

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR HELÓI FRANCISCO
GENIL GENARI E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24.10.2.2012
Enrique Usbua
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Helói Francisco Gentil Genari

Métrica Baseada em Projeção de Modelos para Detecção de Danos em Estruturas

Campinas, 2012

Helói Francisco Gentil Genari

Métrica Baseada em Projeção de Modelos para Detecção de Danos em Estruturas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

Campinas
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G285m	Genari, Helói Francisco Gentil Métrica baseada em projeção de modelos para detecção de danos em estruturas / Helói Francisco Gentil Genari – Campinas, SP: [s.n.], 2012. Orientador: Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Análise de séries temporais - Processamento de dados. 2. Identificação e sistemas. 3. Localização de falhas (Engenharia). 4. Análise estrutural (Engenharia). I. Nóbrega, Eurípedes Guilherme de Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.
-------	---

Título em Inglês:	Metric based on models projection for damage detection in structures
Palavras-Chave em Inglês:	Time series analysis - Data processing; Identification and systems; Troubleshooting (Engineering); Structural analysis (Engineering).
Área de Concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Gilmar Barreto e Alberto Luiz Serpa.
Data da Defesa:	24/02/2012
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

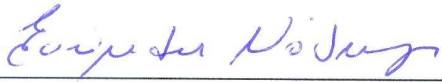
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Métrica Baseada em Projeção de Modelos
para Detecção de Danos em Estruturas**

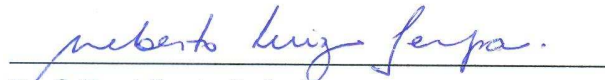
Autor: Helói Francisco Gentil Genari

Orientador: Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega

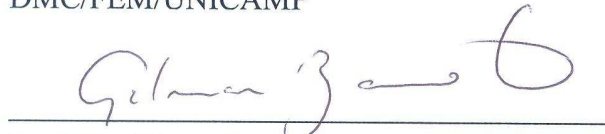
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Gilmar Barreto
DMCSI/FEEC/UNICAMP

Campinas, 24 de fevereiro de 2012

Dedico este trabalho à minha família e à minha namorada pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nobrega pela dedicação e honestidade na orientação deste trabalho, pela confiança e apoio e pela paciência e amizade.

Agradeço ao Prof. Juan Camino pelos ensinamentos transmitidos.

À minha família pela fé e apoio incontestável na realização deste trabalho e pela educação que recebi durante esses anos.

À minha namorada, Fabíola, pela paciência na revisão deste trabalho e pelo apoio em momentos difíceis.

Aos meus colegas de laboratório e de UNICAMP pelos diversos e agradáveis momentos de convívio em Campinas.

Aos professores, funcionários e institutos que me acolheram ao longo da graduação e do mestrado.

À CAPES pela bolsa concedida.

À UNICAMP pela infraestrutura disponibilizada para minha formação.

E à população brasileira pelo financiamento das instituições UNICAMP e CAPES.

“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos no mínimo fará coisas admiráveis.”
José de Alencar

RESUMO

Para cumprir requisitos de segurança, aumentar a vida útil de estruturas e reduzir os custos de manutenção, métodos de detecção de danos e de monitoramento da integridade de estruturas (SHM) têm recebido grande atenção da comunidade científica nas últimas décadas. Neste contexto, várias técnicas diferentes para detecção de danos foram propostas, mas algoritmos eficientes e práticos são ainda temas muito pesquisados. Neste trabalho, estudam-se a métrica cepstral e a métrica por subespaços para a detecção de danos. Essas métricas calculam a distância entre dois modelos autorregressivos (AR). A distância entre os modelos AR, derivados a partir das séries temporais dos sinais de vibrações das estruturas com e sem danos utilizando identificação por subespaços, deve ser correlacionada com a informação do dano, incluindo sua severidade e localização. Assim, as distâncias calculadas utilizando-se as métricas são consideradas indicadores de danos. Para validar os dois indicadores, dois experimentos foram realizados. O primeiro consistiu em três vigas similares de alumínio, uma íntegra e duas contendo falhas simuladas que, juntamente com duas massas de $2.5g$ e $8.5g$, simularam quatro danos diferentes. No segundo experimento, foi utilizada uma placa de alumínio retangular e, com o auxílio de massas de $2.5g$, $8.5g$ e $20g$, foram simulados cinco danos com diferentes severidades e localizações. Os resultados dos experimentos indicaram que o cálculo das distâncias entre os modelos AR são eficientes para detecção, análise de severidade e localização de danos.

Palavras-Chave: Análise de séries temporais - Processamento de dados; Identificação e sistemas; Localização de falhas (Engenharia); Análise estrutural (Engenharia).

ABSTRACT

To satisfy security requirements, extend life cycle of structures and reduce maintenance costs, damage detection techniques and structural health monitoring (SHM) have received great attention from the scientific community in the last decades. In this context, several different techniques for damage detection have been proposed, but efficient and practical algorithms are yet a major research theme. Cepstral metric and subspace metric for damage detection are studied in this work. These metrics compute the distance between two auto-regressive (AR) models, derived from times series of vibration signals from structures with and without damage, and it should be correlated with information of the damage, including damage location and severity. Thus, the distances calculated using these metrics are considered damage indicators. To validate both indicators, two experiments were performed. The first one consisted of three similar beams, a healthy one and two with simulated damages, which, together with two masses of $2.5g$ e $8.5g$, simulated four different damages. In the second experiment, it was used an rectangular aluminum plate with aid of three masses of $2.5g$, $8.5g$ and $20g$ to simulate five damages with different severities and locations. The results of experiments indicated that the calculation of distances between AR models are effective for the detection, analysis of severity and location of damages.

Keywords: Time series analysis - Data processing; Identification and systems; Troubleshooting (Engineering); Structural analysis (Engineering).

LISTA DE FIGURAS

1.1	Fluxograma para a detecção de danos.	3
1.2	Uma visão global dos diferentes capítulos e suas relações. A linha pontilhada indica menor dependência.	4
2.1	Projeção do vetor $x \in \mathbb{R}^3$ utilizando o projetor $\Pi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. A projeção de x sobre a imagem de Π , que é um subespaço de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$, é Πx . A projeção sobre o subespaço complementar da imagem de $(I - \Pi)$ de dimensão um é $(I - \Pi)x$	12
2.2	Decomposição do vetor $x \in \mathbb{R}^3$ sobre $\text{imag}(A)$ e sobre o complemento de $\text{imag}(A)$. . .	14
2.3	O ângulo entre os subespaços de dimensão um $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$	17
2.4	Ângulos principais entre dois subespaços $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$ de dimensão dois.	18
3.1	Sistema determinístico.	24
3.2	Sistema estocástico.	31
3.3	Diagrama de blocos do sistema inovativo.	35
5.1	Sensor/Atuador piezelétrico.	47
5.2	Diagrama de blocos do experimento.	47
5.3	Vigas utilizadas para identificação de danos.	49
5.4	Foto do experimento com as vigas.	50
5.5	Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga saudável. . .	50
5.6	Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 1. .	51
5.7	Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 2. .	51
5.8	Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 3. .	52
5.9	Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 4. .	52
5.10	Distâncias cepstrais entre o modelo de referência e os modelos das vigas danificadas. .	53
5.11	Distâncias entre o modelo de referência e os modelos das vigas danificadas calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços.	54
5.12	Experimento com a placa de alumínio.	55
5.13	Disposição dos atuadores e sensores na placa retangular de alumínio.	56
5.14	Disposição dos atuadores, sensores e massas na placa para as configurações 2, 3 e 4. . .	57

5.15	Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 1.	58
5.16	Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 2.	58
5.17	Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 3.	59
5.18	Distâncias entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa da- nificada calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços - configurações 2, 3 e 4.	59
5.19	Distâncias cepstrais entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada - configurações 2, 3 e 4.	60
5.20	Disposição dos atuadores, sensores e massas na placa para as configurações 5 e 6. . . .	61
5.21	Distâncias entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa dani- ficada calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços - configurações 5 e 6. . .	62
5.22	Distâncias cepstrais entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada - configurações 5 e 6.	62

LISTA DE TABELAS

5.1	Localização dos sensores e do atuador	55
-----	---	----

LISTA DE SIGLAS

Siglas

AR	Modelo Autorregressivo
ARE	Equação Algébrica de Riccati
ARI	Inequação Algébrica de Riccati
ARMA	Modelo Autorregressivo de Média Móvel
ARX	Modelo Autorregressivo com Entrada Exógena
DFT	Transformada Discreta de Fourier
DWT	Transformada <i>Wavelet</i> discreta
FRF	Função de Resposta em Frequência
LMI	Desigualdade Matricial Linear
MIMO	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
NDE	Métodos de Avaliação não Destrutiva
PCA	Análise de Componentes Principais
SHM	Monitoramento da Integridade das Estruturas
SISO	Uma Entrada e uma Saída
SVD	Decomposição em Valores Singulares
VAR	Vetor Autorregressivo

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$	números reais, números complexos, números inteiros
$\mathbb{R}^n$	vetor real de dimensão n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	matriz real de dimensão $(m \times n)$
$\mathbb{C}^{m \times n}$	matriz complexa de dimensão $(m \times n)$
A^H	matriz transposta conjugada de A
A^T	matriz transposta de A
A^{-1}	matriz inversa de A
$A^\dagger$	matriz pseudoinversa de A
$\ a\ $	norma Euclidiana do vetor a
$\ A\ $	norma Euclidiana de A
$\ A\ _F$	norma de Frobenius de A
$\text{posto}(A)$	posto de A
$\text{dia}(\sigma_i)$	matriz diagonal formada por σ_i na diagonal principal
$\text{imag}(A)$	imagem ou espaço coluna de A
$\text{lin}(A)$	espaço linha de A
$\text{nul}(A)$	espaço nulo de A
$\text{dom}(A)$	domínio de A
$\text{con}(A)$	contradomínio de A
$a \perp b$	o vetor a é ortogonal ao vetor b
$S^\perp$	complemento ortogonal de S
Π	projedor ortogonal
$\Pi_{I(A)}$	projedor ortogonal que projeta sobre o espaço coluna de A
$\Pi_{L(A)}$	projedor ortogonal que projeta sobre o espaço linha de A
B/A	projeção ortogonal do espaço linha da matriz B sobre o espaço linha da matriz A

$[a \triangleleft b]$	ângulo entre os vetores a e b
$[A \triangleleft B]$	ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$
$\cos[A \triangleleft B]$	cossenos dos ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$
λ_i	autovalores
$G(k)$	parâmetros de Markov
$\mathcal{O}_k$	matriz estendida de observabilidade
Γ_l	matriz estendida de controlabilidade
$E\{x\}$	esperança matemática do vetor x
Q	matriz de covariância do vetor $w(k)$, $Q = E\{w(k)w^T(k)\}$
P	matriz de covariância do vetor de estados $x(k)$, $P = E\{x(k)x^T(k)\}$
R	matriz de covariância do vetor $v(k)$, $R = E\{v(k)v^T(k)\}$
S	matriz de covariância cruzada entre os vetores $w(k)$ e $v(k)$, $S = E\{w(k)v^T(k)\}$
K	ganho de Kalman
$\bar{d}$	complexo conjugado de $d \in \mathbb{C}$
$c(m)$	coeficientes cepstrais, $m \in \mathbb{Z}$
$\mathcal{O}_{i\infty}$	matriz infinita de observabilidade dos sistema inverso
$\mathcal{O}_\infty$	matriz infinita de observabilidade
$\max(m, n)$	maior número real entre m e n
$\min(m, n)$	menor número real entre m e n
α_i	polos
β_i	zeros
$\text{cov}(x)$	covariância do vetor aleatório x

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Métodos Propostos	2
1.2	Organização do Trabalho	4
2	ÁLGEBRA LINEAR, GEOMETRIA E MODELOS PARAMÉTRICOS	6
2.1	Decomposição em Valores Singulares	6
2.1.1	Propriedades Geométricas	8
2.2	A Inversa de Moore-Penrose	9
2.3	Projetores Ortogonais	10
2.3.1	Projetores	10
2.3.2	Projetores Ortogonais	11
2.3.3	Projeção Ortogonal sobre o Espaço Coluna de uma Matriz	12
2.3.4	Projeção Ortogonal sobre o Espaço Linha de uma Matriz	14
2.4	Mínimos Quadrados	15
2.5	Ângulos Principais entre os Subespaços	16
2.5.1	Ângulos entre dois Vetores	17
2.5.2	Ângulos e Direções Principais	17
2.5.3	Cossenos dos Ângulos Principais e as Direções Principais como Autovalores e Autovetores	19
2.5.4	Cálculo dos Cossenos dos Ângulos Principais Baseado na Fatoração LQ	20
2.6	Modelos Paramétricos ARMA, AR e MA.	21
2.7	Sumário	23
3	IDENTIFICAÇÃO POR SUBESPAÇOS	24
3.1	Realização Determinística	24
3.1.1	Algoritmo de Realização Determinística	29
3.2	Realização Estocástica	30
3.2.1	Algoritmo de Realização Estocástica	36
3.3	Determinação da Ordem do Modelo	37

3.4	Sumário	38
4	INDICADORES DE DANOS	39
4.1	Métrica Cepstral	39
4.2	Métrica por Subespaços	43
4.3	Sumário	45
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	46
5.1	Instrumentação, Diagrama de Blocos e Sinais dos Experimentos	46
5.2	Estudo de Danos em Vigas de Alumínio	48
5.3	Estudo de Danos em uma Placa Retangular de Alumínio	55
5.4	Sumário	63
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	64
6.1	Perspectivas	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

Estruturas mecânicas são submetidas a esforços repetitivos, ao atrito, a carregamentos e a diferenças de temperaturas e de pressões. Além disso, algumas partes dessas estruturas podem estar em contato com chuva, umidade e outros agentes corrosivos. Assim, a combinação desses agentes físicos e químicos contribuem significativamente para a deterioração das estruturas. Desse modo, uma eficiente detecção da deterioração e dos danos estruturais pode prevenir falhas catastróficas e reduzir os custos de manutenção. Nesse contexto, técnicas de detecção de falhas e de monitoramento da integridade de estruturas vem sendo investigadas e vários indicadores de danos já estão descritos na literatura (FASSOIS; SAKELLARIOUS, 2007; GENARI; NOBREGA, 2012).

Algumas técnicas tradicionais de diagnósticos de danos, utilizando métodos de avaliação não destrutiva (NDE), baseadas nas teorias de acústica, magnetismo, ciências térmicas, radiografia, entre outras, estão sendo desenvolvidas. Esses métodos são utilizados principalmente para caracterização de danos e para analisar o grau de severidade, requerendo um conhecimento antecipado dos possíveis locais de danos (ZHENG; MITA, 2007; FARRAR; WORDEN, 2007). Entretanto, a implementação dos métodos NDE pode ser demorada, de altíssimo custo para instrumentar todos os elementos e componentes que são possivelmente críticos e o acesso a determinadas áreas nem sempre é possível (CHANG et al., 2003; HUMAR et al., 2006).

As características de vibrações de uma estrutura, por exemplo, frequências, modos de vibração e amortecimentos são influenciadas diretamente pelas características físicas da estrutura, como sua massa e sua rigidez. Os danos em uma estrutura reduzem a rigidez e/ou a massa e, consequentemente, alteram as características das vibrações (HUMAR et al., 2006). Assim, uma recente categoria de detecção de danos baseada nas características das vibrações vem sendo pesquisada. A maioria dos métodos para detecção de falhas utilizando vibrações são baseados nas mudanças das frequências modais, nos modos de vibrações, na matriz de flexibilidade e na matriz de rigidez (CARDEN; FANNING, 2004; WORDEN; DULIEU-BARTON, 2004). Os métodos baseados nas vibrações das estruturas possuem as seguintes vantagens: não é necessário o conhecimento prévio dos danos e de suas localizações; os sensores que medem as vibrações não necessitam ficar próximos dos danos, pois uma quantidade limitada de sensores pode, às vezes, prover informações

suficientes para localizar e quantificar danos mesmo em estruturas grandes e complexas (HUMAR et al., 2006). Além disso, esses métodos são baseados em dados, não em modelagens físicas, assim, uma vantagem óbvia é que não são necessários modelos físicos ou modelagem por elementos finitos (FASSOIS; SAKELLARIOUS, 2007; ZHENG; MITA, 2007).

Os métodos baseados em séries temporais, uma subclasse dos métodos baseados em vibrações, tornaram-se outra importante categoria de métodos para identificação de falhas (FASSOIS; SAKELLARIOUS, 2007). Por exemplo, Lu e Gao (2005) consideraram o desvio padrão do erro residual entre dois estados de modelos autorregressivos com entradas exógenas (ARX), que representam os sistemas danificados e o sistema sem danos (sistema de referência), para a detecção de falhas. Os modelos autorregressivos (AR), mais típicos entre os modelos de séries temporais, vem recebendo considerável atenção para detecção de danos em estruturas. Nair et al. (2006) consideraram apenas os três primeiros termos AR do modelo autorregressivo de média móvel (ARMA) para definir um indicador de danos. Mattson e Pandit (2006) utilizaram o desvio padrão do resíduo do modelo vetor autorregressivo (VAR) como indicador de danos. Fanning e Carden (2001) utilizaram a média e a variância dos resíduos do modelo AR para formar os gráficos de controle estatístico de processos. Zhen e Zhigao (2010) propuseram uma técnica para detectar danos em uma plataforma marinha baseada no fato de que os coeficientes de um modelo AR são funções dos autovalores da estrutura. Os dois principais benefícios da detecção de falhas e do monitoramento da integridade de uma estrutura utilizando análise de séries temporais são que a construção de um modelo matemático não é necessária e que essas técnicas também podem ser aplicadas quando a excitação não pode ser medida ou controlada (ZHENG; MITA, 2008).

1.1 Métodos Propostos

Neste trabalho, dois indicadores de danos definidos como a distância entre modelos AR são investigados. Esses dois métodos de detecção de danos identificam as mudanças nos parâmetros do modelo AR através da medida de distâncias. A distância entre dois modelos AR, identificados a partir das respostas dinâmicas das estruturas com e sem danos, deve ser correlacionada com

as informações dos danos, incluindo sua localização e severidade. Para esses dois indicadores, é necessário um modelo AR de referência, normalmente da estrutura saudável, para ser comparado com o modelo a ser inspecionado.

O fluxograma para o método de detecção de danos utilizado no trabalho é apresentado pela Figura 1.1. Esse método é composto dos seguintes passos:

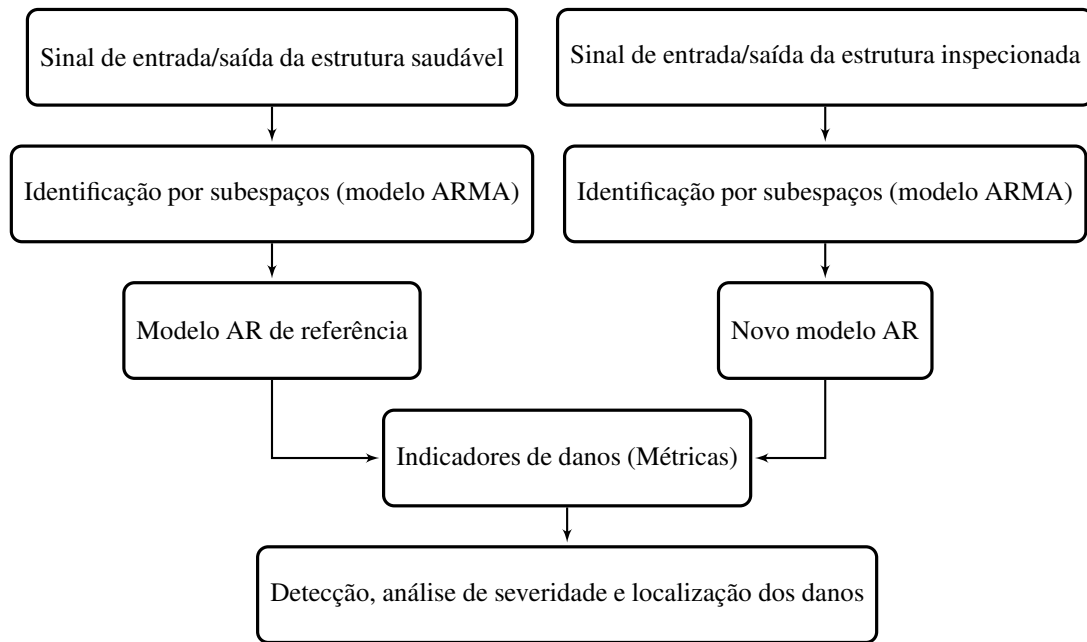


Figura 1.1 - Fluxograma para a detecção de danos.

- Passo 1:** Os sinais de vibração da estrutura com e sem danos são capturados por sensores do tipo piezelétrico.
- Passo 2:** Em seguida, os sinais são parametrizados como modelos ARMA. Os sinais de vibrações da estrutura de referência e da estrutura a ser inspecionada são modelados como modelos ARMA utilizando identificação por subespaços.
- Passo 3:** As partes AR dos modelos ARMA são selecionadas.
- Passo 4:** O indicador de danos é definido como a distância entre os modelos AR. As distâncias podem ser obtidas tanto pela métrica cepstral quanto pela métrica por subespaços.
- Passo 5:** A detecção, análise de severidade e a localização de danos são baseadas nos resultados dos cálculos das distâncias.

1.2 Organização do Trabalho

Uma descrição de cada capítulo presente neste trabalho é feita a seguir. A Figura 1.2 apresenta a relação entre os diferentes capítulos.

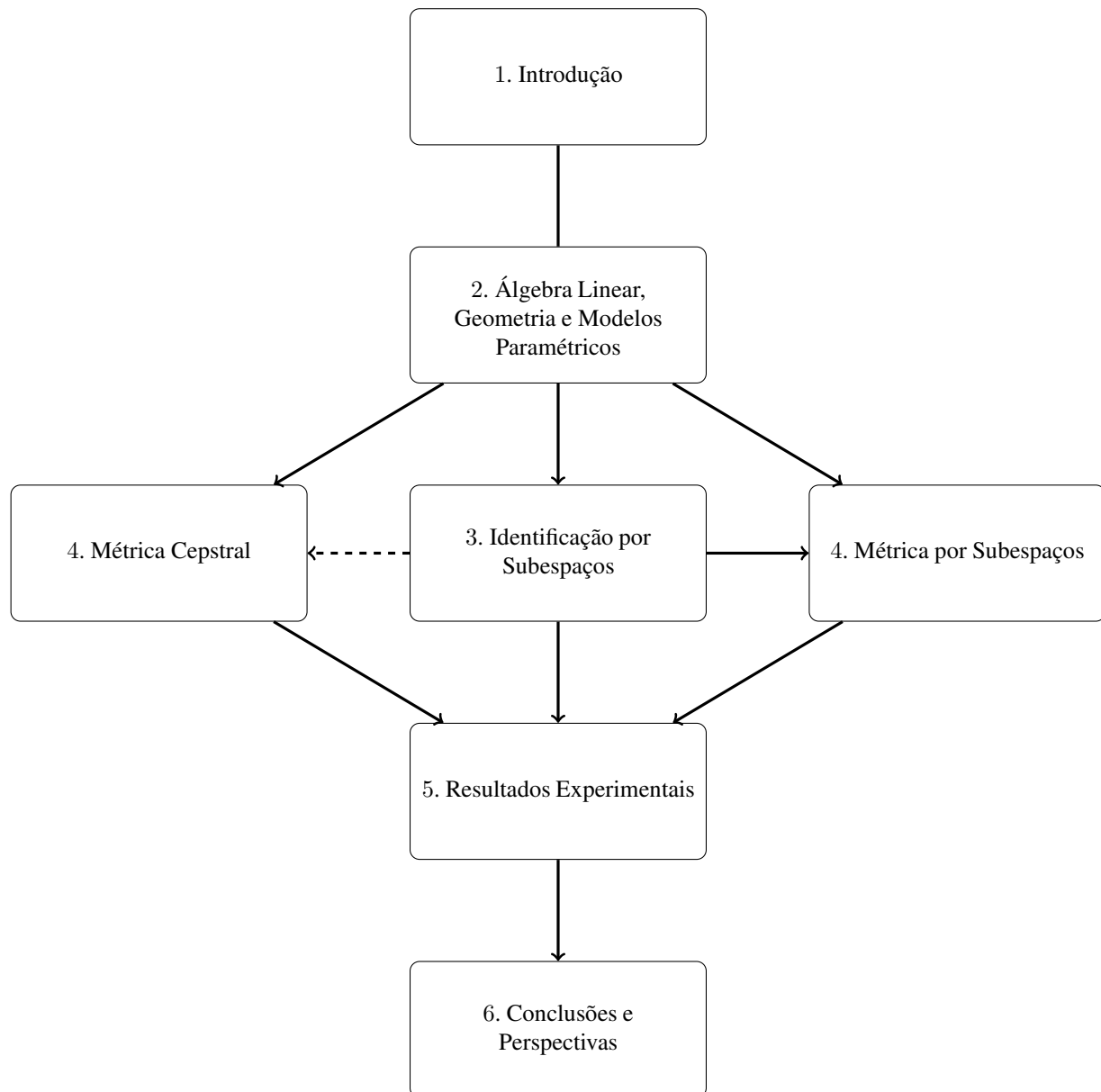


Figura 1.2 - Uma visão global dos diferentes capítulos e suas relações. A linha pontilhada indica menor dependência.

No capítulo 2, são discutidas ferramentas matemáticas utilizadas ao longo dessa disserta-

ção, sendo a mais importante o conceito e o cálculo dos principais ângulos entre dois subespaços lineares. Entretanto, para o completo entendimento do conceito geométrico envolvido, algumas noções de álgebra linear, como a decomposição em valores singulares (SVD) e projetores ortogonais, são discutidas. Finalizando o capítulo, são apresentadas as formas ARMA, AR e MA que podem representar os modelos paramétricos.

O capítulo 3 apresenta a realização determinística e a realização estocástica. Inicialmente, a partir das respostas impulsivas do sistema determinístico, é montada uma matriz de Hankel. Através das matrizes obtidas pelo SVD da matriz de Hankel, as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas são derivadas e utilizadas para obter as matrizes de estado do sistema determinístico. Em seguida, a realização estocástica é apresentada utilizando a teoria de realização determinística e uma desigualdade matricial linear (LMI). A partir da realização estocástica, é derivado um sistema na forma inovativa. Finalizando o capítulo, o critério para seleção da ordem do modelo, conhecido como diagrama de estabilização, é apresentado.

O capítulo 4 demonstra as técnicas que calculam a distância entre modelos AR. Duas métricas para o cálculo das distâncias são apresentadas: a métrica cepstral e a métrica por subespaços. A métrica cepstral é definida a partir dos coeficientes cepstrais dos modelos AR, enquanto a métrica por subespaços é definida como os cossenos dos ângulos principais entre os subespaços dos modelos AR.

No capítulo 5, resultados experimentais são apresentados. Inicialmente, utilizando-se três vigas de alumínio similares, são simulados quatro danos diferentes. Utilizando a identificação por subespaços e as métricas, é possível fazer a detecção das falhas. Em seguida, utilizando uma placa retangular de alumínio, são simulados cinco danos com diferentes localizações e severidades. No experimento com as placas, as métricas provam ser eficientes na identificação, análise de severidade e localização de danos.

Finalmente, no capítulo 6, conclui-se a dissertação e apresenta-se um conjunto de ideias que darão prosseguimento ao trabalho.

2 ÁLGEBRA LINEAR, GEOMETRIA E MODELOS PARAMÉTRICOS

Os conceitos básicos de álgebra linear, geometria e de modelos paramétricos que são utilizados ao longo desta dissertação são revisados nesse capítulo. A noção geométrica dos ângulos principais entre dois subespaços a partir das direções principais constituem a parte mais discutida do capítulo. Outros conceitos como SVD, a inversa de Moore-Penrose e modelos paramétricos que são ferramentas valiosas em processamento de sinais e identificação são também trabalhados no capítulo. Para o desenvolvimento desse capítulo foram utilizados livros como Strang (1988), Boldrini et al. (1986), Anton (2001), Meyer (2001), Katayama (2005) e Shores (2007) e teses como Barreto (2002), De Cock (2002), Cheng (2003) e Delgado (2004).

2.1 Decomposição em Valores Singulares

A SVD é aplicada em matrizes reais e complexas. Inicialmente são mostradas as propriedades da SVD para matrizes complexas e posteriormente é definida a SVD para matrizes reais.

Teorema 2.1 (Decomposição completa em valores singulares para matrizes complexas). *Toda matriz complexa $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ pode ser fatorada como:*

$$A = U \Sigma V^H \quad (2.1)$$

em que as matrizes $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ são unitárias. $U^H U = I_m = U U^H$ e $V^H V = I_n = V V^H$, e o índice H denota matriz transposta conjugada. Além disso, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz real e tem a forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{r \times r} & 0^{(n-r) \times r} \\ 0^{r \times (m-r)} & 0^{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

em que $r = \text{posto}(A)$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

A partir da SVD, a matriz A pode ser decomposta na seguinte forma:

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H \quad (2.2)$$

em que u_i e v_i são a i -ésima coluna de U e V , respectivamente. Essa decomposição é utilizada para redução de dados em muitas aplicações. A decomposição 2.2 descreve a matriz A como uma soma de r matrizes de posto um de importância decrescente, devido aos valores singulares decrescentes.

Corolário 2.1 (Redução da decomposição em valores singulares). *Seja uma matriz complexa $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de posto r . Então, existem matrizes $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times r}$, $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times r}$ de modo que:*

$$A = U_1 \Sigma_1 V_1^H \quad (2.3)$$

em que as colunas de U_1 e de V_1 são ortonormais, $U_1^H U_1 = V_1^H V_1 = I_r$ e $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_i), i = 1, 2, \dots, r$.

Se A for real, todas as matrizes obtidas da decomposição em SVD são reais.

Teorema 2.2 (Decomposição em valores singulares para matrizes reais). *Para toda matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existem matrizes ortogonais $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($U^T U = I_m = U U^T$ e $V^T V = I_n = V V^T$) que:*

$$A = U \Sigma V^T$$

em que $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{r \times r} & 0^{(n-r) \times r} \\ 0^{r \times (m-r)} & 0^{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

sendo $r = \text{posto}(A)$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_i), i = 1, 2, \dots, r$ e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

2.1.1 Propriedades Geométricas

Para uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sua imagem, $\text{imag}(A)$, é definida como:

$$\text{imag}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : y = Ax\} \quad (2.4)$$

O espaço linha de A , denotado por $\text{lin}(A)$, é a imagem de A^T .

O espaço nulo de A , $\text{nul}(A)$, é definido como:

$$\text{nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \quad (2.5)$$

O domínio e o contradomínio da matriz A é definido como:

$$\begin{aligned} \text{dom}(A) &= \text{lin}(A) + \text{nul}(A), \\ \text{con}(A) &= \text{imag}(A) + \text{nul}(A^T). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dessa forma, $\text{imag}(A)$ e $\text{nul}(A^T)$ são ortogonais complementares em $\mathbb{R}^m$, $\text{nul}(A^T)$ também é denotado por $\text{imag}(A)^\perp$. Analogamente, $\text{nul}(A)$ também pode ser denotado por $\text{lin}(A)^\perp$.

Propriedade 2.1. *Seja a SVD da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de posto r*

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

em que $U_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$, $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$. Então,

$$\begin{aligned}
\text{imag}(U_1) &= \text{imag}(A), \\
\text{imag}(U_2) &= \text{nul}(A^T) = \text{imag}(A)^\perp, \\
\text{imag}(V_1) &= \text{imag}(A^T) = \text{lin}(A), \\
\text{imag}(V_2) &= \text{nul}(A) = \text{imag}(A^T)^\perp = \text{lin}(A)^\perp.
\end{aligned}$$

2.2 A Inversa de Moore-Penrose

A definição padrão para a inversa de uma matriz falha se a matriz não for quadrada ou se ela for singular. Utilizando a decomposição em valores singulares, é possível definir uma matriz pseudoinversa para matrizes não quadradas e para matrizes singulares. Existem várias formas de generalizar a inversa de uma matriz, e todas satisfazem uma ou mais condições de Penrose (BEN-ISRAEL; GREVILLE, 1977).

Definição 2.1 (Generalização da Inversa). *Para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é chamada uma inversa- (i,j,k) para A se G satisfaz a i -ésima, j -ésima e k -ésima ($i,j,k = 1, \dots, 4$) condições de Penrose:*

1. $AGA = A$,
2. $GAG = G$,
3. $(AG)^T = AG$,
4. $(GA)^T = GA$.

Por exemplo, G é uma inversa-(1,3) para A se $AGA = A$ e AG é simétrica.

A matriz única G que satisfaz as quatro condições de Penrose é chamada de inversa generalizada ou pseudoinversa (PENROSE, 1955; KATAYAMA, 2005).

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz de posto r com a SVD reduzida, ou seja, $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$. A pseudoinversa de A é igual a

$$A^\dagger = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T$$

Note que

$$A^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T,$$

$$A^\dagger = A^T (A A^T)^\dagger.$$

Que reduz a

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T \quad \text{se } A \text{ tiver posto coluna completo,} \quad (2.8)$$

$$A^\dagger = A^T (A A^T)^{-1} \quad \text{se } A \text{ tiver posto linha completo,} \quad (2.9)$$

$$A^\dagger = A^{-1} \quad \text{se } A \text{ for quadrada e não singular.} \quad (2.10)$$

2.3 Projetores Ortogonais

Uma ferramenta geométrica que é utilizada ao longo desse trabalho é a projeção ortogonal sobre subespaços. Assim, inicialmente é trabalhado o conceito geral de projetores. Em seguida, são definidos os projetores ortogonais.

2.3.1 Projetores

Um projetor é definido como:

Definição 2.2 (Projetor). *Um projetor é uma matriz que satisfaz a seguinte relação:*

$$\Pi^2 = \Pi \quad (2.11)$$

Se Π é um projetor, $(I - \Pi)$ também é um projetor:

$$(I - \Pi)^2 = I - 2\Pi + \Pi^2 = I - \Pi$$

Se $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é um projetor, pode ser provado que:

$$\begin{aligned} \text{imag}(\Pi) \cap \text{imag}(I_m - \Pi) &= \{0\}, \\ \text{imag}(\Pi) + \text{imag}(I_m - \Pi) &= \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

A matriz $(I_m - \Pi)$ é chamada de projetor complementar de Π . Desse modo, para qualquer Π ,

$$\text{imag}(I_m - \Pi) = \text{nul}(\Pi)$$

Um vetor $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser sempre decomposto exclusivamente como:

$$x = \Pi x + (I_m - \Pi)x \quad (2.12)$$

com representação geométrica apresentada pela Figura 2.1. Observa-se na figura que Πx é a projeção do vetor x sobre o espaço $\text{imag}(\Pi)$ e $(I_m - \Pi)x$ é a projeção do vetor x sobre $\text{imag}(I_m - \Pi)$.

2.3.2 Projetores Ortogonais

Projetores ortogonais são definidos como:

Definição 2.3 (Projetor ortogonal). *Uma matriz de projeção $\Pi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é chamada ortogonal se Πx é ortogonal a $(I_m - \Pi)y$ para todo vetor x e $y \in \mathbb{R}^m$:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : (\Pi x)^T (I_m - \Pi)y = 0 \quad (2.13)$$

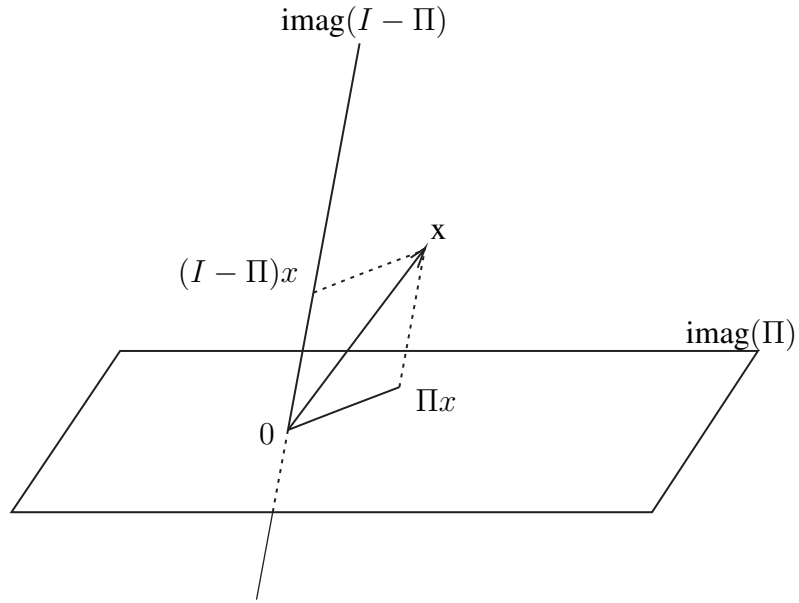


Figura 2.1 - Projeção do vetor $x \in \mathbb{R}^3$ utilizando o projetor $\Pi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. A projeção de x sobre a imagem de Π , que é um subespaço de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$, é Πx . A projeção sobre o subespaço complementar da imagem de $(I - \Pi)$ de dimensão um é $(I - \Pi)x$.

Da Equação 2.13, tem-se:

$$x^T(\Pi^T - \Pi^T \Pi)y = 0, \quad \forall x, y$$

então,

$$\Pi^T = \Pi^T \Pi$$

2.3.3 Projeção Ortogonal sobre o Espaço Coluna de uma Matriz

A matriz de projeção ortogonal, $\Pi_{I(U)}$, que projeta sobre o espaço coluna de uma matriz $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$, forma uma base ortogonal para $\text{imag}(U)$ com suas colunas e é definida como:

$$\Pi_{I(U)} = UU^T, \quad (U^T U = I_r) \quad (2.14)$$

e satisfaz as seguintes condições:

$$\text{imag}(\Pi_{I(U)}) = \text{imag}(U),$$

$$\Pi_{I(U)}^2 = \Pi_{I(U)},$$

$$\Pi_{I(U)}^T = \Pi_{I(U)}.$$

A matriz de projeção ortogonal, $\Pi_{I(A)}$, que projeta sobre o espaço coluna de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto r , pode ser obtida da SVD reduzido como:

$$\begin{aligned} A &= U_1 \Sigma_1 V_1^T, \\ \Pi_{I(A)} &= U_1 U_1^T. \end{aligned}$$

A partir da SVD, pode-se mostrar que:

$$\Pi_{I(A)} = AA^\dagger$$

Se $\Pi_{I(A)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de projeção ortogonal que projeta um vetor sobre o espaço coluna da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $(I_m - \Pi_{I(A)})$ é a matriz de projeção ortogonal que projeta o vetor sobre o espaço complementar de $\text{imag}(A)$. Assim:

$$I_m - \Pi_{I(A)} = I_m - U_1 U_1^T = U_2 U_2^T$$

e nota-se que $\text{imag}(U_2) = \text{imag}(A)^\perp$. Dessa forma, a decomposição do vetor $x \in \mathbb{R}^m$ é:

$$x = \Pi_{I(A)}x + (I_m - \Pi_{I(A)})x$$

com representação geométrica apresentada pela Figura 2.2. Observa-se nessa figura que Πx é a projeção do vetor x sobre o espaço $\text{imag}(A)$ e $(I_m - \Pi)x$ é a projeção do vetor x sobre o espaço ortogonal ao espaço $\text{imag}(A)$.

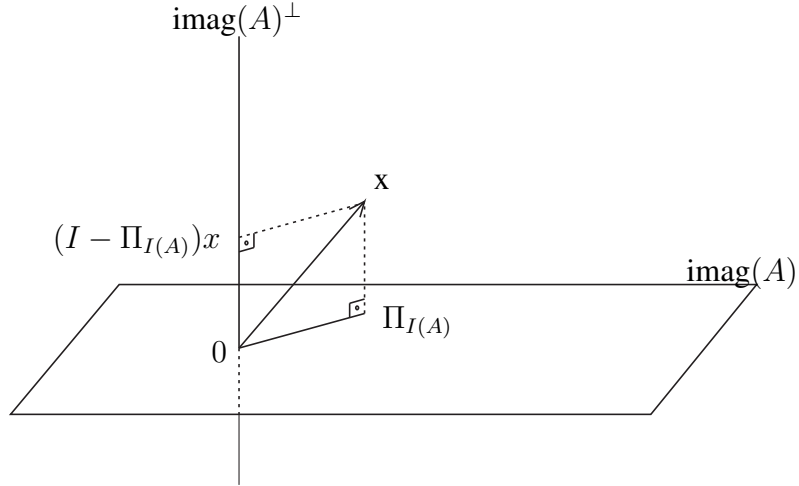


Figura 2.2 - Decomposição do vetor $x \in \mathbb{R}^3$ sobre $\text{imag}(A)$ e sobre o complemento de $\text{imag}(A)$.

2.3.4 Projeção Ortogonal sobre o Espaço Linha de uma Matriz

Seja $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ a SVD reduzida de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Então, a matriz de projeção ortogonal que projeta sobre o espaço linha da matriz A pode ser obtida como:

$$\Pi_{L(A)} = V_1 V_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.15)$$

e também:

$$\Pi_{L(A)} = A^\dagger A \quad (2.16)$$

A projeção ortogonal do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ sobre o espaço linha de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é $\Pi_{L(A)}x$. A projeção ortogonal do espaço linha de $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sobre o espaço linha de A é o espaço linha de $(B\Pi_{L(A)})$. Essa projeção é definida como $\text{lin}(A/B)$. Por exemplo, para uma matriz A de posto linha completo, tem-se:

$$B/A = BA^T(AA^T)^{-1}A \quad (2.17)$$

2.4 Mínimos Quadrados

Neste trabalho, o problema de mínimos quadrados é definido como:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

em que $m \geq n$.

Lema 2.1. *Considera-se que o posto de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é $r < n$. Então, a solução geral do problema de mínimos quadrados*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

é dada por:

$$x = A^\dagger b + (I_n - A^\dagger A)z, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad (2.18)$$

Além disso, $x = A^\dagger b$ é a única solução de norma mínima.

Demonstração. O vetor de minimização x deve satisfazer $Ax = \Pi_{I(A)}b$, em que $\Pi_{I(U)}$ é o projetor ortogonal dado por $UU^T = AA^\dagger$. Assim, $A(A^\dagger b) = \Pi_{I(A)}b$ e por comparação chega-se a $x = A^\dagger b$ como solução do problema de mínimos quadrados. Porém, para uma solução geral na forma $x = A^\dagger b + y$, y deve ser determinado. Desse modo:

$$Ay = A(x - A^\dagger b) = Ax - \Pi_{I(A)}b = 0 \quad (2.19)$$

Considerando que $y \in \text{nul}(A)$. Utilizando a decomposição em valores singulares, $A = U\Sigma V^T$, tem-se:

$$A^\dagger A = V\Sigma^{-1}U^T U\Sigma V^T = VV^T$$

$VV^T = A^\dagger A$ é projetor ortogonal que projeta sobre $\text{imag}(A^T)$. Então, o projetor ortogonal que projeta sobre $\text{nul}(A)$ é $I_n - VV^T = I_n - A^\dagger A$. Assim, $y \in \text{nul}(A)$ é definido como:

$$y = (I_n - A^\dagger A)z, \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (2.20)$$

Isso prova a expressão 2.18. Finalmente, uma vez que $A^\dagger b$ e $(I_n - A^\dagger A)z$ são ortogonais, então:

$$\|x\|^2 = \|A^\dagger b\|^2 + \|I_n - A^\dagger A\|^2 \geq \|A^\dagger b\|^2 \quad (2.21)$$

em que é assegurada a igualdade para $z = 0$. Isso completa a prova. $\square$

Lema 2.2. *Uma solução geral para o problema de mínimos quadrados*

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n \times p}} \|AX - B\|_F, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

é dada por:

$$X = A^\dagger B + (I_n - A^\dagger A)Z, \quad \forall Z \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (2.22)$$

em que $\|\cdot\|_F$ é a normal de Frobenius.

Demonstração. A prova é similar à do Lema 2.1. $\square$

2.5 Ângulos Principais entre os Subespaços

Os ângulos principais entre dois subespaços são uma generalização dos ângulos entre vetores. Inicialmente é definido o ângulo entre dois vetores. Em seguida, é apresentado o conceito de ângulos principais e direções principais entre dois subespaços. Além disso, algumas formas de calcular esses ângulos são discutidas.

2.5.1 Ângulos entre dois Vetores

Sejam dois vetores $a, b \in \mathbb{R}^n$. Baseado na desigualdade de Cauchy-Schwarz, o cosseno do ângulo entre a e b pode ser definido como:

$$\cos[a \angle b] = \frac{|a^T b|}{\|a\| \|b\|} \quad (2.23)$$

em que $\|a\|$ é a norma Euclideana de a . Observa-se que foi utilizada a notação $[a \angle b]$ para o ângulo entre os vetores a, b . Além disso, os valores absolutos de $a^T b$ fazem $[a \angle b]$ pertencer ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. A representação geométrica do ângulo entre os vetores a e b é mostrada pela Figura 2.3.

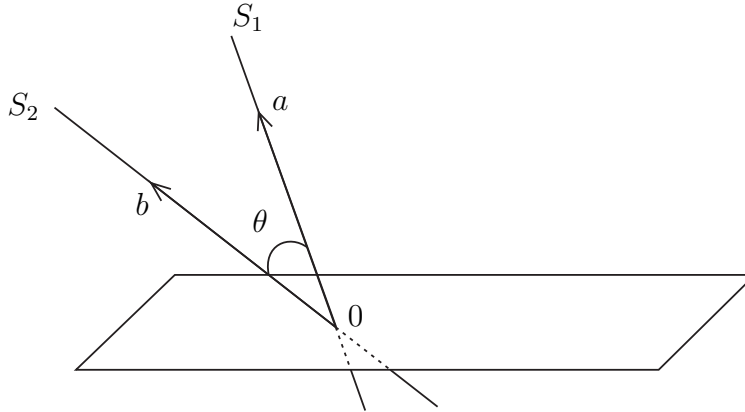


Figura 2.3 - O ângulo entre os subespaços de dimensão um $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$.

2.5.2 Ângulos e Direções Principais

A noção de ângulo entre dois subespaços de ordem um pode ser generalizada para subespaços de ordem mais elevadas. Assume-se que existam dois subespaços lineares $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^n$ de dimensões d_1 e d_2 . A extensão natural do caso de dimensão unitária é escolher um vetor unitário u_1 de S_1 e um vetor unitário v_1 de S_2 de tal forma que o ângulo entre u_1 e v_1 seja minimizado. Os vetores u_1 e v_1 são as direções principais e o ângulo entre eles é o ângulo principal θ_1 . Em seguida, escolhe-se o vetor unitário $u_2 \in S_1$ ortogonal a u_1 e vetor $v_2 \in S_2$ ortogonal a v_1 que minimize o

ângulo θ_2 entre eles. Portanto, θ_2 é o segundo ângulo principal e u_2 e v_2 correspondem às direções principais. Este processo continua até $\min(d_1, d_2)$ ângulos. O resultado é mostrado de forma gráfica pela Figura 2.4.

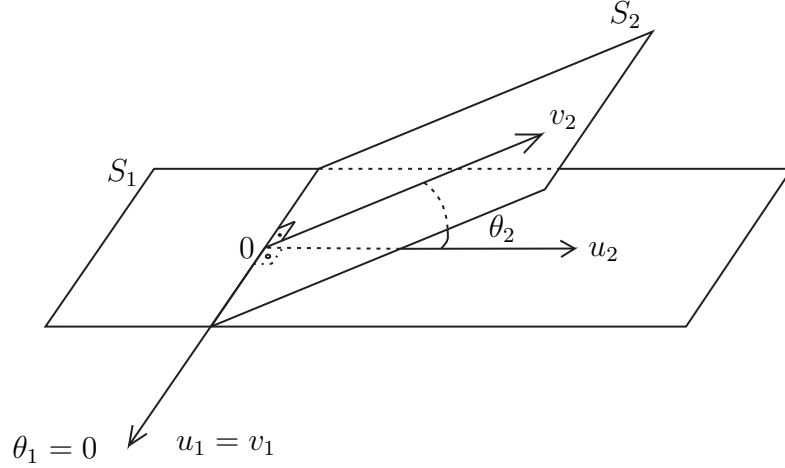


Figura 2.4 - Ângulos principais entre dois subespaços $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$ de dimensão dois.

Definição 2.4 (Ângulos e direções principais). *Os ângulos principais $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \theta_{\min(d_1, d_2)} \leq \pi/2$ entre os subespaços S_1 e S_2 de dimensões d_1 e d_2 e suas direções principais $u_i \in S_1$ e $v_i \in S_2$ são definidos recursivamente como:*

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \max_{\substack{u \in S_1 \\ v \in S_2}} u^T v = u_1^T v_1, \\ \cos \theta_k &= \max_{\substack{u \in S_1 \\ v \in S_2}} u^T v = u_k^T v_k, \text{ para } k = 2, \dots, \min(d_1, d_2), \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\|u\| = \|v\| = 1,$$

e para $k > 1$:

$$\begin{aligned} u^T u_i &= 0 \quad i = 1, \dots, k-1, \\ v^T v_i &= 0 \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Considera-se que a matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tenha posto r_a e a matriz $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tenha posto r_b .

Então, os ângulos principais entre os espaços linhas de A e de B são considerados como:

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\min(r_a, r_b)}) = [A \triangleleft B] \quad (2.24)$$

A seguir são descritos os três tipos de ângulos principais entre os espaços linhas de A e de B :

1. t ângulos principais zero: $\theta_1 = \dots = \theta_t = 0$

As principais direções correspondendo aos t ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ são comuns aos espaços linha de A e de B (veja u_1 e v_1 na Figura 2.4). Isso significa que a dimensão da intersecção de $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ é igual à t :

$$\dim(\text{lin}(A) \cap \text{lin}(B)) = t \quad (2.25)$$

O número de ângulos nulos entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ é calculado como:

$$t = \text{posto}(A) + \text{posto}(B) - \text{posto} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

2. $(r_{ab} - t)$ ângulos principais agudos: $0 < \theta_{t+1} \leq \dots \leq \theta_{r_{ab}} < \frac{\pi}{2}$

O número r_{ab} é definido como: $r_{ab} = \text{posto}(AB^T)$.

3. $(\min(r_a, r_b) - r_{ab})$ ângulos principais retos: $\theta_{r_{ab}+1} = \dots = \theta_{\min(r_a, r_b)} = \frac{\pi}{2}$

Existem $(\min(r_a, r_b) - r_{ab})$ direções principais de $\text{lin}(B)$ ortogonais às $(\min(r_a, r_b) - r_{ab})$ direções principais de $\text{lin}(A)$.

2.5.3 Cossenos dos Ângulos Principais e as Direções Principais como Autovalores e Autovetores

Para as matrizes $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$ que possuem posto r_a e r_b , os ângulos principais e as direções principais de $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ seguem do problema generalizado de autovalor:

$$\begin{pmatrix} 0 & AB^T \\ BA^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda, \quad (2.27)$$

sujeito a $x^T AA^T x = 1$ e $y^T BB^T y = 1$.

Assume-se que $p + q$ autovalores λ_i estão ordenados como:

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{p+q}$$

Os vetores $A^T x_i$ e $B^T y_i$, para $i = 1, \dots, \min(r_a, r_b)$ em que x_i e y_i satisfazem a expressão 2.27 com $\lambda = \lambda_i$, são as direções principais correspondendo ao ângulo principal θ_i .

Se A e B possuem posto linha completo e considerando que $p \leq q$, então os cossenos dos ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ são:

$$\cos[A \angle B] = \sqrt{\lambda((AA^T)^{-1}AB^T(BB^T)^{-1}BA^T)} \quad (2.28)$$

2.5.4 Cálculo dos Cossenos dos Ângulos Principais Baseado na Fatoração LQ

O cálculo dos ângulos entre subespaços de grande dimensões é uma tarefa trabalhosa e de grande custo computacional. Para contornar esse problema, um algoritmo eficiente baseado na fatoração LQ é utilizado. Inicialmente é definido a fatoração LQ e depois é apresentado o algoritmo.

Definição 2.5. A fatoração LQ de uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é dada por:

$$A = LQ^T \quad (2.29)$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é ortogonal e $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é triangular inferior.

Propriedade 2.2 (A decomposição LQ escrita como uma decomposição QR). A decomposição LQ de uma matriz A é semelhante à decomposição QR de A^T . Se $A^T = QR$, em que Q é ortogonal e

R é triangular superior; então $A = R^T Q^T$ é a fatoraçaõ de A em uma matriz triangular inferior e em uma transposta de uma matriz ortogonal, como na fatoraçaõ LQ .

Teorema 2.3 (Cálculo dos ângulos entre dois subespaços baseado na fatoraçaõ LQ). *Considerando as matrizes $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$, de posto linha completo, em que $p \leq q$ e $(p + q) \leq n$. Os ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ podem ser calculados como:*

1. Calcular a parte triangular da fatoraçaõ LQ da matriz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

A parte triangular é:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$$

em que $L_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ e $L_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

2. Calcular a parte triangular da fatoraçaõ LQ de $\begin{bmatrix} L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix}^T$$

em que a matriz S é não singular.

3. Os cossenos dos ângulos principais entre $\text{lin}(A)$ e $\text{lin}(B)$ são os valores singulares de $S^{-1}L_{21}$.

Demonstraçaõ. Ver De Cock (2002). □

2.6 Modelos Paramétricos ARMA, AR e MA.

Seja um sistema linear caracterizado pela seguinte função de transferênciã no plano z :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.30)$$

em que $u(n)$ é a sequênciã de entrada do sistema e $x(n)$ representa a saída do sistema que é observável. Então tem-se:

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k u(n-k) \quad (2.31)$$

Na estimação do espectro de potência, a sequência de entrada não é observável. Entretanto, caso os dados de saída do sistema sejam caracterizados como um processo aleatório estacionário, a sequência de entrada é também considerada um processo aleatório estacionário. Em tal caso, o espectro de potência P_x da sequência de saída é:

$$P_x(z) = |H(z)|^2 P_u(z) \quad (2.32)$$

em que $H(z)$ é a resposta em frequência do sistema linear e $P_u(z)$ é o espectro de potência do dado de entrada. Considerando que a sequência de entrada é um ruído branco com média zero e variância σ , então o espectro de potência da saída observada é:

$$P_x(z) = \sigma^2 |H(z)|^2 = \sigma^2 \frac{|B(z)|^2}{|A(z)|^2} \quad (2.33)$$

A partir da Equação 2.30, os modelos AR, MA e ARMA são derivados:

1. Se $b_0 = 1, b_1, b_2, \dots, b_q = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(n) &= - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + u(n) \\ H(z) &= \frac{1}{A(z)} \\ P_x(z) &= \sigma^2 \frac{1}{|A(z)|^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

A saída $x(n)$ é chamada de processo autorregressivo (AR) de ordem p . A medida da saída atual é a soma ponderada das p saídas passadas e da entrada atual.

2. Se $a_1, a_2, \dots, a_p = 0$ e $b_0 = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(n) &= u(n) + \sum_{k=1}^q b_k u(n-k) \\ H(z) &= B(z) \\ P_x(z) &= \sigma^2 |B(z)|^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

O sistema com saída $x(n)$ é chamado de um processo de média móvel (MA) de ordem q . A saída é obtida através de uma soma ponderada de entradas passadas com a entrada atual.

3. Se nem todos os termos do conjunto $a_1, a_2, \dots, a_p$ e do conjunto $b_1, b_2, \dots, b_p$ são nulos, o sistema com a saída $x(n)$ é chamado de processo autorregressivo de média móvel (ARMA) de ordem AR p e ordem MA q .

$$\begin{aligned} x(n) &= - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k u(n-k) \\ H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ P_x(z) &= \sigma^2 \frac{|B(z)|^2}{|A(z)|^2} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dentre os três modelos apresentados, o modelo AR é o mais utilizado. O modelo AR é adequado para representar espectros com picos agudos. Além disso, modelos AR resultam em equações lineares simples para os parâmetros AR, enquanto os modelos MA requerem muitos coeficientes para representar espectros com picos agudos. A combinação de polos e zeros do modelo ARMA fornece a mais eficiente representação do espectro de um processo aleatório. Proakis e Manolakis (1996) asseguram que qualquer processo ARMA ou MA pode ser representado exclusivamente por um modelo AR e qualquer processo ARMA ou AR pode ser representado exclusivamente por um modelo MA. Para mais detalhes dessa abordagem, ver Cheng (2003).

2.7 Sumário

Para facilitar o entendimento das ferramentas utilizadas nessa dissertação, conceitos como a decomposição em valores singulares e projetores ortogonais foram introduzidos. Além disso, a definição dos ângulos principais entre dois subespaços e algumas de suas propriedades foram apresentadas. Algumas ferramentas para o cálculo desses ângulos via autovalores e decomposição LQ foram mostradas. Além disso, os modelos paramétricos AR, MA e ARMA e seus espectros de potência foram descritos.

3 IDENTIFICAÇÃO POR SUBESPAÇOS

Neste capítulo, a realização determinística e a realização estocástica são discutidas. Inicialmente, apresenta-se a realização determinística baseada na decomposição em valores singulares da matriz bloco de Hankel formada por respostas impulsivas. Em seguida, a realização estocástica é derivada da teoria da realização determinística e de uma desigualdade matricial linear (LMI) satisfeita pela matriz de covariância de estado. Além disso, mostra-se que todas as soluções do problema de realização estocástica provêm das soluções da LMI. Utilizando a equação matricial de Riccati, é calculada a solução de contorno da LMI. Finalmente, para escolha da ordem do modelo, discute-se a ferramenta diagrama de estabilização.

3.1 Realização Determinística

Seja um sistema linear discreto no tempo descrito por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1b)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ o vetor de saída. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ são constantes e o diagrama de blocos que representa o sistema determinístico é apresentado pela Figura 3.1.

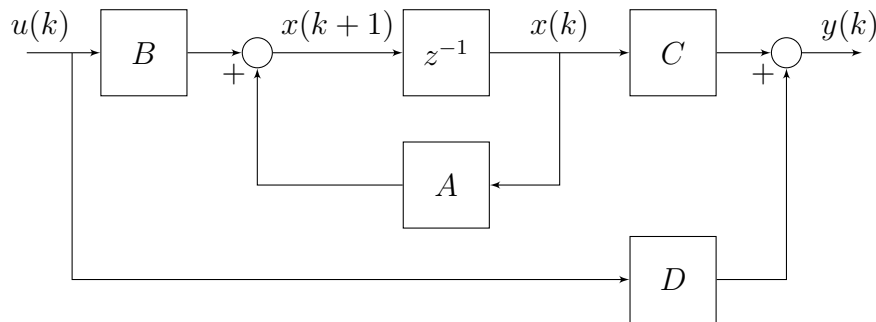


Figura 3.1 - Sistema determinístico.

Considerando a entrada impulsiva $u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$, condição inicial $x(0) = 0$ e sistema causal (não responde antes de ser excitado), a Equação 3.1 pode ser propagada para valores de $k \geq 0$ como:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & G(0) = y(0) = D \\ x(1) = B & G(1) = y(1) = CB \\ x(2) = AB & G(2) = y(2) = CAB \\ x(3) = A^2B & G(3) = y(3) = CA^2B \\ \vdots & \vdots \\ x(k) = A^{k-1}B & G(k) = y(k) = CA^{k-1}B \end{array}$$

Assim, a resposta impulsiva é escrita em termos das matrizes (A, B, C, D) da seguinte forma:

$$G(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $\{G(k), k = 0, 1, \dots\}$ são também chamados de parâmetros de Markov.

Para uma entrada $u(k)$ qualquer, a resposta $y(k)$ é obtida através da convolução da resposta impulsiva $G(k)$ com a entrada $u(k)$. Assim, a convolução entre $G(k)$ e $u(k)$ é representada pela expressão:

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G(j)u(k-j), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.3)$$

Para $u(k) = 0, k < 0$, propagando-se a Equação 3.3 com auxílio da Equação 3.2, tem-se:

$$\begin{aligned}
y(0) &= G(0)u(0) \\
y(1) &= G(0)u(1) + G(1)u(0) \\
y(2) &= G(0)u(2) + G(1)u(1) + G(2)u(0) \\
&\vdots = \vdots
\end{aligned}$$

Pode-se representar esse conjunto de igualdades na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} G(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G(1) & G(0) & 0 & \dots & 0 \\ G(2) & G(1) & G(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \end{bmatrix}}_U \quad (3.4)$$

A Equação 3.4 representa um mapeamento linear de entradas para saídas e pode ser escrita na forma de uma transformação linear representada como:

$$Y = TU$$

em que T tem a forma da matriz de Toeplitz.

Considera-se que a entrada $u(k)$ assume valores não nulos para $k \leq -1$ e nulos para $k \geq 0$ (chamada de entradas passadas em relação ao instante $k = 0$) e que a saída foi medida para $k \geq 0$ (chamada de saídas futuras). Desse modo, a Equação 3.3 pode ser remodelada da seguinte maneira:

$$y(k) = \sum_{j=-1}^{-\infty} G(k-j)u(j), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.5)$$

Propagando-se a Equação 3.5 para entradas passadas e para saídas futuras, tem-se:

$$\begin{aligned}
y(0) &= G(1)u(-1) + G(2)u(-2) + G(3)u(-3) \dots \\
y(1) &= G(2)u(-1) + G(3)u(-2) + G(4)u(-3) \dots \\
y(2) &= G(3)u(-1) + G(4)u(-2) + G(5)u(-3) \dots \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

com a representação na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{Y_+} = \underbrace{\begin{bmatrix} G(1) & G(2) & G(3) & \dots \\ G(2) & G(3) & G(4) & \dots \\ G(3) & G(4) & G(5) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ u(-3) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{U_-} \quad (3.6)$$

a Equação 3.6 pode ser interpretada como uma transformação linear na forma $Y_+ = HU_-$, em que H é uma matriz de Hankel de dimensão infinita definida por:

$$H = \begin{bmatrix} G(1) & G(2) & G(3) & \dots \\ G(2) & G(3) & G(4) & \dots \\ G(3) & G(4) & G(5) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Utilizando um número finito de dados, a matriz de Hankel 3.7 pode ser truncada na forma:

$$H_{k,l} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \dots & G_l \\ G_2 & G_3 & G_4 & \dots & G_{l+1} \\ G_3 & G_4 & G_5 & \dots & G_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k & G_{k+1} & G_{k+2} & \dots & G_{k+l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{kp \times lm} \quad (3.8)$$

A matriz bloco de Hankel 3.8 pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$H_{k,l} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{l-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^lB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-1}B & CA^kB & \dots & CA^{k+l-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ AB \\ \dots \\ A^{l-1}B \end{bmatrix}^T = \mathcal{O}_k \Gamma_l \quad (3.9)$$

em que $\mathcal{O}_k$ é a matriz estendida de observabilidade e Γ_l é a matriz estendida de controlabilidade.

Deslocando a matriz estendida de observabilidade para cima, constrói-se a seguinte identidade:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{O}_{k-1}A = \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n)$$

Para que a matriz A tenha apenas uma solução, a matriz $\mathcal{O}_{k-1}$ deve ter posto coluna completo, dessa forma, $p(k-1) \geq n$. Assim, a matriz A é calculada como:

$$A = (\mathcal{O}_{k-1}^T \mathcal{O}_{k-1})^{-1} \mathcal{O}_{k-1}^T \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n) = \mathcal{O}_{k-1}^\dagger \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n)$$

a matriz $\mathcal{O}_{k-1}^\dagger = (\mathcal{O}_{k-1}^T \mathcal{O}_{k-1})^{-1} \mathcal{O}_{k-1}^T$ é chamada de pseudoinversa ou inversa generalizada de Moore-Penrose de $\mathcal{O}_{k-1}$.

As matrizes B e C são calculadas como:

$$B = \Gamma_l(1 : n, 1 : m), \quad C = \mathcal{O}_k(1 : p, 1 : n)$$

As matrizes A , B e C estão em função das matrizes de observabilidade e controlabilidade. Dessa forma, para a identificação do sistema determinístico no espaço de estado, basta calcular as matrizes de controlabilidade e observabilidade. Assim, fazendo a decomposição em valores singulares da matriz bloco de Hankel expressada pela Equação 3.8, tem-se:

$$H_{k,l} = \begin{bmatrix} U_n & U_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix} = U_n \Sigma_n V_n^T \quad (3.10)$$

em que Σ_n é uma matriz diagonal com os primeiros n valores singulares não nulos de $H_{k,l}$. Os valores singulares satisfazem a seguinte relação:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_n > 0 = \sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \dots$$

Comparando a Equação 3.8 com a Equação 3.10, as matrizes de observabilidade e controlabilidade podem ser descritas em função das matrizes obtidas na decomposição em valores singulares da matriz bloco de Hankel, portanto:

$$\mathcal{O}_k = U_n \Sigma_n^{1/2}, \quad \Gamma_l = \Sigma_n^{1/2} V_n^T$$

Assim, a partir da matriz bloco de Hankel $H_{k,l}$, que relaciona linearmente a entrada com a saída, é possível obter a matriz de controlabilidade $\mathcal{O}_k$ e observabilidade Γ_l . Em seguida, as matrizes A , B e C são derivadas de $\mathcal{O}_k$ e Γ_l .

3.1.1 Algoritmo de Realização Determinística

O método de identificação baseado nas respostas impulsivas pode ser condensado no seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.1 (Algoritmo de realização determinística (KATAYAMA, 2005)). *A seguir são apresentadas as etapas do algoritmo:*

Etapas 1: *Calcular a decomposição em valores singulares da matriz de Hankel $H_{k,l}$ como:*

$$\begin{aligned}
H_{k,l} &= \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots & G_l \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots & G_{l+1} \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots & G_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k & G_{k+1} & G_{k+2} & \cdots & G_{k+l-1} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} U_n & U_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix}, \\
&= U_n \Sigma_n V_n^T.
\end{aligned}$$

em que Σ_n é uma matriz diagonal com os primeiros n valores singulares não nulos de $H_{k,l}$. Esses valores singulares satisfazem a seguinte relação:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_n > 0 = \sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \cdots$$

Etapa 2: Calcular as matrizes estendidas de observabilidade e de controlabilidade:

$$\mathcal{O}_k = U_n \Sigma_n^{1/2}, \quad \Gamma_l = \Sigma_n^{1/2} V_n^T \quad (3.11)$$

Etapa 3: Calcular as matrizes A , B e C :

$$A = \mathcal{O}_{k-1}^\dagger \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n), \quad B = \Gamma_l(1 : n, 1 : m), \quad C = \mathcal{O}_k(1 : p, 1 : n) \quad (3.12)$$

em que $\mathcal{O}_{k-1}^\dagger = (\mathcal{O}_{k-1}^T \mathcal{O}_{k-1})^{-1} \mathcal{O}_{k-1}^T$.

3.2 Realização Estocástica

Considere um sistema linear, estocástico, discreto e invariante no tempo descrito por:

$$x(k+1) = Ax(k) + w(k) \quad (3.13a)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad (3.13b)$$

sendo $y \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ o vetor de saída, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ o vetor de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrizes determinísticas, $w \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de ruído do processo e $v \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de ruído de observação. Os vetores w e v são de ruído branco com média zero e matrizes de covariância Q , R e S dadas por:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(s) & v^T(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q(k) & S(k) \\ S^T(k) & R(k) \end{bmatrix}, & \text{se } k = s \\ 0, & \text{se } k \neq s \end{cases} \quad (3.14)$$

em que $E\{\cdot\}$ representa a esperança matemática. O diagrama de blocos que representa o sistema estocástico é apresentado na Figura 3.2.

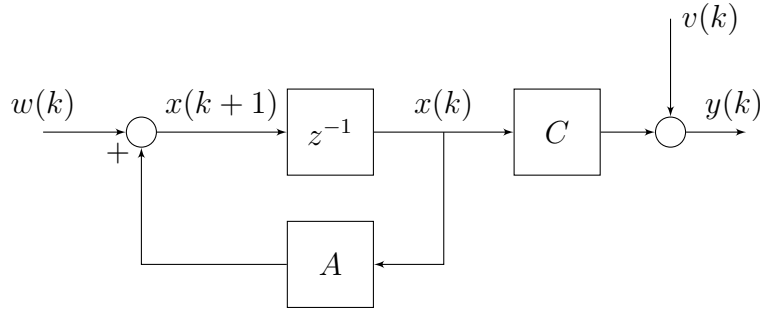


Figura 3.2 - Sistema estocástico.

Considerando que os vetores $v(k)$ e $w(k)$ sejam independentes de x_k :

$$E\{x(k)v(k)^T\} = 0$$

$$E\{x(k)w(k)^T\} = 0$$

e considerando que o processo estocástico é estacionário:

$$E[x(k)] = 0,$$

$$E[x(k)x(k)^T] = P \text{ (matriz de covariância de estado)}$$

Da Equação 3.14, tem-se que $Q = E\{w(k)w(k)^T\}$ e $R = E\{v(k)v(k)^T\}$. A matriz de covariância de estado, $E\{x(k+1)x(k+1)^T\}$, é calculada por:

$$\begin{aligned}
P &= E\{x(k+1)x(k+1)^T\} \\
&= E\{(Ax(k) + w(k))(Ax(k) + w(k))^T\} \\
&= AE\{x(k)x(k)^T\}A^T + AE\{x(k)w(k)^T\} + E\{w(k)x(k)^T\}A^T + E\{w(k)w(k)^T\} \\
&= APA^T + Q
\end{aligned}$$

que é uma equação de Lyapunov.

Definindo G como:

$$\begin{aligned}
G &= E\{x(k+1)y(k)^T\} \\
&= E\{(Ax(k) + w(k))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= AE\{x(k)x(k)^T\}C^T + E\{w(k)v(k)^T\} \\
&= APC^T + S
\end{aligned}$$

A matriz de covariância da saída é definida como:

$$\Lambda_i = E\{y(k+i)y(k)^T\} \quad (3.15)$$

Para $i = 0$, a matriz de covariância Λ_0 é:

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= E\{y(k)y(k)^T\} \\
&= E\{(Cx(k) + v(k))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= CE\{x(k)x(k)^T\}C^T + E\{v(k)v(k)^T\} \\
&= CPC^T + R
\end{aligned}$$

Para $i = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= E\{y(k+1)y(k)^T\} \\
&= E\{(Cx(k+1) + v(k+1))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= E\{(C(Ax(k) + w(k)) + v(k+1))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= CAE\{x(k)x(k)^T\}C^T + CE\{v(k)w(k)^T\} \\
&= CAPC^T + CS \\
&= CG
\end{aligned}$$

Para $i = 2$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= E\{y(k+2)y(k)^T\} \\
&= E\{(Cx(k+2) + v(k+2))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= E\{(C(Ax(k+1) + w(k+1)) + v(k+2))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= E\{(C(A^2x(k) + Aw(k) + w(k+1)) + v(k+2))(Cx(k) + v(k))^T\} \\
&= CA^2E\{x(k)x(k)^T\}C^T + CAE\{w(k)v(k)^T\} \\
&= CA^2PC^T + CAS \\
&= CA(APC^T + S) \\
&= CAG
\end{aligned}$$

Assim, a generalização para $i = 1, 2, \dots$ torna-se:

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G \quad (3.16)$$

Comparando a Equação 3.2 com a Equação 3.16, conclui-se que as covariâncias de saída podem ser consideradas como os parâmetros de Markov do sistema linear invariante no tempo determinístico representado pelas matrizes A , G , C e $\Lambda(0)$.

Desse modo, a matriz de covariância da saída do sistema representado pela Equação 3.13 é:

$$\Lambda_i = \begin{cases} G^T(A^T)^{-i-1}C^T, & i < 0 \\ CPC^T + R, & i = 0 \\ CA^{i-1}G, & i \geq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Além disso, o seguinte conjunto de equações foi gerado:

$$Q = P - APA^T \quad (3.18a)$$

$$S = G - APC^T \quad (3.18b)$$

$$R = \Lambda(0) - CPC^T \quad (3.18c)$$

em que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad P > 0 \quad (3.19)$$

Considerando que as matrizes $(A, G, C, \Lambda(0))$ já foram calculadas, o problema de realização estocástico considerado por Faurre (1976) consiste em encontrar as matrizes (P, Q, R, S) que satisfaçam as Equações 3.18 e 3.19. Dessa maneira, substituindo a Equação 3.18 na Equação 3.19, o problema de realização estocástica resume-se em encontrar $P > 0$ que satisfaça a seguinte desigualdade matricial linear (LMI):

$$M(P) = \begin{bmatrix} P - APA^T & G - APC^T \\ G^T - CPA^T & \Lambda(0) - CPC^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.20)$$

O complemento de Schur de $M(P)$ em relação a $(\Lambda(0) - CPC^T)$ é

$$M(\Pi) = \begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P - APA^T - K(\Lambda(0) - CPC^T)K^T & 0 \\ 0 & \Lambda(0) - CPC^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ K^T & I \end{bmatrix}$$

em que $K = (G - APC^T)(\Lambda(0) - CPC^T)^{-1}$ é conhecido como ganho de Kalman.

A matriz de covariância R é positiva definida. Então, a inequação algébrica de Riccati (ARI)

é definida como:

$$APA^T + (G^T - APC^T)(\Lambda(0) - CPC^T)^{-1}(G^T - CPA^T) - P \leq 0 \quad (3.21)$$

O ponto limite da Inequação 3.21 é calculado pela seguinte equação algébrica de Riccati (ARE):

$$P = APA^T + (G - APC^T)(\Lambda(0) - CPC^T)^{-1}(G^T - CPA^T) \quad (3.22)$$

em que todas as soluções são positivas definidas se (A, G^T) for controlável.

O sistema expresso pela Equação 3.13 pode ser convertido em um modelo inovativo aplicando o filtro de Kalman (DESAI; PAL, 1982). Considerando $\omega(k) = Ke(k)$ e $e(k) = v(k) = y - Cx(k)$, o modelo inovativo é representado como:

$$x(k+1) = Ax(k) + Ke(k) \quad (3.23a)$$

$$y(k) = Cx(k) + e(k) \quad (3.23b)$$

em que $e(k)$ é o processo inovativo e K é o ganho de Kalman. O diagrama de blocos que representa o sistema inovativo é mostrado na Figura 3.3.

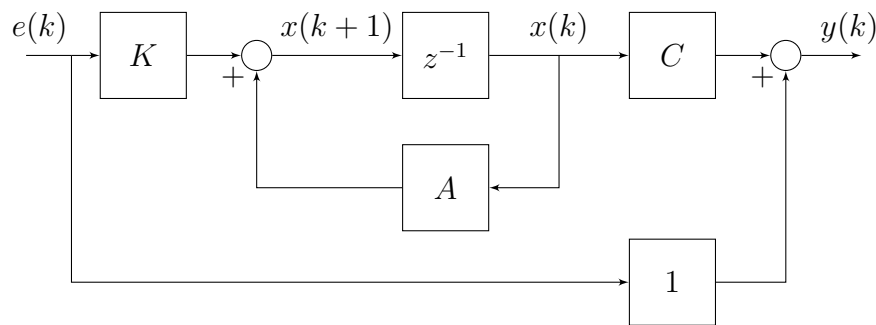


Figura 3.3 - Diagrama de blocos do sistema inovativo.

3.2.1 Algoritmo de Realização Estocástica

Utilizando o algoritmo de realização determinística 3.1, tem-se o seguinte algoritmo de realização estocástica:

Algoritmo 3.2 (Algoritmo de realização estocástica (KATAYAMA, 2005)). *A seguir são apresentadas as etapas do algoritmo.*

Etapa 1: *Formar a matriz bloco de Hankel com as matrizes de covariância $\{\Lambda(l), l = 0, 1, \dots, L-1\}$:*

$$H_{k,k} = \begin{bmatrix} \Lambda(1) & \Lambda(2) & \dots & \Lambda(k) \\ \Lambda(2) & \Lambda(3) & \dots & \Lambda(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(k) & \Lambda(k+1) & \dots & \Lambda(2k-1) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

em que $2k-1 \leq L$ e $k > n$ e:

$$\Lambda(l) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-l-1} y(i+l)y(i)^T \quad (3.25)$$

Etapa 2: *Calcular a decomposição em valores singulares de $H_{k,k}$, tal que:*

$$H_{k,k} = \begin{bmatrix} U_n & U_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix} = U_n \Sigma_n V_n^T \quad (3.26)$$

em que Σ_n contém os n maiores valores singulares de $H_{k,k}$.

Etapa 3: *Calcular as matrizes de controlabilidade e observabilidade definidas por:*

$$\mathcal{O}_k = U_n \Sigma_n^{1/2}, \quad \Gamma_k = \Sigma_n^{1/2} V_n^T \quad (3.27)$$

Etapa 4: *Calcular as matrizes A, C, G utilizando:*

$$A = \mathcal{O}_{k-1}^\dagger \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n), \quad C = \mathcal{O}_k(1 : p, 1 : n), \quad G = \Gamma_k(1 : n, 1 : p) \quad (3.28)$$

Passo 5: *Utilizando as matrizes A, C, G e $\Lambda(0)$, definir a ARE:*

$$P = APA^T + (G - APC^T)(\Lambda(0) - CPC^T)^{-1}(G^T - CPA^T) \quad (3.29)$$

Calcular a solução $P \geq 0$ para obter o ganho de Kalman:

$$K = (G - APC^T)(\Lambda(0) - CPC^T)^{-1} \quad (3.30)$$

Obtém-se o seguinte modelo inovativo:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Ke(k) \\ y(k) &= Cx(k) + e(k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que $\text{cov}\{e(t)\} = \Lambda(0) - CPC^T$.

3.3 Determinação da Ordem do Modelo

A determinação da ordem de um modelo é um problema chave em identificação de sistemas. Em algumas aplicações, a ordem do sistema é sobredeterminada para reduzir o viés (*bias*) e capturar todas as características relevantes da estrutura, mesmo na presença de grandes quantidades de medidas com ruídos. Entretanto, como consequência da utilização da ordem sobrestimada, os polos com significado físico são completados por um conjunto de polos numéricos que não têm relação com o problema estrutural (FREITAS, 2008).

Muitas discussões teóricas e resultados experimentais para a seleção da ordem do modelo estão presentes na literatura, com destaque para os seguintes trabalhos (GERSCH; SHARPE, 1973; ULRYCH; BISHOP, 1974; TONG, 1977; PRIESTLEY, 1983; PUKKILA; KRISHNAIAH, 1988; REZEK; ROBERTS, 1997; WEI, 1990; PROAKIS; MANOLAKIS, 2006). Os critérios mais populares para seleção da ordem dos modelos são: o critério informativo de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1973), o erro de predição final de Akaike (FPE) (AKAIKE, 1969) e o critério de informação Bayesiano (BIC) (AKAIKE, 1979). Em qualquer um desses critérios, que no fundo são medidas do erro dos modelos paramétricos, existe um valor de mínimo local do erro. A ordem para a qual se verifica o valor de mínimo local do erro deve ser escolhida para identificar o modelo.

Na prática, os critérios AIC, FPE e BIC nem sempre são simples de utilizar. Dessa forma, para

a seleção da ordem do modelo no processo de identificação, há uma outra ferramenta de maior utilidade prática do que as referidas anteriormente, que é o diagrama de estabilização. Um diagrama de estabilização auxilia na seleção dos polos correspondentes aos modos naturais de vibração, permitindo distingui-los daqueles que são polos de ruído, numéricos ou computacionais (RODRIGUES, 2004).

O diagrama de estabilização é construído repetindo-se o processo de identificação para diferentes ordens crescentes e um gráfico é traçado com a ordem do modelo no eixo das ordenadas e com a frequência no eixo das abscissas (AUWERAER; PEETERS, 2004). No diagrama, verifica-se que os modos bem excitados estabilizam logo para modelos de ordem baixa, enquanto os modos pouco excitados só estabilizam para ordens mais elevadas. Portanto, normalmente é necessário considerar modelos de ordem elevada, para que seja possível identificar modos pouco excitados. Além disso, nota-se que os polos correspondentes a ruídos, computacionais ou numéricos, não estabilizam (VERBOVEN, 2002).

3.4 Sumário

Neste capítulo foram apresentados dois problemas de realização: a determinística e a estocástica. A realização determinística constrói o modelo no espaço de estados a partir dos dados de entrada e de saída. A solução da realização, encontrar as matrizes de estados A , B , C e D , é baseada na decomposição em valores singulares da matriz de Hankel formada pelas respostas impulsivas. Um algoritmo para a solução do problema de realização determinística foi apresentado. O problema de realização estocástica é definido utilizando-se a teoria de realização determinística em conjunto com uma LMI e é resolvido utilizando-se uma LMI associada com ARI e ARE. A partir da solução ARE, o ganho de Kalman é calculado e um modelo inovativo é definido. Em seguida, um algoritmo de identificação estocástica é apresentado utilizando-se o algoritmo de realização determinístico. Finalmente, discute-se a construção e o uso do diagrama de estabilização para determinar a ordem de um modelo.

4 INDICADORES DE DANOS

Neste capítulo discutem-se duas medidas de distância entre modelos AR: a métrica cepstral e a métrica por subespaços. As distâncias calculadas por essas duas métricas são aplicadas com sucesso em processamento de áudio e de fala, identificação de modelos estocásticos, biologia (comparação entre sequências de DNA e proteínas), classificação e reconhecimento de processos visuais, entre outros. Neste trabalho, o interesse na aplicação das métricas está na detecção, análise da severidade e localização de danos em estruturas. A partir dos coeficientes cepstrais e dos ângulos entre os subespaços dos modelos ARMA, são definidas, respectivamente, a métrica cepstral e a métrica por subespaços para modelos AR. As distâncias calculadas entre os modelos AR são consideradas um indicador de danos.

4.1 Métrica Cepstral

A métrica cepstral é baseada na distância Euclidiana ponderada dos coeficientes cepstrais e foi proposta inicialmente por Martin (2000). O cepstro de um processo estocástico é definido como a transformada inversa de Fourier do logaritmo do espectro de potência. O cepstro foi introduzido por Bogert et al. (1963) como uma ferramenta para detecção de ecos em dados sísmológicos. Além disso, a análise cepstral feita por Bogert et al. tornou-se um caso especial da teoria de sistemas homomórficos feita por Oppenheim (1965). O cepstro é aplicado em uma variedade de áreas incluindo processamento de áudio (LIU et al., 2009; LIU; LIN, 2006), processamento da fala (MUDA et al., 2010; GU; ROSE, 2001; DIMITRIADIS et al., 2005), identificação de modelos estocásticos (OPPENHEIM et al., 1976), diagnóstico de máquinas (WISMER, 2012), identificação de similaridades em sequências de DNA e proteínas (PHAM, 2006; PHAM, 2007), entre outras. Uma revisão dos principais conceitos e das principais características do cepstro pode ser vista em Childers et al. (1977) e em Oppenheim e Schaffer (1975).

Além das aplicações já mencionadas, o cepstro também é utilizado para medir a distância

entre dois sinais. Por exemplo, em Basseville (1989), medidas da distância espectral e medidas da distância espectral paramétrica são utilizadas para calcular a distância entre dois modelos paramétricos. Em Kalpakis et al. (2001), a distância cepstral não ponderada foi utilizada para agrupar séries temporais e teve como resultado o desempenho melhor em relação ao agrupamento utilizando técnicas como a transformada discreta de Fourier (DFT), análise de componentes principais (PCA) e transformada *wavelet* discreta (DWT). Também, em Boets et al. (2005, 2006), a distância cepstral ponderada apresentada por Martin (2000) foi utilizada para fazer o agrupamento de séries temporais. O agrupamento usando a métrica cepstral ponderada apresentou resultados melhores em comparação com a distância cepstral não ponderada, distância entre os espectros, distância H_2 e a distância H_∞ .

Nesta pesquisa, a distância entre dois modelos paramétricos é calculada utilizando a métrica cepstral ponderada. A distância cepstral ponderada entre os modelos autorregressivos (AR) é derivada a partir da distância cepstral ponderada entre modelos autorregressivos de média móvel (ARMA).

A série temporal x_n representa um processo ARMA se for satisfeita a seguinte relação:

$$x_n = - \sum_{j=1}^p a_j x_{n-j} + \sum_{j=0}^q b_j e_{n-j}$$

em que e_n é um ruído branco com média zero e variância σ . No domínio z , a função de transferência é:

$$H(z) = \sigma \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^p a_j z^{-j}} = \sigma \frac{\prod_{i=1}^q (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i z^{-1})} \quad (4.1)$$

no qual α_i e β_i são, respectivamente, polos e zeros e p e q são suas ordens. Os coeficientes da parte AR são a_j e b_j são os coeficientes da parte MA. Vale a pena ressaltar que o processo ARMA também pode ser representado no espaço de estados pela Equação 3.23.

A métrica cepstral para calcular a distância entre dois modelos ARMA foi definida por Martin (2000). A distância é baseada nos coeficientes cepstrais dos modelos ARMA. Para um modelo ARMA linear, invariante, SISO e com função de transferência $H(z)$, os coeficientes são calculados

como a transformada inversa z do logaritmo de seu espectro:

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) z^{-m} &= \log H(z) \bar{H}(z^{-1}) \\
&= \log \left(\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^q (1 - \beta_i z^{-1})(1 - \bar{\beta}_i z)}{\sum_{i=1}^p (1 - \alpha_i z^{-1})(1 - \bar{\alpha}_i z)} \right) \\
&= \log(\sigma^2) + \sum_{i=1}^q (\log(1 - \beta_i z^{-1}) + \log(1 - \bar{\beta}_i z)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p (\log(1 - \alpha_i z^{-1}) + \log(1 - \bar{\alpha}_i z))
\end{aligned} \tag{4.2}$$

em que $\bar{d}$ denota o complexo conjugado de $d \in \mathbb{C}$.

Considerando que todos os polos e zeros estão dentro do círculo unitário (modelo de fase mínima), as identidades a seguir podem ser consideradas:

$$\log(1 - az^{-1}) = - \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{a^\eta}{\eta} z^{-\eta}, \quad |z| > |a| \tag{4.3a}$$

$$\log(1 - bz) = - \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{b^\eta}{\eta} z^\eta, \quad |z| < |b^{-1}| \tag{4.3b}$$

Substituindo-se a Equação 4.3 na Equação 4.2, tem-se:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) z^{-m} = \log(\sigma^2) + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^m}{m} z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_i^m}{m} z^m \right) - \sum_{i=1}^q \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_i^m}{m} z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_i^m}{m} z^m \right)$$

Assim, os coeficientes cepstrais podem ser expressos em função dos polos e zeros:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} [\sum_{i=1}^p \alpha_i^m - \sum_{i=1}^q \beta_i^m], & m > 0 \\ \log(\sigma^2), & m = 0 \\ \frac{1}{m} [\sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_i^{-m} - \sum_{i=1}^q \bar{\beta}_i^{-m}], & m < 0 \end{cases}$$

e considerando que os polos e zeros ocorram em pares complexos conjugados, os coeficientes

cepstrais podem ser reescritos como:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{|m|} [\sum_{i=1}^p \alpha_i^{|m|} - \sum_{i=1}^q \beta_i^{|m|}], & m \neq 0 \\ \log(\sigma^2), & m = 0 \end{cases}$$

Para dois modelos ARMA, $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, estáveis e de fase mínima, Martin (2000) define a distância entre $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ como:

$$D(M^{(1)}, M^{(2)}) = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} m |c^{(1)}(m) - c^{(2)}(m)|^2} \quad (4.4)$$

em que $c^{(1)}(m)$ e $c^{(2)}(m)$ são os coeficientes cepstrais de $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, respectivamente.

Considerando-se que dois modelos ARMA $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ com função de transferência $M^{(1)} = \frac{a^{(1)}(z)}{b^{(1)}(z)}$ e $M^{(2)} = \frac{a^{(2)}(z)}{b^{(2)}(z)}$ estejam em série com $M^{(3)} = \frac{1}{(a^{(1)}(z)a^{(2)}(z))}$ (um filtro). Então, os modelos resultantes são:

$$M^{(1-3)} = M^{(1)} M^{(3)} = \frac{1}{b^{(1)}(z)a^{(2)}(z)}$$

$$M^{(2-3)} = M^{(2)} M^{(3)} = \frac{1}{b^{(2)}(z)a^{(1)}(z)}$$

Nota-se que a distância entre dois modelos ARMA é euclidiana e ponderada por m , desse modo:

$$D(M^{(1)}, M^{(2)}) = D(M^{(1-3)}, M^{(2-3)})$$

Assim, para calcular a distância entre dois modelos ARMA $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, é suficiente considerar apenas os modelos AR $M^{(1-3)}$ e $M^{(2-3)}$.

Além disso, do ponto de vista da análise espectral moderna, o modelo AR provê uma adequada aproximação para o espectro de potência que contém picos agudos, sendo que os picos são

representados pelos polos do modelo AR. Dessa forma, os polos do modelo AR podem indicar uma forte ressonância da estrutura (ZHENG, 2008).

Para dois modelos AR M^1 e M^2 de ordem $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ e polos $\alpha_i^{(1)}$ e $\alpha_i^{(2)}$, a métrica cepstral pode ser simplificada em termos dos polos como a seguir:

$$D(M^1, M^2)^2 = \log \left(\frac{\prod_{i=1}^{p^{(1)}} \prod_{j=1}^{p^{(2)}} (1 - \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_j^{(2)}) \prod_{i=1}^{p^{(2)}} \prod_{j=1}^{p^{(1)}} (1 - \alpha_i^{(2)} \bar{\alpha}_j^{(1)})}{\prod_{i=1}^{p^{(1)}} \prod_{j=1}^{p^{(1)}} (1 - \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_j^{(1)}) \prod_{i=1}^{p^{(2)}} \prod_{j=1}^{p^{(2)}} (1 - \alpha_i^{(2)} \bar{\alpha}_j^{(2)})} \right) \quad (4.5)$$

4.2 Métrica por Subespaços

A métrica por subespaços é baseada nos ângulos entre os subespaços dos modelos ARMA. A teoria que calcula a distância entre modelos ARMA foi apresentada inicialmente por De Cock e De Moor (2000). Assim como a métrica cepstral, a métrica por subespaços vem sendo aplicada em diferentes áreas. Por exemplo, Bissacco et al. (2001) aplicaram a métrica por subespaços para reconhecer os movimentos humanos. Em Vidal et al. (2007), são feitas a classificação e o reconhecimento de processos visuais dinâmicos utilizando a métrica por subespaços. Similarmente à métrica cepstral, a distância calculada entre os modelos AR utilizando os ângulos entre os subespaços é derivada a partir da distância entre dois modelos ARMA.

Um modelo ARMA, linear, invariante com o tempo e de fase mínima (todos os polos e zeros estão dentro do círculo unitário) pode ser representado no espaço de estados na forma inovativa como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Ke(k) \\ y(k) &= Cx(k) + e(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que $e(k)$ é o processo inovativo e K é o ganho de Kalman.

A matriz infinita de observabilidade do sistema 4.6 é expressada como:

$$\mathcal{O}_\infty = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots \end{bmatrix}^T$$

Do modelo 4.6, as equações no espaço de estados do modelo inverso podem ser derivadas como a seguir:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A - KC)x(k) + Ky(k) \\ u(k) &= -Cx(k) + y(k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consequentemente, os zeros do sistema 4.6 são os autovalores de $(A - KC)$. Similarmente, a matriz infinita de observabilidade do sistema inverso é dada por:

$$\mathcal{O}_{i\infty} = \begin{bmatrix} -C & -C(A - KC) & -C(A - KC)^2 & \dots \end{bmatrix}^T$$

Considerando-se que dois modelos ARMA $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ são estáveis, de fase mínima e de ordem n . $\mathcal{O}_\infty^{(1)}$ e $\mathcal{O}_\infty^{(2)}$ são as matrizes infinitas de observabilidade de $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, respectivamente, enquanto $\mathcal{O}_{i\infty}^{(1)}$ e $\mathcal{O}_{i\infty}^{(2)}$ são as matrizes infinitas de observabilidade dos modelos inversos de $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, respectivamente. Os ângulos entre os subespaços dos modelos $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ são definidos como os ângulos principais θ_i ($i = 1, \dots, 2n$) entre os espaços colunas de $[\mathcal{O}_\infty^{(1)} \quad \mathcal{O}_\infty^{(2)}]$ e $[\mathcal{O}_\infty^{(2)} \quad \mathcal{O}_\infty^{(1)}]$ (DE COCK; DE MOOR, 2000; DE COCK; DE MOOR, 2002).

Para os dois modelos $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ de ordem n , a distância entre os modelos ARMA é definida em termos dos ângulos entre os subespaços como a seguir:

$$D(M^{(1)}, M^{(2)})^2 = \log \left(\prod_{i=1}^{2n} \frac{1}{\cos^2(\theta_i)} \right) \quad (4.8)$$

em que θ_i são os ângulos entre os subespaços dos modelos $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$.

Similarmente à métrica cepstral que utiliza apenas os polos do modelo AR, a métrica por subespaços pode ser derivada a partir dos ângulos entre os subespaços dos modelos AR. Considerando que dois modelos AR estáveis e observáveis $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$ sejam caracterizados na forma de

espaço de estados por suas matrizes de estados $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$, por suas matrizes de saídas $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$ e por suas matrizes de observabilidade estendidas $\mathcal{O}_\infty^{(1)}$ e $\mathcal{O}_\infty^{(2)}$, respectivamente. Assim, para dois modelos AR $M^{(1)}$ de ordem $n^{(1)}$ e $M^{(2)}$ de ordem $n^{(2)}$, a métrica em termos dos ângulos entre os subespaços dos modelos AR é definida da seguinte maneira:

$$D(M^{(1)}, M^{(2)})^2 = \log \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2(\theta_i)} \right) \quad (4.9)$$

em que $n = \max(n^{(1)}, n^{(2)})$ e θ_i ($i = 1, \dots, n$) são os ângulos entre os subespaços dos modelos AR $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, definidos como os ângulos principais entre os subespaços colunas $\mathcal{O}_\infty^{(1)}$ e $\mathcal{O}_\infty^{(2)}$.

4.3 Sumário

Neste capítulo, duas métricas para calcular a distância entre modelos AR foram apresentadas. Essas duas métricas são utilizadas com frequência para o reconhecimento de voz, diagnóstico de máquinas e o reconhecimento de movimentos humanos. A partir da função de transferência de um modelo ARMA, são obtidos os coeficientes cepstrais. A distância entre dois modelos ARMA é definida como a distância Euclidiana ponderada dos coeficientes cepstrais. A partir disso, a métrica cepstral é derivada para um sistema AR. Em seguida, são definidas as matrizes de observabilidade estendidas do modelo inovativo e de seu modelo inverso. Com as matrizes de observabilidade estendidas são montados dois subespaços e os ângulos principais entre eles são utilizados para calcular a distância entre dois modelos ARMA. Similarmente à métrica cepstral, a métrica por subespaços é derivada para modelos AR.

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, são investigadas a métrica cepstral e a métrica por subespaços para detecção, análise de severidade e localização de danos aplicados em estruturas reais. Inicialmente, com o auxílio de três vigas de alumínio e duas massas de $2.5g$ e $8.5g$, são simulados quatro danos diferentes. As distâncias calculadas a partir das métricas são utilizadas para detecção de danos nas vigas de alumínio. Em seguida, utilizando-se uma placa de alumínio retangular e com o auxílio de três massas de $2.5g$, $8.5g$ e $20g$ são simulados cinco danos na placa com diferentes severidades e localizações. Assim, as métricas são analisadas para detecção, quantização de severidade e localização de danos.

5.1 Instrumentação, Diagrama de Blocos e Sinais dos Experimentos

Para a aquisição e geração dos sinais, foi utilizada uma placa dSPACE®, modelo DS1104. Essa placa é integrada com Matlab®\Simulink® e dessa forma a aquisição, a geração e o processamento dos sinais (podendo ser em tempo real) são realizados pelo conjunto Matlab®\Simulink®\dSPACE®. Além disso, a placa dSPACE® fornece uma biblioteca de blocos (RTI - *Real Time Interface*) do Simulink® que, para cada função da placa, há um bloco específico. Também, o pacote inclui o software ControlDesk®, que é utilizado para a construção de uma interface gráfica que pode monitorar e alterar, em tempo real, as variáveis da aplicação que estão sendo executadas na placa.

Neste experimento, os atuadores e os sensores são do tipo piezelétrico. Os elementos piezelétrico são cristais, como o quartzo, a turmalina e o titanato, que acumulam cargas elétricas em certas áreas da estrutura cristalina quando sofrem uma deformação física, por ação de uma pressão. Seu sinal de resposta é linear com a variação de deformação e eles são capazes de fornecer sinais de frequências de milhões de ciclos por segundo. O efeito piezelétrico é um fenômeno reversível e, se for conectado a um potencial elétrico, resultará em uma correspondente deformação física, com

o efeito altamente estável e exato (ALVES; BORSCHIVER, 2009). No trabalho, foi utilizada cerâmica de titanato zirconato de chumbo (PZT) como material piezelétrico. A Figura 5.1 apresenta uma foto do sensor/atuator piezelétrico utilizado nos experimentos.



Figura 5.1 - Sensor/Atuador piezelétrico.

No experimento, o sinal de excitação é amplificado e aplicado a um transdutor piezelétrico (atuador). O sinal de vibração do sistema é capturado por outro transdutor piezelétrico, amplificado e transmitido para a dSPACE®. O diagrama de blocos que representa um par de atuador e sensor é apresentado pela Figura 5.2.

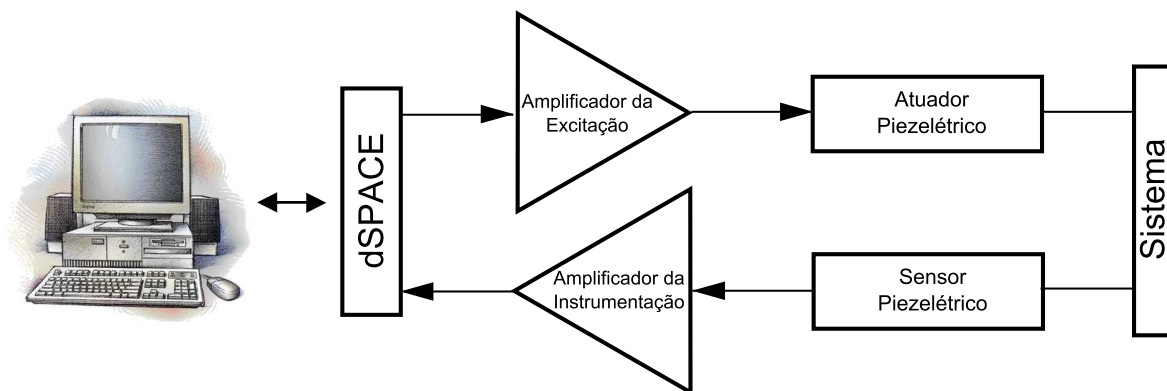


Figura 5.2 - Diagrama de blocos do experimento.

Na identificação dos sistemas utilizando o método por subespaços apresentado no capítulo 3, um sinal de ruído branco com média zero, variância 0,4, amostrado a $20kHz$ e com 50000 pontos é aplicado como sinal de excitação.

Além disso, para gerar as funções de resposta em frequência (FRFs), é utilizado um sinal determinístico e periódico, amostrado a $20kHz$, do tipo Schroeder (PINTELON; SCHOUKENS, 2001), com banda passante entre $0Hz$ e $10kHz$. O sinal do tipo Schroeder é gerado de acordo com a expressão seguinte:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N A \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

com a fase de Schroeder $\phi_k = -k(k-1)\pi/N$, $f_k = l_k f_0$ com $l_k \in \mathbb{N}$ e apresenta as seguintes características:

- Sinal periódico com período $T_0 = 1/f_0$.
- Resolução de frequência é $1/T$, onde T é tempo total das medidas.
- As frequências podem ser alteradas sem restrições no termo $k f_0$.

O cálculo da FFT feito a partir de sinais estocásticos são propensos a aumentos sistemáticos de erros devido ao *leakage*. Utilizando sinais periódicos e medindo números inteiros de períodos, os erros devidos ao *leakage* são eliminados completamente. Também, os erros devido ao viés (*bias*) são reduzidos sistematicamente (PINTELON; SCHOUKENS, 2001).

5.2 Estudo de Danos em Vigas de Alumínio

O experimento consiste em três vigas similares de alumínio que são suportadas por espumas para simular vibrações livres. Com o auxílio de duas massas, são criadas cinco configurações diferentes:

1. Viga saudável (referência)
2. Viga cortada na forma triangular (viga danificada 1)
3. Viga cortada na forma circular (viga danificada 2)
4. Viga saudável com a adição de uma massa de $2.5g$ (viga danificada 3)
5. Viga saudável com a adição de uma massa de $8.5g$ (viga danificada 4)

Todas essas configurações são ilustradas pela Figura 5.3. Além disso, os sensores e atuadores situam-se em extremidades opostas das vigas. A Figura 5.4 mostra uma fotografia do experimento.

As Figuras 5.5 a 5.9 apresentam os diagramas de estabilização e as FRFs para as configurações apresentadas pela Figura 5.3. Nota-se, na comparação dos diagramas de estabilização com suas respectivas FRFs, que existe uma convergência entre os principais polos físicos do sistema e os picos das FRFs. Também, em todas as configurações, os principais polos dos sistemas convergiram para ordem 40. Dessa forma, a ordem escolhida para a identificação dos modelos das vigas é 40.

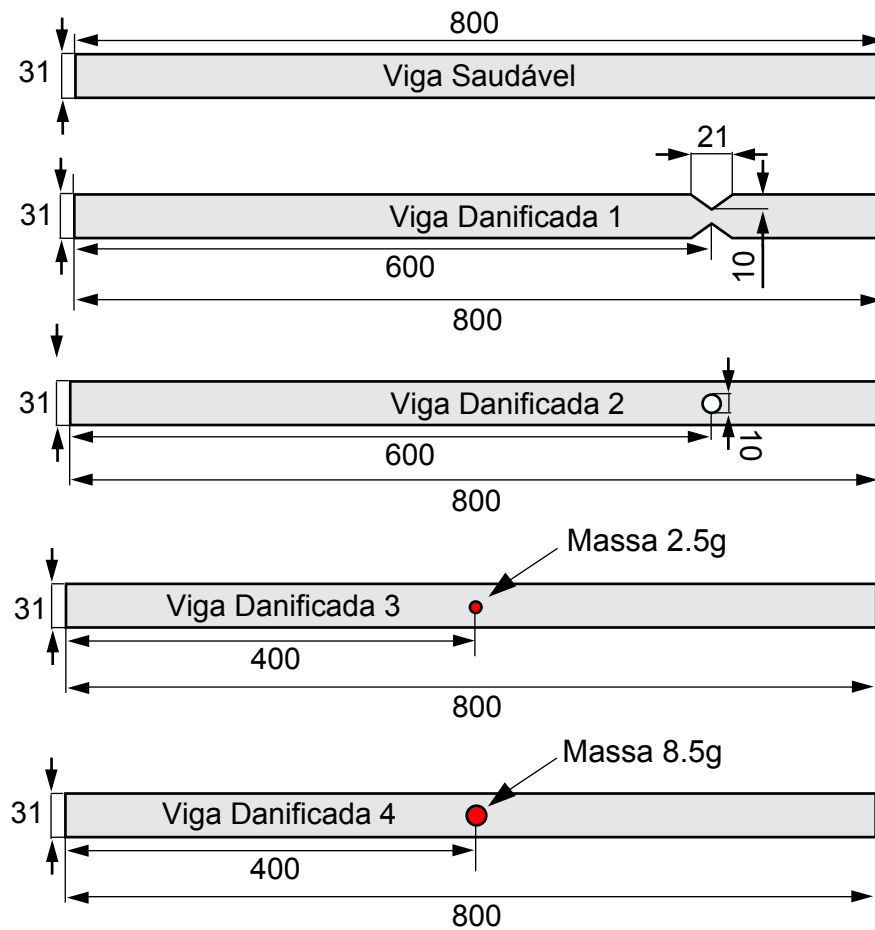


Figura 5.3 - Vigas utilizadas para identificação de danos.

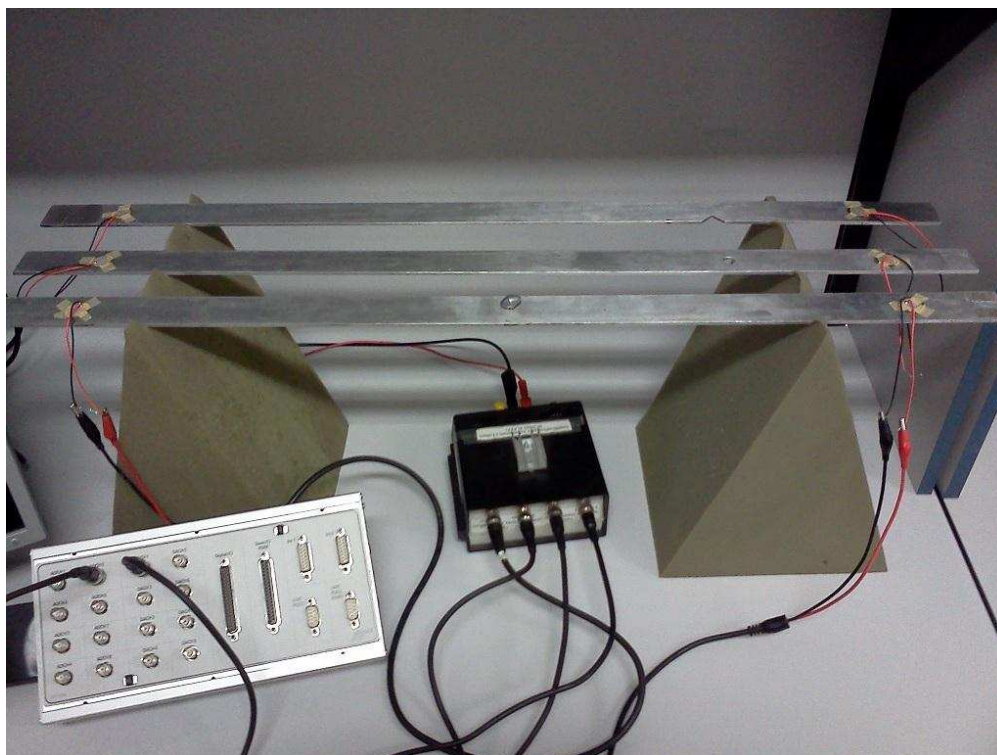


Figura 5.4 - Foto do experimento com as vigas.

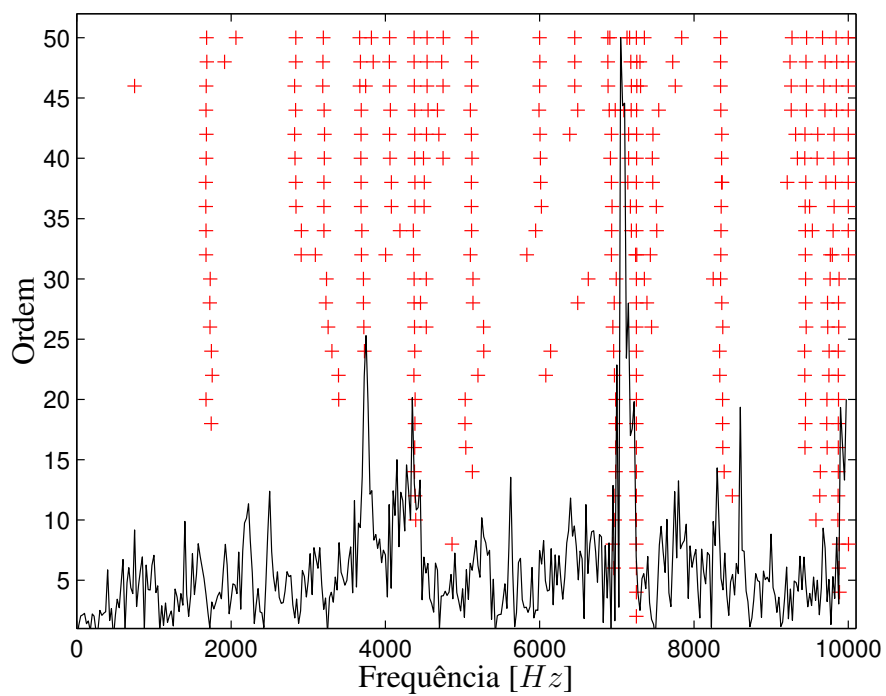


Figura 5.5 - Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga saudável.

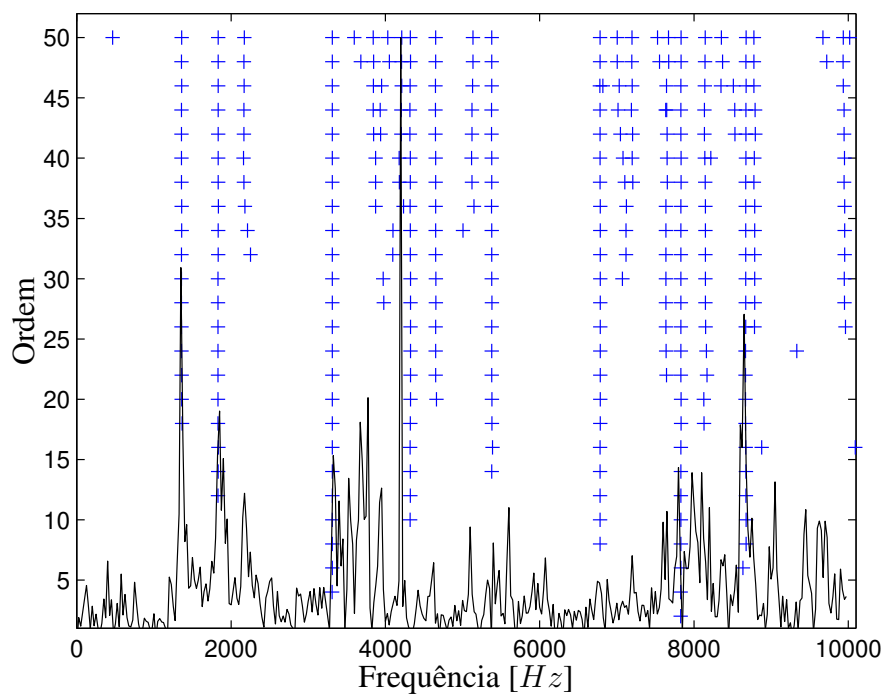


Figura 5.6 - Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 1.

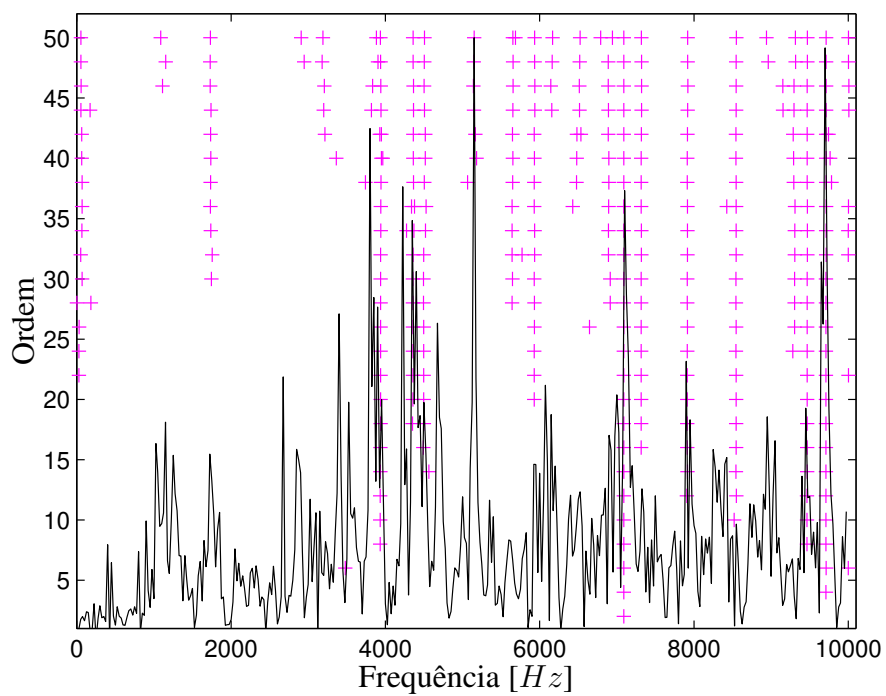


Figura 5.7 - Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 2.

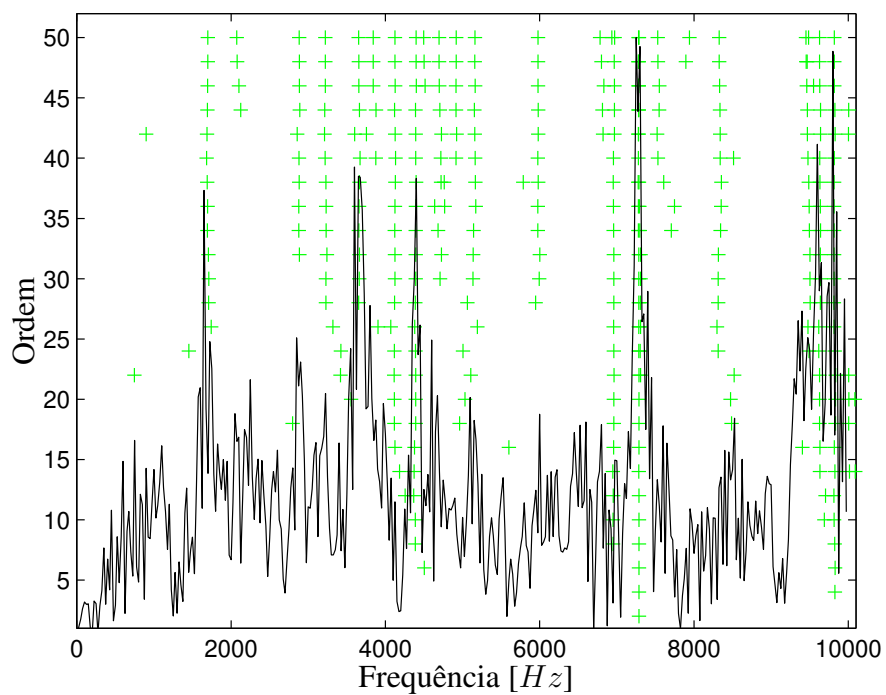


Figura 5.8 - Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 3.

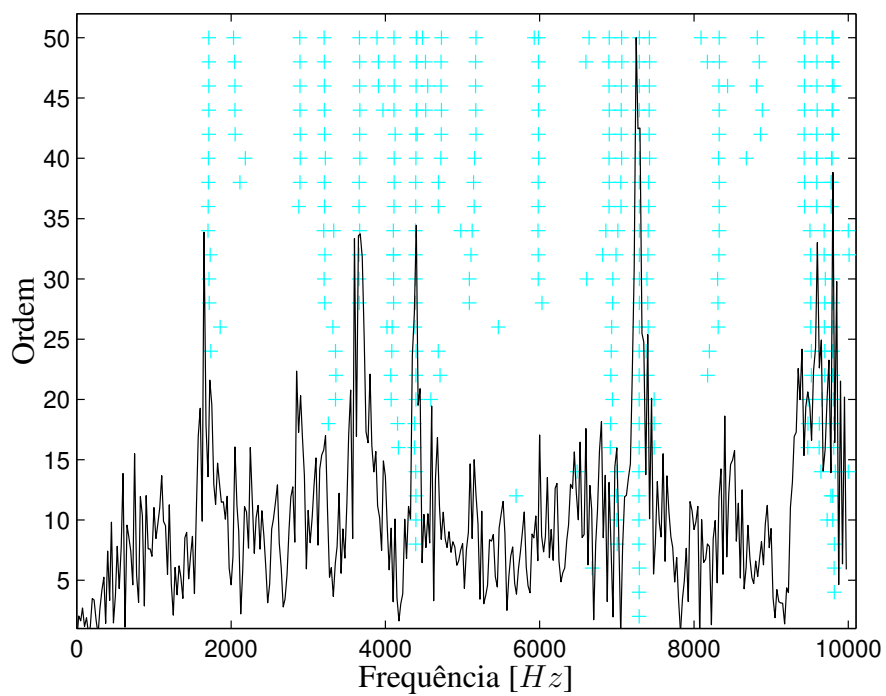


Figura 5.9 - Comparação entre o diagrama de estabilização (+) e a FRF (-) para a viga danificada 4.

O modelo da viga saudável é adotado como modelo de referência e em seguida comparado com os outros modelos através da métrica cepstral e da métrica por subespaços. A Figura 5.10 mostra as distâncias calculadas pela métrica cepstral em termos dos polos dos modelos AR segundo a Equação 4.5, e a Figura 5.11 apresenta as distâncias calculadas pela métrica por subespaços em termos dos ângulos entre os subespaços dos modelos AR segundo a Equação 4.9.

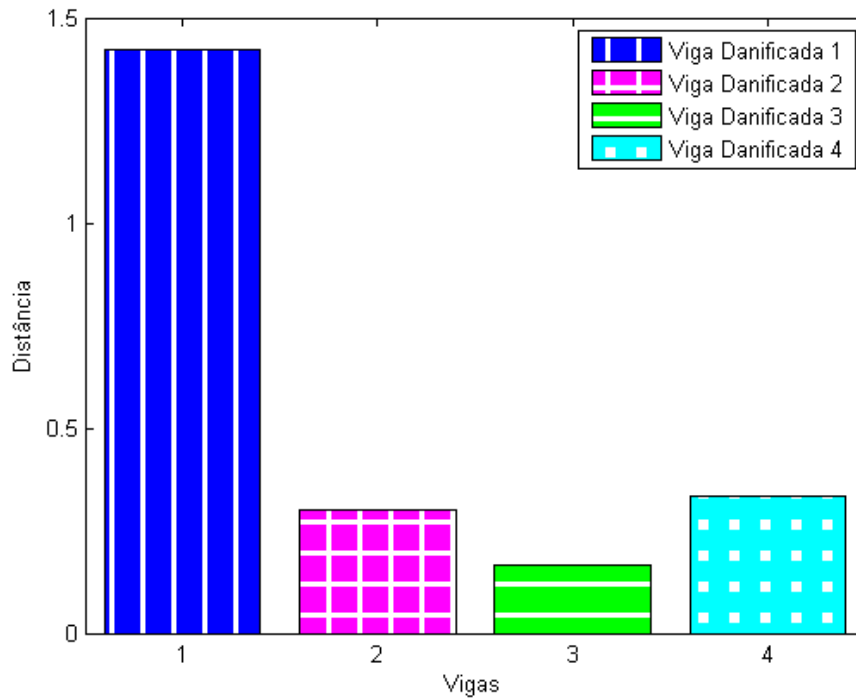


Figura 5.10 - Distâncias cepstrais entre o modelo de referência e os modelos das vigas danificadas.

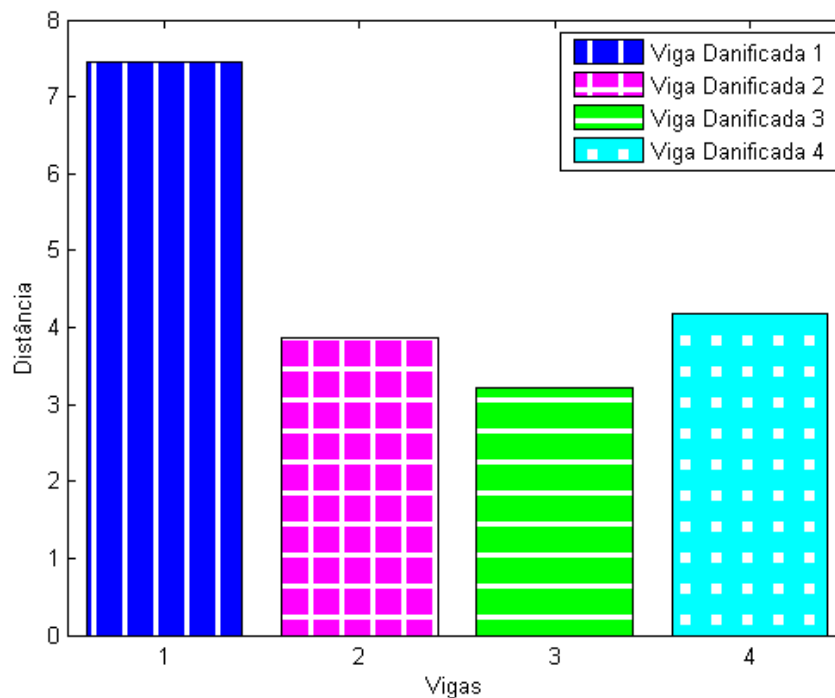


Figura 5.11 - Distâncias entre o modelo de referência e os modelos das vigas danificadas calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços.

Nota-se pelas Figuras 5.10 e 5.11 que as distâncias calculadas utilizando a métrica por subespaços são maiores que as distâncias cepstrais. Esse resultado é um indicativo de que a métrica por subespaços é um indicador de danos mais sensível às mudanças dos parâmetros do sistema causadas pelas falhas do que o indicador cepstral. Além disso, apesar dos valores diferentes calculados utilizando as duas métricas, a interpretação dos resultados das métricas são equivalentes. Dessa forma, a análise seguinte pode ser utilizada tanto para a métrica cepstral quanto para a métrica por subespaços. Observa-se que a maior distância entre o modelo de referência e os modelos que representam as vigas danificadas ocorreu com o modelo que descreve a viga cortada na forma triangular. Esse resultado já era esperado, pois essa viga sofreu a maior modificação em sua estrutura original. Além disso, a diferença entre os indicadores para a viga danificada devido ao acréscimo da massa de 2.5g e para a viga danificada devido ao acréscimo da massa de 8.5g abre a possibilidade da utilização das métricas para análise de severidade de danos. Dessa forma, o experimento seguinte foi projetado para analisar a eficácia das métricas em quantificar a severidade dos danos e também averiguar a possibilidade de localização deles.

5.3 Estudo de Danos em uma Placa Retangular de Alumínio

O sistema a ser investigado é uma placa retangular de alumínio suportada por espumas para simular vibrações livres. A placa retangular tem os lados medindo $700mm \times 500mm$ e espessura de $1mm$. A fotografia do experimento é apresentada na Figura 5.12.

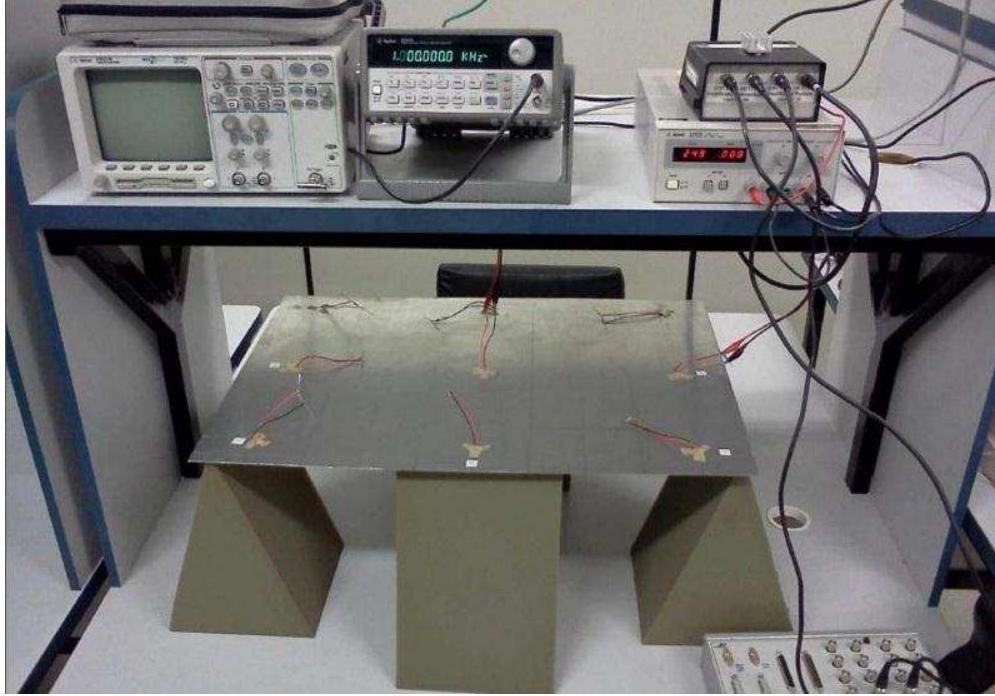


Figura 5.12 - Experimento com a placa de alumínio.

No experimento com a placa, são utilizados oito sensores piezelétricos $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$ e s_8 e um atuador piezelétrico a_1 . O atuador e os sensores são dispostos na placa retangular segundo a Figura 5.13. A Tabela 5.1 apresenta a localização precisa dos atuadores e dos sensores segundo o sistema de referência apresentado na Figura 5.13.

Tabela 5.1 - Localização dos sensores e do atuador

Eixos	a_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
x (cm)	0	-28	-28	-28	0	28	28	28	0
y (cm)	0	-20	0	20	20	20	0	-20	-20

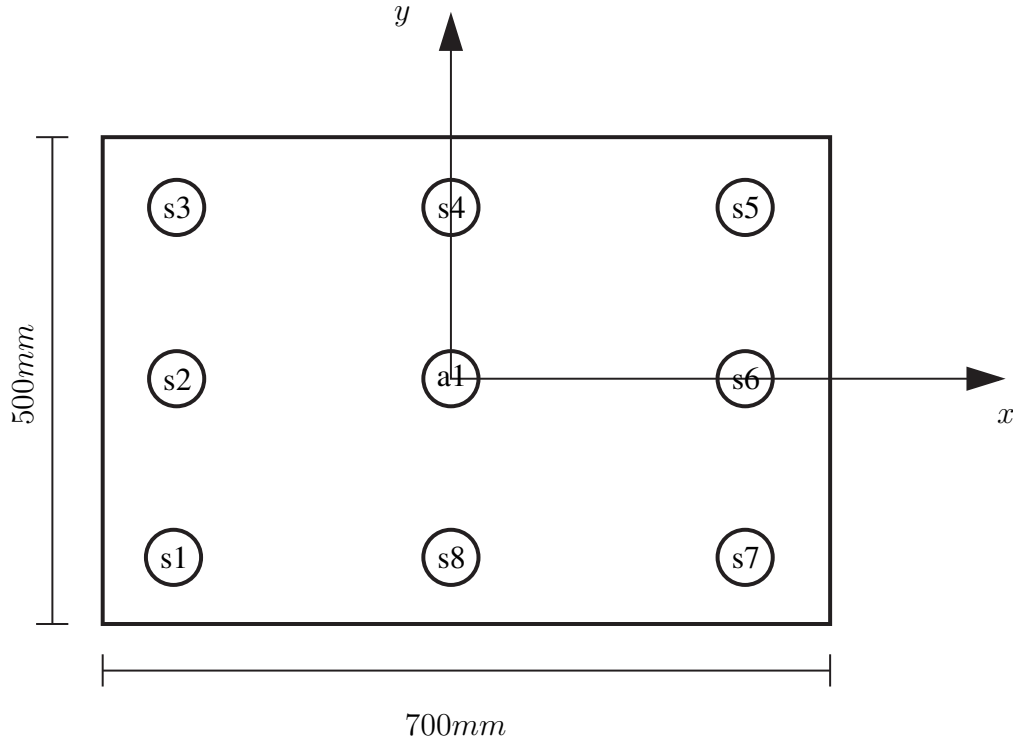


Figura 5.13 - Disposição dos atuadores e sensores na placa retangular de alumínio.

Para cada par de sensor e atuador, é considerado um sistema de uma entrada e uma saída (SISO), ou seja, $a_1 - s_1, a_1 - s_2, \dots, a_1 - s_8$ representam os oito sistemas SISO e são chamados, para simplificar a nomenclatura, apenas de sistemas $s_1, s_2, \dots, s_8$.

Para simular diferentes danos e graus de severidade, colocam-se massas de $2.5g$, $8.5g$ e $20g$ sobre a placa. Com essas massas, inicialmente são criadas quatro configurações diferentes causadas pela interação entre as massas e a placa. As configurações são criadas da seguinte forma:

1. Placa sem massas, placa saudável (referência).
2. Massa de $2.5g$ colocada na posição $(-21, -5)$ (dano 1).
3. Massa de $8.5g$ colocada na posição $(-21, -5)$ (dano 2).
4. Massa de $20g$ colocada na posição $(-21, -5)$ (dano 3).

A Figura 5.14 ilustra a posição em que as massas de $2.5g$, $8.5g$ e $20g$ foram colocadas. Os oito modelos SISO da placa saudável (configuração 1) são considerados modelos de referência. Assim, utilizando-se a métrica cepstral e a métrica por subespaços, cada modelo de referência é

comparado com seu respectivo modelo para cada uma das configurações 2, 3 e 4. Por exemplo, o modelo de referência s_1 da configuração 1 é comparado com o modelo s_1 da configuração 2 e assim por diante.

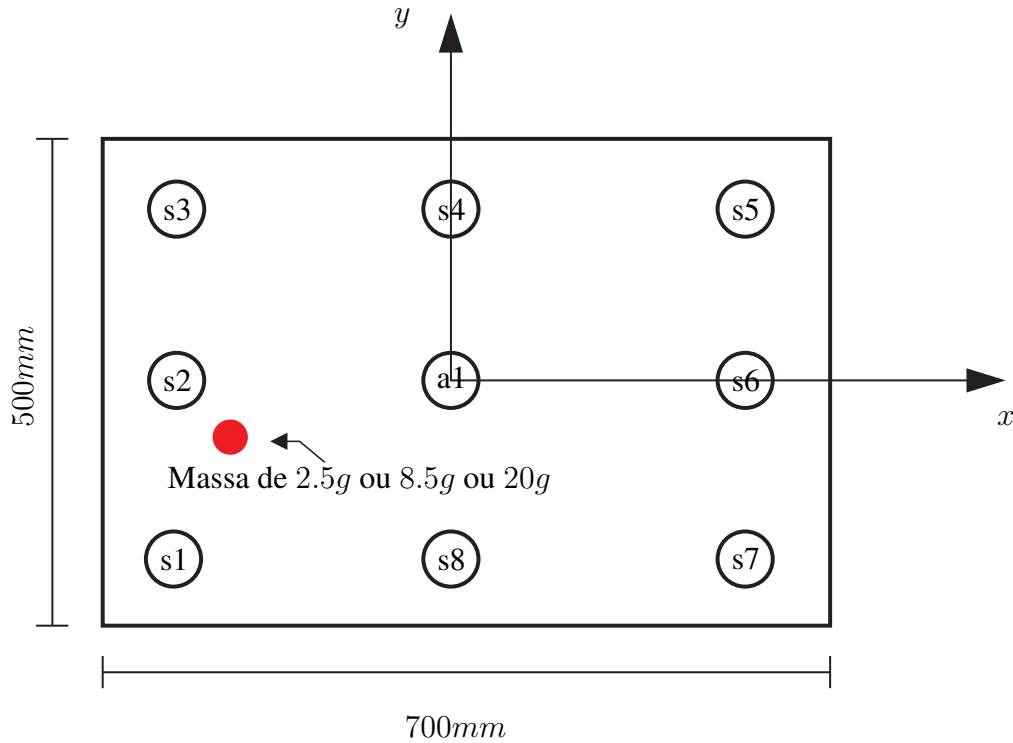


Figura 5.14 - Disposição dos atuadores, sensores e massas na placa para as configurações 2, 3 e 4.

As Figuras 5.15 a 5.17 comparam os diagramas de estabilização entre o modelo s_1 da placa saudável e os modelos s_1 que representam a placa com o dano 1, dano 2 e dano 3. Nesses diagramas, já é possível visualizar a diferença entre o modelo de referência e os modelos que descrevem as vigas danificadas. Assim, utilizando-se a métrica cepstral e a métrica por subespaços, todos os modelos de referência são comparados com os modelos que descrevem a placa com danos para as configurações 2, 3 e 4 e os resultados são apresentados pelas Figuras 5.18 e 5.19.

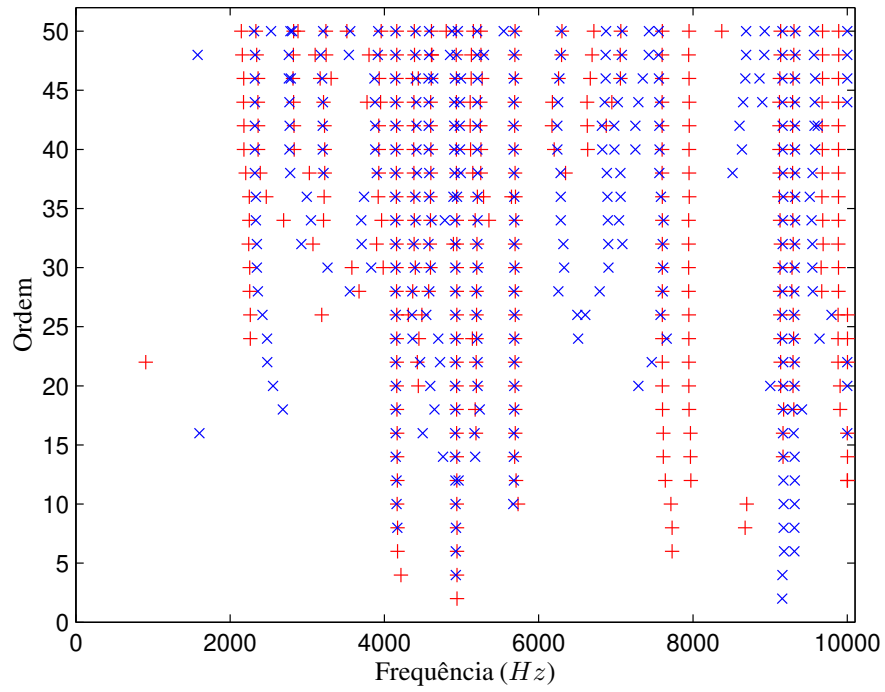


Figura 5.15 - Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 1.

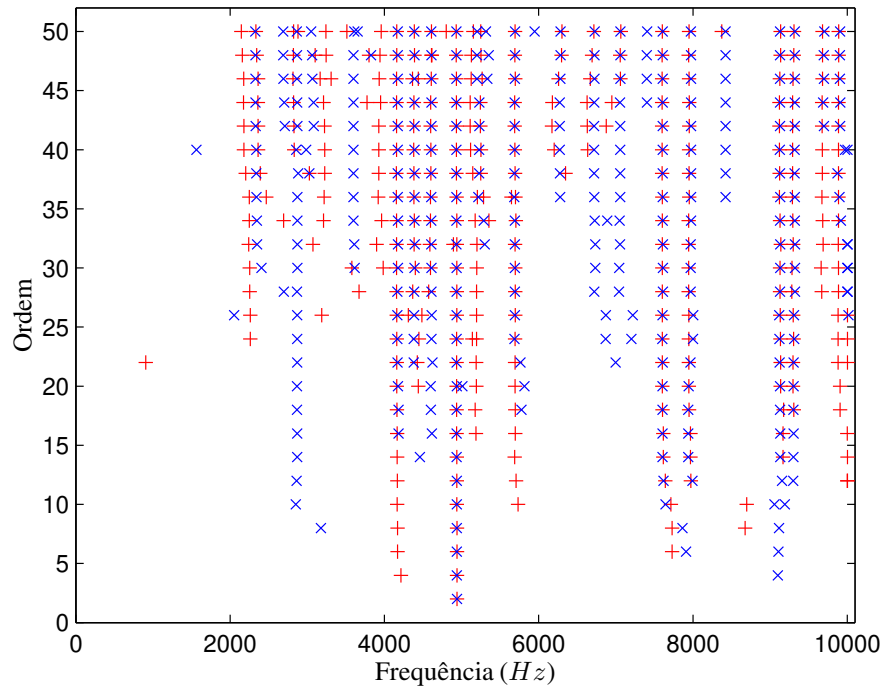


Figura 5.16 - Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 2.

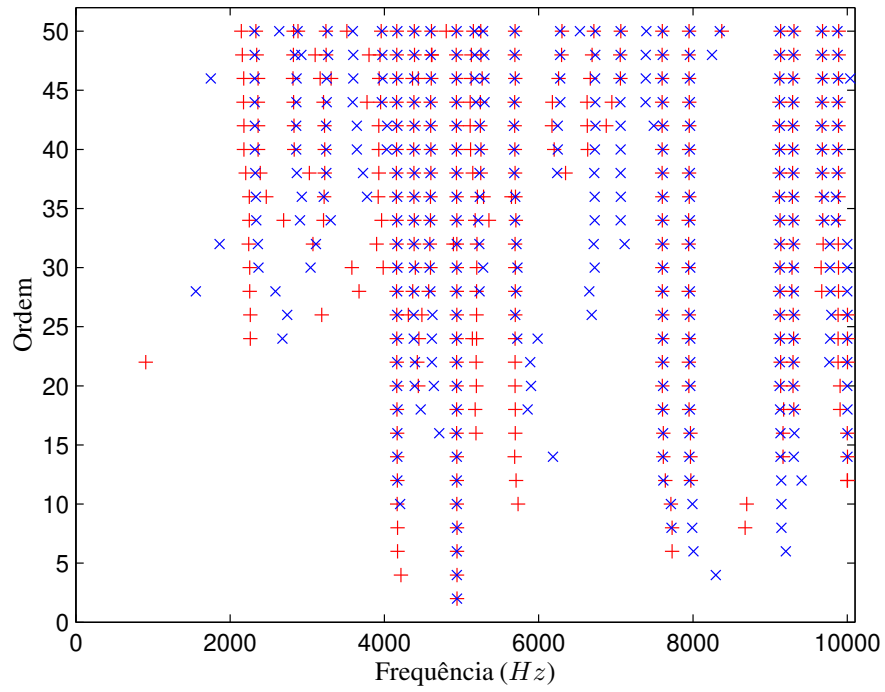


Figura 5.17 - Comparação entre os diagramas de estabilização do modelo s_1 da placa saudável (+) com o modelo s_1 que representa a placa danificada (x) - dano 3.

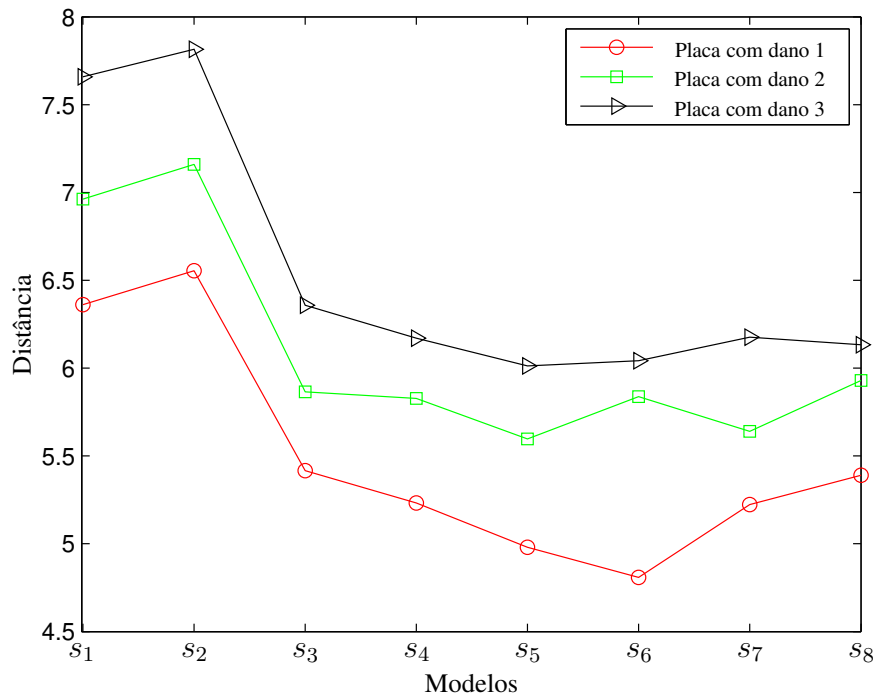


Figura 5.18 - Distâncias entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços - configurações 2, 3 e 4.

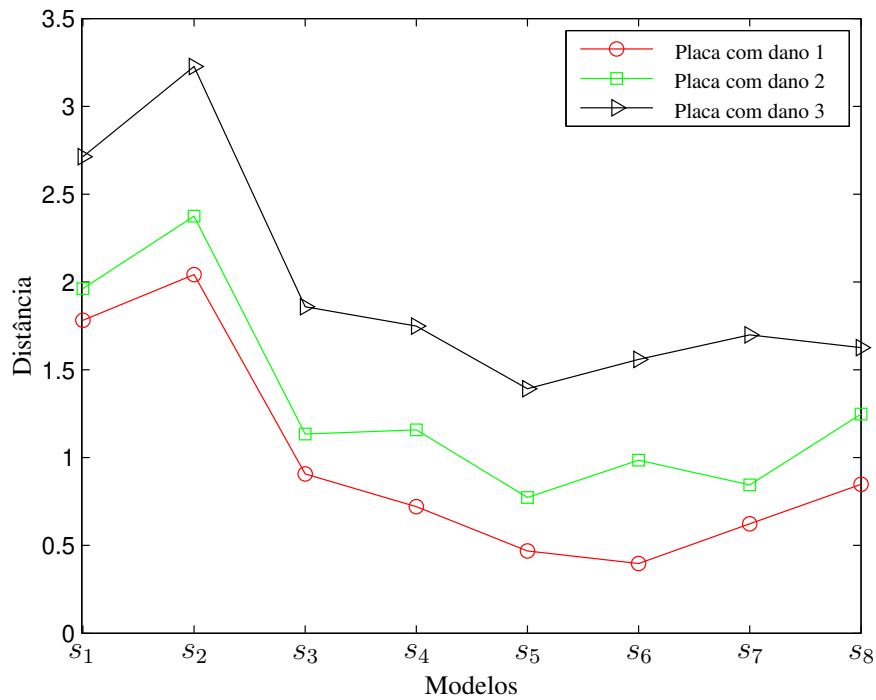


Figura 5.19 - Distâncias cepstrais entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada - configurações 2, 3 e 4.

Nesse experimento, constata-se também que as distâncias calculadas utilizando a métrica por subespaços são maiores que as distâncias cepstrais. Dessa forma, é possível afirmar que a métrica por subespaços é mais sensível a mudanças dos parâmetros do modelo AR causadas pelas falhas. Além disso, nota-se que, em ambas as métricas, todas as massas produziram diferenças (distâncias) entre os sistemas, porém as distâncias aumentam com o aumento das massas. Assim, pode-se afirmar que a métrica cepstral e a métrica por subespaços são eficientes na quantificação da severidade. Além disso, observa-se que as maiores diferenças ocorrem em relação aos sistemas s_1 e s_2 . Vale a pena ressaltar que os danos induzidos na placa pela introdução das massas de $2.5g$, $8.5g$ e $20g$ situam-se entre os sistemas s_1 e s_2 , sendo mais próximos do sistema s_2 . Dessa forma, as métricas pesquisadas demonstram ser capazes, além de detectar falhas e analisar severidade, de localizar danos. Assim, para verificar a capacidade das métricas na localização de danos, duas outras configurações são propostas:

5. Massa de $20g$ colocada na posição $(-21, -5)$ e massa de $2.5g$ colocada na posição $(-21, -5)$ (dano 4).

6. Massa de $20g$ colocada na posição $(-21, -5)$ e massa de $8.5g$ colocada na posição $(-21, -5)$ (dano 5).

A Figura 5.20 ilustra as posições onde foram colocadas as massas para as configurações 5 e 6. A Figura 5.21 e 5.22 apresentam os resultados da comparação entre os modelos de referência e os modelos que descrevem a placa para as configurações 5 e 6 utilizando a métrica cepstral e a métrica por subespaços. Observa-se que a distância aumenta com o aumento da massa. Além disso, nota-se que existem duas regiões em que as distâncias são maiores: região entre os sensores s_1 e s_2 e região entre o sensor s_4 e s_5 . Na região entre os sensores s_1 e s_2 foi colocada a massa de $20g$ e na região entre s_4 e s_5 foram colocadas as massas de $2.5g$ e $8.5g$. Assim, constata-se que a métrica cepstral e a métrica por subespaços podem ser utilizadas também para a localização de danos em estruturas.

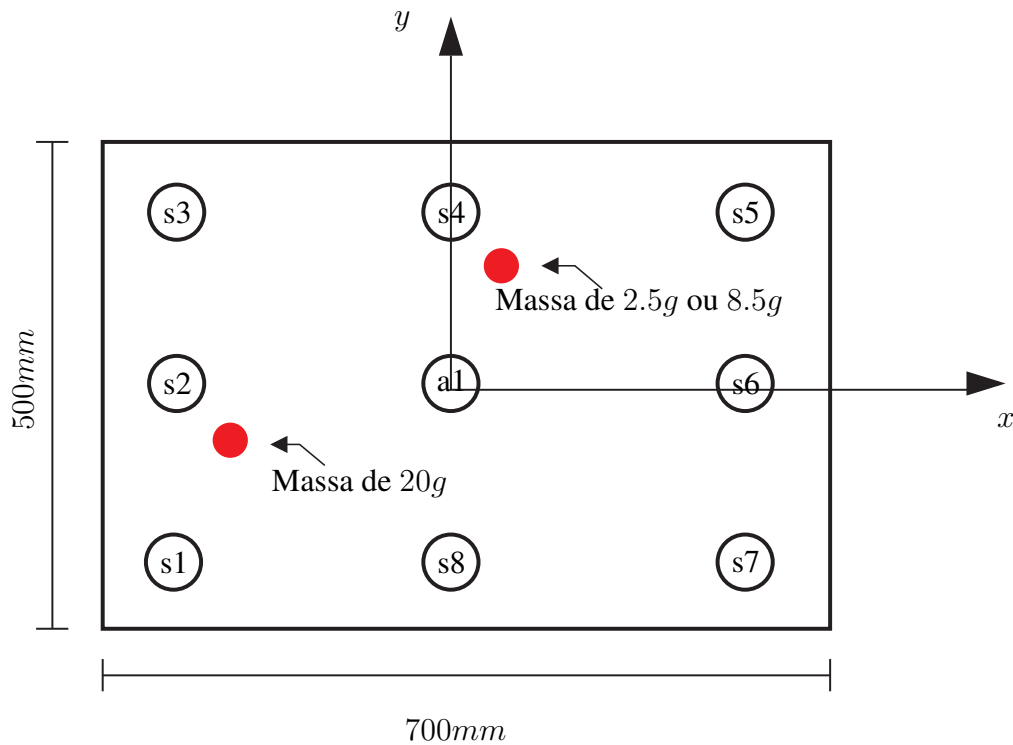


Figura 5.20 - Disposição dos atuadores, sensores e massas na placa para as configurações 5 e 6.

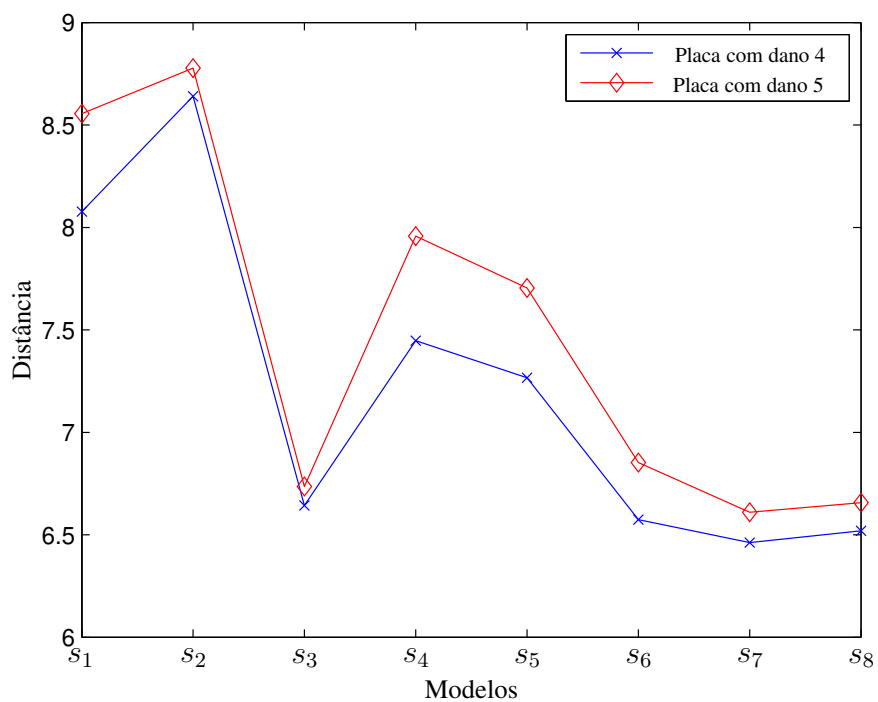


Figura 5.21 - Distâncias entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada calculadas em termos dos ângulos entre os subespaços - configurações 5 e 6.

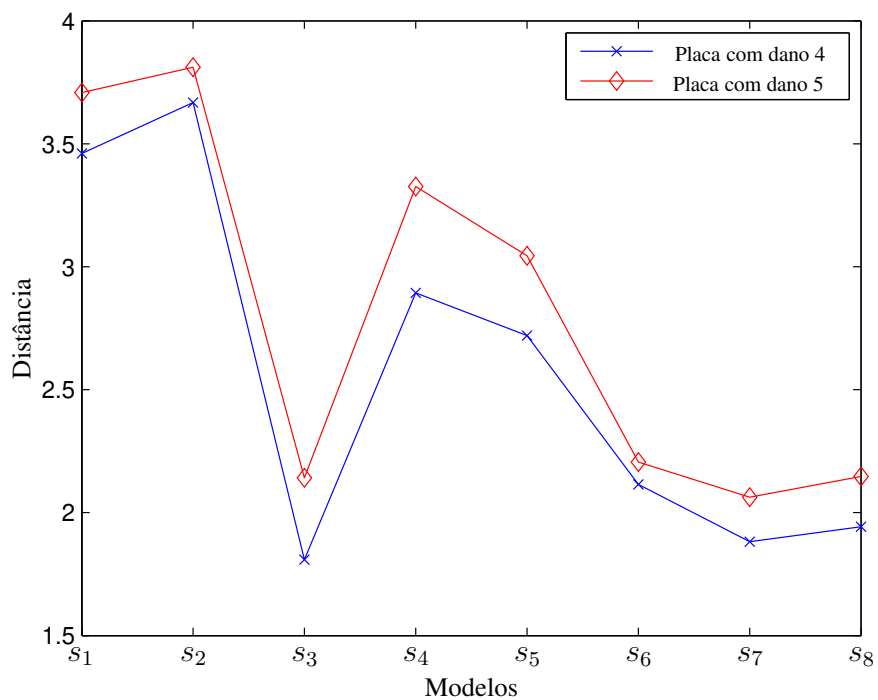


Figura 5.22 - Distâncias cepstrais entre os modelos de referência e os modelos que representam a placa danificada - configurações 5 e 6.

5.4 Sumário

Neste capítulo, a métrica cepstral e a métrica por subespaços foram investigadas para detecção, análise de severidade e localização de danos em estruturas reais. Inicialmente, com auxílio de três vigas de alumínio e duas massas de 2,5g e 8,5g, foram simulados quatro danos diferentes. Utilizando as métricas, foi possível fazer a detecção das falhas nessas vigas de alumínio e esse experimento abriu a possibilidade da utilização das métricas para localização e análise da severidade de danos. Dessa forma, utilizando uma placa retangular de alumínio e três massas de 2,5g, 8,5g e 20g, foi possível simular cinco danos com diferentes severidades e localizações. Utilizando as métricas, foi possível fazer a detecção de falhas, quantificar as severidades e localizar os danos na placa de alumínio. Assim, a métrica cepstral e a métrica por subespaços mostraram ser ferramentas eficientes na detecção, quantificação de severidade e localização de danos em aplicações reais.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho foi realizado o estudo de duas técnicas de detecção de falhas baseadas na distância entre modelos AR. Inicialmente, utilizando-se uma técnica de identificação por subespaços, foram estimados os modelos ARMA a partir dos sinais dos sensores piezelétricos. Com auxílio do diagrama de estabilização, foi escolhida a ordem ótima do modelo ARMA. A partir do modelo ARMA foram derivados os modelos AR.

As medidas das distâncias, utilizando a métrica cepstral e a métrica por subespaços, foram introduzidas no Capítulo 4. Os métodos para detecção de danos utilizam as distâncias entre os modelos AR como indicador de danos. O desempenho do indicador de danos foi investigado em aplicações reais. Dois experimentos diferentes foram planejados: utilizando três vigas similares de alumínio foram simulados quatro danos diferentes; e utilizando uma placa retangular de alumínio foram simulados cinco danos com diferentes localizações e severidades.

Resultados experimentais utilizando as vigas de alumínio demonstraram a eficiência da métrica na detecção de danos e a possibilidade da utilização dos indicadores para quantificar severidades. Dessa forma, o experimento com a placa de alumínio foi montado objetivando sanar as dúvidas em relação à eficiência das métricas para localizar e analisar a severidades de danos. Resultados experimentais com a placa demonstraram a eficiência da métrica para detecção, localização e análise de severidade de danos. Os resultados experimentais estão presentes no Capítulo 5.

Vale a pena ressaltar que a realização deste trabalho envolveu uma revisão bibliográfica abrangente dos assuntos relacionados ao tema de detecção de danos e monitoramento da integridade de estruturas, entre os quais pode-se destacar: técnicas de detecção de danos baseadas em séries temporais, identificação clássica de sistemas determinísticos e estocásticos, identificação por subespaços de sistemas determinísticos e estocásticos, aquisição e processamento de sinais e valiosos conceitos em álgebra linear e geometria.

6.1 Perspectivas

Há muitos métodos de detecção de falhas que são aptos a analisar a severidade e localizar falhas, porém muitos desses métodos são de difícil aplicação. Os métodos apresentados neste trabalho não são exceção. Através de experimentos em estruturas reais, foram mostrados que os cálculos das distâncias aumentam monotonicamente com o aumento da severidade. Além disso, as distâncias medidas são maiores quanto mais próximas dos sensores estiverem as falhas. Dessa forma, as métricas foram utilizadas para a localização das áreas em que ocorreram os danos. Contudo, os indicadores de danos necessitam ser investigados cuidadosamente para análise de severidade e localização em outras aplicações, como: investigações de trincas e suas propagações, em materiais compósitos e em estruturas que já possuem reparos.

Além disso, as medidas das distâncias nesse trabalho foram feitas considerando modelos SISO. As métricas ainda necessitam ser investigadas em aplicações com modelos MIMO. Recentemente, Zheng e Mita (2007) utilizaram a métrica cepstral em conjunto com um filtro de branqueamento para a detecção de danos em sistemas MIMO. Boets et al. (2007) apresentaram uma definição da distância utilizando subespaços para múltiplos processos Gaussianos.

A seleção ótima da ordem é ainda um problema difícil. Apesar de existirem diferentes critérios de seleção da ordem do modelo, em muitos casos existem divergências entre os critérios. Dessa forma, é necessário investigar e comparar outros critérios além dos mencionados nesse trabalho, pois a ordem do modelo selecionado é um parâmetro utilizado pelas métricas e por isso a seleção da ordem deve ser feita cuidadosamente.

Por fim, a detecção de falhas mostrada nesse trabalho foi baseada no processamento de dados *offline*. Entretanto, no monitoramento da integridade de estruturas de sistemas críticos como aeronaves, naves espaciais, usinas nucleares, fábricas de produtos químicos e que processam materiais perigosos, a detecção de falhas tem que ser rápida, porque as consequências de uma falha podem ser catastróficas (ZHANG; JIANG, 2008). Dessa forma, o processamento de dados em tempo real para a detecção de falhas em sistema críticos é extremamente importante. Assim, para adequar os métodos apresentados nesse trabalho para a detecção de falhas *online*, é necessário

transformar o algoritmo de identificação por subespaços em um algoritmo de identificação recursivo. Em (GOETHALS et al., 2004), é apresentado o algoritmo recursivo baseado na realização estocástica apresentada no Capítulo 3. Consequentemente, a detecção, análise da severidade e localização de danos em tempo real, utilizando a identificação recursiva e as métricas, serão temas de futuras investigações.

REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. Fitting autoregressive models for prediction. In: **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**. [S.l.: s.n.], 1969. v. 21, p. 243–247.

_____. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In: **2nd International Symposium on Information Theory**. Budapest: [s.n.], 1973. p. 267–281.

_____. A Bayesian extension of the minimum aic procedure of autoregressive model fitting. **Biometrika**, v. 36, n. 2, p. 237–242, 1979.

ALVES, F. C.; BORSCHIVER, S. **Estudo Tecnológico para o Setor de Automação de Processos**. Universidade Federal do Rio de Janeiro: Escola de Química, 2009. Disponível em: <http://neitec.com/wp-content/uploads/2011/06/Estudo-Tecnol%C3%B3gico-Para-o-Setor-de-Automa%C3%A7%C3%A3o-de-Processos.pdf>.

ANTON, H. **Álgebra Linear com Aplicações**. [S.l.]: Bookman, 2001. 572 p.

AUWERAER, H. V. D.; PEETERS, B. Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: use and automation of the stabilization diagram. In: **IMTC, Instrumentation and Measurement Technology Conference**. Como: IEEE, 2004. p. 2193–2198.

BARRETO, G. **Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estados**. 419 p. Tese — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2002.

BASSEVILLE, M. Distance measures for signal processing and pattern recognition. In: **Signal Processing**. [S.l.: s.n.], 1989. v. 18, n. 4, p. 349–369.

BEN-ISRAEL, A.; GREVILLE, T. N. E. **Generalized Inverses: Theory and Applications**. New

York: Wiley, 1977.

BISSACCO, A. et al. Recognition of human gaits. In: **IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition**. [S.l.: s.n.], 2001. p. II52–II57.

BOETS, J.; DE COCK, K.; DE MOOR, B. Distances between dynamical models for clustering time series. In: **14th IFAC Symposium on System Identification**. Newcastle, Austrália: [s.n.], 2006. p. 392–397.

_____. A mutual information based distance for multivariate Gaussian processes. In: **46th IEEE Conference on Decision and Control**. New Orleans, LA: [s.n.], 2007. p. 3048–3053.

BOETS, J. et al. Clustering time series, subspace identification and cepstral distances. **Journal of Communications in Information and Systems**, v. 5, n. 1, p. 69–96, 2005.

BOGERT, B. P.; HEALY, M. J. R.; JW, T. The quefrency analysis of time series for echoes: cepstrum, pseudoautocovariance, cross-cepstrum, and saphe cracking. In: **Symposium on Time Series Analysis**. New York: Wiley, 1963. p. 209–243.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Harbra, 1986. 412 p.

CARDEN, E. P.; FANNING, P. Vibration based condition monitoring: A review. **Structural Health Monitoring**, v. 3, n. 4, p. 355–377, 2004.

CHANG, P. C.; FLATAU, A.; LIU, S. C. Review paper: Health monitoring of civil infrastructure. **Structural Health Monitoring**, v. 2, n. 3, p. 257–267, 2003.

CHENG, F. **Human Motion Description in Multimedia Database**. 198 p. Tese — School of Electronics and Physical Sciences, University of Surrey, 2003.

CHILDERS, D. G.; SKINNER, D. P.; KEMERAIT, R. C. The cepstrum: A guide to processing.

In: **Proceedings of the IEEE**. [S.l.: s.n.], 1977. v. 65, n. 10, p. 1428–1443.

DE COCK, K. **Principal Angles in System Theory, Information Theory and Signal Processing**. 337 p. Tese — Katholieke Universiteit Leuven, 2002.

DE COCK, K.; DE MOOR, B. Subspace angles between linear stochastic models. In: **39th IEEE Conference on Decision and Control**. Sydney, NSW , Australia: [s.n.], 2000. p. 1561–1566.

_____. Subspace angles between arma models. **Systems Control Letters**, v. 46, n. 4, p. 1–15, 2002.

DELGADO, C. J. M. **Identificação no Subespaço de Estados de Sistemas Lineares - Novas abordagens e recursividade**. 337 p. Tese — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004.

DESAI, U. B.; PAL, D. A realization approach to stochastic model reduction and balanced stochastic realizations. In: **21st Decision and Control Conference**. Orlando, FL: IEEE, 1982. p. 1106–1112.

DIMITRIADIS, D.; MARAGOS, P.; POTAMIANOS, A. Auditory teager energy cepstrum coefficients for robust speech recognition. In: **European Speech Processing Conference**. Lisbon, Portugal: [s.n.], 2005. p. 3013–3016.

FANNING, P. J.; CARDEN, E. P. Auto-regression and statistical process control techniques applied to damage indication in telecommunication masts. **Key Engineering Materials**, v. 204-205, p. 251–260, 2001.

FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An introduction to structural health monitoring. **Royal Society of London Transactions Series A**, v. 365, n. 1851, p. 303–315, 2007.

FASSOIS, S. D.; SAKELLARIOUS, J. S. Time series methods for fault detection and identification in vibrating structures. **Royal Society of London Transactions Series A**, v. 365,

n. 1851, p. 411–448, 2007.

FAURRE, P. L. Stochastic realization algorithms. In: MEHRA, R.; LAINIOTIS, D. (Ed.). **System Identification: Advances and Case Studies**. [S.l.]: Academic Press, 1976. p. 1–25.

FREITAS, T. C. **Identificação de Parâmetros Modais Utilizando Apenas as Respostas da Estrutura**. 133 p. Dissertação — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2008.

GENARI, H. F. G.; NOBREGA, E. G. O. A damage detection technique based on ARMA models distance estimation. In: **1st International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling**. São Sebastião, Brazil: [s.n.], 2012.

GERSCH, W.; SHARPE, D. Estimation of power spectra with finite-order autoregressive models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 18, n. 4, p. 367–369, 1973.

GOETHALS, I. et al. Recursive output only subspace identification for in-flight flutter monitoring. In: **22nd International Modal Analysis Conference**. Dearborn, Michigan: [s.n.], 2004.

GU, L.; ROSE, K. Perceptual harmonic cepstral coefficients for speech recognition in noisy environment. In: **IEEE International Conference On Acoustics, Speech, And Signal Processing**. Salt Lake City, UT , USA: [s.n.], 2001. v. 1, p. 125–128.

HUMAR, J.; BAGCHI, A.; XU, H. Performance of vibration-based techniques for the identification of structural damage. **Structural Health Monitoring**, v. 5, n. 3, p. 215–241, 2006.

KALPAKIS, K.; GADA, D.; PUTTAGUNTA, V. Distance measures for effective clustering of arima time-series. In: **IEEE International Conference on Data Mining**. San Jose, CA , USA: [s.n.], 2001. p. 273–280.

KATAYAMA, T. **Subspace Methods for System Identification**. Germany: Springer-Verlag,

2005. 392 p.

LIU, Q.; SUNG, A. H.; QIAO, M. Temporal derivative-based spectrum and mel-cepstrum audio steganalysis. In: **IEEE Transactions on Information Forensics and Security**. [S.l.: s.n.], 2009. v. 4, n. 3, p. 359–368.

LIU, S.; LIN, S. D. BCH code-based robust audio watermarking in the cepstrum domain. **Journal of Information Science and Engineering**, v. 22, p. 535–543, 2006.

LU, Y.; GAO, F. A novel time-domain autoregressive model for structural damage diagnosis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 283, p. 1031–1049, 2005.

MARTIN, R. J. A metric for ARMA process. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 48, n. 4, p. 1164–1170, 2000.

MATTSON, S. G.; PANDIT, S. M. Statistical moments of autoregressive model residuals for damage localisation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, n. 3, p. 627–645, 2006.

MEYER, C. D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. [S.l.]: SIAM, 2001. 700 p.

MUDA, L.; BEGAM, M.; ELAMVAZUTHI, I. Voice recognition algorithms using mel frequency cepstral coefficient (mfcc) and dynamic time warping (dtw) techniques. **Journal of Computing**, v. 2, n. 3, p. 138–143, 2010.

NAIR, K. K. et al. Time series-based damage detection and localization algorithm with application to the asce benchmark structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, n. 1-2, p. 349–368, 2006.

OPPENHEIM, A.; KOPEC, G.; TRIBOLET, J. Signal analysis by homomorphic prediction. In: **IEEE International Conference On Acoustics, Speech, And Signal Processing**. [S.l.: s.n.], 1976. v. 24, n. 4, p. 327–332.

OPPENHEIM, A. V. **Superposition in a class of nonlinear systems**. Technical report 432, Research Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, USA, 1965.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Digital Signal Processing**. London: Prentice Hall International, 1975.

PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. In: **Cambridge Philosophical Society**. [S.l.: s.n.], 1955. v. 51, p. 406–413.

PHAM, T. D. LPC cepstral distortion measure for protein sequence comparison. **IEEE Transactions on Nano Bioscience**, v. 5, n. 2, p. 83–88, 2006.

_____. Spectral distortion measures for biological sequence comparisons and database searching. **Pattern Recognition**, v. 40, n. 2, p. 516–529, 2007.

PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. **System Identification: A Frequency Domain Approach**. New York: IEEE Press, 2001. 1 p.

PRIESTLEY, M. B. **Spectral Analysis and Time Series**. [S.l.]: Academic Press, 1983.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. K. **Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications**. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.

_____. _____. [S.l.]: Prentice Hall, 2006. 1004 p.

PUKKILA, T. M.; KRISHNAIAH, P. R. On the use of autoregressive order determination criteria in multivariate white noise tests. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing**, v. 36, n. 9, p. 1396–1403, 1988.

REZEK, I. A.; ROBERTS, S. J. Parametric model order estimation: a brief review. In: **IEE Colloquium on the Use of Model Based Digital Signal Processing Techniques in the Analysis**

of Biomedical Signals. London, UK: [s.n.], 1997. p. 3/1–3/6.

RODRIGUES, J. **Identificação Modal Estocástica: Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil.** 526 p. Tese — Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Universidade do Porto, Porto, 2004.

SHORES, T. S. **Applied Linear Algebra and Matrix Analysis.** [S.l.]: Springer, 2007. 400 p.

STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications.** [S.l.]: Thomson Learning, 1988. 520 p.

TONG, H. More on autoregressive model fitting with noisy data by Akaike's information criterion. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 23, n. 3, p. 409–410, 1977.

ULRYCH, T. J.; BISHOP, T. N. Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. **Reviews of Geophysics and Space Physics**, v. 13, n. 1, p. 183–200, 1974.

VERBOVEN, P. **Frequency-Domain system identification for modal analysis.** 250 p. Tese — Vrije Universiteit Brussel, Belgium, 2002.

VIDAL, R.; SOATTO, S.; CHIUSO, A. Applications of hybrid system identification in computer vision. In: **European Control Conference.** Kos, Greece: [s.n.], 2007.

WEI, W. W. S. **Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods.** [S.l.]: Addison Wesley, 1990.

WISMER, J. **Application Note: Gearbox Analysis Using Cepstrum Analysis and Comb Liftering.** Brüel & Kjær, Denmark, 2012. Disponível em: <<http://www.bksv.com/>>.

WORDEN, K.; DULIEU-BARTON, J. M. An overview of intelligent fault detection in systems and structures. **Structural Health Monitoring**, v. 3, n. 1, p. 85–98, 2004.

ZHANG, Y.; JIANG, J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. **Annual Reviews in Control**, v. 32, n. 2, p. 229–252, 2008.

ZHEN, W.; ZHIGAO, Z. Damage detection of offshore platform structures using time domain response data. In: **ICICTA, International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation**. Changsha, China: IEEE, 2010. p. 1079–1084.

ZHENG, H. **Distance Measures of Autoregressive Models for Structural Damage Detection**. 98 p. Tese — Keio University, Japan, 2008.

ZHENG, H.; MITA, A. Two-stage damage diagnosis based on the distance between arma models and pre-whitening filters. **Smart Materials and Structures**, v. 16, p. 1829–1836, 2007.

_____. Damage indicator defined as the distance between ARMA models for structural health monitoring. **Struct. Control Health Monit.**, v. 15, p. 992–1005, 2008.