

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Síntese de Funções de Green e Estados Auxiliares
Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais
Ilimitados com Auxílio da Transformada de Radon**

Autor : **Marco Adolph**
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

13/06

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Síntese de Funções de Green e Estados Auxiliares
Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais
Ilimitados com Auxílio da Transformada de Radon**

Autor : **Marco Adolph**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006
S.P. - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

TESE DE DOUTORADO

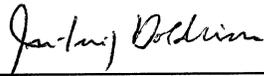
**Síntese de Funções de Green e Estados Auxiliares
Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais
Ilimitados com Auxílio da Transformada de Radon**

Autor : **Marco Adolph**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**



**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
FEM / UNICAMP**



**Prof. Dr. José Luiz Boldrini
IMECC / UNICAMP**



**Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM / UNICAMP**



**Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM / UNICAMP**



**Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini
EESC / USP - São Carlos**

Campinas, 07 de março de 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Adolph, Marco

Ad72s Síntese de funções de Green e estados auxiliares viscoelastodinâmicos em meios tridimensionais ilimitados com auxílio da transformada de Radon / Marco Adolph.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Viscoelasticidade. 2. Green, Funções de. 3. Vibração. 4. Métodos de elementos de contorno. 5. Radon, Transformada de. 6. Anisotropia. I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Synthesis of viscoelastodynamic Green functions and auxiliary states for three-dimensional unbounded domains with aid of the Radon transform

Palavras-chave em Inglês: Viscoelastodynamic, Green's functions, Auxiliary states, Radon transform, Anisotropy, Dynamics of unbounded domains

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Luiz Boldrini, Paulo Sollero, Renato Pavanello e Wilson Sérgio Venturini

Data da defesa: 07/03/2006

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha querida esposa Sandra.

Agradecimentos:

Esse trabalho não teria sido possível sem a colaboração e incentivo de muitos. A todas as pessoas que me apoiaram, presto a minha homenagem:

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto pela oportunidade, pela orientação, por ter mantido o foco, indicado caminhos e, principalmente, pela amizade.

Ao Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho pelo inestimável auxílio com a transformada de Radon, embasamentos matemáticos e pela amizade.

Aos Prof. Dr. Dmitri Vlassov e Prof. Dr. Heraldo Cambraia por terem despertado em mim o interesse pela ciência e pesquisa.

À Sandra, essa pessoa tão especial, por se manter ao meu lado em todos os instantes, incentivando, alegrando, ajudando e me fazendo rir, mesmo nos momentos de desespero. Sem seu apoio, esse trabalho não teria sido realizado.

A minha família, especialmente a meu pai que, ao longo deste trabalho, foi um verdadeiro amigo e incentivador.

À Vera e Vitor, pela amizade e carinho.

Aos professores do DMC pelos quais tenho grande apreço.

A Maria Elena, pela amizade e pela ajuda com tramites burocráticos.

Aos amigos da UNICAMP, Willian, Eder, Alex, Ronaldo, Zilda, Noritomi, Luiz Sanches, Foltran, Khaled, Carlos, Clecios e Flávia

Aos amigos da graduação na UFPR pela amizade e apoio.

A todos os funcionários da FEM pela estrutura e colaboração.

A CAPES pela bolsa e a FAPESP pela estrutura laboratorial.

“Uma jornada de mil milhas começa sempre com um simples passo.”

Lao-tsé

Resumo

Adolph, Marco, *Síntese de Funções de Green e Estados Auxiliares Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais Ilimitados com Auxílio da Transformada de Radon*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 297 p. Tese de Doutorado.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma formulação para obtenção de Funções de Green e estados auxiliares para os problemas viscoelastodinâmicos tridimensionais. Os problemas são descritos com auxílio de equações diferenciais, as quais foram solucionadas utilizando as transformadas de Radon e Fourier, bem como condições de contorno específicas. A transformada inversa é realizada numericamente. Essa formulação resulta em soluções com apenas uma integral imprópria e uma limitada, porém, quando se adota transformada de Fourier, são obtidas duas integrais ilimitadas. Para os problemas isotrópicos, essa formulação permite o desacoplamento do problema tridimensional em dois problemas auxiliares bidimensionais. As respostas de tensão e deslocamento foram deduzidas para os problemas de semi-espaço com cargas concentrada e distribuída, bem como de espaços completos submetidos a carregamento distribuído. A implementação numérica foi validada com auxílio das soluções estáticas de Cerruti, Boussinesq e Kelvin, bem como com implementações numéricas dinâmicas baseadas na transformada dupla de Fourier. Foram obtidos bons resultados. É apresentada a formulação para semi-espaços anisotrópicos.

Palavras-Chave

Problemas Viscoelastodinâmica, Funções de Green, Estados Auxiliares, Transformada de Radon, Anisotropia, Dinâmica de Domínios Ilimitados.

Abstract

Adolph, Marco, *Synthesis of Viscoelastodynamic Green Functions and Auxiliary States for Three-dimensional Unbounded Domains with Aid of The Radon Transform*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 297 p. Tese de Doutorado.

The purpose of this study was to develop a formulation to obtain Green's functions and auxiliary states in order to solve three-dimensional viscoelastodynamic problems. The problems are described with the aid of differential equations, which were solved by using the Radon and Fourier transforms, as well as specific boundary conditions. The inverse transform was numerically accomplished. This formulation resulted in solutions with a single (one) improper integral and a finite one, however, in case of using the Fourier transform, two infinite integrals are obtained. As for the isotropic-related problems, this formulation allows to break up the three-dimensional problem into two auxiliary two-dimensional problems. The stress and displacement solutions were obtained for problems related to half-space under concentrated and distributed loads, as well as to whole-spaces under a distributed load. The numerical implementation was validated by using the Cerruti, Boussinesq and Kelvin's static solutions, and numerical dynamic responses based on the double Fourier transform. Thus, effective results were obtained. In addition, it was included the formulation for anisotropy half-spaces.

Keywords

Viscoelastodynamic, Green's functions, Auxiliary States, Radon Transform, Anisotropy, Dynamics of unbounded domains

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xxiv
Nomenclatura	xxv
1. Introdução	01
1.1 Apresentação	01
1.2 Revisão Bibliográfica	03
1.3 Objetivos e Organização do Trabalho	07
2. Elasticidade geral, Anisotropia, Viscoelasticidade	09
2.1 Elasticidade Geral	09
2.2 Deformações, tensões e lei de Hooke	10
2.3 Casos particulares de anisotropia	12
2.4 Constantes de Engenharia	16
2.5 Rotação de Coordenadas	20
2.6 Equações de Movimento	22
2.7 Viscoelasticidade	24
3. Transformada de radon e suas Propriedades	27
3.1 A transformada de radon	27
3.2 Definição da Transformada Bidimensional de Radon	27
3.3 Transformada Tridimensional de Radon	30
3.4 Propriedades da Transformada de Radon	30

3.5 Relações com a Transformada de Fourier	34
3.6 Transformadas Inversas	36
4. Síntese de Estados Auxiliares e Funções de Green	41
4.1 Introdução	41
4.2 Colocação do problema	41
4.3 Solução do problema com auxílio da transformada de Radon	43
4.3.1 Metodologia de solução- meios isotrópicos	44
4.3.2 Solução do primeiro problema auxiliar	49
4.3.2 Solução do segundo problema auxiliar	56
4.3.4 Acoplamento dos problemas auxiliares e transformada inversa de Radon	58
4.4 Carga Concentrada	63
4.5 Problema Axisimétrico – Carga Vertical Concentrada	65
4.5.1 Deslocamento Vertical	65
4.5.2. Deslocamento Radial	68
4.5.3 Deformações e tensões devidas a carregamento vertical	71
4.5.4. Análise das componentes de deformação na superfície livre	76
4.5.5 Análise das componentes de Tensão	78
4.5.6 Análise dos Integrandos	81
4.5.7 Algoritmo de Longman e estratégias de integração	94
4.5.8 Resultados numéricos	98
4.6 Deslocamentos, deformações e tensões no sistema de coordenadas cartesianas	118
4.6.1 Carregamento Vertical	121
4.6.2 Carregamento horizontal em x (S)	124
4.6.3 Carregamento horizontal em y (T)	128
4.7 Semi-espço com carregamento concentrado – sistema cartesiano	131
4.7.1 Análise dos integrandos – carregamento concentrado – Funções H	131
4.7.2 Análise dos integrandos – carregamento concentrado – Funções G, núcleos	136
4.7.3 Conjunto final de equações para carregamento concentrado	139
4.7.4 Técnicas de integração	146
4.7.5 Resultados numéricos para carregamento concentrado – sistema cartesiano	147

4.8 Deslocamentos, deformações e tensões para carregamento distribuído	175
4.8.1 Análise das funções H para carregamento distribuído	182
4.8.2 Conjunto final de equações para carregamento distribuído	185
4.8.3 Técnicas de integração para carregamento distribuído	193
4.8.4 Resultados numéricos para carregamento distribuído	197
5. Funções de Green para o espaço completo isotrópicos tridimensionais	225
5.1 Introdução	225
5.2 Solução através da transformada de Radon	225
5.3 Análise dos Integrandos e técnicas de integração	239
5.4 Resultados numéricos	243
6. Funções de Green para semi-espacos ortotrópicos tridimensionais	255
6.1 Introdução	255
6.2 Colocação do problema	255
6.3 Solução utilizando a transformada de Radon	256
6.4 Solução em tensões	263
6.5 Amplitudes de onda	266
6.6 Transformadas inversas	268
7. Conclusões e trabalhos futuros	271
Referências Bibliográficas	275
Anexo I	283
Anexo II	286
Anexo III	291

Lista de Figuras

Figura 2.1 Transformação de coordenadas	12
Figura 3.1- Linha no domínio da função	28
Figura 3.2 - Coordenadas para definir L	28
Figura 3.3 Rotação do sistema de coordenadas	29
Figura 3.4 – Linha L em função vetores ξ	29
Figura 3.5 Relação com transformada Fourier 1	36
Figura 3.6 Relação com transformada Fourier 2	36
Figura 4.1a – Carga qualquer e sistema de coordenadas.	42
Figura 4.1b – Decomposição das forças	42
Figura 4.2 – Rotação do sistema de coordenadas	46
Figura 4.3. Círculos para VPC 1	62
Figura 4.4. Círculos para VPC 2	62
Figura 4.5. Carga concentrada na superfície livre	64
Figura 4.6. Componente real da equação 4.190	66
Figura 4.7. Componente imaginária da equação 4.190	67
Figura 4.8. Componente real da equação 4.196	67
Figura 4.9. Componente imaginária da equação 4.196	68
Figura 4.10. Componente real de $\Omega_{cilindric}$	69
Figura 4.11. Componente imaginária de $\Omega_{cilindric}$	69
Figura 4.12. Componente real de $\Omega_{cilindric}$	69
Figura 4.13. Componente imaginária de $\Omega_{cilindrica}$	70
Figura 4.14. Componente real de U_{rz}	70
Figura 4.15. Componente imaginária de U_{rz}	71

Figura 4.16. Componente real de $G(\varepsilon_{zz})$	76
Figura 4.17. Componente imaginária de $G(\varepsilon_{zz})$	76
Figura 4.18 Componente real de $G(\varepsilon_{\varphi\varphi z})$	77
Figura 4.19. Componente imaginária de $G(\varepsilon_{\varphi\varphi z})$	77
Figura 4.20. Componente real de $G(\varepsilon_{rz})$	78
Figura 4.21 Componente imaginária de $G(\varepsilon_{rz})$	78
Figura 4.22 Componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento Vertical	83
Figura 4.23 Componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento Vertical	83
Figura 4.24 – Influência do amortecimento sobre a parcela real do núcleo G_{Uzz}	84
Figura 4.25 – Influência do amortecimento sobre a parcela imaginária do núcleo G_{Uzz}	85
Figura 4.26 – Influência da profundidade sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz}	87
Figura 4.27 – Influência da profundidade sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz}	87
Figura 4.28 – Influência da frequência sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz} , $z=0$	88
Figura 4.29 – Influência da frequência sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} , $z=0$	88
Figura 4.30 – Influência da frequência sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz} , $z=1$	89
Figura 4.31 – Influência da frequência sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} , $z=1$	89
Figura 4.32 – Influência do coeficiente de Poisson sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .	90
Figura 4.33 – Influência do coeficiente de Poisson sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .	90
Figura 4.34 – Influência do módulo de cisalhamento sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .	91
Figura 4.35 – Influência do módulo de cisalhamento sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .	91
Figura 4.36 – Função de Bessel de ordem zero.	93
Figura 4.37 – Influência de “a” sobre o termo oscilante	93
Figura 4.38 – Função oscilando em torno de zero.	96
Figura 4.39 – Componente real do integrando de Uzz .	96
Figura 4.40 – Esquema de integração para semi-espço.	97

Figura 4.41 – U_{zz} – Comparação com o problema estático – Boussinesq	100
Figura 4.42 – U_{zz} – Resposta para diferentes camadas	100
Figura 4.43 – Influência do amortecimento sobre U_{zz} , $z=1$.	101
Figura 4.44 – Influência do coeficiente de Poisson sobre U_{zz}	102
Figura 4.45 – U_{zz} – Resultados para superfície livre.	102
Figura 4.46 – Comparação com a formulação obtida por Fourier, $z=r=1$	103
Figura 4.47 – Erros obtidos na comparação entre as duas formulações	104
Figura 4.48 – Componente real resposta de deslocamento ao logo de R, $\omega=2$ rad/s	104
Figura 4.49 – Componente imaginária resposta de deslocamento ao logo de R, $\omega=2$ rad/s	105
Figura 4.50 – Deslocamento radial, problema quase-estático.	106
Figura 4.51 – Deslocamento Radial, influência da profundidade.	107
Figura 4.52 – Deslocamento radial na superfície livre	107
Figura 4.53a - σ_{zz} problema quase-estático	112
Figura 4.53b – Erro relativo	112
Figura 4.54a - σ_{rz} problema quase-estático	112
Figura 4.54b – Erro relativo	112
Figura 4.55a - $\sigma_{\phi\phi z}$ problema quase-estático	112
Figura 4.55b – Erro relativo	112
Figura 4.56a - σ_{rz} problema quase-estático	113
Figura 4.56b – Erro relativo	113
Figura 4.57 – Semi-espço, considerada a anisotropia. Plano r-z analisado	114
Figura 4.58 – Componente real do deslocamento Vertical U_{zz}	114
Figura 4.59 – Componente imaginária do deslocamento Vertical U_{zz}	114
Figura 4.60 – Componente real do deslocamento Radial U_{rz}	115
Figura 4.61 – Componente imaginária do deslocamento Radial U_{rz}	115
Figura 4.62 – Componente real de σ_{zz}	115
Figura 4.63 – Componente imaginária de σ_{zz}	116
Figura 4.64 – Componente real de σ_{rz}	116
Figura 4.65 – Componente imaginária de σ_{rz}	116
Figura 4.66 – Componente real de $\sigma_{\phi\phi z}$	117
Figura 4.67 – Componente imaginária de $\sigma_{\phi\phi z}$	117

Figura 4.68 – Componente real de σ_{rzz}	117
Figura 4.69 – Componente imaginária de σ_{rzz}	118
Figura 4.70a. Componente real de H_1 , $\xi=1$	135
Figura 4.70b. Componente imaginária de H_1 , $\xi=1$	135
Figura 4.71a. Componente real de H_1 , $\xi=5$	135
Figura 4.71b. Componente imaginária de H_1 , $\xi=5$	135
Figura 4.72a. Componente real de HI_1 – par	136
Figura 4.72b. Componente imaginária de HI_1 – ímpar	136
Figura 4.73a. U_{zz} – problema quase-estático.	148
Figura 4.73b. Erro relativo para U_{zz}	148
Figura 4.74a. U_{xz} – problema quase-estático.	149
Figura 4.74b. Erro relativo para U_{xz}	149
Figura 4.75a. U_{yz} – problema quase-estático.	149
Figura 4.75b. Erro relativo para U_{yz}	149
Figura 4.76a. U_{zx} – problema quase-estático.	149
Figura 4.76b. Erro relativo para U_{zx}	149
Figura 4.77a. U_{xx} – problema quase-estático.	150
Figura 4.77b. Erro relativo para U_{xx}	150
Figura 4.78a. U_{yx} – problema quase-estático.	150
Figura 4.78b. Erro relativo para U_{yx}	150
Figura 4.79a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=1$	152
Figura 4.79b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=1$	152
Figura 4.80a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=5$	152
Figura 4.80b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=5$	152
Figura 4.81a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=10$	153
Figura 4.81b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=10$	153
Figura 4.82a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=1$	153
Figura 4.82b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=1$	153
Figura 4.83a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=5$	153
Figura 4.83b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=5$	153
Figura 4.84a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=10$	154

Figura 4.84b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=10$	154
Figura 4.85a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=1$	154
Figura 4.85b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=1$	154
Figura 4.86a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=5$	154
Figura 4.86b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=5$	154
Figura 4.87a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=10$	155
Figura 4.87b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=10$	155
Figura 4.88a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=1$	155
Figura 4.88b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=1$	155
Figura 4.89a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=5$	155
Figura 4.89b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=5$	155
Figura 4.90a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=10$	156
Figura 4.90b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=10$	156
Figura 4.91a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=1$	156
Figura 4.91b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=1$	156
Figura 4.92a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=5$	156
Figura 4.92b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=5$	156
Figura 4.93a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=10$	157
Figura 4.93b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=10$	157
Figura 4.94a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=1$	157
Figura 4.94b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=1$	157
Figura 4.95a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=5$	157
Figura 4.95b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=5$	157
Figura 4.96a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=10$	158
Figura 4.96b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=10$	158
Figura 4.97a. σ_{zzz}	159
Figura 4.97b. σ_{zzz} . Erro Relativo	159
Figura 4.98a. σ_{xxz}	159
Figura 4.98b. σ_{xxz} Erro Relativo	159
Figura 4.99a. σ_{yyz}	160
Figura 4.99b. σ_{yyz} Erro Relativo	160

Figura 4.100a σ_{xzz}	160
Figura 4.100b. σ_{xzz} Erro Relativo	160
Figura 4.101a σ_{yzz}	160
Figura 4.101b σ_{yzz} Erro Relativo	160
Figura 4.102a σ_{xyz}	161
Figura 4.102b σ_{xyz} Erro Relativo	161
Figura 4.103a. σ_{zzx}	161
Figura 4.103b σ_{zzx} Erro Relativo	161
Figura 4.104a σ_{xxx}	161
Figura 4.104b σ_{xxx} Erro Relativo	161
Figura 4.105a σ_{yyx}	162
Figura 4.105b σ_{yyx} Erro Relativo	162
Figura 4.106a σ_{xzx}	162
Figura 4.106b σ_{xzx} Erro Relativo	162
Figura 4.107a σ_{yzx}	162
Figura 4.107b σ_{yzx} Erro Relativo	162
Figura 4.108a σ_{xyx}	163
Figura 4.108b σ_{xyx} Erro Relativo	163
Figura 4.109 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{zz}	164
Figura 4.110 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{zz}	165
Figura 4.111 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{xz}	165
Figura 4.112 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{xz}	166
Figura 4.113 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{zx}	166
Figura 4.114 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{zx}	167
Figura 4.115 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{xx}	167
Figura 4.116 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{xx}	168
Figura 4.117 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{yx}	168
Figura 4.118 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{yx}	169
Figura 4.119 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zz}	169
Figura 4.120 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zz}	170
Figura 4.121 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{xz}	170

Figura 4.122 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xz}	171
Figura 4.123 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yz}	171
Figura 4.124 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{yz}	172
Figura 4.125 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zx}	172
Figura 4.126 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zx}	173
Figura 4.127 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{xx}	173
Figura 4.128 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xx}	174
Figura 4.129 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yx}	174
Figura 4.130 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{yx}	175
Figura 4.131 Função de carregamento distribuído	176
Figura 4.132 Função transladada	176
Figura 4.133 Linhas auxiliares para determinação dos limites de integração	176
Figura 4.134a. Componente real de $H_1 \xi=5$	185
Figura 4.134b Componente real de $H_1 \xi=5$	185
Figura 4.135 – Função IH_{uzz}	195
Figura 4.136 – Componente real de $G_{Uzz}IH_{Uzz} - z=0$	196
Figura 4.137 – Componente imaginária de $G_{Uzz}IH_{Uzz} - z=0$	196
Figura 4.138 – Componente real de $G_{Uzz}IH_{Uzz} - z=1$	196
Figura 4.139 – Componente imaginária de $G_{Uzz}IH_{Uzz} - z=1$	197
Figura 4.140 – Esquema de integração para semi-espaço com carregamento distribuído	197
Figura 4.141 – Semi-espaço submetido a carregamento distribuído	199
Figura 4.142 – Solução quase-estática para carregamento distribuído	200
Figura 4.143 – U_{zz} tendendo ao carregamento concentrado	201
Figura 4.144 – Erro absoluto na aproximação com carregamento concentrado	202
Figura 4.145a. $U_{zz} - \omega=5, z=0, y=2$	203
Figura 4.145b. Erro relativo U_{zz}	203
Figura 4.146a. $U_{xz} - \omega=5, z=0, y=2$	204
Figura 4.146b. Erro relativo U_{xz}	204
Figura 4.147a. $U_{yz} - \omega=5, z=0, y=2$	204
Figura 4.147b. Erro relativo U_{yz}	204
Figura 4.148a $U_{zz} \omega=2, z=0, y=2$	204

Figura 4.148b. Erro relativo U_{zz}	204
Figura 4.149a U_{xz} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	205
Figura 4.149b Erro relativo U_{xz}	205
Figura 4.150a U_{yz} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	205
Figura 4.150b Erro relativo U_{yz}	205
Figura 4.151a U_{zx} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	205
Figura 4.151b Erro relativo U_{zx}	205
Figura 4.152a U_{xx} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	206
Figura 4.152b Erro relativo U_{xx}	206
Figura 4.153a U_{yx} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	206
Figura 4.153b Erro relativo U_{yx}	206
Figura 4.154a U_{zy} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	206
Figura 4.154b Erro relativo U_{zy}	206
Figura 4.155a U_{xy} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	207
Figura 4.155b Erro relativo U_{xy}	207
Figura 4.156a U_{yy} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$	207
Figura 4.156b Erro relativo U_{yy}	207
Figura 4.157a U_{xx} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$	207
Figura 4.157a Erro relativo U_{xx}	207
Figura 4.158a U_{zx} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$	208
Figura 4.158b Erro relativo U_{zx}	208
Figura 4.159a U_{yy} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$	208
Figura 4.159b Erro relativo U_{yy}	208
Figura 4.160a U_{xz} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$	208
Figura 4.160b Erro relativo U_{xz}	208
Figura 4.161a U_{zz} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$	209
Figura 4.161b Erro relativo U_{zz}	209
Figura 4.162 – Planos analisados, carregamento distribuído	210
Figura 4.163 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{zz}	210
Figura 4.164 – Plano x-y, $z=0$ – Componente imaginária de U_{zz}	211
Figura 4.165 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{xz}	211

Figura 4.166 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{xz}	212
Figura 4.167 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{zx}	212
Figura 4.168 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{zx}	213
Figura 4.169 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{xx}	213
Figura 4.170 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{xx}	214
Figura 4.171 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{yx}	214
Figura 4.172 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{yx}	215
Figura 4.173 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zz}	215
Figura 4.174 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zz}	216
Figura 4.175 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{xz}	216
Figura 4.176 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xz}	217
Figura 4.177 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yz}	217
Figura 4.178 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{yz}	218
Figura 4.179 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zx}	218
Figura 4.180 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zx}	219
Figura 4.181 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{xx}	219
Figura 4.182 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xx}	220
Figura 4.183 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yx}	220
Figura 4.184 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{yx}	221
Figura 4.185a – Tensão σ_{zz} Estática	222
Figura 4.185b – Erro σ_{zz} Estática	222
Figura 4.186a – Tensão σ_{xx} Estática	222
Figura 4.186b – Erro σ_{xx} Estática	222
Figura 4.187a – Tensão σ_{yy} Estática	223
Figura 4.187b – Erro σ_{yy} Estática	223
Figura 4.188a – Tensão σ_{yz} Estática	223
Figura 4.188b – Erro σ_{yz} Estática	223
Figura 4.189a – Tensão σ_{xz} Estática	223

Figura 4.189b – Erro σ_{xzz} Estática	223
Figura 4.190a – Tensão σ_{yzz} Estática	224
Figura 4.190b – Erro σ_{yzz} Estática	224
Figura 5.1. Espaço completo submetido a carregamento distribuído.	226
Figura 5.2. Divisão em semi-espacos	226
Figura 5.3 – Singularidades núcleo de deslocamento do espaço completo – parte real	241
Figura 5.4 – Singularidades núcleo de deslocamento do espaço completo – parte imaginária	241
Figura 5.5 – Efeito amortecimento nas descontinuidades do núcleo de deslocamento do espaço completo – parte real	242
Figura 5.6 – Efeito amortecimento nas descontinuidades do núcleo de deslocamento do espaço completo – parte imaginária	242
Figura 5.7 – Esquema de integração espaço completo com carregamento distribuído	243
Figura 5.8a – Deslocamento U_{zz} – Estático	244
Figura 5.8b – Erro relativo U_{zz} – Estático	244
Figura 5.9a – Deslocamento U_{xz} – Estático	244
Figura 5.9b – Erro relativo U_{xz} – Estático	244
Figura 5.10a – Deslocamento U_{yz} – Estático	244
Figura 5.10b – Erro relativo U_{yz} – Estático	244
Figura 5.11a – Deslocamento U_{zx} – Estático	245
Figura 5.11b – Erro relativo U_{zx} – Estático	245
Figura 5.12a – Deslocamento U_{xx} – Estático	245
Figura 5.12b – Erro relativo U_{xx} – Estático	245
Figura 5.13a – Deslocamento U_{yx} – Estático	245
Figura 5.13b – Erro relativo U_{yx} – Estático	245
Figura 5.14a – Deslocamento U_{zy} – Estático	246
Figura 5.14b – Erro relativo U_{zy} – Estático	246
Figura 5.15a – Deslocamento U_{xy} – Estático	246
Figura 5.15b – Erro relativo U_{xy} – Estático	246
Figura 5.16a – Deslocamento U_{yy} – Estático	246

Figura 5.16b – Erro relativo U_{yy} – Estático	246
Figura 5.17a – Deslocamento U_{zz} Dinâmico	247
Figura 5.17b – Erro U_{zz} Dinâmico	247
Figura 5.18a – Deslocamento U_{xz} Dinâmico	248
Figura 5.18b – Erro U_{xz} Dinâmico	248
Figura 5.19a – Deslocamento U_{yz} Dinâmico	248
Figura 5.19b – Erro U_{yz} Dinâmico	248
Figura 5.20a – Deslocamento U_{zx} Dinâmico	248
Figura 5.20b – Erro U_{zx} Dinâmico	248
Figura 5.21a – Deslocamento U_{xx} Dinâmico	249
Figura 5.21b – Erro U_{xx} Dinâmico	249
Figura 5.22a – Deslocamento U_{yx} Dinâmico	249
Figura 5.22b – Erro U_{yx} Dinâmico	249
Figura 5.23a – Deslocamento U_{zy} Dinâmico	249
Figura 5.23b – Erro U_{zy} Dinâmico	249
Figura 5.24a – Deslocamento U_{xy} Dinâmico	250
Figura 5.24b – Erro U_{xy} Dinâmico	250
Figura 5.25a – Deslocamento U_{yy} Dinâmico	250
Figura 5.25b – Erro U_{yy} Dinâmico	250
Figura 5.26a – Tensão σ_{zz} Estática	251
Figura 5.26b – Erro σ_{zz} Estática	251
Figura 5.27a – Tensão σ_{xxz} Estática	251
Figura 5.27b – Erro σ_{xxz} Estática	251
Figura 5.28a – Tensão σ_{yyz} Estática	251
Figura 5.28b – Erro σ_{yyz} Estática	251
Figura 5.29a – Tensão σ_{xyz} Estática	252
Figura 5.29b – Erro σ_{xyz} Estática	252
Figura 5.30a – Tensão σ_{xzz} Estática	252

Figura 5.30b – Erro σ_{xzz} Estática	252
Figura 5.31a – Tensão σ_{yzz} Estática	252
Figura 5.31b – Erro σ_{yzz} Estática	252
Figura 5.32a – Tensão σ_{zzz} 2D, b=20	253
Figura 5.33a – Tensão σ_{xxz} 2D, b=20	253
Figura 5.34a – Tensão σ_{xzz} 2D, b=20	253
Figura 5.35a – Tensão σ_{xxx} 2D, b=20	254
Figura 5.36a – Tensão σ_{zzx} 2D, b=20	254

Tabelas

Tabela 4.1 Baixas frequências	98
Tabela 4.2 Tabela 4.2. U_{zz} – Quase-estático	99
Tabela 4.3. Influência do amortecimento	101
Tabela 4.4. U_{rr} – Quase estático	108
Tabela 4.5 ε_{zz} – Quase estático	109
Tabela 4.6 ε_{rr} - Quase estático	110
Tabela 4.7 σ_{zz} - Quase estático	111

Nomenclatura

Letras latinas

A, B, C, D, E, F – amplitudes de onda

c_{ij} – coeficientes elasticos

E – módulo de Elasticidade

H – parcela oscilante dos integrandos de deslocamento e tensão

G – núcleo dos integrandos

J_i - função de Bessel de ordem i

i – número complexo

\mathfrak{R} - transformada de radon

s – variável escalar no domínio de Radon

n_i – variável angular no domínio de Radon

k – variável no domínio de Fourier

P – carga vertical

S – carga tangencial na direção x

T – carga tangencial na direção y

U_{ij} – deslocamento na direção i, devido carga com orientação j

Letras Gregas

α, β – raízes dos problemas auxiliares

δ – normalização de frequência e densidade

$\delta()$ – função Delta de Dirac

β_{ij} – componentes da matriz de rotação

ε_{ij} – ij componente de deformação

σ_{ijk} – ij componente de tensão, devido carga com orientação k

ν – coeficiente de Poisson

η – coeficiente de amortecimento

λ – constante de Lamé

μ – módulo de cisalhamento

ω – frequência de excitação rad/s

ρ – densidade de massa

ξ – variável angular no domínio de Radon

ξ – comprimento de onda normalizado

ψ – função que relaciona amplitudes de onda

Γ – coeficientes de funções de tensão

Superescritos

* - define variáveis complexas

~ - função no domínio de Radon

^ - função no domínio de Fourier

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

O estudo da dinâmica dos domínios ilimitados está relacionado a muitos problemas da engenharia. A interação, entre estruturas e domínios ilimitados, está presente em grande parte das plantas industriais, nas quais maquinários e suas fundações geram energia que se propaga através do solo para as adjacências. Em regiões de tráfego intenso, são geradas perturbações pela propagação de ondas, podendo causar desconforto nas vizinhanças. Tais perturbações podem ter a forma de pulsos, impactos ou ainda oscilações harmônicas. Essa energia propagada pode interferir na operação de diversos equipamentos, afetar a segurança, as condições trabalho e reduzir a qualidade de vida nas habitações próximas.

Para reduzir a amplitude de oscilações e da energia propagada pelo solo, devem ser construídas fundações adequadas. Quando estas não forem suficientes, pode-se recorrer a barreiras e trincheiras que dificultam a radiação de energia.

O leito dos oceanos também pode ser modelado adequadamente, utilizando as formulações de meios ilimitados. A crescente busca por novas fontes de petróleo tem levado a projetos cada vez mais ousados em águas profundas. Isso implica instalação de equipamentos de prospecção em regiões de difícil acesso e sujeitos a carregamentos dinâmicos. Esses equipamentos não podem apresentar falhas ou devem ter alta confiabilidade. Sendo assim, é necessária uma análise das condições de operação, o mais próximo da realidade, ainda durante a fase de projeto e desenvolvimento.

As crescentes exigências quanto à eficiência de equipamentos, melhoria da qualidade de trabalho e conforto ambiental, requerem um estudo mais aprofundado e realista das alternativas

de projeto, com o objetivo de minimizar efeitos danosos da propagação de ondas. Não é, portanto possível basear análises apenas nos métodos empíricos adotados no passado para o desenvolvimento de fundações e barreiras para evitar a propagação de energia. Muitos pesquisadores têm dedicado grandes esforços na modelagem e formulação de novas metodologias e ferramentas.

O crescimento da capacidade e dos recursos computacionais, ao longo dos últimos anos, ampliou significativamente as possibilidades do uso de técnicas numéricas como instrumentos auxiliares para o projeto e análise dos problemas de interação solo-estrutura. Um dos requisitos básicos, para a modelagem correta desses problemas dinâmicos, é a descrição adequada da condição de radiação de Sommerfeld, ou amortecimento geométrico que garante que a energia originada na fonte se propaga e se afasta sem reflexão.

O método de elementos de contorno (MEC) requer, para sua formulação, o uso de estados auxiliares, as chamadas funções de Green ou soluções fundamentais. Estas funções devem representar as características do meio material que representa o problema. Diversos trabalhos têm sido realizados com o intuito de gerar esses estados para os mais diversos meios, incluindo efeitos de viscoelasticidade, anisotropia, poroelasticidade. A maior parte destas formulações é realizada no domínio da frequência. No entanto, respostas transientes podem ser obtidas com uso da transformada de Fourier. Usualmente, essas funções de Green são sintetizadas através da integração numérica de funções obtidas com auxílio da transformada de Fourier. Mais recentemente foram apresentados trabalhos com uso da transformada de Radon.

As formulações tridimensionais, com uso da transformada de Fourier, resultam em funções que requerem o tratamento de duas integrais impróprias que possuem alto custo computacional, o que é, atualmente, uma barreira para o estudo de problemas mais complexos e realistas. Espera-se que, com o uso da transformada de Radon, sejam obtidos integrandos mais simples e que demandem menor esforço computacional.

Ao longo deste trabalho, será apresentada a formulação para semi-espacos tridimensionais isotrópicos e anisotrópicos viscoelásticos submetidos a carregamentos distribuídos e

concentrados, utilizando a transformada de Radon como ferramenta auxiliar na determinação das respostas. Esta teoria será aplicada também aos espaços completos com carregamento distribuído.

1.2 Revisão Bibliográfica

A análise dinâmica de estruturas bi e tridimensionais, considerando a distribuição contínua de massa, é de difícil proposição. Isto é especialmente verdadeiro em problemas que envolvem meios infinitos ou semi-infinitos. As técnicas analíticas são aplicáveis a poucos problemas específicos. Isto abre espaço para os métodos numéricos. A correta modelagem dos problemas de interação solo-estrutura deve respeitar a condição de Sommerfeld, que representa o amortecimento geométrico do meio tratado. Usualmente, os meios, representando o solo, são descritos como semi-infinitos viscoelásticos (Gazetas, 1983). Os métodos de discretização de domínio, como o método de elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF) apresentam dificuldades para tratar os meios infinitos, porque a dimensão finita das malhas é um fator limitador (Luco e Hadjain, 1974). O MDF não é muito utilizado devido às dificuldades para modelar geometrias complexas. As malhas truncadas e limitadas do MEF e MDF não levam em conta o amortecimento geométrico. O aumento do coeficiente de amortecimento interno ou do material de um meio ilimitado não é capaz de compensar o amortecimento geométrico nos modelos de MEF e MDF (Mesquita et al., 1993). Existem algumas alternativas para inserir os efeitos de amortecimento geométrico no FEM. Uma das possibilidades é o uso dos chamados elementos infinitos (Bettes, 1977, Barros, 1996); outra seria o mapeamento de Dirichlet-to-Neumann (DtN) (Givoli, 1992, Zavala, 1999).

A despeito das diversas tentativas para modelar os problemas dinâmicos de meios infinitos com o uso do MEF, hoje é aceito que o método mais adequado, para esses problemas, é o método dos elementos de contorno (MEC). Os Elementos de Contorno (EC) emergiram como fortes candidatos à solução numérica de problemas dinâmicos complicados, por permitirem a redução de dimensão do problema e garantirem a satisfação das condições de amortecimento das ondas no infinito (Beskos, 1987, Beskos, 1997).

A formulação de elementos de contorno, em que apenas o contorno do domínio necessita de discretização, requer o uso de um estado auxiliar com as mesmas características, isto é, o

mesmo operador diferencial do problema estudado. Tais estados auxiliares são conhecidos por funções de Green (Kane, 1994). Foram realizados diversos estudos com o objetivo de sintetizar, analítica ou numericamente, essas funções auxiliares estacionárias para domínios anisotrópicos (Wang e Rajapakse, 1991, Wang e Achembach, 1995, Saez, 1997, Almeida Barros, 1997), para os poroelásticos (Rajapakse e Sentjuntichai, 1993) e até para meios piezoelétricos (Daros, 1999).

Nos últimos anos, o grupo de pesquisa do DMC, desenvolveu algumas funções de Green viscoelásticas sintetizadas numericamente para o regime estacionário e para os semi-espacos homogêneos isotrópicos 2D e 3D (Romanini, 1995, Mesquita Neto e Pontes Jr., 1992, Capello Sousa, Almeida Barros e Mesquita Neto, 2000), para os problemas multicamadas isotrópicos 2D e 3D (Mesquita Neto e Barros, 1999, Barros, 2001) e para os anisotrópicos (Almeida Barros e Mesquita Neto, 1999, Barros, 2001).

Esses estados viscoelásticos auxiliares, no domínio da frequência, foram sintetizados numericamente. As transformadas integrais de Fourier e Hankel são os recursos matemáticos para as soluções obtidas. Esses estados são funções de Green (cargas concentradas) e de Influência (carga distribuída). Tais estados auxiliares desenvolvidos podem ser incorporados às versões direta e indireta do MEC (DMEC, IMEC) para analisar as respostas estacionárias de fundações rígidas de superfície, engastadas e enterradas, interagindo com os perfis de solo apresentados (Romanini, 1995, Barros, 1997, Almeida Barros e Mesquita Neto, 2001, Almeida Barros e Mesquita Neto, 1999).

A formulação dos problemas de interação solo-estrutura, no regime estacionário, está mais fundamentada e estabelecida que a variante no domínio do tempo. As pesquisas, para obtenção das respostas transientes, estão ainda limitadas a problemas simples, embora seja reconhecido que a formulação transiente seja mais atrativa por permitir soluções não lineares.

As soluções transientes podem ser obtidas através dos seguintes procedimentos: 1- determinação da solução harmônica seguida pela reconstituição da resposta transiente, utilizando síntese de Fourier; 2- solução do problema no domínio transformado de Laplace, seguido de uma transformação inversa para obter a resposta no domínio do tempo; 3- formulação no domínio do tempo e solução em conjunto com esquema de integração direta no tempo, adequado também a problemas não – lineares. Utilizando a primeira alternativa, Adolph (2002) e Thomazo (2004)

obtiveram soluções fundamentais e de Green para problemas bidimensionais. Entretanto, a extensão para problemas tridimensionais mais complexos encontrou limitações devido ao alto custo computacional envolvido na determinação das respostas estacionárias, tornando necessária a busca por formulações mais viáveis.

Uma das alternativas é a apresentada por Wang e Achenbach (1993a, 1993b, 1994a, 1995) consistindo em uma formulação baseada na transformada de Radon que permite a síntese de soluções fundamentais (espaço completo) para meios totalmente anisotrópicos. Em seus estudos, trataram as soluções para problemas bi e tridimensionais com carregamento concentrado harmônico. A grande vantagem, apresentada na formulação, é que, ao invés de resultar em uma transformada inversa com integrais impróprias, obtiveram integrais limitadas. Para o caso bidimensional, é necessária uma integração sobre o círculo unitário e, para o tridimensional, uma integração sobre a superfície de uma esfera unitária.

Utilizando a transformada de Radon, Pan e Tonon (2000) obtiveram expressões para os deslocamentos em espaços completos tridimensionais piezoelétricos com anisotropia geral. No mesmo ano Jiang (2000) apresentou soluções fundamentais para o mesmo problema, mas incluindo efeitos térmicos.

A determinação de soluções para semi-espaços utilizando a transformada de Radon, foi realizada inicialmente por Georgiadis e Lykotrafitis (2001). Trataram de semi-espaços tridimensionais isotrópicos e elásticos submetidos a cargas concentradas vertical e horizontal, que se deslocam sobre a superfície livre. Utilizando a transformada bidimensional de Radon sobre as coordenadas x e y , mantendo a coordenada z no sistema cartesiano, desacoplaram as equações de Navier, obtendo dois problemas auxiliares, para os quais já existia resposta. As condições de contorno são dadas para superfície livre. Após o acoplamento das respostas dos problemas auxiliares, aplicaram a transformada inversa de Radon. Em 2003, apresentaram a extensão do trabalho considerando efeitos de térmicos (Lykotrafitis e Georgiadis, 2003).

Mais recentemente Denda et al (2004) apresentaram a solução fundamental bidimensional para os problemas bidimensionais transientes com piezoelectricidade geral. Realizaram uma implementação de elementos de contorno com estas soluções para determinar as frequências de ressonadores piezoelétricos.

Yang et al (2004) apresentaram a solução para semi-espaços e para espaços completos anisotrópicos, não homogêneos e tridimensionais submetidos a uma carga concentrada deslocando-se ao longo de z . Em sua formulação, adotaram a transformada de Fourier bidimensional e o formalismo de Stroh. Trataram o espaço completo, porém considerando propriedades materiais distintas para valores de z positivos e negativos. O semi-espaço é obtido quando se considera que, para um dos semi-espaços, a rigidez é nula. Um fato interessante dessa formulação é que as funções de Green no domínio físico são obtidas por duas integrais impróprias, que, com auxílio da transformação para coordenadas polares, podem ser reduzidas para uma única integração sobre a direção radial. A resposta final é dividida em uma soma de uma função de Green para espaço ilimitado com uma parcela limitada. A primeira pode ser resolvida com auxílio da transformada de Radon, utilizando basicamente a formulação de Wang e Achembach.

Um algoritmo otimizado, para determinar numericamente os deslocamentos e tensões da formulação apresentada por Wang e Achembach (1995), foi implementado por Dravinski e Zheng (2000). Obtiveram uma redução de cinco vezes nos esforços computacionais quando comparados com os procedimentos usuais de integração.

As soluções fundamentais deduzidas por Wang e Achembach (1995) foram aplicadas em diversas implementações de elementos de contorno. Inicialmente em 2001, Sáez e Dominguez (2001) utilizaram-nas para o estudo de propagação de trincas em sólidos transversalmente isotrópicos submetidos a carregamentos harmônicos. Denda et al (2003) aplicaram as funções no método de elementos de contorno para análise de autovalores (vibrações), determinando autovalores de matrizes não simétricas complexas que dependiam não linearmente da frequência. Kögl e Gaul (2003), utilizando as soluções fundamentais em conjunto com o método da reciprocidade, obtiveram as soluções para problemas de vibração livre de meios tridimensionais anisotrópicos. Ariza e Dominguez (2004) implementaram o método de elementos de contorno transiente para estudo de propagação de trincas de meios tridimensionais transversalmente isotrópicos.

Com exceção dos trabalhos de Georgiadis e Lykotrafidis, foi utilizada a transformada de Radon tridimensional, gerando soluções fundamentais para espaços completos com carregamento

concentrado, considerando propriedades de anisotropia e piezeletricidade. Nesses trabalhos, não foram considerados efeitos de viscoelasticidade, tampouco carregamentos distribuídos. No estudo de fundações, estados auxiliares com carregamento distribuído podem ser muito úteis. Diversos pesquisadores têm-se dedicado à obtenção de soluções para semi-espaços e sua implementação em problemas de interação solo-estrutura. Além dos trabalhos citados anteriormente, desenvolvidos por pesquisadores do DMC, são encontrados alguns para obtenção de estados auxiliares para carregamentos distribuídos. No entanto, a maior parte desses trabalhos lida com forças estáticas.

Seguindo a linha de desenvolver respostas para carregamentos distribuídos, Wang e Liao (2002) apresentaram soluções fechadas para carregamentos estáticos linearmente distribuídos no interior de um semi-espaço transversalmente isotrópico e elástico. O plano de anisotropia adotado é paralelo à superfície livre. Foram estudadas distribuições de carregamento definidas por funções lineares, constante e parabólica definidas sobre uma superfície retangular. As respostas foram obtidas a partir da integração da resposta obtida para um carregamento concentrado. Para carregamento retangular, em semi-espaço tridimensional transversalmente isotrópico e elástico, uma solução foi apresentada por Yue et al (2005). Foi considerado um carregamento estático aplicado no interior do meio semi-infinito. As equações que regem o problema foram resolvidas com uso da transformada dupla de Fourier. Neste trabalho, não foi utilizada a integração do carregamento concentrado, e sim aplicada a condição de contorno, considerando o carregamento distribuído.

Em 2004, Wang et al. (2004) apresentaram respostas para o semi-espaço transversalmente isotrópico submetido a cargas estáticas enterradas não lineares com base triangular: a solução mais uma vez foi obtida através da integração da solução com carregamento concentrado.

1.3 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho tem por objetivo a síntese de funções de Green e estados auxiliares estacionários para meios isotrópicos, anisotrópicos e viscoelásticos, utilizando a transformada de Radon. Serão tratados os semi-espaços submetidos a carregamentos concentrados e distribuídos.

E os espaços completos submetidos ao carregamento distribuído. Para esses problemas não foram encontradas na literatura formulações com uso da transformada de Radon.

No capítulo 2, são apresentadas uma breve introdução e revisão da mecânica do contínuo e considerações sobre meios anisotrópicos e as simplificações possíveis. São apresentadas de forma explícita as equações de movimento para os materiais totalmente anisotrópicos, ortotrópicos e isotrópicos. É descrita a introdução da viscoelasticidade e a metodologia empregada.

No capítulo 3, é feita uma introdução da transformada de Radon e de suas principais propriedades. São apresentados alguns exemplos de transformação e uso das propriedades.

No capítulo 4, é apresentada a metodologia para síntese das funções de Green dos meios isotrópicos com uso da transformada de Radon. São apresentados os casos de carregamento concentrado e distribuído aplicados sobre um semi-espaço. É feita uma análise do comportamento das funções resultantes e discutida a metodologia empregada para obter a solução das integrações numéricas. São apresentados resultados numéricos e uma comparação com os resultados obtidos pela implementação através da transformada de Fourier.

No capítulo 5, obtém-se a solução para espaços completos isotrópicos submetidos a carregamentos distribuídos. É apresentada uma análise do comportamento das funções e sua implementação numérica. Os resultados são comparados com os obtidos pela formulação com a transformada de Fourier.

No capítulo 6, é estudada formulação para os casos envolvendo meios ortotrópicos, apresentando a formulação para os carregamentos concentrado e distribuído em semi-espaços e o carregamento distribuído aplicado no semi-espaço.

No capítulo 7, são apresentadas a conclusão e propostas para temas futuros.

Capítulo 2

Elasticidade geral, Anisotropia, Viscoelasticidade

2.1 Elasticidade Geral

Grande parte dos materiais aplicados em engenharia possui alguma capacidade de elasticidade, isto é, se submetidos a carregamentos limitados, possuem a capacidade de retomar o estado inicial quando descarregados. A deformação elástica desses materiais dentro de certos limites pode ser assumida como linear e proporcional ao carregamento aplicado, sendo descrita pela lei de Hooke generalizada.

Dependendo do ponto de vista em que o material é analisado, pode-se assumir que ele possui ou não propriedades homogêneas, ou seja, as características elásticas poderiam variar ao longo do meio. Isso pode ser observado em solos estratificados e em algumas estruturas de engenharia.

Uma característica interessante de diversos materiais de engenharia, como por exemplo os compósitos, é a variação das características elásticas nas diferentes direções a partir de um ponto de referência adotado no sólido. Quando se assume que um material é isotrópico, define-se que o comportamento do material em todas as direções é o mesmo, possuindo as mesmas propriedades em qualquer sentido.

Por outro lado, ao considerarmos a anisotropia, não existe, necessariamente, uma equivalência de propriedades nos diversos sentidos; em casos gerais, as características são distintas em cada uma das direções.

Ao longo deste capítulo, será apresentada uma breve revisão das teorias da elasticidade para os modelos tridimensionais.

2.2 Deformações, tensões e lei de Hooke

A partir do deslocamento de um ponto provocado por um carregamento arbitrário, é possível determinar o estado de deformação. Assumindo que sejam pequenas deformações, desprezam-se os termos não lineares. Considerando as componentes de deslocamento U_x , U_y , U_z , dadas respectivamente nas direções x , y e z em um sistema cartesiano, é possível determinar as deformações específicas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{dx}, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{dy}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{dz}, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{dz} + \frac{\partial U_z}{dx} \right), \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{dz} + \frac{\partial U_z}{dy} \right), \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{dy} + \frac{\partial U_y}{dx} \right). \quad (2.6)$$

As deformações dadas pelas equações 2.1 a 2.3 representam deformações lineares, enquanto que as restantes representam as distorções angulares do ponto. Estas equações podem ser agrupadas de modo mais elegante na forma de um tensor simétrico de segunda ordem. Dessa maneira o estado de deformação é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{dx_j} + \frac{\partial U_j}{dx_i} \right), \quad (2.7)$$

para $i, j = x, y, z$. Ou ainda na forma matricial:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Para se definir o estado de tensões, são necessárias seis componentes, que, no sistema cartesiano, são divididas em três tensões normais e três componentes de cisalhamento. Que podem ser agrupadas na forma de um tensor simétrico:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A relação entre as componentes do estado de tensão associado a um estado de deformação é fornecida pela lei de Hooke generalizada. Na forma geral, cada componente do estado de tensão é uma função linear e homogênea das seis componentes de deformação. Utilizando a notação indicial, essas relações podem ser escritas por (Timoshenko, Goodier, 1984, Mase&Mase, 1999),

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.10)$$

Nesta relação, c_{ijkl} representa um tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas do material. Este tensor possui 81 componentes. No entanto, lembrando que os tensores de tensão e deformação são simétricos, é possível mostrar que:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}, \quad (2.11)$$

restando, portanto, no máximo 36 componentes distintas. Utilizando as contrações dos índices da notação, agrupados ij e kl , aplicando a regra sugerida por Voigt (1928): 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 13→5 e 12→6, é possível mostrar que a relação tensão-deformação pode ser escrita na forma (Voigt, 1928):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

Admitindo-se que existe uma função de energia potencial elástica e que esta deve ser igual à energia de deformação por unidade de volume deformado e que esta energia é positiva, mostra-se que $c_{ij}=c_{ji}$. Logo, a matriz de coeficientes elásticos é simétrica, com apenas 21 constantes independentes. Usualmente os materiais, mesmo os processados pelo homem, possuem simetrias

materiais que permitem simplificações nas relações constitutivas, reduzindo o número de constantes independentes.

As constantes c_{ij} dependem do sistema de coordenadas adotado, sofrendo transformações segundo a rotação do sistema de coordenadas. O número de constantes é relacionado ao número de direções elasticamente equivalentes, que podem ser definidas a partir de um ponto no interior do meio estudado. Na anisotropia geral, não existe nenhuma direção equivalente. Entretanto, essa é uma situação rara, sendo comum haver direções com propriedades elásticas equivalentes, até o caso extremo em que todas o são, e, nessa situação, existem apenas duas constantes elásticas independentes: esse é o caso dos meios isotrópicos.

2.3. Casos particulares de anisotropia

O tensor de quarta ordem que relaciona as tensões às deformações, pode sofrer uma transformação ortogonal de coordenadas de um sistema de referência, x_i , para o sistema auxiliar, x'_i , como pode ser visualizado na figura 2.1, dada por (Nayfeh, 1995):

$$c_{mnop} = \beta_{mi} \beta_{nj} \beta_{ok} \beta_{op} c'_{ijkl} \quad (2.13)$$

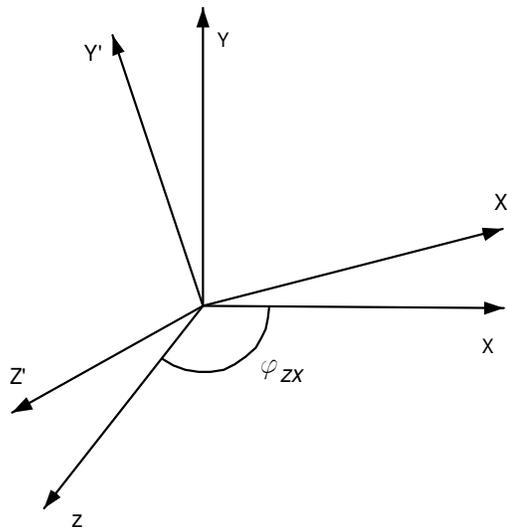


Figura 2.1 Transformação de coordenadas

Sendo que β_{ij} é um tensor de transformação, em que os elementos são dados pelos cossenos entre os eixos x_i e x'_j , e na forma geral é dado por

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde:

$\beta_{ij} = \mathbf{e}_i' \bullet \mathbf{e}_j$, sendo \mathbf{e}_i' e \mathbf{e}_j versores dos dois sistemas de coordenadas envolvidos na transformação.

Partindo da anisotropia geral, para o caso em que existe apenas um plano de simetria, conhecido por simetria plana, e considerando, arbitrariamente, que esse plano coincide com o plano definido pelos eixos x, y. Isto significa que, se duas direções são simétricas a esse plano, então elas são elasticamente equivalentes; a direção normal a esse plano é a direção principal de elasticidade. Nesse caso inicial, em que consideramos apenas uma direção, as tensões normais aplicadas ao plano de simetria, não induzem distorção fora do plano (Almeida Barros, 1997). É possível demonstrar que esse material é invariável á transformação de coordenadas dada por:

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Substituindo a equação 2.15 em 2.13, e assumindo que todas as propriedades não variam, é necessário que os seguintes termos se anulem (Nayfeh, 1995):

$$c_{1123} = c_{2223} = c_{3323} = c_{1113} = c_{2213} = c_{3313} = c_{2312} = c_{1312} = 0 \quad (2.16)$$

com esse resultado, a relação de 2.12 por ser reescrita para simetria plana como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ SIM & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Se for assumido que esse material possui mais um plano de simetria definido por x, z, então para a transformação

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

as propriedades elásticas também devem ser mantidas. Assim, é possível eliminar mais quatro constantes:

$$c_{1112} = c_{2212} = c_{3312} = c_{1323} = 0. \quad (2.19)$$

A relação entre os estados de tensão e deformação, neste caso, passa a ser dada na forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ SIM & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Esta relação caracteriza os materiais conhecidos como ortotrópicos, existindo, neste caso, apenas 9 coeficientes independentes. Note que se dois planos ortogonais constituem planos de simetria, então qualquer plano normal a eles também será um plano de simetria e não contribuirá com novas restrições nas propriedades do material.

Materiais, com simetrias maiores que o caso ortotrópico, podem ser identificados pelo mesmo procedimento. Basta, para tanto, considerar uma rotação φ em torno do eixo z, a rotação pode ser descrita por:

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi & 0 \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Aplicando esta transformação sobre os materiais ortotrópicos, obtém-se (Nayfeh, 1995):

$$\begin{aligned} c'_{1111} &= c_{1111} (\cos \varphi)^4 + c_{2222} (\text{sen} \varphi)^4 + 2(c_{1122} + 2c_{1212})(\cos \varphi)^2 (\text{sen} \varphi)^2 \\ c'_{1122} &= (c_{1111} + c_{2222} - 4c_{1212})(\cos \varphi)^2 (\text{sen} \varphi)^2 + c_{1122} ((\cos \varphi)^4 + (\text{sen} \varphi)^4) \\ c'_{1133} &= c_{1122} (\cos \varphi)^2 + c_{2233} (\text{sen} \varphi)^2 \\ c'_{1122} &= (c_{1111} - c_{1122} - 2c_{1212})(\cos \varphi)^3 (\text{sen} \varphi) + (c_{1122} - c_{2222} + 2c_{1212})(\cos \varphi)(\text{sen} \varphi)^3 \\ c'_{2222} &= c_{1111} (\text{sen} \varphi)^4 + c_{2222} (\cos \varphi)^4 + 2(c_{1122} + 2c_{1212})(\cos \varphi)^2 (\text{sen} \varphi)^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
c'_{2233} &= c_{2233} (\cos \varphi)^2 + c_{1122} (\sin \varphi)^2 \\
c'_{2212} &= (c_{1111} - c_{1122} - 2c_{1212})(\cos \varphi)(\sin \varphi)^3 + (c_{1122} - c_{2222} + 2c_{1212})(\cos \varphi)^3 (\sin \varphi) \\
c'_{3333} &= c_{3333} \\
c'_{3312} &= (c_{2233} - c_{1133})(\cos \varphi)(\sin \varphi) \\
c'_{2312} &= (c_{2323} - c_{1313})(\cos \varphi)(\sin \varphi) \\
c'_{2323} &= c_{2323} (\cos \varphi)^2 + c_{1313} (\sin \varphi)^2 \\
c'_{1313} &= c_{1313} (\cos \varphi)^2 + c_{2323} (\sin \varphi)^2 \\
c'_{1212} &= (c_{1111} + c_{2222} - 2c_{1122} - 4c_{1212})(\cos \varphi)^2 (\sin \varphi)^2 + c_{1212}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Se for considerado que para um ângulo $\varphi=90^\circ$, as características elásticas não variam, então das equações 2.22, percebe-se que as direções em x e y são intercambiáveis, e assim são obtidas as restrições

$$\begin{aligned}
c'_{2222} &= c_{1111} \\
c'_{2233} &= c_{1133} \\
c'_{1313} &= c_{2323}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

e, se para qualquer ângulo φ , as propriedades se mantêm, obtém-se adicionalmente a restrição

$$c_{1111} - c_{1122} = 2c_{1212}. \tag{2.24}$$

Utilizando as restrições de 2.23 e 2.24 na equação 2.20, obtém-se a relação para os materiais transversalmente anisotrópicos,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{55} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.25}$$

Isto significa que este material é isotrópico no plano formado por x, y. Este tipo de anisotropia pode ser denominado também de anisotropia cruzada ou anisotropia hexagonal.

Prosseguindo a análise, considerando um ângulo, γ , e definindo uma rotação em torno do eixo y, é possível escrever a transformação:

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \text{sen} \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Se, para rotações combinadas dos ângulos $\varphi=90^\circ$ e $\gamma=90^\circ$, as propriedades elásticas não variam, chega-se à relação dos materiais com anisotropia cúbica (**cubic**), sendo possível mostrar que, neste caso existem apenas três constantes independentes de modo que,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{66} & 0 & 0 \\ & & & & c_{66} & 0 \\ & \text{SIM} & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

então, os eixos, x, y e z são intercambiáveis.

Se, para qualquer rotação dos ângulos φ e γ , as características elásticas do material se mantêm, tem-se o material isotrópico, que possui as mesmas características em qualquer direção, ou seja, as constantes elásticas independem da orientação do sistema de coordenadas escolhido e existem apenas duas constantes independentes:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ & \text{SIM} & & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.4 Constantes de Engenharia

Como foi visto anteriormente, para os materiais isotrópicos são requeridas apenas duas constantes elásticas independentes. Adicionalmente, qualquer constante elástica pode ser

determinada com o auxílio de outras duas, como, por exemplo, o módulo de Cisalhamento a partir do coeficiente de Poisson e módulo de Elasticidade.

Para o caso isotrópico, tem-se:

$$\begin{aligned} c_{11} &= E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \\ c_{12} &= E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \end{aligned} \quad (2.28)$$

sendo:

- E o módulo de Elasticidade,
- ν o coeficiente de Poisson,
- λ constante de Lamé,
- μ módulo de cisalhamento.

Utilizando as constantes de engenharia, reescreve-se 2.27 na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

As relações de elasticidade para o caso transversalmente anisotrópico são dadas por

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E}{a} (1 - n\nu_{zx}^2) \\ c_{12} &= \frac{E}{a} (n\nu_{zx}^2 + \nu) \\ c_{13} &= \frac{E}{a} \nu_{zx} (1 + \nu) \\ c_{33} &= \frac{E_z}{a} \nu_{zx} (1 + \nu^2) \\ c_{44} &= \mu_{xz} \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo:

$$n = \frac{E}{E_z} \quad (2.31)$$

$$a = (1 + \nu) \left(1 - \nu - 2\nu v_{zx}^2 \right)$$

nas quais:

- E é o módulo de elasticidade na direção do plano de isotropia, considerado o plano xy ,
- E_z é o módulo de elasticidade na direção normal ao plano de isotropia,
- ν é o coeficiente de Poisson que relaciona as deformações ocorridas em duas direções ortogonais contidas no plano de isotropia,
- ν_{zx} é o coeficiente de Poisson que relaciona a deformação na direção normal ao plano de isotropia com a deformação numa direção qualquer contida no plano xy ,
- $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ é o módulo de cisalhamento numa direção contida no plano de isotropia,
- μ_{xz} é o módulo de cisalhamento numa direção normal ao plano de isotropia.

A energia de deformação deve ser sempre positiva, por isso as constantes devem respeitar as restrições (Payton, 1983)

$$\begin{aligned} c_{11} &> |c_{12}| \\ c_{33} (c_{11} + c_{12}) &> 2c_{13}^2 \\ c_{44} &> 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Segundo Pickering (1970) é preciso que:

$$\begin{aligned} E, E_z, \mu_{xz} &> 0 \\ \nu &> -1 \\ n(1 - \nu) &> 2(\nu_{zx})^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para os materiais ortotrópicos, as constantes em função de propriedades de engenharia são dadas por:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{\Delta E_y E_z} \\ c_{12} &= \frac{\nu_{yx} - \nu_{zx}\nu_{yz}}{\Delta E_y E_z} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
c_{13} &= \frac{\nu_{zx} - \nu_{yx}\nu_{zy}}{\Delta E_y E_z} \\
c_{21} &= \frac{\nu_{xy} - \nu_{xz}\nu_{zy}}{\Delta E_x E_z} \\
c_{22} &= \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{\Delta E_x E_z} \\
c_{23} &= \frac{\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xy}}{\Delta E_x E_z} \\
c_{31} &= \frac{\nu_{xz} - \nu_{xy}\nu_{yz}}{\Delta E_x E_y} \\
c_{32} &= \frac{\nu_{yz} - \nu_{xy}\nu_{yx}}{\Delta E_x E_y} \\
c_{33} &= \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}{\Delta E_x E_z} \\
c_{44} &= \mu_{yz} \\
c_{55} &= \mu_{zx} \\
c_{66} &= \mu_{xy}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

sendo

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xz} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z} \tag{2.35}$$

nas quais

- E_i é o módulo de elasticidade na direção i , com $i=x,y,z$,
- ν_{ij} é o coeficiente de Poisson que relaciona a deformação na direção i , com uma deformação na direção j .

É importante frisar que $\nu_{ij} = \nu_{ji}$. Uma vez que o tensor c_{ij} deve ser simétrico, para que a energia de deformação seja positiva, as seguintes restrições devem ser respeitadas

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_{yx} - \nu_{zx}\nu_{yz}}{\Delta E_y E_z} &= \frac{\nu_{xy} - \nu_{xz}\nu_{zy}}{\Delta E_x E_z} \\
\frac{\nu_{zx} - \nu_{yx}\nu_{zy}}{\Delta E_y E_z} &= \frac{\nu_{xz} - \nu_{xy}\nu_{yz}}{\Delta E_x E_y} \\
\frac{\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xy}}{\Delta E_x E_z} &= \frac{\nu_{yz} - \nu_{xy}\nu_{yx}}{\Delta E_x E_y}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

sendo relações relativamente complicadas. Utilizando a inversa da matriz c_{ij} composta pelas constantes fornecidas em 2.34, é possível obter uma relação mais simples

$$\frac{V_{ij}}{E_i} = \frac{V_{ji}}{E_j}. \quad (2.37)$$

A partir dessas relações entre tensões e deformações, é possível obter as equações de movimento.

2.5 Rotação de Coordenadas

As componentes da matriz c_{ij} , que fornece as constantes elásticas do material, dependem do sistema de coordenadas adotado. Nos casos apresentados anteriormente, para u'a maior simplificação considerou-se que os eixos, que definem as direções das propriedades elásticas, coincidiam com o sistema cartesiano de referência. Entretanto, pode ser útil, uma definição geral, válida para um ângulo qualquer. Considerando uma rotação de um sistema local x , para um sistema global x' , pode-se escrever para o tensor de quarta ordem:

$$c'_{mnop} = \beta_{mi}\beta_{nj}\beta_{ok}\beta_{op}c_{ijkl}, \quad (2.38)$$

sendo β_{ij} a matriz de rotação dada pelos ângulos entre as direções i' e j . A transformação, também, é válida para as componentes de deslocamento, deformação e tensão, fornecidas respectivamente, pelas relações

$$u'_i = \beta_{ij}u_j, \quad (2.39)$$

$$\varepsilon'_{mn} = \beta_{mi}\beta_{nj}\varepsilon_{ij}, \quad (2.40)$$

$$\sigma'_{mn} = \beta_{mi}\beta_{nj}\sigma_{ij}. \quad (2.41)$$

Considerando a matriz de rotação dada na equação 2.21, ou seja, a rotação em torno do eixo z , é possível obter a equação transformada para o material com simetria plana, e adotando a notação contraída de c_{ijkl} de forma que:

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c_{11}(\cos\varphi)^4 + c_{22}(\sin\varphi)^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 + 4(c_{16} + 2c_{26})(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 \\ c'_{12} &= (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66})(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 + c_{12} + 2(c_{16} + 2c_{26})((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2)\cos\varphi\sin\varphi \\ c'_{13} &= c_{13}(\cos\varphi)^2 + c_{23}(\sin\varphi)^2 + 2c_{36}\cos\varphi\sin\varphi \\ c'_{16} &= (c_{12} - c_{11} - 2c_{66})(\cos\varphi)^3(\sin\varphi) + (c_{22} - c_{12} - 2c_{66})(\cos\varphi)(\sin\varphi)^3 + 3(c_{26} - c_{16})(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 + \\ &+ c_{16}(\cos\varphi)^4 - c_{26}(\sin\varphi)^4 \\ c'_{22} &= c_{11}(\sin\varphi)^4 + c_{22}(\cos\varphi)^4 + 2(c_{12} + 2c_{1212})(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)^2 - 4(c_{16}(\cos\varphi)^2 + c_{26}(\sin\varphi)^2)\cos\varphi\sin\varphi \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
c'_{23} &= c_{23} (\cos \varphi)^2 + c_{13} (\text{sen} \varphi)^2 - 2c_{36} \cos \varphi \text{sen} \varphi \\
c'_{26} &= (c_{12} - c_{11} - 2c_{66})(\cos \varphi)(\text{sen} \varphi)^3 + (c_{22} - c_{12} - 2c_{66})(\cos \varphi)^3 (\text{sen} \varphi) + 3(c_{16} - c_{26})(\cos \varphi)^2 (\text{sen} \varphi)^2 - \\
&\quad - c_{16} (\text{sen} \varphi)^4 + c_{26} (\cos \varphi)^4 \\
c'_{33} &= c_{33} \\
c'_{36} &= (c_{23} - c_{13})(\cos \varphi)(\text{sen} \varphi) + c_{36} ((\cos \varphi)^2 - (\text{sen} \varphi)^2) \\
c'_{44} &= c_{44} (\cos \varphi)^2 + c_{55} (\text{sen} \varphi)^2 - 2c_{45} \cos \varphi \text{sen} \varphi \\
c'_{45} &= (c_{44} - c_{55})(\cos \varphi)(\text{sen} \varphi) + c_{45} ((\cos \varphi)^2 - (\text{sen} \varphi)^2) \\
c'_{55} &= c_{55} (\cos \varphi)^2 + c_{44} (\text{sen} \varphi)^2 + 2c_{45} \cos \varphi \text{sen} \varphi \\
c'_{66} &= c_{66} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66})(\cos \varphi)^2 (\text{sen} \varphi)^2 + 2(c_{16} - c_{26})(-(\cos \varphi)^2 + (\text{sen} \varphi)^2) \cos \varphi \text{sen} \varphi.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Agrupando na forma matricial, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{zz} \\ \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & c'_{16} \\ & c'_{22} & c'_{23} & 0 & 0 & c'_{26} \\ & & c'_{33} & 0 & 0 & c'_{36} \\ & & & c'_{44} & c'_{45} & 0 \\ & & & & c'_{55} & 0 \\ & & & & & c'_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \varepsilon'_{zz} \\ 2\varepsilon'_{yz} \\ 2\varepsilon'_{xz} \\ 2\varepsilon'_{xy} \end{array} \right\}. \tag{2.43}$$

É possível comparar este resultado com aqueles obtidos na equação 2.22 para os materiais ortotrópicos. Percebe-se a semelhança, no que se refere à aparência, entre a matriz não rotacionada dos materiais com isotropia plana e dos ortotrópicos rotacionados. Existem diversas vantagens na utilização do sistema de coordenadas global, x' , y' , z' . Se for utilizado o ângulo $\varphi=0$, obtêm-se as equações do sistema local de referência. Para qualquer rotação do plano de simetria dos materiais com isotropia plana ou dos demais, excluindo-se os isotrópicos, as propriedades transformadas assumem a forma da equação 2.43. Independentemente do ângulo adotado, mesmo que eliminados os coeficientes c_{16} , c_{26} , c_{36} e c_{45} , para o caso ortotrópico, mantém-se a forma 2.43, apenas caso particular de $\varphi=0$, permitindo a eliminação de componentes adicionais, obtendo, já no domínio transformado, um sistema semelhante àquele da equação 2.20.

2.6 Equações de movimento

Partindo da equação de movimento obtida do equilíbrio, desconsideradas as forças de volume,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{dt^2}, \quad (2.44)$$

e aplicando as equações 2.1 a 2.6 nas relações entre tensão e deformação fornecidas para os diferentes materiais, 2.12 para os anisotrópicos gerais, 2.17 para os com simetria plana, 2.20 para os materiais ortotrópicos, 2.25 para os transversalmente isotrópicos e finalmente 2.28 para os isotrópicos é possível obter equações de movimento em função unicamente dos deslocamentos. As soluções dessas equações são chamadas de estados auxiliares ou soluções fundamentais, e podem ser aplicadas no método dos elementos de contorno direto e indireto.

Inicialmente para o caso isotrópico, excluídas as forças de corpo, é possível obter:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \right\} U_x + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dy} \right) U_y + \left(\frac{d^2}{dx dz} \right) U_z \right\} = -\omega^2 \rho U_x, \quad (2.45)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dy^2} \right] \right\} U_y + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dy} \right) U_x + \left(\frac{d^2}{dy dz} \right) U_z \right\} = -\omega^2 \rho U_y, \quad (2.46)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} U_z + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dz} \right) U_x + \left(\frac{d^2}{dy dz} \right) U_y \right\} = -\omega^2 \rho U_z. \quad (2.47)$$

Considerando o material totalmente anisotrópico, ou seja, a relação da equação 1.12, submetido a uma transformação para o sistema global de coordenadas, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} & C'_{11} \frac{d^2 U_x}{dx^2} + C'_{66} \frac{d^2 U_x}{dy^2} + C'_{55} \frac{d^2 U_x}{dz^2} + 2C'_{16} \frac{d^2 U_x}{dx dy} + 2C'_{15} \frac{d^2 U_x}{dx dz} + 2C'_{56} \frac{d^2 U_x}{dy dz} \\ & + C'_{16} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + C'_{26} \frac{d^2 U_y}{dy^2} + C'_{45} \frac{d^2 U_y}{dz^2} + (C'_{12} + C'_{66}) \frac{d^2 U_y}{dx dy} + (C'_{14} + C'_{56}) \frac{d^2 U_y}{dx dz} \\ & + (C'_{46} + C'_{25}) \frac{d^2 U_y}{dy dz} + C'_{15} \frac{d^2 U_z}{dx^2} + C'_{46} \frac{d^2 U_z}{dy^2} + C'_{35} \frac{d^2 U_z}{dz^2} + (C'_{14} + C'_{56}) \frac{d^2 U_z}{dx dy} \\ & + (C'_{13} + C'_{55}) \frac{d^2 U_z}{dx dz} + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_z}{dy dz} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
& C'_{66} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + C'_{22} \frac{d^2 U_y}{dy^2} + C'_{44} \frac{d^2 U_y}{dz^2} + 2C'_{26} \frac{d^2 U_y}{dxdy} + 2C'_{46} \frac{d^2 U_y}{dxdz} + 2C'_{24} \frac{d^2 U_y}{dydz} + \\
& C'_{16} \frac{d^2 U_x}{dx^2} + C'_{26} \frac{d^2 U_x}{dy^2} + C'_{45} \frac{d^2 U_x}{dz^2} + (C'_{12} + C'_{66}) \frac{d^2 U_x}{dxdy} + (C'_{14} + C'_{56}) \frac{d^2 U_x}{dxdz} + \\
& + (C'_{46} + C'_{25}) \frac{d^2 U_x}{dydz} + C'_{56} \frac{d^2 U_z}{dx^2} + C'_{24} \frac{d^2 U_z}{dy^2} + C'_{34} \frac{d^2 U_z}{dz^2} + (C'_{46} + C'_{25}) \frac{d^2 U_z}{dxdy} + \\
& + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_z}{dxdz} + (C'_{23} + C'_{44}) \frac{d^2 U_z}{dydz} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
& C'_{15} \frac{d^2 U_x}{dx^2} + C'_{46} \frac{d^2 U_x}{dy^2} + C'_{35} \frac{d^2 U_x}{dz^2} + (C'_{14} + C'_{56}) \frac{d^2 U_x}{dxdy} + (C'_{13} + C'_{55}) \frac{d^2 U_x}{dxdz} + \\
& + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_x}{dydz} + C'_{56} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + C'_{24} \frac{d^2 U_y}{dy^2} + C'_{34} \frac{d^2 U_y}{dz^2} + (C'_{46} + C'_{25}) \frac{d^2 U_y}{dxdy} + \\
& + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_y}{dxdz} + (C'_{23} + C'_{44}) \frac{d^2 U_y}{dydz} + C'_{55} \frac{d^2 U_z}{dx^2} + C'_{44} \frac{d^2 U_z}{dy^2} + C'_{33} \frac{d^2 U_z}{dz^2} + \\
& + 2C'_{45} \frac{d^2 U_z}{dxdy} + 2C'_{35} \frac{d^2 U_z}{dxdz} + 2C'_{34} \frac{d^2 U_z}{dydz} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Estas equações são válidas para qualquer ângulo, ou seja, são dadas no sistema global de referência. Utilizando as restrições de 2.16, que definem o caso de isotropia plana, recorrendo à análise da seção anterior, sabe-se que a Lei de Hooke, para este caso, é dada pela equação 2.43. Assim sendo, é possível obter as equações de movimento para problemas de isotropia plana, eliminando as parcelas C'_{14} , C'_{15} , C'_{24} , C'_{25} , C'_{34} , C'_{35} , C'_{46} e C'_{56} , das equações 2.48 a 2.50, reescritas como:

$$\begin{aligned}
& C'_{11} \frac{d^2 U_x}{dx^2} + C'_{66} \frac{d^2 U_x}{dy^2} + C'_{55} \frac{d^2 U_x}{dz^2} + 2C'_{16} \frac{d^2 U_x}{dxdy} + C'_{16} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + C'_{26} \frac{d^2 U_y}{dy^2} + C'_{45} \frac{d^2 U_y}{dz^2} + \\
& + (C'_{12} + C'_{66}) \frac{d^2 U_y}{dxdy} + (C'_{13} + C'_{55}) \frac{d^2 U_z}{dxdz} + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_z}{dydz} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
& C'_{16} \frac{d^2 U_x}{dx^2} + C'_{26} \frac{d^2 U_x}{dy^2} + C'_{45} \frac{d^2 U_x}{dz^2} + (C'_{12} + C'_{66}) \frac{d^2 U_x}{dxdy} + C'_{66} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + C'_{22} \frac{d^2 U_y}{dy^2} + \\
& + C'_{44} \frac{d^2 U_y}{dz^2} + 2C'_{26} \frac{d^2 U_y}{dxdy} + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_z}{dxdz} + (C'_{23} + C'_{44}) \frac{d^2 U_z}{dydz} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
& (C'_{13} + C'_{55}) \frac{d^2 U_x}{dx dz} + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_x}{dy dz} + (C'_{36} + C'_{45}) \frac{d^2 U_y}{dx dz} + (C'_{23} + C'_{44}) \frac{d^2 U_y}{dy dz} + \\
& + C'_{55} \frac{d^2 U_z}{dx^2} + C'_{44} \frac{d^2 U_z}{dy^2} + C'_{33} \frac{d^2 U_z}{dz^2} + 2C'_{45} \frac{d^2 U_z}{dx dy} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Estas equações também são válidas para o caso ortotrópico, uma vez que eliminar os coeficientes C_{16} , C_{26} , C_{36} e C_{45} , do sistema de coordenadas local, referenciado no material, não altera a forma da Lei de Hooke no sistema global, ocorrendo apenas uma simplificação das constantes C'_{ij}

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= c_{11} (\cos \varphi)^4 + c_{22} (\sen \varphi)^4 + 2(c_{12} + 2c_{66}) (\cos \varphi)^2 (\sen \varphi)^2 \\
c'_{12} &= (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66}) (\cos \varphi)^2 (\sen \varphi)^2 + c_{12} \\
c'_{13} &= c_{13} (\cos \varphi)^2 + c_{23} (\sen \varphi)^2 \\
c'_{16} &= (c_{12} - c_{11} - 2c_{66}) (\cos \varphi)^3 (\sen \varphi) + (c_{22} - c_{12} - 2c_{66}) (\cos \varphi) (\sen \varphi)^3 \\
c'_{22} &= c_{11} (\sen \varphi)^4 + c_{22} (\cos \varphi)^4 + 2(c_{12} + 2c_{66}) (\cos \varphi)^2 (\sen \varphi)^2 \\
c'_{23} &= c_{23} (\cos \varphi)^2 + c_{13} (\sen \varphi)^2 \\
c'_{26} &= (c_{12} - c_{11} - 2c_{66}) (\cos \varphi) (\sen \varphi)^3 + (c_{22} - c_{12} - 2c_{66}) (\cos \varphi)^3 (\sen \varphi) \\
c'_{33} &= c_{33} \\
c'_{36} &= (c_{23} - c_{13}) (\cos \varphi) (\sen \varphi) \\
c'_{44} &= c_{44} (\cos \varphi)^2 + c_{55} (\sen \varphi)^2 \\
c'_{45} &= (c_{44} - c_{55}) (\cos \varphi) (\sen \varphi) + c_{45} ((\cos \varphi)^2 - (\sen \varphi)^2) \\
c'_{55} &= c_{55} (\cos \varphi)^2 + c_{44} (\sen \varphi)^2 \\
c'_{66} &= c_{66} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66}) (\cos \varphi)^2 (\sen \varphi)^2.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Se for considerado que o sistema de referência local coincide com o global, então, obtém-se a resposta da equação 2.20.

2.7 Viscoelasticidade

Grande parte das estruturas não possui comportamento perfeitamente elástico.

Usualmente os materiais possuem alguma viscoelasticidade, o que significa que o estado de tensão é função não somente de deformações, mas também da evolução desses estados ao longo

do tempo. A inclusão desses efeitos permite u'a melhor representação da dissipação de energia no meio.

A viscoelasticidade linear pode ser facilmente agregada, quando se trabalha no domínio da freqüência com o uso do princípio da correspondência (Findley et al, 1989, Cristensen, 1982). Seguindo essa linha, uma aproximação, para considerar a viscoelasticidade, é a substituição das constantes das equações constitutivas (Lamé) por constantes complexas, que caracterizam um amortecimento hysterético, e que podem ou não depender da freqüência. No domínio do tempo, a inclusão é feita por equações constitutivas dependentes do tempo. Neste caso, é comum o tratamento com integrais de convolução.

Os primeiros trabalhos com inclusão de efeitos de amortecimento em problemas de interação solo-estrutura remontam aos trabalhos de Mesquita (1989), tendo sido, posteriormente, complementados com sucesso de modelagens mais complexas, como a introdução de outras características materiais, como estratificação, anisotropia, etc.

A consideração de modelos dependentes da freqüência permite a inclusão mais simples, pois não envolvem integrais de convolução, mas apenas produtos. Diversas funções podem ser adotadas para descrever essa dependência da freqüência. A variação pode ser constante, linear, em forma de rampa, entre outros. Podem ser considerados, inclusive, dados experimentais. Os efeitos dos modelos de amortecimento foram estudados por Adolph (2002), Mesquita et al. (2003).

Para meios com viscoelasticidade, as relações da elasticidade podem ser reescritas na forma:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}, \quad (2.55)$$

sendo:

$$c_{ijkl}^*(\omega) = c_{ijkl} (1 + i\eta_{ijkl}(\omega)), \quad (2.56)$$

não sendo aplicável a convenção da soma de Einstein. Na equação 2.56, η_{ijkl} é um tensor que representa a taxa de amortecimento interno do material. Neste trabalho não será considerada uma componente real de amortecimento, apenas uma parcela imaginária. Este amortecimento poderia ser explicado como sendo uma dissipação da energia devida ao atrito entre as partículas do material.

O amortecimento pode ser viscoso ou hysterético. O primeiro é caracterizado por ser uma função da frequência, ou seja, a taxa de amortecimento interno depende e varia com a frequência, enquanto que, no hysterético a taxa se mantém constante (Gaul et al, 1985).

As constantes de amortecimento podem ser apresentadas na forma de uma matriz simétrica, utilizando a notação condensada,

$$c_{ij}^* (\omega) = c_{ij} (1 + i\eta_{ij} (\omega)). \quad (2.57)$$

Novamente a repetição dos índices não indica soma.

Neste trabalho, não são considerados valores complexos para os coeficientes de Poisson. As constantes elásticas, incluindo efeitos de amortecimento, são dadas na forma:

$$E_i^* (\omega) = E_i (1 + i\eta_{E_i} (\omega)) \quad (2.58)$$

$$\mu_i^* (\omega) = \mu_i (1 + i\eta_{\mu_i} (\omega)).$$

Note que esta formulação torna possível aplicar amortecimentos, variando segundo a direção, ou seja, poderiam ser utilizadas taxas de amortecimento diferentes para cada propriedade elástica.

Capítulo 3

Transformada de Radon e suas propriedades

3.1 A transformada de Radon

A transformada de Radon foi desenvolvida por Radon em 1917. Entretanto, só se tornou mais difundida na década de 70. Não é tão conhecida quanto a transformada de Fourier. No entanto, já foi bem estudada, podendo ser citados os trabalhos de Deans (1993), John (1955), Gel'fand et al (1966) e Helgason (1980). Para este trabalho houve também a contribuição de Carvalho (2005). A aplicação mais comum, e adotada em larga escala, é a tomografia computadorizada e os problemas de reconstrução de imagens (Deans, 1993).

Ao longo deste capítulo, será apresentada a transformada de Radon e suas principais propriedades.

3.2 Definição da transformada bidimensional de Radon

Nesta introdução, a transformada de Radon será estudada apenas para os casos bi e tridimensionais. A transformada de Radon de uma função f é designada por

$$\tilde{f} = \mathfrak{R}f . \quad (3.1)$$

No caso bidimensional, sejam x, y as coordenadas de um domínio do \mathbb{R}^2 . Se L é uma linha no plano, então o mapeamento definido pela projeção ou a integral de linha de f , ao longo de todas as linhas L possíveis de se obterem no plano, é a transformada de Radon de f , desde que a integral exista, pode-se escrever que:

$$\tilde{f} = \mathfrak{R}f = \int_L f(x, y) dp , \quad (3.2)$$

sendo dp o incremento de comprimento ao longo de L . O domínio pode ser o plano completo, ou apenas uma região deste plano, como indicado na figura 3.1. O mapeamento que define a

transformada de 3.2 foi estudado por Radon (1917). Em seu artigo, mostrou que se f é contínua e possui suporte compacto, então $\mathfrak{R}(f)$ é definida unicamente pela integração ao longo de todas as linhas L . Considere a figura 3.2, e a equação para alinhamento L dada por:

$$s = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (3.3)$$

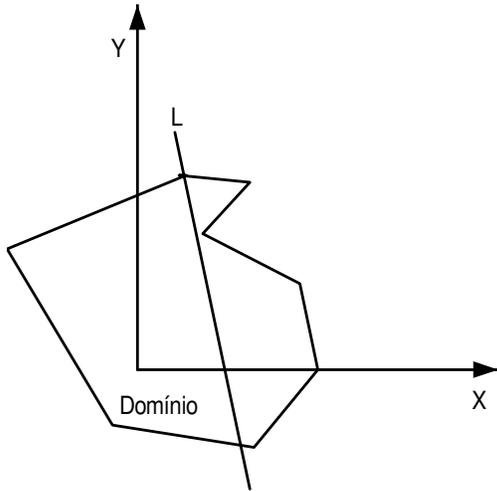


Figura 3.1- Linha no domínio da função

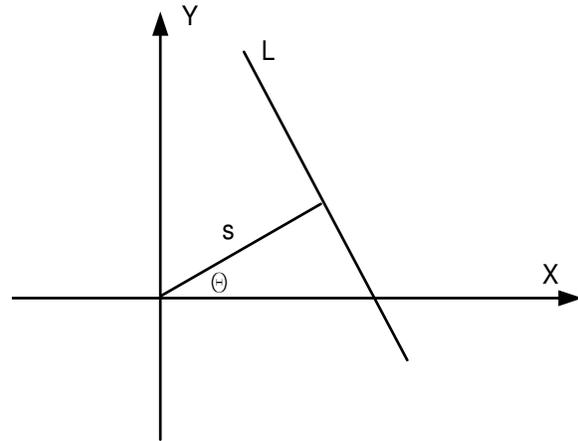


Figura 3.2 - Coordenadas para definir L

A integral de 3.2 é dependente dos valores de s e Φ , de forma explícita

$$\tilde{f}(s, \phi) = \mathfrak{R}f = \int_L f(x, y) dp. \quad (3.4)$$

Se esta integral é conhecida para todos os valores de s e Φ , então \tilde{f} é a transformada de Radon de f . Considerando um sistema de coordenadas definido por s e p , obtido da rotação ϕ em relação ao sistema de coordenadas original x, y , como na figura 3.3, de modo que

$$\begin{aligned} x &= s \cos \phi - p \sin \phi \\ y &= s \sin \phi + p \cos \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando as relações de 3.5 em 3.4, chega-se a

$$\tilde{f}(s, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \phi - p \sin \phi, s \sin \phi + p \cos \phi) dp. \quad (3.6)$$

Se a função f existe somente em parte do domínio, então a integral passa a ser limitada.

Existe, ainda outra maneira de descrever a transformada de Radon. Assumindo que $\bar{x} = (x, y)$ e que $f(\bar{x}) = f(x, y)$, e definindo os vetores unitários indicados na figura 3.4, na forma

$$\begin{aligned}\xi &= (\cos \phi, \text{sen} \phi) \\ \xi^\perp &= (-\text{sen} \phi, \cos \phi)\end{aligned}\tag{3.7}$$

e, sendo possível, obter um escalar t de modo que $\bar{x} = s\xi + t\xi^\perp$, reescreve-se 3.6 na forma

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\xi + t\xi^\perp) dt.\tag{3.8}$$

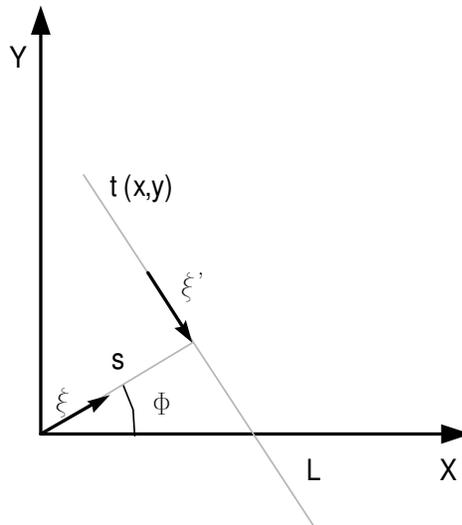
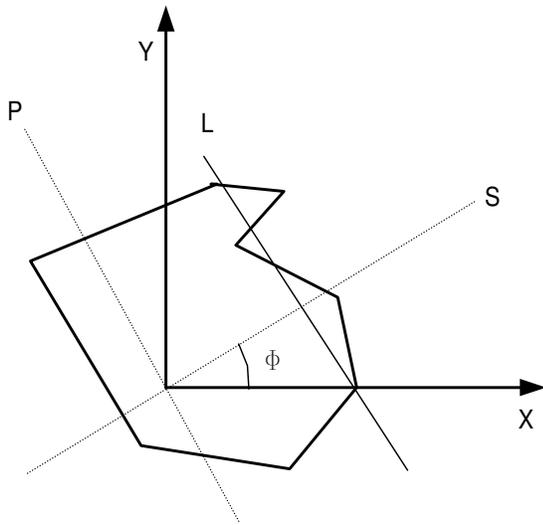


Figura 3.3 Rotação do sistema de coordenadas Figura 3.4 – Linha L em função vetores ξ

Uma outra forma, que permite uma generalização para dimensões superiores, é obtida quando se reescreve a equação da linha de 3.3 como

$$s = \xi \cdot \bar{x} = x \cos \phi + y \text{sen} \phi,\tag{3.9}$$

utilizando-se este resultado, a transformada de Radon no \mathbb{R}^2 pode ser escrita com auxílio de uma função Delta de Dirac,

$$\tilde{f}(s, \xi) = \iint_{\mathbb{R}} f(\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) dx dy.\tag{3.10}.$$

Recorrendo à equação 3.8, é possível visualizar o espaço sobre a qual é definida a transformada de Radon bidimensional. Uma vez que ξ é um vetor definido pelo ângulo Φ , \tilde{f} é dada sobre a superfície de semicilindro infinito.

3.3 Transformada tridimensional de Radon

É possível obter a transformada de Radon tridimensional, a partir da extensão de 3.10. Para tanto, considera-se que $\bar{x} = (x, y, z)$, e que o vetor ξ é unitário no \mathbb{R}^3 , de modo que

$$s = \xi \cdot \bar{x} = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \quad (3.11)$$

define um plano, e a transformada de Radon é dada por:

$$\tilde{f}(s, \xi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) dx dy dz. \quad (3.12)$$

A extensão para dimensões superiores é obtida, ampliando-se a equação de s , sendo possível a definição para qualquer \mathbb{R}^n .

3.4 Propriedades da transformada de Radon

As propriedades descritas a seguir são válidas para transformadas de Radon de dimensões quaisquer. Estas propriedades são descritas de maneira mais aprofundada em Deans (1993) e Gel'fand et al. (1966).

Homogeneidade: a função $\tilde{f}(s, \xi)$ é homogênea de grau -1, considere

$$\tilde{f}(as, a\xi) = \int f(\bar{x}) \delta(as - s\xi \cdot \bar{x}) d\bar{x} \quad (3.13)$$

$$\tilde{f}(as, a\xi) = |a|^{-1} \int f(\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x}$$

a é um número qualquer não nulo, portanto

$$\tilde{f}(as, a\xi) = |a|^{-1} \tilde{f}(s, \xi). \quad (3.14)$$

Se $a=-1$, então se mostra que a função é simétrica

$$\tilde{f}(-s, -\xi) = \tilde{f}(s, \xi). \quad (3.15)$$

Linearidade: para duas funções f e g e duas constantes c_1 e c_2 ,

$$\mathfrak{R}\{c_1 f + c_2 g\} = \int [c_1 f(\bar{x}) + c_2 g(\bar{x})] \delta(p - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x} = c_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}. \quad (3.16)$$

A transformada de Radon é uma transformação linear.

Transformadas de funções lineares: através de uma mudança de variáveis, é possível obter a transformada de Radon de uma função de uma mudança linear de coordenadas. Considerando o produto interno dado por

$$\xi \cdot \bar{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \quad (3.17)$$

que, na forma matricial, possui a forma:

$$\xi^T \bar{x} = \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3. \quad (3.18)$$

Para uma matriz A não singular composta de elementos reais de modo que $y = A\bar{x}$, com, $x, y \in \mathbb{R}^n$, pode-se escrever a identidade

$$\xi^T y = \xi^T A\bar{x} = (A^T \xi)^T \bar{x}, \quad (3.19)$$

que de forma mais explícita é:

$$\xi \cdot y = \xi \cdot A\bar{x} = A^T \xi \cdot \bar{x}. \quad (3.20)$$

Considerando a transformada $\mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\}$, assumindo-se que A é não singular e que seja possível escrever a relação

$$y = A\bar{x}, \quad (3.21)$$

que utilizando a notação indicial é dada por

$$y_k = \sum_{l=1}^n A_{kl} x_l, \quad (3.22)$$

com $k=1,2,\dots,n$, no caso bidimensional, $n=2$, no tridimensional $n=3$.

Sendo $B = A^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\} &= \int f(A\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x} \\ \mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\} &= |\det B| \int f(\bar{y}) \delta(s - \xi \cdot B\bar{y}) d\bar{y} \\ \mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\} &= |\det B| \int f(\bar{y}) \delta(s - B^T \xi \cdot \bar{y}) d\bar{y}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo o jacobiano da transformação a magnitude do determinante de B , então

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\} &= |\det B| \left\{ \tilde{f}(s, B^T \xi) \right\} \\ \mathfrak{R}\{f(B^{-1}\bar{x})\} &= |\det B| \left\{ \tilde{f}(s, B^T \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Note que, se B for ortogonal, ou seja, $B^{-1} = B^T = A$, e o determinante de B for igual a 1, chega-se a

$$\mathfrak{R}\{f(A\bar{x})\} = \tilde{f}(s, A\xi). \quad (3.25)$$

Se a matriz A é um múltiplo da matriz identidade, $A = \lambda I$, então para λ real, tem-se

$$\mathfrak{R}\{f(\lambda\bar{x})\} = \frac{1}{\lambda^n} \tilde{f}\left(s, \frac{\xi}{\lambda}\right) \quad (3.26)$$

ou ainda

$$\mathfrak{R}\{f(\lambda\bar{x})\} = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \tilde{f}(\lambda s, \xi). \quad (3.27)$$

Translação de funções: dada uma função $f(\bar{x} - \bar{a})$, sendo o argumento escrito como $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$, a transformada de f é dada por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(\bar{x} - \bar{a})\} &= \int f(\bar{x} - \bar{a}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x}, \\ \mathfrak{R}\{f(\bar{y})\} &= \int f(\bar{y}) \delta(s - \xi \cdot \bar{a} - \xi \cdot \bar{y}) d\bar{y}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

finalmente o teorema da translação é:

$$\mathfrak{R}\{f(\bar{x} - \bar{a})\} = \tilde{f}(s - \xi \cdot \bar{a}, \xi). \quad (3.29)$$

Transformadas de derivadas: é a propriedade mais utilizada ao longo deste trabalho. Para obter a transformação da derivada, $\partial f / \partial x_k$ de uma função $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, parte-se de:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \xi_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(\bar{x} + \frac{\varepsilon}{\xi_k}\right) - f(\bar{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}} f(\bar{x}), \quad (3.30)$$

sendo que $f\left(\bar{x} + \frac{\varepsilon}{\xi_k}\right)$, representa $f(x_1, \dots, x_k + \varepsilon/\xi_k, \dots, x_n)$, com ξ_k indicando o k-ésimo componente de ξ . Aplicando a transformada de Radon em 3.30 e utilizando a propriedade de translação, com $\bar{a} = (0, 0, \dots, \varepsilon/\xi_k, \dots, 0)$, chega-se a

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(s + \varepsilon, \xi) - \tilde{f}(s, \xi)}{\varepsilon}, \quad (3.31)$$

portanto,

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \frac{\partial \tilde{f}(s, \xi)}{\partial s}, \quad (3.32)$$

considerando a derivada dupla, pode-se escrever que:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right) = \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 \tilde{f}(s, \xi)}{\partial s^2}. \quad (3.33)$$

Percebe-se, que independentemente de qual a direção das derivadas no sistema cartesiano, todas elas são realizadas em relação à variável s no domínio de Radon.

Derivadas da transformada: considere a função

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int f(\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x} \quad (3.34)$$

diferenciada em ξ_k ,

$$\frac{\partial \tilde{f}(s, \xi)}{\partial \xi_k} = \int f(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) d\bar{x}, \quad (3.35)$$

considerando a identidade a seguir (Deans, 1993)

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(s - \xi \cdot \bar{x}) = -x_k \frac{\partial}{\partial s} \delta(s - \xi \cdot \bar{x}), \quad (3.36)$$

obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathfrak{R}(f(\bar{x})) = -\frac{\partial}{\partial s} \mathfrak{R}(x_k f(\bar{x})). \quad (3.37)$$

Transformada da Convolução: considere a transformada de Radon das funções g e h :

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \mathfrak{R}(g) \\ \tilde{h} &= \mathfrak{R}(h), \end{aligned} \quad (3.38)$$

seja f a convolução de g e h :

$$f(\bar{x}) = g * h = \int g(\bar{y}) h(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{y}, \quad (3.39)$$

a transformada de Radon de f é dada por:

$$\tilde{f}(s, \xi) = \mathfrak{R}f(\bar{x}) = \mathfrak{R}(g * h), \quad (3.40)$$

$$\tilde{f}(s, \xi) = \iint g(\bar{y})h(\bar{x} - \bar{y})\delta(s - \xi \cdot \bar{x})d\bar{y}d\bar{x},$$

aplicando uma mudança de variáveis, dada por, $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$, reescreve-se 3.40 como:

$$\tilde{f}(s, \xi) = \iint g(\bar{y})h(\bar{z})\delta(s - \xi \cdot \bar{y} - \xi \cdot \bar{z})d\bar{y}d\bar{z},$$

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int g(\bar{y})\tilde{h}(s - \xi \cdot \bar{y}, \xi)d\bar{y},$$

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int g(\bar{y})d\bar{y} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(s - p, \xi)\delta(p - \xi \cdot \bar{y})dp,$$

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(s - p, \xi)dp \int g(\bar{y})\delta(p - \xi \cdot \bar{y})d\bar{y},$$

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(p, \xi)\tilde{h}(s - p, \xi)dp. \quad (3.41)$$

Finalmente

$$\mathfrak{R}(g * h) = \tilde{g} * \tilde{h} \quad (3.42)$$

a transformada de Radon de uma convolução resulta na convolução das transformadas de Radon das funções. Neste ponto, a transformada de Fourier pode ter vantagens, uma vez que a transformada de Fourier de uma convolução resulta no produto das funções transformadas.

3.5 Relação com a transformada de Fourier

Para obter a relação entre a transformada de Radon e a transformada de Fourier, considere-se o \mathbb{R}^n , com os pontos no domínio cartesiano representados por $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que no espaço de Fourier, serão indicados por $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, a transformada de Fourier de Dimensão n de uma função $f(\bar{x})$ é dada por:

$$\hat{f}(\bar{k}) = \mathfrak{F}_n f = \int f(\bar{x})e^{-i2\pi\bar{k} \cdot \bar{x}}d\bar{x}; \quad (3.43)$$

a inversa é obtida pela equação:

$$f(\bar{x}) = \mathfrak{F}_n^{-1} \hat{f} = \int \hat{f}(\bar{k})e^{i2\pi\bar{k} \cdot \bar{x}}d\bar{k}. \quad (3.44)$$

Reescrevendo 3.43, na forma:

$$\hat{f}(\bar{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\bar{x} f(\bar{x})e^{-i2\pi t} \delta(t - \bar{k} \cdot \bar{x}), \quad (3.45)$$

considerando que t é real e sendo $\bar{k} = s\xi$ e $t = sp$, com s real e ξ um vetor unitário. Então, é possível escrever:

$$\hat{f}(p\xi) = |p| \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\bar{x} f(\bar{x}) e^{-i2\pi sp} \delta(sp - p\xi \cdot \bar{x}),$$

$$\hat{f}(p\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i2\pi sp} \int d\bar{x} f(\bar{x}) \delta(s - \xi \cdot \bar{x}).$$
(3.46)

Note que é nítida uma parcela que corresponde à transformada de Radon da função f , assim sendo:

$$\hat{f}(p\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s, \xi) e^{-i2\pi sp} ds.$$
(3.47)

Note que a parcela à direita é a transformada unidimensional de Fourier ao longo da direção radial da transformada de Radon, então simbolicamente se escreve:

$$\hat{f} = \mathfrak{F}_1 \tilde{f} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{R} f.$$
(3.48)

Esta relação é apresentada esquematicamente na figura 3.5. Aplicando a transformada inversa de Fourier, considerando-se $n=1$, chega-se à inversa de 3.47.

$$\tilde{f}(s, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p\xi) e^{i2\pi sp} ds.$$
(3.49)

Isto significa que é possível obter a transformada de Radon de uma inversa de Fourier aplicada sobre a direção radial, simbolicamente

$$\mathfrak{R} f = \mathfrak{F}_1^{-1} \hat{f}.$$
(3.50)

A interpretação é mais simples no esquema da figura 3.6.

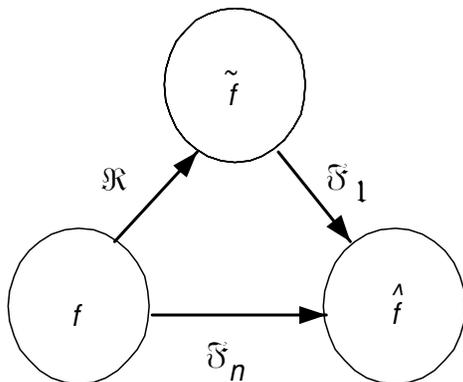


Figura 3.5 Relação com transformada Fourier

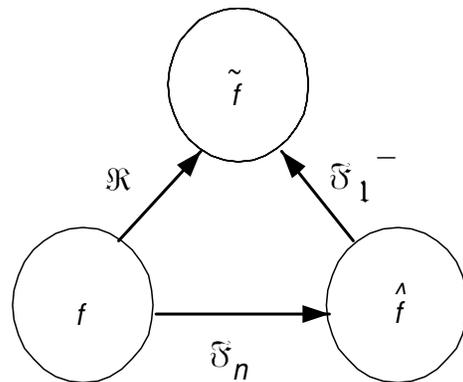


Figura 3.6 Relação com transformada Fourier

3.6 Transformadas Inversas

As inversas de Radon são muito importantes para compreensão deste trabalho.

A grande vantagem apresentada na formulação de Wang e Achembach, para espaços completos tridimensionais, é a inversa definida por uma integral sobre uma esfera unitária.

Dimensão ímpar: aplicável ao caso tridimensional. Considerando a expressão

$$\int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int d\bar{y} f(\bar{y}) \int_{-\infty}^{\infty} ds |s| \delta[s - \xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})], \quad (3.51)$$

que com a transformação de variáveis, dada por, $\bar{y} = \bar{x} + \bar{z}$ pode ser escrita por:

$$\int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int d\bar{y} |s| \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{z} f(\bar{x} + \bar{z}) \delta[s - \xi \cdot \bar{z}], \quad (3.52)$$

utilizando-se a propriedade da translação, chega-se a

$$\int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds. \quad (3.53)$$

A integração de 3.53 sobre a esfera unitária S^{n-1} , resulta:

$$\int_{|\xi|=1} d\xi \int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds, \quad (3.54)$$

na qual $|\xi| = 1$ representa uma esfera unitária, e $d\xi$ um elemento infinitesimal de sua superfície.

A integral do lado esquerdo pode ser obtida com uso da identidade (Deans, 1983)

$$\Delta_x^{(n+1)/2} \int_{|\xi|=1} d\xi \int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = 4(2\pi)^{n-1} (-1)^{(n-1)/2} f(\bar{x}), \quad (3.55)$$

que é válida para $n \geq 3$. Decompondo o operador Laplaciano, e considerando as relações de 3.54 e 3.55, escreve-se:

$$\Delta_x^{(n-1)/2} \Delta_x \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds = 4(2\pi)^{n-1} (-1)^{(n-1)/2} f(\bar{x}). \quad (3.56)$$

Considere a mudança de variáveis $s = t - \xi \cdot \bar{x}$, aplicada em 3.56, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}(t, \xi) dt, \quad (3.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds = \int_{\xi \cdot \bar{x}}^{\infty} |t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}(t, \xi) dt - \int_{-\infty}^{\xi \cdot \bar{x}} |t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}(t, \xi) dt.$$

Aplicando a regra de Leibnitz, para a derivação da função da integral,

$$\Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds = \Delta_x \int_{\xi \cdot \bar{x}}^{\infty} |t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}(t, \xi) dt - \Delta_x \int_{-\infty}^{\xi \cdot \bar{x}} |t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}(t, \xi) dt =$$

$$= 2\xi \cdot \xi \tilde{f}(\xi \cdot \bar{x}, \xi), \quad (3.58)$$

lembrando que o produto interno, $\xi \cdot \xi = 1$, e combinando as equações 3.58 e 3.56, conclui-se que a inversa da transformada de Radon para $n \geq 3$ é dada por:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} \Delta_x^{(n-1)/2} \int_{|\xi|=1} \tilde{f}(\xi \cdot \bar{x}, \xi) d\xi, \quad (3.59)$$

inserindo o operador Laplaciano na integral, tem-se:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^{n-1} \tilde{f}(\xi \cdot \bar{x}, \xi) d\xi. \quad (3.60)$$

Para o problema tridimensional $n=3$, portanto,

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \tilde{f}(\xi \cdot \bar{x}, \xi) d\xi. \quad (3.61)$$

Dimensão par é o caso mais aplicado nesta tese. Para determinar a transformada Inversa Bidimensional de Radon, o procedimento é o mesmo adotado para as funções ímpares; a diferença é a identidade utilizada. Considere o logaritmo de 3.52,

$$\int f(\bar{y}) \log|\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int d\bar{y} f(\bar{y}) \int_{-\infty}^{\infty} ds \log|s| \delta[s - \xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})], \quad (3.62)$$

chega-se a

$$\int f(\bar{y}) |\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} |s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds. \quad (3.63)$$

Aplicando a integração sobre a esfera unitária, S^{n-1} , e utilizando uma identidade semelhante a 3.55, porém para n par (Deans, 1983), dada por:

$$\Delta_x^{n/2} \int_{|\xi|=1} d\xi \int f(\bar{y}) \log|\xi \cdot (\bar{y} - \bar{x})| d\bar{y} = (2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\bar{x}), \quad (3.64)$$

aplicando o resultado de 3.64 em 3.63,

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\bar{x}) = \Delta_x^{(n-2)/2} \Delta_x \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \log|s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds, \quad (3.65)$$

é possível obter outra forma para essa equação, analisando a expressão:

$$\Delta_x I(\bar{x}) = \Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} \log|s| \tilde{f}(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds, \quad (3.66)$$

e introduzindo o operador laplaciano no integrando, (Deans 1993), escreve-se:

$$\Delta_x I(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|s| \tilde{f}_n(s + \xi \cdot \bar{x}, \xi) ds, \quad (3.67)$$

aplicando a mudança de variáveis, dada por $s = t - \xi \cdot \bar{x}$, reescreve-se 3.67,

$$\Delta_x I(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|t - \xi \cdot \bar{x}| \tilde{f}_n(t, \xi) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_p(s, \xi)}{s - \xi \cdot \bar{x}} ds \quad (3.68)$$

sendo:

$$\tilde{f}_p(s, \xi) = \frac{\partial \tilde{f}_n(s, \xi)}{\partial s} \quad (3.69)$$

aplicando o resultado de 3.68 em 3.65, é obtida a transformada inversa para n par, escrita como:

$$f(\bar{x}) = \frac{i\pi}{2(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1} \tilde{f}(s, \xi)}{s - \xi \cdot \bar{x}} ds. \quad (3.70)$$

Para a transformada de Radon bidimensional, $n=2$, assim:

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_p(s, \xi)}{s - \xi \cdot \bar{x}} ds, \quad (3.71)$$

sendo:

$$\xi = (\cos \phi, \sin \phi), \quad (3.72)$$

$$\xi \cdot \bar{x} = x \cos \phi + y \sin \phi. \quad (3.73)$$

Se ao invés do sistema cartesiano de coordenadas, for utilizado o sistema polar, a equação 3.71, para transformada inversa bidimensional de Radon, é reescrita como:

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_p(s, \xi)}{s - r \cos(\phi - \theta)} ds. \quad (3.74)$$

Capítulo 4

Síntese de Estados Auxiliares e Funções de Green

4.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentados os estados auxiliares para o carregamento dinâmico aplicado sobre um semi-espaço isotrópico, viscoelástico tridimensional. Trabalhos anteriores do grupo de pesquisa do DMC utilizaram a transformada de Fourier para sintetizar as respostas de tensão e deslocamento (Mesquita, 1989, Romanini, 1995, Almeida Barros, 1997, Marques Barros, 2001). Neste trabalho, será utilizada a transformada de Radon como ferramenta auxiliar no desenvolvimento de funções para domínios ilimitados. Ao longo deste capítulo, será formulada a resposta para os problemas de semi-espaço, considerando axissimetria com carga vertical, problemas com carregamentos concentrados orientados pelos eixos do sistema de coordenadas e carregamentos distribuídos.

4.2. Colocação do Problema

Considere um semi-espaço isotrópico, homogêneo, viscoelástico, com sistema de coordenadas (x,y,z) , com eixo z , perpendicular à superfície livre, submetido a um carregamento qualquer $F(\omega)$, como apresentado na figura 4.1a.

Sobre a superfície livre, é aplicada uma carga qualquer, oscilando, harmonicamente, no tempo, e definida por:

$$p(t) = p \cdot e^{i\omega t}, \quad (4.1)$$

sendo ω a frequência, e i o número imaginário. Este carregamento qualquer pode ser representando por cargas com a direção dos eixos do sistema de coordenadas, como pode ser visto na figura 4.1b.

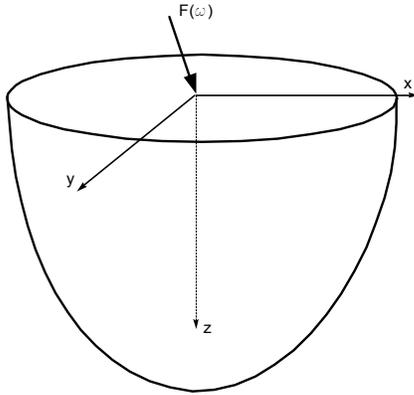


Figura 4.1a – Carga qualquer e sistema de coordenadas

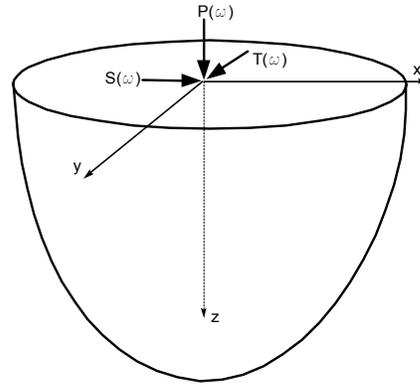


Figura 4.1b – Decomposição das forças

A equação de movimento que rege o problema, considerando o material isotrópico, e excluindo as forças de corpo é:

$$\mu \cdot \bar{U}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \cdot \bar{U}_{k,ki} = \rho \bar{U}_{i,tt} \quad (4.2)$$

Uma vez que o carregamento é harmônico, são obtidas respostas de deslocamento harmônicas, assim aplicando a transformada de Fourier na equação 4.2, obtêm-se os deslocamentos no domínio da frequência,

$$\mu \cdot \bar{U}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \cdot \bar{U}_{k,ki} = -\omega^2 \rho \bar{U}_i \quad (4.3)$$

Utilizando a notação de Einstein ($i,j=x,y,z$), e expandindo a equação 4.3:

$$\mu [U_{i,xx} + U_{i,yy} + U_{i,zz}] + (\lambda + \mu) [U_{x,xi} + U_{y,yi} + U_{z,zi}] = -\omega^2 \rho U_i \quad (4.4)$$

expandindo em i , são obtidas as seguintes equações:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \right\} U_x + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dy} \right) U_y + \left(\frac{d^2}{dx dz} \right) U_z \right\} = -\omega^2 \rho U_x \quad (4.5)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dy^2} \right] \right\} U_y + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dy} \right) U_x + \left(\frac{d^2}{dy dz} \right) U_z \right\} = -\omega^2 \rho U_y \quad (4.6)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + (\lambda + \mu) \left[\frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} U_z + (\lambda + \mu) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx dz} \right) U_x + \left(\frac{d^2}{dy dz} \right) U_y \right\} = -\omega^2 \rho U_z \quad (4.7)$$

O amortecimento é introduzido nas constantes de Lamé, através do princípio da correspondência, considerando valores complexos (Mesquita, 1989):

$$\lambda^* = \lambda(1 + \eta i)$$

$$\mu^* = \mu(1 + \eta i)$$

4.3. Solução do problema com auxílio da transformada de Radon

Utilizando a transformada de Radon bidimensional em x, y , reescrevem-se as equações 4.5 a 4.7:

$$\left\{ \mu \left[n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_x + (\lambda + \mu) n_x \frac{d}{ds} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_x, \quad (4.8)$$

$$\left\{ \mu \left[n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_y + (\lambda + \mu) n_y \frac{d}{ds} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_y, \quad (4.9)$$

$$\left\{ \mu \left[n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_z + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_z. \quad (4.10)$$

Lembrando que:

$$n_x = \cos(\theta)$$

$$n_y = \text{sen}(\theta)$$

e considerando:

$$\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1,$$

simplificam-se as equações 4.8-4.10:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_x + (\lambda + \mu) n_x \frac{d}{ds} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_x, \quad (4.11)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_y + (\lambda + \mu) n_y \frac{d}{ds} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_y, \quad (4.12)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_z + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \left\{ n_x \frac{d}{ds} \tilde{U}_x + n_y \frac{d}{ds} \tilde{U}_y + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_z. \quad (4.13)$$

As condições de contorno para o problema de semi-espaco são definidas na forma de tensões na superfície livre, $z=0$. Para problemas de camada sobre leito rígido, também podem ser escritas condições de contorno na forma de restrições de deslocamentos na base. Para o semi-espaco, submetido a carregamento vertical, as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = -P(x, y, z) \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = 0 \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

e para carregamento tangencial ao longo do x,

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = 0 \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = -S(x, y, z) \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

e finalmente para carregamento tangencial ao longo do eixo y,

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = 0 \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = 0 \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = -T(x, y, z) \end{cases} \quad (4.16)$$

Para obter as condições de contorno no domínio transformado, aplica-se a transformada de Radon sobre as equações 4.14 a 4.16, obtendo,

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{P}(s, \theta, z, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{S}(s, \theta, z, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{T}(s, \theta, z, \omega) \end{cases} \quad (4.19)$$

4.3.1 Metodologia de solução- meios isotrópicos

O meio isotrópico tridimensional permite o desacoplamento em dois problemas auxiliares bidimensionais (Georgiadis e Lykotrafidis, 2001). O esquema de solução é apresentado no diagrama 4.1 Esta metodologia facilita, significativamente, a dedução das componentes de deslocamentos e tensões do espaço completo. Infelizmente, não é possível, até o momento, estender tal técnica para os meios anisotrópicos.

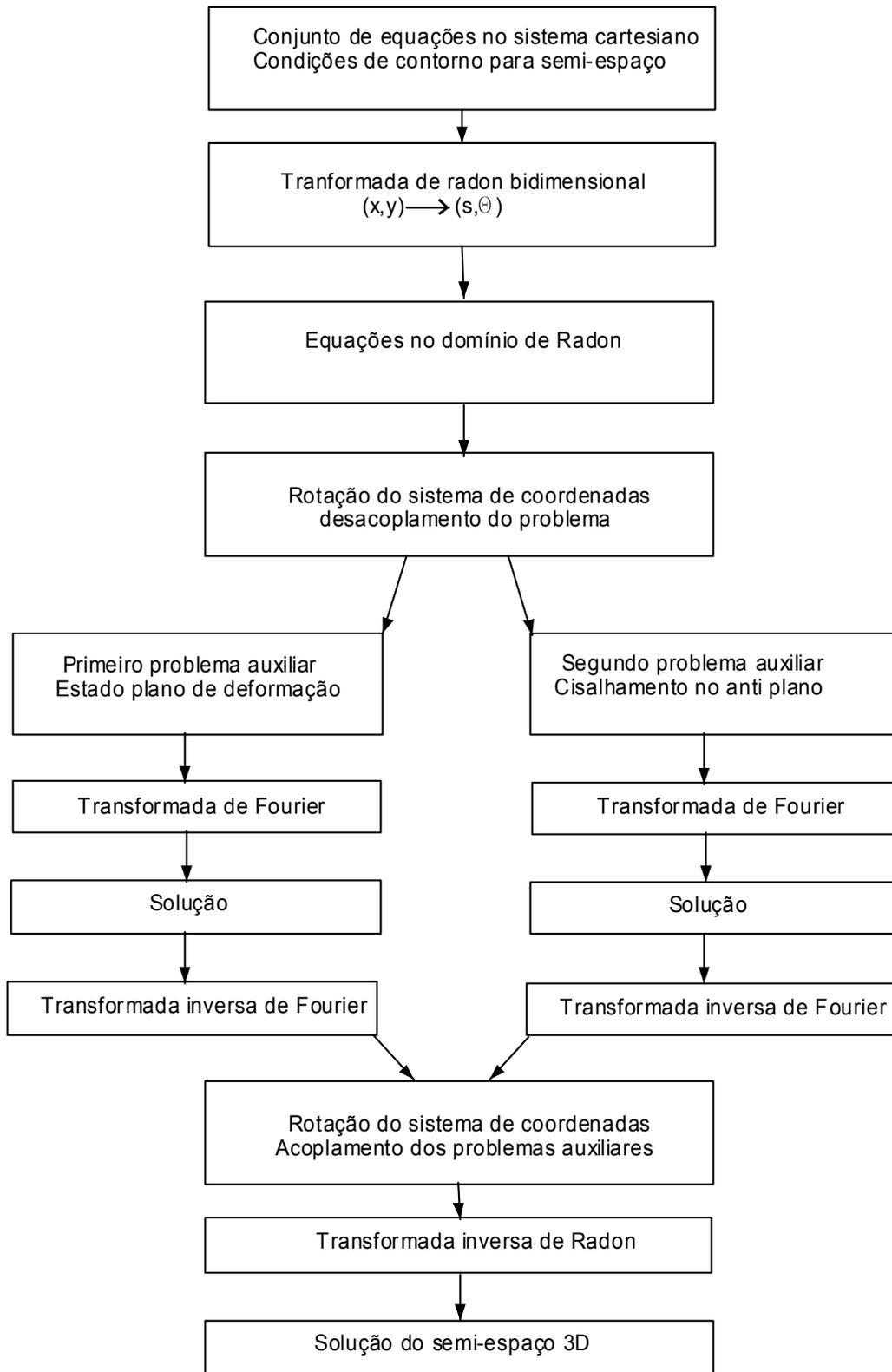


Diagrama 4.1 – Esquema de solução para o semi-espaço tridimensional.

Na figura 4.2, é apresentada a rotação do sistema de coordenadas (x,y,z) , em torno do eixo z , ao longo de um ângulo θ . O novo sistema de coordenadas é representado por (x',y',z) . A rotação das componentes de deslocamento e tensão é dada por:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_{x'} \\ \tilde{U}_{y'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_x \\ \tilde{U}_y \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{zx'} \\ \tilde{\sigma}_{zy'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{zy} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Estas transformações são válidas apenas para as componentes de tensão indicadas, uma vez que compõem a face superior do tensor de tensões, que podem ser rotacionados em torno do eixo z . As rotações das demais componentes não serão necessárias para solução desse problema, podendo ser ignoradas.

Considerando que $n_x = \cos\theta$ e $n_y = \text{sen}\theta$, é possível obter os deslocamentos no sistema de transformadas rotacionado:

$$\tilde{U}_{z'} = \tilde{U}_z, \quad (4.22)$$

$$\tilde{U}_{x'} = n_x \tilde{U}_x + n_y \tilde{U}_y, \quad (4.23)$$

$$\tilde{U}_{y'} = -n_y \tilde{U}_x + n_x \tilde{U}_y. \quad (4.24)$$

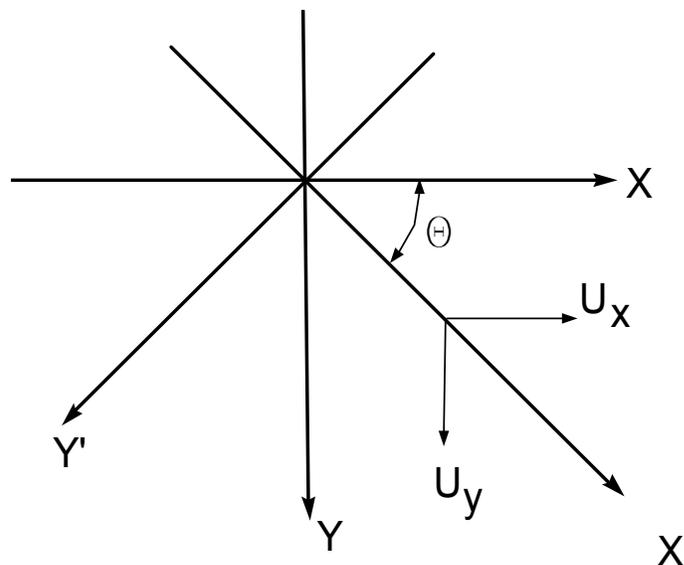


Figura 4.2 – Rotação do sistema de coordenadas

Com auxílio das equações 4.22 a 4.24, aplicadas na equação 4.13, pode-se escrever:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{z'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} = -\omega^2 \rho \tilde{U}_{z'}. \quad (4.25)$$

esta equação possui todas as componentes de deslocamento no domínio transformado e rotacionado. Para as equações 4.11 e 4.12 o processo algébrico para obter todas as variáveis no sistema de coordenadas rotacionado é um pouco mais complexo. Da equação 4.23, obtém-se:

$$\tilde{U}_x = \frac{\tilde{U}_{x'} - n_y \tilde{U}_y}{n_x}, \quad (4.26)$$

aplicando em 4.11 e considerando a equação 4.23, tem-se:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \frac{\tilde{U}_{x'} - n_y \tilde{U}_y}{n_x} + (\lambda + \mu) n_x \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\} = -\omega^2 \rho \left[\frac{\tilde{U}_{x'} - n_y \tilde{U}_y}{n_x} \right], \quad (4.27)$$

para simplificação, considere a relação:

$$A = (\lambda + \mu) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_z \right\}, \quad (4.28)$$

reescrevendo 4.27, e isolando os termos $U_{x'}$ e U_y ,

$$\left\{ \frac{\mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + n_x A + \frac{\omega^2 \rho \tilde{U}_{x'}}{n_x} = \left\{ \frac{n_y \mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_y + \omega^2 \rho \frac{n_y \tilde{U}_y}{n_x}, \quad (4.29)$$

multiplicando a equação 4.29, por n_x ,

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + n_x^2 A + \omega^2 \rho \tilde{U}_{x'} = \left\{ n_y \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_y + \omega^2 \rho n_y \tilde{U}_y, \quad (4.30)$$

e multiplicando a equação 4.12, por n_y , isolando os termos em \tilde{U}_y

$$n_y \left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_y + n_y \omega^2 \rho \tilde{U}_y = -n_y^2 A, \quad (4.31)$$

substituindo a parcela à esquerda da equação 4.31 em 4.30, obtém-se uma relação com todas as componentes de deslocamento no sistema rotacionado,

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + n_x^2 A + \omega^2 \rho \tilde{U}_{x'} + n_y^2 A = 0, \quad (4.32)$$

lembrando que $n_x^2 + n_y^2 = 1$, e aplicando na equação 4.32, a equação final resulta em:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{x'} = 0. \quad (4.33)$$

Quando se inicia pela equação 4.24, é possível escrever:

$$\tilde{U}_y = \frac{\tilde{U}_{y'} + n_y \tilde{U}_x}{n_x} \quad (4.34)$$

e com a substituição na equação 4.12, considerando ainda os resultados obtidos em 4.23, escreve-se:

$$\left\{ \frac{\mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} + \left\{ \frac{n_y \mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_x + n_y A + \omega^2 \rho \frac{\tilde{U}_{y'} + n_y \tilde{U}_x}{n_x} = 0, \quad (4.35)$$

isolando o termo \tilde{U}_x :

$$+ \left\{ \frac{n_y \mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_x + \omega^2 \rho \frac{n_y \tilde{U}_x}{n_x} = - \left\{ \frac{\mu}{n_x} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} - \omega^2 \rho \frac{\tilde{U}_{y'}}{n_x} - n_y A, \quad (4.36)$$

multiplicando por n_x e dividindo por n_y , obtém-se a seguinte relação:

$$+ \left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_x + \omega^2 \rho \tilde{U}_x = - \left\{ \frac{\mu}{n_y} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} - \omega^2 \rho \frac{\tilde{U}_{y'}}{n_y} - n_x A, \quad (4.37)$$

usando este resultado na equação 4.11, tem-se,

$$- \left\{ \frac{\mu}{n_y} \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} - n_x A + n_x A + \omega^2 \rho \frac{\tilde{U}_{y'}}{n_y} = 0, \quad (4.38)$$

que, multiplicada por n_y , fornece a última equação no sistema de coordenadas rotacionado:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{y'} = 0. \quad (4.39)$$

Agrupando as equações 4.25, 4.33 e 4.39 que fornecem os deslocamentos no domínio de Radon rotacionado, obtém-se o conjunto de equações de movimento transformadas e desacopladas,

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{z'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{z'} = 0, \quad (4.40)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{x'} = 0, \quad (4.41)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{y'} = 0. \quad (4.42)$$

Também é importante escrever as condições de contorno no sistema de coordenadas rotacionado,

$$\tilde{\sigma}_{zz'}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{P}(x, y, z = 0), \quad (4.43)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'}(s, \theta, z, \omega) = -\left(\tilde{S}(x, y, z = 0) \cdot \text{Cos}\theta + \tilde{T}(x, y, z = 0) \cdot \text{Sen}\theta \right), \quad (4.44)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy'}(s, \theta, z, \omega) = \left(\tilde{S}(x, y, z = 0) \cdot \text{Sen}\theta - \tilde{T}(x, y, z = 0) \cdot \text{Cos}\theta \right). \quad (4.45)$$

O ponto crucial desta análise é que os deslocamentos e tensões, no domínio transformado, são relacionados neste domínio da mesma maneira que no domínio físico para problemas de estado plano de deformação. Pode ser mostrado que (Georgiadis e Lykotrafitis, 2001):

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = (\lambda + 2\mu) \frac{d\tilde{U}_{z'}}{dz} + \lambda \frac{d\tilde{U}_{x'}}{ds}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = \mu \left(\frac{d\tilde{U}_{z'}}{ds} + \frac{d\tilde{U}_{x'}}{dz} \right), \quad (4.47)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy'} = \mu \frac{d\tilde{U}_{y'}}{dz}. \quad (4.48)$$

As equações 4.40, 4.41, 4.43, 4.44, 4.46 e 4.47 representam o problema de estado plano de deformação bidimensional no sistema de coordenadas (x', z) . Este problema é denominado primeiro problema auxiliar e define o semi-espaço bidimensional perturbado por um carregamento harmônico. Por outro lado, as equações 4.42, 4.45 e 4.48 são de um problema de cisalhamento fora do plano com coordenadas (y', z) , o que configura o segundo problema auxiliar e representa um semi-espaço submetido a um carregamento em linha no antiplano.

4.3.2 Solução do Primeiro problema auxiliar

O primeiro problema foi estudado por Mesquita (1989), Almeida Barros (1997). É o problema de semi-espaço isotrópico bidimensional. Infelizmente, até o presente momento, não existe uma solução analítica para este problema. A solução clássica é efetivada com auxílio da transformada de Fourier, e os deslocamentos e tensões são obtidos com o uso de processos numéricos de integração. Os procedimentos para se obterem tais soluções serão apresentados a seguir.

As equações que representam o problema são:

$$\left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{ds^2} + \mu \frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 \rho \right\} \tilde{U}_{x'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dsdz} \tilde{U}_{z'} = 0, \quad (4.49)$$

$$\left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} + \mu \frac{d^2}{ds^2} + \omega^2 \rho \right\} \tilde{U}_{z'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dsdz} \tilde{U}_{x'} = 0, \quad (4.50)$$

e as condições de contorno, obtidas do carregamento:

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = -\tilde{P}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = -(\tilde{S} \cos \theta + \tilde{T} \sin \theta). \quad (4.52)$$

Da mecânica do contínuo, são obtidas as equações auxiliares que relacionam tensão com deslocamentos:

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = (\lambda + 2\mu) \frac{d\tilde{U}_{z'}}{dz} + \lambda \frac{d\tilde{U}_{x'}}{ds}, \quad (4.53)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = \mu \left(\frac{d\tilde{U}_{z'}}{ds} + \frac{d\tilde{U}_{x'}}{dz} \right). \quad (4.54)$$

A solução apresentada por Almeida Barros (1997) consiste basicamente de uma transformada integral de Fourier no par s-k aplicada nas equações 4.49 e 4.50,

$$\left\{ -(\lambda + 2\mu)k^2 + \mu \frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 \rho \right\} \hat{U}_{x'} + ik(\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \hat{U}_{z'} = 0, \quad (4.55)$$

$$\left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \mu + \omega^2 \rho \right\} \hat{U}_{z'} + ik(\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \hat{U}_{x'} = 0. \quad (4.56)$$

Considere a normalização, $\delta^2 = \omega^2 \rho$, que permite a simplificação das equações.

Uma vez que as equações 4.55 e 4.56 são lineares, podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -k^2(\lambda + 2\mu) + \mu \frac{d^2}{dz^2} + \delta^2 & ik(\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \\ ik(\lambda + \mu) \frac{d}{dz} & (\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} - \mu k^2 + \delta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{U}_{x'} \\ \hat{U}_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.57)$$

ou de maneira compacta:

$$[L]\{u\} = \{0\} \quad (4.58)$$

L é a matriz de coeficientes operacionais do sistema (Wylie, C.R., Barrett, L.C., 1985).

Para que exista uma solução não trivial, é preciso que o determinante da matriz de coeficientes operacionais seja nulo. Tal consideração permite o desacoplamento das funções dadas nas equações 4.49 e 4.50, mas, mantendo a dependência linear entre elas, assim se escreve, $\det[L] \cdot \{u\} = \{0\}$. (4.59)

Da solução do determinante, são obtidas as de equações desacopladas, dadas por:

$$\left(c_1 \frac{d^4}{dz^4} + c_3 \frac{d^2}{dz^2} + c_5 \right) \hat{U}_{x'} = 0, \quad (4.60)$$

$$\left(c_1 \frac{d^4}{dz^4} + c_3 \frac{d^2}{dz^2} + c_5 \right) \hat{U}_{z'} = 0, \quad (4.61)$$

nas quais:

$$c_1 = \lambda\mu + 2\mu^2, \quad (4.62)$$

$$c_3 = -2k^2\lambda\mu - 4k^2\mu^2 + \lambda\delta^2 + 3\mu\delta^2, \quad (4.63)$$

$$c_5 = k^4\lambda\mu + 2k^4\mu^2 - k^2\lambda\delta^2 - 3k^2\mu\delta^2 + \delta^4. \quad (4.64)$$

As constantes c_i dependem unicamente das propriedades elásticas do meio e da variável resultante da transformada de Fourier “ k ”. Aplicando o conceito de comprimento de onda normalizado:

$$\xi = \frac{k}{\delta},$$

reescrevem-se as constantes c_1 , c_3 e c_5 , na forma:

$$c_1 = \lambda\mu + 2\mu^2, \quad (4.65)$$

$$c_3 = \delta^2(-2\xi^2\lambda\mu - 4\xi^2\mu^2 + \lambda + 3\mu), \quad (4.66)$$

$$c_5 = \delta^4(\xi^4\lambda\mu + 2\xi^4\mu^2 - \xi^2\lambda - 3\xi^2\mu + 1). \quad (4.67)$$

criando variáveis auxiliares,

$$c'_1 = c_1, \quad (4.68)$$

$$c'_3 = (-2\xi^2\lambda\mu - 4\xi^2\mu^2 + \lambda + 3\mu), \quad (4.69)$$

$$c'_5 = (\xi^4\lambda\mu + 2\xi^4\mu^2 - \xi^2\lambda - 3\xi^2\mu + 1), \quad (4.70)$$

as equações 4.60 e 4.61 podem ser apresentadas na forma:

$$\left(c'_1 \frac{d^4}{dz^4} + \delta^2 c'_3 \frac{d^2}{dz^2} + \delta^4 c'_5 \right) \hat{U}_{x'} = 0, \quad (4.71)$$

$$\left(c'_1 \frac{d^4}{dz^4} + \delta^2 c'_3 \frac{d^2}{dz^2} + \delta^4 c'_5 \right) \hat{U}_{z'} = 0. \quad (4.72)$$

Os deslocamentos são obtidos das equações diferenciais 4.71 e 4.72, com auxílio das condições de contorno transformadas para o domínio de Fourier. Inicialmente, assume-se que a solução de deslocamento possui a forma:

$$\hat{U}_{z'} = e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (4.73)$$

com derivadas:

$$\frac{d\hat{U}_{z'}}{dz} = \alpha \cdot \delta \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (4.74)$$

$$\frac{d^2\hat{U}_{z'}}{dz^2} = \alpha^2 \cdot \delta^2 \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (4.75)$$

$$\frac{d^3\hat{U}_{z'}}{dz^3} = \alpha^3 \cdot \delta^3 \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (4.76)$$

$$\frac{d^4\hat{U}_{z'}}{dz^4} = \alpha^4 \cdot \delta^4 \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}. \quad (4.77)$$

Estas aplicadas na equação 4.72, resultam:

$$\left(\alpha^4 \delta^4 e^{\alpha \cdot \delta \cdot z} c'_1 + \alpha^2 \delta^4 e^{\alpha \cdot \delta \cdot z} c'_3 + \delta^4 e^{\alpha \cdot \delta \cdot z} c'_5 \right) = 0, \quad (4.78)$$

isolando o termo exponencial:

$$\left(\alpha^4 c'_1 + \alpha^2 c'_3 + c'_5 \right) \delta^4 e^{\alpha \cdot \delta \cdot z} = 0; \quad (4.79)$$

como o termo exponencial nunca será nulo, é preciso que:

$$\alpha^4 c'_1 + c'_3 \alpha^2 + c'_5 = 0. \quad (4.80)$$

A equação 4.80 é biquadrada e possui as raízes $\pm \alpha_1$ e $\pm \alpha_2$, dadas por:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{-c'_3 - \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}}, \quad (4.81)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-c'_3 + \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}}. \quad (4.82)$$

A solução geral de deslocamento $\hat{U}_{z'}$, da equação 4.72, possui a forma:

$$\hat{U}_{z'} = A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + B \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + D \cdot e^{\delta\alpha_2 z}, \quad (4.83)$$

onde A, B, C, D independem de z e são determinadas com auxílio das condições de contorno do problema. Essas funções são as amplitudes das ondas que se propagam pelo semi-espaço. No espaço completo, apenas duas ondas são geradas por carregamento dinâmico: as de compressão e as de cisalhamento. Nos semi-espaços, pode ser observada a presença de uma terceira onda, a chamada onda de Rayleigh (Graff, 1991). A solução completa do sistema é dada por ondas afastando-se da fonte e ondas retornando à fonte.

Aplicando o mesmo procedimento na equação 4.71, tem-se que a resposta de deslocamento horizontal $\hat{U}_{x'}$, é,

$$\hat{U}_{x'} = A' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + B' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + C' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + D' \cdot e^{\delta\alpha_2 z}, \quad (4.84)$$

sendo A', B', C' e D' amplitudes de onda, definidas também pelas condições de contorno. As amplitudes de onda A, B, C e D são relacionadas as amplitudes A', B', C' e D' . Esta relação é obtida com a aplicação das respostas de deslocamento dadas pelas equações 4.83 e 4.84, na equação 4.56, de modo que:

$$\left\{ (\lambda + 2\mu)(\alpha_1^2 A) - \xi^2 \mu A + A + i\xi(\lambda + \mu)(-A' \alpha_1) \right\} \delta^2 e^{-\delta\alpha_1 z} = 0,$$

é necessário que A e A' satisfaçam a relação:

$$(\lambda + 2\mu)(\alpha_1^2 A) - \xi^2 \mu A + A + i\xi(\lambda + \mu)(-A' \alpha_1) = 0,$$

finalmente:

$$A' = \frac{\alpha_1^2 (\lambda + 2\mu) - \xi^2 \mu + 1}{i\xi(\lambda + \mu)\alpha_1} A. \quad (4.85)$$

Ou em uma forma compacta:

$$A' = \psi_1 A, \quad (4.86)$$

sendo:

$$\psi_1 = \frac{\alpha_1^2 (\lambda + 2\mu) - \xi^2 \mu + 1}{i\xi(\lambda + \mu)\alpha_1}. \quad (4.87)$$

Aplicando a mesma análise para conseguir as demais relações, é possível obter:

$$B' = -\psi_1 B, \quad (4.88)$$

e

$$C' = \psi_2 C, \quad (4.89)$$

nas quais:

$$\psi_2 = \frac{\alpha_2^2(\lambda + 2\mu) - \xi^2 \mu + 1}{i\xi(\lambda + \mu)\alpha_2}, \quad (4.90)$$

e finalmente:

$$D' = -\psi_2 D. \quad (4.91)$$

Reescrevendo a equação 4.84 de deslocamento, considerando as relações obtidas nas equações 4.86, 4.88, 4.89 e 4.91, obtém-se o conjunto final de equações de deslocamento para o primeiro problema auxiliar:

$$\hat{U}_{z'} = A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + B \cdot e^{\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} + D \cdot e^{\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}, \quad (4.92)$$

$$\hat{U}_{x'} = \psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \psi_1 B \cdot e^{\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} - \psi_2 D \cdot e^{\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}. \quad (4.93)$$

Como dito anteriormente, as condições de contorno para o semi-espaço são dadas na forma de tensões na superfície livre. Para as componentes de tensão necessárias neste problema auxiliar, após o uso da transformada de Radon e rotação de coordenadas, foram obtidas as relações:

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = (\lambda + 2\mu) \frac{d\tilde{U}_{z'}}{dz} + \lambda \frac{d\tilde{U}_{x'}}{ds}, \quad (4.94)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = \mu \left(\frac{d\tilde{U}_{z'}}{ds} + \frac{d\tilde{U}_{x'}}{dz} \right). \quad (4.95)$$

Aplicando a transformada de Fourier no par $s \leftrightarrow k$ nas equações 4.94 e 4.95, e considerando o comprimento de onda normalizado, chega-se a,

$$\hat{\sigma}_{zz'} = (\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{U}_{z'}}{dz} + i\xi \delta \lambda \hat{U}_{x'}, \quad (4.96)$$

$$\hat{\sigma}_{zx'} = \mu \left(i\xi \delta \hat{U}_{z'} + \frac{d\hat{U}_{x'}}{dz} \right). \quad (4.97)$$

Substituindo as funções de deslocamento de 4.92 e 4.93, nas equações de tensão 4.96 e 4.97, é possível obter:

$$\hat{\sigma}_{zz'} = \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} - \Gamma_1 B e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} - \Gamma_2 D e^{\delta\alpha_2 z}, \quad (4.98)$$

$$\hat{\sigma}_{zx'} = \Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_3 B e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z} + \Gamma_4 D e^{\delta\alpha_2 z}, \quad (4.99)$$

nas quais:

$$\Gamma_1 = -\alpha_1(\lambda + 2\mu) + i\xi\lambda\psi_1 \quad (4.100)$$

$$\Gamma_2 = -\alpha_2(\lambda + 2\mu) + i\xi\lambda\psi_2 \quad (4.101)$$

$$\Gamma_3 = i\mu\xi - \mu\alpha_1\psi_1 \quad (4.102)$$

$$\Gamma_4 = i\mu\xi - \mu\alpha_2\psi_2 \quad (4.103)$$

Finalmente, com o auxílio das condições de contorno, pode-se determinar as amplitudes de onda. Na análise do semi-espço, é preciso que a condição de radiação de Sommerfeld seja respeitada, isto é, ondas geradas pela fonte propagam-se para o infinito sem retornar à fonte, não ocorrendo reflexões. Assim, as amplitudes B' e D' são nulas. Como a tensão na superfície é conhecida, podem-se determinar as amplitudes A' e C' . Inicialmente, utilizando a transformada de Fourier sobre as condições de contorno dadas para a superfície, $z=0$, e fornecidas pelas equações 4.51 e 4.52,

$$\hat{\sigma}_{zz'} = -\hat{P}, \quad (4.104)$$

$$\hat{\sigma}_{zx'} = -\left(\hat{S} \cos \theta + \hat{T} \sin \theta\right). \quad (4.105)$$

O carregamento generalizado pode ser decomposto em cargas orientadas segundo os eixos do sistema de coordenadas. No caso dos sistemas lineares, pode-se aplicar cada carregamento independentemente, e o resultado para a carga genérica é obtido pela sobreposição dos efeitos de cada uma das solicitações básicas. Para carga vertical, P , as amplitudes são:

$$C_P = \frac{-\Gamma_3}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \hat{P}, \quad (4.106)$$

$$A_P = \frac{\Gamma_4}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \hat{P}. \quad (4.107)$$

Para carga tangencial ao longo do eixo x , (S), as funções de amplitude de onda são:

$$C_S = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \hat{S} \cos \theta, \quad (4.108)$$

$$A_S = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \hat{S} \cos \theta. \quad (4.109)$$

E finalmente para carregamento tangencial na direção y , (T), tem-se que as amplitudes de onda são dadas por:

$$C_T = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \tilde{T} \text{sen} \theta, \quad (4.110)$$

$$A_T = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \tilde{T} \text{sen} \theta. \quad (4.111)$$

A solução do primeiro problema auxiliar é obtida através da aplicação da transformada inversa de Fourier nas equações de deslocamento e tensão, de modo que:

$$\tilde{U}_{z'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.112)$$

$$\tilde{U}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.113)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Gamma_1 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta \alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.114)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Gamma_3 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta \alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi. \quad (4.115)$$

4.3.2 Solução do segundo problema auxiliar

Para a solução do segundo problema auxiliar, é adotado o mesmo procedimento da solução do primeiro problema. Utilizando a transformada de Fourier no par $s-k$, na equação 4.42 e considerando comprimento de onda normalizado, chega-se a:

$$\mu \frac{d^2 \tilde{U}_{y'}}{dz^2} + (\delta^2 - \mu \xi^2 \delta^2) \tilde{U}_{y'} = 0. \quad (4.116)$$

A transformação das condições de contorno resulta:

$$\tilde{\sigma}_{zy'} = \left(\hat{S} \text{sen} \theta - \hat{T} \cos \theta \right), \quad (4.117)$$

das equações da elasticidade que relacionam tensão e deslocamentos, tem-se que:

$$\tilde{\sigma}_{zy'} = \mu \frac{d\tilde{U}_{y'}}{dz}. \quad (4.118)$$

Assumindo uma solução harmônica com a forma:

$$\hat{U}_{y'} = e^{\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.119)$$

que substituída na equação 4.116, resulta em:

$$\left\{ \mu \beta^2 \delta^2 + (\delta^2 - \mu \xi^2 \delta^2) \right\} e^{\beta \delta z} = 0, \quad (4.120)$$

que possui a solução dada na forma:

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\mu \xi^2 - 1}{\mu}}. \quad (4.121)$$

A solução geral da equação diferencial dada em 4.89 é:

$$\hat{U}_{y'} = E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} + F e^{\beta \cdot \delta \cdot z}. \quad (4.122)$$

As amplitudes de onda E e F são determinadas através das condições de contorno. Para que a condição de radiação de Sommerfeld seja respeitada, é necessário que $F=0$; E será obtida da condição de contorno de tensão na superfície livre. Para o carregamento vertical P , a amplitude de onda é:

$$E = 0, \quad (4.123)$$

isto significa que para o carregamento vertical, o problema independe do segundo problema auxiliar. Para carregamento tangencial na direção x (S):

$$E = -\frac{\hat{S} \text{sen} \theta}{\mu \beta}, \quad (4.124)$$

e, finalmente, para o carregamento em y (T),

$$E = \frac{\hat{T} \cos \theta}{\mu \beta}. \quad (4.125)$$

A solução de tensão é dada pela substituição do deslocamento da equação 4.122 na 4.118:

$$\hat{\sigma}_{zy'} = -\mu \beta E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} + \mu \beta F e^{\beta \cdot \delta \cdot z}. \quad (4.126)$$

A aplicação da transformada inversa de Fourier, fornece as respostas de deslocamento e de tensão do segundo problema auxiliar, dada por:

$$\tilde{U}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right\} e^{i \xi \delta s} d\xi, \quad (4.127)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\mu \beta \delta E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right\} e^{i \xi \delta s} d\xi. \quad (4.128)$$

4.3.4 Acoplamento dos problemas auxiliares e transformada inversa de Radon

A solução final do problema tridimensional é obtida em duas etapas.

Inicialmente uma rotação de coordenadas para acoplamento dos problemas auxiliares, e conseqüente descrição do problema no sistema original de coordenadas, seguida da transformada inversa bidimensional de Radon. A rotação de coordenadas, para acoplamento dos problemas auxiliares, é obtida com o uso das matrizes:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_x \\ \tilde{U}_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_{z'} \\ \tilde{U}_{x'} \\ \tilde{U}_{y'} \end{pmatrix}, \quad (4.129)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{zy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz'} \\ \tilde{\sigma}_{zx'} \\ \tilde{\sigma}_{zy'} \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

As seguintes respostas são obtidas, no espaço de Radon, após o acoplamento dos problemas auxiliares, já considerando a condição de Sommerfeld:

$$\tilde{U}_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.131)$$

$$\tilde{U}_x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_1 A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi - \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{E e^{-\beta\delta z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.132)$$

$$\tilde{U}_y = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_1 A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{E e^{-\beta\delta z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.133)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.134)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi - \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mu\beta\delta E e^{-\beta\delta z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.135)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mu\beta\delta E e^{-\beta\delta z}\} e^{i\xi\delta z} d\xi. \quad (4.136)$$

As demais componentes de tensão serão deduzidas, nas próximas seções, a partir dos deslocamentos.

A transformada inversa de Radon é realizada em duas etapas (Deans, 1993); inicialmente a função deve ser derivada pela variável de Radon:

$$\tilde{f}(s, \bar{n}) = \frac{df(s, \bar{n})}{ds}, \quad (4.137)$$

e este resultado é substituído em,

$$f(x, y) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(s, \bar{n})}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} ds d\theta, \quad (4.138)$$

ou ainda para o problema descrito em coordenadas cilíndricas:

$$f(r, \varphi) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(s, \bar{n})}{s - r \cos(\theta - \varphi)} ds d\theta \quad (4.139)$$

A análise das equações 4.131 e 4.136, mostra que existe apenas um termo dependente da variável de Radon (s), que é o termo exponencial $e^{i\delta \cdot \xi \cdot s}$. Assim, em uma primeira etapa, deve-se realizar a derivada desse componente. A transformada de Radon das componentes de deslocamento e tensão no sistema cartesiano de coordenadas resulta em:

$$U_z = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{A \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + C \cdot e^{-\delta \alpha_2 z}\} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} d\xi ds d\theta, \quad (4.140)$$

$$U_x = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \cos \theta [\psi_1 A \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \alpha_2 z}] - \sin \theta [E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}] \} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} d\xi ds d\theta \quad (4.141)$$

$$U_y = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \sin \theta [\psi_1 A \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \alpha_2 z}] + \cos \theta [E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}] \} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} d\xi ds d\theta \quad (4.142)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \Gamma_1 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta \alpha_2 z} \} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} d\xi ds d\theta \quad (4.143)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \cos \theta [\Gamma_3 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta \alpha_2 z}] - \sin \theta [\mu \beta \omega E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}] \} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} d\xi ds d\theta \quad (4.144)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \text{sen} \theta [\Gamma_3 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta \alpha_2 z}] + \cos \theta [\mu \beta \omega E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}] \right\} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i \delta \zeta}}{s - x \cos \theta - y \text{sen} \theta} d \xi d s d \theta \quad (4.145)$$

Um termo comum a todas as equações pode ser isolado, e é dado por:

$$\Omega(s, \bar{n}) = \frac{e^{i \delta \zeta}}{s - a}, \quad (4.146)$$

com

$$a = x \cos \theta + y \text{sen} \theta.$$

E, se for adotado o sistema de coordenadas cilíndrico,

$$a = r \cos(\theta - \varphi)$$

Somente esse termo depende das variáveis de Radon “s”. Como a seqüência de integração não afetará o resultado final, tal termo pode ser analisado à parte,

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \delta \zeta}}{s - a} d s, \quad (4.147)$$

usando o “*Mathematica*”, e considerando o valor principal de Cauchy, tem-se:

$$\zeta(k, \theta) = \pi \cdot i \cdot \text{sign}(\delta \xi) [\cos(a \delta \xi) + i \text{sen}(a \delta \xi)], \quad (4.148)$$

e, com o uso da formula de Euler, pode-se escrever:

$$\zeta(k, \theta) = \pi \cdot i \cdot \text{sign}(\delta \xi) e^{i a \delta \xi}. \quad (4.149)$$

Este resultado pode ser obtido do valor principal de Cauchy na integração da equação 4.147,

$$\zeta = VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \delta \zeta}}{s - a} d s, \quad (4.150)$$

realizando uma mudança de variáveis, para reescrever 4.150, na forma:

$$\zeta = e^{i \delta \zeta a} VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \delta \zeta u}}{u} d u, \quad (4.151)$$

com $u = s - a$.

A equação 4.151 pode ser apresentada na forma equivalente:

$$\zeta = e^{i \delta \zeta a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i \delta \zeta u}}{u} d u + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{i \delta \zeta u}}{u} d u \right). \quad (4.152)$$

No caso em que $\zeta=0$, a função ζ pode ser calculada por:

$$\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{u} d u + \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{u} d u \right) = 0. \quad (4.153)$$

Para determinar a integral da função quando $\xi < 0$, é importante observar que os pólos do integrando ocorrem em $u=0$. Considere para $0 < \varepsilon < R$ os semicírculos C_ε e C_R apresentados na figura 4.3. Do teorema dos resíduos, escreve-se:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du + \int_{C_R} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = 0. \quad (4.154)$$

Combinando a equação 4.154 com a equação 4.152 e assumindo que os limites existam, resulta:

$$\zeta = -e^{i\delta\zeta a} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du \right), \quad (4.155)$$

pode ser obtido na literatura (Needham 1997, Palka, 1991) que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi \frac{e^{i\xi\delta\varepsilon(\cos\phi + isen\phi)} i\varepsilon e^{i\phi}}{\varepsilon e^{i\phi}} d\phi, \quad (4.156)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = i \int_0^\pi e^0 d\phi = i\pi. \quad (4.157)$$

Analogamente,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = i \int_0^\pi e^{\xi\delta R(\cos\phi + isen\phi)} d\phi = 0. \quad (4.158)$$

a combinação dos resultados das equações 4.157 e 4.158, aplicados na equação 4.155, resulta

$$\zeta = -i\pi e^{i\delta\zeta a}. \quad (4.159)$$

Para os valores positivos de ξ , são considerados os semi-círculos C_ε e C_R visualizados na figura 4.4. Da análise desses círculos e dos resultados obtidos na literatura (Needham 1997, Palka, 1991), tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\pi^0 \frac{e^{i\xi\delta\varepsilon(\cos\phi + isen\phi)} i\varepsilon e^{i\phi}}{\varepsilon e^{i\phi}} d\phi, \quad (4.160)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = i \int_\pi^0 e^0 d\phi = -i\pi. \quad (4.161)$$

Analogamente,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\delta\zeta u}}{u} du = i \int_0^\pi e^{\xi\delta R(\cos\phi + isen\phi)} d\phi = 0. \quad (4.162)$$

Aplicando os resultados de 4.161 e 4.162 em 4.155, tem-se:

$$\zeta = i\pi e^{i\delta\zeta a} \quad (4.163)$$

Combinando os resultados obtidos nas equações 4.153, 4.159 e 4.163, e utilizando a função sinal, obtém-se:

$$\zeta(k, \theta) = \pi \cdot i \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.164)$$

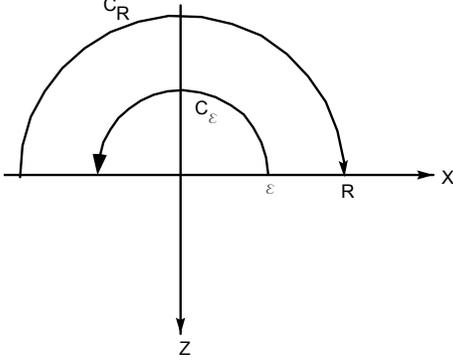


Figura 4.3. Círculos para VPC 1

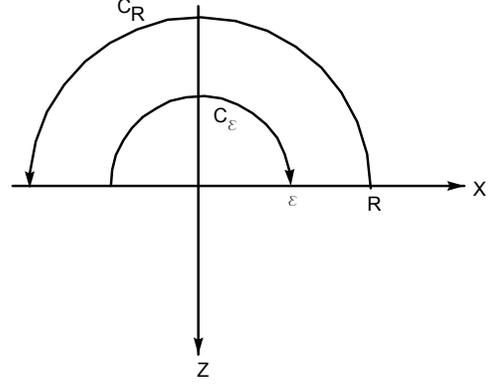


Figura 4.4. Círculos para VPC 2

Finalmente, com uso de ζ , é possível escreverem-se os deslocamentos e tensões através de duas integrais:

$$U_z = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.165)$$

$$U_x = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \cos\theta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] - \text{sen}\theta \left[E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta \quad (4.166)$$

$$U_y = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \text{sen}\theta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] + \cos\theta \left[E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta \quad (4.167)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta \alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.168)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \cos\theta \left[\Gamma_3 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta \alpha_2 z} \right] - \text{sen}\theta \left[\mu \beta \delta E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta \quad (4.169)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \text{sen}\theta [\Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z}] + \cos\theta [\mu\beta\delta E e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}] \right\} d\xi d\theta. \quad (4.170)$$

Infelizmente, não foi possível obter soluções analíticas para as integrais em ξ e θ . Assim se torna necessário o uso de procedimentos numéricos para realizar tais integrais. Para definir quais as melhores metodologias de integração, é necessário analisar as características dos integrandos.

4.4. Carga Concentrada

A partir desta seção são adotadas diferentes condições de contorno, que conseqüentemente representam problemas distintos.

Considere o semi-espço, submetido a um carregamento concentrado, representado por um Delta de Dirac, aplicado na origem do sistema, e na superfície livre, como indicado na figura 4.5. As funções que representam o carregamento são utilizadas para determinar as funções de amplitude de onda (equações 4.106 a 4.111 e 4.123 a 4.125). Para isso, o carregamento deve ser submetido a uma transformada de Radon seguida de uma transformada de Fourier.

As cargas concentradas vertical e horizontais no domínio físico, são dadas na forma de deltas Dirac:

$$P = \delta(x)\delta(y), \quad (4.171)$$

$$S = \delta(x)\delta(y), \quad (4.172)$$

$$T = \delta(x)\delta(y). \quad (4.173)$$

Da transformada de Radon, resulta:

$$\tilde{P} = \delta(s), \quad (4.174)$$

$$\tilde{S} = \delta(s), \quad (4.175)$$

$$\tilde{T} = \delta(s). \quad (4.176)$$

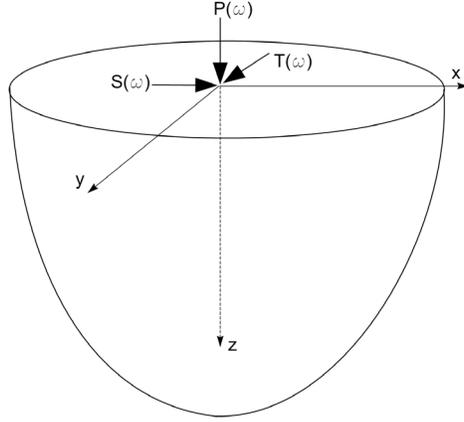


Figura 4.5. Carga concentrada na superfície livre

Finalmente, aplicando a transformada de Fourier, chega-se ao carregamento no domínio de Radon-Fourier:

$$\hat{\hat{P}}(k, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.177)$$

$$\hat{\hat{S}}(k, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.178)$$

$$\hat{\hat{T}}(k, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.179)$$

Substituindo os resultados das equações 4.177 a 4.179 nas equações para carregamento vertical, obtêm-se a amplitudes de onda para solicitação concentrada vertical:

$$C_P = \frac{-\Gamma_3}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.180)$$

$$A_P = \frac{\Gamma_4}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.181)$$

Para carga horizontal em x (S), as amplitudes de onda são dadas por:

$$C_S = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.182)$$

$$A_S = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.183)$$

E para carregamento tangencial em y (T), tem-se:

$$C_T = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.184)$$

$$A_r = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2} \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.185)$$

Com os resultados das equações 4.180 a 4.185, é possível determinar as respostas de deslocamento e tensão de semi-espacos submetidos a cargas concentradas. Inicialmente será analisado o caso particular do carregamento vertical, para o qual é cabível considerar axissimetria.

4.5 Problema axissimétrico – Carga vertical concentrada

No caso de carregamento vertical, o problema pode ser considerado axissimétrico, o que significa que ele pode ser descrito em coordenadas polares e que a resposta independe do ângulo de rotação. Tal particularidade permite uma série de simplificações nos integrandos. A análise será apresentada para cada uma das componentes de deslocamento, deformação e tensão que existem no problema axissimétrico.

4.5.1 Deslocamento vertical

Considerando existir apenas carregamento vertical, é possível conceber que o problema é axissimétrico. Para carga vertical, o deslocamento vertical U_z no sistema cartesiano é dado por:

$$U_{zz}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \xi \delta \left\{ A_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.186)$$

e no sistema de coordenadas cilíndricas:

$$U_{zz}(r, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(r\text{Cos}(\theta-\varphi))} \xi \delta \left\{ A_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} d\xi d\theta. \quad (4.187)$$

Em ambas as equações, é possível observar que existe apenas uma parcela dependendo de θ , que pode ser integrada a parte,

$$\Omega_{cilindrica} = \int_0^{2\pi} e^{i\delta\xi(r\text{Cos}(\theta-\varphi))} d\theta, \quad (4.188)$$

$$\Omega_{cartesiana} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} d\theta. \quad (4.189)$$

A consideração de axissimetria diz que a resposta do problema independe de φ , o que permite a simplificação da equação 4.188, assumindo que $\varphi=0$:

$$\Omega_{cilindrica} = \int_0^{2\pi} e^{i\delta\xi(r\cos(\theta))} d\theta. \quad (4.190)$$

Recorrendo à equação complexa de Bessel (Bronstein et al., 2001)

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos(\theta)} \cos(n\theta) d\theta, \quad (4.191)$$

sendo n a ordem da equação de Bessel. Para n=0:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos(\theta)} d\theta, \quad (4.192)$$

reescrevendo 4.192,

$$\int_0^\pi e^{ix\cos(\theta)} d\theta = \pi J_0(x). \quad (4.193)$$

Da análise do integrando, com os limites apresentados em 4.190, e utilizando as figuras 4.6 e 4.7 é possível notar que a função possui período π , portanto é cabível reescrever os limites

$$\Omega_{cilindrica} = 2 \int_0^\pi e^{i\delta\xi(r\cos(\theta))} d\theta. \quad (4.194)$$

Finalmente, recorrendo à equação 4.193, a integral, para este caso particular, é dada por:

$$\Omega_{cilindrica} = 2 \int_0^\pi e^{ix\cos(\theta)} d\theta = 2\pi J_0(x). \quad (4.195)$$

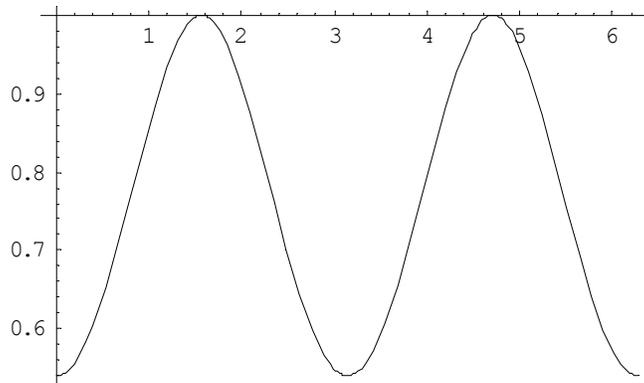


Figura 4.6. componente real da equação 4.190

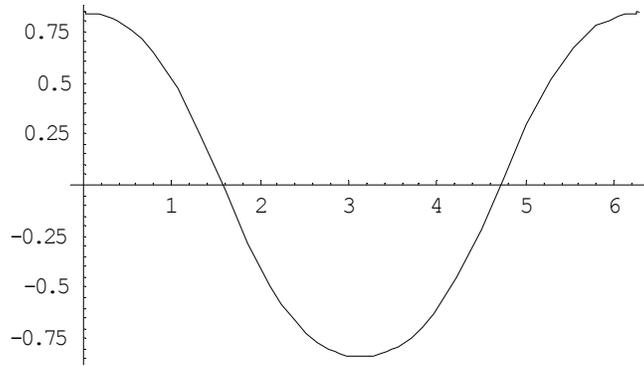


Figura 4.7. componente imaginária da equação 4.190

Aplicando estes resultados na equação de deslocamento e considerando pontos na superfície livre $z=0$, tem-se:

$$U_{zz}(r, z=0, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi \delta \{A_p + C_p\} J_0(\xi \delta r) d\xi, \quad (4.196)$$

sendo a função par, como pode ser observado na figura 4.8, o que permite u'a mudança nos limites de integração e, generalizando para qualquer valor de z , tem-se que a equação de deslocamento vertical é:

$$U_{zz}(r, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \delta \{A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}\} J_0(\xi \delta r) d\xi \quad (4.197)$$

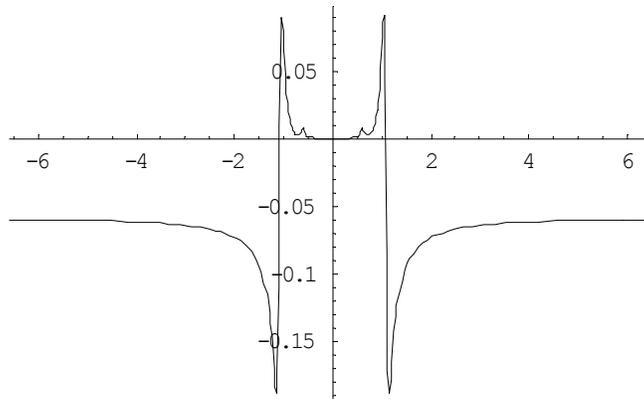


Figura 4.8. Componente real da equação 4.196

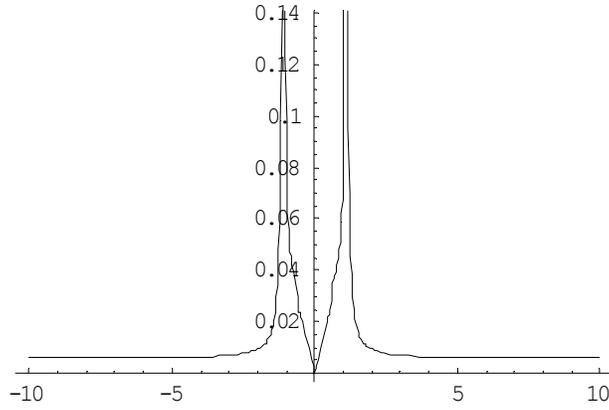


Figura 4.9. Componente imaginária da equação 4.196

4.5.2 Deslocamento horizontal devido à carga vertical

O deslocamento horizontal pode ser escrito em coordenadas cilíndricas, dadas por r e φ . Usando um φ , que permite uma integração analítica em θ , é possível escrever:

$$U_{\varphi z} = U_{xz} \left(\varphi = \pi/2 \right) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(r\cos(\theta-\pi/2))} \xi \delta \left\{ \cos\theta [\psi_1 A_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}] \right\} d\xi d\theta \quad (4.198)$$

$$U_{rz} = U_{yz} \left(\varphi = \pi/2 \right) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(r\cos(\theta-\pi/2))} \xi \delta \left\{ \text{sen}\theta [\psi_1 A_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}] \right\} d\xi d\theta \quad (4.199)$$

Note que estas funções fornecem o mesmo resultado obtido para o deslocamento em x e y ao longo do eixo y . Um outro ângulo que permite realizar esta integração analiticamente é $\varphi=0$, (deslocamentos horizontais ao longo do eixo x). No entanto, a equação resultante é muito complexa e ímpar, mas, apesar disso, fornece exatamente o mesmo resultado, se integrada numericamente à variável ξ .

Isolando os termos em θ na equação 4.198, chega-se a:

$$\Omega_{cilindrica} = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) e^{i\delta\xi(r\cos(\theta-\pi/2))} d\theta, \quad (4.200)$$

as componentes reais e imaginárias do integrando da equação 4.200 são apresentadas nas figuras 4.10 e 4.11, o que permite observar serem ímpares, indicando que a integração nos limites apresentados, será nula. Portanto, o deslocamento angular é igual a zero $U_\varphi=0$. Este resultado está correto, e pode ser observado no problema de Boussinesq (Hahn, 1985)

Na equação 4.199, a função de θ é

$$\Omega_{cilindrica} = \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta) e^{i\delta\xi(r\text{Cos}(\theta-\pi/2))} d\theta, \quad (4.201)$$

nas figuras 4.12 e 4.13 são apresentadas as componentes reais e imaginárias do integrando da equação 4.201. A integração da componente real resulta zero; no entanto, a parcela imaginária tem integral não nula.

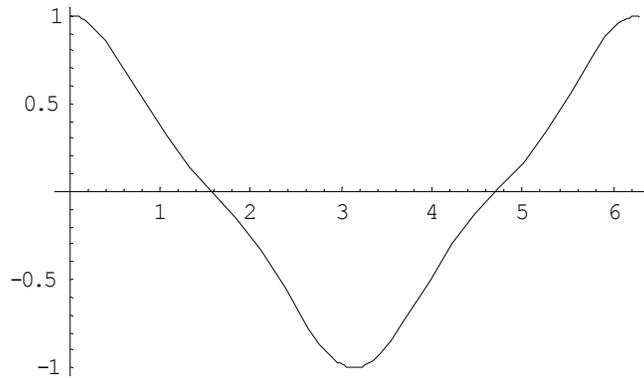


Figura 4.10. Componente real de $\Omega_{cilindrica}$

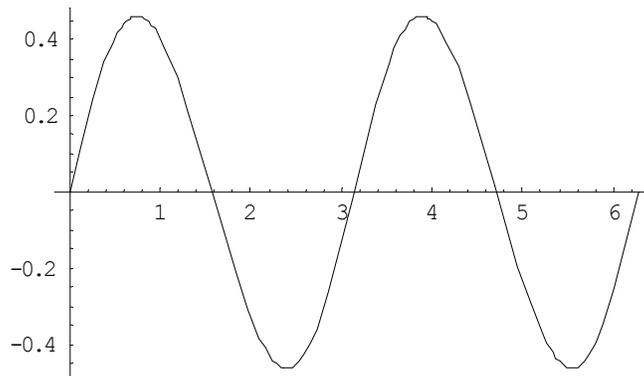


Figura 4.11 Componente imaginária de $\Omega_{cilindrica}$

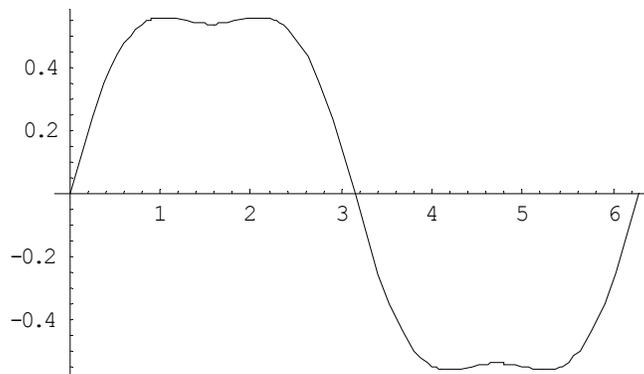


Figura 4.12. Componente real de $\Omega_{cilindrica}$

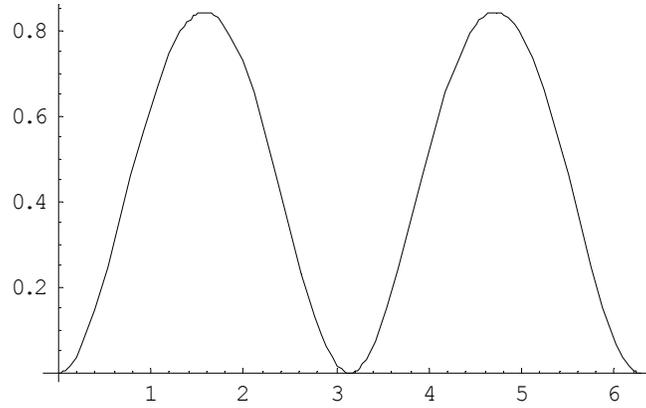


Figura 4.13. Componente imaginária de $\Omega_{cilindrica}$

Recorrendo ao *Mathematica* para obter a integral de 4.201, chega-se a:

$$\Omega_{cilindrica} = 2\pi i J_1(\delta \xi r) \text{sign}(\delta \xi r). \quad (4.202)$$

Assim, o deslocamento radial é dado por:

$$U_{rz} = U_{yz} \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i J_1(\delta \xi r) \xi \delta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] d\xi. \quad (4.203)$$

Como o integrando é simétrico, conforme pode ser visto nas figuras 4.14 e 4.15, reescrevendo os limites:

$$U_{rz} = U_{yz} \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} i J_1(\delta \xi r) \xi \delta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] d\xi \quad (4.204)$$

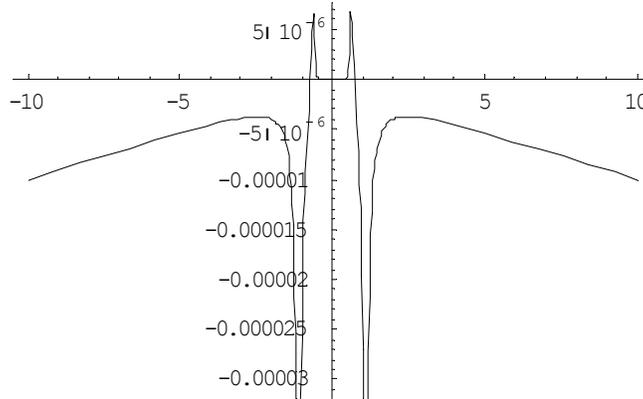


Figura 4.14. Componente real de U_{rz}

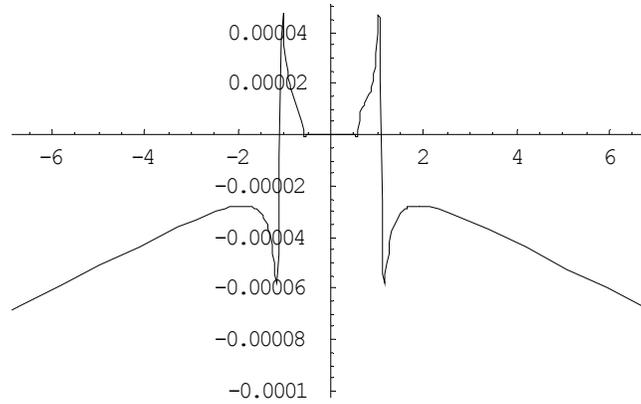


Figura 4.15. Componente imaginária de U_{rz}

4.5.3 Deformações e tensões devidas a carregamento vertical

Para o problema axissimétrico, as componentes de deformação podem ser obtidas dos deslocamentos radial e angular, utilizando as seguintes relações (Graff, 1991):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad (4.205)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} \right), \quad (4.206)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(U_r + \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (4.207)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad (4.208)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (4.209)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + U_\varphi \right) + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r}, \quad (4.210)$$

o deslocamento angular $U_{\varphi z}$ é nulo quando se considera a axissimetria e as componentes U_{rz} e U_{zz} não sofrem variação com o ângulo φ , o que torna possível simplificar as equações 4.205 a 4.210, obtendo:

$$\varepsilon_{rrz} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad (4.211)$$

$$\varepsilon_{\varphi zz} = 0, \quad (4.212)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi z} = \frac{U_r}{r}, \quad (4.213)$$

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad (4.214)$$

$$\varepsilon_{zzz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (4.215)$$

$$\varepsilon_{r\varphi z} = 0. \quad (4.216)$$

Para o caso isotrópico, as componentes de tensão podem ser obtidas com uso da equação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & & & \\ & \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & & \\ & \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \\ & & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \\ \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{zr} \end{Bmatrix} \quad (4.217)$$

que para o problema de carregamento vertical, pode ser reduzida para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rrz} \\ \sigma_{zzz} \\ \sigma_{\varphi\varphi z} \\ \sigma_{zrz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & \\ & \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda \\ & \lambda & \mu & 2\mu + \lambda \\ & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rrz} \\ \varepsilon_{zzz} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi z} \\ \varepsilon_{zrz} \end{Bmatrix}. \quad (4.218)$$

Assim, as tensões são obtidas de:

$$\sigma_{rrz} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{rrz} + \lambda(\varepsilon_{zzz} + \varepsilon_{\varphi\varphi z}) \quad (4.219)$$

$$\sigma_{zzz} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{zzz} + \lambda(\varepsilon_{rrz} + \varepsilon_{\varphi\varphi z}) \quad (4.220)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi z} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{\varphi\varphi z} + \lambda(\varepsilon_{rrz} + \varepsilon_{zzz}) \quad (4.221)$$

$$\sigma_{zrz} = \mu\varepsilon_{zrz} \quad (4.222)$$

A componente de tensão σ_{zzz} também pode ser calculada com auxílio da expressão obtida durante as deduções dos problemas auxiliares, após o acoplamento e transformada inversa, 4.169, bastando, para tanto, aplicar as condições de axissimetria utilizadas no estudo do deslocamento vertical U_{zz} .

Componente de deformação ε_{zzz} é obtida da equação 4.215:

$$\varepsilon_{zzz} = \frac{\partial U_z}{\partial z},$$

a equação 4.197 fornece o deslocamento vertical devido ao carregamento vertical:

$$U_{zz}(r, z, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta \{A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}\} J_0(\xi\delta r) d\xi,$$

substituindo na equação 4.215, calcula-se a deformação como:

$$\varepsilon_{zzz}(r, z, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta \{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \delta \cdot \alpha_2 \cdot C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}\} J_0(\xi\delta r) d\xi \quad (4.223)$$

Componente de deformação $\varepsilon_{\varphi\varphi z}$ obtida com auxílio da equação 4.213, é dada por

$$\varepsilon_{\varphi\varphi z} = \frac{U_r}{r},$$

recorrendo à equação 4.204, representada

$$U_r = U_y\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} iJ_1(\delta\xi r) \xi\delta \left\{ \psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} d\xi$$

e substituindo em 4.213, resulta:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} iJ_1(\delta\xi r) \xi\delta \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} d\xi. \quad (4.224a)$$

Não é necessária uma análise mais aprofundada, pois esta componente consiste basicamente do deslocamento radial U_{rz} dividido pela distância até a fonte, r , inexistindo problema para obter tal valor em qualquer ponto do semi-espço, apenas no caso em que $r=0$, ou seja, os pontos ao longo do eixo z . Neste caso, é necessário determinar o limite, e obtém-se:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi z}(r=0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} i\xi^2 \delta^2 \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} d\xi. \quad (4.224b)$$

Componente de deformação ε_{rrz} , calculada com auxílio da equação 4.211

$$\varepsilon_{rrz} = \frac{\partial U_r}{\partial r},$$

a única parcela do deslocamento radial que depende da distância até a fonte, r , é a função de Bessel, como pode ser observado na equação a seguir:

$$U_{rz} = U_y\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi\delta) iJ_1(\delta\xi r) \xi\delta \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} d\xi$$

a derivada dessa função de Bessel é:

$$\frac{\partial J_1(\delta\xi r)}{\partial r} = \frac{1}{2} \delta\xi \{J_0(\delta\xi r) - J_2(\delta\xi r)\} \quad (4.225)$$

Aplicando este resultado, mas reescrevendo os limites de integração na equação 4.211, obtém-se a expressão para o componente de deformação radial:

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i \cdot \delta^2 \xi^2 \text{Sign}(\xi\delta) \frac{1}{2} \{J_0(\delta\xi r) - J_2(\delta\xi r)\} \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}. \quad (4.226)$$

Esse resultado pode ser escrito de outra maneira:

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i \cdot \delta\xi \text{Sign}(\xi\delta) \left\{ -\frac{J_1(\delta\xi r)}{r} + \delta\xi J_0(\delta\xi r) \right\} \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} \quad (4.227a)$$

e para $r=0$, utilizando o limite, chega-se a:

$$\varepsilon_{rzz}(r=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} i \cdot \delta^2 \xi^2 \text{Sign}(\xi\delta) \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}. \quad (4.227b)$$

Componente de deformação ε_{rzz} é determinada com o uso da equação 4.214

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right),$$

aplicando as componentes de deslocamento e realizando as derivadas, é possível chegar à componente de deformação:

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} i J_1(\delta\xi r) \xi \delta \left\{ \left[-\delta \cdot \alpha_1 \cdot \psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \delta \cdot \alpha_2 \cdot \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} + \int_0^{\infty} \xi^2 \delta^2 \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} J_1(\xi\delta r) d\xi \right),$$

ou de uma forma mais organizada:

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi\delta) J_1(\delta\xi r) \xi \delta^2 \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} \left[-i \cdot \alpha_1 \cdot \psi_1 + \xi \right] + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \left[-i \cdot \alpha_2 \cdot \psi_2 + \xi \right] \right\} \right) \quad (4.228)$$

Nota importante sobre os procedimentos de inversão

Nos procedimentos apresentados neste trabalho, foram utilizadas duas transformadas sobre as funções, a transformada de Radon e a transformada de Fourier e conseqüentemente são necessárias duas transformadas inversas, assim escrevendo para uma função genérica $f(x,y,z,\omega)$:

$$f(x, y, z, \omega) \Rightarrow \mathfrak{R} \Rightarrow \tilde{f}(s, \theta, z, \omega) \Rightarrow \mathfrak{T} \Rightarrow \hat{f}(k, \theta, z, \omega),$$

a inversa de Fourier de maneira mais explícita é:

$$\tilde{f}(s, \theta, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{f}(k, \theta, z, \omega) \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi. \quad (4.229)$$

É importante observar que somente o termo exponencial depende da variável “s”. O próximo passo é a transformada inversa de Radon, realizada em duas etapas:

$$\tilde{f}(s, \bar{n}) = \frac{df(s, \bar{n})}{ds}, \quad (4.230)$$

$$f(x, y) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(s, \bar{n})}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} ds d\theta, \quad (4.231)$$

ou em coordenadas cilíndricas,

$$f(r, \varphi) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(s, \bar{n})}{s - r \cos(\theta - \varphi)} ds d\theta. \quad (4.232)$$

Na primeira etapa, deriva-se a equação 4.29, de modo que:

$$\tilde{f}(s, \theta, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \delta \left\{ \hat{f}(k, \theta, z, \omega) \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \quad (4.233)$$

substituindo este resultado na equação 4.232 para o problema de coordenadas

$$\text{cilíndricas: } f(r, \varphi) = \frac{-1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{f}(k, \theta, z, \omega) \right\} i\xi \delta \frac{e^{i\xi \delta s} d\xi}{s - r \cos(\theta - \varphi)} ds d\xi d\theta, \quad (4.234)$$

a integração em “s” é possível e foi apresentada em seção anterior, assim:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{f}(k, \theta, z, \omega) \right\} \text{sign}(\xi) \xi \delta e^{i\delta \xi r \cos(\theta - \varphi)} d\xi d\theta. \quad (4.235)$$

Para alguns casos particulares, é possível obter a resposta analítica da integração em θ , como foi mostrado para os deslocamentos, e, a forma usual da função resultante, são funções de Bessel. Observe que $\xi \delta$ aparece, no integrando, multiplicando as funções transformadas; tal termo é resultante dos procedimentos de inversão. A idéia principal agora é mostrar qual seria a transformada inversa se $\hat{f}(k, \theta, z, \omega) = a$, sendo a uma constante qualquer, ou uma função qualquer que não decai para zero. Nestes casos, a integração numérica não é possível pois não ocorre convergência, porque o integrando cresce ilimitadamente com ξ . A transformada inversa de funções constantes necessita da ajuda da teoria de distribuição de modo mais simples; a transformada inversa de Fourier de constantes resulta em delta de Dirac (Hsu, 1975) e, a transformada de Radon inversa de um delta de Dirac, resulta em delta de Dirac no domínio físico (Deans, 1993). Esta observação será útil, analisando as deformações na superfície livre.

4.5.4 Análise das deformações na superfície livre

As seguintes componentes de deformação serão analisadas ε_{zzz} , ε_{rzz} , $\varepsilon_{r\theta z}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi z}$.

A componente de deformação ε_{zzz} é dada por

$$\varepsilon_{zzz}(r, z, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta \left\{ -\delta \cdot \alpha_1 \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \delta \cdot \alpha_2 \cdot C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi \quad (4.236)$$

Iniciando com o caso particular, de pontos na superfície, eliminam-se os termos exponenciais, e isolando o núcleo da função dado por:

$$G(\varepsilon_{zzz}) = \left\{ -\delta \cdot \alpha_1 \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \delta \cdot \alpha_2 \cdot C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}. \quad (4.237)$$

As componentes real e imaginária desta função são apresentadas nas figuras 4.16 e 4.17. Esta componente assume um valor constante para $\xi = \pm\infty$, e pode ser assumido, para a transformada inversa, que o resultado seja um delta de Dirac. Esta é a resposta para o problema de Boussinesq na superfície livre e componente ε_{zzz} , deformação nula em todos os pontos e uma singularidade na origem do sistema, na qual foi aplicado o carregamento.

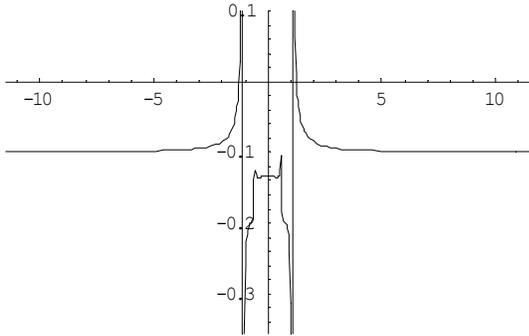


Figura 4.16. Componente real de $G(\varepsilon_{zzz})$

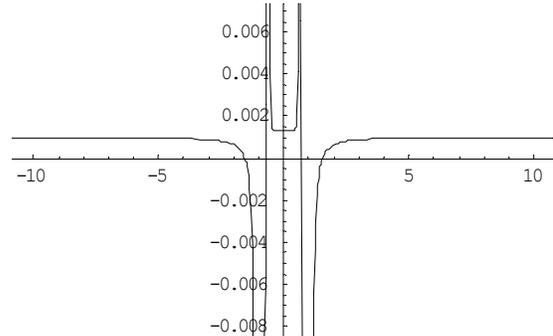


Figura 4.17. Componente imaginária de $G(\varepsilon_{zzz})$

A componente de deformação $\varepsilon_{\varphi\varphi z}$ é dada por

$$\varepsilon_{\varphi\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} iJ_1(\delta\xi r) \xi\delta \left\{ \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} d\xi, \quad (4.238)$$

isolando o núcleo:

$$G(\varepsilon_{\varphi\varphi z}) = \psi_1 A + \psi_2 C \quad (4.239)$$

para o qual as componentes real e imaginária são apresentadas nas figuras 4.18 e 4.19. Esta função decai lentamente, e será posteriormente, multiplicada por uma função de Bessel que aparece no integrando; função que pode ser integrada com auxílio de algoritmos para funções

oscilantes, como o de Longman. Esta componente não necessita de análises adicionais, pois tem exatamente o mesmo comportamento do integrando de deslocamento U_{rz} .

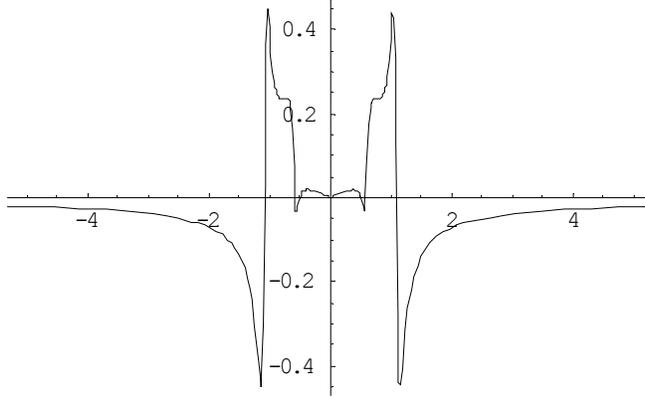


Figura 4.18 Componente real de $G(\varepsilon_{\varphi\varphi z})$

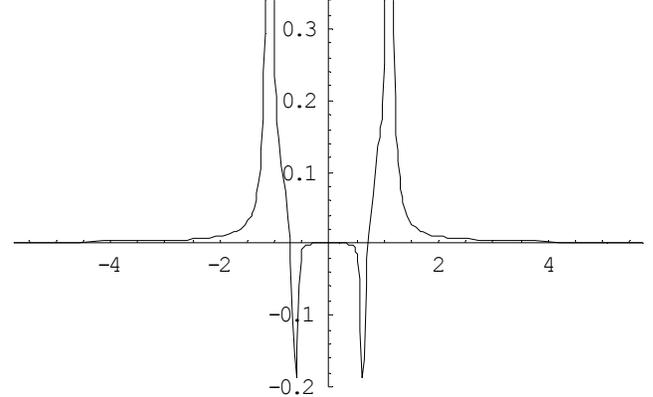


Figura 4.19. Componente imaginária de $G(\varepsilon_{\varphi\varphi z})$

Componente de deformação ε_{rrz} é calculada por:

$$\varepsilon_{rrz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} i \cdot \delta\xi \text{Sign}(\xi\delta) \left\{ -\frac{J_1(\delta\xi r)}{r} + \delta\xi J_0(\delta\xi r) \right\} \left\{ [\psi_1 A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z}] \right\} \quad (4.240)$$

pode ser realizada uma simplificação de modo que:

$$\varepsilon_{rrz} = -\varepsilon_{\varphi\varphi z} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} i \cdot \delta\xi \text{Sign}(\xi\delta) \{ J_0(\delta\xi r) \} \left\{ [\delta\xi \psi_1 A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \delta\xi \psi_2 C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z}] \right\}. \quad (4.241)$$

A componente $\varepsilon_{\varphi\varphi z}$ foi analisada anteriormente, isolando o termo restante e considerando $z=0$:

$$G(\varepsilon_{rrz}) = \delta\xi \psi_1 A + \delta\xi \psi_2 C. \quad (4.242)$$

As componentes real e imaginária desta parcela são apresentadas nas figuras 4.20 e 4.21, notando-se que apresentam um valor constante para $\xi=\pm\infty$. Assumindo que esta função seja constante, é possível considerar que a transformada inversa resulta em um delta de Dirac (Hsu, 1975). Tal resultado confere com o obtido no problema de Boussinesq para o qual esta componente de deformação é $\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\varphi\varphi}$

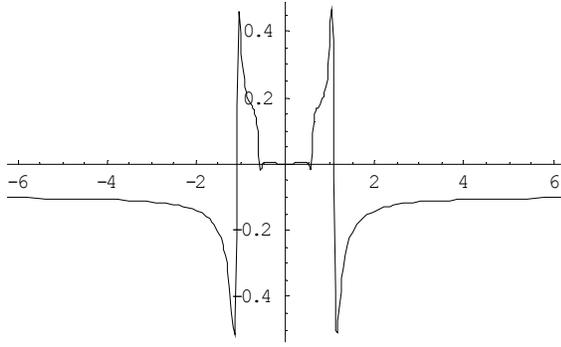


Figura 4.20. Componente real de $G(\varepsilon_{rzz})$

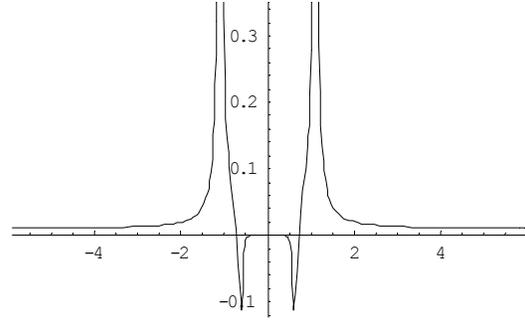


Figura 4.21 Componente imaginária de $G(\varepsilon_{rzz})$

Componente de deformação ε_{rzz} para a superfície livre é dada por

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi\delta) J_1(\delta\xi r) \xi \delta^2 \{A[-i \cdot \alpha_1 \cdot \psi_1 + \xi] + C[-i \cdot \alpha_2 \cdot \psi_2 + \xi]\} d\xi \right). \quad (4.243)$$

É possível mostrar que:

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi\delta) J_1(\delta\xi r) \xi \delta^2 \frac{-1}{\mu i} \{A[\mu \cdot \alpha_1 \cdot \psi_1 - i\mu\xi] + C[\mu \cdot \alpha_2 \cdot \psi_2 - i\mu\xi]\} d\xi \right) \quad (4.244)$$

e

$$\varepsilon_{rzz} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi\delta) J_1(\delta\xi r) \xi \delta^2 \frac{-1}{\mu i} \{A\Gamma_3 + C\Gamma_4\} d\xi \right) = 0. \quad (4.245)$$

Assim, esta componente na superfície é nula.

4.5.5 Análise das componentes de Tensão

Se as deformações foram calculadas, é possível obter as tensões com auxílio das relações 4.219 a 4.222

$$\sigma_{rrz} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{rrz} + \lambda (\varepsilon_{zzz} + \varepsilon_{\varphi\varphi z})$$

$$\sigma_{zzz} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{zzz} + \lambda (\varepsilon_{rrz} + \varepsilon_{\varphi\varphi z})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi z} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{\varphi\varphi z} + \lambda (\varepsilon_{rrz} + \varepsilon_{zzz})$$

$$\sigma_{rzz} = \mu \varepsilon_{rzz}$$

Nas três primeiras equações, pode ser observado um termo comum:

$$\varepsilon = \lambda (\varepsilon_{rrz} + \varepsilon_{zzz} + \varepsilon_{\varphi\varphi z}). \quad (4.246)$$

Este termo é dado por:

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta^2 \left\{ (\alpha_1 - \xi i\psi_1) A e^{-\alpha_1\delta z} + (\alpha_2 - \xi i\psi_2) A e^{-\alpha_2\delta z} \right\} J_0(\delta\xi r) d\xi. \quad (4.247)$$

É importante lembrar que, na superfície livre, $\varepsilon_{rz} = -\varepsilon_{\varphi\varphi z}$, $\varepsilon_{zz} = \delta(x,y,z)$ e $\varepsilon_{rzz} = 0$, assim para pontos fora da origem do sistema de coordenadas, as tensões são reduzidas para

$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} \quad (4.248)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \quad (4.249)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi z} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi z} = -2\mu\varepsilon_{rz} = \frac{1}{r} U_{rz} \quad (4.250)$$

$$\sigma_{rzz} = 0. \quad (4.251)$$

Componente de tensão σ_{zz} , da equação 4.220 com auxílio de 4.247 e 4.223, é possível chegar a:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z, \omega) &= \frac{(2\mu + \lambda)}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta^2 \left\{ -\alpha_1 \cdot A \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} - \alpha_2 \cdot C \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi + \\ &- \frac{\lambda}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(\xi\delta) \xi\delta^2 \left\{ (\alpha_1 - \xi i\psi_1) A e^{-\alpha_1\delta z} + (\alpha_2 - \xi i\psi_2) A e^{-\alpha_2\delta z} \right\} J_0(\delta\xi r) d\xi, \end{aligned}$$

que após algumas simplificações,

$$\sigma_{zz}(r, z, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi\delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi. \quad (4.252)$$

Este resultado é o mesmo da equação 4.169 após as considerações de axissimetria. A análise deste integrando deve ser realizada em duas etapas: pontos no interior do semi-espaco e pontos na superfície. Iniciando pela superfície livre, sabe-se que esta componente de tensão deve ser idêntica ao carregamento aplicado, ou seja, deve ser um delta de Dirac. A tensão é dada por:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.253)$$

que para pontos na superfície, é:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_1 A + \Gamma_2 C \right\} e^{i\xi\delta z} d\xi, \quad (4.254)$$

expandindo as amplitudes de onda para o problema de carregamento vertical,

$$\tilde{\sigma}_{zz}(z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_1 \frac{\Gamma_4}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \hat{P} + \Gamma_2 \frac{-\Gamma_3}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4} \hat{P} \right\} e^{i\xi\delta z} d\xi. \quad (4.255)$$

Após algum trabalho algébrico obtém-se:

$$\tilde{\sigma}_{zzz}(z=0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{P} \right\} e^{i\xi\delta z} d\xi. \quad (4.256)$$

Sendo \hat{P} o carregamento transformado, após a transformação de Radon e Fourier, e a inversa de Fourier possui a forma:

$$\tilde{\sigma}_{zzz}(z=0) = -\tilde{P}. \quad (4.256)$$

E, finalmente, aplicando a transformada inversa de Radon,

$$\sigma_{zzz}(z=0) = -P. \quad (4.257)$$

Esta análise é importante, pois a transformada inversa numérica não é possível para funções de energia ilimitada.

Para pontos no interior do semi-espaço, iniciando da equação de tensão:

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)} \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta \quad (4.258)$$

e utilizando os procedimentos aplicados para deslocamento vertical, é possível escrever a função em coordenadas cilíndricas, e realizar analiticamente a integração em θ , obtendo,

$$\sigma_{zzz}(r, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi. \quad (4.259)$$

E lembrando que o carregamento transformado é $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, para obter:

$$\sigma_{zzz}(r, z, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi. \quad (4.260)$$

Componente de tensão σ_{rrz} , da equação 4.219, com auxílio de 4.247 e 4.227, mostra-se que:

$$\begin{aligned} \sigma_{rrz}(r, z, \omega) = & -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \delta \left\{ \delta(-\alpha_1\lambda + i\xi(\lambda + 2\mu)\psi_1) A e^{-\delta\alpha_1 z} + \delta(-\alpha_2\lambda + i\xi(\lambda + 2\mu)\psi_2) C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi - \\ & -\frac{i\mu}{r\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \delta \left\{ \psi_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_1(\xi\delta r) d\xi. \end{aligned} \quad (4.261)$$

Componente de tensão $\sigma_{\phi\phi z}$, da equação 4.221 com auxílio de 4.247 e 4.224, é fácil mostrar que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi z}(r, z, \omega) = & -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \delta \lambda \left\{ \delta(-\alpha_1 + i\xi\psi_1) A e^{-\delta\alpha_1 z} + \delta(-\alpha_2 + i\xi\psi_2) C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_0(\xi\delta r) d\xi + \\ & + \frac{i\mu}{r\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \delta \left\{ \psi_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} J_1(\xi\delta r) d\xi. \end{aligned} \quad (4.262)$$

4.5.6. Análise dos Integrandos

Para que seja possível definir as estratégias mais adequadas de integração, é preciso analisar as características dos integrandos envolvidos. É muito importante definir qual a influência das diferentes características materiais do meio, das coordenadas e do carregamento aplicado.

Inicialmente, é preciso analisar o comportamento do integrando ao longo da rota de integração. Uma das principais características do integrando são os chamados números de onda, que são indicados pelas discontinuidades no núcleo do integrando. No semi-espço, essas discontinuidades ocorrem para os valores de ξ nos quais as raízes α_1 e α_2 são nulas e quando o denominador das amplitudes de onda é nulo. Assim para as raízes:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{-c'_3 - \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}} = 0, \quad (4.263)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-c'_3 + \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}} = 0. \quad (4.264)$$

E para o denominador das amplitudes de onda, tem-se:

$$\Gamma_3 \Gamma_2 - \Gamma_1 \Gamma_4 = 0. \quad (4.265)$$

Das raízes são obtidos os números para as ondas de compressão e cisalhamento, no caso dos materiais isotrópicos, pode-se mostrar que:

$$c_p = \xi = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}, \quad (4.266)$$

$$c_s = \xi = \pm 1, \quad (4.267)$$

sendo c_p , o número de onda para as ondas de compressão, e c_s para a de cisalhamento. Do termo das amplitudes de onda é obtido o número para as ondas de superfície ou Rayleigh c_R . Para solução do sistema apresentado na equação 4.265, é necessário o uso de métodos numéricos, mas uma das soluções será $\xi = \pm 1$; a outra precisa ser calculada.

A equação de deslocamento vertical deduzida anteriormente, rerepresentada aqui

$$U_{zz}(r, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \delta \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} J_0(\xi \delta r) d\xi, \quad (4.268)$$

pode ser dividida em duas parcelas: núcleo e termo oscilante. O primeiro, o núcleo da função, é dado por

$$G_{U_{zz}}(r, z, \omega) = \xi \delta \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}; \quad (4.269)$$

já o termo oscilante é dado pela função de Bessel

$$H_{U_{zz}}(r, z, \omega) = J_0(\xi \delta r). \quad (4.270)$$

Note que o termo oscilante é função apenas da frequência e da distância entre o ponto analisado e a fonte. As descontinuidades, que aparecem para os valores de ξ correspondentes aos números de onda definidos pelas características do meio físico analisado, ocorrem apenas no núcleo da função. Os números de onda indicam singularidades que podem dificultar os procedimentos de integração numérica. Na figuras 4.22 e 4.23, são apresentadas as componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento vertical.

Foram considerados os seguintes parâmetros materiais, coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$, frequência $\omega=1\text{rad/s}$ e amortecimento nulo e profundidade $z=0$. Para esse meio, $c_p=0.57735$, $c_s=1$, e $c_r=1.08766$.

Para se evitarem os pontos de singularidade ao longo do eixo de integração, existem duas opções. Inicialmente, pode-se considerar ξ uma variável complexa, desviando dos pontos de singularidade (Lamb, 1904). A alternativa consiste em incluir o amortecimento interno na formulação, consideram-se, para isto as constantes elásticas complexas, com a inclusão de uma parcela imaginária. O principal efeito dessa inclusão é que os pontos de singularidade se afastam do eixo real, permitindo a integração numérica. O uso de constantes complexas parece ser mais realista, pois praticamente todos materiais possuem amortecimento interno, existindo, ainda, a vantagem de ser possível incluir resultados experimentais.

Nas figuras 4.24 e 4.25, pode ser visualizada a influência do amortecimento sobre as singularidades. Note que, à medida que o valor do amortecimento aumenta, ocorre uma suavização do integrando, reduzindo, significativamente, os esforços computacionais. Note que para a parcela imaginária, na qual, após o número de onda c_s , para o caso elástico, a função é nula;

com a inclusão do amortecimento, a função passa a apresentar valores não nulos, o que, no entanto, não gera novos problemas de integração.

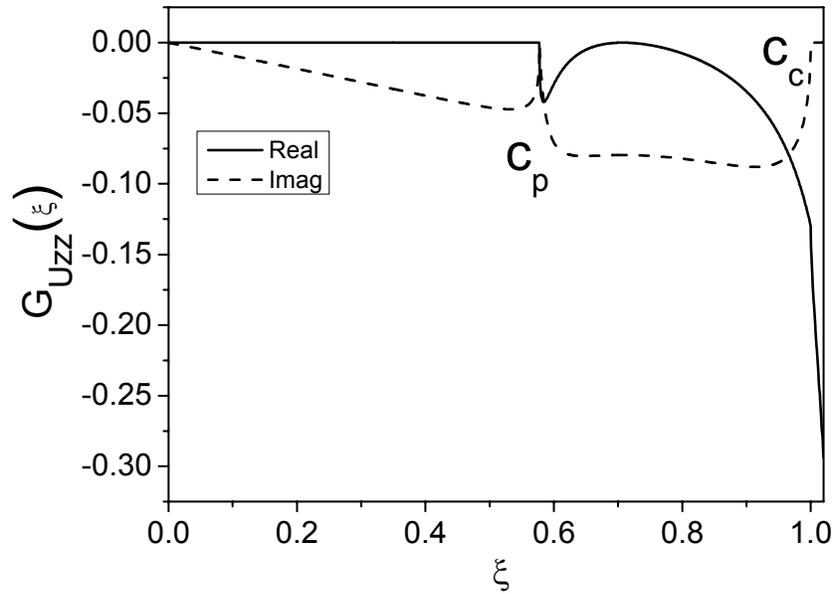


Figura 4.22 Componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento Vertical

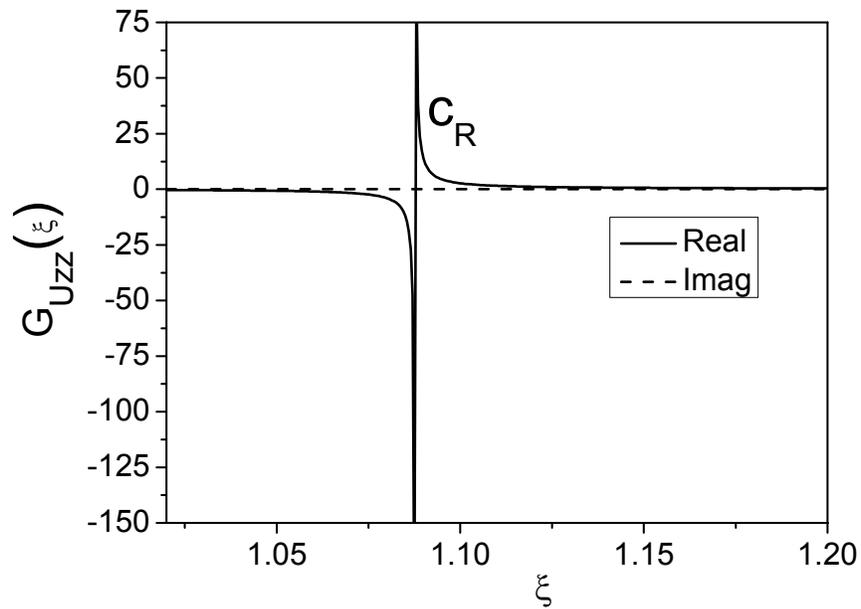


Figura 4.23 Componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento Vertical

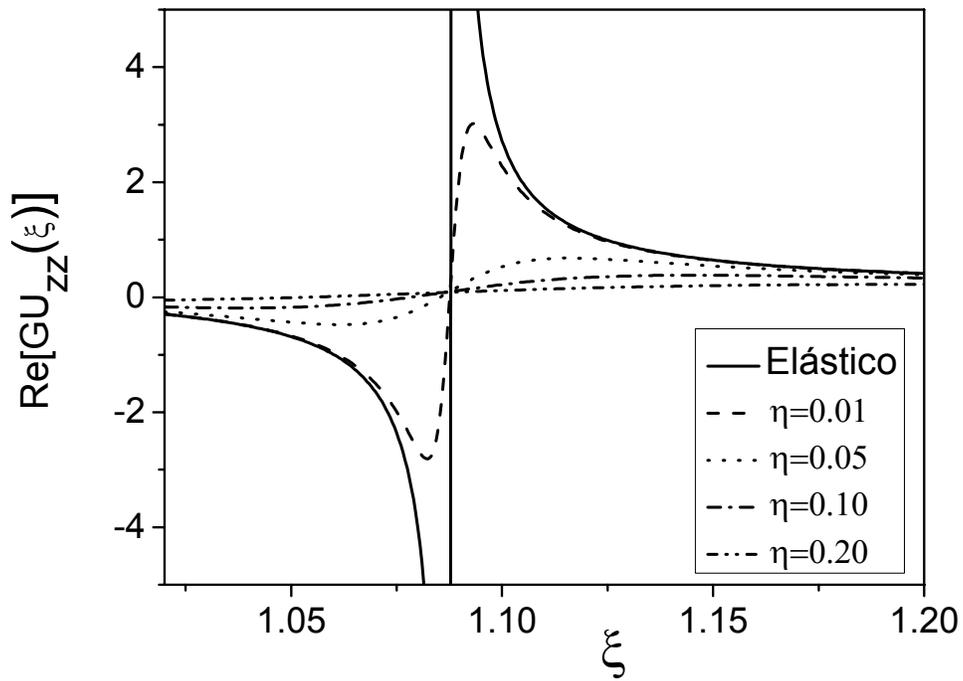
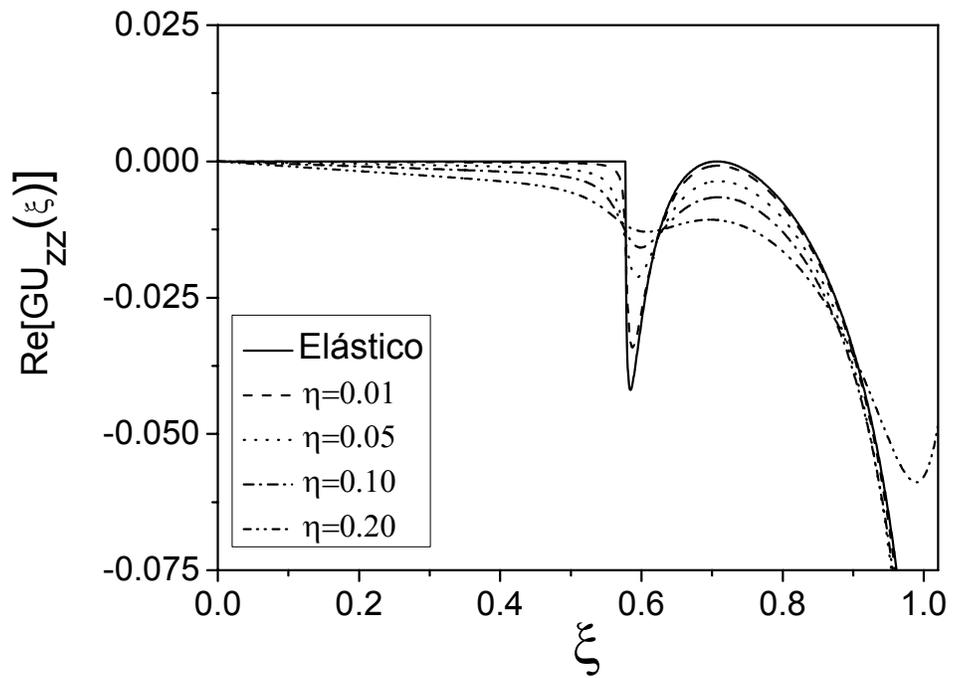


Figura 4.24 – Influência do amortecimento sobre a parcela real do núcleo G_{uz}

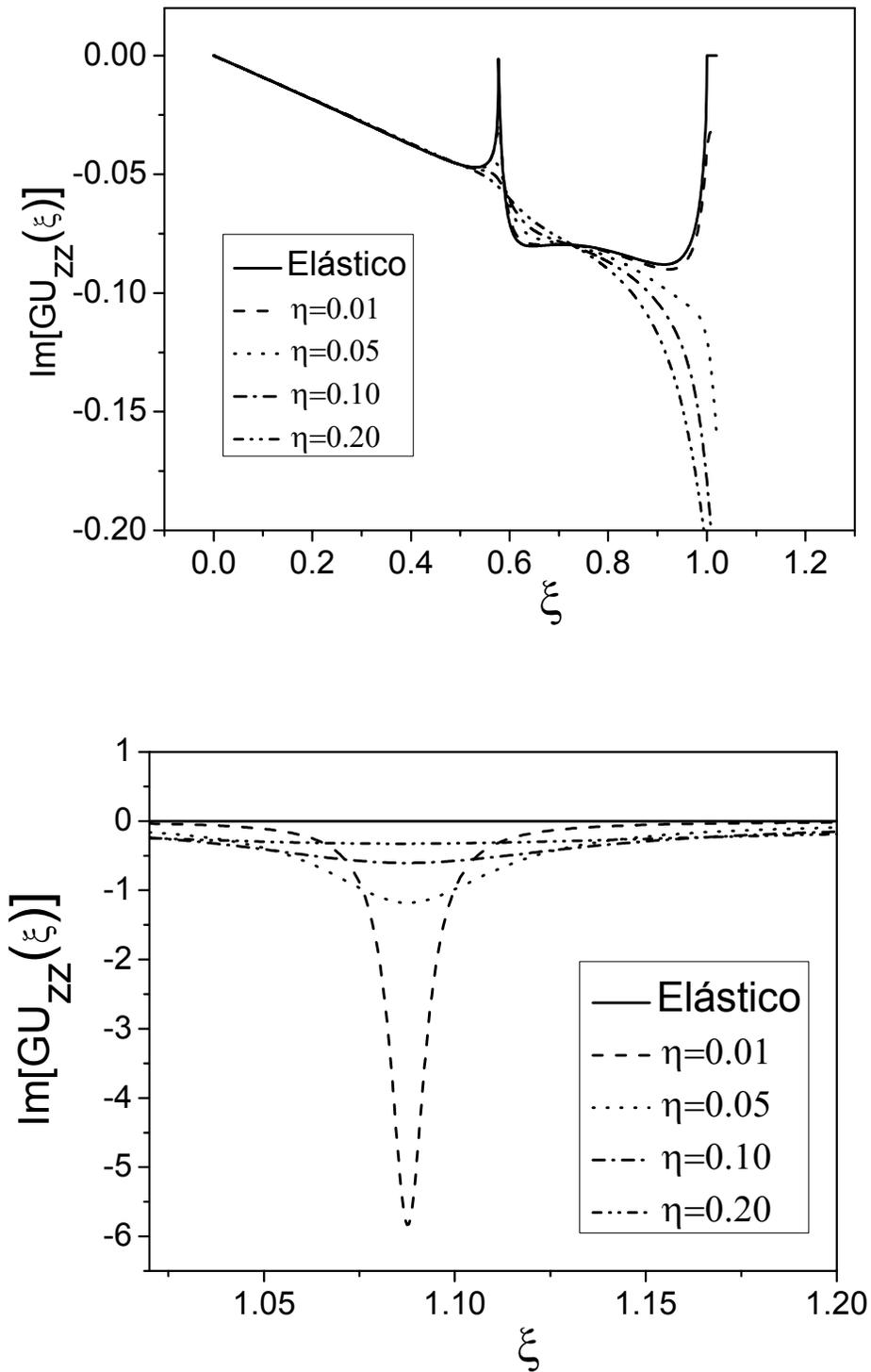


Figura 4.25 – Influência do amortecimento sobre a parcela imaginária do núcleo G_{uzz}

Resta, ainda, avaliar a influência dos diversos parâmetros materiais e geométricos sobre o núcleo do integrando de deslocamento vertical. Deve-se salientar que tais efeitos são observados nos núcleos das demais componentes de deslocamento, deformação e tensão. Considerando os parâmetros utilizados anteriormente, porém fixando o amortecimento $\eta=0.01$, varia-se a profundidade do ponto z . Este parâmetro aparece unicamente no termo exponencial; portanto o efeito esperado é de redução das amplitudes da função com o aumento do valor de z . Isso é especialmente interessante porque as integrais são impróprias, se para maiores profundidades, o integrando decai rapidamente. O processo de integração não precisa percorrer grandes faixas de ξ .

O efeito da redução da amplitude pode ser observado nas figuras 4.26 e 4.27, respectivamente para as componentes real e imaginária. Observa-se que para valores de $z > 5$, o integrando atinge valores praticamente nulos com $\xi \geq 10$. Para pontos na superfície, o núcleo passa a ser constante para $\xi > c_R$. O mesmo efeito é esperado para o aumento da frequência, pois, no núcleo da função, ela aparece apenas no termo exponencial e multiplicando as amplitudes de onda. Inicialmente, considerando um ponto na superfície, $z=0$, o que elimina o termo exponencial, observa-se nas figuras 4.28 e 4.29 para as componentes real e imaginária que ocorre apenas um aumento constante da função. Nas figuras 4.30 e 4.31 é apresentada análise semelhante, porém para profundidade $z=1$, nesse caso o aumento da frequência de excitação contribui para o maior decaimento do integrando.

O coeficiente de Poisson aparece implícito tanto nas raízes, quanto nas amplitudes de onda, sendo de se esperar que contribua para alteração dos números de onda c_p e c_R . Este efeito pode ser observado nas figuras 4.32 e 4.33, nas quais são visualizadas as partes real e imaginária do núcleo. Nota-se um evidente deslocamento dos pólos e significativa redução das amplitudes. Para essa análise, foram considerados os parâmetros materiais anteriores, porém foi adotada profundidade nula. Efeito semelhante é esperado quando se varia o valor do módulo de cisalhamento μ , e que, de fato, como pode ser observado nas figuras 4.34 e 4.35 isso ocorre. O aumento da rigidez fornece números de onda menores, significando que a velocidade de propagação será maior.

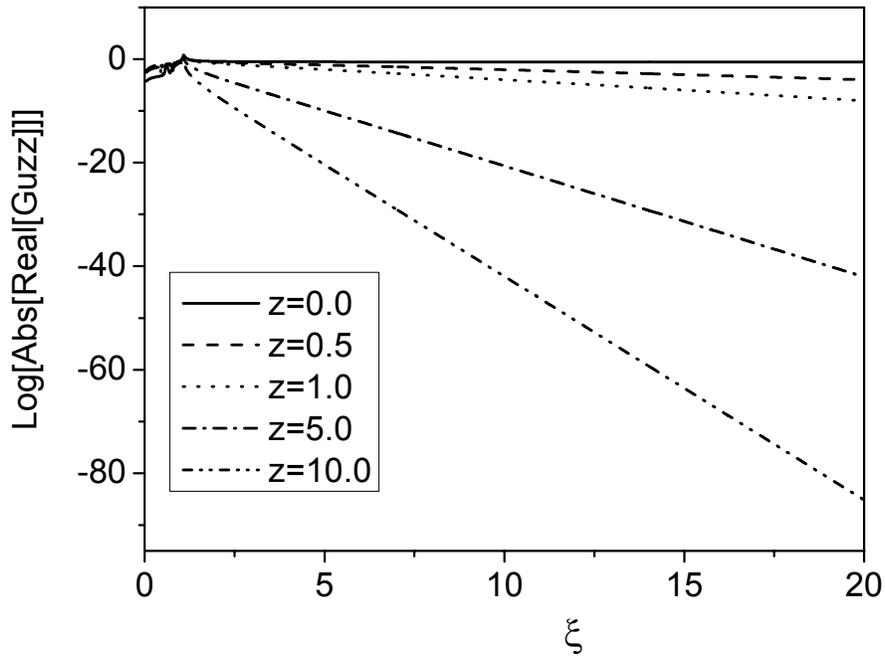


Figura 4.26 – Influência da profundidade sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz} .

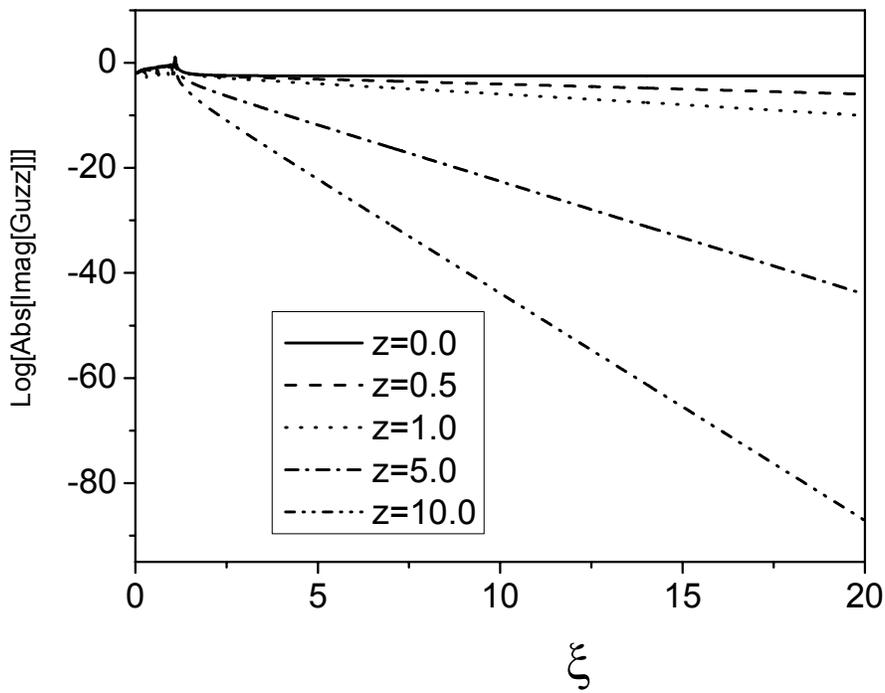


Figura 4.27 – Influência da profundidade sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .

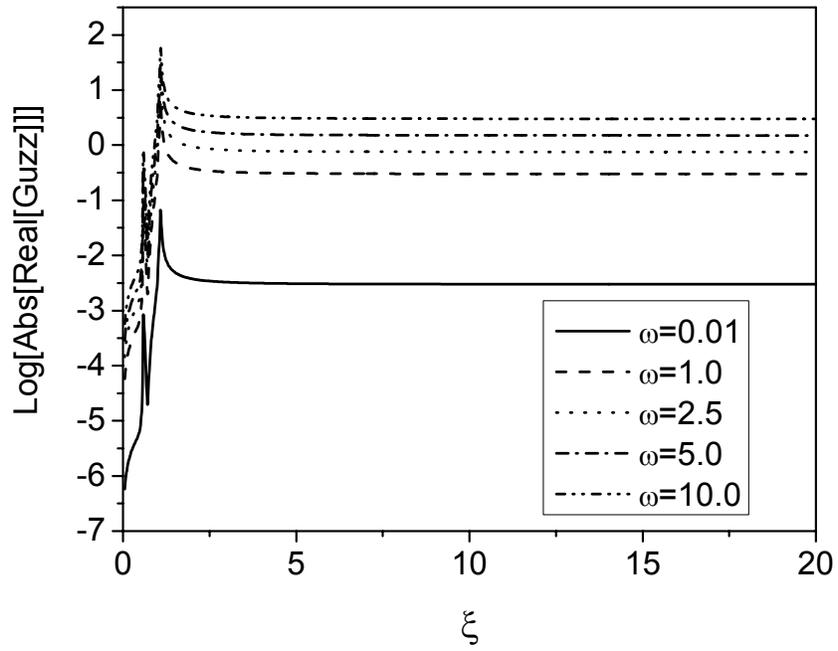


Figura 4.28 – Influência da frequência sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz} , $z=0$

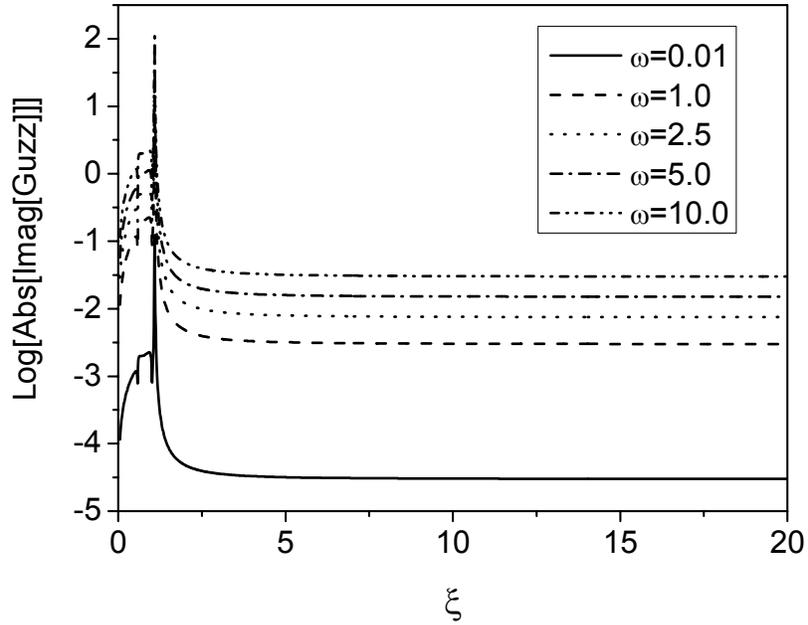


Figura 4.29 – Influência da frequência sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} , $z=0$

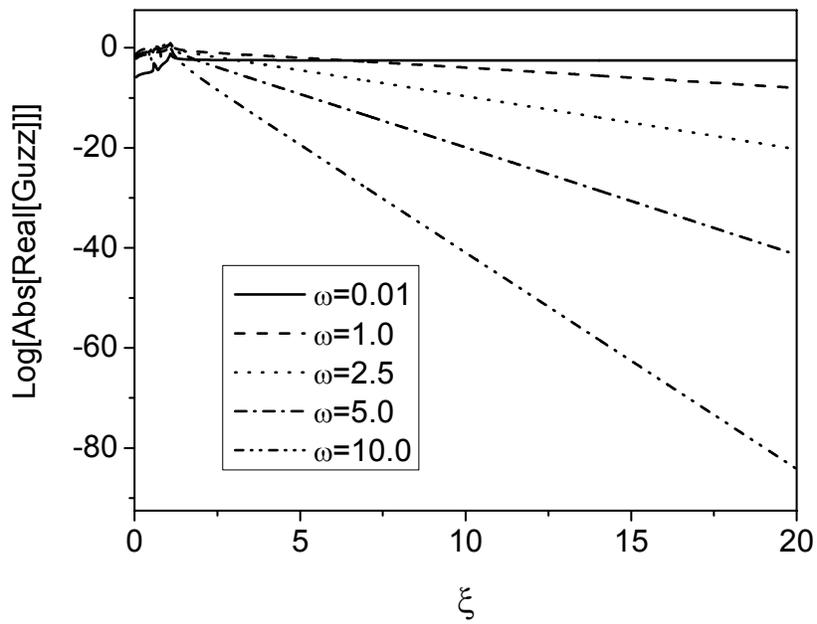


Figura 4.30 – Influência da frequência sobre a parcela real do núcleo da função G_{Uzz} , $z=1$

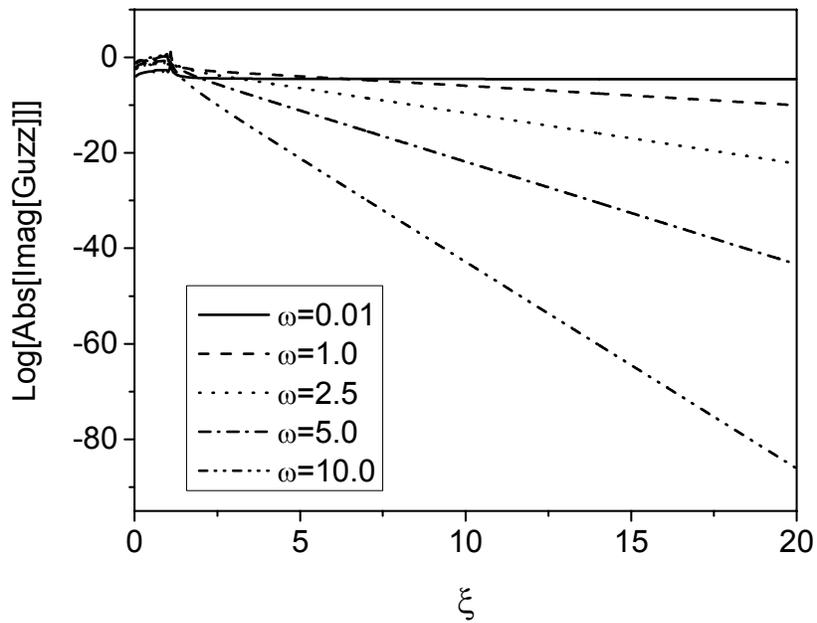


Figura 4.31 – Influência da frequência sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} , $z=1$

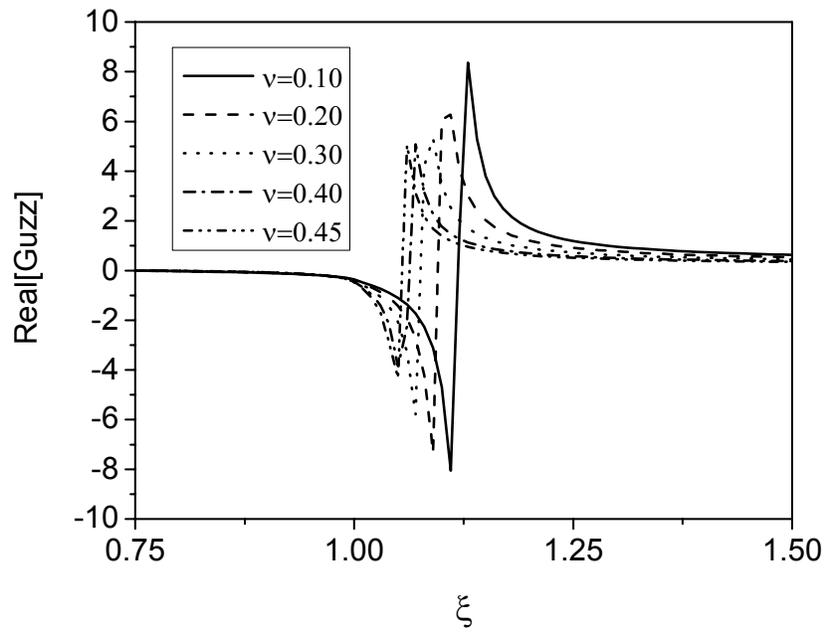


Figura 4.32 – Influência do coeficiente de Poisson sobre a parcela imaginária o núcleo da função

G_{Uzz} .

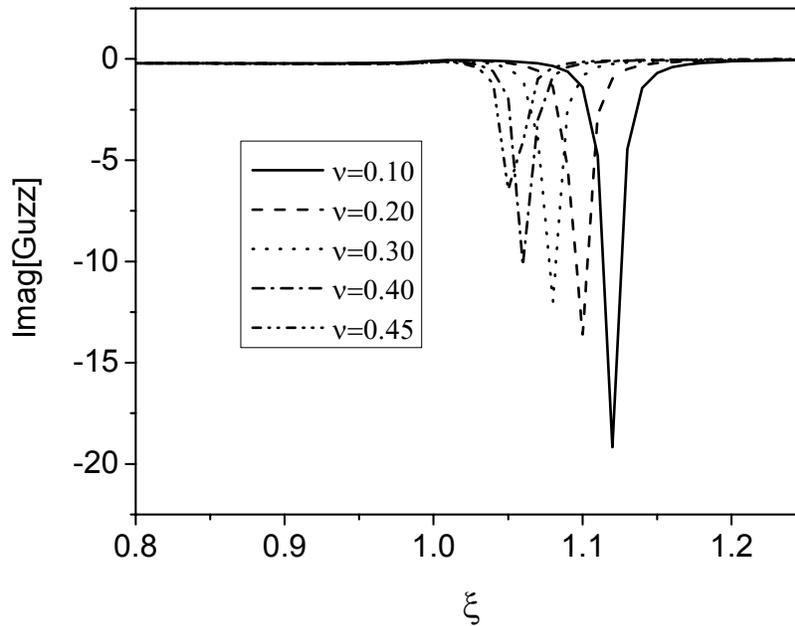


Figura 4.33 – Influência do coeficiente de Poisson sobre a parcela imaginária o núcleo da função

G_{Uzz} .

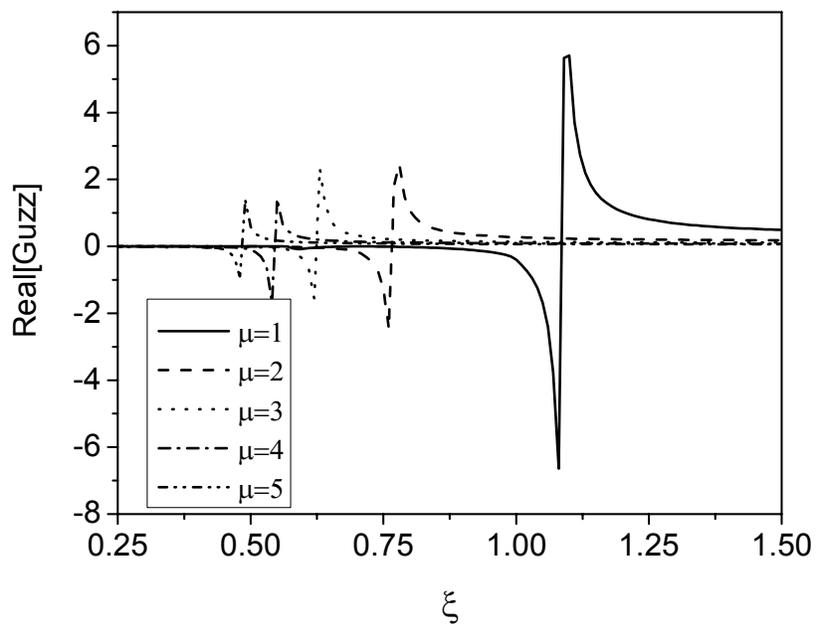


Figura 4.34 – Influência do módulo de cisalhamento sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .

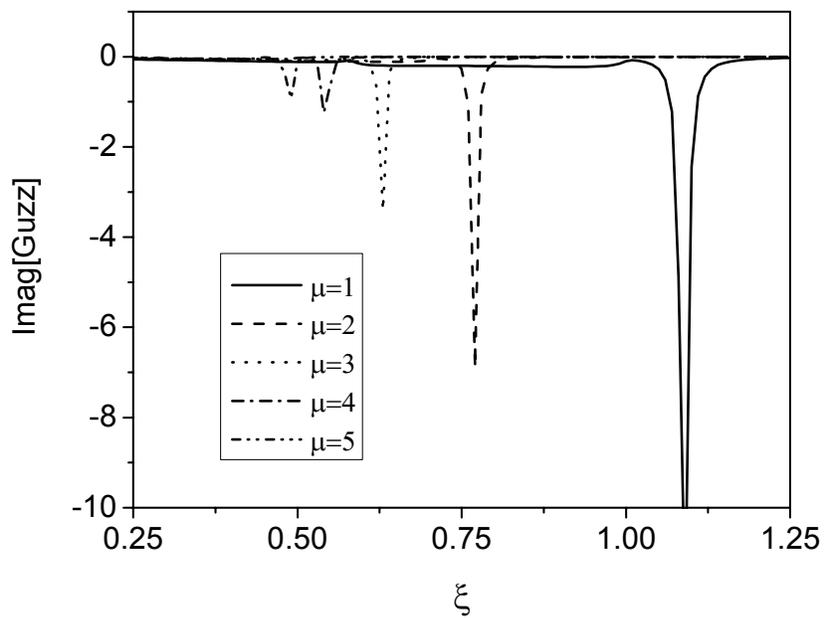


Figura 4.35 – Influência do módulo de cisalhamento sobre a parcela imaginária o núcleo da função G_{Uzz} .

O núcleo da função possui comportamento suave após c_R ; no entanto, esta parcela do integrando, no caso axissimétrico, é multiplicada por uma função de Bessel (4.270), que é caracterizada por oscilações harmônicas, como pode ser observado na figura 4.36. Este efeito, que poderia ser um complicador dos procedimentos de integração, pode ser contornado com a aplicação de algoritmos adequados. Neste trabalho, optou-se pelo algoritmo de Longman, que será apresentado na próxima seção. Um fator importante é que os zeros das funções de Bessel são conhecidos e podem ser obtidos em tabelas. Ainda é necessária uma consideração sobre o comportamento do termo oscilante, sendo que o passo das oscilações sofre influência da variável espacial, r , e da frequência da carga aplicada, ω . Considere a função de Bessel da parcela oscilante do deslocamento vertical:

$$H_{U_{zz}}(r, z, \omega) = J_0(\xi \delta r), \quad (4.271)$$

note que a distância a fonte e a frequência aparecem multiplicadas, substituindo este produto por uma constante “ a ”, tem-se:

$$f(a, \omega) = J_0(\xi a). \quad (4.272)$$

A análise da influência de “ a ” é suficiente para elucidar os efeitos da frequência e distância sobre a parcela oscilante. Na figura 4.37, é apresentada essa função de Bessel para diversos valores da constante “ a ”. Observe que o aumento de “ a ” provoca uma redução da distância entre dois zeros da função e um decaimento mais rápido. Para frequências ou distâncias maiores, a função terá um número maior de oscilações para uma dada faixa de ξ . O passo pode ser determinado através da relação:

$$\Delta \xi = \frac{\pi}{r \sqrt{\omega^2 \rho}}; \quad (4.273)$$

relação que facilita, significativamente, os procedimentos de integração, pois não é preciso determinar cada zero da função de Bessel.

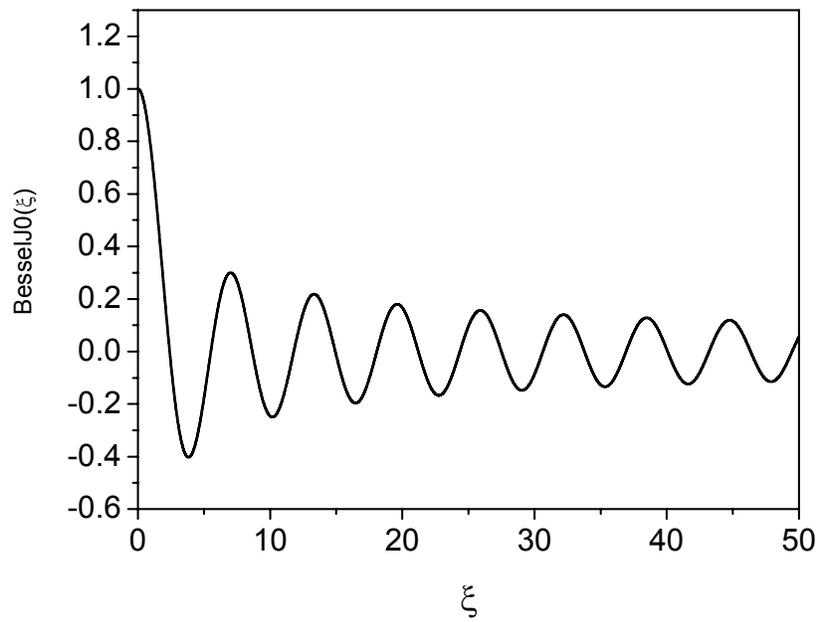


Figura 4.36 – Função de Bessel de ordem zero.

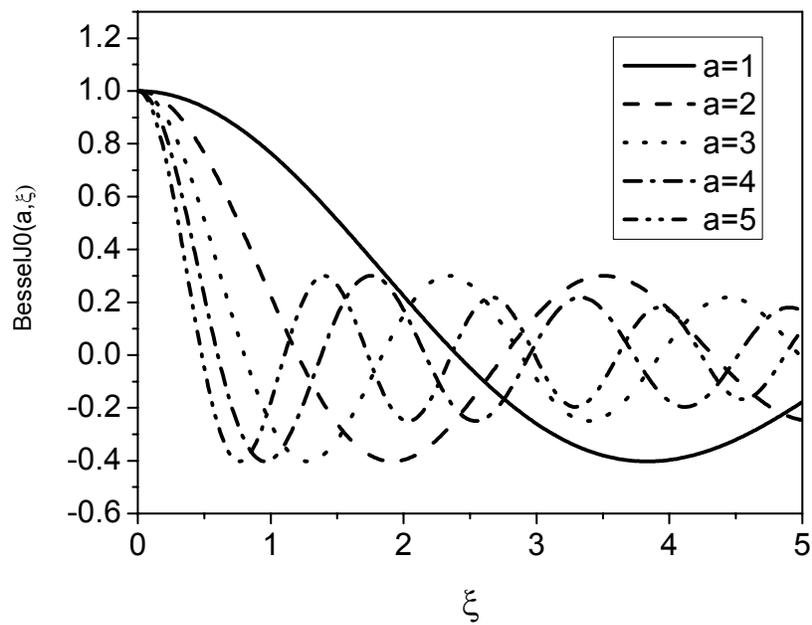


Figura 4.37 – Influência de “a” sobre o termo oscilante

4.5.7. Algoritmo de Longman e estratégias de integração

Para obter a integral ilimitada de uma função, cujo integrando oscila em torno de zero com valores decaindo continuamente, é útil calcular individualmente as contribuições positivas e negativas e somar a série infinita resultante. Infelizmente, essas séries convergem lentamente (Davis e Rabinowitz, 1975). O método é baseado na transformação, de Euler, de séries alternantes e convergentes. Para tal transformação, se a série pode ser escrita como:

$$V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + V_4 - \dots \quad (4.274)$$

para a qual

$V_n > 0$ e $V_{n+1} < V_n$, para qual $n \rightarrow \infty$, e considerando:

$$\Delta V_n = V_{n+1} - V_n, \quad (4.275)$$

$$\Delta^{r+1} V_n = \Delta^r V_{n+1} - \Delta^r V_n \quad (4.276)$$

obtém-se:

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n V_n = \frac{1}{2} V_0 - \frac{1}{4} \Delta V_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 V_0, \quad (4.277)$$

sendo possível mostrar que tal série é convergente quando a série original é (Longman, 1956). É possível descrever o resíduo R_p , resultante após o uso de p termos, se $V_n = \phi(n)$, sendo $\phi(x)$ uma função de x de modo que $\phi^{(p)}(x)$ tem sinal fixo para todos os valores positivos de x , e decai com o aumento de x . Pode-se mostrar que (Longman, 1954),

$$|R_p| < 2^{-p} |\Delta^p V_0|. \quad (4.278)$$

Assumindo uma função $f(x)$, que oscile em torno de zero, decaindo monotonicamente, figura 4.38, com zeros em:

$$x = x_i, i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.279)$$

e, ainda que,

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots \quad (4.280)$$

deseja-se determinar a integral,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx,$$

fazendo a integração por trechos:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots \quad (4.281)$$

Para este tipo de função, as integrais, em cada trecho, são alternadamente positivas e negativas e decrescem em módulo, podendo-se escrever que:

$$\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots = \int_a^{\infty} f(x) dx - (V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \dots), \quad (4.282)$$

sendo o trecho entre parênteses uma série alternante e convergente, então é possível mostrar que:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx - \left(\frac{1}{2} V_0 - \frac{1}{4} \Delta V_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 V_0 - \frac{1}{16} \Delta^3 V_0 + \dots \right). \quad (4.283)$$

Para demonstrar a lógica do algoritmo, recorre-se ao exemplo apresentado por Longman (1956). Considere a integração da função de Bessel de ordem zero, apresentada na figura 4.38, sabe-se que

$$\int_a^{\infty} J_0(x) dx = 1. \quad (4.284)$$

Na tabela a seguir, são apresentados os resultados para os cálculos dos volumes e expansão do algoritmo.

n	$\int_0^{x_n} J_0(x) dx$	$\pm \int_{x_n}^{x_{n+1}} J_0(x) dx$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7
1	1.470442								
2	0.668846	8.01596E-01							
3	1.268168	5.99322E-01	-2.02274E-01						
4	0.769119	4.99049E-01	-1.00273E-01	1.02001E-01					
5	1.205654	4.36535E-01	-6.25140E-02	3.77590E-02	-6.42420E-02				
6	0.812831	3.92823E-01	-4.37120E-02	1.88020E-02	-1.89570E-02	4.52850E-02			
7	1.172888	3.60057E-01	-3.27660E-02	1.09460E-02	-7.85600E-03	1.11010E-02	-3.41840E-02		
8	0.838567	3.34321E-01	-2.57360E-02	7.03000E-03	-3.91600E-03	3.94000E-03	-7.16100E-03	2.70230E-02	
9	1.151982	3.13415E-01	-2.09060E-02	4.83000E-03	-2.20000E-03	1.71600E-03	-2.22400E-03	4.93700E-03	-2.20860E-02
10	0.855986	2.95996E-01	-1.74190E-02	3.48700E-03	-1.34300E-03	8.57000E-04	-8.59000E-04	1.36500E-03	-3.57200E-03
11	1.137178	2.81192E-01	-1.48040E-02	2.61500E-03	-8.72000E-04	4.71000E-04	-3.86000E-04	4.73000E-04	-8.92000E-04
12	0.868771	2.68407E-01	-1.27850E-02	2.01900E-03	-5.96000E-04	2.76000E-04	-1.95000E-04	1.91000E-04	-2.82000E-04

Partindo da integral de x_1 a x_4 , e após considerando a série obtida da diferença dos volumes, aplicada na equação 4.283,

$$\int_a^\infty J_0(x) dx = 0.769119 - \left[\frac{1}{2}(-0.436535) - \frac{1}{4}(0.043712) + \frac{1}{8}(-0.010946) - \frac{1}{16}(0.003916) + \frac{1}{32}(-0.001716) - \frac{1}{64}(0.000859) + \frac{1}{128}(-0.000473) - \frac{1}{256}(0.000282) \right] = 0.999999$$

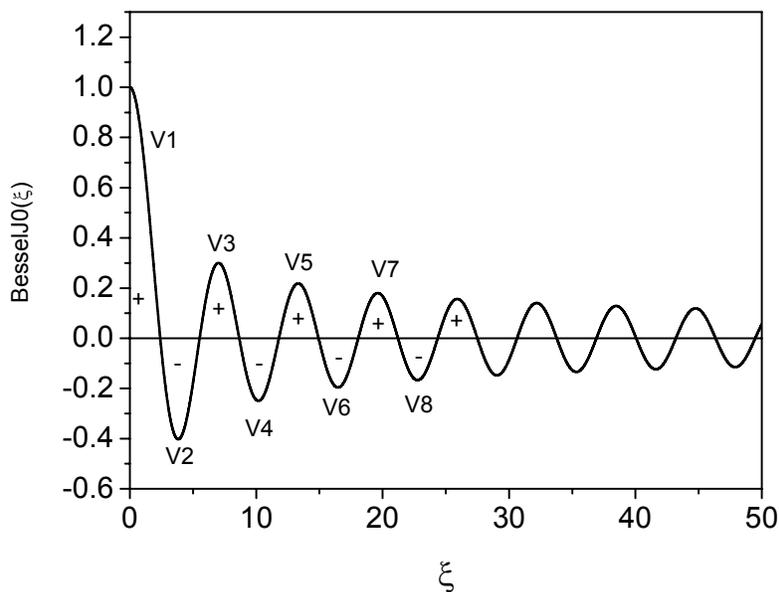


Figura 4.38 – Função oscilando em torno de zero.

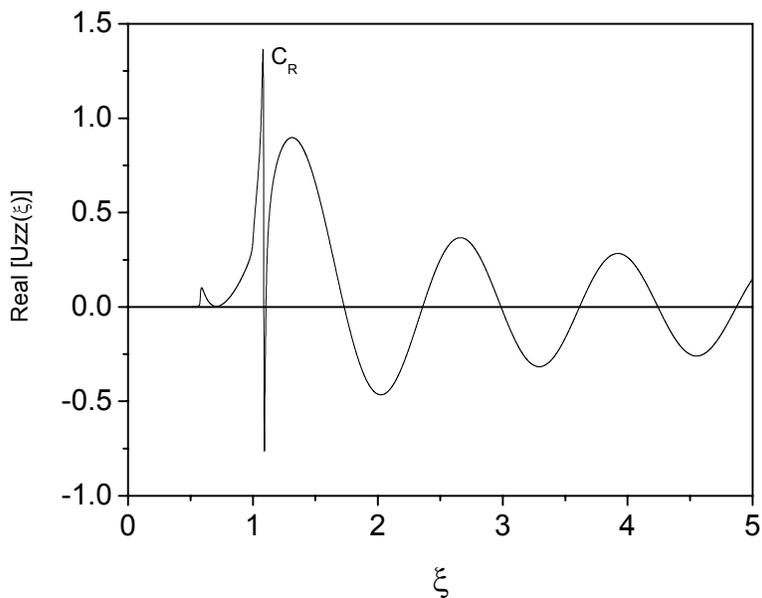


Figura 4.39 – Componente real do integrando de Uzz.

Não existe nenhuma restrição quanto ao ponto em que se inicia o processo de integração pelos volumes. Caso se deseje integrar uma função com trecho inicial irregular, basta isolar este trecho, determiná-lo à parte e utilizar o algoritmo de Longman no trecho oscilante. Na figura 4.39, é apresentada a componente real do integrando para deslocamento vertical. Observe que no trecho inicial, a função é irregular; no entanto, após c_R a função inicia um comportamento oscilatório. Para esta função, foram considerados os parâmetros: coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$, amortecimento $\eta=0.01$, frequência $\omega=1\text{rad/s}$ e amortecimento nulo e profundidade $z=0$, distância a fonte $r=1 \text{ m}$.

Neste trabalho, a integral da função, no trecho inicial, é calculada com um integrador adaptativo que refina o intervalo nas proximidades das descontinuidades. Para determinação dos volumes de cada intervalo, é utilizada a quadratura de Gauss. Após o ponto em que a função passa a ter comportamento oscilatório com decaimento monotônico, adota-se o algoritmo de Longman. Este esquema e caminho de integração são apresentados na figura 4.40.

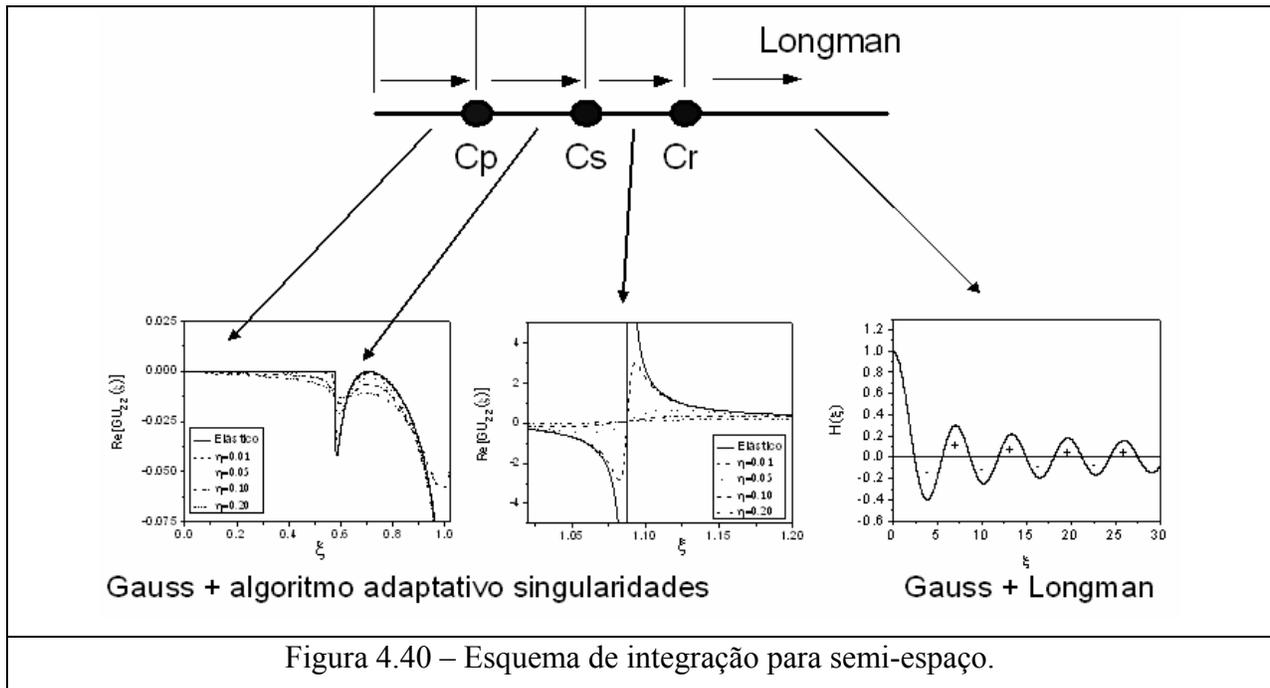


Figura 4.40 – Esquema de integração para semi-espço.

4.5.8. Resultados numéricos

Infelizmente, não foram obtidas, na literatura, respostas analíticas para carregamentos dinâmicos, para validar a formulação apresentada. Entretanto, utilizando baixos valores de frequência, é possível aproximar as respostas daquelas obtidas para os problemas estáticos, resolvidos por Boussinesq. Na tabela 4.1, são apresentadas respostas para diferentes valores de frequência, considerando os parâmetros: coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1 \text{ kg/m}^3$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, fator de amortecimento $\eta=0.01$, erros de integração 10^{-10} . Para frequência $\omega=0.01 \text{ rad/s}$, é obtido um erro aceitável, a frequência ideal seria $\omega=0.001$ ou menor; os custos computacionais, porém, aumentam significativamente.

Tabela 4.1 Baixas frequências			
Ω	U_{zz}	Estático	erro %
0.001	0.1125223413	0.1125395395	0.01528189
0.01	0.1124248164	0.1125395395	0.10194024
0.05	0.1120846634	0.1125395395	0.40419228
0.1	0.1118199472	0.1125395395	0.63941289
0.5	0.1155780338	0.1125395395	2.69993491
1	0.1314486406	0.1125395395	16.8021845

Inicialmente são apresentados resultados para pontos abaixo da superfície. Nestes casos também seria possível utilizar a quadratura de Gauss para pontos próximos ou na superfície a convergência aplicando Gauss seria muito lenta, por isso é necessário recorrer a técnicas mais adequadas, como o algoritmo de Longman apresentado anteriormente.

Na tabela 4.2, são apresentados os resultados para diferentes pontos do semi-espaço. Comparando os resultados com os do problema estático, nota-se uma boa convergência.. Estes resultados foram obtidos considerando coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1 \text{ kg/m}^3$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, fator de amortecimento $\eta=0.01$, erros de integração 10^{-10} . A frequência considerada é $\omega=0.01$. Para análise das respostas, foi considerado o valor absoluto do deslocamento. No caso de análises dinâmicas, devem ser consideradas as parcelas real e imaginária. Na figura 4.41, é apresentada a resposta para pontos ao longo de $z=0.5$. Variou-se a distância em relação à fonte: observe-se que as respostas são muito próximas daquelas do problema estático.

Na figura 4.42, são apresentados os resultados para várias profundidades. Observe que as amplitudes decaem significativamente com a profundidade.

Tabela 4.2. Uzz – Quase-estático

Z	R	0	0.1	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5.0
0.5	Radon	3.97753E-01	3.84026E-01	3.26995E-01	2.25026E-01	1.20813E-01	8.04153E-02	6.00640E-02	4.79154E-02	3.98532E-02	3.41137E-02	2.98195E-02	2.64855E-02	2.38220E-02
	Estático	3.97887E-01	3.84158E-01	3.27411E-01	2.25079E-01	1.21000E-01	8.05267E-02	6.01717E-02	4.80198E-02	3.99545E-02	3.42120E-02	2.99148E-02	2.65779E-02	2.39116E-02
	Erro %	0.0337	0.0344	0.1270	0.0237	0.1546	0.1384	0.1790	0.2175	0.2535	0.2873	0.3187	0.3478	0.3745
1.0	Radon	1.98823E-01	1.97052E-01	1.88342E-01	1.63587E-01	1.12425E-01	7.96836E-02	6.01467E-02	4.83067E-02	4.01644E-02	3.43444E-02	2.99908E-02	2.66144E-02	2.39206E-02
	Estático	1.98944E-01	1.97172E-01	1.88462E-01	1.63705E-01	1.12540E-01	7.97945E-02	6.04998E-02	4.84080E-02	4.02634E-02	3.44424E-02	3.00859E-02	2.67065E-02	2.40099E-02
	Erro %	0.0608	0.0613	0.0638	0.0725	0.1019	0.1389	0.5836	0.2091	0.2459	0.2845	0.3159	0.3450	0.3717
1.5	Radon	1.32514E-01	1.31986E-01	1.29295E-01	1.20675E-01	9.66595E-02	7.49165E-02	5.90987E-02	4.80634E-02	4.02322E-02	3.44918E-02	2.99372E-02	2.67500E-02	2.40358E-02
	Estático	1.32629E-01	1.32101E-01	1.29410E-01	1.20790E-01	9.67721E-02	7.50264E-02	5.92056E-02	4.81674E-02	4.03332E-02	3.45899E-02	3.02381E-02	2.68422E-02	2.41251E-02
	Erro %	0.0871	0.0875	0.0891	0.0950	0.1163	0.1464	0.1806	0.2158	0.2505	0.2835	0.9950	0.3436	0.3703
2.0	Radon	9.93597E-02	9.91365E-02	9.79842E-02	9.41195E-02	8.17023E-02	6.80098E-02	5.61636E-02	4.68799E-02	3.97963E-02	3.43722E-02	3.01545E-02	2.68108E-02	2.41143E-02
	Estático	9.94718E-02	9.92486E-02	9.80963E-02	9.42312E-02	8.18527E-02	6.81183E-02	5.62698E-02	4.69836E-02	3.98973E-02	3.44704E-02	3.02499E-02	2.69051E-02	2.42040E-02
	Erro %	0.1128	0.1130	0.1142	0.1186	0.1837	0.1593	0.1888	0.2206	0.2531	0.2848	0.3152	0.3506	0.3705
2.5	Radon	7.94678E-02	7.93534E-02	7.87594E-02	7.67223E-02	6.97009E-02	6.09049E-02	5.23345E-02	4.49127E-02	3.88173E-02	3.39043E-02	2.99489E-02	2.67408E-02	2.40957E-02
	Estático	7.95775E-02	7.94631E-02	7.88689E-02	7.68316E-02	6.98094E-02	6.10120E-02	5.24397E-02	4.50158E-02	3.89181E-02	3.40025E-02	3.00445E-02	2.68336E-02	2.41999E-02
	Erro %	0.1378	0.1380	0.1389	0.1423	0.1554	0.1755	0.2007	0.2291	0.2589	0.2888	0.3181	0.3460	0.4306
3.0	Radon	6.62069E-02	6.61407E-02	6.57956E-02	6.45977E-02	6.02883E-02	5.44628E-02	4.82818E-02	4.24903E-02	3.74128E-02	3.31074E-02	2.95072E-02	2.65051E-02	2.39933E-02
	Estático	6.63146E-02	6.62483E-02	6.59032E-02	6.47051E-02	6.03951E-02	5.45685E-02	4.83860E-02	4.25927E-02	3.75132E-02	3.32055E-02	2.96028E-02	2.65982E-02	2.40837E-02
	Erro %	0.1623	0.1624	0.1632	0.1660	0.1767	0.1936	0.2154	0.2405	0.2676	0.2954	0.3231	0.3500	0.3755
3.5	Radon	5.67352E-02	5.66935E-02	5.64756E-02	5.57139E-02	5.28989E-02	4.88980E-02	4.43895E-02	3.99014E-02	3.57458E-02	3.20563E-02	2.88548E-02	2.61064E-02	2.37548E-02
	Estático	5.68411E-02	5.67993E-02	5.65815E-02	5.58196E-02	5.30041E-02	4.90024E-02	4.44926E-02	4.00030E-02	3.58456E-02	3.21542E-02	2.89504E-02	2.61996E-02	2.38455E-02
	Erro %	0.1863	0.1864	0.1870	0.1894	0.1984	0.2129	0.2318	0.2540	0.2785	0.3042	0.3302	0.3558	0.3805
4.0	Radon	4.96316E-02	4.96036E-02	4.94575E-02	4.89439E-02	4.70118E-02	4.41696E-02	4.08243E-02	3.73363E-02	3.39599E-02	3.08404E-02	2.80395E-02	2.55662E-02	2.34009E-02
	Estático	4.97359E-02	4.97080E-02	4.95618E-02	4.90481E-02	4.71156E-02	4.42726E-02	4.09263E-02	3.74371E-02	3.40592E-02	3.09378E-02	2.81349E-02	2.56594E-02	2.34918E-02
	Erro %	0.2098	0.2099	0.2105	0.2125	0.2203	0.2328	0.2494	0.2692	0.2913	0.3149	0.3392	0.3634	0.3870
4.5	Radon	4.41067E-02	4.40871E-02	4.39843E-02	4.36221E-02	4.22421E-02	4.01615E-02	3.76328E-02	3.49004E-02	3.21588E-02	2.95387E-02	2.71138E-02	2.49156E-02	2.29479E-02
	Estático	4.42097E-02	4.41901E-02	4.40873E-02	4.37250E-02	4.23446E-02	4.02634E-02	3.77338E-02	3.50004E-02	3.22574E-02	2.96356E-02	2.72090E-02	2.50088E-02	2.30389E-02
	Erro %	0.2330	0.2331	0.2336	0.2353	0.2421	0.2531	0.2678	0.2855	0.3056	0.3272	0.3497	0.3725	0.3950
5.0	Radon	3.96869E-02	3.96726E-02	3.95977E-02	3.93328E-02	3.83144E-02	3.67512E-02	3.48046E-02	3.26420E-02	3.04081E-02	2.82119E-02	2.61251E-02	2.41877E-02	2.24169E-02
	Estático	3.97887E-02	3.97744E-02	3.96995E-02	3.94345E-02	3.84158E-02	3.68520E-02	3.49047E-02	3.27411E-02	3.05060E-02	2.83084E-02	2.62199E-02	2.42807E-02	2.25079E-02
	Erro %	0.2558	0.2559	0.2563	0.2579	0.2639	0.2736	0.2867	0.3027	0.3209	0.3407	0.3616	0.3829	0.4042

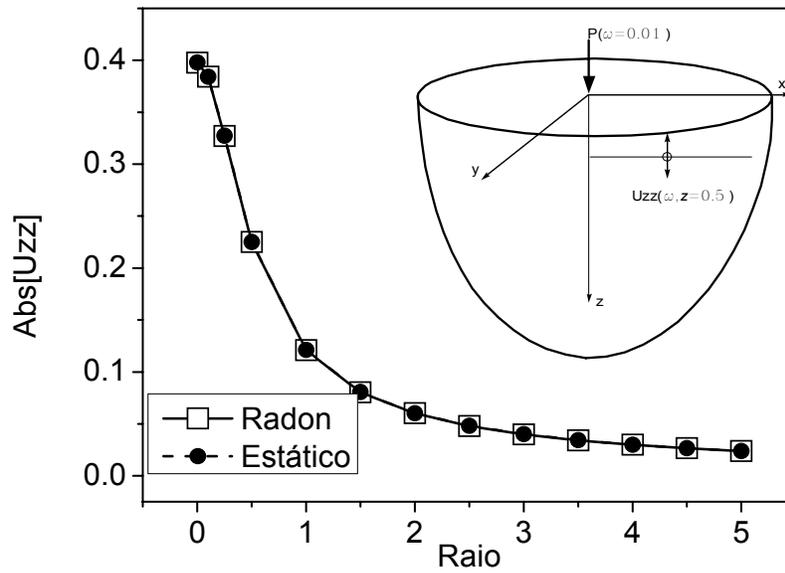


Figura 4.41 – U_{zz} – Comparação com o problema estático - Boussinesq

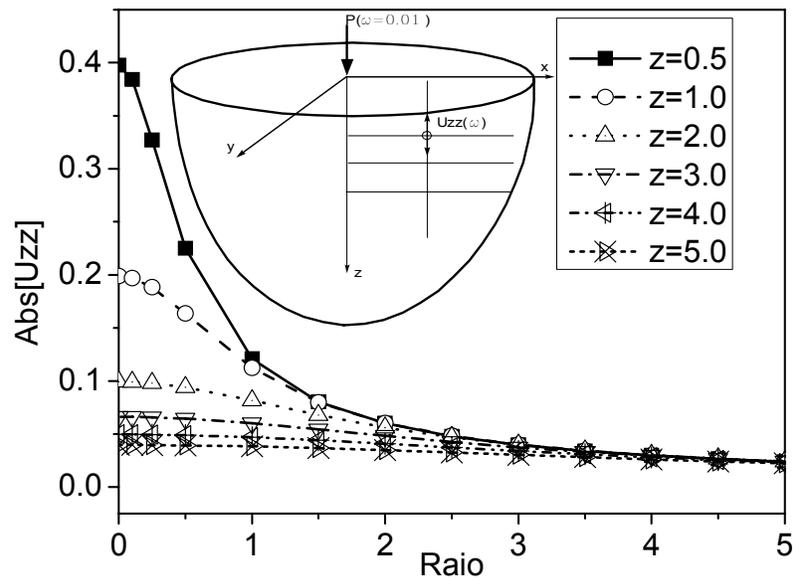


Figura 4.42 – U_{zz} – Resposta para diferentes camadas

Na tabela 4.2, pode ser observado que os erros aumentam à medida que cresce a distância em relação à fonte, r . Esta diferença, nas respostas, pode ser explicada pela presença de amortecimento que promove a absorção da energia propagada através do meio. Além disso, lembrando que a resposta é quase estática, existe o efeito da oscilação das ondas

propagando, mesmo com baixas frequências. Este efeito do amortecimento pode ser observado claramente tabela 4.3, onde é analisada a resposta de deslocamento no ponto $r=z=1$, com frequência $\omega=0.01$ rad/. Nota-se que o aumento de tal amortecimento leva a uma redução significativa dos deslocamentos no ponto. Na figura 4.43, é apresentado o detalhe para o deslocamento, variando-se a distância à fonte, percebendo-se a redução dos valores da resposta ao longo da faixa analisada. O aumento do coeficiente de Poisson tem o mesmo efeito, a redução das amplitudes de deslocamento é mais perceptível, como pode ser visto na figura

Tabela 4.3. Influência do amortecimento			
η	Uzz viscoelástico	Elasto-estático	Erro %
0.01	1.1242482E-01	1.1253954E-01	0.10194
0.05	1.1236728E-01	1.1253954E-01	0.15307
0.10	1.1191264E-01	1.1253954E-01	0.55705
0.20	1.1020514E-01	1.1253954E-01	2.07429
0.30	1.0759585E-01	1.1253954E-01	4.39285

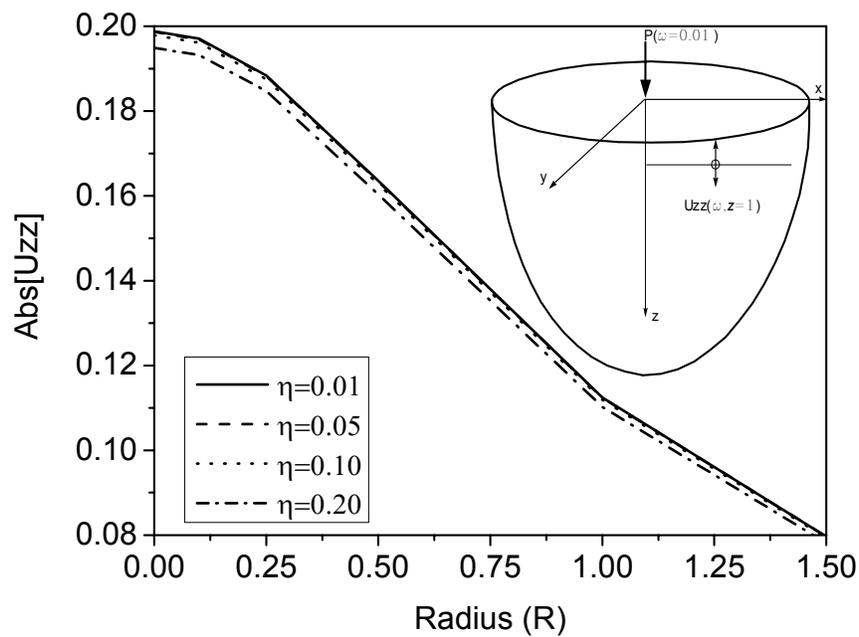


Figura 4.43 – Influência do amortecimento sobre U_{zz} , $z=1$.

O efeito do coeficiente de Poisson é apresentado na resposta de deslocamento na figura 4.44. Note-se uma redução significativa das amplitudes para o aumento do coeficiente.

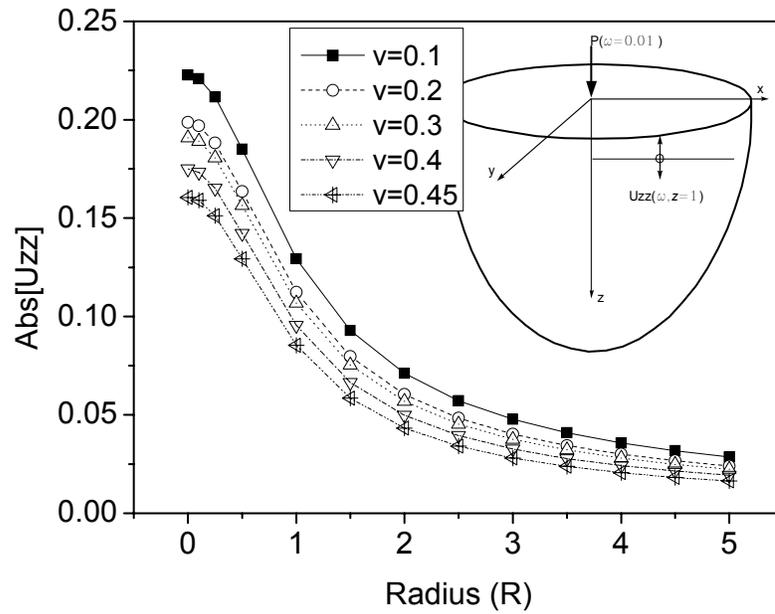


Figura 4.44 – Influência do coeficiente de Poisson sobre U_{zz}

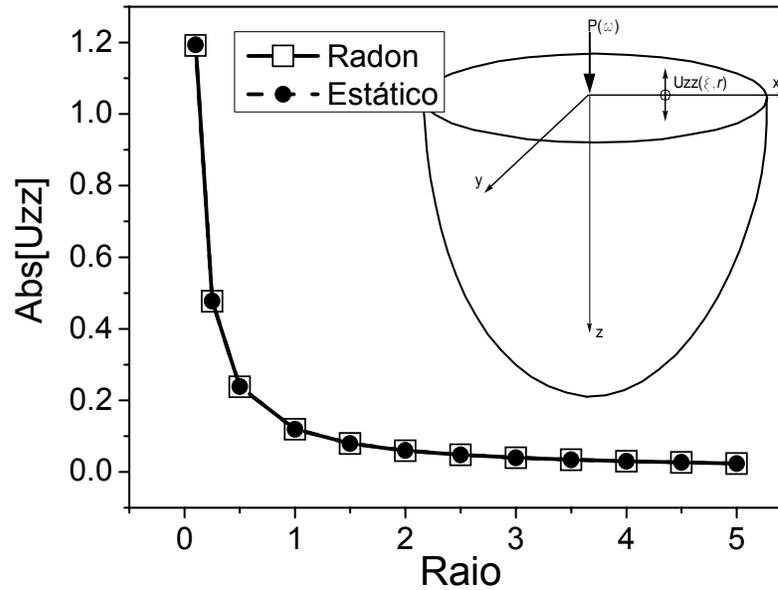


Figura 4.45 – U_{zz} – Resultados para superfície livre.

Como citado anteriormente, para os pontos próximos à superfície, é necessário utilizar um integrador que considere o decaimento lento e oscilatório do integrando. Neste trabalho, para os problemas de carregamento concentrado, foi utilizado o algoritmo de Longman. Na

figura 4.45, é apresentada a resposta de deslocamento para pontos na superfície livre, note uma boa relação entre a resposta quase-estática e a analítica para o problema de Boussinesq.

Para carregamentos harmônicos, foi realizada uma comparação com a formulação que utiliza apenas a transformada de Fourier implementada por Almeida Barros. Foi considerado o ponto $z=r=1$, a resposta para variação, em frequência, é apresentada na figura 4.46; o erro entre as duas formulações e implementações é apresentado na figura 4.47. Resultados, para uma frequência fixa e variando a posição do ponto em que é medida a resposta são apresentados nas figuras 4.48 e 4.49. Foi considerada a frequência $\omega=2$ rad/s, e superfície livre $z=0$. Observa-se uma boa convergência das respostas. A presente formulação apresenta amplitudes menores do que aquelas obtidas pela implementação com transformada de Fourier.

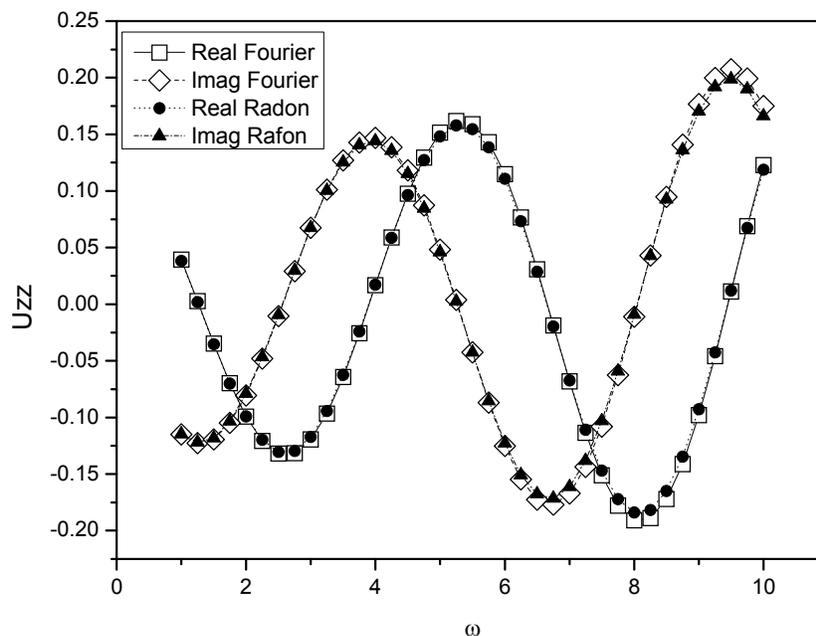


Figura 4.46 – Comparação com a formulação obtida por Fourier, $z=r=1$

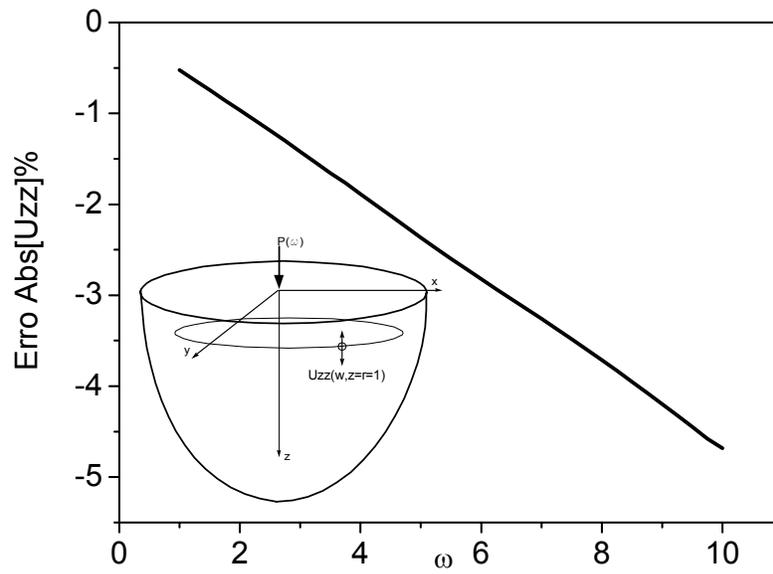


Figura 4.47 – Erros obtidos na comparação entre as duas formulações

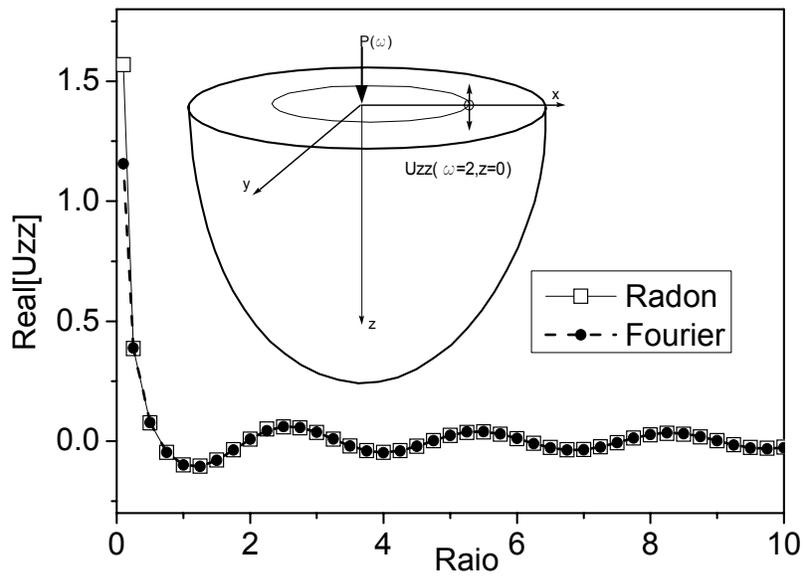


Figura 4.48 – Componente real da resposta de deslocamento ao longo de R, $\omega=2$ rad/s

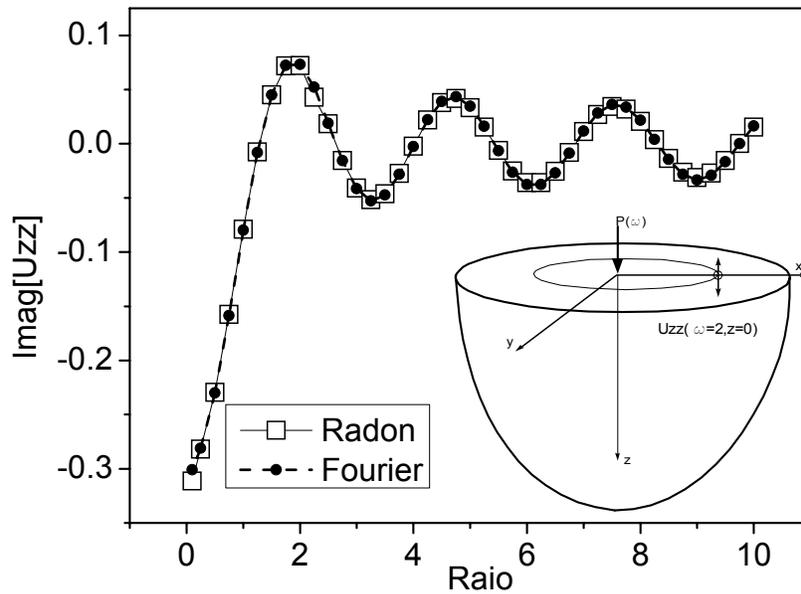


Figura 4.49 – Componente imaginária da resposta de deslocamento ao longo de R, $\omega=2$ rad/s

Na tabela 4.4, são apresentados os resultados para pontos no interior da camada. Tais resultados são satisfatórios se comparados ao problema estático. Foram adotados os mesmos parâmetros da análise anterior, coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1$, módulo de cisalhamento $\mu=1$ N/m², fator de amortecimento $\eta=0.01$, e erros de integração 10^{-8} . Para comparação, foi considerado o valor absoluto da resposta quase-estática. Na figura 4.50 é visualizada a comparação com o problema de Boussinesq, sendo observada uma boa relação entre as duas respostas, tendo sido considerada a profundidade $z=0.5$. A resposta de deslocamento radial para vários valores de profundidade z , é visualizada na figura 4.51. Finalmente, na figura 4.52, tem-se a resposta para a superfície livre, tendo sido obtidas boas respostas. A formulação dinâmica possui resposta complexa. Para fins de comparação com o problema estático, foi considerado o módulo do número complexo; no entanto, para manter o comportamento oscilatório, foi adotado o sinal da componente real.

Nas tabelas 4.5 e 4.6, são listadas as respostas para as componentes de deformações ϵ_{zz} , ϵ_{rz} , respectivamente. Foi realizada a comparação com a resposta obtida pelo problema estático de Boussinesq, notando-se uma boa aproximação da resposta numérica quase-estática com a analítica. Foram considerados os seguintes parâmetros: coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1$, módulo de cisalhamento $\mu=1$, amortecimento $\eta=0.01$, erro de

integração de 10^{-8} , e frequência $\omega=0.01$. Não foram apresentados resultados para $\epsilon_{\phi\phi z}$, pois estes são obtidos diretamente da divisão de $U_{r\phi z}$ por “r”, validada anteriormente.

As componentes de tensão podem ser obtidas a partir das respostas de deformação, no entanto a componente de tensão, σ_{zz} , pode ser calculada diretamente por uma equação deduzida anteriormente, equação 4.196. Os resultados para esta componente são apresentados na tabela 4.7. Foi obtida uma boa convergência das respostas, notando-se o aumento no erro relativo para pontos mais distantes, mas isso se deve à influência do amortecimento e carregamento harmônico. Para validar as respostas de tensão, foram adotados os mesmos parâmetros utilizados na determinação das deformações. É possível observar uma boa correlação entre as respostas analíticas do problema elasto-estático com as obtidas para o problema dinâmico com baixas frequências. As respostas de tensão estão apresentadas nas figuras 4.53 a 4.56, para σ_{zz} , $\sigma_{r\phi z}$, $\sigma_{\phi\phi z}$ e σ_{rzz} respectivamente. Foi considerada a profundidade $z=0.5$. Nota-se claramente um aumento do erro. O erro relativo é calculado pela diferença entre a resposta numérica e a resposta de referência, dividida pela referência, para valores pequenos, próximos a zero; número este que tende a crescer. Se for considerada apenas a diferença entre as respostas numéricas e estáticas, com boa aproximação até a quinta ou sexta casa decimal, são obtidos erros absolutos na ordem de $10^{-4}\%$.

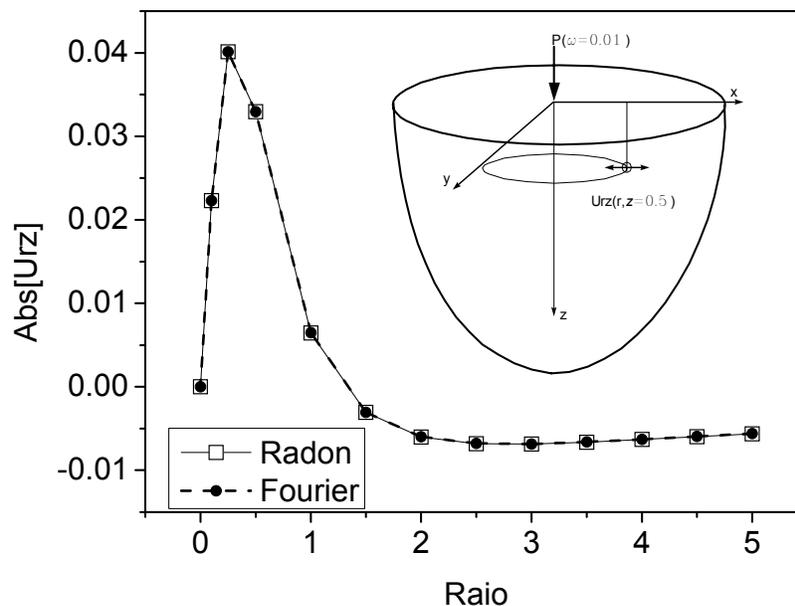


Figura 4.50 – Deslocamento radial, problema quase-estático.

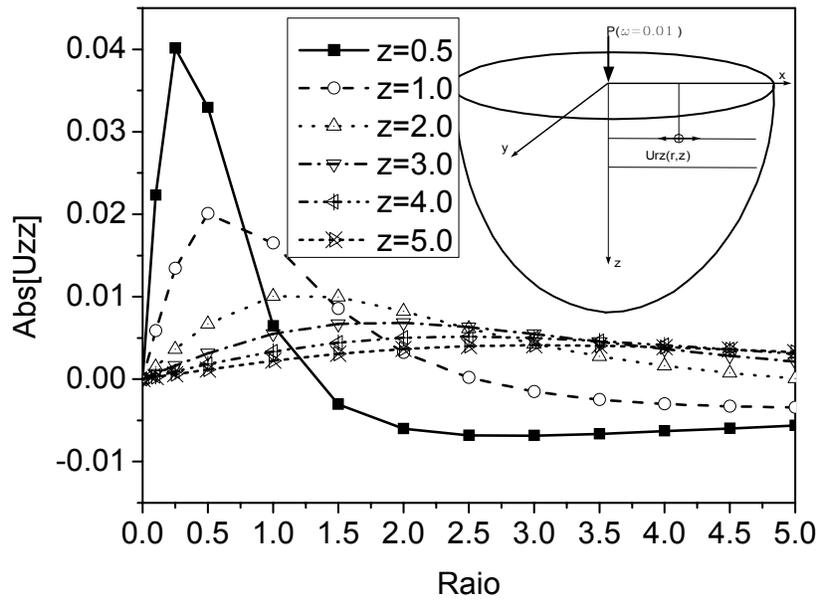


Figura 4.51 – Deslocamento Radial, influência da profundidade.

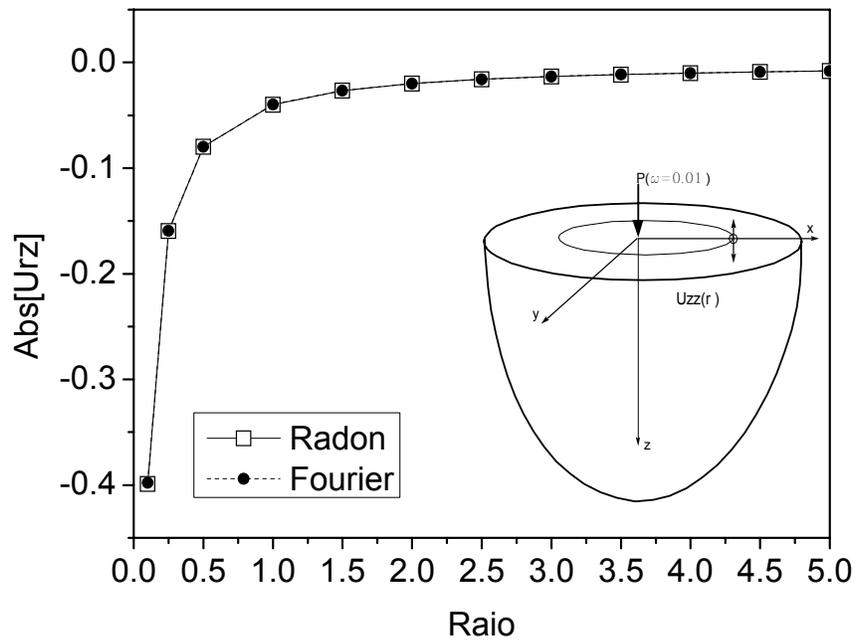


Figura 4.52 – Deslocamento radial na superfície livre

Tabela 4. Urr – Quase estático														
Z	R	0,0	0,1	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5,0
0.5	Radon	0,0	2.22837E-02	4.01348E-02	3.29567E-02	6.46777E-03	-3.05300E-03	-6.00158E-03	-6.80954E-03	-6.86274E-03	-6.63262E-03	-6.31129E-03	-5.96591E-03	-5.62981E-03
	Estático	0,0	2.22857E-02	4.01386E-02	3.29621E-02	6.47583E-03	-3.03886E-03	-5.98675E-03	-6.79174E-03	-6.83954E-03	-6.60940E-03	-6.28376E-03	-5.93647E-03	-5.59795E-03
	Erro %	0,0	0.0087	0.0093	0.0162	0.1244	-0.4654	-0.2478	-0.2621	-0.3392	-0.3513	-0.4382	-0.4959	-0.5692
1.0	Radon	0,0	5.86442E-03	1.34111E-02	2.00657E-02	1.64746E-02	8.55184E-03	3.22574E-03	1.71750E-04	-1.53738E-03	-2.49102E-03	-3.01664E-03	-3.29397E-03	-3.42400E-03
	Estático	0,0	5.86522E-03	1.34131E-02	2.00693E-02	1.64810E-02	8.56112E-03	3.23791E-03	1.86521E-04	-1.51943E-03	-2.47036E-03	-2.99337E-03	-3.26821E-03	-3.39587E-03
	Erro %	0,0	0.0136	0.0145	0.0181	0.0393	0.1084	0.3759	7.9191	-1.1816	-0.8364	-0.7773	-0.7883	-0.8284
1.5	Radon	0,0	2.63154E-03	6.31912E-03	1.10125E-02	1.36855E-02	1.09798E-02	7.31110E-03	4.30224E-03	2.14352E-03	6.59021E-04	-3.50755E-04	-1.03551E-03	-1.50023E-03
	Estático	0,0	2.63207E-03	6.32044E-03	1.10151E-02	1.36906E-02	1.09874E-02	7.32113E-03	4.31480E-03	2.15861E-03	6.76489E-04	-3.30327E-04	-1.01295E-03	-1.47543E-03
	Erro %	0,0	0.0202	0.0210	0.0237	0.0371	0.0684	0.1369	0.2913	0.6991	2.5821	-6.1843	-2.2271	-1.6807
2.0	Radon	0,0	1.48517E-03	3.62923E-03	6.70452E-03	1.00306E-02	9.96759E-03	8.23224E-03	6.14137E-03	4.26781E-03	2.76071E-03	1.60178E-03	7.27323E-04	7.44633E-05
	Estático	0,0	1.48557E-03	3.63025E-03	6.70654E-03	1.00346E-02	9.97371E-03	8.24052E-03	6.15163E-03	4.28056E-03	2.77571E-03	1.61896E-03	7.46539E-04	9.32603E-05
	Erro %	0,0	0.0272	0.0278	0.0301	0.0403	0.0613	0.1004	0.1667	0.2979	0.5401	1.0610	2.5740	20.1553
2.5	Radon	0,0	9.51939E-04	2.34528E-03	4.45551E-03	7.34205E-03	8.25671E-03	7.75846E-03	6.58363E-03	5.23886E-03	3.97732E-03	2.89224E-03	1.99792E-03	1.27654E-03
	Estático	0,0	9.52261E-04	2.34609E-03	4.45713E-03	7.34533E-03	8.26173E-03	7.76532E-03	6.59241E-03	5.24962E-03	3.99008E-03	2.90701E-03	2.01465E-03	1.29517E-03
	Erro %	0,0	0.0339	0.0344	0.0363	0.0447	0.0608	0.0883	0.1332	0.2050	0.3200	0.5080	0.8306	1.4384
3.0	Radon	0,0	6.61595E-04	1.63724E-03	3.15890E-03	5.50486E-03	6.68561E-03	6.83958E-03	6.32560E-03	5.48461E-03	4.54913E-03	3.64793E-03	2.83928E-03	2.14121E-03
	Estático	0,0	6.61858E-04	1.63790E-03	3.16022E-03	5.50756E-03	6.68976E-03	6.84528E-03	6.33295E-03	5.49368E-03	4.55997E-03	3.66056E-03	2.85371E-03	2.15740E-03
	Erro %	0,0	0.0398	0.0402	0.0419	0.0489	0.0620	0.0833	0.1160	0.1651	0.2377	0.3451	0.5056	0.7507
3.5	Radon	0,0	4.86297E-04	1.20668E-03	2.35022E-03	4.24163E-03	5.41836E-03	5.87775E-03	5.78000E-03	5.32926E-03	4.69970E-03	4.01210E-03	3.33877E-03	2.71720E-03
	Estático	0,0	4.86514E-04	1.20722E-03	2.35131E-03	4.24385E-03	5.42180E-03	5.88248E-03	5.78613E-03	5.33688E-03	4.70887E-03	4.02285E-03	3.35114E-03	2.73118E-03
	Erro %	0,0	0.0445	0.0449	0.0463	0.0524	0.0633	0.0805	0.1061	0.1428	0.1947	0.2674	0.3691	0.5119
4.0	Radon	0,0	3.72434E-04	9.25760E-04	1.81423E-03	3.35144E-03	4.43241E-03	5.01340E-03	5.15791E-03	4.98048E-03	4.59930E-03	4.11116E-03	3.58477E-03	3.06383E-03
	Estático	0,0	3.72612E-04	9.26206E-04	1.81512E-03	0.00335327	4.43525E-03	5.01732E-03	5.16302E-03	4.98685E-03	4.60701E-03	4.12026E-03	3.59530E-03	3.07581E-03
	Erro %	0,0	0.0478	0.0482	0.0494	0.0546	0.0639	0.0782	0.0989	0.1278	0.1673	0.2209	0.2929	0.3895
4.5	Radon	0,0	2.94331E-04	7.32500E-04	1.44159E-03	2.70666E-03	3.66938E-03	4.27954E-03	4.55551E-03	4.55823E-03	4.36354E-03	4.04277E-03	3.65356E-03	3.23779E-03
	Estático	0,0	2.94477E-04	7.32865E-04	1.44233E-03	2.70816E-03	3.67170E-03	4.28276E-03	4.55972E-03	4.56352E-03	4.36997E-03	4.05041E-03	3.66245E-03	3.24797E-03
	Erro %	0,0	0.0494	0.0497	0.0508	0.0553	0.0633	0.0753	0.0924	0.1158	0.1472	0.1886	0.2428	0.3134
5.0	Radon	0,0	2.38448E-04	5.93935E-04	1.17245E-03	2.22736E-03	3.07510E-03	3.67005E-03	4.01042E-03	4.12653E-03	4.06515E-03	3.87632E-03	3.60506E-03	3.28765E-03
	Estático	0,0	2.38565E-04	5.94228E-04	1.17304E-03	2.22857E-03	3.07698E-03	3.67266E-03	4.01386E-03	4.13086E-03	4.07045E-03	3.88266E-03	3.61249E-03	3.29621E-03
	Erro %	0,0	0.0491	0.0493	0.0503	0.0542	0.0610	0.0712	0.0855	0.1048	0.1302	0.1632	0.2055	0.2596

Tabela 5 Ezzz – Quase estático														
Z	R	0	0.1	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5.0
0.5	Radon	-7.95738E-01	-7.15647E-01	-4.32732E-01	-1.12534E-01	-2.84560E-03	2.01480E-03	1.47135E-03	9.25217E-04	5.94193E-04	3.97769E-04	2.75425E-04	2.14717E-04	1.48667E-04
	Estático	-7.95775E-01	-7.15679E-01	-4.32752E-01	-1.12540E-01	-2.84705E-03	2.01317E-03	1.46923E-03	9.23457E-04	5.92485E-04	3.96139E-04	2.75670E-04	1.98655E-04	1.47482E-04
	Erro %	0.0046	0.0046	0.0045	0.0047	0.0508	-0.0813	-0.1439	-0.1906	-0.2882	-0.4114	0.0888	-8.0856	-0.8032
1.0	Radon	-1.98938E-01	-1.93662E-01	-1.68824E-01	-1.08186E-01	-2.81349E-02	-5.74635E-03	-7.11571E-04	3.51857E-04	5.03864E-04	4.52203E-04	3.67983E-04	2.92227E-04	2.31526E-04
	Estático	-1.98944E-01	-1.93668E-01	-1.68828E-01	-1.08188E-01	-2.81349E-02	-5.74625E-03	-7.11763E-04	3.51419E-04	5.03292E-04	4.51397E-04	3.67308E-04	2.91496E-04	2.30864E-04
	Erro %	0.0028	0.0028	0.0026	0.0021	-0.0001	-0.0017	0.0269	-0.1247	-0.1136	-0.1786	-0.1838	-0.2507	-0.2867
1.5	Radon	-8.84200E-02	-8.73675E-02	-8.21078E-02	-6.64357E-02	-3.21283E-02	-1.25059E-02	-4.43198E-03	-1.41745E-03	-3.16839E-04	7.42935E-05	1.99092E-04	2.23615E-04	2.11691E-04
	Estático	-8.84194E-02	-8.73668E-02	-8.21070E-02	-6.64346E-02	-3.21268E-02	-1.25044E-02	-4.43087E-03	-1.41669E-03	-3.16339E-04	7.45472E-05	1.99245E-04	2.23685E-04	2.11708E-04
	Erro %	-0.0007	-0.0008	-0.0010	-0.0017	-0.0050	-0.0118	-0.0250	-0.0537	-0.1581	0.3403	0.0770	0.0316	0.0082
2.0	Radon	-4.97390E-02	-4.94048E-02	-4.76985E-02	-4.22101E-02	-2.68946E-02	-1.44666E-02	-7.03594E-03	-3.25480E-03	-1.43802E-03	-5.80554E-04	-1.78925E-04	6.57133E-06	8.71967E-05
	Estático	-4.97359E-02	-4.94017E-02	-4.76955E-02	-4.22070E-02	-2.70470E-02	-1.44640E-02	-7.03372E-03	-3.25299E-03	-1.43656E-03	-5.79373E-04	-1.77941E-04	6.86991E-06	8.78547E-05
	Erro %	-0.0061	-0.0062	-0.0064	-0.0072	0.5633	-0.0183	-0.0315	-0.0554	-0.1011	-0.2039	-0.5533	4.3461	0.7490
2.5	Radon	-3.18353E-02	-3.16982E-02	-3.09911E-02	-2.86314E-02	-2.12648E-02	-1.36982E-02	-8.06170E-03	-4.50429E-03	-2.43931E-03	-1.28586E-03	-6.51316E-04	-3.04186E-04	-1.15241E-04
	Estático	-3.18310E-02	-3.16939E-02	-3.09868E-02	-2.86272E-02	-2.12608E-02	-1.36946E-02	-8.05855E-03	-4.50158E-03	-2.43700E-03	-1.28388E-03	-6.49598E-04	-3.02676E-04	-1.13882E-04
	Erro %	-0.0135	-0.0135	-0.0138	-0.0147	-0.0187	-0.0263	-0.0391	-0.0601	-0.0949	-0.1544	-0.2644	-0.4989	-1.1932
3.0	Radon	-2.21099E-02	-2.20437E-02	-2.17006E-02	-2.05317E-02	-1.66E-02	-1.20252E-02	-8.03561E-03	-5.09654E-03	-3.12917E-03	-1.88071E-03	-1.11012E-03	-6.40624E-04	-3.56118E-04
	Estático	-2.21049E-02	-2.20387E-02	-2.16955E-02	-2.05267E-02	-1.66086E-02	-1.20209E-02	-8.03169E-03	-5.09306E-03	-3.12610E-03	-1.87800E-03	-1.10772E-03	-6.38472E-04	-3.54172E-04
	Erro %	-0.0230	-0.0230	-0.0233	-0.0243	-0.0285	-0.0363	-0.0489	-0.0684	-0.0982	-0.1443	-0.2171	-0.3371	-0.5496
3.5	Radon	-1.62459E-02	-1.62459E-02	-1.62102E-02	-1.53829E-02	-1.31347E-02	-1.02676E-02	-7.49436E-03	-5.20723E-03	-3.49929E-03	-2.30008E-03	-1.48863E-03	-9.50959E-04	-5.98615E-04
	Estático	-1.62403E-02	-1.62046E-02	-1.60186E-02	-1.53774E-02	-1.31294E-02	-1.02627E-02	-7.48980E-03	-5.20309E-03	-3.49556E-03	-2.29673E-03	-1.48560E-03	-9.48208E-04	-5.96102E-04
	Erro %	-0.0346	-0.2552	-1.1958	-0.0360	-0.0404	-0.0484	-0.0609	-0.0795	-0.1067	-0.1463	-0.2041	-0.2902	-0.4216
4.0	Radon	-1.24400E-02	-1.24190E-02	-1.23098E-02	-1.19298E-02	-1.05575E-02	-8.70233E-03	-6.76683E-03	-5.03109E-03	-3.62030E-03	-2.54598E-03	-1.76203E-03	-1.20526E-03	-8.16291E-04
	Estático	-1.24340E-02	-1.24130E-02	-1.23038E-02	-1.19239E-02	-1.05518E-02	-8.69688E-03	-6.76174E-03	-5.02640E-03	-3.61600E-03	-2.54205E-03	-1.75843E-03	-1.20195E-03	-8.13248E-04
	Erro %	-0.0484	-0.0485	-0.0488	-0.0499	-0.0545	-0.0627	-0.0752	-0.0934	-0.1190	-0.1548	-0.2047	-0.2747	-0.3742
4.5	Radon	-9.83072E-03	-9.81763E-03	-9.74929E-03	-9.51034E-03	-8.62913E-03	-7.38746E-03	-6.01840E-03	-4.71040E-03	-3.57443E-03	-2.65083E-03	-1.93339E-03	-1.39318E-03	-9.94743E-04
	Estático	-9.82438E-03	-9.81129E-03	-9.74296E-03	-9.50406E-03	-8.62303E-03	-7.38162E-03	-6.01289E-03	-4.70524E-03	-3.56964E-03	-2.64639E-03	-1.92929E-03	-1.38938E-03	-9.91211E-04
	Erro %	-0.0645	-0.0646	-0.0649	-0.0661	-0.0708	-0.0792	-0.0918	-0.1097	-0.1343	-0.1677	-0.2129	-0.2738	-0.3564
5.0	Radon	-7.96434E-03	-7.95575E-03	-7.91086E-03	-7.75325E-03	-7.16319E-03	-6.30610E-03	-5.32109E-03	-4.33307E-03	-3.42888E-03	-2.65357E-03	-2.01920E-03	-1.51725E-03	-1.12938E-03
	Estático	-7.95775E-03	-7.94916E-03	-7.90427E-03	-7.74671E-03	-7.15679E-03	-6.29992E-03	-5.31521E-03	-4.32752E-03	-3.42366E-03	-2.64869E-03	-2.01464E-03	-1.51300E-03	-1.12540E-03
	Erro %	-0.0829	-0.0830	-0.0833	-0.0845	-0.0894	-0.0979	-0.1107	-0.1284	-0.1525	-0.1843	-0.2263	-0.2814	-0.3538

Tabela 6 Errz - Quase estático														
Z	R	0	0.1	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5.0
0.5	Radon	2.38714E-01	1.92683E-01	4.44237E-02	-6.59289E-02	-3.20958E-02	-1.00600E-02	-3.02382E-03	-5.92893E-04	2.67185E-04	5.86320E-04	6.82822E-04	6.87264E-04	6.53737E-04
	Analitica	2.38732E-01	1.92699E-01	4.44333E-02	-6.59241E-02	-3.20993E-02	-1.00531E-02	-3.01712E-03	-6.07751E-04	2.73043E-04	5.91943E-04	6.87863E-04	6.91884E-04	6.58513E-04
	erro %	0.0078	0.0086	0.0216	-0.0072	0.0109	-0.0686	-0.2221	2.4448	2.1456	0.9500	0.7328	0.6678	0.7253
1.0	Radon	5.96751E-02	5.66091E-02	4.25083E-02	1.11021E-02	-1.64865E-02	-1.35504E-02	-8.68248E-03	-4.50823E-03	-2.51883E-03	-1.40084E-03	-7.59380E-04	-3.82476E-04	-1.56634E-04
	Analitica	5.96831E-02	5.66170E-02	4.25156E-02	1.11083E-02	-1.64810E-02	-1.35432E-02	-8.02482E-03	-4.50249E-03	-2.51328E-03	-1.39551E-03	-7.54281E-04	-3.77594E-04	-1.51938E-04
	erro %	0.0134	0.0139	0.0173	0.0560	-0.0334	-0.0532	-8.1953	-0.1275	-0.2208	-0.3817	-0.6760	-1.2930	-3.0909
1.5	Radon	2.65205E-02	2.60167E-02	2.28763E-02	1.38603E-02	-1.84771E-03	-7.32985E-03	-6.87421E-03	-5.13109E-03	-3.57164E-03	-2.43463E-03	-1.65249E-03	-1.14830E-03	-7.60205E-04
	Analitica	2.65258E-02	2.59128E-02	2.28815E-02	1.42068E-02	-1.93687E-03	-7.32490E-03	-6.86913E-03	-5.12597E-03	-3.56659E-03	-2.42970E-03	-1.64771E-03	-1.11701E-03	-7.55756E-04
	erro %	0.0201	-0.4009	0.0229	2.4394	4.6034	-0.0676	-0.0740	-0.0998	-0.1417	-0.2031	-0.2902	-2.8007	-0.5887
2.0	Radon	1.49167E-02	1.47220E-02	1.37334E-02	1.06249E-02	2.77300E-03	-2.37529E-03	-4.12466E-03	-4.06208E-03	-3.39034E-03	-2.64781E-03	-2.03721E-03	-2.20250E-03	-1.12985E-03
	Analitica	1.49208E-02	1.47260E-02	1.37375E-02	1.06289E-02	2.77708E-03	-2.37105E-03	-4.12026E-03	-4.05758E-03	-3.38580E-03	-2.64332E-03	-2.00621E-03	-1.50553E-03	-1.12562E-03
	erro %	0.0271	0.0275	0.0294	0.0379	0.1469	-0.1787	-0.1068	-0.1110	-0.1339	-0.1702	-1.5455	-46.2938	-0.3755
2.5	Radon	9.54607E-03	9.46614E-03	9.05549E-03	7.70470E-03	3.72098E-03	1.55404E-04	-1.89028E-03	-2.64089E-03	-2.65750E-03	-2.36038E-03	-1.97674E-03	-1.60736E-03	-1.28788E-03
	Analitica	9.54930E-03	9.46936E-03	9.05872E-03	7.70797E-03	3.72437E-03	1.58932E-04	-1.88650E-03	-2.63697E-03	-2.65348E-03	-2.35633E-03	-1.97270E-03	-1.60337E-03	-1.28397E-03
	erro %	0.0338	0.0341	0.0357	0.0424	0.0911	2.2203	-0.2002	-0.1489	-0.1513	-0.1718	-0.2044	-0.2484	-0.3044
3.0	Radon	6.62883E-03	6.59023E-03	6.39066E-03	5.71771E-03	3.55E-03	1.23126E-03	-4.87441E-04	-1.45224E-03	-1.83474E-03	-1.86555E-03	-1.72092E-03	-1.50843E-03	-1.29411E-03
	Analitica	6.63146E-03	6.59287E-03	6.39331E-03	5.72039E-03	3.55170E-03	1.23426E-03	-4.84217E-04	-1.44885E-03	-1.83123E-03	-1.86195E-03	-1.71728E-03	-1.50480E-03	-1.28149E-03
	erro %	0.0397	0.0399	0.0413	0.0468	0.1514	0.2431	-0.6659	-0.2340	-0.1922	-0.1933	-0.2116	-0.2413	-0.9846
3.5	Radon	4.86993E-03	4.84908E-03	4.74085E-03	4.37035E-03	3.10847E-03	1.60126E-03	2.94021E-04	-3.08162E-04	-1.12973E-03	-1.34979E-03	-1.37830E-03	-1.30302E-03	-1.17851E-03
	Analitica	4.87209E-03	4.85125E-03	4.74303E-03	4.37256E-03	3.11080E-03	1.60377E-03	2.96707E-04	-6.11622E-04	-1.12668E-03	-1.34539E-03	-1.37506E-03	-1.29975E-03	-1.17523E-03
	erro %	0.0444	0.0446	0.0459	0.0505	0.0750	0.1565	0.9051	49.6156	-0.2712	-0.3268	-0.2355	-0.2519	-0.2791
4.0	Radon	3.72841E-03	3.71619E-03	3.65255E-03	3.43255E-03	2.65530E-03	1.65518E-03	6.92006E-04	-7.42422E-05	-5.95396E-04	-8.96938E-04	-1.03292E-03	-1.05836E-03	-1.01876E-03
	Analitica	3.73019E-03	3.71797E-03	3.65434E-03	3.43437E-03	2.65722E-03	1.65727E-03	6.94271E-04	-7.16846E-05	-5.92764E-04	-8.94178E-04	-1.03006E-03	-1.05544E-03	-1.01439E-03
	erro %	0.0477	0.0479	0.0490	0.0530	0.0726	0.1260	0.3263	-3.5678	-0.4441	-0.3087	-0.2774	-0.2769	-0.4307
4.5	Radon	2.94586E-03	2.93823E-03	2.89841E-03	2.75984E-03	2.25764E-03	1.57681E-03	8.70903E-04	2.54283E-04	-2.17472E-04	-5.37314E-04	-7.26555E-04	-8.16461E-04	-8.37480E-04
	Analitica	0.002947314	2.93968E-03	2.89988E-03	2.76133E-03	2.25922E-03	1.57853E-03	8.72790E-04	2.56323E-04	-2.15207E-04	-5.34928E-04	-7.24057E-04	-8.13878E-04	-8.34837E-04
	erro %	-0.2102	-1.3224	0.0504	0.0539	0.0700	0.1091	0.2162	0.7958	-1.0521	-0.4460	-0.3449	-0.3174	-0.3165
5.0	Radon	2.38615E-03	2.38114E-03	2.35498E-03	2.26348E-03	1.92571E-03	2.10579E-03	9.29540E-04	4.42628E-04	3.80401E-05	-2.66479E-04	-4.73788E-04	-5.99211E-04	-6.61578E-04
	Analitica	2.38732E-03	2.38232E-03	2.35616E-03	2.26468E-03	1.92699E-03	1.45149E-03	9.31092E-04	4.44333E-04	3.97331E-05	-2.64429E-04	-4.71626E-04	-5.96950E-04	-6.59241E-04
	erro %	0.0490	0.0492	0.0500	0.0529	0.0665	-45.0778	0.1667	0.3838	4.2608	-0.7753	-0.4585	-0.3787	-0.3544

Tabela 7 Trzz - Quase estático														
Z	R	0	0.1	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5.0
0.5	Radon	0.00000E+00	-1.73141E-01	-2.73305E-01	-1.68803E-01	-3.42E-02	-9.00213E-03	-3.20647E-03	-1.39569E-03	-6.88732E-04	-3.78738E-04	-2.24813E-04	-1.41635E-04	-9.56990E-05
	Analítica	0.00000E+00	-1.73148E-01	-2.73317E-01	-1.68809E-01	-3.41646E-02	-9.05926E-03	-3.20560E-03	-1.38519E-03	-6.88047E-04	-3.78133E-04	-2.24274E-04	-1.41149E-04	-9.31468E-05
	erro %	0.0000	0.0045	0.0043	0.0036	-0.0001	0.6306	-0.0272	-0.7584	-0.0994	-0.1599	-0.2405	-0.3442	-2.7400
1.0	Radon	0.00000E+00	-2.32860E-02	-5.12882E-02	-6.83277E-02	-4.22025E-02	-1.88070E-02	-8.54248E-03	-4.21833E-03	-2.26601E-03	-1.30859E-03	-8.02393E-04	-5.17000E-04	3.47130E-04
	Analítica	0.00000E+00	-2.32867E-02	-5.12896E-02	-6.83292E-02	-4.22023E-02	-1.88059E-02	-8.54115E-03	-4.21703E-03	-2.26481E-03	-1.30749E-03	-8.01400E-04	-5.16091E-04	3.46296E-04
	erro %	0.0000	0.0029	0.0027	0.0022	-0.0004	-0.0059	-0.0156	-0.0308	-0.0529	-0.0837	-0.1240	-0.1760	-0.2406
1.5	Radon	0.00000E+00	-6.99555E-03	-1.65131E-02	-2.71779E-02	-2.82096E-02	-1.87580E-02	-1.10024E-02	-6.37673E-03	-3.79764E-03	-2.34971E-03	-1.51143E-03	-1.00785E-03	-6.94037E-04
	Analítica	0.00000E+00	-6.99557E-03	-1.65131E-02	-2.71778E-02	-2.82089E-02	-1.87566E-02	-1.10008E-02	-6.37509E-03	-3.79607E-03	-2.34824E-03	-1.51007E-03	-1.00658E-03	-6.92863E-04
	erro %	0.0000	0.0003	0.0001	-0.0004	-0.0028	-0.0073	-0.0146	-0.0257	-0.0414	-0.0626	-0.0904	-0.1256	-0.1694
2.0	Radon	0.00000E+00	-2.96569E-03	-7.17700E-03	-1.28229E-02	-1.70834E-02	-1.46692E-02	-1.05524E-02	-7.09929E-03	-4.70330E-03	-3.14158E-03	-2.13694E-03	-1.48546E-03	-1.05572E-03
	Analítica	0.00000E+00	-2.96559E-03	-7.17675E-03	-1.28224E-02	-1.70823E-02	-1.46677E-02	-1.05506E-02	-7.09744E-03	-4.70148E-03	-3.13983E-03	-2.13529E-03	-1.48390E-03	-1.05426E-03
	erro %	0.0000	-0.0034	-0.0035	-0.0041	-0.0063	-0.0104	-0.0168	-0.0261	-0.0389	-0.0558	-0.0776	-0.1050	-0.1387
2.5	Radon	0.00000E+00	-1.52192E-03	-3.72618E-03	-6.92653E-03	-1.05437E-02	-1.06267E-02	-8.87364E-03	-6.75434E-03	-4.93075E-03	-3.54951E-03	-2.55767E-03	-1.85912E-03	-1.36828E-03
	Analítica	0.00000E+00	-1.52179E-03	-3.72587E-03	-6.92593E-03	-1.05426E-02	-1.06252E-02	-8.87180E-03	-6.75237E-03	-4.92876E-03	-3.54756E-03	-2.55580E-03	-1.85733E-03	-1.36658E-03
	erro %	0.0000	-0.0081	-0.0082	-0.0087	-0.0109	-0.0148	-0.0208	-0.0291	-0.0403	-0.0549	-0.0734	-0.0963	-0.1243
3.0	Radon	0.00000E+00	-8.81865E-04	-2.17287E-03	-4.12888E-03	-6.80E-03	-7.59369E-03	-7.05405E-03	-5.91652E-03	-4.69122E-03	-3.61471E-03	-2.75223E-03	-2.09151E-03	-1.59567E-03
	Analítica	0.00000E+00	-8.81743E-04	-2.17257E-03	-4.12828E-03	-6.79444E-03	-7.59213E-03	-7.05221E-03	-5.91452E-03	-4.68915E-03	-3.61264E-03	-2.75020E-03	-2.08955E-03	-1.59377E-03
	erro %	0.0000	-0.0138	-0.0140	-0.0145	-0.0167	-0.0205	-0.0261	-0.0339	-0.0441	-0.0573	-0.0737	-0.0939	-0.1188
3.5	Radon	0.00000E+00	-5.55790E-04	-1.37471E-03	-2.64749E-03	-4.57730E-03	-5.48071E-03	-5.49649E-03	-4.96858E-03	-4.21684E-03	-3.44722E-03	-2.75992E-03	-2.18759E-03	-1.72867E-03
	Analítica	0.00000E+00	-5.55676E-04	-1.37443E-03	-2.64693E-03	-4.57623E-03	-5.47922E-03	-5.49470E-03	-4.96659E-03	-4.21475E-03	-3.44509E-03	-2.75779E-03	-2.18550E-03	-1.72664E-03
	erro %	0.0000	-0.0206	-0.0207	-0.0213	-0.0234	-0.0272	-0.0326	-0.0401	-0.0497	-0.0619	-0.0770	-0.0954	-0.1174
4.0	Radon	0.00000E+00	-3.72543E-04	-9.23767E-04	-1.79471E-03	-3.20660E-03	-4.02826E-03	-4.27230E-03	-4.09122E-03	-3.66901E-03	-3.15392E-03	-2.63982E-03	-2.17473E-03	-1.77649E-03
	Analítica	0.00000E+00	-3.72437E-04	-9.23503E-04	-1.79419E-03	-3.20560E-03	-4.02685E-03	-4.27058E-03	-4.08928E-03	-3.66693E-03	-3.15176E-03	-2.63765E-03	-2.17257E-03	-1.77436E-03
	erro %	0.0000	-0.0284	-0.0286	-0.0291	-0.0313	-0.0350	-0.0403	-0.0475	-0.0568	-0.0683	-0.0825	-0.0996	-0.1199
4.5	Radon	0.00000E+00	-2.61758E-04	-6.50176E-04	-1.27083E-03	-2.32334E-03	-3.02108E-03	-3.34041E-03	-3.34507E-03	-3.13636E-03	-2.81208E-03	-2.44634E-03	-2.08627E-03	-1.75712E-03
	Analítica	0.00000E+00	-2.61660E-04	-6.49932E-04	-1.27035E-03	-2.32241E-03	-3.01975E-03	-3.33877E-03	-3.34320E-03	-3.13432E-03	-2.80993E-03	-2.44414E-03	-2.08407E-03	-1.75493E-03
	erro %	0.0000	-0.0373	-0.0375	-0.0380	-0.0402	-0.0438	-0.0491	-0.0561	-0.0651	-0.0762	-0.0897	-0.1059	-0.1249
5.0	Radon	0.00000E+00	-1.90885E-04	-4.74719E-04	-9.31915E-04	-1.73235E-03	-2.31079E-03	-2.63720E-03	-2.73497E-03	-2.65827E-03	-2.46874E-03	-2.22013E-03	-1.95214E-03	-1.69032E-03
	Analítica	0.00000E+00	-1.90795E-04	-4.74494E-04	-9.31468E-04	-1.73148E-03	-2.30954E-03	-2.63564E-03	-2.73317E-03	-2.65629E-03	-2.46663E-03	-2.21795E-03	-1.94992E-03	-1.68809E-03
	erro %	0.0000	-0.0473	-0.0474	-0.0480	-0.0501	-0.0538	-0.0590	-0.0659	-0.0747	-0.0855	-0.0985	-0.1139	-0.1321

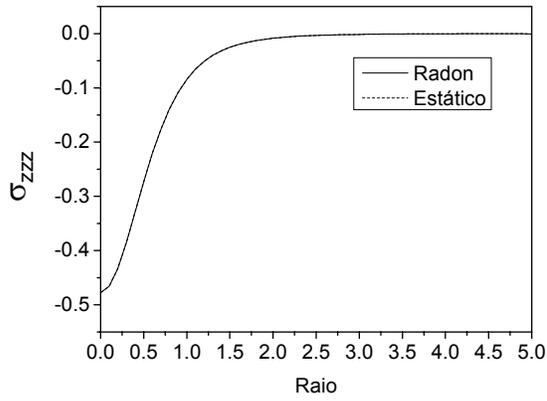


Figura 4.53a - σ_{zzz} problema quase-estático

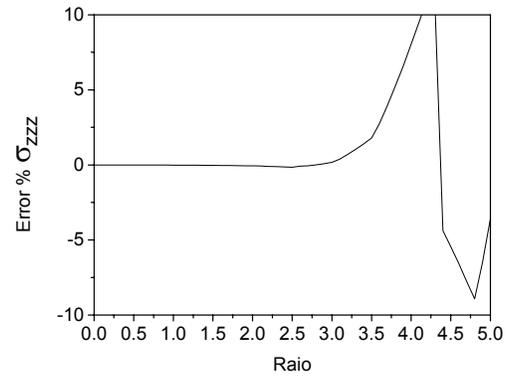


Figura 4.53b – Erro relativo

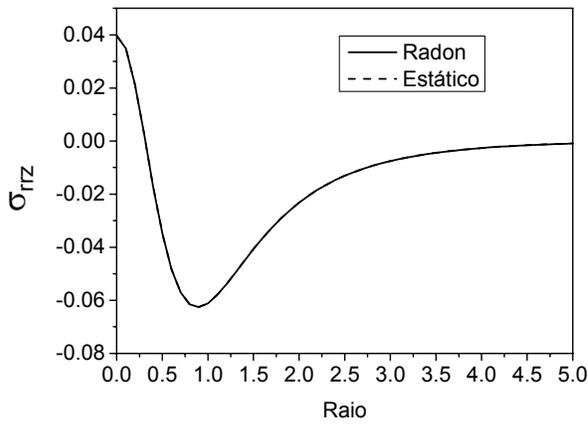


Figura 4.54a - σ_{rrz} problema quase-estático

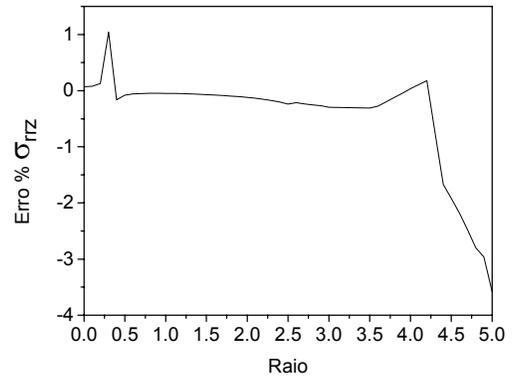


Figura 4.54b – Erro relativo

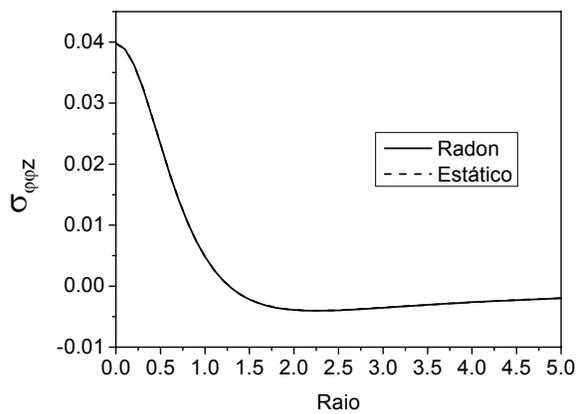


Figura 4.55a - $\sigma_{\phi\phi z}$ problema quase-estático

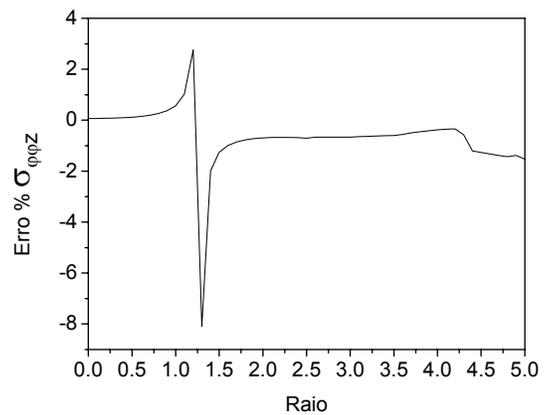


Figura 4.55b – Erro relativo

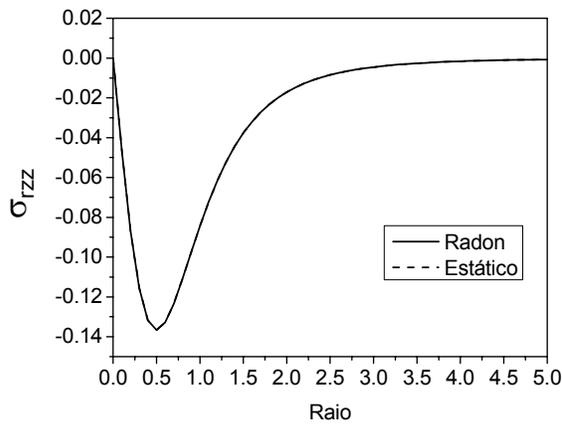


Figura 4.56a - σ_{rzz} problema quase-estático

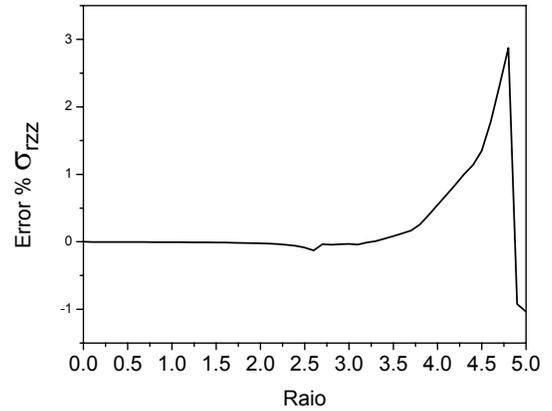


Figura 4.56b – Erro relativo

Para o plano definido por r-z, indicado na figura 4.57, são apresentados os resultados das figuras 4.58 a 4.69, para as componentes real e imaginária dos deslocamentos vertical U_{zz} e radial U_{rz} , das componentes de tensão σ_{zzz} , σ_{rrz} , $\sigma_{\phi\phi z}$ e σ_{rzz} . Por se tratar do problema axissimétrico, tal plano é válido para qualquer ângulo ϕ . Determinado esse plano, é conhecida a resposta para qualquer ponto do semi-espaço.

Foram adotados os parâmetros materiais: coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, fator de amortecimento $\eta=0.2$, frequência de excitação $\omega=5 \text{ rad/s}$ e erros de integração de 10^{-8} . Nas respostas de deslocamento vertical e radial, é possível notar que a amplitude das ondas decai lentamente ao longo da superfície, e que perdem energia rapidamente no interior do semi-espaço. Um ponto importante é que a tensão na superfície deve respeitar as condições de contorno. Pode-se notar que para a componente de tensão normal a superfície σ_{zzz} tende ao delta de Dirac no ponto de carregamento.

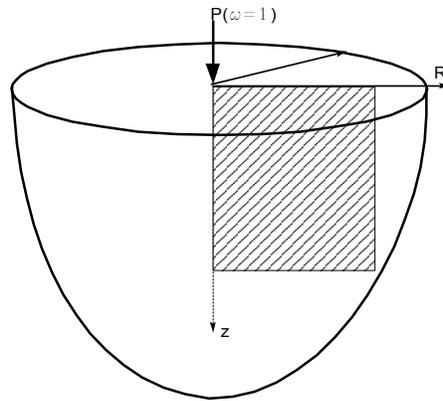


Figura 4.57 – Semi-espaco, considerada a axissimetria. Plano r-z analisado.

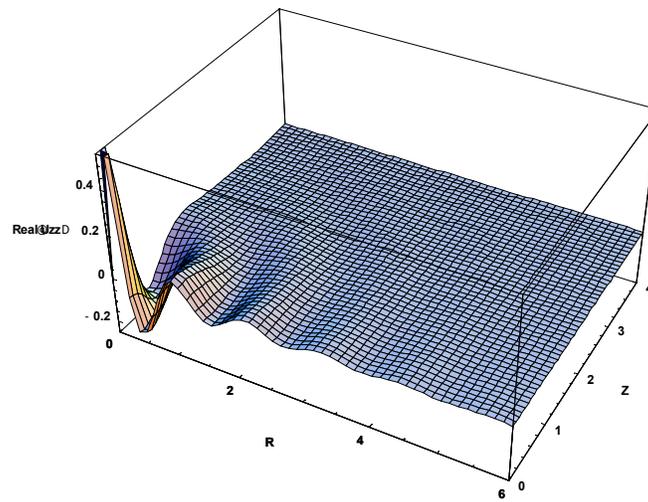


Figura 4.58 – Componente real do deslocamento Vertical U_{zz}

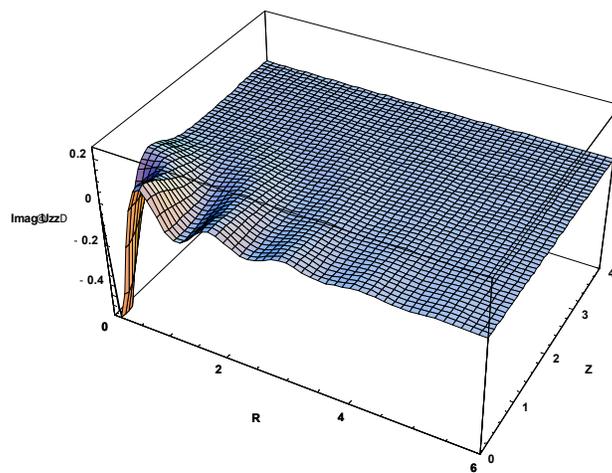


Figura 4.59 – Componente imaginária do deslocamento Vertical U_{zz}

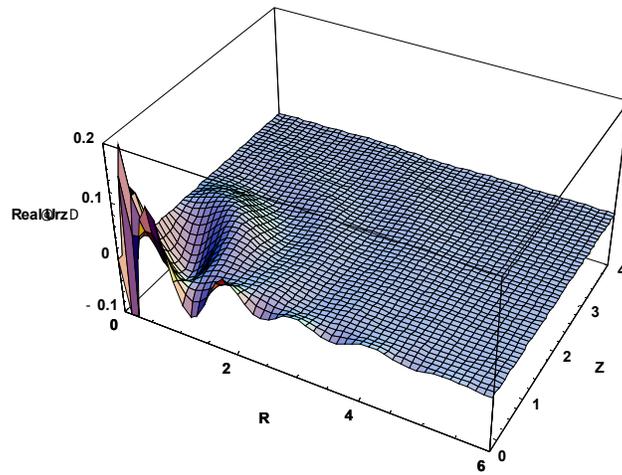


Figura 4.60 – Componente real do deslocamento Radial U_{rz}

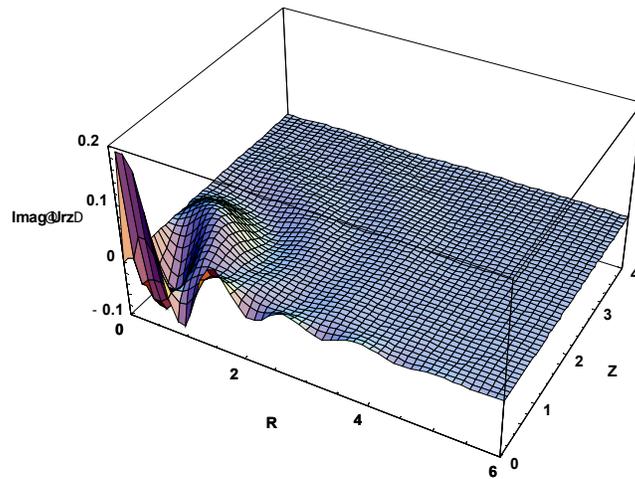


Figura 4.61 – Componente imaginária do deslocamento Radial U_{rz}

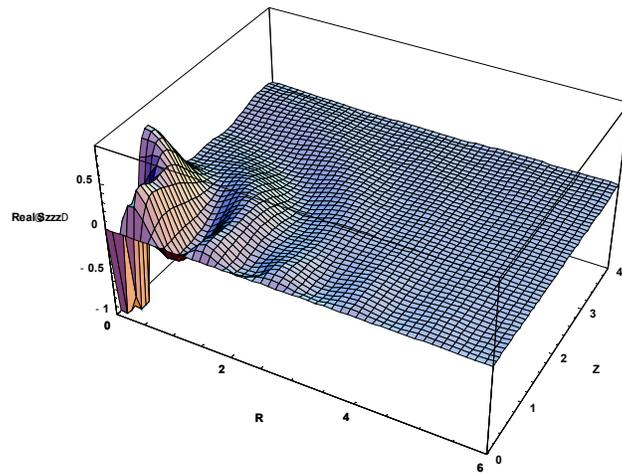


Figura 4.62 – Componente real de σ_{zzz}

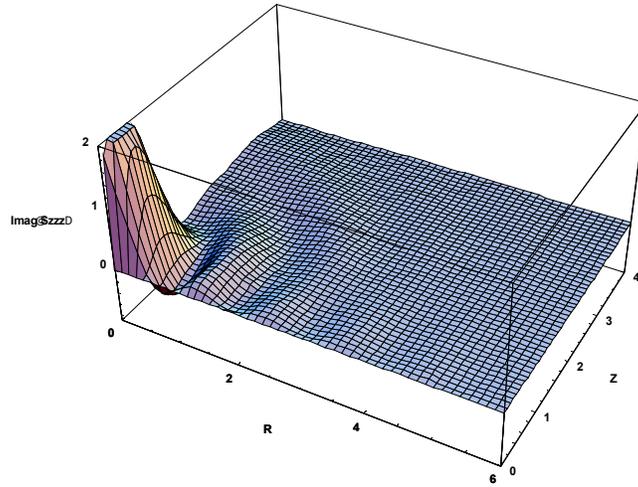


Figura 4.63 – Componente imaginária de σ_{zzz}

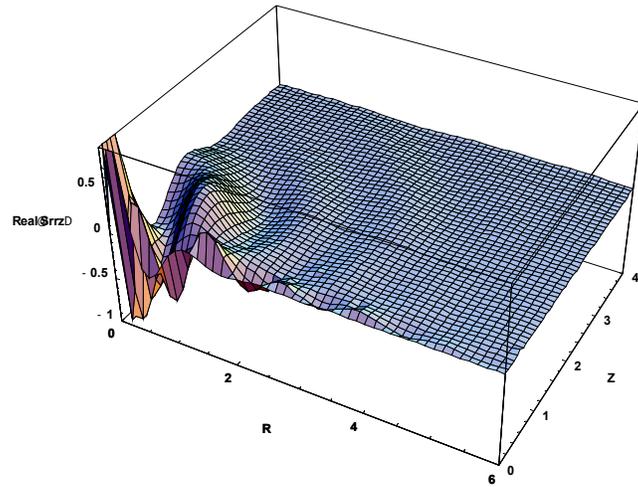


Figura 4.64 – Componente real de σ_{rtz}

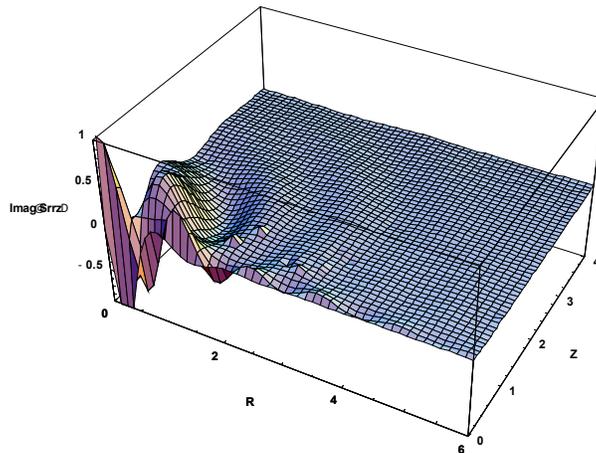


Figura 4.65 – Componente imaginária de σ_{rtz}

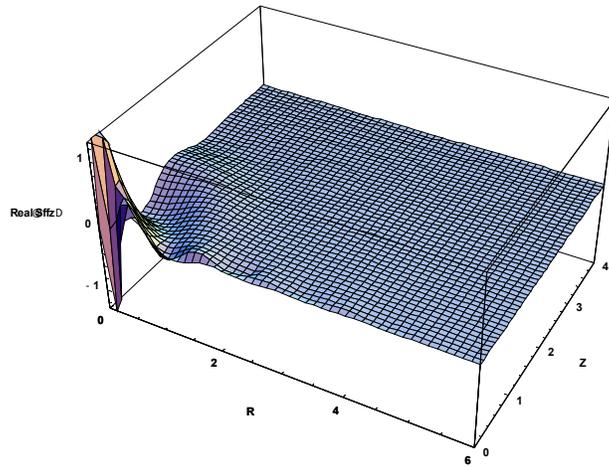


Figura 4.66 – Componente real de $\sigma_{\phi\phi z}$

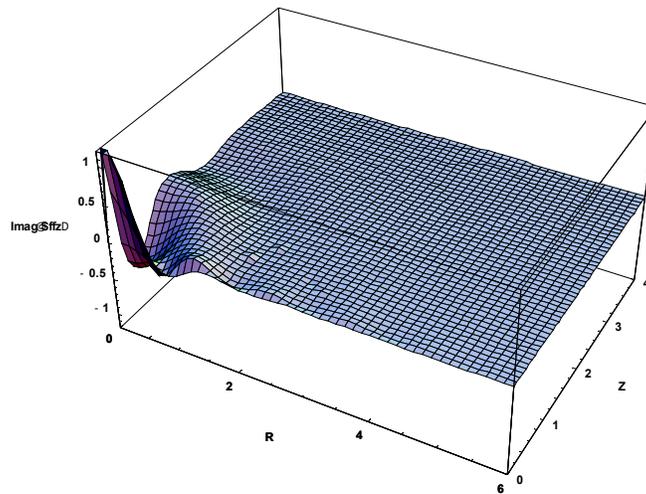


Figura 4.67 – Componente imaginária de $\sigma_{\phi\phi z}$

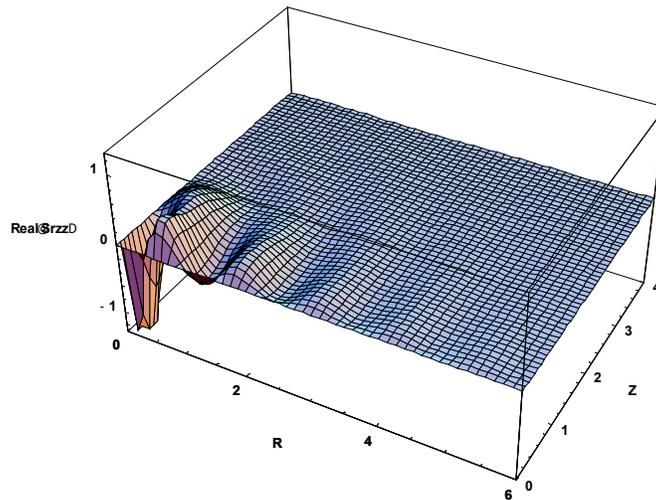


Figura 4.68 – Componente real de σ_{rzz}

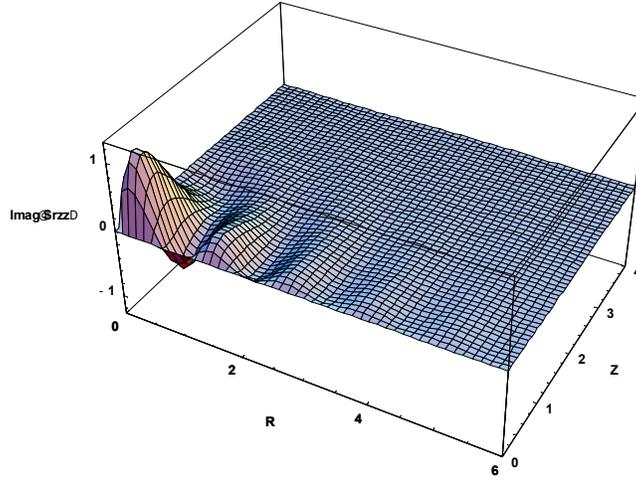


Figura 4.69 – Componente imaginária de σ_{rzz}

4.6 Deslocamentos, deformações e tensões no sistema de coordenadas cartesiano

As considerações de axissimetria foram utilizadas para uma validação inicial. Infelizmente limitam as equações aos problemas com carregamentos axissimétricos. Para obter respostas de semi-espacos submetidos a carregamentos genéricos, é preciso implementar as funções no sistema cartesiano.

Os deslocamentos para um sistema cartesiano são determinados pelas equações 4.165 a 4.167,

$$U_z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \xi\delta \left\{ A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.285)$$

$$U_x = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \xi\delta \left\{ \cos\theta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] - \text{sen}\theta \left[E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta \quad (4.286)$$

$$U_y = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \xi\delta \left\{ \text{sen}\theta \left[\psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] + \cos\theta \left[E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta \quad (4.287)$$

Três das componentes de tensão foram obtidas de equações deduzidas ao longo da formulação (equação 4.168 a 4.170), são elas:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \xi\delta \left\{ \Gamma_1 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta \alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.288)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \cos\theta \left[\Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right] - \text{sen}\theta \left[\mu\beta\delta E e^{-\beta\cdot\delta\cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta, \quad (4.289)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\delta\xi) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)} \xi \delta \left\{ \text{sen}\theta \left[\Gamma_3 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right] + \cos\theta \left[\mu\beta\delta E e^{-\beta\cdot\delta\cdot z} \right] \right\} d\xi d\theta. \quad (4.290)$$

As demais componentes de tensão podem ser determinadas a partir das componentes de deformação. Recorrendo à mecânica do contínuo, para meios isotrópicos as equações constitutivas são:

$$\sigma_{xx} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad (4.291)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad (4.292)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (4.293)$$

As deformações são obtidas dos deslocamentos através das relações:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dU_x}{dx}, \quad (4.294)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dU_y}{dy}, \quad (4.295)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dU_z}{dz}, \quad (4.296)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_x}{dy} + \frac{dU_y}{dx} \right). \quad (4.297)$$

Após a substituição das componentes de deformação nas equações constitutivas, é possível escrever as componentes de tensão na forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)} \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_1) A e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_2) C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta + \right. \\ \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)} \text{Cos}(2\theta) \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu\xi\psi_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu\xi\psi_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta - \right. \\ \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)} \text{Sin}(2\theta) \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \xi\mu E e^{-\beta\delta z} \right\} d\xi d\theta \right], \quad (4.298) \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_1) A e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_2) C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta - \right. \\ \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \text{Cos}(2\theta) \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu\xi\psi_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu\xi\psi_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta + \right. \\ \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \text{Sin}(2\theta) \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu E e^{-\delta\beta z} \right\} d\xi d\theta \right], \quad (4.299)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \left\{ \psi_1 A e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta + \right. \\ \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \text{Cos}(2\theta) \left\{ E e^{-\delta\beta z} \right\} d\xi d\theta \right]. \quad (4.300)$$

Os carregamentos transformados estão implícitos nas equações de amplitude de onda. Para facilitar as deduções e permitir simplificações, as amplitudes de onda pode ser reescritas de maneira que seja possível explicitar o carregamento aplicado. Desse modo para o carregamento vertical, considera-se:

$$A_p = A_p^* \hat{P}, \quad (4.301)$$

$$C_p = C_p^* \hat{P}, \quad (4.302)$$

$$E_p = 0, \quad (4.303)$$

sendo:

$$A_p^* = \frac{\Gamma_4}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4}, \quad (4.304)$$

$$C_p^* = \frac{-\Gamma_3}{\Gamma_3\Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_4}. \quad (4.305)$$

Para carregamento horizontal na direção do eixo x (S), as amplitudes de onda são:

$$A_s = A_s^* \hat{S} \cos \theta, \quad (4.306)$$

$$C_s = C_s^* \hat{S} \cos \theta, \quad (4.307)$$

$$E_s = -\frac{\hat{S} \sin \theta}{\mu\beta\delta}, \quad (4.308)$$

com:

$$A_S^* = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2}, \quad (4.309)$$

$$C_S^* = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2}. \quad (4.310)$$

E para o carregamento horizontal na direção y (T), escreve-se a amplitudes de onda como:

$$A_T = A_T^* \tilde{T} \text{sen} \theta, \quad (4.311)$$

$$C_T = C_T^* \tilde{T} \text{sen} \theta, \quad (4.312)$$

$$E = \frac{\hat{T} \cos \theta}{\mu \beta \delta}, \quad (4.313)$$

com:

$$A_T^* = A_S^* = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2}, \quad (4.314)$$

$$C_T^* = C_S^* = \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_3\Gamma_2}. \quad (4.315)$$

4.6.1 Carregamento vertical

Considerando a notação de amplitudes de onda, que permite explicitar o carregamento, obtêm-se as seguintes respostas para deslocamentos e tensões:

$$U_{zz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \{ A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \} d\xi d\theta, \quad (4.316)$$

$$U_{xz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta \cdot e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \{ [\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}] \} d\xi d\theta, \quad (4.317)$$

$$U_{yz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen} \theta \cdot e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \{ [\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}] \} d\xi d\theta, \quad (4.318)$$

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \{ \Gamma_1 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \} d\xi d\theta, \quad (4.319)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right] \right\} d\xi d\theta, \quad (4.320)$$

$$\sigma_{zyz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right] \right\} d\xi d\theta, \quad (4.321)$$

$$\sigma_{xxz} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{Cos}(2\theta) \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta \right], \quad (4.322)$$

$$\sigma_{yyz} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \text{Cos}(2\theta) \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta \right], \quad (4.323)$$

$$\sigma_{xyz} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} 2\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} d\xi d\theta \right]. \quad (4.324)$$

Estas expressões podem ser escritas de forma mais compacta, isolando-se o núcleo da função da componente exponencial dependente das coordenadas x e y e da freqüência aplicada e da variável de integração θ . Este termo, após a integração em θ , gera uma função oscilante. Iniciando pelo deslocamento vertical:

$$U_{zz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zz}} H_{U_{zz}} d\xi d\theta, \quad (4.325)$$

com:

$$G_{U_{zz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\} \quad (4.326)$$

$$H_{U_{zz}} = \hat{P} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.327)$$

Para o deslocamento horizontal em na direção x:

$$U_{xz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xz}} \cdot H_{U_{xz}} d\xi d\theta, \quad (4.328)$$

com:

$$G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}, \quad (4.329)$$

$$H_{U_{xz}} = \hat{P} \cos \theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}.$$

E ainda para deslocamento horizontal em y:

$$U_{yz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yz}} \cdot H_{U_{yz}} d\xi d\theta, \quad (4.330)$$

$$G_{U_{yz}} = G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}, \quad (4.331)$$

$$H_{U_{yz}} = \hat{P} \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.332)$$

Para a componente de tensão σ_{zzz} :

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzz}} \cdot H_{\sigma_{zzz}} d\xi d\theta, \quad (4.333)$$

$$G_{\sigma_{zzz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.334)$$

$$H_{\sigma_{zzz}} = \hat{P} e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.335)$$

Para a componente de tensão σ_{zzx} :

$$\sigma_{zzx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzx}} \cdot H_{\sigma_{zzx}} d\xi d\theta, \quad (4.336)$$

$$G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right] \right\}, \quad (4.337)$$

$$H_{\sigma_{zzx}} = \hat{P} \cos \theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.338)$$

Para a componente de tensão σ_{zyz} :

$$\sigma_{zyz} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyz}} \cdot H_{\sigma_{zyz}} d\xi d\theta, \quad (4.339)$$

$$G_{\sigma_{zyz}} = G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right] \right\}, \quad (4.340)$$

$$H_{\sigma_{zyz}} = \hat{P} \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.341)$$

Para a componente de tensão σ_{xxz} :

$$\sigma_{xxz} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz}1} \cdot H_{\sigma_{xxz}1} d\xi d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz}2} \cdot H_{\sigma_{xxz}2} d\xi d\theta \right], \quad (4.342)$$

$$G_{\sigma_{xxz}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.343)$$

$$H_{\sigma_{xxz}1} = \hat{P} e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.344)$$

$$G_{\sigma_{xxz}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.345)$$

$$H_{\sigma_{xxz}2} = \hat{P} \cdot \text{Cos}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.346)$$

Para a componente de tensão σ_{yyz} :

$$\sigma_{yyz} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz}1} \cdot H_{\sigma_{yyz}1} d\xi d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz}2} \cdot H_{\sigma_{yyz}2} d\xi d\theta \right], \quad (4.347)$$

$$G_{\sigma_{yyz}1} = G_{\sigma_{xxz}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.348)$$

$$H_{\sigma_{yyz}1} = H_{\sigma_{xxz}1} = e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \hat{P}, \quad (4.349)$$

$$G_{\sigma_{yyz}2} = G_{\sigma_{xxz}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.350)$$

$$H_{\sigma_{yyz}2} = H_{\sigma_{xxz}2} = e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \hat{P} \cdot \text{Cos}(2\theta). \quad (4.351)$$

Para a componente de tensão σ_{xyz} :

$$\sigma_{xyz} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyz}} \cdot H_{\sigma_{xyz}} d\xi d\theta \right], \quad (4.352)$$

$$G_{\sigma_{xyz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.353)$$

$$H_{\sigma_{xyz}} = 2\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)} \hat{P}. \quad (4.354)$$

4.6.2 Carregamento horizontal em x (S)

Aplicando as equações 4.306 a 4.308 nas equações de deslocamento e tensão dadas em 4.285 a 4.290 e 4.298 a 4.300, são obtidas as componentes para o carregamento horizontal na direção x.

Inicialmente, para o deslocamento vertical, já com forma compacta, tem-se:

$$U_{zx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zx}} H_{U_{zx}} d\xi d\theta, \quad (4.355)$$

com

$$G_{U_{zx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.356)$$

$$H_{U_{zx}} = \cos \theta \cdot \hat{S} \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)}. \quad (4.357)$$

Para o deslocamento horizontal em x:

$$U_{xx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \{G_{U_{xx1}} H_{U_{xx1}} - G_{U_{xx2}} H_{U_{xx2}}\} d\xi d\theta, \quad (4.358)$$

com:

$$G_{U_{xx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.359)$$

$$H_{U_{xx1}} = \hat{S} (\cos \theta)^2 \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)}, \quad (4.360)$$

$$G_{U_{xx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.361)$$

$$H_{U_{xx2}} = \hat{S} \cdot (\text{sen}\theta)^2 \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)}. \quad (4.362)$$

Para o deslocamento horizontal em y:

$$U_{yx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx1}} H_{U_{yx1}} - G_{U_{yx2}} H_{U_{yx2}} d\xi d\theta, \quad (4.363)$$

com:

$$G_{U_{yx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.364)$$

$$H_{U_{yx1}} = \hat{S} \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos \theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)}, \quad (4.365)$$

$$G_{U_{yx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.366)$$

$$H_{U_{yx2}} = \hat{S} \cos \theta \text{sen}\theta e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{sen}\theta)}. \quad (4.367)$$

Para a componente de deformação σ_{zzx} :

$$\sigma_{zzx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzx}} H_{\sigma_{zzx}} d\xi d\theta, \quad (4.368)$$

com:

$$G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.369)$$

$$H_{\sigma_{zzx}} = \hat{S} \cos \theta e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\text{sen}\theta)}. \quad (4.370)$$

Para a componente de deformação σ_{zxx} :

$$\sigma_{zxx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{zxx1}} H_{\sigma_{zxx1}} - G_{\sigma_{zxx2}} H_{\sigma_{zxx2}} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.371)$$

com:

$$G_{\sigma_{zxx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.372)$$

$$H_{\sigma_{zxx1}} = \hat{S} (\cos \theta)^2 e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\text{sen}\theta)}, \quad (4.373)$$

$$G_{\sigma_{zxx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.374)$$

$$H_{\sigma_{zxx2}} = \hat{S} (\text{sen}\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\text{sen}\theta)}. \quad (4.375)$$

Para a componente de deformação σ_{zyx} :

$$\sigma_{zyx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{zyx1}} H_{\sigma_{zyx1}} + G_{\sigma_{zyx2}} H_{\sigma_{zyx2}} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.376)$$

com:

$$G_{\sigma_{zyx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.377)$$

$$H_{\sigma_{zyx1}} = \hat{S} \cdot \text{sen}\theta \cos \theta e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\text{sen}\theta)}, \quad (4.378)$$

$$G_{\sigma_{zyx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.379)$$

$$H_{\sigma_{zyx2}} = \hat{S} \text{sen}\theta \cos \theta e^{i\delta\xi(x\cos\theta + y\text{sen}\theta)}, \quad (4.380)$$

Para a componente de deformação σ_{xxx} :

$$\sigma_{xxx} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{xxx1}} H_{\sigma_{xxx1}} + G_{\sigma_{xxx2}} H_{\sigma_{xxx2}} - G_{\sigma_{xxx3}} H_{\sigma_{xxx3}} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.381) \right.$$

com:

$$G_{\sigma_{xxx}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.382)$$

$$H_{\sigma_{xxx}1} = \hat{S} \cos \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.383)$$

$$G_{\sigma_{xxx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.384)$$

$$H_{\sigma_{xxx}2} = \hat{S} \cos(2\theta) \cos \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.385)$$

$$G_{\sigma_{xxx}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.386)$$

$$H_{\sigma_{xxx}3} = \hat{S} \text{sen}\theta \text{Sin}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.387)$$

Para a componente de deformação σ_{yyx} :

$$\sigma_{yyx} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{yyx}1} H_{\sigma_{yyx}1} - G_{\sigma_{yyx}2} H_{\sigma_{yyx}2} - G_{\sigma_{yyx}3} H_{\sigma_{yyx}3} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.388)$$

com:

$$G_{\sigma_{yyx}1} = \text{ign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.389)$$

$$H_{\sigma_{yyx}1} = \hat{S} \cos \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.390)$$

$$G_{\sigma_{yyx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.391)$$

$$H_{\sigma_{yyx}2} = \hat{S} \cos \theta \text{Cos}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.392)$$

$$G_{\sigma_{yyx}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.393)$$

$$H_{\sigma_{yyx}3} = \hat{S} \text{sen}\theta \text{Sin}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.394)$$

Para a componente de deformação σ_{xyx} :

$$\sigma_{xyx} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{xyx}1} H_{\sigma_{xyx}1} - G_{\sigma_{xyx}2} H_{\sigma_{xyx}2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.395)$$

com:

$$G_{\sigma_{xyx}1} = 2\text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.396)$$

$$H_{\sigma_{xyx}1} = \hat{S} (\cos \theta)^2 \text{Sen}(\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta + y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.397)$$

$$G_{\sigma_{yx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta\delta} \right\}, \quad (4.398)$$

$$H_{\sigma_{yx}2} = \hat{T} \text{sen}\theta \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.399)$$

4.6.3 Carregamento Horizontal em y (T)

De maneira análoga ao problema com carregamento em x, é possível escrever as equações para o carregamento na direção y. Aplicando as equações 4.311 a 4.313 nas funções de deslocamento e tensão fornecidas em 4.285 a 4.290 e 4.298 a 4.300, para o deslocamento vertical, considerando a forma compacta, tem-se:

$$U_{zy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zy}1} H_{U_{zy}1} d\xi d\theta, \quad (4.400)$$

sendo:

$$G_{U_{zy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.401)$$

$$H_{U_{zy}1} = \hat{T} \text{sen}\theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.402)$$

O deslocamento horizontal em x:

$$U_{xy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{U_{xy}1} H_{U_{xy}1} - G_{U_{xy}2} H_{U_{xy}2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.403)$$

sendo:

$$G_{U_{xy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.404)$$

$$H_{U_{xy}1} = \hat{T} \text{sen}\theta \cos\theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.405)$$

$$G_{U_{xy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.406)$$

$$H_{U_{xy}2} = \hat{T} \cos\theta \text{sen}\theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.407)$$

O deslocamento horizontal em y:

$$U_{yy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{U_{yy}1} H_{U_{yy}1} - G_{U_{yy}2} H_{U_{yy}2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.408)$$

sendo:

$$G_{U_{yy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.409)$$

$$H_{U_{yy}1} = \hat{T} (\text{sen } \theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.410)$$

$$G_{U_{yy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.411)$$

$$H_{U_{yy}2} = \hat{T} (\cos \theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.412)$$

A componente de tensão σ_{zzy} :

$$\sigma_{zzy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzy}1} H_{\sigma_{zzy}1} d\xi d\theta, \quad (4.413)$$

com:

$$G_{\sigma_{zzy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.414)$$

$$H_{\sigma_{zzy}1} = \hat{T} \text{sen } \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.415)$$

A componente de tensão σ_{zxy} :

$$\sigma_{zxy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{zxy}1} H_{\sigma_{zxy}1} - G_{\sigma_{zxy}2} H_{\sigma_{zxy}2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.416)$$

com:

$$G_{\sigma_{zxy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.417)$$

$$H_{\sigma_{zxy}1} = \hat{T} \text{sen } \theta \cos \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.418)$$

$$G_{\sigma_{zxy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.419)$$

$$H_{\sigma_{zxy}2} = \hat{T} \cos \theta \text{sen } \theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.420)$$

A componente de tensão σ_{zyy} :

$$\sigma_{zyy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{zyy}1} H_{\sigma_{zyy}1} + G_{\sigma_{zyy}2} H_{\sigma_{zyy}2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.421)$$

com:

$$G_{\sigma_{yy}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta\left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z}\right], \quad (4.422)$$

$$H_{\sigma_{yy}1} = \hat{T}(\text{sen}\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.423)$$

$$G_{\sigma_{yy}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}, \quad (4.424)$$

$$H_{\sigma_{yy}2} = \hat{T}(\text{cos}\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.425)$$

A componente de tensão σ_{xxy} :

$$\sigma_{xxy} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{xxy}1} H_{\sigma_{xxy}1} + G_{\sigma_{xxy}2} H_{\sigma_{xxy}2} - G_{\sigma_{xxy}3} H_{\sigma_{xxy}3} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.426)$$

com:

$$G_{\sigma_{xxy}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ (i\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.427)$$

$$H_{\sigma_{xxy}1} = \hat{T} \text{sen}\theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.428)$$

$$G_{\sigma_{xxy}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ \mu\xi\psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu\xi\psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.429)$$

$$H_{\sigma_{xxy}2} = \hat{T} \text{sen}\theta \text{Cos}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.430)$$

$$G_{\sigma_{xxy}3} = \text{sign}(\delta\xi)\xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.431)$$

$$H_{\sigma_{xxy}3} = \hat{T} \text{cos}\theta \text{Sin}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.432)$$

A componente de tensão σ_{yyy} :

$$\sigma_{yyy} = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{yyy}1} H_{\sigma_{yyy}1} - G_{\sigma_{yyy}2} H_{\sigma_{yyy}2} - G_{\sigma_{yyy}3} H_{\sigma_{yyy}3} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.433)$$

com:

$$G_{\sigma_{yyy}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ (i\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.434)$$

$$H_{\sigma_{yyy}1} = \hat{T} \text{sen}\theta e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.435)$$

$$G_{\sigma_{yyy}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ \mu\xi\psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu\xi\psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.436)$$

$$H_{\sigma_{yyy}2} = \hat{T} \text{sen}\theta \text{Cos}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.437)$$

$$G_{\sigma_{yy} 3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.438)$$

$$H_{\sigma_{yy} 3} = \hat{T} \cos \theta \text{Sin}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.439)$$

A componente de tensão σ_{xyy} :

$$\sigma_{xyy} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{\sigma_{yy} 1} H_{\sigma_{yy} 1} - G_{\sigma_{yy} 2} H_{\sigma_{yy} 2} \right\} d\xi d\theta, \quad (4.440)$$

com:

$$G_{\sigma_{yy} 1} = 2\text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.441)$$

$$H_{\sigma_{yy} 1} = \hat{T} \cos(\theta) (\text{sen}(\theta))^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.442)$$

$$G_{\sigma_{yy} 2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}, \quad (4.443)$$

$$H_{\sigma_{yy} 2} = \hat{T} \cos \theta \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.444)$$

4.7.Semi-espaço com carregamento concentrado – sistema Cartesiano

A diferença do problema escrito em coordenadas cartesianas, em relação ao problema com carregamento axissimétrico (coordenadas polares), são relativas à integral limitada definida em θ . Para um ponto qualquer com coordenadas x, y , não é possível obter a integral analítica, exceto nos casos particulares x ou y nulos. É necessária a integração numérica dupla, em θ e ξ . Nesta seção será realizada uma análise dos integrandos, isolando a parcela dependente de θ . Tais análises permitem simplificações que fornecem integrandos mais otimizados e, portanto, com menor necessidade de recursos computacionais.

4.7.1 Análise dos integrandos – carregamento concentrado – Funções H

Somente as funções H dependem da variável de integração θ , o que permite sejam analisadas e integradas à parte. No caso do carregamento concentrado, a forma dos carregamentos transformados é a mesma, de maneira que, por conveniência, pode-se escrever:

$$\hat{P} = \hat{T} = \hat{S} = L.$$

As funções H, que serão analisadas, podem ser agrupadas, pois existem componentes idênticas:

$$H_1 = H_{U_{zz}} = H_{\sigma_{zz}} = H_{\sigma_{xx1}} = H_{\sigma_{yy1}} = H_{\sigma_{zz1}} = e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.445)$$

$$H_2 = H_{U_{xz}} = H_{U_{zx}} = H_{\sigma_{zz}} = H_{\sigma_{zz}} = H_{\sigma_{xx1}} = H_{\sigma_{yy1}} = H_{\sigma_{xy}2} = \cos\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.446)$$

$$H_3 = H_{U_{yz}} = H_{\sigma_{yz}} = H_{\sigma_{zy}1} = H_{\sigma_{xy}1} = H_{\sigma_{yy}1} = H_{U_{zy}1} = H_{\sigma_{yx}2} = \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.447)$$

$$H_4 = H_{U_{xx2}} = H_{U_{yx1}} = H_{U_{xy}1} = H_{U_{xy}2} = H_{\sigma_{zy}1} = H_{\sigma_{yx}2} = H_{\sigma_{zy}1} = H_{\sigma_{zy}2} = H_{\sigma_{yz}} = \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.448)$$

$$H_5 = H_{\sigma_{yz}2} = H_{\sigma_{xz}2} = \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.449)$$

$$H_6 = H_{U_{xx1}} = H_{U_{yx2}} = H_{\sigma_{xx1}} = H_{U_{yy}2} = H_{\sigma_{yy}2} = (\cos\theta)^2 \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.450)$$

$$H_7 = H_{\sigma_{xx}2} = H_{\sigma_{yy}2} = H_{\sigma_{yx}2} = \cos\theta \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.451)$$

$$H_8 = H_{\sigma_{xx}3} = H_{\sigma_{yy}3} = \text{sen}\theta \sin(2\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.452)$$

$$H_9 = H_{\sigma_{yx}1} = \text{sen}(\theta) (\cos\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.453)$$

$$H_{10} = H_{\sigma_{yy}1} = \cos(\theta) (\text{sen}(\theta))^2 e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.454)$$

$$H_{11} = H_{U_{yy}1} = H_{\sigma_{xx}2} = H_{\sigma_{yy}1} = (\text{sen}\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.455)$$

$$H_{12} = H_{\sigma_{xy}2} = H_{\sigma_{yy}2} = \text{sen}\theta \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L, \quad (4.456)$$

$$H_{13} = H_{\sigma_{xy}3} = H_{\sigma_{yy}3} = \cos\theta \sin(2\theta) e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} L. \quad (4.457)$$

Como pode ser observado, existem apenas 13 funções H independentes para todas as situações de carregamento. O carregamento concentrado, L, é descrito na forma de um delta de Dirac, considerando a sua transformada de Radon seguida por uma transformada de Fourier, chegando-se a função de carregamento no domínio para a qual o integrando é escrito, e as funções H são dadas por:

$$H_1 = e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.458)$$

$$H_2 = \cos\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\cos\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.459)$$

$$H_3 = \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.460)$$

$$H_4 = \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.461)$$

$$H_5 = \cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.462)$$

$$H_6 = (\cos\theta)^2 \cdot e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.463)$$

$$H_7 = \cos\theta\cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.464)$$

$$H_8 = \text{sen}\theta\sin(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.465)$$

$$H_9 = \text{sen}(\theta)(\cos\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.466)$$

$$H_{10} = \cos(\theta)(\text{sen}(\theta))^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.467)$$

$$H_{11} = (\text{sen}\theta)^2 e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.468)$$

$$H_{12} = \text{sen}\theta\cos(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.469)$$

$$H_{13} = \cos\theta\sin(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.470)$$

O termo exponencial pode ser expandido para a forma trigonométrica através da fórmula de Euler, o que é particularmente útil, pois permite simplificações e uma implementação numérica mais adequada. A expansão do termo exponencial resulta:

$$H_{\text{exp}} = e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)} = \cos(x\delta\xi\cos(\theta))\cos(y\delta\xi\text{sen}(\theta)) - \text{sen}(x\delta\xi\cos(\theta))\text{sen}(y\delta\xi\text{sen}(\theta)) + i\text{sen}(x\delta\xi\cos(\theta))\cos(y\delta\xi\text{sen}(\theta)) + i\cos(x\delta\xi\cos(\theta))\text{sen}(y\delta\xi\text{sen}(\theta)). \quad (4.471)$$

Lembrando que H é integrada no intervalo $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$, pode-se fazer mais uma simplificação, eliminando os termos ímpares para os quais a integração resulta zero. Finalmente, as funções H podem ser apresentadas na forma expandida:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.472)$$

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\theta \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.473)$$

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\theta \left\{ -\sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.474)$$

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\theta \cdot \sin\theta \left\{ -\sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.475)$$

$$H_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.476)$$

$$H_6 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos\theta)^2 \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.477)$$

$$H_7 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\theta \cos(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.478)$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\theta \sin(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.479)$$

$$H_9 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(\theta) (\cos\theta)^2 \left\{ -\sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.480)$$

$$H_{10} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(\theta) (\sin\theta)^2 \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.481)$$

$$H_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin\theta)^2 \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.482)$$

$$H_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\theta \cos(2\theta) \left\{ -\sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}, \quad (4.483)$$

$$H_{13} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\theta \sin(2\theta) \left\{ -\sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\}. \quad (4.484)$$

Estas equações possuem integral analítica apenas em casos particulares, quando $x=0$ ou $y=0$. Será necessária a integração numérica dessas funções para obtenção de uma solução genérica.

Na figura 4.70, são apresentadas as componentes real e imaginária de H_1 considerando, $x=2$, $y=3$, $\delta=1$, $\xi=1$. Na figura 4.71, as mesmas componentes são rerepresentadas, porém para $\xi=5$. Observe que as oscilações aumentam significativamente, e é necessário que se aplique um algoritmo que leve esse efeito em conta. Por serem funções pares, uma vez que as componentes

ímpares já foram excluídas anteriormente, os limites de integração podem ser alterados, considerando o intervalo $0 \leq \xi \leq \pi/2$, e multiplicando o resultado por dois. Tais efeitos também são característica das demais funções H_i .

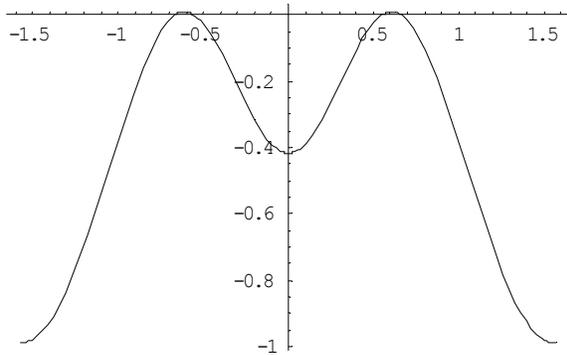


Figura 4.70a. Componente real de H_1 , $\xi=1$

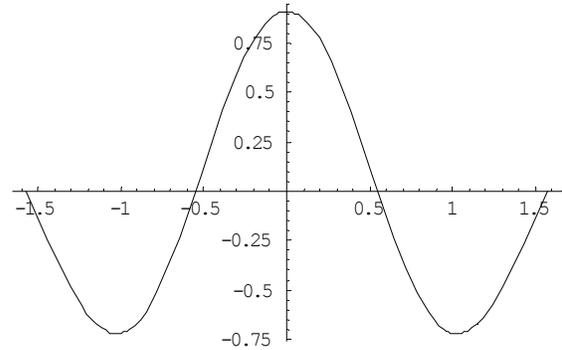


Figura 4.70b. Componente imaginária de H_1 ,

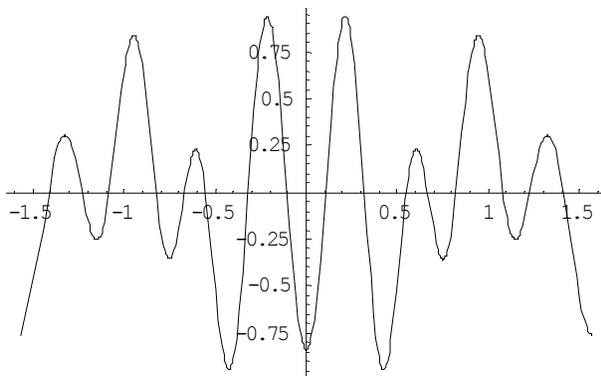


Figura 4.71a. Componente real de H_1 , $\xi=5$

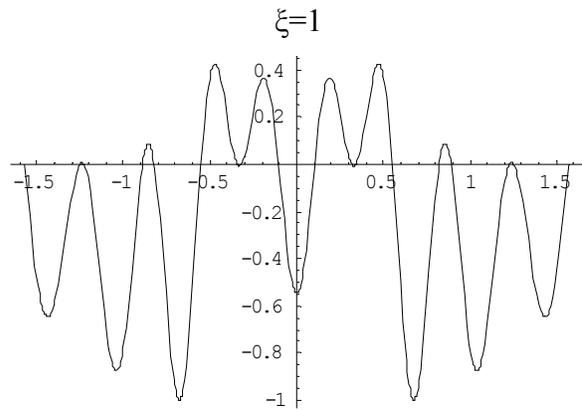


Figura 4.71b. Componente imaginária de H_1 ,
 $\xi=5$

Neste trabalho, a integração dessa função é realizada através de pontos de Gauss, porém, a convergência, utilizando apenas mais pontos de Gauss, é lenta e em alguns casos, impossível. A subdivisão do intervalo de integração é necessária. Para reduzir os custos computacionais, ao invés de iniciar os procedimentos numéricos com um intervalo, que na falha da convergência seria dividido em um segundo, e assim por diante, até que o valor da integração fosse obtido, adotou-se um critério para determinação do número de intervalos inicial. O número de oscilações, e conseqüente passagem por zero, é função de x, y, ξ e δ . Através da análise das funções, obteve-se uma relação que fornece o número aproximado de intervalos necessários,

$$NI = \left\lceil \frac{\delta \xi (x+y)}{3} \right\rceil, \quad (4.485)$$

arredondando-se NI para o número inteiro superior mais próximo. Nos casos em que $x=y=0$, inicia-se o processo com um intervalo de 0 a $\pi/2$.

Através da análise dos resultados da integração de H, pode ser possível mais alguma simplificação dos integrandos. Considerando-se os parâmetros: $x=2$, $y=3$, $\delta=1$, aplica-se o processo de integração para vários valores de ξ , sendo assim possível entender o comportamento da função, pois esta será multiplicada pelo núcleo para ser integrada em ξ . As integrais de H são indicadas por HI. Para HI_1 , vide a figura 4.72, observe que a componente imaginária é ímpar e a real é par. O próximo passo é analisar o comportamento das demais funções HI, conhecendo as características dos núcleos G, é possível eliminar mais uma parcela do integrando. Nas figuras apresentadas no Anexo I, são apresentadas as componentes reais e imaginárias das funções HI_i . Note que sempre existe uma parcela par e uma ímpar, respectivamente, a componente real e a ímpar.

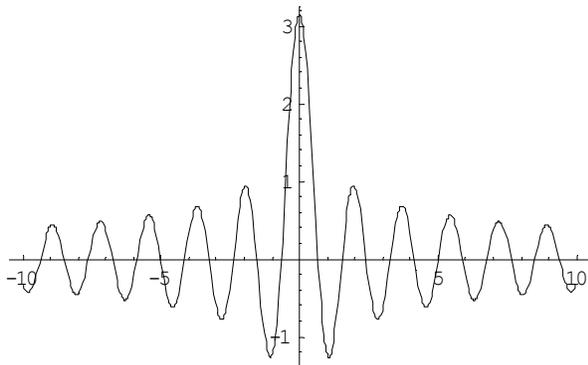


Figura 4.72a. Componente real de HI_1 - par

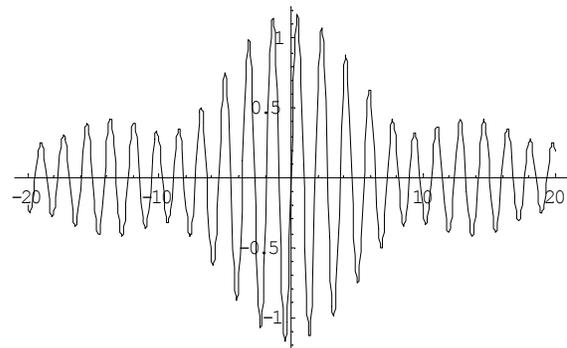


Figura 4.72b. Componente imaginária de HI_1 – ímpar

4.7.2 Análise dos integrandos – carregamento concentrado – Funções G, núcleos

As funções G são independentes de x,y e do carregamento aplicado. Os parâmetros materiais influenciam da mesma maneira que o observado na seção que discutia o carregamento axissimétrico, por isso esses efeitos não serão reapresentados. Determinando se as funções G são pares ou ímpares, e conhecendo as características das funções HI, é possível simplificar o integrando final, desprezando as parcelas que resultariam integral nula, isto é, as funções ímpares resultantes do produto $G \cdot IH$.

Os núcleos para carregamento vertical são dados por:

$$G_{Uzz} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.486)$$

$$G_{Uyz} = G_{Uxz} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}, \quad (4.487)$$

$$G_{\sigma_{zz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}, \quad (4.488)$$

$$G_{\sigma_{yz}} = G_{\sigma_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right] \right\}, \quad (4.489)$$

$$G_{\sigma_{yyz1}} = G_{\sigma_{xxz1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \left(i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1 \right) A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \left(i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2 \right) C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}, \quad (4.490)$$

$$G_{\sigma_{yyz2}} = G_{\sigma_{xxz2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}, \quad (4.491)$$

$$G_{\sigma_{xyz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \psi_2 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}. \quad (4.492)$$

No Anexo II são apresentadas as componentes real e imaginária dessas funções. Na tabela a seguir são definidas as características das funções:

Função Núcleo (parte real e imaginária), carga vertical	Característica:
Guzz	Par
Guyz = Guxz	Ímpar
Gσzzz	Par
Gσzyz = Gσzxz – ímpar	Ímpar
Gσyyz1 = Gσxxz1	Par
Gσyyz2 = Gσxxz2	Par
Gσxyz	Par

Para carregamentos horizontais, note que $A_S^* = A_T^*$ e $C_S^* = C_T^*$, desse modo os núcleos são dados por:

$$G_{U_{xy}1} = G_{U_{zx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.493)$$

$$G_{U_{yy}1} = G_{U_{yx1}} = G_{U_{xy}1} = G_{U_{xx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.494)$$

$$G_{U_{yy}2} = G_{U_{yx2}} = G_{U_{xy}2} = G_{U_{xx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu \beta}, \quad (4.495)$$

$$G_{\sigma_{zxy}1} = G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_S^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C_S^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}, \quad (4.496)$$

$$G_{\sigma_{zyy}1} = G_{\sigma_{zyx}1} = G_{\sigma_{zxy}1} = G_{\sigma_{zxx}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.497)$$

$$G_{\sigma_{zyy}2} = G_{\sigma_{zyx}2} = G_{\sigma_{zxy}2} = G_{\sigma_{zxx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.498)$$

$$G_{\sigma_{yyy}1} = G_{\sigma_{yyx}1} = G_{\sigma_{xyy}1} = G_{\sigma_{xxx}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.499)$$

$$G_{\sigma_{yyy}2} = G_{\sigma_{yyx}2} = G_{\sigma_{xyy}2} = G_{\sigma_{xxx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.500)$$

$$G_{\sigma_{yyy}3} = G_{\sigma_{yyx}3} = G_{\sigma_{xyy}3} = G_{\sigma_{xxx}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta\delta} \right\}, \quad (4.501)$$

$$G_{\sigma_{yyx}1} = G_{\sigma_{yxx}1} = 2 \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.502)$$

$$G_{\sigma_{yxx}2} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}, \quad (4.503)$$

$$G_{\sigma_{xyy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}. \quad (4.504)$$

Estas funções são apresentadas no Anexo II. Na tabela a seguir são apresentadas as características dessas funções:

Função Núcleo (parte real e imaginária), carga horizontal	Característica:
Guxy1 e Guzx	Ímpar
Guyy1, Guyx1, Guxy1, Guxx1	Par
Guyy2, Guyx2, Guxy2, Guxx2	Par
Gszy1, Gszzx	Ímpar
Gszyy1, Gszyx1, Gszy1, Gszxx1	Par
Gszyy2, Gszyx2, Gszy2, Gszxx2	Par
Gsyyy1, Gsyyx1, Gsxyy1, Gsxxx1	Ímpar
Gsyyy2, Gsyyx2, Gsxyy2, Gsxxx2	Ímpar
Gsyyy3, Gsyyx3, Gsxyy3, Gsxxx3	Ímpar
Gsxyy1, Gsxyx1	Ímpar
Gsxyy2, -Gsxyy2	Ímpar

4.7.3 Conjunto final de equações para carregamento concentrado

Considerando as funções pares e ímpares do núcleo, bem como da integração de funções H, e que o produto dessas funções pode resultar uma função par ou ímpar, pode-se obter a forma final dos integrandos para carregamento concentrado.

Para o carregamento vertical, o deslocamento vertical é dado por:

$$U_{zz} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.505)$$

$$G_{U_{zz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.506)$$

o deslocamento horizontal na direção x é dado por:

$$U_{xz} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos(\theta) \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\} d\theta d\xi d\theta, \quad (4.507)$$

$$G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\}, \quad (4.508)$$

e, finalmente, o deslocamento horizontal na direção y:

$$U_{yz} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \sin(\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \sin(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\} d\xi d\theta, \quad (4.509)$$

$$G_{U_{yz}} = G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right] \right\} \quad (4.510)$$

a componente de tensão σ_{zzz} :

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.511)$$

$$G_{\sigma_{zzz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}. \quad (4.512)$$

para componente de tensão σ_{zxx} :

$$\sigma_{zxx} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos(\theta) \sin(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \sin(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.513)$$

$$G_{\sigma_{zxx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \left[\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right] \right\}, \quad (4.514)$$

σ_{zyz} é escrita por:

$$\sigma_{zyz} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ isen(\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) sen(y\delta\xi sen(\theta)) \right\} d\theta d\xi. \quad (4.515)$$

$$G_{\sigma_{zyz}} = G_{\sigma_{zxx}} = sign(\delta\xi) \xi \delta \left\{ [\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z}] \right\}. \quad (4.516)$$

e a componente σ_{xxz} :

$$\sigma_{xxz} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi sen(\theta)) d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi sen(\theta)) d\theta d\xi \right], \quad (4.517)$$

$$G_{\sigma_{xxz1}} = sign(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.518)$$

$$G_{\sigma_{xxz2}} = sign(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.519)$$

para a componente σ_{yyz} :

$$\sigma_{yyz} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi sen(\theta)) d\theta d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi sen(\theta)) d\theta d\xi \right], \quad (4.520)$$

$$G_{\sigma_{yyz1}} = G_{\sigma_{xxz1}} = sign(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.473)$$

$$G_{\sigma_{yyz2}} = G_{\sigma_{xxz2}} = sign(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.521)$$

e para o termo de tensão σ_{xyz} :

$$\sigma_{xyz} = \frac{\mu i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot sen\theta sen(x\delta\xi \cos(\theta)) sen(y\delta\xi sen(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.522)$$

$$G_{\sigma_{xyz}} = 2sign(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.523)$$

Para carregamento tangencial em x (S), o deslocamento vertical é dado por:

$$U_{zx} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ isen(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi sen(\theta)) \cos\theta \right\} d\theta d\xi, \quad (4.524)$$

$$G_{U_{xx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.525)$$

o deslocamento em x pode ser calculado através de:

$$U_{xx} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\cos \theta)^2 \cdot \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\text{sen}\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.526)$$

$$G_{U_{xx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.527)$$

$$G_{U_{xx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.528)$$

e, a componente de deslocamento horizontal em y como:

$$U_{yx} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos \theta \cdot \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \cos \theta \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.529)$$

$$G_{U_{yx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.530)$$

$$G_{U_{yx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}.$$

Para a tensão σ_{zzx} , considera-se:

$$\sigma_{zzx} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos \theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.532)$$

$$G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_S^* e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C_S^* e^{-\delta \alpha_2 z} \right\}, \quad (4.533)$$

para σ_{zxx} :

$$\sigma_{zxx} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\cos \theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\text{sen}\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right] \quad (4.534)$$

$$G_{\sigma_{xx}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta\left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z}\right], \quad (4.535)$$

$$G_{\sigma_{xx}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}, \quad (4.536)$$

para a componente de tensão σ_{zyx} :

$$\sigma_{zyx} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyx}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyx}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right] \quad (4.537)$$

$$G_{\sigma_{zyx}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta\left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z}\right], \quad (4.538)$$

$$G_{\sigma_{zyx}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}, \quad (4.539)$$

para a componente de tensão σ_{xxx} :

$$\sigma_{xxx} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos\theta \text{Cos}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx}3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \sin\theta \text{Sin}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.540)$$

$$G_{\sigma_{xxx}1} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ (i\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2\lambda + (\lambda + \mu)\xi\psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.541)$$

$$G_{\sigma_{xxx}2} = \text{sign}(\delta\xi)\xi\delta^2 \left\{ \mu\xi\psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu\xi\psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.542)$$

$$G_{\sigma_{xxx}3} = \text{sign}(\delta\xi)\xi^2\delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.543)$$

e para a tensão σ_{yyx} :

$$\sigma_{yyx} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos \theta \operatorname{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos \theta \operatorname{Cos}(2\theta) \operatorname{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx}3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen} \theta \operatorname{Sin}(2\theta) \operatorname{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.544)$$

$$G_{\sigma_{yyx}1} = \operatorname{ign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.545)$$

$$G_{\sigma_{yyx}2} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.546)$$

$$G_{\sigma_{yyx}3} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.547)$$

e, finalmente, para a componente σ_{xyx} :

$$\sigma_{xyx} = \frac{\mu i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyx}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen}(\theta) (\cos \theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyx}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen} \theta \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.548)$$

$$G_{\sigma_{xyx}1} = 2 \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.549)$$

$$G_{\sigma_{xyx}2} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}. \quad (4.550)$$

Para o carregamento horizontal em y (T), o deslocamento vertical é:

$$U_{zy} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen} \theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.551)$$

$$G_{U_{zy}1} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\},$$

o deslocamento em x é determinado por:

$$U_{xy} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.552)$$

$$G_{U_{xy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.553)$$

$$G_{U_{xy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.554)$$

e para o deslocamento na direção em y, tem-se:

$$U_{yy} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\text{sen}\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\cos\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.555)$$

$$G_{U_{yy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.556)$$

$$G_{U_{yy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.557)$$

Para a componente de tensão σ_{zzy} :

$$\sigma_{zzy} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.558)$$

$$G_{\sigma_{zzy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.559)$$

a componente σ_{zxy} é:

$$\sigma_{zxy} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.560)$$

$$G_{\sigma_{zxy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.561)$$

$$G_{\sigma_{zxy} 2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.562)$$

A componente σ_{zyy} é determinada por:

$$\sigma_{zyy} = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyy} 1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\text{sen}\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyy} 2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ (\cos\theta)^2 \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.563)$$

$$G_{\sigma_{zyy} 1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.564)$$

$$G_{\sigma_{zyy} 2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.565)$$

A componente normal σ_{xxy} é:

$$\sigma_{xxy} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxy} 1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxy} 2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \text{sen}\theta \text{Cos}(2\theta) i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxy} 3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos\theta \text{Sin}(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.566)$$

$$G_{\sigma_{xxy} 1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.567)$$

$$G_{\sigma_{xxy} 2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.568)$$

$$G_{\sigma_{xxy} 3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.569)$$

para a componente normal σ_{yyy} :

$$\sigma_{yyy} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen} \theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \operatorname{sen} \theta \operatorname{Cos}(2\theta) i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyy}3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos \theta \operatorname{Sin}(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \operatorname{sen}(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.570)$$

$$G_{\sigma_{yyy}1} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.571)$$

$$G_{\sigma_{yyy}2} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.572)$$

$$G_{\sigma_{yyy}3} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.573)$$

A tensão de cisalhamento σ_{xyy} é dada por:

$$\sigma_{xyy} = \frac{\mu i}{4\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos(\theta) (\operatorname{sen}(\theta))^2 \operatorname{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \cos \theta \operatorname{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.574)$$

$$G_{\sigma_{xyy}1} = 2 \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.575)$$

$$G_{\sigma_{xyy}2} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}. \quad (4.576)$$

4.7.4 Técnicas de integração

O comportamento dos núcleos é idêntico ao observado na seção 4.5.6, pois a equação que representa o carregamento concentrado é a mesma. O que define a técnica de integração para o sistema cartesiano são as parcelas a serem integradas em θ . Nas seções 4.7.1 até 4.7.3, foram apresentadas considerações que permitiram a simplificação das equações finais.

As parcelas dependentes de θ , que devem ser integradas (seção 4.7.3), apresentam, como resultante, comportamento oscilatório como o observado para as funções de Bessel obtidas no

problema axissimétrico. Todas as componentes das funções IH, que apresentavam batimento, não são utilizadas, pois resultariam em integral nula. Desse modo, é possível adotar o algoritmo de Longman, o passo é determinado como no problema axissimétrico, através da equação 4.273. Análises realizadas com a função resultante da integração em θ , mostraram não ser necessário determinar os zeros que delimitam os volumes. Independentemente de ξ onde se inicia o cálculo, para o passo calculado, os volumes decaem e alternam os sinais. O caminho de integração é o mesmo do problema anterior. Entretanto, para cada valor de ξ , é necessário realizar a integração numérica em θ .

4.7.5 Resultados numéricos para carregamento concentrado – sistema cartesiano

Inicialmente, considere o problema com carregamentos concentrados vertical e horizontais na direção x e y, aplicados na origem do sistema de coordenadas. Adotando baixas frequências, é possível realizar uma comparação com o problema estático para o qual existem respostas analíticas. Boussinesq apresentou a solução para o semi-espaco tridimensional submetido a carregamento concentrado vertical, e para o carregamento tangencial a solução estática pode ser obtida do problema de Cerruti (Hahn, H. G., 1985).

Considerando o coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, o módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, um amortecimento histerético constante $\eta=0.01$, e uma frequência quase-estática $\omega=0.01\text{rad/s}$, e, analisando pontos na superfície livre, $z=0$, calculam-se os deslocamentos ao longo da direção do eixo x, com $y=0$, erros relativos e absolutos para integração numérica 10^{-8} . Na figura 4.73a, é apresentado o resultado do módulo do deslocamento vertical devido ao carregamento vertical (foi mantido o sinal da componente real), podendo ser observada uma boa concordância com a resposta analítica. De fato, os erros são inferiores a 0.05%, como pode ser visualizado na figura 4.73b; nesta figura foi omitido o ponto $x=0.1$, para o qual o erro foi de 1.77%. Tal componente possui uma singularidade na origem do sistema de coordenadas, e tende ao infinito para $x=y=z=0$. O erro pode ser explicado pela presença de amortecimento material utilizado na implementação, e, também, por se tratar de uma simulação quase-estática, que, mesmo para baixas frequências, possui pequenas oscilações.

O deslocamento horizontal na direção do eixo x, U_{xz} , é apresentado na figura 4.74. Essa resposta também é singular na origem. Em tal função, foram observados erros maiores. Para

pontos afastados, podem ser observados erros de até 5%. Para análise do deslocamento na direção Y, U_{yz} , foram considerados os pontos ao longo do eixo y. Tal componente, ao longo do eixo x, é nula. Como o problema do carregamento vertical é axissimétrico, a resposta de deslocamento U_{yz} , ao longo de y, é igual ao deslocamento U_{xz} ao longo do eixo x. Este resultado pode ser observado, comparando-se essas respostas de deslocamento. A componente U_{yz} pode ser visualizada na figura 4.75.

A mesma análise foi realizada considerando o carregamento tangencial em X. Para o deslocamento vertical, U_{zx} , os resultados podem ser visualizados na figura 4.76. Observe que os erros relativos, na comparação com o problema estático de Cerruti, aumentam com valores maiores de x. Para a componente de deslocamento horizontal na direção x, os erros não são tão significantes, como pode ser observado na figura 4.77. A componente de deslocamento horizontal em y, foi calculada ao longo da direção do eixo x, porém com $y=1$, pois, ao longo do eixo x, é nula. Os resultados e a comparação com o problema de Cerruti são apresentados na figura 4.78, ocorrendo uma boa concordância das respostas.

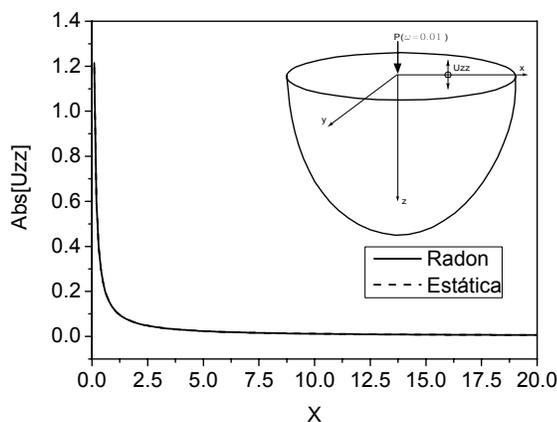


Figura 4.73a. U_{zz} – problema quase-estático.

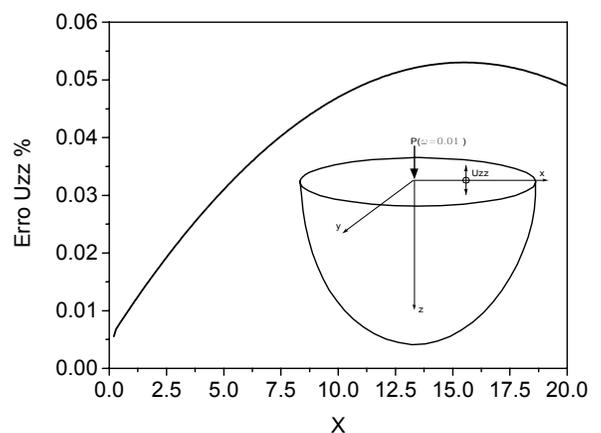


Figura 4.73b. Erro relativo para U_{zz}

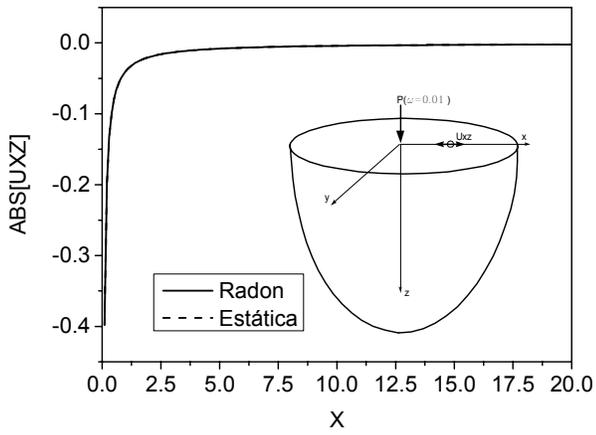


Figura 4.74a. U_{xz} – problema quase-estático.

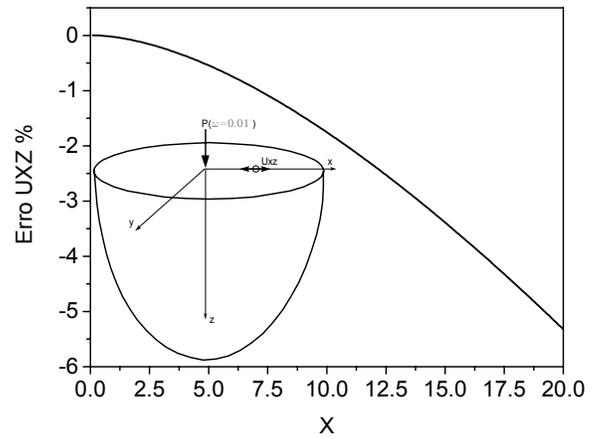


Figura 4.74b. Erro relativo para U_{xz}

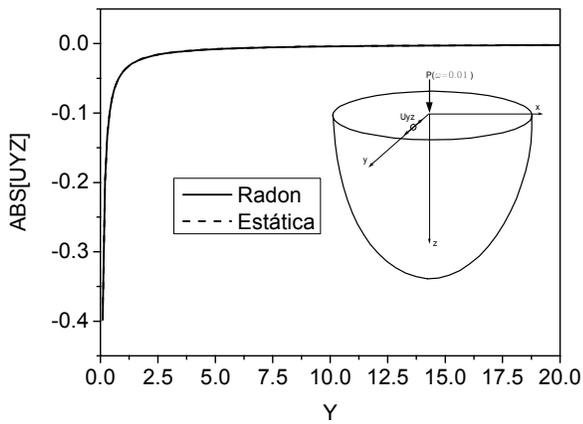


Figura 4.75a. U_{yz} – problema quase-estático.

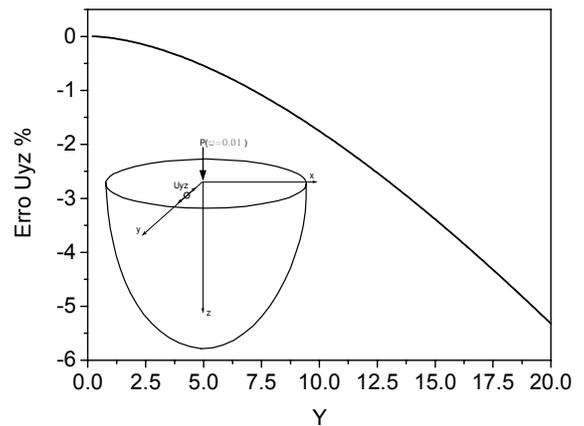


Figura 4.75b. Erro relativo para U_{yz}

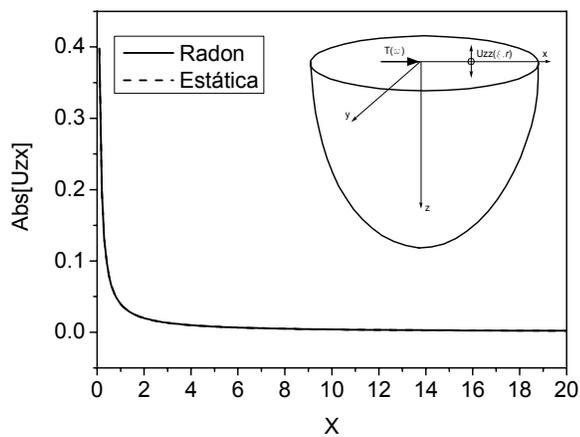


Figura 4.76a. U_{zx} – problema quase-estático.

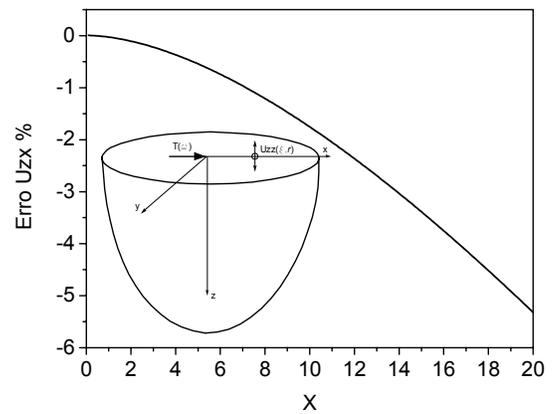


Figura 4.76b. Erro relativo para U_{zx}

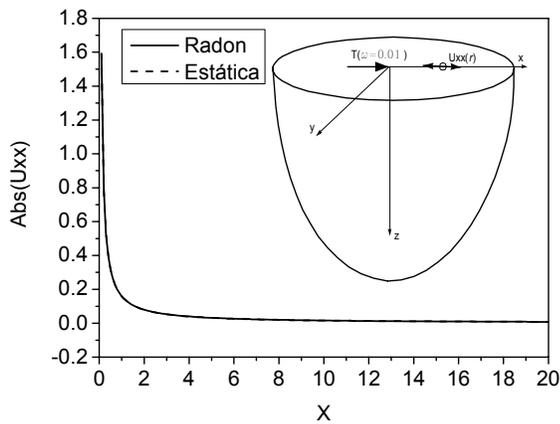


Figura 4.77a. U_{xx} – problema quase-estático.

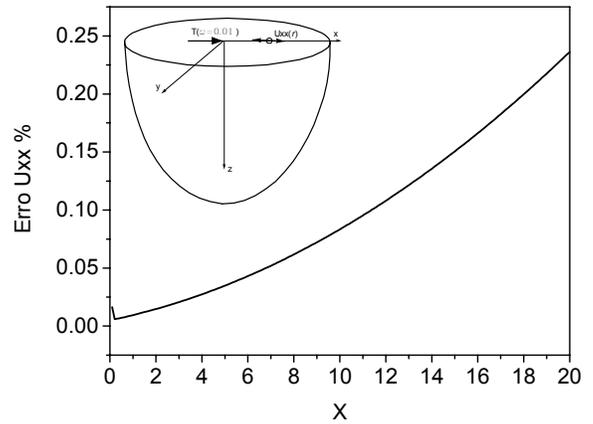


Figura 4.77b. Erro relativo para U_{xx}

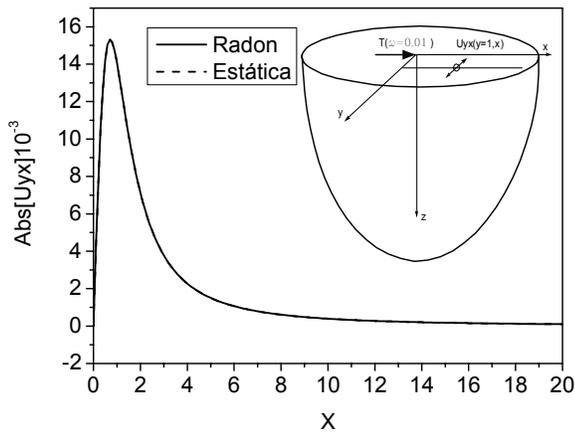


Figura 4.78a. U_{yx} – problema quase-estático.

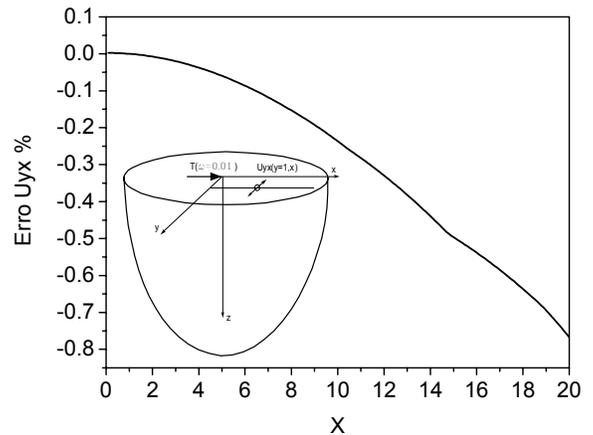


Figura 4.78b. Erro relativo para U_{yx}

Para validação com carregamento dinâmico, foi aplicada uma implementação que utiliza a transformada bidimensional de Fourier (Romanini, 1995). Considerando os parâmetros materiais: coeficiente de Poisson $\nu=0.4$, coordenadas $y=1$ e $z=1$, fator de amortecimento $\eta=0.1$, módulo de cisalhamento, $G=1\text{N/m}^2$, erros relativos e absolutos de integração de 10^{-8} . Essas coordenadas foram adotadas para que nenhuma componente fosse nula, como ocorre ao longo de $x=0$ ou $y=0$. Os resultados de deslocamento vertical devido à carga vertical, U_{zz} , e os erros relativos entre as duas implementações, são apresentados nas figuras 4.79, 4.80, 4.81, para frequências de excitação $\omega=1\text{rad/s}$, $\omega=5\text{rad/s}$ e $\omega=10\text{rad/s}$, respectivamente. Ocorre uma boa concordância entre as duas formulações, como pode ser observado nos gráficos que fornecem o erro. Para a

componente de deslocamento horizontal em x, U_{xz} , foi realizada a mesma análise. Os resultados podem ser observados nas figuras 4.82 a 4.84, notando-se uma boa concordância entre as duas formulações.

Considerando o deslocamento na direção Y, também foram obtidos resultados muito semelhantes entre as duas formulações, para isso observe as figuras 4.85 a 4.87, que fornecem U_{yz} para diferentes valores de frequência.

Para carregamento horizontal no eixo X, a componente de deslocamento vertical, e erros relativos entre as duas formulações, é apresentada nas figuras 4.88 a 4.90 para $\omega=1\text{rad/s}$, $\omega=5\text{rad/s}$ e $\omega=10\text{rad/s}$, existindo uma boa correlação entre as respostas. O deslocamento na direção do eixo x, U_{xx} , para as diferentes frequências, é apresentado nas figuras 4.91 a 4.93. Em alguns pontos são apresentados picos de erro, mas, em geral, ocorre uma boa concordância. Tais picos se dão nos pontos em que a componente cruza o eixo, e são conseqüências da maneira pela qual é calculado o erro relativo. Finalmente, para o deslocamento na direção do eixo y, U_{yx} , podem ser observados bons resultados nas figuras 4.94 a 4.96.

O fator mais importante da implementação com a transformada dupla de Fourier é que deve lidar com duas integrais ilimitadas. A presente formulação trabalha com apenas uma integral imprópria e uma limitada. A integral limitada fornece uma função que oscila e decai monotonicamente, permitindo o uso do algoritmo de Longman para resolver a integral ilimitada. Para obter todas as componentes de deslocamento, foram necessários os seguintes tempos:

Frequência	Formulação com Radon	Formulação com Fourier
$\omega=1$	32 s	324 s
$\omega=5$	89 s	453 s
$\omega=10$	188 s	645 s
$\omega=20$	519 s	783 s

O aumento dos valores de frequência elevam a necessidade de recursos computacionais da presente formulação, pois a integral limitada em Θ torna-se mais custosa. Este efeito também ocorre quando se aumentam os valores de x e y.

Para comparar os recursos necessários, foi considerada também uma simulação com coordenadas $z=0$, $x=y=1$, para determinar as respostas de deslocamento para frequências, variando no intervalo $0.1 < \omega < 50$, com passo de frequência $\Delta \omega = 0.1$. Para a implementação resultante da Transformada de Radon, foram necessários 755 s, e para a implementação com Fourier 2267 s foram utilizados.

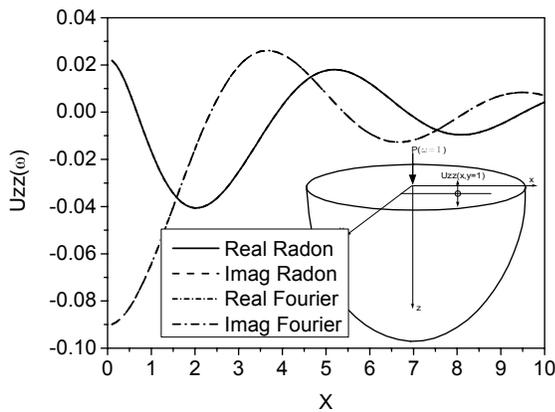


Figura 4.79a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=1$

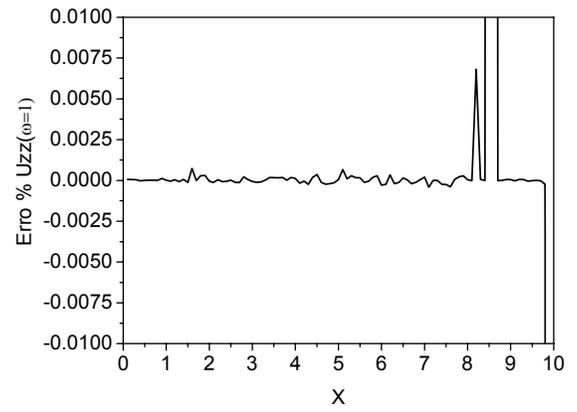


Figura 4.79b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=1$

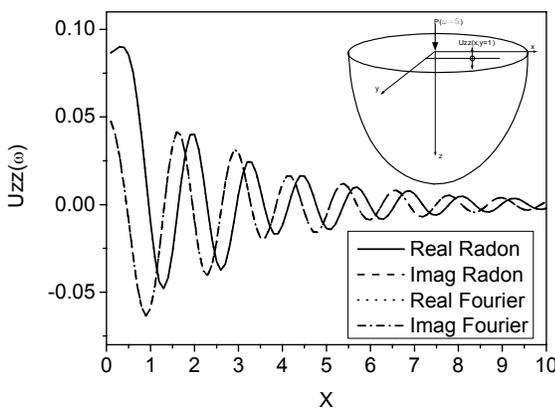


Figura 4.80a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=5$

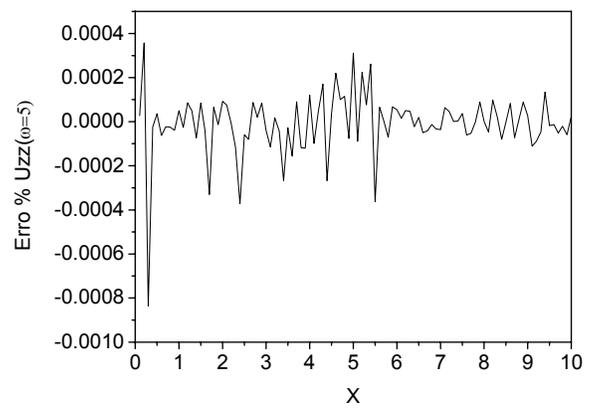


Figura 4.80b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=5$

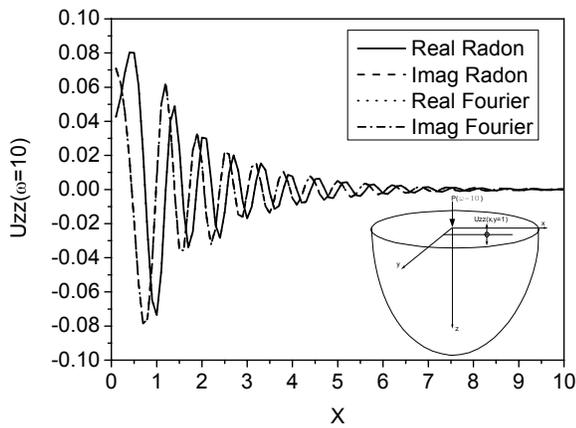


Figura 4.81a. Deslocamento U_{zz} , $\omega=10$

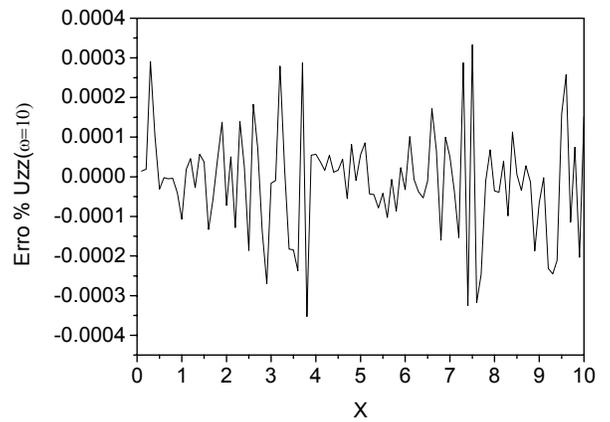


Figura 4.81b. Erro Relativo U_{zz} , $\omega=10$

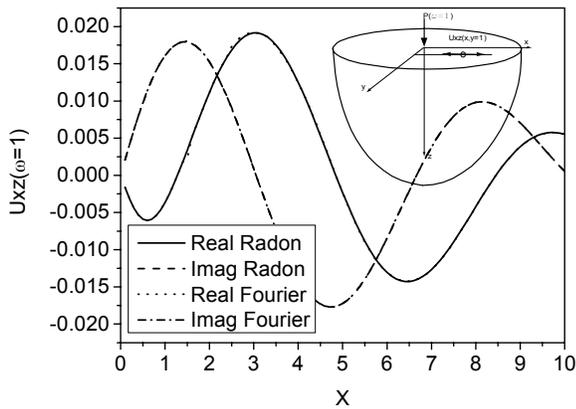


Figura 4.82a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=1$

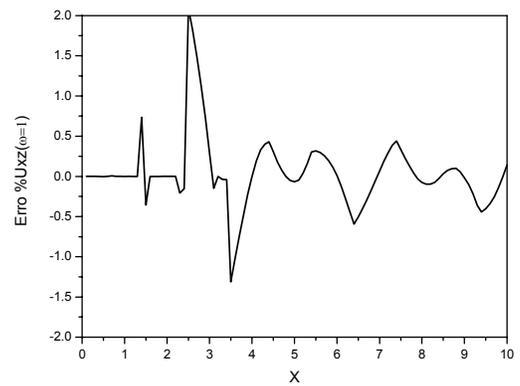


Figura 4.82b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=1$

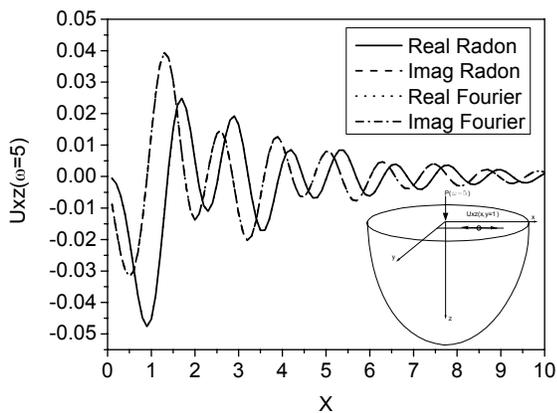


Figura 4.83a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=5$

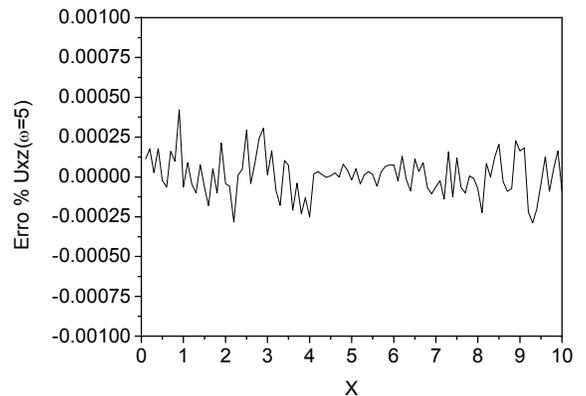


Figura 4.83b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=5$

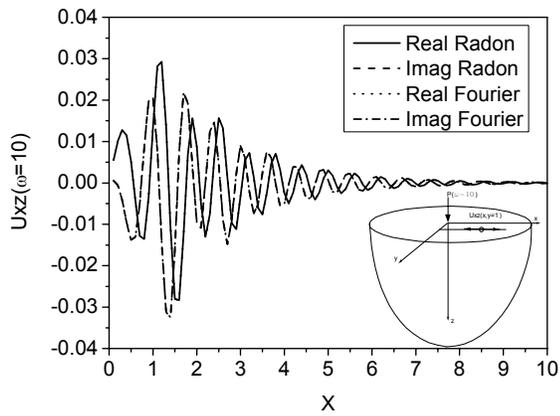


Figura 4.84a. Deslocamento U_{xz} , $\omega=10$

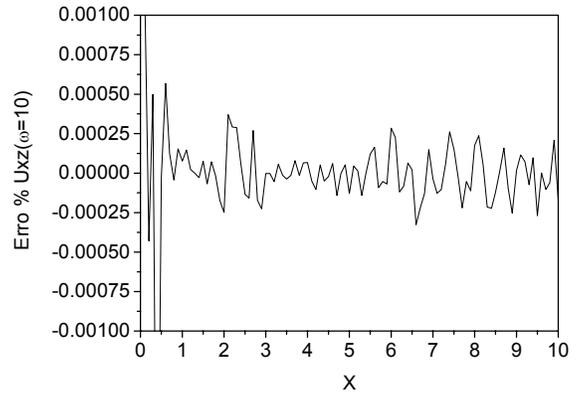


Figura 4.84b. Erro Relativo U_{xz} , $\omega=10$

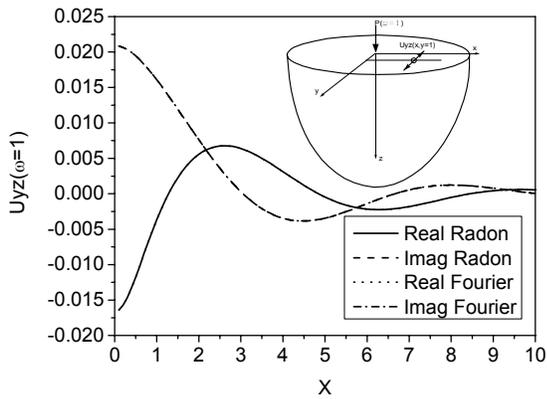


Figura 4.85a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=1$

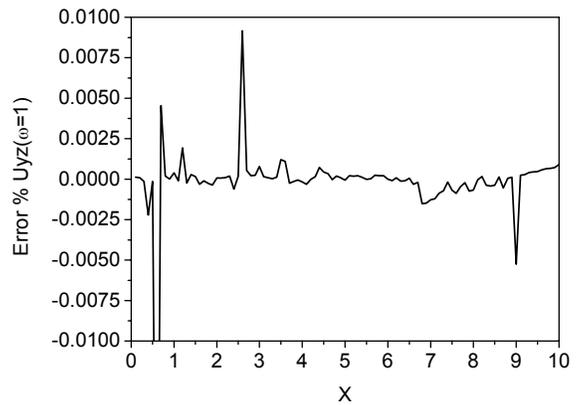


Figura 4.85b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=1$

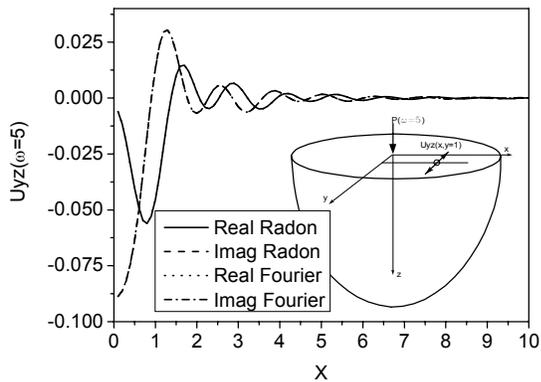


Figura 4.86a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=5$

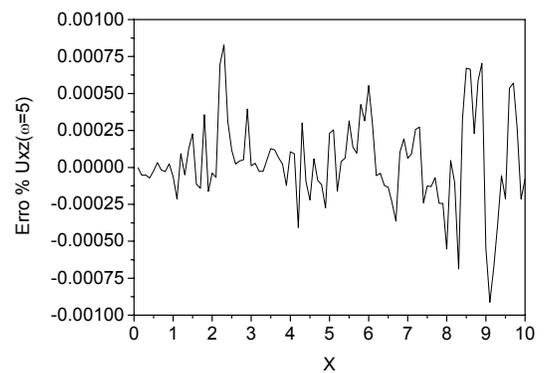


Figura 4.86b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=5$

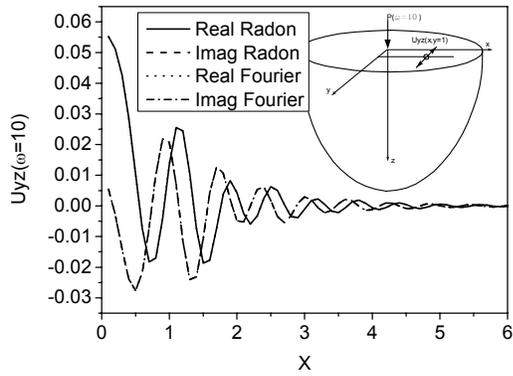


Figura 4.87a. Deslocamento U_{yz} , $\omega=10$

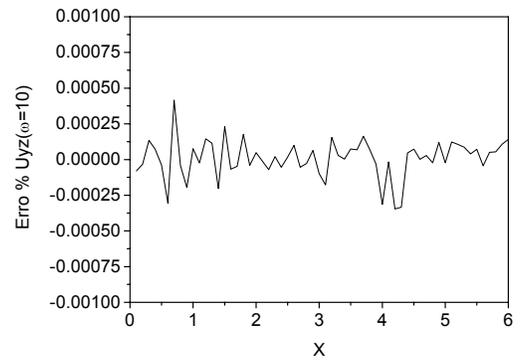


Figura 4.87b. Erro Relativo U_{yz} , $\omega=10$

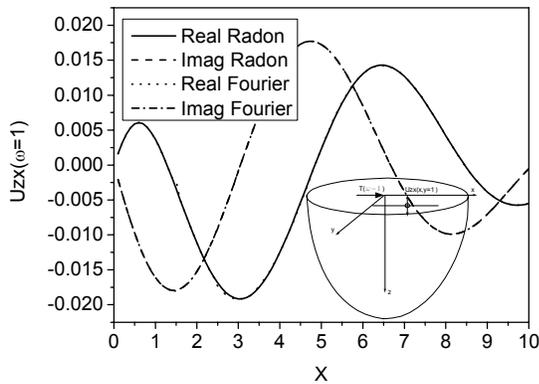


Figura 4.88a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=1$

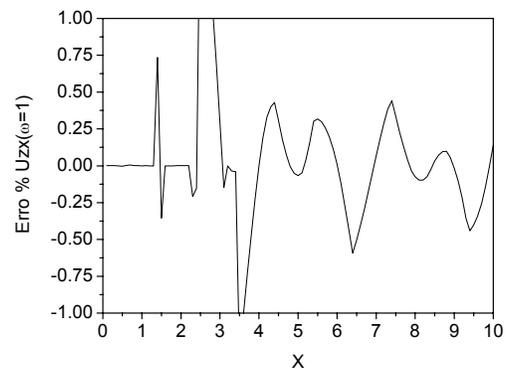


Figura 4.88b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=1$

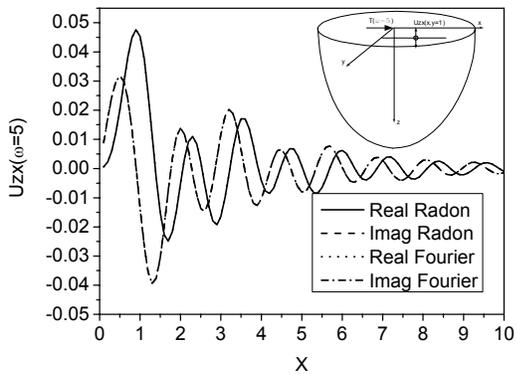


Figura 4.89a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=5$

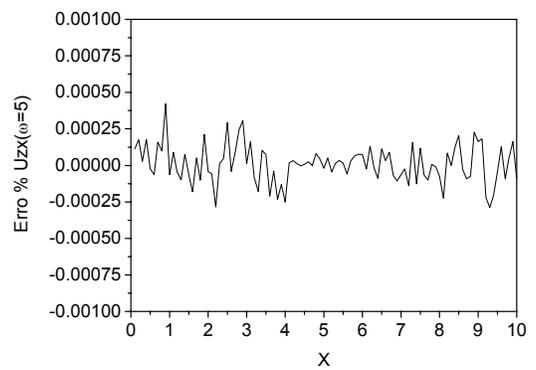


Figura 4.89b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=5$

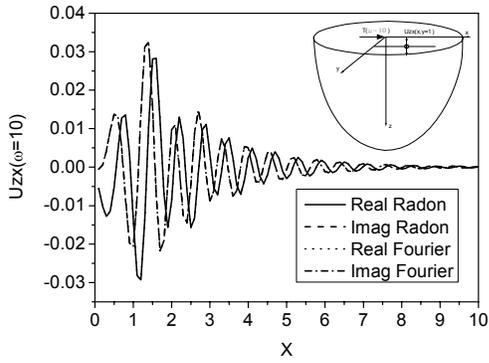


Figura 4.90a. Deslocamento U_{zx} , $\omega=10$

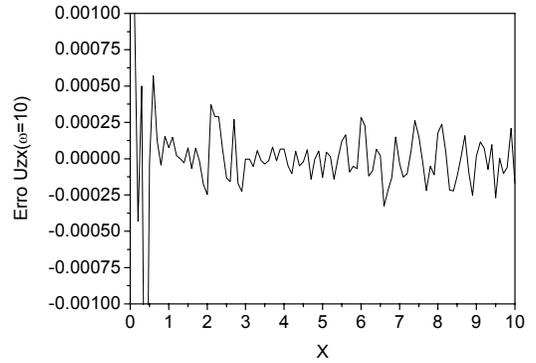


Figura 4.90b. Erro Relativo U_{zx} , $\omega=10$

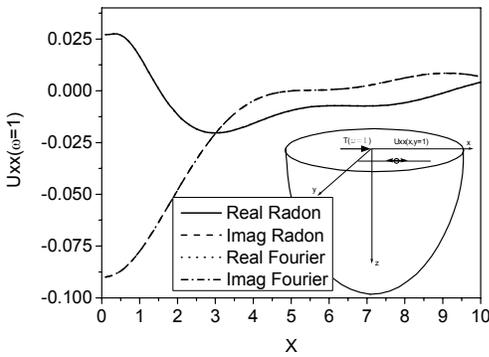


Figura 4.91a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=1$

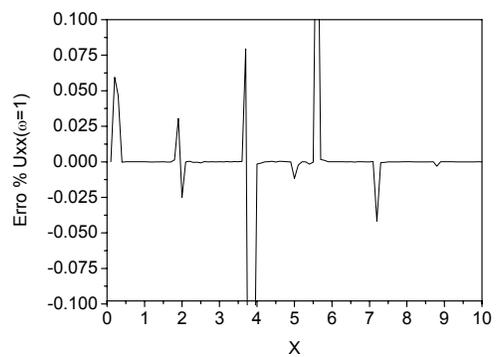


Figura 4.91b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=1$

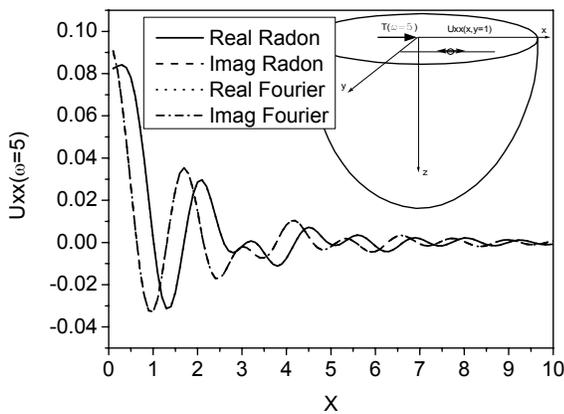


Figura 4.92a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=5$

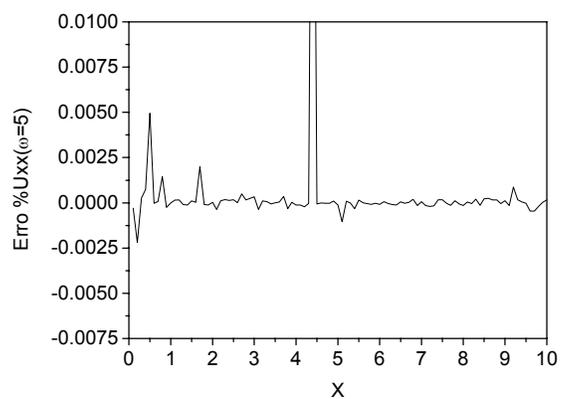


Figura 4.92b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=5$

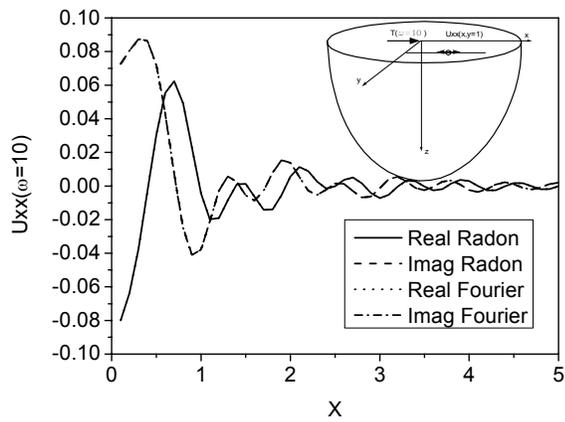


Figura 4.93a. Deslocamento U_{xx} , $\omega=10$

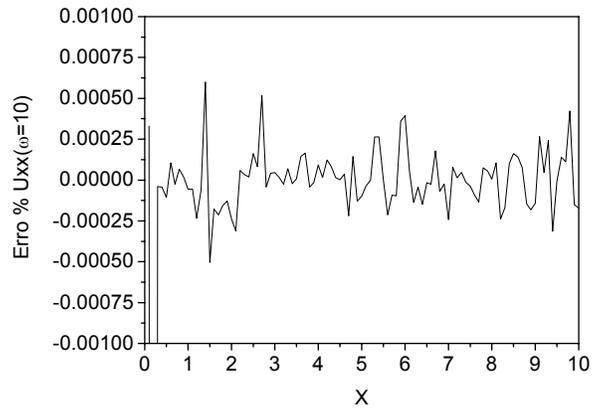


Figura 4.93b. Erro Relativo U_{xx} , $\omega=10$

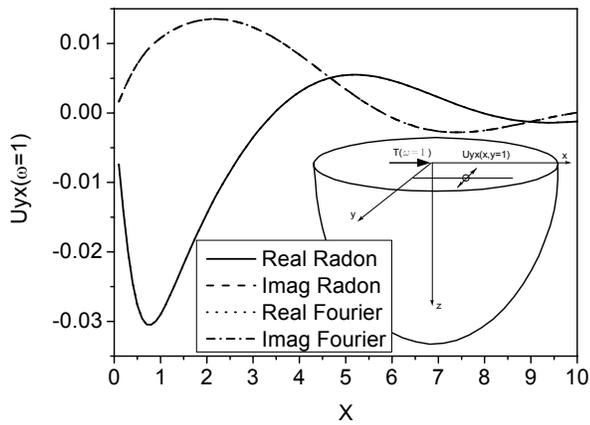


Figura 4.94a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=1$

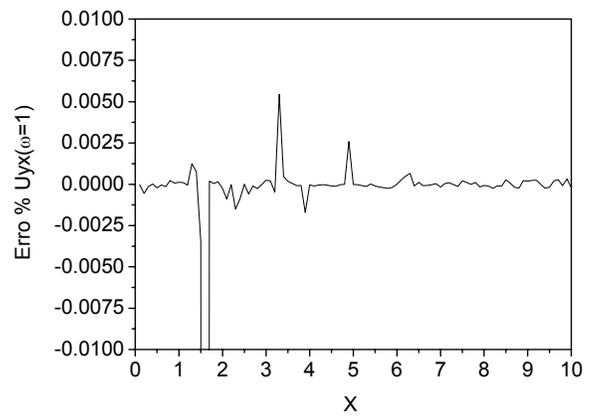


Figura 4.94b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=1$

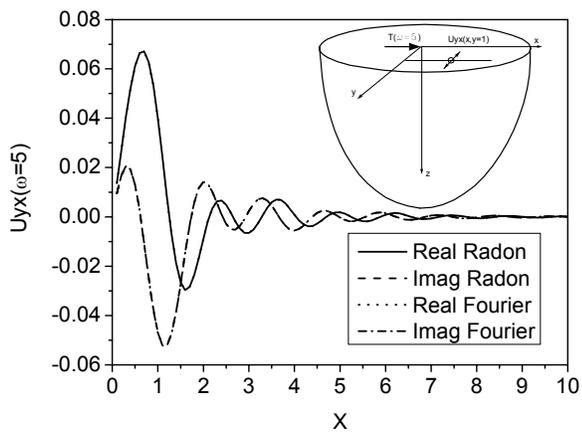


Figura 4.95a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=5$

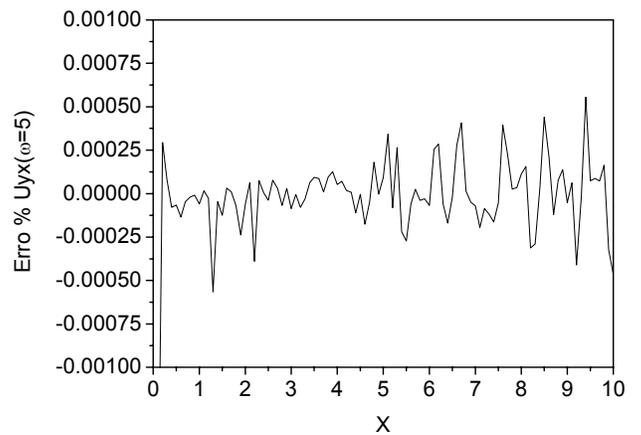


Figura 4.95b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=5$

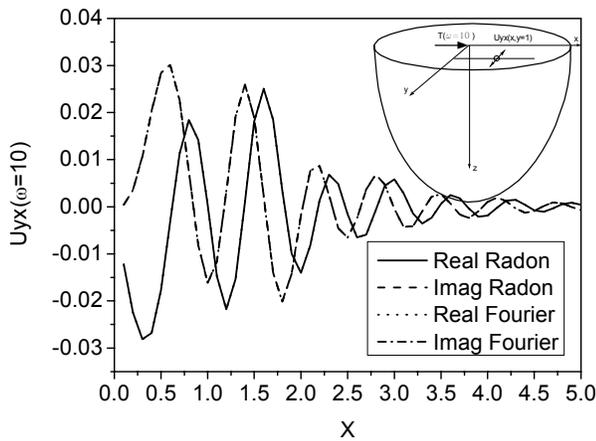


Figura 4.96a. Deslocamento U_{yx} , $\omega=10$

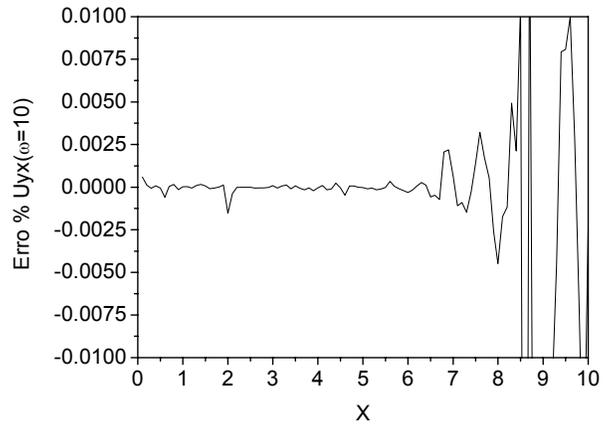


Figura 4.96b. Erro Relativo U_{yx} , $\omega=10$

Para a análise das componentes de tensão, foi adotado o coeficiente de Poisson $\nu=0.4$, ponto com coordenadas $y=1\text{m}$ e $z=1\text{m}$, fator de amortecimento $\eta=0.1$, modulo de cisalhamento, $\mu=1\text{N/m}^2$, e frequência $\omega=5\text{rad/s}$, erros absolutos e relativos de integração de 10^{-8} . As respostas, considerando carregamento vertical, são apresentadas nas figuras 4.97 a 4.102, para as seis componentes de tensão σ_{zzz} , σ_{xxz} , σ_{yyz} , σ_{xzz} , σ_{yzz} e σ_{xyz} , foram obtidas boas respostas comparando as duas formulações. Para realizar as integrações, a implementação com transformada de Radon utilizou 85 s, e a com transformada de Fourier 295 s.

Para o problema considerando o carregamento horizontal em x , as seis componentes de tensão são apresentadas nas figuras 4.103 a 4.108, para σ_{zzx} , σ_{xxx} , σ_{yyx} , σ_{xzx} , σ_{yzx} e σ_{xyx} , respectivamente. Foram obtidas respostas com boa concordância; apenas para σ_{xyx} foi atingida uma diferença mais significativa. A implementação apresentada, neste trabalho, necessitou de 55s enquanto a com transformadas de Fourier utilizou 330s.

Tais equações não permitem o cálculo das componentes de tensão na superfície livre. Sabe-se no entanto, que para as componentes σ_{zzz} , é um delta de Dirac e σ_{yzz} , σ_{xzz} são nulas e esses resultados podem ser obtidos analiticamente. Para as componentes σ_{xxz} , σ_{yyz} , σ_{xyz} algumas dificuldades não permitem a geração das respostas numéricas na superfície. A principal é que o núcleo da função cresce ilimitadamente com ξ , e esse efeito não é compensado com o decaimento das funções obtidas pela integração em θ . Uma análise, semelhante àquela realizada para o problema axissimétrico, é necessária, mas, até o momento, não foi possível isolar uma parcela

convergente e uma divergente que poderia ter como resultado um delta de Dirac. Para casos particulares de x e y , é possível obter essas respostas, mas isto significa recair no caso axissimétrico. Para o problema com carregamento tangencial, a resposta analítica para as parcelas σ_{zzz} é nula e σ_{yzx} , σ_{xzx} são deltas de Dirac ou nulas, dependendo do carregamento adotado. Para as demais componentes, ocorre o problema observado para a carga vertical.

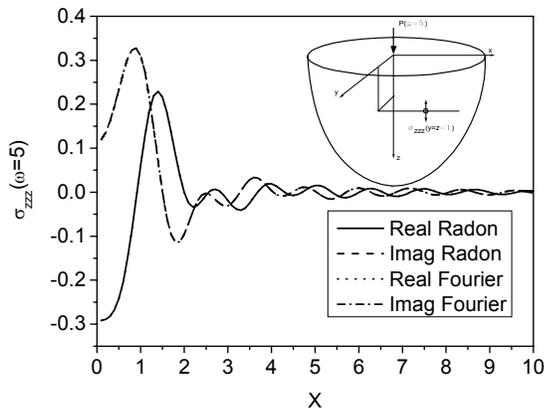


Figura 4.97a. σ_{zzz}

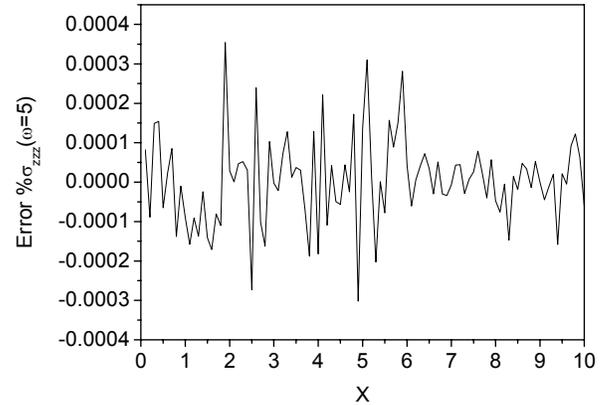


Figura 4.97b σ_{zzz} . Erro Relativo

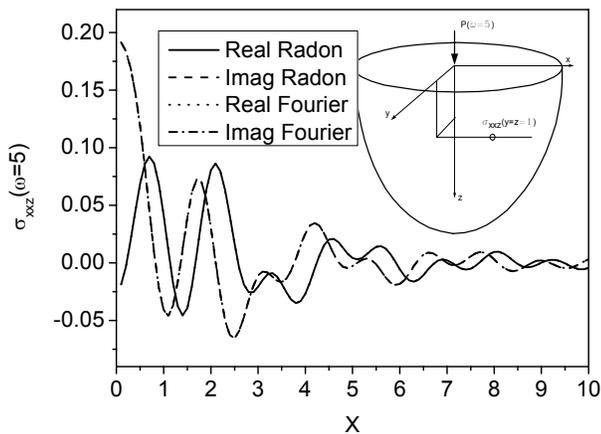


Figura 4.98a σ_{xxz}

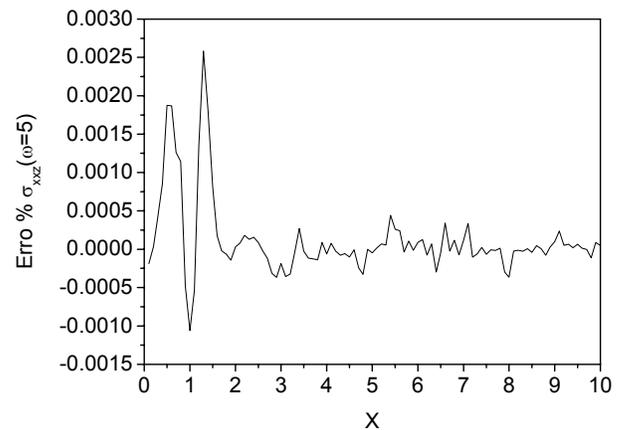


Figura 4.98b. σ_{xxz} Erro Relativo

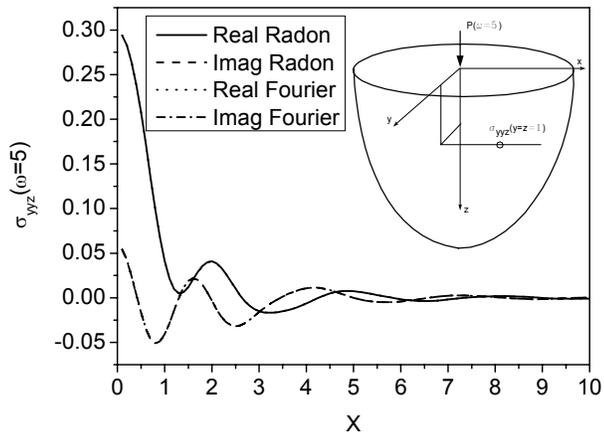


Figura 4.99a σ_{yyz}

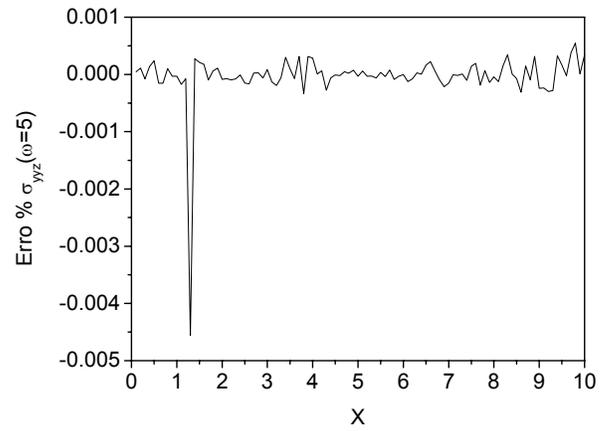


Figura 4.99b. σ_{yyz} Erro Relativo

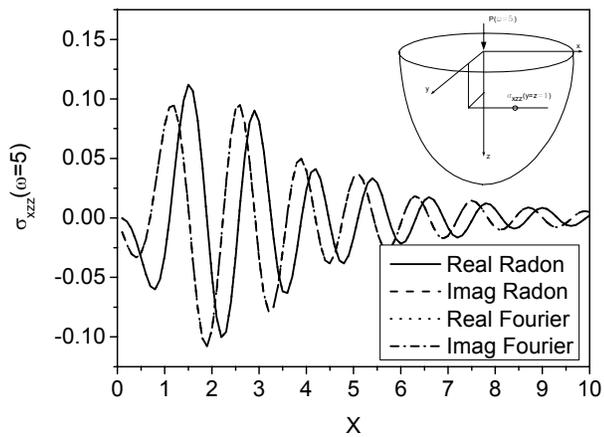


Figura 4.100a σ_{xzz}

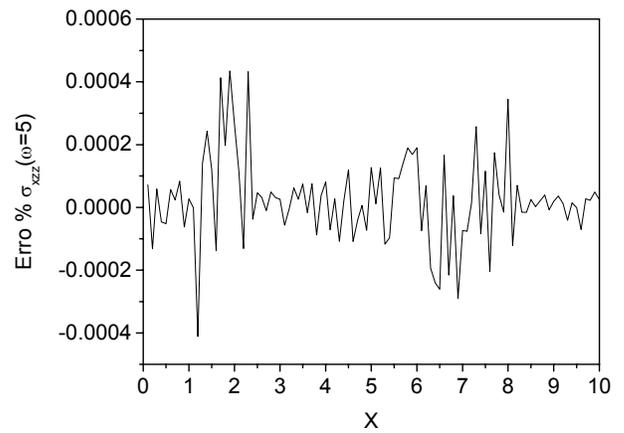


Figura 4.100b. σ_{xzz} Erro Relativo

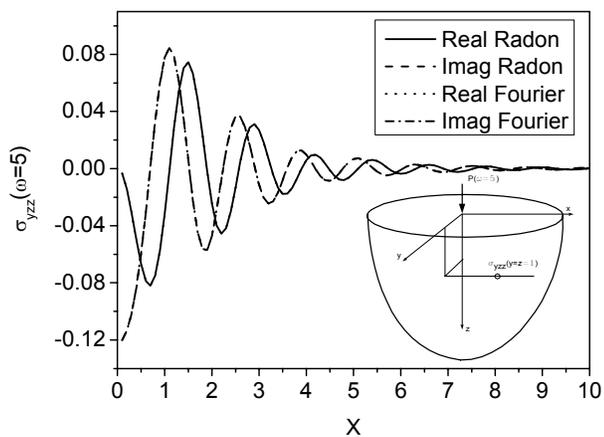


Figura 4.101a σ_{yzz}

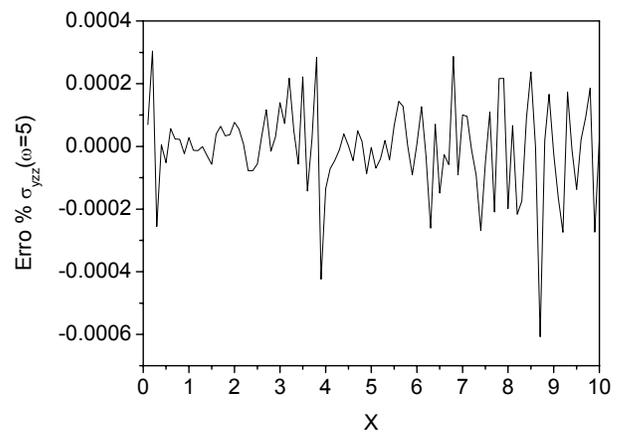


Figura 4.101b σ_{yzz} Erro Relativo

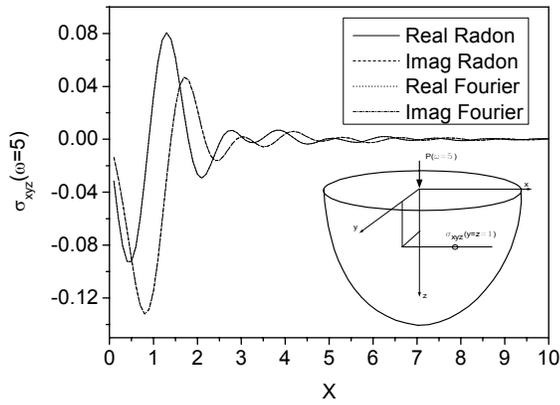


Figura 4.102a σ_{xyz}

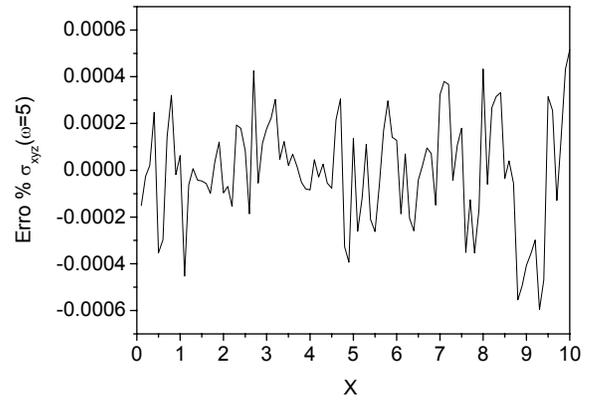


Figura 4.102b σ_{xyz} Erro Relativo

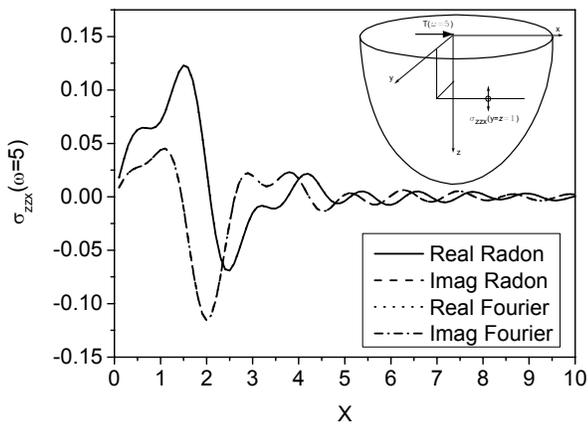


Figura 4.103a. $\sigma_{z zx}$

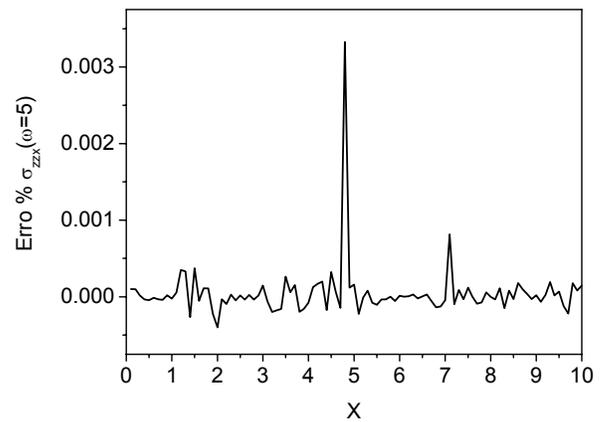


Figura 4.103b $\sigma_{z zx}$ Erro Relativo

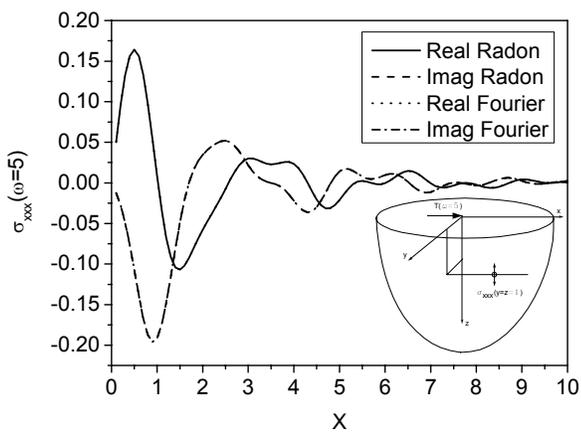


Figura 4.104a σ_{xxx}

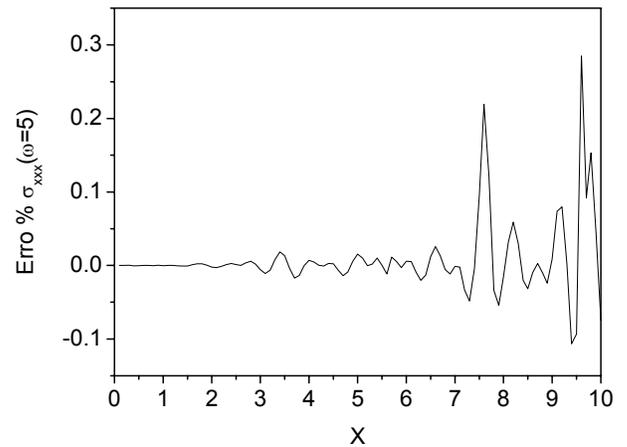


Figura 4.104b σ_{xxx} Erro Relativo

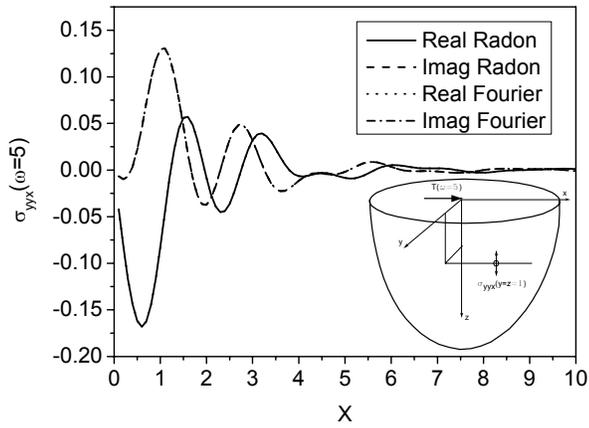


Figura 4.105a σ_{yyx}

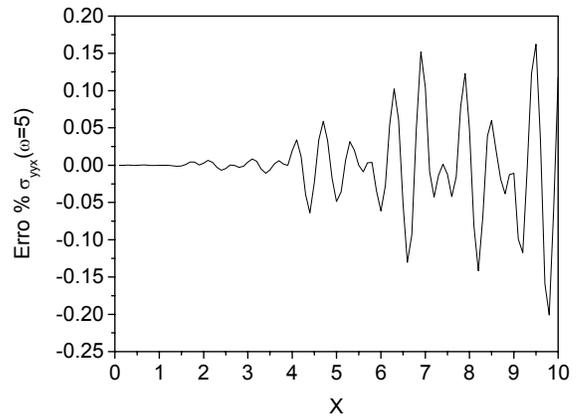


Figura 4.105b σ_{yyx} Erro Relativo

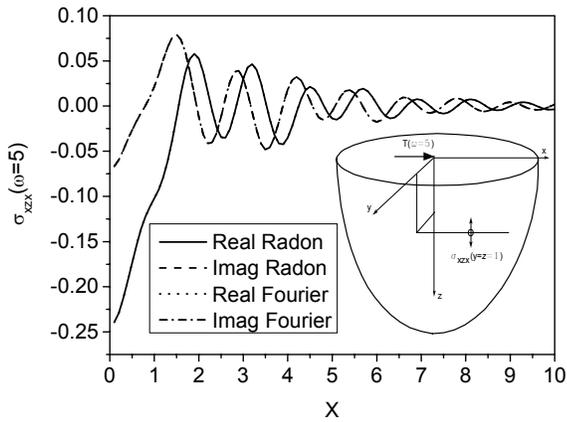


Figura 4.106a σ_{xzx}

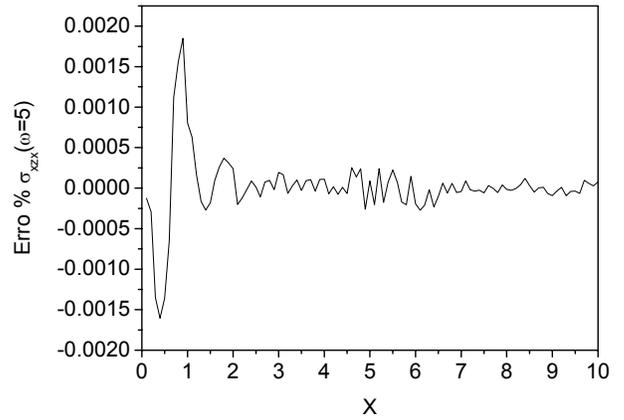


Figura 4.106b σ_{xzx} Erro Relativo

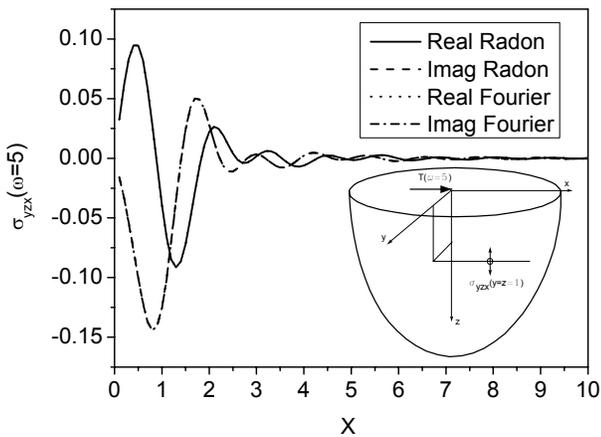


Figura 4.107a σ_{yzx}

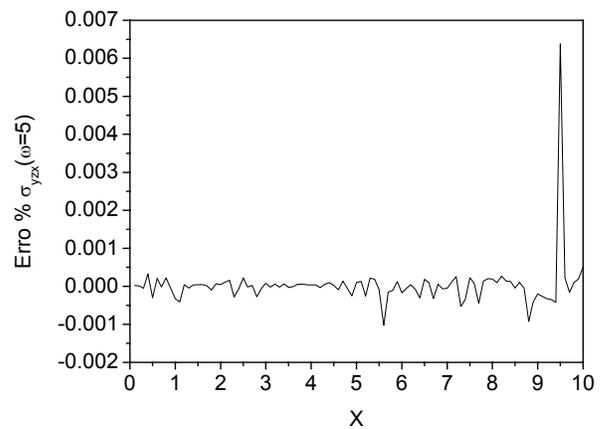


Figura 4.107b σ_{yzx} Erro Relativo

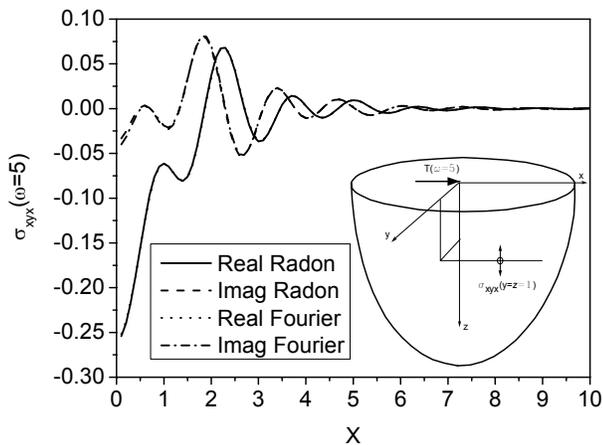


Figura 4.108a σ_{xyx}

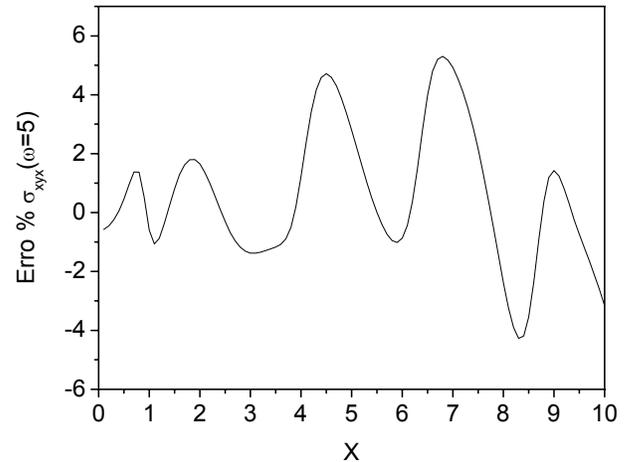


Figura 4.108b σ_{xyx} Erro Relativo

Para a superfície livre do semi-espaço, são apresentados os resultados de deslocamento devido à carga vertical e carga tangencial aplicada no eixo x. Os parâmetros materiais adotados para esta análise são: coeficiente de Poisson $\nu=0.4$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, fator de amortecimento $\eta=0.2$, frequência de excitação $\omega=5$ rad/s e erros relativos e absolutos de integração de 10^{-6} .

Os resultados para carregamento vertical podem ser observados nas 4.109 e 4.110 para as componentes real e imaginária de U_{zz} e 4.111 e 4.112 para as componentes de U_{xz} . Não são apresentados os resultados para U_{yz} , pois estes seriam idênticos aos da componente de deslocamento U_{xz} ao longo do plano x-y rotacionada de 90° em torno do eixo z. Para o problema com carga tangencial, os resultados de deslocamento vertical são apresentados nas figuras 4.113 e 4.114 para as parcelas real e imaginária. As componentes do deslocamento na direção x podem ser visualizadas nas figuras 4.115 e 4.116. O deslocamento na direção y, devido à carga em x, tem suas componentes real e imaginária apresentadas nas figuras 4.116 e 4.118 respectivamente.

Um efeito interessante que ocorre nos problemas de semi-espaço são as ondas de Rayleigh, que predominam na superfície, o efeito dessas ondas desaparece rapidamente à medida que se avança para o interior do meio (Kolsky, 1963). Estas ondas de superfície concentram a maior parte da energia propagada (Graff, 1991). Considerando os parâmetros da análise anterior, porém,

para o plano definido por x-z, com $y=1$, obtém-se o perfil de propagação de ondas para o interior do meio. Para o carregamento vertical, a componente de deslocamento vertical U_{zz} pode ser visualizada nas figuras 4.119, parte real e 4.120, para imaginária. As amplitudes ao longo da superfície livre, decaem mais lentamente que para o interior da camada. A componente U_{xz} é apresentada nas figuras 4.121 e 4.122, respectivamente, para as componentes real e imaginária. O deslocamento U_{yz} é visto nas figuras 4.123 e 4.124 para as componentes real e imaginária.

Para o carregamento horizontal em x, as componentes real e imaginária do deslocamento vertical são apresentadas nas figuras 5.125 e 4.126. O deslocamento horizontal, na direção x, pode ser observado nas figuras 4.127 e 4.128 e, finalmente, o deslocamento em y é mostrado tendo suas componentes apresentadas nas figuras 4.129 e 4.130. Observa-se que, para a componente U_{xx} , o decaimento das amplitudes, quando se avança para o interior do semi-espaco, é menos acentuado que na superfície.

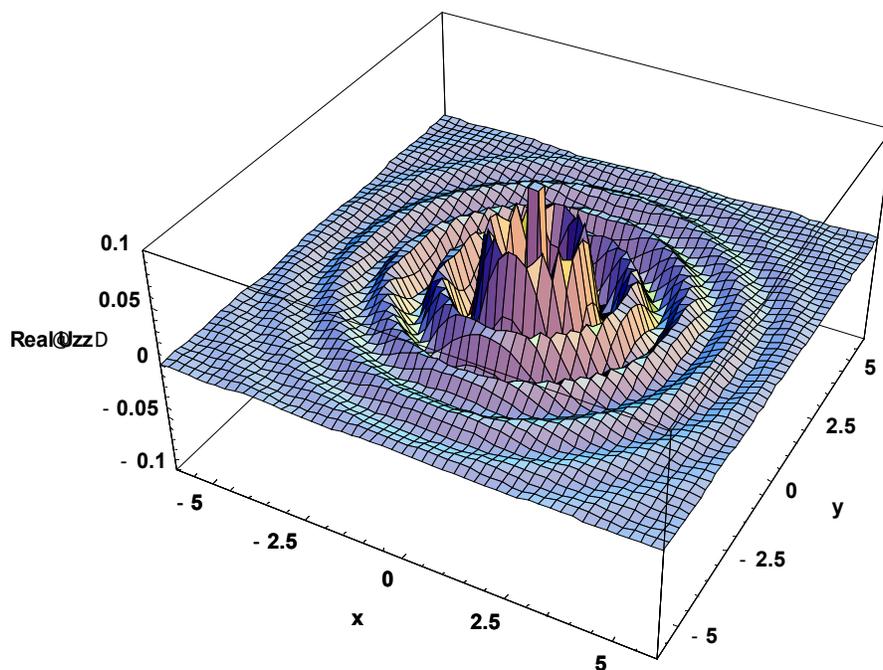


Figura 4.109 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{zz}

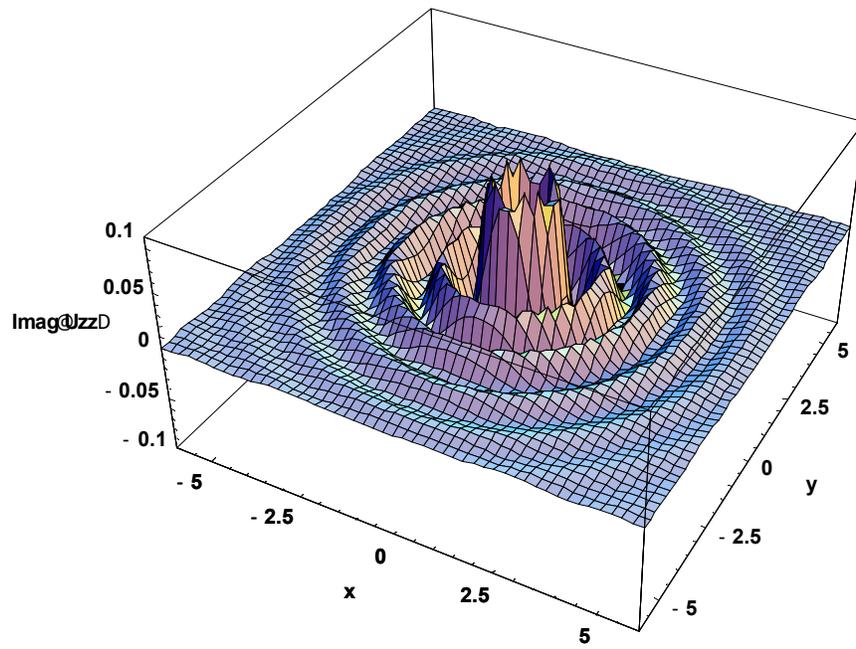


Figura 4.110 – Plano x - y , $z=0$ – Componente imaginária de U_{zz}

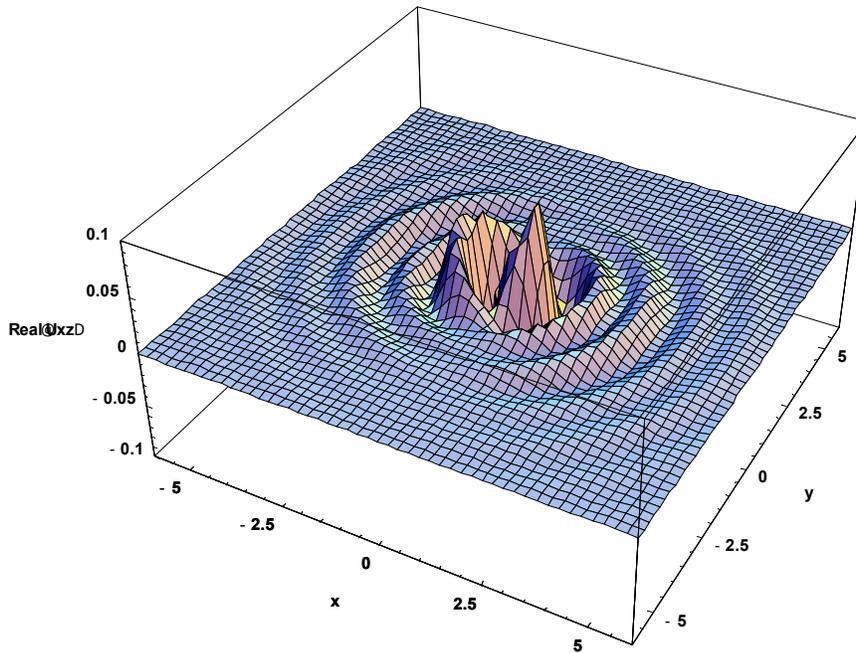


Figura 4.111 – Plano x - y , $z=0$ – Componente real de U_{xz}

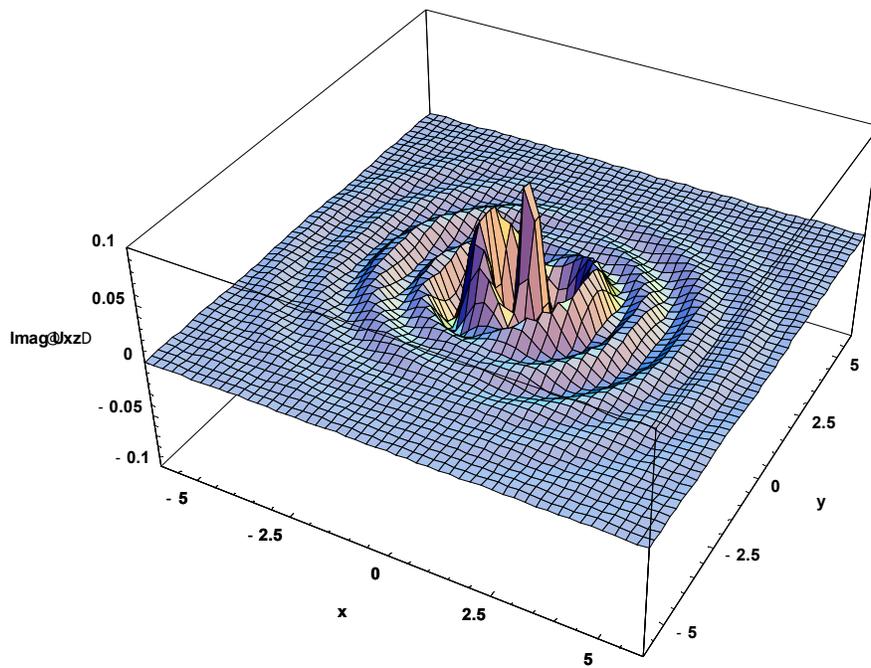


Figura 4.112 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{zx}

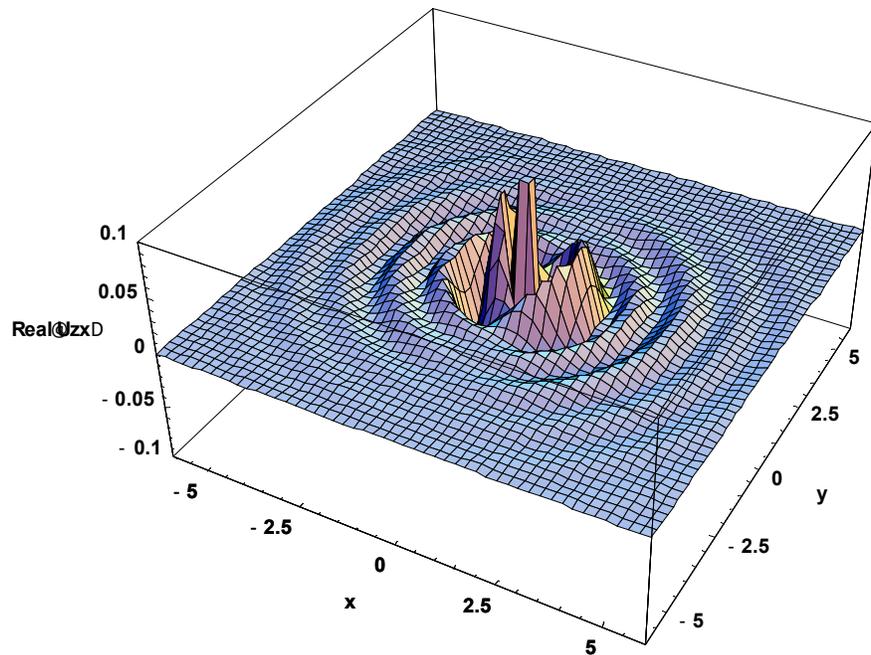


Figura 4.113 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{zx}

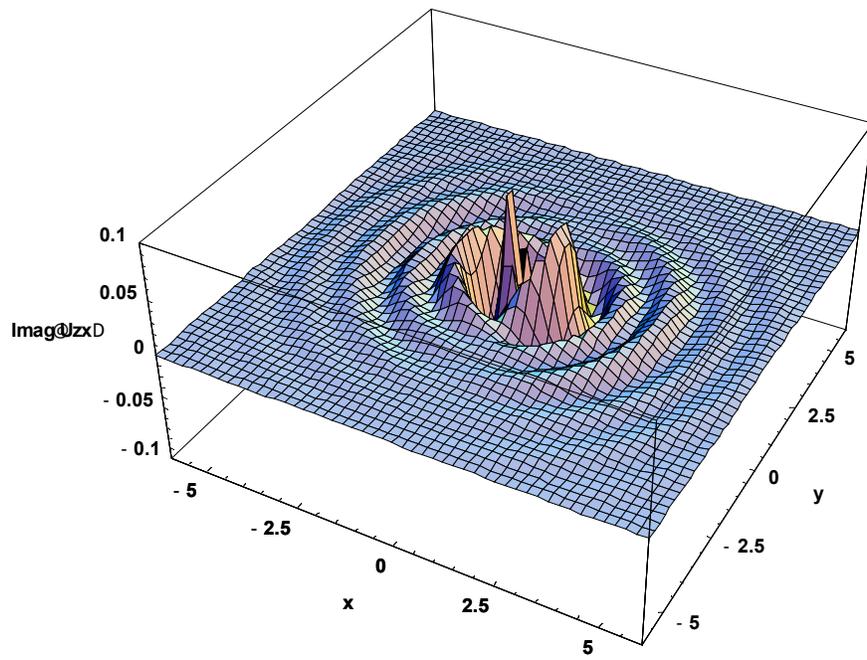


Figura 4.114 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{zx}

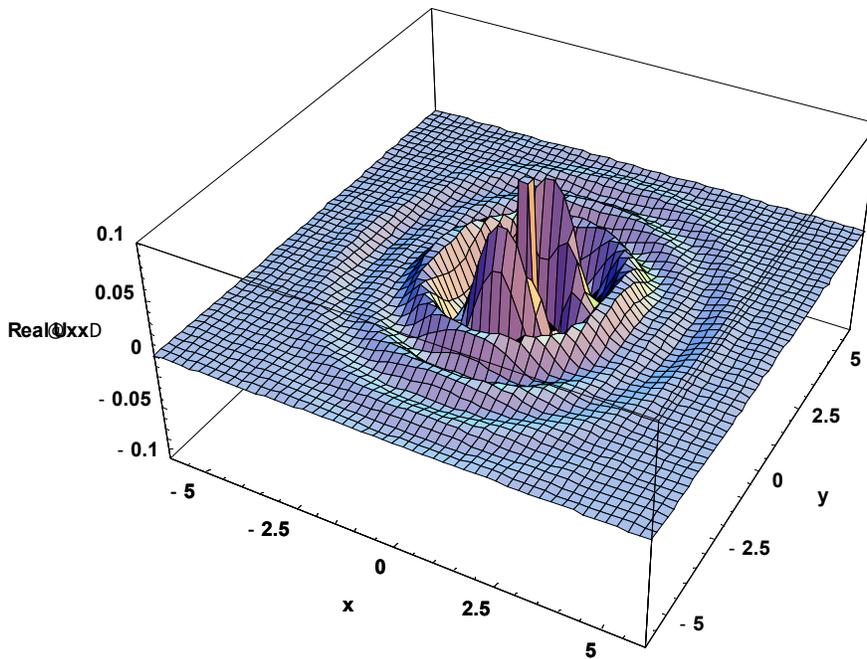


Figura 4.115 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{xx}

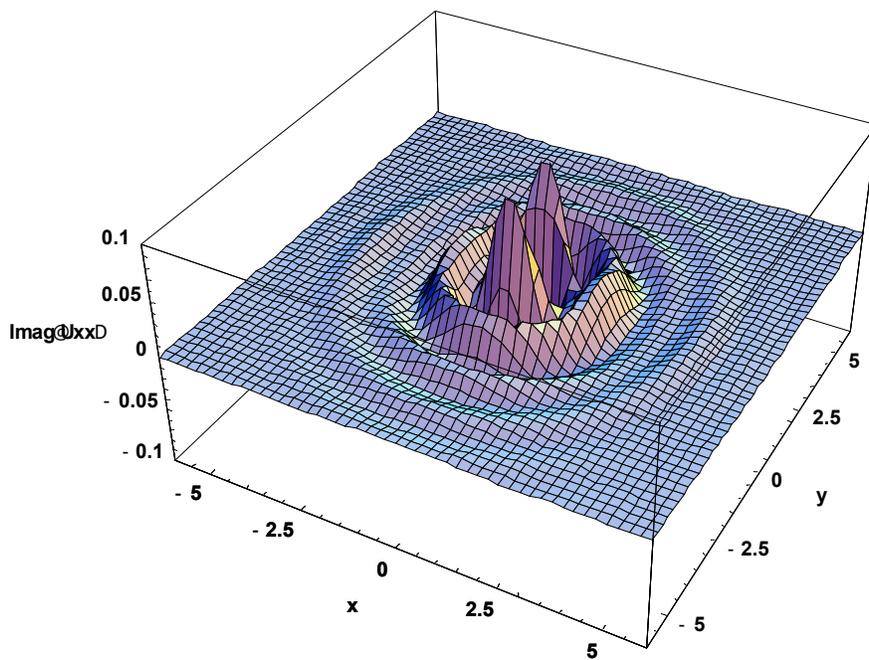


Figura 4.116 – Plano x - y , $z=0$ – Componente imaginária de U_{xx}

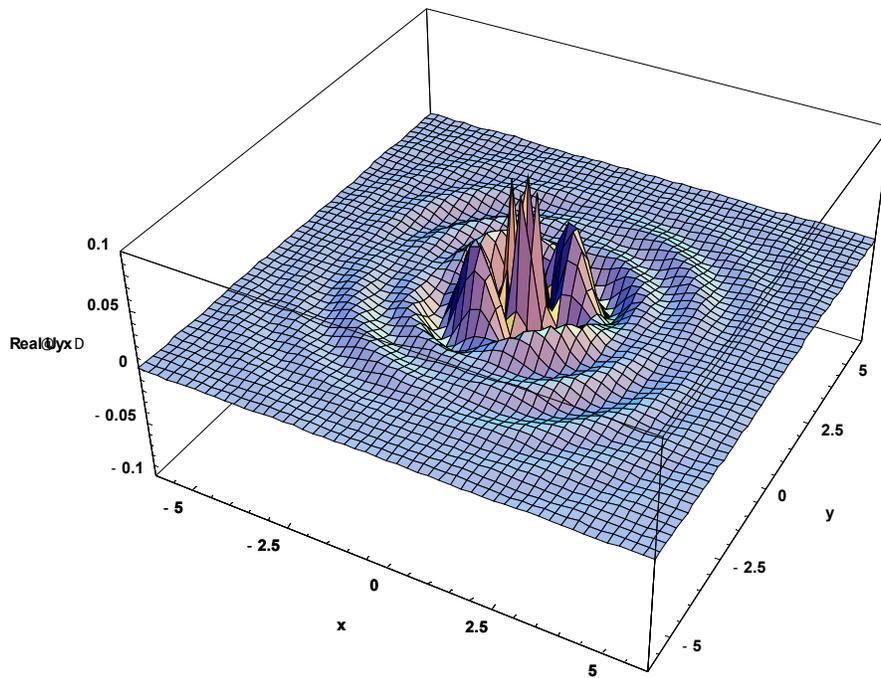


Figura 4.117 – Plano x - y , $z=0$ – Componente real de U_{yx}

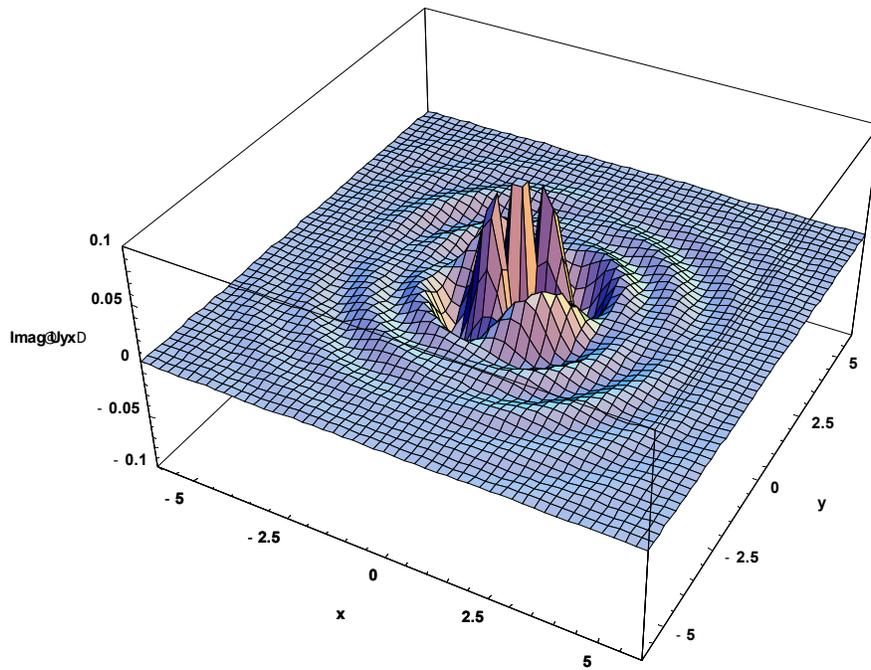


Figura 4.118 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{yx}

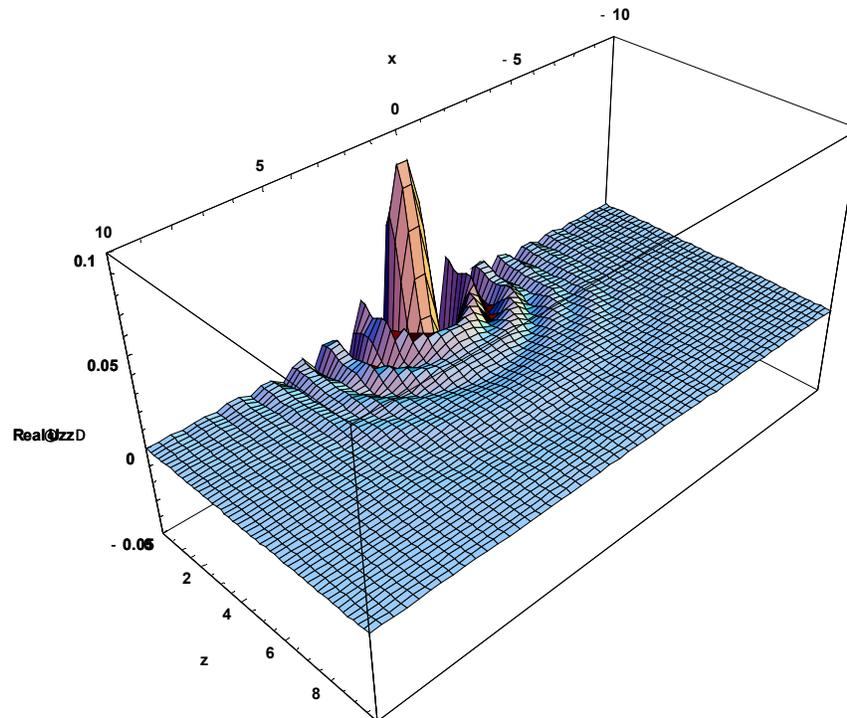


Figura 4.119 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zz}

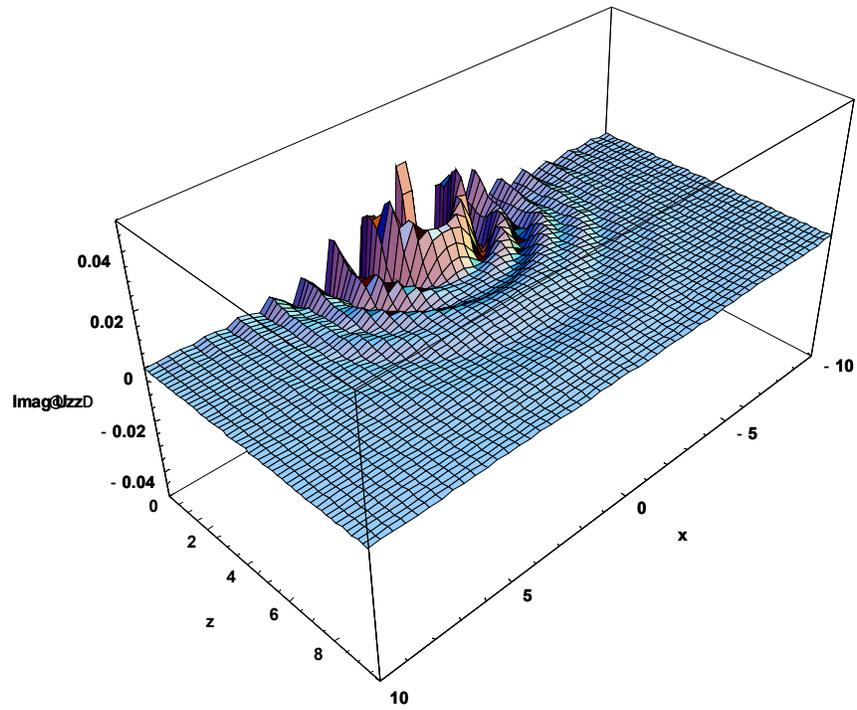


Figura 4.120 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zz}

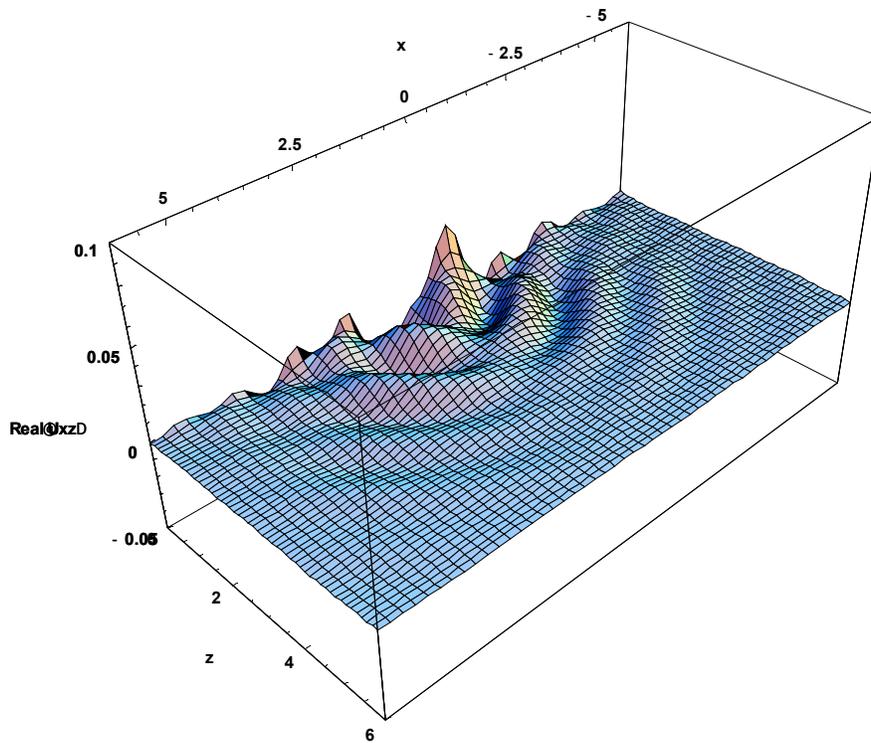


Figura 4.121 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{xz}

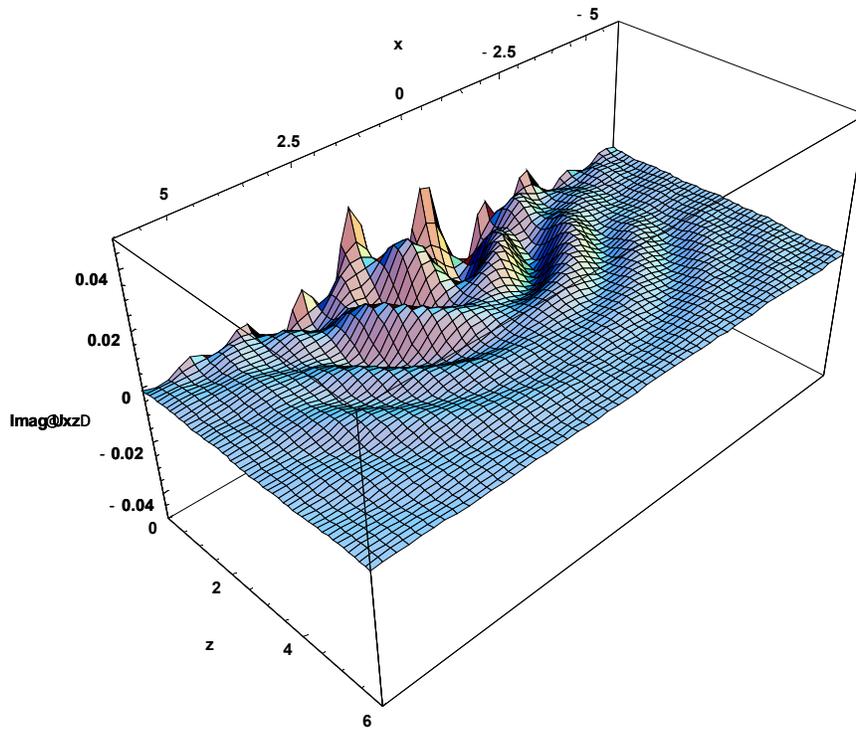


Figura 4.122 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xz}

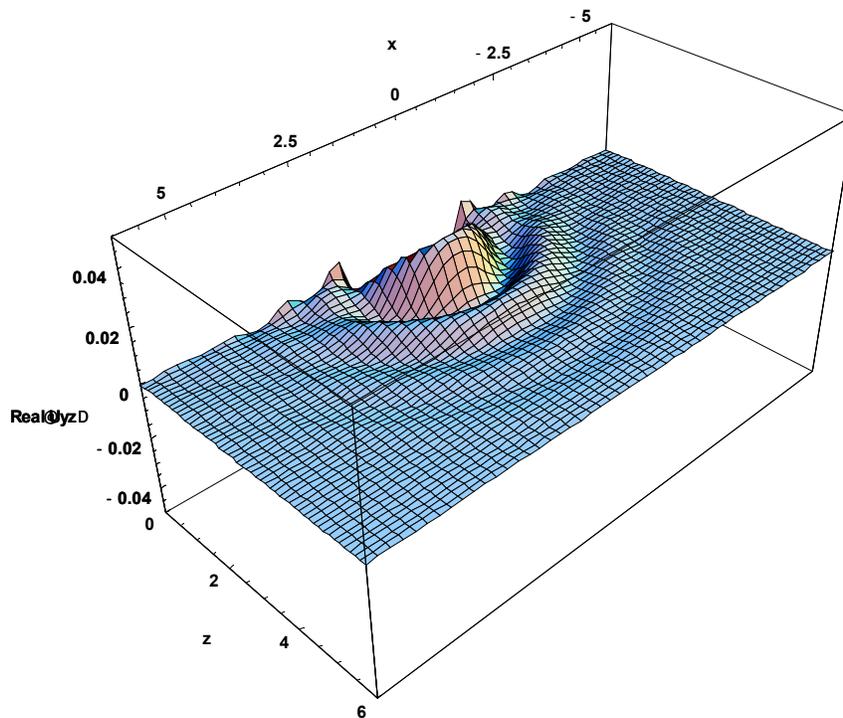


Figura 4.123 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yz}

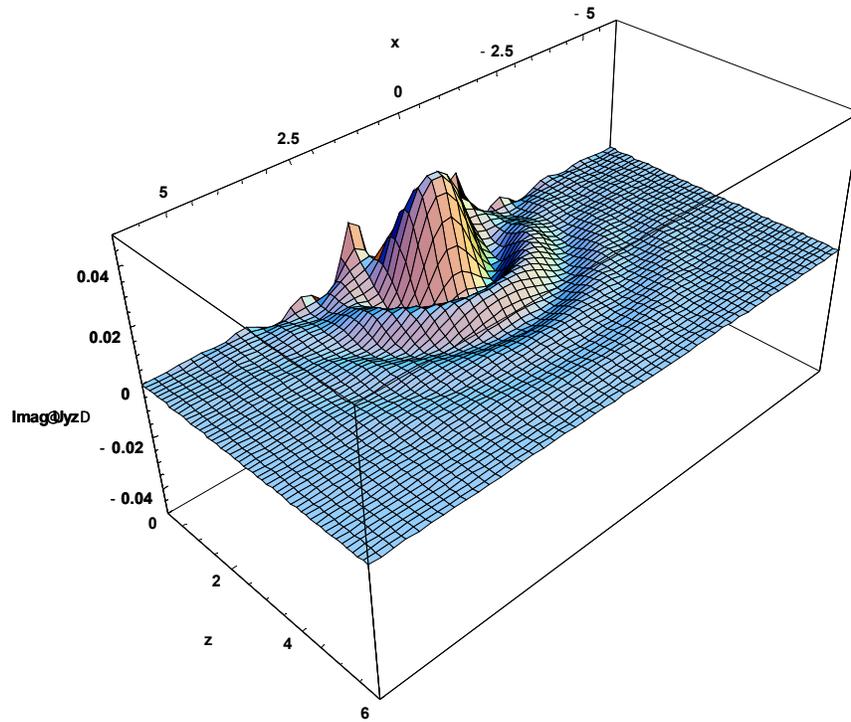


Figura 4.124 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{yz}

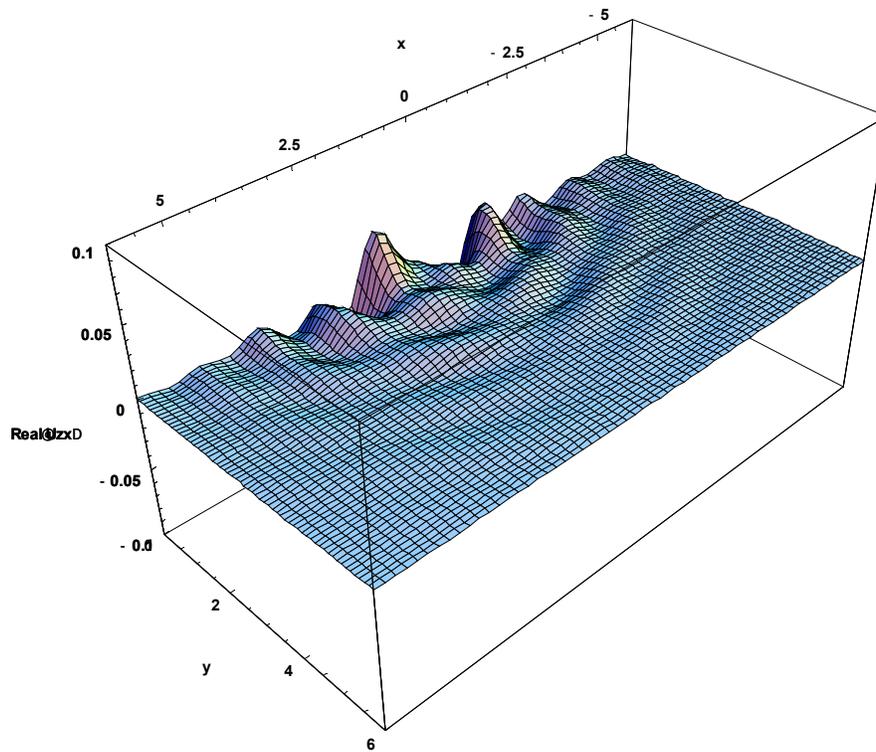


Figura 4.125 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{zx}

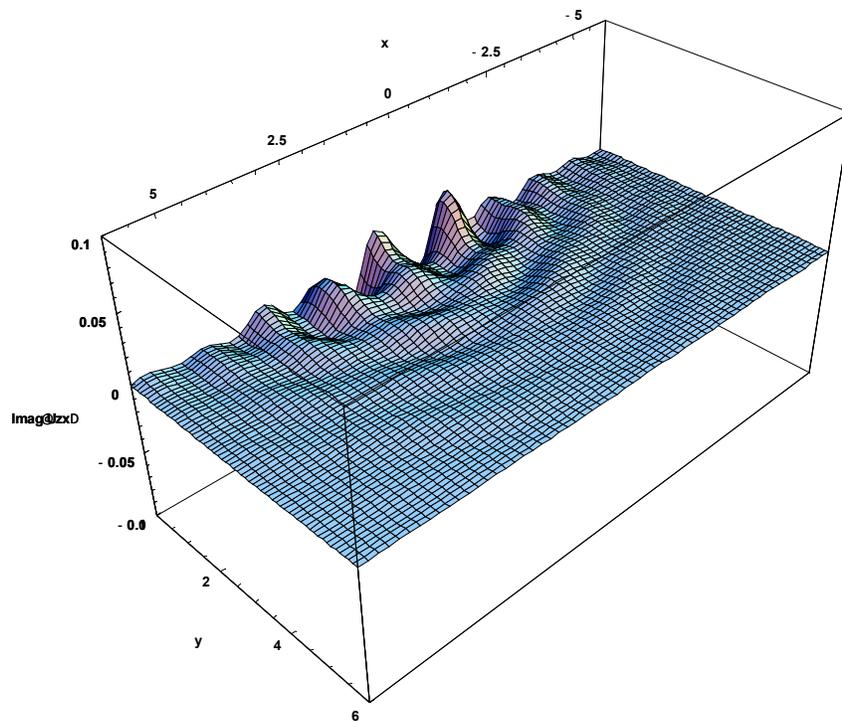


Figura 4.126 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{zx}

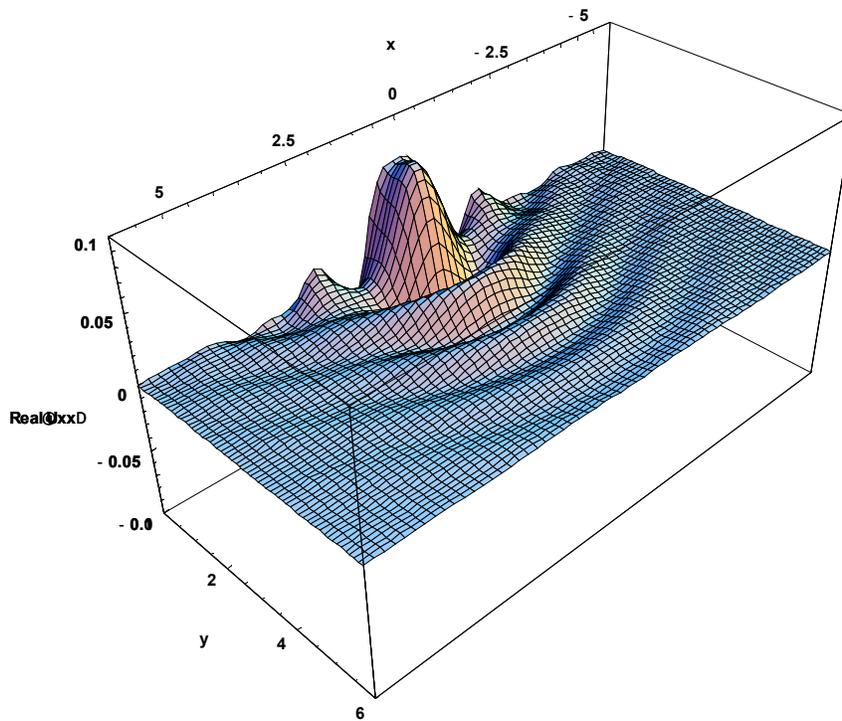


Figura 4.127 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{zx}

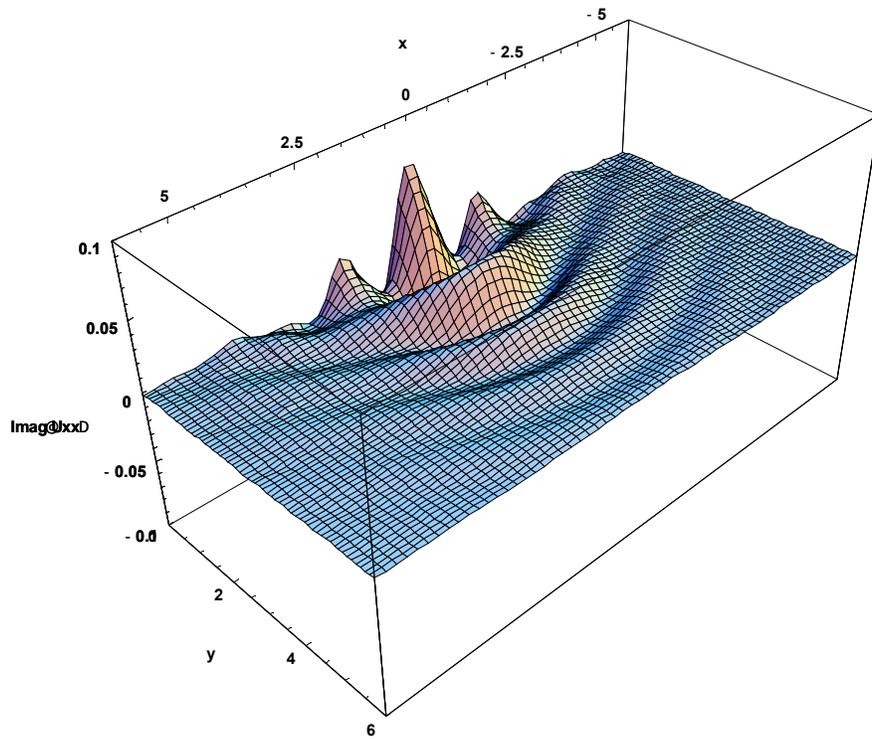


Figura 4.128 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{xx}

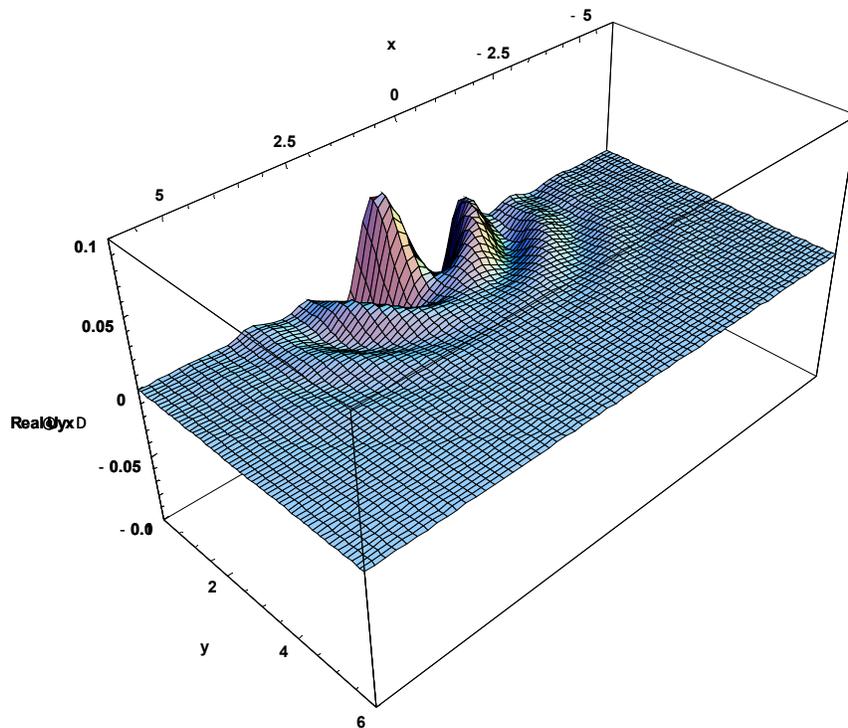


Figura 4.129 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{yx}

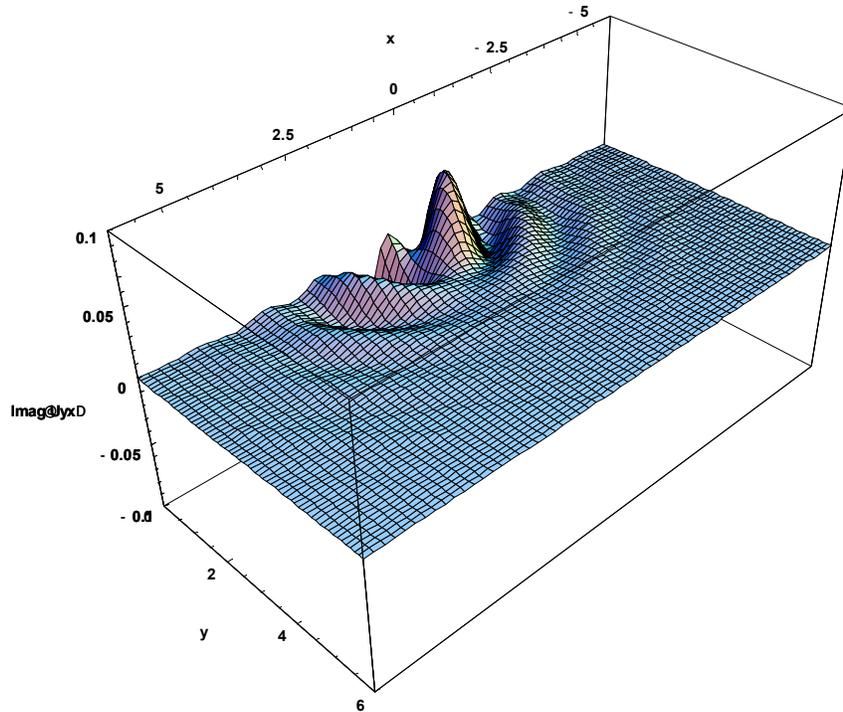


Figura 4.130 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{yx}

4.8 Deslocamentos, deformações e tensões para carregamento distribuído

A função de carregamento distribuído foi estudada em trabalhos anteriores do grupo de pesquisa do DMC. A grande vantagem da formulação, com carregamento distribuído sobre aquela com carregamento concentrado, é que não existem singularidades nas respostas de deslocamento. No estudo de fundações e interação solo-estrutura, é interessante que as funções de Green possam representar o mais próximo da realidade a carga aplicada. Tais estados auxiliares também são muito interessantes para aplicação em elementos de contorno, tanto no método direto quanto no indireto.

A diferença, em relação às respostas de deslocamento e tensão em relação às funções obtidas para carga concentrada, está na parcela referente aos carregamentos transformados. Serão apresentadas duas maneiras de obter a transformada de Radon-Fourier do carregamento distribuído.

Definindo o carregamento distribuído como:

$$L = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq +a \quad -b \leq y \leq +b \\ 0 & \end{cases}, \quad (4.577)$$

apresentada na figura 4.131. Utilizando uma translação dessa função, para permitir que a transformada de Radon seja realizada de maneira mais simples, chega-se à função visualizada na figura 4.132. A resposta final, que é obtida, terá que ser transladada, o que é possível sem grandes complicações. O esquema que auxilia na transformada de Radon, é apresentado na figura 4.133; as linhas auxiliares r e s são necessárias para determinar os limites de integração 1,2 e 3.

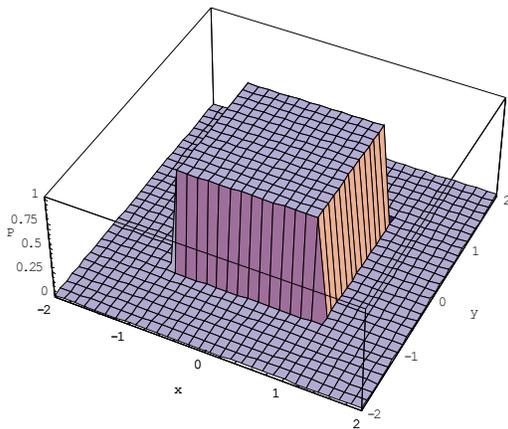


Figura 4.131 Função de carregamento distribuído

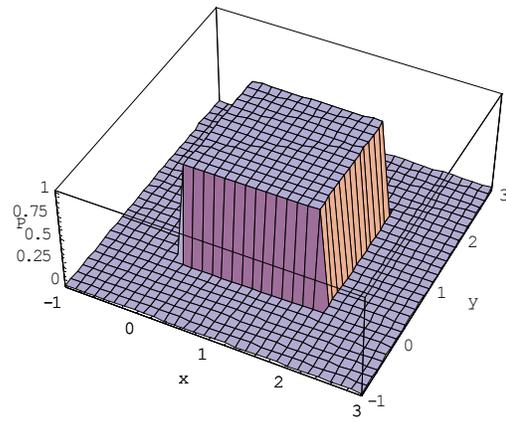


Figura 4.132 Função transladada

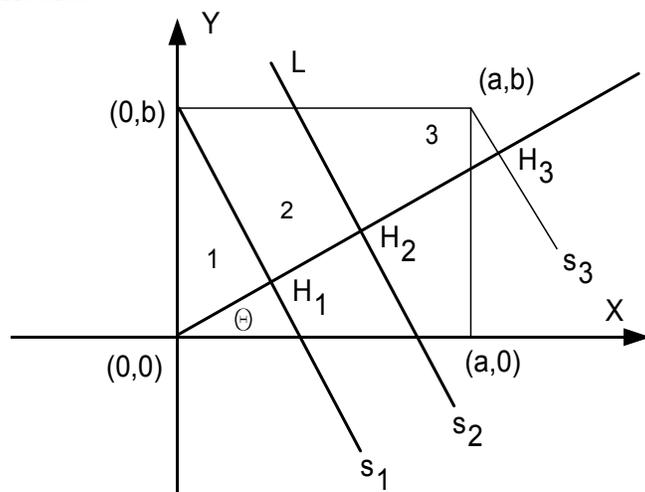


Figura 4.133 Linhas auxiliares para determinação dos limites de integração

A linha r é definida por:

$$r : y = x \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad (4.578)$$

sendo o coeficiente angular dado por:

$$m_r = tg\theta. \quad (4.579)$$

O produto interno entre os coeficientes angulares das linhas r e s é:

$$m_r \bullet m_s = -1; \quad (4.580)$$

assim m_s pode ser determinado facilmente:

$$m_s = -\cot g\theta; \quad (4.581)$$

com m_s é possível escrever uma expressão geral para as linhas:

$$s: (y - y_o) = m_s (x - x_o), \quad (4.582)$$

ou ainda em função de “ p ”:

$$s: (y - p \operatorname{sen}\theta) = -\cot g\theta (x - p \cos\theta). \quad (4.583)$$

Colocando y em evidência:

$$y = -x \cot g\theta + p \operatorname{cosec}\theta \quad (4.584)$$

para a linha S_1 :

$$\begin{aligned} (y - y_1) &= -\cot g\theta (x - x_1), \\ (y - 2b) &= -\cot g\theta (x - 0), \end{aligned} \quad (4.585)$$

$$y - 2b = -x \cot g\theta,$$

$$s_1: y = -x \cot g\theta + 2b. \quad (4.586)$$

e para linha S_2 :

$$\begin{aligned} (y - y_2) &= -\cot g\theta (x - x_2), \\ (y - 0) &= -\cot g\theta (x - 2a), \end{aligned} \quad (4.587)$$

$$s_2: y = -x \cot g\theta + 2b \cot g\theta. \quad (4.588)$$

e finalmente para linha S_3 :

$$\begin{aligned} (y - y_3) &= -\cot g\theta (x - x_3), \\ (y - 2b) &= -\cot g\theta (x - 2a), \end{aligned} \quad (4.589)$$

$$s_3: y = -x \cot g\theta + 2a \cot g\theta + 2b. \quad (4.590)$$

Da intersecção de r e S_1 , é possível determinar as coordenadas de H_1 :

$$\begin{aligned} r \cap s_1, \\ xtg\theta &= -x \cot g\theta + 2b, \\ x &= 2b \operatorname{sen}\theta \cos\theta, \end{aligned} \quad (4.591)$$

e com:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \theta, \\ y &= 2b(\operatorname{sen} \theta)^2, \end{aligned} \quad (4.592)$$

e, finalmente,

$$H_1 \left(2b \operatorname{sen} \theta \cos \theta, 2b(\operatorname{sen} \theta)^2 \right). \quad (4.593)$$

Da intersecção de r e S_2 , determinam-se as coordenadas do ponto H_2

$$\begin{aligned} r \cap s_2, \\ x \operatorname{tg} \theta &= -x \cot g \theta + 2a \cot g \theta, \\ x &= 2a(\cos \theta)^2, \end{aligned} \quad (4.594)$$

e com:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \theta, \\ y &= 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.595)$$

de modo que:

$$H_2 \left(2a(\cos \theta)^2, 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right). \quad (4.596)$$

Da intersecção de r e S_3 , determinam-se as coordenadas do ponto H_3 :

$$\begin{aligned} r \cap s_3, \\ x \operatorname{tg} \theta &= -x \cot g \theta + 2b \cot g \theta + 2b, \\ x &= 2a(\cos \theta)^2 + 2b \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.597)$$

e com:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \theta, \\ y &= 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2b(\operatorname{sen} \theta)^2, \end{aligned} \quad (4.598)$$

finalmente,

$$H_3 \left(2a(\cos \theta)^2 + 2b \operatorname{sen} \theta \cos \theta, 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2b(\operatorname{sen} \theta)^2 \right). \quad (4.599)$$

A distância entre os pontos P_1 e H_1 :

$$d(P_1, H_1) = \sqrt{(H_{1x} - P_{1x})^2 + (H_{1y} - P_{1y})^2} = 2b \cos \theta, \quad (4.600)$$

do triângulo $O P_1 H_1$:

$$\begin{aligned} b^2 &= d_1^2 + p_1^2, \\ 4b^2 &= 4b^2(\cos \theta)^2 + p_1^2, \\ p_1 &= 2b \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (4.601)$$

Assim o limite da região um está determinado.

Para o segundo limite, é necessário determinar o ponto auxiliar P_4 , e usando a intersecção de S_2 e t ($y=2b$):

$$\begin{aligned} y &= -x \cot g\theta + 2a \cot g\theta = 2b, \\ x &= -2btg\theta + 2a, \end{aligned} \quad (4.602)$$

$$P_4(-2btg\theta + 2a, 2b), \quad (4.603)$$

a distância entre P_4 e H_2 :

$$d(P_4, H_2) = \sqrt{(H_{2x} - P_{4x})^2 + (H_{2y} - P_{4y})^2} = 2a \operatorname{sen}\theta - 2b \operatorname{sec}\theta \quad (4.604)$$

e a distância entre P_4 e O :

$$d(O, P_4) = \sqrt{(P_{4x})^2 + (P_{4y})^2} = \sqrt{(2a - 2btg\theta)^2 + b^2} \quad (4.605)$$

do triângulo $O P_4 H_2$:

$$\begin{aligned} d(O, P_4)^2 &= d(P_4, H_2)^2 + P_2^2, \\ P_2 &= 2a \cos\theta. \end{aligned} \quad (4.606)$$

Esta é a segunda região necessária para o processo de integração.

Para determinar o último limite, deve ser considerada a distância $P_3(2a, 2b)$ e H_3 e é dada por:

$$\begin{aligned} d(P_3, H_3)^2 &= (2a(\cos\theta) + b \operatorname{sen}\theta \cos\theta - 2a)^2 + (2a \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 2b(\operatorname{sen}\theta)^2 - 2b)^2 \\ d(P_3, H_3) &= 2a \operatorname{sen}\theta - 2b \cos\theta \end{aligned} \quad (4.607)$$

e, finalmente do triângulo $O P_3 H_3$:

$$p_3 = 2b \operatorname{sen}\theta + 2a \cos\theta. \quad (4.608)$$

Finalmente listando os limites de integração:

$$\begin{aligned} 0 &< p < 2b \operatorname{sen}\theta, \\ 2b \operatorname{sen}\theta &\leq p \leq 2a \cos\theta, \\ 2a \cos\theta &< p < 2b \operatorname{sen}\theta + 2a \cos\theta. \end{aligned} \quad (4.609)$$

Aplicando a transformada de Radon bidimensional definida por:

$$\tilde{L}(p, \theta) = \iint_{\Pi_1} L(x, y) \delta(p - x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta) dx dy, \quad (4.610)$$

a equação pode ser reescrita:

$$\tilde{L}(p, \theta) = \iint_{\Pi_1} L(x, y) \delta\left(\cos \theta \left(\frac{p}{\cos \theta} - x - y \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)\right) dx dy, \quad (4.611)$$

$$\tilde{L}(p, \theta) = \frac{1}{|\cos \theta|} \iint_{\Pi_1} L(x, y) \delta(p \sec \theta - x - y \tan \theta) dx dy.$$

Integrando em x,

$$\tilde{L}(p, \theta) = \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{y_1}^{y_2} L(p \sec \theta - y \tan \theta, y) dy, \quad (4.612)$$

lembrando que a primeira região de integração é:

$$\begin{aligned} p &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y &= -x \cot \theta + p \operatorname{cosec} \theta, \\ x = 0 &\rightarrow y = p \operatorname{cosec} \theta, \end{aligned} \quad (4.613)$$

aplicando este resultado, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_0^{p \operatorname{cosec} \theta} L(p \sec \theta - y \tan \theta, y) dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_0^{p \operatorname{cosec} \theta} 1 dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{p}{\cos \theta \sin \theta}, \end{aligned} \quad (4.614)$$

válido para a primeira região de integração. A segunda região é definida por $0 < y < 2b$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_0^{2b} L(p \sec \theta - y \tan \theta, y) dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_0^{2b} 1 dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{2b}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (4.615)$$

E para a restante:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{y=p \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta 2a}^{2b} L(p \sec \theta - y \tan \theta, y) dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{1}{|\cos \theta|} \int_{p \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta 2a}^{2b} 1 dy, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{2b - p \operatorname{cosec} \theta - 2a \cot \theta}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (4.617)$$

Tais resultados estão no domínio transformado e devem ser transladados, utilizando a propriedade de translação de funções para a transformada de Radon,

$$\begin{aligned} p_0 &= -a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta, \\ p' &= p - p_0 = p + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta; \end{aligned} \quad (4.618)$$

considerando a translação, a transformada da função é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{p + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}, \quad -a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta < p < -a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{2b}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}, \quad -a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta \leq p \leq +a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta, \\ \tilde{L}(p, \theta) &= \frac{2b - (p + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) \operatorname{cosec} \theta - 2a \cot g \theta}{\cos \theta}, \quad a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta < p < b \operatorname{sen} \theta + a \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.619)$$

A formulação apresentada, neste estudo, requer, ainda, que seja aplicada a transformada de Fourier; como a função é contínua por partes, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{L}}(k, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta}^{-a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta} \frac{p + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \cdot e^{-ikp} dp + \int_{-a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}^{+a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta} \frac{2b}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \cdot e^{-ikp} dp + \right. \\ &+ \left. \int_{a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta}^{b \operatorname{sen} \theta + a \cos \theta} \frac{2b - (p + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) \operatorname{cosec} \theta - 2a \cot g \theta}{\cos \theta} \cdot e^{-ikp} dp \right]. \end{aligned} \quad (4.620)$$

E após algumas considerações algébricas e trigonométricas, adotando u'a mudança de variáveis para introduzir o comprimento de onda normalizado, é obtido o seguinte resultado:

$$\hat{\tilde{L}} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\xi \delta b \operatorname{sen}(\theta))}{(\xi \delta)^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}. \quad (4.621)$$

O mesmo resultado pode ser obtido de outra maneira. A transformada de Radon de uma função é dada por:

$$\tilde{L}(p, \theta) = \iint_{\Pi_1} L(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) dx dy, \quad (4.622)$$

aplicando a transformada de Fourier sobre a função integral (4.622), tem-se:

$$\hat{\tilde{L}}(p, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Pi_1} L(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) dx dy \cdot e^{-i\delta \xi p} dp, \quad (4.623)$$

e, nos limites em que a função é diferente de zero, pode-se escrever:

$$\hat{L}(p, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} 1 \cdot \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \cdot e^{-i\delta \xi p} dp, \quad (4.624)$$

$$\hat{L}(p, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} e^{-i\delta \xi (+x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy.$$

Após algumas considerações,

$$\hat{L} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta \cos \theta}. \quad (4.625)$$

4.8.1 Análise das funções H para carregamento distribuído

Não é necessária a análise dos núcleos, pois são os mesmos observados anteriormente para carregamento concentrado. É necessária a análise apenas das funções H. Considerando a transformada do carregamento distribuído, equação 4.625 e, substituindo nos termos oscilantes H das funções de deslocamento e tensão, obtém-se:

$$H_1 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta \cos \theta} e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.626)$$

$$H_2 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta} e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.627)$$

$$H_3 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \cos \theta} e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.628)$$

$$H_4 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2} e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.629)$$

$$H_5 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta \cos \theta} \cos(2\theta) e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.630)$$

$$H_6 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta} \cos(\theta) e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.631)$$

$$H_7 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta} \cos(2\theta) e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (4.632)$$

$$H_8 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \sin(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.633)$$

$$H_9 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \cos(\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.634)$$

$$H_{10} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.635)$$

$$H_{11} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}(\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.636)$$

$$H_{12} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{Cos}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}, \quad (4.637)$$

$$H_{13} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{Sin}(2\theta) e^{i\delta\xi(x\text{Cos}\theta+y\text{Sen}\theta)}. \quad (4.638)$$

Considerando a expansão do termo exponencial e desprezando os termos ímpares, que no intervalo $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ resultariam em integral nula, reescrevem-se as funções H na forma:

$$H_1 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.639)$$

$$H_2 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.640)$$

$$H_3 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \left\{ -\text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.641)$$

$$H_4 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \left\{ -\text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.642)$$

$$H_5 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.643)$$

$$H_6 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos(\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.644)$$

$$H_7 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.645)$$

$$H_8 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \sin(2\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.646)$$

$$H_9 = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \cos(\theta) \left\{ -\text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.647)$$

$$H_{10} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.648)$$

$$H_{11} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}(\theta) \left\{ \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.649)$$

$$H_{12} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(2\theta) \left\{ -\text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}, \quad (4.650)$$

$$H_{13} = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \sin(2\theta) \left\{ -\text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\}. \quad (4.651)$$

Gráficos das funções H estão apresentadas no anexo III. O comportamento oscilatório depende das coordenadas x, y, da frequência normalizada δ e da variável de integração ξ , mantendo-se x, y e δ constantes e, variando ξ , ocorre o aumento do número de oscilações, como pode ser visto nas figuras 4.134a e 4.134b, para $\xi=5$ e $\xi=10$, respectivamente. Este efeito já foi analisado nas equações para carregamento concentrado e, para a integração dessas funções, podem ser adotados os mesmos parâmetros e critérios utilizados anteriormente.

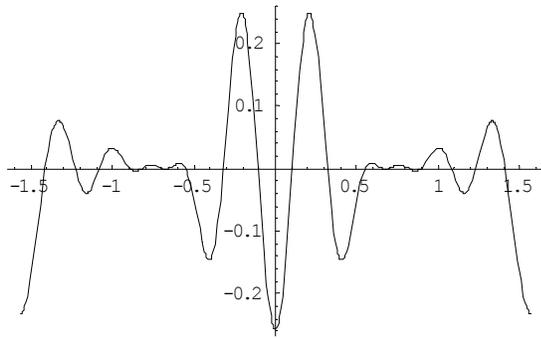


Figura 4.134a Componente real de H1, $\xi=5$

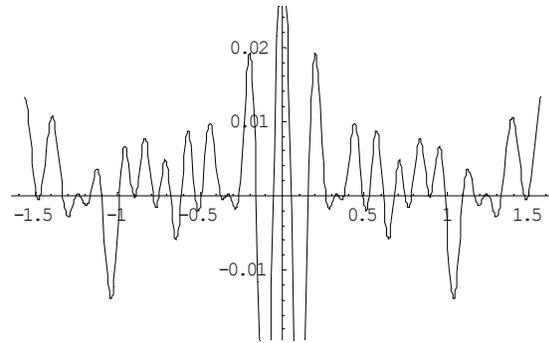


Figura 4.134b Componente real de H1, $\xi=10$

Um outro fato a ser considerado é que a integração dessas funções pode originar funções pares ou ímpares, que, multiplicadas pelos núcleos G, podem resultar parcelas para as quais a integral imprópria será nula. Esta consideração permitirá simplificações adicionais, que reduzem significativamente os esforços computacionais.

Os gráficos com os resultados da integração de H_i , para os parâmetros $x=2$, $y=3$, $\delta=1$, são apresentados no anexo III. Uma parcela é par (a real) e a outra ímpar (a imaginária), pode-se desprezar uma delas, dependendo de, por qual núcleo G_i , ela será multiplicada. Uma desvantagem, em relação à função de carregamento concentrado, é que as IH possuem batimentos, não decaindo, monotonicamente, com integrais de volume para os trechos com sinal alternante.

4.8.2 Conjunto final de equações para carregamento distribuído

Considerando as simplificações resultantes do produto de funções $G_i H_i$ e da constatação de que funções pares multiplicadas por ímpares, são ímpares e que as funções ímpares multiplicadas por outra função ímpar, resulta em uma função par, serão obtidas as equações mais simplificadas. Iniciando pelo problema com carregamento distribuído vertical, pode-se escrever o deslocamento vertical:

$$U_{zz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.652)$$

$$G_{U_{zz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ A_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C_p^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right\}, \quad (4.653)$$

e para o deslocamento horizontal em x

$$U_{xz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi d\theta, \quad (4.654)$$

$$G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ [\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_1\cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_2\cdot z}] \right\}, \quad (4.655)$$

e para o horizontal em y:

$$U_{yz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\xi d\theta, \quad (4.656)$$

$$G_{U_{yz}} = G_{U_{xz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ [\psi_1 A_p^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_1\cdot z} + \psi_2 C_p^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_2\cdot z}] \right\} \quad (4.657)$$

Para a componente de tensão σ_{zzz} :

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.658)$$

$$G_{\sigma_{zzz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ \Gamma_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}. \quad (4.659)$$

A componente de tensão σ_{zxz} :

$$\sigma_{zxz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.660)$$

$$G_{\sigma_{zxz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ [\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z}] \right\}. \quad (4.661)$$

A componente de tensão σ_{zyz} :

$$\sigma_{zyz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \quad (4.662)$$

$$G_{\sigma_{zyz}} = G_{\sigma_{zxz}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ [\Gamma_3 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z}] \right\}. \quad (4.663)$$

E para componente de tensão σ_{xxz} :

$$\sigma_{xxz} = \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxz}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi \right], \quad (4.664)$$

$$G_{\sigma_{xxz}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.665)$$

$$G_{\sigma_{xxz}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}. \quad (4.666)$$

Para componente de tensão normal σ_{yyz} :

$$\sigma_{yyz} = \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyz}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta \cos\theta} \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi \right] \quad (4.667)$$

$$G_{\sigma_{yyz}1} = G_{\sigma_{xxz}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.668)$$

$$G_{\sigma_{yyz}2} = G_{\sigma_{xxz}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}. \quad (4.669)$$

Para a tensão de cisalhamento σ_{xyz} :

$$\sigma_{xyz} = \frac{\mu i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xyz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi \right], \quad (4.670)$$

$$G_{\sigma_{xyz}} = 2 \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_p^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}. \quad (4.671)$$

Para carga tangencial em x (S), o deslocamento vertical é:

$$U_{zx} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.672)$$

$$G_{U_{zx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_S^* \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C_S^* \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.673)$$

o deslocamento na direção x:

$$U_{xx} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) d\theta d\xi \right] \quad (4.674)$$

$$G_{U_{xx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_1\cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_2\cdot z} \right], \quad (4.675)$$

$$G_{U_{xx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}}{\mu\beta}, \quad (4.676)$$

e para o deslocamento na direção y:

$$U_{yx} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.677)$$

$$G_{U_{yx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left[\psi_1 A_S^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_1\cdot z} + \psi_2 C_S^* \cdot e^{-\delta\cdot\alpha_2\cdot z} \right], \quad (4.678)$$

$$G_{U_{yx2}} = -\text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}}{\mu\beta}. \quad (4.679)$$

Para a componente de tensão normal vertical σ_{zzx} :

$$\sigma_{zzx} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \quad (4.680)$$

$$G_{\sigma_{zzx}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left\{ \Gamma_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.681)$$

para a componente σ_{zxx} :

$$\sigma_{zxx} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right], \quad (4.682)$$

$$G_{\sigma_{zxx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.683)$$

$$G_{\sigma_{zxx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta e^{-\beta\cdot\delta\cdot z}, \quad (4.684)$$

para tensão cisalhante σ_{zyx} :

$$\sigma_{zyx} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right], \quad (4.685)$$

$$G_{\sigma_{zyx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta \left[\Gamma_3 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.686)$$

$$G_{\sigma_{zyx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}. \quad (4.687)$$

A tensão normal em x σ_{xxx} :

$$\sigma_{xxx} = \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{Cos}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{xxx3}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right] \quad (4.688)$$

$$G_{\sigma_{xxx1}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.689)$$

$$G_{\sigma_{xxx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.690)$$

$$G_{\sigma_{xxx3}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}, \quad (4.691)$$

e a normal em y σ_{yyx} :

$$\sigma_{yyx} = \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{Cos}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yyx3}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{Sin}(2\theta) \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right] \quad (4.692)$$

$$G_{\sigma_{yyx1}} = \text{ign}(\delta\xi) \xi\delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} \quad (4.693)$$

$$G_{\sigma_{yyx2}} = \text{sign}(\delta\xi) \xi\delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_S^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_S^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} \quad (4.694)$$

$$G_{\sigma_{yx}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}. \quad (4.695)$$

A tensão cisalhante σ_{yx} :

$$\sigma_{yx} = \frac{\mu i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yx}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \cos\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{yx}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.696)$$

$$G_{\sigma_{yx}1} = 2 \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_s^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_s^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.697)$$

$$G_{\sigma_{yx}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ -\frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}. \quad (4.698)$$

Para carga tangencial em y (T)

O deslocamento vertical é dado por:

$$U_{zy} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.699)$$

$$G_{U_{zy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\},$$

o deslocamento tangencial em x:

$$U_{xy} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{xy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.700)$$

$$G_{U_{xy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.701)$$

$$G_{U_{xy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta\delta z}}{\mu\beta}, \quad (4.702)$$

o deslocamento na direção y:

$$U_{yy} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{yy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.703)$$

$$G_{U_{yy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\psi_1 A_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C_T^* \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} \right], \quad (4.704)$$

$$G_{U_{yy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \frac{e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}}{\mu\beta}. \quad (4.705)$$

Para tensão σ_{zzy} :

$$\sigma_{zzy} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zzy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi, \quad (4.706)$$

$$G_{\sigma_{zzy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ \Gamma_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}. \quad (4.707)$$

A tensão σ_{zxy} é dada por:

$$\sigma_{zxy} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zxy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ -\frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.708)$$

$$G_{\sigma_{zxy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.709)$$

$$G_{\sigma_{zxy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (4.710)$$

A tensão σ_{zyy} é:

$$\sigma_{zyy} = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyy}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{sen}\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{zyy}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \cos\theta \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.711)$$

$$G_{\sigma_{zyy}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left[\Gamma_3 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right], \quad (4.712)$$

$$G_{\sigma_{zyy}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta e^{-\beta \cdot \delta \cdot z}. \quad (4.713)$$

A tensão σ_{xyy} pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{xyy}} = & \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{xyy}}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \right. \\ & \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{xyy}}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{Cos}(2\theta) i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi + \quad (4.714) \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{xyy}}3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{Sin}(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \end{aligned}$$

$$G_{\sigma_{\text{xyy}}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.715)$$

$$G_{\sigma_{\text{xyy}}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.716)$$

$$G_{\sigma_{\text{xyy}}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}. \quad (4.717)$$

A componente de tensão normal σ_{yyy} :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{yyy}} = & \frac{i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{yyy}}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ & \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{yyy}}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \cos\theta} \text{Cos}(2\theta) i \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{yyy}}3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{Sin}(2\theta) \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \text{sen}(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.718) \end{aligned}$$

$$G_{\sigma_{\text{yyy}}1} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ (i\alpha_1 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_1) A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + (i\alpha_2 \lambda + (\lambda + \mu) \xi \psi_2) C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.719)$$

$$G_{\sigma_{\text{yyy}}2} = \text{sign}(\delta\xi) \xi \delta^2 \left\{ \mu \xi \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \mu \xi \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.720)$$

$$G_{\sigma_{\text{yyy}}3} = \text{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\beta} \right\}. \quad (4.721)$$

A componente de tensão de cisalhamento σ_{xyy} :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{xyy}} = & \frac{\mu i}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{xyy}}1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2} \text{sen}\theta \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi - \right. \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{\text{xyy}}2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ i \frac{\text{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \text{sen}\theta} \text{sen}(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi \right], \quad (4.722) \end{aligned}$$

$$G_{\sigma_{yy}1} = 2 \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta^2 \left\{ \psi_1 A_T^* e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_T^* e^{-\delta\alpha_2 z} \right\}, \quad (4.723)$$

$$G_{\sigma_{yy}2} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi^2 \delta \left\{ \frac{e^{-\delta\beta z}}{\mu\beta} \right\}. \quad (4.724)$$

4.8.3 Técnicas de integração para carregamento distribuído

Considerando a componente de deslocamento vertical devido à carga vertical, calculada através da equação (4.652):

$$U_{zz} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{U_{zz}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta d\xi,$$

para qual o núcleo é dado por:

$$G_{U_{zz}} = \operatorname{sign}(\delta\xi) \xi \delta \left\{ A_P^* \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C_P^* \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\},$$

isolando o termo oscilante e sua integral:

$$IH_{U_{zz}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\xi\delta a \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\xi\delta b \sin(\theta))}{(\xi\delta)^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \cos(x\delta\xi \cos(\theta)) \cos(y\delta\xi \operatorname{sen}(\theta)) \right\} d\theta. \quad (4.725)$$

O resultado em função $H_{U_{zz}}(\xi)$ resultante da integral em θ do termo oscilante, para o ponto, $x=y=2$, com frequência $\omega=1\text{rad/s}$, é apresentado na figura 4.135. Como pode ser observado, esta função não decai monotonicamente. Tal parte do integrando independe das características do meio físico no qual as ondas se propagam. Considerando as propriedades materiais, coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$, e amortecimento histerético constante $\eta=0.2$, tem-se como integrando final em ξ a função apresentada nas figuras 4.136 e 4.137 para componente real e imaginária, respectivamente, neste caso para um ponto na superfície livre. Para obtenção dos resultados apresentados nas figuras 4.138 e 4.139, foi considerada profundidade de camada $z=1$: a função decai significativamente. Para pontos no interior da camada, o processo de integração é relativamente rápido e os tempos são reduzidos com aumento de z .

Os núcleos das funções para carregamento distribuído são idênticos aos dos problemas com carregamento concentrado, analisados previamente. Deve-se ressaltar que, para o carregamento

distribuído, é possível determinar os termos de tensão na superfície livre, não descritos como condições de contorno. Isto porque o decaimento das funções IH compensa o crescimento do núcleo quando $z=0$. De fato, isso pode ser observado diretamente, no denominador das funções H. Infelizmente, o processo de convergência dos métodos de integração, para as tensões na superfície, é muito lento.

Para o ponto na superfície, as componentes do núcleo, para o deslocamento U_{zz} , tendem a um valor constante. O núcleo será multiplicado pela função IH que decai, porém lentamente, o que permitirá uma integração numérica. Entretanto, o algoritmo de Longman, neste caso, não será aplicável. Para integração numérica, foi implementado um algoritmo do tipo “procedendo para infinito”, a despeito de não ser o mais apropriado em termos computacionais, considerou-se que, para uma validação inicial das funções, seria satisfatório. Os custos computacionais com esse algoritmo serão apresentados na próxima seção. Apesar das limitações desse método numérico, foram obtidos bons resultados para pontos no interior da camada $z>0$, quando comparado à implementação com transformada dupla de Fourier. Deve-se lembrar que os números de onda, para tais funções, são os mesmos dos problemas anteriores. Portanto, as funções são integradas entre os números de onda e posteriormente é realizada a integral imprópria a partir de $\xi=c_R$.

Para a realização da integral imprópria o algoritmo, é montado a partir da definição básica (Davis e Rabinowitz, 1975):

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r f(x) dx \right), \quad (4.726)$$

considerando uma seqüência de números que tende para o infinito, de modo que $0 < r_0 < r_1 < \dots$, pode-se escrever a integral por partes:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{r_0} f(x) dx + \int_{r_0}^{r_1} f(x) dx + \dots \quad (4.727)$$

Cada integral é definida, podendo ser determinada por quadratura de Gauss. O processo de aumento do número de volumes é interrompido quando se atinge o critério de parada, baseado em erro relativo ou absoluto. Os limites de integração usualmente são dobrados a cada passo, por exemplo $r_n = 2^n$. Entretanto, devido às oscilações irregulares da função, foi adotado um passo

constante, calculado com auxílio das coordenadas x e y e da frequência normalizada δ , através da relação:

$$\Delta\xi = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\omega^2 \rho}} . \quad (4.728)$$

Foi adotado como critério de parada, a relação entre a contribuição da integração intervalo, e o valor da integral total, através da fórmula:

$$\frac{\int_0^n f(x) dx}{\int_0^{n-1} f(x) dx} \leq \varepsilon . \quad (4.729)$$

Outro critério que poderia ser utilizado, é dado por:

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \leq \varepsilon . \quad (4.730)$$

O esquema de integração é apresentado na figura 4.140. Inicialmente, é realizada a integração nos intervalos $0 \leq c_p < c_s \leq c_R$, utilizando quadratura de Gauss e refinamento dos intervalos até obter convergência. Posteriormente é realizada a integral imprópria.

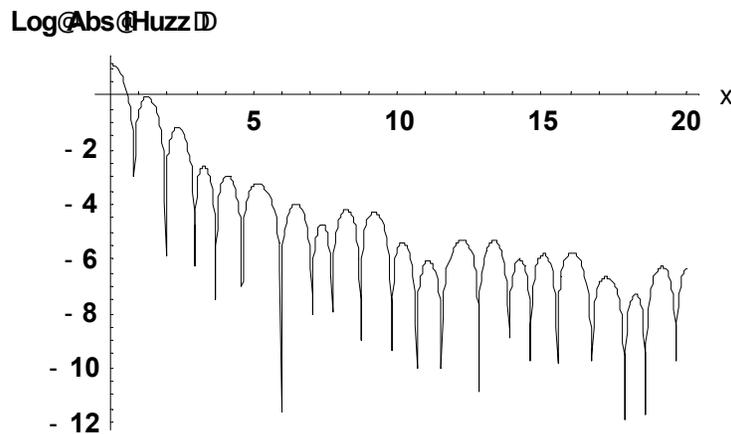


Figura 4.135 – Função IH_{uzz}

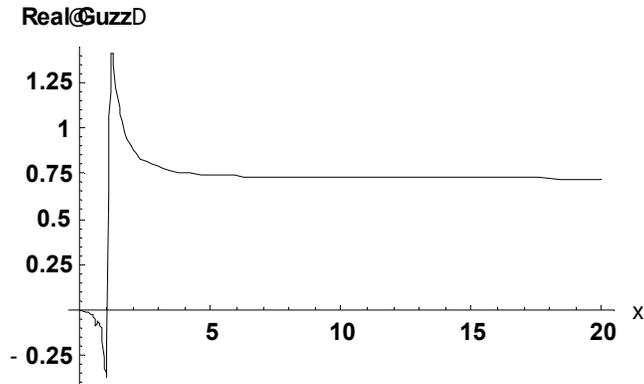


Figura 4.136– Componente real de $G_{Uzz} IH_{Uzz} - z=0$

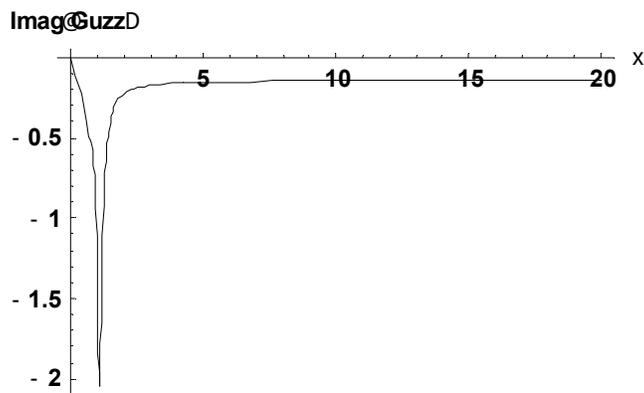


Figura 4.137 – Componente imaginária de $G_{Uzz} IH_{Uzz} - z=0$

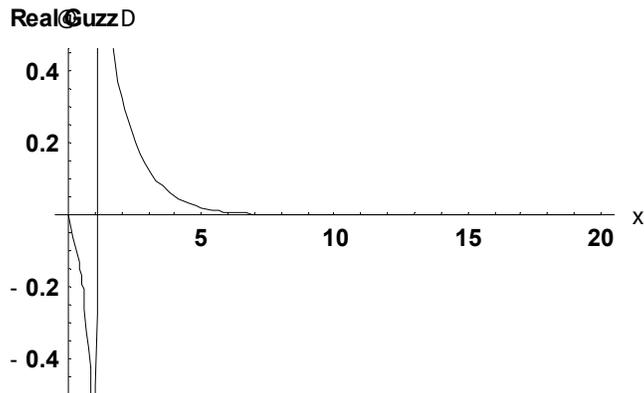


Figura 4.138 – Componente real de $G_{Uzz} IH_{Uzz} - z=1$

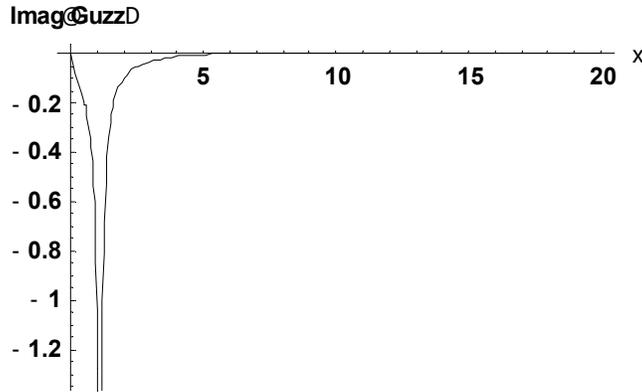


Figura 4.139 – Componente imaginária de $G_{U_{zz}}IH_{U_{zz}}-z=1$

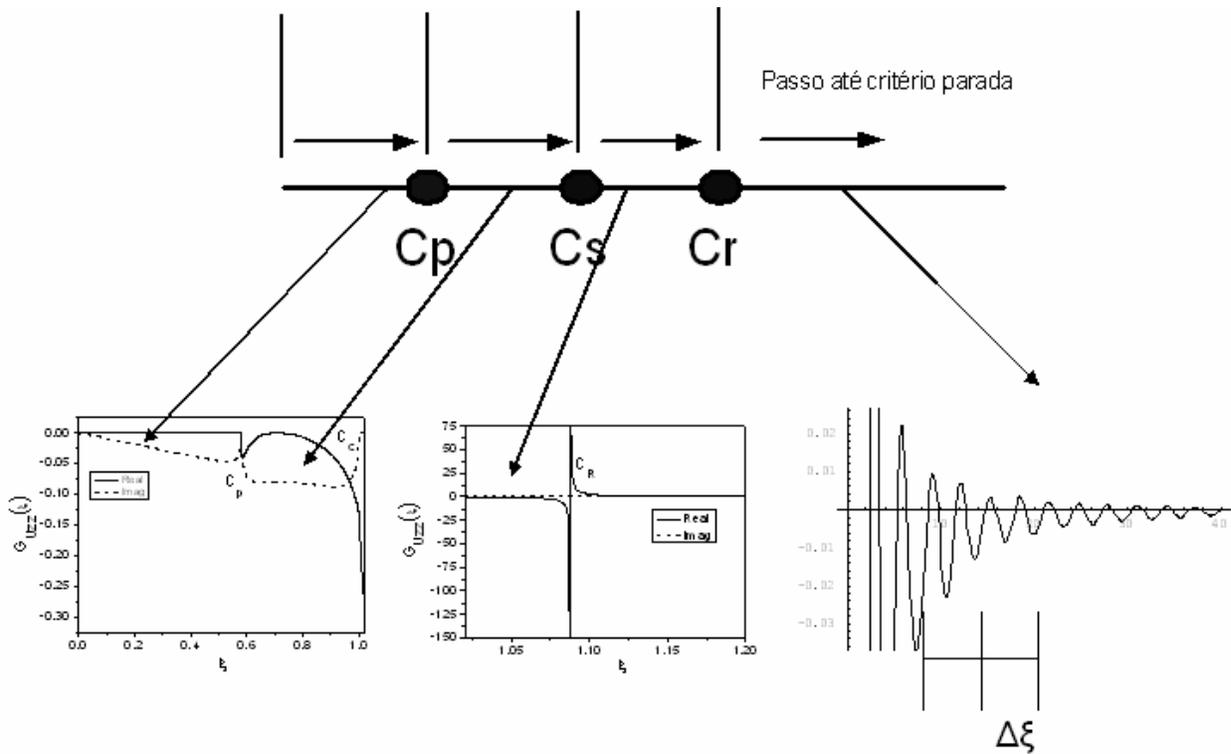


Figura 4.140 – Esquema de integração para semi-espaço com carregamento distribuído

4.8.4 Resultados numéricos para carregamento Distribuído

Para o semi-espaço isotrópico elástico submetido a carregamento estático vertical e distribuído na área definida por a e b , como mostra a figura 4.141, existe resposta analítica para a componente de deslocamento vertical na superfície. Love determinou o deslocamento médio da superfície do semi-espaço submetido ao carregamento uniformemente distribuído (Saada, 1974), como sendo:

$$U_{zz_medio} = m \frac{P(1-\nu^2)}{E\sqrt{A}}, \quad (4.731)$$

para a qual P é o carregamento total, A é a magnitude da área carregada, E o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson e m é um fator numérico que depende da relação entre os semilados a/b. Na tabela a seguir, são apresentados os valores de m para várias razões a/b.

	Círculo	Retângulos, razão a/b						
		1	1.5	2	3	5	10	100
m=	0.96	0.95	0.94	0.92	0.88	0.82	0.71	0.37

A tensão média ao longo do eixo z também foi determinada por Love,

$$\sigma_{zz_medio} = -\frac{P}{4\pi} \left[\frac{2BV}{V^2 + B^2} \frac{V^2 + 1}{V^2} + \tan^{-1} g^{-1} \frac{2BV}{V^2 + B^2} \right], \quad (4.732)$$

sendo:

$$V^2 = \frac{a^2 + b^2 + z^2}{z^2}, \quad (4.733)$$

$$B = \frac{ab}{z^2}. \quad (4.734)$$

Estas equações desenvolvidas por Love são apenas aproximadas. A resposta de deslocamento vertical, em qualquer ponto na superfície livre, foi deduzida por Scheicher a partir da integração do problema de Boussinesq sobre a superfície de carregamento (Gaul, 1976). Essa formulação estática permite a inclusão de efeitos de amortecimento. A resposta adimensional é dada por:

$$\frac{U_{zz}(x, y) a \mu}{P} = \frac{1 - i\eta(\omega = 0)}{16\pi(1 + \eta^2(\omega = 0))(1 - n^2)b_0} \left[-c_2 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - a_2}{\sqrt{a_1^2 + c_2^2} - a_1} \right) + c_1 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - a_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - a_1} \right) - \right. \\ \left. -a_2 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - c_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - c_1} \right) + a_1 \ln \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + c_2^2} - c_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - c_1} \right) \right], \quad (4.735)$$

para a qual são utilizadas as relações adimensionais:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = b/a \\ a_1 = (x/a + 1), \quad a_2 = (x/a - 1) \\ b_1 = (x/b + 1), \quad b_2 = (x/b - 1) \\ c_1 = b_0 b_1 \quad c_2 = b_0 b_2 \\ n = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \end{array} \right. \quad (4.734)$$

quando os pontos, em que se deseja determinar o deslocamento, estão sobre o limite da área carregada é dado que:

$$\begin{aligned} a_2 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - c_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - c_1} \right) &= 0 \quad \text{para} \quad \frac{x}{a} = 1, \\ c_2 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - a_2}{\sqrt{a_1^2 + c_2^2} - a_1} \right) &= 0 \quad \text{para} \quad \frac{y}{b} = 1, \\ a_1 \ln \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + c_2^2} - c_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - c_1} \right) &= 0 \quad \text{para} \quad \frac{x}{a} = -1, \\ c_1 \ln \left(\frac{\sqrt{a_2^2 + c_2^2} - a_2}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2} - a_1} \right) &= 0 \quad \text{para} \quad \frac{y}{b} = -1. \end{aligned} \quad (4.735)$$

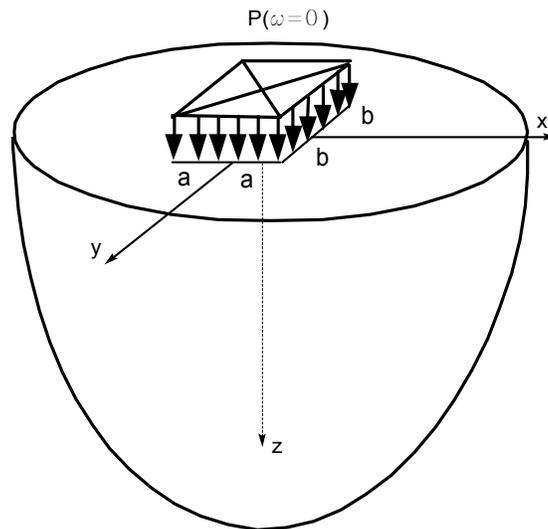


Figura 4.141 – Semi-espaço submetido a carregamento distribuído

Considerando um carregamento com frequência muito baixa, $\omega=0.01\text{rad/s}$, é possível validar a resposta da formulação com transformada de Radon. Adotando como parâmetros

materiais do meio, o coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, o módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, e um fator de amortecimento histerético constante $\eta=0.01$, determinou-se a resposta de deslocamento vertical ao longo do eixo x . Os resultados podem ser vistos na figura 4.142. A diferença dos resultados obtidos pelo problema numérico quase-estático e a resposta estática foram inferiores a 0.1%.

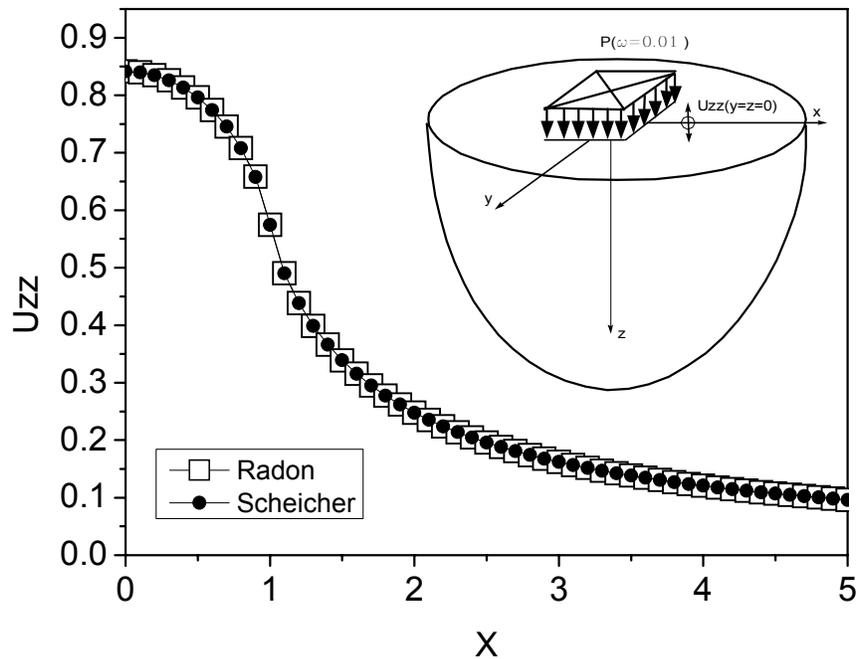


Figura 4.142 – Solução quase-estática para carregamento distribuído

Para validação com a resposta de $U_{zz\text{médio}}$ fornecida por Love, é preciso considerar o deslocamento de todo o plano sob o carregamento, e determinar-se a média dos deslocamentos. Considerando um $\Delta x=\Delta y=0.1$, foram calculados os resultados para os pontos no intervalo $-5 < x < 5$, $-5 < y < 5$. O deslocamento médio, neste intervalo, obtido pela formulação desenvolvida com uso da transformada de Radon foi igual a $U_{zz\text{médio}} = 0.1720$; a resposta pela equação de Love seria $U_{zz\text{love}}=0.1781$. A presença do amortecimento pode explicar a menor amplitude média de deslocamento. Esta função de deslocamento possui decaimento monotônico, e tende a valores inferiores a 0.1720. Se o intervalo for ampliado, as médias tendem a ser mais reduzidas.

Outra metodologia para validação é considerar o problema com carregamento concentrado, validado anteriormente. Neste caso, basta reduzir os valores de a e b , para que as respostas se aproximem daquelas obtidas para carregamento concentrado. Normalizando as respostas de deslocamento como:

$$U_{zznorm} = \frac{U_{zz}}{4ab} \quad (4.736)$$

e mantendo o coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento da análise anterior, aumentando o amortecimento para $\eta=0.2$, e aplicando um carregamento dinâmico com frequência $\omega=1\text{rad/s}$ são obtidos os resultados apresentados na figura 4.143, para diferentes valores de a e b . A diferença das respostas está basicamente no trecho inicial, pois os semilados do carregamento variam. No entanto, à medida que se analisa o resultado ao longo de x , nota-se uma boa convergência das respostas. O erro absoluto para as respostas obtidas é apresentado na figura 4.144. Na medida em que se diminuem os valores de a e b , a resposta aproxima-se bastante daquela obtida pela formulação com carga concentrada.

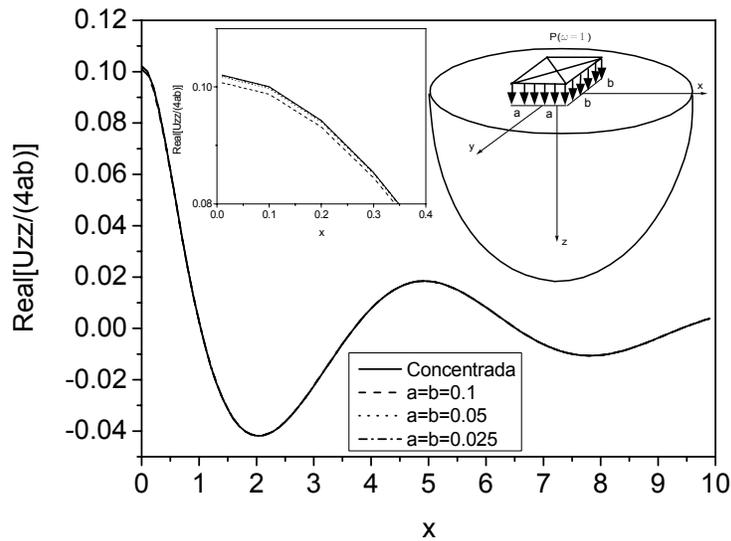


Figura 4.143 – U_{zz} tendendo ao carregamento concentrado

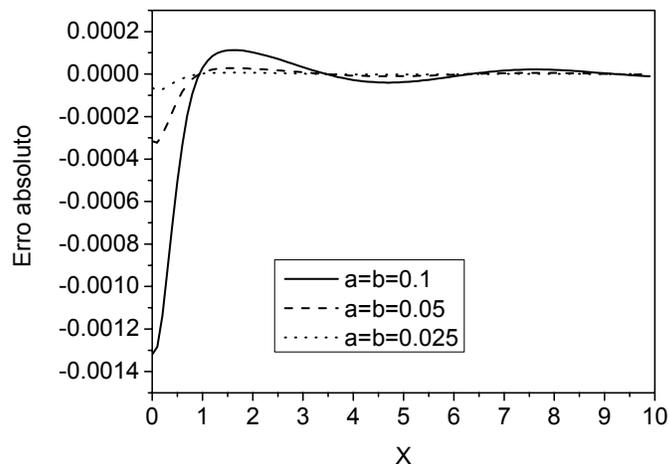


Figura 4.144 – Erro absoluto na aproximação com carregamento concentrado

Para validação dinâmica, foi realizada a comparação com a implementação de Romanini (1995) que utiliza a transformada dupla de Fourier para obter as respostas de deslocamento e tensão para carregamento distribuído. Considerando o carregamento com semilados $a=b=1$, e frequência $\omega=5$ rad/s e parâmetros materiais: coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$ e um fator de amortecimento histerético constante $\eta=0.2$, coordenadas $z=0$, $y=2$, calculando os valores das componentes de deslocamento ao longo do eixo x , erros numéricos absolutos e relativos de 10^{-5} foram adotados. Os resultados, para o problema com carga vertical, são apresentados nas figuras 4.145 a 4.147, para U_{zz} , U_{xz} e U_{yz} , respectivamente, sendo possível notar uma boa concordância entre as duas formulações.

Resultados de todas as componentes de deslocamento para carregamento vertical, horizontal em x e y , considerando os mesmos parâmetros da análise anterior, no entanto, para frequência $\omega=2\text{rad/s}$, são apresentadas as respostas para carga vertical nas figuras 4.148 a 4.150; e nas figuras 4.151 a 4.153, para carga tangencial na direção x . E, finalmente, as figuras 4.154 a 4.156 mostram as respostas para carregamento horizontal na direção y . Foi obtida uma boa concordância entre as duas formulações. Para obter tais resultados na superfície livre, a presente formulação necessitou de 2693 s, enquanto a com implementação, através da transformada de Fourier, precisou de 550s. O maior problema nesta implementação é o comportamento oscilante da função obtida da integração das funções H_i em θ , por decaírem muito lentamente e não

oscilarem de forma que fosse possível utilizar algoritmos mais eficientes, reduzindo, significativamente, a capacidade da formulação na determinação de respostas ao longo da superfície livre.

Para pontos no interior do semi-espço, com coordenadas $z=1$, $y=0$ e frequência $\omega=5$, os resultados são apresentados nas Figura 4.157 a 4.161, para U_{xx} , U_{zx} , U_{yy} , U_{xz} e U_{zz} respectivamente, sendo as demais componentes nulas. Pode ser observada uma boa concordância entre as duas formulações. É importante salientar que, para as componentes U_{zx} e U_{xz} , o erro cresce significativamente para valores de $x>5$, mas, nesse ponto, a resposta tem magnitude de 10^{-5} , que é também a grandeza adotada como critério de parada para o processo de integração. O tempo necessário para obter as respostas pela formulação apresentada neste trabalho foi de 61s, enquanto a implementação baseada na transformada de Fourier necessitou de 520s. Para pontos no interior do semi-espço, a presente formulação converge mais rapidamente.

O esforço computacional, para obter as respostas, está relacionado aos erros de integração adotados. Considerando erros relativos e critérios de parada, diferentes para obter a convergência, e o problema com pontos na superfície, foram necessários os seguintes tempos:

Erro	Radon	Fourier
10^{-5}	2693s	550s
10^{-4}	783s	540s
10^{-3}	187s	536s

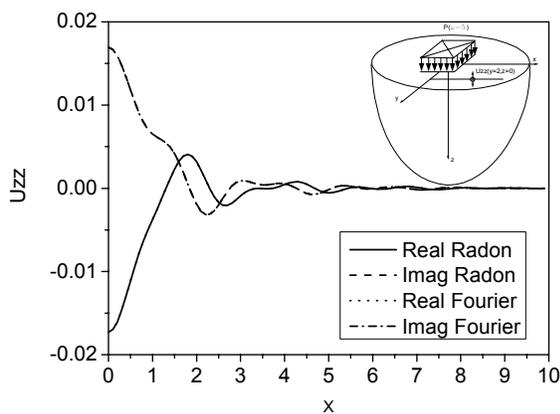


Figura 4.145a. U_{zz} $-\omega=5$, $z=0$, $y=2$

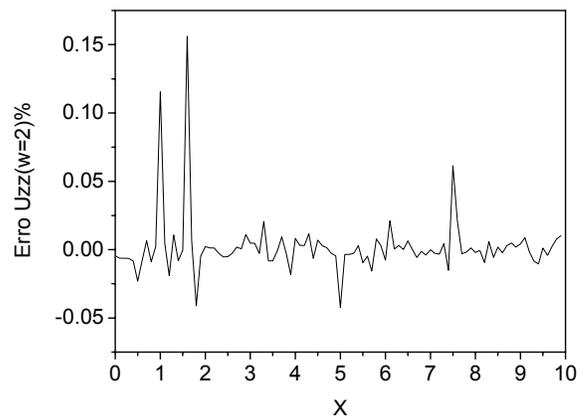


Figura 4.145b. Erro relativo U_{zz}

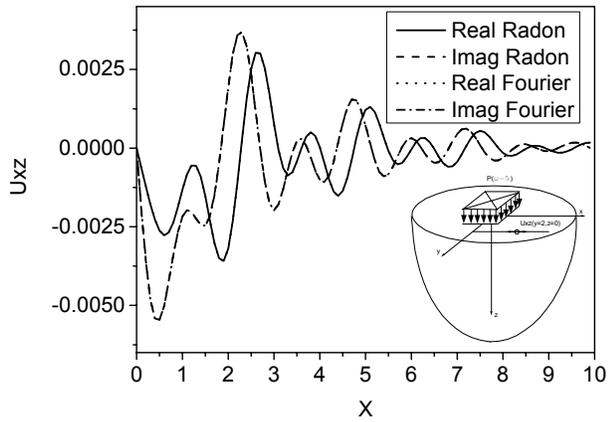


Figura 4.146a. $U_{xz} - \omega=5, z=0, y=2$

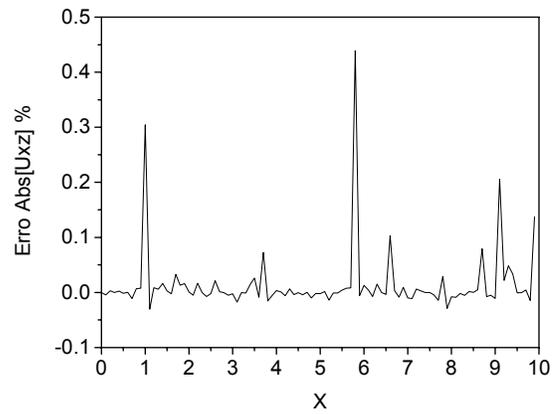


Figura 4.146b. Erro relativo U_{xz}

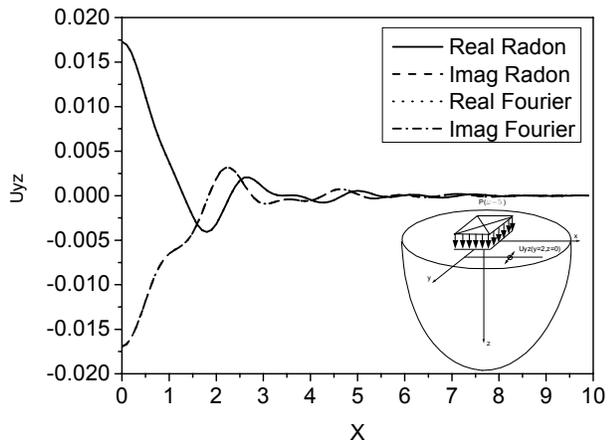


Figura 4.147a. $U_{yz} - \omega=5, z=0, y=2$

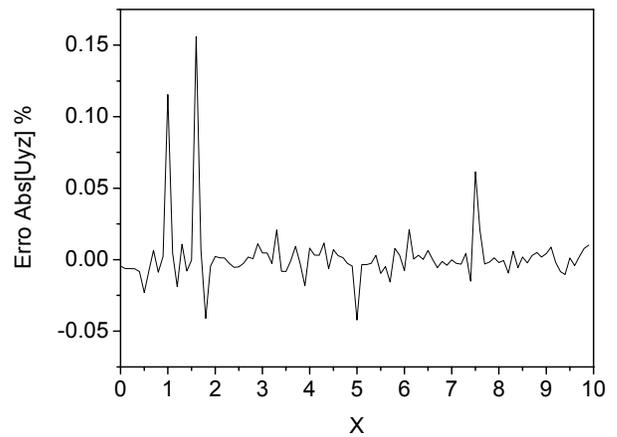


Figura 4.147b. Erro relativo U_{yz}

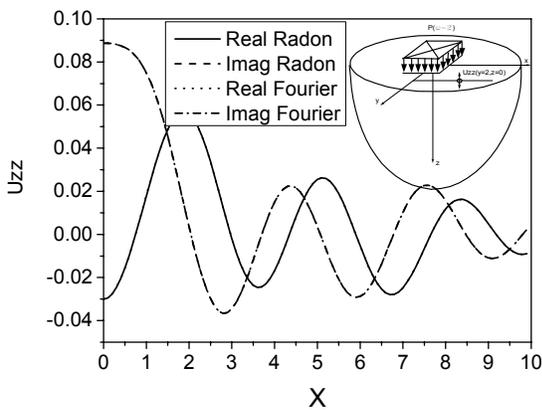


Figura 4.148a $U_{zz} \omega=2, z=0, y=2$

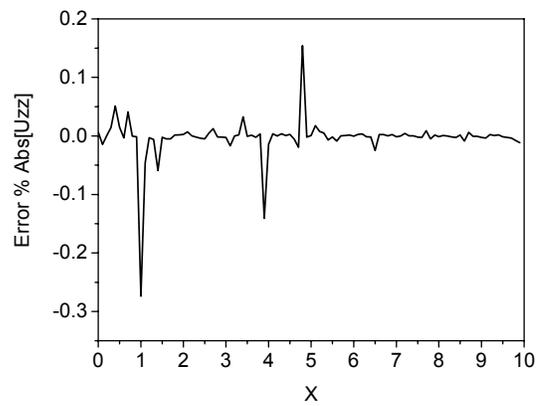


Figura 4.148b. Erro relativo U_{zz}

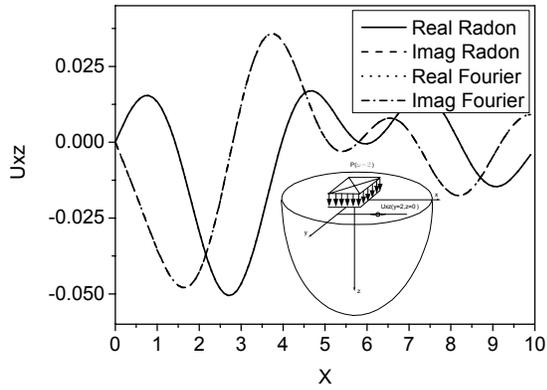


Figura 4.149a U_{xz} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$

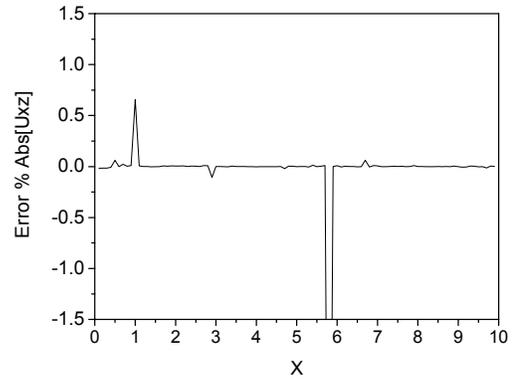


Figura 4.149b Erro relativo U_{xz}

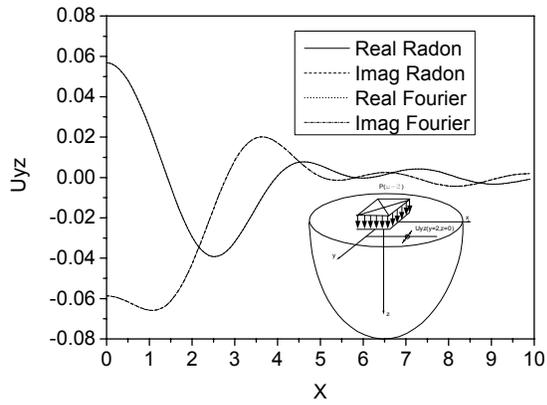


Figura 4.150a U_{yz} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$

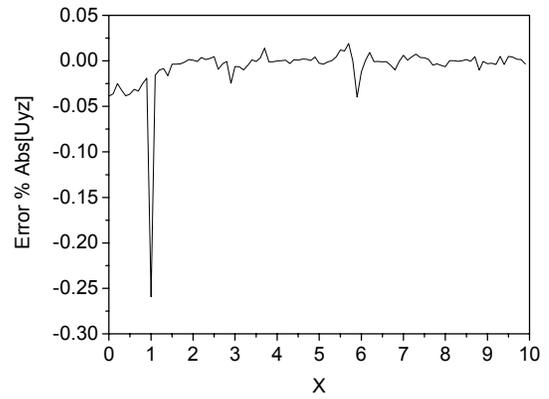


Figura 4.150b Erro relativo U_{yz}

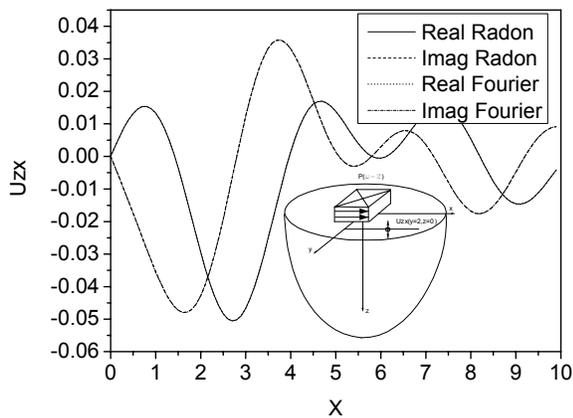


Figura 4.151a U_{z_x} $\omega=2$, $z=0$, $y=2$

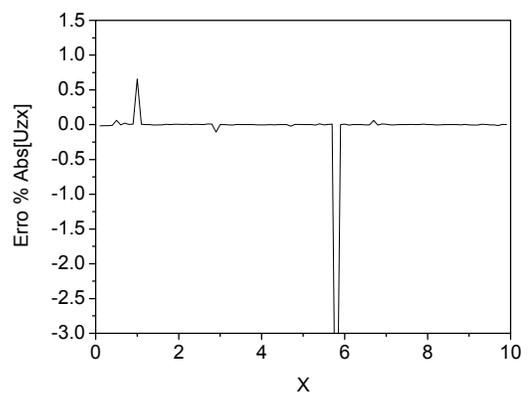


Figura 4.151b Erro relativo U_{z_x}

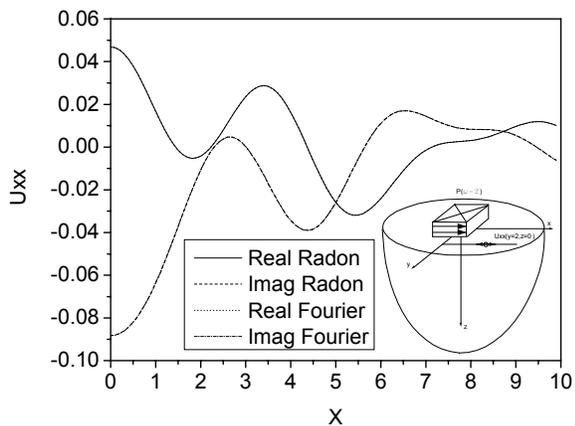


Figura 4.152a $U_{xx} \omega=2, z=0, y=2$

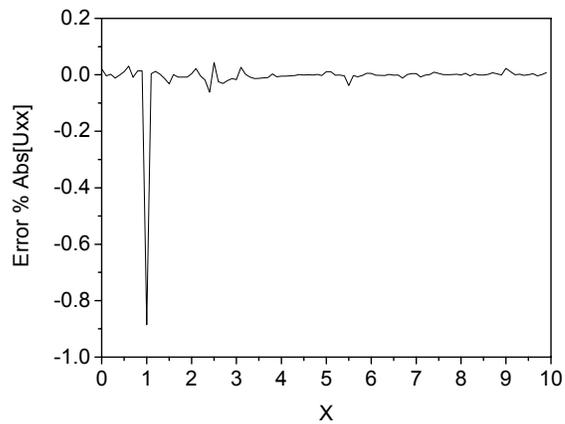


Figura 4.152b Erro relativo U_{xx}

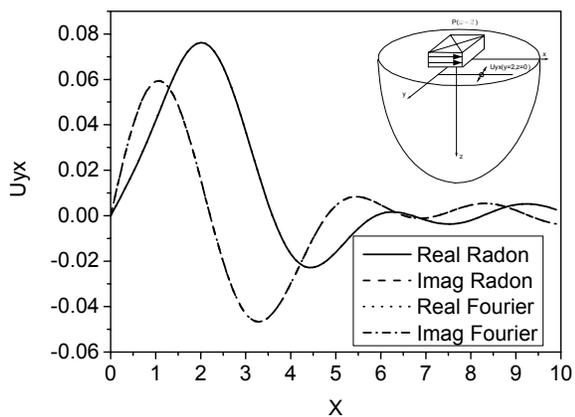


Figura 4.153a $U_{yx} \omega=2, z=0, y=2$

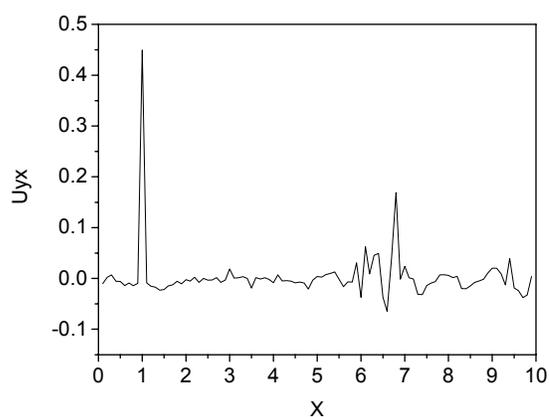


Figura 4.153b Erro relativo U_{yx}

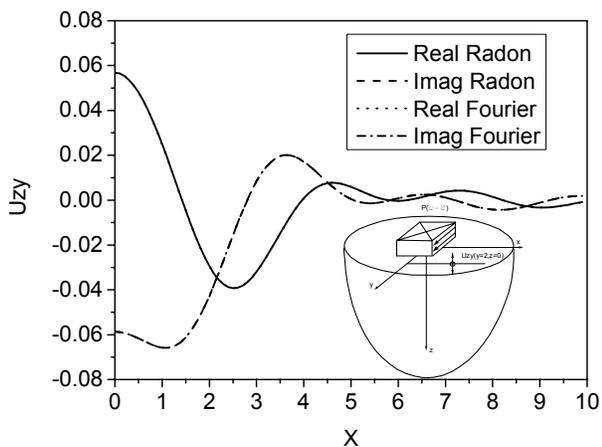


Figura 4.154a $U_{zy} \omega=2, z=0, y=2$

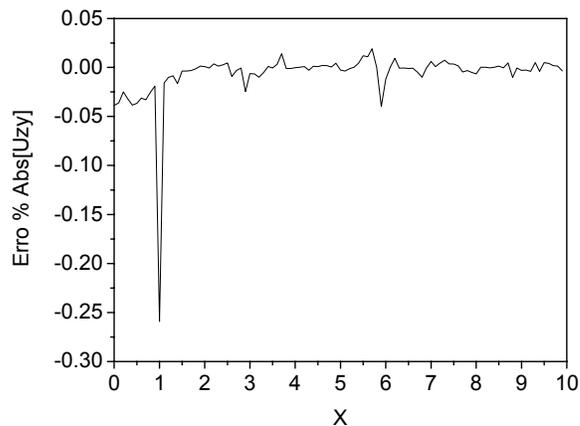


Figura 4.154b Erro relativo U_{zy}

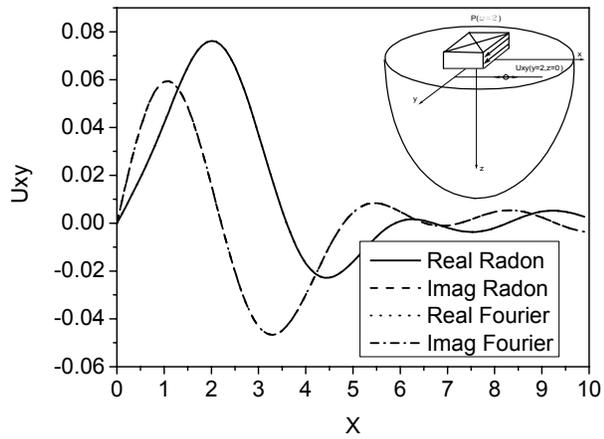


Figura 4.155a $U_{xy} \omega=2, z=0, y=2$

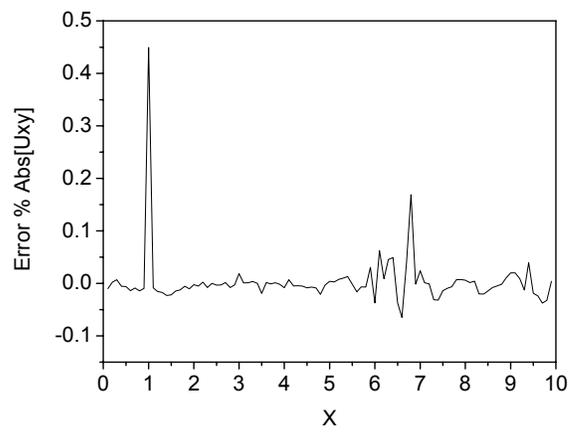


Figura 4.155b Erro relativo U_{xy}

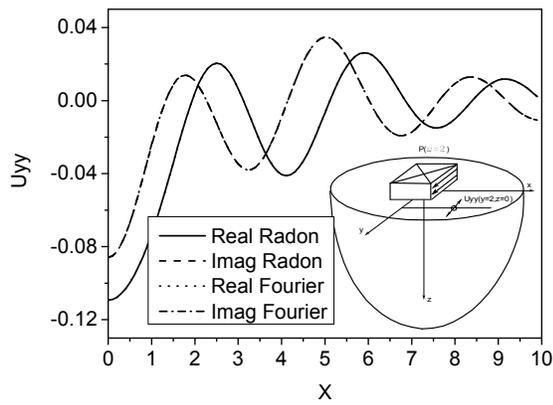


Figura 4.156a $U_{yy} \omega=2, z=0, y=2$

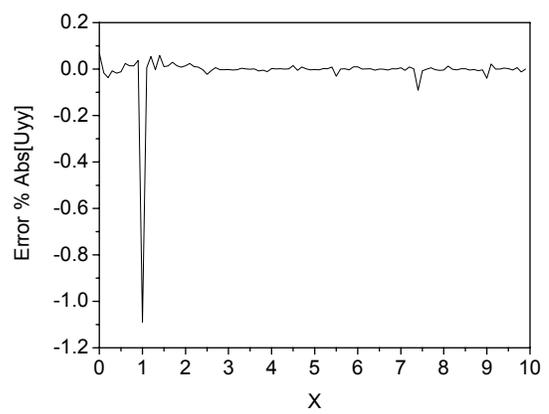


Figura 4.156b Erro relativo U_{yy}

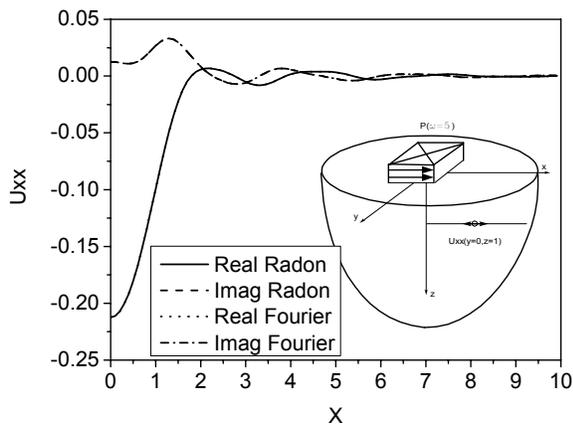


Figura 4.157a $U_{xx} z=1, \omega=5, y=0$

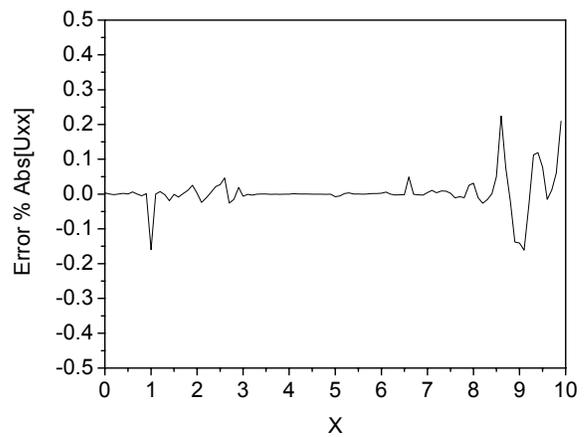


Figura 4.157b Erro relativo U_{xx}

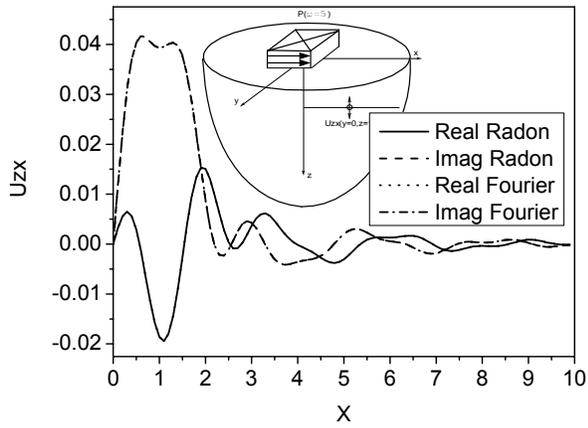


Figura 4.158a U_{zx} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$

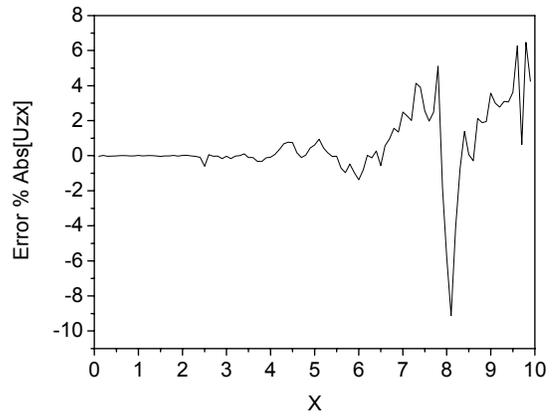


Figura 4.158b Erro relativo U_{zx}

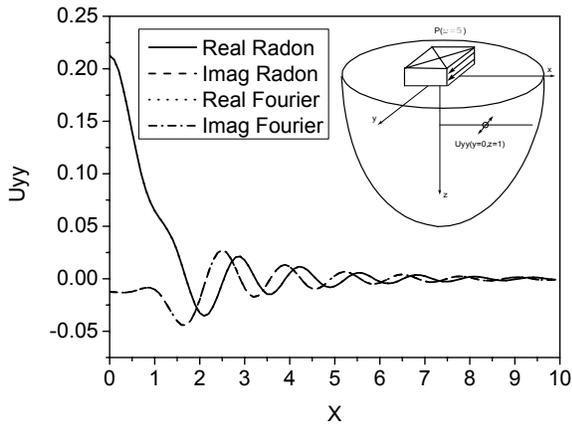


Figura 4.159a U_{yy} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$

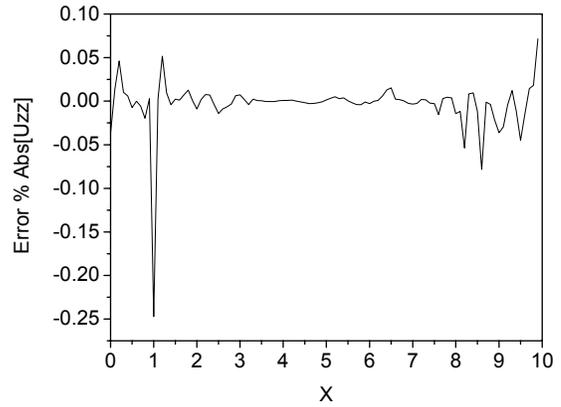


Figura 4.159b Erro relativo U_{yy}

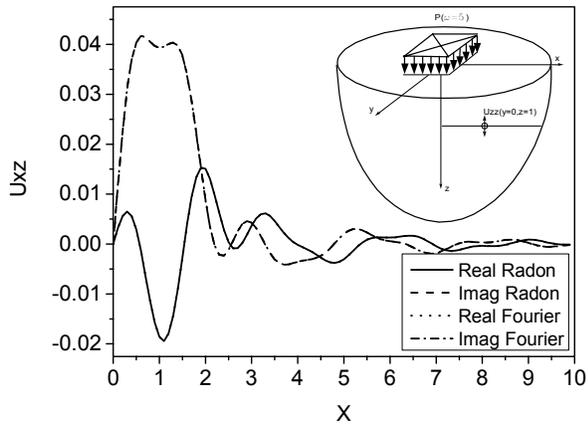


Figura 4.160a U_{xz} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$

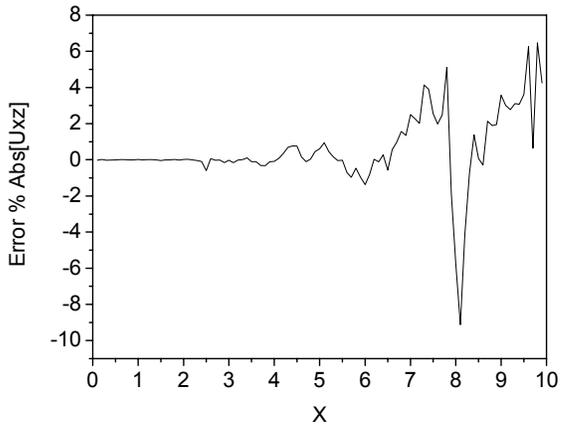


Figura 4.160b Erro relativo U_{xz}

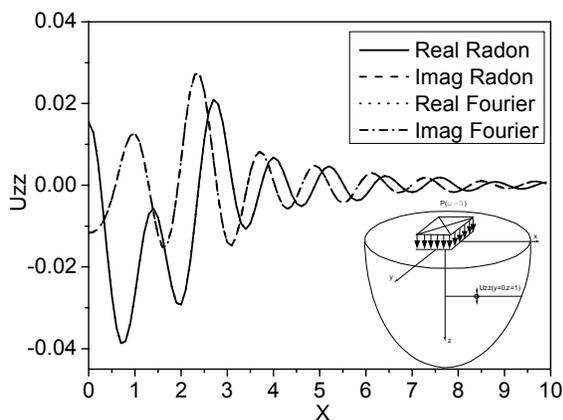


Figura 4.161a U_{zz} $z=1$, $\omega=5$, $y=0$

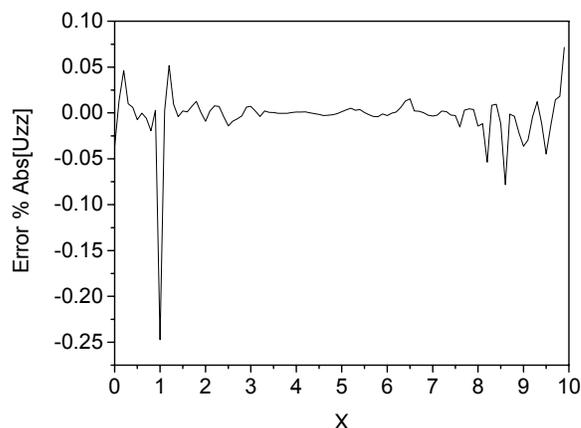


Figura 4.161b Erro relativo U_{zz}

Para a superfície livre do semi-espço, são apresentados os resultados de deslocamento devido à carga vertical e carga tangencial aplicada no eixo x . Os parâmetros materiais adotados para esta análise são coeficiente de Poisson $\nu=0.25$, densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, fator de amortecimento $\eta=0.2$, frequência de excitação $\omega=1$ rad/s e erros relativos e absolutos de integração de 10^{-5} . São apresentados os perfis de propagação de ondas para os planos da superfície livre, e para o plano xz , com $y=0$, como pode ser visto na figura 4.162.

Para o problema com carregamento vertical, os resultados para as componentes real e imaginária dos deslocamentos U_{zz} e U_{xz} , ao longo da superfície livre, são apresentados nas figuras 4.163 a 4.166. Não existem singularidades ao longo dos campos de deformação, sendo o decaimento da função mais lento que o observado para cargas concentradas. Os resultados para carga distribuída aplicada tangencialmente na direção x , são apresentados nas figuras 4.167 a 4.172 para as componentes real e imaginária das componentes U_{zx} , U_{xx} , U_{yz} .

As respostas com o perfil de deslocamento para o plano xz , com $y=2$, são apresentadas nas figuras 2.173 a 2.178. Neste caso, sendo aplicada a carga vertical, as respostas são os deslocamentos U_{zz} , U_{xz} e U_{yz} . Note o rápido decaimento à medida que se aumenta z , a maior parte da energia propaga-se ao longo da superfície livre. Para carga orientada com o eixo x , as respostas para as componentes U_{zx} , U_{xx} e U_{yx} são dadas nas figuras 4.179 a 4.184.

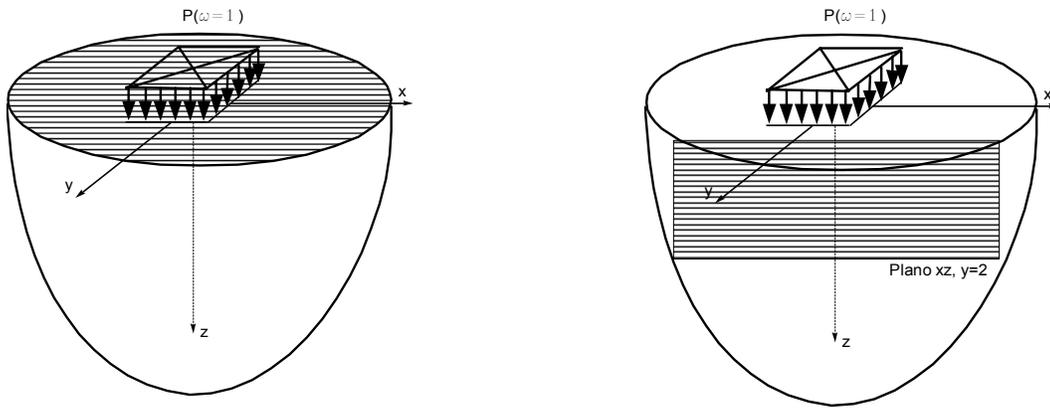


Figura 4.162 – Planos analisados, carregamento distribuído

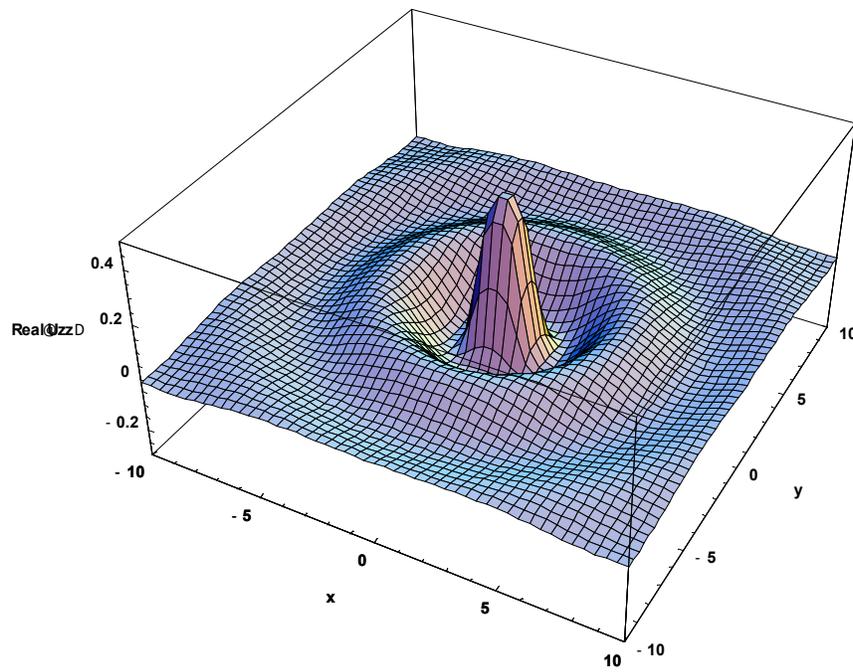


Figura 4.163 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{zz}

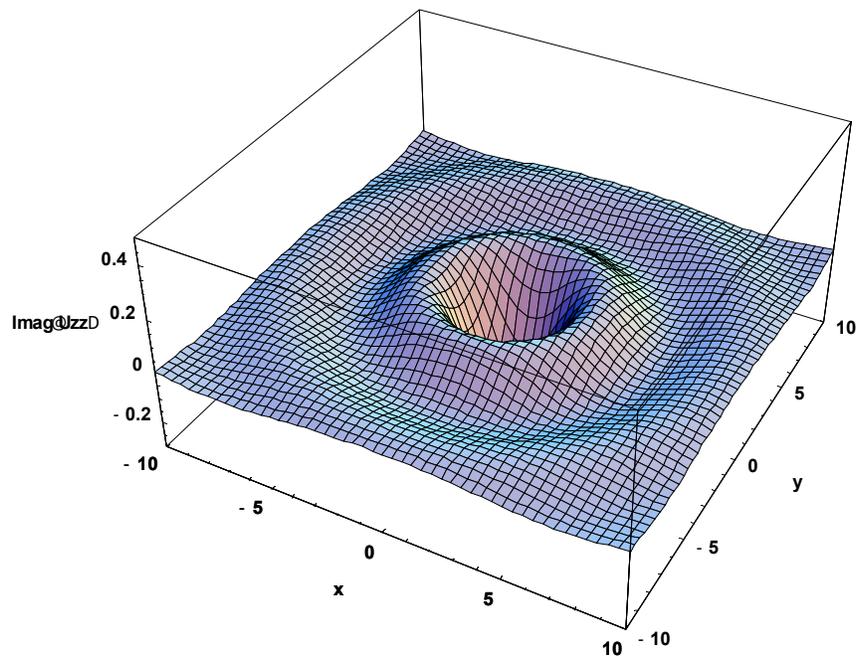


Figura 4.164 – Plano x - y , $z=0$ – Componente imaginária de U_{zz}

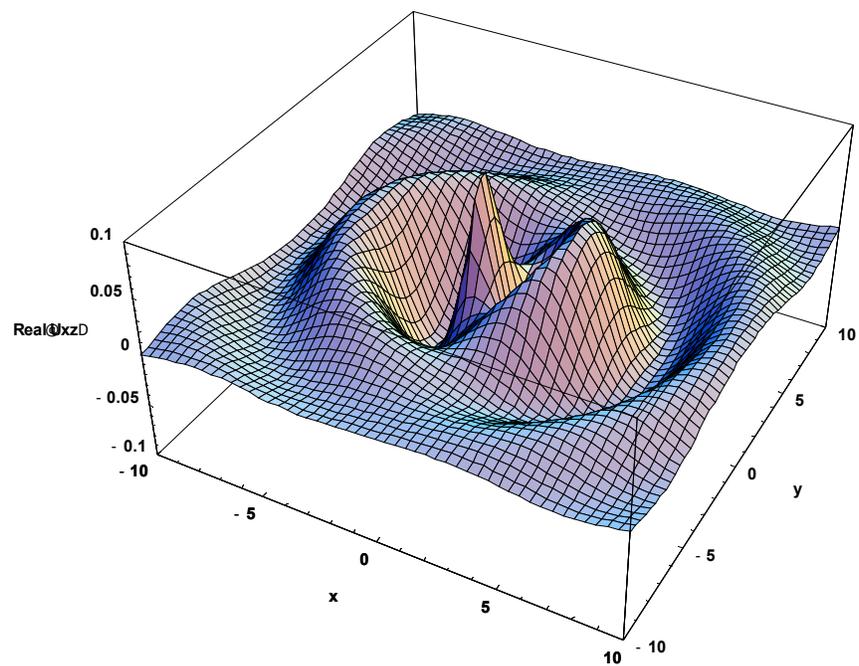


Figura 4.165 – Plano x - y , $z=0$ – Componente real de U_{xz}

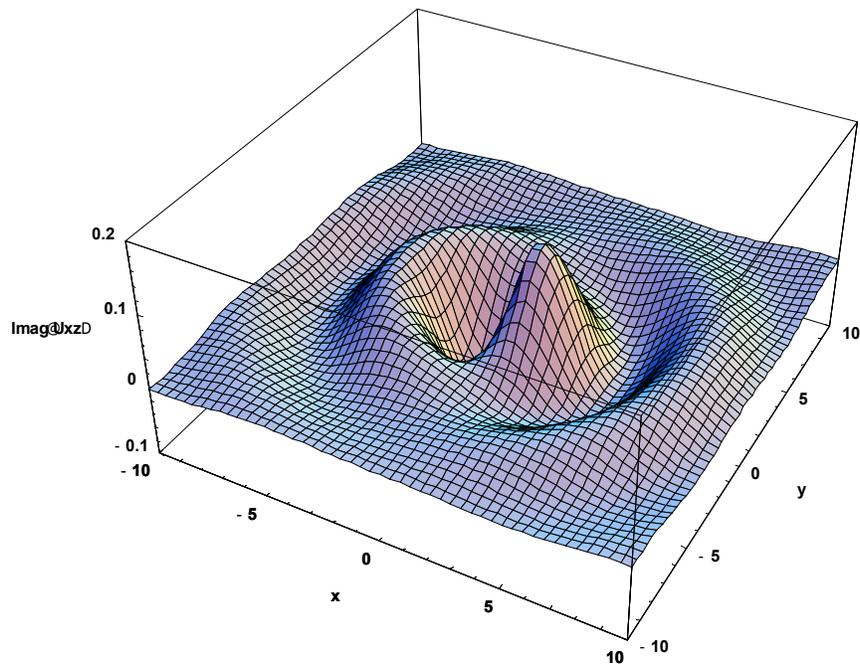


Figura 4.166 – Plano x-y, $z=0$ – Componente imaginária de U_{xz}

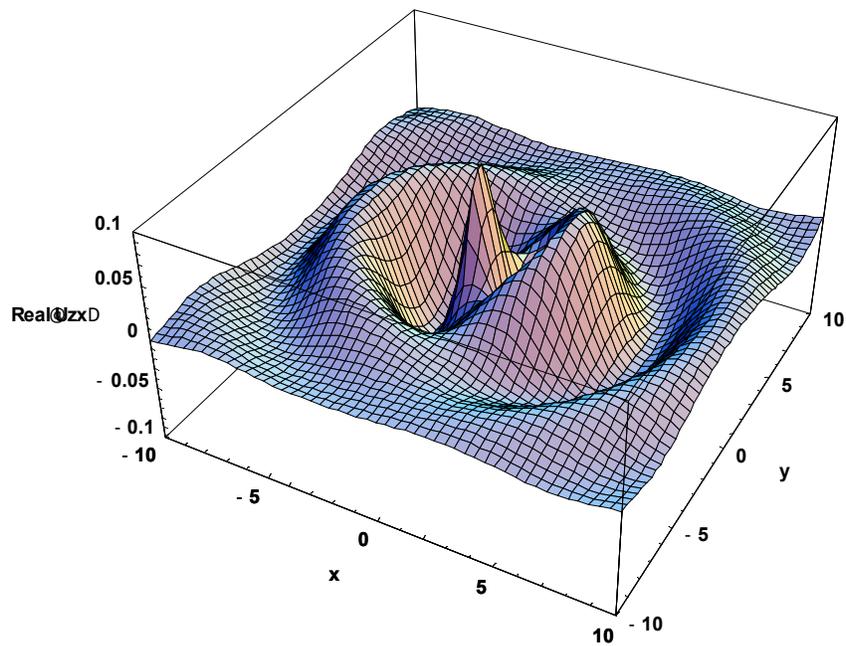


Figura 4.167 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{zx}

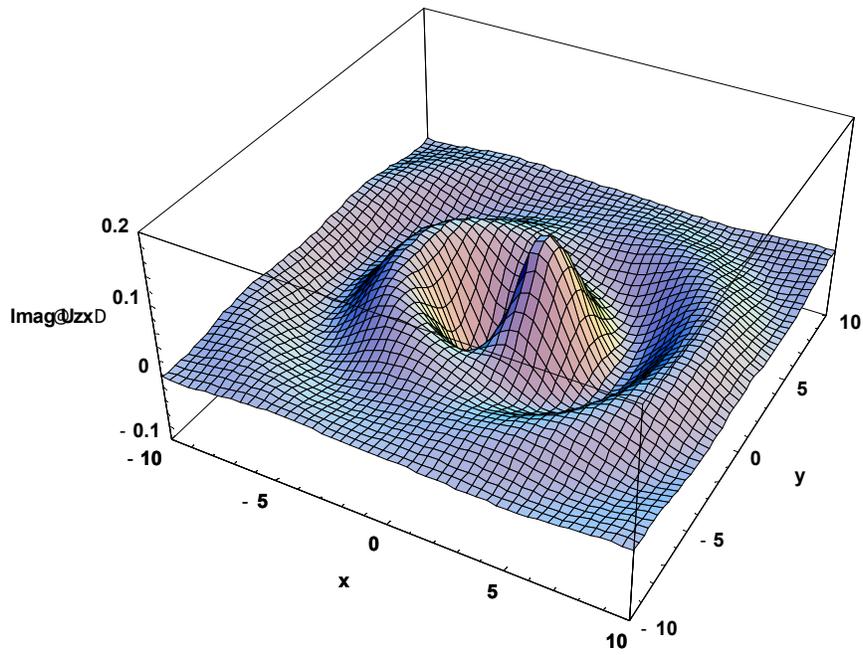


Figura 4.168 – Plano x-y, $z=0$ – Componente imaginária de U_{zx}

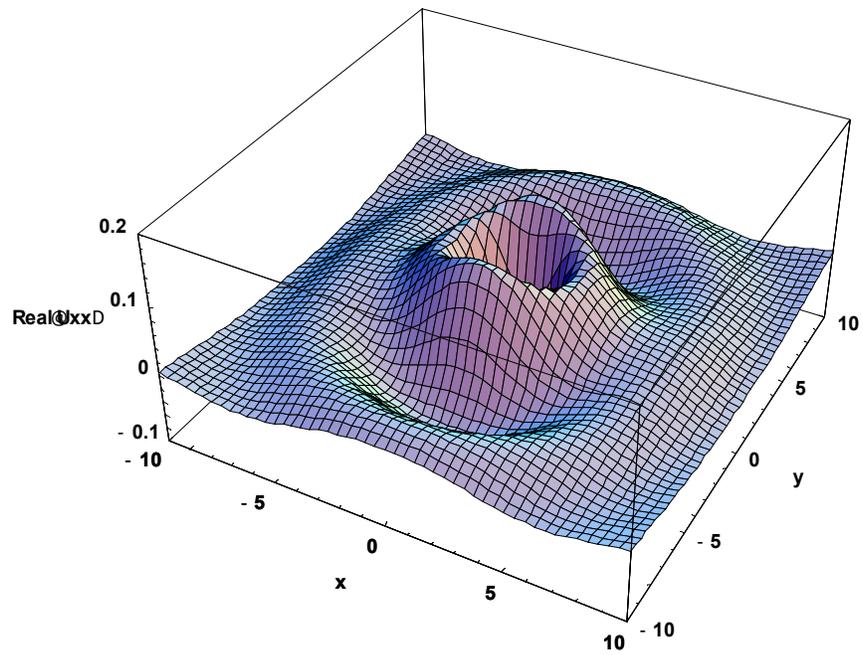


Figura 4.169 – Plano x-y, $z=0$ – Componente real de U_{xx}

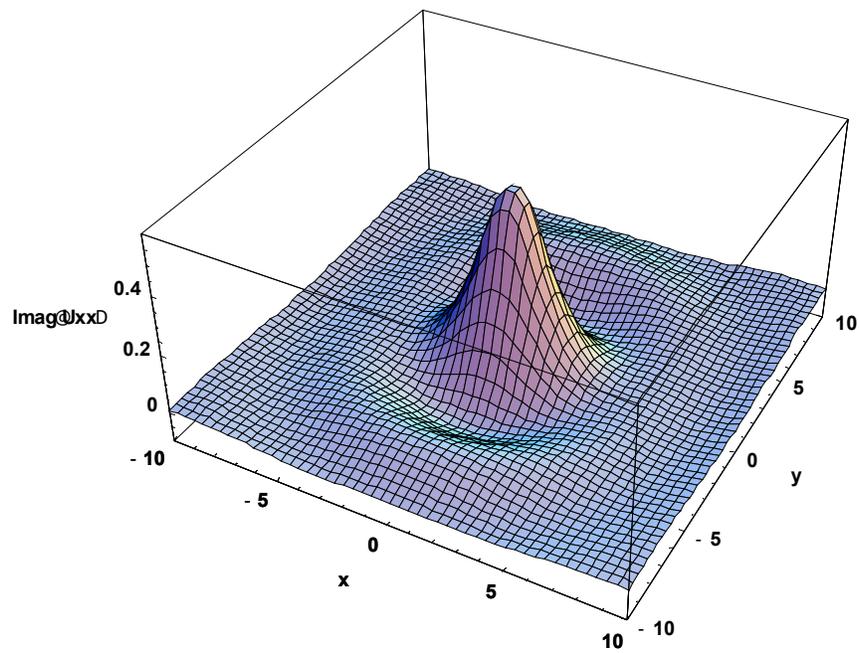


Figura 4.170 – Plano x-y, z=0 – Componente imaginária de U_{xx}

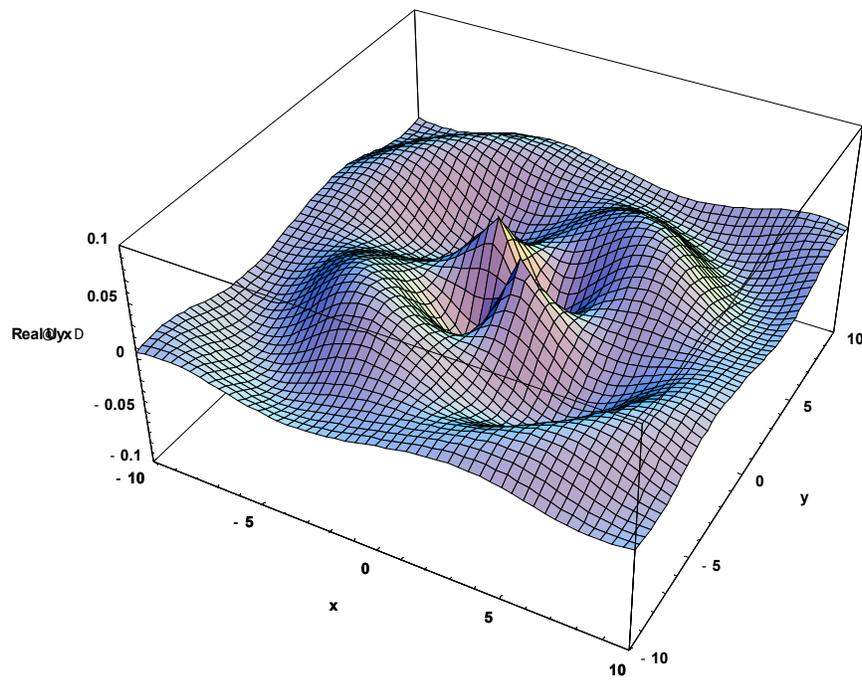


Figura 4.171 – Plano x-y, z=0 – Componente real de U_{yx}

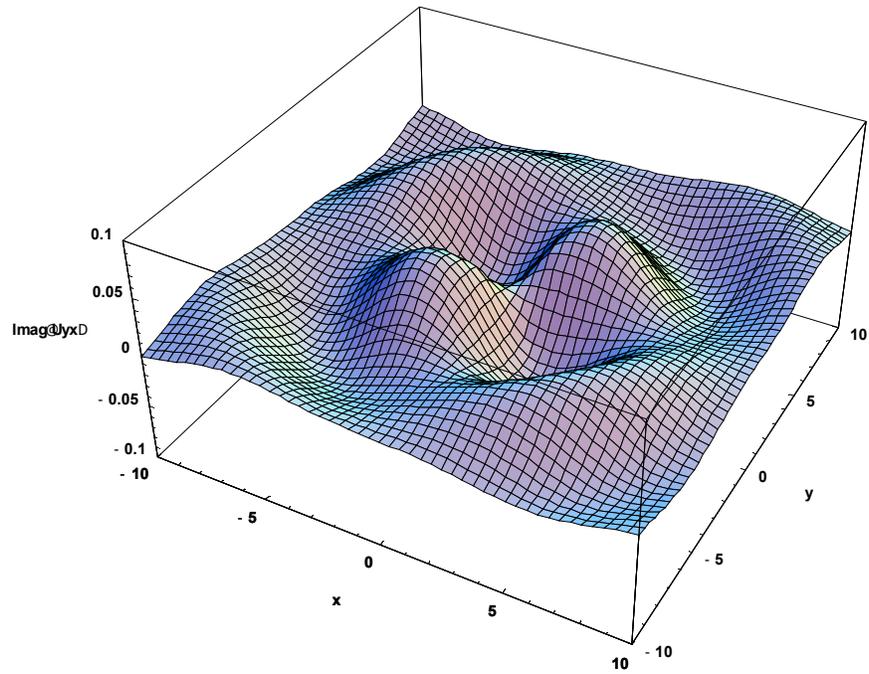


Figura 4.172 – Plano x - y , $z=0$ – Componente imaginária de U_{yx}

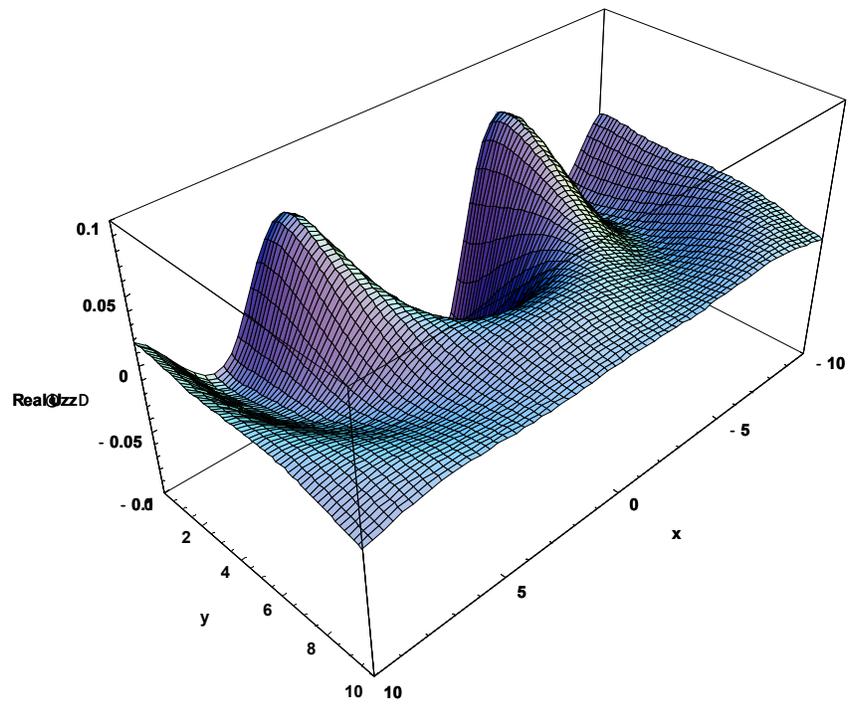


Figura 4.173 – Plano x - z , $y=2$ – Componente real de U_{zz}

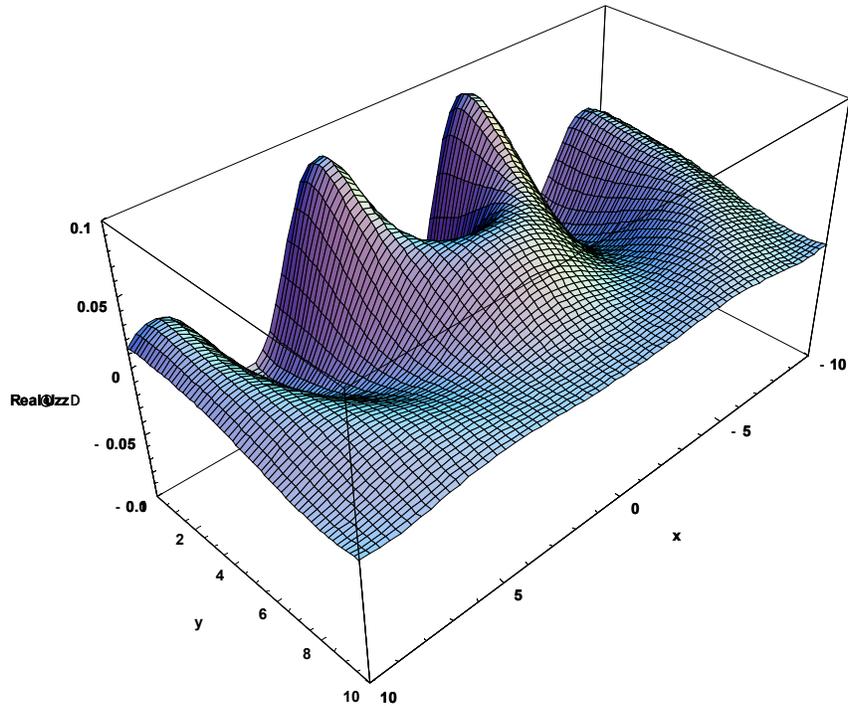


Figura 4.174 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{zz}

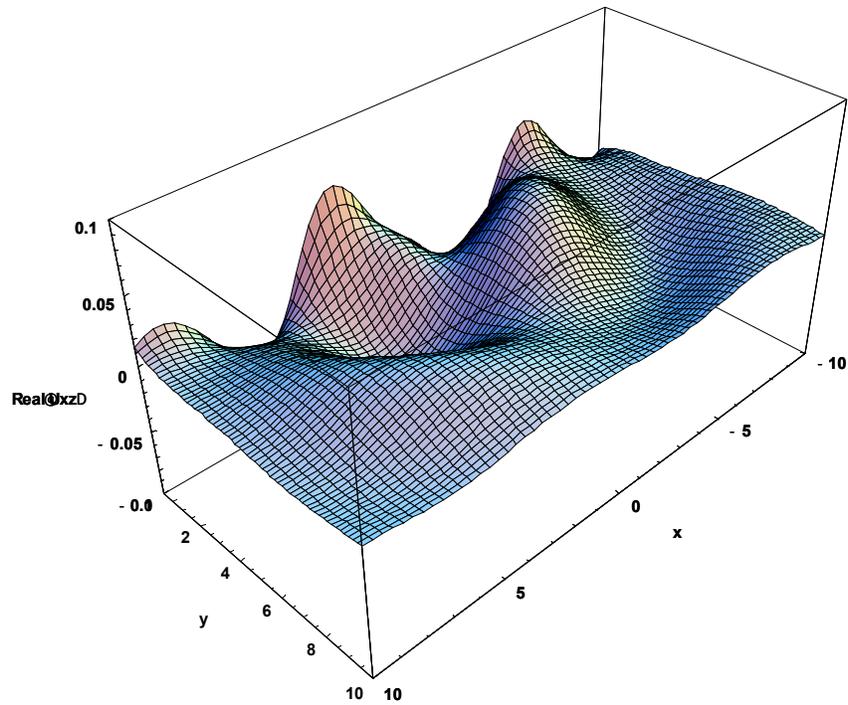


Figura 4.175 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{xz}

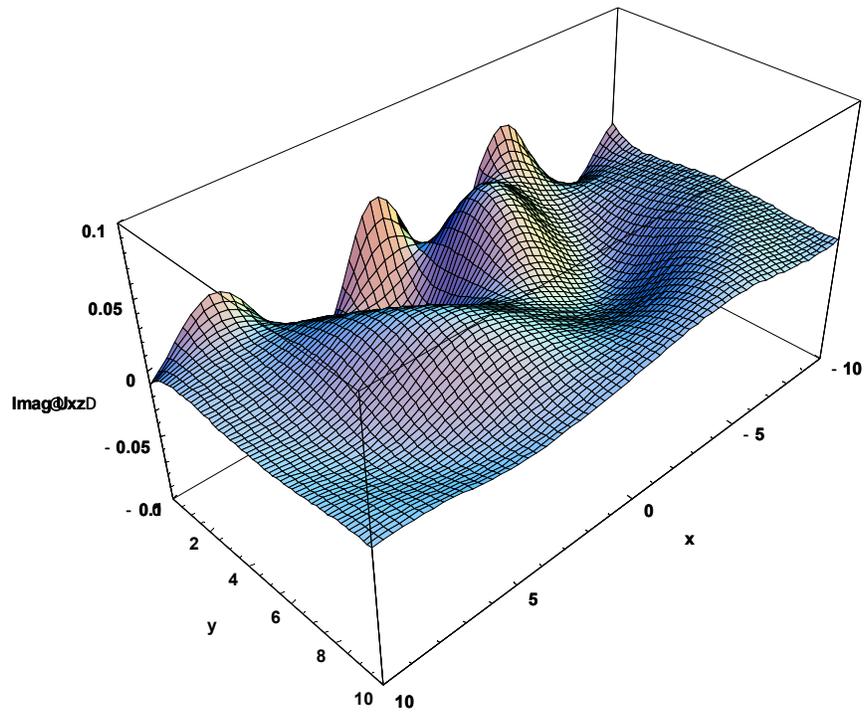


Figura 4.176 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{xz}

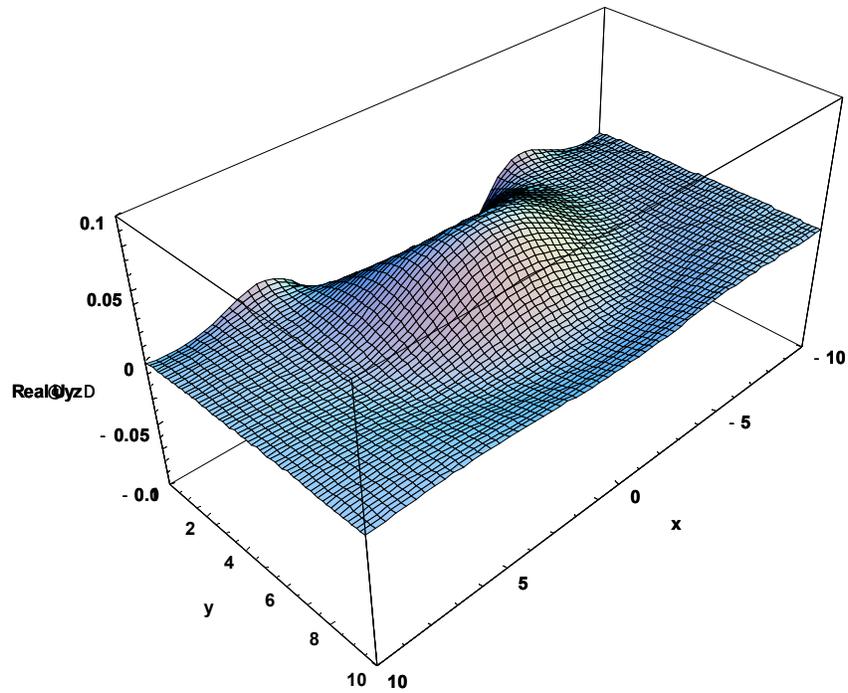


Figura 4.177 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{yz}

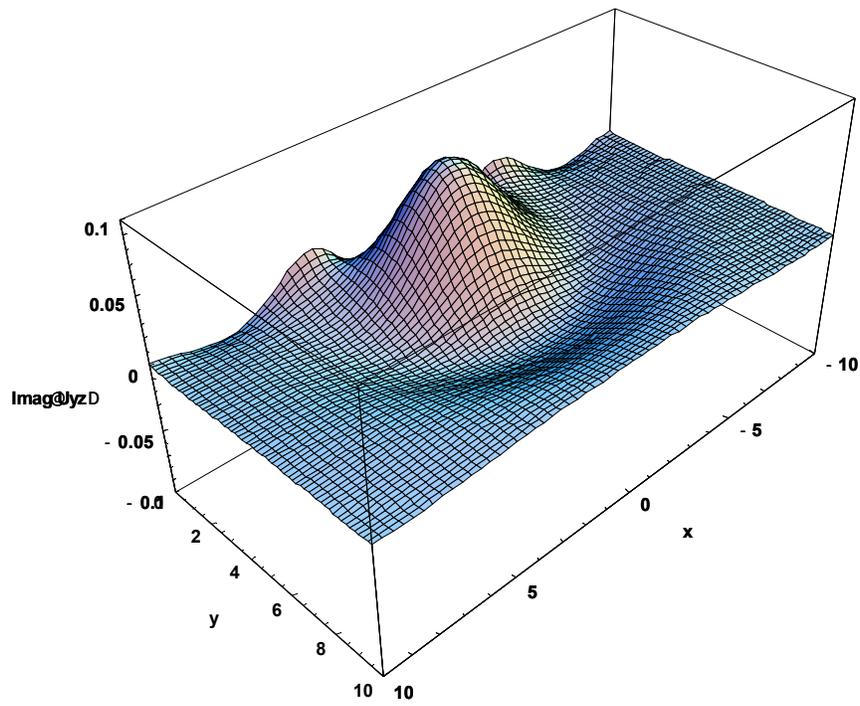


Figura 4.178 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{yz}

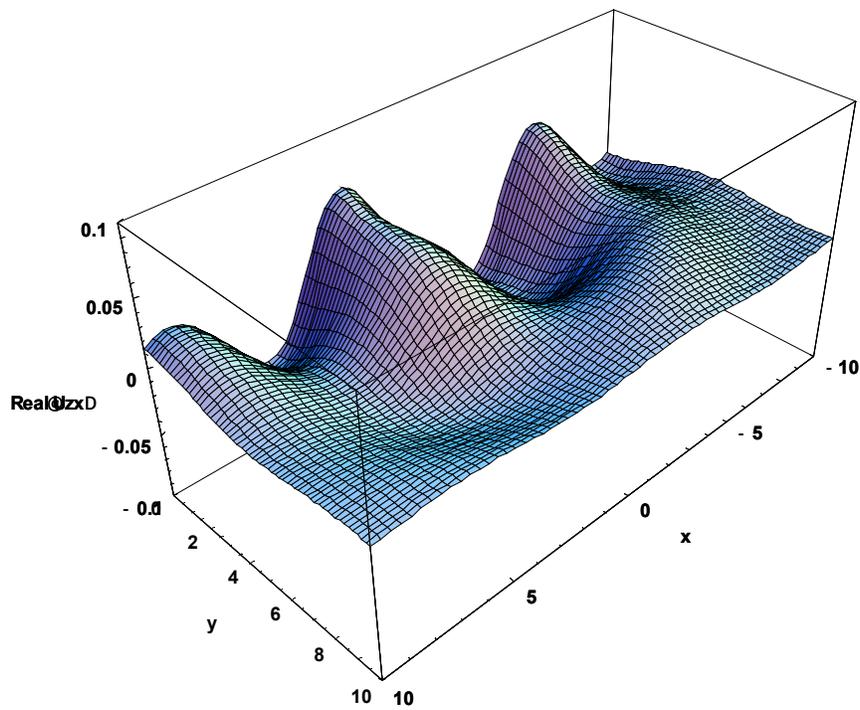


Figura 4.179 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{zx}

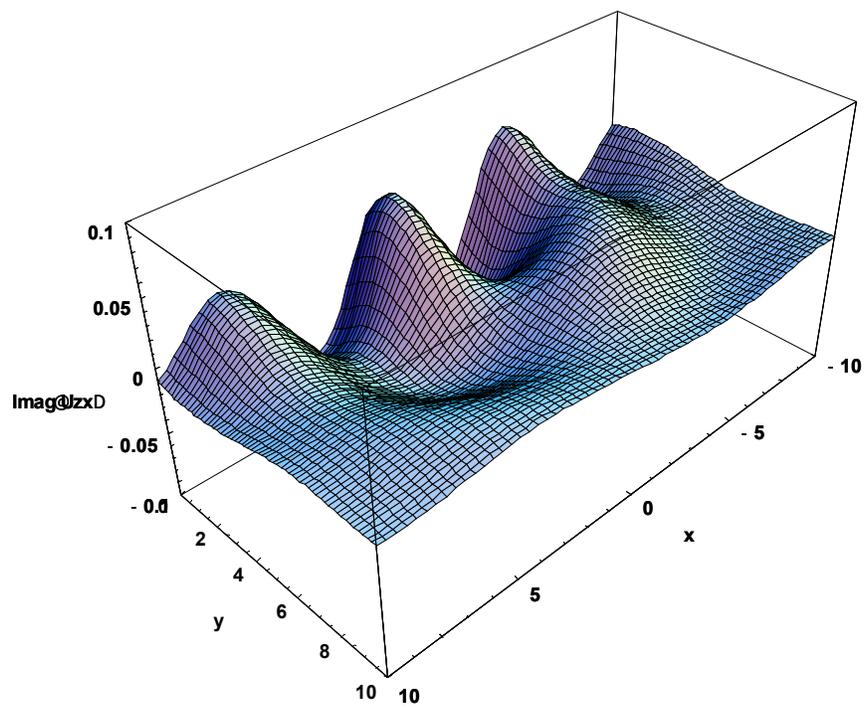


Figura 4.180 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{zx}

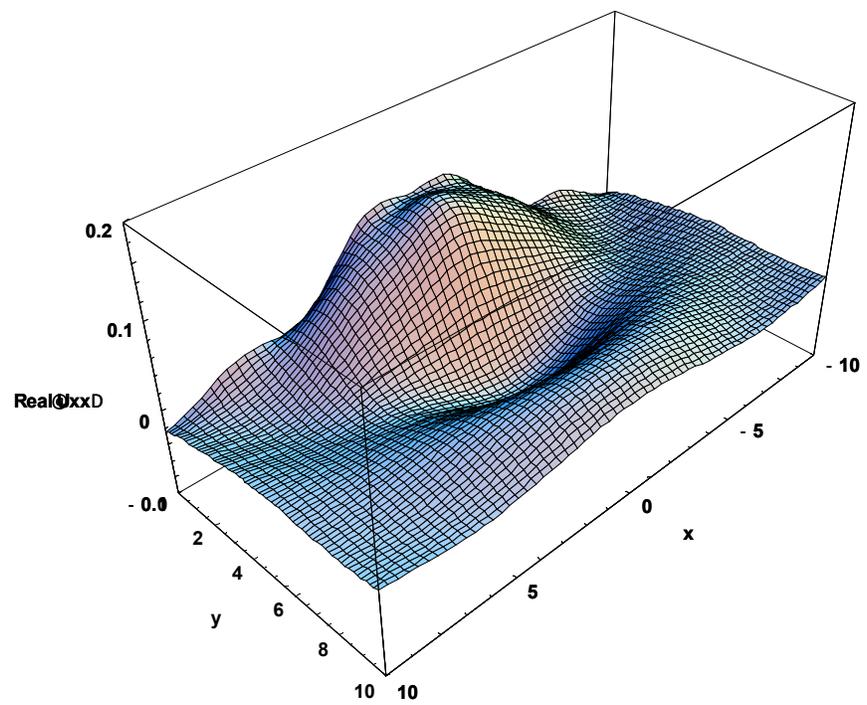


Figura 4.181 – Plano x-z, y=2 – Componente real de U_{zx}

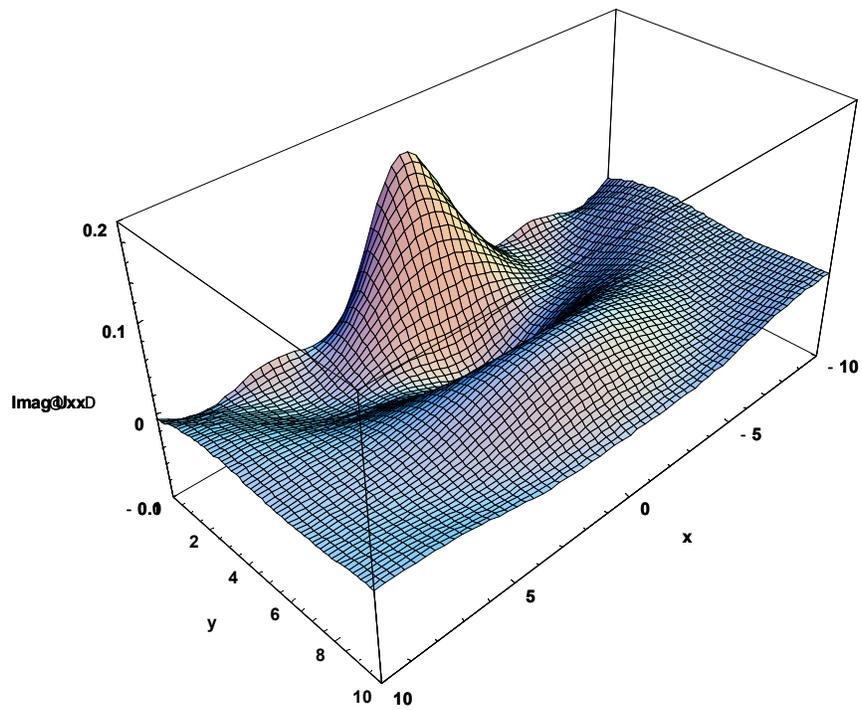


Figura 4.182 – Plano x-z, $y=2$ – Componente imaginária de U_{xx}

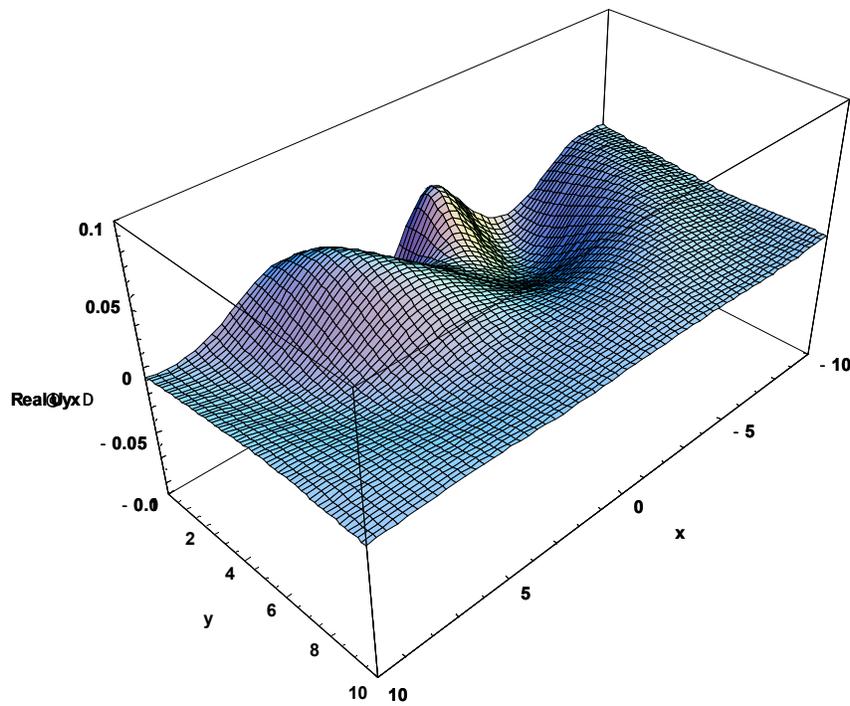


Figura 4.183 – Plano x-z, $y=2$ – Componente real de U_{yx}

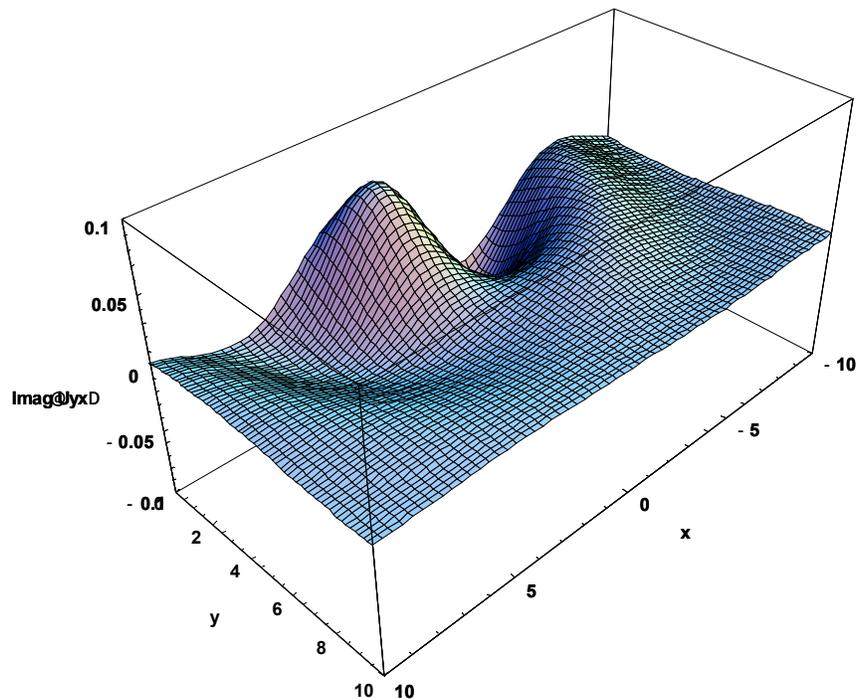


Figura 4.184 – Plano x-z, y=2 – Componente imaginária de U_{yx}

Para validação das equações de tensão obtidas pela formulação com transformada de Radon, não foram encontradas respostas dinâmicas para carregamentos distribuídos. Entretanto, pode-se fazer uma aproximação com a solução estática com carregamento concentrado dada por Boussinesq. Para que a solução de carregamento distribuído possa ser aproximada é necessário utilizar pequenos valores para os semilados, considerou-se $a=b=0.025$. Além disso, é preciso adotar baixas frequências, $\omega=0.01\text{rad/s}$ e baixos valores de amortecimento $\eta=0.01$. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, e densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$. As respostas foram obtidas para pontos ao longo do eixo x, com $y=2$ e $z=1$.

Para carregamento vertical, as componentes de tensão normal σ_{zzz} , σ_{xxz} , e σ_{yyz} , são apresentadas nas figuras 4.185 a 4.187, sendo observada uma boa aproximação em relação à resposta estática para carga concentrada. O erro tende a aumentar à medida que se analisam pontos mais afastados da fonte. Isto se deve à influência de amortecimento material na implementação numérica, e também dos efeitos da semilargura, que, mesmo pequena, não é capaz de fornecer exatamente os resultados analíticos. Além disso, a forma pela qual se calculam os erros, diferença dividida pelo

valor de referência, apresenta picos na aproximação com zero. Nestes casos, tal erro não corresponde à realidade. As tensões cisalhantes são apresentadas nas figuras 4.188 a 4.190, respectivamente para σ_{xyz} , σ_{xzz} , e σ_{yzz} . Uma boa convergência com a resposta analítica pode ser notada. Entretanto, para alguns pontos, ocorrem divergências, resultantes do processo de integração. Para esses exemplos foi adotado critério de parada, do avanço ao longo do eixo de integração, de 10^{-2} .

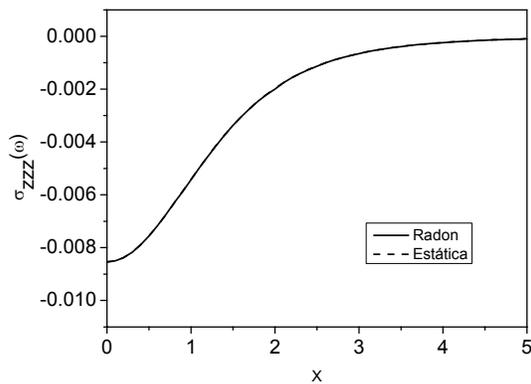


Figura 4.185a – Tensão σ_{zzz} Estática

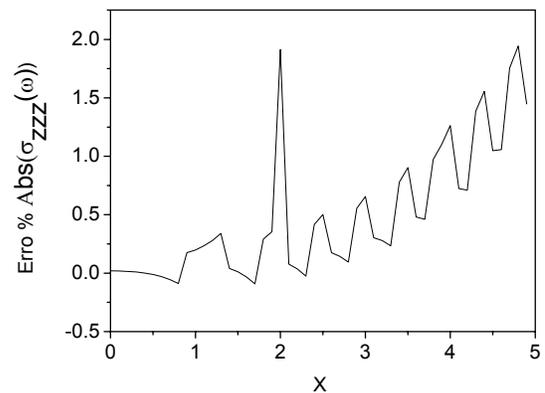


Figura 4.185b – Erro σ_{zzz} Estática

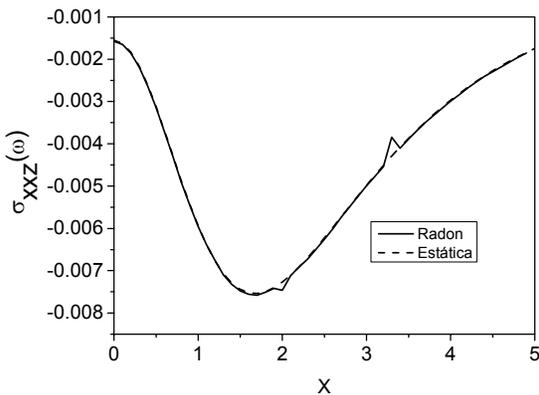


Figura 4.186a – Tensão σ_{xxz} Estática

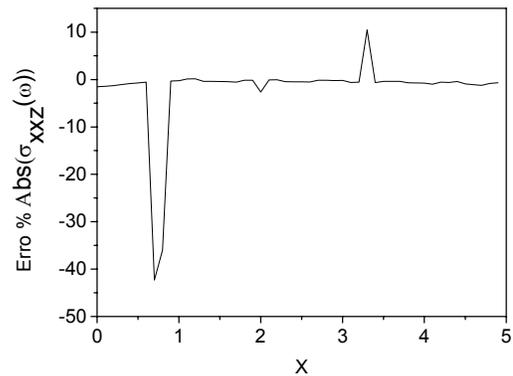


Figura 4.186b – Erro σ_{xxz} Estática

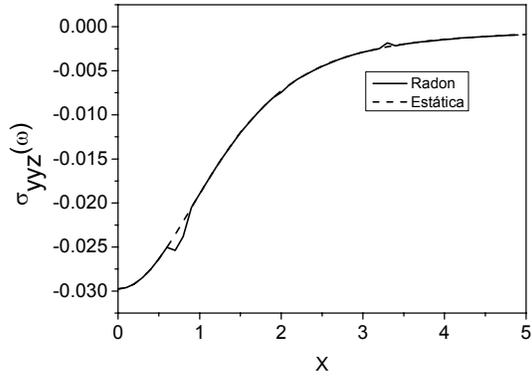


Figura 4.187a – Tensão σ_{yyz} Estática

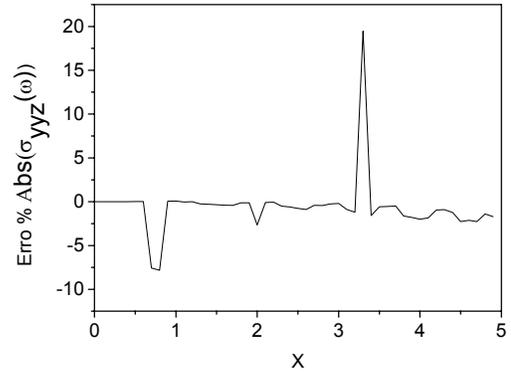


Figura 4.187b – Erro σ_{yyz} Estática

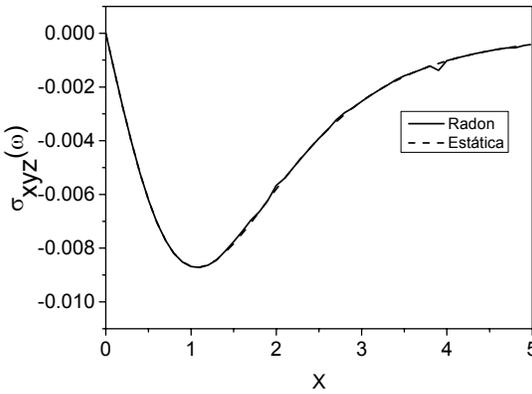


Figura 4.188a – Tensão σ_{xyz} Estática

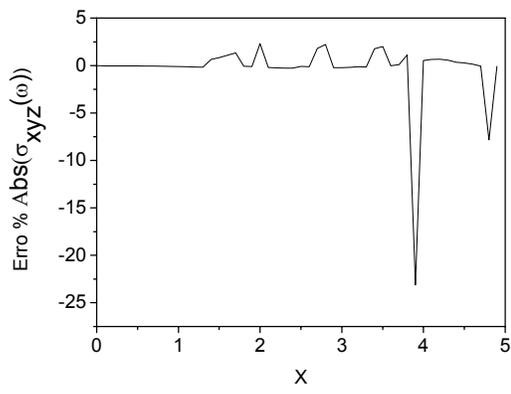


Figura 4.188b – Erro σ_{xyz} Estática

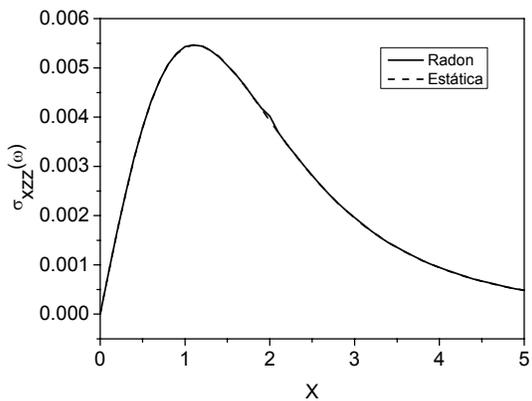


Figura 4.189a – Tensão σ_{xzz} Estática

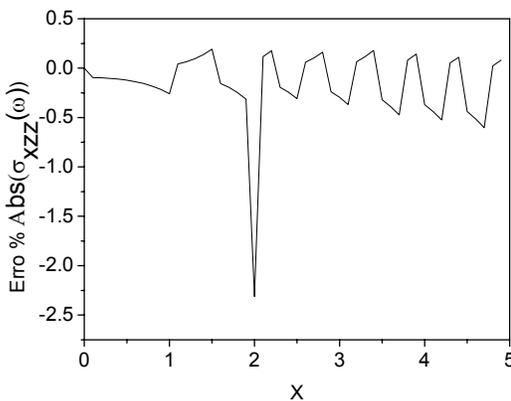


Figura 4.189b – Erro σ_{xzz} Estática

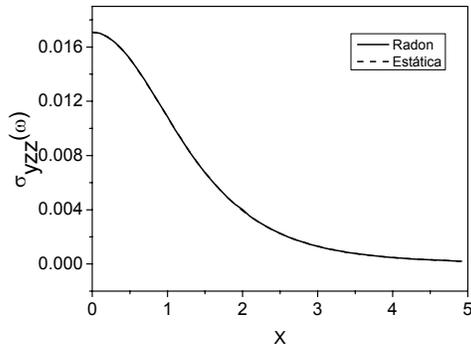


Figura 4.190a – Tensão σ_{yzz} Estática

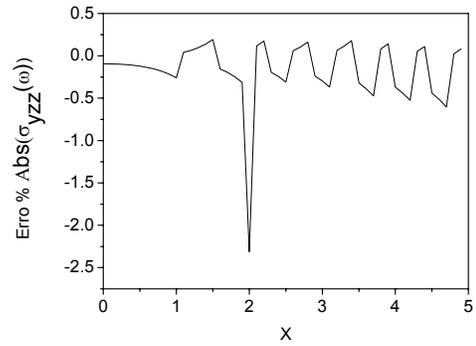


Figura 4.190b – Erro σ_{yzz} Estática

Ao longo deste capítulo foram formuladas as respostas para problemas em semi-espaço, com carregamento aplicado na superfície livre. Essas formulações podem, ainda, ser estendidas para incorporar multicamadas, estratificação, carregamento no interior do semi-espaço e ainda um leito rígido. Isto é realizado através de mudanças nas condições de contorno. Isto é proposto para trabalhos futuros, no momento é mais interessante a formulação e implementação de espaços completos, apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 5

Funções de Green para o espaço completo isotrópico tridimensional

5.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada a formulação para espaços completos tridimensionais isotrópicos, viscoelásticos submetidos a carregamentos distribuídos. A resposta, para tensões e deslocamentos, é obtida pela combinação de dois semi-espaços e equações de compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças na interface. Esta metodologia já foi empregada anteriormente com o uso das transformadas de Fourier. Utilizando a transformada de Radon, foram obtidas respostas para cargas concentradas (Wang e Achembach, 1995), considerando-as como forças de corpo, a extensão dessa formulação para carregamento distribuído não foi, ainda, possível. Neste trabalho, optou-se por utilizar a formulação com a combinação de semi-espaços.

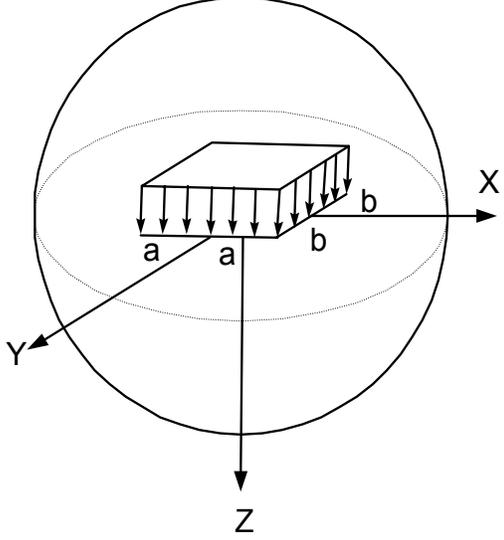
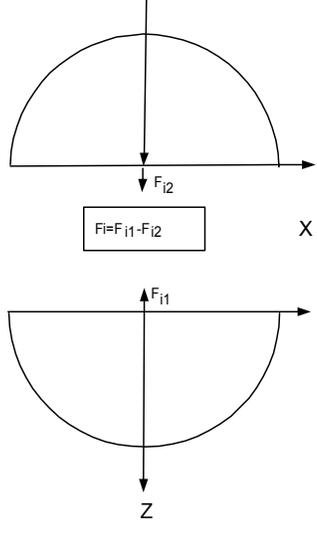
5.2 Solução através da transformada de Radon

Suponha um espaço completo isotrópico, homogêneo, viscoelástico submetido a um carregamento distribuído aplicado no plano x,y em $z=0$, como na figura 5.1. A solução para este problema é obtida pela superposição de dois semi-espaços, apresentados em forma esquemática na figura 5.2, considerando-se a compatibilidade cinemática e equilíbrio de forças na interface, obtendo-se, assim, as condições de contorno para determinar as funções de amplitude de onda.

Na interface, os deslocamentos do semi-espaço superior são idênticos aos do inferior. Desse modo, para compatibilizar os deslocamentos, a diferença entre as componentes de deslocamento deve ser nula. O mesmo ocorre para as tensões, exceto aquela componente que representa uma reação ao carregamento aplicado. Neste caso, a diferença das tensões é dada

como um salto, uma descontinuidade que é equivalente ao carregamento aplicado. As condições de compatibilidade são dadas pelo conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
 U_x^{(1)}(x, y, z = 0) - U_x^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0, \\
 U_y^{(1)}(x, y, z = 0) - U_y^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0, \\
 U_z^{(1)}(x, y, z = 0) - U_z^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0, \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= P, \\
 \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= S, \\
 \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= T.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

	
<p>Figura 5.1. Espaço completo submetido a carregamento distribuído.</p>	<p>Figura 5.2. Divisão em semi-espacos</p>

Por se tratar de um problema linear, é possível analisar isoladamente os efeitos dos carregamentos e superpor as soluções para obter a resposta de um carregamento qualquer. Assim considerando apenas o carregamento vertical, a compatibilidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 U_x^{(1)}(x, y, z = 0) - U_x^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0 \\
 U_y^{(1)}(x, y, z = 0) - U_y^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0 \\
 U_z^{(1)}(x, y, z = 0) - U_z^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0 \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= P \\
 \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0 \\
 \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, z = 0) - \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, z = 0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Para o carregamento na direção x:

$$\begin{aligned}
U_x^{(1)}(x, y, z=0) - U_x^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
U_y^{(1)}(x, y, z=0) - U_y^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
U_z^{(1)}(x, y, z=0) - U_z^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\sigma_{zz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\sigma_{xz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, z=0) &= S, \\
\sigma_{yz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, z=0) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

E, finalmente, para o carregamento na direção y :

$$\begin{aligned}
U_x^{(1)}(x, y, z=0) - U_x^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
U_y^{(1)}(x, y, z=0) - U_y^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
U_z^{(1)}(x, y, z=0) - U_z^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\sigma_{zz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\sigma_{xz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\sigma_{yz}^{(1)}(x, y, z=0) - \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, z=0) &= T.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para obter as amplitudes de onda de cada semi-espaço, é preciso realizar a transformada de Radon dos carregamentos, genericamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_x^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{U}_x^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\tilde{U}_y^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{U}_y^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\tilde{U}_z^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{U}_z^{(2)}(x, y, z=0) &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zz}^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{\sigma}_{zz}^{(2)}(x, y, z=0) &= \tilde{P}, \\
\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}(x, y, z=0) &= \tilde{S}, \\
\tilde{\sigma}_{yz}^{(1)}(x, y, z=0) - \tilde{\sigma}_{yz}^{(2)}(x, y, z=0) &= \tilde{T}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Uma vez que os semi-espaços são resolvidos com o desacoplamento em problemas auxiliares, deve-se aplicar o procedimento de transformação de coordenadas sobre as condições de contorno, obtendo, assim, as condições de contorno do domínio rotacionado. As matrizes de rotação utilizadas são:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_{x'} \\ \tilde{U}_{y'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{U}_z \\ \tilde{U}_x \\ \tilde{U}_y \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

para deslocamentos e para tensão, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{zx'} \\ \tilde{\sigma}_{zy'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{zy} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Os deslocamentos, no domínio rotacionado, são dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{z'} &= \tilde{U}_z, \\ \tilde{U}_{x'} &= \cos \theta \tilde{U}_x + \text{sen} \theta \tilde{U}_y, \\ \tilde{U}_{y'} &= -\text{sen} \theta \tilde{U}_x + \cos \theta \tilde{U}_y.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Da equação que fornece $U_{x'}$, isola-se U_x ,

$$\tilde{U}_x = \frac{\tilde{U}_{x'} - \text{sen} \theta \tilde{U}_{y'}}{\cos \theta}.\tag{5.9}$$

Sabe-se que a diferença entre os deslocamentos dos semi-espacos superior e inferior é nula, assim:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_x^{(1)} - \tilde{U}_x^{(2)} &= \frac{\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \text{sen} \theta \tilde{U}_{y'}^{(1)}}{\cos \theta} - \frac{\tilde{U}_{x'}^{(2)} - \text{sen} \theta \tilde{U}_{y'}^{(2)}}{\cos \theta}, \\ \tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} - \text{sen} \theta [\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)}] &= \cos \theta [\tilde{U}_x^{(1)} - \tilde{U}_x^{(2)}], \\ \tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= \cos \theta [\tilde{U}_x^{(1)} - \tilde{U}_x^{(2)}] + \text{sen} \theta [\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)}], \\ \tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0,\end{aligned}\tag{5.10}$$

fornece a compatibilidade cinemática no domínio transformado. Aplicando o mesmo procedimento para $U_{y'}$:

$$\tilde{U}_y = \frac{\tilde{U}_{y'} + \text{sen} \theta \tilde{U}_{x'}}{\cos \theta}.\tag{5.11}$$

Aplicando a diferença dos deslocamentos:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_y^{(1)} - \tilde{U}_y^{(2)} &= \frac{\tilde{U}_{y'}^{(1)} + \text{sen} \theta \tilde{U}_{x'}^{(1)}}{\cos \theta} - \frac{\tilde{U}_{y'}^{(2)} + \text{sen} \theta \tilde{U}_{x'}^{(2)}}{\cos \theta}, \\ \tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} + \text{sen} \theta [\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)}] &= \cos \theta [\tilde{U}_y^{(1)} - \tilde{U}_y^{(2)}], \\ \tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= \cos \theta [\tilde{U}_y^{(1)} - \tilde{U}_y^{(2)}] - \text{sen} \theta [\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)}], \\ \tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Para o deslocamento vertical a relação é direta:

$$\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} = 0.\tag{5.13}$$

A compatibilidade cinemática é comum aos três problemas com carregamentos distintos.

Agrupando as condições de contorno em deslocamento, tem-se:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} &= 0, \\ \tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0, \\ \tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\tag{5.14}$$

O que diferencia as condições para os carregamentos distintos é o equilíbrio de forças; para o carregamento vertical, a compatibilidade de forças é direta:

$$\tilde{\sigma}_{zz'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zz'}^{(2)} = \tilde{P}, \quad (5.15)$$

e representa uma descontinuidade de tensão na interface.

Para as demais tensões sabe-se que :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zx}^{(1)}(x, y, z = 0) - \tilde{\sigma}_{zx}^{(2)}(x, y, z = 0) &= \tilde{S}, \\ \tilde{\sigma}_{zy}^{(1)}(x, y, z = 0) - \tilde{\sigma}_{zy}^{(2)}(x, y, z = 0) &= \tilde{T}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

É necessário obter equações equivalentes que forneçam as condições de contorno no domínio rotacionado. Da matriz de rotação pode-se escrever

$$\tilde{\sigma}_{zx} = \frac{\tilde{\sigma}_{zx'} - \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zy'}}{\cos\theta}, \quad (5.17)$$

aplicando a diferença entre os semi-espacos:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zx}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx}^{(2)} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)}}{\cos\theta} - \frac{\tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} - \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)}}{\cos\theta} = \tilde{S}, \\ \tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} - \text{sen}\theta\left[\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)}\right] &= \cos\theta\tilde{S}, \\ \tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{S} + \text{sen}\theta\tilde{T}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Percebe-se que um carregamento em y influencia a componente de tensão $\tilde{\sigma}_{zx}$; no entanto, por ser tratar de um problema linear, os efeitos podem ser considerados isoladamente. O mesmo é válido para a componente em x:

$$\tilde{\sigma}_{zy} = \frac{\tilde{\sigma}_{zy'} + \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zx'}}{\cos\theta}, \quad (5.19)$$

considerando a descontinuidade em tensão:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zy}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy}^{(2)} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} + \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)}}{\cos\theta} - \frac{\tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} + \text{sen}\theta\tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)}}{\cos\theta} = \tilde{T}, \\ \tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} + \text{sen}\theta\left[\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)}\right] &= \cos\theta\tilde{T}, \\ \tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{T} - \text{sen}\theta\tilde{S}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Agrupando as respostas de compatibilidade e equilíbrio, escreve-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zz'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zz'}^{(2)} &= \tilde{P}, \\
\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{S} + \text{sen}\theta\tilde{T}, \\
\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{T} - \text{sen}\theta\tilde{S}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Para o problema de carregamento vertical, considerando a linearidade do problema, o conjunto de equações, que auxilia na determinação das amplitudes de onda, é dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zz'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zz'}^{(2)} &= \tilde{P}, \\
\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Para o carregamento S, na direção x:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zz'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zz'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{S}, \\
\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} &= -\text{sen}\theta\tilde{S}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Para a força T, aplicada na direção y, tem-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{z'}^{(1)} - \tilde{U}_{z'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{y'}^{(1)} - \tilde{U}_{y'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{U}_{x'}^{(1)} - \tilde{U}_{x'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zz'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zz'}^{(2)} &= 0, \\
\tilde{\sigma}_{zx'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zx'}^{(2)} &= \text{sen}\theta\tilde{T}, \\
\tilde{\sigma}_{zy'}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{zy'}^{(2)} &= \cos\theta\tilde{T}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Recordando as equações de movimento para o problema isotrópico, já considerado o desacoplamento em dois problemas auxiliares:

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{z'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{z'} = 0, \quad (5.25)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{x'} + (\lambda + \mu) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{ds} \tilde{U}_{x'} + \frac{d}{dz} \tilde{U}_{z'} \right\} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{x'} = 0, \quad (5.26)$$

$$\left\{ \mu \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \tilde{U}_{y'} + \omega^2 \rho \tilde{U}_{y'} = 0. \quad (5.27)$$

O ponto crucial desta análise é que os deslocamentos e tensões, no domínio transformado, são relacionados da mesma maneira que no domínio físico, para problemas de estado plano de deformação. Pode ser mostrado que (Georgiadis e Lykotrafitis, 2001):

$$\tilde{\sigma}_{zz'} = (\lambda + 2\mu) \frac{d\tilde{U}_{z'}}{dz} + \lambda \frac{d\tilde{U}_{x'}}{ds}, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx'} = \mu \left(\frac{d\tilde{U}_{z'}}{ds} + \frac{d\tilde{U}_{x'}}{dz} \right), \quad (5.29)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy'} = \mu \frac{d\tilde{U}_{y'}}{dz}. \quad (5.30)$$

Estas equações, para os problemas auxiliares, já foram resolvidas e, para o primeiro problema auxiliar possuem respostas com a forma:

$$\hat{\tilde{U}}_{z'} = A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + B \cdot e^{\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} + D \cdot e^{\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}, \quad (5.31)$$

$$\hat{\tilde{U}}_{x'} = \psi_1 A \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} - \psi_1 B \cdot e^{\delta \cdot \alpha_1 \cdot z} + \psi_2 C \cdot e^{-\delta \cdot \alpha_2 \cdot z} - \psi_2 D \cdot e^{\delta \cdot \alpha_2 \cdot z}, \quad (5.32)$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{zz'} = \Gamma_1 A e^{-\delta \alpha_1 z} - \Gamma_1 B e^{\delta \alpha_1 z} + \Gamma_2 C e^{-\delta \alpha_2 z} - \Gamma_2 D e^{\delta \alpha_2 z}, \quad (5.33)$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{zx'} = \Gamma_3 A e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_3 B e^{\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 C e^{-\delta \alpha_2 z} + \Gamma_4 D e^{\delta \alpha_2 z}, \quad (5.34)$$

A solução do segundo problema auxiliar possui a forma:

$$\hat{\tilde{U}}_{y'} = E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} + F e^{\beta \cdot \delta \cdot z}, \quad (5.35)$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{zy'} = -\Gamma_5 E e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} + \Gamma_5 F e^{\beta \cdot \delta \cdot z}. \quad (5.36)$$

Com uso das equações de contorno, determinam-se as amplitudes de onda, para carga vertical, tem-se:

$$A_p^{(1)} = B_p^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P}, \quad (5.35)$$

$$C_p^{(1)} = D_p^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\psi_1}{-\psi_2 \Gamma_1 + \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P},$$

$$E_p^{(1)} = F_p^{(2)} = 0. \quad (5.36)$$

Para a carga horizontal S, na direção x, as amplitudes de onda são:

$$A_S^{(1)} = D_S^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \cos \theta \tilde{S}, \quad (5.37)$$

$$B_S^{(2)} = C_S^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{+\Gamma_3 - \Gamma_4} \cos \theta \tilde{S},$$

$$E_S^{(1)} = F_S^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{S} \operatorname{sen} \theta. \quad (5.38)$$

Finalmente, para carga na direção y, tem-se:

$$A_T^{(1)} = D_T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \operatorname{sen} \theta \tilde{T}, \quad (5.39)$$

$$B_T^{(2)} = C_T^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{+\Gamma_3 - \Gamma_4} \operatorname{sen} \theta \tilde{T},$$

$$E_T^{(1)} = F_T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{T} \cos \theta. \quad (5.40)$$

Acoplando a solução dos dois problemas auxiliares, e aplicando a transformada inversa de Fourier, escreve-se:

$$\tilde{U}_z^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.41)$$

$$\tilde{U}_x^{(1)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \psi_1 A^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E^{(1)} e^{-\beta\delta z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.42)$$

$$\tilde{U}_y^{(1)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \psi_1 A^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E^{(1)} e^{-\beta\delta z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.43)$$

$$\tilde{U}_z^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + D^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.44)$$

$$\tilde{U}_x^{(2)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\psi_1 B^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} - \psi_2 D^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F^{(2)} e^{\beta\delta z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.45)$$

$$\tilde{U}_y^{(2)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\psi_1 B^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} - \psi_2 D^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F^{(2)} e^{\beta\delta z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.46)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_1 A^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.47)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx}^{(1)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 A^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\beta\delta E^{(1)} e^{-\beta\delta z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.48)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy}^{(1)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 A^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\beta\delta E^{(1)} e^{-\delta\cdot\omega\cdot z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.49)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\Gamma_1 B^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} - \Gamma_2 D^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.50)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx}^{(2)} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 B^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 D^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\beta\delta F^{(2)} e^{\beta\cdot\delta\cdot z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.51)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy}^{(2)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 B^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 D^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi - \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\beta\delta F^{(2)} e^{\delta\cdot\omega\cdot z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi. \quad (5.52)$$

Para carregamento vertical, as equações podem ser simplificadas, considerando que $E=F=0$, de modo que os deslocamentos são:

$$\tilde{U}_{zz}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + C_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.53)$$

$$\tilde{U}_{xz}^{(1)} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \psi_1 A_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.54)$$

$$\tilde{U}_{yz}^{(1)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \psi_1 A_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \psi_2 C_p^{(1)} \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.55)$$

$$\tilde{U}_{zz}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + D_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.56)$$

$$\tilde{U}_{xz}^{(2)} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\psi_1 B_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} - \psi_2 D_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.57)$$

$$\tilde{U}_{yz}^{(2)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\psi_1 B_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_1 z} - \psi_2 D_p^{(2)} \cdot e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.58)$$

e as tensões:

$$\tilde{\sigma}_{zzz}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_1 A_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 C_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.59)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxx}^{(1)} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 A_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.60)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyz}^{(1)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 A_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 C_p^{(1)} e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.61)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzz}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\Gamma_1 B_p^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} - \Gamma_2 D_p^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi. \quad (5.62)$$

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 B_p^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 B_p^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.63)$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}^{(2)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_3 B_p^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 D_p^{(2)} e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi. \quad (5.64)$$

Substituindo as equações de amplitude de onda A, B, C, D, E, F, escreve-se:

$$\tilde{U}_{zz}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} - \psi_1 \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.65)$$

$$\tilde{U}_{xz}^{(1)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta\alpha_1 z} - e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.66)$$

$$\tilde{U}_{yz}^{(1)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta\alpha_1 z} - e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.67)$$

$$\tilde{U}_{zz}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} - \psi_1 \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.68)$$

$$\tilde{U}_{xz}^{(2)} = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta\alpha_1 z} - e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.69)$$

$$\tilde{U}_{yz}^{(2)} = -\frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta\alpha_1 z} - e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.70)$$

e para as tensões, tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{zzz}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_1 \psi_2 e^{-\delta\alpha_1 z} - \Gamma_2 \psi_1 e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.71)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxx}^{(1)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta\alpha_1 z} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.72)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyz}^{(1)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta\alpha_1 z} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.73)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzz}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ -\psi_2 \Gamma_1 B_p^{(2)} e^{\delta\alpha_1 z} + \Gamma_2 \psi_1 e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.74)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxx}^{(2)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{\delta\alpha_1 z} - \Gamma_4 \psi_1 e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.75)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyz}^{(2)} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{\delta\alpha_1 z} - \Gamma_4 \psi_1 e^{\delta\alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi. \quad (5.76)$$

é possível agrupar essas equações para obter uma única equação, para cada um dos deslocamentos e das tensões, para o espaço completo:

$$\tilde{U}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_1 \cdot e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.77)$$

$$\tilde{U}_{xz} = \text{sign}(z) \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.78)$$

$$\tilde{U}_{yz} = \text{sign}(z) \frac{\text{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.79)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzz} = \text{sign}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_1 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_2 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.78)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzx} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.79)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyz} = \frac{\text{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi. \quad (5.80)$$

Aplicando o processo para as equações de carregamento em x, já agrupando os dois semi-espacos, chega-se ao resultado:

$$\tilde{U}_{zx} = \text{sign}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \cos \theta \tilde{S} \left\{ e^{-\delta \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.81)$$

$$\tilde{U}_{xx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos \theta)^2 \tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_2 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\text{sen} \theta)^2 \tilde{S}}{\Gamma_5} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \right], \quad (5.82)$$

$$\tilde{U}_{yx} = -\frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_2 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{S} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \right], \quad (5.83)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \cos \theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_1 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_2 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.84)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxx} = \text{sign}(z) \left[\frac{(\cos \theta)^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi + \frac{(\text{sen} \theta)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{S} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \right], \quad (5.85)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyx} = \text{sign}(z) \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{S} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \right], \quad (5.86)$$

e para o carregamento horizontal T:

$$\tilde{U}_{zy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \text{sign}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen} \theta \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ e^{-\delta \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi, \quad (5.87)$$

$$\tilde{U}_{xy} = \frac{\cos \theta \text{sen} \theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_2 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{T} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi \delta s} d\xi \right], \quad (5.88)$$

$$\tilde{U}_{yy} = \frac{(\text{sen}\theta)^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta \cdot \alpha_1 |z|} - \psi_2 e^{-\delta \cdot \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \frac{(\cos\theta)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{T} e^{-\beta \cdot \delta |z|} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.89)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\theta \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ -\Gamma_1 e^{\delta \alpha_1 |z|} + \Gamma_2 e^{\delta \alpha_2 |z|} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi, \quad (5.90)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy} = \text{sign}(z) \frac{\cos\theta \text{sen}\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 e^{-\delta \alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{T} e^{-\beta \cdot \delta \cdot z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi \right], \quad (5.91)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \text{sign}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\text{sen}\theta)^2 \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta \alpha_1 z} + \Gamma_4 e^{-\delta \alpha_2 z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\cos\theta)^2 \tilde{T} e^{-\delta \cdot \omega \cdot z} \right\} e^{i\xi\delta s} d\xi \right]. \quad (5.92)$$

Aplicando a transformada inversa bidimensional de Radon, na equação de deslocamento vertical devido à carga vertical, dada em (5.77):

$$U_z = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_1 \cdot e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} i \delta \xi \cdot \frac{e^{i\delta \xi s}}{s - x \cos \theta - y \text{sen} \theta} d\xi ds d\theta \quad (5.93)$$

Como na análise do capítulo anterior, existe apenas um termo que depende da variável de Radon s , é possível obter a integral em ds , tendo como resultado a equação 4.164, rerepresentada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \Rightarrow \zeta = \text{sign}(\xi) i \pi e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)}.$$

Aplicando esse resultado em (5.93) escreve-se:

$$U_{zz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_1 \cdot e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.94)$$

$$\tilde{U}_{xz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta \cdot \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \cdot \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi \cos \theta e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.95)$$

$$\tilde{U}_{yz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ e^{-\delta \cdot \alpha_1 |z|} - e^{-\delta \cdot \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi \text{sen} \theta e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.96)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_1 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_2 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.97)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi \cos \theta e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.98)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \Gamma_3 \psi_2 e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \Gamma_4 \psi_1 e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi \text{sen} \theta e^{i\delta \xi (x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta. \quad (5.99)$$

Para o carregamento na direção x :

$$\tilde{U}_{zx} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \frac{1}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \cos \theta \tilde{S} \left\{ e^{-\delta\alpha_1|z|} - e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.100)$$

$$\tilde{U}_{xx} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{(\cos \theta)^2 \tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \frac{(\text{sen} \theta)^2 \tilde{S}}{\Gamma_5} e^{-\beta\delta|z|} \right] \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.101)$$

$$\tilde{U}_{yx} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[-\frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{S} e^{-\beta\delta|z|} \right] \delta\xi \text{sen} \theta \cos \theta e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.102)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzx} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \Gamma_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} \delta\xi \cos \theta e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.103)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxx} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \left[\frac{(\cos \theta)^2 \tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \Gamma_4 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \left\{ (\text{sen} \theta)^2 \tilde{S} e^{-\beta\delta|z|} \right\} \right] \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.104)$$

$$\tilde{\sigma}_{zxy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \left[\frac{\tilde{S}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \Gamma_4 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \tilde{S} e^{-\beta\delta|z|} \right] \delta\xi \text{sen} \theta \cos \theta e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta. \quad (5.105)$$

e para o carregamento horizontal em y:

$$\tilde{U}_{zy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \delta\xi \frac{\text{sen} \theta \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ e^{-\delta\alpha_1|z|} - e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.106)$$

$$\tilde{U}_{yy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \frac{1}{\Gamma_5} \tilde{T} e^{-\beta\delta|z|} \right] \delta\xi \cos \theta \text{sen} \theta e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.107)$$

$$\tilde{U}_{yy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{(\text{sen} \theta)^2 \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \frac{(\cos \theta)^2}{\Gamma_5} \tilde{T} e^{-\beta\delta|z|} \right] \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.108)$$

$$\tilde{\sigma}_{zzy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\text{sen} \theta \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ -\Gamma_1 e^{\delta\alpha_1|z|} + \Gamma_2 e^{\delta\alpha_2|z|} \right\} \right] \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.109)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \left[\frac{\tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} - \tilde{T} e^{-\beta\delta z} \right] \delta\xi \cos \theta \text{sen} \theta e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.110)$$

$$\tilde{\sigma}_{zyy} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(z) \text{sign}(\xi) \left[\frac{(\text{sen} \theta)^2 \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \Gamma_3 e^{-\delta\alpha_1 z} + \Gamma_4 e^{-\delta\alpha_2 z} \right\} + (\cos \theta)^2 \tilde{T} e^{-\beta\delta z} \right] \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta. \quad (5.111)$$

As demais componentes de tensão são obtidas a partir das deformações e da Lei de Hooke para o meio isotrópico, após algum trabalho algébrico é possível mostrar que, para carga vertical:

$$\tilde{\sigma}_{xyz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \left\{ e^{\delta\alpha_1|z|} - e^{\delta\alpha_2|z|} \right\} \right] \delta^2 \xi^2 \text{sen} \theta \cos \theta \hat{P} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta, \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xxz} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \text{sign}(z) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu (\cos \theta)^2 \psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \left\{ e^{-\delta\alpha_1|z|} - e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} \right] \hat{P} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yyz} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \text{sign}(z) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu (\text{sen} \theta)^2 \psi_1 \psi_2}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \left\{ e^{-\delta\alpha_1|z|} - e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} \right] \hat{P} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.114)$$

para carga horizontal com direção x:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xyx} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} i\mu \text{sign}(\xi) \left[\frac{2 \text{sen} \theta (\cos \theta)^2 \delta^2 \xi^2 \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{\delta\alpha_2|z|} \right\} - \right. \\ & \left. \frac{\text{sen} \theta \cos(2\theta) \delta^2 \xi^2 \tilde{T}}{\Gamma_5} e^{\delta\beta|z|} \right] e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xxx} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda \cos \theta}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu (\cos \theta)^3}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \cos \theta (\text{sen} \theta)^2}{\Gamma_5} e^{-\delta\beta|z|} \right] \hat{T} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yyx} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda \cos \theta}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \cos \theta (\text{sen} \theta)^2}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \cos \theta (\text{sen} \theta)^2}{\Gamma_5} e^{-\delta\beta|z|} \right] \hat{T} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.117)$$

e, finalmente, para carga horizontal com direção y:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yyy} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} i\mu \text{sign}(\xi) \left[\frac{2 \cos \theta (\text{sen} \theta)^2 \delta^2 \xi^2 \tilde{T}}{-\Gamma_3 + \Gamma_4} \left\{ \psi_1 e^{\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{\cos \theta \cos(2\theta) \delta^2 \xi^2 \tilde{T}}{\Gamma_5} e^{\delta\beta|z|} \right] e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xyy} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda \text{sen} \theta}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \text{sen} \theta (\cos \theta)^2}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \text{sen} \theta (\cos \theta)^2}{\Gamma_5} e^{-\delta\beta|z|} \right] \hat{T} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yyy} = & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[\frac{\delta^2 \xi \lambda \text{sen} \theta}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ (\alpha_1 + i\psi_1 \xi) e^{-\delta\alpha_1|z|} - (\alpha_2 + i\psi_2 \xi) e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} + \right. \\ & \left. \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu (\text{sen} \theta)^3}{\Gamma_4 - \Gamma_3} \left\{ \psi_1 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_2 e^{-\delta\alpha_2|z|} \right\} - \frac{2i\delta^2 \xi^2 \mu \text{sen} \theta (\cos \theta)^2}{\Gamma_5} e^{-\delta\beta|z|} \right] \hat{T} e^{i\delta\xi(x \cos \theta + y \text{sen} \theta)} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (5.120)$$

A resolução analítica de tais equações é de difícil proposição; portanto é necessária a implementação de inversas numéricas.

5.3 Análise dos integrandos e técnicas de integração

Para que seja possível definir as estratégias mais adequadas de integração, é preciso analisar as características dos integrandos envolvidos. Da mesma maneira que foi realizada nos problemas de semi-espço, é preciso determinar qual o comportamento do integrando ao longo da rota de integração. Uma das principais características do integrando são os chamados números de onda, que são indicados pelas descontinuidades no núcleo do integrando. No espaço completo, essas descontinuidades ocorrem para os valores de ξ nos quais as raízes α_1 e α_2 são nulas. Assim para as raízes:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{-c'_3 - \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}} = 0, \quad (5.121)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-c'_3 + \sqrt{c_3'^2 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}} = 0. \quad (5.122)$$

E para o denominador das amplitudes de onda, por exemplo, do problema com carregamento vertical, tem-se:

$$\psi_1 \Gamma_2 - \psi_2 \Gamma_1 = 0. \quad (5.123)$$

Das raízes, são obtidos os números para as ondas de compressão e cisalhamento, no caso dos materiais isotrópicos, pode-se mostrar que:

$$c_p = \xi = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}, \quad (5.124)$$

$$c_s = \xi = \pm 1, \quad (5.125)$$

sendo c_p , o número de onda para as ondas de compressão, e c_s para a de cisalhamento. Do termo das amplitudes de onda, nos semi-espços era obtido o número para as ondas de superfície ou Rayleigh. No caso do espaço completo, o número de onda resultante é idêntico ao das raízes. Este resultado é esperado, pois nos espaços completos não ocorre a propagação de ondas de superfície.

A equação de deslocamento vertical deduzida anteriormente, rerepresentada aqui:

$$U_{zz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta\alpha_1 |z|} - \psi_1 \cdot e^{-\delta\alpha_2 |z|} \right\} \delta\xi e^{i\delta\xi(x \cos\theta + y \sin\theta)} d\xi d\theta, \quad (5.126)$$

pode ser dividida em duas parcelas, núcleo e termo oscilante. O primeiro é dado por:

$$G_{Uzz}(z, \omega) = \text{sign}(\xi) \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \left\{ \psi_2 \cdot e^{-\delta \alpha_1 |z|} - \psi_1 \cdot e^{-\delta \alpha_2 |z|} \right\} \delta \xi. \quad (5.127)$$

Já o termo oscilante, consideradas as simplificações realizadas no capítulo 4, é dado pela função:

$$IH_{Uzz} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{sen}(\xi \delta a \cos(\theta)) \text{sen}(\xi \delta b \sin(\theta))}{(\xi \delta)^2 \text{sen} \theta \cos \theta} \cos(x \delta \xi \cos(\theta)) \cos(y \delta \xi \text{sen}(\theta)) \right\} d\theta. \quad (5.128)$$

Note que o termo oscilante é função apenas da frequência, da distância entre o ponto analisado e a fonte e das dimensões dos semilados do carregamento. As discontinuidades, que aparecem para os valores de ξ correspondentes aos números de onda definidos pelas características do meio físico analisado, ocorrem apenas no núcleo da função. Os números de onda indicam singularidades que podem dificultar os procedimentos de integração numérica. Na figuras 5.3 e 5.4, são apresentadas as componentes real e imaginária do núcleo da função de deslocamento vertical. Foram considerados os seguintes parâmetros materiais, coeficiente de Poisson $\nu=0.4$, módulo de cisalhamento $\mu=1 \text{ N/m}^2$, densidade $\rho=1 \text{ kg/m}^3$, frequência $\omega=2 \text{ rad/s}$ e amortecimento nulo e profundidade $z=1$. Para esse meio, $c_p=0.40825$, $c_s=1$.

Para se evitarem os pontos de singularidade, inclui-se o amortecimento interno na formulação, para isto se consideram as constantes elásticas complexas, com a inclusão de uma parcela imaginária nas constantes de Lamé. O principal efeito de tal inclusão é que os pontos de singularidade se afastam do eixo real, permitindo a integração numérica. O uso de constantes complexas parece ser mais realista, pois praticamente todos materiais possuem amortecimento interno. Existe, ainda, a vantagem de ser possível incluir resultados experimentais.

Nas figuras 5.5 e 5.6, pode ser visualizada a influência do amortecimento sobre as singularidades. Note que, à medida que o valor do amortecimento aumenta, ocorre uma suavização do integrando, o que reduz, significativamente, os esforços computacionais. Note que, para a parcela imaginária, na qual, após o número de onda c_s , para o caso elástico, a função é nula. Com a inclusão do amortecimento, a função passa a apresentar valores não nulos, o que, no entanto, não gera novos problemas de integração.

Para o ponto na superfície, as componentes do núcleo, para o deslocamento U_{zz} , tendem a um valor constante. O núcleo será multiplicado pela função IH que decai, porém

lentamente, o que permitirá uma integração numérica. Entretanto, o algoritmo de Longman, neste caso, não será aplicável. Para integração numérica foi implementado um algoritmo do tipo “procedendo para infinito”, a despeito de não ser o mais apropriado em termos computacionais, considerou-se que, para uma validação inicial das funções, seria satisfatório. Os custos computacionais com esse algoritmo serão apresentados na próxima seção. Apesar das limitações desse método numérico, foram obtidos bons resultados para pontos no interior da camada $z > 0$, quando comparado à implementação com transformada dupla de Fourier.

O esquema de integração é apresentado na figura 5.7. Inicialmente, é realizada a integração nos intervalos $0 \leq c_p < c_s \leq c_R$, utilizando quadratura de Gauss e refinamento dos intervalos até obter convergência. Posteriormente, é realizada a integral imprópria.

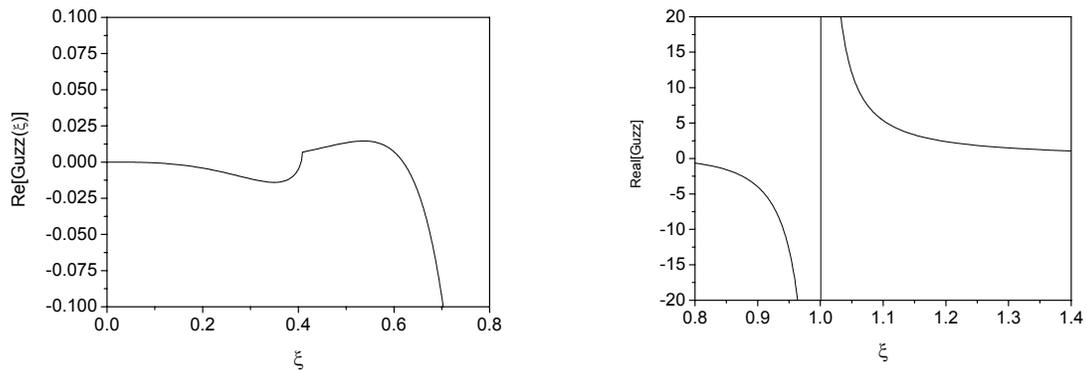


Figura 5.3 – Singularidades núcleo de deslocamento do espaço completo – parte real

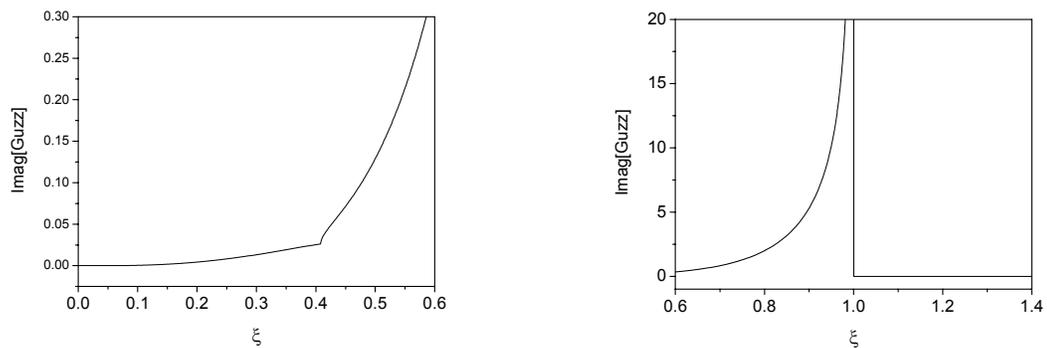


Figura 5.4 – Singularidades núcleo de deslocamento do espaço completo – parte imaginária

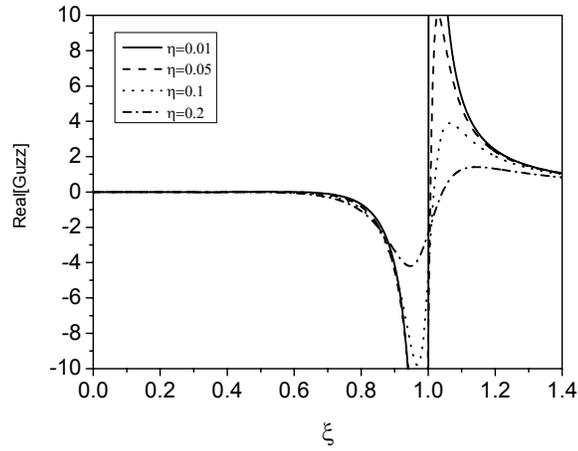


Figura 5.5 – Efeito amortecimento nas descontinuidades do núcleo de deslocamento do espaço completo – parte real

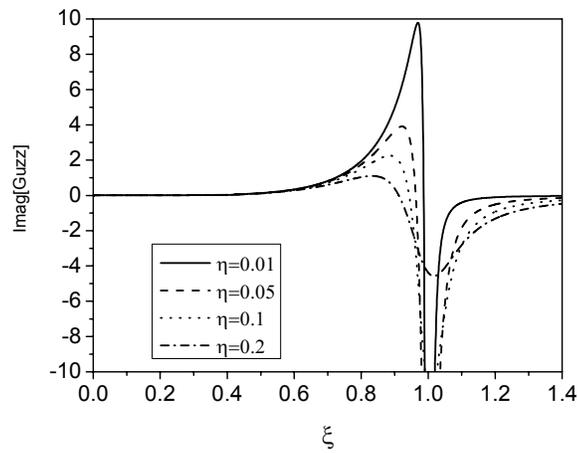


Figura 5.6 – Efeito amortecimento nas descontinuidades do núcleo de deslocamento do espaço completo – parte imaginária

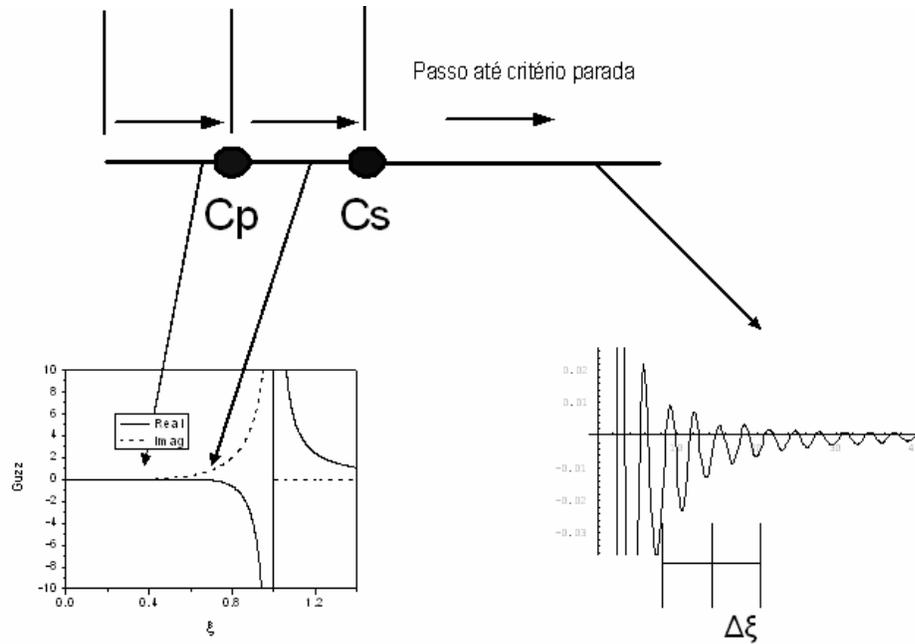


Figura 5.7 – Esquema de integração espaço completo com carregamento distribuído

5.4 Resultados numéricos

Para validação das equações obtidas pela formulação com transformada de Radon, foi realizada, inicialmente, uma comparação com a solução do problema de Kelvin. Para que a solução de carregamento distribuído possa ser aproximada do problema de Kelvin, que assume carga concentrada, é necessário utilizar pequenos valores para os semilados, considerou-se, para tanto, $a=b=0.025$. Além disso, é preciso adotar baixas frequências, $\omega=0.01\text{rad/s}$ e baixos valores de amortecimento $\eta=0.01$. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, e densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$. As respostas foram obtidas para pontos ao longo do eixo x , com $y=z=1$.

Nas figuras 5.8 a 5.10, podem ser observadas as respostas de deslocamento U_{zz} , U_{xz} e U_{yz} resultantes do carregamento vertical. Nota-se uma boa correlação entre as duas respostas: os erros são inferiores a 0.08%. Deve-se salientar que, por menor que sejam o amortecimento, a frequência e os semilados do carregamento, a resposta sempre sofrerá alguma divergência. Em tais respostas, a tendência é a redução das amplitudes devido ao amortecimento presente. Para o carregamento horizontal na direção x , as respostas são dadas nas figuras 5.11 a 5.13, para U_{zx} , U_{xx} e U_{yx} respectivamente. Mais uma vez, foram obtidas respostas próximas à

analítica. E finalmente para carregamento horizontal na direção y, as respostas resultantes são apresentadas nas figuras 5.14 a 5.16.

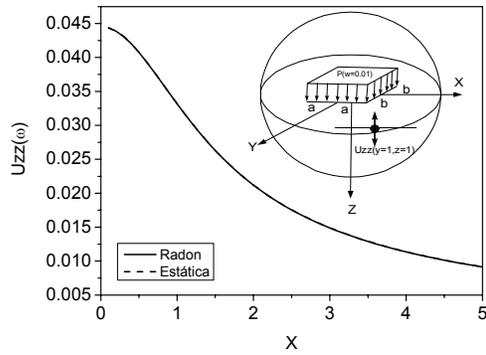


Figura 5.8a – Deslocamento U_{zz} – Estático

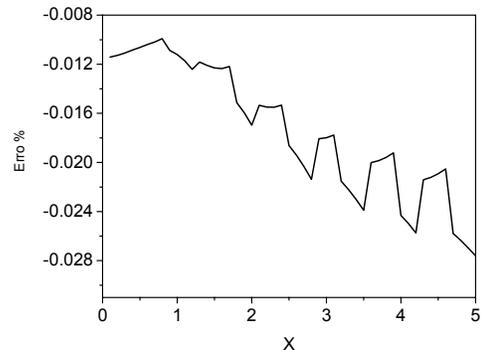


Figura 5.8b – Erro relativo U_{zz} – Estático

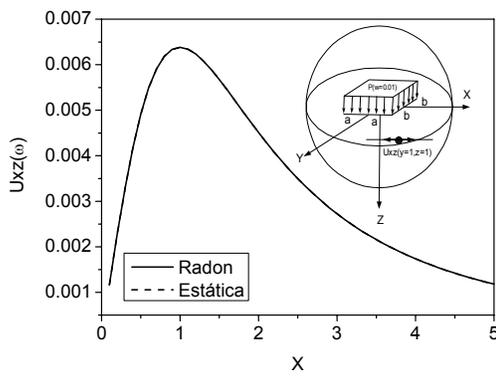


Figura 5.9a – Deslocamento U_{xz} – Estático

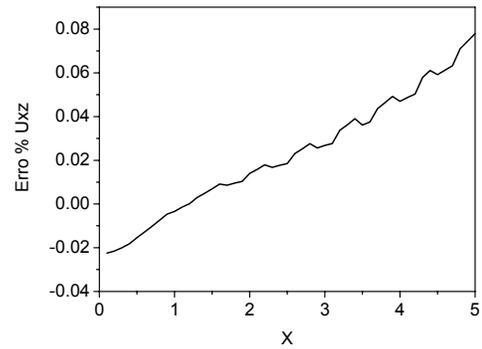


Figura 5.9b – Erro relativo U_{xz} – Estático

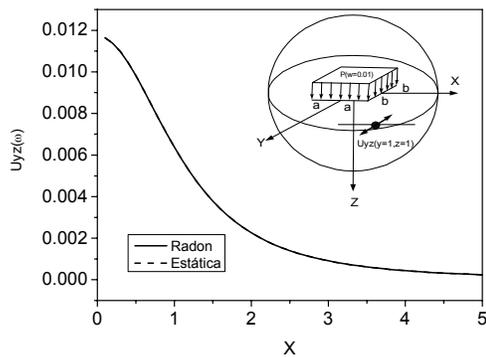


Figura 5.10a – Deslocamento U_{yz} – Estático

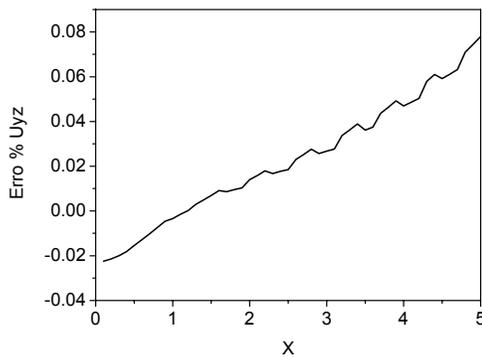


Figura 5.10b – Erro relativo U_{yz} – Estático

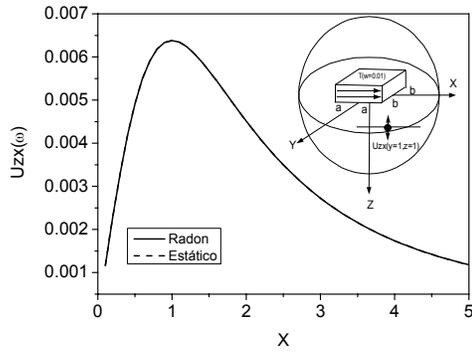


Figura 5.11a – Deslocamento U_{zx} – Estático

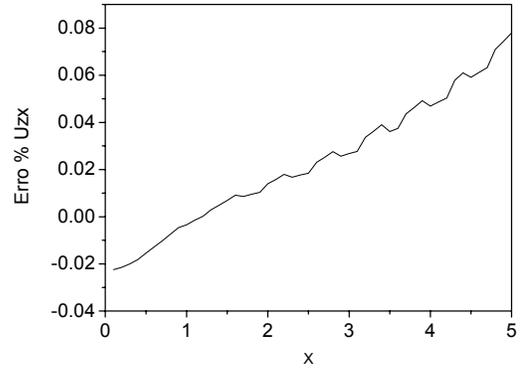


Figura 5.11b – Erro relativo U_{zx} – Estático

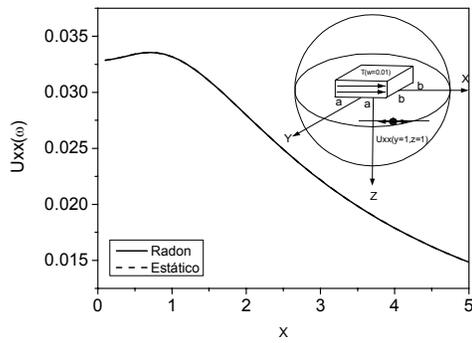


Figura 5.12a – Deslocamento U_{xx} – Estático

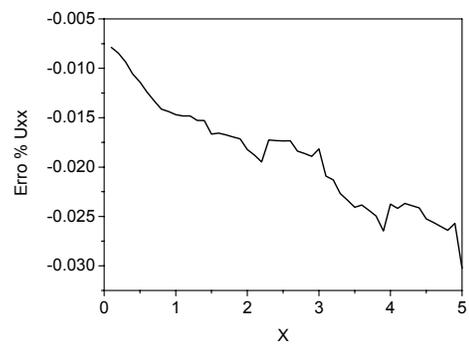


Figura 5.12b – Erro relativo U_{xx} – Estático

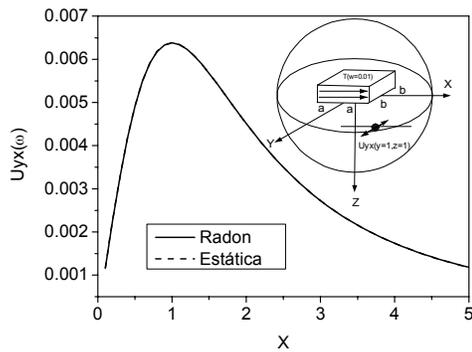


Figura 5.13a – Deslocamento U_{yx} – Estático

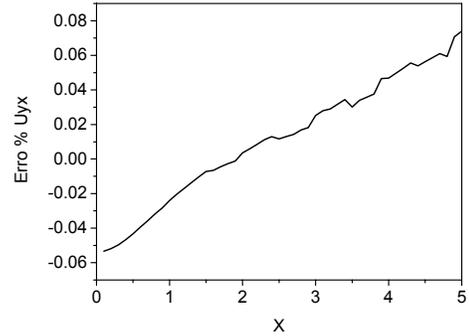


Figura 5.13b – Erro relativo U_{yx} – Estático

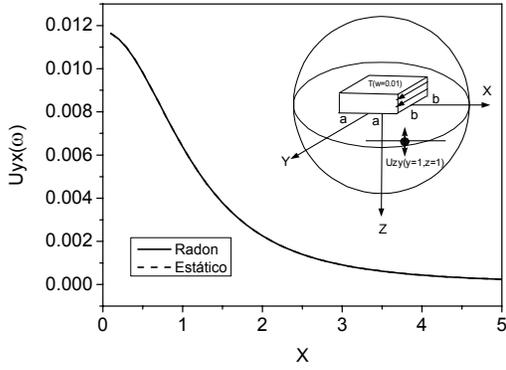


Figura 5.14a – Deslocamento U_{yz} – Estático

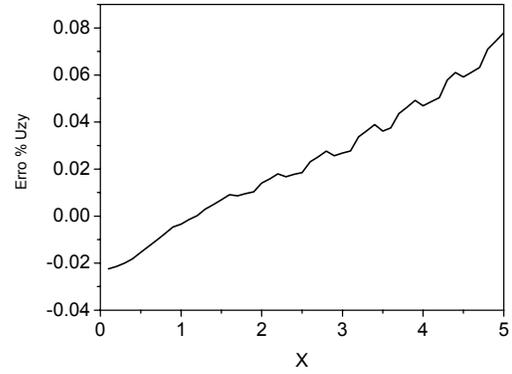


Figura 5.14b – Erro relativo U_{yz} – Estático

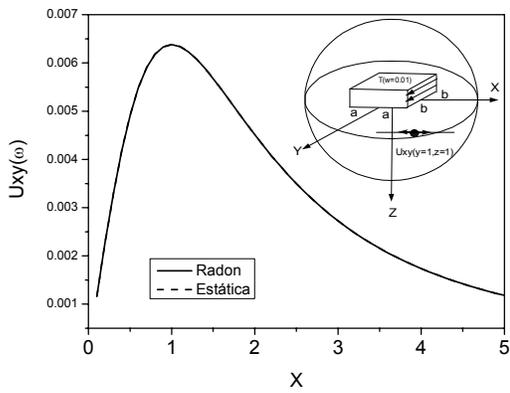


Figura 5.15a – Deslocamento U_{xy} – Estático

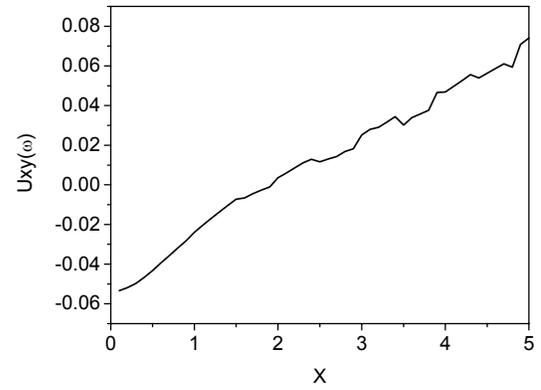


Figura 5.15b – Erro relativo U_{xy} – Estático

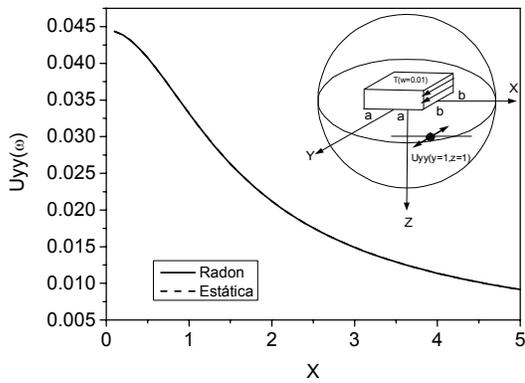


Figura 5.16a – Deslocamento U_{yy} – Estático

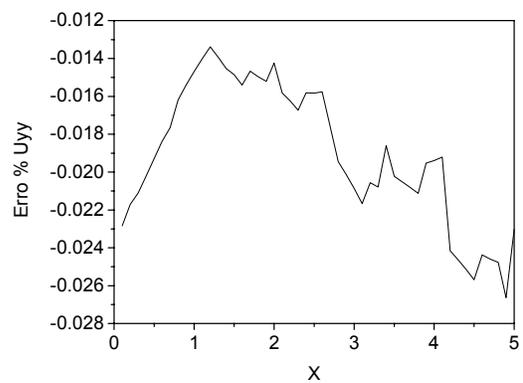


Figura 5.16b – Erro relativo U_{yy} – Estático

Para uma análise das respostas em frequência, e conseqüente validação, tais respostas foram comparadas com as obtidas por uma implementação, utilizando transformada dupla de Fourier. Consideraram-se os mesmos parâmetros matérias da análise anterior, porém foi adotada a semilargura do carregamento $a=b=1$, e as coordenadas fixas foram $y=1$ e $z=0.5$, tendo sido utilizada uma frequência de excitação $\omega=2\text{rad/s}$. Nas figuras 5.17 a 5.19, são apresentados os resultados para deslocamentos devidos a uma carga vertical. Para o carregamento tangencial, com orientação x , as respostas são dadas nas figuras 5.20 a 5.22. E, finalmente, para carregamento na direção y , as figuras 5.23 a 5.25 mostram os perfis de deslocamento nas direções z , x e y respectivamente. Apesar de as componentes das duas formulações apresentarem pequenas diferenças, principalmente nos valores iniciais de x , quando se calcula o erro, através dos módulos das respostas obtidas pelas duas formulações, os resultados são satisfatórios.

A diferença nas componentes real e imaginária pode ser causada pelo amortecimento e implementação numérica.

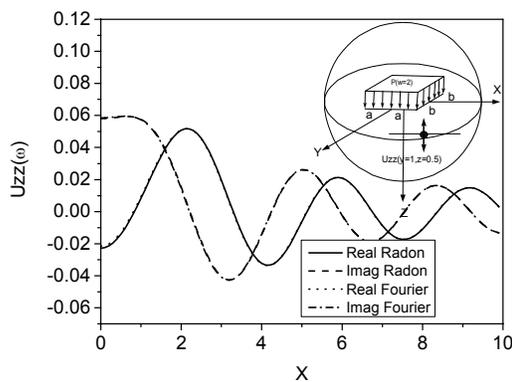


Figura 5.17a – Deslocamento Uzz Dinâmico

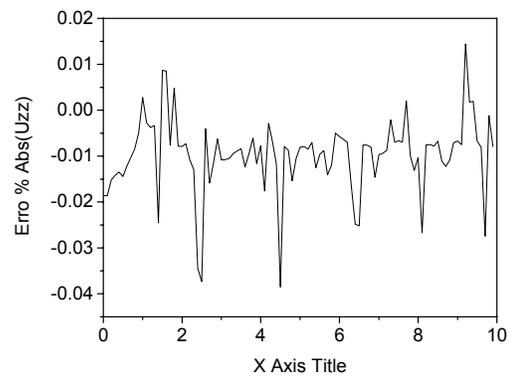


Figura 5.17b – Erro Uzz Dinâmico

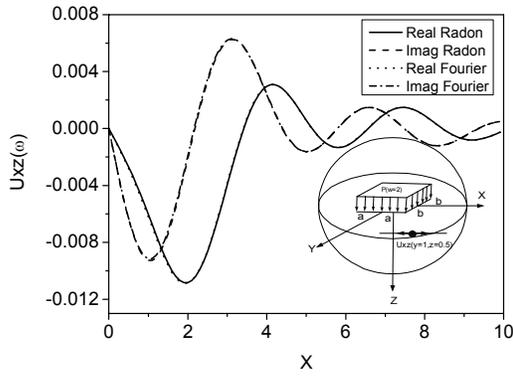


Figura 5.18a – Deslocamento U_{xz} Dinâmico

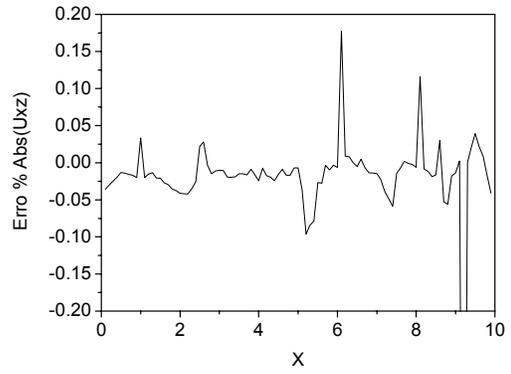


Figura 5.18b – Erro U_{xz} Dinâmico

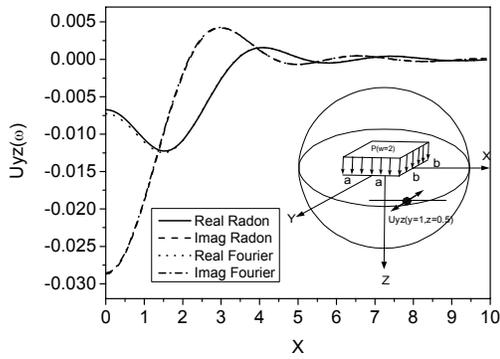


Figura 5.19a – Deslocamento U_{yz} Dinâmico

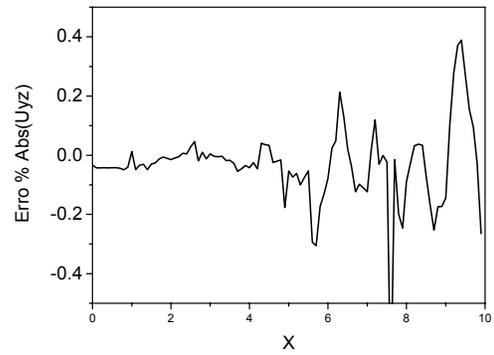


Figura 5.19b – Erro U_{yz} Dinâmico

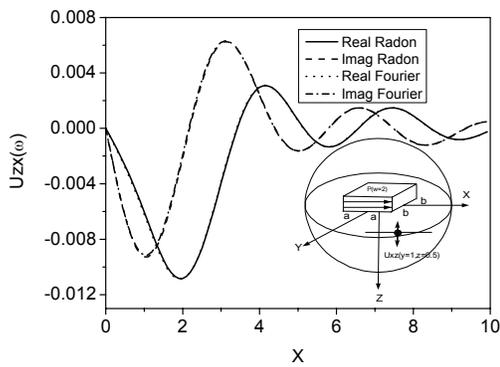


Figura 5.20a – Deslocamento U_{zx} Dinâmico

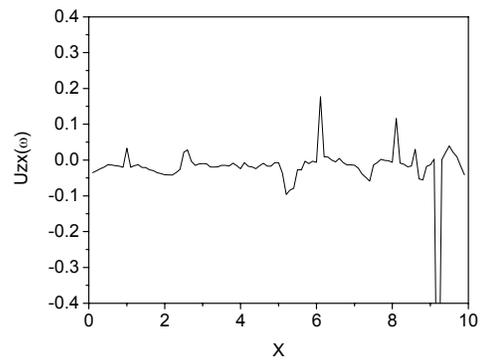


Figura 5.20b – Erro U_{zx} Dinâmico

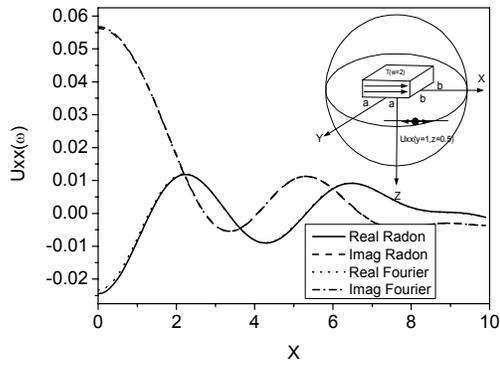


Figura 5.21a – Deslocamento Uxx Dinâmico

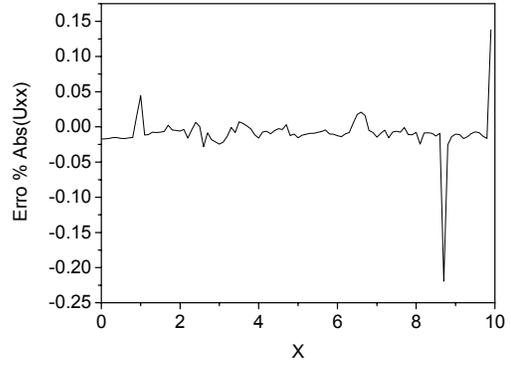


Figura 5.21b – Erro Uxx Dinâmico

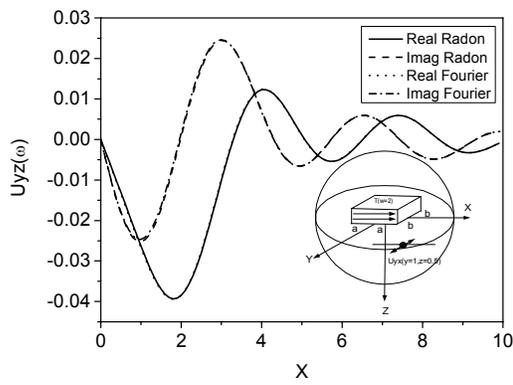


Figura 5.22a – Deslocamento Uyx Dinâmico

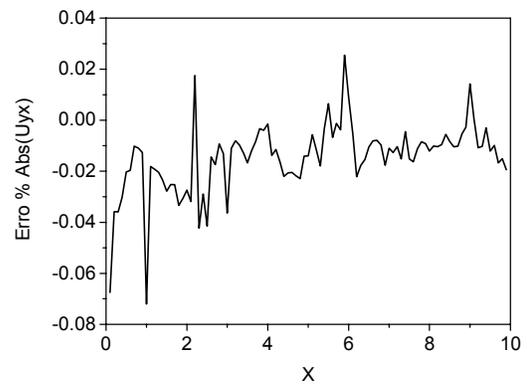


Figura 5.22b – Erro Uyx Dinâmico

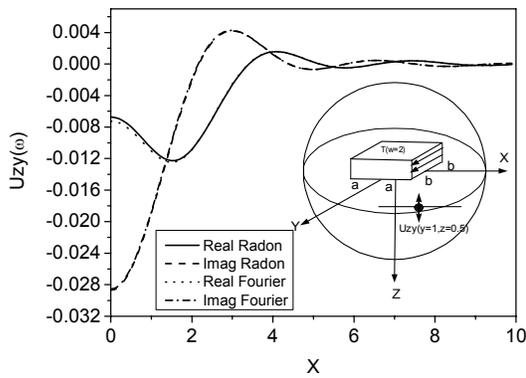


Figura 5.23a – Deslocamento Uzy Dinâmico

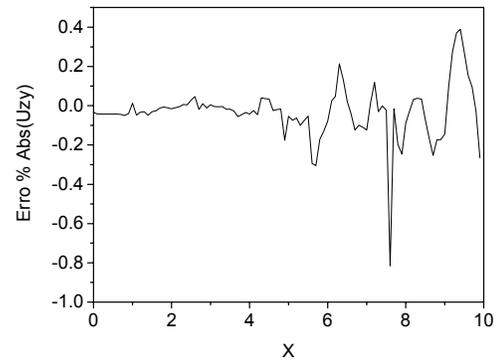


Figura 5.23b – Erro Uzy Dinâmico

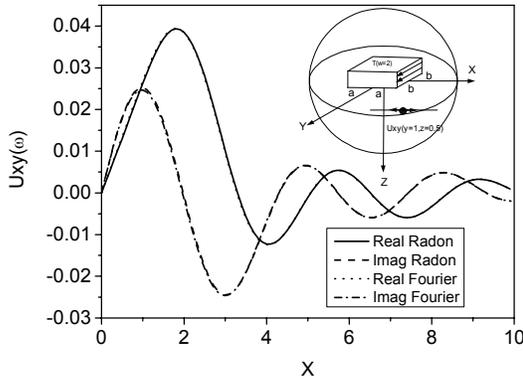


Figura 5.24a – Deslocamento U_{xy} Dinâmico

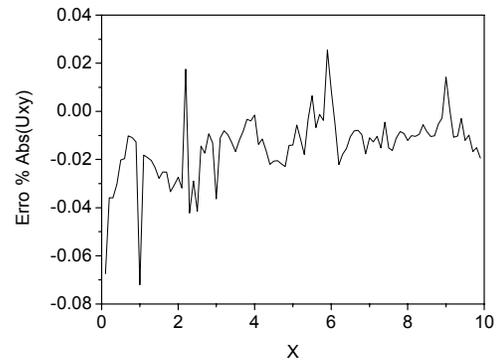


Figura 5.24b – Erro U_{xy} Dinâmico

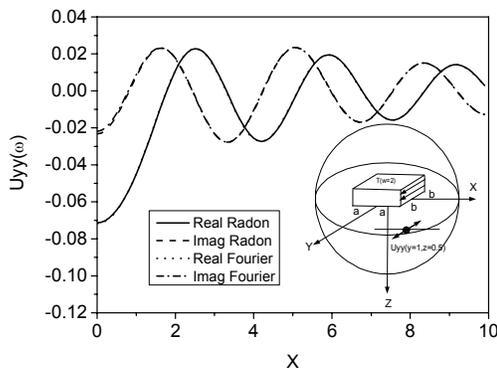


Figura 5.25a – Deslocamento U_{yy} Dinâmico

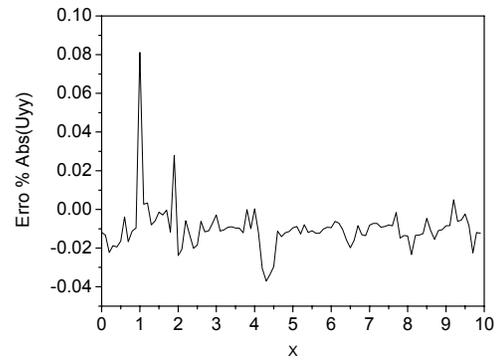


Figura 5.25b – Erro U_{yy} Dinâmico

Para validação das equações de tensão obtidas pela formulação com transformada de Radon, não foram encontradas respostas dinâmicas para carregamentos distribuídos. Entretanto, pode-se fazer uma aproximação com a solução estática com carregamento concentrado dada por Kelvin. Para que a solução de carregamento distribuído possa ser aproximada é necessário utilizar pequenos valores para os semilados, considerou-se $a=b=0.025$. Além disso, é preciso adotar baixas frequências, $\omega=0.01\text{rad/s}$ e baixos valores de amortecimento $\eta=0.01$. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu=1/4$, módulo de cisalhamento $\mu=1\text{N/m}^2$, e densidade $\rho=1\text{kg/m}^3$. As respostas foram obtidas para pontos ao longo do eixo x , com $y=2$ e $z=1$.

Para carregamento vertical, as componentes de tensão normal σ_{zz} , σ_{xxz} , e σ_{yyz} , são apresentadas nas figuras 5.26 a 5.28, sendo observada uma boa aproximação em relação à resposta estática para carga concentrada. O erro tende a aumentar à medida que se analisam

pontos mais afastados da fonte. Isto se deve à influência de amortecimento material na implementação numérica, e também dos efeitos da semilargura, que, mesmo pequena, não é capaz de fornecer exatamente os resultados analíticos. Além disso, a forma pela qual se calculam os erros, diferença dividida pelo valor de referência, apresenta picos na aproximação com zero. Nestes casos, tal erro não corresponde à realidade. As tensões cisalhantes são apresentadas nas figuras 5.29 a 5.31, respectivamente para σ_{xyz} , σ_{xzz} , e σ_{yzz} . Uma boa convergência com a resposta analítica pode ser notada.

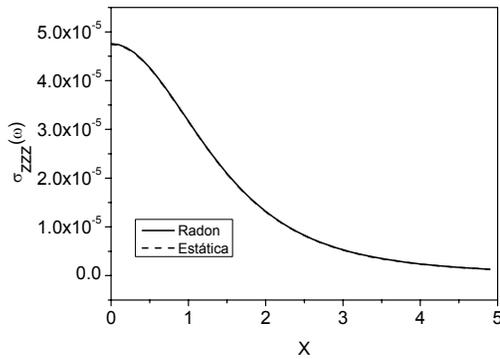


Figura 5.26a – Tensão σ_{zzz} Estática

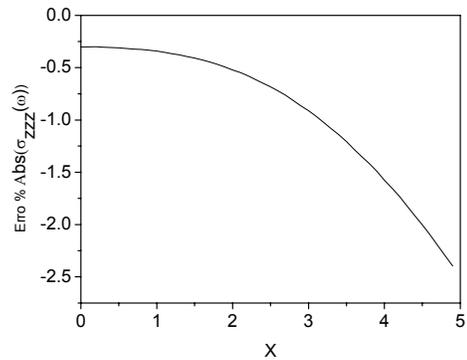


Figura 5.26b – Erro σ_{zzz} Estática

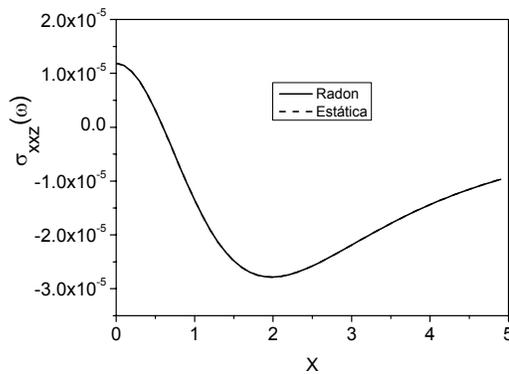


Figura 5.27a – Tensão σ_{xxz} Estática

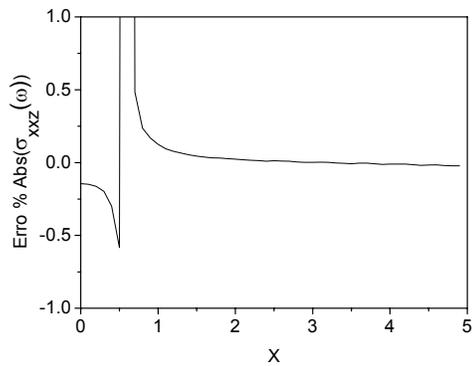


Figura 5.27b – Erro σ_{xxz} Estática

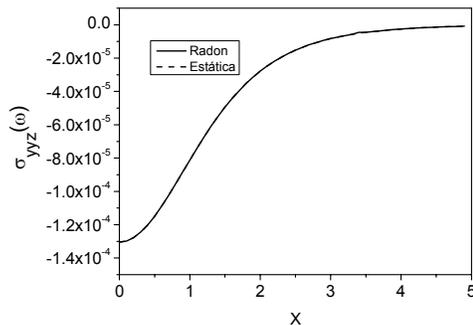


Figura 5.28a – Tensão σ_{yyz} Estática

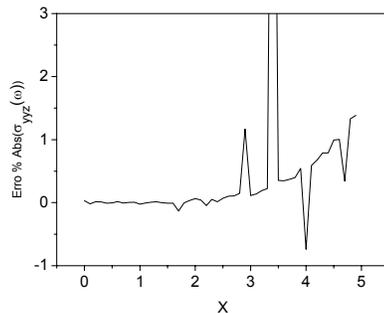


Figura 5.28b – Erro σ_{yyz} Estática

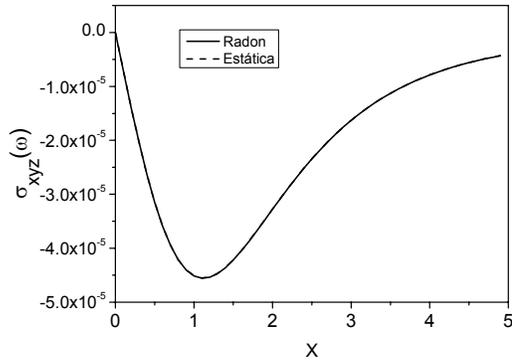


Figura 5.29a – Tensão σ_{xyz} Estática

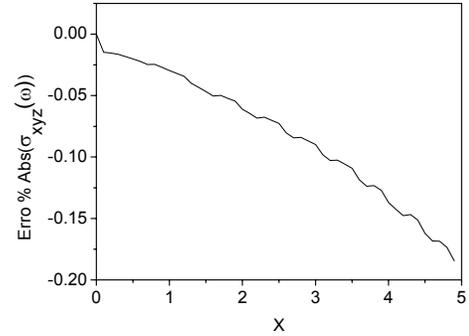


Figura 5.29b – Erro σ_{xyz} Estática

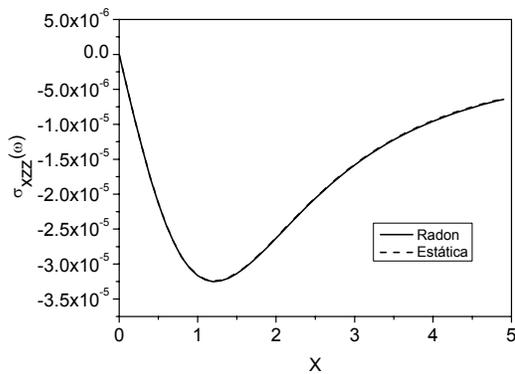


Figura 5.30a – Tensão σ_{xzz} Estática

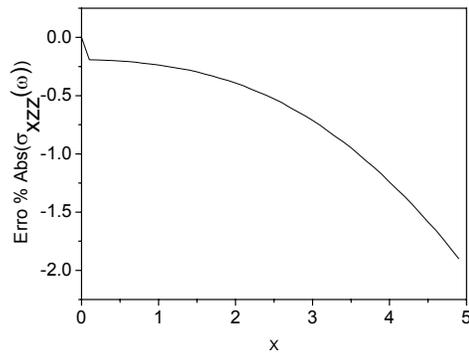


Figura 5.30b – Erro σ_{xzz} Estática

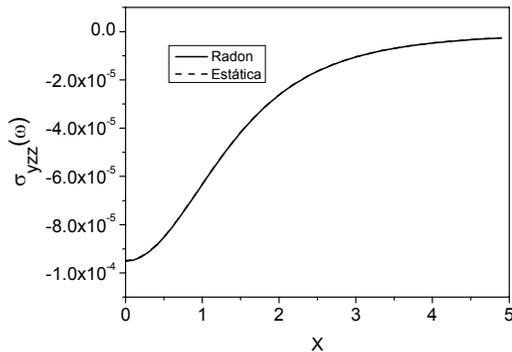


Figura 5.31a – Tensão σ_{yzz} Estática

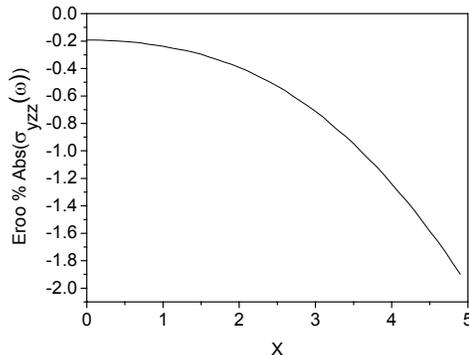


Figura 5.31b – Erro σ_{yzz} Estática

Para validação das respostas obtidas, é possível recorrer ao problema bidimensional, considerando valores elevados para a semilargura b e determinando respostas em pontos com $y=0$. As respostas dinâmicas bidimensionais de tensão foram formuladas por Romanini (1995), utilizando a transformada bidimensional de Fourier. Para efetuar a análise, considerou-se $b=20$, e uma frequência de $\omega=2\text{rad/s}$, e manteve-se os parâmetros materiais das análises anteriores. Nas figuras 5.32, 5.33 e 5.34, são apresentadas as componentes de tensão

resultantes do carregamento vertical. As respostas são muito próximas, entretanto, para σ_{xzz} , nota-se existirem diferenças sutis de amplitude e fase. Para a carga tangencial na direção x, devem ser observadas as figuras 5.35 e 5.36, que fornecem as tensões normais. Para a componente de tensão σ_{xxx} , são observados erros de integração.

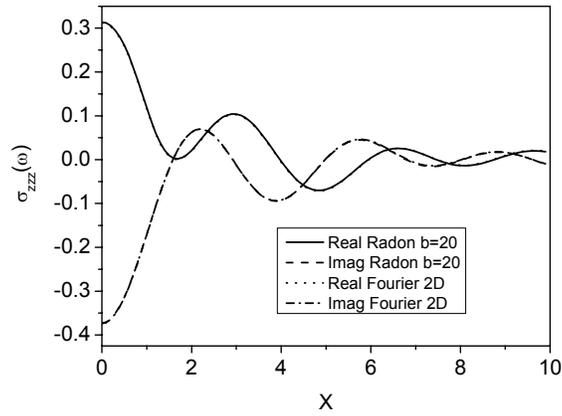


Figura 5.32a – Tensão σ_{zzz} 2D, $b=20$

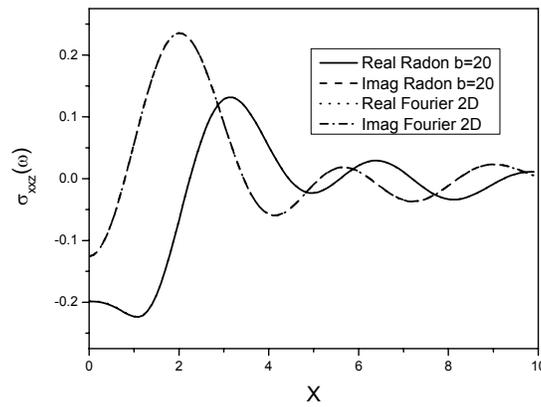


Figura 5.33a – Tensão σ_{xxz} 2D, $b=20$

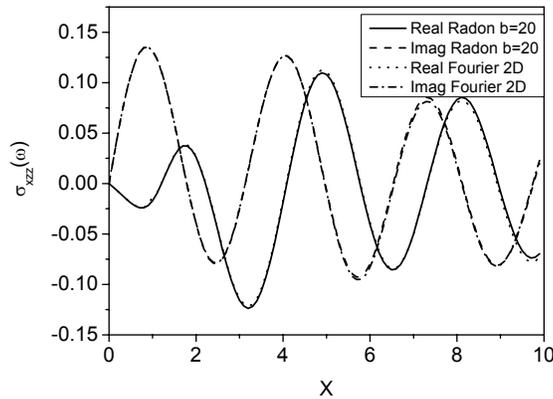


Figura 5.34a – Tensão σ_{xzz} 2D, $b=20$

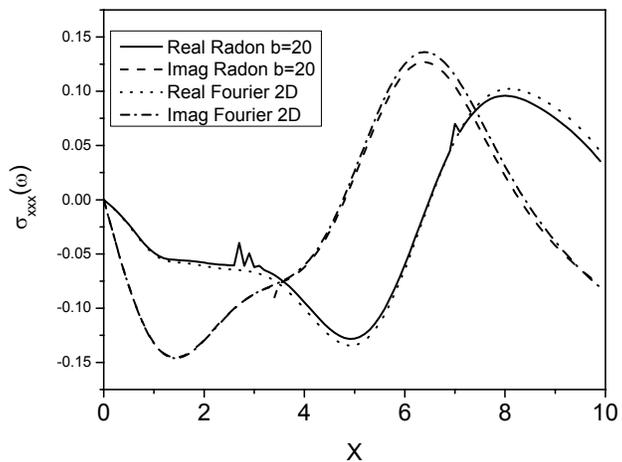


Figura 5.35a – Tensão σ_{xxx} 2D, $b=20$

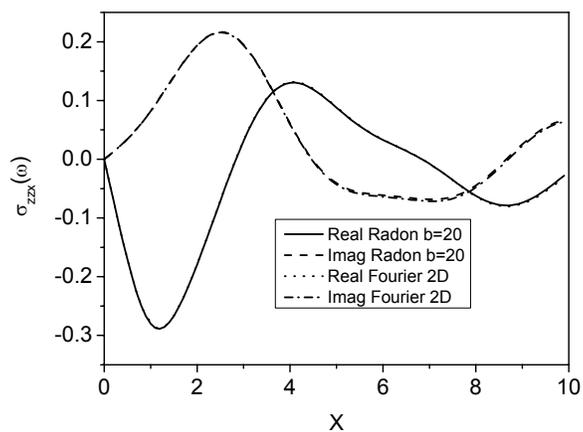


Figura 5.36a – Tensão σ_{zzx} 2D, $b=20$

Capítulo 6

Funções de Green para semi-espacos ortotrópicos tridimensionais

6.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada a dedução para os meios com anisotropia tipo ortotrópica. Para os problemas não isotrópicos, não é possível desacoplar o problema tridimensional em dois problemas auxiliares. Para carregamentos concentrados, a formulação de Wang e Achembach (1995) é adequada; entretanto, não foi possível aplicá-la ao semi-espaco e ao carregamento distribuído. No capítulo quatro, foi apresentada a formulação para semi-espacos e no cinco para o espaco completo com carregamento distribuído. As equações implementadas apresentaram boas respostas comparadas aos problemas estáticos e implementações numéricas com transformada dupla de Fourier. Entretanto, muitos problemas de engenharia lidam com materiais anisotrópicos, assim sendo necessário apresentar uma formulação para os meios anisotrópicos. A formulação apresentada a seguir não apresenta o desacoplamento; as equações são relativamente complexas e a formulação limita-se ao problema de semi-espaco, a partir da qual poderia ser obtida a resposta para espaco completo, desde que as propriedades elásticas da interface sejam compatíveis, neste caso, reduz-se o problema ao transversalmente isotrópico.

6.2 Colocação do Problema

Considere o semi-espaco homogêneo, com anisotropia ortotrópica, com sistema de coordenadas (x,y,z) , definido de maneira a manter o eixo Z perpendicular à superfície livre, como indicado na figura 6.1.

Sobre a superfície é aplicada uma carga, oscilando harmonicamente no tempo, que pode ser escrita na forma:

$$p(t) = p \cdot e^{i\omega t}, \quad (6.1)$$

onde ω é a frequência, e i é o número imaginário.

As equações de movimento que regem o problema para o meio com anisotropia ortotrópica, excluindo as forças de corpo e para o carregamento harmônico 6.1, são dadas por:

$$\left\{ c_{11} \frac{d^2}{dx^2} + c_{66} \frac{d^2}{dy^2} + c_{55} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_x + (c_{12} + c_{66}) \frac{d^2 U_y}{dx dy} + (c_{13} + c_{55}) \frac{d^2 U_z}{dx dz} = -\omega^2 \rho U_x, \quad (6.2)$$

$$\left\{ c_{66} \frac{d^2}{dx^2} + c_{22} \frac{d^2}{dy^2} + c_{44} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_y + (c_{12} + c_{66}) \frac{d^2 U_x}{dx dy} + (c_{23} + c_{44}) \frac{d^2 U_z}{dy dz} = -\omega^2 \rho U_y, \quad (6.3)$$

$$\left\{ c_{55} \frac{d^2}{dx^2} + c_{44} \frac{d^2}{dy^2} + c_{33} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_z + (c_{13} + c_{55}) \frac{d^2 U_x}{dx dz} + (c_{23} + c_{44}) \frac{d^2 U_y}{dy dz} = -\omega^2 \rho U_z. \quad (6.4)$$

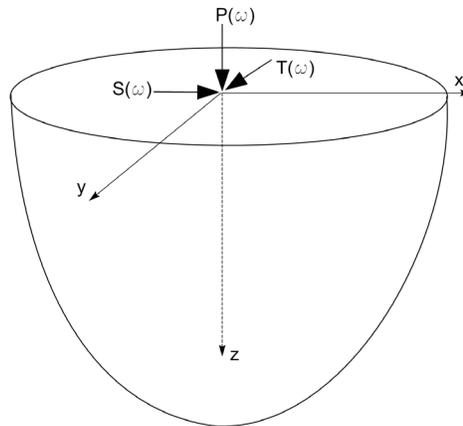


Figura 6.1 – Semi-espaco

As condições de contorno para este semi-espaco são definidas pelas tensões na superfície livre, $z=0$. Para carregamento vertical as condições de contorno em tensão são:

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = -P, \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = 0, \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

para cargas tangenciais no sentido eixo X:

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = 0, \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = -S, \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

e, finalmente, para carregamentos na direção y:

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, z, \omega) = 0, \\ \sigma_{zx}(x, y, z, \omega) = 0, \\ \sigma_{zy}(x, y, z, \omega) = -T. \end{cases} \quad (6.7)$$

6.3 Solução utilizando a transformada de Radon

Aplicando a transformada de Radon bidimensional nas equações de movimento 6.2 a 6.4, escreva-se:

$$\left\{ c_{11}n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{66}n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{55} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_x + (c_{12} + c_{66})n_x n_y \frac{d^2 U_y}{ds^2} + (c_{13} + c_{55})n_x \frac{d^2 U_z}{ds dz} = -\omega^2 \rho U_x, \quad (6.8)$$

$$\left\{ c_{66}n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{22}n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{44} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_y + (c_{12} + c_{66})n_x n_y \frac{d^2 U_x}{ds^2} + (c_{23} + c_{44})n_y \frac{d^2 U_z}{ds dz} = -\omega^2 \rho U_y, \quad (6.9)$$

$$\left\{ c_{55}n_x^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{44}n_y^2 \frac{d^2}{ds^2} + c_{33} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_z + (c_{13} + c_{55})n_x \frac{d^2 U_x}{ds dz} + (c_{23} + c_{44})n_y \frac{d^2 U_y}{ds dz} = -\omega^2 \rho U_z. \quad (6.10)$$

No caso anisotrópico, não é possível desacoplar as equações para obtenção de dois problemas auxiliares. Aplicando a transformada de Fourier no par s-k, pode-se obter:

$$\left\{ -c_{11}n_x^2 k^2 - c_{66}n_y^2 k^2 + c_{55} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_x - (c_{12} + c_{66})n_x n_y k^2 U_y + (c_{13} + c_{55})n_x ik \frac{dU_z}{dz} = -\omega^2 \rho U_x, \quad (6.11)$$

$$\left\{ -c_{66}n_x^2 k^2 - c_{22}n_y^2 k^2 + c_{44} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_y - (c_{12} + c_{66})n_x n_y k^2 U_x + (c_{23} + c_{44})n_y ik \frac{dU_z}{dz} = -\omega^2 \rho U_y, \quad (6.12)$$

$$\left\{ -c_{55}n_x^2 k^2 - c_{44}n_y^2 k^2 + c_{33} \frac{d^2}{dz^2} \right\} U_z + (c_{13} + c_{55})n_x ik \frac{dU_x}{dz} + (c_{23} + c_{44})n_y ik \frac{dU_y}{dz} = -\omega^2 \rho U_z. \quad (6.13)$$

Estas equações podem ser apresentadas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left\{ -c_{11}n_x^2 k^2 - c_{66}n_y^2 k^2 + c_{55} \frac{d^2}{dz^2} \right\} + \omega^2 \rho & -(c_{12} + c_{66})n_x n_y k^2 & (c_{13} + c_{55})n_x ik \frac{d}{dz} \\ -(c_{12} + c_{66})n_x n_y k^2 & \left\{ -c_{66}n_x^2 k^2 - c_{22}n_y^2 k^2 + c_{44} \frac{d^2}{dz^2} \right\} + \omega^2 \rho & (c_{23} + c_{44})n_y ik \frac{d}{dz} \\ (c_{13} + c_{55})n_x ik \frac{d}{dz} & (c_{23} + c_{44})n_y ik \frac{d}{dz} & \left\{ -c_{55}n_x^2 k^2 - c_{44}n_y^2 k^2 + c_{33} \frac{d^2}{dz^2} \right\} + \omega^2 \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Ou de modo mais compacto:

$$[L]\{u\} = \{0\}. \quad (2.15)$$

L é a matriz dos coeficientes operacionais do sistema. Para que exista uma solução não trivial, é necessário que o determinante da matriz de coeficientes operacionais seja nulo. Tal consideração permite o desacoplamento das equações 6.11 a 6.13, mas mantendo a dependência linear entre elas, para isso:

$$\det[L] \cdot \{u\} = \{0\}. \quad (6.16)$$

Utilizando a normalização para poder simplificar as equações, considerando $\delta^2 = \omega^2 \rho$, e aplicando o conceito de comprimento de onda normalizado:

$$\xi = \frac{k}{\delta},$$

e, lembrando que:

$$n_x = \cos(\theta),$$

$$n_y = \text{sen}(\theta),$$

é possível obter do determinante da matriz de coeficientes operacionais aplicado na equação 6.16, o conjunto de equações desacopladas:

$$\left(d_1 \frac{d^6}{dz^6} + d_2 \delta^2 \frac{d^4}{dz^4} + d_3 \delta^4 \frac{d^2}{dz^2} + d_4 \delta^6 \right) \widehat{U}_x = 0, \quad (6.17)$$

$$\left(d_1 \frac{d^6}{dz^6} + d_2 \delta^2 \frac{d^4}{dz^4} + d_3 \delta^4 \frac{d^2}{dz^2} + d_4 \delta^6 \right) \widehat{U}_y = 0, \quad (6.18)$$

$$\left(d_1 \frac{d^6}{dz^6} + d_2 \delta^2 \frac{d^4}{dz^4} + d_3 \delta^4 \frac{d^2}{dz^2} + d_4 \delta^6 \right) \widehat{U}_z = 0, \quad (6.19)$$

nas quais:

$$d_1 = c_{33} c_{44} c_{55},$$

$$d_2 = c_{44} c_{55} + c_{33} (c_{44} + c_{55}) + \xi^2 \left(\left(c_{44} (-c_{11} c_{33} + (c_{13} + c_{55})^2) - c_{33} c_{55} c_{66} \right) \cos^2(\theta) + \left(c_{23}^2 c_{55} + 2c_{23} c_{44} c_{55} - c_{33} (c_{22} c_{55} + c_{44} c_{66}) \right) \text{sen}^2(\theta) \right), \quad (6.60)$$

$$d_3 = c_{33} + c_{44} + c_{55} - \left(-c_{11} c_{33} + (c_{13} + c_{55})^2 \right) c_{66} \xi^4 \cos^4(\theta) + \left(c_{23}^2 + 2c_{23} c_{44} - c_{22} (c_{33} + c_{55}) - c_{33} c_{66} - c_{44} (c_{55} + c_{66}) \right) \xi^2 \sin^2(\theta) + \left(-c_{23} c_{66} (c_{23} + 2c_{44}) + c_{22} (c_{44} c_{55} + c_{33} c_{66}) \right) \xi^4 \sin^4(\theta) - \xi^2 \cos^2(\theta) \left(c_{11} (c_{33} + c_{44}) - (c_{13} + c_{55})^2 + c_{33} c_{66} + c_{55} c_{66} + (c_{13}^2 c_{22} + c_{12}^2 c_{33}) \right) + c_{11} \left(c_{23}^2 - c_{22} c_{33} + 2c_{23} c_{44} \right) - 2c_{12} c_{23} c_{55} - 2c_{12} c_{44} c_{55} + c_{22} c_{55}^2 + 2c_{12} c_{33} c_{66} - 2c_{23} c_{55} c_{66} - 3c_{44} c_{55} c_{66} - 2c_{13} \left(-c_{22} c_{55} + (c_{23} + c_{44})(c_{12} + c_{66}) \right) \xi^2 \sin^2(\theta), \quad (6.21)$$

$$d_4 = - \left(-1 + c_{44} \xi^2 \sin^2(\theta) \right) \left(1 + \xi^2 (-c_{11} + c_{66}) \right) \cos^2(\theta) + c_{11} c_{66} \xi^2 \cos^4(\theta) - \left(c_{22} + c_{66} + (c_{12}^2 - c_{11} c_{22} + 2c_{12} c_{66}) \xi^2 \cos^2(\theta) \right) \sin^2(\theta) + c_{22} c_{66} \xi^2 \sin^4(\theta). \quad (6.22)$$

Estas variáveis dependem exclusivamente das propriedades materiais do meio analisado e da variável no domínio transformado “ ξ ”. Inicialmente, devem ser determinadas as raízes das equações 6.17 a 6.19, considerando que as respostas possuem a forma:

$$\widehat{U}_z = e^{\alpha \cdot \delta \cdot z}, \quad (6.23)$$

com derivadas:

$$\frac{d^2 \widehat{U}_z}{dz^2} = \alpha^2 \cdot \delta^2 \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (6.24)$$

$$\frac{d^4 \widehat{U}_z}{dz^4} = \alpha^4 \cdot \delta^4 e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}, \quad (6.25)$$

$$\frac{d^6 \hat{U}_z}{dz^6} = \alpha^6 \cdot \delta^6 e^{\delta \cdot \alpha \cdot z}. \quad (6.26)$$

Aplicadas em 6.19, resulta:

$$(d_1 \alpha^6 + d_2 \alpha^4 + d_3 \alpha^2 + d_4) \cdot \delta^6 \cdot e^{\delta \cdot \alpha \cdot z} = 0. \quad (6.27)$$

Como o termo exponencial nunca é nulo, é necessário que a relação a seguir seja satisfeita:

$$(d_1 \alpha^6 + d_2 \alpha^4 + d_3 \alpha^2 + d_4) = 0, \quad (6.28)$$

a ordem de sexto grau pode ser reduzida, se:

$$\beta = \alpha^2, \quad (6.29)$$

reescrevendo (6.28), tem-se:

$$(d_1 \beta^3 + d_2 \beta^2 + d_3 \beta + d_4) = 0, \quad (6.30)$$

que é uma equação cúbica, com soluções dadas por:

$$\beta_1 = \frac{-c_2}{3c_1} - \frac{\sqrt[3]{2}d_1}{3c_1 \sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}} + \frac{\sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}}{3c_1 \sqrt[3]{2}}, \quad (6.31)$$

$$\beta_2 = \frac{-c_2}{3c_1} - \frac{(1+i\sqrt{3})d_1}{3\sqrt[3]{4}c_1 \sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}} - \frac{(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}}{6\sqrt[3]{2}c_1}, \quad (6.32)$$

$$\beta_3 = \frac{-c_2}{3c_1} - \frac{(1-i\sqrt{3})d_1}{3\sqrt[3]{4}c_1 \sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}} - \frac{(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{d_2 + \sqrt{4d_1^3 + d_2^2}}}{6\sqrt[3]{2}c_1}, \quad (6.33)$$

sendo:

$$d_1 = -c_2^2 + 3c_1 c_3, \quad (6.34)$$

$$d_2 = -c_2^3 + 9c_1 c_2 c_3 - 27c_1^2 c_4. \quad (6.35)$$

O conjunto completo de respostas da equação 6.28 é dado por seis raízes:

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\beta_1}, \quad (6.36)$$

$$\alpha_2 = \pm \sqrt{\beta_2}, \quad (6.37)$$

$$\alpha_3 = \pm \sqrt{\beta_3}. \quad (6.38)$$

A solução geral para \hat{U}_z , da equação (6.19) é dada por:

$$\hat{U}_z = A \cdot e^{-\delta \alpha_1 \cdot z} + B \cdot e^{\delta \alpha_1 \cdot z} + C \cdot e^{-\delta \alpha_2 \cdot z} + D \cdot e^{\delta \alpha_2 \cdot z} + E \cdot e^{-\delta \alpha_3 \cdot z} + F \cdot e^{\delta \alpha_3 \cdot z}, \quad (6.39)$$

sendo que A, B, C, D, E, F são as amplitudes de onda e independem de z , seus valores são determinados com uso das condições de contorno do problema.

Aplicando o mesmo processo nas equações 6.17 e 6.18, pode-se escrever a forma geral dos deslocamentos \hat{U}_x e \hat{U}_y ,

$$\hat{U}_y = A' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + B' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + C' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + D' \cdot e^{\delta\alpha_2 z} + E' \cdot e^{-\delta\alpha_3 z} + F' \cdot e^{\delta\alpha_3 z}, \quad (6.40)$$

$$\hat{U}_x = A'' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + B'' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + C'' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + D'' \cdot e^{\delta\alpha_2 z} + E'' \cdot e^{-\delta\alpha_3 z} + F'' \cdot e^{\delta\alpha_3 z}, \quad (6.41)$$

sendo que $A', B', C', D', E', F', A'', B'', C'', D'', E'', F''$ também são amplitudes de onda definidas pelas condições de contorno do problema. As funções A, B, C, D, E, F podem ser escritas em função de A', B', C', D', E', F' e também de $A'', B'', C'', D'', E'', F''$. Estas relações são obtidas da substituição de (6.39) a (6.41) nas equações (6.11) a (6.13).

Considerando, inicialmente, apenas os termos com A, A', A'' dos deslocamentos e aplicando-os em (6.13) chega-se a:

$$\left\{ (-c_{55}x_x^2\xi^2\delta^2 - c_{44}x_y^2\xi^2\delta^2 + c_{33}\alpha_1^2\delta^2 + \delta^2)A - (c_{13} + c_{55})n_x i\delta^2\xi\alpha_1 A'' - (c_{23} + c_{44})n_y i\delta^2\xi\alpha_1 A' \right\} e^{-\delta\alpha_1 z} = 0, \quad (6.42)$$

para que a expressão seja correta, é preciso que a próxima relação seja satisfeita:

$$(-c_{55}x_x^2\xi^2 - c_{44}x_y^2\xi^2 + c_{33}\alpha_1^2 + 1)A - (c_{13} + c_{55})n_x i\xi\alpha_1 A'' - (c_{23} + c_{44})n_y i\xi\alpha_1 A' = 0, \quad (6.43)$$

e, finalmente,

$$A = \frac{i\xi\alpha_1}{(-c_{55}x_x^2\xi^2 - c_{44}x_y^2\xi^2 + c_{33}\alpha_1^2 + 1)} \left((c_{13} + c_{55})n_x A'' + (c_{23} + c_{44})n_y A' \right), \quad (6.44)$$

para uma notação mais compacta, define-se:

$$f_1 = \frac{i\xi\alpha_1}{(-c_{55}x_x^2\xi^2 - c_{44}x_y^2\xi^2 + c_{33}\alpha_1^2 + 1)}, \quad (6.45)$$

reduzindo a equação (2.44) para:

$$A = f_1 \left((c_{13} + c_{55})n_x A'' + (c_{23} + c_{44})n_y A' \right). \quad (6.46)$$

Aplicando o resultado de (6.46) na equação (6.12), escreve-se:

$$\left\{ (-c_{66}x_x^2\xi^2\delta^2 - c_{22}x_y^2\xi^2\delta^2 + c_{44}\alpha_1^2\delta^2 + \delta^2)A' - (c_{12} + c_{66})n_x n_y \delta^2 \xi^2 A'' - (c_{23} + c_{44})n_y i\delta^2 \xi \alpha_1 A \right\} e^{-\delta\alpha_1 z} = 0; \quad (6.47)$$

mais uma vez, como o termo exponencial nunca será nulo, deve-se satisfazer a relação:

$$(-c_{66}x_x^2\xi^2\delta^2 - c_{22}x_y^2\xi^2\delta^2 + c_{44}\alpha_1^2\delta^2 + \delta^2)A' - (c_{12} + c_{66})n_x n_y \delta^2 \xi^2 A'' - (c_{23} + c_{44})n_y i\delta^2 \xi \alpha_1 A = 0. \quad (6.48)$$

Recorrendo ao resultado de (6.46), aplicado na equação (6.48), escreve-se a relação:

$$\begin{aligned} & (-c_{66}x_x^2\xi^2\delta^2 - c_{22}x_y^2\xi^2\delta^2 + c_{44}\alpha_1^2\delta^2 + \delta^2)A' - (c_{12} + c_{66})n_x n_y \delta^2 \xi^2 A'' - \\ & - (c_{23} + c_{44})n_y i\delta^2 \xi \alpha_1 f_1 \left((c_{13} + c_{55})n_x A'' + (c_{23} + c_{44})n_y A' \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.49)$$

apresentada na forma compacta como:

$$f_2 A' + f_3 A'' + f_4 A' + f_5 A' = 0, \quad (6.50)$$

em que:

$$f_2 = -c_{66}x_x^2\xi^2 - c_{22}x_y^2\xi^2 + c_{44}\alpha_1^2 + 1, \quad (6.51)$$

$$f_3 = -(c_{12} + c_{66})n_x n_y \xi^2, \quad (6.52)$$

$$f_4 = (c_{23} + c_{44})(c_{13} + c_{55})n_x n_y i\xi \alpha_1 f_1, \quad (6.53)$$

$$f_5 = -(c_{23} + c_{44})(c_{23} + c_{44})n_y^2 i\xi \alpha_1 f_1. \quad (6.54)$$

Da equação (6.50), obtém-se a relação entre A' e A'' ,

$$A' = \Omega_1 A'', \quad (6.55)$$

com:

$$\Omega_1 = -\frac{(f_3 + f_4)}{(f_2 + f_5)}. \quad (6.56)$$

Substituindo a relação de (2.55) em (2.46), chega-se à relação entre A e A''

$$A = \Omega_1' A'' \quad (6.57)$$

para a qual:

$$\Omega_1' = \left[f_1 (c_{13} + c_{55})n_x - f_1 (c_{23} + c_{44})n_y \frac{(f_3 + f_4)}{(f_2 + f_5)} \right]. \quad (6.58)$$

Efetuada o processo para as demais amplitudes de onda, pode-se obter as relações para B , B' e B'' , mostrando-se que:

$$B' = \Omega_2 B'', \quad (6.59)$$

$$B = \Omega_2' B'', \quad (6.60)$$

com:

$$\Omega_2 = \frac{(f_4 - f_3)}{(f_2 - f_5)}, \quad (6.61)$$

$$\Omega_2' = \left[f_1 (c_{13} + c_{55})n_x + f_1 (c_{23} + c_{44})n_y \frac{(f_4 - f_3)}{(f_2 - f_5)} \right]. \quad (6.62)$$

Para as amplitudes de onda C , C' , C'' as relações são:

$$C' = \Omega_3 C'', \quad (6.63)$$

$$C = \Omega_3' C'', \quad (6.64)$$

sendo:

$$\Omega_3 = -\frac{(h_3 + h_4)}{(h_2 + h_5)}, \quad (6.65)$$

$$\Omega_3' = \left[h_1 n_x - h_1 n_y \frac{(h_3 + h_4)}{(h_2 + h_5)} \right]. \quad (6.66)$$

Para as amplitudes D , D' e D'' , é possível mostrar que:

$$D' = \Omega_4 D'', \quad (6.67)$$

$$D = \Omega_4' D'', \quad (6.68)$$

com:

$$\Omega_4 = \frac{(h_4 - h_3)}{(h_2 - h_5)}, \quad (6.69)$$

$$\Omega_4' = \left[h_1 n_x + h_1 n_y \frac{(h_4 - h_3)}{(h_2 - h_5)} \right]. \quad (6.70)$$

Nas equações (6.65), (6.66), (6.69), (6.70) os termos “ h ” são dados por:

$$h_1 = \frac{i\xi\alpha_2}{(-c_{55}x_x^2\xi^2 - c_{44}x_y^2\xi^2 + c_{33}\alpha_2^2 + 1)}, \quad (6.71)$$

$$h_2 = -c_{66}x_x^2\xi^2 - c_{22}x_y^2\xi^2 + c_{44}\alpha_2^2 + 1, \quad (6.72)$$

$$h_3 = -(c_{12} + c_{66})n_x n_y \xi^2, \quad (6.73)$$

$$h_4 = (c_{23} + c_{44})(c_{13} + c_{55})n_x n_y i\xi\alpha_2 h_1, \quad (6.74)$$

$$h_5 = -(c_{23} + c_{44})(c_{23} + c_{44})n_y^2 i\xi\alpha_2 h_1. \quad (6.75)$$

Analogamente para E , E' e E'' :

$$E' = \Omega_5 E'', \quad (6.76)$$

$$E = \Omega_5' E'', \quad (6.77)$$

sendo que:

$$\Omega_5 = -\frac{(g_3 + g_4)}{(g_2 + g_5)}, \quad (6.78)$$

$$\Omega_5' = \left[g_1 n_x - g_1 n_y \frac{(g_3 + g_4)}{(g_2 + g_5)} \right]. \quad (6.79)$$

E, finalmente, para as amplitudes F , F' e F'' , é possível mostrar que:

$$F' = \Omega_6 F'', \quad (6.80)$$

$$F = \Omega_6' F'', \quad (6.81)$$

com:

$$\Omega_6 = \frac{(g_4 - g_3)}{(g_2 - g_5)}, \quad (6.82)$$

$$\Omega'_6 = \left[g_1 n_x + g_1 n_y \frac{(g_4 - g_3)}{(g_2 - g_5)} \right]. \quad (6.83)$$

Nas equações (6.78), (6.79), (6.86), (6.83), os termos “g” são dados por:

$$g_1 = \frac{i\xi\alpha_3}{(-c_{55}x_x^2\xi^2 - c_{44}x_y^2\xi^2 + c_{33}\alpha_3^2 + 1)}, \quad (6.84)$$

$$g_2 = -c_{66}x_x^2\xi^2 - c_{22}x_y^2\xi^2 + c_{44}\alpha_3^2 + 1, \quad (6.85)$$

$$g_3 = -(c_{12} + c_{66})n_x n_y \xi^2, \quad (6.86)$$

$$g_4 = (c_{23} + c_{44})(c_{13} + c_{55})n_x n_y i\xi\alpha_3 g_1, \quad (6.87)$$

$$g_5 = -(c_{23} + c_{44})(c_{23} + c_{44})n_y^2 i\xi\alpha_3 g_1. \quad (6.88)$$

Com o uso destas relações, os deslocamentos podem ser escritos apenas em função de seis amplitudes de onda:

$$\hat{U}_z = \Omega'_1 A'' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \Omega'_2 B'' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + \Omega'_3 C'' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + \Omega'_4 D'' \cdot e^{\delta\alpha_2 z} + \Omega'_5 E'' \cdot e^{-\delta\alpha_3 z} + \Omega'_6 F'' \cdot e^{\delta\alpha_3 z}, \quad (6.89)$$

$$\hat{U}_y = \Omega_1 A'' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + \Omega_2 B'' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + \Omega_3 C'' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + \Omega_4 D'' \cdot e^{\delta\alpha_2 z} + \Omega_5 E'' \cdot e^{-\delta\alpha_3 z} + \Omega_6 F'' \cdot e^{\delta\alpha_3 z}, \quad (6.90)$$

$$\hat{U}_x = A'' \cdot e^{-\delta\alpha_1 z} + B'' \cdot e^{\delta\alpha_1 z} + C'' \cdot e^{-\delta\alpha_2 z} + D'' \cdot e^{\delta\alpha_2 z} + E'' \cdot e^{-\delta\alpha_3 z} + F'' \cdot e^{\delta\alpha_3 z}. \quad (6.91)$$

6.4. Soluções em tensão

Para determinar as amplitudes de onda, são utilizadas condições de contorno em tensão. Portanto é necessário escrever as relações de tensão em função dos deslocamentos e, conseqüentemente, das amplitudes de onda. As relações da mecânica do contínuo entre deslocamentos, deformações e tensões são as mesmas do domínio físico, apenas aplicando as transformadas para converter as variáveis para o domínio transformado.

Da mecânica do contínuo, são obtidas as relações entre tensão e deformação para meios anisotrópicos ortotrópicos, dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\}. \quad (6.92)$$

As deformações em função dos deslocamentos no sistema cartesiano são:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dU_x}{dx}, \quad (6.93)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dU_y}{dy}, \quad (6.94)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dU_z}{dz}, \quad (6.95)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_z}{dy} + \frac{dU_y}{dz} \right), \quad (6.96)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_z}{dx} + \frac{dU_x}{dz} \right), \quad (6.97)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_x}{dy} + \frac{dU_y}{dx} \right). \quad (6.98)$$

Aplicando a transformada de Radon bidimensional nas equações (6.93) a (6.98):

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = n_x \frac{d\tilde{U}_x}{ds}, \quad (6.99)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yy} = n_y \frac{d\tilde{U}_y}{ds}, \quad (6.100)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{d\tilde{U}_z}{dz}, \quad (6.101)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \left(n_y \frac{d\tilde{U}_z}{ds} + \frac{d\tilde{U}_y}{dz} \right), \quad (6.102)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \left(n_x \frac{d\tilde{U}_z}{ds} + \frac{d\tilde{U}_x}{dz} \right), \quad (6.103)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(n_y \frac{d\tilde{U}_x}{ds} + n_x \frac{d\tilde{U}_y}{ds} \right). \quad (6.104)$$

Finalmente, aplicando a transformada de Fourier no par s-k, e considerando $k = \xi\delta$, as deformações no domínio transformado são obtidas:

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = n_x i\xi\delta\hat{U}_x, \quad (6.105)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy} = n_y i\xi\delta\hat{U}_y, \quad (6.106)$$

$$\hat{\varepsilon}_{zz} = \frac{d\hat{U}_z}{dz}, \quad (6.107)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \left(n_y i\xi\delta\hat{U}_z + \frac{d\hat{U}_y}{dz} \right), \quad (6.108)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \left(n_x i \xi \delta \hat{U}_z + \frac{d\hat{U}_x}{dz} \right), \quad (6.109)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(n_y i \xi \delta \hat{U}_x + n_x i \xi \delta \hat{U}_y \right). \quad (6.110)$$

As condições de contorno são dadas na forma de tensões na superfície livre. Inicialmente, são necessárias apenas as equações de tensão para $\hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{zx}, \hat{\sigma}_{zy}$. Determinadas por:

$$\hat{\sigma}_{zz} = c_{13} \hat{\varepsilon}_{xx} + c_{23} \hat{\varepsilon}_{yy} + c_{33} \hat{\varepsilon}_{zz}, \quad (6.111)$$

$$\hat{\sigma}_{zx} = 2c_{55} \hat{\varepsilon}_{zx}, \quad (6.112)$$

$$\hat{\sigma}_{zy} = 2c_{44} \hat{\varepsilon}_{zy}. \quad (6.113)$$

Substituindo os termos de deformações obtém-se as tensões escritas em função dos deslocamentos:

$$\hat{\sigma}_{zz} = c_{12} n_x i \xi \delta \hat{U}_x + c_{12} n_y i \xi \delta \hat{U}_y + c_{33} \frac{d\hat{U}_z}{dz}, \quad (6.114)$$

$$\hat{\sigma}_{zx} = c_{55} \left(\frac{d\hat{U}_x}{dz} + n_x i \xi \delta \hat{U}_z \right), \quad (6.115)$$

$$\hat{\sigma}_{zy} = c_{44} \left(\frac{d\hat{U}_y}{dz} + n_y i \xi \delta \hat{U}_z \right). \quad (6.116)$$

Substituindo os deslocamentos nas relações de tensão dadas nas equações (6.114) a (6.116) e, após algumas considerações e simplificações, é possível escrever:

$$\hat{\sigma}_{zz} = \Pi_1 A'' \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + \Pi_2 B'' \cdot e^{\delta \alpha_1 z} + \Pi_3 C'' \cdot e^{-\delta \alpha_2 z} + \Pi_4 D'' \cdot e^{\delta \alpha_2 z} + \Pi_5 E'' \cdot e^{-\delta \alpha_3 z} + \Pi_6 F'' \cdot e^{\delta \alpha_3 z}, \quad (6.117)$$

$$\hat{\sigma}_{zy} = \Pi_7 A'' \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + \Pi_8 B'' \cdot e^{\delta \alpha_1 z} + \Pi_9 C'' \cdot e^{-\delta \alpha_2 z} + \Pi_{10} D'' \cdot e^{\delta \alpha_2 z} + \Pi_{11} E'' \cdot e^{-\delta \alpha_3 z} + \Pi_{12} F'' \cdot e^{\delta \alpha_3 z}, \quad (6.118)$$

$$\hat{\sigma}_{zx} = \Pi_{13} A'' \cdot e^{-\delta \alpha_1 z} + \Pi_{14} B'' \cdot e^{\delta \alpha_1 z} + \Pi_{15} C'' \cdot e^{-\delta \alpha_2 z} + \Pi_{16} D'' \cdot e^{\delta \alpha_2 z} + \Pi_{17} E'' \cdot e^{-\delta \alpha_3 z} + \Pi_{18} F'' \cdot e^{\delta \alpha_3 z}, \quad (6.119)$$

nas quais as amplitudes de onda aparecem multiplicadas por:

$$\Pi_1 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_1 - c_{33} \Omega_1' \alpha_1 \right), \quad (6.120)$$

$$\Pi_2 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_2 + c_{33} \Omega_2' \alpha_2 \right), \quad (6.121)$$

$$\Pi_3 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_3 - c_{33} \Omega_3' \alpha_2 \right), \quad (6.122)$$

$$\Pi_4 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_4 + c_{33} \Omega_4' \alpha_2 \right), \quad (6.123)$$

$$\Pi_5 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_5 - c_{33} \Omega_5' \alpha_3 \right), \quad (6.124)$$

$$\Pi_6 = \delta \left(c_{13} n_x i \xi + c_{23} n_y i \Omega_6 + c_{33} \Omega_6' \alpha_3 \right), \quad (6.125)$$

$$\Pi_7 = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_1' - \alpha_1 \Omega_1), \quad (6.126)$$

$$\Pi_8 = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_2' + \alpha_1 \Omega_2), \quad (6.127)$$

$$\Pi_9 = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_3' - \alpha_3 \Omega_2), \quad (6.128)$$

$$\Pi_{10} = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_4' + \alpha_2 \Omega_4), \quad (6.129)$$

$$\Pi_{11} = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_5' - \alpha_3 \Omega_5), \quad (6.130)$$

$$\Pi_{12} = c_{44} \delta(n_y i \zeta \Omega_6' + \alpha_3 \Omega_6), \quad (2.131)$$

$$\Pi_{13} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_1' - \alpha_1), \quad (6.132)$$

$$\Pi_{14} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_2' + \alpha_1), \quad (6.133)$$

$$\Pi_{15} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_3' - \alpha_2), \quad (6.134)$$

$$\Pi_{16} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_4' + \alpha_2), \quad (6.135)$$

$$\Pi_{17} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_5' - \alpha_3), \quad (6.136)$$

$$\Pi_{18} = c_{55} \delta(n_x i \zeta \Omega_6' + \alpha_3). \quad (6.137)$$

6.5. Amplitudes de onda

Para determinar as amplitudes de onda, as condições de contorno devem sofrer a transformação de domínio. O uso das tensões, na superfície livre, fornece três condições de contorno; de considerações sobre os deslocamentos podem ser obtidas outras três. No caso do semi-espço, não existe reflexão de onda, a condição de Sommerfeld deve ser respeitada. Para que não exista reflexão de ondas, as amplitudes B'' , D'' e F'' devem ser nulas.

Para obter as condições de contorno no domínio transformado, aplica-se a transformada de Radon nas equações (6.5) a (6.7), de modo que:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{P}, \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.138)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{S}, \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.139)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = -\tilde{T}. \end{cases} \quad (6.140)$$

Ainda é necessário aplicar a transformada de Fourier, obtendo:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = -\hat{P}, \\ \hat{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \hat{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.141)$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \hat{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = -\hat{S}, \\ \hat{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = 0, \end{cases} \quad (6.142)$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{zz}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \hat{\sigma}_{zx}(s, \theta, z, \omega) = 0, \\ \hat{\sigma}_{zy}(s, \theta, z, \omega) = -\hat{T}. \end{cases} \quad (6.143)$$

Para sistemas lineares, os carregamentos podem ser aplicados isoladamente, e seus efeitos sobrepostos para determinar a resposta a um carregamento qualquer. Para carga vertical P , é obtido o sistema de equações:

$$\Pi_1 A'' + \Pi_3 C'' + \Pi_5 E'' = -\hat{P}, \quad (6.144)$$

$$\Pi_7 A'' + \Pi_9 C'' + \Pi_{11} E'' = 0, \quad (6.145)$$

$$\Pi_{13} A'' + \Pi_{15} C'' + \Pi_{17} E'' = 0, \quad (6.146)$$

para o qual a solução em termos de amplitudes de onda é:

$$A_p'' = \hat{P} \frac{\Pi_9 \Pi_{17} - \Pi_{11} \Pi_{15}}{\Phi_1}, \quad (6.147)$$

$$C_p'' = \hat{P} \frac{\Pi_{11} \Pi_{13} - \Pi_7 \Pi_{17}}{\Phi_1}, \quad (6.148)$$

$$E_p'' = \hat{P} \frac{\Pi_{13} \Pi_{19} - \Pi_7 \Pi_{15}}{-\Phi_1}, \quad (6.149)$$

com:

$$\Phi_1 = \Pi_1 \Pi_{11} \Pi_{15} - \Pi_3 \Pi_{11} \Pi_{13} + \Pi_3 \Pi_7 \Pi_{17} - \Pi_5 \Pi_7 \Pi_{15} - \Pi_1 \Pi_9 \Pi_{17} + \Pi_5 \Pi_9 \Pi_{13}. \quad (6.150)$$

Da mesma maneira, para carregamento horizontal no eixo y (T):

$$A_T'' = \hat{T} \frac{\Pi_5 \Pi_{15} - \Pi_3 \Pi_{17}}{\Phi_1}, \quad (6.151)$$

$$C_T^* = \hat{T} \frac{\Pi_5 \Pi_{13} - \Pi_1 \Pi_{17}}{-\Phi_1}, \quad (6.152)$$

$$E_T^* = \hat{T} \frac{\Pi_3 \Pi_{13} - \Pi_1 \Pi_{15}}{\Phi_1}, \quad (6.153)$$

e, finalmente, para o carregamento horizontal na direção do eixo x (S):

$$A_S^* = \hat{S} \frac{\Pi_5 \Pi_9 - \Pi_3 \Pi_{11}}{-\Phi_1}, \quad (6.154)$$

$$C_S^* = \hat{S} \frac{\Pi_3 \Pi_7 - \Pi_1 \Pi_{11}}{\Phi_1}, \quad (6.155)$$

$$E_S^* = \hat{S} \frac{\Pi_3 \Pi_9 - \Pi_3 \Pi_{17}}{\Phi_1}. \quad (6.156)$$

6.6. Transformadas inversas

Para determinar as respostas no domínio físico, é necessário aplicar as transformadas inversas; inicialmente a transformada de Fourier, seguida de uma transformada de Radon bidimensional.

Com a transformada inversa de Fourier, as equações de deslocamento e tensão são dadas por:

$$\tilde{U}_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1 A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + \Omega_3 C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + \Omega_5 E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk, \quad (6.157)$$

$$\tilde{U}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1 A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + \Omega_3 C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + \Omega_5 E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk, \quad (6.158)$$

$$\tilde{U}_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk, \quad (6.159)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_1 A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + \Pi_3 C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + \Pi_5 E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk, \quad (6.160)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_7 A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + \Pi_9 C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + \Pi_{11} E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk, \quad (6.161)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_{13} A'' \cdot e^{-\omega \alpha_1 \cdot z} + \Pi_{15} C'' \cdot e^{-\omega \alpha_2 \cdot z} + \Pi_{17} E'' \cdot e^{-\omega \alpha_3 \cdot z} \right\} e^{iks} dk. \quad (6.162)$$

Da análise das equações (6.157) a (6.162), nota-se que apenas um termo depende da variável de Radon (s), que é o termo exponencial e^{iks} ; para a transformada de Inversa de Radon bidimensional são necessárias duas etapas, a primeira uma derivação em s , de modo que, como nos capítulos anteriores, escreve-se:

$$U_z = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1' A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Omega_3' C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Omega_5' E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta, \quad (6.163)$$

$$U_y = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Omega_3 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Omega_5 E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta, \quad (6.164)$$

$$U_x = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta, \quad (6.165)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_1 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_3 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_5 E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta, \quad (6.166)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_7 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_9 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_{11} E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta \quad (6.167)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_{13} A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_{15} C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_{17} E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \frac{e^{iks}}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} dk ds d\theta \quad (6.168)$$

Considerando a função $\zeta(k, \theta)$, deduzida e apresentada no capítulo 4, equação 4.164, escrevem-se os deslocamentos e tensões como:

$$U_z = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1' A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Omega_3' C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Omega_5' E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \zeta dk d\theta, \quad (6.169)$$

$$U_y = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Omega_1 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Omega_3 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Omega_5 E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \zeta dk d\theta, \quad (6.170)$$

$$U_x = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \zeta dk d\theta, \quad (6.171)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_1 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_3 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_5 E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \zeta dk d\theta, \quad (6.172)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_7 A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_9 C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_{11} E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik \zeta dk d\theta, \quad (6.173)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{-1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi_{13} A'' \cdot e^{-\omega\alpha_1 \cdot z} + \Pi_{15} C'' \cdot e^{-\omega\alpha_2 \cdot z} + \Pi_{17} E'' \cdot e^{-\omega\alpha_3 \cdot z} \right\} ik_{\zeta} dk d\theta. \quad (6.174)$$

As demais componentes de tensão podem ser obtidas dos deslocamentos. Não foi possível, até o momento, a resolução analítica destas equações, sendo necessária a implementação numérica das integrais.

Capítulo 7.

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, foi apresentada a formulação de funções de Green para carga distribuída e concentrada, oscilando, harmonicamente, em semi-espacos e espacos completos tridimensionais isotrópicos e viscoelásticos. Os problemas são descritos com auxílio de equações diferenciais, que foram solucionadas, utilizando-se as transformadas de Radon e Fourier e condições de contorno específicas. Não foi possível obter equações analíticas, sendo a transformada inversa realizada numericamente. Uma das vantagens desta formulação, quando comparada à solução utilizando apenas a transformada de Fourier, é que, ao invés de duas integrais ilimitadas, obteve-se uma limitada, que, em problemas axissimétricos, possui solução analítica. A outra é que, nos problemas isotrópicos, é possível desacoplar o problema tridimensional em dois problemas auxiliares bi-dimensionais. Os procedimentos de integração numérica são relativamente simples, baseados em pontos de Gauss e algoritmos adaptativos, que lidam com o comportamento oscilatório e descontinuidades dos integrandos.

Os resultados numéricos foram comparados aos problemas estáticos para meios elásticos. Para semi-espacos submetidos a carregamento concentrado, com axissimetria, foi realizada validação, utilizando a solução do problema de Boussinesq. Para tanto, consideraram-se baixas frequências e pequenos fatores de amortecimento. Os resultados foram positivos e motivadores. Para este problema, também, foram realizadas validações com uma implementação da formulação baseada em transformadas de Fourier. Para este problema, de carregamento vertical concentrado, foram obtidas as componentes de deslocamento e de tensão, utilizando coordenadas polares.

A extensão, para problemas com carga aplicada tangencialmente à superfície, considerou o sistema de coordenadas cartesiano. A validação da formulação foi baseada nos problemas de Boussinesq (carga vertical) e Cerruti (carga tangencial), foram obtidos bons resultados. Para carregamentos dinâmicos, para os quais não existe ainda resposta analítica, os resultados foram comparados a uma implementação baseada em transformada dupla de Fourier. Os resultados foram muito próximos, sem diferenças significativas. Foram observados ganhos no que se refere a tempo computacional. Infelizmente, para a superfície livre, não foi possível obter as componentes de tensão não prescritas como condições de contorno. Será necessária uma investigação adicional nos integrandos, para eliminar a parcela que diverge. Ainda, para os semi-espaços, foi apresentada a formulação para carregamento distribuído, validada com implementação baseada em transformadas duplas de Fourier. Para este problema, só foi encontrada, na literatura, a resposta analítica para carregamento vertical estático. Os resultados, considerando pequenas frequências, aproximaram-se, significativamente, dessa resposta.

Foram formuladas e implementadas as expressões para problemas de espaços completos submetidos a carregamento distribuído. As expressões foram validadas com o problema de Kelvin, e por aproximação com os problemas bidimensionais. Foram obtidos bons resultados.

Estas expressões podem ser incorporadas em formulações não singulares do Método de Elementos de Contorno, no estudo de problemas de interação solo-estrutura. Apesar de não ter sido possível eliminar as integrais impróprias, que também ocorrem na formulação com transformadas de Fourier, foram obtidos ganhos computacionais.

Foi apresentada a formulação inicial considerando anisotropia. Neste caso, não é possível o uso de desacoplamento em problemas auxiliares. Devido à natureza complexa dos integrandos, não foi possível, ainda, a implementação das transformadas inversas. Deve-se salientar que tal formulação é para semi-espaços, para os quais não foi possível, ainda, descrever as condições de contorno na forma de forças de corpo, o que poderia permitir uma adaptação da formulação de Wang e Achembach.

Propõe-se como trabalhos futuros a análise e implementação dos integrandos para o problema anisotrópico com carregamento distribuído, em semi-espacos e espacos completos, bem como a extensao da formulacao para meios isotrópicos considerando camada sobre leito rígido e carregamentos no interior do semi-espaco. Deve ser analisada a possibilidade de se obter a resposta para espaco completo com carregamento distribuído, a partir da integracao ao longo de uma superficie de carregamento da formulacao com carga concentrada fornecida por Wang e Achembach. É também, necessária uma implementacao de algoritmo mais adequado à obtencao das respostas em pontos na superficie livre, para a qual a implementacao atual não é adequada no que concerne a tempos computacionais. E, finalmente, a incorporacao de tais funcoes auxiliares em métodos de elementos de contorno direto e indireto.

Referências Bibliográficas

- Adolph, M. Soluções Transientes de Problemas Visco-Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da Transformada de Fourier Rápida –FFT. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 2002. Dissertação de Mestrado.
- Almeida Barros, P. L. Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise de Interação Solo–Estrutura. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. Tese Doutorado.
- Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. Elastodynamics Green’s Functions for Orthotropic Plane Strain Continua with Inclined Axis of Symmetry. *International Journal for Solids and Structures*, v. 36, p. 4767-4788, 1999.
- Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. On the Dynamic Interaction and Cross-Interaction of 2D Rigid Structures with Orthotropic Elastic Media Possessing General Principal Axes Orientation, submetido a *Meccanica*.
- Ariza, M.P., Dominguez, J. Dynamic BE analysis of 3D cracks in transversely isotropic solids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 193, pp. 765-779, 2004
- Barros, R. M. Elementos Infinitos para o Tratamento de Problemas da Visco-elastodinâmica Estacionária em Domínios Ilimitados pelo Método dos Elementos Finitos. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1996 Dissertação de Mestrado.

- Barros, R. M. Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 2001. Tese de Doutorado.
- Barros, P. L. A. "Impedances of rigid cylindrical foundations emdedded in transversely isotropic soils". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Accepted for publication
- Bettes, P. Infinite Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, p. 53-64, 1997.
- Beskos, D. E. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis. Applied Mechanics Review, v. 40, n. 1, p.1-23, 1987.
- Beskos, D. E. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996). Applied Mechanics Review, v. 50, n. 3, p. 149-197, 1997.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- Capello Sousa, E. A. , Almeida Barros, P. L., Mesquita Neto, E. FFT based Transient Response of 2D Rigid Foundations Interacting with Transversaly Isotropic Soils. Proceedings 14th ASCE Engineering Mechanics Conference. University of Texas, Austin, USA, p. 6 (Proceedings em CD-ROM).
- Carvalho, E. R. – Comunicação privada, 2005.
- Christensen, R. M. Theory of Viscoelasticity. New York, Academic Press, 1982.
- Daros, C., Wave Propagation in Unbounded Piezoelectric Media of Transversaly Isotropic Symmetry. Institut for Applied Mechanics, Technical University Braunschweig (Brunswick), Alemanha, 1999. Tese de Doutorado.

- Davis, P. J., Rabinowitz, P. *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1975.
- Deans, S. R. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993.
- Denda, M., Wang, C.Y., Yong, Y.K. 2D Time harmonic BEM for solids of general anisotropy with application to eigenvalue problems. *Journal for Sound and Vibration*, v. 261, pp 247-276, 2003
- Denda, M., Araki, Y., Yong, Y.K. Time-Domain BEM for 2D piezoelectricity applied to eigenvalue problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, pp 7241-7265, 2003.
- Dravinski, M., Zheng, T. Numerical Evaluation of three-dimensional time-harmonic Green's functions for a nonisotropic full-space. *Wave motion*, v. 32, pp 141-151, 2000
- Findley, W. N., Lai, J. S., Onaram, K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials With an Introduction to Linear Viscoelasticity*, Dover, New York, 1989.
- Gazetas, G. Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 2, p. 2-42, 1983.
- Gaul, L. Zur Berechnung der Vertikal- und Kippschwingungen eines eines starren Fundamentes auf viskoelastischem Halbraum. Von der Fakultät für Maschinwesen der Technischen Universität Hannover, 1976. Tese de Doutorado
- Gaul, L., Bohlen, S., Kemple, S. Transient and Forced Oscillations of systems with constant hysteretic damping. *Mechanics Research Communications*, vol. 12, pp. 187-201, 1985.
- Givoli, D. *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, Holanda, 1992.
- Gel'fand, I. M., Graev, M. I., Vilenkin, N., Ya. *Generalized Functions.*, Vol 5, Academic, New York, 1966.

- Georgiadis, H. G., Lykotrafitis, G. A method based on the Radon Transform for Three-Dimensional Elastodynamic Problems of Moving Loads. *Journal of elasticity*, v. 65, pp 87-129, 2001.
- Graff, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. New York, Dover, 1991.
- Hahn, H. G. *Elastizitätstheorie, Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*. Stuttgart, Teubner, 1985.
- Helganson, S. *The Radon Transform*. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1980.
- Hsu, H. W. *Análise de Fourier*, LTC, Rio de Janeiro, 1973.
- Jiang, L.Z. Integral representation and Green's functions for 3D time-dependent thermopiezoelectricity. *International Journal for Solids and Structures*, v. 37, pp. 6155-6171, 2000.
- John, F. *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*. Interscience, New York, 1955.
- Kane, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, 1994.
- Kögl, M., Gaul, L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 27, pp. 107-114, 2003
- Kolsky, H. *Stress Waves in Solids*. Dover, New York, 1963.
- Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, series A*, vol. 203, pp. 1-42, 1904.
- Longman, I. M. Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions. *Proc. Cambridge Philos. Soc*, vol. 52, pp. 764-768, 1956
- Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Edition, Dover Publications, Inc, New York, 1994.

- Luco, S. E., Hadjain, A. H. The Dynamic Modeling of the Half Plane by Finite Elements. Nuclear Engineering and Design, v. 31, p. 184-194, 1974.
- Lykotrafitis, G., Georgiadis, H. G. The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving load sources over half space. International Journal of Solids and Structures, v.40, pp 899-940, 2003.
- Mase, G. T., Mase, G. E. Continuum Mechanics for Engineers, Second Edition, CRC Press, 1999
- Mesquita Neto, E. Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum. Hannover, 1989. PhD Thesis.
- Mesquita, E. , Pontes, B. R. Complete Compliance Matrices for the Dynamic Foundation–Soil–Foundation Interaction: a Critical Review of the BEM Potentialities. In: Boundary Elements XIV, vol. 2 Stress Analysis and Computacional Aspects, Brebia, C. A. , Dominguez, J. , Paris, F. (eds), Elsevier Science Publuschers, Londres, p. 193-205, 1992.
- Mesquita Neto, E. Sousa, E. C., Pontes, B. R. Boundary or Finite Elements to Model the Behaviour of Dynamical Systems and Foundation Structures Interacting with the Soil? Proceedings PACAM III, 3rd Pan American Congress of Applied Mechanics, p 101-104, São Paulo, Brasil, 1993.
- Mesquita Neto, E., Barros, R. M. Funções de Green Dinâmicas para Solos Transversalmente Isotrópicos e Multi-Estratificados. Proceedings XX CILAMCE, XX Congresso Íbero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, São Paulo, 1999, (CD-ROM).
- Mesquita, E., Adolph, M., Barros, P.L.A., Romanini, E. Transient Green's Functions and Distributed Load Solutions for Plane Strain, Transversaly Isotropic and Viscoelastic Layers. Latin American, Journal for Solid and Structures, 2003, vol. 1, n.1 São Paulo, Brasil.

- Nayfeh, A. H.. Wave Propagation in Layered Anisotropic Media, with application to composites. Elsevier, Amsterdam, 1995
- Needham, Tristan. Visual Complex Analysis. Clarendon Press. OXFORD , 1997
- Palka, Bruce P. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, 1991
- Pan, E. Tonon, F. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids. International Journal for Solid and Structures, v. 37, pp. 943-958, 2000.
- Payton, R. G. Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media. The Hague: martinus Nijhoff, 1983
- Pickering, D. J. Anisotropic Elastic Parameters for Soils. Géotechnique, vol. 20, n. 3, pp. 271-276, 1970.
- Radon, J. Über die bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. Leipzig, Math-Phys Kl., vol. 69, pp 262-267, 1917.
- Rajapakse, R. K. N. D., Sentjuntichai, T. Fundamental Solutions for Poroelastic Half Space with Compressible Constituents. Journal of Applied Mechanics, v. 60, p. 847-856, 1993.
- Romanini, E. Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura através de Equações Integrais de Contorno. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1995. Tese de Doutorado.
- Saada, A. S. Elasticity Theory and Applications. Pergamon Press, New York, 1974.
- Saez, A. P. Análisis Numérico de Problemas Elastodinámicos en Materiales Transversalmente Isótopos. Sevilla, Espanha, 1997. Tese de Doutorado.
- Sáez, A., M.P., Dominguez, J. Dynamic crack problems in three-dimensional transversely isotropic solids. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 25, pp. 203-210, 2001.

- Sommerfeld, A. Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 1949.
- Thomazzo, L H. Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente de Meios Visco-elásticos. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 2004. Dissertação de Mestrado.
- Timoshenko, S.P., Goodier J. N. Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1984
- Wang. C. D., Liao, J. J. Elastic solutions of displacement for a transversely isotropic half space subjected to three dimensional buried parabolic rectangular loads. International Journal for Solids and Structures, vol. 39, pp. 4805-4824, 2002.
- Wang, C. D., Wang, W. J., Lee, T. C. Three-dimensional buried non-linearly varying triangular loads on a transversely isotropic half space. International Journal for Solids and Structures, vol. 41, pp. 3013-3030, 2004.
- Wang, C. Y., Rajapakse, R. K. N. D. Dynamics of Rigid Strip Foundations Embedded in Orthotropic Elastic Soils. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 20, p. 927-947, 1991.
- Wang, C.Y., Achembach, J. D. A new look at 2D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids. Wave Motion, v. 16, n. 4, pp. 389-405, 1993.
- Wang, C.Y., Achembach, J. D. A new method to obtain 3D Green's functions for anisotropic solids. Wave Motion, v. 18, pp. 273-289, 1993.
- Wang, C.Y., Achembach, J. D. 2D time domain BEM for scattering of elastic waves in anisotropic solids. Boundary Element Technology IX, ed. Brebbia, C.A., and Kassab, A.J., computational mechanics publications, Southampton, 1994
- Wang, C.Y., Achembach, J. D. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids. International Journal , v. 118, pp. 384-392, 1994.

- Wang, C.Y., Achenbach, J. D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids. Proceedings of the Royal Society of London, series A-Mathematical and Physical Sciences, v. 449, pp. 441-458, 1995.
- Wylie, C. R., Barret, L. C. Advanced Engineering Mathematics. Fifth Edition, McGraw Hill, New York, 1985.
- Voigt, W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig, Teubner, 1928.
- Yang, B., Pan, E., Tewary, V.K. Three-dimensional Green's functions of steady-state motion in anisotropic half-spaces and bimetals. Engineering analysis with boundary element method, v. 28, pp. 1069-1082, 2004.
- Yue, Z.Q., Xiao, H.T., Tham, L.G., Lee, C.F., Yin, J.H. Stresses and displacements of a transversely isotropic elastic halfspace due to rectangular loadings. Engineering analysis with boundary elements, v. pp. 1-25, 2005.
- Zavala, P. A. G. Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, 1999. Dissertação de Mestrado.

Anexo I

Comportamento em função de θ , das parcelas oscilantes para carregamento concentrado na superfície do semi-espaco.

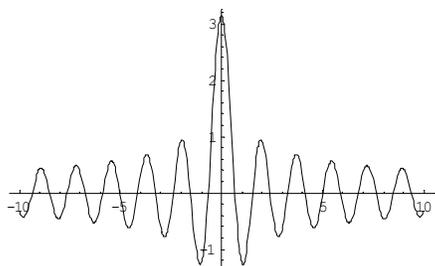


Figura A1a. Componente real de HI_1 - par

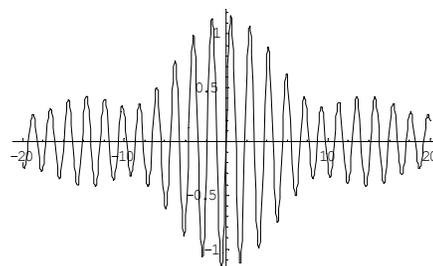


Figura A1b. Componente imaginária de HI_1 -

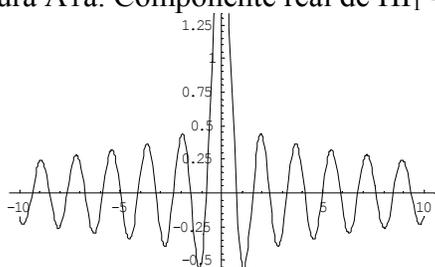


Figura A2a. Componente real de HI_2 - par

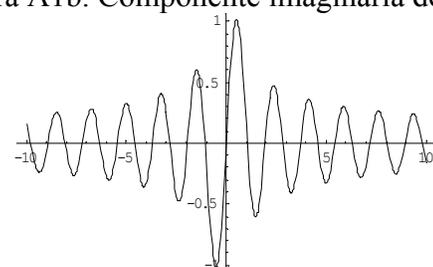


Figura A2b. Componente imaginária de HI_2 -

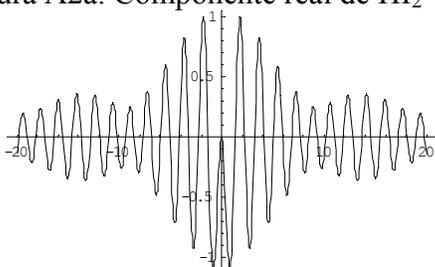


Figura A3a. Componente real de HI_3 - par

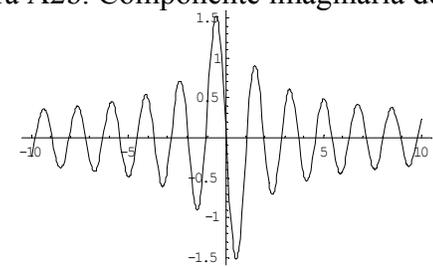


Figura A3b. Componente imaginária de HI_3 -

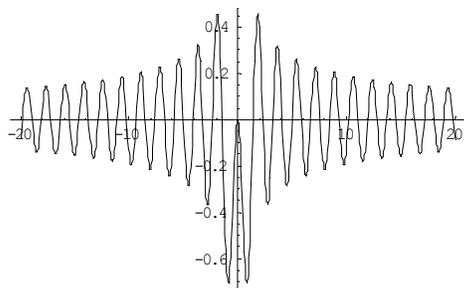


Figura A4a. Componente real de HI_4 - par

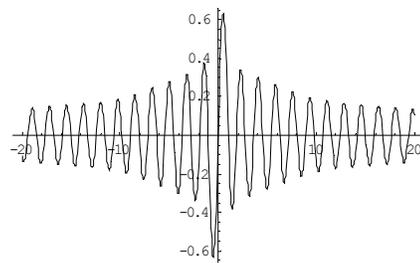


Figura A4b. Componente imaginária de HI_4 -

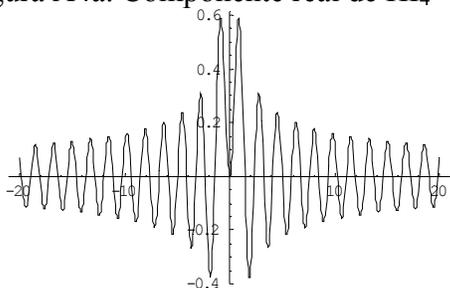


Figura A5a. Componente real de HI_5 - par

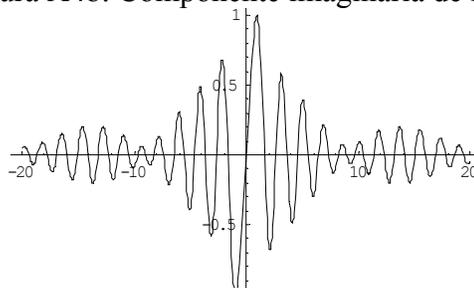


Figura A5b. Componente imaginária de HI_5 -

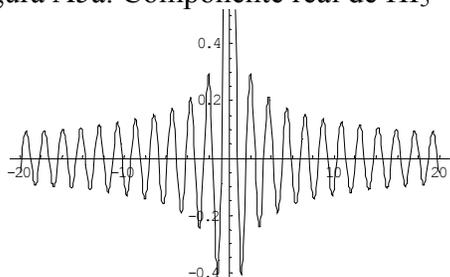


Figura A6a. Componente real de HI_6 - par

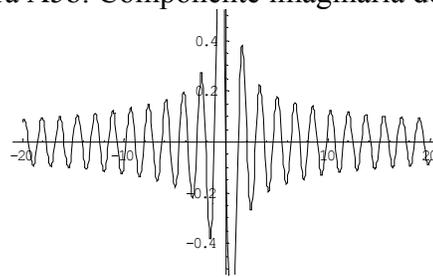


Figura A6b. Componente imaginária de HI_6 -

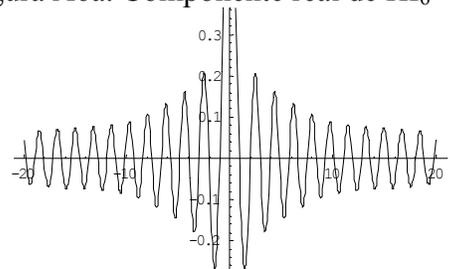


Figura A7a. Componente real de HI_7 - par

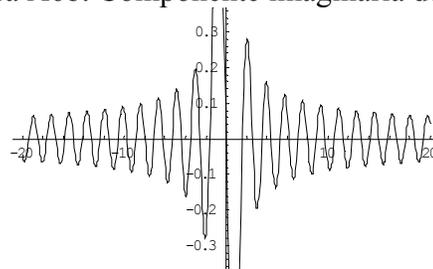


Figura A7b. Componente imaginária de HI_7 -

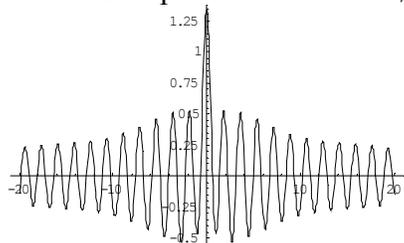


Figura A8a. Componente real de HI_8 - par

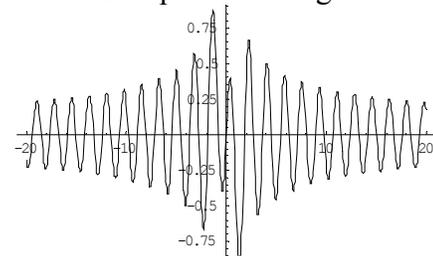


Figura A8b. Componente imaginária de HI_8 -

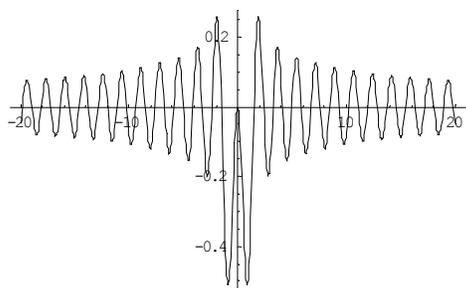


Figura A9a. Componente real de HI_9 - par

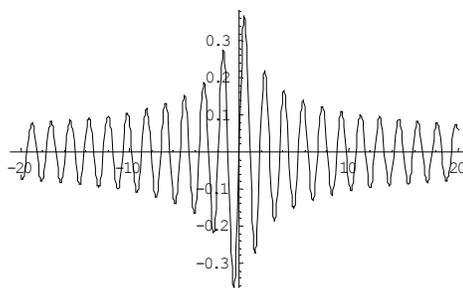


Figura A9b. Componente imaginária de HI_9 - ímpar

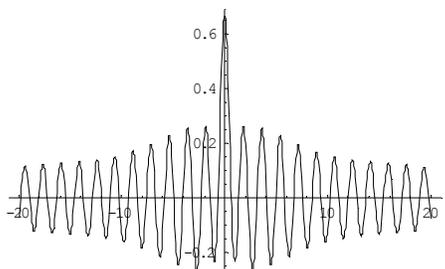


Figura A10a. Componente real de HI_{10} - par

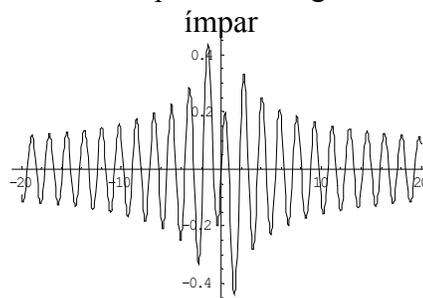


Figura A10b. Componente imaginária de HI_{10} - ímpar

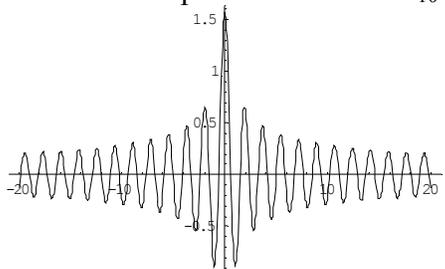


Figura A11a. Componente real de HI_{11} - par

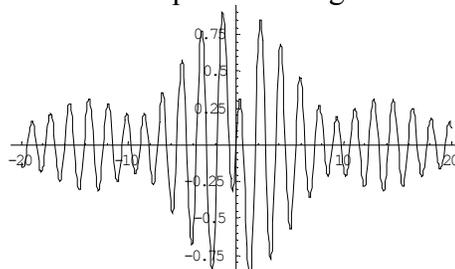


Figura A11b. Componente imaginária de HI_{11} - ímpar

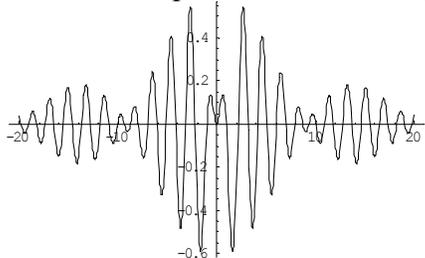


Figura A12a. Componente real de HI_{12} - par

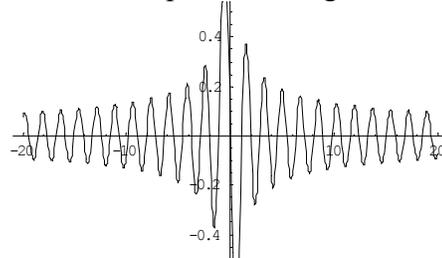


Figura A12b. Componente imaginária de HI_{12} - ímpar

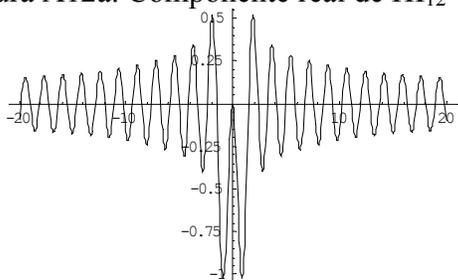


Figura A13a. Componente real de HI_{13} - par

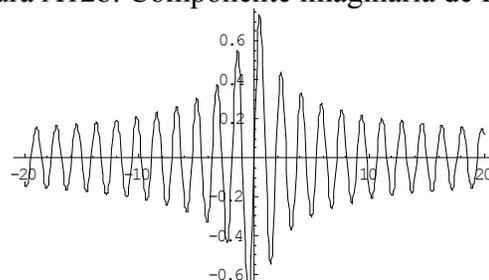


Figura A13b. Componente imaginária de HI_{13} - ímpar

Anexo II

Comportamento do núcleo das funções de deslocamento e função para problemas de semi-espaco considerando carregamento vertical.

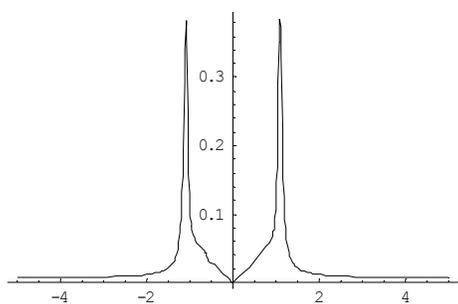


Figura B1a. Parte real de G_{uzz} - par

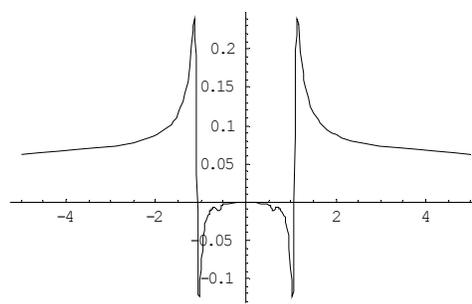


Figura B1b. Parte imaginária de G_{uzz} - par

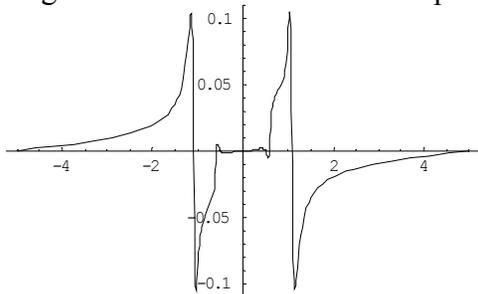


Figura B2a. Parte real de G_{uyz} e G_{uxz} - ímpar

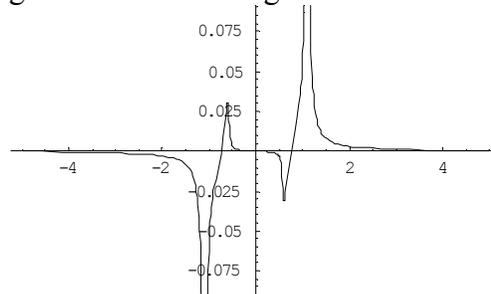


Figura B2b. Parte imaginária de G_{uyz} e G_{uxz}

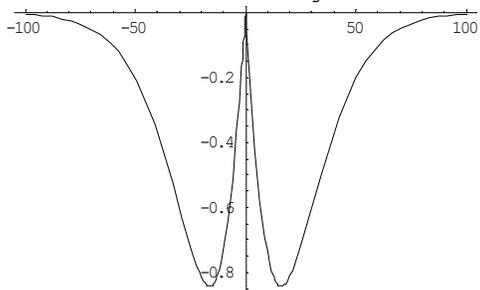


Figura B3a. Parte real de $G_{\sigma zzz}$ - par

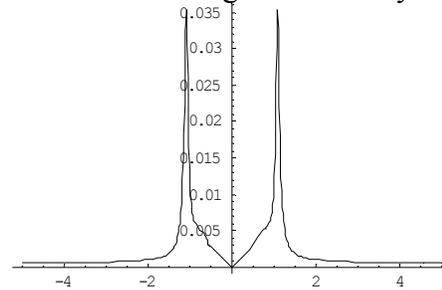


Figura B3b. Parte imaginária de $G_{\sigma zzz}$ - par

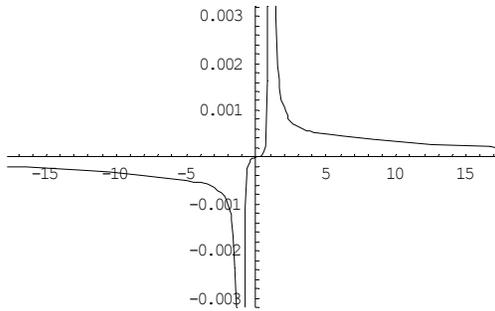


Figura B4a. Parte real de $G\sigma_{zyz}$ e $G\sigma_{zxz}$ – ímpar

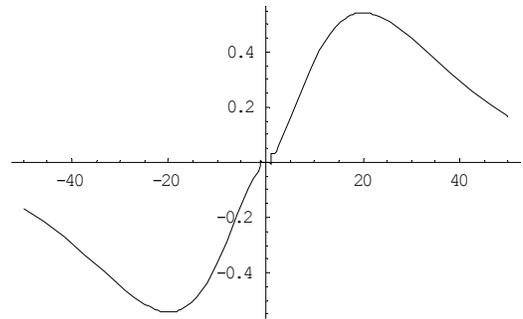


Figura B4b. Parte imaginária de $G\sigma_{zyz}$ e $G\sigma_{zxz}$

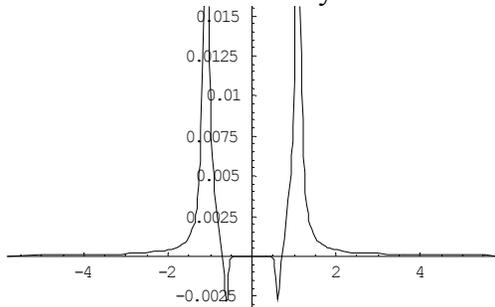


Figura B5a. Parte real de $G\sigma_{yyz1}$ e $G\sigma_{xxz1}$

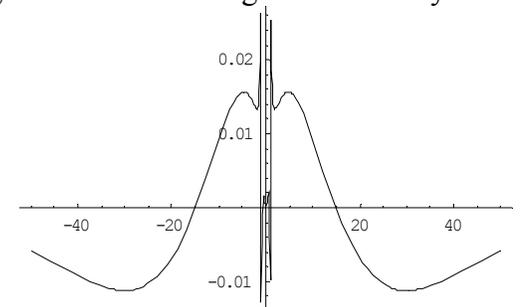


Figura B5b. Parte imaginária de $G\sigma_{yyz1}$ e $G\sigma_{xxz1}$

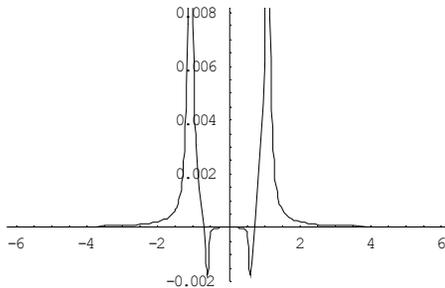


Figura B6a. Parte real de $G\sigma_{yyz2}$ e $G\sigma_{xxz2}$

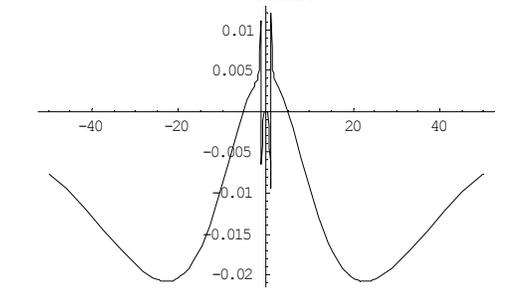


Figura B6b. Parte imaginária de $G\sigma_{yyz2}$ e $G\sigma_{xxz2}$

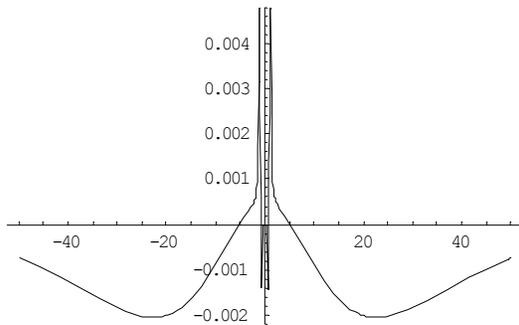


Figura B7a. Parte real de $G\sigma_{xyz}$

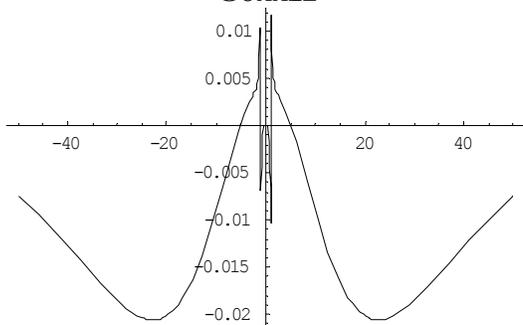


Figura B7b. Parte imaginária de $G\sigma_{xyz}$

Para carregamento horizontal na direção x ou y o comportamento dos núcleos pode ser observado nas figuras:

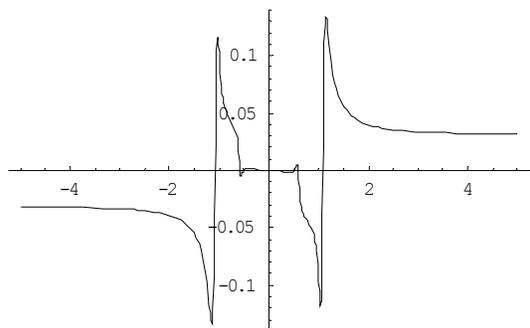


Figura B8a. Parte real de Guxy1 e Guzx

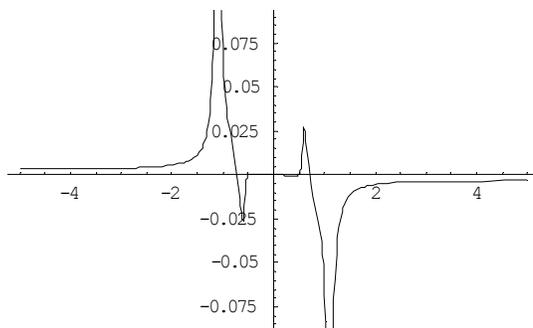


Figura B8b. Parte imaginária de Guxy1 e Guzx

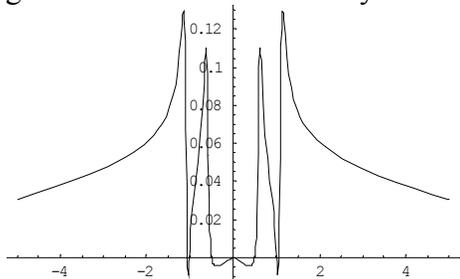


Figura B9a. Parte real de Guyy1, Guyx1, Guxy1, Guxx1

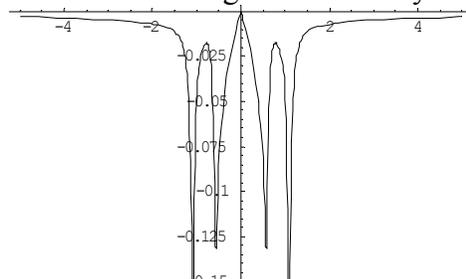


Figura B9b. Parte imaginária de Guyy1, Guyx1, Guxy1, Guxx1

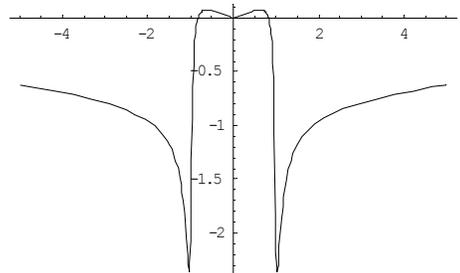


Figura B10a. Parte real de Guyy2, Guyx2, Guxy2, Guxx2

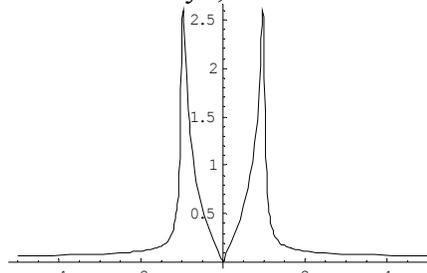


Figura B10b. Parte imaginária de Guyy2, Guyx2, Guxy2, Guxx2

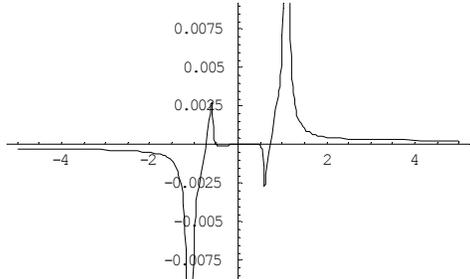


Figura B11a. Parte real de Gszyy1, Gszxx

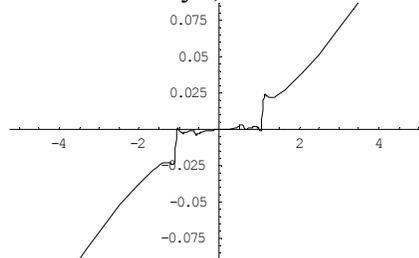


Figura B11b. Parte imaginária de Gszyy1, Gszxx

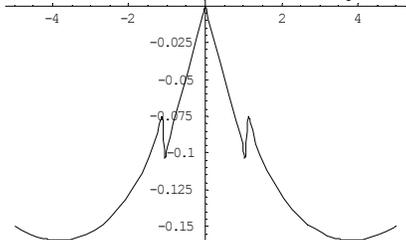


Figura B12a. Parte real de Gszyy1, Gszyx1, Gszyx1, Gszxx1

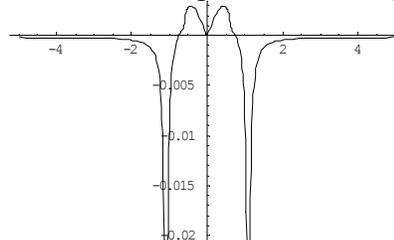


Figura B12b. Parte imaginária de Gszyy1, Gszyx1, Gszyx1, Gszxx1

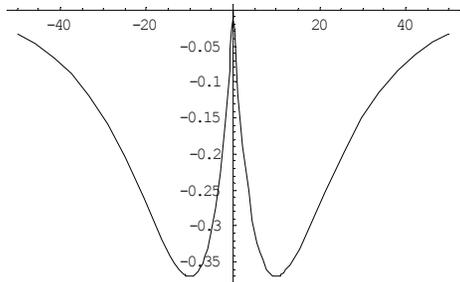


Figura B13a. Parte real de Gszyy2, Gszyx2, Gszxx2

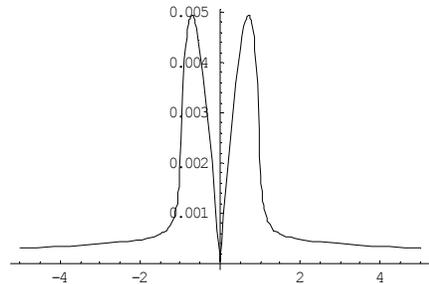


Figura B13b. Parte imaginária de Gszyy2, Gszyx2, Gszxx2

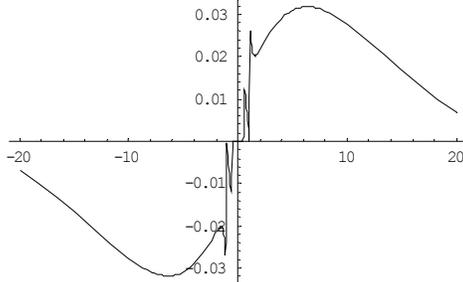


Figura B14a. Parte real de Gsyyy1, Gsyyx1, Gsxxx1

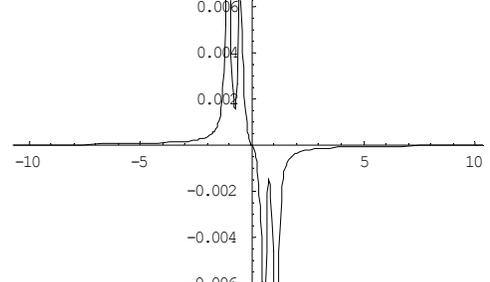


Figura B14b. Parte imaginária de Gsyyy1, Gsyyx1, Gsxxx1

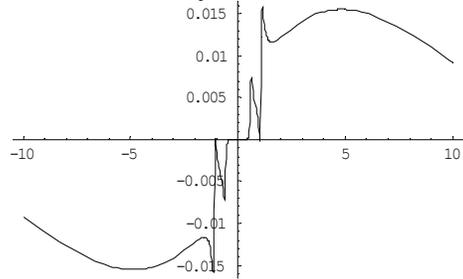


Figura B15a. Parte real de Gsyyy2, Gsyyx2, Gsxxx2

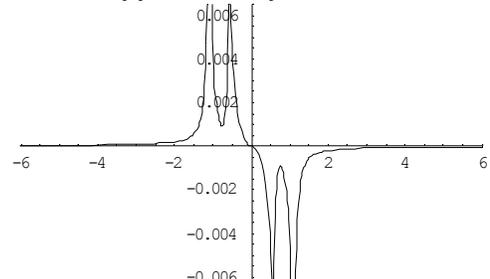


Figura B15b. parte imaginária de Gsyyy2, Gsyyx2, Gsxxx2

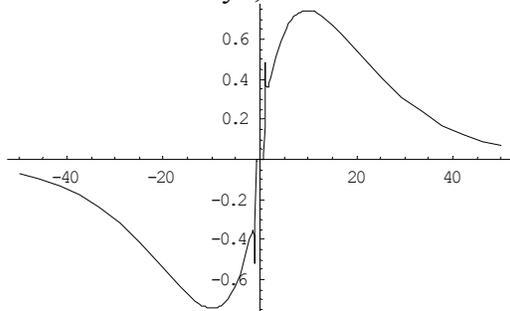


Figura B16a. Parte real de Gsyyy3, Gsyyx3, Gsxxx3

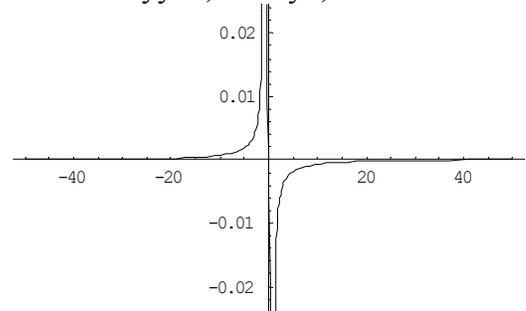


Figura B16b. Parte imaginária de Gsyyy3, Gsyyx3, Gsxxx3

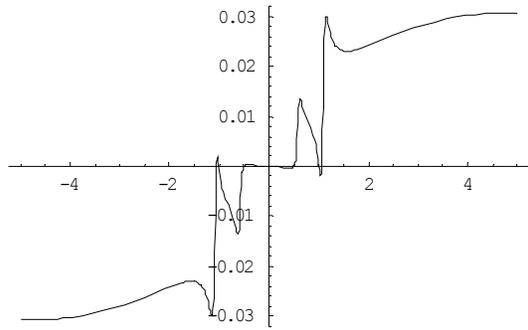


Figura B17a. Parte real de Gsxxy1, Gsxyx1

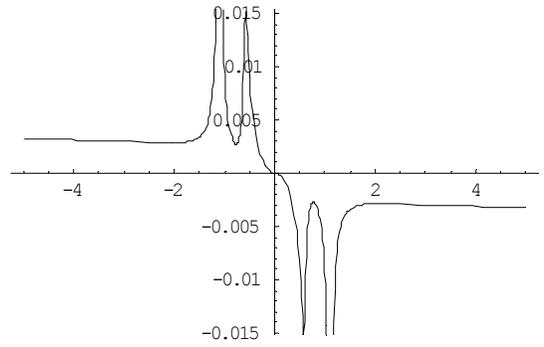


Figura B17b. Parte imaginária de Gsxxy1, Gsxyx1

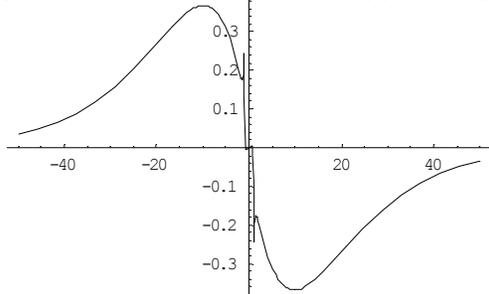


Figura B18a. Parte real de Gsxxy2, -Gsxyx2

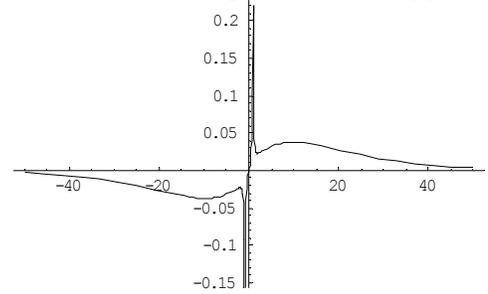


Figura B18b. Parte imaginária de Gsxxy2, -Gsxyx2

Anexo III

Integrandos em θ para problemas com carregamento distribuído.

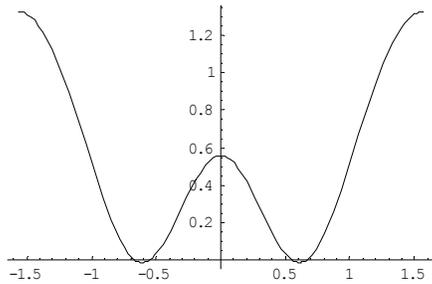


Figura C1a. Componente real de H_1

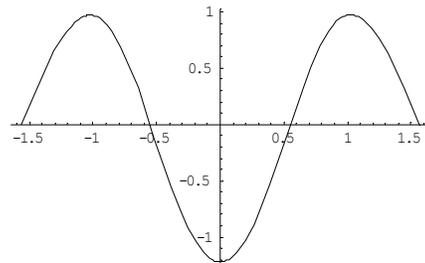


Figura C1b. Componente imaginária de H_1

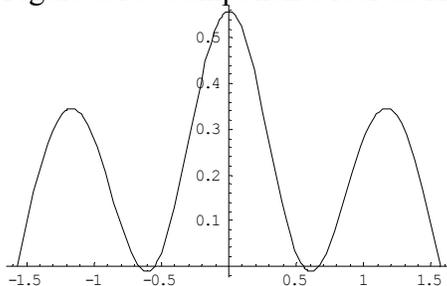


Figura C2a. Componente real de H_2

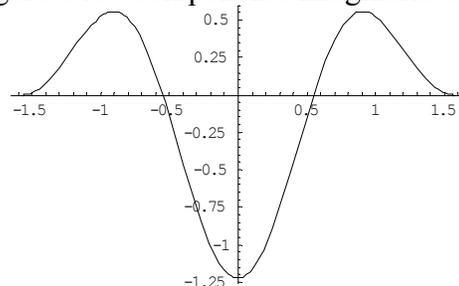


Figura C2b. Componente imaginária de H_2

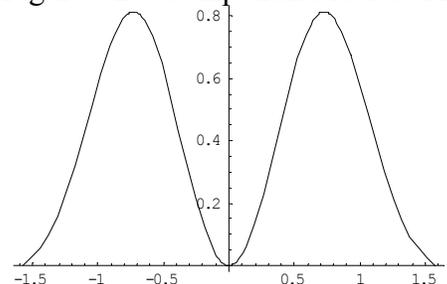


Figura C3a. Componente real de H_3

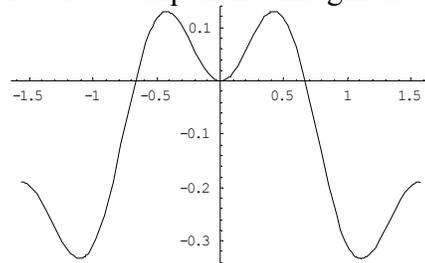


Figura C3b. Componente imaginária de H_3

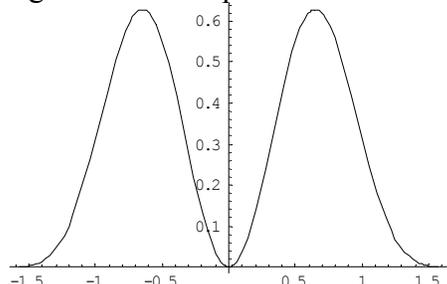


Figura C4a. Componente real de H_4

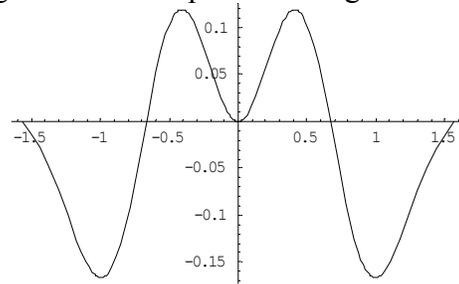


Figura C4b. Componente imaginária de H_4

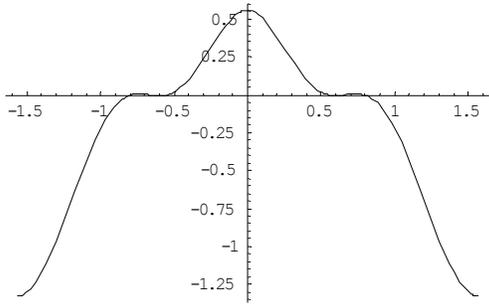


Figura C5a. Componente real de H_5

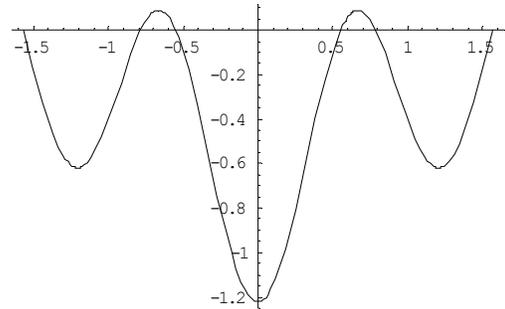


Figura C5b. Componente imaginária de H_5

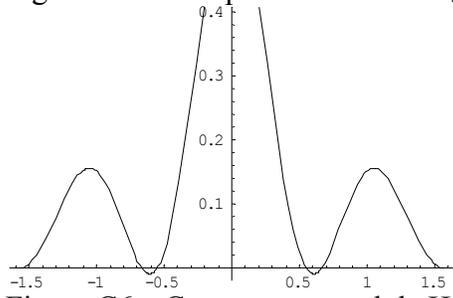


Figura C6a. Componente real de H_6

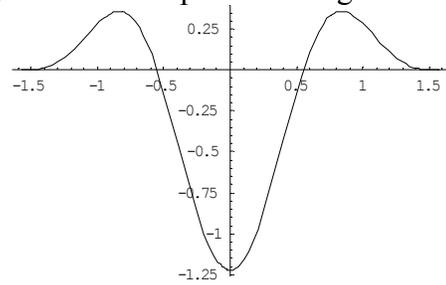


Figura C6b. Componente imaginária de H_6

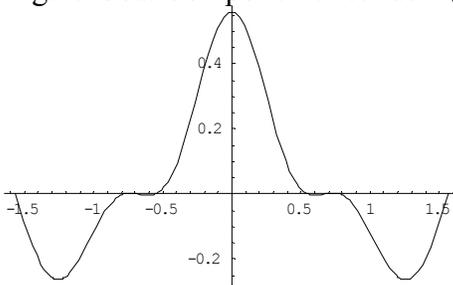


Figura C7a. Componente real de H_7

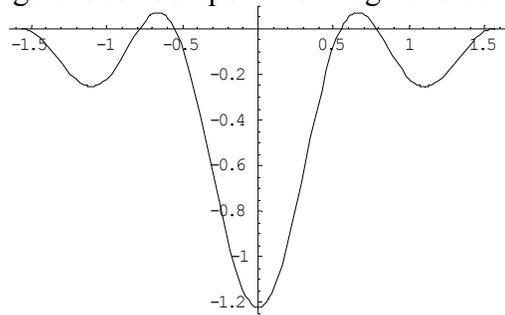


Figura C7b. Componente imaginária de H_7

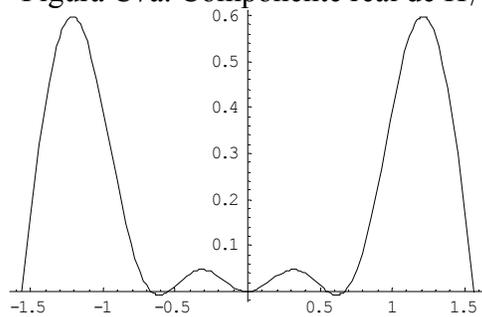


Figura C8a. Componente real de H_8

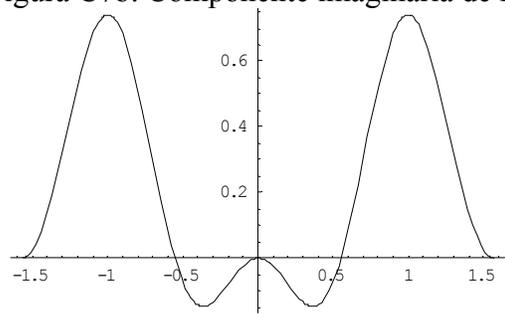


Figura C8b. Componente imaginária de H_8

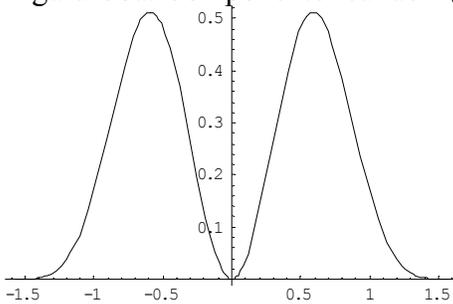


Figura C9a. Componente real de H_9

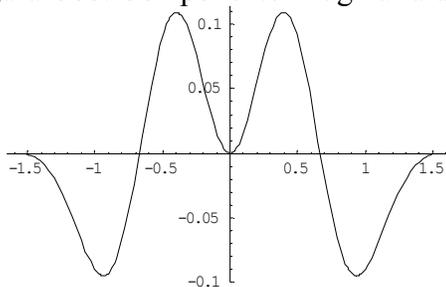


Figura C9b. Componente imaginária de H_9

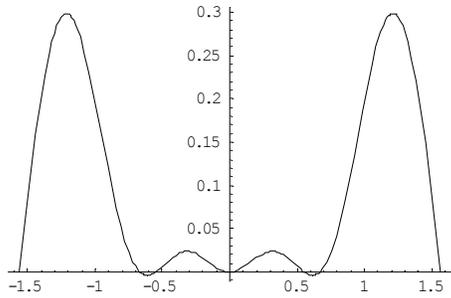


Figura C10a. Componente real de H_{10}

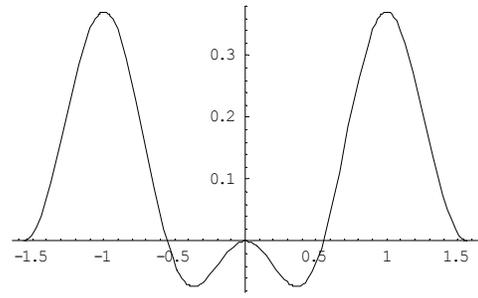


Figura C10b. Componente imaginária de H_{10}

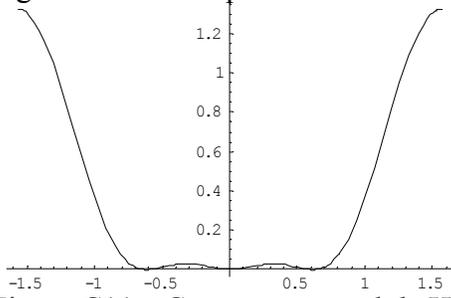


Figura C11a. Componente real de H_{11}

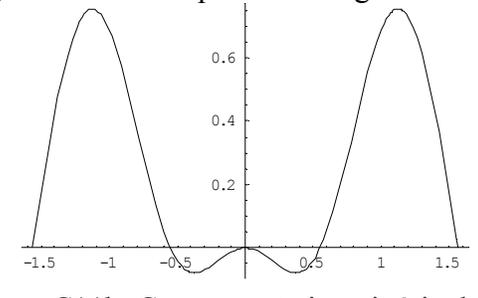


Figura C11b. Componente imaginária de H_{11}

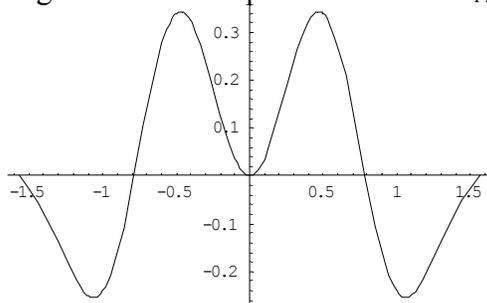


Figura C12a. Componente real de H_{12}

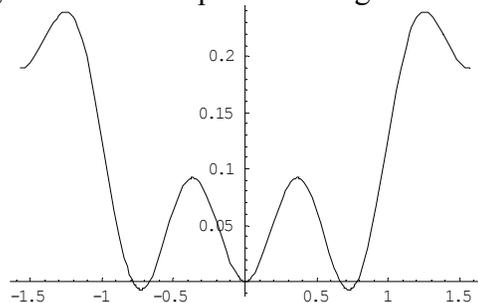


Figura C12b. Componente imaginária de H_{12}

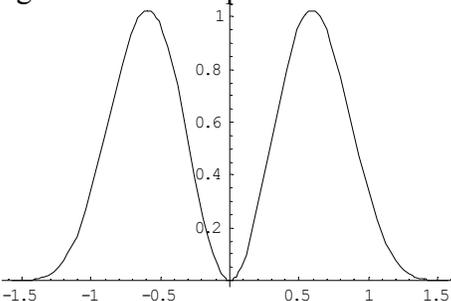


Figura C13a. Componente real de H_{13}

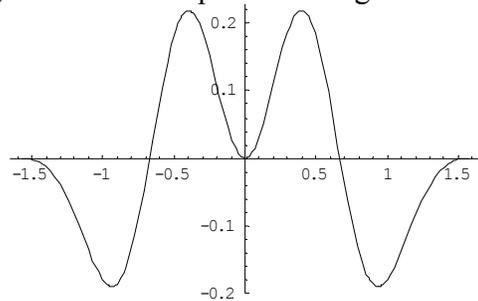


Figura C13b. Componente imaginária de H_{13}

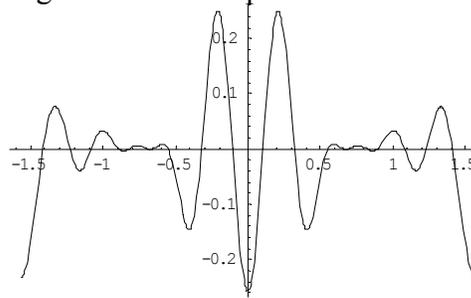


Figura C14a. Componente real de H_1 , $\xi=5$

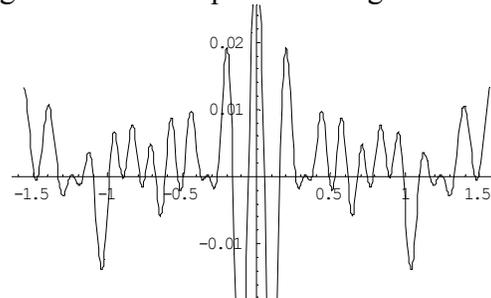


Figura C14b. Componente real de H_1 , $\xi=10$

Termo oscilante, resultante da integração em θ .

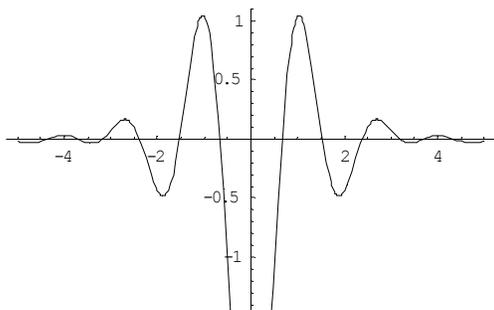


Figura C15a. Componente real de IH_1

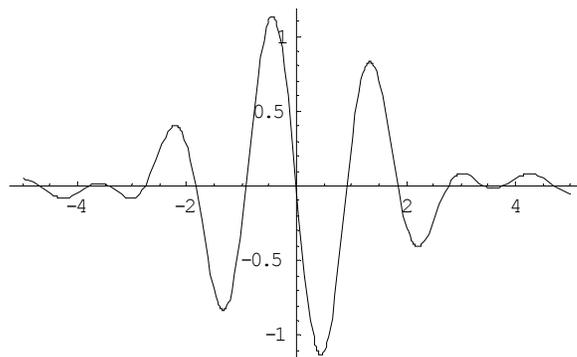


Figura C15b. Componente imaginária de IH_1

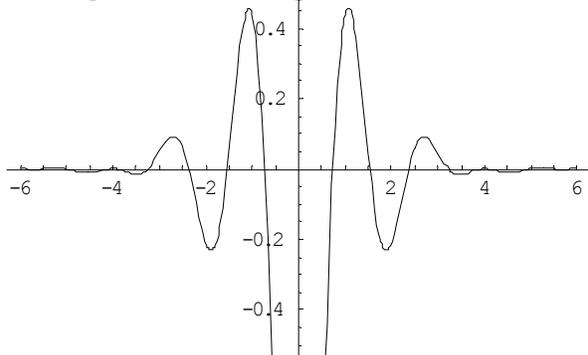


Figura C16a. Componente real de IH_2

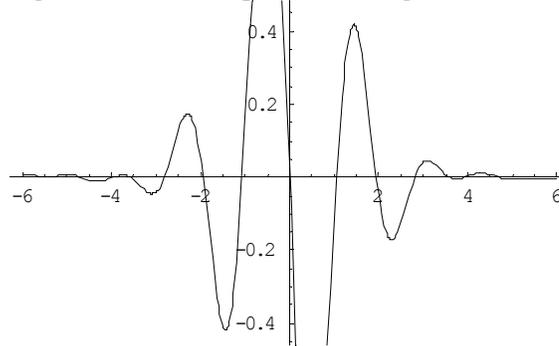


Figura C16b. Componente imaginária de IH_2

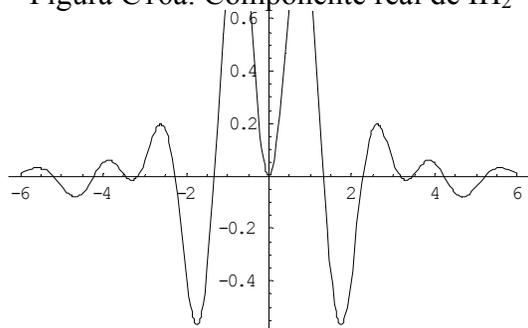


Figura C17a. Componente real de IH_3

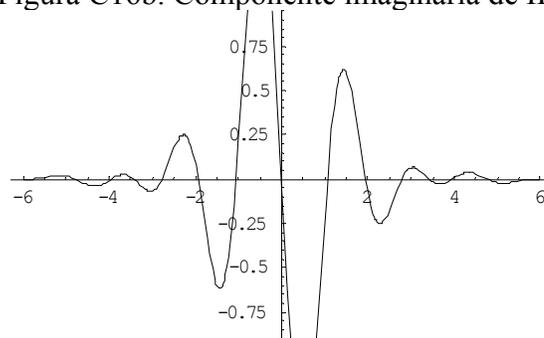


Figura C17b. Componente imaginária de IH_3

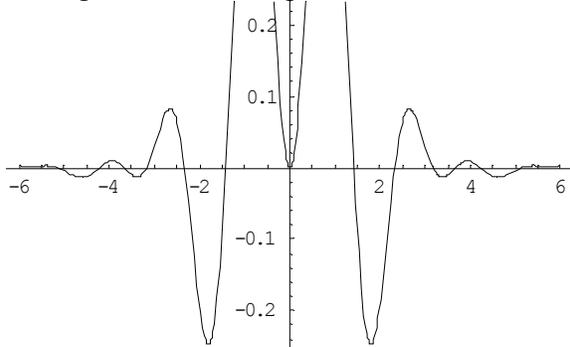


Figura C18a. Componente real de IH_4

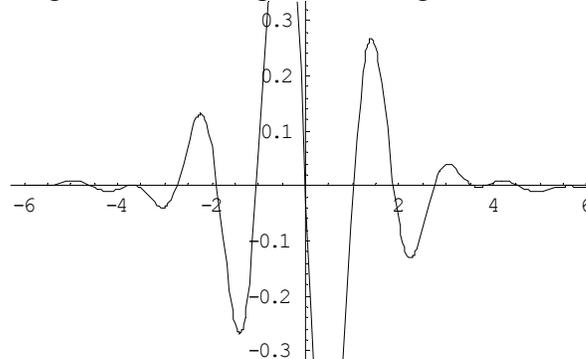


Figura C18b. Componente imaginária de IH_4

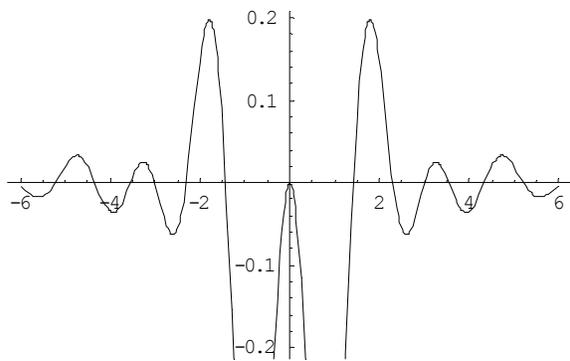


Figura C19a. Componente real de IH_5

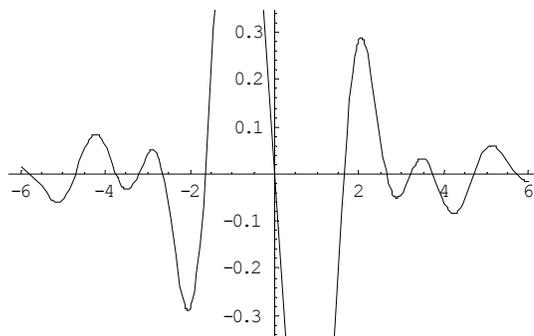


Figura C19b. Componente imaginária de IH_5

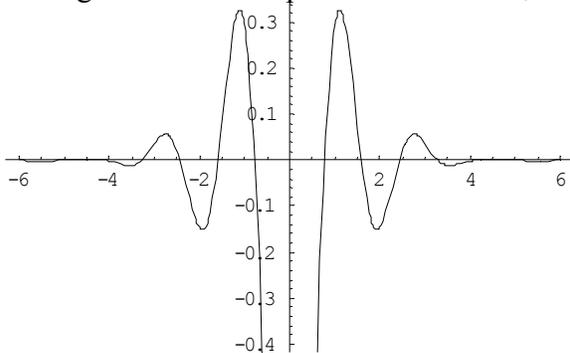


Figura C20a. Componente real de IH_6

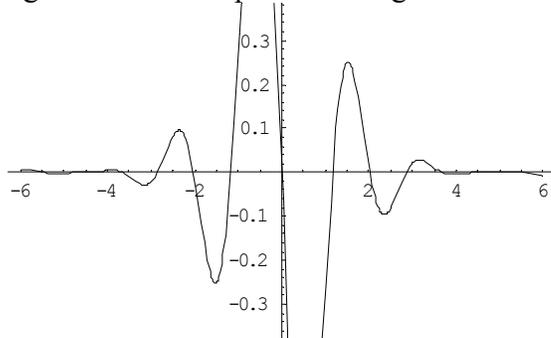


Figura C20b. Componente imaginária de IH_6

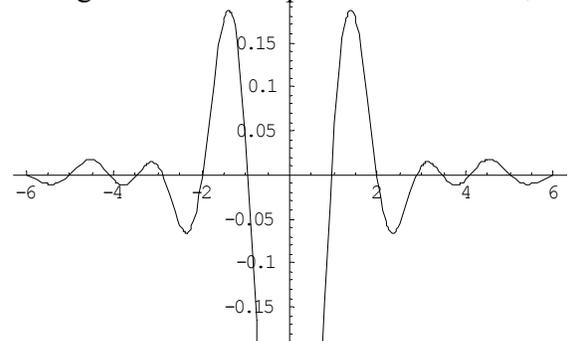


Figura C21a. Componente real de IH_7

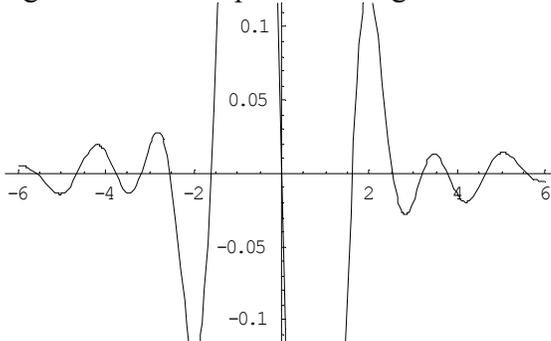


Figura C21b. Componente imaginária de IH_7

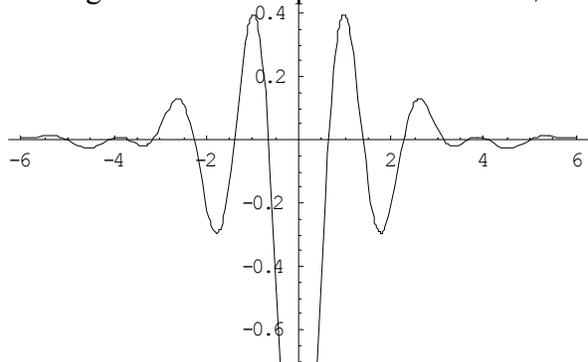


Figura C22a. Componente real de IH_8

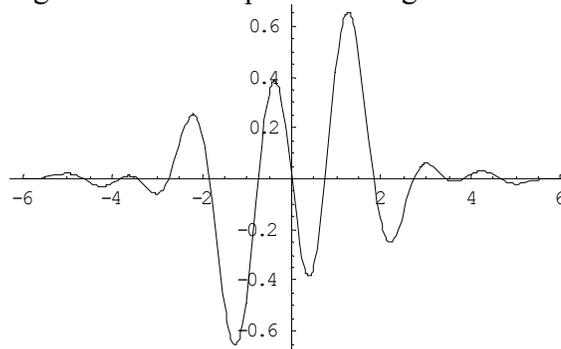


Figura C22b. Componente imaginária de IH_8

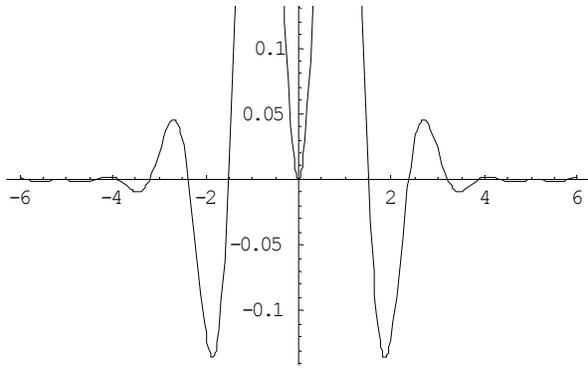


Figura C23a. Componente real de IH_9

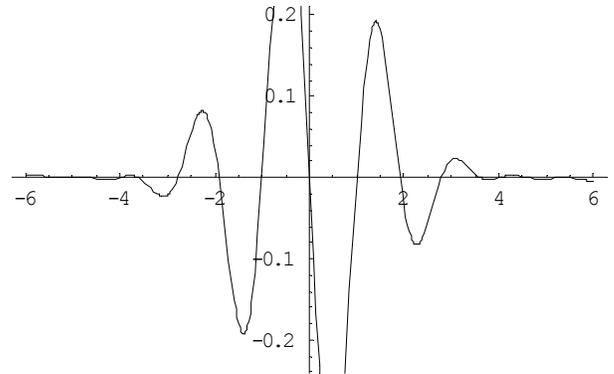


Figura C23b. Componente imaginária de IH_9

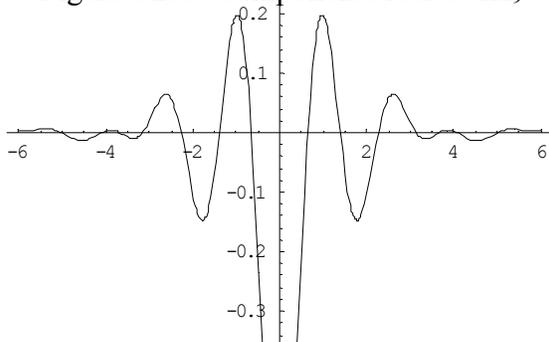


Figura C24a. Componente real de IH_{10}

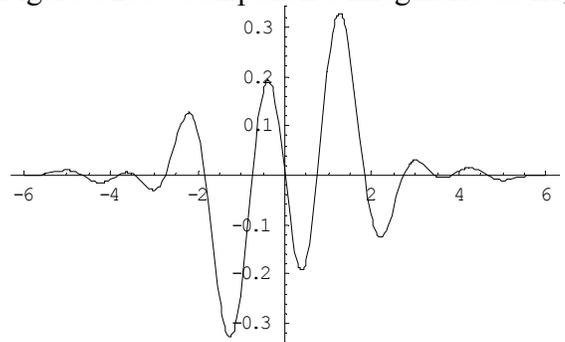


Figura C24b. Componente imaginária de IH_{10}

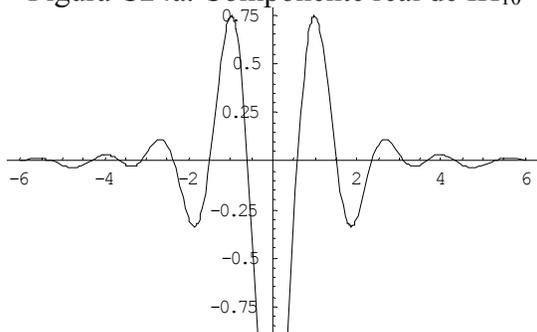


Figura C25a. Componente real de IH_{11}

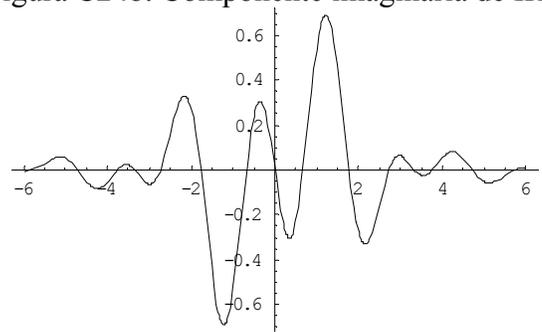


Figura C25b. Componente imaginária de IH_{11}

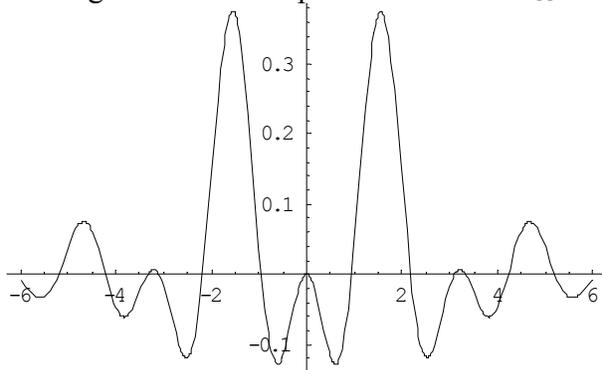


Figura C26a. Componente real de IH_{12}

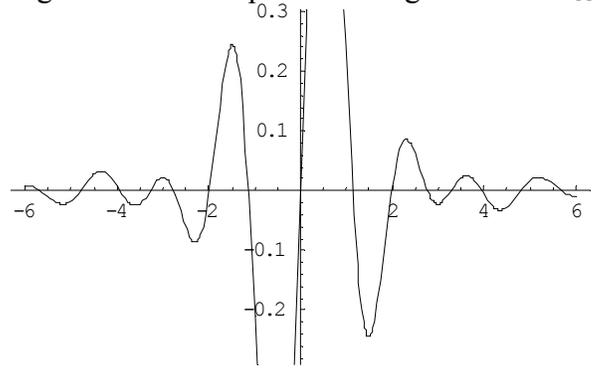


Figura C26b. Componente imaginária de IH_{12}

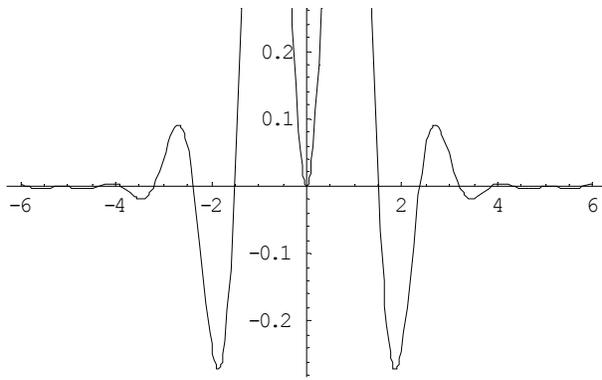


Figura C27a. Componente real de IH_{13}

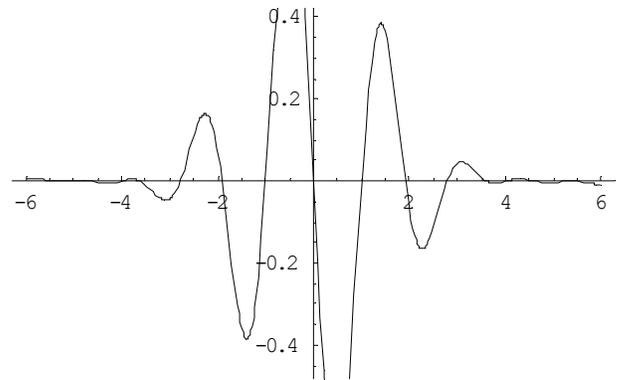


Figura C27b. Componente imaginária de IH_{13}