

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Estrutural em Fadiga e Geração de Malhas de Elementos Finitos

Autor: Eng. Wallace Gusmão Ferreira  
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

09/02

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR WALLACE GUSMÃO  
FERREIRA E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 28/02/2002  
Marco Lúcio Bittencourt  
ORIENTADOR

UNICAMP

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

# Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Estrutural em Fadiga e Geração de Malhas de Elementos Finitos

Autor: Eng. Wallace Gusmão Ferreira  
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 2002  
SP - BRASIL

NIDADE 80  
° CHAMADA T/UNICAMP  
F413d  
EX  
OMBO BCI 50288  
ROC 16-837102  
DX  
REÇO R\$ 11,00  
ATA 13/08/02  
° CPD

CM00171916-3

IBID 250737

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F413d      Ferreira, Wallace Gusmão  
Desenvolvimento de ferramentas computacionais para  
análise estrutural em fadiga e geração de malhas de  
elementos finitos / Wallace Gusmão Ferreira.--  
Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica do dano contínuo. 2. Método dos  
elementos finitos. 3. Engenharia de software. 4.  
Engenharia de software auxiliada por computador. I.  
Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.  
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Estrutural em Fadiga e Geração de Malhas de Elementos Finitos

Autor: Eng. Wallace Gusmão Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt



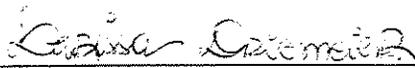
---

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente  
DPM/FEM-UNICAMP



---

Prof. Dr. Renato Pavanello  
DMC/FEM-UNICAMP



---

Profa. Dra. Larissa Driemcior  
PMR - Dep. Eng. Mecatrônica e Sistemas Mecânicos  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Campinas, 28 de fevereiro de 2002.

06075200

# Dedicatória

Às pessoas da minha vida,  
Liz, Romeu, Guida, Jane, Vanessa, Helder Jr. e Carla

# Agradecimentos

Este trabalho é fruto de um grande esforço e sem a ajuda de várias pessoas a sua finalização não teria sido possível. A essas pessoas eu presto sinceros os meus agradecimentos.

À minha família, que me apóia em todos os momentos, me incentivando a continuar e vencer a cada dia.

À minha amiga, amada e companheira Liz, por toda a compreensão, amor e carinho, mesmo nos momentos mais difíceis e de ausência da minha parte.

Ao Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt pelo tempo destinado à orientação desse trabalho e pela oportunidade de aprendizado em Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

À Profa. Dra. Larissa Driemeier pelas valiosas sugestões nas áreas de Fadiga e Mecânica do Dano.

Aos meus professores de graduação da UNESP-Bauru: Prof. Dr. Yukio Kobayashi, Prof. Dr. Gilberto Gonçalves e Prof. Dr. Edson Capello, pelo grande incentivo que me foi dado para o início da carreira acadêmica.

Aos amigos Luciano Driemeier, Cláudio Silva e Alberto Nogueira, pela sua experiência, companheirismo e toda ajuda que me foi dada durante esses anos de convívio.

Aos colegas do DPM/FEM: Nicoletti, Cíntia, Carlos, Barbatto e Adolph, por todos os momentos de trabalho, alegria e descontração que tivemos juntos.

Ao grande amigo Omar e o pessoal da república “Xiqueirim”: Barreto Jr., Ricardo, Carlos Eduardo e Luís Fernando, por todos os churrascos, *happy hours*, etc...

A todos os colegas, professores e funcionários da FEM que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

À FAPESP (Proc. 00/00595-4), pela confiança e pelo suporte financeiro destinados a esse projeto.

“A experiência é um farol  
que ilumina para trás...”

Sabedoria Popular

# Resumo

FERREIRA, Wallace Gusmão. *Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Estrutural em Fadiga e Geração de Malhas de Elementos Finitos*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 163p. Dissertação (Mestrado)

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver a análise estrutural em problemas de fadiga mecânica, usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) e recursos de Engenharia de *Software*. Inicialmente é feita uma revisão dos conceitos básicos de fadiga mecânica, descrevendo as frentes atuais de pesquisa e as metodologias convencionais de projeto. O modelo constitutivo de material para o tratamento de fadiga é definido com base na Mecânica do Dano e a solução numérica do problema de equilíbrio é feita através do MEF. Os resultados obtidos com a implementação do modelo de dano e da análise estrutural de componentes submetidos à fadiga são compatíveis com aqueles apresentados na literatura. Os programas computacionais são implementados usando conceitos de Engenharia de *Software*. Como exemplo da aplicação desses conceitos, é desenvolvido um ambiente gráfico para geração de malhas de elementos finitos, utilizando componentes de *software* disponíveis comercialmente.

## *Palavras Chave*

- Fadiga Mecânica, Mecânica do Dano, Método dos Elementos Finitos, Geração de Malhas, Engenharia de *Software*

# Abstract

FERREIRA, Wallace Gusmão. *Development of Computational Tools for Structural Fatigue Analysis and Finite Element Mesh Generation*. Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 163p. (Master's Thesis)

This work deals with the structural analysis of problems involving mechanical fatigue using the Finite Element Method and Software Engineering concepts. Initially, the basic concepts of mechanical fatigue, the conventional design techniques and the major research areas are reviewed. The material constitutive model to treat the fatigue process is developed based on Damage Mechanics and the numerical solution for the equilibrium equation is obtained by the Finite Element Method. The results obtained with the implementation of the constitutive model and for structural analysis have good agreement with the literature references. All the computational programs are implemented using the concepts of Software Engineering. As example of the application of these concepts, a graphical environment for finite element mesh generation is developed based on third party software components.

## *Keywords*

- Mechanical Fatigue, Damage Mechanics, Finite Element Method, Mesh Generation, Software Engineering

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Organização do Texto da Dissertação . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Fadiga Mecânica</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Revisão Bibliográfica sobre Fadiga . . . . .	6
2.3	Mecanismos de Falha por Fadiga . . . . .	9
2.4	Cargas de Fadiga . . . . .	11
2.4.1	Efeito das Cargas Médias . . . . .	12
2.4.2	Acúmulo de Dano em Fadiga . . . . .	13
2.4.3	Contagem de Ciclos . . . . .	15
2.4.4	Carregamentos Multiaxiais . . . . .	16
2.5	Projeto à Fadiga Mecânica . . . . .	17
2.5.1	Método $S - N$ . . . . .	17
2.5.2	Método $\epsilon - N$ . . . . .	19
2.5.3	Método $da/dN$ . . . . .	21
2.6	Considerações sobre os Métodos de Projeto . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Mecânica do Dano</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	Natureza Física dos Fenômenos . . . . .	28
3.2.1	Elasticidade e Dano . . . . .	29
3.2.2	Plasticidade e Deformações Permanentes . . . . .	30
3.2.3	Tipos de Dano em Mesoescala . . . . .	30
3.3	Descrição Mecânica do Dano . . . . .	32
3.3.1	Elemento de Volume Representativo (EVR) . . . . .	32
3.3.2	Parâmetro Escalar do Dano . . . . .	33
3.3.3	Conceito de Tensão Efetiva . . . . .	34

3.3.4	Princípio de Equivalência de Deformações . . . . .	35
3.3.5	Critério de Ruptura e Limiar de Dano . . . . .	37
3.3.6	Métodos de Medida para o Dano . . . . .	38
3.4	Fundamentos Termodinâmicos . . . . .	40
3.4.1	Variáveis Termodinâmicas e Potencial de Estado . . . . .	40
3.4.2	Critério de Tensão Equivalente de Dano . . . . .	44
3.4.3	Potencial de Dissipação . . . . .	46
3.4.4	Modelo Constitutivo para Plasticidade Acoplada ao Dano . . . . .	48
3.5	Leis Cinéticas de Evolução do Dano . . . . .	51
3.5.1	Formulação Unificada . . . . .	52
3.5.2	Modelo Elastoplástico Perfeito Acoplado ao Dano . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Análise de Resposta Estrutural</b>	<b>59</b>
4.1	Formulação Variacional para o Equilíbrio de um Corpo . . . . .	59
4.2	Aproximação do Problema de Valor de Contorno . . . . .	63
4.2.1	Discretização Espacial. Aproximação por Elementos Finitos . . . . .	63
4.2.2	Discretização Temporal. Procedimento Incremental Iterativo. . . . .	65
4.3	Procedimento de Integração das Equações Constitutivas . . . . .	68
4.3.1	Equações Globais de Equilíbrio . . . . .	68
4.3.2	Integração Local das Equações Constitutivas . . . . .	69
4.3.3	Operador Tangente Consistente . . . . .	73
4.4	Algoritmos de Solução para a Análise de Resposta . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Estudo de Casos</b>	<b>79</b>
5.1	Estudos com o Modelo de Material Elastoplástico Acoplado ao Dano . . . . .	79
5.2	Aplicação: Análise Estrutural de um Componente submetido à Fadiga . . . . .	86
5.3	Comentários Gerais . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Engenharia de Software</b>	<b>95</b>
6.1	Introdução . . . . .	95
6.2	Orientação por Objetos . . . . .	96
6.3	Linguagem de Modelagem Unificada (UML) . . . . .	98
6.4	Processo Unificado de Desenvolvimento (RUP) . . . . .	100
6.5	Arquitetura do Ambiente para Análise e Otimização Estrutural . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Ambiente Gráfico para Geração de Malhas</b>	<b>107</b>
7.1	Estudo de Componentes . . . . .	107
7.1.1	ACIS 3D <i>Geometric Modeler</i> . . . . .	108

7.1.2	HOOPS 3D <i>Application Framework</i> . . . . .	113
7.1.3	Qt . . . . .	115
7.1.4	MeshSim . . . . .	118
7.2	Projeto do Ambiente de Geração de Malhas . . . . .	120
7.2.1	Requerimentos . . . . .	120
7.2.2	<i>Use-case</i> Principal . . . . .	121
7.2.3	Testes Preliminares . . . . .	124
7.2.4	Análise e Projeto de Classes . . . . .	126
7.2.5	Resultados Atuais . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>134</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>136</b>
<b>A</b>	<b>Otimização Estrutural e Análise de Sensibilidade</b>	<b>142</b>
A.1	Forma Geral do Problema de Otimização . . . . .	142
A.2	Análise de Sensibilidade em Problemas Não Lineares . . . . .	143
A.2.1	Definição do Problema de Análise de Sensibilidade . . . . .	143
A.2.2	Considerações sobre a Análise de Sensibilidade . . . . .	144
A.2.3	Notação e Definições Preliminares . . . . .	146
A.2.4	Análise de Sensibilidade a Parâmetros Discretos . . . . .	149
A.2.5	Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma . . . . .	153
A.2.6	Comparação entre os Métodos Direto e Adjunto . . . . .	159
A.3	Aplicações em Elastoplasticidade Acoplada ao Dano . . . . .	160
A.3.1	Formas Variacionais em Elastoplasticidade Acoplada ao Dano . . . . .	161
A.3.2	Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma . . . . .	162
A.3.3	Análise de Sensibilidade a Parâmetros Discretos . . . . .	166
A.3.4	Funcionais de Performance Estrutural . . . . .	167
A.4	Técnicas para Aplicação da Otimização de Forma . . . . .	168
A.4.1	Parametrização Geométrica do Domínio . . . . .	168
A.4.2	Determinação do Campo de Velocidades . . . . .	169

# Lista de Figuras

2.1	Mecanismo de formação de intrusões e extrusões. Adaptado com base em (Driemeier, 1995).	10
2.2	Terminologia utilizada em carregamentos com tensão variável.	13
2.3	Linhas de vida constante para cargas médias.	13
2.4	Curvas de correção para cargas médias: (a) Soderberg , (b) Goodman e (c) Gerber.	14
2.5	Carregamento variável e acúmulo linear de dano.	14
2.6	Método de contagem <i>rainflow</i> . Adaptado com base em (Bannantine et al., 1990).	16
2.7	Diagrama $S - N$ ou de Wöhler.	18
2.8	Curva de histerese para carregamento cíclico. Adaptado com base em (Bannantine et al., 1990).	20
2.9	Diagrama Coffin-Manson.	20
2.10	Sistema de coordenadas na ponta da trinca	22
2.11	Modos principais de trinca: (a) Modo I ou de abertura, (b) Modo II ou de cisalhamento plano e (c) Modo III ou de cisalhamento anti-plano.	22
2.12	Curva típica de propagação de trinca.	23
3.1	Elemento de volume representativo.	33
3.2	Representação esquemática para o princípio de equivalência de deformações (Lemaitre e Chaboche, 1994).	36
3.3	Método unidimensional de medida para o dano. Ensaio real para uma liga de aço CrMoNi, adaptado com base em (Grunwald, 1996).	39
3.4	Determinação das propriedades do material para análise elastoplástica acoplada ao dano (Lemaitre e Doghri, 1994).	58
4.1	Corpo tridimensional.	61
5.1	Resultados obtidos para os estudos com o modelo de dano.	82
5.2	Convergência para o valor do dano em função do número de passos de carregamento.	84
5.3	Acúmulo de dano não linear em fadiga.	85

5.4	Definição do problema de deformação plana (dimensões em mm). . . . .	86
5.5	Malha de elementos finitos triangulares lineares usada no problema de deformação plana (3204 nós e 6033 elementos). . . . .	87
5.6	Malha de elementos finitos usada no problema de deformação plana (detalhe do refinamento na região do chanfro). . . . .	88
5.7	Dano acumulado ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana (detalhe na região da raiz do chanfro). . . . .	89
5.8	Dano crítico ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana. . .	89
5.9	Deformação plástica acumulada ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana. . . . .	89
5.10	Deformação plástica acumulada ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana (detalhe na região do chanfro). . . . .	90
5.11	Tensão equivalente de von Mises ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana. . . . .	90
5.12	Evolução das variáveis internas para o ponto crítico do problema de deformação plana, ao longo dos passos de carregamento. . . . .	91
6.1	Diagrama de classes em UML com seus elementos principais (Booch et al., 1999). . . . .	101
6.2	Ciclo de desenvolvimento de software baseado no RUP (Jacobson et al., 1999). . . . .	104
6.3	Arquitetura em camadas para o ambiente de análise e otimização. . . . .	105
6.4	Estruturas de classe para o módulo de solução numérica (Solver). . . . .	106
7.1	Diagrama de atividades para o <i>use-case</i> principal. . . . .	123
7.2	Modelo de engrenagem usado para testes de geração de malhas. Desenvolvido usando o modelador geométrico ACIS. . . . .	124
7.3	Malha de elementos finitos tetraédricos lineares. 842 nós e 2262 elementos. . . . .	125
7.4	Malha de elementos finitos tetraédricos lineares com refinamento de curvaturas. 2904 nós e 11639 elementos. . . . .	125
7.5	Tela principal do programa de teste usando os componentes ACIS, HOOPS, Qt e MeshSim. . . . .	126
7.6	Diagrama de classes de análise. . . . .	127
7.7	Diagrama de colaboração para os objetos de análise. . . . .	128
7.8	Diagrama de sequência para os objetos de análise. . . . .	129
7.9	Diagrama de classes de projeto para o núcleo de geração de malhas. . . . .	130
7.10	Diagrama de classes de projeto para a interface do sistema. . . . .	131
7.11	Relação entre as classe do núcleo de geração de malhas e as classes de interface. . . . .	131
7.12	Formulário para geração de malhas através da Internet. . . . .	132

A.1	Configurações assumidas por um corpo, ao longo do tempo, em relação a um sistema de referência cartesiano. . . . .	147
A.2	Transformação de um corpo com base em um mapeamento $\mathbf{T}$ , dado em função de um parâmetro $\tau$ . . . . .	154

# Lista de Tabelas

2.1	Terminologia utilizada em carregamentos variáveis. . . . .	12
3.1	Propriedades relacionadas ao dano para alguns materiais (Lemaitre, 1996). . . . .	58
5.1	Propriedades do material utilizado para a validação do modelo de dano. . . . .	80
5.2	Resultados para as variáveis internas ao final de cada ciclo de carregamento. . . . .	83
5.3	Casos de carregamento para o estudo de convergência. . . . .	83

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$S$  - tensão alternada, área de seção transversal não danificada para um EVR, constante de resistência ao dano

$S_D$  - área dos defeitos em uma seção transversal de um EVR

$\tilde{S}$  - área de resistência efetiva de uma seção transversal de um EVR

$N$  - número de ciclos de carregamento, funções de base ou funções de forma

$a$  - comprimento característico da trinca

$a_0$  - comprimento inicial da trinca

$a_f$  - comprimento final da trinca

$S_e$  - limite de resistência à fadiga para um corpo de prova padronizado

$S'_e$  - limite de resistência à fadiga corrigido para um componente real

$k_a$  - fator de correção para tipo de carregamento

$k_b$  - fator de correção para dimensões do componente

$k_c$  - fator de correção para tipo de acabamento superficial

$k_d$  - fator de correção para temperatura de serviço

$k_e$  - fator de correção para confiabilidade estatística

$k_f$  - fator de correção para concentração de tensões dinâmicas

$K$  - fator de intensidade de tensões na ponta da trinca

$\Delta K$  - variação para o fator de intensidade de tensões, constante do material relacionada à propagação de trincas

$A$  - razão de amplitude para tensão ou deformação

$R$  - razão de tensão ou deformação

$d$  - dano acumulado pela regra de Palmgreen-Miner  
 $E$  - módulo de elasticidade ou de Young  
 $\tilde{E}$  - módulo de elasticidade ou de Young efetivo  
 $K'$  - coeficiente de encruamento cíclico  
 $n'$  - expoente de encruamento cíclico  
 $K_t$  - fator de concentração de tensões estáticas  
 $b$  - expoente de Basquin, constante de encruamento isotrópico  
 $c$  - expoente de ductilidade à fadiga  
 $m$  - constante do material relacionada à propagação de trincas  
 $n_i$  - número de ciclos de carregamento aplicado para o  $i$ -ésimo nível de tensão ou deformação  
 $N_i$  - número de ciclos admissível para o  $i$ -ésimo nível de tensão ou deformação  
 $N_R$  - número de ciclos para atingir a ruptura ou iniciação de trincas  
 $i, j, k, l$  - índices para componentes de variáveis tensoriais ou matriciais, índices para contagem de iterações  
 $K_{\max}$  - fator de intensidades de tensões máximo  
 $K_C$  - fator de intensidades de tensões crítico  
 $\Delta K_{th}$  - limiar de propagação de trincas  
 $D_n$  - parâmetro tensorial do dano  
 $\mathbf{n}$  - campo de vetores unitários normais a uma superfície, tensor normal à superfície de escoamento contínuo  
 $D$  - parâmetro escalar do dano  
 $D_c$  - dano crítico para iniciação de trincas  
 $D_{1c}$  - dano crítico unidimensional  
 $T$  - temperatura, tempo máximo de um intervalo  
 $s$  - entropia específica  
 $r$  - deformação plástica de dano acumulada  
 $R$  - variável de encruamento isotrópico

$p$  - deformação plástica acumulada  
 $X^D$  - tensão distorcional de encruamento cinemático  
 $\bar{Y}$  - taxa específica negativa de dissipação da energia elástica em um processo de dano  
 $Y$  - taxa específica positiva de dissipação da energia elástica em um processo de dano  
 $u$  - energia interna específica  
 $C$  - tensor de elasticidade de quarta ordem  
 $X_\infty$  - constante de encruamento cinemático  
 $R_\infty$  - constante de encruamento isotrópico  
 $w_e$  - energia elástica específica  
 $R_v$  - função de triaxialidade de tensões  
 $x$  - ponto material  
 $t$  - tempo ou variável temporal equivalente  
 $S$  - função tensorial de tensão dependente do ponto material  $x$   
 $q$  - fluxo térmico  
 $F$  - potencial de dissipação  
 $F_D$  - potencial de dissipação associado ao dano  
 $f$  - função de escoamento de von Mises  
 $p_D$  - limiar de dano  
 $u$  - campo vetorial de deslocamentos  
 $\hat{u}$  - campo vetorial de deslocamentos virtuais  
 $u^h$  - campo vetorial de deslocamentos aproximado  
 $\hat{u}^h$  - campo vetorial de deslocamentos virtuais aproximado  
 $v$  - campo vetorial de velocidades  
 $t$  - campo vetorial de forças de superfície  
 $b$  - campo vetorial de forças de corpo ou de volume  
 $F^{int}$  - vetor global de forças internas  
 $F^{ext}$  - vetor global de forças externas

$f_e^{int}$  - vetor local de forças internas  
 $f_e^{ext}$  - vetor local de forças externas  
 $B$  - gradiente das funções de forma  
 $B^e$  - gradiente local das funções de forma  
 $L$  - operador gradiente matricial  
 $d$  - vetor de deslocamentos nodais  
 $K$  - matriz de rigidez tangente global  
 $k^e$  - matriz de rigidez tangente local  
 $C^{ep}$  - operador tangente consistente  
 $C^{epD}$  - operador tangente consistente efetivo  
 $I$  - tensor identidade de segunda ordem  
 $\bar{I}$  - tensor identidade de quarta ordem  
 $N$  - tensor normal à superfície de escoamento discreto  
 $H$  - tensor de diferença entre o estado de tensões elásticas e plásticas  
 $C_{\bar{\sigma}}$  - tensor de correção plástica para o tensor de tensões efetivas  
 $C_p$  - escalar de correção plástica para a deformação plástica acumulada  
 $I_n$  - intervalo entre os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$

### Letras Gregas

$\varepsilon$  - deformação unidimensional  
 $\sigma$  - tensão unidimensional  
 $\sigma_u$  - limite de resistência à tração, tensão última de tração unidimensional  
 $\sigma_y$  - limite de escoamento unidimensional  
 $\sigma_R$  - limite de ruptura unidimensional  
 $\sigma_s$  - limite de escoamento modificado para o modelo de dano  
 $\sigma_f$  - limite de resistência à fadiga  
 $\sigma_a$  - tensão alternada em um ciclo de carregamento

$\sigma_{a_i}$  - tensão alternada para o  $i$ -ésimo nível de carregamento  
 $\sigma_m$  - tensão média em um ciclo de carregamento  
 $\Delta\sigma$  - amplitude de tensão em um ciclo de carregamento  
 $\sigma_{\min}$  - tensão mínima em um ciclo de carregamento  
 $\sigma_{\max}$  - tensão máxima em um ciclo de carregamento  
 $\sigma_n$  - tensão nominal  
 $\bar{\sigma}$  - tensão unidimensional efetiva  
 $\bar{\sigma}^+$  - tensão unidimensional efetiva de compressão  
 $\bar{\sigma}_c$  - tensão unidimensional efetiva crítica  
 $\bar{\sigma}_\infty$  - tensão unidimensional efetiva teórica no instante de ruptura  
 $\sigma$  - tensor de tensões  
 $\bar{\sigma}$  - tensor de tensões efetivas  
 $\sigma^D$  - tensor de tensões de distorção  
 $\bar{\sigma}^D$  - tensor de tensões de distorção efetivo  
 $\sigma_H$  - tensão hidrostática  
 $\sigma_{eq}$  - tensão equivalente de von Mises  
 $\bar{\sigma}_{eq}$  - tensão equivalente de von Mises efetiva  
 $\sigma^*$  - tensão equivalente de dano  
 $\bar{\sigma}^*$  - tensão equivalente de dano efetiva  
 $\varepsilon_a$  - deformação alternada em um ciclo de carregamento  
 $\varepsilon_m$  - deformação média em um ciclo de carregamento  
 $\Delta\varepsilon$  - amplitude de deformação em um ciclo de carregamento  
 $\Delta\varepsilon_e$  - amplitude de deformação elástica  
 $\Delta\varepsilon_p$  - amplitude de deformação plástica  
 $\varepsilon_e$  - deformação unidimensional elástica  
 $\varepsilon_p$  - deformação unidimensional plástica  
 $\varepsilon_{pD}$  - limiar de dano unidimensional

$\varepsilon_{\min}$  - deformação mínima em um ciclo de carregamento  
 $\varepsilon_{\max}$  - deformação máxima em um ciclo de carregamento  
 $\sigma'_f$  - coeficiente de resistência à fadiga  
 $\varepsilon'_f$  - coeficiente de ductilidade à fadiga  
 $\varepsilon$  - tensor de deformações infinitesimais  
 $\varepsilon^e$  - tensor de deformações infinitesimais elásticas  
 $\varepsilon^p$  - tensor de deformações infinitesimais plásticas  
 $\varepsilon^D$  - tensor de deformações infinitesimais de distorção  
 $\varepsilon_H$  - deformação hidrostática  
 $\Delta\varepsilon_{xx}$  - amplitude de deformações normais na direção cartesiana  $x$   
 $\Delta\varepsilon_{yy}$  - amplitude de deformações normais na direção cartesiana  $y$   
 $\Delta\varepsilon_{zz}$  - amplitude de deformações normais na direção cartesiana  $z$   
 $\alpha$  - tensor de deformações de encruamento cinemático  
 $\psi$  - funcional de energia, potencial de estado  
 $\rho$  - massa específica  
 $\gamma$  - constante de encruamento isotrópico, multiplicador de plasticidade  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $\delta_{ij}$  - delta de Kroenecker  
 $\tau$  - função escalar dependente do tempo  $t$   
 $\dot{\lambda}$  - multiplicador de plasticidade  
 $\Omega$  - interior de um corpo no espaço euclidiano  
 $\Gamma$  - fronteira de um corpo no espaço euclidiano  
 $\Gamma_u$  - fronteira de Dirichlet para um corpo no espaço euclidiano  
 $\Gamma_\sigma$  - fronteira de Neumann para um corpo no espaço euclidiano  
 $\Omega_e$  - interior de um elemento finito  
 $\Gamma_e$  - fronteira de um elemento finito  
 $\Psi$  - função vetorial

$\lambda$  - coeficiente de Lamé

$\mu$  - coeficiente de Lamé

$\xi$  - tolerância escalar para método iterativo

## Operadores

$(\cdot)'$  - taxa de variação contínua

$\delta(\cdot)$  - taxa de variação discreta

$\Delta(\cdot)$  - variação discreta entre os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$

$\nabla(\cdot)$  - operador gradiente

$\nabla^s(\cdot)$  - operador gradiente simétrico

$div(\cdot)$  - operador divergente

$[\cdot]$  - matriz

$\{\cdot\}$  - vetor

$A(\cdot)$  - operador de montagem para vetores e matrizes globais

$(\cdot)^T$  - operador de transposição para matrizes ou vetores

$tr(\cdot)$  - traço de um tensor ou matriz

$(\cdot)^{trial}$  - estado elástico teste ou com relação ao estimador elástico

$|\cdot|$  - módulo ou valor absoluto

$\|\cdot\|$  - norma euclidiana

## Símbolos

$\mathcal{B}$  - corpo definido no espaço euclidiano tridimensional

$\mathcal{B}_e$  - corpo de um elemento finito

$\mathfrak{R}$  - espaço real

$\mathfrak{R}_+$  - espaço real positivo

$\mathfrak{R}^3$  - espaço real tridimensional

$Sym$  - espaço dos tensores simétricos

$\mathcal{S}_t$  - conjunto solução para um problema de valor de contorno

$\mathcal{V}$  - espaço dos deslocamentos virtuais admissíveis ou de funções de teste

$\mathcal{H}^1$  - espaço de *Sobolev* de funções e primeiras derivadas do tipo quadrado integrável

$\mathcal{V}^h$  - espaço dos deslocamentos virtuais admissíveis ou de funções de teste aproximado

## Siglas

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

MEF - Método dos Elementos Finitos

PIB - Produto Interno Bruto

SAE - Society of Automotive Engineers

ASTM - American Society for Testing and Materials

HCF - High Cycle Fatigue

LCF - Low Cycle Fatigue

RMS - Root Mean Square

EVR - Elemento de Volume Representativo

PVCI - Problema de Valor de Contorno com Condições Iniciais

UML - Unified Modeling Language

RUP - Rational Unified Process

CAD - Computer Aided Design

CAM - Computer Aided Manufacturing

CAE - Computer Aided Engineering

CASE - Computer Aided Software Engineering

MFC - Microsoft Foundation Classes

API - Application Procedural Interface

GUI - Graphical User Interface

VRML - Virtual Reality Modeling Language

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

O estudo da fadiga dos materiais é um assunto de grande importância para a engenharia, pois a maioria das falhas que ocorrem em componentes e estruturas são devidos a esse fenômeno. A falha por fadiga é resultado de cargas dinâmicas variáveis agindo sobre a estrutura, de forma que a tensão em que ocorre a ruptura do material é muito menor que a necessária para atingir a ruptura em carregamento estático. A falha por fadiga é um fenômeno muito comum na engenharia mecânica, devido ao fato de que os componentes e estruturas, em sua maioria, estão em movimento, submetidos portanto a carregamentos cíclicos.

Um dos maiores interesses no projeto de um componente é a determinação de sua durabilidade ou vida útil. O estudo da fadiga mecânica tem aplicação direta sobre a determinação da vida útil de um componente. A vida útil pode ser definida como o número máximo de ciclos de carregamento que uma estrutura pode suportar, antes que ocorra a falha do componente.

Ao longo dos anos, foram desenvolvidas várias técnicas de projeto com o objetivo de tratar a fadiga mecânica de componentes. Apesar do reconhecido avanço dessas técnicas, a maioria é baseada em métodos empíricos, com pouca generalidade e de difícil aplicação em análise estrutural computacional. As aplicações mais comuns estão na área de pós-

processamento de resultados de análise de tensões. A maioria desses métodos são baseados em critérios de falha pontuais, limitados a casos particulares, inviabilizando a análise de componentes com forma e tipos de carregamento mais complexos.

Através do crescimento de áreas como a Mecânica da Fratura e a Mecânica do Dano é possível desenvolver formulações mais gerais que os métodos convencionais de projeto quanto à fadiga. Com base nessas teorias são definidos modelos físico-matemáticos para o comportamento dos materiais, de forma que a análise de tensões e deformações pode ser realizada para a estrutura como um todo. Assim, é possível modelar a iniciação ou a propagação de trincas, associadas a fenômenos como a fadiga mecânica, de maneira mais geral e sistemática, o que facilita a sua implementação em simulação computacional de problemas estruturais.

Para a grande maioria dos problemas estruturais não existe uma solução analítica para as equações envolvidas, de forma que é preciso recorrer a métodos de aproximação numérica. Uma das ferramentas mais utilizadas atualmente na solução de problemas estruturais é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Por ser um método já bastante consolidado teoricamente e devido ao crescimento tecnológico na área computacional, vem se difundindo em larga escala nos meios acadêmicos e industrial em função da existência de vários pacotes de programas comerciais como Ansys, Nastran, Ideas, etc.

A implementação computacional de métodos numéricos, tais como o MEF, é de fundamental importância para a análise de problemas estruturais de engenharia. Sob o ponto de vista do usuário, o programa final deve possuir um interface de utilização simples, além do que deve ser confiável e eficiente. No que se refere à implementação computacional dos algoritmos, desejam-se características como fácil manutenção, extensibilidade, reutilização de código, estrutura modular, bom gerenciamento de memória, entre outras. Dessa forma, é necessário disciplinar a implementação de programas utilizando, por exemplo, os recursos da Engenharia de Software.

Com base no exposto acima, o objetivo desse trabalho é o desenvolvimento de uma dissertação de mestrado, envolvendo formulação e implementação de Análise de Estrutural em problemas de Fadiga Mecânica, com base nos conceitos da Mecânica do Dano acoplados

ao Método dos Elementos Finitos e na utilização de recursos de Engenharia de Software.

## 1.2 Organização do Texto da Dissertação

Os temas abordados nessa dissertação estão subdivididos nos seguintes capítulos:

- **Fadiga Mecânica:** apresenta uma revisão bibliográfica e a descrição das metodologias convencionais para projeto de componentes submetidos à fadiga mecânica;
- **Mecânica do Dano:** descreve a formulação do modelo constitutivo não-linear para um material elastoplástico acoplado ao dano, com base na Mecânica do Dano em Meios Contínuos;
- **Análise de Resposta Estrutural:** aborda a discretização das equações do meio contínuo através do Método dos Elementos Finitos em problemas não-lineares e a integração local das equações para o modelo constitutivo do material elastoplástico acoplado ao dano, visando a implementação computacional;
- **Estudo de Casos:** apresenta exemplos e discussões sobre a aplicação da análise estrutural em problemas de fadiga;
- **Engenharia de *Software*:** descreve as metodologias de engenharia de software aplicadas ao desenvolvimento dos programas utilizados nesse trabalho;
- **Ambiente Gráfico para Geração de Malhas:** descreve o projeto e a implementação de um ambiente gráfico para geração de malhas de elementos finitos, desenvolvido usando os conceitos de Engenharia de *Software*;
- **Conclusões e Perspectivas Futuras:** apresenta a descrição das conclusões obtidas nesse trabalho e sugestões para novos projetos.

# Capítulo 2

## Fadiga Mecânica

### 2.1 Introdução

Existem inúmeras razões pelas quais um componente estrutural submetido a um carregamento qualquer pode vir a falhar, podendo-se citar erros de projeto, processos de fabricação inadequados ou deficientes, manutenção imprópria ou inexistente, sobrecarga nas condições de serviço, problemas ambientais como catástrofes, umidade excessiva, influências da temperatura, corrosão química, desgaste mecânico e as falhas por fadiga.

Na literatura podem ser encontradas várias classificações para os mecanismos de falha. Segundo Collins (Collins, 1981), pode-se definir falha mecânica de uma maneira abrangente como sendo qualquer mudança nas dimensões, forma ou propriedades do material de uma estrutura, máquina ou componente, tornando-os inúteis ou com desempenho insatisfatório, de acordo com as funções a que foram projetados, mesmo na ausência de ruptura propriamente dita.

Define-se fadiga como um tipo de falha mecânica causada primariamente pela aplicação repetida de carregamentos (tensões ou deformações) variáveis, provocando mudanças nas propriedades dos materiais com a diminuição de sua resistência. Caracteriza-se pela geração e propagação lenta e gradual de trincas que levam à ruptura e ao colapso súbito do componente.

É um fenômeno complexo, de caráter estatístico, dependente de diversos fatores

como a magnitude da carga e o número de ciclos de aplicação do carregamento; concentradores de tensões (entalhes, rasgos de chaveta, cantos vivos); fatores relacionados à microestrutura do material (contorno de grão, mecanismos de deslizamento de planos cristalinos, inclusões, vazios); fatores ambientais (temperatura, meio, umidade, corrosão química); processos de fabricação (tensões residuais, acabamento superficial, defeitos, etc.) e desgaste mecânico (contato entre componentes).

De 80 a 90% das falhas que ocorrem em componentes mecânicos decorrem da fadiga (Grunwald e Schnack, 1998). Em geral, os níveis de tensão em que ocorre a ruptura devido ao carregamento variável são muito inferiores aos necessários para ruptura em carregamento estático. Isto exige um maior investimento em pesquisa nessa área, a qual é uma das principais preocupações no projeto de estruturas.

A história registra muitos acidentes sérios decorrentes de falhas por fadiga. Por exemplo os acidentes ocorridos com as aeronaves britânicas *Comet* (o primeiro avião comercial de passageiros a jato) em 1954 com o rompimento por fadiga da fuselagem em função dos ciclos de compressão e descompressão. Em 1985, tem-se o acidente ocorrido com um *Boeing 747* da *Japan Airlines* causando a morte de 520 pessoas. Mais recentemente em, 1988, o caso de um *Boeing 737* da *Hawaiian Airlines* que perdeu aproximadamente um terço da cabine em pleno vôo a mais de 7000 metros de altitude. Essas e outras falhas catastróficas relacionadas à fadiga são amplamente divulgadas na literatura (Suresh, 1991; Schütz, 1996; Norton, 1998).

Segundo estudos econômicos (Gani e Rajan, 1999), a estimativa é de que o prejuízo causado pelas falhas devido à fadiga e à fratura de componentes em 1978, nos Estados Unidos, foi da ordem de 120 bilhões de dólares, aproximadamente 4% do PIB (produto interno bruto) daquele ano. Já em 1982, o prejuízo foi da ordem de 100 bilhões de dólares, ou 3% do PIB (Norton, 1998). Pode ser observado que se fosse utilizada a tecnologia e os recursos atuais em pesquisas, esta cifras poderiam ser reduzidas a 28 bilhões de dólares ao ano.

Nas últimas décadas, os avanços tecnológicos vêm tornando o estudo da fadiga uma grande área de pesquisa científica, englobando diversas disciplinas como ciência dos

materiais, engenharias (mecânica, civil, aeroespacial e eletrônica), biomecânica, física, matemática aplicada e simulação computacional. Entretanto, apesar dos inegáveis avanços, a fadiga dos materiais ainda é um campo de estudos repleto de empirismos, incertezas e controvérsias.

## 2.2 Revisão Bibliográfica sobre Fadiga

Os primeiros estudos destinados ao conhecimento dos fenômenos da fadiga mecânica datam da primeira metade do século XIX, no contexto da Revolução Industrial Européia. Isso se deve ao fato de ser um período de uso intensivo dos metais em construções mecânicas, principalmente nas indústrias ferroviária, têxtil e de construção civil. Além do mais, houve um aumento significativo do número de acidentes com mortes, obrigando as autoridades a exigirem laudos técnicos detalhados das causas, o que motivou pesquisas na área.

As primeiras pesquisas sobre a fratura, em função das características microestruturais de componentes de máquina e em diversas condições de carregamento, começaram a surgir na Inglaterra, França e Alemanha. Há várias referências na literatura contendo históricos detalhados sobre o estudo da fadiga ao longo dos anos, podendo citar os trabalhos de Suresh e Schütz (Suresh, 1991; Schütz, 1996). De 1837 a 1858, destacam-se os trabalhos iniciais sobre o tema, desenvolvidos por pesquisadores como Albert, Poncelet, Rankine, Morin, Stephenson, Braithwaite e Fairbairn.

O primeiro estudo experimental sistemático foi desenvolvido por August Wöhler, de 1858 a 1870, na indústria ferroviária alemã. Seus estudos foram realizados em componentes em escala e condições de funcionamento reais e permitiram constatar que as tensões cíclicas em que ocorriam as rupturas eram muito menores que as de carregamento estático.

Foram levantados os primeiros dados do tipo  $S - N$  (amplitude de tensão ou tensão alternada *versus* número de ciclos de carregamento)<sup>1</sup>. Foi verificada a existência de um

---

<sup>1</sup>Observa-se que nos estudos de Wöhler foram obtidas apenas tabelas de dados  $S - N$  para vários materiais em diversas condições. Relações matemáticas e equações empíricas só foram determinadas

limite de tensão para o qual a ruptura só ocorre para um número muito grande de ciclos, considerado praticamente infinito. Esse limite de tensão é denominado *limite de resistência à fadiga* ou *limite de resistência para vida infinita* ( $S_e$ ), sendo característico dos aços. O limite de resistência à fadiga não é verificado na maioria dos outros materiais<sup>2</sup>.

As pesquisas de Wöhler foram confirmadas posteriormente por Bauschinger em 1886. Seus estudos permitiram constatar a variação das propriedades elásticas dos materiais em função do carregamento cíclico (amaciamento ou endurecimento cíclicos), mais conhecidos de maneira geral como *efeito Bauschinger*.

Até o final do século XIX as pesquisas na área de fadiga apresentam um crescimento modesto, porém significativo. De 1900 a 1950, podem-se destacar alguns avanços como a determinação das primeiras leis empíricas para o limite de resistência à fadiga (Basquin em 1910), ou seja, a relação logarítmica  $S - N$ , conhecida atualmente; a medição de laços de histerese em plasticidade cíclica (Baristow 1910, Inglaterra) e vários estudos em vibrações, efeitos de tratamentos térmicos e processos de fabricação por diversos outros pesquisadores.

Somente ao final da década de 1920 é que se dá o reconhecimento científico dos estudos sobre fadiga, com a publicação dos primeiros livros na área por H.G. Gough na Inglaterra em 1926 e por H.F. Moore e J.B. Kammers em 1927 nos Estados Unidos, além do crescente número de publicações em revistas e jornais especializados (Suresh, 1991).

O conceito de *acúmulo de dano* é definido por Miner em 1945, com base nos trabalhos desenvolvidos por Palmgren em 1924. A constatação de que a fadiga é um processo cumulativo e irreversível é de fundamental importância para o entendimento correto dos fenômenos envolvidos e o desenvolvimento de modelos mais fiéis à observação experimental.

Em 1954, Coffin e Manson realizaram pesquisas independentes, levando em consideração os efeitos das deformações plásticas localizadas (não previstos pelas relações  $S - N$ ), introduzindo o conceito de *deformação cíclica*. São levantadas as primeiras cur-

---

posteriormente por outros pesquisadores.

<sup>2</sup>O limite de resistência à fadiga não é verificado mesmo em alguns tipos de aços de alta resistência (Mitchell, 2000).

vas  $\varepsilon - N$  (amplitude de deformação *versus* números de ciclos), mais conhecidas como relações de Coffin-Manson. Tais contribuições são fundamentais para desenvolvimento de modelos para o estudo de fadiga de baixo ciclo (em média  $N < 1000$  ciclos).

A partir da metade do século XX, é crescente a preocupação em desenvolver bases analíticas e matemáticas mais sólidas para o estudo da fadiga. É nesse contexto que a Mecânica da Fratura apresenta um grande avanço, baseando-se nos conceitos de análise de tensões (Inglis em 1913), energia em fratura e concentração de tensões em trincas (Griffith em 1921). Uma grande contribuição para o desenvolvimento da Mecânica da Fratura se deve ao trabalhos de Paris e Anderson (1961), que definiram regras empíricas de propagação de trincas (teorias  $da/dN$ ) em função da variação da intensidade de tensões ( $\Delta K$ ) em carregamentos estáticos e cíclicos (Gdoutos, 1993; Pastoukhov e Voorwald, 1995).

A partir da década de 1980, há o crescimento de um linha de pesquisa denominada Mecânica do Dano em Meios Contínuos (*Continuum Damage Mechanics*) com grande contribuição dos autores Lemaitre, Chaboche e Krajcinovic, baseando-se nos estudos preliminares de Kachanov (1958) e Rabotnov (1959) (Kachanov, 1986; Lemaitre e Krajcinovic, 1987).

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos (Mecânica do Dano ou Teoria do Dano, simplesmente) estuda a diminuição da capacidade de carregamento do material sem a presença de trincas macroscópicas. Porém, considera o material inicialmente contendo defeitos microscópicos como poros, microtrincas e vazios, de forma que é medido o *acúmulo de dano* no material ao longo dos ciclos de carregamento. Uma das características da teoria do dano é o estudo e a definição de modelos constitutivos para as várias quantidades, escalares e tensoriais, responsáveis pela quantificação do efeito da degradação progressiva do material.

Nas últimas quatro décadas, os avanços tecnológicos (microscopia eletrônica, laser, raios-X, etc) permitiram estudos mais detalhados nas propriedades microscópicas e metalúrgicas dos materiais e suas influências em macroescala. Os efeitos ambientais, processos de fabricação, carregamentos complexos (aleatórios e multiaxiais), materiais diversos,

análise estatística e probabilística, dentre outros têm sido pesquisados, de forma a melhorar os modelos para o estudo da fadiga.

A área de simulação computacional e otimização em problemas de fadiga ainda é muito incipiente. A maioria dos trabalhos nesse campo datam das duas últimas décadas e se concentram em modelos de fratura e propagação de trincas aplicados juntamente com o Método dos Elementos Finitos ou Elementos de Contorno. A dificuldade consiste no fato de que a grande maioria dos modelos para fadiga são extremamente empíricos. Não existe até o presente momento um modelo matemático constitutivo confiável, geral e com ampla aceitação pela comunidade científica ou mesmo pela indústria (Krajcinovic, 1998; Krajcinovic, 2000).

As pesquisas na área indicam tendências na aplicação de modelos constitutivos baseados na Teoria do Dano, na Mecânica da Fratura ou no acoplamento dessas duas frentes de estudo (Lemaitre e Chaboche, 1994; Driemeier, 1995; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1996; Grunwald e Schnack, 1998; Vroonhoven e Borst, 1999; Lin e Smith, 1999a; Lin e Smith, 1999b; Lin e Smith, 1999c). Há também modelos de plasticidade cíclica com base na mecânica dos meios contínuos (Langlais, 1994; Langlais, 1999).

O grande problema é que esses modelos ainda não são suficientemente gerais e compatíveis com a experimentação, além de exigir determinação prévia de novas propriedades dos materiais que não se encontram amplamente tabeladas, o que dificulta a implementação de tais modelos em simulação computacional (Lemaitre e Chaboche, 1994; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1996; Krajcinovic, 2000).

## 2.3 Mecanismos de Falha por Fadiga

O conhecimento aprofundado dos mecanismos microestruturais e metalúrgicos relacionados ao fenômeno da fadiga não são objeto de estudo do presente trabalho. Nesta seção, o tema será abordado apenas em nível introdutório. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências (Madayag, 1969; Fuchs e Stephens, 1980; Suresh, 1991).

Como se sabe, a fadiga é um tipo de falha mecânica, causada primariamente pela

aplicação repetida de carregamentos variáveis. Caracterizada pela geração e propagação paulatina de uma trinca em pontos de concentração de tensões ou deformações (cantos vivos, entalhes, etc.).

A iniciação típica das trincas em peças metálicas é causada por carregamentos cíclicos, originando a movimentação de *discordâncias* que se agrupam em *células unitárias* do material e formam *bandas de deslizamento persistente*, as quais levam à geração de *intrusões* e *extrusões* na sua superfície (ver Figura 2.1). Pode-se pensar nesses micromecanismos como um problema de plasticidade cíclica localizada.

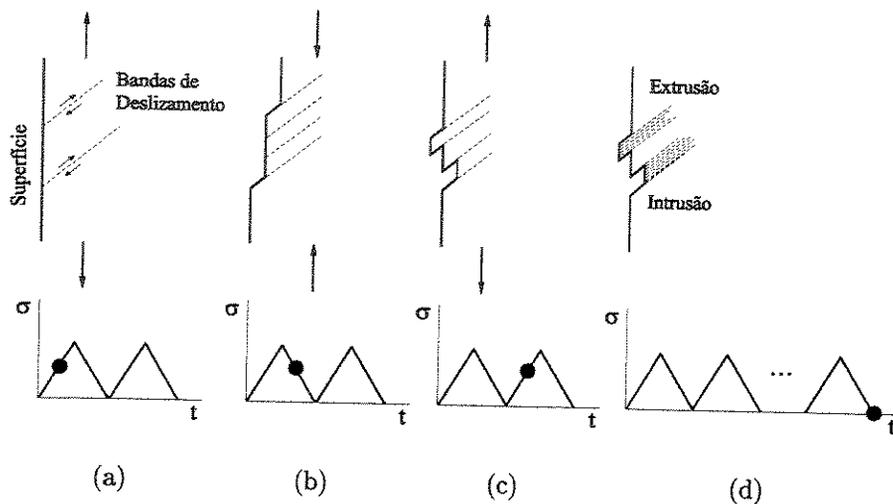


Figura 2.1: Mecanismo de formação de intrusões e extrusões. Adaptado com base em (Driemeier, 1995).

O processo de falha por fadiga é influenciado basicamente pelas propriedades mecânicas do material, acabamento superficial, gradiente das tensões atuantes, do estado de tensões residuais presente junto à superfície da raiz do entalhe e das condições ambientais.

De uma forma geral, podem ser identificadas duas fases distintas num processo de falha por fadiga, que determinam a vida de um componente, ou seja, a *fase de iniciação* e a *fase de propagação de trincas*. A fase de iniciação de trincas corresponde em média a 90% da vida de um componente e consiste do crescimento de microtrincas e defeitos que se aglomeram dando origem a uma trinca dominante. A partir daí, há uma propagação estável dessa trinca dominante até um tamanho crítico, levando à ruptura súbita do mate-

rial. Cada uma dessas duas fases é relativamente bem conhecida de uma forma isolada da outra. Entretanto, o momento exato em que há a transição iniciação/propagação ainda é uma incógnita.

As metodologias de projeto à fadiga se diferenciam com base nessas duas fases. As *metodologias de vida total (total-life approach)* tratam do estudo da fase de iniciação de trincas e correspondem ao método  $S - N$  (método baseado em análise de tensões, *stress-based*) e ao método  $\varepsilon - N$  (método baseado em análise de deformações, *strain-based*) que visam determinar a vida de componentes antes que ocorra a falha propriamente dita. Já as *metodologias tolerantes ao dano (damage tolerante approach)* tratam do estudo da propagação de trincas, visando determinar a vida residual de componentes já trincados. As metodologias tolerantes ao dano são baseadas principalmente nos conceitos da Mecânica da Fratura, sendo representadas pelos métodos  $da/dN$  ou de propagação de trincas.

Os *regimes de fadiga* são determinados com base no número de ciclos de tensão ou deformação a que um componente é submetido. Basicamente, definem-se a *fadiga de baixo ciclo (LCF, low-cycle fatigue)* e a *fadiga de alto ciclo (HCF, high-cycle fatigue)*. Não há um consenso na literatura em relação ao limite entre a fadiga de baixo e alto ciclos. Normalmente, assume-se que a fadiga de baixo ciclo ocorre para  $N < 10^3$  ciclos e a fadiga de alto ciclo para  $N > 10^3$  ciclos.

## 2.4 Cargas de Fadiga

Qualquer carregamento variando com o tempo é potencialmente capaz de gerar falha por fadiga. A característica dos carregamentos pode variar substancialmente de uma aplicação para outra. Em componentes e máquinas rotativas, as cargas tendem a ser constantes em amplitude e frequência, sendo consideradas *cíclicas*. Em outros tipos de equipamentos como veículos (marítimos, aéreos ou terrestres), as cargas costumam variar em amplitude e frequência, sendo consideradas de natureza *randômica* ou *aleatória*.

Os estudos mostram que em condições ambientais normais (temperatura, umidade e ausência de corrosão), a forma de onda e a frequência de repetição do carregamento, seja

ele de tensão ou deformação, influenciam muito pouco sobre a fadiga. Os fatores mais significativos são a amplitude de tensão (ou deformação), o valor médio das cargas e o número de ciclos de carregamento.

Em máquinas e equipamentos rotativos, as formas de onda costumam ser normalmente senoidais. Conforme o tipo de carregamento, podem ser *alternadas simétricas* (valor médio igual a zero), *repetidas* (um dos valores mínimo ou máximo é igual a zero) e *flutuantes* (com todos os valores não nulos). Dessa forma, podem ser definidos os parâmetros dados na Tabela 2.1.

<i>Tensão</i>	<i>Deformação</i>
$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$	$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$
$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2}$
$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}{2}$
$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$	$R = \frac{\varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max}}$
$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$	$A = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_m}$

Tabela 2.1: Terminologia utilizada em carregamentos variáveis.

Considerando a primeira coluna da Tabela 2.1 (tensão), tem-se que  $\Delta\sigma$  é a amplitude de tensões,  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  são, respectivamente, as tensões máximas e mínimas do carregamento,  $\sigma_a$  é a tensão alternada,  $\sigma_m$  é a tensão média,  $R$  é a razão de tensão e  $A$  é a razão de amplitude. Para a segunda coluna (deformação) o raciocínio é análogo, seguindo a mesma terminologia. A Figura 2.2 ilustra esses conceitos para o caso de tensão.

### 2.4.1 Efeito das Cargas Médias

A maioria dos dados tabelados para as propriedades dos materiais relacionadas à fadiga são obtidos com  $\sigma_m = 0$ ,  $R = -1$  e  $A = \infty$ , ou seja, em flexão rotativa, alternada

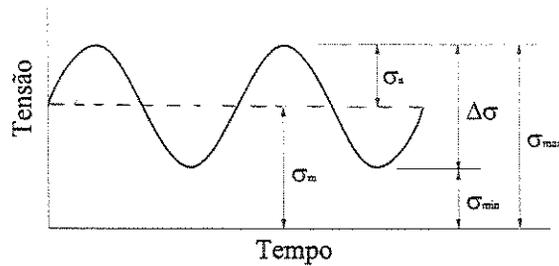


Figura 2.2: Terminologia utilizada em carregamentos com tensão variável.

simétrica. Observa-se, entretanto, que a carga média não nula gera efeitos de acúmulo de dano em carregamentos complexos e devem ser considerados. Há métodos de correção aplicáveis às várias metodologias ( $S - N$ ,  $\varepsilon - N$  ou  $da/dN$ ).

Os métodos de correção tradicionais para levar em consideração as cargas médias são definidos em termos de relações e diagramas de *vida constante*, ver Figura 2.3. Esses diagramas combinam valores de tensões alternadas e tensões médias, de forma a obter uma tensão alternada equivalente considerando uma mesma vida, em função das propriedades do material. As relações mais conhecidas são as de Gerber, Goodman e Soderberg (Bannantine et al., 1990; Norton, 1998; Mitchell, 2000) e estão ilustradas esquematicamente na Figura 2.4.

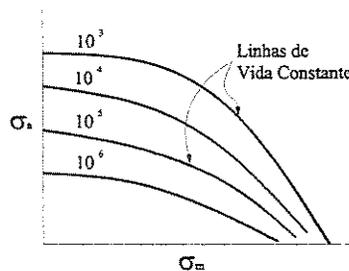


Figura 2.3: Linhas de vida constante para cargas médias.

## 2.4.2 Acúmulo de Dano em Fadiga

O fenômeno da fadiga é um processo cumulativo, localizado, gradual e irreversível, em função dos efeitos elastoplásticos que são introduzidos no material. Em 1945, Miner, com base nos trabalhos de Palmgren de 1924, propôs a seguinte regra para o acúmulo

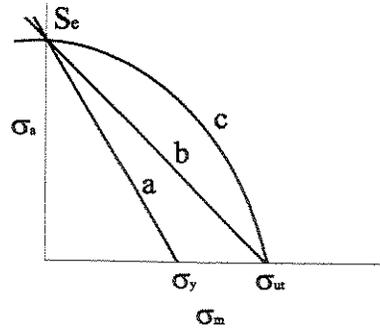


Figura 2.4: Curvas de correção para cargas médias: (a) Soderberg , (b) Goodman e (c) Gerber.

de dano em componentes submetidos a carregamentos com amplitude e tensão média variáveis

$$d = \sum_i^k \frac{n_i}{N_i} = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_k}{N_k} = 1, \quad (2.1)$$

sendo  $n_i$  o número de ciclos que um carregamento  $\sigma_{a_i}$  é aplicado e  $N_i$  o respectivo número de ciclos máximo que o componente suporta o carregamento  $\sigma_{a_i}$ . A relação de ciclos  $\frac{n_i}{N_i}$  é também chamada de vida relativa à fadiga. Nesse caso, assume-se que quando o acúmulo de dano atinge o valor da unidade, o componente entra em fase de ruptura. A Figura 2.5 ilustra um carregamento com amplitude variável e a regra de Miner de acúmulo linear de dano.

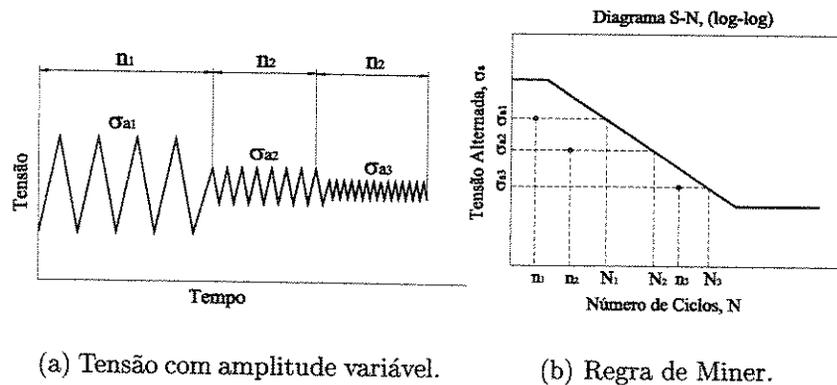


Figura 2.5: Carregamento variável e acúmulo linear de dano.

Esse é um critério de ruptura que, por ser uma soma linear, não considera a sequência dos carregamentos e os efeitos de plasticidade localizados e irreversíveis. Entretanto, é razoável para pequenas variações nas tensões médias do carregamento. Apesar de o valor

da unidade ser o mais comumente aceito, não há um consenso em relação ao valor máximo considerado para a soma das relações  $\frac{n_i}{N_i}$ , que podem variar de 0, 1 a 10 (Driemeier, 1995; Fatemi e Yang, 1998).

Atualmente, existem mais de 50 modelos empíricos, analíticos ou semi-analíticos visando melhorar e/ou complementar as discrepâncias dos conceitos de acúmulo de dano em fadiga, introduzidos por Palmgren e Miner (Fatemi e Yang, 1998). Apesar de existirem vários modelos, não há ainda um que seja universalmente aceito. Cada modelo consegue apenas tratar de maneira satisfatória alguns dos fatores fenomenológicos associados ao acúmulo de dano em fadiga.

Devido à complexidade envolvida, nenhum dos modelos permite englobar todos os fatores e a aplicabilidade de cada um varia caso a caso. A regra de Palmgren-Miner ainda é usada de maneira predominante em projeto mecânico, apesar de todas as controvérsias. Ainda é necessário muito esforço científico no estudo dos fenômenos de acúmulo de dano em fadiga, de forma a se obter um modelo geral e confiável para a previsão correta da vida de componentes.

### 2.4.3 Contagem de Ciclos

Em carregamentos complexos, com cargas médias variáveis, métodos de contagem de ciclos são geralmente empregados para reduzir a *história do carregamento* em uma série de eventos discretos, nos quais podem ser empregados os dados, propriedades materiais e métodos desenvolvidos para a previsão da vida de componentes em carregamentos com amplitude constante.

Vários métodos de contagem de ciclos têm sido desenvolvidos ao longo dos anos. Uma descrição detalhada dos vários métodos pode ser encontrada na literatura (Bannantine et al., 1990; Anthes, 1997; Tashkinov, 1998). O método de contagem mais conhecido é o *rainflow*, usado em geral para transformar uma história de carregamento em diversos eventos discretos e obter diagramas de *laços de histerese* (diagramas de tensão *versus* deformação em carregamentos cíclicos), ver Figura 2.6.

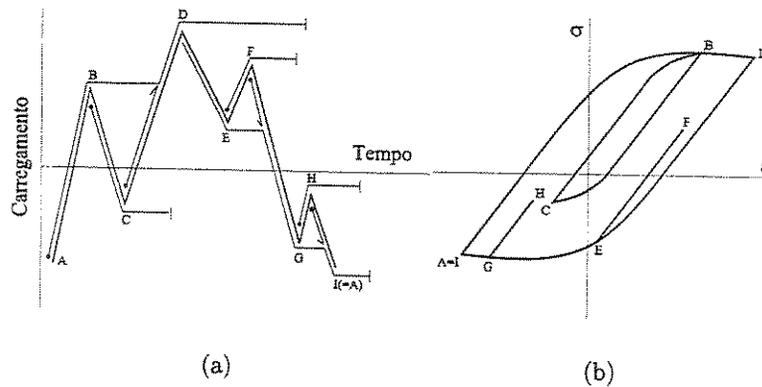


Figura 2.6: Método de contagem *rainflow*. Adaptado com base em (Bannantine et al., 1990).

Existem vários algoritmos, alguns já normalizados por instituições como a ASTM (*American Society for Testing and Materials*), para a contagem de ciclos de carregamento de forma otimizada e a minimizar o esforço computacional, sendo amplamente divulgados na literatura.

#### 2.4.4 Carregamentos Multiaxiais

Os dados e propriedades de materiais com relação à fadiga são obtidos em carregamentos uniaxiais (tração/compressão, flexão pura ou torção). Em carregamentos complexos atuando em várias direções, algumas diferenças devem ser levadas em consideração. A partir da década de 1970, muitos pesquisadores vêm se dedicando a esse estudo, sendo que hoje pode ser considerado uma grande área de pesquisa, conforme a revisão feita por You e Lee em 1996 (You e Lee, 1996). Os métodos usados para o tratamento de cargas multiaxiais podem ser resumidos como sendo critérios para transformar, de maneira apropriada, um carregamento em várias direções em um carregamento uniaxial equivalente.

De um modo geral, em projeto são comumente utilizados critérios de falha como von Mises ou Tresca, afim de se obterem carregamentos uniaxiais equivalentes aos multiaxiais. Uma das principais limitações em se aplicar equivalentes de tensão e/ou deformação é que

esses métodos não são capazes de prever, adequadamente, os efeitos de carregamentos não-proporcionais ou *fora de fase*. Apesar disso, vêm sendo usado em larga escala em projeto mecânico, principalmente pela sua relativa simplicidade de implementação.

## 2.5 Projeto à Fadiga Mecânica

A seguir, tem-se um resumo dos métodos clássicos utilizados atualmente para o dimensionamento a fadiga, ou seja, os métodos  $S - N$ ,  $\varepsilon - N$  e  $da/dN$ . Maiores detalhes sobre esses métodos podem ser encontrados nas referências (Bannantine et al., 1990; Norton, 1998; Mitchell, 2000).

### 2.5.1 Método $S - N$

O método  $S - N$  ou de Wöhler compara a iniciação de trincas por fadiga de componentes reais com os dados obtidos para corpos de prova padronizados. Assume-se que o ponto crítico do componente (em geral a raiz de um entalhe) tenha a mesma resistência que corpos de prova padronizados e que seja submetido à mesma *história de tensões*.

Inicialmente, no método  $S - N$ , avalia-se a resistência à fadiga no ponto crítico da peça considerando todos os fatores de correção. Depois, deve-se calcular a história de tensões no ponto crítico induzida pelo carregamento real e, finalmente, quantificar o acúmulo de dano produzido pelos diversos eventos do carregamento. Esse método só deve ser aplicado em componentes não trincados e em níveis de tensão predominantemente elásticos (fadiga de alto ciclo).

O diagrama  $S - N$  ou de Wöhler, ilustrado na Figura 2.7, apresenta a tensão alternada ( $S = \sigma_a$ ) *versus* número de ciclos admissível. No caso dos aços, essa curva pode ser representada por uma relação logarítmica. Denomina-se  $S_e$  como o limite de resistência à fadiga de um corpo de prova padronizado para vida infinita, ocorrendo, normalmente, entre  $10^6$  e  $10^7$  ciclos de carregamento.

O valor de  $S_e$  é definido para um corpo de prova em ensaios padronizados, devendo

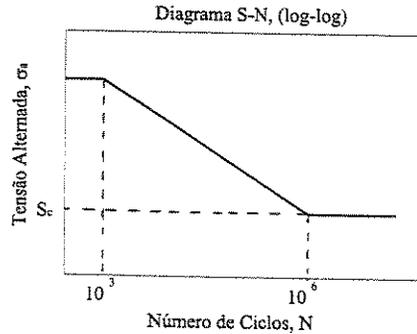


Figura 2.7: Diagrama  $S - N$  ou de Wöhler.

ser corrigido para o cálculo da vida de um componente real. Normalmente, utilizam-se fatores de correção da seguinte maneira

$$S'_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S_e, \quad (2.2)$$

sendo  $S'_e$  é o limite de resistência à fadiga para vida infinita de um componente real. Nesse caso os fatores  $k$  representam resumidamente

- $k_a$  : fator de correção para o tipo de carregamento (flexão, tração ou torção);
- $k_b$  : fator de correção para as dimensões do componente;
- $k_c$  : fator de correção para o tipo acabamento superficial da peça (forjamento, usinagem, retificação, polimento, etc.);
- $k_d$  : fator de correção para a temperatura de serviço;
- $k_e$  : fator de correção para a confiabilidade estatística dos ensaios de fadiga e
- $k_f$  : fator de correção para a concentração de tensões dinâmicas no componente (entalhes, furos, rasgos de chaveta, raios de concordância, etc.).

O efeito das cargas médias é quantificado pelas relações ou diagramas de vida constante (Goodman, Gerber e Soderberg). O acúmulo de dano a fadiga é calculado normalmente pela regra de Palmgren-Miner ou equivalente. De um modo geral, em projeto, são utilizados critérios de falha como von Mises ou Tresca, afim de se obter carregamentos uniaxiais equivalentes aos multiaxiais.

### 2.5.2 Método $\varepsilon - N$

O método  $\varepsilon - N$  ou de Coffin-Manson compara a iniciação de trincas por fadiga de componentes reais com os dados obtidos para corpos de prova padronizados. Assume-se que os componentes tenham a mesma resistência que os corpos de prova e que sejam submetidos à mesma *história de deformações*. Os eventos elastoplásticos induzidos pelo carregamento no ponto crítico do componente são quantificados, ao contrário do método  $S - N$ .

Como no caso do  $S - N$ , o método  $\varepsilon - N$  também só se aplica ao dimensionamento à fadiga de componentes não trincados, mas, por considerar os efeitos elastoplásticos, é mais adequado ao dimensionamento em fadiga de baixo ciclo. Entretanto, por ser mais geral que o  $S - N$ , pode também ser utilizado em problemas de fadiga de alto ciclo, fornecendo resultados um pouco mais precisos. Considera-se como o mais difícil de ser implementado, pois requer o uso de soluções computacionais, mesmo nos casos mais simples. Atualmente, esse método vem recebendo bastante aceitação e as propriedades de muitos materiais já estão tabeladas.

De maneira geral, pelo método  $\varepsilon - N$  deve-se primeiramente avaliar a resistência à fadiga no ponto crítico da peça considerando todos os fatores de correção, calcular a história de deformações no ponto crítico induzida pelo carregamento real e quantificar o acúmulo de dano produzido pelos diversos eventos do carregamento.

O método  $\varepsilon - N$  clássico trabalha com tensões e deformações reais usando relações  $\Delta\sigma - \Delta\varepsilon$ , tipo Ramberg-Osgood, para prever os laços de histerese (ver Figura 2.8), que consideram o amolecimento ou endurecimento cíclico do material (efeitos elastoplásticos ou efeito Bauschinger). A relação de Ramberg-Osgood pode ser expressa por

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{-n'} \quad (2.3)$$

sendo  $\Delta\varepsilon_e$  a amplitude de deformações elásticas,  $\Delta\varepsilon_p$  a amplitude de deformações plásticas,  $\Delta\sigma$  a amplitude de tensões,  $E$  o módulo de Young, e  $K'$  e  $n'$  são, respectivamente, o coeficiente e expoente de encruamento ou endurecimento cíclico.

Para o caso de tensões nominais predominantemente elásticas, a regra de concen-

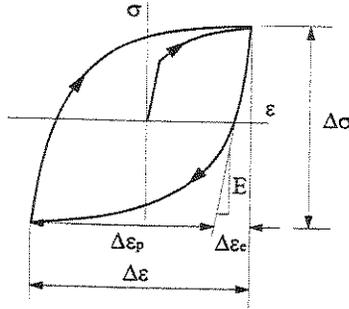


Figura 2.8: Curva de histerese para carregamento cíclico. Adaptado com base em (Bannantine et al., 1990).

tração de deformações de Neuber é dada por

$$K_t^2 = \frac{\Delta\sigma \Delta\epsilon E}{\Delta\sigma_n^2}, \quad (2.4)$$

sendo  $\Delta\sigma$  e  $\Delta\epsilon$  as amplitudes de tensão e deformação medidas no ponto crítico,  $\Delta\sigma_n$  a amplitude de tensão nominal atuante e  $E$  o módulo de Young.

A relação entre a amplitude de deformações atuantes no ponto crítico é dada pela equação de Coffin-Manson, representada pela Figura 2.9, ou seja

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{elástica}}{2} + \frac{\Delta\epsilon_{plástica}}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c, \quad (2.5)$$

sendo  $\sigma'_f$  o coeficiente de resistência à fadiga,  $b$  o expoente de resistência à fadiga (expoente de Basquin),  $\epsilon'_f$  o coeficiente de ductilidade à fadiga,  $c$  o expoente de ductilidade à fadiga,  $E$  o módulo de Young e  $N$  número de ciclos.  $\sigma'_f$ ,  $b$ ,  $\epsilon'_f$  e  $c$  são propriedades do material e encontram-se amplamente tabelados.

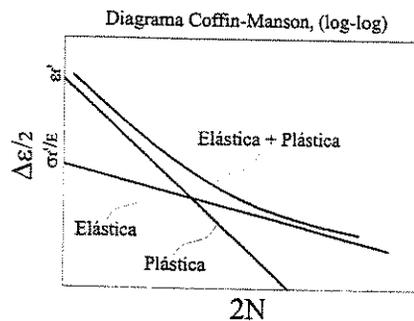


Figura 2.9: Diagrama Coffin-Manson.

No caso de serem considerados os efeitos decorrentes das tensões médias, podem ser

usadas correções para a relação de Coffin-Manson, de forma a se obterem resultados mais precisos. Relações conhecidas são as de Morrow, Morrow modificada e Smith-Topper-Watson (Castro e Meggiolaro, 2000). No caso de carregamentos com amplitude variável, costuma-se utilizar métodos de contagem de ciclos e aplicar uma regra de acúmulo de dano (Pamlgren-Miner ou equivalente).

O método  $\varepsilon - N$  é um método moderno, que vem sendo indicado por instituições tradicionais como a SAE (*Society of Automotive Engineers*) e ASTM, mas que possui pontos controvertidos e incertezas ainda não completamente resolvidos pela comunidade científica. Problemas como a dificuldade em obter laços de histerese compatíveis com os experimentos, correta contagem dos ciclos e a influência da ordem dos eventos do carregamento são discutidos por Castro em (Castro e Meggiolaro, 1998; Castro e Meggiolaro, 1999; Castro e Meggiolaro, 2000).

### 2.5.3 Método $da/dN$

O método  $da/dN$  permite a previsão da vida residual de peças trincadas. Esse método é baseado nos conceitos da Mecânica da Fratura Linear. Resumidamente, a Mecânica da Fratura é a parte da Mecânica dos Sólidos destinada a determinar o estado de tensões e deformações em corpos trincados (Gdoutos, 1993; Pastoukhov e Voorwald, 1995). De maneira geral, o estado de tensões em um corpo trincado é dado pela relação

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(K, r, \theta), \quad (2.6)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  as componentes do tensor de tensões,  $K$  o fator de intensidade de tensões,  $f_{ij}$  uma função dependente da posição do ponto num sistema de coordenadas cilíndrico, conforme Figura 2.10, e do fator  $K$ . O fator  $K$  depende principalmente dos modos de trinca e estão representados na Figura 2.11.

De maneira geral, o método  $da/dN$  considera que existe uma trinca dominante de dimensões conhecidas. Essa trinca é considerada como o ponto crítico da peça e pode ser modelada pelos conceitos tradicionais da Mecânica da Fratura. A taxa de propagação da trinca (função  $da/dN$ ) depende primariamente da variação do fator de intensidade de

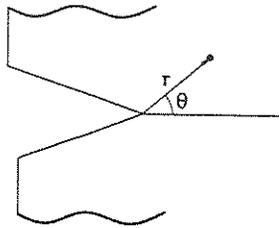


Figura 2.10: Sistema de coordenadas na ponta da trinca

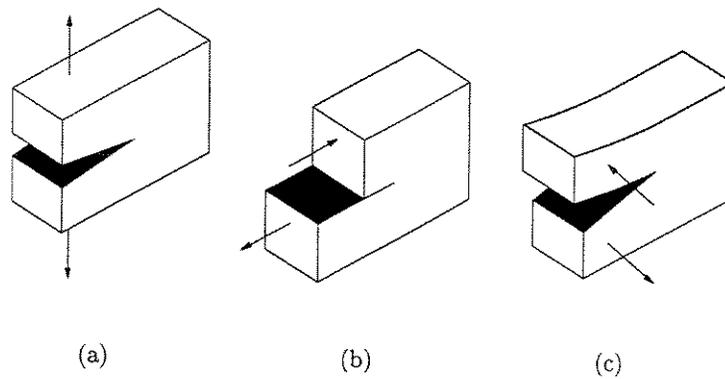


Figura 2.11: Modos principais de trinca: (a) Modo I ou de abertura, (b) Modo II ou de cisalhamento plano e (c) Modo III ou de cisalhamento anti-plano.

tensões  $\Delta K$ .

O método  $da/dN$  tem suas origens nos trabalhos de Paris e Anderson (1961). A seguinte regra geral para a propagação de trincas é empregada

$$\frac{da}{dN} = A\Delta K^m, \quad (2.7)$$

sendo  $A$  e  $m$  constantes que dependem do tipo de material.

A curva  $\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$  tem um aspecto em forma de “S”, caracterizada por três fases distintas: a fase I, com um limiar de propagação  $\Delta K_{th}$  e derivada decrescente, dependente da carga média, da microestrutura do material de fatores ambientais; a fase II, linear (derivada constante), dependente da carga média, da microestrutura do material de fatores ambientais e da geometria da peça; e a fase III, de derivada crescente até o ponto de fratura (nesse ponto  $K_{max} = K_C$  (crítico)). Uma representação esquemática da curva  $\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$  é dada na Figura 2.12.

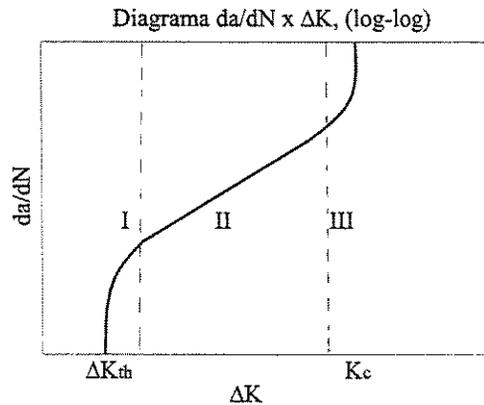


Figura 2.12: Curva típica de propagação de trinca.

A regra de Paris só descreve com precisão a fase II e pode gerar erros significativos no cálculo da vida de componentes. Dessa forma, existem outros métodos que visam corrigir as deficiências da regra de Paris, entre eles os mais conhecidos são os métodos de Elber, Forman e Priddle. Outras relações modificadas podem ser obtidas, de forma a melhorar a fidelidade com relação aos experimentos.

A fim de se conhecer o número máximo de ciclos  $N$  para que uma trinca de comprimento inicial  $a_0$  cresça até um comprimento final  $a_f$ , realiza-se uma integração do seguinte

tipo

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, \Delta K_{th}, K_C, K_{max}, \dots)}, \quad (2.8)$$

sendo  $f(\Delta K, \Delta K_{th}, K_C, K_{max}, \dots)$  uma função que depende da regra  $da/dN$  aplicada.

No caso de carregamentos complexos, há vários métodos que podem ser utilizados para quantificar de maneira adequada todos os efeitos decorrentes. Os mais conhecidos são o método RMS e o método de crescimento ciclo a ciclo (CCC). O método RMS (*root mean square* ou raiz quadrática média) se baseia em substituir o carregamento complexo por um outro equivalente, com base em uma média estatística. Já o método CCC quantifica o crescimento da trinca a cada ciclo do carregamento.

## 2.6 Considerações sobre os Métodos de Projeto

Com base nas análises de especialistas em projeto quanto à fadiga mecânica (Bannantine et al., 1990; Norton, 1998; Mitchell, 2000; Castro e Meggiolaro, 2000), pode-se fazer os seguintes comentários gerais em relação às técnicas convencionais de projeto.

O método  $S - N$  é o mais antigo e o mais simples de ser aplicado. Apresenta uma grande quantidade de dados experimentais tabelados e funciona razoavelmente bem para problemas uniaxiais, de alto ciclo e com amplitude constante. Por outro lado, é o mais empírico e os cálculos não podem ser extrapolados para materiais que não apresentam um limite de fadiga definido nem para faixas de valores fora dos especificados pelos experimentos. Além do mais, não é capaz de prever efeitos elastoplásticos e a sequência dos carregamentos, bem como não considerar a fase de propagação de trincas. Dessa forma, é normalmente aplicado em componentes com geometria simples (eixos, por exemplo) em carregamentos com amplitude constante e para fadiga de alto ciclo. Por fornecer uma estimativa de vida grosseira, deve ser usado em conjunto com outros métodos.

Já o método  $\varepsilon - N$  apresenta a vantagem de prever os efeitos elastoplásticos em fadiga de baixo ciclo, envolvendo altas temperaturas, geometrias mais complicadas e componentes não trincados. Ao levar em conta a sequência de carregamentos e amplitude variável o método  $\varepsilon - N$  é considerado melhor que o  $S - N$ . Como desvantagens

desse método pode-se citar o seu caráter iterativo de cálculo, o que impede a obtenção de estimativas rápidas sobre a vida de componentes. Há também problemas de natureza empírica e não há definições sobre como computar efeitos de acabamento superficial, por exemplo. De maneira geral, é aplicado em problemas nos quais as deformações plásticas são relevantes, em fadiga de baixo ciclo, altas temperaturas, componentes de dimensões pequenas (grande concentração de tensões) e em carregamentos com amplitude variável.

O método  $da/dN$  pode ser considerado o menos empírico de todos os métodos abordados. É geralmente aplicado em problemas de fadiga de baixo ciclo e dimensionamento para vida finita de componentes, nos quais os níveis de tensão são suficientemente altos para permitir a formação de trincas, sendo mais útil no cálculo da vida residual de componentes já trincados. É geralmente aplicado em conjunção com programas de ensaios não-destrutivos em serviços de inspeção e manutenção preditiva, principalmente na indústria aeronáutica e aeroespacial. Quando usado em conjunção com o método  $\varepsilon - N$  pode fornecer resultados satisfatórios, mesmo no caso de iniciação de trincas.

Resumidamente, não existe um método de projeto geral, que seja aplicável em todas as situações. Cada técnica possui naturalmente suas vantagens e limitações e a decisão sobre qual método aplicar deve ser feita baseando-se no tipo de material, história do carregamento, ambiente de serviço, geometria do componente e nas consequências de sua falha. Além do mais, a escolha do melhor método em cada caso é extremamente dependente da experiência do projetista e da confiança e conhecimento que o mesmo tem sobre o método escolhido.

Observa-se ainda que os métodos convencionais de projeto à fadiga mecânica são limitados a casos particulares de carregamento e, na maioria dos casos, são baseados em relações empíricas com faixa de validade muito restrita. Essas características dificultam a aplicação desses métodos em simulação computacional de uma maneira mais geral e sistemática. A maioria dos programas computacionais existentes comercialmente para análise estrutural em fadiga são destinados à simples automatização de cálculos ou ao pós-processamento de resultados de análises de tensões.

No próximo capítulo será apresentada a formulação para a deterioração progressiva

dos materiais submetidos a carregamentos, com base na Mecânica do Dano. Será definido um modelo constitutivo de material elastoplástico acoplado ao fenômeno de dano, capaz de prever fenômenos como fadiga, fluência, dano dúctil ou frágil. O uso desse modelo constitutivo permite a formulação e implementação para análise estrutural computacional em fadiga, utilizando o Método dos Elementos Finitos, como será mostrado nos capítulos subsequentes.

# Capítulo 3

## Mecânica do Dano

### 3.1 Introdução

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos, ou simplesmente Mecânica do Dano, é definida como o ramo da Mecânica dos Meios Contínuos (Gurtin, 1981; Lai et al., 1993) destinado a analisar os efeitos da deterioração progressiva de um material, submetido a tensões ou deformações de origem mecânica ou térmica. A Mecânica do Dano se dedica ao estudo e à definição de modelos constitutivos para as várias quantidades (escalares, vectoriais ou tensoriais), responsáveis pela quantificação do efeito da degradação progressiva dos materiais.

Sob certos tipos de carregamento, a estrutura do material tende a se deteriorar gradativamente. O aparecimento de descontinuidades como vazios, poros e microtrincas provoca o efeito de concentração de tensões nas regiões mais solicitadas. Essas deteriorações provocam o enfraquecimento do material e a diminuição da sua capacidade de carregamento. Dessa forma, a modelagem do material como um meio contínuo introduz incertezas significativas quanto à sua resposta aos carregamentos. Entretanto, a quantificação precisa desses efeitos discretos agindo no meio contínuo exige grande trabalho experimental, tornando-se inviável, principalmente sob o ponto de vista de engenharia.

Conforme (Kachanov, 1986), o trabalho pioneiro de Kachanov, publicado em 1958, propõe a descrição do efeito das descontinuidades, inerentes ao processo de fluência em

metais sob carregamento axial, através da introdução de um parâmetro escalar, denominado *continuidade*, que permite quantificar os efeitos discretos decorrentes do acúmulo de dano no material. Apesar desse novo modelo ser mais fiel aos fenômenos físicos observados, ainda representa uma aproximação. Entretanto, a perda na precisão é compensada pela simplicidade do equacionamento.

A Mecânica do Dano proporciona novos métodos para a modelagem da iniciação de trincas. Permite avaliar o processo de dano no material quando submetido a diferentes condições de carregamento, influenciando diretamente sobre a sua vida útil. Nas décadas de 1980 e 1990, há um grande avanço da Mecânica do Dano com os trabalhos de pesquisadores como Kachanov, Lemaitre, Chaboche, Krajcinovic, Murakami, Hult, Bhattacharya, entre outros, estando atualmente em fase de amadurecimento científico (Lemaitre e Krajcinovic, 1987; Lemaitre e Chaboche, 1994; Lemaitre, 1996; Krajcinovic, 2000).

Nas seções seguintes, apresentam-se os conceitos básicos da Mecânica do Dano e a formulação para o modelo constitutivo de material que será utilizado nesse trabalho. O texto foi baseado principalmente nos trabalhos de Lemaitre e seus colaboradores (Lemaitre e Krajcinovic, 1987; Lemaitre e Chaboche, 1994; Lemaitre, 1996).

### 3.2 Natureza Física dos Fenômenos

O *dano* dos materiais representa o processo físico de deterioração progressiva que leva à sua ruptura. Do ponto de vista fenomenológico, pode-se abordar o comportamento dos materiais em três níveis ou escalas diferentes: *microescala*, *mesoescala* e *macroescala*.

O dano em microescala (escala atômica ou microscópica) é caracterizado pelo acúmulo de microtensões na vizinhança de defeitos e interfaces e pela perda de coesão atômica. Na mesoescala de um volume representativo de volume (escala intermediária, células unitárias, cristais ou aglomerados atômicos) é considerado o crescimento de microtrincas e microvazios que levam à iniciação de uma trinca. Já na escala macroscópica (componentes e estruturas) ou macroescala, o dano é caracterizado pela propagação de trincas. A Mecânica do Dano trata dos fenômenos em microescala e mesoescala através

da inclusão de variáveis de dano nas formulações da Mecânica do Contínuo. A propagação de trincas, macroescala, é normalmente estudada através da Mecânica da Fratura a partir das variáveis definidas em mesoescala.

Apesar da relativa diferença entre as estruturas físicas de materiais de engenharia como metais, polímeros, compósitos, cerâmicas, concreto e madeira, a semelhança qualitativa nos seus comportamentos mecânicos em meso e macroescala (elasticidade, escoamento, plasticidade, etc.) permite que as propriedades sejam formuladas com base em princípios energéticos comuns a todos esses materiais. Através da Mecânica dos Meios Contínuos e da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis é possível modelar o comportamento desses materiais de forma geral e consistente, sem a necessidade de considerar em detalhes a complexidade das suas microestruturas físicas.

### 3.2.1 Elasticidade e Dano

Os materiais são constituídos por átomos, ligados através de interações de campos eletromagnéticos. Os fenômenos elásticos estão relacionados ao movimento relativo reversível de átomos do material, associado a uma perceptível variação no volume, com a redução da distância interatômica. Apesar de sua natureza microscópica, é possível tratar a teoria da elasticidade através de modelos constitutivos matemáticos em mesoescala, usando a reversibilidade das deformações elásticas e incorporar conceitos como linearidade e isotropia.

O dano se inicia quando se dá a perda de coesão interatômica (*debonding*). Em metais submetidos a um carregamento, há o deslizamento dos planos cristalinos e o movimento de discordâncias e imperfeições. Caso os valores de tensão ultrapassem um determinado limite, o processo se torna irreversível, devido ao acúmulo de discordâncias em pontos específicos do material, causando perda de coesão e formando microtrincas. Este mecanismo é caracterizado pela introdução de deformações plásticas microscópicas no material.

Dessa forma, conclui-se que a elasticidade é diretamente influenciada pelo dano, pois o aumento do acúmulo de discordâncias se reflete na redução da elasticidade do material.

Esse acoplamento que ocorre do ponto de vista do estado do material, nesse caso definido pela deformação elástica e pelo dano, é denominado *acoplamento de estado*.

### 3.2.2 Plasticidade e Deformações Permanentes

Ao contrário da elasticidade, a qual está relacionada ao movimento relativo de átomos, a plasticidade em metais está relacionada ao deslizamento de planos cristalinos. No caso de polímeros, o fenômeno está associado à reorganização de moléculas. Em materiais cerâmicos, compósitos, concreto e madeira, a plasticidade depende da formação de microtrincas e da perda de coesão das interfaces do material.

A plasticidade é um processo irreversível que introduz deformações permanentes no material. Embora ocorra variação volumétrica, esta só é considerável em valores muito elevados de tensão, teoricamente acima do limite de resistência à tração para os materiais convencionais, podendo ser desprezada.

Em todos os casos, a plasticidade é influenciada pelo dano devido à redução da área efetiva de resistência do material, com a perda de coesão interatômica. O dano não influencia o mecanismo de deslizamento de planos cristalinos diretamente, não havendo acoplamento de estado. Por outro lado, esse acoplamento indireto leva a um aumento na tensão efetiva atuante no material, podendo ser visualizado apenas através das equações cinéticas (evolução das variáveis de estado), sendo denominado *acoplamento cinético*.

Os fenômenos de elasticidade, plasticidade e dano podem ser resumidos da seguinte maneira. A elasticidade acontece ao nível de átomos. Por sua vez, a plasticidade é governada por escorregamentos ao nível de cristais e moléculas. Finalmente, o dano está relacionado à perda de coesão atômica em microescala e à iniciação de trincas em mesoescala.

### 3.2.3 Tipos de Dano em Mesoescala

Apesar do mecanismo microscópico geral do dano ser o mesmo para os materiais, é possível definir em mesoescala diferentes tipos de manifestação do dano, dependentes do

tipo de material, carregamento e temperatura, ou seja,

- *dano frágil* ou *quase-frágil*: o dano é considerado frágil quando uma trinca é iniciada em mesoescala com mínimo acúmulo de deformação plástica, sendo altamente localizado. Uma medida qualitativa para o dano frágil pode ser dada através da relação unidimensional entre as deformações elástica e plástica, isto é,

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} < 1; \quad (3.1)$$

- *dano dúctil*: o dano é considerado dúctil quando associado a deformações plásticas maiores que um certo limiar  $p_D$ . Nesse caso, o grau de distribuição do dano ao longo do volume de material é comparável àquele das deformações plásticas;
- *dano por fluência*: quando o material é carregado em altas temperaturas (acima da temperatura de recristalização), a deformação plástica envolve viscosidade, ou seja, o material se deforma mesmo sob tensão constante, havendo então dano por fluência. Como no caso dúctil, o grau de distribuição do dano é comparável ao das deformações visco-plásticas;
- *dano por fadiga de baixo ciclo*: ocorre quando o material é submetido a carregamentos cíclicos com valores elevados de tensão ou deformação. O grau de distribuição do dano chega a ser superior aos casos dúctil e de fluência. Normalmente, apesar de não haver consenso na literatura, o número de ciclos de ruptura ( $N_R$ ) considerado no caso de fadiga de baixo ciclo é  $N_R < 10^4$ ;
- *dano por fadiga de alto ciclo*: nesse caso, os valores de tensão ou deformação cíclicos são baixos, havendo pouca ou desprezível deformação plástica e altamente localizada (geralmente em entalhes, furos, cantos-vivos, etc.). Considera-se que o número de ciclos para ruptura ( $N_R$ ) esteja na faixa  $10^4 < N_R < 10^7$ .

## 3.3 Descrição Mecânica do Dano

### 3.3.1 Elemento de Volume Representativo (EVR)

A Mecânica do Contínuo trata de quantidades definidas em pontos materiais. Do ponto de vista físico, estas quantidades representam *médias* definidas em um determinado volume. Para definir o dano é preciso considerar um corpo sólido *danificado*, conforme mostra a Figura 3.1.

Nesse corpo é isolada uma porção representativa do volume, com tamanho suficientemente maior que as descontinuidades do material, e suficientemente pequeno para evitar a suavização dos gradientes de deformação. Dessa forma, a representação é adequada aos valores médios das quantidades observadas.

Esta porção de volume em mesoescala é denominada *Elemento de Volume Representativo* (EVR). Valores usualmente adotados para o EVR são (Lemaitre, 1996)

- $(0,1 \text{ mm})^3$  para metais e cerâmicas;
- $(1 \text{ mm})^3$  para polímeros e compósitos;
- $(10 \text{ mm})^3$  para madeira;
- $(100 \text{ mm})^3$  para o concreto.

Esses valores são muito maiores do que aqueles considerados nos problemas convencionais da elasticidade (da ordem de  $\mu\text{m}$ ) e devem ser respeitados para que os modelos constitutivos sejam válidos. Além disso, nas discretizações dos domínios para soluções numéricas, como em elementos finitos, os sub-domínios considerados devem ser compatíveis com as definições para o EVR, de forma a reduzir a dependência da solução em função do refinamento da malha (Krajcinovic, 2000).

Uma importante propriedade a considerar é o caráter localizado do dano. Em geral, o dano é um fenômeno muito mais localizado do que a deformação. Lembre-se que o dano é caracterizado pela perda de coesão atômica, restringindo-se a algumas superfícies. Já a

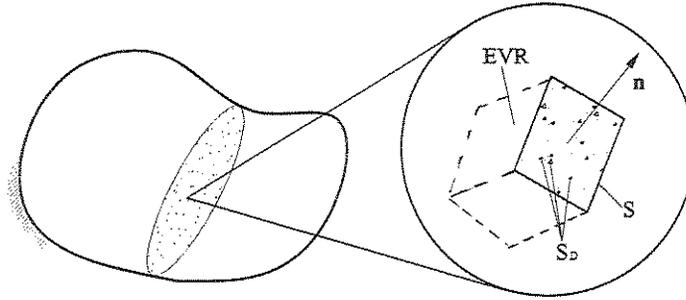


Figura 3.1: Elemento de volume representativo.

deformação é dada pelo movimento de átomos e planos cristalinos, ocorrendo ao longo de volumes.

Portanto, a microescala é a escala dos mecanismos usada para considerar deformação e dano. A mesoescala é a escala na qual as equações constitutivas de mecânica são escritas. Já a macroescala é a escala das estruturas de engenharia.

### 3.3.2 Parâmetro Escalar do Dano

Define-se  $S$  como sendo a área de uma seção transversal de um EVR, identificada pelo vetor normal  $\mathbf{n}$  (ver Figura 3.1). Seja  $\tilde{S}$  a área efetiva de resistência ( $\tilde{S} < S$ ), levando em consideração todos os efeitos de concentração de tensões e interação entre os defeitos e suas regiões vizinhas. Dessa forma, tem-se

$$S_D = S - \tilde{S}, \quad (3.2)$$

sendo  $S_D$  a área total dos defeitos, computando as interações entre os vazios e concentrações de tensão.

Assim, define-se o parâmetro de dano (ou variável de dano) como

$$D_n = \frac{S_D}{S}. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) representa uma medida mecânica para o dano localizado em função de  $\mathbf{n}$ . De maneira simplificada,

$$\begin{aligned} 0 \leq D_{\mathbf{n}} < 1 & \text{ representa o estado de dano no material,} \\ D_{\mathbf{n}} = 0 & \text{ para o material livre de imperfeições e} \\ D_{\mathbf{n}} = 1 & \text{ para a ruptura completa do componente.} \end{aligned}$$

No caso mais geral de distribuição anisotrópica de defeitos no material, o parâmetro de dano  $D_{\mathbf{n}}$  é uma função dependente de  $\mathbf{n}$ , assumindo características vetoriais ou tensoriais, dependendo do modelo utilizado. Já para o caso isotrópico,  $D_{\mathbf{n}}$  não depende de  $\mathbf{n}$ , podendo ser representado por uma função escalar  $D$ , ou seja,

$$D_{\mathbf{n}} = D, \quad \forall \mathbf{n}. \quad (3.4)$$

O dano isotrópico representa uma configuração uniformemente distribuída de microtrincas e cavidades ao longo de todas as direções no material. No presente trabalho será abordado apenas o caso de dano isotrópico.

### 3.3.3 Conceito de Tensão Efetiva

A definição de um parâmetro de dano, representando uma densidade superficial de defeitos e descontinuidades no material, permite definir o conceito de tensão efetiva. A *tensão efetiva de dano* representa o valor corrigido para as tensões distribuídas em uma determinada seção, que efetivamente resistem ao carregamento externo na presença de dano.

Considere um carregamento  $F$  atuando perpendicularmente sobre uma seção de um EVR. No caso uniaxial, sabe-se que a tensão nominal para satisfazer as equações de equilíbrio é

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (3.5)$$

Na ocorrência de dano, a área efetiva de resistência é definida por

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D). \quad (3.6)$$

Assim, por definição, a tensão efetiva de dano no material é dada por

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} \quad (3.7)$$

ou

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)}. \quad (3.8)$$

Observa-se ainda que  $\bar{\sigma} \geq \sigma$ , sendo que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma, & \text{para o material livre de imperfeições e} \\ \bar{\sigma} &\rightarrow \infty, & \text{no momento de ruptura.} \end{aligned}$$

Considerando o caso multiaxial isotrópico, a razão  $\frac{S}{\bar{S}}$  não depende da orientação de  $\mathbf{n}$  e o operador  $(1-D)$  pode ser aplicado a todas as componentes do tensor de tensões, ou seja,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)}, \quad (3.9)$$

sendo  $\boldsymbol{\sigma}$  um tensor de tensões genérico e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  o tensor de tensões efetivo de dano associado a  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Observa-se que a tensão efetiva de dano é diferente nos casos de tração e compressão. Devido ao *fechamento* dos defeitos e vazios durante a compressão, o valor de  $\bar{\sigma}^+$  (compressão) é equivalente ao de  $\sigma$  convencional. Esse e outros fenômenos, relacionados à ordem de grandeza dos defeitos, como o acúmulo de tensões em pontos localizados (defeitos) da área efetiva de resistência, só podem ser modelados adequadamente pela teoria em microescala (micromecânica do dano) e não serão abordados nesse trabalho.

### 3.3.4 Princípio de Equivalência de Deformações

Uma maneira de se evitar a análise em microescala, para cada tipo de defeito e cada tipo de mecanismo de dano, é postular um princípio de deformação ou de tensão equivalente para todos os casos em mesoescala.

Com base na termodinâmica, o *método do estado local* (Lemaitre, 1996) assume que o estado termomecânico em um ponto material é completamente definido pelos valores instantâneos de um conjunto de variáveis de estado, dependendo apenas do ponto considerado. Este postulado, aplicado em microescala, impõe que as equações constitutivas para a deformação de um microvolume elementar não sofrem influências dos elementos em sua vizinhança.

Extrapolando esse raciocínio em mesoescala, tem-se que as equações constitutivas de deformação para a superfície ( $S - S_D$ ) de um EVR não são modificadas pelo dano. Em outras palavras, tem-se que a tensão real no material é equivalente à tensão efetiva de dano  $\tilde{\sigma}$  e não à tensão nominal  $\sigma$ .

Com base nessa hipótese, Lemaitre estabeleceu em 1971 o *princípio de equivalência de deformações*, no qual assume-se que o comportamento do material é afetado pelo dano apenas na forma da tensão efetiva. O princípio de equivalência de deformações diz que (Lemaitre e Chaboche, 1994)

*“Qualquer resposta em termos de deformações para o comportamento do material danificado, tanto no caso uniaxial quanto no multiaxial, é representada pelos mesmos modelos constitutivos para o material idealmente perfeito, substituindo-se a tensão nominal pela tensão efetiva de dano.”*

Em outras palavras, para o caso uniaxial, a deformação  $\varepsilon$  de um corpo danificado, quando submetido a uma tensão  $\sigma$ , é equivalente à deformação obtida em um corpo considerado perfeito, quando submetido a uma tensão equivalente à tensão efetiva de dano  $\tilde{\sigma}$ . A Figura 3.2 ilustra o princípio de equivalência de deformações.

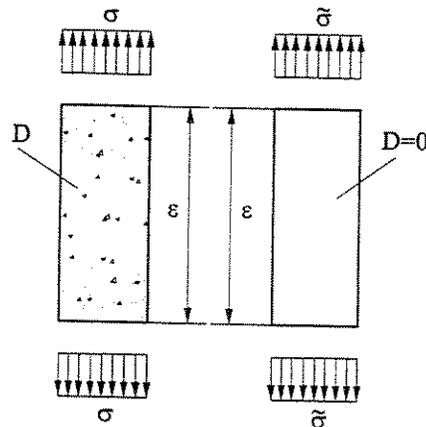


Figura 3.2: Representação esquemática para o princípio de equivalência de deformações (Lemaitre e Chaboche, 1994).

No caso uniaxial elástico e isotrópico, a lei constitutiva para um material danificado

é dada por

$$\varepsilon_e = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-D)}, \quad (3.10)$$

sendo  $\varepsilon_e$  a deformação elástica uniaxial e  $E$  o coeficiente de elasticidade ou módulo de Young.

Observa-se que o princípio de equivalência de deformações constitui-se de uma hipótese não rigorosa, assumindo que o efeito do dano sobre diversos comportamentos diferentes (elasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, etc.) é o mesmo. Tal fato é, sem dúvida, uma grande aproximação dos fenômenos físicos observados. Entretanto, essa simplificação não compromete o formalismo e a eficiência do equacionamento no contexto de engenharia (Lemaitre e Chaboche, 1994).

### 3.3.5 Critério de Ruptura e Limiar de Dano

A ruptura em mesoescala representa a iniciação de trincas ocupando toda a superfície do EVR, ou seja,  $D = 1$ . Em muitos casos, isso é causado por um processo de instabilidade repentino que induz à perda de coesão atômica na área de resistência remanescente. Em macroescala, isso corresponde a um valor de dano crítico  $D_c$ , que depende do material e das condições de carregamento.

O processo final de perda de coesão atômica é caracterizado por um valor crítico para a tensão efetiva atuante na área resistente. Definindo esse valor de tensão como  $\sigma_\infty$ , representando a máxima tensão que o material suporta, tem-se que

$$\bar{\sigma}_c = \frac{\sigma}{1-D_c} = \sigma_\infty. \quad (3.11)$$

Na prática, o valor de  $\sigma_\infty$  pode ser aproximado pela tensão última (máxima tensão de tração) do material  $\sigma_u$ , de fácil obtenção experimental (embora sempre  $\sigma_u < \sigma_\infty$ ). Dessa forma,

$$D_c \simeq 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u} \quad (3.12)$$

fornece o valor de dano crítico para iniciação de trinca em mesoescala, dado um valor de tensão unidimensional  $\sigma$ . Definido dessa maneira,  $D_c$  varia entre  $D_c \simeq 0$ , para fratura puramente frágil, até  $D_c \simeq 1$ , para o caso puramente dúctil. Usualmente este valor

permanece na faixa  $0,2 \leq D_c \leq 0,5$  para materiais convencionais.

Considerando o caso unidimensional (ensaio de tração monotônico), pode-se definir um equivalente unidimensional para  $D_c$ , dado por

$$D_{1c} = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_u}, \quad (3.13)$$

sendo  $\sigma_R$  a tensão de ruptura para o material. Definido dessa maneira  $D_{1c}$ , representa uma propriedade inerente aos materiais, podendo ser medido experimentalmente.

Antes da iniciação de trincas propriamente dita, ocorre a nucleação, causada pelo acúmulo de microtensões e microdeformações ou pelo acúmulo de discordâncias em pontos da microestrutura. Isso corresponde, no caso de tração pura unidimensional, a um certo valor limite de deformação plástica  $\varepsilon_{pD}$ , abaixo do qual não ocorre dano por microtrincas, ou seja,

$$\varepsilon_p < \varepsilon_{pD} \Rightarrow D = 0. \quad (3.14)$$

Ao valor  $\varepsilon_{pD}$  convencionou-se chamar *limiar de dano*. Assim como o dano crítico unidimensional, o limiar de dano é uma propriedade de cada material, podendo ser obtido através de experimentos.

### 3.3.6 Métodos de Medida para o Dano

O dano no material, na forma em que é definido, não é uma propriedade que pode ser facilmente verificada através de experimentos. A sua medição direta através de ensaios micrográficos, apesar de ser possível, é extremamente trabalhosa, o que eleva demais o custo do processo, sendo portanto inviável do ponto de vista prático.

Com base na definição da tensão efetiva de dano, associada a hipótese de equivalência de deformações, podem ser propostos métodos indiretos para avaliar o dano no material, através da variação de suas propriedades macroscópicas. Os métodos existentes podem ser relacionados à variação de propriedades como elasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, microdureza, emissão acústica, ou mesmo na variação de propriedades elétricas como resistividade ou condutividade (Lemaitre e Chaboche, 1994; Lemaitre, 1996).

O método mais simples é baseado nos ensaios convencionais de tração (tensão-

deformação). Com base na equação unidimensional para o material elástico, tem-se que

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon_e, \quad (3.15)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade para o material sem dano. Pode-se definir então

$$\tilde{E} = E(1 - D), \quad (3.16)$$

como sendo o módulo de elasticidade para o material danificado. Dessa forma, aproxima-se o dano no material por

$$D = 1 - \left( \frac{\sigma}{\tilde{E}\varepsilon_e} \right) = 1 - \left[ \frac{E(1 - D)\varepsilon_e}{E\varepsilon_e} \right] = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (3.17)$$

Assim, utilizando corpos de prova e sistemas de aquisição adequados, é possível avaliar a evolução do dano no material submetido a ciclos de carregamento e descarregamento, em um ensaio de tração convencional, até atingir a ruptura. A Figura 3.3 ilustra o método de medida do dano através da variação do módulo de elasticidade.

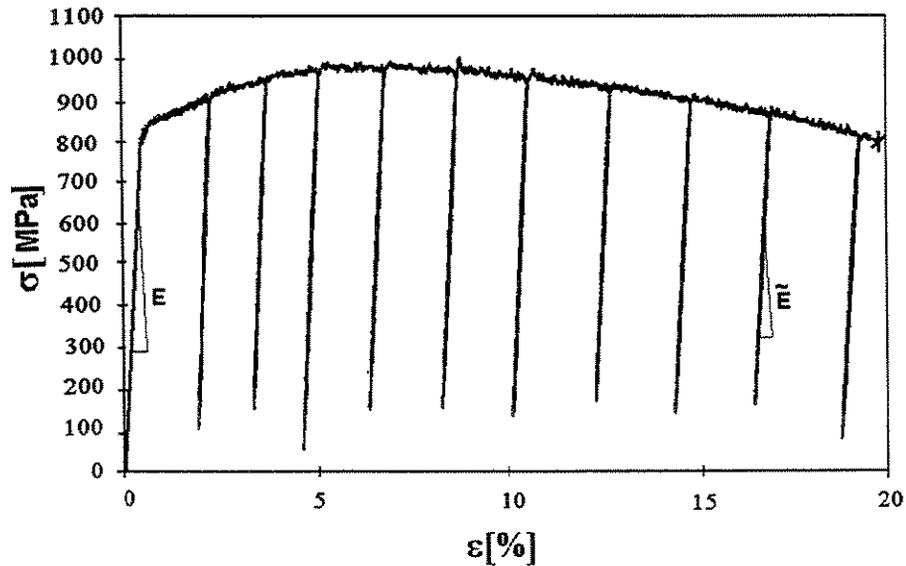


Figura 3.3: Método unidimensional de medida para o dano. Ensaio real para uma liga de aço CrMoNi, adaptado com base em (Grunwald, 1996).

Apesar do conceito simples, esse método apresenta várias dificuldades de aplicação. A avaliação contínua da variação do módulo de elasticidade exige uma medida relativamente precisa de valores muito pequenos de deformações. Além do mais, o dano é normalmente um fenômeno localizado, o que requer a utilização de sensores de tamanhos extremamente reduzidos. Esses e outros fatores tornam a medida do dano um processo

caro e difícil de ser realizado com a precisão requerida (Lemaitre e Chaboche, 1994).

### 3.4 Fundamentos Termodinâmicos

O processo de dano possui um caráter evolutivo e permanente. Os modelos constitutivos que visam prever o comportamento de um material, na ocorrência de fenômenos dessa categoria, devem obedecer aos princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis, a fim de formulá-los de forma consistente com os fundamentos da mecânica.

De maneira geral, postula-se a existência de potenciais de estado e de dissipação. Na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis, esses potenciais são definidos com base na *Teoria do Acoplamento Estado-Cinético* (*State Kinetic Coupling Theory*, (Lemaitre, 1996)).

O *potencial de estado*, ou de energia livre, é escrito em função das variáveis de estado. Define as leis de estado e as variáveis associadas às variáveis de estado (variáveis duais), para definir a potência envolvida em cada processo físico. Já o *potencial de dissipação*, ou cinético, é denotado em função das variáveis associadas e considera leis cinéticas de evolução das variáveis de dissipação de fluxo.

As relações constitutivas obtidas através dos potenciais de estado e cinético caracterizam a irreversibilidade do processo em questão. A diferença principal entre os diversos modelos constitutivos envolvendo acúmulo de dano está na escolha adequada desses potenciais e na sua validação experimental.

#### 3.4.1 Variáveis Termodinâmicas e Potencial de Estado

Assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações, as *variáveis de estado* em mesoescala são divididas em *variáveis observáveis* e *variáveis internas*. Entre as variáveis observáveis, tem-se

- o tensor de deformação total  $\varepsilon$  associado ao tensor de tensões  $\sigma$  e
- a temperatura  $T$  associada à entropia específica  $s$ .

Já as variáveis internas são

- a parte elástica do tensor de deformações,  $\varepsilon^e$ , associada ao tensor de tensões  $\sigma$ ;
- a parte plástica do tensor de deformações,  $\varepsilon^p$ , associada a  $-\sigma$ , devido à decomposição das deformações na forma

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p; \quad (3.18)$$

- $r$ , a deformação plástica de dano acumulada, associada à variável de encruamento isotrópico  $R$ . Com base no critério de von Mises, usado na definição do potencial plástico (Lemaitre, 1996; Simo e Hughes, 1998), é necessário que o fluxo  $\dot{r}$  seja relacionado ao dano e proporcional à taxa de deformação plástica acumulada, definida como

$$\dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad (3.19)$$

sendo  $\varepsilon_{ij}^p$  as componentes de  $\varepsilon^p$  em notação indicial;

- a deformação de encruamento cinemático não-linear (*back strain*),  $\alpha$  ou  $\alpha_{ij}$ , associada à tensão  $\mathbf{X}^D$ , que representa o encruamento cinemático (*back stress*), ou a translação do centro da superfície de escoamento (Simo e Hughes, 1998), no espaço de tensões de distorção<sup>1</sup> e
- $D$  a variável de dano, associada à variável  $\bar{Y}$ , uma densidade de energia por unidade de volume relacionada à energia dissipada num processo de dano.

As variáveis relacionadas às variáveis de estado são denominadas *variáveis associadas*, sendo elas o tensor de tensões  $\sigma$  ( $-\sigma$  no caso de  $\varepsilon^p$ ), a entropia específica  $s$ , a

---

<sup>1</sup>Um tensor  $\mathbf{A}^D$  é definido como sendo de distorção se obedecer as seguintes propriedades

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \text{tr}(\mathbf{A}^D) = 0,$$

sendo  $\mathbf{I}$  o tensor identidade.

variável de encruamento isotrópico  $R$ , o encruamento cinemático  $\mathbf{X}^D$  e a energia específica  $\bar{Y}$ .

Para deduzir as leis de estado, é preciso definir um potencial postulado como um funcional côncavo em relação à temperatura, convexo com relação às outras variáveis de estado e que contém a origem do sistema de coordenadas.

O funcional de energia específica livre de Helmholtz, dado genericamente por

$$\psi = u - Ts, \quad (3.20)$$

sendo  $u$  a energia interna específica, representa o máximo trabalho possível que pode ser realizado em um processo isotérmico. É escrito em função das variáveis de estado como se segue

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon^e, \varepsilon^p, r, \alpha, D). \quad (3.21)$$

Para elastoplasticidade ou elasto-viscoplasticidade, as deformações agem apenas através da diferença  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$ . Logo,

$$\psi = \psi([\varepsilon - \varepsilon^p], T, r, \alpha, D) = \psi(\varepsilon^e, T, r, \alpha, D). \quad (3.22)$$

Através da segunda lei da termodinâmica, escrita na forma da desigualdade de Clausius-Duhem, assumindo a densidade  $\rho$  do material constante, é possível escrever as leis constitutivas relacionando as variáveis de estado e associadas como se segue (Lemaitre, 1996)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p}, \\ s = \frac{\partial \psi}{\partial T}, \\ R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \mathbf{X}^D = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \\ \bar{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Observa-se que uma expressão analítica para  $\psi$  é escolhida com base em observações experimentais e resultados da micromecânica do dano, através da teoria do acoplamento estado-cinético, assumindo algumas hipóteses.

Tais hipóteses nesse caso são: comportamento linear e isotrópico (na fase elástica), equivalência de deformações com o conceito de tensão efetiva, nenhum acoplamento de estado entre plasticidade e elasticidade nem entre dano e plasticidade, relações clássicas para encruamento (isotrópico e cinemático) com saturação em grandes deformações plásticas e processos isotérmicos. Dessa forma, o funcional proposto em (Lemaitre, 1996) é

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D) + R_\infty \left( r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{X_\infty \gamma}{3} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right], \quad (3.24)$$

sendo  $\mathbf{C} = C_{ijkl}$  o tensor de elasticidade de quarta ordem,  $R_\infty$  e  $b$  constantes do material relacionadas ao encruamento isotrópico e  $X_\infty$  e  $\gamma$  relacionadas ao encruamento cinemático.

Com base na definição analítica de  $\psi$  e nas expressões em (3.23), pode-se escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e (1 - D), \\ R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = R_\infty [1 + e^{-br}], \\ X_{ij}^D = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{2}{3} X_\infty \gamma \alpha_{ij}, \\ Y = -\bar{Y} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Nesse caso,  $Y$  é definido apenas por conveniência, de forma a manipular somente quantidades positivas.

Se for considerada a inversão da matriz de  $\mathbf{C}$ , é possível reescrever a lei elástica (lei de Hooke) para um material danificado como

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e (1 - D) \Rightarrow \varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{(1 - D)} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{(1 - D)} \delta_{ij}, \quad (3.26)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $E$  o módulo de Young e  $\delta_{ij}$  o *delta de Kroenecker*.

O significado físico de  $Y$  pode ser compreendido relacionando-o com a densidade de energia de deformação elástica  $w_e$ , definida por

$$dw_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e. \quad (3.27)$$

Integrando esta expressão, considerando a lei elástica acoplada ao dano

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e (1 - D) \quad (3.28)$$

e mantendo  $D$  constante, tem-se

$$w_e = \int C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e (1 - D) d\varepsilon_{kl}^e = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{kl}^e (1 - D). \quad (3.29)$$

Portanto

$$Y = \frac{w_e}{(1 - D)}. \quad (3.30)$$

Considerando novamente a lei elástica, mantendo-se  $\sigma_{ij}$  constante,

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} [(1 - D) d\varepsilon_{kl}^e - \varepsilon_{kl}^e dD] = 0 \Rightarrow d\varepsilon_{kl}^e = \varepsilon_{kl}^e \frac{dD}{(1 - D)}. \quad (3.31)$$

Logo,

$$dw_e|_{\sigma=cte} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \frac{dD}{(1 - D)} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e (1 - D) \varepsilon_{kl}^e \frac{dD}{(1 - D)}. \quad (3.32)$$

Como  $Y = -\bar{Y}$ , tem-se finalmente

$$Y = \frac{1}{2} \frac{dw_e}{dD} \Big|_{\sigma=cte}. \quad (3.33)$$

Convenciona-se denominar  $Y$  como a *taxa específica de dissipação da energia de deformação elástica* para um material em processo de dano, sendo  $Y$  uma forma quadrática e positiva definida. Em outras palavras,  $Y$  representa a energia dissipada devido à perda de rigidez no EVR em função do dano.

### 3.4.2 Critério de Tensão Equivalente de Dano

A principal variável termodinâmica associada ao dano é a taxa de dissipação da energia de deformação elástica  $Y$ . Torna-se interessante interpretá-la como um critério de tensão equivalente de forma análoga à tensão equivalente de von Mises para a plasticidade. É possível definir um critério de tensão unidimensional, equivalente ao caso tridimensional com dano.

Inicialmente, considera-se a separação dos efeitos hidrostáticos ( $H$ ) e de distorção

(D) para os tensores de tensão e deformação elástica, ou seja,

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^D + \sigma_H \delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{eD} + \varepsilon_H^e \delta_{ij}, \end{cases}, \quad (3.34)$$

sendo  $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$  e  $\varepsilon_H^e = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e$  as respectivas componentes hidrostáticas.

Dessa forma,  $w_e$  pode ser escrita como

$$w_e = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \int \sigma_{ij}^D d\varepsilon_{ij}^{eD} + \delta_{ij} \delta_{ij} \int \sigma_H d\varepsilon_H. \quad (3.35)$$

Observando que  $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$  e

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^D = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^D}{(1-D)}, \\ \varepsilon_H^e = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H}{(1-D)}, \end{cases}, \quad (3.36)$$

tem-se

$$w_e = \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}{(1-D)} + 3 \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H^2}{(1-D)} \right). \quad (3.37)$$

Introduzindo o conceito de tensão equivalente de von Mises, ou seja,

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \right)^{1/2}, \quad (3.38)$$

obtém-se

$$Y = \frac{w_e}{(1-D)} = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]. \quad (3.39)$$

Define-se a *função de triaxialidade* para o estado de tensões<sup>2</sup>, dependente de  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$  (razão de triaxialidade) e do coeficiente de Poisson, como sendo

$$R_\nu = \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2. \quad (3.40)$$

A partir daí, tem-se que

$$Y = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{2E} R_\nu. \quad (3.41)$$

A *tensão equivalente de dano* é definida como sendo a tensão unidimensional  $\sigma^*$ , tal que, para o mesmo valor de dano, fornece o mesmo valor da densidade de energia de

---

<sup>2</sup>A função de triaxialidade mede o grau de fragilidade ou ductilidade em um processo de ruptura. Quanto maior o seu valor, mais frágil será o processo.

deformação elástica  $w_e$  que um estado tridimensional. Analiticamente, isso quer dizer que

$$w_e(\sigma^*) = w_e(\sigma) = Y(1 - D), \quad (3.42)$$

ou seja,

$$\frac{\sigma^{*2}}{2E(1 - D)} = \frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{2E(1 - D)}. \quad (3.43)$$

Portanto,

$$\sigma^* = \sigma_{eq} R_v^{1/2}. \quad (3.44)$$

Observa-se nessa última equação, que a tensão equivalente de dano  $\sigma^*$  não é uma função explícita de  $D$ , apesar de estar relacionada a um processo de dano. Esse fato pode ser explicado através dos princípios físicos associados ao dano. A plasticidade é caracterizada pelo deslizamento de planos cristalinos, sendo independente das tensões hidrostáticas. O processo de dano está associado à perda de coesão dos átomos, que é influenciada pelas tensões hidrostáticas ou pela triaxialidade de tensões. Esse fenômeno é influenciado também pelo coeficiente de Poisson, o qual governa a variação elástica do volume do material (Lemaitre, 1996). Assim, o efeito do dano é implicitamente computado em função da razão de triaxialidade e do coeficiente de Poisson.

Nesse ponto, é importante definir o conceito de carregamentos proporcionais. Um carregamento é considerado proporcional se puder ser escrito na forma

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \tau(t), \quad (3.45)$$

sendo  $\mathbf{S}$  uma função tensorial dependente apenas do ponto  $\mathbf{x}$  e  $\tau$  uma função escalar dependente apenas do tempo. Na prática, isso significa que os diversos carregamentos sobre a estrutura devem estar em fase. A implicação desse conceito está no fato de que, em carregamentos proporcionais, as direções principais de tensão permanecem constantes ao longo do tempo, de forma que a função de triaxialidade mantém-se constante. Nesse trabalho, consideram-se apenas carregamentos proporcionais.

### 3.4.3 Potencial de Dissipação

Tendo definido todas as variáveis (de estado e associadas) e as relações constitutivas através do potencial de estado, resta agora definir um segundo potencial, responsável por

descrever a evolução cinética dos fenômenos.

A segunda lei da termodinâmica, com base na desigualdade de Clausius-Duhem, é dada por

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0, \quad (3.46)$$

sendo  $q_i = \mathbf{q}$  o fluxo térmico associado ao gradiente de temperatura  $T_{,i}$  (processo não-isotérmico).

A partir de (3.22), o fluxo de energia livre  $\dot{\psi}$  pode ser descrito em função das variáveis de estado como se segue

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D}. \quad (3.47)$$

Observando que  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$  e usando a definição das variáveis associadas, reescreve-se a desigualdade de Clausius-Duhem como

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - R\dot{r} - X_{ij}^D \dot{\alpha}_{ij} - \bar{Y}\dot{D} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0. \quad (3.48)$$

No caso de um processo isotérmico, no qual a dissipação plástica pode ser desconsiderada (Lemaitre, 1996), tem-se que

$$-\bar{Y}\dot{D} \geq 0. \quad (3.49)$$

Sabendo-se que  $-\bar{Y}$  é uma forma quadrática e positiva definida, ou seja,  $-\bar{Y} \geq 0$ , a taxa de dano  $\dot{D}$  deve ser uma função também não negativa ( $\dot{D} \geq 0$ ). Dessa forma, a irreversibilidade do processo está garantida, sendo compatível com os princípios termodinâmicos e com os fenômenos físicos observados.

A leis cinéticas de plasticidade ou viscoplasticidade acoplada ao dano são derivadas através do potencial de dissipação  $F$ . Define-se o mesmo como sendo um funcional convexo das variáveis associadas, sendo que as variáveis de estado agem como parâmetros de forma implícita. Portanto,

$$F \equiv F \left( \underbrace{\sigma, R, \mathbf{X}^D, Y}_{\text{variáveis}}; \underbrace{(\varepsilon^e, r, \boldsymbol{\alpha}, D)}_{\text{parâmetros}} \right). \quad (3.50)$$

Através de  $F$  e da condição de normalidade (Lemaitre, 1996; Simo e Hughes, 1998)

é possível escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\lambda}, \\ \dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda}, \\ \dot{\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial X^D} \dot{\lambda}, \\ \dot{D} = -\frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda}, \end{array} \right. \quad (3.51)$$

que representam as leis de evolução das variáveis de estado. O parâmetro  $\dot{\lambda}$  é um escalar positivo definido ( $\dot{\lambda} \geq 0$ ), conhecido como *multiplicador de plasticidade*.

### 3.4.4 Modelo Constitutivo para Plasticidade Acoplada ao Dano

Nesta seção, descreve-se uma forma particular para o modelo constitutivo envolvendo plasticidade e dano.

Inicialmente, é necessário definir um *critério de escoamento* com base numa função de carregamento tridimensional. No caso, será utilizado o critério de von Mises, o qual assume que as deformações plásticas são governadas pela densidade de energia elástica de cisalhamento ou de distorção. Esse critério também é conhecido como *Teoria  $J_2$  de Escoamento*.

A tensão equivalente de von Mises é dada por

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \right)^{1/2}, \quad (3.52)$$

sendo  $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  a tensão deviatórica.

O critério de escoamento unidimensional, acoplado ao dano, considerando os efeitos de encruamento isotrópico ( $R$ ) e cinemático ( $X$ ), é dado por

$$f = \left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_y = 0. \quad (3.53)$$

O acoplamento entre dano e deformação plástica é escrito de acordo com o princípio da equivalência de deformação estabelecido na Seção 3.3.4. Assim, o critério de escoamento é escrito da mesma forma que para um material não danificado, exceto que a tensão

é substituída pela tensão efetiva. Para dano isotrópico, tem-se

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D},$$

ou seja, o dano influencia igualmente todas as componentes de tensão  $\sigma$ .

No caso geral, o critério de escoamento  $f$ , acoplado ao dano, é escrito como

$$f = (\tilde{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)_{eq} - R - \sigma_y, \quad (3.54)$$

sendo

$$(\tilde{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)_{eq} = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_{ij}^D}{1-D} - X_{ij}^D \right) \left( \frac{\sigma_{ij}^D}{1-D} - X_{ij}^D \right) \right]^{1/2} \quad (3.55)$$

e  $\sigma_y$  a tensão de escoamento para o material, dependente da temperatura.

A região do espaço de tensões de distorção na qual não ocorre deformação plástica é definida pela *superfície de escoamento*, dada por

$$f = (\tilde{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)_{eq} - R - \sigma_y \leq 0. \quad (3.56)$$

A variação no volume interno e na posição dessa superfície no espaço de tensões de distorção representa os fenômenos de encruamento cinemático e isotrópico, associados à deformação plástica e ao dano.

No caso de plasticidade, as condições de carregamento a serem consideradas são (Simo e Hughes, 1998)

$$\left\{ \begin{array}{l} f < 0 \text{ e } \dot{\lambda} = 0 \text{ (carregamento elástico),} \\ \\ f = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \text{ (descarregamento elástico),} \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\lambda} = 0 \text{ (carregamento neutro),} \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\lambda} > 0 \text{ (carregamento plástico).} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Deve-se ainda obedecer às condições de complementaridade ou de Kuhn-Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0 \text{ e } \dot{\lambda} f = 0 \quad (3.58)$$

e a condição de consistência

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \text{ se } f = 0. \quad (3.59)$$

Uma possível expressão para o potencial de dissipação  $F$ , baseada nas hipóteses

da Teoria do Acoplamento Estado-Cinético e na comprovação experimental, é dada por (Lemaitre, 1996)

$$F = \left( \tilde{\sigma}^D - \mathbf{X}^D \right)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D + F_D. \quad (3.60)$$

Os três primeiros termos equivalem à função de carregamento  $f$ . No caso de considerar  $F = f$ , tem-se as conhecidas *teorias de plasticidade associativa*. O termo  $\frac{3}{4X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D$  é responsável pelo encruamento cinemático não-linear. Já o termo  $F_D$  representa a parte do potencial da qual é derivada a lei cinética de evolução do dano. Sabe-se, através de experimentos (Lemaitre, 1996), que a evolução do dano depende apenas de  $Y$ ,  $r$  e  $D$ . Dessa forma,

$$\dot{D} = -\frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda}. \quad (3.61)$$

Uma expressão para  $F_D$  será apresentada na próxima seção.

Assim, derivando-se as equações constitutivas através do potencial de dissipação escolhido, tem-se que (Lemaitre, 1996)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D)}{(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D)_{eq}} \frac{\dot{\lambda}}{1-D}, \\ \dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda} = \dot{p}(1-D), \\ \dot{\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}^D} \dot{\lambda} = \varepsilon_{ij}^p (1-D) - \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D \dot{\lambda}. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Como foi visto anteriormente,  $\dot{p}$  representa a variação da deformação plástica acumulada  $p$ , definida por

$$\dot{p} = \left( \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2}. \quad (3.63)$$

Com base na definição de  $(\tilde{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)_{eq}$ , tem-se que

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}. \quad (3.64)$$

No caso unidimensional,  $\dot{p}$  representa simplesmente o valor absoluto da taxa de deformação, ou seja,

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}_p|. \quad (3.65)$$

Já no caso em que não há dano ( $\varepsilon_p < \varepsilon_{pD} \Rightarrow D = 0$ ), tem-se que  $p = r$ .

A expressão para  $\dot{\lambda}$  pode ser calculada através das condições de carregamento, associadas às condições de complementaridade (Kuhn-Tucker) e de consistência. No caso de plasticidade ( $f = 0$ ), tem-se que

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial X_{ij}^D} \dot{X}_{ij}^D + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0. \quad (3.66)$$

Resolvendo essa última equação, considerando as leis de encruamento dadas por

$$X_{ij}^D = \gamma \frac{2}{3} X_\infty \alpha_{ij} \quad (3.67)$$

e

$$R = R_\infty [1 + e^{-br}] \Rightarrow \dot{R} = b (R_\infty - R) \dot{\lambda}, \quad (3.68)$$

obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} = \frac{3 (\bar{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D) \dot{\sigma}_{ij}}{2 \zeta + b (R_\infty - R)} \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \\ \text{ou} \\ \dot{\lambda} = 0 \text{ nos outros casos,} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

sendo  $\zeta$  um escalar dado por

$$\zeta = (\bar{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D)_{eq} (1 - D) \left[ X_\infty \gamma - \frac{3 (\bar{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D)}{2 (\bar{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D)_{eq}} \left( \gamma X_{ij}^D + \frac{\bar{\sigma}_{ij}^D}{1 - D} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \right) \right]. \quad (3.70)$$

### 3.5 Leis Cinéticas de Evolução do Dano

Na seção anterior foram definidos os potenciais de estado e de dissipação. Através desses potenciais foram deduzidas expressões constitutivas envolvendo as variáveis de estado e as variáveis associadas, bem como suas leis de evolução cinética. Entretanto, nenhuma forma explícita para a evolução do dano foi apresentada.

Nesta seção será apresentada uma forma geral ou unificada para a evolução cinética do dano isotrópico, abrangendo os casos de dano frágil, dúctil, fluência e fadiga, acoplados a elastoplasticidade perfeita ou ideal.

A grande vantagem desse modelo é considerar de maneira unificada todos os tipos de dano em mesoescala, além de computar implicitamente os efeitos da temperatura (imbutidos nas propriedades do material), qualquer tipo de carregamento (monotônico ou cíclico, uniaxial ou multiaxial) e a interação não-linear entre as várias formas de dano.

Como exemplo da utilização desses modelos em análise por elementos finitos, podem ser citados os trabalhos de Lemaitre e Doghri (Lemaitre e Doghri, 1994), ilustrando a aplicabilidade em vários tipos de dano, e Grunwald e Schnack (Grunwald, 1996; Grunwald e Schnack, 1997), especificamente em dano por fadiga.

### 3.5.1 Formulação Unificada

Como visto anteriormente, o potencial de dissipação pode ser escrito como

$$F = (\bar{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4X_{\infty}} X_{ij}^D X_{ij}^D + F_D, \quad (3.71)$$

sem uma forma analítica para  $F_D$ , de maneira que a evolução do dano foi descrita como

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda}, \quad (3.72)$$

sendo

$$\dot{\lambda} = \dot{r} = \dot{p}(1 - D) \quad \text{e} \quad \dot{p} = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}. \quad (3.73)$$

Igualmente aos outros potenciais, a escolha de  $F_D$  é baseada nas hipóteses da teoria do acoplamento estado-cinético e na comprovação experimental. Nesse caso, a expressão para  $F_D$  é dada por (Lemaitre, 1996)

$$F_D = \begin{cases} \frac{Y^2}{2S(1-D)} & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases}, \quad (3.74)$$

sendo  $S$  uma propriedade do material determinada experimentalmente, denominada *Resistência ao Dano*, e  $p_D$  o limiar de dano.

Dessa forma,

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda} = \begin{cases} \frac{Y}{S} \dot{p} & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases}. \quad (3.75)$$

O limiar de dano  $p_D$ , ou  $\varepsilon_{pD}$  no caso unidimensional, está relacionado à energia armazenada no material durante o processo de nucleação e iniciação de trincas, devido à concentração de tensão em pontos de acúmulo de distorções ou não-homogeneidades no material. Fazendo um balanço energético do processo, desconsiderando os fenômenos de

encruamento (plasticidade perfeita ou ideal), é possível demonstrar que (Lemaitre, 1996)

$$p_D \simeq \varepsilon_{pD} \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\bar{\sigma}_{eq} - \sigma_f}, \quad (3.76)$$

sendo  $\sigma_u$  a tensão última do material,  $\sigma_f$  a tensão limite de resistência à fadiga e  $\bar{\sigma}_{eq}$  a tensão equivalente de von Mises, em valores efetivos com relação ao dano. O valor de  $\varepsilon_{pD}$  deve ser determinado experimentalmente.

Observa-se que, por definição,  $p_D$  é um valor limite de deformação antes do qual não ocorre dano, portanto  $D = 0$ , de forma que  $\bar{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq}$ . Sendo assim,

$$p_D \simeq \varepsilon_{pD} \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\sigma_{eq} - \sigma_f}. \quad (3.77)$$

Também com base em balanços energéticos e observações realizadas no momento de ruptura para materiais com comportamento perfeitamente plástico, é possível estabelecer um critério de ruptura geral para o caso de dano, ou seja,

$$D_c = D_{1c} \left( \frac{\sigma_u}{\bar{\sigma}^*} \right)^2 \leq 1, \quad (3.78)$$

sendo  $\bar{\sigma}^*$  a tensão equivalente de dano em valores efetivos.  $D_{1c}$  é o valor crítico de dano unidimensional, determinado experimentalmente. Nesse caso, é possível estabelecer o valor máximo de dano admissível para o material, dado um estado de tensões qualquer, representado por  $\bar{\sigma}^*$ . Em outras palavras, a iniciação de trincas ocorre se  $D = D_c$ .

De forma geral, o conjunto de equações envolvidas no processo de evolução de dano pode ser resumido como se segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{D} = \begin{cases} \frac{Y}{S} \dot{p} & \text{se } p \geq p_D \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases}, \\ p_D \simeq \varepsilon_{pD} \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\sigma_{eq} - \sigma_f}, \\ D_c = D_{1c} \left( \frac{\sigma_u}{\bar{\sigma}^*} \right)^2 \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.79)$$

### 3.5.2 Modelo Elastoplástico Perfeito Acoplado ao Dano

Para a maioria dos materiais, o limiar de dano  $p_D$  é um valor de deformação grande o suficiente para considerar que haja saturação (estabilização) do fenômeno de encruamento (cinemático e isotrópico), de forma que o material assume um comportamento perfeitamente plástico, ou seja

$$p > p_D \Rightarrow \begin{cases} X_{ij}^D = 0 \\ R = 0 \end{cases} . \quad (3.80)$$

O critério de escoamento simplifica-se para

$$f = \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_s \leq 0, \quad (3.81)$$

sendo  $\sigma_s$  um “limite de escoamento” modificado que deve ser considerado caso a caso. Normalmente, o valor de  $\sigma_s$  está limitado pelo limite de escoamento real do material e pela tensão última ( $\sigma_y \leq \sigma_s \leq \sigma_u$ ).

Considerando a condição de normalidade e um modelo de plasticidade associativa ( $F = f$ ), tem-se que

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \text{ se } \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}, \quad (3.82)$$

com  $\dot{\lambda} = \dot{p}(1 - D)$ .

Assim,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3 \tilde{\sigma}_{ij}^D}{2 \sigma_s} \dot{p} \text{ se } \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}. \quad (3.83)$$

Sabendo que

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{2E(1 - D)^2}, \quad (3.84)$$

então

$$\dot{D} = \frac{\sigma_s^2 R_v}{2ES} \dot{p} \text{ se } p \geq p_D, \quad (3.85)$$

Deve-se lembrar ainda que

$$f = 0 \Rightarrow \tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_s. \quad (3.86)$$

Eliminando-se  $\dot{p}$  nas equações para  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  e  $\dot{D}$ , chega-se a

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3ES}{\sigma_s^3} \frac{\sigma_{ij}^D}{(1-D)} \dot{D}, \quad (3.87)$$

explicitando a dependência direta de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  em relação a  $D$ . De fato, o efeito do dano sobre a deformação plástica, é equivalente a um encruamento isotrópico negativo ou amolecimento (*softening*) do material, no caso de se considerar um comportamento plástico ideal (Lemaitre, 1996).

Observa-se ainda que para plasticidade perfeita, o limiar de dano é dado por

$$\begin{cases} p_D = \varepsilon_{pD} \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\sigma_s - \sigma_f} \\ \text{ou} \\ p_D = \varepsilon_{pD} \text{ se } \sigma_s = \sigma_u. \end{cases} \quad (3.88)$$

Sabendo-se que

$$\tilde{\sigma}^* = \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)} R_v^{1/2} = \sigma_s R_v^{1/2}, \quad (3.89)$$

então o critério de ruptura é corrigido como se segue

$$\begin{cases} D_c = D_{1c} \frac{\sigma_u^2}{\sigma_s^2 R_v} \leq 1 \\ \text{ou} \\ D_c = \frac{D_{1c}}{R_v} \leq 1 \text{ se } \sigma_s = \sigma_u. \end{cases} \quad (3.90)$$

Finalmente, agrupando-se todas as relações deduzidas, tem-se o conjunto completo de equações constitutivas para a análise elastoplástica acoplada ao dano, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \\
\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{(1-D)} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{(1-D)} \delta_{ij}, \\
\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} \frac{3\bar{\sigma}_{ij}^D}{2\sigma_s} \dot{p} & \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \\ 0 & \text{se } f < 0 \end{cases}, \\
\dot{D} = \begin{cases} \frac{\sigma_s^2 R_v}{2ES} \dot{p} & \text{se } p \geq p_D, f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \\ 0 & \text{se } p < p_D \end{cases}, \\
p_D = \varepsilon_{pD} \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\sigma_s - \sigma_f}, \\
f = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_s \leq 0, \\
\dot{p} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{p}f = 0 \text{ (condições de Kuhn-Tucker)}, \\
\dot{p}\dot{f} = 0 \text{ se } f = 0 \text{ (condição de consistência)}.
\end{array} \right. \quad (3.91)$$

Os parâmetros do material necessários para a solução das equações são o módulo de Young  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$ , o limite de resistência à fadiga  $\sigma_f$ , o limite de escoamento  $\sigma_y$ , a tensão máxima de tração  $\sigma_u$ , o limite de plasticidade  $\sigma_s$ , a resistência ao dano  $S$ , o limiar de dano unidimensional  $\varepsilon_{pD}$  e o dano crítico unidimensional  $D_{1c}$ .

A determinação das propriedades do material pode ser efetuada através de ensaios de tração convencionais ou por um ensaio de fadiga de baixíssimo ciclo ( $N_R < 10^4$ ), conforme procedimento descrito em (Lemaitre e Doghri, 1994). Esses ensaios permitem determinar os valores para as propriedades requeridas, podendo ser visualizados através

da Figura 3.4.

Como pode ser observado, os valores de  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_u$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_f$  são facilmente obtidos em ensaios convencionais de tração monotônica ou cíclica, conforme demonstrado nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b). O limiar de dano unidimensional  $\varepsilon_{pD}$  caracteriza o valor de deformação plástica acumulada, a partir do qual inicia a ocorrência do dano. Esse valor de deformação corresponde à tensão última de tração  $\sigma_u$ , ver Figura 3.4(a).

O limite de escoamento modificado  $\sigma_s$  é ajustado de forma a aproximar melhor o comportamento do material na região da curva  $\sigma - \varepsilon$ , entre os valores  $\sigma_y$  e  $\sigma_u$  (ver Figura 3.4(a)). Essa região só é modelada corretamente se forem incluídos os fenômenos de encruamento no modelo. Por outro lado, conforme demonstrado em (Lemaitre e Doghri, 1994), é possível aproximar razoavelmente o comportamento do material nessa região se o valor de  $\sigma_s$  for aumentado progressivamente, à medida que o material acumula deformação plástica, até que a tensão última de tração  $\sigma_u$  seja atingida. Entretanto, a relação entre  $\sigma_s$  e a deformação deve ser conhecida previamente através de experimentos.

Através da Figura 3.4(c) é possível visualizar o significado da resistência ao dano  $S$  e do dano crítico unidimensional  $D_{1c}$ . Como pode ser observado, a relação entre  $D$  e  $p$  é dada por uma reta. O valor inicial de  $p$  corresponde a  $\varepsilon_{pD}$  ( $D = 0$ ) e o valor de dano no instante da ruptura corresponde  $D_{1c}$  ( $p = p_{\max}$ ). A inclinação da reta que relaciona  $D$  e  $p$  fornece o valor de  $S$ . Dessa forma,  $S$  representa a resistência que o material possui em se danificar em função da deformação plástica acumulada.

A Tabela 3.1 apresenta os valores dessas propriedades obtidas para alguns materiais à temperatura ambiente.

Com base no modelo constitutivo de material elastoplástico perfeito acoplado ao fenômeno de dano que foi definido nesse capítulo é possível modelar o comportamento de materiais em problemas estruturais envolvendo danificação, como fadiga por exemplo. O problema de valor de contorno de equilíbrio para um corpo sólido tridimensional utilizando esse modelo constitutivo dá origem a um problema não linear. A formulação para a solução numérica desse tipo de problema é feita com base no Método dos Elementos Finitos e será apresentada no próximo capítulo.

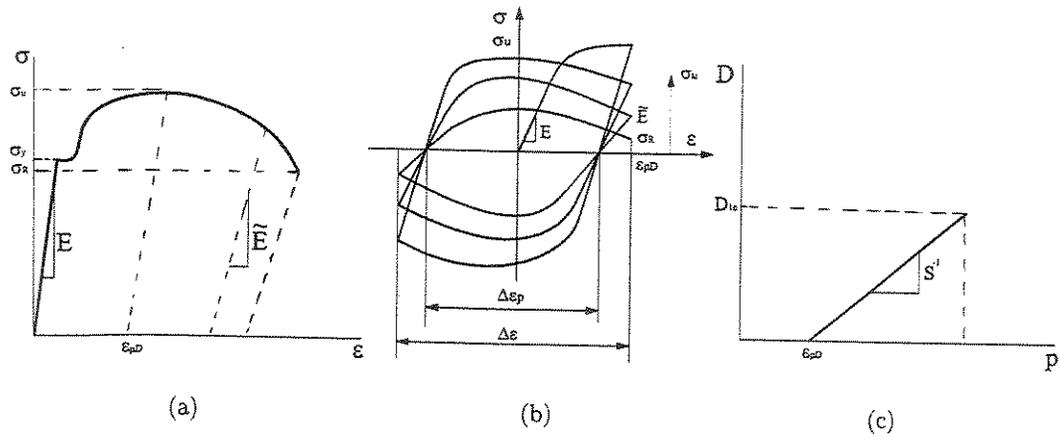


Figura 3.4: Determinação das propriedades do material para análise elastoplástica acoplada ao dano (Lemaitre e Doghri, 1994).

Material	$E$ MPa	$\nu$	$\sigma_f$ MPa	$\sigma_y$ MPa	$\sigma_u$ MPa	$S$ MPa	$\varepsilon_{pD}$	$D_{1c}$
Aço AISI 1010	190 000	0.28	200	320	700	2.4	0.44	0.20
Aço Inox AISI 316	200 000	0.30	180	260	700	7.0	0.10	0.15
Alumínio 2024	72 000	0.32	250	300	500	1.7	0.03	0.23
Cobre	100 000	0.33	100	190	300	0.40	0.35	0.85
Cerâmica	400 000	0.20	300	306	500	6.0	0.10	0.99
Concreto (tração)	30 000	0.20	1.5	2.5	3	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0	0.20

Tabela 3.1: Propriedades relacionadas ao dano para alguns materiais (Lemaitre, 1996).

## Capítulo 4

# Análise de Resposta Estrutural

No Capítulo 3 foi apresentada a descrição do modelo constitutivo para um material com comportamento elastoplástico, com base na mecânica do dano em meios contínuos. Neste capítulo será apresentado o método de aproximação da solução do problema de valor de contorno para o equilíbrio de um corpo tridimensional, com comportamento elastoplástico acoplado ao dano, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Será apresentado também o procedimento iterativo de integração das equações do modelo constitutivo utilizado.

### 4.1 Formulação Variacional para o Equilíbrio de um Corpo

Considera-se inicialmente um corpo tridimensional como sendo uma região do espaço euclidiano dada por  $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^3$ , conforme a Figura 4.1. Os pontos associados ao corpo  $\mathcal{B}$  são denotados por  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathcal{B}$ . O intervalo de tempo em questão é dado por  $[0, T] \subset \mathfrak{R}_+$ . Nesse caso, o campo de deslocamentos é dado pelo mapeamento

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^3. \quad (4.1)$$

Para o caso de pequenas deformações, tem-se que o campo tensorial de deformações é dado pela parte simétrica do gradiente de  $\mathbf{u}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] &\rightarrow Sym \\ (\mathbf{x}, t) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] = \nabla^s \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo  $Sym$  o espaço dos tensores simétricos.

O campo vetorial de velocidades é definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] &\rightarrow \mathfrak{R}^3 \\ (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Define-se também o campo tensorial de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] &\rightarrow Sym \\ (\mathbf{x}, t) \rightarrow \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os campos vetoriais para as forças externas de volume  $\mathbf{b}$  e de superfície  $\mathbf{t}$  são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^3 \quad (4.5)$$

e

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B} \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^3. \quad (4.6)$$

O contorno de  $\mathcal{B}$  é definido por  $\Gamma$ , tal que

$$\mathcal{B} = \Omega \cup \Gamma, \quad (4.7)$$

sendo  $\Omega$  a região interior de  $\mathcal{B}$ .

As condições de contorno de Dirichlet em  $\Gamma_u$  e de Neumann em  $\Gamma_\sigma$  são descritas, respectivamente, como

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.8)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\sigma} = \mathbf{t} \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.9)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o campo dos vetores normais a  $\Gamma_\sigma$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ .

No caso de problemas dinâmicos, definem-se as condições de contorno iniciais na forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

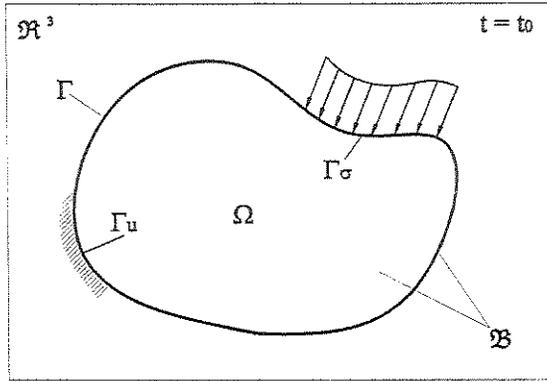


Figura 4.1: Corpo tridimensional.

e

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

em  $\mathcal{B}$ , as quais devem ser compatíveis, ou seja,

$$\mathbf{u}_0|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}|_{t=0} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{v}_0|_{\Gamma_u} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{u}}|_{t=0}. \quad (4.13)$$

Finalmente, as equações de equilíbrio são dadas por

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{em } \Omega \times ]0, T[ , \quad (4.14)$$

sendo  $\rho$  o campo escalar da massa específica de  $\mathcal{B}$  dada por

$$\rho = \rho(\mathbf{x}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{R}_+. \quad (4.15)$$

Associadas às condições de contorno, as equações de equilíbrio, define-se o Problema de Valor de Contorno com Condições Iniciais (PVCII), na forma forte, para o campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ , considerando o equilíbrio do corpo  $\mathcal{B}$ , em qualquer instante de tempo  $t \in [0, T]$ .

O campo de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  está relacionado implicitamente ao campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , através das equações constitutivas. Para materiais com comportamento não-linear, como no caso do modelo elastoplástico acoplado ao dano, a solução numérica aproximada não é trivial e seu procedimento será descrito a seguir.

Primeiramente, a integração das equações constitutivas depende da análise das condições de carregamento e descarregamento (condições de complementaridade e consistência) para se relacionar de forma correta  $\sigma$  e  $\varepsilon$ . Em segundo lugar, as variáveis de estado estão submetidas a restrições adicionais, definidas pelo critérios evolutivos e de escoamento adotados.

A solução numérica aproximada do problema de valor de contorno não-linear, sujeito à condições iniciais, será desenvolvida nos moldes definidos em (Benallal et al., 1988; Owen e Hinton, 1996; Simo e Hughes, 1998).

Para dar início ao procedimento de solução numérica para o PVCI, é necessário definir a sua forma integral, ou forma fraca, mais adequada à solução por elementos finitos.

A forma fraca do PVCI é dada como se segue. Define-se o conjunto solução para o campo de deslocamento como sendo o espaço vetorial linear dado por

$$\mathcal{S}_t = \left\{ \mathbf{u}(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}(\cdot, t)|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}(\cdot, t) \right\}. \quad (4.16)$$

Associado ao conjunto solução  $\mathcal{S}_t$ , define-se o espaço das funções teste, ou dos deslocamentos virtuais admissíveis, como sendo

$$\mathcal{V} = \left\{ \hat{\mathbf{u}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\}. \quad (4.17)$$

Admite-se que  $\mathcal{S}_t \subset \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$  e  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ , sendo que  $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$  denota um espaço de *Sobolev* de funções e primeiras derivadas do tipo quadrado integrável, de forma a satisfazer as exigências de continuidade da solução.

Dessa forma, pode-se enunciar o seguinte problema variacional, que é a forma fraca do PVCI, com base no Princípio das Potências Virtuais:

*Encontrar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{S}_t$ , tal que*

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma = 0, \quad (4.18)$$

para todo  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Pode ser demonstrado que a solução do problema variacional acima é única e equivalente ao PVCI (Simo e Hughes, 1998).

## 4.2 Aproximação do Problema de Valor de Contorno

### 4.2.1 Discretização Espacial. Aproximação por Elementos Finitos

A solução analítica para o PPCI (4.14) é somente viável em problemas com a geometria do domínio  $\mathcal{B}$  e as condições de contorno muito simples. O objetivo central é determinar uma solução aproximada para  $\mathbf{u}(\cdot, t)$ , de forma que as equações constitutivas e as condições de equilíbrio sejam satisfeitas  $\forall t \in [0, T]$ .

Uma das formas mais simples de construir um espaço de aproximação  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  é escrever  $\hat{\mathbf{u}}$ , da seguinte maneira

$$\hat{\mathbf{u}} \simeq \hat{\mathbf{u}}^h \in \mathcal{V}^h \Rightarrow \hat{u}_l^h = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \hat{u}_l^j, \quad l = 1, 2, 3, \quad (4.19)$$

sendo  $N_j(\mathbf{x})$  as funções de base,  $\hat{u}_l^j$  os coeficientes de interpolação a serem determinados e  $n$  o número de funções de base utilizadas. Matricialmente, pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1^h(\mathbf{x}) \\ \hat{u}_2^h(\mathbf{x}) \\ \hat{u}_3^h(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_j(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_j(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^j \\ \hat{u}_2^j \\ \hat{u}_3^j \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

Se for usado o mesmo espaço de aproximação dos deslocamentos virtuais  $\hat{\mathbf{u}}$  para aproximar a solução  $\mathbf{u}$  do problema (método de Galerkin), tem-se que

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \Rightarrow u_l^h = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) u_l^i, \quad l = 1, 2, 3. \quad (4.21)$$

Substituindo essas expressões na forma variacional (4.18) do PPCI, desconsiderando-se os efeitos dinâmicos e admitindo-se deslocamentos virtuais arbitrários, obtém-se, na forma matricial, para  $j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega} [\nabla^s N_j]^T \{ \boldsymbol{\sigma}^h \} d\Omega - \rho \int_{\Omega} [N_j] \{ \mathbf{b} \} d\Omega - \int_{\Gamma} [N_j] \{ \mathbf{t} \} d\Gamma = 0 \right\}, \quad (4.22)$$

sendo  $\{ \boldsymbol{\sigma}^h \} = \{ \boldsymbol{\sigma}^h (N_i(\mathbf{x}) u_l^i) \} = \{ \sigma_{11}^h \ \sigma_{22}^h \ \sigma_{33}^h \ \sigma_{12}^h \ \sigma_{13}^h \ \sigma_{23}^h \}^T$ , com  $l = 1, 2, 3$ .

Reescrevendo, numa forma matricial compacta, tem-se que

$$\{ \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}^h) \} = \{ \mathbf{F}^{ext}(\rho, \mathbf{b}, \mathbf{t}) \}. \quad (4.23)$$

Na expressão anterior,  $\mathbf{F}^{int}$  é o vetor global das forças internas dado por

$$\{\mathbf{F}^{int}\} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \{\sigma^n\} d\Omega, \quad (4.24)$$

com

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

ou seja,  $[\mathbf{B}] = [\nabla^s N_j] = [\mathbf{L}] [N_j]$  é a matriz para o gradiente das funções de forma.

Analogamente,  $\mathbf{F}^{ext}$  é o vetor global das forças externas, ou seja,

$$\{\mathbf{F}^{ext}\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \rho \int_{\Omega} [N_j] \{\mathbf{b}\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N_j] \{\mathbf{t}\} d\Gamma \right\}, \quad (4.26)$$

Devido à relação não-linear entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , a equação matricial (4.23) forma um sistema de equações não-lineares, nos quais as incógnitas são os coeficientes  $u_i^j$  da aproximação de  $\mathbf{u}$ .

Considera-se agora uma discretização do domínio  $\mathcal{B}$  em subdomínios não sobrepostos, ou elementos finitos, da seguinte forma

$$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{B}_e, \quad (4.27)$$

sendo  $n_{el}$  um número inteiro, correspondendo ao número de elementos da discretização.

Utilizando funções de base ou de forma  $[N_j]$ , polinomiais, contínuas e diferenciáveis por partes, é possível escrever agora as expressões para os vetores de forças interna e externa localmente em cada elemento  $\mathcal{B}_e$  da discretização, ou seja,

$$\{\mathbf{f}_e^{int}\} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^e]^T \{\sigma^n\} d\Omega_e \quad (4.28)$$

e

$$\{\mathbf{f}_e^{ext}\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega_e} [N_j^e] \rho \{\mathbf{b}\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [N_j^e] \{\mathbf{t}\} d\Gamma_e \right\}, \quad (4.29)$$

sendo  $N$  o número de nós definidos em cada elemento.

Somando-se a contribuição de cada elemento sobre os vetores globais, tem-se que

$$\begin{cases} \{\mathbf{F}^{int}\} = A_{e=1}^{n_{ei}} \{\mathbf{f}_e^{int}\} \\ \{\mathbf{F}^{ext}\} = A_{e=1}^{n_{ei}} \{\mathbf{f}_e^{ext}\} \end{cases}, \quad (4.30)$$

sendo  $A$  o operador padrão de montagem para os vetores e matrizes globais (Simo e Hughes, 1998). Os vetores de forças interna e externa locais normalmente são calculados através de métodos de integração numérica.

#### 4.2.2 Discretização Temporal. Procedimento Incremental Iterativo.

O significado de *discretização temporal* empregado aqui está associado ao caso mais geral para a solução do problema de equilíbrio, com carregamentos variando no tempo. O intervalo de interesse não necessariamente está relacionado a um intervalo de tempo com significado físico. No caso de carregamentos estáticos, por exemplo, assume-se que o carregamento total sobre a estrutura é *equivalente* à aplicação paulatina de carregamentos menores, até que o valor máximo da carga seja atingido, respeitando o equilíbrio em cada incremento do carregamento. Nesse caso, o intervalo de tempo em questão refere-se apenas aos *instantes fictícios* entre a aplicação de incrementos de carregamentos sucessivos.

No caso de serem desconsiderados os efeitos dinâmicos (inércia, impacto, etc.), o carregamento pode ser considerado *quase-estático*, sendo possível desenvolver um método iterativo ou de *carregamento incremental*, de forma a obter uma melhor aproximação do problema de equilíbrio não-linear.

Seja  $[0, T]$  o intervalo de tempo de interesse. Considera-se a partição

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}], \quad (4.31)$$

como sendo os incrementos de tempo ou passos de carregamento.

Assume-se que o corpo está equilibrado em cada  $t = t_n$ . O campo de tensões  $\sigma_n^h$  deve satisfazer o equilíbrio, ou seja,

$$\mathbf{F}^{int}(\sigma_n^h) - \mathbf{F}_n^{ext} = \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

O campo de deslocamentos no instante  $t_n$  é  $\mathbf{u}_n^h \in \mathcal{V}^h$ .

Considera-se agora um carregamento incremental  $(\Delta \mathbf{b}, \Delta \mathbf{t})$ , de forma que

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n + \Delta \mathbf{b} \quad (4.33)$$

e

$$\mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_n + \Delta \mathbf{t} \quad (4.34)$$

representam o carregamento no instante  $t_{n+1}$ , caracterizando o vetor de carregamento externo  $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}$ .

O problema agora resume-se em:

*Encontrar  $\Delta \mathbf{u}_n^h \in \mathcal{V}^h$ , o campo de deslocamentos atualizado  $\mathbf{u}_{n+1}^h = \mathbf{u}_n^h + \Delta \mathbf{u}_n^h$ , as variáveis de estado atualizadas e o campo de tensões, satisfazendo, simultaneamente:*

1. as equações de equilíbrio no instante  $t_{n+1}$  e
2. as equações constitutivas na sua forma discreta.

Com o objetivo de simplificar a notação, o sobrescrito “ $h$ ” será omitido nas próximas seções.

A solução do problema acima, por se tratar de equações não-lineares, deve ser obtida de maneira iterativa, até que as condições 1 e 2 sejam satisfeitas, com base em um critério de convergência pré-determinado.

Seja  $(\cdot)^k$  o valor da variável  $(\cdot)$  na  $k$ -ésima iteração do passo de carregamento. Dessa forma, o procedimento iterativo para a solução do problema, segue os seguintes passos:

- i. sendo  $\Delta \mathbf{d}^k$  o incremento para o vetor de deslocamento nodal na  $k$ -ésima iteração, tem-se que o deslocamento nodal total é

$$\mathbf{d}_{n+1}^k = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}^k. \quad (4.35)$$

O campo de deformações, associado a  $\mathbf{d}_{n+1}^k$ , para um elemento  $\mathcal{B}_e$  da discretização é dado por

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k \Big|_{\mathcal{B}_e} \right\} = [\mathbf{B}^e] \left\{ (\mathbf{d}^e)_{n+1}^k \Big|_{\mathcal{B}_e} \right\}, \quad (4.36)$$

sendo  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23}\}^T$ ;

- ii. dado o campo de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k$ , para cada elemento  $\mathcal{B}_e$ , calcula-se o campo de tensões  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k$  através das equações constitutivas;
- iii. calcula-se o valor de  $\mathbf{f}_e^{int}$  e soma-se a contribuição de cada elemento sobre o valor do vetor global das forças internas  $\mathbf{F}^{int}$ ;
- iv. checka-se a convergência. Se o equilíbrio e as equações constitutivas forem satisfeitos, então  $(\cdot)_{n+1}^k$  é solução do problema. Caso contrário, determina-se  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$ , atualiza-se o valor de  $k$  ( $k \leftarrow k + 1$ ) e inicia-se uma nova iteração (passo i).

A grande dificuldade encontrada no algoritmo anterior é a determinação de  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$  (passo iv). Uma das maneiras possíveis é expandir linearmente  $\mathbf{f}_e^{int}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)$  em torno de  $\mathbf{d}_{n+1}^k$ , ou seja,

$$\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}) \simeq \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \nabla \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k) \Delta \mathbf{d}^{k+1}. \quad (4.37)$$

Considerando que o operador de montagem  $\mathbf{A}$  é linear e usando a regra da cadeia, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}^{k+1} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{ei}} \frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}^e|_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}^e|_{n+1}^{k+1} \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{ei}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^e)^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{d}^e|_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}^e|_{n+1}^{k+1} d\Omega_e \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{ei}} \left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^e)^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k} \right] \mathbf{B}^e d\Omega_e \right] \Delta \mathbf{d}^e|_{n+1}^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Define-se a *matriz de rigidez tangente local* para o elemento  $\mathcal{B}_e$  como sendo

$$\mathbf{k}^e|_{n+1}^k = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k} \right] \mathbf{B}^e d\Omega_e. \quad (4.39)$$

Realizando esse procedimento de maneira global, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta \mathbf{d}^{k+1}, \quad (4.40)$$

sendo  $\mathbf{K}_{n+1}^k$  a *matriz de rigidez tangente global*, dada por

$$\mathbf{K}_{n+1}^k = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{ei}} \mathbf{k}^e|_{n+1}^k, \quad (4.41)$$

definida no instante  $t_{n+1}$  e na iteração  $k$ .

Estima-se agora  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$ , através do equilíbrio, fazendo a seguinte aproximação

$$\left[ \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} \right] + \frac{\partial \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}^{k+1} \simeq \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

ou, de forma mais simplificada,

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = [\mathbf{K}_{n+1}^k]^{-1} [\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)]. \quad (4.43)$$

Nessa equação, considerando que o termo  $\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k$  pode ser calculado, a única incógnita é  $\Delta \mathbf{d}^{k+1}$ . Utilizando essa equação, associada ao método iterativo (passos i-iv), tem-se um procedimento equivalente à forma clássica do método de solução iterativa de Newton para sistemas não-lineares.

O termo

$$(\mathbf{C}^{ep})_{n+1}^k = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k} \quad (4.44)$$

é denominado *operador tangente consistente*, representando uma aproximação para  $\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  na iteração  $k$  e no instante  $t_{n+1}$ . A forma explícita para o cálculo de  $(\mathbf{C}^{ep})_{n+1}^k$  está associada à integração das equações constitutivas, conforme será visto na próxima seção.

## 4.3 Procedimento de Integração das Equações Constitutivas

### 4.3.1 Equações Globais de Equilíbrio

Conforme foi visto na seção anterior, no contexto de aproximação por elementos finitos, assumindo pequenas deformações, as equações de equilíbrio podem ser escritas como se segue

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0}, \quad (4.45)$$

para o instante  $t_{n+1}$ .

Sabe-se que  $\sigma_{n+1}$  depende implicitamente dos deslocamentos nodais  $\mathbf{d}_{n+1}$ , de forma que pode-se escrever

$$\Psi(\mathbf{d}_{n+1}) = 0. \quad (4.46)$$

Resolvendo este problema não-linear iterativamente pelo método de Newton, em cada iteração  $k$ , tem-se que

$$\Psi(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta \mathbf{d}^{k+1} = 0, \quad (4.47)$$

sendo  $\Delta \mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{d}_{n+1}^k$ ,

$$\mathbf{K}_{n+1}^k = \frac{\partial \Psi(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\mathbf{C}^{epD})_{n+1}^k \mathbf{B} d\Omega, \quad (4.48)$$

com  $(\mathbf{C}^{epD})_{n+1}^k$  o operador tangente consistente para o modelo elastoplástico acoplado ao dano e  $\mathbf{B}$  a matriz do gradiente das funções de forma.

Em cada incremento de tempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , ou passo de carregamento, para a iteração inicial ( $k = 0$ ), assume-se que

$$\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n \quad \text{e} \quad (\mathbf{C}^{epD})_{n+1}^0 = (1 - D_n) \mathbf{C}, \quad (4.49)$$

sendo  $D_n$  o valor do dano no instante  $t_n$  e  $\mathbf{C}$  a matriz para o tensor de elasticidade.

Uma vez que  $\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}$  é conhecido, então

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{k+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{B}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{d}_n), \quad (4.50)$$

de maneira que o algoritmo está completamente descrito, sendo que  $(\mathbf{C}^{epD})_{n+1}^k$  é calculado após a integração local das equações constitutivas.

### 4.3.2 Integração Local das Equações Constitutivas

O método utilizado para a integração das equações constitutivas consiste de um *algoritmo dirigido pela deformação (strain driven algorithm)*. Em cada iteração  $k$  do passo do carregamento, obtém-se um incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , a partir do qual devem ser obtidas as outras variáveis de estado para o material, em cada ponto de integração dos elementos da discretização. No instante  $t_n$  são conhecidos os valores da tensão e das outras variáveis para o material. Ao final do passo de carregamento (instante  $t_{n+1}$ ), todos os parâmetros do material são atualizados. O procedimento numérico é derivado em uma

forma analítica fechada, conforme (Lemaitre e Doghri, 1994).

Inicialmente, assume-se que o incremento  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  é inteiramente elástico, ou seja,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.51)$$

sendo  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$ , de forma que

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \\ &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \mathbf{I} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ &= \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)] \mathbf{I} + 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)] \\ &= \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p] \mathbf{I} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Como o processo de deformação plástica ocorre a volume constante ( $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \text{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$ ), tem-se que

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \mathbf{I} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (4.53)$$

sendo  $\lambda$  e  $\mu$  os coeficientes de Lamé, dados por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.54)$$

Se o valor de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}$  (*trial elastic state*, estimador elástico) satisfaz a condição de escoamento  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ , então a hipótese elástica é válida e o cálculo é finalizado. Todas as outras variáveis, associadas ao modelo elastoplástico com dano, são mantidas com seus valores no instante  $t_n$ . Caso  $f_{n+1}^{trial} > 0$ , o estado elástico do material deve ser corrigido, de forma a se obter o estado plástico equivalente, no instante  $t_{n+1}$ .

Para isso, as leis de evolução para  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e  $D$  são discretizadas conforme o procedimento de integração *completamente implícito*, apresentando a vantagem de ser incondicionalmente estável (Ortiz e Popov, 1985; Simo e Hughes, 1998). Dessa forma,

$$\Delta D = \frac{\sigma_s^2 R_v}{2ES} \Delta p \quad \text{e} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{N} \Delta p, \quad (4.55)$$

sendo

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma}_{eq})_{n+1}}. \quad (4.56)$$

A solução no instante  $t_{n+1}$  deve satisfazer o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f_{n+1} = (\bar{\sigma}_{eq})_{n+1} - \sigma_s = 0 \\ \mathbf{H} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \mathbf{I} - 2\mu [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)] = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Substituindo a expressão discreta para  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  no sistema acima, tem-se que

$$\begin{cases} f_{n+1} = (\bar{\sigma}_{eq})_{n+1} - \sigma_s = 0 \\ \mathbf{H} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \mathbf{I} - 2\mu [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \mathbf{N} \Delta p] = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

tendo como incógnitas  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  e  $p_{n+1}$ .

Esse sistema de equações é não linear, devendo ser resolvido iterativamente pelo método de Newton. Para cada iteração  $r$ , tem-se que

$$\begin{cases} f_{n+1} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \cdot \mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = 0 \\ \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_{n+1}} C_p = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

sendo que

$$\mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{r+1} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^r \quad \text{e} \quad C_p = p_{n+1}^{r+1} - p_{n+1}^r \quad (4.60)$$

são as *correções plásticas* para  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $p$ , tendo como valores de entrada para a iteração inicial ( $r = 0$ ), obtidos através do estimador elástico.

O sistema de equações (4.59) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} f_{n+1} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = 0 \\ \mathbf{H} + \left[ \bar{\mathbf{\Pi}} + 2\mu \Delta p \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \right] \mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathbf{N} C_p = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

sendo  $\bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{\Pi}}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  o tensor identidade de quarta ordem.

Sabendo-se que (Lemaitre e Doghri, 1994)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \frac{3}{2} \\ \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = \frac{1}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \left[ \frac{3}{2} \left( \bar{\boldsymbol{\Pi}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \end{array} \right. \quad (4.62)$$

é possível obter uma forma explícita para  $C_p$ , dada por

$$C_p = \frac{f_{n+1} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}}{3\mu}. \quad (4.63)$$

O operador  $\otimes$  denota o produto tensorial, ou seja, para dois tensores de segunda ordem  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , o produto resulta em um tensor de quarta ordem  $\mathbf{C}$ , da seguinte maneira

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}. \quad (4.64)$$

Já para  $\mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ , tem-se que

$$\mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{2}{3} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H} - f_{n+1}) \mathbf{N} - \frac{1}{1 + \frac{3\mu}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \Delta p} \left[ \mathbf{H} + \frac{2\mu (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{N} \Delta p}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \right]. \quad (4.65)$$

O cálculo de  $\mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$  e  $C_p$  é feito de modo iterativo. Para a iteração inicial,  $r = 0$ , calcula-se  $\mathbf{C}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$  e  $C_p$  com base na estimativa elástica, considerando  $\Delta p = 0$  ( $p_{n+1} = p_n$ ). Os valores de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ ,  $p_{n+1}$ ,  $f_{n+1}$  e  $\mathbf{H}$  são atualizados iterativamente, até que seja atingida uma precisão requerida ( $\|f_{n+1}\| \leq \xi$  e  $\|\mathbf{H}\| \leq \xi$ ) ou o número de iterações chegue ao valor máximo permitido.

Após serem encontrados os valores corrigidos de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  e  $p_{n+1}$ , no instante  $t_{n+1}$ , calculam-se os valores respectivos para  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$  e  $D_{n+1}$  através de suas equações discretas (4.55). O valor de  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  é calculado como  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ . Deve-se lembrar que, se  $p_{n+1} < p_D$ , então  $D_{n+1} = D_n$ .

A grande vantagem desse método é que a integração das equações constitutivas pode ser resolvida de forma explícita. Não é necessário resolver um sistema de equações adicional e as incógnitas (correções plásticas) são obtidas iterativamente (Lemaitre e Doghri, 1994).

Além do mais, esse método também pode ser aplicado para o caso de se considerar

o encruamento (cinemático e isotrópico), acoplados ou não ao dano. Isso o torna mais simples e eficiente do que o método geral de integração dado em (Benallal et al., 1988), que envolve a solução de um sistema de equações não lineares para a integração das equações constitutivas.

### 4.3.3 Operador Tangente Consistente

No modelo geral de plasticidade (Simo e Hughes, 1998), define-se o conceito de *módulo tangente elastoplástico contínuo*  $\mathbf{C}^{ep}$ , representando o fator de proporcionalidade entre as taxas  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Para um material com comportamento elástico, tem-se que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.66)$$

Já para o caso de haver deformações plásticas, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.67)$$

O tensor de elasticidade  $\mathbf{C}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\overline{\mathbf{I}}. \quad (4.68)$$

Considerando um modelo de plasticidade perfeita, a expressão do módulo tangente elastoplástico é dada por (Simo e Hughes, 1998)

$$\mathbf{C}^{ep} = \kappa\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left[ \overline{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right], \text{ se } f = 0, \quad (4.69)$$

sendo

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (4.70)$$

o *módulo global* (coeficiente de expansão hidrostática).

O tensor  $\mathbf{n}$  representa o *campo normal* à superfície de escoamento, definido como

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma\mathbf{n}, \quad (4.71)$$

sendo  $\gamma$  um escalar, representando o multiplicador de plasticidade.

No caso de um modelo de plasticidade perfeita acoplada ao dano, considerando o conceito de tensão efetiva e o princípio de equivalência de deformações, tem-se

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})' = \mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)\mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{epD}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.72)$$

relacionando  $(\bar{\sigma})'$  e  $\dot{\varepsilon}$ . A taxa de deformação plástica é dada por

$$\dot{\varepsilon}^p = \mathbf{n}\dot{\lambda} = \mathbf{n}\dot{p}(1 - D), \quad (4.73)$$

com  $\mathbf{n}$  agora dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3 \bar{\sigma}_{ij}^D}{2 \bar{\sigma}_{eq} (1 - D)} \mathbf{1}. \quad (4.74)$$

Assim, relacionando  $\dot{\sigma}$  e  $\dot{\varepsilon}$ , incluindo o efeito do dano através do conceito de tensão efetiva e da equivalência de deformações, tem-se

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{epD} \dot{\varepsilon} \Rightarrow \mathbf{C}^{epD} = \begin{cases} (1 - D) \mathbf{C} & \text{se } f < 0 \\ (1 - D) \mathbf{C}^{ep} & \text{se } f = 0 \end{cases}. \quad (4.75)$$

Observa-se que  $\mathbf{C}^{epD}$  representa uma *taxa de variação* contínua entre  $\dot{\sigma}$  e  $\dot{\varepsilon}$ . Isso significa que seu cálculo só é válido no limite, quando os incrementos diferenciais  $d\sigma$  e  $d\varepsilon$  tendem a zero. No caso de integração numérica das equações constitutivas, o cálculo é feito com base em incrementos finitos  $\Delta\sigma$  e  $\Delta\varepsilon$  dependentes do passo de carregamento.

Dessa forma, é necessário obter uma expressão para  $\mathbf{C}^{epD}$ , consistente com a integração numérica do modelo constitutivo, de forma a garantir uma taxa de convergência quadrática para a solução do sistema de equações global, pelo método de Newton. É nesse contexto que se define o *operador tangente consistente* ou *módulo tangente elastoplástico algoritmico*. O seu conceito foi introduzido inicialmente por Simo e Taylor em 1986 (Simo e Hughes, 1998).

O cálculo de  $\mathbf{C}^{ep}$ , no instante  $t_{n+1}$ , é feito tomando-se uma variação linear da solução para  $\sigma_{n+1}$  em torno de  $\varepsilon_{n+1}$ . Considerando a derivação da expressão algoritmica para  $\bar{\sigma}_{n+1}$ , dada por

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}\varepsilon_{n+1}^e = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) + 2\mu(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \mathbf{N}\Delta p), \quad (4.76)$$

tem-se que

$$\delta\bar{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}\delta\varepsilon_{n+1} + 2\mu(\delta\Delta p\mathbf{N} + \Delta p\delta\mathbf{N}) = \mathbf{C}_{n+1}^{ep}\delta\varepsilon_{n+1}. \quad (4.77)$$

Lembrando-se que

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^D}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \mathbf{1}$$

e

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\sigma}_{n+1}^D\|,$$

então,

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^D}{\|\tilde{\sigma}_{n+1}^D\|}. \quad (4.78)$$

Dessa forma, para um material elastoplástico perfeito acoplado ao dano, obtém-se, a partir da dedução apresentada em (Simo e Hughes, 1998)

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\theta_{n+1} \left[ \overline{\mathbf{II}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] & \text{se } f_{n+1} = 0 \\ \theta_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2\mu\Delta p}{\|\tilde{\sigma}_{n+1}^D\|} \end{cases}, \quad (4.79)$$

relacionando  $\delta\tilde{\sigma}_{n+1}$  e  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ .

Usando-se a definição de  $\tilde{\sigma}_{eq}$ , pode-se reescrever a equação anterior como

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\theta_{n+1} \left[ \overline{\mathbf{II}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] & \text{se } f_{n+1} = 0 \\ \theta_{n+1} = 1 - \frac{3\mu\Delta p}{(\tilde{\sigma}_{eq})_{n+1}} \end{cases}. \quad (4.80)$$

Assim, a relação entre  $\delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  é dada por

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{epD} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \quad (4.81)$$

sendo

$$\mathbf{C}_{n+1}^{epD} = \begin{cases} (1 - D_{n+1}) \mathbf{C} & \text{se } f_{n+1} < 0 \\ (1 - D_{n+1}) \mathbf{C}_{n+1}^{ep} & \text{se } f_{n+1} = 0 \end{cases}. \quad (4.82)$$

Observa-se que essa expressão permite corrigir o valor de  $\mathbf{C}_{n+1}^{epD}$  em função de  $\Delta p$ , que depende diretamente do passo de carregamento escolhido. Analisando a expressão de  $\mathbf{C}_{n+1}^{epD}$ , observa-se que

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \mathbf{C}_{n+1}^{epD} = \mathbf{C}^{epD}. \quad (4.83)$$

Dessa forma, o cálculo de  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep}$  é feito de maneira consistente com a integração das equações constitutivas.

Nota-se ainda que, o uso do módulo elastoplástico contínuo, ao invés do operador

tangente consistente, não altera de maneira significativa a precisão da solução numérica. Entretanto, a convergência do método iterativo de solução (método de Newton) para o sistema de equações de equilíbrio global pode ser reduzida, especialmente para grandes incrementos de carregamento (valores muito grandes de  $\Delta p$ ), nos quais os termos de segunda ordem da aproximação não podem ser desconsiderados (Benallal et al., 1988).

Da maneira que foi definido nessa seção, o cálculo de  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep}$  só é válido para os casos tridimensional, deformação plana ou tensão axissimétrica. A formulação para o estado plano de tensões deve seguir um procedimento específico, conforme demonstrado por Simo e Hughes (Simo e Hughes, 1998).

## 4.4 Algoritmos de Solução para a Análise de Resposta

A seguir, tem-se um resumo dos passos para a solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio global, através do método de Newton, e para a integração das equações constitutivas.

Considera-se uma partição do intervalo de tempo de interesse, dada por

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$$

e um incremento de tempo como sendo  $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ . Admite-se que, para um dado incremento de tempo  $I_n$ , todas as variáveis são conhecidas no instante  $t_n$ .

Assim, para a solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio global, repetir os passos de i a vi, iniciando em  $t = 0$ , até que todas as variáveis sejam conhecidas no instante  $t = T$ .

- i. Calcular o incremento do carregamento e o vetor das forças externas

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n + \Delta \mathbf{b}, \quad \mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_n + \Delta \mathbf{t} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \mathbf{F}(\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{t}_{n+1}) .$$

- ii. Calcular o vetor das forças internas, com base nas variáveis dadas no instante  $t_n$  e iniciar a solução iterativa para os deslocamentos ( $k = 0$ ).

- iii. Calcular o incremento do deslocamento  ${}^{k+1}\Delta\mathbf{u}$ , sendo  ${}^{k+1}\Delta(\cdot) = {}^{k+1}(\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$ , através do sistema de equações

$${}^{k+1}\Delta\mathbf{u} = {}^k\mathbf{K}_{n+1}^{-1} \left( \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - {}^k\mathbf{F}_{n+1}^{int} \right).$$

- iv. Atualizar as variáveis de estado  ${}^{k+1}\mathbf{V}_{n+1}$  (integração das equações constitutivas), o módulo tangente elastoplástico  ${}^{k+1}\mathbf{C}_{n+1}^{epD}$  e a matriz de rigidez tangente  ${}^{k+1}\mathbf{K}_{n+1}$ .
- v. Calcular o novo vetor das forças internas  ${}^{k+1}\mathbf{F}_{n+1}^{int}$ , com base nas variáveis internas atualizadas.
- vi. Fazer  $k = k + 1$  e checar a convergência ( $\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - {}^k\mathbf{F}_{n+1}^{int} \leq \xi$  ou  $k = k_{\max}$ ). Se o critério de convergência foi atingido, fazer  $n = n + 1$  e iniciar um novo passo de carregamento (passo i). Caso contrário, retornar ao passo iii.

Para a integração das equações constitutivas, os seguintes passos devem ser seguidos:

- i. Dado um incremento de deformação  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , assume-se inicialmente que o passo é inteiramente elástico ( $\Delta\varepsilon^p = 0$ ). Assim,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \mathbf{I} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$$

- ii. Se  $f_{n+1} \leq 0$ , então a estimativa elástica está correta e todas as outras variáveis são atualizadas com seus respectivos valores no instante  $t_n$ , ou seja,

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \\ p_{n+1} = p_n \\ D_{n+1} = D_n \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_n) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \end{cases}.$$

Caso contrário ( $f_{n+1} > 0$ ), deve-se calcular as correções plásticas para as variáveis. Ir para o passo iii ( $r = 0$ ).

iii. Calcular as correções plásticas para  $\sigma_{n+1}$  e  $p_{n+1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = \frac{f_{n+1} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}}{3\mu} \\ C_{\bar{\sigma}} = \frac{2}{3} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H} - f_{n+1}) \mathbf{N} - \frac{1}{1 + \frac{3\mu}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \Delta p} \left[ \mathbf{H} + \frac{2\mu (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{N} \Delta p}{(\bar{\sigma}_{eq})_{n+1}} \right] \\ \sigma_{n+1}^{r+1} = \sigma_{n+1}^r + C_{\bar{\sigma}} \\ p_{n+1}^{r+1} = p_{n+1}^r + C_p \end{array} \right.$$

iv. Fazer  $r = r+1$ , atualizar  $\mathbf{H}$  e  $f_{n+1}$  checar a convergência ( $(\|f_{n+1}\| \leq \xi$  e  $\|\mathbf{H}\| \leq \xi)$  ou  $r = r_{\max}$ ). Caso a convergência não seja atingida, retornar ao passo iii. Caso contrário, atualizar  $\epsilon_{n+1}^p$ ,  $D_{n+1}$  e  $\sigma_{n+1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{n+1}^p = \mathbf{N} \Delta p \\ D_{n+1} = \frac{\sigma_s^2 R_v}{2ES} \Delta p \\ \sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \bar{\sigma}_{n+1} \end{array} \right.$$

e finalizar o processo de integração.

# Capítulo 5

## Estudo de Casos

Neste capítulo, apresentam-se inicialmente os estudos realizados com a implementação da integração local modelo constitutivo de material elastoplástico acoplado ao dano. Em seguida, como exemplo de aplicação do modelo, são apresentados os resultados da análise estrutural de um componente submetido a fadiga, obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos.

### 5.1 Estudos com o Modelo de Material Elastoplástico Acoplado ao Dano

Após a implementação da integração local das equações constitutivas para o modelo de material, foram realizados alguns estudos visando a validação numérica e ressaltar as principais características do modelo empregado. Os estudos foram conduzidos com base nos exemplos descritos no trabalho de Lemaitre e Doghri (Lemaitre e Doghri, 1994).

O primeiro exemplo trata-se de um problema de fadiga de baixo ciclo para um ponto material submetido a um carregamento com amplitude de deformação controlada em  $\Delta\varepsilon_{xx} = 7\%$ . O estado de deformação no ponto é considerado como de tração pura (estado triaxial de deformações), de forma que  $\Delta\varepsilon_{yy} = \Delta\varepsilon_{zz} = -\nu\Delta\varepsilon_{xx}$ . O material considerado é uma liga de alumínio e suas propriedades estão descritas na Tabela 5.1.

$E$	$\nu$	$\sigma_y$	$\sigma_s$	$\sigma_f$	$\sigma_u$	$S$	$\varepsilon_{pD}$	$D_{1c}$
MPa		MPa	MPa	MPa	MPa	MPa		
72000	0,32	306	440	303	500	6	0,1	0,99

Tabela 5.1: Propriedades do material utilizado para a validação do modelo de dano.

Observa-se que a implementação do modelo apresentada em (Lemaitre e Doghri, 1994) é baseada na análise de dano *localmente acoplada*. Nesse caso, a forma geral do modelo constitutivo não é alterada. Entretanto, o cálculo do limiar de dano  $p_D$  é considerado em microescala, de maneira que o valor do limite de fadiga deve ser modificado para  $\sigma'_f = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y}$ . Já o cálculo das outras variáveis permanece inalterado. Os resultados para a validação do modelo de dano foram obtidos com base nessas considerações e estão ilustrados na Figura 5.1. A Tabela 5.2 apresenta os resultados para as variáveis internas, ao final de cada ciclo de carregamento.

A avaliação da precisão numérica dos resultados não foi possível de ser realizada pelo fato de os resultados apresentados na literatura estarem disponíveis apenas na forma de gráficos. Além do mais, não há na literatura consultada informações sobre o número de passos de carregamento utilizados na obtenção desses resultados.

Apesar desse fato, observou-se que o comportamento global para evolução das variáveis, ao longo dos ciclos de carregamento, é fiel aos apresentados na literatura. Com base nos gráficos disponíveis em (Lemaitre e Doghri, 1994), observa-se que o valor do dano  $D$  e o valor da deformação plástica acumulada  $p$ , ao final do oitavo ciclo de carregamento, apresentam diferenças a partir da terceira casa decimal em relação aos resultados aqui apresentados.

A Figura 5.1(a) ilustra os ciclos de deformação aplicados ao ponto material, considerando a componente  $\varepsilon_{xx}$ . Nesse exemplo, verifica-se que o valor do dano  $D$  permanece nulo, até que o valor da deformação plástica acumulada  $p$  ultrapasse o limiar de dano  $p_D$ . Nesse caso,  $D > 0$  quando  $p = 0,14099$ , na metade do segundo ciclo de carregamento, conforme esperado. Esse resultado pode ser observado na Figura 5.1(b).

O valor da máxima tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{eq}$  permanece constante em

440 MPa ( $\sigma_{eq} = \bar{\sigma}_{eq} = \sigma_s$ ) até que o limiar de dano seja alcançado e o valor de  $D$  comece a ser acumulado. A partir desse instante, o valor de  $\sigma_{eq}$  começa a se reduzir ( $\sigma_{eq} = \bar{\sigma}_{eq}(1 - D)$ ), caracterizando o amolecimento do material (*strain softening*) devido ao fenômeno do dano. Esse comportamento pode ser observado através da Figura 5.1(c).

O diagrama de tensão-deformação cíclica para esse exemplo está ilustrado na Figura 5.1(d). Pode-se observar a coerência em relação ao modelo elastoplástico perfeito, pois os laços de histerese mantêm-se centrados na origem do sistema de referência, o que indica ausência de encruamento cinemático. O efeito do dano pode ser observado através do “giro para direita” dos laços de histerese em relação ao eixo perpendicular ao plano contendo o sistema de referência.

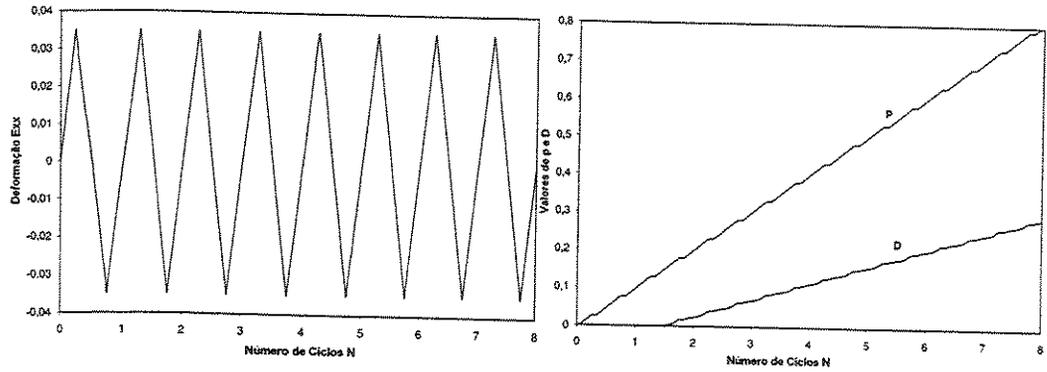
Esse fato indica a redução do valor absoluto da tensão máxima  $\sigma_{xx}$  ao longo dos ciclos de carregamento, o que caracteriza mais uma vez o efeito do amolecimento do material provocado pelo dano. Nesse caso, o fenômeno de dano se assemelha ao efeito de encruamento isotrópico negativo sobre o material, de forma que a superfície de escoamento permanece centrada na origem do sistema de referência e seu volume é reduzido à medida que o dano é acumulado no material.

O instante da iniciação de trincas no ponto material é caracterizado quando o valor de  $D$  atinge o valor do dano crítico  $D_c$ . De acordo com definição do critério de falha para o dano,  $D_c$  deve ter valor máximo teórico 1 e variar exponencialmente com a tensão equivalente de dano  $\sigma^*$ , que é proporcional a  $\sigma_{eq}$  e à função de triaxialidade  $R_v$ .

O comportamento do dano crítico ao longo do primeiro quarto de ciclo do carregamento pode ser observado a partir da Figura 5.1(e). Já na Figura 5.1(f), verifica-se a iniciação de trincas no ponto material quando o valor de  $D$  ultrapassa o valor de  $D_c$ , ao final do oitavo ciclo de carregamento.

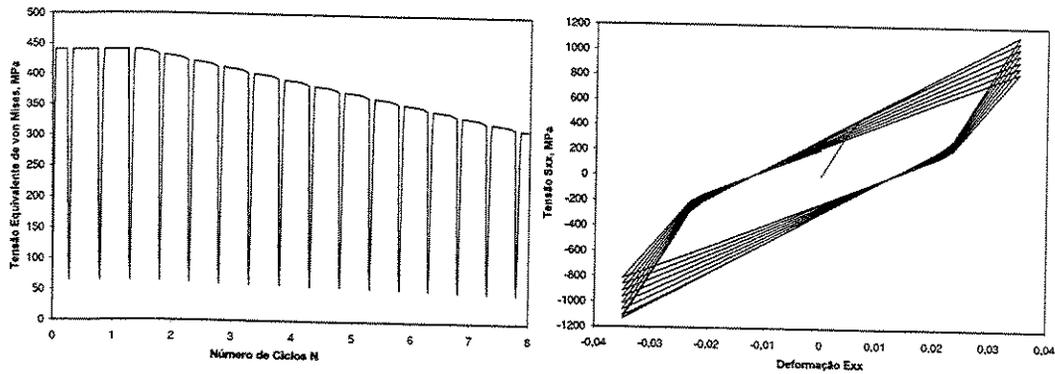
Os resultados apresentados na Figura 5.1 foram obtidos utilizando uma discretização de 15 passos de carregamento para cada quarto de ciclo. Não foram encontradas referências na literatura sobre o número de passos de carregamento que deve ser utilizado para garantir a precisão numérica dos resultados.

Foram feitos alguns estudos com o objetivo de avaliar as características de con-



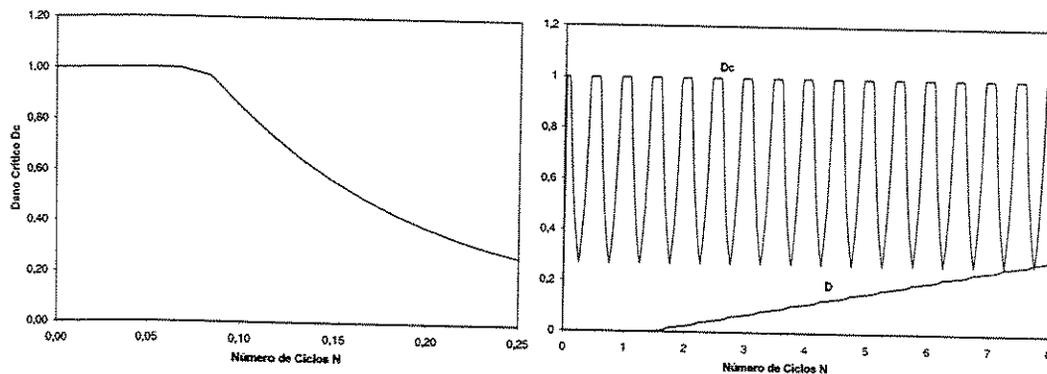
(a)

(b)



(c)

(d)



(e)

(f)

Figura 5.1: Resultados obtidos para os estudos com o modelo de dano.

Ciclo	$D$	$p$	$\sigma_{eq}$ MPa	$\sigma_{xx}$ MPa
1	0,00000	0,09631	440,00	293,33
2	0,02388	0,19800	429,49	286,33
3	0,06817	0,29969	410,01	273,34
4	0,11246	0,40138	390,52	260,35
5	0,15675	0,50307	370,03	247,35
6	0,20104	0,60476	351,54	234,36
7	0,24533	0,70644	332,05	221,37
8	0,28962	0,80813	312,57	208,38

Tabela 5.2: Resultados para as variáveis internas ao final de cada ciclo de carregamento.

vergência da solução em função do número de passos de carregamento. Para tanto, foi observado o comportamento do valor do dano no instante da iniciação de trincas, em três casos de carregamento distintos. Nesse exemplo, utilizou-se o mesmo material do problema anterior (Tabela 5.1), com os níveis de deformação fornecidos na Tabela 5.1, em condição de tração pura ( $\Delta\varepsilon_{yy} = \Delta\varepsilon_{zz} = -\nu\Delta\varepsilon_{xx}$ ).

Caso	$\Delta\varepsilon_{xx}$ %	$\sigma_s$ MPa	Iniciação de Trincas Ciclos
1	9,0	460	5
2	1,0	440	368
3	0,425	370	109228

Tabela 5.3: Casos de carregamento para o estudo de convergência.

O comportamento da solução para o valor do dano no instante da iniciação de trincas pode ser observado na Figura 5.2. Verificou-se nessas condições que, para os carregamentos mais severos (casos 1 e 2), a tendência é que a convergência seja atingida com o número de passos de carregamento, por quarto de ciclo, da ordem de 15 a 20. Para o caso de fadiga de alto ciclo (caso 3), o valor do dano permaneceu constante em função do número de passos de carregamento.

Esse comportamento pode ser explicado devido ao fato de que, em carregamentos mais severos, o caráter não linear é mais acentuado, o que exige um número maior de passos de carregamento para se atingir a convergência. Já no caso de fadiga de alto ciclo, o nível de tensões é predominantemente elástico, de maneira que a solução tende a ser

próxima do caso linear e independente do número de passos de carregamento.

De qualquer modo, o erro cometido ao se usar um número de passos inferior ao necessário para se atingir a convergência é a favor da segurança. Observa-se que o valor do dano aumenta em função da redução do número de passos, de modo que a iniciação de trincas calculada dessa maneira deve ocorrer antes do número de ciclos teoricamente esperado.

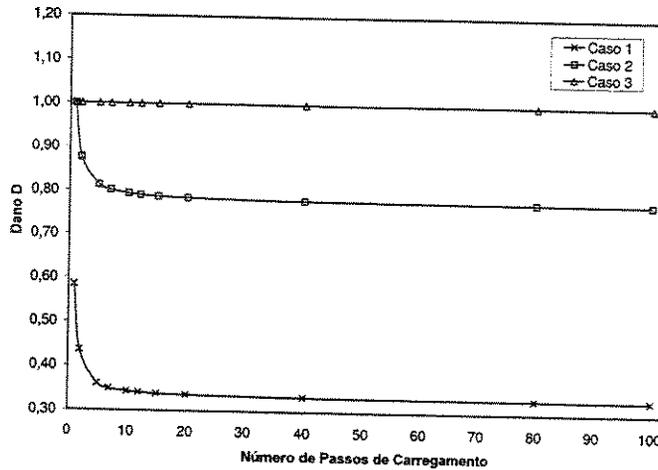


Figura 5.2: Convergência para o valor do dano em função do número de passos de carregamento.

Uma importante característica do problema de fadiga é a não linearidade do acúmulo de dano em carregamentos com amplitude variável. Se for considerado uma história de carregamento em dois níveis de tensão/deformação diferentes, ou seja,  $N_1$  ciclos com amplitude  $\Delta\varepsilon_1$  e  $N_2$  ciclos com amplitude  $\Delta\varepsilon_2$ , de forma que a iniciação de trincas ocorra com um número de ciclos  $N_R = N_1 + N_2$ , em geral, em contraste à regra de acúmulo linear de Palmgreen-Miner, tem-se que (Fatemi e Yang, 1998)

$$\begin{cases} \frac{N_1}{N_R(\Delta\varepsilon_1)} + \frac{N_2}{N_R(\Delta\varepsilon_2)} < 1 & \text{se } \Delta\varepsilon_1 > \Delta\varepsilon_2 \text{ e} \\ \frac{N_1}{N_R(\Delta\varepsilon_1)} + \frac{N_2}{N_R(\Delta\varepsilon_2)} > 1 & \text{se } \Delta\varepsilon_1 < \Delta\varepsilon_2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Esse fenômeno foi estudado para um material com as mesmas propriedades usadas

nos exemplos anteriores, considerando os seguintes níveis de amplitude de deformação

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon = 0,47\% \Rightarrow N_R = 7751 \text{ ciclos e} \\ \Delta\varepsilon = 1,0\% \Rightarrow N_R = 368 \text{ ciclos,} \end{cases}$$

em condição de tração pura.

O resultados desse estudo podem ser observados no diagrama apresentado na Figura 5.3. Esse diagrama é uma forma clássica de se analisar o acúmulo de dano não linear em fadiga para dois níveis de carregamento sequenciais.

O diagrama é obtido variando-se o número de ciclos de aplicação do primeiro nível de carregamento em valores de 0 a 1 para a relação  $\frac{N_1}{N_{R1}}$ , obtendo-se a relação equivalente  $\frac{N_2}{N_{R2}}$  para o segundo nível do carregamento, através do modelo de dano. Esse procedimento é realizado para o dois casos:  $\Delta\varepsilon_1 > \Delta\varepsilon_2$  e  $\Delta\varepsilon_1 < \Delta\varepsilon_2$ .

Observa-se que o modelo elastoplástico acoplado ao dano é capaz de prever o acúmulo de dano não linear em fadiga, levando em consideração a sequência de aplicação dos carregamentos. Esse fato não pode ser previsto pelas metodologias convencionais de projeto, baseadas na regra linear de Palmgreen-Miner, a qual considera normalmente

$$\frac{N_1}{N_{R1}} + \frac{N_2}{N_{R2}} = 1,$$

o que não é verificado na prática.

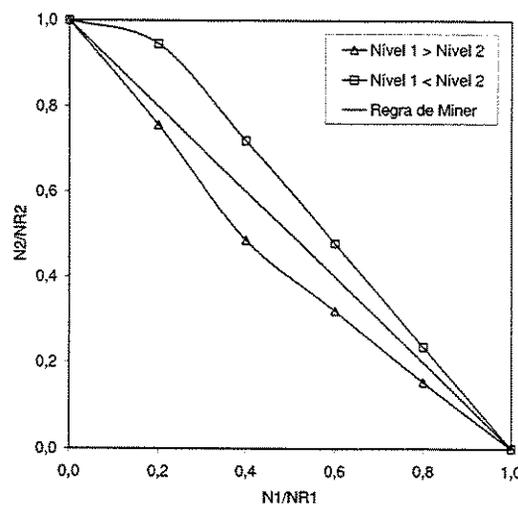


Figura 5.3: Acúmulo de dano não linear em fadiga.

## 5.2 Aplicação: Análise Estrutural de um Componente submetido à Fadiga

Esse exemplo visa ilustrar a aplicação do modelo de material elastoplástico acoplado ao dano na análise estrutural de um componente submetido a carregamento cíclico, através do Método dos Elementos Finitos.

O problema considerado representa uma viga com chanfro, submetida a um carregamento de flexão alternada simétrica com cargas  $P_{\max} = +1kN$  e  $P_{\min} = -1kN$ . A definição do problema está ilustrada na Figura 5.4. O material da viga apresenta as mesmas propriedades indicadas na Tabela 5.1. Foi considerada na análise a condição de estado plano de deformações. Por conveniência, de forma a acelerar a obtenção dos resultados, o valor máximo da carga  $P$  foi escolhido de maneira a induzir um problema de fadiga de baixo ciclo.

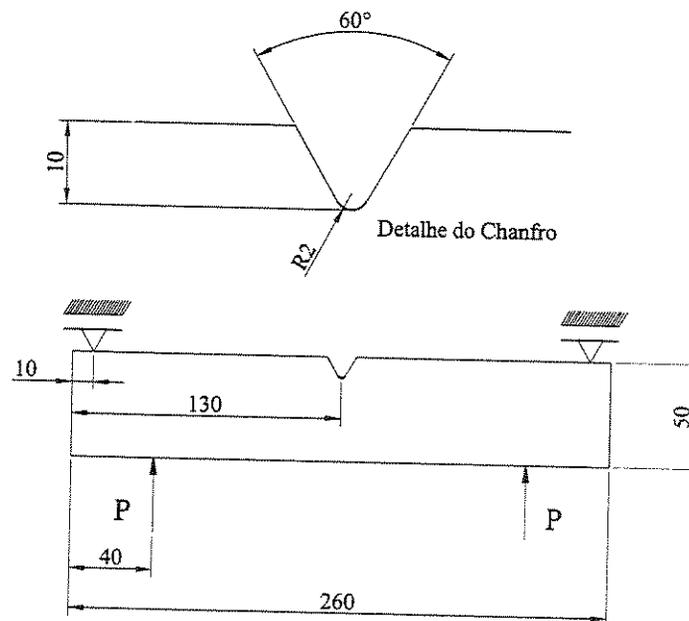


Figura 5.4: Definição do problema de deformação plana (dimensões em mm).

Um fato conhecido é a dependência do valor do dano em função do refinamento da malha de elementos finitos, devido ao gradiente de tensões no elemento de volume

representativo (EVR). Conforme discutido no Capítulo 3, é recomendável respeitar alguns limites para as dimensões do EVR ( $0,1\text{mm}^3$  no caso dos metais), de forma a manter válidas as hipóteses feitas para a modelagem do dano. No presente trabalho, procurou-se obedecer as dimensões para o tamanho médio do elemento na região de concentração de tensões (chanfro). Foram feitos alguns testes com carregamento na fase elástica, até ser obtido um refinamento adequado.

A Figura 5.5 ilustra a malha de elementos finitos utilizada na análise e a Figura 5.6 mostra o detalhe do refinamento na região do chanfro. Refinamentos maiores que o apresentado não forneceram variações significativas para o valor da tensão de von Mises no ponto crítico do entalhe (raiz do chanfro). Nesse caso, admitiu-se a convergência para o campo de tensões na região considerada.

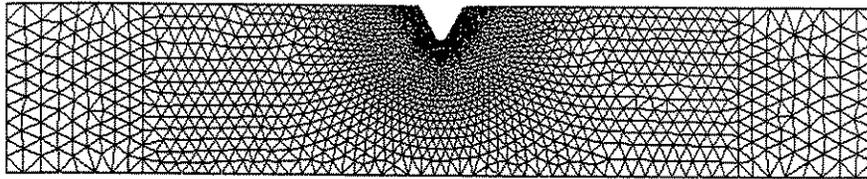


Figura 5.5: Malha de elementos finitos triangulares lineares usada no problema de deformação plana (3204 nós e 6033 elementos).

Os resultados da análise podem ser visualizados através das Figuras 5.7 a 5.11. Esses resultados representam a distribuição do dano, dano crítico, deformação plástica acumulada e tensão de von Mises, no instante da iniciação de trincas (nono ciclo de carregamento).

A evolução das variáveis internas para o ponto crítico do chanfro, ao longo dos ciclos de carregamento, pode ser visualizada através dos diagramas da Figura 5.12. Foram utilizados 20 passos de carregamento para cada quarto de ciclo (blocos de carregamento).

Observa-se que o valor do dano permanece nulo durante a maior parte do tempo, evoluindo bruscamente e ultrapassando o valor do dano crítico, a partir do nono ciclo de carregamento, caracterizando a iniciação de trincas, Figura 5.12(a). Pode-se perceber também o caráter extremamente localizado do dano, mesmo em um problema de fadiga de baixo ciclo.

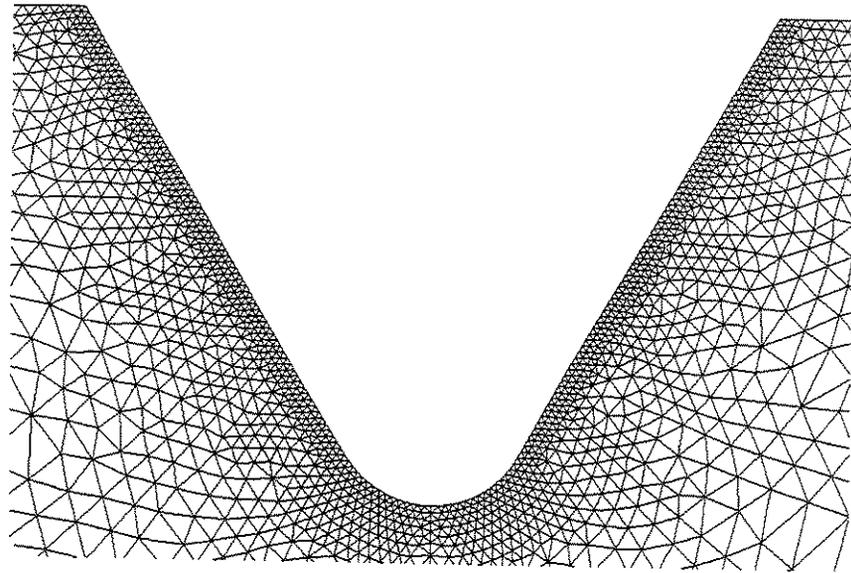


Figura 5.6: Malha de elementos finitos usada no problema de deformação plana (detalhe do refinamento na região do chanfro).

A evolução muito rápida do dano caracteriza o processo de fratura frágil do material no instante da iniciação de trincas (alta triaxialidade de tensões na região do ponto crítico). Lembra-se que o dano  $D$  é proporcional à variação da deformação plástica acumulada  $p$  e à função de triaxialidade  $R_v$ . Já  $p$  não é dependente da triaxialidade do estado de tensões, evoluindo de maneira mais suave, Figura 5.12(b).

Da mesma forma que nos exemplos da seção anterior, pode-se observar o fenômeno do amolecimento do material devido à evolução do dano através da Figura 5.12(c). A tensão de von Mises permanece em 440 MPa ( $\sigma_{eq} = \sigma_s$ ) a maior parte do tempo, sendo reduzida proporcionalmente ao valor do dano acumulado a partir do nono ciclo.

### 5.3 Comentários Gerais

Os resultados obtidos com a implementação do modelo de material elastoplástico acoplado ao dano permitiram demonstrar que essa metodologia é mais geral que os métodos convencionais de projeto para realizar a análise estrutural de componentes submetidos a vários tipos de carregamento, como no caso da fadiga.

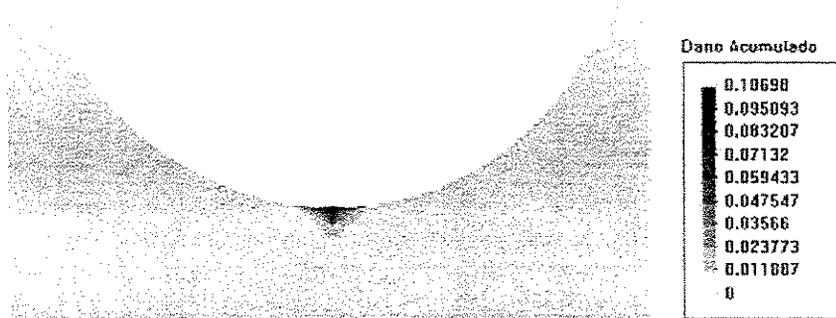


Figura 5.7: Dano acumulado ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana (detalhe na região da raiz do chanfro).

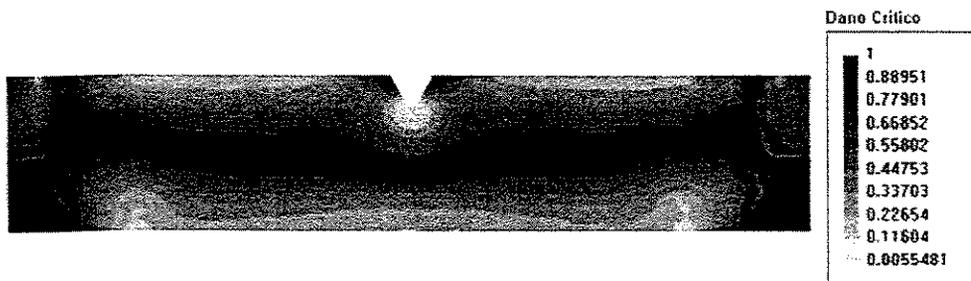


Figura 5.8: Dano crítico ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana.

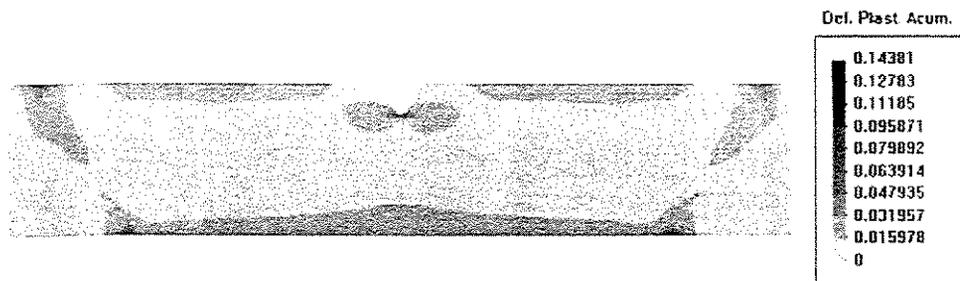


Figura 5.9: Deformação plástica acumulada ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana.

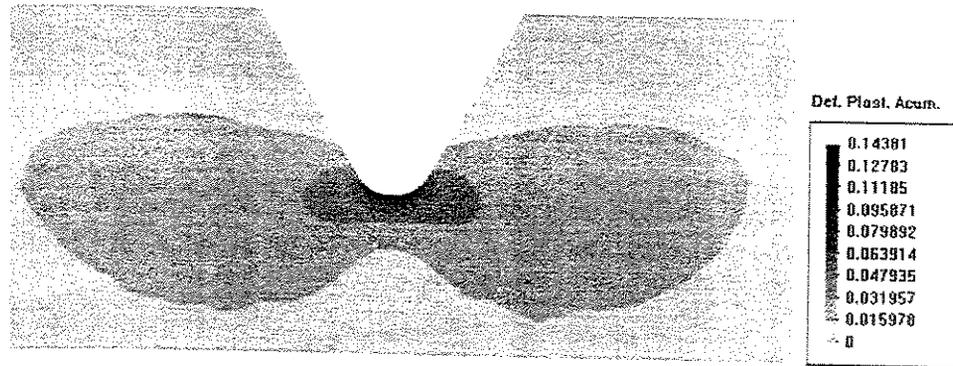


Figura 5.10: Deformação plástica acumulada ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana (detalhe na região do chanfro).

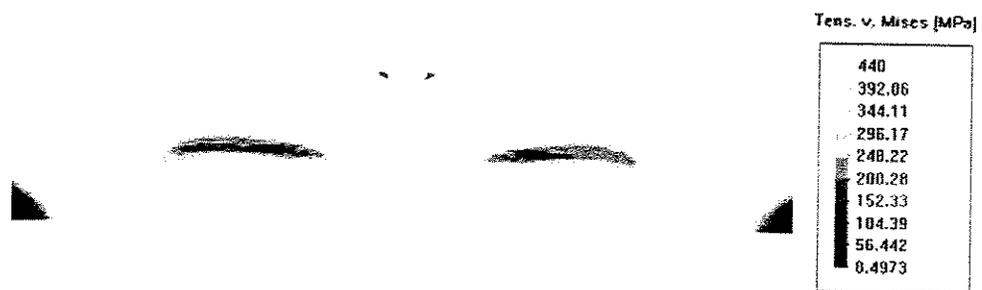
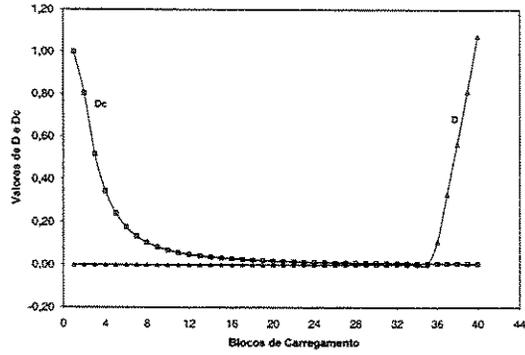
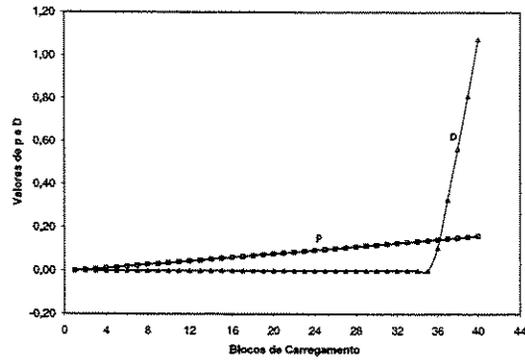


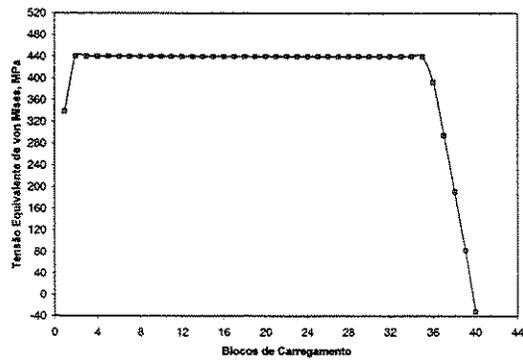
Figura 5.11: Tensão equivalente de von Mises ao final de 9 ciclos para o problema de deformação plana.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.12: Evolução das variáveis internas para o ponto crítico do problema de deformação plana, ao longo dos passos de carregamento.

Como o modelo é baseado em uma formulação contínua, pode ser aplicado diretamente em problemas tridimensionais e de carregamentos complexos, como fadiga multiaxial. Além disso, o modelo não diferencia carregamentos estáticos, fadiga de alto e baixo ciclo. Se as propriedades do material forem consideradas em várias faixas de temperatura, é possível modelar o problema de fluência, com poucas alterações na implementação.

O modelo de dano é capaz de prever o caráter não linear do fenômeno da fadiga, considerando implicitamente a sequência dos carregamentos e o acúmulo não linear de dano em carregamentos complexos e com amplitude variável. Os fenômenos de encruamento cinemático e isotrópico também podem ser incluídos, conforme mostrado em (Benallal et al., 1988), ao invés de considerar a plasticidade perfeita ou ideal.

Outra característica interessante é a discretização do carregamento em passos, o que permite eliminar os procedimentos de contagem de ciclos convencionais e os diagramas de tensão-deformação cíclicas (laços de histerese) podem ser obtidos de maneira imediata, tanto em problemas de deformação como em tensão controladas.

Se for utilizada uma análise pontual (sem a solução de um problema de valor de contorno), como apresentado na Seção 5.1, é possível utilizar o modelo de dano como alternativa ao método  $\varepsilon - N$ , ou utilizá-lo como pós-processamento para análises elásticas ou elastoplásticas convencionais (elementos finitos, ou um outro método numérico equivalente) (Lemaitre e Doghri, 1994).

Pode-se citar como desvantagem dessa metodologia o alto custo computacional decorrente da análise numérica não-linear. Em casos de fadiga de alto ciclo, observa-se que o carregamento é predominantemente elástico, de forma que o efeito do dano é nulo na maior parte dos ciclos de carregamento, o que não justifica em muitos casos o alto esforço computacional demandado. Além do mais o dano pode ser muito localizado em apenas alguns pontos do componente.

Como alternativa, pode-se aplicar a análise localmente acoplada, associada um procedimento de *salto de ciclos* (Lemaitre e Doghri, 1994; Grunwald, 1996), com o objetivo de reduzir o custo computacional e acelerar a obtenção dos resultados. Entretanto, essas estratégias são aproximações que reduzem muito a generalidade do modelo e os critérios

de sua aplicação não estão ainda bem definidos na literatura.

Outro ponto a ser considerado é a forte dependência da solução em função do refinamento da malha. Nos trabalhos (Grunwald, 1996; Grunwald e Schnack, 1997) utilizou-se estratégias de refinamento adaptável baseada na estimativa de Zhu-Zienkiewicz para reduzir o erro no cálculo das tensões, de modo a melhorar, de maneira um pouco mais sistemática, o cálculo das variáveis relacionadas ao dano.

Uma outra alternativa a ser sugerida pode ser a utilização de interpolações de maior ordem para os elementos da discretização, associadas a análise adaptável das malhas em função da precisão das variáveis internas. Entretanto, não há referências na literatura sobre esse tipo de aplicação.

Além do mais, não há referências sobre o número mais adequado de pontos de integração a serem utilizados para o cálculo da matriz de rigidez tangente e para o vetor de força interna e qual a melhor forma de interpolar as variáveis do modelo constitutivo e suavizar as soluções nodais. O exemplo aqui ilustrado utilizou apenas um ponto de integração por elemento e os resultados foram suavizados para os nós utilizando uma média ponderada pelas áreas dos elementos que compartilham o nó em questão.

A principal desvantagem desse modelo de dano ainda é a dificuldade na determinação das propriedades dos materiais associadas ao dano. O custo da sua determinação é elevado e há poucos dados tabelados na literatura. Foram encontradas poucas referências sobre o uso desse modelo com o elementos finitos (Benallal et al., 1988; Grunwald, 1996; Grunwald e Schnack, 1997) e não foram encontrados registros de sua aplicação em âmbito industrial, apesar da boa coerência com resultados experimentais apresentada em (Grunwald, 1996).

A implementação por elementos finitos utilizando esse modelo de dano (Grunwald, 1996; Grunwald e Schnack, 1997) apresenta exemplos apenas em estado plano de tensão. Conforme discutido no Capítulo 4, formulação para o operador tangente consistente aqui empregada, é válida apenas para os casos tridimensional, deformação plana ou de tensão axissimétrica. O caso de tensão plana exige uma formulação totalmente específica para a análise não linear por elementos finitos em problema envolvendo plasticidade (Simo e Hughes, 1998).

Optou-se inicialmente por implementar o caso mais geral por ser mais adequado à formulação de análise de sensibilidade e otimização estrutural (proposta inicial do projeto, ver Apêndice A) e posteriormente implementar o caso de tensão plana. Entretanto, essas implementações não foram possíveis para esse trabalho.

Apesar de não terem sido comparados numericamente com exemplos da literatura, os resultados da análise estrutural por elementos finitos apresentaram um comportamento coerente com as previsões teóricas do modelo de dano. Em contrapartida, a implementação da integração local das equações constitutivas apresentou uma considerável coerência em relação aos dados da literatura, de forma que os resultados obtidos com a análise estrutural podem ser considerados bastante satisfatórios.

# Capítulo 6

## Engenharia de Software

### 6.1 Introdução

A necessidade de desenvolvimento de programas de computadores maiores, mais complexos e, ao mesmo tempo, mais robustos e confiáveis, favoreceu o surgimento de uma disciplina, na área das ciências da computação, denominada *Engenharia de Software* (Pressman, 1995).

A engenharia de software pode ser definida como um conjunto de métodos, ferramentas e procedimentos para viabilizar o desenvolvimento de programas de computadores de uma forma mais controlada e racional, bem como a sua qualificação e manutenção.

Os métodos envolvem um amplo conjunto de tarefas que incluem: planejamento e estimativa de projeto, análise de requisitos de software e de sistemas, projeto de estrutura de dados, especificação e codificação de programas, testes e manutenção.

As ferramentas de apoio, denominadas CASE (*Computer Aided Software Engineering*) ou Engenharia de *Software* Auxiliada por Computador, são programas (ou conjuntos de programas) específicos, com o objetivo de automatizar as atividades associadas à engenharia de *software*.

Os procedimentos constituem o elo que garante a consistência entre os métodos e as ferramentas para desenvolvimento do software.

Dentre as várias metodologias disponíveis para a aplicação dos conceitos de engenharia de software, pode-se citar o RUP (*Rational Unified Process*) que é baseado na orientação por objetos, utilizando uma linguagem de modelagem denominada UML ou *Unified Modeling Language* (Linguagem de Modelagem Unificada).

Existem várias ferramentas desenvolvidas pela empresa *Rational* ([www.rational.com](http://www.rational.com)), que dão suporte à aplicação do RUP, desde a fase de concepção até a fase de testes, documentação e distribuição. Atualmente, todos os programas que estão sendo implementados pelo grupo, no qual esse projeto se insere, seguem o processo RUP e algumas das ferramentas disponíveis.

A seguir, tem-se um resumo dos conceitos da orientação por objetos, da linguagem de modelagem unificada (UML) e do processo unificado de desenvolvimento (RUP).

## 6.2 Orientação por Objetos

A orientação por objetos é baseada no Modelo de Objetos ou Paradigma de Objetos, que surgiu a partir do final da década de 1970, como consequência natural da evolução da Ciência da Computação. Com o crescimento do tamanho (mais de 10.000 linhas de código) e da complexidade dos programas, tornou-se necessário desenvolver metodologias capazes de tratar a complexidade de maneira mais racional e organizada.

O modelo de objetos vem sendo influenciado por vários fatores, confirmando ser um conceito unificado na Ciência da Computação, aplicável não apenas a linguagens de programação, mas no projeto de interfaces de usuários, bancos de dados, bases de conhecimentos e mesmo na arquitetura de *hardware* e *software* de computadores. A razão para essa grande difusão é pelo simples fato de que a orientação por objetos permite tratar a complexidade inerente aos mais diversos tipos de sistemas (Booch, 1991).

O Modelo de Objetos é dividido em Programação Orientada por Objetos (OOP-*Object Oriented Programming*), Projeto Orientado por Objetos (OOD-*Object Oriented Design*) e Análise Orientada por Objetos (OOA-*Object Oriented Analysis*). Segundo Booch (Booch, 1991) esses termos podem ser definidos da seguinte maneira

- A programação orientada por objetos é um método de implementação, no qual os programas são organizados como conjunto cooperativo de *objetos*. Cada um deles representa uma *instância de uma classe*, as quais pertencem a uma *hierarquia* de classes, unidas por relações de *herança*;
- O projeto orientado por objetos é um método de projeto englobando o processo de *decomposição por objetos* e uma notação específica para descrever as características *lógicas, físicas, estáticas* e *dinâmicas* de um sistema a ser projetado;
- A análise orientada por objetos é um método de análise que examina os *requerimentos* na perspectiva das classes e dos objetos, definindo um vocabulário comum para o domínio do problema.

O modelo de objetos proporciona uma base conceitual para os métodos orientados por objetos, tendo como principais características *abstração, encapsulamento, modularidade* e *hierarquia*. De maneira resumida

- O objetivo da abstração é extrair da complexidade de um sistema os tipos de dados, conhecidos como classes. As classes denotam as características principais dos diferentes tipos de objetos, definindo-os no seu conceito mais geral, sem se preocupar inicialmente com suas particularidades. É nesse sentido que se diz que um objeto representa uma *instância* de uma classe;
- O encapsulamento é o processo pelo qual são preservados ou escondidos os detalhes particulares de um determinado objeto, que não contribuem para a descrição de suas características principais. A partir do conceito de encapsulamento, definem-se os métodos e atributos públicos, protegidos ou privados;
- Modularidade é a propriedade de um sistema ser decomposto em um conjunto de módulos, possuindo uma relação estreita e coesiva entre si;
- Hierarquia é uma ordenação lógica, em níveis de importância, entre as abstrações de um sistema.

A principal vantagem do modelo de objetos é a proximidade com os conceitos do mundo real a serem implementados nos programas. Ao contrário do modelo por procedimentos, onde são isolados os comportamentos através de subrotinas, descrevem-se as principais características do sistema através de variáveis e métodos, com base nos tipos de dados básicos fornecidos pela linguagem utilizada.

### 6.3 Linguagem de Modelagem Unificada (UML)

A *Unified Modeling Language* (UML) (Booch et al., 1999) é uma linguagem de modelagem para sistemas complexos que permite a visualização, especificação, construção e documentação do funcionamento do sistema durante a sua concepção e execução.

A partir dos conceitos de orientação por objetos foram definidas várias linguagens para a modelagem de sistemas, tanto no meio acadêmico como no meio empresarial. Por terem sido baseadas nas necessidades práticas relativas ao desenvolvimento de programas, essas linguagens possuíam várias vantagens e desvantagens, dependendo da aplicação a que se destinavam. A unificação das melhores características das linguagens mais consagradas e o seu aperfeiçoamento é que deu origem à UML.

Inicialmente, a UML foi criada a partir das necessidades associadas ao processo de desenvolvimento de *software*. Entretanto, seus conceitos atingiram um caráter amplo e geral, o que permite a sua aplicação nos mais diversos sistemas, observando-se naturalmente as suas peculiaridades.

A UML trata da definição de modelos que representam o sistema, suas características principais e as suas relações com o meio ao qual estão inseridos. Os modelos representam simplificações da realidade e o seu nível de detalhamento é proporcional à complexidade do sistema. A UML é uma linguagem baseada nos conceitos provenientes da orientação por objetos.

Basicamente, a UML se utiliza da definição de abstrações ou conceitos de entidades responsáveis pela realização das “tarefas” ou procedimentos inerentes ao funcionamento do sistema que está sendo modelado. Define também as relações entre estas entidades e

os diagramas que agrupam e representam essas relações.

As entidades principais da UML são as *entidades estruturais*, representando as partes estáticas do sistema (partes físicas ou conceituais); as *entidades comportamentais*, que representam as partes dinâmicas do sistema (comportamento ao longo do tempo); *entidades de agrupamento*, definindo a organização do sistema e o seu agrupamento em módulos com características comuns e *entidades de anotação*, são itens explanatórios (notas) que visam facilitar o melhor entendimento do sistema.

No que diz respeito às relações, definem-se as de *dependência*, *associação*, *generalização* e *realização*. As relações de dependência indicam que uma entidade necessita de uma ou mais outras para que suas atividades sejam realizadas. Já as relações de associação representam as diversas formas de conexão entre as entidades. As relações de generalização indicam a especialização de uma abstração em outras abstrações-filhas, representando uma hierarquia de entidades. Por último, as relações de realização representam os “contratos de trabalho” entre entidades de subsistemas diferentes de forma a permitir a sua execução.

Os tipos de diagramas definidos pela UML são os de *classe*, *objetos*, *use-cases*, *sequência*, *colaboração*, *estado (statechart)*, *atividade*, *componentes*, e *distribuição (deployment)*. De uma forma geral, os diagramas representam as relações entre as entidades do sistema, permitindo ilustrar o funcionamento em diversos ângulos. Basicamente, os diagramas da UML podem ser descritos como

- Diagramas de classe: ilustram o relacionamento entre as diversas classes do sistema;
- Diagramas de objetos: representam o relacionamento entre os objetos (instâncias de classes) que devem ser criados para o funcionamento do sistema;
- Diagramas de *use-cases*: *use-cases* são fluxos de eventos do sistema que fornecem algum resultado de valor para os usuários. Os diagramas de *use-cases* ilustram os diversos fluxos de evento do sistema;
- Diagramas de sequência e colaboração: são duas variações de diagramas que ilustram a interação entre os objetos do sistema durante a execução dos fluxos de eventos. Os

diagramas de sequência enfatizam a ordem temporal da troca de mensagem entre os objetos. Já os de colaboração enfatizam a organização estrutural entre os objetos que enviam e recebem mensagens;

- Diagramas de estado: representam a evolução ou transição entre os estados do sistema. São importantes na compreensão do comportamento do sistema do ponto de vista das interfaces entre os diversos subsistemas;
- Diagramas de atividade: é um tipo especial de diagrama de estado (fluxograma) que ilustra o comportamento do sistema do ponto de vista das atividades, na sua sequência de realização;
- Diagramas de componentes: mostram a organização e dependência entre os conjuntos de componentes do sistema. Estes diagramas devem estar relacionados aos diagramas de classes, interfaces e colaborações;
- Diagramas de distribuição: representam a configuração organizacional dos grupos de componentes (nós) em tempo de execução. Os diagramas de distribuição ilustram a arquitetura do sistema do seu ponto de vista estático.

A Figura 6.1 ilustra um diagrama de classes típico em UML, representando a modelagem das classes de uma empresa (funcionários, escritórios, departamentos, etc.).

Atualmente, a UML é mantida por um grupo independente de pesquisadores e empresas (OMG, *Object Management Group*, [www.omg.org](http://www.omg.org)) que trata do desenvolvimento e da especificação de ferramentas e metodologias associadas à tecnologia de informação e engenharia de software.

## 6.4 Processo Unificado de Desenvolvimento (RUP)

O *Rational Unified Process* (RUP) (Jacobson et al., 1999) é um processo de desenvolvimento de software baseado em três características fundamentais.

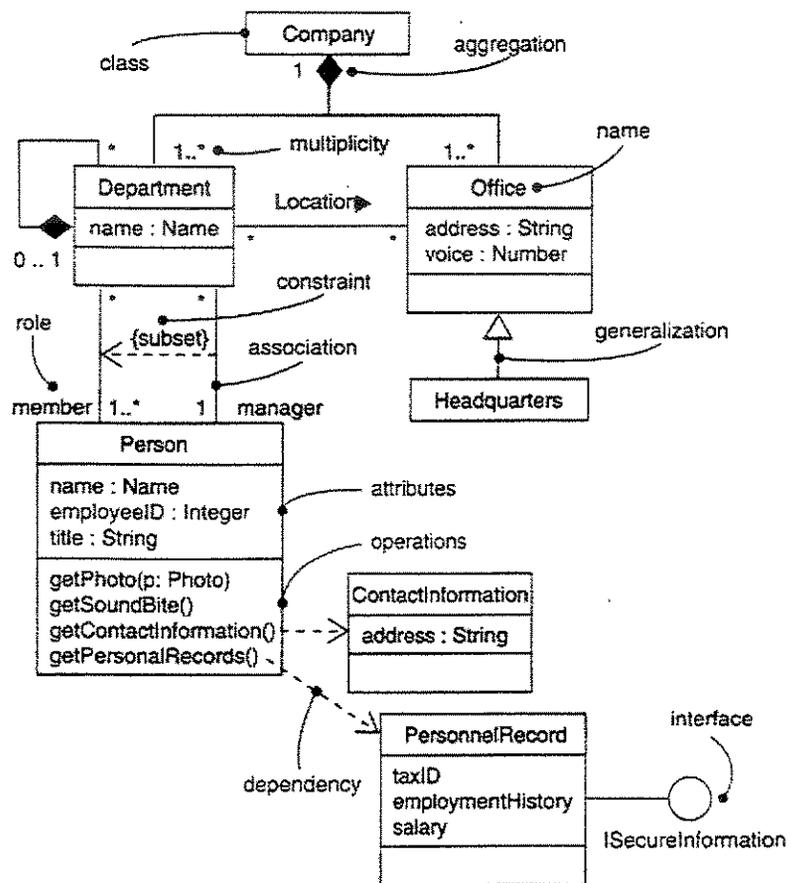


Figura 6.1: Diagrama de classes em UML com seus elementos principais (Booch et al., 1999).

A primeira delas é que se trata de um processo *iterativo*. Isso significa que, de acordo com a complexidade do sistema, o mesmo deve ser desenvolvido aos poucos. Logo, à medida que suas principais funcionalidades básicas são implementadas com sucesso, outras novas funcionalidades mais complexas são inseridas, implementadas e testadas, gerando um processo de evolução cíclico.

A segunda característica do RUP é se constituir em um processo centrado na arquitetura do sistema. Parte-se do princípio que, desde que a arquitetura do sistema seja robusta o suficiente, é possível o desenvolvimento em etapas paralelas, minimizando o re-trabalho, aumentando a reutilização de componentes e, conseqüentemente, a sua manutenção.

A terceira e última característica básica é que RUP é um processo dirigido por *use-cases*. *Use-cases* são estudos de caso que visam capturar os fluxos de eventos principais definidos nos requerimentos do sistema e que levam a algum resultado de valor para os usuários. Um exemplo de *use-case* pode ser o conjunto de eventos associados ao envio de mensagens através de um sistema de correio eletrônico. Um sistema complexo pode ser constituído por vários *use-cases* e os mesmos podem ser “quebrados” em *use-cases* secundários, bem com se inter-relacionar mutuamente e definir fluxos alternativos de eventos.

O RUP é baseado na UML e suporta o desenvolvimento utilizando técnicas de orientação por objetos. De maneira geral, o processo de desenvolvimento engloba as seguintes etapas:

- **Análise de Requerimentos:** nessa fase são definidos os requisitos principais que o sistema deve oferecer a todos os níveis de usuários. São analisadas as características básicas gerais para garantir o funcionamento do sistema, bem como critérios de qualidade, facilidade de uso, formas de acesso, tipos de interface, etc.;
- **Definição dos *use-cases*:** nessa segunda etapa, com base nos requerimentos que foram definidos, são extraídos os fluxos de eventos principais e os mesmos devem ser descritos, de acordo com a sequência de acontecimentos. É importante definir nessa fase também, os *use-cases* principais, ou essenciais, que serão detalhados e

implementados na primeira iteração;

- **Análise e Projeto de Classes do Sistema:** aqui são definidas as entidades (classes, dados membro e métodos) principais para a realização das tarefas definidas pelos *use-cases* principais que serão implementados na primeira iteração. Devem ser analisados também, as formas de acesso (interfaces) entre os usuários e o sistema;
- **Implementação:** consiste da geração de códigos de programa propriamente dita. A partir das classes que foram definidas na etapa anterior, são gerados os códigos de programação na linguagem que foi adotada e os procedimentos são implementados;
- **Testes e Distribuição:** após todo o código ser implementado, o sistema deve ser testado, com base nos requerimentos e *use-cases* que foram definidos e, após a sua aprovação, é disponibilizado para uso ou avaliação pelos usuários. Após essa fase, todo o processo se reinicia, a partir de novos requerimentos e *use-cases* que não foram implementados na iteração atual, enquanto durar o processo de desenvolvimento e evolução do sistema.

Cada uma dessas etapas é composta pelas fases: concepção (*inception*), na qual são definidos os requerimentos associados ao foco de aplicação do projeto (*business case*); elaboração (*elaboration*), na qual se estabelecem o plano de projeto e a arquitetura básica do sistema; construção (*construction*), desenvolvimento propriamente dito do sistema e transição (*transition*), fase de fornecimento do sistema para os usuários. A Figura 6.2 ilustra um ciclo típico de desenvolvimento de software, baseado nos conceitos do RUP.

## 6.5 Arquitetura do Ambiente para Análise e Otimização Estrutural

Os programas implementados pelo grupo de pesquisa no qual esse trabalho se insere vêm sendo desenvolvidos usando os recursos e metodologias da Engenharia de Software. Todo o sistema foi organizado e estruturado a partir dos projetos de auxílio à

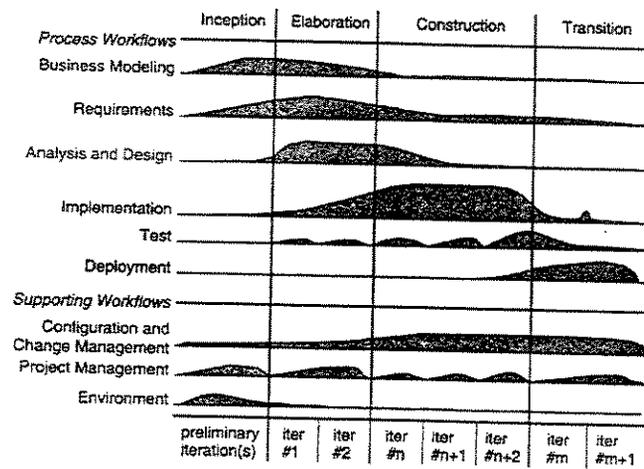


Figura 6.2: Ciclo de desenvolvimento de software baseado no RUP (Jacobson et al., 1999).

pesquisa (*Ambiente para Análise, Simulação e Otimização de Estruturas*, FAPESP - Proc. 97/00540-0) e doutorado (Silva, 2002) (*Análise de Sensibilidade e Otimização Estrutural em Problemas Não-lineares*, FAPESP - Proc. 97/11130-8).

A arquitetura em *níveis* ou *camadas* global para o projeto pode ser visualizada através da Figura 6.3. A idéia básica é que os subsistemas dos níveis mais inferiores não dependam dos superiores. A dependência só é permitida de cima para baixo ou horizontalmente. Dessa forma, o sistema tende a evoluir de maneira consistente a partir de recursos mais básicos até os aplicativos mais sofisticados.

No nível mais inferior da estrutura da Figura 6.3 estão distribuídos os subsistemas de redes de computadores (TCP/IP) e os sistemas operacionais (Windows ou Unix/Linux). Logo acima, encontram-se os componentes de software de outros grupos de pesquisa ou distribuídos comercialmente (modelador geométrico ACIS, bibliotecas gráficas e de geração de malha, etc.).

No nível imediatamente superior, encontram-se os componentes e subsistemas básicos para análise estrutural e otimização (estruturas de dados, *Ds*; gerenciamento de bancos de dados, *CFS*; solução numérica, *Solver*; análise adaptável, *Adapt* e otimização, *Opt*). No nível mais superior, encontram-se os subsistemas para análise e otimização de estruturas

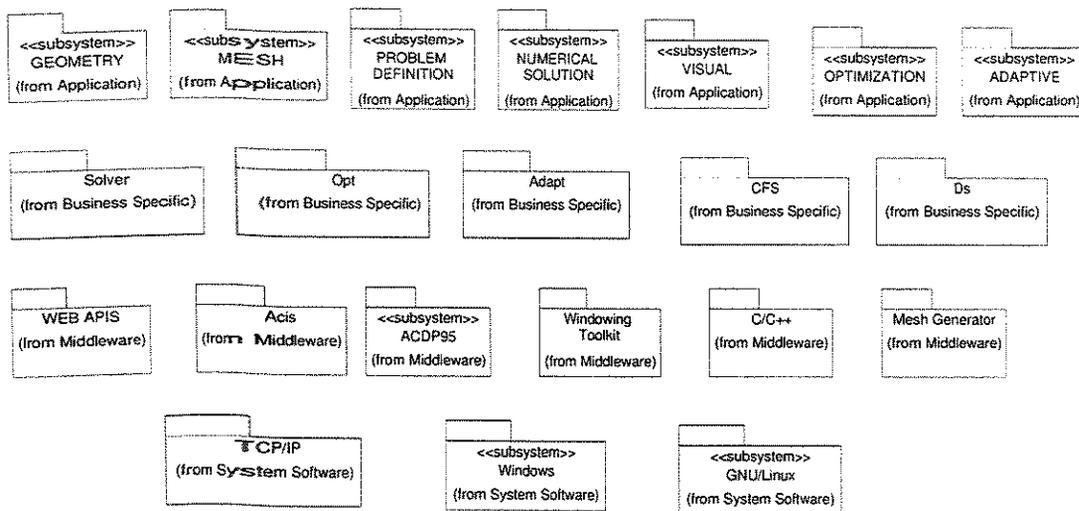


Figura 6.3: Arquitetura em camadas para o ambiente de análise e otimização.

que vêm sendo desenvolvidos, ou seja,

- GEOMETRY, manipulação e cura de geometrias CAD;
- MESH, geração e visualização de malhas de elementos finitos;
- PROBLEM DEFINITION, definição de carregamentos e condições de contorno;
- NUMERICAL SOLUTION, solução numérica e análise por elementos finitos;
- VISUAL, visualização de resultados e pós-processamento;
- OPTIMIZATION, otimização estrutural de componentes;
- ADAPTIVE, análise adaptável.

A contribuição do presente trabalho para o sistema como um todo se dá em duas áreas. As implementações da integração numérica do modelo constitutivo de material acoplado ao dano e análise estrutural em fadiga foram incluídas na estrutura de classes existente no componente *Solver*, representadas na Figura 6.4. O ambiente para geração de malhas, apresentado no próximo capítulo, integra o subsistema MESH. Todos os programas são desenvolvidos utilizando a linguagem de programação por objetos C++.

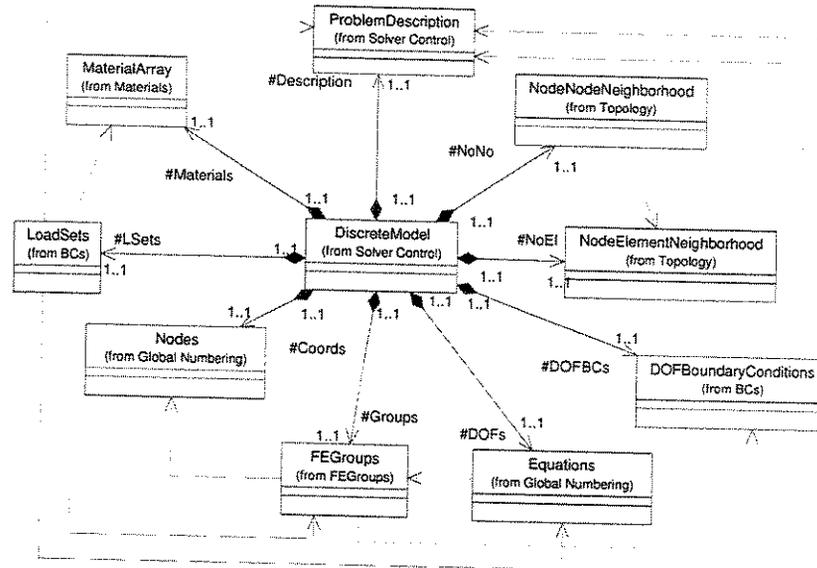


Figura 6.4: Estruturas de classe para o módulo de solução numérica (Solver).

As estruturas de classe do módulo Solver estão esquematizadas através da Figura 6.4. De maneira geral, o sistema é composto por uma estrutura que representa o modelo discreto, classe *DiscreteModel*. O modelo discreto agrega várias outras estruturas para nós e elementos, classes *Nodes* e *FEGroups*; topologia de malha, classes *NodeElementNeighborhood* e *NodeNodeNeighborhood*; descrição do problema, classe *ProblemDescription*; grupos de carregamentos, classe *LoadSets*; condições de contorno e graus de liberdade, classe *DOFBoundaryConditions* e grupos de materiais, classe *MaterialArray*.

## Capítulo 7

# Ambiente Gráfico para Geração de Malhas

Neste capítulo, apresenta-se a descrição do projeto de um ambiente gráfico para geração de malhas de elementos finitos. O ambiente de geração de malhas é parte integrante do projeto de auxílio à pesquisa (*Ambiente para Análise, Simulação e Otimização de Estruturas*), citado no capítulo anterior. O ambiente gráfico para geração de malhas deve funcionar de maneira integrada com os outros ambientes do projeto (módulos de geometria, definição do problema, análise, otimização e visualização dos resultados).

Nas próximas seções, abordam-se o estudo de componentes de *software* utilizados no desenvolvimento e a descrição do projeto do sistema, com base nos conceitos de engenharia de software, descritos no Capítulo 6.

### 7.1 Estudo de Componentes

Atualmente, o desenvolvimento de *software* é baseado em componentes. Um componente é um conjunto de funcionalidades especializadas ou unidade de elementos de programação computacional (funções, classes, etc.), agrupados de maneira conveniente com um propósito definido. Os componentes são partes constituintes de sistemas ou produtos. Um produto é um conjunto de componentes ou sistemas combinados e distribuídos

(vendidos ou disponibilizados gratuitamente) de forma única.

No desenvolvimento de aplicações para sistemas de engenharia CAD/CAM/CAE, os componentes tipicamente utilizados são:

- Modeladores geométricos como o ACIS 3D *Geometric Modeler* ou o Parasolid *Kernel Modeler* (*Unigraphics Solutions*, [www.ugs.com](http://www.ugs.com));
- Sistemas gráficos para visualização, manipulação, impressão e interação com o usuário como o HOOPS/3d *Application Framework* e
- Bibliotecas para o desenvolvimento de interfaces gráficas de usuários (GUI, *Graphical User Interface*) como MFC (*Microsoft Foundation Classes*), Qt, Motif, etc.
- Outros componentes para aplicações específicas como *solvers* para elementos finitos, geradores de malha, etc.

A seguir, tem-se a descrição dos componentes utilizados para a confecção do ambiente para geração de malhas. Tais componentes são o modelador geométrico ACIS 3D *Geometric Modeler*, o sistema gráfico HOOPS/3d *Application Framework*, a biblioteca para desenvolvimento de interfaces gráficas de usuários, Qt, e a biblioteca de classes para geração automática de malhas, MeshSim.

### 7.1.1 ACIS 3D *Geometric Modeler*

ACIS 3D *Geometric Modeler* (ACIS) é um conjunto de bibliotecas gráficas de componentes computacionais para modelagem geométrica tridimensional, desenvolvidos pela *Spatial Corp.* ([www.spatial.com](http://www.spatial.com)), baseado em conceitos de orientação por objetos e linguagem C++. Sua arquitetura permite o desenvolvimento de aplicativos envolvendo modelagem geométrica e manipulação de *wireframes*<sup>1</sup>, superfícies e sólidos para serem utilizados em computação gráfica (ACIS, 2001; Corney, 1997).

---

<sup>1</sup> *Wireframes* ou *estruturas de arame* consistem na representação de geometrias apenas através de suas arestas e vértices, ao contrário dos sólidos que contém também as faces do modelo.

O ACIS consiste de um conjunto (hierarquia) de classes (incluindo dados e métodos) e funções que dão suporte à criação de curvas, superfícies e sólidos, bem como à integração com outros modelos geométricos pré-definidos pelo usuário. O ACIS atualmente encontra-se na versão 6.3.

Muitos aplicativos nas mais diversas áreas da computação gráfica, como jogos, filmes, e programas de engenharia (CAD/CAM/CAE) utilizam o ACIS como modelador geométrico. O programa AutoCAD da empresa AutoDesk é o exemplo mais comum do uso do ACIS como modelador geométrico.

### Conceitos Básicos

O ACIS considera separadamente a geometria (forma detalhada) da topologia (conectividade) dos objetos. Este conceito é conhecido como modelagem B-rep (*boundary representation*) que garante maior consistência na construção de modelos. Esta forma de modelagem permite distinguir entre pontos interiores, exteriores e sobre as superfícies (o que difere modeladores de sólidos ou *wireframes*). O ACIS é naturalmente um modelador de sólidos, porém a representação em B-rep permite a coexistência de sólidos e wireframes de maneira consistente (ACIS, 2001).

O ACIS considera a geometria como sendo o conceito de entidades físicas (pontos, curvas e superfícies) representadas pelo modelo, independentemente de suas relações de vizinhança (topologia) ou de espaço. A geometria no ACIS é subdividida em Geometria de Construção, que define a estrutura matemática para a definição das entidades e a Geometria de Modelo que permite agregar funcionalidades às entidades criadas como *undo* e *redo*, salvamento em arquivos, tratamento de erros, gerenciamento de memória, etc. Normalmente, as geometrias de construção são temporárias dando lugar as de modelo que são permanentes e salvas com o modelo criado.

A topologia descreve como as entidades geométricas são relacionadas. Topologicamente uma linha reta e uma curva elíptica são consideradas iguais (arestas) bem como uma superfície quadrilateral e uma hexaédrica (faces), apesar de seus conceitos geométricos serem diferentes.

O ACIS permite o salvamento e a recuperação (leitura) de modelos em arquivos próprios, podendo ser binários, SAB (*Standard ACIS Binary*, .sab) ou texto (ASCII), SAT (*Standard ACIS Text*, .sat). A convenção de escrita e leitura desses formatos de arquivo é um padrão aberto e a maioria dos aplicativos baseados em ACIS o utilizam, sendo possível fazer a conversão para diferentes outros formatos (IGES, STEP, CATIA, etc).

### Arquitetura

Atualmente, o ACIS é composto por 53 componentes, destinados ao desenvolvimento de diversas funções. Os principais componentes são o *Kernel* (KERN) contendo classes para definição geometria, topologia e atributos para as entidades; salvamento e recuperação de modelos ou procedimentos (*undo* e *redo*); classes matemáticas; o *Base* (BASE) responsável pelo gerenciamento de memória para estruturas ACIS e não-ACIS, além de definir estruturas de dados básicas; o *Laws* (LAW) para representação e manipulação simbólica de equações e funções e o *AG Spline* para a criação e manipulação de curvas e superfícies do tipo *spline*.

Os outros componentes são responsáveis por funções como operações *booleanas* (união, subtração, intersecção), renderização, conversão de formatos de arquivos (IGES, STEP, etc), “cura” de modelos (*healing*), transformação de modelos (*offset*, rotação, *blending*), entre outras funcionalidades.

Os componentes do ACIS são compilados na forma de bibliotecas de objetos. Tais bibliotecas devem ser agregadas (*link*) ao código dos programas e estão disponíveis na forma de bibliotecas estáticas (.lib) ou dinâmicas (.dll).

### Interfaces de Programação

O acesso às funcionalidades do ACIS pode ser feito de várias maneiras. Através da linguagem C++, pela linguagem *Scheme* ou por uma combinação das duas.

O acesso através da linguagem C++ pode ser feito usando funções API (*Application*

*Procedural Interface*), ou funções de interface direta DI (*Direct Interface*). Estes métodos também podem ser estendidos ou redefinidos pelo usuário.

As funções API são a principais formas de acesso ao ACIS usando C++. Basicamente são desenvolvidas de forma a permitir o acesso ao ACIS associado ao tratamento de erros (argumentos e resultados), mecanismos de *undo* e *redo* e a consistência em função das diferentes versões do ACIS.

As DIs são funções ou métodos (membros de classes ou não) comuns de C++ que implementam funcionalidades do ACIS e não permitem tratamento de erros ou as outras características oferecidas pelas funções API, bem como a consistência entre versões.

Há também um conjunto de classes e funções do ACIS derivadas do MFC, denominadas ACIS MFC, que permitem e facilitam a programação em plataforma Windows de uma maneira mais rápida.

O *Scheme* é uma linguagem interpretada derivada da linguagem de domínio público LISP, que proporciona um acesso rápido às funcionalidades do ACIS. Como é uma linguagem interpretada, não exige nenhum processo de compilação ou *linkage*. Uma outra vantagem é utilizar o *Scheme* como treinamento ou teste das funcionalidades do ACIS para posterior programação em C++.

## Exemplos de Programas

Seguem alguns exemplos de programas típicos usando ACIS desenvolvidos em C++ e *Scheme*, com base em (Corney, 1997). No primeiro exemplo são criados dois cilindros, é aplicada uma rotação a um deles, os dois são unidos e o corpo resultante é salvo em um arquivo SAT. No segundo exemplo, tem-se o programa equivalente em *Scheme*.

### Programa em C++

```
//Definicao dos arquivos de cabecalho e prototipo de funcoes
#include "stdio.h"
#include "boolean/kernapi/api/boolapi.hxx"
#include "construct/kernapi/api/cstrapi.hxx"
#include "kernel/kernapi/api/kernapi.hxx"
#include "kernel/kerndata/top/alltop.hxx"
#include "kernel/kerndata/lists/lists.hxx"
#include "kernel/kernutil/vector/transf.hxx"
#include "kernel/kernutil/vector/vector.hxx"
```

```

//Prototipo de funcao para salvamento de entidades em arquivo SAT
void save_ent(char*, ENTITY*);

//Inicio do programa principal
void main()
{
//Inicializando os componentes do ACIS
  api_start_modeller(0);
  api_initialize_booleans();

//Criando os cilindros
  BODY *cyl1, *cyl2;
  api_make_frustum(100,20,20,20, cyl1);
  api_make_frustum(100,20,20,20, cyl2);

//Definindo uma transformacao de rotacao e aplicando aos cilindros
  transf rotX = rotate_transf(M_PI/2,vector(1,0,0));
  api_apply_transf(cyl1,rotX);

//Aplicando operacao booleana de uniao aos cilindros
  api_unite(cyl1,cyl2);

//Salvando a entidade final
  save_ent('unite.sat',cyl2);

//Finalizando os componentes do ACIS
  api_terminate_booleans();
  api_stop_modeller();

//Fim do programa principal
}

//Corpo da funcao de salvamento em arquivo SAT
void save_ent( char *filename, ENTITY *ent)
{
  FILE *fp = fopen(filename, 'w');
  if (fp != NULL) {
    ENTITY_LIST *savelist = new ENTITY_LIST;
    savelist->add(ent);
    api_save_entity_list(fp,TRUE,*savelist);
    delete savelist;
  } else
    printf('Unable to open file\n');
  fclose(fp);
}

```

## Programa em Scheme

```

;Inicializando a janela grafica
(view:gl)

;Definindo os cilindros
(define c1 (solid:cylinder (position 0 0 -50)(position 0 0 50) 20))
(define c2 (solid:cylinder (position 0 0 -50)(position 0 0 50) 20))
(define c3 (solid:cylinder (position 0 0 -50)(position 0 0 50) 20))

;Definindo e aplicando a transformacao de rotacao
(define t1 (transform:rotation (position 0 0 0) (gvector 1 0 0) 90))
(define t2 (transform:rotation (position 0 0 0) (gvector 0 1 0) 90))
(entity:transform c1 t1)
(entity:transform c2 t2)

;Definindo e aplicando a transformacao booleana de uniao
(define cross (solid:unite c1 c2 c3))

```

```
;Salvando as entidades em arquivo SAT
(part:save 'unite.sat')
```

### 7.1.2 HOOPS 3D *Application Framework*

O HOOPS 3D *Application Framework* (HOOPS/3dAF) é um conjunto de bibliotecas, baseadas em C++, para o desenvolvimento de aplicações gráficas 3D. É desenvolvido pela Tech Soft America ([www.hoops3d.com](http://www.hoops3d.com)) e encontra-se na versão 6.0 (HOOPS/3DAF, 2001; Merry e Leler, 1996).

O HOOPS/3dAF é definido como um *sistema gráfico* independente para o desenvolvimento de aplicações envolvendo visualização, manipulação, impressão, etc. em programas 3D. Juntamente com um modelador geométrico como o ACIS e uma biblioteca para o desenvolvimento de interfaces (MFC, Qt, Motif, etc) permite a confecção de aplicações gráficas como as utilizadas em projeto e engenharia, CAD/CAM/CAE.

O HOOPS/3dAF é constituído dos seguintes componentes

- HOOPS/3dGS - HOOPS 3D *Graphics System*. É o núcleo do HOOPS/3dAF. Consiste de um conjunto de APIs para a criação, edição, armazenamento, manipulação, recuperação de dados (*querying*), renderização e impressão de todo tipo de informações gráficas 3D (textos, modelos geométricos, barras de cores, legendas, etc.);
- HOOPS *Internet Tools* - Ferramentas para compressão de dados e distribuição pela rede mundial de computadores (*Data Streaming, Collaboration e Web Publishing*). Através da definição de um formato de arquivo HSF (*Hoops Stream File*) permite a integração dos aplicativos desenvolvidos com base no HOOPS/3dAF com sistemas de Internet ou cliente-servidor. É acompanhado normalmente dos componentes HOOPS/ActiveX, HOOPS/Netscape e HOOPS/Net;
- HOOPS/GMB - *Geometric Modeler Bridges*. Faz a interface com os principais modeladores geométricos da atualidade, ACIS e Parasolid *Kernel Modeler*. Permite uma integração rápida com os modelos gerados por esses componentes e o sistema

gráfico do HOOPS/3dAF (mapeamento de entidades, conversão);

- HOOPS *Model/View/Operator (MVO) Class Library* . Um conjunto de classes desenvolvidas em C++ , a partir do HOOPS/3dAF, que permitem a implementação da maioria das funcionalidades básicas dos sistemas CAD/CAM/CAE. Inclui métodos para seleção, manipulação, impressão, salvamento de arquivos e visualização de informações gráficas. Possui a vantagem de ter o código-fonte aberto, o que possibilita a sua modificação/extensão;
- HOOPS/GUI - *Graphical User Interface Modules* . Assim como o ACIS MFC, deriva classes para facilitar a programação de interfaces gráficas e em diversos sistemas operacionais como, Windows (MFC), Qt, ActiveX, Netscape *plug-ins*, Java Swing e Motif. Também são de código-fonte aberto permitindo a modificação.

### Conceitos Básicos

O sistema HOOPS/3dGS armazena as *cenar gráficas* como uma hierarquia de *segmentos*. Dessa forma, os *segmentos* constituem os elementos mais básicos organizacionais do HOOPS/3dGS.

De maneira geral, os segmentos representam conjuntos de geometrias, atributos e subsegmentos. A geometria representa qualquer elemento gráfico desenhado na tela, podendo ser elementos geométricos propriamente ditos ou textos, barras de cores, imagens *bitmap*, etc. Os atributos representam as características do próprio segmento ou dos seus constituintes como forma, tamanho, cores, luzes, sombras, posições, etc.

Os tipos de geometria utilizados no HOOPS/3dGS são *Circles, Circular Arcs, Circular Wedge, Circular Chord, Cutting Planes, Cutting Lines, Ellipses, Elliptical Arcs, Grids, Images, Lines, Markers, Meshes, NURBS Curves, Polygons, Polylines, Shells* e *Text*.

O procedimento de programação através do HOOPS/3dGS é baseado primariamente na definição de segmentos, inserção de geometrias e/ou subsegmentos e definição de atributos.

## Exemplo de Código

A seguir, tem-se um exemplo de código típico usando o HOOPS/3dGS, desenvolvido com base em (HOOPS/3DAF, 2001). No seguinte exemplo, são criados segmentos, inseridas retas tridimensionais (representando as geometrias) com diferentes formas (contínua, traço-ponto, pontilhado, etc.) e espessuras (representando os atributos).

```
//Definicoes de cabecalho
#include "hc.h"

//Inicio do programa principal
int main ()
{
    //Criando o segmento principal
    HC_Open_Segment ("?Picture");

    //Criando os segmentos secundarios e definindo os atributos
    HC_Open_Segment ("eddy street");
    HC_Insert_Line (-0.7, -0.7, 0.0, 0.7, 0.7, 0.0);
    HC_Set_Line_Pattern ("...");
    HC_Close_Segment ();

    HC_Open_Segment ("state street");
    HC_Insert_Line (-0.3, 0.5, 0.0, -0.5, 0.2, 0.0);
    HC_Set_Line_Weight (3.0);
    HC_Close_Segment ();

    HC_Open_Segment ("dryden road");
    HC_Insert_Line (0.4, 0.6, 0.0, 0.3, -0.7, 0.0);
    HC_Set_Line_Pattern ("- -");
    HC_Close_Segment ();

    //Fechando o segmento principal e finalizando o programa
    HC_Close_Segment ();
    HC_Pause ();
    HC_Exit_Program ();
    return 0;
}
```

### 7.1.3 Qt

Qt é uma biblioteca multi-plataforma para o desenvolvimento de interfaces gráficas de usuário, baseada em orientação por objetos e linguagem C++. É desenvolvida pela Trolltech AS. ([www.trolltech.com](http://www.trolltech.com)) e atualmente encontra-se na versão 2.3 (Qt, 2001; Dalheimer, 1999).

Através da Qt é possível emular as interfaces gráficas nativas de diversos sistemas operacionais como

- MS/Windows - 95, 98, NT, e 2000;
- Unix/X11 - Linux, Sun Solaris, HP-UX, Digital Unix, IBM AIX, SGI IRIX e vários outros e
- *Embedded* - plataformas Linux para dispositivos eletrônicos com saída gráfica como micros de mão (*palmtops*), telefones celulares, etc.

O ambiente gráfico KDE, comum nas distribuições do sistema operacional Linux, foi originalmente desenvolvido com base em Qt.

### Conceitos Básicos

Todos os objetos de interface criados a partir do Qt são denominados *widgets* e derivam de uma classe base denominada *QWidget*. Através da classe *QWidget*, pode-se manipular qualquer tipo de evento gerado pelo usuário ou pelo sistema operacional.

Todo *widget* é um objeto gráfico retangular e está relacionado aos demais através de relações do tipo *pai-filho* (um *widget*-pai pode possuir vários *widgets*-filhos, etc.). *Widgets* de *alto-nível* são aqueles que estão no topo da hierarquia, não possuindo pais. Normalmente, *widgets* de alto-nível são representados por janelas contendo uma moldura e uma barra de título, embora seja possível definir *widgets* com outra aparência. Em Qt, as classes *QMainWindow* e as várias subclasses *QDialog* são os tipos mais comuns de *widgets* de alto-nível.

Em Qt são usados diferentes tipos de métodos para processar os eventos gerados pela interação entre o usuário e a interface gráfica. O primeiro define um conjunto de métodos virtuais para a classe *QWidget* capazes de manipular eventos de *baixo-nível* (eventos básicos ou padrão) como desenhar na tela ("*Paint*"), redefinir tamanhos ("*Resize*"), pressionar teclas ("*Key Press*") e mover o *mouse* ("*Mouse Movement*").

O segundo tipo é um paradigma inventado pelos desenvolvedores do Qt, denominado "*Signals and Slots*", para manipulação de eventos de *alto-nível* ou não-padrão. Nesse modelo, o programador define diferentes tipos de "sinais" personalizados que podem ser emitidos pelos *widgets* quando são ativados pelos usuários, por exemplo, quando

um botão de *menu* recebe um *click de mouse*. Os “*slots*” representam áreas distintas do código-fonte que implementam as ações a serem executadas quando os sinais forem emitidos.

De maneira geral, quando o usuário ativa um elemento qualquer da interface gráfica (*widget*), este gera um sinal. Em seguida, métodos padrão do Qt associam o sinal ao seu respectivo *slot* que executa a ação definida pelo programador.

### Exemplo de Código

A seguir, tem-se um exemplo típico de programa em Qt, desenvolvido com base em (Qt, 2001). No seguinte exemplo é criada uma janela padrão com um botão “Sair”, que permite abandonar o aplicativo após ser pressionado. No programa há também um exemplo de mudança do tipo de fonte usada e a conexão entre *signals* e *slots* padrão (`clicked()` e `quit()`).

```
//Definicoes de cabecalho
#include "qapplication.h"
#include "qpushbutton.h"
#include "qfont.h"

//Inicio do programa principal
int main( int argc, char **argv )
{
    //Inicializando a aplicacao com os parametros da linha de comando
    QApplication a( argc, argv );

    //Criando o botao e redefinindo o tamanho o tipo de fonte
    QPushButton quit( "Sair", 0 );
    quit.resize( 75, 30 );
    quit.setFont( QFont( "Times", 18, QFont::Bold ) );

    //Conectando o sinal padrao de click do botao com o slot de sair
    QObject::connect( &quit, SIGNAL(clicked()), &a, SLOT(quit()) );

    //definindo o botao como principal elemento da aplicacao e mostrand o
    //na tela
    a.setMainWidget( &quit );
    quit.show();

    //Finalizando a aplicacao e o programa principal
    return a.exec();
}
```

#### 7.1.4 MeshSim

O MeshSim é um componente de software, baseado em C++, para geração automática de malhas diretamente a partir de modelos geométricos em formato CAD. É desenvolvido pela empresa *Simmetrix Inc.* ([www.simmetrix.com](http://www.simmetrix.com)). Encontra-se na versão 3.2 (MeshSim, 2001) e é disponível nas plataformas Windows e Unix/Linux.

Através do MeshSim é possível gerar malhas de superfície e de volume. As malhas de superfície podem ser triângulos lineares (3 nós), quadriláteros lineares (4 nós), mista (triângulos e quadriláteros lineares) e triângulos quadráticos (6 nós). Já as malhas de volume podem ser formadas por tetraedros lineares (4 nós) ou tetraédros quadráticos (10 nós).

Atualmente, o MeshSim é composto dos seguintes subcomponentes

- MeshSim *Core*: é o núcleo de geração de malhas. Permite a geração de malhas estruturadas e não-estruturadas a partir de modelos geométricos em formato CAD;
- MeshSim *Interfaces*: representa o sistema de conversão de formatos de arquivo CAD baseados nos modeladores ACIS e Parasolid e
- MeshSim *Boundary Layer*: permite a geração de malhas especiais para aplicação em problemas de fluidos (malhas CFD - *Computational Fluid Dynamics*).

#### Conceitos Básicos

Para gerar uma malha de elementos finitos, utilizando o MeshSim, é necessário converter o modelo de CAD nativo para um formato específico do MeshSim. Isso é feito utilizando os conversores de modelos geométricos (MeshSim *Interfaces*).

Posteriormente, devem ser definidos os parâmetros para geração da malha (tipo de malha (superfície ou volume), tamanho dos elementos (locais ou global), critérios de refinamento, otimização e suavização da malha gerada, controle do processo, etc.. Caso nenhum parâmetro de geração seja definido, é possível gerar a malha automaticamente com parâmetros padrão do MeshSim.

Ao final da geração, utilizam-se rotinas de iteração (*query functions*) ao longo das entidades de malha gerada, a fim de salvar as informações em arquivos personalizados pelo usuário ou mesmo graficar a malha em um programa com suporte gráfico.

## Exemplo de Código

A seguir tem-se um exemplo de código para geração de malhas utilizando o MeshSim, desenvolvido com base em (MeshSim, 2001). O modelo CAD original é baseado em ACIS e a malha é salva em um arquivo texto (formato ASCII).

```
//Definicoes de cabecalho
#include ''MeshSim.h''
#include ''MeshSimAcis.h''
#include <stdout.h>

//Prototipo da funcao para salvamento da malha
void writeNodesAndElements(pMesh mesh, FILE *file)

//Iniciando o programa principal
int main(int argc, char *argv[])
{
    //Inicializando o MeshSim
    MS_init();

    //Criando os objetos de modelo e malha no formato MeshSim
    pGModel model;
    pMesh mesh;

    //Lendo o modelo geometrico a partir de um arquivo ACIS (SAT)
    model = GM_createFromAcisFile(argv[1]);

    //Gerando uma malha com parametros globais padrao
    mesh = MS_newMesh(model);
    MS_generateMesh(mesh,0);

    //Salvando a malha (nos e elementos) em um arquivo ASCII
    FILE *file = fopen(''mesh.dat'',''w'');
    writeNodesAndElements(mesh,file)

    //Finalizando o MeshSim
    MS_exit();

    //Fim do programa principal
    return 1;
}

//Corpo da funcao para salvamento da malha
void writeNodesAndElements(pMesh mesh, FILE *file)
{
    //Estruturas de dados para iteracao das entidades de malha
    VIter vIter;
    RIter rIter;
    pVertex vertex;
    pRegion region;
    double loc[3];
    pPlist regionVerts;
    int i,j;
    vIter = M_vertexIter(mesh);
```

```

rIter = M_regionIter(mesh);
i=0;

//Escrevendo as coordenadas dos nos
while(vertex=VIter_next(vIter))
{
  EN_setID(vertex,i++);
  V_coord(vertex,loc);
  fprintf(file,"%lf %lf %lf\n",loc[0],loc[1],loc[2]);
}

//Escrevendo as incidencias dos elementos
while(region = RIter_next(rIter))
{
  regionVerts = R_verts(region);
  for(j=0; j < 4; j++)
  {
    vertex = (pVertex)Plist_item(regionVerts,j);
    fprintf(file,"%d ",EN_id(vertex));
  }
  fprintf(file,'\n');
}
}

```

## 7.2 Projeto do Ambiente de Geração de Malhas

Nas seções seguintes, apresenta-se o desenvolvimento do ambiente para geração de malhas de elementos, utilizando os conceitos de engenharia de software com base no processo RUP. A principal ferramenta utilizada durante o processo foi o programa *Rational Rose Enterprise Edition*, que permite o desenvolvimento de projetos com base nos conceitos da UML. O *Rational Rose* é parte integrante do conjunto de ferramentas (*Rational Suite Enterprise*) distribuído pela empresa *Rational*.

### 7.2.1 Requerimentos

Como requerimentos funcionais para o ambiente de geração de malhas, deseja-se que o mesmo implemente uma interface gráfica que permita o funcionamento de forma unificada (*standalone*) ou integrado em um ambiente completo de análise por elementos finitos, juntamente com os programas de modelagem geométrica, definição do problema, análise, otimização e visualização de resultados.

Deve ser possível também o funcionamento em um modo sem interface gráfica (modo texto), através de arquivos de comando (*batch run*). Esta última possibilidade permite o

funcionamento do ambiente de geração de malhas à distância (sistemas remotos, cliente-servidor ou mesmo a Internet), bem como a integração com outros sistemas.

O ambiente gráfico deve permitir ao usuário a abertura de arquivos CAD, no formato ACIS (SAT) ou a importação de diferentes formatos (IGES, STEP, CATIA, etc.), com procedimento automático de cura (*healing*) das possíveis imperfeições do modelo geométrico.

Após a abertura do modelo geométrico, cabe ao usuário definir todos os parâmetros de malha (tipo de malha, tipo de elemento, critérios de refinamento, etc.) e submeter o modelo para geração. Caso os parâmetros não sejam fornecidos, o sistema deve ser capaz de gerar a malha a partir de parâmetros padrão.

Gerada a malha, o sistema deve permitir a visualização e manipulação dos atributos (nós e elementos), assim como listar informações como coordenadas dos nós, identificadores dos nós e elementos e qualidade dos elementos.

O ambiente gráfico para geração de malhas deve possuir funcionalidades de visualização como *Pan*, *Zoom*, *Rotate*, *Render*, *Wireframe*, tanto para o modelo geométrico quanto para a malha. Todas as inconsistências, erros e incompatibilidades durante o processo devem ser informadas ao usuário. Um arquivo com um resumo do processo (log) deve ser criado ao final da utilização.

Quando da utilização do ambiente no modo texto, as informações sobre o modelo e os parâmetros de geração e diretórios e formatos de entrada e saída de resultados devem ser submetidos através de um arquivo de comandos em formato ASCII. Após a geração, os resultados devem ser armazenados em um diretório acessível ao usuário, juntamente com um arquivo log com o resumo do processo.

### 7.2.2 *Use-case* Principal

Na Figura 7.1, tem-se o diagrama de atividades do *use-case* para o funcionamento no modo gráfico, a partir da abertura do arquivo com o modelo, definição dos parâmetros e geração da malha. O fluxo principal representa o sistema funcionando integrado com

o ambiente completo para análise por elementos finitos. O fluxo alternativo representa o ambiente funcionando individualmente.

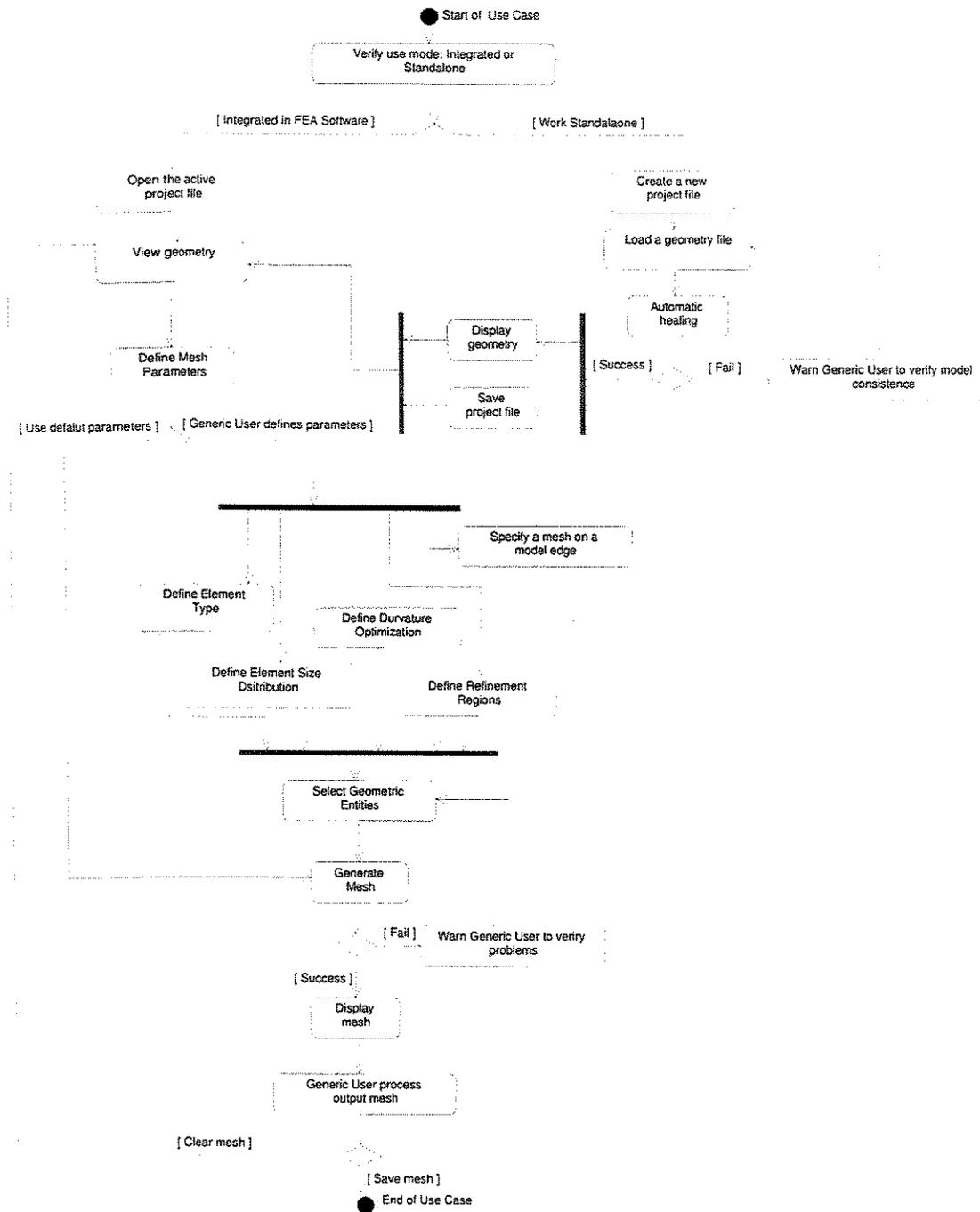


Figura 7.1: Diagrama de atividades para o *use-case* principal.

### 7.2.3 Testes Preliminares

Para garantir um projeto mais consistente para as classes do sistema, foram realizados alguns testes de implementação dos componentes utilizados no desenvolvimento do ambiente para geração de malhas. Os componentes testados foram o ACIS e o HOOPS, associados ao Qt, bem como o componente de geração de malhas MeshSim.

As Figuras 7.3 e 7.4 representam as malhas geradas a partir do modelo geométrico da Figura 7.2, construído com base no modelador ACIS. A Figura 7.5 ilustra a tela principal do programa de teste que foi desenvolvido.

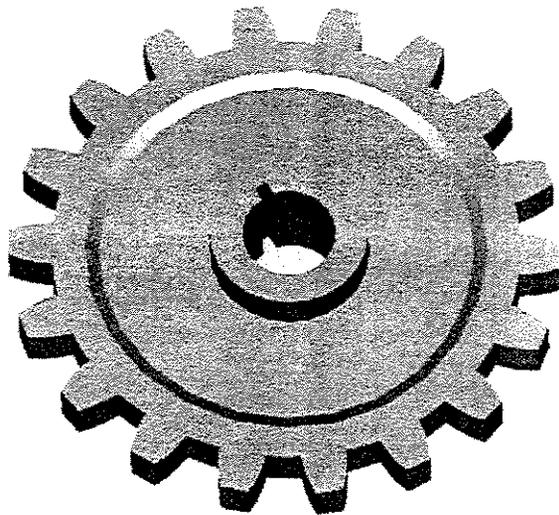


Figura 7.2: Modelo de engrenagem usado para testes de geração de malhas. Desenvolvido usando o modelador geométrico ACIS.

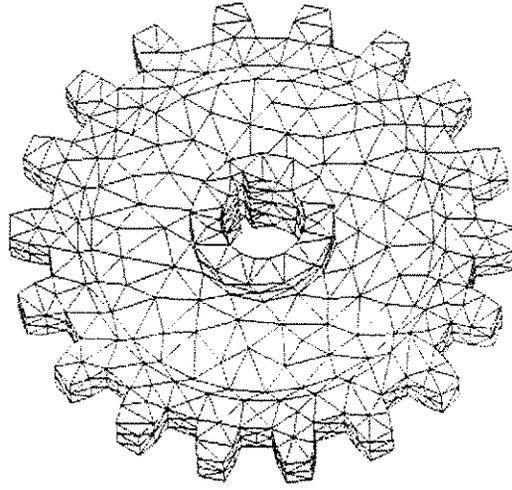


Figura 7.3: Malha de elementos finitos tetraédricos lineares. 842 nós e 2262 elementos.

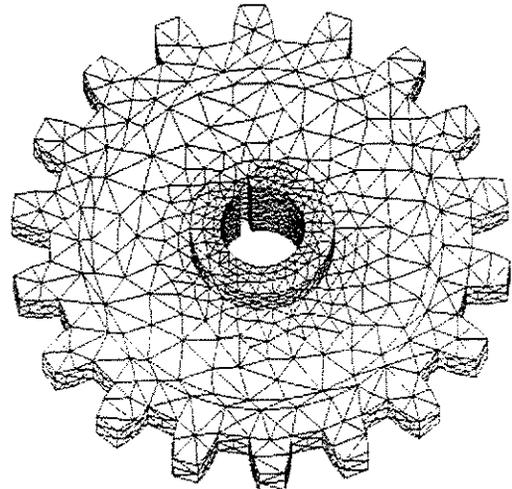


Figura 7.4: Malha de elementos finitos tetraédricos lineares com refinamento de curvaturas. 2904 nós e 11639 elementos.

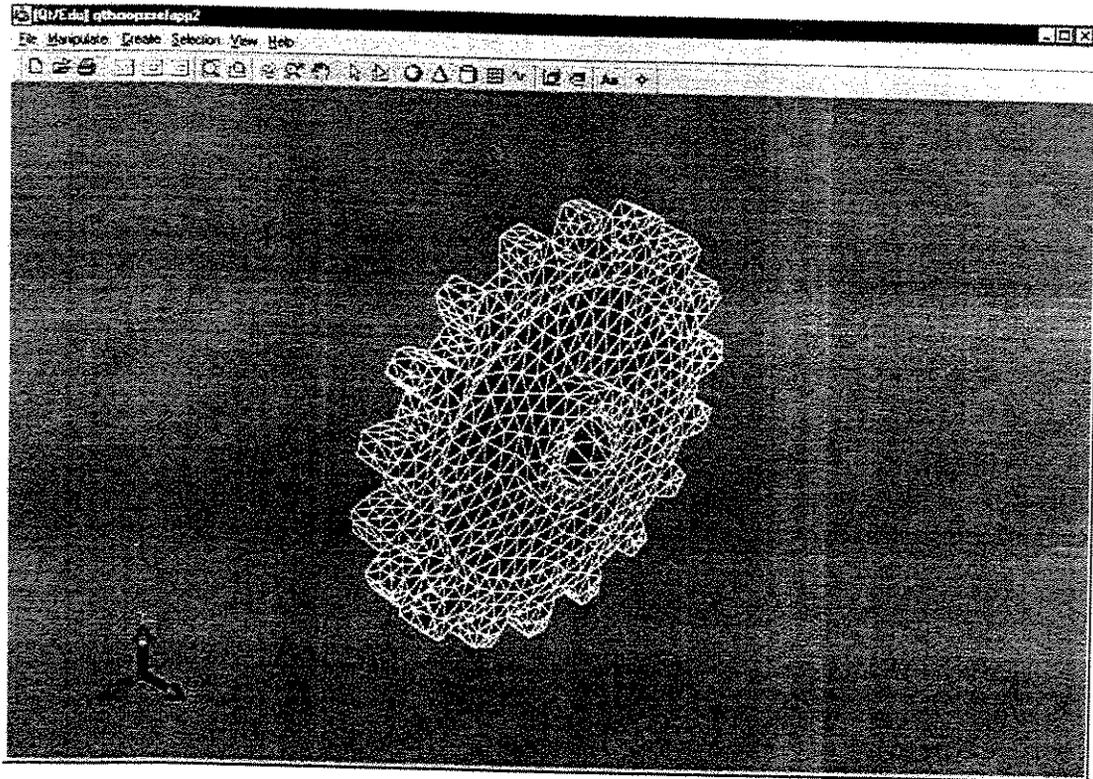


Figura 7.5: Tela principal do programa de teste usando os componentes ACIS, HOOPS, Qt e MeshSim.

## 7.2.4 Análise e Projeto de Classes

A seguir, ilustram-se os diagramas obtidos na etapa de análise e projeto de classes para o ambiente de geração de malhas utilizando a UML através do programa *Rational Rose*.

A Figura 7.6 ilustra as classes de análise para o sistema. As classes de análise representam o usuário genérico (*Generic User*), o gerador de malhas (*MeshGenerator*), a interface do sistema (*MeshGenerationGUI*), a malha (*Mesh*) e o modelo geométrico (*GeometricModel*). Nas Figuras 7.7 e 7.8, têm-se os diagramas de sequência e colaboração para as classes de análise.

As classes de projeto para o núcleo de geração de malhas podem ser visualizadas através da Figura 7.9. Os dados membro e os métodos das classes também estão definidos.

Tais classes são: uma classe genérica para o gerador de malhas (*MeshGenerator*) e uma classe herdeira específica para o gerador de malhas (*MSMeshGenerator*) baseado no componente MeshSim. A classe *ElementType\_E* é uma classe auxiliar para a definição dos tipos de elementos finitos disponíveis para a geração (tipo de dado enumerado).

Ao se considerar outras derivações para a classe genérica *MeshGenerator*, é possível incluir outros componentes para geração de malhas, tais como os programas GiD e Hypermesh.

Na Figura 7.10, representam-se as classes base para o desenvolvimento da interface do programa. A classe *HQWidget* é uma classe genérica para o desenvolvimento de interfaces desenvolvida com base nos componentes HOOPS e Qt.

A classe *MeshInterface*, por sua vez, é uma herdeira de *HQWidget*, específica para o ambiente de geração de malhas. A classe *Mesh* é uma classe auxiliar para *MeshInterface*. Esta classe permite encapsular algumas das rotinas implementadas em *MeshInterface*, de forma a manter a portabilidade e a reutilização dos códigos da interface.

As relações entre as classes do núcleo de geração de malhas e as classes da interface podem ser visualizadas na Figura 7.11.

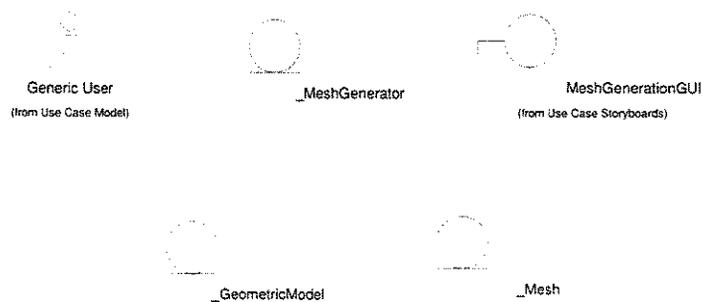


Figura 7.6: Diagrama de classes de análise.

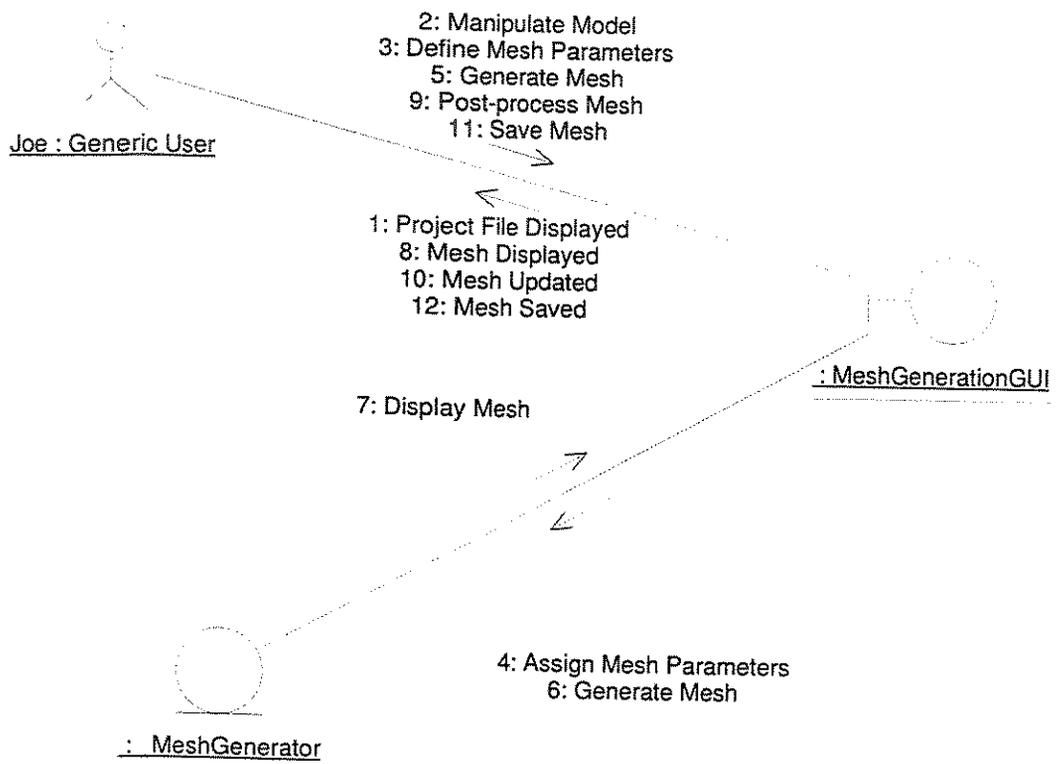


Figura 7.7: Diagrama de colaboração para os objetos de análise.

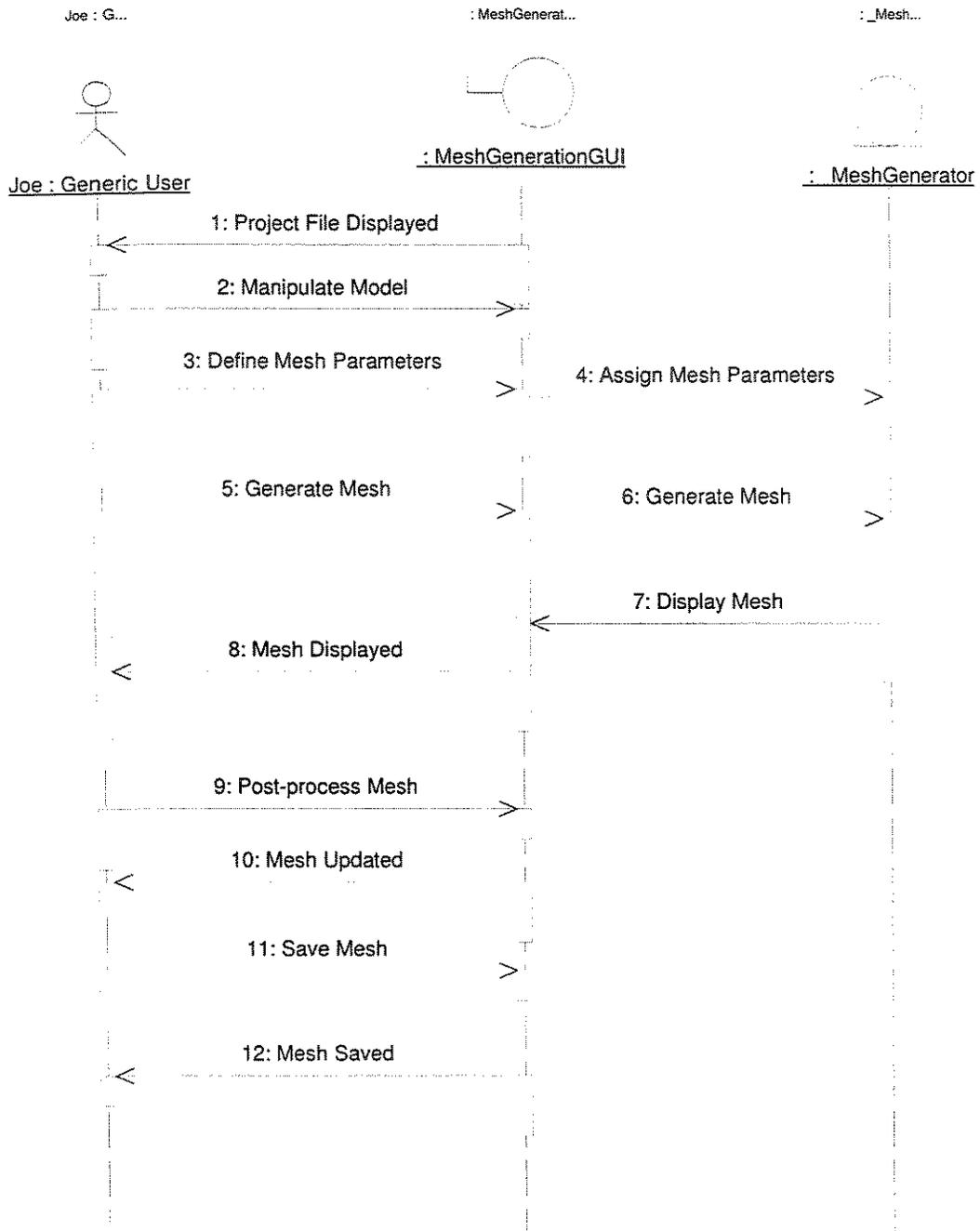


Figura 7.8: Diagrama de sequência para os objetos de análise.

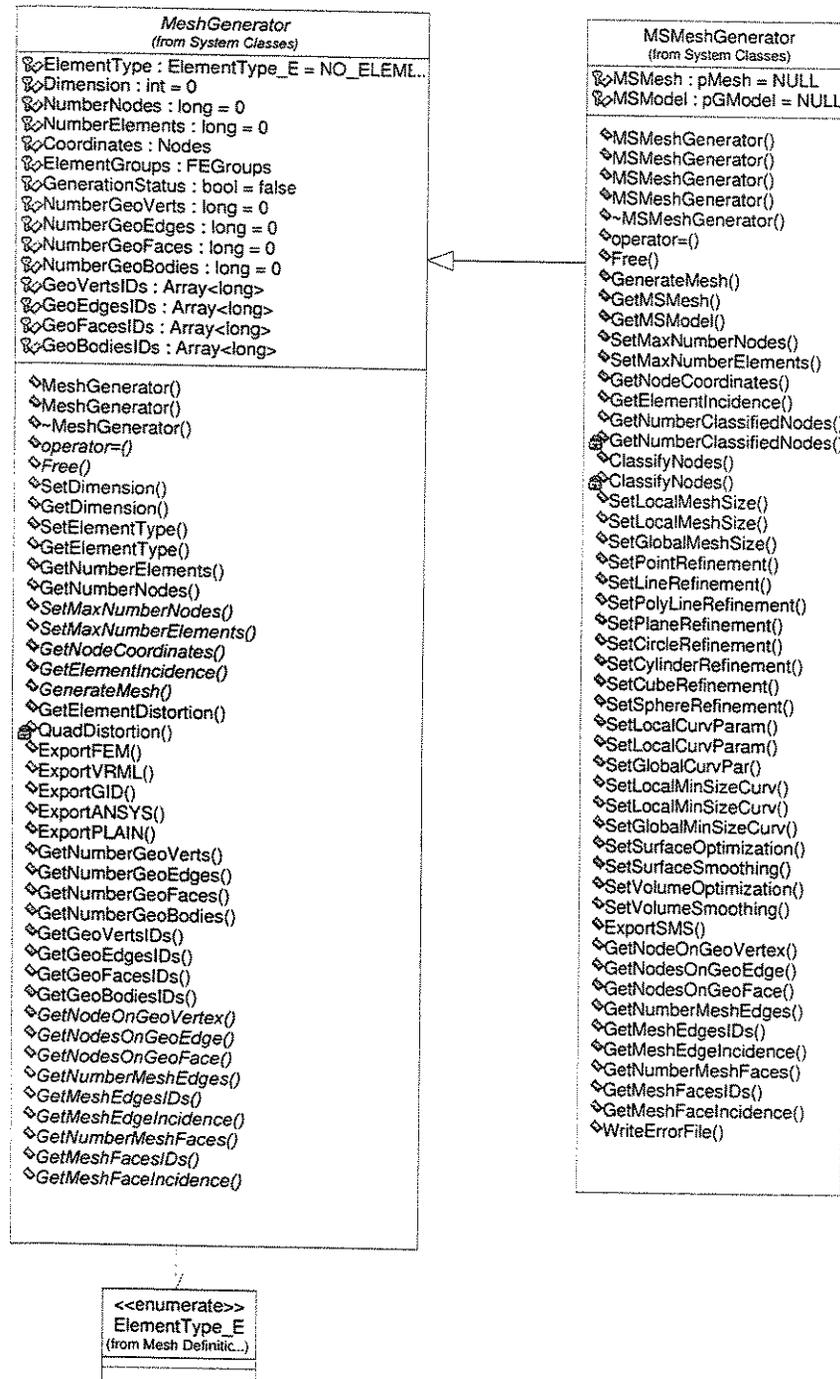


Figura 7.9: Diagrama de classes de projeto para o núcleo de geração de malhas.

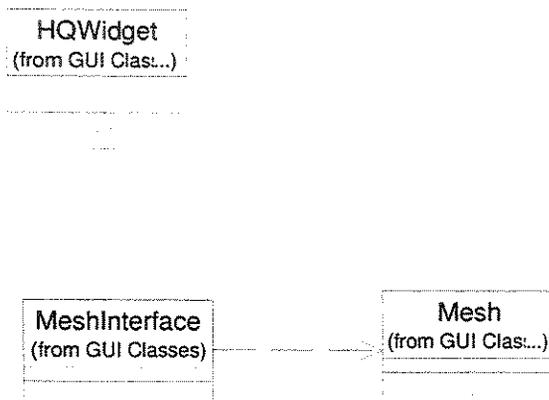


Figura 7.10: Diagrama de classes de projeto para a interface do sistema.

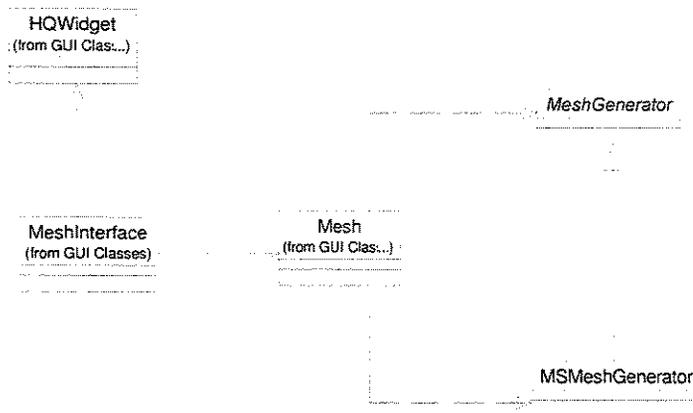


Figura 7.11: Relação entre as classe do núcleo de geração de malhas e as classes de interface.

### 7.2.5 Resultados Atuais

As classes do núcleo de geração de malhas já foram implementadas e sistema está funcionando de maneira satisfatória no modo sem interface gráfica (modo texto) e através da Internet. A Figura 7.12 apresenta o formulário de entrada de dados para geração de malhas através da Internet que vem sendo utilizado.

Para usar o programa em modo texto, o usuário deve criar um arquivo de comandos (ASCII) no qual são definidos todos os parâmetros para a geração de malhas: nomes de arquivos e diretórios de entrada e saída, tipos de arquivo de entrada e saída e parâmetros

**Tipo do arquivo de entrada:**  SAT  IGES  STEP  PRO/ENGINEER  CATIA  VDA/FS

**Arquivo de entrada:**

**Tipo da malha:**  Bidimensional  Superfície  Volume

**Tipo do elemento:**

<input checked="" type="radio"/> Triângulo (3 nós)	<input type="radio"/> Triângulo (6 nós)
<input type="radio"/> Quadrado (4 nós)	<input type="radio"/> Mista (quadrados de 4 nós e triângulos de 3 nós)
<input checked="" type="radio"/> Tetraedro (4 nós)	<input checked="" type="radio"/> Tetraedro (10 nós)

**Definição de parâmetros de malha:**  Automático  Manual

**Parâmetros de malha para a opção manual:**

Tamanho médio do elemento:

Grau de refinamento da malha em regiões curvas:  Nenhum  Baixo  Médio  Alto

**Tipo do arquivo de saída:**  GID  ANSYS  FEM

Figura 7.12: Formulário para geração de malhas através da Internet.

de geração como tamanho global e tipo de elemento e refinamento de curvaturas. O processo de geração é submetido usando a linha de comandos do sistema operacional (Windows ou Unix/Linux) tendo como parâmetro de entrada para o programa dado pelo arquivo de comandos.

No caso de utilizar o programa através da Internet, o usuário deve especificar no formulário (ver Figura 7.12) o tipo de arquivo de entrada, carregar o arquivo no servidor (*upload*), definir o tipo de malha e o tipo de elemento a ser utilizado, especificar os parâmetros para geração (tamanho médio do elemento e grau de refinamento em curvaturas) e os tipos de arquivo de saída para a malha a ser gerada. Caso o usuário não especifique os parâmetros para geração, o sistema define o tamanho médio do elemento e o grau de refinamento em curvaturas automaticamente. Esse sistema está funcionando em uma *versão piloto* na rede de computadores do laboratório do grupo de pesquisa e posteriormente pretende-se disponibilizá-lo para toda a Internet.

Os modelos geométricos para geração de malhas devem estar no formato SAT (ACIS). Os tipos de elementos disponíveis são triângulos (3 e 6 nós), quadriláteros (4

nós), malha mista (quadriláteros de 4 nós e triângulos de 6 nós) e tetraedros (4 e 10 nós). Ressalta-se que arquivos em outros formatos diferentes de SAT podem ser convertidos usando o módulo de manipulação de geometrias, que faz parte do projeto citado anteriormente (Driemeier, 2002), e submetidos para geração de malhas.

As malhas geradas são exportadas em formatos compatíveis com os programas de elementos finitos comerciais Ansys e GiD, no formato VRML (*Virtual Reality Modeling Language*) e em outros formatos específicos para análise por elementos finitos. O formato VRML é muito útil, pois permite a visualização da malha através de *browsers* de Internet (Internet Explorer, Netscape Navigator, etc), usando acessórios tipo *plug-in* gratuitos.

A interface para o ambiente gráfico de geração de malhas encontra-se em fase de implementação. Com base nos testes realizados, observou-se a viabilidade de utilização dos componentes gráficos e do componente para geração de malhas.

Os próximos passos do desenvolvimento consistem em finalizar a implementação das classes de interface, finalizar os testes do sistema, fazer a integração com os outros módulos e disponibilizá-lo para uso. Dessa forma, será possível concluir a primeira iteração do processo de desenvolvimento, permitir a sua continuidade através da inclusão de novas funcionalidades e rever as possíveis falhas da primeira fase.

## Capítulo 8

# Conclusões e Perspectivas Futuras

A realização desse trabalho permitiu obter as seguintes conclusões:

- Os métodos convencionais para o tratamento da fadiga mecânica são, em geral, baseados em equações empíricas, aplicadas em casos muito particulares e inadequadas a simulação computacional;
- Através da Mecânica do Dano é possível formular o processo de deterioração dos materiais submetidos a diversos tipos de carregamento. Foram definidas equações constitutivas para um material elastoplástico acoplado a fenômeno de dano, sem a inclusão de fenômenos de encruamento (plasticidade perfeita ou ideal);
- A implementação numérica da integração local do modelo constitutivo apresentou resultados coerentes com os da literatura;
- Usando o modelo de material elastoplástico acoplado ao dano foi possível desenvolver a simulação computacional de um componente submetido à fadiga, através da análise estrutural por elementos finitos;
- Através do uso das metodologias e recursos da Engenharia de Software foi possível desenvolver programas mais confiáveis, de maneira modular, em uma estrutura de projeto mais organizada, permitindo melhor manutenção e crescimento;

- Como ilustração do uso dos conceitos e recursos da Engenharia de Software foi desenvolvido um ambiente gráfico para geração de malhas através da integração de componentes de software disponíveis comercialmente. O sistema encontra-se em fase final de implementação e já pode ser utilizado em modo texto ou através da Internet;

Como idéias para trabalhos futuros, é possível fazer as seguintes sugestões:

- Fazer um estudo comparativo entre os resultados da análise estrutural de componentes submetidos à fadiga pelo Método dos Elementos Finitos com as técnicas convencionais de projeto;
- Desenvolver a formulação numérica para o problema de estado plano de tensões e comparar os resultados da análise estrutural com os apresentados na literatura;
- Estudar a aplicação de técnicas de refinamento adaptável, associadas a interpolações de elementos finitos de maior ordem, de forma reduzir a dependência das variáveis de dano em relação ao refinamento da malha;
- Implementar a formulação de Análise de Sensibilidade e Otimização Estrutural de componentes submetidos à fadiga;
- Estudar as possibilidades de acoplamento entre os conceitos da Mecânica do Dano e da Fratura, de forma a modelar a iniciação e a propagação de trincas simultaneamente;
- Finalizar a implementação e integrar o ambiente de geração de malhas com os outros módulos do projeto.

## Referências Bibliográficas

- ACIS. Spatial Corporation. Online help for ACIS, version 6.3, 2001.
- Anthes, R. J. Modified rainflow counting keeping the load sequence. *International Journal of Fatigue*, v. 19, n.7, p.529-535, 1997.
- Arora, J. *Introduction to Optimum Design*. Mechanical Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1989.
- Arora, J., Cardoso, J. Variational principle for shape design sensitivity analysis. *AIAA Journal*, v. 30, n.2, p.538-547, 1992.
- Bannantine, J. A., Comer, J. J. , Handrock, J. L. *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- Benallal, A., Billardon, R. , Doghri, I. An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, v. 4, n.1, p.731-740, 1988.
- Booch, G. *Object Oriented Design with Applications*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., USA, 1991.
- Booch, G., Rumbaugh, J. , Jacobson, I. *The Unified Modeling Language User Guide*. Addison Wesley, Reading (MA), 1999.
- Bugeda, G., Gil, L. Shape sensitivity analysis for structural problems with non-linear material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, n.1, p.1385-1404, 1999.
- Buscaglia, G., Feijóo, R. , Padra, C. A posteriori error estimation in sensitivity analysis. *Structural Optimization*, v. 9, n.3/4, p.194-199, 1995.
- Castro, J. T. P., Meggiolaro, M. A. Vida 98 - danômetro visual para automatizar o projeto à fadiga sob carregamentos complexos. *RBCM - Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v. 20, n.4, p.666-685, 1998.
- Castro, J. T. P., Meggiolaro, M. A. Alguns comentários sobre a automação do método epsilon-n para dimensionamento à fadiga sob carregamentos complexos. *RBCM - Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v. 21, n.2, p.294-312, 1999.

- Castro, J. T. P., Meggiolaro, M. A. Automation of the fatigue design under complex loading. In: *Fadiga 2000, I Seminário Internacional de Fadiga da SAE Brasil Seção São Paulo*, p. 1-17, FEI- Faculdade de Engenharia Industrial, São Bernado do Campo, SP, Brasil. SAE - Brasil, 2000.
- Choi, K., Haug, E. Shape design sensitivity analysis of elastic structures. *Journal of Structural Mechanics*, v. 11p.231-269, 1983.
- Choi, K., Santos, J. Design sensitivity analysis for nonlinear structural systems part I: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n.1, p.2039-2055, 1987.
- Choi, K., Seong, H. A domain method for shape design sensitivity analysis of built-up structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 57, n.1, p.1-15, 1986.
- Choi, K., Twu, S. Equivalence of continuum and discrete methods of shape design sensitivity analysis. *AIAA Journal*, v. 27, n.10, p.1419-1424, 1989.
- Collins, L. A. *Failure of Materials in Mechanical Design*. John Wiley & Sons, Ohio, USA, 1981.
- Corney, J. *3D Modeling with ACIS Kernel and Toolkit*. John Wiley and Sons, New York, 1997.
- Dalheimer, M. *Programming with Qt*. O'Reilly & Associates, New York, 1999.
- Driemeier, L. *Considerações Sobre a Fadiga em Metais e o Comportamento do Concreto sob Solicitação Cíclica*. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1995., Dissertação (Mestrado).
- Driemeier, L. S. *Aplicação do Conceito de Derivada Topológica na Otimização de Estrutural de Problemas da Elasticidade*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002., Dissertação (Mestrado).
- Fatemi, A., Yang, L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, v. 20, n.1, p.9-34, 1998.
- Fuchs, H. O., Stephens, R. I. *Metal Fatigue in Engineering*. Wiley, New York, 1980.
- Gani, L., Rajan, S. D. Use of fracture mechanics and shape optimization for component design. *AIAA Journal*, v. 37, n.2, p.255-260, 1999.
- Gdoutos, E. E. *Fracture Mechanics - An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993.
- Grunwald, J., Schnack, E. A fatigue model for shape optimization. *Structural Optimization*, v. 14, n.1, p.36-44, 1997.

- Grunwald, J., Schnack, E. Modeling fatigue for shape optimization of dynamically loaded parts. *Advances in Engineering Software*, v. 291, n.1, p.63–67, 1998.
- Grunwald, J. E. *A Fatigue Model for Shape Optimization based on Continuum Damage Mechanics*. Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe, 1996., Tese (Doutorado), Karlsruhe, Germany.
- Gurtin, M. *An Introduction to Continuum Mechanics*, v. 158 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1981.
- Haftka, R., Grandhi, R. Structural shape optimization — a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 57, n.1, p.91–106, 1986.
- Haug, E., Choi, K. , Komkov, V. *Design sensitivity analysis of structural systems*, v. 177 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Orlando, 1986.
- Herskovits, J., Coelho, C. An interior points algorithm for structural optimization problems. In: Brebbia, C., Hernandez, S., (Eds.), *Computer Aided Optimum Design of Structures: Recent Advances - Proceedings of the First International Conference, Southampton, June, 1989*, p. 231–241, Southampton. Computational Mechanics Publications - Springer Verlag, 1989.
- HOOPS/3DAF. Tech Soft America. Hoops/3daf online documentation, version 6.0, 2001.
- Jacobson, I., Booch, G. , Rumbaugh, J. *The Unified Software Development Process*. Addison Wesley, Reading (MA), 1999.
- Kachanov, L. M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1986.
- Kim, N., Choi, K. , Chen, J. S. Shape design sensitivity analysis and optimization of elasto-plasticity with frictional contact. *AIAA Journal*, v. 38, n.9, p.1742–1753, 2000.
- Kleiber, M. Incremental finite element sensitivity analysis for non-linear mechanics applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n.1, p.3291–3308, 1994.
- Krajcinovic, D. Selection of damage parameter - art or science? *Mechanics of Materials*, v. 28, n.1, p.165–179, 1998.
- Krajcinovic, D. Damage mechanics: Accomplishments, trends and needs. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, n.1, p.267–277, 2000.
- Lai, W., Rubin, D. , Krempl, E. *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 3rd ed., 1993.
- Langlais, T. E. *Computer Methods for Multiaxial Plasticity*. Faculty of the Graduate School of the University of Minnesota, 1994., Dissertação (Mestrado).

- Langlais, T. E. *Computational Methods for Multiaxial Fatigue Analysis*. Faculty of the Graduate School of the University of Minnesota, 1999., Tese (Doutorado).
- Lemaitre, J. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Germany, 1996.
- Lemaitre, J., Chaboche, J. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- Lemaitre, J., Doghri, I. Damage 90: A post processor for crack initiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 115, n.1, p.197-232, 1994.
- Lemaitre, J., Krajcinovic, D. *Continuum Damage Mechanics. Theory and Applications*. CISM Courses and Lectures n.295. International Centre for Mechanical Sciences, Italy, 1987.
- Lin, X. B., Smith, R. A. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates. Part I: The numerical technique. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 63, n.1, p.503-522, 1999a.
- Lin, X. B., Smith, R. A. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates. Part II: Crack shape change. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 63, n.1, p.523-540, 1999b.
- Lin, X. B., Smith, R. A. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates. Part III: Stress intensity factor and fatigue crack growth life. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 63, n.1, p.541-556, 1999c.
- Madayag, A. F. *Metal Fatigue: Theory and Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1969.
- Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n.20, p.3327-3342, 1996.
- Merry, J., Leler, W. *3D with Hoops*, 1996.
- MeshSim. Simmetrix, Inc. MeshSim user's guide, version 3.2, 2001.
- Mitchell, M. R. Fatigue analysis for design. In: *Fadiga 2000, I Seminário Internacional de Fadiga da SAE Brasil Seção São Paulo*, p. 1-29, FEI - Faculdade de Engenharia Industrial, São Bernado do Campo, SP, Brasil. SAE - Brasil, 2000.
- Norton, R. L. *Machine Design - An Integrated Approach*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1998. 1048p.
- Ortiz, M., Popov, E. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods*, v. 21, n.1, p.1561-1576, 1985.

- Owen, D. R. J., Hinton, E. *Finite Elements in Plasticity: theory and practice*. Prineridge Press, Swansea, Wales, 1996.
- Pastoukhov, V. A., Voorwald, H. J. C. *Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural*. Editora Unesp, São Paulo, SP, 1995.
- Pressman, R. S. *Engenharia de Software*. Makron Books, Brasil, 1995.
- Qt. Troll Tech AS. Qt online reference documentation, version 2.3.0, 2001.
- Rogers, D., Adams, J. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, 2nd ed., 1990.
- Santos, J., Choi, K. Shape design sensitivity analysis of nonlinear structural systems. *Structural Optimization*, v. 4, n.1, p.23–35, 1992.
- Schütz, W. A history of fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 54, n.2, p.263–300, 1996.
- Seong, H., Choi, K. Boundary-layer approach to shape design sensitivity analysis. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 15, n.2, p.241–263, 1987.
- Silva, C. *Otimização Estrutural e Análise de Sensibilidade Orientadas por Objetos*. DPM/FEM/UNICAMP, Campinas, 1997., Dissertação (Mestrado).
- Silva, C., Bittencourt, M. Análise de sensibilidade e otimização estrutural em problemas elastostáticos lineares. In: *Proceedings of 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Bauru. ABCM, 1997.
- Silva, C., Bittencourt, M. An interactive object-oriented tool for structural optimization. In: I. Idelsohn, E. O., Dvorkin, E., (Eds.), *Computational Mechanics - New Trends and Applications*, p. 1–16, Barcelona. CIMNE, 1998.
- Silva, C., Bittencourt, M. Design sensitivity analysis expressions in elastic problems (in portuguese). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 5, n.2, p.243–268, 1999a.
- Silva, C., Bittencourt, M. Expressões de análise de sensibilidade em problemas elásticos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 5, n.2, p.243–268, 1999b.
- Silva, C. A. C. *Otimização Estrutural em Problemas Não Lineares - Tese a ser Publicada*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002., Tese (Doutorado).
- Simo, J., Hughes, T. *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.
- Suresh, S. *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.

- Tashkinov, A. V. On design cycles counting in regulatory fatigue strength estimation. *Nuclear Engineering and Design*, v. 179, n.1, p.101-107, 1998.
- Vanderplaats, G. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill, New York, 1984.
- Vroonhoven, J. C. W., Borst, R. Combination of fracture and damage mechanics for numerical failure analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, n.1, p.1169-1191, 1999.
- You, B.-R., Lee, S.-B. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *International Journal of Fatigue*, v. 18, n.4, p.235-244, 1996.

# Apêndice A

## Otimização Estrutural e Análise de Sensibilidade

### A.1 Forma Geral do Problema de Otimização

Um grande número de problemas de otimização estrutural apresenta a seguinte forma (Vanderplaats, 1984; Arora, 1989; Silva e Bittencourt, 1997)

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \text{ sujeito a } \begin{cases} g_i(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases}, \text{(A.1)}$$

sendo  $f$  a função objetivo do problema,  $g_i$  e  $h_j$  são os funcionais de restrição,  $\mathbf{u}$  é a solução da equação de estado do problema estrutural,  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor das variáveis de projeto e  $\mathbf{x}$  representa os pontos materiais pertencentes ao domínio.

As funções  $f$ ,  $g_i$  e  $h_j$  são implícitas nas variáveis de projeto, pois dependem da solução  $\mathbf{u}$ , que é dependente de  $\mathbf{p}$ , ou seja  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{p})$ . A região  $\Omega$  do domínio, na qual todas as restrições são satisfeitas simultaneamente, é chamada *região factível* ou *de viabilidade*, ou seja,

$$\Omega = \{ \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^n \mid g_i(\mathbf{p}) \leq 0, i = 1, \dots, m \text{ e } h_j(\mathbf{p}) = 0, j = 1, \dots, p \}. \quad \text{(A.2)}$$

Resolver um problema de otimização significa determinar um ponto  $\mathbf{p}^* \in \Omega$ , no qual  $f$  assume um valor mínimo. Em problemas de engenharia, se  $\mathbf{p}^*$  existir, denomina-se o

mesmo como ponto de mínimo, ponto ótimo ou projeto ótimo.

A escolha dos funcionais é diretamente relacionada com a finalidade e aplicação do componente ou estrutura. Inicialmente, estabelece-se o objetivo funcional do projeto, selecionando-se os critérios a serem aplicados para avaliar as soluções possíveis. Em seguida, determinam-se as características desejadas, a fim de definir claramente o projeto e a sua viabilidade. Em geral, essas características são representadas pelo vetor de variáveis  $\mathbf{p} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  que, ao assumir valores numéricos, define um projeto.

Há várias formas de se resolver um problema de otimização estrutural. Dentre os métodos disponíveis, destaca-se o método de Pontos Interiores de Herskovits (Herskovits e Coelho, 1989). Esse método consiste de um algoritmo para determinação de direções de busca problemas de otimização. Devido a suas características de convergência, vem sendo muito aplicado em problemas de otimização estrutural (Choi e Twu, 1989; Buscaglia et al., 1995; Silva e Bittencourt, 1997).

A implementação computacional de técnicas de otimização, utilizando o algoritmo de pontos interiores de Herskovits, foi efetuada com sucesso em (Silva, 1997; Silva e Bittencourt, 1997; Silva e Bittencourt, 1998; Silva e Bittencourt, 1999a; Silva e Bittencourt, 1999b).

## A.2 Análise de Sensibilidade em Problemas Não Lineares

### A.2.1 Definição do Problema de Análise de Sensibilidade

Os funcionais de performance comumente utilizados em otimização estrutural apresentam a seguinte forma genérica

$$\psi = \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}). \quad (\text{A.3})$$

Observa-se que esse funcional depende tanto explicitamente das variáveis de projeto  $\mathbf{p}$  quanto implicitamente, através da solução da equação de estado para o problema estrutural, dada por  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ .

Muitos critérios para determinar as direções de busca em problemas de otimização levam em conta a determinação de gradientes dos funcionais envolvidos. Dentre as diversas técnicas disponíveis, destaca-se a análise de sensibilidade, cujo objetivo principal é explicitar a dependência total desse tipo de funcional, ou a sua sensibilidade, em relação às variações do projeto.

Considerando uma variação para o funcional  $\psi$ , em relação ao projeto, tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{p}} \psi \cdot d\mathbf{p} \\ &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{u}) d\mathbf{p} = \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \right] \cdot d\mathbf{p}. \quad (\text{A.4})\end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla_{\mathbf{p}} \psi = \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Nessa última equação, os termos  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}}$  e  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}}$  podem ser determinados, já que a forma funcional de  $\mathcal{G}$  é conhecida. O problema principal consiste em determinar  $\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{u}$ . Como  $\mathbf{u}$  é definido de forma implícita pela solução do sistema de equações do problema estrutural, a sua diferenciação em relação a  $\mathbf{p}$  não é imediata. Dessa maneira, algumas técnicas são empregadas, de forma a obter os gradientes para os funcionais de performance, via análise de sensibilidade.

## A.2.2 Considerações sobre a Análise de Sensibilidade

A aplicação da análise de sensibilidade no projeto de componentes e estruturas tem apresentado um grande desenvolvimento nas últimas décadas, encontrando-se estabelecida no campo dos problemas estruturais lineares, segundo a vasta bibliografia disponível sobre o assunto (Choi e Haug, 1983; Choi e Seong, 1986; Haug et al., 1986; Seong e Choi, 1987; Haftka e Grandhi, 1986).

Há duas formas básicas de análise de sensibilidade, a discreta e a contínua. No caso discreto, determinam-se as derivadas dos funcionais, tomando-se as equações do meio contínuo em sua forma discretizada. No caso da formulação contínua, consideram-se as equações em sua forma original, deduzindo-se analiticamente as expressões de sensibili-

dade, as quais são posteriormente discretizadas para o cálculo numérico.

A formulação contínua tem como vantagem a obtenção do enunciado analítico das derivadas dos funcionais do problema, sem nenhuma discretização envolvida, além da independência em relação à implementação do código de análise estrutural. Em problemas lineares, observa-se que as formulações discreta e contínua fornecem resultados equivalentes. Entretanto, podem diferir bastante no caso de problemas não lineares.

Em problemas não lineares, existem duas metodologias para o desenvolvimento de análise de sensibilidade contínua, a formulação *Lagrangiana Atualizada* (ou *Euleriana*) e a formulação *Lagrangiana Total*. Em ambas, as equações para o corpo na sua configuração final de equilíbrio, são obtidas na sua forma incremental, usando o princípio dos trabalhos virtuais. Essas equações são linearizadas em torno de uma configuração de equilíbrio previamente conhecida, de forma a desenvolver formulações incrementais para a análise de resposta em problemas não-lineares.

No primeiro método (formulação lagrangiana atualizada), as respostas estruturais são definidas em função da configuração deformada do corpo, em cada passo do carregamento incremental. Já para o segundo (formulação lagrangiana total), as respostas estruturais são dadas em função da configuração inicial (não deformada). Conforme se observa na literatura disponível sobre o assunto (Choi e Santos, 1987; Arora e Cardoso, 1992; Santos e Choi, 1992; Kleiber, 1994; Bugeda e Gil, 1999; Kim et al., 2000), esses dois métodos são equivalentes do ponto de vista analítico.

Entretanto, em problemas envolvendo pequenas deformações, é mais conveniente utilizar a formulação lagrangiana total, a qual será adotada nesse trabalho, sendo desenvolvida com base em (Choi e Santos, 1987; Santos e Choi, 1992). Nos dois casos, a formulação é suficientemente geral, de forma a poder ser aplicada em vários tipos de não linearidades como: grandes deslocamentos, grandes deformações, grandes rotações, impacto e não linearidades de material, desde que relações constitutivas e cinemáticas adequadas sejam utilizadas.

A determinação dos gradientes dos funcionais, em relação às variações do projeto, pode ser realizada através de dois métodos, o método direto ou o método adjunto. No

método direto, a variação da solução da equação de equilíbrio, em relação ao projeto, é obtida resolvendo-se um conjunto de sistemas lineares, resultantes da diferenciação das equações de equilíbrio linearizadas. A sensibilidade de cada funcional é determinada em função da sensibilidade da solução das equações de equilíbrio em relação ao projeto.

Usando o método adjunto, um sistema de equações lineares auxiliar é obtido para cada funcional do problema. Esse método fornece expressões explícitas para a sensibilidade dos funcionais de performance estrutural, em relação ao projeto. Uma vez que o sistema não linear de equilíbrio e os sistemas lineares adjuntos são resolvidos, as expressões de sensibilidade podem ser calculadas.

Nas seções que se seguem serão apresentadas as formulações de análise de sensibilidade de funcionais de performance, em função da variação de parâmetros discretos, ou seja, parâmetros que não dependem da forma do domínio estudado, como: massa, espessura, área de seção transversal, frequências naturais, etc. Posteriormente, será descrita a análise de sensibilidade à mudança de forma, na qual a forma do domínio do corpo é tomada como parâmetro de projeto.

### A.2.3 Notação e Definições Preliminares

Com base na Figura A.1, observa-se um corpo assumindo diferentes posições ao longo do tempo, com relação a um sistema de referência cartesiano, nos instantes  $0$ ,  $t$  e  $t + \Delta t$ . O interior  $\Omega$  e o contorno  $\Gamma$  do corpo são dados em função de cada configuração assumida, em cada um dos instantes. Da mesma forma, as coordenadas do ponto genérico  $P$  são dadas respectivamente por  ${}^0\mathbf{x}$ ,  ${}^t\mathbf{x}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}$ .

Com base nos deslocamentos do ponto  $P$ , pode-se escrever

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x} + \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

O vetor  $\mathbf{u}$  representa o incremento de deslocamento entre as configurações nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , ou seja,

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}. \quad (\text{A.7})$$

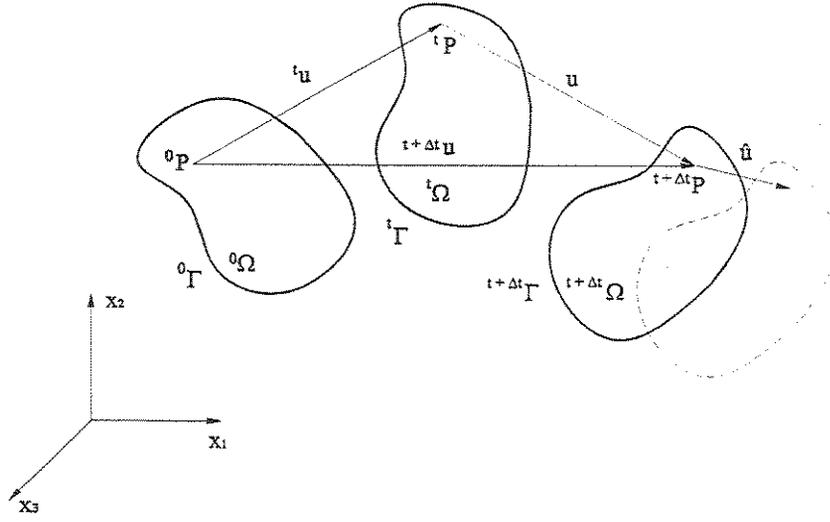


Figura A.1: Configurações assumidas por um corpo, ao longo do tempo, em relação a um sistema de referência cartesiano.

Usando o princípio dos trabalhos virtuais, a equação de equilíbrio para um corpo, no instante  $t + \Delta t$ , pode ser expressa como

$$\int_{t+\Delta t\Omega} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} {}^{t+\Delta t}d\Omega = {}^{t+\Delta t}R, \quad (\text{A.8})$$

sendo  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy e  ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o tensor de pequenas deformações, tomado com base em um deslocamento virtual arbitrário  $\hat{\mathbf{u}}$ , com respeito ao equilíbrio no instante  $t + \Delta t$ , ou seja,

$${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}\nabla\hat{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t}\nabla^T\hat{\mathbf{u}} \right), \quad (\text{A.9})$$

sendo

$${}^{t+\Delta t}\nabla\hat{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial{}^{t+\Delta t}\mathbf{x}}. \quad (\text{A.10})$$

O termo  ${}^{t+\Delta t}R$  representa o trabalho realizado sobre o corpo pelas forças externas, considerando um deslocamento virtual admissível  $\hat{\mathbf{u}}$ . Dessa forma,

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{t+\Delta t\Omega} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} {}^{t+\Delta t}d\Omega + \int_{t+\Delta t\Gamma} {}^{t+\Delta t}\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} {}^{t+\Delta t}d\Gamma, \quad (\text{A.11})$$

sendo  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{t}$  as forças externas de volume e superfície, respectivamente, assumidas como independentes dos deslocamentos e das configurações ocupadas pelo corpo e  ${}^{t+\Delta t}\rho$  a densidade, no instante  $t + \Delta t$ .

Pode-se definir a seguinte forma bilinear de energia

$$a({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \equiv \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \quad (\text{A.12})$$

e a forma linear do carregamento

$$l(\hat{\mathbf{u}}) \equiv {}^{t+\Delta t}R, \quad (\text{A.13})$$

de maneira a reescrever a equação de equilíbrio como

$$a({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.14})$$

sendo  $\mathcal{V}$  o espaço dos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis.

Observa-se que a equação de equilíbrio não pode ser resolvida diretamente, já que a configuração no instante  $t + \Delta t$  é, em geral, desconhecida. Uma solução pode ser obtida relacionando-se todas as variáveis a uma configuração de equilíbrio previamente conhecida. Na prática, isso é feito usando-se uma das formulações definidas anteriormente, a lagrangiana atualizada ou a lagrangiana total.

Podem ser feitas algumas observações com relação à notação utilizada. Tem-se que um sobrescrito à esquerda representa o instante em que a quantidade ocorre e um sobrescrito à esquerda representa a configuração na qual a quantidade é referenciada. Entretanto, algumas exceções podem ser feitas a essa regra.

No caso do instante e a configuração de referência coincidirem, omite-se o índice que representa a configuração. Como exemplo, o tensor de tensões de Cauchy, que mede as forças por unidade de área, sempre em relação à configuração deformada, tem-se que

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \equiv {}^{t+\Delta t}_{{}^{t+\Delta t}}\boldsymbol{\sigma}.$$

Como serão consideradas forças externas independentes da configuração, omite-se o subscrito 0, que indica a configuração inicial do corpo, quando as forças são aplicadas, ou seja,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b} \equiv {}^0_{{}^{t+\Delta t}}\mathbf{b} \quad \text{e} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{t} \equiv {}^0_{{}^{t+\Delta t}}\mathbf{t}.$$

Nas derivadas, o subscrito à esquerda indica o instante em que a variável de derivação é considerada, ou seja,

$${}_0\nabla\hat{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial^0\mathbf{x}} \quad \text{ou} \quad {}_0\nabla^{t+\Delta t}\mathbf{x} \equiv \frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{x}}{\partial^0\mathbf{x}}.$$

## A.2.4 Análise de Sensibilidade a Parâmetros Discretos

Na formulação lagrangiana total, todas as variáveis são medidas em relação à configuração inicial do corpo no instante 0. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 a \left( {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{u}, {}_0 \hat{\mathbf{u}} \right) &= \int_{\Omega} {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot {}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}} \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} {}_0^{t+\Delta t} \rho \, {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{b} \cdot {}_0 \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{t} \cdot {}_0 \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma \\
 &= l({}_0 \hat{\mathbf{u}}) \quad \forall {}_0 \hat{\mathbf{u}} \in {}_0 \mathcal{V},
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

sendo  ${}_0 \mathcal{V}$  e  ${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{S}$  o espaço dos deslocamento virtuais admissíveis e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, no instante  $t + \Delta t$ , referentes à configuração do corpo no instante 0, respectivamente. O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é definido como

$${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{{}_0 \rho}{{}_{t+\Delta t} \rho} \, {}_{t+\Delta t} \nabla^0 \mathbf{x} \, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \, {}_{t+\Delta t} \nabla^T {}^0 \mathbf{x}. \tag{A.16}$$

Já  ${}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}}$  é o tensor de deformações de Green-Lagrange, no instante  $t + \Delta t$ , referente à configuração no instante 0, ou seja,

$${}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( {}_0 \nabla^{t+\Delta t} \mathbf{u} + {}_0 \nabla^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + {}_0 \nabla^{t+\Delta t} \mathbf{u} \, {}_0 \nabla^{t+\Delta t} \mathbf{u} \right). \tag{A.17}$$

A relação entre  ${}_0^{t+\Delta t} \mathbf{S}$  e  ${}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}}$  é não linear, então uma forma incremental para a equação de equilíbrio será utilizada na solução. Dessa maneira, definem-se

$${}_0 \mathbf{S} \equiv {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{S} - {}^t \mathbf{S} \tag{A.18}$$

e

$${}_0 \mathbf{E} \equiv {}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}} - {}^t \mathbf{E}. \tag{A.19}$$

Já para  ${}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}}$ , calculado em relação ao deslocamento virtual  $\hat{\mathbf{u}}$ , tem-se que

$${}_0 \hat{\mathbf{E}} = {}_0^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{E}}, \tag{A.20}$$

lembrando-se que

$${}^t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow {}^t \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \tag{A.21}$$

Usando essas definições, pode-se reescrever a equação de equilíbrio, na forma incremental,

$$\int_{\Omega} {}_0 \mathbf{C} \, {}_0 \mathbf{E} \cdot {}_0 \hat{\mathbf{E}} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}^t \mathbf{S} \cdot {}_0 \hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega = {}^{t+\Delta t} R - \int_{\Omega} {}^t \mathbf{S} \cdot {}_0 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega, \tag{A.22}$$

sendo  ${}_0\mathbf{C}$  o tensor de propriedades do materia e  ${}_0\boldsymbol{\varepsilon}$  e  ${}_0\boldsymbol{\eta}$  são as partes linear e não-linear de  ${}_0\mathbf{E}$  respectivamente.

Um solução aproximada para essa equação pode ser obtida usando a linearização  ${}_0\mathbf{E} = {}_0\boldsymbol{\varepsilon}$ , em cada incremento  $\Delta t$ , dessa forma,

$$\int_{{}_0\Omega} {}_0\mathbf{C} {}_0\boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{{}_0\Omega} {}_0^t\mathbf{S} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_0\Omega} {}_0^t\mathbf{S} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega, \quad (\text{A.23})$$

sendo

$${}_0\mathbf{S} = {}_0\mathbf{C} {}_0\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{A.24})$$

Pode-se agora definir uma nova forma de energia bilinear, dada por

$$a^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}, {}_0\hat{\mathbf{u}}) \equiv \int_{{}_0\Omega} {}_0\mathbf{C} {}_0\boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{{}_0\Omega} {}_0^t\mathbf{S} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega. \quad (\text{A.25})$$

Observa-se que  ${}_0\mathbf{C}$  e  ${}_0^t\mathbf{S}$  são tensores considerados simétricos. Assim,  $a^*({}_0^t\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$  é uma forma simétrica com relação a seus argumentos.

### Diferenciabilidade da Equação de Equilíbrio

Considera-se agora um sistema em equilíbrio no instante  $t$ , correspondente a um dado projeto  $\mathbf{p}$ . A equação de equilíbrio (A.14) para este sistema pode ser reescrita como

$$a_{\mathbf{p}}({}_0^t\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = l_{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.26})$$

Supondo que o projeto seja perturbado na direção  $\tau\delta\mathbf{p}$ , em conseqüência, há uma mudança na resposta do sistema e uma nova configuração de equilíbrio ocorre no instante  $t + \Delta t$ . Nesse caso, a nova configuração de equilíbrio é

$$a_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = l_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.27})$$

observando-se que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta t = 0. \quad (\text{A.28})$$

Em a análise de sensibilidade, a variação de medidas de performance estrutural devido a variações no projeto devem ser encontradas. Essa informação pode ser obtida calculando-se a primeira variação da equação (A.27) com relação ao projeto  $\mathbf{p}$ . Para tanto, será utilizada a equação (A.15), com base na formulação lagrangiana total. Assim,

$$a_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}}({}_0^{t+\Delta t}\mathbf{u}, {}_0\hat{\mathbf{u}}) = l_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}}({}_0\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall {}_0\hat{\mathbf{u}} \in {}_0\mathcal{V}, \quad (\text{A.29})$$

sendo que sua primeira variação com relação ao projeto pode ser definida como

$$a'_{\delta\mathbf{p}} \left( {}^t_0\mathbf{u}, {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) \equiv \frac{d}{d\tau} a_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}} \left( {}^t_0\bar{\mathbf{u}}, {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) \Big|_{\tau=0}. \quad (\text{A.30})$$

Nesse caso,  ${}^t_0\bar{\mathbf{u}}$  denota o estado  ${}^t_0\mathbf{u}$ , com a dependência em relação a  $\tau$  suprimida, e  ${}_0\hat{\mathbf{u}}$  é independente de  $\tau$ . Da mesma forma, para o carregamento

$$l'_{\delta\mathbf{p}} \equiv \frac{d}{d\tau} l_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}} ({}_0\hat{\mathbf{u}}) \Big|_{\tau=0}. \quad (\text{A.31})$$

A variação solução para a equação de estado (A.29) é definida como

$${}_0\mathbf{u}' \equiv \frac{d}{d\tau} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u} (\mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p}) \Big|_{\tau=0} \quad (\text{A.32})$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{{}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u} (\mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p}) - {}^t_0\mathbf{u} (\mathbf{p})}{\tau}. \quad (\text{A.33})$$

Observa-se a comutatividade em relação às derivadas, ou seja,

$$({}_0\nabla\mathbf{u})' = {}_0\nabla(\mathbf{u}'), \quad (\text{A.34})$$

sendo que a derivada parcial deve ser tomada com respeito à configuração não deformada, no instante  $t = 0$ .

Através da regra da cadeia, tem-se que

$$\frac{d}{d\tau} a_{\mathbf{p}+\tau\delta\mathbf{p}} \left( {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u} (\mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p}), {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) \Big|_{\tau=0} = a'_{\delta\mathbf{p}} \left( {}^t_0\mathbf{u}, {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) + a_{\mathbf{p}}^* \left( {}^t_0\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\hat{\mathbf{u}} \right). \quad (\text{A.35})$$

Com base na linearização de (A.15) e tomando-se a primeira variação de (A.29), tem-se

$$a_{\mathbf{p}}^* \left( {}^t_0\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) = l'_{\delta\mathbf{p}} ({}_0\hat{\mathbf{u}}) - a'_{\delta\mathbf{p}} \left( {}^t_0\mathbf{u}, {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) \quad \forall {}_0\hat{\mathbf{u}} \in {}_0\mathcal{V}, \quad (\text{A.36})$$

ou na forma expandida, com base em (A.25),

$$a_{\mathbf{p}}^* \left( {}^t_0\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\hat{\mathbf{u}} \right) = \int_{{}_0\Omega} {}_0\mathbf{C} \cdot {}_0\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{{}_0\Omega} {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega \quad (\text{A.37})$$

Assumindo que o estado  ${}^t_0\mathbf{u}$  seja conhecido, essa última equação representa uma equação variacional para a variável  ${}_0\mathbf{u}'$ . A solução dessa equação depende de  $\delta\mathbf{p}$ , já que o termo do lado direito da igualdade é dado em função de  $\delta\mathbf{p}$ .

## Análise de Sensibilidade a Parâmetros Discretos para um Funcional de Performance

Considra-se que uma medida para a performance estrutural de um componente pode ser escrita como um funcional na forma integral geral, dada por

$${}^t_0\psi = \int_{\Omega} \mathcal{G} \left( {}^t_0\mathbf{u}, {}_0\nabla^t\mathbf{u}, \mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p} \right)^0 d\Omega. \quad (\text{A.38})$$

Considerando a primeira variação desse funcional, em relação ao projeto, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^t_0\psi' &\equiv \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \mathcal{G} \left( {}^t_0\mathbf{u}(\mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p}), {}_0\nabla^t\mathbf{u}(\mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p}), \mathbf{p} + \tau\delta\mathbf{p} \right)^0 d\Omega \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega} \left( \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\mathbf{u}' + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\mathbf{u}' + \mathcal{G}_{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{p} \right)^0 d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

com

$$\mathcal{G}_{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathcal{G}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{A.41})$$

e

$$\mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla\mathbf{u}}. \quad (\text{A.42})$$

Observa-se que a expressão para  ${}^t_0\psi'$  representa a sensibilidade do funcional de performance  ${}^t_0\psi$ , em relação a uma variação  $\delta\mathbf{p}$  do projeto. Entretanto, essa equação depende diretamente da sensibilidade da solução da equação de equilíbrio, dada por  ${}_0\mathbf{u}'$ . Há duas formas básicas de se obter uma expressão para  ${}^t_0\psi'$  dependente apenas da variação do projeto  $\delta\mathbf{p}$ , que são os métodos direto e adjunto.

O método direto consiste em determinar  ${}_0\mathbf{u}'$  através de (A.36) e obter a sensibilidade para o funcional de performance. Já o método adjunto consiste em introduzir um problema auxiliar e explicitar a dependência de  ${}^t_0\psi$  em relação a  $\delta\mathbf{p}$ .

Para tanto, substitui-se  ${}_0\mathbf{u}'$  por um deslocamento virtual  ${}_0\hat{\lambda}$ , escrevendo a forma bilinear  $a_{\mathbf{p}}^*({}_0\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$  para a variável adjunta  ${}_0\lambda$  como sendo

$$a_{\mathbf{p}}^*({}_0\mathbf{u}; {}_0\lambda, {}_0\hat{\lambda}) = \int_{\Omega} \left( \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\hat{\lambda} + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\hat{\lambda} \right)^0 d\Omega \quad \forall {}_0\hat{\lambda} \in {}_0\mathcal{V}. \quad (\text{A.43})$$

Considerando que  ${}_0\hat{\mathbf{u}} \in {}_0\mathcal{V}$ , é possível resolver esta equação para  ${}_0\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = {}_0\hat{\mathbf{u}}$ , de forma que

$$a_{\mathbf{p}}^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\boldsymbol{\lambda}, {}_0\mathbf{u}') = \int_{{}_0\Omega} (\mathcal{G}_{{}_0^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\mathbf{u}' + \mathcal{G}_{{}_0\nabla^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\mathbf{u}')^0 d\Omega. \quad (\text{A.44})$$

Agora, como  ${}_0\hat{\mathbf{u}}$  e  ${}_0\boldsymbol{\lambda}$  estão definidos no mesmo espaço  ${}_0\mathcal{V}$ , resolve-se a equação para  $a_{\mathbf{p}}^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\hat{\mathbf{u}})$ , fazendo  ${}_0\hat{\mathbf{u}} = {}_0\boldsymbol{\lambda}$ , o que leva a

$$a_{\mathbf{p}}^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\boldsymbol{\lambda}) = l'_{\delta\mathbf{p}}({}_0\boldsymbol{\lambda}) - a'_{\delta\mathbf{p}}({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\boldsymbol{\lambda}). \quad (\text{A.45})$$

Usando agora a simetria de  $a_{\mathbf{p}}^*({}_0^t\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$  com relação a seus argumentos, obtém-se

$$\int_{{}_0\Omega} (\mathcal{G}_{{}_0^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\mathbf{u}' + \mathcal{G}_{{}_0\nabla^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\mathbf{u}')^0 d\Omega = l'_{\delta\mathbf{p}}({}_0\boldsymbol{\lambda}) - a'_{\delta\mathbf{p}}({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\boldsymbol{\lambda}). \quad (\text{A.46})$$

O lado direito dessa equação é linear em  $\delta\mathbf{p}$ , podendo ser calculado, uma vez que o estado  ${}_0^t\mathbf{u}$  e a variável adunta  ${}_0\boldsymbol{\lambda}$  são determinados, resolvendo-se as equações (A.26) e (A.43) respectivamente.

Substituindo esse resultado na equação para a variação do funcional de performance, tem-se que

$${}_0^t\psi' = \int_{{}_0\Omega} \mathcal{G}_{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{p}^0 d\Omega + l'_{\delta\mathbf{p}}({}_0\boldsymbol{\lambda}) - a'_{\delta\mathbf{p}}({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\boldsymbol{\lambda}), \quad (\text{A.47})$$

representando a dependência da sensibilidade do funcional de performance em função da variação do projeto. Os dois últimos termos dependem de cada problema analisado.

Uma observação interessante é que, embora a equação original de equilíbrio seja não-linear, a equação (A.43) é linear. Esse fato implica que o esforço computacional para a análise de sensibilidade a parâmetros discretos é equivalente em problemas lineares e não lineares. Se for utilizado o método dos elementos finitos para a análise numérica, a matriz de rigidez para (A.43) é a matriz de rigidez tangente para a configuração final de equilíbrio (Choi e Santos, 1987).

## A.2.5 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

Nesta seção, as relações entre a variação da forma de um componente estrutural e as variações resultantes nos funcionais de performance serão deduzidas.

Como a forma do domínio do componente é considerada como como uma variável de

projeto, é conveniente considerar o domínio como um meio contínuo e utilizar o conceito de derivada material. O uso do conceito da derivada material e da formulação lagrangiana total permitem escrever as expressões para a análise de sensibilidade de um funcional de performance com relação à mudança de forma do domínio. Essa formulação será desenvolvida com base em (Santos e Choi, 1992).

### Campo de Velocidades

Considera-se um domínio  ${}^0\Omega$  no instante  $\tau = 0$ . Admite-se que apenas o parâmetro  $\tau$  define a transformação  $\mathbf{T}$  entre a configuração inicial  ${}^0\Omega$  e  ${}^0\Omega_\tau$ . O mapeamento

$$\mathbf{T} : {}^0\mathbf{x} \rightarrow {}^0\mathbf{x}_\tau \mid {}^0\mathbf{x} \in {}^0\Omega \quad (\text{A.48})$$

é definido por

$${}^0\mathbf{x}_\tau = \mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, \tau), \quad {}^0\Omega_\tau = \mathbf{T}({}^0\Omega, \tau), \quad {}^0\Gamma_\tau = \mathbf{T}({}^0\Gamma, \tau). \quad (\text{A.49})$$

O mapeamento (A.49) pode ser interpretado como um processo dinâmico de perturbação de um domínio inicial  ${}^0\Omega$ , no instante  $\tau = 0$ , para uma configuração final  ${}^0\Omega_\tau$ . Considerando um ponto material  ${}^0\mathbf{x} \in {}^0\Omega$  no instante  $\tau = 0$ , esse ponto será definido por  ${}^0\mathbf{x}_\tau \in {}^0\Omega_\tau$  na configuração perturbada, ver Figura A.2.

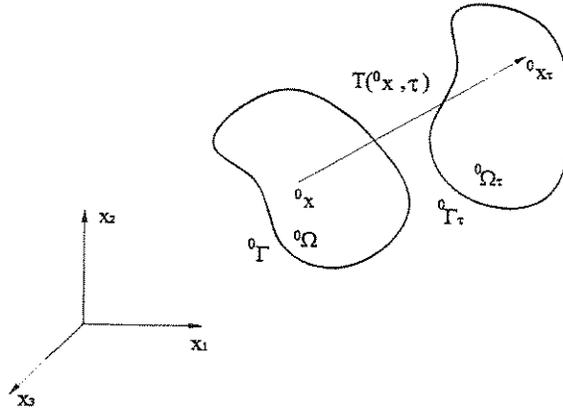


Figura A.2: Transformação de um corpo com base em um mapeamento  $\mathbf{T}$ , dado em função de um parâmetro  $\tau$ .

Define-se o *campo de velocidades*  $\mathbf{V}$  como

$$\mathbf{V}({}^0\mathbf{x}_\tau, \tau) \equiv \frac{d {}^0\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{d \mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (\text{A.50})$$

com  $\tau$  fazendo o papel do tempo.

Considerando a vizinhança de  $\tau = 0$ , assumindo hipóteses de regularidade (Santos e Choi, 1992), tem-se que

$$\mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau}({}^0\mathbf{x}, 0) + \mathcal{O}^n(\tau) = {}^0\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}({}^0\mathbf{x}, 0) + \mathcal{O}^n(\tau). \quad (\text{A.51})$$

Ignorando os termos de alta ordem  $\mathcal{O}^n(\tau)$ , vem que

$$\mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, \tau) = {}^0\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}({}^0\mathbf{x}), \quad (\text{A.52})$$

sendo  ${}^0\mathbf{x} = \mathbf{T}({}^0\mathbf{x}, 0)$  e  $\mathbf{V}({}^0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{V}({}^0\mathbf{x}, 0)$ .

### Derivada Material de Funcionais

Considerando agora um componente estrutural nas sua configuração final de equilíbrio, no instante  $t$ , correspondendo ao domínio inicial  ${}^0\Omega$ , a equação de equilíbrio para esse sistema é da forma

$$\begin{aligned} a_{0\Omega}({}^t_0\mathbf{u}, {}^0_0\hat{\mathbf{u}}) &\equiv \int_{{}^0\Omega} {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^t_0\hat{\mathbf{E}} \, {}^0d\Omega \\ &= \int_{{}^0\Omega} {}^t_0\rho {}^t_0\mathbf{b} \cdot {}^0_0\hat{\mathbf{u}} \, {}^0d\Omega + \int_{{}^0\Gamma} {}^t_0\mathbf{t} \cdot {}^0_0\hat{\mathbf{u}} \, {}^0d\Gamma \\ a_{0\Omega}({}^t_0\mathbf{u}, {}^0_0\hat{\mathbf{u}}) &= l_{0\Omega}({}^0_0\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall {}^0_0\hat{\mathbf{u}} \in {}^0_0\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

sendo que o subscrito  ${}^0\Omega$  é utilizado para explicitar a dependência de  $a$  e  $l$  em função da forma do domínio.

A equação variacional de equilíbrio para um domínio perturbado  ${}^0\Omega_\tau$ , no instante  $t + \Delta t$ , pode ser dada por

$$\begin{aligned} a_{0\Omega_\tau}({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u}_\tau, {}^0_0\hat{\mathbf{u}}_\tau) &\equiv \int_{{}^0\Omega_\tau} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{S} \cdot {}^{t+\Delta t}_0\hat{\mathbf{E}} \, {}^0d\Omega_\tau \\ &= \int_{{}^0\Omega_\tau} {}^{t+\Delta t}_0\rho {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{b} \cdot {}^0_0\hat{\mathbf{u}}_\tau \, {}^0d\Omega_\tau + \int_{{}^0\Gamma} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{t} \cdot {}^0_0\hat{\mathbf{u}}_\tau \, {}^0d\Gamma \\ &= l_{0\Omega_\tau}({}^0_0\hat{\mathbf{u}}_\tau) \quad \forall {}^0_0\hat{\mathbf{u}}_\tau \in {}^0_0\mathcal{V}_\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

A solução  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u}_\tau$  para a configuração, no instante  $t + \Delta t$ , com relação às coordenadas iniciais  ${}^0\mathbf{x}_\tau$  do domínio perturbado, é assumida como sendo uma função suave do projeto. Então o mapeamento

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u}_\tau({}^0\mathbf{x}_\tau) \equiv {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u}_\tau[{}^0\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}({}^0\mathbf{x})] \quad (\text{A.55})$$

é definido em  ${}^0\Omega$  e depende de  $\tau$  de duas maneiras. Primeiramente,  ${}^t+\Delta t\mathbf{u}_\tau$  é uma solução do sistema variacional na configuração perturbada. Em segundo lugar,  ${}^t+\Delta t\mathbf{u}_\tau$  é calculado no ponto  ${}^0\mathbf{x}_\tau$ .

A derivada material de  ${}^t\mathbf{u}$  no ponto  ${}^0\mathbf{x} \in {}^0\Omega$ , é dada por

$$\begin{aligned} {}^t_0\dot{\mathbf{u}}({}^0\mathbf{x}) &= \frac{d}{d\tau} {}^t+\Delta t\mathbf{u}_\tau [{}^0\mathbf{x} + \tau\mathbf{V}({}^0\mathbf{x})] \Big|_{\tau=0} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{{}^t+\Delta t\mathbf{u}_\tau [{}^0\mathbf{x} + \tau\mathbf{V}({}^0\mathbf{x})] - {}^t_0\mathbf{u}({}^0\mathbf{x})}{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Se  ${}^t_0\mathbf{u}_\tau$  possui uma expressão regular na vizinhança de  ${}^0\Omega_\tau$ , então,

$${}^t_0\dot{\mathbf{u}}({}^0\mathbf{x}) = {}^0\mathbf{u}'({}^0\mathbf{x}) + {}^0\nabla^T {}^t\mathbf{u}\mathbf{V}({}^0\mathbf{x}), \quad (\text{A.57})$$

sendo

$${}^0\mathbf{u}'({}^0\mathbf{x}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{{}^t+\Delta t\mathbf{u}_\tau({}^0\mathbf{x}) - {}^t_0\mathbf{u}({}^0\mathbf{x})}{\tau}, \quad (\text{A.58})$$

a derivada parcial de  ${}^t_0\mathbf{u}$  com relação a  $\tau$ .

Para dar segmento à formulação, é necessário definir duas derivadas materiais, com base em (Santos e Choi, 1992). Tais definições permitem expressar as derivadas materiais de funcionais definidos no domínio perturbado, em relação ao domínio não perturbado.

**Definição 1** *Seja um funcional definido como uma integral sobre  ${}^0\Omega_\tau$ , para a configuração de equilíbrio, no instante  $t + \Delta t$ , com a configuração de referência no instante  $t = 0$ , dado por*

$${}^t+\Delta t\psi_1 = \int_{{}^0\Omega_\tau} {}^t+\Delta t h_\tau ({}^0\mathbf{x}_\tau)^0 d\Omega_\tau, \quad (\text{A.59})$$

sendo  ${}^t+\Delta t h_\tau$  uma função regular definida em  ${}^0\Omega_\tau$ . Se  ${}^0\Omega$  possui regularidade  $C^k$ , então a derivada material de  ${}^t+\Delta t\psi_1$  em  ${}^0\Omega$  é

$${}^t_0\psi'_1 = \int_{{}^0\Omega} [{}^0h'({}^0\mathbf{x}) + {}^0\nabla^T {}^t h({}^0\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}({}^0\mathbf{x}) + {}^t h({}^0\mathbf{x}) \text{Div}\mathbf{V}({}^0\mathbf{x})] {}^0d\Omega, \quad (\text{A.60})$$

com a divergência (*Div*) calculada em relação a  ${}^0\mathbf{x}$ .

**Definição 2** *Seja um funcional  ${}^t+\Delta t\psi$ , definido como uma integral sobre  ${}^0\Gamma_\tau$ , dado por*

$${}^t+\Delta t\psi_2 = \int_{{}^0\Gamma_\tau} {}^t+\Delta t g_\tau ({}^0\mathbf{x}_\tau)^0 d\Gamma_\tau, \quad (\text{A.61})$$

sendo  ${}^t+\Delta t g_\tau$  uma função regular definida em  ${}^0\Gamma_\tau$ . Se  ${}^0\Omega$  possui regularidade  $C^{k+1}$ , então

a derivada material de  ${}^t\psi_2$  em  ${}^0\Gamma$  é

$${}^t\psi_2' = \int_{{}^0\Gamma} \left\{ {}^0g'({}^0\mathbf{x}) + [{}^0\nabla^T {}^t g({}^0\mathbf{x}) \cdot {}^0\mathbf{n} + {}^0H {}^t g({}^0\mathbf{x})] (\mathbf{V} \cdot {}^0\mathbf{n}) \right\} {}^0d\Gamma, \quad (\text{A.62})$$

sendo que  ${}^0H$  é a curvatura do contorno  ${}^0\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  e duas vezes a curvatura de  ${}^0\Gamma$  em  $\mathbb{R}^3$ , com  ${}^0\mathbf{n}$  representado o campo normal sobre  ${}^0\Gamma$ .

### Diferenciabilidade da Equação de Equilíbrio

Tomando a derivada material nos dois lados da equação (A.54), usando as definições de (A.60) e (A.62) e um processo de linearização como o feito em (A.25), tem-se que

$$\left[ a_{0\Omega}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) \right]' \equiv a'_{\mathbf{V}}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) + a_{0\Omega}^*({}^t\mathbf{u}; {}^0\hat{\mathbf{u}}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) = l'_{\mathbf{V}}({}^0\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall {}^0\hat{\mathbf{u}} \in {}^0\mathcal{V}. \quad (\text{A.63})$$

Conforme procedimento de derivação descrito em (Santos e Choi, 1992), chega-se em

$$a_{0\Omega}^*({}^t\mathbf{u}; {}^0\hat{\mathbf{u}}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) = l'_{\mathbf{V}}({}^0\hat{\mathbf{u}}) - a'_{\mathbf{V}}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall {}^0\hat{\mathbf{u}} \in {}^0\mathcal{V}, \quad (\text{A.64})$$

sendo  $a_{0\Omega}^*({}^t\mathbf{u}; {}^0\hat{\mathbf{u}}, {}^0\hat{\mathbf{u}})$  escrita como

$$a_{0\Omega}^*({}^t\mathbf{u}; {}^0\hat{\mathbf{u}}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) = \int_{{}^0\Omega} {}^0\mathbf{C} {}^0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot {}^0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} {}^0d\Omega + \int_{{}^0\Omega} {}^t\mathbf{S} \cdot {}^0\hat{\boldsymbol{\eta}} {}^0d\Omega, \quad (\text{A.65})$$

$l'_{\mathbf{V}}({}^0\hat{\mathbf{u}})$  dado por

$$\begin{aligned} l'_{\mathbf{V}}({}^0\hat{\mathbf{u}}) = & \int_{{}^0\Omega} {}^t\rho ({}^t\hat{\mathbf{u}} \cdot {}^0\nabla^T {}^t\mathbf{b}\mathbf{V} + {}^t\mathbf{b} \cdot {}^0\hat{\mathbf{u}} \text{Div}\mathbf{V}) {}^0d\Omega + \\ & + \int_{{}^0\Gamma} [-{}^t\mathbf{t} \cdot {}^0\nabla^T \hat{\mathbf{u}}\mathbf{V} + \\ & + ({}^0\nabla^T {}^t\mathbf{t} \cdot {}^0\hat{\mathbf{u}} \cdot {}^0\mathbf{n} + {}^0H {}^t\mathbf{t} \cdot {}^0\hat{\mathbf{u}}) (\mathbf{V} \cdot {}^0\mathbf{n})] {}^0d\Gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

com  $a'_{\mathbf{V}}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}})$  escrita na forma

$$a'_{\mathbf{V}}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) = a_{0\Omega}^*({}^t\mathbf{u}; -{}^0\nabla^T {}^t\mathbf{u}\mathbf{V}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) - a_{0\Omega}({}^t\mathbf{u}, {}^0\nabla^T {}^t\hat{\mathbf{u}}\mathbf{V}) + c_{0\Omega}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}), \quad (\text{A.67})$$

e  $c_{0\Omega}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}})$  definida como se segue

$$c_{0\Omega}({}^t\mathbf{u}, {}^0\hat{\mathbf{u}}) = \int_{{}^0\Omega} [{}^0\nabla^T ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\hat{\mathbf{E}})] \cdot \mathbf{V} {}^0d\Omega + \int_{{}^0\Omega} {}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\hat{\mathbf{E}} \text{Div}\mathbf{V} {}^0d\Omega. \quad (\text{A.68})$$

## Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma para um Funcional de Performance

Considera-se que uma medida para a performance estrutural de um componente, definida em um domínio com forma variável, pode ser escrita como

$${}^{t+\Delta t}_0\psi = \int_{{}_0\Omega_\tau} \mathcal{G} \left( {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{u}_\tau, {}_0\nabla^{t+\Delta t}\mathbf{u}_\tau \right)^0 d\Omega_\tau, \quad (\text{A.69})$$

sendo  $\mathcal{G}$  uma função contínua e diferenciável com relação a seus argumentos.

Tomando-se a derivada material para esse funcional, com base em (A.60), tem-se que

$${}^t_0\psi' = \int_{{}_0\Omega} \left( \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\mathbf{u}' + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\mathbf{u}' + {}_0\nabla^T\mathcal{G} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{G} \text{Div}\mathbf{V} \right)^0 d\Omega. \quad (\text{A.70})$$

Usando agora (A.57), vem que

$$\begin{aligned} {}^t_0\psi' = \int_{{}_0\Omega} \left[ \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\dot{\mathbf{u}} - \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla^T\dot{\mathbf{u}}\mathbf{V} + \right. \\ \left. - \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla \left( {}_0\nabla^T\dot{\mathbf{u}}\mathbf{V} \right) + {}_0\nabla^T\mathcal{G} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{G} \text{Div}\mathbf{V} \right]^0 d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Analogamente ao caso de análise de sensibilidade a parâmetros discretos, usando o método direto, deve-se obter a solução da equação de estado  ${}_0\mathbf{u}$  e a sua sensibilidade em relação à mudança de forma do domínio,  ${}_0\dot{\mathbf{u}}$ , através de (A.65). Para o método adjunto, o procedimento também é análogo ao caso de parâmetros discretos e é dado como se segue.

É necessário desenvolver agora uma expressão explícita para  ${}^t_0\psi'$  em termos de do campo de velocidades  $\mathbf{V}$ , já que  ${}_0\dot{\mathbf{u}}$  e  ${}_0\nabla\dot{\mathbf{u}}$  dependem implicitamente de  $\mathbf{V}$ . Para tanto será introduzida uma equação adjunta substituindo  ${}_0\dot{\mathbf{u}}$  por um deslocamento virtual  ${}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ , de forma que se pode escrever a forma bilinear  $a_{0\Omega}^*({}_0\mathbf{u}; {}_0\boldsymbol{\lambda}, {}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}})$  como sendo

$$a_{0\Omega}^*({}_0\mathbf{u}; {}_0\boldsymbol{\lambda}, {}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \int_{{}_0\Omega} \left( \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}} + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\hat{\boldsymbol{\lambda}} \right)^0 d\Omega \quad \forall {}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in {}_0\mathcal{V}, \quad (\text{A.72})$$

tendo como incógnita  ${}_0\boldsymbol{\lambda}$ .

Considerando que  ${}_0\dot{\mathbf{u}} \in {}_0\mathcal{V}$ , é possível resolver esta equação para  ${}_0\hat{\boldsymbol{\lambda}} = {}_0\dot{\mathbf{u}}$ , de forma que

$$a_{0\Omega}^*({}_0\mathbf{u}; {}_0\boldsymbol{\lambda}, {}_0\dot{\mathbf{u}}) = \int_{{}_0\Omega} \left( \mathcal{G}_{\mathbf{u}} \cdot {}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathcal{G}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\dot{\mathbf{u}} \right)^0 d\Omega. \quad (\text{A.73})$$

Agora, como  ${}_0\hat{\mathbf{u}}$  e  ${}_0\lambda$  são definidos no espaço  ${}_0\mathcal{V}$ , resolve-se a equação para  $a_{0\Omega}^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\hat{\mathbf{u}})$ , fazendo  ${}_0\bar{\mathbf{u}} = {}_0\lambda$ , o que leva a

$$a_{0\Omega}^*({}_0^t\mathbf{u}; {}_0\mathbf{u}', {}_0\lambda) = l'_V({}_0\lambda) - a'_V({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\lambda). \quad (\text{A.74})$$

Usando agora a simetria de  $a_{0\Omega}^*({}_0^t\mathbf{u}; \cdot, \cdot)$  com relação a seus argumentos, obtém-se

$$\int_{{}_0\Omega} (\mathcal{G}_{{}_0^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{G}_{{}_0\nabla^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla\hat{\mathbf{u}}) \, {}_0d\Omega = l'_V({}_0\lambda) - \mathcal{G}'({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\lambda). \quad (\text{A.75})$$

Dessa forma, pode-se escrever  ${}_0^t\psi'$  como

$$\begin{aligned} {}_0^t\psi' = & l'_V({}_0\lambda) - a'_V({}_0^t\mathbf{u}, {}_0\lambda) + \int_{{}_0\Omega} [-\mathcal{G}_{{}_0^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla^T\hat{\mathbf{u}}\mathbf{V} + \\ & -\mathcal{G}_{{}_0\nabla^t\mathbf{u}} \cdot {}_0\nabla({}_0\nabla^T\hat{\mathbf{u}}\mathbf{V}) + {}_0\nabla^T\mathcal{G} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{G} \text{Div}\mathbf{V}] \, {}_0d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

sendo que o lado direito dessa equação pode ser calculado, uma vez que  ${}_0^t\mathbf{u}$  e  ${}_0\lambda$  são conhecidos, através das equações (A.53) e (A.72) respectivamente.

É importante ressaltar que a forma (A.72) é a mesma obtida em (A.43), o que é vantajoso no caso de realizar a análise de sensibilidade a parâmetros discretos e à forma simultaneamente. Analogamente ao caso de parâmetros discretos, a equação (A.72) é linear, resultando no mesmo esforço computacional para a análise de sensibilidade à forma, em problemas lineares e não lineares. Da mesma forma, se for utilizado o método dos elementos finitos para a análise numérica, a matriz de rigidez para (A.43) é a matriz de rigidez tangente para a configuração final de equilíbrio (Santos e Choi, 1992). No caso da análise de sensibilidade à forma, o cálculo de (A.65) requer o conhecimento do campo de velocidades, para cada parâmetro de forma associado ao projeto.

## A.2.6 Comparação entre os Métodos Direto e Adjunto

Alguns comentários podem ser feitos com relação aos métodos direto e adjunto para determinação da sensibilidade de funcionais, tanto à variação de parâmetros discretos quanto à variação da forma do domínio.

Para calcular a sensibilidade de cada funcional  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_f$ ), usando o método direto, deve-se resolver as equações (A.36) ou (A.65). Essas expressões representam  $N_p$  sistemas de equações de mesma matriz, independente do número de funcionais,

para determinar  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}}$ , pois cada sistema fornece uma coluna do tensor  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j}$ , sendo  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N_p$ ).

No caso do método adjunto, resolvem-se as equações (A.43) ou (A.65). Nesse caso, as expressões representam  $N_f$  sistemas de equações, também de mesma matriz, obtendo a solução para os campos de deslocamentos adjuntos  $\lambda_i$ , para cada funcional.

Para se determinar qual método é mais vantajoso, do ponto de vista numérico, deve-se considerar o número de sistemas de equações a serem resolvidos, com base no número de funcionais ( $N_f$ ) e no número de variáveis de projeto ( $N_p$ ) envolvidos. Se  $N_p < N_f$  o método direto é mais vantajoso. Caso contrário, deve-se usar o método adjunto. Na maioria dos casos, entretanto, o número de funcionais envolvidos é maior que o número de variáveis de projeto, de forma que, nesse caso, o método adjunto é mais utilizado. Apesar dessas diferenças, os dois métodos são equivalentes, a menos das dificuldades de implementação numérica (Choi e Santos, 1987; Santos e Choi, 1992).

### A.3 Aplicações em Elastoplasticidade Acoplada ao Dano

Os processos de deformação plástica, acoplados ou não ao dano, representam fenômenos não lineares irreversíveis. A irreversibilidade desses processos induz a dependência do resultado em função caminho percorrido pelo sistema, até o equilíbrio ser atingido.

Como foi observado nas seções anteriores, a análise de sensibilidade é sempre linear, sendo resolvida de maneira direta (sem iterações), mesmo que o sistema de equilíbrio original seja não-linear.

Apesar das considerações sobre os métodos direto e adjunto de solução, realizados nas seções anteriores, surgem algumas considerações adicionais no caso de problemas irreversíveis. Esse tipo de problema envolve a solução do sistema de equilíbrio não linear de maneira iterativa, de modo que, ao final de cada passo do carregamento, são conhecidos apenas os valores de incrementos para as variáveis internas (tensão, deformação,

dano, etc.), sendo necessário conhecer a sensibilidade dessas variáveis em cada passo do carregamento, de forma a obter a sua sensibilidade total, ao final do processo. Esse fato inviabiliza a aplicação do método adjunto, pois seria necessária a resolução de um sistema não linear inteiro, para cada funcional estudado. Dessa forma, deve-se aplicar o método direto de solução (linear) em cada passo do carregamento, simultaneamente à análise de resposta do sistema de equilíbrio, para se obter a sensibilidade dos funcionais, preservando a irreversibilidade do processo (Kim et al., 2000).

Desse modo, a análise de sensibilidade em problemas irreversíveis deve ser dividida em duas partes. Primeiro determina-se a sensibilidade para o incremento de deslocamento e posteriormente, atualiza-se a sensibilidade para a tensão a deformação e as variáveis de evolução do processo.

Outra consideração importante é que o método clássico de solução de problemas de plasticidade é baseado na definição do operador tangente consistente ou algorítmico (ver Capítulo 4). Deve-se lembrar que a utilização do operador tangente contínuo, ao invés do algorítmico, afeta a solução do sistema, apenas do ponto de vista da taxa de convergência (aumento no número de iterações), não sendo significativa a variação de precisão nos resultados. Por outro lado a precisão da análise de sensibilidade é fortemente afetada pelo uso do operador tangente contínuo (Kim et al., 2000). Esse fato reforça a necessidade do uso do operador tangente algorítmico para a solução do sistema de equilíbrio, em problemas envolvendo otimização e análise de sensibilidade.

### A.3.1 Formas Variacionais em Elastoplasticidade Acoplada ao Dano

A forma variacional para o problema elastoplástico acoplado ao dano podem ser reescritas como

$$a(\mathbf{u}_{n+1}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.77})$$

sendo

$$a(\mathbf{u}_{n+1}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (\text{A.78})$$

e

$$l(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma, \quad (\text{A.79})$$

considerando um incremento do carregamento dado por  $I = [t_n, t_{n+1}]$ . Considerando a linearização dessas equações, tem-se que

$$a^*(\mathbf{u}_n; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.80})$$

com

$$a^*(\mathbf{u}_n; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}^{epD} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega, \quad (\text{A.81})$$

com base na notação utilizada no Capítulo 4.

Se for utilizada a solução incremental, tem-se que

$$a^*(\mathbf{u}_{n+1}^k; \Delta \mathbf{u}^{k+1}, \hat{\mathbf{u}}) = l(\hat{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}_{n+1}^k, \hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.82})$$

para o instante  $t_{n+1}$ , até que o termo residual (lado direito da equação) atinja a convergência, ou o número de iterações  $k$  chegue a um valor máximo permitido.

### A.3.2 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

A análise de sensibilidade à mudança de forma parte do princípio da definição do campo de velocidades  $\mathbf{V}$ . O campo de velocidades representa a direção da variação do projeto para um domínio perturbado e é assumido como sendo conhecido *a priori*. A perturbação da geometria na direção do campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  é controlada pelo parâmetro  $\tau$ . Assim, a derivada material para o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é definida como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_{\tau}[\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x})] - \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\tau} \\ &= \mathbf{u}' + \nabla^T \mathbf{u} \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

sendo

$$\mathbf{u}' = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\tau} \quad (\text{A.84})$$

a derivada parcial de  $\mathbf{u}$  em relação ao parâmetro  $\tau$ .

A equação variacional para o domínio perturbado é dada por

$$a_{\Omega_{\tau}}({}^{n+1}\mathbf{u}_{\tau}, \hat{\mathbf{u}}_{\tau}) = l_{\Omega_{\tau}}(\hat{\mathbf{u}}_{\tau}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_{\tau} \in \mathcal{V}_{\tau}, \quad (\text{A.85})$$

sendo  $\mathcal{V}_\tau$  o espaço dos deslocamentos virtuais admissíveis definido no domínio perturbado.

No caso do material elastoplástico acoplado ao dano, a relação constitutiva, na forma incremental é dada por

$${}^{n+1}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = {}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (\text{A.86})$$

Em consequência, a derivada material para o tensor de tensões efetivas, depende da derivada material para o campo de deformações. Como nesse caso são consideradas pequenas deformações, então (Kim et al., 2000)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} [\nabla (\Delta\dot{\mathbf{u}}) + \nabla^T (\Delta\dot{\mathbf{u}})] - \frac{1}{2} [\nabla (\Delta\mathbf{u}) \nabla \mathbf{V} + \nabla^T \mathbf{V} \nabla^T (\Delta\mathbf{u})] \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon} (\Delta\dot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_V (\Delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [\boldsymbol{\varepsilon} (\hat{\mathbf{u}})] &= -\frac{1}{2} [\nabla \hat{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{V} + \nabla^T \mathbf{V} \nabla^T \hat{\mathbf{u}}] \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_V (\hat{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Como  $(\hat{\mathbf{u}})$  está definido no mesmo espaço de  $\hat{\mathbf{u}}$ , todos os termos contendo  $(\hat{\mathbf{u}})$  em  $\boldsymbol{\varepsilon}_V (\hat{\mathbf{u}})$  foram desconsiderados. Observa-se que a derivada material para o campo de deformações incremental possui a mesma estrutura que o campo de deformações total quando se substitui  $\Delta\dot{\mathbf{u}}$  por  $\Delta\mathbf{u}$  porque a cinemática do problema é considerada como linear, apesar do modelo constitutivo ser não linear. Esse procedimento não deve ser realizado no caso de considerar deformações finitas, ao invés de infinitesimais, em que os termos para a deformação incremental e a total diferem.

Para um incremento de deformação na fase elástica, a derivada material para o tensor de tensões e para as variáveis internas são dados por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}) &= \frac{d}{d\tau} ({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{C} \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \frac{d}{d\tau} ({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{C} [\boldsymbol{\varepsilon} (\Delta\dot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_V (\Delta\mathbf{u})], \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

$$\frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{d}{d\tau} ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.90})$$

e

$$\frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}D) = \frac{d}{d\tau} ({}^nD), \quad (\text{A.91})$$

ou seja, a sensibilidade para o tensor de tensões evoluiu elasticamente e as variáveis plásticas permanecem no seu estado definido para o instante  $t = t_n$ .

Por outro lado, se a lei de escoamento for violada, deve-se obter as correções plásticas para o tensor de tensões e para as outras variáveis internas. Considerando o estimador elástico, vem que

$$\frac{d}{d\tau} \left( {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{trial}^D \right) = \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{trial}^D \right) + 2\mu \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^D). \quad (\text{A.92})$$

Para a evolução das variáveis plásticas, tem-se que

$$\frac{d}{d\tau} \left( {}^{n+1}D \right) = \frac{d}{d\tau} \left( {}^nD \right) + \frac{\sigma_s^2 R_v}{2ES} \frac{d}{d\tau} (\Delta p) \quad (\text{A.93})$$

e

$$\frac{d}{d\tau} \left( {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}^p \right) = \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\boldsymbol{\varepsilon}^p \right) + \mathbf{N} \frac{d}{d\tau} (\Delta p) + \Delta p \frac{d}{d\tau} (\mathbf{N}). \quad (\text{A.94})$$

A derivada material de  $\mathbf{N}$  pode ser calculada como

$$\frac{d}{d\tau} (\mathbf{N}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D\|} \left( \bar{\boldsymbol{\Pi}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) \left[ 2\mu \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^D) + \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right) \right], \quad (\text{A.95})$$

sabendo-se que

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D}{{}^{n+1}\tilde{\sigma}_{eq}^D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D}{\|{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D\|}. \quad (\text{A.96})$$

Para a função de escoamento vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( {}^{n+1}f \right) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d}{d\tau} \|{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D\| = 0 \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right) + 2\mu \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^D) \right\| = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

Resolvendo-se essa equação, pode-se encontrar (Kim et al., 2000)

$$\frac{d}{d\tau} (\Delta p) = \mathbf{N} \cdot \left[ \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^D) + \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right) \right]. \quad (\text{A.98})$$

Finalmente, a derivada material para o tensor de tensões equivalente, corrigida para o estado plástico, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) + \mathbf{C} \frac{d}{d\tau} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) - 2\mu \left[ \mathbf{N} \frac{d}{d\tau} (\Delta p) + \Delta p \frac{d}{d\tau} (\mathbf{N}) \right] \\ &= \mathbf{C}^{ep} [\boldsymbol{\varepsilon} (\Delta\dot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_V (\Delta\mathbf{u})] + {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{fic}, \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

sendo

$${}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{fic} = \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right) - \mathbf{N} \left[ \mathbf{N} \cdot \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right) \right] - \frac{3\mu}{{}^{n+1}\tilde{\sigma}_{eq}^D} \left( \bar{\boldsymbol{\Pi}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) \frac{d}{d\tau} \left( {}^n\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \right), \quad (\text{A.100})$$

podendo ser calculado com base nos valores dados no instante  $t_n$ , no estimador elástico, no campo de velocidades  $\mathbf{V}$  e no incremento de deslocamentos  $\Delta \mathbf{u}$ .

Deve-se observar que, como  $\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ , então,

$$\frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}D) {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) {}^{n+1}D. \quad (\text{A.101})$$

Dessa forma, para a sensibilidade da equação de equilíbrio, tem-se

$$\frac{d}{d\tau} [a_{\Omega} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})] = a_{\Omega}^* ({}^{n+1}\mathbf{u}; \Delta \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + a'_{\mathbf{V}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}), \quad (\text{A.102})$$

sendo

$$a'_{\mathbf{V}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} [{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}^{epD} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{V}}(\Delta \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) + {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{fic} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{u}}) + {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) (\text{div } \mathbf{V})] d\Omega, \quad (\text{A.103})$$

que pode ser obtido através do campo de velocidades  $\mathbf{V}$  e da solução para o campo de deslocamentos  ${}^{n+1}\mathbf{u}$ .

Assim, para o domínio perturbado, obtém-se

$$a_{\Omega}^* ({}^{n+1}\mathbf{u}; \Delta \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = l'_{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{u}}) - a'_{\mathbf{V}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.104})$$

O termo  $l'_{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{u}})$  representa a contribuição do carregamento sobre o equilíbrio para o domínio perturbado. No caso de carregamentos independentes da deformação, esse termo é nulo. A matriz de rigidez para essa equação é a mesma é a mesma matriz de rigidez tangente usada no cálculo de  $\Delta \mathbf{u}$ , ao final do passo do carregamento. Essa equação deve ser resolvida para cada variável de projeto, modificando-se o termo do lado direito (carregamento fictício), obtendo-se ao final desse processo, a sensibilidade para os funcionais de performance, pelo método direto.

A solução dessa equação fornece  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ , de forma que a sensibilidade total para o campo de deslocamentos no instante  $t_{n+1}$  é dada por

$${}^{n+1}\hat{\mathbf{u}} = {}^n\hat{\mathbf{u}} + \Delta \hat{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.105})$$

Obtendo-se  ${}^{n+1}\hat{\mathbf{u}}$ , atualiza-se a sensibilidade para o tensor de tensões e para as outras variáveis internas.

Observa-se que o custo computacional para o cálculo da análise de sensibilidade em problemas elastoplásticos, acoplados ou não ao dano, é muito maior que no caso

elástico linear. Isso decorre da necessidade de armazenar e atualizar todos os resultados de sensibilidade para as variáveis em cada ponto de integração do modelo discreto de solução (Kim et al., 2000).

### A.3.3 Análise de Sensibilidade a Parâmetros Discretos

O domínio material  $\Omega$  e, conseqüentemente, as integrais em derivadas em relação a ele são independentes das características controladas por variáveis de parâmetros discretos. Dessa forma, a diferença básica entre os desenvolvimentos da seção anterior e desta seção está na possibilidade de comutar a derivação em relação a variáveis de projeto com gradientes materiais e integrais da equação de equilíbrio.

Mantendo-se o domínio constante, tem-se

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{p})] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}[\mathbf{p} + \tau \delta \mathbf{p}] - \mathbf{u}(\mathbf{p})}{\tau}, \quad (\text{A.106})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = {}^{n+1}\dot{\mathbf{u}} - {}^n\dot{\mathbf{u}}, \quad (\text{A.107})$$

$$\nabla ({}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}) = \nabla ({}^n\dot{\mathbf{u}}) + \nabla (\Delta \dot{\mathbf{u}}), \quad (\text{A.108})$$

$$\frac{d}{d\tau} (\Delta \varepsilon) = \frac{1}{2} [\nabla (\Delta \dot{\mathbf{u}}) + \nabla^T (\Delta \dot{\mathbf{u}})] \quad (\text{A.109})$$

e

$$(\dot{\hat{\mathbf{u}}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} [\Delta \varepsilon (\hat{\mathbf{u}})] = \mathbf{0}. \quad (\text{A.110})$$

As derivadas  $\frac{d}{d\tau} (\cdot)$  para as variáveis internas são obtidas da mesma forma que na seção anterior. Já para o tensor de tensões, vem que

$$\frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{C}^{ep} \varepsilon (\Delta \dot{\mathbf{u}}) + {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{fic}, \quad (\text{A.111})$$

com  ${}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{fic}$  dado pela mesma expressão anterior dada por (A.100).

Finalmente, para a sensibilidade da equação de equilíbrio, tem-se

$$\frac{d}{d\tau} [a_{\mathbf{p}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})] = a_{\mathbf{p}}^* ({}^{n+1}\mathbf{u}; \Delta \dot{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + a'_{\delta \mathbf{p}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}), \quad (\text{A.112})$$

sendo

$$a'_{\delta \mathbf{p}} ({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \left[ {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{fic} \cdot \varepsilon (\hat{\mathbf{u}}) + \frac{d}{d\tau} ({}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \varepsilon (\hat{\mathbf{u}}) \right] d\Omega \quad (\text{A.113})$$

de forma que,

$$a_p^*(\mathbf{u}; \Delta \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = l'_{\delta p}(\hat{\mathbf{u}}) - a'_{\delta p}({}^{n+1}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.114})$$

permitido a obtenção de  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ .

As mesmas considerações feitas na seção anterior, referentes à solução de  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ , também se aplicam nesse caso.

### A.3.4 Funcionais de Performance Estrutural

Para objetivos de otimização estrutural, em geral são considerados os funcionais de massa, tensão, deslocamento e energia de deformação (Silva, 1997; Silva e Bittencourt, 1997). No caso específico de otimização envolvendo dano, serão considerados adicionalmente dois funcionais: o funcional de tensão equivalente de dano e o funcional de dano, com sua descrição dada a seguir.

#### Funcional de Tensão

Define-se a função média  $m_r(\mathbf{x})$  como uma função não nula apenas em uma região  $\Omega_r \subseteq \Omega$  e com integral unitária sobre o domínio da seguinte forma

$$m_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\Omega_r} d\Omega_r} & \mathbf{x} \in \Omega_r \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega_r \end{cases}. \quad (\text{A.115})$$

Considere o funcional genérico de tensão  $\mathcal{G}(\mathbf{T})$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ , envolvendo o critério de falha relevante do problema, como tensões principais, von Mises, Tresca, tensão equivalente de dano, etc. Em geral, utiliza-se o seguinte funcional de tensão média na região  $\Omega_r \subseteq \Omega$

$$\psi_1 = \int_{\Omega_r} \mathcal{G}(\mathbf{T}) m_r(\mathbf{x}) d\Omega_r = \frac{\int_{\Omega_r} \mathcal{G}(\mathbf{T}) d\Omega_r}{\int_{\Omega_r} d\Omega_r}. \quad (\text{A.116})$$

Considerando uma discretização por elementos finitos, o domínio  $\Omega_r$  poderia, por exemplo, ser coincidente com o elemento onde ocorre o valor máximo de  $\mathcal{G}(\mathbf{T})$ . No caso de

considerar a tensão equivalente de dano, vem que

$$\psi_1 = \frac{\int_{\Omega_r} \sigma^*(\mathbf{x}) d\Omega_r}{\int_{\Omega_r} d\Omega_r}. \quad (\text{A.117})$$

### Funcional de Dano

Considere o funcional de dano, definido em cada ponto do domínio  $\mathcal{G}(D) = D(\mathbf{x})$ , dado por

$$\psi_2 = \int_{\Omega} D(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) d\Omega, \quad (\text{A.118})$$

sendo  $\delta$  o delta de Dirac e  $\mathbf{x}_k$  as coordenadas do ponto em que o dano deve ser controlado, por exemplo as coordenadas de um nó da discretização.

## A.4 Técnicas para Aplicação da Otimização de Forma

### A.4.1 Parametrização Geométrica do Domínio

Para objetivos de otimização de forma de componentes, é necessário parametrizar a representação geométrica do domínio. Ao longo dos anos, várias técnicas vem sendo aplicadas, usando representação de curvas tipo *Bézier*, *Splines*, *B-Splines*, etc. Uma representação que vem apresentando sucesso é a baseada em NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*), um tipo especial de representação em *B-Splines*.

As parametrização por NURBS fornece uma forma matemática simples e precisa de representar formas analíticas comuns (linhas, planos, cônicas, superfícies, etc) e vêm sendo muito utilizadas em sistemas gráficos computacionais e programas CAD. Nesse trabalho, as geometrias serão descritas usando NURBS por apresentarem características bastante eficientes para otimização de formas estruturais, como, por exemplo, a possibilidade de controlar as tangentes dos pontos extremos da curva e seu nível de oscilação. Isso permite a obtenção de formas suaves e simples de serem construídas. Além disso, como tais curvas ficam contidas em um polígono de controle claramente definido, pode-se evitar a obtenção de geometrias degeneradas durante o processo automático de otimização (Silva,

1997; Silva e Bittencourt, 1997).

De maneira simplificada, as curvas NURBS são definidas por um polígono cujos vértices correspondem a um conjunto de *pontos de controle* e os respectivos *pesos* de cada vértice. A geometria é obtida pela interpolação das coordenadas dos pontos de controle, utilizando os pesos e um conjunto de funções de base tipo *B-Spline*, com algumas características especiais (Rogers e Adams, 1990; Corney, 1997).

As NURBS podem ser controladas variando-se o número e a posição dos pontos de controle, os pesos e os parâmetros das funções de base. No caso de otimização estrutural de forma de estruturas é de interesse controlar os pesos e os pontos de controle.

Em resumo, o contorno  $\Gamma$  do componente é parametrizado usando NURBS, sendo as coordenadas dos pontos de controle da curva e seus respectivos pesos, as variáveis de projeto  $\mathbf{p}$  que controlam a geometria do domínio.

#### A.4.2 Determinação do Campo de Velocidades

Dentre as diversas abordagens de definição do campo de velocidades, pode ser citado o método da camada de contorno (*boundary layer approach*). Nesse método, define-se um campo de velocidades não nulo apenas em regiões do domínio adjacentes às superfícies parametrizadas do contorno, evitando que procedimentos de integração sejam realizados em todo o domínio. Uma variação dessa técnica, foi utilizada com sucesso em (Silva, 1997; Silva e Bittencourt, 1997).

Essa técnica modificada, se baseia na definição do campo de velocidades não nulo numa camada de contorno da espessura de um elemento da discretização, adjacente ao contorno parametrizado. Esse procedimento apresenta a vantagem de ser ao mesmo tempo eficiente e simples de ser utilizado em um processo automatizado de otimização, pois utiliza a informação obtida da geração automática de malhas, tendo conduzido a resultados considerados satisfatórios.