

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

Dissertação Apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
como Requisito Parcial à Obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**UM SISTEMA ORIENTADO POR OBJETOS PARA  
ANÁLISE NUMÉRICA DA POROELASTICIDADE  
ACOPLADA PELA TÉCNICA DOS ELEMENTOS**

**FINITOS**

Este exemplar corresponde a redação final  
da tese defendida por César Augusto  
Monteiro Siqueira e aprovada  
pela comissão julgadora em 12 01 19 95

José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa  
ORIENTADOR

Autor: César Augusto Monteiro Siqueira

Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

**Janeiro, 1995**

UNIDADE	-BC
N.º CHAMADA:	T/Unicamp
	Si75s
V.º	1
TRAB. Nº	90/23718
PROG.	433/95
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	23/02/95

CM-00065516-1

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA CENTRAL - UNICAMP

Siqueira, Cezar Augusto Monteiro  
Si75s Um sistema orientado por objetos para analise numerica da poro-elasticidade acoplada pela tecnica dos elementos finitos / Cezar Augusto Monteiro Siqueira. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Jose Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.  
Dissertacao (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecanica.

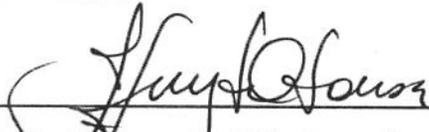
1. Metodo dos elementos finitos. 2. Mecanica de rochas. 3. Programacao orientada a objetos. 4. Mecanica dos solos. 5. Poro-elasticidade. I. Sousa, Jose Luiz Antunes de Oliveira e. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecanica. III. Titulo.

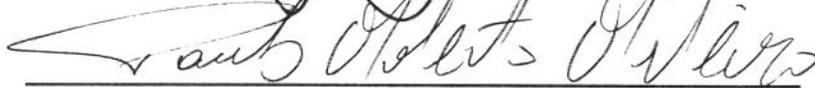
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

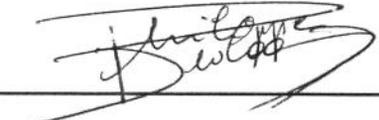
A dissertação “Um Sistema Orientado por Objetos para Análise Numérica da Poroelasticidade Acoplada pela Técnica dos Elementos Finitos”, elaborada por César Augusto Monteiro Siqueira e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 12 de janeiro de 1995.

Banca Examinadora

  
\_\_\_\_\_  
José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa, Ph. D.

  
\_\_\_\_\_  
Paulo Roberto Ribeiro, Ph. D.

  
\_\_\_\_\_  
Philippe Remy Bernard Devloo, Ph. D.

Para: meus pais, Francisco e Maria Vitória,  
minhas irmãs, Raquel e Camila,  
meus avós: José Augusto, Aurélia, Manoel e Camila,  
e Solange.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa pela sugestão do tema, pela ajuda sempre que necessária, pelo exemplo profissional, e pela amizade durante todo o trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo pela boa vontade com que me ajudou durante o trabalho, pelo conhecimento adquirido em nossas discussões de trabalho, e pela co-orientação informal que foi muito importante para a conclusão do trabalho.

Agradeço ao Prof. João Cândido Baptista de Campos pelo auxílio sempre que necessário, as conversas muito esclarecedoras sobre o tema de estudo, e pela amizade.

Agradeço aos funcionários de Departamento de Engenharia de Petróleo pela excelência dos serviços prestados.

Agradeço aos amigos de curso, pela ajuda sempre que necessária, e pelo apoio durante todo o curso.

Agradeço à Deus pela possibilidade de ter chegado até onde cheguei, e pelo auxílio nas horas mais difíceis de nossas vidas.

## RESUMO

A técnica dos elementos finitos, aliada aos conceitos de Programação Orientada por Objetos, é aplicada na análise de problemas da Teoria da Poroelasticidade Acoplada, no estado plano de deformações. A técnica dos elementos finitos foi escolhida devido a dificuldade de obtenção de soluções analíticas, que geralmente requerem simplificações excessivamente restritivas. A Programação Orientada por Objetos é utilizada devido a grande flexibilidade proporcionada por essa filosofia de programação quanto à extensão do sistema para problemas mais complexos, e também devido à disponibilidade de um sistema orientado por objetos para a utilização da técnica dos elementos finitos. Ao sistema foi incluída uma nova classe responsável pelas informações referentes às equações diferenciais, condições de contorno, e condições iniciais da Teoria da Poroelasticidade. São apresentadas as formulações teórica e numérica do problema, de acordo com a teoria de Biot, assim como a implementação computacional. O sistema é validado através da comparação com resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura. Para esta validação foram analisados os problemas de uma coluna poroelástica, e de consolidação de uma argila saturada sob ação de uma sapata de fundação. Foi feito um estudo de caso para um poço em um meio poroelástico, em que pressões, tensões efetivas e tensões totais são analisadas e comparadas com soluções analíticas. Possíveis extensões ao sistema, visando o tratamento de problemas mais complexos são discutidas.

### Palavras-chave:

- Método dos Elementos Finitos;
- Mecânica de Rochas;
- Mecânica dos Solos;
- Programação Orientada à Objetos;
- Poroelasticidade.

## ABSTRACT

The finite element technique and concepts of object oriented programming are applied to the solution of plane strain problems from Biot's Theory of Poroelasticity. The finite element technique was chosen due to the difficulty in obtaining analytic solutions, which, generally, require too restrictive simplifications. The object oriented programming is used because of its high flexibility in the extension of the system to handle more complex problems. Also the availability of a general purpose object oriented system to handle the finite element technique helped in the decision. Classes which are responsible for handling the information related to the equations of poroelasticity, boundary conditions and initial conditions were introduced to the system. The numerical formulation according to Biot's theory, and computational implementation, are discussed. The system is validated through the comparison to numerical and analytical results found in the literature. This validation was performed by solving a problem of a poroelastic column, and a problem of consolidation of a saturated clay, subject to a partially distributed load on the surface. An application was performed to analyse the problem of a wellbore in a poroelastic medium, in which, pressures, effective and total stresses are computed and compared to analytic solutions. Possible extensions to the system, aiming at the treatment of more complex problems, are discussed.

Keywords:

- Finite Elements;
- Rock Mechanics;
- Object Oriented Programming;
- Soil Mechanics;
- Poroelasticity.

## SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b> .....	x
<b>Lista de Tabelas</b> .....	xvi
<b>1 Introdução</b> .....	1
1.1 Motivação do Trabalho.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	2
1.3 Organização da Dissertação.....	6
<b>2 Base Teórica</b> .....	7
2.1 Teoria da Poroelasticidade Acoplada.....	7
2.1.1 Hipóteses.....	7
2.1.2 Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.....	8
2.1.3 Constantes Utilizadas nas Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada .....	15
2.1.3.1 Módulo de Elasticidade Transversal Drenado.....	15
2.1.3.2 Módulo de Poisson Drenado.....	16
2.1.3.3 Módulo de Poisson Não-Drenado.....	16
2.1.3.4 Coeficiente B de Skempton.....	17
2.1.3.5 Constante de Biot.....	17
2.1.3.6 Coeficiente de Permeabilidade.....	18
2.1.4 Condições de Contorno.....	18
2.1.5 Condição Inicial.....	20
<b>3 Formulação Numérica</b> .....	24
3.1 Obtenção da Formulação Numérica das Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada .....	25

<b>4 Implementação Computacional e Testes.....</b>	<b>34</b>
4.1 Implementação Computacional.....	34
4.2 Testes.....	38
4.2.1 Coluna Poroelástica.....	38
4.2.2 Consolidação de Uma Argila Completamente Saturada de Fluido.....	47
<b>5 Estudo de Caso: Poço em um Meio Poroelástico.....</b>	<b>56</b>
5.1 Soluções Analíticas.....	56
5.2 Caso de um Poço num Meio Poroelástico Sob Ação de um Carregamento Não-Hidrostático.....	58
5.2.1 Meio Poroso Carregado com um Campo Hidrostático de Tensões e Pressão do Reservatório.....	59
5.2.2 Meio Poroso Carregado com um Campo Hidrostático de Tensões, Pressão no Reservatório e no Poço.....	73
5.2.3 Meio Poroso Carregado com um Campo Hidrostático de Tensão, com Pressão no Reservatório (Condição Inicial Compressível).....	84
5.2.4 Meio Poroso Carregado com um Campo Deviatórico de Tensão.....	90
<b>6 Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos.....</b>	<b>95</b>
6.1 Conclusões.....	95
6.2 Propostas para Futuros Trabalhos.....	97
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>99</b>
<b>Nomenclatura.....</b>	<b>103</b>
<b>Apêndice A - Introdução aos Conceitos Relativos à Técnica dos         Elementos Finitos.....</b>	<b>106</b>

<b>Apêndice B - Solução das Equações da Teoria da Poroelasticidade</b>	
<b>Acoplada Unidimensional: Aplicação ao Caso da Coluna</b>	
<b>Poroelástica.....</b>	<b>110</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação das condições macroscópica e microscópica do elemento.....	8
2.2	Condições de contorno para: a) deslocamentos e forças de superfície; e b) pressões e vazões.....	19
3.1	Representação das condições de contorno para o problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.....	26
3.2	Matriz de Rigidez do sistema ( $[K]$ ), vetor de incógnitas ( $\{d\}$ ), e vetor de carregamento ( $\{F\}$ ).....	31
3.3	Matriz $[L]$ e vetor $\{d^a\}$ .....	32
3.4	Matriz de Rigidez do sistema ( $[K]^i$ ), vetor de incógnitas ( $\{d\}^i$ ), e vetor de carregamento ( $\{F\}^i$ ) para a formulação inicial.....	33
4.1	Esquema simplificado mostrando a estrutura de classes do programa .....	37
4.2	Esquema simplificado mostrando a iteração entre as classes .....	38
4.3	Modelo da coluna poroelástica de Biot.....	39
4.4	Coluna poroelástica utilizada na simulação computacional, e elemento computacional utilizado para deslocamento e pressão.....	41
4.5	Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o deslocamento no topo da coluna (estado inicial compressível). $P = 1$ MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.1.....	43
4.6	Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para a pressão na base da coluna (estado inicial compressível). $P = 1$ MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.1.....	44

4.7	Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o deslocamento no topo da coluna (estado inicial incompressível). $P = 1$ MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.2.....	45
4.8	Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para a pressão na base da coluna (estado inicial incompressível). $P = 1$ MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.2.....	46
4.9	Modelo utilizado para a análise de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido.....	47
4.10	Malha utilizada para a solução numérica do caso de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido, e elemento computacional utilizado para deslocamento e pressão.....	50
4.11	Estimativa do erro relativo entre a solução numérica e analítica (Schiffman et. al., 1969). $P=1$ MPa, $L = 2$ m e demais valores utilizados apresentados na tabela 4.3.....	52
4.12	Resultado numérico para a pressão no ponto $x = 0$ e $z = 0.5$ , com a variação do tempo adimensional. $P = 1$ MPa, $L = 2$ m e demais valores utilizados apresentados na tabela 4.3.....	53
4.13	Resultado numérico para a pressão na linha $x = 0$ , com a variação da profundidade $z$ . $P = 1$ MPa, $L=2$ m e demais valores utilizados apresentados na tabela 4.3.....	54
4.14	Comparação entre a solução analítica proposta por Biot (Biot, 1941a) e numérica para o caso do assentamento da superfície superior ( $z=0$ ). $P=1$ MPa, $L = 2$ m e demais valores utilizados apresentados na tabela 4.3.....	55
5.1	Modelo utilizado para o problema do poço.....	59
5.2	Malha utilizada para a obtenção dos resultados para o caso de carregamento hidrostático, e elementos computacionais utilizados para o deslocamento e pressão.....	59

5.3	Pressão normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	63
5.4	Pressão normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	64
5.5	Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	65
5.6	Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	66
5.7	Tensão radial total normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	67
5.8	Tensão radial total normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	68
5.9	Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	69
5.10	Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	70
5.11	Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	71

5.12	Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	72
5.13	Pressão normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	74
5.14	Pressão normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	75
5.15	Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa .....	76
5.16	Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa .....	77
5.17	Tensão radial total normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa .....	78
5.18	Tensão radial total normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa .....	79
5.19	Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	80
5.20	Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	81

5.21	Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	82
5.22	Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 15$ MPa e $p_0 = 10$ MPa.....	83
5.23	Pressão normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa (condição inicial compressível).....	85
5.24	Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa (condição inicial compressível).....	86
5.25	Tensão radial total normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa (condição inicial compressível).....	87
5.26	Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S=0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa (condição inicial compressível).....	88
5.27	Tensão circunferencial total versus raio normalizado para pequenos tempo normalizados. Carregamento: $P=30$ MPa, $S = 0$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 10$ MPa (condição inicial compressível).....	89
5.28	Malha utilizada para o caso de um campo deviatórico de tensões, e elementos computacionais para deslocamento e pressão.....	91
5.29	Pressão versus raio normalizado, variando o ângulo. Carregamento: $P=0$ MPa, $S=5$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 0$ MPa.....	92

5.30	Tensão radial total normalizada em relação a $S$ , versus raio normalizado, variando o ângulo. Carregamento: $P=0$ MPa, $S=5$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 0$ MPa.....	93
5.31	Tensão circunferencial total normalizada em relação a $S$ , versus raio normalizado variando com o ângulo. Carregamento: $P=0$ MPa, $S=5$ MPa, $p_w = 0$ MPa e $p_0 = 0$ MPa.....	94
A.1	Polinômios interpolantes utilizados para o caso unidimensional. ....	108
A.2	Polinômios interpolantes utilizados para o caso bidimensional.....	109
B.1	Modelo unidimensional e suas condições de contorno .....	110

## LISTA DE TABELAS

4.1	Valores utilizados para o teste comparativo entre a solução analítica de Biot e a solução numérica para o caso de condição inicial compressível.....	40
4.2	Valores utilizados para o teste comparativo entre a solução analítica de Biot e a solução numérica para o caso de condição inicial compressível.....	42
4.3	Valores das constantes utilizadas para o teste de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido, onde atua uma carga distribuída.....	50
5.1	Valores utilizados para as constantes do material.....	60
5.2	Valores utilizados para as constantes do carregamento (Figura 5.1).....	60
5.3	Valores das constantes de carregamento.....	73
5.4	Valores das constantes do material utilizadas para o caso de condição inicial compressível.....	84
5.5	Valores do carregamento utilizado para o caso de carregamento deviatórico.....	90
B.1	Equivalência entre os termos presentes na equação da condução de calor unidimensional e, nas equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.....	113

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Motivação do Trabalho

Problemas de fraturamento hidráulico e de estabilidade de poços petrolíferos têm freqüentemente indicado a necessidade de modelagem precisa de fenômenos poroelásticos em rochas reservatório. Geralmente, em projetos de fraturamento hidráulico, efeitos poroelásticos não são considerados no comportamento estrutural da rocha, que é modelada como um meio contínuo não poroso. O escoamento de fluidos no interior da rocha não é modelado, considerando-se apenas, de forma simplificada, a perda de fluido pelas paredes da fratura.

Neste trabalho são desenvolvidas funcionalidades para a simulação bidimensional do comportamento estrutural de meios porosos, considerando efeitos poroelásticos. O trabalho se baseia na técnica dos elementos finitos e na filosofia de programação orientada por objetos.

A complexidade das equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada e a necessidade de se considerar geometrias complexas limitam as possibilidades de utilização de soluções analíticas. Assim o caminho natural foi a utilização de uma técnica numérica. A opção da técnica numérica, assim como da filosofia de programação, foi feita tendo em vista a disponibilidade de um ambiente computacional orientado por objetos para o desenvolvimento de programas de elementos finitos (Devloo e Alves, 1992; Devloo, 1993).

No ambiente computacional utilizado, as atenções estariam concentradas no desenvolvimento de classes relacionadas diretamente com a simulação de fenômenos poroelásticos, fazendo uso de classes já desenvolvidas por outros pesquisadores, com a perspectiva de as classes aqui desenvolvidas

serem no futuro utilizadas no desenvolvimento de novas funcionalidades no tratamento de problemas mais complexos, como o estudo da influência de efeitos poroelásticos na propagação de fraturas em rocha, ou simulação tridimensional considerando efeitos poroelásticos.

O objetivo desta dissertação é descrever a implementação computacional das classes relacionadas com o problema da Poroelasticidade acoplada, apresentando testes para validação de resultados, comparando-os com soluções disponíveis na literatura.

## 1.2. Revisão Bibliográfica.

A Teoria da Poroelasticidade Acoplada, freqüentemente referida como teoria de Biot, foi apresentada em sua forma geral, pela primeira vez, em 1941, por Maurice A. Biot (Biot, 1941). Anteriormente, Biot já havia apresentado a mesma teoria, porém de uma forma menos completa (Biot, 1935). Biot faz referência à abordagem dada por Terzaghi (Terzaghi, 1925), que analisou o problema de uma coluna de material poroso, com deslocamentos horizontais restringidos nas faces laterais, e deslocamentos verticais restringidos na base, sujeita a um carregamento constante. Terzaghi considerou como hipóteses que as partículas e os grãos existentes no meio poroso eram contidos por forças moleculares, que o meio poroso apresentava comportamento elástico, e que seus poros estavam preenchidos com água. Devido às limitações da análise unidimensional, com carregamento constante, realizada por Terzaghi, Biot desenvolve duas extensões a esse trabalho: (1) desenvolvimento de equações para o caso tridimensional; e (2) possibilidade de utilizar um carregamento variável no tempo. Biot assumiu que o material era isotrópico.

Além do problema da coluna poroelástica de Terzaghi, Biot apresentou também o problema de argila saturada de fluido (Biot, 1941), que traz algumas simplificações à Teoria da Poroelasticidade Acoplada. Tais

com que a equação relativa ao fluido seja desacoplada, tornando-se semelhante à equação da difusão, para a qual, em alguns casos mais simples, existem soluções. Em trabalhos posteriores (Biot, 1941a; Biot e Clingan, 1941b), Biot apresenta, para o caso de uma argila saturada de fluido, soluções para o problema de consolidação sobre a ação do carregamento de uma sapata de fundação, considerando a superfície superior permeável ou não. Posteriormente, outros trabalhos apresentados por Biot (Biot e Clingan, 1942; Biot, 1956), apresentam soluções analíticas, assim como uma extensão para o caso de materiais anisotrópicos (Biot, 1955).

Uma análise da Teoria da Poroelasticidade Acoplada é apresentada por Schiffman et. al. (Schiffman et. al., 1969). Schiffman também analisa o problema de consolidação de uma argila saturada de fluido, sujeita ao carregamento de uma sapata de fundação. Uma solução aproximada para a pressão inicial no meio poroso, e uma solução aproximada para a pressão considerando tempos pequenos são apresentadas.

Cleary e Rice apresentaram uma formulação mais atraente para a Teoria da Poroelasticidade Acoplada (Cleary e Rice, 1976). Nesta formulação, Cleary e Rice estudam o problema de um meio poroso contendo um fluido compressível, e propõem novas constantes a serem utilizadas nas equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada. As constantes introduzidas pelos autores apresentam a vantagem de serem mais facilmente entendidas que as introduzidas por Biot (Biot, 1941; Biot e Willis, 1957). Cleary também desenvolveu soluções fundamentais para meio poroso saturado de fluido (Cleary, 1977).

Detournay et. al. (Detournay et. al., 1985) analisaram os mecanismos presentes em processos de fraturamento hidráulico utilizando de conceitos da Teoria da Poroelasticidade Acoplada. Uma solução no campo de Laplace para o problema de um meio poroso sujeito a um carregamento não hidrostático foi apresentada por Detournay e Cheng (Detournay e Cheng, 1988). A solução é

dividida em três modos de carregamento. Nos dois primeiros modos de carregamento, correspondentes à parte hidrostática do carregamento e à pressão do fluido, respectivamente, é desconsiderada a variação temporal da variação volumétrica do meio poroso, tornando desacoplada a equação para a pressão. O problema passa a ser a determinação de um campo de pressão, que posteriormente é introduzido como forças de volume nas equações para os deslocamentos. O terceiro modo corresponde à parte deviatória do carregamento.

Outra análise desenvolvida por Detournay e Cheng foi a de uma fratura hidráulica estacionária presente em um meio poroelástico (Detournay e Cheng, 1991).

As poucas soluções analíticas se restringem a casos de geometrias simples como a coluna poroelástica, citada anteriormente, e de simplificações introduzidas nas equações, como no caso de uma argila saturada. Quando se torna necessário encontrar soluções para problemas com geometrias complexas, ou quando estamos interessados em considerar todos os termos presentes nas equações, sem que qualquer simplificação possa ser feita, torna-se imprescindível a utilização de métodos numéricos para a solução das equações.

Sandhu e Wilson (Sandhu e Wilson, 1969) analisam a dissipação de pressão em meios elásticos utilizando-se da técnica de elementos finitos. Posteriormente, Christian (Christian, 1970) apresenta uma análise dos métodos numéricos empregados em problemas de distribuição de tensões em materiais não-drenados. Christian e Boehmer aplicam a técnica dos elementos finitos na solução de problemas de consolidação em estado plano de deformações (Christian e Boehmer, 1970a). Ghaboussi e Wilson (Ghaboussi e Wilson, 1972) apresentaram a formulação variacional para a dinâmica de sólidos porosos elásticos saturados de fluido.

Murad (Murad, 1990) estudou a modelagem e análise numérica do

problema de consolidação proposto por Biot, para o caso de estado não-drenado incompressível. Murad também considerou um modelo para meios poroso rígidos e elásticos, e desenvolveu estimativas de erros encontrados com a solução numérica. Outro desenvolvimento apresentado pelo autor diz respeito ao aumento de precisão, utilizando a técnica de elementos finitos para a análise da Teoria da Poroelasticidade Acoplada (Murad e Loula, 1992).

Cheng e Dusseault apresentam o desenvolvimento de um sistema bi-dimensional completamente acoplado para a análise de deformações e difusão de pressão ao redor de um poço, usando a técnica de elementos finitos (Cheng e Dusseault, 1993). No artigo os autores apresentam resultados considerando um poço em um meio sujeito a carregamentos hidrostáticos e não-hidrostáticos.

Considerando a técnica dos elementos de contorno, Borba resolveu as equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada (Borba, 1992). Em sua dissertação, Borba considerou o estudo do caso de um poço presente em um campo de tensões não-hidrostático. Borba também apresenta todo o desenvolvimento da formulação numérica da técnica dos elementos de contorno, usando elementos constantes.

Outro trabalho numérico foi apresentado por Boone (Boone, 1989). Em sua tese de Doutorado, Boone desenvolve um sistema para a análise de propagação de fraturas em um meio poroelástico. Tal análise é feita utilizando a técnica dos elementos finitos. Para os cálculos relativos ao escoamento de fluidos através da fratura foi utilizada a técnica das diferenças finitas. Uma das principais preocupações do trabalho de Boone foi a de implementar rotinas que permitissem a visualização da propagação da fratura, assim como apresentar graficamente no modelo gráficos de contornos coloridos mostrando valores de pressões, tensões, vazões, e deformações, facilitando a identificação de efeitos poroelásticos presentes na propagação de fraturas em meios porosos.

### 1.3. Organização da Dissertação

No primeiro capítulo são apresentadas a motivação do trabalho e a revisão bibliográfica da dissertação. No segundo capítulo são apresentadas as equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada, suas hipóteses, parâmetros envolvidos e condições de contorno. É também discutida a formulação para a condição inicial, fazendo uma discussão detalhada das propriedades a serem levadas em consideração para o instante inicial. É importante frisar que na literatura muito pouco já foi discutido sobre a condição inicial da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

No terceiro capítulo, a técnica dos elementos finitos é utilizada para a obtenção de uma formulação numérica para o problema. Neste capítulo são encontradas as matrizes a serem utilizadas no sistema computacional, para o instante inicial e para um tempo genérico. No quarto capítulo é discutida a implementação computacional das classes relativas ao problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada no ambiente computacional orientado por objetos. São apresentados também os testes para validação de resultados.

No quinto capítulo é apresentado um problema de um poço em um meio poroelástico com diferentes hipóteses de carregamento, também com comparação com resultados analíticos obtidos na literatura. O sexto capítulo apresenta as conclusões obtidas, assim como propostas para futuros trabalhos.

## 2. BASE TEÓRICA

### 2.1. Teoria da Poroelasticidade Acoplada

A Teoria da Poroelasticidade Acoplada pode ser entendida como uma extensão da teoria da Elasticidade. Tal extensão se deve ao fato de na Teoria da Poroelasticidade Acoplada existir um termo de pressão de poros acoplado às equações da Elasticidade. O acoplamento das deformações no meio poroso com o fluxo de fluidos em seu interior, também é feito na lei de Darcy.

A seguir é apresentado o desenvolvimento das equações utilizadas na Teoria da Poroelasticidade Acoplada, os parâmetros utilizados, e as condições contorno e iniciais necessárias à solução de problemas.

#### 2.1.1. Hipóteses

Por ser uma extensão da teoria da Elasticidade, com acoplamento com a Lei de Darcy, as hipóteses utilizadas para ambas são mantidas:

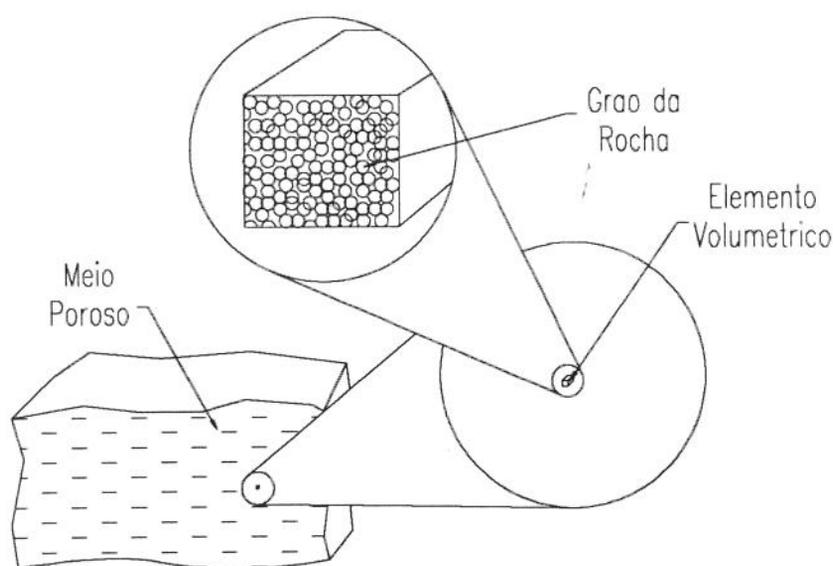
1. O meio poroso é considerado isotrópico e homogêneo;
2. As deformações e os deslocamentos são pequenos, de modo que possam ser linearizados;
3. As deformações são proporcionais às tensões no meio poroso;
4. Forças de volume não são consideradas;
5. Os poros são interconectados, de modo a permitir o fluxo de fluidos através deles;
6. O meio poroso está completamente saturado de fluidos;

7. O fluido presente no meio poroso é Newtoniano e incompressível;
8. Por convenção, trações são consideradas positivas;
9. Não são consideradas variações de temperatura.

### 2.1.2. Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada

Nesta seção são apresentados os principais passos do desenvolvimento das equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada apresentada por Biot. Será utilizada a notação indicial (Chen e Saleeb, 1982) com o interesse de simplificar a representação das equações obtidas.

Considere-se um elemento volumétrico do meio poroso. Definem-se os eixos cartesianos de tal forma que os mesmos sejam orientados na direção das faces do elemento. As dimensões do elemento são consideradas suficientemente maiores que as de um grão ou um poro do elemento, para que a hipótese de homogeneidade do meio seja válida. Ao mesmo tempo, as dimensões do elemento devem ser pequenas o suficiente para que possa ser considerado infinitesimal (figura 2.1).



**Figura 2.1: Representação das condições macroscópica e microscópica do elemento.**

Considerando-se as tensões presentes no elemento, as mesmas podem ser representadas como forças distribuídas pelas faces do mesmo. O tensor tensão é apresentado na equação (2.1).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O tensor da equação (2.1) é simétrico, podendo, portanto ser representado por apenas seis de suas nove componentes.

A equação de equilíbrio para um elemento é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.2)$$

sendo que  $F_i$  representa as forças de volume.

Utilizando agora a hipótese de que as forças de volume são desprezíveis ( $F_i=0$ ),

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.3)$$

O tensor apresentado na equação 2.1 é formado por duas partes: a primeira devida as tensões presentes na matriz da rocha, tensões efetivas ( $\sigma'_{ij}$ ), e outra referente à pressão do fluido ( $p$ ) (equação 2.4).

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Considerando-se agora as deformações presentes no meio poroso, e chamando-se de  $\varepsilon_{ij}$ , o tensor deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Representando-se o vetor de deslocamentos em um ponto por  $u_i$  e considerando-se a hipótese de pequenas deformações, tem-se para as deformações no meio poroso:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)}^1 \quad (2.6)$$

A equação (2.6) relaciona as deformações com os deslocamentos no meio poroso. Observe-se que  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , com o que o tensor deformação pode ser representado por apenas seis componentes.

Para descrever completamente a condição macroscópica do meio poroso, deve-se adicionar uma nova variável, chamada variação do conteúdo de fluido, e representada pelo símbolo  $\zeta$ . A variação do conteúdo de fluido representa a variação de volume de fluido em um volume de referência do meio poroso. Tal volume de referência pode ser, por exemplo, o elemento idealizado anteriormente (figura 2.1).

Desta forma, chega-se a sete variáveis dependentes: as seis componentes do tensor deformação no meio poroso, e a variação do conteúdo de fluido. Tais variáveis dependem de sete variáveis independentes: as seis componentes do tensor tensão no meio poroso e a pressão de fluido. Como aproximação, considerando-se pequenos valores para as deformações e para a variação do conteúdo de fluido, pode-se considerar que as sete variáveis dependentes são funções lineares das sete variáveis independentes (Biot, 1941).

Iniciando-se a análise pelas deformações no meio poroso, considere-se a pressão de poros igual a zero, ou a não existência de fluido nos poros. As deformações relacionam-se com as tensões através da Lei de Hooke, pois o problema se torna um problema de Elasticidade:

<sup>1</sup> A notação  $u_{(i,j)}$  representa a parte simétrica de um tensor (Hughes, 1987).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.7)$$

Na equação (2.7), E representa o módulo de elasticidade linear drenado do material, e  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson drenado do meio. Os valores medidos em condições drenadas representam as propriedades da matriz da rocha, não sofrendo influência do fluido presente no meio poroso.

A seguir, introduz-se o efeito da pressão nas deformações do meio poroso. Pela hipótese de isotropia do material, o efeito da pressão deve ser o mesmo para as três deformações normais, não existindo no caso das deformações angulares. Com isso:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{3H} p \delta_{ij} \quad (2.8)$$

A equação (2.8) apresenta para a constante que relaciona a pressão com as deformações, o símbolo H. A pressão do fluido, ou pressão de poros, é representada por p. A equação (2.8) representa, através de notação indicial, a relação entre as seis componentes do tensor deformação, e as seis componentes do tensor tensão no meio poroso e a pressão no fluido.

Finalmente, introduz-se a variação no conteúdo de fluido. Utilizando-se uma combinação linear para relacioná-la com as seis componentes do tensor tensão e a pressão:

$$\zeta = a_1 \sigma_{11} + a_2 \sigma_{22} + a_3 \sigma_{33} + a_4 \sigma_{12} + a_5 \sigma_{23} + a_6 \sigma_{31} + a_7 p \quad (2.9)$$

Uma variação de  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , ou  $\sigma_{33}$  deve ter o mesmo efeito sobre a variação do conteúdo de fluido, por se tratar de um material isotrópico:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3H_1} \quad (2.10)$$

Adicionalmente, por se tratar de um material isotrópico, uma mudança no sinal das tensões cisalhantes não pode causar uma variação no conteúdo de fluido, com o que:

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0 \quad (2.11)$$

Considerando agora as equações (2.10) e (2.11), e substituindo-se  $a_7=1/R$ , resulta que:

$$\zeta = \frac{1}{3H_1} \sigma_{kk} + \frac{1}{R} p \quad (2.12)$$

Através da análise da variação de energia potencial do meio poroso, pode ser provado que  $H = H_1$  (Biot, 1941). Fazendo-se esta substituição na equação (2.12), resulta:

$$\zeta = \frac{1}{3H} \sigma_{kk} + \frac{1}{R} p \quad (2.13)$$

Assim, as equações (2.8) e (2.13) relacionam as deformações no meio poroso e a variação do conteúdo de fluido com as tensões no meio poroso e a pressão no fluido. Colocando-se as tensões como funções das deformações, a partir da equação (2.8):

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (2.14)$$

Na equação (2.14),  $G$  representa o módulo de elasticidade transversal drenado. Uma nova constante, conhecida por constante de Biot ( $\alpha$ ), também aparece na equação (2.14). Esta constante é expressa por:

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)H} \quad (2.15)$$

Fazendo uso das equações (2.14) e (2.15) na equação (2.13).

$$\zeta = \alpha \varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q} p \quad (2.16)$$

Na equação (2.16),  $1/Q$  representa:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.17)$$

Uma desvantagem do uso das constantes utilizadas por Biot é o fato de as mesmas não serem comuns ao leitor, o que acaba dificultando o entendimento.

Uma formulação mais simples, do ponto de vista do entendimento das constantes, foi apresentada por Rice e Cleary (Cleary e Rice, 1976), em que duas novas constantes substituem  $Q$  e  $H$ , presentes na formulação de Biot. As novas constantes são  $B$ , o coeficiente de Skempton, e  $\nu_u$ , o módulo de Poisson não-drenado. O significado físico das constantes introduzidas por Rice e Cleary, assim como todas as outras presentes na Teoria da Poroelasticidade Acoplada são apresentadas na próxima seção.

Fazendo uso das constantes introduzidas por Rice e Cleary na equação (2.13):

$$\zeta = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2GB(1 + \nu_u)} \left[ \sigma_{kk} + \frac{3}{B(1 + \nu_u)} p \right] \quad (2.18)$$

Considerando agora a relação entre as deformações, tensões e pressões para o meio poroso, segundo Rice e Cleary:

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1 + \nu_u)(1 + \nu)} p \delta_{ij} \quad (2.19)$$

Nos casos de interesse prático da engenharia de Petróleo, como por exemplo a análise de tensões em rochas reservatório que apresentam fraturas, deve ser considerado o estado plano de deformação, por este melhor representar

as condições encontradas. Para que se possa obter as equações para o estado plano de deformações, deve-se utilizar as condições para esse estado: (1)  $\varepsilon_{33} = 0$ ; (2)  $\sigma_{33} = f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \varepsilon_{kk}, p)$ . Utilizando as condições (1) e (2) na equação (2.19), e substituindo na equação (2.18):

$$\zeta = \frac{3(v_u - v)}{B(1 + v_u)(1 - 2v)} \varepsilon_{kk} + \frac{9(v_u - v)(1 - 2v_u)}{2GB^2(1 + v_u)^2(1 - 2v)} p \quad (2.20)$$

Fazendo-se uma comparação entre as equações (2.16) e (2.20).

$$\alpha = \frac{3(v_u - v)}{B(1 + v_u)(1 - 2v)} \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{9(v_u - v)(1 - 2v_u)}{2GB^2(1 + v_u)^2(1 - 2v)} \quad (2.22)$$

De posse das relações entre tensões e variação do conteúdo de fluido, como funções das deformações no meio poroso e da pressão no fluido, podem ser obtidas as equações diferenciais que são a base da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

Substituindo-se (2.14) nas equações de equilíbrio (2.3):

$$2G\varepsilon_{ij,j} + \frac{2Gv}{(1 - 2v)} \varepsilon_{kk,i} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (2.23)$$

Colocando-se a equação (2.23) como função dos deslocamentos no meio poroso:

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{2Gv}{(1 - 2v)} u_{k,ki} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (2.24)$$

De posse da equação (2.24), fica faltando uma equação referente ao escoamento de fluidos pelo meio poroso. Tal equação será obtida da equação da continuidade (2.25) e da Lei de Darcy (2.26), que governa o escoamento de

fluidos em meios porosos.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{k,k} = 0 \quad (2.25)$$

$$q_k = -\kappa p_{,k} \quad (2.26)$$

Nas equações (2.25) e (2.26), o símbolo  $q_k$  representa a vazão de fluido na direção da variável  $x_k$  e  $\kappa$  o coeficiente de permeabilidade do meio poroso.

Substituindo as equações (2.16) e (2.26) na equação (2.25):

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa p_{,kk} = 0 \quad (2.27)$$

As equações (2.24) e (2.27) são as equações a serem utilizadas na solução de problemas da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

### 2.1.3. Constantes Utilizadas nas Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada

A seguir, são apresentadas as constantes utilizadas na Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

#### 2.1.3.1. Módulo de Elasticidade Transversal Drenado

O módulo de elasticidade transversal drenado é representado pela relação entre uma tensão cisalhante e a deformação angular por ela produzida (equação 2.28).

$$G = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{23}}{2\varepsilon_{23}} = \frac{\sigma_{31}}{2\varepsilon_{31}} \quad (2.28)$$

$G$  está diretamente relacionado ao módulo de elasticidade linear drenado, ou módulo de Young,  $E$ , e ao módulo de Poisson drenado,  $\nu$ , da seguinte

forma (Chen e Saleeb, 1982):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.29)$$

A unidade do módulo de elasticidade transversal drenado no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o Pascal (Pa). Valores para o módulo de elasticidade transversal drenado usualmente encontrados para rochas estão situados entre  $7 \times 10^9$  e  $1.7 \times 10^{10}$  Pa (Borba, 1992).

### 2.1.3.2. Módulo de Poisson Drenado

O módulo de Poisson drenado mede a relação entre as deformações transversal e longitudinal em um ensaio de compressão uniaxial, estando a amostra, no caso de um meio poroso, sem fluido em seu interior ou sem restrição para a saída do mesmo.

O módulo de Poisson drenado é uma grandeza adimensional e apresenta-se limitado entre 0 e 0.5 (sólido incompressível). Para rochas seu valor encontra-se na faixa de 0.15 a 0.45 (Borba, 1992).

### 2.1.3.3. Módulo de Poisson Não-Drenado

Tem a mesma definição do módulo de Poisson drenado, com a exceção de que no ensaio o fluido não pode sair da amostra. Apresenta-se na faixa entre o módulo de Poisson drenado e 0.5. O limite inferior é alcançado quando o fluido presente nos poros é altamente compressível fazendo com que sua influência sobre o estado não drenado seja desprezível. O limite superior corresponde a uma predominância da incompressibilidade do fluido sobre a compressibilidade do sólido, apresentando portanto um estado não-drenado incompressível.

#### 2.1.3.4. Coeficiente B de Skempton

O coeficiente B de Skempton, ou coeficiente de pressão de poro, mede a relação entre a variação de pressão de poro e a variação de tensão hidrostática total na amostra, sob condições não-drenadas:

$$B = -\frac{3\Delta p}{\Delta\sigma_{kk}}, \text{ com } \Delta m = 0. \quad (2.30)$$

Na equação (2.30),  $\Delta m$  representa a variação de massa de fluido contido na amostra. Os valores do coeficiente B de Skempton são adimensionais, apresentando-se na faixa de 0 a 1. O limite inferior corresponde a um sistema com um fluido altamente compressível, enquanto que o limite superior é atingido para o caso de a incompressibilidade do fluido predominar sobre a compressibilidade do sólido .

#### 2.1.3.5. Constante de Biot

A constante de Biot, ou constante poroelástica, é definida pela relação entre a variação do conteúdo de fluido e a deformação volumétrica total da amostra, em um ensaio drenado:

$$\alpha = \frac{\zeta}{\varepsilon_{kk}}, \text{ com } \Delta p = 0. \quad (2.31)$$

Pode também ser representada em função das constantes apresentadas anteriormente, como pode ser visto na equação (2.20).

A constante de Biot é uma grandeza adimensional entre 0 e 1. O limite inferior se refere ao caso em que os constituintes sólidos do material são bastante compressíveis, ou ao caso de não existir fluido nos poros do material, ou ainda o caso de o fluido existente nos poros ser bastante compressível. O limite superior é alcançado quando os mesmos são incompressíveis.

Portanto, pode-se notar das equações finais obtidas pela Teoria da Poroelasticidade Acoplada, que a constante de Biot é responsável pelo acoplamento dos termos da teoria da Elasticidade com os termos relativos ao escoamento de fluidos pelo meio poroso. Assim, quando a constante de Biot apresenta o valor nulo, as equações da Poroelasticidade se desacoplam, resultando nas equações da Elasticidade e da Difusão independentes.

#### 2.1.3.6. Coeficiente de Permeabilidade

O coeficiente de permeabilidade mede a resistência oferecida por um material poroso à passagem de um fluido através dele. É expressa pela relação entre a vazão de fluido que passa pelo meio poroso e o diferencial de pressão necessário para manter tal vazão.

$$\kappa = - \frac{q_i}{P_{,i}} \quad (2.32)$$

O coeficiente de permeabilidade, como representado na relação (2.32), é função da permeabilidade absoluta do meio poroso  $k$ , e da viscosidade do fluido  $\mu$ :

$$\kappa = \frac{k}{\mu} \quad (2.33)$$

O coeficiente de permeabilidade é expresso no Sistema Internacional de Unidades em  $m^2/(Pa \cdot seg)$ . É uma característica que varia muito, pois depende do meio poroso em questão, assim como do fluido que escoar por ele.

#### 2.1.4. Condições de Contorno

Tendo em vista que um problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada consiste na determinação de deslocamentos no meio poroso e pressões do fluido presente no meio, existiram condições de contorno para os

deslocamentos e para a pressão de fluido.

Como condições de contorno para os deslocamentos do meio poroso, devem ser considerados os casos de deslocamento normal ( $u_n$ ) e tangencial ( $u_t$ ) imposto (2.34), e/ou o caso de tensão normal ( $\sigma_n$ ) e tensão cisalhante ( $\sigma_t$ ) imposta (2.35) (figura 2.2a):

$$\begin{aligned} u_i n_i &= u_n, \text{ e} \\ u_i s_i &= u_t \text{ em } \Gamma_u \end{aligned} \quad (2.34)$$

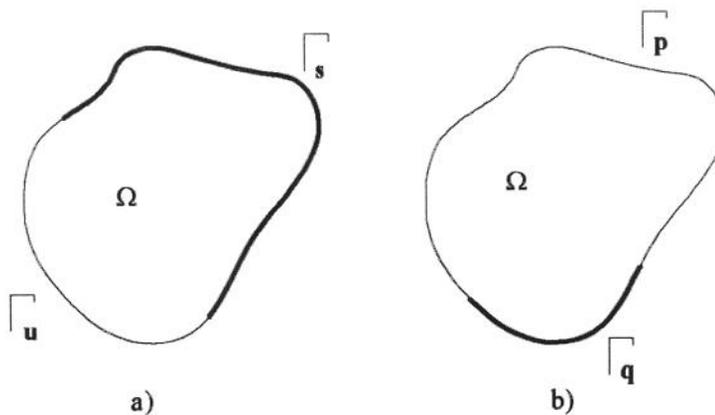
$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \cdot n_j n_i &= \sigma_n, \text{ e} \\ \sigma_{ij} \cdot s_j s_i &= \sigma_t \text{ em } \Gamma_s \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como condições de contorno para a pressão do fluido devem ser considerados os casos de pressão imposta (2.36), e/ou o caso de vazão normal ( $q_n$ ) imposta (2.37).

$$p = p_0, \text{ em } \Gamma_p. \quad (2.36)$$

$$-\kappa p_{,j} \cdot n_j = q_n, \text{ em } \Gamma_q. \quad (2.37)$$

A figura 2.2b mostra os domínios  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_q$ , onde as pressões e vazões apresentam suas condições de contorno.



**Figura 2.2: Condições de contorno para: a) deslocamentos e forças de superfície; e b) pressões e vazões.**

### 2.1.5. Condição Inicial

A condição inicial para o problema de Biot corresponde a resposta instantânea do corpo saturado ao carregamento imposto. Por isto, não se considera a mobilidade do fluido contido no meio poroso. O fato de não se considerar a mobilidade inicial do fluido implica em se considerar que não ocorre variação do conteúdo de fluido no meio poroso, ou  $\zeta = 0$ .

Um exemplo ilustrativo, para explicar o que acontece com o meio poroso no instante inicial, seria o de se considerar uma esponja completamente saturada de fluido. Antes da aplicação da carga, ou seja, num instante  $t < 0$ , a esponja está em equilíbrio, não tendo qualquer deformação, e o fluido em seu interior apresentando pressão nula.

No instante inicial, momento em que ocorre a aplicação da carga, o fluido não tem tempo de se difundir pela esponja, sofrendo um aumento de pressão. Isso se deve ao fato de a energia fornecida pelo carregamento inicial se distribuir entre a deformação inicial da esponja e o aumento de pressão inicial do fluido.

Após o instante inicial, ocorre uma difusão do fluido contido nos poros da esponja, resultando como efeito principal a diminuição da pressão do fluido a medida que este sai da esponja. Uma vez que ocorre a difusão da pressão do fluido contido no meio poroso, o carregamento vai sendo cada vez mais suportado pelo material da esponja, fazendo com que as deformações deste se tornem cada vez maiores. Assim, pode-se concluir que no meio poroso, no instante inicial, as propriedades não-drenadas prevalecerão, enquanto que para um tempo muito longo após a aplicação do carregamento, as propriedades drenadas se tornarão mais importantes.

Desconsiderando-se então a mobilidade do fluido para o instante inicial, o corpo responderá ao carregamento inicial com um corpo elástico com

dadas propriedades (propriedades não-drenadas). Portanto, pode ser concluído que para o instante inicial, o problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada se torna um problema de Elasticidade.

A pressão resultante da condição inicial poderia ser calculada como a tensão hidrostática agindo no sólido. Assim, para o instante inicial, deve ser resolvido um problema de Elasticidade, onde são utilizadas as propriedades não-drenadas do meio poroso. Tal resultado seria utilizado para a aproximação inicial da pressão.

Este procedimento tem dois inconvenientes: acarretaria um cálculo adicional, sem garantia de convergência do resultado e; para configurações onde a condição inicial é incompressível, o problema elástico se torna singular.

Para simplificar o algoritmo, é imposta a condição de que a variação do conteúdo de fluido deve ser nula para o instante inicial.

Considerando-se que o meio poroso deve apresentar variação do conteúdo de fluido igual a zero para o instante inicial, que é a condição inicial para o problema:

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,ki} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (2.38)$$

$$\zeta = \alpha \varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q} p = 0 \quad (2.39)$$

Para a formulação inicial são aplicadas condições apenas sobre os deslocamentos e tensões impostas ao modelo. A pressão se torna uma variável dependente do campo de deslocamento calculado.

Isso se deve ao fato de a condição inicial ser baseada na Formulação Mista (Hughes, 1987), utilizada no estudo de casos de incompressibilidade em

Elasticidade. Tal formulação se torna necessária devido à singularidade inserida no problema elástico para o caso de um material incompressível. Nessa formulação, a pressão se torna uma variável dependente dos deslocamentos no meio, sendo proporcional ao divergente dos deslocamentos. A Formulação Mista é apresentada nas equações (2.40) e (2.41).

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) - p^*_{,i} = 0 \quad (2.40)$$

$$u_{i,i} + \frac{p^*}{\lambda} = 0 \quad (2.41)$$

Nas equações (2.40) e (2.41),  $p^*$  representa a tensão hidrostática presente no sólido elástico, e o parâmetro  $\lambda$  a relação:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \quad (2.42)$$

O parâmetro  $\lambda$  expressa a incompressibilidade do meio, tendendo para infinito no caso de um sólido incompressível. Observando a expressão (2.41) nota-se que para o caso incompressível o divergente dos deslocamentos é nulo, não existindo variação volumétrica do sólido.

Fazendo uma comparação entre as equações (2.38) e (2.39), e as equações (2.40) e (2.41):

$$\lambda = \left[ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} + \alpha Q \right] \quad (2.43)$$

A equação (2.43) mostra que, para o caso de  $\nu_u = 0.5$  e  $B = 1$ , que são as condições não-drenadas incompressíveis para a Teoria da Poroelasticidade Acoplada, obtém-se pelas equações (2.21) e (2.22),  $\alpha = 1$  e  $1/Q = 0$ , fazendo com que  $\lambda \rightarrow \infty$ , ou,  $1/\lambda \rightarrow 0$ , o que equivale ao caso incompressível, segundo a Formulação Mista.

Portanto, as equações (2.38) e (2.39) são as equações a serem utilizadas para a formulação do instante inicial.

### 3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

As soluções de problemas em Engenharia geralmente conduzem a equações diferenciais parciais, de difícil solução, restringindo as poucas soluções analíticas existentes a geometrias simples. Muitas vezes, além de geometrias simplificadas, são feitas algumas simplificações teóricas, fazendo com que termos das equações diferenciais percam importância, tornando o problema ainda mais distante da realidade.

Quando é desejada uma solução que considere todos os termos presentes nas equações diferenciais, em geometrias complexas, torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Tais soluções vem se tornando cada vez mais utilizadas em Engenharia, devido à disponibilidade de computadores cada vez mais poderosos, permitindo que problemas mais complexos possam ser analisados de forma mais realística. Técnicas como a de Elementos Finitos vem sendo cada vez mais utilizadas, devido ao grande número de problemas em que a mesma já foi empregada, e também as grandes facilidades introduzidas com o rápido avanço da informática.

No presente trabalho a técnica dos elementos finitos será utilizada, devido principalmente à vantagem de se aplicar a qualquer geometria. A disponibilidade de um sistema utilizando Programação Orientada por Objetos (Devloo, 1992) também foi importante para a escolha da técnica. Além disso, a possibilidade de se adicionar termos a análise através do conceito de Herança, que é uma das características da Programação Orientada por Objetos, viabiliza a expansão do sistema desenvolvido. Pelo uso de Herança, o sistema poderá se tornar cada vez mais completo. O conceito de Herança, assim como outros conceitos relativos a programação orientada por objetos, é apresentado no capítulo 4.

Como exemplo pode-se citar o desenvolvimento de classes que se utilizariam de conceitos da Mecânica do Fraturamento para a simulação de propagação de fraturas em um meio poroelástico, e também classes para análise tridimensional de Poroelasticidade Acoplada.

A seguir é descrita a aplicação da técnica dos elementos finitos para a obtenção de uma formulação numérica para o problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

### 3.1. Obtenção da Formulação Numérica das Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

Considerando-se as equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada:

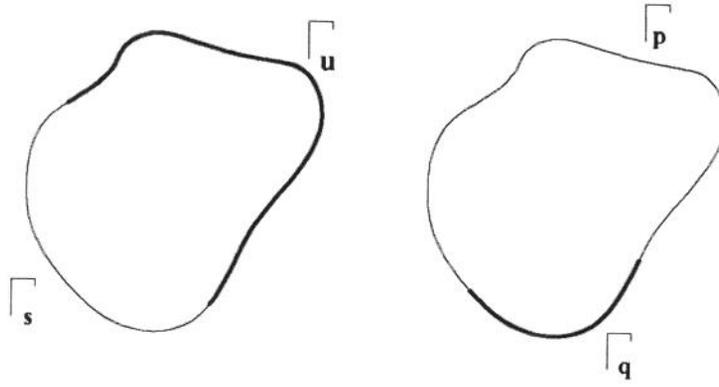
$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \kappa p_{,kk} = 0 \quad (3.2)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_i &= g_i && \text{em } \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j &= h_i && \text{em } \Gamma_s \\ p_i &= S_i && \text{em } \Gamma_p \\ q_i n_i &= R_i && \text{em } \Gamma_q \\ \zeta|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na equação (3.3) tem-se que  $g_i$  representa a condição de contorno para os deslocamentos no contorno  $\Gamma_u$ ,  $h_i$  representa a condição de contorno para as forças de superfície no contorno  $\Gamma_s$ ,  $S_i$  a condição para as pressões no contorno  $\Gamma_p$ , e  $R_i$  representa a condição para as vazões no contorno  $\Gamma_q$  (figura 3.1).



**Figura 3.1: Representação das condições de contorno para um problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.**

Considere-se inicialmente a equação (3.1). Fazendo-se uma reformulação da equação (3.1) pela aplicação da Formulação Fraca<sup>1</sup>:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \omega_i d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Utilizando-se o teorema da divergência na equação (3.4):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \omega_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_s} h_i \omega_i d\Gamma \quad (3.5)$$

Aplicando-se a equação (2.14), que relaciona as tensões no meio poroso com as deformações e a pressão no fluido, na equação (3.5):

$$\int_{\Omega} \left( 2Gu_{(i,j)} + \frac{2Gv}{(1-2\nu)} u_{k,k} \delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \right) \omega_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_s} h_i \omega_i d\Gamma \quad (3.6)$$

Fazendo-se a consideração de estado plano de deformações, pode-se substituir  $u_1 = u$  e  $u_2 = v$ . As equações (3.7), (3.8) e (3.9) mostram as funções admissíveis para as três variáveis:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_n} \bar{u}_k \psi_k^u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_n} \bar{u}_k \psi_k^u \quad (3.7)$$

<sup>1</sup> Os conceitos relativos a técnica dos elementos finitos são apresentados no Apêndice A.

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{Nn} \bar{v}_k \psi_k^v(x, y) = \sum_{k=1}^{Nn} \bar{v}_k \psi_k^v \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{Nn} \bar{p}_k \psi_k^p(x, y) = \sum_{k=1}^{Nn} \bar{p}_k \psi_k^p \quad (3.9)$$

Nas equações (3.7), (3.8) e (3.9), os símbolos  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$  e  $\bar{p}_k$  representam respectivamente, o deslocamento nodal na direção x, o deslocamento nodal na direção y, e a pressão nodal, para o nó k, e Nn representa o número de nós no domínio.

Fazendo-se o índice i igual a um, e variando-se o índice j de um a dois na equação (3.6). Através da substituição das funções admissíveis (3.7), (3.8), e (3.9) na equação (3.6), é obtido, através da utilização do método de Galerkin:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} + G \frac{\partial \psi_k^u}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial y} \right] d\Omega \right\} \bar{u}_k + \\ & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ G \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial y} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} \right] d\Omega \right\} \bar{v}_k - \\ & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \alpha \psi_k^p \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} \right] d\Omega \right\} \bar{p}_k = \sigma_i^u \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fazendo-se o mesmo para o caso do índice i ser igual a 2, e variando-se o índice j de um a dois na equação (3.6):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial x} + G \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} \right] d\Omega \right\} \bar{v}_k + \\ & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ G \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^u}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial x} \right] d\Omega \right\} \bar{u}_k - \\ & \sum_{k=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left\{ \int_{\Omega} \left[ \alpha \psi_k^p \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} \right] d\Omega \right\} \bar{p}_k = \sigma_i^v \end{aligned} \quad (3.11)$$

As equações (3.10) e (3.11) são as equações resultantes da aplicação da técnica dos elementos finitos na equação (3.6). Resta portanto aplicar a

técnica à equação (3.2).

Considerando-se a equação (3.2) em função dos deslocamentos e da pressão:

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,k}) - \kappa \nabla^2 p = 0 \quad (3.12)$$

Aplicando-se a formulação fraca, juntamente com o Método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,k}) - \kappa \nabla^2 p \right) \omega_3 d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

Separando as integrais da equação (3.13):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \omega_3 d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,k}) \omega_3 d\Omega - \int_{\Omega} \kappa \nabla^2 p \omega_3 d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Na equação (3.13) e (3.14),  $\omega_3$  são as funções teste para a aproximação da pressão. Aplicando-se o teorema da divergência na terceira integral da equação (3.14):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \omega_3 d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,k}) \omega_3 d\Omega - \int_{\Gamma_q} \kappa \nabla p \omega_3 d\delta\Omega + \int_{\Omega} \kappa \nabla p \nabla \omega_3 d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Variando-se o índice k de um a dois, e substituindo-se as funções admissíveis (3.7), (3.8) e (3.9), na equação (3.15):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_k \bar{p}_k \psi_k^p \right) \left( \sum_l \psi_l^p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_k \bar{u}_k \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \right) \right] \left( \sum_l \psi_l^p \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_k \bar{v}_k \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \right) \right] \left( \sum_l \psi_l^p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \nabla \left( \sum_k \bar{p}_k \psi_k^p \right) \nabla \left( \sum_l \psi_l^p \right) d\Omega = q_l \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agrupando-se os termos da equação (3.16):

$$\sum_k \sum_l \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \psi_k^p \psi_l^p d\Omega \right\} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial t} + \sum_k \sum_l \left\{ \int_{\Omega} \kappa \left[ \frac{\partial \psi_k^p}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k^p}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^p}{\partial y} \right] d\Omega \right\} \bar{p}_k +$$

$$\sum_k \sum_l \left\{ \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_j^u}{\partial x} \psi_m^p d\Omega \right\} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + \sum_k \sum_l \left\{ \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^u}{\partial y} \psi_l^p d\Omega \right\} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = q_1 \quad (3.17)$$

Representando a equação (3.17) de uma forma simplificada:

$$A_{lk} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial t} + B_{lk} \bar{p}_k + C_{lk} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + D_{lk} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = E_1 \quad (3.18)$$

sendo:

$$A_{lk} = \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \psi_k^p \psi_l^p d\Omega$$

$$B_{lk} = \int_{\Omega} \kappa \left[ \frac{\partial \psi_k^p}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k^p}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^p}{\partial y} \right] d\Omega$$

$$C_{lk} = \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \psi_l^p d\Omega \quad (3.19)$$

$$D_{kl} = \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^u}{\partial y} \psi_l^p d\Omega$$

$$E_1 = q_1$$

Discretizando-se no tempo a equação (3.18), pela técnica de diferenças finitas:

$$A_{lk} \left( \frac{\bar{p}_k - \bar{p}_k^a}{\Delta t} \right) + B_{lk} \bar{p}_k + C_{lk} \left( \frac{\bar{u}_k - \bar{u}_k^a}{\Delta t} \right) + D_{lk} \left( \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_k^a}{\Delta t} \right) = E_1 \quad (3.20)$$

$$C_{lk} \bar{u}_k + D_{lk} \bar{v}_k + (A_{lk} + B_{lk} \Delta t) \bar{p}_k =$$

$$E_1 \Delta t + A_{lk} \bar{p}_k^a + C_{lk} \bar{u}_k^a + D_{lk} \bar{v}_k^a \quad (3.21)$$

Nas equações (3.20) e (3.21), o índice superior a se refere à variável calculada num tempo  $(t-\Delta t)$ .

Com a discretização no tempo da equação (3.20), a matriz de rigidez para o problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada já está definida. O

sistema de equações a ser resolvido é representado na equação (3.22).

$$[K]\{d\} = [L]\{d\}^a + \{F\} \quad (3.22)$$

As figuras 3.2 e 3.3 apresentam os elementos das matrizes da equação (3.22).

A equação (3.22) deve ser utilizada para cálculos em tempos genéricos após o inicial. Para a condição inicial, deve ser resolvida a equação (3.23), que leva em consideração a formulação para o instante inicial discutida no capítulo anterior.

$$[K]^i \{d\}^i = \{F\}^i \quad (3.23)$$

O índice superior  $i$  se refere à condição inicial. A figura 3.4 apresenta as matrizes a serem utilizadas para a condição inicial da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.



$$L_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left\{ -\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \psi_l^p d\Omega \right\} & \left\{ -\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \psi_l^p d\Omega \right\} & \left\{ -\int_{\Omega} \frac{1}{Q} \psi_k^p \psi_l^p d\Omega \right\} \end{bmatrix}$$

$$d_k^a = \begin{Bmatrix} \bar{u}_k^a \\ \bar{v}_k^a \\ \bar{p}_k^a \end{Bmatrix}$$

Figura 3.3: Matriz  $[L]$  e vetor  $\{d^a\}$ .

$$\mathbf{K}_{ik}^i = \begin{bmatrix}
\left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} + G \frac{\partial \psi_k^u}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial y} \right] d\Omega \right\} & \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} + G \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^u}{\partial y} \right] d\Omega \right\} & \left\{ - \int_{\Omega} \alpha \psi_k^p \frac{\partial \psi_l^u}{\partial x} d\Omega \right\} \\
\left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} + G \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial x} \right] d\Omega \right\} & \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} + G \frac{\partial \psi_k^v}{\partial x} \frac{\partial \psi_l^v}{\partial x} \right] d\Omega \right\} & \left\{ - \int_{\Omega} \alpha \psi_k^p \frac{\partial \psi_l^v}{\partial y} d\Omega \right\} \\
\left\{ - \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^u}{\partial x} \psi_l^p d\Omega \right\} & \left\{ - \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \psi_k^v}{\partial y} \psi_l^p d\Omega \right\} & \left\{ - \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \psi_k^p \psi_l^p d\Omega \right\}
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_k^i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{p}_k \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_i^i = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Figura 3.4:** Matriz de Rigidez do sistema ( $[\mathbf{K}]^i$ ), vetor de incógnitas ( $\{\mathbf{d}\}^i$ ) e vetor de carregamento ( $\{\mathbf{F}\}^i$ ) para a formulação inicial.

## **4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E TESTES**

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos de Programação Orientada por Objetos, destacando algumas de suas vantagens para o desenvolvimento de sistemas de grande porte, como programas para análises pela técnica dos elementos finitos. Juntamente com os esses conceitos, é apresentado o sistema utilizado no desenvolvimento do programa, bem como a implementação das classes de objetos necessárias para o problema de Poroelasticidade Acoplada.

Na seqüência, são apresentados os testes computacionais realizados com a intenção de verificar a coerência e correção dos resultados, e validação do programa através de comparação com soluções analíticas e numéricas obtidas na literatura.

### **4.1 Implementação Computacional**

A técnica numérica escolhida para a solução do problema de Biot foi a técnica dos elementos finitos. O uso dessa técnica traz uma certa complexidade do ponto de vista da implementação computacional. Esta complexidade está relacionada com o fato de a técnica envolver integrações numéricas, aplicação de condições de contorno, necessidade de se trabalhar com polinômios de interpolação de vários graus, e utilização de diversos tipos de elementos em uma mesma malha.

As complexidades citadas são tratadas com mais facilidade quando são aplicados os conceitos de Programação Orientada por Objetos. Em um sistema orientado por objetos, dados e ações sobre os mesmos são tratados de uma forma acoplada.

Classes são entidades que descrevem dados e conjuntos de ações que operam sobre eles. Quando os dados são definidos, são também definidas as ações sobre os mesmos, e somente através destas ações os dados podem ser modificados. A utilização das classes se dá através da uso de objetos provenientes destas classes. Assim, em vez de uma série de rotinas resolvendo um dado problema, um sistema orientado por objetos consiste em um conjunto de objetos que interagem entre si de modo a resolvê-lo.

Uma grande vantagem da Programação Orientada por Objetos se refere ao reaproveitamento de classes, já desenvolvidas e testadas, no tratamento de problemas diferentes. Esse fato favorece o desenvolvimento de novas funcionalidades em um sistema existente, uma vez que a atenção do programador se concentrará apenas no código a ser desenvolvido, sem necessidade de alterar o código já existente. Com isso diminuem também as possibilidades de introdução de erros, que poderiam inclusive afetar outras funcionalidades já estáveis.

Em um sistema orientado por objetos para tratamento de problemas pela técnica dos elementos finitos, nós, elementos, matrizes e o próprio modelo são tratados como objetos, isto é, instâncias de classes que definem como são armazenados os dados e as ações sobre estes. Este trabalho foi desenvolvido a partir de um sistema orientado por objetos para tratamento de problemas pela técnica dos elementos finitos, desenvolvido pelo Prof. Dr. Philippe R. B. Devloo (Devloo, 1993), onde foram adicionadas novas classes para o tratamento de problemas da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.

O sistema utilizado é formado por três classes básicas responsáveis pela utilização da técnica dos elementos finitos. A primeira classe, *geoelbas*, é responsável pela descrição geométrica dos elementos. Esta classe apresenta-se com um caráter bastante geral, podendo ser utilizada para gerar elementos unidimensionais, bidimensionais, ou tridimensionais. Nas subclasses geradas a partir da classe *geoelbas*, são armazenadas as informações geométricas relativas

aos nós e elementos, como por exemplo as coordenadas dos nós e os número de lados do elemento. Estas classes também são responsáveis pelos cálculos dos Jacobianos, necessários aos cálculos de matrizes de rigidez e vetores de carga.

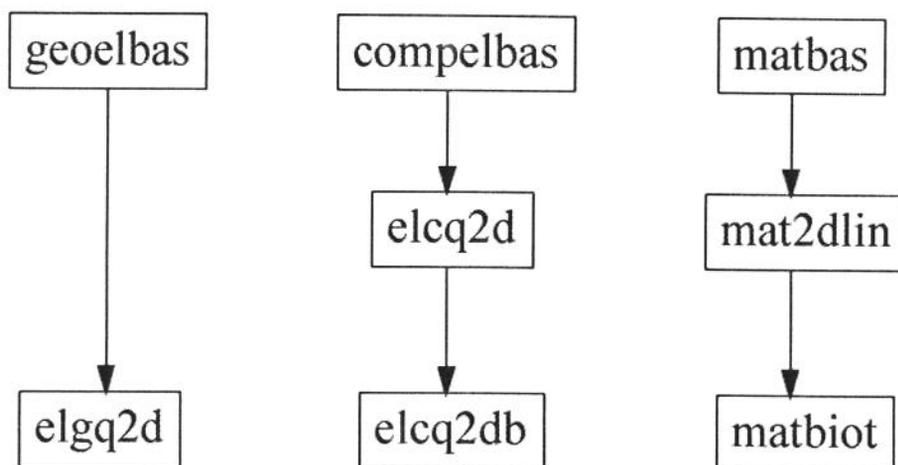
A segunda classe básica, *compelbas*, define os esquemas de interpolação e integração sobre os elementos, sendo responsável pela montagem das matrizes de rigidez e carregamento do problema. A terceira classe básica, *matbas*, mantém informações sobre os coeficientes presentes nas equações diferenciais. É nesta classe que as contribuições de cada elemento finito são calculadas, usando as funções de forma e suas derivadas provenientes das subclasses da classe *compelbas*. É a classe *matbas* a responsável pelas informações relativas ao problema a ser estudado, pois nela estão os coeficientes das equações diferenciais e condições de contorno para o problema.

As três classes básicas devem ser suficientemente gerais de forma a abranger uma faixa muito grande de problemas. Para resolver um determinado problema é necessário criar subclasses, específicas para esse problema. As características definidas para as classes básicas são adquiridas pelas novas classes empregando dois conceitos importantes da Programação Orientada por Objetos, chamados *Herança* e *Polimorfismo*. *Herança* é um conceito que permite que subclasses sejam criadas a partir de classes existentes, através da definição de novos grupos de dados e ações. A subclasse herda os dados e ações dessa superclasse, classe a partir da qual a nova classe foi gerada, e apresenta funcionalidades adicionais. Eventualmente subclasses podem redefinir algumas ações de suas superclasses. *Polimorfismo* é a habilidade de se ter uma mesma ação executada por diferentes objetos. Cada classe define a ação seguindo procedimentos diferentes, porém, para quem requisita a ação, esses procedimentos são transparentes. Apenas o resultado da ação importa, não importando a maneira como foram obtidos.

Para o problema da Teoria da Poroelasticidade Acoplada, o conceito

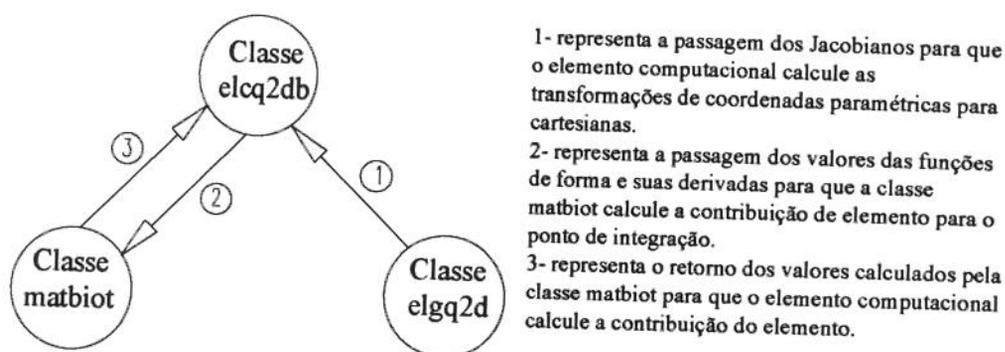
de *Herança* foi utilizado na criação de duas novas classes. Uma se refere ao material, *matbiot*, subclasse derivada de *matbas*, que mantém as informações dos coeficientes das matrizes do problema, as condições de contorno, e a formulação inicial. A segunda classe, *elcq2db*, que é responsável pelos cálculos de funções de interpolação sobre os elementos e seus valores nos pontos de integração, foi criada a partir da classe *elcq2d*, que apresenta as informações para os cálculos dos elementos quadriláteros bidimensionais. A nova classe *elcq2db* herda todas as características de sua superclasse, que por sua vez herdou as características da superclasse que a gerou, a classe básica *compelbas*.

A criação da classe *elcq2db* foi necessária devido ao fato de se estar trabalhando com polinômios de interpolação de grau inferior para os valores da pressão (Dusseault e Cheng, 1993). Esta característica não existia na superclasse *elcq2d*, criando a necessidade para tal solução. A figura 4.1, apresenta esquematicamente as classes básicas e as respectivas subclasses geradas a partir delas.



**Figura 4.1:** Esquema simplificado mostrando a estrutura de classes do programa.

A figura 4.2 apresenta, de forma simplificada, a interação entre as classes para a solução das equações da Teoria de Biot. Na figura 4.2 são vistas as três principais classes responsáveis pelos cálculos.



**Figura 4.2: Esquema simplificado mostrando a iteração entre as classes.**

A seguir são apresentados os exemplos computacionais utilizados para a validação do programa.

## 4.2 Testes

Dois testes de verificação foram executados. O primeiro se refere ao caso da coluna poroelástica, proposto por Biot (Biot, 1941). No segundo teste, foi resolvido um problema de consolidação de solos (Biot, 1941; Biot, 1941a; Schiffman et. al., 1969).

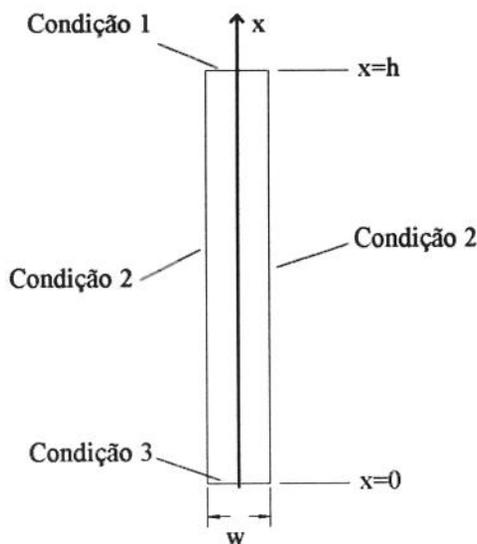
### 4.2.1 Coluna Poroelástica

O problema da coluna poroelástica corresponde a uma simplificação das equações da Poroelasticidade tridimensional, uma vez que pode ser reduzido a um problema unidimensional. O modelo para o estudo é o de uma coluna de material poroso, cuja largura é muito menor que o comprimento, tornando válida a aproximação para um estado unidimensional.

A figura 4.3 mostra a coluna poroelástica a ser analisada, assim como a orientação da variável  $x$ , e as condições de contorno do problema. Na figura 4.3 tem-se:

- Condição 1: Tensão normal de compressão  $P$  e pressão nula;
- Condição 2: Deslocamento normal nulo e vazão normal nula;

- Condição 3: Deslocamento normal nulo e vazão normal nula;



**Figura 4.3: Modelo da coluna poroelástica de Biot.**

Considerando-se as equações (2.24) e (2.27), onde são considerados somente os termos em  $x$ .

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2)$$

As equações (4.1) e (4.2) devem ser satisfeitas para as seguintes condições de contorno (4.3).

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \sigma(h) &= -P \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 \\ p(h) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

O processo de solução das equações (4.1) e (4.2), com as condições de contorno (4.3) é apresentado no Apêndice B. Na equação (4.4) é apresentada a

solução para a pressão ao longo da coluna para um tempo genérico.

$$p = \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n (h - x)] \quad (4.4)$$

$$\text{sendo: } p(0) = \frac{P}{\left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)\alpha Q} + \alpha \right]} \quad (4.5)$$

$$c = \frac{\kappa}{\left[ \frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{Q} \right]} \quad (4.6)$$

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad (4.7)$$

O resultado obtido para o recalque da superfície superior da coluna poroelástica, para tempos genéricos, é apresentado na equação (4.8).

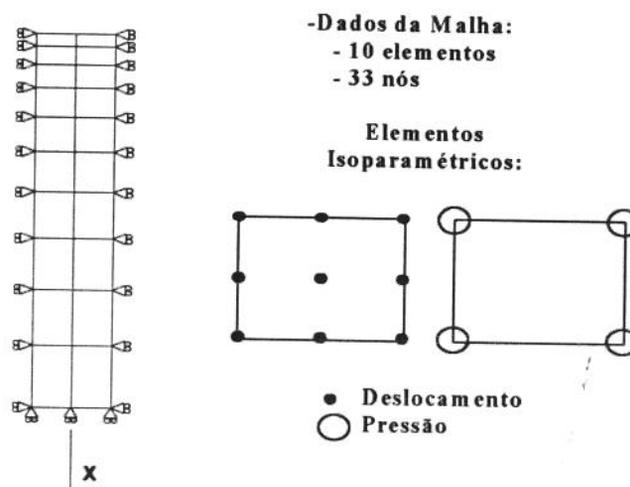
$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[ Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (4.8)$$

Para a comparação com a solução analítica foram usadas as constantes apresentadas na tabela 4.1 (Boone, 1989).

**Tabela 4.1: Valores utilizados para o teste comparativo entre a Solução Analítica de Biot e a Solução Numérica para o caso de condição inicial compressível.**

Constantes - Unidades	Valor Utilizados
G - [MPa]	6000
$\nu$ - [adimens.]	0.2
$\nu_u$ - [adimens.]	0.33
B - [adimens.]	0.62
$\kappa$ - [m <sup>2</sup> /MPa.seg]	$2 \cdot 10^{-5}$
$\Delta t$ - [seg]	1
h - [m]	6
w - [m]	1

A malha utilizada para a obtenção dos resultados numéricos é apresentada na figura 4.4.



**Figura 4.4: Coluna poroelástica utilizada na simulação computacional, e elemento computacional utilizado para deslocamento e pressão.**

Para os elementos da malha apresentada na figura 4.4 foram utilizadas aproximações quadrática para os deslocamentos e linear para a pressão, como pode ser visto no elemento isoparamétrico mostrado na figura.

A figura 4.5 apresenta as soluções analítica e numérica para o deslocamento do topo da coluna ( $x=0$ ). É interessante que a curva representa uma transição entre o estado não-drenado e drenado. O estado não-drenado é caracterizado por um estado em que o carregamento é suportado pelo fluido, aumentando sua pressão, e pela parte sólida. No estado drenado, a pressão do fluido já foi totalmente dissipada, passando o carregamento a ser suportado apenas pela matriz sólida.

Na figura 4.6 é apresentada a variação da pressão no fluido ao longo do tempo. Conforme discutido no parágrafo anterior, observa-se um aumento da pressão no instante inicial, pois parte do carregamento é suportado pelo fluido. A medida que o tempo vai passando, a pressão vai se dissipando, até chegar ao valor inicial.

Outro resultado interessante pode ser visto nas figuras 4.7 e 4.8. Trata-se dos resultados obtidos para o caso de um meio poroso que apresenta características incompressíveis para o estado não-drenado (instante inicial). A mesma malha da figura 4.4 é utilizada, assim como as aproximações para os deslocamentos e as pressões. Os valores das constantes do material utilizadas no exemplo são mostrados na tabela 4.2. Para o caso de comportamento incompressível no estado inicial chega-se a  $\alpha = 1$  e  $1/Q = 0$ .

**Tabela 4.2: Valores utilizados para o teste comparativo entre a Solução Analítica de Biot e a Solução Numérica para o caso de condição inicial incompressível.**

Constantes - Unidades	Valor Utilizados
G - [MPa]	6000
$\nu$ - [adimens.]	0.2
$\nu_u$ - [adimens.]	0.5
B - [adimens.]	1
$\kappa$ - [ $m^2/MPa.seg$ ]	$2.10^{-5}$
$\Delta t$ - [seg]	1
h - [m]	6
w - [m]	1

É interessante notar o comportamento do meio poroso para o instante inicial, quando as condições predominantes são as não-drenadas. Por se tratar de um problema incompressível, no instante inicial, o deslocamento do topo da coluna vai ser nulo, sendo o carregamento suportado totalmente pelo fluido. Após o instante inicial, a medida que a pressão vai se dissipando, parte do carregamento vai sendo suportado pela parte sólida, fazendo com que a coluna vá sendo pouco a pouco comprimida. Após ter se passado um tempo muito longo, o carregamento é completamente suportado pela matriz sólida.

A seguir é apresentado um problema de Mecânica de Solos, que consiste na consolidação de uma argila saturada sob ação do carregamento de uma fundação direta.

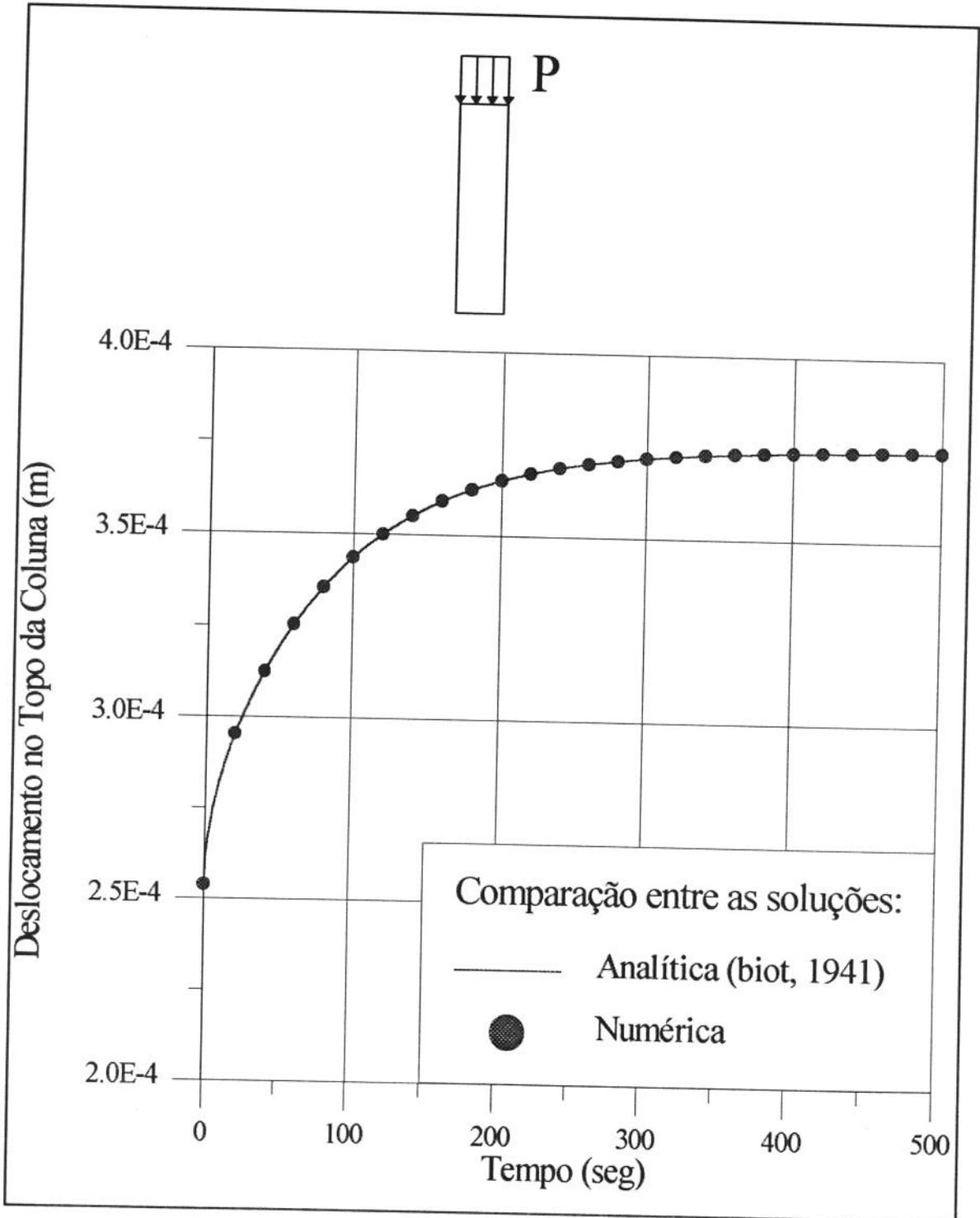
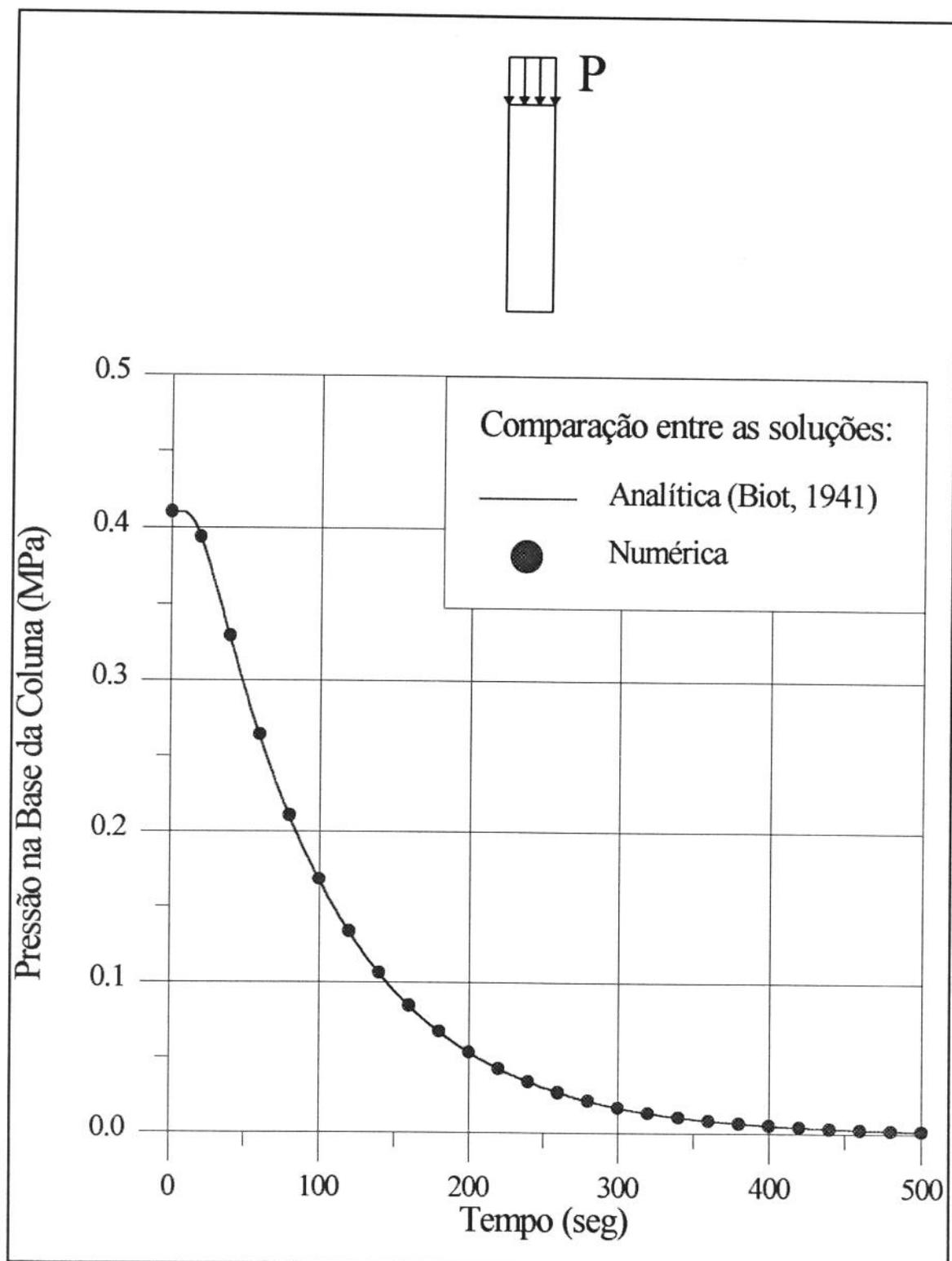
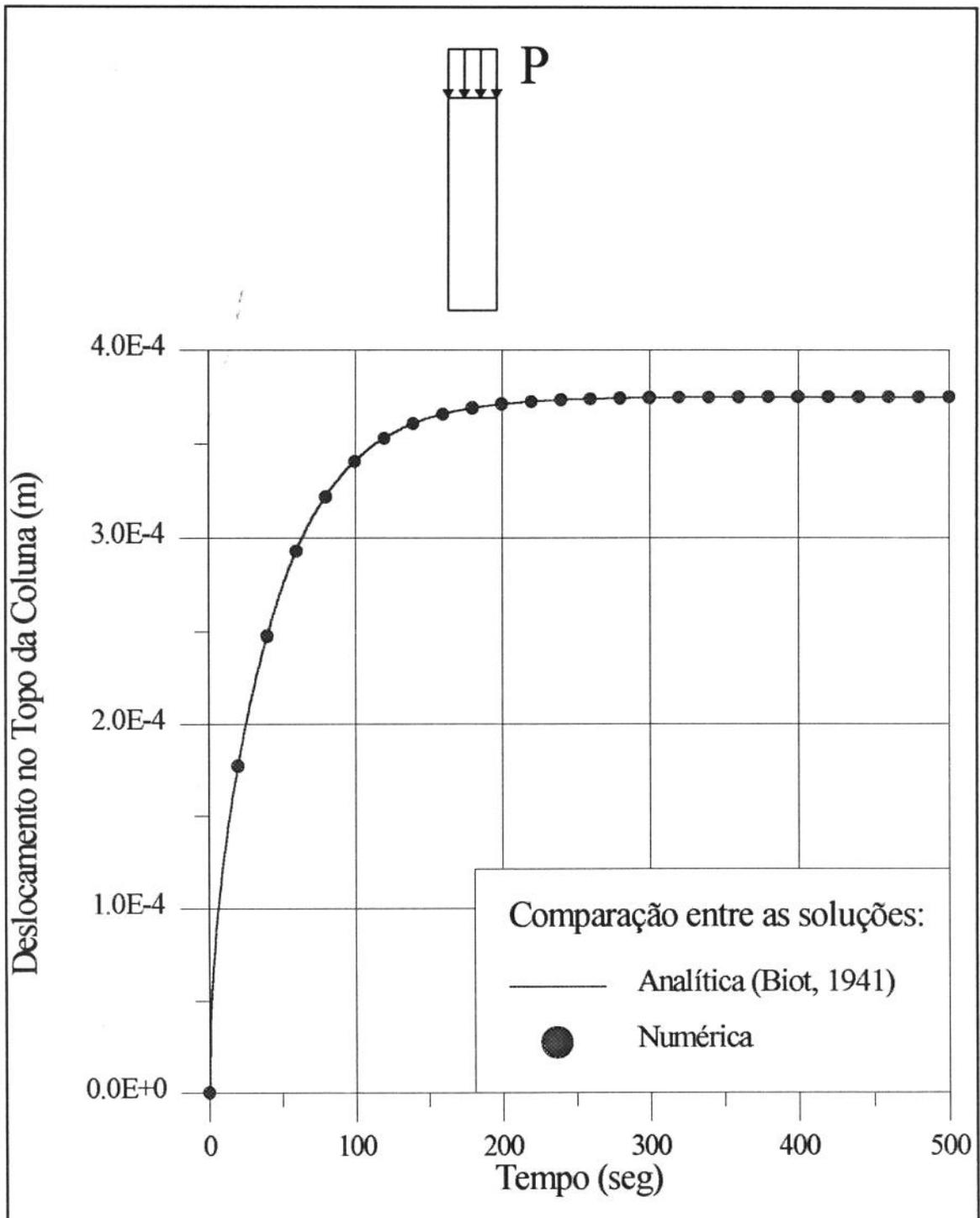


Figura 4.5: Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o deslocamento no topo da coluna (estado inicial compressível).  $P = 1$  MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.1.



**Figura 4.6:** Comparação entre os resultados analítico e numérico para a pressão na base da coluna (estado inicial compressível).  $P = 1$  MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.1.



**Figura 4.7:** Comparação entre os resultados analítico e numérico para a pressão na base da coluna (estado inicial incompressível).  $P = 1$  MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.2.

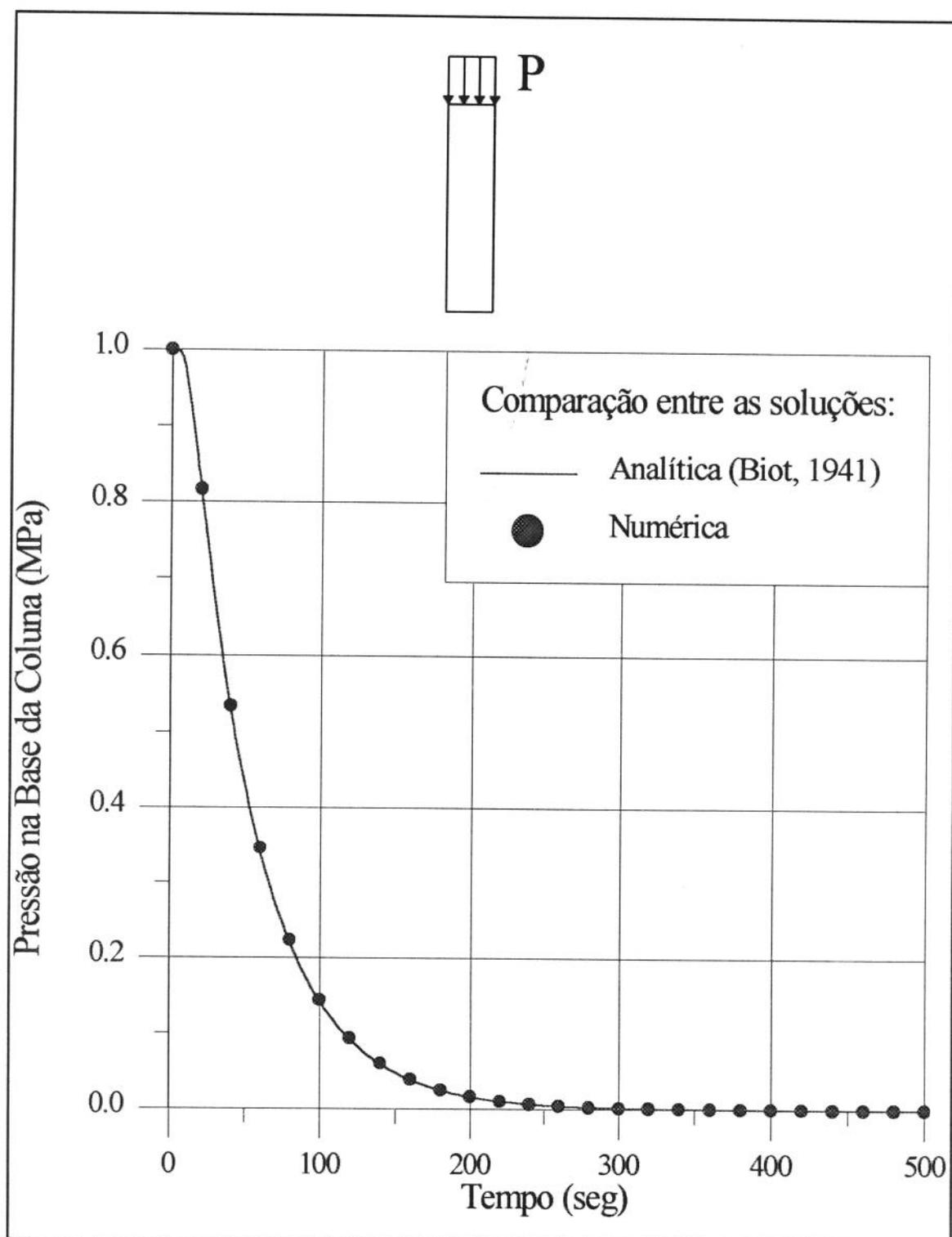


Figura 4.8: Comparação entre os resultados analítico e numérico para a pressão na base da coluna (estado inicial incompressível).  $P = 1$  MPa e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.2.

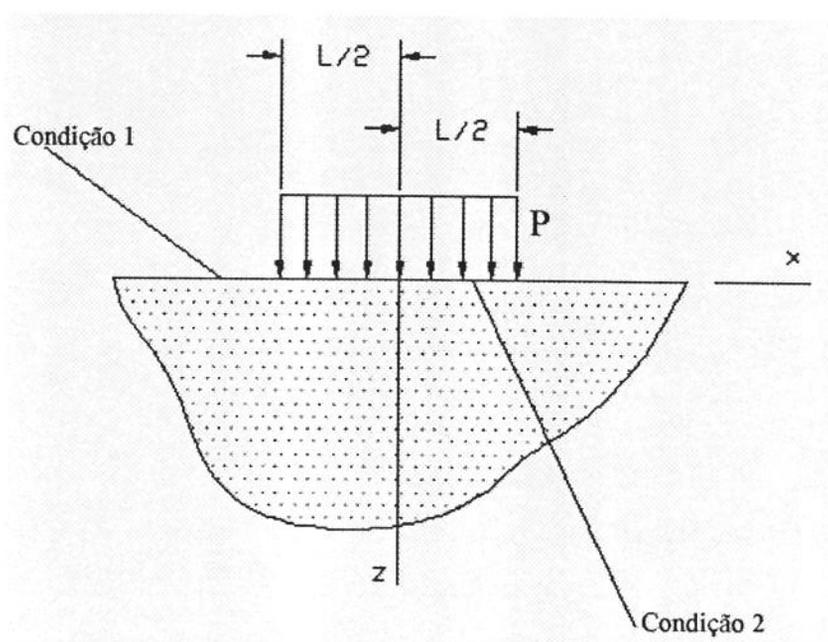
#### 4.2.2 Consolidação de uma argila completamente saturada de fluido

Como segundo teste será simulado o caso de um meio poroso sujeito a um carregamento distribuído, por exemplo uma sapata de fundação. A figura 4.9 apresenta o modelo, que corresponde a um carregamento distribuído  $P$ , de largura  $L$ , aplicado sobre uma argila saturada. As condições citadas na figura 4.9 são:

Condição 1: Tensão normal, tensão tangencial e pressão nulas;

Condição 2: Tensão normal  $-P$ , tensão tangencial e pressão nulas.

Para o infinito teremos condições de deslocamentos e pressões iguais a zero.



**Figura 4.9: Modelo utilizado para a análise de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido.**

Para o estudo do caso proposto, tendo sido considerado que o material é uma argila completamente saturada de fluido, é válida a hipótese de o material apresentar características não-drenadas incompressíveis (Biot, 1941). Tal

hipótese implica em  $\alpha = 1$  e  $1/Q = 0$ , simplificando as equações diferenciais (2.24) e (2.27).

$$2G\nabla^2 u_i + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk,i} - p_{,i} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - \kappa \nabla^2 p = 0 \quad (4.10)$$

Somando-se as equações (4.9) chega-se a:

$$\nabla \varepsilon_{kk} = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \nabla p \quad (4.11)$$

Substituindo-se o resultado (4.11) na equação (4.10):

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} = \frac{2G\kappa(1-\nu)}{(1-2\nu)} \nabla^2 \varepsilon_{kk} \quad (4.12)$$

A equação (4.12) é semelhante a equação da condução de calor unidimensional, apresentada na seção anterior.

Portanto, as equações (4.11) e (4.12) passam a ser as equações fundamentais que governam a consolidação de um material argiloso completamente saturado de fluido.

Biot desenvolveu uma solução aproximada para o recalque da superfície superior,  $z=0$  (Biot, 1941a). A solução proposta por Biot é apresentada na equação (4.13).

$$w_s = \frac{(1-2\nu)}{G(1-\nu)} p \sqrt{\frac{2G(1-\nu)\kappa t}{(1-2\nu)\pi}} [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \quad (4.13)$$

$$\text{sendo: } f(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \xi \log\left(1 + \frac{4}{\pi\xi^2}\right) + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{\pi}\xi}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi}{3.24 + \xi^2} \quad (4.14)$$

$$\xi_1 = \frac{x + L/2}{\sqrt{\frac{2G(1-\nu)\kappa t}{(1-2\nu)}}} \quad (4.15)$$

$$\xi_2 = \frac{x - L/2}{\sqrt{\frac{2G(1-\nu)\kappa t}{(1-2\nu)}}} \quad (4.16)$$

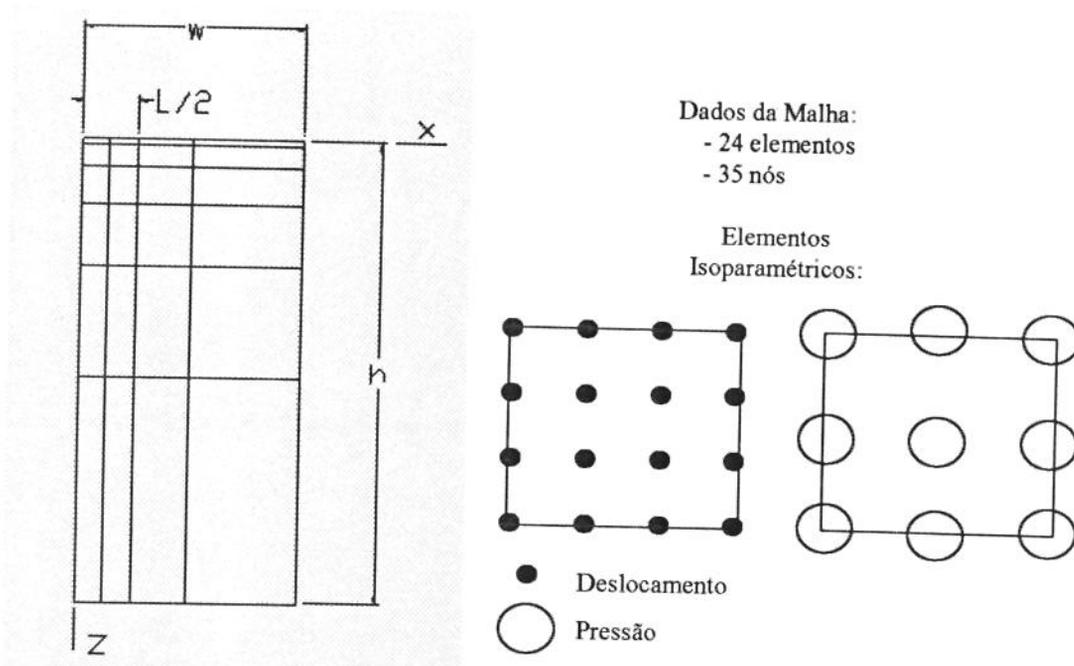
Schiffman, (Schiffman et. al., 1969), também analisou o problema de consolidação de argilas completamente saturadas de fluidos. Schiffman apresenta uma solução aproximada para a pressão do fluido no domínio, válida para pequenos tempos. Essa solução é apresentada na equação (4.17).

$$p = \frac{P}{\pi} \left\{ \arctan \left( \frac{zL}{z^2 + x^2 - (L/2)^2} \right) + \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{T^*}{\pi}} \left[ \frac{x + L/2}{z^2 + (x + L/2)^2} - \frac{x - L/2}{z^2 + (x - L/2)^2} \right] \right\} \quad (4.17)$$

$$\text{sendo: } \eta = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \quad (4.18)$$

$$T^* = 2G\eta\kappa t = \text{tempo adimensional} \quad (4.19)$$

Para a obtenção dos resultados numéricos foi utilizada a malha apresentada na figura 4.10.



**Figura 4.10:** Malha utilizada para a solução numérica do caso de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido, e elemento computacional utilizado para deslocamento e pressão.

Nos exemplos que se seguem, foi utilizado um polinômio de interpolação de ordem 3 para o deslocamento e ordem 2 para a pressão, como pode ser visto na figura 4.10. Os valores utilizados para as constantes do material são mostrados na tabela 4.3.

**Tabela 4.3:** Valores das constantes utilizadas para o teste de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido.

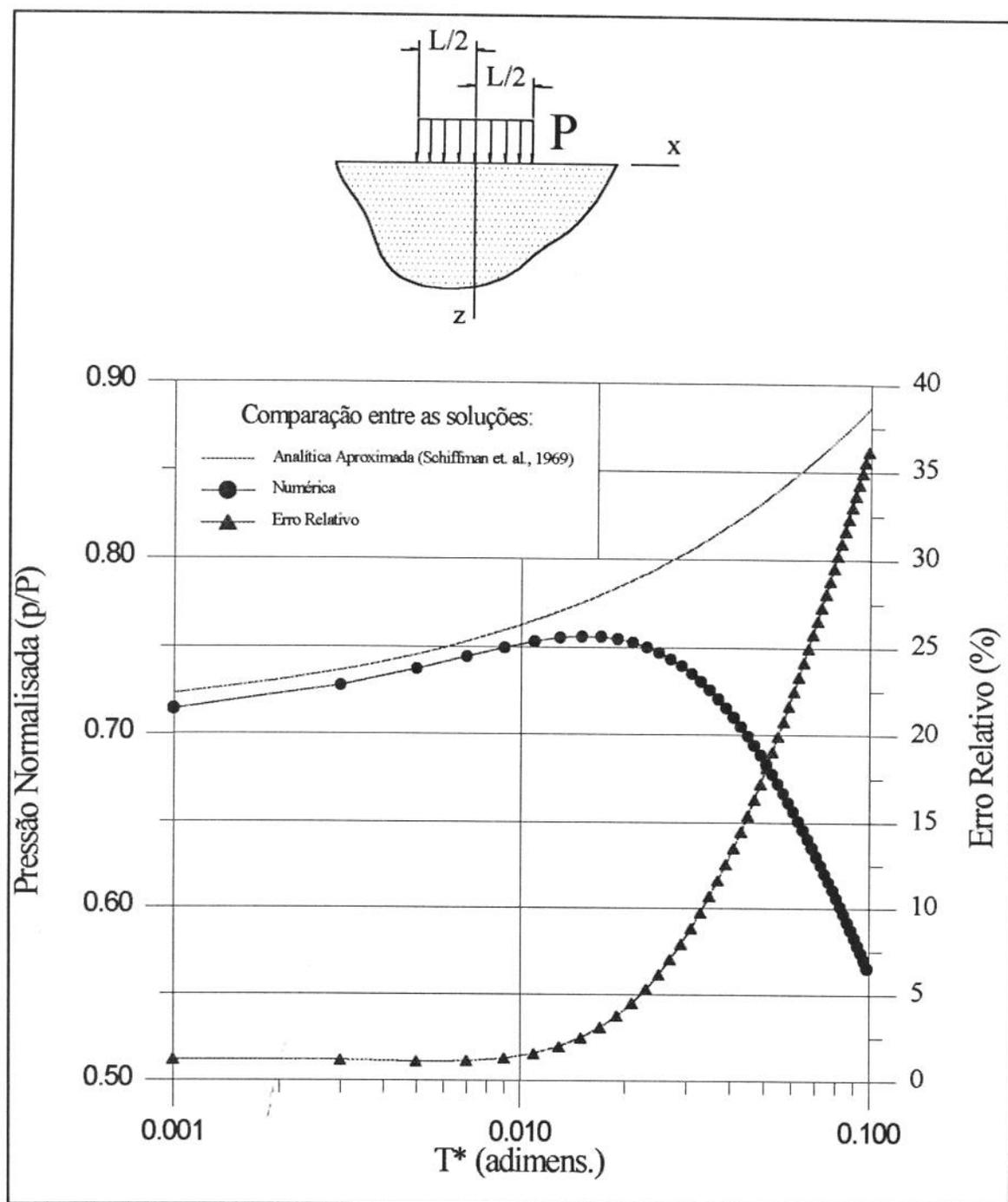
Constante - Unidade	Valor utilizado
$G$ - [MPa]	6000
$\nu$ - [adimens.]	0
$\nu_u$ - [adimens.]	0.5
$B$ - [adimens.]	1
$\kappa$ - [ $m^2/MPa.seg$ ]	$2 \cdot 10^{-5}$
$\Delta T^*$ - [seg]	variável
$h$ - [m]	18.6
$w$ - [m]	6

Na figura 4.11 é apresentada uma comparação entre a solução (4.17) e os resultados numéricos. Pela curva de erro relativo apresentada na figura 4.11,

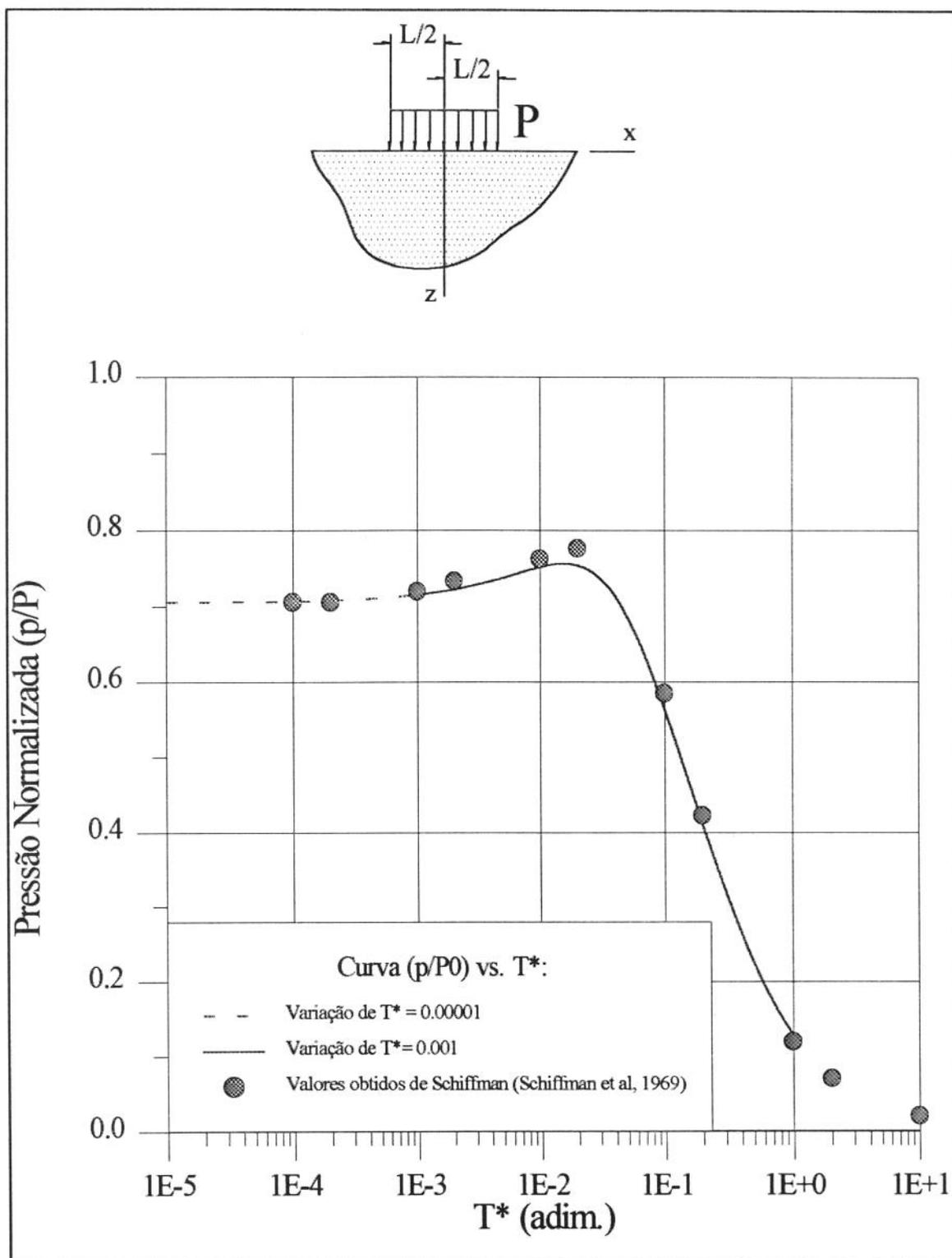
pode-se ver que a equação (4.17) apresenta resultados confiáveis para um valor de  $T^* < 0.01$ , quando comparada com os resultados numéricos. Na figura 4.12 está representada a variação da pressão com o tempo para o ponto  $x = 0$  e  $z = 0.5$ , sendo apresentados resultados obtidos por Schiffman (Schiffman et. al., 1969).

Na figura 4.13 são apresentados os resultados obtidos por Schiffman (Schiffman et. al., 1969), sendo comparados com os resultados numéricos. Na figura 4.14 é apresentada a comparação entre a solução proposta por Biot (Biot, 1941a) e a solução numérica.

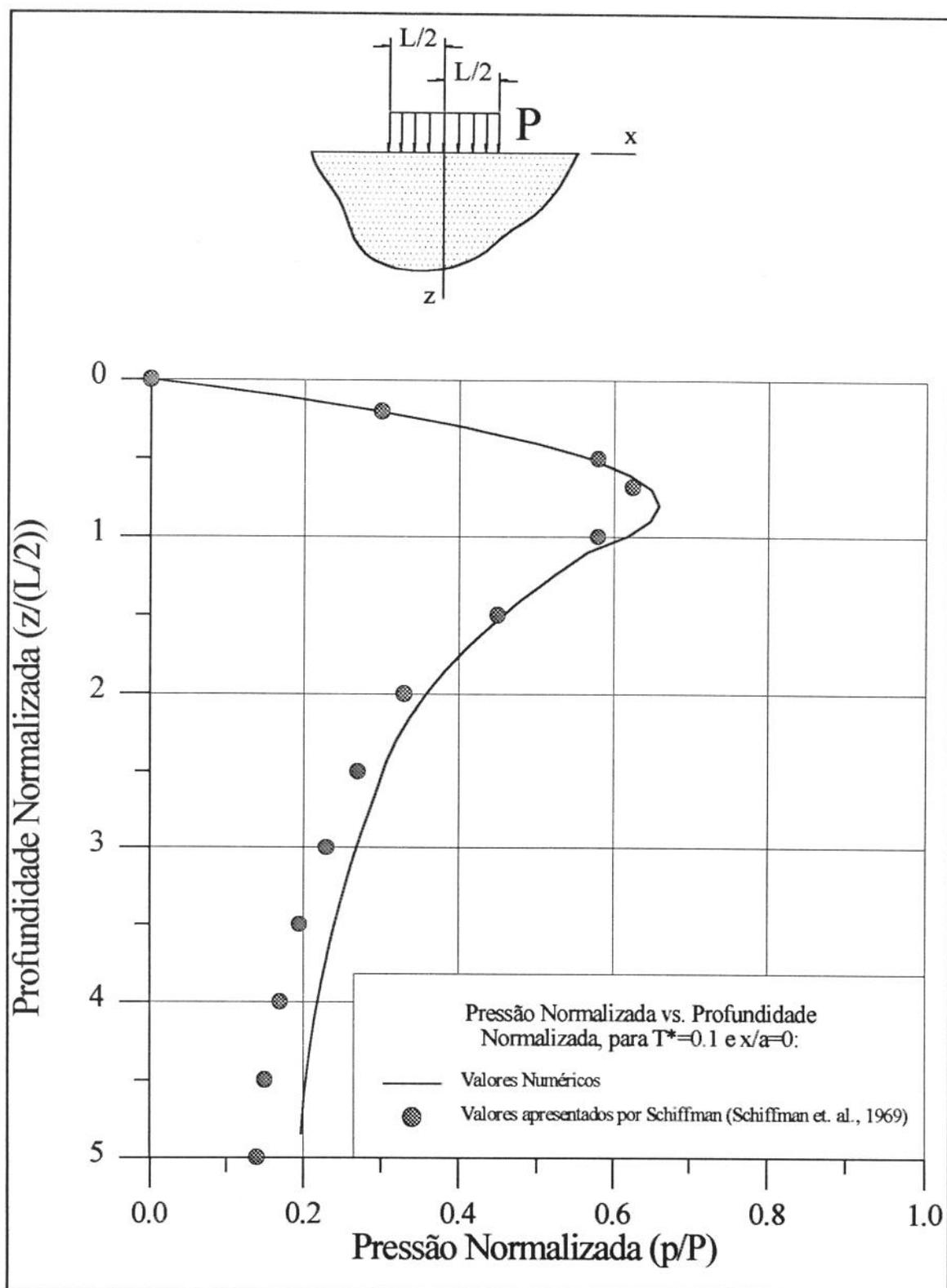
No próximo capítulo são discutidos os efeitos poroelásticos ao redor de um poço, sujeito ao carregamento de tensões e pressões “in situ”.



**Figura 4.11: Estimativa do erro relativo entre a solução numérica e analítica (Schiffman et. al., 1969).  $P = 1$  MPa,  $L = 2$  m e demais valores utilizados apresentados na tabela 4.3.**



**Figura 4.12:** Resultado numérico para a pressão no ponto  $x = 0$  e  $z = 0.5$ , com a variação do tempo adimensional.  $P = 1$  MPa,  $L = 2$  m e demais constantes utilizadas apresentadas na tabela 4.3.



**Figura 4.13:** Resultado numérico para a pressão normalizada em  $x = 0$ , com a variação da profundidade  $z$ .  $P = 1$  MPa,  $L = 2$  m e demais valores das constantes utilizadas estão apresentados na tabela 4.3.

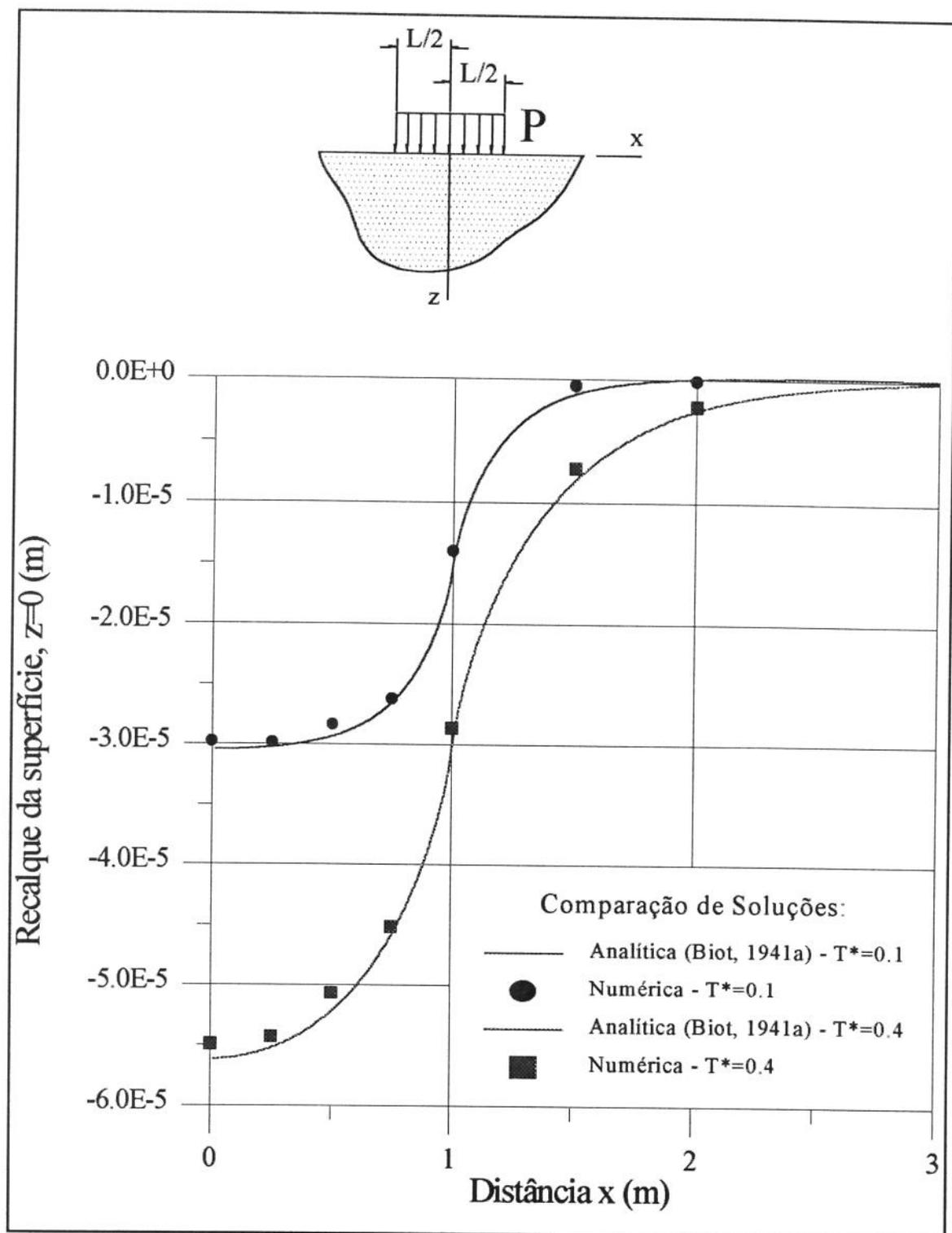


Figura 4.14: Comparação entre a solução analítica proposta por Biot (Biot, 1941a) e numérica para o caso do assentamento da superfície superior ( $z=0$ ).  $P = 1$  MPa,  $L = 2$  m e valores das demais constantes apresentados na tabela 4.3.

## 5. Estudo de Caso: Poço em um meio poroelástico

O estudo de tensões ao redor de um poço é seguramente a aplicação mais importante da poroelasticidade para a engenharia de petróleo. Como exemplos, temos a aplicação a estabilidade de poços, importante na perfuração dos poços, e ao dimensionamento de operações de fraturamento hidráulico.

A seguir são apresentadas soluções teóricas encontradas na literatura, assim como as simplificações assumidas. Também são apresentadas comparações destas soluções teóricas com resultados numéricos gerados.

### 5.1 Soluções Analíticas

As soluções apresentadas na literatura geralmente não consideram a poroelasticidade completamente acoplada em sua análise. Frequentemente são introduzidas simplificações, que tornam o problema desacoplado.

Risnes et. al. apresenta uma solução para as equações da Poroelasticidade, considerando o meio sob carregamento hidrostático (Risnes et. al., 1992). Risnes considera que o escoamento de fluido no meio poroso apresenta-se em regime permanente. Com esta hipótese, Risnes utiliza a equação da difusão para o regime permanente, encontrando assim uma solução para a pressão. Após o cálculo da pressão, sua solução é introduzida nas equações para os deslocamentos. A pressão fará o papel de um termo fonte nas equações dos deslocamentos. As equações (5.1) e (5.2) correspondem às equações utilizadas por Risnes.

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,ki} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (5.1)$$

$$p_{,ii} = 0 \quad (5.2)$$

Comparando-se estas equações com as equações da Poroelasticidade Acoplada, observa-se que na equação (5.2) foram desconsiderados os termos das derivadas temporais da pressão e da variação volumétrica. Esta simplificação faz com que a solução assuma um caráter permanente. Portanto, a solução encontrada por Risnes, por desconsiderar os termos transientes, deve tender para a solução correta para valores de tempo muito grandes.

Outra solução para o problema de tensões na região de um poço em um meio poroelástico foi apresentada por Detournay (Detournay et. al., 1988). Detournay simplifica as equações através da consideração de que a variação temporal da variação volumétrica do sólido é nula, para o caso de um carregamento axissimétrico, fazendo com que a equação para a pressão se torne a equação da difusão para um regime transiente.

A solução é apresentada para um modelo de um poço sendo perfurado. O modelo considera que o material perfurado é retirado instantaneamente. As condições de contorno são aplicadas no poço. Para o carregamento “in situ”, é aplicado apenas no poço um carregamento de mesmo módulo e sinal contrário. Para a pressão original do reservatório, deve ser aplicada apenas no poço uma pressão negativa de mesmo módulo.

Detournay divide o carregamento em três modos para facilitar a aplicação das condições de contorno. O primeiro modo representa a parte hidrostática do carregamento. O segundo modo apresenta a contribuição da pressão aos efeitos poroelásticos, e o terceiro modo a parte deviatória do carregamento. Ambos os modos um e dois representam carregamentos axissimétricos.

As equações (5.3) e (5.4) são as equações utilizadas por Detournay para a obtenção das soluções para um carregamento axissimétrico.

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,ki} - \alpha p_{,i} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c^* p_{,ii} = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{sendo } c^* = \frac{2\kappa B^2 G(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)} \quad (5.5)$$

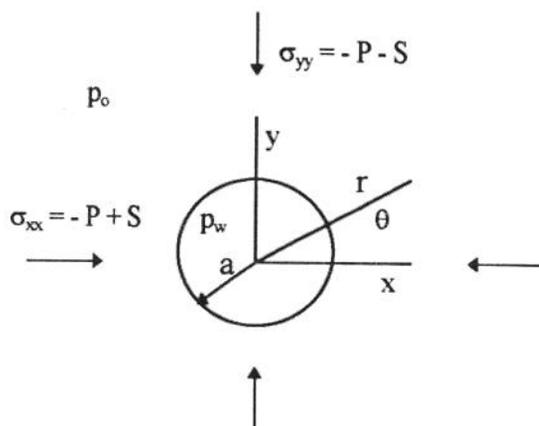
Considerando-se o modo 1, que é relativo aos efeitos causados pelo carregamento hidrostático agindo no meio, observa-se pela equação (5.4) que para a pressão é encontrada a solução trivial, fazendo com que o problema se torne portanto, um problema de Elasticidade. Detournay resolve o problema no campo de Laplace, para os modos dois e três, apresentando soluções aproximadas no domínio do tempo, para pequenos tempos.

A seguir são apresentadas comparações feitas entre soluções obtidas com o uso da técnica dos elementos finitos, e as soluções analíticas apresentadas por Detournay (Detournay et. al., 1988), e Resnis (Resnis et. al, 1992), sendo considerados diversos casos de carregamento.

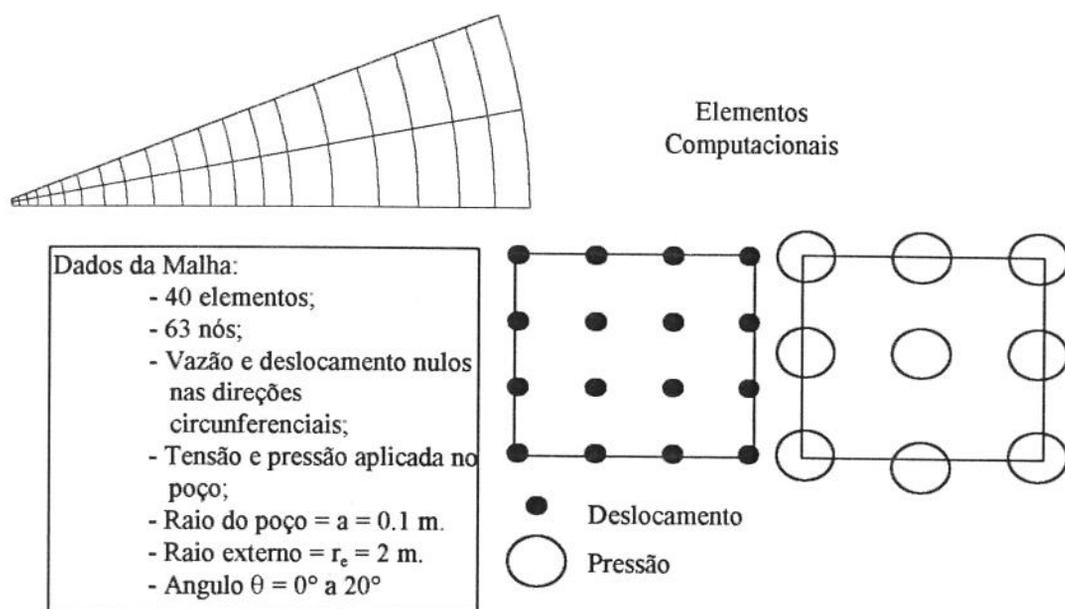
## 5.2 Caso de um Poço em um Meio Poroelástico sob Ação de um Carregamento Não-Hidrostático.

Para o estudo do caso de um poço em um meio poroelástico, é utilizado o modelo mostrado na figura 5.1. Nesta figura, P significa a parte hidrostática do carregamento, S a parte deviatórica,  $p_w$  a pressão no poço e  $p_0$  a pressão original do reservatório.

Para a simulação dos casos numéricos com carregamentos axissimétricos, foi utilizada a malha apresentada na figura 5.2. Nesta figura também são apresentados os dados da malha, assim como as condições de contorno.



**Figura 5.1: Modelo utilizado para o problema do poço.**



**Figura 5.2: Malha utilizada para a obtenção dos resultados para o caso de carregamento hidrostático, e elementos computacionais utilizados para o deslocamento e pressão.**

### 5.2.1 Meio poroso carregado com um campo hidrostático de tensões e pressão do reservatório.

Como primeiro caso são apresentados os resultados obtidos para a parte hidrostática do carregamento, sendo que a pressão no poço foi considerada

nula. Na tabela 5.1 e 5.2 são apresentados os valores utilizados para as constantes do material, e para os carregamentos, respectivamente.

**Tabela 5.1: Valores utilizados para as constantes do material.**

Constante - [Unidade]	Valores Utilizados
G - [MPa]	6000
$\nu$ - [adim.]	0.25
$\nu_u$ - [adim.]	0.5
B - [adim.]	1.0
$\kappa$ - [m <sup>2</sup> /MPa.seg]	$2 \cdot 10^{-5}$

**Tabela 5.2: Valores utilizados para as constantes do carregamento (Figura 5.1).**

Constante - [Unidade]	Valor Utilizado
P - [MPa]	30
S - [MPa]	0
$p_w$ - [MPa]	0
$p_0$ - [MPa]	10

Nos gráficos apresentados a seguir, são mostrados valores normalizados para as variáveis. Tais normalizações são apresentadas nas equações (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9).

$$r^* = \frac{r}{a} \quad (5.6)$$

$$T^* = \frac{ct}{a^2} \quad (5.7)$$

$$p^* = \frac{p}{p_0} \quad (5.8)$$

$$[\sigma]^* = \frac{[\sigma]}{P} \quad (5.9)$$

$$\text{onde: } c = \frac{2GB^2\kappa(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)} \quad (5.10)$$

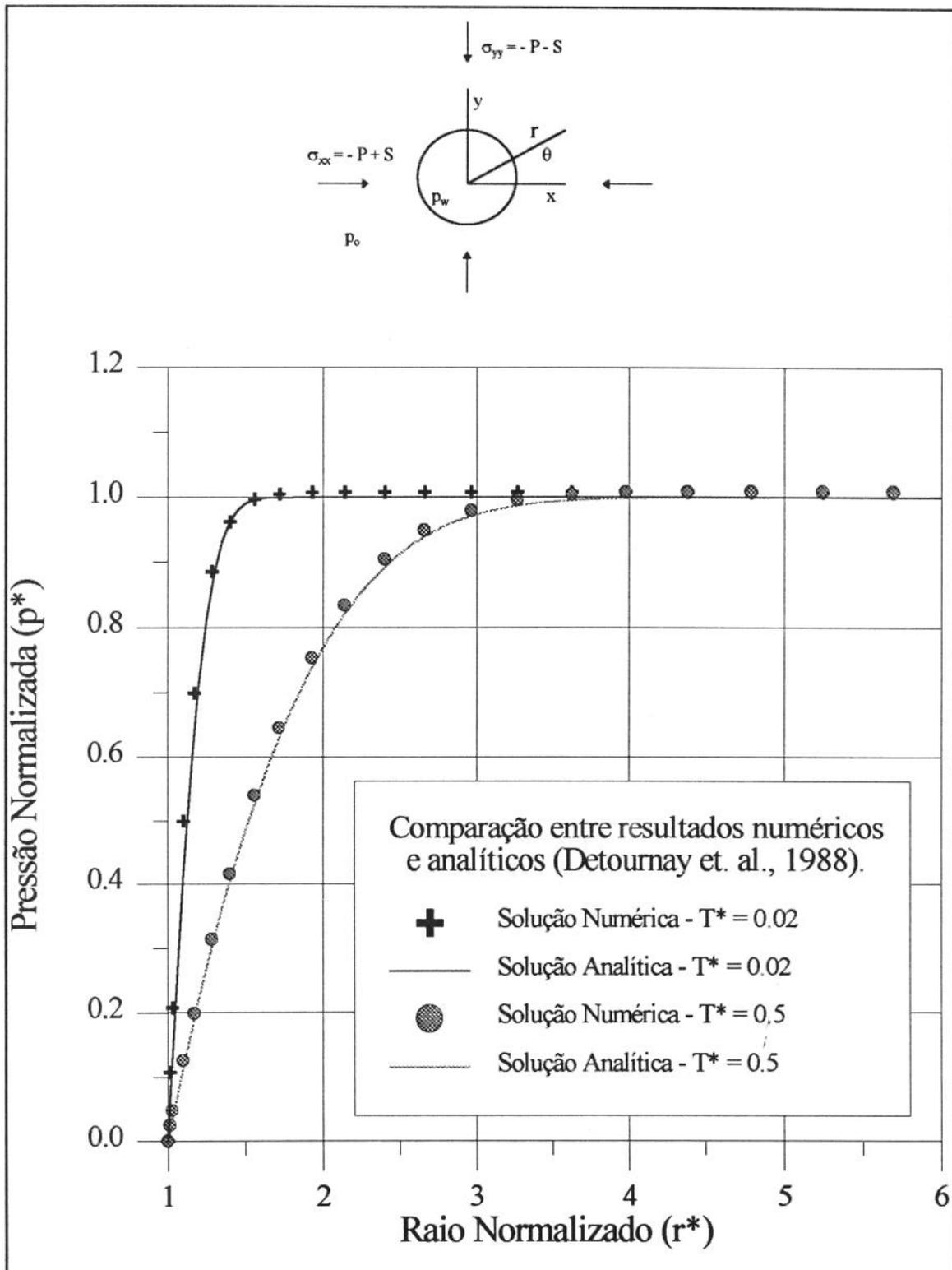
$[\sigma]$  representa valores de tensões calculadas, podendo ser radiais ou circunferenciais, totais ou efetivas.

Na figura 5.3 são apresentados os resultados da pressão normalizada,  $p^*$ , versus o raio normalizado,  $r^*$ , para pequenos tempos normalizados,  $T^*$ . Também são apresentadas as soluções analíticas apresentadas por Detournay (Detournay et. al., 1988). Pode ser observado o bom ajuste das curvas analíticas e numéricas.

Na figura 5.4 são mostrados os resultados de pressão para grandes tempos normalizados. Nota-se que a solução numérica da pressão tende para a solução proposta por Resnis (Resnis et. al., 1992), que é a solução para o regime permanente.

Nas figuras 5.5 e 5.6 são apresentados os valores das tensões radiais efetivas adimensionais versus  $r^*$ , para pequenos e grandes tempos normalizados, respectivamente. As tensões radiais totais normalizadas para grandes e pequenos tempos normalizadas são apresentadas nas figuras 5.7 e 5.8. Pelo fato de a tensão radial total manter seu valor aproximadamente constante durante o tempo, uma vez que depende somente do carregamento externo aplicado ao meio poroso, a variação da tensão radial efetiva se deve ao fato de a pressão não ter alcançado o estado permanente. Para um tempo muito grande, quando o regime puder ser considerado permanente para a pressão, o mesmo também ocorrerá para as tensões radiais efetivas. Também das figuras 5.7 e 5.8 pode ser feita uma comparação entre os resultados numéricos e analíticos, que se apresentam muito bem ajustados.

Nas figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 são apresentadas as variações das tensões circunferenciais efetivas e totais, para pequenos e grandes tempos normalizados. As variações das tensões circunferenciais efetivas são menos acentuadas do que as apresentadas pelas tensões efetivas radiais. Isso pode ser entendido como uma menor dependência com relação à pressão.



**Figura 5.3: Pressão normalizada versus raio normalizado para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**

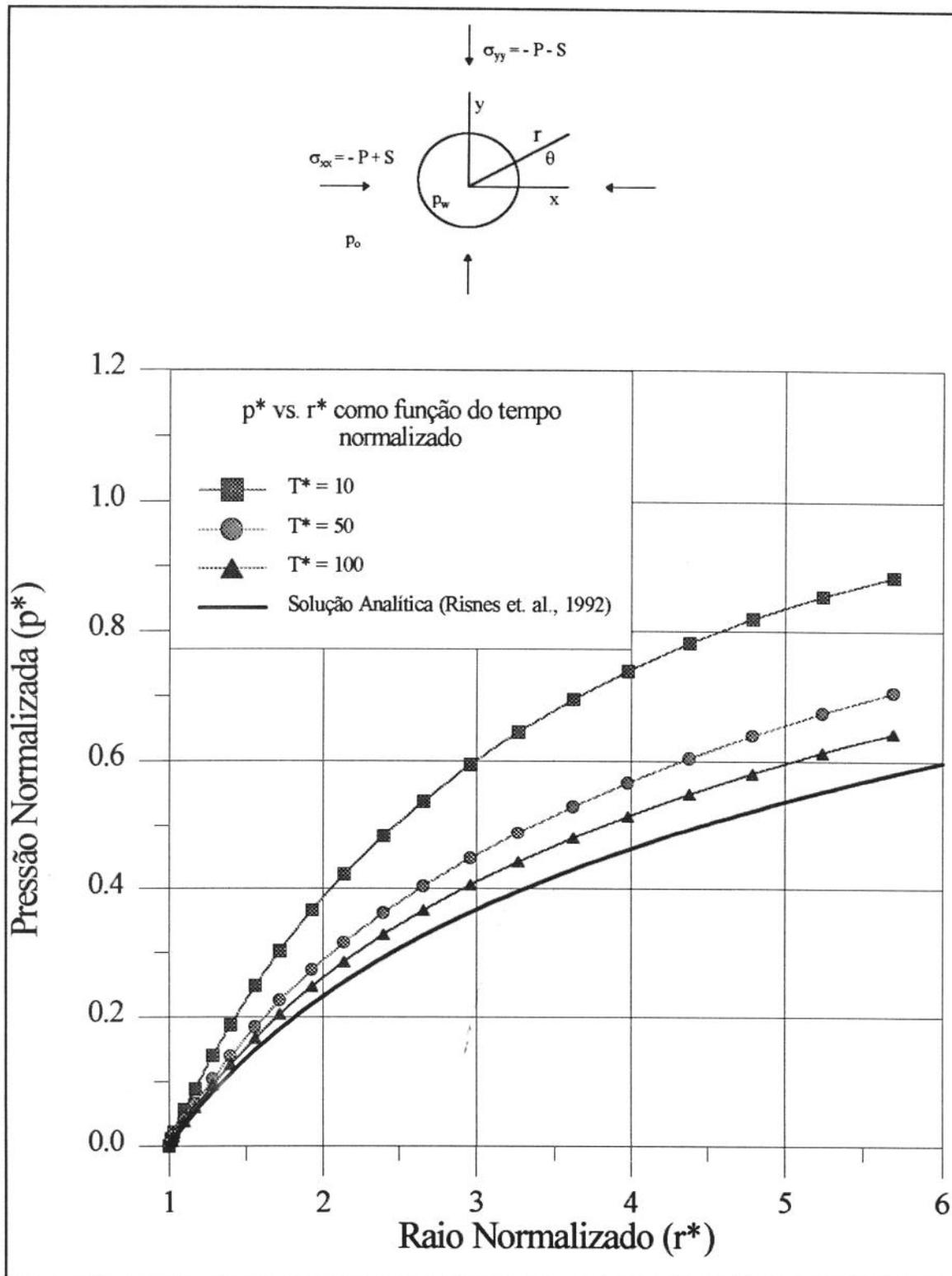
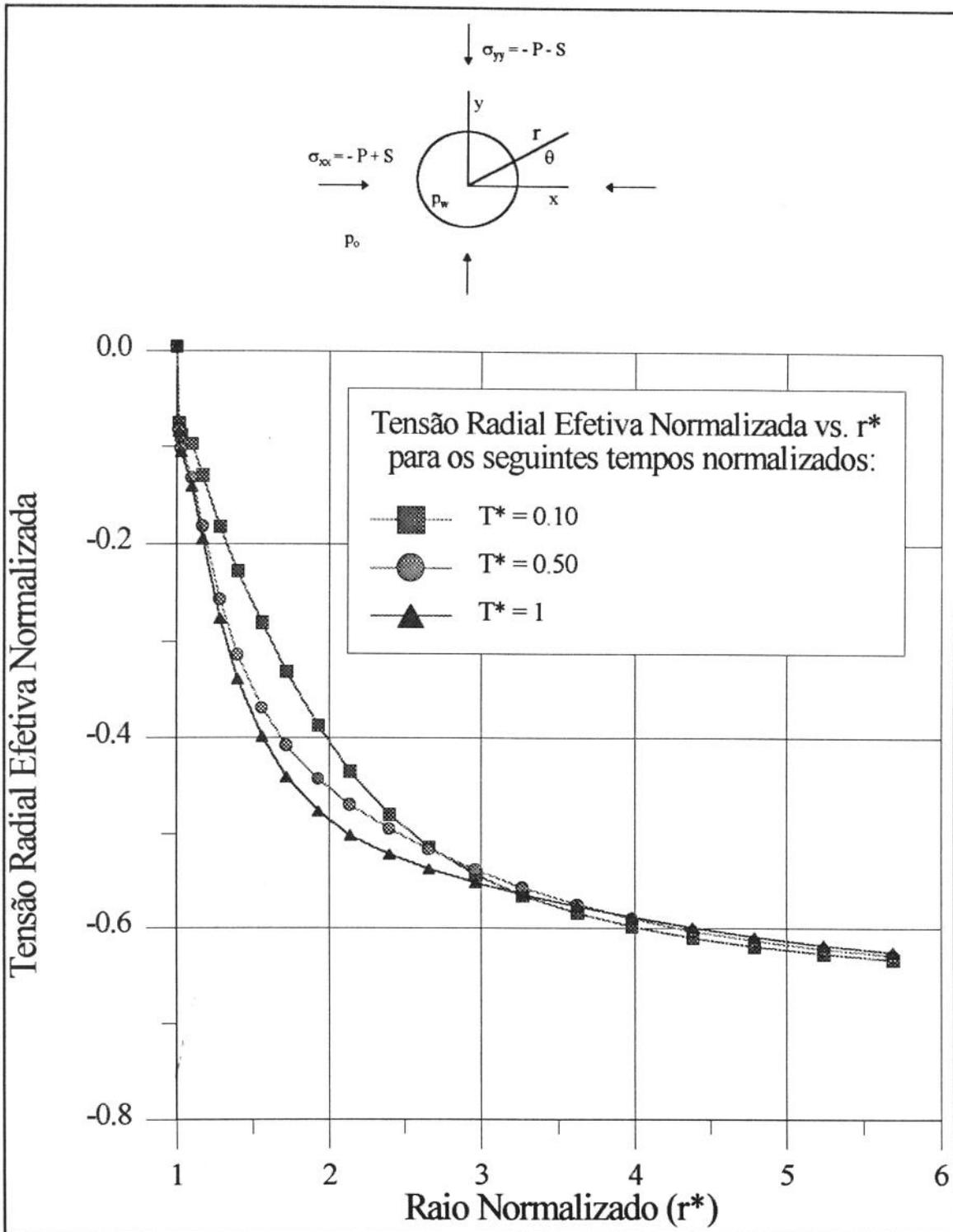


Figura 5.4: Pressão normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.



**Figura 5.5: Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**

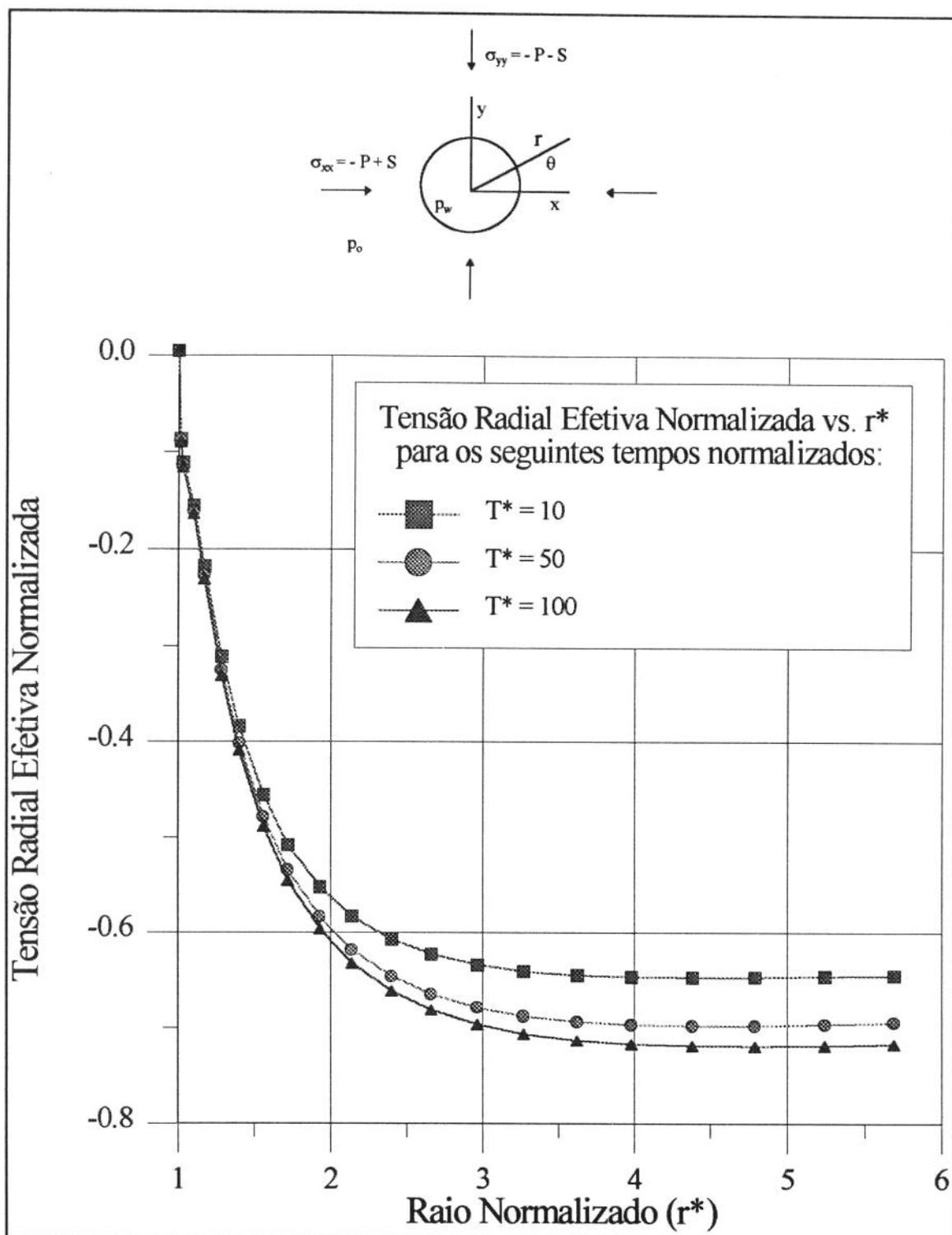
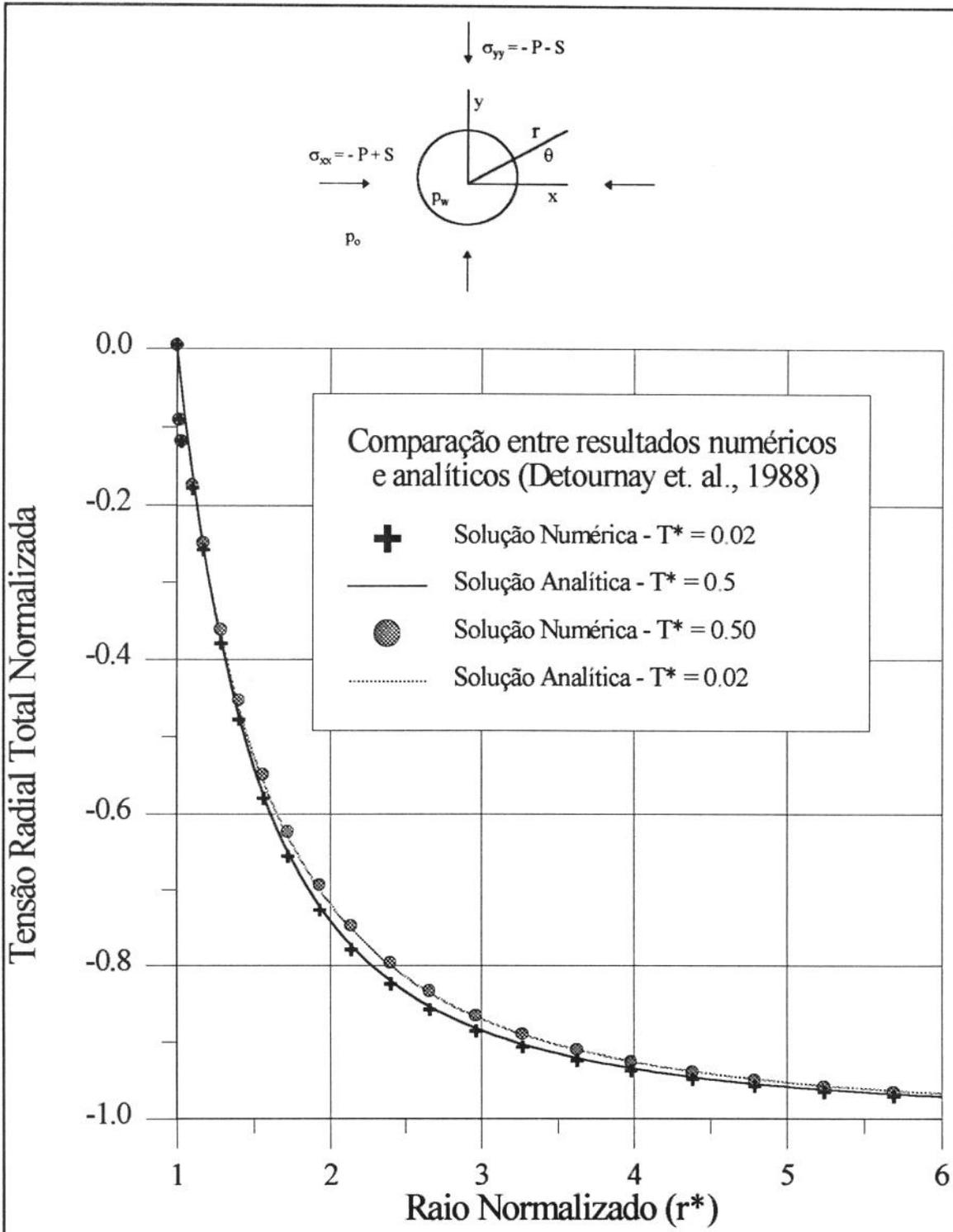
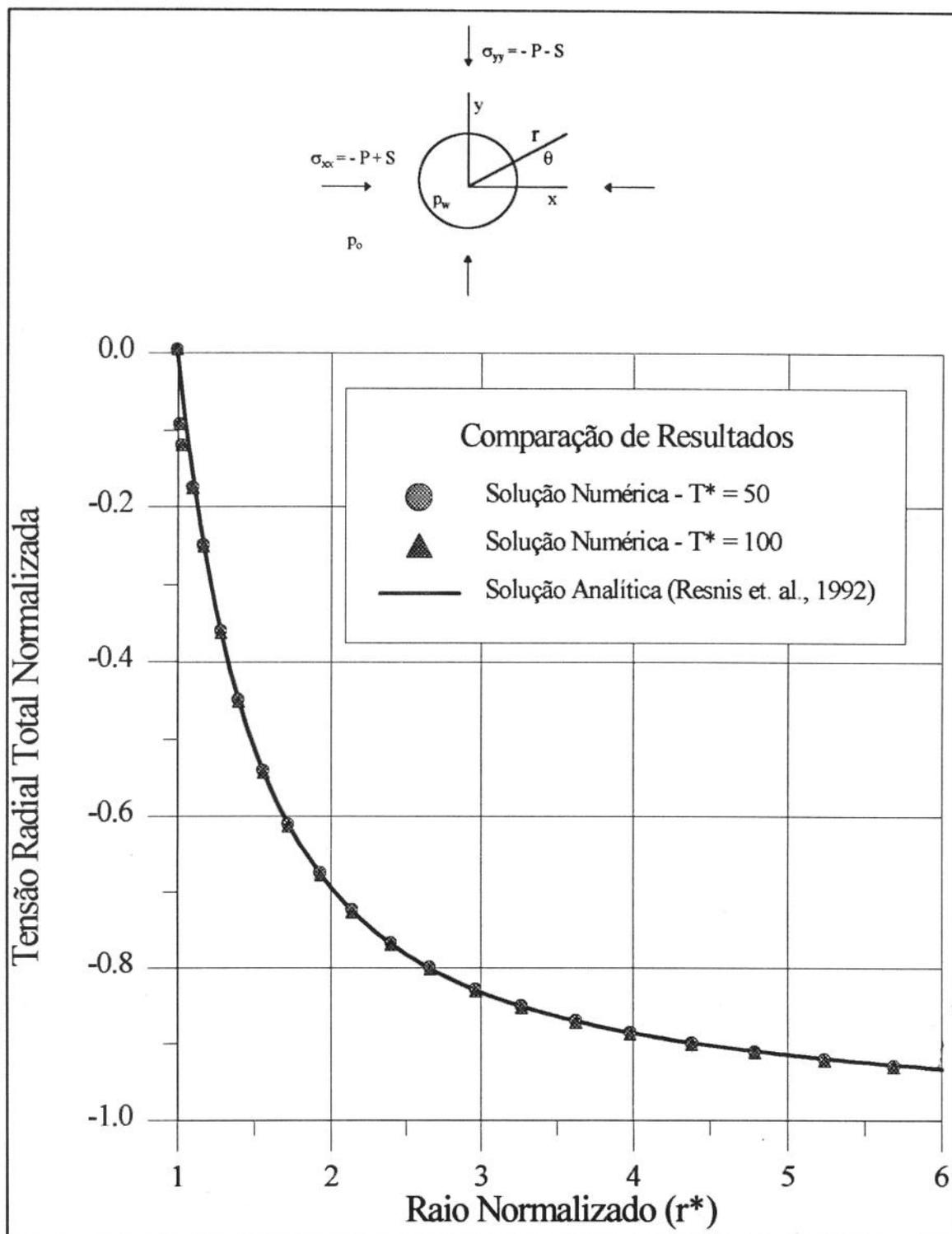


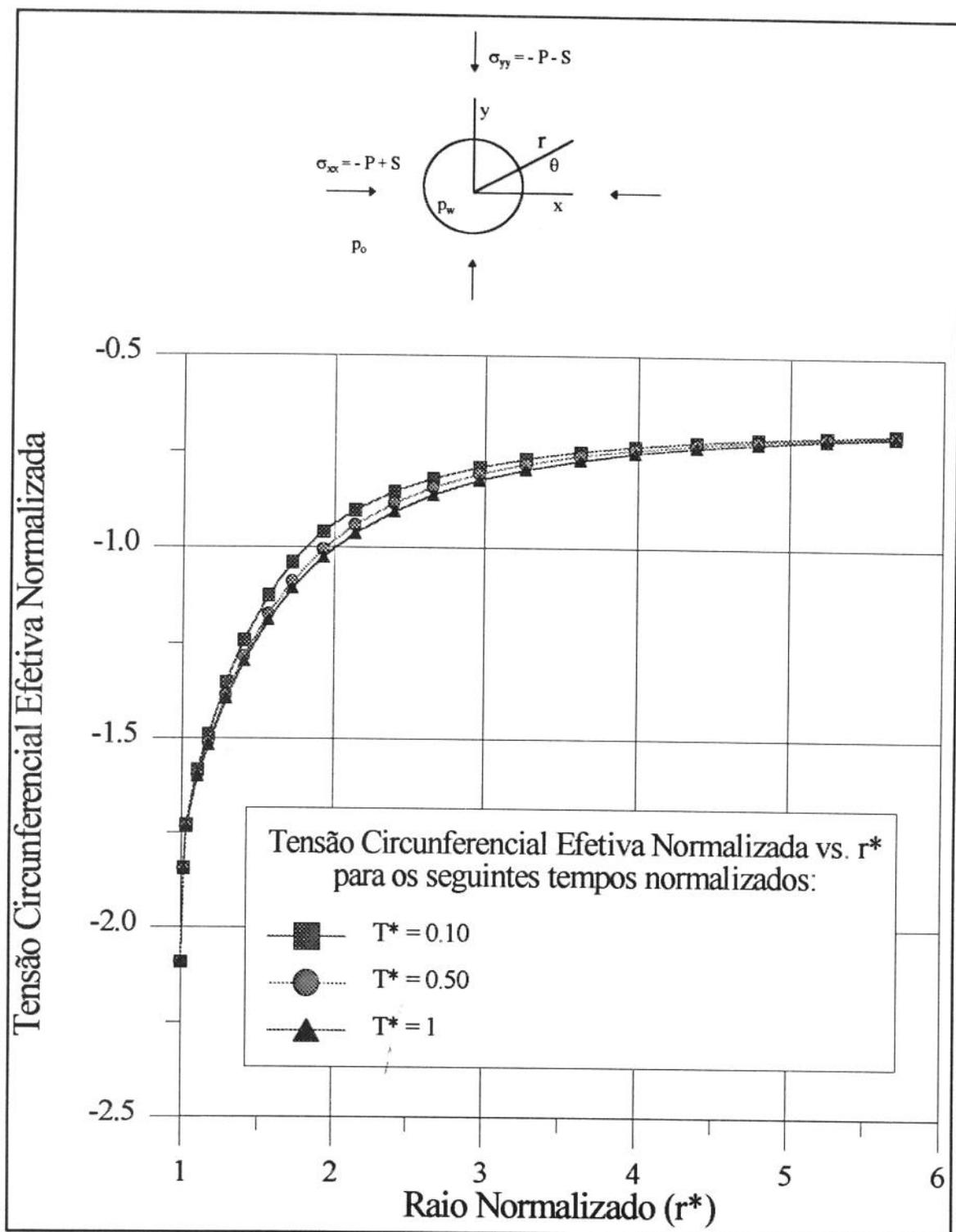
Figura 5.6: Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.



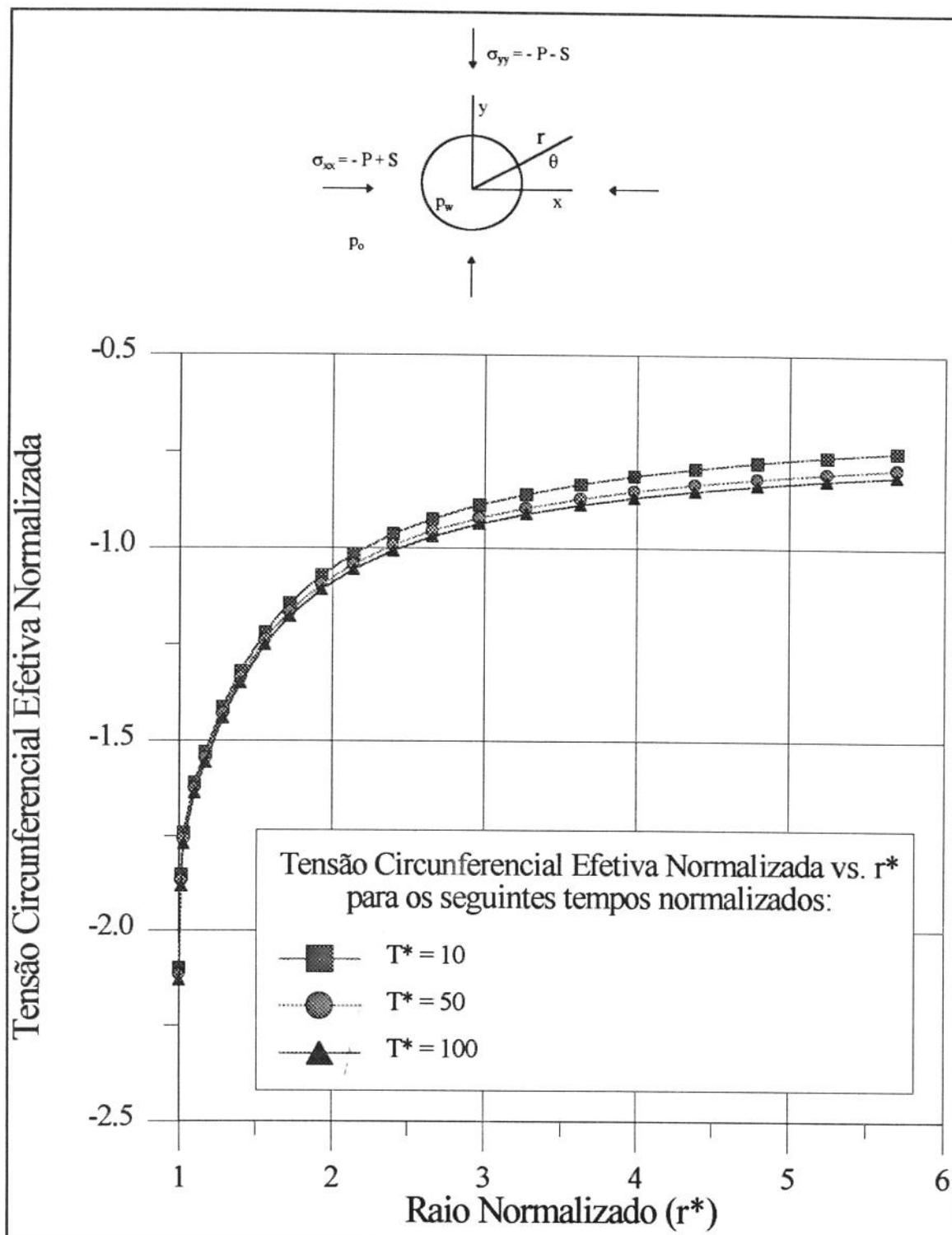
**Figura 5.7: Tensão radial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**



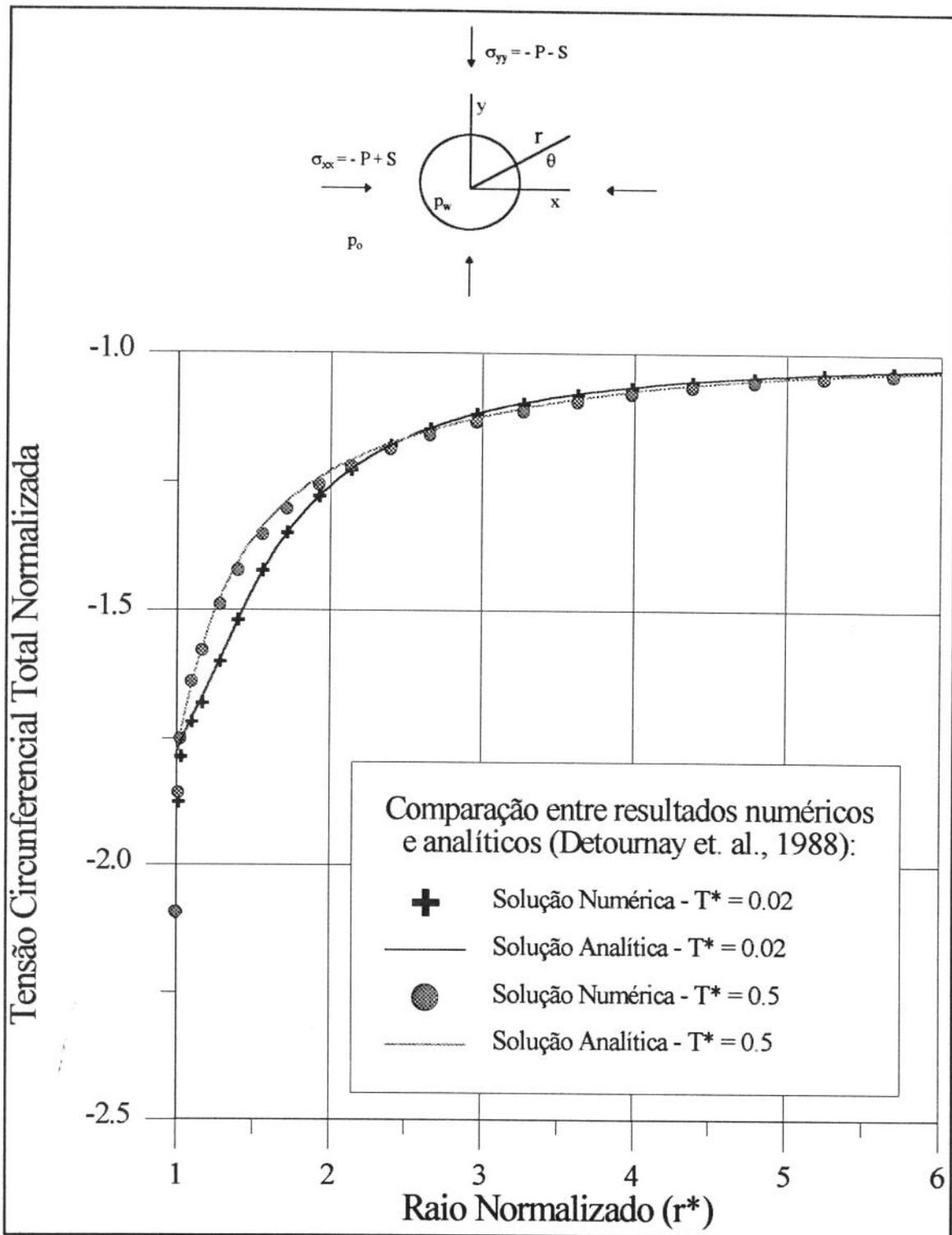
**Figura 5.8: Tensão radial total normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



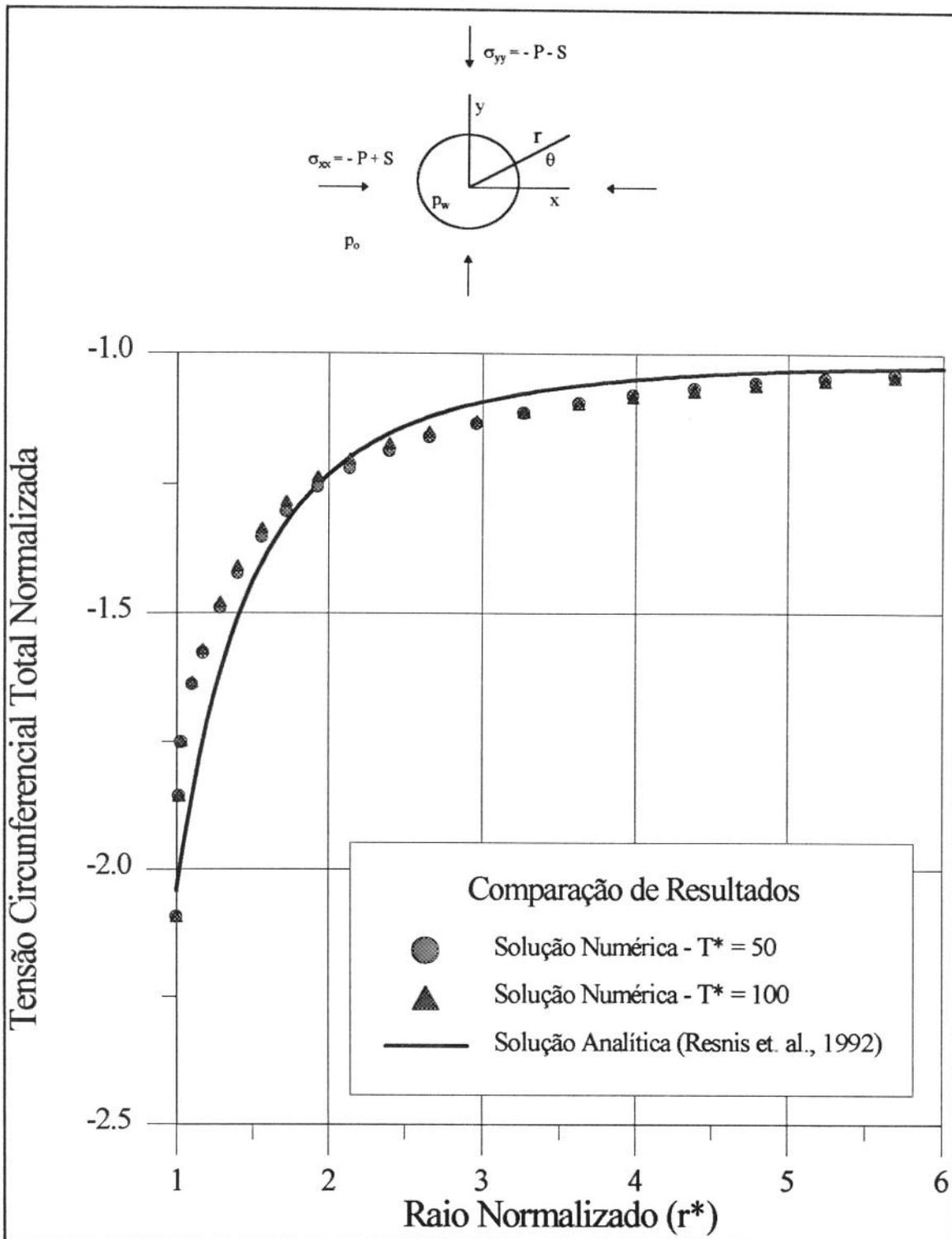
**Figura 5.9: Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



**Figura 5.10: Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados.**  
**Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**



**Figura 5.11: Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**



**Figura 5.12: Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**

### 5.2.2 Meio poroso carregado com um campo hidrostático de tensões, pressão no reservatório e no poço.

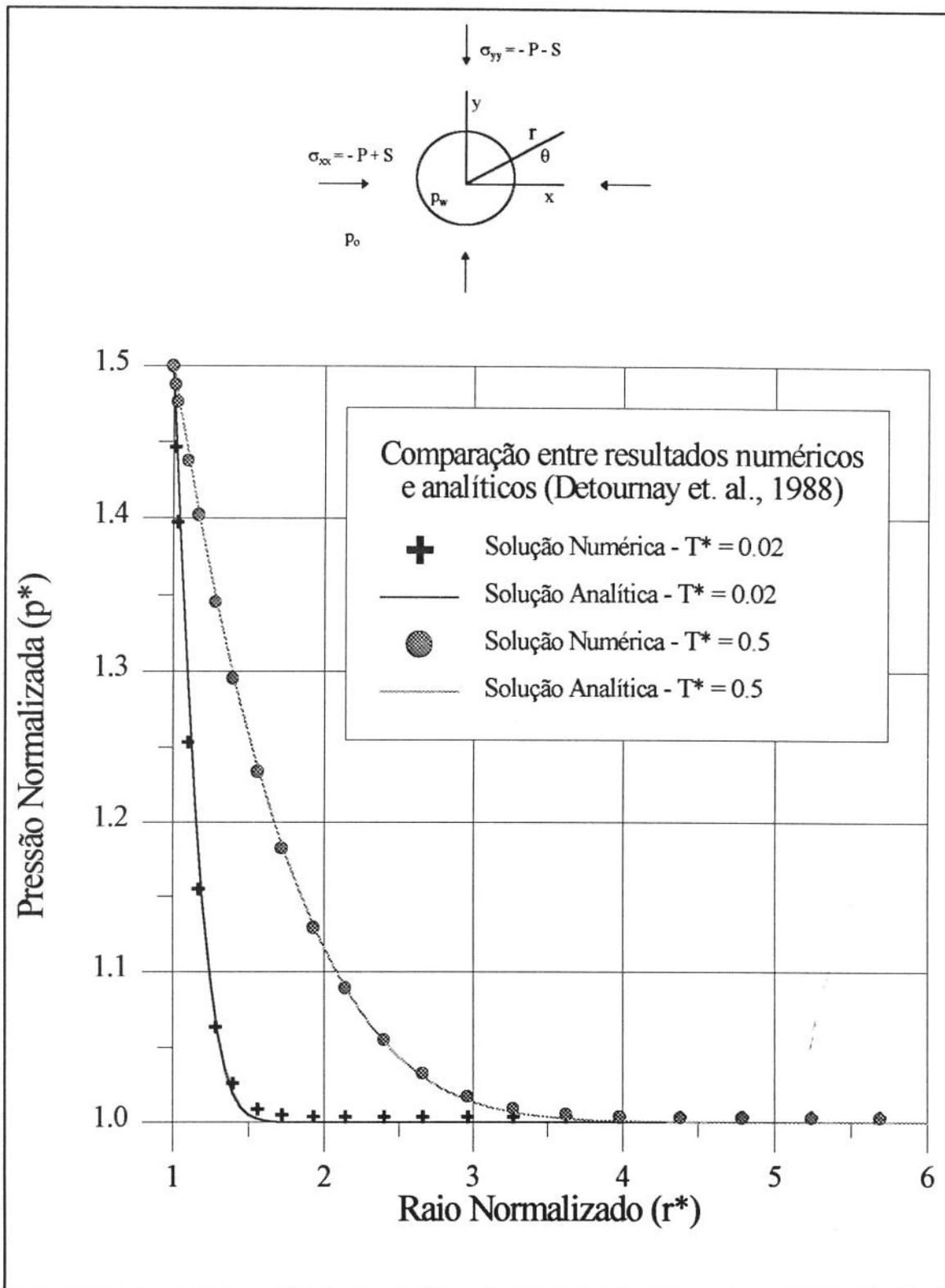
A seguir, considera-se o carregamento apresentado na tabela 5.3, mantendo os mesmos valores para as constantes apresentados na tabela 5.1.

**Tabela 5.3: Valores das constantes de carregamento.**

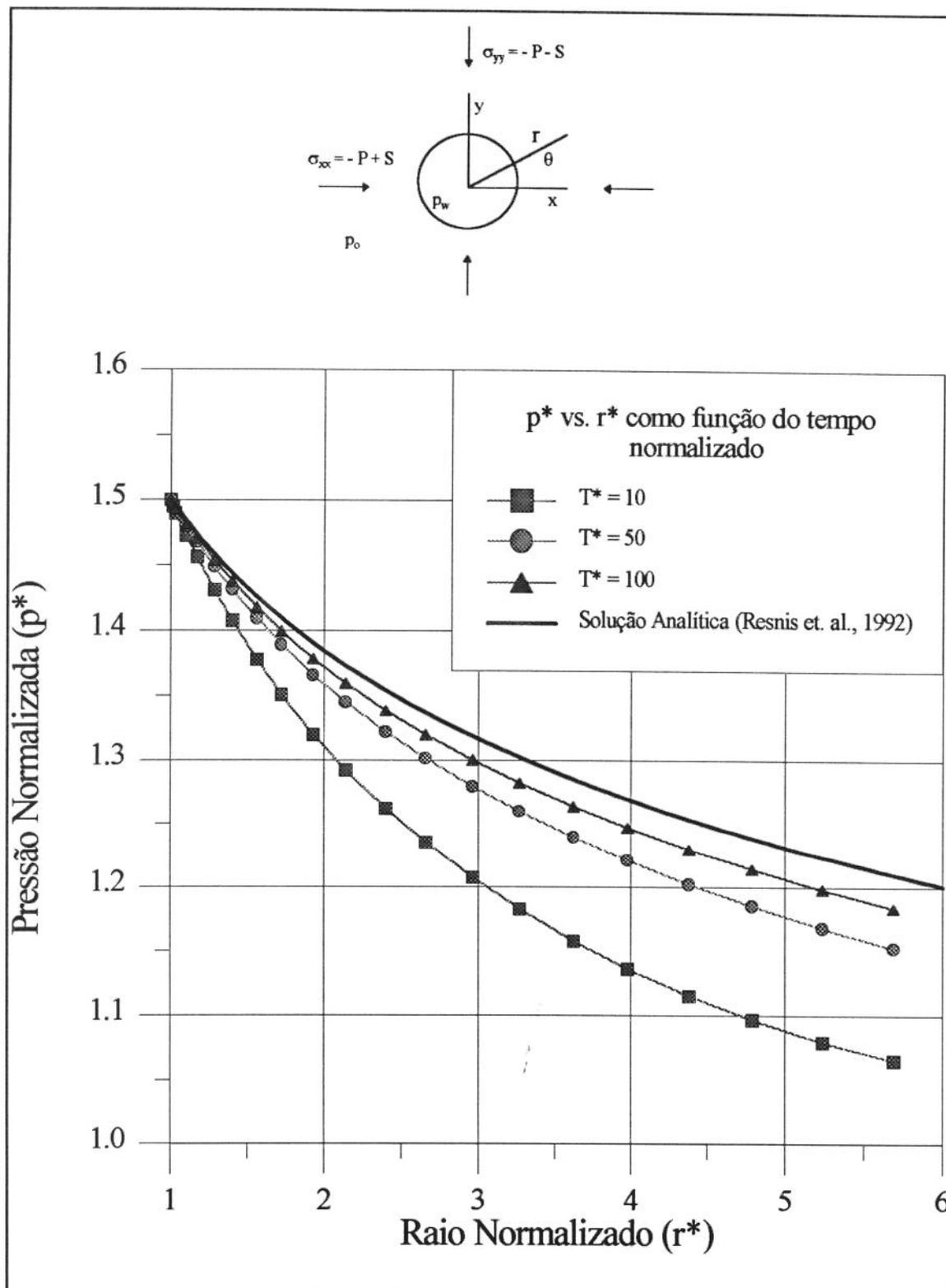
Constante - [Unidade]	Valor Utilizado
P - [MPa]	30
S - [MPa]	0
$p_w$ - [MPa]	15
$p_0$ - [Mpa]	10

Na figura 5.13 e 5.14 são apresentados os resultados de  $p^*$  versus  $r^*$  para vários valores de  $T^*$ . Novamente pode ser observada a qualidade do ajuste com as curvas teóricas para pequenos tempos normalizado, e a tendência das curvas numéricas para um tempo grande, com relação ao regime permanente.

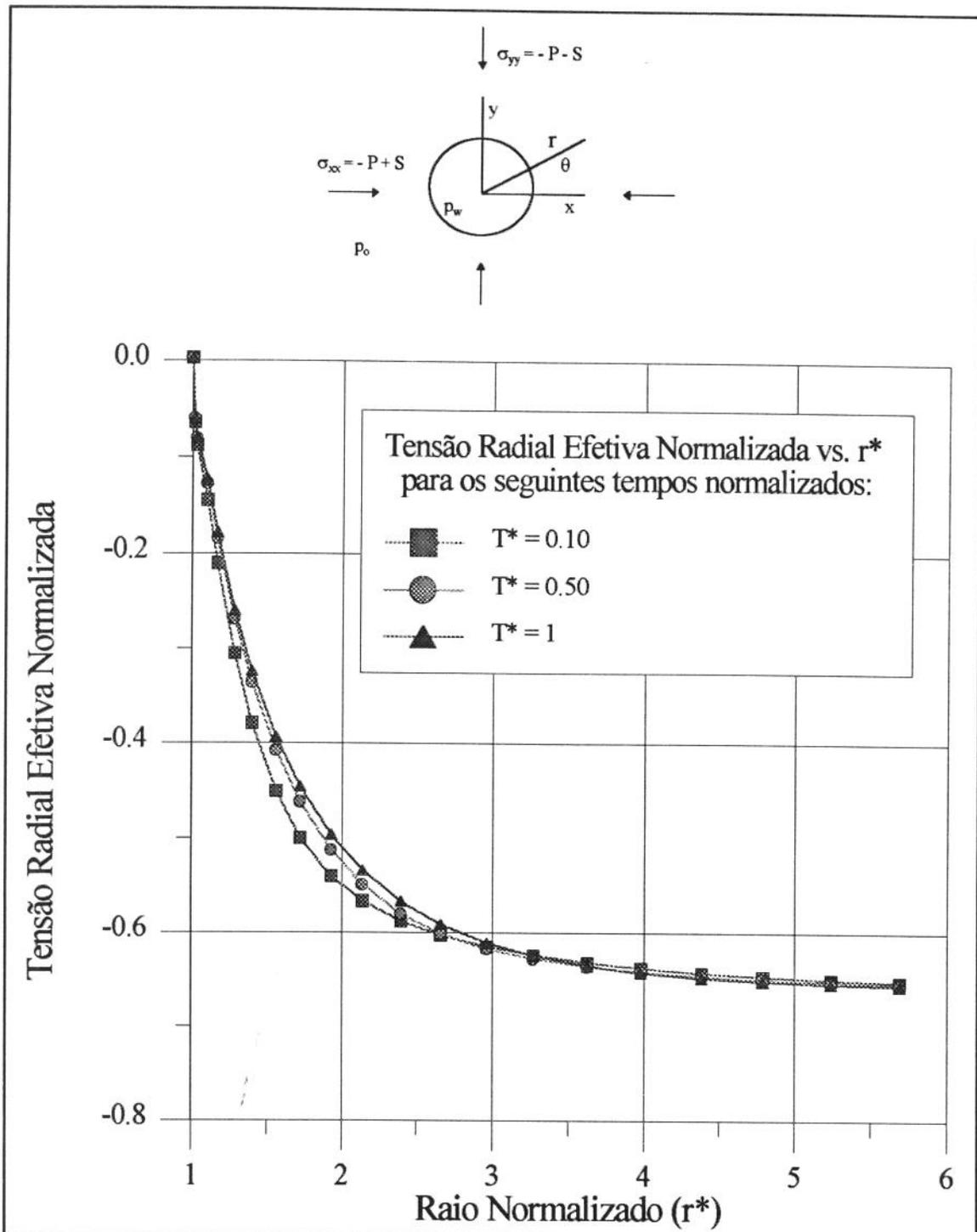
As tensões radiais efetivas normalizadas podem ser vistas nas figuras 5.15 e 5.16. As tensões radiais totais normalizadas são apresentadas nas curvas 5.17 e 5.18. A variação das tensões circunferenciais efetivas e totais normalizadas, com relação ao raio normalizado, é apresentada nas figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22.



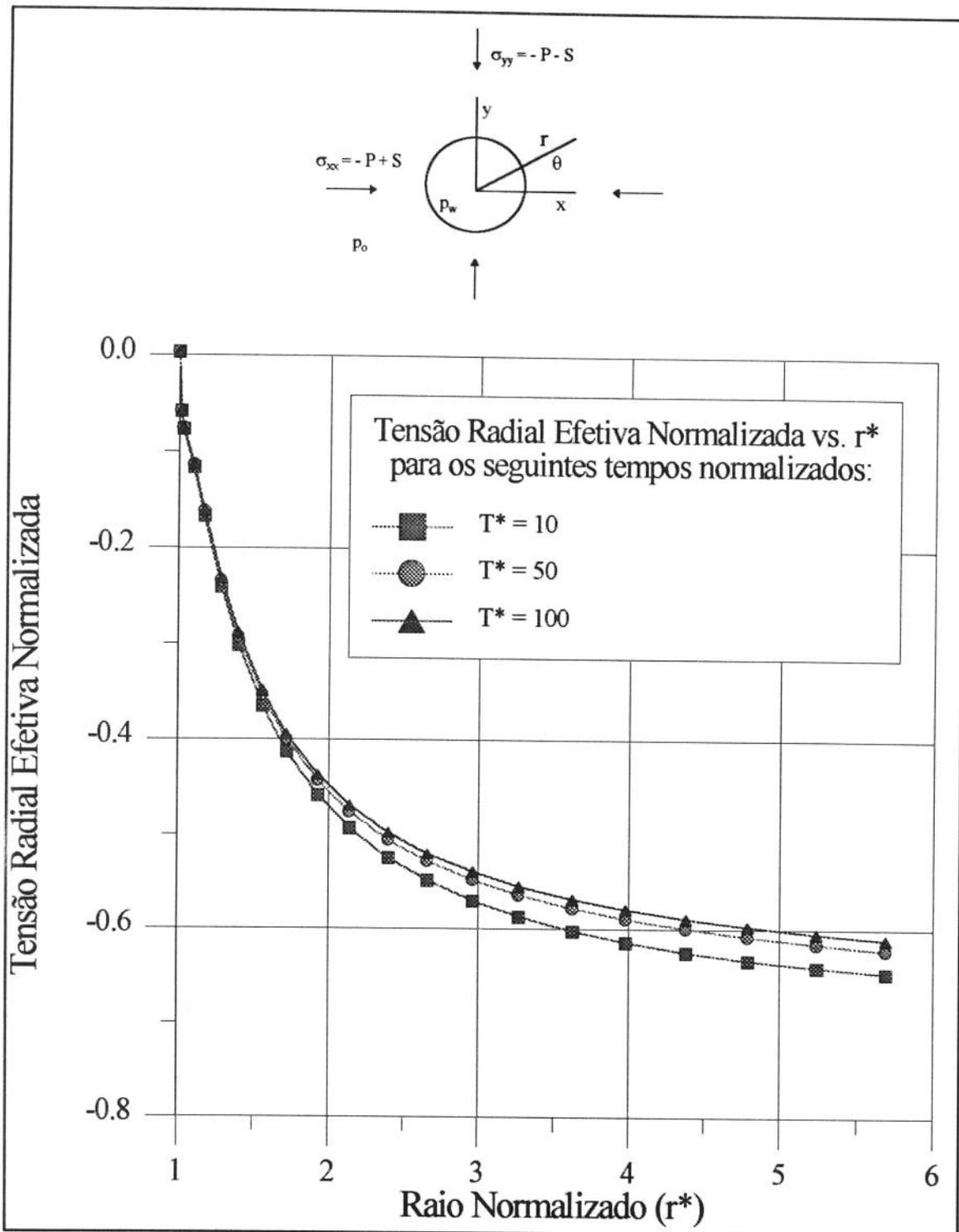
**Figura 5.13: Pressão normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**



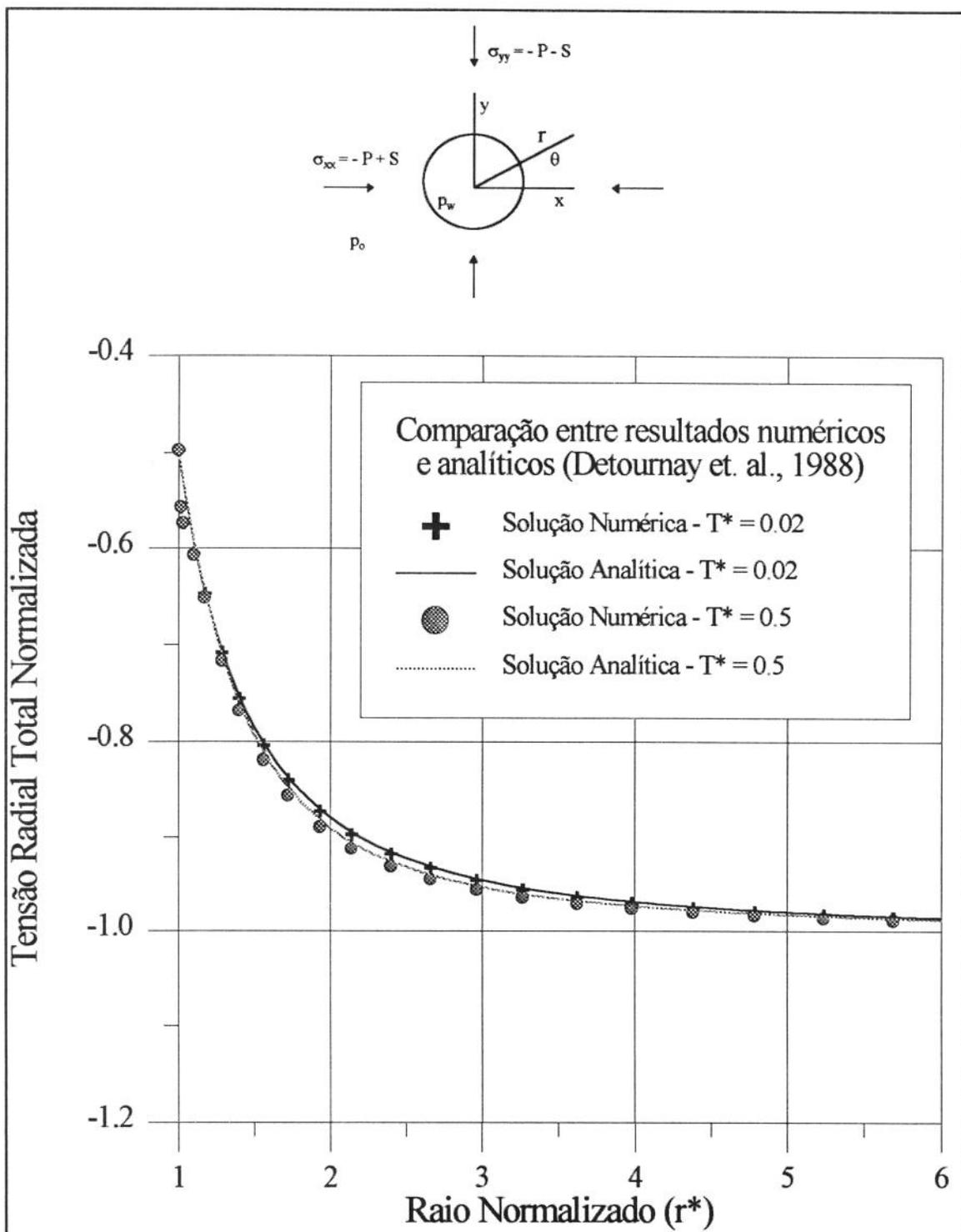
**Figura 5.14: Pressão normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



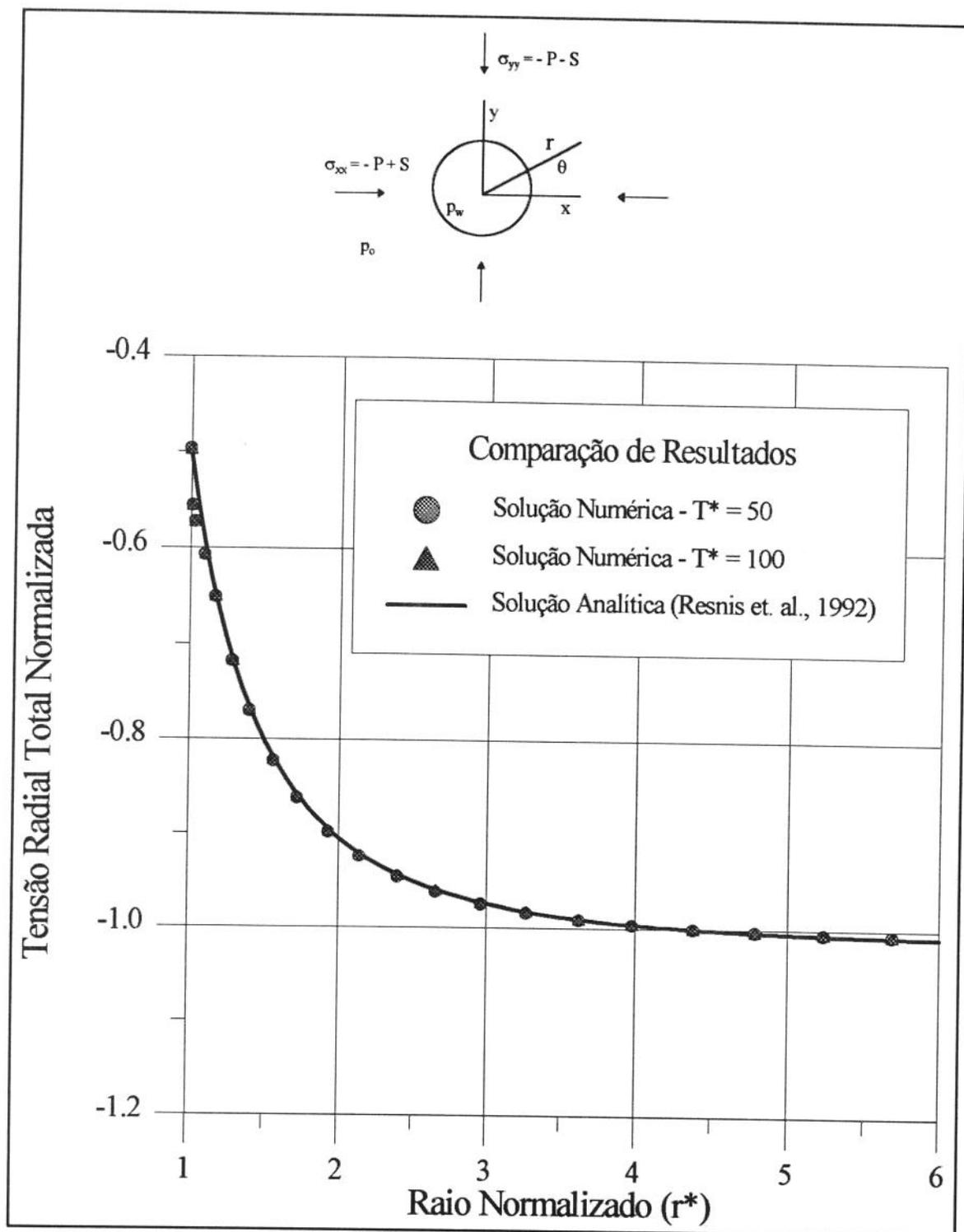
**Figura 5.15: Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



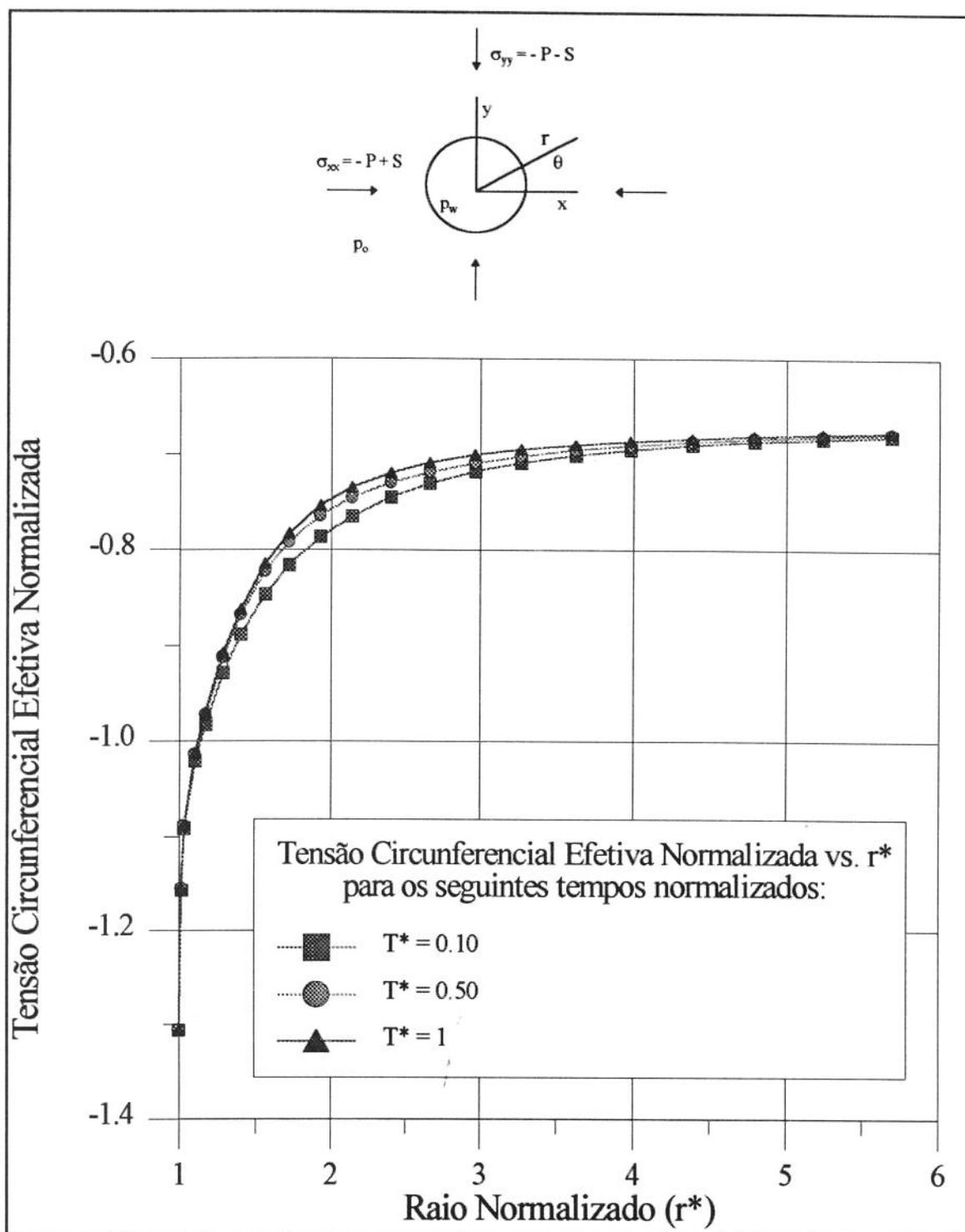
**Figura 5.16:** Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30 \text{ MPa}$ ,  $S = 0 \text{ MPa}$ ,  $p_w = 15 \text{ MPa}$  e  $p_o = 10 \text{ MPa}$ .



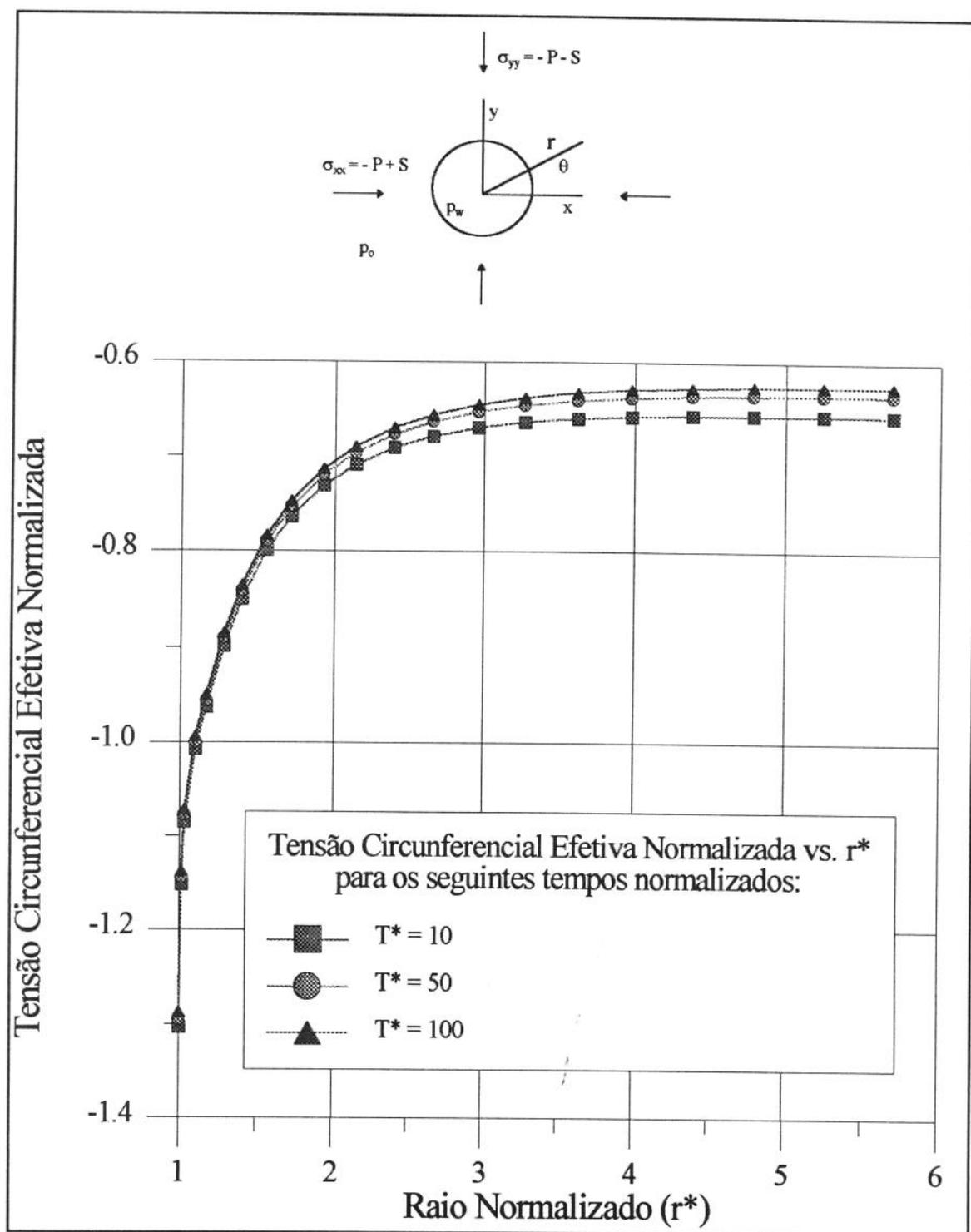
**Figura 5.17: Tensão radial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



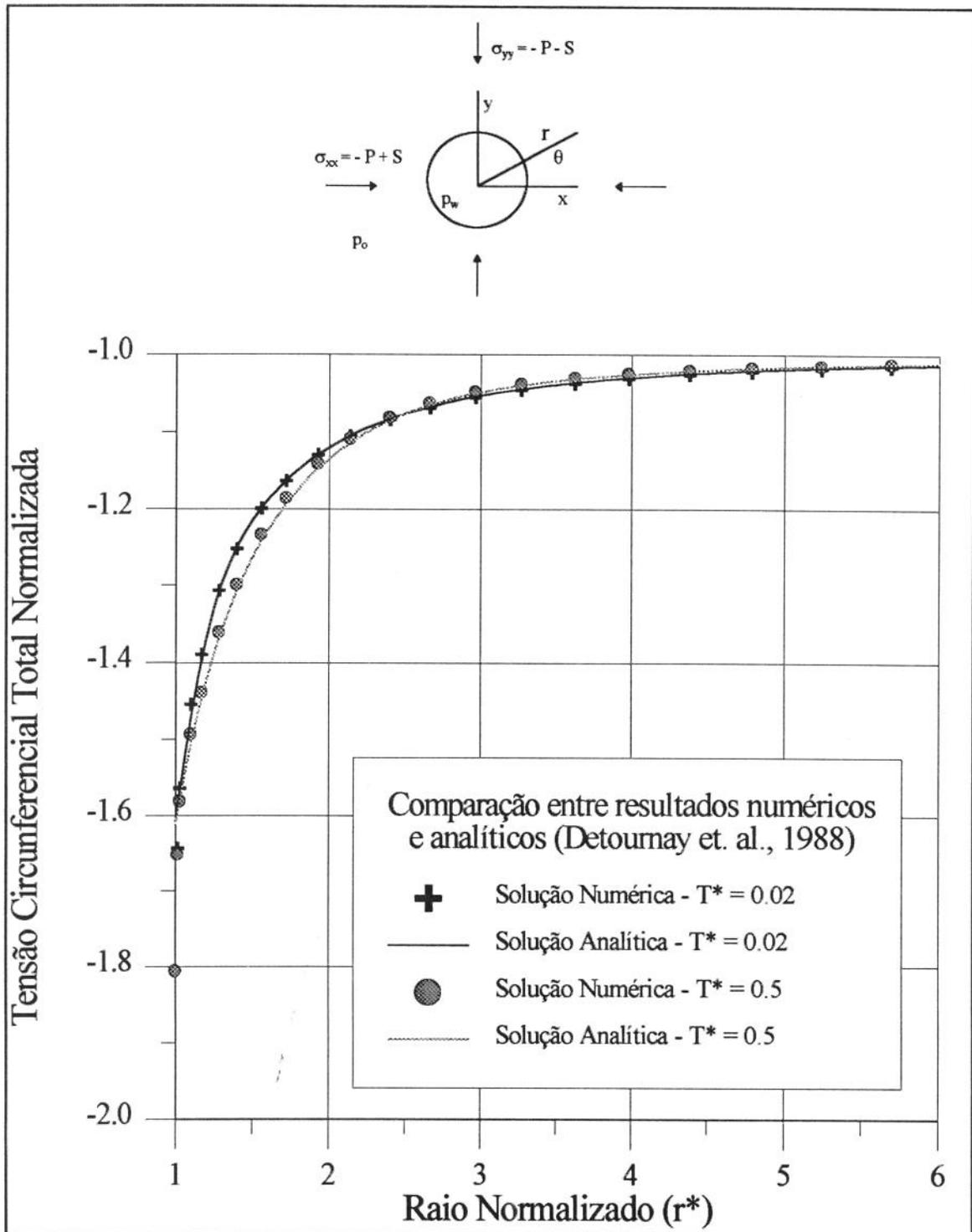
**Figura 5.18: Tensão radial total normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



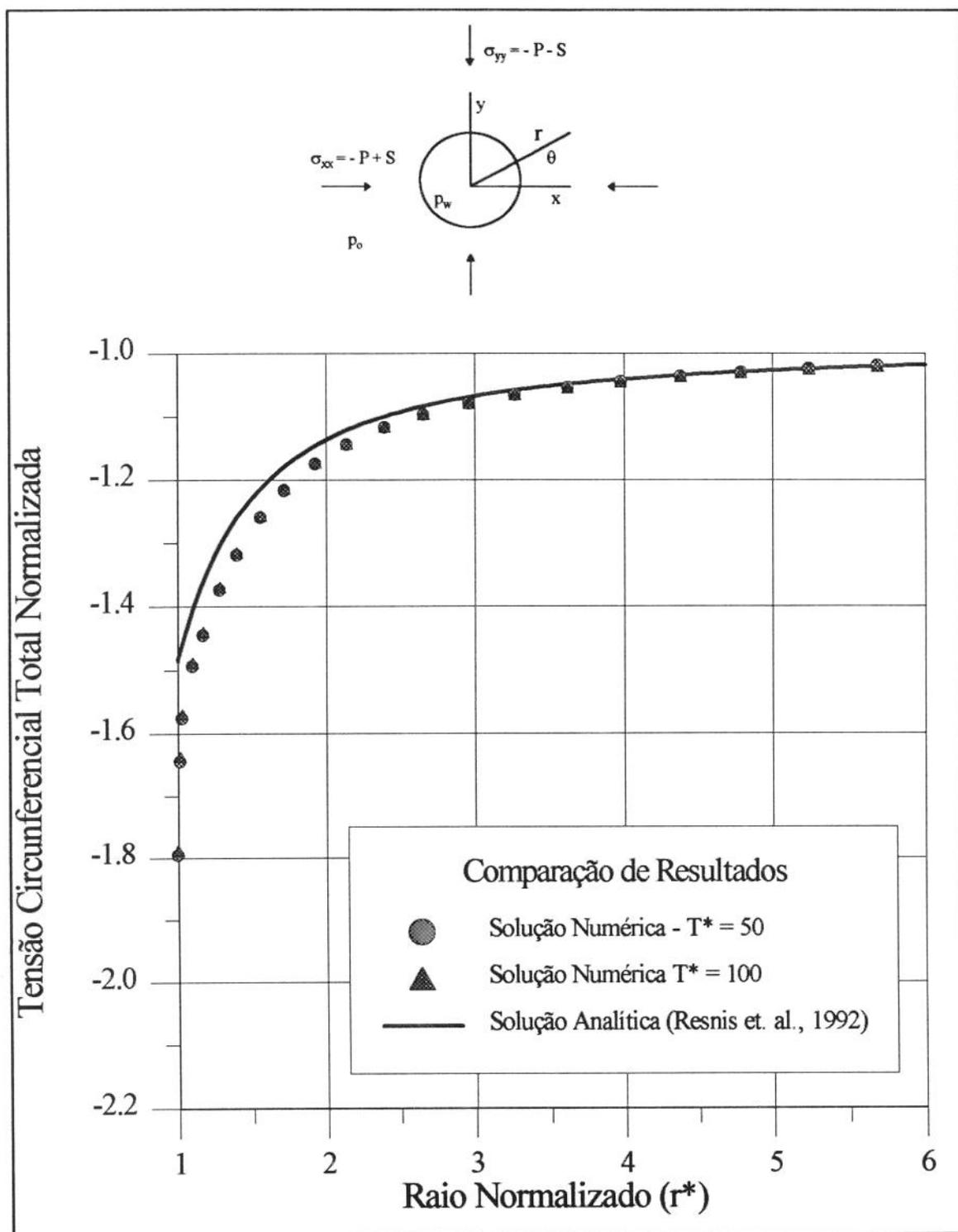
**Figura 5.19: Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



**Figura 5.20: Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



**Figura 5.21: Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_o = 10$  MPa.**



**Figura 5.22: Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado, para grandes tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 15$  MPa e  $p_0 = 10$  MPa.**

### 5.2.3 Meio poroso carregado com um campo hidrostático de tensão, com pressão no reservatório (condição inicial compressível).

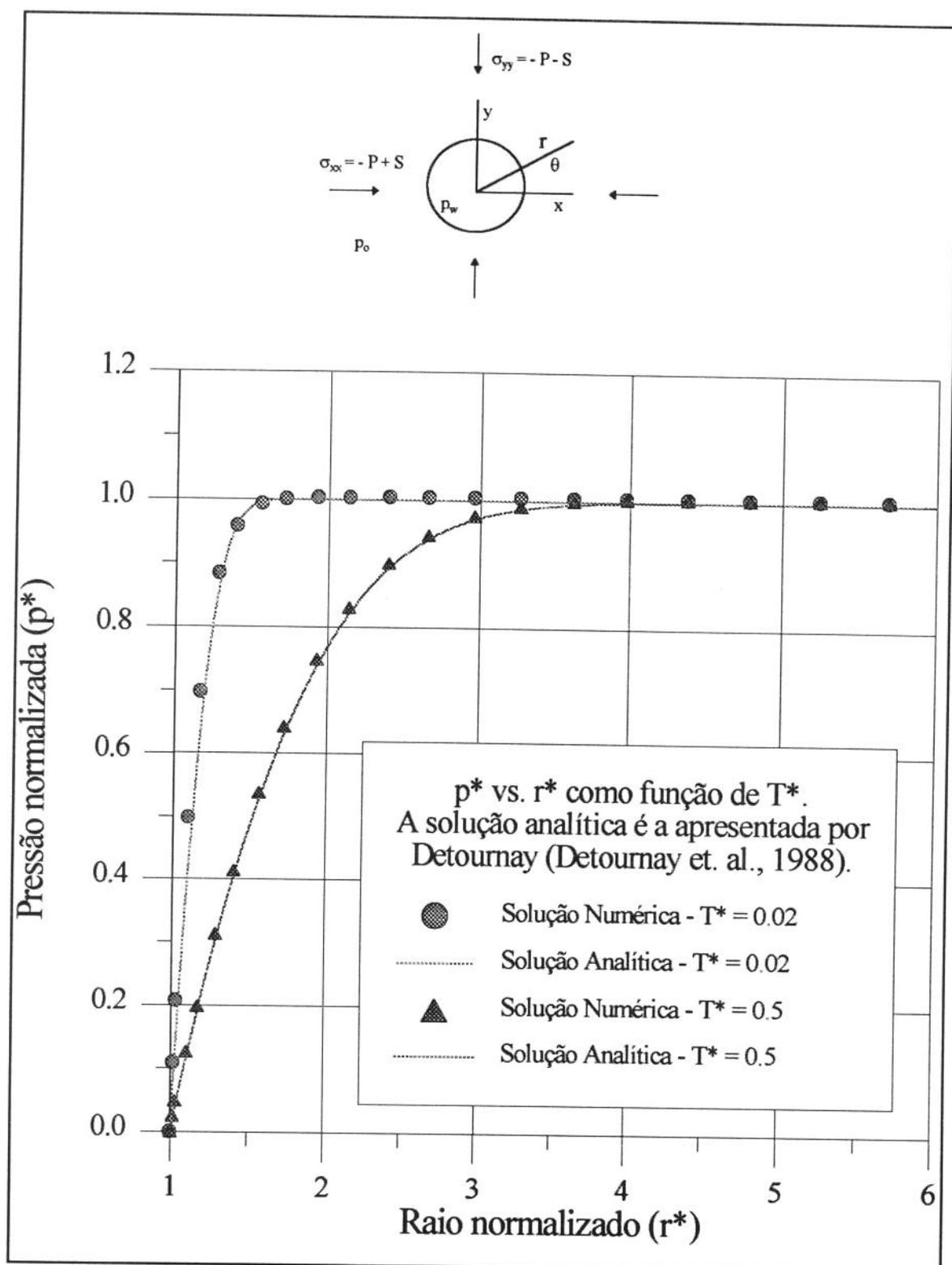
Considerando agora o carregamento apresentado na tabela 5.2, e utilizando novos valores para as constantes, apresentados na tabela 5.4. Estes valores foram obtidos na literatura (Boone, 1989).

**Tabela 5.4: Valores das constantes do material utilizadas para o caso de condição inicial compressível.**

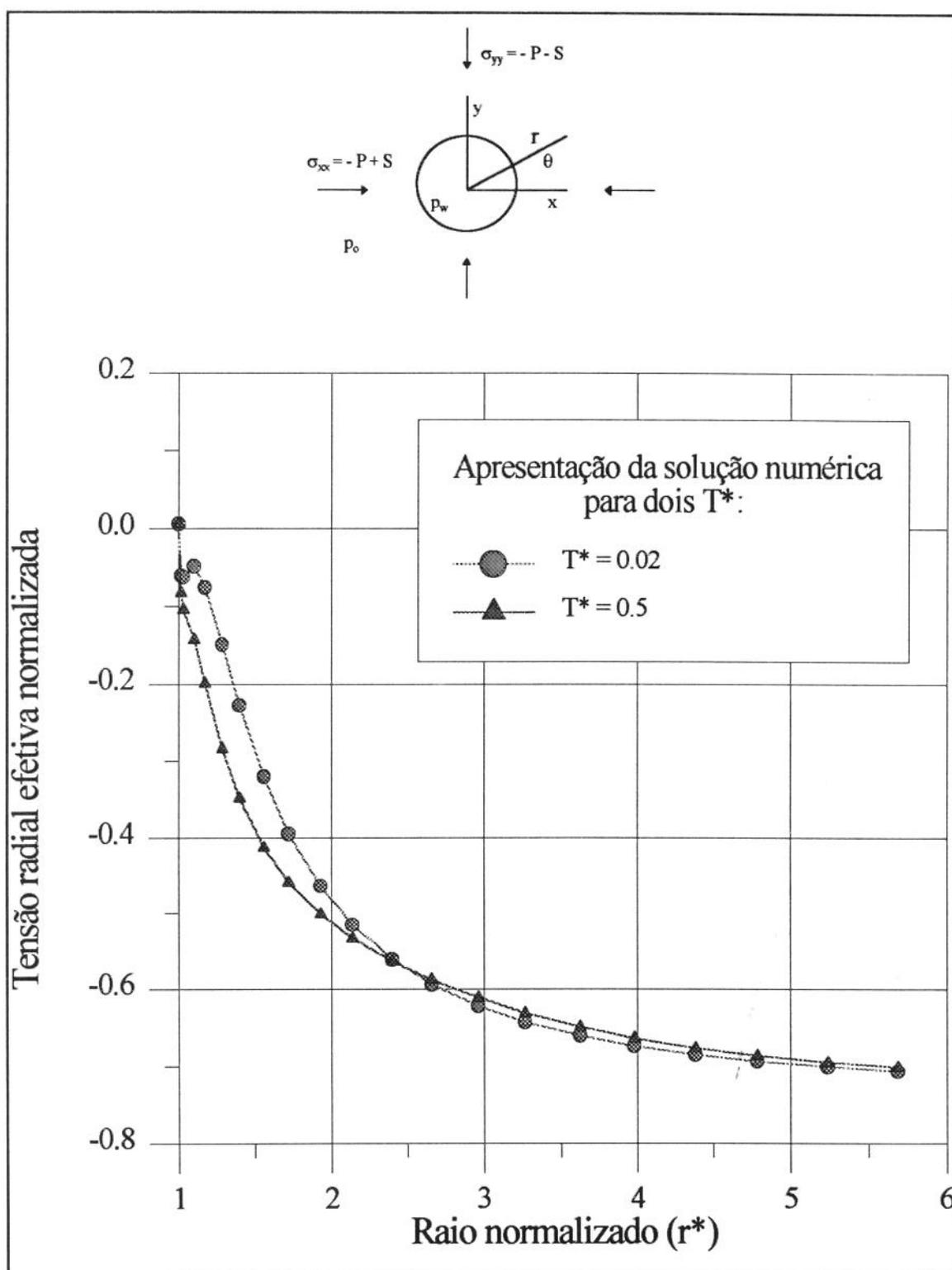
Constante - [Unidade]	Valor Utilizado
G - [MPa]	6000
$\nu$ - [adim.]	0.2
$\nu_u$ - [adim.]	0.33
B - [adim.]	0.62
$\kappa$ - [ $m^2/MPa.seg$ ]	$2.10^{-5}$

Na figura 5.23 são apresentados os resultados de  $p^*$  versus  $r^*$  para os dois valores de  $T^*$ . São utilizados apenas dois valores de tempo pelo fato de a solução analítica ser apresentada para tempos normalizados pequenos. Como pode ser visto, a solução numérica apresenta um bom ajuste para ambos os tempos.

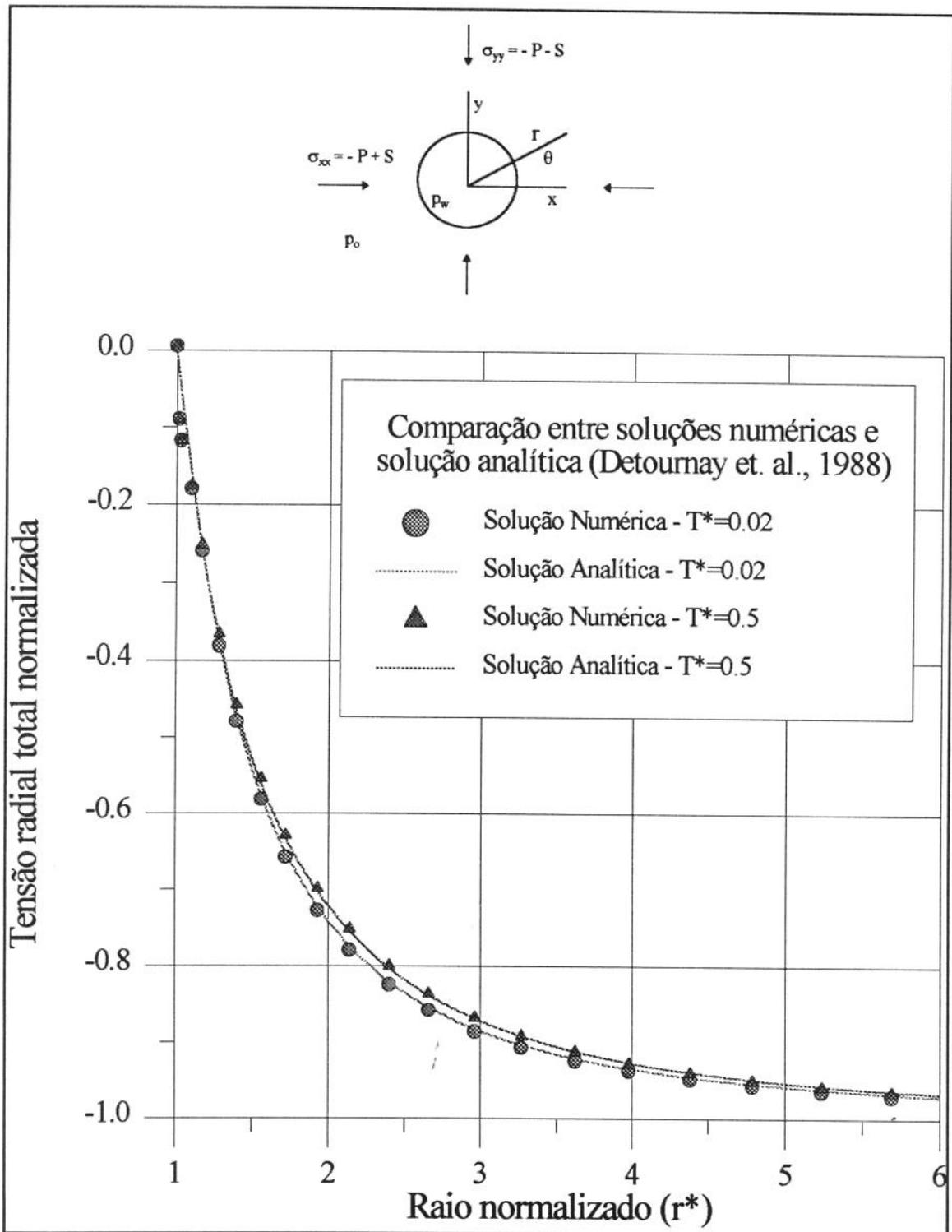
As tensões radiais efetivas normalizadas são apresentadas nas figura 5.24. As tensões radiais totais normalizadas são apresentadas na figura 5.25. A variação das tensões circunferenciais efetivas e totais normalizadas, com relação ao raio normalizado, é apresentada nas figuras 5.26 e 5.27.



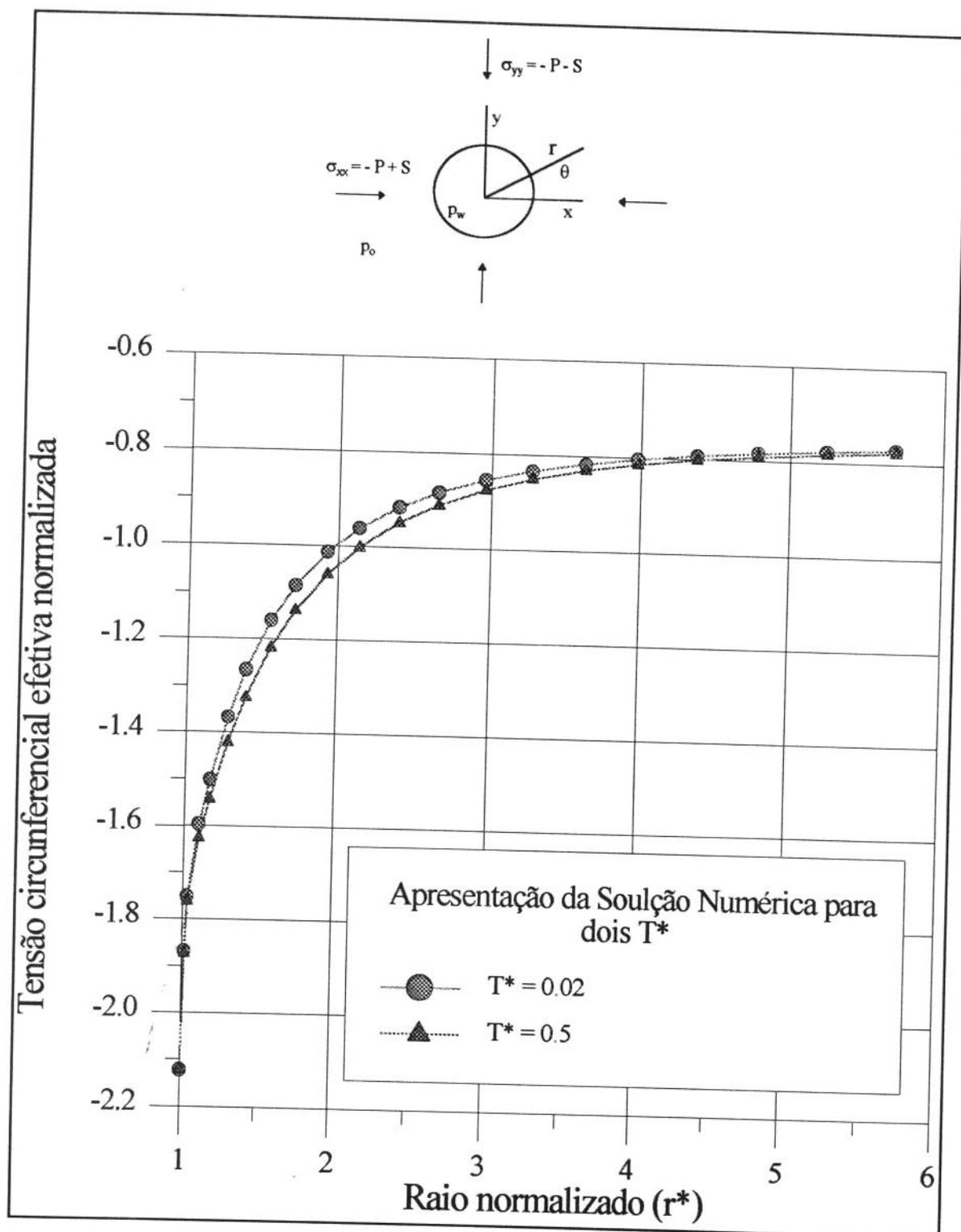
**Figura 5.23: Pressão normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 10$  MPa (condição inicial compressível).**



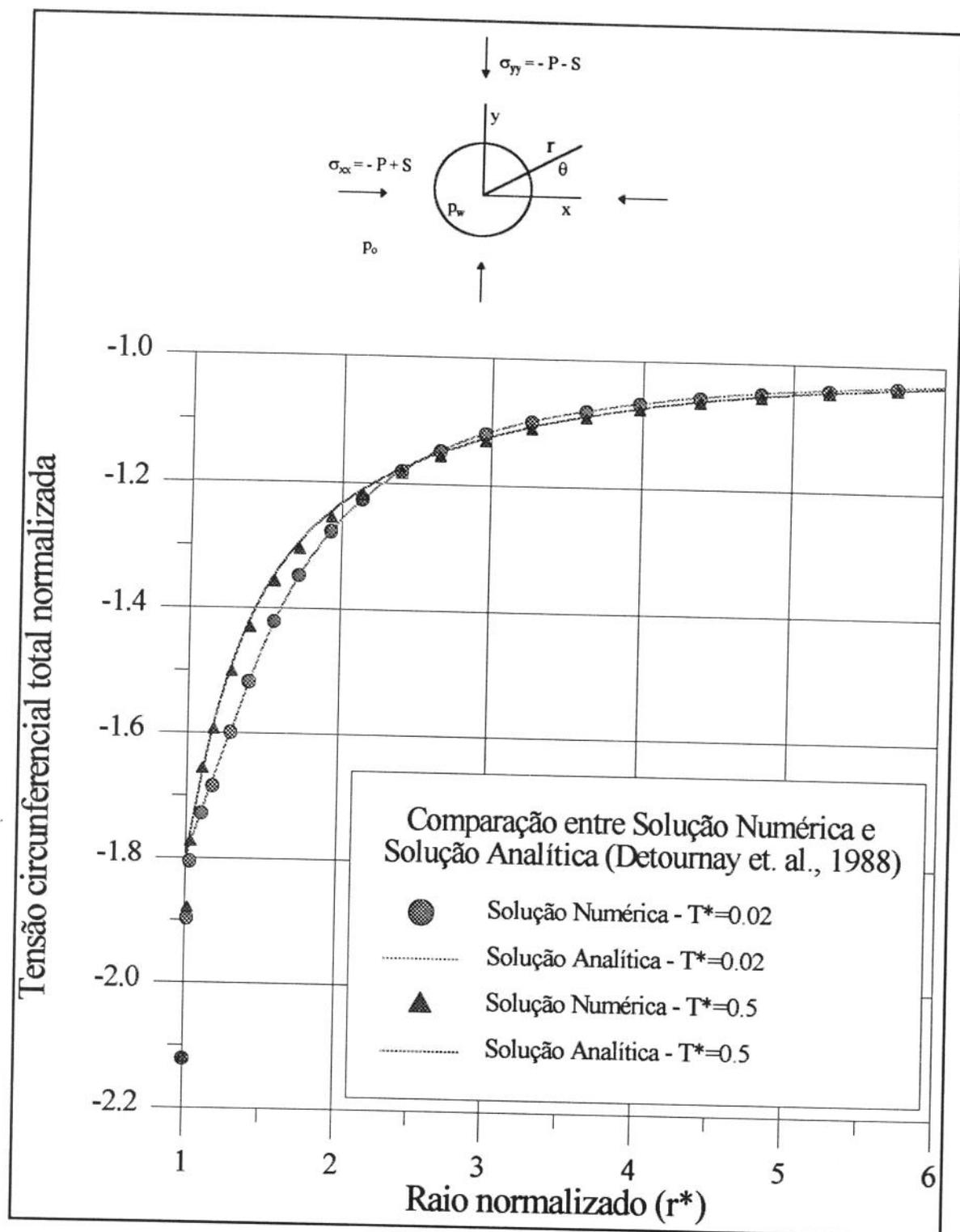
**Figura 5.24: Tensão radial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P=30\text{MPa}$ ,  $S = 0\text{ MPa}$ ,  $p_w = 0\text{ MPa}$ ,  $p_o = 10\text{ MPa}$  (condição inicial compressível).**



**Figura 5.25: Tensão radial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_o = 10$  MPa (condição inicial compressível).**



**Figura 5.26: Tensão circunferencial efetiva normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 10$  MPa (condição inicial compressível).**



**Figura 5.27: Tensão circunferencial total normalizada versus raio normalizado, para pequenos tempos normalizados. Carregamento:  $P = 30$  MPa,  $S = 0$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 10$  MPa (condição inicial compressível).**

#### 5.2.4 Meio poroso carregado com um campo deviatórico de tensão.

Considerando-se agora as constantes do material apresentadas na tabela 5.1, e utilizando novos valores para o carregamento, apresentado na tabela 5.5.

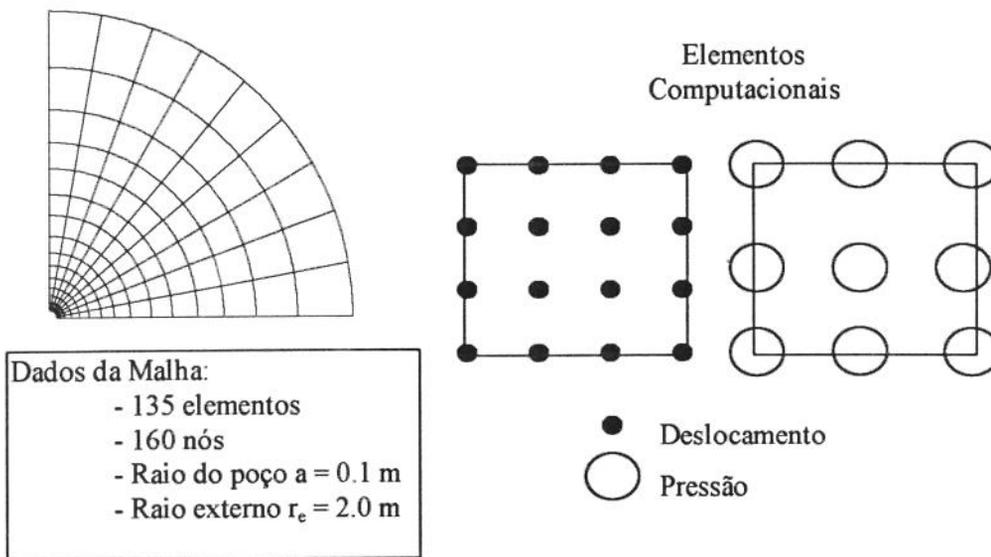
**Tabela 5.5: Valores do carregamento utilizado para o caso de carregamento deviatórico.**

Constante - [Unidade]	Valor Utilizado
P - [MPa]	0
S - [MPa]	5
$p_0$ - [MPa]	0
$p_w$ - [MPa]	0

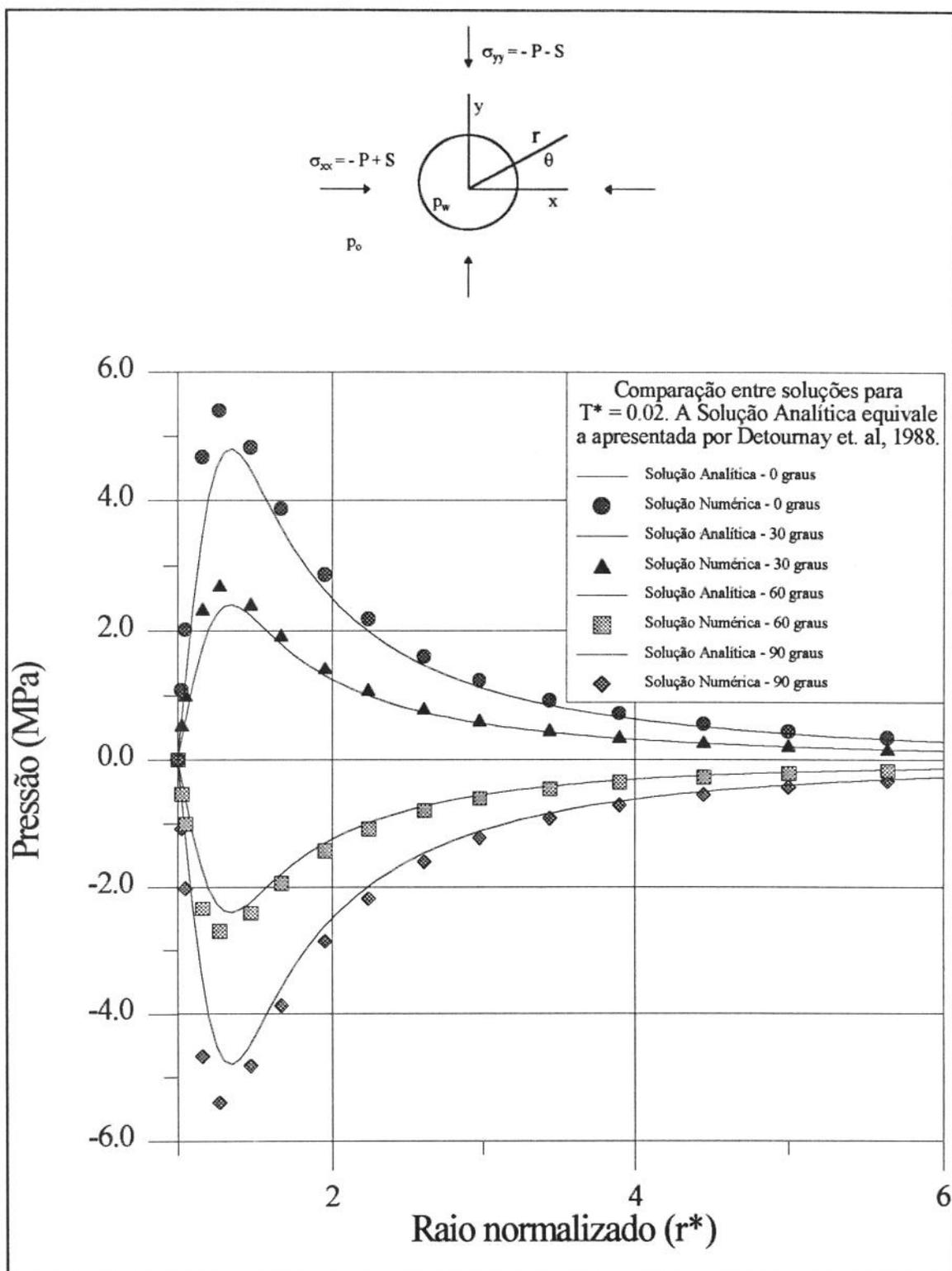
Na figura 5.28 é apresentada a malha utilizada para os cálculos de um campo deviatórico de tensões. Tal malha é necessária pelo fato do problema ter uma solução que varia com o ângulo. Também é apresentado na figura 5.28 o elemento computacional utilizado, que usa polinômios de terceiro grau para os deslocamentos e segundo grau para a pressão, que possui a mesma ordem de interpolação dos polinômios utilizados nos exemplos anteriores (figura 5.2).

Na figura 5.29 são apresentados os resultados de  $p^*$  versus  $r^*$  para o valor de  $T^* = 0.02$ . É utilizado apenas um valor de tempo pelo fato de a solução analítica ser apresentada para tempos normalizados pequenos (Detournay et. al., 1988).

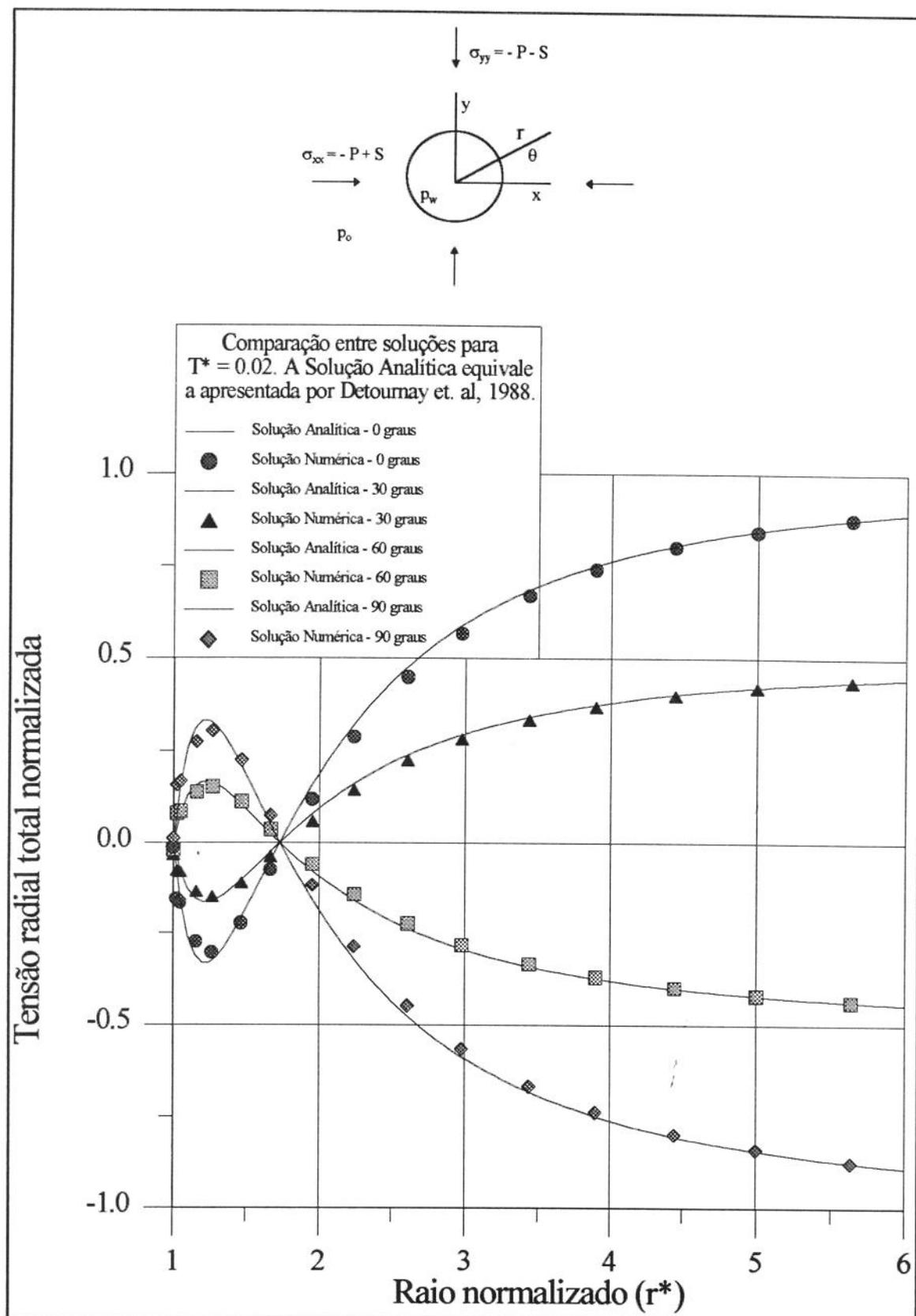
As tensões radiais totais normalizadas são apresentadas nas figura 5.30. A variação das tensões circunferenciais totais normalizadas, com relação ao raio normalizado, é apresentada na figura 5.31. Todos os gráficos apresentam a variação dos parâmetros analisados em relação ao ângulo  $\theta$ .



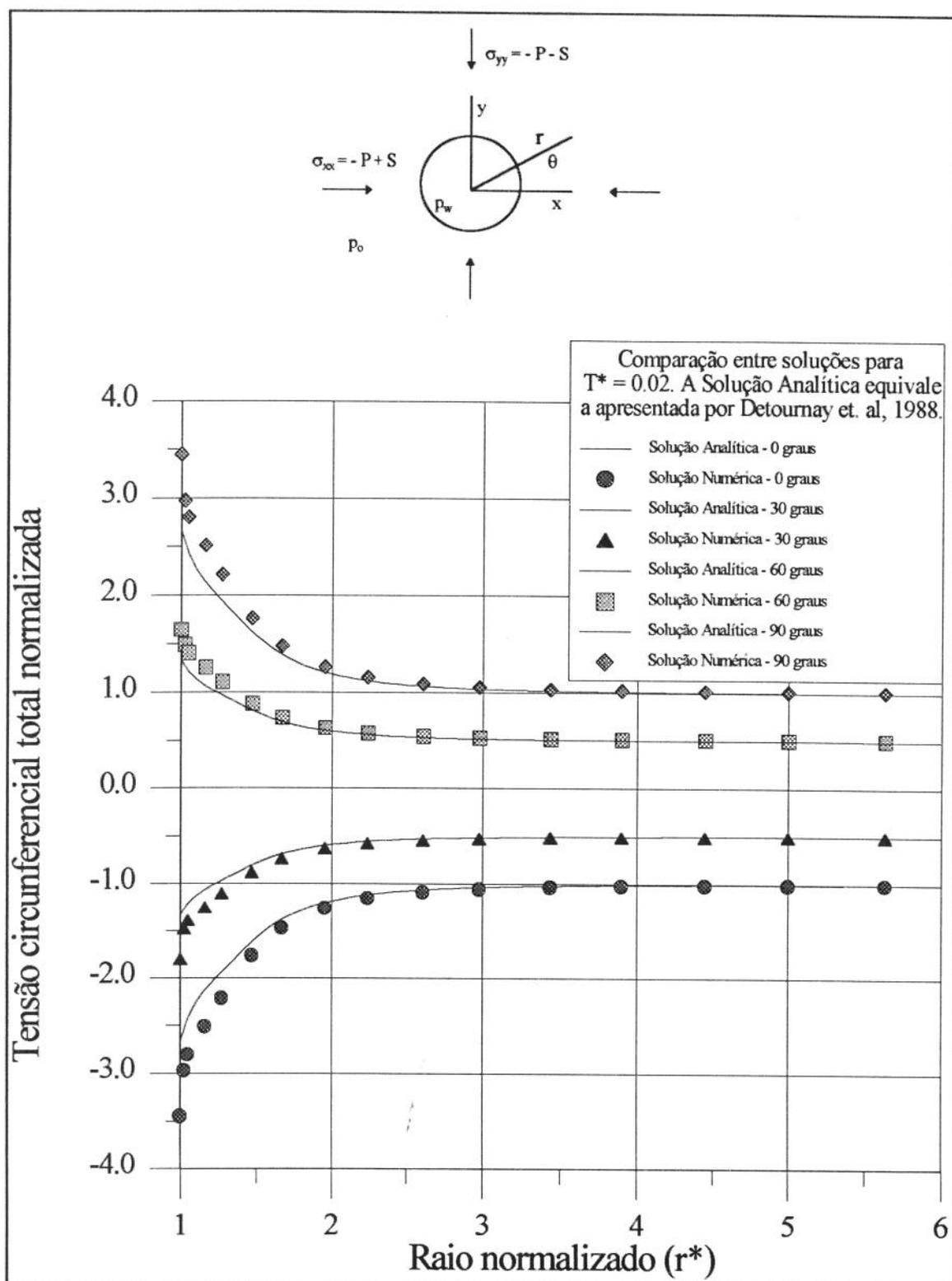
**Figura 5.28: Malha utilizada para o caso de um campo deviatórico de tensões, e elementos computacionais para deslocamento e pressão.**



**Figura 5.29: Pressão versus raio normalizado, variando com o ângulo.**  
**Carregamento:  $P = 0$  MPa,  $S = 5$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 0$  MPa.**



**Figura 5.30: Tensão radial total normalizada em relação a  $S$ , versus raio normalizado variando com o ângulo. Carregamento:  $P = 0$  MPa,  $S = 5$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 0$  MPa.**



**Figura 5.31: Tensão circunferencial total normalizada em relação a  $S$ , versus raio normalizado variando com o ângulo. Carregamento:  $P = 0$  MPa,  $S = 5$  MPa,  $p_w = 0$  MPa,  $p_0 = 0$  MPa.**

## 6. Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho, sendo discutidas a importância de se analisar a Teoria da Poroelasticidade Acoplada, e as vantagens da técnica dos elementos finitos aliada à filosofia de Programação Orientada por Objetos utilizada no desenvolvimento do trabalho. São apresentadas propostas para futuros trabalhos, que resultariam em novas implementações ao sistema, de modo a possibilitar a solução de problemas mais complexos envolvendo o comportamento poroelástico de rochas reservatório.

### 6.1 Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver um sistema computacional, usando a técnica dos elementos finitos e a programação orientada para objetos para a solução de problemas da Teoria da Poroelasticidade Acoplada. Esse objetivo foi alcançado, sendo que o programa gerado foi testado e validado pela comparação com resultados analíticos e numéricos publicados por outros autores.

A Teoria da Poroelasticidade Acoplada é importante na análise estrutural em meio porosos sob ação de carregamento e escoamento de fluidos. Geralmente, em projetos a serem executados no campo, a Teoria da Elasticidade é empregada na determinação de tensões para iniciação de fraturas ou colapso das paredes de poços. Isso pode conduzir a erros significativos em reservatórios que apresentem condições de tensões “in situ” diferentes da hidrostática, o que corresponde à situação mais geral na prática.

As soluções analíticas encontradas na literatura são bastante limitadas, restringindo-se a casos simplificados, com restrições de geometria ou mesmo de termos das equações diferenciais. Com isso, é importante o desenvolvimento de

simuladores numéricos, que considerem todos os termos das equações diferenciais da Teoria da Poroelasticidade Acoplada. Sem o uso de um simulador numérico, torna-se praticamente impossível o cálculo de efeitos poroelásticos em meios fraturados, por exemplo. Também a análise tridimensional dos efeitos poroelásticos apresenta-se bastante dificultada sem a utilização de um simulador numérico.

Soluções numéricas, como a apresentada nesta dissertação, apresentam também a vantagem de permitir a consideração de materiais com diferentes propriedades em um mesmo modelo, permitindo um aumento no grau de realismo da simulação. Isto pode ser realizado com o simulador baseado na técnica dos elementos finitos, descrito nesta dissertação, estabelecendo regiões com diferentes valores para as constantes poroelásticas. Também a variação desses valores ao longo do tempo pode ser simulada.

Possíveis extensões para possibilitar a solução de problemas mais complexos são favorecidas pela aplicação dos conceitos de Programação Orientada por Objetos, requerendo apenas que novas classes sejam acrescentadas ao sistema já existente, aumentando a gama de possibilidades de análise. O desenvolvimento dentro desta filosofia de programação permitiu que a atenção estivesse voltada para os problemas relativos à Teoria da Poroelasticidade Acoplada, com poucas alterações nas classes já desenvolvidas e estáveis, incorporadas anteriormente ao sistema por outros pesquisadores. Da mesma forma, um pesquisador que no futuro venha a incorporar funcionalidades para a simulação de fraturamento hidráulico em um meio poroelástico, por exemplo, não deverá ter a necessidade de alterar as classes desenvolvidas neste trabalho, que já foram testadas.

Uma importante inclusão ao sistema seria a possibilidade de se considerar a utilização de malhas adaptativas para a análise pela técnica dos elementos finitos. Isso seria importante, por exemplo, na transição entre o estado

inicial, com comportamento não-drenado, e o instante posterior, o que ocasiona o aparecimento de gradientes elevados de pressão. Tais gradientes tendem a desestabilizar a solução para os instantes iniciais, porém desaparecem a medida que o tempo vai aumentando. Portanto seria desejável utilizar uma malha mais refinada nos instantes iniciais, próximo ao contorno, reduzindo o número de elementos nessas regiões com o decorrer do tempo. Também a adaptatividade teria importância para a análise de meios porosos fraturados.

## 6.2 Propostas para futuros trabalhos

É importante que novas funcionalidades sejam acrescentadas ao sistema, ampliando os campos de utilização. Tais funcionalidades seriam implementadas através da criação de novas classes de objetos, fazendo uso das classes já implementadas e de outras que venham a ser implementadas por outros pesquisadores.

Um futuro desenvolvimento na área seria o de considerar-se os casos de estado plano de tensão, estado axissimétrico e estado tridimensional. Isso não recai num problema de difícil solução, pois devido ao uso dos conceitos de Programação Orientada por Objetos, será necessário apenas criar novas classes, nas quais seriam implementados os coeficientes das equações diferenciais específicas de cada caso. Também, a generalidade do sistema utilizado, faz com que isso ocorra até mesmo para a introdução de análises tridimensionais ao programa.

Outro aspecto importante a ser considerado, como futuro desenvolvimento, seria a introdução de classes ao sistema para permitir a utilização de conceitos da Mecânica do Fraturamento, visando o estudo de propagação de fraturas hidráulicas em meios poroelásticos. O acoplamento de pressão e deslocamentos no meio poroso pode ser importante principalmente na ponta da fratura, onde estão presentes tensões elevadas, e que são aliviadas

rapidamente com o avanço do processo de propagação da fratura.

Um outro ponto importante seria o de se acrescentar a possibilidade de análise de efeitos poroelásticos na simulação de estabilidade de poços. Para isso poderiam ser acrescentados critérios de ruptura, como o de Mohr-Coulomb, para que pudessem ser avaliadas a faixa de variação admissível para as pressões devidas ao peso de lama durante a perfuração de poços de petróleo.

A possibilidade de se desenvolver classes relativas ao comportamento de fluidos, considerando-se diversos modelos reológicos, é também bastante favorecida pelo uso da Programação Orientada por Objetos.

Uma importante área para desenvolvimentos dentro do sistema seria a implementação de classes para visualização de resultados, explorando as potencialidades gráficas de estações de trabalho. Tais funcionalidades poderiam favorecer o acompanhamento de resultados parciais, conferindo um efeito dinâmico à análise. Um exemplo de análise de um meio poroelástico pós-processada dinamicamente seria a apresentação, por meio de contornos coloridos, da variação da pressão com o tempo, para um dado carregamento. A visualização de resultados utilizando recursos gráficos permite sua rápida interpretação por parte do analista, favorecendo a assimilação do comportamento do modelo, objetivo principal da análise.

Para desenvolver rotinas de visualização não há necessidade de conhecer a Teoria da Poroelasticidade Acoplada. Assim, outros programadores poderiam desenvolver classes especializadas para o pós-processamento de resultados. Isso é favorecido pela Programação Orientada por Objetos, que permite que essas classes de visualização, uma vez desenvolvidas, sejam colocadas à disposição de todos os usuários do sistema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T.: "Finite Elements: An Introduction." Prentice-Hall, Inc., New Jersey, EUA, 1981.
- Biot, M. A.: "General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material." *Journal of Applied Mechanics*, v. 78, p. 91-96, 1956.
- Biot, M. A.: "Consolidation Settlement Under a Rectangular Load Distribution." *Journal of Applied Physics*, v. 12, p 426-430, 1941.
- Biot, M. A.: "General Theory of Three-Dimensional Consolidation." *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155-164, 1941.
- Biot, M. A.: "Le Problème de la Consolidation des Matières Argileuses Sous Une Charge." *Ann. Soc. Sci. Bruxelles B55*, p. 110-113 (1935), apud BIOT, M. A.: "General Theory of Three-Dimensional Consolidation." *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155-164, 1941.
- Biot, M. A.: "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid." *Journal of Applied Physics*, v. 26, p. 182-185, 1955.
- Biot, M. A.; Clingan, F. M.: "Bending Settlement of a Slab Resting on a Consolidating Foundation." *Journal of Applied Physics*, v. 13, p. 35-40, 1942.
- Biot, M. A.; Clingan, F. M.: "Consolidation Settlement of a Soil With an Imprevious Top Surface." *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 578-581, 1941.
- Biot, M. A.; Willis, D. G.: "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation." *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 594-601, 1957.
- Boone, T. J.: "Simulation and Visualization of Hydraulic Fracture Propagation in Poroelastic Rock." New York/N.J/EUA. Dissertação (Doutoramento) - Cornell University, Ithaca-New York, 1989.

- Borba, G. L.: "Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno para Tratamento do Estado Plano da Poroelasticidade Acoplada." Campinas/SP - 1992, 146p.. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- Carslaw, H. S. & Jaeger, L. C.: "Conduction of Heat in Solids." - Clarendon Press, London, 1959.
- Chen, W. F.; Saleeb, A. F.: "Constitutive Equations for Engineering Materials." v. 1, New York, John Wiley & Sons, 1982.
- Cheng, H.; Dusseault, M. B.: "Development and Application of a Fully-Coupled Two-Dimensional Finite Element Approach to Deformation and Pressure Diffusion Around a Borehole." *The Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 32, n. 10, p. 28-38, 1993.
- Christian, J. T.: "Undrained Stress Distribution by Numerical Methods." *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, v. 94, p. 1333-1345, SM6, Proc. Paper 6243, 1970.
- Christian, J. T.; Boehmer, J. W.: "Plane Strain Consolidation by Finite Elements." *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, v. 96, p. 1435-1457, SM4, 1970.
- Cleary, M. P.: "Fundamental Solutions for a Fluid-Saturated Porous Solid." *Int. Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 9, p. 785-806, 1977.
- Cleary, M. P.; Rice, J. R.: "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media With Compressible Constituents." *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 14, n. 2, p. 227-241, 1976.
- Detournay, E.; Cheng, A. H.-D.: "Poroelastic Response of a Borehole in a Non-hydrostatic Stress Field." *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, v. 25, n. 3, p. 171-182, 1988.
- Detournay, E.; Cheng, A. H.-D.: "Plane Strain Analysis of a Stationary Hydraulic Fracture in a Poroelastic Medium." *Int. Journal of Solids and Structures*, v. 27, n. 13, p. 1645-1662, 1991.

- Detournay, E.; McLennan, J. D.; Roegiers, J. -C.: "Poroelastic Concepts Explain Some of the Hydraulic Fracturing Mechanisms." *SPE15262*, 1985.
- Devloo, P. R. B.: "On the Development of a Finite Element Program Based on the Object Oriented Programing Philosophy." OON-SKI'93 - The Object-Oriented Numerics Conference, p. 183-203, 1993.
- Devloo, P. R. B.; Alves F., J. S.: "An Object Oriented Approach to Finite Element Programing (Phase I): a system independent windowing enviroment for developing interactive scientific programs." *Advances in Engineering Softwares and Workstations*, v. 14, n. 1, p. 41-46, 1992.
- Ghaboussi, J.; Wilson, E. L.: "Variational Formulation of Dynamics of Fluid-Saturated Porous Elastic Solids." *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 98, p. 947-963, EM4, 1972.
- Hughes, T. J. R.: "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis." Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- Murad, M. A.: "Modelagem e Análise Numérica de Escoamentos Saturados em Meios Porosos Rígidos e Elásticos Lineares" Rio de Janeiro/RJ - 1990, 141 p., Tese (Doutorado) - Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RJ.
- Murad, M. A.; Loula, A. F. D.: "Improved Accuracy in Finite Element Analysis of Biot's Consolidation Problem." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 95, p. 359-382, 1992.
- Nur, A.; Byerlee, J. D.: "An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rock With Fluids." *Journal of Geophysical Research*, v. 76, n. 26, p. 6414-6419, 1971.
- Risnes, R.; Fjær, E.; Holt, R. M.; Horsrud, PER; Raaen, A. M.: "Petroleum Related Rock Mechanics." - Elsevier Science Publishers B. V., 1992.
- Sandhu, R. S.; Wilson, E. L.: "Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media." *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 95, p. 641-652, EM3, 1969.

Schiffman, R. L.; et. al.: "An Analysis of Consolidation Theories." - *J. Soil Mech. & Foundations Div. ASCE*, v. 95, p. 285-312, 1969.

Spiegel, M. R.: "Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática." - Editora McGraw-Hill Ltda, São Paulo, 1992.

Terzaghi, K.: "Erbdaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage." *Principle of Soil Mechanics, Eng. News Record*, 1925, apud Biot, M. A.: "General Theory of Three-Dimensional Consolidation." *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155-164, 1941.

## NOMENCLATURA

### Alfabeto Latino:

- a - Raio do poço
- B - Coeficiente de Skempton
- c - Coeficiente generalizado de consolidação
- c\* - Coeficiente generalizado de consolidação de Rice e Cleary
- E - Módulo de elasticidade linear drenado
- $F_i$  - Forças de volume
- G - Módulo de elasticidade transversal drenado
- $g_i$  - Condição de contorno para os deslocamentos na região i
- H,  $H_1$  - Constantes introduzidas por Biot
- h - Altura da coluna poroelástica
- $h_i$  - Condição de contorno para as forças de superfície na região i
- k - Permeabilidade
- L - Largura do carregamento distribuído
- $n_i$  - Vetor normal a superfície
- P - Carregamento aplicado ( parte hidrostático no caso do poço)
- p - Pressão de poros
- $p(0)$  - Pressão no instante inicial na coluna
- $p^*$  - Pressão normalizada
- $p_0$  - Pressão de poros inicial do modelo
- $p_w$  - Pressão no poço
- $\bar{p}_k$  - Valor nodal da pressão, no nó k
- Q - Constante poroelástica de Biot
- $q_k$  - Vazão na direção  $x_k$
- R - Constante utilizada por Biot

- $R_i$  - Condição de contorno para vazão na região  $i$   
 $r$  - Coordenada radial  
 $r^*$  - Raio normalizado  
 $S$  - Parte deviatória do carregamento  
 $S_i$  - Condição de contorno para a pressão na região  $i$   
 $s_i$  - Vetor tangencial a superfície  
 $T^*$  - Tempo normalizado  
 $t$  - Tempo  
 $u_i$  - Deslocamento na direção de  $x_i$   
 $\bar{u}_k$  - Valor nodal do deslocamento em  $x$ , no nó  $k$   
 $\bar{v}_k$  - Valor nodal do deslocamento em  $y$ , no nó  $k$   
 $w$  - Largura do modelo

### Alfabeto Grego:

- $\alpha$  - Constante de Biot  
 $\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker  
 $\epsilon_{kk}$  - Deformação volumétrica do sólido  
 $\epsilon_{ij}$  - Tensor deformação  
 $\Gamma$  - Contorno do problema  
 $\Gamma_i$  - Contorno onde é aplicada condição para a variável  $i$   
 $\eta$  - Coeficiente de consolidação  
 $\kappa$  - Coeficiente de permeabilidade  
 $\lambda$  - Coeficiente de Elasticidade  
 $\mu$  - Viscosidade do fluido  
 $\nu$  - Módulo de Poisson drenado  
 $\nu_u$  - Módulo de Poisson não-drenado  
 $\pi$  - Constante matemática

- $\theta$  - Coordenada angular
- $\sigma_{ij}$  - Tensor tensão
- $\sigma'_{ij}$  - Tensor tensão efetiva
- $[\sigma]^*$  - Tensão normalizada
- $\Omega$  - Domínio do problema
- $\omega_i$  - Função de forma para a variável  $i$
- $\xi$  - Variável auxiliar utilizada por Biot na solução aproximada para o problema de consolidação de uma argila completamente saturada de fluido
- $\psi_i^k$  - Função de forma para a variável  $k$ , no nó  $i$
- $\zeta$  - Variação do conteúdo de fluido

## APÊNDICE A

### Introdução aos Conceitos Relativos à Técnica dos Elementos Finitos

Considere-se um problema representado pela equação (A.1).

$$\begin{aligned} \chi[T(x)] - f(x) &= 0 \\ T(x_0) &= 0 \\ T(x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Na equação (A.1) temos:

- $T(x)$  é uma função da variável  $x$ ,
- $\chi[ ]$  é um operador diferencial, e
- $f(x)$  representa um termo fonte presente na equação.

A utilização da técnica dos elementos finitos no problema representado pela equação (A.1) tem por encontrar uma solução aproximada para o problema. Tal solução aproximada pode ser entendida como um somatório de funções testes. As possíveis soluções do problema pertencem então a uma base de funções que são soluções do problema. Esta base apresenta a característica de possuir um número infinito de funções, pois qualquer combinação linear de um conjunto de soluções também será solução para o problema.

O problema como apresentado pela equação (A.1) apresenta-se representado numa formulação Forte. A formulação Forte garante que uma solução encontrada para o problema deverá atender as equações do mesmo em todos os pontos do domínio. Encontrar soluções para o problema que apresenta-se representado pela formulação Forte torna-se bastante complicado.

Pode ser feita uma reformulação do problema, através do uso da formulação Variacional ou Fraca. Trata-se de resolver o problema visando a obtenção de uma solução que seja correta de forma ponderada sobre o domínio. Assim, nossa base de soluções se torna mais facilmente encontrada, do para o caso da formulação Forte. A aplicação da formulação Variacional ao problema representado pela equação (A.1) gera:

$$\int_{\Omega} (\chi[\tau - f(x)]v) d\Omega = 0 \quad (\text{A.2})$$

Na equação (A.2),  $\tau$  representa a solução aproximada para a função  $T(x)$ ,  $v$  representa a função teste para o problema, e  $\Omega$  representa o domínio do problema. O caráter aproximado da solução pode ser visto no fato de se considerar que o produto interno da solução aproximada, com a função teste deve ser nulo.

As funções admissíveis,  $\tau$ , apresentam restrições do ponto de vista de serem deriváveis sobre o domínio, o que não acontece com as funções teste. Caso seja considerado o problema desta forma, devem ser encontradas duas bases de funções: uma para as funções admissíveis, e outra para as funções teste. Este problema pode ser contornado pela aplicação do teorema da Divergência a equação (A.2). O uso do teorema da Divergência faz com que se eleve a ordem de derivação sobre a função teste, reduzindo esta mesma ordem sobre a função admissível. Assim, ambas as funções teste e admissíveis poderão pertencer a mesma base de soluções. Além de evitar a necessidade de se encontrar duas bases distintas de soluções para o problema, o problema se torna simétrico ao se utilizar a mesma base de funções.

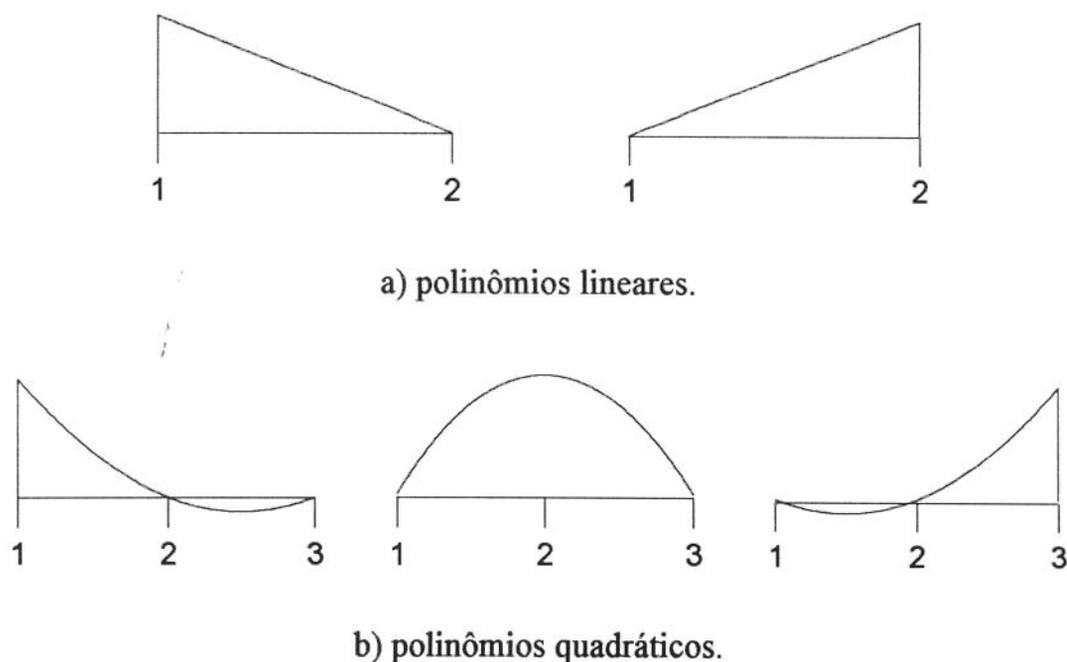
A aplicação do método de Galerkin ao problema (A.2) faz com que se reduza a base de soluções para um número finito de soluções, viabilizando sua utilização. Apesar do método de Galerkin apresentar uma estratégia elegante para

a construção de soluções aproximadas, este apresenta a desvantagem de se obter tais soluções aproximadas.

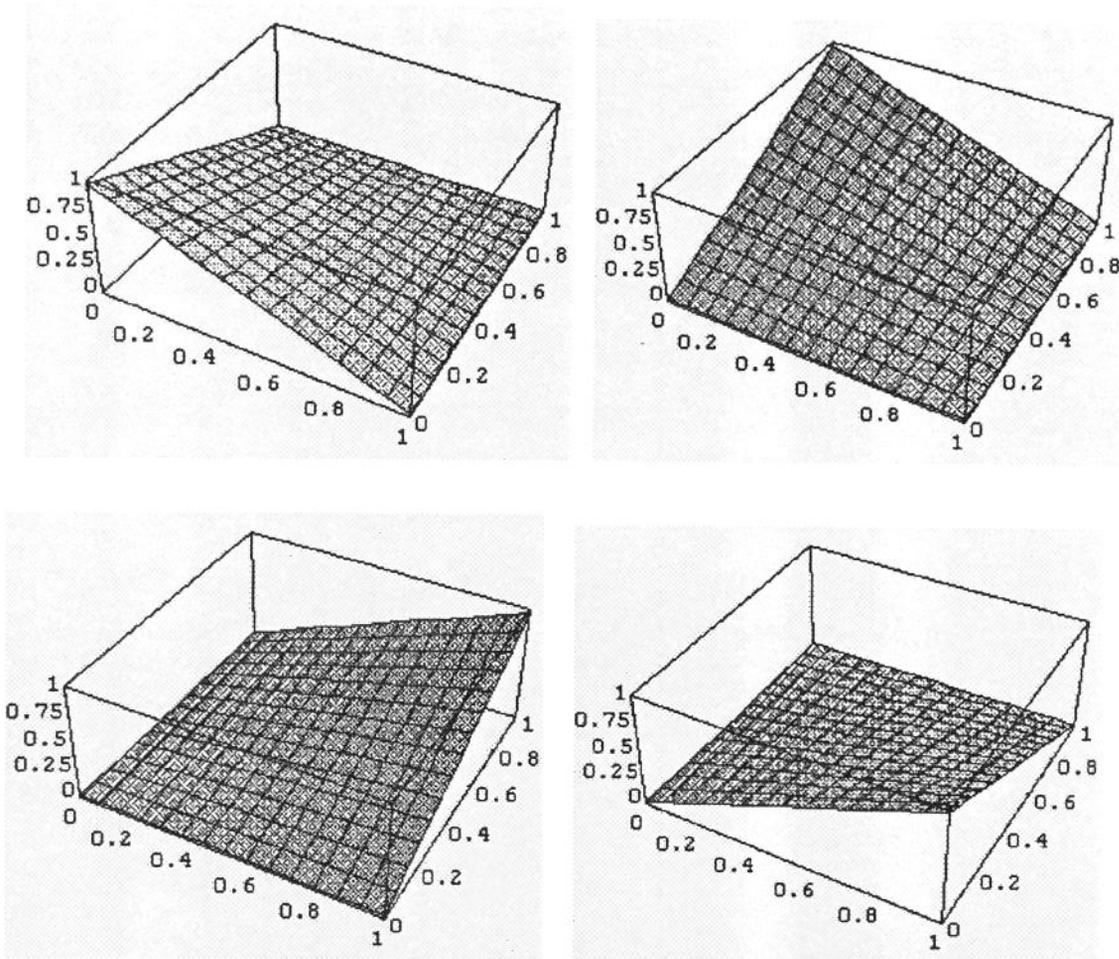
A técnica dos elementos finitos soluciona tal problema, fornecendo uma forma geral e sistemática para a construção das bases de funções para a aproximação de Galerkin.

Assim, a base de funções será definida para um domínio dividido em sub-regiões, chamadas elementos finitos, onde sobre cada sub-região podem ser escolhidas funções bastante simples, como por exemplo, funções polinomiais. Portanto, para se obter a base de funções para resolver o problema, basta dividir o domínio em sub-domínios, e definir sobre cada sub-domínio a função responsável pela interpolação do resultado sobre o mesmo.

Na figura (A.1) são apresentados polinômios interpolantes para o caso linear (a), e quadrático (b), sendo considerado o problema unidimensional. O caso bidimensional é apresentado na figura (A.2).



**Figura A.1: Polinômios interpolantes utilizados para o caso unidimensional.**



**Figura A.2: Polinômios interpolantes utilizados para o caso bidimensional.**

Outro conceito importante é o de elementos isoparamétricos. Tais elementos apresentam-se num sistema de coordenadas simplificado (sem rotação e translação). Quando tais elementos são utilizados, as integrações e interpolações são feitas neste sistema, sendo feita uma transformação de coordenadas dos resultados para o sistema original. Isso reduz bastante a complexidade computacional para cálculos com integração numérica sobre os elementos.

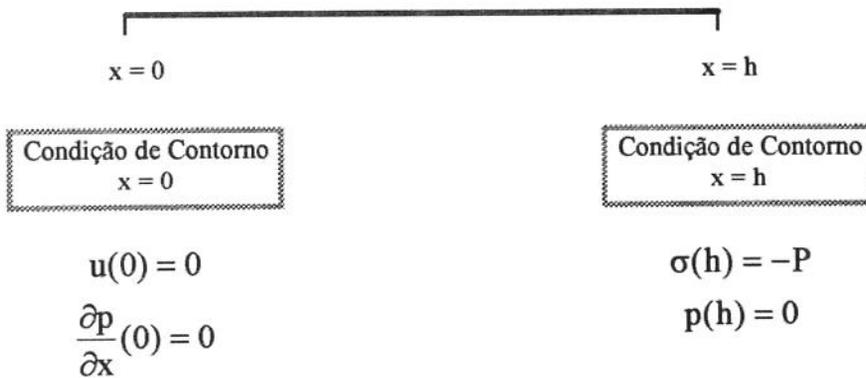
A introdução à técnica dos elementos finitos aqui apresentada, teve por objetivo apresentar os principais conceitos envolvidos. Uma apresentação mais detalhada pode ser obtida na literatura (Hughes, 1987; Becker, 1981).

## APÊNDICE B

### Solução das Equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada Unidimensional: Aplicação ao Caso da Coluna Poroelástica.

O problema da coluna poroelástica corresponde a uma simplificação das equações da Poroelasticidade tridimensional, uma vez que pode ser reduzido a um problema unidimensional.

A figura B.1 apresenta um esquema mostrando o modelo unidimensional e as condições de contorno do problema.



**Figura B.1: Modelo unidimensional e suas condições de contorno.**

Considerando-se as equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada apresentadas no Capítulo 2, equações (2.24) e (2.27), para o caso unidimensional chega-se a:

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.2})$$

As equações (B.1) e (B.2) devem ser satisfeitas para as seguintes condições de contorno (Figura B.1).

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \sigma(h) &= -P \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 \\ p(h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Considerando que a tensão total  $\sigma$  na coluna é constante e igual a  $-P$ , a equação (2.14) leva a:

$$\sigma = -P = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha p \quad (\text{B.4})$$

De onde:

$$-P = \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha p \quad (\text{B.5})$$

Derivando a equação (B.5) em relação ao tempo:

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

Introduzindo o resultado (B.7) na equação (B.2):

$$\frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Reagrupando os termos:

$$\left[ \frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{Q} \right] \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.9})$$

A equação (B.9) é a equação que deve ser resolvida para o cálculo das pressões ao longo da coluna. Utilizando-se a condição de que a variação do conteúdo de fluido é igual a zero no instante inicial:

$$\zeta = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0) + \frac{1}{Q} p(0) = 0 \quad (\text{B.10})$$

De onde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = -\frac{1}{\alpha Q} p(0) \quad (\text{B.11})$$

Aplicando-se o resultado (B.11) na equação (B.5), tem-se para a pressão na coluna no instante inicial:

$$p(0) = \frac{P}{\left[ \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)\alpha Q} + \alpha \right]} \quad (\text{B.12})$$

Observando-se a semelhança entre a equação (B.9) e a equação da condução de calor unidimensional (Carslaw e Jaeger, 1959), pode-se concluir que uma solução para esta servirá como solução para a equação (B.9). A seguir são apresentadas a equação do problema de condução de calor, assim como as condições de contorno e inicial, conforme apresentadas por Carslaw e Jaeger (Carslaw e Jaeger, 1959).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \lambda T \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
 0 < x < L \\
 T(x,0) &= f(x) \\
 \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) &= 0 \\
 T(L,t) &= \phi_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{B.14}$$

Como pode ser visto na equação (B.13), aparece um termo fonte ou de geração de calor. Segundo Carslaw e Jaeger, a solução da equação (B.13) com as condições de contorno (B.14) é:

$$\begin{aligned}
 T(x,t) &= \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t - K\beta_n^2 t) \cos(\beta_n^2 x) \\
 &\left\{ K\beta_n (-1)^n \int_0^t \exp[(K\beta_n^2 + \lambda)\gamma] \phi_2(\gamma) d\gamma + \int_0^L f(\chi) \cos(\beta_n \chi) d\chi \right\}
 \end{aligned}
 \tag{B.15}$$

$$\text{sendo: } \beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}
 \tag{B.16}$$

Uma equivalência entre os termos das equações da condução de calor unidimensional e das equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada é apresentada na tabela B.1.

**Tabela B.1: Equivalência entre os termos presentes na equação da condução de calor unidimensional e, nas equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada.**

Equação da Condução de Calor Unidimensional	Equação da Teoria da Poroelasticidade Acoplada Unidimensional
L	h
f(x)	p(0)
$\phi_2(t)$	0 (zero)
$\lambda$	0 (zero)
K	c
x	h-x
T	p

Utilizando-se a equivalência apresentada na tabela B.1:

$$p = \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n(h-x)] \quad (\text{B.17})$$

$$\text{sendo: } c = \frac{\kappa}{\left[ \frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{Q} \right]} \quad (\text{B.18})$$

Considerando-se o caso de uma coluna poroelástica, apresentado no capítulo 2, para o cálculo do recalque total do topo da coluna ( $u_0$ ) chega-se a:

$$u_0 = -\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (\text{B.19})$$

Utilizando-se a equação (B.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} [\alpha p - P] \quad (\text{B.20})$$

Aplicando-se o resultado (B.20) na equação (B.19):

$$u_0 = -\int_0^h \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} [\alpha p - P] dx \quad (\text{B.21})$$

Substituindo-se a solução (B.17) na equação (B.21):

$$u_0 = -\int_0^h \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[ \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n(h-x)] - P \right] dx \quad (\text{B.22})$$

Resolvendo-se a integral (B.22).

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[ Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_n h)}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{B.23})$$

Considerando-se o termo  $\sin^2(\beta_n h)$  na equação (B.23), o mesmo

apresentará sempre o valor unitário, de onde:

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[ Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{B.24})$$

Através do uso da equação (B.24), observa-se que para  $t=0$ , o recalque inicial será:

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[ Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \right] \quad (\text{B.25})$$

Segundo a referência (Spiegel, 1992):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4h^2}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{4h^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4h^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{h^2}{2} \quad (\text{B.26})$$

Utilizando-se o resultado (B.26) na equação (B.25):

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)h}{2G(1-\nu)} [P - \alpha p(0)] \quad (\text{B.27})$$

O recalque final, considerando-se um tempo muito grande ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)Ph}{2G(1-\nu)} \quad (\text{B.28})$$