

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Vibrações Não Lineares e Não Ideais de Um Sistemas de Dois Graus de Liberdade

Autor: **Karen de Lolo Guilherme**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

Co-orientador: **Prof. Dr. Paulo Roberto G. Kurka**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MÊCANICO

Vibrações Não Lineares e Não Ideais de Um Sistemas de Dois Graus de Liberdade

Autora: **Karen de Lolo Guilherme**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

Co-orientador: **Prof. Dr. Paulo Roberto G. Kurka**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas - 2004

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Guilherme, Karen de Lolo

Vibrações não lineares e não ideais de um sistemas de dois graus de liberdade / Karen de Lolo Guilherme. -- Campinas, SP: [s.n.], 2004.

G945v

Orientadores: Prof. Dr. José Manoel Balthazar e Prof. Dr. Paulo Roberto G. Kurka.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Motores elétricos de corrente contínua. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Perturbação (Matemática). 4. Teorias não-lineares. 5. Vibração ressonante. 6. Equações diferenciais. 7. Modelos matemáticos. I. Balthazar, José Manoel. II. Kurka, Paulo Roberto Gardel. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Dedicatória:

Aos meus pais, José e Marilda, que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos de minha vida, principalmente nos estudos, não poupando esforços para que eu chegasse até aqui.

Às minhas queridas irmãs, Kátia e Karina, grandes amigas e companheiras.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESP pelo financiamento deste projeto.

Ao Prof. José Manoel Balthazar, pela orientação, amizade e alegria, que tornaram a execução deste trabalho muito prazerosa.

Ao Prof. Paulo Roberto G. Kurka, que sempre esteve pronto a me ajudar, e sem o qual a minha permanência neste programa de pós-graduação não seria possível.

Ao Prof. Masayoshi Tsuchida, que me apresentou a um trabalho pelo qual me apaixonei: a pesquisa; agradeço também pela amizade e pelo incentivo.

Ao Prof. Helder Anibal Hermini, pela pronta atenção que sempre me dedicou.

Agradeço imensamente aos meus pais José e Marilda, e às minhas queridas irmãs Kátia e Karina, pelo amor, carinho, e pelo apoio incondicional que sempre me dedicaram.

À minha irmã Karina e seu esposo Adherbal, por me receberem sempre prontamente em sua casa, e principalmente por me presentear com esta fofura que é a minha sobrinha Júlia.

Ao Hassan, uma pessoa muito especial, agradeço o carinho, a compreensão e o cuidado dedicados.

Às amigas com quem tenho dividido a minha vida nestes últimos dois anos, Celina, Simone e Enadija, agradeço pelas convesas, pelas risadas e principalmente pela paciência, que tornaram nossa convivência tão prazerosa.

Aos meus companheiros de sala Edna, Jeferson e Maira, cuja amizade e discussões sobre o trabalho foram muito valiosas.

Agradeço à amiga Simone e ao seu esposo Eduardo pela alegria, pela ajuda com o Latex, e principalmente pela valiosa amizade.

Às secretárias do DPM, Cleusa e Denise, pelas muitas gentilezas.

À Deus, pela constante presença em todos os momentos da minha vida, iluminando, protegendo e conduzindo o meus passos.

Resumo

GUILHERME, Karen de Lolo, *Vibrações Não Lineares e Não Ideais de Um Sistemas de Dois Graus de Liberdade*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 114 pp. Dissertação(Mestrado)

Neste trabalho investiga-se o comportamento dinâmico de uma classe especial de problemas denominada problemas não ideais. Desenvolve-se o estudo de um sistema dinâmico, constituído por dois blocos, conectados por molas e amortecedores. Um motor elétrico de corrente contínua do tipo não-ideal, isto é, com potência limitada, é acoplado a um dos blocos com o intuito de perturbar o sistema. A interação entre o sistema dinâmico e a fonte de energia, e o fato do sistema operar com potência limitada, caracterizam um problema não ideal. Uma escolha conveniente dos parâmetros físicos deste sistema proporciona condições ressonantes entre suas frequências naturais e, através de integrações numéricas é possível obter oscilações regulares e comportamento caótico, os quais dependem da escolha destes parâmetros. Uma solução analítica para o movimento estacionário do sistema é obtida através da análise de perturbações. Através desta solução observa-se fenômenos intrínsecos a sistemas não ideais tais como a dependência da frequência de excitação com relação a amplitude de oscilação da coordenada de movimento do sistema. Além disso, obtém-se condições de estabilidade para o sistema e condições para a existência de bifurcações do tipo sela-nó.

Palavras Chave:

Sistemas Dinâmicos, Método da Média, Sistemas Não Ideais, Ressonância, Fonte de Potência Limitada.

Abstract

GUILHERME, Karen de Lolo, *Nonideal and Nonlinear Vibrations of a two degree of freedom system*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 114 pp. Dissertação(Mestrado)

In this work the dynamic behavior of a nonideal system is studied. A dynamic system composed by two lumped masses and connected by springs and dampers is analyzed. A non-ideal DCC motor is connected to one of the masses in order to disturb the system. The interaction between the dynamic system and the energy source and the limited power of the system make this a non-ideal problem. An appropriate choice of the physical system's parameters create resonant conditions to its natural frequencies. Regular vibrations and chaotic behavior depends of the physical parameters and can be observed when a numerical integration is performed. An analytical solution for the system stationary oscillations is obtained by perturbation methods. Due to this solution one can observe typical non-ideal phenomena like the amplitude motion dependency to the frequency of the excitation. Conditions for system stability and the existence of saddle bifurcations are also obtained.

Key Words:

Dynamic Systems, Methods of Averaging, Non-Ideal Systems, Resonance, Limited Power Supply.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	3
1.2 Objetivos do trabalho	4
1.3 Apresentação dos capítulos	5
2 Dinâmica Não Linear e Caos	6
2.1 A teoria de sistemas dinâmicos	7
2.1.1 Linearização	8
2.2 Noções básicas de estabilidade	9
2.2.1 Classificação e estabilidade das soluções de equilíbrio	11
2.2.2 Critério de Routh-Hurwitz (R-H)	13
2.3 Bifurcações	14
2.3.1 Bifurcação sela-nó	15
2.3.2 Bifurcação transcritical	16
2.3.3 Bifurcação de forquilha	16
2.3.4 Bifurcação de Hopf	17
2.4 Imprevisibilidade em sistemas dinâmicos não lineares	20
2.4.1 Mapa de Poincaré	21
2.4.2 Expoente de Lyapunov	23
2.4.3 Espectro de Frequência	24
2.5 Sistemas Dinâmicos Não Ideais	26
2.5.1 Característica da Fonte de Energia	27

3	Simulação numérica de um sistema não ideal de dois graus de liberdade	31
3.1	Apresentação do sistema não ideal de dois graus de liberdade	32
3.1.1	Linearização em torno da órbita de equilíbrio	34
3.2	Estudo de Ressonâncias	35
3.2.1	Ressonância 1:1	37
3.2.2	Ressonância 1:2	46
4	Solução analítica aproximada do sistema não ideal	51
4.1	Método da Média	51
4.1.1	Teorema da Média	54
4.2	Método da média no sistema dinâmico de 2 graus de liberdade	58
4.2.1	Método da Variação de Parâmetros	61
4.2.2	Série de Fourier	73
4.2.3	A estabilidade dos movimentos estacionários	77
4.2.4	Crítério R-H	79
4.2.5	Teorema de Sotomayor	82
5	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	86
5.1	Conclusões	86
5.1.1	Soluções numéricas	86
5.1.2	Solução analítica aproximada	87
5.2	Perspectivas Futuras	88
5.2.1	Prosseguir com o estudo do sistema médio	88
5.2.2	Análise numérica em condições ressonantes	89
5.2.3	Movimento torcional	89
5.2.4	Controle por saturação	90
5.2.5	Trabalho experimental	90
	Referências Bibliográficas	91
A	A Teoria de Floquet	95
B	Outras simulações numéricas	97

Lista de Tabelas

3.1 Ressonâncias Estudadas	38
B.1 Ressonâncias Estudadas	97

Lista de Figuras

2.1	Estabilidade de Lyapunov	10
2.2	Classificação dos pontos fixos	12
2.3	Bifurcação sela-nó	15
2.4	Bifurcação transcritical	16
2.5	Bifurcação de forquilha supercrítica (esquerda). Bifurcação forquilha subcrítica (direita)	17
2.6	Bifurcação de Hopf	19
2.7	A geometria do fluxo sendo "desenhada" nas seções de Poincaré	22
2.8	A trajetória γ perfurando uma seqüência de seções de Poincaré	23
2.9	A divergência de trajetórias vizinhas	24
2.10	Aparato experimental de Kononenko e Korablev para um sistema não ideal.	27
2.11	Família de características da fonte de energia (L_1, L_2, \dots, L_5). Forma exponencial (esquerda). Forma linear (direita)	28
2.12	Família de características obtidas experimentalmente por Kononenko e Korablev	29
2.13	Comparação entre as respostas em freqüência experimental e teórica para o sistema não ideal de Kononenko e Korablev para Ω crescente (a) e Ω decrescente (b)	30
2.14	Curvas de resposta em freqüência comparando sistemas ideais (linha contínua) e não ideais (setas)	30
3.1	Sistema Dinâmico Não Ideal	32
3.2	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 antes da passagem pela ressonância; freqüência $\bar{\omega} = 0.7$; Torque Linear.	39
3.3	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a freqüência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as freqüências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$; freqüência $\bar{\omega} = 0.8435$; Torque Linear.	39
3.4	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 depois da passagem pela ressonância; freqüência $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Linear.	40
3.5	Curvas do expoente máximo de Lyapunov, versus $\log \tau$; (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Linear	40
3.6	Diagrama da superfície de secção para χ_1 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Linear.	41

3.7	Diagrama da superfície de secção para χ_2 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Linear.	41
3.8	Média das amplitudes máximas de χ_1 (o) e χ_2 (*) em função frequência $\bar{\omega}$: os picos correspondem a passagem pela ressonância $\bar{\omega} = 0.8435$. Torque Linear.	42
3.9	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 antes da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 0.7$; Torque Não Linear.	43
3.10	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$; frequência $\bar{\omega} = 0.8435$; Torque Não Linear.	43
3.11	Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 depois da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear.	44
3.12	Espectro de frequências para χ_1 : (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear.	44
3.13	Diagrama da superfície de secção para χ_1 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Não Linear.	45
3.14	Diagrama da superfície de secção para χ_2 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Não Linear.	45
3.15	Curvas do expoente máximo de Lyapunov, versus $\log \tau$; (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear	46
3.16	Perfil superior das vibrações de χ_1 , antes do efeito Sommerfeld. Figura (a) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.5269$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) corresponde a $\bar{\omega} = 0.75$ da ressonância 1:2 B. As vibrações são regulares.	47
3.17	Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) mostra o perfil para $\bar{\omega} = 1.0$, (imediatamente antes do efeito) da ressonância 1:2 A, e figura (b) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$ da ressonância 1:2 B. As vibrações são irregulares.	47
3.18	Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) é o perfil na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) mostra o perfil para $\bar{\omega} = 0.84$ (após o efeito Sommerfeld). As vibrações são irregulares.	48
3.19	Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) corresponde a $\bar{\omega} = 1.1$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) a $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.6007$	48
3.20	Passagem pelas ressonâncias e o efeito Sommerfeld. Os símbolos (o) e (*) correspondem às amplitudes máximas de χ_1 e χ_2 respectivamente. Na figura (a) correspondente à ressonância 1:2 A, o efeito Sommerfeld ocorre na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$, e na ressonância 1:2 B, figura (b), na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$	49
3.21	Passagem pela ressonância e o efeito Sommerfeld. Os símbolos são os mesmos da figura 3.20.	49
5.1	Configurações possíveis para observar o movimento torcional no sistema dinâmico	89
B.1	Movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$	98
B.2	Diagrama de Bifurcações para a ressonância 2:5, nas variáveis χ_1 e χ_2	99

B.3	As curvas do expoente característico de Lyapunov para a ressonância 2:5, com as frequências $\bar{\omega}_1 = 0.849$ e $\bar{\omega}_2 = 2.11$	99
B.4	Gráfico da FFT para a ressonância 2:5.	100
B.5	Movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$, para a ressonância 2:1.	101
B.6	Diagrama de Bifurcações para a ressonância 2:1, nas variáveis χ_1 e χ_2	102
B.7	As curvas do expoente característico de Lyapunov para a ressonância 2:1, com as frequências $\bar{\omega}_1 = 1.649$ e $\bar{\omega}_2 = 0.825$	102
B.8	Gráfico da FFT para a ressonância 2:1.	103

Capítulo 1

Introdução

Desde os tempos de Aristóteles vislumbra-se entender o movimento dos corpos no espaço, com o especial interesse de descrever o funcionamento do Universo. Acreditava-se que modelando matematicamente este problema e obtendo soluções analíticas para estas equações seria possível fazer previsões a respeito do futuro; acreditava-se muito no determinismo destas equações.

Muitos estudos foram realizados em Mecânica Celeste e assim foi-se construindo teorias a respeito das soluções de equações diferenciais e métodos de resolução analítica. Porém, somente após quase dois mil anos de pesquisas foi dado o ponto de partida para a Teoria de Sistemas Dinâmicos. Com o objetivo de verificar a validade das afirmações de Aristóteles a respeito do movimento dos corpos, Galileu realizou experimentos com corpos caindo ou em balanço sob a ação da gravidade, e tais análises quantitativas refutaram as leis de movimento de Aristóteles. Galileu introduziu conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas dos movimentos.

O nascimento da Teoria de Sistemas Dinâmicos coincide com a origem da Mecânica Clássica, cuja existência se deve especialmente a Isaac Newton. Estudar um sistema dinâmico significa investigar as propriedades de um conjunto de equações diferenciais que possui uma variável independente temporal, e cujas variáveis dependentes descrevem a dinâmica dos corpos (que estas equações representam) em um espaço de estados. A abordagem newtoniana consistia em solucionar as equações de movimento, achando expressões analíticas para as posições dos corpos em função do tempo. A análise qualitativa da dinâmica clássica, iniciada por Poincaré e estendida por Arnold, Kolmogorov, Moser e outros, revolucionou o estudo de sistemas dinâmicos. A busca de soluções exatas foi substituída por uma compreensão qualitativa ou topológica das famílias de soluções, revelando-se uma enorme riqueza de movimentos.

O interesse por sistemas dinâmicos tem-se intensificado muito nos últimos anos, principalmente quando incluem não linearidades em sua formulação. Esse tipo de sistema tem aplicações nas diversas áreas da Ciência. Utiliza-se sistemas dinâmicos para modelar fenômenos biológicos, problemas em Astronomia, Mecânica e Eletrônica, e para estudar dinâmicas populacionais e econômicas. As não linearidades que geralmente aparecem nessas formulações permitem uma

variabilidade maior nos tipos de soluções existentes no sistema, tais como soluções periódicas, quasiperiódicas, multi-periódicas ou até mesmo caóticas. Provavelmente, Poincaré foi o primeiro a vislumbrar caos no problema dos três corpos. Ele notou que alguns sistemas possuíam grande variabilidade no comportamento das soluções devido a pequenas alterações nas condições iniciais. A previsão nestes sistemas tornava-se impossível e eliminava-se a possibilidade de determinismo em que acreditavam os aristotélicos. Num extremo tem-se o movimento caótico, hipersensível às condições iniciais, e no outro a dinâmica regular dos sistemas integráveis, sendo que tipicamente esses movimentos surgem entrelaçados num mesmo sistema.

Na teoria de vibrações mecânicas costuma-se expressar as condições de estabilidade e instabilidade dinâmica dos sistemas relacionando as frequências de excitação externa e as frequências naturais do sistema, definindo uma região no espaço de parâmetros denominada região de ressonância. Nessa região ocorrem movimentos diferenciados que dependem do tipo de excitação externa aplicada ao sistema e às características intrínsecas ao problema.

Neste trabalho interessa-se pelo comportamento das oscilações de um sistema não ideal, operando na região de ressonância, em especial ressonâncias 1:1 e 1:2. O surgimento da teoria de sistemas não ideais se deu há exatamente um século. Enquanto Poincaré descobria uma nova propriedade do comportamento de equações diferenciais, intrínseca a alguns tipos de sistemas, Sommerfeld dava início a uma nova classe de sistemas dinâmicos: os sistemas dinâmicos não ideais. Em um experimento em que se considerava um sistema dinâmico oscilante sob a influência de uma fonte de excitação, operando com potência limitada, Sommerfeld observou a ocorrência de fenômenos diferenciados quando o sistema oscilante interagia com a fonte de excitação. Ele notou que na região de ressonância, a rotação do motor (fonte de excitação utilizada) variava de maneiras distintas conforme a variação da amplitude do sistema oscilante, sendo extremamente dependente da coordenada de movimento do sistema e não dependente simplesmente do tempo. Após as observações de Sommerfeld, foram constatados outros fenômenos na existência de interação entre fonte de energia e sistema oscilante na região de ressonância. Observou-se a dependência da curva de ressonância com relação ao sentido da variação da frequência da força de excitação, que a ocorrência de oscilações instáveis em um sistema linear está intimamente ligada às propriedades do motor elétrico, o fenômeno do salto ("jump") durante a passagem de um regime ressonante para um regime não ressonante.

Recentemente, a formulação de sistemas dinâmicos como não ideais tem sido explorada de forma intensiva. Balthazar e colaboradores [5] retomaram o estudo de sistemas vibrantes não ideais e apresentam uma revisão completa de diferentes teorias sobre o assunto. Além disso, uma série de trabalhos apresentam vários sistemas mecânicos analisados com formulações não ideais, detectando oscilações regulares e irregulares, bifurcações e caos no movimento destes sistemas. Formou-se um grupo de pesquisas que visa intensificar os estudos nesta área e obter novos resultados associando sistemas não ideais, não linearidades e teoria do caos. O objeto de estudo deste trabalho é um sistema não ideal, que também faz parte desta série de trabalhos.

1.1 Revisão Bibliográfica

O primeiro relato que se tem a respeito da interação entre um sistema oscilante e a fonte de energia é apresentado por Sommerfeld em 1902 [39]. Em seu experimento, constituído por uma mesa e um motor elétrico, o qual servia como fonte de excitação, ele observou que a velocidade do motor não era uma função suave que dependia apenas da energia inserida ao sistema. Quando a amplitude atingia o seu valor máximo, na região de ressonância, o gasto de energia crescia aproximadamente o dobro. Por outro lado, após a ressonância, a amplitude decrescia bruscamente, enquanto a velocidade do motor rapidamente crescia. A este fenômeno atribuiu-se o nome de Efeito Sommerfeld. Roccard publicou em 1949 o primeiro estudo analítico deste fenômeno [2].

Kalischuk notou a dependência da curva de ressonância com relação ao sentido da variação da frequência da força de excitação em 1939 [25]. No ano seguinte, Martyshkin mostra que a ocorrência de oscilações instáveis em um sistema linear está intimamente ligada às propriedades do motor elétrico. O fenômeno do salto ("jump") tem o seu primeiro relato em 1953 [2], quando Blekhman observa, em um estudo de auto-sincronização de massas rotacionais desbalanceadas, que a passagem de um regime ressonante para um regime não ressonante se dá através de um salto.

A partir de 1958, Kononenko publica vários artigos investigando sistemas não ideais, características da fonte de energia e passagem pela ressonância, destacando-se entre eles um artigo de 1964, que contém um experimento realizado por Kononenko e Korablev em 1959, no qual Kononenko demonstra que, com potência limitada, a velocidade angular do excitador não é aleatória, mas sim determinada pela interação entre o sistema estrutural e o excitador [2]. Em 1969, Kononenko [25] dedica um livro a sistemas dinâmicos com fonte de potência limitada, o qual faz referência a vários trabalhos e experimentos na área. Nayfeh e Mook [32] discutem o experimento realizado por Kononenko e Korablev e muitos outros experimentos são mencionados. Uma revisão completa de diferentes teorias sobre sistemas vibrantes não ideais é apresentada por Balthazar e colaboradores [5].

Recentemente, a formulação de sistemas dinâmicos como não ideais tem sido explorada de forma intensiva. Em 2002, Souza e colaboradores [40] apresentam o estudo de um sistema sujeito a choque, excitado por fonte não ideal, detectando oscilações regulares e irregulares, bifurcações e caos no movimento do sistema. Belato e colaboradores [9] apresentam o estudo de um sistema eletromecânico não ideal, quando o torque gerado pelo motor é determinado pelo próprio movimento do pêndulo. É evidenciada a existência do efeito Sommerfeld no sistema. Balthazar e colaboradores [6, 7] apresentam ricas revisões bibliográficas sobre sistemas não ideais e apresentam vários sistemas mecânicos recentemente analisados com formulações não ideais. Em [3] é utilizado o método de Melnikov para detectar bifurcações de Hopf em um sistema não ideal. Recentemente, Sado e Kot [36] apresentam um sistema dinâmico autoparamétrico com formulação não ideal, que consiste de um pêndulo montado em um corpo de massa M ,

suspensão por uma mola linear, com um amortecedor não linear. A excitação é feita por um motor elétrico cuja potência é limitada e são observados movimentos caóticos nas ressonâncias entre o corpo de massa M e o motor, e entre o pêndulo e o motor.

Resultados recentes sobre a aplicação do método da média em sistemas com fonte de excitação não ideal podem ser encontrados em [15] e [13]. O primeiro utiliza o método para verificar a presença do fenômeno de saturação, cujos resultados são comparados com resultados de integração numérica obtidos. O sistema estudado é um pórtico com não linearidades quadráticas, operando na região de ressonância interna 1:2. Um sistema semelhante foi estudado anteriormente por Brasil e Mook [11], quando constata-se a saturação dos modos durante a passagem pela ressonância. Dantas e Balthazar [13] também estudam uma estrutura aproticada, sujeita a oscilações livres, e faz uma abordagem mais formal do método da média. É verificada a existência de uma órbita periódica estável quando a excitação externa está próxima do primeiro modo de vibração, e duas órbitas periódicas hiperbólicas quando próxima do segundo modo. Uma delas é assintoticamente estável e a outra não.

O sistema dinâmico estudado nesta dissertação, foi anteriormente apresentado com uma formulação não ideal em [2], com a proposta de um controle baseado em técnicas de regularização de Tikhonov. Algumas simulações numéricas foram efetuadas, preliminarmente em [23]. Resultados obtidos no mestrado foram publicados em [24, 42, 43]. Um sistema dinâmico semelhante foi estudado em [26], com a aplicação de controle do tipo passivo à estrutura sob a ação da fonte não ideal, de duas formas distintas: através da variação da frequência natural da estrutura e pela introdução de um absorvedor de vibração.

1.2 Objetivos do trabalho

O objeto de estudo deste trabalho é um sistema dinâmico não ideal constituído por duas massas acopladas por molas e amortecedores. O sistema é fixo em uma base e uma mola e um amortecedor sustentam a primeira massa; utiliza-se também uma mola e um amortecedor conectando a segunda massa à primeira. Um motor elétrico de corrente contínua é acoplado a primeira massa com o intuito de perturbar o sistema e promover oscilações. O motor gira uma pequena massa presa a uma haste, opera com potência limitada e apresenta uma formulação com interação entre as coordenadas de movimento do sistema e a coordenada do motor, caracterizando um problema não ideal. Esta formulação foi apresentada anteriormente em [2]. Foi proposta uma técnica de controle, usando a regularização de Tikhonov para evitar o mal condicionamento do problema.

Nessa dissertação estuda-se somente as oscilações no sentido vertical. Interessa-se pelo comportamento dinâmico desse sistema durante a passagem pela ressonância. Para isso são realizadas simulações numéricas para determinados valores dos parâmetros do sistema de maneira que as frequências naturais do sistema estejam em ressonância 1:1 e 1:2. A frequência de rotação do motor funciona como um parâmetro de controle, o qual faz com que o sistema

passar por essas regiões e fenômenos provenientes das não idealidades do problema possam ser observados. Além disso, deseja-se encontrar uma solução analítica aproximada para o sistema. A vantagem dessa solução é permitir um estudo paramétrico do sistema, a partir de uma série em potências de ϵ . A solução é obtida através do método da média, um método de perturbação através do qual obtém-se um sistema de equações de primeira ordem em amplitude e fase (sistema médio), cujo comportamento da solução oscila em torno de um valor médio, estacionário, porém preservando a topologia, e portanto estabilidade do sistema original localmente. O estabilidade do sistema é avaliada e verifica-se a possibilidade da ocorrência de bifurcações sela-nó, a qual está associada ao fenômeno do salto.

1.3 Apresentação dos capítulos

Esta dissertação foi dividida em 5 capítulos. No capítulo 2 apresenta-se uma introdução sobre sistemas dinâmicos, conceitos de estabilidade, ferramentas para o estudo de sistemas não lineares e sistemas não ideais, com o intuito de fornecer uma base teórica que sirva de sustentação para o restante do trabalho. Foi criado um contexto histórico a respeito de cada tópico tratado, ou definição introduzida para servir de motivação ao leitor.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação matemática do problema não ideal estudado neste trabalho e os resultados obtidos a partir de simulações numéricas do sistema não ideal de dois graus de liberdade. São estudadas as ressonâncias internas 1:1 e 1:2. São apresentados gráficos com o movimento oscilatórios sob tais condições ressonantes, mapas de Poincaré, espectros de potência e curvas dos expoentes máximos de Lyapunov.

No capítulo 4 inicia-se a busca pela solução analítica do sistema não ideal de dois graus de liberdade a partir do método da média. O capítulo é iniciado com uma explanação do método da média de Krylov-Bogoliubov para um sistema dinâmico generalizado com n graus de liberdade, assumindo que este se encontra na forma normal. É apresentado o teorema da média e sua demonstração. Uma solução analítica é encontrada baseada na generalização feita anteriormente. Outra forma para a obtenção das equações médias, proposta por Nayfeh [29], é apresentada em seguida. Nesta solução obtém-se as condições de estabilidade do sistema pelo critério R-H e condições de bifurcação para o sistema, utilizando o teorema de Sotomayor.

O capítulo 5 contém conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Em seguida apresenta-se as referências bibliográficas utilizadas no decorrer do trabalho.

Foram inseridos também dois apêndices que são julgados relevantes para a continuação deste trabalho. No apêndice A introduz-se a Teoria de Floquet, uma das técnicas que também podem ser aplicadas a esse trabalho. No apêndice B, apresenta-se o resultado de outras simulações numéricas realizadas

Capítulo 2

Dinâmica Não Linear e Caos

A Teoria de Sistemas Dinâmicos nasceu a partir de algumas questões sobre o funcionamento do Universo e as leis que governavam o movimento da Terra. Aristóteles (384-322 a.C.), filósofo clássico, acreditava que o Universo era finito e esférico, cujo centro coincidia com o centro da Terra. Além disso, ele propôs leis de movimento dos corpos afirmando que um corpo mantém-se em movimento apenas sob a ação de uma força, que quando removida leva o corpo ao repouso; a velocidade de um corpo era proporcional à intensidade da força que atua sobre ele; e que corpos de mesmo volume soltos de uma mesma altura atingiam o solo em instantes distintos: o mais pesado atingiria o solo primeiro. Tais afirmações eram dedutivas, indo do caso particular ao geral. Porém deram início a uma série de estudos de astronomia, os quais formalizaram a teoria sobre o movimento dos corpos que se tem hoje.

Galileu Galilei (1564-1642) foi o pioneiro no uso do telescópio para estudo sobre os corpos celestes e autor de observações astronômicas muito importantes como por exemplo, a de que o sol não era uma esfera homogênea como acreditava Aristóteles. Antes disso, Galileu começou a se interessar pela teoria do movimento. Desconfiado das conclusões aristotélicas, Galileu sentiu a necessidade de criar um procedimento experimental, ou seja, um método para medir determinadas grandezas dos corpos em movimento, com o objetivo de verificar a validade das proposições teóricas. Suas análises quantitativas de experiências realizadas com pêndulos simples, projéteis lançados obliquamente, e corpos deslizando sobre planos inclinados, ou caindo livremente, introduziram conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas dos movimentos. Galileu notou que a força que age sobre um corpo é proporcional à sua aceleração, e não à velocidade como Aristóteles sugerira; e ainda, observou que todos os corpos caem segundo uma mesma aceleração gravitacional, na ausência da resistência do ar. Tais resultados de experimentos sobre a cinemática de corpos caindo ou balaçando sob a ação da gravidade constituem o ponto de partida da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

Neste capítulo introduz-se alguns conceitos básicos sobre a Teoria de Sistemas Dinâmicos e algumas definições válidas tanto para sistemas lineares como não lineares. Discute-se técnicas para o estudo de equações diferenciais, destacando-se a abordagem qualitativa; define-se espaço

de estados, no qual este estudo qualitativo é realizado. Define-se ponto de equilíbrio e introduz-se o conceito de estabilidade.

2.1 A teoria de sistemas dinâmicos

I. Newton (1642-1727) concebeu o cálculo diferencial e integral, propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo, deduziu a lei de gravitação universal e muitas outras contribuições. Mas, a sua contribuição mais importante foi relacionar a gravitação com o comportamento dinâmico do Sistema Solar. Newton admitia não compreender a natureza da gravidade; entretanto foi capaz de deduzir a lei que rege o comportamento dos corpos sob sua ação. E, com base nessa lei, comprova os experimentos realizados por Galileu e dá início a busca de métodos de resolução analítico de sistemas dinâmicos. Newton publicou o livro *Principia*, um trabalho completo sobre Mecânica, no qual demonstrava as leis de J. Kepler (1571-1630) de que os planetas descrevem órbitas elípticas. Neste trabalho Newton preferiu uma abordagem baseada em métodos geométricos e não utilizou equações diferenciais.

Um sistema dinâmico é definido por uma variável independente, real ou inteira positiva t (variável temporal); pelo espaço de fases (ou espaço de estados) formado por uma variável dependente $x(t)$ n -dimensional; por uma métrica (geralmente a norma euclideana), utilizada para medir distâncias no espaço de fases; e por um operador evolução Φ , que quando aplicado a condição inicial determina o estado do sistema no instante t , ou seja, $x(t) = \Phi(x(0))$. Este operador também é conhecido como fluxo, denominação introduzida por Newton, adotada ainda nos dias de hoje. Observa-se que na posição de equilíbrio x_0 , $\Phi(x_0) = x_0$. Para Newton, uma quantidade "que flui" é uma quantidade que varia dinamicamente e a taxa de variação temporal dessa quantidade, ou seja, a derivada, recebeu o nome de *fluxion*. Resolver a equação diferencial é achar sua solução geral, seu fluxo. Assim, Newton estabeleceu uma conexão entre equações diferenciais e a imagem geométrica de um fluxo.

Nesse contexto, de uma maneira mais simplificada, pode-se introduzir a seguinte formulação para um sistema dinâmico autônomo, contínuo no tempo:

$$\dot{x} = F(x, M) \tag{2.1}$$

sendo $F(x)$ um campo vetorial n -dimensional, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o vetor de estados n -dimensional do sistema e $M = (M_1, M_2, \dots, M_m)$ o vetor m -dimensional dos parâmetros de controle do sistema. O ponto de equilíbrio (x_0, M_0) é obtido tal que $F(x_0) = 0$, ou seja, ele representa as soluções estacionárias (quando o sistema pára de se mover no espaço de fases). Se escolhe-se uma condição inicial que coincide com um ponto de equilíbrio, então o sistema ali permanece indefinidamente.

O espaço de estado, ou espaço de fases, é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são x_1, x_2, \dots, x_n e cada estado é representado por um ponto com coordenadas $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ neste espaço. A evolução temporal desses estados é determinado por n equações diferenciais

de primeira ordem, na forma $\dot{x}_i = f_i(x)$. Denomina-se retrato de fases o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções f_i são definidas.

A abordagem newtoniana consistia em solucionar as equações de movimento, achando expressões analíticas para as posições dos corpos em função do tempo, isto é, determinando $x(t)$. Newton resolvera o problema de dois corpos interagentes, mas gerações seguintes de físicos e matemáticos descobriram que o problema relativo a três corpos era insolúvel, não sendo possível resolvê-lo analiticamente de forma exata. O *problema dos n corpos* se refere ao movimento de n pontos de massa (ou n esferas homogêneas) movendo-se em um espaço tridimensional e sujeitos apenas à atração gravitacional mútua. Normalmente, quando não se consegue obter uma solução exata, procura-se por uma solução na forma de série. Busca-se encontrar uma solução como uma soma infinita de termos, sendo que cada termo resolve uma versão simplificada da equação diferencial original. Se as correções tendem a zero, a soma dos termos é finita e a série converge para a solução real. Na aplicação desse procedimento, necessita-se de um parâmetro pequeno em função do qual se faz a expansão em série da solução real.

2.1.1 Linearização

Quando estuda-se equações diferenciais não lineares costuma-se utilizar processos de linearização. Isto porque a solução analítica explícita de equações diferenciais só existe para primeira ordem, caso contrário a solução analítica explícita existe somente para alguns casos especiais, como por exemplo equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes. Além disso, é possível realizar um estudo local de sistemas não lineares através da análise do sistema linear correspondente. Impõe-se uma perturbação z à solução de equilíbrio x_0 :

$$x(t) = x_0(t) + z(t) \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1), assumindo F pelo menos C^1 , expandindo o resultado em série de Taylor na vizinhança de x_0 e retendo apenas a parte linear, obtém-se

$$\dot{z} = D_x F(x_0)z + O(\|z\|^2) \quad \text{ou} \quad \dot{z} = A(t)z \tag{2.3}$$

quando A é a matriz da primeira derivada parcial de $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ (matriz Jacobiana), aplicada ao ponto de equilíbrio x_0 :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial z_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

Devido a linearização em z , o estudo de estabilidade é apenas local. Quando a solução de equilíbrio x_0 é periódica, a matriz A também é periódica, ambas com o mesmo período T .

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente. O teorema de Hartman-Grobman terá uma discussão mais detalhada ainda neste capítulo, mas antes é conveniente introduzir o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov.

2.2 Noções básicas de estabilidade

Em 1793, P. S. Laplace (1749-1827) fez a primeira grande contribuição para o estudo da estabilidade do Sistema Solar. Segundo ele, em primeira aproximação em série de potências da excentricidade, os eixos maiores das órbitas dos planetas não têm termos seculares. J. L. Lagrange (1736-1813) provou em 1796 que, para todas as ordens de aproximação das excentricidades das órbitas elípticas, todas as ordens de aproximação do seno do ângulo de inclinação dos planos que contém tais órbitas (com relação ao plano da órbita da Terra) e para perturbações de primeira ordem com relação às massas, o sistema é estável, no sentido que termos seculares não aparecem nas soluções em série.

A primeira tentativa de se criar uma teoria geral da estabilidade só foi feita no final do século XIX, por A. M. Lyapunov (1857-1918). Em sua tese de doutorado, defendida em 1892, Lyapunov definiu estabilidade para uma solução de uma equação diferencial ordinária. Simplicadamente uma solução $x(t)$ é estável se outras soluções, cujos valores no instante $t = t_0$ estão próximos de $x(t_0)$, permanecem próximas de $x(t)$ durante o passar do tempo. Assim, o problema da estabilidade foi desvinculado dos estudos relativos ao Sistema Solar, tornando-se parte da teoria de equações diferenciais.

O estudo de estabilidade de um sistema pode ser realizado sobre a sua solução ou sobre as equações diferenciais que o descrevem. No primeiro caso investiga-se o comportamento das soluções cujas condições iniciais estão na sua vizinhança (estabilidade de uma solução estacionária ou estabilidade orbital). No segundo caso, a estabilidade é determinada pelo comportamento de equações isomórficas cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada (estabilidade estrutural). Neste texto será apresentado apenas o conceito de estabilidade de uma solução estacionária, representada por um ponto de equilíbrio no espaço de fases, segundo a definição de Lyapunov.

Seja x_0 a posição de equilíbrio de um sistema dinâmico. Define-se x_0 como condição inicial ($x(0) = x_0$), aplica-se uma pequena perturbação e analisa-se o comportamento da solução após a perturbação. A sua estabilidade é classificada da seguinte maneira:

- a. x_0 é assintoticamente estável se a trajetória $x(t) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, x_0 atrai todas as trajetórias contidas em uma hiper-esfera centrada nele. Se o raio dessa hiper-esfera é

finito, diz-se que o ponto é localmente assintoticamente estável. Se ela compreende todo o espaço de fases (raio infinito) o ponto é dito globalmente assintoticamente estável.

- b. x_0 é neutramente estável se a trajetória $x(t)$ permanece dentro da hiper-esfera centrada nele conforme o tempo passa, porém nesse caso **não** ocorre a convergência $x(t) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow \infty$.
- c. x_0 é instável se a trajetória $x(t)$ deixa a hiper-esfera centrada nele num tempo finito.

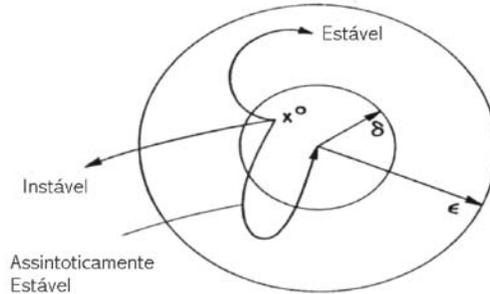


Figura 2.1: Estabilidade de Lyapunov

Observações:

1. O termo hiper-esfera é utilizado apenas para sistemas dinâmicos com dimensão maior que três. Para o caso unidimensional tem-se uma reta; para o caso bidimensional um círculo; e para o caso tridimensional uma esfera.
2. Um ponto classificado como assintoticamente estável é também denominado **atrator**, pois atrai todas as trajetórias próximas a ele. Além disso, o conjunto de todas as condições iniciais que convergem para um mesmo atrator forma a bacia de atração desse atrator.
3. A definição de estabilidade de Lyapunov se baseia na evolução temporal da distância entre a trajetória $x(t)$ e o ponto x_0 . Por isso é necessário estabelecer uma métrica na definição do sistema dinâmico estudado. Neste trabalho é utilizada a métrica euclidiana.

Formalmente, define-se que um ponto de equilíbrio x_0 é estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para $\|x(0) - x_0\| < \delta(\epsilon)$, então $\|x(t) - x_0\| < \epsilon$, para todo $t > 0$. Assim, há uma vizinhança de raio δ em torno do ponto de equilíbrio tal que, para uma condição inicial pertencente a essa vizinhança, a trajetória correspondente a essa condição inicial nunca se afasta mais do que uma distância ϵ . O ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente estável se, e somente se, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para $\|x(0) - x_0\| < \delta(\epsilon)$, então $\|x(t) - x_0\| \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$. Nesse caso, conforme o tempo passa, a trajetória que parte de $x(0)$ se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_0$. Entretanto,

se independente de quão próximo esteja $x(0)$ de $x(t)$, uma trajetória deixa a vizinhança de raio ϵ num tempo t finito, então o ponto é instável.

Um sistema de equações diferenciais lineares autônomas possui um ou infinitos pontos de equilíbrio e costuma-se classificá-lo como assintoticamente estável, neutramente estável ou instável de acordo com seu ponto de equilíbrio. Se este é único e é assintoticamente estável, o sistema é dito globalmente assintoticamente estável. Em sistemas não lineares, o número de pontos de equilíbrio pode ser qualquer.

2.2.1 Classificação e estabilidade das soluções de equilíbrio

O ponto de equilíbrio de um sistema linear pode também ser classificado de acordo com a topologia do seu retrato de fases e de acordo com a sua estabilidade. Essas definições são baseadas nos sinais dos autovalores associados ao sistema.

Considera-se o sistema de n equações diferenciais de primeira ordem (2.3). O polinômio característico é obtido a partir do determinante $\det(A - \lambda I) = 0$ sendo I a matriz identidade. Supondo que a matriz A tenha todos os seus autovalores distintos, essa matriz pode ter raízes reais simples λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$; ou raízes complexas conjugadas $\lambda_i = \lambda_{re} + j\lambda_{im}$, $\lambda_{i+1} = \lambda_{re} - j\lambda_{im}$.

Se todos os autovalores dessa matriz tem parte real diferente de zero, o ponto fixo correspondente x_0 é denominado **ponto fixo hiperbólico**, os quais se classificam de três formas quanto a estabilidade:

- **sorvedouros** se a parte real de todos os autovalores de A são negativas, ou seja, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável;
- **ponto de sela** se alguns (não todos) autovalores de A tem parte real positiva e o restante tem parte real negativa;
- **fontes** se todos os autovalores de A tem parte real positiva;

Quanto ao domínio das raízes, classificam-se:

- **nó estável** se todos os autovalores de A associada a um sorvedouro são reais;
- **nó instável** se todos os autovalores de A associada a uma fonte são reais;
- **foco estável** se todos os autovalores de A associada a um sorvedouro são complexos;
- **foco instável** se todos os autovalores de A associada a uma fonte são complexos;

Se algum ou todos os autovalores da matriz A são imaginários puros, o ponto fixo correspondente x_0 é denominado **ponto fixo não hiperbólico**, e pode ser classificado como:

- **marginalmente estável** ou **neutramente estável** se alguns dos autovalores de A tem parte real negativa, enquanto todos os outros tem parte real zero
- **instáveis** se um ou mais autovalores de A tem parte real positiva;
- **centros** se todos os autovalores de A são imaginários puros e diferentes de zero;

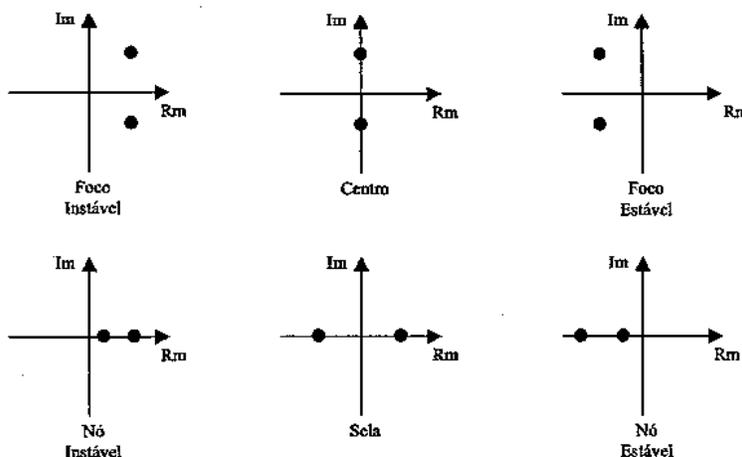


Figura 2.2: Classificação dos pontos fixos

O teorema de Hartman-Grobman é aplicável somente a pontos fixos hiperbólicos. Pontos fixos não hiperbólicos utiliza-se o teorema de Shoshitaishvili. Destes teoremas segue que um ponto fixo do sistema dinâmico não linear (2.1) é estável (instável) se o ponto fixo do sistema linear correspondente (2.3) é estável (instável). Além disso, a linearização não pode determinar a estabilidade de pontos fixos neutramente estáveis ou centros pois são não hiperbólicos; neste caso é necessário uma análise não linear, considerando termos que foram desprezados na expansão em série de Taylor.

Para pontos fixos hiperbólicos, o teorema de Hartman-Grobman garante uma equivalência topológica orbital entre os retratos de fases do sistema dinâmico não linear e do respectivo sistema linearizado, em torno do ponto fixo. Dois retratos de fases são topologicamente orbitalmente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro .

De uma maneira mais formal, seja a função $F(x) = z$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Suponha F uma função injetora (cada z_i é imagem de um único x_i) e sobrejetora (cada z_i é imagem de pelo menos um x_i , necessariamente). Então existe a inversa $F^{-1}(z) = x$. Se F é contínua, invertível e sua inversa F^{-1} é contínua então F é um homeomorfismo e o domínio x e a imagem z são homeomorfos. Os sistemas dinâmicos $\dot{x} = F(x)$ e $\dot{z} = h(z)$ são topologicamente orbitalmente equivalentes quando os retratos de fases destes sistemas podem ser relacionados por um homeomorfismo $F(x) = z$ que preserve o sentido do movimento (orientação) no espaço de fases. Portanto, as trajetórias na vizinhança de um ponto fixo do sistema dinâmico não linear

são qualitativamente equivalentes a aquelas na vizinhança do ponto fixo do sistema linearizado, caracterizando um estudo local da estabilidade.

2.2.2 Critério de Routh-Hurwitz (R-H)

Na seção anterior observou-se que o estudo da estabilidade em sistemas dinâmicos lineares é realizado a partir dos autovalores calculados na vizinhança do ponto de equilíbrio. Porém, para sistemas dinâmicos de dimensão elevada, calcular os autovalores explicitamente se torna muito difícil e exige cálculos computacionais de grande custo. E.J. Routh (1831-1907) em 1874 solucionou este problema com um critério que mais tarde foi complementado por A. Hurwitz (1859-1919), independentemente. Como trata-se de descobrir se todas as raízes de um polinômio tem parte real negativa, não há necessidade de calculá-los explicitamente.

Seja o polinômio característico de um sistema dinâmico linear de ordem n

$$\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \dots + B_n = 0.$$

Em 1895 Hurwitz descobriu quando todas as raízes do polinômio característico são negativas, os coeficientes B_i do polinômio são positivos. Porém esta condição é necessária mas não suficiente. As condições necessárias e suficientes são encontradas a partir da matriz H $n \times n$ de Hurwitz, construída do seguinte modo:

$$H_n = \begin{bmatrix} B_1 & B_3 & B_5 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & B_2 & B_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{n-2} & B_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Pode-se observar que a diagonal da matriz H_n contém todos os coeficientes B_i do polinômio característico, sem repetição. O critério R-H estabelece que a parte real de todos os autovalores é menor que zero se todos os coeficientes do polinômio característico são positivos e se os determinantes:

$$\Delta_1 = \det[B_1], \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_3 \\ 1 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} B_1 & B_3 & B_5 \\ 1 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_1 & B_3 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\dots, \Delta_n = \det[H_n] = B_n \Delta_{n-1}$$

são todos positivos.

2.3 Bifurcações

O termo bifurcação foi introduzido por Poincaré em 1885, e refere-se a uma mudança qualitativa da trajetória no espaço de fases, quando um parâmetro do sistema é variado. Usualmente, esta mudança topológica ocorre se houver perda de estabilidade estrutural no sistema (2.1), para determinado valor dos parâmetros M , do qual o espaço de fases é dependente. Estes parâmetros são denominados parâmetro de bifurcação, e o ponto no espaço de fases onde isso ocorre é denominado ponto de bifurcação. Em um ponto de bifurcação, a matriz jacobiana do sistema tem pelo menos um autovalor com parte real igual a zero para sistemas contínuos (ou pertencente ao círculo unitário para sistemas discretos). Bifurcações que são produzidas por um único parâmetro de bifurcação são classificadas como bifurcações de codimensão um, assim como quando são produzidas por k parâmetros ela é dita de codimensão k . A codimensão indica também quantos autovalores com parte real zero a matriz jacobiana associada ao sistema terá. A codimensão representa a degeneração do espaço de estados.

A estabilidade estrutural relaciona-se com a preservação (ou não) da topologia do retrato de fases, quando as equações que originam esse retrato são perturbadas, através da variação dos valores dos parâmetros das equações. Em um ponto de bifurcação o sistema torna-se estruturalmente instável ocorrendo mudanças qualitativas na solução. Por outro lado, o sistema dinâmico é estruturalmente estável se ele é orbitalmente topologicamente equivalente a uma versão perturbada. Denomina-se bifurcações locais aquelas que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma órbita fechada. Quando não podem ser deduzidas de um estudo local, diz-se que ocorrem bifurcações globais.

Se a variação do parâmetro de controle para determinado ponto fixo é suavemente evoluída, o ponto fixo pode perder a estabilidade a partir das seguintes bifurcações (bifurcações de codimensão um): sela-nó, transcritical, forquilha (pitchfork) ou por quebra de simetria e bifurcação de Hopf. As bifurcações sela-nó, transcritical e por quebra de simetria são denominadas **bifurcações estáticas**, pois elas ocorrem apenas para soluções estáticas (pontos fixos). A bifurcação de Hopf é classificada como **bifurcação dinâmica** pois ocorre para intervalos de pontos fixos ou soluções periódicas.

A ferramenta geralmente utilizada para analisar as características das soluções de equilíbrio de um sistema sob a variação de um intervalo de parâmetros é o diagrama de bifurcações. A solução assintoticamente estável costuma ser representada por uma linha cheia; a solução instável por sua vez é representada por uma linha tracejada. Um diagrama de bifurcação revelará para quais valores do parâmetro de controle a solução do sistema bifurca e como ela bifurca. No estudo de caos tais diagramas são muito usuais na detecção de parâmetros para os quais o sistema apresenta comportamento caótico.

Outra maneira de efetuar esta análise, menos utilizada devido a sua complexidade, é reduzir um sistema dinâmico ao que denomina-se forma normal de uma bifurcação, através de uma mudança de coordenadas. A forma normal de uma bifurcação é a forma padrão de uma equação

diferencial que caracteriza a bifurcação em questão. As bifurcações de codimensão um e suas respectivas formas normais são apresentadas a seguir. Será utilizada a notação f_μ (vetor $n \times 1$) para a primeira derivada parcial das componentes de f com relação ao parâmetro de controle μ , para sistemas do tipo (2.1). Um diagrama de bifurcação é apresentado em cada caso.

2.3.1 Bifurcação sela-nó

Também conhecida como bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, esta bifurcação cria ou destrói um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias. Sua forma normal é

$$\dot{x} = \mu \pm x^2, \quad (2.6)$$

onde x é a variável de estados e μ é o parâmetro de controle. Analisa-se o caso $\dot{x} = \mu - x^2$.

Observa-se a existência de dois pontos fixos não triviais quando $\mu > 0$: $x_0 = \sqrt{\mu}$ e $x_0 = -\sqrt{\mu}$. O autovalor associado à matriz jacobiana do sistema é $\lambda = -2x$. Para $x_0 = \sqrt{\mu}$, $\lambda < 0$ e portanto, x_0 é um nó estável. Por outro lado, $x_0 = -\sqrt{\mu}$ é um nó instável.

Quando $\mu = 0$, $x_0(\mu) = 0$ e $\lambda = 0$. Logo, o ponto fixo x_0 é não hiperbólico. O número de pontos passa de 2 para 1. Então o ponto $(x_0, \mu_c) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação. Para $\mu < 0$ não existem pontos fixos. O diagrama de bifurcações apresentado na figura 2.3 mostra a evolução da solução do sistema (2.6) quando o parâmetro de controle μ é variado.

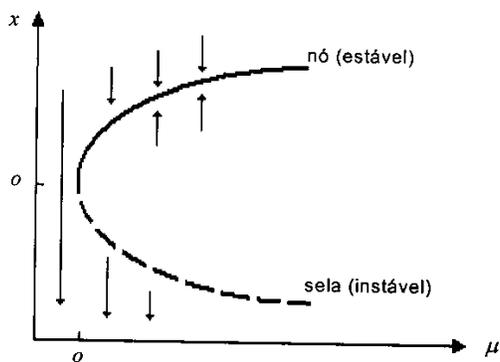


Figura 2.3: Bifurcação sela-nó

Considerando a primeira derivada parcial das componentes de $f = \mu - x^2$ com relação ao parâmetro de controle, $f_\mu = 1$. O posto da matriz aumentada $[D_x f | f_\mu]$ no ponto $(0, 0)$ é $n = 1$, ou seja, f_μ não pertence ao espaço de $D_x f$. Esta é uma característica do ponto de bifurcação do tipo sela-nó e é uma das maneiras de se distinguir este ponto. Observa-se ainda que todos os subespaços que são criados por este ponto de bifurcação tem a mesma tangente. Para as outras bifurcações estáticas, o posto da matriz aumentada é $(n - 1)$.

2.3.2 Bifurcação transcritical

A bifurcação transcritical faz com que a estabilidade de dois pontos de equilíbrio sejam trocadas para um valor crítico do parâmetro, porém estes pontos existem para qualquer valor do parâmetro. Sua forma normal é

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad (2.7)$$

onde x é a variável de estados, μ é o parâmetro de controle.

Observa-se a existência dos pontos fixos: $x_0 = 0$ (trivial) e $x_0 = \mu$ (não trivial). $D_x f = \mu - 2x$ e seus autovalores são $\lambda = \mu$ para $x_0 = 0$, e $\lambda = -\mu$ para $x_0 = \mu$.

Quando adotamos o valor crítico para o parâmetro de controle, $\mu_c = 0$, existe um único ponto fixo $x_0(\mu_c) = 0$ e o autovalor correspondente é $\lambda = 0$. Logo, o ponto fixo x_0 é não hiperbólico e o ponto $(x_0, \mu_c) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação. A figura 2.4 mostra a evolução da solução do sistema (2.7) quando o parâmetro de controle μ é variado.

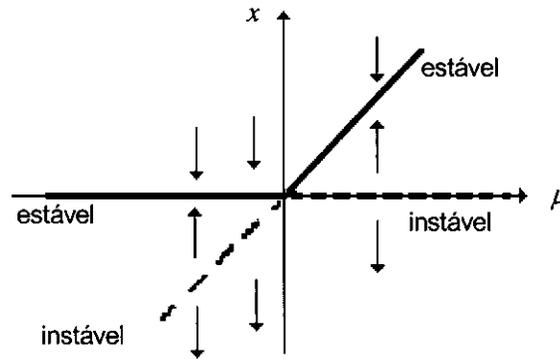


Figura 2.4: Bifurcação transcritical

Novamente, considerando a primeira derivada parcial das componentes de f com relação ao parâmetro de controle, tem-se $f_\mu = x$. Então o posto da matriz aumentada $[D_x f | f_\mu]$ não muda no ponto $(0, 0)$, e é igual a 1. Ou seja, f_μ não pertence ao espaço de $D_x f$. Dessa forma, conclui-se que a bifurcação não é do tipo sela-nó. Os espaços que são criados por este ponto de bifurcação não tem a mesma tangente, caracterizando uma bifurcação transcritical.

2.3.3 Bifurcação de forquilha

Essa bifurcação aparece em sistemas físicos que apresentam algum tipo de simetria. Um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade aparece e desaparece simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico. Esta bifurcação é subdividida em dois tipos, supercrítica e subcrítica, cujas respectivas formas normais são:

$$(a) \dot{x} = \mu x - x^3, \quad e \quad (b) \dot{x} = \mu x + x^3. \quad (2.8)$$

onde x é a variável de estados, μ é o parâmetro de controle.

Em ambos os casos observa-se a existência de três pontos fixos: $x_0 = 0$ (trivial) e $x_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$ (não trivial), sendo $\alpha = 1$ no caso (a) e $\alpha = -1$ no caso (b).

$D_x f = \mu - 3x^2$ e seus autovalores são $\lambda = \mu$ para $x_0 = 0$, e $\lambda = -2\mu$ para $x_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$, e α como definido acima. Logo o ponto fixo trivial é estável quando $\mu < 0$ e instável caso contrário.

($\alpha = 1$): Neste caso o ponto fixo existe somente quando $\mu > 0$, e é um ponto estável.

($\alpha = -1$): Neste caso o ponto fixo existe somente quando $\mu < 0$, e é um ponto instável.

Para ambos os casos, $\mu_c = 0$ é um valor crítico e $x_0(\mu_c)$ é um ponto não hiperbólico. Além disso, o número de pontos fixos muda; de 3 pontos fixos passa-se a ter 1, e a estabilidade do ponto fixo trivial muda ao passar pelo valor crítico $\mu_c = 0$. Logo, a origem do espaço-controle $(x_0, \mu_c) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação. A figura 2.5 o diagrama de bifurcações das equações (2.8) quando o parâmetro de controle μ é variado, gerando bifurcação de forquilha supercrítica e subcrítica.

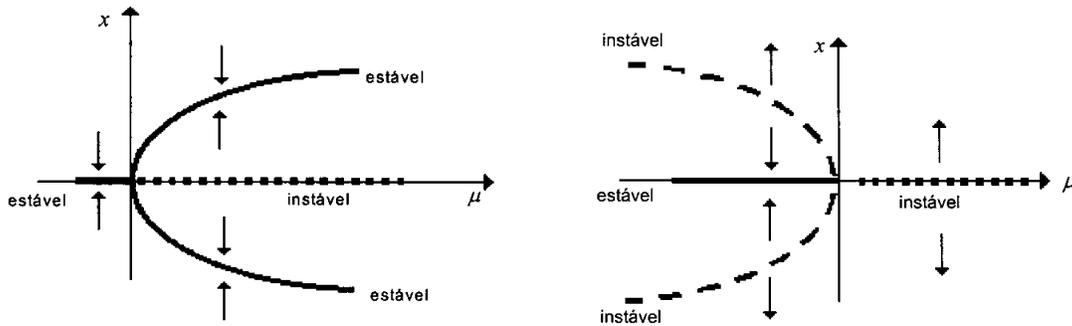


Figura 2.5: Bifurcação de forquilha supercrítica (esquerda). Bifurcação forquilha subcrítica (direita)

No caso da bifurcação de forquilha supercrítica, localmente observa-se dois intervalos de pontos fixos instáveis em um dos lados do ponto de bifurcação, e um intervalo de pontos fixos estáveis do outro. O inverso ocorre para a bifurcação de forquilha subcrítica: observa-se um intervalo de pontos fixos estáveis em um dos lados do ponto de bifurcação, e dois intervalos de pontos fixos instáveis do outro.

2.3.4 Bifurcação de Hopf

Essa bifurcação é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação. E. Hopf, em 1942, estabeleceu as condições para a ocorrência de tal bifurcação num sistema n -dimensional. Entretanto esse tipo de bifurcação já havia sido sugerido por Poincaré em 1892 e estudado por Andronov, em 1929, para um sistema bidimensional. Por esse motivo, às vezes ela é chamada de bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf. A

forma normal desta bifurcação é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y + (\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2); \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y + (\beta x + \alpha y)(x^2 + y^2); \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde x e y são os estados do sistema e μ é o parâmetro de controle. $(0, 0)$ é ponto fixo e os autovalores associados a matriz jacobiana são $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$. Quando $\mu_c = 0$ observa-se que o ponto fixo $(0, 0)$ é não hiperbólico. Além disso, para $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu} = \frac{d\lambda_2}{d\mu} = 1,$$

satisfazendo a condição de transversalidade [31]. Então, $(0, 0)$ é um ponto de bifurcação de Hopf quando $\mu = 0$, e cria uma solução periódica bifurcante de período $2\pi/\omega$.

Fazendo a transformação

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \sin \theta$$

transforma-se (2.9) no sistema

$$\dot{r} = \mu r + \alpha r^3; \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta} = \omega + \beta r^2. \quad (2.11)$$

Hopf mostrou que o comportamento para deste último sistema dinâmico equivale ao comportamento do sistema original (2.9), na vizinhança do ponto de bifurcação. Observa-se que a equação (2.10) é idêntica a (2.8). Então a bifurcação de Hopf para $(0, 0, 0)$, no espaço (x, y, μ) , é equivalente a uma bifurcação de forquilha para $(0, 0)$ no espaço (r, μ) . Quando $\alpha = -1$ obtém-se a bifurcação forquilha supercrítica no espaço (r, μ) e então, uma bifurcação de Hopf supercrítica no espaço (x, y, μ) . Por outro lado, quando $\alpha = 1$ obtém-se uma bifurcação forquilha subcrítica no espaço (r, μ) e uma bifurcação de Hopf subcrítica no espaço (x, y, μ) .

Considera-se que a bifurcação ocorre para $\mu_c = 0$. Assim, $\alpha(0) = 0$ e $\beta(0) \neq 0$. Em torno do ponto de bifurcação, podem ser expandidos em série de Taylor, os coeficientes α , β , a , b , por simplicidade adota-se $\frac{d\alpha}{d\mu} |_{\mu=0} \equiv d$, $a(0) \equiv a$, $\beta(0) = \beta$, $\frac{d\beta}{d\mu} |_{\mu=0} \equiv c$, $b(0) = b$. Assim obtendo-se

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d(\mu)r + a(\mu)r^3; \\ \dot{\theta} &= \beta + c(\mu) + br^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A figura 2.6 mostra uma bifurcação de Hopf no espaço estado-controle. O teorema de Sotomayor dá condições necessárias e suficientes para a existência de bifurcações estáticas.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Sotomayor) *Seja o sistema $f(x, m)$, $f \in C^3$, as seguintes hipóteses são necessárias para a aplicação do teorema:*

- a. *A existência do ponto de equilíbrio (x_0, m_0) ;*

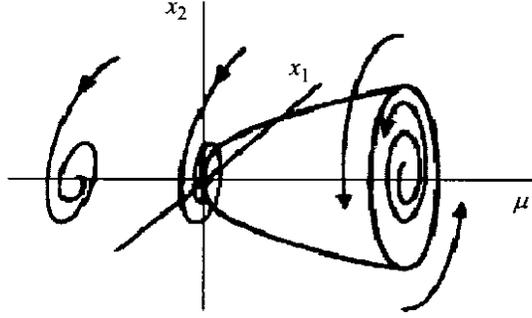


Figura 2.6: Bifurcação de Hopf

- b. A matriz jacobiana associada ao sistema aplicada ao ponto de equilíbrio, $D_x f(x_0, m_0)$, tem um autovalor simples $\lambda \equiv 0$ com um autovetor associado v , e $D_x f(x_0, m_0)^T$ tem um autovetor w associado ao autovalor $\lambda \equiv 0$;
- c. $D_x f(x_0, m_0)$ tem k autovalores de parte real negativa e $n - k - 1$ autovalores com parte real positiva.

Se as condições acima são satisfeitas tem-se:

1. Bifurcação sela-nó em (x_0, m_0) se

$$w^T \frac{\partial f}{\partial m}(x_0, m_0) \neq 0 \quad e \quad w^T D_x^2 f(x_0, m_0) \cdot (v, v) \neq 0;$$

2. Bifurcação transcritical em (x_0, m_0) se

$$w^T \frac{\partial f}{\partial m}(x_0, m_0) \equiv 0 \quad ; \quad w^T D_x f(x_0, m_0)v \neq 0 \quad e \quad w^T D_x^2 f(x_0, m_0) \cdot (v, v) \neq 0;$$

3. Bifurcação por quebra de simetria transversal se

$$w^T \frac{\partial f}{\partial m}(x_0, m_0) \equiv 0 \quad ; \quad w^T D_x f(x_0, m_0)v \neq 0 \quad w^T D_x^2 f(x_0, m_0) \cdot (v, v) \neq 0 \quad ;$$

$$e \quad w^T D_x^3 f(x_0, m_0) \cdot (v, v, v) \neq 0;$$

Munidos das condições necessárias, pode-se encontrar as condições suficientes. Estas condições envolvem a derivada do vetor f com relação ao parâmetro de controle m ($\frac{\partial f}{\partial m}(x, m)$), sendo f o vetor das equações dinâmicas do sistema; envolvem também o cálculo das derivadas direcionais $w^T D_x^i f(x_0, m_0) \cdot (v, \dots, v)$ (i aplicações de v), cujo procedimento merece um pouco mais de atenção, pois dependendo da dimensão do sistema ele se torna muito trabalhoso. Observa-se que os vetores w e v são vetores n -dimensionais e constantes, e a matriz $D_x f(x, m)$ é a matriz jacobiana, quadrada de ordem n . O procedimento para o cálculo da derivada direcional pode ser sistematizado da seguinte forma:

- Calcula-se a matriz jacobiana do sistema (2.1), ou seja, $D_x f(x, m)$ ($n \times n$);
- Multiplica-se a matriz jacobiana pelo autovetor v ; obtém-se um vetor ($n \times 1$);
- Diferencia-se o vetor resultante com relação a x ; obtém-se novamente uma matriz ($n \times n$);
- multiplica-se novamente por v , obtendo um vetor ($n \times 1$);
- finalmente, multiplica-se o vetor resultante pelo autovetor w de A^T , obtendo um número. Aplica-se ao ponto de equilíbrio e analisa-se o valor resultante.

Observe que se o valor de $w^T \frac{\partial f}{\partial m}(x_0, m_0) \neq 0$ a única bifurcação estática possível é a bifurcação sela-nó. Porém, caso contrário ela é a única que não pode ocorrer.

2.4 Imprevisibilidade em sistemas dinâmicos não lineares

Vários fenômenos que ocorrem em escalas macromoleculares são previsíveis teoricamente. As leis de Newton, por exemplo, comprovaram as conclusões experimentais obtidas por Galileu. Por outro lado, resultados teóricos sobre o movimento de corpos macromoleculares podem prever resultados experimentais. Entretanto isso nem sempre acontece; alguns fenômenos são considerados de difícil previsão.

A impossibilidade de se prever o futuro de alguns sistemas quando o estado inicial é conhecido com precisão finita foi constatada por J.C. Maxwell (1831-1879) em 1873. Em 1903, alguns anos após ter desenvolvido vários estudos a respeito da estabilidade do sistema solar, J.H. Poincaré (1854-1912) escreveu, referindo-se aos seus estudos sobre o problema dos três corpos: *"...pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível..."*. Este efeito de amplificação de erros nas condições iniciais é conhecido como sensibilidade às condições iniciais e uma consequência imediata é a imprevisibilidade do comportamento da solução de sistemas dinâmicos caóticos. Provavelmente, Poincaré foi o primeiro a vislumbrar caos no problema dos três corpos.

A conclusão de Poincaré foi que as soluções em série, geralmente utilizadas na busca de soluções para os problemas da época, eram divergentes. Porém, em meados do século XX, A.N. Kolmogorov (1903-1987), V.I. Arnold e J. Moser provaram que a convergência (ou divergência) dessas séries depende da escolha das condições iniciais. Assim, um sistema com três ou mais corpos pode ter movimentos regulares ou caóticos. Esse resultado é uma consequência do teorema KAM, cuja sigla é dedicada às iniciais do nome de seus autores. Em sistemas caóticos os erros nas condições iniciais crescem exponencialmente com o tempo, inviabilizando uma previsão de longo prazo. A resolução de um modelo meteorológico simplificado, realizada

através de simulações em computador, resultaram na descoberta do primeiro atrator estranho, que caracteriza um sistema caótico. Segundo E.N. Lorenz, *pequenas perturbações causadas pelo bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas* (Efeito Borboleta). A descoberta de sistemas caóticos afetou o próprio método científico criado por Galileu para a validação da teoria, pois se o sistema analisado é caótico, previsões de longo prazo são intrinsicamente impossíveis, o que dificulta essa validação.

Caos ocorre num sistema determinista quando seu comportamento é aperiódico (irregular) e depende sensivelmente das condições iniciais. Na prática, erros nas condições iniciais serão sempre presentes devido a uma série de fatores tais como ruído, efeitos de diagonalização, precisão, etc. O advento do computador permitiu que a solução de equações diferenciais fossem calculadas com uma maior variabilidade das condições iniciais e dos valores dos parâmetros envolvidos nas equações, desenvolvendo conclusões intuitivas sobre os possíveis comportamentos que essas equações representam. Sistemas formados por equações diferenciais como (2.1) não são facilmente integradas. Porém, atualmente existem vários algoritmos que permitem o cálculo de sua solução tais como o método de Euler, de Runge-Kutta, de Adams-Bashforth, Adams-Moulton e o método trapezoidal. O método mais utilizado é o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

2.4.1 Mapa de Poincaré

Um diagrama de bifurcação mostra os tipos de atratores que surgem em um sistema quando um parâmetro de bifurcação é variado. Entretanto, um diagrama de bifurcação quase não dá informações a respeito da geometria deste atrator no espaço de estado. Assim, para conhecer melhor a geometria do atrator pode-se usar o então chamado mapa de Poincaré. A figura 2.7 mostra a utilidade do mapa de Poincaré na verificação da geometria do atrator, desenhada pelo fluxo de um sistema dinâmico qualquer.

J.H. Poincaré (1854-1912) ficou famoso ao conquistar o prêmio oferecido pelo rei Oscar II, da Suécia e da Noruega, na festa de seu aniversário de 60 anos. O prêmio, lançado em 1886, seria entregue para quem desse uma prova matemática rigorosa a respeito da estabilidade (ou não) do Sistema Solar. Ao estudar esse problema, Poincaré desenvolveu vários teoremas e acabou ganhando o prêmio em 1889, embora sua solução fosse apenas parcial. Um desses estudos de Poincaré culminou em uma técnica cuja finalidade é reduzir o estudo de um fluxo contínuo num espaço de fases de dimensão n ao estudo de um mapa num espaço de fases com dimensão $n - 1$. Esse é o motivo pelo qual essa técnica se tornou muito usual para sistemas não lineares [1].

Considera-se um sistema dinâmico autônomo na forma (2.1) quando x é um vetor de estados n -dimensional e M um vetor m -dimensional de parâmetros do sistema. A identificação de órbitas periódicas em um sistema de equações diferenciais como esse, geralmente não é uma tarefa fácil [19]. O mapa de Poincaré é um artifício que simplifica esta identificação, discretizando o sistema contínuo de equações diferenciais através de um mapeamento, reduzindo então

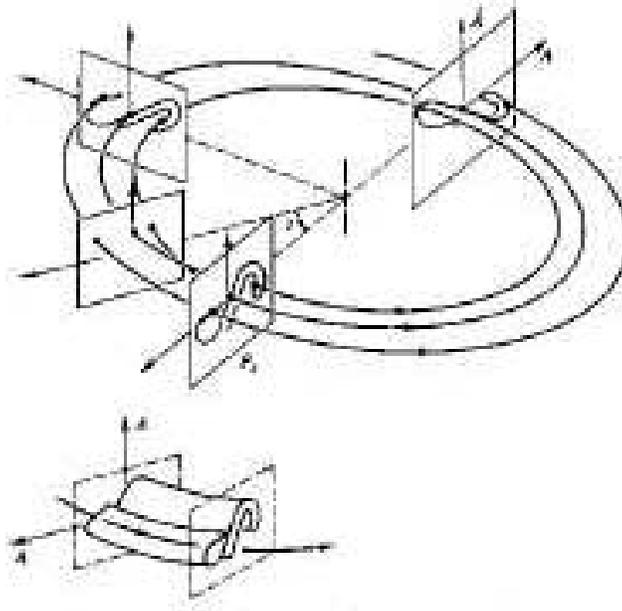


Figura 2.7: A geometria do fluxo sendo "desenhada" nas seções de Poincaré

a ordem do sistema.

Considere uma órbita periódica γ que faz parte do fluxo Φ no R^n , definido pelo campo vetorial (2.1). Uma *seção de Poincaré* é uma hipersuperfície no espaço de estados, transversal ao fluxo das equações do sistema, ou seja,

$$n(x) \cdot F(x) \neq 0 \quad \text{ou} \quad n^T(x) \cdot F(x) \neq 0,$$

quando $n(x)$ é um vetor normal à seção no ponto x , F é o campo vetorial que representa o fluxo e o ponto indica produto interno. Denota-se esta seção por Σ , sendo esta hipersuperfície de dimensão menor que a do espaço de estados, isto é, para um sistema n -dimensional, Σ tem dimensão $(n-1)$ [31].

Seguindo este raciocínio, a seção de Poincaré para o caso tri-dimensional será representada por um plano. Pode-se então imaginar uma seqüência de seções planas $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ em intervalos Δt , e a trajetória do sistema interceptando esses planos em um único sentido. A regra matemática que mapeia esta seqüência de planos, que podem ser denominados planos de fase, em um único plano, é denominada mapa de Poincaré, e pode ser representada pela transformação

$$X_{m+1} = P(X_m),$$

quando X_i representa um ponto fixo, ou seja, a marcação da trajetória no plano. A trajetória γ sempre perfurará a seqüência de seções no mesmo sentido, perfurando-as de frente para trás ou de trás para frente, nunca nos dois sentidos simultaneamente (figura 2.8).

No caso de órbitas periódicas, a seção de Poincaré apresenta necessariamente um número finito de pontos fixos, que depende da sua periodicidade. Por exemplo, caso apareçam dois

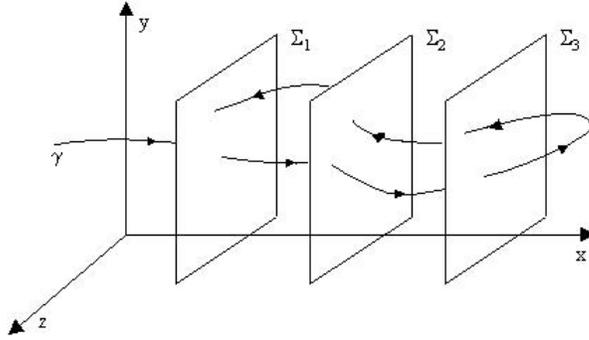


Figura 2.8: A trajetória γ perfurando uma seqüência de seções de Poincaré

pontos na seção de Poicaré, isto indica que o período da resposta é o dobro do período da força excitadora. Por outro lado, se os pontos fixos jamais coincidem, a órbita é dita aberta e o movimento é não periódico. Se os pontos fixos descrevem uma órbita fechada, tem-se um movimento quase periódico. Um movimento não periódico, representado por uma coleção de infinitos pontos geometricamente arrumados dentro de uma região limitada no espaço de fase, dá indícios de um atrator estranho ou caótico. E existe ainda uma outra possibilidade, quando os infinitos pontos apresentam-se de forma difusa, o que pode caracterizar um movimento aleatório ou um atrator caótico com baixa dissipação. Por isso, para afirmar com certeza a existência de movimentos caóticos em um sistema dinâmico, faz-se necessária a utilização de uma ferramenta mais precisa, como por exemplo, o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

2.4.2 Expoente de Lyapunov

Considera-se uma trajetória descrita por uma determinada evolução. O expoente de Lyapunov associado a esta trajetória é uma medida média da expansão e contração de trajetórias que estão próximas a ela. O expoente de Lyapunov mede o crescimento exponencial quanto à perturbação de uma trajetória, para determinado ponto no espaço de estado. Usando o expoente de Lyapunov pode-se distiguir pontos fixos, movimentos periódicos e quase-periódicos, e movimentos caóticos [31].

Supõe-se então um fluxo tal como (2.1) e a evolução deste a partir de duas condições iniciais próximas x_0 e $y_0 = x_0 + \varepsilon$ tal que

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0). \quad (2.13)$$

Note que esta proximidade (raio da vizinhança da órbita x_0) depende das condições iniciais. O expoente de Lyapunov mede o crescimento exponencial da perturbação $\varepsilon_k(t)$ (figura 2.9) e pode ser definido como

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Logo,

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) \exp^{\lambda_i t}, \quad (2.14)$$

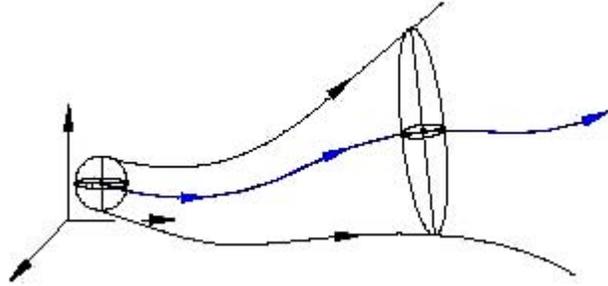


Figura 2.9: A divergência de trajetórias vizinhas

Na prática calcula-se analiticamente expoentes de Lyapunov em pouquíssimos casos, mas existem várias estimativas numéricas para este valor [16]. Neste caso, calcula-se λ para diferentes condições iniciais e faz-se uma média sobre os valores obtidos. Para um número de iterações suficientemente grande, o expoente de Lyapunov deixa de depender da condição inicial, ou seja, acaba-se por visitar o atrator independente do ponto de partida.

Os expoentes de Lyapunov permitem obter informações valiosas com respeito à estabilidade local de um atrator. Como em (2.14) tem-se uma medida de divergência, pode-se concluir que a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital, o que permite concluir que: *uma primeira condição para a ocorrência de atratores estranhos (dinâmica caótica) para sistemas contínuos é a existência de pelo menos um expoente positivo.*

Pode-se observar ainda que, no caso de soluções periódicas ou quase-periódicas, $\lambda_i < 0$ nas direções perpendiculares ao movimento, pois espera-se que esse deslocamento diminua com o tempo, e $\lambda_i = 0$ ao longo da trajetória, visto que este deslocamento não deve se alterar.

Por outro lado, se $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$ tem-se uma diminuição do volume no espaço de fase e o sistema torna-se dissipativo. Conclui-se então que: *uma segunda condição para a ocorrência de atratores estranhos em sistemas contínuos é $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, o que garante a contração do espaço de fase.* E, como terceira condição para existência de movimentos caóticos: *a dimensão do espaço de fases deve ser no mínimo tridimensional.*

2.4.3 Espectro de Freqüência

Algumas das dificuldades encontradas no estudo da dinâmica associada a séries temporais experimentais estão ligadas ao não conhecimento das equações do movimento [16]. O espectro de freqüência ou espectro de Fourier ajuda na distinção de movimentos periódicos, quase-periódicos e caóticos e são tipicamente usados no estudo de sinais estacionários, quando não se conhece as equações do movimento. Qualquer função $x(t)$ pode ser representada pela superposição de um número (eventualmente infinito) de componentes periódicas. No caso em

que $x(t)$ é periódica, seu espectro pode ser representado como a combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplos inteiros da frequência básica ω . Essa combinação linear recebe o nome de série de Fourier. Como normalmente a $x(t)$ não é periódica, utiliza-se a transformada de Fourier para representá-la em termos dessas frequências.

A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é definida como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp^{-i\omega t} dt \quad (2.15)$$

quando ω denota a frequência e $X(\omega)$ é uma quantidade complexa que indica o peso relativo com que a frequência ω comparece na composição de $x(t)$ [31]. Vale lembrar que, ao escrever (2.15), assume-se que $x(t)$ é integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2.16)$$

O espectro de potências $P(\omega)$ é definido como o módulo quadrado do espectro de Fourier $X(\omega)$:

$$P(\omega) = |X(\omega)|^2. \quad (2.17)$$

A transformada de Fourier fornece uma representação simples de um sinal em função de senos e cossenos, a qual se apresentam como linhas discretas no espectro de frequência. Este sinal pode ser obtido de dados físicos experimentais ou de integrações numéricas, dispondo-se em uma série temporal discreta e finita. Supondo esta série com N termos, na forma $x_j = x(t_j)$, com $t_j = j\Delta t$, coletada em um tempo finito $N\Delta t$. Pode-se então obter a representação por senos e cossenos através da transformada de Fourier discreta (DFT):

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N x_j \exp \left[i \frac{2\pi j k}{N} \right], \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

sendo x_j dependente do tempo $t = j\Delta t$ e \hat{x}_k dependente das frequências $\omega = k\Delta f$, $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$. O espectro de potências discreto é definido por

$$P(\omega) = |\hat{x}_k|^2. \quad (2.19)$$

Um caso especial da DFT é a transformada rápida de Fourier (FFT), cujo desenvolvimento é atribuído a Cooley e Tukey [31]. A FFT é um esquema computacional eficiente e já está disponível em vários softwares comerciais, como por exemplo, o software Matlab, o qual foi utilizado neste trabalho.

Geralmente, não se conhece a priori o período T do sinal e portanto não é possível tomar o tempo final $N\Delta t$ como um múltiplo de T , o que compromete a resolução dos picos de $P(\omega)$. O espectro de potências de um sinal periódico de período T será então composto de um pico em $\frac{2\pi}{T}$,

picos secundários ("side-lobes") e picos menores nos harmônicos, também seguidos de "side-lobes". Para um sinal não periódico resultante da superposição de movimentos periódicos, de períodos desconhecidos, o espectro pode ser mais complicado mas apresenta picos bem definidos nas frequências $\omega_n = |m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_r\omega_r|$, com m_i inteiros e ω_i frequências associadas aos períodos de cada oscilação independente do movimento. Finalmente, para sinais aperiódicos, o espectro apresenta-se de forma contínua, evidenciando portanto um sinal caótico ou estocástico. Este espectro pode ser confundido com o espectro de um sinal multi-periódico, contendo um número muito grande de frequências independentes, o qual também se apresenta como um espectro contínuo. Por isso, na busca de movimentos caóticos, a análise espectral não é suficiente.

2.5 Sistemas Dinâmicos Não Ideais

Chamamos de sistema não ideal os sistemas de potência limitada, cuja excitação é provocada por uma fonte de energia não ideal, ou seja, além de considerar a influência do excitador no sistema oscilante, considera-se também que a ação da fonte de energia depende do movimento do sistema oscilante. Neste caso não existe uma lei específica de variação de sua força que possa ser determinada por uma função dependente simplesmente do tempo. A força de excitação deve depender das coordenadas de movimento e velocidade da fonte de energia. No caso de sistemas com fonte de energia ideal, a resposta do sistema oscilante ao perturbador é desprezada, isto é, não é levada em conta. Logo, sua força excitadora pode ser escrita apenas como uma função do tempo τ .

A formulação de um sistema não ideal, deve incluir então um termo $R(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x})$, com φ e x coordenadas de movimento da fonte de energia e do sistema oscilante respectivamente, que descreve a influência do sistema oscilante na fonte de energia. Pode-se acrescentar ainda um termo $Q(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ que expressa o acoplamento do sistema oscilante com a fonte não ideal, considerando termos não lineares que seriam desprezados na formulação convencional. Ambos são obtidos na determinação das Equações Diferenciais do movimento.

Logo, o movimento de um sistema oscilante excitado por uma fonte de energia não ideal, com n graus de liberdade, pode, de um modo geral, ser descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} & (m_{i1}\ddot{x}_1 + \beta_{i1}\dot{x}_1 + c_{i1}x_1) + (m_{i2}\ddot{x}_2 + \beta_{i2}\dot{x}_2 + c_{i2}x_2) + \dots + \\ + & (m_{in}\ddot{x}_n + \beta_{in}\dot{x}_n + c_{in}x_n) = Q_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \varphi, \dot{\varphi}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$I\ddot{\varphi} + H(\varphi, \dot{\varphi}) - L(\varphi, \dot{\varphi}) = R(\varphi, \dot{\varphi}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$$

quando $L(\varphi, \dot{\varphi})$ é a função o torque de direcionamento ou força eletromecânica do perturbador, e está intimamente ligada a natureza da fonte de energia.

Portanto, os sistemas dinâmicos modelados matematicamente como não ideais possuem pelo menos um grau de liberdade a mais do que o sistema ideal correspondente, dependendo

do número de motores presentes nele. O fenômeno de salto e o aumento de potência exigido pela fonte de energia, operando na região da ressonância, são manifestações do fenômeno conhecido como efeito Sommerfeld, em homenagem ao primeiro pesquisador a observar estes fatos experimentalmente.

Sommerfeld foi o precursor desta teoria, quando em um experimento observou que a velocidade do motor não dependia apenas do tempo, mas também da amplitude de oscilação do sistema. Um experimento um pouco mais recente foi realizado por Kononenko e Korablev (1959) com uma viga engastada, excitada por um rotor que gira duas massas desbalanceadas em sua extremidade, cujo esquema é apresentado na figura 2.10

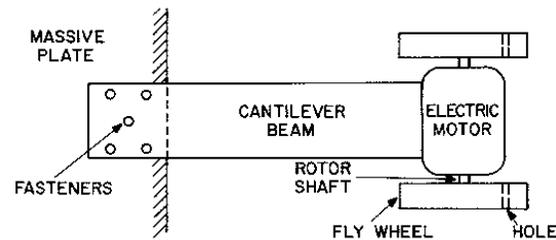


Figura 2.10: Aparato experimental de Kononenko e Korablev para um sistema não ideal.

Características importantes que ocorrem no sistema quando este tipo de modelo matemático é adotado:

- a. Variações bruscas (saltos ou "jumps") da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação;
- b. Descontinuidade da curva amplitude versus frequência, indicando regiões de instabilidade;
- c. Influência do perfil da curva "amplitude versus frequência" com relação ao sentido de crescimento de $\dot{\varphi}$, ou seja, quando o operador altera a velocidade do motor elétrico em acréscimos ou decréscimos;
- d. Dependência destes efeitos com relação às características eletromecânicas do motor $L(\varphi, \dot{\varphi})$.

Estas propriedades foram verificadas no experimento de Kononenko e Korablev (figura 2.10) e serão discutidas ao longo do desenvolvimento da teoria de sistemas não ideais. Para observá-las é necessário conhecer as características da fonte de energia, que será o assunto da próxima seção.

2.5.1 Característica da Fonte de Energia

Um conceito importante em sistemas não ideais é a característica da fonte de energia. Ela descreve a dinâmica interna da fonte de energia, relacionando suas grandezas, cujas escolhas

dependem do tipo de energia considerada. Em sistemas mecânicos é comum adotar como característica da fonte de energia mecânica a relação entre o torque $L(\varphi, \dot{\varphi})$ e a velocidade de rotação $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, a qual é mantida constante quando a relação é encontrada. A característica muitas vezes é utilizada como critério de escolha da fonte de energia pois ela representa suas propriedades essenciais.

Uma técnica adotada para a obtenção da característica da fonte de energia é adotar um parâmetro de controle, como por exemplo a potência fornecida, e para cada valor fixo deste, obter uma curva característica. Isso corresponde a uma família de características que podem ser reguladas conforme a variação do parâmetro de controle. Geralmente, tem-se duas possibilidades destas curvas, no plano torque versus frequência de rotação. A primeira delas sendo do tipo exponencial (mais realista)

$$L = E_1 \exp^{-E_1 \frac{d\varphi}{dt}},$$

e a segunda sendo do tipo linear

$$L = a - b \frac{d\varphi}{dt}.$$

Nas figuras 2.11, cada curva corresponde a determinado valor do parâmetro de controle, os quais geram as características L_1, L_2, \dots, L_5 . A figura 2.12 mostra as curvas características obtidas experimentalmente por Kononenko e Korablev.

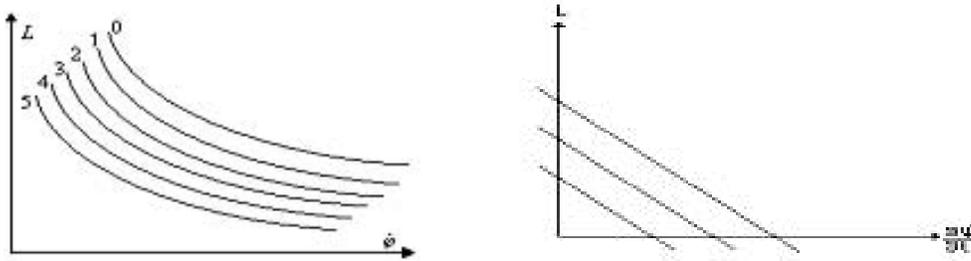


Figura 2.11: Família de características da fonte de energia (L_1, L_2, \dots, L_5). Forma exponencial (esquerda). Forma linear (direita)

Quando as características são adotadas na forma exponencial, geralmente precisam ser obtidas na forma gráfica, resultado de testes experimentais. A intersecção da curva característica para determinado valor do parâmetro de controle, com a curva referente à energia total consumida pelo sistema, define o ponto de estabilidade do sistema, para o qual a rotação é constante. Assim evidencia-se a dependência do movimento da fonte de energia com relação a resposta do sistema vibrante, dado que a rotação da fonte de energia depende da energia consumida pela estrutura para se movimentar.

Deseja-se analisar a inclinação da curva característica, ou seja, o estudo da característica da fonte de energia é realizado através do seu gradiente (o valor em módulo de $N = \frac{dL}{d\dot{\varphi}}$). Assim, quanto maior o valor de N, maior é a sua inclinação, podendo chegar a uma posição muito íngreme (praticamente vertical), caracterizando o sistema ideal. Pode-se classificar a

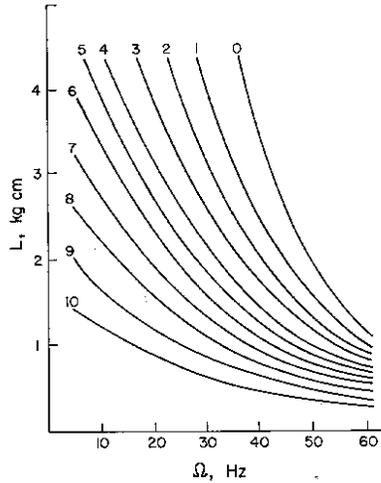


Figura 2.12: Família de características obtidas experimentalmente por Kononenko e Korablev

característica como suave quando N é pequeno e rígida (ou dura) quando N é grande. Na maioria dos casos N decresce com o crescimento de $\dot{\varphi}$, ou seja, N é negativo. O torque de resistência ao movimento de rotação da fonte de energia $H(\varphi, \dot{\varphi})$ é obtido geralmente de dados experimentais e apresentado na forma gráfica.

A figura 2.13 mostra a amplitude de movimento da viga de Kononenko e Korablev, plotada em função de Ω . Os pequenos círculos mostrados na figura foram obtidos fazendo com que o rotor atingisse um estado de equilíbrio para o qual o parâmetro de controle é fixo, ou seja, a amplitude da resposta ao estado de equilíbrio foi medida. Varia-se suavemente o parâmetro de controle até que ele atinja outro estado de equilíbrio. A curva sólida corresponde á resposta teórica obtida para o mesmo sistema. A figura da esquerda mostra esses resultados para Ω crescente, enquanto a figura da direita mostra os mesmos resultados para Ω decrescente. Pode-se observar certos intervalos em que não existem resposta ao estado de equilíbrio. Além disso, o tamanho desse intervalo muda para os valores de Ω crescente ou decrescente. Esta propriedade de sistemas não ideais é denominada **fenômeno do salto** ("jump").

A figura 2.14 mostra a curva de resposta em frequência típica de um sistema linear ideal. Os pontos P, R, T e H correspondem aos pontos da figura 2.13. As setas indicam o sentido de variação do parâmetro de controle em um sistema não ideal. Observa-se que o sistema não ideal não possui resposta entre as frequências Ω_T e Ω_H quando a frequência é crescente, o que não acontece com o sistema ideal. Por outro lado, quando a frequência é decrescente o sistema não tem respostas para o intervalo de frequências Ω_R e Ω_P .

Observa-se que do lado esquerdo do pico de ressonância, a potência inserida ao sistema é inicialmente pequena. Variando suavemente esta potência, a frequência e a amplitude da curva de ressonância sofrem um aumento considerável. Por outro lado, a partir do ponto P a potência inserida ao sistema é bem maior, no entanto a frequência sofre uma pequena variação (de Ω_P a

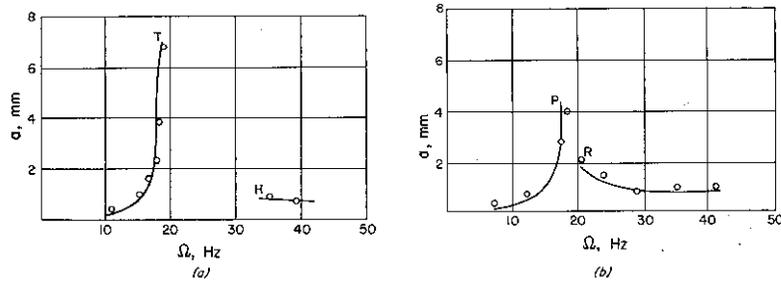


Figura 2.13: Comparação entre as respostas em frequência experimental e teórica para o sistema não ideal de Kononenko e Korablev para Ω crescente (a) e Ω decrescente (b)

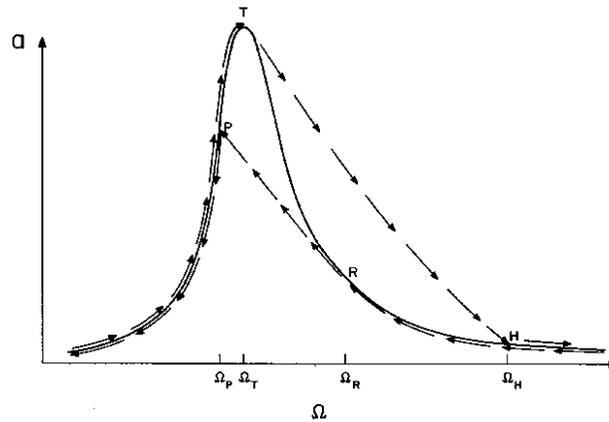


Figura 2.14: Curvas de resposta em frequência comparando sistemas ideais (linha contínua) e não ideais (setas)

Ω_T). Ou seja, um aumento relativamente grande da potência provoca um aumento considerável na amplitude mas quase não altera a frequência. Para o ponto T a característica do movimento muda. Um crescimento na potência inserida faz a amplitude decrescer consideravelmente e a frequência crescer também de forma considerável. Este fenômeno é conhecido como **efeito Sommerfeld**. A dependência com relação ao sentido do crescimento do parâmetro de controle é conhecida como **histerese**.

Capítulo 3

Simulação numérica de um sistema não ideal de dois graus de liberdade

Existem dois caminhos para se solucionar um conjunto de equações diferenciais. O primeiro é a partir da integração analítica destas equações, que geralmente são muito complexas, até mesmo para sistemas lineares. A grande vantagem é que a solução obtida é uma solução geral que vale para quaisquer condições iniciais e quaisquer valores dos parâmetros. O segundo é resolvê-lo através de integrações numéricas, obtendo a variável dependente $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ em uma região pré-determinada pela variável t , com o inconveniente de obter-se apenas uma solução particular para as equações do sistema. Neste caso, a vantagem é que o trabalho é todo realizado pelo computador. Porém, muitas vezes uma investigação qualitativa do comportamento da solução é satisfatória, dispensando a busca pela solução analítica do sistema.

Até o final do século XIX desejava-se obter informações precisas sobre equações diferenciais não lineares e por isso buscava-se soluções exatas através de integrações. Poincaré introduziu uma nova visão a esse respeito; ele percebeu que era possível investigar as características topológicas de um sistema sem resolvê-lo explicitamente, utilizando uma abordagem qualitativa. Assim, no lugar das técnicas que buscam fórmulas, inicia-se o uso de técnicas geométricas e topológicas no estudo de sistemas dinâmicos. A partir das técnicas qualitativas obtém-se pistas sobre a evolução do sistema no espaço de fases, com cálculos analíticos relativamente simples que determinam o comportamento assintótico das soluções do sistema (possíveis comportamentos do sistema quando $t \rightarrow \infty$). A desvantagem destas técnicas é que parte da informação quantitativa é perdida.

Neste capítulo faz-se a apresentação do objeto de estudo desta Dissertação: um sistema não ideal de dois graus de liberdade. São apresentadas simulações numéricas do sistema operando próximo às regiões de ressonância. Investiga-se a possibilidade de existência de movimentos regulares e irregulares nas regiões de ressonância 1:1 e 1:2.

3.1 Apresentação do sistema não ideal de dois graus de liberdade

O sistema estudado nesta dissertação é constituído por duas massas acopladas m_1 e m_2 , sustentadas por molas lineares com coeficientes de rigidezes k_1 e k_2 , e amortecedores com coeficientes de amortecimento c_1 e c_2 , como mostra a Fig.3.1.

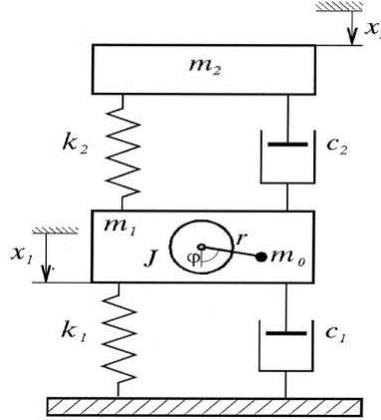


Figura 3.1: Sistema Dinâmico Não Ideal

Um rotor é acoplado à massa m_1 , girando uma pequena massa m_0 desbalanceada, com um momento de inércia J , situada a uma distância r do eixo de rotação, e cuja frequência de excitação é denotada por ω . Considera-se que o sistema opera com potência limitada, ou seja o sistema é não ideal. As equações que descrevem o movimento do sistema dinâmico apresentado na Fig.3.1 são [2]:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = m_0 r \omega^2 \cos \varphi + m_0 r \dot{\omega} \sin \varphi$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = 0$$

$$J \ddot{\varphi} = L(\omega) - H(\omega) + m_0 \ddot{x}_1 \sin \varphi$$

$$\dot{L} = -aL - b\omega + k_u U(\omega) \tag{3.1}$$

quando as funções $m_0 r \omega^2 \cos \varphi$, e $m_0 r \dot{\omega} \sin \varphi$ são as forças de inércia provocadas pelo rotor e a função $m_0 \ddot{x}_1 \sin \varphi$ representa o momento desta força de inércia. As forças de inércia fazem com que a massa desbalanceada m_0 deforme as molas k_1 e k_2 , com uma frequência de excitação $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. A última equação do sistema de equações diferenciais (3.1), representa a característica da fonte de energia, neste caso um motor de corrente contínua. Esta curva característica é

considerada linear para alguns casos das simulações numéricas e para o estudo analítico. Ou seja, $\dot{L} = 0$, e é representada pela equação $L(\omega) = a - b\omega$, sendo a e b constantes que dependem do tipo e da potência do motor. L também pode ser considerada como o torque gerado pelo motor. H é o torque de resistência e U é a tensão nos terminais do motor. Escolhendo-se convenientemente os parâmetros do sistema dinâmico, pode-se ajustar as frequências naturais ω_1 e ω_2 , associadas respectivamente às oscilações nas variáveis x_1 e x_2 , de modo que estejam em diferentes tipos de ressonância.

É possível tornar o sistema (3.1) adimensional introduzindo as variáveis adimensionais [2]:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{m_1}{m_0 r} x_1 & \chi_2 &= \frac{m_1}{m_0 r} x_2 & \chi'_1 &= \frac{m_1}{m_0 r} \dot{x}_1 & \chi'_2 &= \frac{m_1}{m_0 r} \dot{x}_2 \\ \bar{\omega} &= \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \omega & \bar{\omega}' &= \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \dot{\omega} & \lambda &= L \frac{m_1}{J k_1} & \tau &= t \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

e as constantes adimensionais:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{k_2}{k_1} & \theta^2 &= \mu \frac{m_1}{m_2} & \beta &= b \frac{m_1}{J k_1} & \alpha &= a \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \\ \eta_1 &= \frac{c_1}{\sqrt{k_1 m_1}} & \eta_2 &= \frac{c_2}{\sqrt{k_1 m_1}} & \rho &= m_0 \sqrt{\frac{r}{J m_1}} & u &= k_u U \frac{m_1}{J k_1} \sqrt{\frac{m_1}{J k_1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

O sistema adimensional obtido é

$$\begin{aligned} \chi''_1 &= -\chi_1 - \eta_1 \chi'_1 + \mu(\chi_2 - \chi_1) + \eta_2(\chi'_2 - \chi'_1) + \bar{\omega}^2 \cos \bar{\varphi} + \bar{\omega}' \sin \bar{\varphi} \\ \chi''_2 &= -\theta^2(\chi_2 - \chi_1) - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2(\chi'_2 - \chi'_1) \\ \bar{\varphi}'' &= \lambda + \rho \chi''_1 \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e a equação adimensional da característica do motor é

$$\lambda' = -\alpha \lambda - \beta \bar{\omega} + u,$$

que quando considerada linear torna-se

$$\lambda = \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{\omega}.$$

A vantagem do estudo de um sistema com variáveis adimensionais é que nele trabalha-se com números puros, sem considerar a dimensão de suas variáveis.

Pode-se obter os pontos de equilíbrio do sistema (3.4) introduzindo o vetor $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$ e transformando o sistema (3.4) em um sistema com 5 equações diferenciais de primeira ordem, na forma $\dot{z} = f(z)$ com

$$z_1 = \chi_1, \quad z_2 = \chi_1', \quad z_3 = \chi_2, \quad z_4 = \chi_2', \quad z_5 = \bar{\omega}$$

Assim, obtém-se as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} a) \quad & \dot{z}_1 = z_2 \\ b) \quad & \dot{z}_2 = \frac{1}{1 - \rho \sin^2 \bar{\varphi}} \left[-(1 + \mu)z_1 - (\eta_1 + \eta_2)z_2 + \mu z_3 + \eta_2 z_4 + z_5^2 \cos \bar{\varphi} + \right. \\ & \left. + (\hat{\alpha} - \hat{\beta} z_5) \sin \bar{\varphi} \right] \\ c) \quad & \dot{z}_3 = z_4 \\ d) \quad & \dot{z}_4 = \theta^2 z_1 + \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 z_2 - \theta^2 z_3 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 z_4 \\ e) \quad & \dot{z}_5 = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \rho \sin^2 \bar{\varphi}} + \frac{\rho \sin \bar{\varphi}}{1 - \rho \sin^2 \bar{\varphi}} \left[-(1 + \mu)z_1 - (\eta_1 + \eta_2)z_2 + \mu z_3 + \eta_2 z_4 + \right. \\ & \left. + z_5^2 \cos \bar{\varphi} - \frac{\hat{\beta}}{\rho \sin \bar{\varphi}} z_5 \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

e, fazendo $\dot{z}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, 5$ nas equações (3.5), obtém-se os pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} z_2 &= z_4 = 0 \\ z_1 &= z_3 = \left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \right)^2 \cos \bar{\varphi} \\ z_5 &= \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Os pontos de equilíbrio (3.6) na verdade constituem uma órbita periódica de equilíbrio, onde $\bar{\varphi}$ pode variar de 0 a $2\pi + 2k\pi$.

3.1.1 Linearização em torno da órbita de equilíbrio

Obtido o sistema de equações diferenciais $\dot{z}_i = f_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ quando $z = (z_1, z_2, \dots, z_5)^T$, é necessário encontrar a matriz Jacobiana

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_5} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_5} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_5}{\partial z_1} & \frac{\partial f_5}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_5}{\partial z_5} \end{bmatrix}$$

para escrever o sistema na forma $\dot{z} = Az$.

Então, diferenciando f_i , $i = 1, \dots, 5$ com relação a (z_1, z_2, \dots, z_5) e linearizando em torno da órbita de equilíbrio, obtém-se a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(1+\mu)}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & -\frac{(\eta_1+\eta_2)}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{\mu}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{\eta_2}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{2\hat{\alpha} \cos \bar{\varphi} - \hat{\beta}^2 \sin \bar{\varphi}}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \theta^2 & \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 & -\theta^2 & -\frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 & 0 \\ -\frac{(1+\mu)\rho \sin \bar{\varphi}}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & -\frac{(\eta_1+\eta_2)\rho \sin \bar{\varphi}}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{\mu \rho \sin \bar{\varphi}}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{\eta_2 \rho \sin \bar{\varphi}}{1-\rho \sin^2 \bar{\varphi}} & \frac{2\hat{\alpha} \rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} - \hat{\beta}^2}{\hat{\beta}(1-\rho \sin^2 \bar{\varphi})} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A matriz A contém todos os parâmetros físicos do sistema mecânico em função das constantes adimensionais μ, θ^2, \dots , e, através dos autovalores de A obtém-se as frequências naturais do sistema mecânico.

Munidos da órbita de equilíbrio do sistema em questão, e da linearização em torno da mesma, vários estudos podem ser realizados para analisar o comportamento oscilatório do sistema. Um dos métodos adotados nesta dissertação foi a simulação numérica do movimento a partir de técnicas como o mapa de Poincaré, o expoente de Lyapunov e a transformada rápida de Fourier (FFT). Essas são técnicas puramente numéricas, sendo que o mapa de Poincaré e a FFT avaliam o sistema de forma qualitativa, dando apenas indícios de movimentos irregulares e caos, enquanto o expoente de Lyapunov é uma ferramenta quantitativa, capaz de identificar o caos.

Por outro lado, pode-se tentar uma análise analítica do problema. Uma das alternativas são os métodos de perturbação, os quais permitem obter soluções analíticas aproximadas do sistema de equações diferenciais, e propiciam a análise de estabilidade, permitindo um melhor domínio dos parâmetros do sistema. Neste trabalho, o método de perturbação escolhido foi o método da média proposto por Krylov-Bogoliubov em 1947 [29]. O método utilizado e o estudo do sistema (3.4) será apresentado no Capítulo 4.

Outra opção encontrada para o estudo do problema proposto neste trabalho foi a teoria de Floquet, visto que o sistema apresenta solução de equilíbrio orbital, e considerando que já existem técnicas eficientes de controle para sistemas caóticos baseados na matriz de monodromia [37, 38]. Uma introdução da utilização desta teoria é apresentada no Apêndice A desta dissertação.

3.2 Estudo de Ressonâncias

As condições de estabilidade e instabilidade dinâmica são comumente expressas em teoria de vibrações mecânicas em termos de certas relações existentes entre as frequências de excitação externa e as frequências naturais do sistema, denominadas relações de frequências, cujo

fenômeno mecânico associado é chamado de ressonância. Para sistemas cujas equações diferenciais do movimento tem coeficientes constantes, a relação mais geral desse fenômeno é da forma:

$$\omega = \frac{p}{q}\omega_i,$$

quando ω é a frequência de excitação, ω_i é a frequência natural e p e q são números primos entre si, usualmente pequenos.

As relações de frequências dadas acima são usualmente denominadas de ressonâncias dinâmicas (forçadas). O ponto representado pelas relações de frequência definidas acima, é o indicativo do incipiente das oscilações ressonantes, pertencentes à regiões especiais no espaço de excitações paramétricas, denominadas de regiões de instabilidade, onde as amplitudes são crescentes com o tempo. Fora destas regiões o movimento é estável, isto é, ele é limitado no tempo e decai na presença de amortecimento. Na fronteira destas regiões o movimento consiste de oscilações ressonantes que podem ser estáveis periódicas ou quase-periódicas, ou instáveis ilimitadas no tempo. A existência das relações de ressonância e suas características (transientes ou de regime permanente) dependem de um número de fatores relacionados ao sistema e às excitações externas. Em sistemas mecânicos pode-se citar algumas características de não linearidades, que podem levar a comportamentos oscilatórios diferenciados do sistema:

- a. não linearidades geométricas ou físicas;
- b. dissipação de energia interna ou externa;
- c. sistemas giroscópicos;
- d. imperfeições do material;
- e. modos estacionários e não-estacionários;
- f. *fontes de energia de potência limitada (ou fontes não-ideais)*;
- g. forças dinâmicas não conservativas.

Neste trabalho considera-se o sistema dinâmico apresentado na figura (3.1), cujas equações são dadas por (3.1). Interessa-se pelo seu comportamento oscilatório na região de ressonância, sendo influenciado pelas não idealidades do problema. Sistemas não ideais operando na região de ressonância podem apresentar fenômenos como o efeito Sommerfeld, o fenômeno do salto e regiões de oscilações instáveis. Foram realizadas simulações sobre as equações adimensionais (3.4), quando as frequências naturais estavam em ressonância 1:1 e 1:2. A frequência de excitação foi variada de forma a estabelecer uma relação 1:1 com cada frequência natural, fenômeno que denomina-se passagem pela ressonância. São várias as possibilidades de se obter essas ressonâncias, basta que seja efetuada uma escolha adequada dos parâmetros físicos do problema, definidos por (3.2) e (3.3).

A escolha do método de integração numérica, utilizado para obter soluções numéricas das equações diferenciais adimensionais do movimento (3.4), deve levar em consideração os seguintes quesitos:

- a escolha do passo de integração;
- o uso desse passo;
- e a escolha dos parâmetros envolvidos no sistema.

É conveniente a utilização de um método que ajuste automaticamente o tamanho do passo de integração, para que eles se adaptem à trajetória da solução do sistema. A estimativa do erro local em cada passo vai controlar o crescimento (ou decréscimo) do passo. O método numérico mais indicado nestes problemas são os métodos de Runge-Kutta, que permitem a variação automática do passo de integração.

As frequências naturais do sistema (3.4), objeto de estudo deste trabalho, foram obtidas através dos autovalores da matriz A (3.7), atribuindo valores aos parâmetros físicos do sistema. Para estas simulações, adotou-se $\bar{\varphi} = 0$, o que implica dizer que as oscilações do sistema foram obtidas a cada giro da massa m_0 , no motor desbalanceado.

Durante este período foram analisadas várias ressonâncias entre as frequências naturais do sistema, ω_1 e ω_2 , com o objetivo de explorar ao máximo o sistema estudado. O grande número de parâmetros físicos envolvidos nas equações de movimento, permitem uma grande variabilidade do sistema dinâmico, o que torna este estudo extremamente necessário.

Esta fase compreende um trabalho computacional pesado, utilizando implementações em Fortran 95 para obter as oscilações de χ_1 e χ_2 em função de τ , o mapa de Poincaré de χ_1 e χ_2 em função de $\bar{\omega}$, e o cálculo dos expoentes de Lyapunov. O cálculo da FFT e as figuras obtidas, foram gerados com a ajuda do Software Matlab 5.2. Vale lembrar que todos os estudos foram realizados nas variáveis adimensionais do sistema e suas respectivas ilustrações também estão em função das variáveis adimensionais.

São apresentadas a seguir algumas das ressonâncias estudadas. Outros resultados podem ser vistos em [21, 22, 23, 24, 42, 43]. As ressonâncias 1:1 e 1:2 entre as frequências naturais, foram obtidas com os seguintes parâmetros adimensionais:

3.2.1 Ressonância 1:1

Nesta seção, considera-se as oscilações do sistema (3.4), oscilando quando a relação entre as frequências naturais é 1:1 e sob condições diferentes relativas ao torque do motor L . No primeiro caso, L é considerada linear, ou seja, $L(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$, sendo α e β constantes que dependem do tipo e da potência do motor. No segundo caso, considera-se que $\dot{L} \neq 0$, e a equação característica do motor é dada pela última equação do sistema (3.4).

Tabela 3.1: Ressonâncias Estudadas

	Ressonâncias		
	1:1	1:2 A	1:2 B
<i>Parâmetros</i>			
η_1	0.1581	0.0	0.0
η_2	0.5885	2.77	0.378
μ	0.5	0.0769	0.1428
θ^2	1.6667	0.308	0.571
α	3.1623	2.774	3.78
$\beta(\times 10^4)$	1.0	0.7692	1.4285
<i>Frequências</i>			
$\bar{\omega}_1$	0.8435	0.5269	0.7975
$\bar{\omega}_2$	0.8436	1.0488	1.6005

Inicialmente, foram fixados alguns valores para as massas dos blocos, a massa excêntrica m_0 , o raio r , o momento de inércia J , a voltagem U e as constantes a e b , e foram mantidas livres as rigidezes e os amortecimentos envolvidos no sistema. Assim encontrava-se os valores para os quais as frequências naturais permaneciam em ressonância. A velocidade angular do motor $\dot{\varphi}$ determina a passagem pela ressonância.

As figuras (3.2) mostram a evolução temporal do perfil de χ_1 e χ_2 na região de ressonância 1:1, quando o motor opera com torque linear. A figura mostra o comportamento do sistema antes da passagem pela ressonância. As amplitudes máximas de χ_1 e χ_2 durante a passagem são apresentadas na figura (3.3). Na figura (3.4) são apresentadas as oscilações de χ_1 e χ_2 após a passagem pela ressonância. Observa-se que durante a passagem pela ressonância ocorre um aumento brusco das amplitudes de oscilação, porém essa amplitude cai novamente após a passagem. Para qualquer instante de tempo, as oscilações permanecem regulares. As figuras (3.6) e (3.7) mostram o diagrama da superfície de seção $\bar{\varphi} = 0$, $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$, para χ_1 e χ_2 respectivamente. Na figura (3.5) apresenta-se a curva representativa do expoente máximo de Lyapunov para os mesmos valores de $\bar{\omega}$. Na figura (3.8) são plotados os valores médios das amplitudes máximas de χ_1 e χ_2 para cada valor da frequência de rotação do motor $\bar{\omega}$.

Observa-se então, que quando o torque do motor é considerado linear, as amplitudes de oscilação se comportam de maneira regular, apresentando apenas um aumento da amplitude durante a passagem pela ressonância.

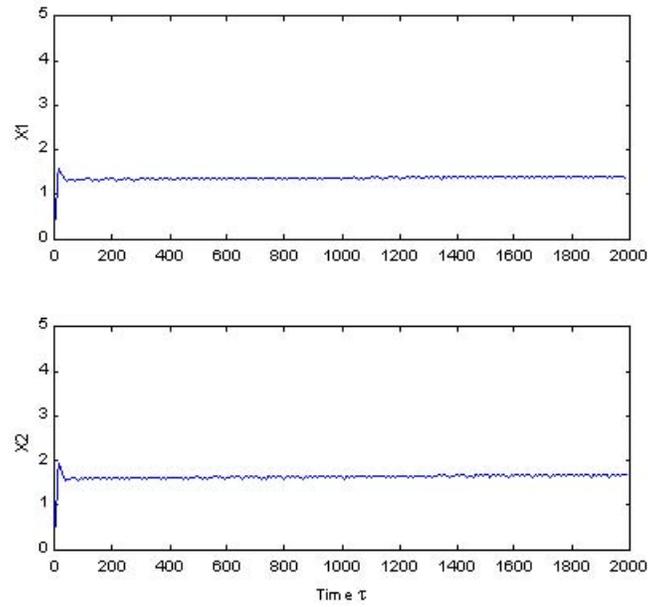


Figura 3.2: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 antes da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 0.7$; Torque Linear.

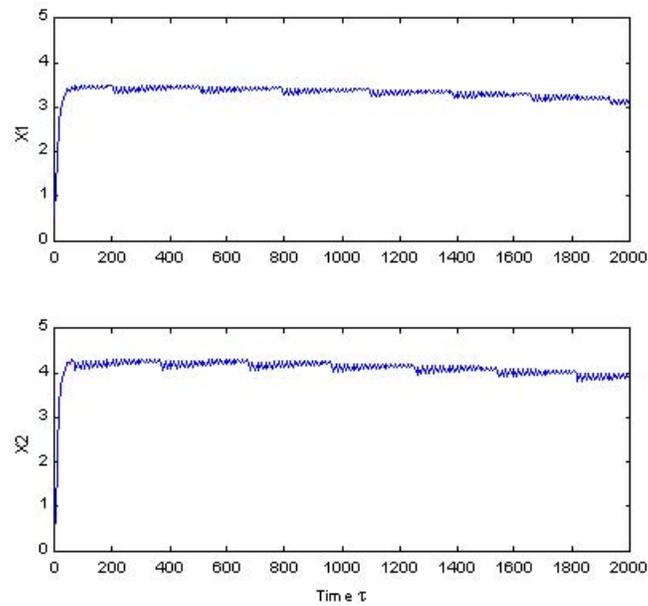


Figura 3.3: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$; frequência $\bar{\omega} = 0.8435$; Torque Linear.

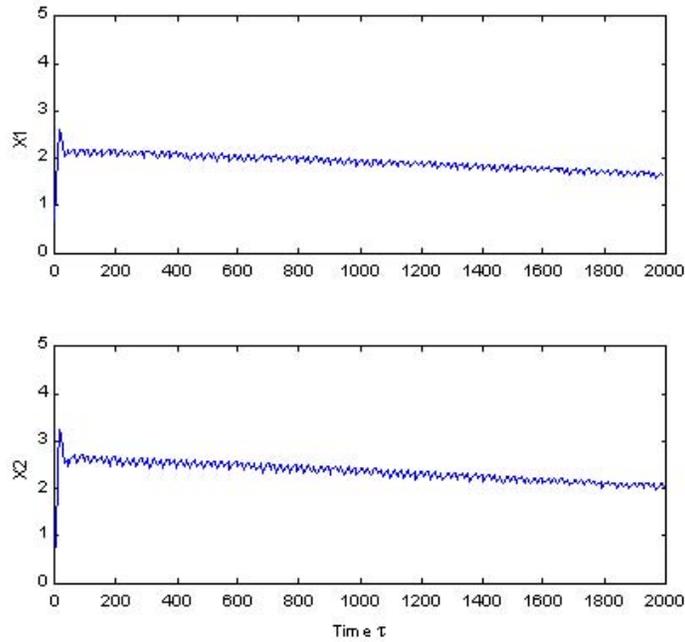


Figura 3.4: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 depois da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Linear.

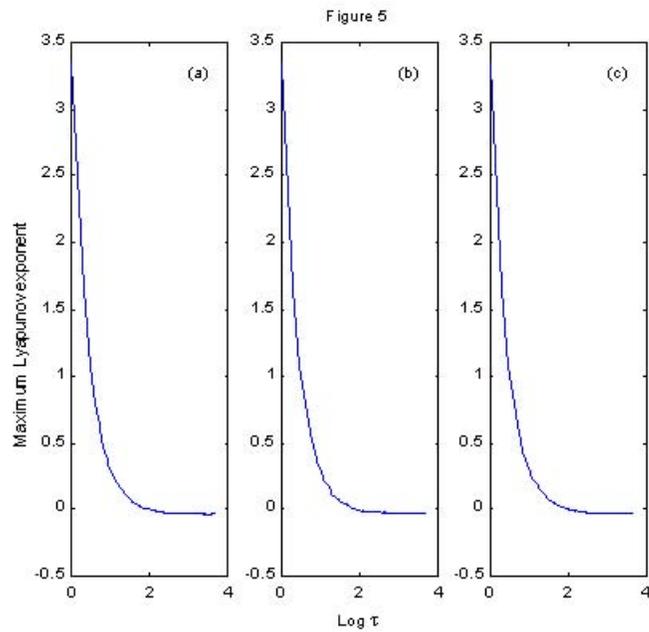


Figura 3.5: Curvas do expoente máximo de Lyapunov, versus $\log \tau$; (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Linear

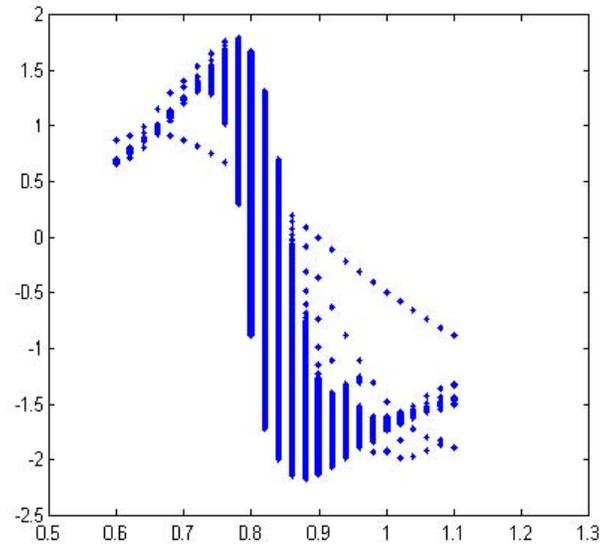


Figura 3.6: Diagrama da superfície de secção para χ_1 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Linear.

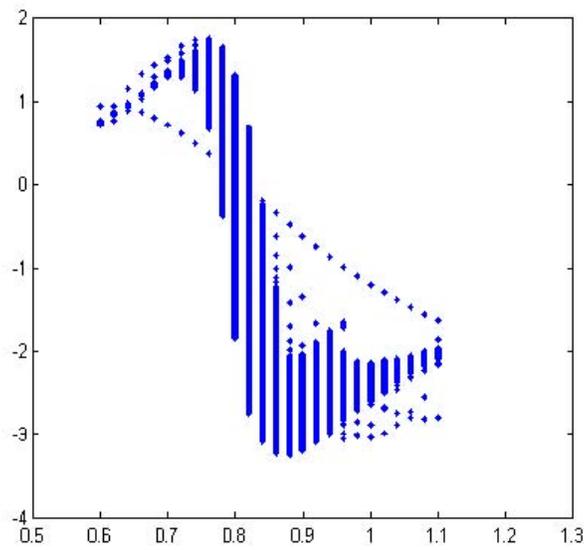


Figura 3.7: Diagrama da superfície de secção para χ_2 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Linear.

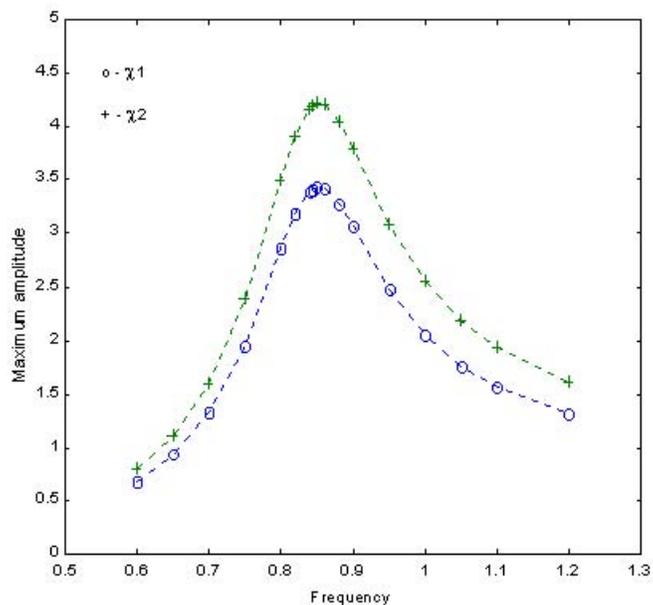


Figura 3.8: Média das amplitudes máximas de χ_1 (o) e χ_2 (*) em função frequência $\bar{\omega}$: os picos correspondem a passagem pela ressonância $\bar{\omega} = 0.8435$. Torque Linear.

A figura (3.9) mostra o perfil das amplitudes estacionárias de χ_1 e χ_2 antes da passagem pela ressonância, considerando o modelo de torque não linear. A frequência neste caso é $\bar{\omega} = 0.7$ e o movimento obtido é regular. Para a frequência $\bar{\omega} = 0.8435$, o motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ (figura (3.10)) e o movimento se torna irregular, mantendo-se dessa forma depois da passagem pela ressonância ($\bar{\omega} = 1.0$) (figura (3.11)). As figuras (3.12) e (3.15) mostram o espectro de frequências e a curva do expoente máximo de Lyapunov, respectivamente, para as três frequências citadas acima. O espectro de frequências apresenta-se irregular depois da passagem pela ressonância e os respectivos expoentes de Lyapunov são positivos, evidenciando comportamento irregular e caos. As figuras (3.13) e (3.14) representam os diagramas da superfície de secção para χ_1 e χ_2 respectivamente. A superfície de secção adotada foi $\bar{\varphi} = 0$, $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$.

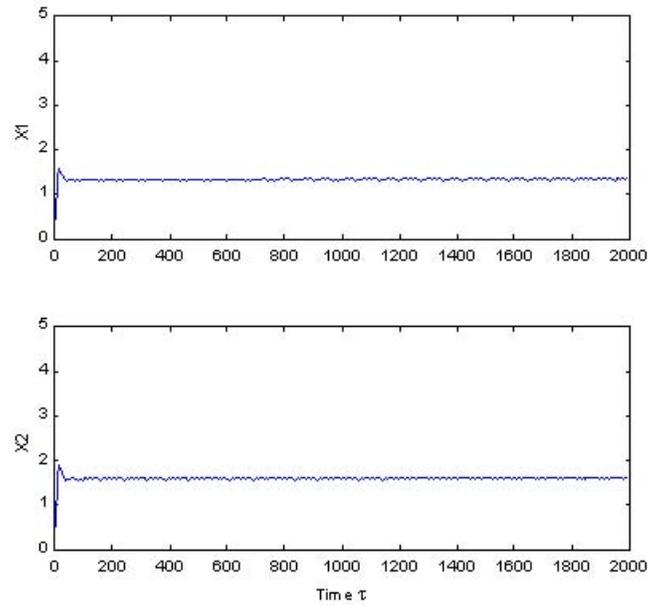


Figura 3.9: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 antes da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 0.7$; Torque Não Linear.

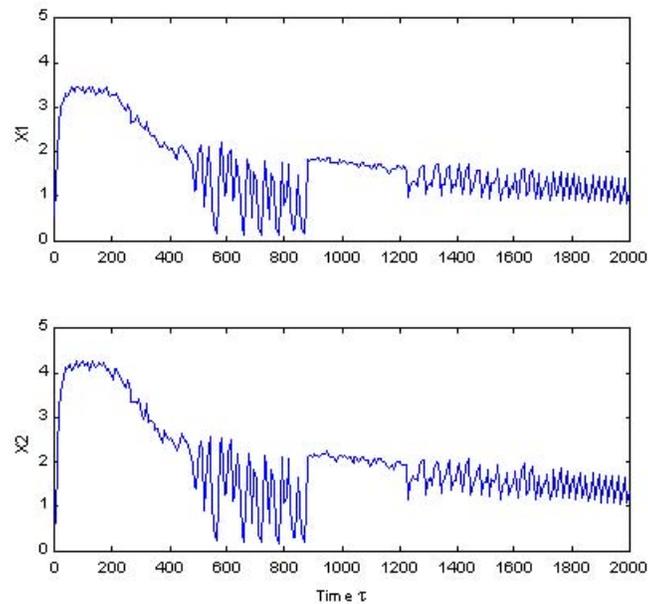


Figura 3.10: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$; frequência $\bar{\omega} = 0.8435$; Torque Não Linear.

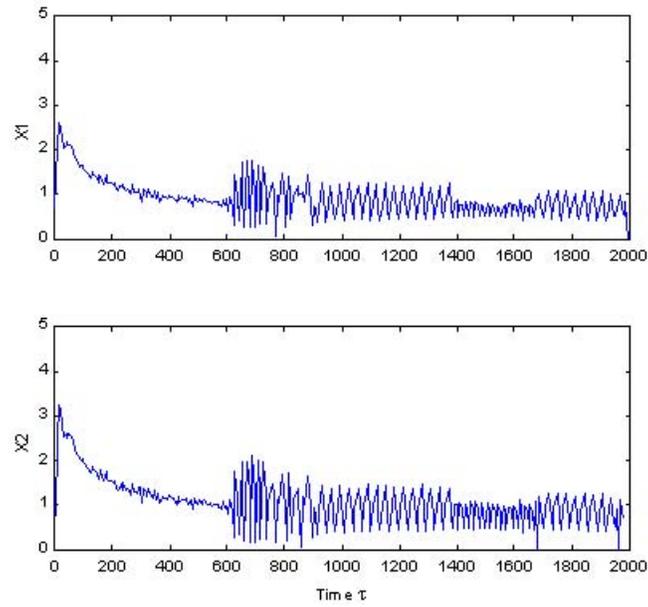


Figura 3.11: Perfil do movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 depois da passagem pela ressonância; frequência $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear.

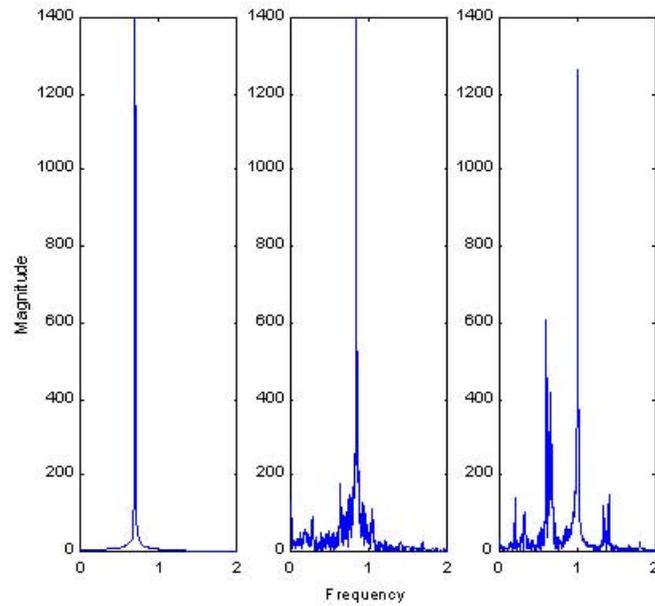


Figura 3.12: Espectro de frequências para χ_1 : (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear.

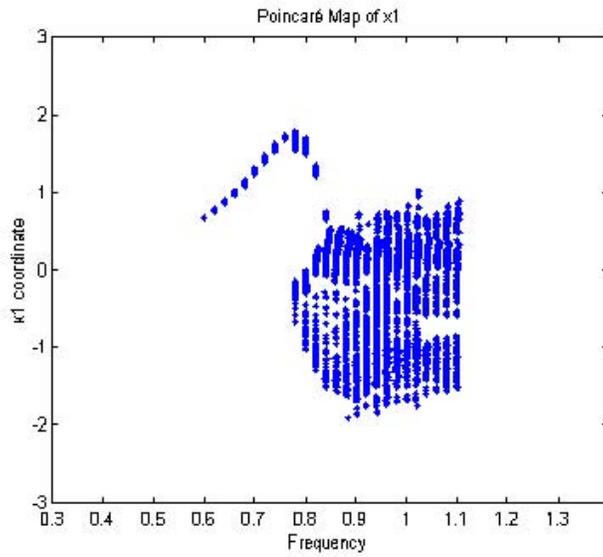


Figura 3.13: Diagrama da superfície de secção para χ_1 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Não Linear.

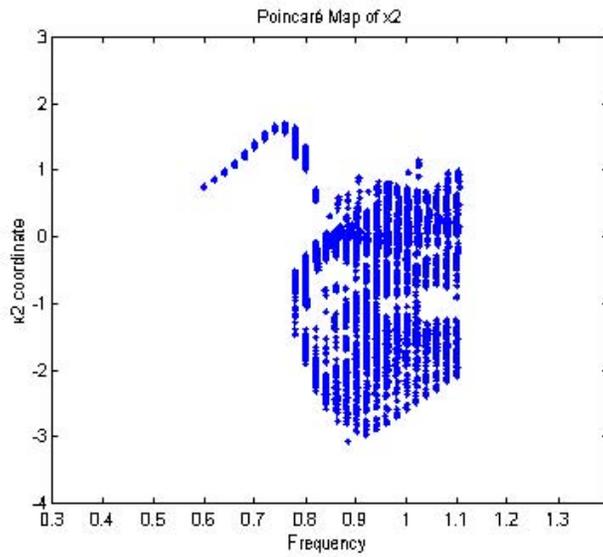


Figura 3.14: Diagrama da superfície de secção para χ_2 com passo $\Delta\bar{\omega} = 0.02$. Plano adotado: $\bar{\varphi} = 0$ com condições $\chi'_1 > 0$ e $\chi'_2 > 0$. Torque Não Linear.

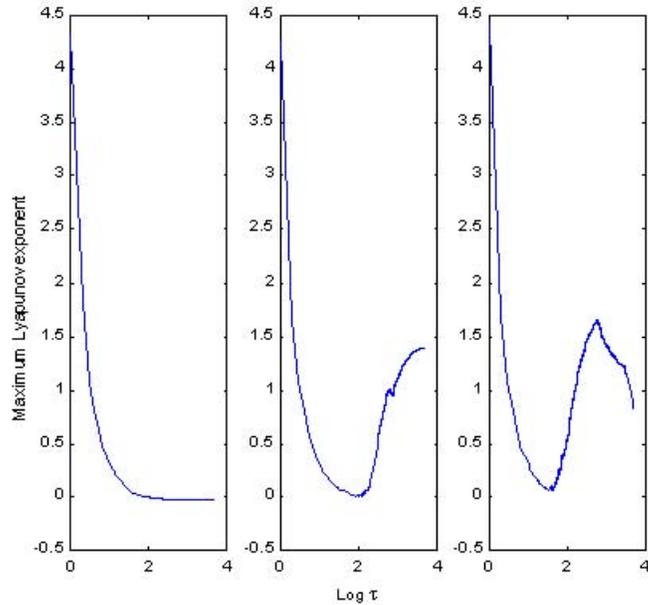


Figura 3.15: Curvas do expoente máximo de Lyapunov, versus $\log \tau$; (a) $\bar{\omega} = 0.7$, (b) $\bar{\omega} = 0.8435$ e $\bar{\omega} = 1.0$; Torque Não Linear

3.2.2 Ressonância 1:2

Nesta seção, considera-se as oscilações do sistema (3.4), oscilando quando a relação entre as frequências naturais é 1:2. São consideradas duas condições ressonantes distintas, ambas apresentadas na tabela 3.1. Foi dada uma ênfase na procura de movimentos regulares e irregulares, e o que se nota é que, quando aumentamos a frequência do rotor, as vibrações tornam-se mais irregulares. Além disso, o efeito Sommerfeld contribui para tornar uma vibração regular em uma vibração irregular, pois após esse efeito as vibrações são sempre irregulares. A seqüência de figuras (3.16 a) a (3.20 a) ilustra esse fato para a ressonância 2:1 A, e as figuras (3.16 b) a (3.20 b) para a ressonância 2:1 B. No caso dessa última ressonância, as vibrações tornam-se muito irregulares, e apresenta um fenômeno de salto para $\bar{\omega} \approx 1.15$.

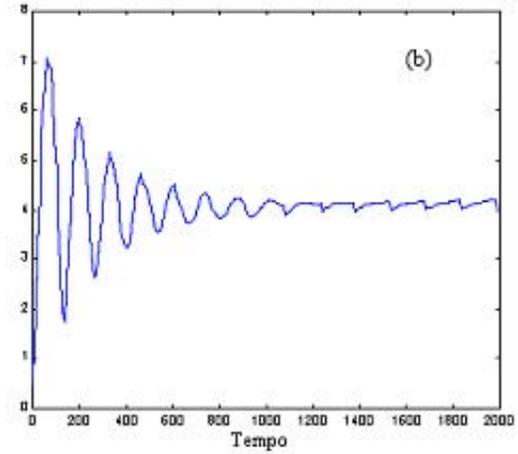
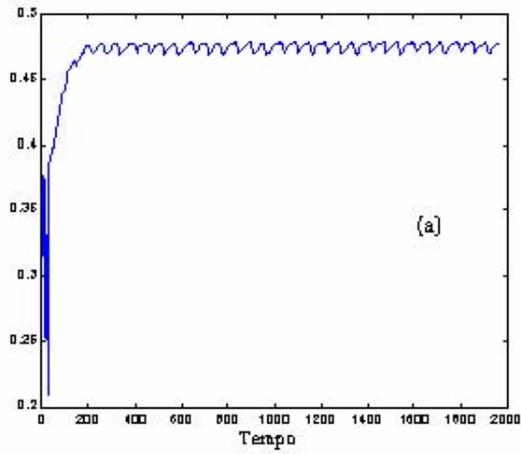


Figura 3.16: Perfil superior das vibrações de χ_1 , antes do efeito Sommerfeld. Figura (a) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.5269$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) corresponde a $\bar{\omega} = 0.75$ da ressonância 1:2 B. As vibrações são regulares.

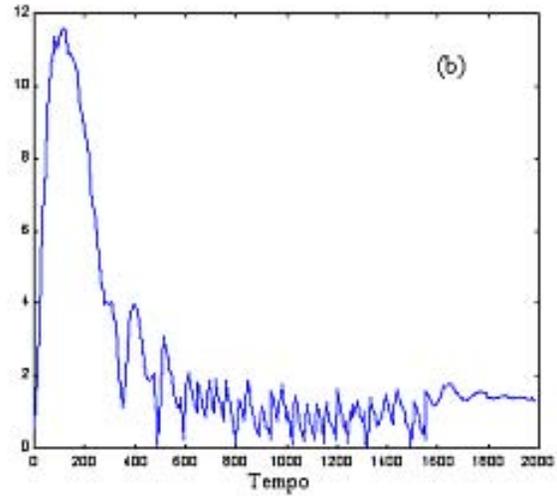
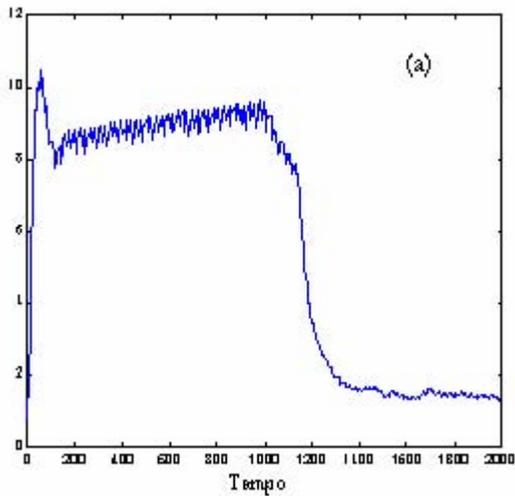


Figura 3.17: Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) mostra o perfil para $\bar{\omega} = 1.0$, (imediatamente antes do efeito) da ressonância 1:2 A, e figura (b) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$ da ressonância 1:2 B. As vibrações são irregulares.

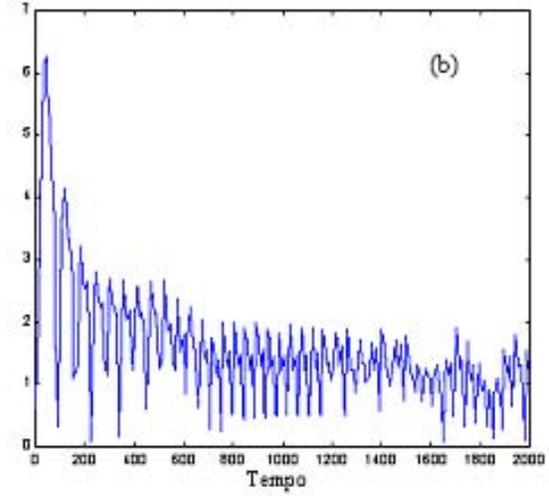
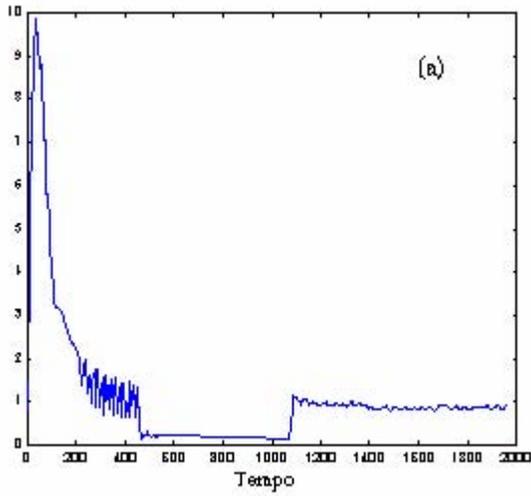


Figura 3.18: Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) é o perfil na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) mostra o perfil para $\bar{\omega} = 0.84$ (após o efeito Sommerfeld). As vibrações são irregulares.

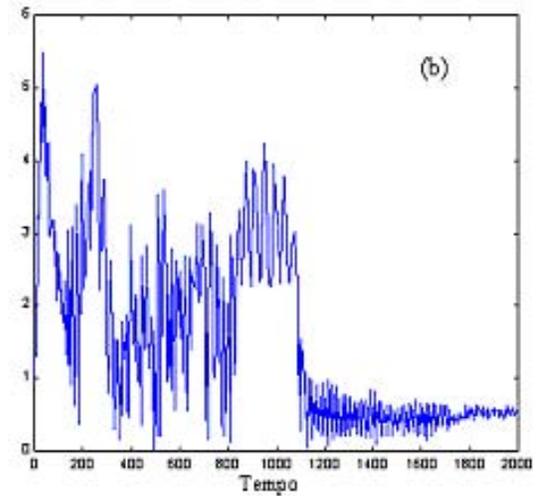
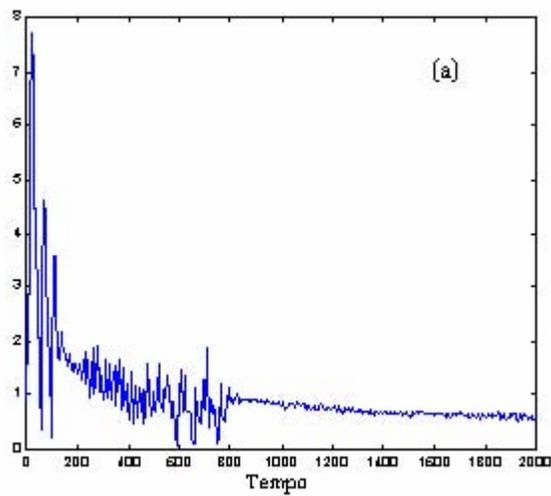


Figura 3.19: Perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) corresponde a $\bar{\omega} = 1.1$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) a $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.6007$.

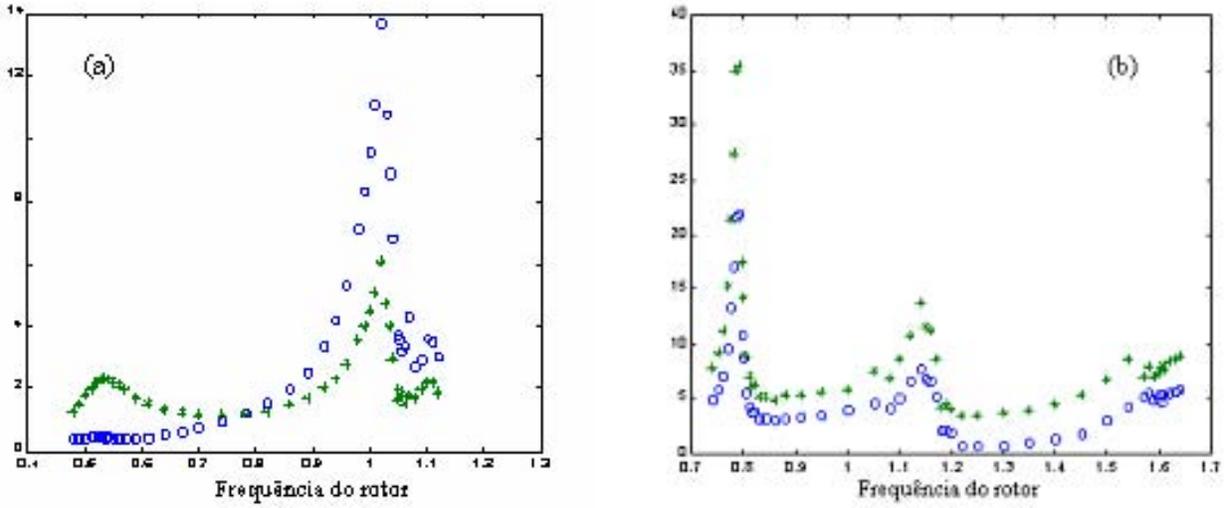


Figura 3.20: Passagem pelas ressonâncias e o efeito Sommerfeld. Os símbolos (o) e (*) correspondem às amplitudes máximas de χ_1 e χ_2 respectivamente. Na figura (a) correspondente à ressonância 1:2 A, o efeito Sommerfeld ocorre na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$, e na ressonância 1:2 B, figura (b), na passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$.

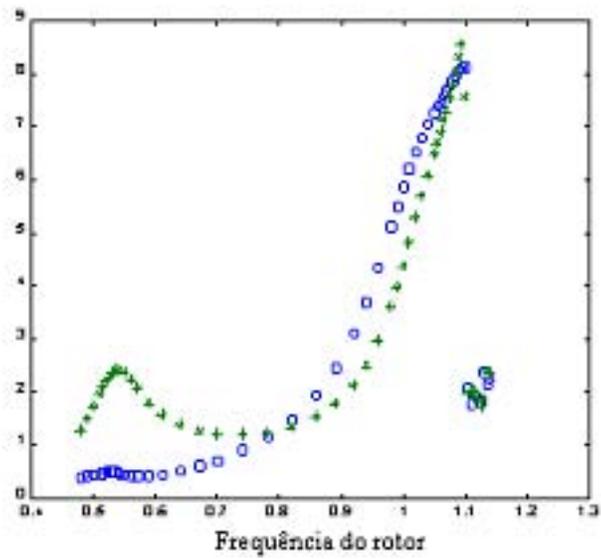


Figura 3.21: Passagem pela ressonância e o efeito Sommerfeld. Os símbolos são os mesmos da figura 3.20.

A figura (3.16) mostra perfil superior das vibrações de χ_1 , corresponde à passagem pela ressonância $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.5269$ (para a ressonância 1:2 A), e quando $\bar{\omega} = 0.75$ da ressonância 1:2 B, bem próximo da primeira ressonância, mas antes de passar por ela. As vibrações são regulares. A figura (3.17) mostra o perfil superior das vibrações de χ_1 . Figura (a) mostra o perfil para $\bar{\omega} = 1.0$, (imediatamente antes do efeito) da ressonância 1:2 A, e figura (b) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$ da ressonância 1:2 B. As vibrações são irregulares.

Na figura (3.18) são apresentados o perfil superior das vibrações de χ_1 para passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$ da ressonância 1:2 A, e para a $\bar{\omega} = 0.84$ na ressonância 1:2 B (após o efeito Sommerfeld). As vibrações são irregulares. A figura (3.19) mostra o perfil superior das vibrações de χ_1 correspondente a $\bar{\omega} = 1.1$ da ressonância 1:2 A, e $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.6007$ para o caso B. A figura (3.20) apresenta passagem pelas ressonâncias e o efeito Sommerfeld. A figura (a) corresponde à passagem $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = 1.0488$ da ressonância 1:2 A, e a figura (b) corresponde a $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 0.7975$.

A figura (3.21) mostra a ocorrência do efeito Sommerfeld para a ressonância 1:2 B. O efeito Sommerfeld, que é caracterizado pelo aumento brusco das vibrações, ocorre quando a frequência do rotor coincide com as frequências naturais do sistema. Para a ressonância 1:2 B, este efeito ocorre durante a passagem por $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 = 1.15$.

Capítulo 4

Solução analítica aproximada do sistema não ideal

Muitas das equações diferenciais que descrevem sistemas vibratórios são não lineares e sua solução analítica dificilmente pode ser encontrada. Por esse motivo o estudo de vibrações em sistemas mecânicos geralmente restringe-se a soluções numéricas, baseadas em algoritmos adequados, sujeitas a uma condição inicial. Porém, muitas vezes deseja-se encontrar tais soluções a partir de métodos analíticos, já que sua existência é garantida pelo teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Este capítulo descreve um método clássico para a busca dessas soluções: o método da média. Encontra-se a solução analítica aproximada para o sistema não ideal (3.4) de duas maneiras distintas.

A análise de estabilidade de um sistema dinâmico tal como (3.4) pode ser feita de várias maneiras. Neste capítulo utiliza-se o critério R-H, através do qual obtém-se relações entre os coeficientes do polinômio característico que garantem a estabilidade assintótica do sistema; e o teorema de Sotomayor que determina condições sobre as quais o sistema apresenta bifurcações estáticas. As duas técnicas citadas foram discutidas com mais detalhes no Capítulo 2.

4.1 Método da Média

Originalmente criado por Krylov e Bogoliubov, o método da média é um dos métodos que podem ser utilizados para obter uma solução analítica aproximada de equações diferenciais. Este método é um método de Perturbação que consiste em considerar certas quantidades como funções que variam suavemente no tempo. Para isso é introduzido um pequeno parâmetro positivo ε e o sistema de equações diferenciais é reduzido à forma normal [14]

$$\ddot{v}_i + \omega_i^2(\varepsilon t)v_i = \varepsilon f_i(\varphi, v_1, \dots, v_n, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde v_i são as coordenadas normais na forma vetorial, εt é um tempo que varia suavemente

e $\omega_i^2(\varepsilon t) = \frac{k_i(\varepsilon t)}{m_i(\varepsilon t)}$ são as freqüências neutras instantâneas do sistema linear correspondente, ou seja, o sistema quando considera-se $\varepsilon = 0$. Quando $k_i(\varepsilon t)$ e $m_i(\varepsilon t)$ são independentes do tempo, $k_i(\varepsilon t) = k_i = \text{cte}$ e $m_i(\varepsilon t) = m_i = \text{cte}$, as freqüências neutras instantâneas se tornam as freqüências naturais do sistema.

As funções εf_i são chamadas funções ou forças perturbativas contendo termos que representam a dissipação de energia, termos não lineares e a excitação externa. A presença de ε neste termo indica uma pequena contribuição de f_i e portanto, sistemas dinâmicos apresentados na forma (4.1) são denominados sistemas fracamente não lineares. Além disso, f_i são funções periódicas em φ com período 2π . Para sistemas não ideais, as excitações externas são funções do deslocamento angular $\varphi(t)$ e de $D(\varepsilon t) \cos \varphi(t)$, sendo $\dot{\varphi}(t) = \omega$ a freqüência de excitação e $D(\varepsilon t)$ são freqüências e amplitudes dependentes do tempo.

Fazendo $\varepsilon = 0$ nas equações (4.1) temos

$$\ddot{v}_i + \omega_i^2 v_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

as quais são denominadas equações não perturbadas correspondentes ao sistema (4.1) e cujas soluções são funções harmônicas do ângulo de fase $\psi_i = \varphi + \beta_i$:

$$v_i = a_i \cos \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

sendo a constante a_i a amplitude do i -ésimo modo.

Quando são considerados os parâmetros perturbativos na excitação externa, ou seja, quando $\varepsilon \neq 0$, harmônicos mais altos podem aparecer na solução e as freqüências naturais podem depender da amplitude. Considerando que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a solução pode ser representada por (4.3), podemos representar a solução do sistema de equações diferenciais (4.1) na seguinte forma assintótica [14]:

$$v_i = a_i(\varepsilon t) \cos \psi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j M_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

quando M_{ij} são funções desconhecidas, periódicas em φ e ψ , com período 2π , e dependentes de a_i .

O primeiro passo para obter uma solução analítica para o sistema dinâmico (4.1) através do método da média é utilizar o método de variação de parâmetros para transformar as variáveis dependentes v_i em novas variáveis dependentes a_i e β_i , $i = 1, \dots, n$. Como (4.1) e (4.3) constituem $2n$ equações para $3n$ variáveis, impõe-se condições adicionais

$$\dot{v}_i = -\omega_i a_i \text{sen} \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

requerendo que a velocidade da coordenada v do sistema perturbado (4.1) tenha a mesma forma que para o caso $\varepsilon = 0$.

Logo, quando as equações (4.3) são substituídas nas equações (4.1) proporcionam uma mudança de variáveis $v \longrightarrow z$, sendo $v = [v_1 \dot{v}_1 v_2 \dot{v}_2 \dots v_n \dot{v}_n]^T$ e $z = [a_1 \beta_1 a_2 \beta_2 \dots a_n \beta_n]^T$, cujas equações diferenciais são da forma

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \operatorname{sen} \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ a_i \dot{\beta}_i &= a_i(\omega_i - \omega)(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \cos \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

as quais, unidas a $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ formam um sistema equivalente ao (4.1). As funções periódicas $G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ e $T_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ são funções que variam suavemente no tempo. Em geral, restringe-se a solução à m -ésima aproximação, ou seja, as somas infinitas que aparecem nas três últimas equações, são substituídas por somas finitas de 1 até m . Supondo que a solução das equações (4.6) para $m = 1$ são do tipo $z = y + \varepsilon w(y, t, \varepsilon)$, ou seja ,

$$\begin{aligned} a_i &= A_i + \varepsilon U_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n/2; \\ \beta_i &= \xi_i + \varepsilon V_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n/2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

quando U_i e V_i são funções periódicas que variam suavemente no tempo, pode-se obter uma primeira aproximação para as equações acima determinando A_i e ξ_i através de equações médias $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y)$ de (4.6), substituindo as novas variáveis A_i e ξ_i nestas equações. Para isso, basta que existam as integrais

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G_{n_{ij}}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ a_i \dot{\xi}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\varepsilon \sigma_i a_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T_{n_{ij}}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \right] d\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Obtidas as equações médias acima, basta igualar estas equações a zero e obtém-se as expressões para A_i e ξ_i em seu estado estacionário. Observa-se que este primeiro termo da solução é constante e é equivalente a solução de equilíbrio das equações médias. Por isso, é possível fazer o estudo da estabilidade destes estados estacionários a partir dos autovalores da matriz jacobiana do sistema médio linearizado. O teorema da média garante que a estabilidade obtida para a solução de equilíbrio do sistema médio é localmente a mesma para o sistema original.

Chega-se à solução (4.3) retornando às variáveis iniciais v . Para obter a solução assintótica (4.4) é necessário encontrar os funcionais U_i e V_i . Nayfeh [29] propõe a utilização do Método da Média Generalizado para encontrar estes funcionais. Neste trabalho elas são encontradas da maneira proposta por Kononenko [25].

4.1.1 Teorema da Média

Existem várias versões para o teorema da média [20]. A versão adotada nesta dissertação foi proposta por Hale, Sanders e Verhulst, os quais fazem uma discussão completa do ponto de vista assintótico [20].

A média é aplicável a sistemas na forma

$$\dot{z} = \varepsilon f(z, t, \varepsilon); \quad z \in U \subset R^n, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad (4.9)$$

quando $f : R^n \times R \times R^+ \rightarrow R^n$ é C^r , limitada em um conjunto limitado U e T-periódica em t , $T > 0$. O campo vetorial existente em tais sistemas sujeito a forças T-periódicas, fazem com que a solução média tenha uma evolução suave no tempo. O sistema médio autônomo associado é definido como

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt =_{def} \varepsilon \bar{f}(y) \quad (4.10)$$

Sob estas condições, apresenta-se o teorema da média.

Teorema 4.1.1 *(Teorema da Média) Existe uma mudança de coordenadas C^r $z = y + \varepsilon w(y, t, \varepsilon)$ sob a qual (4.9) se torna*

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon) \quad (4.11)$$

quando f_1 tem período T em t . Então:

1. Se $z(t)$ e $y(t)$ são soluções de (4.9) e (4.10) sob as condições iniciais z_0 e y_0 para $t = 0$ respectivamente, e $|z_0 - y_0| = O(\varepsilon)$, então $|z(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ em uma escala de tempo $\frac{t}{\varepsilon}$.
2. Se p_0 é um ponto fixo hiperbólico de (4.10) então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, (4.9) possui uma única órbita periódica $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ com estabilidade do mesmo tipo de p_0 .
3. Se $z^s(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ é uma solução de (4.9) pertencente à variedade estável da órbita periódica hiperbólica $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$, $y^s(t) \in W^s(p_0)$ é uma solução de (4.10) pertencente à variedade estável do ponto fixo hiperbólico p_0 e $|z_0^s - y_0^s| = O(\varepsilon)$, então $|z^s(t) - y^s(t)| = O(\varepsilon)$ para $t \in [0, \infty)$. O mesmo resultado se aplica a soluções pertencentes às variedades instáveis em um intervalo $t \in (-\infty, 0]$.

Observações: As conclusões (2) e (3) podem ser generalizadas para conjuntos hiperbólicos mais complicados, como órbitas hiperbólicas por exemplo, e são válidos para quase todas as funções periódicas f [20]. A conclusão (3) implica que o teorema da média pode ser usado para aproximar variedades estáveis e instáveis em conjuntos limitados e geralmente para estudar a estrutura global de mapas de Poincaré de (4.9).

Demonstração: Pode-se explicitar o cálculo da mudança de coordenadas que leva a (4.11): seja

$$f(z, t, \varepsilon) = \bar{f}(z) + \tilde{f}(z, t, \varepsilon) \quad (4.12)$$

particionada em um termo médio \bar{f} e um termo oscilante \tilde{f} ; Seja

$$z = y + \varepsilon w(y, t, \varepsilon) \quad (4.13)$$

para qualquer w . Diferenciando (4.13) e usando (4.9) e (4.12) obtém-se

$$\dot{w}(y, t, \varepsilon) = \frac{\partial w}{\partial t}(y, t, \varepsilon) + D_y w(y, t, \varepsilon) \dot{y}(t)$$

Então

$$l\dot{y}[I + \varepsilon D_y w] = \dot{z} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon f(z, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$l\dot{y}[I + \varepsilon D_y w] = \varepsilon \bar{f}(y + \varepsilon w) + \varepsilon \tilde{f}(y + \varepsilon w, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}$$

ou

$$\dot{y} = \varepsilon [I + \varepsilon D_y w]^{-1} \left[\bar{f}(y + \varepsilon w) + \tilde{f}(y + \varepsilon w, t, \varepsilon) - \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (4.14)$$

Expandindo (4.14) em potências de ε e escolhendo w como a antiderivada de \tilde{f} :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \tilde{f}(y, t, 0) \quad (4.15)$$

obtém-se

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 \left[D_y \tilde{f}(y, t, 0) w(y, t, 0) - D_y w(y, t, 0) \bar{f}(y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) \right] + O(\varepsilon^3)$$

que por definição torna-se

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon) \quad (4.16)$$

Para obter a conclusão (1) utiliza-se o lema de Gronwall:

Lema 4.1.2 Se u, v e $c \geq 0$ em $[0, t]$, c é diferenciável, e $v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds$, então

$$v(t) \leq c(0)\exp \int_0^t u(s)ds + \int_0^t c'(s) \left[\exp \int_s^t u(\tau)d\tau \right] ds.$$

Demonstração: Para provar o lema, faça $R(t) = \int_0^t u(s)v(s)ds$, então $R'(t) = u(t)v(t)$.

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

$$u(s)v(s) - u(s) \int_0^t u(s)v(s)ds \leq u(s)v(s) \Rightarrow R'(t) - u(s)R(t) \leq u(s)c(t).$$

Integrando esta desigualdade diferencial obtém-se

$$\mu R' - \mu u R \leq \mu u c \Rightarrow (\mu R)' \leq \mu u c$$

$$\mu R' - \mu u R = (\mu R)' \Leftrightarrow \mu' = -\mu u \Leftrightarrow \frac{d\mu}{ds} = -\mu u \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -u ds$$

$$\Leftrightarrow \mu = \exp \int_0^t -\mu ds$$

Logo,

$$\mu R \leq \int_0^t \mu(s)u(s)c(s)ds + \mu(0)R(0), \quad \mu(0) = 1$$

$$R(t) \leq R(0)\exp \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t u(s)v(s)\exp \int_s^t -u(\tau)d\tau ds$$

$$\int_0^t u(s)v(s)ds \leq \int_0^t u(s)v(s)\exp \int_s^t -u(\tau)d\tau ds$$

Aplicando integração por partes do lado direito da equação acima obtém-se

$$\int_0^t u(s)v(s)\exp \int_s^t -u(\tau)d\tau ds = -c(t) + c(0)\exp \int_0^t u(\tau)d\tau ds + \int_0^t c'(s)\exp \int_s^t u(\tau)d\tau ds$$

$$c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds \leq c(0)\exp \int_0^t u(\tau)d\tau ds + \int_0^t c'(s)\exp \int_s^t u(\tau)d\tau ds$$

Logo

$$v(t) \leq c(0)\exp \int_0^t u(\tau)d\tau ds + \int_0^t c'(s)\exp \int_s^t u(\tau)d\tau ds$$

(1) Considerando as equações (4.10) e (4.11), integrando-as obtém-se

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = y_{\varepsilon 0}(t) - y_0(t) + \varepsilon \int_0^t [\bar{f}(y_\varepsilon(s)) - \bar{f}(y(s))] ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(y_\varepsilon(s), s, \varepsilon) ds$$

quando y_ε é a solução de (4.11) com a condição inicial $y_{\varepsilon 0}$.

Fazendo $y_\varepsilon - y = \zeta$, definindo L a constante de Lipschitz de \bar{f} e C o valor máximo de f_1 obtém-se

$$|\zeta(t)| = |\zeta(0)| + \varepsilon L \int_0^t |\zeta(s)| ds + \varepsilon^2 C t \quad (4.17)$$

Aplicando o Lema de Gronwall com $C(t) = |\zeta(0)| + \varepsilon^2 C t$ e $u(s) = \varepsilon L$

$$\begin{aligned} |\zeta(t)| &\leq |\zeta(0)| e^{\varepsilon L t} + \int_0^t \varepsilon^2 C e^{\int_s^t \varepsilon L d\tau} ds = \\ &= |\zeta(0)| e^{\varepsilon L t} + \varepsilon^2 C \int_0^t e^{\varepsilon L(t-s)} ds \leq \left[|\zeta(0)| + \frac{\varepsilon C}{L} \right] e^{\varepsilon L t}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Logo, se $|\zeta(0)| = |y_{\varepsilon 0} - y_0| = O(\varepsilon)$ então $|\zeta(t)| = |y_\varepsilon(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ para $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]$. Finalmente, usando a transformação (4.13) obtém-se

$$|z(t) - y_\varepsilon(t)| = \varepsilon w(y, t, \varepsilon)$$

e usando a desigualdade triangular

$$|z(t) - y(t)| = |z(t) - y_\varepsilon(t)| + |y_\varepsilon(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$$

(2) É conveniente usar a idéia de mapa de Poincaré e variedades invariantes para demonstrar o segundo resultado do teorema.

Considere os mapas de Poicaré P_0 e P_ε associados as equações (4.10) e (4.11). Reescreve-se estas equações como segue:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon \bar{f}(y); & \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, \theta, \varepsilon) & \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (4.19)$$

quando $(y, \theta) \in R^n \times S^1$, e $S^1 = R/T$ é um ciclo de tamanho T , nós definimos uma seção $\Sigma = \{(y, \theta) | \theta = 0\}$ e o primeiro retorno (ou tempo T) do mapa de Poincaré $P_0 : U \rightarrow \Sigma$, $P_\varepsilon : U \rightarrow \Sigma$ são então definidos por (4.19) na forma usual, sendo $U \subseteq \Sigma$ um conjunto aberto.

Observa-se que P_ε é ε^2 -fechado para P_0 então T é fixo e independe de ε . Se p_0 é um ponto fixo hiperbólico de $DP_0(p_0)$ então $DP_0(p_0) = e^{\varepsilon T Df(p)}$. Portanto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{1}{\varepsilon}) [e^{\varepsilon T Df(p_0)} - Id] = TDf(p_0)$ é invertível. Então P_ε é ε -fechado para P_0 e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{1}{\varepsilon}) [DP_\varepsilon(p_0) - Id] = TDf(p_0)$.

O teorema da função implícita implica que os zeros de $\frac{1}{\varepsilon}[DP_\varepsilon(p_0) - Id] = TDf(p_0)$ formam uma curva suave $(p_\varepsilon, \varepsilon)$ em $R^n \times R$. Os p_ε são pontos fixos de P_ε , e os autovalores de $DP_\varepsilon(p_\varepsilon)$ são ε^2 -fechados para aqueles de $DP_0(p_0)$. Logo $p_\varepsilon = p_0 + O(\varepsilon)$ e $DP_\varepsilon(p_\varepsilon) = exp[\varepsilon T(Df(p_\varepsilon) + \varepsilon^2 Df_1(p_\varepsilon))] = exp[\varepsilon T(Df(p_0) + O(\varepsilon^2))]$. Então (4.19(1)) tem uma órbita periódica γ_ε ε -fechada para p_0 e via a mudança de coordenadas (4.13), a equação (4.9) tem uma órbita similar.

Nós reforçamos que tudo que é requerido para a existência da órbita periódica em (4.9) é a ausência de qualquer autovalor igual a um no espectro de $DP_0(p_0)$. Entretanto, o tipo de estabilidade de p_0 e γ_ε pode não ser a mesma se algum autovalor de $DP_0(p_0)$ pertencer ao círculo unitário.

Para provar (3) supõe-se que (4.10) tem um ponto de sela hiperbólico p_0 e considera-se $y(t) \in W^s(p_0)$ e a solução correspondente $y_\varepsilon(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ do sistema completo (4.11). Os casos no quais p_0 é um sorvedouro ou fonte e W^s é substituído por W^u podem ser tratados da mesma forma. A prova é dividida em duas partes: uma região externa na qual o campo vetorial médio $\varepsilon \bar{f}(y)$ é grande em comparação com o termo restante $\varepsilon^2 f_1(y, t)$, $\varepsilon \bar{f}(y)$ é grande em comparação com o termo restante $\varepsilon^2 f_1(y, t)$, e uma região interna na qual as "perturbações" $\varepsilon \bar{f}$ e $\varepsilon^2 f_1$ são de ordens comparáveis. Fixa-se uma vizinhança δ , U_δ de p_0 tal que fora de U_δ obtém-se $|\bar{f}(y)| \gg \varepsilon |f_1(y, t, \varepsilon)|$. Como acima o teorema de Gronwall mostra que $|y_\varepsilon - y_0| = O(\varepsilon)$ para um tempo de ordem $\frac{1}{\varepsilon}$ fora de U_δ . Por outro lado, em U_δ o teorema da variedade estável global garante que a variedade estável $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon)$ é ε , C^r fechado para $W_{loc}^s(p_0) \times [0, T]$. Além disso, soluções pertencentes a $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon)$ e $W_{loc}^s(p_0)$ são contraídas em direção a γ_ε e p_0 respectivamente, dominadas pelo termo $e^{-\lambda t}$. Usando este fato pode-se provar que se y_ε e y_0 entram U_δ com $O(\varepsilon)$, eles permanecem com $O(\varepsilon)$ por todo o tempo restante. Partindo com as duas estimativas juntas e usando a transformação (4.13), obtém-se o resultado desejado.

4.2 Método da média no sistema dinâmico de 2 graus de liberdade

Embora trabalhoso, o método da média contém uma grande vantagem: ele permite um maior domínio quanto as regiões de estabilidade (ou instabilidade) do sistema dinâmico, a partir do conhecimento analítico de seus parâmetros físicos. [13], por exemplo, verificaram analiticamente a existência de órbitas periódicas e hiperbólicas em uma estrutura apertada, utilizando o proposto método da média. Além disso, suas soluções são obtidas nas amplitudes e fases do sistema dinâmico, em função da velocidade de rotação do motor que excita o sistema. Ou seja, a solução é totalmente voltada para a física do problema, facilitando assim o entendimento do seu comportamento.

Pode-se introduzir ao sistema (3.4) um balanceamento de ordem [29], considerando as forças de amortecimento, as forças de inércia e os momentos de inércia muito menores em relação às outras forças e momentos envolvidos no sistema. Considera-se que esses termos são pequenas

quantidades de ε e é possível escrever o sistema dinâmico (3.4) na forma matricial:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = \varepsilon f(t) - \varepsilon C\dot{u}(t); \quad (4.20)$$

$$\bar{\varphi}'' = \varepsilon \lambda + \varepsilon \rho \chi_1'' \text{sen } \bar{\varphi},$$

sendo $u(t) = [\chi_1 \ \chi_2]^T$ o vetor adimensional de deslocamento do sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

a matriz de massas adimensional,

$$C = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\frac{\theta^2}{\mu}\eta_2 & \frac{\theta^2}{\mu}\eta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

a matriz das constantes de amortecimento do sistema e

$$K = \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\mu \\ -\theta^2 & \theta^2 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

a matriz de rigidez. A função vetorial f contém os termos não lineares, acoplados e forçados das duas primeiras equações do sistema adimensional. Pode-se observar que para $\varepsilon = 0$, obtém-se um sistema não perturbado, que neste caso, apresenta termos acoplados em sua matriz de rigidez (4.23). Pode-se observar que a terceira equação de (3.4) está desacoplada das equações anteriores, permitindo trabalhá-la separadamente.

Para aplicar o método da média de Krylov-Bogoliubov no sistema dinâmico apresentado na figura (3.1), é conveniente que as equações do sistema dinâmico estejam na forma normal (4.1). Para remover o acoplamento no lado esquerdo da equação (4.21), introduz-se a coordenada $v = [v_1 \ v_2]^T$, através da transformação linear $u = Pv$, quando $u(t) = [\chi_1 \ \chi_2]^T$, P é uma matriz quadrada de ordem 2, cujas colunas $p_i = [p_{i1} \ p_{i2}]^T$ são os autovetores correspondentes aos autovalores $\bar{\omega}_1^2$ e $\bar{\omega}_2^2$ de $Kp_i = \bar{\omega}_i^2 Mp_i$ [12].

Inicialmente, pode-se multiplicar o sistema dinâmico (4.21) pela inversa de M e reduzi-lo à forma

$$\ddot{u} + M^{-1}Ku = \varepsilon M^{-1}[f - C\dot{u}].$$

Introduzindo a transformação $u = Pv$ como definido acima obtém-se

$$P\ddot{v} + M^{-1}KPv = \varepsilon M^{-1}[f - CP\dot{v}].$$

Para que seja reduzido à forma normal, multiplica-se a equação acima pela inversa de P . Como neste caso M é a matriz identidade, P é real e ortogonal, e $P^{-1} = P^T$, obtém-se:

$$P^T P \ddot{v} + P^T M^{-1} K P v = \varepsilon P^T M^{-1} [f - C P \dot{v}] \Rightarrow \ddot{v} + \Lambda v = \varepsilon F,$$

quando $\Lambda = P^T K P$ e o vetor $F = P^T [f - C P \dot{v}]$. Logo, o sistema normal completo (com a parte não perturbada desacoplada) é

$$I \ddot{v} + \Lambda v = \varepsilon [Q \dot{v} + f \cos \bar{\varphi} + h \text{sen } \bar{\varphi}]; \quad (4.24)$$

$$\ddot{\bar{\varphi}} = \varepsilon [\lambda + \rho (\ddot{v}_1 + \ddot{v}_2) \text{sen } \bar{\varphi}];$$

quando

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varphi}}^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\varphi}} \\ 0 \end{bmatrix};$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 + \eta_1 p_{21} & \eta_1 + \eta_2 + \eta_1 p_{22} \\ \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 + p_{21}) & \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 + p_{21}) \end{bmatrix}.$$

sendo $\Lambda = P^T K P$ uma matriz diagonal, cujos elementos são os autovalores da matriz K . Define-se as frequências naturais como a solução não trivial de $(K - \bar{\omega}_i^2 M) p_i = 0$. Como M é a matriz identidade isso equivale a calcular os autovalores de K através do polinômio característico $\det(K - \bar{\omega}^2 I) = 0$. Obtém-se

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{1 + \mu + \theta^2 - \sqrt{(1 + \mu + \theta^2)^2 - 4\theta^2}}{2}$$

e

$$\bar{\omega}_2^2 = \frac{1 + \mu + \theta^2 + \sqrt{(1 + \mu + \theta^2)^2 - 4\theta^2}}{2}.$$

Encontra-se P , a matriz dos autovetores associados a $\bar{\omega}_1^2$ e $\bar{\omega}_2^2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1 + \mu - \theta^2 + R_c}{2\mu} & \frac{1 + \mu - \theta^2 - R_c}{2\mu} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

quando $R_c = \sqrt{(1 + \mu + \theta^2)^2 - 4\theta^2}$.

Pode-se observar que para $\varepsilon = 0$, o sistema na coordenada v (4.25) apresenta-se na forma normal não perturbada (4.2), para $i = 1, 2$, acrescido da equação $\ddot{\varphi} = 0$. Portanto, v tem soluções conhecidas na forma (4.3), com $i = 1, 2$, e $\bar{\varphi}$ tem solução do tipo

$$\bar{\varphi} = \bar{\omega}\tau, \quad (4.26)$$

quando $\bar{\omega}$ é a frequência de rotação do motor.

4.2.1 Método da Variação de Parâmetros

O segundo passo para a aplicação do método da média é transformar o sistema dinâmico (4.25) na forma padrão, utilizando o método da variação de parâmetros [30]. O termo "forma padrão" foi introduzido por Bogoliubov e consiste em tomar um sistema na forma (4.25) e, utilizando o método da variação de parâmetros, construir a transformação s para z , sendo $s = [v_1 \ \dot{v}_1 \ v_2 \ \dot{v}_2 \ \bar{\omega}]$ as coordenadas do sistema original $\dot{s} + \Lambda s = \varepsilon F(s, \dot{s}, \tau)$, e $z = [a_1 \ \beta_1 \ a_2 \ \beta_2 \ \bar{\omega}]$ as coordenadas do sistema padrão $\dot{z} = \varepsilon f(z, \tau) + O(\varepsilon^2)$. As coordenadas a_i , $i = 1, 2$ representam as amplitudes de oscilações das coordenadas v_i , as coordenadas β_i , $i = 1, 2$ representam suas fases e $\bar{\omega}$ a frequência de rotação do motor.

Assume-se que a solução particular do sistema de equações diferenciais (4.25) é a solução das equações diferenciais homogêneas correspondentes, dada pelas equações (4.3) e (4.26), acrescidas de outros termos. Introduce-se as substituições:

$$a) \ v_i = a_i \cos(\varphi + \beta_i), \quad i = 1, 2$$

$$b) \ \dot{v}_i = -\dot{a}_i \bar{\omega}_i \operatorname{sen}(\varphi + \beta_i), \quad i = 1, 2$$

$$c) \ \dot{\varphi} = \bar{\omega}, \quad (4.27)$$

as quais transformam a variável dependente s na nova variável dependente z .

Para $\varepsilon \neq 0$, considera-se que $a_i = a_i(\tau)$, $\beta_i = \beta_i(\tau)$ e $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\tau)$ são funções que variam suavemente no tempo. Deriva-se as equações (4.27 a) e (4.27 b) em τ sob essas considerações e obtém-se

$$a) \ \dot{v}_i = \dot{a}_i \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) - (\bar{\omega} + \dot{\beta}_i) a_i \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i); \quad i = 1, 2, \quad (4.28)$$

$$b) \ \ddot{v}_i = -\dot{a}_i \bar{\omega}_i \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) - (\bar{\omega} + \dot{\beta}_i) \bar{\omega}_i a_i \cos(\bar{\varphi} + \beta_i). \quad i = 1, 2.$$

Comparando (4.28 a) com (4.27 b) obtém-se a igualdade

$$\dot{a}_i \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) - \dot{\beta}_i a_i \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) = (\bar{\omega} - \bar{\omega}_i) a_i \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.29)$$

Substituindo as equações (4.27) e (4.28 b) no sistema (4.25) e utilizando a restrição (4.29), obtém-se:

$$\begin{aligned}
a) \dot{a}_i &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i} \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) [T_i], \quad i = 1, 2 \\
b) a_i \dot{\beta}_i &= (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}) a_i + \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i} \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) [T_i], \quad i = 1, 2 \\
c) \dot{\bar{\omega}} &= \varepsilon [H],
\end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo T_i e H os termos

$$\begin{aligned}
T_1 &= (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2) - \\
&\quad \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\varphi}) - \dot{\bar{\omega}} \text{sen}(\bar{\varphi}), \\
T_2 &= \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2), \\
H &= \lambda - \rho \left[\dot{a}_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + a_1 \bar{\omega}_1 (\bar{\omega} + \dot{\beta}_1) \cos(\bar{\varphi} + \beta_1) + \dot{a}_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2) + \right. \\
&\quad \left. a_2 \bar{\omega}_2 (\bar{\omega} + \dot{\beta}_2) \cos(\bar{\varphi} + \beta_2) \right] \text{sen}(\bar{\varphi}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Deseja-se obter uma aproximação de primeira ordem para a solução do sistema (4.25) sob condições de ressonância 1:1. Para isso são introduzidos os parâmetros de sintonia $\varepsilon\sigma_1$ e $\varepsilon\sigma_2$:

$$a) \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \varepsilon\sigma_1 \quad \text{e} \quad b) \bar{\omega} = \bar{\omega}_2 + \varepsilon\sigma_2. \tag{4.32}$$

Logo, o sistema (4.30), junto com a equação $\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \bar{\omega}$ formam um sistema equivalente ao (4.25). Considerando apenas os termos de $O(\varepsilon)$ e fazendo a transformação

$$d\bar{\varphi} = \bar{\omega} d\tau,$$

obtém-se o sistema (4.30) nas coordenadas físicas de amplitude e fase $\dot{y} = \varepsilon f(y)$, denominada forma padrão [25]:

$$\begin{aligned}
a) \frac{da_i}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) [Tn_i]; \quad i = 1, 2, \\
b) \frac{d\beta_i}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon\alpha_i}{\bar{\omega}} + \frac{\varepsilon}{a_i \bar{\omega}_i \bar{\omega}} \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) [Tn_i]; \quad i = 1, 2, \\
c) \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}} [Hn],
\end{aligned} \tag{4.33}$$

com Tn_i e HN referente aos novos termos

$$\begin{aligned}
Tn_1 &= (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2) \\
&\quad - \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\varphi}) \\
Tn_2 &= \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2)] \tag{4.34}
\end{aligned}$$

$$HN = \lambda - [\rho a_1 \bar{\omega}_1 \bar{\omega} \cos(\bar{\varphi} + \beta_1) + \rho a_2 \bar{\omega}_2 \bar{\omega} \cos(\bar{\varphi} + \beta_2) \text{sen}(\bar{\varphi})].$$

Pode-se observar que o sistema (4.33) determina que as equações diferenciais de a_i , β_i ($i = 1, 2$) e $\bar{\omega}$ com relação a $\bar{\varphi}$ são pequenas quantidades de ε . Conseqüentemente, a_1 , β_1 , a_2 , β_2 e $\bar{\omega}$ serão funções que variam suavemente no tempo, e sua solução será da forma (4.8), $z = y + \varepsilon w(y, \bar{\varphi})$:

$$\begin{aligned}
a) \quad a_1 &= A_1 + \varepsilon U_1(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi}); \\
b) \quad \beta_1 &= \xi_1 + \varepsilon U_2(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi}); \\
c) \quad a_2 &= A_2 + \varepsilon U_3(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi}); \\
d) \quad \beta_2 &= \xi_2 + \varepsilon U_4(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi}); \\
e) \quad \bar{\omega} &= \Omega + \varepsilon U_5(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi}), \tag{4.35}
\end{aligned}$$

quando $y = (A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega)$ são valores constantes que representam a solução estacionária do sistema (4.33) e $\varepsilon w = \varepsilon U_i(A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega, \bar{\varphi})$ são pequenas funções periódicas de $\bar{\varphi}$.

Obtém-se A_1, ξ_1, A_2, ξ_2 e Ω através das equações médias, isto é, expande-se o lado direito das equações (4.33), fazendo uso de (4.34) e calcula-se a média utilizando (4.10). Nesta integração A_1, ξ_1, A_2, ξ_2 e Ω são consideradas constantes.

As equações médias obtidas são

$$\begin{aligned}
a) \frac{dA_1}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_1\Omega} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) - \\
&\quad - \Omega^2 \text{sen } \xi_1] ; \\
b) \frac{d\xi_1}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_1\Omega A_1} [2\bar{\omega}_1 A_1 \alpha_1 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \text{sen}(\xi_1 - \xi_2) - \\
&\quad - \Omega^2 \cos \xi_1] ; \\
c) \frac{dA_2}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_2\Omega} \left[\frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(\xi_2 - \xi_1) \right] ; \\
d) \frac{d\xi_2}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_2\Omega A_2} \left[2\bar{\omega}_2 A_2 \alpha_2 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(\xi_2 - \xi_1) \right] ; \\
e) \frac{d\Omega}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\Omega} [2\lambda + \rho \bar{\omega}_1 \Omega A_1 \text{sen } \xi_1 + \rho \bar{\omega}_2 \Omega A_2 \text{sen } \xi_2] .
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Por simplificação foram adotadas as notações

$$\varepsilon \alpha_1 = (\bar{\omega}_1 - \Omega) = -\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{e} \quad \varepsilon \alpha_2 = (\bar{\omega}_2 - \Omega) = -\varepsilon \sigma_2 .$$

Para encontrar os estados estacionários A_{10} , ξ_{10} , A_{20} , ξ_{20} e Ω_0 encontra-se as posições de equilíbrio das equações médias (4.36), isto é, fazendo

$$\begin{aligned}
a) & (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10} + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_{20} \cos(\xi_{10} - \xi_{20}) - \\
& - \Omega_0^2 \text{sen } \xi_{10} = 0 \\
b) & 2\bar{\omega}_1 A_{10} \alpha_1 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_{20} \text{sen}(\xi_{10} - \xi_{20}) - \Omega_0^2 \cos \xi_{10} = 0 \\
c) & \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_{20} - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10} \cos(\xi_{20} - \xi_{10}) = 0 \\
d) & 2\bar{\omega}_2 A_{20} \alpha_2 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10} \text{sen}(\xi_{20} - \xi_{10}) = 0 \\
e) & 2\lambda + \rho \bar{\omega}_1 \Omega_0 A_{10} \text{sen } \xi_{10} + \rho \bar{\omega}_2 \Omega_0 A_{20} \text{sen } \xi_{20} = 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

De (4.37 c) e (4.37 d) obtém-se

$$\begin{aligned}
 a) \quad \cos(\xi_{20} - \xi_{10}) &= \cos(\xi_{10} - \xi_{20}) = \frac{(1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_{20}}{(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_{10}} \\
 b) \quad -\text{sen}(\xi_{20} - \xi_{10}) &= \text{sen}(\xi_{10} - \xi_{20}) = -\frac{2\alpha_2 \mu \bar{\omega}_2 A_{20}}{\eta_2 \theta^2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10}}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

De (4.37 a) obtém-se uma equação para ξ_{10} :

$$\text{sen}(\xi_{10}) = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{\bar{\omega}_1 A_{10}}{\Omega_0^2} + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \frac{(1 - p_{22}) \bar{\omega}_2^2 A_{20}^2}{(1 - p_{21}) \Omega_0^2 \bar{\omega}_1 A_{10}}, \tag{4.39}$$

De (4.37 b) obtém-se uma segunda equação para ξ_{10} :

$$\cos(\xi_{10}) = \frac{2\alpha_1}{\Omega_0^2} \bar{\omega}_1 A_{10} + \frac{2\alpha_2 \mu \bar{\omega}_2^2 A_{20}^2}{(1 - p_{21}) \eta_2 \theta^2 \Omega_0^2 \bar{\omega}_1 A_{10}}. \tag{4.40}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\text{sen}(\xi_{10} - \xi_{20}) = \text{sen}(\xi_{10}) \cos(\xi_{20}) - \cos(\xi_{10}) \text{sen}(\xi_{20})$$

e

$$\cos(\xi_{10} - \xi_{20}) = \cos(\xi_{10}) \cos(\xi_{20}) + \text{sen}(\xi_{10}) \text{sen}(\xi_{20})$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\xi_{20}) &= \frac{\bar{\omega}_2 A_{20}}{\Omega_0^2} \left[(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} + \frac{4 \alpha_1 \alpha_2 \mu}{(1 - p_{21}) \eta_2 \theta^2} \right] + \\
 &+ \frac{\bar{\omega}_2^3 A_{20}^3}{\bar{\omega}_1^2 A_{10}^2 \Omega_0^2} \left[(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \frac{(1 - p_{22})^2}{(1 - p_{21})^2} + \frac{4 \alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \eta_2^2 \theta^4} \right]
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Elevando (4.37 c) e (4.37 d) ao quadrado, utilizando as igualdades (4.38), (4.39), (4.40) e (4.41), e somando as expressões resultantes, obtém-se uma expressão dependente de A_{10} e A_{20} :

$$- \left[(1 - p_{22})^2 \frac{\theta^4}{\mu^2} \eta_2^2 + 4 \alpha_2^2 \right] \bar{\omega}_2^2 A_{20}^2 + (1 - p_{21})^2 \frac{\theta^4}{\mu^2} \eta_2^2 \bar{\omega}_1^2 A_{10}^2 = 0 \tag{4.42}$$

Repetindo o procedimento anterior para (4.37 a) e (4.37 b) obtém-se a segunda expressão dependente de A_{10} e A_{20} :

$$\begin{aligned}
 &\bar{\omega}_2^2 A_{20}^2 \left\{ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \left[1 - 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} \right] + \frac{8 \alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} \right\} - \\
 &- [4 \alpha_1^2 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})^2] \bar{\omega}_1^2 A_{10}^2 = \frac{2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})}{(1 - p_{21})^2} \left[4 \alpha_2^2 \frac{\mu^2}{\theta^4 \eta_2^2} + \right. \\
 &+ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{22})^2 \left. \right] \frac{\bar{\omega}_2^4 A_{20}^4}{\bar{\omega}_1^2 A_{10}^2} - \Omega_0^4
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Isolando $\omega_1^2 A_{10}^2$ em (4.42) e substituindo em (4.43) obtém-se o valor de A_{20}^2 :

$$\begin{aligned}
A_{20}^2 = & \frac{\Omega_0^4}{\bar{\omega}_2^2} \left\{ 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})(1 - p_{22}) \left[\frac{1}{(1 - p_{21})} + \right. \right. \\
& + \frac{(1 - p_{22})\theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} + \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})^2 (1 - p_{22})}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{21})^2} \left. \right] + \\
& \frac{4\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} - 2 \right] - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) + \frac{4\alpha_1^2}{(1 - p_{21})} + \\
& \left. + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2} \left[1 - \frac{2\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} \right] \right\}^{-1}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado em (4.42) obtém-se o valor de A_{10}^2 :

$$\begin{aligned}
A_{10}^2 = & \frac{\Omega_0^4}{\bar{\omega}_1^2} \left[1 + \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2} \right] \left\{ \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \times \right. \\
& \times \left[1 - \frac{2(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} \right] - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) + \frac{4\alpha_1^2}{(1 - p_{21})} + \\
& + 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{22}) \left[\frac{1}{(1 - p_{21})} + \right. \\
& + \frac{(1 - p_{22})\theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} + \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})^2 (1 - p_{22})}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{21})^2} \left. \right] + \\
& \left. + \frac{4\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} - 2 \right] \right\}^{-1} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

As expressões (4.45) e (4.44) representam as amplitudes estacionárias do sistema, A_1 e A_2 respectivamente, e são independentes entre si. Elas dependem apenas da frequência de rotação Ω_0 , cuja expressão pode ser obtida de (4.37 e), introduzindo as substituições (4.38), (4.39), (4.40) e (4.41):

$$\begin{aligned}
2\lambda + \rho \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})] \frac{\bar{\omega}_2^2 A_{20}^2}{\Omega_0} + \\
+ \frac{\rho}{(1 - p_{21})^2} \left[\frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2} + (1 - p_{22})^2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \right] \frac{\bar{\omega}_2^4 A_{20}^4}{\bar{\omega}_1^2 \Omega_0 A_{10}^2} + \\
+ \rho (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{\bar{\omega}_1^2 A_{10}^2}{\Omega_0} = 0
\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade (4.42) obtém-se uma expressão para a frequência de oscilações forçadas Ω_0 , dependente apenas da amplitude estacionária A_{20} :

$$\begin{aligned}
& 2\lambda + \rho \left\{ \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})] + \right. \\
& + \frac{\theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4 \alpha_2^2 \mu^2} \left[\frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2} + (1 - p_{22})^2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \right] + \\
& \left. + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \left[1 + \frac{4 \alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2} \right] \right\} \frac{\bar{\omega}_2^2}{\Omega_0} A_{20}^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Oscilações forçadas ocorrem no sistema não ideal (3.4) somente quando a frequência Ω satisfaz a equação (4.46). Então, esta frequência depende da característica da fonte de energia, representada na equação por 2λ , e da amplitude de oscilação da segunda coordenada A_2 . Essa dependência da frequência com relação a amplitude é uma característica de sistemas com fonte de energia não ideal.

A equação (4.46) pode ter mais de uma raiz correspondente ao valor estacionário de Ω . Separando a equação (4.46) em duas partes, sendo a primeira $L(\Omega) = 2\lambda$, e o restante da equação representado por $S(\Omega)$, é possível traçar um gráfico de $S(\Omega)$, $L(\Omega) \times \Omega$. $L(\Omega)$ é a curva característica do motor e $S(\Omega)$ pode ser interpretada como o momento da força de resistência total do sistema [25]. Os pontos de interseção da curva característica com a curva de ressonância S definem as raízes da equação (4.46), e portanto, os valores estacionários de Ω . Cada valor estacionário de Ω por sua vez, define para cada coordenada do sistema uma amplitude e uma fase constantes, as quais podem ser determinadas pelas expressões (4.45), (4.44), (4.39), (4.40) e (4.41). Visto que é possível considerar uma família de curvas características, e que algumas dessas curvas podem interceptar a curva de ressonância em mais de um ponto, conclui-se que a solução analítica aproximada do problema na região de ressonância não é única, e depende da definição da frequência de excitação do sistema.

Quando a curva característica intercepta a curva de ressonância em mais de um ponto, sendo um deles o ponto onde ela atinge o seu valor máximo (pico de ressonância), ocorre uma mudança brusca de estabilidade, definindo uma região não realizável pela curva de ressonância. Esta região é definida como região instável das oscilações estacionárias, e o fenômeno associado é denominado fenômeno do salto ("jump"). Esta também é uma característica intrínseca a sistemas não ideais.

Para aumentar a precisão da solução, usando (4.35), é preciso encontrar as funções periódicas $\varepsilon w = \varepsilon U_i(\bar{\varphi}, \Omega, A_1, \xi_1, A_2, \xi_2)$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Seguindo o método proposto por Kononenko [25], substitui-se $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \omega$ por $A_1, \xi_1, A_2, \xi_2, \Omega$ respectivamente nas equações (4.33), e expande-se o lado direito das equações (4.36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a) \frac{dA_1}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_1 \Omega} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) - \\
&- \Omega^2 \text{sen } \xi_1 - \{ \Omega^2 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) + \\
&(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \}]; \\
b) \frac{d\xi_1}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2A_1 \bar{\omega}_1 \Omega} [2\bar{\omega}_1 A_1 \alpha_1 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \text{sen}(\xi_1 - \xi_2) - \\
&- \Omega^2 \cos \xi_1 - \{ \Omega^2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) + \\
&+(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \}]; \\
c) \frac{dA_2}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_2 \Omega} \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 + (1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(\xi_2 - \xi_1) - \\
&\{(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_2)\}]; \\
d) \frac{d\xi_2}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon \alpha_2}{\Omega} - \frac{\varepsilon \theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) [\bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(\xi_1 - \xi_2) + \\
&\{(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_2)\}]; \\
e) \frac{d\Omega}{d\bar{\varphi}} &= \frac{\varepsilon}{2\Omega} [2\lambda - \rho \bar{\omega}_1 \Omega A_1 \text{sen } \xi_1 - \rho \bar{\omega}_2 \Omega A_2 \text{sen } \xi_2 - \\
&\rho \{ \bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_2) \}].
\end{aligned} \tag{4.47}$$

As equações (4.48) apresentam termos constantes e termos harmônicos em $\bar{\varphi}$ (termos entre chaves). Integrando esses termos com relação a $\bar{\varphi}$ obtém-se as funções $\varepsilon U_i(\bar{\varphi}, \Omega, A_1, \xi_1, A_2, \xi_2)$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

$$\begin{aligned}
a) \varepsilon U_1(y) &= \frac{\varepsilon}{4 \bar{\omega}_1 \Omega} \left[\Omega^2 \cos(2 \bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \operatorname{sen}(2 \bar{\varphi} + 2 \xi_1) - \right. \\
&\quad \left. (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \operatorname{sen}(2 \bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \right] ; \\
b) \varepsilon U_2(y) &= \frac{\varepsilon}{4 \bar{\omega}_1 A_1 \Omega} \left[-(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(2 \bar{\varphi} + 2 \xi_1) - \right. \\
&\quad \left. - \Omega^2 \operatorname{sen}(2 \bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2 \bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \right] ; \\
c) \varepsilon U_3(y) &= -\frac{\varepsilon \theta^2 \eta_2}{4 \mu \bar{\omega}_2 \Omega} \left[(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \operatorname{sen}(2 \bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2 \bar{\varphi} + 2 \xi_2) \right] ; \\
d) \varepsilon U_4(y) &= -\frac{\varepsilon \theta^2 \eta_2}{4 \mu A_2 \bar{\omega}_2 \Omega} \left[(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(2 \bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + \right. \\
&\quad \left. (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2 \bar{\varphi} + 2 \xi_2) \right] ; \\
e) \varepsilon U_5(y) &= \frac{\rho}{4} \left[\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2 \bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2 \bar{\varphi} + \xi_2) \right] ; \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente as equações (4.35) se tornam

$$\begin{aligned}
a) \ a_1 &= A_{10} + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1\Omega} \left[\Omega^2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) - \right. \\
&\quad \left. (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \right] ; \\
b) \ \beta_1 &= \xi_{10} + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1 A_1 \Omega} \left[-(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) - \right. \\
&\quad \left. -\Omega^2 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) \right] ; \\
c) \ a_2 &= A_{20} - \frac{\varepsilon \theta^2 \eta_2}{4\mu \bar{\omega}_2 \Omega} \left[(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \text{sen}(2\bar{\varphi} + 2\xi_2) \right] ; \\
d) \ \beta_2 &= \xi_{20} - \frac{\varepsilon \theta^2 \eta_2}{4\mu A_2 \bar{\omega}_2 \Omega} \left[(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_2) \right] ; \\
e) \ \bar{\omega} &= \Omega_0 + \frac{\varepsilon \rho}{4} \left[\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_2) \right] .
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Voltando às variáveis iniciais v_1 , \dot{v}_1 , v_2 e \dot{v}_2 , dadas por (4.3), obtém-se para os estados estacionários do movimento:

$$\begin{aligned}
v_1 &= A_{10} \cos(\bar{\varphi} + \xi_1) + \frac{\varepsilon}{8\bar{\omega}_1\Omega} \left[\Omega^2 \cos(3\bar{\varphi} + 2\xi_1) - \right. \\
&\quad \left. -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \{ \text{sen}(3\bar{\varphi} + 3\xi_1) + \text{sen}(\bar{\varphi} + \xi_1) \} + \Omega^2 \cos(\bar{\varphi}) - \right. \\
&\quad \left. -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \{ \text{sen}(3\bar{\varphi} + 2\xi_1 + \xi_2) + \text{sen}(\bar{\varphi} + \xi_2) \} \right] ; \\
v_2 &= A_{20} \cos(\bar{\varphi} + \xi_2) - \frac{\varepsilon \theta^2 \eta_2}{8\mu \bar{\omega}_2 \Omega} \left[(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \{ \text{sen}(3\bar{\varphi} + \xi_1 + 2\xi_2) + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(\bar{\varphi} + \xi_1) \} + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \{ \text{sen}(3\bar{\varphi} + 3\xi_2) + \text{sen}(\bar{\varphi} + \xi_2) \} \right] .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A dependência do ângulo $\bar{\varphi}$ com relação a t , devido ao movimento do motor, pode ser dada pela equação (4.49 e)

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \Omega_0 + \frac{\varepsilon \rho}{4} \left[\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_2) \right] , \tag{4.51}$$

sendo Ω , A_1 , ξ_1 , A_2 , ξ_2 considerados constantes. Integrando a equação (4.51) em τ e aplicando-se um esquema de sucessivas aproximações para esta equação, obtém-se

$$\bar{\varphi} = \Omega_0 \tau + \frac{\varepsilon \rho}{8} [\bar{\omega}_1 A_1 \text{sen}(2\Omega\tau + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \text{sen}(2\Omega\tau + \xi_2)] . \quad (4.52)$$

Com as mesmas aproximações, (4.51) se torna

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \Omega_0 + \frac{\varepsilon \rho}{4} [\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\Omega + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\Omega\tau + \xi_2)] , \quad (4.53)$$

Logo, as equações (4.50) e (4.52) representam a solução analítica aproximada do sistema dinâmico (4.25). Para obter a solução do sistema original adimensional basta fazer

$$\chi_1 = v_1 + v_2 \quad \text{e} \quad \chi_2 = p_{21}v_1 + p_{22}v_2.$$

Aplicando a solução (4.52) em (4.50), obtém-se

$$\begin{aligned} \chi_1 &= A_{10} \cos(\Omega\tau + \xi_1) + A_{20} \cos(\Omega\tau + \xi_2) + \frac{\varepsilon}{8\Omega} \left[\frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1} \cos(3\Omega\tau + 2\xi_1) - \right. \\ &\quad - A_1(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 3\xi_1) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_1) \} + \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1} \cos(\Omega\tau) - \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}_2 A_2}{\bar{\omega}_1} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 2\xi_1 + \xi_2) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_2) \} \\ &\quad - \frac{\theta^2 \eta_2}{\mu \bar{\omega}_2 \Omega} [(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \{ \text{sen}(3\Omega\tau + \xi_1 + 2\xi_2) + \\ &\quad + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_1) \} + (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 3\xi_2) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_2) \}]] ; \\ \chi_2 &= p_{21} A_{10} \cos(\Omega\tau + \xi_1) + p_{22} A_{20} \cos(\Omega\tau + \xi_2) + \frac{\varepsilon p_{21}}{8\Omega} \left[\frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1} \cos(3\Omega\tau + 2\xi_1) - \right. \\ &\quad - A_1(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 3\xi_1) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_1) \} + \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1} \cos(\Omega\tau) - \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}_2 A_2}{\bar{\omega}_1} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 2\xi_1 + \xi_2) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_2) \} \\ &\quad - \frac{\theta^2 \eta_2 p_{22}}{\mu \bar{\omega}_2 \Omega} [(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \{ \text{sen}(3\Omega\tau + \xi_1 + 2\xi_2) + \\ &\quad + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_1) \} + (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \{ \text{sen}(3\Omega\tau + 3\xi_2) + \text{sen}(\Omega\tau + \xi_2) \}]] ; \end{aligned} \quad (4.54)$$

sendo p_{21} e p_{22} os elementos da segunda linha da matriz (4.25). As propriedades característica da solução analítica obtida são a presença de harmônicos de 3Ω nas expressões (4.50) do movimento

oscilatório do sistema e a presença de pequenos harmônicos de 2Ω nas expressões (4.51) e (4.52), que representam a velocidade angular e a coordenada angular do motor, respectivamente.

Pela análise de estabilidade da solução obtida pode-se obter o fenômeno do salto e até mesmo bifurcações, com a aplicação do teorema de Sotomayor (Sotomayor, 1986) ou com critérios de estabilidade tais como o critério de Routh-Hurwitz (R-H). Quando examina-se oscilações forçadas de um sistema não ideal uma série de fenômenos podem ser observados, tais como: o fenômeno do salto na curva de ressonância; a presença de condições instáveis de oscilações estacionárias na região de ressonância; a dependência dessas condições com relação ao sentido da variação de Ω . Outra característica intrínseca a esses sistemas é a presença de harmônicos de 3Ω e 2Ω nas expressões do movimento oscilatório do sistema, da velocidade angular e da coordenada angular do motor. Esta propriedade foi observada na solução analítica aproximada, obtida neste trabalho através do método da média. O critério R-H pode indicar as condições paramétricas em que ocorrem condições instáveis de oscilações estacionárias na região de ressonância. O fenômeno do salto pode ser observado através das simulações numéricas das equações médias do sistema.

É importante salientar que a solução obtida acima é a solução analítica aproximada para as oscilações estacionárias do sistema (3.4). Para obter a solução não estacionária é necessário realizar simulações numéricas do sistema médio (4.36), considerando como condições iniciais a solução estacionária obtida analiticamente. A passagem pela ressonância é um processo não estacionário [25]. Isso significa que o comportamento do sistema durante a passagem pela ressonância, a partir de certa condição inicial, será aproximadamente constante, e terá oscilações próximas ao valor médio.

Observa-se que para a solução estacionária, o lado direito das equações (4.36) foram considerados iguais a zero; para o processo não estacionário devem ser considerados diferentes de zero. Portanto, A_1 , ξ_1 , A_2 , ξ_2 e Ω são funções que variam suavemente em τ , devido a estrutura das equações (4.36). Então, a primeira e a terceira equações de (4.36) descrevem a variação da amplitude de oscilação das variáveis χ_1 e χ_2 ; a segunda e a quarta equações de (4.36) descrevem a variação das fases iniciais do movimento; e a última equação de (4.36) descreve a variação da frequência Ω (o valor médio da velocidade angular do rotor em um período).

O passo inicial para essa simulação é escolher os parâmetros físicos do sistema e uma característica particular do motor. Em seguida, calcula-se a solução estacionária correspondente. A escolha de um dos pontos de intersecção da curva característica com a curva de ressonância $S(\Omega)$, determinará o processo estacionário. Além disso, o valor inicial de Ω deve estar dentro da região de ressonância. Para isso, considera-se que os parâmetros de sintonia são pequenos, de forma que a frequência de excitação esteja suficientemente próxima das frequências naturais. Integra-se as equações (4.36) utilizando um integrador numérico e obtém-se então o movimento não estacionário.

Kononenko [25] menciona que nesta simulação evidencia-se uma forte interação entre a aceleração angular da fonte de excitação e a amplitude das oscilações, de maneira que quando

uma destas variáveis cresce, a outra decresce bruscamente. O valor mínimo da aceleração angular, ocorre quando a amplitude atinge o seu valor máximo.

4.2.2 Série de Fourier

Segundo Nayfeh [29], mediar as equações (4.30) equivale a expandi-las em série de Fourier da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \dot{a}_i &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} \text{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) \left[T_{i0}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} Tc_{in}(z) \cos(n\bar{\varphi} + n\beta_i) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} Ts_{in}(z) \text{sen}(n\bar{\varphi} + n\beta_i) \right], \quad i = 1, 2; \\
 b) \quad a_i \dot{\beta}_i &= (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}) \frac{a_i}{\bar{\omega}} + \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) \left[T_{i0}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} Tc_{in}(z) \cos(n\bar{\varphi} + n\beta_i) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} Ts_{in}(z) \text{sen}(n\bar{\varphi} + n\beta_i) \right], \quad i = 1, 2; \\
 c) \quad \dot{\bar{\omega}} &= \varepsilon \left[\lambda + H_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} Hc_n(z) \cos(n\bar{\varphi}) + \sum_{n=1}^{\infty} Hs_n(z) \text{sen}(n\bar{\varphi}) \right]; \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

sendo $z = (a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \bar{\omega})$,

$$\begin{aligned}
 T_{i0}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_i d\bar{\varphi}, \quad i = 1, 2; \\
 Tc_{in}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_i \cos(n\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad i = 1, 2; \\
 Ts_{in}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_i \text{sen}(n\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad i = 1, 2; \\
 H_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H d\bar{\varphi}; \\
 Hc_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H \cos(n\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}; \\
 Hs_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H \text{sen}(n\bar{\varphi}) d\bar{\varphi};
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2) - \\
&\quad - \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\varphi}) - \dot{\bar{\omega}} \operatorname{sen}(\bar{\varphi}); \\
T_2 &= \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_1) + \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_2); \\
H &= -\frac{\rho \Omega}{2} a_1 \bar{\omega}_1 [\operatorname{sen}(2\bar{\varphi} + \beta_1) - \operatorname{sen}(\beta_1)] - \frac{\rho \Omega}{2} a_2 \bar{\omega}_2 [\operatorname{sen}(2\bar{\varphi} + \beta_2) - \operatorname{sen}(\beta_2)].
\end{aligned}$$

Observa-se que as expressões de a_i e β_i tornam-se

$$\begin{aligned}
a) \quad \dot{a}_i &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} [T_{i0}(z) \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + \beta_i) + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T c_{in}(z) \{ \operatorname{sen}((n+1)\bar{\varphi} + (n+1)\beta_i) + \operatorname{sen}((n-1)\bar{\varphi} + (n-1)\beta_i) \} + \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T s_{in}(z) \{ \cos((n-1)\bar{\varphi} + (n-1)\beta_i) - \cos((n+1)\bar{\varphi} + (n+1)\beta_i) \} \right], \\
&\quad (i = 1, 2) \\
b) \quad a_i \dot{\beta}_i &= (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}) a_i + \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} [T_{i0}(z) \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T c_{in}(z) \{ \cos((n+1)\bar{\varphi} + (n+1)\beta_i) + \cos((n-1)\bar{\varphi} + (n-1)\beta_i) \} + \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T s_{in}(z) \{ \operatorname{sen}((n+1)\bar{\varphi} + (n+1)\beta_i) + \operatorname{sen}((n-1)\bar{\varphi} + (n-1)\beta_i) \} \right]. \\
&\quad (i = 1, 2) \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Preservando apenas os termos até $n = 1$, para uma primeira aproximação toma-se apenas a parte que varia suavemente em $\bar{\varphi}$, ou seja, o termo independente de $\bar{\varphi}$. Isso equivale a calcular a média pois os termos da série que são periódicos em $\bar{\varphi}$ tornam-se zero devido a ortogonalidade

da série de Fourier. Logo, as equações médias são:

$$\begin{aligned}
a) \quad \dot{a}_i &= \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_i\bar{\omega}} T s_{i1}(z), & i &= 1, 2; \\
b) \quad a_i \dot{\beta}_i &= (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}) \frac{a_i}{\bar{\omega}} + \frac{\varepsilon}{2\bar{\omega}_i\bar{\omega}} T c_{i1}(z), & i &= 1, 2; \\
c) \quad \dot{\bar{\omega}} &= \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}} [\lambda + H_0(z)];
\end{aligned} \tag{4.58}$$

sendo

$$\begin{aligned}
T s_{11} &= \frac{1}{2} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \cos(\beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \cos(\beta_2)]; \\
T c_{11} &= \frac{1}{2} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\beta_2) - \bar{\omega}^2]; \\
T s_{21} &= \frac{\theta^2}{2\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \cos(\beta_1) + (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \cos(\beta_2)]; \\
T c_{21} &= \frac{\theta^2}{2\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\beta_1) + (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\beta_2)]; \\
H_0 &= \frac{\theta \bar{\omega}}{2} [a_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\beta_1) + a_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\beta_2)].
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Assumindo que a solução analítica aproximada do sistema dinâmico (4.58) será da forma (4.35), pode-se fazer uma mudança de variáveis e escrever as equações médias da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a) \quad \dot{A}_1 &= \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1\Omega} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) A_1 \bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) A_2 \bar{\omega}_2 \cos(\xi_2)]; \\
b) \quad \dot{\xi}_1 &= \frac{\varepsilon}{\Omega} (\bar{\omega}_1 - \Omega) + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1\Omega A_1} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \\
&\quad + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2) - \Omega^2]; \\
c) \quad \dot{A}_2 &= \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_2\Omega} \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) A_1 \bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + (1 - p_{22}) A_2 \bar{\omega}_2 \cos(\xi_2)]; \\
d) \quad \dot{\xi}_2 &= \frac{\varepsilon}{\Omega} (\bar{\omega}_2 - \Omega) + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_2\Omega A_2} \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \\
&\quad + (1 - p_{22}) A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2)]; \\
e) \quad \dot{\Omega} &= \frac{\varepsilon}{2\Omega} [2\lambda(\Omega) + \rho\Omega A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \rho\Omega A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2)].
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Para encontrar a solução de equilíbrio de (4.60), basta considerá-las iguais a zero:

$$\begin{aligned}
a) \quad & (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})A_1 \bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})A_2 \bar{\omega}_2 \cos(\xi_2) = 0; \\
b) \quad & (\bar{\omega}_1 - \Omega)4\bar{\omega}_1 \Omega A_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \\
& (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2) - \Omega^2 = 0; \\
c) \quad & (1 - p_{21})A_1 \bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + (1 - p_{22})A_2 \bar{\omega}_2 \cos(\xi_2) = 0; \\
d) \quad & \frac{\mu}{\theta^2 \eta_2} (\bar{\omega}_2 - \Omega)4\bar{\omega}_2 \Omega A_2 + (1 - p_{21})A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + (1 - p_{22})A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2); \\
e) \quad & 2\lambda(\Omega) + \rho \Omega A_1 \bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \rho \Omega A_2 \bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

De (4.61 a) obtém-se

$$\cos(\xi_1) = \frac{-(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1} \cos(\xi_2). \tag{4.62}$$

De (4.61 b) obtém-se

$$\text{sen}(\xi_1) = \frac{\Omega^2 - 4(\bar{\omega}_1 - \Omega)\bar{\omega}_1 A_1}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1} - \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})A_1 \bar{\omega}_1} \text{sen}(\xi_2). \tag{4.63}$$

Fazendo $\text{sen}^2(\xi_1) + \cos^2(\xi_1) = 1$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\xi_2) &= \\
&= \frac{[\Omega^2 - 4(\bar{\omega}_1 - \Omega)\bar{\omega}_1 A_1]^2 - [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1]^2 + [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2]^2}{2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 [\Omega^2 - 4(\bar{\omega}_1 - \Omega)\bar{\omega}_1 A_1]}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Repetindo o procedimento acima para (4.61 c) e (4.61 d) obtém-se

$$\text{sen}(\xi_1) = \frac{[(1 - p_{22})\theta^2 \eta_2 \bar{\omega}_2 A_2]^2 - [(1 - p_{21})\theta^2 \eta_2 \bar{\omega}_1 A_1]^2 - [(\bar{\omega}_2 - \Omega)\mu \bar{\omega}_2 A_2]^2}{8(1 - p_{21})(\bar{\omega}_2 - \Omega)\bar{\omega}_1 A_1 \bar{\omega}_2 A_2}. \tag{4.65}$$

Substituindo as equações (4.64) e (4.65) em (4.61 e) obtém-se uma função

$$\mathfrak{S}(A_1, A_2, \Omega) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(A_1, A_2, \Omega) &= 2(\alpha - \beta\Omega) + \\
\rho\Omega &\left[\frac{[(1 - p_{22})\theta^2\eta_2\bar{\omega}_2A_2]^2 - [(1 - p_{21})\theta^2\eta_2\bar{\omega}_1A_1]^2 - [4(\bar{\omega}_2 - \Omega)\mu\bar{\omega}_2A_2]^2}{8(1 - p_{21})(\bar{\omega}_2 - \Omega)\bar{\omega}_2A_2} + \right. \\
&\left. \frac{[\Omega^2 - 4(\bar{\omega}_1 - \Omega)\bar{\omega}_1A_1]^2 - [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2p_{21})\bar{\omega}_1A_1]^2 + [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2p_{22})\bar{\omega}_2A_2]^2}{2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2p_{22})[\Omega^2 - 4(\bar{\omega}_1 - \Omega)\bar{\omega}_1A_1]} \right]
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Tal função fornece a relação entre as amplitudes das coordenadas originais χ_1 e χ_2 e a frequência de rotação do motor. Atribuindo valores numéricos para os seus parâmetros é possível fazer uma curva tridimensional relacionando A_1 , A_2 e Ω .

Pode-se observar que não é possível encontrar as amplitudes estacionárias do movimento de (4.60) devido a dependência que existe entre as equações. Propõe-se então uma outra análise para as equações (4.60).

4.2.3 A estabilidade dos movimentos estacionários

O motivo pelo qual se interessa pela solução estacionária das equações médias é que pode-se fazer o estudo da estabilidade dessas equações e, segundo o teorema de Hartman-Grobman (discutido no Capítulo 2) esta estabilidade é topologicamente equivalente à estabilidade do sistema original. Como foi visto na seção anterior, é preciso fazer algumas considerações sobre as equações (4.61) para que tornar possível este estudo.

Considera-se as equações médias (4.60) sob a variável independente τ e por simplificação adota-se $l_1 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2p_{21})$ e $l_2 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2p_{22})$:

$$\begin{aligned}
a) \quad \dot{A}_1 &= \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1} [l_1A_1\bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + l_2A_2\bar{\omega}_2 \cos(\xi_2)] ; \\
b) \quad \dot{\xi}_1 &= \varepsilon(\bar{\omega}_1 - \Omega) + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_1A_1} [l_1A_1\bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + l_2A_2\bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2) - \Omega^2] ; \\
c) \quad \dot{A}_2 &= \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_2} \frac{\theta^2\eta_2}{\mu} [(1 - p_{21})A_1\bar{\omega}_1 \cos(\xi_1) + (1 - p_{22})A_2\bar{\omega}_2 \cos(\xi_2)] ; \\
d) \quad \dot{\xi}_2 &= \varepsilon(\bar{\omega}_2 - \Omega) + \frac{\varepsilon}{4\bar{\omega}_2A_2} \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{21})A_1\bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + (1 - p_{22})A_2\bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2)] ; \\
e) \quad \dot{\Omega} &= \frac{\varepsilon}{2} [2(\alpha - \beta\Omega) + \rho\Omega A_1\bar{\omega}_1 \text{sen}(\xi_1) + \rho\Omega A_2\bar{\omega}_2 \text{sen}(\xi_2)] .
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Pode-se observar de (4.67 a) e (4.67 c) que $\cos \xi_1 = 0$ e $\cos \xi_2 = 0$ são coordenadas do ponto de equilíbrio de (4.67). Então, supõe-se $\xi_1 = \frac{k\pi}{2}$ e $\xi_2 = \frac{n\pi}{2}$ e analisa-se dois casos:

1. k e n são pares ou k e n são ímpares, ou seja, ξ_1 e ξ_2 estão em fase. Logo, pode-se dizer que $\text{sen}\xi_1 = 1$ e $\text{sen}\xi_2 = 1$;
2. k e n **não** são simultaneamente pares ou ímpares, ou seja, ξ_1 e ξ_2 não estão em fase. Logo, $\text{sen}\xi_1$ e $\text{sen}\xi_2$ tem sinais opostos e pode-se considerar $\text{sen}\xi_1 = 1$ e $\text{sen}\xi_2 = -1$.

Caso 1:

Fazendo as equações (4.67) iguais a zero e considerando ξ_1 e ξ_2 em fase obtém-se os seguintes estados estacionários:

$$A_{10} = -\frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_1} \left[\frac{4\mu}{\theta^2 \eta_2} (\bar{\omega}_2 - \Omega) + (1 - p_{21}) \right] \left[\left\{ \frac{4\mu}{\theta^2 \eta_2} (\bar{\omega}_2 - \Omega) + (1 - p_{21}) \right\} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 4(\bar{\omega}_1 - \Omega) + l_1 \right\} \frac{1}{(1 - p_{21})} - l_2 \right]^{-1}; \quad (4.68)$$

$$A_{20} = \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_2} \left[\left\{ \frac{4\mu}{\theta^2 \eta_2} (\bar{\omega}_2 - \Omega) + (1 - p_{21}) \right\} \left\{ 4(\bar{\omega}_1 - \Omega) + l_1 \right\} - l_2(1 - p_{21}) \right]^{-1}; \quad (4.69)$$

$$\Omega_0 = \frac{-2\alpha}{\rho A_1 \bar{\omega}_1 + \rho A_2 \bar{\omega}_2 - \beta}. \quad (4.70)$$

A matriz jacobiana aplicada aos pontos de equilíbrio (ou estados estacionários) (4.68), (4.69) e (4.70) neste caso é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-l_1 A_{10}}{4} & 0 & \frac{-l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{4 \bar{\omega}_1} & 0 \\ \frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{4 \bar{\omega}_1 A_{10}^2} & 0 & \frac{l_2 \bar{\omega}_2}{4 \bar{\omega}_1 A_{10}} & 0 & -1 - \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \\ 0 & -\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10}}{4 \mu \bar{\omega}_2} & 0 & -\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22}) A_{20}}{4 \mu} & 0 \\ \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{4 \mu \bar{\omega}_2 A_{20}} & 0 & -\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_{10}}{4 \mu \bar{\omega}_2 A_{20}^2} & 0 & -1 \\ \frac{\rho \bar{\omega}_1 \Omega}{2} & 0 & \frac{\rho \bar{\omega}_2 \Omega}{2} & 0 & \frac{\rho}{2} A_{ef} - \beta \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

sendo a constante $A_{ef} = \bar{\omega}_1 A_{10} + \bar{\omega}_2 A_{20}$ uma combinação linear das amplitudes estacionárias com ξ_1 e ξ_2 em fase. Observa-se que todas as propriedades referentes às oscilações estacionárias discutidos na seção anterior devem valer também para esta solução.

4.2.4 Critério R-H

O polinômio característico da matriz (4.71) é dado por

$$\lambda^5 + B_1 \lambda^4 + B_2 \lambda^3 + B_3 \lambda^2 + B_4 \lambda + B_5, \quad (4.72)$$

sendo

$$B_1 = -tr(A) = \beta - \frac{\rho}{2}(\bar{\omega}_1 A_{10} + \bar{\omega}_2 A_{20}); \quad (4.73)$$

$$B_2 = \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{16\mu} \left[l_2 + \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} - \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22}) \bar{\omega}_1 A_{10}}{\mu \bar{\omega}_2 A_{20}} \right] + \frac{l_1 (\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20})}{16 \bar{\omega}_1 A_{10}}; \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} B_3 = & -\frac{\rho}{2}(\bar{\omega}_1 A_{10} + \bar{\omega}_2 A_{20}) \left[\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{16\mu} \left(l_2 + \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} - \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22})}{\mu \bar{\omega}_2 A_{20}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{l_1 (\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20})}{16 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right] + \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_1 A_{10}}{8\mu} [l_1 \mu + \theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})] \left[1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right] - \\ & - \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2 A_{20}}{8\mu} [l_2 \mu + \theta^2 \eta_2 (1 - p_{22})]; \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$B_4 = \frac{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})}{(16\mu)^2} [l_2 (1 - p_{21}) - l_1 (1 - p_{22})] \left[\frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} + \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} \right]; \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned}
B_5 = & -\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21}) A_{10} A_{20}}{16\mu} [l_2(1 - p_{21}) - l_1(1 - p_{22})] \times \\
& \times \left[\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{16\mu A_{10} A_{20}} \left(\frac{\rho}{2} \bar{\omega}_1 A_{10} + \frac{\rho}{2} \bar{\omega}_2 A_{20} - \beta \right) \left[\frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} - \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} \right] + \right. \\
& + \frac{\rho \theta^2 \eta_2 (1 - p_{21}) \Omega_0}{8\mu A_{20}} \left(1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right) \left(1 + \frac{\bar{\omega}_1^2 A_{10}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} \right) + \\
& \left. + \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2}{8 A_{10}} \left(l_2 - \frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_1 A_{10}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.77}$$

De acordo com (2.4), a matriz de Hurwitz dos coeficientes do polinômio característico de grau 5 é dada por

$$H_5 = \begin{bmatrix} B_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & 1 & 0 \\ B_5 & B_4 & B_3 & B_2 & B_1 \\ 0 & 0 & B_5 & B_4 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

Assim, os critérios R-H de estabilidade para um sistemas de ordem 5 são:

$$\Delta_1 = \det[B_1] > 0 \implies \text{tr}(A) < 0; \tag{4.79}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_3 \\ 1 & B_2 \end{bmatrix} > 0 \implies \Delta_1 B_2 - B_3 > 0 \tag{4.80}$$

$$\implies B_2 > 0 \quad \text{e} \quad B_1 B_2 - B_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} B_1 & B_3 & B_5 \\ 1 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_1 & B_3 \end{bmatrix} > 0 \implies \Delta_2 B_3 + B_1 (B_5 - B_1 B_4) > 0 \tag{4.81}$$

$$\implies B_3 > 0 \quad \text{e} \quad B_5 - B_1 B_4 > 0;$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4 = \det \begin{bmatrix} B_1 & 1 & 0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & 1 \\ B_5 & B_4 & B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & B_5 & B_4 \end{bmatrix} > 0 \implies \\
\implies \Delta_3 B_4 - B_5 B_2 \Delta_2 - B_5 (B_5 - B_1 B_4) > 0 \\
\implies B_4 > 0 \text{ e } \Delta_3 B_4 > B_5 B_2 \Delta_2 - B_5 (B_5 - B_1 B_4); \tag{4.82}
\end{aligned}$$

$$\Delta_5 = \det [H_5] > 0 \implies B_5 \Delta_4 > 0 \implies B_5 > 0. \tag{4.83}$$

dos quais obtém-se, respectivamente as seguintes relações:

$$\beta > \frac{\rho}{2} (\bar{\omega}_1 A_{10} + \bar{\omega}_2 A_{20}); \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_1 A_{10}}{8\mu} [l_1 \mu + \theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})] \left[1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right] + \\
& + \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2 A_{20}}{8\mu} [l_2 \mu + \theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})] > 0; \tag{4.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta^2 \eta_2 A_{10} A_{20}}{16\mu} [l_2 (1 - p_{21}) - l_1 (1 - p_{22})] \left[-\frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2}{8 A_{10}} \left(l_2 - \frac{\Omega_0^2 l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_1 A_{10}} \right) - \right. \\
& \left. - \left(1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right) \left(1 + \frac{\bar{\omega}_1^2 A_{10}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} \right) \frac{\rho \theta^2 \eta_2 \Omega_0 (1 - p_{21})}{8\mu A_{20}} \right] > 0; \tag{4.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [l_2(1 - p_{21}) - l_1(1 - p_{22})] \left\{ \frac{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})}{(16\mu)^2} \left[\frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} + \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} \right] \times \right. \\
& \times \left[\frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_1 A_{10}}{8} \left(\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22})}{\mu} + l_1 \right) \left(1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2 A_{20}}{8} \left(\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{\mu} + l_2 \right) \right] - \left[\frac{l_1 (\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20})}{16 \bar{\omega}_2 A_{20}} + \right. \\
& + \left. \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{16 \mu} \left(\frac{l_2}{\bar{\omega}_2} + l_2 - \frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22}) \bar{\omega}_1 A_{10}}{\mu \bar{\omega}_2 A_{20}} \right) \right] \frac{\theta^2 \eta_2 A_{10} A_{20}}{16 \mu} \times \\
& \times \left[\left(1 + \frac{\Omega_0}{2 \bar{\omega}_1 A_{10}} \right) \left(1 + \frac{\bar{\omega}_1^2 A_{10}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} \right) \frac{\rho \theta^2 \eta_2 \Omega_0 (1 - p_{21})}{8 \mu A_{20}} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\rho \Omega_0 \bar{\omega}_2}{8 A_{10}} \left(l_2 - \frac{\Omega_0^2 - l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_1 A_{10}} \right) \right] \right\} > 0; \tag{4.87}
\end{aligned}$$

Portanto, a solução estacionária do sistema dinâmico (3.4) é estável se as condições (4.73) a (4.87) são satisfeitas. A próxima seção apresenta a aplicação do teorema de Sotomayor ao sistema dinâmico (3.4) para a condição de equilíbrio χ_1 e χ_2 em fase. Apenas as condições para a ocorrência de bifurcação sela-nó são verificadas.

4.2.5 Teorema de Sotomayor

As equações (4.61), junto às condições $\xi_1 = \frac{k\pi}{2}$ e $\xi_2 = \frac{n\pi}{2}$ em fase, formam o ponto de equilíbrio $(A_{10}, \xi_{10}, A_{20}, \xi_{20}, \Omega_0)$ do sistema (4.60). Portanto a primeira condição necessária é satisfeita.

Para satisfazer a segunda condição, basta que o coeficiente B_5 (4.77) do polinômio característico (4.72) seja nulo. A restrição em anular este termo é que a condição escolhida para efetuar esta anulação não pode anular outros autovalores; o sistema deve ter somente um autovalor simples. Assim, os termos

$$(1 - p_{21}); \quad [l_2(1 - p_{21}) - l_1(1 - p_{22})] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\Omega_0^2 + l_2 \bar{\omega}_2 A_{20}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} - \frac{l_2}{\bar{\omega}_1} \right]$$

não podem ser nulos pois anulariam o coeficiente B_4 (4.76) e o polinômio característico (4.72) teria duas raízes nulas. Esta restrição satisfaz a terceira condição necessária para o uso do teorema.

Pode-se então supor que o autovetor correspondente ao autovalor simples de (4.71) é $v^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]$ e o autovetor para o mesmo autovalor correspondente a A^T é $w^T = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5]$, satisfazendo a segunda condição necessária.

Para encontrar o autovetor v , basta encontrar a solução não trivial do sistema $Av = 0$. Para o sistema (4.60) obtém-se as seguintes coordenadas do autovetor v :

$$\begin{aligned}
v_1 = & \frac{\rho\Omega_0(l_2\bar{\omega}_2)^2}{2l_1(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})} \left(1 + \frac{1}{4\mu(\bar{\omega}_1A_{10})^2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_0}{4\bar{\omega}_1A_{10}}\right) \left[\frac{\rho\Omega_0A_1^2\bar{\omega}_1}{(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})} \times \right. \\
& \times \left. \left(1 + \frac{\Omega_0}{4\bar{\omega}_1A_{10}}\right) \left(2\bar{\omega}_1 + \frac{\theta^2\eta_2(1-p_{21})}{2\mu A_{20}}\right) + \frac{\rho}{2}(\bar{\omega}_1A_{10} + \bar{\omega}_2(\Omega_0 + A_{20})) \right. \\
& \left. - \beta\right]^{-1} + \frac{A_{20}(l_2\bar{\omega}_2)^2}{l_1\bar{\omega}_1(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})};
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$v_2 = -\frac{l_2\bar{\omega}_2A_{20}}{l_1\bar{\omega}_1A_{10}}; \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
v_3 = & \Omega + \frac{\theta^2\eta_2(1-p_{21})\bar{\omega}_1A_{10}^2}{\mu\bar{\omega}_2A_{20}(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})} \left[\left(1 + \frac{\Omega}{4\bar{\omega}_1A_{10}}\right)\Omega + \frac{(l_2\bar{\omega}_2)^2A_{20}}{4l_1(\bar{\omega}_1A_{10})^2}\right]; \\
v_4 = & 1;
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
v_5 = & \frac{\rho\Omega_0(l_2\bar{\omega}_2)^2}{2l_1(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})} \left(1 + \frac{1}{4\mu(\bar{\omega}_1A_{10})^2}\right) \left[\frac{\rho\Omega_0A_1^2\bar{\omega}_1}{(\Omega_0^2 - l_2\bar{\omega}_2A_{20})} \left(1 + \frac{\Omega_0}{4\bar{\omega}_1A_{10}}\right) \times \right. \\
& \times \left. \left(2\bar{\omega}_1 + \frac{\theta^2\eta_2(1-p_{21})}{2\mu A_{20}}\right) + \frac{\rho}{2}(\bar{\omega}_1A_{10} + \bar{\omega}_2(\Omega_0 + A_{20})) - \beta\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Da mesma forma, pode-se encontrar o autovetor w da matriz A^T fazendo $A^T w = 0$. Assim,

$$w_2 = w_3 = 1; \tag{4.92}$$

$$\tag{4.93}$$

$$w_1 = -\frac{\theta^2\eta_2(1-p_{21})\bar{\omega}_1}{\mu\bar{\omega}_2l_1}; \tag{4.94}$$

$$w_4 = \frac{4\mu\bar{\omega}_2A_{20}}{\theta^2\eta_2(1-p_{21})}; \tag{4.95}$$

$$w_5 = \frac{2}{\rho\bar{\omega}_2} \left(\frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} - \frac{\bar{\omega}_1 A_{10}}{A_{20}} \right) \quad (4.96)$$

Usualmente, diz-se que um sistema dinâmico leva a uma bifurcação se existe uma mudança qualitativa na trajetória do sistema quando um parâmetro de bifurcação é variado. Escolhendo como parâmetro de controle do sistema (4.60) a constante β , parâmetro que depende da potência do motor obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\Omega]^T \quad (4.97)$$

Então,

$$w^T \frac{\partial f}{\partial \beta}(x_0, \beta_0) = -\frac{2}{\rho\bar{\omega}_2} \left(\frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} - \frac{A_{10}\bar{\omega}_1}{A_{20}} \right) \Omega_0 \quad (4.98)$$

Existem apenas duas situações em que $w^T \frac{\partial f}{\partial \beta}(x_0, m_0)$ se anula:

$$\left(\frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} - \frac{A_{10}\bar{\omega}_1}{A_{20}} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_0 = 0.$$

Na primeira situação, $\frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} = \frac{A_{10}\bar{\omega}_1}{A_{20}}$.

Logo,

$$A_{20} = \frac{4\bar{\omega}_1^2 A_{10}^2}{l_2\bar{\omega}_2}. \quad (4.99)$$

Então, para a existência de bifurcação do tipo sela-nó é necessário que $\Omega_0 \neq 0$, a igualdade (4.99) não aconteça, e que $w^T D_x^2 f(x_0, \beta_0) \cdot (v, v) \neq 0$, sendo

$$\begin{aligned} w^T D_x^2 f(x_0, \beta_0) \cdot (v, v) &= \frac{l_2\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})}{4\mu l_1} v_4(v_1 + 2v_3) + \frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}^2} v_1(A_{20}v_1 - v_3) - \\ &- \frac{\Omega_0}{2\bar{\omega}_1 A_{10}^2} v_1 \left(\frac{\Omega_0}{2} v_1 - v_5 \right) - \frac{l_1}{4} v_2^2 - \frac{l_2\bar{\omega}_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} (v_1 v_3 - A_{20}v_4^2) - 4\bar{\omega}_2 A_{20} v_4^2 - \\ &\frac{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{22})}{2\mu} v_4 v_3 - \frac{\bar{\omega}_2 + 1}{A_{20}} v_1 v_3 + \frac{2\bar{\omega}_1 A_{10}}{A_{20}^2} v_3^2 + \frac{v_5}{2\bar{\omega}_1 A_{10}} (\Omega_0 v_1 - v_5) - \\ &- \left(\frac{l_2}{4\bar{\omega}_1 A_{10}} - \frac{\bar{\omega}_1 A_{10}}{\bar{\omega}_2 A_{20}} \right) (2\bar{\omega}_1 v_1 v_5 - \bar{\omega}_1 A_{10} \Omega_0 v_2^2 + 2\bar{\omega}_1 v_3 v_5 - \bar{\omega}_2 \Omega_0 v_4^2). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Nayfeh e Balachandran [31] mostram que quando ocorre bifurcação do tipo sela-nó em um sistema é possível observar o fenômeno do salto no mesmo. O salto representa uma descontinuidade na evolução dos estados do sistema (fluxo), para determinado valor do parâmetro de

controle, denominada mudança catastrófica. Ou seja, a bifurcação sela-nó é classificada como uma bifurcação catastrófica.

O próximo passo para a continuação deste trabalho é simular numericamente os resultados obtidos neste capítulo, aplicando as restrições obtidas pelo critério R-H e pelo teorema de Sotomayor para a verificação dos resultados.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

O objetivo deste trabalho é investigar as propriedades dinâmicas de um sistema não ideal constituído por duas massas, sustentadas por molas e amortecedores, sendo excitado por um motor elétrico de corrente contínua que está acoplado a uma das massas. Embora a idéia inicial fosse realizar uma análise estritamente numérica, observou-se que a complexidade do sistema, devido ao grande número de parâmetros que influenciam o comportamento do sistema de dois graus de liberdade, exigia um estudo analítico preliminar que pudesse propiciar um estudo das regiões de estabilidade e também de perda da estabilidade. Encontrar a solução numérica tem a desvantagem de que esta solução é apenas particular, para alguns valores paramétricos pré-determinados. Por esse motivo interessa-se também por uma solução analítica, a qual permitirá uma vasta variabilidade dos parâmetros físicos do problema e, quando aplicado um estudo de estabilidade sobre ela, permitirá que essa escolha seja conveniente ao estudo realizado. Neste capítulo serão explicitados os principais resultados obtidos neste trabalho de mestrado, tanto os resultados numéricos quanto os resultados analíticos, e as inúmeras perspectivas futuras para a continuação do trabalho.

5.1 Conclusões

5.1.1 Soluções numéricas

As oscilações do sistema (3.4), mostram-se regulares e irregulares, dependendo do valor da frequência. Quando o torque é considerado com modelo linear as oscilações são regulares, sofrendo apenas um aumento de amplitude durante a passagem pela ressonância, retomando seu estado normal depois. A regularidade do movimento também é evidenciada nas figuras dos diagramas de secção de Poincaré. Observa-se que as curvas do expoente máximo de Lyapunov, para as três frequências mostradas, convergem para o valor zero.

Quando considera-se o modelo não linear para o torque, aparecem movimentos irregulares durante a passagem pela ressonância, os quais permanecem irregulares. Antes da passagem o movimento é regular. O espectro de frequências também torna-se irregular durante a passagem pela ressonância; as curvas dos expoentes máximos de Lyapunov, quando o valor adotado para a frequência é o valor da ressonância, mostram a convergência para um valor positivo. A secção de Poincaré adotada é a mesma para o caso de torque linear.

Para a ressonância 1:2, foram estudados dois conjuntos de parâmetros diferentes. Ambos manifestam o efeito Sommerfeld quando passam pela ressonância; o primeiro, quando a frequência de rotação entra em ressonância com a segunda frequência natural; o segundo, quando entra em ressonância com a primeira frequência natural. Foi observado que as oscilações se tornam mais irregulares a medida que a frequência $\bar{\omega}$ aumenta. Além disso, após a ocorrência do efeito Sommerfeld as oscilações se tornam sempre irregulares, sugerindo uma interferência deste efeito se propagando às outras frequências. No caso da ressonância 1:2 B, as vibrações tornam-se muito irregulares, e apresenta um fenômeno de salto para $\bar{\omega} = 1.15$, logo após o valor de frequência para o qual ocorre o efeito Sommerfeld nesta ressonância.

5.1.2 Solução analítica aproximada

A técnica de perturbação utilizada foi o método da média proposto por Krylov e Bogoliubov. Duas versões distintas do método foram encontradas nas pesquisas bibliográficas, embora em ambas o método seja atribuído aos mesmos autores. A grande vantagem do método da média é que em seu espaço de estados, ele preserva a topologia do sistema dinâmico original, permitindo assim obter propriedades do sistema de interesse a partir de um sistema mais simplificado.

Para a primeira técnica adotou-se o livro de Kononenko [25]. Kononenko apresenta a aplicação do método da média em alguns sistemas mecânicos e, a partir da sua solução aplica o estudo de estabilidade através do critério R-H. Na solução analítica aproximada encontrada por esta técnica, que baseia-se no teorema da média, foram observadas algumas propriedades intrínsecas a sistemas não ideais. Foi constatada a presença de harmônicos de frequência 3Ω nas expressões do movimento oscilatório do sistema, e harmônicos de frequência 2Ω nas expressões da velocidade angular e da coordenada angular do motor.

Outra propriedade característica de sistemas com fonte de energia não ideal que foi observada neste trabalho, foi dependência da frequência de excitação Ω com relação a amplitude de oscilação. Neste caso, a dependência acontece apenas com a amplitude referente à coordenada χ_2 do sistema. Além disso, observou-se a dependência da solução estacionária de Ω com relação à característica da fonte de energia, representada na equação por 2λ . Essa característica pode ser considerada linear ou exponencial. Neste trabalho, ela é considerada linear; uma família de retas que interceptam a curva de ressonância, definindo valores constantes para Ω , as quais definem a solução estacionária. Isso acontece porque as amplitudes de oscilação e suas respectivas fases são dependentes de Ω , e portanto, para cada valor desta frequência, existe uma solução

estacionária correspondente. Assim, destaca-se que a solução analítica aproximada encontrada não é única, mas sim depende da velocidade angular do motor.

A segunda técnica utilizada foi inspirada no trabalho de Nayfeh e colaboradores [29], [32] e [30]. Este porém não apresenta estudos de estabilidade analítico; apresenta apenas resultados de integrações numéricas das equações médias de primeira ordem obtidas. Foram aplicadas técnicas para avaliar a estabilidade do sistema dinâmico não ideal estudado. Pelo critério R-H obteve-se condições de estabilidade e (instabilidade) paramétricas do sistema não ideal estudado. Utilizando estas condições em integrações numéricas é possível observar os fenômenos intrínsecos a sistemas não ideais, tais como o fenômeno do salto. A aplicação do teorema de Sotomayor nestas equações médias estabelece condições para a existência de bifurcações estáticas tais como bifurcação sela-nó, transcritical, ou por quebra de simetria transversal no sistema dinâmico estudado. Essas condições são baseadas no sinal de derivadas direcionais do sistema médio. Apenas a relação para a existência de bifurcações sela-nó foram obtidas. Por serem analíticas é possível uma varredura dos parâmetros físicos do problema não ideal em que pode-se observar esta bifurcação graficamente. O interesse especial pela bifurcação sela-nó é que este tipo de bifurcação leva ao fenômeno do salto quando adota-se a frequência de rotação do sistema como parâmetro de controle [31], já que trata-se de uma bifurcação catastrófica (ou descontínua).

Embora trabalhoso, os cálculos e algebrismos envolvidos em ambos os métodos são simples, envolvendo conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral, e alguns conceitos de Álgebra Linear. A literatura concernente a este método não é muito vasta, porém apresenta resultados satisfatórios quanto a sua aplicação.

5.2 Perspectivas Futuras

5.2.1 Prosseguir com o estudo do sistema médio

Algumas características intrínsecas a sistemas com fonte de energia não ideal foram observadas na solução analítica obtida neste trabalho, tais como a presença de harmônicos de frequências 3Ω e 2Ω nas expressões do movimento oscilatório do sistema, da velocidade angular e da coordenada angular do motor. Porém, outras propriedades podem ser observadas: o fenômeno do salto na curva de ressonância; a presença de condições instáveis de oscilações estacionárias na região de ressonância; a dependência dessas condições com relação ao sentido de variação de Ω . Estas características podem ser observadas através da integração numérica das equações médias, e deve ser o passo seguinte ao estudo realizado nesta dissertação. Essas integrações permitirão que se observe as propriedades do sistema não ideal em oscilações não estacionárias na região de ressonância.

A segunda técnica utilizada para a obtenção das equações médias leva a uma solução apenas de primeira ordem, ou seja, a solução estacionária do sistema médio. Tal solução é equivalente

à solução do sistema não perturbado. É possível encontrar soluções de mais alta ordem para este sistema. Nayfeh [29] propõe o uso do método da média generalizado. A aplicação deste método é imediata a partir da solução já obtida. Pode-se aplicar este método também na primeira solução obtida, que é baseada no teorema da média.

5.2.2 Análise numérica em condições ressonantes

As análises numéricas que foram feitas nas regiões de ressonância deste trabalho devem ser extendidas a outras ressonâncias, agora considerando os resultados de estabilidade obtidos neste trabalho através do critério R-H, proporcionando uma escolha mais criteriosa dos parâmetros físicos do problema.

As regiões de perda de estabilidade encontradas através do teorema de Sotomayor poderão ser verificadas numericamente; além disso, este resultado também proporcionará uma escolha melhor dos parâmetros físicos do sistemas no estudo de seu comportamento nas regiões de ressonância.

5.2.3 Movimento torcional

Até o momento, nos estudos realizados foi considerado apenas movimento das oscilações no sentido vertical. Sugere-se que seja realizado o estudo do movimento torcional, tornando o estudo mais coerente com a realidade. Pode-se adotar nesse estudos duas configurações diferentes, além da que já foi proposta nesse trabalho (fig. 5.1). Para isso é necessário obter as equações do modelo adotado. A análise dinâmica, via mapas de Poincaré e diagramas de Bifurcações, usando FFT e o cálculo do Espectro de Lyapunov, deve ser efetivado, para as várias configurações do problema.

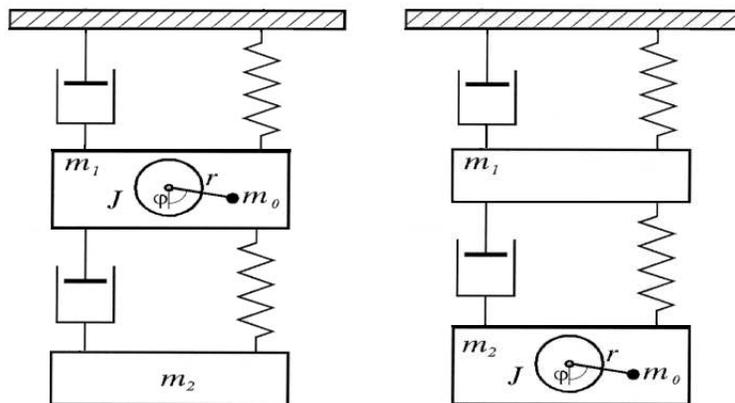


Figura 5.1: Configurações possíveis para observar o movimento torcional no sistema dinâmico

5.2.4 Controle por saturação

Várias estratégias de controle vem sendo desenvolvidas e utilizadas na literatura corrente na busca de soluções de problemas em engenharia mecânica. No caso de problemas não-ideais, pouco esforço foi efetuado nesta direção. Entre os poucos trabalhos, de controle para problemas não-ideais, mencionam-se os publicados recentemente por [2] que utilizou a técnica de Tikhonov na obtenção de tempo mínimo de passagem pela ressonância no problema vibratório não-ideal desta dissertação.

Para que a estratégia de controle tenha efeito sobre o sistema, deve-se levar em conta os seguintes pontos:

- O acoplamento modal entre o controlador e os modos de vibração do sistema em questão
- A definição dos parâmetros físicos de tal modo que exibam o efeito de acoplamento modal
- A velocidade média de rotação do carregamento não-ideal deve estar em ressonância com a frequência natural do segundo modo de vibração e/ou primeiro modo de vibração.

As idéias principais contidas nesta seção foram tiradas dos trabalhos desenvolvidos em [33], [34], [35] e [44], porém as aplicações aqui efetuadas são completamente diferentes dos trabalhos mencionados, por tratar-se de um problema cuja complexidade exige adaptações das técnicas exploradas pelos autores mencionados.

5.2.5 Trabalho experimental

Existe a possibilidade de um estudo experimental do sistema dinâmico estudado neste trabalho. As massas m_1 e m_2 , massas dos blocos 1 (inferior) e 2 (superior) (Figura 3.1) poderiam ser substituídas por duas placas metálicas que seriam conectadas entre si por duas colunas metálicas idênticas. Analogamente, a placa inferior (m_1) também seria conectada a uma base sísmica por duas colunas deste mesmo tipo. Essas colunas seriam, na realidade, perfis metálicos chatos (com larguras muito maiores que suas espessuras).

Dessa forma, o conjunto formado (um prédio de dois andares com pavimentos metálicos rígidos) teria frequência de ressonância bem distintas correspondentes aos seus modos de vibração laterais; em outras palavras, os modos laterais numa determinada direção seriam bem afastados daqueles relacionados com a direção ortogonal devido as diferenças dos momentos de inércia das colunas).

Neste arranjo, tem-se o controle das frequência de ressonância através do perfil das colunas e/ou dos seus comprimentos; baixo amortecimento; possibilidade de alteração do amortecimento através da colagem elastico-plastico nas colunas; estabilidade ao se fazer girar o motor desbalanceado, já que na direção que não há interesse, i.e., vertical, mas que é excitada pela massa rotativa, a estrutura será mais rígida e haverá facilidade de instrumentação.

Referências Bibliográficas

- [1] Aguirre, L.A. A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos. Part I: Tools and Benchmarks. *SBA Controle & Automação*, v.7, (1), pp.29-49, 1996.
- [2] Balthazar, J. M., Cheshankov, B. I., Ruschev, D. T., Barbanti, L., Weber, H. I. Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degrees of freedom, excited by a non-ideal energy source. *Journal of Sound and Vibration*, v.239, (5), pp.1075-1085, 2001.
- [3] Balthazar, J. M., Dantas, H. J. M. On the appearance of a Hopf bifurcation in a non-ideal mechanical problem. *Mechanics Research Communications*, v.30, (5), pp.493-503, 2003.
- [4] Balthazar, J. M., Mook, D. T., Reyolando, M. L. R. F., Weber, H. I., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P. Recent results on vibrating problems with limited power supply. In. 6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Łódź, Polonia. *Proceedings 6th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*, 2001, v. , pp. .
- [5] Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., Fenili, A., Belato, D., de Mattos, M. C., Wieczorek, S. On vibrating systems with a Limited Power Supply and Their Applications to Engineering Sciences. In. Seminário Brasileiro de Análise, Campinas, SP, Brasil. *Anais do Seminário Brasileiro de Análise*, 1999, pp.137-227.
- [6] Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., Reyolando, M. L. R. F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P. An overview on non-ideal vibrations. *Meccanica*, aceito.
- [7] Balthazar, J. M., Reyolando, M. L. R. F., Weber, H. I., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P., Garzelli, F. J. *A review of new vibrating issues due to non-ideal energy sources*. Dynamical Systems and Control, Taylor & Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. I. Weber, G. Leimann. ISBN: 0415309972.
- [8] Balthazar, J. M., Pontes, B. R. *On friction induced non-linear and non-ideal (regular and chaotic) vibrations: a source of fatigue*. Dynamical Systems and Control, Taylor & Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. Weber, G. Leitmann. ISBN: 0415309972.
- [9] Belato, D., Weber, H. I., Balthazar, J. M. Escape in a nonideal electro-mechanical system. *ABCM*, v. XXIV, pp. 235-340, 2002.

- [10] Bogoliubov, N. N. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. India: Hindustan Publishing Corporation, 1961, p.
- [11] Brasil, R. M. L. R. F., Mook, D. T. Nonlinear vibrations of a portal frame excited by a nonideal motor. In. 5th Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures, Blacksburg, Virginia Tech, USA. *Proceedings of 5th Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures*, 1994.
- [12] Clough, R. W., Penzien, J. *Dynamics of structures*. Singapore: McGraw-Hill, 7.ed., 1982, p.
- [13] Dantas M. J. H., Balthazar, J. M. Uma análise qualitativa das oscilações planas de uma estrutura aperturada: ressonâncias. II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José dos Campos, SP, Brasil. *Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2003, v.2, pp. , ISBN:85-86883-15-8.
- [14] Evan-Iwanowski, R. M. *Resonance oscillations in mechanical systems*. The Netherlands, Amsterdam: Elsevier, 1976, p.
- [15] Felix, J. L. P., Balthazar, J. M., Brasil, R. M. L. R. F. On non-ideal and non-linear portal frame dynamics analysis using Bogoliubov averaging method. *ABCM*, v. XXIV, (), pp , 2002.
- [16] Ferrara-Fiedler, N., Prado, C. P. C. *Caos: uma introdução*. São Paulo (SP), Brasil: Edgard Blücher Ltda., 1994, p.
- [17] Foale, S., Thompson, J. M. T. Geometrical concepts and computational techniques of nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 89, (), pp.381-394, 1991.
- [18] Golnaraghi, M. F. (1991) Chaotic Vibrations and Resonances in a Flexible-Arm Robot. *CSME*, v. 15, (90), pp.213-234, 1991.
- [19] Gonçalves, P. B., Prado, Z. J. G. N. Instabilidade de sistemas dinâmicos. In. 1a. Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos (SP), Brasil. *Aplicações em Dinâmica e Controle*, ABCM/SBMAC, 2001, v.1, pp.1-18. ISBN: 85-85769-09-2.
- [20] Guckenheimer, J., Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. New York, USA: Springer-Verlag, 1980, p.
- [21] Guilherme, K. L., Balthazar, J. M., Tsuchida, M. Estudo de um Sistema Dinâmico com Fonte de Energia Não Ideal e Aplicação do Método da Média. XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São José do Rio Preto, SP, Brasil. *Anais do XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, SBMAC, 2003, pp.

- [22] Guilherme, K. L., Tsuchida, M., Balthazar, J. M., Kurka, P. G. Sobre o Aparecimento de Caos em um Problema Vibratório com Dois Graus de Liberdade Excitado por uma Fonte de Potência Não Ideal. XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Nova Friburgo (RJ), Brasil. *Anais do XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, SBMAC, 2002, pp.189.
- [23] Guilherme, K. L., Tsuchida, M., Balthazar, J. M., Silva, G. N. (2001) Um estudo do comportamento de um sistema dinâmico não ideal durante a passagem pela ressonância. In. I Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos (SP), Brasil. *Aplicações em Dinâmica e Controle*, ABCM/SBMAC, 2001, v.1, pp.1-18. ISBN: 85-85769-09-2.
- [24] Guilherme, K. L., Tsuchida, M., Balthazar, J. M., Silva, G. N., Cheshankov, B. I. Estudo da Ressonância 1:1 em um Sistema Dinâmico não ideal. In. I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José do Rio Preto, SP, Brasil, *Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações*, ABCM/SBMAC, 2002, v.1, pp.965-970. ISBN: 85-86883-05-0.
- [25] Kononenko, V. O. *Vibrating System of Limited Power Supply*. ILife, 1969, p.
- [26] Kuroiwa, T., Brasil, R. M. L. R. F., Balthazar, J. M. Controle passivo de vibrações de bases de motores não ideais. In. II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José dos Campos, SP, Brasil, *Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações*, ABCM/SBMAC, 2003, v.2, pp.965-970. ISBN: ISBN:85-86883-15-8.
- [27] Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, .
- [28] Monteiro, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, SP, Brasil: Livraria da Física, 2002, p. ISBN: 85-88325-08-X
- [29] Nayfeh, A. H. (1973) *Perturbation Methods*. USA: Wiley series in pure and applied mathematics, 1973, p.
- [30] Nayfeh, A. H. *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. USA: Wiley. Séries in Nonlinear Science, 2000.
- [31] Nayfeh, A. H., Balachandran, B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. USA: Wiley, 1994, p.
- [32] Nayfeh, A. H., Mook, D. T. *Nonlinear Oscillations*. USA: Wiley, 1979.
- [33] Pai, P.F., Wen, B., Naser, A. S., Schulz, Z. M. Structural vibration control using PZT patches and non-linear phenomena. *Journal of Sound and Vibration* , 215, pp. 273-296, 1998.

- [34] Queini, S. S. , Nayfeh, A. H. Analysis and application of a nonlinear vibration absorber. *Journal of Vibration and Control*, 6, pp. 999-1016, 2000.
- [35] Queini, S. S. , Nayfeh, A. H., Golnaraghi, M. F. A Theoretical and experimental implementation of a control method based on saturation. *Nonlinear Dynamics*, 13, 189-202, 1997.
- [36] Sado, D., Kot, M. The chaotic vibration of an autoparametrical system with non ideal source of power. 7th Conference on Dynamical Sustersms - Theory and Applications, Łódź, Poland, *Proceedings of 7th Conference on Dynamical Sustersms - Theory and Applications*, 2003, pp.
- [37] Sinha, S. C., Pandiyan, R., Bibb J. S. Lyapunov-Floquet Transformation: Computation and Applications to Peiodic Systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.118, (), pp.209-219, 1996.
- [38] Sinha, S. C., Marghitu, D. B., Boghiu, D. Stability and Control of a Parametrically Excited Rotating Beam. *ASME*, v.120, pp. 462-470, 1998.
- [39] Sommerfeld, A. Beiträge Zum Dynamischen Ausbau der Festigkeitslehe Physikal Zeitschr. 3, pp.266-286, 1902.
- [40] Souza, S. L. T., Caldas, I. L., Balthazar, J. M., Brasil, R. M. L. R. F. Analysis of regular and irregular dynamics of nonideal gear rattling problem. *ABCM*, v.XXIV, pp. 235-340, 2002.
- [41] Thompson J. M. T., Bishop S. R. *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*. Wiley, 1994
- [42] Tsuchida, M., Guilherme, K. L., Balthazar, J. M., Silva, G. N. Dinâmica Vibracional com Dois Graus de Liberdade. II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José dos Campos, SP, Brasil: *Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2003, vol.2, pp.768-777, ISBN:85-86883-15-8.
- [43] Tsuchida, M., Guilherme, K. L., Balthazar, J. M., Silva, G. N., Cheshankov, B. I. On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance. *Journal of Sound and Vibration*, v.260, pp.949-960, 2003.
- [44] Tuer, K.L., Golnaraghi, M.F., Wang. D. Development of a generalized active vibration suppression strategy for a cantilever beam using internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 5, pp. 131-151, 1994.
- [45] Wiggins, S. *Global Bifurcation and Chaos*. Applied Mathematical Sciences, v. 73, Sringer Verlag, 1980.

Apêndice A

A Teoria de Floquet

O estudo da teoria de Floquet, destina-se a sistemas cuja solução de equilíbrio é conhecida e esta é representada por uma órbita periódica [31]. O objetivo deste método é estudar a estabilidade do sistema a partir dos multiplicadores de Floquet.

Considera-se um fluxo n -dimensional como em (2.1), cuja solução $X_0(t) = (x_0, M_0)$ é periódica de período mínimo T . Impõe-se uma perturbação z a X_0 , resultando em

$$x(t) = X_0(t) + z(t) \quad (\text{A.1})$$

que, substituindo em (2.1), assumindo F pelo menos C^1 , expandindo o resultado em série de Taylor na vizinhança de X_0 e retendo apenas a parte linear, obtém-se

$$\dot{z} = D_x F(X_0, M_0)z + O(\|z\|^2) \quad \text{ou} \quad \dot{z} = A(t, M_0)z \quad (\text{A.2})$$

quando A é a matriz da primeira derivada parcial de F . Devido a linearização em z , o estudo de estabilidade é local. A matriz A é periódica, também com período T . Entretanto, T não é necessariamente o período mínimo de A : quando F tem apenas não linearidades ímpares, o período mínimo de A é $\frac{T}{2}$.

Pode-se obter a matriz de soluções fundamentais $n \times n$ [31]

$$Z(t) = [z_1(t) \ , z_2(t) \ , \dots, z_n(t)],$$

constituída das n soluções linearmente independentes $z_i(t)$, denominadas soluções fundamentais. É claro que Z satisfaz (A.2), então, substituindo Z em (A.2) e mudando a variável dependente de t para $\tau = t + T$, obtém-se

$$\frac{dZ}{d\tau} = A(\tau - T, M_0)Z = A(\tau, M_0)Z. \quad (\text{A.3})$$

Como Z é a matriz de soluções fundamentais,

$$Z(t + T) = [z_1(t + T) \ , z_2(t + T) \ , \dots, z_n(t + T)],$$

também é matriz de soluções fundamentais. Logo, considerando que $z_i(t)$ são soluções l.i., $z_i(t + T)$ pode ser escrita como combinação linear de $z_1(t)$, $z_2(t)$, \dots , $z_n(t)$, ou seja,

$$Z(t + T) = Z(t)\Phi \quad (\text{A.4})$$

sendo Φ uma matriz $n \times n$ constante, dependente da matriz de soluções fundamentais, e portanto, não é única. Especificando a condição inicial $Z(0) = I$, quando I é a matriz identidade $n \times n$, e fazendo $t = 0$ em (A.4), obtém-se que

$$\Phi = Z(T)\Phi, \quad (\text{A.5})$$

conhecida na literatura como matriz de monodromia.

Os autovalores da matriz Φ são denominados multiplicadores característicos ou multiplicadores de Floquet. Existe um único conjunto de multiplicadores de Floquet associados a matriz A de (A.2) e cada um desses multiplicadores provém uma medida de convergência ou divergência ao longo de uma direção particular da órbita periódica de (2.1) [31].

Uma solução periódica de (2.1) é dita hiperbólica, se somente um dos multiplicadores de Floquet está localizado dentro do círculo unitário no plano complexo. Se não existem multiplicadores de Floquet fora do círculo unitário, ela é dita solução periódica hiperbólica assintoticamente estável, também conhecida como ciclo limite estável ou atrator periódico, por atrair órbitas positivas vizinhas. Se um ou mais multiplicadores de Floquet estiverem fora do círculo unitário, a solução é dita periódica hiperbólica instável e, se todos os multiplicadores de Floquet estiverem fora do círculo unitário a solução é denominada ciclo limite instável ou repulsor periódico. Quando algum dos multiplicadores de Floquet, associados solução hiperbólica instável, estiverem dentro do círculo unitário, a solução periódica é denominada ciclo limite instável do tipo sela.

Se um ou mais multiplicadores de Floquet estão localizados no círculo unitário, a solução periódica é chamada solução periódica não hiperbólica. Ela é classificada como instável se um ou mais dos multiplicadores de Floquet associados estão fora do círculo unitário. Caso nenhum dos multiplicadores de Floquet esteja fora do círculo unitário, faz-se necessário analisar termos não lineares de (A.2) para determinar a estabilidade da solução periódica.

Observando o processo de linearização realizado no Capítulo 3, nota-se que o sistema $\dot{z} = Az$, utilizando a matriz (3.7) é equivalente ao sistema (A.2) citado acima. Ou seja, o próximo passo para o estudo da estabilidade via multiplicadores de Floquet, é obter as 5 soluções linearmente independentes para o sistema linearizado, referente ao sistema não ideal (3.1), e, a partir delas, a matriz de monodromia. Isto constitui a maior dificuldade de aplicação do método, dada a grande complexidade das equações que governam o movimento do sistema.

Apêndice B

Outras simulações numéricas

As simulações numéricas de um sistema não-ideal permitem a verificação de características importantes do sistema dinâmico provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como variações bruscas da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação (saltos ou "jumps") quando considera-se as condições estacionárias do movimento. Serão mostradas a seguir, o comportamento das oscilações de χ_1 e χ_2 para as duas ressonâncias mencionadas na tabela B.1. Esta análise permite obter informações sobre o comportamento do sistema com relação aos parâmetros físicos escolhidos.

Tabela B.1: Ressonâncias Estudadas

	Ressonâncias	
	2:5	2:1 A
<i>Parâmetros</i>		
η_1	0.1582	0.1582
η_2	0.1582	0.1424
μ	1.0	0.58
θ^2	3.333	1.933
α	3.162	3.162
$\beta(\times 10^4)$	1.0	1.0
<i>Frequências</i>		
$\bar{\omega}_1$	0.847	1.651
$\bar{\omega}_2$	2.115	0.825

O Diagrama de Bifurcações é ilustrado com a utilização das ressonâncias 2:5 e 2:1. Para estas ressonâncias são apresentados também o expoente de Lyapunov e os respectivos gráficos

da FFT.

A figura B.1 mostra as oscilações estacionárias de χ_1 e χ_2 , passando pelas frequências naturais $\omega_1 = 0.268$ e $\omega_2 = 0.669$. Embora irregulares durante a passagem pela 1ª frequência natural, as oscilações tendem a estacionar-se. Já na 2ª frequência natural, as oscilações mostram-se mais irregulares do que antes. Este aumento de amplitude é caracterizado pelo efeito Sommerfeld.

No diagrama de bifurcações da figura B.2, observa-se uma nuvem de pontos, que indica um movimento caótico para esta ressonância. A figura B.3 mostra a curva do expoente de Lyapunov e, a figura B.4, a FFT para esta ressonância, que apresenta um pico na 2ª frequência natural, indicando movimento periódico.

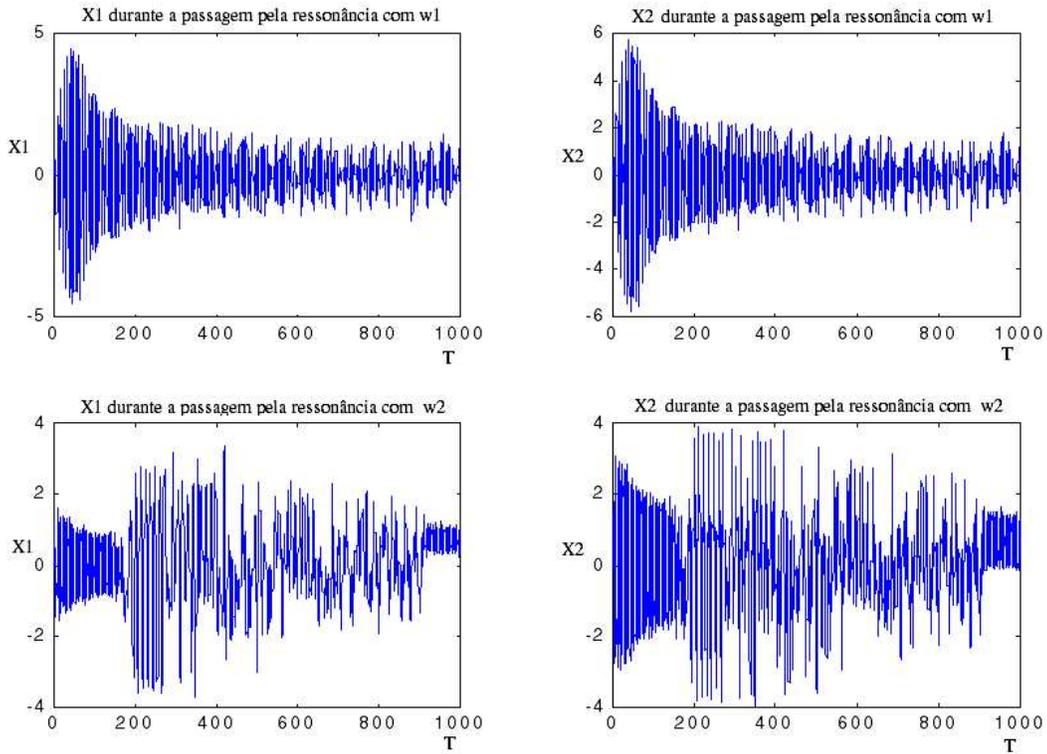


Figura B.1: Movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$.

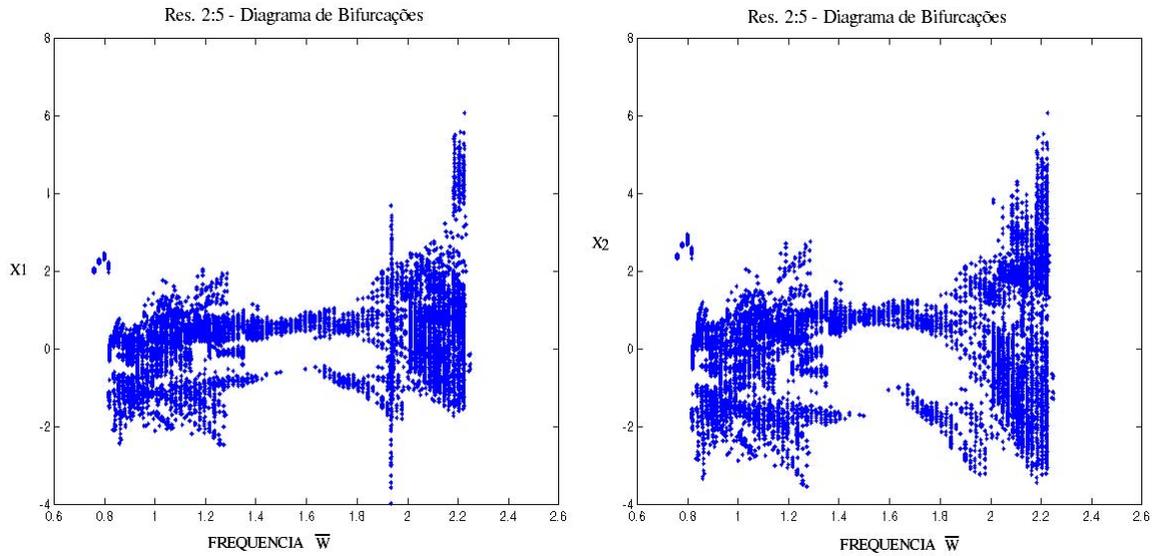


Figura B.2: Diagrama de Bifurcações para a ressonância 2:5, nas variáveis χ_1 e χ_2 .

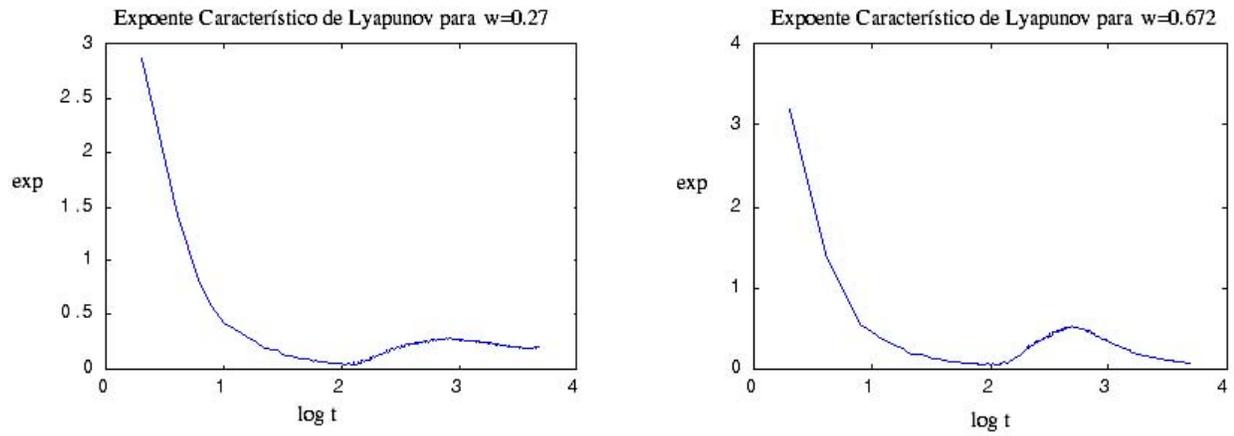


Figura B.3: As curvas do expoente característico de Lyapunov para a ressonância 2:5, com as frequências $\bar{\omega}_1 = 0.849$ e $\bar{\omega}_2 = 2.11$.

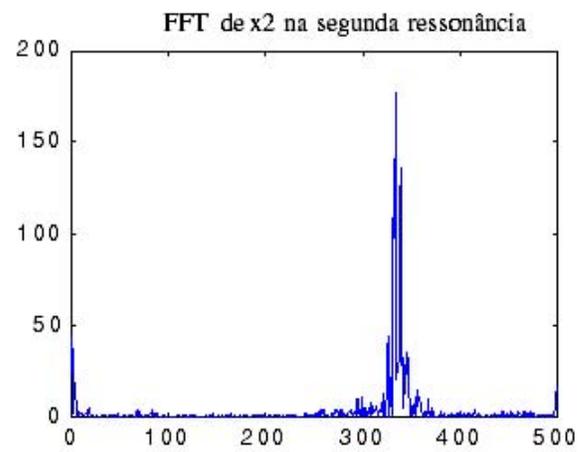
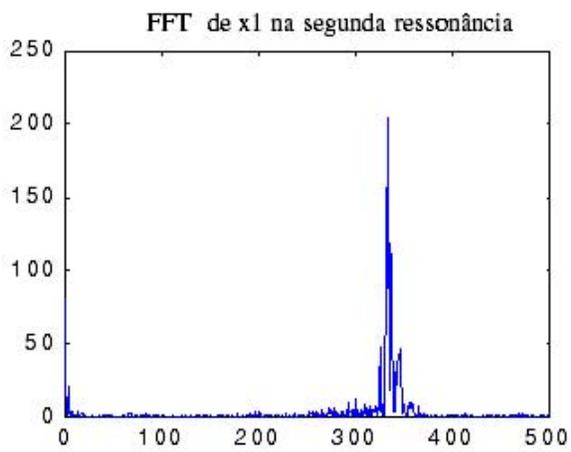
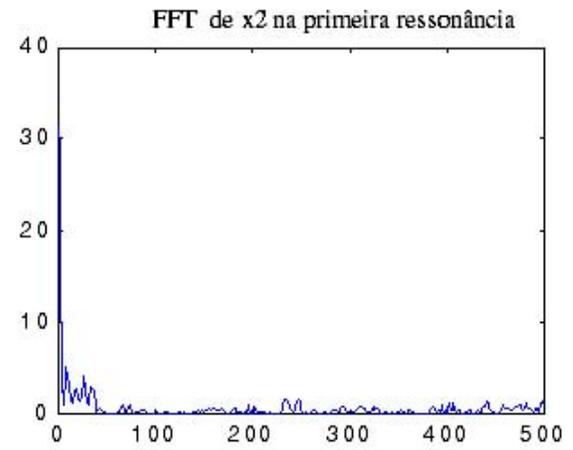
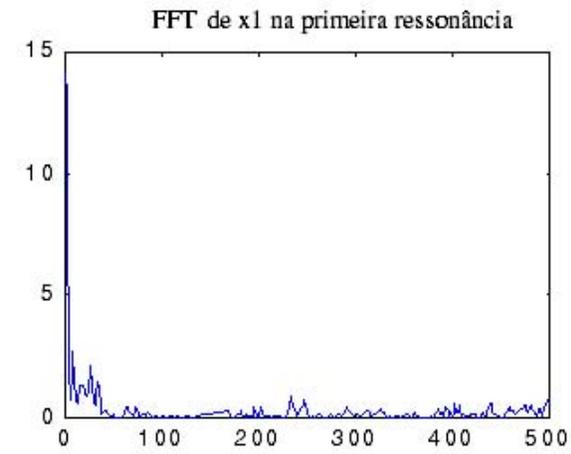


Figura B.4: Gráfico da FFT para a ressonância 2:5.

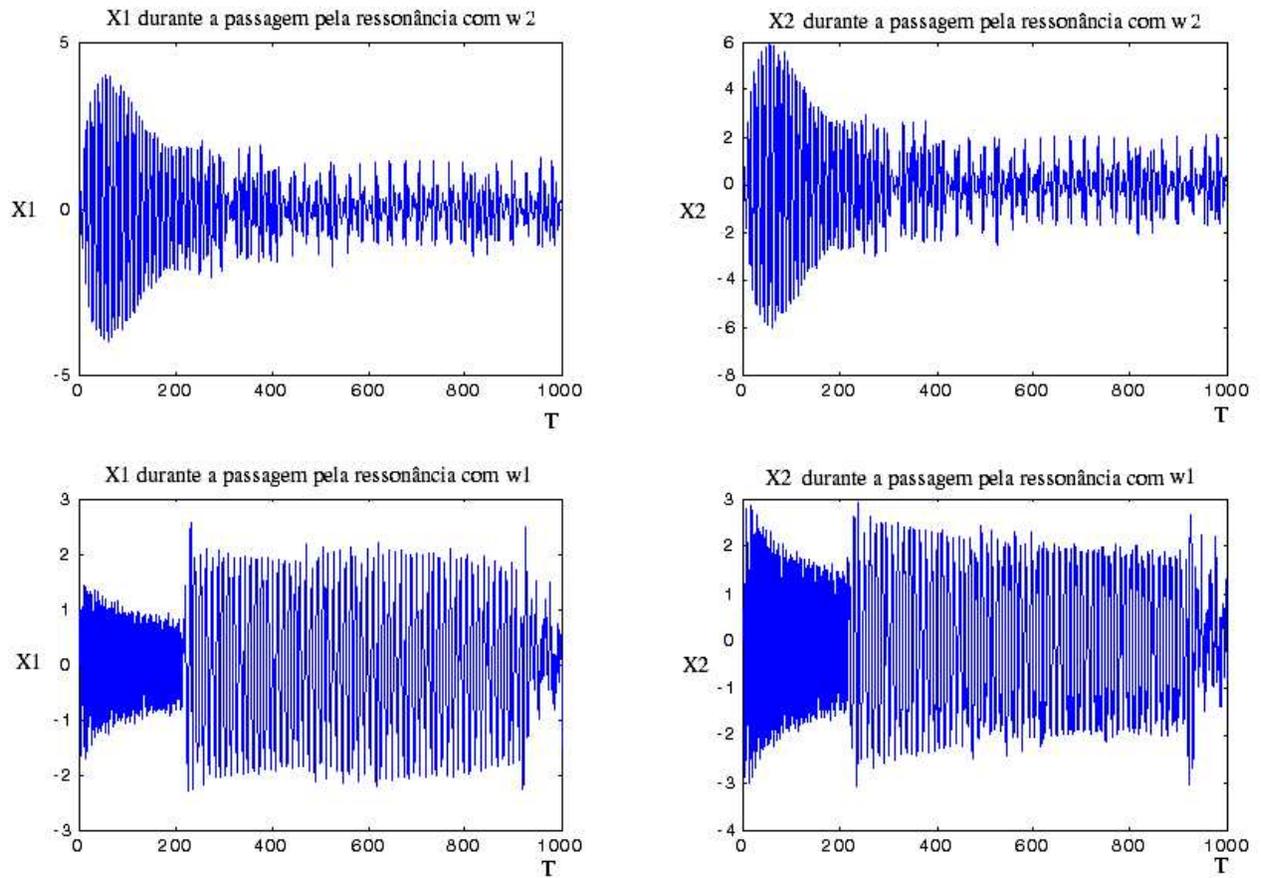


Figura B.5: Movimento oscilatório de χ_1 e χ_2 quando a frequência $\bar{\omega}$ do motor entra em ressonância com as frequências naturais do sistema $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$, para a ressonância 2:1.

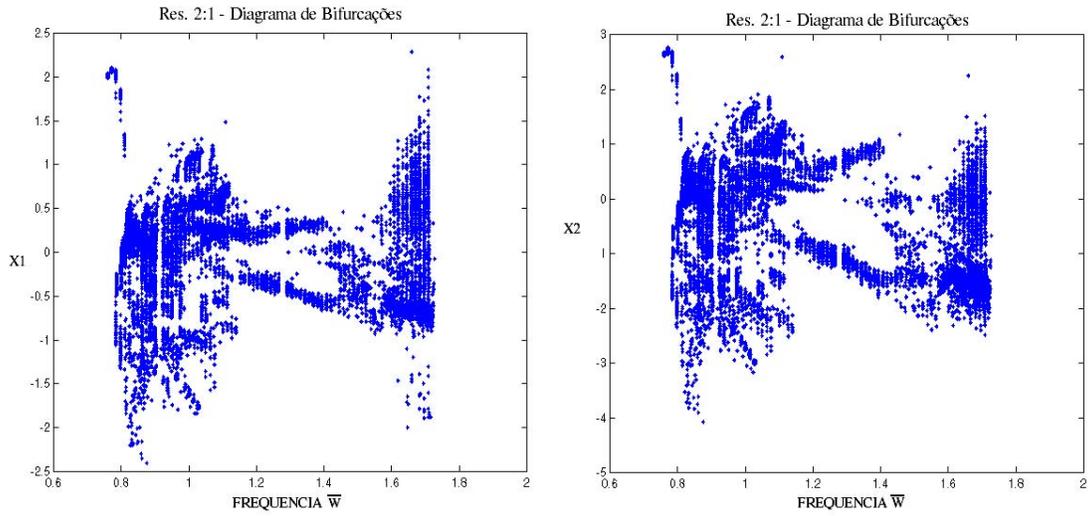


Figura B.6: Diagrama de Bifurcações para a ressonância 2:1, nas variáveis χ_1 e χ_2 .

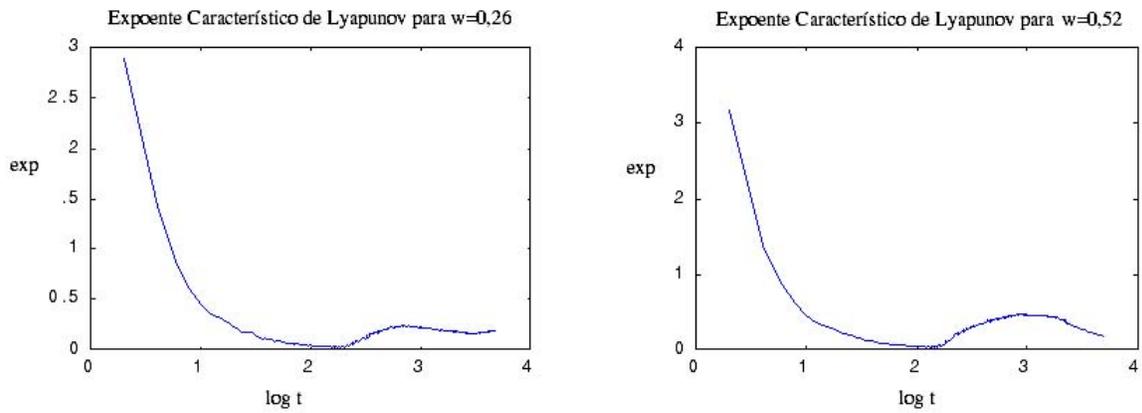


Figura B.7: As curvas do expoente característico de Lyapunov para a ressonância 2:1, com as frequências $\bar{\omega}_1 = 1.649$ e $\bar{\omega}_2 = 0.825$.

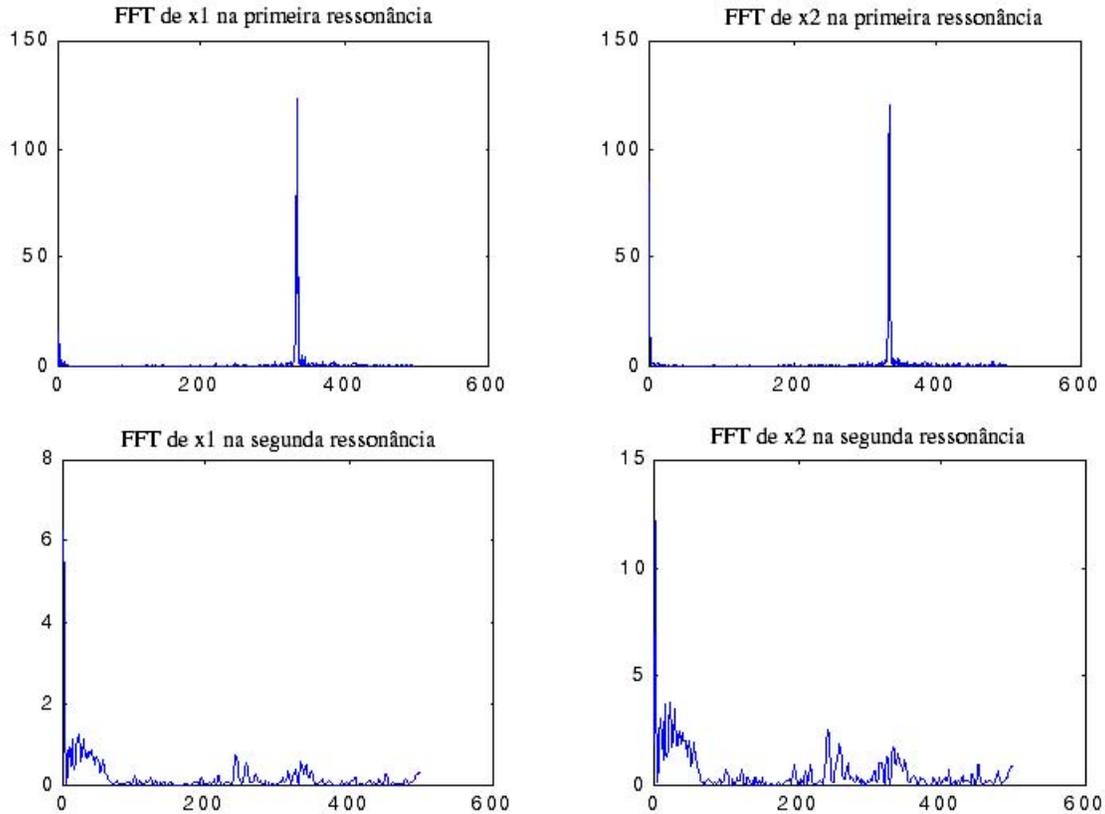


Figura B.8: Gráfico da FFT para a ressonância 2:1.

Para a ressonância 2:1, as oscilações são apresentadas em B.5 e, como no caso anterior, apresentam-se mais irregulares quando a frequência do motor passa pela 2^a frequência natural. O diagrama de bifurcações na figura B.6, apresenta uma nuvem de pontos, indicando também a existência de movimentos caóticos. A curva característica do expoente de Lyapunov é apresentada na figura B.7 e a FFT é apresentada na figura B.8. Nota-se um aspecto contínuo na FFT durante a passagem pela 2^a ressonância, ou seja, identifica-se um movimento aperiódico.

Foram apresentadas 2 ressonâncias distintas, com comportamentos também muito distintos. O número de parâmetros a ser trabalhado é muito grande e permite uma variação brusca do comportamento do sistema, com pouca variação destes parâmetros. Isso mostra a necessidade de um estudo mais preciso da estabilidade do sistema, que defina quais são os melhores valores para determinados parâmetros, permitindo uma melhor observância dos fenômenos que podem ocorrer em um sistema não ideal. Para esse fim, foi sugerida a utilização do método da média de Krylov-Bogoliubov.

Súmula Curricular

Artigos completos publicados em periódicos

1. *Dinâmica Vibracional com Dois Graus de Liberdade: Estudo de Ressonâncias 2:1*. (pré-print)
2. *Solução Analítica de um Sistema Não Ideal de Dois Graus de Liberdade*. (pré-print)
3. TSUCHIDA, Masayoshi; GUILHERME, Karen de Lolo; BALTHAZAR, José Manoel; SILVA, Geraldo Nunes; CHESHANKOV, B I. *On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance*. Journal of Sound and Vibration, Brasil, v. 260, p. 949-960, 2002.

Trabalhos completos em anais de eventos

1. GUILHERME, Karen de Lolo; BALTHAZAR, José Manoel; TSUCHIDA, Masayoshi; *Vibrações de Um Sistema Excitado por Um Motor Elétrico de Corrente Contínua de Potência Limitada (Não-Ideal), Modelado Com Dois Graus De Liberdade* In: CONEM 2004 - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2004 (aceito).
2. TSUCHIDA, Masayoshi; GUILHERME, Karen de Lolo; BALTHAZAR, José Manoel; SILVA, Geraldo Nunes. *Dinâmica Vibracional com Dois Graus de Liberdade*. In: DINCON 2003 - II CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2003, São José dos Campos e II DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control. Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações e II DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control. SBMAC, 2003. v. I, p. 965-970.
3. GUILHERME, Karen de Lolo; TSUCHIDA, Masayoshi; BALTHAZAR, José Manoel; SILVA, Geraldo Nunes; CHESHANKOV, B I. *Estudo da Ressonância 1:1 em um Sistema Dinâmico Não Ideal*. In: DINCON 2002 - I CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2002, São José do Rio Preto. Anais do I Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações. SBMAC, 2002, v.I, pp. 965-970. Série: Arquimedes; ISSN/ISBN: 8586883050.

4. GUILHERME, Karen de Lolo; TSUCHIDA, Masayoshi; BALTHAZAR, José Manoel; SILVA, Geraldo Nunes. *Um estudo do comportamento de um sistema não ideal durante a passagem pela ressonância*. In: PRIMEIRA ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE - APLICON, 2001, São Carlos - SP. Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle. ABCM / SBMAC, 2001. v. único, pp.40-43. ISSN/ISBN: 8585769084.

Resumos simples em anais de eventos

1. GUILHERME, Karen de Lolo; BALTHAZAR, José Manoel; TSUCHIDA, Masayoshi. *Estudo de um sistema dinâmico com fonte de energia não ideal e aplicação do método da média*. In: XXVI CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2003, v. 1, pp. 164.
2. GUILHERME, Karen de Lolo; BALTHAZAR, José Manoel; TSUCHIDA, Masayoshi. *Sobre o Aparecimento de Caos em um Problema Vibratório com Dois Graus de Liberdade Excitado por uma Fonte de Potência Não Ideal*. In: XXV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2002, v. 1, pp. 189.
3. GUILHERME, Karen de Lolo; TSUCHIDA, Masayoshi; BALTHAZAR, José Manoel. *Estudo de um sistema mecânico com mapa de Poincaré*. In: XXIV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2001, Belo Horizonte (MG). Resumo das Comunicações XXIV CNMAC, 2001, v. 1, pp. 251.
4. GUILHERME, Karen de Lolo; TSUCHIDA, Masayoshi. *Solução numérica de um sistema dinâmico afetado por ressonância*. In: XXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2000, Santos (SP). Resumo das Comunicações - XXIII CNMAC, 2000, pp. 183.