UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente em Meios Visco-Elásticos 2D

Autor: **Luiz Henrique Thomazo**
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa**

05/2007

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente em Meios Visco-Elásticos 2D

Autor: **Luiz Henrique Thomazo**
Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Thomazo, Luiz Henrique
T368f	Formulação do método dos elementos de contorno indireto para resposta transiente em meios visco-elásticos 2D / Luiz Henrique Thomazo. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.
	Orientadores: Euclides de Mesquita Neto, Edson Antonio Capello Sousa.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Métodos de elementos de contorno. 2. Viscoelasticidade. 3. Interação solo-estrutura. 4. Máquinas – Fundações. I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Sousa, Edson Antonio Capello. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Formulation of transient response in 2D viscoelastic médium using indirect boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Boundary elements methods, Viscoelastic, Structure-soil interaction e Machinery foundations.
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Humberto Breves Coda e Paulo Sollero
Data da defesa: 27/02/2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente em Meios Visco-Elásticos 2D

Autor: **Luiz Henrique Thomazo**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

Co-Orientador: **Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa**

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Humberto Breves Coda
EESC/USP-São Carlos

Prof. Dr. Paulo Sollero
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 27 de Fevereiro de 2004.

200749650

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus queridos pais Paulo e Sônia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força e pelas pessoas que achou por bem fazerem parte da minha vida.

Também agradeço a todas as pessoas que me apoiaram e às instituições que prestaram seus suportes, aos quais gostaria de deixar gravada as minhas considerações e apreço:

Aos meus pais pelo incentivo e por estarem presentes em todos os momentos importantes da minha vida. Às minhas irmãs Nivea e Ana, pelo incentivo e constante apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, que não apenas fora sempre muito elucidativo, mas que também com seu indiscutível bom senso e conhecimento, nunca permitiu um iminente "naufrágio", resgatando sempre à tona, nos momento mais difíceis, o curso do trabalho.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa, que me apresentou e incentivou o meu ingresso neste caminho.

Aos meus amigos de todos os lugares e tempos, Diogo, Andréia, Caroline, Alex, Maion, Paula, Leonardo e Juan.

A todos os professores e colegas do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, que ajudaram de forma direta ou indireta na conclusão desta etapa do meu aperfeiçoamento.

Agradeço ao meu grupo de trabalho, Adolph. À minha "república", Ilson, Eder, Edmilson, Alex e Elson.

À CAPES pelo fomento financeiro para a realização deste trabalho.

O que faz andar o barco não é a vela enfunada,
mas o vento que não se vê.
(Platão)

Resumo

Thomazo, Luiz Henrique, *Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente em Meios Visco-Elásticos 2D*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 125 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta uma metodologia para a realização de análises dinâmicas estacionárias e transientes em domínios visco-elásticos limitados ou ilimitados, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno. São utilizados como estados auxiliares soluções não-singulares de problemas do semi-espaço e do espaço completo de meios visco-elásticos. Os estados visco-elásticos auxiliares são sintetizados numericamente, tanto no domínio da freqüência, como no domínio do tempo. Os mencionados estados auxiliares são constituidos das soluções em tensão e deslocamento resultantes de cargas espacialmente constantes, aplicadas sob segmentos lineares tanto na superfície de semi-espaços, como no interior de espaços completos. Inicialmente os estados auxiliares são sintetizados numericamente no domínio da freqüência, dando origem à análise de problemas estacionários. Na seqüência estados auxiliares transientes são obtidos a partir da aplicação da transformada de Fourier rápida (FFT) sobre os estados estacionários mencionados. Os estados auxiliares são utilizados para a síntese de uma versão não singular Indireta do MEC (MEC-I) tanto no domínio da freqüência quanto no domínio do tempo. No trabalho ainda é formulada e implementada a inclusão de um corpo rígido interagindo com o meio discretizado pelo MEC-I. O comportamento visco-elástico do contínuo é introduzido pelo princípio da correspondência e são analisados os modelos de histerése constante e de Kelvin-Voigt.

Palavras-chaves: Método dos Elementos de Contorno Indireto, Visco-elasticidade, Interação Solo-Estrutura, Análise Transiente.

Abstract

Thomazo, Luiz Henrique, *Formulation of Transient Response in 2D Viscoelastic Medium using Indirect Boundary Element Method.* Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 125 p. Dissertação (Mestrado).

The main purpose of the present work is to further develop a methodology to perform stationary and transient dynamic analysis of viscoelastic continua by the Boundary Element Method. Numerically synthetized stationary and transient, half-space and full-space auxiliary states are employed to render a non-singular implementation of the indirect version of the Boundary Element Method, IBEM.

The auxiliary states used in this word are displacement and traction components stemming from the solution two stress bounary value problems. A constant traction distribution applied at a linear segment over the viscoelastic half-space surface and at the interior of the viscoelastic full-space describe the solutions applied to formulate the BEM. The IBEM is formulated and implemented to render the dynamic solution of bounded and unbounded domains.

The interaction of the IBEM mesh with a massless rigid body is also formulated in the context of this work. Viscoelastic effects are included by means of the correspondence principle. The influence of the constant hysteresis and the Kelvin-Voigt damping models are studied.

Keywords: Indirect Boundary Element Method, Viscoelasticity, Dynamic Soil-structure Interaction, Transient Dynamic Analysis.

Sumário

Lista de Figuras **xii**

Lista de Tabelas **xv**

Nomenclatura **xvii**

1 Introdução **1**

1.1 Apresentação 1

1.2 Revisão Bibliográfica 2

1.2.1 Métodos Numéricos 2

1.2.2 Visco-Elasticidade 6

1.2.3 Resposta Transiente para o MEC 7

1.3 Objetivos e Descrição do Trabalho 8

2 Síntese de Estados Auxiliares no Domínio da Freqüência **11**

2.1 Elastodinâmica Estacionária 12

2.2 Visco-elasticidade Estacionária 13

2.3 Propagação de Ondas no Semi-Espaço 17

2.4 Validações das Soluções Fundamentais 20

2.4.1 Semi-Espaço 23

2.4.1.1 Carga Distribuída 23

2.4.1.2 Carga Concentrada 36
2.4.2 Espaço Completo 43
2.4.2.1 Carga Concentrada 43
2.4.2.2 Carga Distribuída 49

3 Síntese de Estados Auxiliares no Domínio do Tempo 57

3.1 Transformada de Fourier 58
3.2 Tratamento dos Estados Auxiliares no Domínio da Freqüência 59
3.3 Instabilidade na Solução no Domínio do Tempo 65

4 Incorporação das Condições de Corpo Rígido 67

4.1 Introdução 67
4.2 Condições de Corpo Rígido 68
4.2.1 Compatibilidade Cinemática 68
4.2.2 Equilíbrio de Forças 69
4.3 Superposição dos Efeitos das Soluções com Carregamento Distribuído na Superfície do Semi-espaço. 71
4.3.1 Equações Finais para Resposta em Deslocamento do Corpo Rígido no Domínio da Freqüência 73
4.3.2 Adimensionalização das Grandezas 74
4.4 Superposição no Domínio do Tempo 75
4.4.1 Equações Finais para o Corpo Rígido no Domínio do Tempo 77
4.5 Integral de Convolução por Aproximação Linear 79
4.6 Resultados Numéricos 87

5 Método dos Elementos de Contorno Indireto 93

5.1 Apresentação 93
5.2 Transformação de Coordenadas 95

5.3 Método dos Elementos de Contorno Indireto no Domínio da Freqüência . . . 97

5.3.1 Deslocamentos 98

5.3.2 Tensões 102

5.3.3 Relacionando: Tensão & Deslocamento 108

5.3.4 Validação do MEC-I Quase-Estático 109

5.4 Associação de Corpo Rígido no MEC-I 112

5.5 Resultados Numéricos 115

5.5.1 Colocação do problema 115

5.5.2 Resultados 116

6 Conclusão e Trabalhos Futuros **119**

Referências Bibliográficas **121**

Lista de Figuras

2.1 Modelos de amortecimentos adotados. 16

2.2 Semi-espaço com excitação normal. 17

2.3 Semi-espaço com excitação tangencial. 17

2.4 Fluxograma do Esquema de Validação. 21

2.5 Discretização dos pontos geométricos para validação. 21

2.6 Carregamento uniforme distribuído sobre o semi-espaço. 25

2.7 Caso 1 - Deslocamento em w_z no semi-espaço, carga distribuída. 26

2.8 Erro: Caso 1 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída. 26

2.9 Caso 2 - Deslocamentos em w_z no semi-espaço, carga distribuída. 27

2.10 Erro: Caso 2 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída. 27

2.11 Caso 3 - Deslocamentos em u_x no semi-espaço, carga distribuída. 28

2.12 Erro: Caso 3 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída. 28

2.13 Caso 4 - Deslocamentos em u_x no semi-espaço, carga distribuída. 29

2.14 Erro: Caso 4 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída. 29

2.15 Caso 1 - Tensões em σ_{xxx} no semi-espaço, carga distribuída. 32

2.16 Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída. 32

2.17 Caso 2 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga distribuída. 33

2.18 Erro: Caso 2 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída. 33

2.19 Caso 3 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga distribuída. 34

2.20 Erro: Caso 3 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída. 34

2.21 Caso 4 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga distribuída. 35
2.22 Erro: Caso 4 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída. 35
2.23 Caso 1 - Tensões em σ_{xxx} no semi-espaço, carga concentrada. 38
2.24 Caso 1 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga concentrada. 38
2.25 Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada. 39
2.26 Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada (Zoom). 39
2.27 Caso 2 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga concentrada. 40
2.28 Erro: Caso 2 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada. 40
2.29 Caso 3 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga concentrada. 41
2.30 Erro: Caso 3 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada. 41
2.31 Caso 4 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga concentrada. 42
2.32 Erro: Caso 4 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada. 42
2.33 Caso 1 - Tensões em σ_{xz} no espaço completo, carga concentrada. 44
2.34 Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga concentrada. 44
2.35 Caso 2 - Tensões em σ_{xx} no espaço completo, carga concentrada. 45
2.36 Erro: Caso 2 - Tensões no espaço completo, carga concentrada. 45
2.37 Caso 3 - Tensões em σ_{zz} no espaço completo, carga concentrada. 46
2.38 Erro: Caso 3 - Tensões no espaço completo, carga concentrada. 46
2.39 Caso 4 - Tensões em σ_{xz} no espaço completo, carga concentrada. 47
2.40 Erro: Caso 4 - Tensões no espaço completo, carga concentrada. 47
2.41 Caso 1 - Deslocamento em w_z no espaço completo, carga distribuída. 50
2.42 Erro: Caso 1 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída. 50
2.43 Erro: Caso 2 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída. 51
2.44 Erro: Caso 3 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída. 51
2.45 Erro: Caso 4 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída. 52
2.46 Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga distribuída. 52

2.47 Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga distribuída (Zoom). 53

2.48 Erro: Caso 2 - Tensões no espaço completo, carga distribuída. 53

2.49 Erro: Caso 3 - Tensões no espaço completo, carga distribuída. 54

2.50 Erro: Caso 4 - Tensões no espaço completo, carga distribuída. 54

3.1 Solução estacionária de deslocamento (G_{wz}). 61

3.2 Solução transiente (G_{wz}). 61

3.3 Instantes iniciais da solução transiente (G_{wz}). 62

3.4 Instantes finais da solução transiente (G_{wz}). 62

3.5 Transição da resposta estacionária para zero. 63

3.6 Modelos de amortecimento viso-elástico. 64

4.1 Relação entre o deslocamento do ponto x_3 (W, U) e o deslocamento de corpo rígido da fundação $\{u_v, u_h, \phi_y\}^T$. 68

4.2 Relação entre as forças de superfícies $t_z(x_i)$,$t_x(x_i)$ no ponto e as forças externas aplicadas na fundação $\{F_v, F_h, M_y\}^T$. 70

4.3 Superposição dos efeitos das funções de influência. 72

4.4 Superposição separadas em duas somas. 72

4.5 Integração com forma constante. 79

4.6 Integração com forma linear. 79

4.7 Esquema da convolução por aproximação linear. 82

4.8 Passos para cada instante da convolução. 83

4.9 Fundação rígida discretizada com 3 elementos. 87

4.10 Excitação externa vertical F_v - tipo pulso. 87

4.11 Deslocamento na direção z das soluções em freqüência e do sistema 1($CONV.\Delta t$) constante. 88

4.12 Deslocamento na direção z das soluções do sistema 1($CONV.\Delta t$) constante e do sistema 2($CONV$) constante. 89

4.13 Deslocamento na direção z das soluções do sistema $1(CONV.\Delta t)$ constante e do sistema $2(CONV)$ linear. 90

4.14 Comparação entre as soluções com a superposição no tempo para o sistema $1(CONV.\ \Delta t)$ constante x linear. 91

4.15 Instantes iniciais da comparação das soluções com a superposição no tempo para o sistema $1(CONV.\Delta t)$ constante x linear, (zoom). 91

4.16 Comparação das soluções com os resultados de Spyrakos & Antes e Spyrakos & Beskos. 92

5.1 Elemento no espaço 2D. 95

5.2 Componentes da matriz de transformação de coordenadas. 96

5.3 Semi-espaço com trincheira. 98

5.4 Carregamento na direção z no espaço completo. 99

5.5 Carregamento na direção x no espaço completo. 103

5.6 Representação gráfica da superfície no semi-espaço com carregamento vertical $t_z = 1$ no centro. 109

5.7 Comparação das soluções dos deslocamentos da superfície no semi-espaço - MEC-I e Gibson. 110

5.8 Erro da solução Wz obtida pelo MEC-I comparada com a literatura. 111

5.9 Deslocamento Uz, obtido pelo MEC-I. 111

5.10 Associação solo-estrutura. 112

5.11 Barra 2D engastada com excitação na extremidade. 115

5.12 Função Resposta em Freqüência e diagrama de fases do ponto A. 116

5.13 Representação do deslocamento estático e dos quatro primeiros modos da barra. 117

5.14 Representação do deslocamento estático e dos quatro primeiros modos da barra (Normalizados). 118

Lista de Tabelas

5.1 Propriedades físicas da barra. 116

Nomenclatura

Letras Latinas

a_j	-	Metade da largura da excitação local
u_i	-	Deslocamento no ponto i
x, z	-	Sistema de coordenadas local
$\overline{f}_p(j)$	-	Amplitude da Carga distribuída sobre o elemento j na direção p
Ao	-	Freqüência adimensional - $Ao = \frac{\omega.a_j}{Cs}$
C_p	-	Velocidade da onda de pressão no meio elástico
C_s	-	Velocidade da onda de cisalhamento no meio elástico
C_{ijkl}	-	Matriz constitutiva do material
CC	-	Matriz de compatibilidade cinemática
EQ	-	Matriz de equilíbrio de forças
E	-	Módulo de elasticidade
E_m	-	Erros em mínimos quadrado - Eq.(2.47)
$G = \mu$	-	Módulo de cisalhamento
G_{ij}	-	Funções de Green
N	-	Número de elementos
U_p^e	-	Deslocamento na direção $p = (x, z)$, do elemento e
X_i, Z_i	-	Coordenadas geométricas do nó (Global)
X, Z	-	Sistema de coordenadas global

Letras Gregas

ω	-	Freqüência circular	$[rad/s]$
ν	-	Coeficiente de Poisson do contínuo	
η	-	Coeficiente de amortecimento	
ρ	-	Densidade do contínuo	

Superescritos

T - Transposto
e - Número do elemento

Subscritos

i - Elemento que está sendo calculado
j - Elemento de aplicação do carregamento
n - normal
t - tangente
1 - Coordenada inicial do elemento
2 - Coordenada final do elemento

Abreviações

IDSS - Interação Dinâmica Solo-Estrutura
MEC - Método dos Elementos de Contorno
MEC-I - Método dos Elementos de Contorno Indireto
MEF - Método dos Elementos Finitos
DtN - Dirichlet-to-Neumann

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

O fenômeno de propagação de ondas tem sido estudado não apenas como mais um apelo científico, como diz a etimologia da palavra para dar conhecimento, mas por tratar-se de um fenômeno corrente no cotidiano de toda a humanidade, desde o simples ato de comunicar-se como, por exemplo, pela fala, até irreparáveis catástrofes provocadas por terremotos. Ter o conhecimento de tal fenômeno garante mais do que conforto, garante proteção, como por exemplo às obras de artes situadas em um museu localizado por algum infortúnio ao lado de uma linha de metrô.

Os problemas de propagação de ondas em domínios limitados ou ilimitados podem ser complexos, considerando-se meios heterogêneos, anisotrópicos, visco-elásticos, submetidos a excitação dinâmica e ainda ressaltando-se os casos que devem satisfazer a condição de radiação de Sommerferld. A solução de casos tão genéricos ainda é desconhecida para a matemática analítica. Porém, nos atuais dias consolida-se cada vez mais a técnica de soluções numéricas para os problemas físicos encontrados por pesquisadores e engenheiros.

Os métodos aplicados consistem em uma modelagem matemática e simulações computacionais, que substituem em muitos casos a utilização de protótipos e laboratórios para ensaios dos mesmos. Porém, os custos computacionais variam para cada método e problema estudado. Entretanto, estes custos financeiros podem ser bem amenos quando comparados com a pesquisa experimental. Já o custo do tempo de processamento é ainda um fator limitante, o que requer métodos matemáticos e implementações computacionais cada vez mais refinados. Além disso, os métodos numéricos não estão isentos de problemas de instabilidade

e erros nas soluções devido ao truncamento e arredondamento digital causados pelos limites computacionais.

As soluções numéricas estão proporcionando um grande avanço na ciência, seja no campo da química, física, matemática ou na junção de todas, na engenharia.

A solução transiente para meios visco-elásticos é oriunda de soluções sintetizadas numericamente, primeiramente no domínio da freqüência, e com uma técnica de transformação e tratamento, é finalmente determinada no domínio do tempo. Uma vez implementada a solução transiente para meios visco-elásticos, pode-se estudar a interação entre o meio visco-elástico e um corpo rígido, da qual faz parte a interação dinâmica solo-estrutura (IDSS).

Dois métodos podem ser citados para esta técnica de solução aproximada, que são os Métodos dos Elementos Finitos (MEF) e os Métodos dos Elementos de Contorno (MEC).

Adiante serão abordadas as vantagens e desvantagens dos dois métodos acima. Também será justificada a metodologia da criação de um domínio limitado com geometria genérica podendo ser visco-elástico, anisotrópico e interagindo com um corpo rígido. A solução transiente proposta neste trabalho é pré-requisito para que no futuro seja feito o acoplamento do MEC e do MEF em regime transiente, possibilitando o solução de problemas mais complexos como a não linearidade encontrada no estudo de casos de contato.

1.2 Revisão Bibliográfica

Seguindo o desenvolvimento feito na apresentação acima e, para melhor entendimento é atribuído um tratamento particularizado para os seguintes assuntos escolhidos: métodos numéricos; viscoelasticidade; resposta transiente para o MEC.

1.2.1 Métodos Numéricos

Deve-se salientar que, em geral, encontra-se uma grande dificuldade a realização da proposição na análise dinâmica de estruturas ou meios tridimensionais em que a distribuição de massa é considerada contínua, seja em domínios ilimitados ou limitados. A mesma dificuldade é também verificada para casos de análises bi-dimensionais em estado plano. As técnicas analíticas conhecidas são aplicáveis a poucos problemas. Em problemas de maior complexidade, a dificuldade ou ausência de solução analítica é substituída pelas técnicas numéricas, que podem ser divididas em duas vertentes:

a. pela aproximação contínua;

b. pela aproximação discreta.

Esta segunda (aproximação discreta) é representada neste texto pelos conhecidos MEC e MEF.

O método dos elementos finitos (MEF) já está bem consolidado, conforme pode ser visto em Bathe (1982), Hughes (1987), Cook, Malkus e Plesha (1989), Zienkiewicz e Morgan (1983), com grande disponibilidade de softwares comerciais produzidos por grandes empresas. O MEF também pode ser encontrado acoplado nos softwares de CAD além de diversas outras ferramentas de apoio à solução de problemas como: análise estrutural estática e dinâmica, elasticidade, visco-elasticidade, plasticidade, contato, acústica, magnetismo, eletricidade, transferência de calor e massa, termodinâmica, entre outros.

O MEF também proporciona inúmeras vantagens na área da mecânica dos sólidos, fornecendo soluções numéricas de análises de problemas lineares e não lineares, (BATHE, 1982).

Porém, este método exige uma grande capacidade de armazenamento e processamento computacional para problemas em três dimensões, ou mesmo em duas dimensões. Além disso, há casos de difícil aplicação do MEF em análises em que o domínio estende-se ao infinito, pois uma das características inerentes ao método consiste na malha ser finita (discretização do domínio). Esta dificuldade acarreta erros devido ao truncamento da malha, uma vez que sua formulação não satifaz as condições de radiação de Sommerferld, (BESKOS, 1987, 1997), refletindo a energia radiada na forma de ondas novamente para dentro do domínio. Esta limitação pode ser verificada principalmente nos problemas elastodinâmicos, onde ocorre o fenômeno da propagação de ondas. Por exemplo, no solo existem ondas que se propagam para o infinito sem serem refletidas e que carregam consigo energia retirada do meio, fenômeno este chamado de amortecimento geométrico. Quando utiliza-se o modelo dinâmico no meio contínuo através de uma malha finita, as bordas da malha (truncamento) provocam a reflexão de ondas. Algumas tentativas foram feitas a fim de se adaptar o método para estas soluções. Uma análise do problema dinâmico em meios infinitos e das limitações do MEF podem ser encontradas em Richart, Hall e Woods (1970), Hadjian, Luco e Tsai (1974), Luco e Hadjain (1974). A solução de maior sucesso foi apresentada por Bettes (1977), desenvolvendo os chamados elementos infinitos no âmbito do MEF. Um trabalho mais recente no campo da análise vibro-acústica, também utilizando o MEF e o mapeamento DtN (Dirichlet-to-Neumann) para tratar domíninios ilimitados, foi apresentado por Zavala (1999).

Uma alternativa para se tratar problemas de propagação de ondas em meios infinitos é o método dos elementos de contorno (MEC) que foi inicialmente aplicados a problemas elastoestático e potencial. Os trabalhos de Rizzo (1967), Cruse e Rizzo (1968), Cruse (1968) foram pioneiros a solucionar problemas elastodinâmicos transientes bidimensionais, em que o semi-espaço elástico com cargas transientes é formulado no domínio transformado de Laplace, utilizando o MEC. Nestes trabalhos os resultados no domínio do tempo são obtidos através da técnica de inversão numérica da transformada de Laplace proposta por Papoulis (1957).

O MEC tornou-se uma eficiente ferramenta computacional para outras áreas da mecânica aplicada, como a elastodinâmica. Por exemplo, Manolis e Beskos (1981) estudaram o efeito da concentração de tensões dinâmicas em uma cavidade plana, Mansur (1983) propôs uma formulação direta no tempo para problemas transientes bi-dimensionais, utilizando um algoritmo passo-à-passo no tempo para obter a resposta transiente. Rizos e Karabalis (1994), utilizaram o MEC no domínio do tempo para a análise de problemas em três dimensões, seguindo a solução de Stokes para espaços infinitos. Coda e Venturini (1995a) apresentaram melhoras na solução elastodinâmica transiente, minimizando o efeito das singularidades das soluções fundamentais transientes. Neste trabalho foi implementada uma solução fundamental no domínio do tempo modificada, a fim de melhorar a estabilidade do algoritmo numérico.

Enquanto o MEF calcula soluções aproximadas de equações diferenciais no domínio, o MEC apenas aproxima as soluções no contorno resolvendo uma equação integral no contorno (KANE, 1994).

No MEC, formulado com o auxílio de um estado auxiliar adequado, a discretização requerida é apenas do contorno, reduzindo assim as dimensões dos problemas em uma dimensão, ou seja, no caso de problemas de três dimensões é possível representá-lo através de uma superfície, no caso de duas dimensões sua representação se dá em uma linha e para uma dimensão é possível sua representação por pontos escalares. Esta característica vem a ser uma vantagem no caso de problemas complexos (malhas extensas), exigindo um menor tempo de preparação dos dados de entrada que o requerido pelo MEF.

Uma vez que a formulação do MEC está baseada em equações integrais e funções matemáticas com singularidades, torna-se mais difícil sua assimilação e mesmo sua implementação computacional, que também é agravada com o armazenamento de matrizes não simétricas e cheias, diferentemente do MEF, que possui matrizes simétricas em bandas.

A modelagem matemática do MEC é mais indicada para problemas de meios homogêneos. Para meios heterogêneos se faz necessário a discretização do domínio em sub-domínios ou sub-

estruturas, assim como no caso do MEF. Esta semelhança faz com que uma das vantagens mais interessante do MEC, que é a discretização apenas do contorno, seja eliminada no tratamento de meios fortemente heterogêneos.

Para se transformar as equações diferenciais (EqDif) que governam o problema sob análise em um conjunto de equações integrais de contorno (EIC), sem integrais de domínio, as quais, por sua vez darão origem ao Método dos Elementos de Contorno, são necessários dois elementos básicos. O primeiro é um estado auxiliar, que é a solução de um problema regido pelo mesmo operador diferencial, mas submetido a condições de contorno específicas ou particulares. O segundo elemento é uma identidade integral, capaz de relacionar o estado auxiliar àquele que representa a solução do problema a ser resolvido. Na análise de meios elásticos, as identidades integrais mais utilizadas são a segunda identidade de Green ou o teorema da reciprocidade de Betti. Assim, por exemplo, a solução de um problema elástico e anisotrópico requer um estado auxiliar elástico e anisotrópico. Um problema visco-elástico transiente exige um estado auxiliar visco-elástico e transiente.

A obtenção desses estados auxiliares tem demandado esforços de muitos pesquisadores, já sendo conhecidas para muitos dos casos clássicos. Alguns estados auxiliares como os estados auxiliares elastodinâmicos para solos anisotrópicos contínuos e estacionários podem ser encontrados nos trabalhos de Wang e Rajapakse (1991), Wang e Achenbach (1995), Saez (1997), Barros (1997). Os estados auxiliares em meios poroelásticos são encontrados em Rajapakse e Sentjuntichai (1993). Por fim, para meios piezzo-eléctricos indica-se o trabalho de Daros (1999).

Spyrakos e Beskos (1986) obtiveram, com a utilização do MEC no domínio do tempo, a resposta de uma fundação rígida engastada em um solo homogêneo e submetida ao carregamento dinâmico transiente bem como às ondas sísmicas incidentes na fundação.

Spyrakos e Antes (1986) solucionaram o mesmo problema descrito acima com o método dos resíduos ponderados, o qual demanda menos tempo de cálculo que o realizado por Spyrakos e Beskos (1986) que utiliza o método da reciprocidade. Neste último trabalho é feita uma melhora na formulação anteriormente publicada por Antes (1985).

Contudo, para a análise de problemas não lineares o MEF se encontra em melhores condições de aplicação. Natural, se observarmos que o tempo de difusão e desenvolvimento do método já vem de longa data.

Ambos os métodos apresentados acima possuem vantagens e desvantagens. Desta forma a utilização de um método que conseguisse unir as vantagens do MEC e do MEF poderia solucionar uma gama ainda maior de problemas que os solucionados pelos métodos isolada-

mente. Esta idéia do acoplamento entre o MEC e o MEF foi sugerida por Zienkiewicz, Kelly e Bettess (1979), sendo este um dos trabalhos pioneiros na área.

Um exemplo de sua aplicação é para o caso em que existem dois ou mais domínios com características diferentes. Tais como a homogeneidade e não homogeneidade, comportamento linear e não linear, domínio finito e domínio infinito. Na discretização de cada domínio seria usado o método que melhor o descreve. A Interação Dinâmica Solo Estrutura (IDSS) é uma aplicação prática do que poderia ser tratada pelo acoplamento do MEC e MEF. Neste caso, a estrutura, um domínio de malha finita que pode ser heterogênea, poderia ser modelada pelo MEF, já o solo, que se estende ao infinito e que se enquadra em um meio homogêneo, seria tratado pelo MEC.

As formulações para o problemas de IDSS devem também considerar em que tipo de domínio, se no domínio do tempo ou no domínio da freqüência, se realizará a sua solução, pois trata-se de um problema dinâmico no qual alguns tipos de problemas só é possível representar no domínio do tempo, como é o caso da aplicação de cargas transientes que variam ao longo do tempo.

1.2.2 Visco-Elasticidade

A visco-elasticidade é intrínseca ao material e ao seu comportamento diante de diversas condições às quais o mesmo é submetido (temperatura, tensão, vibração, etc). Pode-se entender por visco-elasticidade como relaxamento das tensões sem que haja mudança na deformação.

A visco-elasticidade linear pode ser modelada matematicamente substituindo-se a relação constitutiva da elasticidade linear por uma relação constitutiva complexa conforme apresentado por Mesquita (1989). Assim, no domínio do tempo as relações constitutivas (Lamé) são integrais de convolução, enquanto que no domínio da freqüência apenas um produto. A incorporação dos efeitos da visco-elasticidade pode ser realizada no domínio da freqüência através do princípio da correspondência (CHRISTENSEN, 1982) da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(\omega) = C^{*}_{ijkl}(\omega)\,\varepsilon_{kl}(\omega) \tag{1.1}$$

sendo C^{*}_{ijkl} as constantes elásticas complexas dependentes da freqüência (ω) que relacionam as tensões σ_{ij} com os deslocamentos ε_{kl}. Portanto, no caso elástico tem-se um módulo de elasticidade E com a parte real. Já para o caso da visco-elasticidade tem-se um módulo de elasticidade complexo E^{*}, como mostra a equação (1.2). Tratando-se de uma análise no domínio da freqüência com função de um fator de amortecimento $\eta(\omega)$ dependente da

freqüência e contida na parte imaginária do parâmetro, o princípio da correspondência permite escrever:

$$E^* = E\left(1 + i\eta\left(\omega\right)\right) \tag{1.2}$$

Isto permite que muitas funções de amortecimento sejam analisadas, até mesmo um sinal obtido experimentalmente.

Os efeitos da visco-elasticidade foram introduzidos nas equações de elementos finitos para regime estacionário, submetido a um estado plano de deformação por Mesquita, Sousa e Pontes (1994a, 1994b). Na formulação de elementos de contorno a consideração dos efeitos de visco-elasticidade é embasada nos tensores de Stokes, onde são utilizadas constantes complexas nas equações constitutivas. Naquele trabalho foram analisados problemas de interação solo estrutura e isolamento de ondas através do uso de trincheiras.

1.2.3 Resposta Transiente para o MEC

Alguns estudos apresentados acima foram realizados diretamente no domínio do tempo. A grande maioria dos pesquisadores privilegiam esta forma de obtenção de solução para que possam num passo seguinte acrescentar aos seus métodos a solução de problemas não lineares.

No entanto, a resposta transiente pode ser conseguida de uma outra forma, através da solução do problema estacionário. Já a solução dos problemas não lineares pode ser inserida em um momento posterior a obtenção da resposta transiente obtida através da solução estacionária, ou seja, a obtenção da resposta transiente independe da técnica numérica de modelagem (SOUSA, 1999). Pode-se citar três alternativas para a obtenção da resposta transiente:

a. Determinação da solução harmônica seguida pela reconstituição da resposta transiente usando síntese de Fourier;

b. Solução do problema no domínio transformado de Laplace, seguido de uma transformação inversa para obter a resposta no domínio do tempo;

c. Formulação no domínio do tempo e solução em conjunto com esquema de integração direta no tempo. Sendo que este terceiro caso pode abranger o procedimento para soluções não lineares.

Nas duas primeiras alternativas apresentadas acima (a. e b.), propõe-se solucionar o problema estacionário no domínio da freqüência e no domínio transformado de Laplace, respectivamente. Particularmente no caso (a.), obtém-se as resposta estacionária no domínio da freqüência e de posse deste estado auxiliar é possível obter a resposta transiente aplicando-se a IFFT, segundo a metodologia apresentada por (ADOLPH; MESQUITA; ROMANINI, 2001). Pode-se também, utilizar o estado auxiliar estacionário para obter a solução de problemas envolvendo a interação de corpos rígidos com um meio e posteriormente aplicar a IFFT para obter a resposta transiente deste problema. Alternativamente, pode-se obter a solução transiente do problema de interação do corpo rígido com o meio, incorporando a formulação do corpo rígido diretamente nas soluções transientes.

Estas duas alternativas para a solução transiente com a incorporação de corpo rígido serão mostradas ao longo do trabalho, com a distribuição que pode ser vista na seção seguinte.

1.3 Objetivos e Descrição do Trabalho

Este trabalho tem por objetivo contribuir para a realização de análises dinâmicas estacionárias e transientes em domínios visco-elásticos limitados ou ilimitados, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno. No presente trabalho serão utilizados como estados auxiliares soluções não-singulares de problemas do semi-espaço e do espaço completo de meios visco-elásticos. Os estados visco-elásticos auxiliares são sintetizados numericamente, tanto no domínio da freqüência, como no domínio do tempo.

Os mencionados estados auxiliares são constituidos das soluções em tensão e deslocamento resultantes de cargas espacialmente constantes, aplicadas sob segmentos lineares tanto na superfície de semi-espaços, como no interior de espaços completos. Inicialmente os estados auxiliares são sintetizados numericamente no domínio da freqüência, dando origem à análise de problemas estacionários. Na seqüência estados auxiliares transientes são obtidos a partir da aplicação da transformada de Fourier rápida (FFT) sobre os estados estacionários mencionados.

Os estados auxiliares são utilizados para a síntese de uma versão não singular Indireta do MEC (MEC-I) tanto no domínio da freqüência quanto no domínio do tempo. No trabalho ainda é formulada e implementada a inclusão de um corpo rígido interagindo com o meio discretizado pelo MEC-I. O comportamento visco-elástico do continuo é introduzido pelo princípio da correspondência e são analisados os modelos de histerése constante e de Kelvin-Voigt.

No capítulo 2 é apresentada de forma simplificada a síntese de um estado auxiliar no domínio da freqüência seja no semi-espaço ou no espaço completo, abrangendo as metodologias para acrescentar efeitos visco-elásticos. Também são validados os programas gerados por Barros (1997) e por Romanini (1995), quando possível comparando-se com casos estático encontrado na literatura. Os estados auxiliares usados neste trabalho são oriundas destes programas.

No capítulo 3 é discutida a obtenção da resposta transiente a partir das soluções estacionárias, através da transformada de Fourier rápida (FFT) para meios visco-elásticos no semi-espaço (ADOLPH, 2002). Também são mostrados os problemas envolvidos no tratamento do sinal e seus efeitos.

No capítulo 4 é apresentada uma metodologia para sintetizar a resposta transiente de uma fundação rígida 2D interagindo com o solo visco-elástico modelado no semi-espaço. A instabilidade da resposta transiente é discutida, (THOMAZO; MESQUITA, 2003). Um exemplo é validado com os resultados transientes obtidos por Spyrakos e Antes (1986), Spyrakos e Beskos (1986).

No capítulo 5 é feita a formulação do MEC-I no domínio da freqüência. A solução é validada para o caso quase-estático comparando-se com a solução da literatura. É também apresentado um caso numérico clássico que é o caso da barra engastada com uma excitação na extremidade. Este exemplo é usado para validar o método desenvolvido.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros, tendo em vista o aperfeiçoamento e a continuidade do presente trabalho.

Capítulo 2

Síntese de Estados Auxiliares no Domínio da Freqüência

Estados auxiliares visco-elásticos tem sido sintetizados numericamente no domínio da freqüência para o semi-espaço e o espaço completo em meios homogêneos isotrópicos 2D e 3D conforme atestam os trabalhos de (ROMANINI, 1995; MESQUITA; PONTES, 1992; SOUSA; BARROS; MESQUITA, 1999). Para solos isotrópicos com leito rígido e meios transversalmente isotrópicos os estados podem ser encontrados em Mesquita e Barros (1999), Barros (1997). Os estados auxiliares estão presentes nos núcleos das equações integrais e contém em sua formulação as características do problema, como o meio que está sendo estudado, espaço completo ou semi-espaço, elástico, visco-elástico, homogêneo, isotrópico e assim por diante.

Quando o estado auxiliar é originado por uma distribuição delta de Dirac aplicado no interior do espaço completo, o estado auxiliar é chamado de solução fundamental do problema. Se uma condição de contorno mais restrita é prescrita o estado auxiliar é chamado de "Função de Green".

Os estados auxiliares dependem não apenas do meio, mas também do tipo de carga aplicada. A carga pode ser pontual ou distribuída, modelada no espaço completo ou no semi-espaço. No presente trabalho, os estados auxiliares são sintetizados numericamente e possuem um custo computacional razoavelmente elevado.

Neste capítulo é mostrado, de forma resumida, uma seqüência de procedimentos para obtenção de estados auxiliares para meios visco-elásticos, isotrópicos, homogêneos e contínuos, submetidos a uma excitação harmônica distribuída na superfície.

2.1 Elastodinâmica Estacionária

Da teoria da elasticidade tem-se que a equação de equilíbrio estático em um corpo (Ω) submetido a um estado de tensão:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \quad \text{(i,j=1,2)} \tag{2.1}$$

Acrescentando-se um termo devido as propriedades inerciais do sistema, pode-se obter a equação de equilíbrio dinâmico escrita na forma:

$$\rho u_{i,tt} = \sigma_{ij,j} + f_i \qquad \text{em} \quad \Omega \tag{2.2}$$

As forças de superfície do corpo podem ser encontradas por:

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \tag{2.3}$$

A relação entre deslocamento e deformação dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.4}$$

As equações constitutivas que relacionam as tensões com as deformações pode ser expressa pela equação:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{2.5}$$

onde λ e μ são as chamadas constantes de Lamé.

Assim, com o auxílio das equações de equilíbrio que relacionam as forças de corpo e de superfície com as tensões mais as relações entre os deslocamentos e a deformação, juntamente com as equações constitutivas é possível encontrar a equação de Navier que governa a solução do problema dada em função do deslocamento:

$$\mu u_{i,tt} + \left(\lambda + \mu\right) u_{j,ji} + f_i + \rho \omega^2 u_i = 0 \tag{2.6}$$

onde,

- ρ é a densidade de massa;
- f_i são as forças de corpo por unidade de volume;
- n_j é o vetor normal ao contorno Γ;

- t_i é a força na superfície;

- σ_{ij} é o tensor de tensões;

- ε_{ij} é o tensor de deformação;

- $u_{i,j} e u_{j,i}$ são as velocidades dos pontos i e j, respectivamente, nas direções j e i ;

- $u_{i,tt}$ é a derivada segunda do deslocamento u_i em relação ao tempo, ou seja, a aceleração.

Para obter a solução do sistema no domínio da freqüência, ou seja, no regime estacionário, assume-se uma variação harmônica do tipo:

$$f\left(t\right) = \overline{f} \cdot e^{i\omega t} \tag{2.7}$$

sendo $\overline{f}$ a amplitude do carregamento e ω a freqüência circular da excitação. Com isso tem-se que a resposta também pode ser escrita como uma função harmônica dada por:

$$u\left(t\right) = \overline{u} \cdot e^{i\omega t} \tag{2.8}$$

Substituindo-se as equações (2.8) e (2.7) na equação (2.6) é possível obter a solução da seguinte forma:

$$S(\omega)\overline{u} = \overline{f} \tag{2.9}$$

Esta equação também é conhecida como resposta em freqüência, sendo $S(\omega)$ o termo que representa a rigídez dinâmica ou impedância global do sistema, também chamada de função de transferência.

2.2 Visco-elasticidade Estacionária

De posse das equações de equilíbrio das condições iniciais e de contorno para o caso elastodinâmico é possível adicionar a dissipação de energia interna e com isso obter um modelo visco-elastodinâmico estacionário.

É mostrado abaixo o procedimento apenas para coordenada x, pois para a direção y o procedimento é análogo.

A equação de equilíbrio na direção x é escrita como:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

A equação constitutiva visco-elástica (CHRISTENSEN, 1982) é definida por:

$$\sigma_{ij} = \int_0^t G_{ijkl}\left(t-\tau\right)\frac{\partial \varepsilon_{kl}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.11}$$

A equação (2.11) está escrita em notação indicial, onde $G_{ijkl}\left(t\right)$ é denominada função de relaxação em função do tempo. Esta função é a responsável pela relaxação das tensões sem que haja mudança das deformações, daí a atribuição de seu nome.

Pode-se ainda escrever as deformações em função das tensões, dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t J_{ijkl}\left(t-\tau\right)\frac{\partial \sigma_{kl}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.12}$$

Na equação (2.12), tem-se $J_{ijkl}\left(t\right)$ que é a função de fluência, encontrada na plasticidade e também chamada de função de "creep".

Usando a dilatação volumétrica de deformação e_{ij} e o tensor desviador S_{ij}

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\left(\delta_{ij}\cdot\varepsilon_{kk}\right) \qquad e_{ii} = 0 \tag{2.13}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\left(\delta_{ij}\cdot\sigma_{kk}\right) \qquad S_{ii} = 0 \tag{2.14}$$

pode-se então desacoplar a função de relaxação e a de fluência em outras duas funções de relaxação, dadas pelas equações (2.15) e (2.16), e duas funções de fluência, dadas pelas equações (2.17) e (2.18), ambas independentes, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1\left(t-\tau\right)\frac{\partial e_{ij}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.15}$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2\left(t-\tau\right)\frac{\partial e_{kk}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.16}$$

$$e_{ij} = \int_{-\infty}^t J_1\left(t-\tau\right)\frac{\partial S_{ij}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.17}$$

$$e_{kk} = \int_{-\infty}^t J_2\left(t-\tau\right)\frac{\partial S_{kk}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.18}$$

Assim, defini-se a relação tensão-deformação isotrópica visco-elástica por:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\int_{-\infty}^t \lambda\left(t-\tau\right)\frac{\partial \varepsilon_{kk}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau + 2\cdot\int_{-\infty}^t \mu\left(t-\tau\right)\frac{\partial \varepsilon_{ij}\left(\tau\right)}{\partial \tau}d\tau \tag{2.19}$$

Na equação (2.19) aparecem as funções de relaxação ($\lambda\left(t-\tau\right)$ e $\mu\left(t-\tau\right)$) apropriadas ao problema da visco-elasticidade e também o delta de Kronecker (δ_{ij}).

Por definição, da teoria da elasticidade linear isotrópica, sabe-se que a relação deformação-deslocamento é dada como sendo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.20}$$

Expandindo-se os índices das equações (2.19) e (2.20) para o tratamento bi-dimensional, e fazendo as adequadas substituições na equação de equilíbrio (2.10), pode-se escrever:

$$\int_{-\infty}^{t} \mu\left(t-\tau\right) \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{t} \left[\mu\left(t-\tau\right) + \lambda\left(t-\tau\right)\right] \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right)}{\partial \tau} d\tau + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \tag{2.21}$$

A equação de equilíbrio para o problema visco-elástico transiente linear está agora caracterizado pela equação (2.21). Ressaltando que esta equação está escrita apenas para os termos de deslocamentos na direção x. Como já fora dito antes, para a coordenada na direção y é o mesmo procedimento.

Deve-se também observar que a equação (2.21) está escrita no domínio do tempo, trazendo consigo alguns inconvenientes, como as integrais de convolução. Para evitar estas dificuldades, utiliza-se o subterfúgio de escrever o problema no domínio da freqüência, conforme sugerido nos trabalhos de Mesquita (1989), Sousa (1992), Romanini (1995), Barros (1997) e Barros (2001).

Assim, para passar do domínio do tempo para o domínio da freqüência defini-se uma excitação harmônica de acordo com a equação:

$$F_x\left(\overrightarrow{x}, t\right) = \overline{F}_x \cdot e^{i\omega t} \tag{2.22}$$

e aplica-se a transformada de Fourier na equação (2.21).

A equação da visco-elastodinâmica estacionária, é então dada por:

$$\mu^*\left(i\omega\right)\left(\frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}_y}{\partial y^2}\right) + \left[\mu^*\left(i\omega\right) + \lambda^*\left(i\omega\right)\right]\left(\frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}_y}{\partial x \partial y}\right) + \overline{F}_x = -\rho\omega^2 \overline{u}_x \tag{2.23}$$

Deve-se observar que $\overline{u}_x$ é função das coordenadas x, y e da freqüência ω.

$$\overline{u}_x = \overline{u}_x\left(\overrightarrow{x}, \omega\right) \tag{2.24}$$

$$\overrightarrow{x} = (x, y) \tag{2.25}$$

É possível escrever a equação (2.23) na forma de notação indicial, como:

$$\mu^* (i\omega) \cdot \overline{u}_{i,jj} + [\mu^* (i\omega) + \lambda^* (i\omega)] \cdot \overline{u}_{k,ki} + \overline{F}_i = -\rho\omega^2 \overline{u}_i \tag{2.26}$$

As constantes de Lamé complexas são μ^* e λ^*, definidas como:

$$\mu^* (i\omega) = \mu \cdot (1 + i\eta_\mu (\omega)) \tag{2.27}$$

$$\lambda^* (i\omega) = \lambda \cdot (1 + i\eta_\lambda (\omega)) \tag{2.28}$$

Onde μ e λ são constantes de Lamé reais encontradas na teoria da elasticidade, já definidas anteriormente. Nestas constantes a parte real é responsável pelo comportamento elástico e a parte imaginária pela perda de energia (amortecimento interno).

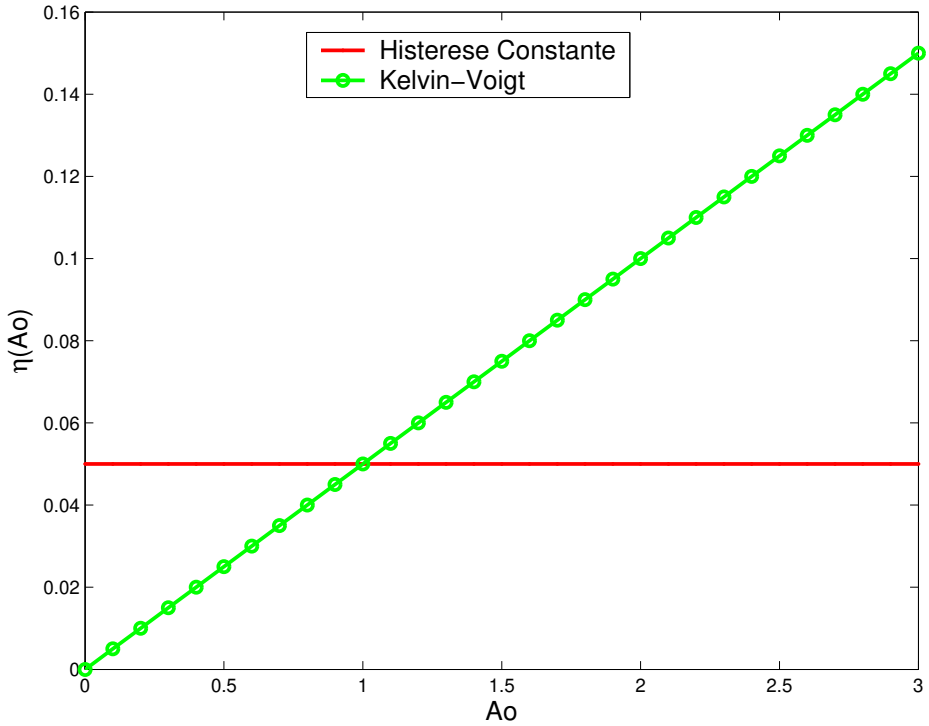

Figura 2.1: Modelos de amortecimentos adotados.

Os coeficientes de amortecimento (η_μ e η_λ) podem ser obtidos experimentalmente ou pode-se assumir uma função associada a um modelo visco-elástico. No entanto não pertence ao escopo deste trabalho o estudo destas funções de amortecimento. No presente trabalho as análises limitam-se a dois casos: o modelo de histerése constante de amortecimento, dada pela equação:

$$\eta_\lambda (\omega) = \eta_\mu (\omega) = \eta \tag{2.29}$$

e o modelo de Kelvin-Voigt o qual é representado pela equação:

$$\eta_\lambda(\omega) = \eta_\mu(\omega) = \omega \cdot \eta \tag{2.30}$$

O modelo de Kelvin-Voigt varia linearmente com a freqüência, favorecendo a obtenção através da síntese numérica dos estados auxiliares. Os modelos utilizados também podem ser vistos na figura 2.1.

As equações (2.29) e (2.30) admitem a simplificação dos coeficientes de amortecimentos serem iguais, o que é plausível de acordo com Mesquita (1989), onde mostra que para coeficientes de Poisson reais, ou seja, $\upsilon \epsilon \mathbb{R}$, os coeficientes de amortecimento η_μ e η_λ são iguais.

2.3 Propagação de Ondas no Semi-Espaço

Apesar de ter encontrado a equação da visco-elastodinâmica estacionária, dada pela equação (2.26), para o problema visco-elástico isotrópico linear em regime estacionário, ainda é necessário encontrar a solução do estado auxiliar. Para isso, deve-se inserir as condições de contorno, as quais no presente caso podem ser escritas em função da tensão, caracterizando um problema de valor de contorno das tensões (PVC-tensões).

O primeiro estado auxiliar a ser sintetizado é um semi-espaço, visco-elástico, sujeito a um carregamento normal (t_z) e um tangencial (t_x) aplicado na superfície, tal como mostrado nas figuras 2.2 e 2.3. Assume-se o estado plano de deformações.

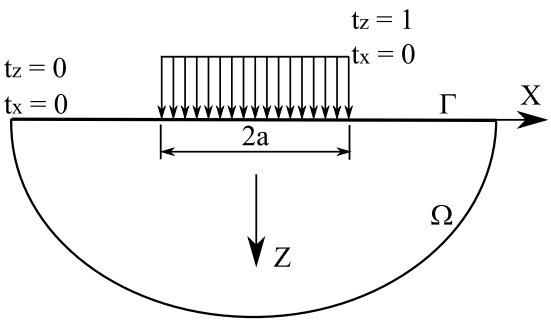

Figura 2.2: Semi-espaço com excitação normal.

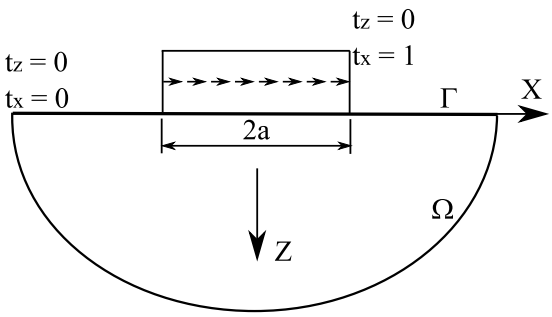

Figura 2.3: Semi-espaço com excitação tangencial.

O Semi-espaço é formado de uma superfície livre onde aplica-se uma excitação harmônica, alternando na direção horizontal e depois na direção vertical. Desta forma, a obtenção de

uma solução para uma carga em qualquer direção é conseguida fazendo uma composição das duas soluções encontradas pela alternância da direção do carregamento.

As condições de contorno para a excitação vertical (normal) é dada por:

$$\overline{\sigma}_{ozz}\left(x, z=0\right) = \begin{cases} t_z = -\overline{\sigma}_{zz} & ; \quad |x| \leq a \\ 0 & ; \quad |x| > a \end{cases} \tag{2.31}$$

assim como para a carga horizontal (tangêncial), as condições de contorno são dadas por:

$$\overline{\sigma}_{ozx}\left(x, z=0\right) = \begin{cases} t_x = -\overline{\sigma}_{zx} & ; \quad |x| \leq a \\ 0 & ; \quad |x| > a \end{cases} \tag{2.32}$$

Neste problema tem-se a propagação de ondas no semi-espaço, a qual pode ser representada pela velocidade de onda de cisalhamento (C_s) e pela velocidade de onda de dilatação (C_p). Essas velocidades de onda estão relacionadas com as propriedades do meio. Sabe-se do estudo das propagações de ondas que com o aumento da rigidez tem-se também o aumento das velocidades das ondas no meio. As velocidade de pressão e de cisalhamento para o meio visco-elástico, são dadas por:

$$C_p^* = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2 \cdot \mu^*}{\rho}}; \tag{2.33}$$

$$C_s^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}}; \tag{2.34}$$

Os números de ondas complexos são escritos como:

$$k_p^* = \sqrt{\frac{\omega^2}{C_p^*}}; \tag{2.35}$$

$$k_s^* = \sqrt{\frac{\omega^2}{C_s^*}}; \tag{2.36}$$

A solução completa do PVC-tensões esboçado pode ser encontrado no trabalho de Romanini (1995). As etapas da solução incluem a determinação de funções de flexibilidade para o semi-espaço, no domínio do numero de ondas β. Considerando que as funções de flexibilidade são para a carga aplicada na direção vertical, tem-se:

$$\overline{H}_{wz}\left(\beta\right) = \frac{\alpha_1 \cdot \left(\beta^2 - \alpha_2^2\right)}{\mu^* \cdot F_{Ray}\left(\beta\right)} \tag{2.37}$$

$$\overline{H}_{uz}(\beta) = \frac{i \cdot \beta \left[(\beta^2 - \alpha_2^2) - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2\right]}{\mu^* \cdot F_{Ray}(\beta)} \tag{2.38}$$

Já para as funções de flexibilidade para o carregamento na direção horizontal, tem-se:

$$\overline{H}_{ux}(\beta) = \frac{\alpha_2 \cdot (\beta^2 - \alpha_2^2)}{\mu^* \cdot F_{Ray}(\beta)} \tag{2.39}$$

$$\overline{H}_{wx}(\beta) = -\frac{i \cdot \beta \left[(\beta^2 - \alpha_2^2) - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2\right]}{\mu^* \cdot F_{Ray}(\beta)} \tag{2.40}$$

Nas equações das funções de flexibilidade acima as variáveis α_1 e α_2, podem ser escritos em função dos números de ondas complexos k_p^*, k_s^* e do numero de ondas β, da seguinte forma:

$$\alpha_1 = \sqrt{\beta^2 - k_1^{*2}}; \tag{2.41}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^{*2}} \tag{2.42}$$

A função de freqüência de Rayleigh F_{Ray}, também encontrada nas equações das funções de flexibilidade, é escrita como (ROMANINI, 1995) :

$$F_{Ray}(\beta) = \left(2 \cdot \beta^2 - k_2^{*2}\right)^2 - 4 \cdot \beta^2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \tag{2.43}$$

Finalmente, as equações que correspondem aos deslocamentos no regime estacionário para os carregamentos verticais e horizontais sobre o semi-espaço visco-elástico, são apresentadas por:

$$\overline{W}_p(x) = \frac{\overline{\sigma}_{zp}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{H}_{wp}(\beta) \cdot sen(\beta a)}{\beta} \cdot e^{i\beta x}\, d\beta \tag{2.44}$$

$$\overline{U}_p(x) = \frac{\overline{\sigma}_{zp}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{H}_{up}(\beta) \cdot sen(\beta a)}{\beta} \cdot e^{i\beta x}\, d\beta \tag{2.45}$$

Onde o subscrito p deve ser substituído pelas direções x,z do carregamento. As integrais presentes na respostas são sintetizadas numericamente. Estas soluções em deslocamento são obtidas pela integração numérica das equações (2.44) e (2.45) e serão discutidas mais adiante.

2.4 Validações das Soluções Fundamentais

No presente Capítulo foi apresentado de forma simplificada um exemplo para obtenção dos estados auxiliares. No entanto, muitas outras formulações seguem a rotina apresentada, ou mesmo, derivam desta, como é o caso do estudo de estados auxiliares 3D de superfície apresentadas por Mesquita (1989). Há também formulações para meios considerando-se a estratificação horizontal (ROMANINI, 1995).

Uma formulação bastante completa para meios transversalmente isotrópicos, com carga concentradas e distribuídas, no semi-espaço e no espaço completo, tanto na superfície quanto no interior foi apresentada por Barros (1997) em sua tese de doutorado. Este trabalho gerou um programa denominado *Wingreen*, que é usado na presente dissertação, principalmente para as soluções no semi-espaço.

Outro programa usado neste trabalho como fonte de estados auxiliares para o espaço completo é o programa gerado por Romanini (1995), que denominaremos de apenas *Romanini*.

O uso de dois programas é justificado pois o programa *Wingreen* esta compilado e não possuímos o código fonte do programa, o que não ocorre com o programa do *Romanini*, para o qual temos acesso ao código fonte. Estes programas fornecem soluções em termos de deslocamentos e tensões. Como estes estados auxiliares irão formar os núcleos do MEC-I, é necessário que se faça uma validação dos mesmos.

Para validação destes programas, foi montado um esquema apresentado pela figura 2.4. Este esquema foi montado pois não é encontrado na literatura solução analítica para o modelo visco-elastodinâmico que está sendo tratado neste trabalho. Portanto, compara-se o caso quase-estático encontrado para uma freqüência próxima de zero nos programas que fornecem os estados auxiliares estacionário com o caso estático quando encontrado na literatura.

Três referências foram usadas para comparação: Gibson (1967), Poulos e Davis (1974) e Crouch e Starfield (1983).

A seqüência da validação segue o esquema da figura 2.4, com exceção do último bloco que será apresentado em um momento oportuno, no capítulo que contém a formulação do MEC-I.

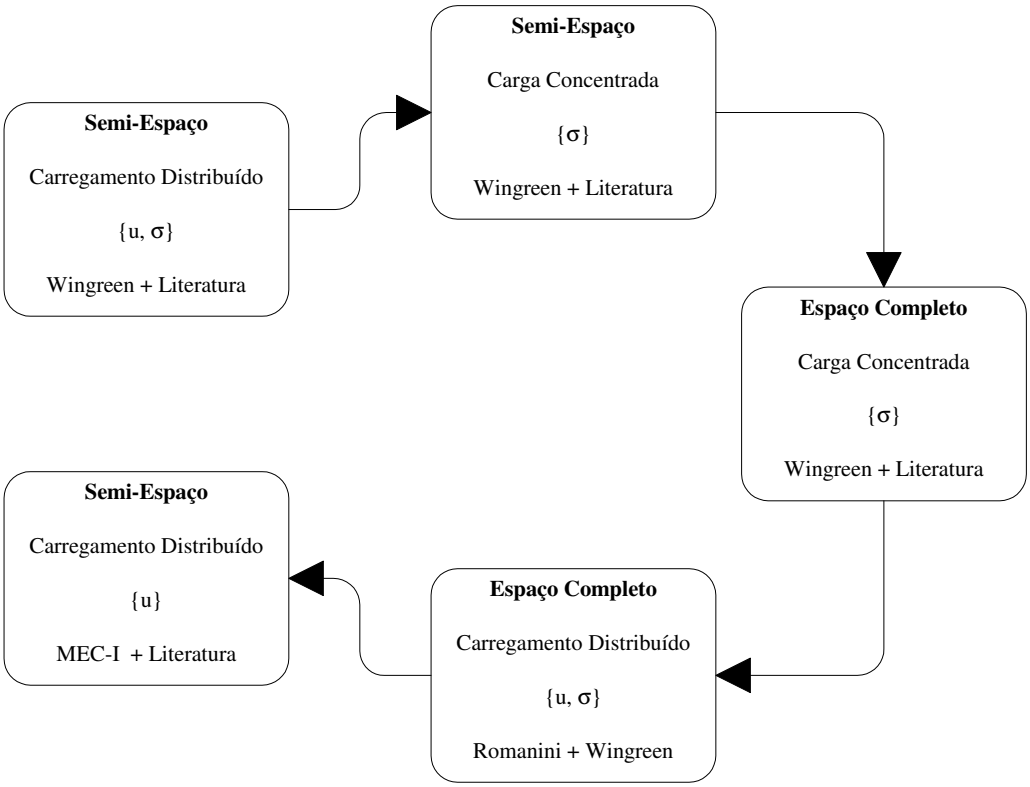

Figura 2.4: Fluxograma do Esquema de Validação.

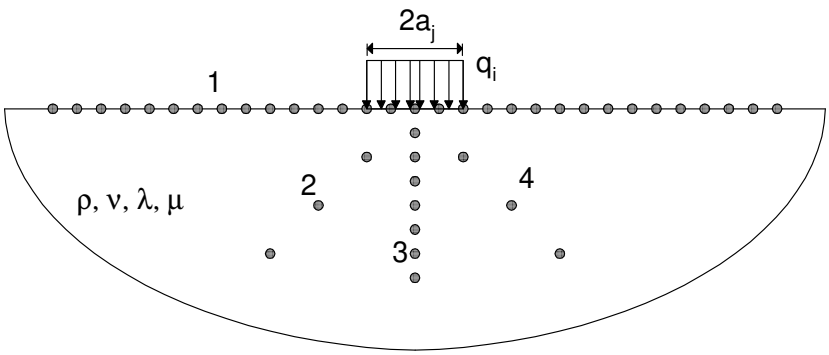

Figura 2.5: Discretização dos pontos geométricos para validação.

O fluxograma da figura 2.4 indica a seqüência que seguirá a validação. Primeiramente são validados os deslocamentos e as tensões obtido do programa *Wingreen* para o semi-espaço com carregamento distribuído. Em seguida, também para o semi-espaço são validadas as tensões obtidas do programa *Wingreen* para a carga concentrada. As tensões do espaço completo obtidas pelo programa *Wingreen* com carga concentrada é validado na terceira etapa do fluxograma. Na quarta etapa é validado os deslocamentos e tensões para o espaço completo com carregamento distribuído comparando-se as soluções obtidas dos programas *Wingreen* e o programa do *Romanini*. Finalmente, a última etapa apresenta a validação dos deslocamentos para o semi-espaço com carregamento distribuído obtidos pelo MEC-I, cuja validação será apresentada em um capitulo posterior como já foi dito.

Parâmetros Adotados

Para esta validação foram escolhidos quatro conjuntos de pontos espaciais, que podem ser vistos na figura 2.5.

Identificados os conjuntos de pontos como:

Caso 1) $X(-15; 15; 0,25) \quad Z(0) \quad [m]$;

Caso 2) $X(-5; -1; 1) = -Z(-5; -1; 1) \quad [m]$;

Caso 3) $X(0) \quad Z(0; 15; 0,25) \quad [m]$;

Caso 4) $X(1; 5; 1) = Z(1; 5; 1) \quad [m]$;

As coordenadas dos pontos estão escritas acima na respectiva seqüência: do ponto inicial ao ponto final com o passo do ultimo valor. Além das coordenadas dos pontos calculados, outras constantes também são relevantes. São elas:

- $q_i = 1$ Amplitude do carregamento por unidade de área nas direções $i = (x, z) \quad [N/m^2]$;
- $G = 1$ Módulo de cisalhamento $[N/m^2]$;
- $\upsilon = 0,4$ Coeficiente de Poisson;
- $b = a_j = 1$ Semi-largura da excitação $[m]$;
- $E = 2G(1 + \upsilon)$ Módulo de elasticidade $[N/m^2]$;
- η Modelo visco-elástico constante para os valores (0,01; 0,05 e 0,1);

Freqüência Adimensional A_O

As freqüências quase-estáticas utilizadas nos estados auxiliares, foram A_O = 0,1; 0,05 e 0,01.

A freqüência adimensional é definida pela equação (2.46), sendo: ω a freqüência circular dada em $[rad/s]$, a_j a semi-largura do carregamento em $[m]$, e C_s a velocidade de propagação de onda de cisalhamento em $[m/s]$.

$$A_O = \frac{\omega \cdot a_j}{C_s} \tag{2.46}$$

Para o cálculo de erro entre as respostas comparadas foi adotado o erro mínimo quadrado dado por:

$$E_m = \sqrt{|V_L^2 - V_N^2|} \tag{2.47}$$

onde V_L^2 é o valor encontrado na literatura e V_N^2 o valor calculado numericamente.

2.4.1 Semi-Espaço

No semi-espaço serão validados os estados auxiliares do programa *Wingreen*, com os resultados encontrados na literatura, para o caso de um semi-espaço sujeito a carga concentradas (POULOS; DAVIS, 1974) e para o carregamento distribuído(GIBSON, 1967).

2.4.1.1 Carga Distribuída

São encontrados resultados tanto para as tensões (σ_{ij}) quanto para os deslocamentos (w_z, u_x). Os deslocamentos podem ser escritos conforme as equações (2.48) e (2.53).

Segundo Gibson (1967), para um semi-espaço homogêneo, isotrópico elástico, sob o carregamento distribuído, tem-se:

$$\begin{aligned} w_z(x,z) - w_z(0,0) = \frac{-qb}{2\pi G}\Bigg\{ & \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{b}\right) log\left[\frac{z^2+(b+x)^2}{b^2}\right] + \cdots \\ & \cdots + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{b}\right) log\left[\frac{z^2+(b-x)^2}{b^2}\right] + \frac{z}{b}tan^{-1}\left(\frac{b+x}{z}\right) + \frac{z}{b}tan^{-1}\left(\frac{b-x}{z}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.48}$$

O deslocamento para o semi-espaço 2D deve ser calculado retirando o deslocamento de um ponto de referência. Adota-se então o deslocamento de referência como sendo o deslocamento

da origem $w(0,0)$. Observando que para os casos (2 e 4) foram retirados os deslocamentos do ponto mais externo. Estes casos contém poucos pontos e apenas foram aplicados para verificar principalmente os sinais das soluções no interior do meios e fora dos eixos de coordenadas.

As variáveis da equação (2.48) são definidas por:

- w_z é o deslocamento na direção z devido ao carregamento na mesma direção;
- b é a semi-largura do carregamento;
- q é a amplitude do carregamento uniforme distribuído;
- x, z são as coordenadas geométricas;
- G é o módulo de cisalhamento;

Uma vez que Gibson (1967) adotou o coeficiente de Poisson $\upsilon = 0,5$, é preciso corrigir a equação (2.48) para qualquer Poisson. Também de acordo com Gibson (1967) tem-se as tensões, dadas por:

$$\sigma_{xx} = 2G\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi e\right] \tag{2.49}$$

$$\sigma_{zz} = 2G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \varphi e\right] \tag{2.50}$$

$$\sigma_{xz} = G\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \tag{2.51}$$

sendo a dilatação:

$$e = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.52}$$

e onde $\varphi = \upsilon/(1-2\upsilon)$ é uma constante elástica auxiliar em função do coeficiente de Poisson.

As equações para as tensões e deslocamentos para a superfície (POULOS; DAVIS, 1974), são dadas por:

$$w_z(x,0) = \frac{2q(1-\upsilon^2)}{\pi \cdot E}\left[(x-b)ln|x-b| - (x+b)ln|x+b| + 2b \cdot ln(b)\right] \tag{2.53}$$

As tensões resultantes do carregamento vertical (q_z) são dadas por:

$$\sigma_{zz} = \frac{q_z}{\pi}\left[\alpha + sen(\alpha) \cdot cos(\alpha + 2\delta)\right] \tag{2.54}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{q_z}{\pi}\left[\alpha - sen(\alpha) \cdot cos(\alpha + 2\delta)\right] \tag{2.55}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{q_z}{\pi} \cdot sen(\alpha) \cdot sen(\alpha + 2\delta) \tag{2.56}$$

As tensões para o carregamento horizontal (q_x) são dadas por:

$$\sigma_{xx} = \frac{q_x}{\pi} \left[log_e \frac{R_1^2}{R_2^2} - sen(\alpha) \cdot sen(\alpha + 2\delta) \right] \tag{2.57}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{q_x}{\pi} \left[sen(\alpha) \cdot sen(\alpha + 2\delta) \right] \tag{2.58}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{q_x}{\pi} \left[\alpha - sen(\alpha) \cdot cos(\alpha + 2\delta) \right] \tag{2.59}$$

Os ângulos α e δ, bem como as distâncias R_1 e R_2, podem ser identificados na figura 2.6. As demais variáveis das equações de Poulos e Davis (1974) já foram definidas anteriormente para Gibson (1967).

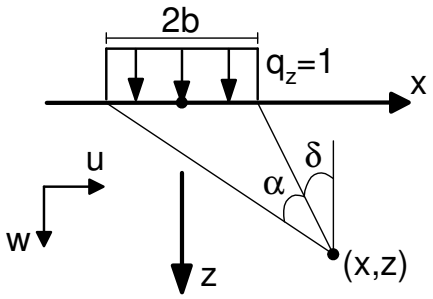

Figura 2.6: Carregamento uniforme distribuído sobre o semi-espaço.

Os deslocamentos horizontais devido ao carregamento também horizontal (u_x) segue a mesma expressão que para o deslocamento vertical devido ao carregamento vertical, ou seja:

$$u_x = w_z \tag{2.60}$$

A seguir, são apresentados os resultados em gráficos com os erros de todas as soluções para o caso (conjunto de pontos espaciais) e devido a equação (2.60) apenas uma figura com a curva de uma das soluções como exemplo do seu comportamento.

Salientando-se que o erro é sempre calculado com a solução para freqüência adimensional $A_O = 0,01$, que é a freqüência calculada mais próxima da freqüência estática. E ainda, nos gráfico dos erros são apresentados tanto os erros dos deslocamentos $u_x(A_O = 0,01)$ quanto os de $w_z(A_O = 0,01)$.

Os resultados dos deslocamentos são apresentados primeiro e em seguida os resultados das tensões.

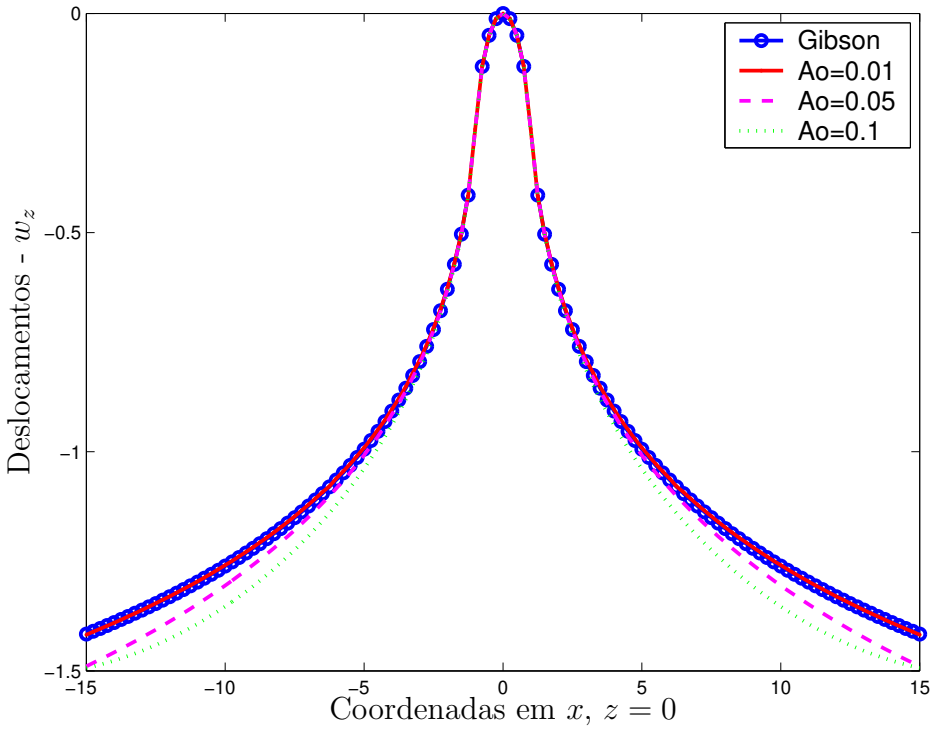

Figura 2.7: Caso 1 - Deslocamento em w_z no semi-espaço, carga distribuída.

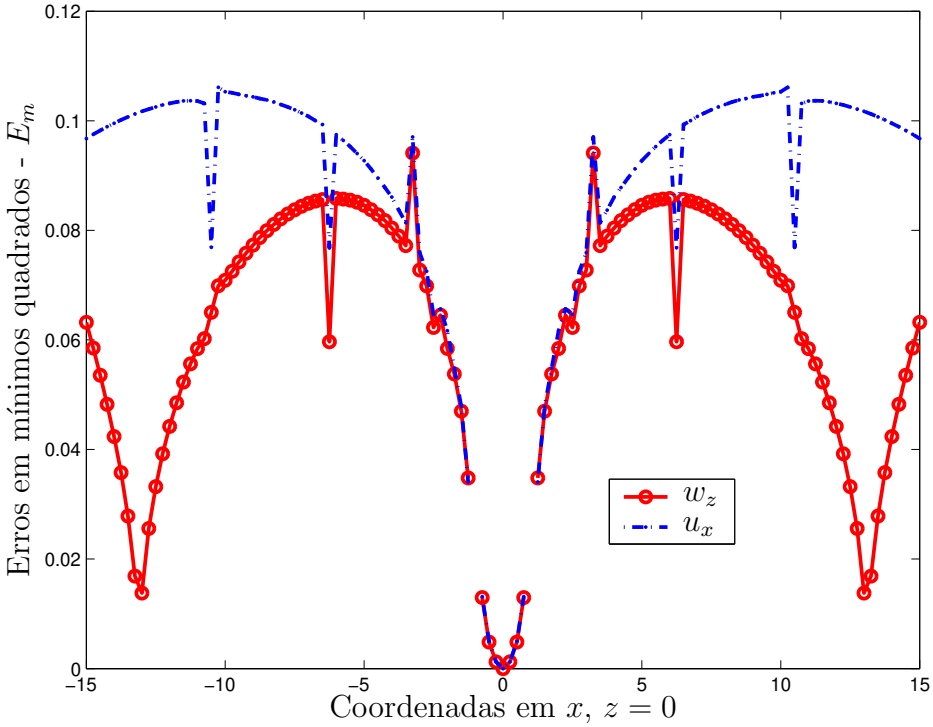

Figura 2.8: Erro: Caso 1 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída.

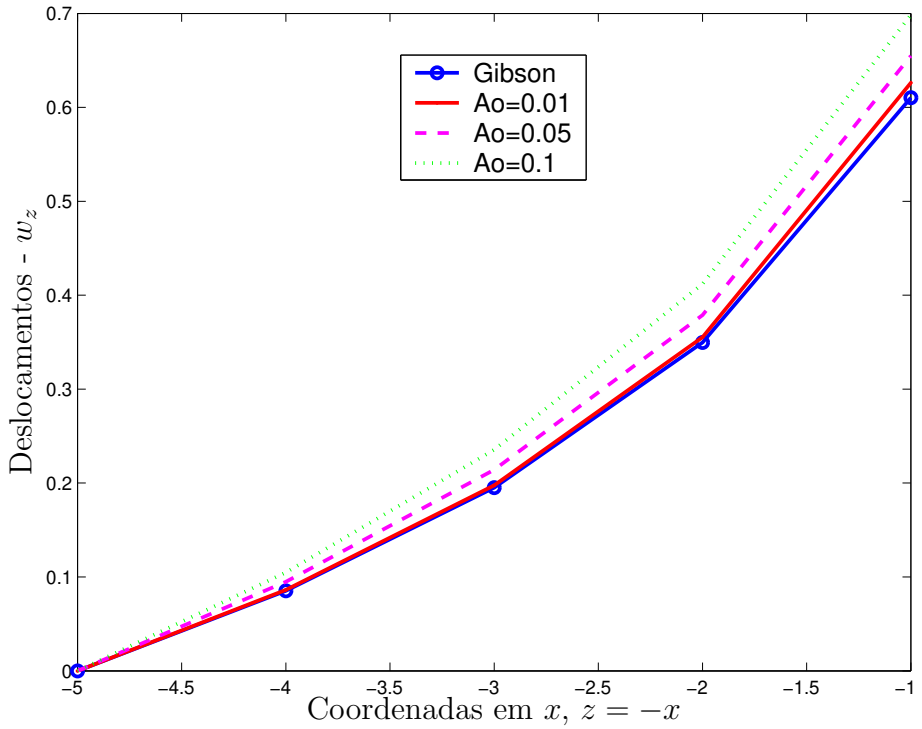

Figura 2.9: Caso 2 - Deslocamentos em w_z no semi-espaço, carga distribuída.

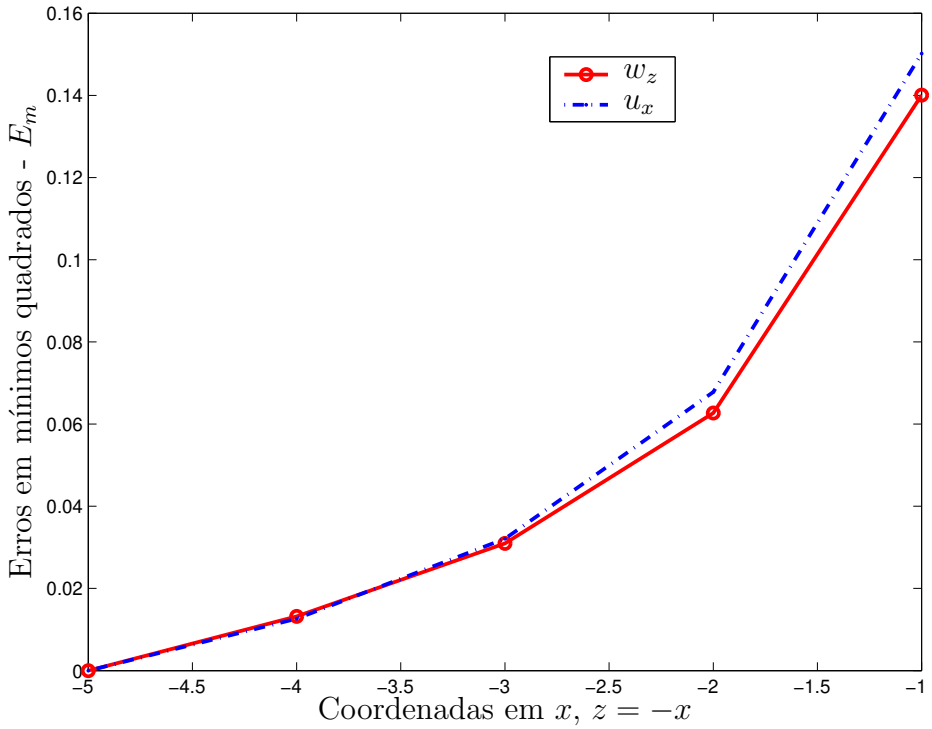

Figura 2.10: Erro: Caso 2 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída.

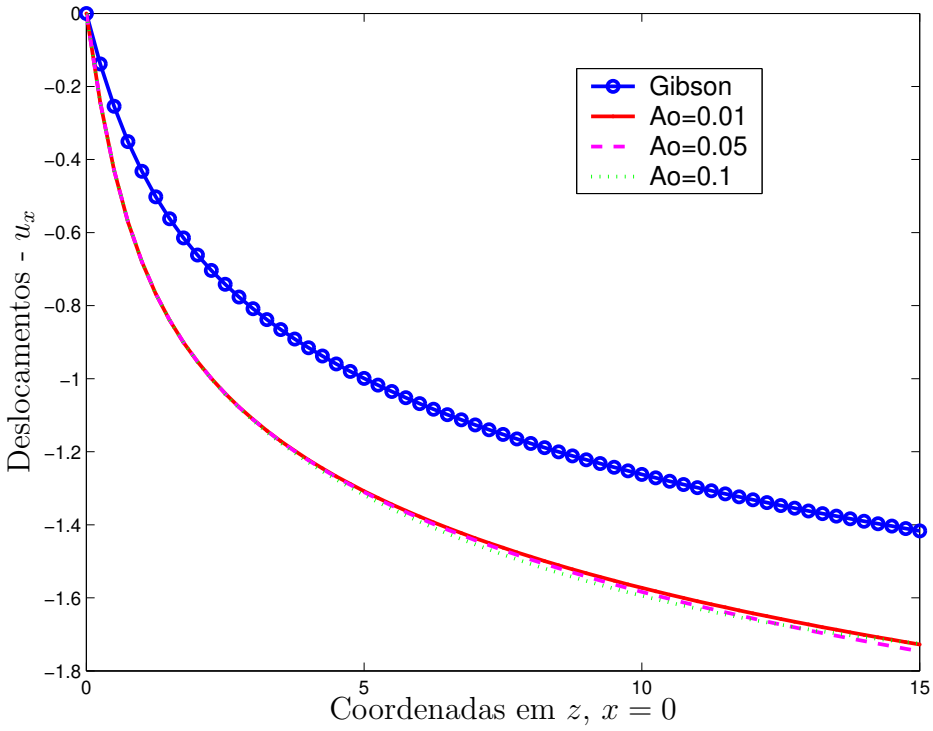

Figura 2.11: Caso 3 - Deslocamentos em u_x no semi-espaço, carga distribuída.

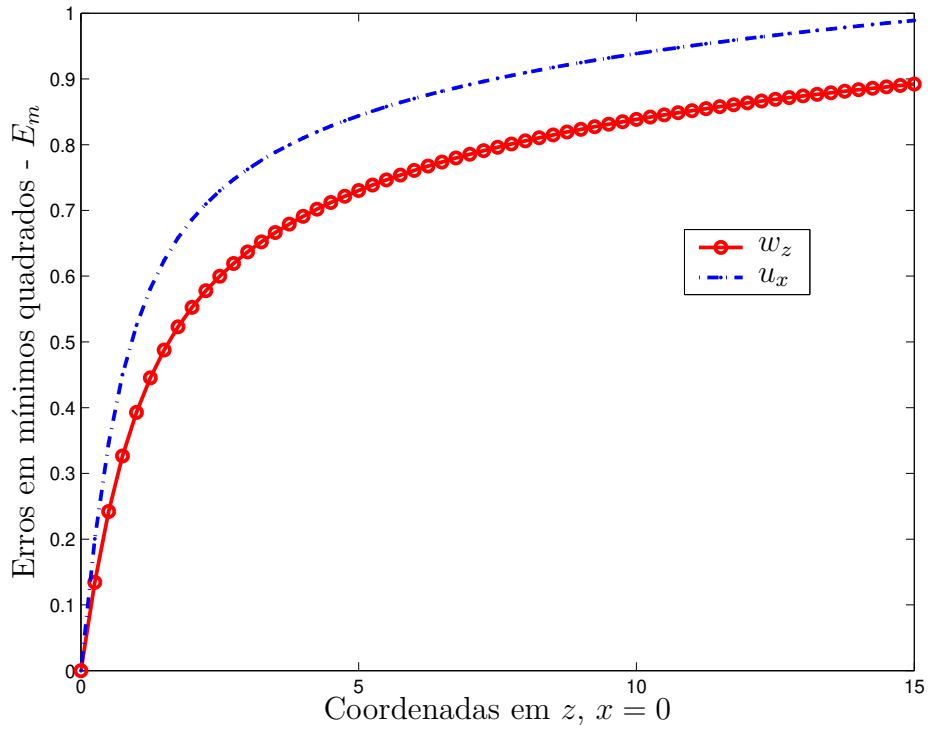

Figura 2.12: Erro: Caso 3 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída.

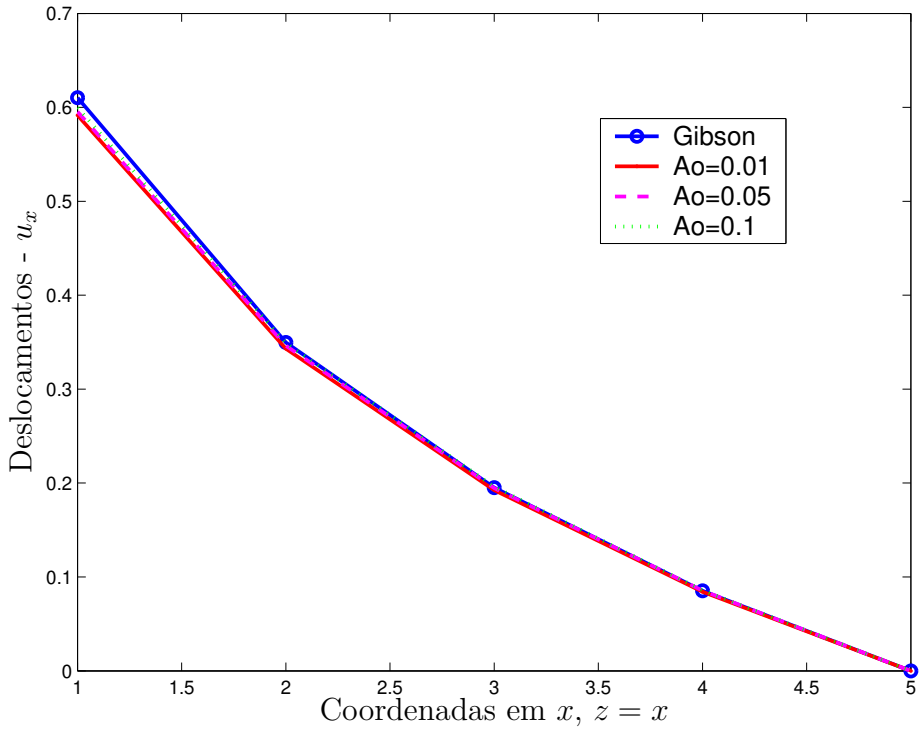

Figura 2.13: Caso 4 - Deslocamentos em u_x no semi-espaço, carga distribuída.

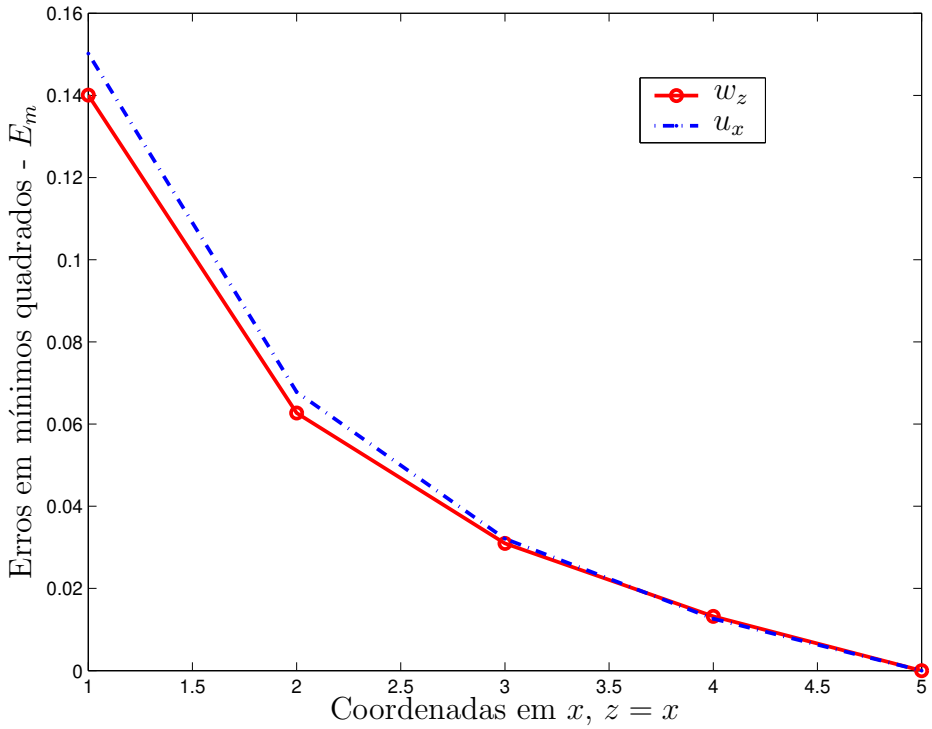

Figura 2.14: Erro: Caso 4 - Deslocamentos no semi-espaço, carga distribuída.

O erro apresentado na forma de mínimos quadrados é bastante interessante, pois além de fornecer um valor quantitativo do desvio de uma curva em relação à outra, fornece a forma que uma curva está variando em relação à outra curva. A figura 2.8 é um bom exemplo disto. Observa-se que o deslocamento da solução numérica para $A_O = 0,01$ oscila em torno da solução analítica. O que é válido pois observando a figura 2.7 tem-se os deslocamentos W_z para as freqüências adimensionais $A_O = 0,05$ e $A_O = 0,1$ com oscilações maiores que para a freqüência $A_O = 0,01$, que aparenta estar sobreposta à resposta de deslocamento analítica. No entanto, o erro apresentado na figura 2.8 mostra que as curvas não são perfeitamente ajustados, apresentando um pequeno erro. As duas interrupções que são observadas nas curvas do gráfico do erro são devido aos pontos coincidentes com a extremidade da excitação distribuída, onde há uma singularidade na solução.

Já para o Caso 2 são apresentados poucos pontos para a formação das curvas da solução. No entanto observa-se na figura 2.9 que a solução numérica tendeu à solução analítica a medida que se reduziu a freqüência. Conforme mostra a figura 2.10. Nas figuras 2.12 e 2.11 são apresentados os erros e o deslocamento U_x, respectivamente. Com a metade do número de pontos que o Caso 1, o Caso 3 mostra um comportamento das soluções e dos erros bem melhor que o Caso 2. Onde, apesar de não haver um ajuste das curvas na figura 2.11 com a solução analítica, seu comportamento mostra uma convergência tanto na solução dos deslocamentos quanto dos erros. Por fim, no Caso 4, semelhante ao ocorrido para o Caso 3, há uma boa aproximação das curvas das soluções numéricas com a solução analítica, conforme mostrada na figura 2.13 e comprovada pelos baixos valores de erros apresentados na figura 2.14. E ainda, comparando-se as figuras 2.13 e 2.9 verifica-se a simetria das soluções. Esta comparação é possível tendo por base a equação (2.60).

Em todos os quatro gráficos de erros, figuras 2.8, 2.10, 2.12 e 2.14, a solução dos deslocamentos na direção U_x e carregamento na mesma direção x apresentaram um erro pouco maior que os deslocamentos W_z.

É importante lembrar que todos os gráficos das soluções, sejam de deslocamentos ou de erros, estão em função das coordenadas espaciais dos conjuntos de pontos escolhidos para cada caso.

Na apresentação dos resultados das tensões os gráficos dos erros contém os resultados dos erros de seis componentes de tensão (σ_{zzz}, σ_{xxx}, σ_{xzz}, σ_{xzx}, σ_{zzx} e σ_{xxz}).

Para o caso das tensões os erros são ainda menores que os encontrados para o deslocamentos. A figura 2.16 mostra os erros das componentes de tensão para freqüência adimensional $A_O = 0,01$ em relação às soluções de tensões fornecidas por Poulos e Davis (1974). A curva

que apresenta maior erro é a para solução da componente de tensão σ_{xxx}, ou seja, a componente σ_{xx} devido a carga na direção x, o último índice refere-se a direção do carregamento. Esta componente apresenta um aumento do seu erro à medida que se aproxima da singularidade, "embaixo"do carregamento esse comportamento é invertido e seu erro, portanto, diminui enquanto se aproxima do centro do carregamento. Na figura 2.15 é mostrada a solução para a tensão, a componente σ_{xxx}, para as várias freqüências e a solução analítica. As curvas apresentam boa concordância, exceto nos pontos externos do carregamento onde está localizada a singularidade da solução.

Na figura 2.18, para os erros do Caso 2, são verificados erros bastantes baixos, sendo possível ver na figura 2.17 uma boa aproximação da solução para freqüência $A_O = 0,01$. A figura 2.20 mostra os erros para o Caso 3, onde como ocorrido para os deslocamentos do mesmo Caso, o erro também aumenta conforme se afasta da superfície, porém logo há uma redução dos erros seguida de um comportamento convergente. As curvas com as componentes de tensão σ_{zzz}, comparada com a solução analítica apresentam uma boa aproximação mesmo para as freqüência maiores que $A_O = 0,01$, apresentadas na figura 2.19. Novamente, assim como verificado para os deslocamentos, o Caso 4 apresenta simetria com as soluções apresentadas para o Caso 3, ver figura 2.21, resultando nos mesmo baixos valores de erros apresentados na figura 2.22.

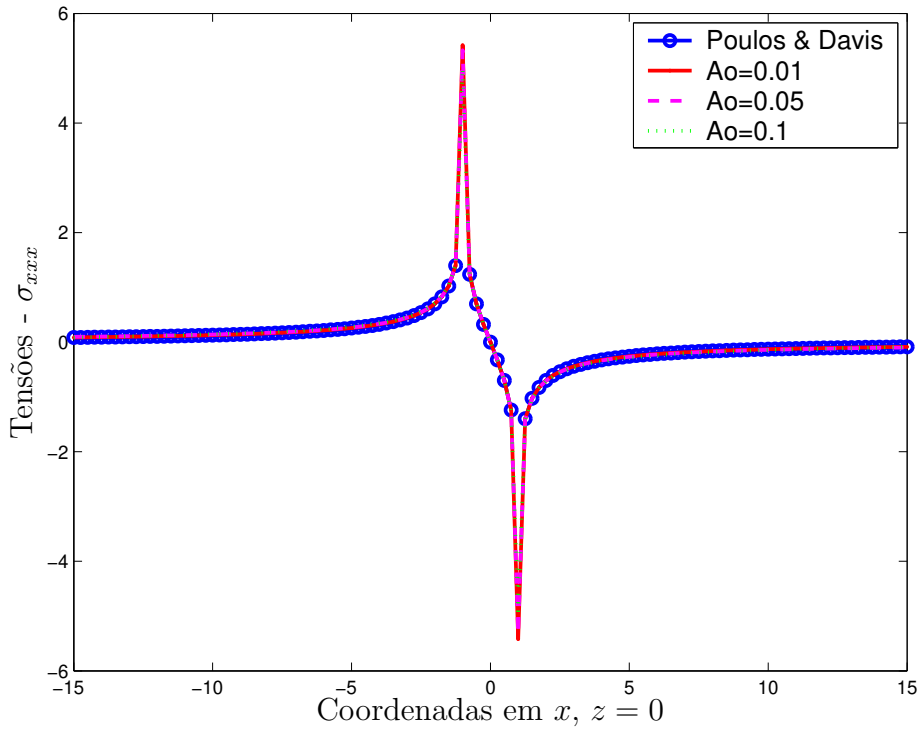

Figura 2.15: Caso 1 - Tensões em σ_{xxx} no semi-espaço, carga distribuída.

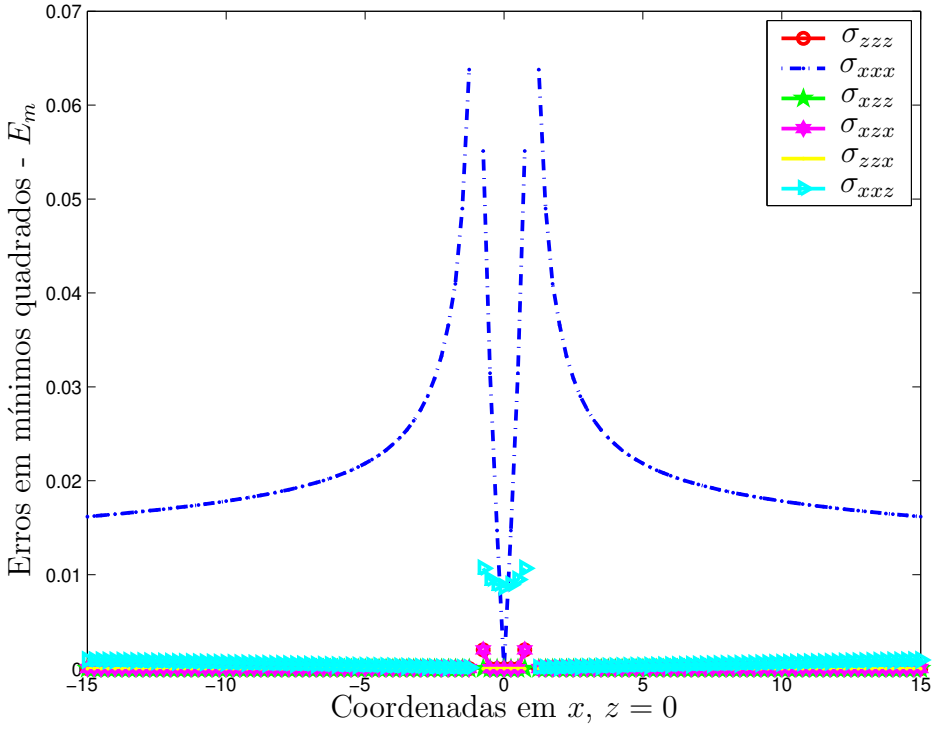

Figura 2.16: Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída.

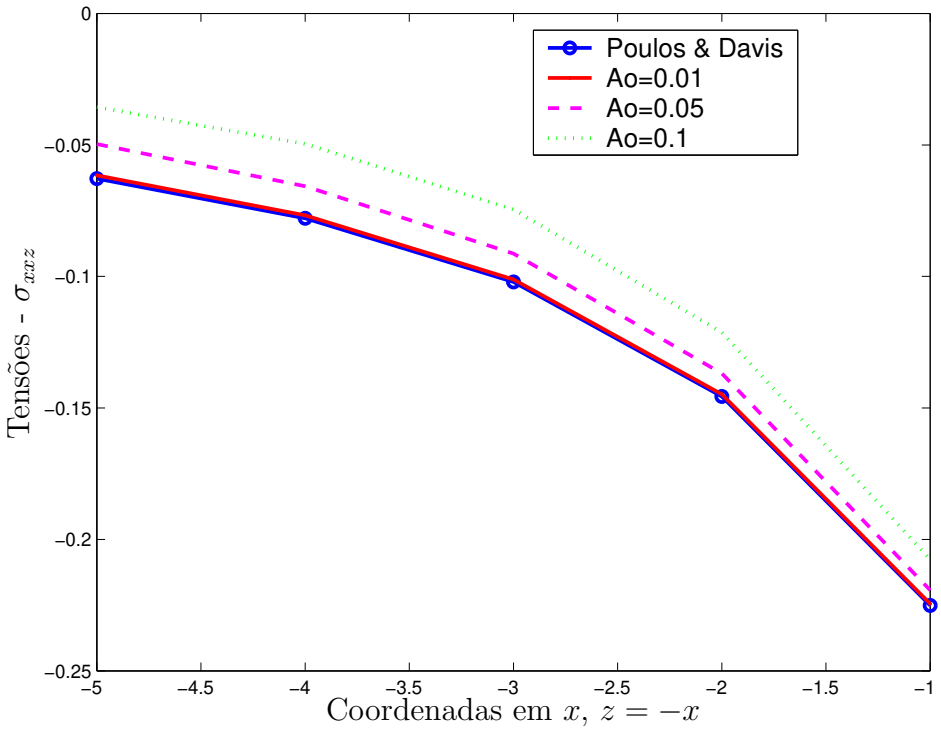

Figura 2.17: Caso 2 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga distribuída.

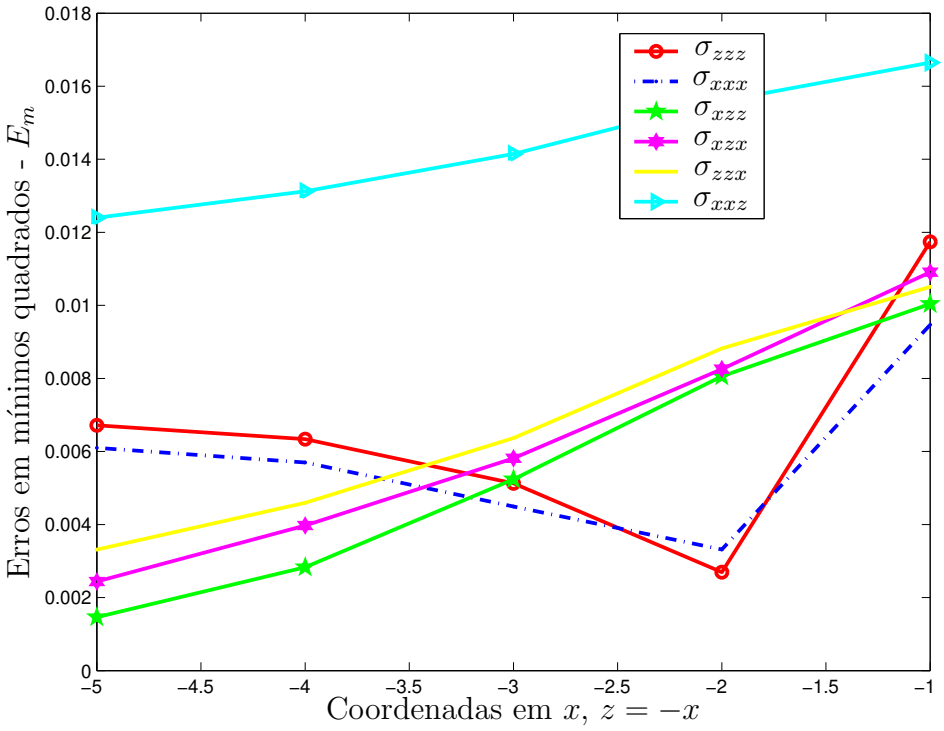

Figura 2.18: Erro: Caso 2 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída.

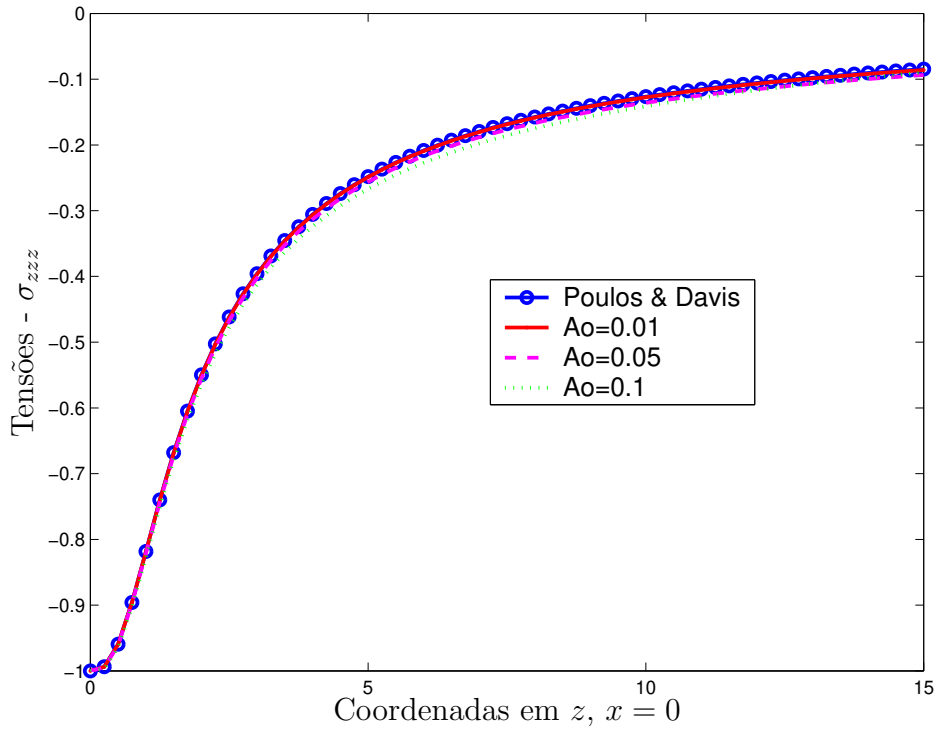

Figura 2.19: Caso 3 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga distribuída.

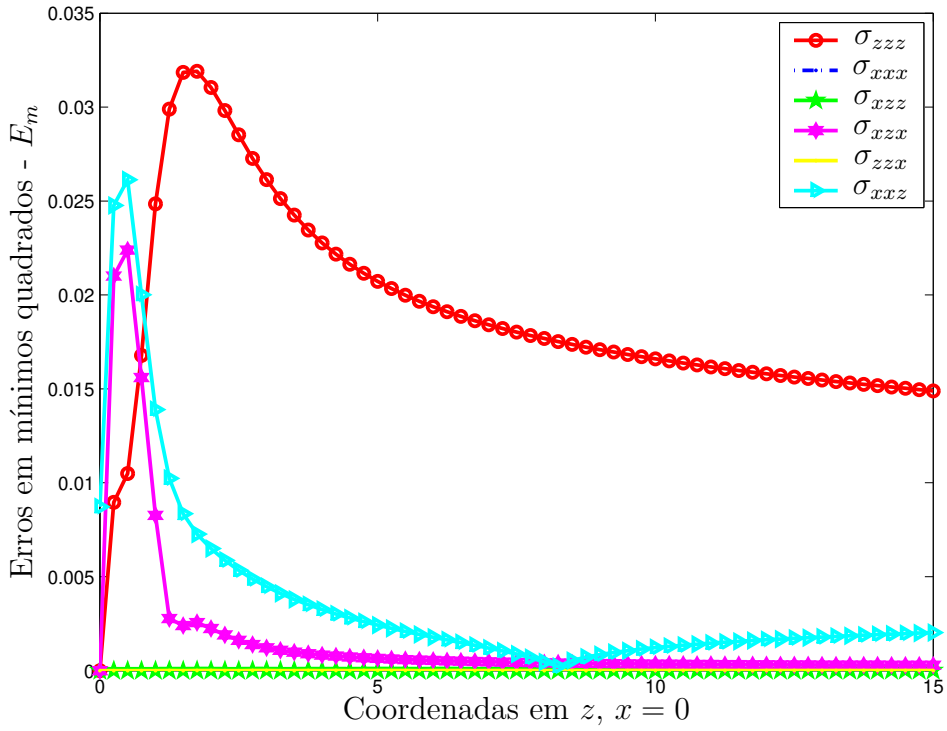

Figura 2.20: Erro: Caso 3 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída.

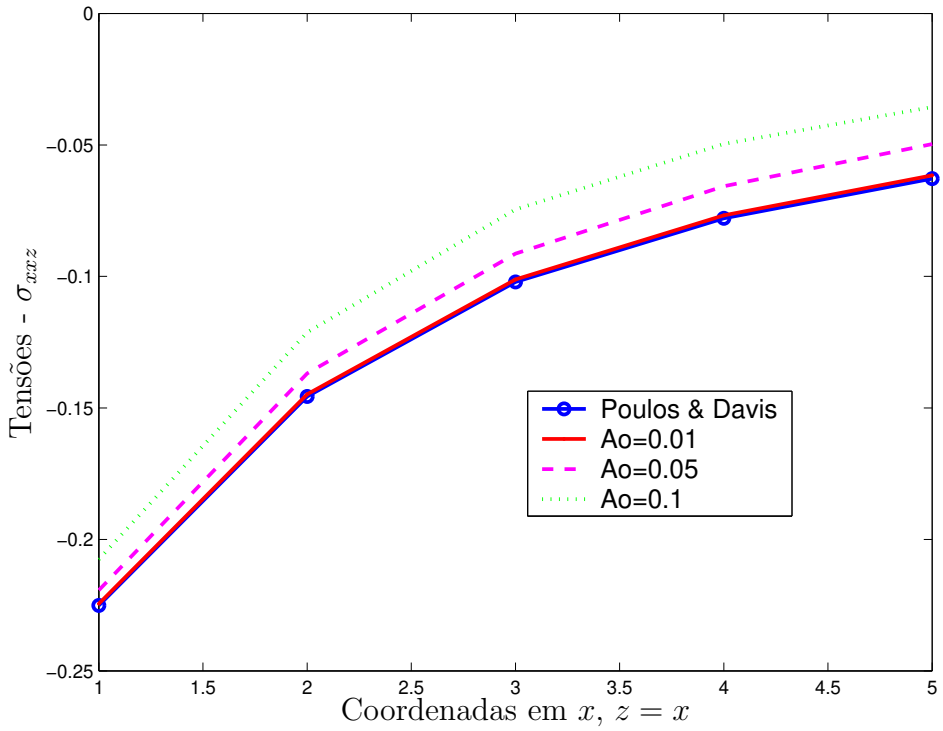

Figura 2.21: Caso 4 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga distribuída.

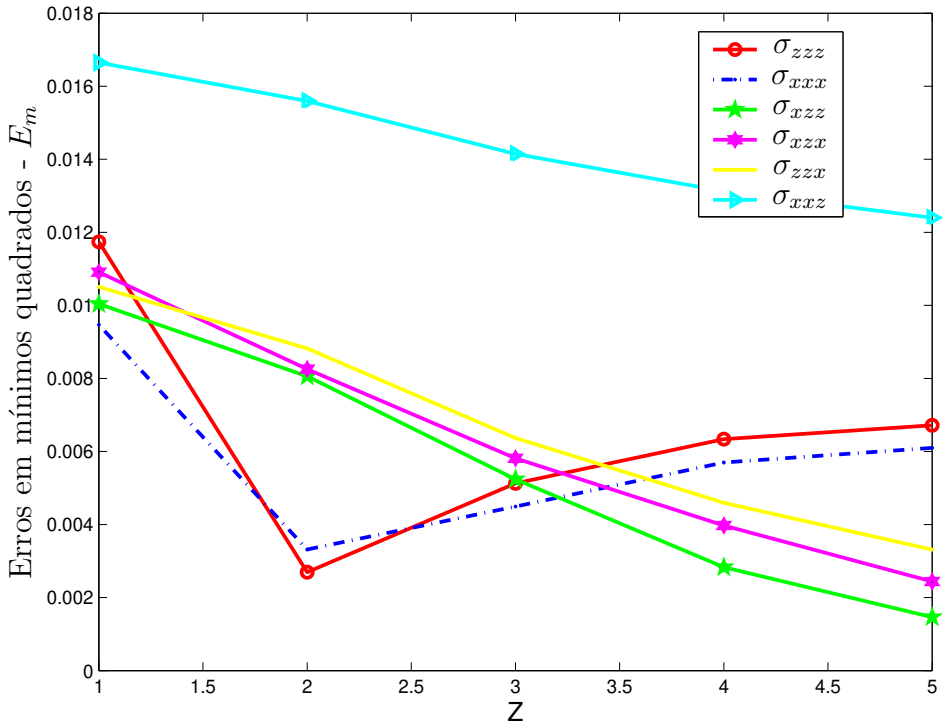

Figura 2.22: Erro: Caso 4 - Tensões no semi-espaço, carga distribuída.

2.4.1.2 Carga Concentrada

Para a carga concentrada no semi-espaço 2D, apenas será validado as tensões, de acordo com os resultados encontrados em Poulos e Davis (1974).

Para carga aplicada na direção vertical, a solução é dada por:

$$\sigma_{xxz} = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{x^2 z}{R^4} \tag{2.61}$$

$$\sigma_{zzz} = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{z^3}{R^4} \tag{2.62}$$

$$\sigma_{xzz} = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{x \cdot z^2}{R^4} \tag{2.63}$$

para as tensões devido a carga na direção horizontal é dada por:

$$\sigma_{zzx} = \frac{2pxz^2}{\pi R^4} \tag{2.64}$$

$$\sigma_{xxx} = \frac{2px^3}{\pi R^4} \tag{2.65}$$

$$\sigma_{xzx} = \frac{2px^2 z}{\pi R^4} \tag{2.66}$$

onde R é a distância da fonte de aplicação da carga até o ponto que está sendo medida a tensão.

O gráfico da figura 2.25 mostra um erro muito grande para a componente de tensão σ_{xxx}, porém este valor de erro está mais uma vez próximo ao ponto de singularidade da solução. Neste caso, para carga concentrada, a singularidade está sobre a origem. Focalizando uma aproximação na base da figura 2.25, é possível identificar os erros na figura 2.26, sendo comprovado os baixos valores de erros, inclusive para os demais pontos da componente σ_{xxx}. Na figura 2.23 é mostrado o comportamento da solução para a componente de tensão σ_{xxx}. Nota-se que para os pontos próximos à origem há irregularidade na curva para $A_O = 0,01$. Isso ocorre devido a limitação do programa em sintetizar a solução para baixas freqüências próximo da singularidade. Para as demais freqüências verifica-se um comportamento mais regular, aproximando-se da solução analítica. Ainda para este caso, é apresentado na figura 2.24 a solução para outra componente de tensão, σ_{zzz}, que na figura com os erros 2.26 apresenta um erro pouco acima da componente σ_{xxx}. Todavia, na figura 2.24 tem-se um comportamento bem melhor próximo à singularidade, enquanto as demais curvas numéricas apresentam suas oscilações devido à dinâmica.

Para o Caso 2, os erros mostrados na figura 2.28 são pequenos. Na figura 2.27 é possível ver o bom ajuste da curva para solução para freqüência quase-estática e a solução analítica.

Já para o Caso 3, o erro para a componente de tensão σ_{zzz}, apresentado na figura 2.30, começa com um valor "alto"e decresce de forma convergente. A apresentação desta solução comparada com a solução analítica, mostrada na figura 2.29, apresenta boa concordância mesmo para as freqüência mais altas. No Caso 4 repete-se a simetria com a solução obtida para o Caso 3, como pode ser verificado nas figuras das componentes de tensão 2.31 e dos erros 2.32.

O programa *Wingreen* é validado com esses resultados para o semi-espaço. É comprovada também a simetria ou a anti-simetria das soluções tanto para o deslocamento quanto para as tensões, em relação ao eixo de coordenas z.

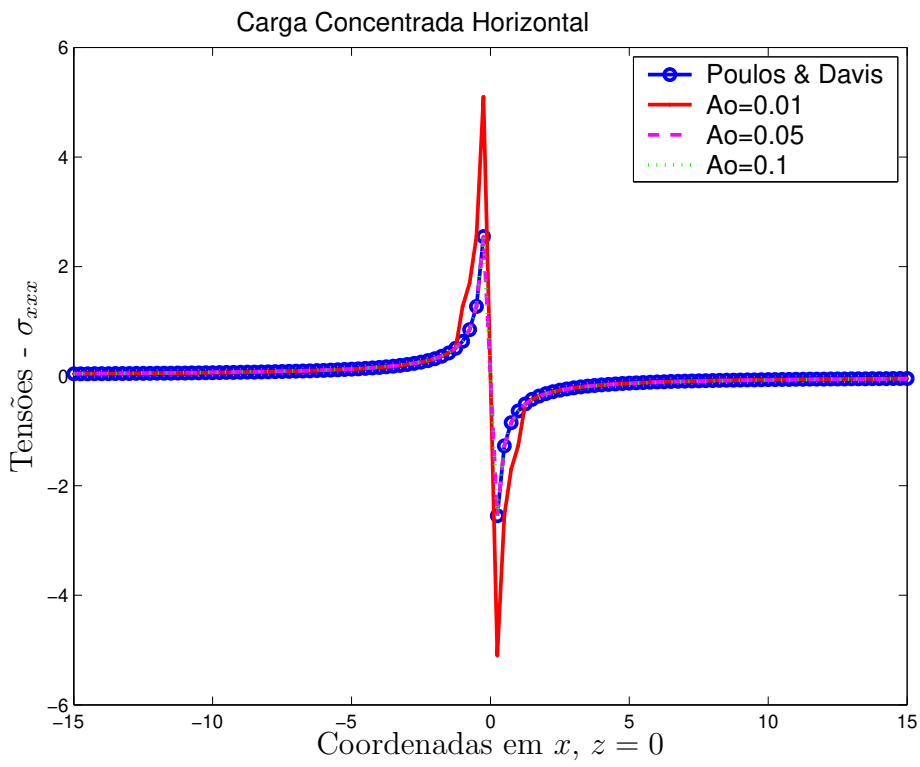

Figura 2.23: Caso 1 - Tensões em σ_{xxx} no semi-espaço, carga concentrada.

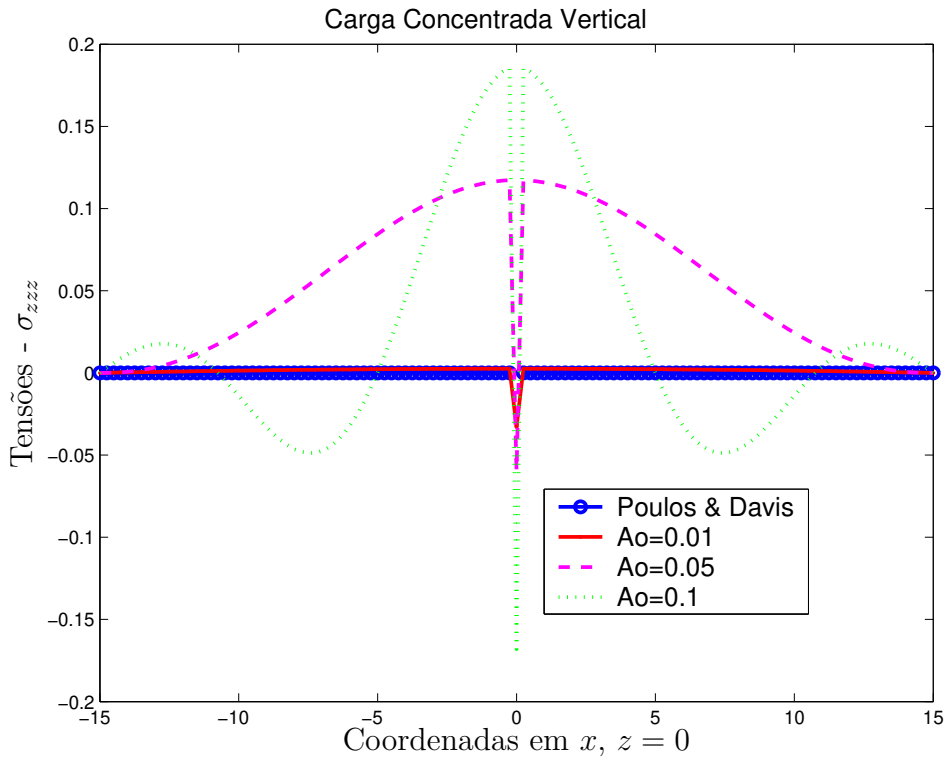

Figura 2.24: Caso 1 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga concentrada.

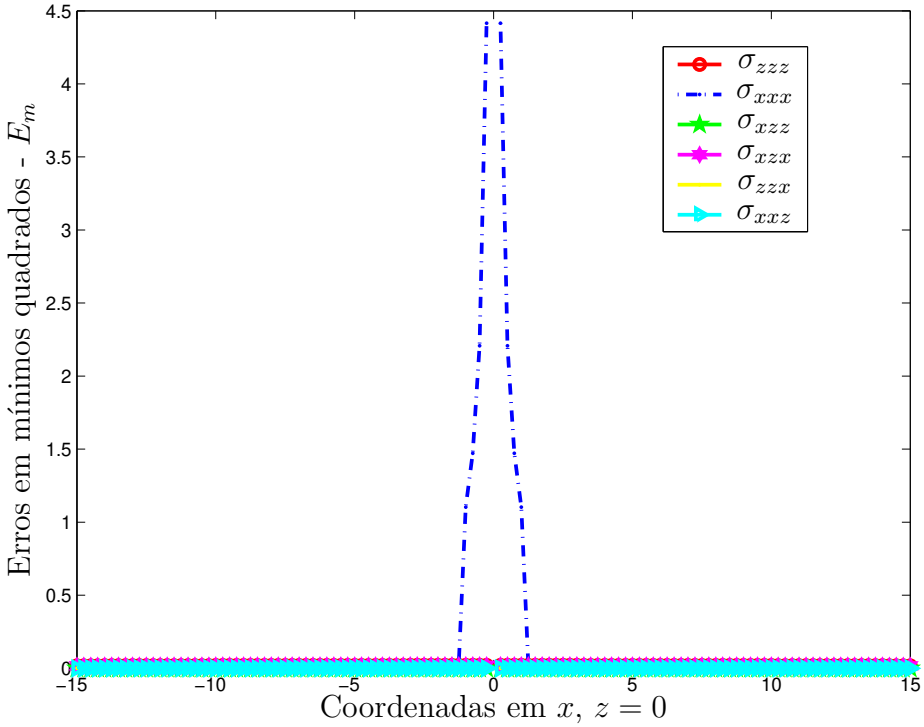

Figura 2.25: Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada.

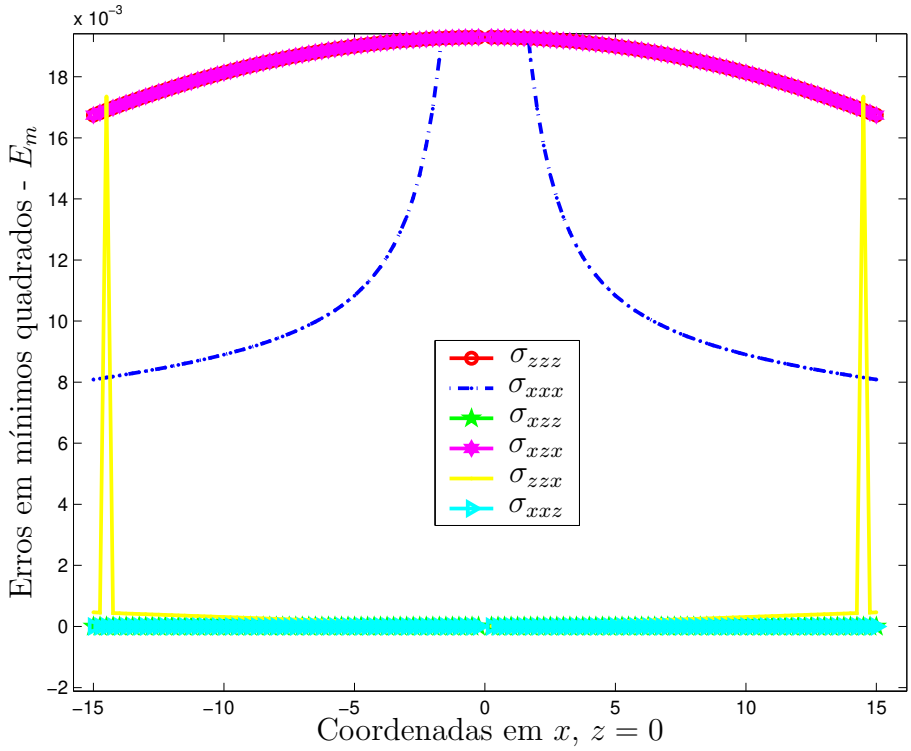

Figura 2.26: Erro: Caso 1 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada (Zoom).

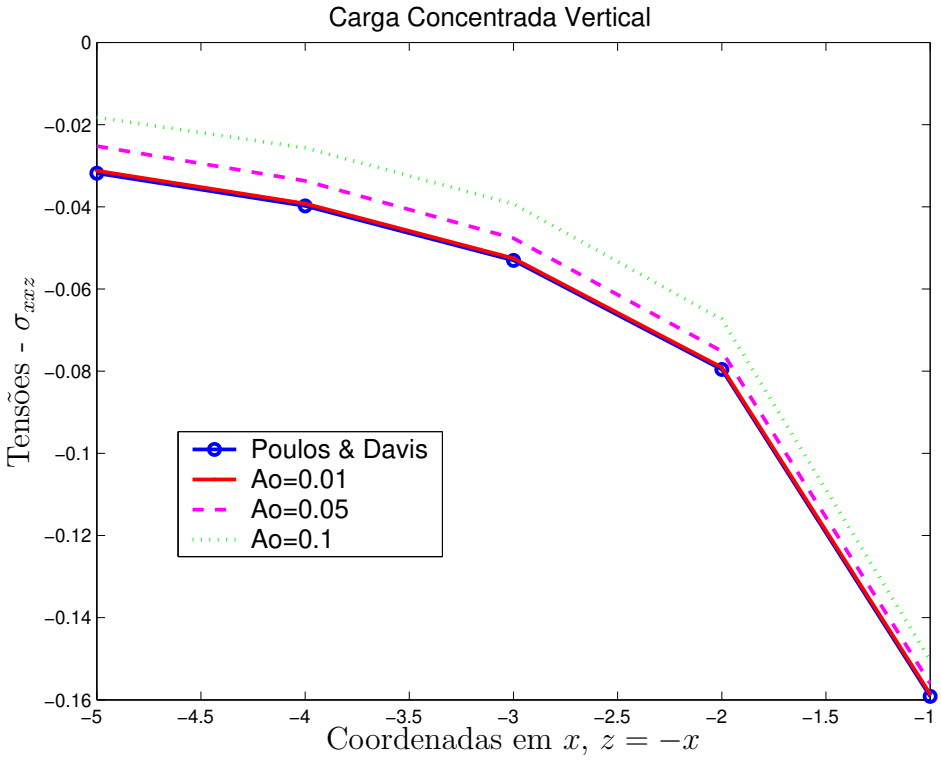

Figura 2.27: Caso 2 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga concentrada.

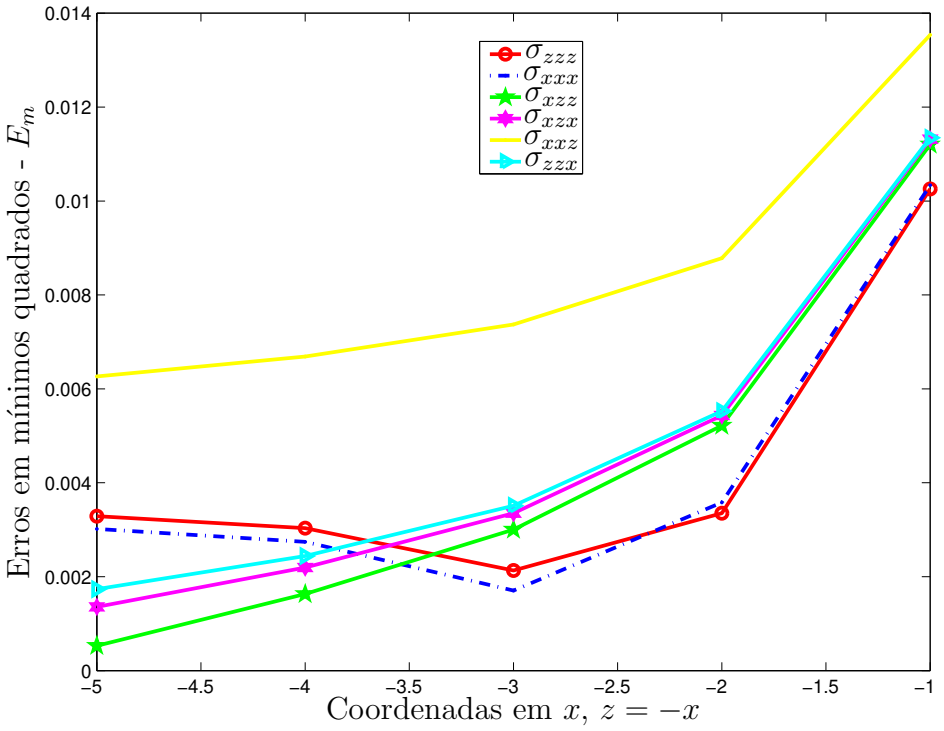

Figura 2.28: Erro: Caso 2 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada.

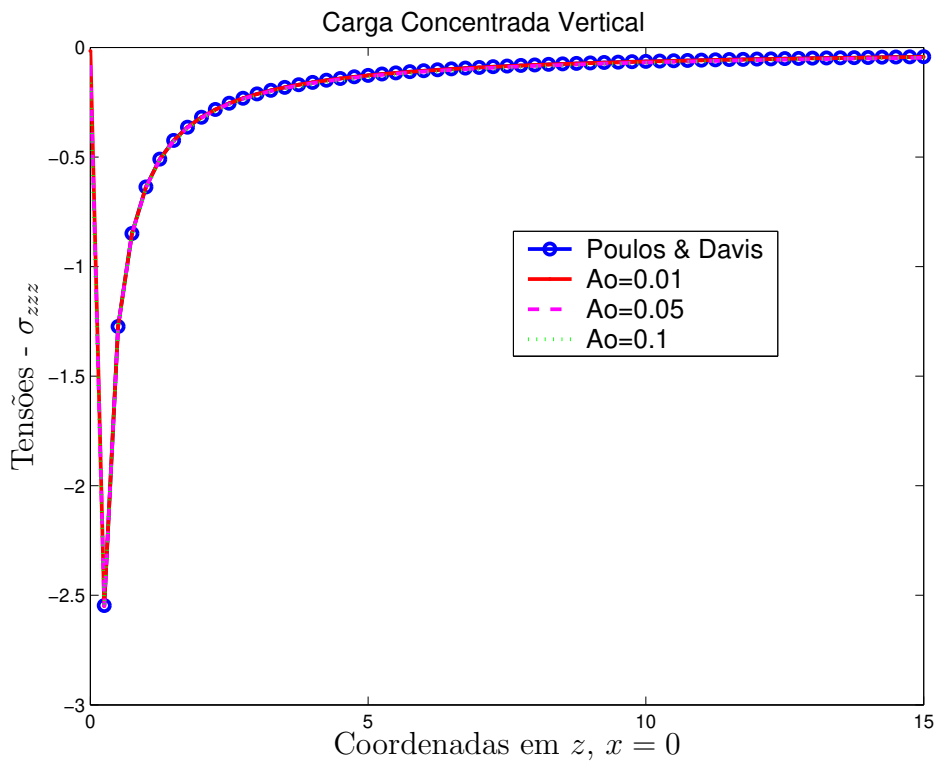

Figura 2.29: Caso 3 - Tensões em σ_{zzz} no semi-espaço, carga concentrada.

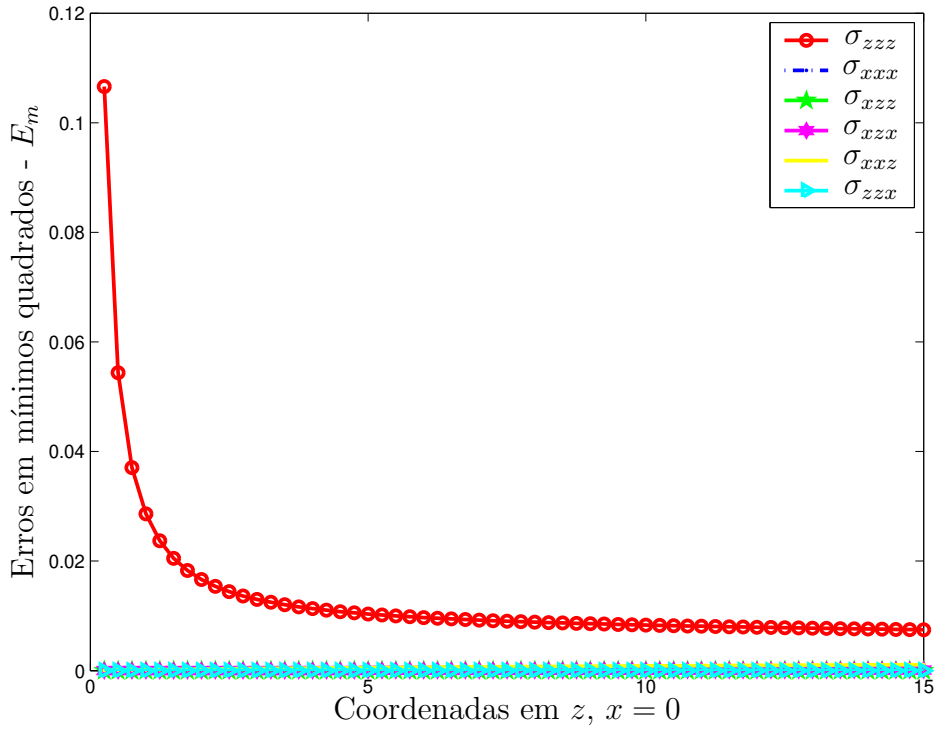

Figura 2.30: Erro: Caso 3 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada.

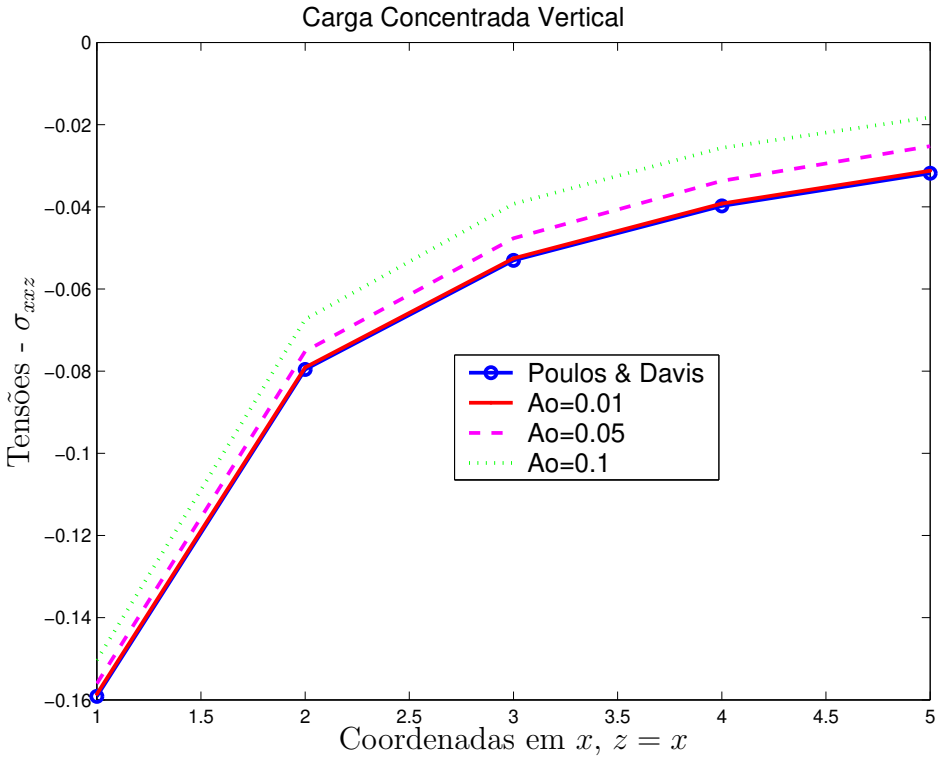

Figura 2.31: Caso 4 - Tensões em σ_{xxz} no semi-espaço, carga concentrada.

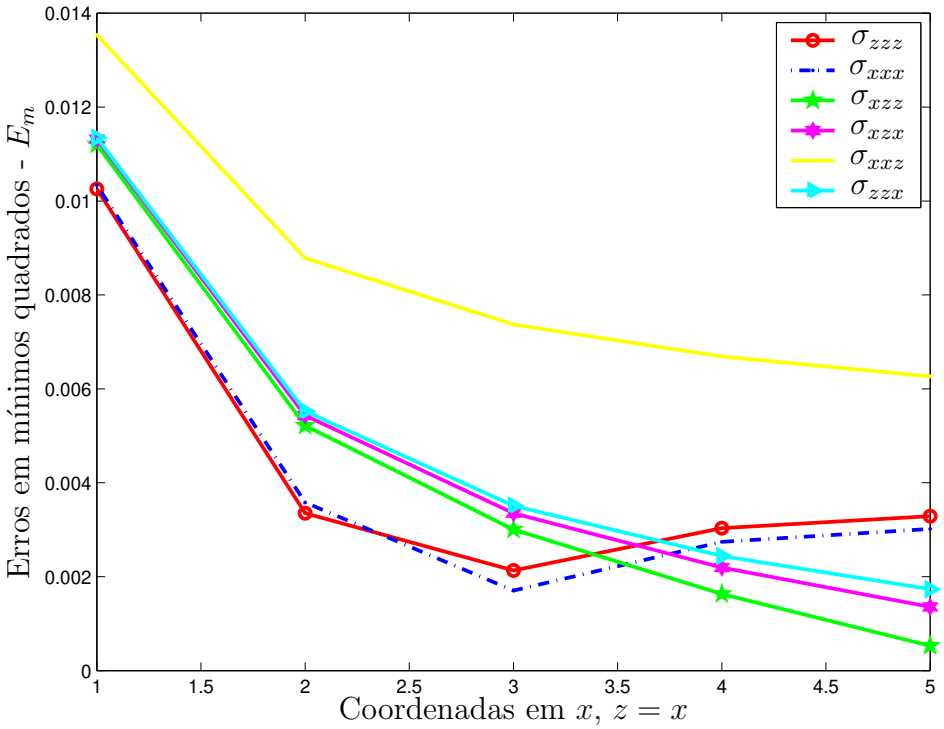

Figura 2.32: Erro: Caso 4 - Tensões no semi-espaço, carga concentrada.

2.4.2 Espaço Completo

O espaço completo é um meio continuo, sem superfície livre. No entanto, a discretização dos pontos geométricos utilizados para o semi-espaço será mantida também para o espaço completo, assim como as demais propriedades do meio.

2.4.2.1 Carga Concentrada

Esta é a última fase de validação do programa *Wingreen* com a literatura. Apenas serão validadas as tensões.

$$\sigma_{zz} = \frac{p}{2\pi(1-\upsilon)}\frac{z}{R^2}\left[\frac{3-2\upsilon}{2} - \frac{x^2}{R^2}\right] \tag{2.67}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{p}{2\pi(1-\upsilon)}\frac{z}{R^2}\left[-\frac{1-2\upsilon}{2} + \frac{x^2}{R^2}\right] \tag{2.68}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{p}{2\pi(1-\upsilon)}\frac{x}{R^2}\left[\frac{1-2\upsilon}{2} + \frac{z^2}{R^2}\right]\frac{2px^2z}{\pi R^4} \tag{2.69}$$

Não é necessário obter as componentes para cada direção de carregamento, uma vez que no espaço completo não há a presença da superfície livre modificando as condições de contorno para a solução de cada direção de carregamento.

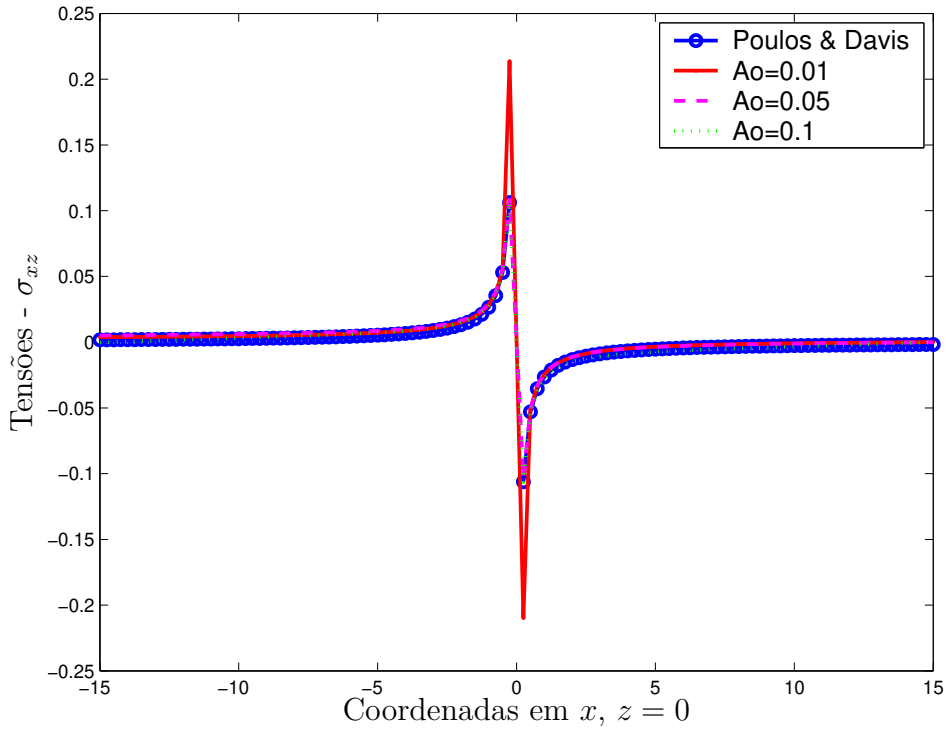

Figura 2.33: Caso 1 - Tensões em σ_{xz} no espaço completo, carga concentrada.

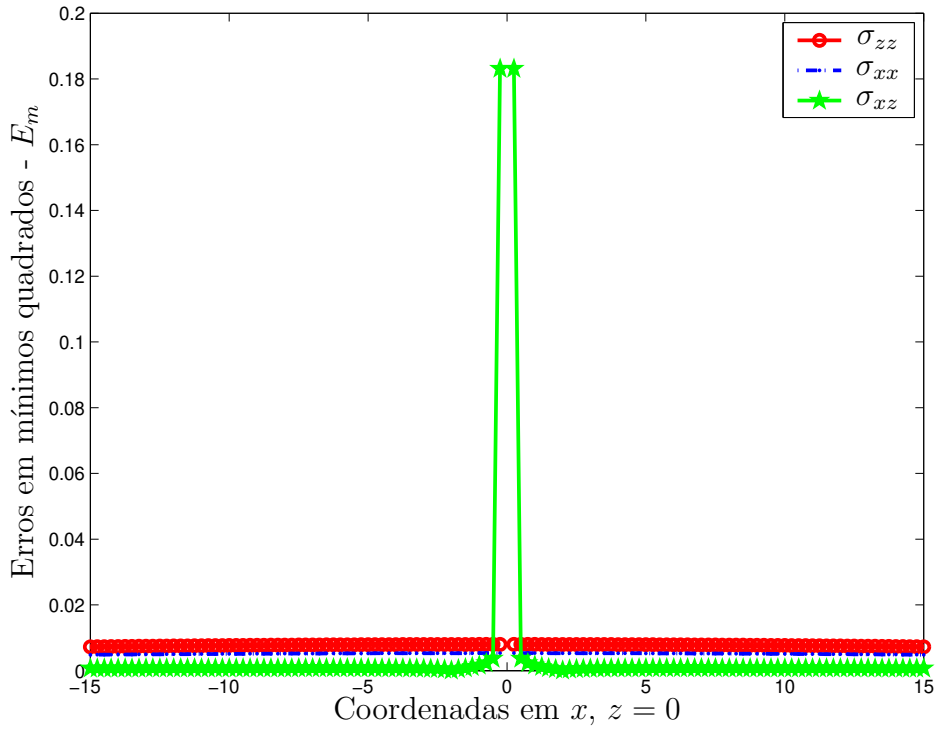

Figura 2.34: Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga concentrada.

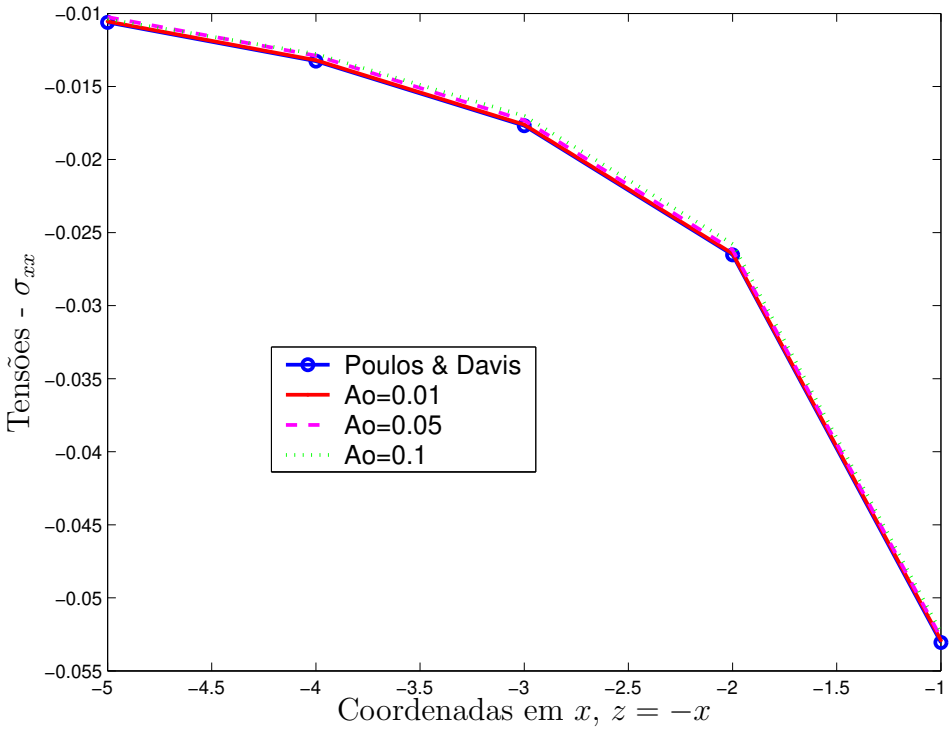

Figura 2.35: Caso 2 - Tensões em σ_{xx} no espaço completo, carga concentrada.

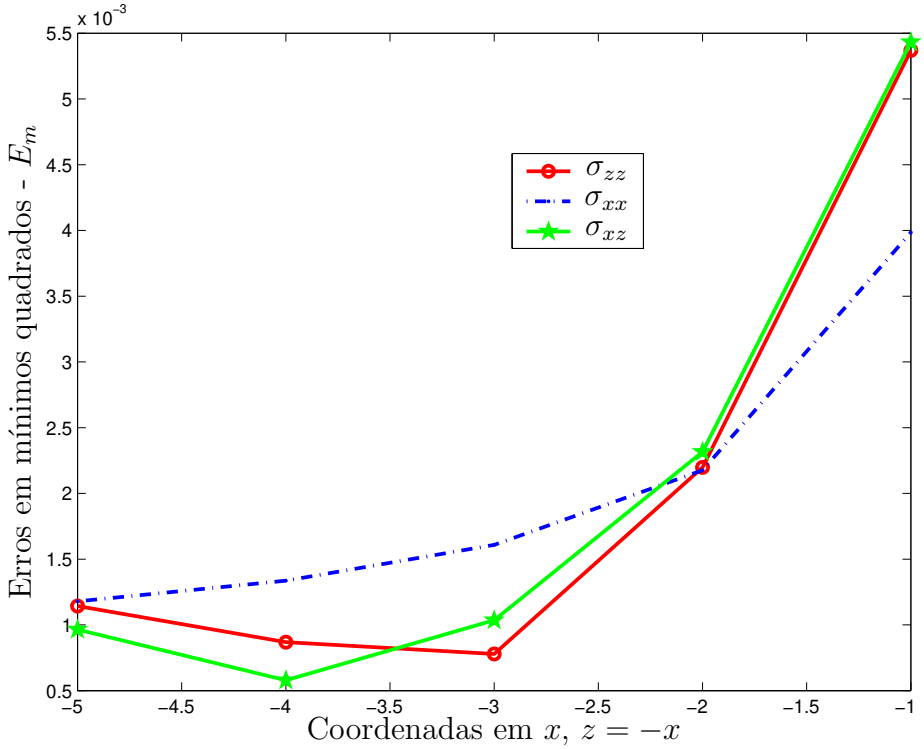

Figura 2.36: Erro: Caso 2 - Tensões no espaço completo, carga concentrada.

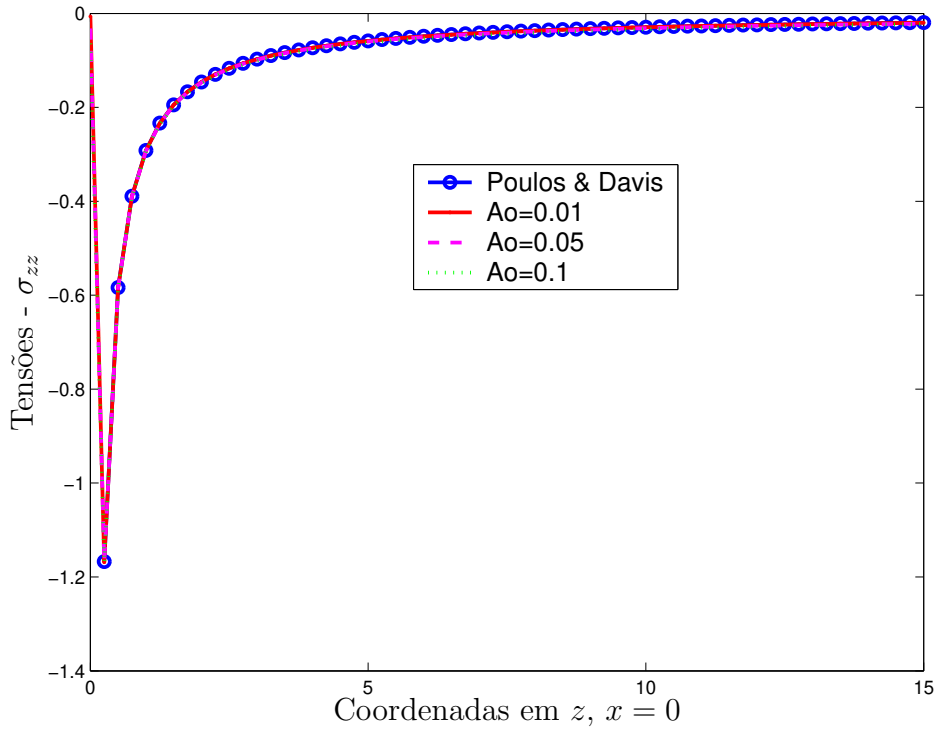

Figura 2.37: Caso 3 - Tensões em σ_{zz} no espaço completo, carga concentrada.

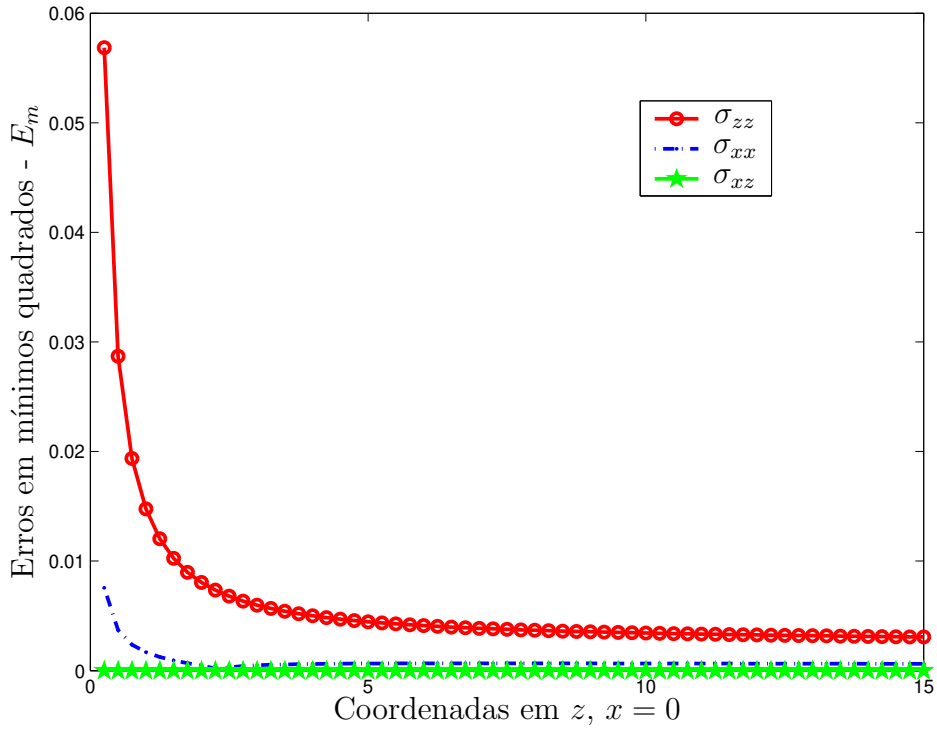

Figura 2.38: Erro: Caso 3 - Tensões no espaço completo, carga concentrada.

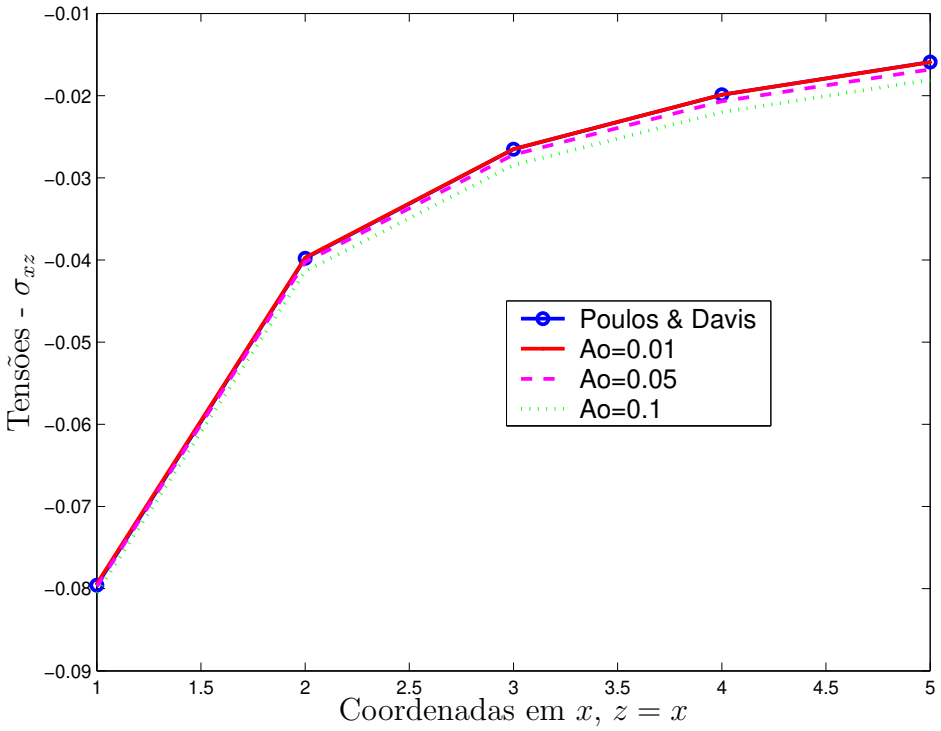

Figura 2.39: Caso 4 - Tensões em σ_{xz} no espaço completo, carga concentrada.

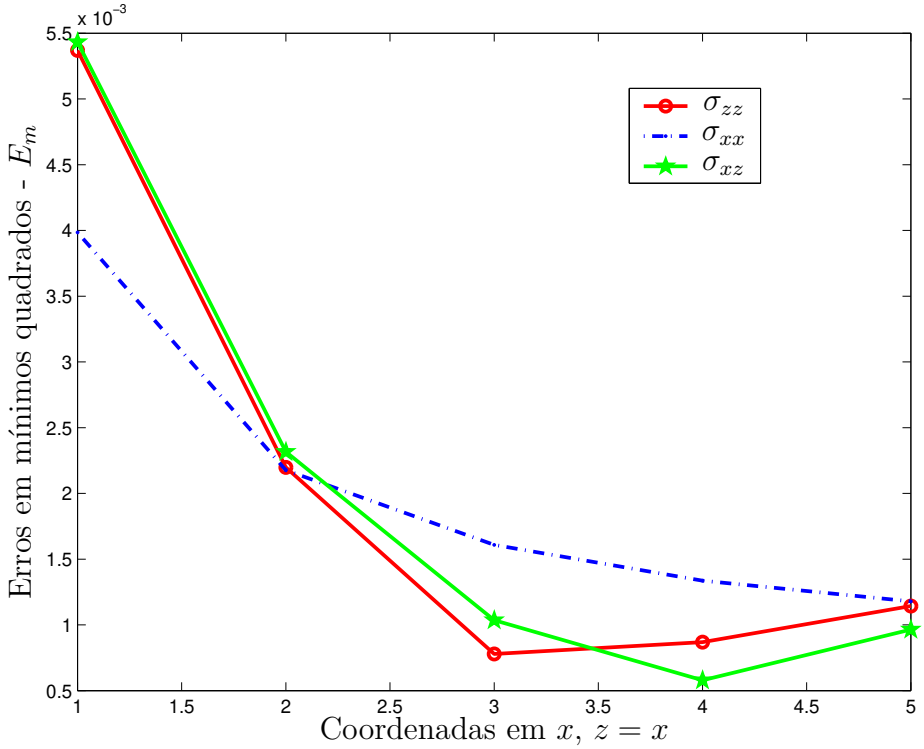

Figura 2.40: Erro: Caso 4 - Tensões no espaço completo, carga concentrada.

Os resultados para as tensões no espaço completo com cargas concentradas seguem um comportamanto semelhante aos resultados para o semi-espaço com cargas concentradas. O que pode ser comprovado observando a figura 2.34 do erro para o Caso 1 do espaço completo com carga concentrada com a figura 2.25 para o semi-espaço. A figura 2.34 mostra um erro bastante alto para os pontos vizinhos da singularidade. Porém, para os demais pontos espaciais, é possível verificar, na figura 2.33, uma boa concordância das curvas obtidas numericamente com a solução analítica. Outra mostra da semelhança entre os resultados do espaço completo com o semi-espaço, ambos para carga concentrada, está na figura 2.38 quando comparada com a figura 2.29. Notar que a semelhança está no comportamento, pois os valores diferem, assim como na figura 2.38 de erro para o espaço completo, que é próximo à metade do erro apresentado na figura 2.30.

Para os Casos 2 e 4 também se mantém a simetria das soluções de tensão, que podem ser verificadas observando as figuras 2.35 e 2.39 e os seus respectivos erros podem ser vistos nas figuras 2.36 e 2.40, com valores baixos, sendo os resultados satisfatórios.

A validação para o programa *Wingreen* quase-estático está finalizada. Os resultados apresentados estão em conformidade com o esperado, que quanto menor a freqüência adimensional utilizada, mais próximo da solução analítica para o caso estático. Os erros tanto das tensões quanto dos deslocamentos, quando possíveis de serem analisados, mostraram-se baixos, comprovando a confiabilidade dos resultados. Apesar de ter sido calculado o erro pelo mínimo quadrado, nenhuma das soluções apresentadas acima mostraram sinais trocados para as soluções. O que não apareceria nos gráficos de erro, por se tratar da raiz da diferença dos quadrados das soluções, ver equação (2.47).

2.4.2.2 Carga Distribuída

O carregamento distribuído no espaço completo será muito importante na formulação do MEC-I. Portanto, agora valida-se o programa do *Romanini*, o qual será usado na formulação do MEC-I. Este programa será validado comparando-se os seus resultados com o programa *Wingreen*, que fora até então alvo das validações com a literatura. Isto porque não há na literatura solução analítica para o carregamento distribuído no espaço completo. Neste ponto considera-se a solução fornecida pelo *Wingreen* como válida para servir de referência ao programa do *Romanini*.

Serão validados tanto os deslocamentos quanto as tensões. Porém, diferentemente da apresentação anterior, apenas serão mostrados os gráficos com os erros das soluções e com exceção de um, com as soluções para o deslocamento w_z, na figura 2.41.

Nas figuras contendo os erros das tensões, são mostradas as componentes do tensor de tensão para cada direção de carregamento aplicado, originando seis componentes do tensor de tensão, ou seja, diferente do realizado para a validação do *Wingreen*, onde apenas era validado com a literatura para uma direção de carregamento resultando em três componentes do tensor de tensão.

Na figura 2.41 é mostrada as soluções para os deslocamentos (w_z) na superfície (Caso 1), obtidos pelo programa do *Romanini*, sendo estas as curvas R_{AO}, para as várias freqüências adimensionais. Na mesma figura estão mostrados as curvas obtidas pelo programa *Wingreen* para o deslocamento representadas por W_{AO}. É verificada uma sobreposição das soluções, mesmo sem retirar o deslocamento da origem para estas soluções. Ao logo desta última validação, não é retirado o deslocamento nem da origem, para os Casos 1 e 3, e nem das extremidades para os Caso 2 e 4. Isto porque são comparados os resultados de dois métodos numéricos sem que haja a necessidade de retirar esse deslocamentos de referência como era preciso fazer para as soluções dos deslocamentos analíticos.

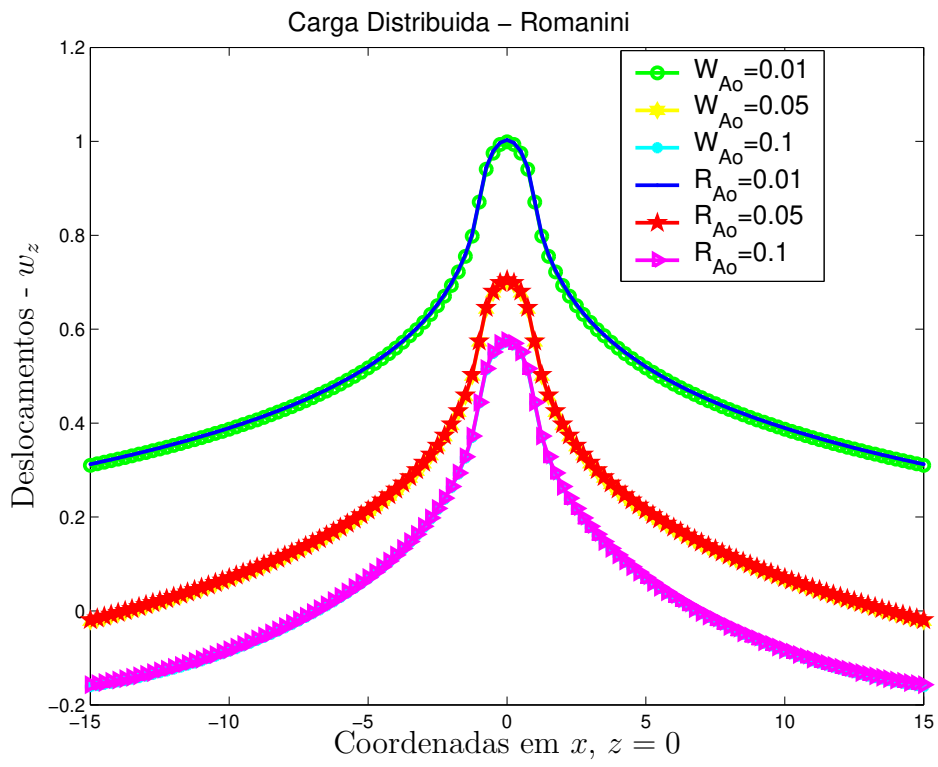

Figura 2.41: Caso 1 - Deslocamento em w_z no espaço completo, carga distribuída.

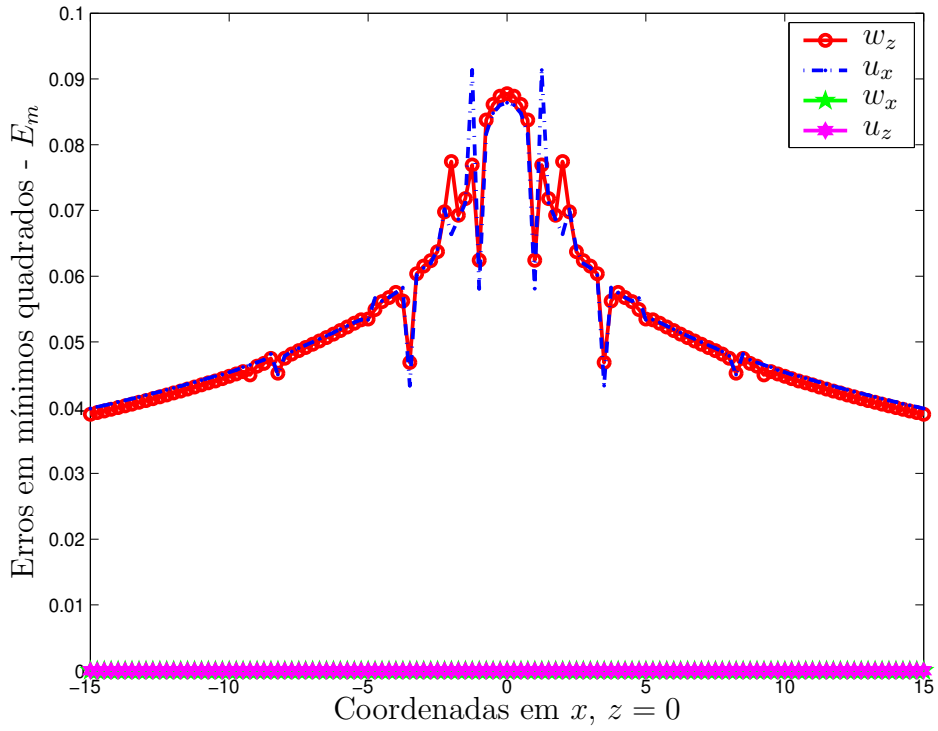

Figura 2.42: Erro: Caso 1 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída.

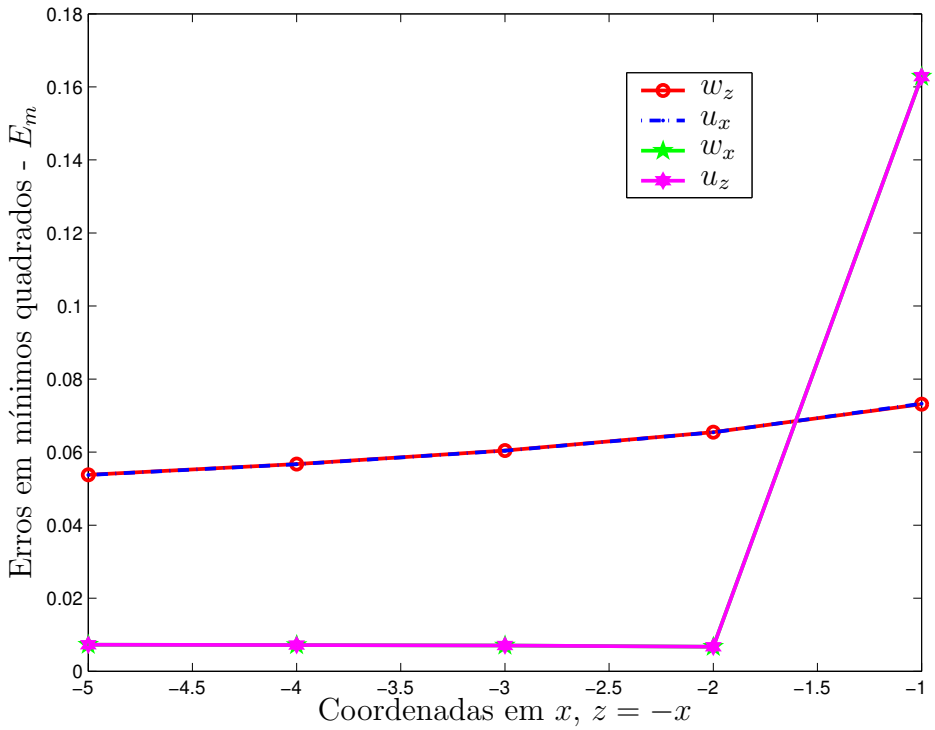

Figura 2.43: Erro: Caso 2 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída.

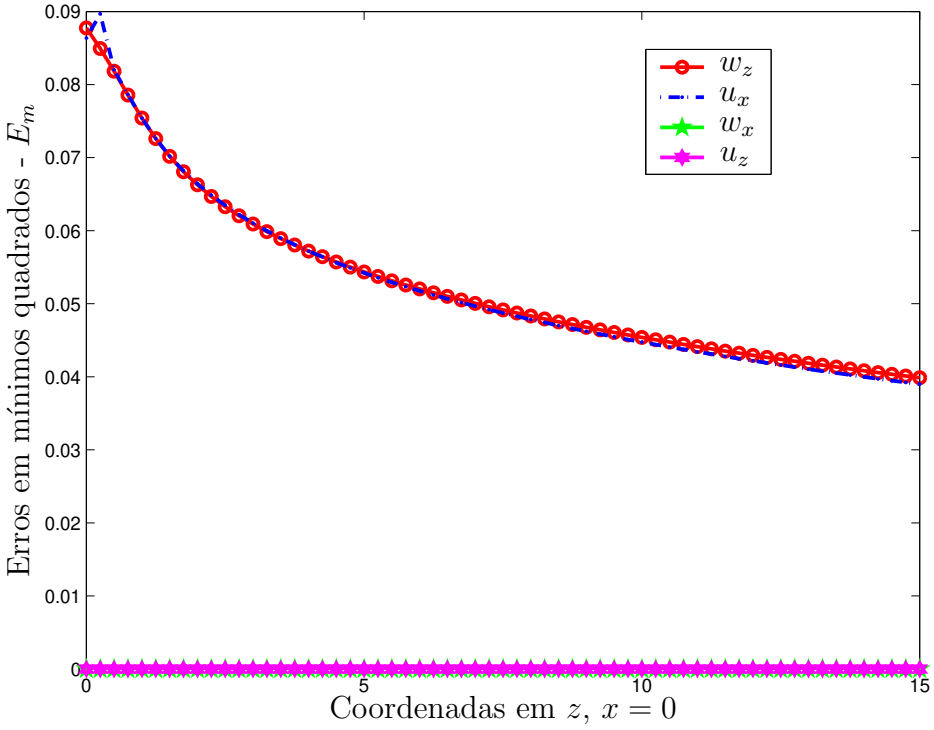

Figura 2.44: Erro: Caso 3 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída.

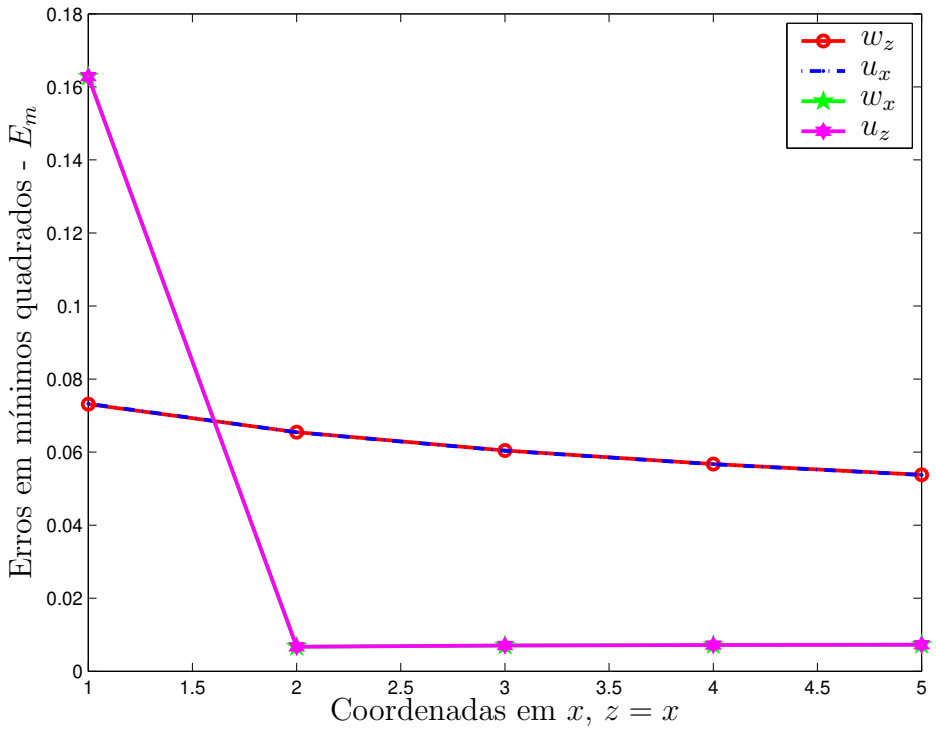

Figura 2.45: Erro: Caso 4 - Deslocamentos no espaço completo, carga distribuída.

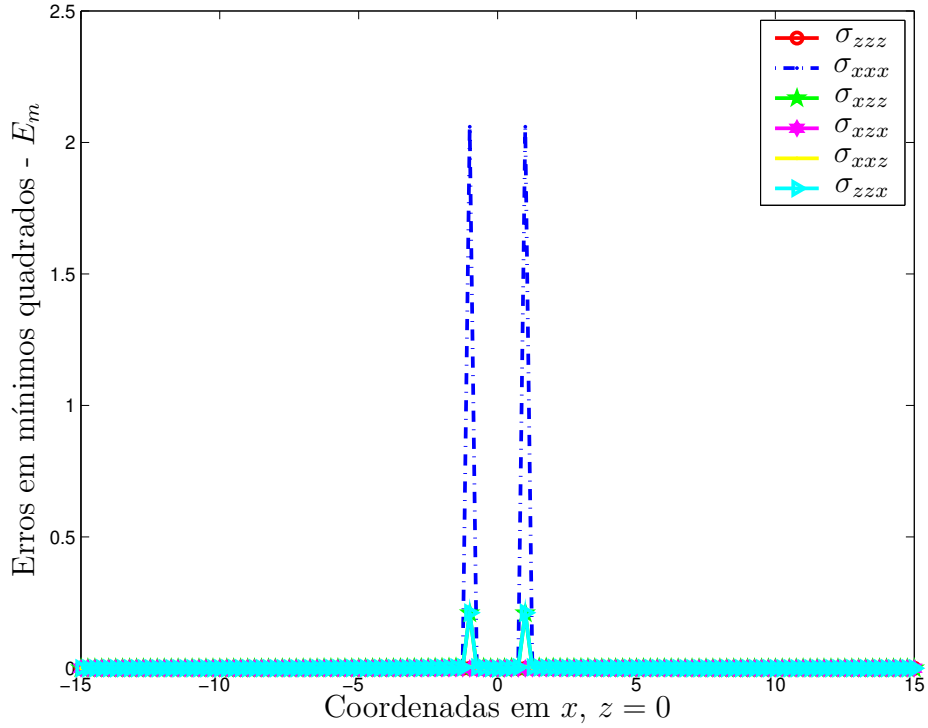

Figura 2.46: Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga distribuída.

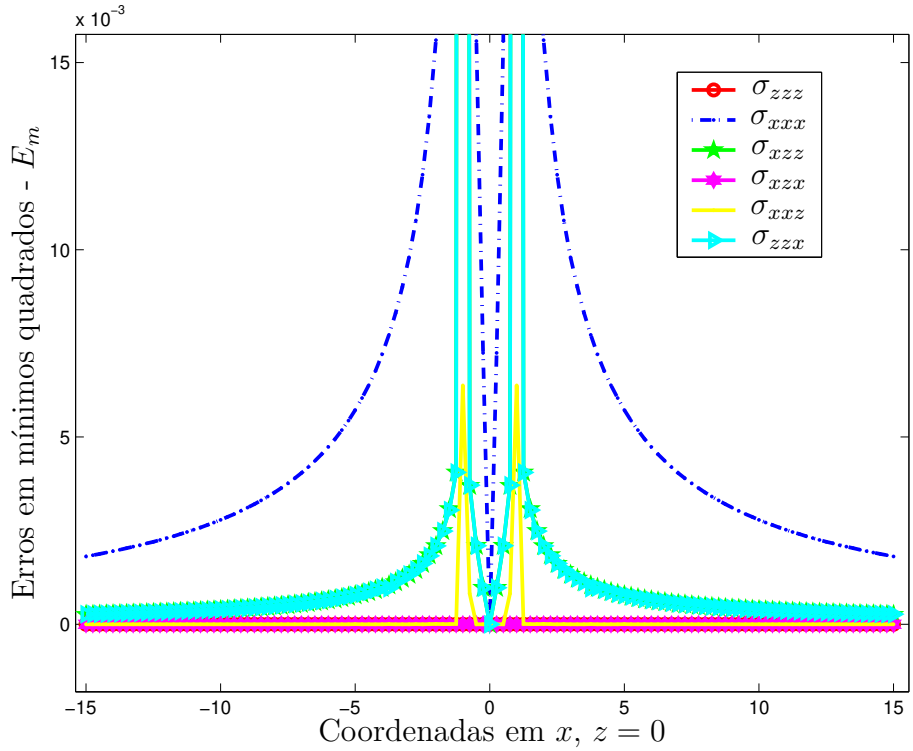

Figura 2.47: Erro: Caso 1 - Tensões no espaço completo, carga distribuída (Zoom).

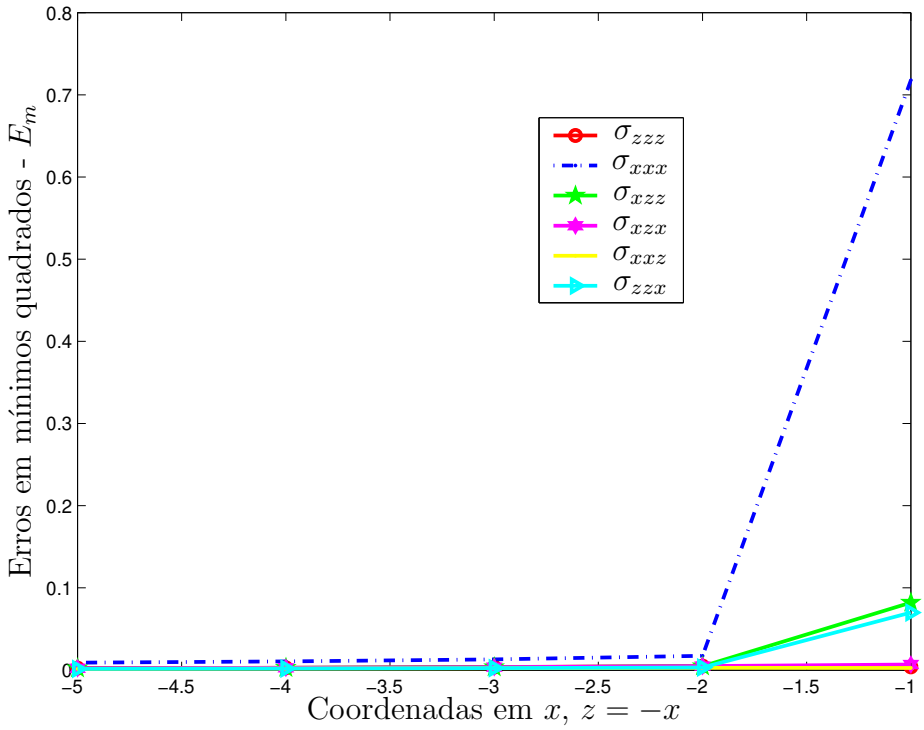

Figura 2.48: Erro: Caso 2 - Tensões no espaço completo, carga distribuída.

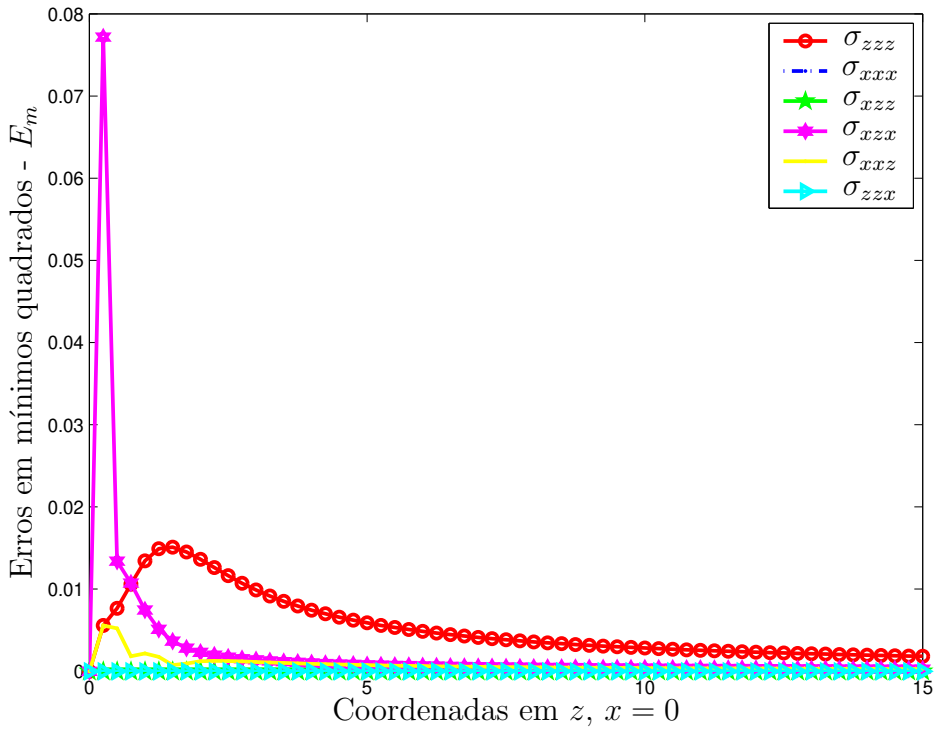

Figura 2.49: Erro: Caso 3 - Tensões no espaço completo, carga distribuída.

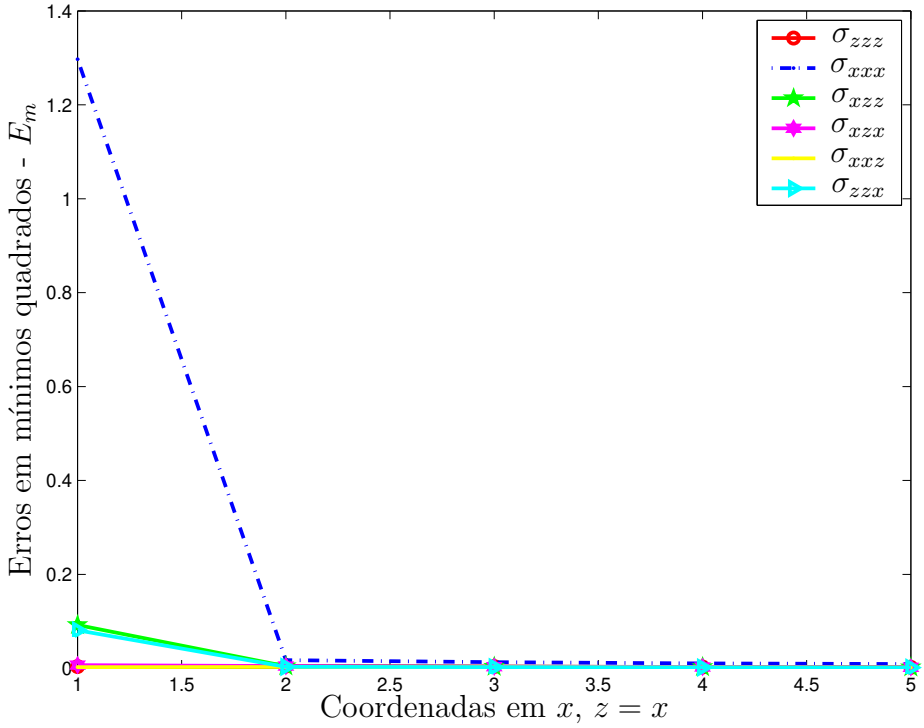

Figura 2.50: Erro: Caso 4 - Tensões no espaço completo, carga distribuída.

Na figura 2.42 são mostrados os erros quando comparadas as soluções de deslocamento para a freqüência adimensional $A_O = 0,01$ do programa *Wingreen* com o programa do *Romanini*. Os erros para as soluções de deslocamento devido ao carregamento na mesma direção (w_z, u_x), mostram um comportamento semelhante, sendo seus valores de erro baixos e uma oscilação para a solução próxima da singularidade. Já os erros para as soluções cruzadas, ou seja, para os deslocamentos devido ao carregamento na direção contrária (w_x, u_z), apresentaram valores nulos.

Para os deslocamentos nos casos 2 e 4, é possível verificar a simetria comparando os gráficos dos erros nas figuras 2.43 e 2.45. Em ambos os casos os erros apresentados são pequenos, assim como o erro mostrado para o Caso 3 na figura 2.44, onde os erros para os deslocamentos cruzados (w_x, u_z) são nulos como ocorrido para o Caso 1 e os erros para os delocamentos (w_z, u_x) diminuem conforme se afastam da origem de aplicação do carregamento. Com isso conclui-se que os deslocamentos obtidos pelo programa do *Romanini* são equivalentes aos obtidos pelo programa *Wingreen*. Sendo, portanto, considerados válidos.

Já para as tensões, é observado na figura 2.46 os erros para as componentes de tensão, onde a componente σ_{xxx} apresenta um erro bastante elevado. Porém, observando uma ampliação da base da figura 2.46, é possível comprovar na figura 2.47, que os erros maiores ocorrem nos pontos espaciais vizinhos da singularidade. Outro fato de extrema relevância a salientar é a solução para a componente de tensão σ_{xzx}, que apesar de apresentar na figura 2.47 um erro igual a zero para todos os pontos espaciais na superfície, quando comparada a solução obtida pelo programa do *Romanini* com o *Wingreen* apresentou os mesmos valores porém com sinais trocados, o que resultou em um erro igual à zero. Esta inversão de valores é possivelmente devido a uma interpretação equivocada do termo da componente de tensões. Esta foi a única solução que apresentou este comportamento.

Nas figuras 2.48 e 2.50 para os erros nos Casos 2 e 4, respectivamente, são mostrados valores para os erros bastante baixos, com exceção da componente σ_{xxx} na figura 2.50 que apresentou um erro mais elevado para o ponto espacial ($x = 1$, $z = 1$) na linha da singularidade. Finalmente, para a figura 2.49, para o Caso 3, mostrou valores baixos para os erros das componentes de tensão.

Os resultados obtidos em toda esta análise são realmente muito satisfatórios. Principalmente por se tratar da obtenção dos valores para tensão e deslocamento sintetizados por integrações numéricas bastante difíceis.

Capítulo 3

Síntese de Estados Auxiliares no Domínio do Tempo

Neste capítulo será discutida a obtenção da resposta transiente a partir da resposta estacionária com o uso da inversa da transformada rápida de Fourier (IFFT). Devido a obtenção do estado auxiliar transiente depender da resposta estacionária torna-se necessário tratar os sinais estacionários para que se obtenha uma resposta transiente correta.

As respostas transientes sintetizadas desta forma trazem consigo todas as propriedades que foram consideradas na formulação estacionária. Isto ocorre pois as características da equação diferencial que governa o comportamento do problema são de sistemas lineares, podendo-se resolver as equações no domínio da freqüência e estas soluções serem válidas quando transformadas para o domínio do tempo. Devido à essa característica da equação diferencial é possível obter os estados auxiliares transientes de problemas em meios visco-elásticos. Porém, com o uso da transformação de domínios, da freqüência para o tempo, inseri-se na resposta transiente efeitos indesejáveis, tais como o efeito da causalidade e do deslocamento estático ou nível "DC".

Um trabalho para minimizar estes efeitos e conseguir uma resposta melhor foi realizado por Adolph (2002), voltado principalmente à resposta visco-elástica do deslocamento para o semi-espaço isotrópico. As resposta transientes foram validadas com os resultados apresentados por Guan e Novak (1992) e Richter (1997) para carga concentrada no semi-espaço. Ainda no seu trabalho, com a técnica de superposição das soluções fundamentais e adicionando uma formulação de fundação rígida, realizou a interação dinâmica solo-estrutura no domínio da freqüência e também no domínio do tempo. Esta última apresentou instabilidade na solução de alguns casos, fato este salientado neste capítulo.

3.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta importante no processamento de sinais, possibilitando operações como filtragem, respostas de sistemas lineares devido suas propriedades de diferenciação e integração, simplificação de problemas que envolvem convolução passando a ser apenas um produto em freqüência (HWEI; HSU, 1991). A transformada de Fourier é usada desde a telefonia celular até a tratamento de imagens obtidas por satélites.

A resposta de um sistema linear é o produto de uma função resposta em freqüência com uma excitação arbitrária realizado no domínio da freqüência. Também pode ser conseguida no domínio do tempo de acordo com o teorema da convolução:

$$x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \tag{3.1}$$

A integral de convolução associada à transformada de Fourier tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} x(t) * g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot G(f) \\ x(t) \cdot g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * G(f) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $X(f)$ e $G(f)$ são as transformadas de $x(t)$ e $g(t)$, respectivamente.

A solução a partir da integral de convolução da excitação no tempo com a função de impedância do sistema tem um custo computacional mais dispendioso que a solução obtida através do produto no domínio da freqüência.

A partir da expansão em série de Fourier de um sinal periódico no domínio do tempo com período T, é possível chegar a forma discreta da transformada de Fourier, dada por:

$$X_k = \frac{T}{N} \sum_{r=1}^{N} x_r \cdot e^{\frac{-i2\pi kr}{N}} \tag{3.3}$$

onde N é o número de termos do sinal discreto, $k \geq 1$ é a componente do espectro em freqüência e r é a componente no tempo.

Tem-se que o passo no tempo é:

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{\omega_{máx}} \tag{3.4}$$

e o passo em freqüência é:

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T_{máx}} \tag{3.5}$$

Portanto a redução do passo no tempo implica em maiores freqüências máximas calculadas, bem como a redução do passo na freqüência acarreta em um tempo de amostragem maior.

A transformada discreta inversa de Fourier é dada por:

$$x_r = \frac{1}{T}\sum_{r=1}^{N} X_k \cdot e^{\frac{i2\pi kr}{N}} \tag{3.6}$$

A FFT envolve um algoritmo de otimização do cálculo da transformada discreta de Fourier que no início dependia do número de termos do sinal (N) ser representado na base de potência de 2. Posteriormente foram desenvolvidos algoritmos para base de potência de 3 e de 5. Atualmente, algoritmos mais eficazes permitem o cálculo para qualquer número de termos. Uma abordagem mais completa da FFT e seu algoritmo podem ser encontrados nas obras de Papoulis (1957), Hwei e Hsu (1991) e Newland (1993).

3.2 Tratamento dos Estados Auxiliares no Domínio da Freqüência

Uma das condições necessária para que se realize a IFFT é que as funções no domínio da freqüência sejam periódicas. Assim deve-se ter um período completo para que se realize a IFFT. Porém na maioria dos casos a resposta estacionária tem um comportamento de decaimento monotônica e sua transição para zero ocorre em altas freqüências podendo acontecer um truncamento antes de que a resposta complete o período, ou seja, que convirja ao valor inicial zero. Acarretando no efeito da causalidade na resposta transiente (ADOLPH; MESQUITA; ROMANINI, 2001). Este efeito depende muito do truncamento da resposta estacionária.

Geralmente nos problemas estruturais de engenharia os valores de freqüências adimensionais encontrados estão entre $0 \leq A_O \leq 10$, ou seja, a parte significativa da análise da dinâmica concentra-se nesta faixa de freqüência adimensional, (GAZETAS, 1983). No entanto é comum para a metodologia aqui abordada calcular respostas estacionárias com A_O próximos ao valor 500, o que não tem sentido físico, mas devido a necessidade matemática da transformada de Fourier, resultando respostas transientes mais suaves. Às vezes necessita-se da inclusão de zeros na resposta em freqüência a fim de se aumentar o $\omega_{máx}$ e por consequência, reduzir o passo no tempo. Isto deve-se a relação entre a freqüência máxima $\omega_{máx}$ calculada e o passo de tempo Δt mostrada na equação (3.4). Analogamente tem-se a relação

do tempo máximo $T_{máx}$ com o passo em freqüência $\Delta\omega$, de acordo com a equação (3.5). Assim, com o refinamento do passo em freqüência obtém-se um maior tempo de amostragem na solução transiente.

A figura 3.1 apresenta um exemplo do estado auxiliar para o deslocamento devido ao carregamento distribuído aplicado na mesma direção de medida do deslocamento (G_{wz}) no domínio da freqüência em função da freqüência adimensional A_O, sendo a resposta obtida para o elemento sob o carregamento distribuído. Na seqüência é apresentada a solução transiente na figura 3.2, da mesma função do estado auxiliar mostrado na figura 3.1, os instantes iniciais e finais da solução transiente são evidênciados nas figuras 3.3 e 3.4, respectivamente.

É possível verificar um bom comportamento da solução estacionária na figura 3.1, mesmo para as altas freqüências. Este bom comportamento para as altas freqüências implica na minimização das oscilações nos instantes iniciais da solução transiente mostrada na figura 3.3. Já o passo de freqüência utilizado na solução estacionária acarreta a um maior tempo de amostragem da solução transiente. Na figura 3.4 são mostradas as oscilações nos instantes finais da solução transiente, as quais apresentam uma pequena amplitude. Estas oscilações tem por causa o passo em freqüência e o comportamento da solução estacionária para as baixas freqüências.

Esta necessidade de se obter soluções estacionária com passos em freqüência pequenos e altas freqüências calculadas, resulta em um dispendioso custo do tempo computacional. Portanto, para se obter soluções transientes com qualidade, ou seja, onde seu comportamento seja suave e com grande quantidade de informação é necessário tratar as soluções estacionárias. Justificando o uso de técnicas tais como o uso de filtros e extrapolação da função com o uso de *spline*. Estas técnicas serão apresentadas mais adiante.

O decaimento para zero da solução estacionária depende de muitos fatores, dentre os quais amortecimento visco-elástico. A transição para zero foi sugerida por Adolph (2002) através do uso de uma extrapolação por uma *spline* suave, conforme mostrado na figura 3.5, ou com o uso de filtros exponenciais, dados pela equação (3.7), atuando na resposta calculada. Estas ferramentas possuem algumas desvantagens como o "achatamento"da resposta transiente, funcionando como um acréscimo no amortecimento e indicando uma relação entre a causalidade e o amortecimento.

$$F_{filtro}(A_O) = e^{-\lambda\cdot(A_O - A_{Ofiltro})} \tag{3.7}$$

onde λ é o fator de decaimento do filtro e $A_{Ofiltro}$ a freqüência de início do sinal.

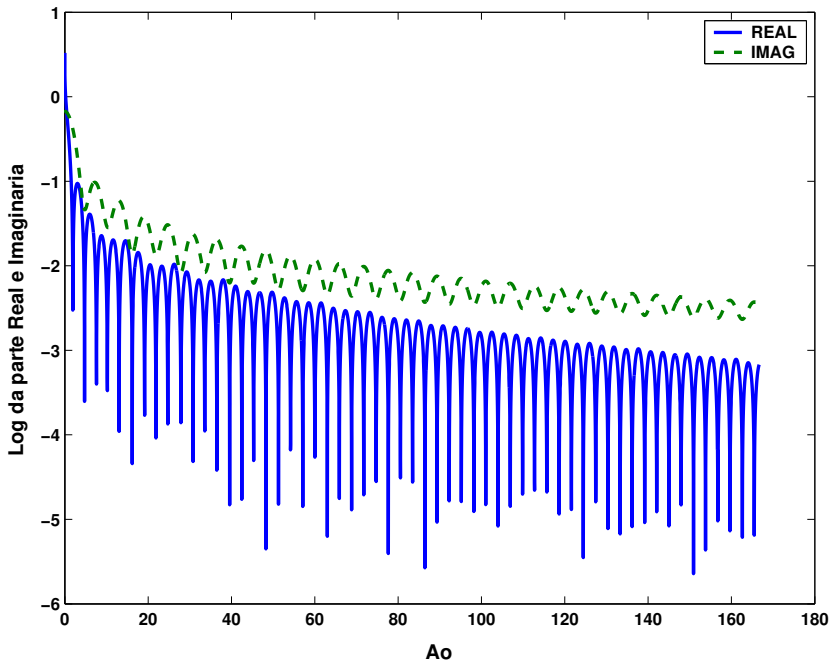

Figura 3.1: Solução estacionária de deslocamento (G_{wz}).

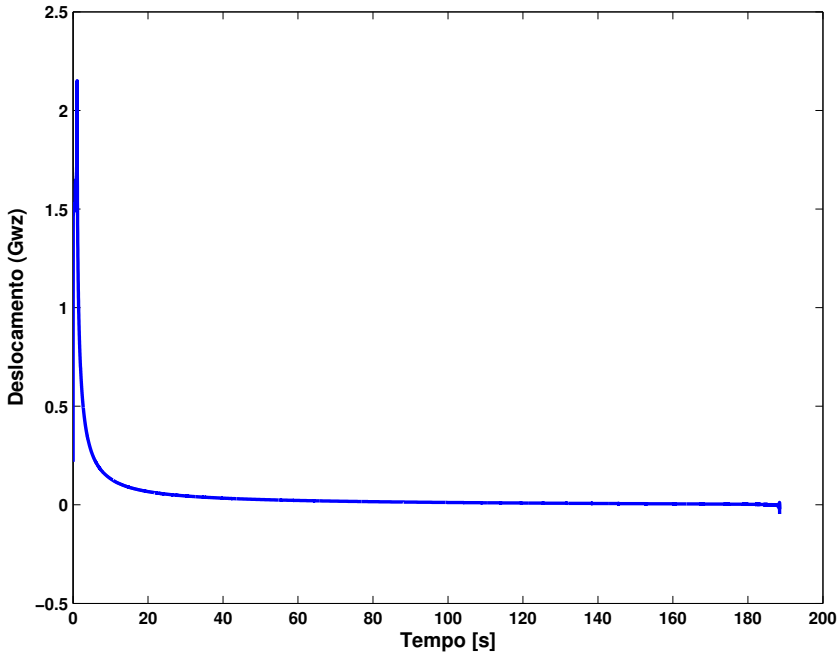

Figura 3.2: Solução transiente (G_{wz}).

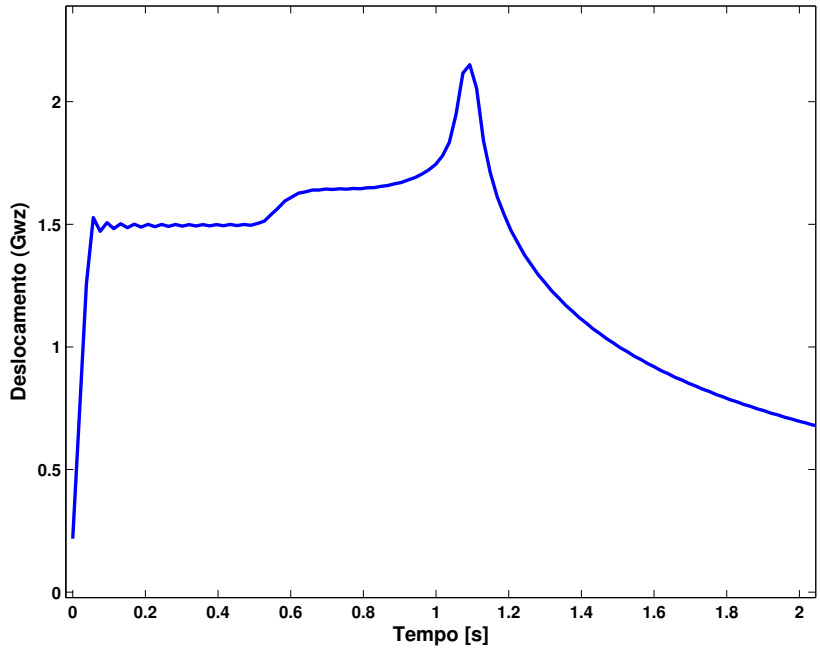

Figura 3.3: Instantes iniciais da solução transiente (G_{wz}).

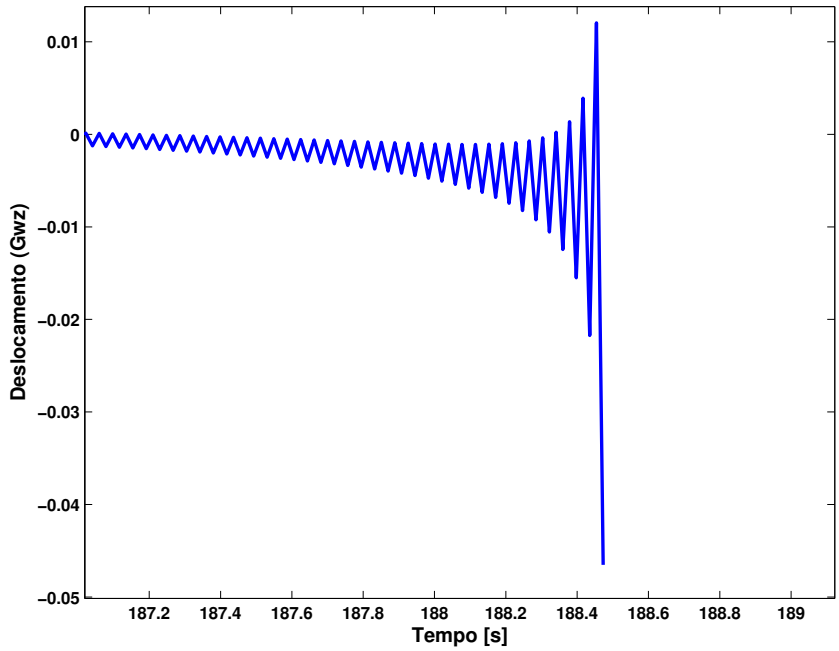

Figura 3.4: Instantes finais da solução transiente (G_{wz}).

A figura 3.5 mostra a solução do deslocamento na direção w devido ao carregamento na direção z sintetizada numericamente até a freqüência $A_O = A_{Ocalc}$. Esta freqüência é escolhida para otimizar o processo ou imposta por uma falha no esquema de integração numérica. A faixa seguinte da solução até $A_O = A_{Ozeros}$ é obtida com a aplicação de filtro ou com o uso da *spline*. Finalmente é inserido zeros alcançando $A_O = A_{Ofinal}$.

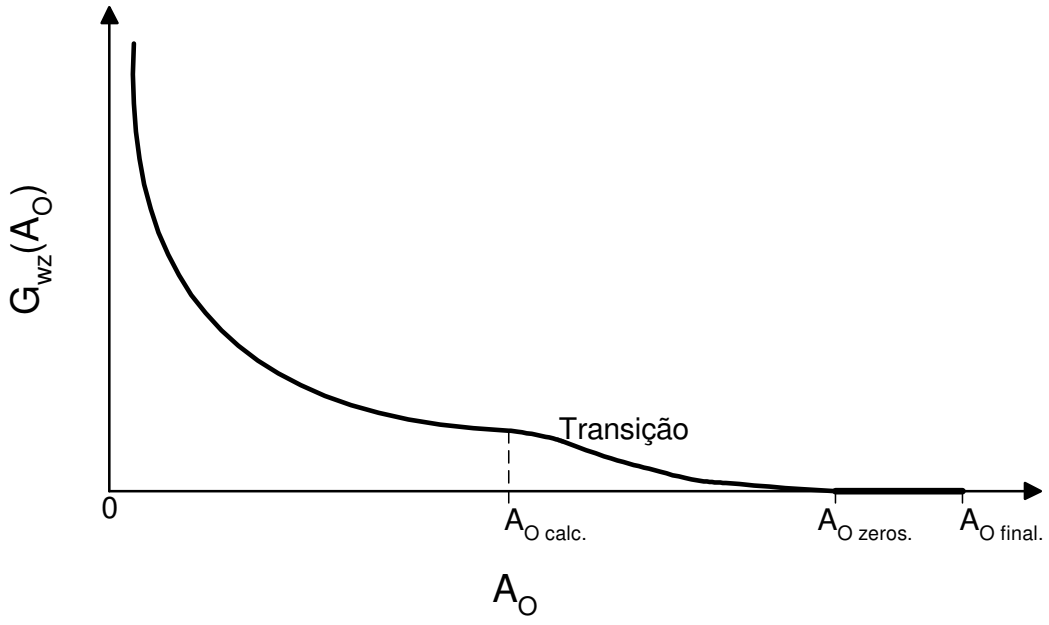

Figura 3.5: Transição da resposta estacionária para zero.

Um comportamento também anômalo na solução 2D para o semi-espaço é o movimento de corpo rígido, também chamado de componente "DC", (NEWLAND, 1993). Investigado e apresentado por Mesquita et al. (2002), este deslocamento esta relacionado com a singularidade na função estacionária para freqüência adimensional $A_O = 0$, ver figura 3.5. A solução tende ao infinito nesta freqüência. O que se faz para atribuir um valor a esta freqüência é calcular um valor tão próximo de zero quanto seja possível. Um exemplo disto foi demonstrado no decorrer de todo o capítulo anterior, onde o $A_O = 0,01$ foi o valor mais baixo calculado. O cálculo desta freqüência próxima de zero é uma limitação da síntese numérica da solução que pode ser contornada.

Para eliminar o movimento de corpo rígido, ou nível "DC", basta extrair de toda a resposta, já no domínio do tempo, o último termo, ou seja:

$$G_{ij}(t) = G_{ij}(t) - G_{ij}(t_{máx}) \tag{3.8}$$

onde o termo $G_{ij}(t_{máx})$ representa o deslocamento de corpo rígido causado pelo processo de IFFT com o valor quase-estático de $A_O(0)$.

Adolph (2002) investigou a influência sobre as respostas ao delta de Dirac utilizando três modelos de amortecimento: o modelo histerético constante, o modelo de Kelvin-Vogt e um misto dos dois anteriores em um modelo tipo rampa. Os modelos podem ser vistos na figura 3.6.

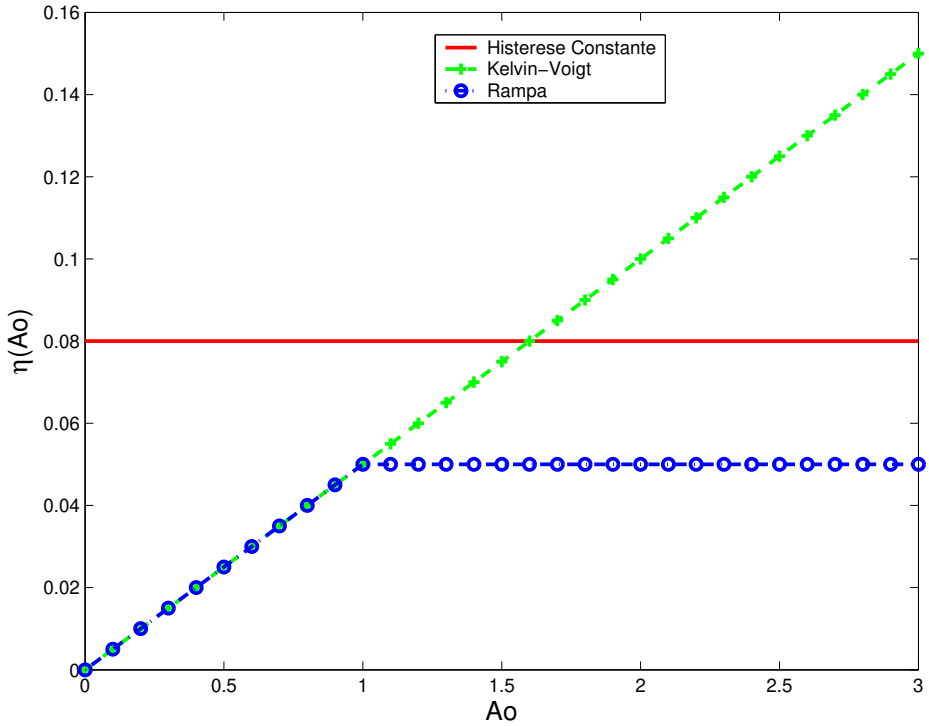

Figura 3.6: Modelos de amortecimento viso-elástico.

Em suma, a metodologia para a obtenção da resposta transiente pode ser dividida em etapas. Inicialmente utilizando-se as características do meio, como por exemplo o modelo de amortecimento, são calculadas as soluções estacionárias com passos e limites de freqüência arbitrários. De posse das soluções, é realizada uma análise de suas componentes reais e imaginárias, identificando-se a origem da falha na integração numérica. Caso seja necessário, aumenta-se o período de análise, diminuindo-se o passo em freqüência. Re-calculando pontos intermediários, realiza-se a transição para zero a partir da freqüência de falha identificada até uma freqüência estipulada para cessar a transição para zero. Acrescenta-se zeros na solução até a freqüência máxima desejada. Opta-se em resolver o sistema para uma excitação arbitrária.

Utilizando-se a resposta estacionária tratada como uma função resposta em freqüência e realizando o seu produto pela excitação no domínio da freqüência, pode-se finalmente aplicar a IFFT sobre o resultado do produto e obter a resposta transiente.

Ou então, aplica-se a IFFT sobre a resposta estacionária e realiza a integral de convolução com a excitação no domínio do tempo, resultando também na resposta transiente.

Esta metodologia apresentada pode ser aplicada às soluções fundamentais tanto de deslocamento quanto de tensão, modeladas para qualquer do tipo de meio e excitação aplicada, no semi-espaço ou no espaço completo.

Uma resposta transiente 3D de uma fundação interagindo com o solo visco elástico considerando as propriedades de inércia da fundação foi apresentada por Adolph, Mesquita e Romanini (2002).

3.3 Instabilidade na Solução no Domínio do Tempo

Na metodologia apresentada acima, não foi identificado nenhum problema de instabilidade na resposta transiente, seja através do produto no domínio da freqüência, seja na convolução no domínio do tempo. No entanto, na obtenção da resposta transiente de fundações rígidas de superfície apresentada no trabalho do Adolph (2002), foi verificada a instabilidade na solução através da convolução no domínio do tempo.

Na formulação para a interação de uma fundação rígida com o solo, é considera a superposição dos deslocamentos ou tensões devido às excitações aplicadas tanto no solo quanto na fundação. Além da superposição, são inseridas equações estipuladas pelo comportamento de corpo rígido da fundação. Estas considerações, que resultam em um sistema algébrico matricial mais complicado, serão mostradas com detalhes no capítulo seguinte onde se busca uma solução para instabilidade encontrada.

Alguns indícios foram registrados por Adolph (2002) como causa da instabilidade. Dentre estes pode-se citar o condicionamento da matriz do sistema algébrico, o aumento no número de elementos na discretização da fundação e a diminuição do fator de amortecimento. O tipo de excitação também tem influência, pois para excitação senoidal não foi encontrada a instabilidade. Apenas para excitação do tipo pulso foi encontrada a instabilidade.

Capítulo 4

Incorporação das Condições de Corpo Rígido

4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma metodologia para sintetizar a resposta transiente de uma fundação rígida 2D interagindo com o solo visco-elástico modelado como semi-espaço. O método é baseado na superposição dos efeitos das funções de influência devido a cargas distribuídas na superfície do semi-espaço. A solução transiente das funções de influência para cargas distribuídas são obtidas com o uso da IFFT. As soluções superpostas são agregadas às condições de compatibilidade cinemática e ao equilíbrio de forças de corpo, satisfazendo as condições de corpo rígido. A estabilidade da resposta transiente do sistema é discutida. Algumas propostas alternativas são apresentadas, tais como a alteração na forma estrutural do sistema linear a ser resolvido e a aplicação de um sistema de convolução com uma aproximação linear ao invés do sistema discreto constante. Esta metodologia visa a implementação do método dos elementos de contorno indireto e, no futuro, a solução de problemas não-lineares.

A incorporação de corpo rígido é também apresentada de uma outra forma que não a mencionada acima. Sendo as soluções estacionárias das funções de influência para cargas distribuídas superpostas e adionadas às condições cinemática e ao equilíbrio de forças de corpo, ainda no domínio da freqüência, resolve-se o sistema para uma excitação aplicada sobre o corpo rígido obtendo-se as funções de flexibilidade normalizadas da fundação. Aplica-se a IFFT sobre as funções de flexibilidade obtendo-se assim a resposta transiente necessária para a validação com o método da superposição no domínio do tempo.

A validação dos resultados é realizada através da comparação dos resultados transientes obtidos com os resultados apresentados por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986).

4.2 Condições de Corpo Rígido

4.2.1 Compatibilidade Cinemática

Uma das condições da fundação, ou estrutura rígida, é a condição de compatibilidade cinemática. A compatibilidade cinemática consiste na restrição segundo à qual todos os pontos pertencentes à fundação rígida são submetidos, ou seja, os deslocamentos verticais e horizontais expressos por:

$$\begin{aligned} W(x_i) &= u_v + \phi_y(x_i - x_f) \\ U(x_i) &= u_h - \phi_y(z_i - z_f) \end{aligned} \tag{4.1}$$

estão diretamente relacionados com os deslocamentos verticais, horizontais e de rotação do corpo rígido, esta definição pode ser verificada na figura 4.1. Onde, ϕ_y é a amplitude do ângulo de rotação da fundação em relação ao eixo horizontal e u_v, u_h são os deslocamentos verticais e horizontais, respectivamente, da fundação com relação a um ponto de referência de coordenadas (x_f, z_f). Usualmente este ponto de referencia é o centro da fundação.

Desta forma, toda a fundação comporta-se como se fosse constituída de uma rígidez infinita, sem a presença de qualquer deformação. Todos os elementos da fundação se mantém colineares, esta relação pode ser vista na figura 4.1.

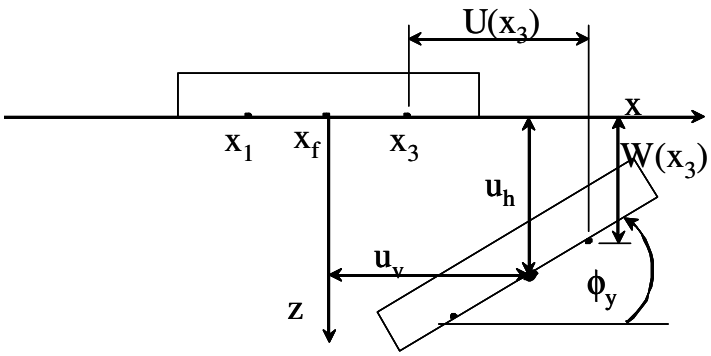

Figura 4.1: Relação entre o deslocamento do ponto x_3 (W, U) e o deslocamento de corpo rígido da fundação $\{u_v, u_h, \phi_y\}^T$.

O agrupamento das equações em uma matriz de compatibilidade cinemática $[CC]$ e relaciona os deslocamentos dos diversos pontos x_i na interface solo-fundação $W(x_i)$ e $U(x_i)$ com os graus de liberdade do corpo rígido ($\{u_{ref}\} = \{u_v, u_h, \phi_y\}^T$), pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} W(x_i) \\ U(x_i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (\frac{x_1 - x_f}{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & (\frac{x_N - x_f}{a}) \\ 0 & 1 & -(\frac{z_1 - z_f}{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -(\frac{z_N - z_f}{a}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_h \\ \phi_y a \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

onde, a é a metade da largura da fundação e N é o número de elementos para discretizar a fundação.

A equação (4.2) também é apresentada de forma simplificada:

$$\{u_i\} = [CC] \cdot \{u_{ref}\} \tag{4.3}$$

O vetor de deslocamentos da equação (4.3) $\{u_i\}$ representa os mesmos deslocamentos do vetor $\{\overline{u}_i\}$ citados na equação (4.13). Porém, este último está escrito para o domínio da freqüência, e como a compatibilidade cinemática é a mesma para o domínio do tempo, optou-se por escrevê-la com uma notação própria.

4.2.2 Equilíbrio de Forças

Uma segunda e última condição para a incorporação de uma fundação rígida é satisfazer o equilíbrio de forças. Do equilíbrio de forças entre as forças de superfícies $(t_z(x_i), t_x(x_i))$ na interface solo-fundação e os esforços externos aplicados na fundação rígida ($\{F_{ext}\} = \{F_v, F_h, M_y\}^T$) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} F_v &= \sum_{i=1}^{N} t_z(x_i) \cdot l_i \\ F_h &= \sum_{i=1}^{N} t_x(x_i) \cdot l_i \\ \frac{M_y}{a} &= \sum_{i=1}^{N} t_z(x_i) \cdot l_i \cdot (x_i - x_f)/a - t_x(x_i) \cdot l_i \cdot (z_i - z_f)/a \end{aligned} \tag{4.4}$$

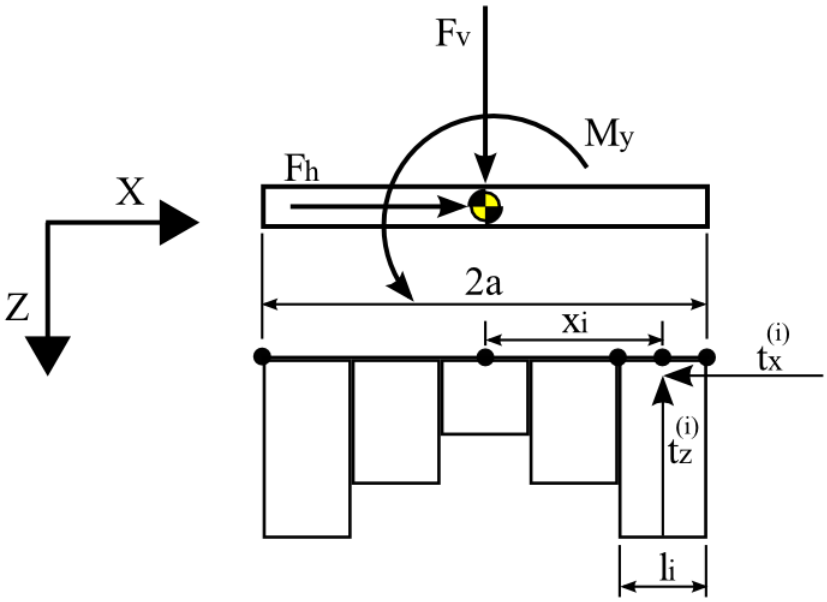

Figura 4.2: Relação entre as forças de superfícies $t_z(x_i)$,$t_x(x_i)$ no ponto e as forças externas aplicadas na fundação $\{F_v, F_h, M_y\}^T$.

sendo, l_i o comprimento do i-ésimo elemento, F_v, F_h, M_y são, respectivamente, a força vertical, força horizontal e o momento aplicados externamente à fundação, ver figura 4.2.

O equilíbrio de forças, de acordo com a figura 4.2 e as equações (4.4), relaciona as forças de corpo rígido (forças externas) com as forças de superfície de cada ponto x_i da interface solo-fundação, sendo estas forças nos nós equivalentes à toda força distribuída ao longo do comprimento l_i de cada elemento. Assim, tem-se que a matriz de equilíbrio de forças $[EQ]$ é a transposta da matriz de compatibilidade cinemática multiplicada pelo comprimento do respectivo elemento dada por:

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_h \\ \dfrac{M_y}{a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_1 & \dots & l_N \\ l_1 \cdot (\dfrac{x_1 - x_f}{a}) & \dots & l_N \cdot (\dfrac{x_N - x_f}{a}) & -l_1 \cdot (\dfrac{z_1 - z_f}{a}) & \dots & -l_N \cdot (\dfrac{z_N - z_f}{a}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_z(x_1) \\ \vdots \\ t_z(x_N) \\ t_x(x_1) \\ \vdots \\ t_x(x_N) \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Apresentando as equações de equilíbrio de forças de forma compacta, tem-se:

$$\{F_{ext}\} = [EQ] \cdot \{F_f\} \tag{4.6}$$

sendo F_f as forças de superfícies $t_z(x_i)$,$t_x(x_i)$ aplicadas na interface solo-estrutura. Estas variáveis equivalem as forças de superfícies $\left\{\overline{f}_j\right\}$ encontradas mais adiante na equação (4.13). No entanto, escreve-se com outra notação pois o equilíbrio de forças será o mesmo na formulação no tempo.

4.3 Superposição dos Efeitos das Soluções com Carregamento Distribuído na Superfície do Semi-espaço.

As respostas estacionárias das soluções de deslocamentos e tensões são regidas por uma relação diretamente proporcional à excitação aplicada, ou seja, há uma relação linear que pode ser representada para o deslocamento estacionário como:

$$\overline{u}_p(x,z) = \frac{1}{\pi\mu}\overline{G}_{pr}(x,z)\overline{f}_r(x,z) \tag{4.7}$$

onde $p = x, z$ é a direção em que o deslocamento é medido e $r = x, z$ é a direção da aplicação da carga.

No entanto, pode haver uma excitação em qualquer outro lugar que não na coordenada geométrica (x, z) e seu efeito deve ser considerado no deslocamento total $\overline{u}_p(x, z)$. Para isto, basta somar as influências de cada excitação, realizando a superposição dos efeitos de deslocamentos,

$$\overline{u}_p(x_i,z_i) = \frac{1}{\pi\mu}\sum_{j=1}^{N}\overline{G}_{pr}(x_i,z_i,x_j,z_j)\overline{f}_r(x_j,z_j) \tag{4.8}$$

que também pode ser escrito de forma matricial como:

$$\{\overline{u}_p(x_i,z_i)\} = \frac{1}{\pi\mu}\left[\overline{G}_{pr}(x_i,z_i,x_j,z_j)\right]\left\{\overline{f}_r(x_j,z_j)\right\} \tag{4.9}$$

sendo i o ponto onde está sendo calculado a solução e j o ponto onde a carga está aplicada.

Um esquema da superposição realizado para três pontos discretizados na superfície do semi-espaço pode ser visto na figura 4.3. Na figura 4.4 é separada a superposição na soma de três casos simples, equivalente a figura 4.3, com excitações verticais (t_z) e horizontais (t_x). Considera-se o campo de tensões constante distribuída sobre cada elemento.

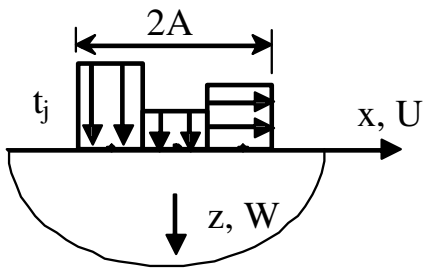

Figura 4.3: Superposição dos efeitos das funções de influência.

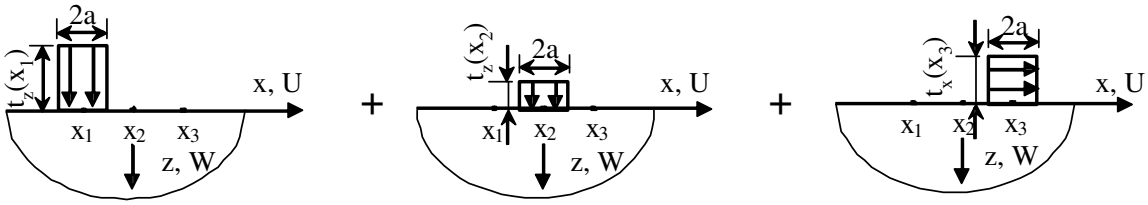

Figura 4.4: Superposição separadas em duas somas.

Os deslocamentos totais verticais $\overline{u}_z(x_i, A_O)$ e horizontais $\overline{u}_x(x_i, A_O)$ do centro de cada elemento representados pela figura 4.4 devido as carga normais $(\overline{f}_z(x_j, A_O))$ e tangenciais $(\overline{f}_x(x_j, A_O))$ podem ser obtidos por:

$$\overline{u}_z(x_i, A_O) = \frac{1}{\pi\mu}\sum_{j=1}^{N}\left[\overline{G}_{zz}(x_i, x_j, A_O)\cdot\overline{f}_z(x_j, A_O) + \overline{G}_{zx}(x_i, x_j, A_O)\cdot\overline{f}_x(x_j, A_O)\right] \quad (4.10)$$

$$\overline{u}_x(x_i, A_O) = \frac{1}{\pi\mu}\sum_{j=1}^{N}\left[\overline{G}_{xz}(x_i, x_j, A_O)\cdot\overline{f}_z(x_j, A_O) + \overline{G}_{xx}(x_i, x_j, A_O)\cdot\overline{f}_x(x_j, A_O)\right] \quad (4.11)$$

onde $N = 3$ para este caso com três elementos.

É conveniente lembrar que a solução para cada elemento depende da freqüência e das coordenadas geométricas. Desta forma, é possível escrever a solução de forma matricial expandindo para N elementos como:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_z(x_1) \\ \vdots \\ \overline{u}_z(x_N) \\ \overline{u}_x(x_1) \\ \vdots \\ \overline{u}_x(x_N) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu}\begin{bmatrix} \overline{G}_{zz}(x_1,x_1) & \cdots & \overline{G}_{zz}(x_1,x_N) & \overline{G}_{zx}(x_1,x_1) & \cdots & \overline{G}_{zx}(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{G}_{zz}(x_N,x_1) & \cdots & \overline{G}_{zz}(x_N,x_N) & \overline{G}_{zx}(x_N,x_1) & \cdots & \overline{G}_{zx}(x_N,x_N) \\ \overline{G}_{xz}(x_1,x_1) & \cdots & \overline{G}_{xz}(x_1,x_N) & \overline{G}_{xx}(x_1,x_1) & \cdots & \overline{G}_{xx}(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{G}_{xz}(x_N,x_1) & \cdots & \overline{G}_{xz}(x_N,x_N) & \overline{G}_{xz}(x_N,x_1) & \cdots & \overline{G}_{xz}(x_N,x_N) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{f}_z(x_1) \\ \vdots \\ \overline{f}_z(x_N) \\ \overline{f}_x(x_1) \\ \vdots \\ \overline{f}_x(x_N) \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

ou simplesmente

$$\{\overline{u}_i\} = \left[\overline{G}_{ij}\right] \cdot \left\{\overline{f}_j\right\} \tag{4.13}$$

onde a matriz $[\overline{G}_{ij}]$ é denominada matriz de influência dos deslocamentos do problema, o vetor de deslocamentos total $\{\overline{u}_i\}$ contém os deslocamentos de todos os pontos discretizados e $\left\{\overline{f}_j\right\}$ é o vetor de forças de superfície ao longo de cada elemento.

4.3.1 Equações Finais para Resposta em Deslocamento do Corpo Rígido no Domínio da Freqüência

Para montar um sistema para a solução no domínio da freqüência que represente o problema de interação dinâmica solo-estrutura basta acoplar as equações apresentadas de forma matricial pelas equações (4.13), (4.3) e (4.6) em um só sistema algébrico. Para tanto, primeiramente deve-se relacionar os deslocamento dos centros de cada elemento fornecido pelas soluções quando sujeitos uma excitação com as restrições imposta aos deslocamentos pela compatibilidade cinemática, ou seja, igualando-se a equação (4.13) com a equação (4.3), tem-se:

$$\left[\overline{G}_{ij}\right] \cdot \left\{\overline{f}_j\right\} - [CC] \cdot \{u_{ref}\} = \{0\} \tag{4.14}$$

Faltando apenas acrescentar as condições de equilíbrio de força definidas em (4.6), obtendo um sistema algébrico completo para a formulação de corpo rígido no domínio da freqüência, representado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\pi\mu}\overline{G}_{zz}(x_i,x_j) & \frac{1}{\pi\mu}\overline{G}_{zx}(x_i,x_j) & -1 & 0 & -(\frac{x_i - x_f}{a}) \\ \frac{1}{\pi\mu}\overline{G}_{xz}(x_i,x_j) & \frac{1}{\pi\mu}\overline{G}_{xx}(x_i,x_j) & 0 & -1 & (\frac{z_i - z_f}{a}) \\ l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_i & 0 & 0 & 0 \\ l_i(\frac{x_i - x_f}{a}) & -l_i(\frac{z_i - z_f}{a}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{f}_z(x_j) \\ \overline{f}_x(x_j) \\ \overline{u}_v \\ \overline{u}_h \\ \overline{\phi}_y a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{F}_v \\ \overline{F}_h \\ \overline{M}_y/a \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

ou também, de forma concisa:

$$\begin{bmatrix} \overline{G} & -CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{f} \\ \overline{u}_{ref} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_{ext} \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

sendo o sistema de dimensões $(2N + 3 \times 2N + 3)$. Portanto, o vetor de incógnitas é formado por $2N$ tensões de interface solo-estrutura mais 3 termos dos deslocamentos da fundação.

4.3.2 Adimensionalização das Grandezas

O vetor de incógnitas do sistema da equação (4.16) pode ser escrito em função de grandezas adimensionais, dando origem a um sistema normalizado independente do sistema de unidades.

Primeiramente define-se as forças de superfícies normalizadas. Aplicando apenas uma força externa vertical na fundação de amplitude $\overline{F}_v = \overline{f}_z$. Tem-se que a tensão na fundação é $\overline{\sigma}_z = \overline{f}_z/2a$, onde a é a metade da largura da fundação. Analogamente pode-se escrever que a tensão no elemento é $\overline{\sigma}_{zj} = \overline{f}_z(x_j)/2a_j$ onde a_j é a semi-largura do elemento. Assim, dividindo-se a tensão no elemento pela tensão da fundação, encontra-se a tensão normalizada para o elemento dada por:

$$\overline{k}_{zzj} = \frac{\overline{\sigma}_{zj}}{\overline{\sigma}_z} = \frac{\overline{f}_z(x_j) \cdot a}{a_j \cdot \overline{f}_z} \Longrightarrow \overline{k}_{zzj} = \frac{\overline{f}_z(x_j)}{\overline{f}_z \cdot d_j} \tag{4.17}$$

$$\overline{k}_{xxj} = \frac{\overline{\sigma}_{xj}}{\overline{\sigma}_x} = \frac{\overline{f}_x(x_j) \cdot a}{a_j \cdot \overline{f}_x} \Longrightarrow \overline{k}_{xxj} = \frac{\overline{f}_x(x_j)}{\overline{f}_x \cdot d_j} \tag{4.18}$$

onde $d_j = a_j/a$. A tensão normalizada $\overline{k}_{xxj}$ é encontrada realizando o mesmo procedimento para uma força externa horizontal e considereando as demais nulas.

Os deslocamentos verticais, horizontais e de rotação da fundação também podem ser normalizados com o auxílio do fator $\pi\mu/\overline{f}_z$, sendo $\overline{f}_z$ a amplitude da carga externa vertical. Os deslocamentos normalizados da fundação são escritos como:

$$\overline{u}_{vnorm} = \frac{\overline{u}_v \pi\mu}{\overline{f}_z} \tag{4.19}$$

$$\overline{u}_{hnorm} = \frac{\overline{u}_h \pi\mu}{\overline{f}_z} \tag{4.20}$$

$$\overline{\phi}_{ynorm} \cdot a = \frac{\overline{\phi}_y \cdot a\pi\mu}{\overline{f}_z} \tag{4.21}$$

Substituindo as tensões e deslocamentos normalizados na equação (4.15), o sistema passa a ser:

$$\begin{bmatrix} d_j \cdot \overline{G}_{wz}(x_i, x_j) & d_j \cdot \overline{G}_{wx}(x_i, x_j) & -1 & 0 & -(\frac{x_i - x_f}{a}) \\ d_j \cdot \overline{G}_{uz}(x_i, x_j) & d_j \cdot \overline{G}_{ux}(x_i, x_j) & 0 & -1 & (\frac{z_i - z_f}{a}) \\ d_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_j & 0 & 0 & 0 \\ d_j \cdot (\frac{x_i - x_f}{a}) & -d_j \cdot (\frac{z_i - z_f}{a}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{k}_{zzj}(x_j) \\ \overline{k}_{xxj}(x_j) \\ \overline{u}_{vnorm} \\ \overline{u}_{hnorm} \\ \overline{\phi}_{ynorm} a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

As forças externas assumem agora valores nulos ou iguais a 1 como pode ser visto na equação (4.22). Isto ocorre porque a normalização foi realizada em função de suas amplitudes, ou seja, $\overline{F}_{ext}$ pode ser igual a $\{1,\ 0,\ 0\}^T$ para a carga vertical; $\{0,\ 1,\ 0\}^T$ para a carga horizontal e $\{0,\ 0,\ 1\}^T$ para o momento normalizado.

A equação (4.22) pode ser escrita de forma sucinta como:

$$\begin{bmatrix} \overline{G}_{norm} & -CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{k}_{norm} \\ \overline{u}_{refnorm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_{extnorm} \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

na qual $\overline{G}_{norm}$ é a matriz com as soluções estacionárias para os deslocamentos normalizados.

Resolvendo o sistema de equações (4.23) sucessivamente para as forças externas aplicadas isoladamente obtém-se a matriz de flexibilidade do sistema, ou seja, a matriz que relaciona as forças externas com os deslocamentos, dada por:

$$\begin{Bmatrix} W_z \\ U_x \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & N_{uz} & N_{\phi z} \\ N_{wx} & N_{ux} & N_{\phi x} \\ N_{wy} & N_{uy} & N_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

De acordo com o trabalho de Mesquita (1989), quando aplicada apenas uma força vertical sobre uma fundação 2D simétrica, esta não deve causar deslocamentos na direção horizontal ou de rotação. Assim a matriz de flexibilidade para fundação 2D deve ser:

$$\begin{Bmatrix} W_z \\ U_x \\ \phi_y a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi\mu} \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{\phi x} \\ 0 & N_{uy} & N_{\phi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

No entanto, ainda é mostrado em seu trabalho que o deslocamento horizontal provocado por um momento aplicado na fundação tem a mesma influência de um carregamento horizontal sobre a rotação na fundação, ou seja, $N_{\phi x} = N_{uy}$.

4.4 Superposição no Domínio do Tempo

A solução da interação solo-estrutura no domínio da freqüência é muito importante, porém deficitária em se tratando de alguns casos específicos, tal como o problema não-linear que pode ser considerado quando estudado o escorregamento com o atrito na interface solo-estrutura. Visando sanar esta deficiência, é justificada a formulação no domínio do tempo a fim de contemplar soluções para os problemas não-lineares.

A formulação da superposição no domínio do tempo segue os mesmos aspectos da freqüência, principalmente pela formulação na adição da compatibilidade cinemática e do equilíbrio de forças. Todavia, a superposição das soluções fundamentais propriamente dita é o diferencial, pois, contrário ao que ocorre no domínio da freqüência, no domínio do tempo a relação que fornece os deslocamentos é uma integral de convolução entre a excitação e a solução fundamental e não mais um produto como na freqüência. Esta relação é dada por:

$$u_i(x_i, t) = \int_0^t g_{ij}(x_i - x_j, t - \tau) \cdot f_j(\tau)\, d\tau \tag{4.26}$$

onde t refere-se ao instante de tempo.

A resposta com a superposição, seguindo a mesma lógica da figura 4.4, é um somatório de integrais de convoluções dadas por:

$$u_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t g_{ij}(x_i - x_j, t - \tau) \cdot f_j(\tau)\, d\tau \tag{4.27}$$

Sendo que a representação discreta da convolução (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975) é dada por:

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{t} g(t - \tau) \cdot f(\tau)\, \Delta t \tag{4.28}$$

onde Δt é o passo constante no tempo.

Portanto, pode-se escrever a equação (4.27) de forma matricial para um exemplo de três elementos discretizados e apresentado apenas os deslocamentos na direção vertical z. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{c} w_1(t_n) \\ w_2(t_n) \\ w_3(t_n) \end{array} \right\} = \sum_{\tau=0}^{n} \begin{bmatrix} g_{11}(t_\tau) & g_{12}(t_\tau) & g_{13}(t_\tau) \\ g_{21}(t_\tau) & g_{22}(t_\tau) & g_{23}(t_\tau) \\ g_{31}(t_\tau) & g_{32}(t_\tau) & g_{33}(t_\tau) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} f_1(t_{n-\tau}) \\ f_2(t_{n-\tau}) \\ f_3(t_{n-\tau}) \end{array} \right\} \cdot \Delta t \tag{4.29}$$

para τ variando de 0 até n e o instante inicial $n = 0$.

A equação (4.29) mostra que não há nenhum problema em obter os deslocamentos através da integral de convolução, que para dados discretos, torna-se um somatório. Contudo não é possível acoplar a superposição da forma apresentada na equação (4.29) com o comportamento de corpo rígido, pois na formulação de corpo rígido as tensões na interface solo-estrutura são incógnitas.

Contudo, investigando o comportamento da integral de convolução, consegue-se reescrever a equação (4.29), (ADOLPH, 2002), agora com todos os graus de liberdade de desloca-

mento nas direções x e z, como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(t_n) \\ u(t_n) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} g_{wz}(t_0) & g_{wx}(t_0) \\ g_{uz}(t_0) & g_{ux}(t_0) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} f_z(t_n) \\ f_x(t_n) \end{array} \right\} \cdot \Delta t + \underbrace{\sum_{\tau=1}^{n} \begin{bmatrix} g_{wz}(t_\tau) & g_{wx}(t_\tau) \\ g_{uz}(t_\tau) & g_{ux}(t_\tau) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} f_z(t_{n-\tau+1}) \\ f_x(t_{n-\tau+1}) \end{array} \right\}}_{CONV} \cdot \Delta t \tag{4.30}$$

A integral de convolução é separada na soma de duas parcelas, onde a primeira parcela contém a solução transiente da solução fundamental fixa no instante inicial multiplicada pelas forças de superfícies na interface solo-estrutura para o instante em que se está calculando, e a segunda parcela contém o resto do somatório de convolução que no instante inicial é nula e passa a ser calculada a partir do segundo instante em diante. Parte da segunda parcela será chamada de $CONV$, ver equação (4.30). Esta parte $CONV$ trata-se de um vetor de ordem $2N$ e observando que o Δt não faz parte do vetor $CONV$.

Escrevendo a equação (4.30) de forma compacta, tem-se:

$$\left\{ u_i(t_n) \right\} = [g_{ij}(t_0)] \{f_j(t_n)\} \cdot \Delta t + \{CONV\} \cdot \Delta t \tag{4.31}$$

4.4.1 Equações Finais para o Corpo Rígido no Domínio do Tempo

De posse da equação (4.30), é possível dar continuidade a formulação da superposição com as restrições de corpo rígido, a qual segue análogamente ao procedimento para o domínio da freqüência. Portanto, igualando-se a equação (4.31) com a equação (4.3) que trata da compatibilidade cinemática e re-arranjando os termos, tem-se:

$$[g_{ij}(t_0)] \{f_j(t_n)\} \cdot \Delta t - [CC] \{u_{ref}(t_n)\} = \{-CONV\} \cdot \Delta t \tag{4.32}$$

Falta apenas acrescentar as equações de equilíbrio de forças e assim montar um sistema algébrico. Isso pode ser feito de duas formas.

A primeira forma, mais direta, consiste em inserir a constante Δt a equação (4.32) dentro do vetor de forças de superfícies no lado esquerdo da equação (4.32) e dentro do vetor do lado direito da mesma equação. Feito isso, deve-se adicionar a equação de equilíbrio de força (4.6) que deverá ter o vetor de forças externas multiplicado por Δt para que não seja alterada, dando origem ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} g_{ij}(t_0) & -CC \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} f_j(t_n) \cdot \Delta t \\ u_{ref}(t_n) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -CONV \cdot \Delta t \\ F_{ext} \cdot \Delta t \end{array} \right\} \tag{4.33}$$

O sistema dado pela equação (4.33) será denominado de sistema $1(CONV \cdot \Delta t)$.

A segunda forma de se obter o sistema é dividindo toda a equação (4.32) por Δt antes de acoplar a equação de equilíbrio de força, de modo que o sistema final é apresentado por:

$$\begin{bmatrix} g_{ij}(t_0) & -CC/\Delta t \\ EQ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j(t_n) \\ u_{ref}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CONV \\ F_{ext} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

O segundo sistema dado pela equação (4.34) será chamado de sistema $2(CONV)$.

É importante salientar que as matrizes de ambos os sistemas dados pelas equações (4.33) e (4.34) não são alteradas para cada passo de tempo, o contrário do que acontece na freqüência cuja matriz muda a cada passo na freqüência. No tempo apenas o vetor de excitação externa F_{ext} e o vetor da convolução das funções de influência com as forças de superfícies dos passos anteriores mudam a cada passo de tempo, ou seja, isso significa dizer, fazendo analogia com um sistema linear $[A]\{x\} = \{b\}$, que apenas o vetor b muda com o passo de tempo.

Considerando ainda que no instante inicial não é conhecida nenhuma força de superfície para convoluir com as funções de influência, deve-se adotar o vetor $CONV = 0$ para o instante inicial. Isso é tão somente possível pois considera-se o problema como causal, ou seja, o sistema não apresenta reação dinâmica até que haja uma perturbação do sistema. O mesmo pode não ocorrer caso seja considerada uma condição inicial que não a igual a zero para os deslocamentos, ou mesmo de velocidade.

O sistema $1(CONV \cdot \Delta t)$ é uma proposta alternativa deste trabalho com o intuito de melhorar o condicionamento da matriz e eliminar a instabilidade encontrada no trabalho apresentado por Adolph (2002), o qual é constituído com a formulação do sistema $2(CONV)$. Observando que suas simulações numéricas foram simplificadas, considerando-se apenas as funções de influência que relacionam o deslocamento vertical com a excitação normal à superfície, dando origem ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} g_{wz11}(t_0) & g_{wz12}(t_0) & g_{wz13}(t_0) & g_{wz14}(t_0) & -1/\Delta t \\ g_{wz21}(t_0) & g_{wz22}(t_0) & g_{wz23}(t_0) & g_{wz24}(t_0) & -1/\Delta t \\ g_{wz31}(t_0) & g_{wz32}(t_0) & g_{wz33}(t_0) & g_{wz34}(t_0) & -1/\Delta t \\ g_{wz41}(t_0) & g_{wz42}(t_0) & g_{wz43}(t_0) & g_{wz44}(t_0) & -1/\Delta t \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{v1}(t_n) \\ f_{v2}(t_n) \\ f_{v3}(t_n) \\ f_{v4}(t_n) \\ u_v(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CONV_1 \\ -CONV_2 \\ -CONV_3 \\ -CONV_4 \\ F_z \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

Este sistema simplificado, para quatro elementos na fundação, proporcionou uma redução significativa dos custos computacionais. Porém sua adoção não se deve ao fato de querer reduzir custos computacionais, e sim a elaboração de um sistema que desconsidera-se os efeitos

dos estados auxiliares cruzados, ou seja, afim de desprezar a influência dos estados auxiliares de deslocamentos em uma dada direção devido ao carregamento na direção perpendicular para identificar a real causa da instabilidade encontrada na solução do sistema equações no domínio do tempo.

No presente trabalho foi apresentado fundações constituidas de apenas três elementos. Embora o sistema de equações tenha sido considerado com todos os estados auxiliares de deslocamento, fazendo com que a dimensão do sistema fosse $2N + 3$, onde N é o numero de elementos da fundação.

4.5 Integral de Convolução por Aproximação Linear

No estudo da estabilidade do sistema, além da variação das configurações adotadas, também foi modificada a forma como é realizada a integral de convolução. Não só a forma discreta constante, na qual se tem o valor constante no ponto ao longo de todo Δt como demonstrado na figura 4.5, foi implementada e investigada, mas também a forma com uma aproximação linear com o auxílio das funções de forma, neste caso linear, e com o uso de dois pontos pode-se variar a integração ao longo de Δt, como mostra a figura 4.6.

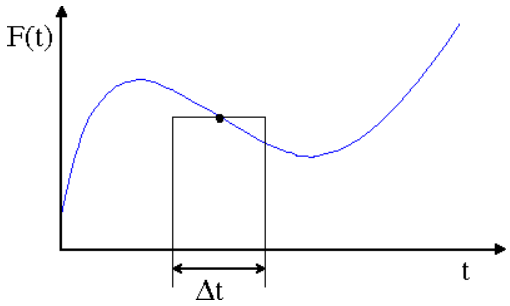

Figura 4.5: Integração com forma constante.

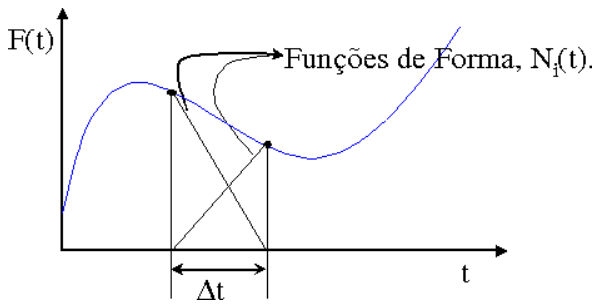

Figura 4.6: Integração com forma linear.

O equacionamento da integral de convolução com aproximação linear é mostrado na seqüência após a apresentação de algumas propriedades da convolução.

Do teorema da convolução, tem-se que:

$$g(t) * h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) \cdot h(t-\beta)\, d\beta \tag{4.36}$$

Sendo que as funções $g\,(t)$ e $h\,(t)$ são nulas para $t < 0$, ou seja, em um sistema causal, tem-se:

$$g(t) * h(t) = \int_{0}^{t} g(\beta) \cdot h(t-\beta)\, d\beta \tag{4.37}$$

a) Impulso: elemento neutro da convolução

$$g(t) = g(t) * \delta(t) \tag{4.38}$$

O impulso é um elemento neutro da convolução, ou seja, sua aplicação não modifica a função original. Esta propriedade é importante pois o seu uso pode ser estendido, originando a propriedade seguinte, que é o deslocamento temporal.

b) Deslocamento temporal

$$g(t) * \delta(t - a) = g(t - a) \tag{4.39}$$

O deslocamento temporal permite que a função seja deslocada em relação a seu funcional.

c) Convolução com um degrau unitário (Heaviside)

$$g(t) * u(t) = \int_0^t g(\beta)\, d\beta \tag{4.40}$$

A convolução de uma função com uma função degrau resulta na sua integral.

d) Comutativa

$$g(t) * y(t) = y(t) * g(t) \tag{4.41}$$

e) Associativa

$$x(t) * (g(t) * z(t)) = (x(t) * g(t)) * z(t) \tag{4.42}$$

Representação Discreta da Convolução

A representação discreta da convolução para um sistema de funções causais (4.37) é dada por:

$$u(t) = g(t) * h(t) = \sum_{\tau=0}^{t} g(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \Delta\tau \tag{4.43}$$

onde Δt é o passo constante no tempo.

Contudo, podemos resumir a operação da convolução em cinco passos, os quais seguem abaixo:

- Mudança de variável;
- Inversão ou rotação de uma das funções;
- Atraso da variável t em relação a variável adotada (nosso exemplo τ);
- Produto entre as funções;
- Integração.

Estes passos podem ser exemplificados matematicamente pela equação (4.44).

$$\begin{aligned}
u(t) &= g(t) * h(t) = \sum_{\tau=0}^{t} g(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \Delta\tau \\
u(0) &= g(0) \cdot h(0) \\
u(1) &= g(0) \cdot h(1) + g(1) \cdot h(0) \\
u(2) &= g(0) \cdot h(2) + g(1) \cdot h(1) + g(2) \cdot h(0) \\
u(3) &= g(0) \cdot h(3) + g(1) \cdot h(2) + g(2) \cdot h(1) + g(3) \cdot h(0) \\
u(4) &= g(0) \cdot h(4) + g(1) \cdot h(3) + g(2) \cdot h(2) + g(3) \cdot h(1) + g(4) \cdot h(0)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Aproximando as funções por funções de forma linear

Na figura 4.6 pode ser verificada a variação da função $F(t)$ de forma linear para o passo Δt com o auxilio das funções de forma linear $N_i(t)$.

Os passos da equação (4.44) para duas funções causais $g(t)$ e $h(t)$ aproximadas por funções de forma lineares N_1 e N_2 podem ser visualizado graficamente na figura 4.7.

Sendo as funções de forma linear, dadas por:

$$
\begin{aligned}
N_1(\tau) &= N_2(\Delta t - \tau) = \frac{\tau}{\Delta t} \\
N_2(\tau) &= N_1(\Delta t - \tau) = 1 - \frac{\tau}{\Delta t}
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Portanto, as funções $g(\tau)$ e $h(t-\tau)$ já em função de novas variáveis e com a rotação (inversão) de uma das funções, assume a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
g(\tau) = {} & g(0)N_1^0(\tau) + g(1)N_2^0(\tau) + g(2)N_1^1(\tau) + g(2)N_2^1(\tau) + \cdots \\
& \cdots + g(2)N_1^2(\tau) + g(3)N_2^2(\tau) + g(3)N_1^3(\tau) + g(4)N_2^3(\tau)
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

$$
\begin{aligned}
h(t-\tau) = {} & h(0)N_1^0(t-\tau) + h(1)N_2^0(t-\tau) + h(2)N_1^1(t-\tau) + h(2)N_2^1(t-\tau) + \cdots \\
& \cdots + h(2)N_1^2(t-\tau) + h(3)N_2^2(t-\tau) + h(3)N_1^3(t-\tau) + h(4)N_2^3(t-\tau)
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Onde os índices superiores das funções de forma se referem ao segmento da função, o qual pode ser identificado na figura 4.7 pela numeração em negrito.

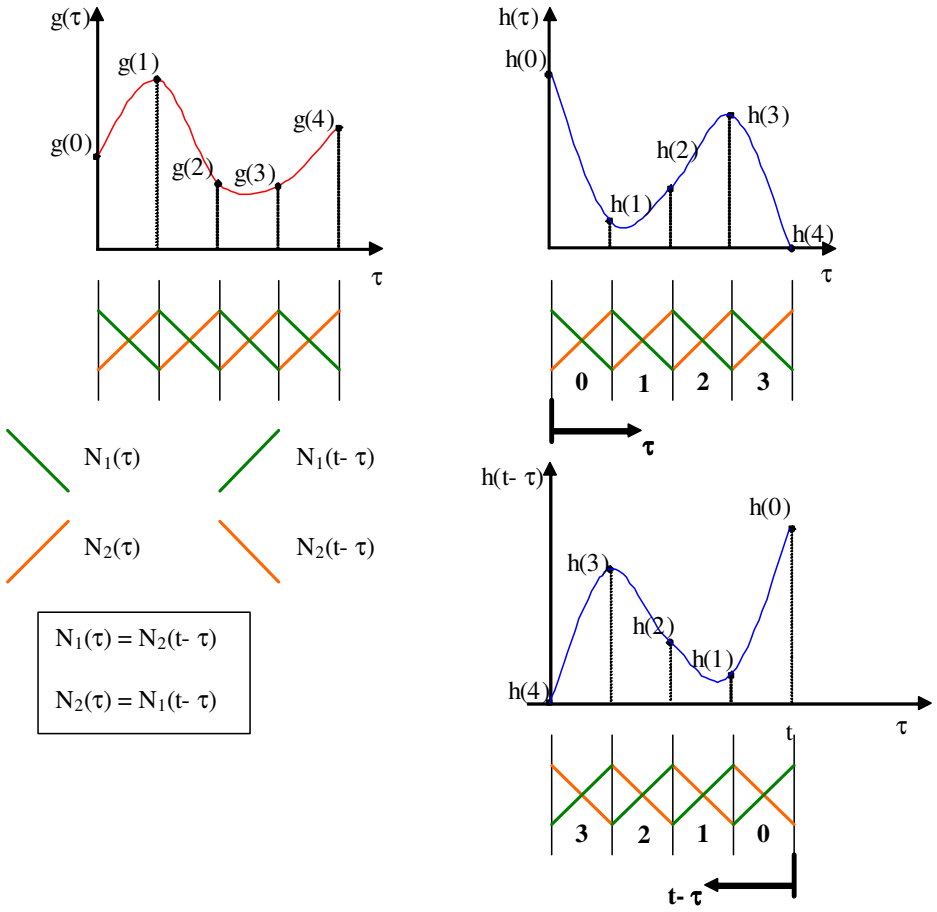

Figura 4.7: Esquema da convolução por aproximação linear.

Faltando apenas multiplicar as funções e integrar para cada instante, como mostra a figura 4.8.

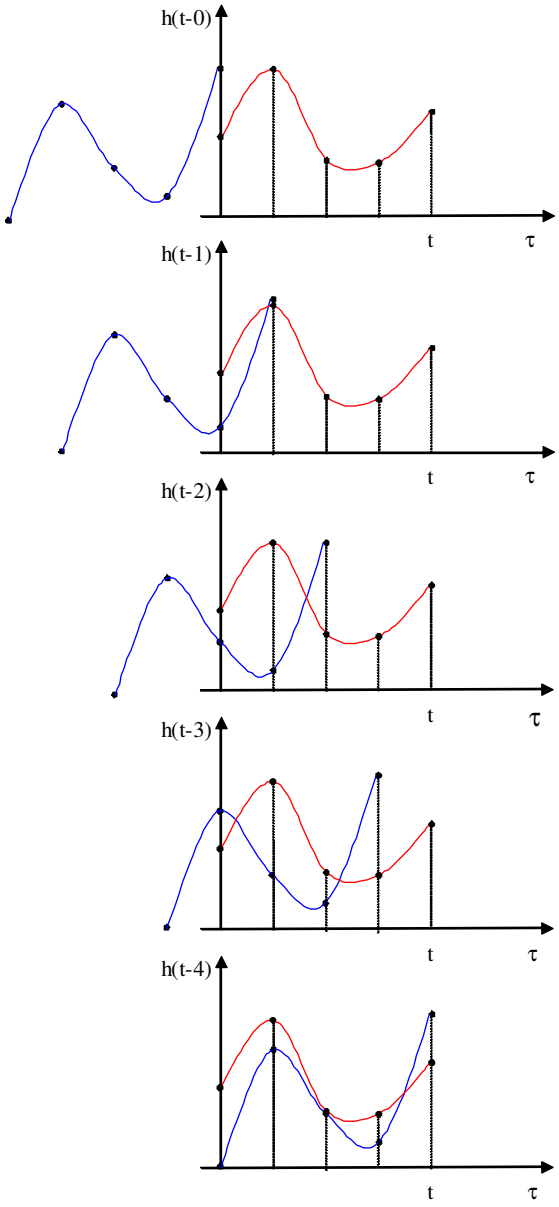

Figura 4.8: Passos para cada instante da convolução.

Para o primeiro instante não é possível fazer a aproximação linear, pois há apenas um ponto de cada função. Entretanto a partir do segundo instante em diante a convolução segue com a aproximação linear.

Para o segundo instante a integral de convolução fica da seguinte forma:

$$\int_0^{\Delta t} [g(0)N_1(\tau) + g(1)N_2(\tau)]\,[h(0)N_1(t-\tau) + h(1)N_2(t-\tau)]\;d\tau \tag{4.48}$$

De acordo com as propriedades da convolução, é possível encontrar a forma expandida da equação (4.48), que mostra a convolução ponderada pela convolução das funções de forma, como segue:

$$\begin{aligned} g(0)h(0)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(1)h(0)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\ \cdots + g(0)h(1)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} + g(1)h(1)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{IV} \end{aligned} \tag{4.49}$$

E ainda observando os valores atribuídos as funções de forma na equação (4.45):

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{\Delta t}{6} \\ \int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{\Delta t}{3} \end{aligned} \tag{4.50}$$

ou ainda em notação indicial,

$$\int N_i N_j\,d\tau = \begin{cases} \dfrac{\Delta t}{6} \Longleftrightarrow i = j \\ \dfrac{\Delta t}{3} \Longleftrightarrow i \neq j \end{cases} \tag{4.51}$$

Assim, a equação (4.49), pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} (g(0)h(0) + g(1)h(1))\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(1)h(0)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\ \cdots + g(0)h(1)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Para um terceiro instante da integral de convolução, seguindo a seqüência da figura 4.8, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} [g(0)N_1(\tau) + g(1)N_2(\tau)]\,[h(1)N_1(t-\tau) + h(2)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\ \int_{\Delta t}^{2\Delta t} [g(1)N_1(\tau) + g(2)N_2(\tau)]\,[h(0)N_1(t-\tau) + h(1)N_2(t-\tau)]\;d\tau \end{aligned} \tag{4.53}$$

De forma expandida a equação (4.53) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&(g(0)h(1)+g(1)h(2))\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(1)h(1)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\
&\cdots + g(0)h(2)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} + \cdots \\
&\cdots + (g(1)h(0)+g(2)h(1))\underbrace{\int_{\Delta}^{2\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(2)h(0)\underbrace{\int_{\Delta}^{2\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\
&\cdots + g(1)h(1)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Fazendo o mesmo procedimento para o quarto passo, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta t} [g(0)N_1(\tau)+g(1)N_2(\tau)]\,[h(2)N_1(t-\tau)+h(3)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\
&\int_{\Delta t}^{2\Delta t} [g(1)N_1(\tau)+g(2)N_2(\tau)]\,[h(1)N_1(t-\tau)+h(2)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\
&\int_{2\Delta t}^{3\Delta t} [g(2)N_1(\tau)+g(3)N_2(\tau)]\,[h(0)N_1(t-\tau)+h(1)N_2(t-\tau)]\;d\tau
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Escrevendo de forma expandida a equação (4.55), tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(g(0)h(2)+g(1)h(3))\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(1)h(2)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\
&\cdots + g(0)h(3)\underbrace{\int_0^{\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} + \cdots \\
&\cdots + (g(1)h(1)+g(2)h(2))\underbrace{\int_{\Delta}^{2\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(2)h(1)\underbrace{\int_{\Delta}^{2\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\
&\cdots + g(1)h(2)\underbrace{\int_{\Delta}^{2\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} + \cdots \\
&\cdots + (g(2)h(0)+g(3)h(1))\underbrace{\int_{2\Delta}^{3\Delta t} N_1(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{I} + g(3)h(0)\underbrace{\int_{2\Delta}^{3\Delta t} N_2(\tau)N_1(t-\tau)\,d\tau}_{II} + \cdots \\
&\cdots + g(2)h(1)\underbrace{\int_{2\Delta}^{3\Delta t} N_1(\tau)N_2(t-\tau)\,d\tau}_{III} + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Finalmente, fazendo analogamente ao que foi feito para os passos anteriores, obtém-se o resultado para o ultimo passo da figura (4.8), onde uma função sobrepõe a outra completamente, é dada por:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta t} [g(0)N_1(\tau)+g(1)N_2(\tau)]\,[h(3)N_1(t-\tau)+h(4)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\
&\int_{\Delta t}^{2\Delta t} [g(1)N_1(\tau)+g(2)N_2(\tau)]\,[h(2)N_1(t-\tau)+h(3)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\
&\int_{2\Delta t}^{3\Delta t} [g(2)N_1(\tau)+g(3)N_2(\tau)]\,[h(1)N_1(t-\tau)+h(2)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots \\
&\int_{3\Delta t}^{4\Delta t} [g(3)N_1(\tau)+g(4)N_2(\tau)]\,[h(0)N_1(t-\tau)+h(1)N_2(t-\tau)]\;d\tau + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

A seqüência exibida acima pode ser escrita de forma expandida análogamente ao que foi feito para os passos anterior. Com a forma expandida dos passos da convolução é possível identificar que a integral de convolução linear é expressa pela convolução dos segmentos das funções aproximadas por funções de forma lineares ponderadas pela integral do produto das funções de forma lineares identificada nas equações acima por ($I = IV$, II, III), as quais tem seus valores constante como podem ser verificados nas equações (4.50) e (4.51).

4.6 Resultados Numéricos

Os resultados numéricos obtidos foram para um problema com fundação rígida na superfície discretizada com três elemento como mostra a figura 4.9, considerando o modelo de amortecimento histerético constante com o coeficiente $\eta = 0,01$, o coeficiente de Poisson, $\nu = 1/3$, o módulo de cisalhamento, $G = 2,028.10^7 \quad N/m^2$. A excitação foi realizada do tipo pulso, figura 4.10, aplicada no sentido vertical com amplitude de $F_v = 2,63.10^{-6}\,s$ partindo do instante inicial. A largura da fundação é de $2A = 1,524\,m$. Estes dados foram extraídos de Spyrakos e Antes (1986), Spyrakos e Beskos (1986) e permitem uma comparação dos resultados.

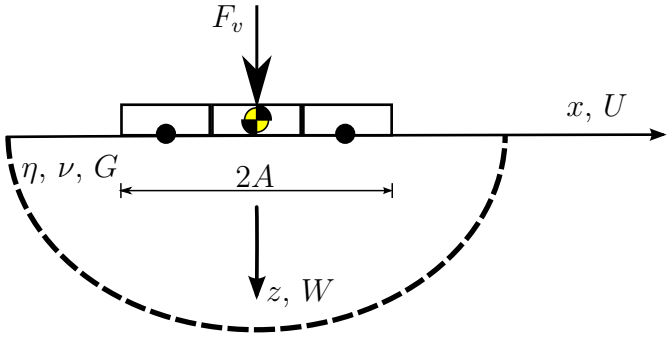

Figura 4.9: Fundação rígida discretizada com 3 elementos.

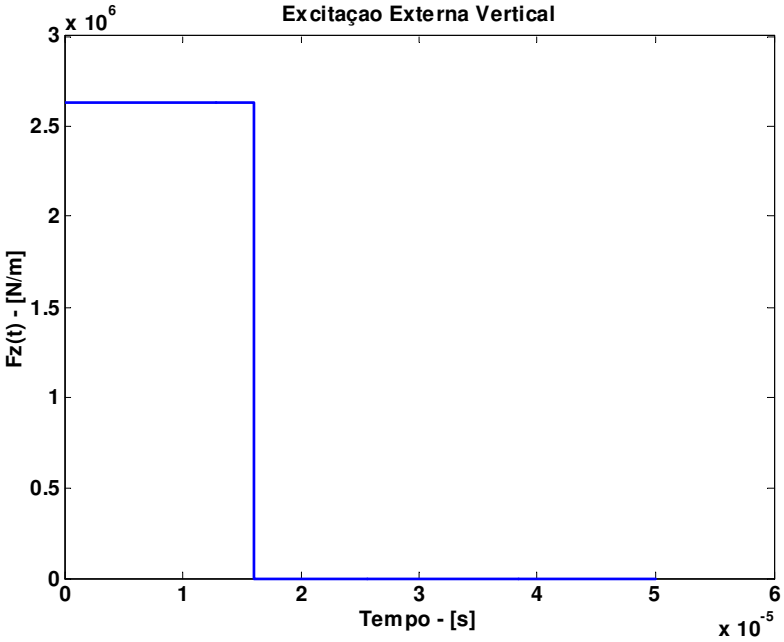

Figura 4.10: Excitação externa vertical F_v - tipo pulso.

Colocado o problema estudado é apresentado na seqüência os resultados obtidos.

A comparação dos resultados obtidos pela convolução linear com os resultados da superposição na freqüência transformada para o domínio do tempo com a aplicação da IFFT é mostrado na figura 4.11. Esta comparação é realizada com a finalidade de validar a superposição no tempo utilizando-se como parâmetro os resultados obtidos através da IFFT aplicada sobre a flexibilidade total da fundação rígida apresentada na equação (4.25). Os resultados apresentam boa concordância.

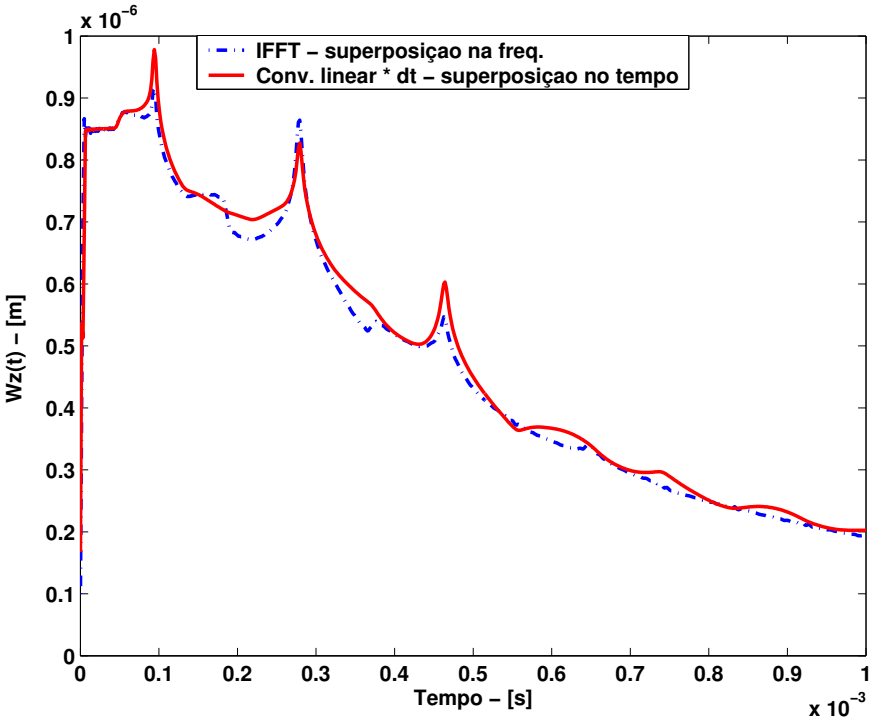

Figura 4.11: Deslocamento na direção z das soluções em freqüência e do sistema 1($CONV.$ Δt) constante.

Na seqüência é apresentado a comparação entre os sistemas algébricos para a convolução constante, figura 4.12. A convolução linear é comparada com a convolução constante nas figuras 4.13, 4.14 e 4.15. Finalmente, na figura 4.16 é comparado resultado obtido pela convolução linear com os resultados encontrados na literatura, validando assim o método apresentado.

- Para convolução constante:

Dois esquemas de realização da convolução com passo constante na superposição são estudados. Uma análise indica que o sistema 2($CONV$) desestabiliza a resposta inviabilizando o seu uso, figura 4.12.

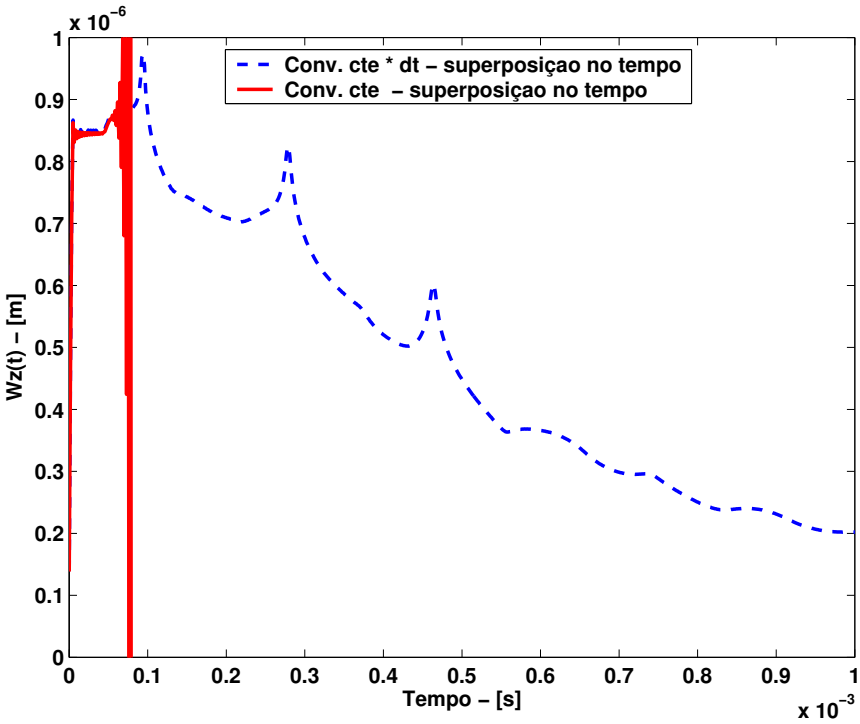

Figura 4.12: Deslocamento na direção z das soluções do sistema $1(CONV.\Delta t)$ constante e do sistema $2(CONV)$ constante.

- Para convolução linear:

A solução do esquema da convolução aproximada por uma função de forma linear é comparado com o esquema de convolução constante, figura 4.13.

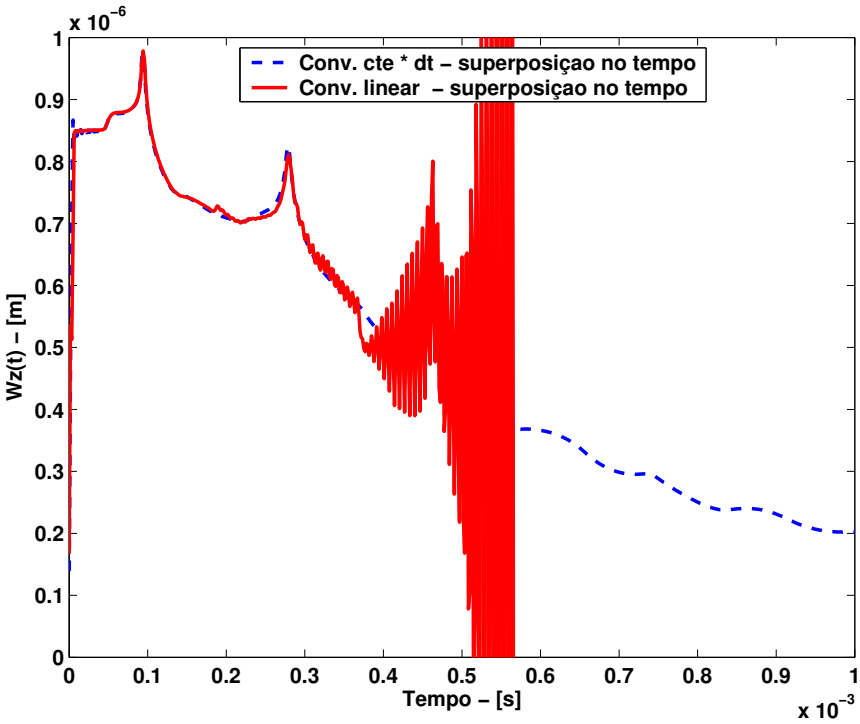

Figura 4.13: Deslocamento na direção z das soluções do sistema $1(CONV.\Delta t)$ constante e do sistema $2(CONV)$ linear.

As soluções para o sistema $2(CONV)$ também apresentam instabilidades para o caso da convolução por uma função de forma linear. No entanto, a instabilidade aparece em instantes de tempos mais adiantados quando realizada a solução do sistema pela convolução constante, figura 4.12, ou seja, a convolução linear apresenta maior estabilidade que a convolução constante.

Já para os sistema $1(CONV.\Delta t)$, como mostra a figura 4.14, com o uso da convolução linear não é verificada a instabilidade na solução.

- Comparação entre as convoluções:

Uma análise é feita sobre os dois esquema de realizar a convolução com o sistema algébrico que obteve êxitos em suas soluções, ou seja, na configuração do sistema $1(CONV.\Delta t)$. Com a finalidade de explicar suas diferenças, a figura 4.15 mostra uma ampliação da parte inicial da resposta apresentada na figura 4.14.

Em seguida é apresentado na figura 4.16 uma comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os extraídos dos trabalhos de Spyrakos e Antes (1986), Spyrakos e Beskos (1986).

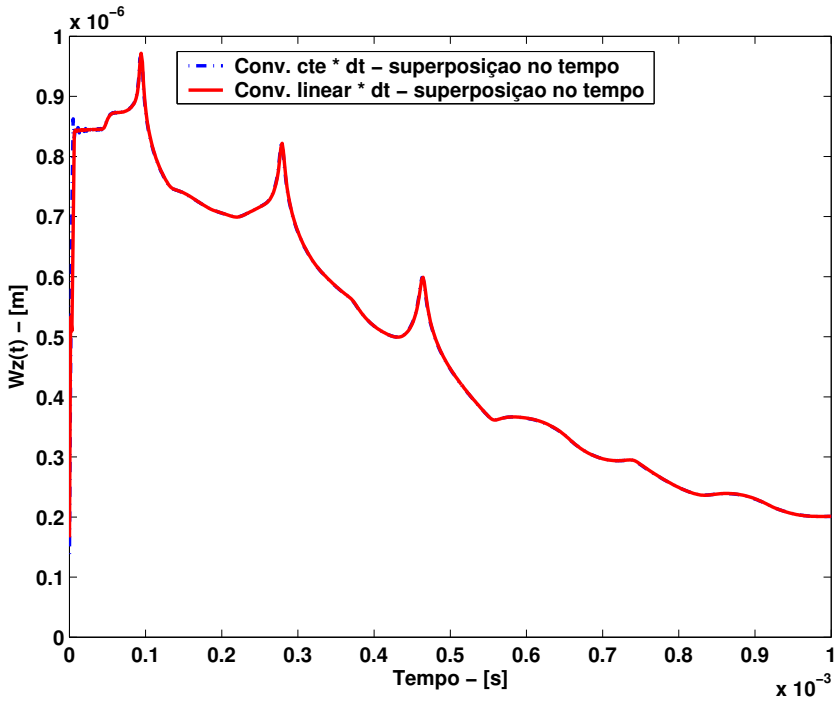

Figura 4.14: Comparação entre as soluções com a superposição no tempo para o sistema $1(CONV.\ \Delta t)$ constante x linear.

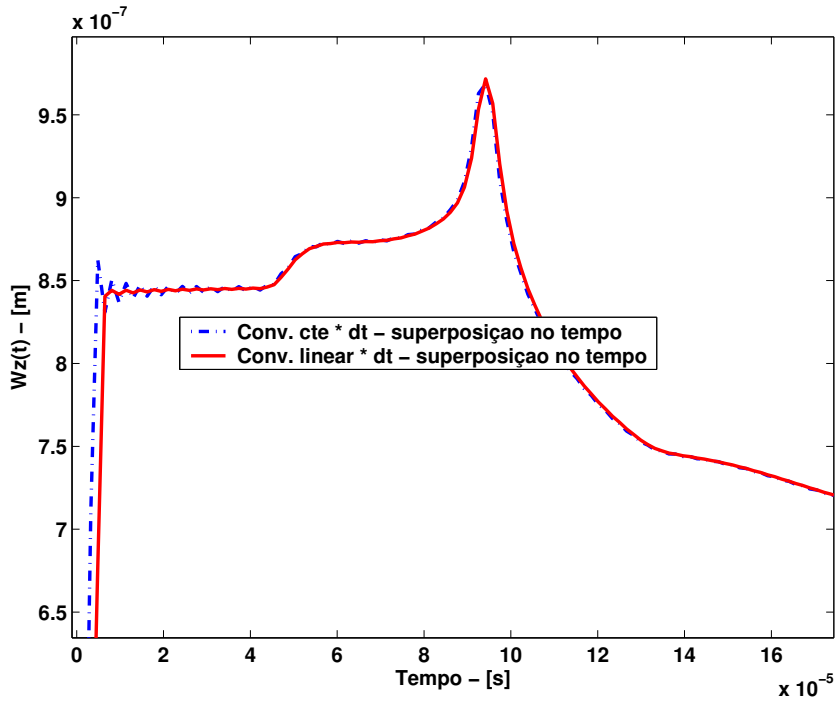

Figura 4.15: Instantes iniciais da comparação das soluções com a superposição no tempo para o sistema $1(CONV.\Delta t)$ constante x linear, (zoom).

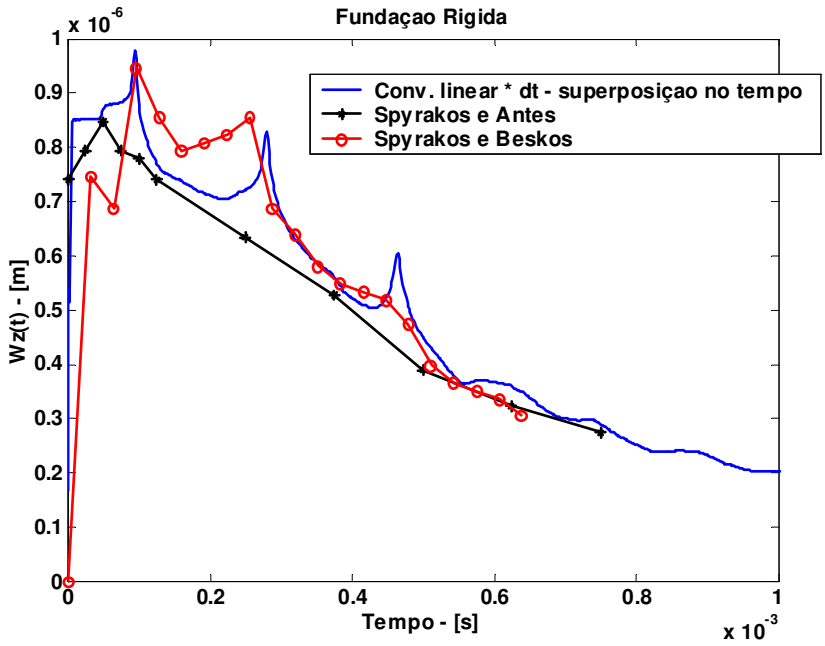

Figura 4.16: Comparação das soluções com os resultados de Spyrakos & Antes e Spyrakos & Beskos.

Uma análise indica que os resultados divergem nas configurações do sistema $2(CONV)$. Os mesmos erros não são encontrados na configuração do sistema $1(CONV.\Delta t)$, sendo que neste caso a matriz da equação (4.33) não possui o termo $1/\Delta t$ em sua configuração. Nota-se também que a forma de interpolação no domínio do tempo tem influência sobre a estabilidade da resposta transiente. Isto é verificado comparando-se os resultados com o uso da convolução linear a qual observa-se um maior controle da estabilidade. Pois na configuração do sistema $2(CONV)$ encontra-se a divergência dos resultados em instantes mais tardios que os da convolução constante, como pode ser visto nas figuras 4.12 e 4.13. Mesmo no caso da configuração do sistema $1(CONV.\Delta t)$, a figura 4.14 mostra que a convolução linear consegue amenizar as oscilações iniciais, funcionando como um filtro, que pode ser melhor visualizado na figura 4.15. Ressaltando-se que estas oscilações iniciais se devem ao não tratamento adequado das respostas estacionárias como sugerem Adolph, Mesquita e Romanini (2002), que apresentam como causa das flutuações os efeitos da IFFT realizada numericamente. Finalmente na figura 4.16 temos uma comparação com os resultados da literatura, que nos mostram uma coerência satisfatória dos resultados para o problema tratado. Pois além de serem poucos os pontos dos resultados fornecidos por Spyrakos e Antes (1986) e Spyrakos e Beskos (1986), estes não apresentam uma discretização da fundação, bem como os seus resultados referem-se ao solo elástico e não visco-elástico como o apresentado neste trabalho.

Capítulo 5

Método dos Elementos de Contorno Indireto

5.1 Apresentação

O MEC tem sido usado na solução dos mais diversos problemas na engenharia. O método consiste na transformação das equações diferenciais que descrevem o problema em equações integrais de contorno através do uso das soluções fundamentais e/ou estados auxiliares. Discretizando-se as equações integrais e aplicando-se as condições de contorno é possível encontrar a solução dos problemas no contínuo. As soluções das equações integrais no contorno admitem que o problema seja reduzido de uma dimensão, ou seja, a equação diferencial de um problema de domínio 3D é convertido em um problema de equações integrais no contorno, que para o este problema é discretizado pela superfície do domínio. Assim, no MEC é necessário discretizar apenas o contorno do problema. Isto representa uma grande vantagem em eficiência diante de outros métodos numéricos que requerem a discretização do domínio.

No entanto, trata-se de um método ainda "recente"em relação aos outros métodos, sendo o investimento em seu estudo um desafio para competir com softwares comerciais, em se tratando de problemas clássicos da engenharia. Em contrapartida, para meios que se estendem ao infinito o MEC apresenta vantagens. Outra de suas caracteristicas vantajosas é a incorporação do efeito de amortecimento geométrico nas condições de contorno das soluções fundamentais satisfazendo naturalmente este efeito que também é conhecido como condição de radiação de Sommerferld. Nos métodos de domínios o truncamento na discretização da malha impede a satisfação desta condição.

O MEC pode ser encontrado em duas principais formulações. Uma onde o domínio é caracterizado por suas propriedades tais como fator de amortecimentos, módulo de cisalhamento, densidade, etc. E então é obtida a solução do problema impondo as condições de contorno, como tensões e deslocamentos. Este é o mais usual e é conhecido como Método Direto, pois suas condições de contorno são quantidades com sentido físico definido. Uma segunda formulação também leva em consideração as propriedades do meio, as mesma do problema estudado, no entanto é submetido à uma perturbação fictícia, ou seja, uma fonte de excitação sem significado físico. A solução para esta carga fictícia é posteriormente utilizada para obter a solução real do problema. A este método é dado o nome de Método Indireto, ou ainda, Método dos Elementos de Contorno Indireto (MEC-I).

As duas formulações podem ser realizadas tanto no semi-espaço quanto no espaço completo. Embora a vantagem de se realizar o MEC com o Método Indireto baseado na solução ou estado auxiliar do espaço completo é a possibilidade de se criar uma generalização para a forma geométrica qualquer. Isto é, com o auxílio do espaço completo usado como estado auxiliar é possível a obtenção do semi-espaço com superfície livre e de geometria genérica.

Neste capítulo é apresentada a formulação do MEC-I no domínio da freqüência e em seguida no domínio do tempo. As soluções fundamentais utilizadas foram obtidas através do programa do Romanini (1995) no espaço completo conforme discutido no capítulo 2.

No MEC-I é utilizado o princípio da superposição das influências dos estados auxiliares de cada elemento. Os elementos que descrevem a forma geométrica do problema são elementos constantes que aceitam o carregamento distribuído sobre eles. Os elementos são calculados em um sistema de coordenadas locais e para a montagem do problema é adotada um sistema de coordenadas global. Assim as funções dos estados auxiliares de deslocamentos e de tensões são obtidos no sistema local de cada elemento contendo o carregamento. A superposição é realizada em um sistema global de coordenadas. Uma outra opção implica que as funções dos estados auxiliares de cada elemento com carregamento sejam transformados para o sistema de coordenadas global e em seguida transformados novamente para um sistema de coordenadas locais de cada elemento onde esteja sendo calculada a influência. Tanto no sistema global de coordenadas quanto no sistema local do elemento que esteja sendo calculada a influência é possível realizar a superposição de cada função de influência devido a cada carregamento. Esta segunda alternativa de se obter a superposição das funções de influência no sistema local do elemento calculado é a adotada no presente trabalho para viabilizar a inserção das condições de contorno em coordenadas locais. Pois, as condições de contorno são mais facilmente interpretáveis no sistema local de cada elemento. Adiante segue uma breve abordagem sobre a transformação do sistema de coordenadas.

5.2 Transformação de Coordenadas

O objetivo não é realizar nenhum estudo aprofundado da transformação de coordenadas e sim apresentar algumas notações que serão freqüentemente utilizadas no decorrer do capítulo.

É necessário encontrar uma matriz de transformação de coordenadas β_{ij} que transforme as coordenadas de um elemento do sistema local de coordenadas x_j para o sistema global X_i, como descreve a equação:

$$\{X_i\} = [\beta_{ij}]\,\{x_j\} \tag{5.1}$$

A figura 5.1 mostra os versores unitários $\underline{e}_x$ e $\underline{e}_z$ dos eixos de coordenadas globais (X, Z), $\underline{\lambda}^E$ é o versor unitário do elemento E e $\underline{n}^E$ é a normal do elemento E, na direção exterior ao elemento. O vetor $\underline{X}_1^E$ contém as coordenadas globais (X_1^E, Z_1^E) do nó inicial e o vetor $\underline{X}_2^E$ as coordenadas globais (X_2^E, Z_2^E) do nó final do elemento E.

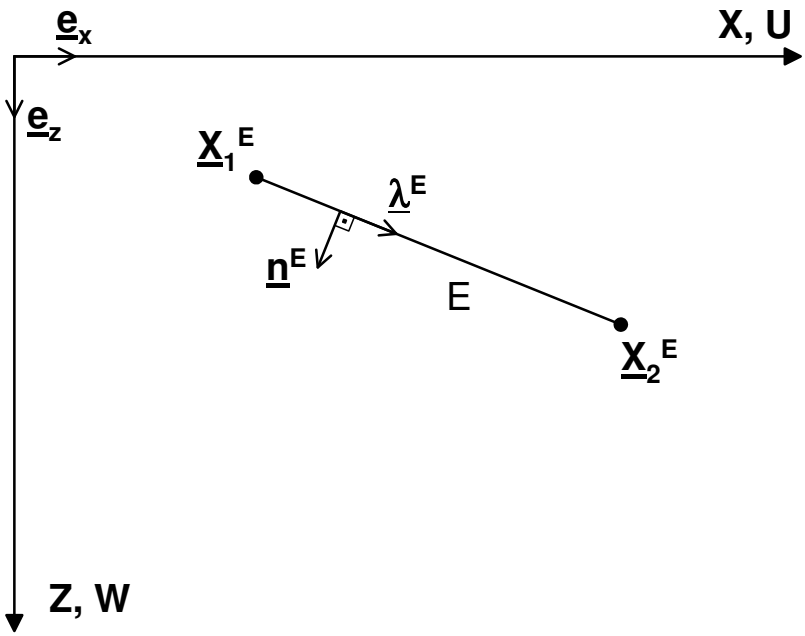

Figura 5.1: Elemento no espaço 2D.

O versor unitário do elemento $\underline{\lambda}^E$ é calculado a partir das coordenadas globais:

$$\underline{\lambda}^E = \frac{1}{L^E}\left\{(X_2^E - X_1^E)e_x + (Z_2^E - Z_1^E)e_z\right\} \tag{5.2}$$

sendo o comprimento do elemento dado por:

$$L^E = \sqrt{(X_2^E - X_1^E)^2 + (Z_2^E - Z_1^E)^2} \tag{5.3}$$

Já o vetor normal do elemento pode ser encontrado pelo produto vetorial, como segue:

$$\underline{n}^E = \underline{\lambda}^E \otimes \underline{e}_y \tag{5.4}$$

ou ainda:

$$\underline{n}^E = \frac{1}{L^E} \begin{bmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ (X_2^E - X_1^E) & 0 & (Z_2^E - Z_1^E) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

finalmente,

$$\{n^E\} = \left\{ -\frac{\Delta Z^E}{L^E}, 0, \frac{\Delta X^E}{L^E} \right\}^T \tag{5.6}$$

onde

$$\Delta X^E = (X_2^E - X_1^E) \tag{5.7}$$

$$\Delta Z^E = (Z_2^E - Z_1^E) \tag{5.8}$$

De modo que o versor unitário pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{\lambda^E\} = \left\{ \frac{\Delta X^E}{L^E}, 0, \frac{\Delta Z^E}{L^E} \right\}^T \tag{5.9}$$

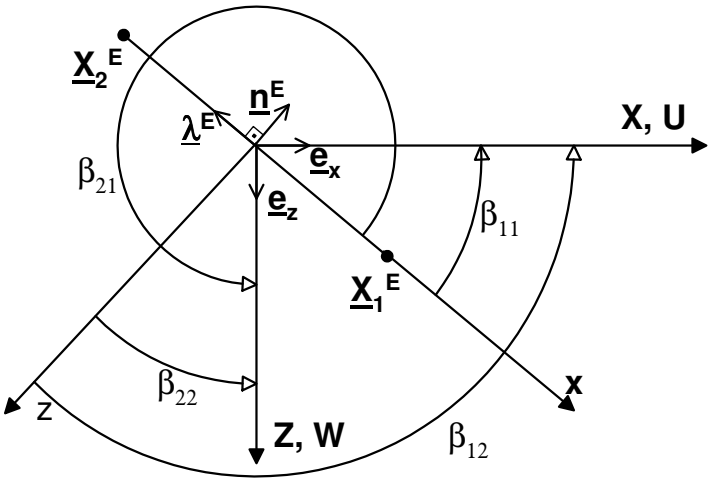

Figura 5.2: Componentes da matriz de transformação de coordenadas.

Na figura 5.2 são identificados os componentes da matriz de transformação de coordenadas do sistema local (x, z) para o sistema global (X, Z).

Os componentes da matriz de transformação podem ser identificados como o produto escalar entre os versores dos eixos de coordenadas globais com os versores das coordenadas locais de acordo com a equação (5.10). Os versores das coordenadas locais estão em função do versor unitário do elemento para o eixo x local e o vetor normal para o eixo z local.

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= (\underline{e}_x \circ -\underline{\lambda}^E) \\
\beta_{21} &= (\underline{e}_z \circ -\underline{\lambda}^E) \\
\beta_{12} &= (\underline{e}_x \circ -\underline{n}^E) \\
\beta_{22} &= (\underline{e}_z \circ -\underline{n}^E)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Fazendo o produto escalar para a componente β_{11}, tem-se:

$$\beta_{11} = \left[(1\underline{e}_x + 0\underline{e}_y + 0\underline{e}_z) \circ -(\frac{\Delta X^E}{L^E}\underline{e}_x + 0\underline{e}_y + \frac{\Delta Z^E}{L^E}\underline{e}_z)\right] = -\frac{\Delta X^E}{L^E} \tag{5.11}$$

Realizando o produto escalar para os demais componentes obtém-se a matriz de transformação de coordenadas, dada por:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{L^E}\begin{bmatrix} -\Delta X^E & \Delta Z^E \\ -\Delta Z^E & -\Delta X^E \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

A matriz de transformação possui algumas propriedades, tais como:

$$\begin{aligned}
\beta_{ji} &= \beta_{ij}^T \\
\beta_{ji} &= \beta_{ij}^{-1} \\
\beta_{ij}^{-1} &= \beta_{ij}^T
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Com isso é possível prosseguir a formulação do MEC-I.

5.3 Método dos Elementos de Contorno Indireto no Domínio da Freqüência

A partir do programa do Romanini (1995) são obtidas as soluções fundamentais para o deslocamento e para as tensões, modeladas no espaço completo. As soluções fundamentais são obtidas no domínio da freqüência. A manipulação destas soluções será apresentada em duas partes. A primeira tratará dos deslocamentos e a segunda das tensões. Por fim, será montado o sistema que relaciona as soluções fundamentais de deslocamento, tensão e as

condições de contorno fornecendo o semi-espaço com geometria da superfície livre qualquer, como o exemplo da figura 5.3.

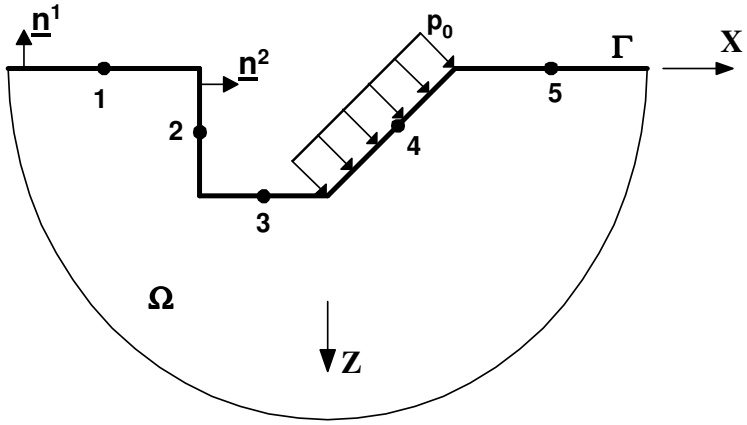

Figura 5.3: Semi-espaço com trincheira.

A figura 5.3 mostra o semi-espaço com a superfície discretizada com cinco elementos e um carregamento constante no elemento 4.

5.3.1 Deslocamentos

São obtidas as componentes de deslocamento na direção k, medido no ponto $\underline{x}_i(x_i, z_i)$, causadas por um carregamento unitário distribuído constante, na direção l, aplicado em uma área de largura $2a$ cujo o centro está em $\underline{x}_j(x_j, z_j)$. Assim como na equação (5.14):

$$u_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a_j) = G_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a_j) \cdot t_l(\underline{x}_j, a) \tag{5.14}$$

Lembrando que a solução depende não apenas do ponto onde está medindo a resposta e do ponto onde a excitação foi aplicada, mas também depende da freqüência adimensional A_O, do fator de amortecimento η, do coeficiente de Poisson ν, do módulo de cisalhamento μ e da semi-largura da excitação a. Estes parâmetros serão omitidos nas equações futuras para simplificar a apresentação.

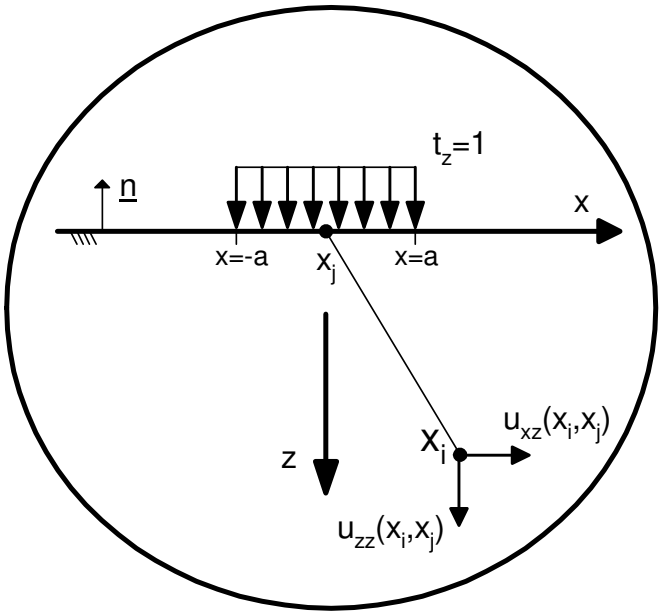

Figura 5.4: Carregamento na direção z no espaço completo.

Para um carregamento na direção vertical t_z, como mostra a figura 5.4, tem-se que os deslocamentos no sistema local de coordenadas são dados por,

$$\begin{aligned} u_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j) \\ u_{xz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{xz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Analogamente, para uma excitação na direção horizontal t_x, tem-se:

$$\begin{aligned} u_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) \\ u_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Quando há excitações nas duas direções, tem-se o deslocamento total na direção $k = (x, z)$, como segue na equação (5.17).

$$\begin{aligned} u_z(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j, a_j) + G_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a_j) \\ u_x(\underline{x}_i, \underline{x}_j) &= G_{xz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j, a_j) + G_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a_j) \end{aligned} \tag{5.17}$$

ou ainda, em notação matricial, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_z(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \\ u_x(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} G_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) & G_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \\ G_{xz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) & G_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} t_z(\underline{x}_j, a_j) \\ t_x(\underline{x}_j, a_j) \end{array} \right\} \tag{5.18}$$

A equação (5.18) fornece os deslocamentos totais expresso no sistema local de coordenadas, ou seja, no sistema associado às direções do carregamento (x, z) em um ponto (x_i)

devido a excitação nas duas direções em um ponto (x_j). Para ter os deslocamentos totais em diversos pontos, para as duas direções, e em vários pontos de aplicação da excitação, deve ser feita a superposição dos efeitos de deslocamentos. No entanto, os deslocamentos da equação (5.18) estão em coordenadas locais e para realizar a superposição é necessário que estejam em função das coordenadas globais (X, Z).

Conforme pode ser verificado na equação (5.12), a matriz de transformação de coordenadas do sistema local para o sistema global ($\beta_{ij}^{E=j}$) de um elemento ($E = j$) pode ser aplicada para os deslocamentos, obtendo-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} U_z(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \\ U_x(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \end{array} \right\} = \frac{1}{L^E} \begin{bmatrix} -\Delta X^{E=j} & \Delta Z^{E=j} \\ -\Delta Z^{E=j} & -\Delta X^{E=j} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_z(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \\ u_x(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \end{array} \right\} \tag{5.19}$$

Substituindo a equação (5.19) na equação (5.18) obtém-se os deslocamentos no sistema global de coordenadas para um sistema de coordenadas locais do elemento no ponto x_i com excitação em um elemento de coordenadas x_j, como mostrado na equação:

$$\left\{ \begin{array}{c} U_z(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \\ U_x(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{1}{L^E} \begin{bmatrix} -\Delta X^{E=j} & \Delta Z^{E=j} \\ -\Delta Z^{E=j} & -\Delta X^{E=j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) & G_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \\ G_{xz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) & G_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{G}}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)} \left\{ \begin{array}{c} t_z(\underline{x}_j, a_j) \\ t_x(\underline{x}_j, a_j) \end{array} \right\} \tag{5.20}$$

onde $\overline{\overline{G}}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ é a matriz dos estados auxiliares para os deslocamentos pré-multiplicada pela matriz de transformação de coordenadas do sistema local para o sistema global de coordenadas. Portanto, os deslocamentos podem ser escritos por:

$$\left\{ U_k(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \right\} = \left[\overline{\overline{G}}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \right] \left\{ t_l(\underline{x}_j, a_j) \right\} \tag{5.21}$$

Com a equação (5.21) é possível realizar a superposição dos estados auxiliares para o deslocamento. No entanto, como já fora dito, optou-se em transformar os deslocamentos $U_k(\underline{X}_i, \underline{X}_j)$ para o sistema local do elemento que está sendo medido o deslocamento, obtendo-se o deslocamento $u_k(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$. Esta operação de transformação do sistema de coordenadas globais para o sistema local é efetuada multiplicando-se os deslocamentos pela matriz de transformação de coordenadas $\left[\beta_{ij}^{E=i}\right]^T$, de acordo com a equação:

$$\left\{ u_k(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \right\} = \left[\beta_{ij}^{E=i}\right]^T \cdot \left\{ U_k(\underline{X}_i, \underline{X}_j) \right\} \tag{5.22}$$

Portanto, multiplicando-se a equação (5.21) por $\left[\beta_{ij}^{E=i}\right]^T$, obtem-se:

$$\left\{ u_k(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \right\} = \underbrace{\left[\beta_{ij}^{E=i}\right]^T \cdot \left[\overline{\overline{G}}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \right]}_{\overline{G}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)} \left\{ t(\underline{x}_j, a_j) \right\} \tag{5.23}$$

onde $\overline{G}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ é a matriz dos estados auxiliares para o deslocamento no sistema local de coordenadas. Assim, a equação (5.23) calcula os deslocamentos no sistema de coordenadas local do elemento onde é feita a medição (i) em função das trações fictícias aplicadas no sistema de coordenadas local do elemento (j) do ponto fonte.

Aqui podemos calcular os deslocamentos de qualquer ponto do domínio mudando a posição de i, ou seja, mudando as coordenadas $\underline{x}_i$ do centro dos elementos para a coordenada desejada:

$$\begin{aligned}
\{u_k(\underline{x}_1, \underline{x}_1)\} &= \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_1, \underline{x}_1)\right] \{t_l(\underline{x}_1, a_1)\} \\
\{u_k(\underline{x}_2, \underline{x}_1)\} &= \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_2, \underline{x}_1)\right] \{t_l(\underline{x}_1, a_1)\} \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\{u_k(\underline{x}_N, \underline{x}_1)\} &= \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_N, \underline{x}_1)\right] \{t_l(\underline{x}_1, a_1)\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

note que os estados auxiliares de deslocamentos já estão descritos no sistema local de coordenadas.

Já os deslocamentos no ponto $\underline{x}_i$, devido à todos os demais carregamentos no domínio, é a soma dos efeitos neste ponto, dado por

$$\begin{aligned}
\{u_k(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_1)\right] \{t_l(\underline{x}_1, a_1)\} + \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_2)\right] \{t_l(\underline{x}_2, a_2)\} + \cdots \\
+ \left[\overline{G}_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_N)\right] \{t_l(\underline{x}_N, a_N)\}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Juntando as equações (5.24) e (5.25) encontramos a superposição das funções de deslocamentos de todos os pontos medidos e excitados. Resultando na seguinte equação, apresentada de forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z(\underline{x}_1) \\ u_x(\underline{x}_1) \end{Bmatrix} \\ \cdots\cdots \\ \begin{Bmatrix} u_z(\underline{x}_2) \\ u_x(\underline{x}_2) \end{Bmatrix} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \begin{Bmatrix} u_z(\underline{x}_N) \\ u_x(\underline{x}_N) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_1, \underline{x}_1) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_1, \underline{x}_2) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_1, \underline{x}_N) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_2, \underline{x}_1) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_2, \underline{x}_2) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_2, \underline{x}_N) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_N, \underline{x}_1) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_N, \underline{x}_2) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \overline{G}_{zz} & \overline{G}_{zx} \\ (\underline{x}_N, \underline{x}_N) & \\ \overline{G}_{xz} & \overline{G}_{xx} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_z(\underline{x}_1) \\ t_x(\underline{x}_1) \end{Bmatrix} \\ \cdots\cdots \\ \begin{Bmatrix} t_z(\underline{x}_2) \\ t_x(\underline{x}_2) \end{Bmatrix} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \begin{Bmatrix} t_z(\underline{x}_N) \\ t_x(\underline{x}_N) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

$$(5.26)$$

Este sistema pode ainda ser re-escrito como:

$$\{u(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] \left\{t(\underline{x}_j, a_j)\right\} \tag{5.27}$$

A equação (5.27) relaciona os deslocamentos $u(\underline{x}_i)$ no sistema local de coordenadas do ponto de medição às trações fictícias $t(\underline{x}_j, a_j)$ que estão expressas também no sistema local mas do ponto fonte.

5.3.2 Tensões

As componentes do tensor de tensão são obtidas através do programa do *Romanini* para o espaço completo, separadas em duas matrizes do tensor de tensão. Uma para cada direção do carregamento (t_x, t_z), e ponderadas pelas respectivas amplitudes de carregamento. A composição destas duas matrizes dá origem ao tensor de tensão do espaço completo, como pode ser visto na equação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xxx} & H_{xzx} \\ H_{zxx} & H_{zzx} \end{bmatrix} \cdot t_x + \begin{bmatrix} H_{xxz} & H_{xzz} \\ H_{zxz} & H_{zzz} \end{bmatrix} \cdot t_z \tag{5.28}$$

O programa do *Romanini* fornece os estados auxiliares de tensão separados em seis componentes (H_{xxx}, H_{xzx}, H_{zzx}, H_{xxz}, H_{xzz}, e H_{zzz}). Sendo os três primeiros componentes devido ao carregamento aplicado na direção (x) e amplitude (t_x) e os três últimos componentes devido ao carregamento na direção (z) e amplitude (t_z). Assim o ultimo dos três sub-indice que compõe cada componente se refere à direção do carregamento. São obtidos apenas três componentes para cada direção de carregamento devido a simetria dos estados auxiliares de tensão tanto para $(H_{xzx} = H_{zxx})$ quanto para $(H_{xzz} = H_{zxz})$.

A figura 5.5 mostra as componentes do tensor parcial (σ_{xxx}, σ_{xzx} e σ_{zzx}) no ponto $\underline{x}_i$ devido ao carregamento distribuído unitário $t_x = 1$ na direção x aplicado no ponto $\underline{x}_j$ e de largura $2a$.

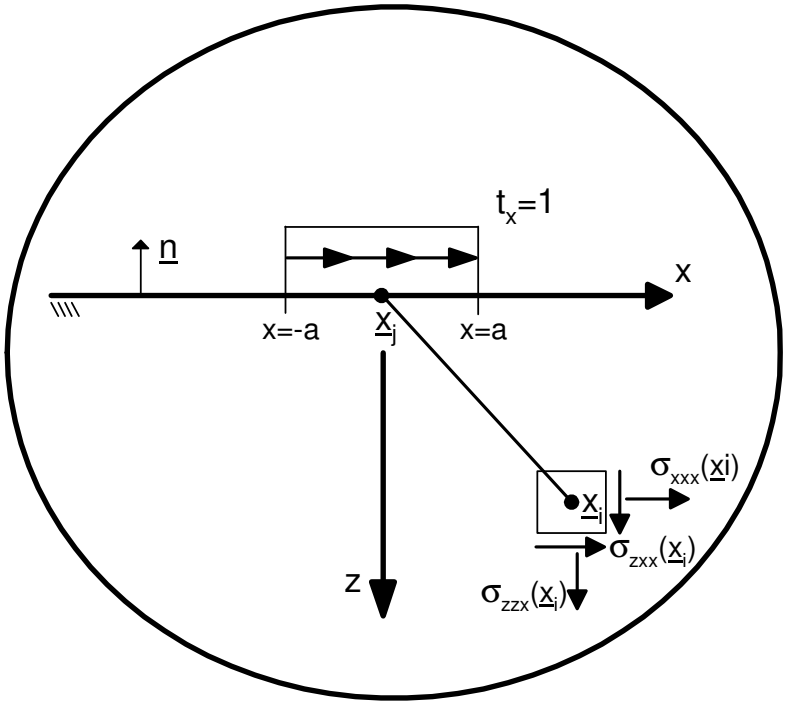

Figura 5.5: Carregamento na direção x no espaço completo.

Análogamente ao que fora feito para os deslocamentos na equação (5.14), tem-se as componentes do tensor de tensão devido a excitação na direção vertical dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zzz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{xxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xzz} = \sigma_{zxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_z(\underline{x}_j, a)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Para o caso da excitação horizontal, como mostra a figura 5.5, tem-se a equação dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zzx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{xxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xzx} = \sigma_{zxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) \cdot t_x(\underline{x}_j, a)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Portanto, o tensor de tensões quando estão presentes as forças de superfícies nas duas direções, assim como foi dito acima, é a soma das influências ponderadas pela amplitude do carregamento, resultando em:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zzx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + H_{zzz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{xxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + H_{xxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \\
\sigma_{xz} = \sigma_{zx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j, A_O, \eta, \nu, \mu, a) &= H_{zxx}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + H_{zxz}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_z(\underline{x}_j, a)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

É possível identificar que a equação (5.28) é apenas a forma matricial de escrever a equação (5.31).

Bem como no caso dos deslocamentos as funções de influência para as tensões também dependem do ponto de aplicação da excitação $\underline{x}_j$, do ponto onde está sendo calculada a tensão $\underline{x}_i$, da freqüência adimensional A_O, do fator de amortecimento η, do coeficiente de Poisson ν, do módulo de cisalhamento μ e da semi-largura da excitação a_j. Estes parâmetros serão suprimidos das equações futuras para simplificar a apresentação.

Assim, é possível apresentar a equação (5.31) em notação indicial como:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = H_{\alpha\beta M}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \cdot t_M(\underline{x}_j, a) \tag{5.32}$$

Todavia, o tensor de tensão está em função das coordenadas locais do sistema. O que inviabiliza a superposição dos efeitos de todos os pontos de aplicação do carregamento. Para transformar o tensor de tensão para o sistema de coordenadas globais pode-se seguir uma analogia a partir da equação (5.1):

$$\{X_i\} = [\beta_{ij}]\,\{x_j\}$$

nesta equação é transformado um vetor do sistema local $\{x_j\}$ para um vetor do sistema global $\{X_i\}$. Para um tensor de segunda ordem, escrito em notação indicial, tem-se:

$$Q_{kl} = \beta_{ki}\beta_{lj}q_{ij} \tag{5.33}$$

ou ainda de forma matricial:

$$[Q_{kl}] = [\beta_{ki}]\,\{q_{ij}\}\,[\beta_{lj}]^T \tag{5.34}$$

Para melhor compreensão, faremos a transformação de coordenadas do sistema local para o sistema global para o tensor de tensões partindo da equação:

$$\{ti\} = [\sigma_{ij}]\,\{n_j\} \tag{5.35}$$

dadas as forças de superfícies ti, normal n_j e o tensor de tensões σ_{ij}, todos no sistema local de coordenadas. Os vetores da normal e das forças de superfície no sistema local ainda podem ser escritos em função de uma transfomação de coordenada do sistema global como dado na equação:

$$\{n_j\} = [\beta_{lj}]^T\,\{N_l\} \tag{5.36}$$

$$\{t_i\} = [\beta_{ki}]^T\,\{T_k\} \tag{5.37}$$

onde, N_l e T_k são os vetores normal e de forças de superfície, respectivamente, ambos no sistema global de coordenadas. Adotados apenas para esta dedução.

Substituindo as equações (5.36) e (5.37) na equação (5.35), tem-se:

$$[\beta_{ki}]^T \{T_k\} = [\sigma_{ij}] [\beta_{lj}]^T \{N_l\} \tag{5.38}$$

ou ainda,

$$\{T_k\} = [\beta_{ki}] [\sigma_{ij}] [\beta_{lj}]^T \{N_l\} \tag{5.39}$$

Finalmente, da equação (5.39) é possível escrever o tensor de tensão $[\overline{\sigma}_{kl}]$ no sistema global como:

$$[\overline{\sigma}_{kl}] = [\beta_{ki}] [\sigma_{ij}] [\beta_{lj}]^T \tag{5.40}$$

Aplicando esta transformação de coordenadas na equação (5.32), pode-se escrever o tensor de tensões como:

$$[\overline{\sigma}_{kl}] = \left[\beta_{k\alpha}^{E=j}\right] \left[H_{\alpha\beta x}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] \left[\beta_{l\beta}^{E=j}\right]^T \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + \left[\beta_{k\alpha}^{E=j}\right] \left[H_{\alpha\beta z}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] \left[\beta_{l\beta}^{E=j}\right]^T \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \tag{5.41}$$

a matriz de transformação de coordenadas está escrita em função do elemento onde a carga está aplicada ($E = j$). Simplificando, tem-se:

$$[\overline{\sigma}_{kl}] = \left[\overline{H}_{klx}(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\right] \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + \left[\overline{H}_{klz}(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\right] \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \tag{5.42}$$

onde $\left[\overline{H}\right]$ são as funções de influência no sistema global de coordenadas.

Agora, determinando as forças de superfícies no sistema global $\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\}$, tem-se:

$$\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\} = \left[\overline{\sigma}_{kl}(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\right] \cdot \left\{n^E(\underline{X}_i)\right\} \tag{5.43}$$

lembrando que o vetor da normal $\left\{n^E(\underline{X}_i)\right\}$ já foi apresentado na equação (5.6) e está no sistema global de coordenadas.

Escrevendo a equação (5.43) em função das funções de influência tem-se:

$$\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\} = \left[\overline{H}_{klx}(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\right] \cdot \left\{n^E(\underline{X}_i)\right\} \cdot t_x(\underline{x}_j, a) + \left[\overline{H}_{klz}(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\right] \cdot \left\{n^E(\underline{X}_i)\right\} \cdot t_z(\underline{x}_j, a) \tag{5.44}$$

ou expandindo os indices, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{f}_x(\underline{X}_i) \\ \overline{f}_z(\underline{X}_i) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \overline{H}_{xxx} & \overline{H}_{xzx} \\ \overline{H}_{zxx} & \overline{H}_{zzx} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} n_x^E(\underline{X}_i) \\ n_z^E(\underline{X}_i) \end{array} \right\} \cdot t_x(\underline{x}_j) + \begin{bmatrix} \overline{H}_{xxz} & \overline{H}_{xzz} \\ \overline{H}_{zxz} & \overline{H}_{zzz} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} n_x^E(\underline{X}_i) \\ n_z^E(\underline{X}_i) \end{array} \right\} \cdot t_z(\underline{x}_j)$$

(5.45)

Realizando-se os produtos das matrizes da função de influência pelos vetores da normal, é possível reorganizar de forma matricial, resultando em:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{f}_x(\underline{X}_i) \\ \overline{f}_z(\underline{X}_i) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \overline{H}_{xxx}\, n_x^E(\underline{X}_i) + \overline{H}_{xzx}\, n_z^E(\underline{X}_i) & \overline{H}_{xxz}\, n_x^E(\underline{X}_i) + \overline{H}_{xzz}\, n_z^E(\underline{X}_i) \\ \overline{H}_{zxx}\, n_x^E(\underline{X}_i) + \overline{H}_{zzx}\, n_z^E(\underline{X}_i) & \overline{H}_{zxz}\, n_x^E(\underline{X}_i) + \overline{H}_{zzz}\, n_z^E(\underline{X}_i) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} t_x(\underline{x}_j) \\ t_z(\underline{x}_j) \end{array} \right\} \tag{5.46}$$

A obtenção da equação (5.46) pode ser conseguida de uma outra forma. Multiplicando-se pelos vetores $\{1,\, 0\}^T$ e $\{0,\, 1\}^T$ os dois termos, respectivamente, dos produto das matriz de influência pelo vetor normal, como mostra de forma simplificada a equação:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{f}_x(\underline{X}_i) \\ \overline{f}_z(\underline{X}_i) \end{array} \right\} = \left[\left[\overline{H}_{klx}\right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} n_x^E(\underline{X}_i) \\ n_z^E(\underline{X}_i) \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \left[\overline{H}_{klz}\right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} n_x^E(\underline{X}_i) \\ n_z^E(\underline{X}_i) \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} t_x(\underline{x}_j) \\ t_z(\underline{x}_j) \end{array} \right\} \tag{5.47}$$

Esta segunda forma é a mais indicada para o uso na implementação computacional. Escrevendo de forma sucinta, tem-se:

$$\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\} = \left[K_{op}(n_i)\right] \cdot \left\{t_p(\underline{x}_j)\right\} \tag{5.48}$$

onde t_p são as forças de superfícies determinadas no ponto fonte (j) expressos no sistema de coordenadas local do elemento contendo o carregamento (x_j). E f_o são as forças de superfície em um elemento campo (i) onde é feita e medição expressa no sistema global de coordenadas (x_i). E ainda, $[K_{op}(n_i)]$ está em função do vetor normal do elemento $E = i$ que está sendo medido, o vetor normal (n_i) é expresso no sistema global de coordenadas.

A equação (5.48) expressa as forças de superfície $\left\{\overline{f}_x(\underline{X}_i),\, \overline{f}_z(\underline{X}_i)\right\}^T$ no ponto $(\underline{X}_i)$ no sistema global de coordenadas devido as cargas fictícias $\left\{\overline{t}_x(\underline{x}_j),\, \overline{t}_z(\underline{x}_j)\right\}^T$ atuando no ponto de aplicação $(\underline{x}_j)$ expresso no sistema local de coordenadas do elemento (j).

Já seria possível efetuar a superposição das várias funções de influência causadas por diversas excitações, Porém, antes devemos expressar as forças de superfícies no ponto $(\underline{x}_i)$, segundo o sistema local de coordenadas, que resultará nas forças de superfície tangencial e normal ao elemento, ou seja, até agora alinhamos os tensores de tensão obtidos pela excitação no ponto $(\underline{x}_j)$ com o sistema global de coordenadas, entretanto agora alinharemos os tensores de tensão com relação as coordenadas locais do ponto onde se está medindo $(\underline{x}_i)$. Para efetuar

esta operação de transformação de coordenadas novamente nas forças de superfície, utiliza-se da matriz de transformação de coordenadas $\left[\beta_{ij}^{E=i}\right]$, de acordo com a equação:

$$\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\} = \left[\beta^{E=i}\right] \cdot \left\{f_o(\underline{x}_i)\right\} \tag{5.49}$$

sendo,$\left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\}$ as forças de superfície no sistema global e $\left\{f_o(\underline{x}_i)\right\}$ as forças de superfície no sistema local.

Para realizar a operação contraria, que é a desejada, tem-se:

$$\left\{f_o(\underline{x}_i)\right\} = \left[\beta^{E=i}\right]^T \cdot \left\{\overline{f}_o(\underline{X}_i)\right\} \tag{5.50}$$

Portanto, multiplicando-se a equação (5.48) por $\left[\beta^{E=i}\right]^T$, obtém-se:

$$\left\{f_o(\underline{x}_i)\right\} = \left[\beta^{E=i}\right]^T \left[K_{op}(n_i)\right] \cdot \left\{t_p(\underline{x}_j)\right\} \tag{5.51}$$

Com isso é possível calcular as forças de superfícies normal e tangencial de qualquer centro de elemento situado nas coordenadas $\underline{x}_i$. No entanto, ainda é necessário fazer a superposição para os diversos carregamentos distribuídos nos pontos $\underline{x}_j$. Análogamento ao que foi feito para os deslocamentos, a superposição das forças de superfície no ponto $\underline{x}_i$ também é um somatório de uma série de forças de superfície nos pontos $\underline{x}_j$, dada por:

$$\begin{aligned}\left\{f_o(\underline{x}_i, \sum_{j=1}^{N}\underline{x}_j)\right\} = &\left[\beta^{E=i}\right]^T \left[K_{op}(\underline{X}_i, \underline{X}_1, n_i)\right] \cdot \left\{t_p(\underline{x}_1)\right\} + \\ &\left[\beta^{E=i}\right]^T \left[K_{op}(\underline{X}_i, \underline{X}_2, n_i)\right] \cdot \left\{t_p(\underline{x}_2)\right\} + \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\left[\beta^{E=i}\right]^T \left[K_{op}(\underline{X}_i, \underline{X}_N, n_i)\right] \cdot \left\{t_p(\underline{x}_N)\right\}\end{aligned} \tag{5.52}$$

Adotando,

$$\left[\overline{S}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] = \left[\beta^{E=i}\right]^T \left[K_{op}(\underline{X}_i, \underline{X}_1, n_i)\right] \tag{5.53}$$

e expandindo, além das medidas para as várias excitações, para a medida das forças de superfície em diversos pontos $\underline{x}_i$, tem-se de forma matricial:

$$\left\{\begin{array}{c}\{f_o(\underline{x}_1)\}\\ \{f_o(\underline{x}_2)\}\\ \vdots\\ \{f_o(\underline{x}_N)\}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc}\left[\overline{S}(\underline{x}_1, \underline{x}_1)\right] & \left[\overline{S}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)\right] & \dots & \left[\overline{S}(\underline{x}_1, \underline{x}_N)\right]\\ \left[\overline{S}(\underline{x}_2, \underline{x}_1)\right] & \left[\overline{S}(\underline{x}_2, \underline{x}_2)\right] & \dots & \left[\overline{S}(\underline{x}_2, \underline{x}_N)\right]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[\overline{S}(\underline{x}_N, \underline{x}_1)\right] & \left[\overline{S}(\underline{x}_N, \underline{x}_2)\right] & \dots & \left[\overline{S}(\underline{x}_N, \underline{x}_N)\right]\end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c}\{t_p(\underline{x}_1)\}\\ \{t_p(\underline{x}_2)\}\\ \vdots\\ \{t_p(\underline{x}_N)\}\end{array}\right\} \tag{5.54}$$

ou ainda, de forma concisa:

$$\{f(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right] \left\{t(\underline{x}_j,\, a_j)\right\} \tag{5.55}$$

A equação (5.55) expressa as forças de superfície $\{f(\underline{x}_i)\}$ para os centro dos elementos campo $(\underline{x}_i)$ no sistema local de coordenadas devido aos carregamentos fictícios distribuídos pontos fonte $\left\{t(\underline{x}_j,\, a_j)\right\}$ nos elementos de coordenadas $(\underline{x}_j)$ também no sistema local e de semi-largura (a_j).

5.3.3 Relacionando: Tensão & Deslocamento

Através do uso das cargas fictícias t obtivemos os deslocamentos e as forças de superfície, segundo as equações (5.27) e (5.55), respectivamente, dadas por:

$$\{u(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] \left\{t(\underline{x}_j, a_j)\right\} \tag{5.27}$$

$$\{f(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right] \left\{t(\underline{x}_j,\, a_j)\right\} \tag{5.55}$$

Tanto a matriz de influência para os deslocamentos $\left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right]$ quanto a matriz de influência para as tensões $\left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right]$, são matrizes inversíveis. Com isso é possível isolar as cargas fictícias em uma das equação acima e substituir na outra, resultando em:

$$\{u(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right] \left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{f(\underline{x}_i)\} \tag{5.56}$$

nesta equação tem-se a relação entre as forças de superfícies reais $\{f(\underline{x}_i)\}$ no sistema local de coordenadas e os deslocamentos $\{u(\underline{x}_i)\}$ também no sistema local de coordenadas. Sendo as forças de superfície as forças normal e tangencial aplicada no elemento. O produto das matrizes de influência dos deslocamentos $\left[\overline{G}\right]$ pela matriz inversa de influência das tensões $\left[\overline{S}\right]^{-1}$ fornece a matriz de flexibilidade.

É possível escrever a equação (5.56) de forma mais genérica como:

$$\left[\overline{G}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{u(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{S}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{f(\underline{x}_i)\} \tag{5.57}$$

essa é a forma mais usual que aparece no método dos elementos de contorno, bastando substituir as condições de contorno, seja no vetor de deslocamento ou no vetor de forças de superfície, ou em ambos, re-arranjar o sistema em função de quais forem as incógnitas do problema e obter a solução.

É o uso das tensões fictícias $(t(x_j, a_j))$ apresentada nas equações (5.27) e (5.55) que caracteriza o MEC-I.

5.3.4 Validação do MEC-I Quase-Estático

Será apresentada a validação referente ao último bloco apresentado no fluxograma da figura (2.4). Sendo que é comparado apenas os deslocamentos Wz, ou seja, os deslocamentos na direção z devido ao carregamento na mesma direção com os resultados encontrados na literatura (GIBSON, 1967). Foi escolhido também apenas o conjunto de pontos discretizados na superfície, conforme o Caso 1 ($Z = 0$, X de -15 à 15 com passo de $0,25$) também apresentado no capítulo 2.

Trata-se da obtenção da solução para o semi-espaço utilizando-se do MEC-I. Assim basta obter as soluções estacionárias para os pontos discretizados tanto para os deslocamentos quanto para as tensões através do programa do *Romanini*. Manipular cada solução conforme visto na formulação acima e finalmente inserir as condições de contorno na equação (5.56) e obter a solução. Neste caso, tratando-se de um problema de valor de contorno das tensões (PVC-tensões) é necessário substituir o vetor $\{f(\underline{x}_i)\}$ por valores nulos onde se deseja a superfície livre e valores de carregamento nos nós que se aplica a carga, resultando em um semi-espaço com superfície livre e um carregamento distribuído no elemento central da superfície, uma representação gráfica desta condição de contorno pode ser observada na figura 5.6. Foi usado o valor unitário para o carregamento na direção vertical, sendo a semi-largura da excitação $a_j = 1$. A freqüência adimensional utilizadas nas soluções estacionárias é $A_o = 0,01$.

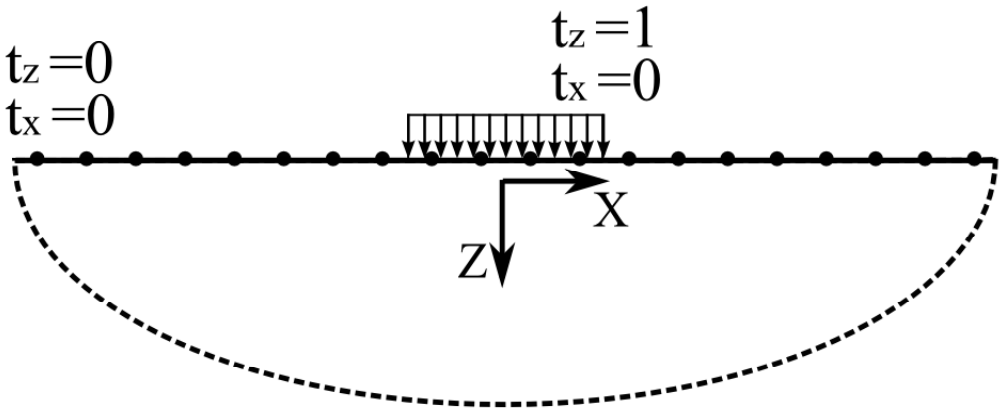

Figura 5.6: Representação gráfica da superfície no semi-espaço com carregamento vertical $t_z = 1$ no centro.

A figura 5.7 mostra os deslocamentos na direção z devido ao carregamento unitário na mesma direção, comparando-se os resultados obtidos pelo MEC-I com os da literatura.

Visualmente a figura 5.7 mostra um comportamento semelhante para as soluções analisadas. A coerência dos resultados é comprovada na figura 5.8 que apresenta o erro mínimo quadrado das soluções. Além dos valores reduzidos encontrados no gráfico do erro é também observado um comportamento da curva de erro da figura 5.8 semelhante ao comportamento do erro das soluções do mesmo problema fornecido pelo programa *Wingreen* apresentado na figura 2.8. No resultado obtido através MEC-I o erro apresentado, figura 5.8, é pouco maior que o erro apresentado pelo programa *Wingreen*, figura 2.8.

Na figura 5.9 é apresentada a solução para o deslocamento cruzado, ou seja, o deslocamento U na direção x devido ao carregamento na direção z. Contudo, em uma análise qualitativa da solução é possível afirmar que seu comportamento está de acordo com o esperado, apresentado uma curva de solução anti-simétrica em relação ao eixo z de coordenadas.

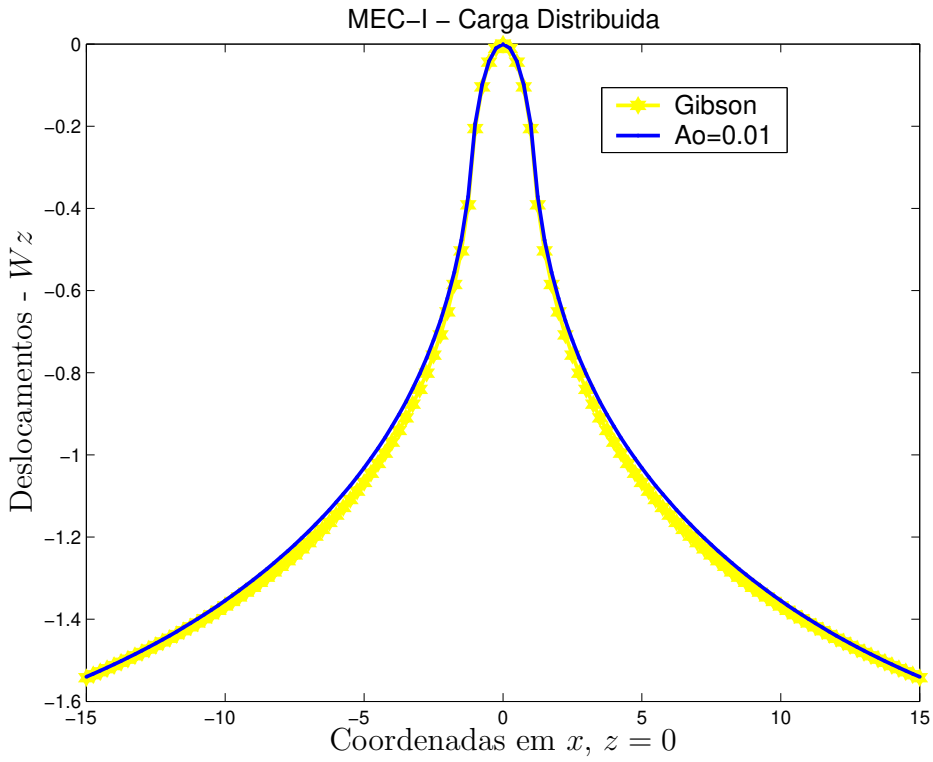

Figura 5.7: Comparação das soluções dos deslocamentos da superfície no semi-espaço - MEC-I e Gibson.

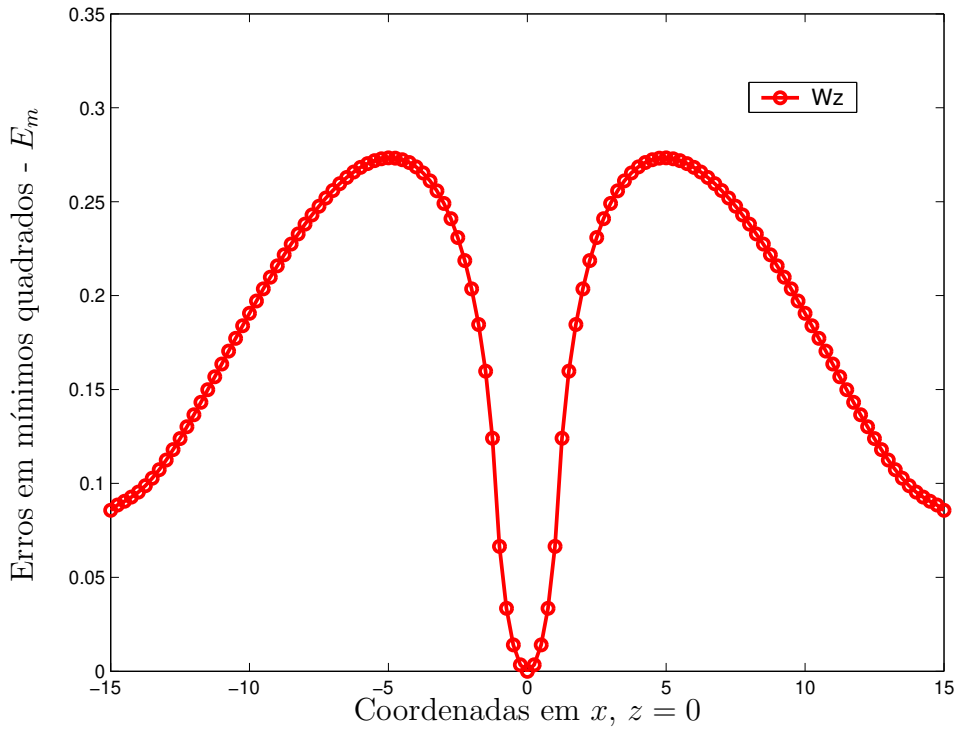

Figura 5.8: Erro da solução Wz obtida pelo MEC-I comparada com a literatura.

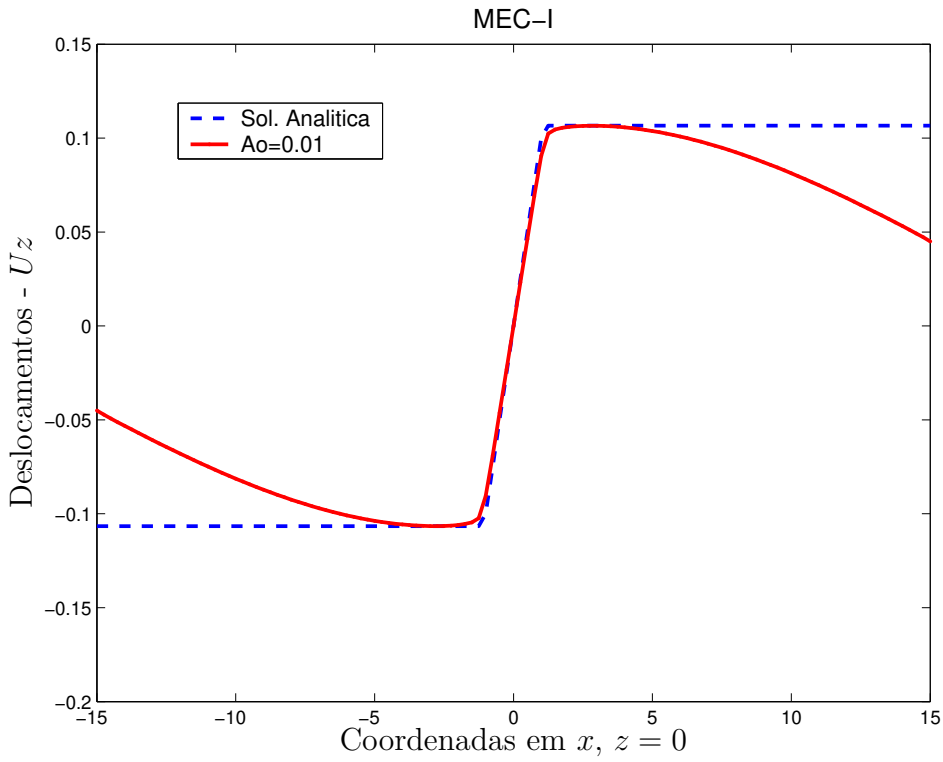

Figura 5.9: Deslocamento Uz, obtido pelo MEC-I.

5.4 Associação de Corpo Rígido no MEC-I

No MEC-I é possível realizar a associação de corpo rígido de uma forma um pouco diferente da abordada no capítulo anterior. No entanto as equações de compatibilidade cinemática (4.3) e de equilíbrio de forças (4.6) serão as mesmas utilizadas no capítulo anterior, dadas respectivamente pelas equações:

$$\{u_i\} = [CC] \cdot \{u_{ref}\}$$

$$\{F_{ext}\} = [EQ] \cdot \{F_f\}$$

onde, $\{F_f\}$ são as forças de superfície na interface solo-estrutura. E lembrando que a matriz de equilíbrio de forças é igual a transposta da matriz de compatibilidade cinemática ($[EQ] = [CC]^T$).

Agora partindo da equação (5.57), dada por:

$$\left[\overline{G}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{u(\underline{x}_i)\} = \left[\overline{S}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{f(\underline{x}_i)\}$$

e escrevendo em função da matriz de rígidez do sistema, ou seja, invertendo a matriz de flexibilidade apresentada na equação (5.56), tem-se:

$$\left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right] \left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right]^{-1} \{u(\underline{x}_i)\} = \{f(\underline{x}_i)\} \tag{5.58}$$

onde denominaremos o produto das matrizes de influência, ou ainda, a matriz de rígidez, de acordo com:

$$\left[\overline{R}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right] = \left[\overline{S}(\underline{x}_i,\, \underline{x}_j)\right] \left[\overline{G}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)\right]^{-1} \tag{5.59}$$

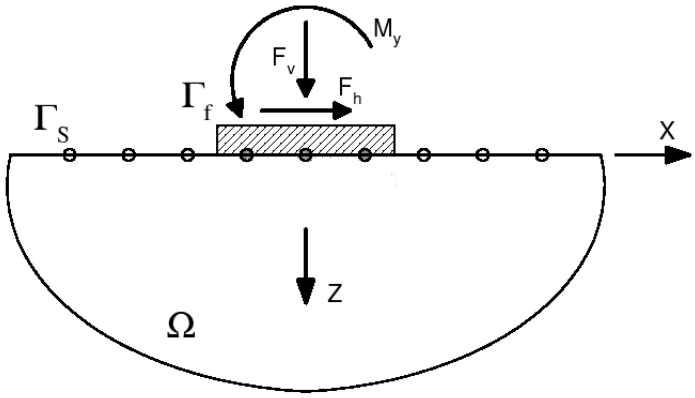

Figura 5.10: Associação solo-estrutura.

A figura (5.10) mostra o solo com uma fundação rígida de superfície. Os nós dos elementos que descrevem o solo livre são representados no contorno Γ_S, enquanto que os nós pertencentes à fundação rígida são representados no contorno Γ_f. Ainda na fundação podem ser aplicadas forças externas dadas pelo vetor $\{F_{ext}\} = \{F_v,\, F_h, M_y\}^T$.

Portanto, substituindo a equação (5.59) na equação (5.58) e rearranjando o sistema de equações em função das variáveis do solo livre separadas das variáveis da fundação rígida e das variáveis de inteface solo-fundação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \overline{R}_{ss} & \overline{R}_{sf} \\ \overline{R}_{fs} & \overline{R}_{ff} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_s \\ u_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_s \\ f_f \end{array} \right\} \tag{5.60}$$

onde, f_s são as forças de superfície nodais aplicadas no solo livre e f_f são as forças de superfície aplicadas no nós dos elementos que constituem a fundação, ou seja, sendo F_f as forças de superfície dada na equação de equilíbrio de forças (4.6), então $f_f = F_f$. Os subíndices $_f$ e $_s$ servem para identificar os nós da fundação e os nós fora da fundação, respectivamente. Os deslocamentos também foram separados em deslocamentos dos nós do solo livre (fora da fundação) u_s e deslocamentos dos nós da fundação rígida u_f. Onde $u_f = u_i$, sendo u_i já o deslocamento apresentado na equação de compatibilidade cinemática, equação (4.3).

Portanto, tomando-se da parte inferior do sistema de equações (5.60) e multiplicando ambos os lados da igualdade pela matriz de compatibilidade cinemática transposta $[CC]^T$, tem-se:

$$[CC]^T \left[\overline{R}_{fs}\right] \{u_s\} + [CC]^T \left[\overline{R}_{ff}\right] \{u_f\} = [CC]^T \{f_f\} \tag{5.61}$$

Recorrendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} [CC]^T &= [EQ] \\ \{f_f\} &= \{F_f\} \\ \{U_f\} = \{u_i\} &= [CC]\,\{u_{ref}\} \end{aligned} \tag{5.62}$$

e utilizando-se das equações de compatibilidade cinemática (4.3) e de equilíbrio de forças (4.6), é possível fazer as cabíveis substituições na equação (5.61), resultando em:

$$[CC]^T \left[\overline{R}_{fs}\right] \{u_s\} + [CC]^T \left[\overline{R}_{ff}\right] [CC]\,\{u_{ref}\} = \{F_{ext}\} \tag{5.63}$$

Na parte superior do sistema de equações (5.60), dada por:

$$\left[\overline{R}_{ss}\right] \{u_s\} + \left[\overline{R}_{sf}\right] \{u_f\} = \{f_s\} \tag{5.64}$$

basta substituir $\{u_f\} = \{u_i\} = [CC]\{u_{ref}\}$, obtendo:

$$\left[\overline{R}_{ss}\right]\{u_s\} + \left[\overline{R}_{sf}\right][CC]\{u_{ref}\} = \{f_s\} \tag{5.65}$$

Reorganizando o sistema de equações com as equações (5.63) e (5.65), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \overline{R}_{ss} & \overline{R}_{sf} \cdot CC \\ CC^T \cdot \overline{R}_{fs} & CC^T \cdot \overline{R}_{ff} \cdot CC \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_{ref} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ F_{ext} \end{Bmatrix} \tag{5.66}$$

Substituindo o vetor do lado direito, que expressa as condições de contorno para as forças de superfície do solo livre f_s geralmente assumindo valores nulos e o carregamento das forças de corpo sobre a fundação rígida F_{ext}, resolvendo o sistema de equações obtém-se o vetor de deslocamentos dos nós pertencentes ao solo livre u_s e os deslocamentos do ponto de referência da fundação u_{ref}.

Esta formulação de associação de corpo rígido é uma alternativa a mais para a solução no domínio da freqüência. Todavia, nada impede de se aplicar ao MEC-I a associação na forma que foi realizada no capítulo 4. Tanto para a solução em freqüência quanto para a solução no domínio do tempo.

Uma das vantagens de se aplicar esta formulação para incorporação do corpo rígido é que o sistema de equações é reduzido, diferente do que acontece na formulação do capítulo 4 onde a incorporação do corpo rígido aumenta o sistema de equações.

5.5 Resultados Numéricos

Nesta seção será apresentado um exemplo de uma barra sujeita a excitação em uma extremidade e engastada pela extremidade oposta. A solução é obtida através do uso do MEC-I.

5.5.1 Colocação do problema

O exemplo estudado é o de uma barra como mostra a figura 5.11.

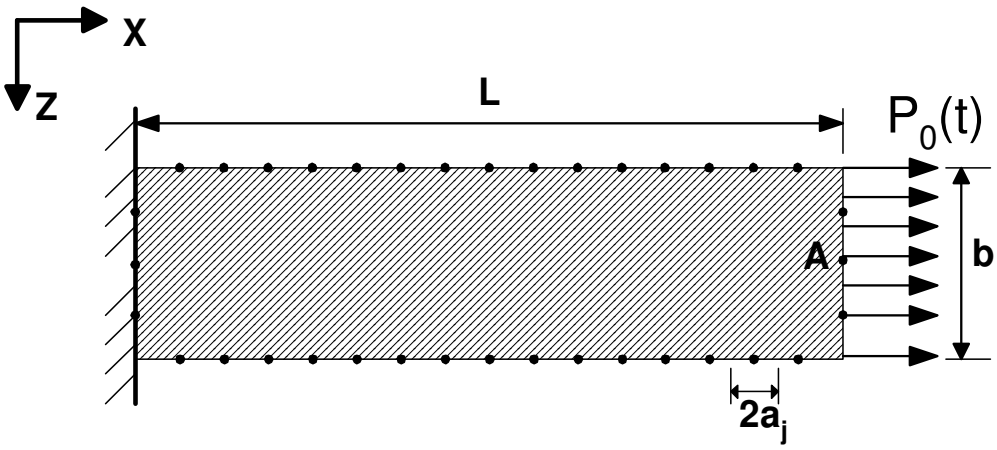

Figura 5.11: Barra 2D engastada com excitação na extremidade.

A figura 5.11 ilustra uma barra que no exemplo adotado é constituída de 176 elementos em seu contorno de mesmo comprimento dos elementos de $(2a_j)$ com a semi-largura do elemento $(a_j = 0,5)$, sendo as laterais formada pela área dada por $(b = 8 \cdot 2a_j)$ e o comprimento total da barra de $(L = 80 \cdot 2a_j)$. Uma das extremidades da barra está sujeita a um engastamentos nas duas direções (X, Z) para os elementos centrais (dois) e os demais elementos vizinhos estão engastados apenas na direção (X) de acordo com o sistema de coordenadas globais apresentado na figura. A excitação $(P_0(t))$ na extremidade livre apresentada na figura 5.11 é um delta de Dirac no domínio do tempo, sendo que está aplicada distribuída sobre os oito elementos apenas na direção (X). O elemento central da extremidade com a excitação é identificado na figura 5.11 como o ponto A.

Os parâmetros que constitui as propriedades físicas da barra tais como módulo de cisalhamento μ, módulo de elasticidade E, Poisson ν, fator de amortecimento η e densidade ρ podem ser encontradas na tabela 5.1. O modelo de amortecimento adotado é o modelo de Kelvin-Voigt.

Tabela 5.1: Propriedades físicas da barra.

μ	1
E	2,667
ν	0,333
η	0,01
ρ	1

A faixa de freqüência adimensional escolhida para o calculo dos estados auxiliares é dada por (A_O de $0,01$ à $0,81$ com um passo de $0,004$) e a freqüência adimensional quase estática adotada é dada por ($A_O(1) = 0,002$). Assim tem-se 201 pontos em freqüência .

5.5.2 Resultados

Os resultados no domínio da freqüência para o ponto A da barra podem ser visualizados na figura 5.12. Que mostra na parte superior a FRF juntamente com o deslocamento estático e na parte inferior é apresentada a fase da FRF. Ambos os gráficos estão em função da freqüência adimensionalizada A_O.

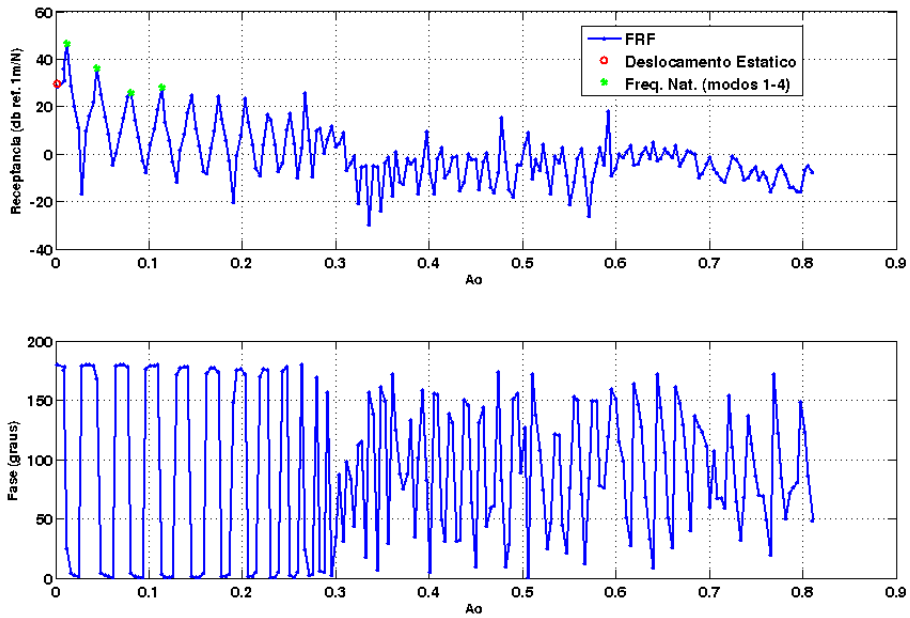

Figura 5.12: Função Resposta em Freqüência e diagrama de fases do ponto A.

Na figura 5.12 é possível identificar as freqüências naturais da barra confirmando a inversão de fase nas ressonâncias. O deslocamento estático encontrado pela solução analítica

está bastante próximo ao deslocamento estático obtido pelo MEC-I.

A seguir são apresentados os quatro primeiros modos para barra encontrados para as primeiras freqüências naturais na figura 5.12. A figura 5.13 para os modos também é composta por um contorno representando a barra sem carregamento e por mais um contorno representando o deslocamento da barra para um carregamento estático.

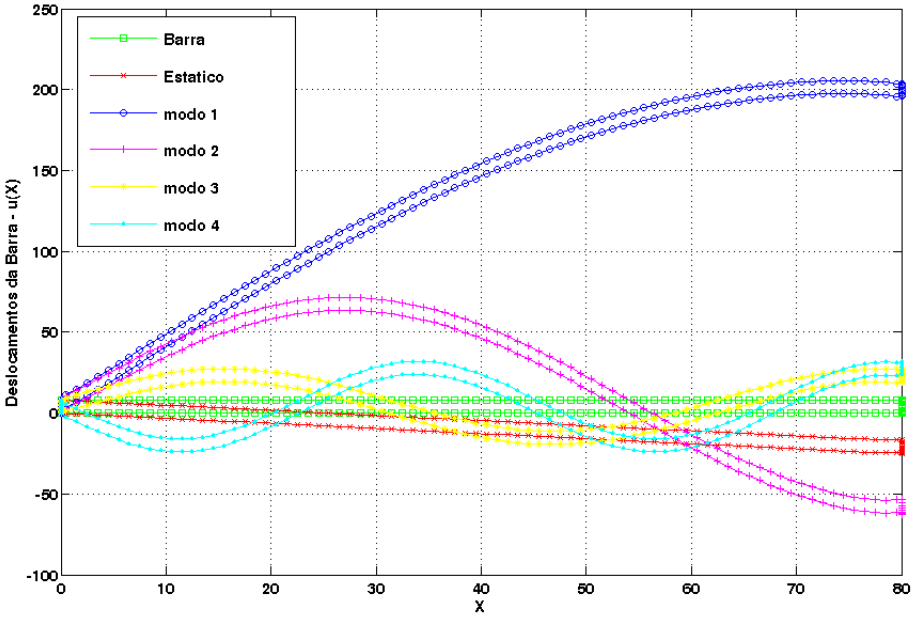

Figura 5.13: Representação do deslocamento estático e dos quatro primeiros modos da barra.

A figura 5.13 apresenta os modos da barra sujeita a uma excitação axial. No entanto optou-se por apresentar os deslocamentos axiais da resposta rebatidos no eixo perpendicular a excitação para uma melhor visualização do comportamento dos modos da barra.

A seguir é apresentada uma versão da figura 5.13 com as amplitudes normalizadas pelo produto de $\frac{80}{\text{Máx}(modo)}$, ou seja, a amplitude de cada modo foi multiplicada pelo comprimento da barra ($L = 80$) e dividido pelo valor máximo de amplitude do respectivo modo. A figura 5.14 exibe o comportamento dos quatro primeiros modos com suas amplitudes normalizadas, possibilitando a comparação dos modos entre si. A figura 5.14 também é composta de duas outras curvas, assim como a figura 5.13, sendo uma representando a barrar sem carregamento e a outra a barra com o carregamento estático.

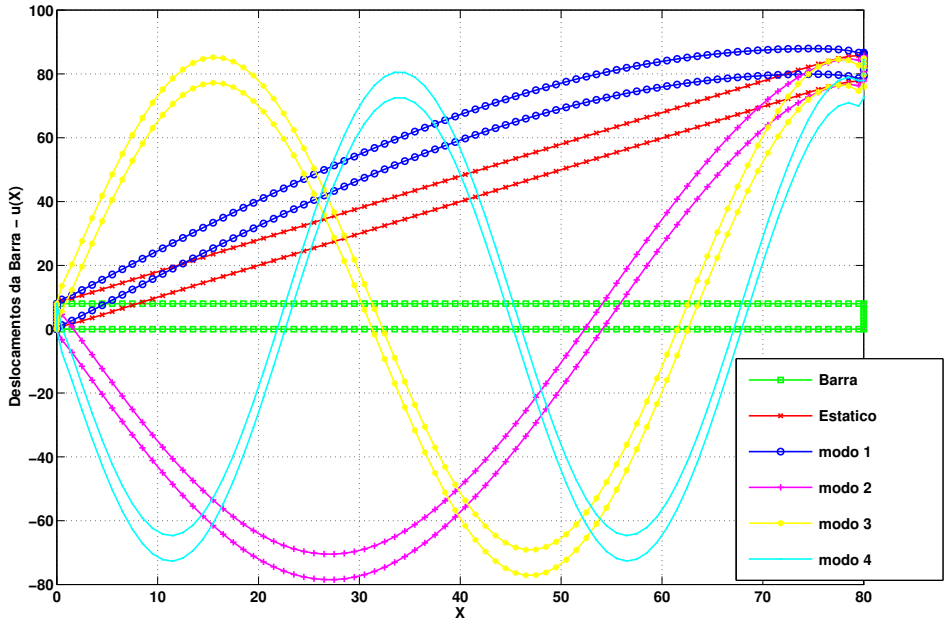

Figura 5.14: Representação do deslocamento estático e dos quatro primeiros modos da barra (Normalizados).

Os resultados obtidos mostram uma coerência do MEC-I na solução do caso estudado.

Capítulo 6

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, foi apresentada metodologia para sintetizar a resposta transiente de uma fundação rígida 2D interagindo com o solo visco-elástico modelado como um semi-espaço. O método é baseado na superposição dos efeitos das funções de influência devido a cargas distribuídas no semi-espaço. Por sua vez, a solução transiente das funções de influência para cargas distribuídas foram obtidas com o uso do algoritmo da inversa da transformada rápida de Fourier (IFFT). Às soluções superpostas foram agregadas as condições de compatibilidade cinemática e o equilíbrio de forças de corpo, satisfazendo as condições de corpo rígido.

A estabilidade da resposta transiente do sistema foi discutida para os efeitos de estudos alternativos como a alteração na forma estrutural do sistema linear resultante e a aplicação de um sistema de convolução com uma aproximação linear ao invés do sistema discreto constante apresentados. A validação dos resultados realizada através da comparação dos resultados transientes obtidos da literatura mostrou-se satisfatória. Salientando uma grande contribuição do trabalho na compreensão das causas da instabilidade e formas alternativas de solucionar este efeito.

A metodologia mencionada é também uma forma mais simples de realizar uma versão indireta do MEC para problemas de carregamento sobre corpo rígido no semi-espaço, ou seja, a incorporação de uma fundação rígida na superfície do semi-espaço é também resolvido com o uso da metodologia do MEC indireto apresentada neste trabalho.

Foi realizada uma formulação para a obtenção da resposta no domínio do tempo para problemas 2D usando o método dos elementos de contorno indireto, a partir do espaço completo dando origem ao semi-espaço. Esta formulação possibilita a formação de uma superfície livre no semi-espaço com qualquer geometria que possa ser construída com segmentos de retas, permitindo a simulação de trincheiras que impedem ou reduzem a propagação das ondas.

Para exemplificar a aplicação do MEC-I foi apresentado o caso de uma barra com engastamento simples, sendo os resultados encontrados um grande indicador da necessidade do aperfeiçoamento e continuidade do MEC-I.

Para trabalhos futuros, propõe-se a generalização do método para a aplicação em problemas estruturais mais complexos. O método também permitiria a simulação de semi-espaços com trincheiras possibilitando o estudo de mecanismos para redução da energia transmitida ao longo da superfície. Para problemas de interação solo-estrutura envolvendo o acoplamento de fundações e estruturas complexas, podem ser realizados estudos para viabilização do acoplamento do MEC com o MEF.

O alto custo computacional oriundos da necessidade de sintetizar numéricamente os estados auxiliares estacionários demonstra que são necessários estudos na otimização da implementação visando um menor tempo na obtenção desses estados. Uma alternativa é a utilização de processamento paralelo.

Referências Bibliográficas

ADOLPH, M. *Soluções Transientes de Problemas Visco-Elastodinâmicos em Meios Ilimitados Através da Transformada de Fourier Rápida - FFT.* Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Mecânica Computacional, 2002.

ADOLPH, M.; MESQUITA, E. N.; ROMANINI, E. A methodology to determine the transient response of structures interacting with visco-elastic soils using the FFT algorithm. In: *22th CILAMCE. Congresso Íbero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia.* Campinas: [s.n.], 2001. (CD-ROM).

ADOLPH, M.; MESQUITA, E. N.; ROMANINI, E. Transient response of three dimensional structures interacting with viscoelastic soils. In: *15th ASCE Engineering Mechanics Conference.* Columbia University, New York, NY.: [s.n.], 2002.

ANTES, H. A boundary element procedure for transient wave propagation in two-dimensional isotropic elastic media. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 1, p. 313–322, 1985.

BARROS, P. L. A. *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise de Interação Solo-Estrutura.* Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

BARROS, R. M. *Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Freqüência.* Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Brasil, Campinas, 2001.

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.

BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Review*, v. 40, n. 1, p. 1–23, 1987.

BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996). *Applied Mechanics Review*, v. 50, n. 3, p. 149–197, 1997.

BETTES, P. Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, p. 53–64, 1977.

CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity.* New York: Academic Press, 1982.

CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Non-singular time-stepping BEM for transient elastodynamic analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 15, p. 11–18, 1995a.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. E. *Concept and Aplication of Finite Element Analysis.* [S.l.]: Wiley, 1989.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. *Boundary Element Methods in Solid Mechanics.* [S.l.]: George Allen & Unwin, 1983.

CRUSE, T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 22, p. 341–355, 1968.

CRUSE, T. A.; RIZZO, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamic problem I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 22, p. 244–259, 1968.

DAROS, C. *Wave Propagation in Unbounded Piezoelectric Media of Transversaly Isotropic Symmetry.* Tese (Doutorado) — Institut for Applied Mechanics, Technical University Braunschweig (Brunnswick), Alemanha, 1999.

GAZETAS, G. Analysis of machine foundation vibrations: State of the art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 2, p. 2–42, 1983.

GIBSON, R. E. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Géotechinique*, v. 17, p. 58–67, 1967.

GUAN, F.; NOVAK, M. Transient response of an elastic homogeneous halfspace to suddenly applied rectangular loading. *Geotechnical Research Centre Report GEOT-10-92*, junho 1992.

HADJIAN, A. H.; LUCO, J. E.; TSAI, N. C. Soil-structure interaction: Continuum or finite element. *Nuclear Eng. Design*, p. 151–167, 1974.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1987.

HWEI, P. H.; HSU, J. K. *Applied Fourier Analysis*. [S.l.]: International Thomson Publishing, 1991.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.

LUCO, J. E.; HADJAIN, A. H. The dynamic modeling of the half plane by finite elements. *Nuclear Engineering and Design*, v. 31, p. 184–194, 1974.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and laplace transform. *International Journal for Numerical Methos in Engineering*, v. 17, p. 573–599, 1981.

MANSUR, W. J. *A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problens Using the Boundary Element Method*. Tese (Doutorado) — University of Southhampton, 1983.

MESQUITA, E. N. *Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum*. Tese (Doutorado) — Hamburgo, 1989.

MESQUITA, E. N. et al. Transient Green and influence functions for plane strain visco-elastic half-spaces. In: *IABEM 2002 (Internation Association for Boundary Element Methods)*. UT Austin, USA: [s.n.], 2002.

MESQUITA, E. N.; BARROS, R. M. Funções de Green dinâmicas para solos transversalmente isotrópicos e multi- estratificados. In: *XX CILAMCE, XX Congresso Íbero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*. São Paulo: [s.n.], 1999. CD-ROM.

MESQUITA, E. N.; PONTES, B. R. Complete compliance matrices for the dynamics foundation-soil-foundation interaction: A critical review of the BEM potentialities. In: *14th BEM (Internation Conference on Boundary Element Methods)*. Sevilha, Espanha: [s.n.], 1992. p. 193–205.

MESQUITA, E. N.; SOUSA, E. C.; PONTES, B. R. Coupling of finite and boundary element procedures for steady state elastodynamics- part ii: Numerical results -validations and applications. In: . [S.l.]: Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, 1994. v. 16, n. 2, p. 159–176.

MESQUITA, E. N.; SOUSA, E. C.; PONTES, B. R. Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. part i: Formulation. In: . [S.l.]: Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, 1994. v. 16, n. 2, p. 143–158.

NEWLAND, D. E. *An Introduction to Random Vibrations*. Terceira edição. Longman: Spectral and Wavelet Analysis, 1993.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Digital Signal Processing*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1975.

PAPOULIS, A. A. New method of inversion of the laplace transform. *Quartly Applied Mathematics*, v. 14, p. 405–414, 1957.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. *Elastic Solutions For Soil and Rock Mechanics*. New York - London - Sydney - Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1974.

RAJAPAKSE, R. K. N. D.; SENTJUNTICHAI, T. Fundamental solutions for poroelastic half space with compressible constituents. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, p. 847–856, 1993.

RICHART, F. E. J.; HALL, J. R. J.; WOODS, R. D. *Vibrations of Soils and Foundations*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.

RICHTER, C. A Green's function time-domain BEM of elastodynamics. *Computacional Mechanics Publications, Southampton, UK*, 1997.

RIZOS, D. C.; KARABALIS, D. L. An advanced direct domain BEM formulation for general 3-D elastodynamic problems. *Computacional Mechanics*, v. 15, p. 249–269, 1994.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quaterly of Applied Mathematics*, v. 17, p. 201–217, 1967.

ROMANINI, E. *Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura através de Equações Integrais de Contorno*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil, 1995.

SAEZ, A. P. *Análisis Numérico de Problemas Elastodinámicos en Materiales Transversalmente Isótropos*. Tese (Doutorado) — Sevilha, Espanha, 1997.

SOUSA, E. A. C. *Acoplamento do Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno para Tratamento de Problemas Estacionários de Elastodinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

SOUSA, E. A. C. *Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Visco-elastodinâmicos Transientes: Pré-requisitos para o Acoplamento.* Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

SOUSA, E. A. C.; BARROS, P. L. A.; MESQUITA, E. N. FFT based transient response of 2D rigid foundations interacting with transversaly isotropic soils. In: *14th ASCE Engineering Mechanics Conference.* University of Texas, Austin, USA: [s.n.], 1999. p. 6. Proceedings em CD-ROM.

SPYRAKOS, C. C.; ANTES, H. Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: A comparative study. *Computers & Structures*, v. 24, n. 4, p. 529–535, 1986.

SPYRAKOS, C. C.; BESKOS, D. E. Dynamic response of rigid strip-foundation by a time domain boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 1547–1565, 1986.

THOMAZO, L. H.; MESQUITA, E. N. Formulação da fundação Rígida - 2D no tempo através da superposição das funções de influência da carga distribuida. In: *DINCOM.* São José dos Campos - SP: [s.n.], 2003. (CD-ROM).

WANG, C. Y.; ACHENBACH, J. D. Three dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids. In: *Royal Soc. London A.* [S.l.: s.n.], 1995. v. 449, p. 441–458.

WANG, C. Y.; RAJAPAKSE, R. K. N. D. Dynamics of rigid strip foundations embedded in orthotropic elastic soils. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 20, p. 927–947, 1991.

ZAVALA, P. A. G. *Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN).* Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. Marriage à la mode - the best of worlds (finite element and boundary integrals). In: _____. [S.l.]: Wiley, 1979. cap. 5.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite Element and Aproximations.* [S.l.]: Wiley, 1983.