

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR DANTE LEONARDO
ZORATTO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 22 / 12 / 1992
Guaranda
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

BALANCEAMENTO MODAL SEM CONHECIMENTO
PRÉVIO DOS MODOS

DANTE LEONARDO [ZORATTO *rn*]

Tese apresentada à faculdade de Engenharia de
Campinas – UNICAMP, como parte dos
requisitos exigidos para obtenção do título de
Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA.

Campinas, 22 de dezembro de 1992

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Tese de: Doutorado
Título da Tese: Balanceamento Modal sem Conhecimento Prévio dos Modos
Autor: Dante Leonardo Zoratto *n.º 76*
Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti *t*
Aprovado por:

Fernando
Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente

Slama
Prof. Dr. Jules Ghislain Slama

Almeida
Prof. Dr. Marcio Tadeu de Almeida

Arruda
Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

Pavanello
Prof. Dr. Renato Pavanello

Campinas, 22 de dezembro de 1992

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Fernando Iguti pela prestimosa orientação deste trabalho bem como pela amizade e incentivo.

À CAPES/PICD e ao Programa de Engenharia Mecânica da COPPE pela oportunidade concedida.

À Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM – UNICAMP) em especial aos Departamentos de Mecânica Computacional e de Projeto Mecânico pela acolhida e pelos recursos materiais propiciados.

Aos professores, colegas e amigos que de alguma forma colaboraram na execução deste trabalho, em especial ao Prof. Janito Vaqueiro Ferreira por ter possibilitado a utilização de rotinas de simulação desenvolvidas em sua tese de Mestrado e que foram de grande valia no presente trabalho.

A Daisy Lima pelo seu empenho na digitação do trabalho bem como a Glória Maria que a iniciou.

A todos aqueles que, simplesmente sendo amigos, ajudaram a manter o ânimo na busca do objetivo, ora alcançado.

Aos meus pais Tulio e Gina. À Beatriz, minha
companheira e à Juliana, Laura e Flávio, meus filhos.

BALANCEAMENTO MODAL SEM CONHECIMENTO PRÉVIO DOS MODOS

RESUMO

É estudado um método de balanceamento modal de rotores flexíveis em que a forma do modo é também identificada conjuntamente com os demais parâmetros modais a partir da resposta ao desbalanceamento, no domínio da frequência, medida em um certo número de planos a diferentes velocidades angulares. A relação entre a resposta e os parâmetros a identificar determina duas equações não lineares, constituindo desta forma um sistema de $2 \times N \times NR$ equações e $N + 6$ incógnitas (na versão básica do método), sendo N o número de planos de medida e NR o número de velocidades angulares.

A solução do sistema de equações resultante é estimada pelo método dos Mínimos Quadrados, sendo utilizado para o problema de minimização dos resíduos, o algoritmo de Han–Powell que consiste numa combinação dos métodos Quase–Newton, penalidade quadrática e programação quadrática recursiva.

É descrito o desenvolvimento e teste de diferentes versões do algoritmo de identificação do desbalanceamento e demais parâmetros modais: identificação modo–a–modo, identificação de mais de um modo simultaneamente e identificação de modos não planares.

Os algoritmos são testados com respostas ao desbalanceamento simuladas numericamente, sendo também apresentado o desenvolvimento de um método para determinação da influência dos erros de medida no desbalanceamento residual.

MODAL BALANCING WITHOUT PREVIOUS KNOWLEDGE OF THE MODES

ABSTRACT

A modal method of balancing flexible rotors, is studied, where the mode shapes are identified together with the other modal parameters. The procedure is based on frequency responses measured, at a certain number of planes and angular velocities. Each measurement determines two equations, constituting a system of $2 \times N \times NR$ non-linear equations and $N + 6$ unknowns (in the basic version algorithm), where N is the number of measurement planes and NR the number of angular velocities.

The system solution is based on a least-squares estimator and the Han-Powell algorithm is used for minimization purposes. The algorithm associates the Quasi-Newton approach with the absolute-value penalty function and the recursive quadratic programming.

Different versions of the balancing and modal identification algorithm are presented: the mode-to-mode identification, the simultaneous mode identification and the non-planar mode identification algorithms. These algorithms are tested with numerically simulated responses. A method of determining the influence of measurement errors on the residual unbalancing is also presented.

SIMBOLOGIA

M –	número de modos
N –	número de planos de medida
NR –	número de velocidades angulares em que são medidas as respostas
$\mathbf{M}$ –	matriz de massa
$\mathbf{K}$ –	matriz de rigidez
$\mathbf{C}$ –	matriz de amortecimento
$[\mathbf{m}]$ –	matriz diagonal da massa modal
$[\mathbf{d}]$ –	matriz diagonal do amortecimento modal
$[\mathbf{k}]$ –	matriz diagonal da rigidez modal
$\{\mu\}$ –	vetor do momento de desbalanceamento modal (massa desbalanceadora modal)
$\{g\}$ –	vetor de coordenadas modais
Ω –	velocidade angular do rotor
$R(x, \Omega)$ –	resposta ao desbalanceamento
$\varphi_i(x)$ –	valor do modo no plano de coordenada genérica x
$c(x)$ –	deformação geométrica do conjunto rotor
$H_i(\Omega)$ –	resposta modal "ponderada"
H_i^{Re} –	componente real da resposta modal "ponderada"
H_i^{Im} –	componente imaginária da resposta modal "ponderada"
ϵ_i –	excentricidade modal
ϵ_i^{Re} –	componente real da excentricidade modal
ϵ_i^{Im} –	componente imaginária da excentricidade modal
μ_i^{Re} –	componente real da massa desbalanceadora modal
μ_i^{Im} –	componente imaginária da massa desbalanceadora modal
ξ_i –	fator de amortecimento modal
ω_i –	velocidade angular crítica do modo i
$ r _{\max}$ –	resposta medida de maior módulo
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ –	sistema de equações não lineares à identificar
$\{\text{Res}_i\}$ –	soma da contribuição dos modos superiores e inferiores e dos erros de medida na resposta do rotor
$\{r(\Omega)\}$ –	vetor de respostas medidas
$c_i \phi_i$ –	componente modal da deformação geométrica
$\{\phi_i\}$ –	vetor constituído por um número discreto de valores do modo nos

planos de medida utilizados

$E(\mathbf{x})$ –	função objetivo a ser minimizada
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ –	vetor das restrições a serem satisfeitas no problema de minimização de $E(\mathbf{x})$
λ –	vetor dos multiplicadores de Lagrange
$\ell(\mathbf{x}, \lambda)$ –	função Lagrangeano
$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ –	matriz derivada segunda da função Lagrangeano
$\mathbf{d}$ –	incremento do vetor $\{\mathbf{x}\}$ entre uma dada iteração e a anterior
$\mathbf{y}$ –	incremento de λ entre uma dada iteração e a anterior
$\mathbf{B}$ –	matriz auxiliar do algoritmo Quase-Newton que tende a $\mathbf{L}$ quando próximo da solução
$\mathbf{q}$ –	incremento do gradiente da função Lagrangeano entre uma dada iteração e a anterior
$P(\mathbf{x})$ –	função de penalidade quadrática
$\mathbb{C}$ –	constante de penalidade
$\mathbf{J}$ –	matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
k_z –	rigidez do mancal na direção horizontal
k_y –	rigidez do mancal na direção vertical
k –	rigidez do eixo do monorotor
k'_y –	rigidez equivalente na direção Y
k'_z –	rigidez equivalente na direção Z
y_e, z_e –	coordenadas do centro geométrico do monorotor
y_s, z_s –	coordenadas do centro de massa do monorotor
ω_y, ω_z –	velocidades angulares críticas do monorotor nas direções Y e Z
ω^* –	velocidade angular crítica do monorotor suportado em mancais rígidos
Y_e –	semi-eixo maior da trajetória elíptica
Z_e –	semi-eixo menor da trajetória elíptica
θ_1, θ_2 –	ângulos que o semi-eixo maior da trajetória elíptica faz com o eixo Z e Y respectivamente

Obs.: As matrizes são indicadas com [], ou simplesmente com uma letra maiúscula em negrito, como por exemplo: $[\mathbf{B}]$ ou $\mathbf{B}$.

Os vetores são indicados com { }, ou simplesmente com uma letra minúscula em negrito, como por exemplo $\{\mathbf{d}\}$ ou $\mathbf{d}$.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 – BALANCEAMENTO MODAL	6
2.1 – Resposta dinâmica do rotor desbalanceado	6
2.2 – Identificação dos parâmetros modais e das massas desbalanceadoras, com o conhecimento dos autovetores do sistema e sem massa teste	10
2.3 – Natureza das Medidas	12
CAPÍTULO 3 – BALANCEAMENTO MODAL SEM CONHECIMENTO PRÉVIOS DOS MODOS	17
3.1 – Identificação de cada modo isoladamente	
Sistemas de baixa densidade modal	17
3.1.1 – Valores iniciais do modo e sua norma	21
3.1.2 – Solução do sistema de equações. Identificação dos parâmetros modais, pelo algoritmo de Han–Powell	22
3.1.3 – Valores iniciais dos parâmetros	27
3.1.4 – Determinação das massas modais e massas desbalanceadoras modais	28
3.1.5 – Determinação das Massas Balanceadoras	30
3.1.6 – Esquema de balanceamento, modo a modo, com identificação por Mínimos Quadrados	30
3.1.7 – Simulação da Resposta do Rotor ao Desbalanceamento Modal e Identificação Modo a Modo. Apreciação de Resultados	31
3.1.8 – Definição de Alguns parâmetros necessários à utilização do algoritmo	39
3.1.9 – Teste do Algoritmo de Identificação Modo a Modo com Respostas Simuladas Correspondentes ao Desbalanceamento de Vários Modos Simultaneamente	40
3.2 – Identificação de sistemas de alta densidade modal	42

	Pág.
3.2.1 – Implementação do algoritmo de Han–Powell, para solução do sistema de equações, considerando M modos na resposta medida	45
3.2.2 – Valores iniciais dos parâmetros	49
3.2.3 – Esquema de balanceamento Simultâneo, considerando M modos	50
3.2.4 – Simulação da resposta do rotor ao desbalanceamento de M modos e identificação simultânea dos parâmetros modais. Apreciação dos resultados	51
 CAPÍTULO 4 – BALANCEAMENTO EM SISTEMAS COM MODOS NÃO PLANARES	 53
4.1 – Reposta de um Monorotor Suportado em Mancais Anisotrópicos	54
4.2 – Identificação do Modo não Planar	57
4.3 – Implementação do Algoritmo de Han–Powell para o Caso de Modos não Planares	63
4.4 – Teste do Algoritmo a Partir de Respostas Simuladas	65
 CAPÍTULO 5 – SENSIBILIDADE DO ALGORITMO A ERROS EXPERIMENTAIS	 69
5.1 – Possíveis Fontes de Erros nas Medidas de Resposta	70
5.2 – Geração de Novos "Conjuntos de Medida" pelo Método de Monte Carlo	71
5.3 – Desbalanceamento Residual Esperado	75
 CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES	 78
 APÊNDICE A – ALGORITMO DE HAN–POWELL	 80

	Pág.
APÊNDICE B – IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS UTILIZANDO AS DERIVADAS DAS RESPOSTAS MEDIDAS EM FUNÇÃO DA ROTAÇÃO	87
REFERÊNCIAS	92

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A tendência de aumento do limite de velocidade de operação dos sistemas rotativos associada à redução de sua massa, tornando-os mais flexíveis, faz crescer a importância do balanceamento de massa dos seus elementos girantes, tendo em vista manter em limites compatíveis o desvio físico do eixo principal de inércia em relação à linha entre mancais, e em consequência as forças transmitidas à estrutura de suporte. O desbalanceamento de massa, inicialmente, é devido à imperfeições de fabricação ou dos materiais, mas pode também se desenvolver durante a operação, devido ao acúmulo de detritos, ao desgaste, erosão ou corrosão de partes constituintes.

Ao contrário dos rotores rígidos, em que a deformação elástica do eixo devida à flexão é desprezível na faixa de operação, os rotores flexíveis, que operam em velocidades super-críticas podem apresentar deformações consideráveis na presença de pequenos desbalanceamentos de massa, exigindo metodologias mais elaboradas para o seu balanceamento.

Os métodos de balanceamento de rotores flexíveis utilizados atualmente podem ser classificados como variantes do Método dos Coeficientes de Influência (MCI) ou do Método Modal (MM) que foram sistematizados na década de 60, destacando-se os trabalhos de J. M. TESSARZIK e outros [1] e T. P. GOODMAN [2] para o MCI e os de R. E. D. BISHOP e colaboradores [3], [15], [16], [17] e [18] para o MM. Ambos os métodos utilizam medidas experimentais de amplitude e fase do deslocamento lateral do rotor na determinação das massas balanceadoras, e são aplicáveis a sistemas lineares.

É importante notar, como salienta N.F. RIEGER [31] "que estes métodos são efetivos unicamente a partir de respostas síncronas do rotor, e neste sentido, as técnicas de processamento de sinal utilizadas para a extração da componente síncrona da resposta medida tornam-se parte essencial dos procedimentos de balanceamento. Além disso quando a máquina se torna instável não haverá massa balanceadora capaz de estabilizá-la, e procedimentos outros que não o balanceamento devem ser utilizados".

O MCI, que pode ser entendido como um método de identificação não paramétrico, utiliza um grande número de medidas experimentais para a determinação da matriz de coeficientes de influência, que relaciona as variáveis de entrada que influenciam o sistema (desbalanceamento do rotor) com as variáveis de saída (deslocamento lateral), e o sistema, portanto, pode ser totalmente desconhecido. O MM é baseado na propriedade de que as vibrações devido ao desbalanceamento, podem ser calculadas em função dos modos de vibração do rotor. Pode-se dizer que é um método de identificação paramétrica, que pressupõe conhecido (e verdadeiro) o modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico do rotor.

A grande vantagem do MM em relação ao MCI, é o menor número de medidas necessárias à sua execução, sendo por esta razão preferido sempre que a resposta do rotor possa ser decomposta em modos de vibração que não tenham acoplamento significativo entre si.

Como alternativa a estes dois métodos foi desenvolvido no final da década de 70 o Método Unificado (MU) que utiliza os conceitos básicos de ambos, realçando as vantagens de cada um. Este método está descrito por M. S. DARLOW [4] e A. G. PARKINSON e outros [26] e consiste na utilização de uma matriz de coeficientes de influência tal como no MCI, modificado por uma informação modal. Sua aplicação é muito conveniente quando se faz o balanceamento de uma série de rotores de mesmo tipo, não sendo necessário, a cada vez, determinar a matriz de coeficientes de influência.

As publicações mais recentes no que se refere ao método modal, têm como referência os trabalhos de GASCH e DRECHSLER [5] e P. GNIELKA [6], que propuseram um esquema modal bastante automatizado em que não é necessário parar o rotor para adicionar (ou subtrair) massas de teste. Esta tendência de automatização dos métodos de balanceamento é observada também nos trabalhos de NISHIMOTO e outros [27] e DARLOW [4].

O tema tem sido objeto de pesquisa em nosso país basicamente através de dissertações de mestrado. No Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ, foram elaboradas por A. G. CASTRO [9] e P. R. MEDEIROS [28], trabalhos visando a aplicação experimental dos métodos de Coeficientes de Influência e Modal com massa de teste, respectivamente, e que compreendem o

desenvolvimento de algoritmos computacionais e projeto e execução de um protótipo experimental. Em tese elaborada no Departamento de Mecânica Computacional da UNICAMP por J. V. FERREIRA [7], foi desenvolvido um algoritmo de balanceamento modal baseado no modelo utilizado por GASH & DRESHLER [5] e P. GNIELKA [6] que prescinde da utilização de massa de teste, em que o método é estendido para utilização em sistemas com alta densidade modal mediante a utilização de um filtro modal computacional. O trabalho compreende também o projeto e execução de protótipo experimental. No Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, foi desenvolvido um trabalho de tese de mestrado, realizado por H. B. LACERDA [29] referente ao Método dos Coeficientes de Influência, em que são estudados critérios a serem usados na escolha dos melhores planos de balanceamento, no sentido de reduzir o número de medidas necessário. Estes critérios são testados em protótipo experimental. Na Universidade Federal de Santa Catarina foi estudada por M. T. C. FARIA e C. S. DE BARCELLOS [31] um método de análise de sensibilidade da resposta desbalanceada à variação de massa do rotor, como auxiliar no procedimento de balanceamento pelo método dos Coeficientes de Influência.

Na versão do MM que é utilizada por GASCH e DRECHSLER [5], P. GNIELKA [6] e também por J. V. FERREIRA [7] e que está resumida no Capítulo 2, é necessário calcular previamente as massas modais e os autovetores do rotor, valores estes que são utilizados como dados no processo de identificação das massas desbalanceadoras modais. Quando não é bem conhecida a distribuição de massa ou da rigidez do rotor, este cálculo prévio pode ser afetado por erros que irão causar imprecisão na determinação das massas balanceadoras.

No Capítulo 3 do presente trabalho é apresentado o desenvolvimento de um método alternativo, que procura superar esta dificuldade, identificando os autovetores do sistema conjuntamente com os demais parâmetros modais, partindo apenas de valores da resposta dinâmica do rotor, medidos próximo às velocidades angulares críticas.

O valor inicial do modo, no processo de identificação, é tomado como o valor da resposta medida em cada um dos planos, próximo à velocidade angular crítica. O sistema de equações utilizado na identificação paramétrica, deve satisfazer a restrições do tipo $\{\phi_i\}^T \cdot \{\phi_i\} = A$, sendo A uma constante calculada a partir dos valores iniciais de $\{\phi_i\}$ e que depende da norma adotada para o modo.

A solução do sistema de equações resultante é estimada pelo método dos Mínimos Quadrados, sendo utilizado para o problema de minimização dos resíduos, o algoritmo de Han–Powell que consiste numa combinação dos métodos Quase–Newton, penalidade quadrática e programação quadrática recursiva, cuja implantação é descrita.

O algoritmo de identificação é testado a partir da simulação das respostas do rotor ao desbalanceamento, obtidas de um modelo de Elementos Finitos do rotor, sendo estas respostas utilizadas como se fossem medidas experimentais isentas de erro.

Os resultados obtidos, quando se identifica cada modo isoladamente, a partir da resposta simulada para um desbalanceamento modal, são bastante precisos para todos os parâmetros modais identificados, incluindo os valores do modo. O mesmo não acontece quando se identifica cada modo a partir da resposta simulada para o desbalanceamento de vários modos, ou seja, verifica-se que o processo de identificação é sensível à existência de componentes de modos próximos ao modo de interesse.

Este problema é resolvido satisfatoriamente quando se considera cada resposta como a superposição das contribuições de M modos, utilizando-se no processo de identificação medidas próximas a cada um dos M modos. É apresentado um exemplo em que é feita a identificação simultânea de três modos a partir da resposta simulada do desbalanceamento destes modos, e os resultados obtidos são comparados com os que se obtém quando se identifica cada modo separadamente.

No Capítulo 4 está descrita uma versão do algoritmo para identificação de pares de modos, que corresponde aos casos em que as trajetórias do centro geométrico do rotor em cada plano tem a forma elíptica e não mais circular, como ocorre nos rotores suportados em mancais anisotrópicos. Nestes casos torna-se necessário a medida de deslocamento em duas direções perpendiculares em cada plano de medida, de forma a poder determinar a trajetória elíptica bem como a sua inclinação em relação às direções de medida. Foram satisfatórios os resultados obtidos em alguns casos testados com valores de resposta simulados.

No Capítulo 5 é desenvolvido um método para teste do algoritmo de identificação quando se utiliza respostas que contém erros de medida. Este método consiste em agregar erros aleatórios a cada uma das medidas de um dado conjunto de referência gerando um novo conjunto que é submetido ao algoritmo, permitindo a comparação com os resultados obtidos para o conjunto isento de erros. Utilizando este método de simulação de novos conjuntos de medida, foi possível determinar para um caso particular examinado, qual seria o desbalanceamento residual esperado com um desejado nível de certeza em função do desvio padrão das medidas.

CAPÍTULO 2

BALANCEAMENTO MODAL

O balanceamento modal sem a necessidade de utilização de massa de teste que é descrito por P. GNIELKA [6] pode ser obtido pela adição ao sistema, de um conjunto discreto de massas colocadas em um número N de planos de balanceamento de tal forma a satisfazer à equação:

$$[\phi]^T \{W\} = -\{\mu\}$$

onde $[\phi]^T$ é a transposta da matriz de autovetores do sistema que deve ser conhecida previamente e $\{\mu\}$ é o vetor do momento de desbalanceamento modal ou simplesmente vetor de massas desbalanceadoras modais.

Os termos do vetor $\{W\}$ são representados por números complexos em que o módulo corresponde ao produto da massa balanceadora pela distância relativa ao eixo geométrico do rotor e o argumento é a posição angular em relação a uma referência conhecida. Cada termo de $\{W\}$, que aqui chamamos simplesmente de vetor de massas balanceadoras, é obtido pela soma dos termos correspondentes dos vetores $\{W_1\}$, $\{W_2\}$, ..., $\{W_i\}$... $\{W_M\}$ que devem satisfazer a equações do tipo:

$$\{\phi_i\}^T \{W_i\} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\{\phi_i\}$ é a coluna de $[\phi]$ correspondente ao modo i e μ_i é a massa desbalanceadora do modo i . O vetor de massas desbalanceadoras $\{\mu\}$ é determinado por identificação, a partir de um certo número de medidas de deslocamento lateral do rotor, utilizando um sistema de equações que estabelecem a relação entre a resposta dinâmica do rotor desbalanceado e os diversos parâmetros modais.

2.1 – RESPOSTA DINÂMICA DO ROTOR DESBALANCEADO

O sistema eixo—disco—mancais tal como o mostrado na Figura 2.1 que foi

utilizado por J. V. FERREIRA [7] e é também utilizado neste trabalho, é modelado pelo Método dos Elementos Finitos

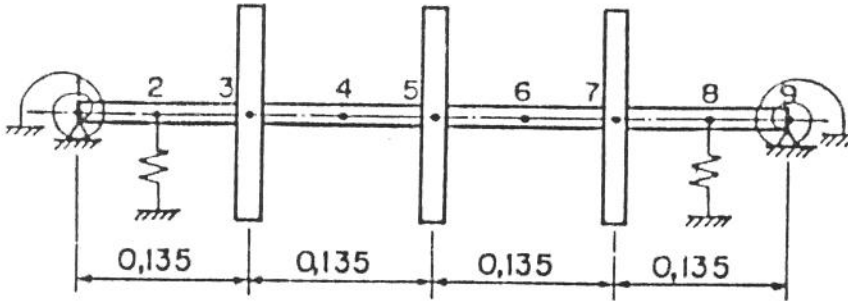


Fig. 2.1 — Sistema eixo—disco—mancais

O eixo é discretizado pela utilização de elementos de viga de Timoshenko como em H. D. NELSON [32] sem levar em consideração o efeito giroscópico. Os discos são considerados como massas concentradas e os mancais como molas lineares e isotrópicas.

Considera-se o amortecimento viscoso como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez [33] de tal forma que o efeito do amortecimento possa ser modelado diretamente em termos modais.

A equação resultante é

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{r}}\} + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{r}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{r}\} = \Omega^2\{\mathbf{U}\} e^{j\Omega t} \quad (2.1)$$

onde:

$\{\mathbf{U}\}$ é o vetor de massas desbalanceadoras generalizadas

Ω é a velocidade angular do rotor

e
$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

A matriz de autovetores necessária à determinação das massas

balanceadoras é determinada pela solução da equação

$$\mathbf{K}\{\phi_i\} = \omega_i^2 \mathbf{M}\{\phi_i\} \quad (2.2)$$

que é obtida numericamente pelo método de Jacobi, sendo ω_i a i -ésima frequência natural de vibração do sistema.

A equação (2.1) pode ser desacoplada por meio da transformação linear

$$\{r\} = [\phi] \{g\}$$

onde as colunas de $[\phi]$ são autovetores reais do sistema e $\{g\}$ é o vetor de coordenadas modais.

Premultiplicando a equação (2.1) por $[\phi]^T$, resulta então o sistema de equações diferenciais modais cuja solução nos fornece a resposta dinâmica do rotor desbalanceado

$$[m] \{\ddot{g}\} + [d] \{\dot{g}\} + [k] \{g\} = \Omega^2 \{\mu\} e^{j\Omega t} \quad (2.3)$$

onde:

$$\begin{aligned} [m] &= [\phi]^T M[\phi] &&= \text{matriz diagonal da massa modal} \\ [d] &= [\phi]^T C[\phi] &&= \text{matriz diagonal do amortecimento modal} \\ [k] &= [\phi]^T K[\phi] &&= \text{matriz diagonal da rigidez modal} \\ \{\mu\} &= [\phi]^T \{U\} &&= \text{vetor do momento de desbalanceamento modal} \\ \{g\} &&&= \text{coordenada modal} \end{aligned}$$

Considerando a resposta harmônica, a uma dada velocidade angular constante Ω , tem-se,

$$\{g_i(t)\} = \{F_i(\Omega)\} e^{j\Omega t}$$

logo:

$$(-[m] \Omega^2 + j\Omega [d] + [k]) \{F\} = \Omega^2 \{\mu\}$$

A resposta ao desbalanceamento, em termos contínuos em uma posição x , a uma velocidade angular Ω é dada por:

$$R(x, \Omega) = c(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\frac{k_i}{m_i} - \Omega^2 + j\Omega \frac{d_i}{m_i}} \frac{\mu_i}{m_i} \varphi_i(x) \quad (2.4)$$

onde:

$\varphi_i(x)$ é o valor do modo i no plano de coordenada genérica $\underline{x}$
 $c(x)$ é uma parcela que não depende da velocidade angular Ω , que aqui chamamos de deformação geométrica, e que se deve à deformação proveniente da montagem do eixo nos mancais

O processo de balanceamento utiliza respostas medidas experimentalmente em um certo número de planos de medida, a velocidades angulares próximas a uma crítica, de forma que a parcela predominante na resposta do rotor, seja aquela correspondente ao modo próximo ao qual se está medindo. Esta é uma aproximação aceitável quando o sistema é de baixa densidade modal e as respostas medidas têm então, a seguinte expressão:

$$\{r(\Omega)\} = c_i\{\phi_i\} + F_i(\Omega) \{\phi_i\} + \{Res_i\} \quad (2.5)$$

onde:

$\{\phi_i\}$ é um vetor constituído por um número discreto de termos correspondentes aos valores do modo i nos planos de medida utilizados. $\{\phi_i\}$ é portanto um subconjunto do modo contínuo φ_i .

$c_i\{\phi_i\}$ é a componente modal da deformação geométrica.

$\{Res_i\}$ contribuição dos modos superiores e inferiores e erros de medida

$\{r(\Omega)\}$ vetor deslocamento lateral do rotor

Sendo ainda:

$$F_i(\Omega) = \frac{\Omega^2}{\frac{k_i}{m_i} - \Omega^2 + j\Omega \frac{d_i}{m_i}} \cdot \frac{\mu_i}{m_i} \quad (2.6)$$

O procedimento de balanceamento modal utilizado por GASH e DRECHSLER [5] e também por GNIELKA [6] e J. V. FERREIRA [7] define para cada modo, uma função $H_i(\Omega)$, na forma:

$$H_i(\Omega) = F_i(\Omega) + c_i \quad (2.7)$$

Sendo $H_i(\Omega)$, obtida a partir das respostas medidas e dos valores dos modos calculados ou medidos. Assim temos:

$$H_i(\Omega) = \frac{\{\phi_i\}^T \{r(\Omega)\}}{\{\phi_i\}^T \{\phi_i\}} - \frac{\{\phi_i\}^T \{Res_i\}}{\{\phi_i\}^T \{\phi_i\}} \quad (2.8)$$

que aqui denominamos resposta modal "ponderada".

2.2— IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS E DAS MASSAS DESBALANCEADORAS, COM O CONHECIMENTO DOS AUTOVETORES DO SISTEMA E SEM MASSA TESTE

Conhecidos, a forma do modo nos planos de medida, ou $\{\phi_i\}$, a massa generalizada, m_i , e a informação experimental, $H_i(\Omega)$, é possível a identificação das massas desbalanceadoras, a partir do sistema de equações obtido com a introdução da equação (2.6) em (2.7).

Tem-se então:

$$j\Omega d_i(H_i - c_i) + k_i(H_i - c_i) - \Omega^2 \mu_i = \Omega^2 m_i(H_i - c_i) \quad (2.9)$$

que é válida para cada velocidade angular (Ω) próxima à frequência crítica i , para sistemas com baixa densidade modal em N planos de medida.

Medindo-se a resposta do rotor em NR diferentes velocidades angulares, e considerando que a resposta modal $H_i(\Omega)$ contém partes real e imaginária

$(H_i = H_i^{\text{Re}} + j H_i^{\text{Im}})$, obtém-se um par de equações para cada velocidade angular utilizada.

O sistema obtido será então:

$-\Omega_1 H_1^{\text{Im}}$	H_1^{Re}	$\Omega_1^2 m_i - k_i^*$	$\Omega_1 d_i^*$	$-\Omega_1^2$	0	d_i	$\Omega_1^2 m_i H_1^{\text{Re}}$
$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	k_i	$\begin{matrix} - & - & - \\ - & - & - \end{matrix}$
$\Omega_{NR} H_{NR}^{\text{Im}}$	H_i^{Re}	$\Omega_{NR}^2 m_i - k_i^*$	$\Omega_{NR} d_i^*$	$-\Omega_{NR}^2$	0	c_i^{Re}	$\Omega_{NR}^2 m_i H_{NR}^{\text{Re}}$
$\Omega_1 H_1^{\text{Re}}$	H_1^{Im}	$-\Omega_1 d_i^*$	$\Omega_1^2 m_i - k_i^*$	0	$-\Omega_1^2$	c_i^{Im}	$\Omega_1^2 m_i H_1^{\text{Im}}$
$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$	μ_i^{Re}	$\begin{matrix} - & - & - \\ - & - & - \end{matrix}$
$\Omega_{NR} H_{NR}^{\text{Re}}$	H_1^{Im}	$-\Omega_{NR} d_i^*$	$\Omega_{NR}^2 m_i - k_i^*$	0	$-\Omega_{NR}^2$	μ_i^{Im}	$\Omega_{NR}^2 m_i H_{NR}^{\text{Im}}$

A solução do sistema pode ser estimada por Mínimos Quadrados partindo-se de valores estimados para d_i e k_i (d_i^* , k_i^*) na primeira iteração, assumindo-se nas iterações subseqüentes os valores de d_i e k_i obtidos na iteração anterior.

Observa-se que a massa modal generalizada é calculada previamente. Em particular quando se utiliza uma normalização para o modo, tal que, m_i seja unitária, a massa desbalanceadora modal μ_i é igual a excentricidade, visto que $\epsilon_i = \frac{\mu_i}{m_i}$.

As massas de correção, que balanceiam o modo i são obtidas por:

$$\{W_i\} = (\mu_i^{\text{Re}} + j \mu_i^{\text{Im}}) \{t_i\} \quad (2.10)$$

onde $\{t_i\}$, é um vetor ortogonal a $\{\phi_j\}$ para todo $j \neq i$ de tal forma que seja

satisfeita a equação:

$$[\phi]^T [t] = -I \quad (2.11)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_N) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_M(x_1) & \phi_M(x_2) & \dots & \phi_M(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{2,1} & \dots & t_{M,1} \\ t_{1,2} & t_{2,2} & \dots & t_{M,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1,N} & t_{2,N} & \dots & t_{M,N} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

o que garante que as massas corretivas para um dado modo i não afetem outro modo diferente de i , sendo $1 \leq i \leq M$ e $M \leq N$, onde M é o número de modos que se deseja balancear e N é o número de planos de medida.

Este processo de obtenção das massas balanceadoras vale tanto para o balanceamento modo-a-modo como para o balanceamento simultâneo de M modos.

Uma outra possibilidade de balanceamento modo-a-modo é resolver sucessivamente, parte da equação (2.12) que está indicada em linhas tracejadas, indo na direção do modo de menor para o de maior ordem.

2.3 – NATUREZA DAS MEDIDAS

O balanceamento é realizado a partir de um certo número de medidas de amplitude do deslocamento lateral do rotor, feitas à velocidade angular constante, em planos previamente estabelecidos, determinando-se também um ângulo de fase em relação a um sinal de referência, aqui denominado de ângulo de referência ou fase de referência (β).

As Figuras 2.2 a 2.4 mostram algumas situações típicas, que nos permitem identificar as grandezas envolvidas.

A Figura 2.2. mostra o desbalanceamento correspondente a uma

excentricidade de massa coincidindo com a referência, sendo portanto $\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon$ e $\epsilon^{\text{Im}} = 0$. Supondo a não existência de amortecimento ($\xi = 0$), um sensor de proximidade colocado no eixo dos reais indicará o sinal em que o pico coincide com o sinal de referência. Neste caso o ângulo de referência $\beta = 0$ e a amplitude medida será proporcional à:

$$F^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2 \epsilon^{\text{Re}}}{(\omega^2 - \Omega^2)}; F^{\text{Im}} = 0$$

Sendo que:

$$\beta = \arctg \frac{F^{\text{Im}}}{F^{\text{Re}}} = 0$$

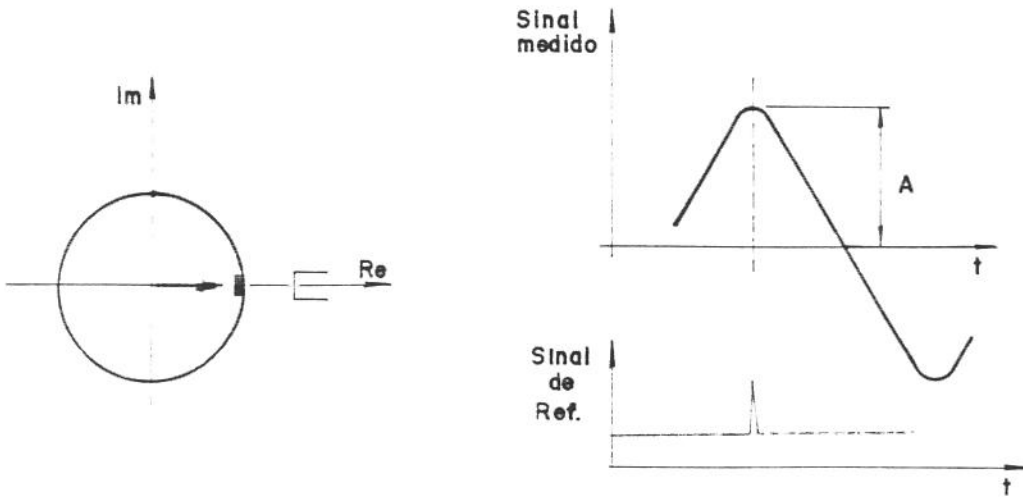


Fig. 2.2 – Caso: $\epsilon = \epsilon^{\text{Re}}$, $\epsilon^{\text{Im}} = 0$, $\xi = 0$

No caso de $\xi \neq 0$ teremos:

$$F_i^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2 (\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega^2 \xi^2}$$

$$F_i^{\text{Im}} = - \frac{2\Omega^3 \omega \xi \epsilon^{\text{Re}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega^2 \xi^2}$$

$$\beta = \arctg - \frac{2\Omega\omega\xi}{(\omega^2 - \Omega^2)}$$

e β indica a defasagem entre o sinal de referência e o pico do sinal.

A Figura 2.3 mostra um desbalanceamento em que a excentricidade, esta defasada do sinal de referência de um ângulo α , aqui denominado de ângulo de desbalanceamento. Então:

$$\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon \cdot \cos \alpha \quad \text{e} \quad \alpha = \arctg \frac{\epsilon^{\text{Im}}}{\epsilon^{\text{Re}}}$$

$$\epsilon^{\text{Im}} = \epsilon \cdot \sin \alpha$$

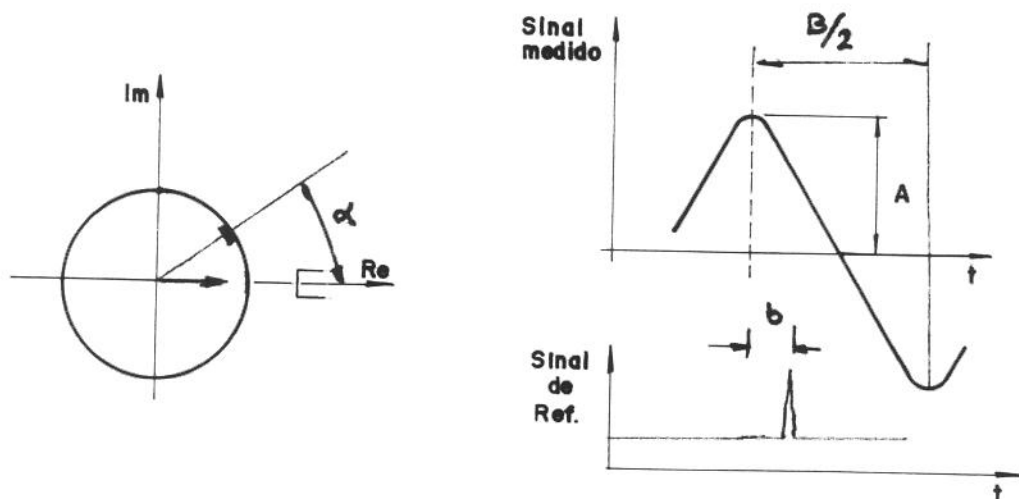


Fig. 2.3 – Caso: $\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon \cos \alpha$, $\epsilon^{\text{Im}} = \epsilon \sin \alpha$, $\xi = 0$

Neste caso, considerando $\xi = 0$, o sinal medido terá uma amplitude proporcional a: $\sqrt{(F^{\text{Re}})^2 + (F^{\text{Im}})^2}$ sendo

$$F^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2 \epsilon^{\text{Re}}}{(\omega^2 - \Omega^2)}; \quad F^{\text{Im}} = \frac{\Omega^2 \epsilon^{\text{Im}}}{(\omega^2 - \Omega^2)}$$

$$\beta = \alpha = \arctg \frac{F^{\text{Im}}}{F^{\text{Re}}} = \frac{\epsilon^{\text{Im}}}{\epsilon^{\text{Re}}}; \quad \beta = \frac{b}{B} \cdot 2\pi$$

A Figura 2.4 mostra o caso mais geral de um desbalanceamento, com $\alpha \neq 0$

e $\xi \neq 0$.

Então:

$$\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon \cos \alpha ; \quad \xi \neq 0$$

$$\epsilon^{\text{Im}} = \epsilon \sin \alpha$$

$$F^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2}$$

$$F^{\text{Im}} = \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Im}} - 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Re}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2}$$

$$\beta = \arctg \frac{F^{\text{Im}}}{F^{\text{Re}}} = \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Im}} - 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Re}}}{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}}$$

Dividindo, numerador e denominador por $\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}}$ tem-se:

$$\beta = \arctg \left(\frac{\arctg \alpha - \frac{2\Omega\omega\xi}{(\omega^2 - \Omega^2)}}{1 + \frac{2\Omega\omega\xi}{(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \arctg \alpha} \right)$$

$$\beta = \alpha - \arctg \frac{2\Omega\omega\xi}{(\omega^2 - \Omega^2)} = \alpha - \gamma ; \quad \beta = \frac{b}{B} \cdot 2\pi$$

sendo γ o ângulo de fase, propriamente dito, entre a força proveniente do desbalanceamento e o deslocamento medido.

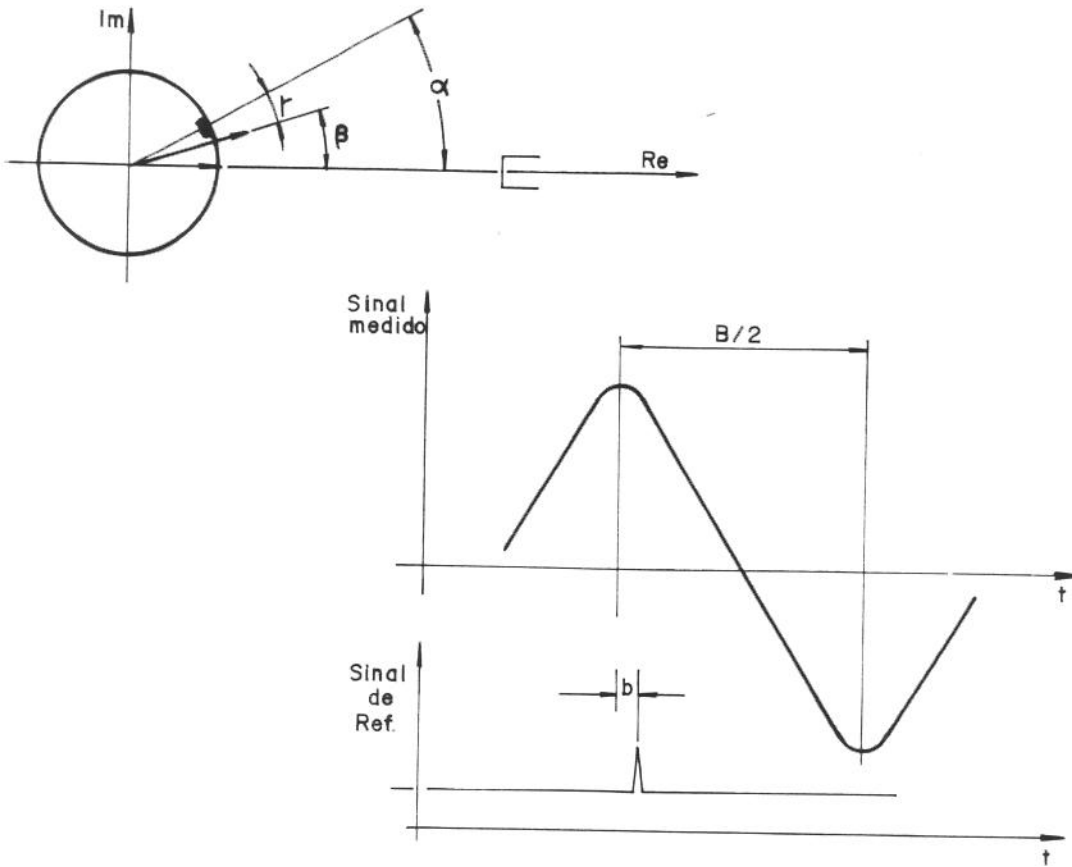


Fig. 2.4 – Caso: $\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon \cos \alpha$; $\epsilon^{\text{Im}} = \epsilon \sin \alpha$; $\xi \neq 0$

CAPÍTULO 3

BALANCEAMENTO MODAL SEM CONHECIMENTO PRÉVIO DOS MODOS

O método modal descrito no capítulo anterior supõe conhecidos os autovetores e sua normalização com respeito à massa ou à rigidez modal do sistema. Quando o sistema não é bem conhecido quanto às dimensões, material, distribuição de massa e rigidez ou características dos mancais, o cálculo prévio dos autovetores será impreciso podendo afetar o valor das massas balanceadoras determinadas. No presente capítulo é desenvolvido um método alternativo em que o modo é identificado conjuntamente com os demais parâmetros modais, tendo-se como única informação um certo número de respostas medidas, que são tomadas como uma primeira aproximação do valor do modo nos planos de medida.

Neste caso não será possível utilizar o conceito de resposta modal "ponderada", definido anteriormente como uma ponderação entre os valores de respostas nos vários planos de medida a uma dada velocidade angular, ponderação esta que era obtida usando os valores do modo conhecidos previamente. Não é possível também obter a identificação completa dos parâmetros modais sem utilizar massa de teste, embora, como se verá adiante, este procedimento seja simplificado com relação ao que é utilizado no método modal clássico com massa de teste, em que os modos são conhecidos previamente.

3.1— IDENTIFICAÇÃO DE CADA MODO ISOLADAMENTE PARA SISTEMAS DE BAIXA DENSIDADE MODAL.

Se o sistema é de baixa densidade modal, próximo às frequências críticas, a resposta será muito próxima à resposta modal, sendo desprezível a parcela $\{Res_i\}$ na expressão (2.5).

Introduzindo-se o fator de amortecimento modal ξ_i e a excentricidade modal ϵ_i na expressão (2.6) ela é reescrita na forma:

$$F_i = \frac{\Omega^2}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\omega_i\Omega\xi_i} (\epsilon_i^{Re} + j\epsilon_i^{Im}) \quad (3.1)$$

Visto que: $\epsilon_i = \frac{\mu_i}{m_i} = \epsilon_i^{\text{Re}} + j \epsilon_i^{\text{Im}}$ e $\xi_i = \frac{d_i}{2m_i \omega_i}$; logo: $\frac{d_i}{m_i} = 2\omega_i \xi_i$.

Desmembrando (3.1) em partes real e imaginária e fazendo:

$A = (\omega_i^2 - \Omega^2)$ tem-se:

$$F_i = \frac{\Omega^2 (\epsilon_i^{\text{Re}} + j \epsilon_i^{\text{Im}})}{A + 2j\Omega \omega_i \xi_i} = \frac{\Omega^2 (\epsilon_i^{\text{Re}} + j \epsilon_i^{\text{Im}})(A - 2j\Omega \omega_i \xi_i)}{A^2 + 4\Omega^2 \omega_i^2 \xi_i^2}$$

logo:

$$F_i^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2 (\omega_i^2 - \Omega^2) \epsilon_i^{\text{Re}} + 2\Omega^3 \omega_i \xi_i \epsilon_i^{\text{Im}}}{\omega_i^4 + \Omega^4 - 2\omega_i^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega_i^2 \xi_i^2} \quad (3.2)$$

$$F_i^{\text{Im}} = \frac{\Omega^2 (\omega_i^2 - \Omega^2) \epsilon_i^{\text{Im}} - 2\Omega^3 \omega_i \xi_i \epsilon_i^{\text{Re}}}{\omega_i^4 + \Omega^4 - 2\omega_i^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega_i^2 \xi_i^2} \quad (3.3)$$

Introduzindo (3.2) e (3.3) em (2.5) e lembrando que:

$$r_i = r_i^{\text{Re}} + j r_i^{\text{Im}} \quad \text{e} \quad c_i = c_i^{\text{Re}} + j c_i^{\text{Im}}$$

obtem-se as seguintes expressões para a resposta em um dado plano de medida, onde não está indicado o subíndice, i , do modo, e ϕ é um valor particular do vetor $\{\phi\}$:

$$r^{\text{Re}} = c^{\text{Re}} \phi + \frac{\Omega^2 (\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3 \omega \xi \epsilon^{\text{Im}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\Omega^2 \omega^2 + 4\Omega^2 \omega^2 \xi^2} \cdot \phi \quad (3.4)$$

$$r^{\text{Im}} = c^{\text{Im}} \phi + \frac{\Omega^2 (\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Im}} - 2\Omega^3 \xi \epsilon^{\text{Re}}}{\omega^4 + \Omega^4 - 2\Omega^2 \omega^2 + 4\Omega^2 \omega^2 \xi^2} \cdot \phi \quad (3.5)$$

Desenvolvendo (3.4) e (3.5) obtem-se um par de equações para cada resposta medida em um dado plano à uma dada velocidade angular.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
& (\omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2)r^{\text{Re}} - (\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2)c^{\text{Re}}\phi - \\
& - (\omega^2 - \Omega^2)\Omega^2\epsilon^{\text{Re}}\phi - 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}\phi + r^{\text{Re}}\Omega^4 = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e

$$\begin{aligned}
& (\omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2)r^{\text{Im}} - (\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2)c^{\text{Im}}\phi - \\
& - \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2)\epsilon^{\text{Im}}\phi + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Re}}\phi + r^{\text{Im}}\Omega^4 = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para N planos de medição e NR velocidades angulares o sistema fica constituído por $2 \times N \times NR$ equações não lineares que podem ser expressas genericamente por:

$$\begin{aligned}
s_{kj} \{ \xi, \omega, c^{\text{Re}}, c^{\text{Im}}, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_j \} + p_{kj} &= 0 \\
t_{kj} [\xi, \omega, c^{\text{Re}}, c^{\text{Im}}, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_j] + q_{kj} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Para $k = 1, \dots, NR$ (velocidade angular)
 $j = 1, \dots, N$ (Plano de medição)

Sendo o vetor dos parâmetros à identificar, para cada modo, definido na forma:

$$x(\xi, \omega, c^{\text{Re}}, c^{\text{Im}}, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_N)$$

$j = 1, \dots, N$ (Plano de medição)

O número de equações do sistema deve ser no mínimo igual ao de parâmetros a identificar, ou seja:

$$2 \times N \times NR \geq N + 6 \quad \therefore$$

$$(2NR - 1) N \geq 6$$

As equações são ordenadas da seguinte forma:

Equações Reais	Plano de medida 1	velocidade ang. 1 velocidade ang.2 velocidade ang. NR
		
	Plano de medida N	velocidade ang.1 velocidade ang. 2 velocidade ang. NR
		
Equações Imaginárias	Plano de medida 1	velocidade ang.1 velocidade ang. 2 velocidade ang. NR
		
	Plano de medida N	velocidade ang. 1 velocidade ang. 2 velocidade ang.NR
		

A primeira equação do sistema é, portanto, escrita na forma:

$$\begin{aligned} & (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2) r_1^{\text{Re}} - \\ & - (\omega^4 + \Omega_1^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2) c^{\text{Re}}\phi_1 - \\ & - \Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2) \epsilon^{\text{Re}}\phi_1 - 2\Omega_1^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}\phi_1 + r_1^{\text{Re}}\Omega_1^4 = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A equação NR x N + 1 é a primeira equação imaginária do sistema e é escrita na forma:

$$\begin{aligned} & (\omega^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2) r_1^{\text{Im}} - \\ & (\omega^4 + \Omega_1^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2) c^{\text{Im}}\phi_1 - \end{aligned}$$

$$-\Omega_1^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) \epsilon^{\text{Im}} \phi_1 + 2\Omega_1^3 \omega \xi \epsilon^{\text{Re}} \phi_1 + r_1^{\text{Im}} \Omega_1^4 = 0 \quad (3.10)$$

O sistema assim constituído deve satisfazer a uma restrição que está ligada à definição da norma do modo $\{\phi_i\}$.

3.1.1 – Valores iniciais do modo e sua norma.

Ao incluir os valores do modo em cada plano de medida, entre os parâmetros a identificar é necessário determinar entre que limites estes valores poderão variar. A Figura 3.1 mostra em linhas descontínuas, possíveis valores que podem assumir o modo no entorno do valor que o mesmo tem, se considerarmos como primeira aproximação o próprio valor das respostas medidas, o que está indicado pela linha cheia na Figura 3.1.

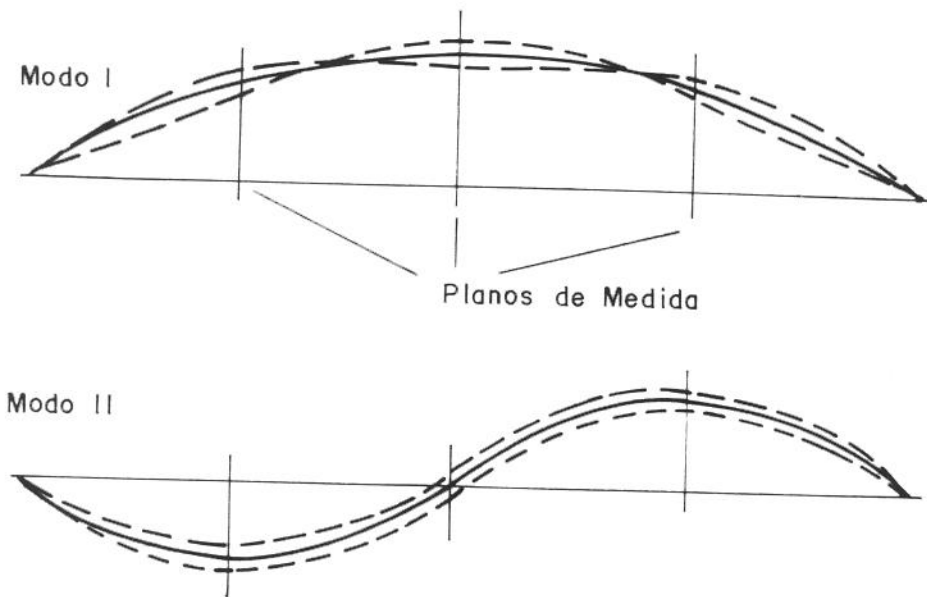


Fig. 3.1 – Ajuste dos valores do modo em torno dos valores da resposta medida (modos I e II)

Os valores iniciais do modo são tomados proporcionais ao módulo das respostas medidas em cada plano, atribuindo-se o valor unitário à resposta de maior módulo, sendo os demais, portanto, iguais às frações $\frac{|r_i|}{|r_{\max}|}$, sendo $|r_j|$ o módulo da resposta medida em um plano qualquer e $|r_{\max}|$, o maior módulo.

Desta forma, fica definida a norma $|\phi_i|$ do modo e também a equação de restrição que deve ser satisfeita pelo sistema (3.8) ou seja:

$$\{\phi_i\}^T \{\phi_i\} = \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\frac{|\Gamma_j|}{|\Gamma|_{\max}} \right]^2 \right\} \quad (3.11)$$

Deve-se considerar o fato de que, para o primeiro modo, todos os valores de $\{\phi_j\}$ são positivos o que não acontece para os demais modos. É necessário, portanto, adotar um critério adicional, para definir o sinal que deve ser atribuído ao valor do modo, em cada plano de medida.

Considera-se o fato de que, as respostas são medidas em termos de componentes reais e imaginárias, sendo o ângulo de fase definido como $\arctg \frac{r_{Im}}{r_{Re}}$. Para a definição do sinal dos termos de $\{\phi_j\}$, adota-se o seguinte procedimento:

- a) Faz-se uma rotação do sistema de eixos de tal forma que a resposta de maior módulo passe a ter, no novo sistema, componente imaginária nula e componente real positiva.
- b) Adota-se para sinal de cada um dos demais termos de $\{\phi_i\}$, o sinal da componente real, no novo sistema de eixos.

3.1.2 – Solução do Sistema de Equações. Identificação dos Parâmetros Modais, pelo Algoritmo de Han-Powell.

A solução do sistema de equações não lineares (3.8), que chamaremos genericamente de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, pode ser estimada por Mínimos Quadrados, que consiste em minimizar a função: $E(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}).\mathbf{f}(\mathbf{x})$ onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Como se trata de minimizar uma função sujeita às restrições $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, é necessário introduzir uma nova função objetivo, que englobe as restrições. Esta nova função objetivo, que é chamada de função Lagrangeano, é da forma:

$$l(\mathbf{x}, \lambda) = E(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

onde λ é o vetor de multiplicadores de Lagrange, em que, cada elemento está associado a uma das restrições.

As condições necessárias para a existência de mínimo são:

$$\begin{aligned}\{\nabla_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}, \lambda)\} &= \{\nabla_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x})\} + \lambda^T [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})] = 0 \\ \{\nabla_{\lambda} l(\mathbf{x}, \lambda)\} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\end{aligned}\quad (3.13)$$

Observa-se, que, anular $\{\nabla_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}, \lambda)\}$, implica em anular $\{\nabla_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x})\}$, a menos de um erro que corresponde à $-\lambda^T [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})]$, ou seja, ao final do processo:

$$\{\nabla E(\mathbf{x})\} = -\lambda^T [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.14)$$

quando

$$\{\nabla_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}, \lambda)\} \rightarrow 0$$

Dentre os algoritmos possíveis de serem utilizados para a solução do problema de minimizar a função Lagrangeano, optamos pelo de Han-Powell, que combina o método Quase-Newton com os métodos de penalidade e de programação quadrática recursiva.

Este algoritmo, segundo D. G. LUENBERGER [8], reúne algumas características interessantes, na solução de problemas desta natureza, quais sejam:

- a) É globalmente convergente, visto que a busca unidimensional garante uma direção de descenso para a função de penalidade quadrática.
- b) Perto da solução, o processo converge superlinearmente, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|} = 0$$

sendo $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k+1}$ o valor do vetor dos parâmetros entre duas iterações sucessivas e $\mathbf{x}^*$ a solução que é buscada.

- c) Como os métodos Quase-Newton, o algoritmo de Han-Powell utiliza apenas informações de primeira ordem, o que implica em menor número de operações.

A versão do algoritmo de Han-Powell que foi utilizada neste trabalho está descrita no Apêndice A e é implementada a partir da equação:

$$[B + CA^T A] d = -\{\nabla E(\mathbf{x})^T\} - [CA^T \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.15)$$

ou

$$d = -[B + CA^T A]^{-1} \{\nabla P(\mathbf{x})\}^T \quad (3.16)$$

A solução da equação (3.16) nos fornece a cada iteração um valor da direção $d = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ sendo $\mathbf{x}_k$ o vetor que contém o valor dos parâmetros no ponto k e que no caso presente tem dimensão $(N + 6)$ sendo N o número de planos de medida. Assim:

$$\mathbf{x}_k = \{\xi_k, \omega_k, c_k^{\text{Re}}, c_k^{\text{Im}}, \epsilon_k^{\text{Re}}, \epsilon_k^{\text{Im}}, \phi_{k1}, \dots, \phi_{kN}\}$$

$d = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ é o vetor direção com dimensão $(N + 6)$

B é a matriz quadrada que substitue a Hessiana no método de Newton e é atualizada após cada iteração. Tem dimensão: $(N + 6) \times (N + 6)$.

$A = [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})]$ é o gradiente das equações de restrição. No caso presente, temos apenas uma restrição, sendo A um vetor com dimensão $1 \times (N + 6)$.

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é o valor da restrição no ponto $\mathbf{x}_k$.

$CA^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ é portanto um vetor coluna de dimensão $(N + 6)$.

$\{\nabla E(\mathbf{x})\}^T$ é um vetor coluna (transposta do vetor gradiente da função objetivo original e tem dimensão $(N + 6)$.

Sendo $E(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ o gradiente da função $E(\mathbf{x})$ é obtido pela utilização da matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Assim:

$$\{\nabla E(\mathbf{x})\}^T = -2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

sendo o termo genérico da matriz Jacobiana dado por:

$$J_{kj}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

$$k = 1, \dots, 2 \times N \times NR \text{ (equação)}$$

$$j = 1, \dots, N + 6 \text{ (parâmetro)}$$

onde NR é o número de rotações em que são efetuadas as medidas, sendo portanto, de $2 \times NR \times N$ o número total de equações constantes do sistema (3.8) genericamente chamado de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

A matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é portanto uma matriz retangular de dimensões $(2 \times NR \times N) \times (N + 6)$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{N+6}} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_{N+6}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_{N+6}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

No caso presente, a primeira linha da matriz Jacobiana é obtida derivando a primeira equação real do sistema (3.9).

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \xi} = 8(\Gamma^{\text{Re}} - c^{\text{Re}} \phi_1) \Omega_1^2 \omega^2 \xi - 2\Omega_1^3 \omega \epsilon^{\text{Im}} \phi_1$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \omega} = (4\omega^3 - 4\omega\Omega_1^2 + 8\omega\Omega_1^2\xi^2)(r_1^{\text{Re}} - c^{\text{Re}}\phi_1)$$

$$-2\omega\Omega_1^2\epsilon^{\text{Re}}\phi_1 - 2\Omega_1^3\xi\epsilon^{\text{Im}}\phi_1$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial c^{\text{Re}}} = -(\omega^4 - 2\omega^2\Omega_1^3 + \Omega_1^4 + 4\omega^2\Omega_1^2\xi^2)\phi_1$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_4} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial c^{\text{Im}}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_5} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \epsilon^{\text{Re}}} = -\Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2)\phi_1$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_6} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \epsilon^{\text{Im}}} = -2\Omega_1^3\omega\xi\phi_1$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_7} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \phi_1} = -(\omega^4 + \Omega_1^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\omega^2\Omega_1^2\xi^2)c^{\text{Re}} - \Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2)\epsilon^{\text{Re}} - 2\Omega_1^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_8} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \phi_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{N+6}} = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \phi_N} = 0$$

A linha $N \times NR + 1$ da matriz Jacobiana é obtida pela derivada da primeira equação imaginária do sistema (3.10). Assim:

$$\frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial \xi} = 8\omega^2\Omega_1^2\xi(r_1^{\text{Im}} - c^{\text{Im}}\phi_1) + 2\omega\Omega_1^3\epsilon^{\text{Re}}\phi_1$$

$$\frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial f_{N \times NR + 1}(\mathbf{x})}{\partial \omega} = (4\omega^3 + 8\omega\Omega_1^2\xi^2 - 4\omega\Omega_1^2)(r_1^{\text{Im}} - c^{\text{Im}}\phi_1) -$$

$$-2\Omega_1^2\omega\epsilon^{\text{Im}}\phi_1 + 2\Omega_1^3\xi\epsilon^{\text{Re}}\phi$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}}{\partial x_3} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}}{\partial c^{Re}} = 0$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_4} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial c^{Im}} = -(\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega_1^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2)\phi_1$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_5} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial \epsilon^{Re}} = 2\Omega_1^3\omega\xi\phi_1$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_6} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial \epsilon^{Im}} = -\Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2)\phi_1$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_7} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial \phi_1} =$$

$$= (\omega^4 - 2\Omega_1^2\omega^2 + 4\Omega_1^2\omega^2\xi^2 + \Omega_1^4)c^{Im} - \Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2)\epsilon^{Im} + 2\Omega_1^3\omega\xi\epsilon^{Re}$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_8} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial \phi_2} = 0$$

$$=====$$

$$\frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial x_{N+6}} = \frac{\partial f_{N_xNR+1}(\mathbf{x})}{\partial \phi_N} = 0$$

3.1.3 – Valores Iniciais dos Parâmetros

Testes preliminares de utilização do algoritmo indicaram que a convergência para o mínimo da função $E(\mathbf{x})$ é muito sensível ao valor inicial que se atribui à frequência crítica ω enquanto se mostra satisfatória mesmo para valores iniciais distantes dos demais parâmetros (usualmente se inicializa com valores nulos para os demais parâmetros). Experimentalmente, é possível obter uma informação bastante próxima de ω , pelo exame da tendência da resposta medida, ao variar-se a velocidade angular do rotor. Esta informação pode ser ainda melhorada, utilizando um modelo de identificação reduzido, ou seja, sem incluir deformação modal e fixando o valor do modo no valor unitário. Como resposta deste modelo mais simples teremos uma aproximação maior para ω ainda que com

valores errôneos para os demais parâmetros. Neste caso, utilizamos as respostas medidas em apenas um plano de medida.

O modelo simplificado é dado por:

$$r = \frac{\Omega^2(\epsilon^{\text{Re}} + j \epsilon^{\text{Im}})}{\omega^2 - \Omega^2 + 2j\omega\Omega\xi} \quad (3.19)$$

que tem como parâmetros a identificar apenas: ξ , ω , ϵ^{Re} e ϵ^{Im} .

As equações resultantes a partir de (2.47) são:

$$(\omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2) r^{\text{Re}} - \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} - 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}} + r^{\text{Re}}\Omega^4 = 0$$

$$(\omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2) r^{\text{Im}} - \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Im}} + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Re}} + r^{\text{Im}}\Omega^4 = 0$$

O problema de inicialização pode ser estimado por Mínimos Quadrados utilizando um algoritmo Quase-Newton sem restrições.

3.1.4 – Determinação das Massas Modais e Massas Desbalanceadoras Modais

Por meio da solução do sistema de equações (3.8) é identificado o valor do modo em cada um dos planos de medida, considerando uma norma que atribui o valor unitário ao componente de $\{\phi_i\}$ com maior valor absoluto. Conseqüentemente o valor identificado para ϵ_i , será função da norma adotada, visto que:

$$[\phi]^T \mathbf{M} [\phi] = [m]$$

logo:

$$\epsilon_i = \frac{\mu_i}{m_i} = \frac{\mu_i}{\{\phi_i\}^T \mathbf{M} \{\phi_i\}}$$

Como se pressupõe não conhecida a distribuição de massa do rotor, os termos da matriz $\mathbf{M}$ são desconhecidos e portanto não é possível determinar m_i e

conseqüentemente a massa desbalanceadora modal μ_i , que é em última análise, o objetivo do processo.

É necessário utilizar uma massa de teste à semelhança do que é feito no método de coeficientes de influência com a diferença de que, neste caso, já é conhecida a posição angular da massa desbalanceadora modal.

A determinação da massa modal então, consiste em colocar-se uma massa modal de teste μ_t em oposição (180°) à excentricidade identificada, medindo-se a amplitude e fase do deslocamento lateral do rotor antes e depois de colocada a massa de teste, a uma mesma velocidade angular.

Assim tem-se:

$$r_1 = a\mu_i$$

$$r_2 = a(\mu_i - \mu_t)$$

onde:

r_1 — medida de deslocamento lateral devido somente ao desbalanceamento original (deve ser deduzida a deformação geométrica do eixo medida ao estado estacionário)

r_2 — medida de deslocamento lateral após a colocação da massa modal de teste μ_t

a — constante de proporcionalidade

O valor da massa desbalanceadora é portanto:

$$\mu_i = \frac{\mu_t}{1 - \frac{r_2}{r_1}}$$

e a massa modal é obtida por:

$$m_i = \frac{\mu_i}{\epsilon_i} = \frac{\mu_t}{\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \epsilon_i}$$

Este procedimento é adotado para cada modo após a identificação das excentricidades modais.

3.1.5 – Determinação das Massas Balanceadoras

As massas balanceadoras são determinadas a partir do conhecimento dos modos e das massas desbalanceadoras modais, como está descrito no item 2.2, pela expressão:

$$\{W_i\} = (\mu_i^{\text{Re}} + j \mu_i^{\text{Im}}) \{t_i\}$$

sendo $[t]$ tal que: $[\phi]^T [t] = -[I]$

3.1.6 – Esquema de Balanceamento Modo a Modo com Identificação por Mínimos Quadrados Incluindo os Modos.

O esquema do processo de balanceamento seguindo o modelo relatado no item 3.1. e sub-itens, pode ser sumarizado como segue:

- a) Medida de deslocamento lateral do rotor em amplitude e fase em N planos de medida e NR velocidades angulares, próximo a crítica de interesse, iniciando-se pela primeira, até a critica imediatamente superior à velocidade angular de operação do rotor, sendo N no mínimo igual a ordem do modo e NR tal que: $(2NR - 1) N \geq 6$.

É feita uma estimativa do valor da velocidade angular crítica:

- b) Identificação com modelo reduzido em um plano de medida obtendo-se uma segunda aproximação da velocidade angular crítica e a primeira aproximação de ξ_i , ϵ_i^{Re} e ϵ_i^{Im} . O número de velocidades angulares deverá ser no mínimo $NR = 2$.
- c) Identificação com modelo que inclui a deformação geométrica e o valor do modo em cada um dos planos de medida (sistema não-linear com uma restrição quadrática). Valores finais para ξ_i , ω_i , c_i^{Re} , c_i^{Im} , ϵ_i^{Re} , ϵ_i^{Im} , ϕ_j ,

sendo $j = 1, \dots, N$.

- d) Medida de deslocamento lateral do rotor com uma massa de teste colocada em oposição à excentricidade já identificada (a fase do desbalanceamento modal é definida pelo conhecimento de ϵ^{Re} e ϵ^{Im}). Determina-se: $m_i, \mu_i^{\text{Re}}, \mu_i^{\text{Im}}$.
- e) Retorno aos itens a, b, c, d até o último modo de interesse.
- f) Determinação das massas balanceadoras em cada plano de balanceamento, n , pela utilização da equação:

$$\{W\} = \sum_{i=1}^M \{W_i\}$$

sendo $\{W_i\} = (\mu_i^{\text{Re}} + j \mu_i^{\text{Im}}) \cdot \{t_i\}$

$n = 1, \dots, N$ (número de planos)

$i = 1, \dots, M$ (número de modos)

3.1.7 — Simulação da Resposta do Rotor ao Desbalanceamento Modal e Identificação Modo a Modo

O algoritmo de identificação modo a modo foi testado a partir de respostas de um rotor com desbalanceamento modal conhecido, obtidas por simulação numérica. O rotor simulado, que está mostrado na Figura 2.1 é o mesmo utilizado por J. V. FERREIRA [7] e tem as seguintes características físicas:

$$\text{Eixo} \begin{cases} \text{Área} & - 1.227 \text{ E}-04 (\text{m}^2) \\ \text{I} & - 1.198 \text{ E}-09 (\text{m}^4) \\ \text{E} & - 2.067 \text{ E}+11 (\text{N/m}^2) \\ \rho & - 7.800 (\text{kg/m}^3) \\ \text{Compr} & - .54 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Disco} \begin{cases} \text{Massa} & - 1.929 (\text{kg}) \\ \text{M. Inércia} & - 2.713 \text{ E}-3 (\text{kg.m}^2) \end{cases}$$

A simulação é feita considerando-se valores discretos de massa agregados a cada uma das posições onde se localizam os deslocamentos e deflexões nodais do

sistema discreto que representa o rotor e que foi utilizado para o cálculo dos auto-valores e auto-vetores pelo método dos Elementos Finitos. Estas massas são calculadas por:

$$\{U_i\} = -\mu_i\{t_i\}$$

sendo $\{U_i\}$ o vetor de massas discretas que produz o desbalanceamento modal μ_i .

A Tabela 3.1 mostra uma seqüência de casos testados em que se utilizou doze medidas de resposta correspondentes a quatro diferentes velocidades angulares próximas a primeira crítica e nos três planos em que se situam os discos.

Variou-se a proximidade com relação à crítica bem como o intervalo entre as velocidades angulares utilizadas. Simulou-se apenas o desbalanceamento do modo I e os valores identificados em cada caso são comparados com os valores simulados que constam da primeira coluna.

Tabela 3.1 – Valores dos parâmetros resultantes na identificação do modo I

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.1 120,125,130, 135 rad/s	Caso 1.2 110,115,120, 125 rad/s	Caso 1.3 100,105,110, 115 rad/s
ξ	.05	.0500000059	.0500000139	.04999997
ω	134.815	134.815017	134.815017	134.815011
c^{Re}	– .2E–4	–.200000315E–4	–.19997722E–4	–.200008E–04
c^{Im}	.0	.273240708E–8	.691152816E–9	.18E–8
ϵ^{Re}	– 4.E–3	–3.99996886E–3	–3.9999702E–2	–3.999968E–3
ϵ^{Im}	6.9282E–3	6.92814751E–3	6.9281474E–2	6.928146E–3
ϕ_1	.3444685	.34447052	.34447053	.3444705
ϕ_2	.487783	.48778738	.4877874	.487871
ϕ_3	.3444662	.34446731	.34446733	.344467

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.4 90,95,100, 105 rad/s	Caso 1.5 120,130,135, 140 rad/s	Caso 1.6 130,235,140, 145 rad/s
ξ	.05	.050000135	.05000011	.049999946
ω	134.815	134.814324	134.815019	134.815018
c^{Re}	-.2E-4	-.20014946E-4	-.20000108E-4	-.19993092E-04
c^{Im}	.0	.960069477E-7	-.289E-8	-.263244606E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-3.9998739E-3	-3.9999699E-3	-3.999968E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	6.9279015E-3	6.9281534E-3	6.9281463E-3
ϕ_1	.3444685	.344470486	.3444703	.34447053
ϕ_2	.487783	.48778736	.4877872	.4877874
ϕ_3	.3444662	.344467297	.34446718	.34446734

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.7 135,140,145, 150 rad/s	Caso 1.8 140,145,150, 155 rad/s	Caso 1.9 145,150,155, 160 rad/s
ξ	.05	.001388488	.0500000078	.0500000086
ω	134.815	135.159927	134.815012	134.815092
c^{Re}	-.2E-4	6.3615799E-3	-.20016996E-4	-.19842E-4
c^{Im}	.0	-2,5594656E-2	.31628278E-8	-.2458E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-4.6734326E-3	3.9999736E-3	-3.9999E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	-6.6124678E-4	6.9281514E-3	6.9281095E-3
ϕ_1	.3444685	.3444705	.3444705	.4877879
ϕ_2	.487783	.4878738	.4877874	.488877879
ϕ_3	.3444662	.3444673	.34446735	.344466466

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.10 130,140,145, 150 rad/s	Caso 1.11 100,110,120, 130 rad/s	Caso 1.12 90,100,110,120 rad/s
ξ	.05	.0499999912	.0500000147	.0500000103
ω	134.815	134.815018	134.815018	134.815021
c^{Re}	-.2E-4	-.199905087E-4	-.19999066E-4	-.19999328E-4
c^{Im}	0.0	-.3176246E-8	-.3034567E-8	.2934357E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-3.9999679E-3	-3.99996984-2	-3.99997007E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	6.928146E-2	6.9281484E-2	6.9281503E-3
ϕ_1	.3444685	.34447053	.344705	.3444705
ϕ_2	.487783	.4877874	.4877838	.487787787
ϕ_3	.3444662	.3444673	.3444673	.3444673

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.13 80,90,100, 110 rad/s	Caso 1.14 120,130,140, 150 rad/s	Caso 1.15 130,140,150, 160 rad/s
ξ	.05	.0499999708	.0500000010	.050000001
ω	134.815	134.815001	134.815017	134.815017
c^{Re}	-.2E-4	-.20000914E-4	-.19998505E-4	-.19998505E-4
c^{Im}	.0	.24679613E-8	-.31637894E-10	-.30557201E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-3.9999651E-3	-3.9999691E-3	-3.999969E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	6.9281415E-3	6.928142E-3	6.9281476E-3
ϕ_1	.3444685	.3444705	.34447051	.34447051
ϕ_2	.487783	.48778738	.48778738	.48778739
ϕ_3	.3444662	.3444673	.3444673	.3444673

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.16 140,150,160, 170 rad/s	Caso 1.17 150,160,170, 180 rad/s	Caso 1.18 80,100,120, 140 rad/s
ξ	.05	.050000027	.050000023	.049999995
ω	134.815	134.815014	134.81503	134.815018
c^{Re}	-.2E-4	-.20008408E-4	-.19987662E-4	-.20000279E-4
c^{Im}	.0	.10080837E-7	-.31370877E-8	-.86049631E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-3.9999703E-3	-3.9999682E-3	-3.9999683E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	6.92815305E-3	6.92814454E-3	6.928148E-3
ϕ_1	.3444685	.34447053	.344470529	.344470521
ϕ_2	.487783	.48778742	.48778741	.48778738
ϕ_3	.3444662	.3444673	.34446733	.34446732

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 1.19 60,80,100, 120 rad/s	Caso 1.20 100,120,140, 160 rad/s	Caso 1.21 120,140,160, 180 rad/s
ξ	.05	.0500000097	.0500000006	.049999998
ω	134.815	134.815021	134.815017	134.81502
c^{Re}	-.2E-4	-.199997146E-4	-.19999593E-4	-.19999428E-4
c^{Im}	.0	.278562385E-9	-.2983986E-9	-.127834E-8
ϵ^{Re}	-4.E-3	-3.99996952E-3	-3.9999689E-3	-3.999968E-3
ϵ^{Im}	6.9282E-3	6.92814956E-3	6.9281485E-3	6.928148E-3
ϕ_1	.3444685	.34447054	.34447051	.34447053
ϕ_2	.487783	.48778741	.48778739	.4877874
ϕ_3	.3444662	.34446734	.34446732	.34446733

Tabela 3.2 – Valores dos parâmetros resultantes na identificação do modo II

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 2.1 505,510,515, 520 rad/s	Caso 2.2 500,505,510, 515 rad/s	Caso 2.3 495,500,505, 510 rad/s
ξ	.01	.009999997	.0100000091	.009999998
ω	519,076	519,07605	519.07605	519.07605
c^{Re}	0.0	-.3011498E-7	.73097617E-7	.97019607E-8
c^{Im}	.0	.4504964E-7	-.5919458E-7	-.190407713E-7
ϵ^{Re}	- 5.E-3	-4.9999977E-3	-5.0000095E-3	-5.000000E-3
ϵ^{Im}	8.660254E-3	8.660252E-3	8.6602559E-3	8.660255E-3
ϕ_1	-.4720	.4720057	-.47200569	-.4720057
ϕ_2	.235595E-5	.23559E-5	.23555E-5	.235536E-5
ϕ_3	.4720	.472006	.4720068	.4720068

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 2.4 490,495,500, 505 rad/s	Caso 2.5 510,515,520, 525 rad/s	Caso 2.6 515,520,525, 530 rad/s
ξ	.01	.009999997	.0100000003	.0100000014
ω	519,076	519.076036	519.066049	519.07605
c^{Re}	0.0	-.69705022E-7	-.180254717E-8	-.51498822E-7
c^{Im}	.0	.56365267E-7	-.57705413E-8	-.24793125E-7
ϵ^{Re}	- 5.E-3	-4.9999844E-3	-5.00000126E-3	-5.0000018E-3
ϵ^{Im}	8.660254E-3	8.6602455E-3	8.6602539E-3	8.6602555E-3
ϕ_1	-.4720	.4720057	-.47200569	-.47200568
ϕ_2	.235595E-5	.2355765E-5	.23559833E-5	.2355886E-5
ϕ_3	.4720	.4720068	.47200678	.47200678

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados	
		Caso 2.7 520,525,530, 535 rad/s	Caso 2.8 525,530,535, 540 rad/s
ξ	.01	.0099999994	.0099999976
ω	519,076	519.07605	519.07605
c^{Re}	0.0	.42955791E-7	-.2740713E-7
c^{Im}	.0	-.31044525E-8	-.42018248E-7
ϵ^{Re}	- 5.E-3	-4.99999E-3	-5.000003E-3
ϵ^{Im}	8.660254E-3	8.6602525E-3	8.66025E-3
ϕ_1	-.4720	.4720057	-.47200569
ϕ_2	.235595E-5	.235603E-5	.2355741E-5
ϕ_3	.4720	.4720068	.47200678

Tabela 3.3 – Valores dos parâmetros resultantes na identificação do modo III

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 3.1 1070,1075,1080 1085 rad/s	Caso 3.2 1055,1065,1075, 1085 rad/s	Caso 3.3 1045,1055,1065, 1075 rad/s
ξ	0,00	.173698E-11	-.10117254E-9	-.323801E-10
ω	1083,776	1083,67615	1083,67616	1083,67614
c^{Re}	0,00	-.788838E-7	-.13217839E-7	.1570157E-7
c^{Im}	0,00	-.318194E-7	-.39711608E-7	3120548E-7
ϵ^{Re}	6.E-3	6.0000075E-3	6.0000070E-3	6.00000044E-3
ϵ^{Im}	10.3923E-3	10.391315E-3	10.3936282E-3	10.39231E-3
ϕ_1	+ .3436	.3436292	.3436382	+ .34362928
ϕ_2	-.429117	-.42911699	-.42911697	-.42911702
ϕ_3	+ .3436	.34363085	+ .34363083	+ .34363086

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 3.4 1035,1045,1055 1065 rad/s	Caso 3.5 1025,1035,1045, 1055 rad/s	Caso 3.6 1080,1085,1090, 1095 rad/s
ξ	0,00	-.1442162E-8	-.37200274E-8	-.2012177E-9
ω	1083.776	1083.676615	1083.67614	1083.67615
c^{Re}	0,00	-.556108E-8	.1654435E-7	.540595E-7
c^{Im}	0,00	.62316748E-8	.104260634E-8	-.852599E-7
ϵ^{Re}	6.E-3	6.0000069E-3	6.00000317E-3	6.0000079E-3
ϵ^{Im}	10.3923E-3	10.392316E-3	10.3923158E-3	10.392315E-3
ϕ_1	+.3436	.3436292	+.34362823	.3436293
ϕ_2	-.429117	-.4291169	-.42911696	-.4291169
ϕ_3	+.3436	.3437308	+.3436308	.34363086

Parâmetros	Valor de Simulação	Valores Identificados		
		Caso 3.7 1080,1090,1100 1110 rad/s	Caso 3.8 1080,1100,1120, 1140 rad/s	Caso 3.9 1050,1080,1110, 1140 rad/s
ξ	0,00	.19920416E-9	.4683119E-9	-.1992395E-9
ω	1083.776	1083.67615	1083.67615	1083.67615
c^{Re}	0.00	.33158895E-8	-.15659839E-7	-.11445925E-7
c^{Im}	0.00	.58168469E-7	-.24741066E-9	-.341978647E-8
ϵ^{Re}	6.E-3	6.00000661E-3	6.00000603E-3	6.00000688E-3
ϵ^{Im}	10.3923E-3	10.3923174E-3	10.392316E-3	10.3923168E-3
ϕ_1	+.3436	.3436293	.34362927	.343628
ϕ_2	-.429117	-.42911699	-.429117005	-.42911698
ϕ_3	+.3436	.34363086	.34363086	.3436308

As Tabelas 3.2 e 3.3 subseqüentes mostram resultados obtidos na identificação dos modos II e III, respectivamente seguindo-se o mesmo critério quanto às velocidades angulares utilizadas nas identificações.

Verifica-se que os resultados apresentados acima para diferentes valores e intervalos de velocidades angulares em geral mostram uma boa concordância entre os valores simulados e identificados.

Observa-se discrepância apenas no caso 1.7 o que pode ser atribuído ao fato de se utilizar uma velocidade angular de 135 rad/s muito próxima à crítica de 134.815 rad/s. Embora em outros casos tenha sido utilizado esta velocidade angular o caso 1.7 é o único destes em que se utilizou apenas respostas de valores superiores à crítica. O caso 1.10 utiliza as mesmas velocidades angulares do caso 1.7 com excessão de 135 rad/s, e apresenta resultados compatíveis com os demais casos.

3.1.8 – Definição de Alguns Parâmetros Necessários à Utilização do Algoritmo

Para a utilização do algoritmo, é necessário definir previamente o valor mais adequado para alguns parâmetros. Estes valores podem ser diferentes segundo a classe de problema que se esta resolvendo, i.e.: identificação modo-a-modo, identificação simultânea de mais de um modo ou identificação de modos não planares. A determinação é feita experimentalmente a partir dos resultados parciais que vão sendo obtidos em cada caso.

É utilizado um fator de redução do valor da função e de seu gradiente para mantê-los dentro de limites da ordem de 10^3 a 10^{-9} , correspondendo este último número ao valor que tem a função ou o gradiente quando a solução é atingida ou a aproximação é considerada satisfatória. Esta providência é necessária para evitar saturação, sobretudo na rotina de busca unidimensional. O valor de 10^{-9} é adotado em geral como parâmetro de convergência para o gradiente, em comparação que é realizada após cada iteração.

Outros parâmetros cujos valores devem ser definidos são:

- constante de penalidade $\mathbb{C}$
- constante de comparação para o teste de convergência da função

$\psi = \nabla P(\mathbf{x} + \nu \mathbf{d})$ no método de busca unidimensional pela secante

- incremento inicial que se deve dar a $\mathbf{x}$ no início da busca unidimensional
- número máximo de iterações da busca unidimensional. Em todos os casos foi adotado o valor máximo de 10 iterações visto que, após este número de iterações a convergência em geral é muito lenta
- número máximo de iterações principais. Foi fixado em 400 com exceção do caso de identificação simultânea em que se utilizou um número mais elevado de iterações (da ordem de 550).

3.1.9 — Teste do Algoritmo de Identificação Modo a Modo com Respostas Simuladas Correspondentes ao Desbalanceamento de Vários Modos Simultaneamente

Em sistemas de alta densidade modal, a contribuição dos modos vizinhos na resposta medida, próximo a uma frequência crítica pode ser significativa, de forma a afetar a identificação dos parâmetros modais. No sentido de verificar a eficiência do algoritmo na identificação de sistemas com alta densidade modal ele foi testado com respostas ao desbalanceamento de vários modos simultaneamente e que foram obtidas pelo mesmo método referido anteriormente, somando-se os valores de resposta dos três primeiros modos do mesmo rotor. A Tabela 3.4 mostra os resultados obtidos na identificação modo a modo, verificando em todos os casos alguma discrepância entre valores simulados e identificados. Estes resultados, bem como os das Tabelas 3.1 a 3.3 foram publicados em D. L. Zoratto e F. Iguti [11].

Tabela 3.4 – Valores da identificação modo a modo a partir de respostas simuladas para os modos I, II e III simultaneamente

Parâmetro	Caso 3.1.1 120,125,130,135 rad/s		Caso 3.1.2 505,510,515,520 rad/s	
	Valores de simulação	Valores de identificação	Valores de simulação	Valores de identificação
ξ	.01	.00999938	.01	.0097844
ω	134.815	134.814018	519.0765	519.00859
c^{Re}	0,00	-.22E-4	0,00	.278E-2
c^{Im}	0,00	.14E-5	0,00	.236E-2
ϵ^{Re}	.008	.007971	.01	.009968857
ϵ^{Im}	0.0	.2106E-6	0.0	.000013227
ϕ_1	.344685	.339614	-.472	-.46846
ϕ_2	.487783	.487463	.235595E-5	-.012122
ϕ_3	.3444662	.35409	.472	.453703

Parâmetro	Caso 3.1.3 1070,1075,1080,1085 rad/s	
	Valores de simulação	Valores de identificação
ξ	.01	.008986
ω	1083.676	1083.13686
c^{Re}	.00	-.01654
c^{Im}	.00	.037881
ϵ^{Re}	.012	.01044668
ϵ^{Im}	.000	-.000183
ϕ_1	+.3436	+.33719
ϕ_2	-.429117	-.42089
ϕ_3	+.3436	+.321699

Estes resultados orientaram o trabalho no sentido de se buscar um modelo de identificação que fosse capaz de identificar mais de um modo simultaneamente, a partir de respostas próximas as críticas de interesse, e que está relatado a seguir.

3.2 – IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE ALTA DENSIDADE MODAL

O modelo utilizado na identificação paramétrica em sistemas de alta densidade modal deve considerar a resposta em frequência próxima a uma dada frequência crítica como o somatório de uma parcela principal correspondente ao modo em questão e de parcelas menores devidas aos $M-1$ modos de maior ou menor ordem. Assim, para um dado plano de medida, a resposta em frequência será:

$$r(\Omega) = \sum_{i=1}^M c_i \phi_{ij} + \sum_{i=1}^M F_i \phi_{ij} \quad (3.20)$$

onde ϕ_{ij} é o valor do modo i em um dado plano de medida j e $\sum_{i=1}^M c_i \phi_{ij} = c$ é a deformação geométrica total que o rotor apresenta e que pode ser medida em repouso. É possível então, trabalhar com a resposta líquida, devida apenas às excentricidades modais, subtraindo-se da resposta medida, a deformação do rotor

$$r(\Omega) = \sum_{i=1}^M F_i \phi_{ij} \quad (3.21)$$

Desmembrando em partes real e imaginária, vem:

$$r = r^{\text{Re}} + r^{\text{Im}} = \sum_{i=1}^M F_i^{\text{Re}} \cdot \phi_{ij} + j \sum_{i=1}^M F_i^{\text{Im}} \cdot \phi_{ij}$$

sendo:

$$F_i^{\text{Re}} = \frac{\Omega^2 (\omega_i^2 - \Omega^2) \epsilon_i^{\text{Re}} + 2\Omega^3 \omega_i \xi_i \epsilon_i^{\text{Im}}}{\omega_i^4 + \Omega^4 - 2\omega_i^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega_i \xi_i^2}$$

e

$$F_i^{\text{Im}} = \frac{\Omega^2 (\omega_i^2 - \Omega^2) \epsilon_i^{\text{Im}} - 2\Omega^3 \omega_i \xi_i \epsilon_i^{\text{Re}}}{\omega_i^4 + \Omega^4 - 2\omega_i^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \omega_i^2 \xi_i^2}$$

Fazendo:

$$C_i = \Omega^2 (\omega_i^2 - \Omega^2)$$

$$D_i = 2\Omega^3 \omega_i \xi_i$$

$$A_i = \omega_i^4 + \Omega^4 - 2\omega_i^2 \Omega^2 + 4\Omega^2 \xi_i^2 \omega_i^2$$

Temos:

$$r^{\text{Re}} = \sum_{i=1}^M \frac{C_i \epsilon_i^{\text{Re}} + D_i \epsilon_i^{\text{Im}}}{A_i} \phi_{ij}$$

$$r^{\text{Im}} = \sum_{i=1}^M \frac{C_i \epsilon_i^{\text{Im}} - D_i \epsilon_i^{\text{Re}}}{A_i} \phi_{ij}$$

Resultando para cada plano de medida um par de equações que podem ser escritas:

$$r^{\text{Re}} \prod_{i=1}^M A_i - \sum_{i=1}^M \{C_i \epsilon_i^{\text{Re}} + D_i \epsilon_i^{\text{Im}}\} \phi_{ij} \cdot \frac{\prod_{i=1}^M A_i}{A_i} = 0 \quad (3.22)$$

$$r^{\text{Im}} \prod_{i=1}^M A_i - \sum_{i=1}^M \{C_i \epsilon_i^{\text{Im}} - D_i \epsilon_i^{\text{Re}}\} \phi_{ij} \cdot \frac{\prod_{i=1}^M A_i}{A_i} = 0$$

em que o termo $\prod_{i=1}^M A_i = A_1 A_2 A_3 \dots A_M$ é utilizado por conveniência na obtenção da matriz Jacobiana por derivação.

Observa-se que a parcela $r^{\text{Re}} \prod_{i=1}^M A_i$ contém o termo independente das

equações (3.22) que é $r^{\text{Re}} \Omega^{4M}$.

Genericamente, podemos escrever as equações do sistema na forma:

$$s_{kj} \{ \xi_1, \omega_1, \epsilon_1^{\text{Re}}, \epsilon_1^{\text{Im}}, \phi_{1j}, \dots, \xi_2, \omega_2, \epsilon_2^{\text{Re}}, \epsilon_2^{\text{Re}}, \epsilon_2^{\text{Im}}, \phi_{2j}, \dots, \xi_k, \omega_k, \epsilon_k^{\text{Re}}, \epsilon_k^{\text{Im}}, \phi_{kj} \} - p_{kj} = 0$$

$$t_{kj} \{ \xi_1, \omega_1, \epsilon_1^{\text{Re}}, \epsilon_1^{\text{Im}}, \phi_{1j}, \dots, \xi_2, \omega_2, \epsilon_2^{\text{Re}}, \epsilon_2^{\text{Im}}, \phi_{2j}, \dots, \xi_i, \omega_i, \epsilon_k^{\text{Re}}, \epsilon_k^{\text{Im}}, \phi_{ij} \dots \} - q_{kj} = 0$$

Para $k = 1, \dots, NR$ (velocidade angular)

$j = 1, \dots, N$ (plano)

$i = 1, \dots, M$ (modo)

Sendo o vetor dos parâmetros à identificar definido na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \{ & \xi_1, \omega_1, \epsilon_1^{\text{Re}}, \epsilon_1^{\text{Im}}, \phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1N}, \xi_2, \omega_2, \\ & \epsilon_2^{\text{Re}}, \epsilon_2^{\text{Im}}, \phi_{21}, \phi_{22}, \dots, \phi_{2N}, \dots, \xi_M, \omega_M, \epsilon_M^{\text{Re}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\epsilon_M^{\text{Im}}, \phi_{M1}, \phi_{M2}, \dots, \phi_{MN} \}$$

$j = 1, \dots, N$ (plano)

$i = 1, \dots, M$ (modo)

O número de equações do sistema, deve ser no mínimo igual ao de parâmetros a identificar, ou seja:

$$2 \times N \times NR \geq (N + 4) \cdot M$$

$$\frac{N(2NR - M)}{M} \geq 4 \quad \text{ou} \quad NR \geq \frac{(N + 4) \cdot M}{2 \cdot N}$$

As equações são ordenadas da mesma forma como feito para o sistema (3.8) do item 3.1.

Portanto a primeira equação do sistema é escrita na forma:

$$r_1^{\text{Re}} \prod_{i=1}^M A_{i1} - \sum_{i=1}^M \{C_{i1} \epsilon_i^{\text{Re}} + D_{i1} \epsilon_i^{\text{Im}}\} \phi_{i1} \frac{\prod_{i=1}^M A_{i1}}{A_{i1}} = 0 \quad (3.24)$$

onde

$$C_{i1} = \Omega_1^2 (\omega_i^2 - \Omega_1^2)$$

$$D_{i1} = 2 \Omega_1^3 \omega_i \xi_i$$

$$A_{i1} = \omega_i^4 + \Omega_1^4 - 2 \omega_i^2 \Omega_1^2 + 4 \Omega_1^2 \xi_i^2 \omega_i^2$$

A primeira equação imaginária do sistema aparece na ordem $M \times N + 1$ e é escrita na forma:

$$r_1^{\text{Im}} \prod_{i=1}^M A_{i1} - \sum_{i=1}^M \{C_{i1} \epsilon_i^{\text{Im}} - D_{i1} \epsilon_i^{\text{Re}}\} \phi_{i1} \frac{\prod_{i=1}^M A_{i1}}{A_{i1}} = 0 \quad (3.25)$$

O sistema assim constituído deve satisfazer a M restrições, ou seja; a uma restrição para cada modo, que são do tipo:

$$\{\phi_i\}^T \{\phi_i\} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{|r_j|}{|r_{\max}|} \right]^2 \quad (3.26)$$

$i = 1, \dots, M$ (modo)

$j = 1, \dots, N$ (plano de medição)

sendo r_j , o termo genérico de um conjunto de N medidas realizadas próximo à frequência crítica, correspondente ao modo i e $r_{\max}$ o termo de maior módulo deste conjunto.

3.2.1 — Implementação do Algoritmo de Han–Powell para Solução do Sistema de Equações Considerando M Modos na Resposta Medida.

A solução do sistema descrito no item anterior, é obtida por Mínimos

Quadrados, utilizando o mesmo algoritmo do item 3.1, com as alterações necessárias à consideração de M restrições, bem como, na rotina de cálculo do gradiente da função objetivo.

Tomando-se a equação (3.16) que é a base do algoritmo de Han-Powell:

$$\mathbf{d} = -\{\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\}^{-1}\{\nabla P(\mathbf{x})^T\}$$

Observamos as alterações que ocorrem com relação ao caso anterior (item 3.1):

- Os vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{d}$, $\{\nabla P(\mathbf{x})\}$ e $\{\nabla E(\mathbf{x})\}$, têm dimensão $(N + 4).M$.
- A matriz $\mathbf{B}$ tem dimensão $(N + 4).M \times (N + 4).M$.
- $\mathbf{A}$, é uma matriz de dimensões $(M) \times (N + 4).M$, onde cada linha, corresponde à derivada de cada uma das restrições. Logo, a matriz $\mathbf{A}$ terá apenas N termos não nulos por linha. Indicando apenas os termos não nulos, temos a seguinte configuração para esta matriz:

$$\begin{bmatrix} [0] & 2\phi_{11} & 2\phi_{12} \dots & 2\phi_{1N} & [0] \\ [0] & 2\phi_{21} & 2\phi_{22} \dots & 2\phi_{2N} & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & 2\phi_{M1} & 2\phi_{M2} \dots & 2\phi_{MN} & [0] \end{bmatrix}$$

A matriz Jacobiana, $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, necessária ao cálculo do gradiente da função objetivo $E(\mathbf{x})$, é obtida pela derivação de cada equação do tipo (3.22). Apresentamos a seguir a primeira linha de $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ que corresponde à derivada da primeira equação real do sistema que é a (3.24), e onde por simplicidade, o subíndice das constantes A, C e D denotam o modo e o seu valor corresponde em cada modo, à primeira velocidade angular utilizada (Ω_1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} &= 8 \Omega_1^2 \omega_1^2 \xi_1 r_1^{\text{Re}} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M - 2 \Omega_1^3 \omega_1 \phi_{11} \epsilon_1^{\text{Im}} A_2 \cdot A_3 \dots A_M \\ &= (8 \Omega_1^2 \omega_1^2 \xi_1 r_1^{\text{Re}} - 2 \Omega_1^3 \omega_1 \phi_{11} \epsilon_1^{\text{Im}}) A_2 \cdot A_3 \dots A_M \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} = (4 \omega_1^3 - 4 \omega_1 \Omega_1^2 + 8 \Omega_1^2 \omega_1 \xi_1^2) A_2 \cdot A_3 \dots A_M \cdot r_1^{\text{Re}}$$

$$- (2 \Omega_1^2 \omega_1 \cdot \epsilon_1^{\text{Re}} + 2 \Omega_1^3 \xi_1 \epsilon_1^{\text{Im}}) \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1^{\text{Re}}} = - \Omega_1^2 (\omega_1^2 - \Omega_1^2) \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1^{\text{Im}}} = - 2 \Omega_1^3 \omega_1 \xi_1 \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{11}} = - (C_1 \epsilon_1^{\text{Re}} + D_1 \epsilon_1^{\text{Im}}) \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{1N}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} = 8 \Omega_1^2 \omega_2^2 \xi_2 r_1^{\text{Re}} \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M - 2 \Omega_1^3 \omega_2 \cdot \phi_{21} \epsilon_2^{\text{Im}} \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} = (4 \omega_2^3 - 4 \omega_2 \Omega_1^2 + 8 \Omega_1^2 \omega_2 \cdot \xi_2^2) A_1 \cdot A_3 \dots A_M \cdot r_1^{\text{Re}}$$

$$- (2 \Omega_1^2 \omega_2 \cdot \epsilon_2^{\text{Re}} + 2 \Omega_1^3 \cdot \xi_2 \cdot \epsilon_2^{\text{Im}}) \phi_{21} \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_2^{\text{Re}}} = - \Omega_1^2 (\omega_2^2 - \Omega_1^2) \phi_{21} \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_2^{\text{Im}}} = - 2 \Omega_1^3 \omega_2 \xi_2 \phi_{21} \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{21}} = - (C_2 \epsilon_2^{\text{Re}} + D_2 \epsilon_2^{\text{Im}}) \cdot A_1 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{22}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{2N}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi_M} = (8 \, \Omega_1^2 \, \omega_M^2 \, \xi_M \, r_1^{\text{Re}} - 2 \, \Omega_1^3 \, \omega_M \, \phi_{M1} \, \epsilon_M^{\text{Im}}) \, A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega_M} = (4 \, \omega_M^3 - 4 \, \omega_M \, \Omega_1^2 + 8 \, \Omega_1^2 \, \omega_M \, \xi_M^2) \, A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1} \cdot r_1^{\text{Re}}$$

$$- (2 \, \Omega_1^2 \, \omega_M \, \epsilon_M^{\text{Re}} + 2 \, \Omega_1^3 \cdot \xi_M \cdot \epsilon_M^{\text{Im}}) \, \phi_{M1} \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_M^{\text{Re}}} = - \Omega_1^2 (\omega_M^2 - \Omega_1^2) \, \phi_{M1} \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_M^{\text{Im}}} = - 2 \, \Omega_1^3 \, \omega_M \cdot \xi_M \cdot \phi_{M1} \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{M1}} = - (C_M \, \epsilon_M^{\text{Re}} + D_M \, \epsilon_M^{\text{Im}}) \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{M-1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{M2}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_{MN}} = 0$$

A linha de ordem $N \times NR$, é obtida pela derivada da primeira equação imaginária do sistema, que é a (3.25) e é dada por:

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \xi_1} = (8 \Omega_1^2 \omega_1^2 \xi_1 r_1^{\text{Im}} + 2 \Omega_1^3 \omega_1 \phi_{11} \epsilon_1^{\text{Re}}) A_2 \cdot A_3 \dots A_k$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \omega_1} (4 \omega_1^3 - 4 \omega_1 \Omega_1^2 + 8 \Omega_1^2 \omega_1 \xi_1^2) A_2 \cdot A_3 \dots A_k \cdot r_1^{\text{Im}}$$

$$- (2 \Omega_1^2 \omega_1 \cdot \epsilon_1^{\text{Im}} - 2 \Omega_1^3 \xi_1 \epsilon_1^{\text{Re}}) \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \epsilon_1^{\text{Re}}} = 2 \Omega_1^3 \omega_1 \xi_1 \cdot \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \epsilon_1^{\text{Im}}} = - \Omega_1^2 (\omega_1^2 - \Omega_1^2) \phi_{11} \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \phi_{11}} = - (C_1 \epsilon_1^{\text{Im}} - D_1 \epsilon_1^{\text{Re}}) A_2 \cdot A_3 \dots A_M$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \phi_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_{NxNR+1}}{\partial \phi_{1N}} = 0$$

e assim por diante.

3.2.2 – Valores Iniciais dos Parâmetros

Os valores iniciais dos parâmetros modais que se deseja identificar, são obtidos da forma descrita no sub-ítem 3.1.4 uma vez que a identificação simultânea de M modos, é feita a partir dos parâmetros identificados modo a modo, como no procedimento descrito no ítem 3.1.

3.2.3 – Esquema de Balanceamento de M Modos Simultaneamente

O esquema de balanceamento de M modos simultaneamente pode ser sumarizado como segue:

- a) O mesmo do item 3.1.7 a)
- b) O mesmo do item 3.1.7 b)
- c) O mesmo do item 3.1.7 c)

com exceção do fato de que os valores dos parâmetros modais identificados, ainda não são finais tendo em vista que eles deverão inicializar a solução do problema de identificação de M modos simultaneamente. O procedimento de **a** até **c** é feito para cada um dos modos de interesse, após o que, passamos ao passo seguinte:

- d) Medida da deformação geométrica do rotor nos N planos de medida, à velocidade angular próxima de zero. Subtração da parcela de deformação geométrica, das respostas medidas, obtendo-se a resposta líquida devida somente ao desbalanceamento.
- e) Identificação dos parâmetros modais dos M modos de interesse, simultaneamente, obtendo-se então os valores finais dos parâmetros modais:

$$\xi_i, \omega_i, \epsilon_i^{\text{Re}}, \epsilon_i^{\text{Im}}, \phi_{ij}, \quad \text{sendo}$$

$$i = 1, \dots, M$$

$$j = 1, \dots, N.$$

- f) O mesmo do item 3.1.7 d)
- g) O mesmo do item 3.1.7 f)

3.2.4 — Simulação da Resposta do Rotor ao Desbalanceamento de M Modos e Identificação Simultânea dos Parâmetros Modais

O algoritmo de identificação simultânea de vários modos foi testado, com respostas dos casos 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 que são provenientes da simulação do desbalanceamento simultâneo dos três primeiros modos do rotor descrito em 3.1.8, e que foram anteriormente utilizados no teste do algoritmo de identificação modo-a-modo.

Tabela 3.5 — Valores da identificação simultânea dos modos I, II e III

Parâmetros	Valores Simulados	Valores Identificados	Valores Corrigidos
ξ_1	.0	.0	—
ω_1	134.815	134.81492	—
ϵ_1^{Re}	.008	.0079861	.00800376
ϵ_1^{Im}	.00	0.0	0.0
ϕ_{11}	.344685	.345228	.344467
ϕ_{12}	.487783	.48886	.487783
ϕ_{13}	.3444662	.345258	.3444974
ξ_2	0	0	—
ω_2	519.0765	519.07327	—
ϵ_2^{Re}	.01	.010127	.00999743
ϵ_2^{Im}	.00	.0.0	0.0
ϕ_{21}	— .472	— .465961	— .472
ϕ_{22}	— .235595E—5	— .293487E—6	— .28973E—6
ϕ_{23}	.472	.4659568	.472
ξ_3	0	0	—
ω_3	1083,676	1083,6748	—
ϵ_3^{Re}	.012	.0123304	.011997
ϵ_3^{Im}	.0	.0.0	0.0
ϕ_{31}	.3436	.3343537	.343644
ϕ_{32}	— .429117	— .4175155	— .429117
ϕ_{33}	.3436	.3343407	.343631

Os resultados obtidos e que foram publicados em D. L. Zoratto [22], estão mostrados na Tabela 3.5 verificando-se uma aparente discrepância entre os valores identificados e simulados. Verifica-se que o produto $\epsilon.\phi$ que segundo pode ser visto pela expressão (2.4) reproduz o valor da resposta, segundo pode ser visto pela expressão (2.4) é muito próximo do simulado. Isto é mostrado na coluna de valores corrigidos, que foram obtidos multiplicando-se os valores identificados de ϵ pelo inverso do fator que relaciona o valor dos modos simulados e identificados.

Como alternativa para a identificação de sistemas de alta densidade modal, apresentamos no Apêndice A o desenvolvimento de um procedimento de identificação com base nas derivadas das respostas medidas conforme é sugerido por C. W. LEE e outros [20].

CAPÍTULO 4

BALANCEAMENTO EM SISTEMAS COM MODOS NÃO PLANARES

Neste capítulo investigamos a possibilidade de balancear pelo método modal, sistemas que apresentem modos não planares, que, segundo M. S. DARLOW [4] constitui-se em uma das limitações do método. Este é o caso, por exemplo, de rotores suportados por mancais elásticos anisotrópicos, onde a rigidez resultante, segundo duas direções perpendiculares, são desiguais. Como pode ser visto pela análise de um monorotor, suportado por mancais anisotrópicos, que é feita a seguir, ocorrem duas frequências críticas próximas uma da outra ao invés de apenas uma, e a amplitude do deslocamento que é desigual segundo duas direções perpendiculares, determinará órbitas elípticas para o movimento do centro do eixo ao invés de órbitas circulares, como foi considerado até aqui.

No caso geral de um rotor com múltiplos discos, em que cada plano transversal ao eixo pode apresentar orientação diferenciada dos eixos—principais da trajetória elíptica, verifica-se que a deflexão do eixo poderá ser não planar, na forma mostrada na Figura 4.1. Neste caso, as medidas de deslocamento efetuadas como descrito no item 2.3, nos diversos planos de medição, não guardarão relação entre si, visto que, as trajetórias elípticas estarão sendo abordadas em posições angulares diferentes em cada um dos planos de medida.

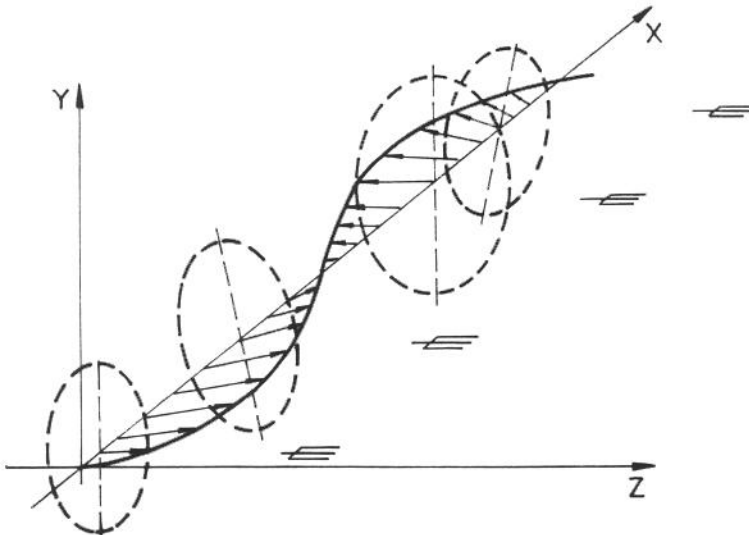


Fig. 4.1 — Modo não planar

4.1 — RESPOSTA DE UM MONOROTOR SUPORTADO EM MANCAIS ANISOTRÓPICOS

Pela análise de um monorotor não amortecido suportado em mancais anisotrópicos apresentada por GASCH [23] tem-se uma idéia qualitativa de como se apresenta a resposta de um rotor mais complexo.

Seja o rotor da Figura 4.2 suportado nas extremidades com mancais de rigidez $k_y \neq k_z$.

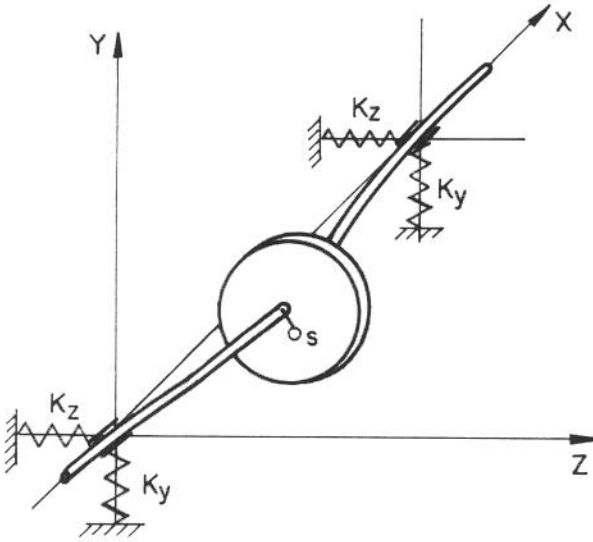


Fig. 4.2 — Monorotor em mancais anisotrópicos

A rigidez equivalente nas direções y e z será dada por:

$$k'_y = \frac{2k_y \cdot k}{2k_y + k}; \quad k'_z = \frac{2k_z \cdot k}{2k_z + k}$$

onde k é a rigidez do eixo.

Equacionando segundo cada um dos graus de liberdade (vide Figura 4.3) temos:

$$m\ddot{z}_s = -k'_z z_e$$

$$m\ddot{y}_s = -k'_y y_e \quad (4.1)$$

$$\oplus \ddot{\varphi} = \epsilon(y_e k'_y \cos \varphi - z_e k'_z \sin \varphi) + T$$

Consideremos o estado estacionário em que:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \Omega; \quad \varphi = \Omega t + \beta$$

e que o torque T é apenas suficiente para vencer o atrito e ainda, escolhendo um instante inicial apropriado de forma a anular β , têm-se:

$$y_s = y_e + \epsilon \sin \varphi$$

$$z_s = z_e + \epsilon \cos \varphi$$

Logo:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_e + k'_z \cdot z_e = \epsilon \Omega^2 m \cos \Omega t \\ m\ddot{y}_e + k'_y \cdot y_e = \epsilon \Omega^2 m \sin \Omega t \end{cases} \quad (4.2)$$

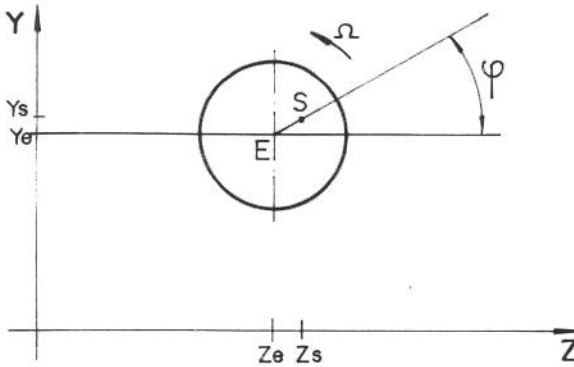


Fig. 4.3 – Posicionamento da massa excêntrica s

A solução completa do sistema (4.2) é:

$$\begin{aligned}
y_e &= Y_{e_0} \cos(\omega_y t + \gamma_y) + \epsilon \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_y^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \\
z_e &= Z_{e_0} \cos(\omega_z t + \gamma_z) + \epsilon \frac{\Omega^2}{\omega_z^2 - \Omega^2} \cos \Omega t
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Os primeiros termos destas expressões tendem a se anular com o tempo na presença de amortecimento, que não está sendo considerado no equacionamento.

Examinando-se apenas as parcelas de (4.3) correspondentes à excentricidade ϵ têm-se:

$$y_e = Y_e \sin \Omega t; \quad z_s = Z_e \cos \Omega t \tag{4.4}$$

ou seja:

O movimento de E (centro do eixo) é uma elipse cujos eixos principais coincidem com a direção das coordenadas Y e Z. Então têm-se:

$$\left(\frac{z_e}{Z_e} \right)^2 + \left(\frac{y_e}{Y_e} \right)^2 = 1 \tag{4.5}$$

Sendo Z_e e Y_e os semi-eixos principais da trajetória elíptica descrita pelo centro E.

$\omega_z = \sqrt{k'_z/m}$ e $\omega_y = \sqrt{k'_y/m}$, são as duas frequências críticas de valor menor do que se os mancais fossem rígidos visto que neste caso $\omega = \sqrt{k/m}$ sendo $k > k'_z > k'_y$ conforme mostra a Figura 4.4

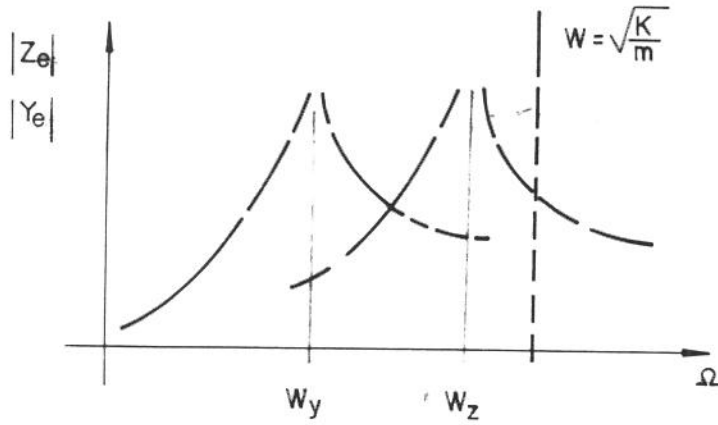


Fig. 4.4 — Frequências críticas do monorotor suportado em mancais anisotrópicos

4.2 — IDENTIFICAÇÃO DO MODO NÃO PLANAR

A trajetória elíptica pode ser determinada por meio de medidas de deslocamento do rotor segundo duas direções quaisquer Z e Y perpendiculares entre si, colocando-se um dos sinais no eixo horizontal (Z) e o outro no eixo vertical (Y) de um osciloscópio, conforme mostra a Figura 4.5.

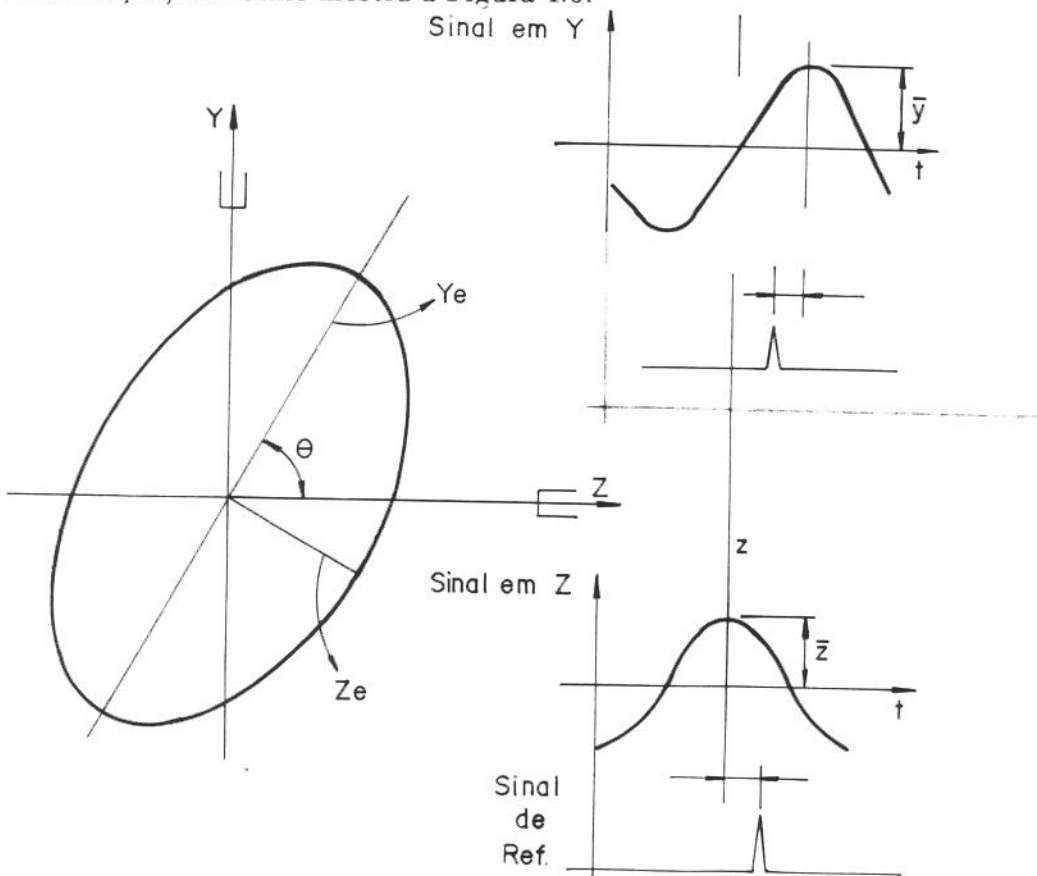


Fig. 4.5 — Composição dos sinais medidos nas direções perpendiculares Z e Y

O método está descrito em T. G. Beckwith [25].

Determina-se, igualmente a inclinação dos eixos da elipse em relação às direções dos eixos de medida Z e Y. Assim θ_1 é o ângulo que o eixo Y_e faz com o eixo Z e θ_2 é o seu complemento, ou seja, é o ângulo que Y_e faz com o eixo Y. Então: $\theta_2 = 90^\circ - \theta_1$ conforme mostra a Figura 4.6.

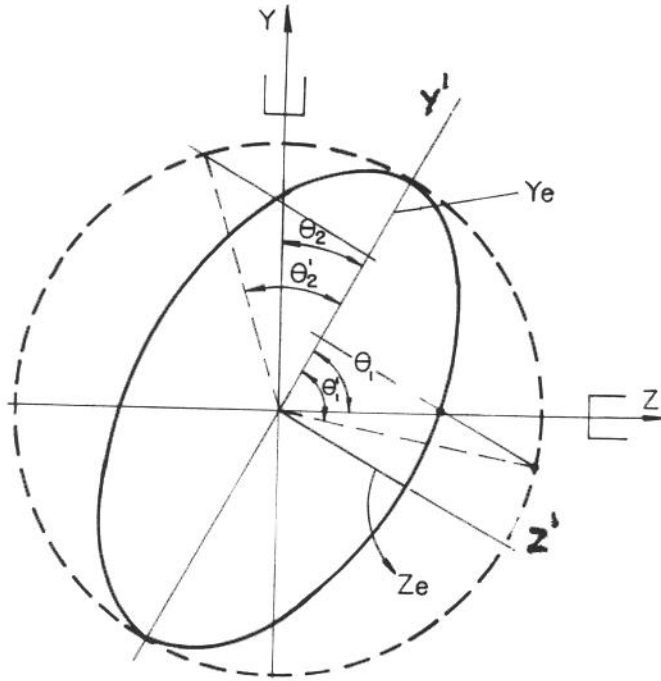


Fig. 4.6 — Indicação dos ângulos θ_1 e θ_2 que definem a posição da trajetória, elíptica e dos ângulos derivados θ'_1 e θ'_2

Utilizando as equações paramétricas da elipse, as coordenadas de qualquer ponto sobre a trajetória elíptica podem ser expressas na forma:

$$\begin{aligned} Z^{\text{Re}} &= Z_e \sin \theta'_1 ; & Z^{\text{Im}} &= Y_e \cos \theta'_1; \\ Y^{\text{Re}} &= -Z_e \sin \theta'_2 ; & Y^{\text{Im}} &= Y_e \cos \theta'_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde se fez coincidir o sistema de referência Z' , Y' com os eixos principais da elipse.

Os ângulos θ'_1 e θ'_2 são derivados de θ_1 e θ_2 pelas expressões:

$$\theta_1' = \arctg\left(\frac{Y_e}{Z_e} \operatorname{tg} \theta_1\right) \quad (4.7)$$

$$\theta_2' = \arctg\left(\frac{Y_e}{Z_e} \operatorname{tg} \theta_2\right) = \arctg\left(\frac{Y_e}{Z_e} \operatorname{cotg} \theta_1\right)$$

A amplitude do deslocamento nas direções Z e Y podem ser expressas em números complexos, respectivamente, por:

$$F_z = Z_e \operatorname{sen} \theta_1' + j Y_e \cos \theta_1' \quad (4.8)$$

e $F_y = Z_e \operatorname{sen} \theta_2' + j Y_e \cos \theta_2'$

No caso que analisamos até agora, a excentricidade de massa foi considerada coincidente com a referência ($\alpha = 0$) e se supõe não existir amortecimento ($\xi = 0$).

Por esta razão, os semi-eixos Y_e e Z_e coincidem com os eixos de referência Y' e Z' , respectivamente, e que são também as direções de menor e maior rigidez.

Quando $\alpha \neq 0$ existirá um defasamento angular α entre os semi-eixos da elipse e os eixos de referência Y' e Z' .

Quando existe amortecimento, ocorre um defasamento γ , entre o deslocamento lateral e a força que o produz (no caso, o desbalanceamento de massa) o que corresponde a uma inclinação da elipse em relação às direções de menor e maior rigidez no sentido oposto ao giro do rotor. No caso geral em que $\alpha \neq 0$ e $\xi \neq 0$ o defasamento entre os semi-eixos da trajetória elíptica e os eixos de referência Y' e Z' será de $\beta = \alpha - \gamma$ tal como indicado na Figura 4.7.

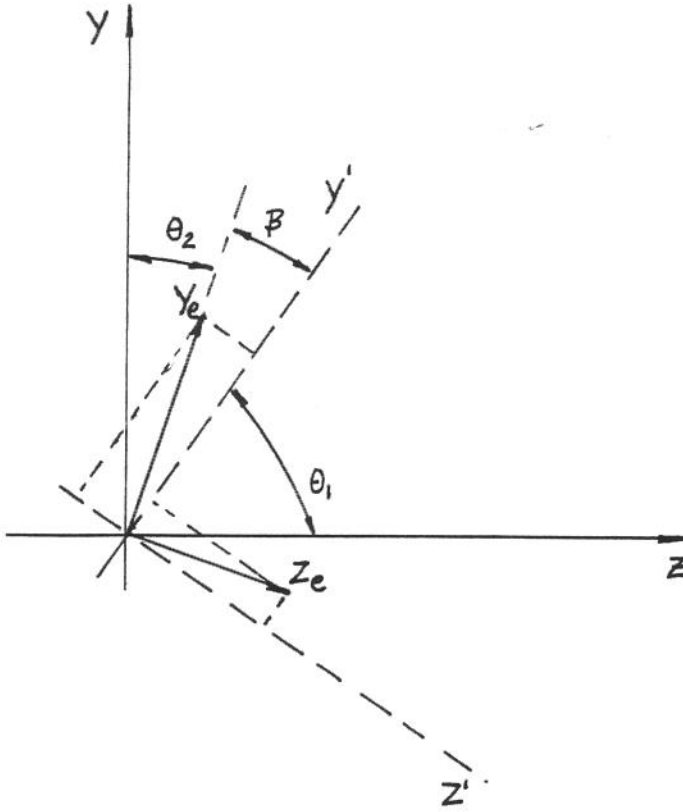


Fig. 4.7 — Defasamento entre os semi-eixos da trajetória elíptica e os eixos de referência (caso $\alpha \neq 0$, $\xi \neq 0$)

Neste caso as expressões (4.8) são escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 F_z &= (|Z_e| \cos \beta + j|Z_e| \sin \beta) \sin \theta'_1 + \\
 &+ (j|Y_e| \cos \beta - |Y_e| \sin \beta) \cos \theta'_1 \\
 F_y &= (-|Z_e| \cos \beta - j|Z_e| \sin \beta) \sin \theta'_2 + \\
 &+ (j|Y_e| \cos \beta - |Y_e| \sin \beta) \cos \theta'_2
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Os semi-eixos Z_e e Y_e podem ser representados pelos números complexos:

$$Z_e = \frac{\Omega^2(\epsilon^{\text{Re}} + j\epsilon^{\text{Im}})}{a^2\omega_y^2 - \Omega^2 + 2j\xi_y\omega_y\Omega}$$

$$Y_e = \frac{\Omega^2(\epsilon^{\text{Re}} + j\epsilon^{\text{Im}})}{\omega_y^2 - \Omega^2 + 2j\xi_y\omega_y\Omega} \quad (4.10)$$

onde $\omega_z = a\omega_y$ $a > 1$ e $\xi_y\omega_y = \xi_z\omega_z$

implicando esta última igualdade, que estamos considerando a mesma constante de amortecimento nas duas direções i.é.: $C_i = C_y = C_z$. Assim:

$$\xi_y = \frac{C_i}{C_{cy}} \quad \xi_z = \frac{C_i}{C_{cz}}$$

$$C_{cy} = 2m_i\omega_y \text{ logo:}$$

$$C_{cz} = 2m_i\omega_z \quad \xi_y = \frac{C_i}{C_{cz}} = a \cdot \xi_z$$

$$\text{ou} \quad \xi_z = \frac{\xi_y}{a} \therefore \xi_y \cdot \omega_y = \xi_z \cdot \omega_z$$

Desmembrando as equações (4.10) em componentes reais e imaginárias e substituindo na primeira das equações (4.9) obtemos:

$$\begin{aligned} F_z = p_1 \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}} + D_1 \epsilon^{\text{Im}}}{A_1} + p_1 j \frac{C_1 \epsilon^{\text{Im}} - D_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \\ + q_1 j \frac{C\epsilon^{\text{Re}} + D\epsilon^{\text{Im}}}{A} + q_1 \frac{C\epsilon^{\text{Im}} - D\epsilon^{\text{Re}}}{A} \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde:

$$A = \omega_y^4 + \Omega^4 - 2\omega_y^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega_y^2\xi_y^2$$

$$A_1 = a^4\omega_y^4 + \Omega^4 - 2\omega_y^2a^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega_y^2\xi_y^2$$

$$C = \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2)$$

$$C_1 = \Omega^2(a^2 \omega^2 - \Omega^2)$$

$$D = 2\Omega^3 \omega_y \zeta_y$$

$$D_1 = 2\Omega^3 \omega_y \zeta_y = D$$

$$p_1 = \text{sen } \theta_1$$

$$q_1 = \text{cos } \theta_1$$

A medida na direção Y determina uma equação semelhante onde substituímos os fatores p_1 e q_1 por $p_2 = -\text{sen } \theta_2$ e $q_2 = \text{cos } \theta_2$.

Resulta portanto, para cada medida realizada um par de equações, que são expressas na forma:

$$\begin{aligned} r^{\text{Re}} &= p \cdot \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}} + D_1 \epsilon^{\text{Im}}}{A_1} \phi - q \cdot \frac{C \epsilon^{\text{Im}} - D \epsilon^{\text{Re}}}{A} \phi \\ r^{\text{Im}} &= q \cdot \frac{C \epsilon^{\text{Re}} + D \epsilon^{\text{Im}}}{A} \phi + p \cdot \frac{C_1 \epsilon^{\text{Im}} - D_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde:

ϕ é o valor do modo que será identificado conjuntamente com os demais parâmetros modais. É de se observar que, para valores iniciais do modo nos diferentes planos de medida é tomado o semi-eixo maior da trajetória elíptica em cada plano de medida. A norma do modo é calculada da mesma forma como no item 3.1.1, sendo que, no presente modelo é considerado o mesmo modo em ambas direções (rigidez máxima e mínima) o que corresponde à trajetórias elípticas com mesma relação entre semi-eixos. O caso geral, em que esta relação não se mantém constante nos vários planos de medida, pode ser tratado com a mesma sistemática, sendo necessário no entanto, identificar os modos nas duas direções separadamente determinando um número maior de parâmetros a identificar, bem como uma nova restrição a ser obedecida pelo sistema.

Ao acrescentar a deformação geométrica modal, cujas componentes são c^{Re}

e c^{Im} , ficamos com as seguintes expressões que vão constituir o sistema utilizado na identificação de modos não planares:

$$\begin{aligned}
 & -AA_1r^{\text{Re}} + AA_1c^{\text{Re}}\phi + p.A(C_1\epsilon^{\text{Re}} + D_1\epsilon^{\text{Im}})\phi - \\
 & -qA_1(C\epsilon^{\text{Im}} - D\epsilon^{\text{Re}})\phi = 0 \\
 & -AA_1r^{\text{Im}} + AA_1c^{\text{Im}}\phi + qA_1(C\epsilon^{\text{Re}} + D\epsilon^{\text{Im}})\phi + \\
 & + pA(C_1\epsilon^{\text{Im}} - D_1\epsilon^{\text{Re}})\phi = 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

O vetor de parâmetros a identificar é dado por:

$$\{\xi_y, \omega_y, c^{\text{Re}}, c^{\text{Im}}, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, a, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$$

ou seja: $N + 7$ parâmetros a identificar excluindo-se o coeficiente de Lagrange sendo N o número de planos de medida.

O número de equações necessárias para a identificação é portanto:

$$2 \times N \times NR \geq N + 7$$

ou $NR = \frac{N+7}{2N}$ é o número mínimo de velocidades angulares necessárias.

4.3— IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE HAN-POWELL PARA O CASO DE MODOS NÃO PLANARES

A implementação do algoritmo é feita seguindo-se a mesma sistemática do caso de identificação modo-a-modo relatado no item 3.1. Variando substancialmente, apenas a matriz Jacobiana, cuja primeira linha é expressa pela derivada da primeira equação real. Assim:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = - (8\Omega^2\omega^2\xi) (A_1+A) (r^{\text{Re}}-c^{\text{Re}}\phi)$$

$$\begin{aligned}
& + p.A(2\Omega^3\omega) \epsilon^{\text{Im}} \phi + qA_1(2\Omega^3\epsilon^{\text{Re}}) \phi \\
& + 8\Omega^2\omega^2\xi \cdot \phi \{p(C_1\epsilon^{\text{Re}} + D_1\epsilon^{\text{Im}}) - q(C\epsilon^{\text{Im}} - D\epsilon^{\text{Re}})\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = - \{A(4a^4\omega^3 - 4a^2\omega\Omega^2 + 8\omega\Omega^2\xi^2) +$$

$$- A_1(4\omega^3 - 4\omega\Omega^2 + 8\omega\Omega^2\xi^2)\} (r^{\text{Re}} + c^{\text{Re}} \phi)$$

$$+ p.A(2\omega\Omega^2a^2\epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3\xi\epsilon^{\text{Im}}) \phi +$$

$$+ p(C_1\epsilon^{\text{Re}} + D_1\epsilon^{\text{Im}}) \cdot (4\omega^3 - 4\Omega^2\omega - 8\Omega^2\omega\xi^2) \phi -$$

$$- q.A_1(2\omega\Omega^2\epsilon^{\text{Im}} - 2\Omega^3\xi\epsilon^{\text{Re}}) \phi$$

$$- q(C\epsilon^{\text{Im}} - D\epsilon^{\text{Re}}) (4a^4\omega^3 - 4a^2\omega\Omega^2 + 8\Omega^2\omega\xi^2) \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial c^{\text{Re}}} = AA_1\phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial c^{\text{Im}}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon^{\text{Re}}} = (p.AC_1 + q.A_1.D) \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon^{\text{Im}}} = (p.A.D_1 - q.A_1.C) \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = A.(4a^3\omega^4 - 4a\omega^2\Omega^2) (c^{\text{Re}} \cdot \phi - r^{\text{Re}})$$

$$+ p.A(2\Omega^2a\omega^2\epsilon^{\text{Re}}) \phi -$$

$$- q(C\epsilon^{\text{Im}} - D\epsilon^{\text{Re}}) (4a^3\omega^4 - 4a\omega^2\Omega^2) \cdot \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_1} = A A_1 c^{\text{Re}} + A_1 p (C_1 \epsilon^{\text{Re}} + D_1 \epsilon^{\text{Im}}) -$$

$$q A_1 (C \epsilon^{\text{Im}} - D \epsilon^{\text{Re}})$$

.....

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_N} = 0$$

4.4 – TESTE DO ALGORITMO A PARTIR DE RESPOSTAS SIMULADAS

O algoritmo desenvolvido para a identificação de modos não planares foi testado inicialmente para um caso particular que não oferece dificuldade para simular as respostas a utilizar e por isso se constitui em um teste expedito. É o caso em que $\omega_y = \omega_z$ e portanto $a = 1$ e as orbitas são circulares com o ângulo ($\alpha = 0$) entre a massa desbalanceadora e a referência, e $\xi = 0$. As expressões (4.5) nas direções z e y de medida reduzem-se à:

$$r_z^{\text{Re}} = \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi; \quad r_z^{\text{Im}} = 0$$

$$r_y^{\text{Re}} = 0; \quad r_y^{\text{Im}} = \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi$$

visto que: $C = C_1$ e $A = A_1$.

Os resultados estão indicados na Tabela 4.1 (caso PO) em que se utilizou o mesmo valor de resposta nas duas direções de medida para as velocidades angulares: 120, 125, 130, 135 rad/s com $\epsilon = \epsilon^{\text{Re}} = 8 \cdot 10^{-3}$.

Tabela 4.1 – Resultados da identificação paramétrica do par do modo I

Parâmetros	Caso PO	
	120, 125, 130, 135 rad/s	
	Simulado	Identificado
ξ	0.0	
ω	134.815	134.815
c^{Re}	0.0	.331055 E-8
c^{Im}	0.0	-.258232 E-8
ϵ^{Re}	8.E-3	7,99856 E-3
ϵ^{Im}	0.0	.2981 E-8
a	1.0	1.00000008
ϕ_1	.3444685	.34406166
ϕ_2	.487783	.4877874
ϕ_3	.3444662	.34406166

Testou-se a seguir com o caso ainda particular, em que a direção dos eixos da trajetória elíptica coincidem com as direções de medida. Neste caso: $\theta_1 = \theta_1^i = 90^\circ$ e $\theta_2 = \theta_2^i = 0^\circ$ e as expressões (4.5) simplificam-se para:

$$r_z^{\text{Re}} = \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi; \quad r_z^{\text{Im}} = 0$$

para medida de resposta na direção do eixo z, e

$$r_y^{\text{Re}} = 0; \quad r_y^{\text{Im}} = \frac{C \epsilon^{\text{Re}}}{A} \phi$$

para a medida de resposta na direção do eixo y.

As respostas utilizadas na identificação foram simuladas para valores de $\epsilon^{\text{Re}} = \epsilon = 8 \times 10^{-3}$ utilizando-se em cada plano de medida, o valor do modo

previamente calculado e uma relação $a = \omega_z/\omega_y = 1.1$.

Os resultados obtidos estão mostrados na continuação da Tabela 4.1 (caso P1) e correspondem a identificação do par do modo I.

A mesma Tabela 4.1 mostra os resultados do caso P2 em que os eixos principais das trajetórias elípticas não coincidem com a direção de medida, sendo além disto, diferente a sua orientação em cada plano de medida, determinando o assim chamado modo não planar.

As respostas utilizadas, na identificação deste caso, foram obtidas gerando inicialmente as amplitudes nas duas direções principais de rigidez, adotando a mesma relação $a = \omega_z/\omega_y = 1.1$ do caso anterior, e calculando-se os parâmetros p e q em cada medida a partir da determinação dos ângulos θ_1 e θ_2 pelas expressões:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{Y_e}{Z_e} \operatorname{tg} \theta_1\right)$$

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{Y_e}{Z_e} \operatorname{tg} \theta_2\right)$$

Sendo θ_1 e θ_2 previamente estabelecidos e Y_e/Z_e a relação entre as amplitudes nas duas direções principais de rigidez.

O valor de ϵ é o mesmo utilizado no caso P1, ou seja: $\epsilon = \epsilon^{\text{Re}} = 8 \times 10^{-3}$. Portanto, na direção Z, temos:

$$r_z^{\text{Re}} = p_1 \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi$$

$$r_z^{\text{Im}} = q_1 \frac{C \epsilon^{\text{Re}}}{A} \phi$$

e na direção Y temos:

$$r_y^{\text{Re}} = p_2 \frac{C_1 \epsilon^{\text{Re}}}{A_1} \phi$$

$$r_y^{Im} = q_2 \frac{C}{A} \epsilon^{Re} \phi$$

Tabela 4.1 – Resultados da identificação paramétrica do par do modo I
(continuação)

Parâmetros	Caso P1		Caso P2	
	105,110,115,120,125,130		105,110,115,120,125,130	
	rad/s		rad/s	
	Simulado	Identificado	Simulado	Identificado
ξ	0.0	−.865444E−8	0.0	−.743219E−9
ω	134.815	134.815011	134.815	134.815018
c^{Re}	0.0	−.891203E−9	0.0	−.3973289E−9
c^{Im}	0.0	.4867685E−9	0.0	.1379936E−8
ϵ^{Re}	8 x 10 ^{−3}	7.9999E−3	8 x 10 ^{−3}	8.01E−3
ϵ^{Im}	0.0	.926032E−9	0.0	.4236E−9
a	1.1	1.0999998	1.1	1.09999
ϕ_1	.3444684	.34447	.3444684	.3440356
ϕ_2	.4877837	.487787	.4877837	.48871709
ϕ_3	.3444659	.3444665	.3444659	.3440313

CAPÍTULO 5

SENSIBILIDADE DO ALGORITMO A ERROS EXPERIMENTAIS

O teste do algoritmo que é feito a partir de respostas simuladas do rotor e que está descrito nos capítulos anteriores, não considera a existência de erros experimentais que podem afetar a identificação correta dos parâmetros modais.

Sob o ponto de vista prático é importante conhecer o nível de excentricidade residual que deve ser esperado após a adição das massas balanceadoras determinadas a partir de respostas medidas com erro de desvio padrão conhecido. Este parâmetro está ligado a sensibilidade do algoritmo a erros de medida, ou seja, é função de como estes erros são propagados no processo de identificação. Para um dado conjunto de medidas o valor da excentricidade residual dependerá da combinação dos erros que efetivamente ocorrem em cada medida e portanto se o algoritmo for aplicado a um grande número de conjuntos de medidas experimentais será possível obter uma distribuição estatística da excentricidade residual e assim também o seu valor esperado com um nível de certeza desejado. Este procedimento torna-se bastante oneroso em razão do grande número de paradas do equipamento para operações de medida e adição de massas balanceadoras.

T. IWATSUBO [12] apresenta um desenvolvimento analítico para a determinação desta distribuição estatística a partir do conhecimento do desvio padrão das medidas aplicando-o para a comparação dos Métodos de Coeficientes de Influência e Modal quanto a sensibilidade a erros de medida. Alternativamente A. G. CASTRO [9] e D. L. ZORATTO & A. G. CASTRO [10] apresentam um método em que esta distribuição é obtida pela aplicação do algoritmo a um grande número de novos conjuntos de medidas obtidos artificialmente pela adição de erros aleatórios a um conjunto de medidas isento de erros, tomado como referência. Este último método, com as necessárias adaptações que são descritas neste capítulo, foi aplicado para a determinação da sensibilidade a erros de medida da versão do algoritmo de identificação modo a modo em função do desvio padrão das medidas. O valor deste desvio padrão, por sua vez, é possível de ser estimado a priori pelo exame dos fatores que podem se constituir em fonte de erro em um dado sistema de medida.

5.1 – POSSÍVEIS FONTES DE ERROS NAS MEDIDAS DE RESPOSTA

As medidas de resposta dinâmica de um rotor desbalanceado são normalmente feitas com sensores de proximidade indutivos, que apresentam uma faixa de linearidade relativamente estreita (da ordem de 1 mm, para os sensores da Shenck utilizados por A. G. CASTRO [9], por exemplo) podendo resultar daí, erros de não-linearidade em algumas medidas. A fase de referência é medida a partir do conhecimento da distância entre o pico do sinal, correspondente ao deslocamento lateral do rotor, e um sinal de referência conforme esta indicado nas Figuras 2.3 e 2.4. Esta medida depende da nitidez com que se apresenta o pico do sinal do deslocamento lateral, que pode ser mascarado pela presença de componentes de frequência mais elevada induzidas pela base de sustentação do rotor, ou introduzidas pelo próprio circuito de medida, e também por componentes de frequência próxima à de interesse, originadas, por exemplo, pelo acoplamento motor-rotor.

Os valores medidos de amplitude e fase podem ainda ser afetados por erros oriundos da variação de rotação durante a realização das medidas, o que ocasiona transientes de aceleração e desaceleração.

Em laboratório é possível lançar mão de procedimentos para reduzir a influência de alguns destes erros experimentais tais como os utilizados por A. G. CASTRO [9] em um protótipo experimental de eixo vertical onde a estrutura rígida em que é montado o rotor repousa sobre uma manta de material visco-elástico bastante flexível, evitando a vibração induzida pela base; foi utilizado também um dispositivo de fixação do motor que permite o ajuste fino do seu alinhamento com o rotor, bem como um controle fino de rotação. É possível ainda a utilização de técnicas de processamento de sinal, como feito por J. V. FERREIRA [7] em que o sinal de interesse é extraído do sinal com ruído.

A maior ou menor eficiência destes procedimentos, em amenizar a influência dos diversos fatores de erro, determinará a qualidade das medidas de resposta a serem utilizadas na identificação paramétrica, da qual resultarão as massas balanceadoras a serem agregadas ao rotor.

O desvio padrão das medidas será maior quando elas são realizadas no campo onde alguns dos procedimentos acima mencionados podem não ser realizáveis.

5.2— GERAÇÃO DE "NOVOS CONJUNTOS DE MEDIDA" PELO MÉTODO DE MONTE CARLO

Uma grande série de novos "conjuntos de medida" são gerados por um Método de Monte Carlo, tomando-se como referência um dado conjunto de respostas simuladas. Este conjunto que chamamos de referência, pode ser entendido como "um conjunto de medidas experimentais isentas de erro", pois o algoritmo de identificação aplicado a ele dá como resultado os valores da excentricidade modal utilizados para simulá-lo. Cada "novo conjunto de medidas" é obtido agregando-se erros às componentes real e imaginária de cada uma das medidas que constituem o conjunto de referência.

O método utilizado, está descrito em JAMES V. BECK, KENNET J. ARNOLD [13] e segue o seguinte roteiro:

- 1) utiliza-se uma rotina de geração de números pseudo-randômicos (δ) dentro do intervalo 0 e 1;
- 2) assume-se que os erros de medida seguem uma distribuição normal e portanto devemos acrescentar a uma dada medida do conjunto de referência um erro que será $e = r.\eta.\sigma$ onde σ é o desvio padrão da distribuição, η um número associado a um número pseudo-randômico definido acima entre 0 e 1, e r o valor da medida do conjunto de referência;
- 3) a obtenção de uma seqüência de observações pseudo-randômicas em uma população normal é feita pela utilização da transformação de BOX-MULLER [14]

$$\eta_1 = (-2.\ln \delta_1)^{1/2} \cos(2\pi\delta_2)$$

$$\eta_2 = (-2.\ln \delta_1)^{1/2} \sin(2\pi\delta_2)$$

sendo δ_1 e δ_2 dois números pseudo-randômicos obtidos em seqüência.

η_1 e η_2 são números pseudo-randômicos de uma população com distribuição normal de valor esperado 0 e variância 1.

A Tabela 5.1 mostra uma seqüência de números pseudo-randômicos δ e η sendo estes últimos obtidos pela transformação de Box-Muller.

A Tabela 5.2 mostra a distribuição de números pseudo-randômicos η obtidos com tamanhos de amostras 5, 100, 1000, 10000, 20000 números pseudo-randômicos, observando-se que os valores obtidos são muito próximos à distribuição normal, mesmo para tamanho de amostra relativamente pequeno.

A tabela 5.3 mostra a distribuição obtida para os mesmos tamanhos de amostra quando se toma o número pseudo-randômico δ (entre 0 e 1) como o valor da função de distribuição normal $\tau(r)$, que permite fazer a associação entre δ e η . Assim, por exemplo, ao intervalo de .0013 e .9987 de δ , corresponde o intervalo -3.5 a 3.5 de η . Verifica-se que com este método, que foi utilizado por A. G. CASTRO [9], D. L. ZORATTO, A. G. CASTRO [10] obtém-se valores muito semelhantes aos obtidos pelo método de Box-Muller tendo sido preferido este último, pela concisão de execução.

A Tabela 5.4 mostra três exemplos de novos conjuntos de 24 medidas obtidos a partir do conjunto sem erro constante da primeira coluna, pela adição de erros aleatórios com desvio padrão de 2%.

Tabela 5.1 — Sequência de números pseudo—randômicos obtidos pela transformação de Box—Muller

δ	η	δ	η
0.00184	3.01310	0.81138	−1.87566
0.56725	0.21779	0.78278	−1.04234
0.20030	−1.72335	0.45541	0.49587
0.05548	−2.35268	0.53321	−0.49817
0.63466	−0.54669	0.65283	−0.78133
0.12299	1.88972	0.06285	0.78759
0.27686	1.13719	0.12445	1.12930
0.56348	−1.06226	0.47955	0.13727
0.72011	0.29394	0.80907	−0.75519
0.10268	−0.55748	0.70793	−2.05950
0.10920	−1.63468	0.39159	1.32523
0.40951	−0.76782	0.65258	−1.09363
0.84922	0.26995	0.82826	−0.50398
0.61175	−0.47237	0.67096	−0.87162
0.75985	0.13792	0.77979	−0.72818
0.92540	0.29285	0.11654	0.26326
0.67645	0.50083	0.15416	0.72866
0.97924	0.13541	0.13504	0.15367
0.67006	0.03634	0.75646	−0.89412
0.89379	0.28945	0.85459	−0.37520
0.05414	1.94772	0.89932	−1.42787
0.82519	0.60174	0.03862	0.14896
0.10687	1.84559	0.08118	1.03256
0.43418	1.07375	0.90618	−0.71816
0.08684	−2.07200	0.55668	−0.77079
0.12627	−0.21645	0.26676	2.02281
0.87699	−0.40855	0.60311	−0.30920
0.42727	0.89753	0.12919	0.94611
0.33159	1.41089	0.94923	−0.46599

Tabela 5.2 – Distribuição dos números pseudo–randômicos η obtidos pela transformação de Box–Muller para diversos tamanhos de amostra S

η		(δ) Tamanho da Amostra			
		100	1000	10000	20000
	> 3.5	0	0	4	4
$2.5 <$	< 3.5	0	2	66	110
$1.5 <$	< 2.5	5	60	612	1188
$0.5 <$	< 1.5	22	237	2420	4851
$-0.5 <$	< 0.5	41	401	3844	7708
$-1.5 <$	< -0.5	25	230	2362	4802
$-2.5 <$	< -1.5	6	64	625	1211
$-3.5 <$	< -2.5	1	6	67	122
	< -3.5	0	0	0	4

Tabela 5.3 – Distribuição de números pseudo–randômicos η obtidos por associação de δ com o valor da função de distribuição normal

η		(S) Tamanho da Amostra			
		100	1000	10000	20000
	> 3.5	0	0	3	8
$2.5 <$	< 3.5	1	2	77	120
$1.5 <$	< 2.5	9	62	623	1212
$0.5 <$	< 1.5	26	251	2364	4800
$-0.5 <$	< 0.5	34	362	3816	7640
$-1.5 <$	< -0.5	22	266	2422	4897
$-2.5 <$	< -1.5	7	51	616	1214
$-3.5 <$	< -2.5	1	6	75	103
	< -3.5	0	0	4	6

Tabela 5.4 – Conjuntos de medidas derivados pela adição aleatória de erros com desvio padrão de 2.00%

Conjunto sem Erro	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3
0.169651E-01	0.171715E-01	0.174215E-01	0.171882E-01
0.239222E-01	0.232553E-01	0.240555E-01	0.242370E-01
0.167247E-01	0.164930E-01	0.167601E-01	0.163935E-01
0.366463E-01	0.362838E-01	0.365055E-01	0.372095E-01
0.517355E-01	0.530842E-01	0.506291E-01	0.534021E-01
0.363490E-01	0.363396E-01	0.354219E-01	0.366353E-01
-.100613E+01	-.0985707E+01	-.100540E+01	-.0991339E+01
-.142490E+01	-.143510E+01	-.140611E+01	-.144254E+01
-.100644E+01	-.102613E+01	-.100284E+01	-.102232E+01
-.377618E+01	-.375673E+01	-.361099E-01	-.379339E-01
-.536556E-01	-.535560E+01	-.540285E-01	-.553991E-01
-.381128E-01	-.392538E-01	-.381246E-01	-.386219E-01
-.262586E-03	-.280966E-03	-.267204E-03	-.260977E-03
0.378426E-04	0.389762E-04	0.386671E-04	0.379849E-04
0.204994E-03	0.201333E-03	-0.203375E-03	0.210424E-03
-.291478E-03	-.297424E-03	-.275976E-03	-.275790E-03
0.428263E-04	0.428246E-04	0.418656E-04	0.421320E-04
0.222918E-03	0.224223E-03	0.226166E-03	0.220083E-03
-.318727E-03	-.319954E-03	-.319213E-03	-.314944E-03
0.478783E-04	0.458435E-04	0.478466E-04	0.488535E-04
0.241674E-03	0.237562E-03	0.236252E-03	0.242260E-03
-.347091E-03	-.348849E-03	-.339690E-03	-.359340E-03
0.533921E-04	0.550834E-04	0.524200E-04	0.541889E-04
0.261569E-03	0.259397E-03	0.257606E-03	0.264643E-03

5.3 – EXCENRICIDADE RESIDUAL ESPERADA

Cada novo conjunto de medida obtido pelo método descrito acima, é submetido ao algoritmo de balanceamento, determinando-se juntamente com os

demaís parâmetros, a excentricidade modal ϵ_k , sendo k a ordem do conjunto.

Definimos a excentricidade residual correspondente ao conjunto k como a relação entre os módulos da diferença vetorial $|\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon}_k|$ e $|\vec{\epsilon}|$.

Sendo $|\vec{\epsilon}|$ a excentricidade modal correspondente ao conjunto de medidas isentas de erro.

Portanto, $d_{\epsilon_k}(\%) = \frac{|\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon}_k|}{|\vec{\epsilon}|} \cdot 100$ é a excentricidade residual em (%) correspondente ao conjunto k . Estendendo este procedimento a um grande número de novos conjuntos de medida obtém-se a distribuição desejada para a excentricidade residual.

A Tabela 5.5 mostra os resultados obtidos pela aplicação do procedimento de simulação descrito, a séries de 120 novos conjuntos com desvios padrões de 1, 2, 5, 10 e 15% obtidos a partir de um conjunto de 24 respostas correspondentes a 8 velocidades angulares e três planos de medida, que constituem a junção dos casos 1.2 e 1.6 do item 3.1.8. As velocidades angulares utilizadas neste caso foram 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140 e 145. Estes resultados estão publicados em D. L. ZORATTO [21].

Observa-se que em todos os casos a excentricidade residual média e o desvio padrão da sua distribuição, mantém aproximadamente a mesma proporção com o desvio padrão das medidas, situando-se aquém deste valor. Na última coluna é apresentado o valor máximo que se pode esperar com 95% de certeza para a excentricidade residual e que corresponde a um efeito multiplicador em relação ao desvio padrão da ordem de 1.3 a 1.5.

Tabela 5.5 – Média e desvio padrão da distribuição da excentricidade residual para diversos valores de desvio padrão das medidas

Desvio Padrão das Medidas (%)	Média da excentricidade Residual (%)	Desvio Padrão da Distribuição (%)	Excentricidade Residual c/95% de Certeza (%)
1	.65	.387847	1.29
2	1.4072	.92145	2.923
5	3.562	2.287	7.335
10	7.247	4.309	14.335
15	11.557	5.68	20.93

Para valores de desvio padrão de 20% o algoritmo passa a apresentar problemas de convergência na maioria dos casos o que limita a sua utilização a um nível de erro com desvio padrão abaixo deste valor.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

A identificação modal efetivada sobre valores simulados de resposta ao desbalanceamento de rotores flexíveis mostrou ser um método necessário para a depuração de erros no processo de desenvolvimento de algoritmos de balanceamento. Os resultados obtidos nas diversas simulações realizadas mostram ser viável a identificação da forma do modo conjuntamente com os demais parâmetros modais.

Em todos os casos examinados, utilizou-se um número de medidas de resposta simuladas apenas suficiente para a estimação da solução do sistema de equações, visando economia do tempo de processamento. Este procedimento é conservativo, visto que um número maior de informações experimentais tende a ser mais favorável, quanto à precisão.

A sensibilidade aos erros de medida foi avaliada tomando-se unicamente a excentricidade modal como parâmetro de comparação no sentido de viabilizar um maior número de amostras de novos conjuntos de medida. É conveniente estender esta análise, considerando os demais parâmetros que intervêm no cálculo das massas balanceadoras e tomar estas últimas como parâmetro de comparação com o caso de referência.

O problema de balanceamento modal aqui tratado abrange várias áreas de conhecimento tais como, Dinâmica de Rotores, Análise Modal, Identificação Paramétrica, Minimização com Restrições, Métodos Experimentais de Aquisição e Tratamento de Sinais, Teoria de Erro. No presente trabalho utilizou-se um modelo matemático simplificado em que não foi considerado o efeito giroscópico e o amortecimento interno, por exemplo, e pode ser, portanto, consideravelmente desenvolvido.

A anisotropia dos mancais, que apesar de ter sido tratada de uma forma simplificada, mostrou resultados bastante favoráveis, a partir da resposta de um monorotor, tem, no desenvolvimento de modelos mais elaborados, uma linha promissora de desenvolvimento.

Embora o presente trabalho tenha sido centrado em torno da Identificação

Paramétrica esta é uma área que pode ser ainda bastante explorada, sobretudo quando se pensa em utilizar algoritmos que levem em conta a existência de erros de medida, e ou das características físicas do rotor no sentido de minimizar a sua influência no resultado obtido. Tais são, por exemplo, o Método de Mínimos Quadrados Ponderados, que leva em conta cada informação de forma não homogênea, atribuindo pesos às medidas experimentais, que são determinados no próprio processo de identificação ou o conceito de variável instrumental que permite, a cada passo, ajustar o modelo que esta sendo utilizado na identificação.

A validação experimental do método que não foi considerada neste trabalho, passa pelo desenvolvimento de rotinas de aquisição de dados em tempo real, e que possam alimentar os algoritmos de identificação no momento adequado; rotinas de processamento de sinal, que permitam, de forma consistente, extrair o sinal de interesse sem afetar a fase de referência; rotinas gráficas que permitam a visualização, por exemplo, das órbitas elípticas no caso de anisotropia dos mancais e que possam interpretar os valores que se devem extrair dos gráficos, tais como, tamanho dos semi-eixos da elipse e inclinação dos mesmos.

Em termos de laboratório, é conveniente dispor de um sistema físico que tenha respostas ao desbalanceamento isentas de ruído, mas que permita simulá-los a partir de excitações controladas, com a finalidade de testar as rotinas de processamento de sinal.

APÊNDICE A

ALGORITMO DE HAN-POWELL

Para a descrição do algoritmo de Han-Powell convém descrever sucintamente os métodos de Newton, Quase-Newton e de penalidade quadrática.

A solução pelo método de Newton é obtida a partir das equações:

$$\begin{cases} \nabla l(\mathbf{x}_k, \lambda_k)^T + L(\mathbf{x}_k, \lambda_k) \mathbf{d}_k + [\nabla h(\mathbf{x}_k)^T] \mathbf{y}_k = 0 \\ h(\mathbf{x}_k) + [\nabla h(\mathbf{x}_k)] \mathbf{d}_k = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$$

e, $L(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$, é a derivada de segunda ordem da função $l(\mathbf{x}, \lambda)$, também denominada de Hessiana.

Expressando as equações (A.1), na forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} L(\mathbf{x}_k, \lambda_k) & [\nabla h(\mathbf{x}_k)^T] \\ [\nabla h(\mathbf{x}_k)] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla l(\mathbf{x}_k, \lambda_k)^T \\ -h(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

O vetor $\mathbf{x}$, correspondente ao mínimo da função, é então calculado pela aplicação recursiva da equação acima.

O Método Quase-Newton, deriva do anterior, pela utilização de uma matriz auxiliar B_k , em lugar de $L(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$, matriz esta, que é atualizada após cada iteração, e tem a propriedade de tender a $L(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$, quando o processo tende à solução, ou seja, ao mínimo da função $l(\mathbf{x}, \lambda)$.

Assim, à semelhança do anterior, o método Quase-Newton resolve o sistema, pela aplicação recursiva da equação:

$$\begin{bmatrix} B_k & [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T] \\ [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla l(\mathbf{x}_k, \lambda_k)^T \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A matriz B_k , em geral, é inicializada com o valor da matriz identidade e atualizada segundo uma fórmula designada genericamente de BFGS por ser devida à Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno e, segundo LUENBERGER [8], é expressa na forma:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k \cdot \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_k^T \cdot B_k}{\mathbf{d}_k^T \cdot B_k \cdot \mathbf{d}_k} + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{q}_k} \quad (\text{A.4})$$

onde:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{q}_k = \nabla l(\mathbf{x}_{k+1}, \lambda_{k+1})^T - \nabla l(\mathbf{x}_k, \lambda_{k+1})^T$$

e onde λ_{k+1} é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

O método de penalidade quadrática, utiliza uma função objetivo, que é obtida adicionando-se um termo de penalidade quadrática à função $E(\mathbf{x})$ que se deseja minimizar:

Assim:

$$P(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbb{C} \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 \quad (\text{A.5})$$

é a função penalidade quadrática.

É oportuno lembrar que se $\{\nabla P(\mathbf{x})\}$ tende a zero na solução do problema, a função $\{\nabla E(\mathbf{x})\}$ tende a $-\mathbb{C} \cdot \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|$ à semelhança do que ocorre com $\nabla l(\mathbf{x}, \lambda)$ em (3.13).

A equivalência dos dois procedimentos leva a que, na solução:

$$\mathbb{C} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cong \lambda$$

o que sugere adotar o valor de $\frac{\lambda}{\mathbb{C}}$ como resíduo das equações de restrição.

Assim sendo, resolver o problema de minimizar a função $E(\mathbf{x})$ sujeita à restrição $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, equivale a minimizar:

$$\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B} \mathbf{d} + \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T \mathbf{d}$$

$$\text{sujeito à } \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{d} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{\mathbb{C}} \quad (\text{A.6})$$

onde λ é uma aproximação do vetor multiplicador de Lagrange do problema original e é calculado externamente por uma fórmula do tipo:

$$\lambda = [(1/\mathbb{C})\mathbf{I} + \mathbf{Q}]^{-1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \nabla E(\mathbf{x})^T] \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$\mathbf{A} = [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})]$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$$

O algoritmo de Han–Powell utiliza o método de penalidade quadrática acima descrito, recursivamente, i.é., resolve o problema quadrático a cada iteração, após a qual, a matriz $\mathbf{B}_k$ é atualizada segundo fórmula semelhante à (A.4).

Para garantir a propriedade de descenso entre uma iteração e outra, para a função penalidade, é necessário que $\mathbf{B}_{k+1}$ seja positiva definida. Segundo LUENBERGER [8], para que esta condição seja obtida em cada iteração, é necessário que $\mathbf{d}_k^T \mathbf{r}_k > 0$ onde:

$$\mathbf{r}_k = \theta_k \mathbf{q}_k + (1 - \theta_k) \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k$$

Isto é garantido se fizermos:

$$\begin{cases} \theta_k = 1 & \text{quando } \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{q}_k \geq a \cdot \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{d}_k \\ \theta_k = \frac{(1-a)\mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{d}_k - \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{q}_k} & \text{quando } \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{q}_k < a \cdot \mathbf{d}_k^T \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{d}_k \end{cases}$$

onde a é uma fração decimal arbitrária. Na versão utilizada tomamos o valor de $a = .2$

A fórmula de atualização de $\mathbf{B}_k$ é então uma modificação da eq.(A.4) e fica:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{d}_k} + \frac{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{r}_k} \quad (\text{A.8})$$

Após cada iteração é feita uma busca unidimensional para determinar o mínimo da função penalidade segundo a nova direção. O método adotado é o da secante que consiste em minimizar a função $\psi = \nabla P(\mathbf{x} + \nu \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d}$ em que ν é um escalar obtido por sucessivas aproximações como mostra a Figura A.1. Sendo $\nu_0 = 0$ e $\nu_1 = h$ o valor de ν_2 é calculado por semelhança de triângulos:

$$\frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_1 - \nu_0} = \frac{\psi_0}{\psi_0 - \psi_1}$$

Logo:

$$\nu_2 = \nu_0 + \frac{\psi_0}{\psi_0 - \psi_1} (\nu_1 - \nu_0)$$

e

$$\frac{\nu_3 - \nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{\psi_1}{\psi_1 - \psi_2}$$

Logo:

$$\nu_3 = \nu_1 + \frac{\psi_1}{(\psi_1 - \psi_2)} (\nu_2 - \nu_1)$$

E assim sucessivamente, obtém-se

$$\nu_i = \nu_{i-2} + \frac{\psi_{i-2}}{\psi_{i-2} - \psi_{i-1}} (\nu_{i-1} - \nu_{i-2})$$

$$\text{No limite, } \frac{\nu_i - \nu_{i-2}}{\nu_i} \rightarrow 0$$

e $\nu^* = \nu_i$ corresponde ao valor que minimiza a função ψ e portanto o valor de $\mathbf{x}$ para a próxima iteração é: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \nu^* \mathbf{d}$.

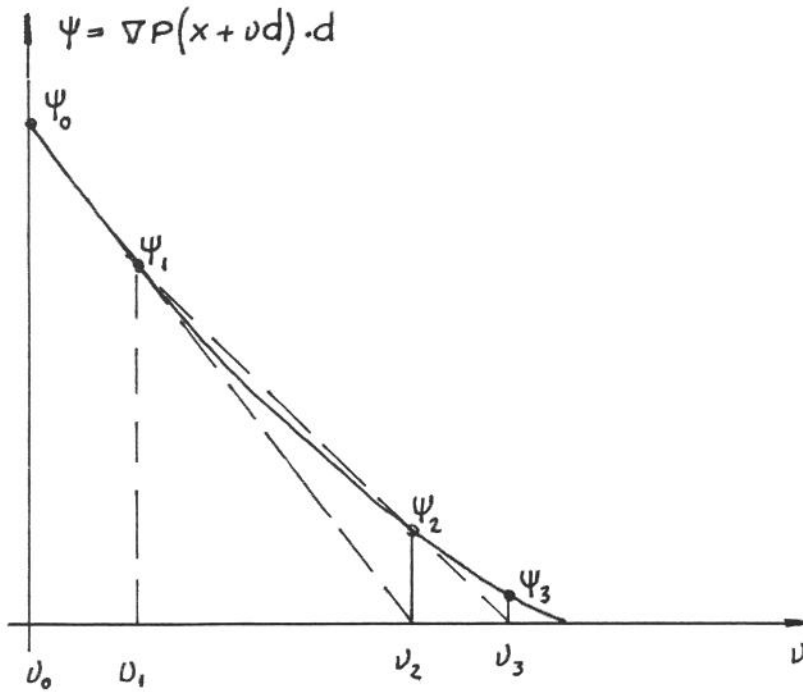


Fig. A.1 – Busca unidimensional pelo método da secante

O algoritmo de Han–Powell pode ser sumarizado nos seguintes passos, ao resolver o problema:

Minimizar $E(\mathbf{x})$

sujeito à $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$

Passo 1: Inicia com um ponto $\mathbf{x}_0$ obtido conforme descrito no item 3.1.4, tomando $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ e $\lambda = 0$.

Passo 2: Resolve o problema quadrático de:

$$\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d} + \{\nabla E(\mathbf{x})\} \mathbf{d} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{sujeito à} \quad [\nabla h(\mathbf{x})] \mathbf{d} + h(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{\mathfrak{C}}$$

Passo 3: Obtida a nova direção $\mathbf{d}$ é feita uma busca unidimensional pelo método da secante obtendo-se o mínimo da função $P(\mathbf{x})$ nesta direção.

Passo 4: Atualiza-se o valor de λ pela expressão (A.8).

Passo 5: Atualiza-se a matriz $\mathbf{B}_k$ pela expressão (A.9) retornando ao passo (2) até que $\mathbf{d} \cong 0$.

Observa-se que as condições necessárias para minimizar (A.6) são:

$$\begin{cases} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k + \{\nabla E(\mathbf{x})\} + \lambda [\nabla h(\mathbf{x})] = 0 \\ [\nabla h(\mathbf{x})] \mathbf{d} + h(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{\mathfrak{C}} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Como $\mathbf{d} = \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k$ próximo à solução $\mathbf{d} \rightarrow 0$ logo (A.10) tendem à:

$$\{\nabla E(\mathbf{x})\} + \lambda [\nabla h(\mathbf{x})] = 0$$

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{\mathfrak{C}}$$

o que equivale à minimização do Lagrangeano considerado em (3.13) a menos do termo $\frac{\lambda}{\mathfrak{C}}$ como foi justificado anteriormente.

Implementação do Algoritmo de Han-Powell

A solução do problema quadrático correspondente ao passo 2, pode ser obtido a partir da seguinte manipulação:

Da equação de restrição (A.10):

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = (1/\mathfrak{C}) \lambda - h(\mathbf{x}) \quad (\text{A.11})$$

onde $\mathbf{A} = [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})]$

Logo

$$\mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{A}^T \lambda - \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.12})$$

Segundo Luenberger [9] a aplicação das condições necessárias a existência de mínimo ao sistema (A.6) nos conduz à expressão:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T + (1/\mathbb{C})\lambda - \mathbf{h}(\mathbf{x})] - \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T \quad (\text{A.13})$$

Sendo $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{d} &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + \\ &+ \mathbf{A}^T [1/\mathbb{C} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{I}] \lambda - \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T - \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \{\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + (1/\mathbb{C} \mathbf{I} + \mathbf{Q}) \lambda\} \\ &- \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T - \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

O termo entre colchetes na expressão (A.14) se anula, tendo em vista que:

$$\lambda = [1/\mathbb{C} \mathbf{I} + \mathbf{Q}]^{-1} \{\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \{\nabla E(\mathbf{x})\}^T\}$$

logo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{d} &= -\{\nabla E(\mathbf{x})\}^T - \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ (\mathbf{B} + \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{d} &= -\{\nabla P(\mathbf{x})\}^T \\ \mathbf{d} &= -[\mathbf{B} + \mathbb{C} \mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \{\nabla P(\mathbf{x})\}^T \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

APÊNDICE B

IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS UTILIZANDO A DERIVADA DA RESPOSTA EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE ANGULAR

Apresentamos o desenvolvimento da alternativa de se utilizar a derivada das respostas ao desbalanceamento em relação à velocidade angular, na identificação de sistemas com alta densidade modal.

Neste caso, a influência dos modos próximos à crítica de interesse fica reduzida e além disso a parcela correspondente à deformação inicial do rotor, sendo independente da velocidade angular, deixa de ser considerada no modelo de identificação.

Desenvolvendo a partir da derivação da expressão (3.21) em relação a Ω , obtém-se:

$$\frac{\partial r(\Omega)}{\partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial \Omega} \sum_{i=1}^M F_i \cdot \phi_{ij} \quad (B.1)$$

Visto que a parcela $\sum_{i=1}^M c_i \phi_{ij}$ independe da velocidade angular.

Desenvolvendo (B.1) temos:

$$\frac{\partial r(\Omega)}{\partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial \Omega} \sum_{i=1}^M \frac{\Omega^2}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\omega_i\Omega\xi_i} (\epsilon_i^{\text{Re}} + j\epsilon_i^{\text{Im}}) \phi_{ij} \quad (B.2)$$

Examinando-se a expressão resultante ao dividir-se a derivada da resposta sem amortecimento por Ω^2 , pode-se verificar, que decresce sensivelmente a contribuição dos demais modos.

Assim:

$$R' = \frac{\partial r}{\Omega^2 \partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial \Omega} \sum_{i=1}^M \frac{\epsilon_i^{\text{Re}} + j\epsilon_i^{\text{Im}}}{\omega_i^2 - \Omega^2} \phi_{ij} = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \Omega} =$$

$$\mathbb{R}' = \sum_{i=1}^M \frac{(\epsilon_i^{\text{Re}} + j\epsilon_i^{\text{Im}})(2\Omega)}{A^2} \phi_{ij}$$

sendo $A = \omega_i^2 - \Omega^2$

$$\mathbb{R}' = \frac{2}{\Omega} \sum_{i=1}^M \left(\frac{F_i}{(\omega_i^2 - \Omega^2)} \phi_{ij} \right)$$

Observe-se que o fator $\frac{2}{\Omega(\omega_i^2 - \Omega^2)}$ é sensivelmente decrescente, para as velocidades angulares distantes da crítica de interesse, e portanto, a contribuição dos termos dos modos superiores e inferiores ao modo de interesse é menor, na derivada da resposta do que na própria resposta.

As expressões das derivadas a serem utilizadas para a identificação das massas modais e demais parâmetros modais, são obtidas a partir do desmembramento de (B2), considerando-se apenas a parcela do modo de interesse. Por simplicidade omite-se o subíndice i do modo, sendo ϕ o valor do modo em um plano de medida genérico. Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\text{Re}} &= \frac{\partial \tau^{\text{Re}}(\Omega)}{\partial \Omega} = \frac{\{(-4\Omega^3 + 2\Omega\omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 6\Omega^2\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}\}\phi}{A} \\ &\quad - \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}}{A^2} (4\Omega^3 - 4\Omega\omega^2 + 8\Omega\omega^2\xi^2)\phi \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$A = (\omega^4 + \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^2\omega^2\xi^2)$$

Fazendo-se ainda:

$$B = A^2 - \Omega^8$$

$$C = \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Im}}$$

$$D = (4\Omega^3 - 4\Omega\omega^2 + 8\omega^2\Omega\xi^2)$$

$$F = (-4\Omega^3 - 2\Omega\omega^2) \epsilon^{\text{Re}} + 6\Omega^2\omega\xi\epsilon^{\text{Im}} \quad (\text{B.4})$$

obtem-se:

$$\mathbb{R}^{\text{Re}} = \frac{\partial \mathbb{r}^{\text{Re}}}{\partial \Omega} = \frac{\partial \mathbb{r}^{\text{Re}}}{\partial \Omega} = \frac{A F \phi - C D \phi}{A^2} \quad (\text{B.5})$$

A componente imaginária $\mathbb{R}^{\text{Im}}$ pode ser obtida substituindo-se em (B.3) ϵ^{Re} por ϵ^{Im} e ϵ^{Im} por $-\epsilon^{\text{Re}}$.

Assim:

$$\mathbb{R}^{\text{Im}} = \frac{A F_1 \phi - C_1 D \phi}{A^2} \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$C_1 = \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) \epsilon^{\text{Im}} - 2\Omega^3\omega\xi\epsilon^{\text{Re}}$$

$$F_1 = (-4\Omega^3 + 2\Omega\omega^2) \epsilon^{\text{Im}} - 6\Omega^2\omega\xi\epsilon^{\text{Re}}$$

De (B.5) e (B.6) obtém-se um par de equações a serem utilizadas na identificação dos parâmetros modais

$$(-CD + AF) \phi - B \mathbb{R}^{\text{Re}} + \Omega^8 \mathbb{R}^{\text{Re}} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$(-C_1D + AF_1) \phi - B \mathbb{R}^{\text{Im}} + \Omega^8 \mathbb{R}^{\text{Im}} = 0$$

À semelhança do item 3.1, para N planos de medição e NR velocidades angulares teremos um sistema de $2 \times N \times \text{NR}$ equações não lineares que podem ser expressas por:

$$u_{ij}(\xi, \omega, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_j) + h_{ij} = 0$$

(B.8)

$$y_{ij}(\xi, \omega, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_j) + q_{ij} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \text{ (plano)} \\ i = 1, \dots, NR \text{ (velocidade angular)} \end{array} \right.$$

Para fins da estimação da solução do sistema pelo Método dos Mínimos Quadrados, as equações são ordenadas de forma semelhante ao item 3.1.

O conjunto de equações assim formado, chamamos de $f(\mathbf{x})$, sendo $\mathbf{x}$ o vetor dos parâmetros a serem identificados:

$$\mathbf{x} = (\xi, \omega, \epsilon^{\text{Re}}, \epsilon^{\text{Im}}, \phi_j, \dots, \phi_N)$$

a matriz Jacobiana da função $f(\mathbf{x})$ é:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{4+N}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{2 \times N \times NR}}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{2 \times N \times NR}}{\partial x_{4+N}} \end{bmatrix}$$

Os termos da primeira linha da matriz Jacobiana, que é constituída pelas derivadas da primeira equação $f_1(\mathbf{x})$ em função de $\mathbf{x}$, são:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = (16\Omega_1\omega^2\xi C + 2\Omega_1\omega\epsilon^{\text{Im}}D + 6\Omega_1^2\omega_1\epsilon^{\text{Im}}A + 8\Omega_1^2\omega^2\xi F) \phi_1 +$$

$$16\omega^2\Omega_1^2\xi(A) \mathbb{R}^{\text{Re}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial \omega} (16\Omega_1\omega\xi^2 - 8\Omega_1\omega) C \phi_1 + (2\omega\Omega_1^2\epsilon^{\text{Re}} + 2\Omega_1\xi\epsilon^{\text{Im}}) D \phi_1$$

$$(4\omega\Omega_1\epsilon^{\text{Re}} + 6\Omega_1^2\xi\epsilon^{\text{Im}}) \text{ A } \phi_1 + (4\omega^3 - 4\omega\Omega_1^2 + 8\omega\Omega_1^2\xi^2) \text{ F } \phi_1$$

$$+ (8\omega^7 + 25\Omega_1^4\omega^2 - 24\omega^5\Omega_1^2 + 48\omega_5\Omega_1^2\xi^2 -$$

$$- 8\omega\Omega_1^6 + 16\omega\Omega_1^6\xi^2 - 64\omega^3\Omega_1^4\xi^2 + 64\Omega_1^4\omega^3\xi^4) \mathbb{R}_1^{\text{Re}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon^{\text{Re}}} = \Omega_1^2(\omega^2 - \Omega_1^2) \text{ D } \phi_1 - 4\Omega_1^3 \text{ A } \phi_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon^{\text{Im}}} = 2\Omega_1^3\omega\xi\text{D}\phi_1 + 6\Omega_1^2\omega\xi \text{ A } \phi_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} = - \text{ C } \text{ D } + \text{ A } \text{ F}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_6} = \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{4+N}} = \frac{\partial f_1}{\partial \phi_N} = 0$$

REFERÊNCIAS

- [1] J. M. TESSARZIK; R. H. BADGLEY; W. J. ANDERSON — "Flexible Rotor Balancing by the Exact Point-Speed Influence Coefficient Method". Trans. ASME, Journal Eng. Industry, (1972), pp. 148—157.
- [2] T. P. GOODMAN — "A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections". Trans. ASME Journal Eng. Industry, (1964), pp. 273—279.
- [3] R. E. D. BISHOP; A. G. PARKINSON — "Vibration and Balancing of Flexible Rotors". Applied Mechanics Review, Mat (1968), pp. 439—493.
- [4] M. S. DARLOW — "A Unified Approach to the Mass Balancing of Rotating Flexible Shaft". Ph.D. Dissertation, University of Florida, (1980).
- [5] R. GASCH; J. DRECHSLER — "Modales Auswuchten Elastischer Läufer Ohne Testgewichtssetzungen". VDI-Bericht Nr. 320, (1978), pp. 45—54.
- [6] P. GNIELKA — "Modal Balancing of Flexible Rotors without Test Runs: An Experimental Investigation". Journal of Sound and Vibration, (1983), pp. 157—172.
- [7] J. V. FERREIRA — "Balanceamento de Rotores Flexíveis". Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica — UNICAMP, Campinas julho (1989).
- [8] D. G. LUENBERGER — "Linear and Nonlinear Programming". Addison-Wesley Publishing Company, (1984), 2a. Edição.
- [9] A. G. CASTRO — "Balanceamento de Rotores Flexíveis pelo Método de Coeficientes de Influência". Tese de Mestrado, Programa de Eng. Mecânica — COPPE/UFRJ, (1986).
- [10] D. L. ZORATTO, A. G. CASTRO — Residual Vibration Amplitude on Influence Coefficient Balancing Procedure. VIII IFTOMM — Congress on

Theory of Machines and Mechanisms, Espanha (1987).

- [11] D. L. ZORATTO, F. IGUTI — Balanceamento Modal sem Conhecimento Prévio dos Modos Anais do II Congresso de Engenharia Mecânica Norte—Nordeste (1992), pp. 235–245.
- [12] T. IWATSUBO — Error Analysis of Vibration of Rotor/Bearing System. Inst. of Mech. Eng. London (1976).
- [13] JAMES, V. BECK, KENNETH J. ARNOLD — Parameter Estimation in Engineering and Science, pg. 125, 126, John Wiley & Sons.
- [14] BOX, G. E. P. and MULLER, M. E. — A Note on the Generation of Randon Normal Deviates. Ann. Math. Stat. 2—610—611 (1958).
- [15] R. E. D. BISHOP — The Vibration of Rotating Shafts. Jnl. Mech. Eng. Sci. 1, 1, 50 (1959).
- [16] R. E. D. BISHOP and G. M. L. GLADWELL (1959) — The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor, Jnl. Mech. Eng. Sci. 1, 1, 66 (1959).
- [17] R. E. D. BISHOP and A. G. PARKINSON — On the Isolation of Modes in Balancing of Flexible Shafts, Proc. Inst. Mech. Engrs. 177, 16, 406 (1963).
- [18] A. G. LINDLEY and R. E. D. BISHOP — Some Recent Research of the Balancing of Large Flexible Rotors, Proc. Inst. Mech. Engrs., 177, 30, 811 (1963).
- [19] J. V. FERREIRA, F. IGUTI, D. E. ZAMPIERI — Simulação do Balanceamento de um Rotor Flexível por Coeficientes de Influência, Anais do VIII COBEM, Ita, São José dos Campos (1985).
- [20] C. W. LEE e outros — Modal Balancing of a Flexible Rotor Using Response Gradient Method, Anais do VII IFTOMM, Sevilha (1987), pp. 1765–1768.
- [21] D. L. ZORATTO — Utilização do Algoritmo de Han—Powell no

Balanceamento Modal de Rotores Flexíveis, XIII CILAMCE, Porto Alegre (1992).

- [22] D. L. ZORATTO – Utilização de um Método de Monte Carlo na Determinação do Desbalanceamento Residual de Rotores Flexíveis, 10^o. SINAPE, Rio de Janeiro (1992).
- [23] R. GASCH, H. PFÜTZNER – Rotor Dynamik, Springer (1975).
- [24] J. H. WANG – An On-Line Computer System for Phase-Angle Monitoring in-Turbogenerator, IFTOMM Rotor Dynamics, Japan (1986).
- [25] T. G. BECKWITH – Mechanical Measurements, Addison-Wesley Publishing Co.
- [26] A. G. PARKINSON, M. S. DARLOW, A. J. SMALLEY e R. H. BADGLEY – "An Introduction to a Unified Approach to Flexible Rotor Balancing", ASME Gas Turbine Conference, março de 1979.
- [27] W. D. PILKEY e outros – "A Computational Technique for Optimizing Correction Weights and Axial Location of Balance Planes of Rotating Shafts", Trans. ASME, Vol. 105 (1983).
- [28] P. R. MEDEIROS – "Balanceamento de Rotores Flexíveis pelo Método Modal", Tese de Mestrado, Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ (1988).
- [29] H. B. LACERDA – "Racionalização do Método dos Coeficientes de Influência Aplicado ao Balanceamento de Rotores Flexíveis", Tese de Mestrado, UFU, Uberlândia, dezembro de 1990.
- [30] M. T. C. FARIA e C. S. DE BARCELLOS – "Balanceamento Flexível de Rotores de Turbogeneradores Modelados Através de Elementos Finitos", XI COBEM, SP, (1991).
- [31] N. F. RIEGER – "Flexible Rotor-Bearing System Dynamics", Part III, Unbalance Response and Balancing of Flexible Rotors in Bearings, ASME

Publication (1973).

- [32] H. D. NELSON — "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", ASME, Paper n^o. 79-wa/de-5 (1979).
- [33] R. W. CLOUGH, J. PENZIEN — "Dinamics of Structures". McGraw-Hill, New York (1974).