

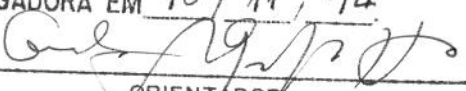


UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE TÉRMICA E FLUIDOS

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR EDSON JOSÉ VASQUES

_____ E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 10 / 11 / 94



ORIENTADOR

**ESCOAMENTOS EM SISTEMAS ANULARES:
MAPAS DE VELOCIDADES**

Autor: Edson José Vasques
Orientador: Carlos Alberto Gasparetto

Nº Publ. FEM
046 / 94

**Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Mecânica como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica.**

outubro 1994

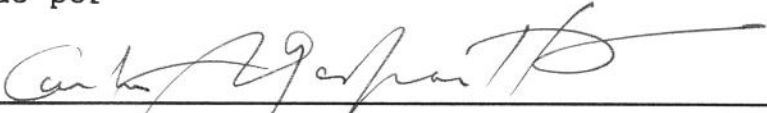
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE TÉRMICA E FLUIDOS

Tese de Doutorado

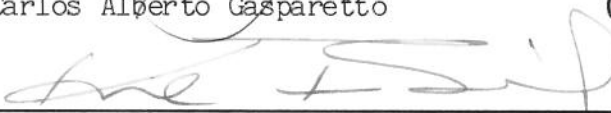
Título: Escoamentos em Sistemas Anulares: Mapas de
Velocidades.

Autor : Edson José Vasques *4441 m.c.*
Orientador: Carlos Alberto Gasparetto *t*

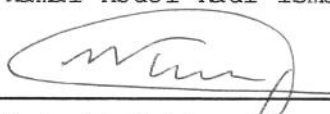
Aprovado por



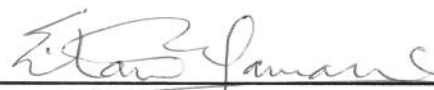
Prof. Dr. Carlos Alberto Gasparetto (Presidente)



Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail



Prof. Dr. Satoshi Tobinaga



Prof. Dr. Eitaro Yamane



Prof. Dr. Eduardo Cleto Pires

Campinas, 10 de novembro de 1994.

À minha família e
em especial

à *Raquel*, minha esposa, ao *Rérison*, à
Amanda e à *Ana Carolina* nossos filhos
e a meus pais

José Garcia Vasques (in memoriam) e
Aparecida Sorvillo Vasques.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar sou grato a Deus, "pois Ele mesmo é Quem dá a todos a vida e a respiração e todas as coisas; ... Porque nEle vivemos e nos movemos e existimos" Atos 17:25 e 28.

Em segundo lugar, reconheço que o trabalho desenvolvido nesta tese só foi possível porque tive a felicidade de contar com a pronta colaboração de algumas pessoas. A todas elas sou imensamente grato. Merecem destaque:

- Prof. Dr. Carlos Alberto Gasparetto, amigo e orientador cuja experiência e visão foram fundamentais tanto na escolha como no desenvolvimento deste trabalho.
- Prof. Dr. Ismail Tosun (Dep. de Engenharia Química da Middle East Technical University, Ancara - Turquia) pela gentileza de solicitamente nos atender, enviando material concernente a Inversão Geométrica
- Profs. Drs. José Roberto Campanha e Dario Antonio Donatti (Dep. de Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro) por terem sido os primeiros a me ajudarem na parte de programação gráfica.
- Prof. Dr. René Armando Moreno Alfaro (Dep. de Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro) pela importante ajuda na parte de programação numérica.
- Prof. Dr. Dimas Roberto Vollet (Dep. de Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio CLaro) pela incansável ajuda tanto na parte de programação numérica como gráfica.

- Profs. Drs. *Fernando Dagnoni Prado*, *Gerson Antonio Santarine*, *Makoto Yoshida* e *Roberto Hessel* (todos professores do Dep. Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro) pela ajuda que prestaram em inúmeras ocasiões e das mais diversas formas.
- *Ari Araldo Xavier de Camargo*, programador do Polo Computacional da Unesp, Campus de Rio Claro, por ter me assessorado em muitos aspectos deste trabalho.
- *Reginaldo Cesar Bortolin*, programador do Centro de Estudos Ambientais da Unesp, Campus de Rio Claro, pela paciência e ajuda prestadas desde a primeira tentativa até a versão final dos gráficos tridimensionais de velocidade.
- *Sergio Correia dos Santos Ferreira*, formando em Ciências da Computação (Unesp Campus de Rio Claro), pela ajuda na elaboração dos fluxogramas.
- Prof. Dr. *Kamal Abdel Radi Ismail* pelo acolhimento e amizade manifestados no decorrer destes anos que estive na FEM-UNICAMP.
- Prof. Dr. *Chang-Yu Liu* pelo exemplo que deixou e pelo que pude aprender com ele, tanto de Mecânica dos fluidos como de Teoria da camada limite.
- Prof. Dr. *Mário Alberto Tenan* (Instituto de Física "Gleb Wataghin", DFESCM-UNICAMP) pela amizade, apoio e exemplo manifestados durante um período particularmente difícil nesta batalha que foi o doutorado.

- Profs. Drs. *Alzira Cristina de Mello Stein-Barana* e *Hari Mohan Gupta* pela boa vontade e colaboração prestadas ao propiciarem as facilidades disponíveis no Departamento de Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro, por ocasião de seus respectivos mandatos como Chefes desse Departamento.
- *Maristela Carlos Rebustini* (Dep. de Física do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro) pela competência na digitação deste trabalho.
- *Gilberto Girello* (Dep. de Estatística do IGCE - Unesp, Campus de Rio Claro), pela paciência e esmero com que fez os mais diversos desenhos.

Finalmente, agradeço a CAPES por ter me auxiliado através do PICD.

Meu sincero muito obrigado a todos.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	i
SUMÁRIO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
RESUMO	xviii
SUMMARY	xix
CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS	xx

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO 2

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES CONCÊNTRICOS	7
2.1. Escoamento Laminar	8
2.1.1. Definições e perfis de velocidades	8
2.1.2. Raio que localiza o Lugar Geométrico (L.G.) onde ocorre a velocidade máxima ($r_{C,max}$)..	13
2.1.3. Velocidade máxima ($v_{z,max}$)	14
2.1.4. Velocidade média $\langle v_z \rangle$	15
2.1.5. Posição r para uma determinada velocidade adimensional, $v_z/v_{z,max}$	17
2.1.6. Tensão de cisalhamento	19
2.1.7. Relação entre vazão e r_{Ci}	21
2.1.8. Resultados experimentais reportados na li- teratura. Domínio de validade das equações em função do número de Reynolds	23
2.2. Escoamento Turbulento	27
2.2.1. Perfis de velocidades para tubos lisos ...	27
2.2.2. Perfis de velocidades para sistemas anulares	29

CAPÍTULO 3

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS	40
3.1. Sistemas de Coordenadas e Definições	41
3.2. Escoamento Laminar	52
3.2.1. Solução da equação do movimento	52
3.2.2. Lugar Geométrico (L.G.) das velocidades máximas ($v_{z,max}$). Mapas de isovelocidades	56
3.2.3. Velocidades em $\xi = \text{constante}$	65
3.2.4. Mapas tridimensionais	68
3.2.5. Razão das vazões nos sistemas excêntricos e concêntricos	71
3.3. Escoamento Turbulento	73

CAPÍTULO 4

INVERSÃO GEOMÉTRICA E SUA APLICAÇÃO A SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS	75
4.1. Preliminares Matemáticos	76
4.2. Inversão Geométrica	84
4.3. Aplicações da Inversão	89
4.4. Mapas de Isovelocidades	94

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES	115
5.1. Considerações finais e conclusões	116
5.2. Sugestões	119
REFERÊNCIAS	121

APÊNDICES

A	VALORES NUMÉRICOS DOS SISTEMAS ANULARES E DOS CAMPOS DE VELOCIDADE. CARACTERÍSTICAS DOS MAPAS DE ISOVELOCIDADE	128
---	--	-----

B	CARACTERÍSTICAS DOS MAPAS TRIDIMENSIONAIS	133
C	DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS 1, 2, 3 E 4	135
D	FLUXOGRAMAS DOS PROGRAMAS	140
D1	ANNULUS	141
D2	VMAX	155
D3	VMAXSI	159
D4	ETA	164
D5	VELNETA	173
D6	CARTVEL	177
D7	ZERO	179
D8	REPSILON	185
D9	XSI	189
D10	RAIZ	195

LISTA DE FIGURAS

2.1	Corte longitudinal parcial de um sistema anular concêntrico	8
2.2	Tensão de cisalhamento e velocidade em um sistema anular concêntrico com $r_C^* = 0,4$	20
2.3	Perfil de velocidades para o sistema anular com $r_C^* = 0,650$	24
2.4	Perfis de velocidades para o sistema anular com $r_C^* = 0,162$	24
2.5	Perfil completo universal de velocidades e dados experimentais obtidos por Nikuradse para escoamento turbulento em tubos lisos	29
2.6	Corte longitudinal parcial de um sistema anular mostrando perfis de velocidades, parâmetros característicos e regiões interna (1) e externa (2)	30
2.7	Dados experimentais da distribuição de velocidades para a porção externa do perfil de velocidades no escoamento turbulento através de um sistema anular	32
2.8	Dados experimentais da distribuição de velocidades para a porção interna do perfil de velocidades no escoamento turbulento através de um sistema anular	33
2.9	Dados da distribuição de velocidades em sistemas anulares concêntricos obtidos das equações (2.44) e (2.45)	34

2.10	Comparação dos perfis de velocidades para os regimes laminar e turbulento em sistema anular para a mesma velocidade média	36
2.11	Concordância entre as equações (2.13) e (2.49) ..	37
2.12	Perfis de velocidades médias	38
3.1	Corte longitudinal parcial de um sistema anular excêntrico	41
3.2	Sistema de coordenadas bipolar.....	42
3.3	Sistema de coordenadas bipolar; $\eta = \text{constante}$..	43
3.4	Coordenadas ξ	44
3.5	Sistema de coordenadas bipolar; $\xi = \text{constante}$..	45
3.6	Geometria do sistema anular excêntrico	47
3.7	Representação do sistema anular excêntrico	50
3.8	Representação do sistema anular excêntrico	51
3.9	Sistema de coordenadas definido pela declaração WINDOW	51
3.10	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	58
3.11	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	58
3.12	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	59
3.13	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	59

3.14	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	60
3.15	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	60
3.16	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .	61
3.17	Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ	66
3.18	Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ	66
3.19	Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ	67
3.20	Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ	67
3.21	Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ	68
3.22	Mapa tridimensional	69
3.23	Mapa tridimensional	69
3.24	Mapa tridimensional	70
3.25	Mapa tridimensional	70
3.26	Razão das vazões nos sistemas anulares excêntricos e concêntricos em função de r^* , tendo ε como parâmetro	72

4.1	Sistema de coordenadas bipolar; $\eta = \text{constante}$..	78
4.2	Potência de um ponto P em relação a uma circunferência	79
4.3	Pontos inversos, P e P'	81
4.4	Pontos e seus correspondentes pela inversão	82
4.5	Pontos e seus correspondentes pela inversão	82
4.6	Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $r^2/p > 1$	83
4.7	Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $0 < r^2/p < 1$	83
4.8	Inversão de uma circunferência	84
4.9	Equivalência entre as coordenadas η , ξ , sob a inversão com centro A'	88
4.10	Curvas de nível que representam a soma dos módulos das equações (4.22) igual a um valor constante Y_{fix} . $Y_{fix} = 0,0001$ (a); $0,0005$ (b); $0,0010$ (c); $0,0025$ (d); $0,0050$ (e); $0,0100$ (f); $0,0250$ (g); $0,0500$ (h); $0,1000$ (i) ..	91 e 109
4.11	Região de aplicabilidade da técnica da inversão (área não hachurada)	91
4.12	L.G. das velocidades máximas em um anular excêntrico	93
4.13	Inversão de uma linha de isovelocidade	95

4.14	Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento	99
4.15	Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento	99
4.16	Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento	100
4.17	Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966)	100
4.18	Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento	101
4.19	Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966)	101
4.20	Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento	102
4.21	Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966)	102
4.22	Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966)	103
4.23	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.	105
4.24	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar obtido pela técnica da inversão	106
4.25	Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.	106

4.26	Mapas de isovelocidades apresentando o afastamento das semicircunferências η (tracejadas) e $\eta_{\max}$ (linha cheia) obtida pela inversão	108
4.27	Mapa de isovelocidades destacando-se as semicircunferências (tracejadas), que delimitam a faixa onde está o L.G. das $v_{z,\max}$ e a (pontilhada) obtida pela técnica da inversão ...	112
1	Pontos inversos, P e P'	135
2	Pontos e seus correspondentes pela inversão	136
3	Pontos e seus correspondentes pela inversão	137
4	Inversa de uma circunferência.Razão de homotetia $r^2/p > 1$	138
5	Inversa de uma circunferência.Razão de homotetia $0 < r^2/p < 1$	138

LISTA DE TABELAS

2.1. Distribuição da tensão de cisalhamento e velocidade em um sistema anular com $r_C^* = 0,4$	20
2.2. Redução percentual da vazão através de sistemas anulares	23
3.1. Resultados da aplicação do algoritmo "VMAXSI" ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\varepsilon = 0,3$..	63
3.2. Resultados da aplicação do algoritmo "ETA", para quatro valores de velocidade, ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\varepsilon = 0,3$	64
4.1. Resultados da aplicação dos algoritmos "VMAX" e "VMAXSI" ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\varepsilon = 0,6$	111

LISTA DE SÍMBOLOS

- a = abscissa do polo em $\eta = \infty$
 A_n = constante, dada pela equação (3.25d)
 B_n = constante, dada pela equação (3.25e)
 d = abscissa do centro da circunferência inversa
 E = constante, dada pela equação (3.25c)
 e = excentricidade, definida pela equação (3.13)
 F = constante, dada pela equação (3.25b)
 F_i = componente i -ésima da força de corpo por unidade de volume, $i = 1, 2, 3$
 h_i = fatores de escala
 K = constante, definida pela equação (2.6)
 p = pressão
 $\mathcal{P}$ = potência de um ponto em relação a uma circunferência
 Q = vazão volumétrica
 q_i = coordenadas curvilíneas genéricas
 R = raio da circunferência de inversão
 $\mathcal{R}$ = redução de vazão

r = raio

r^* = razão dos raios

Re_y = número de Reynolds

$\bar{u}$ = valor médio (temporal) da velocidade

u^* = velocidade de atrito

u_i = componente da velocidade na direção i

u^+ = velocidade adimensional ($= \bar{u}/u^*$)

$\vec{V}$ = velocidade

v^* = velocidade máxima no eixo de simetria ($\xi = 0$)

v_z = velocidade axial

x, y, z = coordenadas cartesianas

y^+ = distância adimensional da parede

WD = janela, definida pelo algoritmo "ANNULUS" em função dos parâmetros r_e^* e ϵ

Letras Gregas

α = abscissa do centro do tubo interno, definida pela equação (3.11)

β = abscissa do centro do tubo externo, definida pela equação (3.12)

γ = função, definida pela equação (2.14)

ε = razão de excentricidade, definida pela equação (3.15)

ζ = valor experimental de $(r_{C_0}^2 - r_{C,\max}^2)$

η, ξ = coordenadas bipolares

μ = viscosidade dinâmica

ν = viscosidade cinemática

ρ = massa específica

τ = tensão de cisalhamento

τ_0 = tensão de cisalhamento na parede

ψ = valor calculado de $(r_{C_0}^2 - r_{C,\max}^2)$

Sub-índices

1 = região interna do escoamento

2 = região externa do escoamento

c = sistema anular concêntrico

e = exc = sistema anular excêntrico

fix = fixado num valor constante

i = tubo interno

max = máxima

o = tubo externo

Símbolos Matemáticos

$\equiv$ é (por definição) identicamente igual a

$\sim$ semelhante

$\langle \rangle$ média sobre uma secção reta do escoamento

$\frac{D}{DT}$ = derivada substancial

∇^2 = Laplaciano

RESUMO

Título: Escoamentos em Sistemas Anulares: Mapas de Velocidades.

Autor: Edson José Vasques

Orientador: Carlos Alberto Gasparetto

O presente trabalho é um estudo sobre os escoamentos anulares, onde se destacam os mapas de velocidades para os sistemas excêntricos. Estes mapas foram obtidos através de: (i) algoritmos que foram desenvolvidos utilizando as soluções de SNYDER & GOLDSTEIN (1965) para o regime laminar e (ii) da técnica da inversão geométrica como apresentada por ÖZGEN & TOSUN (1987) para os escoamentos laminares e turbulentos. Esta técnica transforma um sistema anular excêntrico em um sistema concêntrico, permitindo estender os poucos pontos disponíveis, experimentais ou de soluções analíticas, para abranger praticamente toda a área da secção transversal do escoamento. Foram utilizados como base de referência para o caso turbulento os resultados experimentais de JONSSON & SPARROW (1966). Dez sistemas anulares excêntricos foram selecionados. Cinco para cada regime de escoamento. No regime laminar os sistemas tiveram seus parâmetros de definição, razão dos raios, r_e^* , e razão de excentricidade, ϵ , nos intervalos, $0,281 \leq r_e^* \leq 2/3$ e $0,25 \leq \epsilon \leq 1$. No turbulento os intervalos foram: $0,281 \leq r_e^* \leq 0,75$ e $0,6 \leq \epsilon \leq 1$. Este estudo considera também o domínio de aplicabilidade da técnica da inversão, definindo uma estratégia que se pode adotar, para que, mesmo os sistemas cujos parâmetros r_e^* e ϵ estejam situados fora do referido domínio, possam também ser objetos de sua aplicabilidade, apresentando resultados que sejam uma razoável aproximação da realidade física.

Palavras-chave: 1. Escoamento laminar; 2. Escoamento turbulento; 3. Sistemas anulares; 4. Inversão Geométrica; 5. Mapas de velocidades.

SUMMARY

Title: Flows in Annuli Systems: Velocity Maps.

Author: Edson José Vasques

Adviser: Carlos Alberto Gasparetto

This work deals with annular flows in concentric and eccentric systems. For the latter, we highlight velocity maps. These maps were obtained from: (i) algorithms created by us, based on the SNYDER & GOLDSTEIN (1965) solutions for the laminar flow case and (ii) the geometric inversion technique as presented by ÖZGEN & TOSUN (1987) for laminar and turbulent flows. The latter transforms an eccentric annulus system into a concentric system allowing thereafter to probe the complete flow area through a few available points which can be obtained either experimentally or via analytic solutions. We took JONSSON & SPARROW (1966)'s experimental data for velocities as starting point for our calculations for the turbulent case. Ten eccentric annuli systems were selected, five for each flow regime. For laminar case, the system's parameters are in the domain $0,281 \leq r_e^* \leq 2/3$, $0,25 \leq \epsilon \leq 1$, where r_e^* is defined as the radius ratio and ϵ as the eccentricity ratio. For the turbulent flow the parameters are in the region $0,281 \leq r_e^* \leq 0,75$ and $0,6 \leq \epsilon \leq 1$. Both parameters completely characterize our systems. Besides mapping the velocity field we discuss the region of applicability for the inversion technique. For systems with parameters beyond this applicability region we present solutions using the same technique which yield reasonable results when compared to the real systems.

Key words: 1. Laminar flow; 2. Turbulent flow; 3. Annuli systems; 4. Geometric inversion; 5. Velocity maps.

CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

Constituem contribuições originais do presente trabalho o desenvolvimento de algoritmos que permitem:

- 1º.) obter a representação bidimensional de sistemas anulares excêntricos para quaisquer valores de razão dos raios, r_e^* , e razão de excentricidade, ϵ ;
- 2º.) obter, para o caso dos escoamentos laminares nos sistemas excêntricos, (i) mapas de isovelocidades e (ii) todos os dados necessários à aplicação dos "softwares" GRAPHER e SURFER, utilizados na obtenção das distribuições de velocidade de uma parede a outra, para qualquer ângulo de varredura, e mapas tridimensionais de velocidade;
- 3º.) implementar a técnica de inversão geométrica aos escoamentos anulares excêntricos, tanto para o caso laminar como o turbulento, e
- 4º.) estudar a região de aplicabilidade da técnica da inversão, considerando em especial, a estratégia que se deve adotar, para que os sistemas cujos parâmetros de definição, r_e^* e ϵ , estejam situados fora da referida região, possam mesmo assim, serem objetos de aplicação da citada técnica, apresentando resultados razoáveis quando comparados aos apresentados pelos sistemas reais.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em 1890, M.Maurice Couette publicou em Paris sua tese onde descrevia e discutia o arranjo experimental utilizado no estudo da viscosidade de fluidos. O sistema experimental era constituído por um par de cilindros, sendo o externo sujeito a rotação e o interno suspenso por um fio com constante de torção conhecida. A necessidade de estimar os erros nas medidas de viscosidade, causados pelo desalinhamento do cilindro suspenso, faz desse o primeiro trabalho a considerar o problema do cilindro excêntrico.

O escoamento em sistemas anulares excêntricos constitui uma importante classe de problemas e encontra-se presente em um número cada vez maior de aplicações na Engenharia, tais como:

- ▶ perfuração e produção de petróleo e gás natural;
- ▶ sistemas térmicos envolvendo extrusão;
- ▶ trocadores de calor de tubos duplos;
- ▶ transferência de calor por convecção natural e
- ▶ lubrificação em mancais.

O interesse por tais escoamentos, à parte das aplicações, foi motivado pelo menos por dois fatores distintos. Primeiro, pelo surpreendente resultado teórico relativo à considerável queda de pressão, mesmo quando o tubo interno do sistema anular concêntrico é o equivalente a um fio de raio aparentemente desprezível. Em segundo lugar, por ser um protótipo dos escoamentos onde a existência e combinação de duas camadas limites diferentes, revela perfis de velocidade, tensões de cisalhamento, fatores de atrito e grandezas de turbulência, próprios para cada uma das distintas regiões do referido escoamento. Pode-se ressaltar ainda, que o escoamento em tubos e o escoamento entre placas planas paralelas, são casos limites do escoamento anular.

Os primeiros trabalhos acerca dos escoamentos anulares foram em sua maioria experimentais e surgiram da necessidade de se comprovar os resultados teóricos. Dentre esses, destacam-se:

- ▶ determinação do fator de atrito por ATHERTON (1926) ;
- ▶ estudo realizado por LEA & TADROS (1931) evidenciando a divergência entre as previsões teóricas e os dados experimentais relativos à queda de pressão em função de diferentes raios do tubo interno e
- ▶ primeiro estudo teórico e experimental utilizando como modelo para o sistema anular excêntrico a fenda de altura variável, apresentado por TAO & DONOVAN (1955) .

Quanto às aplicações, os escoamentos em sistemas anulares excêntricos são importantes quando ocorrem em equipamentos para os quais foram projetados, em função de determinada característica desejável, como por exemplo, o aumento da vazão devido a uma maior excentricidade e também, quando da necessidade de se prever danos se o desalinhamento de sistemas concêntricos forem causa de possíveis problemas críticos. Exemplos deste segundo caso são as significativas variações do número de Nusselt médio entre os diferentes tubos de trocadores de calor compactos, decorrentes do desalinhamento dos mesmos, causando com frequência sérios danos ao equipamento , e a indicação de que num reator nuclear, o desalinhamento de uma barra cilíndrica de combustível causado por tensões térmicas, podem levá-la à fusão localizada .

Devido à geometria assimétrica, característica dos sistemas anulares excêntricos, o estudo dos escoamentos em tais sistemas, visando obter as soluções das equações do movimento, exige um sistema de coordenadas apropriado. JEFFERY (1921) mostrou a utilidade do sistema bipolar quando o problema era bidimensional e envolvia duas circunferências de raios e distância entre os centros, arbitrários.

Utilizando esse sistema, HEYDA (1959) e SNYDER & GOLDSTEIN (1965) apresentaram soluções analíticas das equações do movimento para o escoamento laminar em sistemas anulares excêntricos. As soluções analíticas formais para o escoamento turbulento nesses sistemas, foram apresentadas por USUI & TSURUTA (1980) .

A utilização dessas soluções permite obter a distribuição de velocidades. Tal possibilidade é de grande interesse uma vez que somente o uso de algoritmos adequados pode levar às técnicas de "scale up" e "scale down" indispensáveis ao projeto dos sistemas e equipamentos, e de sua operação e controle, conforme apresentado em 1993 por VASQUES & GASPARETTO .

Em virtude da inerente complexidade geométrica dos sistemas excêntricos e da existência de uma teoria matemática, denominada *inversão*, que quando aplicada é capaz de transformar circunferências excêntricas em circunferências concêntricas, era natural uma expectativa favorável de que essa inversão poderia simplificar tais problemas. Foi com esta finalidade que NICKEL (1980) usou tal teoria ao estudar os sons harmônicos gerados em um tímpano percutido num ponto não central. Da mesma forma, foram ÖZGEN & TOSUN (1987) os primeiros a aplicá-la aos escoamentos em sistemas anulares excêntricos. Seus resultados consistem em dois mapas de isovelocidades, um para escoamento laminar e outro para turbulento.

Tendo se limitado ao uso de um único sistema anular para cada regime de escoamento, Özgen & Tosun ficaram impossibilitados de comprovar a validade da técnica da inversão para quaisquer valores dos parâmetros que especificam o sistema anular. Seus objetivos foram, mostrar como a técnica pode ser aplicada, e demonstrar a capacidade da mesma em extrapolar dados experimentais, ou provenientes de soluções analíticas. Foi um trabalho pioneiro, e como tal, descortinou um universo de possibilidades. *A exploração de algumas dessas possibilidades constituem parte do objetivo do presente trabalho. O objetivo principal é estudar esses escoamentos e obter o máximo de informações sobre o campo de velocidades.*

Assim, foram escolhidos dez sistemas anulares excêntricos. Em cinco deles considerou-se o escoamento laminar e nos outros cinco, o escoamento turbulento.

Para o caso laminar, utilizando as soluções de Snyder & Goldstein, foram desenvolvidos algoritmos que possibilitaram a obtenção dos mapas de velocidade. Para o escoamento turbulento utilizou-se como base de referência para a aplicação da técnica da inversão os resultados experimentais do trabalho de JONSSON & SPARROW (1966). Os resultados dessa inversão foram mapeados e comparados com os obtidos experimentalmente pelos citados autores. De tais comparações foi possível determinar as faixas de razão

dos raios, r_e^* , e razão de excentricidade, ε , (parâmetros que especificam o sistema anular excêntrico), apropriadas para a aplicação da referida técnica. Para sistemas que tenham seus parâmetros de definição situados fora desta região de aplicabilidade, determinou-se, qual estratégia adotar para se obter resultados que sejam uma razoável aproximação da realidade física.

Um problema que exija para sua formulação, o sistema de coordenadas bipolares, se transformado pela inversão geométrica, terá o seu correspondente em coordenadas cilíndricas. No caso dos escoamentos anulares excêntricos, a aplicação da citada técnica transforma tais escoamentos em escoamentos anulares concêntricos. Por esta razão, este tipo de escoamento será o primeiro a ser considerado, sendo-lhe dedicado todo um capítulo (2).

O escoamento em sistemas anulares excêntricos é o objeto de estudo do Capítulo 3, onde, é apresentado todo o suporte matemático necessário à sua formulação analítica, e onde também, é manifesta toda a riqueza de suas peculiaridades, ilustrada através de vários tipos de mapas.

O Capítulo 4 inicia apresentando a teoria da inversão geométrica para então aplicá-la aos escoamentos anulares excêntricos.

As conclusões, fruto deste estudo e as sugestões para possíveis trabalhos futuros estão no Capítulo 5.

CAPÍTULO 2

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES CONCÊNTRICOS

CAPÍTULO 2

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES CONCÊNTRICOS

2.1. ESCOAMENTO LAMINAR

2.1.1. Definições e perfis de velocidades

Um sistema anular concêntrico é identificado pelo parâmetro r_c^* , definido por:

$$r_c^* \equiv \frac{r_{ci}}{r_{co}}, \quad (2.1)$$

onde:

r_{ci} é o raio externo do tubo interno e

r_{co} é o raio interno do tubo externo; o sub-índice c indica que o sistema anular é concêntrico.

A figura abaixo representa tal sistema.

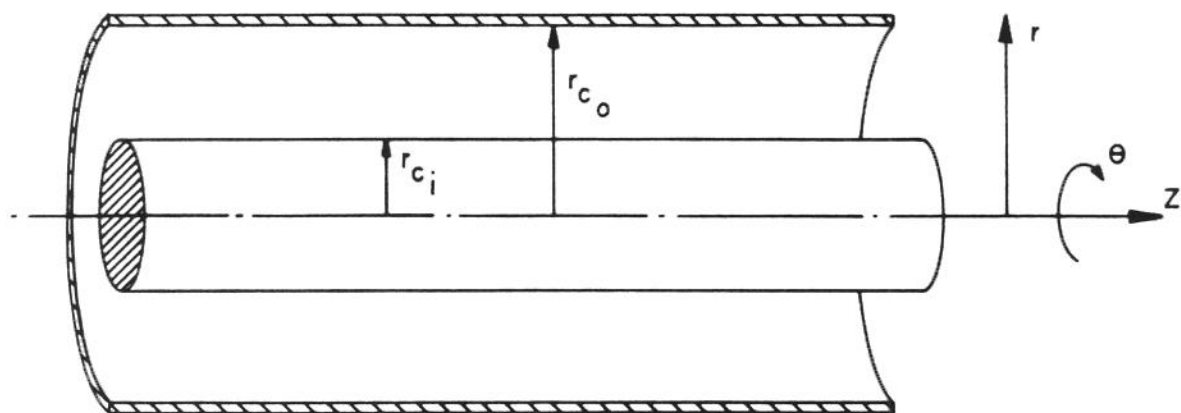


Fig. 2.1 Corte longitudinal parcial de um sistema anular concêntrico.

O escoamento laminar isotérmico de um fluido newtoniano incompressível no interior de sistemas anulares, é descrito pela equação da continuidade (balanço de massa)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.2)$$

e pelas equações de Navier-Stokes (balanço de quantidade de movimento)

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i, \quad (2.3)$$

onde:

u_i - componente da velocidade na direção i ;
 $i = 1, 2, 3$;

x_i - coordenada espacial, num sistema triortogonal;

F_i - componente i -ésima da força de corpo por unidade de volume;

ρ - massa específica;

p - pressão;

μ - viscosidade dinâmica;

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad - \text{derivada substancial}$$

e

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \quad - \text{Laplaciano,}$$

ficando subentendido que i denominado índice livre indica a componente, estando ainda implícita a convenção da soma de Einstein, quando um índice denominado mudo, é repetido uma única vez.

Dependendo dos valores de r_C^* , tem-se:

$$\begin{aligned}
 r_C^* &= 0, & \text{tubo circular,} \\
 r_C^* &= 1, & \text{placas planas e} \\
 0 < r_C^* < 1, & \text{sistema anular propriamente dito.}
 \end{aligned}$$

Para o caso particular do escoamento entre placas planas paralelas, utilizam-se coordenadas cartesianas, enquanto que, para sistemas anulares com $r_C^* \neq 1$, o sistema de coordenadas mais apropriado é o de coordenadas cilíndricas. Com o eixo do sistema anular alinhado na direção z , é considerado aqui apenas o escoamento plenamente desenvolvido. Assim, a componente v_z da velocidade, paralela ao eixo do sistema, dependerá unicamente de r . Este estudo limita-se ao caso em que os tubos estão fixos, implicando portanto em $v_\theta = 0$. Garantidas tais condições, a equação da continuidade determina que seja nula a componente radial da velocidade, isto é, $v_r = 0$.

Considera-se ainda que:

- ▶ não haja variação da pressão em cada secção transversal do sistema anular;
- ▶ a força de corpo F_i é nula e
- ▶ o fluido preenche completamente o sistema, escoando em regime permanente.

Nessas condições, as equações (2.3) reduzem-se a

$$0 = - \frac{dp}{dz} + \mu \left[\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right], \quad (2.4)$$

que numa forma compacta pode ser escrita como

$$\nabla^2 v_z = K, \quad (2.5)$$

sendo

$$K \equiv \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.6)$$

Para fluido newtoniano escoando isotermicamente na região plenamente desenvolvida, K é constante, e a equação (2.5) constitui-se numa equação de Poisson, cuja solução é

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + A \ln r + B. \quad (2.7)$$

As constantes A e B podem ser determinadas através das condições de contorno.

Seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z = 0 \\ v_z = v_{z,\max} \\ \frac{dv_z}{dr} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{em } r = r_{co} \\ \\ \text{em } r = 0 \end{array}$$

Desta forma, o perfil de velocidades se reduz a

$$v_z = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left(r_{co}^2 - r^2 \right), \quad (2.8)$$

onde dp/dz é negativo, uma vez que a pressão em um escoamento viscoso decresce com a distância.

Considerando a aderência nas paredes:

$$v_z = 0 \quad \text{em } \left\{ \begin{array}{l} r = r_{co} \\ r = r_{ci} \end{array} \right.$$

encontram-se as seguintes expressões para A e B , na equação (2.7)

$$A = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\left(r_{ci}^2 - r_{co}^2 \right)}{\ln \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)}$$

e

$$B = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\left(r_{ci}^2 \ln r_{co} - r_{co}^2 \ln r_{ci} \right)}{\ln \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)} .$$

Neste caso o perfil de velocidades é dado por

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left\{ r^2 + \left[\frac{\left(r_{ci}^2 - r_{co}^2 \right)}{\ln \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)} \right] \ln r + \frac{\left(r_{co}^2 \ln r_{ci} - r_{ci}^2 \ln r_{co} \right)}{\ln \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)} \right\} \quad (2.9)$$

Colocando-se r_{ci}^2 e r_{co}^2 em evidência e usando a relação

$$\ln \left(\frac{r}{r_{co}} \right) = \ln \frac{\left(\frac{r}{r_{ci}} \right)}{\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)} = \ln \left(\frac{r}{r_{ci}} \right) - \ln \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right) ,$$

pode-se chegar à seguinte expressão apresentada por LONGWELL (1966) :

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left[r^2 - r_{ci}^2 - \frac{r_{co}^2 - r_{ci}^2}{\ln (r_{co}/r_{ci})} \ln \left(\frac{r}{r_{ci}} \right) \right] . \quad (2.10)$$

Do ponto de vista prático (2.10) é mais conveniente do que (2.9) e será portanto adotada neste trabalho como a expressão do perfil de velocidades para escoamento laminar no interior de sistemas anulares concêntricos.

Partindo do perfil de velocidades é possível obter detalhes adicionais sobre o escoamento no sistema anular considerado.

2.1.2. Raio que localiza o Lugar Geométrico (L.G.) onde ocorre a velocidade máxima ($r_{c,max}$)

Para determinar a posição da velocidade máxima é necessário derivar (2.10) e igualar a zero, ou seja,

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left[2r - \frac{r_{cO}^2 - r_{cI}^2}{\ln(r_{cO}/r_{cI})} (1/r) \right] = 0 \quad (2.11)$$

e

$$\frac{r_{cO}^2 - r_{cI}^2}{\ln \left(\frac{r_{cO}}{r_{cI}} \right)} \frac{1}{r} = 2r,$$

assim

$$r_{c,max} = \left[\frac{r_{cO}^2 - r_{cI}^2}{2 \ln(r_{cO}/r_{cI})} \right]^{1/2}, \quad (2.12)$$

ou usando a definição (2.1)

$$r_{c,\max} = r_{c0} \left[\frac{1 - (r_c^*)^2}{2 \ln (1/r_c^*)} \right]^{1/2} \quad (2.13)$$

Fazendo

$$\frac{1 - r_c^{*2}}{2 \ln (1/r_c^*)} \equiv \gamma \quad (2.14)$$

tem-se

$$r_{c,\max} = r_{c0} \sqrt{\gamma} \quad (2.15)$$

Observa-se que $(r_{c,\max})^2$ é a média logaritmica de r_{c0}^2 e r_{ci}^2 .

Valendo-se da expressão (2.12) é possível simplificar (2.10); assim o perfil de velocidades também pode ser expresso por

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left[- \frac{dp}{dz} \right] \left[r_{ci}^2 + r_{c,\max}^2 \ln \left(\frac{r^2}{r_{ci}^2} \right) - r^2 \right] \quad (2.16)$$

2.1.3. Velocidade máxima ($v_{z,\max}$)

Obviamente

$$v_{z,\max} = v_z|_{r = r_{c,\max}}$$

e utilizando as expressões (2.10) e (2.15), tem-se

$$v_{z,\max} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left[r_{c_o}^2 \gamma - r_{c_i}^2 - (r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2) \frac{\ln \left(\frac{r_{c_o} \sqrt{\gamma}}{r_{c_i}} \right)}{\ln \left(\frac{r_{c_o}}{r_{c_i}} \right)} \right] .$$

Colocando r_{c_o} em evidência e usando (2.1) encontra-se

$$v_{z,\max} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_{c_o}^2 \left[\gamma - (r_c^*)^2 - 2\gamma \ln \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{r_c^*} \right) \right] ,$$

e lembrando que

$$(r_c^*)^2 = 1 - 2\gamma \ln \left(\frac{1}{r_c^*} \right)$$

obtem-se

$$v_{z,\max} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_{c_o}^2 [\gamma(1 - \ln \gamma) - 1] . \quad (2.17)$$

2.1.4. Velocidade média $\langle v_z \rangle$

A velocidade média é obtida da expressão

$$\langle v_z \rangle \equiv \frac{\int_{r_{c_i}}^{r_{c_o}} v_z r dr}{\int_{r_{c_i}}^{r_{c_o}} r dr} \quad (2.18)$$

onde, a menos do fator 2π , o numerador da expressão (2.18)

corresponde à vazão volumétrica:

$$Q_c = \frac{\pi}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) \left[r_{c_o}^4 - r_{c_i}^4 - \frac{(r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2)^2}{\ln (r_{c_o}/r_{c_i})} \right], \quad (2.19)$$

e o denominador a área da secção transversal livre, que neste caso vale $\pi (r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2)$.

Assim,

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) \left[\frac{r_{c_o}^2 + r_{c_i}^2}{2} - \frac{r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2}{\ln (r_{c_o}/r_{c_i})} \right]. \quad (2.20)$$

Comparando-se (2.20) com (2.12) chega-se a uma expressão mais simples para a velocidade média, ou seja,

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) (r_{c_o}^2 + r_{c_i}^2 - 2 r_{c,max}^2). \quad (2.21)$$

Quando r_{c_i} tende a zero, tanto $r_{c,max}$ [expressão (2.12)] como γ [expressão (2.15)] também tendem a zero. Neste caso limite, as relações (2.21) e (2.17) conduzem a

$$\langle v_z \rangle = \frac{v_{z,max}}{2}, \quad (2.22)$$

que é exatamente a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima para o escoamento laminar no interior de um tubo circular.

2.1.5. Posição r para uma determinada velocidade adimensional, $v_z/v_{z,max}$

A equação dos valores de r para uma determinada velocidade adimensional $v_z/v_{z,max}$ é obtida a partir da expressão (2.9) adicionando-se e subtraindo-se $r_{c0}^2 \ln r_{c0}$ à última parcela. Inverte-se também a ordem dos termos da fração no denominador, para que as parcelas fiquem com os sinais trocados. Desta forma

$$\frac{r_{c0}^2 \ln r_{ci} - r_{ci}^2 \ln r_{c0}}{\ln \left(\frac{r_{c0}}{r_{ci}} \right)} = - r_{c0}^2 + (r_{ci}^2 - r_{c0}^2) \frac{\ln r_{c0}}{\ln \left(\frac{r_{ci}}{r_{c0}} \right)},$$

e levando esta expressão para a (2.9) tem-se

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) r_{c0}^2 \left[1 - (r/r_{c0})^2 + \frac{1 - (r_{ci}/r_{c0})^2}{\ln (r_{c0}/r_{ci})} \ln (r/r_{c0}) \right] \quad (2.23)$$

Aplicando-se agora as expressões (2.1) e (2.14) na equação acima encontra-se

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{4\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) r_{c0}^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_{c0}} \right)^2 + 2 \gamma \ln \left(\frac{r}{r_{c0}} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Calculando o quociente das expressões (2.24) e (2.17), tem-se

$$\frac{v_z}{v_{z,\max}} = \frac{1 - \left(\frac{r}{r_{c0}}\right)^2 + 2 \gamma \ln \left(\frac{r}{r_{c0}}\right)}{1 - \gamma (1 - \ln \gamma)} ,$$

o que resulta na equação transcendental

$$\left(\frac{r}{r_{c0}}\right)^2 - 2 \gamma \ln \left(\frac{r}{r_{c0}}\right) = 1 - (1 - \gamma + \gamma \ln \gamma) \frac{v_z}{v_{z,\max}} , \quad (2.25)$$

onde, estabelecida a razão $v_z/v_{z,\max}$, os valores de r podem ser calculados usando-se processos iterativos.

Pode-se também, determinar a razão $v_z/\langle v_z \rangle$; para isto, basta substituir (2.15) em (2.24):

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left[- \frac{dp}{dz} \right] \left[r_{c0}^2 - r^2 + 2 r_{c,\max}^2 \ln \left(\frac{r}{r_{c0}} \right) \right] , \quad (2.26)$$

e dividir (2.26) por (2.21), obtendo-se

$$v_z = 2\langle v_z \rangle \frac{r_{c0}^2 - r^2 + 2 r_{c,\max}^2 \ln \left(\frac{r}{r_{c0}} \right)}{r_{c0}^2 + r_{ci}^2 - 2 r_{c,\max}^2} . \quad (2.27)$$

A expressão (2.27) relaciona a velocidade v_z em qualquer raio r , com a velocidade média e as dimensões do sistema anular. Como a própria velocidade média [dada por

(2.21)], é função da geometria do sistema, pode-se concluir que v_z é função dos raios dos tubos que constituem o sistema anular, para um dado gradiente de pressão.

Quando r_{ci} tende a zero, a equação (2.27) tende a

$$v_z = 2\langle v_z \rangle \left[1 - \left(\frac{r}{r_{co}} \right)^2 \right], \quad (2.28)$$

que é exatamente a expressão do perfil de velocidades, em função da velocidade média, para escoamento laminar no interior de um tubo circular de raio r_{co} .

2.1.6. Tensão de cisalhamento

A distribuição da tensão de cisalhamento τ_{rz} , é dada pela lei da viscosidade de Newton

$$\tau_{rz} = - \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right), \quad (2.29)$$

a qual representa o fluxo viscoso da componente z da quantidade de movimento na direção radial.

Substituindo (2.11) em (2.29) tem-se:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{4} \frac{dp}{dz} \left[\frac{r_{co}^2 - r_{ci}^2}{r \ln (r_{co}/r_{ci})} - 2r \right]. \quad (2.30)$$

Outra expressão para τ_{rz} pode ser obtida, usando (2.16) em (2.29), o que resulta em:

$$\tau_{rz} = - \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \left(r - \frac{r_{c,max}^2}{r} \right). \quad (2.31)$$

Tomando como exemplo um sistema anular concêntrico, com $r_c^* = 0,4$ (sistema anular onde a relação dos raios dos tubos é $r_{c0}/r_{ci} = 2,5$) pode-se construir a Tabela 2.1 utilizando-se das expressões (2.12), (2.31), (2.16) e (2.21).

Tabela 2.1 Distribuição da Tensão de cisalhamento e velocidade em um sistema anular com $r_c^* = 0,4$

$\frac{r}{r_{ci}}$	$\frac{\tau_{rz}}{r_{ci}(-dp/dz)}$	$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle}$
1,0000	-0,9324	0,0000
1,2000	-0,5937	0,7954
1,4000	-0,3232	1,2732
1,6000	-0,0953	1,4904
1,6926	0,0000	1,5133
1,8000	0,1042	1,4836
2,0000	0,2838	1,2779
2,2000	0,4489	0,8913
2,4000	0,6032	0,3369
2,5000	0,6770	0,0000

O gráfico das referidas distribuições é apresentado na Fig. 2.2.

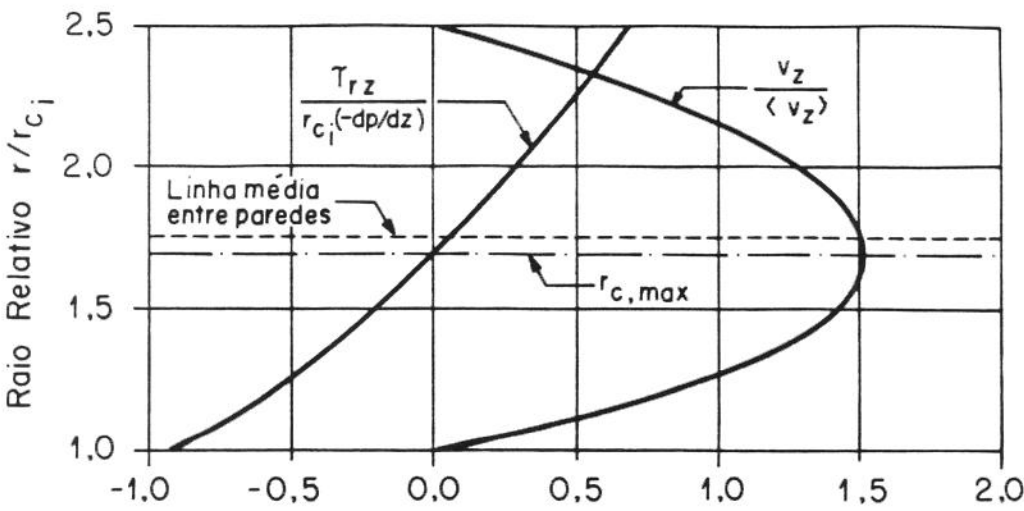


Fig. 2.2 Tensão de cisalhamento e velocidade em um sistema anular concêntrico com $r_c^* = 0,4$.

Observa-se que a tensão de cisalhamento é não linear, tendo valores diferentes nos dois contornos sólidos; nota-se também que $r_{c,max}$ onde o cisalhamento é nulo, está mais próximo do raio menor que do raio maior. É possível verificar ainda, que o perfil de velocidades não é parabólico, embora grosseiramente possa parecê-lo.

2.1.7 Relação entre vazão e r_{ci}

É bastante oportuno comparar as reduções que ocorrem na vazão através de um tubo circular, ao se introduzirem tubos internos concêntricos. A visualização deste efeito pode ser feita do seguinte modo: a equação (2.19) que expressa a vazão através de um sistema anular concêntrico é

$$Q_C = \frac{\pi}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) \left[r_{c_o}^4 - r_{c_i}^4 \frac{(r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2)^2}{\ln(r_{c_o}/r_{c_i})} \right],$$

enquanto que a vazão através de um tubo circular de raio r_{c_o} na ausência do tubo interno ($r_{c_i} = 0$) é

$$Q_{r_{c_o}} = \frac{\pi}{8\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) r_{c_o}^4. \quad (2.32)$$

Usando (2.6) tem-se:

$$Q_{r_{c_o}} = - \frac{K\pi}{8} r_{c_o}^4 \quad (2.33)$$

e

$$Q_C = Q_{r_{c_o}} - \frac{K\pi}{8} \left[- r_{c_i}^4 - \frac{(r_{c_o}^2 - r_{c_i}^2)^2}{\ln(r_{c_o}/r_{c_i})} \right].$$

Assim, a razão será expressa por

$$\frac{Q_C}{Q_{r_{c_0}}} = 1 - \frac{K\pi}{8Q_{r_{c_0}}} \left[-r_{c_i}^4 - \frac{(r_{c_0}^2 - r_{c_i}^2)^2}{\ln(r_{c_0}/r_{c_i})} \right], \quad (2.34)$$

estando implícita a igualdade dos gradientes de pressão em ambas as situações.

Substituindo K e $Q_{r_{c_0}}$ das expressões (2.6) e (2.33) em (2.34), encontra-se:

$$\frac{Q_C}{Q_{r_{c_0}}} = 1 - \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^4 - \frac{1}{\ln(r_{c_0}/r_{c_i})} \left[1 + \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^4 - 2 \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^2 \right], \quad (2.35)$$

e fazendo

$$\left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^4 + \left[2 \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^2 - \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right)^4 - 1 \right] \left[\ln \left(\frac{r_{c_i}}{r_{c_0}} \right) \right]^{-1} \equiv \mathcal{R}$$

(2.35) torna-se

$$\frac{Q_C}{Q_{r_{c_0}}} = 1 - \mathcal{R}. \quad (2.36)$$

A Tabela 2.2 apresenta a redução percentual da vazão através de sistemas anulares quando comparada com a vazão através do tubo para $r_{c_i} = 0$, mantido o mesmo gradiente de pressão.

Tabela 2.2 Redução percentual da vazão através de sistemas anulares

r_{c0}/r_{ci}	2	4	5	10	50	100	500	1000
Redução %	87,4	63,8	57,4	42,6	25,5	21,7	16,1	14,5

Uma situação bastante surpreendente evidenciada na Tabela 2.2 é a de que um fio com somente 1/1000 do diâmetro do tubo possa reduzir a vazão em 14,5%. Deve-se entretanto ressaltar que tais resultados são absolutamente teóricos. Experimentalmente LEA & TADROS (1931) relatam que para um sistema anular concêntrico com $r_c^* = 0,5$ os resultados concordam razoavelmente bem com a teoria, enquanto que para $r_c^* = 0,185$, a vazão observada excedia a teórica em 70%, e que para tubos internos menores que este, a discrepância podia ser ainda maior.

2.1.8. Resultados experimentais reportados na literatura. Domínio de validade das equações em função do número de Reynolds.

O número de dados experimentais encontrados na literatura sobre perfis de velocidade laminar em sistemas anulares é bastante reduzido.

ROTHFUS, MONRAD & SENEAL (1950) estudaram o escoamento de ar em dois sistemas anulares, para $r_c^* = 0,650$ e $r_c^* = 0,162$. Obtiveram para o regime laminar os pontos indicados nas Figs. 2.3 e 2.4 respectivamente, enquanto as curvas contínuas, correspondem aos valores teóricos relativos à equação (2.27).

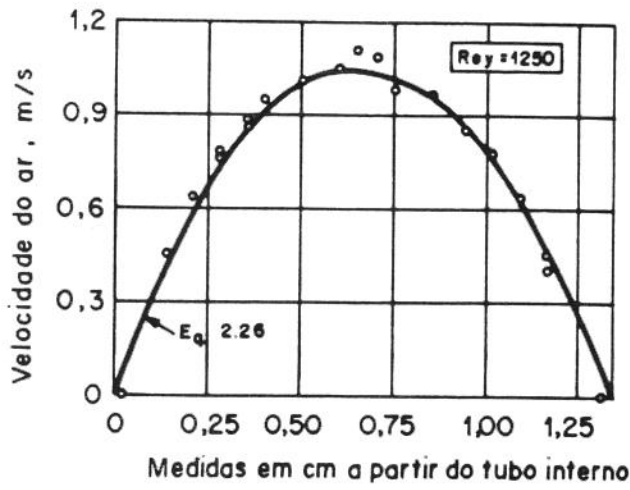


Fig. 2.3 Perfil de velocidades para o sistema anular com $r_c^* = 0,650$. Extraído de Rothfus, Monrad & Senecal (1950) .

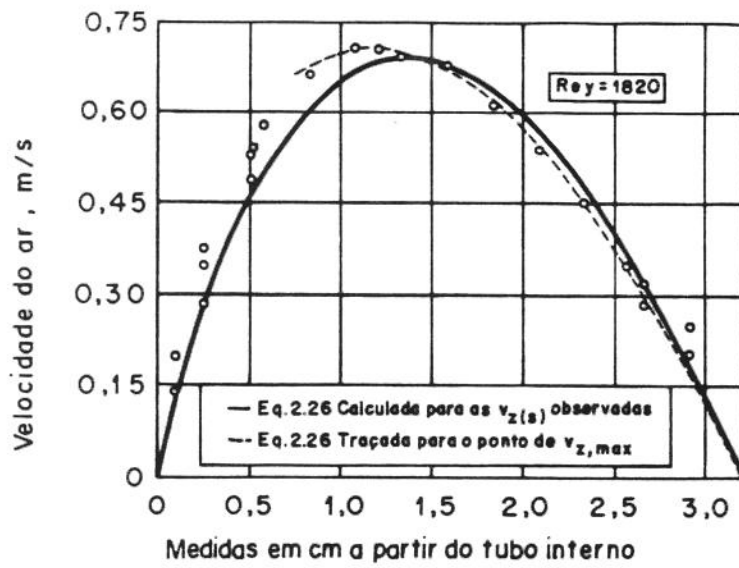


Fig. 2.4 Perfis de velocidades para o sistema anular com $r_c^* = 0,162$. Extraído de Rothfus, Monrad & Senecal (1950) .

Uma observação atenta das Figs. 2.3 e 2.4 revela, que para o sistema anular $r_C^* = 0,650$, os dados experimentais e os valores teóricos estão em concordância, enquanto, para o sistema $r_C^* = 0,162$, nem o perfil, nem o valor teórico de $r_{c,max}$ mostram boa correlação.

Outro trabalho experimental que merece destaque foi realizado por PRENGLE & ROTHFUS (1955), os quais observaram o comportamento de filamentos de corantes utilizados como traçadores injetados no escoamento isotérmico de água através de cinco sistemas anulares concêntricos. Tais experimentos indicaram que os perfis de velocidade laminar evidenciavam boa concordância com a equação (2.27) até número de Reynolds na faixa de 700, que para o caso de sistemas anulares concêntricos é definido por

$$Rey \equiv \frac{2 (r_{C_0}^2 - r_{c,max}^2)}{r_{C_0}} \frac{\langle v_z \rangle \rho}{\mu}, \quad (2.37)$$

onde

$$\frac{r_{C_0}^2 - r_{c,max}^2}{r_{C_0}}$$

corresponde ao raio hidráulico da porção de fluido situada entre $r_{c,max}$ e r_{C_0} . Acima de $Rey = 700$ o raio onde ocorre a velocidade máxima não mais concorda com aquele predito pela equação (2.12).

Verificaram também que a partir de $Rey > 700$ o escoamento laminar estável exibia movimento sinuoso antes da transição para turbulento, a qual ocorria em torno de $Rey = 2000$.

Finalmente pode-se mencionar o artigo de ROTHFUS et alii (1955) que mostra a relação entre $r_{c,max}$ experimental e teórico [equação (2.12)] considerando

diferentes valores do número de Reynolds. Os resultados a seguir expressam tal domínio de validade:

para

$$900 \leq \text{Rey} < 1500$$

$$r_{c,\max} \text{ experimental} < r_{c,\max} \text{ teórico},$$

para

$$\text{Rey} = 1500$$

$$r_{c,\max} \text{ experimental} = r_{c,\max} \text{ teórico},$$

para

$$1700 < \text{Rey} < 9000$$

$$r_{c,\max} \text{ experimental} > r_{c,\max} \text{ teórico}.$$

A informação quantitativa de tais diferenças foi obtida pelos autores ao definirem

$$\zeta \equiv \text{valor experimental de } (r_{C_0}^2 - r_{c,\max}^2)$$

e

$$\psi \equiv \text{valor calculado de } (r_{C_0}^2 - r_{c,\max}^2)$$

Assim, valores extremos que encontraram, independentemente de r_C^* , foram

$$\zeta/\psi = 1,12 \quad \text{para} \quad \text{Rey} = 900$$

$$\zeta/\psi = 0,86 \quad \text{para} \quad \text{Rey} = 2500$$

e obviamente,

$$\zeta/\psi = 1, \quad \text{para} \quad \text{Rey} = 1500.$$

Desta forma, fica evidente a necessidade de se conferir o número de Reynolds antes da utilização das equações, para se garantir a validade das soluções.

2.2. ESCOAMENTO TURBULENTO

2.2.1. Perfis de velocidades para tubos lisos

Para o escoamento turbulento, as equações de conservação da massa [equações (2.2)], e da quantidade de movimento [equações (2.3)], não podem ser resolvidas analiticamente, como no caso laminar. Tal fato decorre da natureza aleatória e não estacionária da turbulência.

Na modelagem clássica do regime turbulento utilizam-se:

- ▶ a decomposição de Reynolds [que iguala as variáveis instantâneas, velocidade ($\vec{V}$) e pressão (p) à soma de um valor médio e um valor flutuante:

$$\vec{V} \equiv \bar{\vec{V}} + \vec{V}' \quad ; \quad p \equiv \bar{p} + p' .$$

$\bar{\vec{V}}$ e $\bar{p}$ representam os valores médios das componentes instantâneas e $\vec{V}'$ e p' as componentes flutuantes];

- ▶ a definição de média [dada em relação a uma variável ϕ num ponto fixo do espaço por:

$$\bar{\phi} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi \, dt ,$$

onde Δt é o intervalo de tempo no qual é tomada a média];

- ▶ a regras de operação envolvendo as médias;
- ▶ hipóteses empíricas e
- ▶ dados experimentais.

A aplicação destes itens possibilita:

- 1º.) transformar as equações de Navier-Stokes [equações (2.3)] nas equações de Reynolds para quantidade de movimento [cuja forma, para o caso de um escoamento unidimensional na região plenamente desenvolvida com $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = u$ e $u_2 = v$ é

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) ,$$

onde o termo $-\rho \overline{u'v'}$ constitui a tensão de Reynolds];

- 2º.) relacionar as tensões de Reynolds com o gradiente de velocidade média local, e
- 3º.) obter os perfis de velocidade para o escoamento turbulento, utilizando os resultados das operações indicadas em 1º.) e 2º.) e dos dados experimentais.

A Fig. 2.5 mostra dados experimentais do escoamento turbulento no interior de tubos lisos obtidos por NIKURADSE (1932) , e as respectivas curvas para cada uma das três regiões em que o campo do escoamento costuma ser dividido. Os perfis são expressos através das grandezas u^+ e y^+ , que são funções de τ_0 (tensão de cisalhamento na parede), sendo que y^+ é também função de ν (viscosidade cinemática). Ao conjunto das três equações relativas às respectivas curvas dá-se a designação de *perfil completo universal de velocidades*.

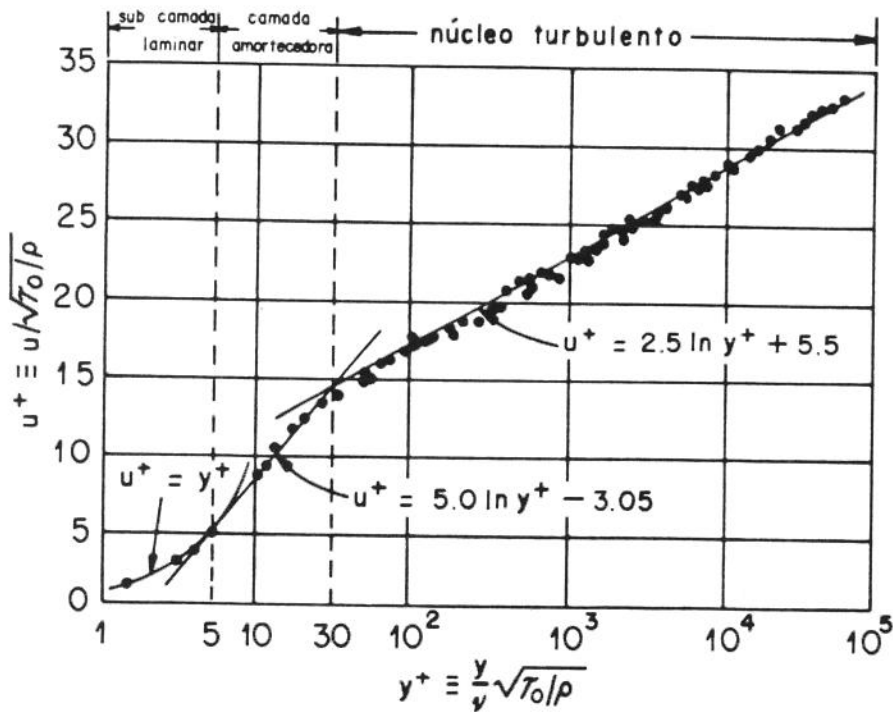


Fig. 2.5 Perfil completo universal de velocidades e dados experimentais obtidos por Nikuradse para escoamento turbulento em tubos lisos. Extraído de ÖZİŞİK (1977) .

2.2.2. Perfis de velocidades para sistemas anulares

Pelo fato do perfil de velocidades para sistemas anulares não ser simétrico [o raio que localiza o Lugar Geométrico (L.G.) onde ocorre a velocidade máxima não coincide com o raio da circunferência situada a meia distância das paredes do sistema - conforme ilustra a Fig. 2.2, pág.20], é conveniente dividi-lo em duas partes distintas:

- ▶ porção externa, que se estende da parede do tubo externo até o L.G. de velocidade máxima; região compreendida no intervalo $r_{c,max} < r \leq r_{c0}$; as grandezas físicas desta região serão denotadas com sub índice 2;
- ▶ porção interna, cuja extensão varia desde a parede do tubo interno até o L.G. de velocidade máxima;

região delimitada por $r_{c,i} \leq r < r_{c,max}$. Nesta região, as grandezas físicas serão indicadas com sub índice 1.

A figura abaixo evidencia tais domínios.

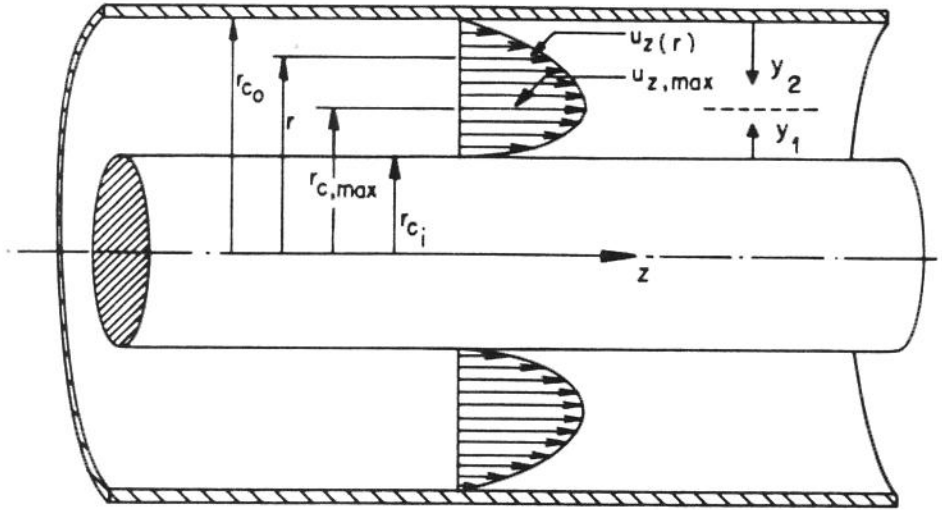


Fig. 2.6 Corte longitudinal parcial de um sistema anular mostrando perfis de velocidades, parâmetros característicos, e regiões interna (1), e externa (2).

Para esta situação definem-se:

$$u_1^+ \equiv \frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\frac{\overline{\tau_1}}{\rho}}} \equiv \frac{\overline{u_1}}{u_1^*}, \quad (2.38)$$

$$u_2^+ \equiv \frac{\overline{u_2}}{\sqrt{\frac{\overline{\tau_2}}{\rho}}} \equiv \frac{\overline{u_2}}{u_2^*}, \quad (2.39)$$

$$y_1^+ \equiv \frac{u_1^* y_1}{\nu} \quad (2.40)$$

e

$$y_2^+ \equiv \frac{u_2^* y_2}{\nu} , \quad (2.41)$$

cujos símbolos significam:

$\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ velocidades médias temporais nas regiões interna e externa, respectivamente;

τ_1 e τ_2 tensões de cisalhamento nas paredes interna e externa, respectivamente, do sistema anular;

u_1^* , u_2^* velocidades de atrito nas respectivas regiões;

y_1 distância da superfície do tubo interno, ou seja, $y_1 = r - r_{ci}$

e

y_2 distância da superfície do tubo externo, isto é, $y_2 = r_{co} - r$.

Alguns poucos estudos experimentais sobre escoamento turbulento em sistemas anulares concêntricos têm sido relatados. Os mais conhecidos são devidos a:

► ROTHFUS, MONRAD & SENEAL (1950) ;

► KNUDSEN & KATZ (1958) ;

► KAYS & LEUNG (1963) ;

► BRIGHTON & JONES (1964) e

► SINGH, NIGAN & MISHRA (1980) .

Cada um desses trabalhos apresenta uma proposta de equações para os perfis de velocidade. Para as finalidades

deste estudo, as equações mais apropriadas, são as indicadas por Knudsen & Katz, por estarem numa forma mais acabada, exigindo, portanto, um número menor de transformações para deixá-las em condições de uso.

As Figs. 2.7 e 2.8 devidas a Knudsen & Katz, apresentam resultados obtidos para escoamento de água, bem como, a curva que melhor se ajusta aos dados experimentais.

Na Fig. 2.7 u_2^+ é representado graficamente em função de y_2^+ para a região externa do perfil de velocidades. A região interna é representada na Fig. 2.8.

Para valores de y_2^+ maiores que 30 a seguinte equação representa melhor os dados de Knudsen e Katz:

$$u_2^+ = 6,1 \log y_2^+ + 3,0. \quad (2.42)$$

Para a porção interna do perfil de velocidades, a equação que possibilita o melhor ajuste dos dados da Fig. 2.8 é dada por

$$u_1^+ = 4,4 \log y_1^+ + 6,2. \quad (2.43)$$

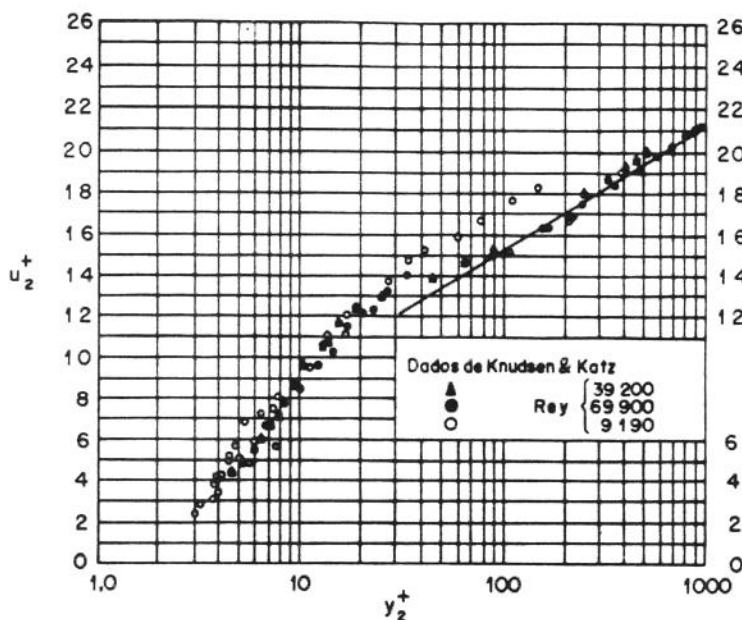


Fig. 2.7 Dados experimentais da distribuição de velocidades para a porção externa do perfil de velocidades no escoamento turbulento através de um sistema anular.

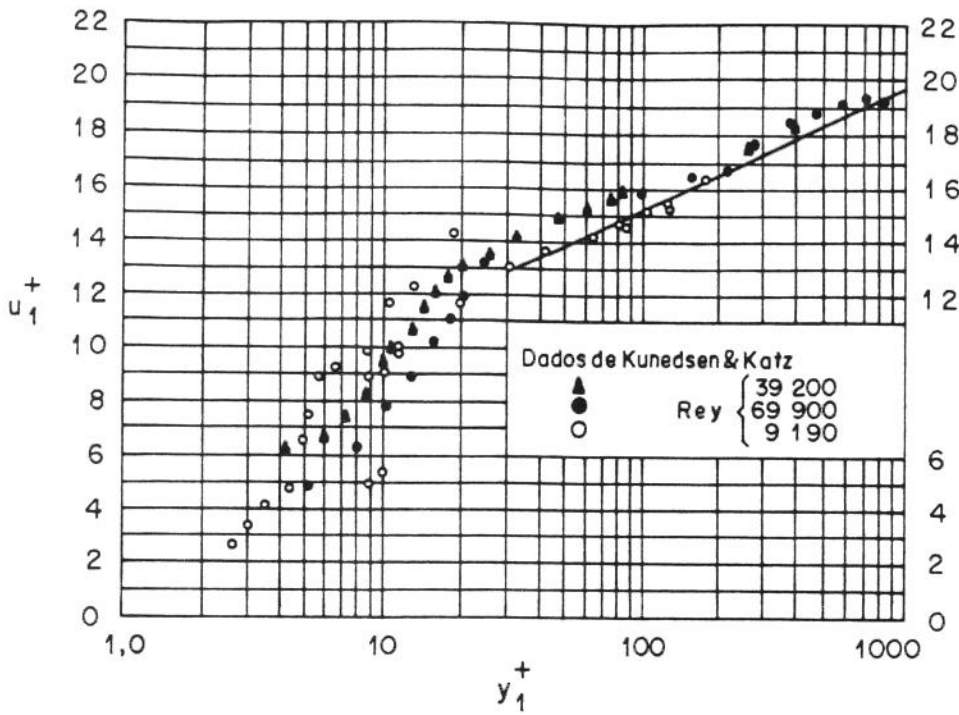


Fig. 2.8 Dados experimentais da distribuição de velocidades para a porção interna do perfil de velocidades no escoamento turbulento através de um sistema anular.

A equação (2.43) se aplica ao núcleo turbulento para valores de y_1^+ maiores que 40.

As equações (2.42) e (2.43) representam uma correlação parcial dos dados de velocidade para escoamento turbulento em sistemas anulares.

Esses mesmos dados, possibilitaram a Knudsen & Katz obter outra correlação, mostrada na Fig. 2.9, onde as velocidades, expressas pela razão $\bar{u}/\bar{u}_{\max}$, são apresentadas como função de $y/y_{\max}$, sendo $y_{\max}$ a distância do L.G. de velocidade máxima à parede.

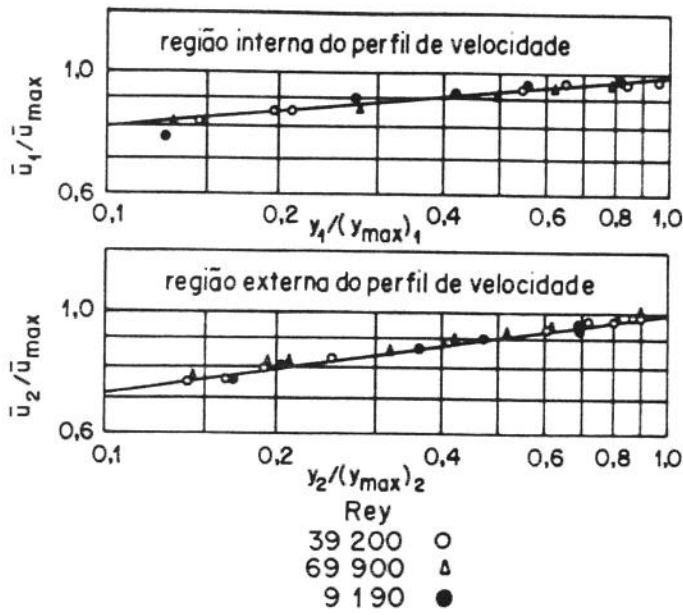


Fig. 2.9 Dados da distribuição de velocidades em sistemas anulares concêntricos obtidos das equações (2.44) e (2.45). Extraído de KNUDSEN & KATZ (1958).

As seguintes equações representam tais dados para os perfis externo e interno respectivamente:

$$\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_{\max}} = \left[\frac{y_2}{(y_{\max})_2} \right]^{0,142} \quad (2.44)$$

e

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_{\max}} = \left[\frac{y_1}{(y_{\max})_1} \right]^{0,102} \quad (2.45)$$

Da Fig. 2.6 depreendem-se as seguintes relações:

$$y_2 = r_{c0} - r ,$$

$$(y_{\max})_2 = r_{c0} - r_{c,\max}$$

e

$$y_1 = r - r_{ci}$$

$$(y_{\max})_1 = r_{c,\max} - r_{ci} .$$

Quando os valores de y_2 , $(y_{\max})_2$, y_1 e $(y_{\max})_1$ das equações (2.44) e (2.45) são substituídos pelas relações acima, tem-se as seguintes expressões para r :

$$r = r_{co} - (r_{co} - r_{c,\max}) \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\max}} \right)^{7,042} \quad \text{para } r > r_{c,\max} \quad (2.46)$$

e

$$r = r_{ci} + (r_{c,\max} - r_{ci}) \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\max}} \right)^{9,804} \quad \text{para } r < r_{c,\max} \quad (2.47)$$

dessa forma pode-se encontrar os correspondentes valores de r para uma determinada razão de velocidades, $\bar{u}/\bar{u}_{\max}$.

A equação válida para a subcamada laminar do perfil de velocidades para escoamento em tubos, apresentada na Fig. 2.5, também se aplica para os sistemas anulares, adquirindo neste caso, a forma $y_1^+ = u_1^+$ e $y_2^+ = u_2^+$, para as porções interna e externa do perfil, respectivamente. As Figs. 2.7 e 2.8 indicam que o domínio de validade das mesmas se estende até y_1^+ e y_2^+ igual a 7.

Outro aspecto do problema a ser considerado, relaciona-se ao L.G. onde ocorre a velocidade máxima.

A diferença entre perfis de velocidades para escoamento nos regimes laminar e turbulento em sistemas anulares é evidenciada na Fig. 2.10, onde os círculos vazios representam dados experimentais do escoamento de água em um sistema anular com $r_{co} = 2,84$ cm, $r_{ci} = 0,79$ cm

e $Re_y = 9190$. Os círculos cheios representam velocidades calculadas da equação (2.27) para escoamento laminar no mesmo sistema anular e para a mesma velocidade média.

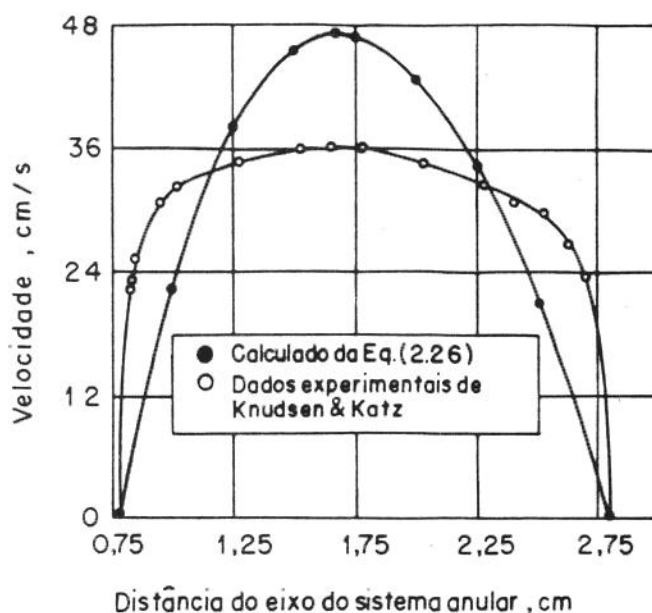


Fig. 2.10 Comparação dos perfis de velocidades para os regimes laminar e turbulento em sistema anular para a mesma velocidade média.

Nota-se que o valor de $r_{c,max}$ é praticamente o mesmo para ambas as curvas. Deve ser ressaltado que a sua determinação experimental é difícil no caso turbulento, devido ao achatamento do perfil na vizinhança do L.G. de velocidade máxima.

KAYS & LEUNG (1963) apresentam a seguinte equação, a qual determina o raio que localiza o L.G. de velocidade máxima para o escoamento turbulento em anulares concêntricos,

$$\frac{r_{c,max}/r_{c0} - r_c^*}{1 - r_{c,max}/r_{c0}} = (r_c^*)^{0,343} \quad (2.48)$$

A fim de constatar um possível desvio entre os valores

de $r_{c,max}$ obtidos para os casos laminar [equação (2.13)] e turbulento [equação (2.48)], explicitou-se $r_{c,max}$ da equação (2.48), ou seja,

$$r_{c,max} = r_{c0} \left[\frac{1 + (r_C^*)^{0,657}}{1 - (r_C^*)^{-0,343}} \right], \quad (2.49)$$

e calculou-se $r_{c,max}$ para todo o intervalo de variação de r_C^* . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 2.11.

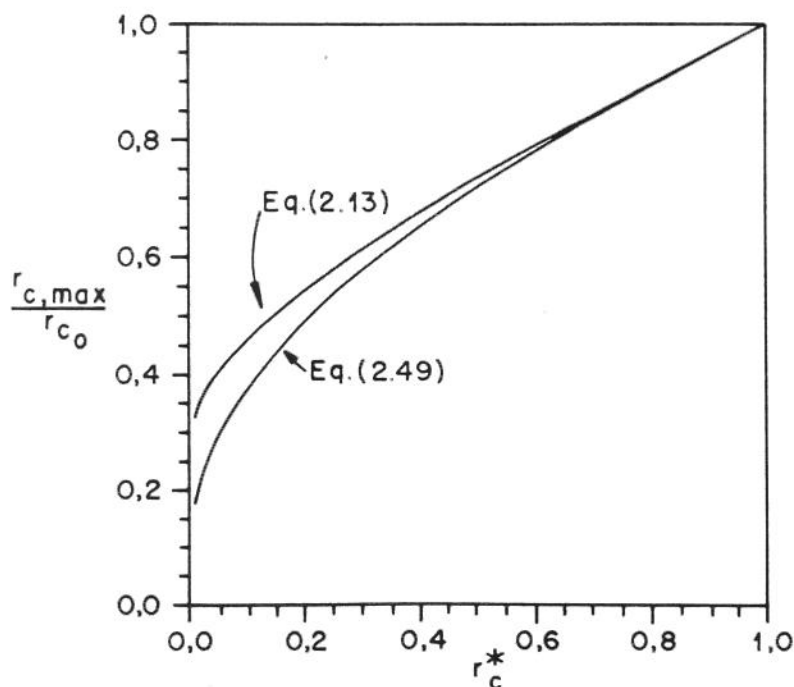


Fig. 2.11 Concordância entre as equações (2.13) e (2.49).

Nota-se que para $r_C^* > 0,4$ as equações são bastante concordantes. Valores de $r_C^* < 0,2$ implicam numa discrepância maior que 12%, e para $r_C^* < 0,1$ o desvio ultrapassa 35%.

Para o sistema anular utilizado por Knudsen & Katz ($r_C^* = 0,278$), o valor de $r_{c,max}$ fornecido pela equação de Kays & Leung para escoamento turbulento é 6,95% menor que o valor obtido pela equação (2.13) para o caso laminar, embora, de acordo com os resultados experimentais apresentados na Fig. 2.10, não se note diferença na

localização dos pontos de máximo dos referidos perfis, ressalvada a dificuldade de se medir tal posição para o caso turbulento.

Da observação da Fig. 2.11 pode-se concluir que, se as equações (2.13) e (2.49) descrevem razoavelmente bem o comportamento da posição dos pontos de velocidade máxima para os dois tipos de escoamento, então os valores de $r_{c,max}$ para os escoamentos turbulentos são menores, no máximo iguais, que os correspondentes valores de $r_{c,max}$ para os escoamentos laminares; tal conclusão está de acordo com os resultados experimentais de BRIGHTON & JONES (1964) que estudaram o escoamento turbulento de ar em quatro sistemas anulares concêntricos. A Fig. 2.12 por eles obtida, ilustra tal comportamento.

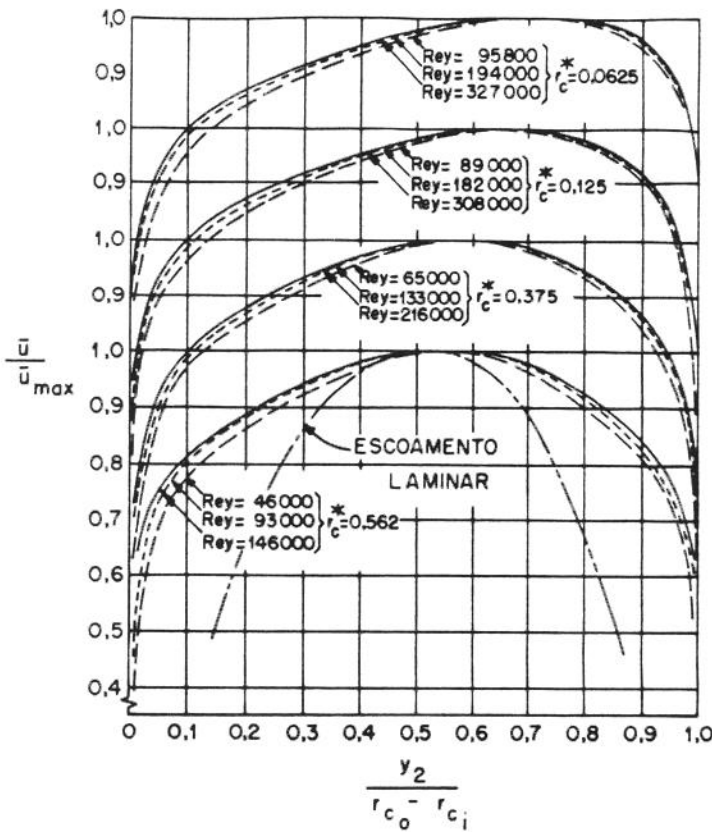


Fig. 2.12 Perfis de velocidades médias. Extraído de Brighton & Jones (1964).

Com os itens até aqui considerados neste capítulo, têm-se todas as informações sobre escoamentos laminares e turbulentos em sistemas anulares concêntricos, necessárias ao desenvolvimento do presente trabalho.

No capítulo seguinte é tratado o caso de sistemas excêntricos.

CAPÍTULO 3

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS

CAPÍTULO 3

ESCOAMENTO EM SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS

3.1. SISTEMAS DE COORDENADAS E DEFINIÇÕES

Um sistema anular excêntrico é constituído pela região compreendida entre dois cilindros circulares não concêntricos, conforme representado na figura abaixo.

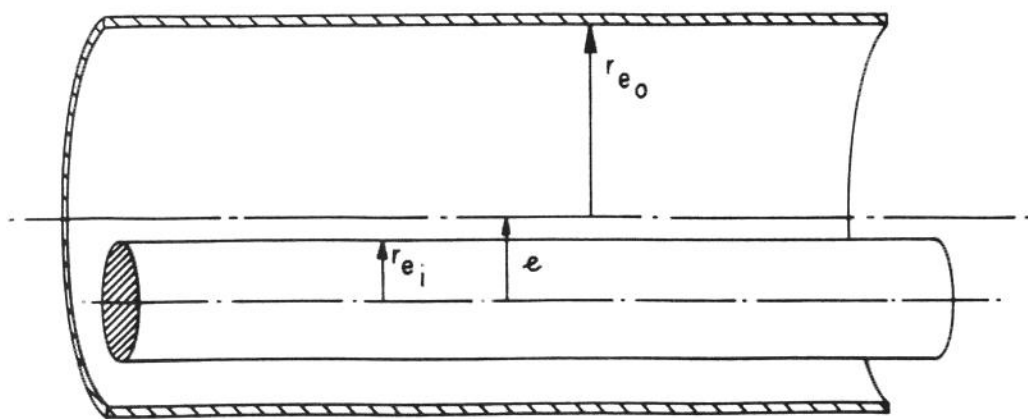


Fig. 3.1 Corte longitudinal parcial de um sistema anular excêntrico.

Devido à assimetria, coordenadas cilíndricas não são convenientes para definir este sistema. As mais apropriadas são as bipolares.

A Fig. 3.2 apresenta, para o caso bidimensional, as coordenadas bipolares relativamente ao sistema Cartesiano.

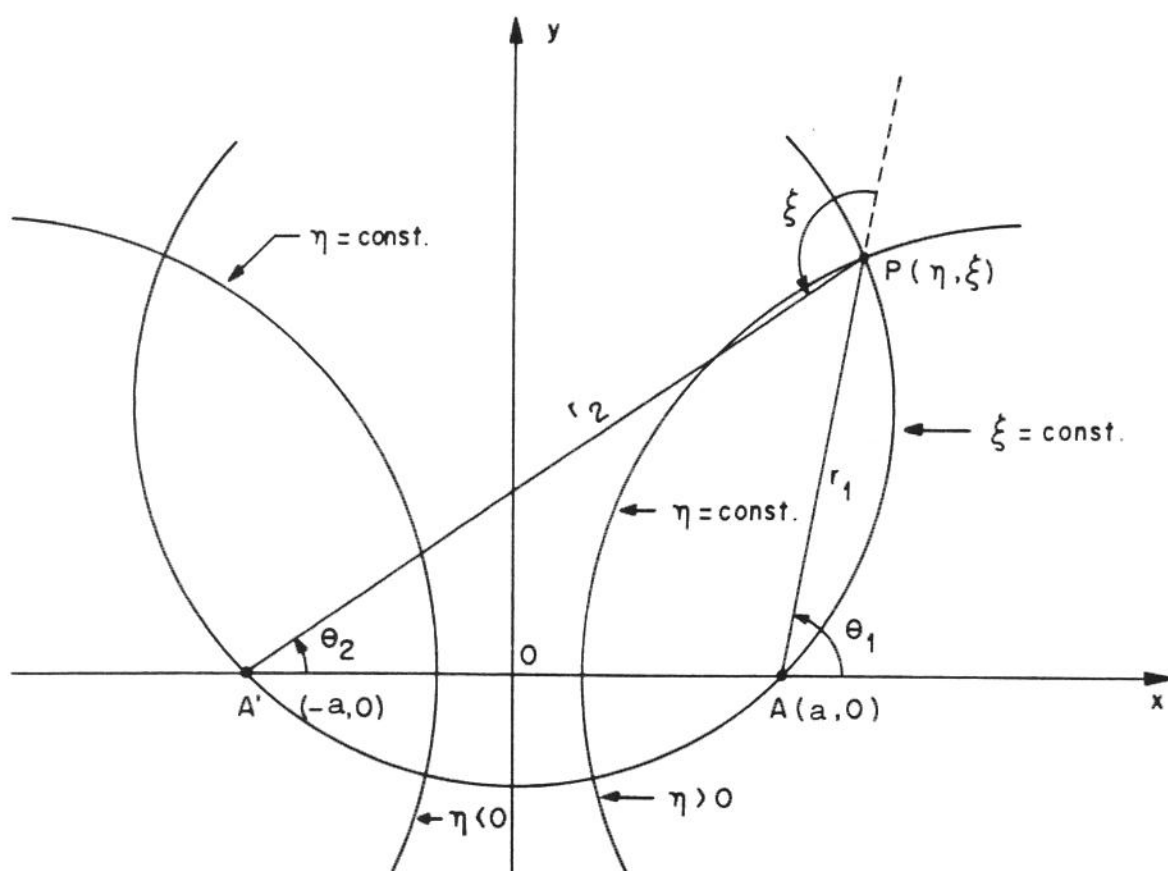


Fig. 3.2 Sistema de coordenadas bipolar.

As coordenadas bipolares de um ponto $P(\eta, \xi, z)$ são definidas por :

$$\eta \equiv \ln \frac{r_2}{r_1} \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (3.1a)$$

$$\xi \equiv \pi - (\theta_1 - \theta_2) \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi \quad (3.1b)$$

e

$$z = z \quad -\infty < z < \infty, \quad (3.1c)$$

onde P dista r_1 do polo $A(a,0)$ e r_2 do polo $A'(-a,0)$, e θ_1 e θ_2 são os ângulos que os segmentos AP e $A'P$ formam, respectivamente, com o eixo x .

Um valor η constante representa uma circunferência centrada no eixo x . Para $\eta > 0$, tal circunferência situa-se no semiplano à direita do eixo y e encerra o polo A . Circunferências à esquerda do eixo y correspondem a valores negativos de η e encerram A' . A Fig. 3.3 mostra algumas circunferências η .

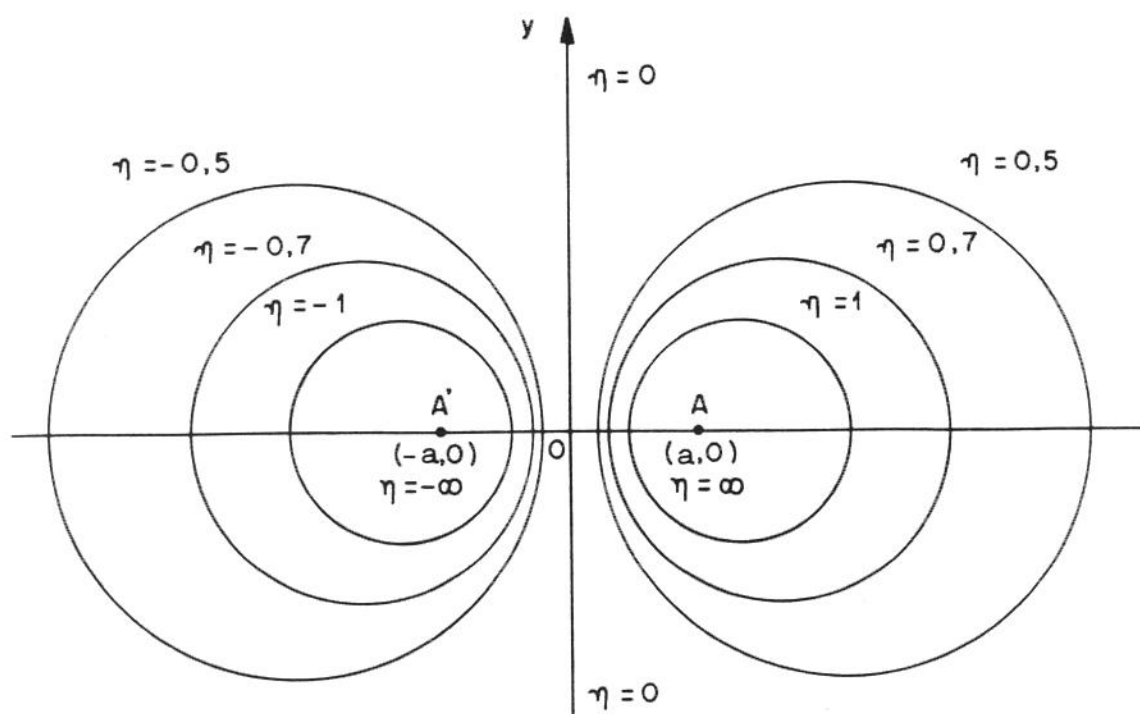


Fig. 3.3 Sistema de coordenadas bipolar ; $\eta = \text{constante}$.

Valores de ξ constantes correspondem a circunferências centradas no eixo y , ortogonais às circunferências η e passando pelos polos A e A' . Os valores de ξ para pontos situados abaixo do eixo x são π maiores que os correspondentes acima. A Fig. 3.4 indica porque ξ constante equivale ao lugar geométrico "circunferência". A propriedade relevante sendo: "ângulos inscritos num mesmo arco são congruentes".

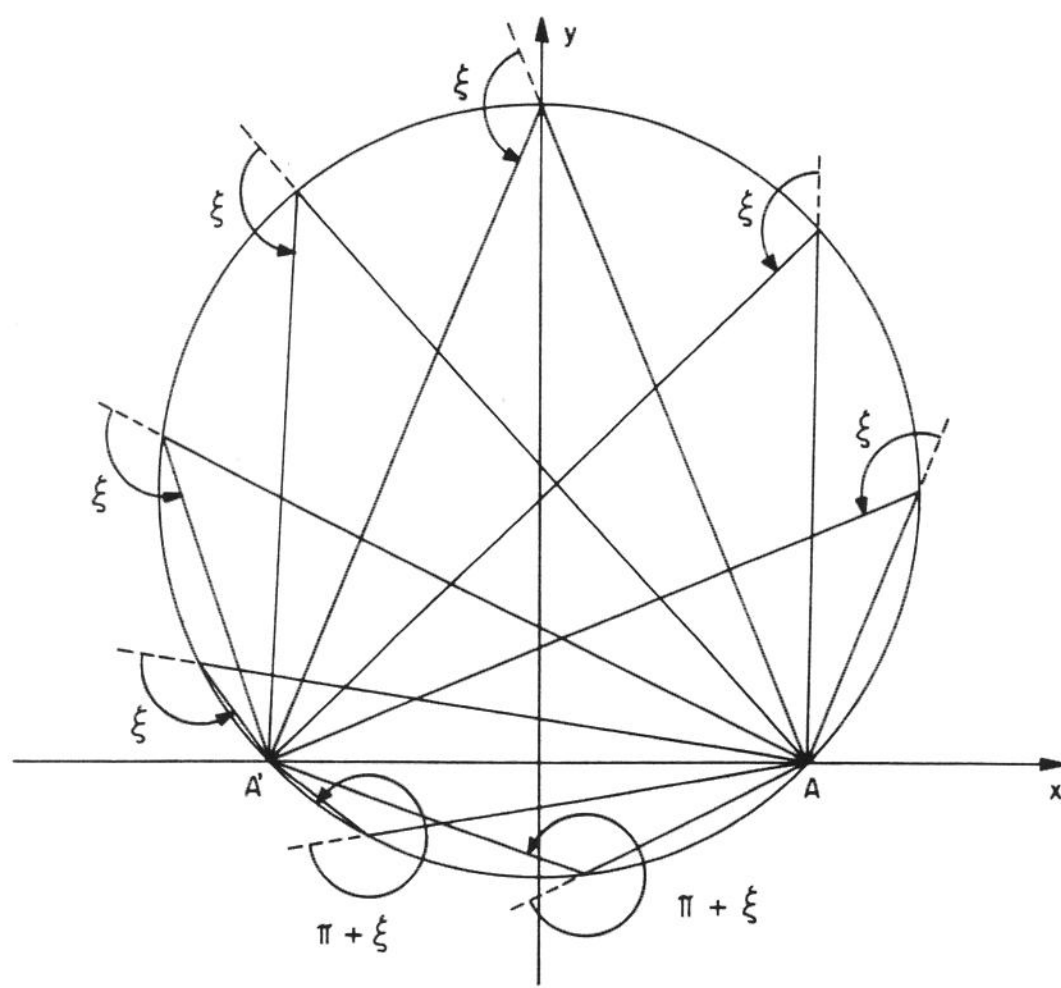


Fig. 3.4 Coordenada ξ .

Vê-se na Fig. 3.5 algumas circunferências ξ .

As equações que relacionam coordenadas cartesianas e coordenadas bipolares são :

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} , \quad (3.2)$$

$$y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} , \quad (3.3)$$

$$z = z , \quad (3.4)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} \right] , \quad (3.5)$$

e

$$\xi = \arctan \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) , \quad (3.6)$$

onde a é a abscissa do polo A .

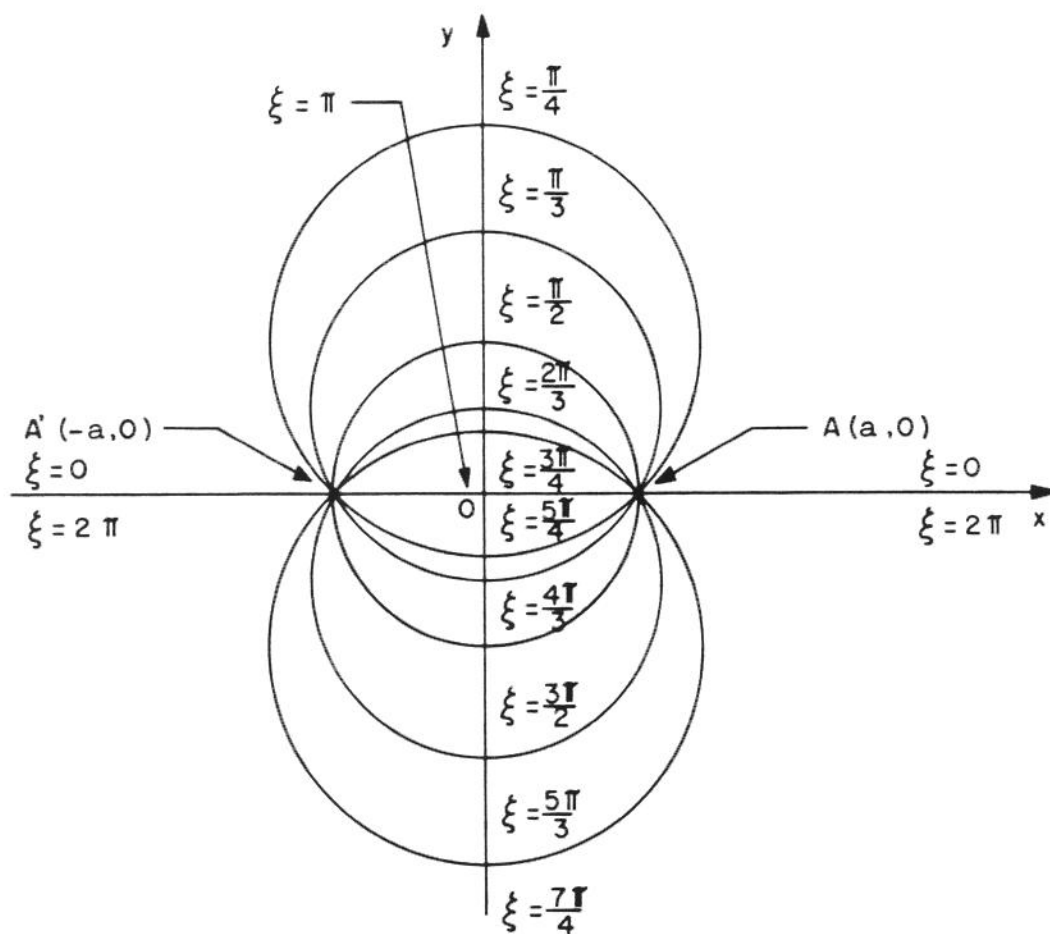


Fig. 3.5 Sistema de coordenadas bipolar ; $\xi = \text{constante}$.

Para η constante, a correspondente circunferência é dada pela equação

$$(x - a \coth \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \eta . \quad (3.7)$$

No caso de ξ constante, a equação da circunferência representada por essa coordenada é

$$x^2 + (y - a \cot \xi)^2 = a^2 \csc^2 \xi . \quad (3.8)$$

As superfícies de coordenadas identificadas pelas equações (3.7) e (3.8) são:

- ▶ cilindros circulares de raio $(a \csc \xi)$ e centro em $y = a \cot \xi$, $\xi = \text{constante}$ e $0 \leq \xi \leq 2\pi$
- ▶ cilindros circulares de raio $(a \operatorname{csch} \eta)$ e centro em $x = a \coth \eta$, $\eta = \text{constante}$ e $-\infty < \eta < +\infty$
- ▶ planos paralelos ao plano xy , $z = \text{constante}$ e $-\infty < z < \infty$

Quando $\eta \rightarrow \infty$, $\coth \eta \rightarrow 1$ e $\operatorname{csch} \eta \rightarrow 0$, e a equação (3.7) tem uma solução, $x = a$, $y = 0$.

Da mesma forma, quando $\eta \rightarrow -\infty$, uma solução é $x = -a$, $y = 0$; a circunferência degenerando para um ponto, o cilindro para uma linha.

A família de circunferências (no plano x,y) descritas pela equação (3.8) passa pelos pontos $x = a$ e $x = -a$; basta notar que $x = \pm a$, $y = 0$ são soluções da equação (3.8) para qualquer valor de ξ .

Do exposto, fica evidente a adequação do sistema de coordenadas bipolares para:

- ▶ definir um sistema anular excêntrico e
- ▶ possibilitar a descrição do campo de uma ou mais variáveis físicas em seu interior.

A geometria do sistema anular excêntrico é indicada na Fig. 3.6, onde as superfícies interna e externa do sistema são, respectivamente, η_i e η_o .

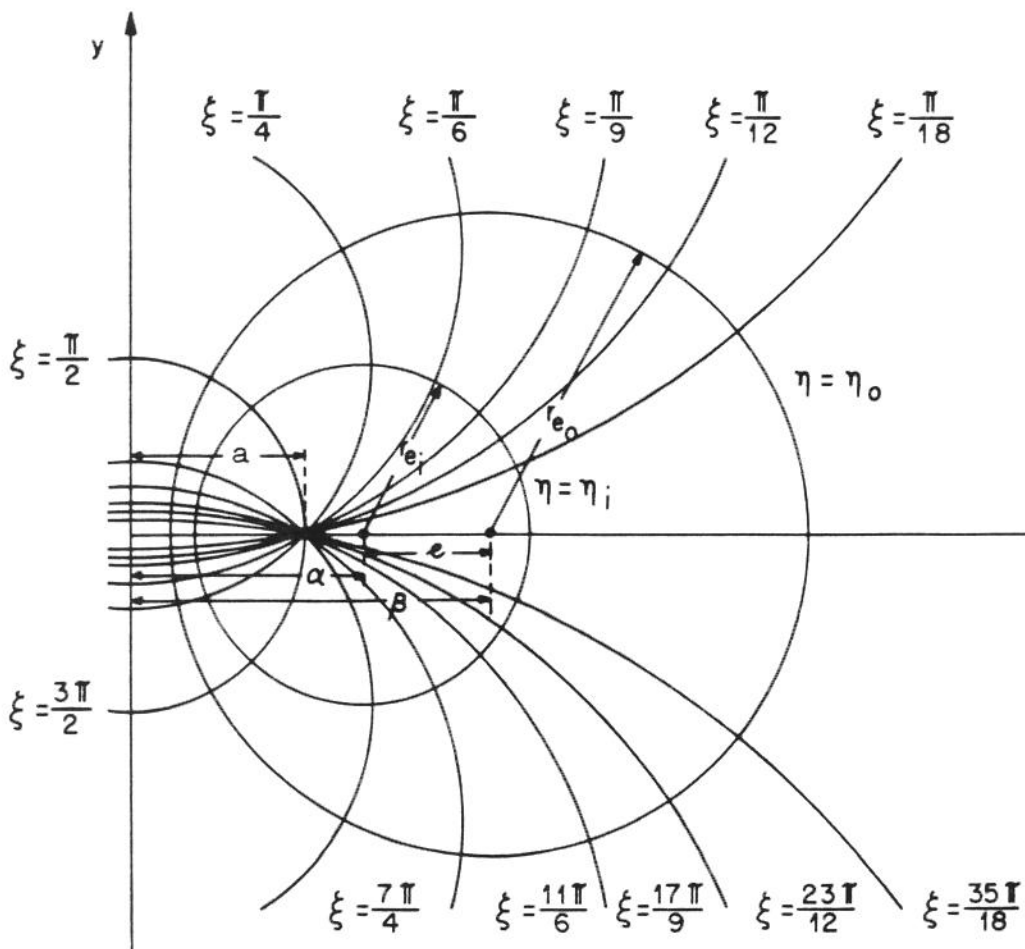


Fig. 3.6 Geometria do sistema anular excêntrico.

Da Fig. 3.6 e considerações anteriores depreendem-se as seguintes relações (onde os sub-índices e_i e e_o indicam que o sistema é excêntrico):

$$r_{e_i} = a \operatorname{csch} \eta_i, \quad (3.9)$$

$$r_{e_o} = a \operatorname{csch} \eta_o, \quad (3.10)$$

$$\alpha = a \operatorname{coth} \eta_i, \quad (3.11)$$

$$\beta = a \operatorname{coth} \eta_o, \quad (3.12)$$

$e \equiv$ distância entre os centros

e

$$e = \beta - \alpha = a (\coth \eta_0 - \coth \eta_i). \quad (3.13)$$

O sistema anular excêntrico é identificado pelos parâmetros r_e^* e ε , razão dos raios e razão de excentricidade, respectivamente. As relações que definem estes parâmetros são:

$$r_e^* \equiv \frac{r_{ei}}{r_{eo}} \quad (3.14)$$

e

$$\varepsilon \equiv \frac{e}{r_{eo} - r_{ei}}. \quad (3.15)$$

($\varepsilon = 0$ corresponde ao caso concêntrico.)

Das relações (3.9), (3.10) e (3.13) tem-se, para a razão de excentricidade,

$$\varepsilon = \frac{\coth \eta_0 - \coth \eta_i}{\operatorname{csch} \eta_0 - \operatorname{csch} \eta_i}.$$

Usando as relações exponenciais que definem as funções hiperbólicas, ε também pode ser expresso por:

$$\varepsilon = \frac{\sinh (\eta_i - \eta_0)}{\sinh \eta_i - \sinh \eta_0} \quad (3.16a)$$

ou

$$\varepsilon = \frac{\sinh \eta_i \cosh \eta_0 - \cosh \eta_i \sinh \eta_0}{\sinh \eta_i - \sinh \eta_0} . \quad (3.16b)$$

A relação $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e a definição (3.14), aplicadas a (3.16b), permitem obter as seguintes expressões:

$$\cosh \eta_0 = \frac{(1 + r_e^*) + \varepsilon^2 (1 - r_e^*)}{2 \varepsilon} \quad (3.17)$$

e

$$\cosh \eta_i = \frac{(1 + r_e^*) - \varepsilon^2 (1 - r_e^*)}{2 \varepsilon r_e^*} . \quad (3.18)$$

Fica evidente que, conhecidos os valores de r_e^* e ε (que especificam o sistema anular), as funções inversas dos co-senos hiperbólicos das expressões (3.17) e (3.18) determinam η_0 e η_i , que representam, respectivamente, as superfícies externa e interna do espaço anular.

A determinação dos centros e dos raios das circunferências η_0 e η_i é baseada na relação (3.5), onde η é expresso para um dado polo (a), em função de x e y .

Aplicando-se a definição de logaritmo à relação (3.5), tem-se:

$$[(x-a)^2 + y^2] e^{2\eta} = (x+a)^2 + y^2,$$

cujo desenvolvimento conduz a

$$x^2 - 2ax \left(\frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \right) + a^2 = -y^2 ,$$

onde o fator entre parênteses é exatamente $\coth \eta$. Adicionando-se $(a \coth \eta)^2$ a ambos os membros da expressão acima, e usando a relação $\operatorname{csch}^2 \eta = \coth^2 \eta - 1$, obtém-se a expressão (3.7).

Assim, especificado o polo, dado pelo valor de a , os centros das circunferências η_i e η_o estarão em $(a \coth \eta_o, 0)$, e $(a \coth \eta_i, 0)$, sendo seus respectivos raios $(a \operatorname{csch} \eta_o)$ e $(a \operatorname{csch} \eta_i)$.

Foi desenvolvido o algoritmo "ANNULUS" que permite obter a representação gráfica dos sistemas anulares excêntricos. O fluxograma deste algoritmo está no Apêndice D1.

Com valores de r_e^* e ε , para um dado valor de a , esse algoritmo seleciona a "janela" que melhor aproveita a tela do monitor de vídeo possibilitando, conseqüentemente, uma figura do sistema que ocupe toda área útil da folha quando a imagem for impressa. As Figs. 3.7 e 3.8 constituem dois exemplos de aplicação do referido algoritmo.

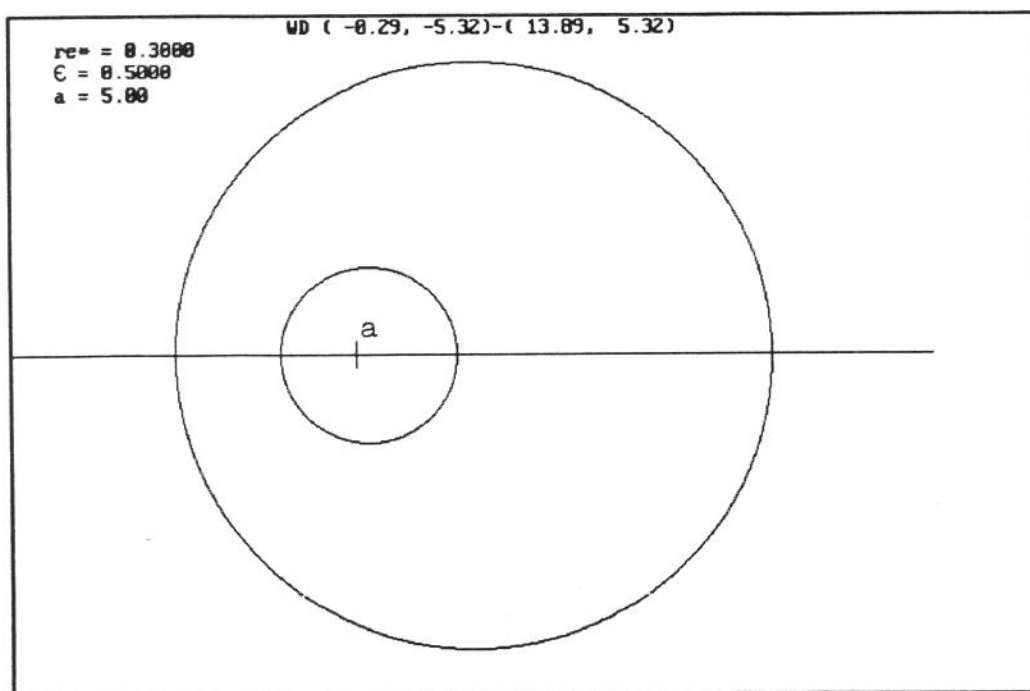


Fig. 3.7 Representação do sistema anular excêntrico.

A legenda WD, que aparece centrada no topo, significa que para os valores dos parâmetros especificados no canto superior esquerdo, a declaração

WINDOW $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$

encaixa a tela em um sistema de coordenadas x-y padrão. Os pontos do plano tendo coordenadas x que variam de x_1 até x_2 , da esquerda para direita, e coordenadas y que variam de y_1 até y_2 , de baixo para cima, conforme Fig. 3.9.

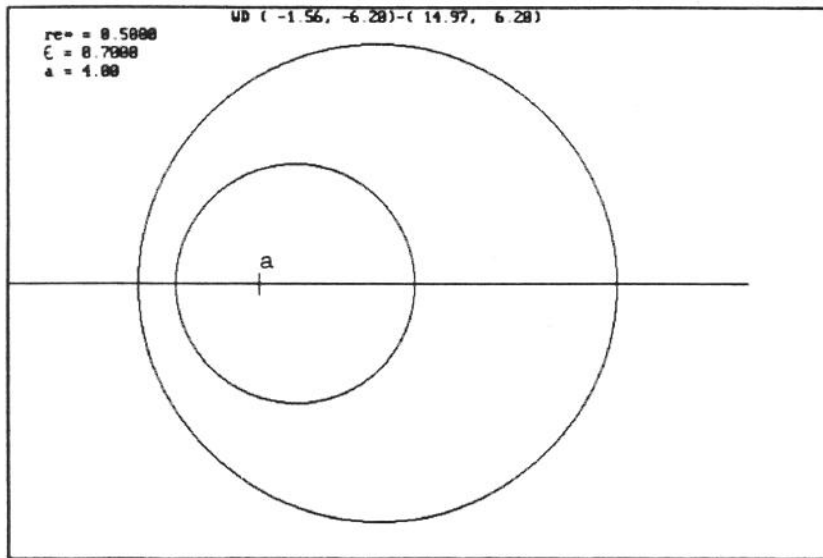


Fig. 3.8 Representação do sistema anular excêntrico.

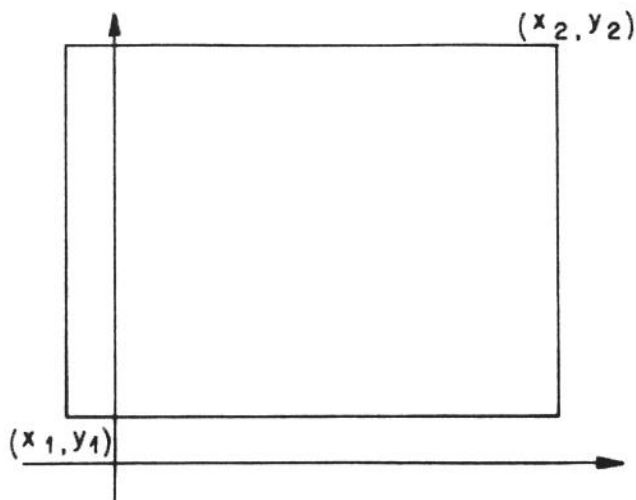


Fig. 3.9 Sistema de coordenadas definido pela declaração WINDOW.

3.2. ESCOAMENTO LAMINAR

3.2.1. Solução da equação do movimento

O escoamento axial de um fluido newtoniano em sistema anular excêntrico respeitadas as mesmas condições estabelecidas às páginas 9, 10 e 11 para o caso concêntrico, é descrito também pela equação de Poisson, (2.5).

Estando o sistema anular definido através de coordenadas bipolares, toda a descrição do escoamento deverá ser feita nesse sistema. Assim, o campo de velocidades será expresso por $v_z(\eta, \xi)$, e a equação (2.5), sujeita às condições de contorno

$$v_z(\eta_0, \xi) = 0 \quad (3.19a)$$

e

$$v_z(\eta_i, \xi) = 0, \quad (3.19b)$$

deverá apresentar o Laplaciano em coordenadas bipolares.

A expressão do Laplaciano de uma função escalar ϕ em um sistema de coordenadas curvilíneas genéricas (q_1, q_2, q_3) é dada por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(q_1, q_2, q_3) = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

h_1, h_2 e h_3 são os fatores de escala que constituem a métrica, e especificam a natureza do sistema de coordenadas.

Os valores de h para sistemas de coordenadas ortogonais são obtidos da relação

$$h_i^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial q_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial q_i} \right]^2, \quad (3.21)$$

onde

x, y e z são as coordenadas cartesianas.

Tomando (3.21) e substituindo x, y e z pelos seus valores das expressões (3.2), (3.3) e (3.4) determinam-se os fatores de escala para o sistema bipolar. Assim, tem-se:

$$h_1 = h_\eta = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (3.22a)$$

$$h_2 = h_\xi = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (3.22b)$$

e

$$h_3 = h_z = 1. \quad (3.22c)$$

A aplicação destes fatores de escala h_i em (3.20) permite obter a expressão do Laplaciano em coordenadas bipolares, que aplicado a uma função escalar ϕ é dado por:

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (3.23)$$

Este resultado possibilita finalmente escrever a equação (2.5), do movimento para um fluido newtoniano escoando no interior de um sistema anular excêntrico, no

sistema de coordenadas bipolares, ou seja,

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \xi^2} = - \left(\frac{1}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \right) \frac{a^2}{\mu} \left(- \frac{dp}{dz} \right) . \quad (3.24)$$

Historicamente, a primeira solução da equação (3.24) obtida para regime laminar, foi proposta em termos de uma função harmônica plana, e apresentada por PIERCY, HOOPER & WINNY (1933)⁽²⁷⁾, que utilizaram uma transformação indicada por Macdonald em 1893, relativa ao correspondente problema de torção. No entanto, o primeiro trabalho a empregar explicitamente coordenadas bipolares para descrever tanto o sistema anular excêntrico como o campo de velocidades em regime laminar, foi publicado em 1959 por HEYDA⁽⁸⁾, que utilizou a função de Green para resolver a equação de Poisson, (2.5), apresentando suas soluções na forma de séries.

Uma solução mais recente foi proposta por SNYDER & GOLDSTEIN (1965)⁽⁹⁾, que se valeram de uma solução apresentada por EL-SADEN (1961)⁽²⁸⁾ ao estudar o problema de condução de calor num cilindro excêntricamente oco, com taxa de geração de calor uniforme.

Ao dividir a equação (3.24), membro a membro, por $a^2/\mu (-dp/dz)$, e aplicar as condições (3.19a) e (3.19b), Snyder & Goldstein obtiveram a solução geral na forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{v_z}{a^2/\mu (-dp/dz)} &= F - E\eta - \frac{\coth \eta}{2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n e^{n\eta} + (B_n - \coth \eta)e^{-n\eta}] \cos n\xi \end{aligned} \quad (3.25a)$$

onde:

$$F = \frac{\eta_i \coth \eta_0 - \eta_0 \coth \eta_i}{2 (\eta_i - \eta_0)} , \quad (3.25b)$$

$$E = \frac{\coth \eta_0 - \coth \eta_i}{2 (\eta_i - \eta_0)} , \quad (3.25c)$$

$$A_n = \frac{\coth \eta_0 - \coth \eta_i}{\exp (2n\eta_i) - \exp (2n\eta_0)} , \quad (3.25d)$$

e

$$B_n = \frac{\coth \eta_0 \exp (2n\eta_i) - \coth \eta_i \exp (2n\eta_0)}{\exp (2n\eta_i) - \exp (2n\eta_0)} . \quad (3.25e)$$

Os parâmetros F , E , A_n e B_n da equação (3.25a) definidos pelas equações (3.25b) a (3.25e) são determinados a partir das expressões (3.17) e (3.18) utilizando-se da relação entre função co-seno hiperbólico inversa e função logarítmica, dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \cosh x &= \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) & x &\geq 1 \\ (\operatorname{arc} \cosh x > 0 \text{ é o valor principal}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

e a seguir calculando-se as respectivas co-tangentes hiperbólicas.

Assim, conhecida a solução da equação do movimento, pode-se determinar o campo de velocidades.

3.2.2. Lugar Geométrico (L.G.) das velocidades máximas ($v_{z,max}$). Mapas de isovelocidades.

O objetivo principal deste trabalho é estudar os escoamentos em sistemas anulares e mapear o campo de velocidades.

Inicialmente, tratou-se de prever teoricamente a distribuição de velocidades para escoamento em regime laminar em cinco sistemas anulares excêntricos, utilizando as expressões de Snyder & Goldstein [(3.25a) a (3.25e)].

Para isto foram desenvolvidos algoritmos objetivando o mapeamento do campo de velocidades.

Elaborar mapa do campo de velocidades indicando para cada ponto o correspondente valor da velocidade é tarefa praticamente impossível caso não sejam adotadas estratégias bem definidas para se evitar a infinidade de pontos existentes numa secção transversal. Daí a necessidade de critérios para se viabilizar uma representação do campo. Destes, o primeiro, não só pela importância intrínseca mas também por ser matematicamente mais simples é a determinação da velocidade máxima, bem como do local onde ocorre.

Deve-se ressaltar que em sistemas anulares excêntricos não existe um L.G. de velocidade máxima como apresentado nos sistemas concêntricos mas sim um L.G. das velocidades máximas.

Para o entendimento de tal fato, deve-se atentar que, para cada ξ , a velocidade do fluido varia de zero (em uma das paredes) até um valor máximo, que ocorre para um determinado valor de η , decrescendo a seguir, até novamente se anular na parede oposta.

Devido à excentricidade, o sistema em questão apresenta duas regiões limites de escoamento: uma em $\xi = 0$, onde o espaçamento anular é máximo e a velocidade atinge o seu maior valor possível, e a outra em $\xi = \pi$, onde por ser mínimo o espaçamento, mínima será a velocidade máxima.

Assim, adotando-se a coordenada ξ como parâmetro de varredura e percorrendo-se a secção transversal ao longo de

η , constata-se uma variação contínua da velocidade máxima, do maior valor possível ao menor.

A velocidade máxima para um determinado ξ , é obtida através da relação $\partial v_z / \partial \eta = 0$ para o ξ especificado, sendo v_z dado pelas expressões (3.25 a) a (3.25 e). Em particular, para $\xi = 0$, tem-se a maior velocidade máxima, sendo denotada por v^* , ou seja, $v^* = v_{z, \max} | \xi = 0$.

A forma mais adequada de se descrever o campo do escoamento é sem dúvida através das linhas de isovelocidade. Para o sistema excêntrico, o procedimento para a obtenção de tais linhas inicia-se com a determinação de v^* . Conhecido o valor numérico de v^* , especifica-se uma das coordenadas, η ou ξ , e escolhe-se a linha de isovelocidade desejada (por exemplo: $0,90v^*$, $0,80v^*$, $0,65v^*$, etc). Substituindo tais valores nas expressões de Snyder & Goldstein [(3.25 a) a (3.25e)] determina-se a outra coordenada. No caso da coordenada escolhida ser ξ , deve-se respeitar a realidade física, não ultrapassando o valor máximo desta para a respectiva velocidade, que ocorre exatamente sobre o L.G. das $v_{z, \max}$, sob pena de se ter uma equação para η , sem solução.

Os cinco sistemas anulares, definidos pelos parâmetros r_e^* e ϵ , objetos deste estudo foram:

$$\begin{cases} r_e^* = 2/3 \\ \epsilon = 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \epsilon = 0,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,4 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,281 \\ \epsilon = 0,999 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases}$$

As Figs. 3.10 a 3.16 são os mapas de isovelocidades

relativos aos cinco sistemas anulares estudados. As Figs. 3.10 e 3.11 representam mapas de isovelocidades para dois sistemas anulares inteiros. Vê-se que, devido à simetria, ambas as metades exibem a mesma configuração. Daí ser possível representar o campo valendo-se apenas de uma das metades, como visto nas Figs. 3.12 a 3.16.

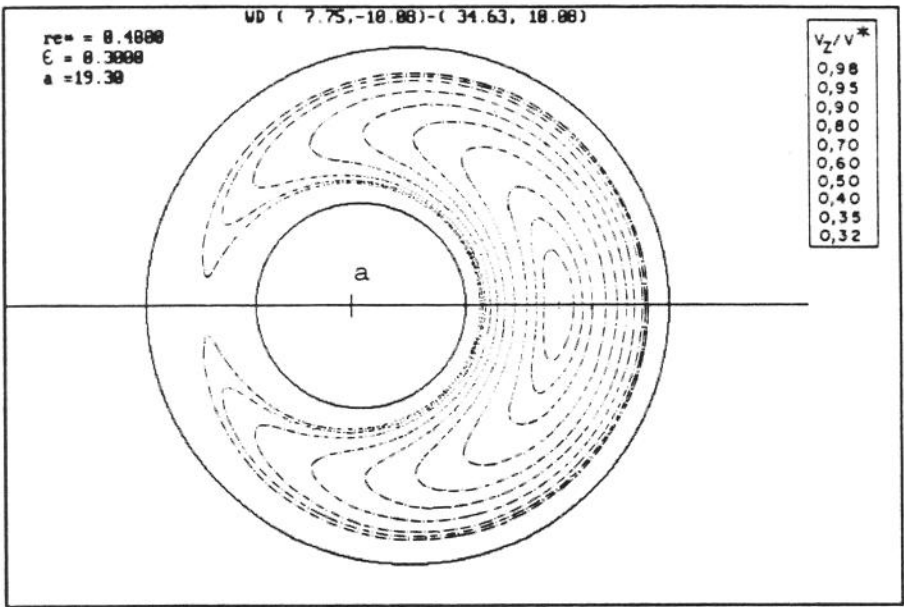


Fig. 3.10 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .

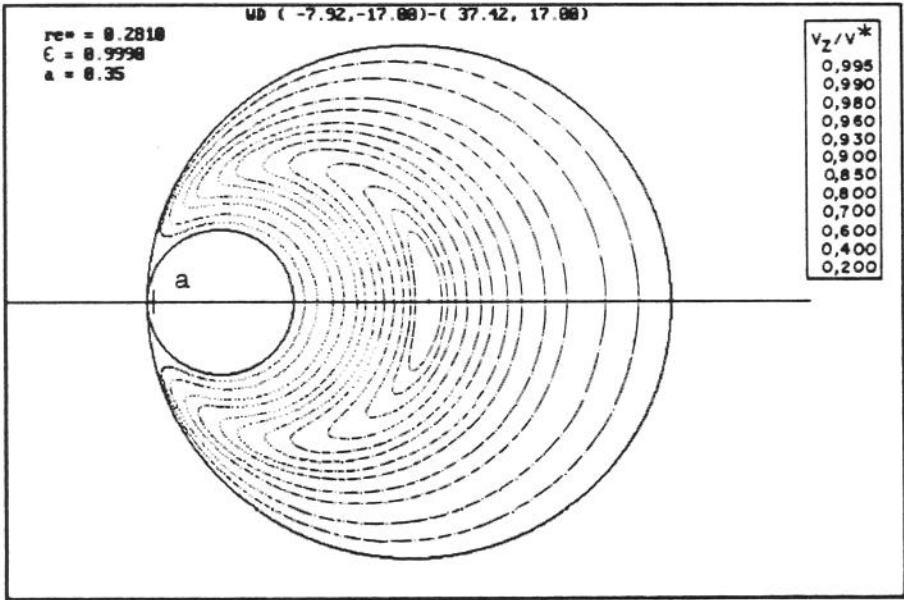


Fig. 3.11 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar

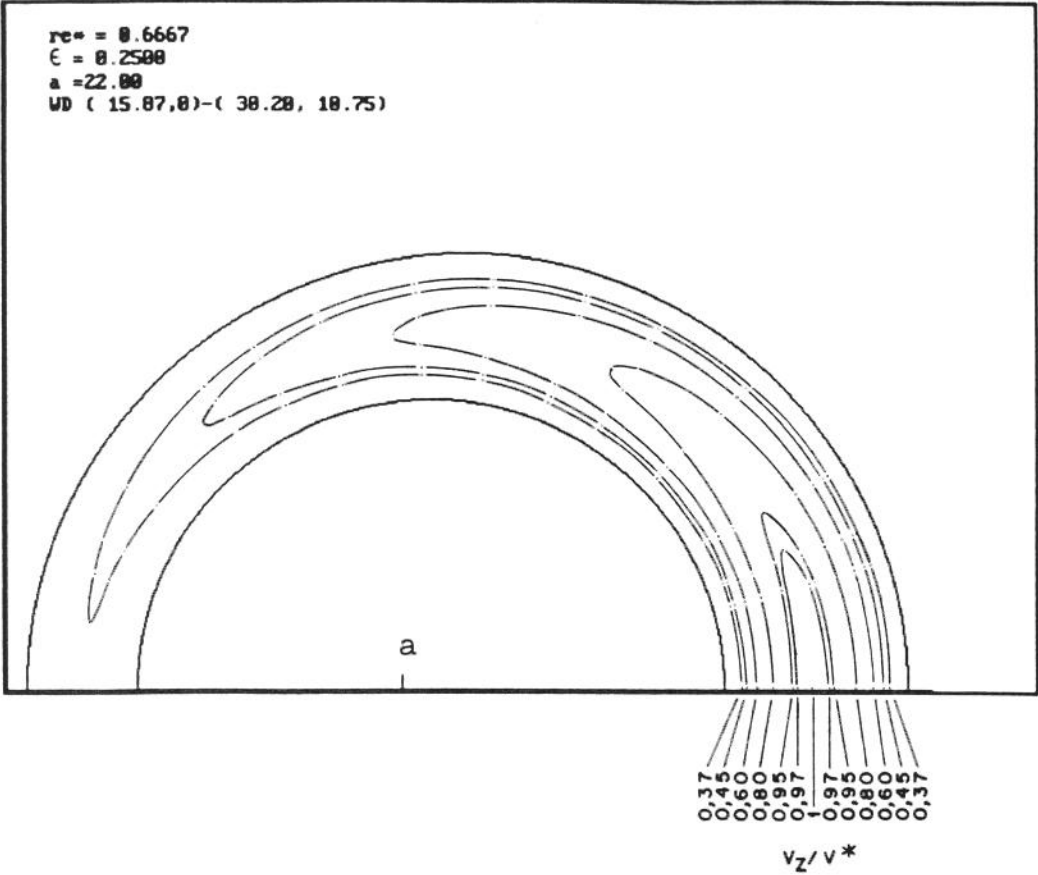


Fig. 3.12 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .

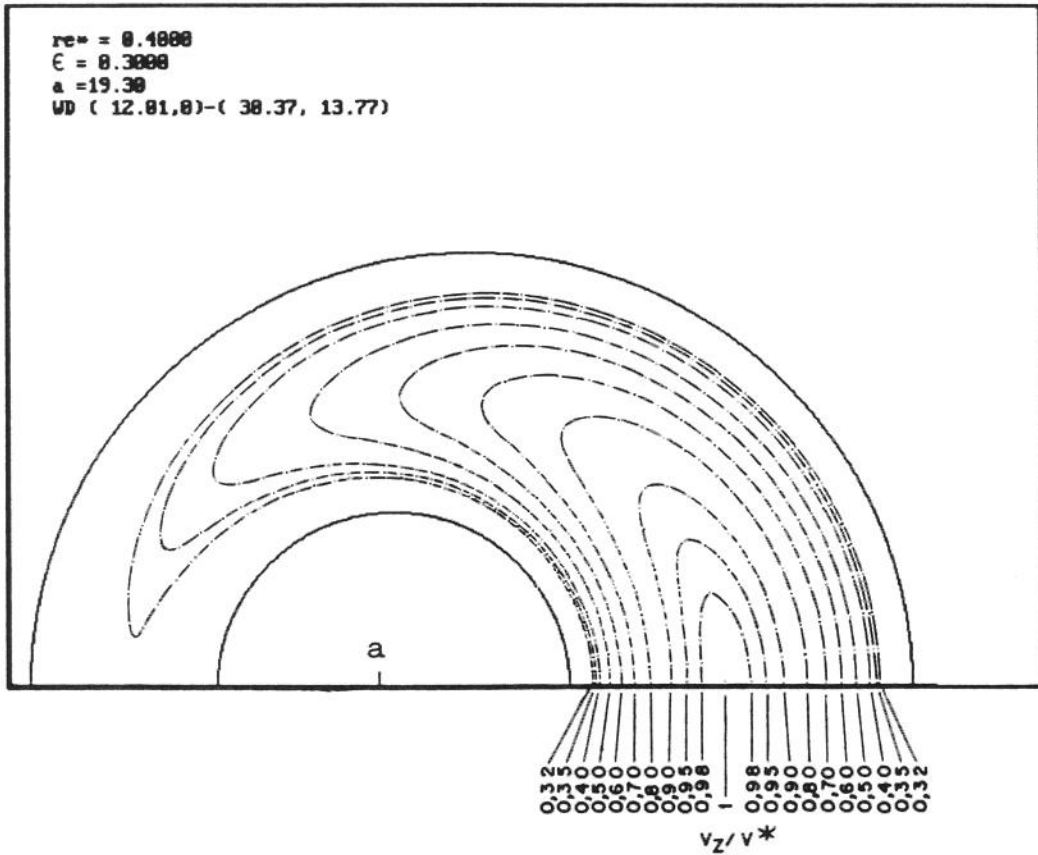


Fig. 3.13 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar .

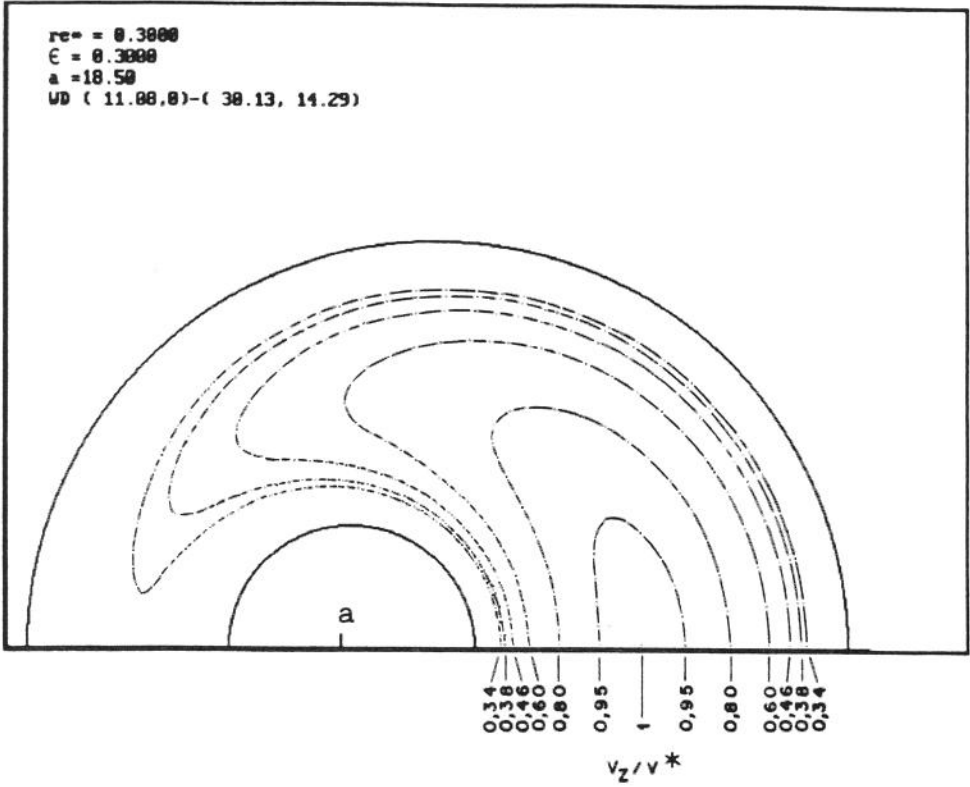


Fig. 3.14 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.

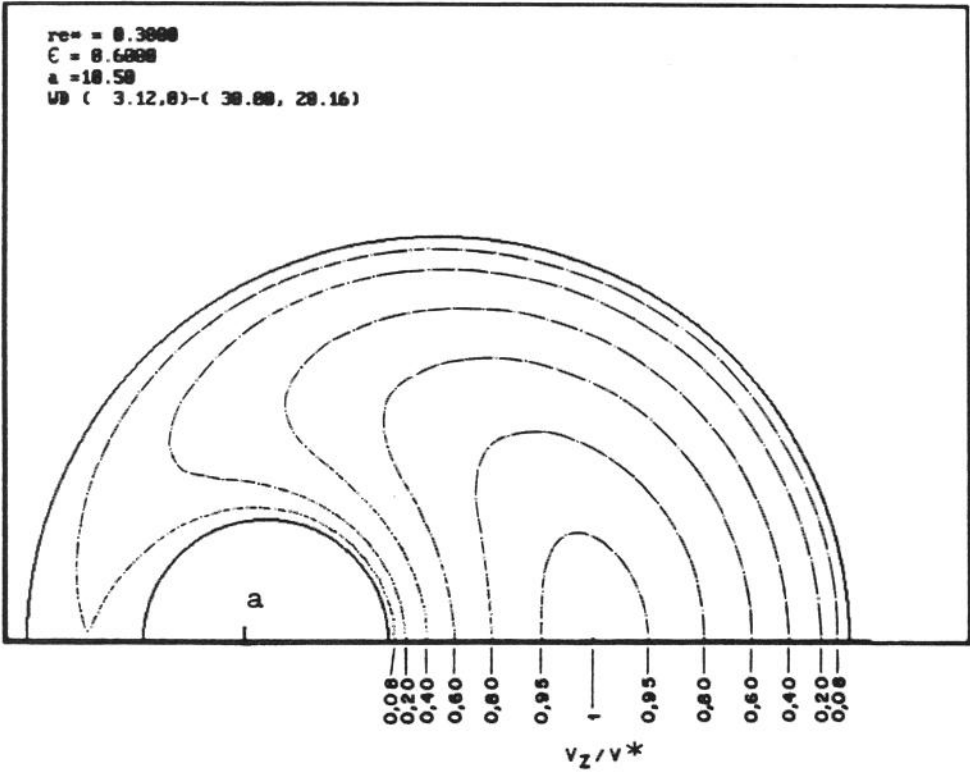


Fig. 3.15 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar

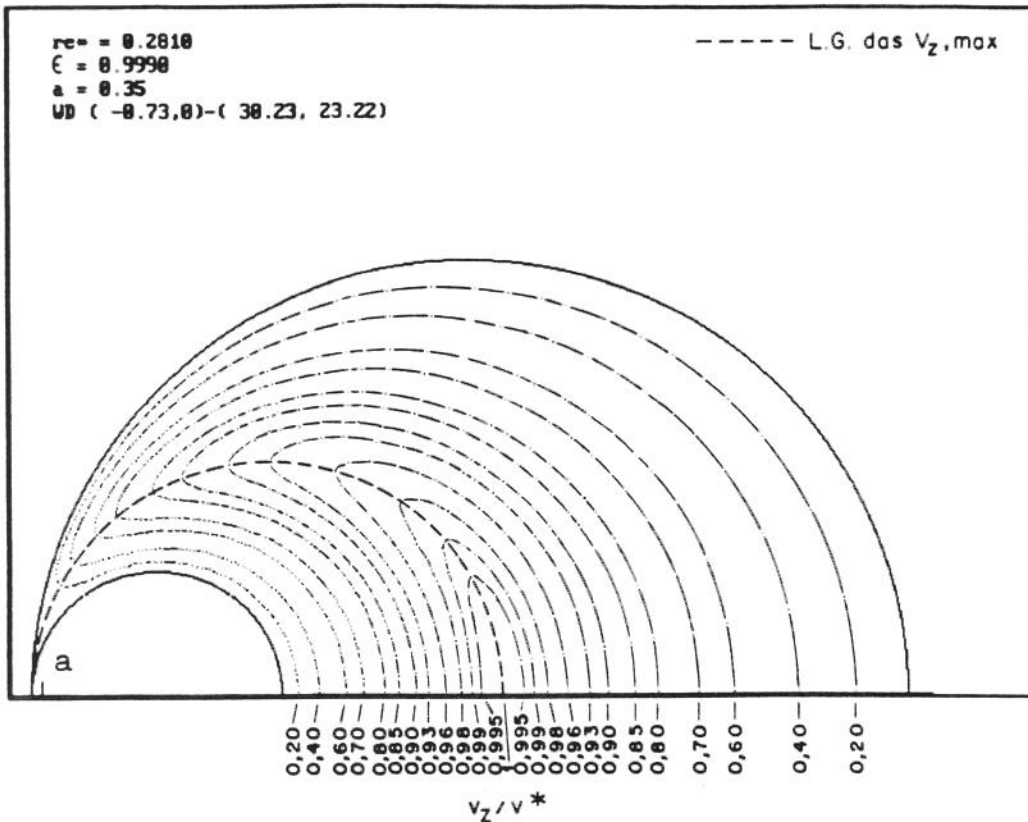


Fig. 3.16 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.

A obtenção de um mapa de isovelocidades obedece à sequência de operações:

- 1ª.) Calculam-se os valores de η_i e η_o do sistema anular excêntrico, através do algoritmo "ANNULUS".
- 2ª.) Determina-se o intervalo de velocidades máximas, calculando-se a máxima (v^*) e a mínima ($V_{z,max}|\xi = \pi$) velocidades máximas, utilizando o algoritmo "VMAX". [Este algoritmo determina a velocidade máxima para um dado ξ , bem como a coordenada η onde tal velocidade ocorre, convertendo também as coordenadas η e ξ em x e y].
- 3ª.) Divide-se o intervalo obtido e, com o algoritmo "VMAXSI", determinam-se, sobre o L.G. das velocidades máximas, os pontos correspondentes às velocidades

cujas linhas de isovelocidades se deseja obter. Assim, partindo dos valores geométricos η_i η_o , a , e do valor especificado da velocidade, (VE), o algoritmo VMAXSI determina ξ e η onde ocorre o valor VE, convertendo também as coordenadas bipolares em coordenadas cartesianas.

- 4ª.) Determinam-se os valores de η para cada um dos ξ , menores que aquele ξ encontrado para um certo valor VE da velocidade, usando-se o algoritmo "ETA" que fornece também as coordenadas cartesianas das intersecções destas circunferências η com a correspondente circunferência ξ .
- 5ª.) Repete-se a operação anterior para cada um dos valores VE. Unem-se os pontos correspondentes a um certo valor da velocidade; a linha obtida corresponde à respectiva linha de isovelocidade. Faz-se o mesmo para os demais valores VE, obtendo-se assim todas as linhas desejadas.

Os fluxogramas dos algoritmos ANNULUS, VMAX, VMAXSI e ETA, desenvolvidos para este estudo, estão nos Apêndices D1, D2, D3 e D4.

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos da aplicação das cinco operações descritas ao sistema anular definido por:

$$\begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases} \quad \text{com } a = 18,5$$

Através do algoritmo ANNULUS obtém-se:

$$\begin{aligned} \eta_i &= 2,615 \\ \eta_o &= 1,461. \end{aligned}$$

As máxima e mínima velocidades máximas, bem como o respectivo local de sua ocorrência fornecidos pelo algoritmo VMAX, são:

$$v^* = 2,283 \times 10^{-2} \text{ em } \begin{cases} \eta = 1,891 \\ \xi = 0, \quad \text{ou} \\ (25,08;0) \text{ em coordenadas cartesianas} \end{cases}$$

e

$$(v_{z,max})_{min} = 7,94 \times 10^{-3} \text{ em } \begin{cases} \eta = 1,961 \\ \xi = \pi, \quad \text{ou} \\ (13,94;0) \text{ em coord. cart.} \end{cases}$$

portanto: $0,333 \ v^* \leq v_{z,max} \leq v^*$. Convém observar que os valores efetivos das velocidades correspondem aos valores apresentados, multiplicados pelo fator $a^2/\mu(-dp/dz)$.

A Tabela 3.1 revela os resultados da aplicação do algoritmo VMAXSI, relativamente ao intervalo das velocidades máximas apresentado pelo sistema anular em consideração adotando o critério de eqüidistância aproximada entre as linhas de isovelocidade.

Tabela 3.1 Resultados da aplicação do algoritmo "VMAXSI" ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\epsilon = 0,3$

$VE_{(max)}$	ξ	η	x	y
0,95v*	0,393	1,895	24,28	2,86
0,80v*	0,856	1,912	21,85	4,99
0,60v*	1,407	1,933	18,60	5,42
0,46v*	1,914	1,947	16,24	4,45
0,38v*	2,376	1,956	14,81	2,96
0,34v*	2,841	1,959	14,06	1,20

Tem-se portanto, sobre o L.G. das $v_{z,max}$, os pontos correspondentes às respectivas velocidades. A Tabela 3.2 mostra, para quatro valores de velocidade: 0,95v*, 0,80v*, 0,60v* e 0,46v*, os resultados da aplicação do algoritmo

ETA para valores de ξ (necessariamente menores que os correspondentes apresentados na Tabela 3.1).

Tabela 3.2 Resultados da aplicação do algoritmo "ETA", para quatro valores de velocidade, ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\epsilon = 0,3$

VE	ξ	η_1	$(x_1; y_1)$	η_2	$(x_2; y_2)$
0,95v*	0,000	1,775	(26,05;0,00)	2,020	(24,16;0,00)
	0,157	1,785	(25,81;1,39)	2,010	(24,12;1,03)
	0,314	1,823	(25,07;2,57)	1,970	(24,05;2,11)
0,80v*	0,000	1,672	(27,06;0,00)	2,167	(23,28;0,00)
	0,157	1,676	(26,83;1,63)	2,163	(23,22;0,85)
	0,314	1,688	(26,18;3,10)	2,149	(23,05;1,68)
	0,524	1,721	(24,80;4,58)	2,112	(22,64;2,78)
	0,655	1,756	(23,75;5,15)	2,075	(22,30;3,46)
	0,785	1,815	(22,62;5,35)	2,012	(21,92;4,22)
0,60v*	0,000	1,595	(27,92;0,00)	2,303	(22,61;0,00)
	0,157	1,597	(27,68;1,83)	2,301	(22,55;0,71)
	0,314	1,604	(26,99;3,50)	2,293	(22,38;1,41)
	0,524	1,619	(25,53;5,27)	2,275	(21,99;2,28)
	0,655	1,633	(24,43;6,04)	2,258	(21,65;2,79)
	0,785	1,652	(23,28;6,55)	2,236	(21,26;3,25)
	1,013	1,697	(21,29;6,85)	2,184	(20,44;3,96)
	1,164	1,742	(20,11;6,67)	2,134	(19,82;4,37)
	1,309	1,808	(19,11;6,22)	2,062	(19,15;4,78)
0,46v*	0,000	1,555	(28,40;0,00)	2,384	(22,26;0,00)
	0,157	1,557	(28,15;1,94)	2,383	(20,20;0,65)
	0,314	1,561	(27,43;3,72)	2,377	(22,04;1,27)
	0,524	1,571	(25,91;5,63)	2,365	(21,67;2,05)
	0,655	1,580	(24,76;6,49)	2,354	(21,36;2,49)
	0,785	1,591	(23,54;7,07)	2,341	(20,99;2,89)
	1,013	1,617	(21,43;7,52)	2,309	(20,52;3,45)
	1,164	1,679	(20,14;7,46)	2,283	(19,64;3,73)
	1,309	1,665	(19,02;7,21)	2,252	(19,13;3,93)
	1,540	1,720	(17,54;6,49)	2,189	(18,17;4,12)
	1,698	1,772	(16,76;5,82)	2,131	(17,47;4,17)
	1,848	1,850	(16,24;5,04)	2,048	(16,73;4,22)

A Fig. 3.14 representa completamente o resultado da aplicação dessas etapas para obtenção de mapas de isovelocidade, ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\epsilon = 0,3$. São seis linhas de isovelocidade traçadas sobre 320 pontos.

Valores numéricos para os demais sistemas encontram-se

no Apêndice A.

Dentre os sistemas considerados, merece destaque, o sistema anular definido por $r_g^* = 0,281$ e $\epsilon = 0,999$. Trata-se de sistema em que as paredes dos tubos apresentam um ponto de tangência. Tal situação corresponde ao caso de excentricidade máxima, $\epsilon = 1$. O motivo de se utilizar 0,999 é contornar a divergência da função co-tangente hiperbólica, responsável pela posição dos centros das circunferências η_i e η_o , que tende ao infinito quando $\epsilon = 1$.

3.2.3. Velocidades em $\xi = \text{constante}$

A velocidade de um fluido escoando no interior de um sistema anular excêntrico, em função da coordenada η , mantida fixa a coordenada ξ , já foi mencionada na seção 3.2.2.. Agora pode ser constatada através das Figs. 3.17 a 3.21, obtidas utilizando-se do "software" GRAPHER⁽²⁹⁾. Cada figura apresenta dez curvas que mostram como a velocidade varia com η , tendo como parâmetro a coordenada ξ . Em todas essas figuras a curva indicada por ξ_1 corresponde à variação da velocidade ao longo do eixo de simetria do sistema anular em $\xi = 0$. As demais curvas, indicadas por $\xi_2, \dots, \xi_9$, correspondem a valores de ξ obtidos da divisão do intervalo $[0, \pi]$ em nove partes.

Para a utilização do GRAPHER a este caso, foi desenvolvido o algoritmo "VELNETA", que fornece a velocidade normalizada, v_z/v^* , em função de η , para um dado ξ , a partir dos valores numéricos de η_1 , η_o e v^* , obtidos através dos algoritmos ANNULUS e VMAX, conforme visto no item anterior. O fluxograma do algoritmo VELNETA encontra-se no Apêndice D5.

O intervalo de variação $\eta_o \leq \eta \leq \eta_i$ pode ser dividido em quantas partes se desejar, obtendo-se um maior ou menor número de pontos onde se pretende determinar o valor normalizado da velocidade.

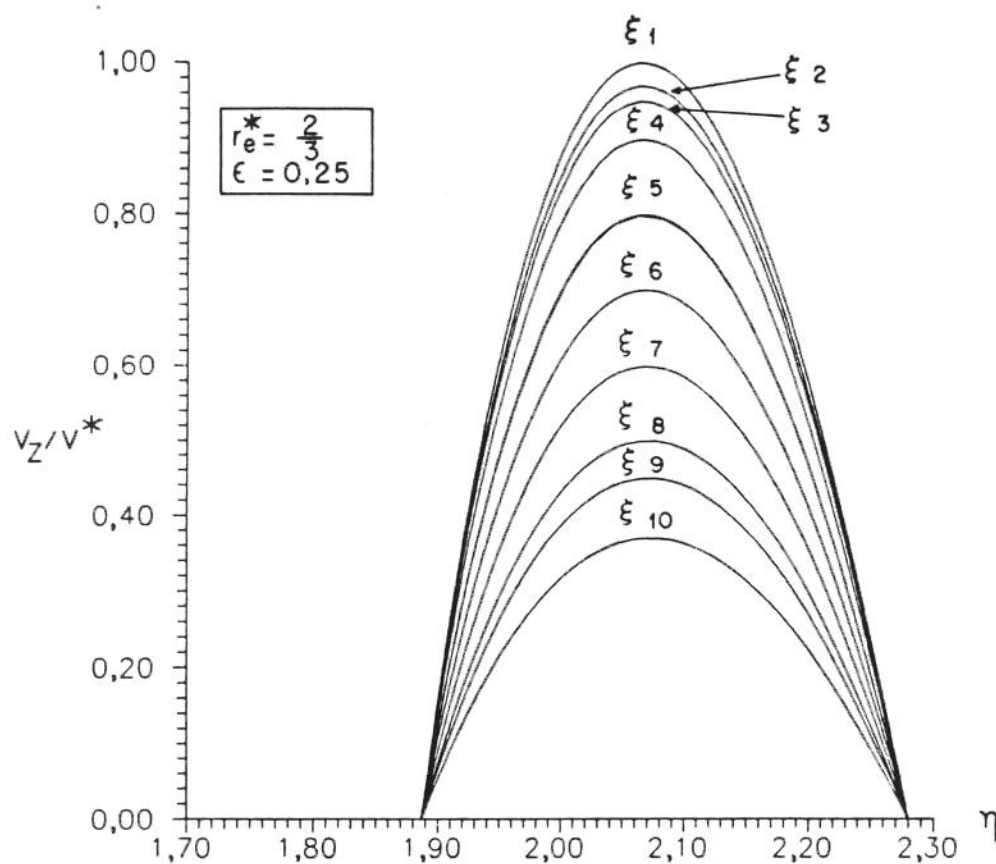


Fig. 3.17 Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ .

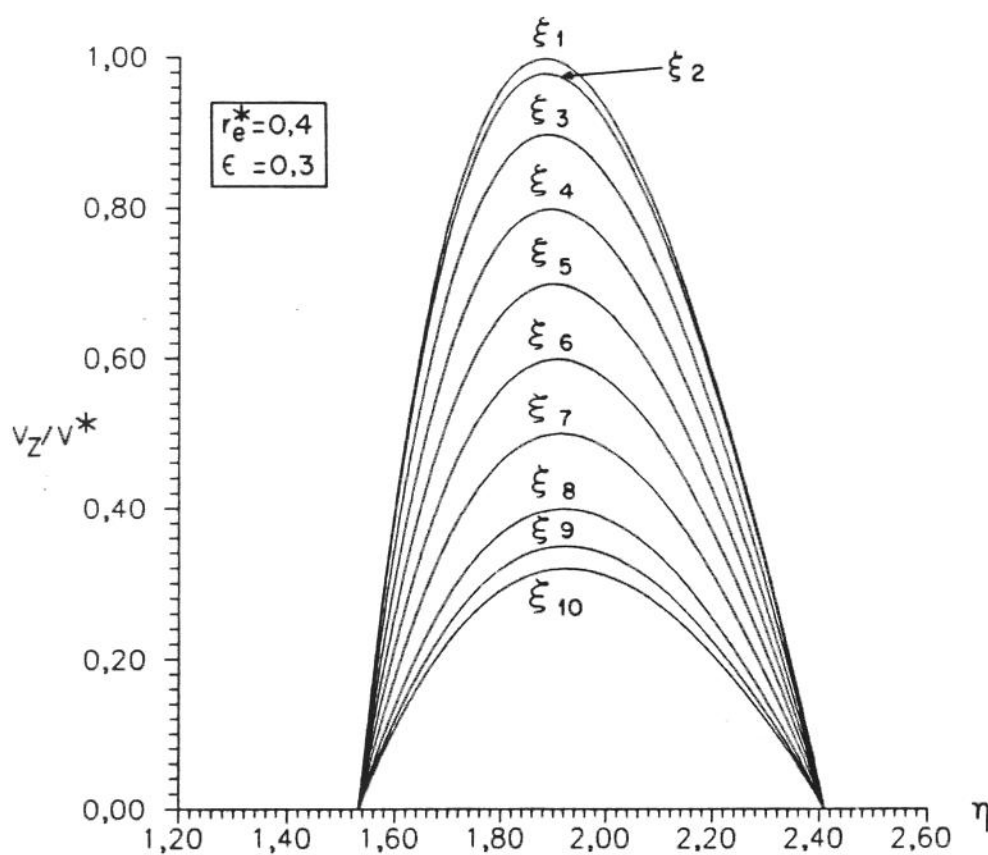


Fig. 3.18 Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ .

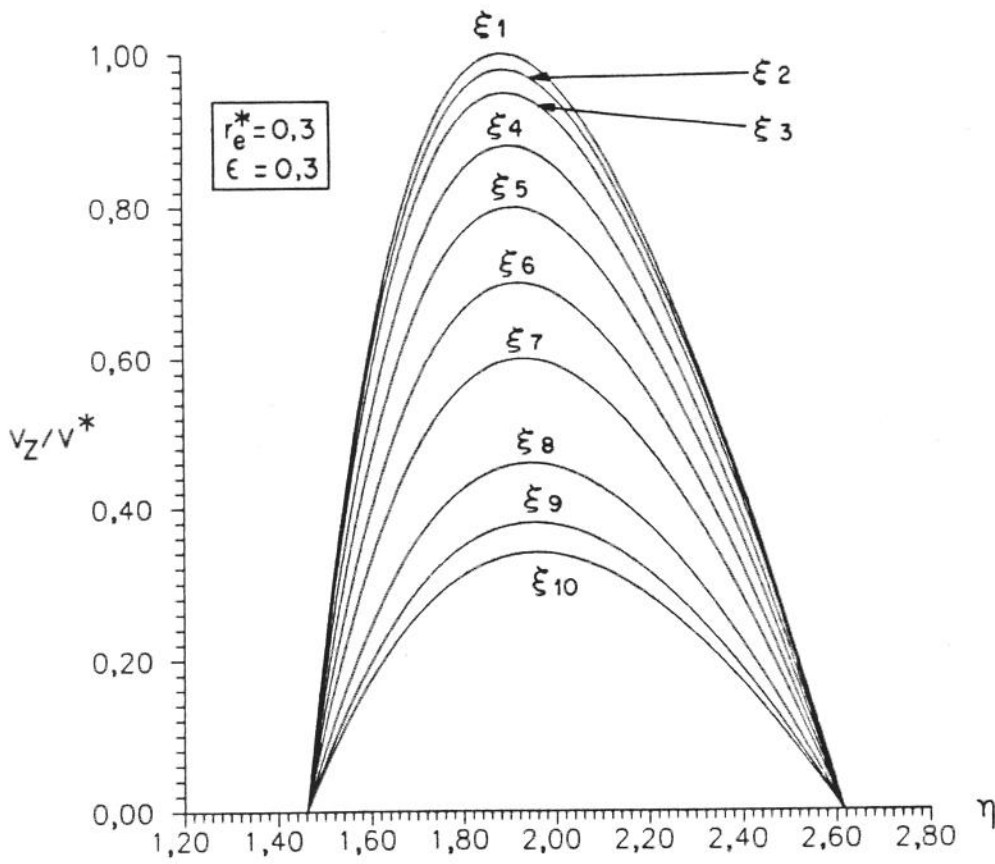


Fig. 3.19 Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ .

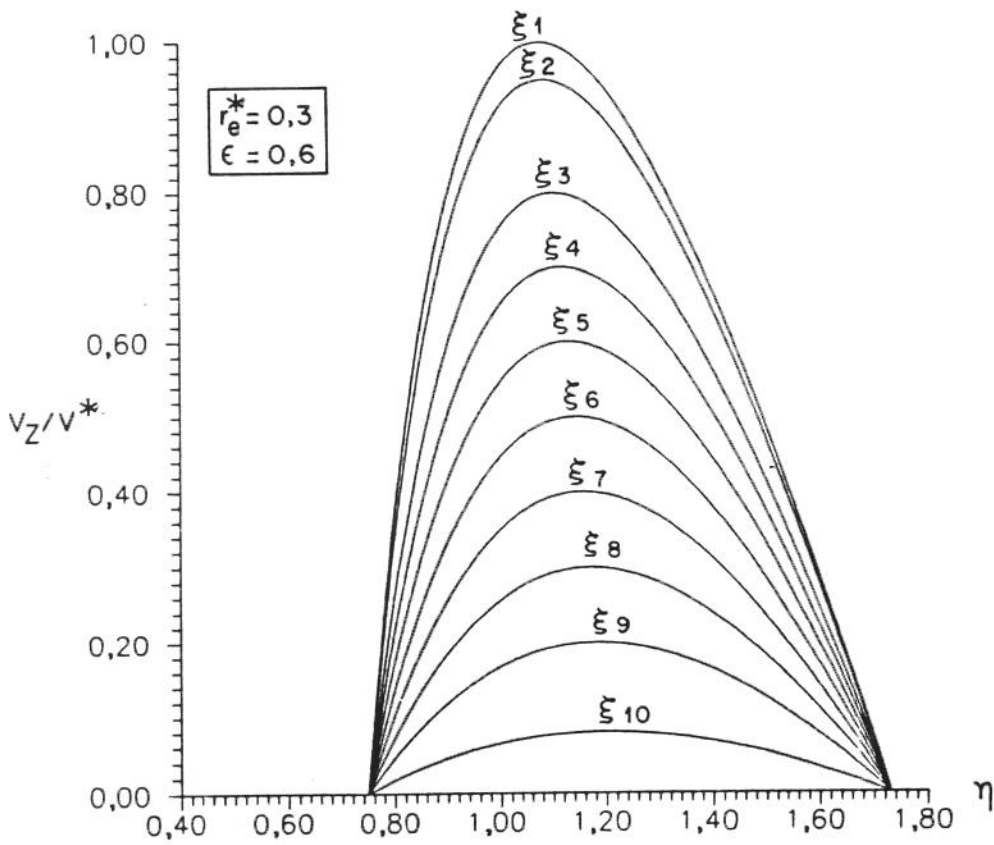


Fig. 3.20 Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ .

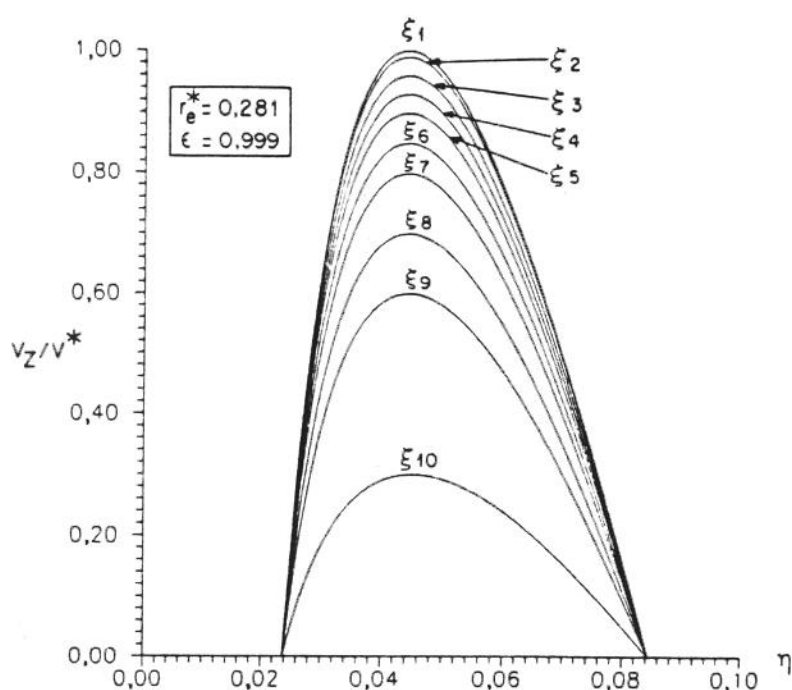


Fig. 3.21 Velocidade para escoamento laminar em função da coordenada η , tendo como parâmetro a coordenada ξ .

3.2.4. Mapas tridimensionais

É possível melhorar a visualização dos escoamentos em sistemas anulares excêntricos através de gráficos tridimensionais representados num sistema Cartesiano. As Figs. 3.22 a 3.25 são as representações tridimensionais para quatro dos sistemas anulares deste estudo. Tais gráficos foram obtidos com o "software" SURFER⁽³⁰⁾, que para sua utilização exigiu o desenvolvimento dos algoritmos "CARTVEL" e "ZERO", cujos fluxogramas estão nos Apêndices D6 e D7.

O CARTVEL determina as coordenadas x, y para uma velocidade normalizada obtida através do algoritmo VELNETA, enquanto o ZERO atribui velocidade nula para pontos nas paredes dos tubos e regiões adjacentes a elas. Do ponto de vista operacional, o algoritmo ZERO cria uma malha uniforme de pontos no interior do tubo interno e no exterior do tubo externo, levando em conta a excentricidade do sistema anular. Sem o estabelecimento dessa malha uniforme o "software" SURFER não atribuiria valores nulos para as

velocidades nestas regiões, acarretando uma deformação do perfil de velocidades nas bordas.

As linhas dos mapas tridimensionais correspondem a valores constantes de x, y e v_z/v^* . As características de cada mapa, como: número de pontos, número de linhas de isovelocidade e número de $\xi(s)$, encontram-se no Apêndice B.

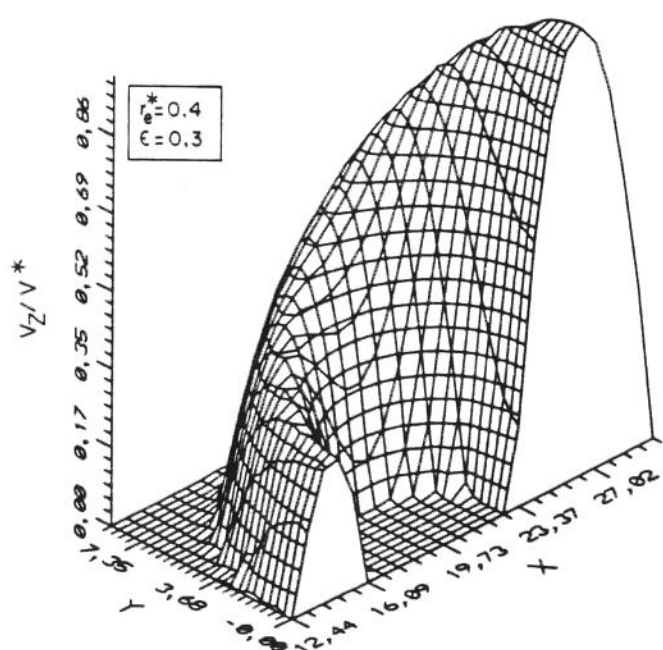


Fig. 3.22 Mapa tridimensional.

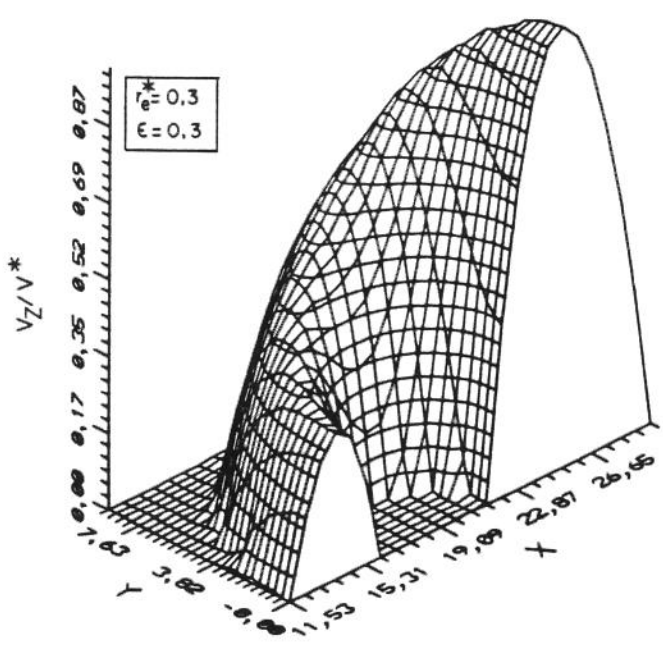


Fig. 3.23 Mapa tridimensional.

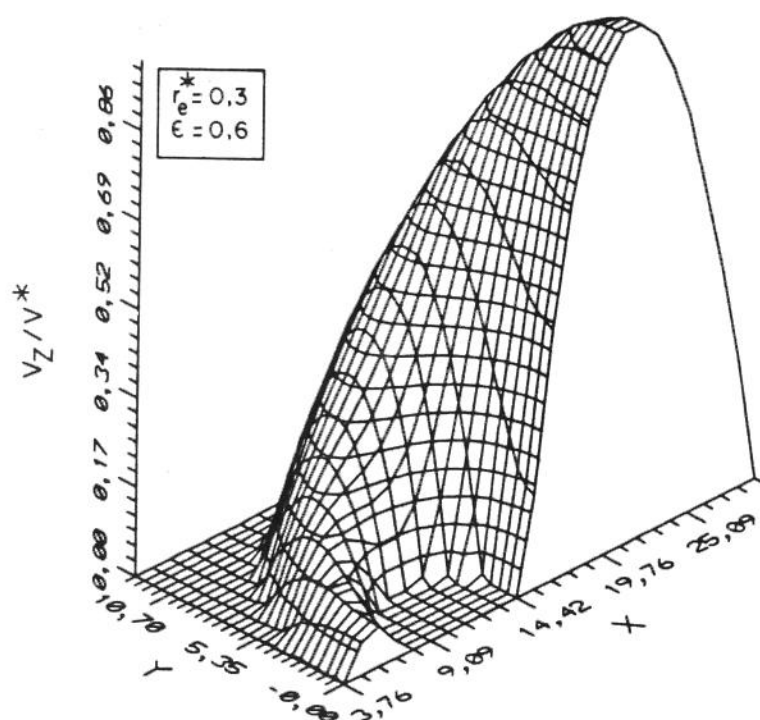


Fig. 3.24 Mapa tridimensional.

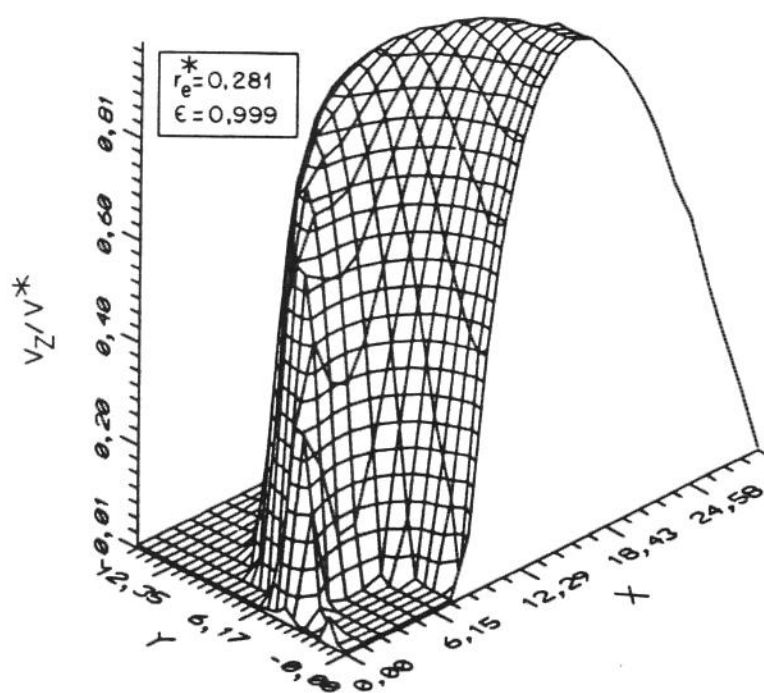


Fig. 3.25 Mapa tridimensional.

3.2.5. Razão das vazões nos sistemas excêntricos e concêntricos

Só existe uma única posição relativa entre dois tubos que compõe um sistema anular concêntrico, ou seja, aquela em que seus eixos coincidem. Mantendo-se o tubo externo fixo, qualquer deslocamento radial do tubo interno acarreta num sistema excêntrico. De que modo as características do escoamento são afetadas quanto ao grau de excentricidade de um sistema anular?

No que diz respeito à vazão, REDBERGER & CHARLES (1962) mostraram que, para um dado gradiente de pressão, um aumento de excentricidade implica num aumento de vazão e este aumento é maior para maiores valores de r_e^* .

Utilizando-se os fatores de escala para o sistema de coordenadas bipolar [equações (3.22a) e (3.22b)] a expressão da vazão adquire a forma

$$Q = a^2 \int_{\eta_0}^{\eta_i} \int_0^{2\pi} \frac{v_z}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} d\xi d\eta \quad (3.27)$$

TOSUN (1984) valendo-se das expressões de Snyder & Goldstein para a distribuição de velocidades, obteve para a vazão num sistema anular excêntrico a solução exata

$$Q_{exc} = \left(- \frac{dp}{dz} \right) \frac{\pi a^4}{2\mu} \Phi, \quad (3.28)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Phi = & (\coth \eta_i - \coth \eta_0) \left[\frac{1}{\eta_0 - \eta_i} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^{2n\eta_i} - e^{2n\eta_0}} \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sinh^4 \eta_0} - \frac{1}{\sinh^4 \eta_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A razão das vazões nos sistemas excêntricos e concêntricos, para um dado gradiente de pressão, é obtida das expressões (3.28), (3.29) e (2.18), assim

$$\frac{Q_{exc}}{Q_c} = \frac{4 \sinh^4 \eta_0}{1 - (r^*)^4 + \left\{ [1 - (r^*)^2]^2 / \ln r^* \right\}} \Phi, \quad (3.30)$$

onde r^* é a razão dos raios, ou seja, $r^* = r_c^* = r_e^*$.

A Fig. 3.26 obtida por Tosun, apresenta a razão Q_{exc}/Q_c como uma função de r^* tendo ϵ como parâmetro.

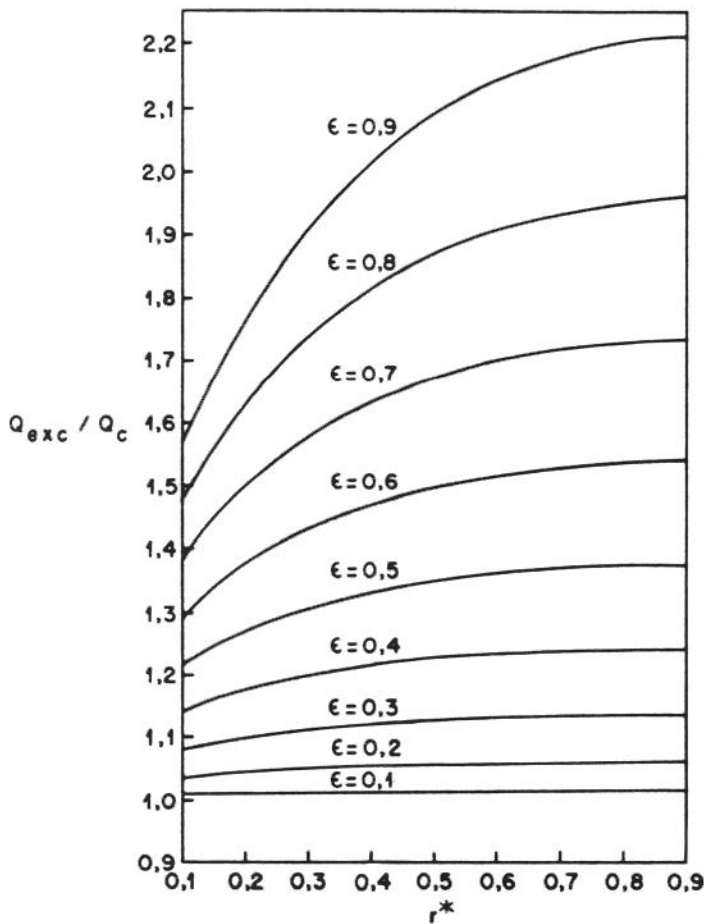


Fig. 3.26 Razão das vazões nos sistemas anulares excêntricos e concêntricos em função de r^* , tendo ϵ como parâmetro. Extraído de Tosun (1984).

Fica evidente que havendo interesse em economia de energia, o escoamento em sistemas anulares excêntricos adquire uma importância considerável, pois, a vazão que ocorre num sistema anular é dependente da pressão aplicada e da excentricidade, para uma dada razão de raios.

3.3. ESCOAMENTO TURBULENTO

A literatura que trata do escoamento turbulento de fluido newtoniano em sistemas anulares excêntricos é escassa. Os trabalhos mais relevantes são devidos a:

- ▶ DEISSLER & TAYLOR (1955) ;
- ▶ JONSSON & SPARROW (1966) e
- ▶ USUI & TSURUTA (1980) .

O trabalho pioneiro de Deissler & Taylor apresenta um modelo analítico que permite determinar a distribuição de velocidades a partir da distribuição das tensões de cisalhamento nas paredes, cujos valores são obtidos através de procedimentos gráficos muito trabalhosos, envolvendo medidas geométricas de comprimento e de área, usando o expediente de tentativa e erro.

Como resultado da aplicação de tal método, Deissler & Taylor apresentam os mapas de isovelocidades dos sistemas anulares formados por tubos cujos raios estão na razão $r_{c0}/r_{ci} = 3,5$ e cujas excentricidades são $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0,6$, $\epsilon = 0,8$ e $\epsilon = 1$, para $Re_y = 20000$.

O trabalho de Jonsson & Sparrow é experimental e constitui-se num marco, já que qualquer análise teórica de escoamentos turbulentos em anulares excêntricos pode ser avaliada pelos resultados obtidos por esses autores. Seus "mapas de contorno" exibindo linhas de velocidade constante

(isovelocidades) tornaram-se "clássicos". De fato, tais mapas são pontos de referência e, por esta razão, são usados no presente trabalho. Não se faz aqui qualquer crítica à metodologia e aos possíveis erros experimentais desse trabalho.

As soluções numéricas do escoamento turbulento totalmente desenvolvido, num sistema anular excêntrico, podem ser obtidas utilizando a solução proposta por USUI & TSURUTA (1980) . A distribuição de velocidades é calculada a partir de uma técnica de transformação integral, conhecida por transformação de Kirchhoff.

No próximo capítulo deste trabalho, os mapas de isovelocidades para escoamentos turbulentos em sistemas anulares excêntricos são obtidos por uma técnica de inversão geométrica. Esta técnica tem sua aplicação condicionada ao conhecimento dos valores de velocidade máxima ao longo do L.G. das $v_{z,max}$. Tal informação pode ser obtida de medidas experimentais ou através das equações disponíveis. Escolhendo-se para estudo os mesmos sistemas utilizados por Jonsson & Sparrow, tem-se através de seus mapas de isovelocidades, os dados necessários à aplicação da referida técnica. Evita-se, assim, a alternativa numérica que, a exemplo do caso laminar (onde algoritmos precisaram ser elaborados visando as soluções de Snyder & Goldstein), exigiria o desenvolvimento de algoritmos especiais que objetivassem as soluções de Usui & Tsuruta.

CAPÍTULO 4

INVERSÃO GEOMÉTRICA E SUA APLICAÇÃO A SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS

CAPÍTULO 4

INVERSÃO GEOMÉTRICA E SUA APLICAÇÃO A SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS

4.1. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

As dificuldades para se resolver um problema matemático, seja ele proposto pela Engenharia, ou de cunho meramente acadêmico, não são criadas intencionalmente e fazem parte da própria natureza do problema. Idealizar métodos que facilitem a solução, economizando tempo e trabalho, tem sido tarefa dos estudiosos e, graças a estes, diversos métodos foram desenvolvidos e estão disponíveis atualmente.

Um dos métodos de vasta aplicação é o da transformação. Essencialmente, um problema difícil é transformado inteligentemente em outro problema que seja mais apropriado para a investigação. Resolve-se o problema transformado e então *inverte-se* a transformação para se obter a solução do problema original.

O problema objeto deste estudo, por envolver excentricidade, tem como sistema natural de coordenadas o sistema bipolar, implicando necessariamente numa solução mais trabalhosa se comparada à solução concêntrica, onde o sistema de coordenadas natural é o cilíndrico, de menor complexidade matemática.

É natural perguntar-se: Existe uma transformação capaz de converter o sistema anular excêntrico em um sistema concêntrico? Existindo tal transformação, seria ela aplicável a todas as configurações de excentricidade? Em caso de restrições, quais seriam?

A resposta à primeira destas perguntas é afirmativa. Existe a transformação, denominada inversão e seu estudo, bem como as respostas às demais perguntas serão o objeto das considerações a seguir.

As transformações geométricas são basicamente cinco: translação, rotação, reflexão, homotetia e inversão.

Translação, rotação e reflexão são englobadas no conjunto das transformações ortogonais, caracterizadas por serem transformações que preservam a forma e as dimensões das figuras, enquanto que, a homotetia pertence ao grupo das transformações de semelhança, as quais preservam a forma das figuras geométricas.

A inversão é uma involução, isto é, transformação que é idêntica à sua inversa, sendo também uma transformação isogonal, por preservar os módulos dos ângulos, embora fiquem com sua orientação revertida.

Para que se possa definir, entender e aplicar a inversão geométrica, fazendo-se dela uma técnica, é necessário definir e considerar o que segue:

► Circunferência de Apolônio. (Apolônio de Perga,
265-200 a.C.).

A circunferência de Apolônio é o L.G. dos pontos, tais que a razão da distância a dois pontos fixos é constante.

Considerando a Fig. 4.1 com os pontos $A'(-a,0)$ e $A(a,0)$ fixos, as curvas η constantes são circunferências de Apolônio.

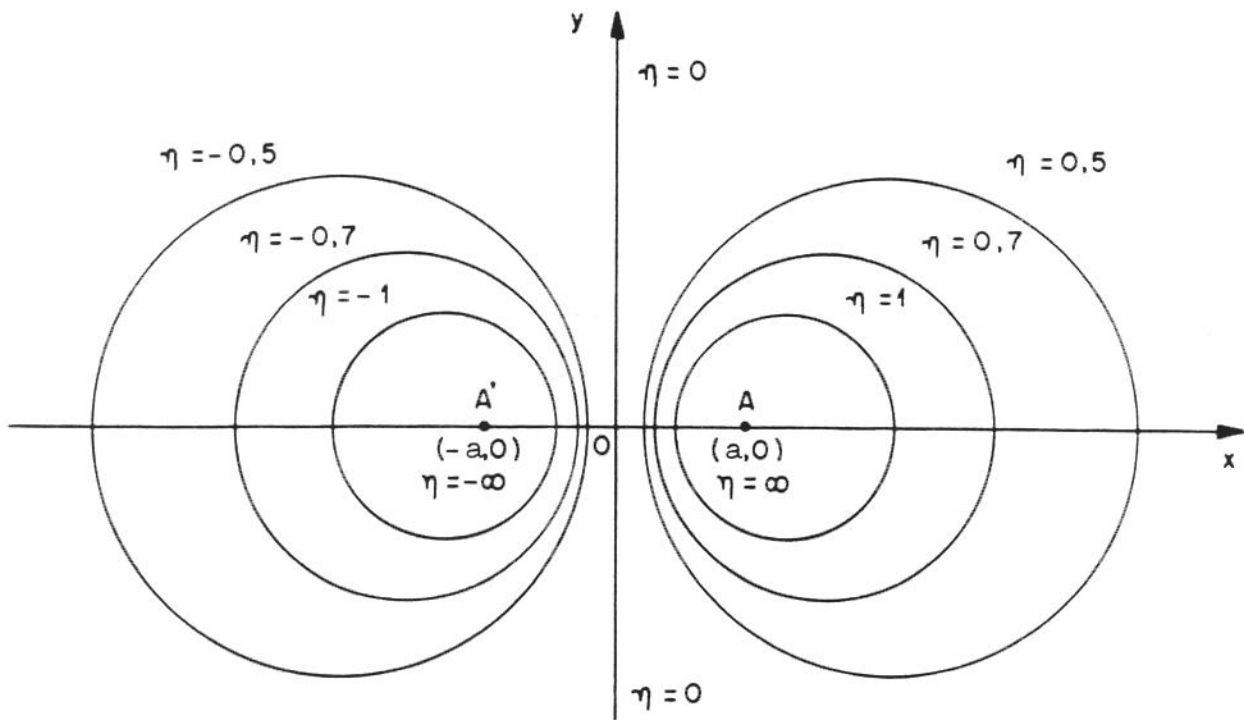


Fig. 4.1 Sistema de coordenadas bipolar ; $\eta = \text{constante}$.

Prova

Se $P(x, y)$ é um ponto da circunferência representada pela coordenada η , a razão das distâncias deste ponto aos pontos fixos A' e A é dada por

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}, \quad (4.1)$$

que comparada à expressão (3.5) proporciona a igualdade

$$e^\eta = \frac{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}. \quad (4.2)$$

Como η é constante, (4.2) garante que a razão $\overline{PA'}/\overline{PA}$ é também constante.

► Homotetia

Homotetia com centro O e razão k , $H(O, k)$, de uma figura $\mathcal{F}$, é definida como a transformação que a cada ponto P de $\mathcal{F}$ faz corresponder um ponto P' com as seguintes propriedades:

- 1ª.) P' pertence à reta OP ;
- 2ª.) $\overline{OP'}/\overline{OP} = k$.

► Potência de um ponto

A potência $\mathcal{P}$ de um ponto P , em relação a uma circunferência, é o produto dos segmentos orientados do ponto P a quaisquer dois pontos da circunferência, colineares com ele.

A Fig. 4.2 ilustra a definição, apresentando três situações para um ponto externo à circunferência, e uma para um ponto interno.

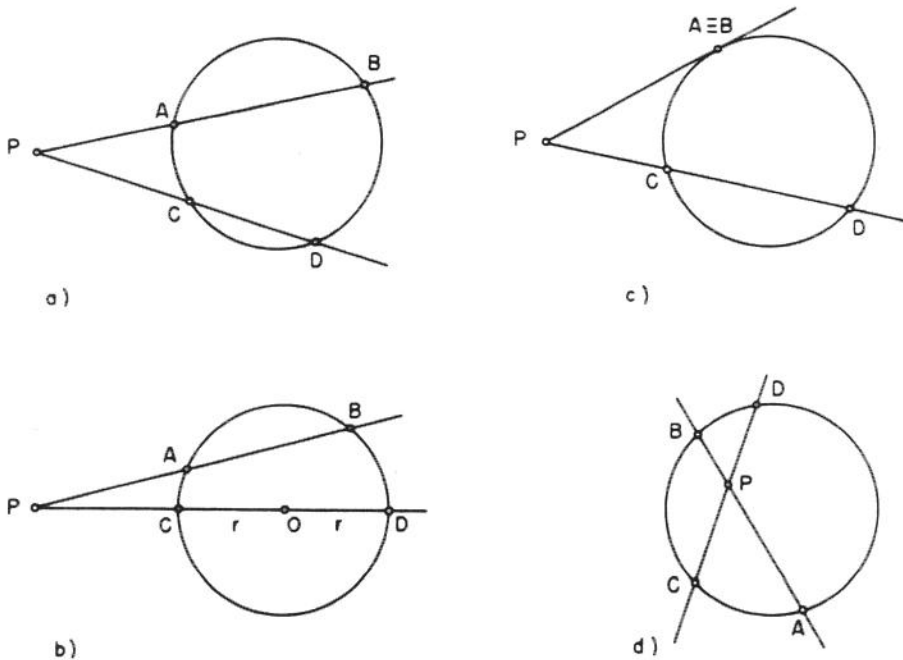


Fig. 4.2 Potência de um ponto P em relação a uma circunferência.

A Fig. 4.2b permite obter a relação

$$p = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PO}^2 - r^2. \quad (4.3)$$

Da definição de potência, tem-se:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD},$$

mas

$$\overline{PC} = \overline{PO} - r$$

$$\overline{PD} = \overline{PO} + r,$$

logo

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PO} - r) (\overline{PO} + r)$$

ou

$$p = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PO}^2 - r^2.$$

► Inverso de um ponto

O inverso de um ponto P , em relação a uma circunferência de centro O e raio R , é definido como o ponto P' sobre a reta OP , tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$. A circunferência de centro O e raio R é chamada circunferência de inversão, o ponto O é o centro de inversão, R é o raio de inversão e R^2 é a potência de inversão.

Dessa definição, conclui-se que o inverso de P' é o próprio P . Além disso, cada ponto fora da circunferência de inversão é transformado num ponto dentro, e cada ponto dentro (exceto o centro O) num ponto fora. A circunferência

é invariante no sentido estrito de que cada ponto dela é invariante. Qualquer reta por O é invariante como um todo, mas não ponto por ponto.

Um modo fácil de se obter através de construção geométrica o inverso de qualquer ponto, exceto o centro, é sugerido pelo teorema a seguir.

► Teorema 1

São pontos inversos, um ponto P' fora da circunferência de inversão e o ponto P , onde a corda de contato das tangentes à circunferência de inversão por P' corta a reta diametral OP' .

A figura seguinte representa as condições do enunciado.

A demonstração deste e dos teoremas que se seguem estão apresentadas no Apêndice C.

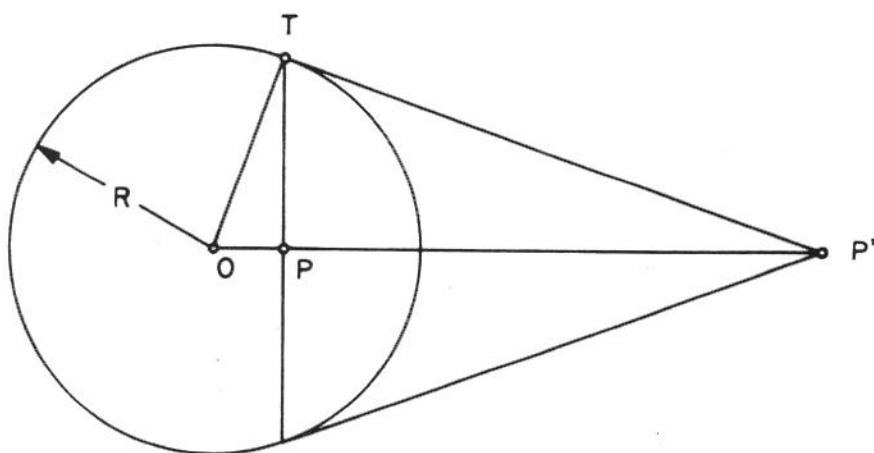


Fig. 4.3 Pontos inversos, P e P' .

Teorema 2

Dois pontos P e Q e seus correspondentes inversos P' e Q' estão numa circunferência ou numa reta pelo centro de inversão.

A Fig. 4.4 apresenta tais pontos.

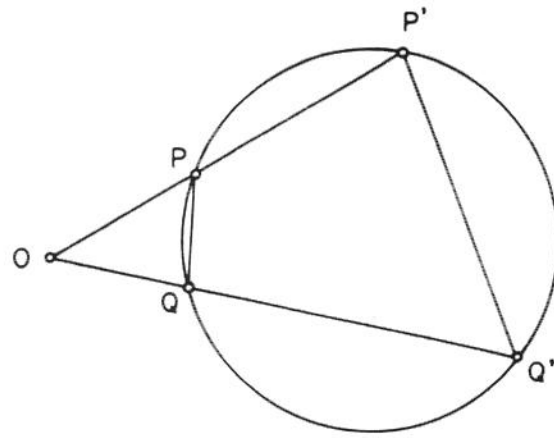


Fig. 4.4 Pontos e seus correspondentes pela inversão.

► Teorema 3

A inversa de uma reta é uma reta ou uma circunferência, conforme o centro de inversão esteja ou não na reta.

A Fig. 4.5 ilustra o Teorema 3.

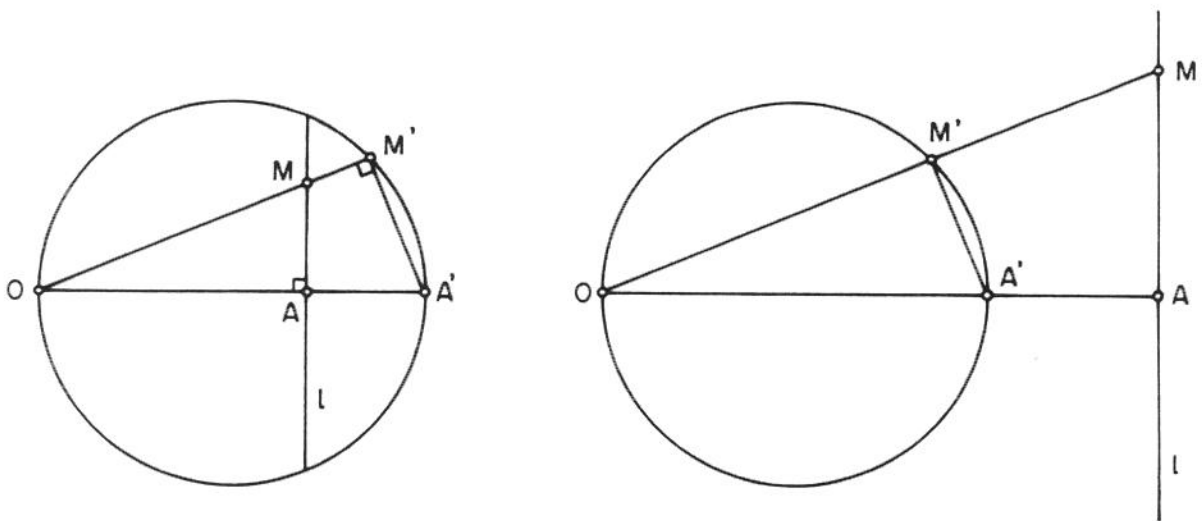


Fig. 4.5 Pontos e seus correspondentes pela inversão.

► Corolário

Qualquer circunferência por O tem como inversa uma reta não por O.

O Teorema a seguir considera a inversa de uma circunferência não por O .

► Teorema 4

A inversa de uma circunferência C , não passando pelo centro de inversão O , é uma circunferência C' não passando por O e homotética à circunferência C , tendo O como centro de homotetia, como mostram as Figs. 4.6 e 4.7.

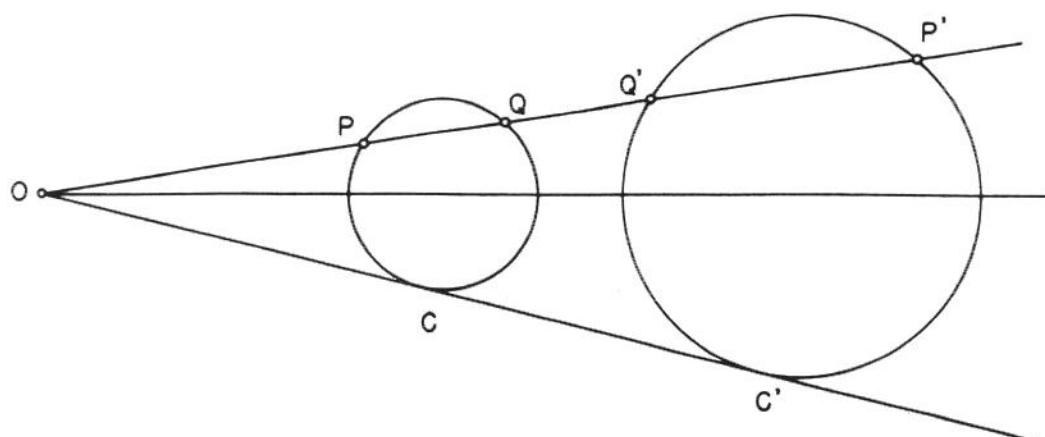


Fig. 4.6 Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $R^2/\rho > 1$.

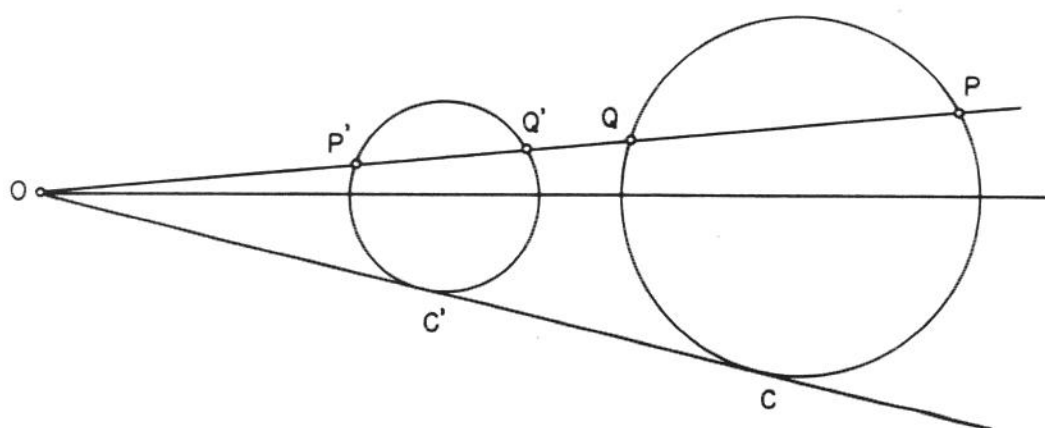


Fig. 4.7 Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $0 < R^2/\rho < 1$.

4.2. INVERSÃO GEOMÉTRICA

Seja uma circunferência de centro C e raio r_e representando a coordenada η constante, como mostra a figura a seguir.

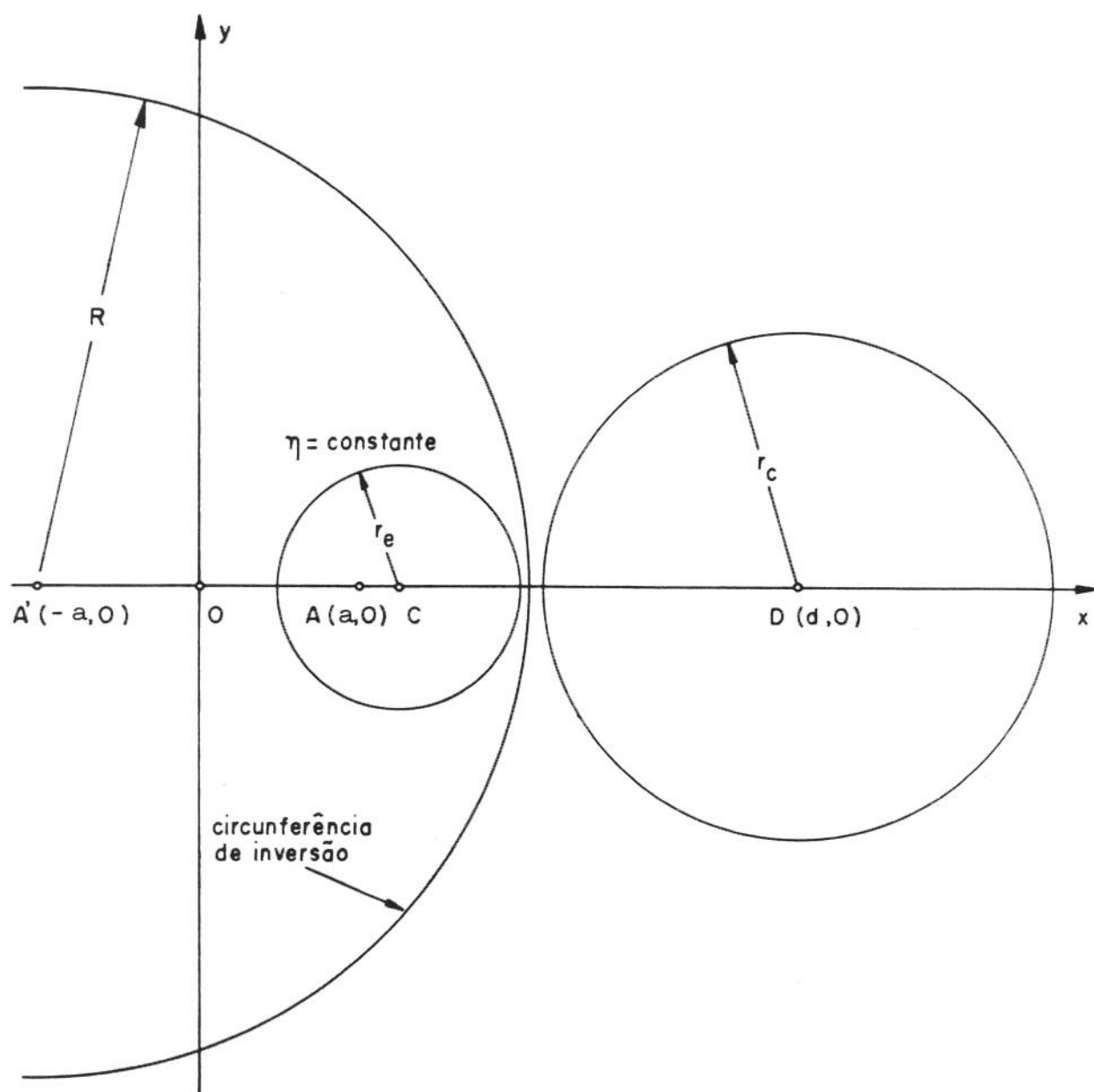


Fig. 4.8 Inversão de uma circunferência.

Da equação (3.7), Capítulo 3, segue-se que

$$OC = a \coth \eta \quad (4.4)$$

e

$$r_e = a \operatorname{csch} \eta . \quad (4.5)$$

Como visto na seção 4.1, tem-se uma circunferência de Apolônio quando $A'(-a,0)$ e $A(a,0)$ são pontos fixos. Esta circunferência pode ser transformada em uma circunferência de centro D sob homotetia $H(A', R^2/\mathcal{P})$, de acordo com o Teorema 4, se $A'(-a,0)$ for tomado como centro de inversão. A razão de homotetia, $R^2/\mathcal{P}$, tem $\mathcal{P}$ (potência do ponto A' em relação a circunferência de centro C) expressa por

$$\mathcal{P} = \overline{A'C}^2 - r_e^2 . \quad (4.6)$$

Usando a equação (4.5) e a identidade [baseada na Fig. 4.8 e equação (4.4)]

$$\overline{A'C} = \overline{A'O} + \overline{OC} = a (1 + \coth \eta) , \quad (4.7)$$

a equação (4.6) pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{P} = 2a^2/\sinh \eta (\sinh \eta + \cosh \eta) , \quad (4.8)$$

ao se utilizar a identidade

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1 . \quad (4.9)$$

Assim, o raio da circunferência inversa, r_c , é dado por

$$r_c = r_e \frac{R^2}{p}, \quad (4.10)$$

ou,

$$r_c = \frac{R^2}{2a(\sinh \eta + \cosh \eta)}. \quad (4.11)$$

É possível expressar ainda o centro da circunferência inversa por

$$\overline{A'D} = \overline{A'C} \frac{R^2}{p}. \quad (4.12)$$

Através das equações (4.7) e (4.8), (4.12) torna-se

$$\overline{A'D} = \frac{R^2}{2a}. \quad (4.13)$$

Como $\overline{A'A} = 2a$, a expressão (4.13) permite escrever

$$\overline{A'D} \cdot \overline{A'A} = R^2, \quad (4.14)$$

indicando que D é o inverso de A. Como o ponto A é fixo, pode-se concluir que as circunferências de Apolônio representando as coordenadas η constantes podem ser transformadas num conjunto de circunferências concêntricas de centro D.

Nota-se que, a escolha de R (raio da circunferência de inversão) ou d (abscissa do centro da circunferência inversa), é arbitrária.

A relação entre R e d pode ser expressa por

$$d = \overline{OD} = \overline{A'D} - \overline{A'O} = \frac{R^2}{2a} - a , \quad (4.15)$$

ou

$$R^2 = 2a (d + a) . \quad (4.16)$$

Substituindo na expressão (4.11) R^2 pelo valor expresso em (4.16), tem-se:

$$\sinh \eta + \cosh \eta = \frac{a + d}{r_C} , \quad (4.17)$$

ou

$$r_C = (a + d) \exp(-\eta) . \quad (4.18)$$

A equação (4.17) e a identidade (4.9) permitem obter as seguintes relações entre os parâmetros d , r_C , e η :

$$\sinh \eta = \frac{(a + d)^2 - r_C^2}{2r_C(a + d)} \quad (4.19)$$

e

$$\cosh \eta = \frac{(a + d)^2 + r_C^2}{2r_C(a + d)} . \quad (4.20)$$

Com respeito à coordenada ξ , a observação da figura abaixo mostra que todas as circunferências representando valores constantes de ξ , passam pelo centro de inversão, ponto A' , e de acordo com o Teorema 3 transformam-se em retas, que passam por D , correspondendo a $\theta = \text{constante}$ em coordenadas cilíndricas. A equivalência entre as coordenadas η , ξ sob a inversão com centro A' é ilustrada na Fig. 4.9.

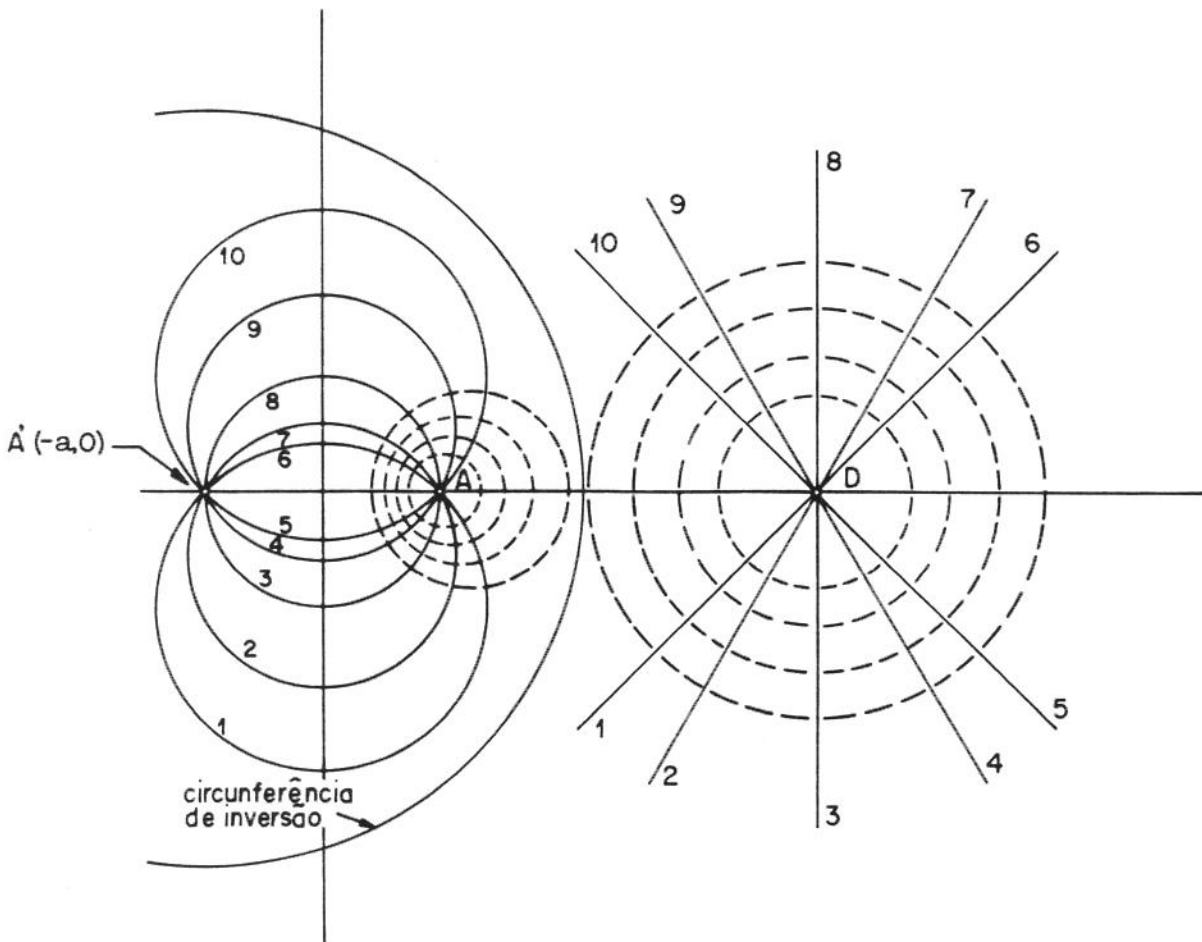


Fig. 4.9 Equivalência entre as coordenadas η , ξ , sob a inversão com centro A' .

4.3. APLICAÇÕES DA INVERSÃO

A inversão geométrica pode ser aplicada com êxito ao estudo dos escoamentos em sistemas anulares excêntricos, permitindo prever o L.G. das velocidades máximas e auxiliando também na determinação das linhas de isovelocidade.

O sucesso da aplicação, no entanto, depende de uma condição fundamental: o L.G. das $v_{z,\max}$ deve coincidir com a linha $\eta = \eta_{\max} = \text{constante}$. Isto implica em que os valores de $\eta_{\max}$ devem ser independentes de ξ .

Para o caso laminar, valores de $\eta_{\max}$ podem ser determinados como uma função de ξ através de $\partial v_z / \partial \eta = 0$, utilizando as expressões de Snyder & Goldstein [(3.25a) a (3.25e)]. Assim,

$$\frac{\partial v_z / \partial \eta}{a^2 / \mu (-dp/dz)} = -E + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^2 \eta$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \xi [-nA_n e^{n\eta} - (nB_n - n \coth \eta) e^{-n\eta} + e^{-n\eta} \operatorname{csch}^2 \eta]$$

e, para $\eta_{\max}$ ser independente de ξ , deve-se ter:

$$-E + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^2 \eta_{\max} = 0$$

ou

$$\sinh \eta_{\max} = (2E)^{-1/2} \quad (4.21)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \xi [-nA_n e^{n\eta_{\max}} - n(B_n - \coth \eta_{\max}) e^{-n\eta_{\max}} + e^{-n\eta_{\max}} \operatorname{csch}^2 \eta_{\max}] = 0$$

ou

$$[2E - n(B_n - \sqrt{1 + 2E})] e^{-n\eta_{\max}} - nA_n e^{n\eta_{\max}} = 0$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ (4.22)

Para um dado par r_e^* , ϵ , determina-se $\eta_{\max}$ através das equações (3.17), (3.18), (3.25c) e (4.21).

Valores de $\eta_{\max}$ que satisfazem (4.22) são independentes de ξ , e portanto, o L.G. das $v_{z,\max}$ corresponde a uma circunferência.

De acordo com o procedimento sugerido por ÖZGEN & TOSUN (1987), pode-se determinar a região de aplicabilidade da técnica da inversão aos escoamentos laminares em sistemas anulares excêntricos.

O conjunto das equações (4.22) não é rigorosamente satisfeito para valores de $\epsilon > 0$ (exceto para $r_e^* \rightarrow 1$). Na prática, este conjunto de equações estabelece regiões nas quais a proximidade do zero é satisfatória. A soma dos módulos das equações (4.22), para um $\eta_{\max}$ define o afastamento do zero, denotado por Y_{fix} . O algoritmo "REPSILON" (Apêndice D8) determina a região de aplicabilidade da técnica da inversão, calculando as curvas de nível no plano formado por r_e^* e ϵ , para determinado Y_{fix} arbitrariamente fixado num valor constante. A Fig. 4.10 mostra as curvas de nível para vários $Y_{fix} = \text{constante}$. As regiões de aplicabilidade da técnica de inversão estão sempre à esquerda da respectiva curva $Y_{fix} = \text{constante}$. A Fig. 4.11 apresenta a região de aplicabilidade da técnica da inversão para $Y_{fix} \leq 0,01$. Esta região se diferencia ligeiramente daquela apresentada por ÖZGEN & TOSUN (1987). Entretanto, estes autores não dão maiores

detalhes dos critérios adotados para o corte da série de equações em n , representadas pela equação (4.22).

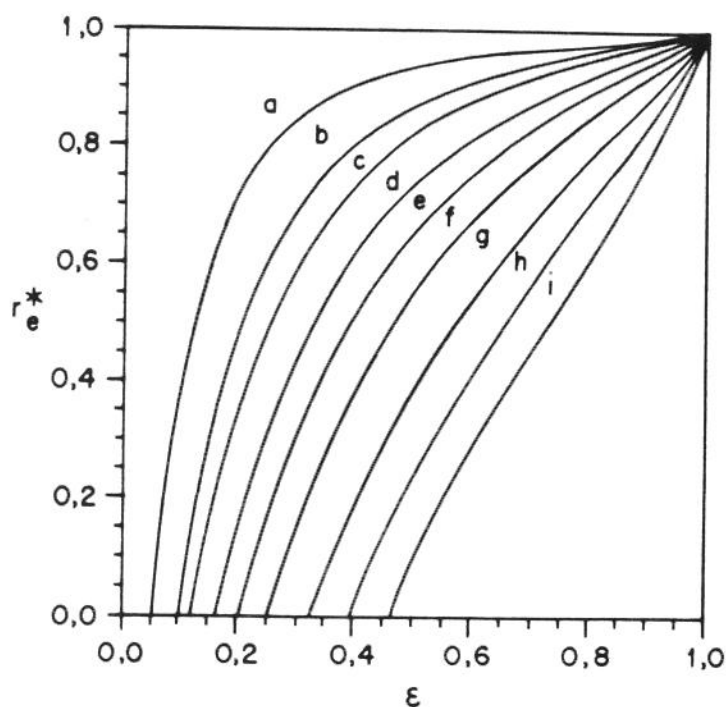


Fig. 4.10 Curvas de nível que representam a soma dos módulos das equações (4.22) igual a um valor constante Y_{fix} : $Y_{fix} = 0,0001$ (a); $0,0005$ (b); $0,0010$ (c); $0,0025$ (d); $0,0050$ (e); $0,0100$ (f); $0,0250$ (g); $0,0500$ (h); $0,1000$ (i).

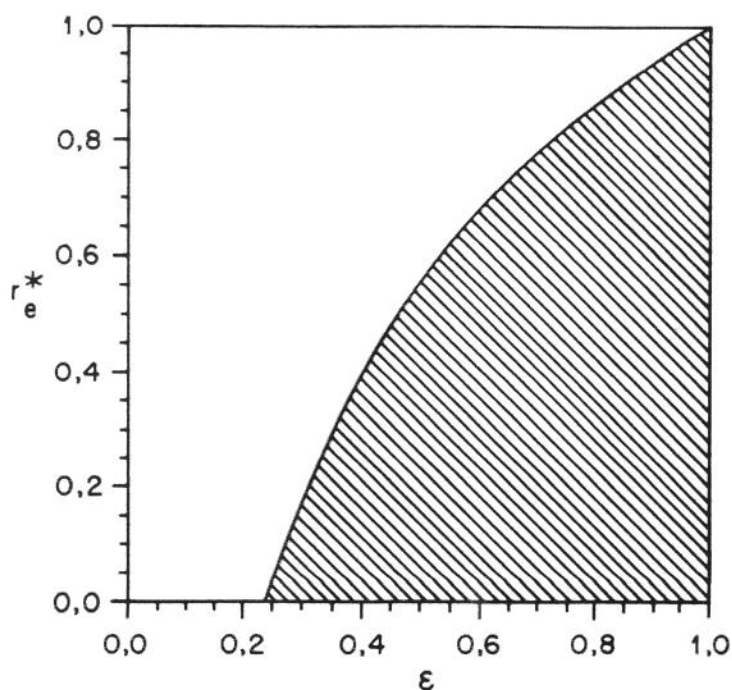


Fig. 4.11 Região de aplicabilidade da técnica da inversão (área não hachurada).

Na região onde $\eta_{\max}$ é independente de ξ , é válida a seguinte aproximação :

$$1 - e^{-2\eta_{\max}} \approx [(1 - e^{-2\eta_i})(1 - e^{-2\eta_o})]^{1/2} . \quad (4.23)$$

Comparando os valores de E das equações (4.21) e (3.25c) e empregando a aproximação (4.23), obtém-se

$$2(\eta_i - \eta_o) = e^{2\eta_{\max}} [(e^{-\eta_o}) - (e^{-\eta_i})^2] . \quad (4.24)$$

Utilizando a definição de r_c^* (equação 2.1) procede-se à inversão da equação (4.24), segundo (4.18), obtendo-se

$$r_{c, \max} = r_{c_o} \left[\frac{1 - (r_c^*)^2}{2 \ln (1/r_c^*)} \right]^{1/2} . \quad (4.25)$$

Nota-se que a equação (4.25) é idêntica à equação (2.13) para escoamento laminar em um sistema anular concêntrico de raio interno r_{c_i} e externo r_{c_o} . O raio que localiza o L.G. da velocidade máxima para o caso turbulento pode ser obtido, dentro das limitações já consideradas no Capítulo 2, seção 2.2., pela mesma equação (4.25).

Em relação aos sistemas excêntricos, adota-se também, conforme HEYDA (1958) , a coincidência entre os L(s).G(s). das velocidades máximas para os regimes laminar e turbulento.

Utilizando-se de um sistema anular excêntrico com $r_{e_i} = 1 \text{ in}(25,4 \text{ mm})$, $r_{e_o} = 1,5 \text{ in}(38,1 \text{ mm})$ e $\epsilon = 0,25$, WOLFFE & CLUMP (1963) estudaram experimentalmente o escoamento de ar para $Re_y = 20000$. Os correspondentes valores de η_i e η_o calculados das equações (3.17) e (3.18) são: $\eta_i = 2,280$ e $\eta_o = 1,887$. Para o sistema concêntrico correspondente, os raios, r_{c_i} , do tubo interno, e r_{c_o} , do

tubo externo, são calculados pela equação (4.18). Se $a + d = 15$ in (381 mm), então $r_{Ci} = 1,534$ in (38,964 mm) e $r_{Co} = 2,273$ in (57,734 mm). Substituindo estes valores na equação (4.25), obtém-se: $r_{c,max} = 1,891$ in (48,031 mm). Procedendo-se a inversão através da equação (4.18), encontra-se $\eta_{max} = 2,07$ para o correspondente L.G. das $v_{z,max}$ no sistema excêntrico. A coincidência entre os pontos experimentais obtidos por Wolffe & Clump e o L.G. das $v_{z,max}$ calculado teoricamente, é mostrada na Fig. 4.12. Deve-se notar ainda, que, para $\epsilon = 0,25$ e $r_e^* = 2/3$, a equação (4.21) válida para escoamento laminar, também resulta em $\eta_{max} = 2,07$. Vê-se, portanto, que a técnica da inversão pode ser usada para prever o L.G. das velocidades máximas nos sistemas anulares excêntricos, tanto para os escoamentos laminares como os turbulentos. O maior mérito desta técnica no entanto, é possibilitar o mapeamento do campo do escoamento através das linhas de isovelocidades.

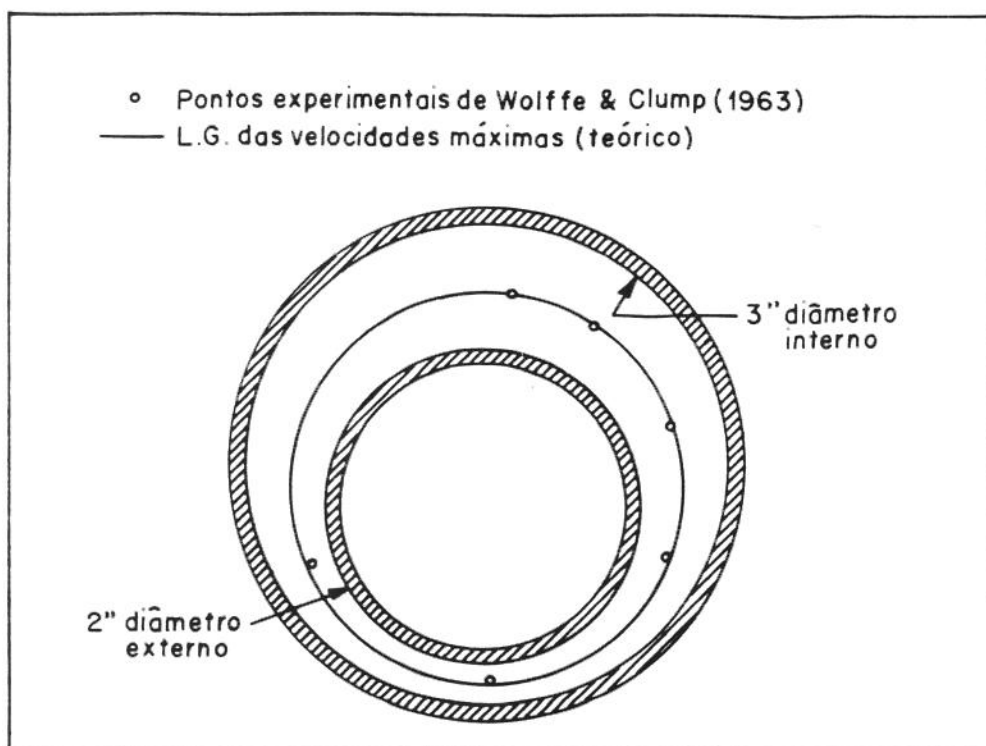


Fig. 4.12 L.G. das velocidades máximas em um anular excêntrico. Extraído de Wolffe & Clump (1963).

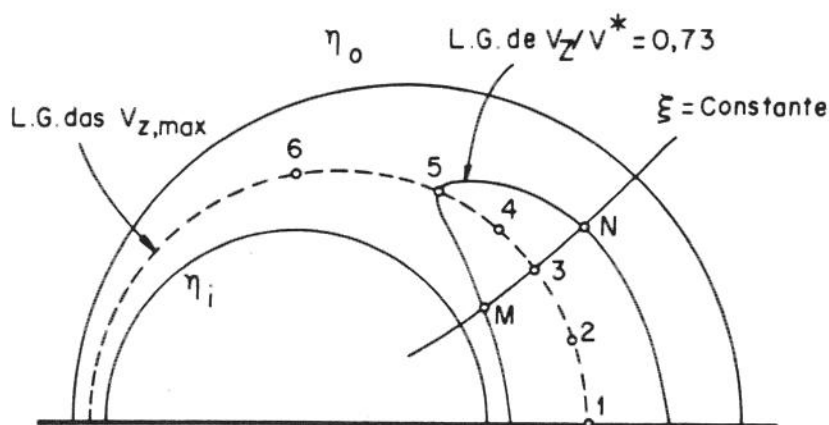
4.4. MAPAS DE ISOVELOCIDADES

Este tópico, já desenvolvido no capítulo anterior para as soluções de Snyder & Goldstein relativas aos escoamentos laminares, será agora considerado em conexão com a teoria da inversão.

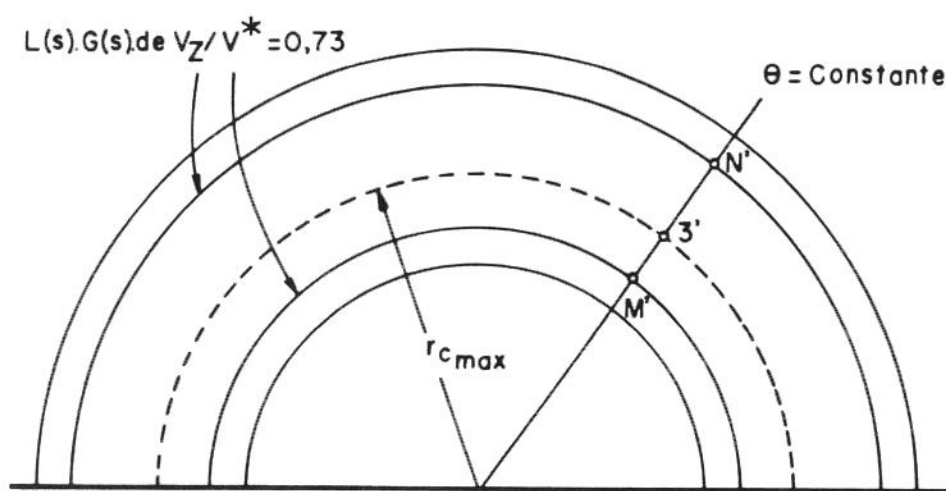
Embora o L.G. das $v_{z,max}$ para um sistema anular excêntrico possa ser predito pela teoria da inversão, a obtenção das linhas de isovelocidade está condicionada ao conhecimento dos valores de $v_{z,max}$. Na prática da Engenharia, tal conhecimento deve ser obtido experimentalmente ou através das equações disponíveis.

A utilização da técnica da inversão para se obter um mapa de isovelocidades obedece à seqüência de operações indicadas por ÖZGEN & TOSUN :

- 1ª.) Determina-se o correspondente sistema concêntrico para um dado sistema anular excêntrico.
- 2ª.) Calculam-se $r_{c,max}$ e o correspondente η_{max} .
- 3ª.) Obtém-se os valores de $v_{z,max}$ em η_{max} . No caso de um escoamento laminar, os valores de $v_{z,max}$ podem ser calculados diretamente das equações de Snyder & Goldstein [(3.25a) a (3.25e)]. Usando-se esses valores, localiza-se $v_{z,max}/v^*$ em η_{max} , como mostra a Fig. 4.13a, onde os pontos 1,2,3,4,5 e 6 correspondem respectivamente aos valores 1, 0,9, 0,85, 0,8, 0,73 e 0,65 de $v_{z,max}/v^*$.



a) Sistema anular excêntrico



b) Sistema anular concêntrico

Fig. 4.13 Inversão de uma linha de isovelocidade. Extraído de ÖZGEN & TOSUN (1987).

- 4ª.) Determinam-se os pontos M' e N' . Por exemplo, seja $v_z/v^* = 0,73$ a linha de isovelocidade pretendida. A linha ξ passando através do ponto 3 intercepta o L.G. de $v_z/v^* = 0,73$ nos pontos M e N , cujas coordenadas η serão determinadas pela técnica da inversão. Nota-se que $v_{z,max}/v^*$ é 0,85 no ponto 3. Pelo Teorema 3, os pontos M , 3 e N , situados numa linha ξ constante, transformam-se, no sistema anular concêntrico, nos pontos M' , 3' e N' ,

situados numa reta $\theta = \text{constante}$ (Fig. 4.13b). Nos pontos M' e N' v_z/v^* é 0,73, e no ponto 3' $v_{z,\max}/v^*$ é 0,85. A localização dos pontos M' e N' é obtida das expressões analíticas disponíveis para sistemas anulares concêntricos. No caso de um escoamento turbulento, pode-se utilizar as equações de Knudsen & Katz [(2.46) e (2.47)] com a razão de velocidades $\bar{u}/\bar{u}_{\max}$ dada por $\frac{v_z/v^*}{V_{z,\max}/v^*}$, ou seja,

$$r = r_{C_0} - (r_{C_0} - r_{c,\max}) \left(\frac{v_z/v^*}{V_{z,\max}/v^*} \right)^{7,042}$$

para $r > r_{c,\max}$

$$r = r_{C_i} + (r_{c,\max} - r_{C_i}) \left(\frac{v_z/v^*}{V_{z,\max}/v^*} \right)^{9,804}$$

para $r < r_{c,\max}$.

No caso laminar, adotando a mesma razão de velocidades, $\frac{v_z/v^*}{V_{z,\max}/v^*}$, os valores de r podem ser calculados da equação (2.25)

$$(r/r_{C_0})^2 - 2\gamma \ln (r/r_{C_0}) = 1 - (1 - \gamma + \gamma \ln \gamma) \left(\frac{v_z/v^*}{V_{z,\max}/v^*} \right)$$

onde

$$\gamma = \frac{1 - r_C^{*2}}{2 \ln (1/r_C^*)}$$

Obtidos os valores de r , os correspondentes valores de η são fixados pela equação (4.18).

- 5ª.) Determina-se a linha ξ que intercepta o L.G. das $v_{z,\max}$ ($\eta = \eta_{\max}$) no ponto correspondente a um certo valor de $v_{z,\max}/v^*$, utilizando a equação (3.2). Conhecidos os valores das coordenadas η e ξ dos pontos M e N, calculam-se os correspondentes x e y , através das equações (3.2) e (3.3).
- 6ª.) Repetem-se as operações 4ª. e 5ª. para outros valores de $v_{z,\max}/v^*$ em $\eta_{\max}$, obtendo-se, assim, o L.G. de $v_z/v^* = \text{constante}$.

Neste trabalho aplicou-se a técnica da inversão a sete sistemas anulares excêntricos, cinco envolvendo escoamentos turbulentos e dois laminares.

Da necessidade de se conhecer valores de $v_{z,\max}$, recorreu-se, no caso turbulento, ao trabalho experimental de JONSSON & SPARROW (1966), onde, como parte dos resultados obtidos por esses autores, encontram-se mapas de isovelocidades. A localização dos $v_{z,\max}/v^*$ em $\eta_{\max}$ foi obtida diretamente de medidas geométricas efetuadas nos referidos mapas. No caso laminar, desenvolveu-se, a partir das equações de Snyder & Goldstein [(3.25a) a (3.25e)], o algoritmo "XSI" (Apêndice D9), capaz de determinar sobre uma linha η o ponto correspondente a um dado valor de velocidade, propiciando além da coordenada ξ , as cartesianas x, y .

Dentre os sistemas estudados por Jonsson & Sparrow, foram escolhidos para este trabalho os seguintes:

$$\begin{cases} r_e^* = 0,75 \\ \epsilon = 0,75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,75 \\ \epsilon = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,561 \\ \epsilon = 0,75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,561 \\ \epsilon = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,281 \\ \epsilon = 0,6 \end{cases}$$

No caso laminar, os sistemas estudados foram:

$$\begin{cases} r_e^* = 2/3 \\ \epsilon = 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,4 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases}$$

As Figs. 4.14, 4.15, 4.16, 4.18 e 4.20 são os mapas de isovelocidades dos escoamentos turbulentos, obtidos pela técnica da inversão geométrica. Nas legendas do canto superior esquerdo constam dois novos parâmetros além daqueles apresentados no caso laminar, o número de Reynolds (Rey) e a medida do raio interno do tubo externo, r_{eo} .

As Figs. 4.17, 4.19, 4.21 e 4.22 são os mapas de isovelocidades obtidos por Jonsson & Sparrow, onde, além do L.G. das $v_{z,max}$, aparece também a semicircunferência η_{max} obtida pela técnica da inversão. Não havendo coincidência entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha $\eta_{max} = \text{constante}$, o mapa obtido constituir-se-á numa aproximação. É evidente, que quanto menor a diferença entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha η_{max} , tanto melhor será essa aproximação. As Figs. 4.14 e 4.15 apresentam a situação de coincidência, e as Figs. 4.16, 4.18 e 4.20 os casos em que o L.G. das $v_{z,max}$ não coincide com a linha η_{max} obtida pela técnica da inversão. As Figs. 4.16, 4.18 e 4.20 são apresentadas formando pares com as Figs. 4.17, 4.19 e 4.21, a fim de permitir uma comparação visual entre os mapas de Jonsson & Sparrow e os mapas obtidos pela técnica da inversão geométrica.

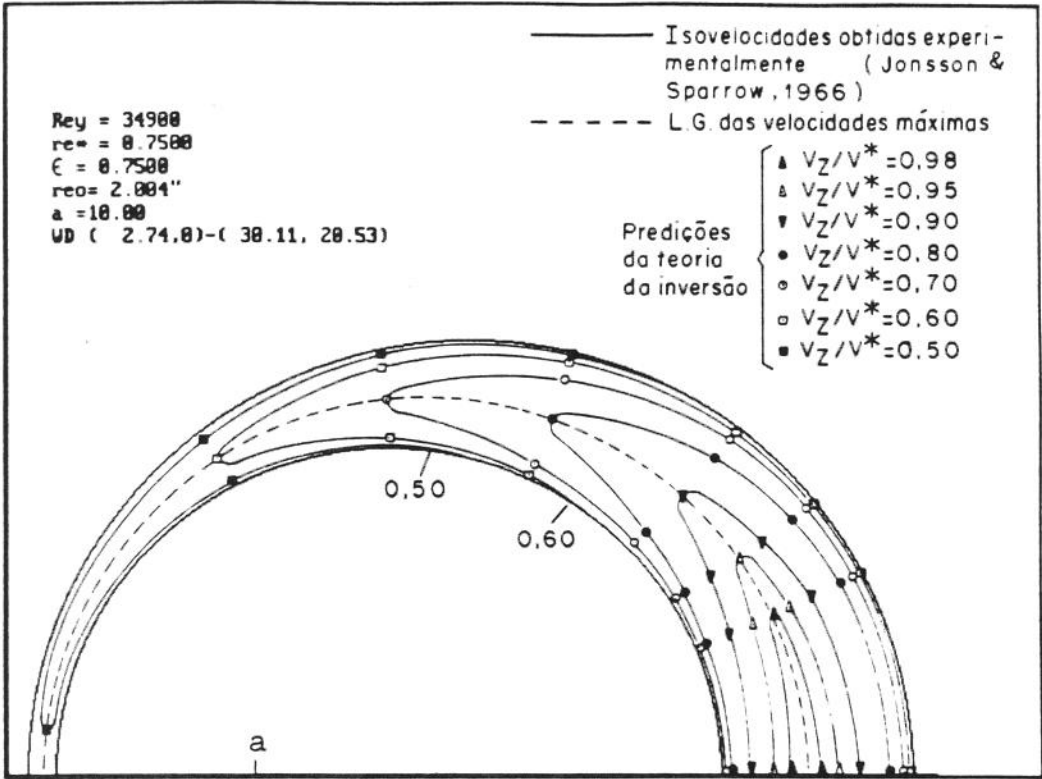


Fig. 4.14 Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

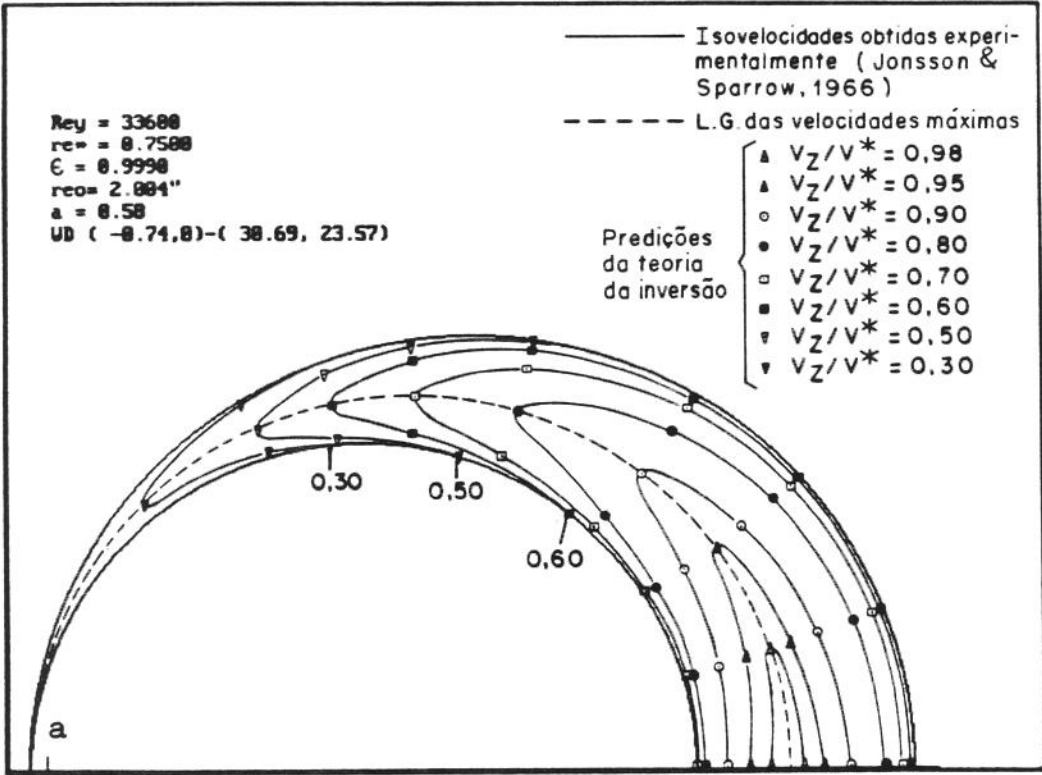


Fig. 4.15 Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

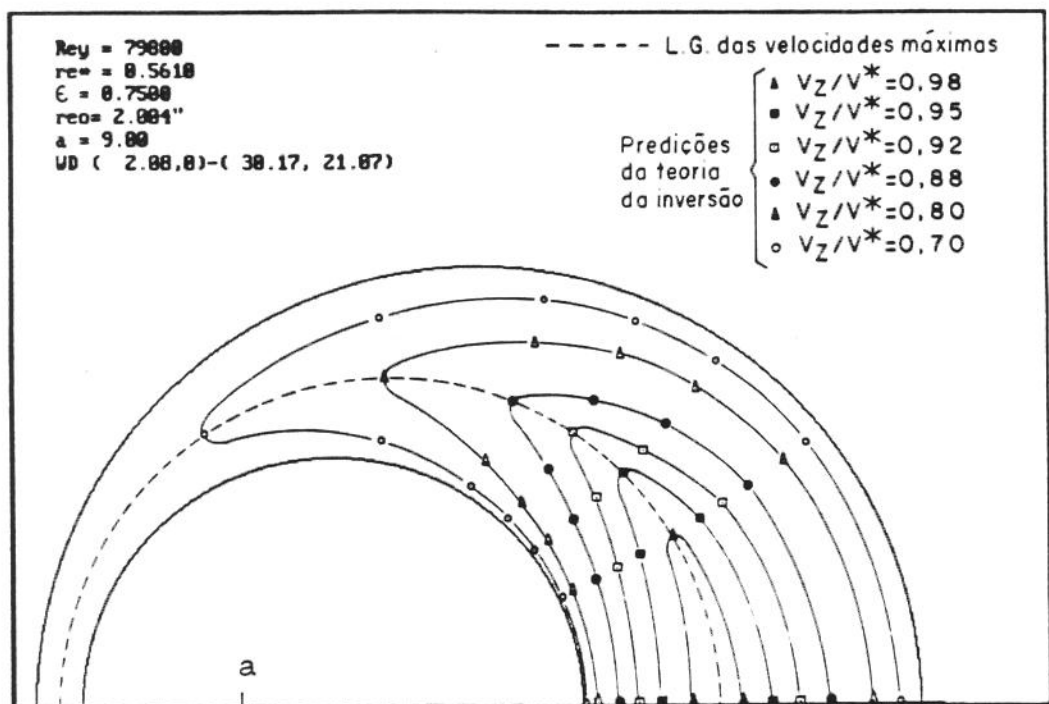


Fig. 4.16 Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

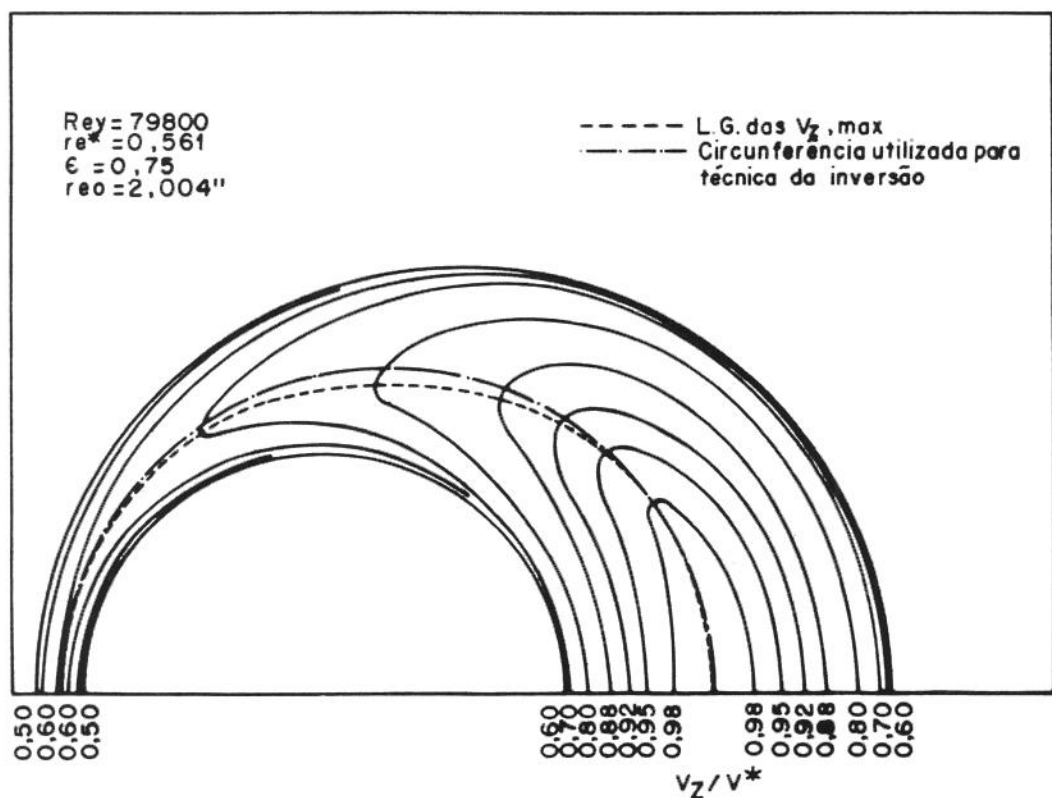


Fig. 4.17 Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966).

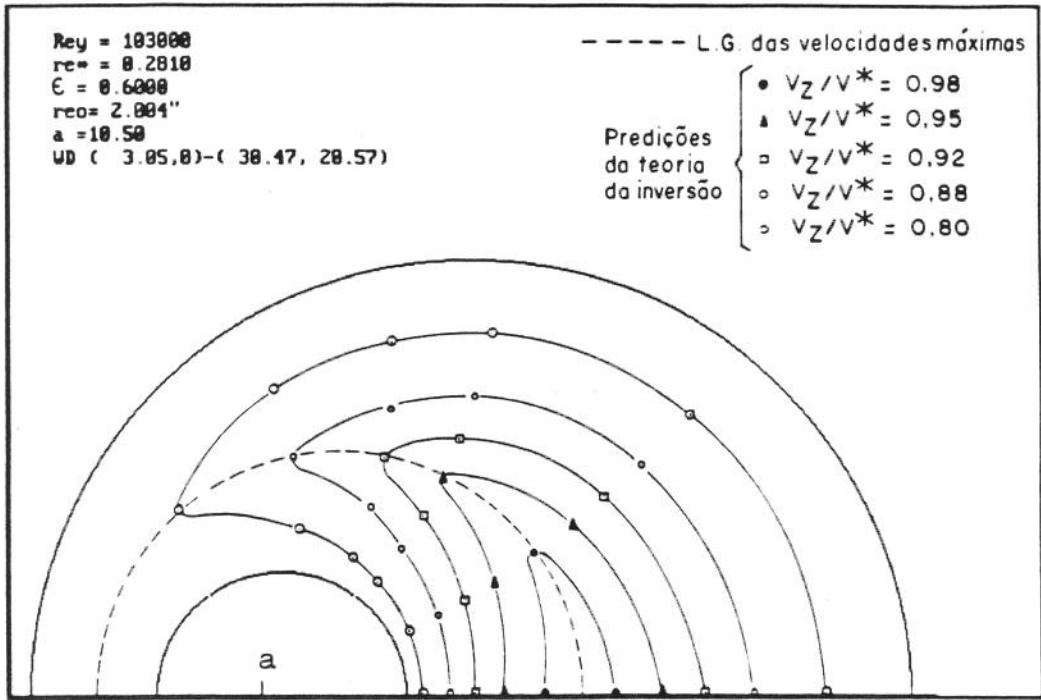


Fig. 4.18 Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

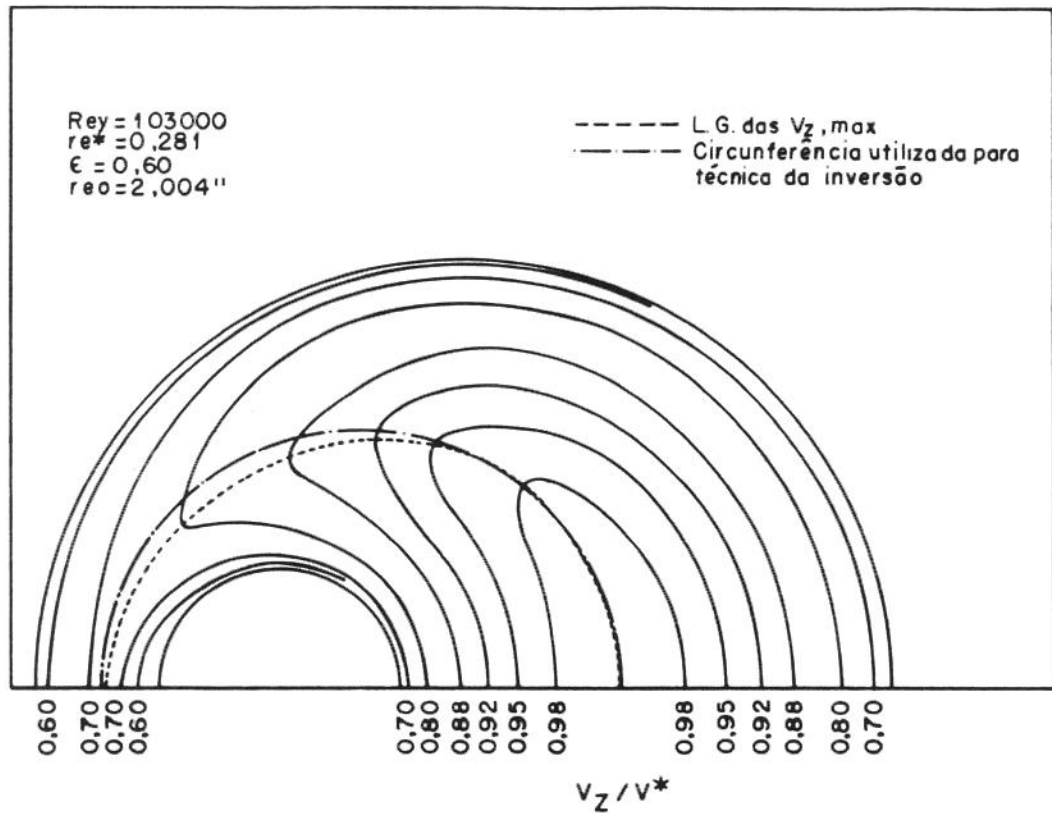


Fig. 4.19 Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966) .

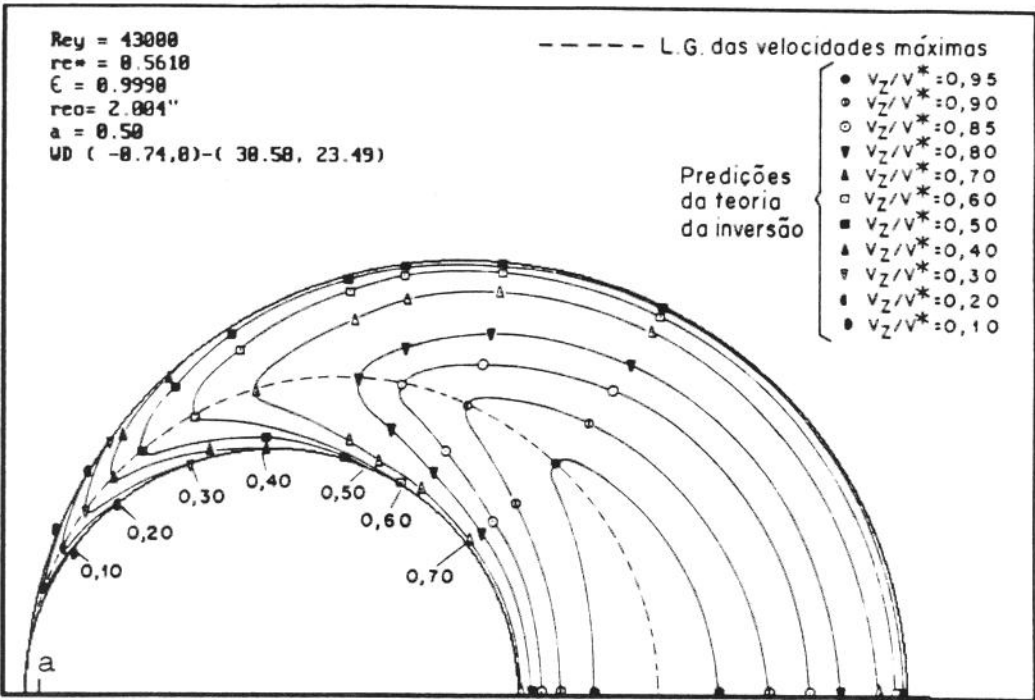


Fig. 4.20 Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento .

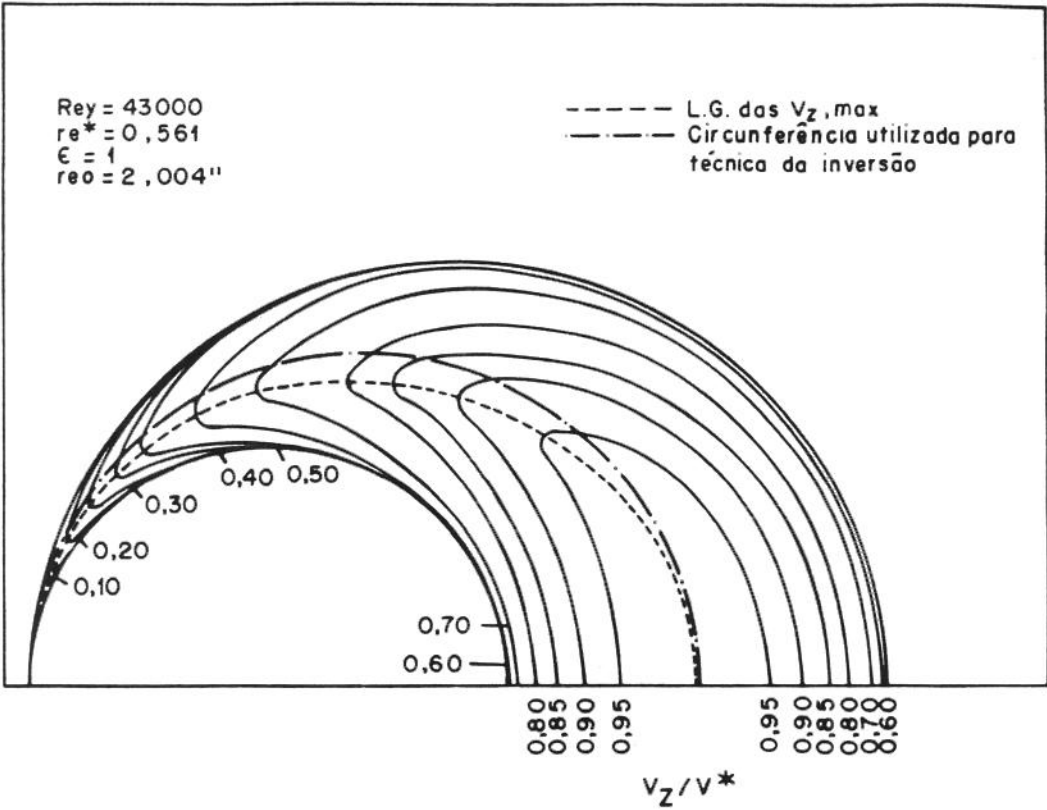


Fig. 4.21 Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1996) .

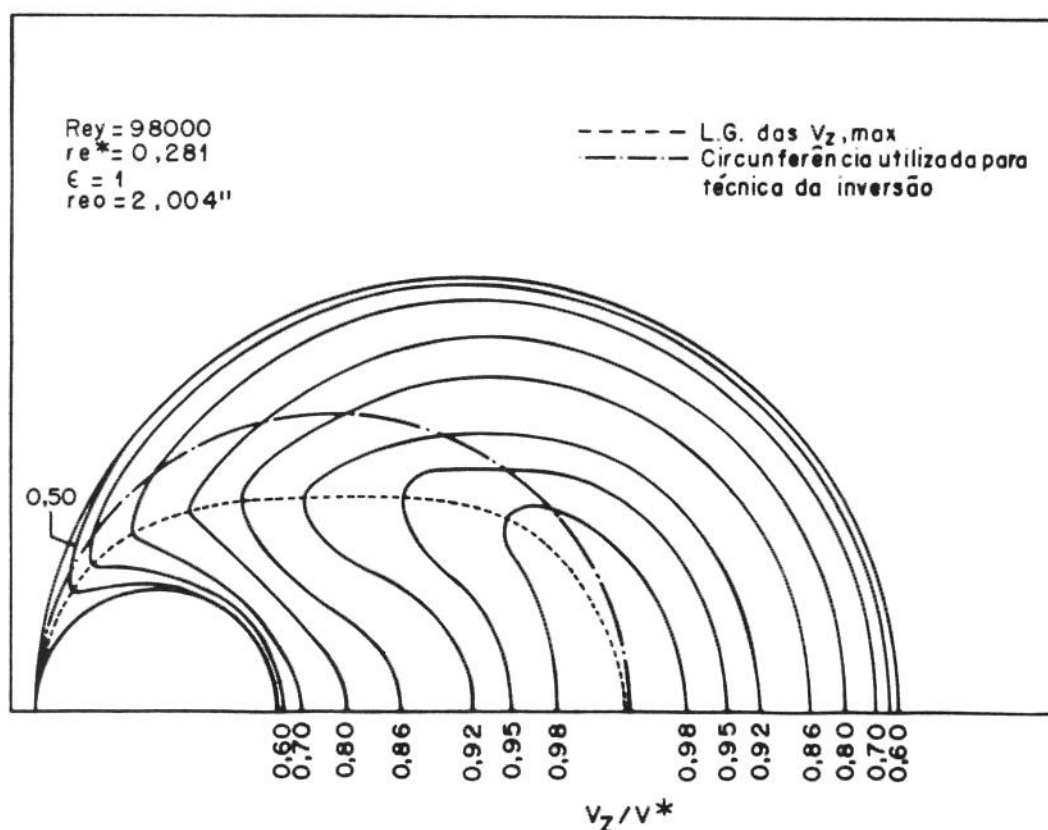


Fig. 4.22 Mapa de isovelocidades obtido por JONSSON & SPARROW (1966).

Uma observação atenta de cada um desses pares de figuras revela que, quanto maior for o afastamento entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a semicircunferência η_{max} , mais divergentes são os resultados em relação ao que seria considerado uma aproximação desejável.

A Fig. 4.22 foi colocada neste trabalho para mostrar uma situação na qual a técnica da inversão não é adequada, por serem muito distintas a linha do L.G. das $v_{z,max}$ e a linha η_{max} .

Considerando ainda as Figs. 4.14, 4.15, 4.17, 4.19, 4.21 e 4.22, pode-se concluir que o desvio entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha $\eta_{max} = \text{constante}$ depende dos parâmetros re^* e ϵ , que definem o sistema anular.

Devido ao arranjo experimental utilizado por Jonsson & Sparrow, constituído de quatro tubos de diâmetros decrescentes, sendo o de maior diâmetro fixo, e os demais,

um por vez, posicionados interiormente ao tubo de maior diâmetro, é possível agrupar os sistemas anulares assim formados, quanto à razão dos raios e quanto à razão de excentricidade. Assim, em relação a r_e^* tem-se o Grupo I, integrado pelos seguintes pares de sistemas:

$$\text{GRUPO I} \left\{ \begin{array}{lll} \text{I.1} & r_e^* = 0,750 & e \quad \begin{cases} \epsilon = 0,75 \\ \epsilon = 1 \end{cases} \\ \\ \text{I.2} & r_e^* = 0,561 & e \quad \begin{cases} \epsilon = 0,75 \\ \epsilon = 1 \end{cases} \\ \\ \text{I.3} & r_e^* = 0,281 & e \quad \begin{cases} \epsilon = 0,60 \\ \epsilon = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Relativamente a ϵ , os sistemas do Grupo II são:

$$\text{GRUPO II} \left\{ \begin{array}{lll} \text{II.1} & \epsilon = 1 & e \quad \begin{cases} r_e^* = 0,750 \\ r_e^* = 0,561 \\ r_e^* = 0,281 \end{cases} \\ \\ \text{II.2} & \epsilon = 0,75 & e \quad \begin{cases} r_e^* = 0,750 \\ r_e^* = 0,561 \end{cases} \\ \\ \text{II.3} & \epsilon = 0,60 & e \quad r_e^* = 0,281 \end{array} \right.$$

Analisando as Figs. 4.16, 4.18, 4.20 e 4.22 referentes a cada um dos pares de sistemas do Grupo I, com exceção do

par I.1 onde não ocorre desvio entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha η_{ax} obtida pela técnica da inversão, verifica-se que a tendência do desvio é ser maior para maiores valores de ϵ . A análise das figuras referentes ao Grupo II mostra que para ϵ fixo, a tendência do desvio é ser tanto maior quanto menor for a razão dos raios.

A somatória destas tendências é totalmente confirmada para o sistema que apresenta a menor razão dos raios e a maior razão de excentricidade, representado na Fig. 4.22, já que este é, dentre os seis sistemas estudados por Jonsson & Sparrow, o que apresenta o maior desvio entre o L.G. das velocidades máximas e a linha η_{max} .

Para os escoamentos laminares, a técnica da inversão foi aplicada a dois sistemas considerados no Capítulo 3. Os mapas de isovelocidades desses sistemas são apresentados nas Figs. 4.23 e 4.24.

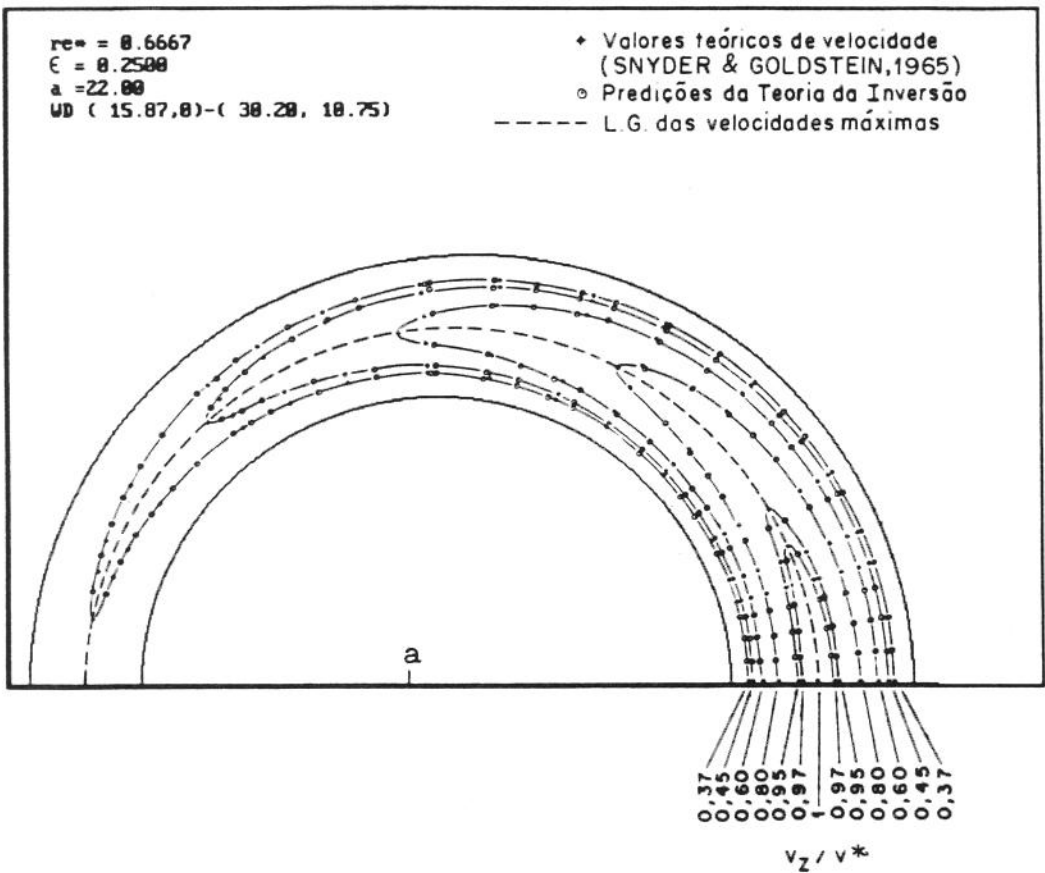


Fig. 4.23 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.

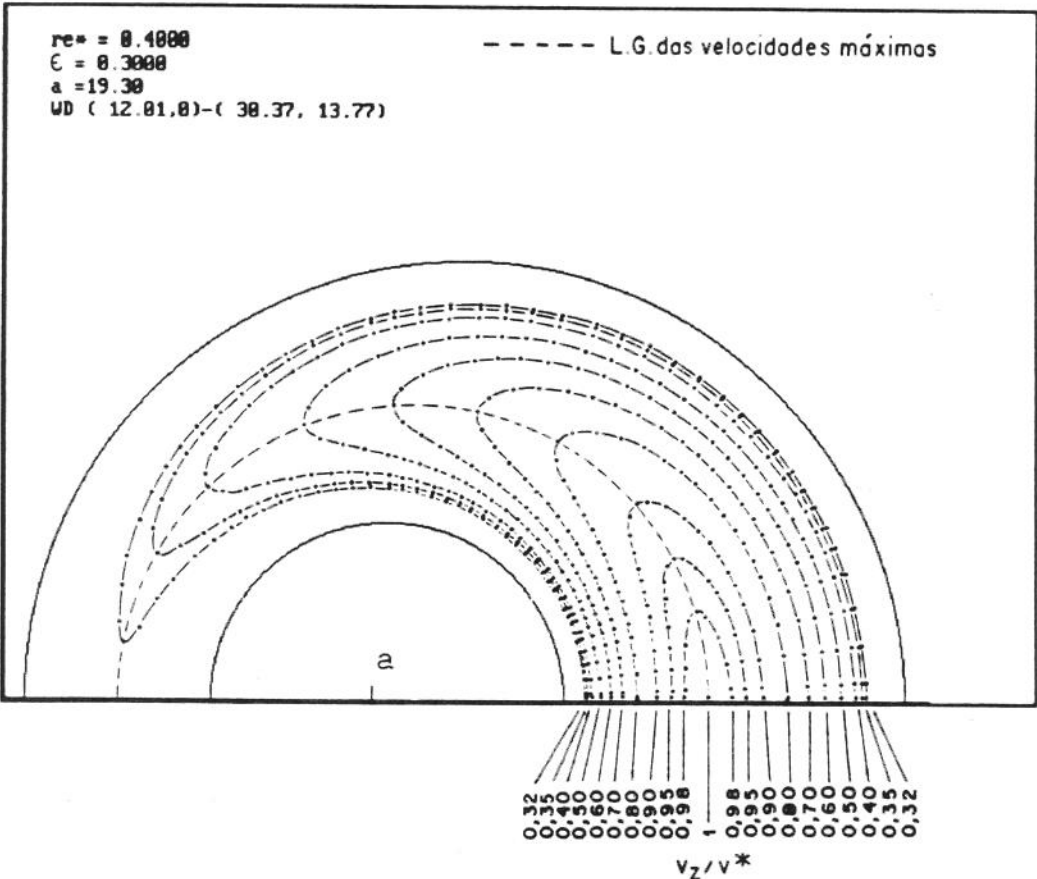


Fig. 4.24 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar obtido pela técnica da inversão.

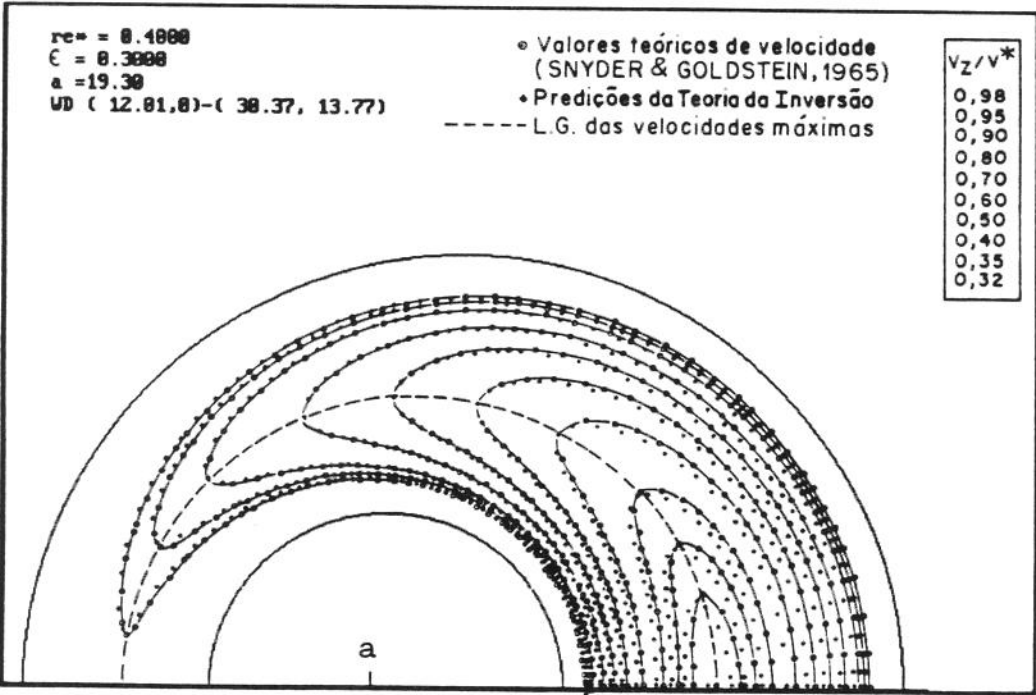
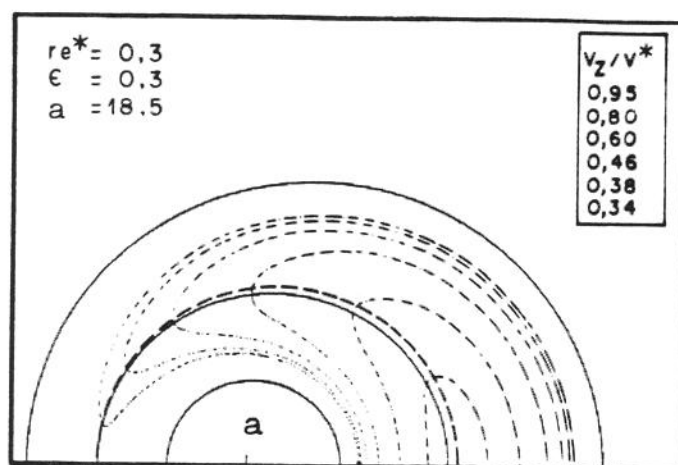


Fig. 4.25 Mapa de isovelocidades para escoamento laminar.

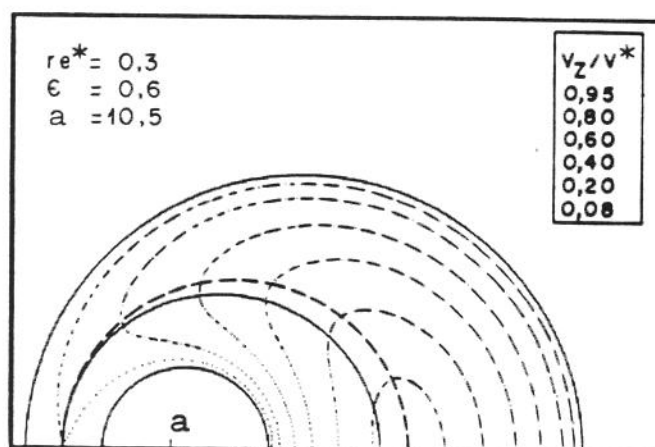
O sistema anular representado na Fig. 4.23 apresenta um escoamento laminar onde o L.G. das $v_{z,\max}$ coincide com a linha $\eta_{\max}$ obtida pela técnica da inversão. Observa-se, que os pontos correspondentes aos valores teóricos de velocidade, obtidos de acordo com as operações fundamentadas nas equações de Snyder & Goldstein (descritas no capítulo anterior), para determinado valor de velocidade, e os pontos correspondentes às predições da teoria da inversão para o mesmo valor de velocidade situam-se sobre a mesma linha de isovelocidade. Tal concordância indica que para casos desta natureza a teoria da inversão é eficaz em predizer pontos de isovelocidades a partir do conhecimento dos valores de $v_{z,\max}/v^*$ ao longo do L.G. das velocidades máximas.

A Fig. 4.25 mostra que o escoamento laminar do sistema representado na Fig. 4.24 apresenta coincidência apenas parcial entre o L.G. das $v_{z,\max}$ e a linha $\eta_{\max}$ obtida pela técnica da inversão geométrica. A Fig. 4.25 revela também, a existência de duas linhas de isovelocidade para cada valor de velocidade. Estas linhas embora distintas, quase coincidem. Casos deste tipo limitam o êxito da teoria da inversão.

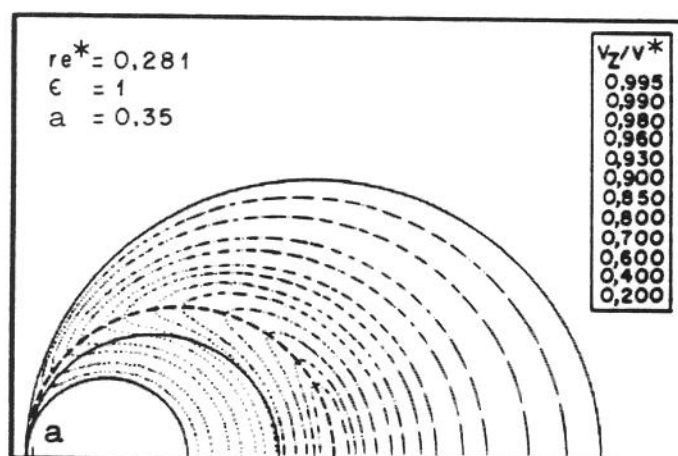
A Fig. 4.26 apresenta os mapas de isovelocidades dos outros três sistemas anulares considerados no Capítulo 3, mostrando as semicircunferências η (tracejadas) associadas a $v_{z,\max}/v^* = 1$ obtido das equações de Snyder & Goldstein, e as semicircunferências $\eta_{\max}$ (linha cheia) obtidas pela técnica da inversão. Nota-se que o afastamento das semicircunferências η e $\eta_{\max}$ em cada um dos sistemas representados nas figuras a, b e c, é função da razão de excentricidade, sendo maior para maiores valores de ϵ , confirmando assim para o caso laminar, a mesma conclusão já obtida em relação a ϵ para o caso turbulento.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.26 Mapas de isovelocidades apresentando o afastamento das semicircunferências η (tracejadas) e $\eta_{\max}$ (linha cheia) obtida pela inversão.

A eficiência da técnica da inversão geométrica para obtenção de mapas de isovelocidades está estritamente relacionada à condição de coincidência do L.G. das $v_{z,max}$ com a linha $\eta_{max} = \text{constante}$ e, de acordo com a análise desenvolvida na seção 4.3, essa coincidência só ocorre para uma certa região do plano formado por r_e^* e ϵ , conforme Fig. 4.10, reproduzida abaixo, onde estão representadas as curvas de nível para determinado Y_{fix} ; as regiões de aplicabilidade da técnica da inversão estão sempre à esquerda da respectiva curva $Y_{fix} = \text{constante}$.

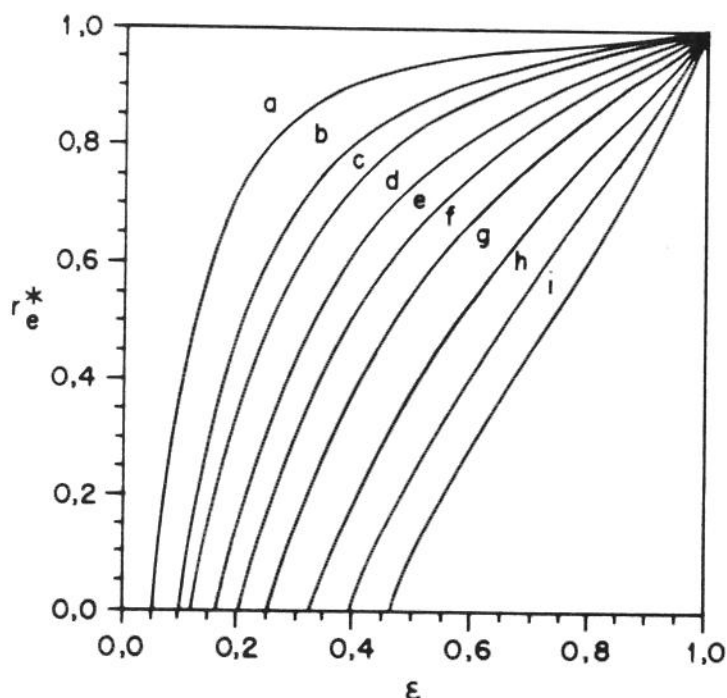


Fig. 4.10 Curvas de nível que representam a soma dos módulos das equações (4.22) igual a um valor constante Y_{fix} : $Y_{fix}=0,0001$ (a); $0,0005$ (b); $0,0010$ (c); $0,0025$ (d); $0,0050$ (e); $0,0100$ (f); $0,0250$ (g); $0,0500$ (h); $0,1000$ (i).

Dado um sistema anular excêntrico, definido pelos parâmetros r_e^* e ϵ , o uso do gráfico apresentado na Fig. 4.10 permite para o caso de escoamentos laminares, antecipar a qualidade da aproximação dos mapas de isovelocidades que a técnica da inversão pode produzir.

Em relação aos sistemas anulares objetos deste estudo, pode-se verificar, usando a Fig. 4.10, para que curvas de nível é tomada a região de aplicabilidade, lembrando que quanto menor for Y_{fix} , melhor será a aproximação produzida. Assim, tem-se por exemplo, os sistemas e os respectivos Y_{fix} que definem a curva que delimita a região de aplicabilidade correspondente:

$$\begin{cases} r_e^* = 2/3 \\ \epsilon = 0,25 \end{cases} \quad Y_{fix} = 0,0005 \quad (b)$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,4 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases} \quad Y_{fix} = 0,0050 \quad (e)$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \epsilon = 0,3 \end{cases} \quad Y_{fix} = 0,0100 \quad (f)$$

$$\begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \epsilon = 0,6 \end{cases} \quad Y_{fix} = 0,1000 \quad (i)$$

Associando estes Y_{fix} com os correspondentes sistemas anulares representados nas Figs. 4.23, 4.25 e 4.26 a e b, nota-se, que para o sistema definido por $r_e^* = 2/3$ e $\epsilon = 0,25$ com $Y_{fix} = 0,0005$, não existe desvio entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha η_{max} obtida pela inversão geométrica, enquanto para os outros três sistemas verifica-se que, quanto maior for Y_{fix} , maior é o desvio, e como maiores

Y_{fix} significam maiores razões de excentricidade e menores razões dos raios, constata-se a mesma tendência de comportamento do desvio entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha η_{max} em relação aos parâmetros r_e^* e ε , revelada pelos resultados de Jonsson & Sparrow para os escoamentos turbulentos.

Para os casos em que o sistema anular encontra-se fora da região de aplicabilidade da técnica da inversão, η_{max} não é independente de ξ . O L.G. das velocidades máximas não é mais uma circunferência; está compreendido numa faixa limitada por duas circunferências. Tais fatos podem ser evidenciados através de um exemplo numérico.

Seja o sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\varepsilon = 0,6$. Utilizando o gráfico da Fig. 4.10 nota-se, que tal sistema encontra-se fora da região de aplicabilidade delimitada por $Y_{fix} = 0,0500$. A aplicação dos algoritmos VMAX e VMAXSI a esse sistema, permite construir a Tabela 4.1, onde é apresentada a variabilidade dos η ao longo do L.G. das velocidades máximas.

Tabela 4.1 Resultados da aplicação dos algoritmos "VMAX" e "VMAXSI" ao sistema anular definido por $r_e^* = 0,3$ e $\varepsilon = 0,6$

$v_{z(max)}/v^*$	η	ξ
1,00	1,0774	0,0000
0,95	1,0840	0,2161
0,80	1,1039	0,4666
0,70	1,1173	0,6054
0,60	1,1302	0,7460
0,50	1,1442	0,8993
0,40	1,1571	1,0782
0,30	1,1708	1,3061
0,20	1,1834	1,6431
0,08	1,1994	3,0680

A representação do sistema anular deste exemplo é mostrada na Fig. 4.27, onde, além das linhas de isovelocidades, estão também a linha $\eta_{max} = 1,1616$

(pontilhada) obtida pela técnica da inversão através do algoritmo ANNULUS e, as linhas (tracejadas) $\eta = 1,0774$ correspondendo a $v_{z,max}/v^* = 1$ e, $\eta = 1,1994$ correspondendo a $v_{z,max}/v^* = 0,08$, que delimitam a faixa onde se encontra o L.G. das $v_{z,max}$.

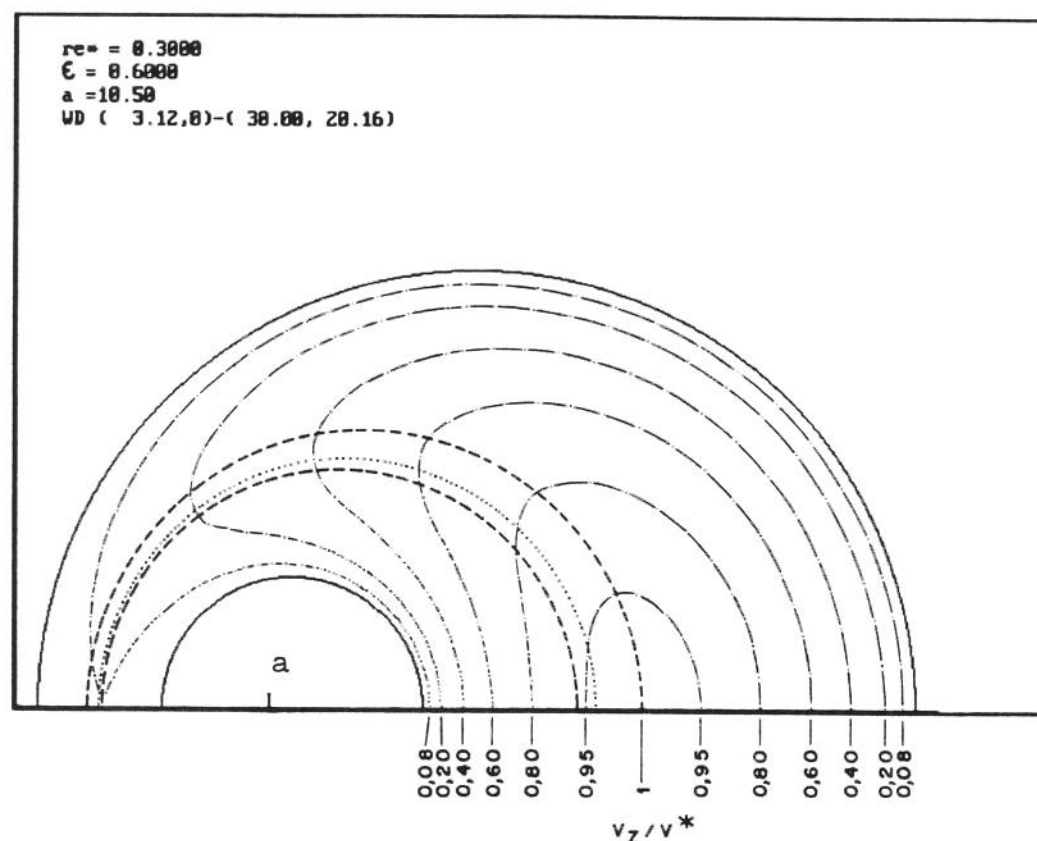


Fig. 4.27 Mapa de isovelocidades destacando-se as semicircunferências (tracejadas) que delimitam a faixa onde está o L.G. das $v_{z,max}$, e a (pontilhada) obtida pela técnica da inversão.

A situação evidenciada por este exemplo, sugere a seguinte questão: Dentro da faixa de variabilidade dos η , que valor deve ser usado como η_{max} , para que os mapas de isovelocidades gerados pela técnica da inversão sejam os mais próximos da realidade física?

A escolha do valor de η , mais apropriado para a utilização da técnica da inversão pode ser inferida, utilizando o exemplo do mesmo sistema anular representado na Fig. 4.27; nesta, nota-se que a semicircunferência

(tracejada) definida pelo η associado ao valor de $v_{z,\max}/v^* = 1$, apresenta-se deslocada para o lado externo do L.G. das $v_{z,\max}$, tanto mais acentuadamente quanto maior for ξ , enquanto que a semicircunferência (tracejada) definida pelo η associado ao limite de $(v_{z,\max}/v^*)|_{\xi = \pi}$, apresenta-se deslocada para o lado interno do L.G. das $v_{z,\max}$, tanto mais pronunciadamente quanto menor for ξ . Observa-se também que a faixa delimitada por estas semicircunferências é, devido à excentricidade, estreita na região onde as velocidades são baixas, e mais larga onde as velocidades são maiores, e como o escoamento tem sua parte mais representativa na região onde as velocidades são altas, conclui-se que, quando se deseja obter mapas de isovelocidades de escoamentos laminares em sistemas que estejam fora da região de aplicabilidade da técnica de inversão, o valor de η mais apropriado é $\eta = \eta_{\max} = \eta|_{v = v^*}$.

Em termos computacionais, os mapas de isovelocidades para os escoamentos considerados neste trabalho, utilizando-se a técnica da inversão, (Figs. 4.14, 4.15, 4.16, 4.18, 4.20, 4.23 e 4.24), podem ser obtidos através da seqüência de operações:

- 1ª.) Calculam-se os valores de $\eta_i, \eta_o, r_{ci}, r_{co}, r_{c,\max}$ e $\eta_{\max}$ do sistema anular excêntrico, através do algoritmo ANNULUS, que possibilita, além da representação gráfica, a opção do traçado da linha $\eta = \eta_{\max}$.
- 2ª.) Determina-se o valor de ξ para cada um dos valores de $v_{z,\max}/v^*$ em $\eta_{\max}$, através da equação (3.2) para o caso turbulento, e através do algoritmo XSI para o caso laminar.
- 3ª.) Obtém-se os valores de η para uma dada razão de velocidades $(v_z/v^*)/(v_{z,\max}/v^*)$ através de um

"software" matemático que resolva para o sistema concêntrico, as equações de Knudsen & Katz [(2.46) e (2.47)] em se tratando de escoamento turbulento, e a equação (2.25) para o caso laminar, convertendo ainda, as raízes r_1 e r_2 , nas correspondentes η_1 e η_2 do sistema excêntrico. Utilizou-se para o caso turbulento o "software" EUREKA. Para o caso laminar, foi desenvolvido o algoritmo "RAIZ" (Apêndice D10).

- 4ª.) Determinam-se as intersecções da circunferência ξ com as circunferências η_1 e η_2 através de um "software" matemático.
- 5ª.) Repetem-se as operações 3ª. e 4ª. para outras razões de velocidades. Unem-se os pontos correspondentes a um certo valor da velocidade; a linha obtida corresponde à respectiva linha de isovelocidade.

Dos mapas de isovelocidades apresentados neste trabalho obtidos pela técnica da inversão geométrica, comprova-se o êxito da teoria da inversão quando aplicada a sistemas anulares cujos parâmetros de definição (r_e^* e ε), situam-se em sua região de aplicabilidade. Fora desta região a técnica da inversão pode ainda ser aplicada, gerando mapas que apresentem resultados aproximados quando comparados aos apresentados pelos sistemas reais. Tais aproximações serão tanto melhores quanto menores forem as razões de excêntricidade e maiores as razões dos raios.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Os assuntos tratados neste trabalho foram basicamente dois. Primeiro, o estudo dos escoamentos anulares em sistemas concêntricos e excêntricos para fluidos newtonianos, incompressíveis, preenchendo completamente o sistema e escoando em regime permanente na região plenamente desenvolvida, tanto no regime laminar como no turbulento. Segundo, a teoria da inversão geométrica e sua aplicação aos escoamentos anulares excêntricos.

O estudo dos escoamentos em sistemas concêntricos, necessário não só por ser um caso particular dos escoamentos em sistemas excêntricos (sistemas com $\epsilon = 0$), mas principalmente por sua indispensabilidade como ferramenta fundamental da técnica da inversão geométrica, permitiu rever algumas de suas características distintivas, como:

- ▶ o perfil de velocidades é não-parabólico;
- ▶ o raio que localiza o L.G. onde ocorre a velocidade máxima ($r_{c,max}$) é menor (no limite igual) para os escoamentos turbulentos que para os escoamentos laminares;

- ▶ a tensão de cisalhamento é não linear e tem valores diferentes nos dois contornos sólidos e
- ▶ o valor de $r_{c,max}$ está mais próximo do valor de r_{ci} que do valor de r_{co} .

Quanto aos escoamentos anulares em sistemas excêntricos, destacam-se duas características: 1ª.) apresentam um L.G. de velocidades máximas variando no intervalo $v_{z,max}|\xi = \pi \leq v_{z,max} \leq v^*$ e 2ª.) para um dado gradiente de pressão, um aumento de excentricidade do sistema anular implica num aumento de vazão, e este aumento é maior para maiores valores de r_e^* .

Dos regimes de escoamento estudados em conexão com os sistemas excêntricos, foi o regime laminar o que possibilitou o maior número de tipos de mapas de velocidade (mapas de isovelocidades, mapas $\xi = \text{constante}$ e mapas tridimensionais), permitindo assim atender plenamente ao objetivo principal deste trabalho, qual seja: obter o máximo de informações sobre o campo de velocidades.

Tais mapas são os resultados gráficos produzidos pelos algoritmos desenvolvidos neste trabalho para operar as soluções da equação do movimento apresentadas por SNYDER & GOLDSTEIN (1965), exceção feita ao algoritmo ANNULUS, que calcula e representa sistemas anulares excêntricos. O desenvolvimento deste algoritmo mostrou-se indispensável à tarefa da produção gráfica dos mapas pois, além de gerar as circunferências η_i η_o que representam o sistema anular, é de sua competência importar e localizar no correspondente espaço anular os pontos gerados pelos algoritmos VMAX, VMAXSI e ETA. A complexidade do algoritmo ANNULUS pode ser apreciada no fluxograma do Apêndice D1.

O emprego destes algoritmos de acordo com as etapas descritas no Capítulo 3 possibilitou: (i) obter a representação bidimensional de sistemas anulares excêntricos para quaisquer valores de razão dos raios, r_e^* , e razão de excentricidade, ϵ ; (ii) obter mapas de isovelocidades e (iii) determinar todos os dados

necessários à aplicação dos "softwares" GRAPHER e SURFER, que por sua vez forneceram, respectivamente, as distribuições de velocidade de uma parede à outra para qualquer ângulo de varredura e mapas tridimensionais de velocidade.

Para o caso do escoamento turbulento, os mapas de isovelocidades dos sistemas excêntricos foram obtidos pela técnica da inversão geométrica, a partir dos resultados experimentais de JONSSON & SPARROW (1966).

Esta técnica de inversão, quando aplicada aos escoamentos em sistemas anulares excêntricos, tem dupla utilidade: permite prever o L.G. das velocidades máximas e, sendo conhecidos valores de $v_{x,max}$ ao longo do L.G. das $v_{z,max}$, auxiliar na determinação de linhas de isovelocidades. É nesta capacidade da técnica de inversão que reside sua grande utilidade, pois, de uns poucos pontos (obtidos experimentalmente ou de soluções analíticas), é possível cobrir com linhas de isovelocidades uma grande área da secção transversal do escoamento.

O êxito desta técnica, no entanto, está condicionado a coincidência do L.G. das $v_{z,max}$ com a linha $\eta = \eta_{max} = \text{constante}$. Quando esta condição não é satisfeita, os mapas de isovelocidades gerados por tal técnica constituem-se em aproximações.

Utilizando tal condição, podem-se delimitar no plano formado por r_e^* e ϵ , dependendo das aproximações desejadas, regiões de aplicabilidade da técnica da inversão.

Quanto à aplicação da técnica da inversão geométrica aos escoamentos em sistemas anulares excêntricos, este trabalho constitui-se num avanço, pois, além de considerar sistemas para os quais o êxito da técnica é completo, considera também sistemas definidos por elevadas razões de excentricidade e pequenas razões dos raios. Sistemas desse tipo, apesar de estarem fora da região de aplicabilidade da referida técnica podem, de acordo com a estratégia apresentada às páginas 111, 112 e 113, ser objetos de sua aplicação, gerando mapas de isovelocidades cujos resultados constituem-se boas aproximações, quando comparados aos

correspondentes mapas apresentados pelos sistemas reais.

Este é, portanto, um trabalho de desenvolvimento de técnicas de representação de perfis de velocidades em sistemas anulares excêntricos.

5.2. SUGESTOES

Uma das características da informática é o seu rápido progresso e conseqüente surgimento de novas facilidades. Por esta razão, problemas que utilizem a informática para a sua solução podem experimentar uma contínua evolução. Este trabalho produziu técnicas de representação de perfis de velocidades em sistemas anulares excêntricos utilizando as facilidades computacionais disponíveis por ocasião do seu desenvolvimento. Assim, uma primeira sugestão é empregar novas facilidades, caso já estejam disponíveis ou assim que estiverem, visando melhorar as técnicas de representação apresentadas neste trabalho, tornando-as mais ágeis e poderosas.

Sendo que os escoamentos estudados neste trabalho se restringiram a fluidos newtonianos, e como os fluidos usuais em aplicações da Engenharia (principalmente Engenharia Química, Engenharia de Alimentos e Engenharia de Petróleo) são em grande parte não newtonianos, sugere-se estender o estudo de tais escoamentos também a estes fluidos.

Outra extensão natural possível deste trabalho é o desenvolvimento de algoritmos que operem as soluções da equação do movimento, apresentadas por USUI & TSURUTA (1980)⁽⁶⁾ para o caso turbulento. Assim, poder-se-ão obter, para o caso turbulento, os mesmos tipos de mapas de velocidades obtidos neste trabalho para o caso laminar (mapas ξ = constante e mapas tridimensionais).

Objetivando verificação experimental dos resultados obtidos neste trabalho, sugere-se uma montagem que permita

ensaios de vazão e perda de carga. As medidas de tais grandezas seriam comparadas com os seus correspondentes valores obtidos a partir dos perfis de velocidades aqui apresentados.

Outra sugestão é pesquisar o desempenho térmico de trocadores de calor de tubos duplos excêntricos. Pois, de acordo com as considerações apresentadas às páginas 71, 72 e 73 sobre o aumento de vazão decorrente de um aumento de excentricidade dos tubos, tais trocadores teriam a vantagem de uma menor perda de carga.

Finalmente, um campo de aplicações para as técnicas aqui desenvolvidas é sua aplicação aos escoamentos multifásicos gás-líquido-sólido. Tais escoamentos em anulares cêntricos e excêntricos têm vasta aplicação tecnológica nos casos de escoamentos com mudança de fase e escoamento de transporte hidráulico e pneumático.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G., 1970, "Mathematical Methods for Physicists", Second Edition, Academic Press.

ATHERTON, D.H., 1926, "Fluid flow in pipes of annular cross-section", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 48, pp. 145-175.

BRIGHTON, J.A. & JONES, J.B., 1964, "Fully Developed Turbulent Flow in Annuli", Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, vol. D86, pp. 835-844.

BUTKOV, E., 1978, "Física Matemática", Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil.

CASTRUCCI, B., 1962, "Lições de Geometria Elementar", 6ª Edição, Livraria Nobel, São Paulo, Brasil, pp. 224-227.

COXETER, H.S.M., 1961, "Introduction to Geometry", John Wiley, New York.

DEISSLER, R.G. & TAYLOR, M.F., 1955, "Analysis of Fully Developed Turbulent Heat Transfer and Flow in an Annulus with various Eccentricities", National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Technical Note 3451.

DONNELLY, R.J., 1991, "Taylor-Couette flow: the early days", Physics Today, November, pp. 32-39.

EL-SADEN, M.R., 1961, "Heat Conduction in an Eccentrically Hollow, Infinitely Long Cylinder with Internal Heat Generation", Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, vol. 83, n° 4, pp. 510-512.

EVES, H., 1972, "A Survey of Geometry", Revised Edition, Allyn and Bacon, Inc., Boston.

GOLDEN SOFTWARE, 1988, "GRAPHER, Reference Manual", Version 1.76, Golden, Colorado, U.S.A..

GOLDEN SOFTWARE, 1990, "SURFER, Reference Manual", Version 4, Golden, Colorado, U.S.A..

HEYDA, J.F., 1958, General Electric Co. Rept. APEX-391.

HEYDA, J.F., 1959, "A Green's Function Solution for the Case of Laminar Incompressible Flow Between Non-Concentric Circular Cylinders", Journal of the Franklin Institute, vol. 267, pp. 25-34.

JEFFERY, G.B., 1921, "Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Co-ordinates", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 221, March, pp. 265-293.

JONSSON, V.K. & SPARROW, E.M., 1966, "Experiments on turbulent-flow phenomena in eccentric annular ducts", Journal of Fluid Mechanics, vol. 25, part 1, pp. 65-86.

KAYS, W.M. & LEUNG, E.Y., 1963, "Heat Transfer in Annular Passages - Hydrodynamically Developed Turbulent Flow with Arbitrarily Prescribed Heat Flux", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 6, pp. 537-557.

KNUDSEN, J.G. & KATZ, D.L., 1958, "Fluid Dynamics and Heat Transfer", Mc Graw-Hill, Inc., New York.

LEA, F.C. & TADROS, A.G., 1931, "Flow of water through a circular tube with a central core and through rectangular tubes", Philosophical Magazine, June, pp. 1235-1247.

LONGWELL, P.A., 1966, "Mechanics of Fluid Flow", Mc Graw-Hill, Inc.

MODENOV, P.S. & PARKHOMENKO, A.S., 1965, "Geometric Transformations". Vol. 1 e 2, Academic Press, New York.

MOSHER, F.E. & SCHNEIDER, D.I., 1990 "Turbo Basic - Guia do Usuário", Mc Graw-Hill, São Paulo, Brasil.

NICKEL, J.A., 1980, "Bipolar Harmonics on a Circular Drum", Mathematical Modelling, vol.1, pp. 369-374

NIKURADSE, J., 1932, "Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren", VDI-Forschungsheft, n° 356.

ÖZGEN, C. & TOSUN, I., 1987, "Application of the Geometric Inversion to the Eccentric Annulus System", pp. 1-25, Não Publicado.

ÖZGEN, C. & TOSUN, I., 1987, "Application of Geometric Inversion to the Eccentric Annulus System", AIChE Journal, vol. 33, n° 11, November, pp. 1903-1907.

ÖZISIK, M.N., 1977, "Basic Heat Transfer", Mc Graw-Hill, Inc., p. 251.

PIERCY, N.A.V., HOOPER, M.S. & WINNY, H.F., 1933, "Viscous Flow through Pipes with Cores", Philosophical Magazine, vol. 15, n° 99, pp. 647-676.

PRENGLE, R.S. & ROTHFUS, R.R., 1955, "Transition Phenomena in Pipes and Annular Cross Sections", Industrial and Engineering Chemistry, vol. 47, n° 3, pp. 379-386.

REDBERGER, P.J. & CHARLES, M.E., 1962, "Axial Laminar Flow in a Circular Pipe Containing a Fixed Eccentric Core", The Canadian Journal of Chemical Engineering, vol. 40, August, pp. 148-151.

ROTHFUS, R.R., MONRAD, C.C. & SENEAL, V.E., 1950, "Velocity Distribution and Fluid Friction in Smooth Concentric Annuli", Industrial and Engineering Chemistry, vol. 42, n° 12, pp. 2511-2520.

ROTHFUS, R.R. et alii, 1955, "Isothermal Skin Friction in Flow Through Annular Sections", Industrial and Engineering Chemistry, vol. 47, n° 5, pp. 913-918.

SINGH, R.P., NIGAM, K.K. & MISHRA, P., 1980, "Developing and Fully Developed Turbulent Flow Through Annuli", Journal of Chemical Engineering of Japan, vol. 13, n° 5, pp. 349-533.

SNYDER, W.T., 1963, "An Analysis of Slug Flow Heat Transfer in an Eccentric Annulus". A.I.Ch.E. Journal, vol 9, n° 4, July, pp. 503-506.

SNYDER, W.T. & GOLDSTEIN, G.A., 1965, "An Analysis of Fully Developed Laminar Flow in an Eccentric Annulus", A.I.Ch.E. Journal, vol. 11, n° 3, May, pp. 462-467.

TAO, L.N. & DONOVAN, W.F., 1955, "Through-flow in concentric and eccentric annuli of fine clearance with and without relative motion of the boundaries", Transactions of the ASME, November, pp. 1291-1301.

TOSUN, I., 1984, "Axial Laminar Flow in an Eccentric Annulus: an Approximate Solution", AIChE Journal, vol. 30, n° 5, pp. 877 e 878.

USUI, H. & TSURUTA, K., 1980, "Analysis of Fully Developed Turbulent Flow in an Eccentric Annulus", Journal of Chemical Engineering of Japan, vol. 13, n° 6, pp. 445-450.

VASQUES, E.J. & GASPARETTO, C.A., 1993, "Escoamento axial em Anulares Excêntricos-Mapeamento de velocidades", Anais do Primeiro Workshop Brasileiro em Fenômenos Não Lineares, Caóticos e Estocásticos, pp. 88-90, IGCE, Unesp, Rio Claro, SP, Brasil.

WOLFFE, R.A. & CLUMP, C.W., 1963, "The Maximum Velocity Locus for Axial Turbulent Flow in an Eccentric Annulus", A.I.Ch.E. Journal, Vol. 9, nº 3, pp., 424 e 425.

APÊNDICES

APÊNDICE A

VALORES NUMÉRICOS DOS SISTEMAS ANULARES E DOS CAMPOS DE VELOCIDADE. CARACTERÍSTICAS DOS MAPAS DE ISOVELOCIDADE

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 2/3 \\ \varepsilon = 0,25 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_i = 2,280 \\ \eta_o = 1,887 \end{cases}$$

$$a = 22$$

$$v^* = 2,077 \times 10^{-3} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 2,066 \end{cases}$$

e

$$(v_{z,\max})_{\min} = 7,59 \times 10^{-4} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = \pi \\ \eta = 2,073 \end{cases}$$

Intervalo de variação de $v_{z,\max}$: $0,366v^* \leq v_{z,\max} \leq v^*$

Número de pontos: 101

Número de linhas de isovelocidade: 06

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,4 \\ \varepsilon = 0,3 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_i = 2,409 \\ \eta_o = 1,533 \end{cases}$$

$$a = 19,3$$

$$v^* = 1,515 \times 10^{-2} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 1,885 \end{cases}$$

e

$$(v_{z,\max})_{\min} = 4,79 \times 10^{-3} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = \pi \\ \eta = 1,925 \end{cases}$$

Intervalo de variação de $v_{z,\max}$: $0,316v^* \leq v_{z,\max} \leq v^*$

Número de pontos: 471

Número de linhas de isovelocidade: 10

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ c = 0,3 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_i = 2,615 \\ \eta_o = 1,461 \end{cases}$$

$$a = 18,5$$

$$v^* = 2,386 \times 10^{-2} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 1,89 \end{cases}$$

e

$$(v_{z,\max})_{\min} = 7,94 \times 10^{-3} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = \pi \\ \eta = 1,961 \end{cases}$$

Intervalo de variação de $v_{z,\max}$: $0,333v^* \leq v_{z,\max} \leq v^*$

Número de pontos: 321

Número de linhas de isovelocidade: 06

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \varepsilon = 0,6 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_i = 1,731 \\ \eta_o = 0,748 \end{cases}$$

$$a = 10,5$$

$$v^* = 2,039 \times 10^{-1} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 1,077 \end{cases}$$

e

$$(v_{z,\max})_{\min} = 1,627 \times 10^{-2} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = \pi \\ \eta = 1,2 \end{cases}$$

Intervalo de variação de $v_{z,\max}$: $0,080v^* \leq v_{z,\max} \leq v^*$

Número de pontos: 265

Número de linhas de isovelocidade: 06

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,281 \\ c = 0,999 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_i = 8,437 \times 10^{-2} \\ \eta_o = 2,374 \times 10^{-2} \end{cases}$$

$$a = 0,35$$

$$v^* = 133,04 \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 4,424 \times 10^{-2} \end{cases}$$

e

$$(v_{z,\max})_{\min} = 5,48 \times 10^{-3} \quad \text{em} \quad \begin{cases} \xi = 3,04 \\ \eta = 4,64 \times 10^{-2} \end{cases}$$

Intervalo de variação de $v_{z,\max}$: $0 \leq v_{z,\max} \leq v^*$

Número de pontos: 662

Número de linhas de isovelocidade: 12

APÊNDICE B

CARACTERÍSTICAS DOS MAPAS TRIDIMENSIONAIS

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,4 \\ \varepsilon = 0,3 \end{cases}$$

Número de pontos: 3486

Número de linhas de isovelocidade: 19

Número de $\xi(s)$: 45

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \varepsilon = 0,3 \end{cases}$$

Número de pontos: 2633

Número de linhas de isovelocidade: 19

Número de $\xi(s)$: 30

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,3 \\ \varepsilon = 0,6 \end{cases}$$

Número de pontos: 3582

Número de linhas de isovelocidade: 19

Número de $\xi(s)$: 45

$$\text{Sistema anular} \quad \begin{cases} r_e^* = 0,281 \\ \varepsilon = 0,999 \end{cases}$$

Número de pontos: 2814

Número de linhas de isovelocidade: 19

Número de $\xi(s)$: 36

APÊNDICE C

DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS 1, 2, 3 E 4

Teorema 1: São pontos inversos, um ponto P' fora da circunferência de inversão e o ponto P , onde a corda de contato das tangentes à circunferência de inversão por P' corta a reta diametral OP' .

Demonstração:

A Fig. 1 representa as condições do enunciado.

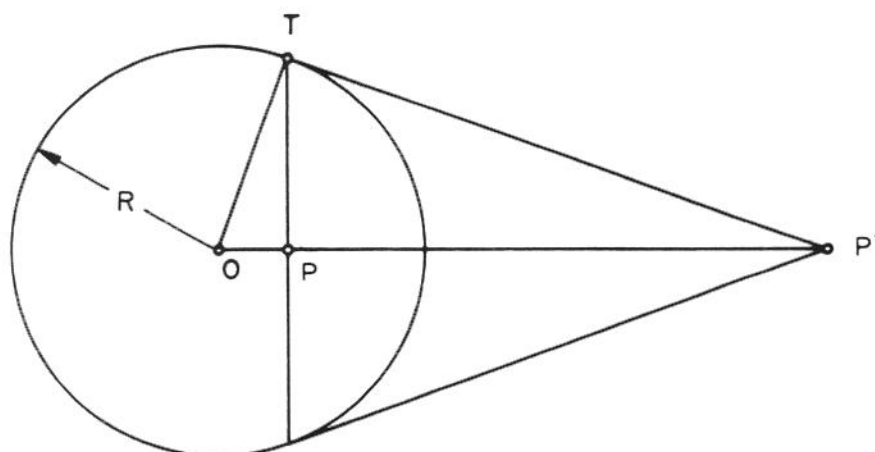


Fig. 1 Pontos inversos, P e P' .

Triângulo $OPT \sim$ triângulo OTP' (caso AA) Conseqüentemente, os lados correspondentes são proporcionais, ou seja,

$$\frac{OT}{OP} = \frac{OP'}{OT} = \frac{TP'}{PT}$$

e como $\overline{OT} = R$

tem-se:

$$\overline{OP'} \cdot \overline{OP} = \overline{OT}^2 = R^2 .$$

Teorema 2: Dois pontos P e Q e seus correspondentes inversos P' e Q' estão numa circunferência ou numa reta pelo centro de inversão.

Demonstração:

Se P e Q estão numa reta por O , P' e Q' estão na mesma reta PQ e todos pertencem assim, à mesma reta.

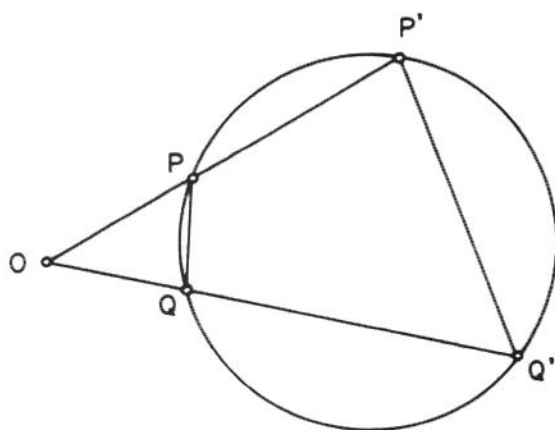


Fig. 2 Pontos e seus correspondentes pela inversão.

Se PQ não contém O , então $\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$ por definição; os triângulos OQP e os $OP'Q'$ são semelhantes e os ângulos OQP e $OP'Q'$ são iguais; a circunferência que passa por P , P' e Q' passa por Q , pois os ângulos $PP'Q'$ e PQQ' são suplementares (figura ao lado).

Teorema 3: A inversa de uma reta é uma reta ou uma circunferência, conforme o centro de inversão esteja ou não na reta.

Demonstração:

- a) Se a reta passa pelo centro de inversão, a correspondente é a própria reta.
- b) Seja ℓ uma reta não por O . Deseja-se saber o lugar de um ponto M' correspondente de um ponto M variável na reta ℓ . Traça-se OA perpendicular à ℓ e seja A' o inverso de A . O quadrilátero $AMM'A'$ é inscritível conforme o Teorema 2, e como o ângulo $A'AM$ é reto, $A'M'M$ é também reto, e portanto $OM'A'$ permanece sempre reto e o lugar de M' é uma circunferência que passa por O (Fig. 3).

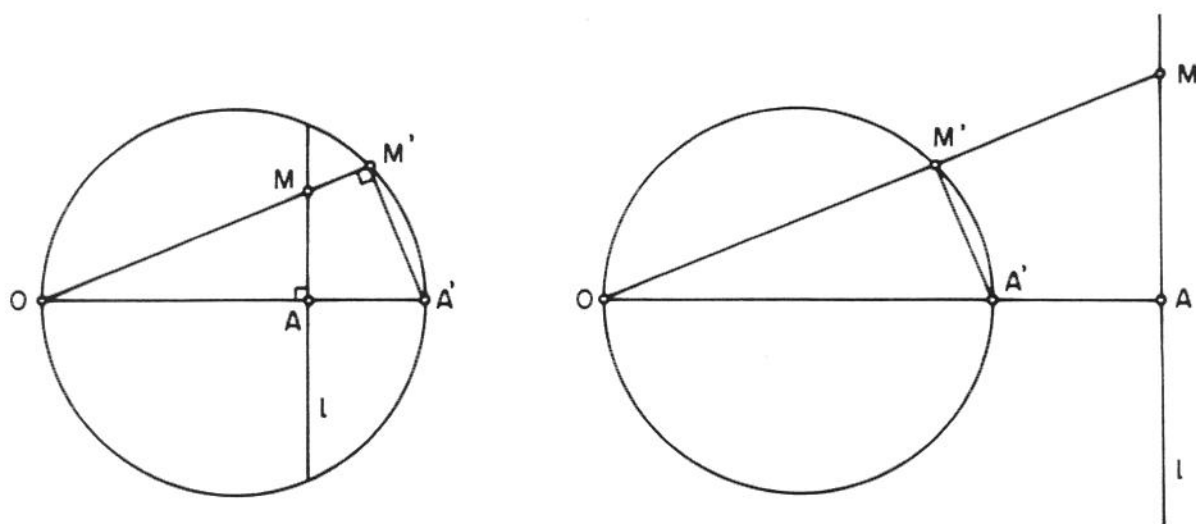


Fig. 3 Pontos e seus correspondentes pela inversão.

Teorema 4: A inversa de uma circunferência C , não passando pelo centro de inversão O , é uma circunferência C' não passando por O e homotética à circunferência C , tendo O como centro de homotetia, como mostram as Figs. 4 e 5.

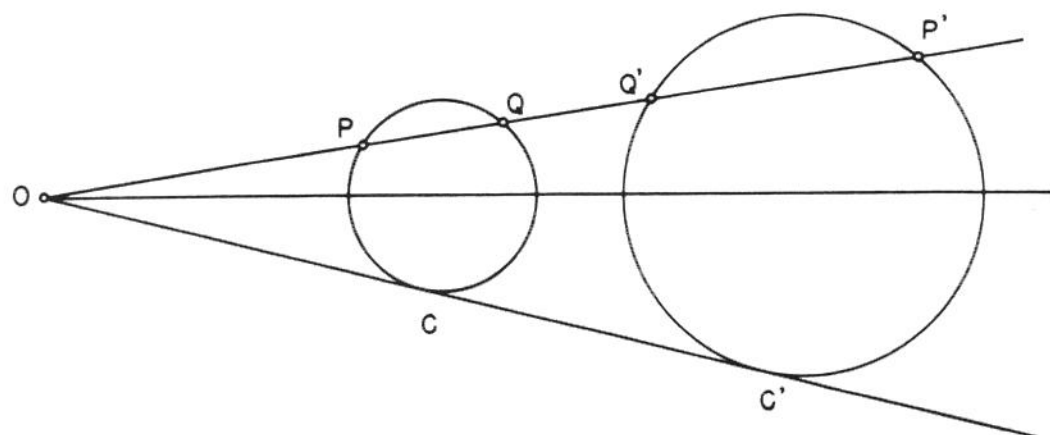


Fig. 4 Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $R^2/\rho > 1$.

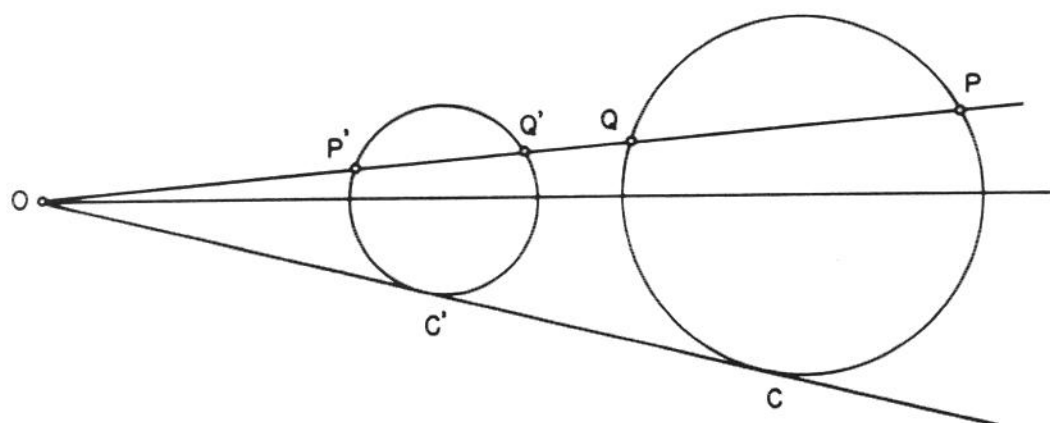


Fig. 5 Inversa de uma circunferência. Razão de homotetia $0 < R^2/\rho < 1$.

Demonstração:

Seja P um ponto qualquer na circunferência C (Figs. 4 e 5). Seja P' o inverso de P . A reta OP intercepta a circunferência em Q ; se OP for tangente à circunferência C , Q coincide com P . Seja R^2 a potência de inversão em relação à circunferência de centro O e raio R (que não aparece na figura), e $\mathcal{P}$ a potência do ponto O em relação a circunferência C . Então,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$$

e

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \mathcal{P},$$

conseqüentemente

$$\overline{OP'}/\overline{OQ} = R^2/\mathcal{P}, \quad \text{uma constante.}$$

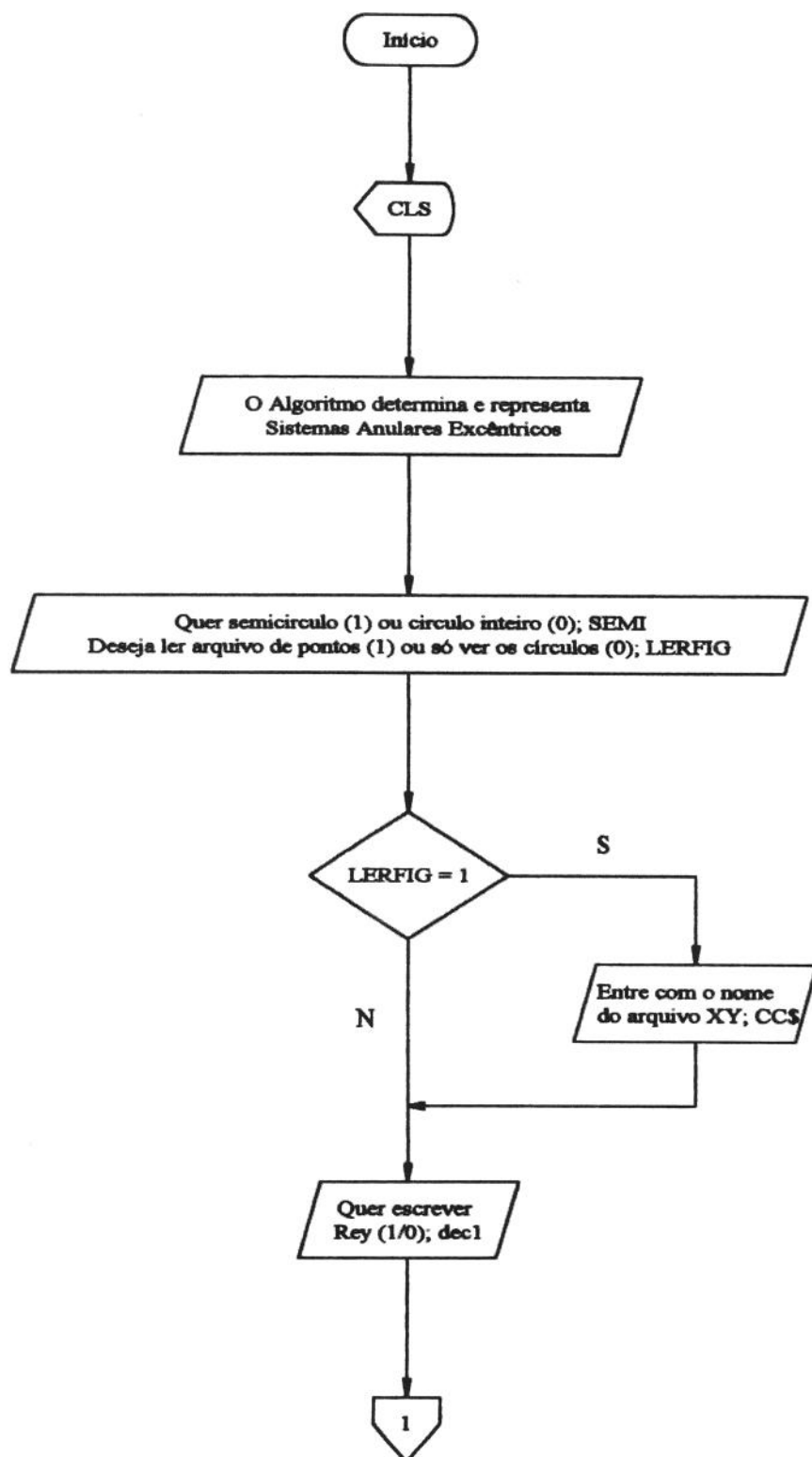
Vê-se, assim, que P' descreve o traçado do L.G. de Q sob a homotetia $H(0, R^2/\mathcal{P})$. Isto é, P' descreve uma circunferência C' homotética à circunferência C , tendo O como centro de homotetia. Como a circunferência C não passa por O , a circunferência C' também não passa por O .

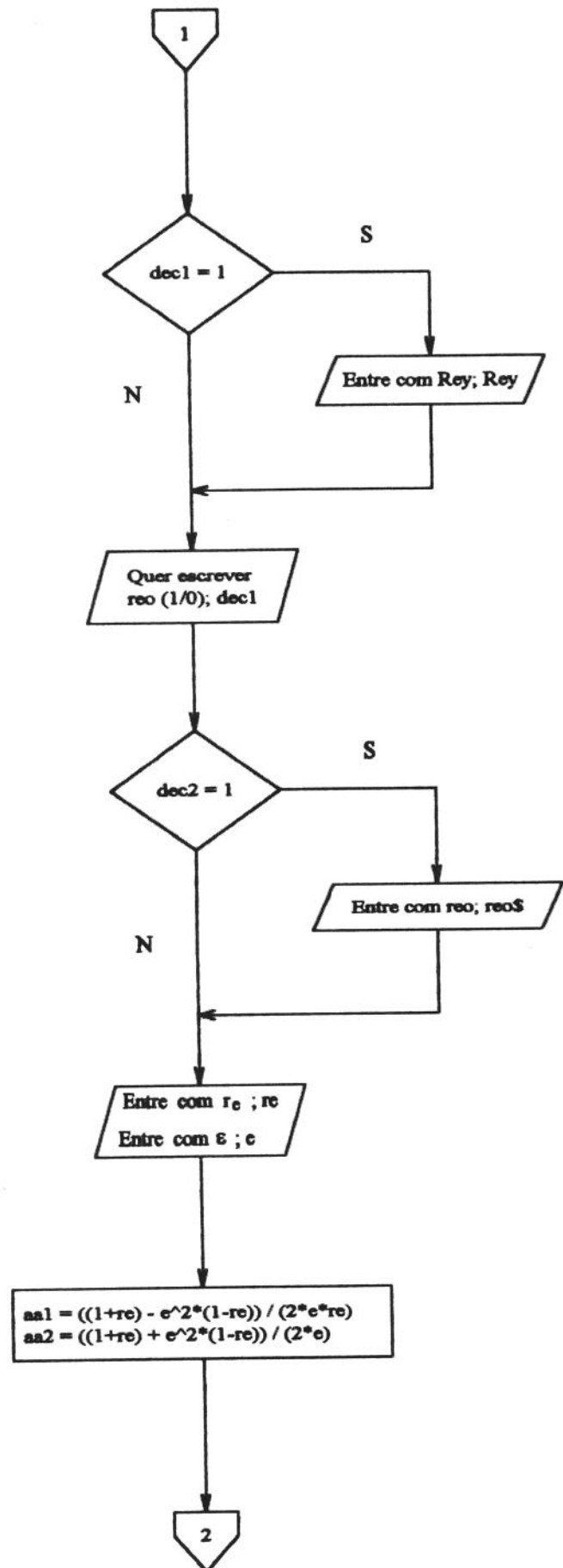
APÊNDICE D

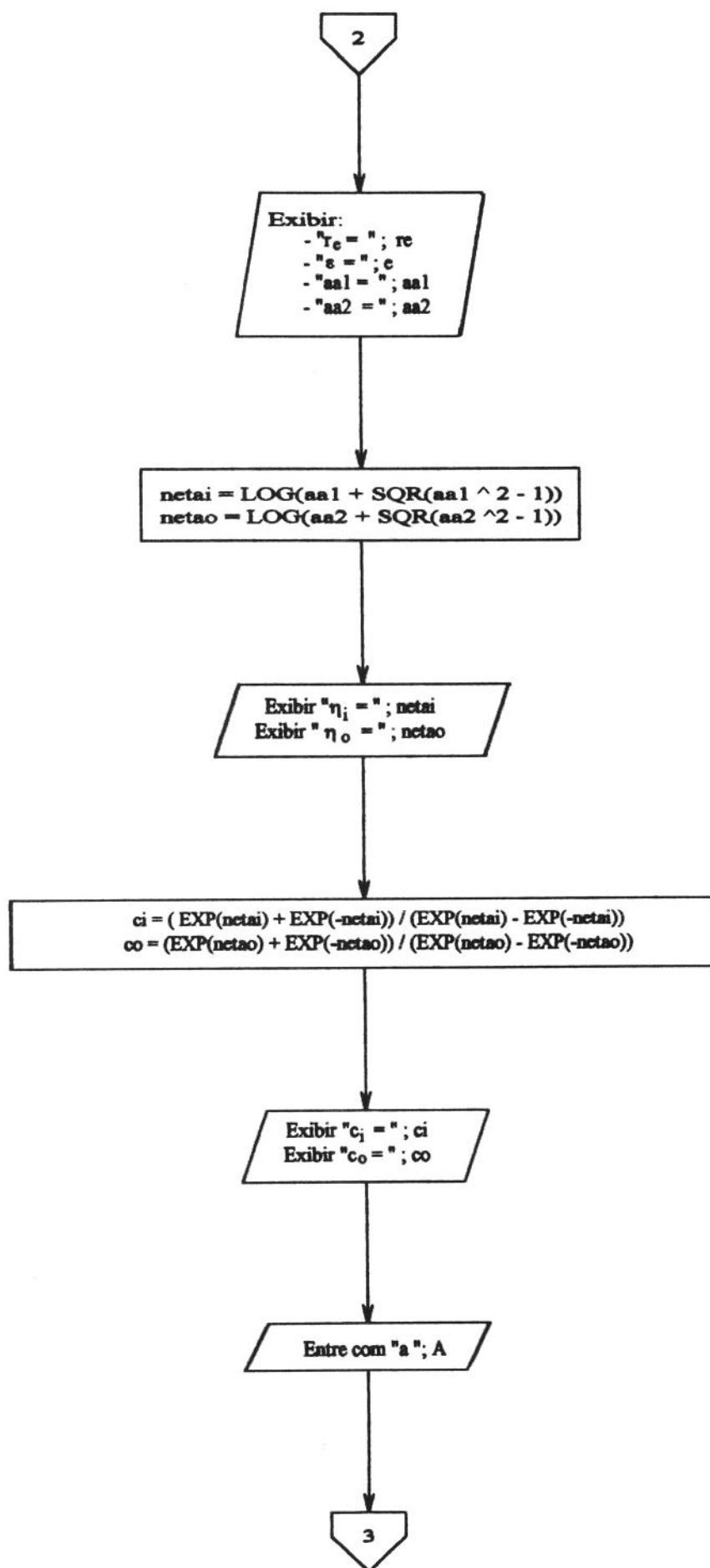
FLUXOGRAMAS DOS ALGORITMOS

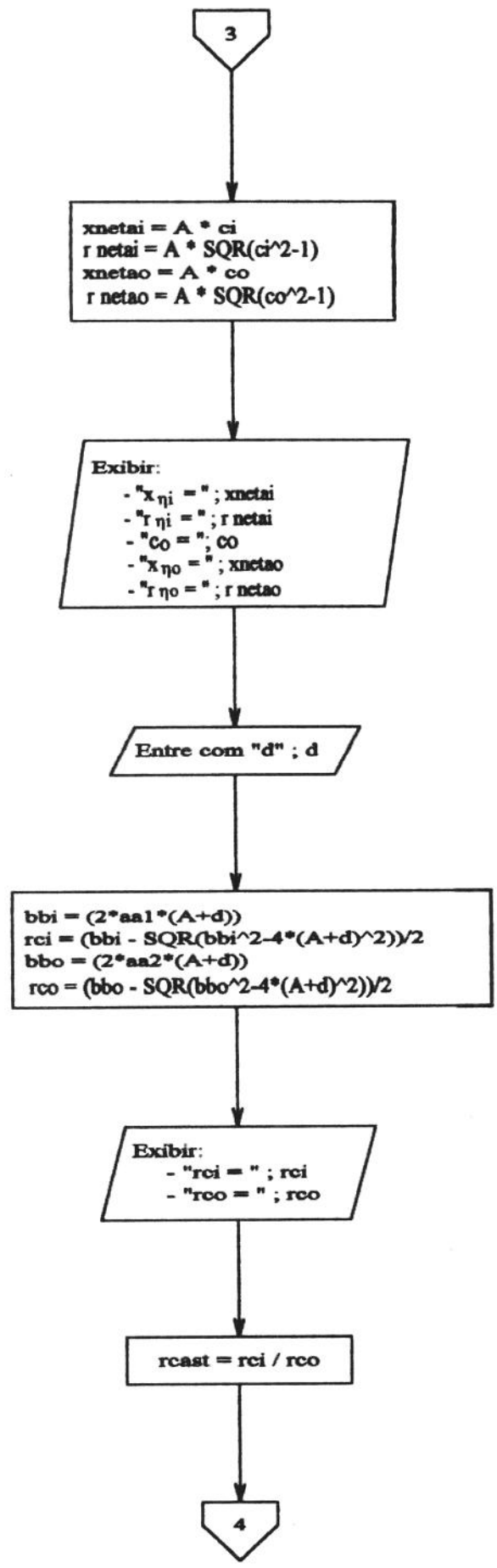
APÊNDICE D1

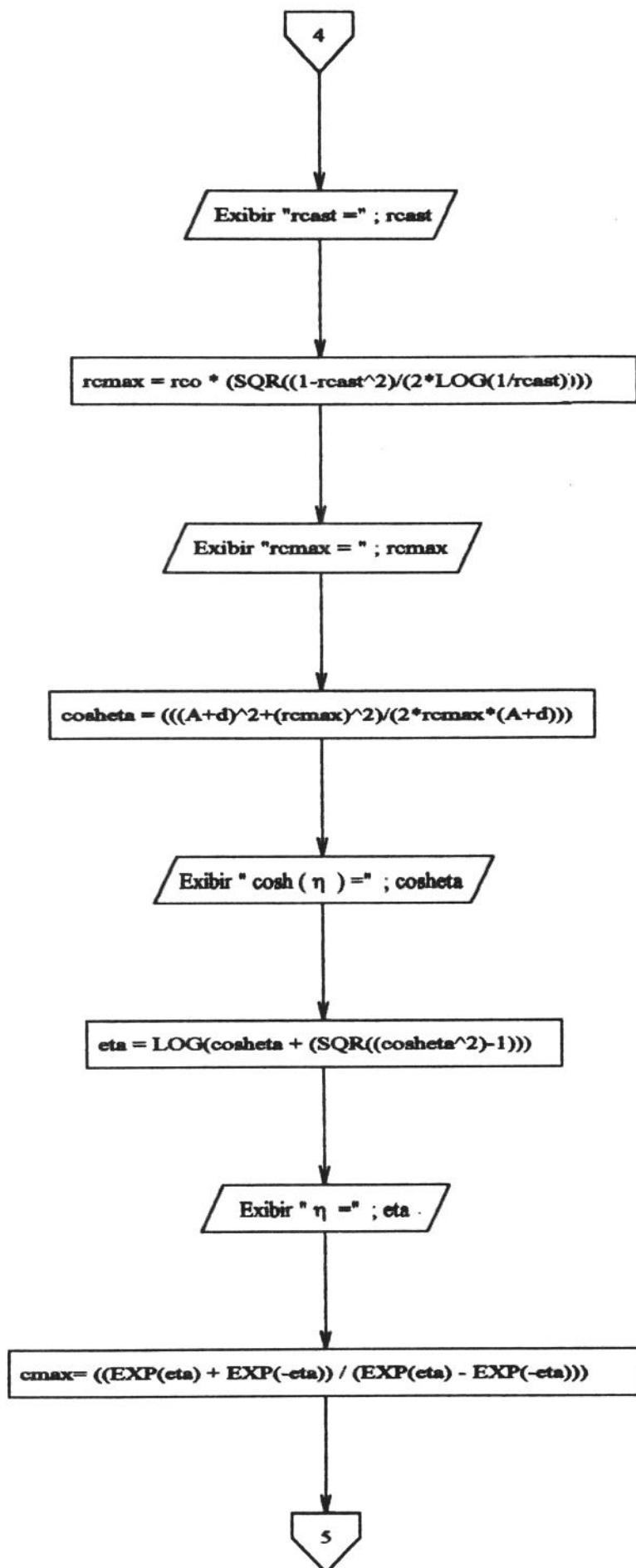
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "ANNULUS"

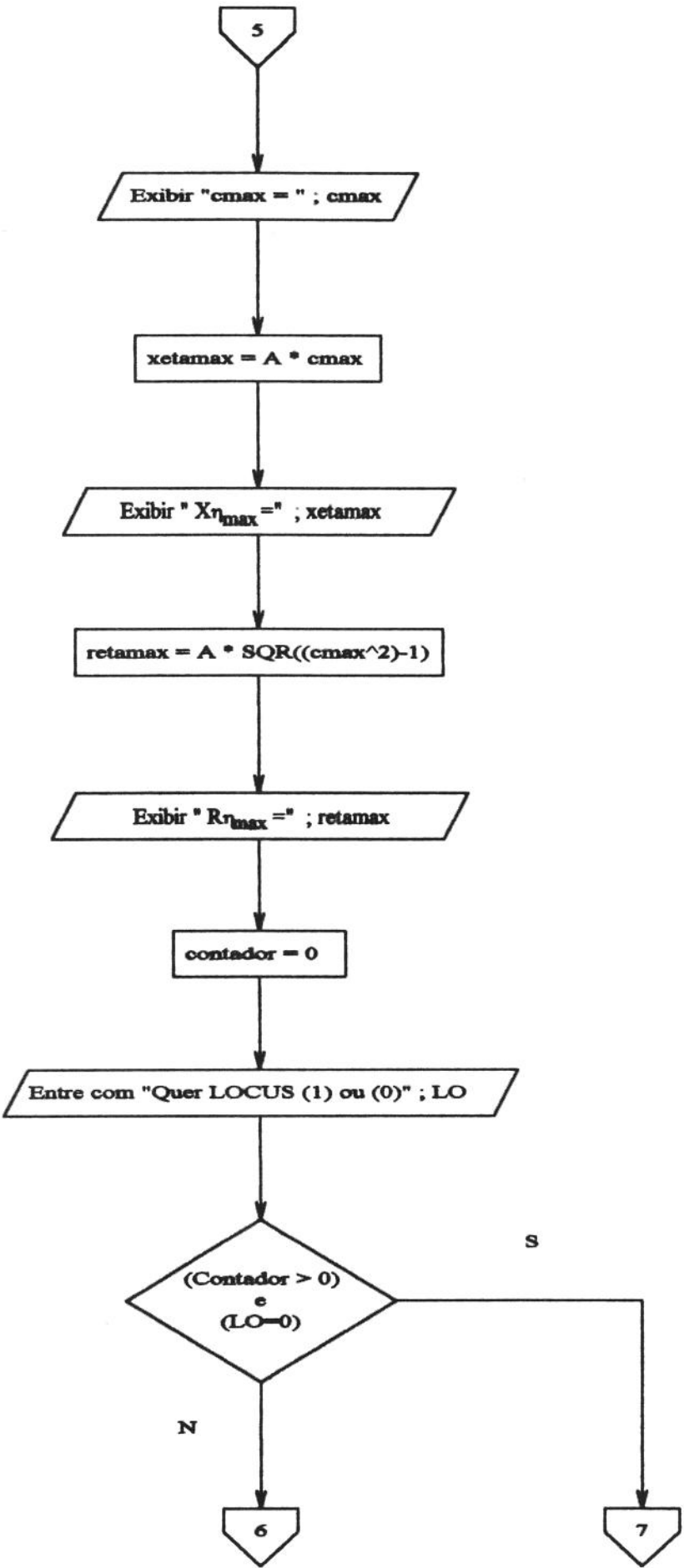


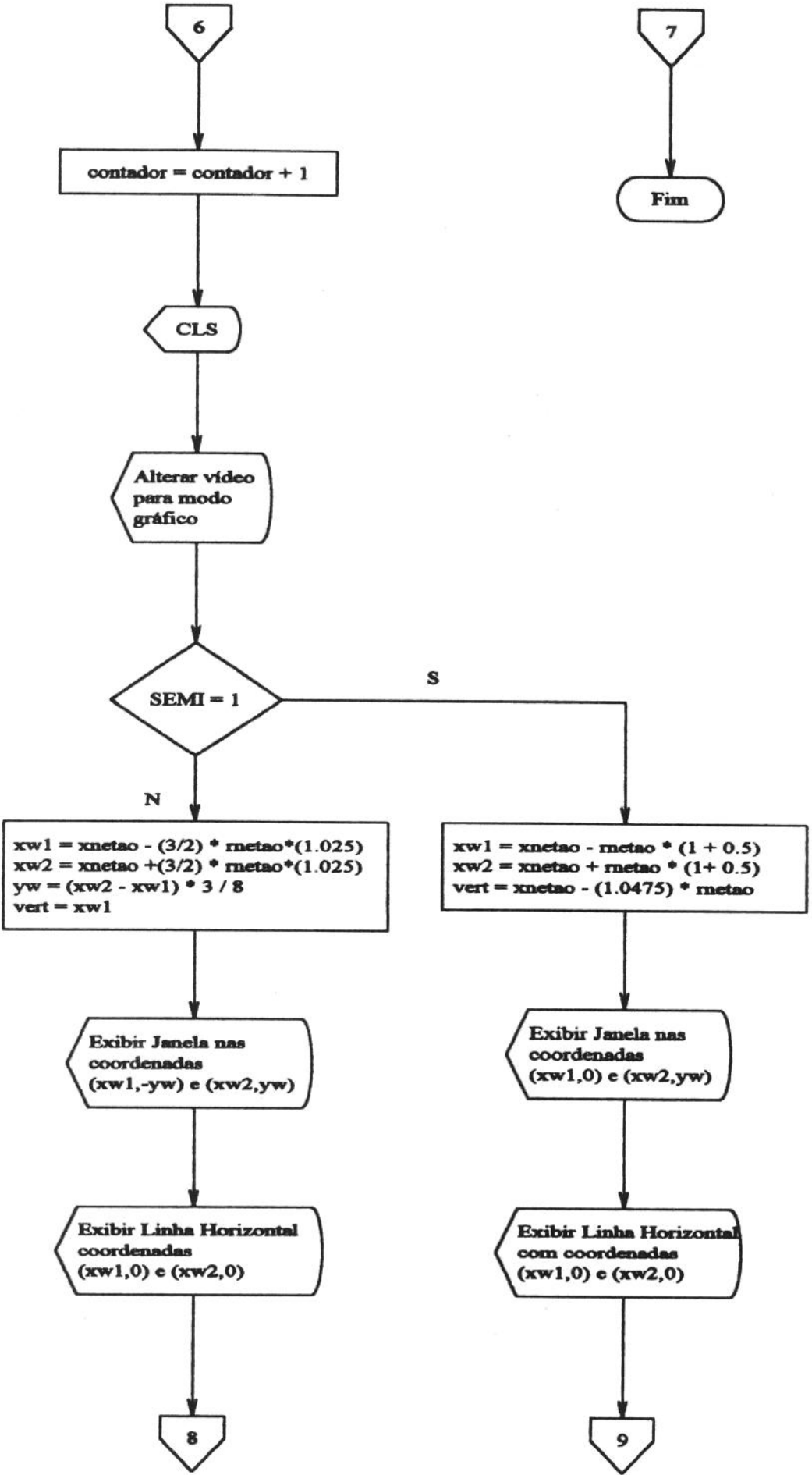


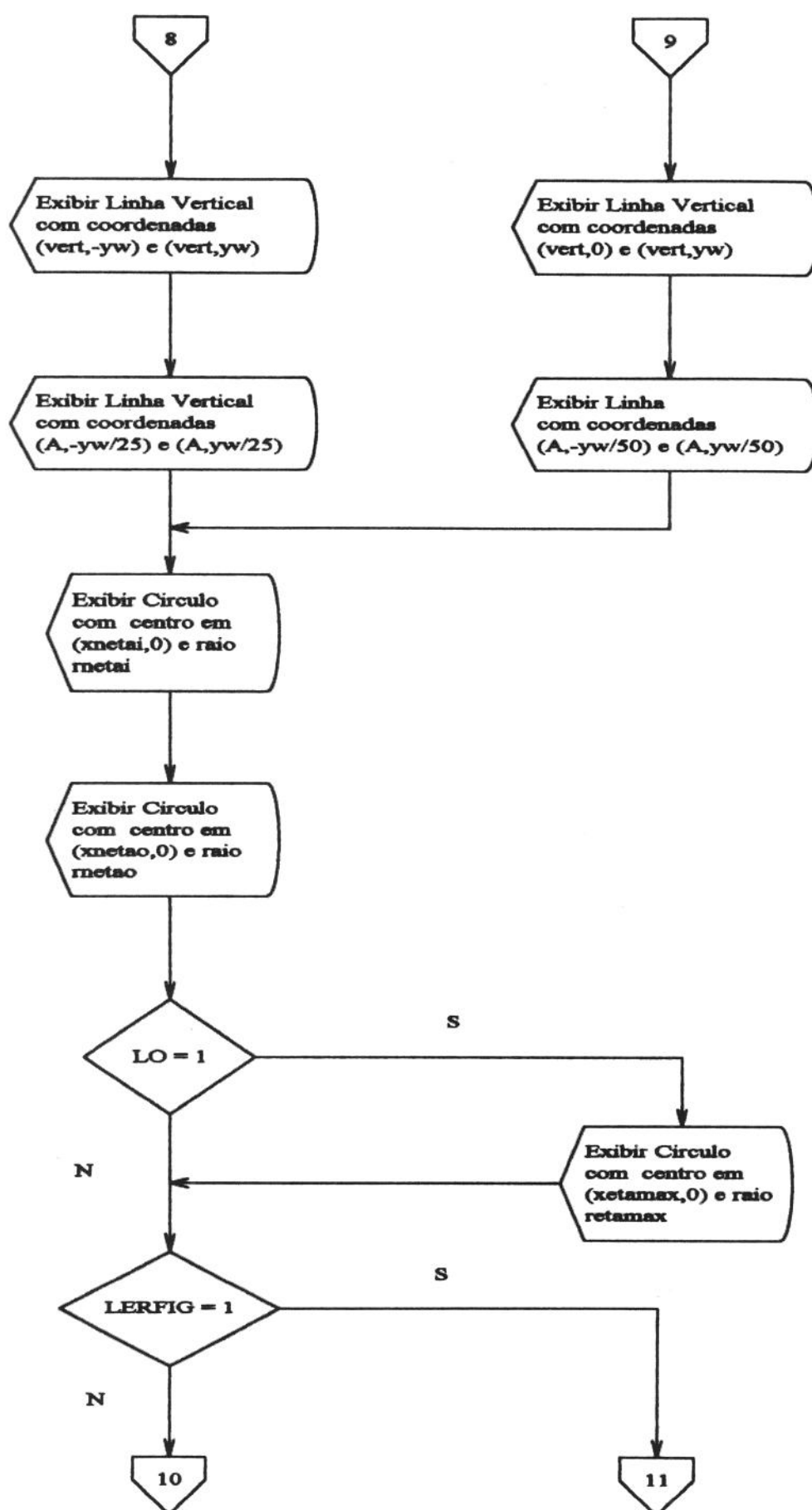


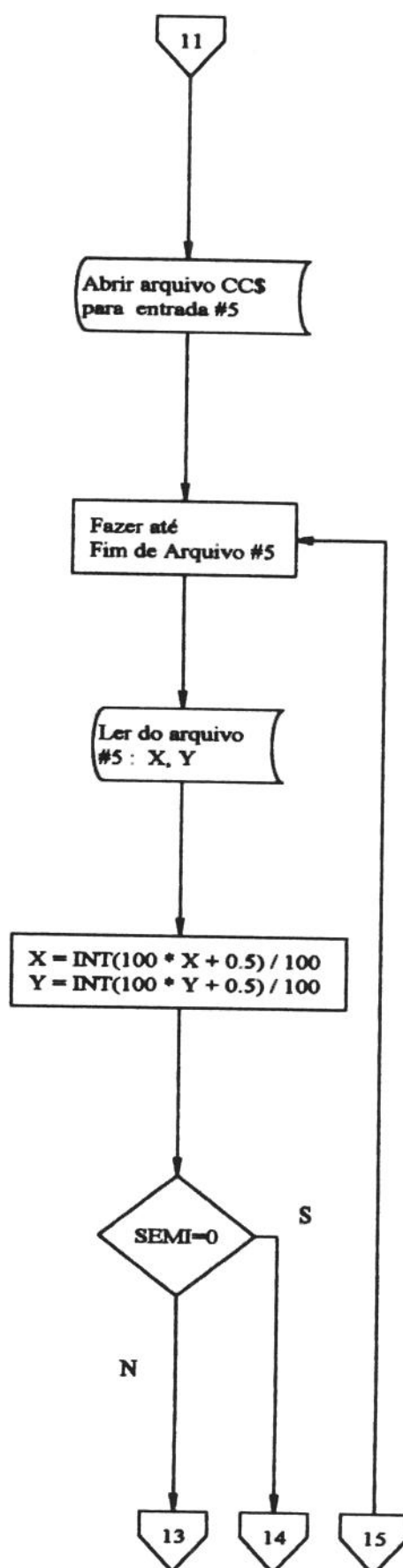
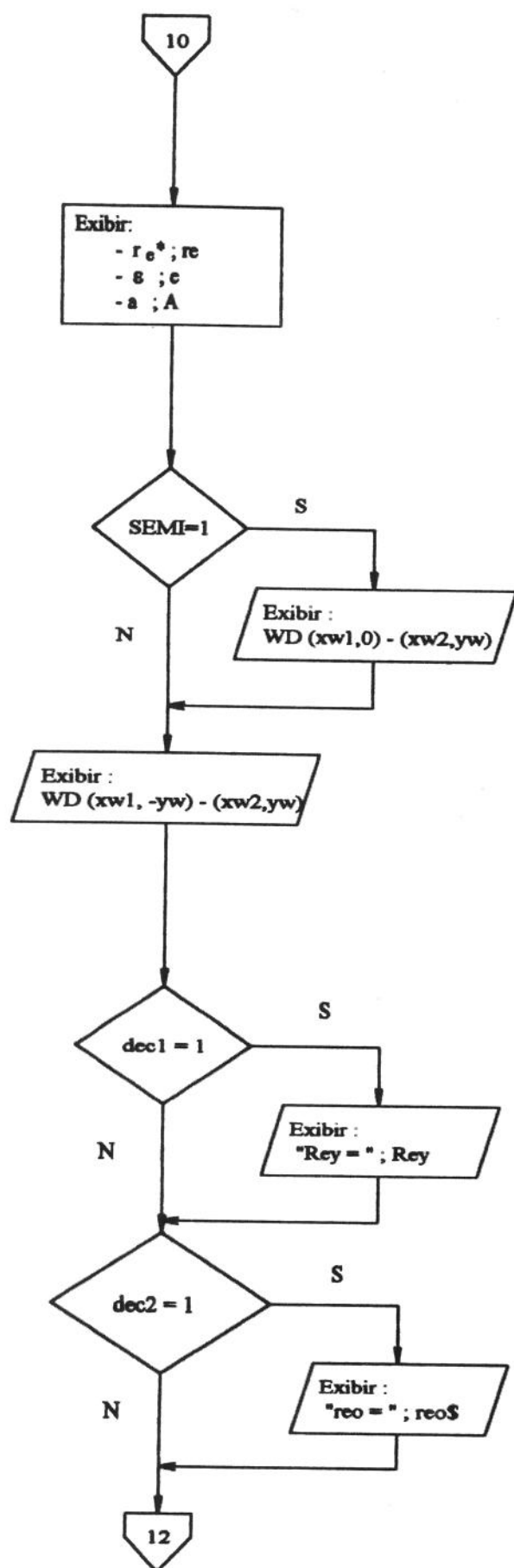


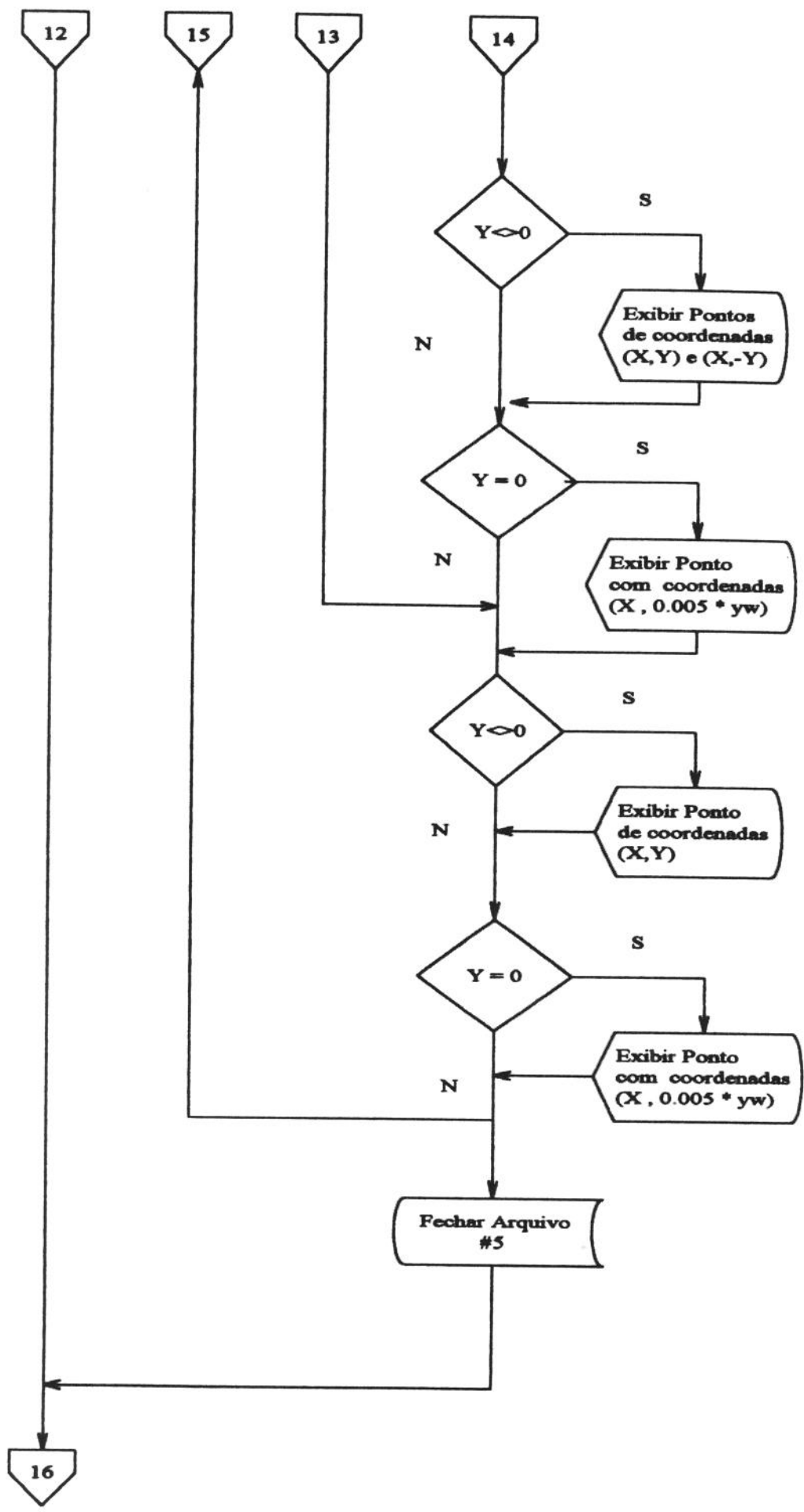


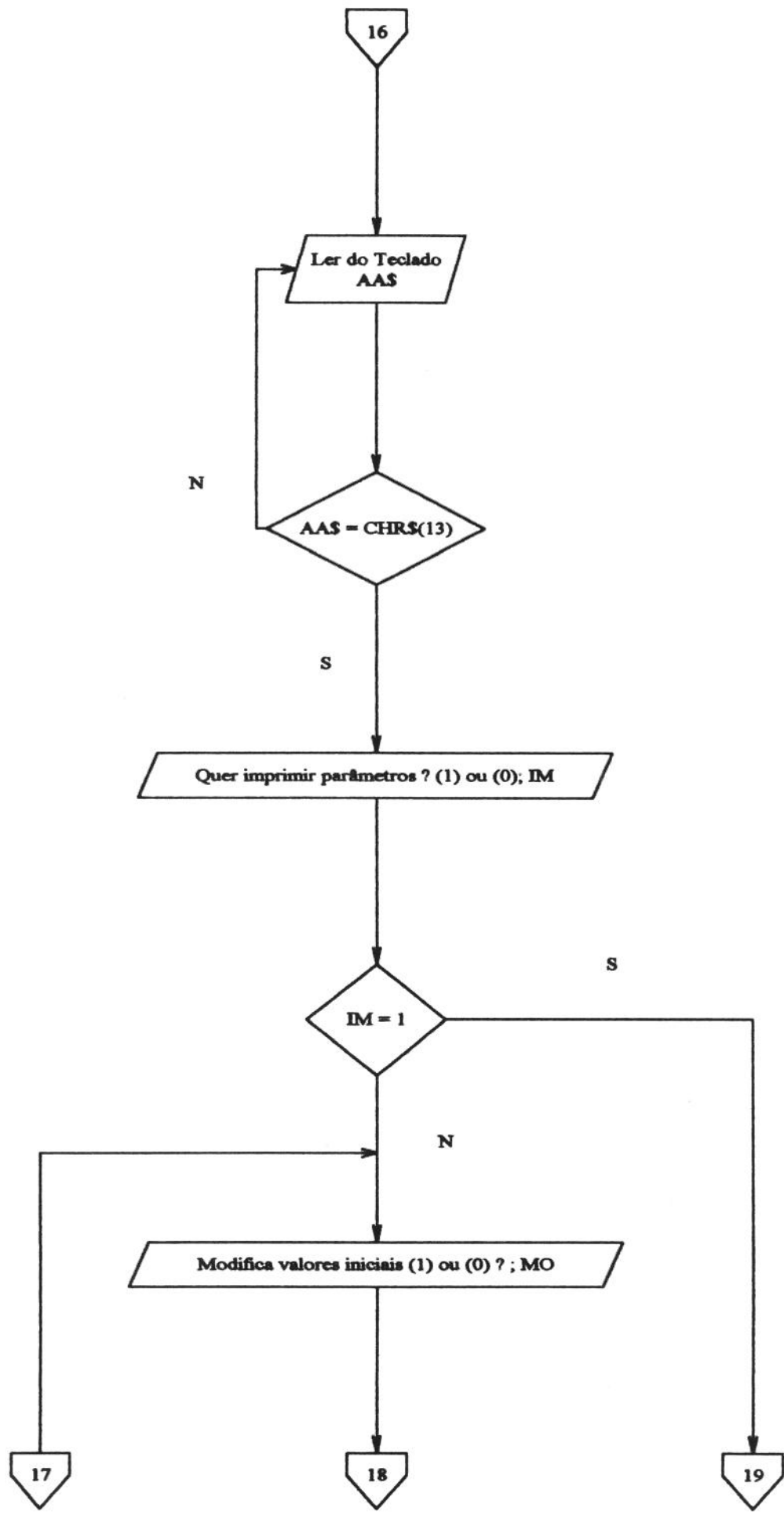


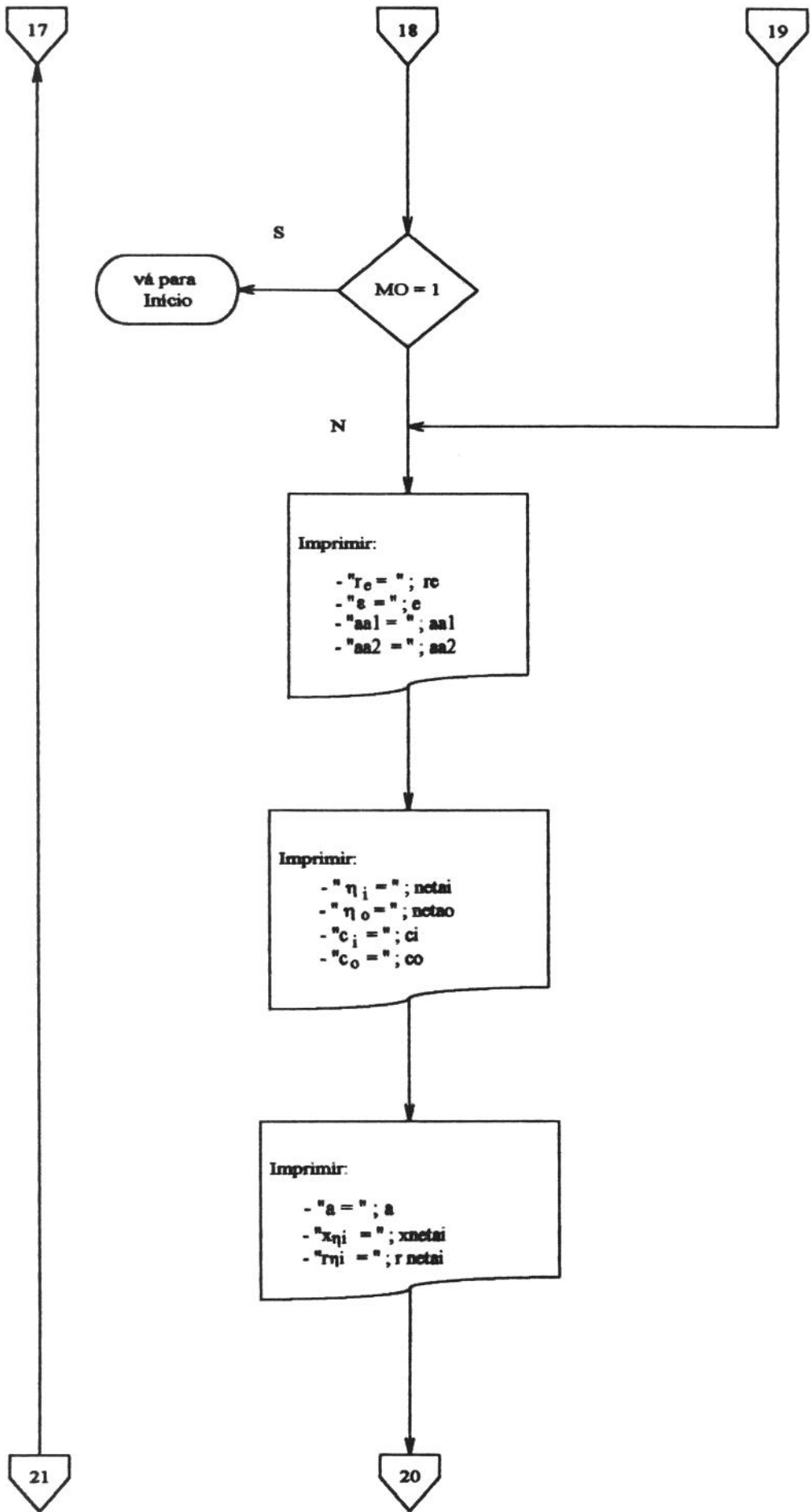


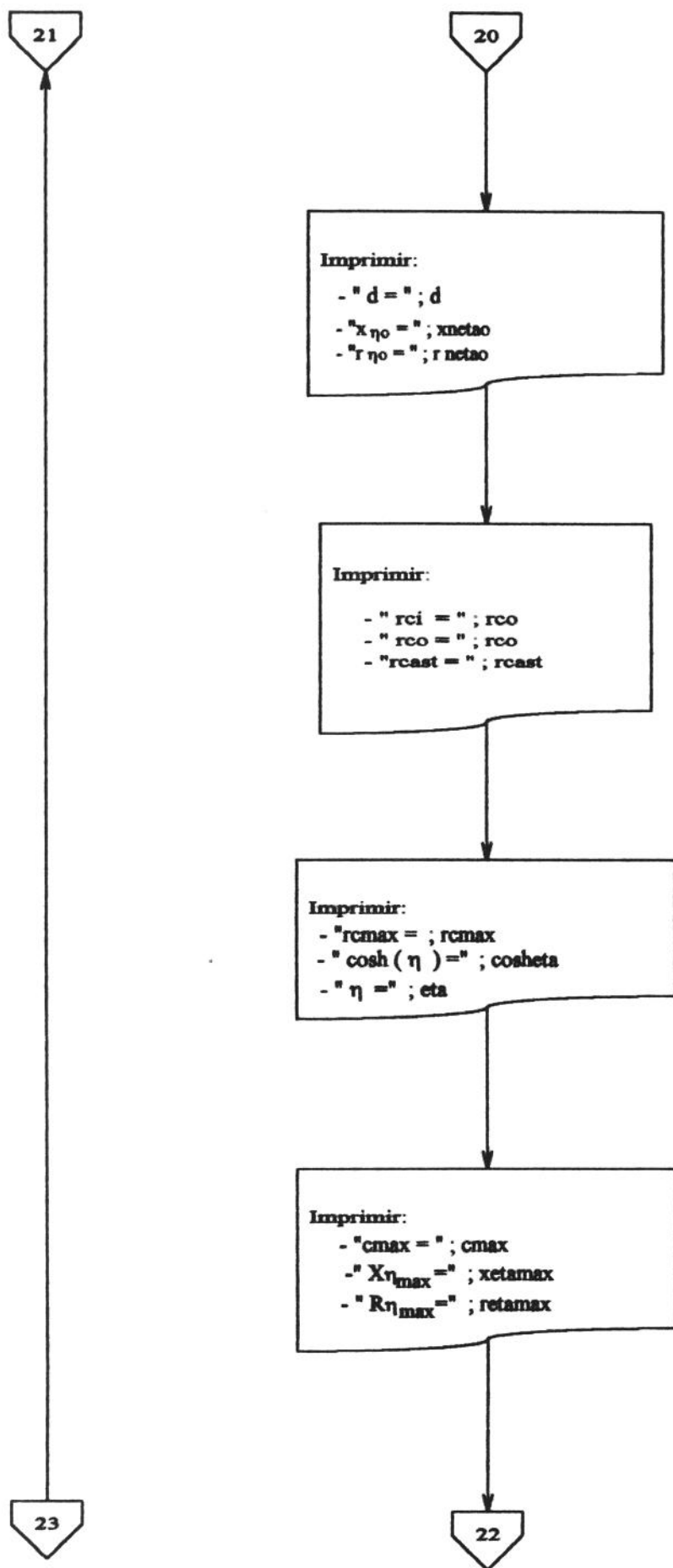


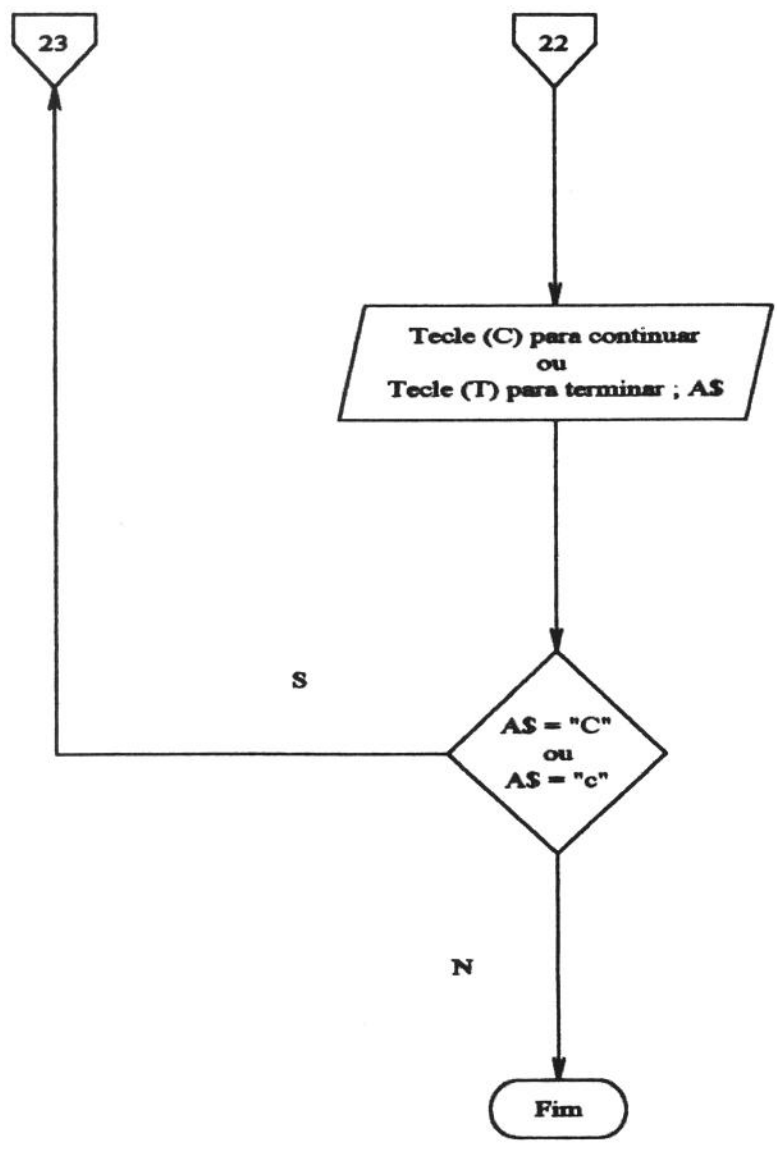






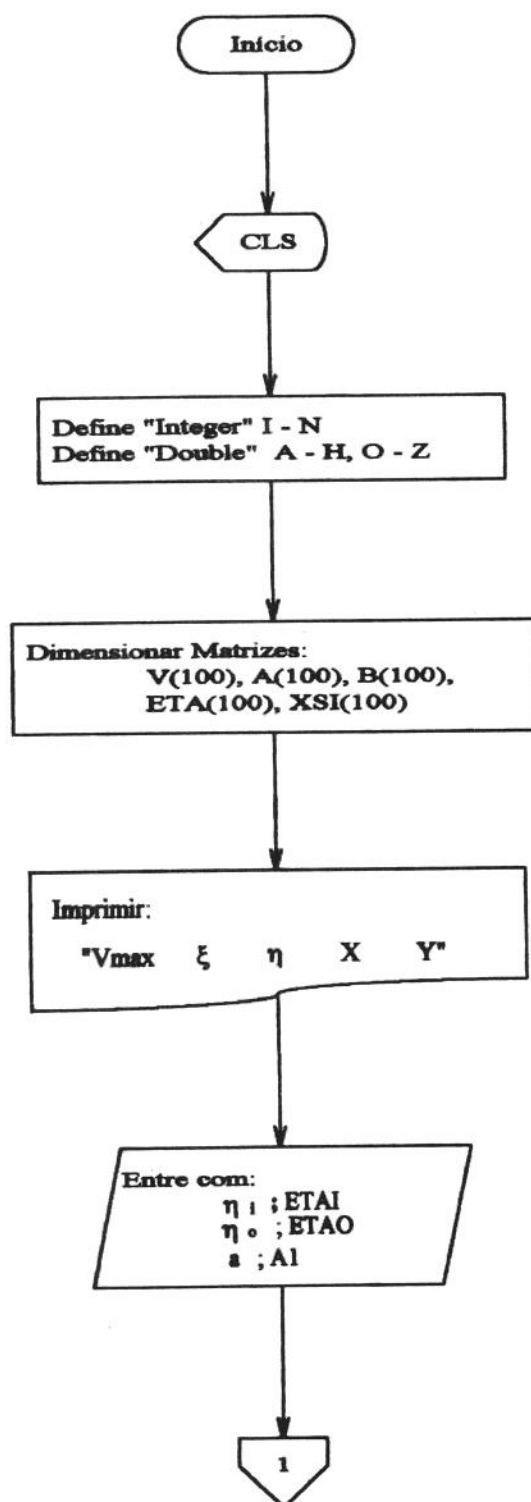


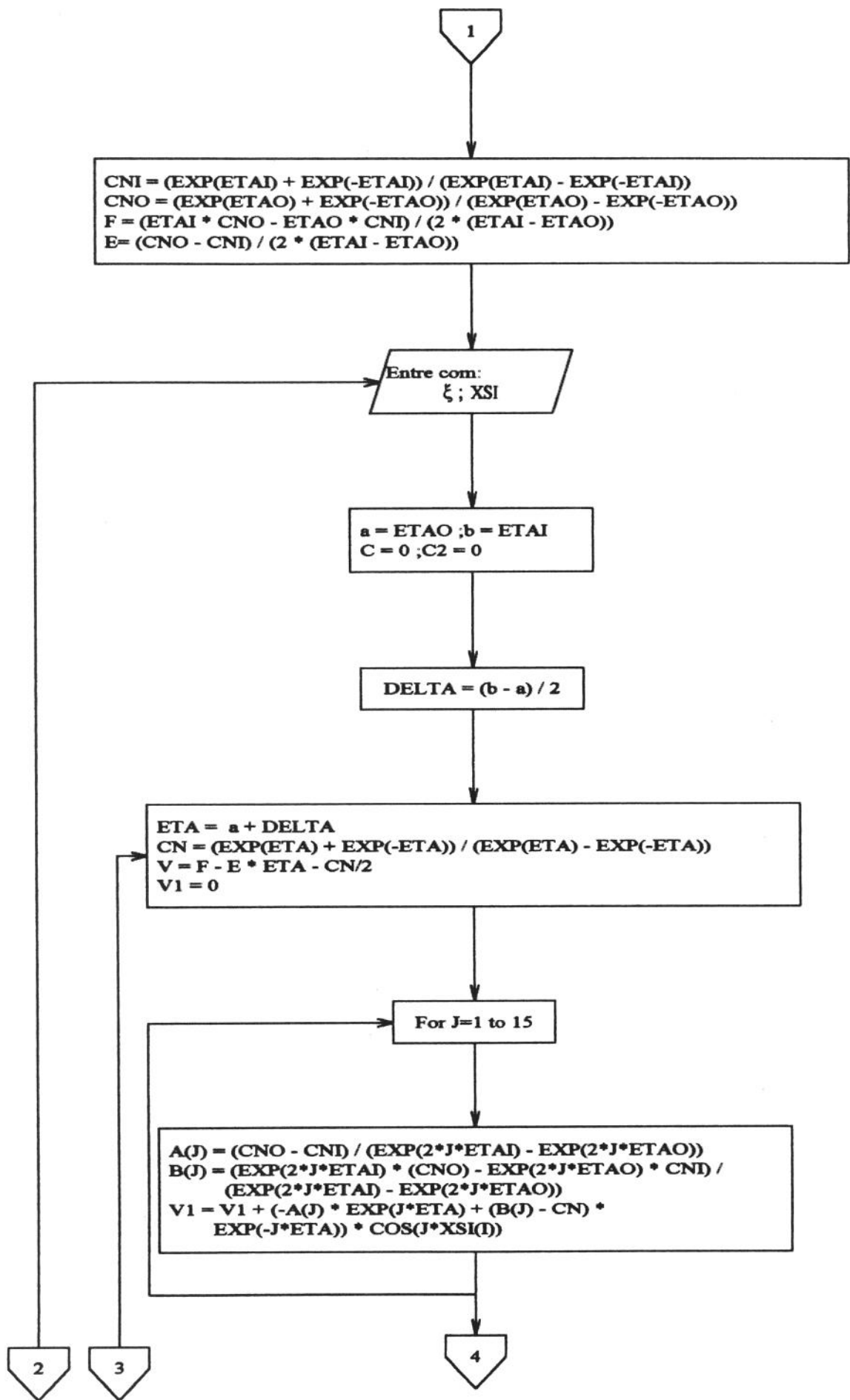


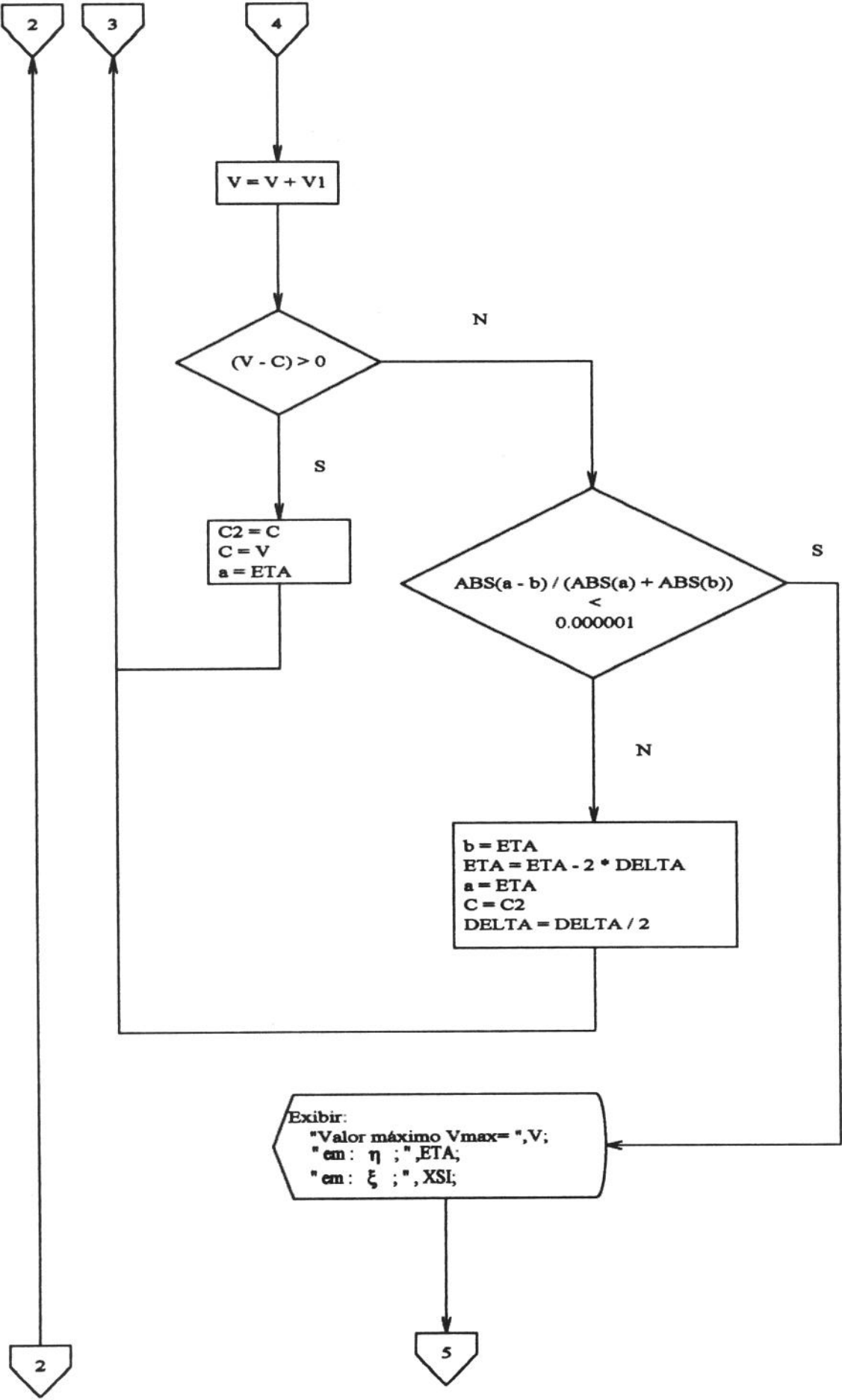


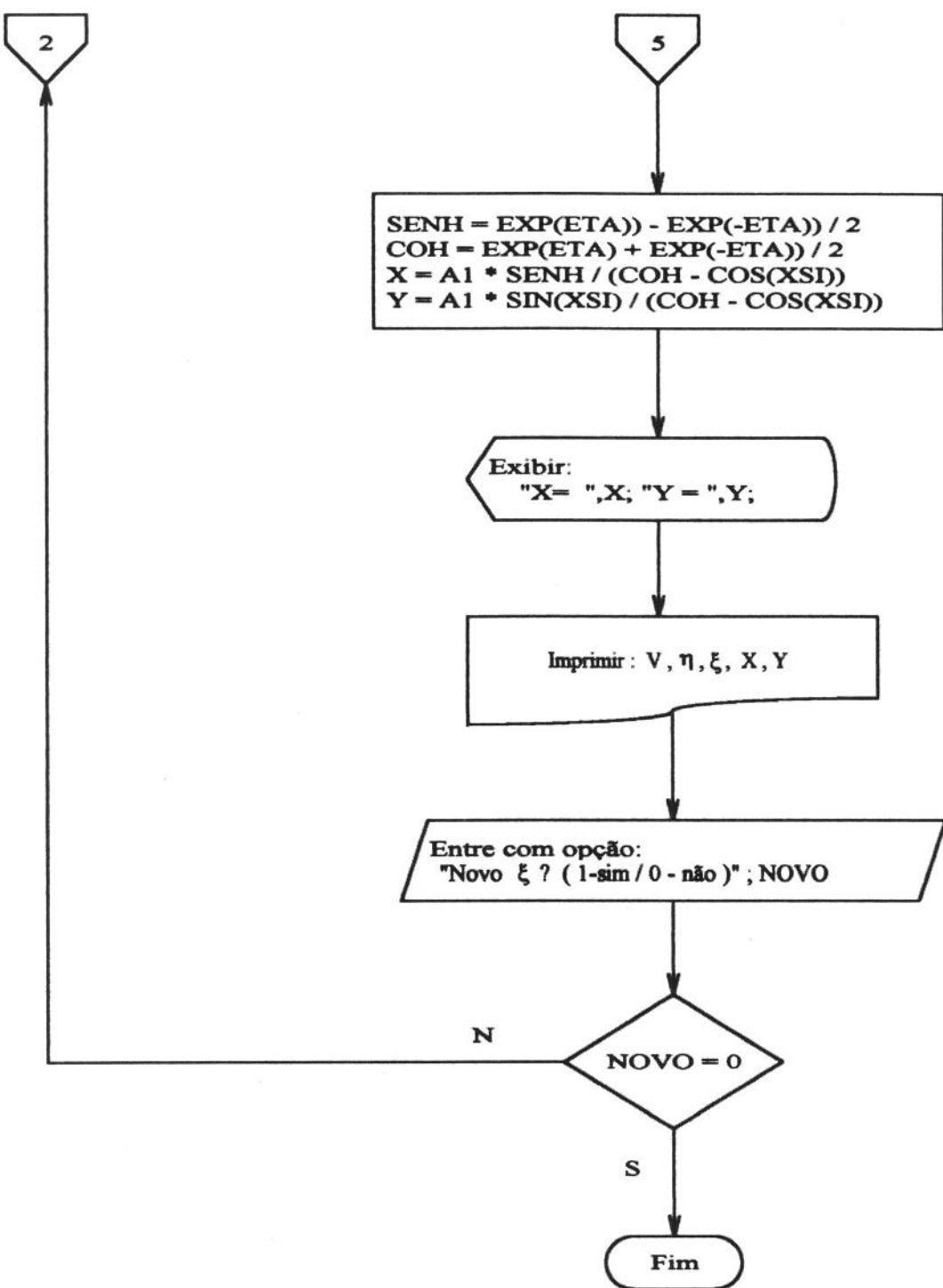
APÊNDICE D2

FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "VMAX"



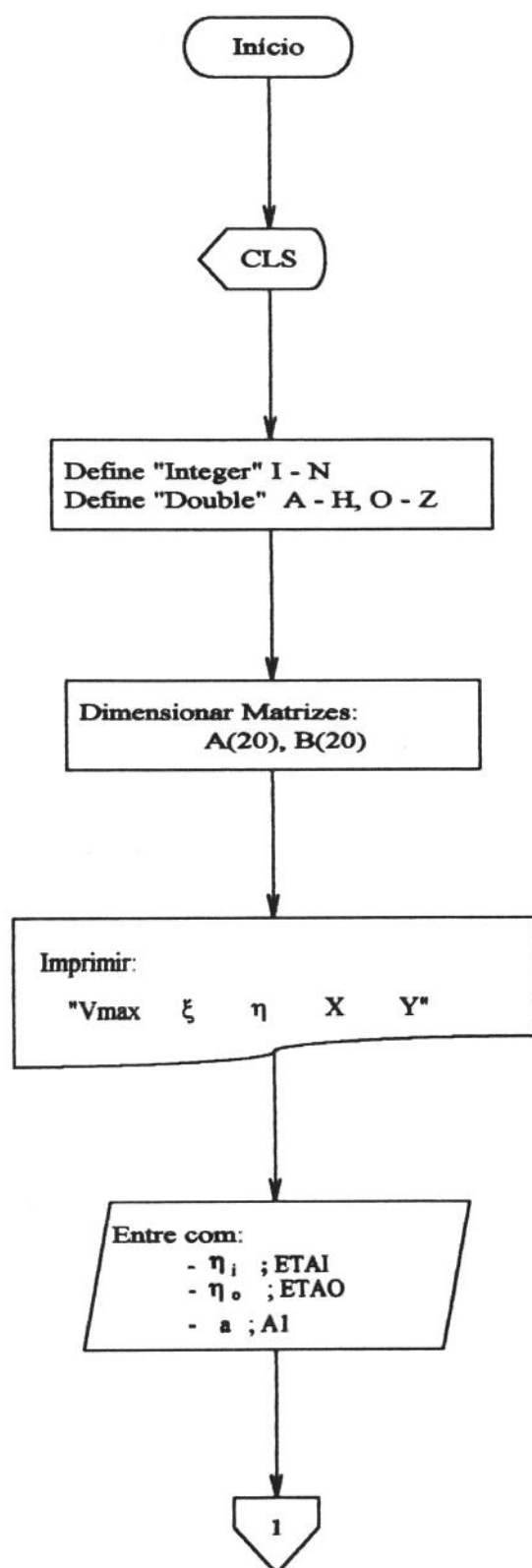


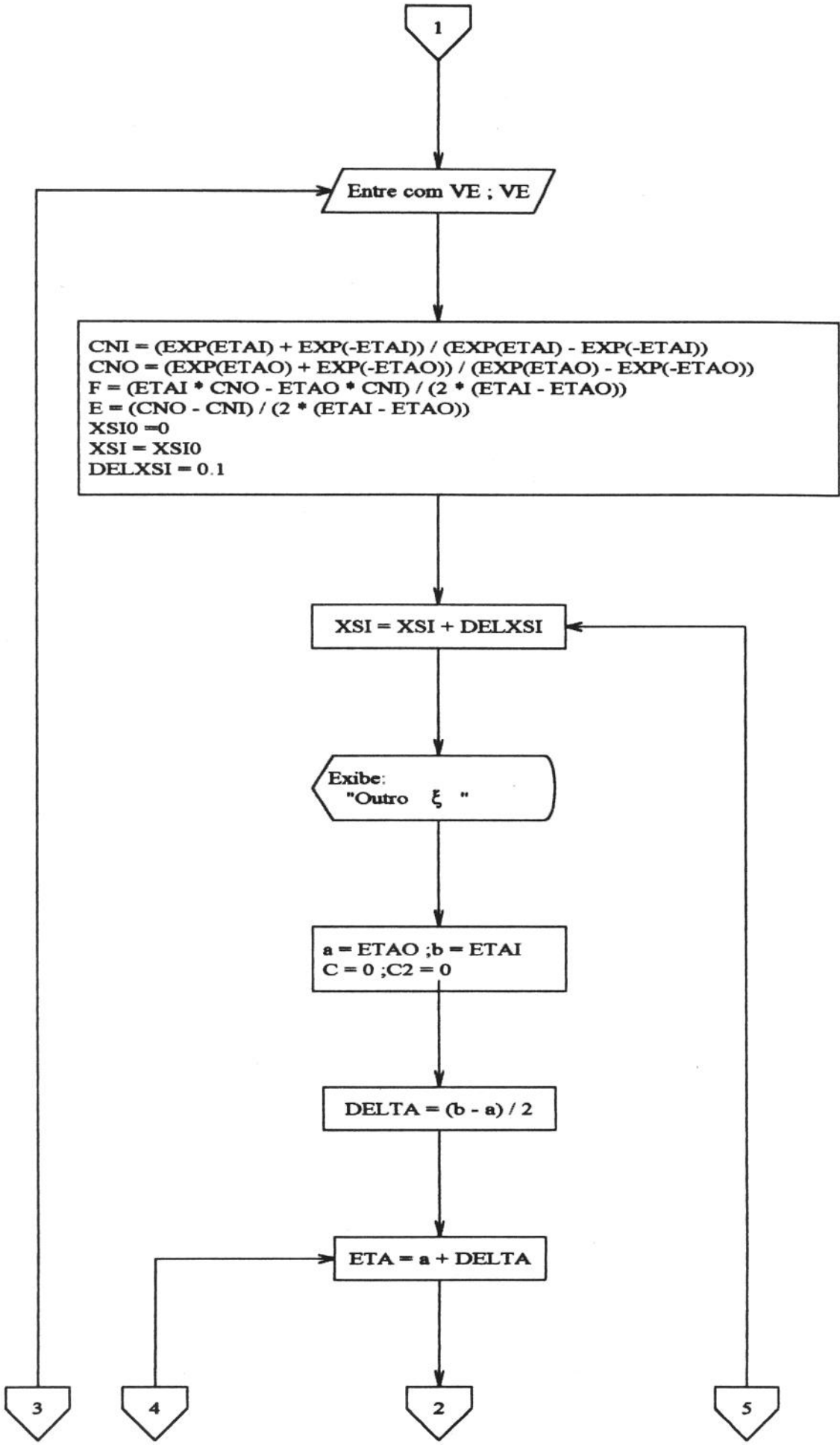


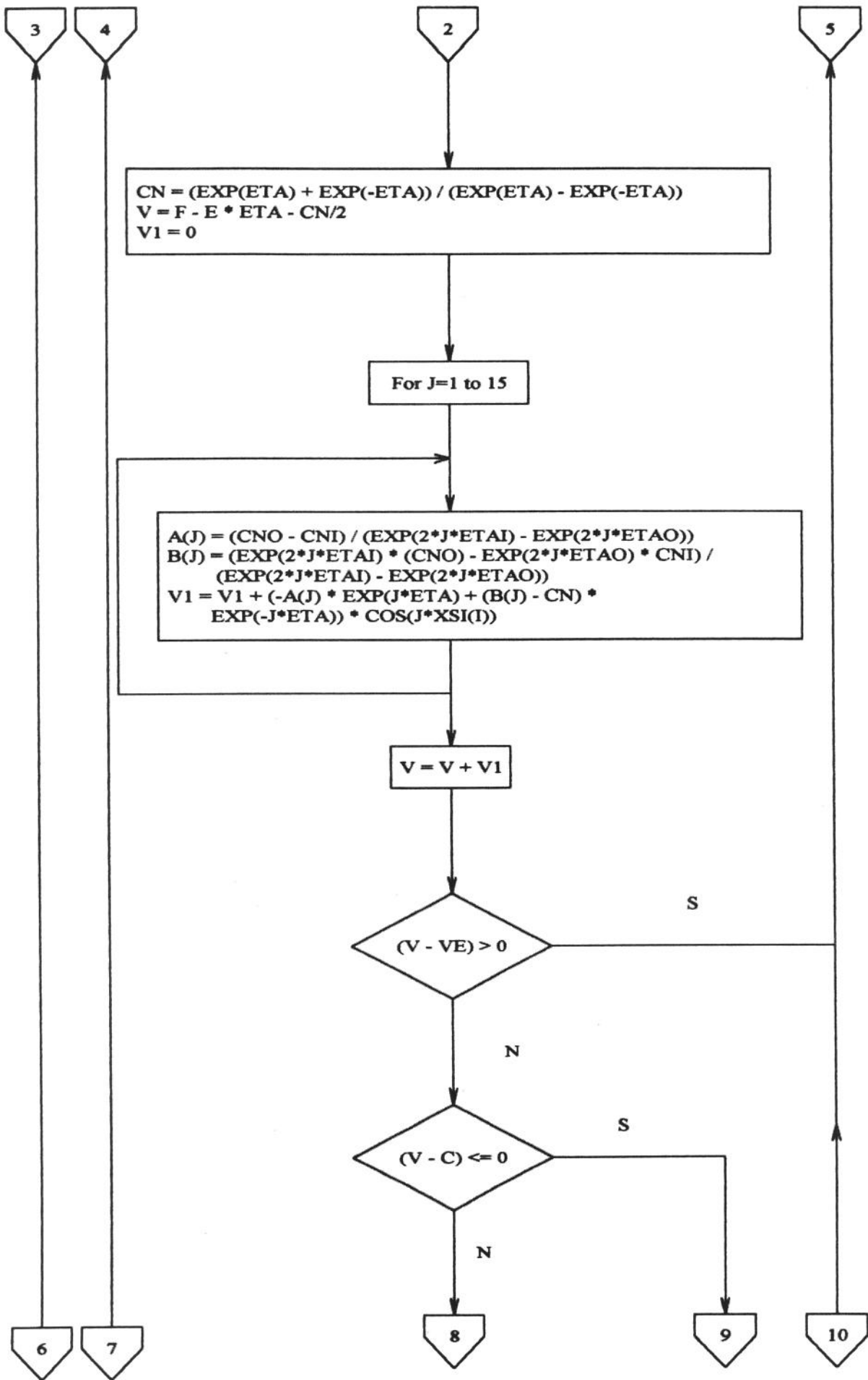


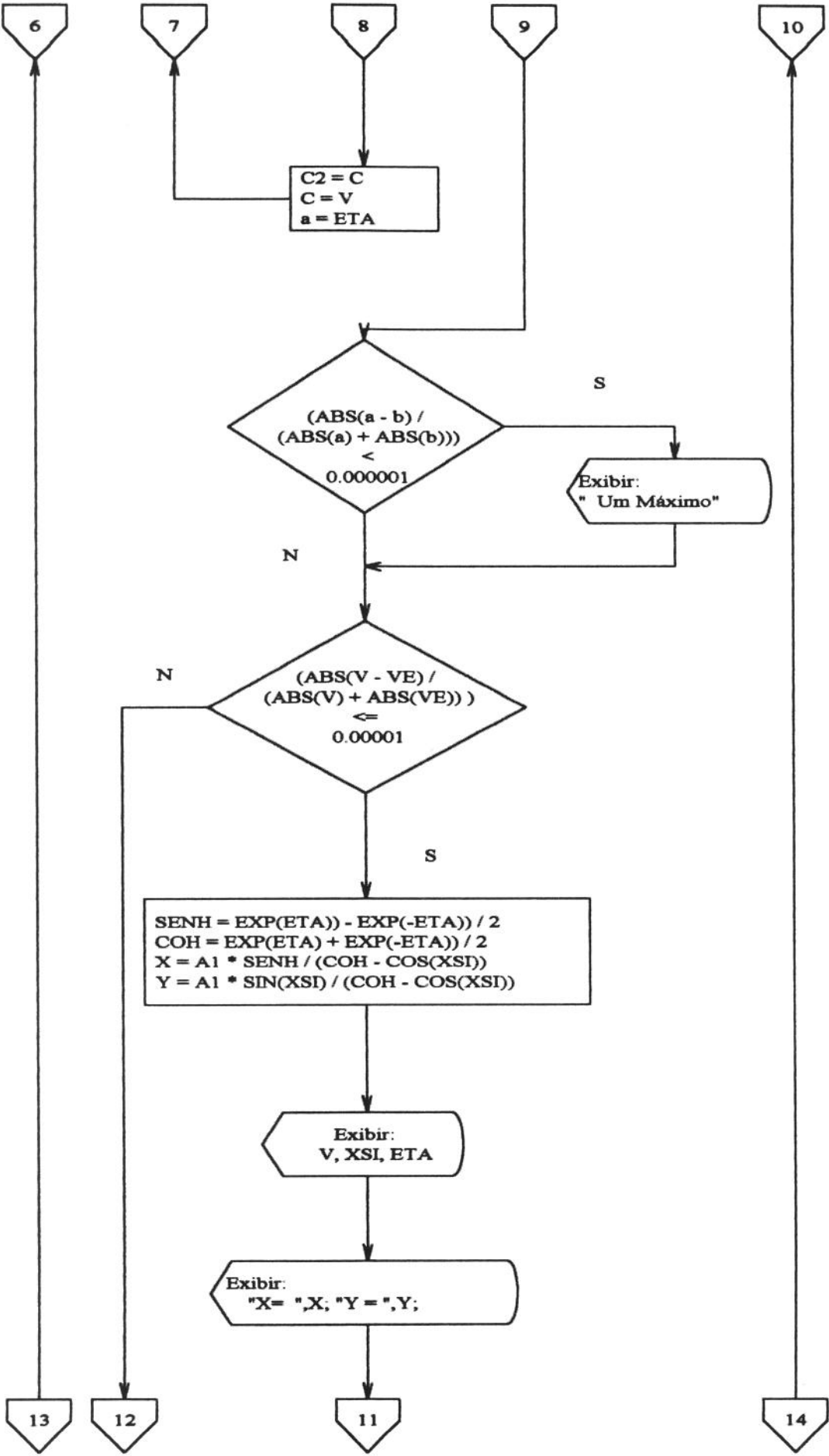
APÊNDICE D3

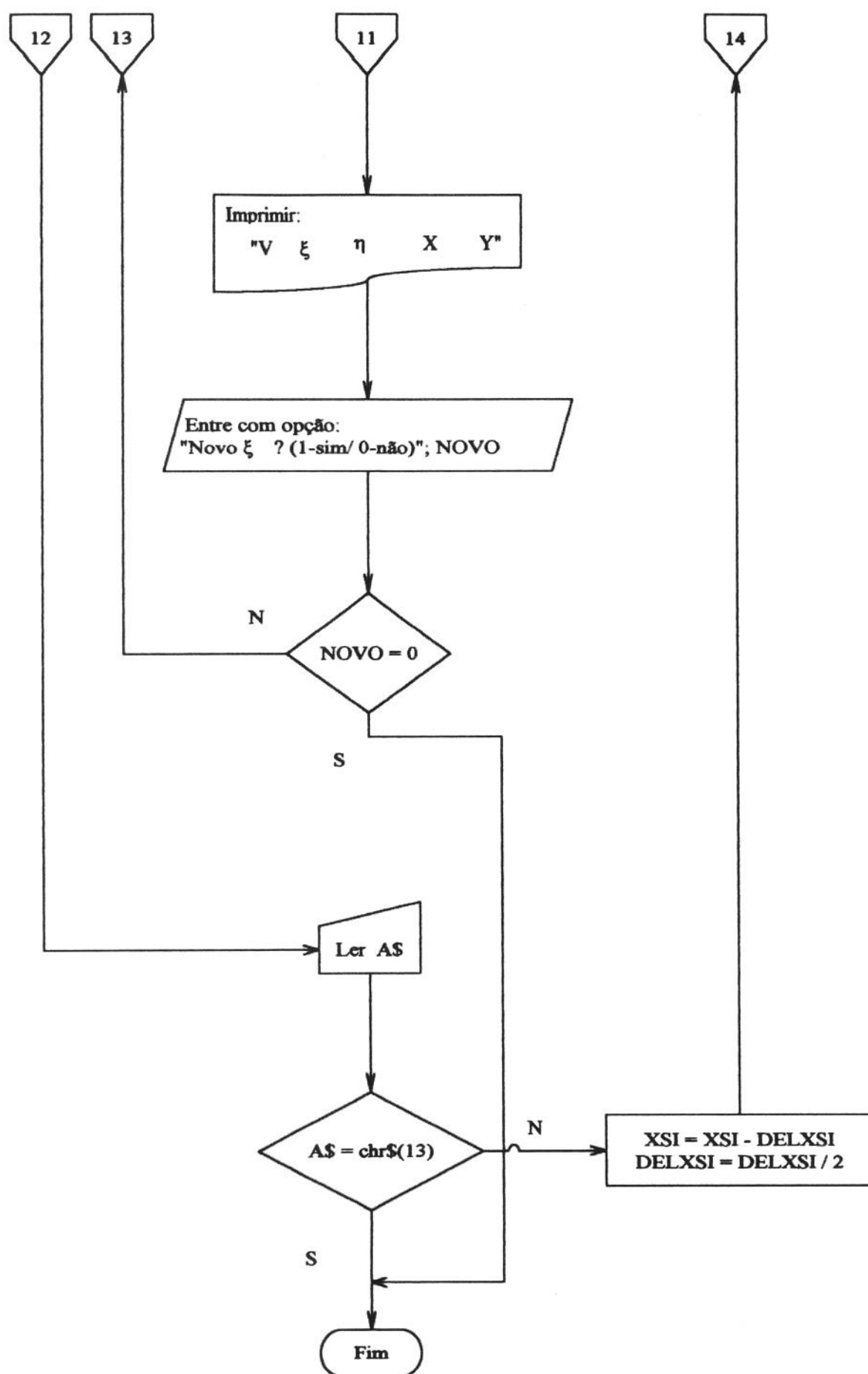
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "VMAXSI"





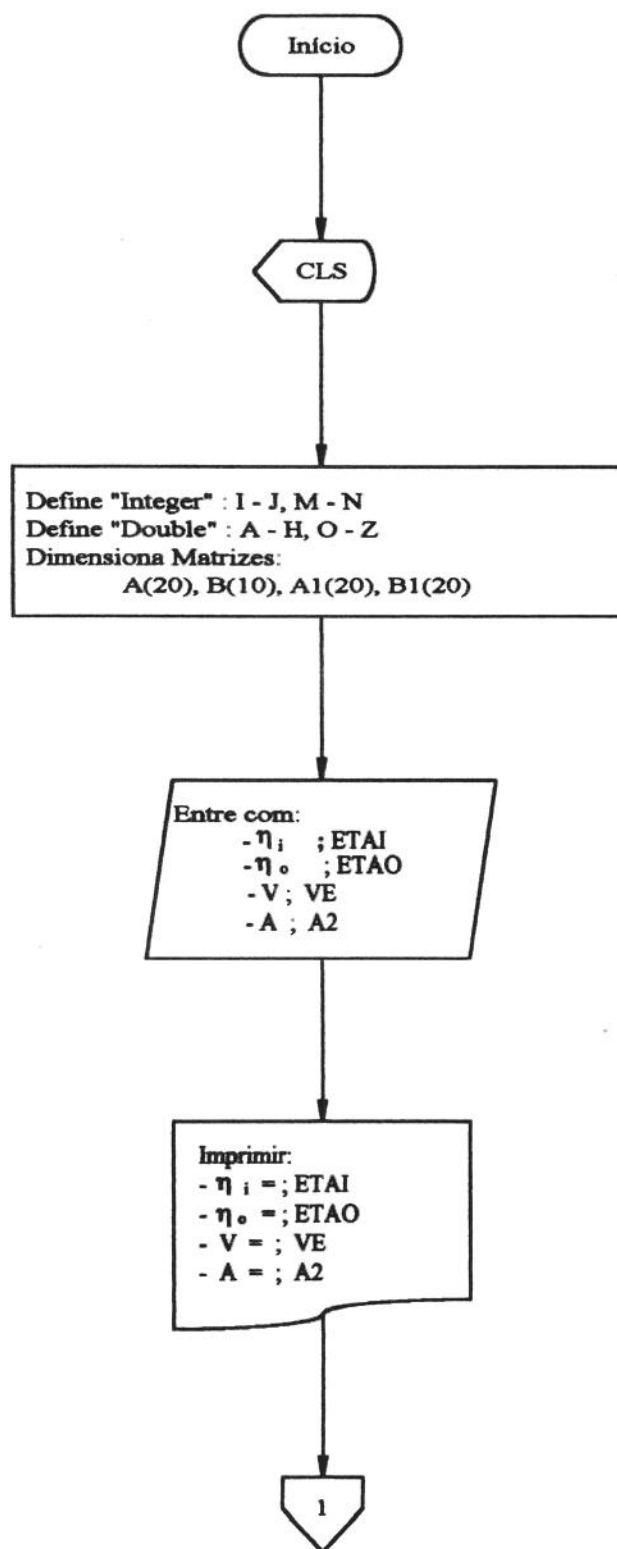


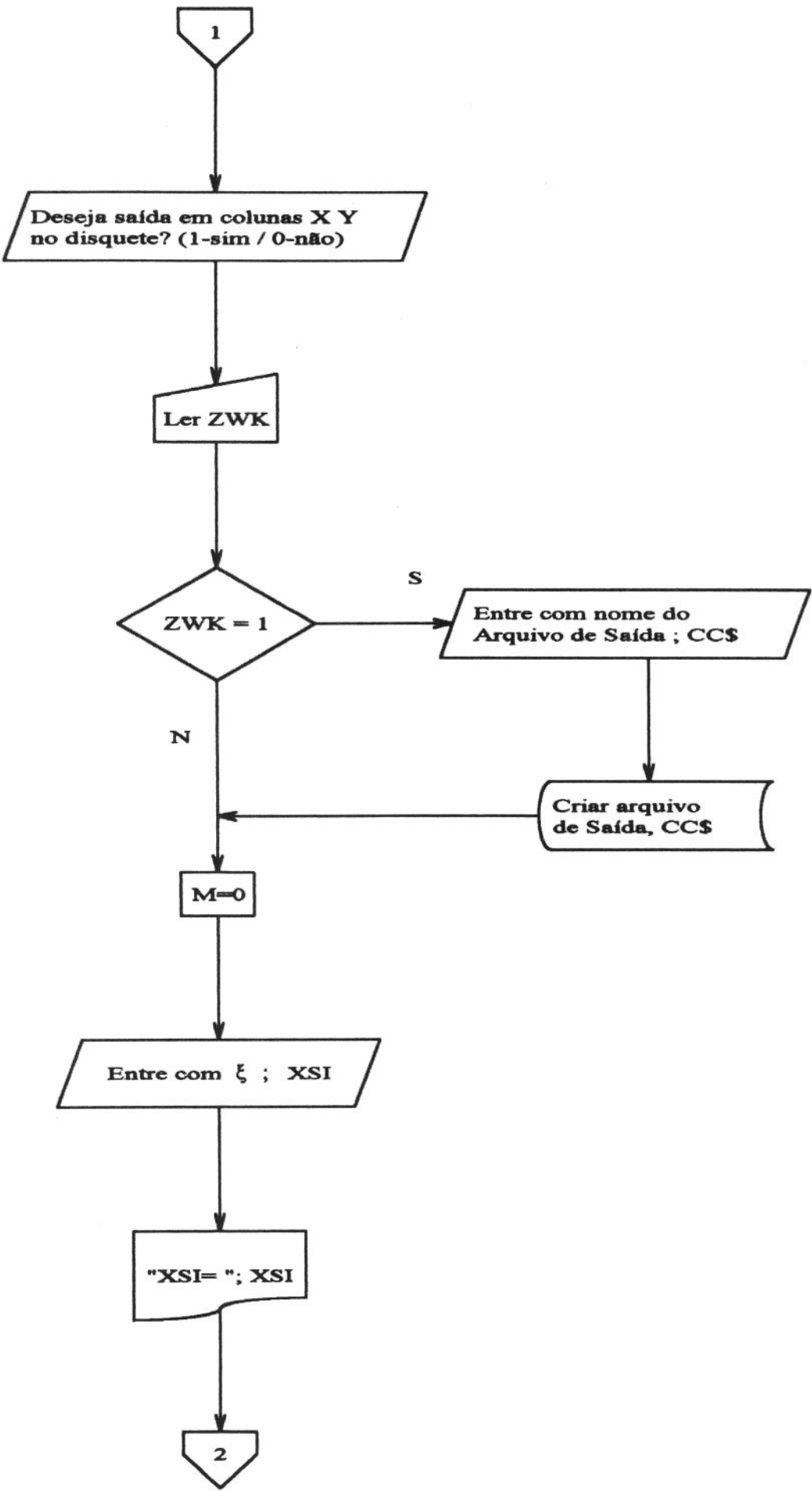


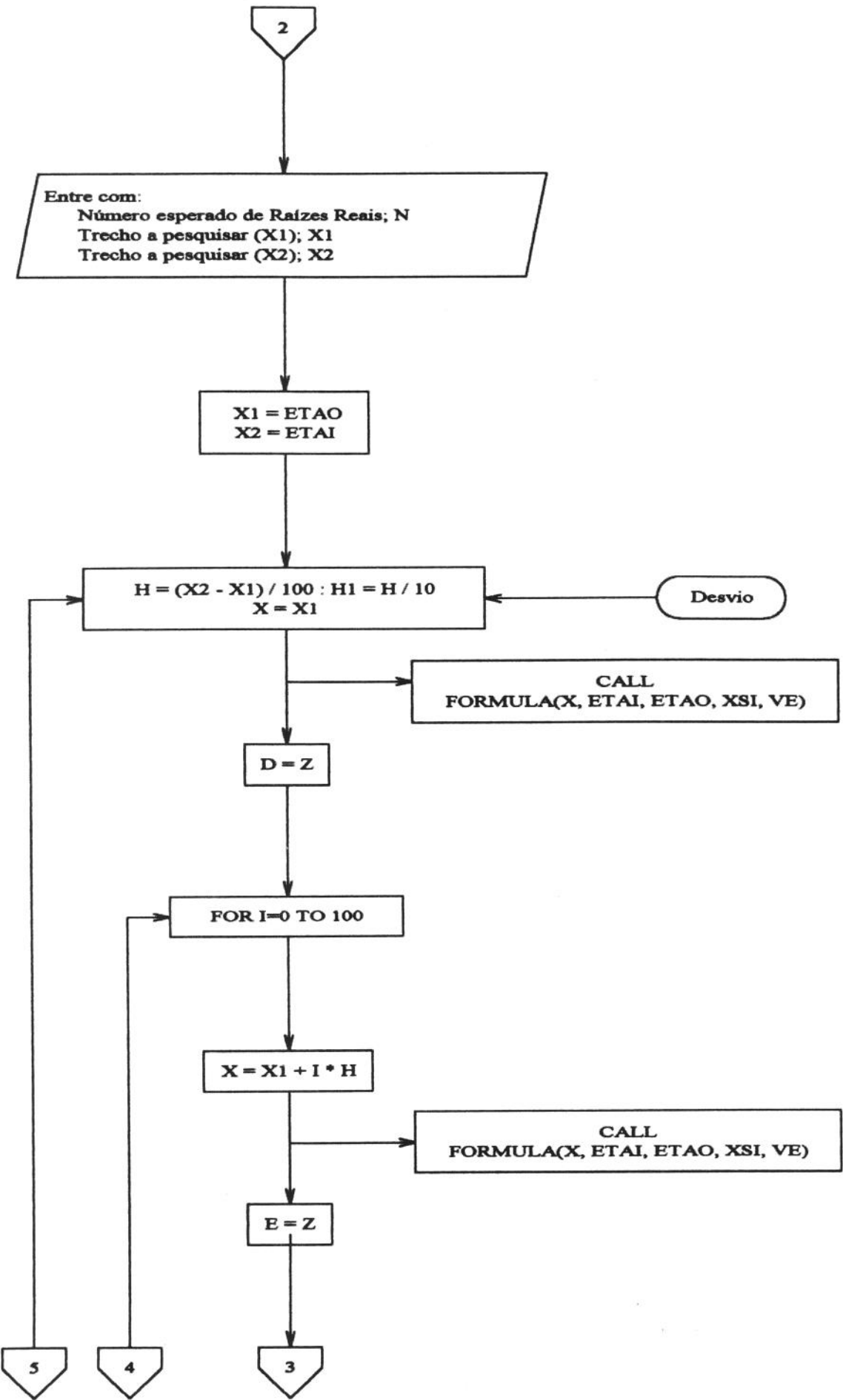


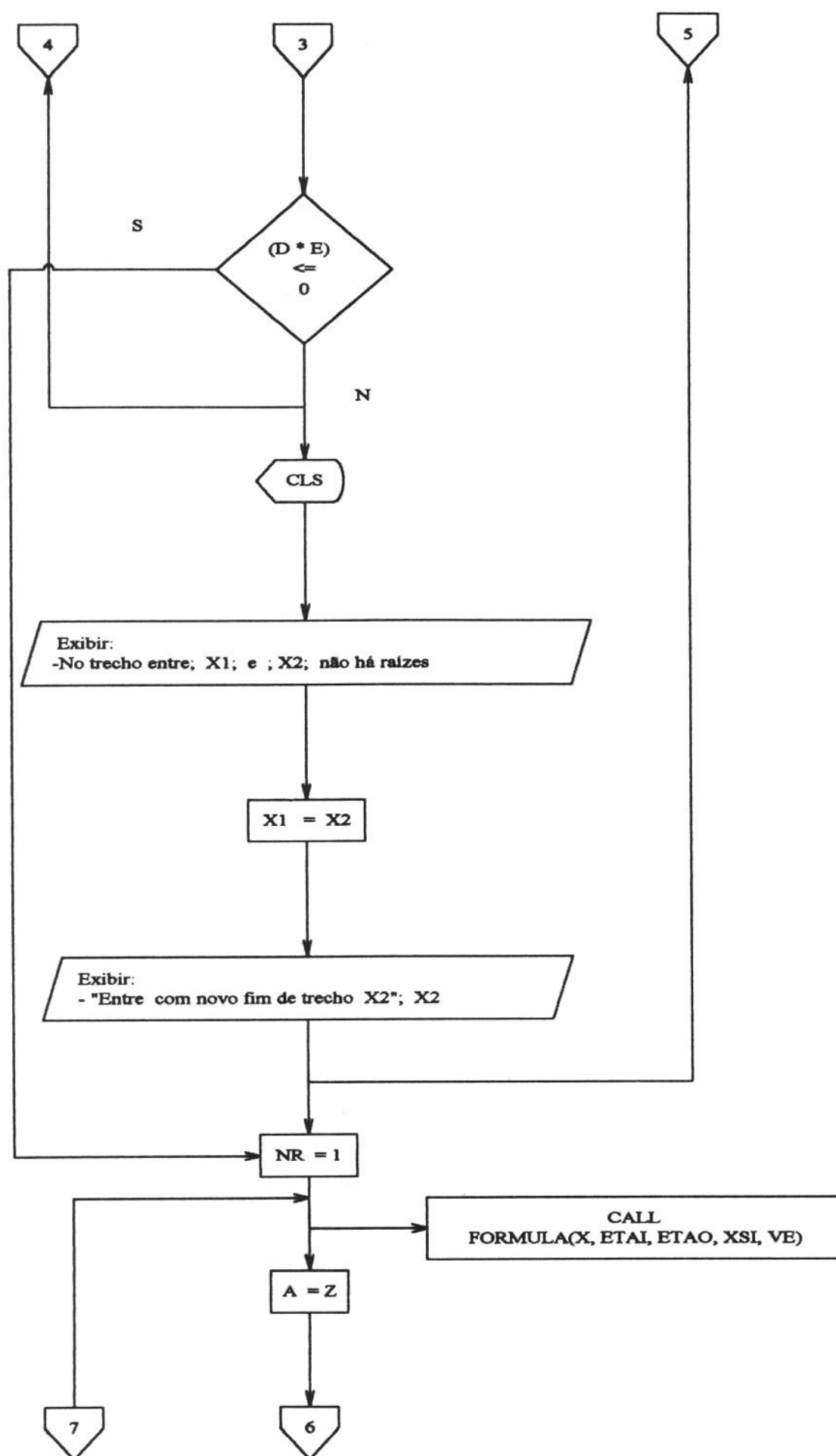
APÊNDICE D4

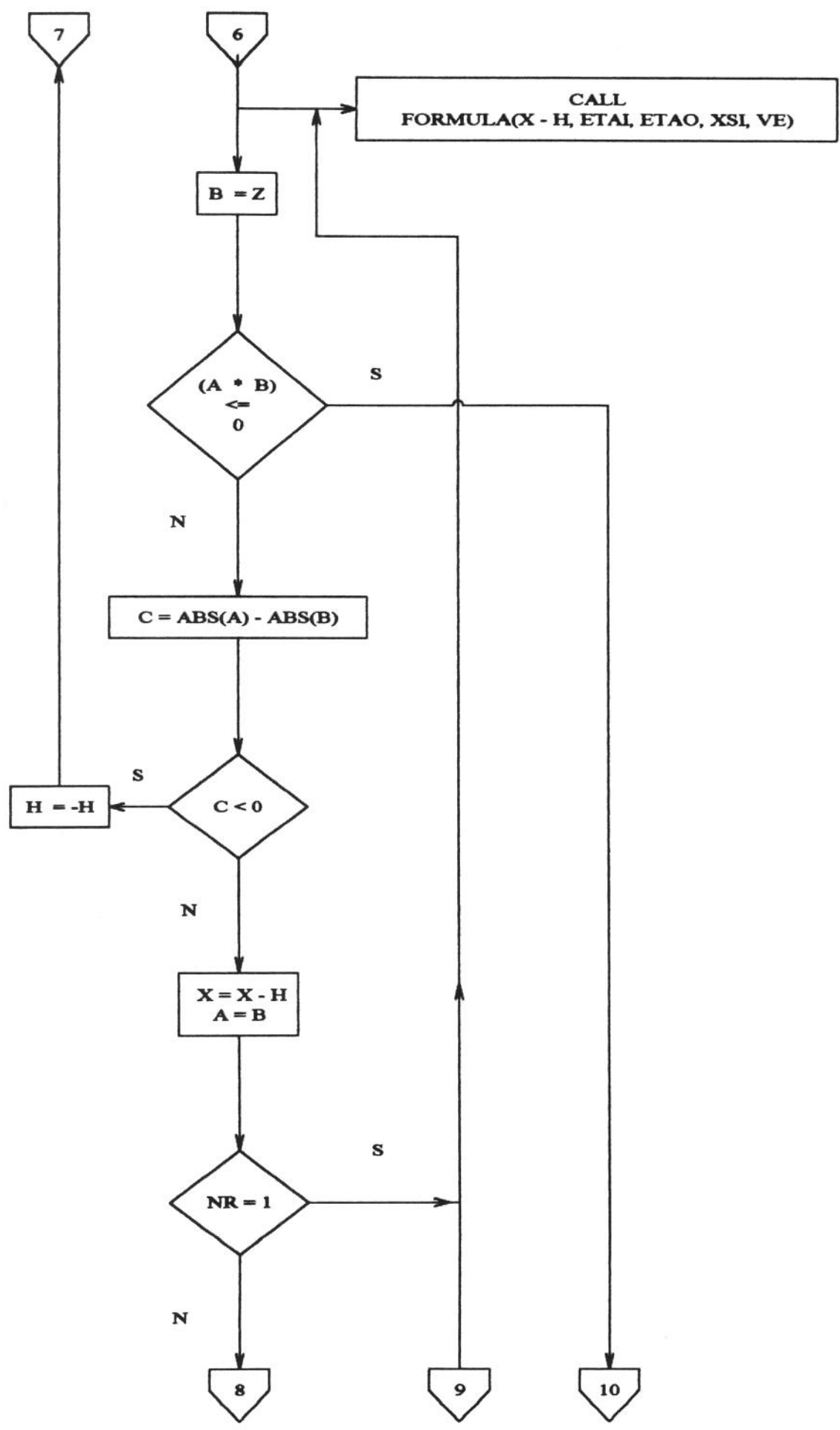
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "ETA"

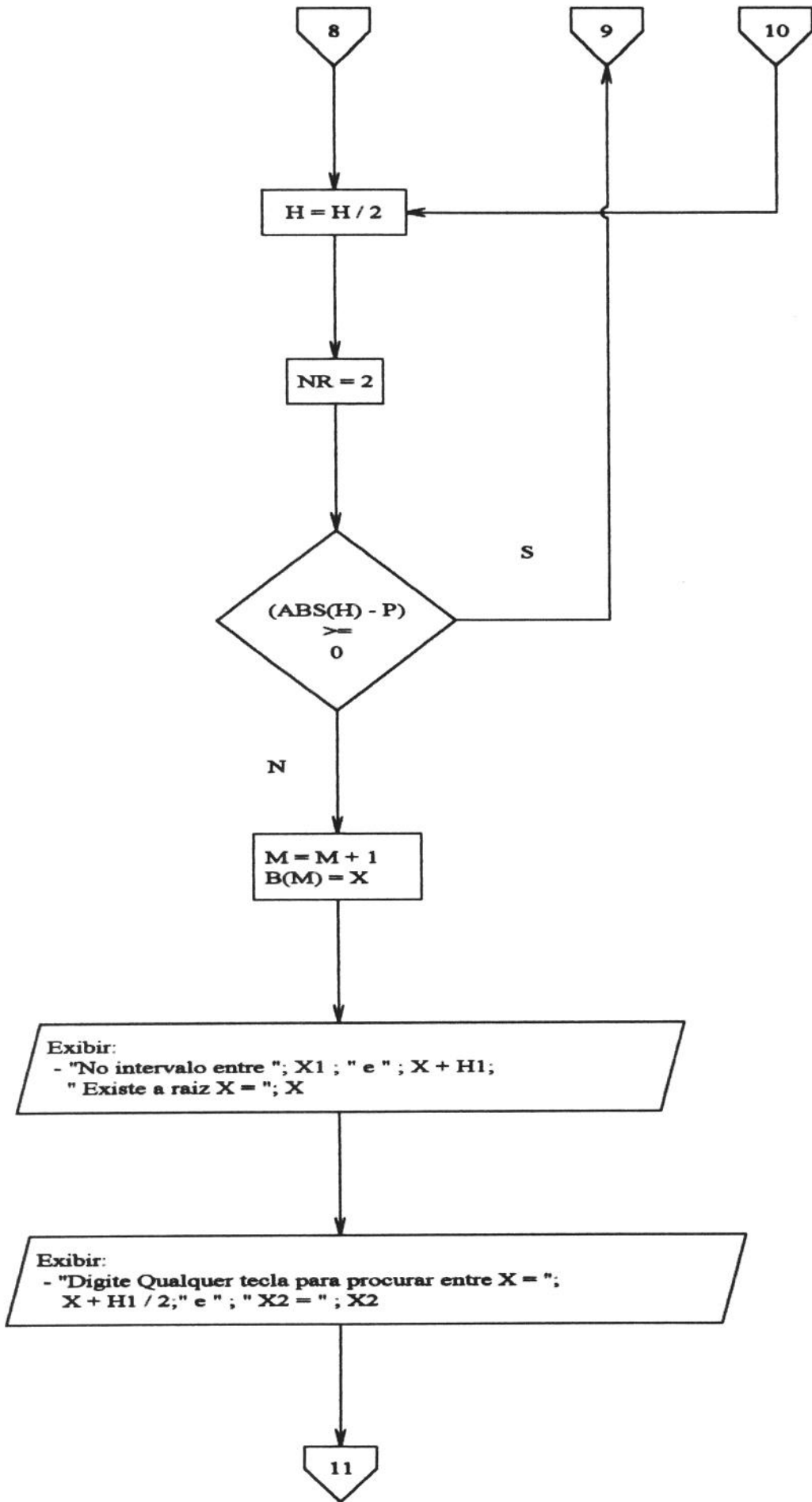


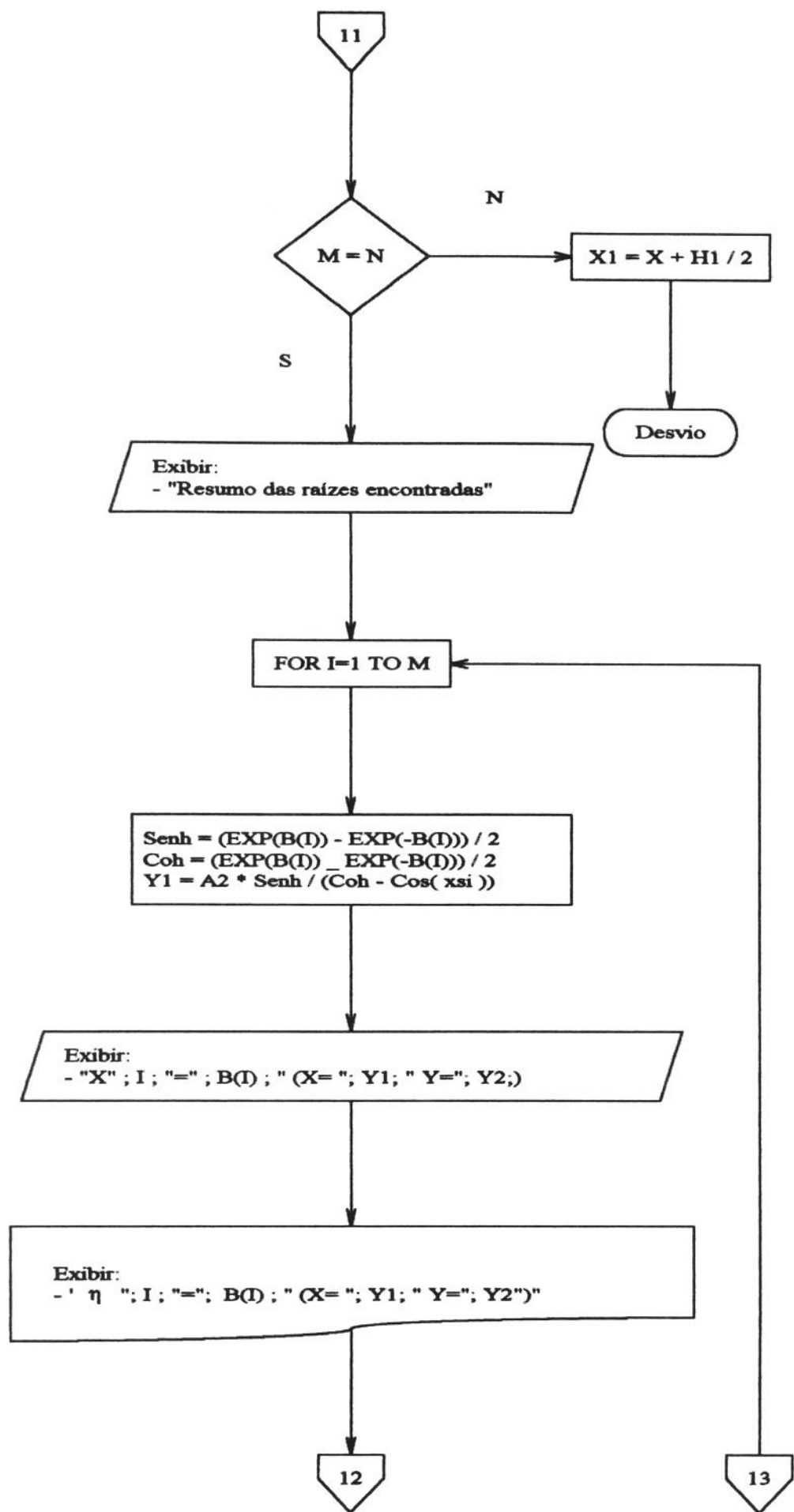


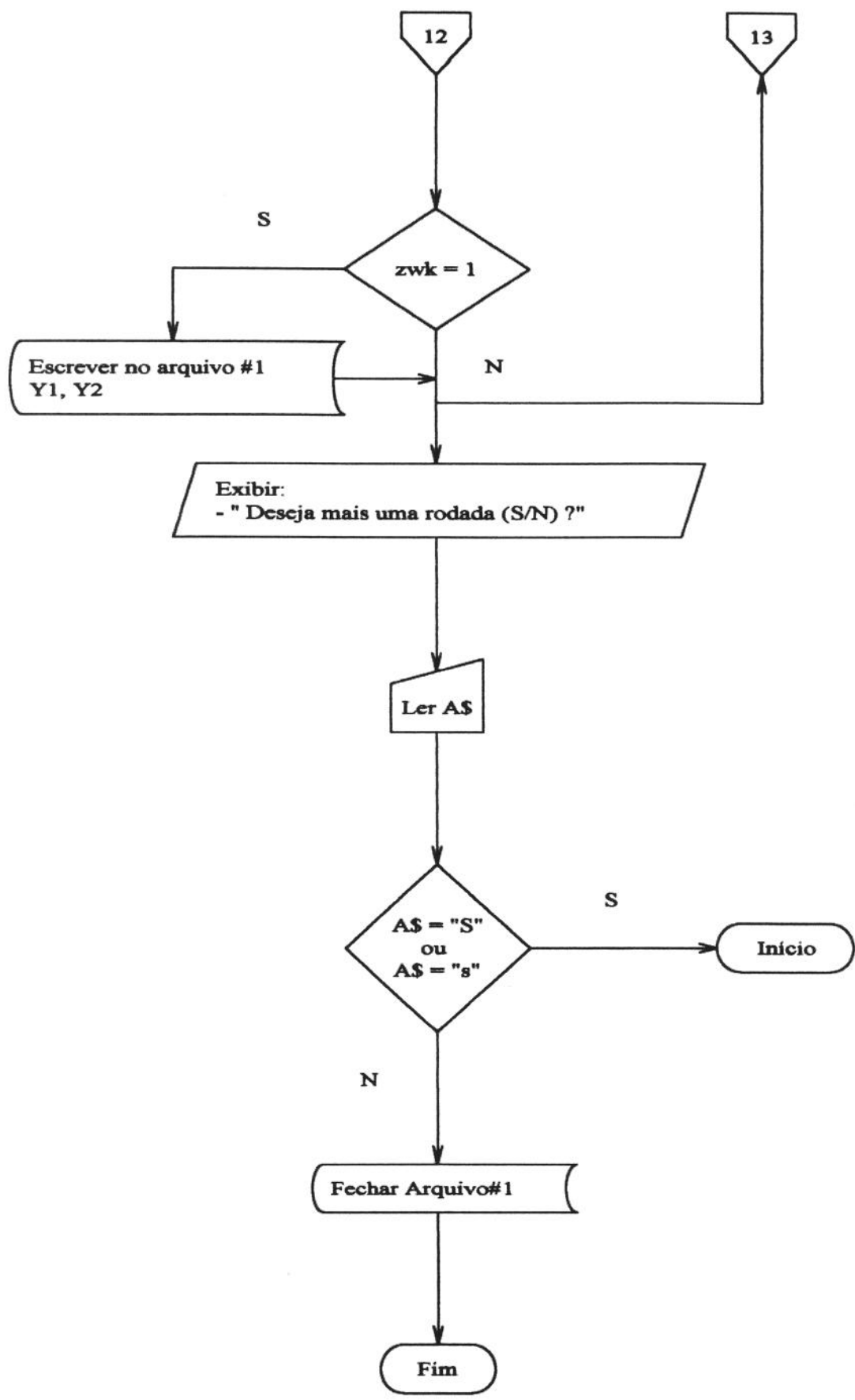


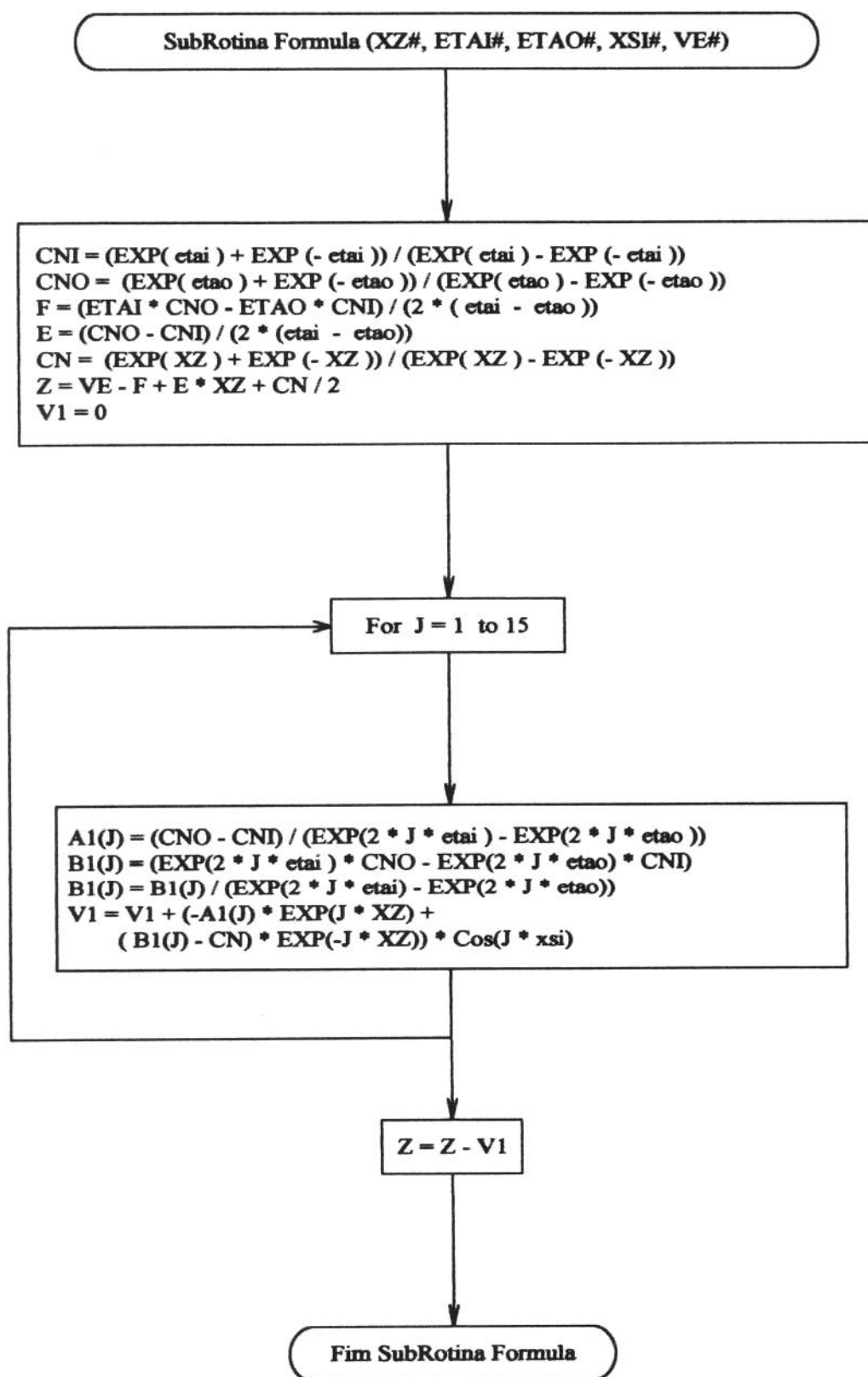




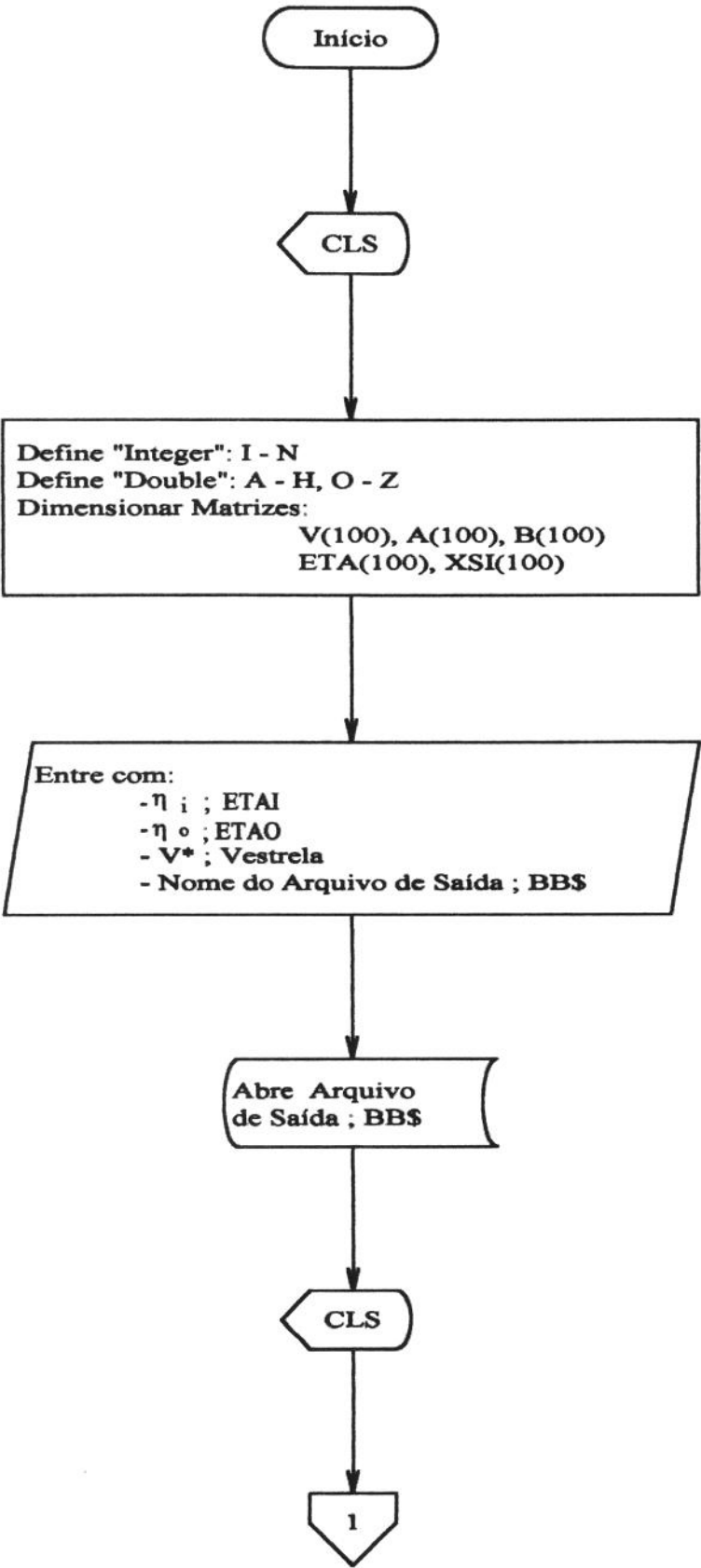


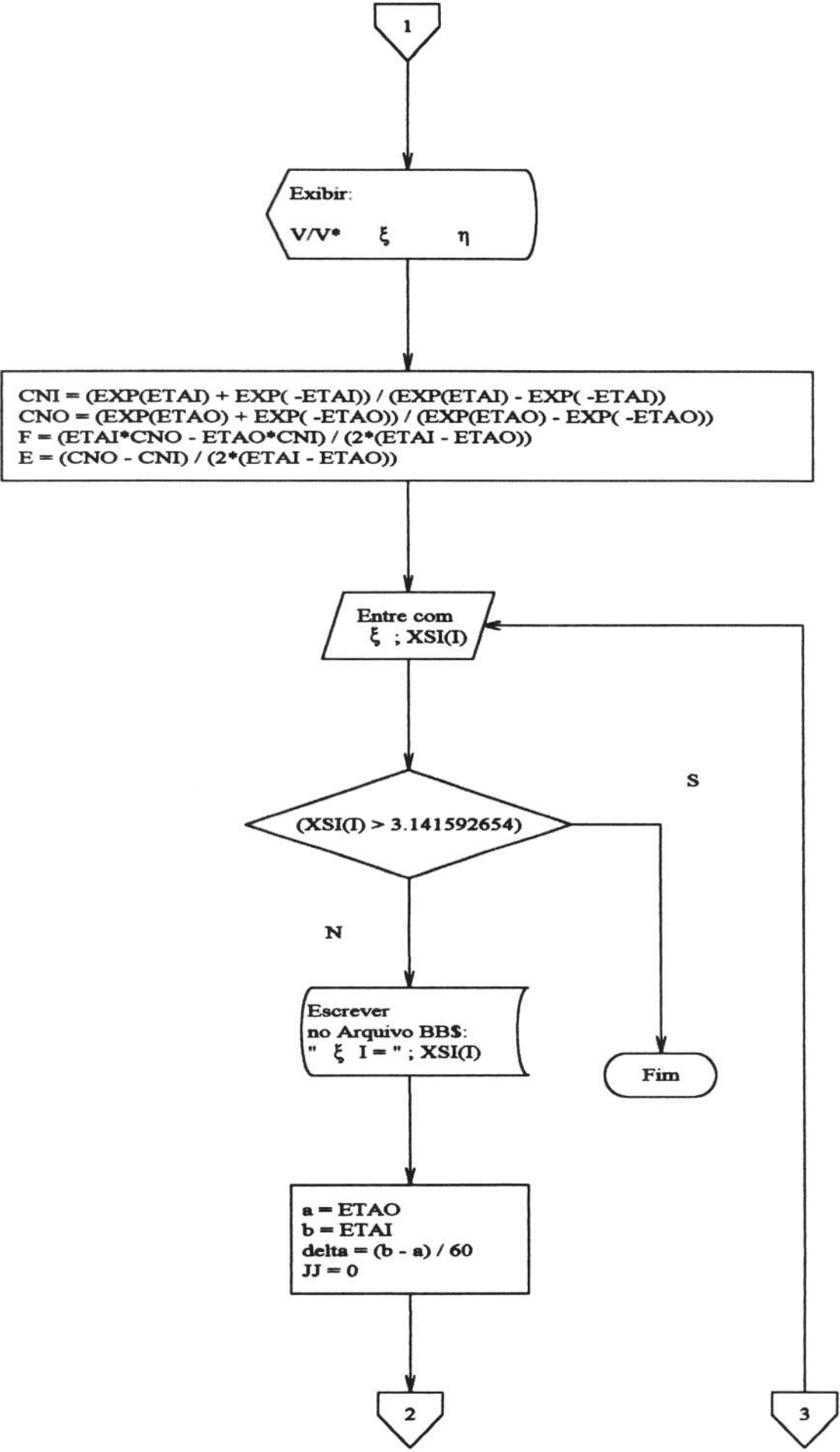


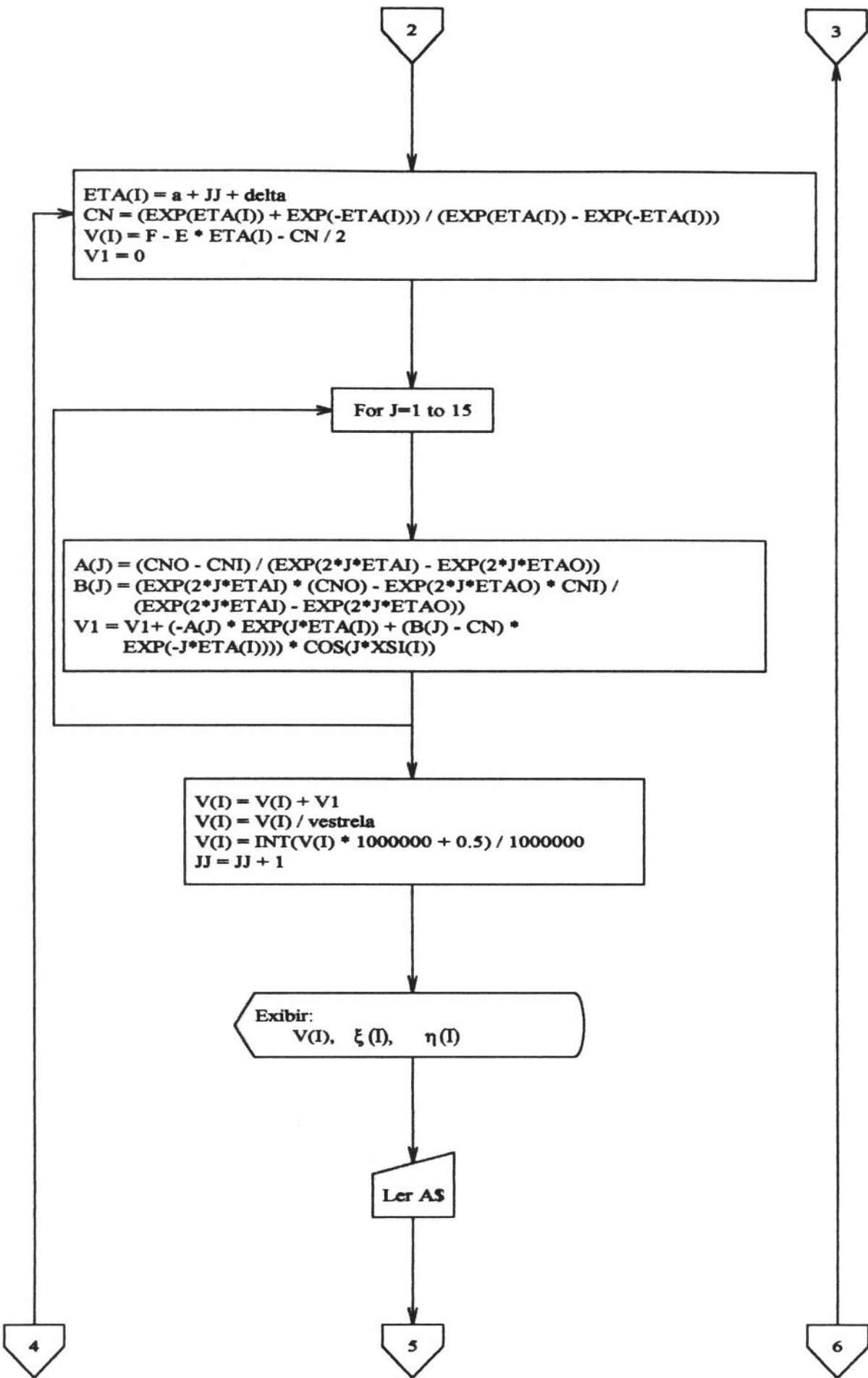


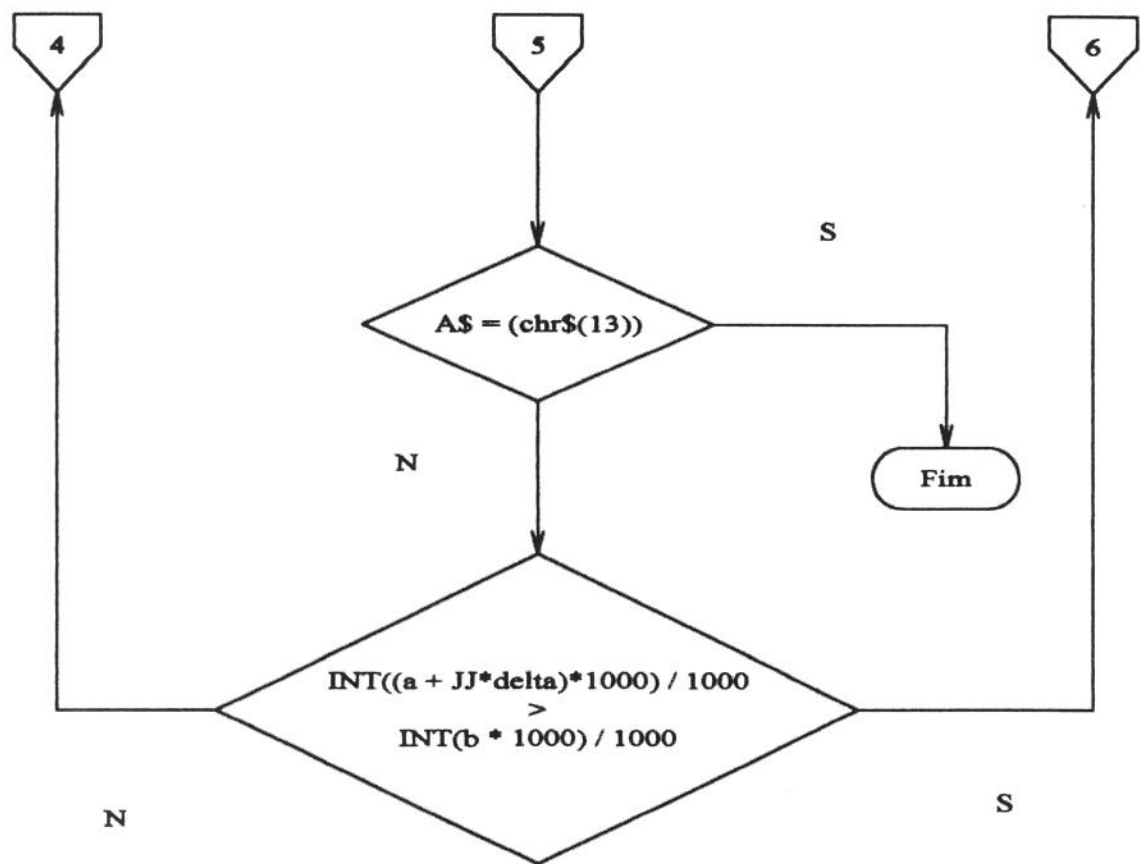


APÊNDICE D5
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "VELNETA"



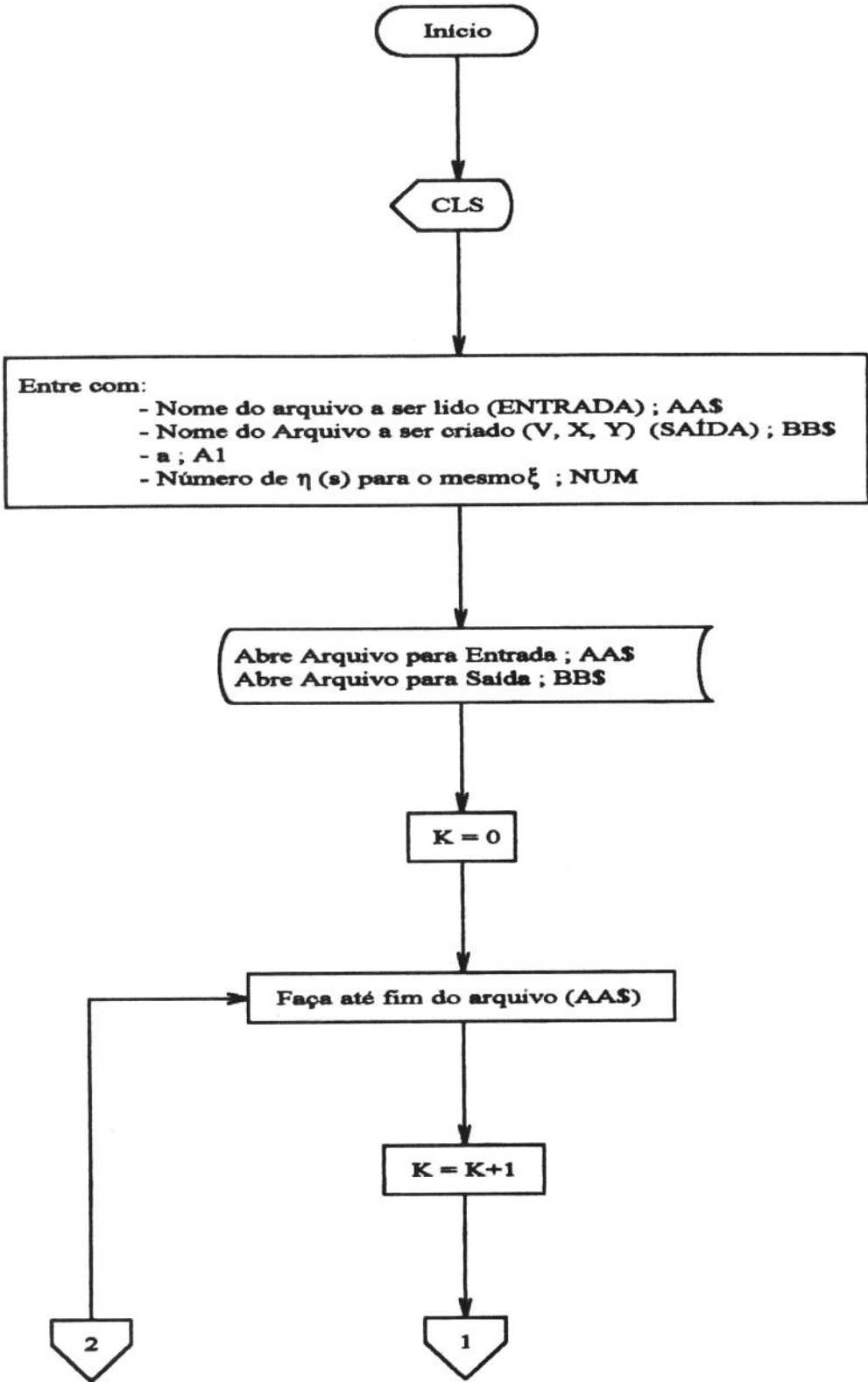


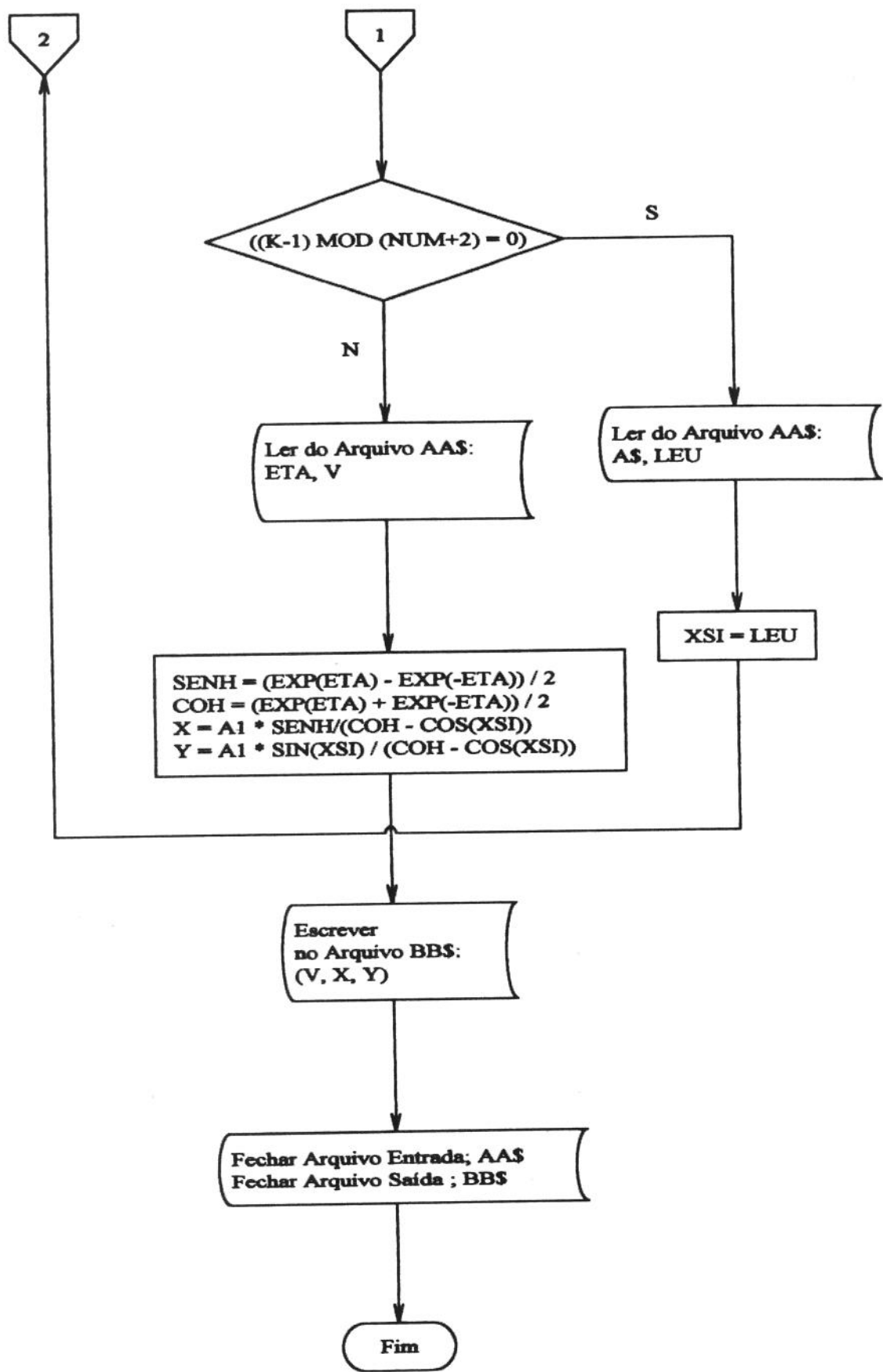




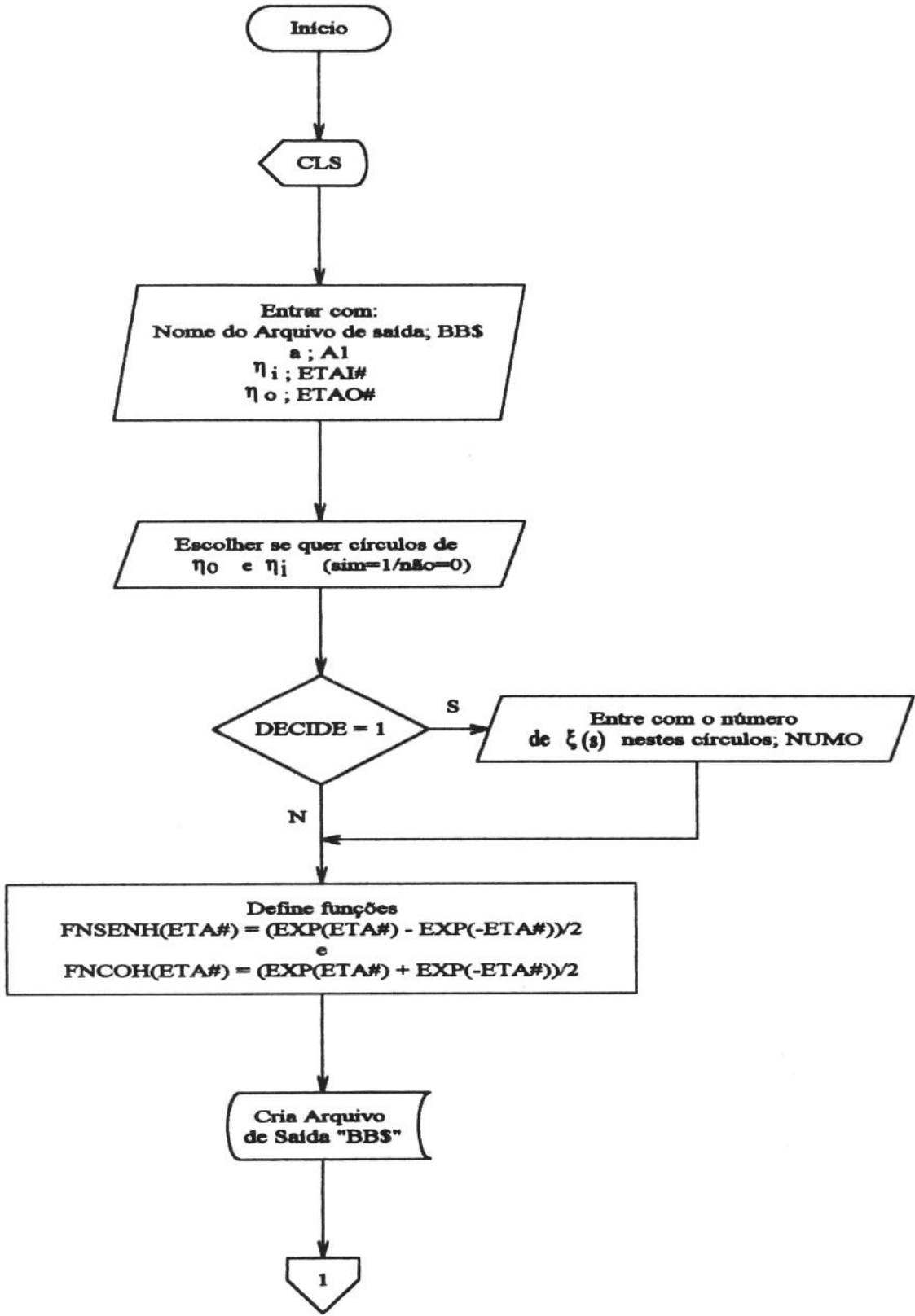
APÊNDICE D6

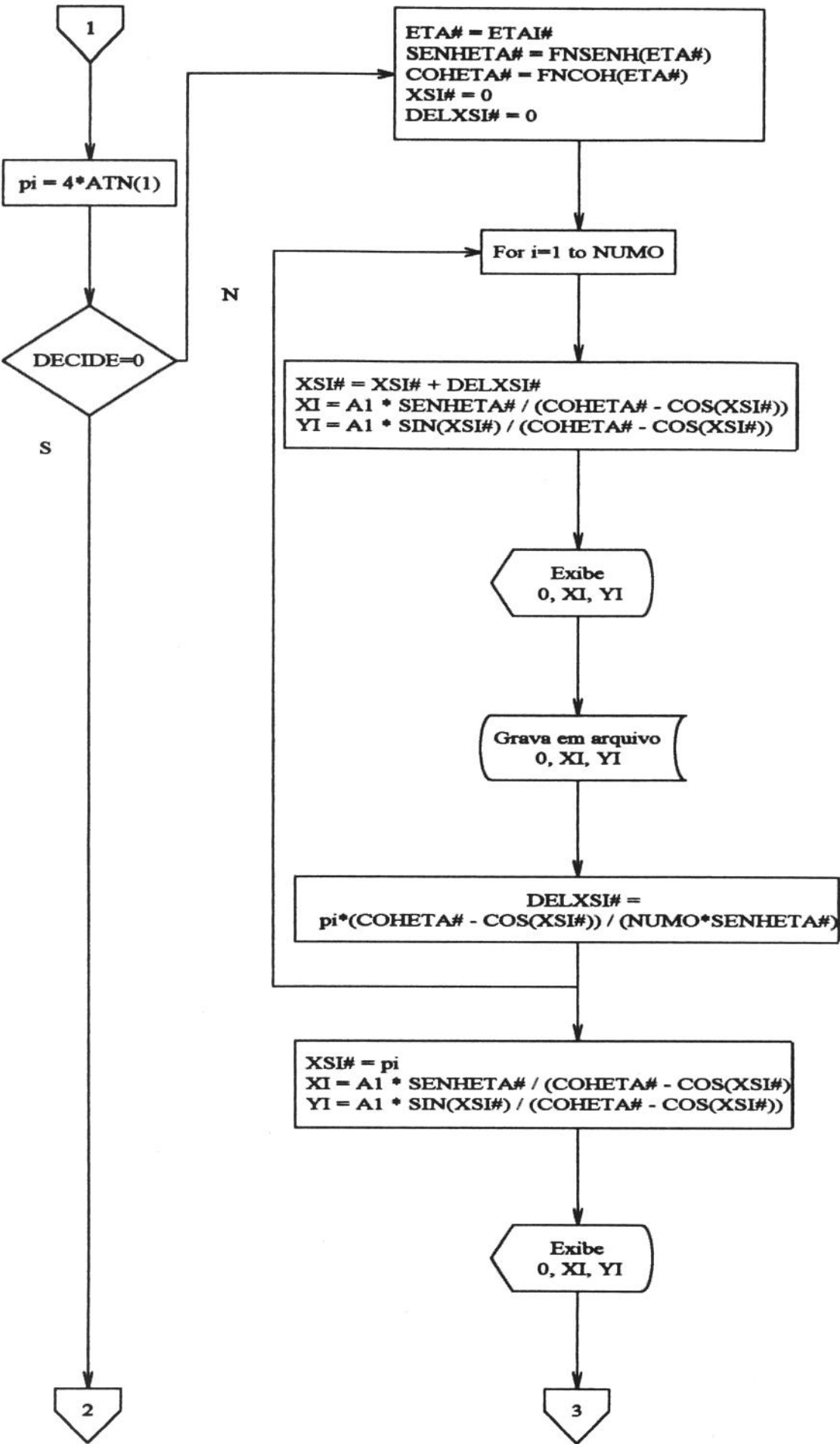
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "CARTVEL"

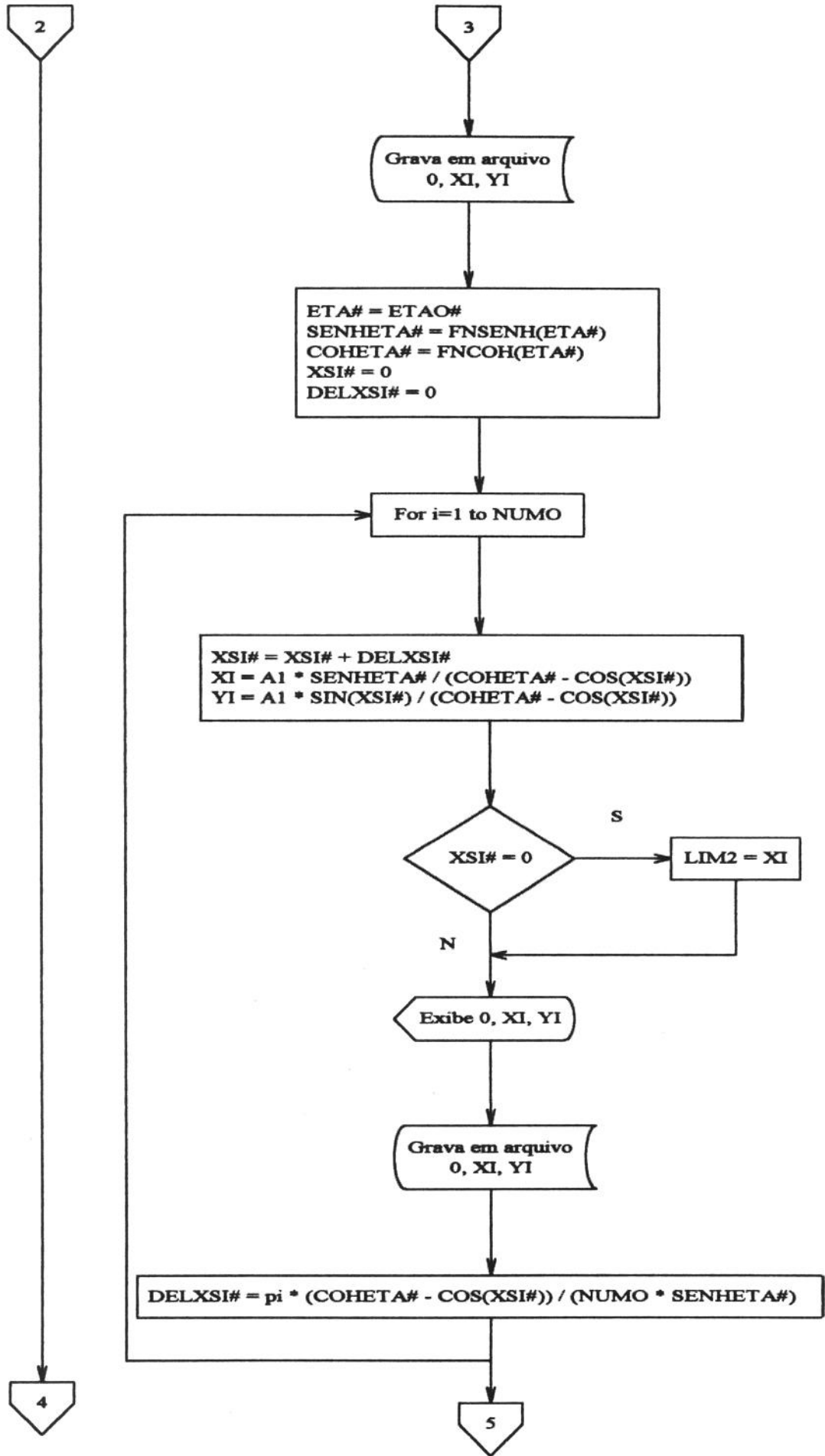


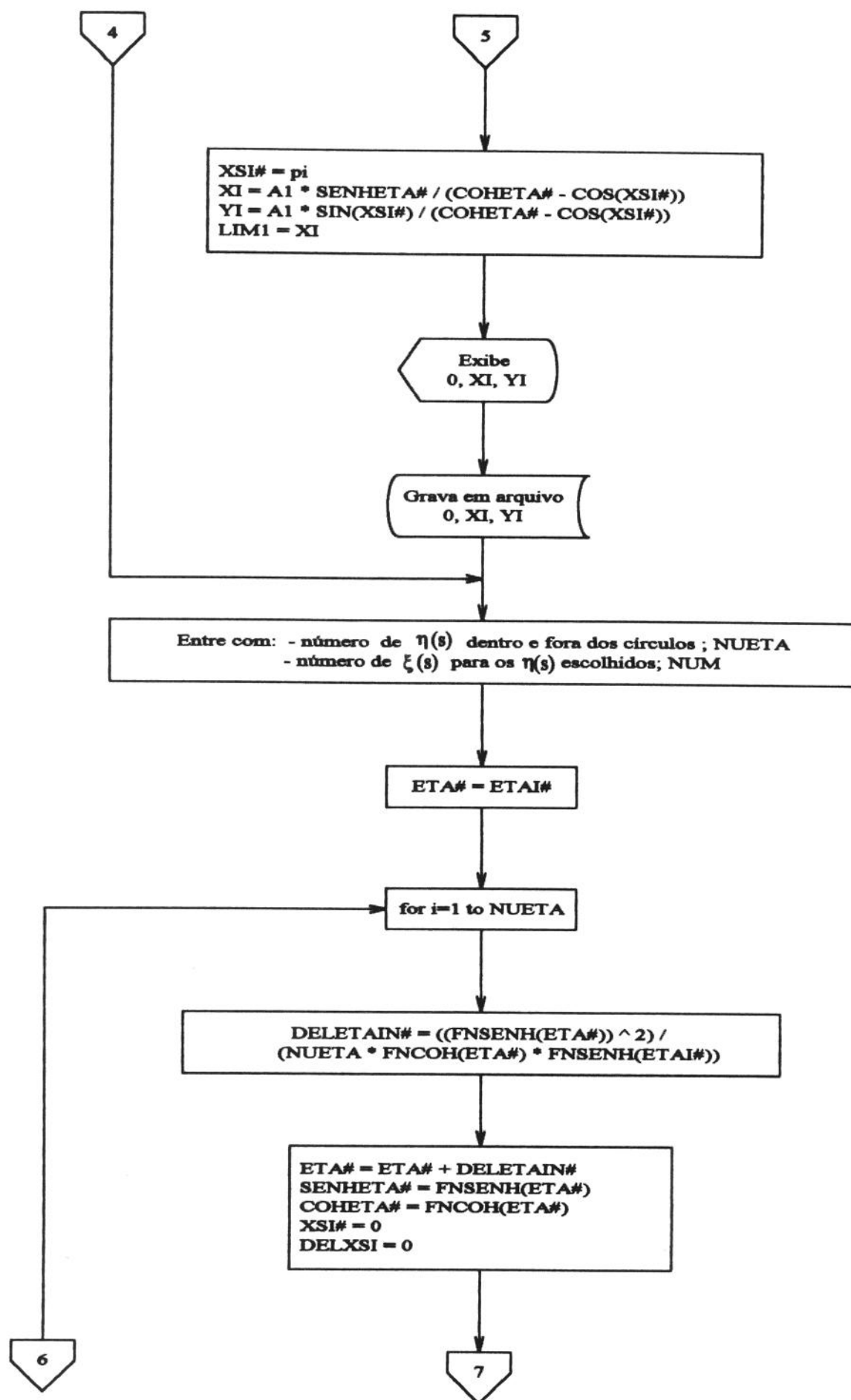


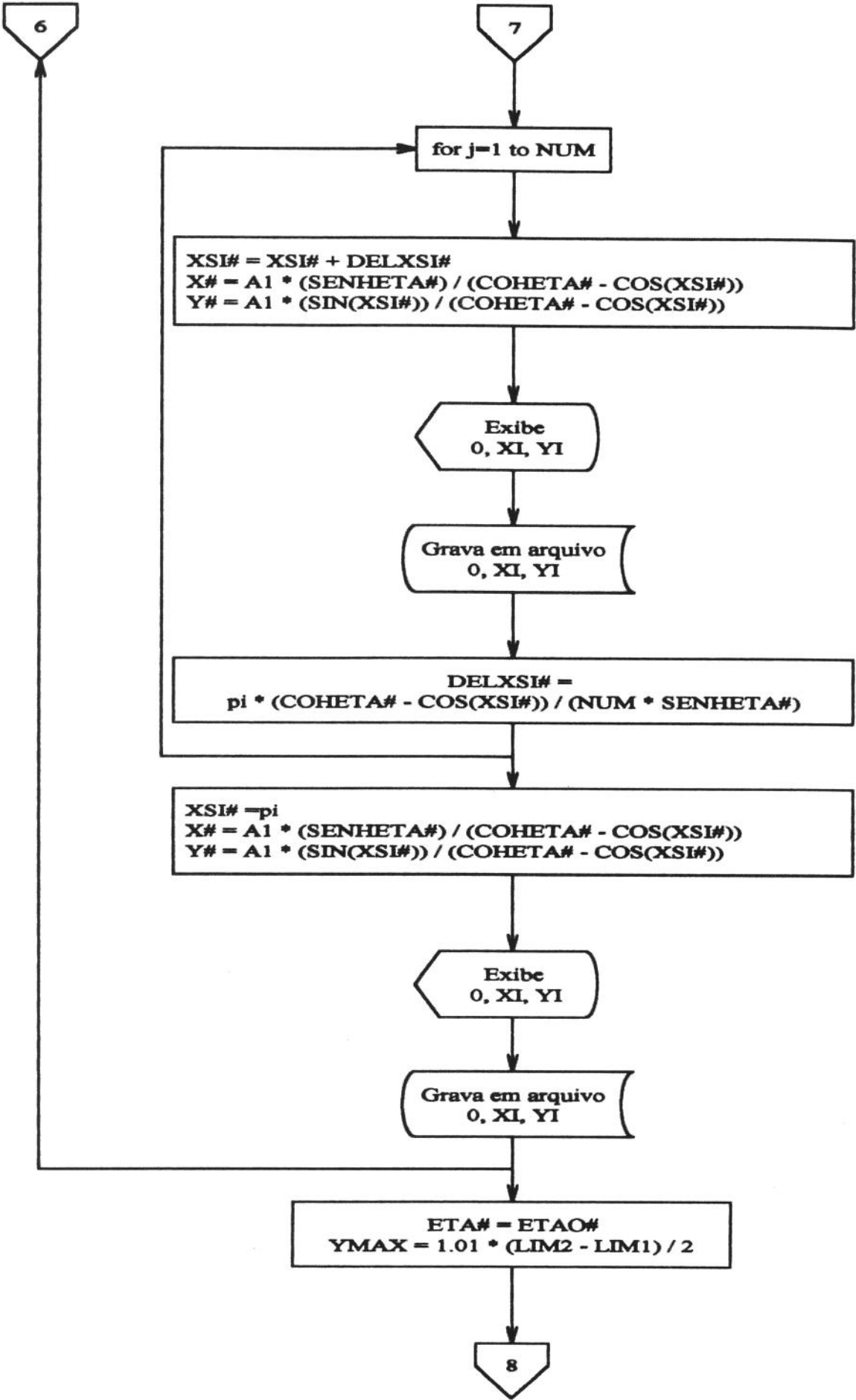
APÊNDICE D7
FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "ZERO"

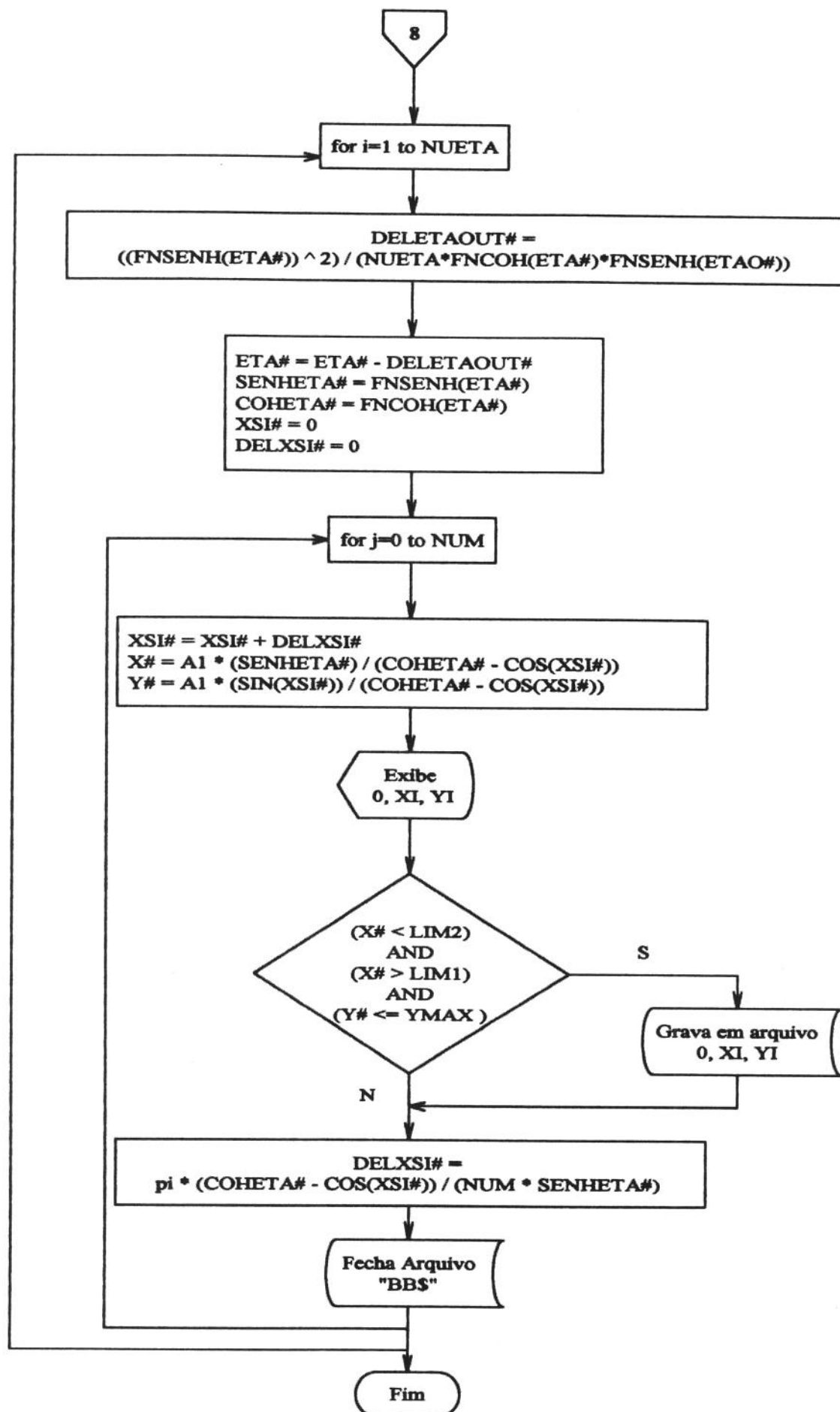




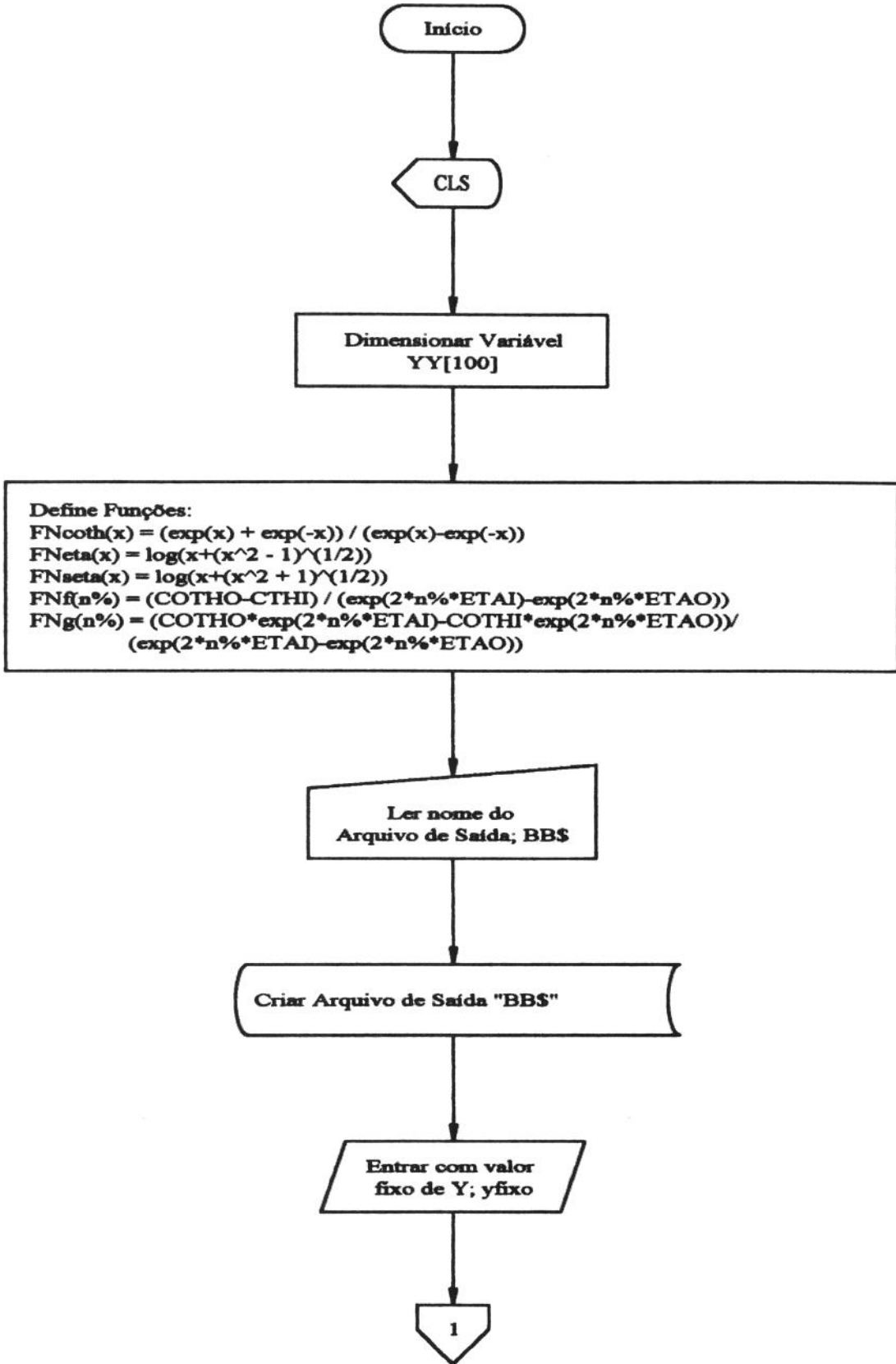


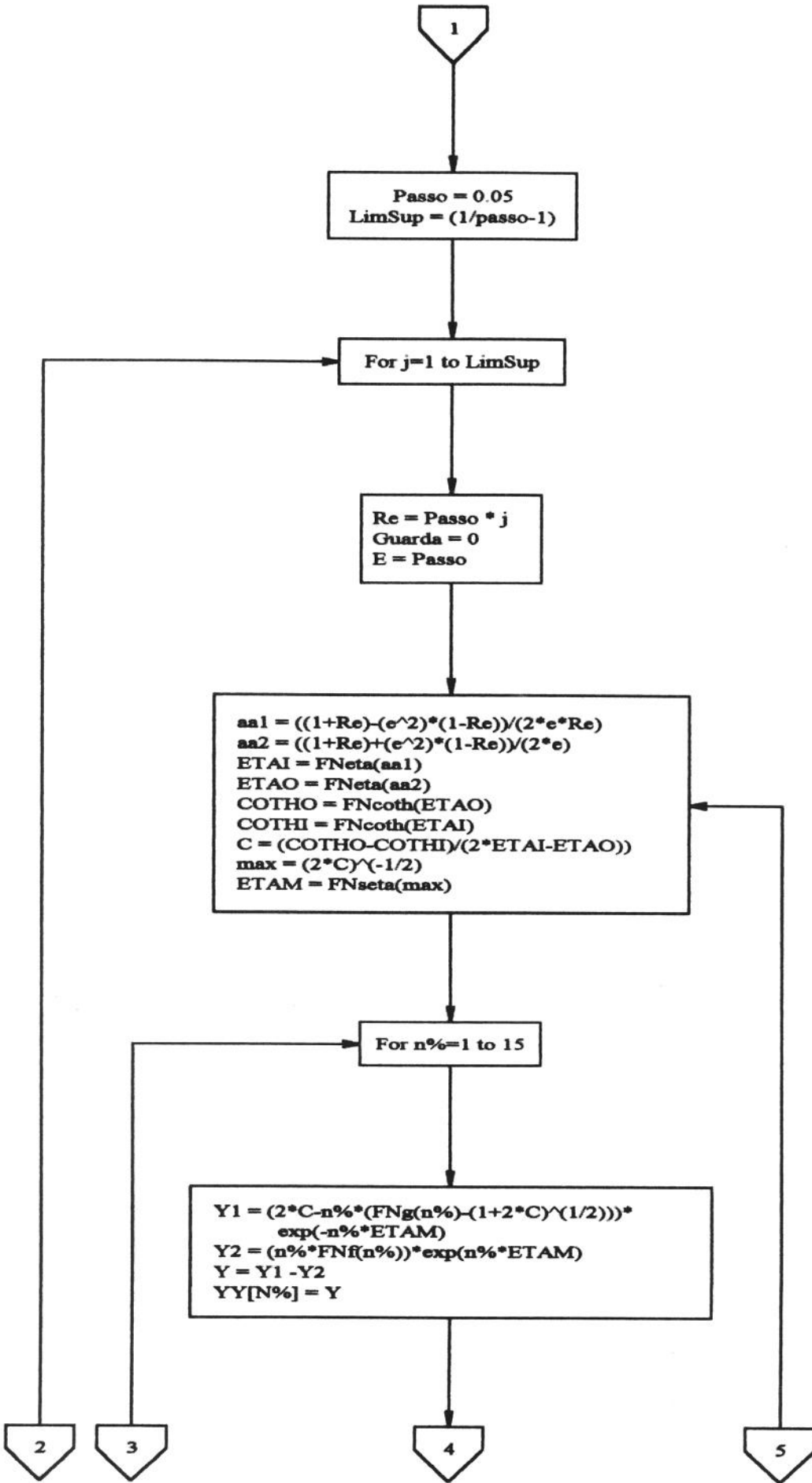


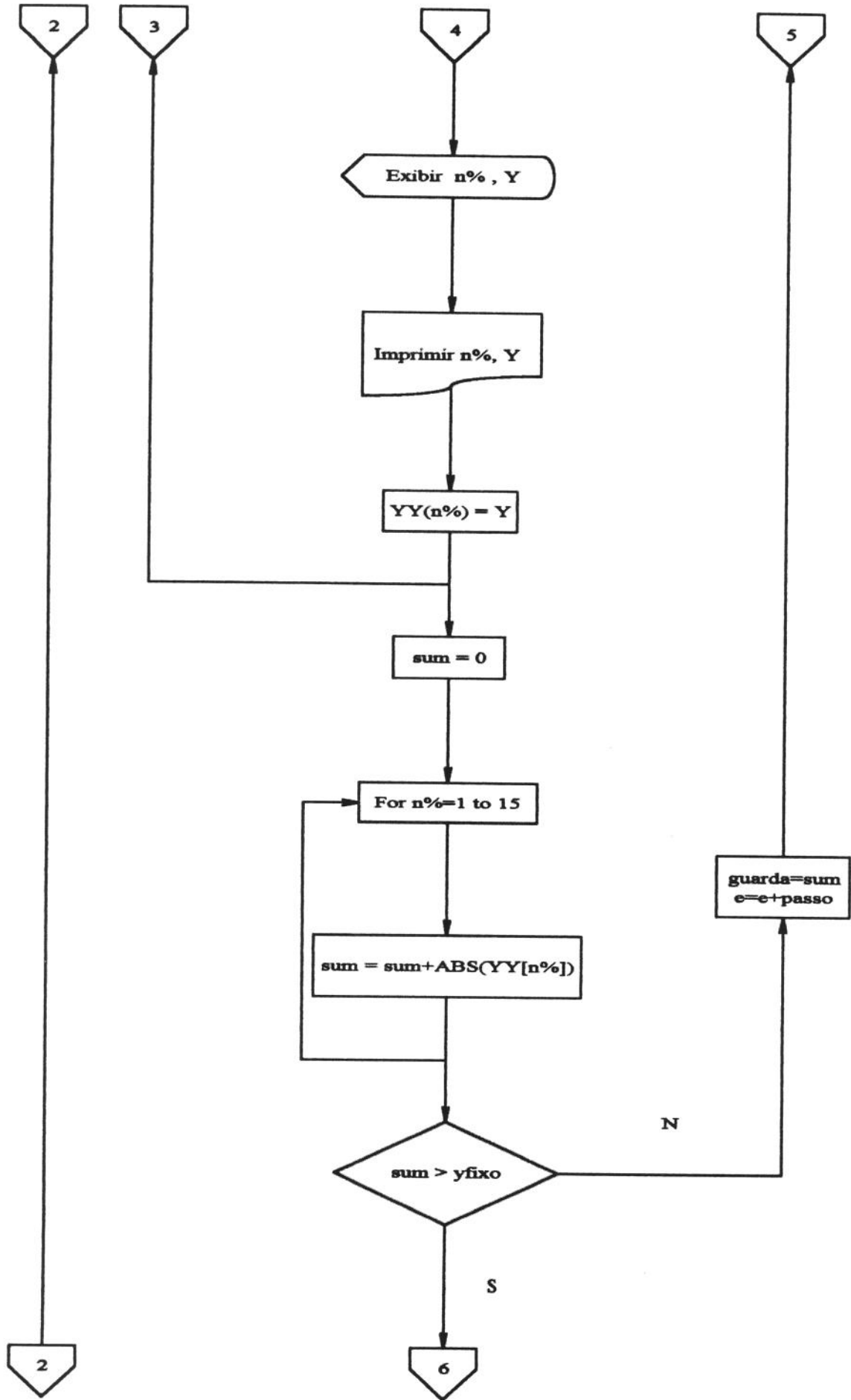


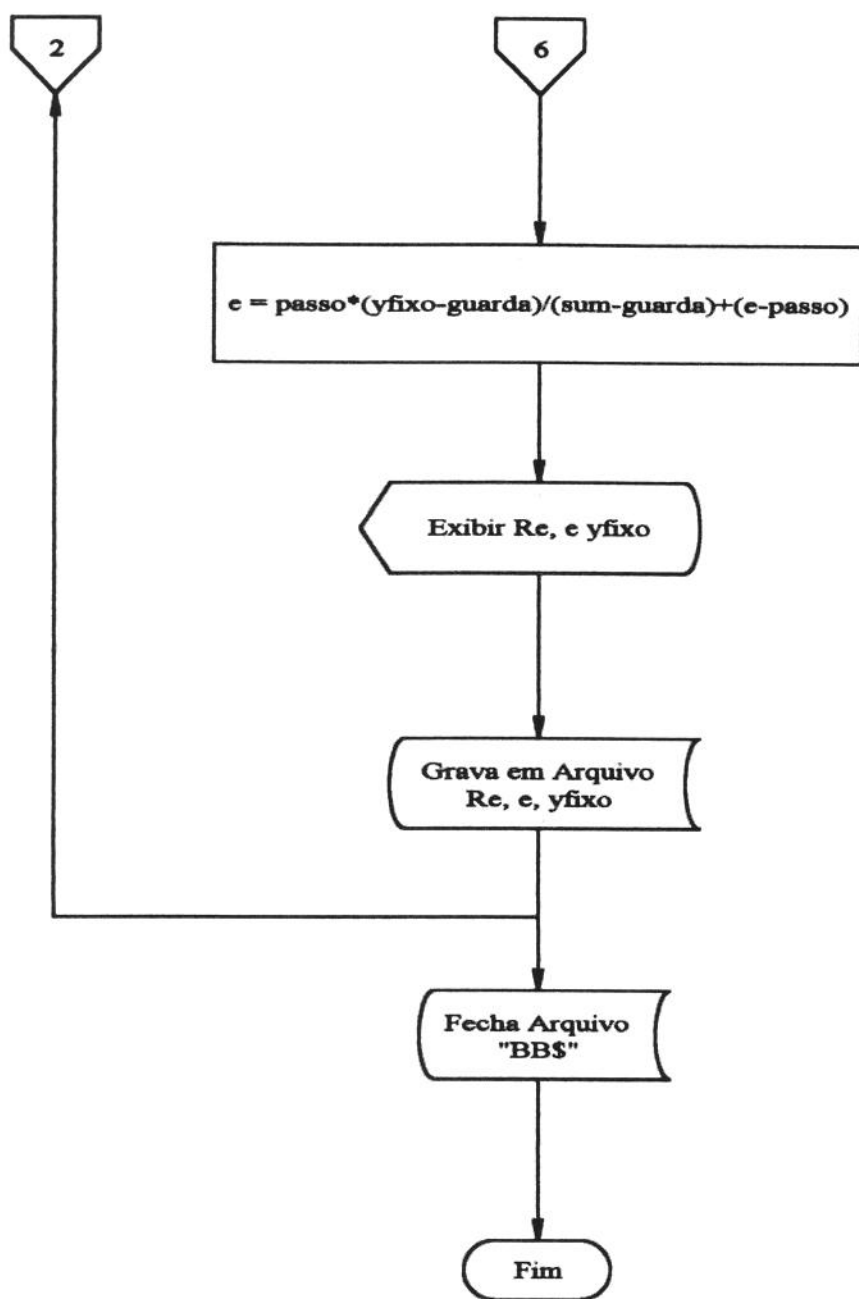


APÊNDICE D8 **FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "REPSILON"**

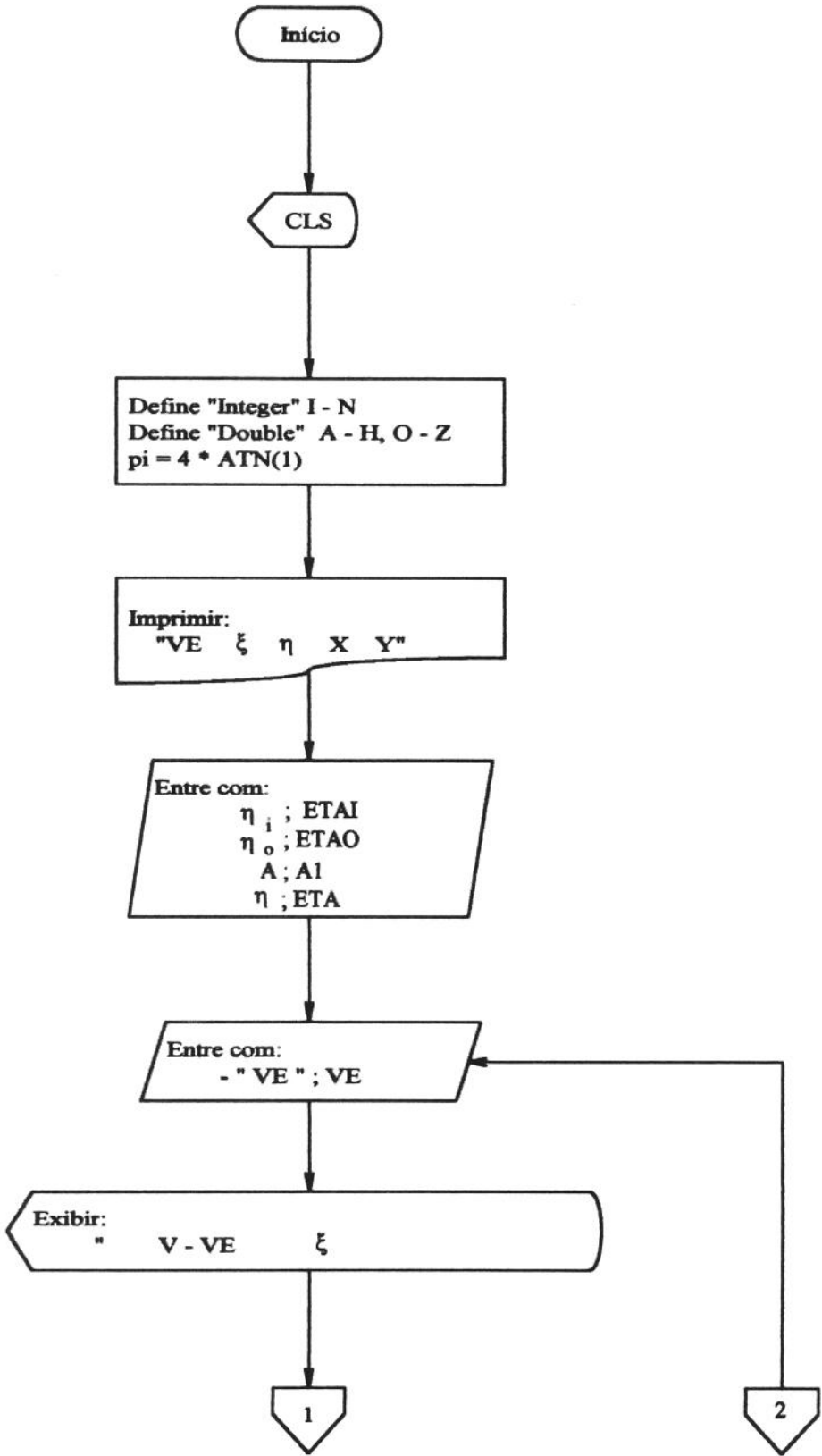


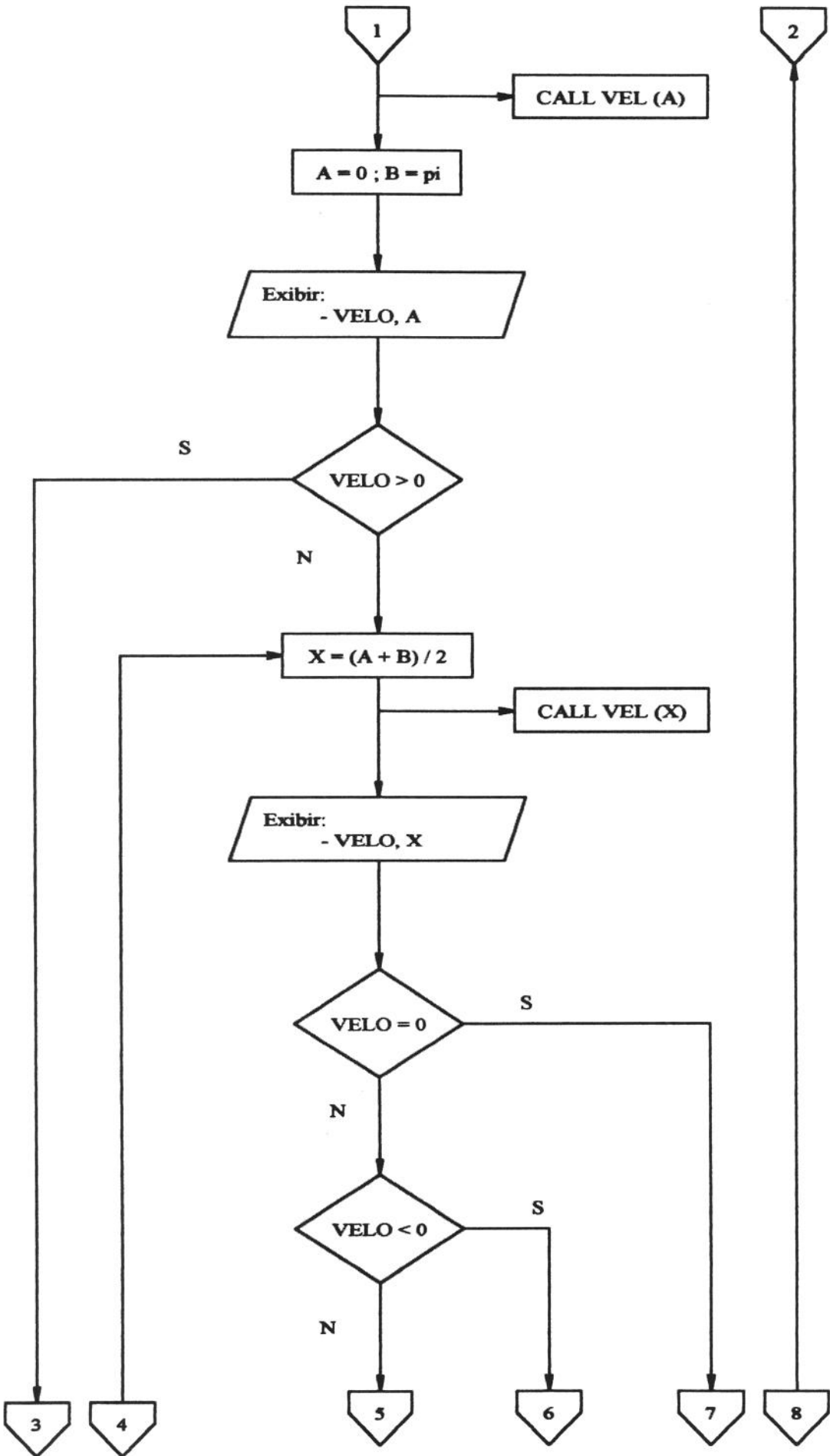


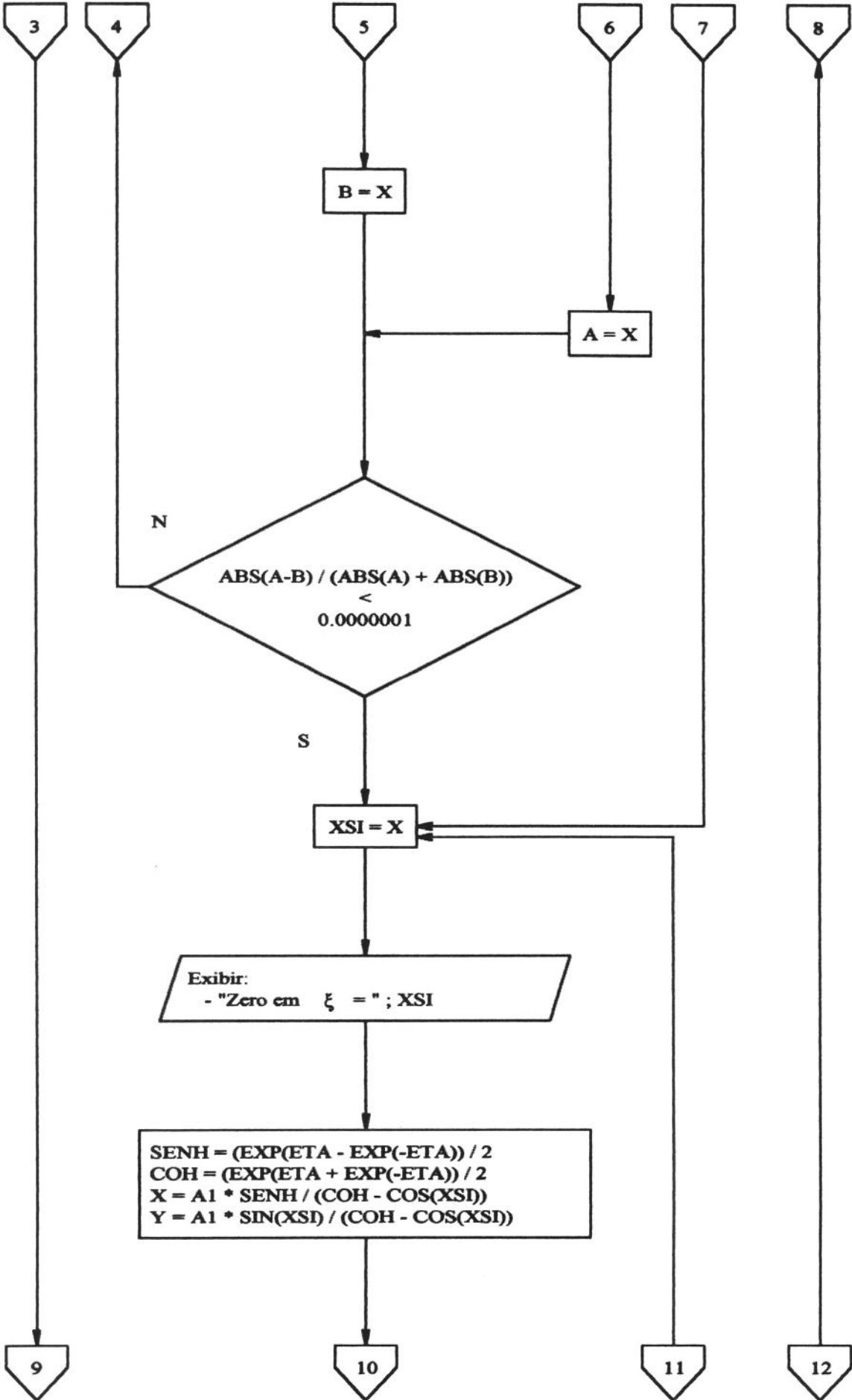


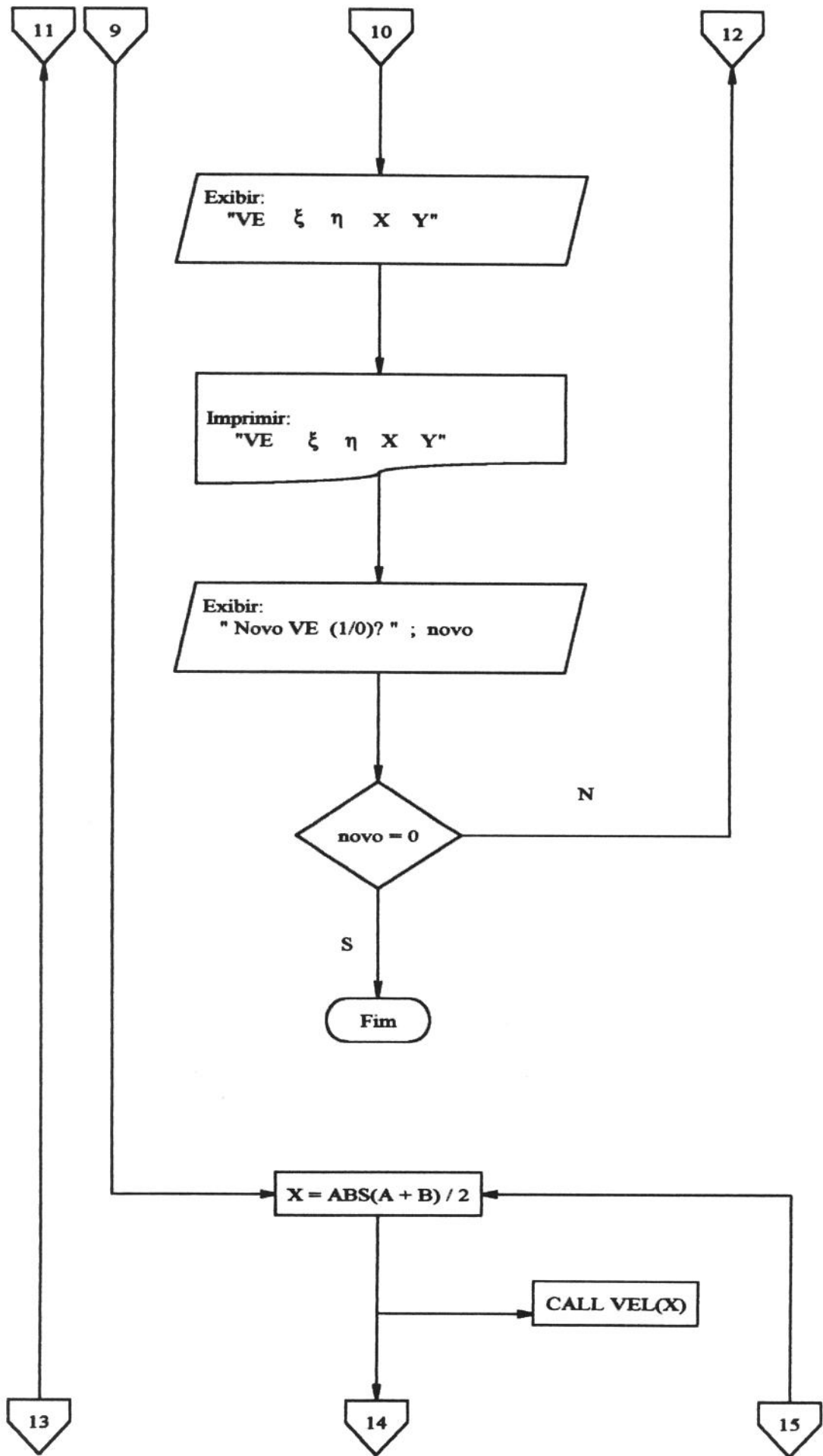


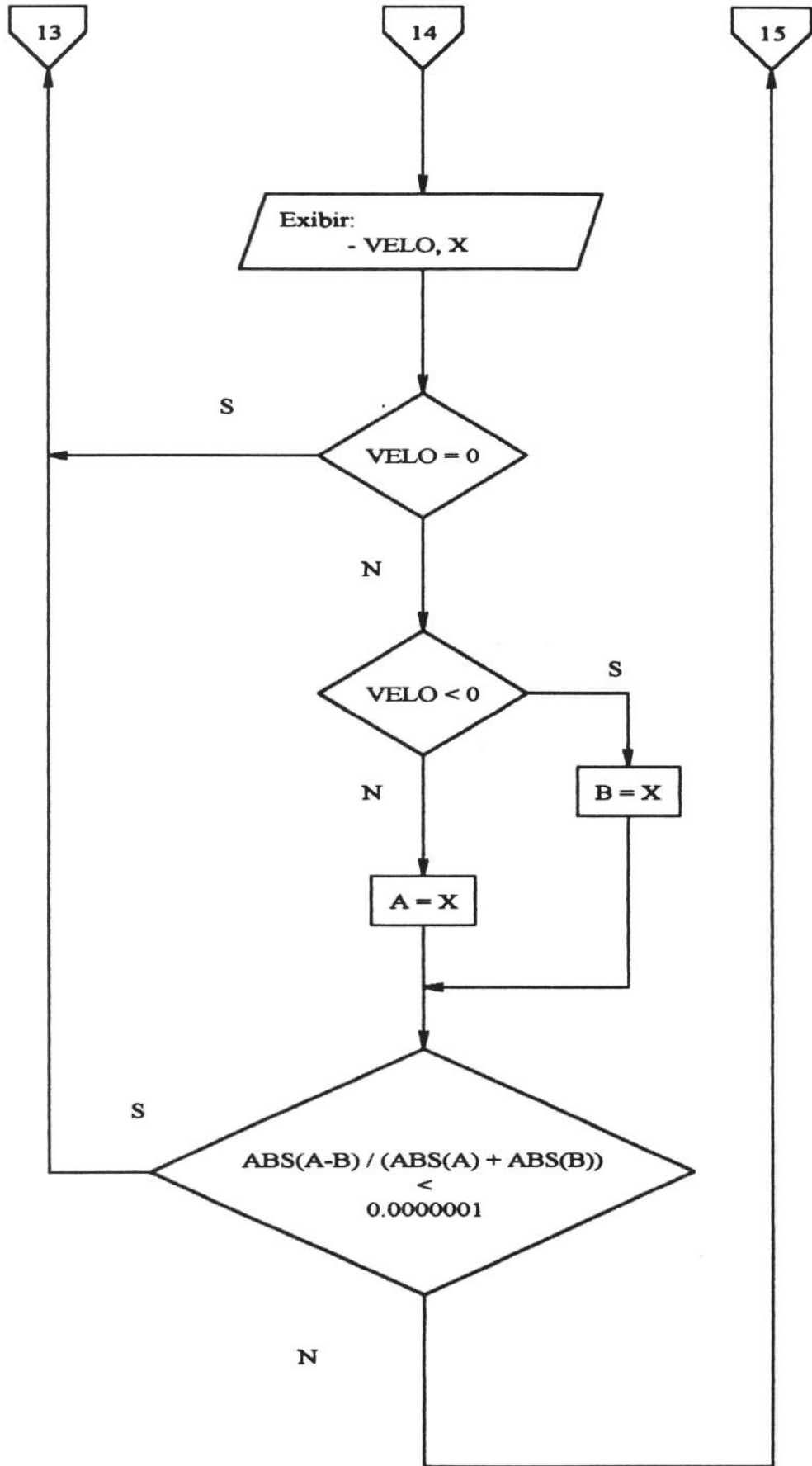
APÊNDICE D9 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "XSI"

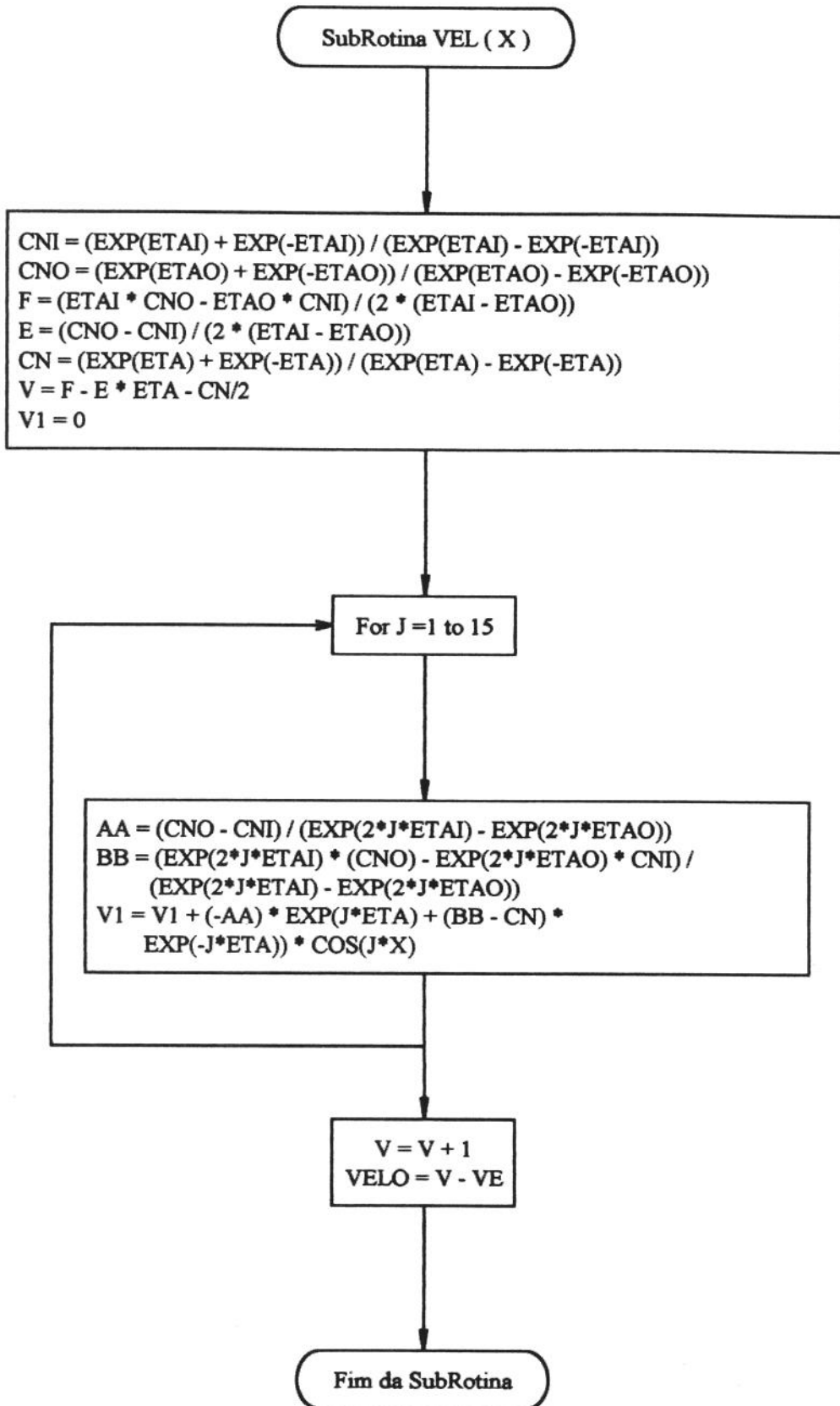












APÊNDICE D10

FLUXOGRAMA DO ALGORITMO "RAIZ"

