorno ∂A ;
- R_{P_i} : forças concentradas na direção transversal da placa atuando nos pontos P_i do contorno nos quais há descontinuidades geométricas;
- f_x : força distribuída externa na direção x tangente à superfície média da placa;
- f_y : força distribuída externa na direção y tangente à superfície média da placa;
- $\bar{f}_{nn}$: força distribuída normal à superfície lateral do contorno da placa;
- $\bar{f}_{nt}$: força distribuída tangencial à superfície lateral do contorno da placa.

O conjunto de esforços externos está ilustrado na Figura 2.12(b). Desta maneira, o trabalho externo T_e para um conjunto de deslocamentos (u_0, v_0, w) é

$$\begin{aligned}
T_e = & \int_A q(x, y) w(x, y) dA + \int_A f_x(x, y) u_0(x, y) dA + \int_A f_y(x, y) v_0(x, y) dA \\
& + \oint_{\partial A} \bar{q}(x, y) w(x, y) d\partial A + \oint_{\partial A} \bar{m}_{nn} \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} + \oint_{\partial A} \bar{f}_{nn}(x, y) u_n(x, y) d\partial A \\
& + \oint_{\partial A} \bar{f}_{nt}(x, y) u_t(x, y) d\partial A + \sum_{i=1}^N [R_{P_i} w(x, y)]_{P_i}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

O PTV estabelece que a soma dos trabalhos dos esforços externos (T_e) e internos (T_i) deve ser nula para qualquer ação de movimento virtual $\hat{w}$ compatível com a cinemática da

placa de Kirchhoff, ou seja,

$$T_e + T_i = 0 \quad \text{para toda ação virtual } \hat{\mathbf{u}} = (u_0, v_0, w) . \quad (2.60)$$

Substituindo (2.58) e (2.59) em (2.60) e colocando em evidência os termos comuns, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_A \left[q(x, y) + \frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} \right] \hat{w}(x, y) dA \\ & \int_A \left[f_x(x, y) + \frac{\partial N_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial y} \right] \hat{u}_0(x, y) dA + \\ & \int_A \left[f_y(x, y) + \frac{\partial N_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial x} \right] \hat{v}_0(x, y) dA + \\ & \oint_{\partial A} [\bar{q}(x, y) - V_n(x, y)] \hat{w}(x, y) d\partial A + \oint_{\partial A} [\bar{m}_{nn}(x, y) + M_{nn}(x, y)] \frac{\partial \hat{w}(x, y)}{\partial n} + \\ & \oint_{\partial A} [f_{nn}(x, y) - N_{nn}(x, y)] \hat{u}_{0n}(x, y) d\partial A + \oint_{\partial A} [f_{nt}(x, y) - N_{nt}(x, y)] \hat{u}_{0t}(x, y) d\partial A + \\ & \sum_{i=1}^N [(R_{P_i} + M_{nt}^+ - M_{nt}^-) \hat{w}(x, y)]_{P_i} = 0. \end{aligned}$$

Como o deslocamento virtual $\hat{\mathbf{u}} = (u_0, v_0, w)$ é arbitrário, a expressão anterior é nula apenas se todos os termos entre colchetes forem simultaneamente nulos. Isto resulta no seguinte PVC de equilíbrio para a placa de Kirchhoff

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0 & x, y \in A, \\ V_n - \bar{q} = 0 & x, y \in \partial A, \\ M_{nn}(x, y) + \bar{m}_{nn}(x, y) = 0 & x, y \in \partial A, \\ (M_{nt}^+ - M_{nt}^-) - R_{P_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial N_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial y} + f_x(x, y) = 0 & x, y \in A, \\ \frac{\partial N_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}(x, y)}{\partial x} + f_y(x, y) = 0 & x, y \in A, \\ f_{nn}(x, y) - N_{nn}(x, y) = 0 & x, y \in \partial A, \\ f_{nt}(x, y) - N_{nt}(x, y) = 0 & x, y \in \partial A. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

A expressão anterior define a forma local ou o Problema de Valor de Contorno (PVC) da

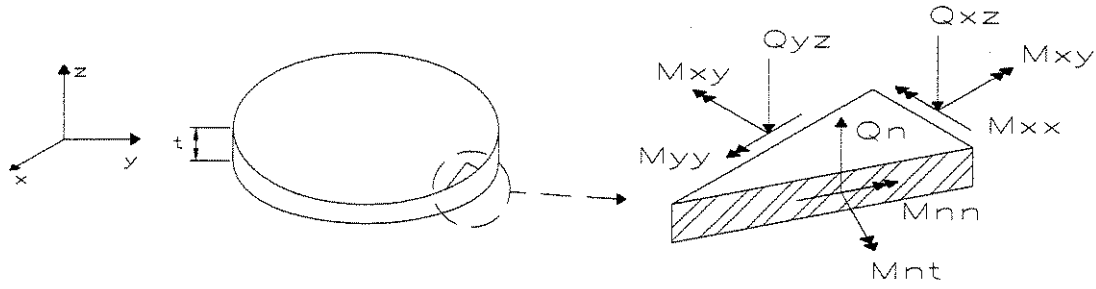


Figura 2.13: Esforços presentes no contorno de uma placa de Kirchhoff.

Engastada	Apoiada 1	Apoiada 2	Livre
$w = 0$	$w = 0$	$w = 0$	$Q_n = 0$
$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$	$M_{nt} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$	$M_{nt} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$	$M_{nn} = 0$	$M_{nn} = 0$	$M_{nn} = 0$

Tabela 2.2: Condições de Contorno no Modelo de Placa de Kirchhoff.

placa livre de restrições cinemáticas. Tem-se uma equação diferencial de segunda ordem em termos de momentos fletor e torção, assim como três condições de contorno para o problema de flexão. A primeira condição de contorno refere-se ao equilíbrio da força cortante V_n no contorno com a carga distribuída $\bar{q}$. A segunda condição de contorno considera o equilíbrio dos momentos fletores distribuídos interno M_{nn} e externo $\bar{m}_{nn}$. A terceira condição estabelece o equilíbrio entre as forças concentradas transversais interna e externa nos pontos de descontinuidade geométrica.

Além disso, tem-se também duas equações de primeira ordem com termos das forças normais e duas condições de contorno para o problema de membrana. Essas condições consideram o equilíbrio entre as cargas tangenciais internas N_{nn} e N_{nt} com as respectivas cargas externas f_{nn} e f_{nt} .

Os esforços presentes no contorno de uma placa estão ilustrados na Figura 2.13. As condições de contorno cinemáticas e de força nas extremidades de uma placa estão indicadas na Tabela 2.2.

2.1.6 Aplicação da Equação Constitutiva

Para uma placa de material elástico, linear e isotrópico, as componentes de tensão $\sigma_{xx}(x, y, z)$, $\sigma_{yy}(x, y, z)$ e $\tau_{xy}(x, y, z)$ estão relacionadas, respectivamente, com as deformações $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$, $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ e $\gamma_{xy}(x, y, z)$ através da Lei de Hooke. O P.V.C. de equilíbrio 2.61 foi deduzido assumindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações.

Como nesta seção emprega-se um material linear, o modelo passa a ser totalmente linear. Neste caso, pode-se decompor as componentes de tensão segundo os efeitos de flexão (indicados por f) e de membrana (indicados por m). Logo,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^m + \sigma_{xx}^f, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^m + \sigma_{yy}^f, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^m + \tau_{xy}^f.$$

Para um material de Hooke, as componentes de tensão e deformação para a flexão estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^f(x, y, z) &= \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2(x, y)} \left(\varepsilon_{xx}^f(x, y, z) + \nu \varepsilon_{yy}^f(x, y, z) \right), \\ \sigma_{yy}^f(x, y, z) &= \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2(x, y)} \left(\varepsilon_{yy}^f(x, y, z) + \nu \varepsilon_{xx}^f(x, y, z) \right), \\ \tau_{xy}^f(x, y, z) &= G(x, y) \gamma_{xy}^f(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \gamma_{xy}^f(x, y, z) \\ &= \frac{E(x, y) [1 - \nu(x, y)]}{2 [1 - \nu^2(x, y)]} \gamma_{xy}^f(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Supõe-se que o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são constantes, ou seja, $E(x, y) = E$ e $\nu(x, y) = \nu$. Introduzindo as componentes de deformação deduzidas anteriormente nas expressões dadas em (2.62), obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^f(x, y) &= -z \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy}^f(x, y) &= -z \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy}^f(x, y) &= -z \frac{E(1 - \nu)}{1 - \nu^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Substituindo-se as expressões anteriores nas equações (2.26), (2.28) e (2.30), os mo-

mentos fletores e torçor para uma placa com material elástico, linear e isotrópico são dados por

$$\begin{aligned}
M_{xx}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) dz \\
&= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right), \\
M_{yy}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) dz \\
&= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right), \\
M_{xy}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

sendo

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.65}$$

a rigidez da placa ao efeito de flexão.

Por sua vez, as forças cortantes Q_x e Q_y dadas em (2.38) e (2.39) são escritas como

$$\begin{aligned}
Q_x(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \\
&= -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right),
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
Q_y(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \\
&= -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Substituindo (2.64) na equação diferencial de flexão dada em (2.61), chega-se na equação diferencial do problema em termos do deslocamento transversal $w(x, y)$, ou seja,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$+2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right] - q(x, y) = 0. \quad (2.68)$$

Simplificando a expressão anterior, obtém-se

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = q(x, y). \quad (2.69)$$

A partir da equação (2.64), vem que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) &= -\frac{M_{xx}(x, y)}{D}, \\ \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) &= -\frac{M_{yy}(x, y)}{D}, \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{M_{xy}(x, y)}{D(1 - \nu)}. \end{aligned}$$

Substituindo as relações anteriores em (2.63), obtém-se as seguintes expressões para as componentes de tensão normal e de cisalhamento

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^f(x, y) &= \frac{M_{xx}(x, y)}{t^3/12} z, \\ \sigma_{yy}^f(x, y) &= \frac{M_{yy}(x, y)}{t^3/12} z, \\ \tau_{xy}^f(x, y) &= \frac{M_{xy}(x, y)}{t^3/12} z. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Por sua vez, as componentes de tensão e deformação, devidas ao efeito de membrana, estão relacionados por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^m(x, y, z) &= \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2(x, y)} \left(\varepsilon_{xx}^m(x, y, z) + \nu \varepsilon_{yy}^m(x, y, z) \right), \\ \sigma_{yy}^m(x, y, z) &= \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2(x, y)} \left(\varepsilon_{yy}^m(x, y, z) + \nu \varepsilon_{xx}^m(x, y, z) \right), \\ \tau_{xy}^m(x, y, z) &= G(x, y) \gamma_{xy}^m(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \gamma_{xy}^m(x, y, z) \\ &= \frac{E(x, y) [1 - \nu(x, y)]}{2 [1 - \nu^2(x, y)]} \gamma_{xy}^m(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Introduzindo-se as equações de deformação do efeito de membrana da Tabela 2.1 nas

equações acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^m(x, y) &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right), \\
\sigma_{yy}^m(x, y) &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right), \\
\tau_{xy}^m(x, y) &= \frac{E(1 - \nu)}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Conhecidas as componentes de tensão, pode-se agora relacionar as forças normais dadas em (2.27), (2.29) e (2.32) com as componentes do campo de deslocamento. Deste modo, tem-se

$$\begin{aligned}
N_{xx}(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right) dz \\
&= T \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right), \\
N_{yy}(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right) dz \\
&= T \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right), \\
N_{xy}(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) dz \\
&= T(1 - \nu) \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right),
\end{aligned} \tag{2.73}$$

sendo

$$T = \frac{Et}{(1 - \nu^2)}$$

a rigidez da placa devido ao efeito de membrana.

Substituindo a equação acima nas equações diferenciais de membrana dadas em (2.68),

obtém-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[T \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[T \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] + f_x(x, y) = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left[T \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] + f_y(x, y) = 0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Essas são as equações diferenciais que descrevem o efeito de membrana num elemento estrutural de placa segundo o modelo de Kirchhoff.

Simplificando as equações (2.74), tem-se

$$\begin{aligned}
T \left[\frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right] &= -f_x, \\
T \left[\frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right] &= -f_y.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Substituindo as equações (2.73) nas expressões (2.72), obtém-se

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^m(x, y) &= \frac{N_{xx}(x, y)}{t}, \\
\sigma_{yy}^m(x, y) &= \frac{N_{yy}(x, y)}{t}, \\
\tau_{xy}^m(x, y) &= \frac{N_{xy}(x, y)}{t}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Observa-se que as componentes de tensão devido ao efeito de flexão variam linearmente com a coordenada z , conforme ilustrado na Figura 2.14(a). As tensões devidas ao efeito de membrana não variam com a coordenada z , como pode ser visto na Figura 2.14(b).

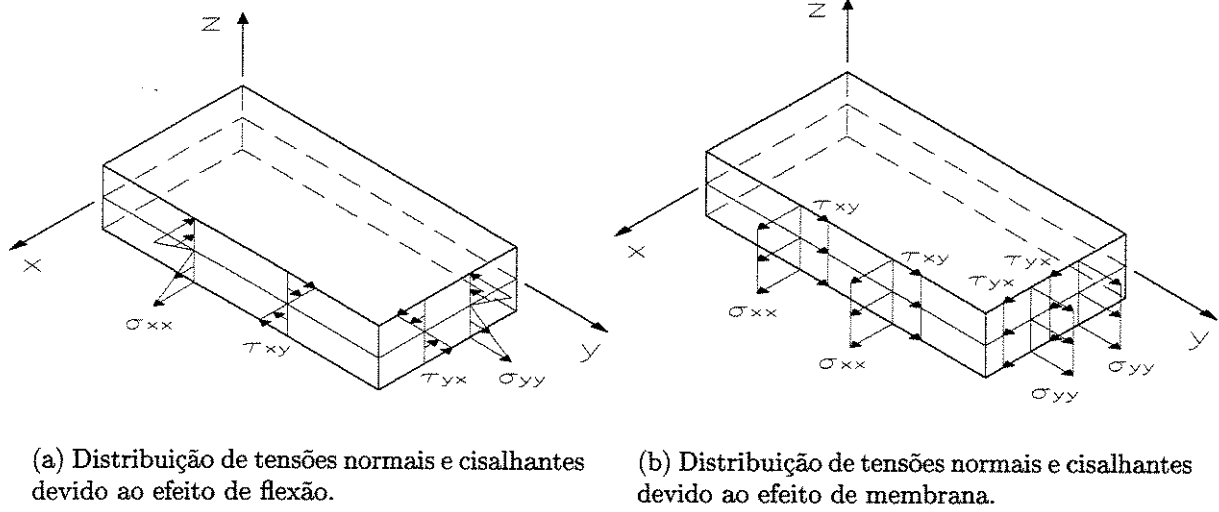


Figura 2.14: Distribuição de tensões na placa de Kirchhoff.

2.2 Aproximação

2.2.1 Forma Forte

A equação diferencial, ou forma forte, devida ao efeito de flexão, do modelo de placa de Kirchhoff, em termos do deslocamento transversal w , é dada por (2.69). Esta equação pode ser denotada na forma padrão de operador como

$$A^f u^f = f^f, \quad (2.77)$$

sendo

$$A^f = D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \quad u^f = w(x, y) \quad \text{e} \quad f^f = q(x, y). \quad (2.78)$$

A solução da equação (2.69) é uma função $w(x, y)$ contínua com derivadas parciais contínuas até a quarta ordem e que satisfaz as condições de contorno do problema. Logo, $w(x, y)$ pertence ao domínio D_{A^f} do operador diferencial A^f , ou seja,

$$D_{A^f} = \left\{ w(x, y) \in C^4(x, y) \text{ e } w(x, y) \text{ satisfaz as condições de contorno} \right\}, \quad (2.79)$$

sendo $C^4(x, y)$ o conjunto das funções contínuas em R^2 com derivadas parciais contínuas até a quarta ordem.

Analogamente, as equações de membrana (2.75) podem ser denotadas como

$$\mathbf{A}^m \mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m, \quad (2.80)$$

com

$$\mathbf{A}^m = T \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}^m = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{f}^m = \begin{Bmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (2.81)$$

A solução da equação (2.80) fornece as funções $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ contínuas com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem e que satisfazem as condições de contorno do problema. Logo, $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ pertencem ao domínio D_{A^m} do operador diferencial $\mathbf{A}^m$, dado por

$$D_{A^m} = \left\{ u_0(x, y), v_0(x, y) \in C^2(x, y) \text{ e } u_0(x, y) \text{ e } v_0(x, y) \right. \\ \left. \text{satisfazem as condições de contorno} \right\}, \quad (2.82)$$

sendo $C^2(x, y)$ o conjunto das funções contínuas em R^2 com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

2.2.2 Forma Fraca

Efeito de Flexão

Para se obter a forma fraca, devida ao efeito de flexão, trabalha-se com a equação não-simplificada dada em (2.68) e multiplica-se a mesma por uma função $v(x, y)$, denominada função teste. Inicialmente, assume-se que v pertence ao domínio do operador A^f , ou seja,

$v(x, y)$ é uma função de $C^4(x, y)$ que satisfaz as condições de contorno do problema. Posteriormente, será visto que na verdade as funções v e w não precisam ser tão regulares e nem satisfazer todas as condições de contorno. Logo, multiplicando-se (2.68) por v tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \right] v(x, y) dA + \\ & \int_A \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \right] v(x, y) dA + \\ & \int_A 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right] v(x, y) dA - \int_A q(x, y) v(x, y) dA = 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para simplificar a notação, o termo (x, y) não será incluído nas equações seguintes. Integrando a expressão anterior por partes, tem-se

$$\begin{aligned} & - \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} dA + \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial y} dA \\ & + \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial y} dA + \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial x} dA \\ & + \oint_{\partial A} \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) n_y \right] v d\partial A - \int_A q v dA = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Observa-se que o termo $2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right]$ foi integrado uma vez em x e outra em y . Na expressão anterior, empregaram-se as definições dos momentos dadas em (2.64) na integral de contorno.

Aplicando-se as definições das forças cortantes (2.66) e (2.67) e a expressão (2.45), a integral de contorno simplifica-se para

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) n_y \right] v d\partial A &= \oint_{\partial A} [Q_x n_x + Q_y n_y] v d\partial A \\ &= \oint_{\partial A} Q_n v d\partial A. \end{aligned}$$

Empregando esta relação em (2.84) e integrando mais uma vez por partes vem que

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dA + \int_A \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dA + \\
& \int_A 2 \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dA + \oint_{\partial A} Q_n v d\partial A \\
& - \oint_{\partial A} \left[\left(M_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \left(M_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] d\partial A - \int_A q v dA = 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

A segunda integral no contorno pode ser simplificada de forma análoga a (2.51), ou seja,

$$\oint_{\partial A} \left[(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial v}{\partial x} + (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\partial A = \oint_{\partial A} \left[M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} + M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t} \right] d\partial A.$$

Substituindo a relação anterior em (2.85) e organizando as integrais de área, obtém-se

$$\begin{aligned}
& D \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] dA \\
& - \oint_{\partial A} Q_n v d\partial A - \oint_{\partial A} \left[M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} + M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t} \right] d\partial A - \int_A q v dA = 0.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Integrando-se por partes o termo $M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t}$, chega-se a uma expressão análoga a (2.54), a qual substituída na equação (2.86) resulta em

$$\begin{aligned}
& D \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] dA \\
& - \oint_{\partial A} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) v d\partial A - \oint_{\partial A} M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} d\partial A + \sum_{i=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) v \right]_{P_i} \\
& - \int_A q v dA = 0.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Finalmente, empregando-se as condições de contorno dadas na forma forte (2.61) vem

que

$$\begin{aligned}
& D \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] dA \\
& = \int_A q v dA + \oint_{\partial A} \bar{q} v d\partial A - \oint_{\partial A} \bar{m}_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} d\partial A - \sum_{i=1}^N [R_{P_i} v]_{P_i}. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

A equação (2.88) é denominada forma fraca, pois apresenta diferenciações de ordem inferior àquelas da forma forte (2.77). Enquanto a forma forte do problema apresenta diferenciações até quarta ordem, a forma fraca apresenta diferenciações de segunda ordem. As funções w e v podem ser menos regulares na forma fraca. Basta que pertençam ao conjunto de funções contínuas com derivada primeira contínua $C^1(x, y)$ ou contínuas com derivada primeira contínua por partes $C_{cp}^1(x, y)$. Na forma forte, estas funções necessitariam ser contínuas em $C^4(x, y)$ ou contínuas por partes em $C_{cp}^4(x, y)$.

A partir de (2.88), observa-se ainda que as condições de contorno naturais, expressas em termos de forças e momentos, são automaticamente satisfeitas pela forma fraca. Isto implica que as funções v e w em (2.88) necessitam satisfazer apenas as condições de contorno cinemáticas ou essenciais. No caso da função teste v , requer-se que a mesma satisfaça apenas as condições de contorno essenciais homogêneas.

Efeito de Membrana

Para se obter a forma fraca das equações (2.74) devido ao efeito de membrana, segue-se a mesma sistemática adotada para se obter (2.88). Assim, multiplicam-se as equações (2.74) pela função teste $v(x, y)$, pertencente, inicialmente, ao domínio do operador A^m , ou seja, $v(x, y)$ é uma função de $C^2(x, y)$ que satisfaz as condições de contorno do problema. Logo

$$\begin{aligned}
& \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left[T \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] v(x, y) dA + \\
& \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left[T \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] v(x, y) dA + \int_A f_x(x, y) v(x, y) dA = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left[T \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \right) \right] v(x, y) dA + \\ & \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) \right] v(x, y) dA + \int_A f_y(x, y) v(x, y) dA = 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes cada termo da equação acima e simplicando, como foi feito em (2.84), tem-se

$$T \int_A \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dA \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} &= \oint_{\partial A} [N_{xx}n_x + N_{xy}n_y] v d\partial A - \int_A f_x v dA, \\ &T \int_A \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dA \quad (2.90) \\ &= \oint_{\partial A} [N_{xy}n_x + N_{yy}n_y] v d\partial A - \int_A f_y v dA. \end{aligned}$$

As equações (2.89) e (2.90) representam a forma fraca do efeito de membrana, pois apresentam diferenciações de ordem inferior à da forma forte (2.81). Enquanto a forma forte do problema apresenta diferenciações até segunda ordem, a forma fraca apresenta diferenciações de primeira ordem. As funções u_0 , v_0 e v podem ser menos regulares na forma fraca. Basta que pertençam ao conjunto de funções contínuas $C^0(x, y)$ ou contínuas por partes $C_{cp}^0(x, y)$. Na forma forte, essas funções necessitam ser contínuas com derivadas até a segunda ordem contínuas em $C^2(x, y)$ ou contínuas por partes em $C_{cp}^2(x, y)$.

Da mesma maneira, as condições de contorno naturais são automaticamente satisfeitas pela forma fraca. Logo, as funções u_0 e v_0 devem satisfazer apenas as condições de contorno essenciais. Já a função teste v deve satisfazer as condições essenciais homogêneas.

2.2.3 Aproximação da Forma Fraca

Efeito de Flexão

A solução aproximada $w_n(x, y)$ do problema de flexão da placa de Kirchhoff com solução exata $w(x, y)$ é escrita da seguinte forma

$$w_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y). \quad (2.91)$$

sendo $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ um conjunto de n funções linearmente independentes, denominadas funções de base, de forma ou de interpolação.

É necessário que as funções escolhidas tenham ordem de diferenciação compatível com aquela presente na forma fraca (2.88). É importante também que satisfaçam as condições de contorno essenciais, uma vez que as condições de contorno naturais são satisfeitas pela forma fraca do problema. Para se obter os coeficientes a_i presentes na solução aproximada (2.91), existem diferentes métodos, tais como Resíduos Ponderados (Colocação e Galerkin), Ritz e Mínimos Quadrados.

O conjunto de todas as combinações lineares das funções ϕ_i gera o subespaço linear denotado por $span\{\phi_i\}_{i=1}^n$ associado a ϕ_i . Dessa forma, as aproximações w_n e v_n das funções w e v dadas em (2.87) pertencem ao subespaço gerado pelas funções ϕ_i , ou seja, $v_n, w_n \in span\{\phi_i\}_{i=1}^n$. Neste caso, v_n é escrita como

$$v_n(x, y) = \sum_{j=1}^n b_j \phi_j(x, y). \quad (2.92)$$

A forma fraca aproximada é obtida substituindo w e v em (2.87) pelas suas respectivas aproximações w_n e v_n , ou seja,

$$D \int_A \left[\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + v \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + \right. \\ \left. 2(1-v) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} \right] dA - \oint_{\partial A} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) v_n d\partial A - \oint_{\partial A} M_{nn} \frac{\partial v_n}{\partial n} d\partial A + \quad (2.93)$$

$$\sum_{i=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) v_n(x, y) \right]_{P_i} - \int_A q v_n dA = 0.$$

Substituindo (2.91) e (2.92) na forma fraca (2.93), obtém-se

$$\sum_{i,j=1}^n \left\{ D \int_A \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + v \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-v) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right] a_i dA - \oint_{\partial A} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \phi_j d\partial A \right. \quad (2.94)$$

$$\left. - \oint_{\partial A} M_{nn} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\partial A + \sum_{k,j=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) \phi_j \right]_{P_k} - \int_A q \phi_j dA \right\} b_j = 0.$$

Como b_j são coeficientes arbitrários da combinação linear (2.92), a expressão anterior é nula se e somente se

$$\sum_{i,j=1}^n \left\{ D \int_A \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + v \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-v) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} dA \right] \right\} a_i = \oint_{\partial A} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \phi_j d\partial A + \quad (2.95)$$

$$\oint_{\partial A} M_{nn} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\partial A - \sum_{k,j=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) \phi_j \right]_{P_k} + \int_A q \phi_j dA = 0.$$

A expressão anterior representa um sistema de equações da forma

$$[\mathbf{K}^f] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}^f\}, \quad (2.96)$$

sendo os coeficientes da matriz de rigidez $[\mathbf{K}^f]$ e do vetor de carregamento $\{\mathbf{f}^f\}$ dados de forma geral por

$$K_{ij}^f = D \int_A \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right] dA, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.97)$$

$$f_j^f = \oint_{\partial A} \left(Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \phi_j d\partial A + \oint_{\partial A} M_{nn} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\partial A - \sum_{k,j=1}^N \left[(M_{nt}^+ - M_{nt}^-) \phi_j \right]_{P_k} + \int_A q \phi_j dA, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.98)$$

A matriz de rigidez pode ser denotada ainda pelo seguinte produto de matrizes

$$[\mathbf{K}^f] = \frac{t^3}{12} [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^f], \quad (2.99)$$

A matriz de deformação $[\mathbf{B}^f]$ é dada por

$$[\mathbf{B}_i^f] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} & \dots & -\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Por sua vez, a matriz de elasticidade $[\mathbf{D}]$ é determinada a partir da lei de Hooke (2.62).

Logo

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Efeito de Membrana

Da mesma maneira, pode-se calcular a forma fraca aproximada das equações (2.89) e (2.90) referentes ao efeito de membrana substituindo u_0 e v_0 pelas suas respectivas aproxi-

mações u_{0n} e v_{0n} , isto é,

$$u_{0n}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y), \quad (2.102)$$

$$v_{0n}(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(x, y), \quad (2.103)$$

sendo $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ o conjunto de n funções linearmente independentes. Da mesma maneira que na flexão, é necessário que as funções escolhidas tenham ordem de diferenciação compatível com aquelas presentes na forma fraca (2.89) e (2.90). É importante também que satisfaçam as condições de contorno essenciais, uma vez que as condições de contorno naturais são satisfeitas pela forma fraca do problema.

O conjunto de todas as combinações lineares das funções φ_i forma o subespaço $span\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Desta maneira, as funções u_{0n} e v_{0n} dadas em (2.89) e (2.90) pertencem ao subespaço gerado pelas funções φ_i , ou seja, u_{0n}, v_{0n} e $v_n \in span\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Nesse caso, a aproximação v_n da função teste v é

$$v_n(x, y) = \sum_{j=1}^n h_j \varphi_j(x, y). \quad (2.104)$$

A forma fraca aproximada é obtida substituindo u_0 , v_0 e v_n em (2.89) e (2.90) pelas suas respectivas aproximações u_{0n} , v_{0n} e v_n , ou seja,

$$\begin{aligned} & -T \int_A \left[\frac{\partial u_{0n}}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_{0n}}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v_{0n}}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial u_{0n}}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) \right] dA \\ & + \oint_{\partial A} [N_{xx} n_x + N_{xy} n_y] v_n d\partial A = \int_A f_x v_n dA, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} & -T \int_A \left[\frac{\partial v_{0n}}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_{0n}}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v_{0n}}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial u_{0n}}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) \right] dA \\ & + \oint_{\partial A} [N_{xy} n_x + N_{yy} n_y] v_n d\partial A = \int_A f_y v_n dA. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Substituindo as equações (2.102), (2.103) e (2.104) na equação anterior e seguindo os mesmos passos para o efeito de flexão, encontra-se a forma fraca aproximada do efeito de

membrana da placa, isto é,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n T \int_A \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} c_i + \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d_i + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} d_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} c_i \right) \right] dA \\ &= \oint_{\partial A} [N_{xx} n_x + N_{xy} n_y] \varphi_j d\partial A - \int_A f_x \varphi_j dA, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n T \int_A \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} d_i + \nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} c_i + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} c_i \right) \right] dA \\ &= \oint_{\partial A} [N_{xy} n_x + N_{yy} n_y] \varphi_j d\partial A - \int_A f_y \varphi_j dA, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.108)$$

As expressões anteriores representam um sistema de equações da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} [K^{11}]_m & [K^{12}]_m \\ \text{sim.} & [K^{22}]_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c\}_m \\ \{d\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1\}_m \\ \{f^2\}_m \end{Bmatrix}. \quad (2.109)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez $[\mathbf{K}^m]$ e do vetor de carga $\{\mathbf{f}^m\}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= T \int_A \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dA \quad i, j = 1, \dots, n, \\ K_{ij}^{12} &= T \int_A \left[\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dA \quad i, j = 1, \dots, n, \\ K_{ij}^{22} &= T \int_A \left[\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dA \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} f_j^1 &= \oint_{\partial A} [N_{xx} n_x + N_{xy} n_y] \varphi_j d\partial A - \int_A f_x \varphi_j dA \quad j = 1, \dots, n, \\ f_j^2 &= \oint_{\partial A} [N_{xy} n_x + N_{yy} n_y] \varphi_j d\partial A - \int_A f_y \varphi_j dA \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Novamente, a matriz de rigidez de membrana pode ser denotada pelo produto

$$[\mathbf{K}^m] = [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^m], \quad (2.112)$$

sendo a matriz de deformação $[\mathbf{B}^m]$ dada por

$$[\mathbf{B}^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

2.2.4 Elementos Finitos de Placa

Efeito de Flexão

Para selecionar as funções de interpolação devido ao efeito de flexão $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ do elemento (e) , deve-se analisar a expressão (2.97). Pode-se ver que os coeficientes $[K_{ij}^f]$ da matriz de rigidez envolvem derivadas parciais de segunda ordem das funções de interpolação. Logo, a regularidade mínima que se exige das funções de interpolação é 1, ou seja, as mesmas devem pertencer ao conjunto $C^1(\Omega)$ das funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem também contínuas numa região $\Omega \subset R^2$. Isto implica que tanto w_e quanto as suas derivadas parciais $(\frac{\partial w_e}{\partial x}, \frac{\partial w_e}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 w_e}{\partial x \partial y})$ são contínuas entre dois elementos. Mas as componentes de deformação e tensão normal serão descontínuas, pois as mesmas envolvem derivadas parciais de segunda ordem. As funções provenientes do produto tensorial dos polinômios cúbicos de Hermite unidimensionais possuem as propriedades requeridas. A obtenção dos polinômios unidimensionais está apresentada no Apêndice B.

A determinação de funções de interpolação de elementos finitos de classe $C^1(\Omega)$ para $\Omega \subset R^2$ não é uma tarefa simples. Para o caso de elementos quadrangulares, tem-se uma forma de recorrência para gerar as funções de interpolação locais. Para isto considere o triângulo de Pascal ilustrado na Figura 2.15. O seguinte procedimento pode ser aplicado para gerar uma família conforme de elementos quadrangulares de classe C^m (Taroco e Feijóo, 1983):

- identifique no triângulo de Pascal, os quadrados cujos lados contém polinômios completos de grau ímpar. Na Figura 2.15, isto corresponde aos quadrados 1, 3, 5, $\dots$, m , $\dots$.

Cada um destes quadrados contém $4, 16, 36, \dots, (m+1)^2, \dots$ monômios independentes.

- considere que o grau de cada monômio contido no quadrado de ordem m corresponde à ordem da derivada que deve ser prescrita nos nós dos vértices do elemento quadrangular de 4 nós sendo m a ordem das derivadas, os polinômios de interpolação locais deste elemento contêm todos os monômios do quadrado $2m+1$. Cada elemento finito assim formado conduz a um elemento de classe C^m .

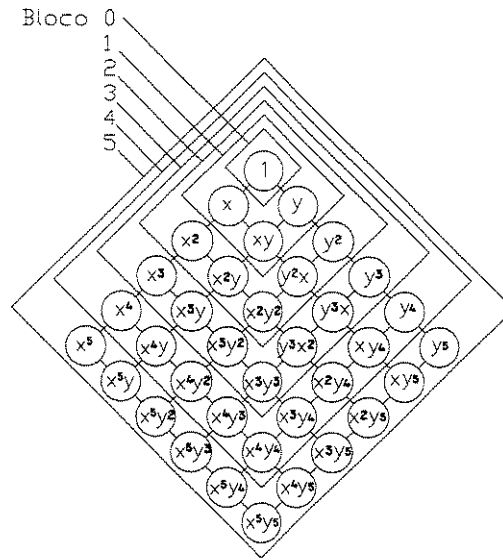


Figura 2.15: Triângulo de Pascal para elementos quadrangulares (Taroco e Feijóo, 1983).

Considere então os seguintes exemplos:

$m = 0$: o quadrado de ordem zero contém os monômios de ordem 0 em x e y . Logo, em cada vértice do elemento finito prescreve-se apenas o valor da função. As funções de interpolação correspondem neste caso a polinômios contendo os monômios do quadrado $2m+1 = 1$, ou seja, $1, x, y, xy$. Este elemento corresponde ao elemento Lagrangiano de classe $C^m = C^0$.

$m = 1$: os monômios deste quadrado são $1, x, y, xy$. Logo, em cada nó de vértice do elemento de 4 nós, deve-se prescrever os valores da função e das derivadas em relação a x ,

a y e cruzada xy , ou seja, consideram-se os valores de u , u_x , u_y e u_{xy} . As funções de interpolação contêm todos os monômios correspondentes ao quadrado $2m+1=3$. Como pode-se observar, esses polinômios contêm 16 coeficientes unicamente determinados a partir das restrições impostas em cada nó. Desta maneira, define-se um elemento de classe $C^m = C^1$.

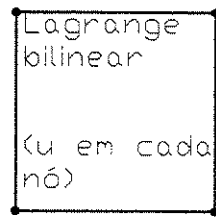
$m = 2$: observando o quadrado para $m = 2$, deve-se prescrever em cada nó do elemento, os valores de u , u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} , u_{xxy} , u_{xyy} e u_{xxyy} . Este elemento de quatro nós corresponde a uma família de classe $C^m = C^2$.

A Figura 2.16 ilustra vários elementos quadrangulares. O elemento Lagrangiano conforme de classe C^0 , prescreve apenas o valor da função em cada nó (ver Figura 2.16(a)). O elemento bilinear ilustrado na Figura 2.16(b) é não conforme, pois tem-se 3 valores por nó e um total de 12 funções de interpolação, não é possível garantir a continuidade das derivadas parciais entre dois elementos, pois são necessários 16 coeficientes. Já o elemento biquadrático da Figura 2.16(c) possui 9 nós e alcança um total de 27 coeficientes, permitindo garantir a continuidade da aproximação e de suas derivadas parciais. Finalmente, as Figuras 2.16(d) e 2.16(e) ilustram elementos Hermiteanos conforme e não-conforme.

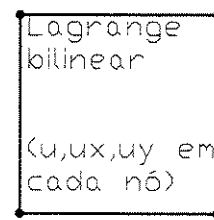
Comparando os elementos conformes de Lagrange e Hermite, observa-se que este último requer 16 coeficientes, enquanto o primeiro possui 27 coeficientes a serem calculados. Logo, sob o ponto de vista computacional, o elemento de Hermite é bem mais vantajoso.

Considere então a dedução das funções de interpolação para o caso $m = 1$ do elemento quadrangular de 4 nós mostrado na Figura 2.17. Como mencionado, em cada nó do elemento tem-se quatro funções de interpolação correspondentes aos valores de u , u_x , u_y e u_{xy} . Considerando os 4 nós, tem-se um total de 16 funções de interpolação correspondentes aos 16 monômios do triângulo de Pascal para o grau $2m+1=3$. A representação local $w_n^{(e)}(\xi, \eta)$ no elemento (e) da aproximação da função $w(x, y)$ é escrita como

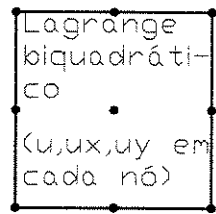
$$\begin{aligned} w_n^{(e)}(\xi, \eta) = & a_1\phi_1^{(e)}(\xi, \eta) + a_2\phi_2^{(e)}(\xi, \eta) + a_3\phi_3^{(e)}(\xi, \eta) + a_4\phi_4^{(e)}(\xi, \eta) + \\ & a_5\phi_5^{(e)}(\xi, \eta) + a_6\phi_6^{(e)}(\xi, \eta) + a_7\phi_7^{(e)}(\xi, \eta) + a_8\phi_8^{(e)}(\xi, \eta) + \end{aligned}$$



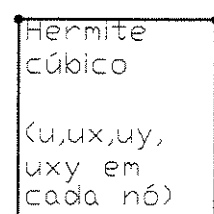
(a) Elemento conforme C^0 .



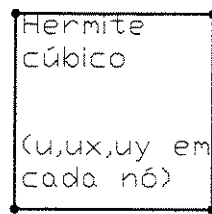
(b) Elemento não-conforme C^1 .



(c) Elemento conforme C^1 .



(d) Elemento conforme C^1 .



(e) Elemento não-conforme C^1 .

Figura 2.16: Elementos quadrangulares.

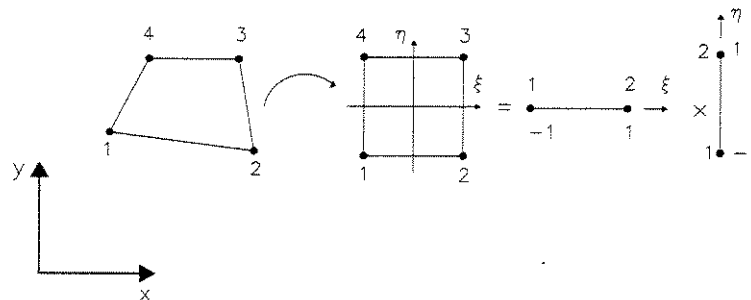


Figura 2.17: Elemento quadrangular de 4 nós.

$$\begin{aligned}
& a_9 \phi_9^{(e)}(\xi, \eta) + a_{10} \phi_{10}^{(e)}(\xi, \eta) + a_{11} \phi_{11}^{(e)}(\xi, \eta) + a_{12} \phi_{12}^{(e)}(\xi, \eta) + \\
& a_{13} \phi_{13}^{(e)}(\xi, \eta) + a_{14} \phi_{14}^{(e)}(\xi, \eta) + a_{15} \phi_{15}^{(e)}(\xi, \eta) + a_{16} \phi_{16}^{(e)}(\xi, \eta) \\
& = \sum_{i=1}^{16} a_i \phi_i^{(e)}(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{2.114}$$

As funções de interpolação nodais $\phi_1^{(e)}$, $\phi_5^{(e)}$, $\phi_9^{(e)}$ e $\phi_{13}^{(e)}$ estão, respectivamente, associadas aos valores da função w ; $\phi_2^{(e)}$, $\phi_6^{(e)}$, $\phi_{10}^{(e)}$ e $\phi_{14}^{(e)}$ à derivada w_x , $\phi_3^{(e)}$, $\phi_7^{(e)}$, $\phi_{11}^{(e)}$ e $\phi_{15}^{(e)}$ à w_y ; $\phi_4^{(e)}$, $\phi_8^{(e)}$, $\phi_{12}^{(e)}$ e $\phi_{16}^{(e)}$ à w_{xy} . Essas funções bidimensionais, ilustradas na Figura 2.18, são obtidas pelo produto tensorial dos polinômios de Hermite cúbicos unidimensionais dados em (B.3). Portanto

$$\begin{cases}
\phi_1^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_1^{(e)}(\xi) \phi_1^{(e)}(\eta), & \phi_2^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_2^{(e)}(\xi) \phi_1^{(e)}(\eta), \\
\phi_5^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_3^{(e)}(\xi) \phi_1^{(e)}(\eta), & \phi_6^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_4^{(e)}(\xi) \phi_1^{(e)}(\eta), \\
\phi_9^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_3^{(e)}(\xi) \phi_3^{(e)}(\eta), & \phi_{10}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_4^{(e)}(\xi) \phi_3^{(e)}(\eta), \\
\phi_{13}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_1^{(e)}(\xi) \phi_3^{(e)}(\eta), & \phi_{14}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_2^{(e)}(\xi) \phi_3^{(e)}(\eta), \\
\phi_3^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_1^{(e)}(\xi) \phi_2^{(e)}(\eta), & \phi_4^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_2^{(e)}(\xi) \phi_2^{(e)}(\eta), \\
\phi_7^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_3^{(e)}(\xi) \phi_2^{(e)}(\eta), & \phi_8^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_4^{(e)}(\xi) \phi_2^{(e)}(\eta), \\
\phi_{11}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_3^{(e)}(\xi) \phi_4^{(e)}(\eta), & \phi_{12}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_4^{(e)}(\xi) \phi_4^{(e)}(\eta), \\
\phi_{15}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_1^{(e)}(\xi) \phi_4^{(e)}(\eta), & \phi_{16}^{(e)}(\xi, \eta) = \phi_2^{(e)}(\xi) \phi_4^{(e)}(\eta).
\end{cases} \tag{2.115}$$

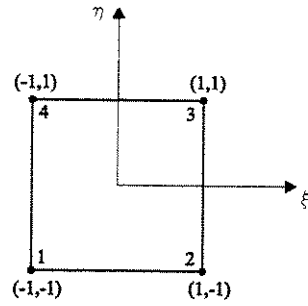
A matriz de rigidez de flexão para um elemento quadrangular de 4 nós empregando polinômios de Hermite pode ser escrita como

$$[\mathbf{K}_f^{(e)}] = \frac{t^3}{12} \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^f] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta.$$

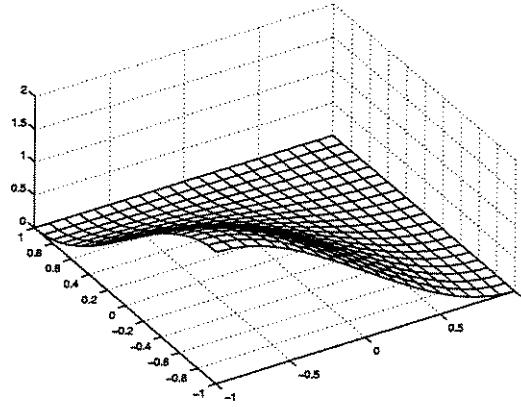
sendo

$$\det[\mathbf{J}] = \frac{dxdy}{d\xi d\eta},$$

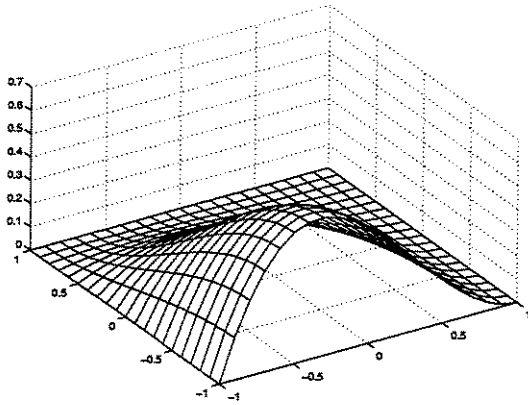
o determinante do Jacobiano, o qual é responsável pela mudança do domínio de integração real ($dxdy$) para o domínio de integração mais simples no espaço do elemento de referência ($d\xi d\eta$), conforme ilustrado na Figura 2.19.



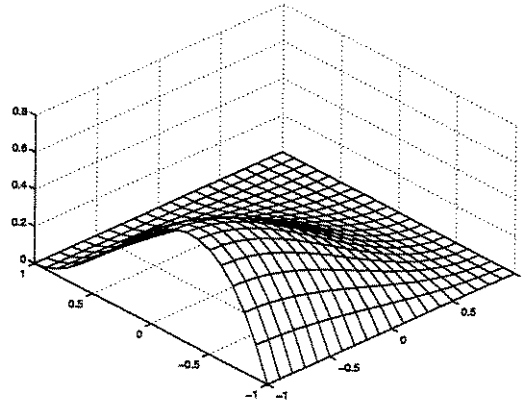
(a) Elemento Quadrangular.



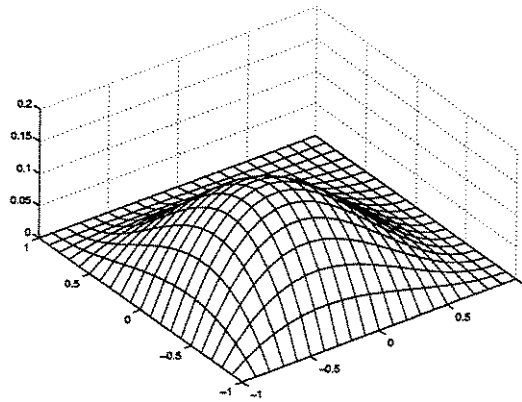
(b) Interpolação de w .



(c) Interpolação de w_x .



(d) Interpolação de w_y .



(e) Interpolação de w_{xy} .

Figura 2.18: Funções de Hermite para o primeiro nó de um elemento quadrangular de 4 nós e 4 graus de liberdade por nó.

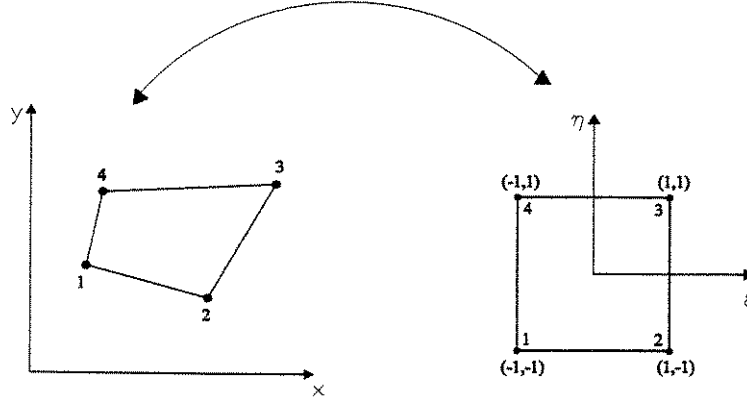


Figura 2.19: Domínio de integração real e de referência.

A matriz de deformação $[\mathbf{B}^f]$ é escrita como

$$[\mathbf{B}^f] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1^f] & [\mathbf{B}_2^f] & [\mathbf{B}_3^f] & [\mathbf{B}_4^f] \end{bmatrix},$$

sendo $[\mathbf{B}_i^f]$ ($i = 1, \dots, 4$) a matriz de deformação nodal, relacionando o campo de deformações com os deslocamentos nodais, dada por

$$[\mathbf{B}_i^f] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \phi_1^{(i)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \phi_2^{(i)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \phi_3^{(i)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \phi_4^{(i)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_1^{(i)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi_2^{(i)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi_3^{(i)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi_4^{(i)}}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi_1^{(i)}}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 \phi_2^{(i)}}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 \phi_3^{(i)}}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 \phi_4^{(i)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.$$

Na expressão anterior, $\phi_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, 4$) representa as funções de interpolação associadas aos nós do elemento quadrangular.

Observa-se que as expressões das matrizes de deformação $[\mathbf{B}_i^f]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) envolvem o cálculo das derivadas globais de segunda ordem das funções nodais locais $\phi_j^{(i)}(\xi, \eta)$ ($i, j = 1, \dots, 4$).

Para isso, aplica-se a seguinte relação para problemas planos (Touzot e Daht, 1985)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + [\mathbf{T}_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix},$$

sendo

$$[\mathbf{T}_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ 2j_{11}j_{21} & 2j_{12}j_{22} & j_{11}j_{12} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{T}_1] = -[\mathbf{T}_2][\mathbf{C}_1][\mathbf{j}]$$

com $[\mathbf{j}] = [\mathbf{J}]^{-1}$ e

$$[\mathbf{C}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix}.$$

No caso de triângulos, os elementos Hermiteanos investigados por Branble e Zlamal (Branble e Zlamal, 1970) são os mais importantes. O elemento mais popular é aquele de classe C^1 com polinômios de interpolação locais de quinto grau proposto por Bosshard (Bosshard, 1968) e Bell (Bell, 1969). Como pode ser visto a partir do triângulo de Pascal ilustrado na Figura 2.20 para elementos triangulares, o elemento de Bosshard requer 21 coeficientes para se ter um polinômio completo de grau 5. Para isso, prescrevem-se os valores de u , u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} em cada vértice e a derivada normal u_n em cada nó localizado na metade do lado do triângulo, conforme ilustrado na Figura 2.20. As funções de interpolação para um elemento triangular C^1 podem ser encontradas em (Touzot e Daht, 1985).

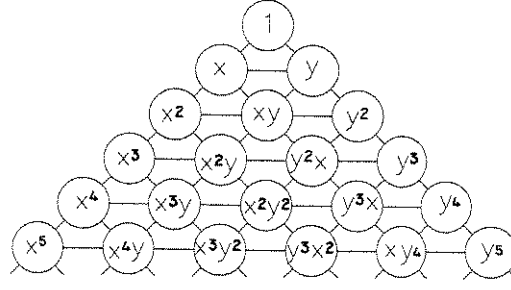


Figura 2.20: Triângulo de Pascal para elementos triangulares.

Efeito de Membrana

Para seleccionar as funções de interpolação devidas ao efeito de membrana $\{\phi_i\}_{i=1}^n$, deve-se analisar as expressões (2.110) e (2.111).

Como pode-se ver, os coeficientes da matriz de rigidez de membrana somente envolvem derivadas parciais de primeira ordem. Assim, utilizam-se funções de interpolação que pertencem ao conjunto $C^0(\Omega)$ das funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem descontínuas numa região $\Omega \subset R^2$. Dessa maneira, o campo de deslocamentos será contínuo entre os elementos, mas as componentes de deformação e tensão normal serão descontínuas entre os elementos, pois envolvem derivadas primeiras. As funções de Serendipity ou Lagrange são suficientes para atender à exigência de continuidade no campo de deslocamentos entre os elementos (Zienkiewicz e Taylor, 1989) e (Cook et al., 1989).

As funções lineares de Serendipity para elementos quadrilaterais de 4 nós são dadas por

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Para elementos triangulares lineares de 3 nós, tem-se

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \xi, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = \eta, \quad \varphi_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta.$$

Da mesma forma que foi feito para o efeito de flexão, a matriz de rigidez de membrana pode ser escrita como

$$[\mathbf{K}_m^{(e)}] = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^m] \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta,$$

A matriz de deformação $[\mathbf{B}^m]$ é escrita como

$$[\mathbf{B}^m] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1^m] & \dots & [\mathbf{B}_n^m] \end{bmatrix},$$

sendo n o número de nós e $[\mathbf{B}_i^m]$ ($i = 1, \dots, n$) a matriz de deformação nodal dada por

$$[\mathbf{B}_i^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix},$$

e $[\mathbf{D}]$ a matriz de elasticidade do estado plano de tensão dada em (2.101).

As derivadas globais das funções de interpolação são calculadas como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{j}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}.$$

Capítulo 3

Modelo de Placa de Reissner-Mindlin

Neste capítulo, apresenta-se a formulação variacional do modelo de placa de Reissner-Mindlin, assim como sua formulação pelo MEF. Adotam-se os mesmos passos seguidos no Capítulo 2 para a construção do modelo e sua aproximação.

A principal diferença do modelo de placa de Reissner-Mindlin, em comparação ao modelo de Kirchhoff, está na inclusão do efeito de distorção das normais à superfície de referência. Assim, as deformações cisalhantes transversais são não nulas, assim como as respectivas distribuições de tensão de cisalhamento. De forma análoga à viga de Timoshenko, assume-se que as distorções transversais são constantes na placa de Mindlin.

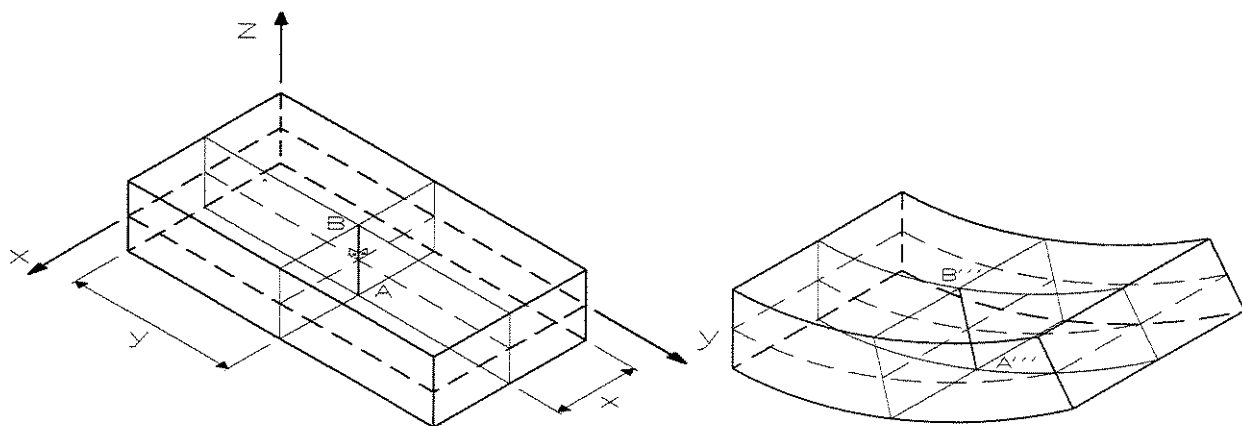
Não será incluído o efeito de membrana, pois, como visto no Capítulo 2, para pequenos deslocamentos, os efeitos de flexão e membrana estão desacoplados. Assim, as equações para o efeito de membrana são as mesmas desenvolvidas no Capítulo 2.

3.1 Formulação

3.1.1 Definição da Cinemática

Na cinemática do modelo de Kirchhoff, as normais à superfície de referência indeformada permanecem normais à superfície de referência deformada e não sofrem variação de comprimento, conduzindo a deformações cisalhantes transversais nulas.

A cinemática do modelo de Mindlin está ilustrada na Figura 3.1. Uma reta AB , normal ao plano de referência não-deformado e distante x e y da origem do sistema de coordenadas, não permanece, necessariamente, normal à superfície de referência na configuração deformada. Porém, o seu comprimento, da mesma forma que no modelo de Kirchhoff, não varia. Com isso, pode-se concluir que no modelo de Mindlin as deformações transversais cisalhantes não são nulas. Após a deformação final a reta AB estará na posição $A'''B'''$.



(a) Normal AB perpendicular à superfície não deformada.

(b) Reta AB sob a superfície deformada.

Figura 3.1: Cinemática do modelo de Mindlin.

Na Figura 3.2, tem-se a reta AB normal à superfície de referência indeformada segundo os planos xz e yz . Após a deformação da placa, todos os pontos da reta AB sofrem um mesmo deslocamento transversal $w(x, y)$, levando a reta AB para a posição $A'B'$. Além desse deslocamento transversal, a reta $A'B'$ sofre rotações de corpo rígido α_{xz} e α_{yz} , respectivamente, em torno dos eixos y e x que a levam para a posição $A''B''$, perpendicular à superfície de

referência. Por último, devido às rotações de distorção β_{xz} e β_{yz} , a normal AB assume a posição final $A'''B'''$. Com isso, a normal AB não mais permanece ortogonal à superfície de referência.

Seja P um ponto qualquer da normal AB com coordenadas iniciais (x, y, z) . As coordenadas x e y dão a posição da reta AB , enquanto que a coordenada z fornece a posição de P na normal AB .

Os deslocamentos u e v do ponto P , nas direções x e y , são dados pela diferença entre as posições final P''' e a inicial P , isto é,

$$u(x, y, z) = x - \Delta x''' - x = -\Delta x''', \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z) = y - \Delta y''' - y = -\Delta y'''. \quad (3.2)$$

Devido ao fato de não haver variação de comprimento da reta AB , as distâncias OP e OP''' possuem o mesmo comprimento z . A partir da Figura 3.2, as seguintes relações trigonométricas são válidas

$$\text{sen } \theta_{xz}(x, y) = \frac{\Delta x'''}{z}, \quad (3.3)$$

$$\text{sen } \theta_{yz}(x, y) = \frac{\Delta y'''}{z}. \quad (3.4)$$

Combinando as equações (3.1) e (3.2) com as (3.3) e (3.4), tem-se

$$u(x, y, z) = -z \text{ sen } \theta_{xz}(x, y), \quad (3.5)$$

$$v(x, y, z) = -z \text{ sen } \theta_{yz}(x, y). \quad (3.6)$$

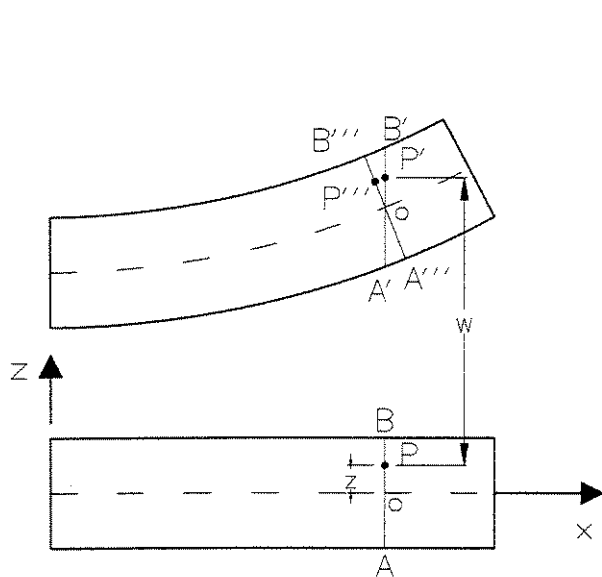
Os índices xz e yz indicam, respectivamente, os planos de rotação y e x .

Considerando-se pequenos deslocamentos, θ_{xz} e θ_{yz} são pequenos, logo,

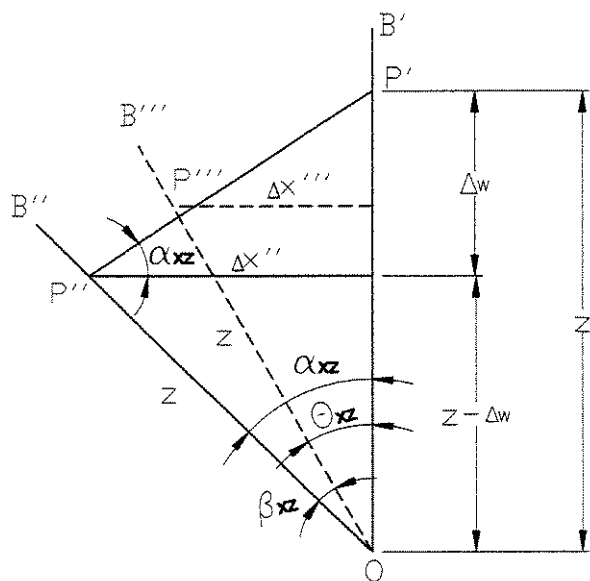
$$\text{sen } \theta_{xz}(x, y) \approx \theta_{xz}(x, y) \quad \text{e} \quad \text{sen } \theta_{yz}(x, y) \approx \theta_{yz}(x, y).$$

Portanto

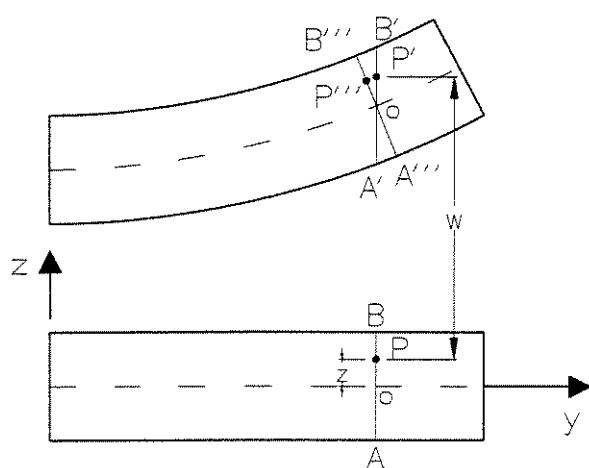
$$u(x, y, z) = -z\theta_{xz}(x, y), \quad (3.7)$$



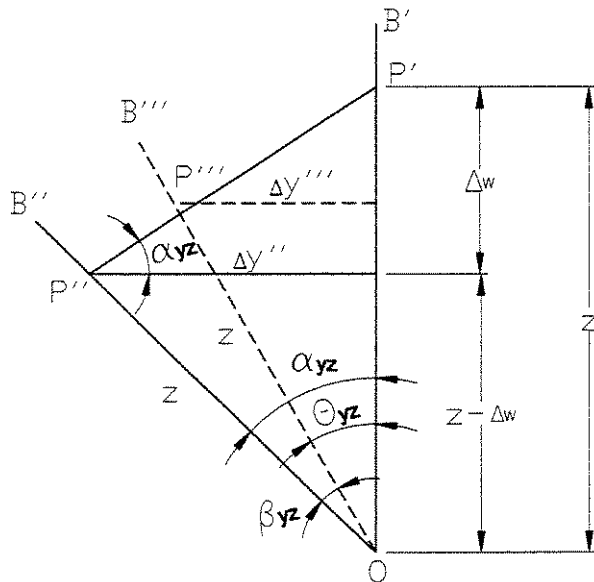
(a) Plano xz .



(b) Normal deformada no plano xz .



(c) Plano yz .



(d) Normal deformada no plano yz .

Figura 3.2: Cinemática do modelo de Mindlin segundo os planos xz e yz .

$$v(x, y, z) = -z\theta_{yz}(x, y). \quad (3.8)$$

A partir da Figura 3.2, observa-se que

$$\theta_{xz}(x, y) = \alpha_{xz}(x, y) - \beta_{xz}(x, y), \quad (3.9)$$

$$\theta_{yz}(x, y) = \alpha_{yz}(x, y) - \beta_{yz}(x, y), \quad (3.10)$$

sendo

- $\theta_{xz}(x, y)$ e $\theta_{yz}(x, y)$ as rotações totais da seção em torno dos eixos y e x ;
- $\alpha_{xz}(x, y)$ e $\alpha_{yz}(x, y)$ as rotações rígidas devidas à flexão pura em torno dos eixos y e x ;
- $\beta_{xz}(x, y)$ e $\beta_{yz}(x, y)$ as rotações rígidas em y e x devidas à distorção cisalhante.

Como mencionado anteriormente, assume-se que as distorções β_{xz} e β_{yz} são constantes para todos os pontos da normal AB .

A partir do modelo de Kirchhoff, tem-se que as rotações de flexão são dadas por

$$\alpha_{xz}(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$\alpha_{yz}(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (3.12)$$

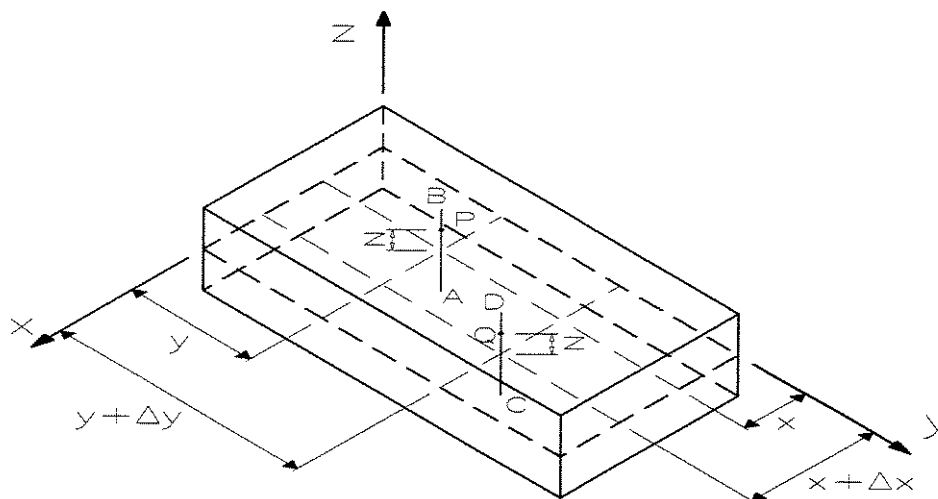
Substituindo (3.9) a (3.12) em (3.7) e (3.8), pode-se escrever a cinemática do modelo de Mindlin através do seguinte o campo vetorial $\mathbf{u}(x, y, z)$ de deslocamentos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_{xz}(x, y) \\ -z\theta_{yz}(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \beta_{xz}(x, y)\right) \\ -z\left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \beta_{yz}(x, y)\right) \\ w(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

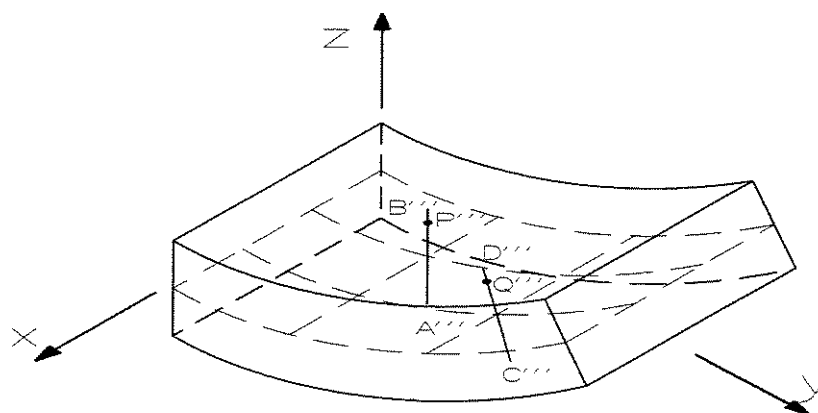
Observa-se que se as distorções β_{xz} e β_{yz} são nulas, recupera-se a cinemática do modelo de Kirchhoff.

3.1.2 Deformação

Da mesma forma que no modelo de Kirchhoff, para se caracterizar o estado de deformação nos pontos da placa de Mindlin, compara-se a cinemática relativa de um ponto $P(x, y, z)$, pertencente à normal AB , com um outro ponto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$, pertencente à normal CD , conforme ilustrado na Figura 3.3(a).



(a) Normais AB e CD antes da flexão.



(b) Normais AB e CD após a flexão.

Figura 3.3: Cinemática das normais AB e CD da placa do modelo de Reissner-Mindlin.

Após a flexão, os pontos P e Q apresentam, respectivamente, deslocamentos $(u(x, y, z)$,

$v(x, y, z), w(x, y, z))$ e $(u(x + \Delta x, y + \Delta y, z), v(x + \Delta x, y + \Delta y, z), w(x + \Delta x, y + \Delta y, z))$ nas direções coordenadas x, y, z . Assim, os pontos P e Q assumem as respectivas posições finais $P'''(x - u(x, y, z), y - v(x, y, z), z + w(x, y, z))$ e $Q'''(x + \Delta x - u(x + \Delta x, y + \Delta y, z), y + \Delta y - v(x + \Delta x, y + \Delta y, z), z + w(x + \Delta x, y + \Delta y, z))$ mostradas na Figura 3.3(b).

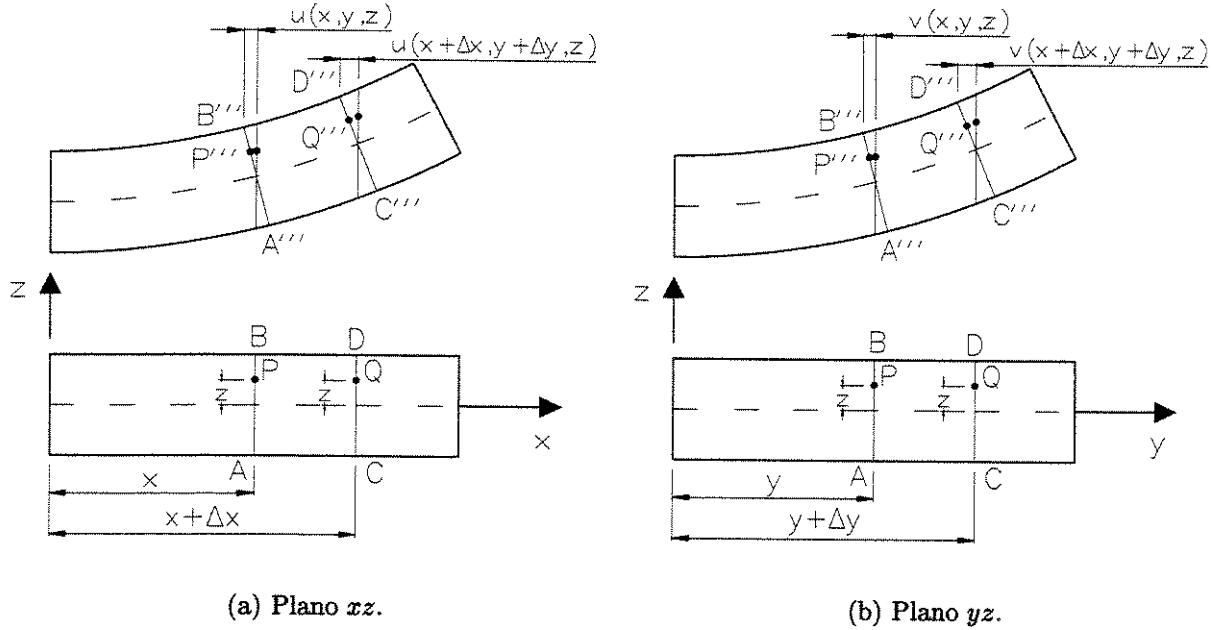


Figura 3.4: Componentes de deformação normal no modelo de Mindlin.

Para se determinar o deslocamento relativo Δu na direção x , considere o plano xz da placa antes e após a flexão, conforme ilustrado na Figura 3.4(a). Os deslocamentos $u(x, y, z)$ e $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ dos pontos $P(x, y, z)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ são determinados da equação 3.5. Logo,

$$u(x, y, z) = -z\theta_{xz}(x, y),$$

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y, z) = -z\theta_{xz}(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Desta maneira, a variação de deslocamento Δu entre os pontos P e Q é dada por

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - u(x, y, z) \\ &= -z[\theta_{xz}(x + \Delta x, y + \Delta y) - \theta_{xz}(x, y)] \end{aligned}$$

$$= -z\Delta\theta_{xz}.$$

A variação de deslocamento específica é obtida dividindo-se Δu por Δx , ou seja,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -z \left(\frac{\Delta\theta_{xz}}{\Delta x} \right). \quad (3.14)$$

A deformação específica ε_{xx} na direção x é obtida tomando-se o limite da relação anterior para $\Delta x \rightarrow 0$. Logo,

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-z \frac{\Delta\theta_{xz}}{\Delta x} \right) = -z \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_{xz}}{\Delta x}.$$

De acordo com a definição de derivada parcial de θ_{xz} em relação a x , tem-se que a expressão anterior é reescrita como

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = -z \frac{\partial\theta_{xz}(x, y)}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial\beta_{xz}(x, y)}{\partial x} \right). \quad (3.15)$$

Devido à flexão da placa, os pontos P e Q apresentam deslocamentos $v(x, y, z)$ e $v(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$ na direção y conforme mostrado na Figura 3.4(b). Analogamente, a componente de deformação ε_{yy} será dada por

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = -z \frac{\partial\theta_{yz}(x, y)}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial\beta_{yz}(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.16)$$

Da mesma forma, a componente de deformação específica ε_{zz} na direção transversal z é dada por

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y)}{\Delta z} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial z}.$$

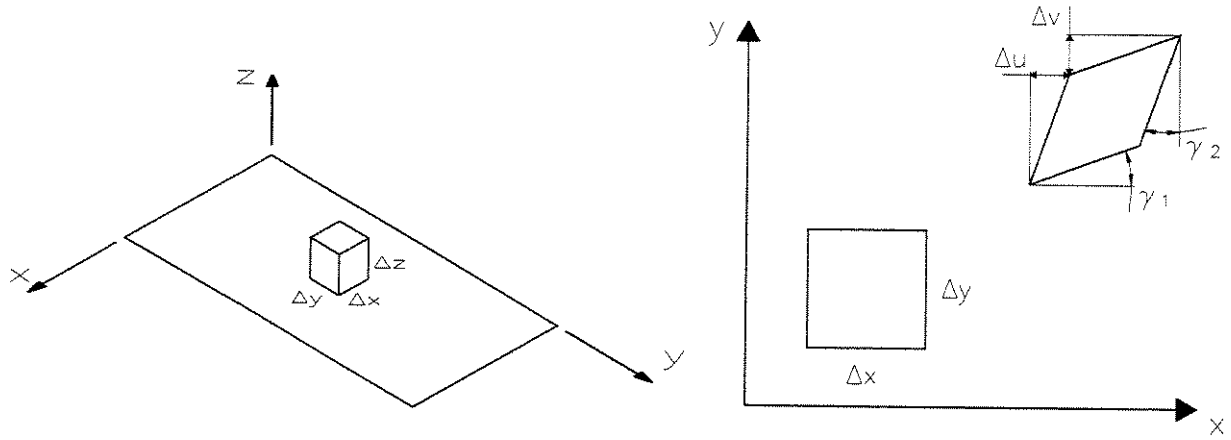
Lembrando que o deslocamento transversal $w(x, y)$ é constante para todos os pontos da normal à superfície média, situada na coordenada (x, y) , tem-se que $\frac{\partial w(x, y)}{\partial z} = 0$. Portanto,

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = 0.$$

Esse resultado está de acordo com a hipótese inicial do modelo de placa de Mindlin que as normais à superfície média não apresentam variação de seu comprimento.

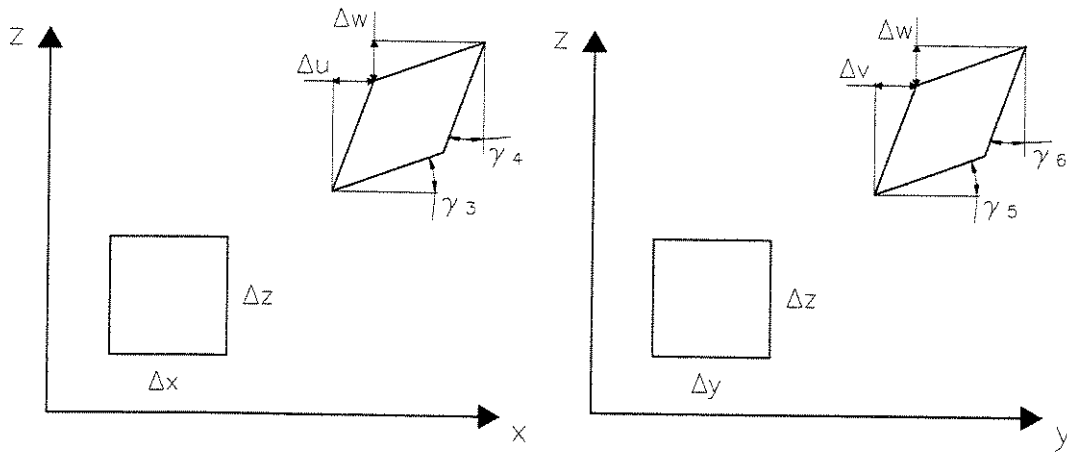
No modelo de Mindlin, tem-se as componentes de distorção total $\bar{\gamma}_{xy}$, $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ nos planos xy , xz e yz , respectivamente. Para deduzir essas componentes de distorção, considere

o elemento diferencial de volume, ilustrado na Figura 3.5(a).



(a) Elemento diferencial sob superfície de referência.

(b) Plano xy .



(c) Plano xz .

(d) Plano yz .

Figura 3.5: Componentes de deformação cisalhante na placa de Mindlin.

Conforme ilustrado na Figura 3.5(b), a componente de distorção total $\bar{\gamma}_{xy}$ no plano de referência pode ser escrita como a soma de duas parcelas de distorção γ_1 e γ_2 de um elemento inicialmente quadrado, ou seja,

$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

As seguintes relações trigonométricas são válidas

$$\tan \gamma_1 = \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

Tomando-se o caso de pequenos deslocamentos, tem-se $\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$ e $\tan \gamma_2 \approx \gamma_2$. Logo,

$$\gamma_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x},$$

$$\gamma_2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}.$$

Substituindo a cinemática dada em (3.13), vem que

$$\gamma_1 = -z \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x}, \quad (3.17)$$

$$\gamma_2 = -z \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y}. \quad (3.18)$$

Portanto, a distorção total no plano xy é dada por,

$$\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = -z \left(\frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.19)$$

Substituindo a primeira e a segunda das equações (3.13) em (3.19), obtém-se

$$\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = -z \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial \beta_{yz}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_{xz}(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.20)$$

As componentes $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ também podem ser escritas como a soma de duas parcelas de distorção de um elemento quadrado, nos planos xz e yz , respectivamente, conforme mostrado nas Figuras 3.5(c) e 3.5(d). Portanto,

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) = \gamma_3 + \gamma_4, \quad (3.21)$$

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) = \gamma_5 + \gamma_6. \quad (3.22)$$

A partir das Figuras 3.5(c) e 3.5(d), tem-se as seguintes relações trigonométricas

$$\tan \gamma_3 = \frac{\Delta w}{\Delta x}, \quad \tan \gamma_4 = \frac{\Delta u}{\Delta z}, \quad \tan \gamma_5 = \frac{\Delta w}{\Delta y}, \quad \text{e} \quad \tan \gamma_6 = \frac{\Delta v}{\Delta z}.$$

Para $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, tem-se $\tan \gamma_3 \hat{=} \gamma_3$, $\tan \gamma_4 \hat{=} \gamma_4$, $\tan \gamma_5 \hat{=} \gamma_5$ e $\tan \gamma_6 \hat{=} \gamma_6$. Logo,

$$\gamma_3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - w(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}, \quad (3.23)$$

$$\gamma_4 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}, \quad (3.24)$$

$$\gamma_5 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - w(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}, \quad (3.25)$$

$$\gamma_6 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Substituindo as expressões anteriores em (3.21) e (3.22) vem que

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} = -\theta_{xz}(x, y) + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}, \quad (3.27)$$

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = -\theta_{yz}(x, y) + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}, \quad (3.28)$$

A partir da cinemática (3.13), obtém-se

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) = \beta_{xz}(x, y, z),$$

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) = \beta_{yz}(x, y, z).$$

Assim, como esperado, as distorções totais $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ são iguais aos próprios ângulos de rotação β_{xz} e β_{yz} .

Observa-se que o estado de deformação em cada ponto da placa de Mindlin é caracterizado por duas componentes de deformação específica $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ e $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ e três componentes de distorção total $\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z)$, $\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z)$ e $\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z)$. Novamente, se os ângulos β_{xz} e β_{yz} são nulos, recuperam-se as componentes de deformação da placa de Kirchhoff.

3.1.3 Movimentos de Corpo Rígido

Para que o movimento de uma placa seja considerado rígido, a distância entre dois pontos quaisquer deve permanecer constante. Isto implica que todas as componentes de

deformação devem ser nulas. Portanto,

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(x, y, z) &= -z \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) &= -z \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} = 0, \\ \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) &= -z \left(\frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y} \right) = 0,\end{aligned}\tag{3.29}$$

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y) = \beta_{xz} = 0,$$

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y) = \beta_{yz} = 0.$$

As duas últimas condições implicam que num movimento rígido não ocorre rotação devida à distorção na placa, ou seja,

$$\beta_{xz} = \beta_{yz} = 0.$$

Portanto,

$$\theta_{xz} = \alpha_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_{yz} = \alpha_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.\tag{3.30}$$

Substituindo as expressões anteriores nas 3 primeiras condições em (3.29), vem que

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0, \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0, \\ \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) &= -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 0.\end{aligned}\tag{3.31}$$

As três expressões anteriores são satisfeitas se $w(x, y) = w = cte$ ou $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = cte$ e $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = cte$. A primeira condição implica numa translação da placa na direção do eixo z . A segunda e terceira condições anteriores representam, respectivamente,

rotações rígidas em tornos dos eixos x e y . Estes movimentos rígidos, devidos à flexão, são os mesmos do modelo de Kirchhoff e estão ilustrados, respectivamente, nas Figuras 2.6(a), 2.6(b) e 2.6(c).

3.1.4 Determinação dos Esforços Internos

Através do conceito de trabalho interno, associa-se a cada componente de deformação (específica e de distorção) uma respectiva componente de tensão (normal e de cisalhamento), as quais representam o estado das forças internas em cada ponto da placa. A soma do produto das tensões citadas pelas suas respectivas componentes de deformação representa a densidade de trabalho interno t_i em cada ponto da placa, ou seja,

$$\begin{aligned} t_i(x, y, z) = & \sigma_{xx}(x, y, z) \epsilon_{xx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z) \epsilon_{yy}(x, y, z) \\ & + \tau_{xz}(x, y, z) \bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) + \tau_{yz}(x, y, z) \bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) + \tau_{xy}(x, y, z) \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z). \end{aligned}$$

Para se obter o trabalho interno total, deve-se somar a densidade de trabalho interno de todos os pontos da placa. Sendo a placa um meio contínuo tridimensional, emprega-se uma integral de volume para representar esta soma. Dessa forma, obtém-se o trabalho interno de deformação da placa como

$$\begin{aligned} T_i = & - \int_V t_i(x, y, z) dV = - \int_V [\sigma_{xx}(x, y, z) \epsilon_{xx}(x, y, z) + \\ & + \sigma_{yy}(x, y, z) \epsilon_{yy}(x, y, z) + \tau_{xz}(x, y, z) \bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) \\ & + \tau_{yz}(x, y, z) \bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) + \tau_{xy}(x, y, z) \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z)] dV. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.15), (3.16), (3.19), (3.27) e (3.28) na expressão anterior, tem-se

$$\begin{aligned} T_i = & - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \left(-z \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial x} \right) + \sigma_{yy}(x, y, z) \left(-z \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} \right) \right. \\ & + \tau_{xy}(x, y) \left(-z \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} \right) \\ & \left. + \tau_{xz}(x, y) \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) \right) + \tau_{yz}(x, y) \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Os ângulos θ_{xz} e θ_{yz} e o deslocamento transversal w não dependem de z . Portanto,

$M_{xx}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(x, y, z) z dz$	$M_{yy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy}(x, y, z) z dz$
$V_{xz}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}(x, y, z) dz$	$V_{yz}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}(x, y, z) dz$
$M_{xy}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}(x, y, z) z dz$	

Tabela 3.1: Esforços internos do modelo de placa de Reissner-Mindlin.

a integral de volume anterior pode ser substituída por uma integral de área no plano xy e outra na espessura t . Logo

$$\begin{aligned}
T_i = & - \int_A \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(x, y, z) z dz \right) \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial x} dA \\
& - \int_A \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy}(x, y, z) z dz \right) \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} dA \\
& - \int_A \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}(x, y, z) z dz \right) \left(\frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} \right) dA \\
& - \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}(x, y, z) dz \right) \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) \right) dA \\
& - \int_A \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}(x, y, z) dz \right) \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right) dA.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

A partir da Seção 2.1.4, observa-se que as duas primeiras integrais ao longo da espessura na expressão anterior representam, respectivamente, os momentos fletores por unidade de comprimento M_{xx} e M_{yy} . Já a terceira integral representa o momento torçor M_{xy} . Da mesma maneira, a quarta e a quinta integrais ao longo da espessura em (3.34) representam forças cortantes distribuídas V_{xz} e V_{yz} por unidade de comprimento.

A Tabela 3.1 resume as definições dos esforços internos compatíveis com a cinemática do modelo de placa de Reissner-Mindlin.

Assim, pode-se rescrever a equação (3.34), redistribuindo a integral para cada termo

entre parênteses, como

$$\begin{aligned}
T_i = & \int_A M_{xx}(x, y) \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial x} dA + \int_A M_{yy}(x, y) \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} dA \\
& + \int_A M_{yx}(x, y) \frac{\partial \theta_{xz}(x, y)}{\partial y} dA - \int_A V_{xz}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dA \\
& + \int_A M_{xy}(x, y) \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} dA - \int_A V_{yz}(x, y) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} dA \\
& + \int_A V_{xz}(x, y) \theta_{xz}(x, y) dA + \int_A V_{yz}(x, y) \theta_{yz}(x, y) dA.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Integrando por partes os 6 primeiros termos de (3.35) e organizando o resultado, obtém-se

$$\begin{aligned}
T_i = & - \int_A \left(\frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}(x, y)}{\partial y} - V_{xz}(x, y) \right) \theta_{xz}(x, y) dA \\
& - \int_A \left(\frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} - V_{yz}(x, y) \right) \theta_{yz}(x, y) dA \\
& + \int_A \left(\frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} \right) w(x, y) dA \\
& + \oint_{\partial A} [M_{xx}(x, y) \eta_x(x, y) + M_{xy}(x, y) \eta_y(x, y)] \theta_{xz}(x, y) d\partial A \\
& + \oint_{\partial A} [M_{yy}(x, y) \eta_y(x, y) + M_{xy}(x, y) \eta_x(x, y)] \theta_{yz}(x, y) d\partial A \\
& - \oint_{\partial A} [V_{xz}(x, y) \eta_x(x, y) + V_{yz}(x, y) \eta_y(x, y)] w(x, y) d\partial A,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

sendo ∂A o contorno da área e η_x e η_y os cossenos diretores em relação aos eixos x e y do vetor normal $\mathbf{n}$ no ponto (x, y) do contorno da placa.

Da mesma maneira que foi feito para o modelo de Kirchhoff, os termos no contorno podem ser reescritos em termos de uma componente normal e outra tangencial no contorno, como mostrado na Figura 2.10.

Para isso, empregam-se as seguintes relações

$$\begin{aligned}
V_n &= V_x n_x + V_y n_y, \\
M_{nn} &= M_{xx} n_x^2 + M_{yy} n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y, \\
M_{nt} &= (M_{yy} - M_{xx}) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2), \\
\theta_{nn} &= \theta_{xz} n_x + \theta_{yz} n_y, \\
\theta_{nt} &= \theta_{yz} n_x - \theta_{xz} n_y.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Substituindo as expressões (3.37) na equação (3.36), obtém-se

$$\begin{aligned}
T_i &= - \int_A \left(\frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}(x, y)}{\partial y} - V_{xz}(x, y) \right) \theta_{xz}(x, y) dA \\
&\quad - \int_A \left(\frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} - V_{yz}(x, y) \right) \theta_{yz}(x, y) dA \\
&\quad + \int_A \left(\frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} \right) w(x, y) dA \\
&\quad + \oint_{\partial A} [M_{nn}(x, y) \theta_{nn}(x, y) + M_{nt}(x, y) \theta_{nt}(x, y) - V_n(x, y) w(x, y)] d\partial A.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Empregando uma análise dimensional, interpreta-se agora o significado físico de cada termo nas integrais de área da expressão anterior.

A análise dimensional do termo $\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}$ revela que o mesmo representa uma densidade de momento fletor por unidade de área na direção do eixo y . A partir da definição (2.26), observa-se que M_{xx} denota um momento fletor na direção y por unidade de comprimento em y . Ao distribuí-lo em relação a x (através da divisão por x) resulta em um momento por unidade de área. Logo

$$\left[\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right] = \frac{\frac{Nm}{m}}{m} = \frac{Nm}{m^2}.$$

Já a cortante V_{xz} também pode ser denotada como uma densidade de momento fletor em y por unidade de área. Observa-se que a força total em z , num ponto (x, y) da superfície média, devido à tensão τ_{xz} é dada pela integral $\int \tau_{xz} dy dz$. Por sua vez, V_{xz} foi definida distribuindo-se em y a força total anterior, ou seja, $V_{xz}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}(x, y, z) dz$. Por sua

vez, V_{xz} como definida causa momentos distribuídos por unidade de área na direção y como ilustrado na Figura 3.6. Assim, tem-se a seguinte análise dimensional

$$[V_{xz}] = \frac{N}{m} = \frac{Nm}{m^2}.$$

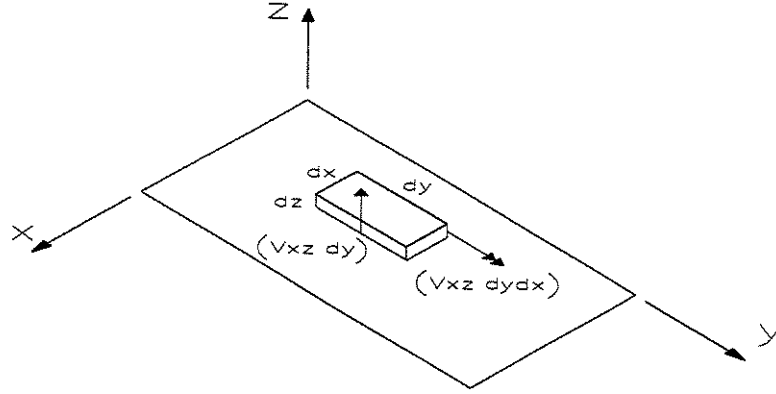


Figura 3.6: Momento devido à cortante distribuída V_{xz} .

Por sua vez, M_{yx} representa um momento torçor distribuído, por unidade de comprimento em x , na direção y (ver Figura 2.7(c)). Logo, a análise dimensional do termo

$$\left[\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right] = \frac{Nm}{m} = \frac{Nm}{m^2}$$

revela que o mesmo representa também um momento por unidade de área em y .

Desta maneira, o termo entre parênteses no primeiro integrando da expressão (3.38) representa um momento distribuído na direção do eixo y , denotado por m_{zyi} . Logo,

$$m_{zyi}(x, y) = \frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - V_{xz}(x, y).$$

Analogamente, o termo entre parênteses no segundo integrando da expressão (3.38) representa um momento distribuído na direção do eixo x , denotado por m_{zxi} . Portanto,

$$m_{zxi}(x, y) = \frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} - V_{yz}(x, y).$$

Considerando agora o termo entre parênteses na terceira integral de área, observa-se que a cortante distribuída em y é novamente distribuída em x , resultando em uma força

cortante por unidade de área. Logo

$$\left[\frac{\partial V_{xz}}{\partial x} \right] = \frac{\frac{N}{m}}{m} = \frac{N}{m^2}$$

representa uma densidade de carga interna distribuída na direção z . Assim,

$$q_i(x, y) = \frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y}.$$

A partir daí, a expressão (3.38) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_i = & - \int_A [m_{zyi}(x, y) \theta_{xz}(x, y) + m_{zxi}(x, y) \theta_{yz}(x, y) + q_i(x, y) w(x, y)] dA \\ & + \oint_{\partial A} [M_{nn}(x, y) \theta_{nn}(x, y) + M_{nt}(x, y) \theta_{nt}(x, y) - V_n(x, y) w(x, y)] d\partial A. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Os esforços internos compatíveis com a cinemática de placa de Mindlin estão ilustrados na Figura 3.7(a).

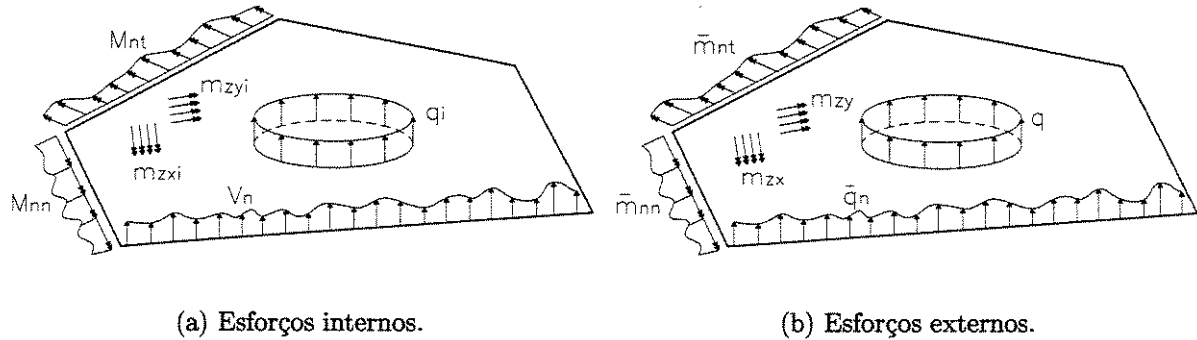


Figura 3.7: Esforços internos e externos na placa de Mindlin.

3.1.5 Determinação dos Esforços Externos

A expressão do trabalho externo T_e permite caracterizar os esforços externos compatíveis com a cinemática do modelo de placa de Mindlin. Para isso, deve-se analisar a equação (3.38). Para cada termo correspondente a um esforço interno na equação (3.38)

deve existir um esforço externo correspondente. Assim, tem-se os seguintes esforços externos ilustrados na Figura 3.7(b):

- m_{zy}, m_{zx} : momentos fletores distribuídos por unidade de área superficial na direção dos eixos y e x , respectivamente;
- q : carga distribuída externa por unidade de área na direção do eixo z ;
- $\tilde{m}_{nn}$: momento fletor distribuído externo presente nos pontos do contorno da superfície de referência na direção do vetor tangente t ;
- $\tilde{m}_{nt}$: momento torçor distribuído externo presente nos pontos do contorno da superfície de referência na direção do vetor normal n ;
- $\tilde{q}_n$: carga distribuída externa presente nos pontos do contorno da superfície de referência na direção z .

A partir daí, o trabalho externo T_e é escrito como

$$\begin{aligned}
 T_e = & \int_A m_{zx}(x, y) \theta_{xz}(x, y) dA + \int_A m_{zy}(x, y) \theta_{yz}(x, y) dA \\
 & + \int_A q(x, y) w(x, y) dA + \oint_{\partial A} \tilde{m}_{nn}(x, y) \theta_{nn}(x, y) \partial A \\
 & + \oint_{\partial A} \tilde{m}_{nt}(x, y) \theta_{nt}(x, y) \partial A + \oint_{\partial A} \tilde{q}_n(x, y) w(x, y) \partial A.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

A aplicação do PTV tem por objetivo caracterizar as condições de equilíbrio do corpo. O PTV estabelece que se a placa está em equilíbrio na sua configuração deformada, então a soma dos trabalhos externos T_e e interno T_i para qualquer ação virtual $\hat{u}$ é nula. Logo

$$T_e + T_i = 0 \quad \text{para toda ação virtual } \hat{u}, \tag{3.41}$$

Substituindo as equações (3.38) e (3.40) na equação (3.41), tem-se

$$\int_A \left[-\frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} + V_{xz}(x, y) + m_{zx}(x, y) \right] \hat{\theta}_{xz}(x, y) dA$$

$$\begin{aligned}
& + \int_A \left[-\frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} + V_{yz}(x, y) + m_{zy}(x, y) \right] \hat{\theta}_{yz}(x, y) dA \\
& + \int_A \left[\frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} + q(x, y) \right] \hat{w}(x, y) dA \\
& + \oint_{\partial A} [M_{nn}(x, y) + \bar{m}_{nn}(x, y)] \hat{\theta}_{nn}(x, y) d\partial A \\
& + \oint_{\partial A} [M_{nt}(x, y) + \bar{m}_{nt}(x, y)] \hat{\theta}_{nt}(x, y) d\partial A \\
& - \oint_{\partial A} [V_n(x, y) - \bar{q}_n(x, y)] \hat{w}(x, y) d\partial A = 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Para que a expressão anterior seja válida para toda ação virtual arbitrária $\hat{u}$, todos os termos entre colchetes devem ser simultaneamente nulos. Assim, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\frac{\partial M_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - V_{xz}(x, y) - m_{zx}(x, y) = 0 & x, y \in A, \\
\frac{\partial M_{yy}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x} - V_{yz}(x, y) - m_{zy}(x, y) = 0 & x, y \in A, \\
\frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} + q(x, y) = 0 & x, y \in A, \\
M_{nn}(x, y) + \bar{m}_{nn}(x, y) = 0 & x, y \in \partial A, \\
M_{nt}(x, y) + \bar{m}_{nt}(x, y) = 0 & x, y \in \partial A, \\
V_n(x, y) - \bar{q}_n(x, y) = 0 & x, y \in \partial A.
\end{array} \right. \tag{3.43}$$

No modelo de placa de Mindlin, obtêm-se três equações diferenciais, as quais podem ser reduzidas a apenas uma equação através da terceira das equações de (3.43).

Derivando a primeira e a segunda equações de (3.43) respectivamente em relação a x e y , obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial m_{zx}(x, y)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial m_{zy}(x, y)}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Somando as duas equações anteriores, tem-se

$$\frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial V_{xz}(x, y)}{\partial x} \tag{3.45}$$

$$-\frac{\partial V_{yz}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial m_{zx}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial m_{zy}(x, y)}{\partial y} = 0,$$

da qual resulta uma única equação diferencial, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial y \partial x} = q(x, y) \\ + \frac{\partial m_{zx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{zy}(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Supondo que os momentos distribuídos externos $m_{zx}(x, y)$ e $m_{zy}(x, y)$ sejam nulos, obtém-se a mesma equação diferencial de equilíbrio em termos dos momentos fletores e torçores do modelo de Kirchhoff, ou seja,

$$\frac{\partial^2 M_{xx}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial y \partial x} = q(x, y). \quad (3.47)$$

3.1.6 Aplicação da Equação Constitutiva

Para um material elástico isotrópico linear, a lei de Hooke estabelece que as tensões normais $\sigma_{xx}(x, y, z)$ e $\sigma_{yy}(x, y, z)$ se relacionam com as deformações específicas $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$ e $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ através do módulo de elasticidade longitudinal $E(x, y)$ e o coeficiente de Poisson $\nu(x, y)$. Por outro lado, as tensões de cisalhamento $\tau_{xz}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$ e $\tau_{xy}(x, y, z)$ se relacionam com as deformações angulares $\gamma_{xz}(x, y, z)$, $\gamma_{yz}(x, y, z)$ e $\gamma_{xy}(x, y, z)$ através do módulo de elasticidade transversal $G(x, y)$ da seção. Portanto

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{1 - \nu(x, y)^2} [\varepsilon_{xx}(x, y, z) + \nu \varepsilon_{yy}(x, y, z)], \quad (3.48)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{1 - \nu(x, y)^2} [\varepsilon_{yy}(x, y, z) + \nu \varepsilon_{xx}(x, y, z)], \quad (3.49)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \bar{\gamma}_{xz}(x, y, z), \quad (3.50)$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \bar{\gamma}_{yz}(x, y, z), \quad (3.51)$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z). \quad (3.52)$$

Considera-se a seguinte expressão para o módulo de elasticidade transversal

$$G(x, y) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))}. \quad (3.53)$$

Substituindo as equações (3.15), (3.16), (3.19), (3.27) e (3.28) nas equações (3.48) a (3.52) e considerando $E(x, y) = E$ e $\nu(x, y) = \nu$, tem-se

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} \right], \quad (3.54)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} \right], \quad (3.55)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = G \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) \right), \quad (3.56)$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = G \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right), \quad (3.57)$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = -Gz \left(\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} \right). \quad (3.58)$$

Substituindo as equações anteriores nas expressões da Tabela 3.1 dos momentos fletores e torçores e das forças cortantes, tem-se

$$\begin{aligned} M_{xx}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} \right] dz \\ &= -D \left[\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} M_{yy}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} \right] dz \\ &= -D \left[\frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} M_{xy}(x, y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} \right] dz \\ &= -\frac{D}{2} (1 - \nu) \left[\frac{\partial \theta_{xx}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}(x, y)}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
V_{xz}(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{kE}{1+\nu} \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) \right] dz \\
&= kGt \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) \right],
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
V_{yz}(x, y) &= \int_{-t/2}^{t/2} \frac{kE}{1+\nu} \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right] dz \\
&= kGt \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Toma-se $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ como sendo a rigidez de flexão e k é o coeficiente ou fator de cisalhamento (ver a próxima seção).

Substituindo (3.59) a (3.63) em (3.54) a (3.58), obtém-se as seguintes expressões para as componentes de tensão

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{M_{xx}(x, y)}{t^3/12} z, \quad \sigma_{yy}(x, y, z) = \frac{M_{yy}(x, y)}{t^3/12} z, \quad \tau_{xy}(x, y, z) = \frac{M_{xy}(x, y)}{t^3/12} z, \\
\tau_{xz}(x, y, z) &= \frac{V_{xz}(x, y)}{kt}, \quad \tau_{yz}(x, y, z) = \frac{V_{yz}(x, y)}{kt}.
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.59) à (3.63) nas equações (3.43), obtém-se a forma forte do modelo de placa de Mindlin em termos dos parâmetros $(w, \theta_{xz}, \theta_{yz})$. Omitindo-se os termos (x, y) para simplificar a notação, tem-se

$$\begin{aligned}
&-D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) \right], \\
&-kGt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right) - m_{zx} = 0,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
&-D \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) \right] \\
&-\frac{kEt}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yz} \right) - m_{zy} = 0,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$kGt \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yz} \right) \right] + q = 0. \quad (3.66)$$

Desenvolvendo as derivadas acima, tais equações tornam-se

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\partial^2 \theta_{xz}}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_{xz}}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_{yz}}{\partial x \partial y} \right] + \frac{kEt}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right) + m_{zx} &= 0, \\ D \left[\frac{\partial^2 \theta_{yz}}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_{yz}}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_{xz}}{\partial x \partial y} \right] + \frac{kEt}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yz} \right) + m_{zy} &= 0, \\ kGt \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} \right] + q &= 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.1.7 Fator de Cisalhamento

As hipóteses cinemáticas do modelo de placa de Mindlin assumem que as normais à superfície de referência permanecem retas após as rotações de distorção, conforme visto na Seção 3.1.1. Logo, assumiu-se que a distorção é constante nas seções da placa. Conseqüentemente, tem-se uma distribuição constante das tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{yz} nas seções da placa. Como não há nenhum esforço nas superfícies superior e inferior da placa, as tensões cisalhantes devem ser nulas nessas superfícies. Neste sentido, uma distribuição constante das tensões cisalhantes nas seções transversais da placa não é compatível com tal condição.

Da mesma maneira, uma distribuição linear também não satisfaria a condição de ausência de tensão nas superfícies superior e inferior da placa. Logo, assume-se uma distribuição quadrática, da forma

$$\tau_{xz}(x, y, z) = -c_1 z^2 + c_2 z + c_3, \quad (3.68)$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = -c_4 z^2 + c_5 z + c_6. \quad (3.69)$$

O sinal negativo dos termos c_1 e c_4 é devido ao fato da concavidade da parábola ser para baixo, como pode ser visto na Figura 3.8.

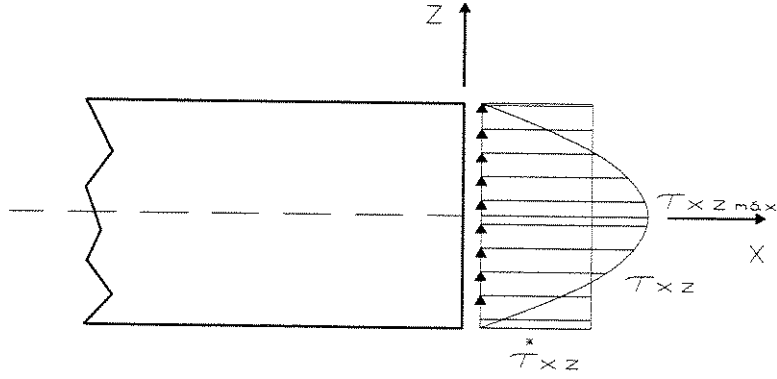


Figura 3.8: Distribuições constante e parabólica de tensão cisalhante na espessura da placa de Mindlin.

Para se determinar as constantes c_1 , c_2 e c_3 da equação (3.68), necessitam-se de três condições de contorno. As duas primeiras condições estão relacionadas com a ausência de tensão cisalhante nas superfícies superior e inferior da placa. Assim

$$\begin{aligned}\tau_{xz}\left(x, y, z = -\frac{t}{2}\right) &= -c_1\left(-\frac{t}{2}\right)^2 - c_2\left(\frac{t}{2}\right) + c_3 = 0, \\ \tau_{xz}\left(x, y, z = \frac{t}{2}\right) &= -c_1\left(\frac{t}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{t}{2}\right) + c_3 = 0.\end{aligned}$$

Somando-se as duas equações anteriores, vem que

$$c_3 = c_1 \frac{t^2}{4}. \quad (3.70)$$

A terceira condição é obtida da simetria da seção transversal em relação ao eixo z do sistema de coordenadas. Como a tensão τ_{xz} é nula nas superfícies superior e inferior da placa, tem-se a maior tensão τ_{xz} em módulo no centro da seção, neste caso em $z = 0$. Esta condição implica que a derivada primeira de $\tau_{xz}(x, y, z)$ em relação à z

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} = -2c_1 z + c_2,$$

é nula para $z = 0$, ou seja

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z = 0)}{\partial z} = -2c_1 0 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0. \quad (3.71)$$

Substituindo as equações (3.70) e (3.71) em (3.68), tem-se

$$\tau_{xz}(x, y, z) = c_1 \left[\frac{t^2}{4} - z^2 \right]. \quad (3.72)$$

A constante c_1 é determinada através do cálculo de V_{xz} levando-se em consideração a distribuição quadrática de τ_{xz} , ou seja

$$V_{xz}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}(x, y, z) dz = \int_{-t/2}^{t/2} c_1 \left[\frac{t^2}{4} - z^2 \right] dz = \frac{c_1 t^3}{6}.$$

Resultando em

$$c_1 = \frac{6V_{xz}}{t^3}.$$

Substituindo a equação anterior em (3.68), tem-se

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \frac{6V_{xz}}{t^3} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - z^2 \right]. \quad (3.73)$$

O mesmo procedimento pode ser obtido para τ_{yz} da equação (3.69), ou seja,

$$\tau_{yz}(x, y, z) = \frac{6V_{yz}}{t^3} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - z^2 \right]. \quad (3.74)$$

Sabe-se que a tensão máxima em módulo ocorre no meio da seção, ou seja, $z = 0$.

Portanto, obtém-se

$$\tau_{xz\max} = \frac{3V_{xz}}{2t} \quad \text{e} \quad \tau_{yz\max} = \frac{3V_{yz}}{2t}. \quad (3.75)$$

Considerando a distribuição constante de τ_{xz} e τ_{yz} devido à hipótese cinemática do modelo de placa de Reissner-Mindlin, tem-se

$$\tau_{xz\max}^* = \frac{V_{xz}}{t} \quad \text{e} \quad \tau_{yz\max}^* = \frac{V_{yz}}{t}. \quad (3.76)$$

Uma das definições do fator de cisalhamento k do modelo de placa é

$$k = \frac{\tau_{xz\max}^*}{\tau_{xz\max}} = \frac{\tau_{yz\max}^*}{\tau_{yz\max}} = \frac{2}{3}. \quad (3.77)$$

Além da definição (3.77), existem outras definições para o fator k . Uma delas se baseia no princípio da mínima energia complementar, onde se encontra o valor de $k = \frac{5}{6}$ (Reissner,

1944), (Reissner, 1945), (Reissner, 1947) e (Reissner, 1950). Por outro lado, Mindlin, ao estudar problemas de vibração em placas finas, encontrou o valor de $\frac{\pi^2}{12}$ (Mindlin, 1951b).

O fator de cisalhamento k foi introduzido no modelo de placa de Reissner-Mindlin com o objetivo de corrigir a discrepância entre a distribuição constante das tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{yz} em relação a distribuição quadrática assumida para satisfazer a ausência de tensões cisalhante nas superfícies superior e inferior da placa.

As distribuições de tensão na espessura da placa de Mindlin estão mostradas na Figura 3.9. Observa-se que as componentes de tensão τ_{xz} e τ_{yz} são indicadas de forma parabólica para satisfazer a condição de esforço cisalhante nulo nas superfícies superior e inferior da placa, conforme as equações (3.73) e (3.74).

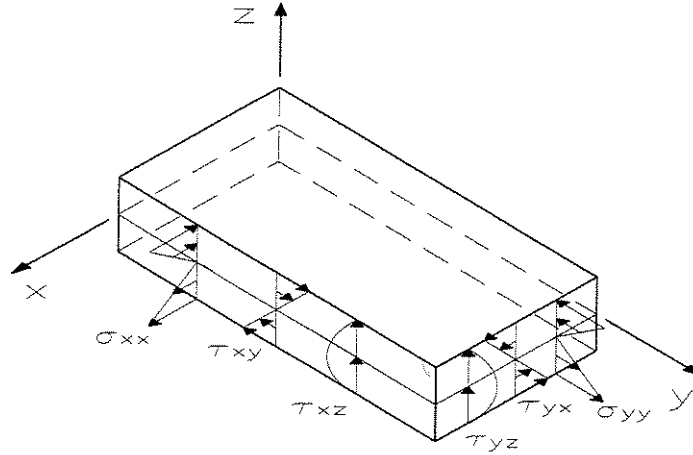


Figura 3.9: Distribuições de tensão na espessura da placa de Mindlin.

3.2 Aproximação

3.2.1 Forma Forte

As equações (3.67) representam a forma forte do modelo de placa de Mindlin. Esta equação pode ser denotada na forma padrão de operador

$$\mathbf{A}u = \mathbf{f},$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -kGt \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & kGt \frac{\partial}{\partial x} & kGt \frac{\partial}{\partial y} \\ kGt \frac{\partial}{\partial x} & D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - kGt & \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ kGt \frac{\partial}{\partial y} & \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - kGt \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_{xz}(x, y) \\ \theta_{yz}(x, y) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} q(x, y) \\ -m_{zx}(x, y) \\ -m_{zy}(x, y) \end{Bmatrix}.$$

A solução das equações (3.78) são funções $w(x, y)$, $\theta_{xz}(x, y)$ e $\theta_{yz}(x, y)$ contínuas com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem e satisfazem as condições de contorno do problema. Logo, $w(x, y)$, $\theta_{xz}(x, y)$ e $\theta_{yz}(x, y)$ pertencem ao domínio D_A do operador diferencial A .

$$D_A = \left\{ w(x, y), \theta_{xz}(x, y) \text{ e } \theta_{yz}(x, y) \in C^2(x, y) \text{ e } w(x, y), \theta_{xz}(x, y) \text{ e } \theta_{yz}(x, y) \text{ satisfazem as condições de contorno} \right\},$$

sendo $C^2(x, y)$ o conjunto das funções contínuas em R^2 com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

3.2.2 Forma Fraca

A forma fraca do modelo de Mindlin possui três equações relativas ao deslocamento w e às rotações θ_{xz} e θ_{yz} .

Multiplicam-se as equações (3.64), (3.65), (3.66), respectivamente, por funções $\varphi_{xz}(x, y)$, $\varphi_{yz}(x, y)$ e $v(x, y)$ pertencentes ao domínio do operador. Nas deduções seguintes, omite-se o termo (x, y) . Portanto,

$$\int_A \left\{ D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) + kGt \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right] + m_{zx} \right\} \varphi_{xz} dA = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + kGt \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) \right] + m_{zy} \right\} \varphi_{yz} dA = 0, \\
& \int_A \left\{ kGt \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yz} \right) \right] + q \right\} v dA = 0.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Integrando as três equações acima por parte, tem-se

$$\begin{aligned}
& -D \int_A \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial x} dA - \frac{Gt^3}{12} \int_A \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} dA \\
& + kGt \int_A \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz} \right] \varphi_{xz} dA + \int_A m_{zx} \varphi_{xz} dA \\
& + \oint_{\partial A} (M_{xx} \eta_x + M_{xy} \eta_y) \varphi_{xz} d\partial A = 0,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
& -D \int_A \left(\frac{\partial \theta_{yz}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_{xz}}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial y} dA - \frac{Gt^3}{12} \int_A \left(\frac{\partial \theta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yz}}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} dA \\
& + kGt \int_A \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz} \right] \varphi_{yz} dA + \int_A m_{zy} \varphi_{yz} dA \\
& + \oint_{\partial A} (M_{yy} \eta_y + M_{xy} \eta_x) \varphi_{yz} d\partial A = 0,
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
& -kGt \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xz} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yz} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] dA + \int_A q v dA \\
& + \oint_{\partial A} (V_{xz} \eta_x + V_{yz} \eta_y) v d\partial A = 0.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

As equações (3.80) a (3.82) representam a forma fraca do modelo de placa de Mindlin, pois possuem diferenciações de ordem inferior à da forma forte (3.67). Enquanto a forma forte do problema apresenta diferenciações até segunda ordem, a forma fraca apresenta diferenciações de primeira ordem. As funções w e v , θ_{xz} e φ_{xz} , θ_{yz} e φ_{yz} podem ser menos regulares na forma fraca. Basta que pertençam ao conjunto de funções contínuas $C^0(x, y)$

ou contínuas por partes $C_{cp}^0(x, y)$. Na forma forte, estas funções necessitariam ser contínuas em $C^2(x, y)$ ou contínuas por partes $C_{cp}^2(x, y)$.

3.2.3 Aproximação da Forma Fraca

A solução aproximada da forma fraca do problema é obtida através da substituição das funções exatas $w(x, y)$, $\theta_{xz}(x, y)$ e $\theta_{yz}(x, y)$ pelas suas respectivas funções aproximadas $\bar{w}(x, y)$, $\bar{\theta}_{xz}(x, y)$ e $\bar{\theta}_{yz}(x, y)$ dadas por

$$\begin{aligned}\bar{w}(x, y) &= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i^{(1)}(x, y), \\ \bar{\theta}_{xz}(x, y) &= \sum_{i=1}^m b_i \phi_i^{(2)}(x, y), \\ \bar{\theta}_{yz}(x, y) &= \sum_{i=1}^m c_i \phi_i^{(2)}(x, y),\end{aligned}\tag{3.83}$$

sendo $\{\phi_i^{(1)}\}_{i=1}^n$ e $\{\phi_i^{(2)}\}_{i=1}^m$ conjuntos de n e m funções linearmente independentes denominadas funções de base, de forma ou de interpolação. São escolhidas com ordem de diferenciação compatível com aquela presente na forma fraca e devem satisfazer todas as condições de contorno essenciais do problema. Observa-se que as condições de contorno naturais são automaticamente satisfeitas pela forma fraca do problema. A solução aproximada é dada por combinações lineares das funções de forma $\phi_i^{(1)}$ e $\phi_i^{(2)}$. Os coeficientes de ponderação a_i , b_i e c_i podem ser determinados através de métodos variacionais, tais como Resíduos Ponderados (Colocação e Galerkin), Ritz e Mínimos Quadrados.

Neste trabalho, emprega-se um mesmo conjunto de funções de interpolação para aproximar o deslocamento $w(x, y)$ e as rotações $\theta_{xz}(x, y)$ e $\theta_{yz}(x, y)$, ou seja, considera-se $\phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)} = \phi_i$. Portanto, reescreve (3.83) como

$$\begin{aligned}\bar{w}(x, y) &= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y), \\ \bar{\theta}_{xz}(x, y) &= \sum_{i=1}^n b_i \phi_i(x, y),\end{aligned}\tag{3.84}$$

$$\bar{\theta}_{yz}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x, y).$$

Analogamente, as funções teste são aproximadas como

$$\begin{aligned}\bar{v}(x, y) &= \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x, y), \\ \bar{\varphi}_{xz}(x, y) &= \sum_{j=1}^n b_j \phi_j(x, y), \\ \bar{\varphi}_{yz}(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x, y).\end{aligned}\tag{3.85}$$

Para encontrar a forma aproximada do modelo de Mindlin, substituem-se as funções w , θ_{xz} e θ_{yz} pelas suas aproximações $\bar{w}$, $\bar{\theta}_{xz}$ e $\bar{\theta}_{yz}$ nas equações (3.80) à (3.82). Logo

$$kGt \int_A \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{\theta}_{xz} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\theta}_{yz} \right] dA = \int_A q \bar{v} dA + \oint_{\partial A} (V_{xz} \eta_x + V_{yz} \eta_y) \bar{v} d\partial A,$$

$$\begin{aligned}& \int_A \left[D \frac{\partial \bar{\theta}_{xz}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{xz}}{\partial x} + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \bar{\theta}_{xz}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{xz}}{\partial y} + \nu D \frac{\partial \bar{\theta}_{yz}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{xz}}{\partial x} + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \bar{\theta}_{yz}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{xz}}{\partial y} \right] dA \\ & - kGt \int_A \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \bar{\theta}_{xz} \right] \bar{\varphi}_{xz} dA = \int_A m_{zx} \bar{\varphi}_{xz} dA + \oint_{\partial A} (M_{xz} \eta_x + M_{xy} \eta_y) \bar{\varphi}_{xz} d\partial A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \int_A \left[D \frac{\partial \bar{\theta}_{yz}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{yz}}{\partial y} + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \bar{\theta}_{yz}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{yz}}{\partial x} + \nu D \frac{\partial \bar{\theta}_{xz}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{yz}}{\partial y} + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \bar{\theta}_{xz}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{yz}}{\partial x} \right] dA \\ & - kGt \int_A \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{\theta}_{yz} \right] \bar{\varphi}_{yz} dA = \int_A m_{zy} \bar{\varphi}_{yz} dA + \oint_{\partial A} (M_{yy} \eta_y + M_{xy} \eta_x) \bar{\varphi}_{yz} d\partial A,\end{aligned}$$

Substituindo as aproximações (3.84) e (3.85) e escrevendo os termos do contorno em componentes normais e tangenciais n e t , tem-se para $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^n \int_A \left[kGt \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} a_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} a_i - \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i b_i - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i c_i \right] dA = \\ & \int_A q \phi_j dA + \oint_{\partial A} (V_{nn}) \phi_j d\partial A,\end{aligned}\tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_A \left[D \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} b_i + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} b_i + \nu D \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} c_i \right. \\
& \quad \left. + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} c_i - kGt \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j a_i + kGt \phi_i \phi_j b_i \right] dA \\
& = \int_A m_{zx} \phi_j dA + \oint_{\partial A} (M_{nn}) \phi_j d\partial A,
\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_A \left[D \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} c_i + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} c_i + \nu D \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} b_i \right. \\
& \quad \left. + \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} b_i - kGt \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_j a_i + kGt \phi_i \phi_j c_i \right] dA \\
& = \int_A m_{zy} \phi_j dA + \oint_{\partial A} (M_{nt}) \phi_j d\partial A.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

As equações (3.86), (3.87) e (3.88) representam as equações aproximadas do modelo de placa de Mindlin. Pode-se escrever estas equações matricialmente, dando origem à matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ e o vetor de cargas nodais $\{\mathbf{f}\}$ do modelo de Mindlin, isto é,

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] \\ sim. & & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1\} \\ \{f^2\} \\ \{f^3\} \end{Bmatrix}. \tag{3.89}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez são dados por para $i, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= \int_A kGt \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dA, \\
K_{ij}^{12} &= - \int_A kGt \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i dA, \\
K_{ij}^{13} &= - \int_A kGt \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i dA, \\
K_{ij}^{22} &= \int_A D \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + kGt \phi_i \phi_j dA, \\
K_{ij}^{23} &= \int_A \frac{Gt^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \nu D \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dA, \\
K_{ij}^{33} &= \int_A D \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + kGt \phi_i \phi_j dA.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Da mesma maneira, os coeficientes do vetor de carregamento $\{\mathbf{f}\}$ são dados, para $j = 1, \dots, n$, por

$$\begin{aligned} f_j^1 &= \int_A q \phi_j dA + \oint_{\partial A} (V_{nn}) \phi_j d\partial A, \\ f_j^2 &= \int_A m_{zx} \phi_j dA + \oint_{\partial A} (M_{nn}) \phi_j d\partial A, \\ f_j^3 &= \int_A m_{zy} \phi_j dA + \oint_{\partial A} (M_{nt}) \phi_j d\partial A. \end{aligned} \quad (3.91)$$

A matriz de rigidez pode ser denotada ainda pelo seguinte produto de matrizes

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}^f] [\mathbf{B}^f] + [\mathbf{B}^c]^T [\mathbf{D}^c] [\mathbf{B}^c],$$

sendo $[\mathbf{B}^f]$ a matriz de deformação devido à flexão e $[\mathbf{B}^c]$ a matriz de deformação devido ao cisalhamento transversal expressas como

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_i^f] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}_i^c] &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \phi_1 & \dots & -\frac{\partial \phi_n}{\partial y} & 0 & \phi_n \\ -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \phi_1 & 0 & \dots & -\frac{\partial \phi_n}{\partial x} & \phi_n & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por sua vez, as matrizes de elasticidade para flexão $[\mathbf{D}^f]$ e cisalhamento $[\mathbf{D}^c]$ são determinadas a partir da lei de Hooke (3.48) a (3.52), ou seja,

$$[\mathbf{D}^f] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^c] = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

3.2.4 Elementos Finitos de Placa

Analisando-se os coeficientes das matrizes de rigidez dados em (3.90), têm-se apenas derivadas parciais de primeira ordem das funções de interpolação $\{\phi_i\}_{i=1}^n$, assim como a presença das próprias funções. Assim, a única exigência que se faz sobre a continuidade das funções $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ é que elas pertençam ao conjunto $C_{cp}^0(\Omega)$ das funções contínuas por partes numa região $\Omega \subset R^2$. Este conjunto garante a continuidade de $(w, \theta_{xz}, \theta_{yz})$ entre os elementos de placa de Reissner-Mindlin. Já as componentes de deformação e tensão serão descontínuas, pois envolvem a primeira derivada parcial das funções ϕ_i .

As funções de interpolação de Serendipity ou Lagrange, dadas no Capítulo 2, garantem a continuidade do campo de deslocamentos $(w, \theta_{xz}, \theta_{yz})$ entre os elementos de placa Reissner-Mindlin.

As matrizes de rigidez de flexão e cisalhamento para um elemento de placa são indicadas como

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_f^{(e)}] &= \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}^f]^T [\mathbf{D}^f] [\mathbf{B}^f] \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta, \\ [\mathbf{K}_c^{(e)}] &= \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}^c]^T [\mathbf{D}^c] [\mathbf{B}^c] \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

O significado do determinante do jacobiano

$$\det [\mathbf{J}] = \frac{dxdy}{d\xi d\eta},$$

está ilustrado na Figura 2.19.

As matrizes de deformação $[\mathbf{B}^f]$ e $[\mathbf{B}^c]$ são dadas por

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^f] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1^f] & \cdots & [\mathbf{B}_n^f] \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}^c] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1^c] & \cdots & [\mathbf{B}_n^c] \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo n o número de nós do elemento e $[\mathbf{B}_i^f]$ e $[\mathbf{B}_i^c]$ ($i = 1, \dots, n$) as matrizes de deformação

nodais para a flexão e cisalhamento dadas, respectivamente, por

$$[\mathbf{B}_i^f] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}_i^s] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 & \phi_i \\ -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \phi_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Já as matrizes de elasticidade $[\mathbf{D}^f]$ e $[\mathbf{D}^c]$ estão expressas em (3.92).

3.2.5 Travamento devido ao Cisalhamento

Quando a placa torna-se muito fina, as deformações transversais cisalhantes (3.27) e (3.28) são desprezíveis. Consequentemente, a matriz de rigidez do elemento torna-se rígida, resultando indesejáveis efeitos numéricos no cálculo do campo de deslocamentos. A solução aproximada é muito sensível à espessura, para placas de pequenas espessuras, erros na solução numérica torna-se significativo. Este fenômeno é conhecido como travamento cisalhante (*shear locking* na língua inglesa). Segundo (Reddy, 1993), o travamento pode ser interpretado como sendo causado pela inclusão das seguintes restrições na forma variacional

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} - \theta_{xz}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} - \theta_{yz}(x, y) = 0. \quad (3.93)$$

O travamento observado no campo de deslocamento do modelo de Reissner-Mindlin é resultado do fato que a forma discreta de (3.93) não é satisfeita quando a placa é muito fina. Quando a placa é grossa, as restrições em (3.93) não precisam ser satisfeitas, e o travamento não ocorre (ou no mínimo, não é tão severo a tal ponto de fornecer resultados errados). Entretanto, para placas finas, as restrições (3.93) são válidas, mas não são satisfeitas no modelo numérico.

Uma forma de resolver o problema é dividir a energia de deformação em dois termos, um integrado totalmente, referente aos termos de flexão da matriz de rigidez, e o outro

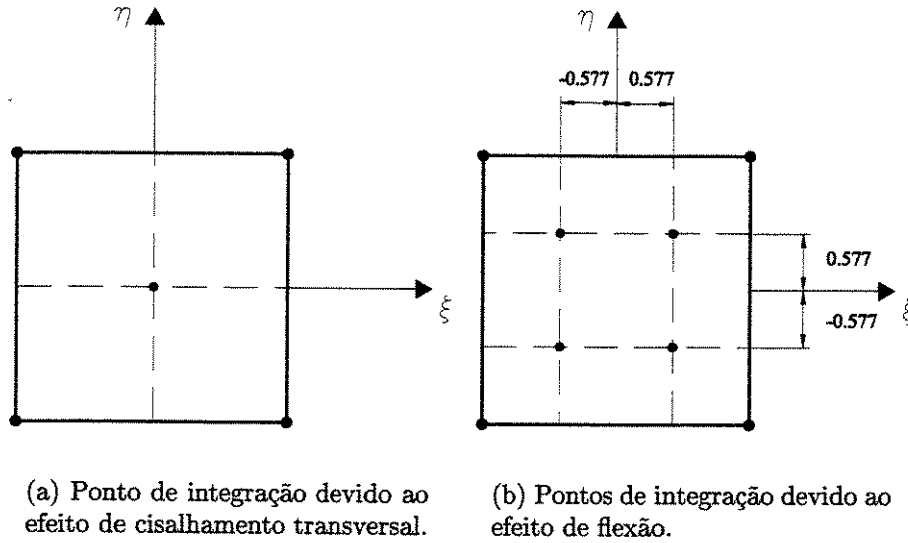


Figura 3.10: Pontos de integração num elemento quadrado bilinear de 4 nós.

integrado de forma reduzida, referente aos termos cisalhantes da matriz de rigidez, ou seja, integra-se os termos cisalhantes com um menor número de pontos de integração. Daí a vantagem de se separar a matriz de rigidez em uma componente devido à flexão $[K_f^{(e)}]$ e outra devido ao cisalhamento transversal $[K_s^{(e)}]$. Assim, torna-se possível empregar uma integração consistente para a matriz de rigidez de flexão e integração reduzida para a matriz de rigidez de cisalhamento.

A integração reduzida tem por objetivo reduzir a influência da energia de deformação cisalhante transversal, considerando um número menor de pontos de integração para os termos da matrix de rigidez envolvidos com deformação cisalhante transversal.

Por exemplo, para uma placa retangular bilinear de 4 nós, pode-se adotar a quadratura de Gauss para a integração numérica do elemento. Afim de evitar o travamento do elemento, deve-se usar 1 ponto de integração (1×1) para integrar os termos da matriz de rigidez de cisalhamento transversal $[K_s^{(e)}]$ e 4 pontos de integração (2×2) para a matriz de rigidez de flexão $[K_f^{(e)}]$ da placa, conforme pode ser visto na Figura 3.10. Assim a energia devido ao efeito de cisalhamento é relaxada.

Capítulo 4

Comentários Finais

Foram apresentados ao longo deste trabalho a dedução dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. A metodologia empregada no desenvolvimento da formulação dos modelos foi seguir uma sequência sistemática de passos na aplicação da formulação variacional e no desenvolvimento da forma aproximada através do MEF.

Adotando-se esta metodologia, pode-se observar que o trabalho de desenvolver a formulação tornou-se mais fácil, pois partiu-se das hipóteses cinemáticas que são grandezas físicas visíveis. Encontraram-se, então, os esforços internos e externos compatíveis com hipóteses cinemáticas dos modelos de placa.

Uma dificuldade encontrada foi interpretar o significado físico de tais esforços. Pode-se notar que a formulação variacional é uma ferramenta matemática poderosa na tarefa de identificar os esforços, porém muitas vezes é necessário realizar uma análise dimensional ou esboçar os esforços internos num elemento infinitesimal e aplicar as condições de equilíbrio estático a fim de visualizar o significado físico dos esforços compatíveis presentes no modelo.

No presente texto, procurou-se não utilizar notação tensorial, pois, embora torne as equações mais compactas e dispense a necessidade de adoção de um sistema de coordenadas, dificulta a interpretação física dos termos presentes nas equações e a aplicação da aproximação do MEF, uma vez que, para aplicar a aproximação e obter a matriz de rigidez e vetor de

carregamentos, é necessário que as equações estejam escritas de forma não tensorial e baseadas num sistema de referência. Logo, o propósito deste trabalho é apresentar a formulação de forma didática e precisa e que torne fácil a tarefa de implementação computacional.

Por fim, como sugestão para um trabalho futuro, seria interessante estender a formulação aqui apresentada a problemas não lineares tais como plasticidade, grandes deformações e hiperelasticidade. Seria de grande interesse, também, a aplicação futura em problemas de otimização de forma e de parâmetros discretos (espessura), pois a formulação variacional facilita em grande parte o trabalho de obtenção da forma fraca aproximada dos modelos.

Bibliografia

- Barrett, K. E., Ellis, S. *An Exact Theory of Elastic Plates*. Pergamon Press, London, 1988.
- Bell. A refined triangular plate bending element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 1, n.1, , 1969.
- Bosshard. Ein neues volverträgliches endliches element für plattenbiegung. *Pub. I Assoc. Bridge Struct. Eng.*, v. 28, 1968.
- Branble, Zlamal. Triangular elements in the finite element methods. *Math. Comput.*, v. 24, n.112, , 1970.
- Cheng, S. A method for solving boundary value problems and two dimensional theories without ad hoc assumptions. *J. Elasticity*, v. 7, n.3, p.329, 1977.
- Cheng, S. Elasticity theory of plates and a refined theory. *Trans. J. Appl. Mech.*, v. 46p.644–650, 1979.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. , Plesha, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, third ed., 1989.
- de Andrade, R. C. *Uma Análise Das Soluções Fundamentais Aplicáveis Às Placas Espessas Pelas Teorias de Reissner e Mindlin e Suas Relações Com a Teoria Clássica Para O Uso No Método Dos Elementos de Contorno*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, 2001., Dissertação (Mestrado).
- de Souza Neto, E. A. *Formulação Tensorial Unificada Na Teoria de Cascas Finas*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1989. 173p, Dissertação (Mestrado).

- Gregory, R. D., Wan, F. Y. M. On plates theories and Saint-Venant's principle. *Int. J. Solids Struct.*, v. 21, p.1005–1024, 1985.
- Júnior, L. P. *A Análise Elástica de Placas e O Método Dos Elementos de Contorno*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, 2000., Tese (Livre Docência), Campinas.
- Kirchhoff, G. R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *J. Math. Crelle*, v. 40, p.51–58, 1850.
- Ladavèze, P., Pecastaings, F. The optimal version of Reissner's theory. *J. Appl. Mech.*, v. 55, n.2, p.413–418, 1988.
- Lai, W. M., Rubin, D. , Krempl, E. *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth-Heinemann Ltd, third ed., 1993.
- Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York, 1944.
- Mindlin, R. D. Influence of rotatory inertia and shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1951a.
- Mindlin, R. D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *Journal of Applied Physics*, v. 23, n.3, p.316–23, 1951b.
- Panc, V. *Theories of Elastic Plates*. International Publishing, Noordhoff, 1975.
- Poisson, S. D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solid. *Journal Mathematic Physics*, v. 12, p.8, 1829.
- Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill International Editions, 1993.
- Reissner, E. On the theory of bending of elastic plates. *J. Math. Physics*, v. 23, p.184, 1944.
- Reissner, E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, n.2, p.69–77, 1945.

- Reissner, E. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 5, n.1, p.55–68, 1947.
- Reissner, E. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, v. XXIX, n.2, p.90–5, 1950.
- Reissner, E. On small deflections of shear deformable elastic plates. *Comput. Meth Appl. Mech. Engrg.*, v. 59, p.227–233, 1986.
- Reissner, E. On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, v. 23, n.6, p.711–717, 1987.
- Reissner, E. On the asymptotic expansions for the sixth order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 85, n.1, p.75–88, 1991.
- Salerno, V. L., Goldberg, M. A. Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. *Journal Applied Mechanics*, p. 54–58, 1960.
- Szabó, B., Babuska, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- Szilar, R. *Theory and Analysis of Plates*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- Taroco, E., Feijóo, R. Teoria de placas y cascaras. *Curso de Mecânica Teórica e Aplicada*, v. 2, p.117–175, 1983.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- Touzot, G., Daht, G. *The Finite Element Displayed*. John Wiley & Sons, 1985.
- Wang, F. Y. Two dimensional theories deduced from three-dimensional theory for a transversely isotropic body - i plate problems. *Int. J. Solids Struct.*, v. 26, n.4, p.455–470, 1990.
- Wang, W., Shi, M. X. Thick plate theory based on general solutions of elasticity. *Acta Mech.*, v. 59, p.27–36, 1997.

Washizu, K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, third ed., 1982.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*, v. 1., McGraw-Hill International Editions, fourth ed., 1989.

Apêndice A

Esforços no Contorno num Sistema de Coordenadas Normal Tangencial

Os esforços no contorno de uma placa podem ser escritos segundo um sistema de coordenadas (n, t, z) ilustrado na Figura 2.10.

A transformação das componentes de tensão escritas no sistema cartesiano (x, y, z) para o sistema tangencial (n, t, z) é realizado partindo-se da regra de transformação de um tensor de segunda ordem, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} & \tau_{nz} \\ \tau_{nt} & \sigma_t & \tau_{tz} \\ \tau_{nz} & \tau_{tz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Realizando o produto das matrizes, obtem-se

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_{xx} \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha,$$

$$\sigma_t = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{tz} = -\tau_{xy} \sin \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha,$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz}.$$

Através das expressões anteriores, pode-se encontrar os esforços internos presentes nos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin no sistema de coordenadas tangencial.

Os esforços devido ao efeito de membrana são calculados da seguinte forma

$$\begin{aligned} N_{nn} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_n dz = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha) dz \\ &= \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz \right) \cos^2 \alpha + 2 \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \right) \sin \alpha \cos \alpha + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz \right) \sin^2 \alpha \\ &= N_{xx} \cos^2 \alpha + 2N_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + N_{yy} \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} N_{tt} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_t dz = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha) dz \\ &= \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz \right) \sin^2 \alpha - 2 \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \right) \sin \alpha \cos \alpha + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz \right) \cos^2 \alpha \\ &= N_{xx} \sin^2 \alpha - 2N_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + N_{yy} \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} N_{nt} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{nt} dz = \left[\int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] dz \\ &= \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz \right) \cos \alpha \sin \alpha + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= (N_{yy} - N_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha - N_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Similarmente, encontram-se os esforços cortantes no sistema tangencial como

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{nz} dz = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \sin \alpha) dz \\ &= - \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \right) \cos \alpha + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

$$= Q_{xz} \cos \alpha + Q_{yz} \sin \alpha, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} Q_t &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{tz} dz = \int_{-t/2}^{t/2} (-\tau_{xy} \sin \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha) dz \\ &= - \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \right) \sin \alpha + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \right) \cos \alpha \\ &= -Q_{xz} \sin \alpha + Q_{yz} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Os momentos fletores e torçores no sistema tangencial ficam

$$\begin{aligned} M_{nn} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_n z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha) z dz \\ &= \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz \right) \cos^2 \alpha + 2 \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \right) \sin \alpha \cos \alpha + \\ &\quad \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz \right) \sin^2 \alpha = M_{xx} \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + M_{yy} \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} M_{tt} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_t z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{xx} \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha) z dz \\ &= \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz \right) \sin^2 \alpha + 2 \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \right) \sin \alpha \cos \alpha + \\ &\quad \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz \right) \cos^2 \alpha = M_{xx} \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + M_{yy} \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} M_{nt} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{nt} z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} [(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] z dz \\ &= \left[- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz - \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz \right) \right] \cos \alpha \sin \alpha + \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= (M_{yy} - M_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha - M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

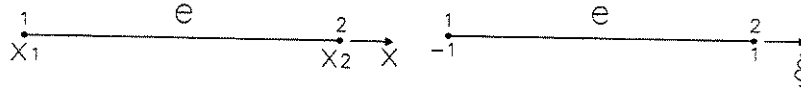
As componentes normais e tangenciais dos deslocamentos ou de suas derivadas são

$$\begin{Bmatrix} u_{n/0} \\ u_{t/0} \\ u_{z/0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x/0} \\ u_{y/0} \\ u_{z/0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x/0} \cos \alpha + u_{y/0} \sin \alpha \\ -u_{x/0} \sin \alpha + u_{y/0} \cos \alpha \\ u_{z/0} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Polinômios Cúbicos Unidimensionais de Hermite

Para deduzir as expressões dos polinômios cúbicos unidimensionais de Hermite, considere o elemento de dois nós ilustrado na Figura B.1(a).



(a) Elemento no sistema global x .

(b) Elemento no sistema local ξ .

Figura B.1: Elemento finito unidimensional de dois nós.

Deseja-se assegurar a continuidade da função $u(x)$ e de sua primeira derivada $\frac{du(x)}{dx}$. Para isto, devem-se associar funções de interpolação locais relacionadas ao valor da função e de sua primeira derivada em cada nó do elemento. Assim, sejam $\phi_1^{(e)}(x)$ e $\phi_2^{(e)}(x)$ as funções locais associadas ao valor e a derivada da função no primeiro nó e $\phi_3^{(e)}(x)$ e $\phi_4^{(e)}(x)$ as respectivas funções de interpolação do segundo nó. Logo, a aproximação $u_n^{(e)}(x)$ de $u(x)$ no elemento (e) pode ser escrita como

$$u_n^{(e)}(x) = a_1^{(e)} \phi_1^{(e)}(x) + a_2^{(e)} \phi_2^{(e)}(x) + a_3^{(e)} \phi_3^{(e)}(x) + a_4^{(e)} \phi_4^{(e)}(x). \quad (\text{B.1})$$

Da mesma forma, a primeira derivada é expressa como

$$\frac{du_n^{(e)}(x)}{dx} = a_1^{(e)} \frac{d\phi_1^{(e)}(x)}{dx} + a_2^{(e)} \frac{d\phi_2^{(e)}(x)}{dx} + a_3^{(e)} \frac{d\phi_3^{(e)}(x)}{dx} + a_4^{(e)} \frac{d\phi_4^{(e)}(x)}{dx}. \quad (\text{B.2})$$

Os coeficientes $a_i^{(e)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) possuem significados físicos, ou seja, representam os valores das incógnitas calculadas nas coordenadas dos nós. Logo, as funções $\phi_i^{(e)}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) devem ser tais que

$$\begin{cases} a_1^{(e)} = u_n^{(e)}(x_1), \\ a_2^{(e)} = \frac{du_n^{(e)}(x_1)}{dx}, \\ a_3^{(e)} = u_n^{(e)}(x_2), \\ a_4^{(e)} = \frac{du_n^{(e)}(x_2)}{dx}. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

ou seja, $a_1^{(e)}$ e $a_3^{(e)}$ representam os valores da aproximação $u_n^{(e)}(x)$ calculadas nas coordenadas nodais x_1 e x_2 , enquanto $a_2^{(e)}$ e $a_4^{(e)}$ são os valores das respectivas derivadas $\frac{du_n^{(e)}(x)}{dx}$.

A partir de (B.1) e (B.2), as condições anteriores impõem as seguintes restrições sobre os polinômios unidimensionais de Hermite $\phi_i^{(e)}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} a_1^{(e)} = u_n^{(e)}(x_1) &\rightarrow \phi_1^{(e)}(x_1) = 1 & \phi_2^{(e)}(x_1) = 0 & \phi_3^{(e)}(x_1) = 0 & \phi_4^{(e)}(x_1) = 0 \\ a_2^{(e)} = \frac{du_n^{(e)}(x_1)}{dx} &\rightarrow \frac{d\phi_1^{(e)}(x_1)}{dx} = 0 & \frac{d\phi_2^{(e)}(x_1)}{dx} = 1 & \frac{d\phi_3^{(e)}(x_1)}{dx} = 0 & \frac{d\phi_4^{(e)}(x_1)}{dx} = 0 \\ a_3^{(e)} = u_n^{(e)}(x_2) &\rightarrow \phi_1^{(e)}(x_2) = 0 & \phi_2^{(e)}(x_2) = 0 & \phi_3^{(e)}(x_2) = 1 & \phi_4^{(e)}(x_2) = 0 \\ a_4^{(e)} = \frac{du_n^{(e)}(x_2)}{dx} &\rightarrow \frac{d\phi_1^{(e)}(x_2)}{dx} = 0 & \frac{d\phi_2^{(e)}(x_2)}{dx} = 0 & \frac{d\phi_3^{(e)}(x_2)}{dx} = 0 & \frac{d\phi_4^{(e)}(x_2)}{dx} = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Como se tem 4 condições sobre cada função $\phi_i^{(e)}$, podem-se determinar os 4 coeficientes (a, b, c, d) de um polinômio geral de terceiro grau

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3. \quad (\text{B.5})$$

Fazendo $p(x) = \phi_1^{(e)}(x)$ e empregando-se as 4 condições dadas na segunda coluna de

(B.2), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 \\ 0 & 1 & 2(x_1)^2 & 3(x_1)^2 \\ 0 & 1 & 2(x_2)^2 & 3(x_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema de equações anterior, determina-se a função $\phi_1^{(e)}(x)$. Tomando-se o sistema local de coordenadas ξ ilustrado na Figura B.1(b), tem-se $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Desta maneira, o sistema de equações se reduz a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Resolvendo o sistema anterior e substituindo em (2.110), vem que

$$\phi_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi + 2). \quad (\text{B.8})$$

Efetuada o mesmo procedimento para os demais polinômios, obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi + 2), \\ \phi_2^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \\ \phi_3^{(e)}(\xi) &= -\frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi - 2), \\ \phi_4^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Deseja-se assegurar a continuidade da função $u(x)$ e de sua primeira derivada $\frac{du(x)}{dx}$. Para isto, devem-se associar funções de interpolação locais relacionadas ao valor da função e de sua primeira derivada em cada nó do elemento. Assim, sejam $\phi_1^{(e)}(x)$ e $\phi_2^{(e)}(x)$ as funções locais associadas ao valor e a derivada da função no primeiro nó e $\phi_3^{(e)}(x)$ e $\phi_4^{(e)}(x)$ as respectivas funções de interpolação do segundo nó. Logo, a aproximação $u_n^{(e)}(x)$ de $u(x)$

no elemento (e) pode ser escrita como

$$u_n^{(e)}(x) = a_1^{(e)}\phi_1^{(e)}(x) + a_2^{(e)}\phi_2^{(e)}(x) + a_3^{(e)}\phi_3^{(e)}(x) + a_4^{(e)}\phi_4^{(e)}(x). \quad (\text{B.10})$$

Da mesma forma, a primeira derivada é expressa como

$$\frac{du_n^{(e)}(x)}{dx} = a_1^{(e)}\frac{d\phi_1^{(e)}(x)}{dx} + a_2^{(e)}\frac{d\phi_2^{(e)}(x)}{dx} + a_3^{(e)}\frac{d\phi_3^{(e)}(x)}{dx} + a_4^{(e)}\frac{d\phi_4^{(e)}(x)}{dx}. \quad (\text{B.11})$$

Resolvendo o sistema anterior e substituindo em (B.3), vem que

$$\phi_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2). \quad (\text{B.12})$$

Efetuando o mesmo procedimento para os demais polinômios, obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2), \\ \phi_2^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \\ \phi_3^{(e)}(\xi) &= -\frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi - 2), \\ \phi_4^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Os 4 polinômios cúbicos de Hermite locais no elemento (e) estão ilustrados na Figura B.2(a). Por sua vez, os polinômios globais $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(x)$ após a superposição das funções locais entre dois elementos adjacentes estão mostrados na Figura B.2(b).

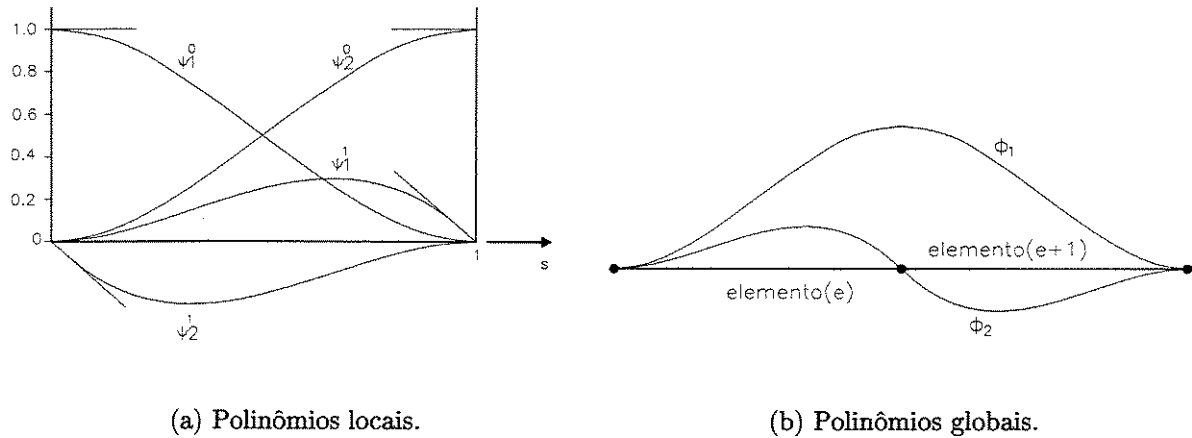


Figura B.2: Polinômios cúbicos de hermite unidimensionais.