

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR *Kellen Taziani*  
*Fernandes Mourão* E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *23 / 02 2012*

*Roberto Luiz Perpa.*  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Kellen Taziani Fernandes Mourão

# Posicionamento de Sensores/Atuadores e Escolha de Funções de Ponderação no Controle H-infinito de Vibrações

Campinas, 2012.

Kellen Taziani Fernandes Mourão

# **Posicionamento de Sensores/Atuadores e Escolha de Funções de Ponderação no Controle H-infinito de Vibrações**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Campinas  
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M866p Mourão, Kellen Taziani Fernandes  
Posicionamento de sensores/atuadores e escolha de funções de ponderação no controle H-infinito de vibrações / Kellen Taziani Fernandes Mourão. - - Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2. Vibração - Controle. 3. Controle H-infinito. 4. Algoritmos genéticos. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Placement of sensors/actuators and selection of weighting functions in H-infinity control of vibrations

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, Vibration - Control, H-infinity Control, Genetic algorithms

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Ely Carneiro de Paiva, Júlio Apolinário Cordioli

Data da defesa: 23-02-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

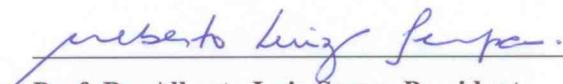
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## Posicionamento de Sensores/Atuadores e Escolha de Funções de Ponderação no Controle H-infinito de Vibrações

Autor: Kellen Taziani Fernandes Mourão

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



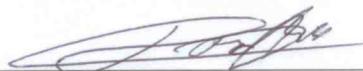
---

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



---

Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



---

Prof. Dr. Júlio Apolinário Cordioli  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC

Campinas, 23 de Fevereiro de 2012.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus amados pais  
e aos meus irmãos pelo apoio incondicional.

*“Talent is luck.  
The important thing in life is courage.”  
Woody Allen*

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado.

Aos meus pais pelo amor, zelo, força e compreensão.

Aos meus irmãos pela cumplicidade.

Ao meu orientador Prof. Alberto Luiz Serpa pela oportunidade, confiança e pela ajuda para a concretização desse trabalho.

À todos os amigos do laboratório por compartilharem comigo experiências, conhecimento, cafés e risadas.

Ao Departamento de Mecânica Computacional e a Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pela qualidade e excelência no ensino.

Aos meus amigos, em especial as amigas Livia pelo incentivo, Eloísa, Monah e Isadora pela amizade e presença, apesar da distância.

Ao Flávio pelo apoio e conselhos.

À todos aqueles que torceram e rezaram por mim.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

## Resumo

MOURAO, Kellen Taziani Fernandes, **Posicionamento de Sensores/Atuadores e Escolha de Funções de Ponderação no Controle  $\mathcal{H}_\infty$  de Vibrações**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2012.

Neste trabalho foi utilizado o controle  $\mathcal{H}_\infty$  para atenuar vibrações em estruturas mecânicas. São utilizadas desigualdades matriciais lineares para encontrar o controlador ótimo. Sensores e atuadores são incorporados ao projeto e para determinar o melhor local onde devem ser fixados na estrutura são utilizadas duas metodologias: uma pela menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada e a outra pela maior norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. Para modelar a estrutura a ser controlada é usado o método de elementos finitos.

Após determinadas as posições ótimas para alocar sensores e atuadores, foram projetados controladores  $\mathcal{H}_\infty$  com filtros de ponderação escolhidos via algoritmos genéticos.

Para projetar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  utilizou-se o modelo reduzido da planta, desconsiderando os modos residuais. São escolhidos filtros de ponderação via algoritmos genéticos para determinar as faixas de frequência de interesse com o intuito de projetar um controlador menos conservador e evitar o fenômeno de *spillover*, e conseqüentemente, que a malha fechada se torne instável.

Os exemplos de aplicação foram realizados sobre uma estrutura flexível do tipo viga. Os resultados mostraram que os controladores projetados, após o posicionamento ótimo de sensores e atuadores e escolhidas das funções de ponderação via algoritmos genéticos, minimizaram a amplitude de vibração da estrutura garantindo a estabilidade do sistema.

**Palavras-Chave:** *Controle de Vibrações, Controle H-infinito, Alocação de Sensores e Atuadores, Otimização de Funções de Ponderação, Spillover.*

## Abstract

MOURAO, Kellen Taziani Fernandes. **Placement of Sensors/Actuators and Selection of Weighting Functions for  $\mathcal{H}_\infty$  Control** of Vibrations. Master's Thesis. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2012.

In this work it was used the  $\mathcal{H}_\infty$  control to attenuate vibrations in mechanical structures. Linear matrix inequalities are used to find the optimal controller. Sensors and actuators are incorporated into the project. To determine the best place to allocate them in the structure two methods are used: the first is based on the highest closed-loop  $\mathcal{H}_\infty$  norm and the second is based on the lowest open-loop  $\mathcal{H}_\infty$  norm. The structure to be controlled was modeled through the finite element method.

After determining the optimal placement to allocate sensors and actuators, the loop was closed and  $\mathcal{H}_\infty$  controllers were designed with weighting filters that were chosen via genetic algorithms for both cases of positioning.

To design the  $\mathcal{H}_\infty$  controller, a reduced model of the plant was used, disregarding the residual modes. Weighting filters are found through genetic algorithms to determine the frequency bands of interest in order to design a controller with less conservatism and avoiding the phenomenon of *spillover*, and consequently, unstable closed loop.

The application examples were based in a flexible beam structure. The results showed that the designed controllers, after the optimal placement of sensors and actuators and choosing the best parameters for the weighting functions, minimized the amplitude of vibration of the structure, ensuring system stability.

**Keywords:** *Vibration Control, H-infinity Control, Placement of Sensors and Actuators, Optimization of Weighting Functions, Spillover*

## Lista de Figuras

3.1	Representação usual do problema de controle.	18
4.1	Exemplos de filtros de ponderação.	24
4.2	Configuração de filtro passa baixa.	26
4.3	Planta Aumentada	27
4.4	Modelo na forma de incerteza aditiva	32
5.1	Representação do sistema e respectivas entradas e saídas	35
6.1	Esquema geral do problema abordado	50
7.1	Problema proposto	52
7.2	Viga com as condições de contorno aplicadas e numeração dos nós e graus de liberdade	52
7.3	Posicionamento do sinal de distúrbio $w$ e da medida de desempenho $z$	53
7.4	Modelo de controle da viga	54
7.5	Planta real $P_r$ e planta original $P$ do modelo de elementos finitos	55
7.6	Planta real e planta normalizada	56
7.7	Planta real normalizada $P_s$ e planta nominal $P_n$	56
7.8	Índice de Posicionamento Ótimo	58
7.9	Função resposta em frequência dos filtros de ponderação selecionados via algoritmo genético e da planta real - sensores e atuadores alocados por $ASAT_\infty$	62
7.10	Resposta em frequência em malha aberta e em malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores alocados por $ASAT_\infty$	63
7.11	Resposta temporal do grau de liberdade de desempenho sem controle e com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAT_\infty$	64

7.12	Sinal de controle de malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAT_{\infty}$	65
7.13	Sinal medido de malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAT_{\infty}$	66
7.14	Polos de malha fechada com controlador projetado sem o uso filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAT_{\infty}$	67
7.15	Polos de malha fechada com controlador projetado com o uso filtros de ponderação ótimos - sensores e atuadores por $ASAT_{\infty}$	67
7.16	Função resposta em frequência dos filtros de ponderação selecionados via algoritmo genético e da planta real - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	69
7.17	Resposta em frequência em malha aberta e em malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	70
7.18	Resposta temporal em malha aberta e em malha fechada com o controlador projetado com filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	71
7.19	Sinal de controle da malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	72
7.20	Sinal medido na malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	73
7.21	Polos de malha fechada com controlador sem o uso de filtros de ponderação - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	74
7.22	Polos de malha fechada com controlador com o uso de filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por $ASAP_{\infty}$	74

## Lista de Tabelas

6.1	Comparação entre um algoritmo clássico e o genético	46
7.1	Comparação entre as 4 primeiras frequências naturais [ <i>rad/s</i> ].	53
7.2	Amortecimento para os 4 primeiros modos.	53
7.3	Sistema controlado com controlador projetado sem filtros de ponderação	75
7.4	Resultados da Malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação	76
7.5	Amplitudes dos três primeiros modos [dB] do sistema controlado	77
7.6	Esforço de Controle [Nm]	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Arábicos

$A$	Área da seção transversal
$A$	Matriz dinâmica
$A_m$	Matriz dinâmica modal
$A_{mi}$	Matriz dinâmica do modo $i$
$\mathbb{A}$	Denota a operação de “assembly”
$B$	Matriz de entrada
$B_m$	Matriz de entrada modal
$B_{mi}$	Matriz entrada modal do modo $i$
$B_i$	Matriz de entrada nodal no modo $i$
$C$	Matriz de saída
$C_m$	Matriz de saída modal
$C_{mq}$	Matriz de saída de deslocamento modal
$C_{mv}$	Matriz de saída de velocidade modal
$D$	Matriz de transmissão direta
$\bar{D}$	Matriz de amortecimento
$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Matriz identidade
$K$	Controlador
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}^e$	Matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{K}_m$	Matriz modal de rigidez
$M$	Matriz de massa
$M^e$	Matriz de massa do elemento
$M_m$	Matriz modal de massa

<b>P</b>	Planta a ser controlada
<b>P</b>	Matriz de simétrica de Lyapunov
<b>R</b>	Vetor que representa as posições candidatas para o atuador
<b>S</b>	Vetor que representa as posições candidatas para o sensor
<b>T</b>	Função de transferência de malha fechada
<b>f</b>	Vetor de forças externas
<b>Z</b>	Matriz com o fator de amortecimento dos modos
<b>q</b>	Vetor de deslocamentos
<b>q̇</b>	Vetor de velocidades
<b>q<sub>m</sub></b>	Vetor de deslocamento modal
<b>y</b>	Vetor de saídas de medição
<b>w</b>	Entradas exógenas
<b>u</b>	Esforço de controle
<b>z</b>	Saída de desempenho

### Caracteres Gregos

<b>Ω</b>	Matriz com as frequências naturais
<b>ξ<sub>i</sub></b>	Fator de amortecimento do modo <i>i</i>
<b>ω<sub>i</sub></b>	Frequência natural do modo <i>i</i>
<b>ω<sub>c</sub></b>	Frequência de corte
<b>ρ</b>	Massa específica
<b>ν</b>	Coefficiente de poisson
<b>α</b>	Parâmetro utilizado para estimar o amortecimento proporcional
<b>β</b>	Parâmetro utilizado para estimar o amortecimento proporcional
<b>λ<sub>i</sub>(G)</b>	Autovalor <i>i</i> de <b>G</b>
<b>ρ</b>	Ganho na passagem das funções de transferência dos filtros de ponderação
<b>ε</b>	Ganho na rejeição das funções de transferência dos filtros de ponderação
<b>σ<sub>∞</sub></b>	Índice de posicionamento

## Definições

Matrizes são denotadas por letras maiúsculas em negrito

Vetores são denotados por letras minúsculas em negrito

$\mathbf{G}^*$ : matriz conjugada transposta

$\sup_w f(w)$ : supremo da função  $f(w)$

$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$ : Norma infinito da matriz  $\mathbf{G}(s)$

$\sigma_i(\mathbf{P}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{P}^*(jw)\mathbf{P}(jw))}$ : valores singulares de  $\mathbf{P}(s)$

$\mathbf{A}'$ : transposta da matriz  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{-1}$ : inversa da matriz  $\mathbf{A}$

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Objetivos	6
1.4	Estrutura e Organização do trabalho	6
<b>2</b>	<b>Estruturas Flexíveis</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução	8
2.2	Modelagem em Coordenadas Nodais	8
2.3	Modelagem em Coordenadas Modais	10
2.4	Modelagem por Elementos Finitos	14
2.5	Programa de Elementos Finitos	16
<b>3</b>	<b>Controle <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>17</b>
3.1	Introdução	17
3.2	Valores Singulares	17
3.3	Apresentação do Problema $\mathcal{H}_\infty$	18
3.4	Desigualdades Matriciais Lineares	21
3.5	Definição de LMI	21
3.6	Problema de Otimização com Restrições LMI	21
<b>4</b>	<b>Filtros de Ponderação e <i>Spillover</i></b>	<b>23</b>
4.1	Introdução	23
4.2	Modelagem da Planta Aumentada	26
4.3	Planta Aumentada em termos de Função de Transferência	29
4.4	<i>Spillover</i>	31
4.5	Redução do <i>Spillover</i>	33

<b>5</b>	<b>Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução	34
5.2	Configuração Geral do Problema de Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores	34
5.2.1	Propriedades dos Sensores e Atuadores	35
5.3	Técnicas para Posicionamento de Sensores e Atuadores	37
5.3.1	Utilizando a Menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Fechada do Sistema - $ASAT_\infty$	37
5.3.2	Utilizando a Maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Aberta do Sistema - $ASAP_\infty$	38
<b>6</b>	<b>Seleção de Filtros de Ponderação usando Algoritmos Genéticos</b>	<b>43</b>
6.1	Introdução	43
6.2	Algoritmos Genéticos	43
6.3	Parâmetros de Otimização dos Filtros de Ponderação	46
6.4	Posicionamento de Sensores e Atuadores e Seleção de Filtros de Ponderação	47
6.4.1	Posicionamento de Sensores/Atuadores usando a menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Malha Fechada - $ASAT_\infty$	48
6.4.2	Posicionamento de Sensores/Atuadores usando a maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Malha Aberta - $ASAP_\infty$	48
6.4.3	Projeto do Controlador após Alocar Sensores e Atuadores	49
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
7.1	Modelo da viga engastada-livre	51
7.1.1	Abordagem de Solução	54
7.1.2	Controlador	56
7.2	Posicionamento de Sensor e Atuador	57
7.2.1	Baseado na Menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Fechada ( $ASAT_\infty$ )	57
7.2.2	Baseado na Maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Aberta ( $ASAP_\infty$ )	57
7.3	Escolha dos Filtros de Ponderação usando Algoritmos Genéticos	58
7.3.1	Parâmetros iniciais das Funções de Ponderação	59
7.3.2	Variáveis de Otimização dos Filtros de Ponderação	60
7.3.3	Projeto de Controlador e Filtros de Ponderação Otimizados para Posições de Sensores/Atuadores obtidas com $ASAT_\infty$	61
7.3.4	Projeto de Controlador e Filtros de Ponderação Otimizados para Posições de Sensores/Atuadores obtidas com $ASAP_\infty$	68

7.4	Resumo dos Resultados dos Métodos	75
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Controladores obtidos</b>	<b>86</b>
A.1	As matrizes do controlador obtido a partir de $ASAT_\infty$	86
A.2	As matrizes do controlador obtido a partir de $ASAP_\infty$	87

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

Entre as modernas estruturas de naves espaciais, aviões, veículos, grandiosos edifícios e pontes existe um problema causado por excitações que provocam vibrações indesejáveis, colocando em risco a própria integridade estrutural do sistema e, em alguns casos, até mesmo a saúde/conforto dos usuários.

As vibrações mecânicas são movimentos periódicos de corpos que são excitados por forças externas. Seus efeitos sobre um sistema podem ser [4]:

- Falhas - são falhas resultantes de tensão excessiva durante eventos transitórios, como por exemplo em terremotos; instabilidade devido as condições de funcionamento, a exemplo o fenômeno denominado *flutter* (vibração que ocorre na estrutura do avião sob excitação do vento; ou fadiga mecânica).
- Conforto - as vibrações nas suspensões de carros, ruídos de motores, de helicópteros, as oscilações causadas pelo vento em edifícios, entre outros.
- Ferramentas com dispositivos de precisão - vibrações são importantes em numerosos sistemas de engenharia onde a precisão é fator fundamental, tais como: leitores de DVD, telescópios, etc.

A necessidade de estruturas leves e sistemas com alto desempenho tornam o projeto de estruturas cada vez mais flexíveis. Insere-se então, neste contexto, o projeto de controle ativo que tem o objetivo de controlar a vibração dessas estruturas, garantindo um desempenho satisfatório à medida que são minimizados os danos causados pelas vibrações mecânicas.

As técnicas atuais de controle se classificam como passivas e ativas. As técnicas baseadas em controle passivo envolvem mudanças nas características estruturais do modelo, tais

como aumento de massa, adição de absorvedores de vibrações, barreiras para isolar estruturas mecanicamente etc. Já o controle ativo de vibrações utiliza informações obtidas por sensores para determinar um controle inteligente da estrutura através de aplicações de forças na estrutura usando elementos para diminuir sua vibração [7].

Estruturas inteligentes, que sejam leves e resistentes, tem sido o foco de atenção de muitos autores nos últimos anos devido a sua capacidade de melhorar o desempenho das estruturas convencionais. Essas estruturas devem atender aos requisitos técnicos principalmente para aplicações em projetos de estruturas aeroespaciais, sendo que um dos principais requisitos consiste em não apresentarem resposta significativa quando excitados por distúrbios externos.

Para minimizar ou até mesmo anular essas vibrações são propostos controladores ativos. O projeto de um sistema de controle ativo de estruturas envolve muitas questões, tais como: a forma de posicionar os sensores e atuadores, quais critérios usar para determinar as funções de ponderação para os critérios de desempenho, bem como garantir a estabilidade e robustez, tudo isso a um baixo custo. Com a integração de sensores, atuadores e adequado projeto de controladores torna-se possível modificar a resposta dinâmica da estrutura resultante de excitações externas que poderiam ser prejudiciais ao desempenho e à integridade da estrutura.

Para obter um controle otimizado, os atuadores devem ser alocados em posições capazes de atenuar todos os modos de forma eficiente, da mesma forma que os sensores devem ser capazes de detectar o movimento de todos os modos. Além disso no projeto do controlador são incorporados filtros de ponderação que têm a função de impor ponderações em frequência para os sinais de entrada e saída, e com essa ponderação diminuir o conservadorismo do projeto.

Diferentes metodologias são usadas para a modelagem de estruturas entre as quais se destaca o método dos elementos finitos. Usando este tipo de formulação é possível obter as matrizes de massa e rigidez, e a partir de uma combinação linear dessas duas, pode-se definir a matriz de amortecimento da estrutura (modelo de amortecimento proporcional).

Modelada a estrutura, pelo método de elementos finitos, os sensores, os atuadores e os filtros de ponderação serão considerados no projeto do controlador, cujo objetivo é minimizar as vibrações do sistema causadas por perturbações externas. Portanto, analisar o efeito do posicionamento ideal de sensores/atuadores e selecionar de forma adequada os filtros de ponderação são passos importantes no projeto de controladores.

O principal problema do controle por realimentação em sistemas flexíveis é controlar

com precisão uma planta de alta ordem com um controlador de ordem reduzida. O projeto de um controlador para um modelo de ordem menor que a original é desejado por exigir menos computacionalmente, porém essa redução na ordem da planta pode restringir o controle a apenas alguns modos de vibração. Esses modos são escolhidos pelo requisito de desempenho do sistema, tais como, tolerância e sensibilidade a vibrações, fontes de excitação e não necessariamente os primeiros modos de baixa frequência no espectro do sistema [3]. Assim o projeto determinado para o controlador deve ser capaz de garantir a estabilidade para a planta de alta ordem, além de atenuar sua vibração. O efeito dos modos não controlados na planta pode levar à instabilidade do sistema de malha fechada provocando o fenômeno conhecido como *spillover*. Assim, os filtros de ponderação são usados no projeto do controlador para reduzir este efeito provocado pelos modos residuais.

Neste trabalho serão abordadas duas técnicas de posicionamento ótimo de sensores e atuadores, a saber: posicionamento pela menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada e pela maior norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. Após determinada a melhor posição para os sensores e atuadores, um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  será projetado. Para realizar o projeto do controlador são determinadas funções de ponderação, escolhidas neste trabalho via algoritmos genéticos. O objetivo da escolha otimizada das funções de ponderação bem como do posicionamento otimizado dos sensores e atuadores tem o objetivo de um projeto de sistema controlado evitando situações que levem ao *spillover*.

Usualmente os filtros de ponderação são determinados através de tentativas, testando-se o resultado obtido através de simulações. O interesse em empregar um algoritmo de otimização neste caso é relacionado à automatização deste processo, obtendo filtros adequados dentre um conjunto grande de possibilidades. Pelo tipo de característica das funções de ponderação, que envolve um parâmetro discreto (ordem do filtro é valor inteiro), e pelo tipo de funções envolvidas no problema, em que a obtenção do gradiente torna-se difícil, optou-se pelo emprego do algoritmo genético como técnica para abordar este problema.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Vários artigos vem sendo publicados com a finalidade de destacar a importância de se controlar estruturas flexíveis e analisar a contribuição de tipos específicos de controladores. Um controlador citado por muitos autores e utilizado neste trabalho é o controle  $\mathcal{H}_\infty$  que tem o objetivo de minimizar o efeito do distúrbio na resposta em frequência da planta que se deseja controlar [24, 28, 36, 51, 52].

Para modelar matematicamente a estrutura é possível encontrar na literatura o emprego de métodos de elementos finitos para obter as matrizes de massa e rigidez que serão usadas para projetar o controlador e posteriormente analisar a resposta temporal do sistema [20, 24, 28].

O projeto  $\mathcal{H}_\infty$ , neste trabalho, é abordado sob o ponto de vista de desigualdades matriciais lineares (LMI), proposto por Lyapunov em 1890. Após estabelecida a condição de estabilidade de Lyapunov, no ano de 1940 Lur'e, Postnikov e outros pesquisadores aplicaram o método de Lyapunov em projetos práticos de engenharia, um problema de estabilidade de um sistema de controle com uma não linearidade no atuador [6, 31]. O critério de estabilidade usado na época foi na forma de LMI. Essas equações foram então reduzidas a inequações polinomiais e foram resolvidas manualmente, provando a validade da estabilidade de Lyapunov [6].

Existem, atualmente, alguns métodos de otimização que procuram determinar o posicionamento ótimo de sensores/atuadores para minimização da energia interna da estrutura e do sinal de controle [30] ou para minimizar as amplitudes de vibração da estrutura [7].

Numa estrutura real, uma situação bastante comum é o fato de sensores/atuadores não poderem ser alocados em determinadas posições devido a restrições físicas da própria estrutura. Assim, os atuadores são alocados em locais permitidos e não necessariamente onde as perturbações foram aplicadas. Da mesma forma os sensores podem ser posicionados em locais diferentes dos locais onde o desempenho é avaliado [16].

Os autores Heverley e Smith [18] utilizam a técnica de otimização discreta denominada “simulated annealing” com o objetivo de minimizar da energia mecânica interna da estrutura e do esforço do controlador. Já Rao, Pan e Venkayya [43] estudaram a utilização de algoritmos genéticos para otimizar o posicionamento de sensores e atuadores em estruturas. Furuya e Haftka [11] também utilizaram algoritmos genéticos para determinar a localização ótima de 8 atuadores em uma estrutura com 1507 posições candidatas. Como pode-se perceber, a utilização de métodos evolutivos de busca de melhores posições para sensores e atuadores tem sido amplamente utilizada com bons resultados. O emprego da técnica chamada discreto-contínua foi empregada por [12] para determinar a posição de atuadores em estruturas inteligentes.

Outros autores utilizam as matrizes grammianas de controlabilidade e observabilidade para analisar as possibilidades para alocar sensores e atuadores [9]. Os autores Sadri, Wright e Wynne [44] utilizam as matrizes grammianas para otimizar o posicionamento dos atuadores usando algoritmos genéticos.

As normas de sistema também são usadas como função objetivo no problema de posicionamento de sensores e atuadores. O trabalho de Ponossian e Gawronski [39] seleciona os melhores pontos para alocarem 4 atuadores e 340 sensores entre mais de 10000 posições candidatas usando a norma  $\mathcal{H}_2$ .

Ao se projetar controladores de ordem reduzida, tem-se a necessidade de se truncar o modelo da planta [15]. Ao reduzir o modelo, os modos não considerados no projeto podem provocar a instabilidade da planta causando o *spillover* [5]. No projeto de controle de estruturas flexíveis, o trabalho [51] utiliza o modelo truncado e considera os modos residuais não modelados como incertezas não estruturadas.

Ao projetar um controlador para a planta truncada não é possível garantir a ausência do *spillover*, logo são utilizadas técnicas que ajudam a diminuir esse efeito, tais como: metodologia LTR recuperando a robustez do sistema [53]; aumentar da ordem do observador, mantendo fixa a ordem do controlador e considerar a dinâmica residual como um ruído no sinal do sensor [27]. Outra forma de evitar a instabilidade do sistema devido a excitação dos modos residuais é aumentar a ordem do controlador através do uso de filtros de ponderação, impondo um limite para as frequências de interesse do projeto nominal da planta. Dessa forma os modos residuais não são afetados pelo sinal de controle, sendo esta uma outra forma de se evitar o *spillover* [3].

Em [26], filtros de ponderação apropriados foram adicionados ao projeto do controlador com a finalidade de controlar as vibrações causadas por torção e flexão produzidas por um motor DC com o intuito de garantir robustez às incertezas.

Sarracini [46] utilizou controladores de ordem completa e ordem fixa em estruturas flexíveis utilizando filtros de ponderação, para evitar que os modos não modelados fossem excitados, evitando o efeito de *spillover*.

Normalmente o requisito de robustez é alcançado através de um processo iterativo de ajuste dos filtros de ponderação, exigindo um certo tempo de projeto, uma vez que são executados vários ciclos de projeto do controlador [35].

Alfaro-Cid, McGookin e Murray-Smith [1] compararam o controle  $\mathcal{H}_\infty$  após o uso de filtros de ponderação, passa-alta e passa-baixa, determinados via algoritmo genético. As estruturas dos filtros de ponderação são dadas por funções de transferência de segunda ordem em que os parâmetros são: ganhos estáticos das funções de ponderação, as posições para alocar um zero e dois polos. Além disso, o GA otimiza os parâmetros estruturais da planta utilizada em questão. A rotina de otimização foi realizada quinze vezes. Os resultados finais foram analisados para os controladores obtidos através de uma média dos resultados. Com

o uso de algoritmo genético foi possível obter um menor custo computacional do projeto do controlador com um menor número de interações, apesar da população inicial ser alterada a cada nova simulação.

Os filtros de ponderação foram também usados para o tratamento de incertezas aditivas e incertezas multiplicativas e, posteriormente, adicionados a planta do sistema para projetar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com o objetivo de maximizar a função de desempenho e melhorar a robustez do projeto. As funções de transferência dos filtros de ponderação foram obtidas a partir das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar. Essas funções de ponderação foram selecionadas via algoritmos genéticos a fim de melhorar o desempenho do sistema [47].

Os filtros de ponderação de primeira ordem, com características estabelecidas a partir das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar, foram selecionados usando algoritmos genéticos também no trabalho [10]. Isto possibilitou a redução do tempo necessário para sintonizar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  específico, alcançando um desempenho satisfatório para o sistema.

### 1.3 Objetivos

O objetivo desse trabalho é escolher filtros de ponderação que serão usados no projeto de controladores para atenuar a vibração de estruturas flexíveis, usando algoritmos genéticos como ferramenta de otimização. Para isso, são determinadas posições ótimas para alocar sensores e atuadores pela norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada e norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. São determinadas funções de ponderação otimizadas através de algoritmos genéticos para a posição definida pelas técnicas das normas  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta e malha fechada com o intuito de evitar o *spillover*, fenômeno causado pela excitação dos modos residuais não considerados no projeto. O emprego dos algoritmos genéticos visa automatizar o processo de escolha das funções de ponderação, procurando obter soluções mais adequadas para estas funções e evitando o processo tedioso de tentativas para a escolha destas.

### 1.4 Estrutura e Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo 1 é apresentada uma introdução do problema a ser abordado.
- No Capítulo 2 é apresentada a modelagem de estruturas flexíveis usando o método de elementos finitos.

- No Capítulo 3 é abordado o projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , baseado em desigualdades matriciais lineares.
- No Capítulo 4 é apresentada a formulação dos filtros de ponderação que serão acoplados ao projeto nominal para a montagem da planta generalizada e é descrito o fenômeno do *spillover*.
- No Capítulo 5 são apresentadas duas técnicas para posicionamento ótimo de sensores e atuadores.
- No Capítulo 6 são apresentadas as rotinas de otimização dos parâmetros dos filtros de ponderação através de algoritmos genéticos.
- No Capítulo 7 mostra os resultados das técnicas de posicionamento de sensores e atuadores e os filtros de ponderação ótimos selecionados para o caso de uma viga flexível.
- No Capítulo 8 são apresentadas as conclusões obtidas neste trabalho.

## Capítulo 2

### Estruturas Flexíveis

#### 2.1 Introdução

O Método de Elementos Finitos é uma técnica usual para obter o modelo matemático de uma estrutura, apresentando resultados confiáveis. Quando a estrutura está disponível é possível realizar uma análise experimental para determinar os parâmetros reais do sistema observado, sendo a identificação experimental um método para estimar um modelo matemático [38].

A estrutura flexível, neste estudo, foi modelada utilizando o Método de Elementos Finitos [25, 42] que consiste na discretização da estrutura, ou seja, consiste na subdivisão da estrutura em elementos finitos, sendo interconectado por nós. Através desse método foram obtidas as matrizes de rigidez e de massa de cada elemento da estrutura, sendo obtida a matriz de amortecimento proporcional após a montagem das matrizes de massa e rigidez. O amortecimento proporcional tem a característica de permitir o desacoplamento das equações, possibilitando um adequado e conveniente tratamento na base modal [15].

Existem duas formas de representar o sistema de coordenadas [16] e que serão descritas a seguir:

- Nodal: emprega deslocamentos e velocidades em pontos específicos chamados nós;
- Modal: emprega deslocamentos e velocidades relacionados aos modos da estrutura.

#### 2.2 Modelagem em Coordenadas Nodais

Modelos nodais são baseados nas coordenadas nodais, em termos de deslocamento, velocidade e aceleração.

Com o método de elementos finitos, chega-se à Equação de movimento de uma estrutura flexível, no domínio do tempo na forma de equação diferencial, representada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Como convenção foi adotado o ponto como primeira derivada em relação ao tempo  $\dot{\mathbf{q}} = \partial\mathbf{q}/\partial t$  e dois pontos como segunda derivada em relação ao tempo  $\ddot{\mathbf{q}} = \partial^2\mathbf{q}/\partial t^2$ . Também foi adotado  $n_d$  como número de graus de liberdade,  $r$  como número de saídas e  $s$  como número de entradas.

Definindo o vetor de estados como:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}'$  é possível reescrever a Equação (2.1) na forma de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde:

- $\mathbf{q}$  é o vetor deslocamento ( $n_d \times 1$ );
- $\dot{\mathbf{q}}$  é o vetor velocidade ( $n_d \times 1$ );
- $\ddot{\mathbf{q}}$  é o vetor aceleração ( $n_d \times 1$ );
- $\mathbf{M}$  é a matriz de massa ( $n_d \times n_d$ );
- $\bar{\mathbf{D}}$  é a matriz de amortecimento ( $n_d \times n_d$ );
- $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema ( $n_d \times n_d$ );
- $\mathbf{I}$  é a matriz identidade com a ordem compatível;
- $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas aplicadas ao sistema ( $n_d \times 1$ ).

O vetor de forças externas  $\mathbf{f}$  é associado aos graus de liberdade da estrutura. Para analisar o efeito individual de cada força  $f_i$  de entrada do sistema, tais como entradas de distúrbio e sinal de controle, tem-se a divisão do vetor  $\mathbf{f}$ , como mostrado por:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} f_2 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} f_n = \sum_i^n \mathbf{B}_i f_i. \quad (2.3)$$

Para uma componente específica  $i$  do vetor de forças externas, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{B}_i f_i = \mathbf{B} f_i. \quad (2.4)$$

Assim o modelo no espaço de estados pode ser escrito na forma apresentada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f_i, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}f_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}$  é a matriz dinâmica;
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_i \end{bmatrix}$  é a matriz de entrada do sistema;
- $\mathbf{C}$  é a matriz de saída do sistema;
- $\mathbf{D}$  é a matriz de transmissão direta, que relaciona a entrada e a saída diretamente;
- $\mathbf{y}$  é o vetor de saídas;
- $f_i$  é uma componente específica do vetor de forças externas.

### 2.3 Modelagem em Coordenadas Modais

A modelagem modal é usada para análise dinâmica de estruturas complexas modeladas pelo método de elementos finitos e em procedimentos de identificação de sistemas em que a representação modal é um resultado natural do experimento [16], ou seja, das frequências e modos naturais de vibração da estrutura. Neste trabalho foi utilizada a modelagem modal.

A modelagem modal é representada através de coordenadas modais. Cada coordenada é independente uma da outra possibilitando fazer uma análise de cada modo separadamente. Essa característica permite analisar o posicionamento de sensores e atuadores, e avaliar e projetar o controlador para os modos de interesse [38].

Da Equação do movimento (2.1) sem o amortecimento, tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (2.6)$$

Para o caso de vibração livre  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , e utilizando as relações  $\mathbf{q}(t) = \phi e^{i\omega t}$  e sua derivada  $\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\omega^2 \phi e^{i\omega t}$ , é possível reescrever a Equação (2.6), conforme mostrado em:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi e^{i\omega t} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Para solução não trivial da Equação (2.7) tem-se:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (2.8)$$

O determinante da Equação (2.8) é satisfeito para um conjunto de  $n_d$  valores de frequência  $\omega$ . Estas frequências são denotadas por:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , em que  $n_d$  é igual ao número de graus de liberdade [16]. A frequência  $\omega_i$  é chamada de *i-ésima* frequência natural. Para cada frequência natural tem-se um autovetor  $\phi_i$ , ou seja, um modo correspondente.

Armazenando em forma matricial tem-se a matriz diagonal de autovalores  $\mathbf{\Omega}$  (frequências naturais):

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

e a matriz dos autovetores  $\mathbf{\Phi}$  [16]:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

A partir da matriz dos autovetores, Equação (2.10), é possível diagonalizar as matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$ , como mostrado por:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{\Phi}' \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (2.11)$$

e

$$\mathbf{M}_m = \Phi' \mathbf{M} \Phi, \quad (2.12)$$

respectivamente. Essas novas matrizes são chamadas de matriz modal de rigidez  $\mathbf{K}_m$  e matriz modal de massa  $\mathbf{M}_m$  [16].

Reconsiderando o amortecimento na Equação do movimento (2.1), para determinar a matriz de amortecimento modal deve-se aplicar a mesma transformação anterior mostrada em:

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \Phi' \bar{\mathbf{D}} \Phi. \quad (2.13)$$

Quando é considerada uma matriz proporcional de amortecimento, designado amortecimento de Rayleigh, a partir de uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa [5], a matriz  $\bar{\mathbf{D}}_m$  também é diagonal. Alguns autores mostram experimentalmente que estruturas com baixos fatores de amortecimento podem ter seu amortecimento aproximado por amortecimento proporcional sem causar erros significativos [5, 33, 49]. Essa relação de proporcionalidade é dada por:

$$\bar{\mathbf{D}} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}, \quad (2.14)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares não negativos, que podem ser estimados a partir de dados experimentais.

Para obter as coordenadas modais é feita uma transformação de coordenadas em que é introduzida um vetor modal,  $\mathbf{q}_m$ , chamado de deslocamento modal, conforme mostrado por:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{q}_m. \quad (2.15)$$

Rearranjando as Equações (2.1) e (2.15), obtém-se:

$$\Phi' \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}_m + \Phi' \bar{\mathbf{D}} \Phi \dot{\mathbf{q}}_m + \Phi' \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}_m = \Phi' \mathbf{f}. \quad (2.16)$$

Substituindo as Equações (2.11), (2.12) e (2.13), tem-se:

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{q}}_m + \bar{\mathbf{D}}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{q}_m = \Phi' \mathbf{f}. \quad (2.17)$$

Dada a Equação (2.17), após multiplicar ambos os lados por  $\mathbf{M}_m^{-1}$ , tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{M}_m^{-1} \bar{\mathbf{D}}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \mathbf{q}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi' \mathbf{f}. \quad (2.18)$$

Comparando a Equação (2.18) com um sistema de segunda ordem na forma padronizada tem-se [15]:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + 2\mathbf{Z}\Omega\dot{\mathbf{q}}_m + \Omega^2\mathbf{q}_m = \mathbf{B}_m\mathbf{f}. \quad (2.19)$$

Posteriormente, passando para modelo de estados na forma da Equação (2.5), tem-se as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  em coordenadas modais:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mq} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é considerada nula neste trabalho [15], uma vez que as saídas se restringem ao deslocamento vertical da estrutura. Sendo  $\mathbf{Z}$  a matriz que contém o fator de amortecimento dos modos,  $\mathbf{B}_m$  a matriz de entrada modal,  $\mathbf{C}_{mq}$  e  $\mathbf{C}_{mv}$ , respectivamente, são as matrizes de saída de deslocamento modal e a de saída de velocidade modal.

Após a aplicação da transformação linear, Equação (2.15), obtém-se o modelo em espaço de estado modal ( $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  e  $\mathbf{C}_m$ ), com a matriz  $\mathbf{A}_m$  na forma de blocos diagonais, possibilitando a análise de cada modo separadamente. Logo, as matrizes dinâmica  $\mathbf{A}_m$ , de entrada  $\mathbf{B}_m$  e de saída  $\mathbf{C}_m$  são [15]:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m1} & \mathbf{C}_{m2} & \dots & \mathbf{C}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  é o número de modos do sistema. As matrizes  $\mathbf{A}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$  e  $\mathbf{C}_{mi}$  representam o estado de cada modo  $i$ .

A partir da Equação (2.17) é possível desacoplar os modos de vibração e obter:

$$\mathbf{M}_{mi}\ddot{\mathbf{q}}_{mi} + \bar{\mathbf{D}}_{mi}\dot{\mathbf{q}}_{mi} + \mathbf{K}_{mi}\mathbf{q}_{mi} = \Phi'\mathbf{f}_i, \quad (2.22)$$

que representa a equação do movimento para cada um dos  $i$  modos da estrutura.

Assim, tem-se as matrizes do modelo de estados para cada modo  $i$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Os pólos da estrutura podem ser calculados em função das frequências naturais de vibração  $\omega_i$  e respectivos fatores de amortecimento  $\xi_i$  de cada modo, como mostrado por:

$$-\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}. \quad (2.24)$$

A forma modal para representar a matriz dinâmica usada nesse trabalho, escrita em modelo de espaço de estados foi [16]:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\xi_i\omega_i & \omega_i \\ \omega_i & -\xi_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i. \quad (2.25)$$

sendo que a matriz de estados apresentará a contribuição de cada modo de forma separada. A matriz  $\mathbf{A}_m$  é reescrita levando em consideração a matriz de cada modo separadamente, como mostrado em:

$$\mathbf{A}_m = \left[ \begin{array}{cc|cc|c|cc} -\xi_1\omega_1 & \omega_1 & & 0 & \dots & & 0 \\ \omega_1 & -\xi_1\omega_1 & & & & & \\ \hline & & 0 & -\xi_2\omega_2 & \omega_2 & \dots & 0 \\ & & \omega_2 & \omega_2 & -\xi_2\omega_2 & \dots & \\ \hline \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \hline & & & & & & \\ & 0 & & 0 & \dots & -\xi_n\omega_n & \omega_n \\ & & & & & \omega_n & -\xi_n\omega_n \end{array} \right], \quad (2.26)$$

podendo ser truncada de acordo com os modos de interesse.

Pode-se perceber na Equação (2.26) que o valor do amortecimento pode ser incluído na formulação de acordo com o amortecimento experimental medido ou estimado para cada um dos modos.

## 2.4 Modelagem por Elementos Finitos

A resolução de problemas por elementos finitos surgiu da necessidade de resolver sistemas descritos por equações diferenciais de forma aproximada, levando em consideração suas

respectivas condições de contorno. Assim, o Método dos Elementos Finitos consiste na divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos permitindo assim a solução aproximada do problema [25].

Para criar um modelo em elementos finitos, para o caso das vigas, estrutura utilizada neste trabalho, deve-se identificar os nós e elementos e as suas respectivas coordenadas. Os graus de liberdade também devem ser definidos. Deve-se aplicar as condições de contorno nos graus de liberdade restritos e conhecer o módulo de elasticidade  $E$ , momento de inércia  $I$ , área da seção transversal  $A$ , densidade do elemento  $\rho$  e o comprimento  $l$ . Para representar o problema de controle é necessário saber o posicionamento dos sensores e atuadores. O elemento de viga, usado neste trabalho, é composto por dois nós, sendo que cada um desses nós tem dois graus de liberdade, i.e., um deslocamento transversal e um de rotação.

A estrutura flexível do tipo viga, utilizada neste estudo, é geometricamente simples e possui as características dinâmicas de interesse para estudar o problema de controle ativo.

Para este trabalho, foi usada a interpolação Hermitiana que leva em consideração os deslocamentos e suas derivadas em cada nó, usada para encontrar as matrizes de massa:

$$\mathbf{M}^e = \rho A l \begin{bmatrix} 13/35 & (11/210)l & 9/70 & -(13/420)l \\ (11/210)l & (1/105)l^2 & (13/420)l & -(1/140)l^2 \\ 9/70 & (13/420)l & 13/35 & -(11/210)l \\ -(13/420)l^2 & -(1/140)l^2 & -(11/210)l & (1/105)l^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e de rigidez:

$$\mathbf{K}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I & 6Il & -12I & 6Il \\ 6Il & 4I^2 & -6Il & 2I^2 \\ -12I & -6Il & 12I & -6Il \\ 6Il & 2I^2 & -6Il & 4I^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

de cada elemento de viga [25].

Após conhecer as matrizes de massa e rigidez de cada elemento é possível fazer a montagem das matrizes globais através do somatório nas posições convenientes dos graus de liberdade para encontrar a matriz final da estrutura. Esta operação é conhecida como *assembly* em elementos finitos e é denotada aqui por  $\mathbb{A}$ . Encontrada a matriz global de massa:

$$\mathbf{M} = \mathbb{A}(\mathbf{M}^e) \quad (2.29)$$

e de rigidez:

$$\mathbf{K} = \mathbb{A}(\mathbf{K}^e), \quad (2.30)$$

respectivamente, as condições de contorno devem ser aplicadas, observando os graus de liberdade restritos.

## 2.5 Programa de Elementos Finitos

O modelo de vigas foi implementado em Matlab® usando o programa de elementos finitos apresentado por [25]. O programa calcula as matrizes de massa e rigidez da estrutura de uma viga. Conhecendo as matrizes de massa e rigidez foi possível determinar a matriz de amortecimento proporcional e conseqüentemente o modelo de estados apresentado pela Equação (2.5). A partir do programa de elementos finitos, o modelo da estrutura será determinado possibilitando o estudo das técnicas para posicionamento de sensores e atuadores e seleção das funções de ponderação para evitar o *spillover*.

## Capítulo 3

### Controle $\mathcal{H}_\infty$

#### 3.1 Introdução

O objetivo de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência, ou seja, reduzir o pico de amplitude do diagrama de Bode para casos SISO (Single Input/Single Output) ou o pico de maior valor singular para casos MIMO (Multiple Input/Multiple Output), ou ainda, o pico da função de resposta em frequência, aumentando assim a estabilidade robusta do sistema. O projeto deve ser capaz de manter um determinado desempenho apesar da ocorrência de interferências/distúrbios externos [14].

#### 3.2 Valores Singulares

A relação entre a saída e a entrada, em frequência, no caso SISO é dada através do diagrama de Bode. Já no caso MIMO esta relação é observada através do diagrama de valores singulares,  $\sigma_i$ , que são raízes quadradas positivas dos autovalores do produto  $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$ , em que  $\mathbf{G}^*(j\omega)$  é o complexo-conjugado transposto da matriz  $\mathbf{G}(j\omega)$ , apresentado por [50]:

$$\sigma_i(\mathbf{G}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}(j\omega)^*\mathbf{G}(j\omega))}; i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.1)$$

onde  $\lambda_i(\cdot)$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $(\cdot)$ .

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é representada pelo maior valor encontrado no gráfico dos valores singulares, que é obtido variando a frequência  $\omega$  e calculado  $\sigma$  através de (3.1).

Em análise de vibrações, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  mede a maior intensidade de amplificação da resposta em frequência, caracterizando o pico de ressonância de maior amplitude, i.e., o pico do diagrama de valor singular, conforme [50]:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{max} \mathbf{G}(j\omega). \quad (3.2)$$

Para o caso SISO, adota-se como norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  o valor de pico do diagrama de Bode, dado por:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} |\mathbf{G}(j\omega)|. \quad (3.3)$$

### 3.3 Apresentação do Problema $\mathcal{H}_{\infty}$

Seja o modelo de estados apresentado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (3.4), obtém-se a equação:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (3.5)$$

em que  $\mathbf{T}(s)$  representa a função de transferência de malha fechada, i.e., relaciona cada entrada a sua respectiva saída.

Considerando o diagrama de blocos mostrado na Figura 3.1, tem-se uma formulação em modelo de estados generalizada, que leva em consideração as entradas  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{u}$  e as saídas  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y}$ , apresentadas por [16, 17]:

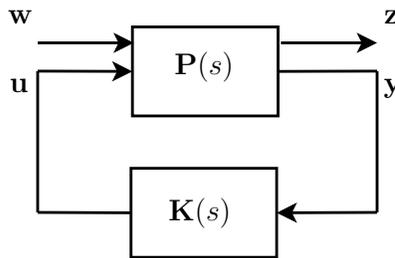


Figura 3.1: Representação usual do problema de controle.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}, \quad (3.8)$$

onde:

- $\mathbf{w}$  é o vetor de entradas exógenas (ruídos e distúrbios externos);
- $\mathbf{u}$  é o vetor de esforço controle;
- $\mathbf{z}$  é o vetor de saídas de desempenho;
- $\mathbf{y}$  é o vetor de sinal medidos enviados ao controlador;
- $\mathbf{P}(s)$  é a planta a ser controlada;
- $\mathbf{K}(s)$  é o controlador a ser projetado.

O controlador dinâmico  $\mathbf{K}(s)$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K\mathbf{y}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K\mathbf{y}. \quad (3.10)$$

A partir da Figura 3.1 e das equações em modelo de estados da planta e do controlador é possível chegar nas seguintes equações:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{u}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{u}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \quad (3.13)$$

Reescrevendo as Equações (3.11), (3.12) e (3.13) na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{P}_{zw}$  é a matriz de transferência da saída  $\mathbf{z}$  para a entrada  $\mathbf{w}$ , e assim sucessivamente para  $\mathbf{P}_{zu}$ ,  $\mathbf{P}_{yw}$  e  $\mathbf{P}_{yu}$ .

Substituindo a Equação (3.13) em (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}) &= \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) no esforço de controle,  $\mathbf{u}$ , Equação (3.13), obtém-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}. \quad (3.16)$$

Reescrevendo a Equação (3.16):

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_{uw}\mathbf{w}, \quad (3.17)$$

em que  $\mathbf{T}_{uw} = [\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]$  representa a matriz de transferência de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{w}$ .

Fazendo o mesmo procedimento da entrada de distúrbio  $\mathbf{w}$  com relação a  $\mathbf{z}$ , e substituindo a Equação (3.16) em (3.11) tem-se:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w},$$

ou ainda,

$$\mathbf{z} = [\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]\mathbf{w} = \mathbf{T}_{zw}\mathbf{w}, \quad (3.18)$$

em que  $\mathbf{T}_{zw} = [\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]$ , representa a matriz de transferência entre os distúrbios  $\mathbf{w}$  e a saída de desempenho  $\mathbf{z}$ , denominada de transformação linear fracionária inferior [55].

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\mathbf{T}_{zw}$  pode ser escrita por:

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \max \sigma(\mathbf{T}_{zw}(j\omega)) = \max \sqrt{\lambda_i(\mathbf{T}_{zw}^* \mathbf{T}_{zw})}. \quad (3.19)$$

O problema  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo consiste em projetar o controlador  $\mathbf{K}(s)$  de tal modo que  $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$  seja minimizado, representado por:

$$\min_{\mathbf{K}(s)} \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty. \quad (3.20)$$

É usual trabalhar com um problema sub-ótimo que consiste em determinar um controlador em que  $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Assim  $\gamma$  é reduzido sucessivamente até encontrar um  $\gamma_{min}$  que seja factível com o problema. No momento em que o  $\gamma$  ótimo é encontrado o controlador ótimo é determinado.

Para encontrar o valor ótimo de  $\gamma$  será empregada a técnica baseada em LMI (Linear Matrix Inequalities), i.e., desigualdade matriciais lineares, técnica descrita brevemente a se-

guir.

### 3.4 Desigualdades Matriciais Lineares

As restrições LMI (Desigualdades Matriciais Lineares) são usadas quando um problema possui termos não lineares nas restrições. Para resolver esse problema são propostas matrizes de transformação que possibilitem reescrever as restrições não lineares e transformar o problema em LMI.

A técnica que utiliza as desigualdades matriciais lineares de sistemas dinâmicos é proveniente da teoria de estabilidade de Lyapunov que determina que um sistema linear  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  é estável, isto é, todas as trajetórias convergem para zero, se e somente se existir uma matriz positivo-definida  $\mathbf{P}$  que satisfaz [6, 13]:

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

### 3.5 Definição de LMI

Uma LMI apresenta a forma apresentada por [14, 48]:

$$\mathbf{F}(x) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

onde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  é a variável e as matrizes simétricas  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  são dadas. A desigualdade  $\{\mathbf{x} | \mathbf{F}(x) > \mathbf{0}\}$  é convexa e positivo-definida, i.e.,  $\mathbf{u}'\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{u} > 0$  para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  diferente de zero.

### 3.6 Problema de Otimização com Restrições LMI

O problema de otimização convexo com restrições na forma de LMI pode ser colocado na forma mostrada por [14]:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \text{sujeito a} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\mu$  é a função objetivo que pode ser reduzida sucessivamente até encontrar um valor mínimo factível real e maior que zero e  $\mathbf{F}$  representa as restrições do problema na forma de LMI. Este problema de minimização é um problema convexo.

Para este trabalho, será utilizada a função *hinfsyn* do Matlab Control Toolbox® [13,22] para resolver o problema de controle estabelecido, com a opção LMI ativada para determinar o controlador que minimiza a saída de desempenho.

No próximo capítulo serão definidas as funções de ponderação usadas nesse trabalho.

## Capítulo 4

### Filtros de Ponderação e *Spillover*

#### 4.1 Introdução

Em um projeto de controle é possível levar em conta dois tipos de incertezas: dinâmicas e paramétricas.

As incertezas paramétricas ou estruturadas são decorrentes do fato de não se ter o conhecimento do valor exato de algum parâmetro da modelagem da estrutura a ser analisada, tais como matriz de massa, rigidez ou amortecimento. As incertezas dinâmicas ou não estruturadas são decorrentes de imperfeições na estrutura do modelo, por exemplo devido ao truncamento do modelo [33].

O truncamento do modelo para ordens reduzidas provoca um erro proveniente dos modos desconsiderados. Porém é usual diminuir a ordem do modelo para facilitar o projeto do controlador, uma vez que controladores de alta ordem podem deixar o projeto oneroso. A ordem do projeto final do controlador pela técnica  $\mathcal{H}_\infty$  está diretamente ligada a ordem da planta e dos filtros de ponderação (ou funções de ponderação) que são pesos que podem ser alocados tanto nas variáveis de entrada como nas de saídas durante a fase de projeto do controlador.

Para exemplificar essa situação, suponha que se deseja controlar os três primeiros modos de uma planta que apresenta um total de 10 modos, o que equivale a um sistema de 20<sup>o</sup> ordem. Presuma que as funções que ponderam o desempenho e a robustez sejam ambas de 2<sup>o</sup> ordem. Para essas configurações, o modelo de projeto, seria de 24<sup>o</sup> ordem, sendo 20 do modelo e 4 dos filtros de ponderação. Dessa forma o sistema terá um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  usual de 24<sup>o</sup> ordem enquanto que a dinâmica referente aos modos que se deseja controlar é de 6<sup>o</sup> ordem. Como o interesse está em controlar preferencialmente os três primeiros modos, o modelo nominal pode incluir apenas a dinâmica a ser controlada. Assim sendo, o projeto final do controlador seria de 10<sup>o</sup> ordem, equivalente a 6 da planta nominal e 4 dos filtros.

Em um problema de controle, os filtros de ponderação tem a função de ponderar as faixas de frequência de interesse como será descrito a seguir.

Filtros de ponderação são usados quando se deseja impor um certo peso para uma determinada faixa de frequência. Assim, sabendo a frequência dos sinais exógenos e as características em frequência da planta, é possível projetar um controlador com menor conservadorismo, já que os filtros de ponderação tem a função de selecionar as frequências que devem ser levadas em consideração no projeto do controlador.

Sabe-se que um sinal de referência usualmente apresenta componentes de baixa frequência e ao adicionar um filtro passa baixa ao modelo de projeto, o sinal de controle deverá ser adequado nas baixas frequências [46]. Ao serem incorporados filtros de ponderação às saídas de desempenho, estes filtros afetam o projeto do controlador no sentido de ponderar a resposta em frequência das funções de transferência de malha fechada.

A Figura 4.1, representa um esquema qualitativo do projeto de filtros de ponderação colocados na saída de desempenho  $W_z$  e na saída de controle  $W_u$  [2, 3, 50]. Neste caso, considere que o interesse está em atenuar o primeiro pico da ressonância e que o modelo nominal do sistema é composto pelo primeiro pico apenas.

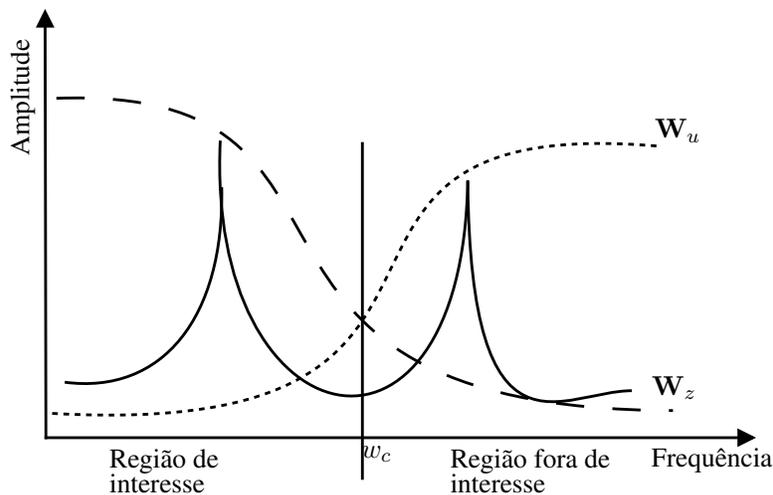


Figura 4.1: Exemplos de filtros de ponderação.

O filtro passa-alta introduz um peso  $W_u$  alto para o sinal de controle na região fora de interesse, ou seja, para frequências maiores que  $w_c$ , evitando o *spillover*, excitação dos modos não considerados no modelo de controle. O filtro passa-baixa introduz um peso  $W_z$  alto na região de interesse da planta, isto é, em baixa frequência aumentando o controle nessa

região. O filtro  $\mathbf{W}_u$  tem o papel de eliminar o sinal de controle na faixa de frequência não considerada no modelo, enquanto que o  $\mathbf{W}_z$  tem o papel de assegurar a atenuação da resposta ao distúrbio na região em que ele atua.

É importante salientar que os filtros de ponderação são usados somente para projetar o controlador, i.e., apenas no projeto de controle, neste caso, solução do problema de minimização, não sendo implementados fisicamente, pois se trata apenas de uma forma de ponderar as características do problema de otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  [8].

Usualmente são adotados filtros de ponderação de primeira ordem. Para casos em que se deseja uma queda mais acentuada na região de transição são utilizados filtros de maior ordem, dados por [54]:

- Passa-Baixa

$$\mathbf{W}_u(s) = \left( \frac{s/\sqrt[k]{\varepsilon} + \omega_c}{s + \omega_c \sqrt[k]{\varrho}} \right)^k \quad (4.1)$$

- Passa-Alta

$$\mathbf{W}_z(s) = \left( \frac{s + \omega_c/\sqrt[k]{\varepsilon}}{s \sqrt[k]{\varrho} + \omega_c} \right)^k \quad (4.2)$$

em que:

- $k$  é a ordem do filtro;
- $\varrho$  é o ganho na rejeição;
- $\varepsilon$  é o ganho na passagem;
- $\omega_c$  representa a frequência de cruzamento de ganho unitário.

A Figura 4.2 representa o modelo de uma configuração de filtro passa baixa, levando em consideração o ganho na rejeição, o ganho na passagem e a frequência de ganho unitário.

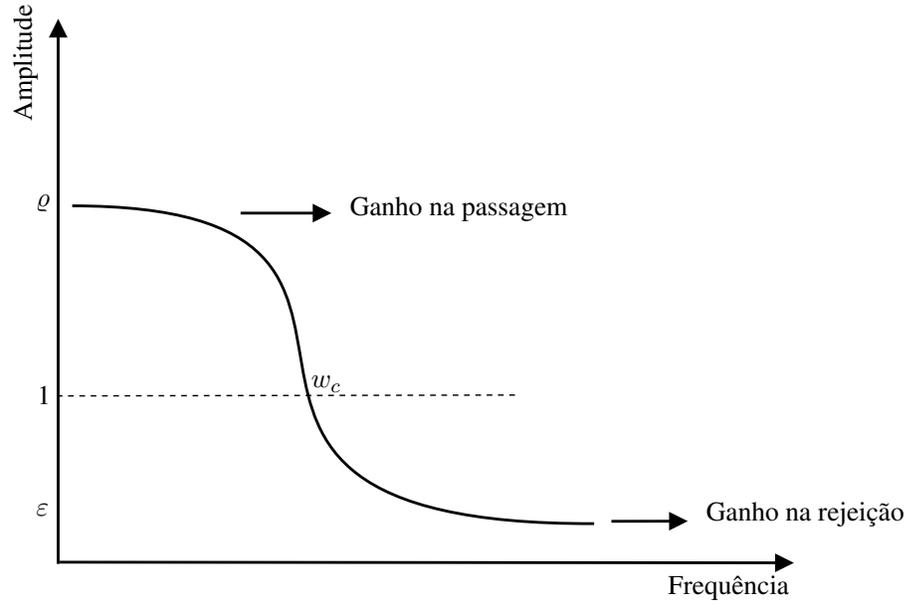


Figura 4.2: Configuração de filtro passa baixa.

Considere que o sistema nominal inclui modos até a frequência limite  $\omega_{lim}$ . A esta planta são acoplados os sensores e atuadores. Considere que a região de interesse para atenuação da vibração é de baixa frequência. O controlador projetado não deverá excitar o sistema residual através da geração do sinal de controle. Após a incorporação de filtros passa-alta ao projeto do controlador, as entradas de distúrbios não devem excitar os modos residuais não influenciando a resposta do sistema, evitando assim o *spillover* [37, 45]. Dessa forma o filtro passa-alta consegue limitar a banda de interesse do controlador, limitando a energia que o atuador entrega a planta, fator determinante para a redução da resposta dinâmica para os deslocamentos de baixa frequência.

A seguir será descrito o modelo matemático da planta aumentada, i.e., a planta generalizada que contém a planta nominal e as funções de ponderação dos filtros. Esta planta aumentada é necessária para projetar o controlador usado neste trabalho.

## 4.2 Modelagem da Planta Aumentada

A planta aumentada [54] é responsável por possibilitar um projeto de controlador capaz de ponderar a saída de desempenho e o esforço de controle para as regiões de interesse. Consiste em uma planta em que os filtros de ponderação são incluídos ao projeto e posterior-

mente é determinado o controlador. A estrutura da planta aumentada usada neste trabalho é representada pela Figura 4.3.

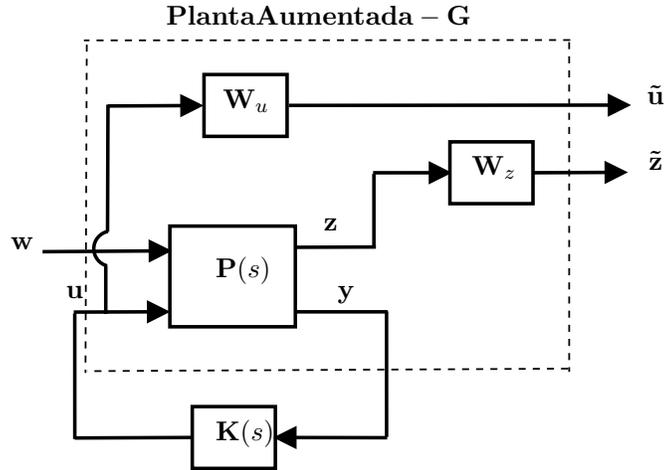


Figura 4.3: Planta Aumentada

As funções de transferência para o filtro passa-alta e passa-baixa são representadas por:

$$W_u(s) = C_u(sI - A_u)^{-1}B_u + D_u, \quad (4.3)$$

$$W_z(s) = C_z(sI - A_z)^{-1}B_z + D_z. \quad (4.4)$$

Estas funções têm como objetivo:

- $W_u$ : eliminar o esforço de controle na região não considerada no modelo,
- $W_z$ : garantir a atenuação de vibração na região de interesse.

Definido o modelo em espaço de estados da planta  $P(s)$ , apresentado no Capítulo 3, Equações (3.6), (3.7) e (3.8) serão usadas na modelagem da planta aumentada, como será visto a seguir.

O modelo de estado do filtro  $W_z$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{z}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{D}_z \mathbf{z}. \quad (4.6)$$

O modelo de estado do filtro  $W_u$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \mathbf{u}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u \mathbf{u}. \quad (4.8)$$

Substituindo a Equação (3.8) em (4.6) e (4.5), tem-se as:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{D}_z \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}. \quad (4.10)$$

Agrupando na forma matricial  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_z$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_u$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}. \quad (4.13)$$

Reagrupando as Equações (4.11), (4.12) e (4.13), obtemos a forma usual de um problema de controle em que:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_z \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}}_2 = [ \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} ], \quad \bar{\mathbf{D}}_{21} = \mathbf{D}_{21}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{22} = \mathbf{D}_{22}.$$

Logo o modelo de estados da planta aumentada, considerando a inclusão dos filtros de ponderação, em notação compacta é:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{D}}_{11} & \bar{\mathbf{D}}_{12} \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{D}}_{21} & \bar{\mathbf{D}}_{22} \end{bmatrix}.$$

Após determinar a planta generalizada do sistema é possível projetar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para diminuir a vibração da planta.

### 4.3 Planta Aumentada em termos de Função de Transferência

A planta  $\mathbf{P}(s)$  da Figura 4.3 pode ser escrita na forma de uma função de transferência conforme:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \\ \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Logo, a Equação (3.14) pode ser escrita como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu} \mathbf{u}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{u}. \quad (4.15)$$

Da Figura 4.3, é possível chegar nas relações apresentadas por:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_z \mathbf{z}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_u \mathbf{u}. \quad (4.17)$$

Substituindo em (4.15) em (4.16), chega-se a:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w} + \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu} \mathbf{u}. \quad (4.18)$$

Reescrevendo as Equações (4.14), (4.17) e (4.18) em função das entradas  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{u}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_u \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Pela Figura 4.3, a lei de controle a ser considerada é dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.14) e reorganizando os termos, tem-se:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}. \quad (4.21)$$

Substituindo, agora, (4.20) juntamente com (4.21) em (4.18), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w},$$

ou ainda,

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_z[\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]\mathbf{w}. \quad (4.22)$$

De (4.20) e (4.21) em (4.17), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}, \quad (4.23)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}, \\ \mathbf{N}_2 &= \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}. \end{aligned}$$

Logo, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (4.24)$$

A Equação (4.24) representa a matriz de transferência de malha fechada.

O sinal de controle pode ser considerado como um parâmetro de desempenho do sistema com o intuito de limitar o seu valor. Assim define-se  $\hat{\mathbf{z}}$  como as saídas de desempenho

em termos de vibração e do esforço de controle. Reescrevendo a Equação (4.24), tem-se:

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (4.25)$$

Assim, o problema de encontrar o controlador sub-ótimo da planta generalizada, dado por:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma, \quad (4.26)$$

que representa o problema a ser resolvido após a inclusão das funções de ponderação.

A seguir será abordado o fenômeno de *spillover*.

#### 4.4 *Spillover*

*Spillover* é um fenômeno proveniente da excitação de modos não incorporados ao projeto de controle, sendo que esses modos que foram desconsiderados podem provocar a instabilidade do sistema. Ao se projetar um controlador em geral leva-se em consideração apenas os modos na faixa de frequência de interesse, devido ao truncamento do modelo. O sistema modelado não apresenta todos os modos de vibração da estrutura e esses modos desconsiderados no modelo são denominados modos residuais.

Como vantagens de truncar o modelo, tem-se uma melhora significativa na convergência dos algoritmos de projeto de controladores e ganho em termos de esforço computacional.

Considere um sistema  $\mathbf{P}$ , dividido em  $\mathbf{P}_{co}$ , representando um sistema de ordem reduzida e  $\mathbf{P}_{re}$ , a planta residual, mostrada pela Figura 4.4 [29].

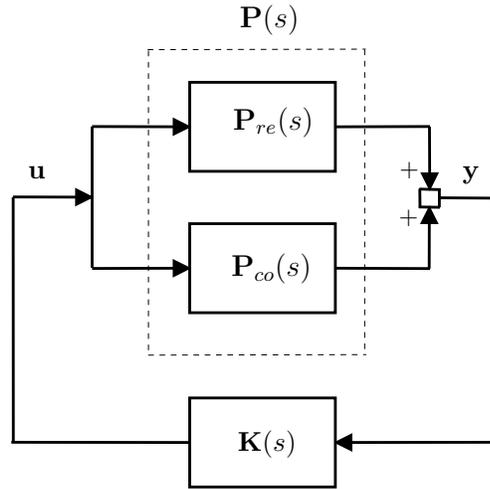


Figura 4.4: Modelo na forma de incerteza aditiva

Logo a planta, considerando os modos a serem controlados e os residuais do sistema, em modelo de estados, é dada por [34]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{re} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{co} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{re} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{re} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2co} \\ \mathbf{B}_{2re} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{co} & \mathbf{C}_{re} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{re} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.28)$$

em que o índice *re* representa os modos residuais e *co* os modos do modelo que serão controlados.

Quando a dinâmica não considerada no modelo de controle, os modos residuais, são excitados, eles provocam um efeito que prejudica o desempenho do sistema em malha fechada, podendo causar a instabilidade do mesmo. Esse fenômeno foi descrito em [3] e foi denominado de efeito de *spillover*.

Quando são usados observadores de estado para estimar as variáveis de controle, tem-se os seguintes tipos de *spillover*:

- *spillover* de controle: os modos da dinâmica residual sofrem influência do sinal de controle;
- *spillover* de observação: os modos da dinâmica residual provocam perturbações no sinal medido;

- *spillover* dinâmico: é resultado do acoplamento dos modos nominais e dos modos residuais.

Em particular, é desejável ter controladores robustos que têm a propriedade de estabilizar não apenas o sistema nominal, mas também o sistema real com a dinâmica não considerada no modelo.

Serão utilizados filtros de ponderação para atenuar o efeito da dinâmica residual no sistema de controle, sendo que o controlador é projetado com um modelo reduzido do sistema.

A seguir serão apresentados alguns métodos citados pela literatura para evitar o *spillover*.

#### 4.5 Redução do *Spillover*

Para que o sistema controlado não fique instável pela excitação dos modos residuais, caracterizando o *spillover*, algumas medidas podem ser tomadas, como por exemplo, procurar alocar sensores e atuadores de forma conveniente para ter um melhor comportamento em malha fechada. A grande dificuldade dessa solução para a maioria dos casos é garantir que o sistema se mantenha observável e controlável. O posicionamento de sensores e atuadores pode ser escolhido arbitrariamente em um projeto de controle ou através de alguma técnica para alocar sensores como por exemplo pela técnica baseada na norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta [34] ou pela técnica baseada na norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada que serão apresentadas no Capítulo 5.

A inclusão de filtros de ponderação é um método direto que visa evitar o *spillover* após fechada a malha com a planta aumentada e pode ser usado como ponto inicial para o projeto de controladores. Neste trabalho serão implementados filtros de ponderação com o objetivo de garantir a estabilidade e desempenho do sistema.

No próximo capítulo serão apresentadas duas técnicas de posicionamento de sensores e atuadores.

## Capítulo 5

### Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores

#### 5.1 Introdução

O posicionamento de sensores e atuadores consiste em definir o melhor ponto na estrutura onde eles possam ser alocados para garantir a melhor eficiência do controle, uma vez que uma escolha inadequada pode comprometer a controlabilidade e a observabilidade do sistema [9]. Descobrir o posicionamento em locais ótimos é possível reduzir o número de sensores e atuadores, conseqüentemente reduzindo custos com instrumentação, processamento de sinais e energia necessária para o controle da estrutura, além de melhorar o desempenho do controlador [40].

Serão apresentadas, neste trabalho, duas técnicas usadas para determinar o posicionamento de sensores e atuadores tendo como função objetivo a minimização pico de vibração de malha fechada do sistema. Uma das técnicas utilizada foi o posicionamento ótimo através da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta [16] e a outra foi através de um algoritmo de busca que utiliza uma metodologia conhecida como otimização discreto-contínua [12], em que a malha analisada é fechada sem o uso de filtros de ponderação. O objetivo dessas técnicas é posicionar os sensores e atuadores em pontos da estrutura para calcular as posições que mais influenciam no controle do sistema.

#### 5.2 Configuração Geral do Problema de Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores

O posicionamento ótimo de sensores e atuadores tem o objetivo de atenuar o efeito dos distúrbios e conseguir um determinado desempenho nas saídas pré-definidas. Para isto em geral são colocados atuadores nas regiões de ação dos distúrbios e sensores nas áreas que se deseja um determinado desempenho. No entanto, algumas vezes é impossível alocar

sensores/atuadores em um determinado grau de liberdade da estrutura, devido a restrições físicas ou econômicas [15]. Assim sensores e atuadores devem ser alocados nas melhores posições viáveis para alcançar o melhor desempenho [7].

O problema de controle apresentado na Figura 5.1, é composto por dois sinais de entrada e dois de saídas. As entradas são:  $w$  representa a entrada de distúrbio,  $u$  representa a entrada do atuador. As saídas são:  $z$  representa a saída de desempenho e  $y$  a saída do sensor.

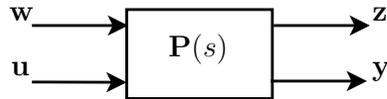


Figura 5.1: Representação do sistema e respectivas entradas e saídas

As entradas dos atuadores incluem neste caso forças e momentos. As entradas de distúrbios incluem as perturbações, ruídos e comandos conhecidos (ou não) aplicados na planta. O sinal do sensor constitui a resposta da estrutura durante os testes e a saída de desempenho inclui o sinal que caracteriza o desempenho do sistema.

Como o posicionamento de sensores e atuadores depende das características físicas da estrutura, deve-se selecionar possíveis posições candidatas tanto para os sensores, quanto para os atuadores, respeitando as limitações físicas de posicionamento do modelo [15].

### 5.2.1 Propriedades dos Sensores e Atuadores

Considerando a Figura 5.1, com as entradas  $w$  e  $u$  e saídas  $z$  e  $y$ , tem-se as seguintes funções de transferência:

- $P_{zw}$ : matriz de transferência de  $w$  para  $z$  e  $P_{zwi}$  para o  $i$ -ésimo modo;
- $P_{yw}$ : matriz de transferência de  $w$  para  $y$  e  $P_{ywi}$  para o  $i$ -ésimo modo;
- $P_{zu}$ : matriz de transferência de  $u$  para  $z$  e  $P_{zui}$  para o  $i$ -ésimo modo;
- $P_{yu}$ : matriz de transferência de  $u$  para  $y$  e  $P_{yui}$  para o  $i$ -ésimo modo.

#### Propriedade Multiplicativa

A propriedade multiplicativa da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um conjunto de sensores/atuadores e para um modo é dada pela Equação (5.1). Esta propriedade estabelece que o produto da

norma modal de cada modo do laço de desempenho (função de transferência de distúrbio para saída de desempenho) pela norma da função de transferência do laço de controle (função de transferência do sinal medido para o sinal de controle) é aproximadamente igual ao produto das normas cruzadas, ou seja, da norma entre as funções de transferência dos distúrbios para as saídas medidas e da norma das funções de transferência o desempenho e para o sinal de controle [15], ou seja,

$$\|\mathbf{P}_{zwi}\|_{\infty} \|\mathbf{P}_{yui}\|_{\infty} \cong \|\mathbf{P}_{ywi}\|_{\infty} \|\mathbf{P}_{zui}\|_{\infty}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Rearranjando a Equação (5.1), tem-se:

$$\|\mathbf{P}_{zwi}\|_{\infty} \cong \frac{\|\mathbf{P}_{zui}\|_{\infty}}{\|\mathbf{P}_{yui}\|_{\infty}} \|\mathbf{P}_{ywi}\|_{\infty}. \quad (5.2)$$

Da propriedade multiplicativa é possível concluir que melhorando a relação entre o atuador e o sensor,  $\mathbf{P}_{yui}$ , diminui-se a relação entre o distúrbio e o desempenho,  $\mathbf{P}_{zwi}$ , do  $n$ -ésimo modo [7].

Da Equação (3.18), tem-se:

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \quad (5.3)$$

A função de transferência de malha fechada relaciona a entrada  $w$  à saída  $z$  e envolve as funções de transferência dos sinais de saída, desempenho e o distúrbio. Assim, caso as matrizes  $\mathbf{P}_{yw}$  e  $\mathbf{P}_{zu}$  forem nulas, o controlador não influenciará em nada o desempenho da planta. Dessa forma, o objetivo do projeto de controladores se baseia em melhorar simultaneamente o ganho entre  $u$  e  $y$ ,  $w$  e  $y$  e  $u$  e  $z$ . Pela propriedade multiplicativa o aumento de  $\mathbf{P}_{yu}$  gera uma melhora de  $\mathbf{P}_{yw}$  e  $\mathbf{P}_{zu}$ , Equação (5.1). Logo para alocar sensores/atuadores deve-se otimizar o ganho no laço de controle [7].

### Propriedade Aditiva

O desempenho da estrutura é determinado pela resposta dinâmica proveniente da ação do distúrbio independente da localização do sensor [7]. Assim a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  do modo  $i$  de uma estrutura com um conjunto de  $r$  atuadores é definida como sendo a soma RMS de normas do modo com um único atuador, i.e., [16]:

$$\|\mathbf{P}_i\|_\infty \cong \sqrt{\sum_{j=1}^s \|\mathbf{P}_{ij}\|_\infty^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

que denota a norma do  $i$ -ésimo modo referente ao  $j$ -ésimo atuador.

Para a análise referente aos  $s$  sensores, tem-se a propriedade [16]:

$$\|\mathbf{P}_i\|_\infty \cong \sqrt{\sum_{j=1}^r \|\mathbf{P}_{ik}\|_\infty^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

que denota a norma do  $i$ -ésimo modo referente ao  $k$ -ésimo sensor.

A alocação de sensores com a posição do atuador definida previamente será utilizada neste trabalho, aplicando as técnicas de posicionamento de sensores e atuadores baseadas nas normas  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta e de malha fechada descritas a seguir.

### 5.3 Técnicas para Posicionamento de Sensores e Atuadores

#### 5.3.1 Utilizando a Menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Fechada do Sistema - $ASAT_\infty$

A técnica de posicionamento de sensores/atuadores baseada na menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada, conhecida como discreto-contínua, que neste trabalho será denotada por  $ASAT_\infty$ , foi proposta em [12]. Consiste em determinar o posicionamento de sensores e atuadores ao longo da estrutura e, para cada combinação de sensor e atuador, é calculado o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  e determinado a norma de malha fechada do sistema sem adicionar funções de ponderação ao projeto.

Nesta metodologia são utilizados dois laços de otimização: um externo, denominado discreto, correspondendo a posição do atuador, e um interno, correspondendo a posição do sensor, laço este denominado contínuo. No laço interno, após ser fixada a posição do atuador, o sensor é alocado na primeira posição candidata e posteriormente será projetado o controlador. A malha é fechada e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o par atuador/sensor alocado nas posições candidatas é calculada sem utilizar filtros de ponderação. Este laço se repete para todas as posições candidatas de sensores. Após serem calculadas todas as normas  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada para todas as posições de sensores possíveis, o atuador é alocado na segunda posição candidata, laço externo. Novamente o laço interno é executado, i.e., são alocados todos os sensores para a nova posição na qual o atuador está fixado. Os controladores são projetados e

norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada é calculada para todas as novas combinações de sensor/atuador. Esse procedimento é realizado até que todas as posições candidatas de atuadores tiverem sido analisadas.

Os laços externos e internos percorrem todo o conjunto de posições candidatas para os sensores e atuadores. Para cada combinação em que o par sensor e atuador é alocado, a planta incluindo esses filtros é calculada e para esta planta tem-se um projeto de controlador e norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada para cada caso é encontrada.

O laço externo de posicionamento de sensores/atuadores é eficiente quando se tem um número fixo e reduzido de sensores e atuadores. Porém pode não ser uma boa escolha quando se trata de estruturas com um número muito elevado de sensores e atuadores, gerando um grande número de posições candidatas. O laço contínuo não garante a obtenção de um controlador factível para todas as posições de sensores e atuadores, caracterizando situações em que o controlador obtido leva à uma malha fechada instável ou a dificuldades de ordem numérica computacional durante a fase do projeto [41].

Após o projeto do controlador é determinada a função de transferência de malha fechada e encontrada a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da entrada de distúrbio para a saída de desempenho. Para cada combinação de posições de sensor/atuador é calculada uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada.

As possíveis posições candidatas devem satisfazer o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \\ \text{sujeito a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < 0 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_k))) < 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

que define que as matrizes dinâmicas de malha fechada ( $\mathbf{A}_{cl}$ ) e do controlador ( $\mathbf{A}_k$ ) devem ser estáveis, i.e., apresentar somente pólos no semi-plano esquerdo.

Dessas posições candidatas que satisfizeram a Equação (5.6), os graus de liberdade ótimos escolhidos para alocar os sensores e atuadores serão os correspondentes à menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada que satisfaçam as restrições de estabilidade do sistema.

### 5.3.2 Utilizando a Maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Aberta do Sistema - *ASAP* $_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é uma medida do tamanho do sistema, ou seja, um sistema dinâmico é “pequeno” se a sua função de transferência possui pequenas magnitudes em todos os seus modos, conforme mostrado no Capítulo 3.

Este método de alocação de sensores e atuadores, denotado por  $ASAP_\infty$ , consiste em determinar um conjunto de todas as posições candidatas de sensores/atuadores e, posteriormente determinar um conjunto menor de posições em que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta dos modos desejados, calculada para cada situação, seja a maior possível [16]. Isso representa a maior magnitude do pico da função de transferência  $\mathbf{P}(s)$  em valores singulares, como mostrado no Capítulo 3, determinando quais são os modos mais significativos do modelo.

A aplicação dessa técnica se torna interessante onde inúmeras posições para alocar sensores e atuadores deverão ser testadas, sendo muito utilizada por exigir um menor esforço computacional. As melhores posições são definidas a partir do cálculo da malha aberta, fazendo com que a solução do problema seja encontrada de forma mais rápida ao se comparar com a técnica de malha fechada.

Definindo  $\mathbb{R}$  como as posições candidatas possíveis para os atuadores e  $\mathbb{S}$  como posições candidatas para os sensores, são escolhidos com antecedência os locais permitidos para a população de  $R$  atuadores e de  $S$  sensores. Por definição, tem-se o posicionamento do atuador  $r$  na posição  $R$  permitida e posicionamento do sensor  $s$  na posição  $S$  permitida.

Considere uma estrutura flexível representada em coordenada modal. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do  $i$ -ésimo modo é dada pela Equação (5.7) [16].

$$\|\mathbf{P}_i\|_\infty \cong \frac{\|\mathbf{B}_{mi}\|_2 \|\mathbf{C}_{mi}\|_2}{2\xi_i\omega_i} \quad (5.7)$$

O modelo modal da estrutura flexível permite analisar cada modo separadamente. Assim a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é a mais usada por possibilitar a análise dos modos de forma desacoplada. A norma do sistema completo, corresponde ao máximo valor encontrado para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de todos os modos, é apresentada pela Equação (5.8), onde  $n$  é o número de modos.

$$\|\mathbf{P}\|_\infty = \max_i \|\mathbf{P}_i\|_\infty \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

Segundo [16], a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do modo  $i$  de uma estrutura com um conjunto de  $r$  atuadores ou um conjunto  $s$  de sensores é igual a soma RMS das normas do modo para cada atuador ou sensor separadamente. Conforme visto na propriedade aditiva, as Equações (5.4) e (5.5) serão utilizadas para indicar quais devem ser as posições em que os sensores e os atuadores devem ser alocados.

Determinadas as normas de cada modo desejado, a seguir será montada uma matriz com todos os valores encontrados.

## Matrizes e Índice de Posicionamento $\mathcal{H}_\infty$

As matrizes de alocação de sensores e atuadores podem ser montadas de forma independente, ou seja, uma matriz para determinar onde o sensor deverá ser alocado e uma para determinar onde o atuador deverá ser alocado. Os procedimentos são semelhantes para ambos os casos.

O índice de posicionamento, denominado  $\sigma_{\infty ik}$ , avalia o  $k$ -ésimo atuador no  $i$ -ésimo modo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. É definido para todos os modos e todas as posições candidatas possíveis através da Equação (5.9) [15].

$$\sigma_{\infty ik} = \mathcal{W}_{ik} \frac{\|\mathbf{P}_{ik}\|_\infty}{\|\mathbf{P}\|_\infty} \quad k = 1, 2, \dots, R \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

onde  $\mathcal{W}_{ik}$  representa o peso para o  $k$ -ésimo atuador e o  $i$ -ésimo modo e, neste trabalho foi considerado como sendo unitário. Usando estes índices, é possível definir a matriz de posicionamento do atuador, Equação (5.10) [15].

$$\Sigma_\infty = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \dots & \sigma_{\infty 1k} & \dots & \sigma_{\infty 1R} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \dots & \sigma_{\infty 2k} & \dots & \sigma_{\infty 2R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \dots & \sigma_{\infty ik} & \dots & \sigma_{\infty iR} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \dots & \sigma_{\infty nk} & \dots & \sigma_{\infty nR} \end{bmatrix} \quad \Leftarrow i\text{-ésimo modo} \quad (5.10)$$

↑  
k-ésimo atuador

Assim, a  $i$ -ésima linha desta matriz representa o  $i$ -ésimo modo e a  $k$ -ésima coluna representa o  $k$ -ésimo atuador.

Da mesma forma, o índice de posicionamento, denominado  $\sigma_{\infty ik}$ , avalia o  $k$ -ésimo sensor no  $i$ -ésimo modo em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. É definido para todos os modos e todas as posições candidatas possíveis através da Equação (5.11).

$$\sigma_{\infty ik} = \mathcal{W}_{ik} \frac{\|\mathbf{P}_{ik}\|_\infty}{\|\mathbf{P}\|_\infty} \quad k = 1, 2, \dots, S \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.11)$$

onde  $\mathcal{W}_{ik}$  representa o peso para o  $k$ -ésimo sensor e o  $i$ -ésimo modo, sendo considerado como sendo unitário neste trabalho. Usando estes índices, é possível definir a matriz de

posicionamento do sensor, Equação (5.12), que é similar a matriz de posicionamento do atuador [15].

$$\sum_{\infty} = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \dots & \sigma_{\infty 1k} & \dots & \sigma_{\infty 1S} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \dots & \sigma_{\infty 2k} & \dots & \sigma_{\infty 2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \dots & \sigma_{\infty ik} & \dots & \sigma_{\infty iS} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \dots & \sigma_{\infty nk} & \dots & \sigma_{\infty nS} \end{bmatrix} \Leftarrow \text{i-ésimo modo} \quad (5.12)$$

↑  
k-ésimo sensor

Assim, a *i-ésima* linha desta matriz representa o *i-ésimo* modo e a *k-ésima* coluna representa o *k-ésimo* sensor.

A matriz de posicionamento,  $\sum_{\infty}$ , é uma ferramenta visual em que é possível identificar a importância de cada sensor/atuador em cada modo, uma vez que através do índice de posicionamento é possível identificar as maiores normas do sistema [16].

Para ilustrar, suponha uma matriz de posicionamento de sensores que contenha apenas a primeira coluna, i.e., apenas um sensor, a partir dela é possível observar a importância desse sensor para cada modo da planta. Da mesma forma, suponha uma matriz de posicionamento em que apenas o primeiro modo seja analisado, é possível analisar a importância desse modo para cada sensor alocado.

Após montada a matriz de posicionamento será apresentado o critério usado para definir os melhores locais para posicionar os sensores e atuadores.

### Índice de Atuador/Sensor

A matriz de posicionamento representa os efeitos da localização de cada sensor/atuador. Os índices de posicionamento são usados para determinar a posição ótima para alocar os sensores/atuadores.

O vetor de índice de posicionamento dos atuadores,  $\sigma_{\infty a}$ , para a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  é definido pela Equação (5.13), que representa todos os atuadores possíveis alocados nas posições candidatas e apenas um modo de interesse escolhido [15]:

$$\sigma_{\infty a} = [\sigma_{\infty a1} \ \sigma_{\infty a2} \ \dots \ \sigma_{\infty aS}]' \quad (5.13)$$

sendo que o  $k$ -ésimo índice é a posição do  $k$ -ésimo atuador para o modo em análise. No caso da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  o índice escolhido é o maior entre todos os modos, Equação (5.14):

$$\sigma_{ak} = \max_i(\sigma_{\infty ak}) \quad k = 1, 2, \dots, S \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.14)$$

Similarmente, o vetor de índice de posicionamento dos sensores,  $\sigma_{\infty s}$ , para a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  é definido pela Equação (5.15):

$$\sigma_{\infty s} = [\sigma_{\infty s1} \ \sigma_{\infty s2} \ \dots \ \sigma_{\infty sR}]' \quad (5.15)$$

em que o  $k$ -ésimo índice é a posição do  $k$ -ésimo sensor para o modo de interesse. No caso da norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  o índice escolhido é o maior entre todos os modos, Equação (5.16).

$$\sigma_{sk} = \max_i(\sigma_{\infty sk}) \quad k = 1, 2, \dots, R, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.16)$$

Os índices  $\sigma_{ak}$  ou  $\sigma_{sk}$  caracterizam a importância do  $k$ -ésimo atuador/sensor, ou seja, podem ser usados como índices de posicionamento de atuador/sensor. Logo, caso um atuador/sensor tenha um  $\sigma_{ak}$  ou  $\sigma_{sk}$  baixo, estes podem ser removidos, pois são insignificantes para o posicionamento [15].

No próximo capítulo será apresentado uma metodologia para escolher os parâmetros das funções de ponderação com o intuito de evitar que o projeto fique instável e buscar um desempenho adequado para a resposta do sistema.

## Capítulo 6

### Seleção de Filtros de Ponderação usando Algoritmos Genéticos

#### 6.1 Introdução

Conforme abordado no Capítulo 4, os filtros de ponderação tem a função de garantir que a norma do sistema tenha um valor máximo na região de interesse. Neste capítulo será apresentada uma metodologia para escolher os valores dos ganhos na passagem, na rejeição e a frequência de corte dos filtros passa-alta e passa-baixa que minimizem a função de transferência de malha fechada do sistema.

Para otimizar os filtros de ponderação, i.e., selecionar seus parâmetros, foi utilizada a técnica de otimização usando algoritmos genéticos. A população de candidatos para a solução do projeto foi definida com antecedência o que reduz as possibilidades de busca, ao se impor limites para essa população, e melhoram a convergência do problema.

Após selecionadas as melhores posições para alocar sensores/atuadores, através da técnicas apresentadas no Capítulo 5, as configurações dos filtros passa-alta e passa-baixa serão determinadas via algoritmos genéticos. O controlador será projetado, levando em consideração a planta generalizada, e será determinada a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de malha fechada  $T_{zw}$ .

#### 6.2 Algoritmos Genéticos

Computação evolucionária é o nome dado a um conjunto de algoritmos baseados na evolução de uma população com o objetivo de determinar uma solução para um problema específico. Esses algoritmos podem ser utilizados com sucesso em muitos problemas que exigem uma otimização da função objetivo. A população de possíveis soluções evolui de uma geração para a seguinte até chegar em uma solução satisfatória para o problema. Existem três tipos de técnicas de computação evolutiva: Algoritmos Genéticos (GA), Programação

Genética (GP) e Algoritmos Evolucionários (EA), que diferem na maneira como uma nova população é gerada para a próxima interação e na forma como os membros são gerados dentro do algoritmo [23]. No presente trabalho serão abordados os Algoritmos Genéticos .

Algoritmos genéticos foram propostos por John H. Holland [19] na década de 1970 como um conceito baseado em um algoritmo do tipo Darwiniano, onde os indivíduos mais fortes na população tem uma maior chance de criar uma prole. É um método utilizado para encontrar o valor ótimo de um problema de otimização com e sem restrições baseado na seleção natural, ou seja, um método evolutivo proposto por Charles Darwin.

O GA é implementado como uma busca computadorizada para um problema de otimização que utiliza princípios de genética e seleção natural. Basicamente, a abordagem do GA é considerar as possíveis soluções para o problema apresentado, como uma sequência de zeros e uns. Várias partes dessas sequências de bits representam os parâmetros do problema de otimização. De posse de uma população inicial candidata, essa população vai sofrendo modificações ao longo do tempo, ou seja, vai evoluindo, a cada interação, até se chegar à sobrevivência do mais apto, sujeito à variações controladas [32].

GA consideram muitos pontos no espaço de busca ao mesmo tempo e foram definidos para proporcionar uma rápida convergência para a solução ideal do problema. Em outras palavras, eles geralmente apresentam uma redução da chance de convergir para mínimos locais, devido a grande variedade de soluções que são testadas. São utilizados, geralmente, em problemas de otimização grandes [23].

Algoritmo genético é um procedimento iterativo que consiste em uma população de tamanho constante de indivíduos, cada um representado por uma cadeia linear finita de símbolos, conhecido como genoma, que codifica uma solução possível em um dado espaço do problema. Este espaço, conhecido como espaço de busca, compreende todas as soluções possíveis para o problema de otimização [23].

Os algoritmos genéticos, na forma padrão, são implementados a partir de uma população inicial de indivíduos gerada aleatoriamente.

Em cada etapa evolutiva, também conhecida como geração, os indivíduos da população atual são decodificados e avaliados de acordo com uma função de aptidão definida para um dado problema.

As populações são manipuladas pelo GA usando operadores genéticos, para finalmente chegar a uma solução de qualidade para o problema dado, neste caso a minimização da função de transferência de malha fechada.

Os algoritmos genéticos podem ser aplicados a uma grande variedade de problemas de

otimização. Problemas estes que podem não ser adequados para um método de otimização clássico baseado em gradiente, incluindo problemas em que a função objetivo é descontínua, não diferenciável, estocástica ou não-linear [32].

Um algoritmo genético básico é composto por três operadores genéticos [32]:

- seleção: seleciona os indivíduos pais que são responsáveis por formar a nova geração de indivíduos filhos;
- *crossover*: combina dois indivíduos pais para formar filhos para a próxima geração, existe troca de material genético;
- mutação: aplica mudanças randômicas aos indivíduos pais para gerarem os filhos a fim de evitar convergência prematura.

A partir de uma população inicial dada, representando possíveis soluções, o GA usa esses operadores para calcular sucessivas gerações. A seleção é baseada na sobrevivência do mais apto, mas a idéia chave é selecionar os melhores indivíduos da população.

No cruzamento em um único ponto, uma posição é selecionada aleatoriamente e os dois vetores de indivíduos pais trocam seu material genético, como ilustrado abaixo:

$$\begin{array}{l} \text{Pai } A = a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ | \ a_5 \ a_6 \\ \text{Pai } B = b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ | \ b_5 \ b_6 \end{array}$$

A troca de material genético entre os dois pais de ambos os lados do ponto de cruzamento selecionado, representado por “|”, produz a seguinte descendência:

$$\begin{array}{l} \text{Filho } A' = a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ | \ b_5 \ b_6 \\ \text{Filho } B' = b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ | \ a_5 \ a_6 \end{array}$$

Os dois indivíduos filhos resultantes de cada operação de *crossover* vão agora ser submetidos a um operador de mutação na etapa final para a formação da nova geração.

O operador de mutação altera um ou mais valores de bit em locais selecionados aleatoriamente da população. A mutação ocorre com uma certa probabilidade que, de acordo com o seu equivalente biológico, ocorre com uma probabilidade muito baixa. O operador de mutação aumenta a capacidade do GA para encontrar uma solução próxima da solução ótima para um dado problema através da manutenção de um nível suficiente de variedade genética na população, que é necessário para se certificar de que o espaço de solução inteiro é usado na

busca pela melhor solução. O operador de mutação serve como um cofre que ajuda a prevenir a perda de material genético [23].

As principais diferenças entre um algoritmo clássico e os algoritmos genéticos são mostrados na Tabela 6.1 [32].

Tabela 6.1: Comparação entre um algoritmo clássico e o genético

Algoritmo Clássico	Algoritmo Genético
Gera um único ponto a cada iteração. A sequência de pontos obtidas com as iterações se aproxima da população ótima.	Gera uma população de pontos a cada iteração. O melhor ponto encontrado é a solução ótima.
Seleciona o próximo ponto da sequência por uma computação determinística.	Seleciona a próxima geração através de um número randômico de gerações.

Inúmeros problemas do tipo de otimização, tais como projeto de controladores, posicionamento de sensores/atuadores, projetos de automação, incluindo programação de projetos de controladores PID (proporcional-integral-derivativo), malhas de controle, projetos de controladores usando lógica fuzzy e redes neurais [23] utilizam algoritmos genéticos para encontrar uma solução ótima para os problemas apresentados.

Neste trabalho será usado o algoritmo genético para determinar quais são as funções de ponderação que deverão ser acopladas ao projeto do controlador, selecionando os valores dos parâmetros do filtro que procuram contornar o efeito de *spillover*, atenuando a vibração da viga.

### 6.3 Parâmetros de Otimização dos Filtros de Ponderação

Os parâmetros do filtro de ponderação que serão as variáveis do problema de otimização são:

- ganho na rejeição;
- ganho na passagem;
- frequência de corte.

Essas variáveis são usadas tanto para os filtros passa-alta quanto para os filtros passa-baixa. O ganho na rejeição varia de um número pequeno, próximo a zero, até 1, que corresponde, em dB, a uma faixa de variação de zero a um valor mínimo negativo. Já o ganho na

passagem varia de 1 até um número máximo definido, ou ainda, em dB, de zero a um valor máximo positivo definido.

A frequência de corte deverá variar de zero a um número positivo máximo pré-definido. Esses serão os parâmetros de otimização e irão compor a população inicial do problema de otimização dos filtros de ponderação.

Outro parâmetro que será variado é a ordem dos filtros de ponderação, em que serão usados filtros de primeira, segunda e terceira ordens. Para os filtros passa-alta e passa-baixa serão usados algoritmos genéticos para identificar quais são os melhores parâmetros que apresentaram menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada que devem ser selecionados.

#### 6.4 Posicionamento de Sensores e Atuadores e Seleção de Filtros de Ponderação

A técnica de posicionamento de sensores/atuadores acoplada ao projeto de filtros de ponderação foi realizada levando em consideração as duas técnicas apresentadas no Capítulo 5: as técnicas da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada e norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta. Após terem sido determinados os melhores locais para se alocar os sensores/atuadores, a malha é fechada e é realizada a rotina de seleção dos filtros de ponderação via algoritmos genéticos.

O objetivo desse projeto é avaliar o quão significativo é o uso de algoritmos genéticos para otimizar as variáveis dos filtros passa-alta e passa-baixa para reduzir a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da planta controlada, reduzindo sua amplitude de vibração e evitando o *spillover*.

Para a rotina de escolha dos filtros de ponderação foram impostas as condições apresentadas pela Equação (6.1), que garante que ao serem variados os parâmetro dos ganhos na rejeição e passagem, e frequência de corte, obtenha-se a menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada do sistema obedecendo as restrições de estabilidade impostas, i.e., que a matriz dinâmica de malha fechada ( $\mathbf{A}_{cl}$ ) e do controlador ( $\mathbf{A}_k$ ) apresentem somente pólos no semi-plano esquerdo. Os parâmetros  $\eta_1$  and  $\eta_2$  são definidos com o intuito de garantir uma rápida resposta do sistema controlado, fazendo com que os pólos de malha fechada das matrizes dinâmicas fiquem alocados mais à esquerda no plano complexo, diminuindo o tempo de estabilização.

$$\begin{aligned} \min_{g, \varepsilon, \omega_c} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \\ \text{s.a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < \eta_1 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_k))) < \eta_2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

#### 6.4.1 Posicionamento de Sensores/Atuadores usando a menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Malha Fechada - $ASAT_\infty$

A técnica de busca denominada  $ASAT_\infty$ , apresentada no Capítulo 5, varia as posições de sensores e atuadores e calcula a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada com controlador sem filtros de ponderação para cada combinação obtida. As posições escolhidas para alocar os sensores e atuadores são definidas a partir da menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada que satisfaça as condições de estabilidade impostas ao sistema, Equação (5.6).

A sequência a seguir apresenta as principais etapas desta técnica:

1. Dados de entrada:
  - modelo da planta, neste caso, um modelo de elementos finitos;
  - posição da medida de desempenho;
  - posição da entrada de distúrbio;
  - posições candidatas para o sensor e atuador associados aos graus de liberdade do modelo;
  - número de modos da planta real;
  - número de modos da planta nominal.
2. Variar as posições possíveis para alocar o sensor e o atuador;
3. Montar a planta em modelo de estados;
4. Projetar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  e encontrar a menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de malha fechada  $T_{wz}$  para cada combinação de sensor/atuador que seja estável;
5. Determinar as posições ótimas para alocar o sensor e o atuador com base no controlador projetado que levou à menor norma;

Aplicada essa rotina, as posições do sensor e do atuador são determinadas.

#### 6.4.2 Posicionamento de Sensores/Atuadores usando a maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Malha Aberta - $ASAP_\infty$

A técnica de posicionamento pelo método  $ASAP_\infty$ , apresentada no Capítulo 5, varia as posições de sensores e atuadores e calcula a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta para cada combinação

obtida. As posições escolhidas para alocar os sensores e atuadores são definidas a partir da maior norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

A sequência a seguir apresenta as principais etapas desta técnica para alocação de sensores e atuadores:

1. Dados de entrada:
  - modelo da planta, neste caso um modelo de elementos finitos;
  - posição da medida de desempenho;
  - posição da entrada de distúrbio;
  - posições candidatas para o sensor e atuador associados aos graus de liberdade do modelo;
  - número de modos da planta real;
  - número de modos da planta nominal.
2. Variar as posições possíveis para alocar o sensor e o atuador;
3. Montar a planta em modelo de estados;
4. Calcular a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta para cada combinação de sensor/atuador;
5. Determinar as posições ótimas para alocar o sensor e o atuador com base na maior norma  $\mathcal{H}_\infty$ ;

Aplicada essa rotina, as posições do sensor e do atuador são determinadas.

### 6.4.3 Projeto do Controlador após Alocar Sensores e Atuadores

Após terem sido alocados os sensores e atuadores em posições ótimas, será calculado o controlador usando filtros de ponderação escolhidos usando algoritmos genéticos a partir de parâmetros iniciais para os ganhos na rejeição e passagem e frequência de corte, com o objetivo de atenuar a vibração da viga e evitar o *spillover*.

Abaixo será descrito o algoritmo usado para selecionar os melhores filtros passa-alta  $W_u$  e passa-baixa  $W_z$  a partir de posições ótimas para alocar sensores/atuadores.

1. Considerar as posições ótimas dos sensores e atuadores usando uma das técnicas descritas anteriormente ( $ASAT_\infty$  ou  $ASAP_\infty$ );

2. Calcular a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada a partir do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  projetado com os parâmetros iniciais dos filtros de ponderação para cada ordem (um, dois ou três) de filtros;
3. Realizar a rotina de otimização via algoritmos genéticos, encontrando um novo controlador a partir dos parâmetros dos novos filtros de ponderação gerados e calculando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema para cada ordem de filtros.
4. Retornar os parâmetros dos filtros de ponderação que levaram à menor norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada do sistema e que satisfazem as restrições de estabilidade do problema.
5. Análise dos resultados.

O esquema da Figura 6.1 ilustra a abordagem usada neste trabalho.

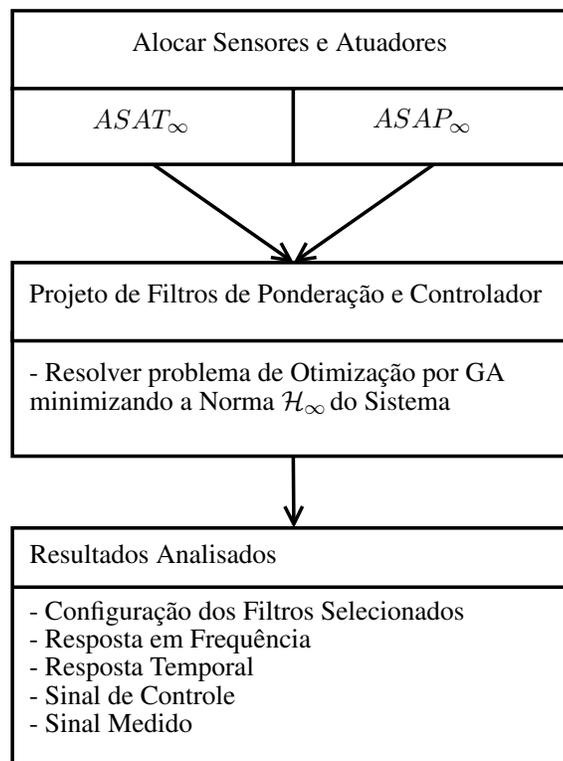


Figura 6.1: Esquema geral do problema abordado

No próximo capítulo são apresentados exemplos em que essas técnicas são aplicadas e os resultados são analisados.

## Capítulo 7

### Resultados

Neste capítulo serão apresentados exemplos para o controle ativo em uma viga envolvendo posicionamento ótimo de sensores e atuadores pelas técnicas chamadas neste trabalho de  $ASAT_{\infty}$  e  $ASAP_{\infty}$ . Posteriormente, é realizado o projeto de controladores via desigualdades matriciais lineares a partir dos parâmetros das funções de ponderação selecionadas utilizando algoritmo genético para cada um dos resultados dos métodos de posicionamento de sensores/atuadores encontrados. Esse conjunto de técnicas tem o objetivo de projetar um controlador que minimize a vibração da viga devido ao distúrbio de entrada.

O controle de vibrações da viga foi realizado com um atuador e um sensor visando o controle na faixa de frequência correspondente aos três primeiros modos de vibrar.

Para o projeto de controle, foi usada a função *hinfsyn* do Matlab<sup>®</sup>, utilizando valores *default* para seus parâmetros de entrada. Como o controlador deve ser de baixa ordem, por conveniência computacional e do *hardware* de instrumentação, o modelo de projeto (planta nominal) corresponde a um truncamento da planta real. O controlador encontrado com esse modelo de número reduzido de modos deve ser capaz de controlar todos os modos da planta real. Assim os modos da dinâmica residual são tratados como incertezas não estruturadas ou incertezas dinâmicas. Esses modos residuais podem provocar o *spillover*, e então filtros de ponderação são acoplados à planta nominal durante o projeto do controlador a fim de evitar este efeito.

#### 7.1 Modelo da viga engastada-livre

A estrutura flexível a ser controlada consiste de uma viga de alumínio, Figura 7.1, na condição engastada-livre.

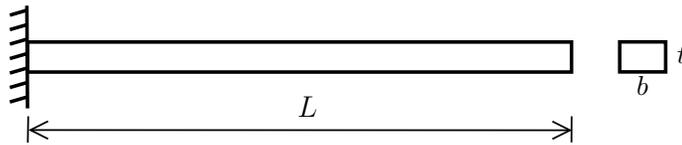


Figura 7.1: Problema proposto

Os parâmetros da viga utilizados foram:

- $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$  é o módulo de elasticidade;
- $\rho_{Al} = 2710 \text{ kg/m}^3$  é a densidade do alumínio;
- $L = 1,05 \text{ m}$  é o comprimento da viga;
- $b = 0,032 \text{ m}$  é a base da secção transversal;
- $t = 0,003 \text{ m}$  é a espessura da secção transversal.

A viga foi discretizada em 23 elementos finitos, sendo que cada elemento apresenta dois nós e cada nó apresenta dois graus de liberdade: um vertical e um rotacional. Isso totaliza 44 graus de liberdade para o modelo de controle, já considerando como condição de contorno o engaste na extremidade esquerda. A numeração dos nós e graus de liberdade do sistema é representada na Figura 7.2.

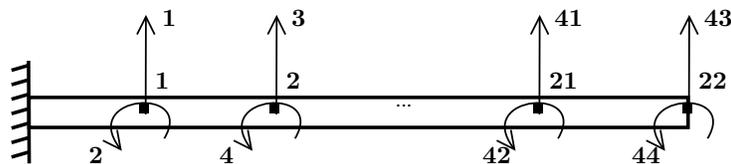


Figura 7.2: Viga com as condições de contorno aplicadas e numeração dos nós e graus de liberdade

Utilizando esses dados e a modelagem de elementos finitos, a partir da metodologia apresentada no Capítulo 2, chega-se as matrizes de massa e de rigidez do sistema, matrizes quadradas de tamanho  $44 \times 44$ .

A matriz de amortecimento proporcional, Equação (2.14), foi calculada para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  iguais a  $5 \times 10^{-7}$  e  $5 \times 10^{-5}$ , respectivamente. Esses valores foram escolhidos para ter um amortecimento da estrutura baixo (amplitudes grandes de vibração nos picos de

interesse da resposta em frequência). Assim neste trabalho, o amortecimento proporcional é dado por:

$$\bar{\mathbf{D}} = 5 \times 10^{-7} \mathbf{K} + 5 \times 10^{-5} \mathbf{M} \quad (7.1)$$

A partir desses valores, pode-se calcular as frequências naturais da viga. Comparando estas com as frequências naturais analíticas da viga simplesmente engastada [21], tem-se a Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Comparação entre as 4 primeiras frequências naturais [rad/s].

Modo	Analítico	Elementos Finitos
1 <sup>o</sup>	13,96	13,96
2 <sup>o</sup>	87,49	87,49
3 <sup>o</sup>	244,99	244,99
4 <sup>o</sup>	480,09	480,11

Os amortecimentos de cada modo, considerando a Equação (7.1), são apresentados na Tabela 7.2. Estes valores foram obtidos com o uso do comando *damp* do Matlab®.

Tabela 7.2: Amortecimento para os 4 primeiros modos.

Modo	Amortecimento
1 <sup>o</sup>	0,0005
2 <sup>o</sup>	0,0022
3 <sup>o</sup>	0,0061
4 <sup>o</sup>	0,0120

A entrada de distúrbio  $w$  foi posicionada como sendo um momento aplicado no grau de liberdade 6, a 0,15 m da extremidade esquerda da viga. O sinal de desempenho  $z$  foi definido como a amplitude de vibração do deslocamento do grau de liberdade 43, a 1,05 m, i.e., na extremidade da viga considerada, Figura 7.3.

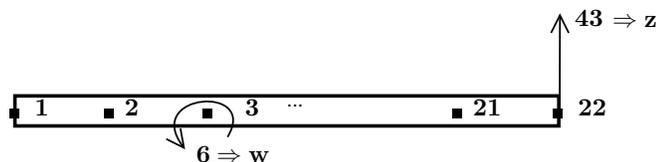


Figura 7.3: Posicionamento do sinal de distúrbio  $w$  e da medida de desempenho  $z$

O distúrbio  $w$  foi gerado utilizando a função *chirp* do Matlab® que percorre um intervalo de frequência de 0 a  $350 \text{ rad/s}$ , com frequência de amostragem de  $100 \text{ kHz}$ , realizando uma varredura senoidal linear, com uma amplitude de  $0,01 \text{ Nm}$  de pico a pico até 50 segundos.

### 7.1.1 Abordagem de Solução

Após determinados os locais onde o distúrbio será aplicado e onde o desempenho será avaliado, as demais variáveis de entrada e saída do modelo de controle serão definidas.

As posições da entrada do sinal de controle  $u$ , representada pelo posicionamento do atuador, e do sinal medido  $y$ , associado ao sensor, foram verificadas para todas as combinações dos 44 graus de liberdade do modelo da viga, como apresentado no Capítulo 5. A Figura 7.4 mostra um exemplo de uma configuração com o controlador considerando um caso de posicionamento do sensor e do atuador na viga. Para o sinal medido pelo sensor  $y$  serão considerados apenas os deslocamentos verticais.

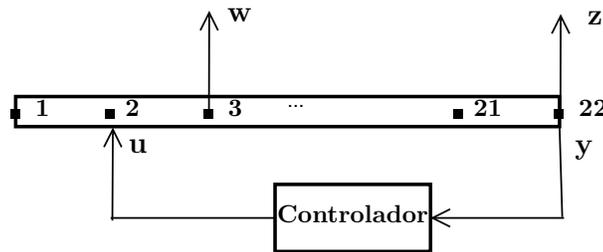


Figura 7.4: Modelo de controle da viga

Quando o sinal medido é proveniente de um local diferente daquele onde o sinal de controle está atuando, o problema é definido como um problema de controle colocado. Para os demais casos, tem-se um problema de controle não colocado.

A partir das matrizes de massa, rigidez e amortecimento, das posições das entradas exógenas de controle, das saídas medida e de desempenho, é possível determinar o modelo da planta. Após obtida a planta, usa-se o comando *canon* do Matlab®, com a opção modal para gerar a forma de modelo modal apresentada no Capítulo 2.

Para o caso específico tomado como exemplo na Figura 7.4, em que o sinal de controle foi definido como sendo um momento aplicado no grau de liberdade 3, i.e., a  $0,10 \text{ m}$  da extremidade esquerda da viga, e o sinal de desempenho definido como sendo a posição vertical do grau de liberdade 43 (Figura 7.3), é determinada a planta em modelo *modal*. Será chamada de

planta real  $P_r$  a planta definida pelo truncamento da planta  $P$  (considerados todos os modos de vibrar) do modelo de elementos finitos para 10 modos de interesse. Esse truncamento foi realizado utilizando a função *modreal* do Matlab®. O diagrama de Bode da planta real ( $P_r$ ) e da planta original ( $P$ ) do modelo de elementos finitos são mostrados na Figura 7.5.

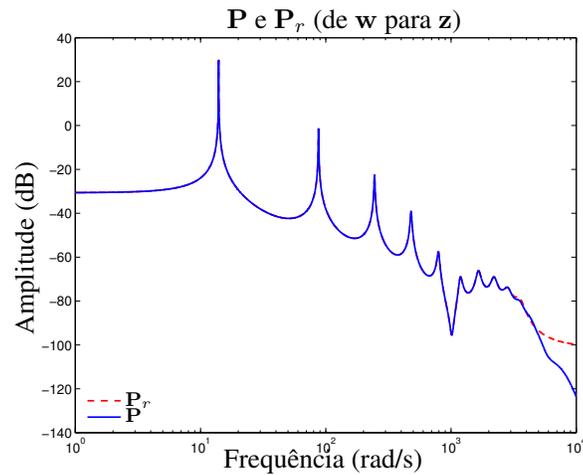


Figura 7.5: Planta real  $P_r$  e planta original  $P$  do modelo de elementos finitos

A planta real foi então normalizada obtendo-se  $P_s$ . A normalização consiste em dividir a função de transferência da planta pelo maior pico do sistema obtendo um ganho máximo de 1 dB, Figura 7.6. Essa normalização escala o sistema facilitando o projeto computacional do controlador e não afeta o resultado do projeto do controlador. Do ponto de vista experimental, essa operação consiste no ajuste dos ganhos da instrumentação envolvida.

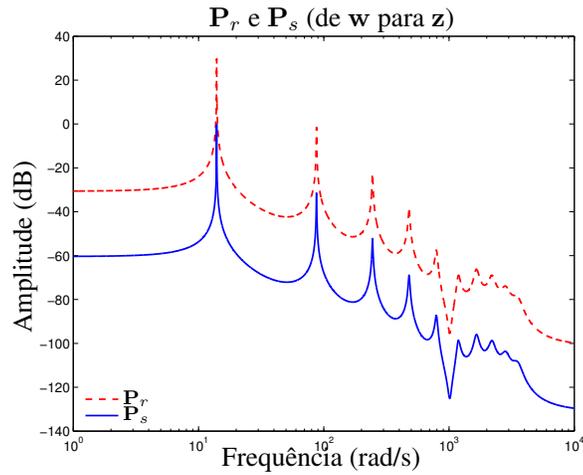


Figura 7.6: Planta real e planta normalizada

A planta nominal, Figura 7.7, foi definida a partir da redução do modelo da planta real normalizada para apenas 3 modos, permitindo o projeto de um controlador de menor ordem. O controlador projetado para a planta nominal  $P_n$ , deverá ser capaz de controlar a planta real.

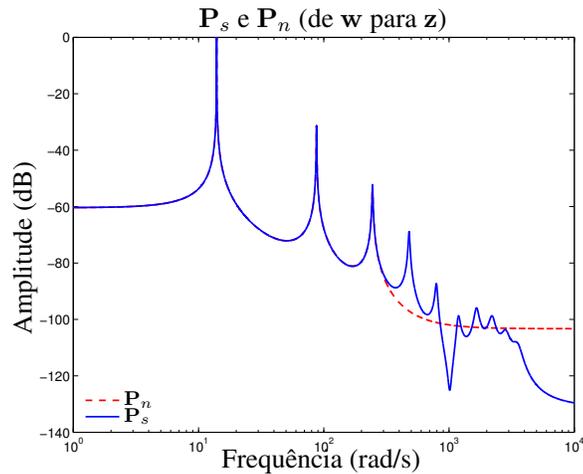


Figura 7.7: Planta real normalizada  $P_s$  e planta nominal  $P_n$

### 7.1.2 Controlador

Para o projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , apresentado no Capítulo 3, foi usada a função *hinfsyn* do Matlab®. O número de saídas medidas e o número de entradas de controle da planta foram definidas pelas quantidade de sensores e atuadores utilizados, i.e., um de cada.

Para a função *hinf* foi selecionada a opção LMI e o critério de convergência foi de  $10^{-12}$  para a variação da função objetivo.

O objetivo do controlador é minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de malha fechada do distúrbio para o desempenho,  $\mathbf{T}_{zw}$ . Enfatiza-se que o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é projetado usando como base o modelo truncado com 3 modos, i.e., usando a planta nominal, e o seu desempenho é verificado para a planta real.

## 7.2 Posicionamento de Sensor e Atuador

### 7.2.1 Baseado na Menor Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Fechada ( $ASAT_\infty$ )

O posicionamento ótimo de sensores e atuadores utilizando o método  $ASAT_\infty$  é realizado a partir de combinações entre todas as posições candidatas de sensores e todas as posições candidatas de atuadores, totalizando para este exemplo 1936 combinações. Para cada par sensor/atuador a malha foi fechada e foi projetado o controlador sem utilizar filtros de ponderação. Para garantir que a planta de malha fechada seja estável, foram impostas as condições mostradas pela Equação (5.6).

Após verificadas todas as combinações de posições, o número de plantas estáveis em malha fechada foi de 169. Dessas plantas, o menor valor para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada foi encontrado quando o sensor foi alocado no 10º grau de liberdade e o atuador no 17º grau de liberdade, caracterizando o caso ótimo de posicionamento de sensores/atuadores.

### 7.2.2 Baseado na Maior Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Malha Aberta ( $ASAP_\infty$ )

Neste caso é apresentada a técnica de posicionamento ótimo de sensores/atuadores pela técnica  $ASAP_\infty$ . Esta técnica consiste em realizar todas as combinações de 44 posições possíveis candidatas para alocar os sensores e 44 posições possíveis para alocar os atuadores, calculando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta para cada uma dessas 1936 combinações, conforme descrito no Capítulo 5. Posteriormente, é montada a matriz com os índices de posicionamento e montada a matriz de posicionamento para o sensor e para o atuador.

A Figura 7.8 mostra o índice de posicionamento do sensor e do atuador para o primeiro modo de vibrar para cada combinação de posições possíveis de sensor/atuador. Os índices foram normalizados para que o maior valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta seja a unidade.

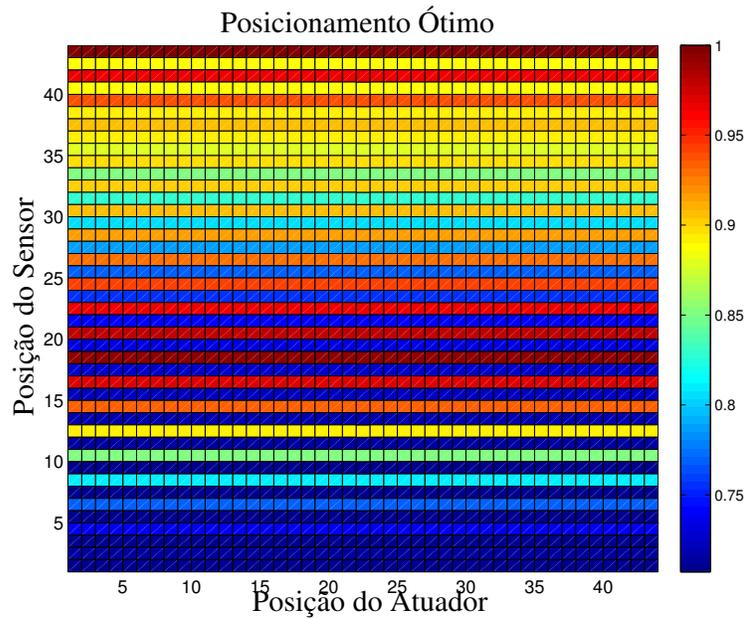


Figura 7.8: Índice de Posicionamento Ótimo

Pela Figura 7.8, pode-se observar que o sensor deve estar alocado, preferencialmente, no 43º grau de liberdade (maior valor correspondente aos graus de liberdade de deslocamentos verticais). O maior valor para o atuador corresponde a primeira posição. A variação encontrada entre os valores foi pequena de forma que não pode ser visualizada com a escala de cores usada na figura.

A maior norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta encontrada após aplicar o método  $ASAP_\infty$  foi de 0,0012.

### 7.3 Escolha dos Filtros de Ponderação usando Algoritmos Genéticos

Os filtros de ponderação serão adicionados à planta nominal para montar a planta generalizada do sistema e então projetar o controlador.

Os filtros passa-alta  $W_u$  e passa-baixa  $W_z$  são usados com o objetivo de tornar o projeto do controlador mais adequado mantendo a planta de malha fechada estável, procurando assegurar que os modos de vibração residuais não sejam excitados. Como os filtros, ao serem adicionados ao projeto aumentam a ordem do controlador, optou-se por buscar filtros de primeira, segunda e terceira ordens.

A busca dos filtros otimizados é feita utilizando algoritmos genéticos como apresentado no Capítulo 6. Os filtros de ponderação são considerados para o projeto do controlador visando minimizar os picos de vibração da viga após o posicionamento ótimo de sensores/atuadores determinados pelos métodos  $ASAT_{\infty}$  e  $ASAP_{\infty}$ .

### 7.3.1 Parâmetros iniciais das Funções de Ponderação

Para os filtros passa-alta e passa-baixa, apresentados no Capítulo 4 a partir das Equações (4.2) e (4.1), o valor do ganho de rejeição inicial foi de  $0 \text{ dB}$ , o ganho na passagem foi de  $1 \text{ dB}$ , e o valor inicial para a frequência de corte inicial foi de  $245 \text{ Hz}$ . A faixa de frequência de interesse corresponde aos três primeiros modos de vibrar da viga. Os filtros usados podem ser de primeira, segunda ou terceira ordens. Dessa forma, tem-se os seguintes filtros iniciais, como ponto de partida, para o problema de otimização:

- para os filtros de primeira ordem:

$$\mathbf{W}_u(s) = \frac{s + 245}{0,8913s + 245}$$

e

$$\mathbf{W}_z(s) = \frac{s + 245}{s + 218,4}$$

- para os filtros de segunda ordem:

$$\mathbf{W}_u(s) = \frac{s^2 + 490s + 6 \times 10^4}{0,8913s^2 + 462,6s + 6 \times 10^4}$$

e

$$\mathbf{W}_z(s) = \frac{s^2 + 490s + 6 \times 10^4}{s^2 + 462,6s + 5,35 \times 10^4}$$

- para os filtros de terceira ordem:

$$\mathbf{W}_u(s) = \frac{s^3 + 735s^2 + 1.801e005s + 1.471 \times 10^7}{0.8913s^3 + 680.7s^2 + 1.733 \times 10^5s + 1.471 \times 10^7}$$

e

$$\mathbf{W}_z(s) = \frac{s^3 + 735s^2 + 1.801 \times 10^5s + 1.471 \times 10^7}{s^3 + 707.3s^2 + 1.668 \times 10^5s + 1.311 \times 10^7}$$

Estes filtros foram definidos visando garantir que o filtro  $\mathbf{W}_u$  seja um filtro passa-alta com o objetivo de eliminar o sinal de controle fora da faixa de frequência de interesse e

$W_z$  seja um filtro passa-baixa com o objetivo de atenuar a resposta ao distúrbio na faixa de frequência para o projeto de controle.

### 7.3.2 Variáveis de Otimização dos Filtros de Ponderação

A escolha dos parâmetros dos filtros de ponderação, utilizando algoritmos genéticos, é realizada após determinar o posicionamento ótimo para alocar sensores/atuadores, conforme apresentado no Capítulo 6.

Primeiramente é fixado uma faixa de valores possíveis para os parâmetros dos filtros de ponderação. Esta faixa de valores determina a região de busca de soluções para o algoritmo genético. As faixas de valores possíveis, de forma a ter uma busca ampla, usadas para os parâmetros da população foram:

- o ganho de rejeição  $\rho$  varia numa faixa de  $-300 \text{ dB}$  a  $0 \text{ dB}$ , representando que o ganho de rejeição varia de um número bem próximo de zero ( $10^{-15}$ ) até 1;
- o ganho de passagem  $\varepsilon$  varia numa faixa de  $0 \text{ dB}$  a  $300 \text{ dB}$ , representando que o ganho de passagem varia de 1 até  $10^{15}$ ;
- a frequência de corte  $\omega_c$ , ou seja, a frequência de cruzamento de ganho unitário ou  $0 \text{ dB}$ , varia numa faixa de frequência que vai de 0 a  $10^4 \text{ Hz}$ .

A função *ga* do Matlab® foi utilizada para otimizar os parâmetros do filtro de ponderação com os valores iniciais de ganho na rejeição e na passagem e frequência de cruzamento de corte mostradas na Seção 7.3.1. Foi definido o valor de 0,9 para o parâmetro de *crossover* do algoritmo genético. O tamanho da população foi de 200. Os parâmetros de convergência utilizados foram: limite de gerações de 10 e a tolerância da variação da função objetivo de  $10^{-5}$ .

Foram impostas restrições no modelo com o objetivo de garantir que a planta controlada e o projeto do controlador sejam estáveis, definindo uma tolerância de  $\eta_1=\eta_2=10^{-4}$  para que os polos da matriz dinâmica da malha fechada e do controlador estejam no semi-plano esquerdo, conforme:

$$\begin{aligned} \min_{\rho, \varepsilon, \omega_c} \quad & \|T_{zw}\|_{\infty} \\ \text{s.a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < \eta_1 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_k))) < \eta_2 \end{aligned}$$

Para garantir a reprodutibilidade dos resultados obtidos pelo algoritmo genético foi usada a função *RandStream*. Essa função assegura que os filtros de ponderação selecionados sejam sempre os mesmos, determinando, assim, o mesmo resultado para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada.

### **7.3.3 Projeto de Controlador e Filtros de Ponderação Otimizados para Posições de Sensores/Atuadores obtidas com $ASAT_\infty$**

Pelo método de posicionamento de sensores e atuadores  $ASAT_\infty$ , as melhores posições definidas para o sensor e atuador foram respectivamente no  $10^\circ$  e  $17^\circ$  graus de liberdade.

Após montada a planta aumentada, partindo dos filtros de ponderação iniciais definidos na Seção 7.3.1, foi então usado um algoritmo genético para escolher os parâmetros ótimos das funções de ponderação, considerando filtros de ordem um, dois e três.

Para cada ordem do filtro foi executada a rotina de escolha dos parâmetros dos filtros. Para os filtros de ordem dois e três, com os mesmos parâmetros iniciais, o algoritmo genético não conseguiu encontrar uma solução factível considerando os critérios de convergência definidos. Para as funções de ponderação de primeira ordem chegou-se a uma solução viável que será apresentada a seguir.

A Figura 7.9 mostra a representação das funções de ponderação de primeira ordem obtidas através de algoritmos genéticos.

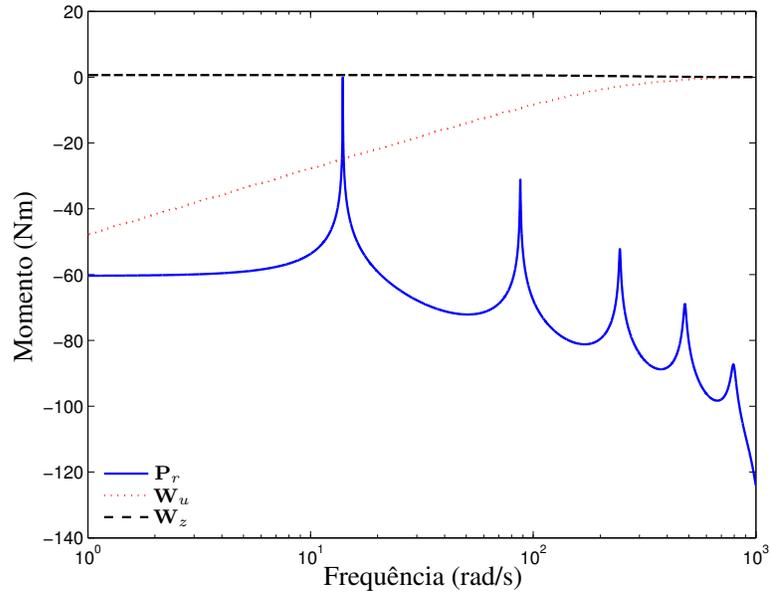


Figura 7.9: Função resposta em frequência dos filtros de ponderação selecionados via algoritmo genético e da planta real - sensores e atuadores alocados por  $ASAT_{\infty}$

As funções ótimas encontradas para os filtros após o uso de algoritmos genéticos foram:

$$\mathbf{W}_u(s) = \frac{s + 7,32 \times 10^{-12}}{0,9665s + 245} \quad e \quad \mathbf{W}_z(s) = \frac{0,9982s + 245,5}{s + 228,3}.$$

A malha foi fechada, após determinadas as posições ótimas dos sensores/atuadores determinados pela técnica  $ASAT_{\infty}$ , i.e., com o sensor alocado no  $10^{\circ}$  grau de liberdade e o atuador no  $17^{\circ}$  grau. O controlador foi projetado sem o uso de filtros de ponderação e com os filtros de ponderação ótimos selecionados pelo algoritmo genético para fins de comparação.

A Figura 7.10 mostra a planta sem controle, planta controlada com controlador sem uso de filtros de ponderação, e planta controlada com controlador projetado usando os filtros de ponderação otimizados. A norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de malha fechada sem o uso das funções de ponderação foi de  $9,2 \times 10^{-5}$ . Para a malha fechada usando controlador projetado com filtros de ponderação, a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  encontrada foi de 0,0277. Nota-se que o pico do primeiro modo sem controle era de  $-0,078 \text{ dB}$ . Após fechar a malha e utilizar filtros de ponderação a amplitude do pico foi de  $-50,7 \text{ dB}$ . Observa-se que para os demais picos da resposta em frequência não houve uma mudança significativa ao se comparar a malha aberta e a malha fechada com filtros. Para a malha fechada sem filtros de ponderação a resposta em frequência apresentou

uma significativa redução dos 4 primeiros modos de vibrar apresentando uma ampliação do pico a partir desse último modo, caracterizando o *spillover* na frequência de  $10^3 \text{ Hz}$ .

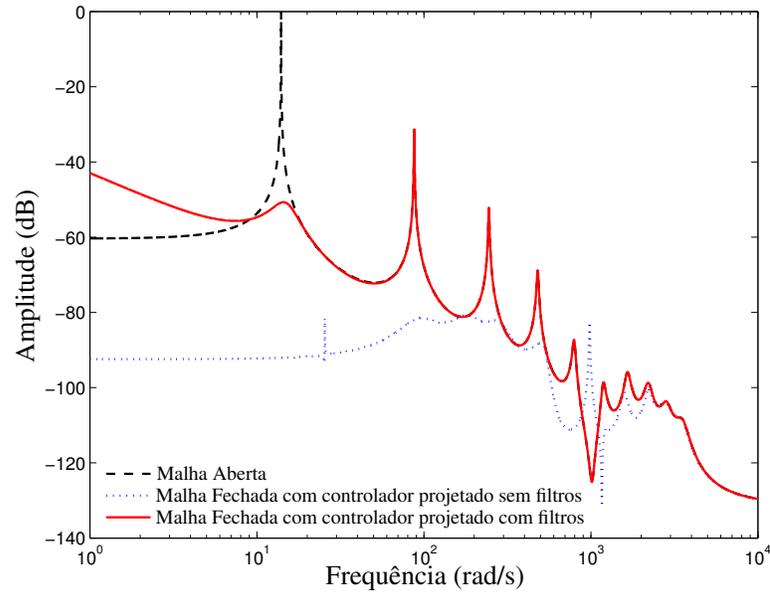


Figura 7.10: Resposta em frequência em malha aberta e em malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores alocados por  $ASAT_{\infty}$

A Figura 7.11 representa a resposta da estrutura com e sem controle no domínio do tempo devido à excitação proveniente do distúrbio externo. Observa-se que a configuração sem controle apresenta amplitude máxima de desempenho de  $10,79 \times 10^{-5} \text{ m}$ . A estrutura controlada sem filtros de ponderação apresentou amplitude máxima de  $9,22 \times 10^{-7} \text{ m}$ . Depois de escolhidos os parâmetros dos filtros, a amplitude máxima foi de  $5,22 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Nota-se que para o caso de malha fechada sem filtros de ponderação as amplitudes de deslocamento no tempo analisado foram consideravelmente baixas.

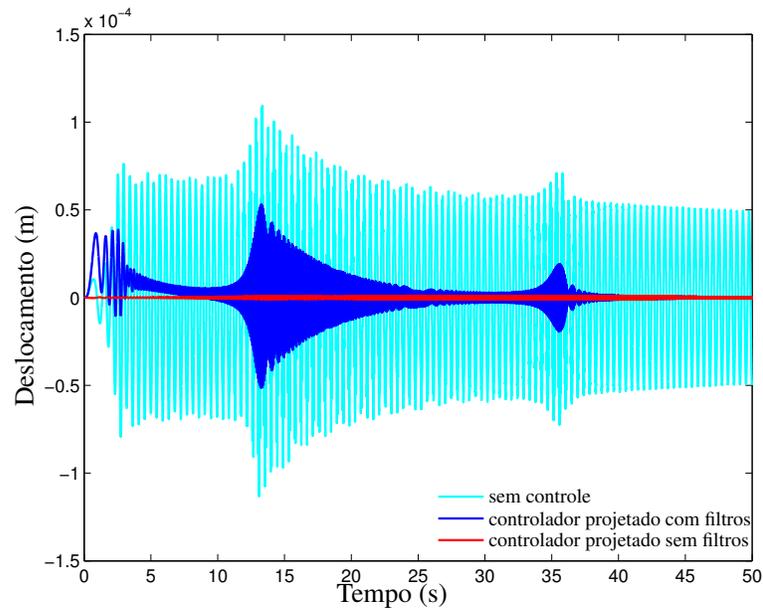


Figura 7.11: Resposta temporal do grau de liberdade de desempenho sem controle e com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAT_{\infty}$

A Figura 7.12 mostra a resposta do esforço de controle com e sem filtros de ponderação. O sinal do esforço de controle sem filtros de ponderação apresentou amplitude máxima de  $0,071 Nm$ , enquanto que para a malha fechada com os filtros de ponderação escolhidos via algoritmos genéticos a amplitude máxima chegou a  $0,032 Nm$ .

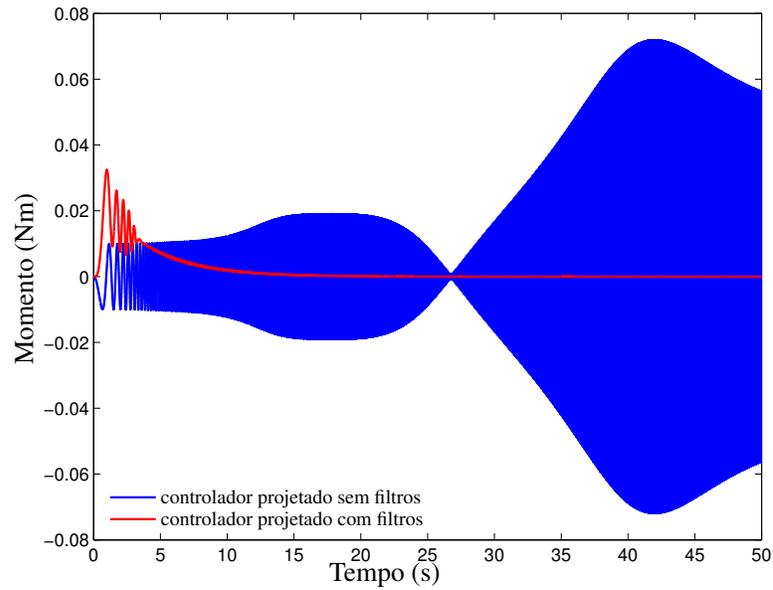


Figura 7.12: Sinal de controle de malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAT_{\infty}$

A Figura 7.13 mostra o comportamento do sinal medido pelo sensor nas malhas fechadas com controle com filtros de ponderação e sem filtros de ponderação. A amplitude máxima do sinal medido em que os filtros de ponderação foram usados é  $11,55 \times 10^{-5} m$ , enquanto que sem o uso de filtros a amplitude máxima atingida foi de  $2,29 \times 10^{-6} m$ .

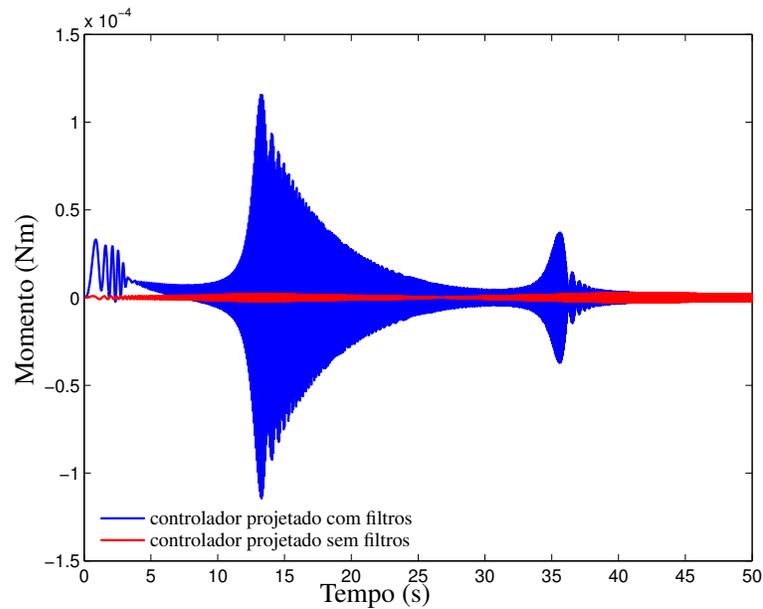


Figura 7.13: Sinal medido de malha fechada com controlador projetado usando filtro de ponderação e sem filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAT_{\infty}$

As Figuras 7.14 e 7.15 representam respectivamente os polos da planta de malha fechada com controle sem o uso de filtros de ponderação no projeto e com o uso dos filtros de ponderação ótimos no projeto do controlador, sendo comparados com os polos da planta real. Nota-se que para a planta em malha fechada com o controlador projetado sem o uso de filtros de ponderação qualquer variação poderá provocar a instabilidade do sistema. Já a malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação isso não acontece. Isto pode ser observado na Figura 7.14 em que os polos da malha fechada estão próximos ao semi-plano direito.

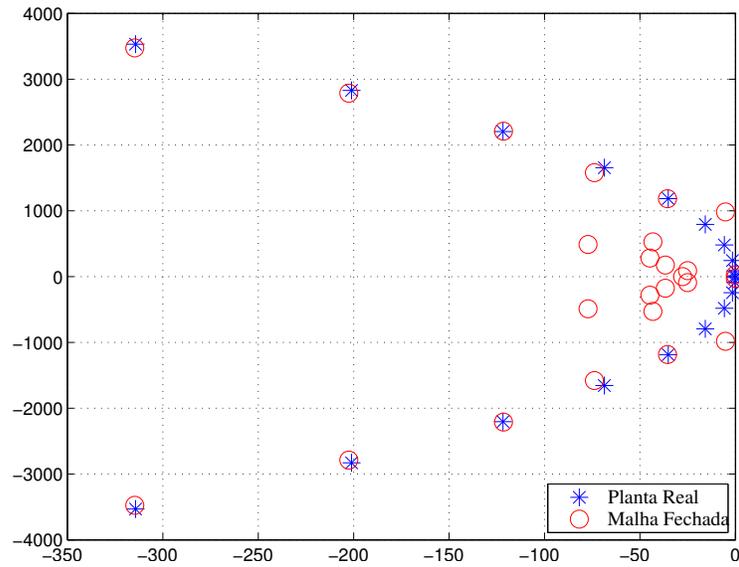


Figura 7.14: Polos de malha fechada com controlador projetado sem o uso filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAT_{\infty}$

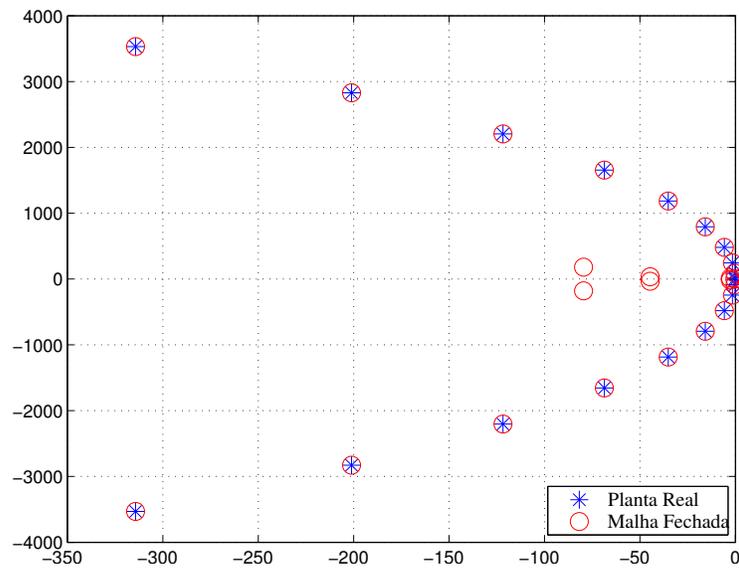


Figura 7.15: Polos de malha fechada com controlador projetado com o uso filtros de ponderação ótimos - sensores e atuadores por  $ASAT_{\infty}$

No Apêndice A é mostrado o controlador projetado com filtros selecionados via algoritmos genéticos partindo da alocação de sensores e atuadores pela técnica  $ASAT_{\infty}$ .

Dos resultados apresentados nesta seção, verifica-se que o emprego dos filtros de ponderação reduz o esforço de controle e leva a um posicionamento dos polos com maior margem de segurança para o sistema controlado. O controlador projetado sem uso dos filtros de ponderação apresenta maior atenuação da vibração havendo maior esforço de controle, mas com maior risco de instabilidade, e particularmente com o aumento da amplitude de vibração para frequências acima da faixa de interesse para o sistema controlado.

#### **7.3.4 Projeto de Controlador e Filtros de Ponderação Otimizados para Posições de Sensores/Atuadores obtidas com $ASAP_{\infty}$**

Pela técnica de posicionamento  $ASAP_{\infty}$ , as posições ótimas definidas foram alocar o atuador no primeiro grau de liberdade e o sensor no 43º grau de liberdade. Os parâmetros iniciais para os filtros de ponderação, definidos na Seção 7.3.1, foram usados para inicializar a rotina de otimização via algoritmos genéticos, em que a malha foi fechada e o controlador projetado (com os filtros). As ordens dos filtros variaram de primeira a terceira ordem. Para cada ordem, o algoritmo genético calculou a menor norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de malha fechada e determinou os filtros de ponderação ótimos. Para os filtros de ordem dois e três, com os parâmetros iniciais idênticos, o algoritmo genético não conseguiu encontrar uma solução factível (a restrição de estabilidade da matriz dinâmica do controlador não foi satisfeita).

A Figura 7.16 mostra a representação das funções de ponderação de primeira ordem obtidas através do algoritmo genético.

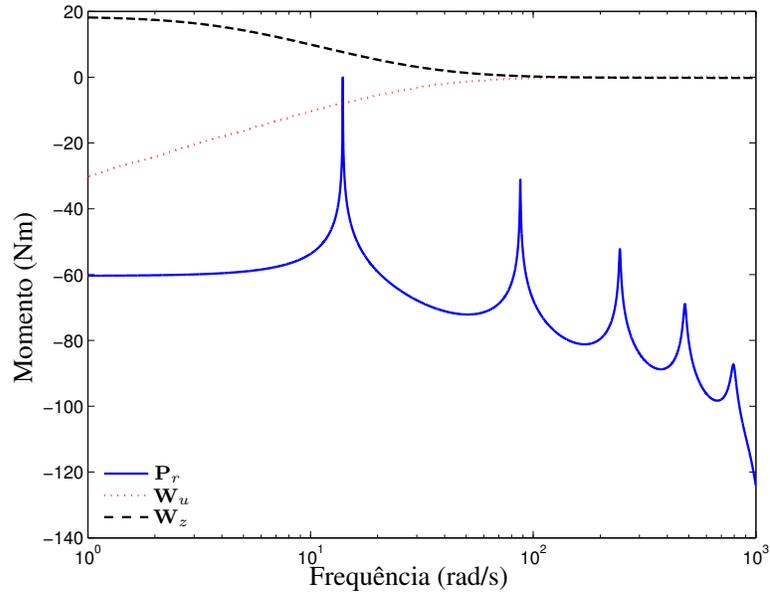


Figura 7.16: Função resposta em frequência dos filtros de ponderação selecionados via algoritmo genético e da planta real - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

As funções encontradas para os filtros de ponderação após o uso de algoritmos genéticos foram:

$$\mathbf{W}_u(s) = \frac{s + 1,163 \times 10^{-11}}{0.9826s + 31.98} \quad e \quad \mathbf{W}_z(s) = \frac{0.9734s + 32.06}{s + 3.848}.$$

A malha foi fechada com o controlador projetado usando esses filtros de ponderação e os resultados serão apresentados a seguir.

A Figura 7.17 mostra a resposta em frequência da planta sem controle e da malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação. Neste caso, a malha fechada com controlador projetado sem o uso de filtros de ponderação tornou-se instável. A norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de malha fechada com o controlador calculado usando os filtros de ponderação otimizados foi de 0,0279.

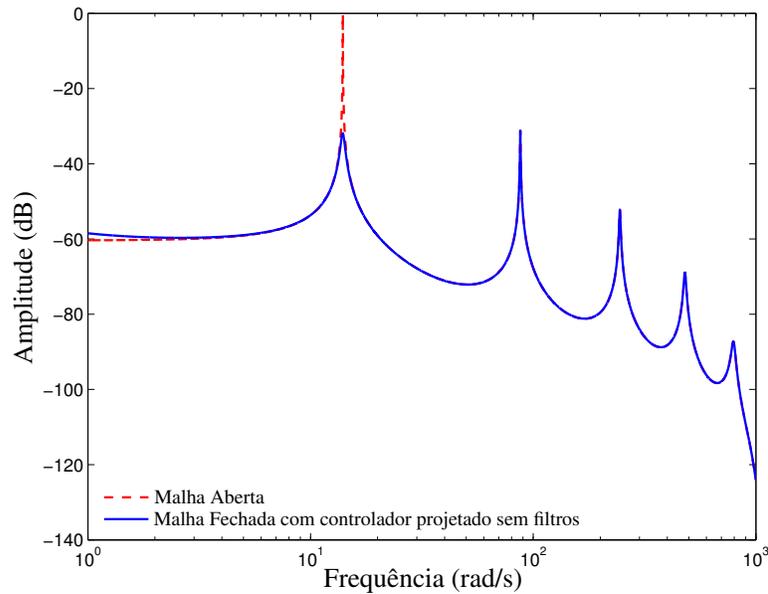


Figura 7.17: Resposta em frequência em malha aberta e em malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

Pela Figura 7.17 nota-se que o pico do primeiro modo de malha aberta é de  $-0,078 \text{ dB}$ . Após fechada a malha com controlador projetado usando os parâmetros dos filtros otimizados, o pico foi para  $-32,25 \text{ dB}$ , representando uma significativa atenuação de vibração da estrutura. Entretanto para os demais picos da resposta em frequência não houve alteração visível.

A Figura 7.18 apresenta a resposta temporal devido ao distúrbio para a estrutura sem controle de vibrações e para a malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação otimizados. Observa-se que a configuração sem controle apresenta amplitude máxima de vibração de  $10,92 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Já a estrutura controlada através do controlador projetado com filtros de ponderação otimizados apresentou uma amplitude máxima de vibração de  $6,25 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

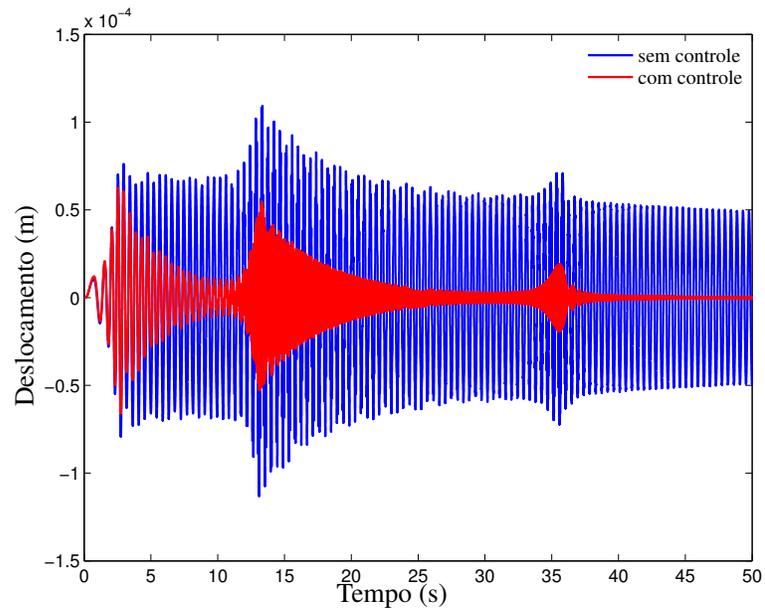


Figura 7.18: Resposta temporal em malha aberta e em malha fechada com o controlador projetado com filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

A Figura 7.19 apresenta o esforço de controle associado ao controlador projetado com os filtros otimizados. A máxima amplitude do esforço de controle foi de  $32,8 \times 10^{-4} Nm$ .

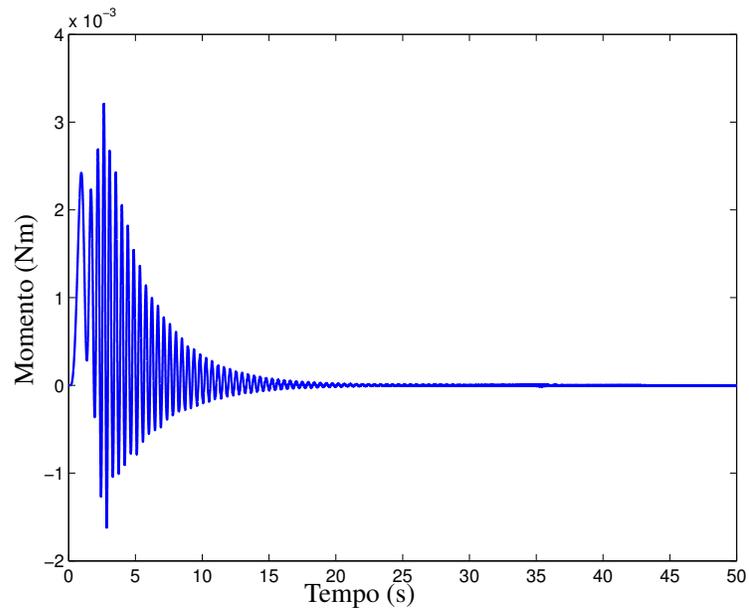


Figura 7.19: Sinal de controle da malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

A Figura 7.20 mostra o comportamento do sinal medido da malha fechada com o controlador projetado usando filtros de ponderação. A amplitude máxima do sinal medido foi de  $6,47 \times 10^{-5} m$ .

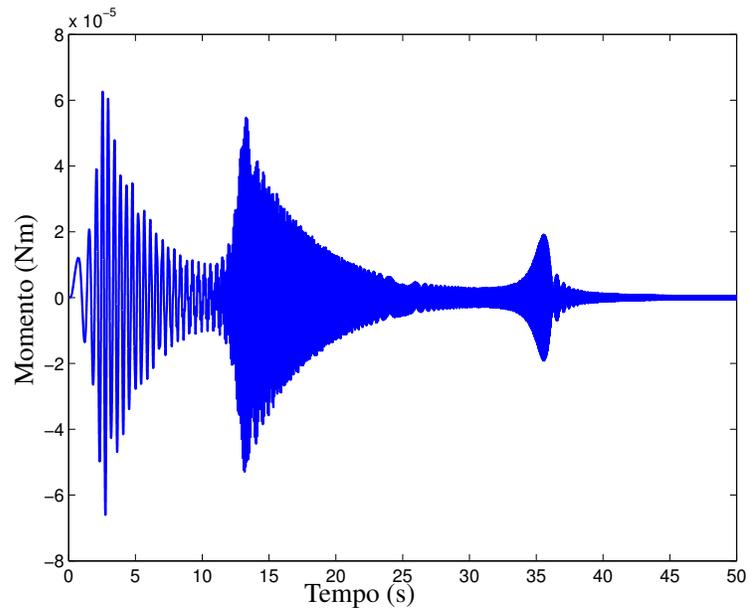


Figura 7.20: Sinal medido na malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

As Figuras 7.21 e 7.22 representam respectivamente os polos da planta de malha fechada com o controlador sem o emprego de filtros de ponderação e com o controlador projetado usando os filtros de ponderação respectivamente, sendo comparados com os polos da planta real (sistema sem controle). Nota-se que para a planta com controlador projetado sem o uso de filtros de ponderação, o sistema em malha fechada é instável. Já a planta controlada com o controlador projetado com filtros de ponderação é estável.

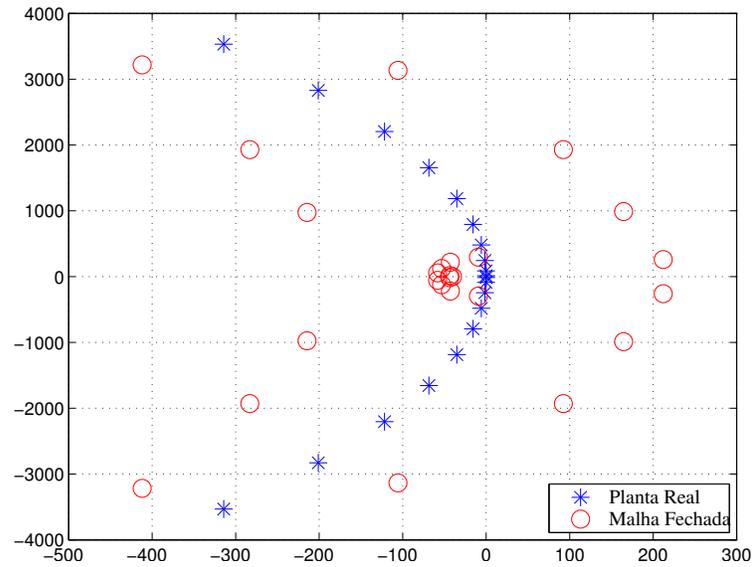


Figura 7.21: Polos de malha fechada com controlador sem o uso de filtros de ponderação - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

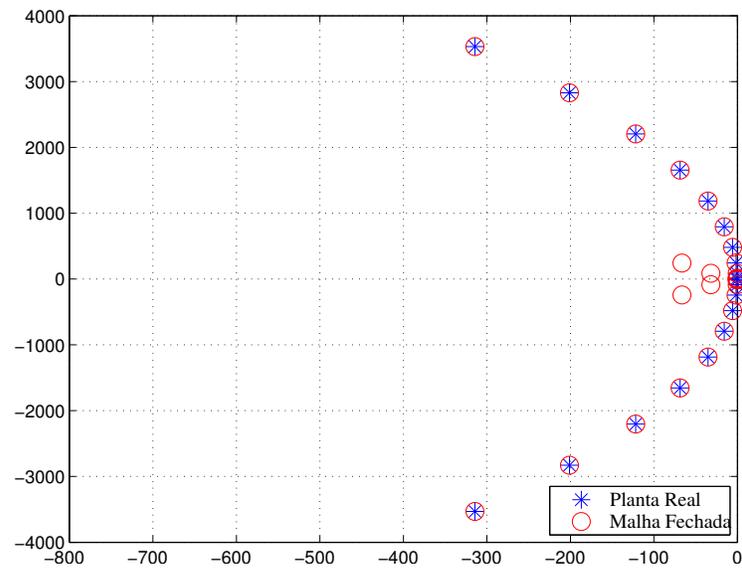


Figura 7.22: Polos de malha fechada com controlador com o uso de filtros de ponderação otimizados - sensores e atuadores por  $ASAP_{\infty}$

No Apêndice A é mostrado o controlador projetado com os filtros selecionados via algoritmos genéticos a partir da técnica de posicionamento de sensores e atuadores  $ASAP_\infty$ .

#### 7.4 Resumo dos Resultados dos Métodos

O uso de algoritmos genéticos para selecionar os parâmetros de ganho na rejeição, ganho na passagem e frequência de corte dos filtros de ponderação passa alta e passa baixa se mostraram eficientes após utilizadas técnicas de posicionamento ótimo de sensores/atuadores ( $ASAT_\infty$  e  $ASAP_\infty$ ).

Analisando as Figuras 7.10 e 7.17, é possível observar uma significativa redução no primeiro pico de amplitude da função reposta em frequência do sistema com o uso de controladores projetados com funções de ponderação otimizadas.

Nota-se na Tabela 7.3, que ao usar o método  $ASAT_\infty$  o sensor deve estar alocado no 10º grau de liberdade e o atuador no 17º. Com o método  $ASAP_\infty$ , o sensor e o atuador estão localizados no 43º e 1º grau de liberdade, respectivamente.

Tabela 7.3: Sistema controlado com controlador projetado sem filtros de ponderação

	técnica $ASAT_\infty$	técnica $ASAP_\infty$
Grau de liberdade do Sensor	10	43
Grau de liberdade do Atuador	17	1
$\ T_{zw}\ _\infty$	$9,18 \times 10^{-5}$	-
Estável	Sim	Não

As rotinas para otimização das funções de ponderação foram aplicadas para filtros de primeira, segunda e terceira ordens. Contudo para os dois últimos, os algoritmos genéticos não encontraram uma solução factível a partir dos dados de entrada definidos para o problema (*crossover* fixado em 0,9, matriz dinâmica da malha fechada e do controlador deveriam ser estáveis, número máximo de gerações). Pela técnica  $ASAT_\infty$  foram utilizadas 4 gerações até ser determinado o resultado ótimo em 40 minutos. Já pela técnica  $ASAP_\infty$  o número de gerações foi de 5 e o tempo foi de 59 minutos. A redução mais efetiva da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação selecionados via algoritmos genéticos foi obtida a partir do método de alocação de sensor/atuador  $ASAT_\infty$  ( $\|T_{zw}\|_\infty = 0,0277$ ). Para o posicionamento obtido pela técnica  $ASAP_\infty$  obteve-se  $\|T_{zw}\|_\infty = 0,0279$ , caracterizando uma diferença de 0,0002, conforme mostrado na Tabela 7.4.

Tabela 7.4: Resultados da Malha fechada com controlador projetado usando filtros de ponderação

		técnica $ASAT_\infty$	técnica $ASAP_\infty$
Parâmetros do Passa Alta $W_u$	$\varrho$	-270,4879	-248,7845
	$\varepsilon$	0,2962	0,1527
	$w_c$	245,0311	31,9772
Parâmetros do Passa Baixa $W_z$	$\varrho$	-0,0156	-0,2342
	$\varepsilon$	0,6304	18,4136
	$w_c$	245,5001	32,0592
$\ T_{zw}\ _\infty$		0,0277	0,0279
Estável		Sim	Sim

Ainda na Tabela 7.4 percebe-se que os ganhos de rejeição para o filtro passa alta ficaram bem menores do que o sugerido inicialmente para ambos os casos de alocação de sensores e atuadores usando as técnicas  $ASAT_\infty$  e  $ASAP_\infty$ . Já para o ganho na passagem, os valores finais encontrados foram próximos aos valores iniciais. Para o projeto de filtros de ponderação otimizados partindo da alocação de sensores e atuadores usando a técnica  $ASAT_\infty$ , o filtro passa alta apresentou frequência de cruzamento de ganho de aproximadamente  $32 Hz$ , enquanto que usando a técnica  $ASAP_\infty$  a frequência de cruzamento de ganho ficou bem próxima à dada inicialmente ( $250 Hz$ ).

Após alocar os sensores e atuadores usando as técnicas  $ASAT_\infty$  e  $ASAP_\infty$  com o controlador projetado com filtros de ponderação, tem-se um sistema em malha fechada mais robusto, uma vez que a rotina de seleção de filtros via algoritmos genéticos verifica que os polos da matriz dinâmica de malha fechada e do controlador estejam sempre alocados no semi-plano esquerdo.

A Tabela 7.5 compara as amplitudes da resposta em frequência dos casos apresentados neste trabalho. A partir do posicionamento obtido pela técnica  $ASAT_\infty$  e com o controlador projetado sem filtros de ponderação, os três primeiros modos de vibrar da viga apresentam uma amplitude bem reduzida. Para a malha fechada usando o posicionamento obtido com a técnica  $ASAP_\infty$ , o sistema em malha fechada tornou-se instável.

Usando a técnica  $ASAT_\infty$  observa-se que a partir do quarto modo de vibrar a planta em malha fechada apresenta o fenômeno *spillover*, i.e., a amplificação da amplitude de algum modo residual, Figura 7.10, mas sem ocorrer a instabilidade da planta. Ao projetar o controlador usando filtros de ponderação, a amplificação da resposta dos modos residuais é

contida e a malha fechada manteve-se estável.

Tabela 7.5: Amplitudes dos três primeiros modos [dB] do sistema controlado

Modo	técnica $ASAT_{\infty}$			técnica $ASAP_{\infty}$		
	$P_r$	Projeto do controlador		$P_r$	Projeto de controlador	
		sem filtros	com filtros		sem filtros	com filtros
1 <sup>o</sup>	-0,078	-81,91	-50,69	-0,078	instável	-32,42
2 <sup>o</sup>	-31,85	-81,59	-31,85	-31,15	instável	-31,15
3 <sup>o</sup>	-54,44	-82,47	-54,44	-52,70	instável	-52,7

Nota-se uma atenuação do pico da amplitude da resposta em frequência de malha fechada após agregados filtros de ponderação via algoritmos genéticos para as técnicas  $ASAT_{\infty}$  e  $ASAP_{\infty}$ .

Todas as plantas de malha fechada e controladores projetados usando filtros de ponderação selecionados via algoritmos genéticos apresentam polos no semi-plano esquerdo, sendo portanto estáveis. Os esforços de controle de malha fechada com filtros em ambos os casos, Figuras 7.12 e 7.19, foram concentrados para o primeiro modo, i.e., no maior pico de vibração.

A Tabela 7.6 mostra a amplitude máxima do sinal de esforço de controle para os casos analisados com controlador projetado com e sem filtros de ponderação. Observa-se que na alocação de sensores e atuadores pela técnica  $ASAP_{\infty}$  não se obteve um sistema controlado estável quando não se utilizou filtros no projeto do controlador. Com a inclusão de filtros de ponderação otimizados encontrou-se uma situação de malha fechada estável.

Tabela 7.6: Esforço de Controle [Nm]

técnica $ASAT_{\infty}$		técnica $ASAP_{\infty}$	
Projeto de controlador		Projeto de controlador	
sem filtros	com filtros	sem filtros	com filtros
0,071	0,032	instável	0,0033

## Capítulo 8

### Conclusão

Este trabalho se insere no contexto de estruturas inteligentes tratando do projeto que abrange o posicionamento do atuador, do sensor e o projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para o problema de controle ativo de vibrações em estruturas. A motivação deste trabalho está no projeto de estruturas inteligentes visando evitar o fenômeno conhecido como *spillover* através do adequado posicionamento dos sensores e atuadores, e também da escolha otimizada dos parâmetros dos filtros de ponderação que caracterizam uma etapa importante do projeto dos controladores  $\mathcal{H}_\infty$ .

Este trabalho investigou dois enfoques para determinar o posicionamento ótimo de sensores e atuadores para o problema de controle ativo de vibrações em estruturas. Um deles determinou a alocação ótima através da minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  da malha fechada do sistema para o controlador projetado sem o uso de filtros de ponderação, chamado neste trabalho de método  $ASAT_\infty$ . O outro determinou a alocação ótima de sensores e atuadores através da maior norma  $\mathcal{H}_\infty$  de malha aberta, método chamado neste trabalho de  $ASAP_\infty$ . A técnica  $ASAP_\infty$ , baseada em malha aberta, envolve menor esforço computacional, já que não requer o projeto do controlador. Contudo, a técnica  $ASAT_\infty$  que aloca os sensores e atuadores já baseada na malha fechada, embora com maior esforço computacional por requerer um projeto de controlador a cada posição candidata, levou a melhores resultados como esperado.

Os parâmetros que definem a função de transferência dos filtros de ponderação foram selecionados através da minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema de malha fechada usando uma rotina de algoritmo genético. As variáveis de otimização destas funções de transferência foram o ganho na passagem, o ganho na rejeição e a frequência de corte. A ordem dos filtros (1, 2 ou 3) foi considerada como variável fixa em cada laço de otimização.

A estrutura usada como exemplo para investigar o comportamento das técnicas abordadas neste trabalho foi uma viga flexível. O modelo da viga foi obtido usando o método dos

elementos finitos. O respectivo modelo de estados foi gerado e usado na sua forma modal, permitindo a respectiva redução do modelo e o consequente projeto do controlador de baixa ordem. O controlador projetado foi então testado no modelo não reduzido, avaliando assim o comportamento do controlador na presença de incertezas dinâmicas (modos não considerados no modelo). É neste contexto que o posicionamento otimizado dos sensores e atuadores e o projeto dos filtros de ponderação tornam-se importantes.

Os filtros de ponderação tem um papel importante no projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ . Usualmente estes filtros são escolhidos através de tentativas, respeitando a forma que devem possuir. Neste trabalho, procurou-se automatizar o processo da escolha dos filtros usando uma otimização através de algoritmos genéticos para a escolha dos parâmetros que definem as funções de transferência destes filtros. Além disso, neste processo de busca dos parâmetros otimizados foi incluída uma restrição adicional de que a malha fechada deveria ser estável, assegurando assim apenas a busca dos casos de interesse. Nota-se que os filtros de ponderação otimizados obtidos após utilizar algoritmos genéticos apenas atenuaram o primeiro modo de vibrar.

A seleção de funções de ponderação através do algoritmo genético para o projeto do controlador foi capaz de garantir a estabilidade e a redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de malha fechada. Isso foi obtido para o resultado do posicionamento otimizado do sensor e do atuador pelas duas técnicas de posicionamento utilizadas. A vantagem do emprego do processo de busca otimizada dos parâmetros dos filtros foi a da automatização do processo de projeto usualmente manual e muitas vezes demorado. Além disso, a otimização com o algoritmo genético busca a solução em um conjunto muito mais amplo de possibilidades visando obter a solução de menor norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o que demandaria em geral muitas iterações de forma não automatizada.

Verificou-se em um dos exemplos simulados que a não utilização dos filtros de ponderação no projeto do controlados levou a malha fechada a uma situação instável, caracterizando a situação de *spillover*. Ao se adicionar funções de ponderação para o projeto do controlador houve um aumento do nível de vibração, mas em contrapartida houve uma melhor margem de estabilidade da malha fechada.

Uma dificuldade observada no trabalho foi a obtenção de uma solução factível através do emprego de filtros de ponderação de ordens 2 e 3, não havendo convergência do algoritmo genético nestes casos. Além disso, o ponto de partida associado aos filtros de ponderação deve ser um ponto factível, e a obtenção deste já pode envolver algumas iterações de projeto. Os parâmetros de ajuste do algoritmo genético, como por exemplo, o *crossover* e *RandS*-

*tream*, usualmente alteram a sequência computacional da busca da solução ótima, podendo inclusive levar a outros resultados de solução ótima. Neste caso, um ponto para aprofundamento deste trabalho é a investigação do comportamento da solução em função de outros parâmetros do algoritmo genético ou mesmo o uso de outra técnica de otimização, tendo em vista que os resultados mostraram um adequado potencial de se escolher os filtros de ponderação de forma automatizada e otimizada.

Uma possibilidade de trabalho futuro é a alocação de mais de um sensor e mais de um atuador para o controle da estrutura, analisando os melhores posicionamentos. Após essa fase, o projeto do controlador com maior número de saídas de desempenho e de controladores leva a um problema de otimização de filtros de ponderação de maior porte, onde o emprego de processos automatizados certamente torna-se mais atrativo. Outro aspecto é considerar a ordem do filtro como uma variável direta de otimização, no caso uma variável discreta, caracterizando assim um problema misto de otimização (variáveis contínuas e discretas).

Outra possibilidade de continuidade deste trabalho envolve o emprego de outras técnicas de controle, como por exemplo, a técnica de controle misto ( $\mathcal{H}_\infty/H_2$ ), e a respectiva seleção otimizada dos filtros de ponderação neste caso. Além disso, a realização de experimentos é um aspecto a se considerar, verificando o desempenho dos controladores em situações não apenas simuladas. Além de serem utilizadas estruturas mais complexas.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALFARO-CID, E., MCGOOKIN, E., AND MURRAY-SMITH, D. Optimisation of the weighting functions of an H-infinity controller using genetic algorithms and structured genetic algorithms. *International Journal of Systems Science* 39 (2008), 335–347.
- [2] BALAS, G. J. Robust control of flexible structures: Theory and experiments. Master's thesis, California Institute of Technology, 1990.
- [3] BALAS, M. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 23 (1978), 673–679.
- [4] BALAS, M. Trends in large space structure control theory: Fondest hopes, wildest dreams. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 27, 3 (jun 1982), 522 – 535.
- [5] BHASKAR, A. Estimates of error in the frequency response of non-classically damped systems. *Journal of Sound and Vibration* 184 (1995), 59–72.
- [6] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM studies in applied theory, 1994.
- [7] BUENO, D. D. Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2007.
- [8] CABELLO, R. V. C. Controle H-infinito de vibrações com restrições no esforço de controle. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2009.
- [9] COSTA E SILVA, V. M., AND ARRUDA, J. R. F. Otimização do posicionamento de atuadores piezocerâmicos em estruturas flexíveis usando um algoritmo genético. In *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 97* (1997).
- [10] DONHA, D., DESANJ, D., AND KATEBI, M. Genetic algorithm for weight selection in H-infinity control design. In *Industrial Applications of Intelligent Control (Digest No: 1997/144), IEE Colloquium on* (may 1997), pp. 5/1 –5/3.

- [11] FURUYA, H., AND HAFTKA, R. T. Locating actuators for vibration suppression on space trusses by genetic algorithms. *Structures and Control Optimization* (1993), 1–11.
- [12] GABBERT, U., SCHULTZ, I., AND WEBER, C. T. Actuator placement in smart structures by discrete-continuous optimization. In *ASME Design Eng. Tech. Conferences* (1997).
- [13] GAHINET, P., AND APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H-infinity control. *Internacional Journal of Robust and Nonlinear Control* 4 (1994), 421–448.
- [14] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., AND CHILALI, M. *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*, first ed. The MathWorks, 1995.
- [15] GAWRONSKI, W. K. *Dynamics and Control of Structures*. Ed. Springer-Verlag, 1998.
- [16] GAWRONSKI, W. K. *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Ed. Springer-Verlag, 2004.
- [17] GU, D. W., PETKOV, P. H., AND KONSTANTINOV, M. M. *Robust Control Design with Matlab*. Ed. Springer Verlag, 2005.
- [18] HEVERLY, D. E., WANG, K. W., AND SMITH, E. C. An optimal actuator placement methodology for active control of helicopter airframe vibration. *Journal of the American Helicopter Society* 46 (2001), 251–261.
- [19] HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*. 1992.
- [20] HSIEH, C., KIM, J., LIU, K., ZHU, G., AND SKELTON, R. Control of large flexible structures—an experiment on the NASA mini-mast facility. *Control Systems, IEEE* 11, 6 (oct 1991), 13–21.
- [21] INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, 1996.
- [22] IWASAKI, T., AND SKELTON, R. All controllers for the general H-infinity control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica* 30, 8 (1994), 1307–1317.
- [23] JAIN, L. C., AND MARTIN, N. *Fusion of Neural Networks, Fuzzy Systems and Genetic Algorithms: Industrial Applications*. 1998.

- [24] KARKOUB, M., BALAS, G., AND TAMMA, K. Colocated and noncolocated control design via  $\mu$ -synthesis for flexible manipulators. In *American Control Conference, 1995. Proceedings of the* (jun 1995), vol. 5, pp. 3321 –3325 vol.5.
- [25] KWON, Y. M., AND BANG, H. *The Finite Element Method using MATLAB*. Ed. CRC Press, 1997.
- [26] LEO, D. J., AND INMAN, D. J. Modeling and control simulations of a slewing frame containing active members. *Smart Materials and Structures* 2 (1993), 82– 95.
- [27] LEWIS, B. S. J. A. Finite element modeling and active control of an inflated torus using piezoelectric devices. Master’s thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.
- [28] LIM, K. B., MAGHAMI, P. G., AND JOSHI, S. M. Comparison of controller designs for an experimental flexible structure. *Control Systems Technology, IEEE* 12 (1992), 108–118.
- [29] LIU, W. Vibration control of large scale flexible structures using magnetorheological dampers. Master’s thesis, Faculty of the Worcester Polytechnic Institute, 2005.
- [30] LOPES, J. C. Controle H-2/H-infinito de estruturas flexíveis através de desigualdades matriciais lineares com alocação de pólos. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2005.
- [31] LURÉ, A. I., AND POSTNIKOV, V. N. On the theory of stability of the controlled systems. *Prikl. Mat. Mekh.* (1944), 246 – 248.
- [32] MATLAB®. *Optimization Toolbox User’s Guide*, 2000.
- [33] MAZONI, A. F. Estudo das técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2008.
- [34] MEIROVITCH, L. *Dynamics and Control of Structures*. Wiley Interscience, 1990.
- [35] MOREIRA, F. J. O. Um controlador H-infinito de banda limitada para o controle ativo de vibração estrutural. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 1998.

- [36] MOSER, A. Designing controllers for flexible structures with H-infinity/ $\mu$ -synthesis. *Control Systems, IEEE* 13, 2 (apr 1993), 79–89.
- [37] NONAMI, K. Control performances based on control system design strategies for active structural control. *JSME international journal* 38 (1995-09-15), 367–378.
- [38] PALMA, P. H. T. Identificação experimental e controle ativo de vibrações aplicadas em estruturas inteligentes. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2007.
- [39] PANOSSIAN, H., GAWRONSKI, W., AND OSSMAN. Balanced shaker and sensor placement for modal testing of large flexible structures. In *IMAC-XVI* (1998).
- [40] PAPTAEODOROU, M., TAYLOR, C. A., AND LIEVEN, N. Optimal sensor locations for dynamic verification. In *Structural Dynamics, Eurodyn 99* (1999), pp. 587–592.
- [41] PEREIRA, C. B. Técnicas de otimização discreto-contínuas aplicadas ao controle de vibração de estruturas inteligentes. Master's thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2003.
- [42] PYATNITSKII, E. S., AND SKORODINSKII, V. I. Numerical methods of lyapunov function construction and their applications to the absolute stability problem. *Syst. Control Letters* 2 (1982), 130–135.
- [43] RAO, S. S., PAN, T., AND VENKAYYA, V. B. Optimal placement of actuators in actively controlled structures using genetic algorithms. *AIAA journal* 29 (1991), 942–943.
- [44] SADRI, A. M., WRIGHT, J. R., AND WYNNE, R. J. Modelling and optimal placement of piezoelectric actuators in isotropic plates using genetic algorithms. *Smart Materials and Structures* 8 (1999), 490–498.
- [45] SAFONOV, M. G., CHIANG, R. Y., AND FLASHNER, H. H-infinity robust control synthesis for a large space structure. In *American Control Conference, 1988* (june 1988), pp. 2038 –2045.
- [46] SARRACINI JR, F. Síntese de controladores H-infinito de ordem reduzida com aplicação no controle ativo de estruturas flexíveis. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2006.

- [47] SEDGH, P. K., AND AMIRIFAR, R. Using genetic algorithm to improve the robust performance of a flexible transmission system. In *IEEE ELECO07 (2007)*.
- [48] SHERER, C., AND WEILAND, S. Linear matrix inequalities in control, 2004. <http://www.dcsc.tudelft.nl/cscherer/lmi/notes05.pdf> - acessado em 25/05/2011.
- [49] SILVA, S. Projeto de controladores robusto para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2005.
- [50] SKOGESTAD, S., AND POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. Ed. John Wiley and Sons, 1996.
- [51] SMITH, R. S., CHU, C.-C., AND FANSON, J. L. The design of H-infinity controllers for an experimental non-collocated flexible structure problem. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2 (1994), 101–109.
- [52] SZAINER, M., AND ROTSTEIN, H. Robust controller design for a constrained flexible structure via mixed I-infinity/ h-infinity optimization. *IEEE Conference on Control Applications* 1 (1992), 271–276.
- [53] VALER, C. E. I. Uma introdução controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis. Master's thesis, Engenharia Mecânica, PUC-RJ, 1999.
- [54] ZHOU, K., AND DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- [55] ZHOU, K., DOYLE, J. C., AND GLOVER, K. *Roboust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

## Apêndice A

### Controladores obtidos

Abaixo serão mostrados os controladores obtidos a partir das técnicas de posicionamento de sensores e atuadores utilizadas neste trabalho, em que  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$  e  $\mathbf{D}_K$ , representam respectivamente, a matriz dinâmica do controlador, a matriz de entrada do controlador, a matriz de saída do controlador e a matriz de transmissão direta do controlador.

#### A.1 As matrizes do controlador obtido a partir de $ASAT_\infty$

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -5,208 & -0,879 & -3,146 & 14,78 & -7,187 \\ -28,89 & -27,93 & -7,289 & 4,302 & -62,07 \\ 8 & -15,37 & 26,48 & 145,8 & 26,29 \\ -47,19 & -94,91 & -157,5 & -104,6 & -162,3 \\ 15,69 & 41,25 & 7,813 & 93,3 & -142,7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} 21,58 \\ 107 \\ -60,58 \\ 146,1 \\ -55,77 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 222,7 & -51,24 & -9,346 & -4,635 & -6,556 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 10,77 \end{bmatrix}$$

**A.2 As matrizes do controlador obtido a partir de  $ASAP_\infty$**

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -0,3854 & -10,2 & 5,344 & -7,317 & -7,375 \\ 4,465 & -75,55 & 17 & -56,49 & -132,1 \\ -0,03918 & 27,3 & -4,833 & 219,8 & 48,2 \\ 3,321 & -83,76 & -177 & -76,75 & -177,9 \\ -1,306 & 84,61 & -21,71 & 122,1 & -39,68 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} -10.7 \\ 56.61 \\ -26.07 \\ 51.52 \\ -29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} -31,87 & -9,915 & 3,096 & -6,298 & -4,898 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 5,999 \end{bmatrix}$$