

Este exemplar corresponde à  
redação final da tese defendida  
por Ricardo C. M. Grillo e  
aprovada pela Comissão Julgadora  
em 19/08/88

Douglas F. Zanetti

ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS E  
TENSÕES EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE  
DENTES RETOS E HELICOIDAIS

17/88

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Mestrado

Título:

ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS E  
TENSÕES EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE  
DENTES RETOS E HELICOIDAIS

Autor:

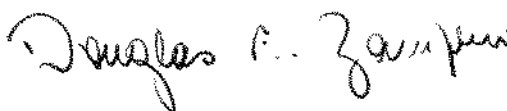
Ricardo Castro de Meiroz Grillo

Orientador:

Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

Aprovada por:

Douglas E. Zampieri



Carlos A. Pallerosi



João Lirani



Campinas, 19 de Agosto de 1988

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS E  
TENSÕES EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE  
DENTES RETOS E HELICOIDAIS

*Ricardo Castro de Meiroz Grillo*

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual de  
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de  
Mestrado em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

- CAMPINAS -  
Agosto de 1988

A MEUS PAIS

## PREFÁCIO

O presente trabalho foi desenvolvido como parte de minhas atribuições de funcionário em Equipamentos Clark Ltda e de estudante de pós-graduação na Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual de Campinas.

Expresso minha gratidão à minha querida esposa Rosely pela paciência, apoio e encorajamento indispensáveis à conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri, minha gratidão pelo interesse, apoio e amizade sempre demonstrados.

À direção de Equipamentos Clark Ltda, nas pessoas do Eng<sup>o</sup> Francisco Edmir Bertolaccini, Presidente; Eng<sup>o</sup> Vivaldo Antônio Fernandes Russo e Eng<sup>o</sup> Jorge Vinicius da Silva Júnior, Diretores; e Eng<sup>o</sup> Alfredo Costa Ferreira, Gerente da Engenharia do Produto, meus sinceros agradecimentos pelo respeito e confiança demonstrados e pelo apoio constante sem o qual este trabalho resultaria impossível.

Expresso minha gratidão aos amigos Hideo Yamamoto, Tadao Suzuki, Almiro Moraes Júnior, Antônio Carlos Zambon, Cláudio Jorge de Souza, Paulo de Almeida Franco e João Valter Pavan, funcionários de Equipamentos Clark Ltda, pelas discussões e valiosas sugestões.

Agradeço ao Dr.-Ing. S. Lachenmaier da RWTH Aachen, Alemanha Ocidental, pelas informações fornecidas e pelo interesse demonstrado por este programa.

Agradeço também a Silvana Franceschini, Maurício Y. Katsurada e Sinésio Dsmar Baccan pela preparação dos originais e confecção dos desenhos.

ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS E  
TENSÕES EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE  
DENTES RETOS E HELICOIDAIS

R E S U M O

Descreve-se um método para o cálculo da distribuição dos esforços internos que surgem nos dentes de uma engrenagem quando um torque externo é imposto. Em seguida, um procedimento para a determinação das tensões no pé dos dentes é demonstrado passo a passo. Analisa-se com detalhes as variações nos esforços devidas aos erros de manufatura dos flancos em contacto e também as alterações devidas às correções de forma impostas pelo projeto. O procedimento de cálculo, que é apresentado na forma de um conjunto de programas para computador digital, é demonstrado para a aplicação em engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais, projeto não necessariamente padronizado, com ou sem erros de perfil.

STUDY ON THE DISTRIBUTION OF FORCES  
AND STRESS IN CYLINDRICAL  
SPUR AND HELICAL GEARS

A B S T R A C T

A method is described for calculating the distribution of internal forces that arise in the gear teeth when an external torque is applied. Following this, a procedure for determining the tooth root stresses is explained step by step. The changes in load distribution due to the gear design corrections or manufacturing deviations are analysed in detail. The calculation methods which are presented in the form of digital computer programs are demonstrated for spur and helical cylindrical gears of non-standard design, with or without flank deviations and corrections.

## Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO .....	1-1
1.1. A Análise de Tensões em Engrenagens .....	1-3
1.2. O Fluxo Usual do Projeto e Dimensionamento .....	1-5
1.3. Proposições .....	1-6
2. HISTÓRICO .....	2-1
2.1. Cálculo de Esforços dos Dentes .....	2-1
2.2. Determinação das Pressões nos Flancos .....	2-2
2.3. Determinação das Tensões de "Bending" .....	2-3
3. OBJETIVOS .....	3-1
3.1. O Fluxo Proposto para o Estudo .....	3-2
4. FUNDAMENTOS PARA O CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS, PRESSÕES E TENSÕES NAS ENGRENAGENS HELICOIDAIS .....	4-1
4.1. Cálculo da Distribuição de Esforços .....	4-1
4.1.1. Características da Função $\Delta(x')$ .....	4-6
4.1.2. Princípios da Análise Numérica .....	4-6
4.1.3. Sistema de Equações Lineares para a Obtenção de "p( $\xi'$ )" e " $\Delta_s$ " .....	4-8
4.1.4. Limitações do Procedimento e Não-linearidade do Fenômeno .....	4-12
4.2. Cálculo das Pressões nos Flancos .....	4-13



4.3.	Cálculo das Tensões no Pé do Dente .....	4-14
4.3.1.	Cálculo das Tensões de Flexão .....	4-15
4.3.2.	Cálculo das Tensões de Compressão .....	4-16
4.3.3.	Fator de Concentração de Tensões e Tensões de Cisalhamento .....	4-18
5.	DADOS GEOMÉTRICOS DAS ENGRENAGENS .....	5-1
5.1.	Dados dos Dentes .....	5-2
5.1.1.	Tolerâncias de Fabricação .....	5-3
5.1.2.	Engrenagens Obtidas por Fresas de Geração .....	5-4
5.2.	Dados de "Lay-out" .....	5-6
5.2.1.	Peculiaridades de "lay-out" .....	5-7
5.3.	Dados de Desvio do Perfil (Erros e Correções) .....	5-9
6.	DETERMINAÇÃO DO MODELO GEOMÉTRICO E ANÁLISE DAS TENSÕES	6-1
6.1.	Determinação das Dimensões do Modelo Análogo .....	6-3
6.2.	Transferência entre os Referenciais Real e do Modelo	6-6
6.2.1.	Obtenção da Altura ( $y_v$ ) da Força no Modelo .....	6-7
6.2.2.	Obtenção da Posição Lateral ( $x_v$ ) da Força no Modelo .....	6-8
6.2.3.	Obtenção do Ângulo de Incidência da Força .....	6-10
6.3.	Distribuição dos Esforços e Tensões .....	6-11
6.3.1.	A Geometria do Engrenamento .....	6-11
6.3.2.	Cálculo da Distribuição dos Esforços .....	6-15
6.3.3.	Cálculo das Tensões no Pé do Dente .....	6-17

7. DISCUSSÃO QUANTO A ESTRUTURA DE PROGRAMAÇÃO E PRECISÃO DO MÉTODO .....	7-1
7.1. Considerações sobre a Estrutura do Programa e Fluxo de Dados .....	7-1
7.2. Comparação com os Resultados de Winter e Hirt .....	7-4
7.3. Comparação com os Resultados de Winter e Broßmann ..	7-6
7.4. Comparação com os Resultados de B. Neupert .....	7-9
7.5. Comparação com os Resultados de S. Oda e T. Koide ..	7-13
8. APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO .....	8-1
8.1. Análise da Variação do Raio de Arredondamento no Pé do Dente de Engrenagens Helicoidais .....	8-1
8.2. Variação dos Esforços Devida à Alteração das Correções na Topografia do Dente .....	8-4
8.3. Cálculo das Tensões para Pares Engrenados com Grau de Recobrimento Maior que 3 .....	8-6
9. CONCLUSÕES .....	9-1
10. BIBLIOGRAFIA .....	10-1

## NOMENCLATURA

$A$	mm	Excedente Lateral da Largura da Engrenagem
$a$	mm	Distância entre Centros
$b$	mm	Largura da Engrenagem
$b'$	mm	Linha de Contacto Efetivo
$D(x, y, \xi, \eta)$	$\mu\text{m}/\text{kgf}$	Função das deformações que surge nos pontos $(x, y)$ do flanco da engrenagem devido a uma força puntual unitária aplicada em $(\xi, \eta)$
$D(x, y, \xi, \eta)$	$\mu\text{m}/\text{kgf}$	Cada uma das funções que compõem $D(x, y, \xi, \eta)$
$d$	mm	Diâmetro ou Diâmetro Primitivo
$d_e$	mm	Diâmetro Externo ou Diâmetro do Chanfro no Topo do Dente
$d_r$	mm	Diâmetro de Raiz
$e z'$	mm	Percurso de Engrenamento
$e(x')$	-	Erro devido à Discretização da Função $p(\xi')$
$\bar{D}(x', \xi') = \bar{D}_{x'}$	$\mu\text{m}/\text{kgf}$	Valor Médio da Função $D$ para cada Intervalo $\delta_{x'}$
$H_{x'}$	-	Elementos da Matriz $[H] = [\bar{D}]^{-1}$
$h$	mm	Altura da Aplicação da Carga Discretizada em relação à Base da Placa Análoga
$K_b(x, y, \xi, \eta)$	$\mu\text{m}/\text{kgf}$	Função das Deflexões da Placa Análoga
$K_s(x, y, \xi, \eta)$	$\mu\text{m}/\text{kgf}$	Função das Deformações Superficiais do Flanco

$M$	kgf	Momento Fletor Especifico
$m$	mm	Módulo
$P$	kgf	Força de Trabalho sobre o Plano de Operação
$P_j$	kgf	Cada uma das Forças Discretizadas sobre a Linha de Contacto
$p$	mm	Passo Circular
$p(\xi')$	kgf/mm	Função da Distribuição da Carga sobre a Linha de Contacto
$r$	mm	Raio ou Raio de Concordância no Pé do Dente segundo o Plano Normal; ou Raio Primitivo
$s$	mm	Espessura Circular
$T$	kgfmm	Torque Externo
$x, y, z$	-	Coordenadas Cartesianas
$x, y$	mm	Coordenadas do Ponto onde se Mede a Deformação
$x'$	mm	Coordenada da Linha de Contacto onde se Mede a Deformação
$z$	-	Número de Dentes
$z'$	-	Coordenada de direção paralela à linha de operação e de origem na tangência entre o diâmetro de base e a linha de operação
$\alpha$	graus	Ângulo de Pressão
$\beta$	graus	Ângulo de Hélice

$\gamma$	graus	Ângulo de Incidência da Força $P$ , segundo o Plano Normal
$\Delta_a$	$\mu\text{m}$	"Atraso" da Rotação da Engrenagem Movida Medido no Plano de Operação
$\Delta(x')$	$\mu\text{m}$	Função das Distâncias entre Flancos na Linha de Contacto
$\Delta_1(x'), \Delta_2(x')$	$\mu\text{m}$	Parcela da Função $\Delta(x')$ devida a cada Engrenagem
$\delta$	mm	Intervalo de Discretização da Função $p(\xi')$
$\epsilon$	graus	Ângulo de Incidência da Força $P$ , segundo o Plano Transversal
$\theta$	rd	Deslocamento Angular das Engrenagens ou um Ângulo Qualquer
$\xi, \eta$	mm	Coordenadas do Ponto onde a Força é Aplicada
$\xi'$	mm	Coordenada da Linha de Contacto onde a Força é Aplicada
$\sigma$	kgf/mm <sup>2</sup>	Tensão de Tração ou Compressão

## ÍNDICES

- a Referente ao "Atraso" da Rotação da Engrenagem Movida; ou Referente ao Lado Esquerdo da Largura da Engrenagem
- b Referente ao Diâmetro de Base; ou Referente ao Lado Direito da Largura da Engrenagem; ou Referente a Flexão ( Bending )

- f Referente à Base da Placa Análoga
- i Índice que Enumera os Pontos em que se Mede as Deformações
- j Índice que Enumera os Pontos de Aplicação das Cargas Discretizadas
- k Índice que Enumera os Dentes em Contacto Simultâneo
- m Número Total dos Dentes em Contacto Simultâneo; ou Referente ao Plano Transversal
- n Número Total de Pontos de Discretização da Carga  $p(\xi')$ ; ou Referente ao Plano Normal; ou Referente à Direção Normal
- t Referente ao Topo do Dente
- v Referente à Cremalheira Análoga
- 1 Índice da Roda de Teste ou Motriz
- 2 Índice da Roda Complementar ou Moviada

## 1. INTRODUÇÃO

O estado atual de evolução da tecnologia traz consigo, entre outras, as seguintes características:

-Além de serem grandes as mudanças conceituais, verifica-se que, a cada dia, diminui o intervalo entre as mesmas. Consequência imediata é a rapidez com que um procedimento ou conceito torna-se obsoleto.

-Diversos fatores, técnicos e econômicos, fazem com que as atenções se voltem à otimização. Dentro do Projeto Mecânico, o interesse pelo melhor desempenho dos componentes aumenta, ao mesmo tempo que seu custo e facilidade de obtenção devem ser mantidos, ou mesmo reduzidos.

-A disponibilidade de novos recursos propicia os intentos da otimização. Entre esses, se destaca o conhecimento científico, o qual fornece subsídios para a melhor compreensão dos fenômenos envolvidos. Dignos de menção são também os recursos de computação, que permitem a manipulação e processamento de grande volume de dados. Por último, os recursos para simulação e testes são hoje bem difundidos.

O dimensionamento de componentes mecânicos tem sido alvo especial do processo mencionado. Têm sido freqüentes as mudanças conceituais do que se refere a seus propósitos e meios; e a atenção marcante que recebe a otimização faz com que esta área ganhe um novo enfoque. Grande esforço é despendido visando a um conhecimento detalhado do item a ser produzido. De acordo com esta nova visão, justifica-se um maior investimento durante o dimensionamento, desde que o produto final se aproxime daquilo que se tem por ótimo.

O projeto de engrenagens cilíndricas, quando comparado a outros segmentos, demonstra pouca aplicação de novos conceitos nos últimos 30 anos. Deve-se mencionar que efetivamente muito progresso tem havido, porém dificilmente é trazido à prática, devido às razões expostas a seguir:

-As engrenagens são elementos com alta complexidade de projeto e fabricação, se comparadas à maioria dos elementos de máquinas. Um levantamento histórico nos mostra que até 1930 produzia-se uma única família de engrenagens as quais estavam tabeladas nas normas de então. De 1930 a 1950 passa-se a normalizar as ferramentas de corte ao invés da

própria peça. Isto abre ao projetista maior liberdade de escolha; mesmo assim, um estreito procedimento de projeto devia ser obedecido. Esta prática tem sido reflexo do grau de insegurança que teria o projetista ao desenvolver, por si só, um par engrenado.

-O ferramental para a fabricação de engrenagens tem sido muito caro e atinge preços proibitivos em se tratando de lotes pequenos. Uma vez que a ferramenta "standard" implica em um projeto "standard" é fácil concluir que poucos projetistas ousarão desprezar os procedimentos tabelados.

Estes dois itens mantiveram o projeto de engrenagens como uma atividade estanque, proibindo quase toda tentativa de otimização.

Deve ser citado que em alguns poucos casos encontra-se um tratamento mais criterioso no projeto, principalmente em se tratando de aplicações específicas. Por exemplo, podemos citar que o projeto de engrenagens para automóveis, já há algumas décadas, tem um bom controle sobre a análise geométrica e cinemática, tanto na concepção quanto na manufatura. Neste segmento, a evolução foi muito agilizada e popularizada com o advento do computador.

Hoje em dia, observa-se que o panorama descrito há pouco tende a mudar-se, dissipando-se assim as dificuldades envolvidas na otimização. O preço do ferramental especial tem-se reduzido, à medida que cresce a utilização do comando numérico, o qual permite a produção de pequenos lotes com baixo investimento. Por outro lado, cresce a cada dia a familiaridade com os métodos analíticos mais complexos. É raro, hoje em dia, que se encontre um grupo de projeto que não faça uso dos recursos de computação.

É fácil de se ver que, uma vez vencidos os entraves tecnológicos da otimização, imediatamente aparece a necessidade de métodos mais precisos de dimensionamento. O processo de otimização, via de regra, levará os componentes a operarem explorando o máximo de sua capacidade. Para que isto seja feito com segurança, é necessário um conhecimento detalhado dos fenômenos de falha e de seus mecanismos.

A essa altura, algumas características do dimensionamento de engrenagens



deven ser levantadas:

-As engrenagens usualmente falham por ruptura ou avaria superficial. Uma análise rigorosa também incluiria outras falhas como o desgaste, o superaquecimento etc, as quais, via de regra, são menos freqüentes. A análise de ruído e resposta a efeitos dinâmicos é também parcialmente atribuída ao dimensionamento.

-Usualmente verifica-se qual será o desempenho do elemento projetado quanto a eventuais rupturas ou avarias na superfície. A análise de outros modos de falha recebe, geralmente, importância secundária. Sabe-se que as falhas mencionadas são função do estado de tensão desses componentes, portanto a análise de tensões ocupa parte preponderante e por vezes a totalidade dessa tarefa.

A despeito da grande evolução havida, na análise de tensões, a maioria dos projetistas de engrenagens usam ainda hoje os métodos desenvolvidos há 80 anos.

A precisão de tais métodos tem sido contestada desde a década de 60, quando novas técnicas analíticas e experimentais confirmaram sua estreiteza. Contudo, apenas nos últimos 5 anos, novos métodos têm-se popularizado. Este fato é perfeitamente delineado se acompanharmos as revisões periódicas das normas mais divulgadas: AGMA, ISO e DIN, /1,2,3/. Até o fim dos anos 70 um único método era proposto, o qual seguia a conceituação tradicional. A partir de 80, as normas passam a aconselhar três a quatro procedimentos com vários graus de precisão.

Naturalmente, o método tradicional, devido à relativa simplicidade, deve ser recomendado quando pouca precisão é requerida. Todavia, uma análise criteriosa é imprescindível se se pretende acompanhar o estado da arte nesta área.

### 1.1. A Análise de Tensões de Engrenagens

Como já mencionado, as falhas mais usuais das engrenagens são a ruptura e a avaria superficial. A falha por ruptura comumente se dá no pé dos dentes segundo um mecanismo de fadiga, e nesse caso é conhecida por "fadiga de flexão" ou "bending". A falha por fadiga superficial mais

comum resulta no surgimento de pequenas crateras nos flancos dos dentes e é conhecida por "pipocamento" ou "pitting".

Os processos e causas destas falhas ainda não são plenamente conhecidos, não obstante, pode-se ter uma boa avaliação do comportamento da peça quando se determina a tensão no pé dos dentes e a pressão em seus flancos.

O cálculo dessas tensões por método analítico exato até o presente não é disponível, devido à complexidade da geometria do elemento.

Vários métodos são aplicados para este propósito, os quais abrangem desde a mera consulta a tabelas pré-montadas até os dispendiosos métodos numéricos e experimentais. Obviamente, cada método oferece um grau de precisão proporcional a sua complexidade.

A fórmula de Lewis /4/ para a determinação da tensão de "bending" e a fórmula de Hertz /5/ para a determinação da pressão de "pitting" foram desenvolvidas há mais de 80 anos e são, ainda hoje, aplicadas extensivamente.

Deve-se citar que entre as novas técnicas de análise de tensão, nenhuma tem sido publicada como um método detalhado para dimensionamento. Novamente nas normas de cálculo de esforços da AGMA, ISO e DIN /1,2,3/ vemos que, embora sejam mencionados outros métodos, apenas o modelo tradicional é descrito e analisado passo a passo.

Genericamente, os métodos de determinação de tensões para engrenagens se dividem em 3 tipos:

- Métodos experimentais
- Métodos numéricos de grande porte
- Métodos semi-analíticos ou geométricos

Dentre os métodos experimentais, são mais comuns a aplicação da fotoelasticidade e da micro-extensometria. Sem dúvida, quando bem aplicados, estes métodos são os que proporcionam melhor resultado. Por outro lado, a alta morosidade e custo proíbe que os mesmos tenham uso extensivo. Mesmo havendo a disponibilidade, eles são comumente usados

como suporte para outro método mais rápido, suprimindo este último com resultados confirmatórios.

Atualmente, os métodos numéricos de grande porte são aplicações das análises de elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, etc. O constante barateamento dos recursos de computação promete que os mesmos se expandam em um futuro próximo. Entretanto, será necessário um período mais longo para que ganhem níveis de rapidez e custo que lhes permitam substituir os demais. Devido à complexidade, ao alto grau de especialização e investimentos, tais métodos não têm tido uso extensivo no dimensionamento. Sua aplicação tem estado restrita à pesquisa avançada ou à análise de casos especiais.

Os demais métodos têm por princípio assemelharem as engrenagens a algum modelo de geometria simples, no qual se determina analiticamente as tensões. Normalmente, esta fase é seguida de alguns ajustes empíricos, que pretendem minimizar as imprecisões inerentes ao procedimento. Alguns desses métodos, embora "semi-analíticos", quando bem monitorados podem atingir precisão comparável à dos métodos numéricos e experimentais. No entanto, via de regra, os métodos mais aplicados sofrem limitações que prejudicam em muito a precisão dos resultados.

## 1.2. O Fluxo Usual do Projeto e Dimensionamento

Com a utilização do computador, o projeto de engrenagens teve grande alteração quanto à seqüência de suas fases. Anteriormente, a maior parte do tempo tinha de ser despendida no cálculo manual e na consulta de ábacos. Hoje, desde que se conte com a implantação de um bom "software" de projetos, a máquina assume os cálculos, restando ao projetista as atividades de concepção e avaliação.

Conseqüência imediata foi a mudança no modo de projetar. Anteriormente costumava-se ter, antes do cálculo de geometria, uma fase prolongada denominada pré-projeto. Neste período, procurava-se definir qual seria a configuração ótima do conjunto a ser projetado. Uma vez terminada esta fase, procedia-se ao cálculo geométrico e dimensionamento, uma única vez. Devido à morosidade do cálculo manual, somente quando os

resultados eram intoleráveis o procedimento seria repetido.

Hoje, praticamente nenhum tempo é gasto no pré-projeto, e o cálculo geométrico e dimensionamento são repetidos iterativamente até se atingir a configuração que melhor satisfaça as exigências.

Desde que os resultados de uma dada tentativa direcionam as entradas da subsequente, é fácil ver que um método impreciso de dimensionamento poderá conduzir o projeto a uma configuração final que não seja adequada ou que, pelo menos, não explore todas as possibilidades existentes.

### 1.3. Proposições

Das afirmações anteriores conclui-se:

-Para que a otimização no projeto de engrenagens seja realística, é necessário um método de dimensionamento que promova precisões muito superiores às daqueles citados nas normas correntes.

-A preparação de tal método não deve se limitar à sua formulação teórica, tendo em vista que os seus principais usuários são pessoas de formação técnica tendo, via de regra, pouco tempo e disponibilidade para maiores aprofundamentos.

-Por outro lado, a fundamentação teórica rigorosa é indispensável; assim como uma crítica da importância de cada fase para que o usuário possa julgar a necessidade de sua implementação total ou parcial.

-Uma vez que tal método visa à aplicação em ambientes de projeto e dimensionamento, é aconselhável que uma capacidade computacional modesta seja suficiente.

O presente trabalho se propõe a proceder à parte inicial desta tarefa - que consiste na análise geométrica das engrenagens, tendo em vista a obtenção de um modelo no qual métodos de alta precisão possam ser aplicados - e prosseguir até a implantação de um método de análise de tensões de "bending", que apresente níveis de precisão satisfazendo as exigências da otimização. Além disso, os princípios para a implantação de um método similar para a análise de "pitting" deverão também ser abordados.

## 2. HISTÓRICO

A análise de tensões em engrenagens pode ser dividida em 3 áreas: O cálculo dos esforços, a determinação das pressões nos flancos, e a determinação das tensões de "bending".

### 2.1. Cálculo de Esforços dos Dentes

Para se chegar às tensões e pressões, o conhecimento da distribuição dos esforços tem-se mostrado imprescindível. De fato esta análise se ocupa de dois itens bem distintos: Por um lado a distribuição de carga sobre o corpo ideal deve ser determinada, por outro as variações induzidas pelos erros do corpo real devem ser sobrepostas.

A hipótese de que os esforços se distribuem uniformemente ao longo da linha de contacto desde cedo se mostrou inaceitável. Por muito tempo, a dificuldade na análise desses esforços desacelerou o estudo das tensões. Sendo imprevisível a distribuição dos esforços, qualquer método para a determinação precisa das tensões resultava de pouca valia.

Devido à fragilidade dos modelos analíticos propostos até a década de 70, o estudo de esforços sobre o corpo ideal tem sido conduzido num misto de análise e experimentos com adição de fatores empíricos. O caso de dentes retos, devido à maior simplicidade tem recebido mais atenção. Para isso os desenvolvimentos anteriores referentes ao estado de tensões e deformações para vigas e placas têm sido aplicados /6,7,8/. Winter, Hirt e Broßmann /9,10/ mediram com micro-extensômetros as deformações no pé do dente de engrenagens retas e helicoidais e calcularam baseado no estado de deformações a distribuição dos esforços.

As variações induzidas pelos erros do corpo real têm tido estudo mais amplo. O mero teste de padrão de contacto (através do recobrimento dos dentes com tinta removível), proporciona alguma idéia de como o esforço se distribui. Demais, as normas de projeto (AGMA, ISO, DIN, HENRIOT) /1,2,3,11/ sugerem uma série de ábacos para aproximar as conseqüências da desuniformidade das cargas. Nessa mesma linha, Schäfer /12/ calculou

a distribuição de cargas para engrenagens com desvio de direção nos flancos.

Os métodos analíticos atuais permitem que a análise do corpo ideal e os erros do corpo real sejam incluídos em um único modelo matemático. Para isso se utiliza da teoria de placas aliada ao estudo de deformações superficiais ou então da análise de elementos finitos tridimensional.

Umezawa, valendo-se dos desenvolvimentos anteriores /7,8/, publicou uma série de trabalhos que, partindo da análise de placas, chega a um modelo completo, pronto a ser aplicado para a análise de esforços em cremalheiras que seguem as dimensões normalizadas JIS (Japanese Industrial Standard) /13,14,15,16,17,18/. Para isso, a análise de diferenças finitas foi aplicada. Tobe, Kato e Inoue completou a mesma análise usando o método de elementos finitos em placas /19,20,21/. A análise tridimensional de elementos finitos tem sido aplicada por Neupert /22,23,24,25/, Wilcox /26,27,28/, e Mathis /29,30/ apresentando ótimos resultados. Um algoritmo para a aplicação da teoria de placas que englobe o caso de engrenagens com dimensões não normalizadas ainda não é disponível na literatura.

## 2.2. Determinação das Pressões nos Flancos

As pressões nos flancos dependem não apenas dos esforços como também dos raios de curvatura de cada ponto de contacto. A proposta de Hertz /5/ para a determinação de pressões de contacto entre cilindros infinitos e esferas tem sido usada extensivamente /31,32/. Para a determinação das pressões em engrenagens retas com desvio angular nos flancos, Rademacher /33/ aplicou a formulação de Hertz com poucas modificações. Também as normas (AGMA, ISO, DIN e HENRIOT) /1,2,3,11/ têm sugerido o uso das equações de Hertz acrescida de fatores empíricos para o dimensionamento de engrenagens retas e helicoidais.

Algumas alterações na formulação de Hertz propostas por Smith e Liu, Grekoussis e Castleberry /34,35,36/ consideram os esforços trativos entre as superfícies de contacto para o caso em que há movimento relativo e atrito, aprimorando assim os resultados da análise. Neupert

/22/, usando elementos finitos tridimensionais propõe um modelo inédito de característica não-linear, no qual o estado de tensão da área de contacto é levantado com muita precisão.

### 2.3. Determinação das Tensões de "Bending"

O cálculo das tensões foi primeiramente conduzido impondo-se à engrenagem um comportamento de viga engastada. Este conceito que foi desenvolvido por Lewis /4/ e tem sido observado por Niemann /31/, pelas normas DIN, ISO, AGMA, HENRIOT e etc /1,2,3,11/, tem sua aplicação até o dia de hoje devido à simplicidade.

Como métodos experimentais, a foto-elasticidade e extensometria têm mostrado melhores resultados.

Em 1926, Timoshenko /37/ procedeu ao primeiro experimento de foto-elasticidade em engrenagens retas. Desde então esta técnica tem sido usada extensivamente, principalmente para se avaliar o comportamento de dentes com dimensões modificadas /31,38,32/. No fim dos anos 70 a foto-elasticidade tridimensional começou a ser aplicada em engrenagens permitindo uma análise mais precisa, principalmente no caso de dentes helicoidais. Castelli /39/ tem analisado desta forma a aplicação de carga puntual em cremalheiras retas e helicoidais. Alison e Hearn /40,41/, baseados em seus experimentos propõem fórmulas para a determinação de tensões de "bending" as quais levam em conta a influência do componente de compressão e cisalhamento da força aplicada.

Com a aplicação de vários extensômetros na região do pé do dente, Oda /42/ levantou qualitativamente a distribuição de tensões ao longo da largura de engrenagens helicoidais. Com o uso de micro-extensômetros, Winter, Hirt, e Broßmann /9,10/ mediram no pé de dentes retos e helicoidais as tensões principais em duas direções, determinando assim o estado de tensão superficial.

A medida do deslocamento das camadas da rede cristalina do metal por meio de difração de raio X também se apresenta como possibilidade de determinação experimental de tensões, muito embora, até o momento, tenha

sido aplicada apenas para a medição das tensões residuais do material /43/.

O cálculo bidimensional de tensões, além do modelo clássico de Lewis /1,2,3,4/, tem usado as técnicas de transformação conformal, elementos finitos bidimensionais, elementos de contorno e etc. Embora alguns desses métodos apresentem ótima precisão, todos sofrem a séria limitação de assumir como hipótese a uniformidade ao longo do terceiro eixo. Isto se revela suportável no caso de engrenagens retas todavia inaceitável para as helicoidais.

Neuber e Baronet /44,45/, aplicaram a transformação conformal valendo-se de funções de transformação relativamente simples. Cardou e Terauchi /46,47,48/ completaram o modelo de Baronet com utilização de uma função que representa o perfil evolvente com muita precisão.

A aplicação de elementos finitos bidimensionais tem sido conduzida por Wilcox, Chabert, Kondo, Ishida, e etc /26,29,49,50,51/. Observa-se que tais pesquisas aparecem como um prólogo para o estudo em três dimensões, com o qual se atinge ótimas precisões. O método de elementos de contorno (B.E.M.) tem sido aplicado por Poterasu /52/ com bons resultados em termos de redução de memória e tempo de processamento.

O cálculo tridimensional de tensões em engrenagens, com o uso do método de elementos finitos, proporciona resultados de precisão apreciável. No entanto, os esforços e investimentos requeridos torna proibitiva sua implementação na maioria dos ambientes em que o cálculo de engrenagem é necessário. Três grandes laboratórios de pesquisa têm liderado este desenvolvimento: O WZL da Escola Técnica Superior de Aachen na Alemanha; o C.E.T.I.M. em Senlis na França; e o Centro de Pesquisas da Gleason Works em Rochester NY, nos Estados Unidos /22,23,24,25,29,30,26,27,28/. A preparação dos sistemas de cálculo destes laboratórios tem exigido de 5 a 10 anos de trabalho e sua operação requer o uso dedicado de computadores de grande porte ( CDC-Cyber 175, etc), nos quais o processamento de uma única análise requer cerca de 10 horas. Os números citados revelam-se incompatíveis com a maioria dos ambientes de projeto e dimensionamento. O rápido avanço no processamento de dados, tanto do "software" como do "hardware" nos promete melhores perspectivas para o



futuro.

A aplicação do estudo de placas planas submetidas a esforços transversais às engrenagens oferece uma análise bidimensional alternativa na qual a hipótese da uniformidade no terceiro eixo não é imposta. De fato esta análise toma por pressuposto a uniformidade de momentos em cada secção transversal do dente, o que não está longe dos resultados obtidos experimentalmente. As deflexões e momentos de uma placa engastada de comprimento infinito submetida a uma carga puntual foram discutidos por Jaramillo /7/ o qual apresentou uma solução exata em termos de integrais impróprias. A mera aplicação da solução de Jaramillo não é suficiente para o caso das engrenagens visto que, na maioria das vezes, não é realístico assemelhar uma engrenagem a uma placa infinita. Por outro lado, a solução de Jaramillo impõe que a placa análoga tenha uma rigidez de flexão constante ao longo da altura, o que não leva em conta o maior ou menor afinamento do topo do dente. Wellauer e Seireg /8/ apresentaram uma solução "semi-empírica" para a placa engastada finita. A solução, que foi baseada no princípio da superposição e num método empírico denominado "espelhamento do momento", mostrou muita coerência com os testes experimentais. A partir de 70, a aplicação de métodos numéricos, possibilitou que o modelo de Wellauer e Seireg fosse enriquecido tornando-se mais próximo do caso real das engrenagens. Kugimiya /53/ desenvolveu o modelo de Wellauer e Seireg com maiores refinamentos no que se refere à geometria da engrenagem. Conry e Seireg /54/ calcularam a correção de perfil que proporciona a distribuição uniforme dos esforços sobre os flancos. Umezawa /13/, usando diferenças finitas, chegou a um modelo mais aperfeiçoado para cremalheiras normalizadas JIS (Japanese Industrial Standard), no qual a rigidez de flexão não é necessariamente constante. Fujita /55/ aplicou esta formulação em sua análise de engrenagens fortemente abauladas (heavily crowned). Oda, seguindo a mesma formulação, propôs fórmulas para o cálculo de tensões em engrenagens helicoidais /56,57,42/. Umezawa prosseguiu sua análise incorporando em seu modelo a deformação local do flanco (deformação de Hertz) /16/. Tobe, Kato e Inoue /19,20,21/ procederam à mesma análise, usando elementos finitos, levando em consideração os efeitos da deformação transversal de cisalhamento. Uma vez obtidos numericamente, esses resultados podem ser parametrizados em função das dimensões características da placa análoga. Umezawa

/14,15/ levantou as "funções de influência" do problema, as quais expressam as deflexões e momentos em toda a placa resultantes de uma carga concentrada.

### 3. OBJETIVOS

Nenhum método analítico exato tem sido desenvolvido até o presente para o cálculo das tensões e deformações em engrenagens cilíndricas. Constata-se que tanto a sua forma geométrica como a distribuição de esforços são demasiadamente peculiares restando como opção a aplicação de um modelo geométrico análogo no qual a análise é concluída.

A qualidade do método depende, portanto, da maior ou menor capacidade de tal modelo em representar o fenômeno real. De fato, é usual que a sobreposição de vários modelos seja aplicada, onde cada qual reproduz certa característica do fenômeno.

Conforme o exposto no capítulo anterior, a aplicação da teoria de placas para a análise de tensões em engrenagens reúne a vantagem de altas precisões a uma necessidade relativamente pequena de processamento. Até o presente a aplicação da teoria de placas tem-se concentrado na família de engrenagens cujos perfis são obtidos segundo as dimensões de cremalheiras padronizadas. É fato que esta família incorpora a grande maioria das engrenagens produzidas para todos os propósitos. Por outro lado, para que o processo de otimização seja possível é de se esperar que tal restrição seja suplantada.

Também tem sido usual que o estudo dimensional das engrenagens seja sempre baseado em sua "cremalheira de referência". Esta premissa não é adequada quando se busca o projeto otimizado. As facilidades atuais permitem que as engrenagens sejam projetadas partindo-se das necessidades e restrições reais. Isto significa que ao invés de partir da tabela de "módulos" padronizados, o projetista deveria partir de suas necessidades, conceber o elemento geométrico que melhor se adapte, e só então apreciar as limitações de manufatura.

O presente trabalho se propõe a estender os progressos da aplicação da teoria de placas para projetos não padronizados, completando para isso as seguintes tarefas básicas:

1. Desenvolver um procedimento para a análise da distribuição de esforços ao longo das linhas de contacto.

2. Desenvolver um algoritmo para a análise da correção de perfil e erros de fabricação.

3. Calcular as tensões resultantes no pé dos dentes.

4. Desenvolver um algoritmo para a determinação da tensão máxima.

5. Preparar o modelo adotado para eventual análise de pressões superficiais.

6. Suprir as fases anteriores de exemplos de aplicação prática que demonstrem a capacidade do procedimento e sua tendência, provendo também comparações com outros métodos consagrados para que se critique a sua exatidão.

### 3.1. O Fluxo Proposto para o Estudo

Uma vez que a análise é concluída sobre um modelo geométrico análogo, para que se tenha resultados confiáveis é necessário que se determine quais aspectos do fenômeno são reproduzidos no modelo básico, quais modelos adicionais devem ser sobrepostos e quais são os níveis de erro inerentes ao procedimento.

Para o estudo em questão o esquema mostrado na Figura 3.1 é proposto.

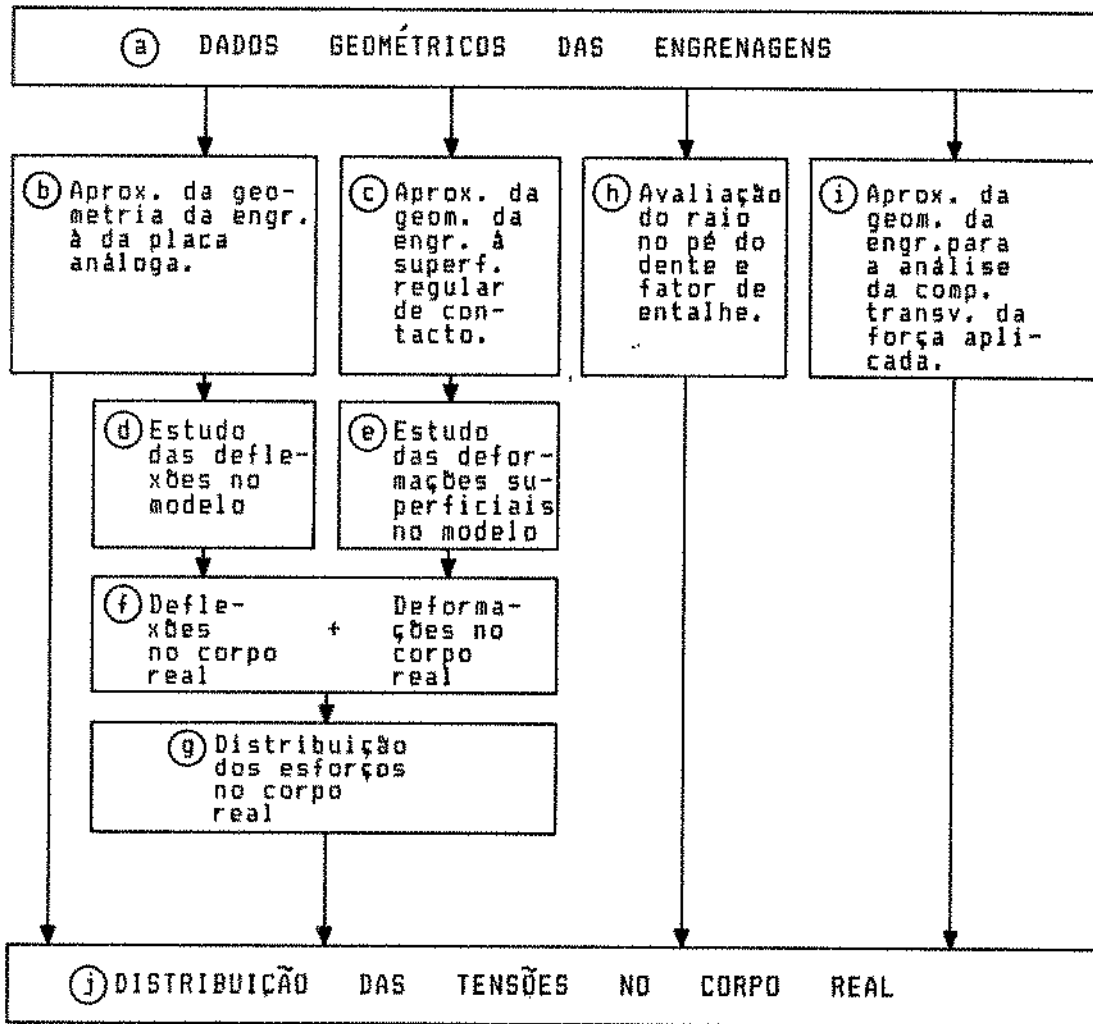


Figura 3.1: Diagrama Proposto para o Estudo

#### 4. FUNDAMENTOS PARA O CALCULO DA DISTRIBUICAO DE ESFORÇOS, PRESSOES E TENSÕES NAS ENGRENAGENS HELICOIDAIS

O algoritmo proposto se aplica à análise estática das solicitações em engrenagens helicoidais. É fato que a análise estática é um modelo bem simplificado do fenômeno real, uma vez que se impõe uma aplicação constante de torque e também os efeitos dinâmicos não são levados em conta. Por outro lado, o procedimento oferece subsídios para uma investigação mais acurada visto que se determina a rigidez dos dentes e sua variação periódica, a qual é a principal responsável pelo surgimento de cargas dinâmicas.

Não se conhece de antemão qual é a posição de engrenamento em que surgem as solicitações críticas. Por esse motivo, o procedimento exige que as diversas posições de engrenamento sejam analisadas.

Neste capítulo demonstra-se a fundamentação teórica de cada estágio do procedimento, também se critica suas limitações e imprecisões. Além disso comenta-se os princípios sobre os quais é feita a analogia do dente real a uma placa engastada e demais modelos adotados.

##### 4.1. Cálculo da Distribuição de Esforços

Quando um par de engrenagens helicoidais é submetido a torque, observa-se que, devido às deformações, a posição da engrenagem movida fica defasada em relação à motriz de um certo ângulo de "atraso"  $\theta_*$ :

$$\theta_* = \theta_1 \times \frac{Z_1}{Z_2} - \theta_2 \quad (1)$$

Onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os deslocamentos angulares das engrenagens 1 e 2, partindo-se de uma posição inicial sem carga.

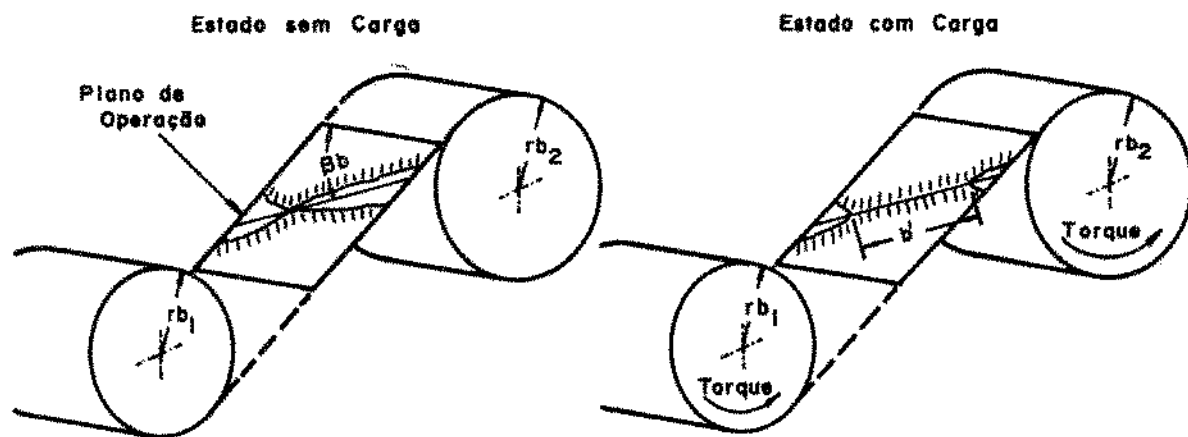


Figura 4.1: Deformação dos Flancos em um Par sob Carga

No plano de operação este ângulo de "atraso" equivale a uma "aproximação" entre os flancos  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = rb_1\theta_1 - rb_2\theta_2 \quad (2)$$

A aplicação de um torque externo  $T$  na engrenagem 1 resulta em uma força

$$P = \frac{T}{rb_1} \quad (3)$$

a qual tem sentido transversal e está sobre o plano de operação.

A força  $P$  distribui-se sobre a linha de contacto segundo uma função  $p(\xi')$  a qual obedece:

$$P = \cos \beta_b \times \int_{b'} p(\xi') d\xi' \quad (4)$$

Para o caso mais comum, em que há vários dentes em contacto simultaneamente, a equação (4) torna-se:

$$P = \cos \beta_o \times \left[ \sum_{k=1}^m \int_{b'_k} p_k(\xi'_k) d\xi'_k \right] \quad (5)$$

Onde  $p_k(\xi'_k)$  é a distribuição de carga sobre cada flanco.

Assumamos ser

$$D(x', \xi') = D_1(x', \xi') + D_2(x', \xi') + \dots + D_n(x', \xi') \quad (6)$$

função que descreve as deformações que surgem nos pontos  $(x')$  da linha de contacto de ambos os flancos sobre o plano de operação, na direção normal, quando uma força unitária é aplicada no ponto  $(\xi')$ ; e

$$\Delta(x') = \Delta_1(x') + \Delta_2(x') \quad (7)$$

a função que descreve a distância inicial entre os flancos na linha de contacto, na direção transversal, sobre o plano de operação.

Visto não haver interpenetração dos flancos a seguinte equação deve ser obedecida em toda a linha de contacto efetivo:

$$\int_{b'} D(x', \xi') p(\xi') d\xi' = [\Delta_o - \Delta(x')] \times \cos \beta_o \quad (8)$$

Para o caso de muitos dentes em contacto simultâneo, a equação (8) torna-se:

$$\int_{b'_k} D_k(x'_k, \xi'_k) p_k(\xi'_k) d\xi'_k = [\Delta_o - \Delta_k(x'_k)] \times \cos \beta_o \quad (9)$$

(k = 1, 2, \dots, m)

Os dados experimentais descritos nas referências /13/, /16/, /54/ e /55/ revelam que a função D compõe-se basicamente das deformações locais (achatamento) das superfícies sob pressão e das deflexões do dente como um todo as quais estão bem próximas daquelas que surgem em uma placa engastada de dimensões análogas. Assume-se que as outras deformações do sistema têm grandeza desprezível ou então promovem um deslocamento do dente como um todo, o que não afeta a distribuição dos esforços, com



exceção do mencionado no item 4.1.1.

Define-se portanto uma função  $K_c(x', \xi')$  que descreve a deformação superficial em um dos flancos quando uma força unitária normal é aplicada em  $(\xi')$ ; e uma função  $[K_b(x', \xi') \times \cos\gamma(x') \times \cos\gamma(\xi')]$  que descreve as deflexões de um dente na direção normal da linha de contacto para uma força unitária normal aplicada em  $(\xi')$ .

A equação (9) torna-se:

$$\int_{b_k} \left\{ [K_{b1k}(x'_k, \xi'_k) \times \cos\gamma(x'_k) \times \cos\gamma(\xi'_k) + K_{c1k}(x'_k, \xi'_k)] + [K_{b2k}(x'_k, \xi'_k) \times \cos\gamma(x'_k) \times \cos\gamma(\xi'_k) + K_{c2k}(x'_k, \xi'_k)] \right\} \times p_k(\xi'_k) d\xi'_k =$$

$$= \left\{ \Delta_{\theta} - [\Delta_{1k}(x'_k) + \Delta_{2k}(x'_k)] \right\} \times \cos\beta_{\theta}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

#### 4.1.0. Obtenção das Funções $K_b$ , $K_c$ e do Ângulo $\gamma$

As deformações que surgem no flanco de um dente de engrenagem submetido a esforços, podem ser calculadas por diversos métodos. Obviamente, métodos mais dispendiosos promoverão maiores precisões. Em coerência com os objetivos propostos, a precisão a se atingir deve ser consideravelmente maior do que aquela obtida pelos métodos usuais. Por outro lado, o tempo de processamento computacional resultante deve estar compatível com o ciclo usual de projeto. Isto significa que o tempo necessário para a verificação de um novo par de engrenagens deve ter a mesma ordem de grandeza do seu tempo de projeto. De outra forma o projetista seria desencorajado a utilizá-lo.

Posto isso, descarta-se qualquer método numérico tridimensional, já que o tempo de processamento requerido não se ajusta ao fluxo usual de projeto. Também qualquer proposta unidimensional (vigas esbeltas) é rejeitada devida à sua pouca precisão. Adota-se o modelo bidimensional

de placas para as deflexões do dente ( $K_b$ ) e um método "semi-empírico" fundamentado na formulação de Hertz /4/ para as deformações locais devidas ao achatamento dos flancos ( $K_c$ ).

Pela teoria de placas, obtém-se as deflexões segundo a direção transversal ao plano de análise (direção "paralela à base do dente). Na formulação descrita no item 4.1. deve-se determinar quais são as deflexões ao longo do plano de engrenamento. Faz-se necessária, portanto, a determinação do ângulo que promova a transferência de referenciais em cada ponto de contacto ( $\gamma$ ).

#### 4.1.0.1. Determinação de $K_b$

Para a aplicação da formulação de placas parte-se da hipótese que um dente helicoidal pode ser razoavelmente representado por uma placa retangular engastada de espessura linearmente variável.

Estuda-se as deflexões em todo o domínio quando uma força unitária é aplicada em um ponto  $(\xi, \eta)$  arbitrário.

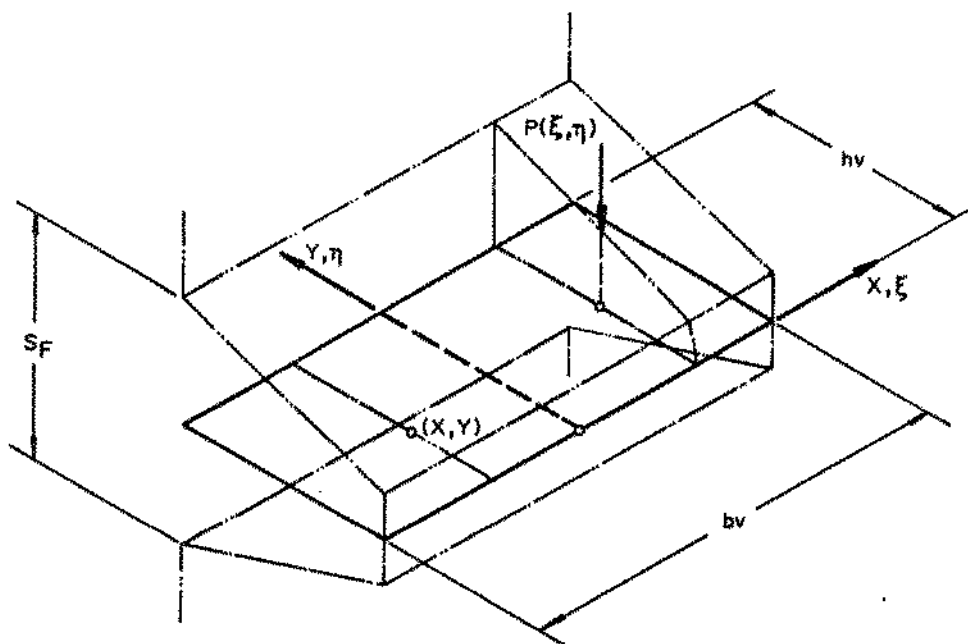


Figura 4.1.1: Placa Bidimensional Análoga ao Dente Helicoidal

A deflexão de uma placa que tem essas características é governada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 D(y) \nabla^2 \nabla^2 \omega + 2 \frac{\partial D(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega \\
 + \frac{\partial^2 D(y)}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = q(x,y) \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

Também se descreve o fenômeno pela minimização da expressão seguinte (princípio variacional):

$$\begin{aligned}
 \pi = \frac{1}{2} \int_A D(y) \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dx dy \\
 - \int_A q(x,y) \omega(x,y) dx dy \quad (10.2)
 \end{aligned}$$

onde

$$D(y) = \frac{E}{12(1-\nu^2)} T(y)^3 \quad (10.3)$$

$w$  = deflexão em cada ponto

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$E$  = Módulo de elasticidade em tração

$q$  = Carga por unidade de área

$T$  = Espessura da placa a cada altura.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

A solução numérica é comumente obtida com:

-A discretização da equação (10.1) através de diferenças finitas.

-A aplicação do princípio variacional (10.2) através do método de elementos finitos.

Muitas outras propostas podem também ser tentadas, entre elas está a solução da equação (10.1) por elementos finitos a qual é usada na referência /20/.

Qualquer método dentre os citados proporciona os subsídios necessários para a determinação da função  $K_b$  da equação (10). Para isso duas abordagens podem ser adotadas: A completação do modelamento e a solução numérica a cada vez que se calcular os valores da função  $K_b$ , ou então o armazenamento de padrões pré-calculados e sua utilização quando necessários.

É certo que o processamento "caso por caso" promove melhor precisão, no entanto, o tempo necessário para a modelagem automática e análise é ainda incompatível com os tempos de projeto quando se considera a utilização de um mini ou micro computador.

Na referência /14/ o seguinte procedimento é sugerido:

1. Parametrização da placa em análise. Isto significa que o cálculo é procedido em uma placa proporcional à do problema em questão tendo altura igual à unidade. Posteriormente multiplica-se os resultados pelo fator de escala conveniente.

2. Obtenção das deflexões em um conjunto de placas que apresentam diversas relações de altura-largura e altura-espessura utilizando o Método de Diferenças Finitas.

3. Obtenção de curvas polinomiais que reproduzem os resultados obtidos numericamente.

4. Aplicação das curvas polinomiais para a determinação das deflexões da placa em estudo.

Adotou-se esta solução para o algoritmo proposto, tendo-se em vista principalmente o reduzido tempo de processamento. Na referência /14/ as equações polinomiais citadas são mostradas em detalhes e sua aplicação é discutida.

#### 4.1.0.2. Determinação de $K_z$

O contacto de duas engrenagens helicoidais é semelhante àquele que ocorre entre dois cones como mostrados na Figura 4.1.2-b. Para o caso em que se tem dois cilindros em contacto a formulação de Hertz prevê a seguinte deformação total:

$$\delta_L = \frac{2(1-\nu^2)}{E} q \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} + 2 \ln 2 + \ln \frac{b}{2 a_c} \right) \quad (10.4)$$

onde

$$a_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi} (1-\nu^2) \frac{q}{E} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}}$$

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$E$  = Módulo de elasticidade em tração

$R$  = Raio de curvatura dos cilindros

$q$  = Carga por unidade de comprimento

$b$  = Comprimento do Cilindro

Para o caso dos dois cones em contacto nenhuma formulação analítica tem sido desenvolvida.

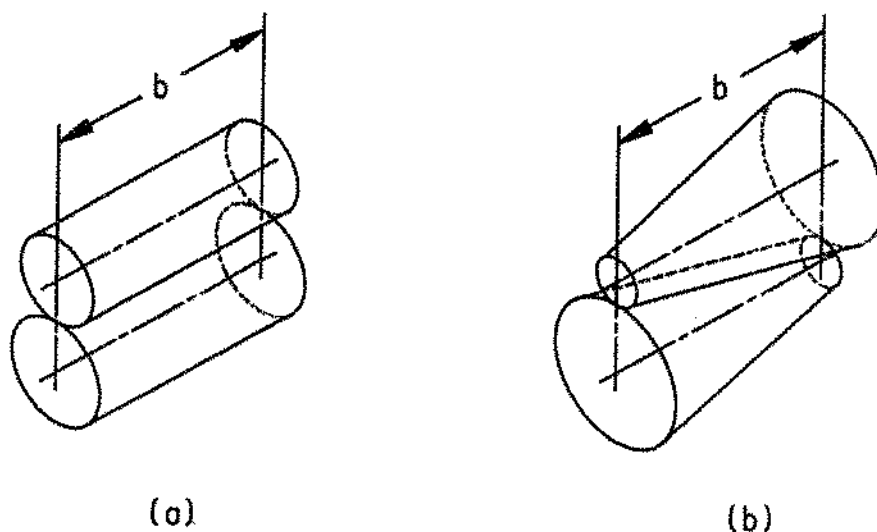


Figura 4.1.2: Aproximação do Padrão de Contacto de uma Engrenagem Reta e Helicoidal

Na referência /16/ um procedimento "semi-empírico" é proposto para a solução deste caso. É certo que o uso de um método numérico de grande porte proporcionaria muito maior precisão. Por outro lado, no contexto atual, o estudo de fenômenos de contacto por Elementos Finitos ou outro método afim é experimental e trabalhoso mesmo para os especialistas da área. Também deve-se ressaltar que o tempo necessário para o processamento desta solução mais uma vez é incompatível aos propósitos desse estudo.

O seguinte procedimento é sugerido:

1. Discretização da carga "q" sobre a linha de contacto obtendo-se cargas concentradas "P" equivalentes em cada incremento.

2. Hipótese que cada carga concentrada "P" provoca uma deformação de acordo com a distribuição assumida empiricamente:

$$\omega = P_x \frac{2(1-\nu)}{4\pi G} \times \frac{1}{\left[ a_c^2 + (x' - \xi')^2 \right]^{1/2}} \quad (10.5)$$

onde

$$a_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi} (1-\nu^2) \frac{q}{E} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}}$$

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$G$  = Módulo de elasticidade em cisalhamento

$E$  = Módulo de elasticidade em tração

$R$  = Raio de curvatura dos cilindros análogos

$q$  = Carga por unidade de comprimento

3. Sobreposição das deformações devidas a cada carga discretizada para se obter a deformação final de cada ponto.

Para confirmar a validade desta proposta empirica a referência /16/ fundamenta-se em duas verificações:

- O fato de esta proposta se adequar bem aos testes experimentais.
- O fato de esta proposta ser equivalente à formulação de Hertz quando aplicada a cilindros em contacto.

#### 4.1.0.3. Determinação do Angulo $\gamma$

O ângulo  $\gamma$  procede à transferência do referencial normal à base, do dente para o plano de operação.

A referencia /59/ mostra com detalhes a geometria da evolvente através da qual se determina o valor deste ângulo de transferência.



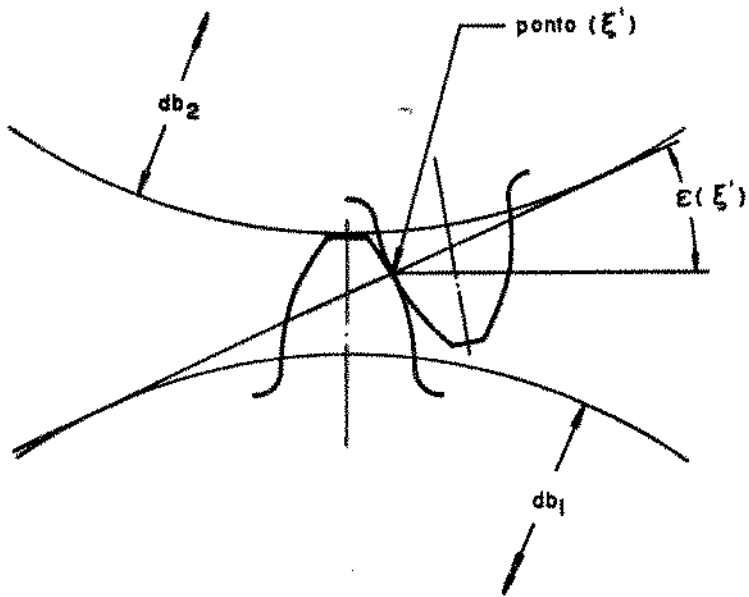


Figura 4.2:  
Determinação do  
Ângulo  $\epsilon(\xi')$

Sendo o ângulo  $\epsilon(\xi')$  conforme o mostrado na Figura 4.2 temos:

$$\gamma(\xi') = \tan^{-1}[\tan \epsilon(\xi') \times \cos \beta(\xi')] \quad (11)$$

A determinação dos esforços sobre a linha de contacto é portanto a solução simultânea das equações (10) e (5):

$$\int_{b'_k} \left\{ \left[ K_{b1k}(x'_k, \xi'_k) \times \cos \gamma(x'_k) \times \cos \gamma(\xi'_k) + K_{c1k}(x'_k, \xi'_k) \right] + \right. \\ \left. \left[ K_{b2k}(x'_k, \xi'_k) \times \cos \gamma(x'_k) \times \cos \gamma(\xi'_k) + K_{c2k}(x'_k, \xi'_k) \right] \right\} \times p_k(\xi'_k) d\xi'_k =$$

$$= \left\{ \Delta_m - \left[ \Delta_{1k}(x'_k) + \Delta_{2k}(x'_k) \right] \right\} \times \cos \beta_b$$

$$(k = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

e

$$P = \cos \beta_b \times \left[ \sum_{k=1}^m \int_{b'_k} p_k(\xi'_k) d\xi'_k \right] \quad (5)$$

#### 4.1.1. Características da Função $\Delta(x')$

As funções  $\Delta_1(x')$  e  $\Delta_2(x')$  devem expressar a distância de cada flanco à linha ideal de contacto sobre o plano de operação, na direção transversal.

O valor de  $\Delta(x')$  deve incorporar não apenas as correções intencionais de perfil como também os desvios de manufatura e de montagem. Ademais as deflexões dos eixos, mancais e corpo da engrenagem podem também serem sobrepostas. Assume-se que a influência relevante de tais deflexões possam ser descritas como uma variação inicial em  $\Delta(x')$ . Uma vez que muitas dessas deflexões são função da distribuição de esforços, uma análise precisa requer um procedimento iterativo.

#### 4.1.2 Princípios da Análise Numérica

Como visto acima, a distribuição de esforços é determinada pela solução de duas equações do tipo:

$$\int_{b'} D(x', \xi') p(\xi') d\xi' = [\Delta_m - \Delta(x')] \times \cos \beta_b \quad (8)$$

$$e \quad P = \cos \beta_b \times \int_{b'} p(\xi') d\xi' \quad (4)$$

onde  $p(\xi')$  e  $\Delta_m$  são incógnitas.

Para a solução numérica desse sistema, a função  $p(\xi')$  deve ser discretizada em "n" coordenadas no domínio  $b'$ , como mostrado na Figura 4.3.

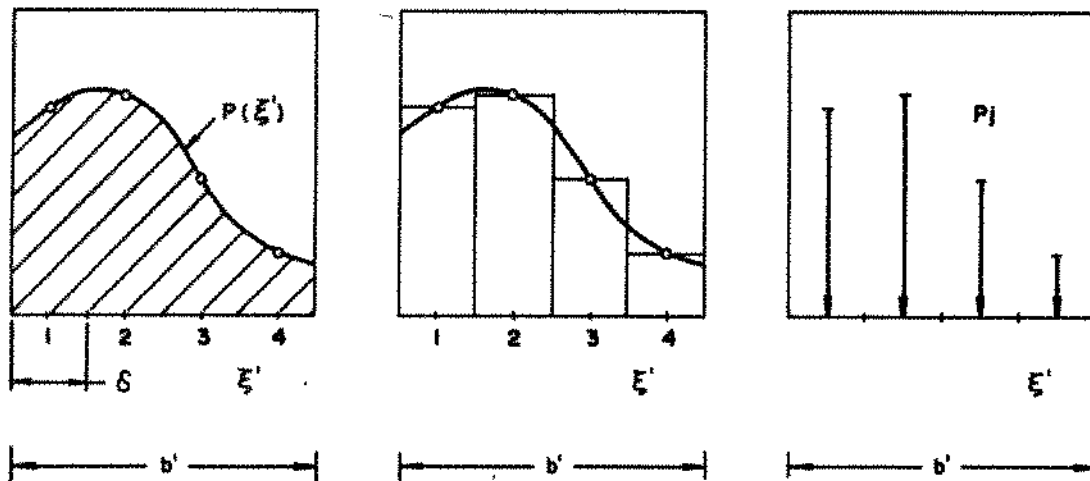


Figura 4.3: Processo de Discretização da Função  $p(\xi')$

Devido às limitações na capacidade de processamento o número de coordenadas de discretização deve ser o menor possível mantendo uma precisão aceitável. O seguinte critério é usado para quantificar o erro devido à discretização:

$$e(x') = \frac{\int_{\delta_j} \mathbf{D}(x', \xi') \times p(\xi') d\xi' - \mathbf{D}(x', \xi_j) \times P_j}{\int_{\delta_j} \mathbf{D}(x', \xi') \times p(\xi') d\xi'}$$

(j = 1, 2, \dots, n) \quad (12)

onde

- $e(x')$  = Erro introduzido pela discretização
- $\delta_j$  = Intervalo de discretização em  $b'$
- $\xi_j$  = Coordenada de discretização
- $P_j$  = Força concentrada aplicada sobre  $\xi_j$

A aplicação efetiva do critério acima não é viável uma vez que a função  $p(\xi')$  é desconhecida.

Um critério opcional é mostrado na expressão (13):

$$e(x') \cong \frac{D(x', \xi'_j) \times P_j - D(x', \xi'_j \pm \frac{\delta_i}{2}) \times P_j}{D(x', \xi'_j) \times P_j}$$

(j = 1, 2, \dots, n) \quad (13)

No caso em que os valores de "e(x')" são muito grandes, o intervalo deve ser diminuído; resultando em um número maior de coordenadas de discretização.

#### 4.1.3. Sistema de Equações Lineares para a Obtenção de "p(\xi)" e "\Delta\_\*

Uma vez selecionado o número de coordenadas de discretização ( Figura 4.4 ) as seguintes equações podem ser impostas:

$$\begin{cases} G(x'_1, \xi'_1) \times P_1 + G(x'_1, \xi'_2) \times P_2 + \dots + G(x'_1, \xi'_n) \times P_n = [\Delta_* - \Delta(x_1)] \times \cos \beta_b \\ G(x'_2, \xi'_1) \times P_1 + G(x'_2, \xi'_2) \times P_2 + \dots + G(x'_2, \xi'_n) \times P_n = [\Delta_* - \Delta(x_2)] \times \cos \beta_b \\ \vdots \\ G(x'_n, \xi'_1) \times P_1 + G(x'_n, \xi'_2) \times P_2 + \dots + G(x'_n, \xi'_n) \times P_n = [\Delta_* - \Delta(x_n)] \times \cos \beta_b \end{cases}$$

(14)

onde

$$G(x'_i, \xi'_j) = \frac{\int_{\delta_i} D(x', \xi'_j) dx'}{\delta_i}$$

(15)

e

$$\frac{P}{\cos \beta_b} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

(16)

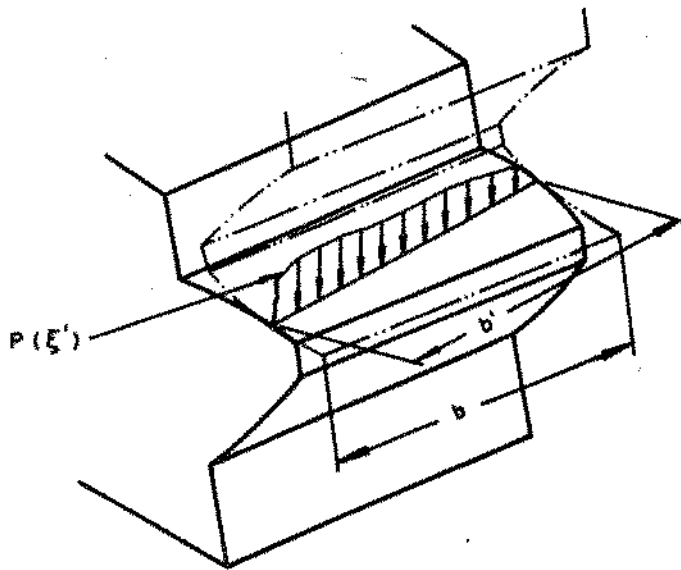


Figura 4.41  
Posição das  
Coordenadas  $(\xi')$   
sobre a Linha de  
Contacto

Na notação matricial temos:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\Delta_n - \Delta_1) \times \cos\beta_b \\ (\Delta_n - \Delta_2) \times \cos\beta_b \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_n) \times \cos\beta_b \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$G_{ij} = G(x'_i, \xi'_j)$  sendo  $i$  e  $j$  as respectivas coordenadas de discretização.

Visto não haver nenhuma deflexão relevante em um dente quando uma carga  $p(\xi')$  é aplicada no dente subsequente, a equação (17) e (16) pode ser estendida para a análise do engrenamento múltiplo da seguinte forma:



logo:

$$\{P\} = [H] \times \{\Delta_m \times \cos\beta_b - \Delta \times \cos\beta_b\} \quad (22)$$

onde  $[H] = [B]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta_m \times \cos\beta_b - \Delta_1 \times \cos\beta_b \\ \Delta_m \times \cos\beta_b - \Delta_2 \times \cos\beta_b \\ \vdots \\ \Delta_m \times \cos\beta_b - \Delta_n \times \cos\beta_b \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{cases} P_1 = R_1 \times \Delta_m - S_1 \\ P_2 = R_2 \times \Delta_m - S_2 \\ \vdots \\ P_n = R_n \times \Delta_m - S_n \end{cases} \quad (24)$$

onde

$$R_j = \sum_{j=1}^n H_{1j} \times \cos\beta_b$$

e

$$S_j = \sum_{j=1}^n H_{1j} \times \Delta_j \times \cos\beta_b$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n R_i \times \Delta_m - \sum_{i=1}^n S_i \quad (25)$$

portanto

$$\Delta_n = \frac{\frac{P}{\cos \beta_b} + \sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad (26)$$

e

$$P_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \times (\Delta_n \times \cos \beta_b - \Delta_i \times \cos \beta_b) \quad (27)$$

#### 4.1.4 Limitações do Procedimento e Não-linearidade do Fenômeno

De modo geral, a aplicação da analogia da engrenagem à placa engastada promove precisões apreciáveis. Os trabalhos anteriores /B,13,17,53,55/, confirmaram com experimentos a boa qualidade do método quando aplicado a projetos padronizados.

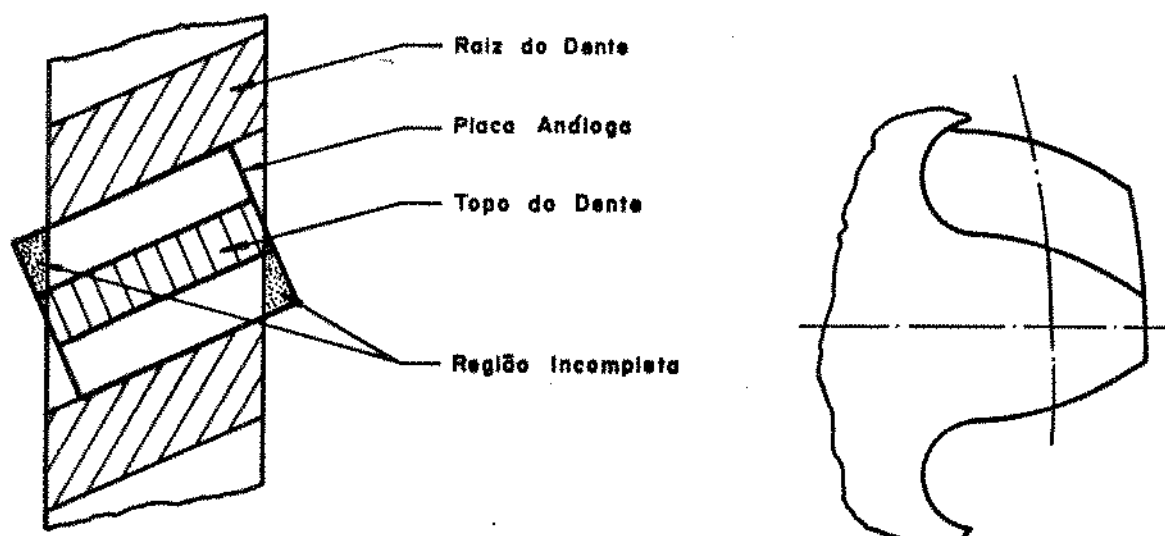
Quando o método proposto é aplicado ao projeto não-padronizado alguns cuidados adicionais devem ser observados para que sua precisão possa ser avaliada. Além do cuidado óbvio de se trabalhar com o máximo de coordenadas de discretização conforme o disponível, os seguintes itens devem ser considerados:

-A analogia do dente helicoidal à placa encontra dificuldades nas regiões extremas das laterais pois a formulação de placa não prevê o caso real em que a secção normal nas extremidades não é completa (ver Figura 4.5).

-Também não se prevê a "distorção" da secção normal devido à diferença gradual do ângulo de hélice entre a raiz e o topo do dente.

Esses fatores devem ser controlados e valores limites estabelecidos, acima dos quais a precisão do método não é assegurada.





**Figura 4.5:** Aproximação do Dente Helicoidal à Placa Engastada

O problema proposto enfrenta dois fatores de não-linearidade:

-As deformações de contacto, expressas por  $K_c$ , são inerentemente não-lineares.

-Também uma forte causa de não-linearidade aparece devido ao fato de a linha de contacto efetivo  $b'$  não ser definida de antemão, ou seja o problema real não admite a existência de uma força  $P$ , que seja menor que zero (a qual tenderia a aproximar os dois flancos). No algoritmo proposto esses fatores são contornados através de uma série de iterações no procedimento básico controlando-se a convergência dos resultados (ver capítulo 7).

#### 4.2. Cálculo das Pressões nos Flancos

Embora o presente trabalho não desenvolva o procedimento para a análise das pressões superficiais, os seguintes dados são obtidos para cada

intervalo da linha de contacto:

- A carga distribuída,
- O raio de curvatura das duas superfícies.
- O deslocamento relativo ( escorregamento ) entre os flancos.

Dispondo-se de tais dados, tanto a formulação de Hertz como outros procedimentos mais acurados podem ser aplicados. Cada intervalo pode ser assemelhado a uma fatia de dois cilindros infinitos, pressionados entre si, girando com escorregamento.

#### 4.3. Cálculo das Tensões no Pé do Dente

No item 4.1. chegou-se às diversas forças  $P_j$ , as quais são discretização da função  $p(\xi')$  sobre a linha de contacto. Para a obtenção das tensões, o efeito de cada força  $P_j$ , deve ser analisado e os resultados sobrepostos. A Figura 4.6 mostra o modelo básico desta análise. A espessura  $s_f$  é delimitada pelo ponto de tangência do raio de concordância  $r$  com uma reta que faz  $30^\circ$  com a direção vertical segundo o plano normal ao dente. Os testes experimentais, quase que unanimemente, confirmam que as tensões críticas surgem nessa posição /9,10,22,42/.

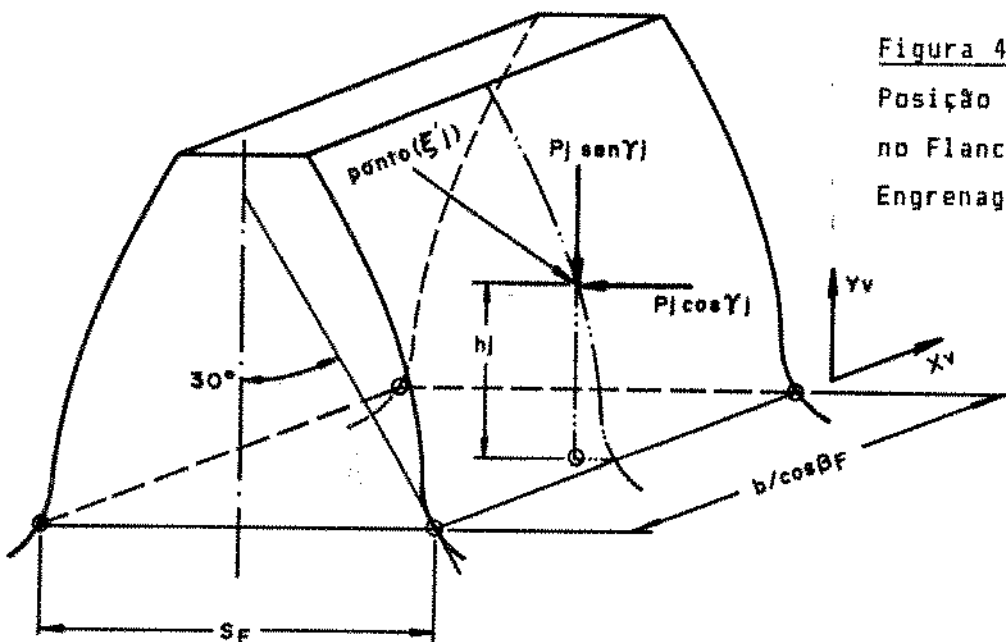


Figura 4.6:  
Posição de  $P_j$   
no Flanco da  
Engrenagem

#### 4.3.1. Cálculo das Tensões de Flexão

As tensões devidas ao momento fletor que surgem no pé do dente são as mais significativas para a análise. Este momento é resultante da aplicação da força  $P, \cos \gamma$ , a uma altura  $h$ , da base do dente. Para a sua determinação a analogia a placa engastada é mais uma vez empregada. Os resultados obtidos por diferenças finitas foram parametrizados na referência /15/ e seus valores checados contra dados experimentais. As tensões na superfície do pé do dente são dadas pela seguinte expressão:

$$\sigma_b(x_v) = \frac{6}{S_f^2} M(x_v, \xi') \quad (28)$$

onde  $\sigma_b$  = Tensão de Flexão

$M$  = Momento fletor no engaste da placa análoga resultante da aplicação de  $P, \cos \gamma$ , ( Figura 4.7 ).

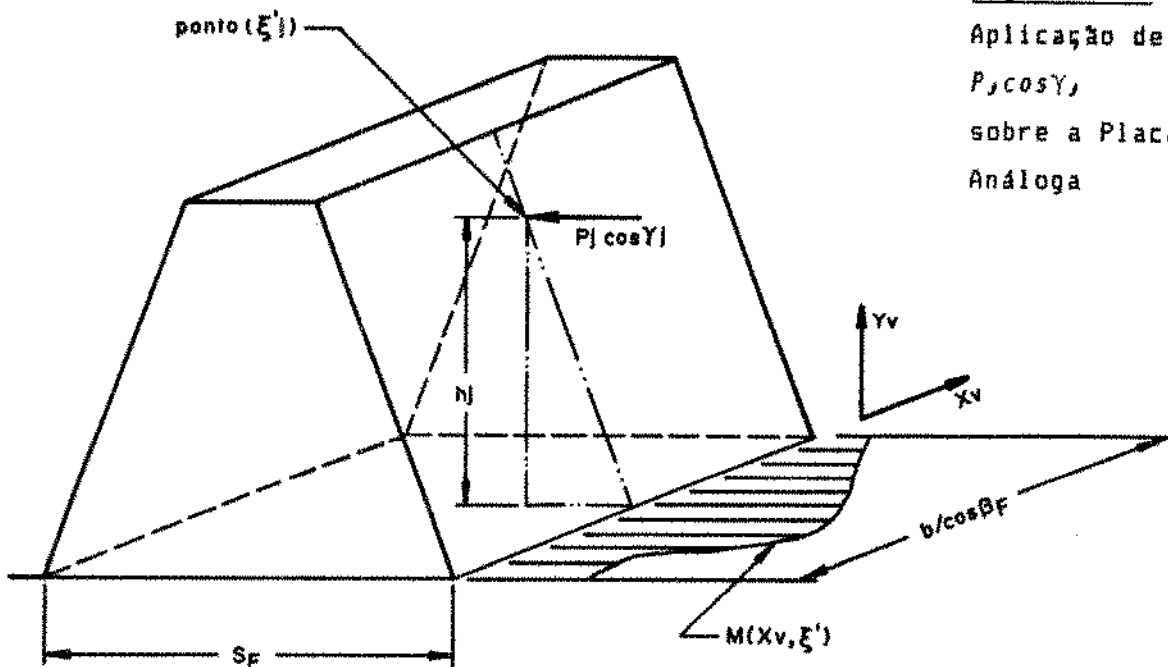


Figura 4.7:  
Aplicação de  $P, \cos \gamma$ ,  
sobre a Placa  
Análoga

### 4.3.2. Cálculo das Tensões de Compressão

Para o cálculo das tensões de compressão devidas à força  $P \cdot \text{sen} \gamma$ , a configuração da Figura 4.6 é assemelhada ao modelo mostrado na Figura 4.8.

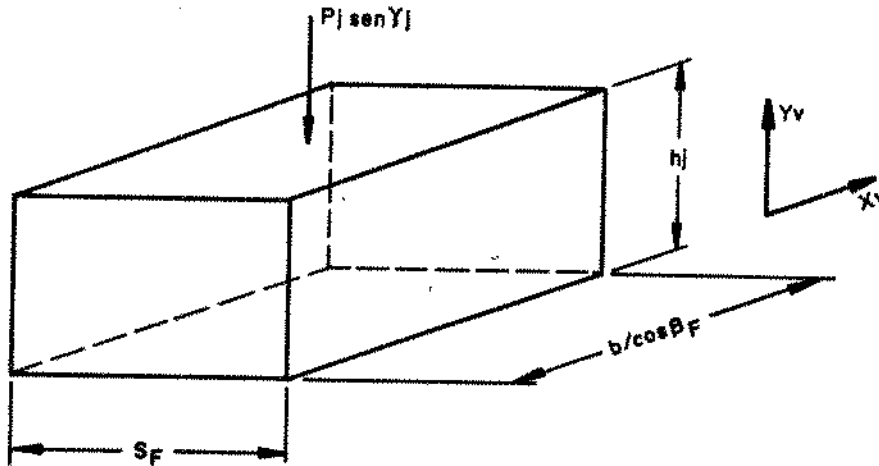


Figura 4.8: Modelo para o Cálculo das Tensões de Compressão

O estado de tensão em uma placa semi-infinita solicitada por uma carga no bordo (Figura 4.9) foi demonstrado por Timoshenko /60,40/.

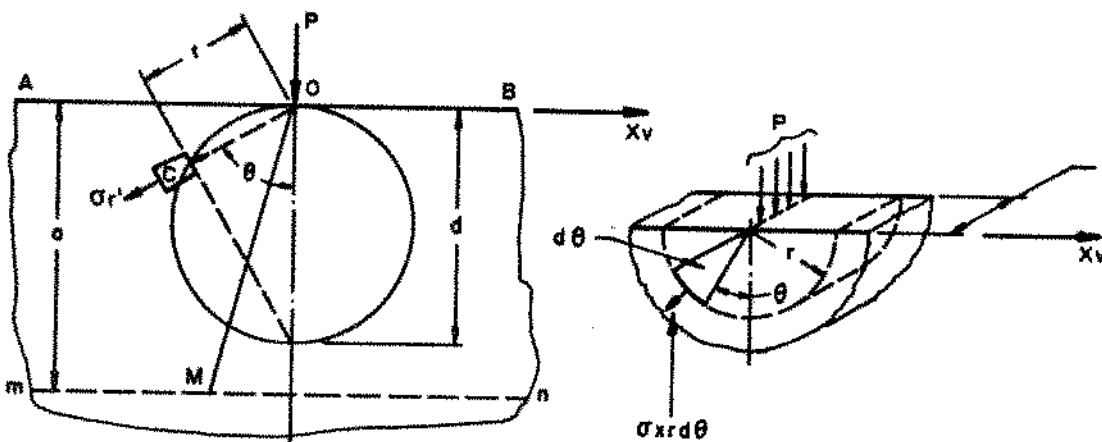


Figura 4.9: Análise das Tensões na Placa Semi-infinita /60/

As tensões segundo a direção vertical a uma distância  $h$ , do bordo são dadas por:

$$\sigma_n = \frac{2P \cos^4 \theta}{\pi h} \quad (29)$$

de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(x_v) dx_v = P \quad (30)$$

satisfazendo a condição estática:

Para o caso da Figura 4.8 assume-se que as tensões se distribuem de forma semelhante, isto é:

$$\sigma_n = k_n \cos^4 \theta \quad (31)$$

tal que

$$\int_{b/\cos \beta_F}^{\infty} \sigma_n(x_v) \times s_v \times dx_v = P, \times s \sin \gamma \quad (32)$$

Sendo  $\bar{x}_{v_1}$  e  $\bar{x}_{v_2}$  as distâncias, segundo o eixo  $x_v$ , do ponto  $\xi'$ , às extremidades da largura do dente (Figura 4.10) temos:

$$\int_{\bar{x}_{va}}^{\bar{x}_{vb}} \bar{\sigma}_n(x_v) \times s_r \times dx_v = P_j \times \text{sen} \gamma_j \quad (33)$$

$$x_v = h_j \times \tan \theta$$

$$dx_v = h_j \times \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= s_r \int_{\bar{\theta}_a}^{\bar{\theta}_b} k_n \cos^4 \theta \times h_j \times \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= s_r k_n h_j \int_{\bar{\theta}_a}^{\bar{\theta}_b} \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$\frac{s_r k_n h_j}{2} \left[ \frac{\text{sen} 2\bar{\theta}_b + \text{sen} 2\bar{\theta}_a}{2} + \bar{\theta}_b + \bar{\theta}_a \right] = P_j \times \text{sen} \gamma_j$$

$$k_n = \frac{4 P_j \text{sen} \gamma_j}{s_r h_j [\text{sen} 2\bar{\theta}_b + \text{sen} 2\bar{\theta}_a + 2(\bar{\theta}_b + \bar{\theta}_a)]} \quad (34)$$

A coordenada " $\theta$ " e os valores  $\bar{\theta}_a$  e  $\bar{\theta}_b$  estão mostrados na Figura 4.10.

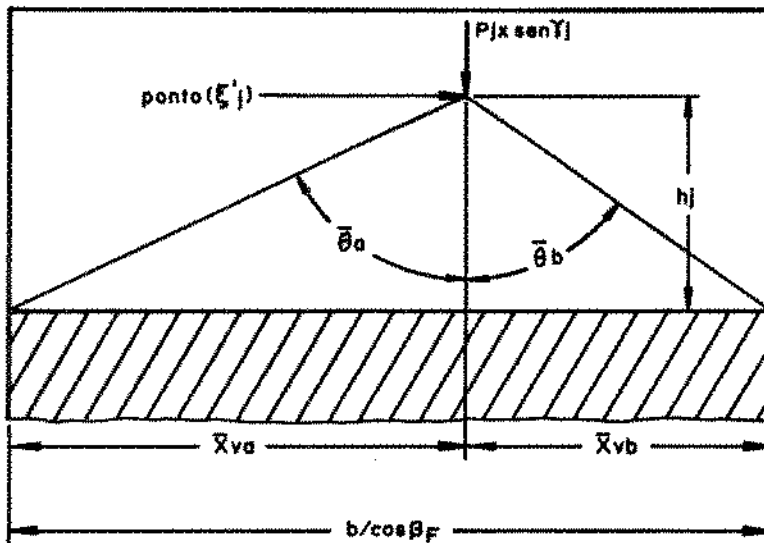


Figura 4.10  
Determinação  
de  $\bar{\theta}_a$  e  $\bar{\theta}_b$

#### 4.3.3. Fator de Concentração de Tensões e Tensões de Cisalhamento

A análise exposta acima não considera a concentração de tensões atribuída ao raio de arredondamento no pé do dente. Tanto as normas de

projeto /1,2,3/, como diversos trabalhos /9,10,40,41,55,61,62,63,64/ possuem valores levantados experimentalmente para este fator, os quais são analisados no capítulo 6 e ajustados para o algoritmo proposto.

Por outro lado tem sido comum, nos métodos de cálculo, a sobreposição do efeito de cisalhamento devido à força transversal. As tensões de cisalhamento na base do dente são significativas especialmente em dentes rebaixados ("stub gear"). Todavia, na superfície do pé do dente ou nas camadas sub-superficiais, as tensões de cisalhamento são desprezíveis. No presente trabalho, a análise de tensões se limita à superfície do pé do dente, onde geralmente se iniciam as trincas devidas à fadiga do material. Por esse motivo as tensões de cisalhamento não são consideradas.

## 5. DADOS GEOMÉTRICOS DAS ENGRENAGENS

Observa-se que os dados de engrenagem são comumente fornecidos segundo formatos adequados a cada empresa ou ambiente de projeto. Apesar dos muitos esforços de padronização, esses dados tendem a acomodar-se às peculiaridades do processo de manufatura e controle de qualidade de cada fábrica. Demais, os detalhes de "lay-out", montagem, aplicação de carga e rotações causam múltiplas combinações onde cada qual produz resultados diversos.

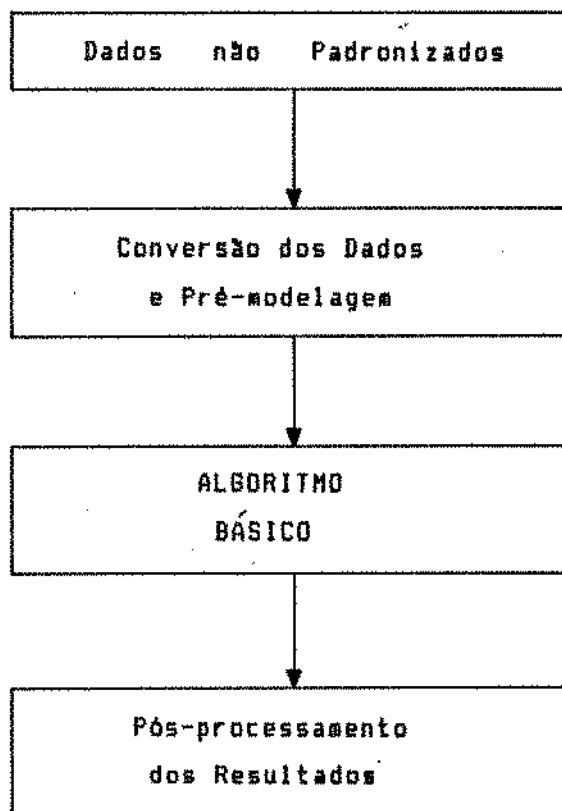


Figura 5.1: Fluxo para a Implantação do Algoritmo Básico



Visto que a análise desses fatores foge aos objetivos deste trabalho o seguinte esquema é estabelecido:

- Um formato básico para os dados de entrada é proposto.
- Uma configuração básica de "lay-out" é imposta.
- Implantado em ambientes diversos, o algoritmo deve seguir o fluxo mostrado na Figura 3.1.

Assegura-se que o algoritmo proposto aplica-se a qualquer projeto independente de seu formato e configuração. Tão somente é tarefa do usuário adequá-lo às suas imposições através de um pré e pós processamento.

### 5.1. Dados dos Dentes

Todos os dados a seguir obedecem a definição e nomenclatura do Projeto de Norma ABNT-4:04.01-003-Set/1982 /58/, a menos de alguns detalhes devidamente comentados.

	Engrenagem 1	Engrenagem 2	Descrição
1	$m$		Módulo Normal
2	$\alpha_n$		Angulo de Pressão Normal
3	$\beta$		Angulo de Hélice no Dia. Primitivo
4	$z_1$	$z_2$	Número de Dentes
5	$a$		Distância entre Centros
6	$s_1$	$s_2$	Espessura Circular Normal
7	$d_{e1}$	$d_{e2}$	Dia. Externo ou Dia. do Chanfro no Topo do Dente
8	$d_{r1}$	$d_{r2}$	Diâmetro de Raiz
9	$r_1$	$r_2$	Raio de Concordância no Pé do Dente segundo o Plano Normal

### 5.1.1. Tolerâncias de Fabricação

É sabido que os parâmetros acima mencionados aparecem na prática dentro de faixas de tolerância ao invés de valores exatos. Propõe-se que o algoritmo básico faça a análise de um conjunto de dados por vez. De acordo com a necessidade de aplicação, a rotina de pré-modelagem poderá acionar o algoritmo básico tantas vezes quantas necessárias, usando em cada caso combinações de valores máximos e mínimos de cada parâmetro.

### 5.1.2. Engrenagens Obtidas por Fresas de Geração (Caracol, Shaper, etc.)

Para as engrenagens obtidas por geração, alguns dos parâmetros mencionados acima não são fornecidos em desenho, ou quando fornecidos não são dignos de confiança. Como exemplo típico menciona-se o raio no pé do dente ( $r$ ). Via de regra, o processo de geração imprime à região do pé do dente uma curva "envolvente de trocói-de" a qual tem um raio de curvatura distinto em cada ponto. Também é o caso do diâmetro de chanfro na cabeça dos dentes, quando fresas do tipo "semi-topping" são aplicadas. Resulta mais confiável que os dados da ferramenta sejam analisados junto com as especificações do processo de corte e acabamento.

O estudo analítico das trocói-des tem sido explorado extensivamente na referência /59/, portanto se propõe que tais ajustes se efetuem na fase de pré-modelagem. Tão somente para esse caso, os dados de número 8 e 9, ( $d_r$  e  $r$ ) serão substituídos no algoritmo básico pelos dados a seguir:

10	$x_{r1}$	$x_{r2}$	Coordenada Horizontal da Raiz da Placa Análoga
11	$y_{r1}$	$y_{r2}$	Coordenada Vertical da Raiz da Placa Análoga
12	$r_{r1}$	$r_{r2}$	Raio de Curvatura do Ponto ( $x_r, y_r$ )

Esses dados são obtidos segundo o esquema mostrado na Figura 5.2.

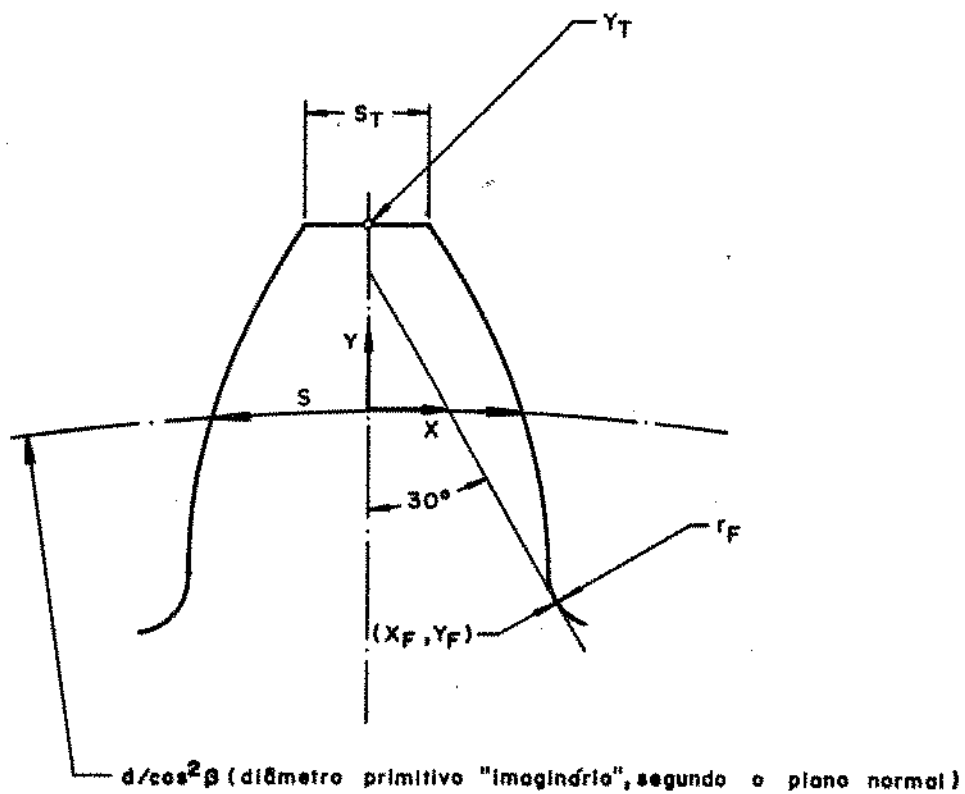


Figura 5.2:

Esquema para a  
Obtenção de  $x_r$ ,  $y_r$ , e  $r_r$

Esses dados são empregados para a composição do modelo descrito no capítulo 6 item 6.1.

## 5.2. Dados de "Lay-out"

Impõe-se a configuração mostrada na Figura 5.3.

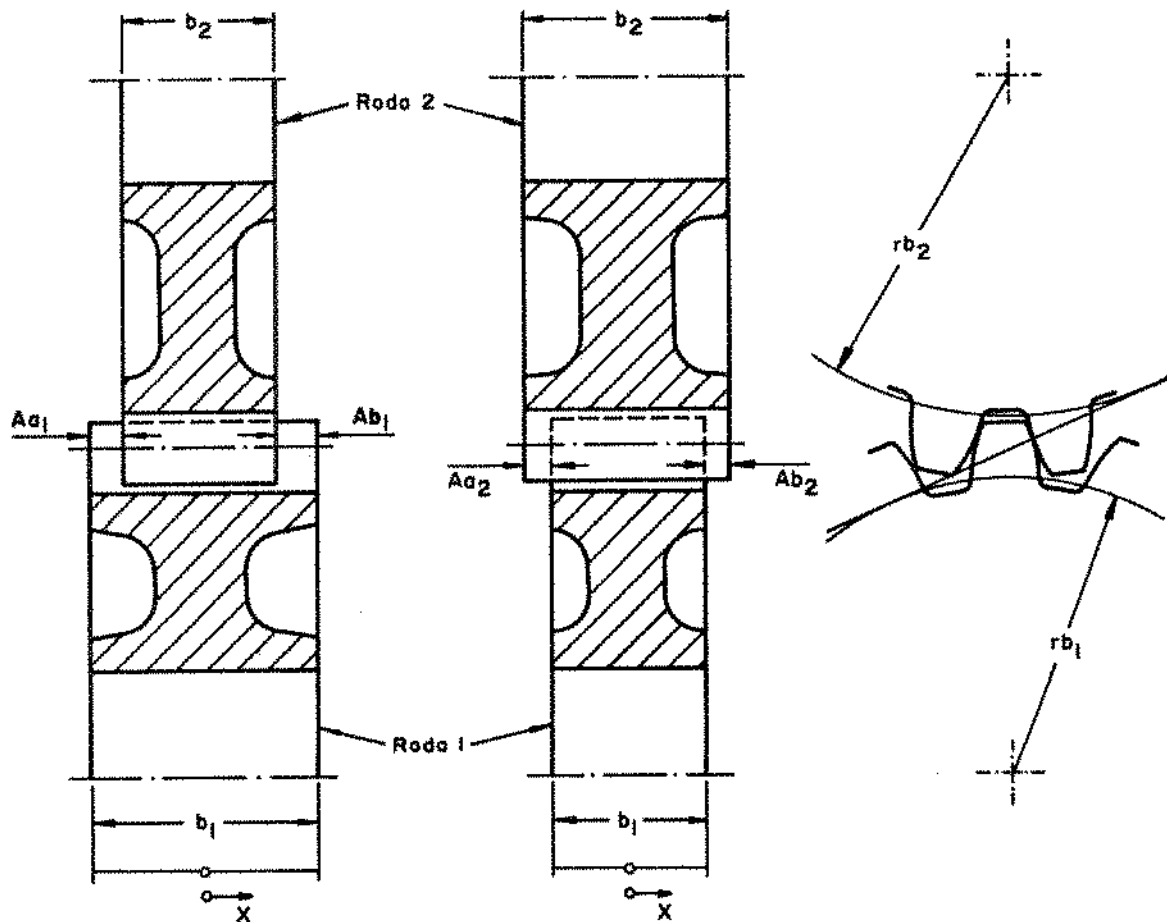


Figura 5.3: Configuração Básica de "Lay-Out"

-A roda de número 1 é mostrada no lado de baixo, possui hélice direita e recebe uma força no sentido que entra na folha.

-Toda vez que o valor  $A_{a1}$  for maior que zero,  $A_{a2}$  deve ser dado como igual a zero e vice-versa. Faz-se o mesmo com os valores  $A_{b1}$  e  $A_{b2}$ .

-A coordenada "x" parte do ponto médio da largura da roda 1.

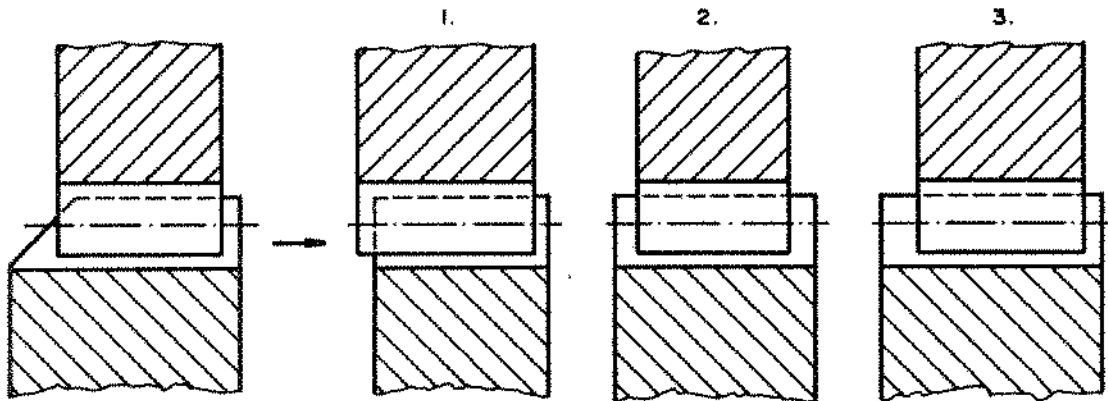
13	$b_1$	$b_2$	Largura da Engrenagem
14	$A_{b1}$	$A_{b2}$	Excedente da Largura no Lado Esquerdo
15	$A_{b1}$	$A_{b2}$	Excedente da Largura no Lado Direito

#### 5.2.1. Peculiaridades de "Lay-out"

-Quando as características de aplicação de força e sentido de hélice não forem iguais às impostas, a pré-modelagem deve proporcionar um rearranjo dos dados para que o algoritmo básico se aplique. Nesse caso, algumas vezes os resultados aparecerão invertidos no que se refere à direção x. Isto é facilmente previsto na pré-modelagem e deve ser corrigido no pós-processamento dos resultados.

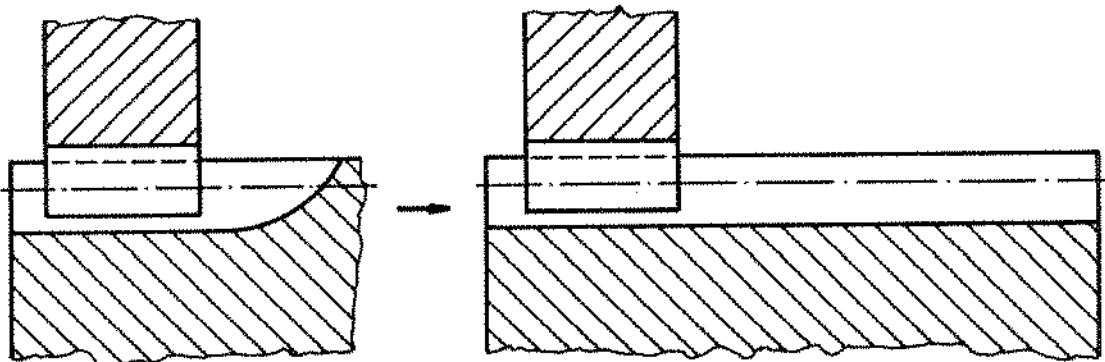
-Todos os casos em que a largura da engrenagem não aparece como o especificado, devem ser aproximados coerentemente. Por vezes, aconselha-se que mais de uma análise seja executada para se obter maior confiança. Dois exemplos são expostos a seguir.

Figura 5.4:  
Aproximação para  
Engrenagens com  
Largura Irregular



Para o caso mostrado na Figura 5.4 é de se esperar que o resultado real esteja próximo da análise intermediária (número 2) e que seguramente esteja entre as de número 1 e 3.

Figura 5.5:  
Aproximação para  
Engrenagens Entalhadas  
em Ponta de Eixo



Desde que a rigidez do lado direito da roda 1, na Figura 5.5 é muito maior do que as demais, esta configuração é aproximada para um caso em que o excedente de largura seja muito maior do que as dimensões envolvidas.

### 5.3. Dados de Desvio do Perfil ( Erros e Correções )

Visando propósitos diversos os perfis das engrenagens são comumente alterados de forma a se afastar da curva evolvente ideal. A essas correções se acumulam os erros de manufatura, deformações de tratamento térmico e erros de posicionamento dos eixos. Quando posto em funcionamento o conjunto engrenagens-eixos apresenta deflexões que causam alteração adicional na posição relativa dos dentes engrenados. Todos esses fatores fazem com que o engrenamento seja alterado em duas direções:

- Uma distância inicial entre os flancos é introduzida.

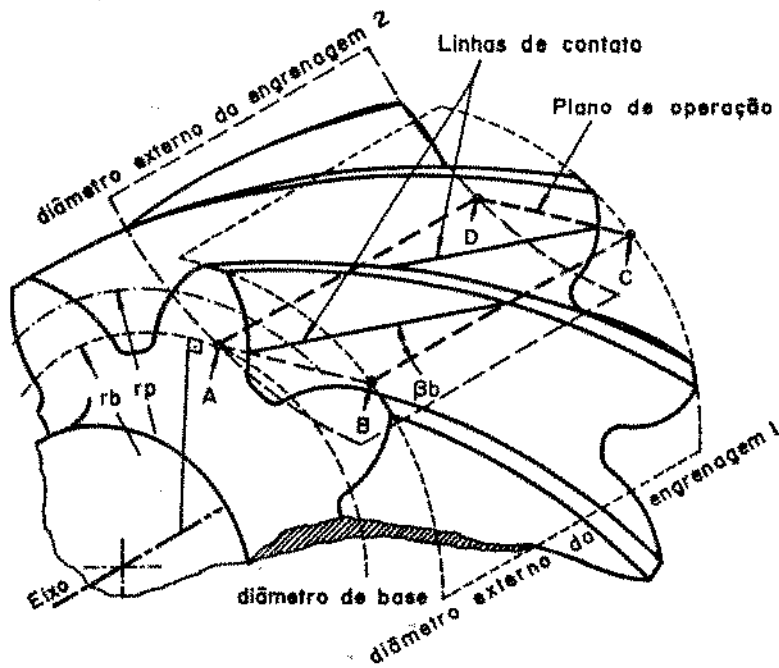
- O contacto passa a ocorrer a certa distância fora do plano de operação.

Uma análise grosseira revela que a distância inicial entre os flancos é função direta do desvio total introduzido enquanto a distância do ponto de contacto ao plano de operação é função da derivada primeira do desvio. Essas duas distâncias causam alterações na distribuição da carga.

Uma vez que a distância do ponto de contacto ao plano de operação é muito menor do que a distância inicial entre os flancos, a primeira é desconsiderada na presente análise. A pré-modelagem deve proceder às conversões necessárias para que o desvio total seja expresso segundo as regras definidas em seguida.

Na Figura 5.6 o quadrilátero ABCD limita o plano de operação. O desvio do perfil deve ser expresso ao longo do plano de operação, na direção transversal para cada fatia da largura da engrenagem.





**Figura 5.6:** Posição do Plano de Operação num Par de Engrenagens Helicoidais /31/

A Figura 5.7-a mostra o levantamento dos dados para a composição da relação:

$$\Delta = f(z') \tag{35}$$

onde  $z'$  tem a direção e origem conforme mostrado na Figura 5.7-b

Como os valores de  $\Delta$  são variáveis em cada fatia da largura, tem-se:

$$\Delta = f(z', x) \tag{36}$$

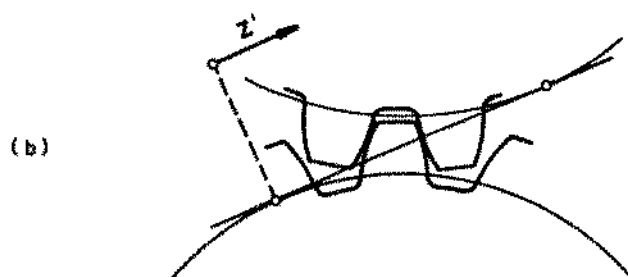
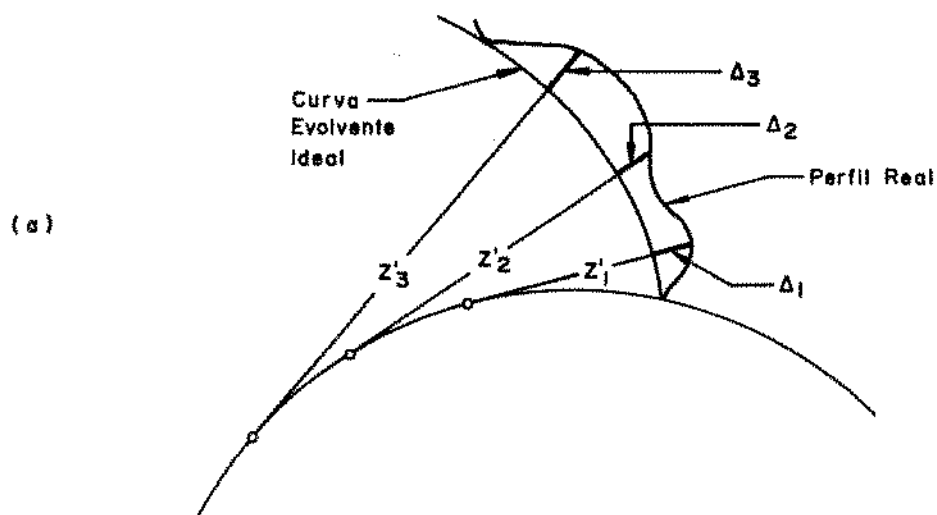


Figura 5.7:  
 Determinação  
 dos Desvios  
 de um  
 Perfil  
 Evolvente

No algoritmo proposto convencionou-se que os valores do desvio serão fornecidos para uma série de pontos  $(x, z')$  igualmente espaçados e que os valores intermediários serão obtidos por interpolação, obtendo-se assim a descrição topológica do flanco, como é mostrado na Figura 5.8

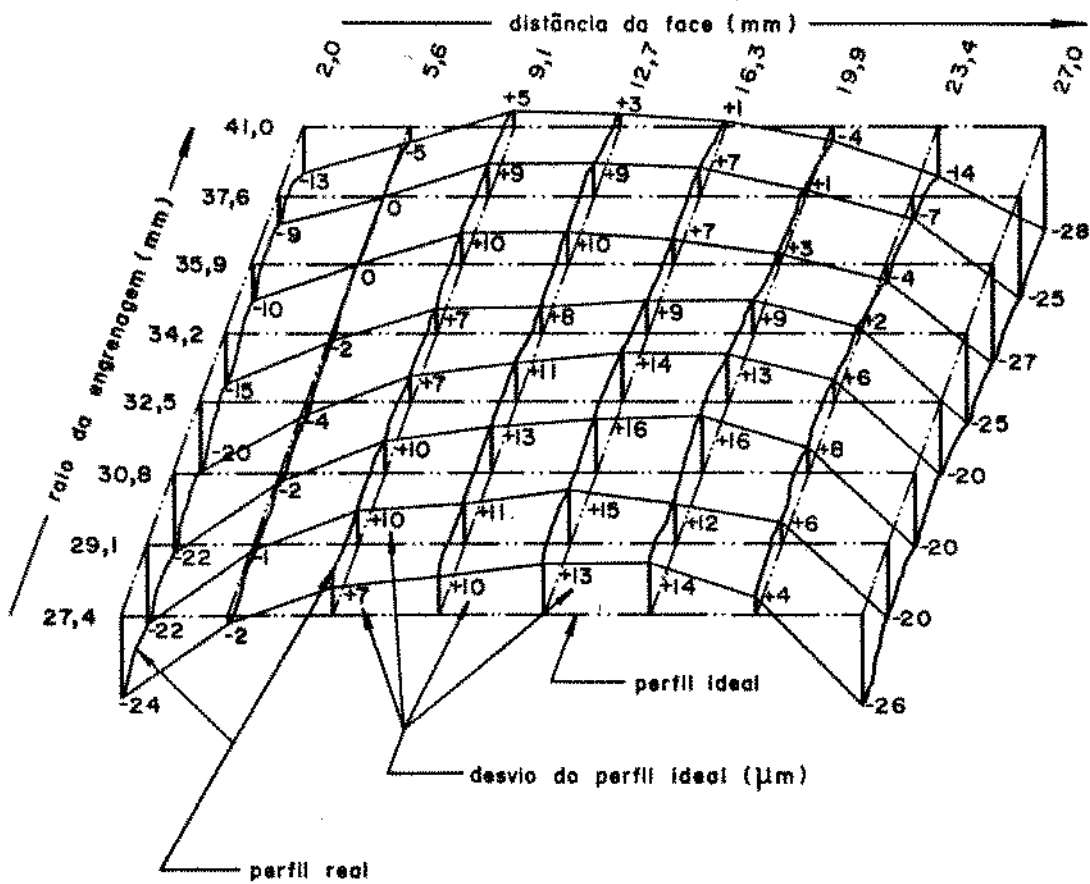


Figura 5.8: Topologia do Flanco de um Dente de Engrenagem

Deve-se portanto fornecer, como dado de entrada, a matriz com os valores do desvio medidos em micrometros ( $\mu\text{m}$ ). Assume-se que a posição (1,1) da matriz refere-se ao ponto na borda esquerda mais inferior e (n,m) ao ponto na borda direita na extremidade superior (diâmetro externo). O posicionamento das engrenagens deve obedecer a mesma convenção adotada no item 5.2. Essa matriz tem tamanho arbitrário, sabendo-se que quanto mais estreito os intervalos mais precisos serão os valores intermediários obtidos por interpolação.

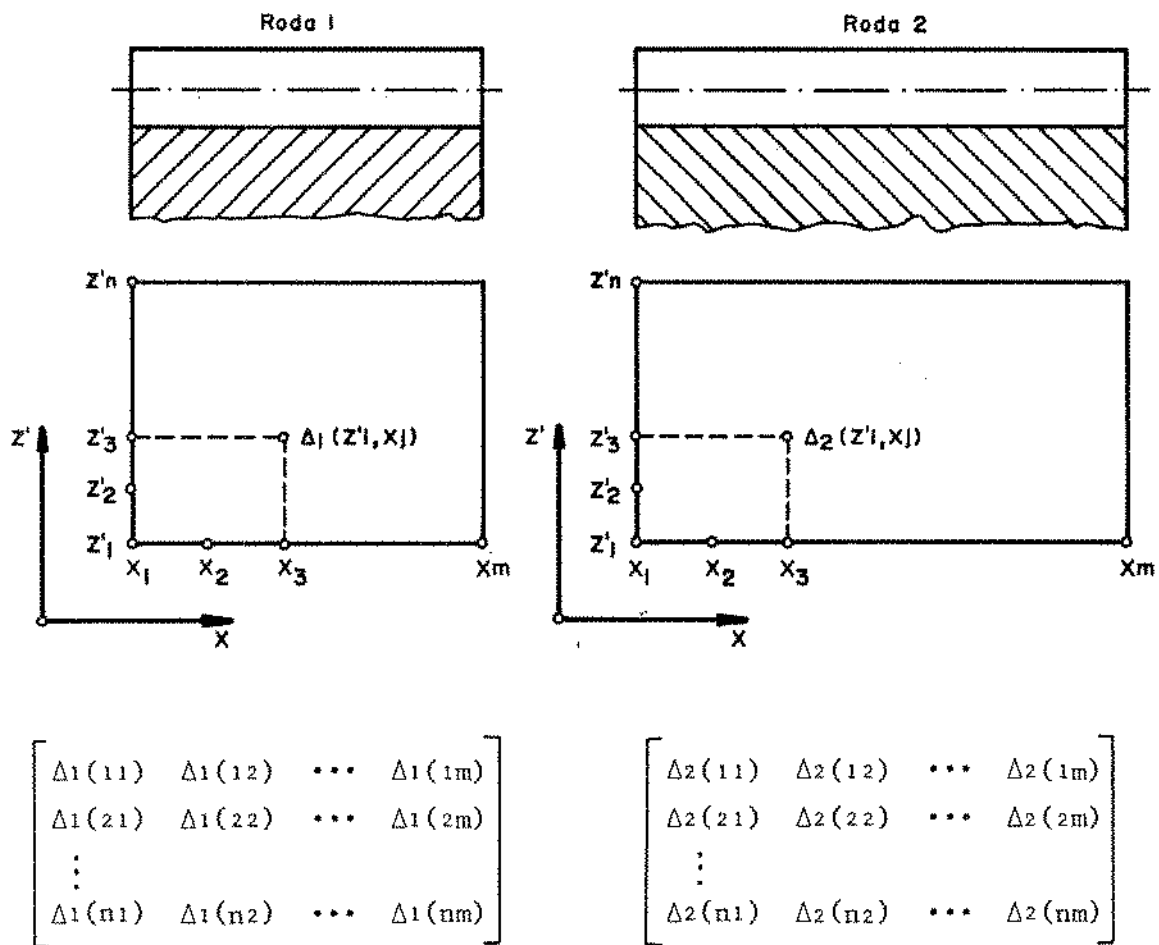


Figura 5.9: Obtenção dos Valores de  $\Delta$

Para o caso de engrenamento simultâneo de vários pares em que se impõe padrões de desvio diferentes para cada dente, as diversas matrizes devem ser fornecidas.

16	$[\Delta_1]$	$[\Delta_2]$	Matriz(es) dos Valores do Desvio Total no Flanco
----	--------------	--------------	--

## 6. DETERMINAÇÃO DO MODELO GEOMÉTRICO E ANÁLISE DAS TENSÕES

Para se aplicar a formulação de placas às engrenagens, uma série de simplificações na geometria do elemento é necessária. Para que este modelamento se efetue automaticamente em computador é necessário que a formulação geral esteja bem definida, e que sua regra de formação seja suficientemente detalhada.

Esta atividade se divide em duas tarefas:

- A determinação das dimensões do modelo análogo.
- A transferência do referencial real para o do modelo e vice-versa.

A obtenção deste modelo não objetiva simplificar a análise geométrica ou cinemática do par engrenado. Embora um tanto complexa, toda a análise geométrica e cinemática das engrenagens é perfeitamente exequível em computador de pequeno porte, obtendo-se valores exatos como resultado. A utilização de um modelo geométrico simplificado deve se limitar ao estudo dos dados cuja obtenção seria inviável de outra maneira, a saber, o estado de tensões e deformações dos corpos em contacto.

O presente trabalho não se propõe a justificar com minúcias cada passo da análise geométrica e cinemática, visto ser este um assunto amplamente divulgado o qual tem sido abordado com detalhes, principalmente nas referências /11/, /31/ e /59/. Alguns detalhes da análise geométrica os quais são próprios do algoritmo proposto recebem maior atenção.

O fluxo mostrado na Figura 6.1 deve ser obedecido.

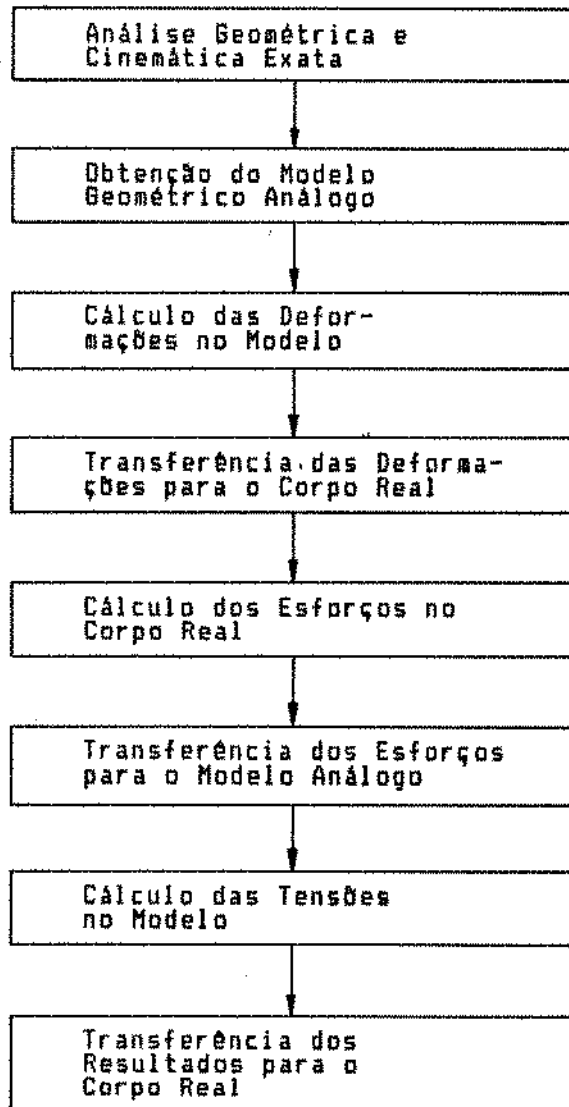


Figura 6.1: Fluxo Seguido para a Análise de Tensões e Deformações do Par Engrenado

### 6.1. Determinação das Dimensões do Modelo Análogo

A formulação de Umezawa /13/ tem sido adotada para a determinação das funções de influência do sistema. Esta é uma formulação bidimensional de placa, a qual simula uma cremalheira trapezoidal conforme a Figura 6.2.

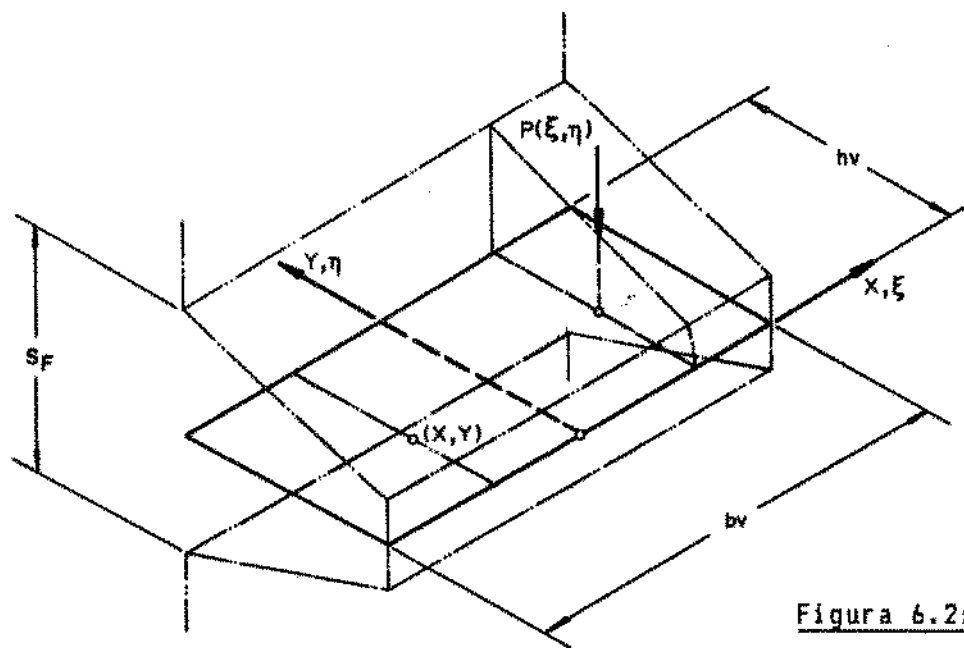
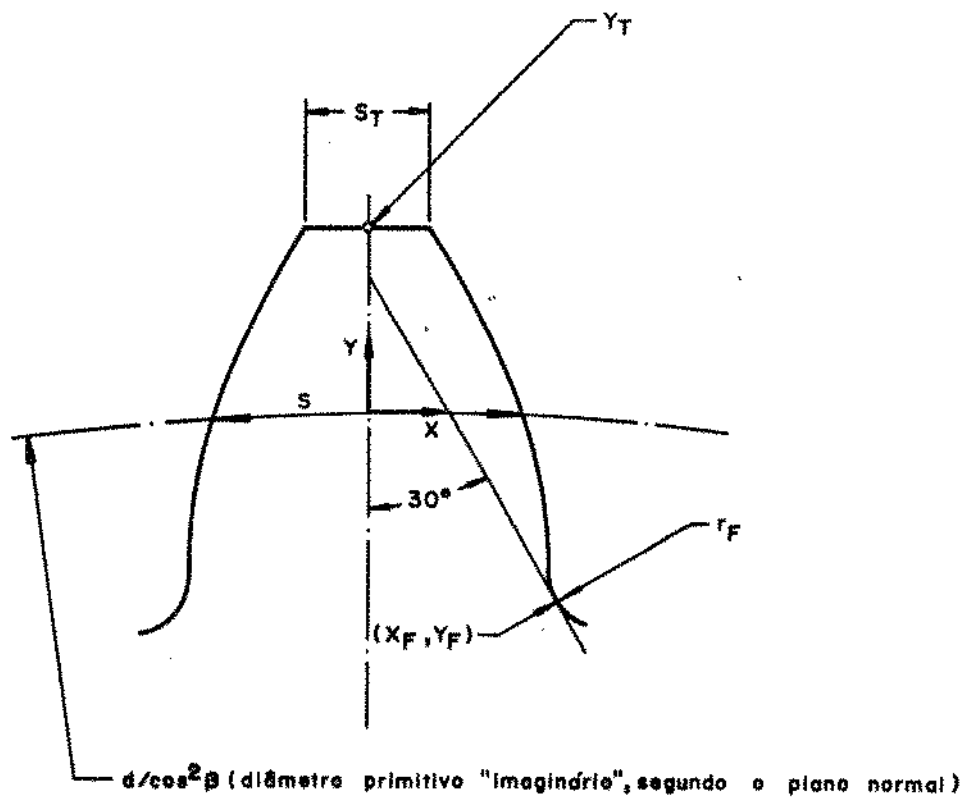


Figura 6.2:  
Cremalheira Análoga  
Utilizada no  
Modelo de  
Umezawa /13/

Ao montar o modelo geométrico, deve-se identificar para certa engrenagem quais as dimensões da cremalheira que mais se aproxima do corpo real. Para isso o conceito de "Diâmetro Primitivo Imaginário" /1,2,3/ é utilizado ( Figura 6.3 ).



**Figura 6.3:** Corte Normal do Dente para a Obtenção das Dimensões da Cremalheira Análoga

A largura da cremalheira é dada por:

$$b_v = b / \cos \beta_v \quad (36)$$

onde  $\beta_v$  = Ângulo de hélice na base da placa análoga



e sua altura é:

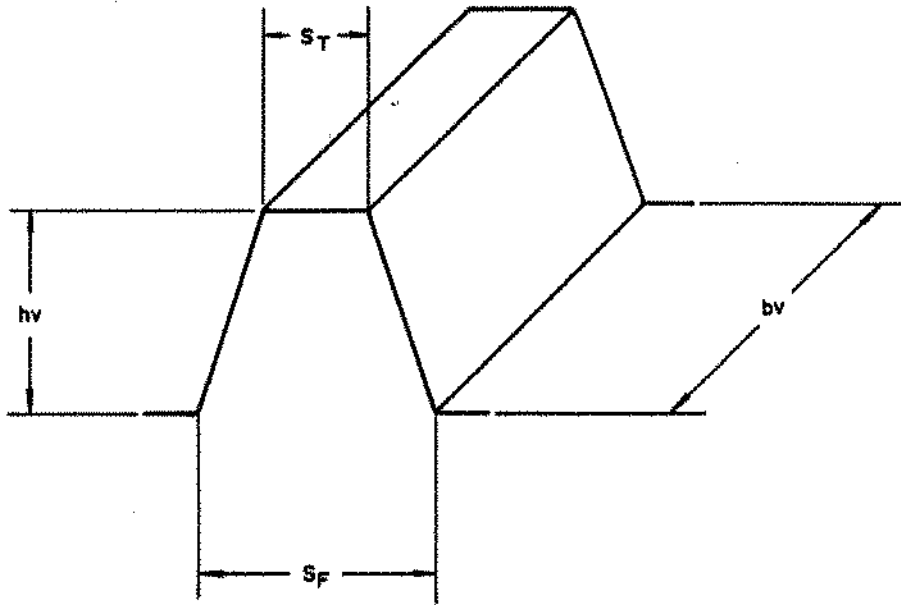
$$h_v = y_e - y_r \quad (37)$$

A espessura da base da cremalheira é dada por:

$$s_r = 2 \times x_r \quad (38)$$

A forma final da cremalheira análoga está mostrada na Figura 6.4.

Figura 6.4:  
Dimensões da  
Cremalheira  
Análoga



A formulação de placas adotada, foi desenvolvida visando apenas à aplicação em cremalheiras padronizadas. Por esse motivo, os dados resultantes são expressos em função do "Módulo" e "Angulo de Pressão" da cremalheira. Para a adequação dessa formulação ao projeto não padronizado os seguintes parâmetros são determinados:

$$\alpha_v = \tan^{-1} \frac{s_r - s_e}{2 h_v} \quad (39)$$

$$b_v = \frac{2 s_r}{5 \tan \alpha_v + \pi} \quad (40)$$

onde  $\alpha_v$  = Ângulo de Pressão da Cremalheira  
 $m_v$  = Módulo da Cremalheira

Deve-se ressaltar que os parâmetros  $\alpha_v$  e  $m_v$  não estão absolutamente relacionados com a cinemática do elemento nem com a sua manufatura, tão somente dizem respeito as dimensões do dente quando aproximado à cremalheira. Verifica-se, por conseguinte, que os valores  $\alpha_v$  e  $m_v$  não são necessariamente iguais para as duas rodas engrenadas.

## 6.2. Transferência entre os Referenciais Real e do Modelo

Tanto a análise da distribuição de esforços como a análise das tensões, partem do princípio de que se pode discretizar a carga distribuída em um número finito de pontos e sobrepor as influências de cada carga resultante. Portanto é necessário conhecer, como ponto de partida, as influências de uma carga que esteja localizada em um ponto qualquer sobre o flanco do dente.

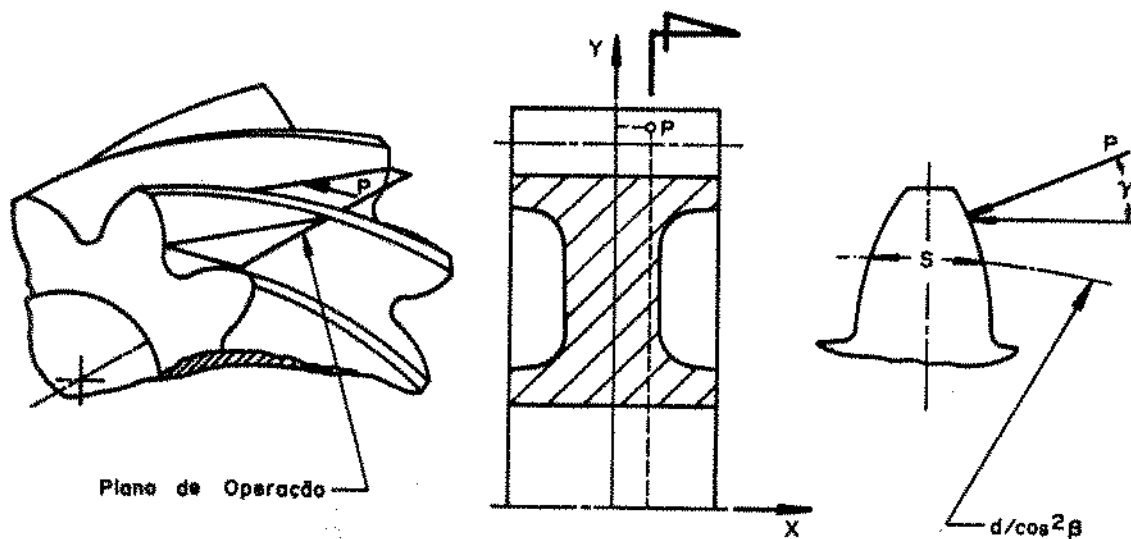


Figura 6.5: Localização de uma Força  $P$ , sobre a Engrenagem

Como é mostrado na Figura 6.5, três parâmetros definem a posição de uma força puntual sobre o flanco da engrenagem:

- Sua altura em relação ao centro da roda ( raio ).
- Sua posição lateral ( eixo  $x$  ).
- Seu ângulo de incidência com relação à linha média do dente ( ângulo  $\gamma$  ).

Partindo-se da análise cinemática, obtém-se para uma dada posição de engrenamento, as coordenadas da linha ou linhas de contacto. Uma vez discretizadas as linhas de contacto, obtém-se, para aquela posição, um conjunto de pares  $(x,r)$  onde devem se localizar as cargas discretizadas  $P_j$ . Este procedimento é abordado com detalhes no item 6.3. Como passo subsequente, é preciso que as coordenadas  $(x,r)$  de localização das forças  $P_j$  sejam transferidas para o referencial da cremalheira onde se procede à análise.

#### 6.2.1. Obtenção da Altura ( $y_v$ ) da Força no Modelo

Segundo a configuração exposta na Figura 6.6, temos:

$$y_v(P) = r - R_v \quad (41)$$

onde  $y_v$  = Coordenada vertical segundo o referencial da cremalheira análoga

$r$  = Distância do ponto de aplicação da força  $P$  ao centro da roda.

$R_v$  = Distância do ponto  $(x_v, y_v)$  ao centro da roda.

A variação causada pelo não paralelismo de  $r$  e  $R_v$  se mostra desprezível em todos os casos.

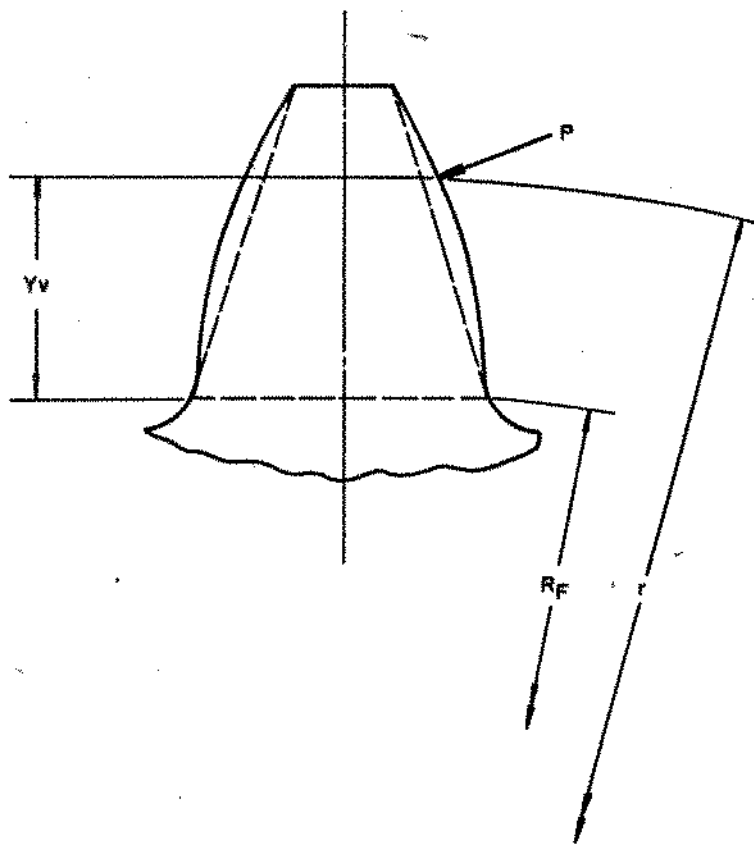


Figura 6.6:  
Determinação da  
Coordenada  $y_v$

#### 6.2.2. Obtenção da Posição Lateral ( $x_v$ ) da Força no Modelo

A analogia de um dente helicoidal a uma placa retangular engastada sofre as imprecisões mencionadas no item 4.1.4, dentre as quais se revela mais grave a incapacidade de o modelo representar a forma real nas extremidades laterais dos dentes. O flanco da engrenagem helicoidal que possui uma forma próxima a um paralelogramo, precisa ser assemelhado a um retângulo perfeito para que a analogia se aplique. Demais, a secção transversal real não é completa naquela região. Por conseguinte é de se esperar que tanto a rigidez como a distribuição de tensões nas extremidades do dente sejam bem diferentes do previsto no modelo.

Verifica-se, sem embargo, que esta limitação causa pouca redução na

precisão geral do método. A relativamente pequena rigidez faz com que somente uma pequena fração da carga seja suportada pelos bordos do flanco. Além disso, é prática usual, impor ao perfil um abaulamento segundo a direção transversal ("crowning"), o qual desloca a carga ainda mais em direção ao centro.

É fácil de se observar que este fator de imprecisão aumenta à medida que diminui a largura da engrenagem. A expressão (42) mostra a condição que as dimensões da roda devem obedecer para se garantir uma precisão satisfatória.

$$(s_f \times \text{sen } \beta_f) / 2 < b / 10 \quad (42)$$

Também deve-se evitar o uso deste algoritmo especificamente para a análise do comportamento das extremidades do flanco, visto que não se pode quantificar o nível de erro implícito.

Como é visto na Figura 6.7, a cremalheira análoga é ajustada ao dente de forma às linhas médias no topo de ambos coincidirem. A "distorção" própria do dente helicoidal é negligenciada.

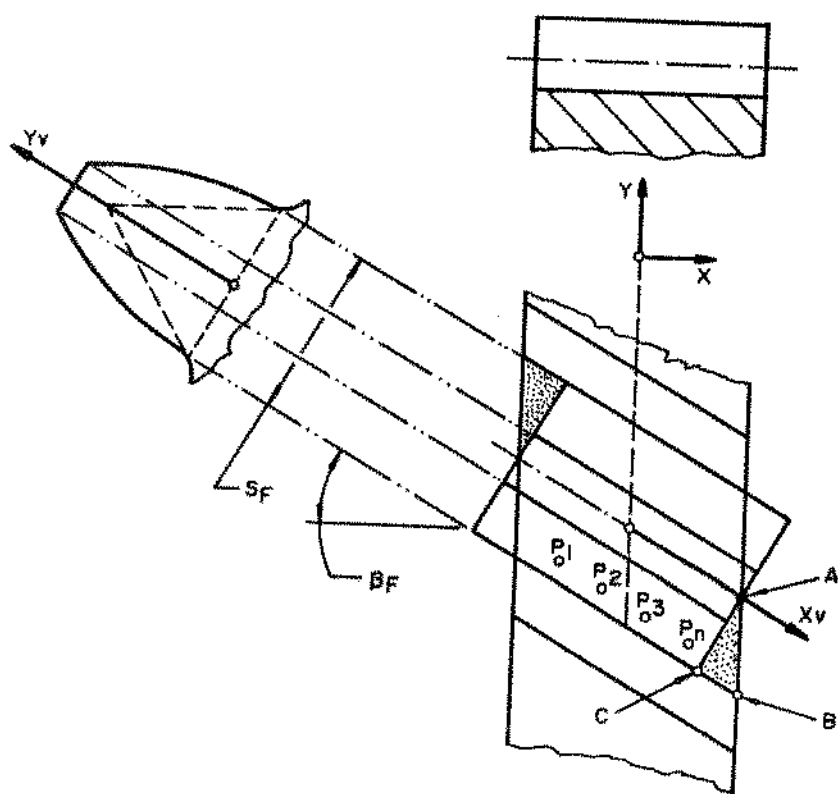


Figura 6.7:  
Determinação da  
Coordenada  $x_v$ .

A conversão da coordenada "x" para "x<sub>v</sub>" é portanto:

$$x_v = \frac{x}{\cos\beta_r} + \left( \frac{s_r}{2} - \frac{y_v}{\tan\alpha_v} \right) \tan\beta_r \quad (43)$$

Observa-se que o triângulo ABC na Figura 6.7 não encontra correspondente na cremalheira análoga. Por esse motivo um ajuste adicional deve ser feito para a região do dente em que  $(x > 0,4 b)$  resultando em:

$$x_v = \frac{x}{\cos\beta_r} + \left( \frac{s_r}{2} - \frac{y_v}{\tan\alpha_v} \right) \tan\beta_r \left( 5 - 10 \frac{x}{b} \right) \quad (44)$$

### 6.2.3. Obtenção do Ângulo de Incidência da Força

Estando definida a posição  $(x, r)$  em que se aplica a força  $P$ , deve-se determinar o ângulo que tal força fará com a base da placa análoga o que definirá o valor da carga transversal e normal. Pelo princípio de engrenamento, sabe-se que a força  $P$  é sempre normal à superfície de contacto. Portanto no plano transversal do engrenamento determina-se o ângulo de incidência  $\epsilon$ .

$$\epsilon = \tan^{-1} \left[ \cos\beta_r \frac{r_b}{r} \right] - \left( \frac{s}{2r} + \tan\alpha_m \right) + \alpha_m \quad (45)$$

e

$$\gamma = \tan^{-1} \left[ \tan\epsilon \cos\beta \right] \quad (46)$$

onde  $\gamma$  = Ângulo de incidência da força  $P$ , segundo a direção normal  
 $r$  = Raio em que a força  $P$ , está localizada  
 $\alpha_m$  = Ângulo de pressão transversal da engrenagem  
 $\beta$  = Ângulo de hélice na altura "r"

### 6.3 Distribuição dos Esforços e Tensões

É necessário que a análise exposta até então seja particularizada para o estado de sollicitação que realmente surge durante um ciclo de carga sobre um par de dentes engrenados. Para tanto o ciclo contínuo deve ser discretizado em vários degraus e o estado de sollicitação analisado em cada um deles.

A aplicação das funções de influência, as tensões de compressão e a análise de concentração de tensões devem ser discutidas afim de que a configuração final dos esforços e tensões seja levantada.

#### 6.3.1. - A Geometria do Engrenamento

Em uma engrenagem helicoidal, o contacto entre dentes ocorre tão somente sobre o plano de operação dentro do retângulo ABCD mostrado na Figura 6.8.

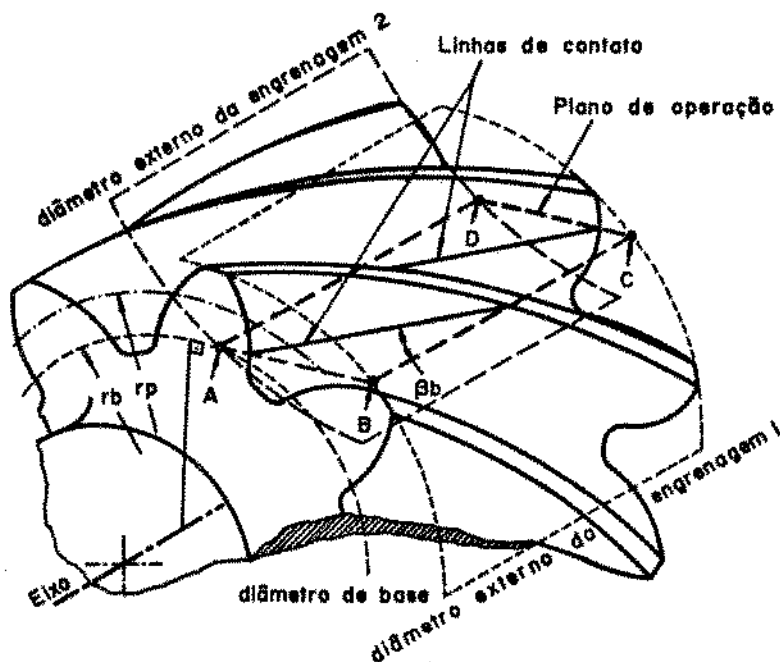
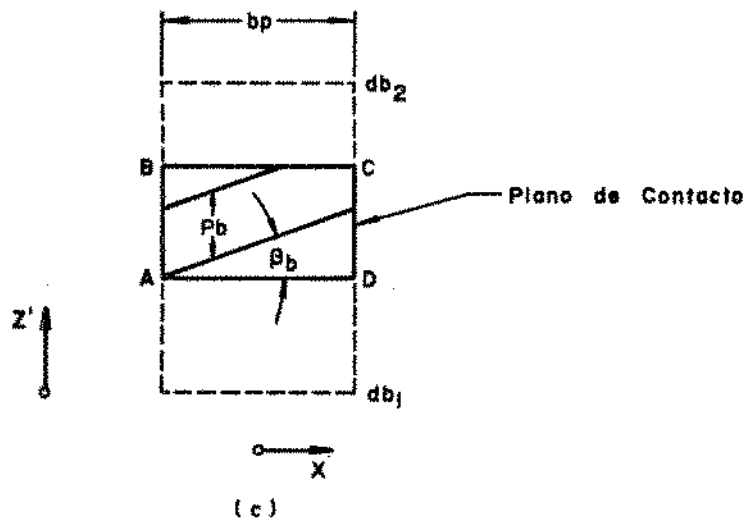
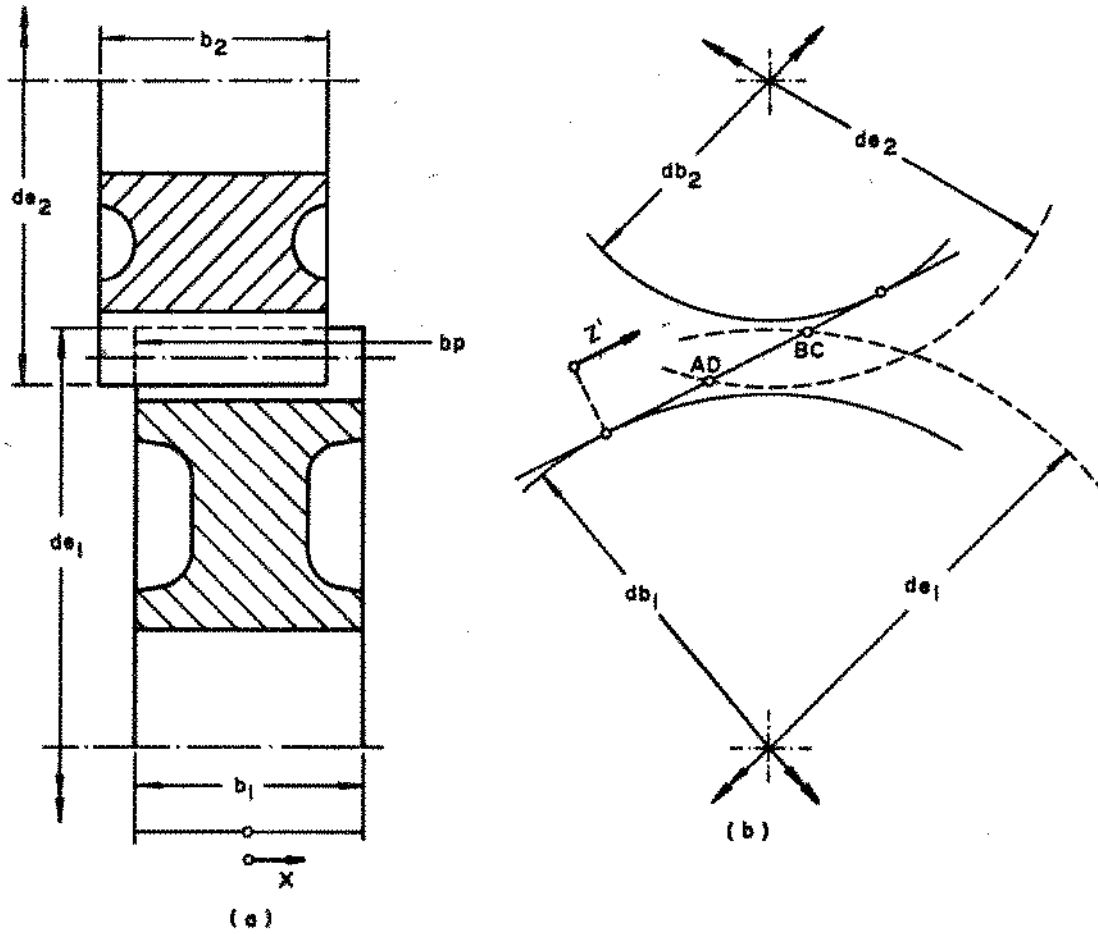


Figura 6.8: Posição do Plano de Operação num Par de Engrenagens Helicoidais /31/

Na Figura 6.9 define-se a posição do retângulo ABCD em relação à engrenagem 1 e à convenção adotada no capítulo 5.

Figura 6.9: Posição do Plano de Contacto e do Retângulo ABCD





A largura  $b_p$  é a intersecção das larguras  $b_1$  e  $b_2$ , a qual é dada por:

$$b_p = b_1 - A_{a1} - A_{b1} = b_2 - A_{a2} - A_{b2} \quad (47)$$

As linhas de contacto surgem portanto dentro de retângulo ABCD, ( Figura 6.9-c ), como um feixe de paralelas distanciadas entre si de um "passo de base" e inclinadas de  $\beta_b$  em relação à horizontal, sendo o "passo de base" definido por:

$$p_b = m_n \times \pi \times \cos \alpha_n \quad (48)$$

Define-se o parâmetro  $ez'$  ( percurso de engrenamento ) o qual tem valor definido para cada estágio do ciclo de carga ( Figura 6.10 ).

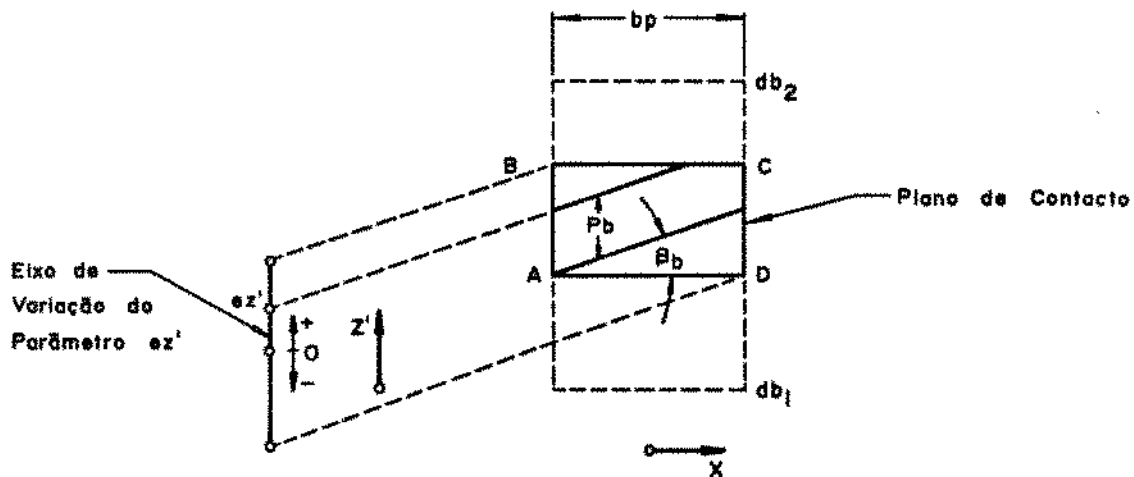


Figura 6.10: Posição do Eixo de Variação do Parâmetro  $ez'$

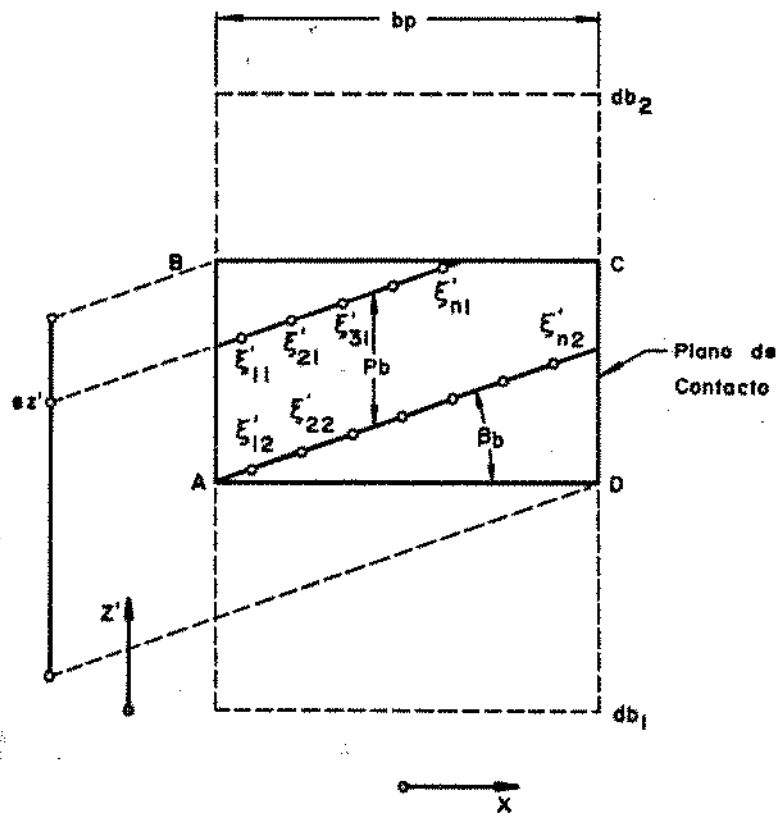
Como revelado na Figura 6.10 o parâmetro  $ez'$  é função injetora da posição de engrenamento e varia de valores simétricos ( de  $-z'$  a  $+z'$  )

durante o ciclo de carga. Uma vez assumido certo valor para  $ez'$  os seguintes dados estão definidos:

- Posição e extensão da linha de contacto do par em análise.
- Posição e extensão das linhas de contacto dos outros pares em contacto simultâneo.

Para a análise total do ciclo de engrenamento o percurso de variação de  $ez'$  deve ser discretizado e cada uma das posições resultantes analisadas.

Figura 6.11:  
Discretização das  
Posições de  
Engrenamento e  
das Linhas  
de Contacto



Em cada posição de engrenamento, as linhas de contacto devem ser discretizadas e para cada ponto  $\xi_i$  resultante determina-se as coordenadas  $(x, z')$ .

A coordenada  $r$  de cada ponto de contacto ( distância ao eixo da roda ) é obtida na seguinte expressão:

$$r = ( r_b^2 + z'^2 )^{1/2} \quad (49)$$

### 6.3.2. Cálculo da Distribuição dos Esforços

Todos os dados necessários para a aplicação da formulação proposta no capítulo 4 têm sido definidos para o problema particular. As funções  $K_b$  e  $K_c$  definidas nas referências /14/ e /16/ são então empregadas para se definir a distribuição de esforços.

A função  $K_c$  merece considerações adicionais uma vez que sua derivação é "semi-empírica" e parte de suas características têm sido contestadas ou negligenciadas em algumas das fontes literárias consultadas. Demais, a função de influência  $K_c$  é dependente da força aplicada o que conduz a um problema de solução não linear.

A função  $K_c$  é dada pela seguinte expressão:

$$K_c = \frac{2(1-\nu)}{4\pi G} \times \frac{1}{[a_c^2 + (x' - \xi')^2]^{1/2}} \quad (50)$$

onde

$$a_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{(1-\nu^2)q}{E}} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (51)$$

- $\nu$  = Coeficiente de Poisson
- $G$  = Módulo de elasticidade em cisalhamento
- $E$  = Módulo de elasticidade em tração
- $R$  = Raio de curvatura dos cilindros análogos
- $q$  = Carga por unidade de comprimento

Os dois raios de curvatura  $R$  para cada ponto de contacto estão descritos na referência /31/ ( Figura 6.12 ).

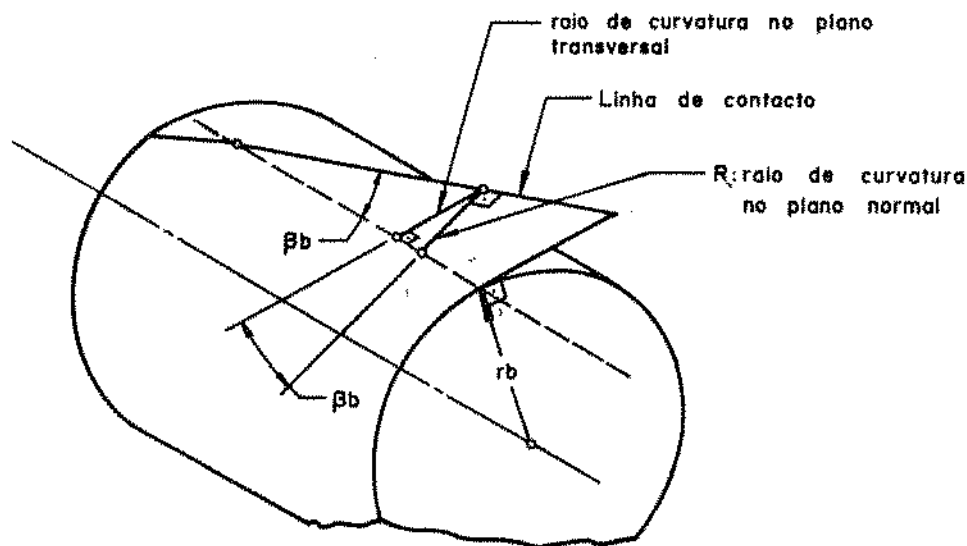


Figura 6.12: Determinação do Raio de Curvatura de um Ponto no Flanco de Engrenagem Helicoidal /31/

Impõe-se inicialmente para o valor de "q" a razão entre a carga total e o comprimento total das linhas de contacto. Uma vez definidas as forças em cada ponto de discretização, redefine-se o valor de "q" para cada segmento e repete-se a análise. Verifica-se que os valores de "q" se estabilizam na terceira ou quarta iteração ( ver capítulo 7 ). Para este procedimento deve-se adotar os cuidados devidos à aplicação de um método iterativo em computador /65/.

O modelo adotado por Umezawa para a determinação de  $K_c$  assume que os corpos em contacto sejam espessos o bastante para que a deformação superficial não seja afetada pelas variações de espessura. Por outro lado Umezawa assume que nas proximidades das bordas surge um fator adicional de deformação o qual foi levantado em corpos de prova compostos de blocos cúbicos pressionados com punção.

A validade de tal determinação é questionável e a incorporação deste fator é negligenciada na maioria dos trabalhos da área /21,22,30,53,54,55/. No presente estágio é quase impossível a confirmação experimental destes valores na própria engrenagem e os experimentos realizados em corpos de prova variam consideravelmente em seus resultados. No algoritmo proposto pode-se proceder a análises paralelas considerando-se ou não a inclusão deste fator, o que às vezes resulta em diferenças consideráveis. No caso real em que as bordas dos dentes raramente se tocam devido às correções impostas, as diferenças tornam-se desprezíveis.

### 6.3.3. Cálculo das Tensões no Pé do Dente.

Uma vez determinada a distribuição de esforços, as tensões são obtidas segundo o procedimento demonstrado no capítulo 4. A análise procedida até então se baseia na distribuição de esforços e tensões em placas bidimensionais para os esforços transversais e em semi-planos infinitos para os esforços normais. Nenhum destes modelos podem reproduzir o acréscimo de tensão no pé do dente da engrenagem devido ao raio de curvatura naquela região.

Este fator de concentração de tensões tem sido discutido nas referências /9,10,40,41,55,61,62,63,64/. Todos estes trabalhos seguem o procedimento básico que consiste em levantar o fator que adapte os valores do modelo matemático aos valores medidos experimentalmente. O modelo básico de Hirt /9/ foi adotado uma vez que seus experimentos revelam maior sofisticação e a medida experimental é feita no corpo real através de micro-extensômetros. Assume-se assim a seguinte fórmula básica:

$$\sigma_r = \sigma_x \left[ \frac{s_r}{2r \times a_x} \right]^{b_z} \left[ 1 + \frac{Sf}{2e} \right] \quad (52)$$

onde  $a_x$  e  $b_x$  = Fatores determinados empiricamente

$e$  = Distância do ponto de aplicação da força ao ponto da medida da tensão ( Figura 6.13 ).

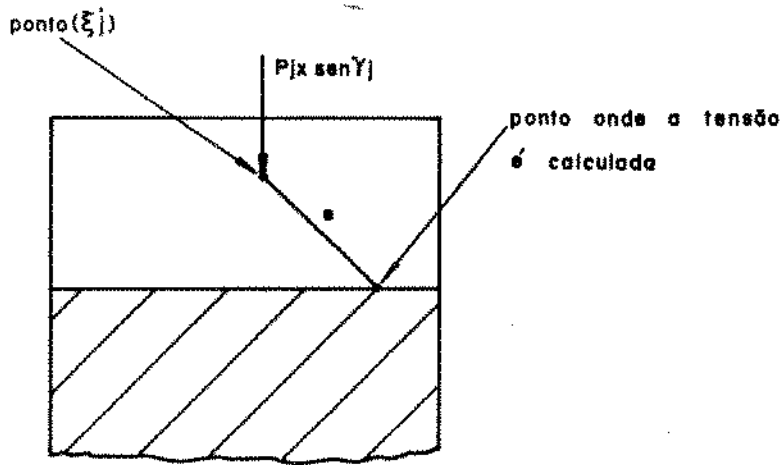


Figura 6.13:  
Determinação do  
Parâmetro "e"

Os valores de  $a_e$  e  $b_e$  foram determinados como "0,5B" e "0,2B" na formulação de Hirt na qual o modelo matemático de vigas foi utilizado ( modelo de Lewis ). Para a presente análise o valor de  $a_e$  se ajustou por volta de "0,770". Esta variação é justificável uma vez que a formulação matemática de vigas e a de placas são consideravelmente distintas.

## 7. DISCUSSÃO QUANTO A ESTRUTURA DE PROGRAMAÇÃO E PRECISÃO DO MÉTODO

Uma vez que o procedimento proposto se baseia em métodos numéricos onde os resultados são necessariamente compostos por aproximações, deve-se avaliar a precisão resultante. Demais cada um dos modelos matemáticos empregados representam apenas parcialmente o fenômeno real, o que obviamente pode introduzir maiores imprecisões. O procedimento proposto, deve portanto ser comparado a medições experimentais tanto quanto a outros métodos analíticos de precisão comprovada.

Selecionou-se dentre os trabalhos coletados os dados resultantes de experimentos e análises que trazem explicitamente as condições impostas e que foram julgados os mais confiáveis. As mesmas condições foram transferidas para o sistema e os dados resultantes comparados.

### 7.1. Considerações sobre a Estrutura do Programa e Fluxo de Dados

Ao se colocar o algoritmo descrito em forma de programa, os seguintes atributos foram designados:

1. O programa deve ser desenvolvido em linguagem APL na versão IBM-CMS.
2. Sua arquitetura de software deve ser tal que permita a criação de versões para Fortran e Pascal sem que sejam necessárias grandes modificações estruturais.
3. O programa deve ser modularizado, podendo cada módulo ser alterado ou enriquecido com pouca ou nenhuma alteração dos demais.
4. O nível de precisão do cálculo (função direta do número de incógnitas do sistema linear descrito no item 4.1.3.) não deve ser pré-estabelecido. pelo contrário, o usuário pode defini-lo a cada utilização baseando-se no binômio "precisão - tempo de processamento".

5. O número de "passadas" (análises para diferentes estágios de engrenamento) deve ser definido pelo usuário e na falta de tal definição um procedimento "default" ótimo deve ser seguido.

6. O programa deve ter a capacidade de ler os dados de entrada em um banco de dados pré-formatado e também de armazenar os resultados em banco de dados que permita a consulta por outros usuários ou programas.

Visando a tais propósitos o fluxograma da Figura 7.1 foi proposto.



LEITURA DE DADOS EXTERNOS	1 Dados Geométricos das Engrenagens 2 Posição Relativa das Engrenagens 3 Erros de Perfil das Engrenagens. 4 Torque Externo, 5 Precisão Requerida (N. de Coordenadas de Discretiz.) 6 Número de Passadas ou 0 (default)
---------------------------	---

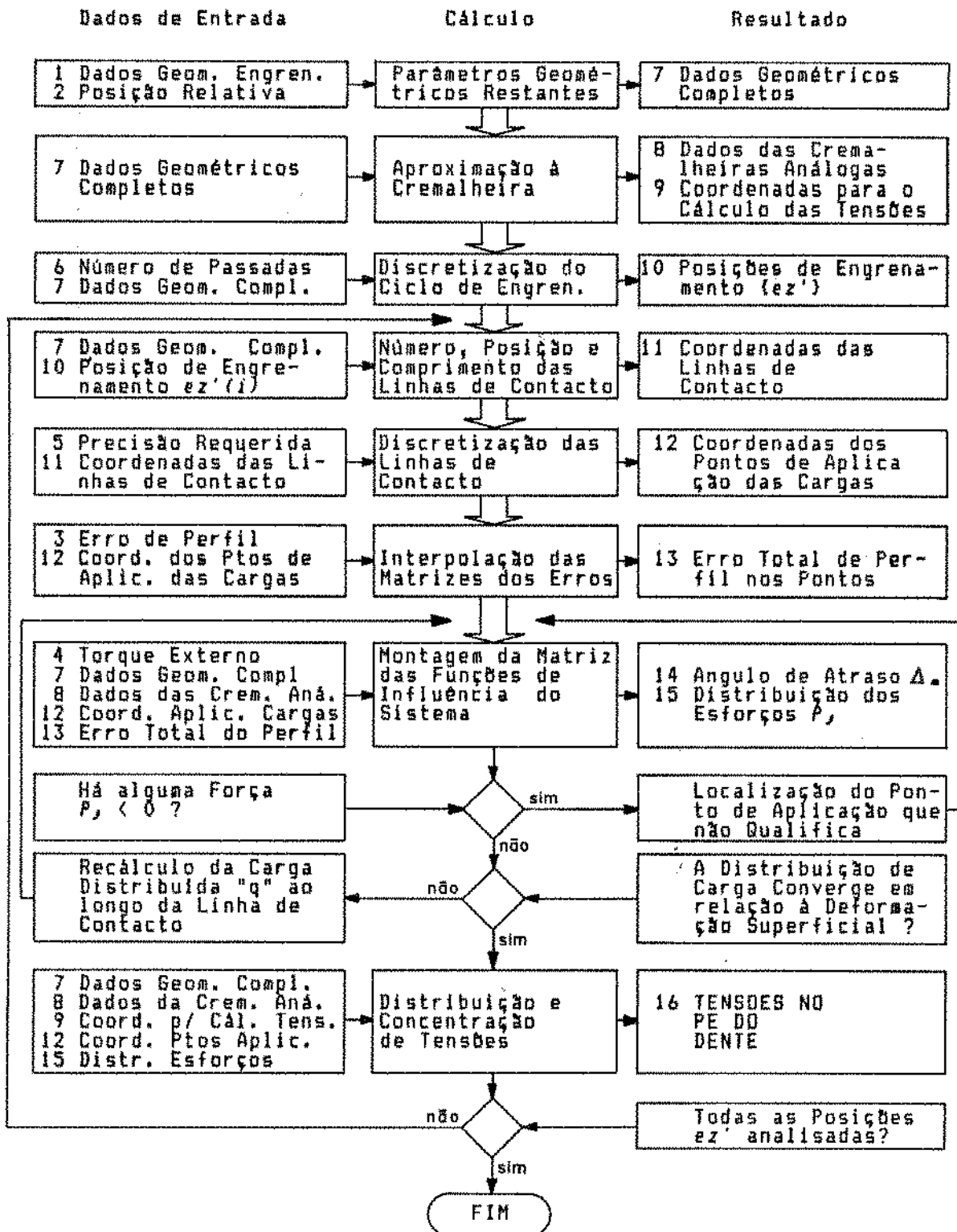


Figura 7.1: Fluxo do Programa em Computador

## 7.2. Comparação com os Resultados de Winter e Hirt /9/

Os experimentos conduzidos por Winter e Hirt /9/ na Escola Técnica Superior de Munique são de reconhecida confiança. Trabalhando com micro-extensômetros (0,6 mm), eles puderam mapear com precisão as tensões da região do pé do dente de uma série de engrenagens de dentes retos e  $\alpha = 10$ .

Uma das constatações interessantes foi o fato de a máxima tensão sempre surgir no ponto de tangência entre o raio e a reta inclinada de  $30^\circ$ , (ver Figura 7.2). Isto vem fortalecer o procedimento proposto, o qual se baseia nesse ponto para limitar as dimensões da placa análoga.

Os resultados encontrados desviam-se dos medidos num máximo de 2,88%.

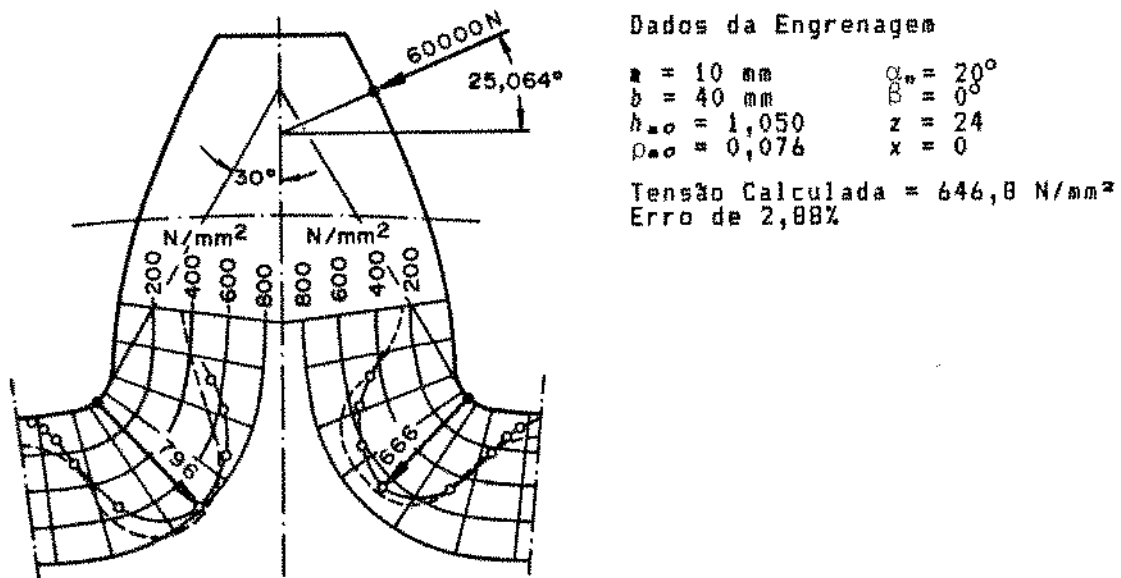
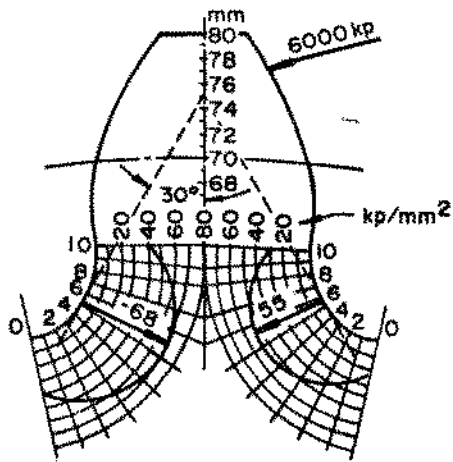


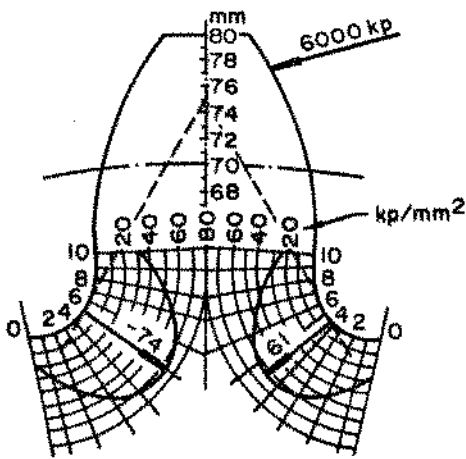
Figura 7.2: Comparação da Tensão Calculada com Medições de Extensômetro (Dentes Retos)



Dados da Engrenagem

$m = 10 \text{ mm}$        $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 40 \text{ mm}$        $\beta = 0^\circ$   
 $h_{ao} = 1,295$        $z = 14$   
 $\rho_{ao} = 0,448$        $x = 0$

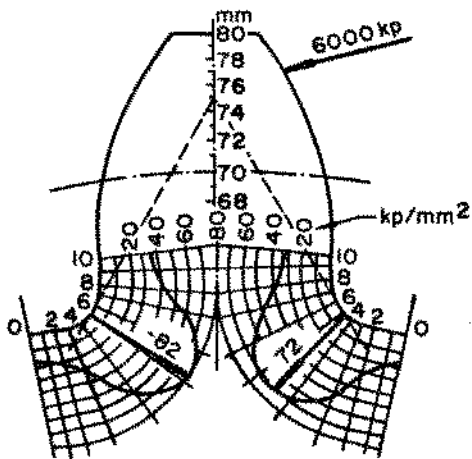
Tensão Calculada = 55,5 kp/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 0,90%



Dados da Engrenagem

$m = 10 \text{ mm}$        $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 40 \text{ mm}$        $\beta = 0^\circ$   
 $h_{ao} = 1,200$        $z = 14$   
 $\rho_{ao} = 0,304$        $x = 0$

Tensão Calculada = 59,6 kp/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 2,29%



Dados da Engrenagem

$m = 10 \text{ mm}$        $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 40 \text{ mm}$        $\beta = 0^\circ$   
 $h_{ao} = 1,050$        $z = 14$   
 $\rho_{ao} = 0,076$        $x = 0$

Tensão Calculada = 70,0 kp/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 2,77%

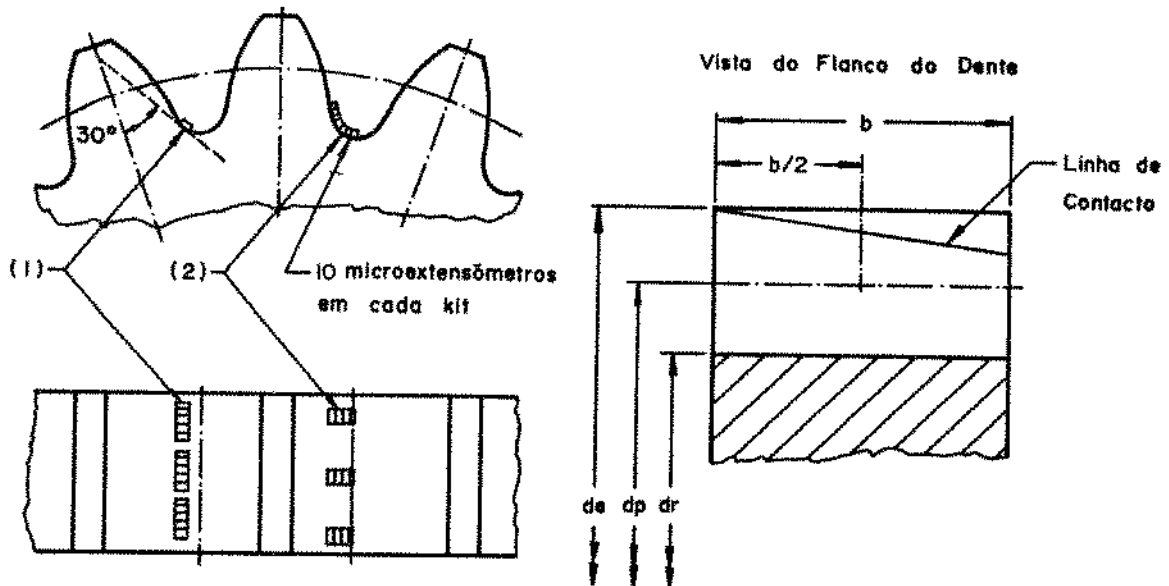
Figura 7.3: Comparação da Tensão Calculada com Medições de Extensômetros (Variação na Geometria do Pé do Dente)

A Figura 7.3 mostra uma série de três engrenagens com dados idênticos a menos da região do pé do dente. É um caso em que a variação nos resultados se deve apenas às diferentes concentrações de tensões. Aplicando-se o procedimento proposto esta tendência é reproduzida precisamente.

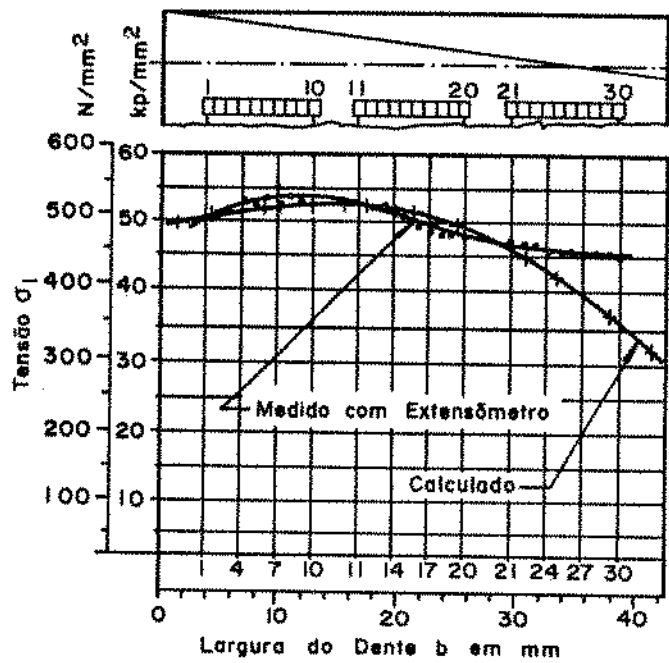
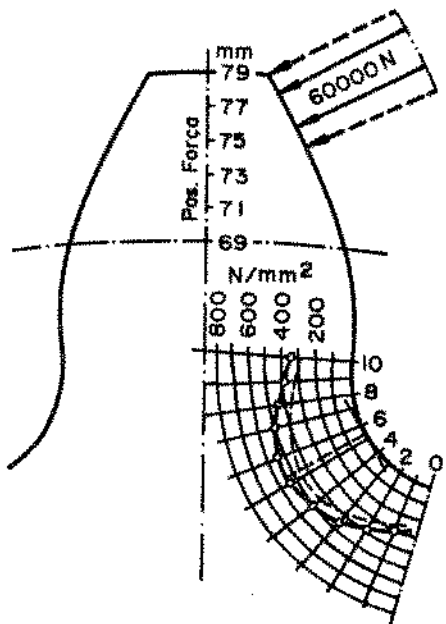
### 7.3 Comparação com os Resultados de Winter e Broßmann /10/

Seguindo os experimentos de Hirt, Broßmann aplicou a mesma metodologia na pesquisa da distribuição de tensões em engrenagens helicoidais /10/ (ver Figuras 7.4 e 5). Tanto a tensão máxima como o gradiente de tensões foram determinados para engrenagens de diversos ângulos de hélice.

O procedimento proposto reproduziu os resultados de Broßmann apresentando um desvio de 10,52% para o caso de  $\beta=30^\circ$  (ver Figura 7.5). Tal variação é aceitável uma vez que está na mesma ordem de grandeza dos erros inerentes à medição por extensômetros (de 5 a 7%) /10/.



Microextensômetro para Medida de Deformação (1) ao longo da Largura e (2) ao longo do Raio

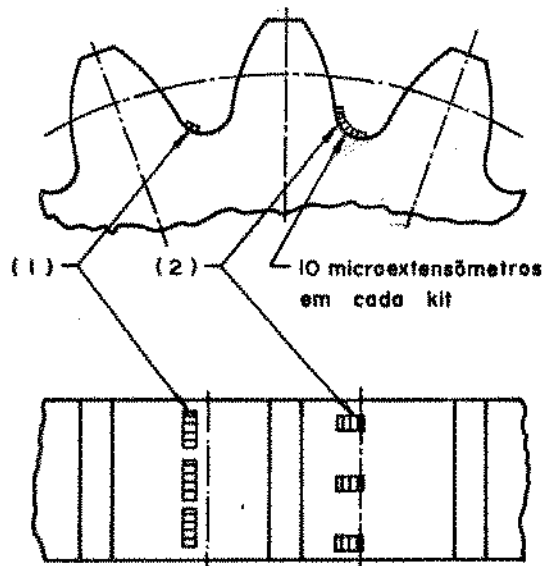


Dados da Engrenagem

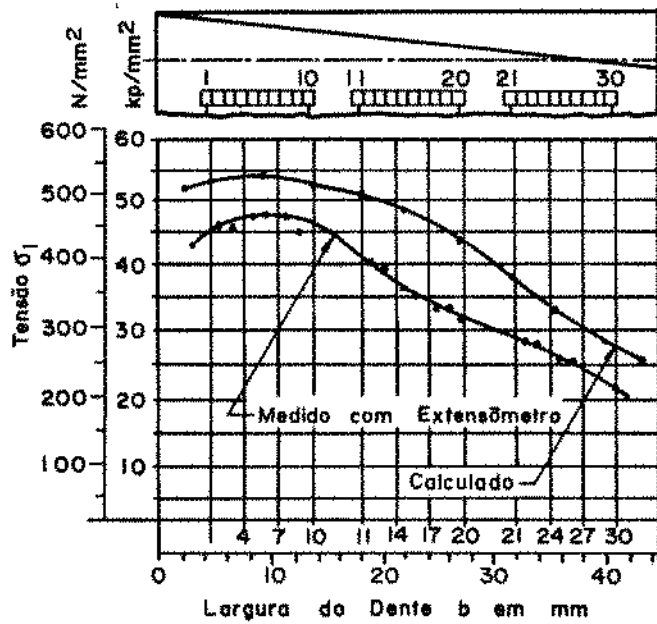
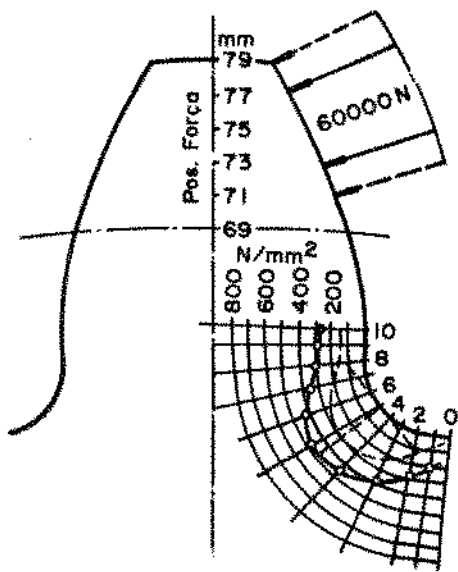
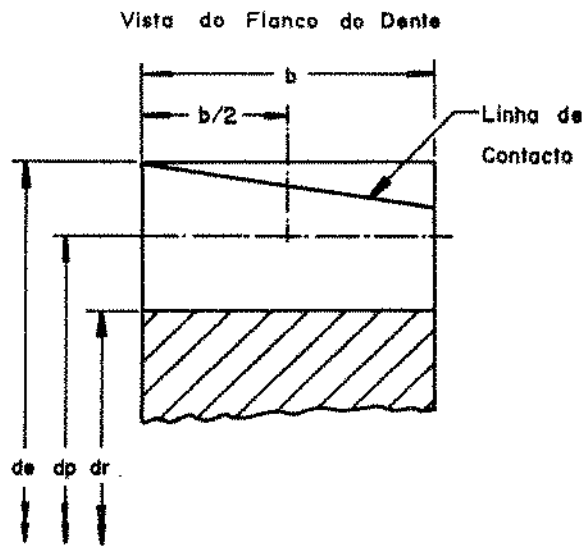
- $a = 10 \text{ mm}$
- $b = 40 \text{ mm}$
- $h_{ao} = 1,295$
- $\rho_{ao} = 0,448$
- $\alpha_n = 20^\circ$
- $\beta = 20^\circ$
- $z = 13$
- $x = 0$

Máxima Tensão Medida = 54,5 kp/mm<sup>2</sup>  
 Máxima Tensão Calculada = 52,8 kp/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 3,11%

Figura 7.4: Comparação da Tensão Calculada com Medições de Extensômetro (Angulo de Hélice  $\beta=20^\circ$ )



Microextensômetro para Medida de Deformação (1) ao longo da Largura e (2) ao longo do Raio



Dados da Engrenagem

- $a = 10 \text{ mm}$
- $b = 40 \text{ mm}$
- $h_{ao} = 1,150$
- $\rho_{ao} = 0,228$
- $\alpha_n = 20^\circ$
- $\beta = 30^\circ$
- $z = 12$
- $x = 0$

Máxima Tensão Medida = 48,5 kp/mm<sup>2</sup>  
 Máxima Tensão Calculada = 53,6 kp/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 10,52%

Figura 7.5: Comparação da Tensão Calculada com Medições de Extensômetros (Angulo de Hélice  $\beta=30^\circ$ )

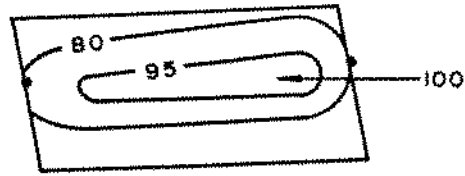
#### 7.4. Comparação com os Resultados de B. Neupert /22/

O método desenvolvido por B. Neupert no WZL (Laboratorium für Werkzeugmaschinen) da Escola Técnica Superior de Aachen é considerado de alta precisão. A análise de elementos finitos é utilizada tanto na determinação dos esforços como das tensões. As Figuras 7.6, 7 e 8 mostram a comparação do diagrama de esforços e tensões obtidos pelos dois métodos. O cálculo é executado na posição de tensão crítica para engrenagens de diferentes ângulos de hélice. Uma variação média de 4% é observada.

DISTRIBUICAO DOS  
ESFORÇOS ( N/mm )



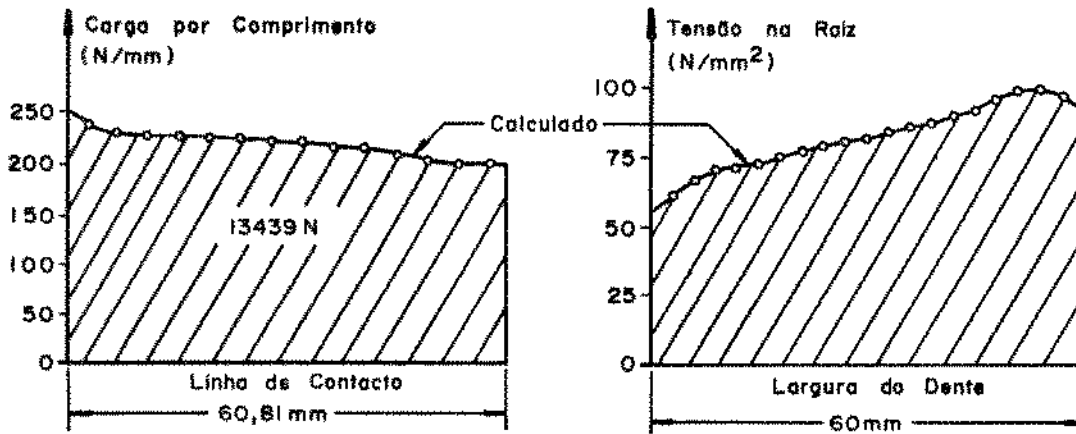
DISTRIBUICAO DAS  
TENSOES ( N/mm<sup>2</sup> )



Número de Dentes em Contacto = 2  
 Percurso de Engrenamento  $ez' = 1,9$

Dados da Engrenagem:  $m = 5 \text{ mm}$   $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 60 \text{ mm}$   $\beta = 10^\circ$   
 $x_1 = x_2 = 0$   $z_1 = z_2 = 25$   
 $a = 126,928 \text{ mm}$   $\epsilon = 2,24$

Força Aplicadas:  $F_{bn} = 17026 \text{ N}$



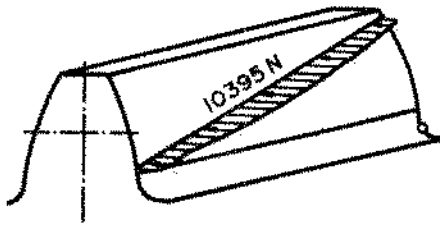
Tensão Máxima ( Neupert ) = 100,0 N/mm<sup>2</sup>  
 Tensão Máxima Calculada = 98,8 N/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 1,20 %

Carga Distribuída ( Neupert ) = 13158 N ( 77,2% da Carga Total )  
 Carga Distribuída Calculada = 13439 N ( 78,9% da Carga Total )  
 Erro de 2,13%

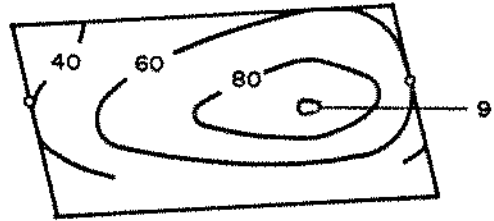
Figura 7.6: Comparação entre o Método Proposto e Elementos Finitos Tridimensionais (Angulo de Hélice  $\beta=10^\circ$ )



DISTRIBUICAO DOS  
ESFORÇOS ( N/mm )

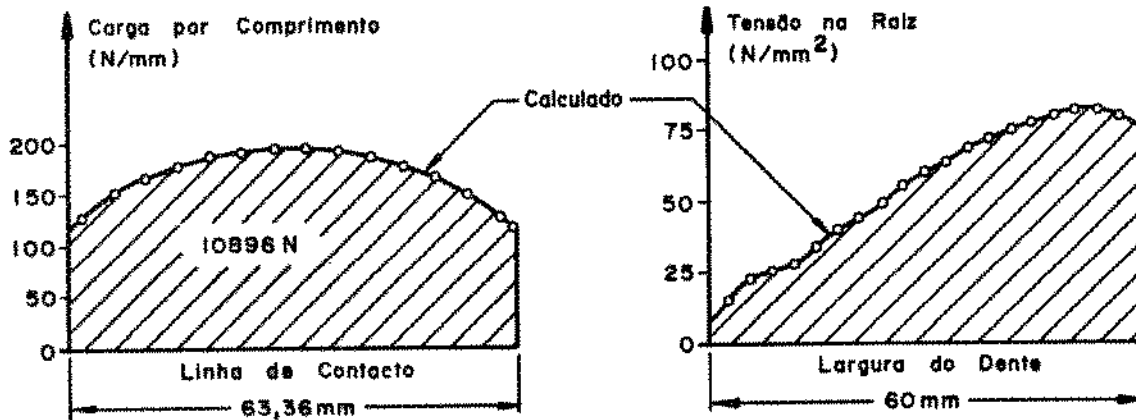


DISTRIBUICAO DAS  
TENSOES ( N/mm<sup>2</sup> )



Número de Dentes em Contacto = 3  
Percurso de Engrenamento  $ez' = 0,0$

Dados da Engrenagem:  $m = 5 \text{ mm}$   $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 60 \text{ mm}$   $\beta = 20^\circ$   
 $x_1 = x_2 = 0$   $z_1 = z_2 = 25$   
 $a = 133,022 \text{ mm}$   $c = 2,79$   
 Força Aplicada:  $F_{bn} = 17026$

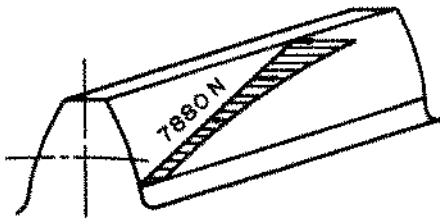


Tensão Máxima ( Neupert ) = 91,0 N/mm<sup>2</sup>  
 Tensão Máxima Calculada = 82,3 N/mm<sup>2</sup>  
 Erro de 9,56 %

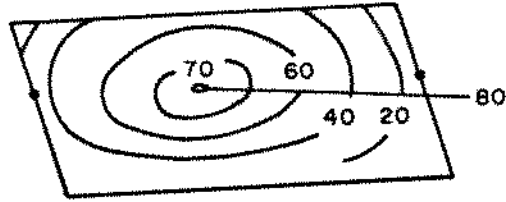
Carga Distribuída ( Neupert ) = 10395 N ( 61,1% da Carga Total )  
 Carga Distribuída Calculada = 10896 N ( 63,9% da Carga Total )  
 Erro de 4,81%

Figura 7.7: Comparação entre o Método Proposto e Elementos Finitos Tridimensionais (Angulo de Hélice  $\beta=20^\circ$ )

DISTRIBUICAO DOS  
ESFORÇOS ( N/mm )



DISTRIBUICAO DAS  
TENSOES ( N/mm<sup>2</sup> )



Número de Dentes em Contacto = 3

Percurso de Engrenamento  $ez' = 6,3$

Dados da Engrenagem:

$m = 5$  mm

$\alpha_n = 20^\circ$

$b = 60$  mm

$\beta = 30^\circ$

$x_1 = x_2 = 0$

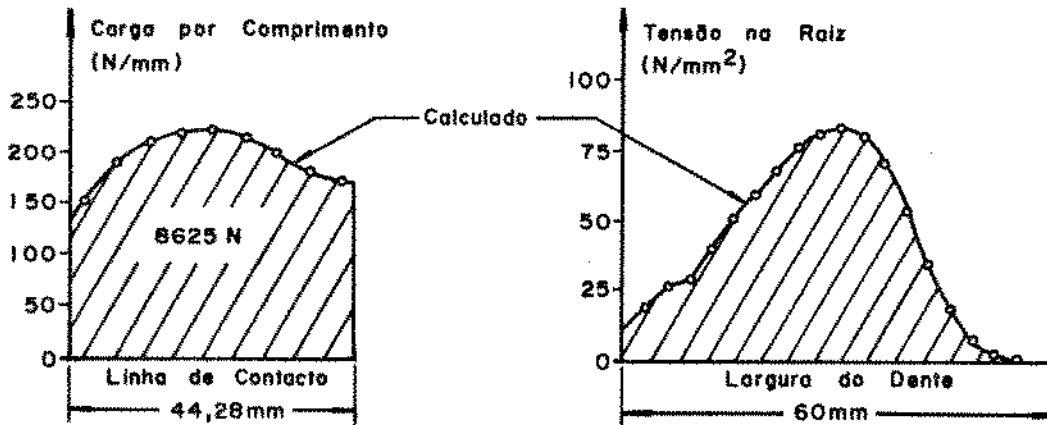
$z_1 = z_2 = 25$

$a = 144,338$  mm

$\epsilon = 3,24$

Força Aplicada:

$F_{tn} = 17026$



Tensão Máxima ( Neupert ) = 80,0 N/mm<sup>2</sup>

Tensão Máxima Calculada = 83,5 N/mm<sup>2</sup>

Erro de 4,37 %

Carga Distribuída ( Neupert ) = 7880 N ( 46,3% da Carga Total )

Carga Distribuída Calculada = 8625 N ( 50,7% da Carga Total )

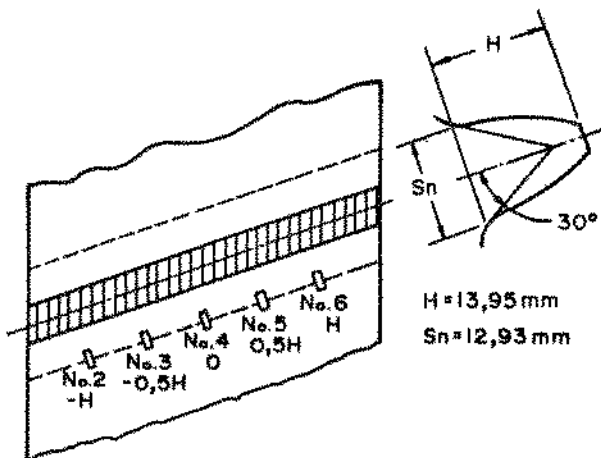
Erro de 9,45%

Figura 7.8: Comparação entre o Método Proposto e Elementos Finitos Tridimensionais (Angulo de Hélice  $\beta=30^\circ$ )

#### 7.5. Comparação com os Resultados de S. Oda e T. Koide /42/

Os experimentos com extensômetros descritos anteriormente (itens 7.2 e 7.3) foram desenvolvidos utilizando-se uma máquina de tração para a simulação dos esforços. Esta abordagem foge do caso real devido a alguns fatores: Uma vez que a carga é aplicada sobre um único dente não se pode quantificar qual seria a divisão de carga entre os diversos dentes em contacto simultâneo. Em segundo lugar, a rigidez do bloco aplicador de carga é certamente diferente daquela apresentada pelo dente da engrenagem par na mesma posição. Isto faz com que a distribuição de esforços sobre a linha de contacto seja alterada.

S. Oda e T. Koide da Universidade de Tottori no Japão procederam ao mesmo experimento usando um par de engrenagens reagindo a um torque externo. Na Figura 7.9 os resultados obtidos são comparados com aqueles do procedimento proposto. As tensões máximas variaram de 4.85%. A Figura 7.10 mostra a distribuição de esforços para o caso em que surge a tensão máxima. Esta distribuição não foi levantada experimentalmente por Oda e Koide.



Dados da Engrenagem

$m = 6 \text{ mm}$                        $\alpha_n = 20^\circ$   
 $b = 40 \text{ mm}$                        $\beta = 20^\circ$   
 $x_1 = x_2 = 0$                        $z_1 = z_2 = 36$

Força Aplicada (Circunferencial)

$F = 10 \text{ kN}$

Tensão Máx. ( S. Oda ) = 105 MPa

Tensão Máx. Calculada = 99,9 MPa

Erro de 4,37 %

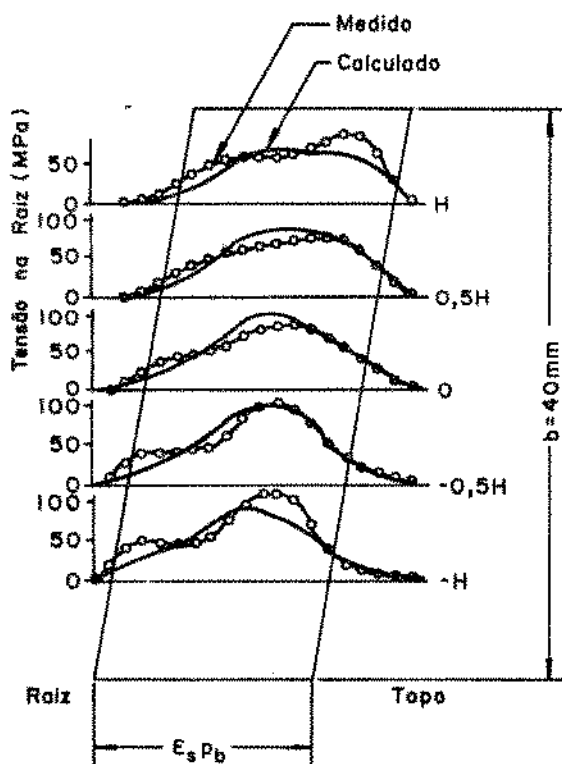
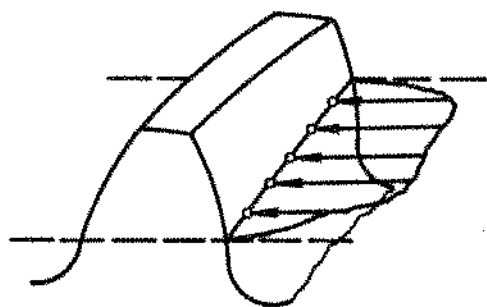


Figura 7.9: Comparação da Tensão Calculada com Medições de Extensômetros (com Vários Dentes em Contacto)



Pares em Contacto: 3

Percurso de Engrenamento  $ez'$ : 0,61

Carga Distribuída: 9636 N  
( 86,8% da Carga Total )

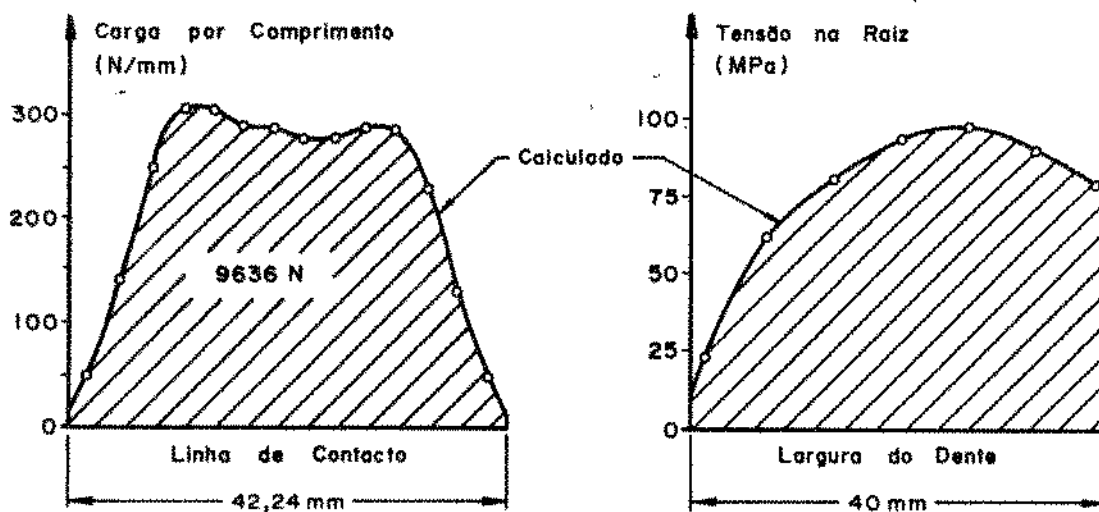


Figura 7.10: Distribuição dos Esforços para o Caso de Máxima Tensão

## 8. APLICACAO DO METODO PROPOSTO

Algumas aplicações do procedimento são exemplificadas as quais demonstram sua utilidade tanto no uso rotineiro (isto é: na obtenção das tensões no pé dos dentes) como também para a pesquisa da influência dos diversos fatores no surgimento de tensões e deformações. Verifica-se que, além de muito mais preciso, tal procedimento traz como principal benefício a possibilidade da análise da influência sobre a tensão final de cada um dos fatores impostos, inclusive dos erros de manufatura e montagem. Pode-se desta forma quantificar o nível de erro tolerável para cada parâmetro e também conhecer qual a tendência de variação das tensões quando um dado parâmetro é alterado gradativamente.

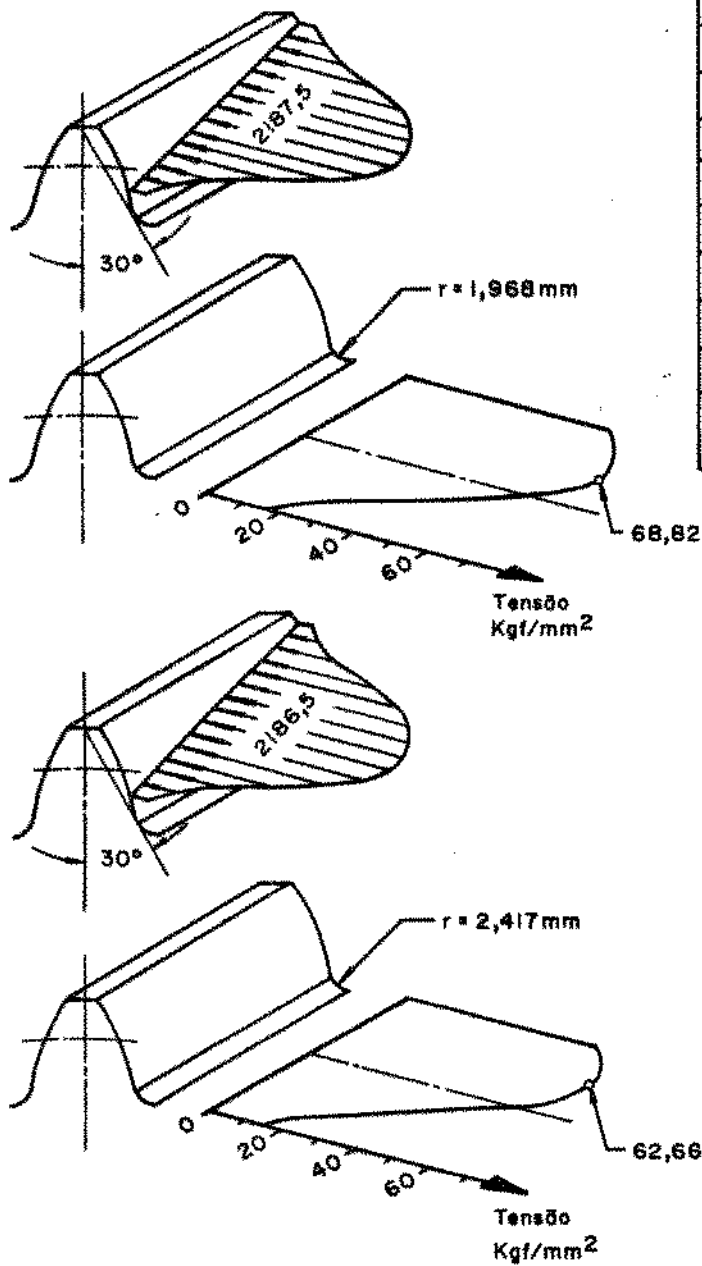
### 8.1 Análise da Variação do Raio de Arredondamento no Pé do Dente de Engrenagens Helicoidais

Ao se constatar a falta de capacidade em um par de engrenagens, seja pelo surgimento de falhas ou por experiência prévia pode-se ponderar sobre o aumento do raio de arredondamento no pé do dente. Esta medida se mostra interessante pelo fato de o "lay-out" geral do redutor não sofrer alteração. Na maioria dos casos a alteração no cortador que visa a aumentar o raio de arredondamento produz, por outro lado, maior profundidade na região do pé do dente. É fácil de se ver que estas duas alterações de geometria trazem efeitos opostos quanto às tensões resultantes. A questão é, portanto, determinar-se qual dos dois fatores é mais influente, ou seja, a soma algébrica das variações devidas a cada um.

Numa análise deste tipo o procedimento tradicional se mostra de pouca valia. Para engrenagens helicoidais, o resultado obtido pelo modelo de vigas apresenta erros de até 40%. É portanto questionável que se use tal procedimento para decidir qual dos dois fatores é o mais influente. A experiência revela que para casos como este a insegurança dos resultados leva o projetista a adotar medidas mais onerosas para obter a capacidade requerida.

Com o sistema proposto, um exemplo deste caso foi analisado e os resultados estão mostrados na Figura 8.1. Observa-se que na situação de máxima tensão chega-se a uma redução de 20%, o que revela ser interessante tal alteração.

Distribuição dos Esforços (Kgf/mm)



dados da engrenagem		engrenagem par
Z =	25	17
m =	4,3259	
$\alpha =$	21,0°	
$\beta =$	37,3713°	
a =	115,0 mm	
b =	20,0 mm	22,2 mm
s =	8,458 mm	7,160 mm
de =	145,67 mm	102,67 mm
P = 2294,9 Kgf		

Figura B.1: Análise da Variação do Raio de Arredondamento no Pé do Dente de Engrenagens Helicoidais

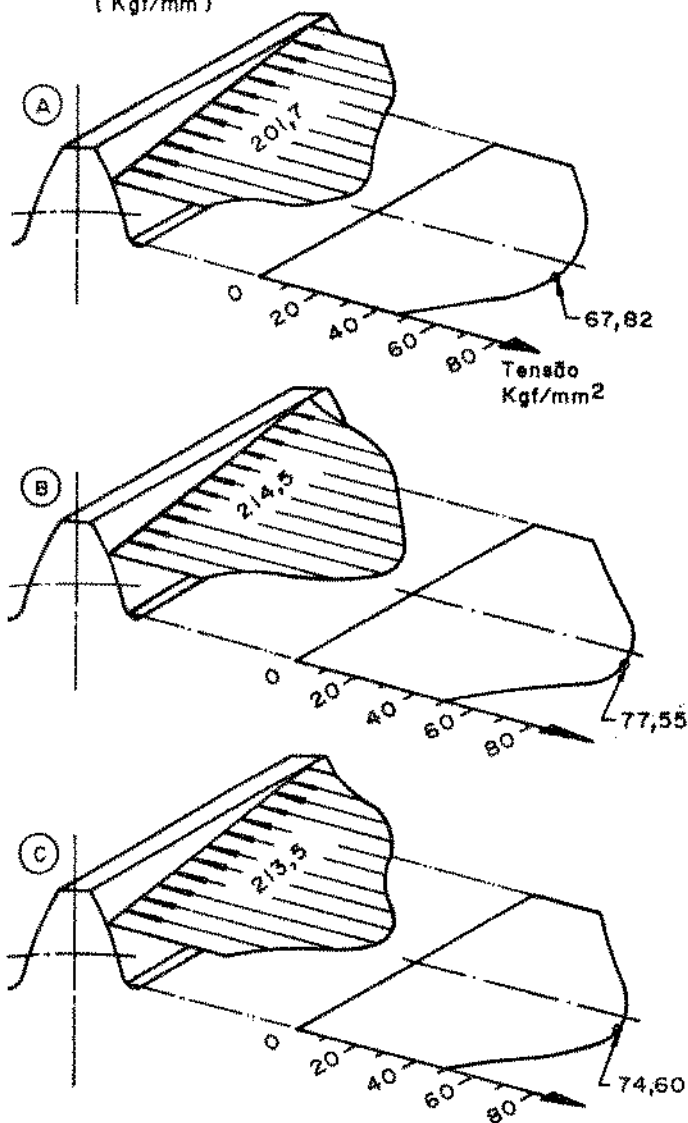


## B.2. Variação dos Esforços Devida à Alteração das Correções na Topografia do Dente

Tanto a alteração de topografia (correções e erros) como a existência de deslocamentos iniciais (devidos a erros diversos) causam variações substanciais no padrão de tensões no pé do dente. Para alguns casos este fator de acúmulo de tensões é o mais significativo. Os critérios de controle sugeridos pelas normas são essencialmente qualitativos. O procedimento proposto permite que se chegue quantitativamente às variações das tensões quando afetadas da alteração de topografia. É interessante se ressaltar que cada um dos desvios de topografia mostra uma influência peculiar sobre o acúmulo de tensões. Constata-se que a observância de certo critério de qualidade, pode ser um expediente oneroso e, ao mesmo tempo, pouco eficiente na redução das tensões. O inverso é também verdadeiro.

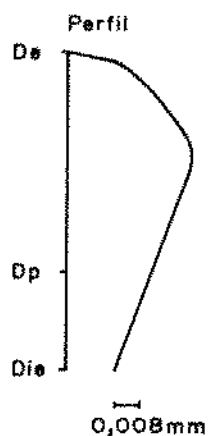
A Figura B.2 mostra um caso típico em que as tensões são alteradas devido a uma variação no abaulamento de uma das engrenagens (crowning). Daí se observa que o procedimento proposto também se presta para a investigação da influência de um dado fator sobre a tensão final no pé do dente.

Distribuição dos Esforços  
(Kgf/mm)

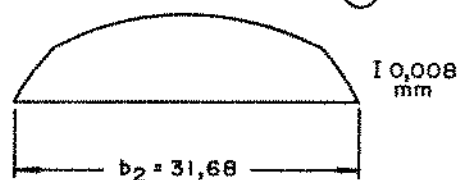


dados da engrenagem	engrenagem par
Z = 39	23
m =	4,2333
$\alpha =$	20,0°
$\beta =$	16,0°
a =	145,0 mm
b = 28,08 mm	31,68 mm
s = 9,394 mm	10,967 mm
de = 187,0 mm	120,0 mm
P = 3519,3 Kgf	

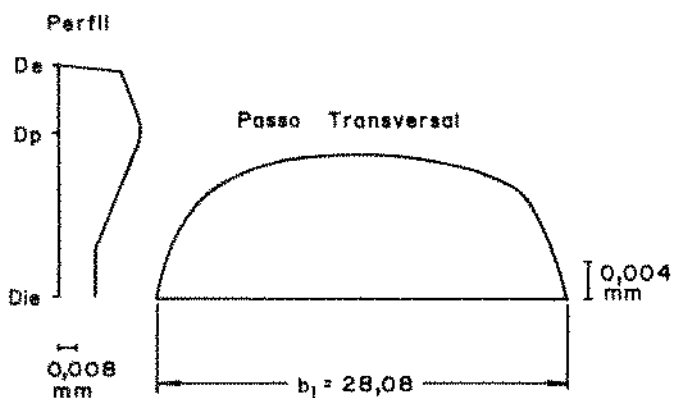
Engrenagem 2



Passo Transversal (B)



Engrenagem 1



Passo Transversal (C)

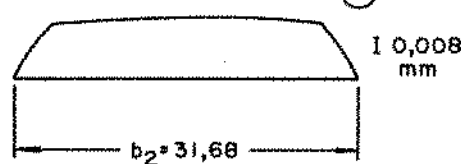


Figura 8.2: Variação dos Esforços Devida à Alteração das Correções na Topografia do Dente

### 8.3. Cálculo das Tensões para Pares Engrenados com Grau de Recobrimento Maior que 3 ( $\epsilon > 3$ )

Este exemplo descreve outro caso em que o procedimento "standard" traz limitações. Um par de rodas com grau de recobrimento maior que três apresenta um mínimo de três dentes em contacto simultâneo durante todo o ciclo. Existe atualmente uma grande tendência de se projetar engrenagens com essa característica. Esta configuração vai além do previsto nas normas correntes, tornando os resultados muito duvidosos. Na Figura 8.3 mostra-se os resultados desta análise usando-se o novo procedimento.

Distribuição dos Esforços (Kgf/mm)

Distribuição das Tensões (Kgf/mm<sup>2</sup>)

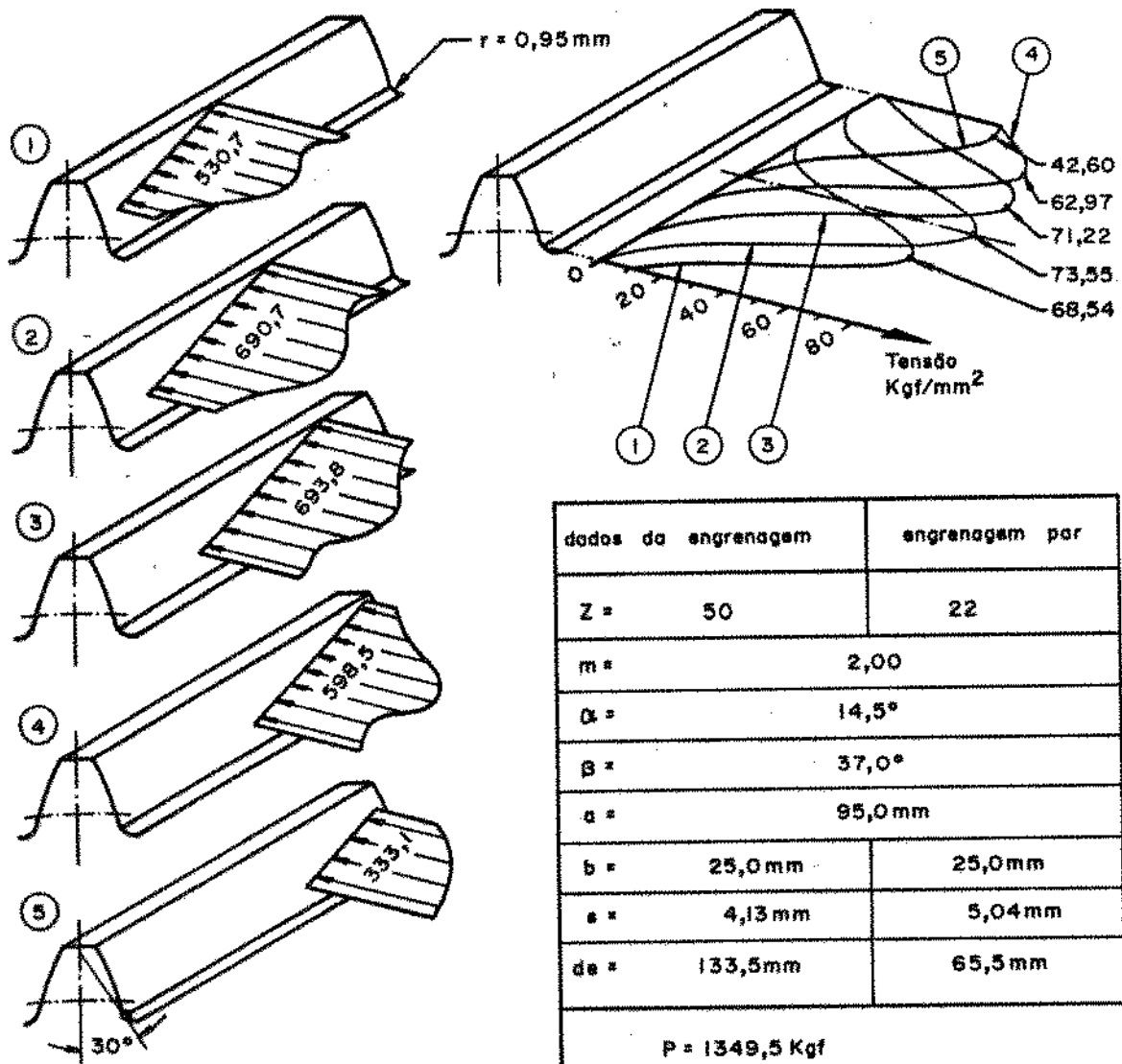


Figura 8.3: Cálculo das Tensões para Pares Engrenados com Grau de Recobrimento Maior que 3 ( $\epsilon > 3$ )

## 9. CONCLUSOES

Desenvolveu-se um conjunto de algoritmos para computador digital, o qual leva a cabo um procedimento de cálculo dos esforços e tensões em engrenagens cilíndricas.

A distribuição dos esforços sobre a linha de contacto e as tensões que surgem no pé dos dentes foram determinadas usando-se a superposição de um conjunto de modelos análogos cada qual representando um dos fatores que influenciam nos resultados.

Os resultados do procedimento proposto foram checados contra outros métodos de reconhecida confiança e verificou-se uma boa precisão.

Todos os modelos utilizados são tipicamente bidimensionais, o que resulta sempre na hipótese de que, em uma dada direção, as grandezas são uniformes. Uma vez que as engrenagens apresentam um estado triplo de tensão, a superposição de modelos e alguns ajustes adicionais se fazem necessários.

Por outro lado o funcionamento do programa obtido é suficientemente rápido para que seja usado durante a fluxo usual de dimensionamento de engrenagens.

Um ponto a ser ponderado para o futuro seria a obtenção de um procedimento semelhante que se valesse de um único modelo matemático capaz de representar o estado de tensões tridimensional. No presente, o uso da Análise Tridimensional de Elementos Finitos se mostra como opção para esta tarefa. No entanto ainda não é realístico se conceber que tal sistema teria a rapidez suficiente para ser usado dentro de uma sessão de dimensionamento e otimização de projeto de pares engranados.

Uma solução conciliatória talvez seria o uso do procedimento aqui proposto para a análise rotineira em conjunção a um sistema mais complexo que seria utilizado para a confirmação de resultados em casos especiais.

Uma vez que o procedimento proposto fornece quantitativamente as variações de tensão devidas a alterações no contacto, o mesmo poderá servir de ferramenta para uma análise das consequências dos erros de manufatura, correções e suas combinações.

Ademais, o procedimento obtido chega à distribuição de esforços e à variação da rigidez torsional do sistema durante o ciclo de engrenamento. Estes dados podem servir de ponto de partida para a análise das pressões de contacto e do surgimento das grandezas dinâmicas.

O procedimento proposto pode também ser aplicado na confecção e aferição de padrões de cálculo para o caso em que não se requer grande precisão. Isto significa que através dos resultados obtidos pode-se levantar as curvas de influência de cada fator as quais serão aplicadas em um procedimento mais simples.

Finalmente, este método apresenta precisão e rapidez suficientes para que se pondere na confecção de um "sistema especialista" que projete e otimize automaticamente engrenagens retas e helicoidais.

10. BIBLIOGRAFIA

- /1/ "Information Sheet for Strength of Spur, Helical, Herringbone and Bevel Gear Teeth", AGMA 225.01
- /2/ "Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears", ISO/DIS 6336
- /3/ "Grundlagen für die Tragfähigkeitsberechnung von Gerad- und Schrägstirnrädern", DIN 3990
- /4/ Lewis, W. Investigation of the Strength of Gear Teeth  
  
Engineers' Club, Philadelphia, Pa.  
15 de Outubro de 1892
- /5/ Hertz, H. Über die Berührung fester elastischer Körper  
  
Opera Completa, Vol I  
PH Lenard, 1895, Leipzig
- /6/ Weber, C. Formänderung und Profilrücknahme bei gerad-  
Banaschek, K. und schrägverzahnten Rädern  
  
Schriftenreihe Antriebstechnik, Caderno 11,  
1955, Vieweg u. Sohn, Braunschweig

- /77/ Jaramillo, T. J. Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Cantilever Plate of Infinite Length
- Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 72, pág. 67-72, Março de 1950
- /8/ Wellauer, E. J. Bending Strength of Gear Teeth by Cantilever-Plate Theory
- Seireg, A.
- Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Ser. B, Vol. 82, N. 3, pág. 213-222, Agosto de 1960
- /9/ Winter, H. The Measurement of Actual Strains at Gear Teeth, Influence of Fillet Radius on Stresses and Tooth Strength
- Hirt, M.
- Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Fevereiro de 1974, pág. 33-40
- /10/ Winter, H. Tatsächliche Zahnfußspannung und zulässige Zahnfußbeanspruchung an schrägverzahnten Stirnrädern
- Broßmann, U.
- Antriebstechnik 17, N. 5, pág. 219-222, 1978
- /11/ Henriot, G. Traité Théorique et Pratique des Engrenages
- Dunod, Paris, 1968



- /12/ Schäfer, W. F. Ein Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung
- Dissertação, 1971  
Escola Técnica Superior de Darmstadt
- /13/ Umezawa, K. Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Rack-shaped Cantilever Plate with Finite Width for Gears
- Bulletin of the JSME, Vol. 15, N. 79,  
1972, pág. 116-130
- /14/ Umezawa, K. The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission - ( 1st Report )
- Bulletin of the JSME, Vol. 15, N. 90,  
1972, pág. 1632-1639
- /15/ Umezawa, K. The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission - ( 2nd Report )
- Bulletin of the JSME, Vol. 16, N. 92,  
1973, pág. 407-413

- /16/ Umezawa, K. Deflection Due to Contact between Gear  
Ishikawa, J. Teeth with Finite Width
- Bulletin of the JSME, Vol. 16, N. 97,  
1973, pág. 1085-1093
- /17/ Umezawa, K. The Meshing Test on Helical Gears  
under Load Transmission -  
( 3rd Report )
- Bulletin of the JSME, Vol. 17, N. 112,  
1974, pág. 1348-1355
- /18/ Kubo, A. Research on the Load Carrying Characteristics  
Umezawa, K. of Cylindrical Gears with Errors -  
( 1st Report )
- Trans. of the JSME, Vol. 43, N. 371,  
Julho de 1977, pág. 2771-2783
- /19/ Tobe, T. Longitudinal Load Distribution Factors  
Inoue, K. of Spur Teeth
- Congrès Mondial des Engrenages, Vol. 1  
Paris, 1977, pág. 211-225
- /20/ Tobe, T. Bending of Stub Cantilever Plate  
Kato, M. and Some Application to Strength  
Inoue, K. of Gear Teeth
- Journal of Mechanical Design, Trans. ASME,  
Vol. 100, Abril de 1978, pág. 374-381

- /21/ Inoue, K. Longitudinal Load Distribution of  
Tobe, T. Helical Gears
- International Symposium on Gearing and Power  
Transmission, 1981, Tóquio, pág. 165-170
- /22/ Neupert, B. Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und  
Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben
- Dissertação, 1983  
Escola Técnica Superior de Aachen
- /23/ Weck, M. Berechnung von Lastverteilung und Zahnfuß-  
Neupert, B. spannungen an Schrägverzahnten  
Zylinderrädern
- Industrie-Anzeiger 98. Jg.Nr. 95 v. 26.11.76  
pág. 1693-1694
- /24/ Weck, M. Berechnung der Zahnfußspannungen an  
Neupert, B. Zylinderrädern mit der Methode finiter  
Elemente
- Industrie-Anzeiger 101. Jg.Nr. 64 v. 10.8.79  
pág. 27-30
- /25/ Weck, M. Berechnung der Beanspruchungen von  
Neupert, B. Stirnrädern mit Zahnflanken-  
Abweichungen
- Industrie-Anzeiger 104. Jg.Nr. 36 v. 5.5.82  
pág. 35-39

- /26/ Wilcox, L.                    Application of Finite Elements to the  
Coleman, W.                    Analysis of Gear Tooth Stresses
- Journal of Engineering for Industry, Trans.  
ASME, Novembro de 1973, pág. 1139-1148
- /27/ Wilcox, L.                    Three-dimensional Stress Analysis of  
Auble, R.                    Meshing Gear Teeth
- Congrès Mondial des Engrenages, Vol. 1  
Paris, 1977, pág. 93-107
- /28/ Wilcox, L.                    Gear Tooth Stresses
- Machine Design, 23 Fev. 1978, pág. 88-92
- /29/ Chabert, G.                    An Evaluation of Stresses and  
Dang Tran, T.                  Deflection of Spur Gear Teeth under  
Mathis, R.                    Strain
- Journal of Engineering for Industry, Trans.  
ASME, Fevereiro de 1974, pág. 85-93
- /30/ Mathis, R.                    Contraintes et Deformations dans un  
Engrenage Helicoidal
- Congrès Mondial des Engrenages, Vol. 1  
Paris, 1977, pág. 109-130

- /31/ Niemann, G. Elementos de Máquinas  
Ed. Edgard Blücher Ltda, 1971
- /32/ Shigley, J. Elementos de Máquinas  
Livros Técnicos e Científicos Edit. S/A  
1986
- /33/ Rademacher, J. Ermittlung von Lastverteilungsfaktoren  
für Stirnradgetriebe  
Industrie-Anzeiger B9. Jg.Nr. 17 v.28.2.67  
pág. 331-334
- /34/ Smith, J. Stresses Due to Tangential and Normal Loads  
Liu, C. on an Elastic Solid with Application to  
Some Contact Stress Problems  
Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME,  
Março de 1953
- /35/ Grekoussis, R. Stellung der Hertzschen Druckellipse auf der  
Michailidis, Th. Oberfläche zweier einander in einen Punkt  
Berührender Körper  
Konstruktion 32, Caderno B, 1980,  
pág. 303-306
- /36/ Castleberry, G. Analyzing Contact Stresses More Accurately  
Machine Design, 12 Abr. 1984, pág. 92-97

- /37/ Timoshenko, S.      The Strength of Gear Teeth  
Baud, R.  
  
Automotive Industries 55,  
1926, pág. 138-142
- /38/ Fernandes, O.      Uma Contribuição ao Estudo das Tensões na  
Raiz de Dentes de Engrenagens - Determina-  
ção da Influência do Raio do Filete Utili-  
zando a Técnica Fotoelástica  
  
Tese de Mestrado, 1971  
Escola de Engenharia de São Carlos - USP
- /39/ Castelli, V.      Three-dimensional Stress Analysis in Spur  
Meneghetti, U.      and Helical Rack Gears  
  
International Symposium on Gearing and Power  
Transmission, 1981, Tóquio, pág. 153-158
- /40/ Allison, I.      A New Design Procedure for the Bending  
Hearn, E.      Strength of Helical Gears  
  
Engineering (Inglaterra), Outubro de 1978,  
pág. 1055-1057
- /41/ Allison, I.      A New Look at the Bending Strength  
Hearn, E.      of Gear Teeth  
  
Experimental Mechanics, Julho de 1980,  
pág. 217-225

- /42/ Oda, S. Study on Bending Fatigue Strength  
Koide, T. of Helical Gears
- International Symposium on Gearing and Power  
Transmission, 1981, Tóquio, pág. 465-470
- /43/ Munhoz Jr, D. Determinação de Tensões Residuais  
e Austenita Retida em Aços  
Cementados Usando Difração  
de Raio X
- Tese de Mestrado, 1983  
Universidade Federal de São Carlos
- /44/ Neuber, H. Die Berechnung der Zahnfuß-  
beanspruchung
- Konstruktion 22, Caderno 11, 1970,  
pág. 447-450
- /45/ Baronet, C. Exact Stress Distribution in Standard  
Tordion, G. Gear Teeth and Geometry Factors
- Journal of Engineering for Industry, Trans.  
ASME, Novembro de 1973, pág. 1159-1163
- /46/ Cardou, A. Numerical Implementation of Complex  
Tordion, G. Potentials for Gear Tooth Stress Analysis
- Journal of Mechanical Design, Trans. ASME  
Vol. 103, Abril de 1981, pág. 460-465

- /47/ Terauchi, Y. Study on Deflection of Spur Gear Teeth -  
Nagamura, K. ( 1st Report )  
  
Bulletin of the JSME, Vol. 23, N. 184,  
1980, pág. 1682-1688
- /48/ Terauchi, Y. Study on Deflection of Spur Gear Teeth -  
Nagamura, K. ( 2nd Report )  
  
Bulletin of the JSME, Vol. 24, N. 188,  
1981, pág. 447-452
- /49/ Kondo, K. On the Bending Stress of Spur Gears By FEM.  
Takada, J. In Relational to Effect of Stressed Volume  
on the Strength  
  
International Symposium on Gearing and Power  
Transmission, 1981, Tôquio, pág. 129-134
- /50/ Ishida, K. Computer Simulation of Stresses and  
Deformations of Gear Case, and of Gear  
Teeth Taking the Influence of Gear Body  
into Consideration  
  
Congrès Mondial des Engrenages, Vol. 1  
Paris, 1977, pág. 309-323
- /51/ Honda, H. An Analysis by Finite Element Techniques  
Conway, J. of the Effects of a Crack in the Gear  
Tooth Fillet and its Applicability to  
Evaluating Strength of the Flawed Gears  
  
Bulletin of the JSME, Vol. 22, N. 174,  
1979, pág. 1848-1855



- /52/ Poterasu, V.                      Stress Analysis of Tooth Gears by  
Mihalache, N.                      Boundary Elements Method in Static Regime
- VIII COBEM  
S. J. Campos, 1985, pág. 461-464
- /53/ Kugimiya, H.                      Stresses in Helical Gear Teeth
- Bulletin of the JSME, Vol. 9, N. 36,  
1966, pág. 816-829
- /54/ Conry, T.                              A Mathematical Programming Technique for  
Seireg, A.                              the Evaluation of Load Distribution and  
Optimal Modifications for Gear Systems
- Journal of Engineering for Industry, Trans.  
ASME, Novembro de 1973, pág. 1115-1122
- /55/ Fujita, K.                              Gear-Tooth Stress Calculation  
Obata, F.                              Method for Heavily Crowned  
Miyanishi, K.                              Gear
- Bulletin of the JSME, Vol. 17, N. 104,  
1974, pág. 264-272

- /56/ Oda, S. Study on Bending Fatigue Strength of Helical  
Shimatomi, Y. Gears - ( 1st Report )
- Bulletin of the JSME, Vol. 23, N. 177,  
1980, pág. 453-460
- /57/ Oda, S. Study on Bending Fatigue Strength of Helical  
Shimatomi, Y. Gears - ( 2nd Report )
- Bulletin of the JSME, Vol. 23, N. 177,  
1980, pág. 461-468
- /58/ "Símbolos de Engrenagens", Projeto de Norma ABNT-4:04.01-003  
Setembro de 1982
- /59/ Buckingham, E. Analytical Mechanics of Gears
- Dover Publications, Inc.  
Nova Iorque, 1963
- /60/ Timoshenko, S. Teoria da Elasticidade  
Goodier, J.
- Ed. Guanabara Dois S/A,  
3a Edição - 1980,  
pág. 18, 94-96
- /61/ Dolan, T. J. A Photoelastic Study of Stresses  
Broghamer, E. L. in Gear Tooth Fillets
- University of Illinois Engineering  
Experimental Station Bulletin,  
N. 335, 1942

- /62/ Heywood, R. B. Tensile Fillet Stresses in  
Loaded Projections  
  
Proc. Inst. Mech. Eng. 159  
1948
- /63/ Neuber, H. Der Zahn  
  
Ing.-Archiv  
Austria, 1963
- /64/ Lipson, C. Handbook of Stresses  
Juvinall, R. C. and Strength  
  
Macmillan  
Nova Iorque, 1963
- /65/ Carnahan, B. Applied  
Luther, H. A. Numerical  
Wilkes, J. D. Methods  
  
John Wiley & Sons, Inc.  
Nova Iorque, 1969

APÊNDICE I

Listagens de Programação

Linguagem APL versão p/ IBM-CMS

```

▽DOPERR[D]▽
▽ J+DOPERR A
[1] A *** A+ MN APN AHM Z1 Z2 L ECN1 DCH1 SHM1 HE1 HAD1 PROT1 HR1 LB1 A11 A21
[2] A      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
[3] A
[4] A      ECN2 DCH2 SHM2 HE2 HAD2 PROT2 HR2 LB2 A12 A22 P V1 V2
[5] A      17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
[6] A
[7] BA9+BASE9 A[(16), 8 18], 0 0
[8] BA41+BASE4 A[(14), 7 8], 0
[9] BA42+BASE4 A[(13), 5 17 18], 0
[10] SFAH1+SEAH A[(14), 7, 8+15]
[11] SFAH2+SEAH A[(13), 5 17, 18+15]
[12] D+A[2 3 7 8 14 15 16 17 18 24 25 26], BA9[4 5 6 9 13 17 18 20 40 50 56 66]
, BA41[35 37], BA42[35 37], SFAH1, SFAH2, A[6], BA9[23], A[27 28 29]
[13] E+ 37 9 p' APN AHM ECN1 DCH1 LB1 A11 A21
ECN2 DCH2 LB2 A12 A22 DM1 DB1 AHB P
CR DM11 DM2 DB2 DM112 DCH11 DIE1 DCH112 DI
E2 ECCH1 ECNCH11 ECCH2 ECNCH12 XSF1 YSF1 XSF2 YSF
2 L APT P V1 V2
[14] I+37
[15] L1:=0E[I:], '+D[I]'
[16] I+I-1
[17] →(I≠0)/L1
[18] I+DEX 7 6 p' BA9 BA41 BA42 SFAH1 SFAH2 D E
[19] SF1+2×XSF1
[20] DSF1+DM1+2×YSF1
[21] DSF11+DM11+2×YSF1
[22] AHSF1+ATAN(DSF1×TAN AHM)+DM1
[23] LB11+LB1+COS AHSF1
[24] H11+(DCH11-DSF11)÷2
[25] SFME1+DCH11×10(ECNCH11+DCH11)
[26] APV1+ATAN((SF1-SFME1)+2)+H11
[27] MN1+(2×SF1)+PI+5×TAN APV1
[28] WD1+2.25×MN1
[29] RAZ1+LB11+WD1
[30] FAP+1.1-0.021×APV1
[31] XT+((139)×(LB1+40))-LB1÷2
[32] XIIT+XT+COS AHSF1
[33] XICST+XIIT+WD1
[34] SF2+2×XSF2
[35] DSF2+DM2+2×YSF2
[36] DSF112+DM112+2×YSF2
[37] AHSF2+ATAN(DSF2×TAN AHM)+DM2
[38] LB112+LB2+COS AHSF2
[39] H112+(DCH112-DSF112)÷2
[40] SFME2+DCH112×10(ECNCH112+DCH112)
[41] APV2+ATAN((SF2-SFME2)+2)+H112
[42] MN2+(2×SF2)+PI+5×TAN APV2
[43] WD2+2.25×MN2
[44] RAZ2+LB112+WD2

```

```

[45] LT1:' P      = ',2#P
[46] LT2:' LB1+2  = ',2#LB1+2
[47] LT7:' HII1   = ',2#HII1
[48] LT8:' XT     = ',1#XT[1 2 4 10 14 18 22 26 30 34 38 39]
[49] I+DEX 16 9 p'XSF1   YSF1   ECCH1   ECNCHII1 SFME1   DCHII1   XSF2
      YSF2   ECCH2   ECNCHII2 SFME2   DCHII2   '
[50] # VAMOS USAR 30 POSICOES DE ENGATE
[51] #
[52] # ENCONTRA-SE OS LIMITES PARA OS X'S NOS DB PARA OS QUAIS HA'
[53] # ENGRENAMENTO
[54] # (((((LB1+10)+COS AHSF1))*((SF1*TAN AHSF1)+2))^((LB2+10)+COS AHSF2))*((SF2*
      TAN AHSF2)+2)))/L5
[55] # DENTE MUITO FINO'
[56] #+0
[57] L5:XBA+(LB1+2)-A11+(((DIE1*2)-DB1*2)*0.5)+2*TAN AHB
[58] XBB+A21-(LB1+2)+(((DCH1*2)-DB1*2)*0.5)+2*TAN AHB
[59] #
[60] XB+XBB+((XBA-XBB)+31)*130
[61] #
[62] IC+130
[63] # PARA CADA UM XB CALCULA-SE O XDCH E XDIE NAO APENAS DO DENTE EM
[64] # QUESTAO COMO TAMBEM DOS 3 AA FRENTE E DOS 3 ATRAS
[65] # OS VALORES DOS X QUE CAEM ALEM DOS LIMITES SAO SUBSTITUIDOS
[66] # PELOS RESPECTIVOS LIMITES
[67] N+(17)-4
[68] XDCH+((((((DCH1*2)-DB1*2)*0.5)+2)-N*PCB)+TAN AHB)*.+XB
[69] XDIE+((((((DIE1*2)-DB1*2)*0.5)+2)-N*PCB)+TAN AHB)*.+XB
[70] XDCH+(XDCH[ ((LB1+2)-A11) ]-[ ((LB1+2)-A21) ]
[71] XDIE+(XDIE[ ((LB1+2)-A11) ]-[ ((LB1+2)-A21) ]
[72] DIF+XDCH-XDIE
[73] APORC+DIF[4; ]+#[1] DIF
[74] #
[75] # TEMOS AGORA 30 XB          30 DIF[4; ] E 30 XDIE[4; ]
[76] #
[77] #
[78] #
[79] XX1+DD1+XXII1+DDII1+HH1+XICS1+YPET1+AX1+R1+AF1+DEL1+XX2+DD2+XXII2+DDII2+
      HH2+XICS2+YPET2+AX2+R2+AF2+DEL2+(7,U1)p1
[80] FRA+(LB1-A11+A21)/(U1-1)
[81] # FRA+(LB1-A11+A21)/U1 ANALISAR
[82] NUM+ 7 30 p0
[83] NUM[4; ]+[ DIF[4; ]+FRA
[84] DLT+DIF[4; ]/(NUM[4; ]+0)+NUM[4; ]
[85] NUM[1; ]+[ DIF[1; ]+DLT
[86] NUM[2; ]+[ DIF[2; ]+DLT
[87] NUM[3; ]+[ DIF[3; ]+DLT
[88] NUM[5; ]+[ DIF[5; ]+DLT
[89] NUM[6; ]+[ DIF[6; ]+DLT
[90] NUM[7; ]+[ DIF[7; ]+DLT
[91] IC+(NUM[4; ]+0)/IC
[92] I+DEX 4 5 p'XBA XBB XDCH FRA '

```

```
[93] J=0
[94] L4:J+J+V2
[95] +(J)pIC/L6
[96] I=IC[J]
[97] LT3:'I = ',I
[98] LT4:NUM[,I]
[99] K=((NUM[,I]≠0)×N)≠0)/(NUM[,I]≠0)×N
[100] H=0
[101] I1=0
[102] L3:PLATE I1
[103] +(H=(pK))/LT5
[104] H+H+1
[105] I1+K[H]
[106] →L3
[107] LT5:' XX1 = ',2#XX1[4;(NUM[4,I])]
[108] LT6:' HH1 = ',2#HH1[4;(NUM[4,I])]
[109] L2:ANALISE
[110] →L4
[111] L6:'FIM DO PROGRAMA'
▽
```

```

▽PLATE[D]▽
▽ J+PLATE A
[1] IP+A+4
[2] XX1[IP;]+V1pXDIE[IP;I]+((DIF[IP;I]-DLT[I]×NUM[IP;I]+2)+((INUM[IP;I])×DLT
[I])×DLT[I])÷2
[3] AF1[IP;]+((XX1[IP;]-XB[I])×TAN AHB)+A×PCB
[4] R1[IP;]+AF1[IP;]+COS AHB
[5] DD1[IP;]+((2×AF1[IP;])×2)+DB1×2)×0.5
[6] DDII1[IP;]+DD1[IP;]-DM1-DMII1
[7] HH1[IP;]+(DDII1[IP;]-DSFII1)÷2
[8] XXII1[IP;]+(XX1[IP;]+COS AHSF1)+(((SF1×TAN AHSF1)÷2)×(1-HH1[IP;]+(SF1+2×
TAN APV1)))÷(((SF1×TAN AHSF1)÷2)×(1-((LB1÷2)-XX1[IP;])÷((LB1+10)×(SF1×
0.5×SEN AHSF1))))×(1-HH1[IP;]+(SF1+2×TAN APV1)))×XX1[IP;]×((LB1+2)-SF1×
0.5×SEN AHSF1)[0.4×LB1)
[9] XICS1[IP;]+XXII1[IP;]÷WD1
[10] YPET1[IP;]+(WD1-HH1[IP;])÷WD1
[11] AX1[IP;]+(DEG(TAN ACOS(DMII1×COS APN)+DDII1[IP;])-(ECN1+DMII1)+TAN APN)+
APN
[12] *DEL1[IP;]+*****
[13] XX2[IP;]+XX1[IP;]+A11+(LB2+2)-(LB1+2)+A12
[14] AF2[IP;]+(L×SEN APT)-AF1[IP;]
[15] R2[IP;]+AF2[IP;]+COS AHB
[16] DD2[IP;]+((2×AF2[IP;])×2)+DB2×2)×0.5
[17] DDII2[IP;]+DD2[IP;]-DM2-DMII2
[18] HH2[IP;]+(DDII2[IP;]-DSFII2)÷2
[19] XXII2[IP;]+(XX2[IP;]+COS AHSF2)-(((SF2×TAN AHSF2)÷2)×(1-HH2[IP;]+(SF2+2×
TAN APV2)))÷(((SF2×TAN AHSF2)÷2)×(1-((LB2+2)+XX2[IP;])÷((LB2+10)×(SF2×
0.5×SEN AHSF2))))×(1-HH2[IP;]+(SF2+2×TAN APV2)))×XX2[IP;]×((LB2+2)+SF2×
0.5×SEN AHSF2)[0.4×LB2)
[20] XICS2[IP;]+XXII2[IP;]÷WD2
[21] YPET2[IP;]+(WD2-HH2[IP;])÷WD2
[22] AX2[IP;]+(DEG(TAN ACOS(DMII2×COS APN)+DDII2[IP;])-(ECN2+DMII2)+TAN APN)+
APN
[23] *DEL2[IP;]+*****
▽

```



```

VANALISE[0]▽
▽ ANALISE;M;N
[1] W+1
[2] L1: n P E' A FORCA TOTAL NO PLANO NORMAL G E' KGF/MM
[3] n E =21 000 KGF/MM2 G=8 000 KGF/MM2
[4] LIN+10
[5] COL+10
[6] H+0
[7] I1+0
[8] L3=LIN+LIN,(NUM[(I1+4);I])p(I1+4)
[9] COL+COL,(1(NUM[(I1+4);I]))
[10] +(H=(pK))/L2
[11] H+H+1
[12] I1+K[H]
[13] +L3
[14] L2: n 'ANALISE'
[15] Q(W=1)/'Q+(pLIN)pP+(+/DIF[;I])÷COS AHB'
[16] DL1+(pLIN)pDEL1[4;(LIN=4)/COL],DEL1[1;(LIN=1)/COL],DEL1[2;(LIN=2)/COL],
DEL1[3;(LIN=3)/COL],DEL1[5;(LIN=5)/COL],DEL1[6;(LIN=6)/COL],DEL1[7;(LIN=
7)/COL]
[17] DL2+(pLIN)pDEL2[4;(LIN=4)/COL],DEL2[1;(LIN=1)/COL],DEL2[2;(LIN=2)/COL],
DEL2[3;(LIN=3)/COL],DEL2[5;(LIN=5)/COL],DEL2[6;(LIN=6)/COL],DEL2[7;(LIN=
7)/COL]
[18] MCOS1+(2ppLIN)pCOS AX1[4;(LIN=4)/COL],AX1[1;(LIN=1)/COL],AX1[2;(LIN=2)/
COL],AX1[3;(LIN=3)/COL],AX1[5;(LIN=5)/COL],AX1[6;(LIN=6)/COL],AX1[7;(LIN
=7)/COL]
[19] MRCOS1+MRCOS1
[20] MCOS2+(2ppLIN)pCOS AX2[4;(LIN=4)/COL],AX2[1;(LIN=1)/COL],AX2[2;(LIN=2)/
COL],AX2[3;(LIN=3)/COL],AX2[5;(LIN=5)/COL],AX2[6;(LIN=6)/COL],AX2[7;(LIN
=7)/COL]
[21] MRCOS2+MRCOS2
[22] MD1+(2ppLIN)p0
[23] MD2+(2ppLIN)p0
[24] MC1+(2ppLIN)p0
[25] MC2+(2ppLIN)p0
[26] H+0
[27] L4:M+M+1
[28] N+0
[29] L5:N+N+1
[30] MD1[M;N]+((KKBB RAZ1,APV1,XICS1[LIN[M];COL[M]],YPET1[LIN[M];COL[M]],XICS1
[LIN[N];COL[N]],YPET1[LIN[N];COL[N]])×(LIN[M]=LIN[N]))+MN1
[31] MD2[M;N]+((KKBB RAZ2,APV2,XICS2[LIN[M];COL[M]],YPET2[LIN[M];COL[M]],XICS2
[LIN[N];COL[N]],YPET2[LIN[N];COL[N]])×(LIN[M]=LIN[N]))+MN2
[32] MC1[M;N]+(0.0139261+((0.0000275869×Q[N])×R1[LIN[N];COL[N]]×R2[LIN[N];COL[N]
]+R1[LIN[N];COL[N]]+R2[LIN[N];COL[N]]))+((DLT[I]÷COS AHB)×COL[M]-COL[N])
*2)×0.5)×(LIN[M]=LIN[N])
[33] Q(M=N)/'MC1[M;N]+(0.0139261+((0.0000275869×Q[N])×R1[LIN[N];COL[N]]×R2[LIN
[N];COL[N]]+R1[LIN[N];COL[N]]+R2[LIN[N];COL[N]]))+((DLT[I]÷COS AHB)×0.5)*
2)×0.5)+ MC1[M;N]÷2'
[34] MC2[M;N]+(0.0139261+((0.0000275869×Q[N])×R1[LIN[N];COL[N]]×R2[LIN[N];COL[N]
]+R1[LIN[N];COL[N]]+R2[LIN[N];COL[N]]))+((DLT[I]÷COS AHB)×COL[M]-COL[N])
*2)×0.5)×(LIN[M]=LIN[N])

```

```

[35] #*(M=N)/'MC2[M;N]+((0.0139261+((0.0000275869)*Q[N]*R1[LIN[N];COL[N]])*R2[LIN[N];COL[N]])+R1[LIN[N];COL[N]]+R2[LIN[N];COL[N]])+((DLT[I]+COS AHB)*0.5)*2)*0.5)+ MC2[M;N])+2'
[36] CXI1+(1+(0.01712+0.08411*15-(((LBII1+2)-(XX1[LIN[M];COL[M]]+COS AHSF1))[(LBII1+2)+(XX1[LIN[M];COL[M]]+COS AHSF1))][15]))*4)*0.5
[37] CCS1+(1+(0.01712+0.08411*15-(((LBII1+2)-(XX1[LIN[N];COL[N]]+COS AHSF1))[(LBII1+2)+(XX1[LIN[N];COL[N]]+COS AHSF1))][15]))*4)*0.5
[38] CYP1+(1+(0.01712+0.08411*15-(((HII1-HH1[LIN[M];COL[M]])+COS APV1)[15]))*4)*0.5
[39] CET1+(1+(0.01712+0.08411*15-(((HII1-HH1[LIN[N];COL[N]])+COS APV1)[15]))*4)*0.5
[40] CXI2+(1+(0.01712+0.08411*15-(((LBII2+2)-(XX2[LIN[M];COL[M]]+COS AHSF2))[(LBII2+2)+(XX2[LIN[M];COL[M]]+COS AHSF2))][15]))*4)*0.5
[41] CCS2+(1+(0.01712+0.08411*15-(((LBII2+2)-(XX2[LIN[N];COL[N]]+COS AHSF2))[(LBII2+2)+(XX2[LIN[N];COL[N]]+COS AHSF2))][15]))*4)*0.5
[42] CYP2+(1+(0.01712+0.08411*15-(((HII2-HH2[LIN[M];COL[M]])+COS APV2)[15]))*4)*0.5
[43] CET2+(1+(0.01712+0.08411*15-(((HII2-HH2[LIN[N];COL[N]])+COS APV2)[15]))*4)*0.5
[44] MC1[M;N]+MC1[M;N]*CXI1*CCS1*CYP1*CET1
[45] MC2[M;N]+MC2[M;N]*CXI2*CCS2*CYP2*CET2
[46] #*(N*M)/L5
[47] +(N#pLIN)/L5
[48] +(M#pLIN)/L4
[49] HD+(MD1*MCOS1*MRCOS1)+(MD2*MCOS2*MRCOS2)+MC1+MC2
[50] HM+BHO
[51] DELA+(P++/HM+.x(DL1+DL2))++/+/HM
[52] D+AF+(+/HM*DELA)-HM+.x(DL1+DL2)
[53] #TENGOES
[54] #Q(W=0)/'RES+AF'
[55] #Q(W#0)/'RES+RES,[1] AF'
[56] +(W=4)/L6
[57] W+W+1
[58] Q+AF+DLT[I]+COS AHB
[59] +L1
[60] L6:' AF = ',1#AF
[61] TENGOES
▽

```

```

▽KKBB[D]▽
▽ J+KKBB A1;XIS;YPS;CSI;ETA;U;LAM;I;E;XISL;CSIL;DELTA;DELTAY;ERRE;VERRE;
  AI;B;C;DELTA;A
[1] A A1+ RAZ(2B/H) APV XIS YPS CSI ETA
[2] A 1 2 3 4 5 6
[3] A
[4] A+A1[1 3 4 5 6],FATORES A1[1 2]
[5] A A + 2B/H XIS YPS CSI ETA U LAMBDA A1 A2 A3 B1 B2 B3 B4 C1 C2
[6] A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
[7] E+ 6 3 p 'XISYPSCSIETAU LAM'
[8] I+6
[9] L:=E[I,],'+A[I+1]'
[10] I+I-1
[11] +(I≠0)/L
[12] AI+A[B 9 10]
[13] B+A[11 12 13 14]
[14] C+A[15 16]
[15] XISL+LAM×XIS
[16] CSIL+LAM×CSI
[17] DELTAXL+XISL-CSIL
[18] DELTAX+XIS-CSI
[19] DELTAY+YPS-ETA
[20] ERRE+((DELTAXL×2)+DELTAY×2)*0.5
[21] VERRE+(+/*-AI×ERRE×2)÷3
[22] J+U×VERRE×(FMIN C,A[1],XIS)×(FMIN C,A[1],CSI)×(GMIN B,YPS)×(GMIN B,ETA)
  +(FMIN C,A[1],DELTA)×(GMIN B,DELTAY)
▽
▽FMIN[D]▽
▽ J+FMIN A;X;C
[1] A A+ C1 C2 2B/H X
[2] A 1 2 3 4
[3] X+A[4]
[4] C+A[1 2]
[5] +(A[3]÷4)/MENOR
[6] +(X×(A[3]÷2)-2)/MAIOR
[7] J+1
[8] +0
[9] MAIOR=J+(1++/C×(X+2-A[3]÷2)* 4 8)*0.5
[10] +0
[11] MENOR=J+(((1++/C×(X+2-A[3]÷2)* 4 8)÷(1++/C×(2-A[3]÷2)* 4 8))*0.5
▽
▽GMIN[D]▽
▽ J+GMIN A;B;Y
[1] A A + B1 B2 B3 B4 Y
[2] A 1 2 3 4 5
[3] B+A[1 2 3 4]
[4] Y+A[5]
[5] J+(1++/B×(Y[0.8]* 5 3 2 1))*0.5
▽

```



[48] C1+CC1[C]+(CC1[C+1]-CC1[C])\*(APV-ANG[C])+(ANG[C+1]-ANG[C])  
[49] C2+CC2[C]+(CC2[C+1]-CC2[C])\*(APV-ANG[C])+(ANG[C+1]-ANG[C])  
[50] J+U,LAMBDA,A1,A2,A3,B1,B2,B3,B4,C1,C2  
v