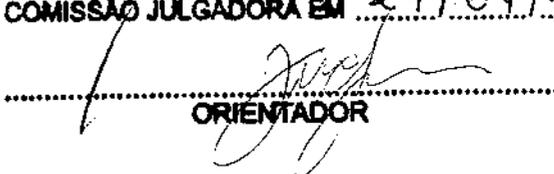


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Edmilson Ricardo
de Oliveira Santos E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24.04.2006


.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Vibrações em Altas Frequências

por Métodos de Energia

Autor: Edmilson Ricardo de Oliveira Santos

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

6/2007

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
CÉSAR LATTES
DESENVOLVIMENTO DE COLEÇÃO

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Análise de Vibrações em Altas Frequências por Métodos de Energia

Autor: Edmilson Ricardo de Oliveira Santos

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2006
S.P. - Brasil**

UNIDADE BC
Nº CHAMADA:
T/UNICAMP Sa59
V. _____ EX. _____
TOMBO BCCL 7.384A
PROC 16.145.07
C _____ D x
PREÇO 11,00
DATA 28.8.07
BIB-ID 446999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Santos, Edmilson Ricardo de Oliveira
Sa59a Análise de vibrações em altas frequências por métodos de energia / Edmilson Ricardo de Oliveira Santos -- Campinas, SP: [s.n], 2006.

Orientador: José Maria Campos dos Santos
Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise espectral. 2. Método dos elementos finitos.
3. Estatística – Análise. 4. Vibração. 5. Propagação de ondas.
I. Santos, José Maria Campos dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título

Titulo em Inglês: High frequency vibration analysis by energy methods

Palavras-chave em Inglês: Spectral analysis; Finite element method; Statistical–Analysis; Vibration; Wave propagation.

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Roberto de França Arruda, Éder Lima de Albuquerque, Arcanjo Lenzi e Moyses Zindeluk

Data da defesa: 24-04-2006

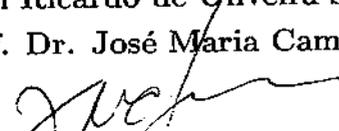
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

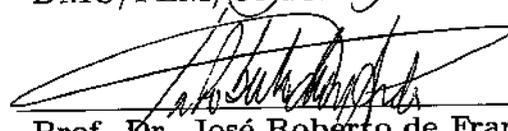
Análise de Vibrações em Altas Frequências por Métodos de Energia

Autor: Edmilson Ricardo de Oliveira Santos

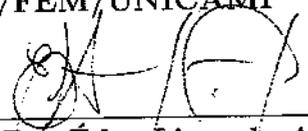
Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos



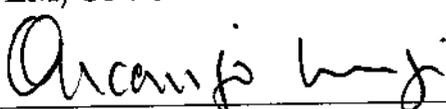
Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Arcanjo Lenzi
UFSC



Prof. Dr. Moyses Zindeluk
COPPE

Campinas, 24 de abril de 2006.

Dedicatória

Aos meus queridos pais e irmãos, com muito carinho.

Agradecimentos

Agradeço...

... ao meu Orientador, Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos pelo apoio e pelas lições para o futuro;

... ao Prof. Dr. José Roberto de França Arruda pelas importantes sugestões ao trabalho;

... à minha querida Simara Matsubara por seu apoio e compreensão;

... aos caros Righeto, Maurício e Adionil pela força em minha chegada em Campinas;

... ao Khaled, ao Lázaro, ao Beli, ao Ronaldo e ao Éder por suas contribuições no desenvolvimento desta tese;

... aos companheiros de república Alex, Luiz, Elson e Ilson;

... aos funcionários do SIFEM, Marco, Fernando, Carlos e Raquel, pelo suporte técnico;

... à Maria Elena, aos Professores, Alunos e Funcionários do Departamento de Mecânica Computacional da FEM;

... às agências de fomento CNPq, FAPESP e CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

SANTOS, Edmilson Ricardo de Oliveira, *Análise de Vibrações em Altas Freqüências por Métodos de Energia*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 181 p., Tese (Doutorado).

Nesta tese, uma avaliação do comportamento vibracional médio em frequência-espaço é realizada com o objetivo de identificar como as vibrações se propagam através de uma estrutura em altas frequências. Para isso, utilizaram-se equações diferenciais de energia, assim como equações diferenciais de movimento para propagação de ondas transversais e longitudinais no plano (x,y) , as quais foram numericamente resolvidas. As metodologias empregadas para resolver as equações diferenciais parciais de energia são: Análise de Fluxo de Energia ("Energy Flow Analysis - EFA"), Método do Fluxo de Energia utilizando Elementos Finitos ("Energy Finite Element Method - EFEM"), Método do Elemento Espectral de Energia ("Energy Spectral Element Method - ESEM"). Para resolver numericamente as equações diferenciais de propagação de ondas foi utilizado o Método dos Elementos Espectrais ("Spectral Element Method - SEM"). O foco principal desta tese é determinar os fluxos e densidades médios totais e parciais por EFEM e ESEM para estruturas simples como barras e vigas colineares, vigas acopladas em ângulos arbitrários e vigas acopladas na forma de um T . Na formulação do EFEM está incluso um mecanismo (matriz de elemento de junta) que modela o acoplamento entre elementos estruturais das estruturas mencionadas anteriormente. A matriz de elemento de junta é única para cada tipo de junta, e necessita de procedimento especial para ser inserida na matriz global do sistema de equações do EFEM. ESEM é uma formulação matricial baseada na solução geral da equação diferencial parcial de energia, assim sendo, o elemento espectral de energia é equivalente a um número infinito de elementos finitos de energia. Finalmente, o último método, SEM, é obtido a partir da solução exata da equação diferencial de propagação da onda, e portanto, não existe aproximação implícita na discretização como no caso do EFEM. Assim, os resultados obtidos por SEM foram utilizados para comparação com os resultados obtidos por EFEM e ESEM. Uma investigação experi-

mental do comportamento vibracional de uma estrutura composta por duas barras colineares e uma outra composta por vigas conectadas na forma de T no sistema (x,y) foi realizada para verificar os resultados de EFEM, ESEM e SEM. Também foram estimados os Fatores de Perda por Acoplamento ("Coupling Loss Factor - CLFs") experimentais da Análise Estatística de Energia ("Statistical Energy Analysis - SEA") usando a técnica do Método da Potência Injetada ("Power Injection Method - PIM") com as respostas vibracionais medidas ao longo da viga T .

Palavras Chave: Método do Fluxo de Energia Utilizando Elementos Finitos, Fatores de Perda por Acoplamento, Análise Estatística de Energia, Análise de Fluxo de Energia, Sub-sistemas de Energias, Método dos Elementos Espectrais, Método do Elemento Espectral de Energia.

Abstract

SANTOS, Edmilson Ricardo de Oliveira, *High Frequency Vibration Analysis by the Energy Methods*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 181 p., Tese (Doutorado).

In this thesis, an evaluation of space frequency average vibrational behavior has been done with the aim of identifying how vibrations are propagating through a structure in high frequencies. For this purpose, energy differential equations were used, as well as equilibrium differential equations for the propagation transversal and longitudinal of waves in the plane (x, y) , which were numerically solved. The methodologies used to solve the energy partial differential equations are Energy Flow Analysis (EFA), Energy Finite Element Method (EFEM), Energy Spectral Element Method (ESEM). The equilibrium differential equations for the propagation of waves were solved by Spectral Element Method (SEM). The main focus of this work is to determine the total and partial averages of flow and energy densities by EFEM and ESEM for simple structures such as colinear rods and beams, coupled beams in arbitrary angles and a T -beam. In the formulation of EFEM the mechanism (joint element matrix) that models the coupling among structural elements of the structures mentioned previously is included. The joint element matrices are unique for each type of joint, and a special procedure to be inserted into global matrix equation systems of the EFEM. ESEM is the matricial formulation based on the general solution of the partial differential equation of energy, therefore, the energy spectral element is equivalent to an infinite number of energy finite elements. Finally, the last method, SEM, is obtained from the exact solution for the differential equation of wave propagation, and, therefore, no implicit approximation as in EFEM case. The results obtained by SEM were used to compare with the results obtained by EFEM and ESEM. Experimental investigation of vibrational behavior of two coupled collinear rods and a T shaped beam structure was performed to verify the results of EFEM, ESEM and SEM. Also, an estimation of the coupling loss factor (CLFs) of Statistical Energy Analysis (SEA), was performed using the Power Injection Method from vibrational response measured along the T -beam.

Keywords: Energy Finite Element Method, Coupling Loss Factors, Statistical Energy Analysis, Energy Flow Analysis, Subsystem Energies, Spectral Element Method, Energy Spectral Element Method.

Sumário

Lista de Figuras	xiv
Lista de Tabelas	xxi
Nomenclatura	xxiii
1 Introdução e estado da arte	1
1.1 Motivação	1
1.2 Métodos investigados neste trabalho	3
1.2.1 Análise Estatística de Energia	3
1.2.2 Método do Fluxo de Energia utilizando Elementos Finitos	5
1.2.3 Método dos Elementos Espectrais	7
1.2.4 Método do Elemento Espectral de Energia	8
1.3 Organização da Tese	9
2 ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA	10
2.1 Introdução	10
2.2 Solução Analítica da Vibração Longitudinal de uma Barra	10
2.2.1 Determinação do fluxo de energia e da densidade de energia em uma barra	12
2.2.2 Simplificação das equações do fluxo e da densidade de energia para uma barra	14
2.3 Equação diferencial de energia para barra	17

2.3.1	Relação entre o fluxo de energia e a densidade de energia	17
2.3.2	Balanco de energia em um elemento diferencial de barra	18
2.4	Solução Analítica da Vibração Transversal de uma Viga	20
2.4.1	Determinação do fluxo de energia e da densidade de energia em uma viga	22
2.4.2	Simplificação das equações do fluxo de energia e da densidade de energia para uma viga	25
2.5	Equação diferencial de energia para viga	29
2.5.1	Balanco de energia em um elemento diferencial de viga	29
2.6	Relações de acoplamento de barras e vigas	31
2.6.1	Relações de acoplamento de barras colineares	32
2.6.2	Relações de acoplamento para vigas colineares	34
2.6.3	Relações de acoplamento para duas vigas acopladas em ângulo arbitrário	35
2.6.4	Relações de acoplamento para um sistema de vigas ramificadas	37
3	MÉTODO DO FLUXO DE ENERGIA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS	41
3.1	Introdução	41
3.2	Formulação do Elemento Finito de Energia Unidimensional	42
3.2.1	Montagem da matriz global dos elementos estruturais acoplados	45
3.2.2	Matriz de junta para dois elementos acoplados em ângulo arbitrário	52
3.2.3	Matriz de junta para três elementos acoplados em ângulos arbitrários	55
4	MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL DE ENERGIA	58
4.1	Introdução	58
4.2	Formulação Espectral Aplicada à Energia	59
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS SIMULADOS	65
5.1	Introdução	65
5.2	Exemplos simulados modelados por EFEM	66

5.2.1	Exemplos de barras e vigas colineares acopladas	68
5.2.2	Exemplos de vigas conectadas em ângulo arbitrário	71
5.2.3	Avaliação do processo de convergência	84
5.3	Exemplos simulados modelados por ESEM	85
5.3.1	Exemplos de barras e vigas colineares acopladas	85
5.3.2	Exemplos de vigas conectadas em ângulo arbitrário	87
5.4	Simulação de uma estrutura real modelada por EFEM, ESEM e SEM	91
6	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	99
6.1	Introdução	99
6.2	Resultados experimentais de duas barras colineares acopladas	100
6.3	Resultados experimentais da Viga T	104
6.3.1	Montagem experimental da viga T	104
6.4	Comparação entre os resultados experimentais e simulados por EFEM e ESEM	107
6.4.1	Determinação experimental dos fatores de perda por acoplamento usando PIM	117
7	Conclusões e Perspectivas Futuras	125
7.1	Conclusões	125
7.2	Perspectivas Futuras	128
A	Determinação dos coeficientes de transmissão e reflexão para estruturas semi-infinitas acopladas	132
A.1	Coefficientes de transmissão e reflexão de barras colineares acopladas	132
A.2	Coefficientes de transmissão e reflexão de vigas colineares acopladas	134
A.3	Coefficientes de transmissão e reflexão de duas vigas acopladas em ângulo ar- bitrário	138
A.4	Coefficientes de transmissão e reflexão para um sistema de vigas ramificadas .	141

B	Método dos elementos espectrais	147
B.1	Interpolações pelo Método dos Elementos Espectrais	150
C	Análise Estatística de Energia (SEA)	152

Lista de Figuras

1.1	Sub-sistemas do modelo SEA de três placas acopladas.	4
2.1	Barra excitada longitudinalmente por uma força harmônica.	11
2.2	Barra excitada por uma força harmônica em uma extremidade e livre na outra.	16
2.3	Densidade de energia cinética, potencial e total média para uma barra excitada longitudinalmente em uma $f=1000$ [Hz].	17
2.4	Balanco de energia em um elemento diferencial de barra.	18
2.5	Deformação da seção da viga de Bernoulli-Euler.	20
2.6	Viga livre-livre vibrando transversalmente.	21
2.7	Convenção de sinais para os esforços que atuam em uma viga.	22
2.8	Viga apoiada em ambas as extremidades, e excitada por uma força harmônica na posição central.	28
2.9	Densidades de energia cinética, potencial e total calculadas por SEM para uma viga excitada transversalmente em uma frequência $f=1000$ [Hz].	29
2.10	Balanco de energia em um elemento diferencial de viga.	30
2.11	Dois barras colineares acopladas excitadas por uma força harmônica.	32
2.12	Coefficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes longitudinais em cada barra, \bar{P}_{LA} e \bar{P}_{LB}	32
2.13	Dois vigas colineares acopladas excitadas por uma força harmônica.	34
2.14	Coefficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes transversais em cada viga, \bar{A}_{FA} e \bar{A}_{FB}	34
2.15	Dois vigas acopladas em um ângulo arbitrário excitadas por uma força harmônica.	35
2.16	Coefficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes transversais em cada viga, \bar{A}_{FA} e \bar{A}_{FB}	36

2.17	Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes longitudinais em cada viga, \bar{P}_{LA} e \bar{P}_{LB}	36
2.18	Três vigas acopladas em ângulos arbitrários excitadas por uma força harmônica.	39
2.19	Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente transversal, \bar{A}_{FA} , na viga A	39
2.20	Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente longitudinal, \bar{P}_{LA} , na viga A	40
3.1	(a) Duas vigas colineares excitadas por uma força harmônica, (b) problema equivalente de energia e (c) modelo de energia (EFEM).	46
3.2	Localização do nó em uma junta de dois elementos colineares acoplados, para um tipo de onda propagando-se ao longo deles.	49
3.3	Localização do nó em uma junta de dois elementos acoplados em ângulo arbitrário, para dois tipos de ondas propagando-se ao longo deles.	53
3.4	Localização do nó em uma junta de três elementos acoplados em ângulos arbitrários, para dois tipos de ondas propagando-se ao longo deles.	56
4.1	Graus de liberdade de um elemento de energia.	60
4.2	(a) Duas barras colineares excitadas por uma força harmônica, (b) problema equivalente de energia.	61
5.1	Número de modos na banda $N(f)$ em função da frequência central f_c , para as barras e vigas A e B em bandas de frequência de 1/3 oitava.	68
5.2	Fator de sobreposição modal MOF em função da frequência central f_c , para as barras e vigas A e B em bandas de 1/3 oitava.	68
5.3	Duas barras colineares acopladas, excitadas por uma força longitudinal harmônica.	69
5.4	Densidade de energia total média longitudinal ao longo das barras AB , calculada por EFEM, EFA e SEM em bandas de 1/3 e 1/12 de oitava com frequências centrais de: (a) $f_c=6.3$ kHz; e (b) $f_c=12.5$ kHz.	69
5.5	Duas vigas colineares acopladas, excitadas por uma força harmônica transversal.	70
5.6	Densidade de energia total média transversal ao longo das vigas AB , calculada por EFEM, EFA e SEM em bandas com frequência central de: (a) $f_c=6.3$ kHz e (b) $f_c=12.5$ kHz.	71

5.7	Duas vigas conectadas em ângulo arbitrário, excitadas por forças harmônicas longitudinal e transversal.	71
5.8	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 0° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	73
5.9	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 30° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	74
5.10	Densidades de energia médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 30° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	75
5.11	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	75
5.12	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	76
5.13	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 90° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	76
5.14	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 90° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	77
5.15	Densidades de energias médias totais e parciais, figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 oitavas com $f_c = 12.5$ kHz, para um ângulo de 30°	78
5.16	Três vigas A , B e C conectadas por uma junta com ângulos de 0° , -30° e 30° , e excitadas por uma força harmônica longitudinal e transversal na extremidade da viga A	79
5.17	Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz. . .	80
5.18	Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz. . .	80

5.19	Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz. .	81
5.20	Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz. .	81
5.21	Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB e AC , calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de 30°	82
5.22	Densidades de energias médias totais e parciais no ramos AB e AC , calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitavas com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de 30°	83
5.23	Estrutura utilizada na análise qualitativa da convergência do EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz	84
5.24	Análise de convergência do EFEM.	84
5.25	Análise de convergência do EFEM.	85
5.26	Densidade de energia total média longitudinal ao longo das barras AB , calculada por ESEM, SEM e EFEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz. .	86
5.27	Fluxo de energia médio total longitudinal ao longo das barras AB , calculado por ESEM e SEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.	86
5.28	Densidade de energia total média transversal ao longo das vigas AB , calculada por ESEM, SEM e EFEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.	87
5.29	Fluxo de energia médio total transversal ao longo das vigas AB , calculado por ESEM e SEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.	87
5.30	Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM, ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.	88
5.31	Fluxos de energias médios totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.	88
5.32	Densidades de energias médias totais e parciais, figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculadas por ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz, para um ângulo de $\phi = 60^\circ$	89

5.33 Fluxos de energias médios totais e parciais das figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculados por ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de $\phi = 60^\circ$	90
5.34 Viga T sub-dividida nas vigas A , B e C , excitada por uma força harmônica longitudinal e outra transversal.	91
5.35 Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.	92
5.36 Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.	93
5.37 Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.	93
5.38 Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AC da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.	94
5.39 Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	94
5.40 Densidades de energias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	95
5.41 Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	95
5.42 Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AC da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.	96
5.43 Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	96
5.44 Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	97
5.45 Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 com $f_c = 12.5$ kHz. . . .	97

5.46	Fluxos de energias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.	98
6.1	Uma estrutura composta de duas barras acopladas excitadas por uma força harmônica.	100
6.2	A montagem experimental consiste de duas barras colineares de seções distintas acopladas.	100
6.3	$N(f)$ para barras (A e B) em bandas de 1/3 oitavas.	101
6.4	MOF para barras (A e B) em bandas de 1/3 oitavas.	102
6.5	Densidade de energia média longitudinal para barras colineares acopladas.	103
6.6	Três vigas conectadas por uma junta com ângulos de 0° , 0° e 90° , e excitadas por duas forças harmônicas longitudinais e transversais no ramo A e C.	104
6.7	Montagem experimental.	105
6.8	Posição dos acelerômetros.	106
6.9	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e B , calculadas por EFEM, dados Experimentais (Exp) e ESEM na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	107
6.10	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e C , calculadas por EFEM, dados Experimentais (Exp) e ESEM na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	108
6.11	Fluxos de energias médios totais e parciais nas vigas A e B , calculados por ESEM e dados Experimentais (Exp) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	108
6.12	Fluxos de energias médios totais e parciais nas vigas A e C , calculados por ESEM e dados Experimentais (Exp) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	109
6.13	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e B , calculadas por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	111
6.14	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e C , calculadas por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	112

6.15	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas <i>A</i> e <i>B</i> simuladas por SEM, e interpoladas por SEM (EXP) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	113
6.16	Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas <i>A</i> e <i>C</i> , simuladas por SEM, e interpoladas por SEM (EXP) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.	113
6.17	Resposta longitudinal experimental da viga <i>A</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	114
6.18	Resposta longitudinal experimental da viga <i>B</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	115
6.19	Resposta longitudinal experimental da viga <i>C</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	115
6.20	Resposta transversal experimental da viga <i>A</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	116
6.21	Resposta transversal experimental da viga <i>B</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	116
6.22	Resposta transversal experimental da viga <i>C</i> , e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.	117
6.23	Modelo de SEA da Viga <i>T</i> para uma excitação.	118
6.24	Energia cinética calculada pela hipótese de massa concentrada (<i>"lumped – mass"</i>), SEM-Timoshenko com rotação e SEM-Timoshenko sem rotação. . .	120
6.25	Fatores de perda por acoplamento calculados a partir dos dados experimentais, por SEM-Timoshenko e analiticamente.	122
6.26	Fatores de perda por acoplamento calculados a partir dos dados experimentais, por SEM-Timoshenko e analiticamente.	123
6.27	Fatores de perda por acoplamento calculados a partir da formulação simplificada de Stimpson e Lalor (1991) usando dados experimentais e respostas simuladas por SEM-Timoshenko, e obtidos analiticamente.	123
A.1	Ondas longitudinais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) incidente sobre a junta.	134
A.2	Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda transversal (\bar{A}_{FA}) incidente sobre a junta.	137

A.3 Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) e transversal (\bar{A}_{FA}) incidentes sobre a junta.	141
A.4 Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) e transversal (\bar{A}_{FA}) incidentes sobre a junta da viga A	146
B.1 Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra.	148

Lista de Tabelas

2.1	Dimensões das variáveis de energia em EFEM.	13
2.2	Parâmetros da estrutura (Barra)	16
2.3	Parâmetro da estrutura (Viga)	28
6.1	Equipamentos.	106

Nomenclatura

Letras Latinas

- $\langle \rangle$ - Valor médio no tempo
- c - Velocidade de fase
- c_g - Velocidade de grupo
- $\langle e \rangle$ - Densidade de energia média total
- e_i - Densidade de energia total instantânea
- $\{\langle e \rangle\}$ - Vetor dos valores nodais da densidade de energia
- k - Número de onda
- \vec{n} - Vetor unitário normal ao contorno S do domínio Γ
- $\langle q \rangle$ - Fluxo de energia médio total
- $\langle q_c \rangle$ - Fluxo de energia médio associado à força cortante
- q_i - Fluxo de energia instantâneo
- $\langle q_m \rangle$ - Fluxo de energia médio associado ao momento fletor
- $\langle q \rangle_n$ - Componente normal do fluxo de energia
- $\{\langle q \rangle\}$ - Vetor dos valores nodais do fluxo de energia
- p - Número de funções de formas, que é igual ao número de graus de liberdade
- r_{mii} - Coeficiente de reflexão transversal na viga i devido a uma onda incidente transversal na viga i
- $u_A(x)$ - Deslocamento longitudinal na barra A
- $v_A(x)$ - Deslocamento transversal da viga A
- $v(x)$ - Solução geral da equação diferencial de movimento na forma espectral
- (x, y) - Sistema de coordenadas local

- A_T - Área transversal da estrutura
 A_F - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma viga
 \bar{A}_{Fi} - Amplitude das ondas transversais incidentes sobre a junta ($i = A, B$ e C)
 A_L - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma barra
 $[B]$ - Contém as componentes do gradiente das funções de forma N_i
 B_F - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma viga
 B_L - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma barra
 C_F - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma viga
 D_F - Amplitude da solução geral da equação diferencial de movimento para uma viga
 E - Módulo de elasticidade
 E_c - Módulo de elasticidade complexo
 E_{cin} - Energia cinética
 E_{pot} - Energia potencial
 F - Amplitude da força
 $\{F^{(e)}\}$ - Fluxo de energia devido a uma fonte externa nos nós do elemento (e)
 G_1 - Amplitude da solução geral da equação diferencial de energia
 G_2 - Amplitude da solução geral da equação diferencial de energia
 I - Momento de inércia
 Im - Parte imaginária de número complexo
 $[K]^{(e)}$ - Matriz do elemento
 M - Momento fletor
 P_L - Amplitude de deslocamento
 $\{Q^{(e)}\}$ - Fluxo de energia avaliado nos nós entre elementos
 \bar{P}_{Li} - Amplitude das ondas Longitudinais incidentes sobre a junta ($i = A, B$ e C)
 Q_L - Amplitude de deslocamento
 Re - Parte real de número complexo
 $U(x, t)$ - Deslocamento longitudinal da barra como uma função da posição e do tempo
 V - Força cortante
 $V(x, t)$ - Deslocamento transversal de uma viga como uma função de posição e tempo

Letras Gregas

- δ - Delta de Dirac
- ω - Freqüência circular
- ν - Coeficiente de Poisson
- η - Fator de amortecimento estrutural
- ρ - Densidade do material
- π_{diss} - Potência dissipada no interior do volume de controle
- π_{in} - Potência injetada
- $\phi(t)$ - Função de inclinação
- ϕ_i - Ângulo de inclinação
- λ - Comprimento de onda
- τ_{mnij} - Coeficiente de transmissão transversal na viga j devido a uma onda incidente transversal na viga i ($i, j = A, B$)
- ∇^2 - Operador de Laplace
- Γ - Domínio da estrutura, que pode ser uni, bi ou tridimensional
- ξ - Função teste ou de ponderação
- $[\nabla]$ - Vetor do operador gradiente, que tem dimensão de acordo com o tipo de componente (uni, bi ou tridimensional)

Subscritos

- m, n - tipo de onda (longitudinal ou transversal)

Abreviações

CLFs	-	Fatores de perda por acoplamento
EFA	-	Análise do Fluxo de Energia
EFEM	-	Método do Fluxo de Energia Utilizando Elementos Finitos
ESEM	-	Método do Elemento Espectral de Energia
FEM	-	Método dos Elementos Finitos
FRF	-	Função de Resposta em Frequência
MOF	-	fator de sobreposição modal
PIM	-	Método da Potência Injetada
SEA	-	Análise Estatística de Energia
SEM	-	Método dos Elementos Espectrais

Capítulo 1

Introdução e estado da arte

1.1 Motivação

As crescentes expectativas dos consumidores, aliadas à efetividade das legislações governamentais, têm levado a engenharia a enfrentar continuamente novos e ainda promissores desafios. Tais desafios são freqüentemente determinados pela compulsão de conciliar necessidades contraditórias e satisfazer diversas restrições de demanda do mercado. Neste sentido, pode-se esperar, por exemplo, que brevemente a indústria automobilística estará produzindo carros mais potentes e mais rápidos, bem como mais econômicos, mais seguros e mais silenciosos. A indústria aeroespacial busca continuamente por novas ferramentas de engenharia com objetivo de aumentar a segurança e a qualidade de vida do homem e da sua instrumentação. Ferramentas de previsão de ruído e vibrações otimizadas são necessárias para controlar níveis de ruído e vibrações excessivos a fim de fornecer um ambiente seguro condizente com a comunicação, o conforto e a eficiência no trabalho.

Uma questão crítica neste campo trata com a identificação dos caminhos de transmissão da vibração. Identificando-se corretamente estes caminhos, as medidas para o controle de ruído e vibração podem ser tomadas para reduzir os seus níveis. Considere-se um caso de redução de ruído em um veículo, em vez de aplicar um tratamento de amortecimento sobre a cabina inteira, um tratamento de amortecimento seletivo pode ser aplicado baseado na previsão dos caminhos de transmissão da vibração. Isto pode ser feito de forma tal que, além de aumentar o conforto, reduz-se o peso obtendo-se um projeto mais eficiente. Uma otimização cuidadosa nos detalhes do projeto é essencial para a obtenção de modificações de baixo custo que levem a características de vibrações e ruídos apropriadas. Veículos, de uma maneira geral, constituem-se em estruturas complexas para as quais não existem métodos simples para a predição de vibrações e ruídos em toda a faixa de frequências audíveis. Alguns

métodos determinísticos, tais como o Método dos Elementos Finitos ("Finite Element Method - FEM") e o Método dos Elementos de Contorno ("Boundary Element Method - BEM"), tornaram-se ferramentas numéricas bem estabelecidas na previsão de vibrações e ruídos. Estes métodos são razoavelmente efetivos na previsão de vibrações e ruídos característicos na faixa de baixas frequências, especialmente quando técnicas de ajuste de modelos baseadas em dados experimentais são aplicadas. Uma faixa de alta frequência é, em geral, definida como aquela em que o comprimento de onda (acústico ou estrutural) é pequeno quando comparado com as dimensões da estrutura. A faixa de baixa frequência é definida como o complemento da alta. Normalmente, em análises em baixa frequência o número de modos envolvidos é pequeno, tornando possível aplicar o FEM, o BEM ou o método de análise modal, os quais são utilizados nos dias de hoje por quase todos os fabricantes de veículos.

Como já mencionado anteriormente, a otimização de um projeto e o refinamento dos componentes críticos para obter um baixo nível de vibrações e ruído requer a habilidade de modelar a resposta global do sistema, sobre uma larga faixa de frequências, de forma confiável. O sistema global inclui a dinâmica das partes estruturais, cavidades acústicas e componentes dinâmicos críticos que contribuem para a excitação, tais como, engrenagens, motores, escapamentos, etc. Ruído e vibração ocorrem sobre uma larga faixa de frequências, e portanto são governados por baixas e altas densidades modais e superposição modal. Teoricamente, FEM pode ser aplicado na análise de problemas vibroacústicos em toda a faixa de frequência de interesse. Entretanto, em altas frequências, o comprimento de onda diminui, e conseqüentemente, o tamanho do elemento na malha deve diminuir na mesma ordem de magnitude a fim de capturar plenamente as deformações estruturais. Isto conduz a modelos de elementos finitos com grande número de graus de liberdade, que para serem resolvidos demandam um alto custo computacional, apesar do crescente aumento da velocidade dos computadores atuais e das sofisticadas melhorias nas implementações dos elementos. Um modelo detalhado do FEM para um veículo automotivo, com vistas à previsão de ruído e vibração, pode requerer o trabalho de vários homens-mês e um enorme esforço computacional para o seu desenvolvimento. Por este motivo, as aplicações práticas atuais do FEM só têm se justificado para análises de até 200 Hz (Cho e Bernhard, 1998). Assim, pode-se concluir que o custo computacional torna-se proibitivo em análises de altas frequências com o FEM.

O BEM é uma técnica desenvolvida mais recentemente, a qual pode ser aplicada a problemas estruturais e outros problemas físicos, mas tem se mostrado particularmente bem adequada para aplicações em acústica. Neste é possível modelar problemas de radiação em meio infinito sem recorrer a condições de contorno artificiais. Existem duas implementações do método, a direta e a variacional. Na direta, a superfície do volume deve ser fechada e a formulação pode ser derivada através da aplicação direta do Teorema de Gauss. Na

variacional, a superfície pode ser aberta e como o próprio nome sugere, sua formulação está baseada na aplicação dos métodos variacionais. Embora teoricamente seja possível aplicar o BEM em toda a faixa de frequência de interesse, limitações de recursos de memória restringem seu uso às baixas frequências. A densidade da discretização da superfície, e portanto, o número de graus de liberdade, é diretamente proporcional à frequência. Assim, o modelo de BEM torna-se crescentemente caro de ser aplicado na faixa de altas frequências.

1.2 Métodos investigados neste trabalho

As discussões a respeito dos métodos determinísticos (FEM e BEM) mostram que estes são eficazes para a predição da resposta (vibracional ou acústica) de estruturas em baixas frequências. Entretanto, em muitas aplicações de engenharia, a vibração de estruturas e o campo sonoro no interior de cavidades acústicas envolvem modos de alta ordem com comprimentos de ondas muito pequenos comparados as dimensões da estrutura ou da cavidade acústica. Neste trabalho, o comportamento dinâmico de estruturas foi investigado a partir de métodos de modelagem melhor adaptados às altas frequências. Os métodos utilizados são: a Análise Estatística de Energia ("Statistical Energy Analysis - SEA"), Método do Fluxo de Energia utilizando Elementos Finitos ("Energy Finite Element Method - EFEM"), Métodos dos Elementos Espectrais ("Spectral Element Method - SEM") e o Método do Elemento Espectral de Energia ("Energy Spectral Element Method - ESEM").

1.2.1 Análise Estatística de Energia

Este é o principal método para análise da qualidade vibroacústica na faixa de altas frequências. Na SEA, a vibração é expressa em termos de energias armazenadas, dissipadas e transmitidas em e entre sub-estruturas. As faixas de frequências são suficientemente largas para conter um número grande de auto-frequências. A potência de entrada em um sub-sistema constitui a excitação (entrada) do modelo. A energia do sub-sistema é a coordenada da resposta. Usando a energia como a variável primária, ambos sistemas estrutural e acústico podem ser modelados usando-se o mesmo tipo de variável. A premissa básica do método é que a energia de vibração comporta-se da mesma forma que a energia térmica. A energia térmica difunde-se das regiões mais "quentes" para as regiões mais "frias" a uma taxa proporcional à diferença de temperatura. A constante de proporcionalidade térmica é chamada de condutividade térmica. Para relacionar o modelo térmico com a vibração, a energia modal em cada sub-sistema é vista como uma medida de temperatura. O parâmetro

de condutividade térmica que mede a resistência ao acoplamento dos sub-sistemas é dado na metodologia da SEA pelo fator de perda por acoplamento. A capacidade térmica de um sub-sistema é expressa pela densidade modal (número de modos/Hz). A convecção é quantificada pelo fator de perda interno. Para todos os sub-sistemas é feito um balanço de energia. A energia de entrada em um sub-sistema iguala-se à energia transferida para o sub-sistema próximo e à energia dissipada devido ao amortecimento interno. As equações globais de energia podem ser resolvidas para a energia média em cada sub-sistema. O método pode ser ilustrado através de uma estrutura consistindo de três sub-sistemas acoplados, figura 1.1.

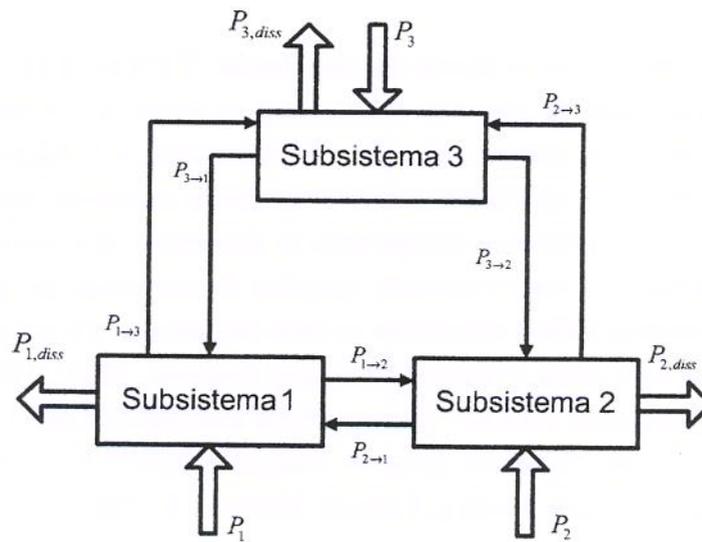


Figura 1.1: Sub-sistemas do modelo SEA de três placas acopladas.

Os três blocos da figura 1.1 são chamados de sub-sistemas SEA. A energia armazenada do sub-sistema i é representada por E_i (média no espaço e frequência). O fluxo de energia de um sub-sistema para outro é mostrado pela seta no sub-índice como $P_{i \rightarrow j}$. A entrada de energia externa é dada por P_i . A energia média que é dissipada no sub-sistema i pelo mecanismo de amortecimento é representada por $P_{i,diss}$. O método aplica variáveis e parâmetros dinâmicos concentrados para modelar o comportamento dinâmico de sistemas lineares contínuos. Conseqüentemente, uma equação algébrica pequena e simples pode ser usada para descrever o estado de vibração. Além disto, devido ao fato do número de sub-sistemas não ser dependente da frequência, o tamanho do modelo para altas frequências pode ser mantido em uma dimensão relativamente pequena. Este fato facilita uma análise de sensibilidade no projeto e verificação do modelo. Contudo, devido ao uso de características dinâmicas concentradas, somente um único valor de energia pode ser previsto para cada sub-sistema. Qualquer

informação espacial em um sub-sistema é perdida. Além disso, a modelagem de efeitos localizados tais como amortecimentos locais e forças pontuais não são fáceis de tratar em SEA. Lyon e Dejong (1995) apresentam um extenso trabalho sobre SEA, o qual constitui-se como uma das referências básicas sobre a sua teoria e aplicação. O desenvolvimento de tecnologias espaciais nos anos 60 levou às primeiras aplicações do SEA. A fim de evitar o mau funcionamento de foguetes devido a danos por vibrações, foi aplicado SEA no estágio inicial do projeto. Nos anos 70 e 80 SEA foi aplicado principalmente nas análises de som transmitido através da estrutura ("*structural borne sound*") em navios e prédios. Com o passar do tempo muitas companhias construtoras de navios desenvolveram seus próprios programas de SEA. Recentemente este interesse tem aumentado em novas aplicações tais como aviões, carros e motores. Durante a última década, um equivalente experimental do SEA preditivo foi desenvolvido. Para o SEA experimental, o objetivo é analisar o fluxo de energia nas estruturas existentes ou em protótipos realizando-se medidas locais sobre a estrutura. Desta maneira, é possível avaliar os caminhos de transmissão em estruturas complexas durante as condições de operação. No momento, SEA é o único método que pode lidar com vibrações de alta frequência de forma suficientemente precisa e a qual está comercialmente disponível em programas computacionais, tais como AUTOSEA2, SEADS, etc. Embora exista um grande apelo pela aplicação do SEA, devido a sua história de mais de 30 anos e aos resultados satisfatórios em muitos casos com relação a altas frequências, alguns aspectos importantes necessitam ainda ser investigados.

1.2.2 Método do Fluxo de Energia utilizando Elementos Finitos

O Método do Fluxo de Energia Utilizando Elementos Finitos ou análise de energia por elementos finitos como também é chamado, iniciou-se com Belov *et al.* (1977). Neste enfoque, o fluxo de energia vibratória é modelado de forma similar ao fluxo de calor em uma estrutura. Uma equação diferencial tipo condução de calor descreve o estado da vibração. Recentemente, Nefske e Sung (1989) implementaram uma formulação de elementos finitos da equação diferencial da condução de calor aplicada à vibração estrutural denominado por Método do Fluxo de Potência por Elementos Finitos ("*Power Flow Finite Element-PFFEM*"). Este enfoque leva em consideração a variação espacial da energia nos sub-sistemas individuais, bem como o fluxo de potência entre eles. Em vez de caracterizar cada sub-sistema por um valor único de energia, o PFFEM descreve a dissipação e a condução da energia vibratória dentro de cada sub-sistema. Resolvendo-se as equações de energia adequadas para a distribuição da densidade de energia em cada sub-sistema, a variação espacial da resposta vibratória pode ser obtida. A investigação de Wohlever e Bernhard (1992) começou em paralelo com o método

PFEM proposto por Nefske e Sung (1989), e tinha como objetivo modelar as resposta vibracionais de estruturas dinâmicas a partir do fluxo de energia em altas frequências. Wohlever e Bernhard (1992) primeiramente focaram em estruturas unidimensionais. Os autores verificaram que a propagação de ondas longitudinais em barras aproxima-se do fluxo de energia térmica. Para a descrição do deslocamento transversal em vigas Bernoulli-Euler, eles utilizam uma variável de energia diferente que a empregada por Nefske e Sung (1989): a energia local, média no espaço e no tempo. A média espacial remove os termos espacialmente harmônicos na solução. Esta média espacial é uma condição necessária para obter as equações diferenciais de energia como no caso de barra. Esta metodologia foi denominada nesta tese por Análise do Fluxo de Energia ("Energy Flow Analysis - EFA")

Cho (1993) dá uma outra extensão a estruturas básicas acopladas. As relações de acoplamento entre sub-estruturas acopladas são discutidas e uma formulação de elemento finito é desenvolvida. Esta formulação de elementos finitos, EFEM, coloca um elemento de junta extra no acoplamento de diferentes sub-estruturas. Cho (1993) mostra alguns exemplos da aplicação de EFEM a estruturas acopladas: uma junta de viga tridimensional, chassis de caminhão e placas finas coplanares acopladas. A premissa básica do EFEM é que o estado vibratório pode ser representado por energias armazenada, dissipada e transmitida. EFEM prevê o comportamento vibratório médio espacial e em frequência de uma estrutura de forma similar ao SEA. Contudo, EFEM utiliza um enfoque de volume diferencial para derivar as equações diferenciais de energia de um sub-sistema. Um dos benefícios de usar uma equação diferencial para descrever o estado da energia vibratória no campo distante é que a modelagem de efeitos localizados tais como amortecimento local e força pontual tornam-se viáveis. Outra grande vantagem é que a variação espacial das densidades de energia em campo distante e do fluxo de energia podem ser obtidos.

Bouthier (1996) estendeu este trabalho para sub-sistemas multi-dimensionais: placas, membranas e ambientes acústicos. Ele formalizou o uso das variáveis de energia para prever as respostas vibracionais de estruturas sujeitas a excitações em altas frequências. Bouthier (1996) explorou em seu trabalho sub-sistemas finitos e infinitos, desenvolvendo-se equações diferenciais de energia para os casos simples e clássico. Ele também deduziu e verificou as equações governantes para a densidade de energia nestes sub-sistemas, implementando uma aproximação por FEM.

Bitsie (1996) estende o trabalho em EFEM a espaços acústicos tridimensionais, assim como no caso de estruturas bidimensionais. A aproximação EFEM inclui assumir que o campo é dominado pela propagação de onda no plano. Isso se aplica particularmente a cavidades fechadas reverberantes, não dominadas pelo campo direto de uma fonte pontual.

O acoplamento estrutural-acústico para placas e espaços acústicos também é discutido em detalhes por Bitsie (1996).

Unglenicks (2000) implementou a aproximação do fluxo de energia de Cho (1993) em um programa de elementos finitos para pórticos e desenvolveu procedimentos experimentais para medir os parâmetros necessários para o modelo de energia por elementos finitos. As técnicas experimentais de Unglenicks (2000) podem ser utilizadas para medir a intensidade e a densidade de energia em uma estrutura. Entretanto, o foco principal desta pesquisa foi desenvolver uma técnica experimental para obter estimativas empíricas dos coeficientes de reflexão, r_{ii} ; os coeficientes de transmissão, τ_{ij} , velocidades de grupo, c_g , e fatores de perda do material, η_{ii} .

Wang (2000) usa uma aproximação da constante das equações diferenciais de energia, referidas como EFEM⁰ que integra as melhores características de ambos EFEM e SEA. Ele também discute a extensão do EFEM para placas ortotrópicas e apresenta um estudo validado experimentalmente com EFEM para uma cabine de caminhão.

Mocus (2001) apresentou critérios para avaliar a região de aplicabilidade do EFEM. A validade desta região é limitada pelas hipóteses e aproximações do método. Para contribuir com a aplicabilidade do método, dois casos com validação experimental foram utilizados. O primeiro caso trata do acoplamento de diferentes tipos de ondas em uma estrutura composta por vigas, e o segundo diz respeito à predição de ruído em cavidades de paredes finas. Os critérios utilizados na avaliação do EFEM são deduzidos dos critérios utilizados na validação dos modelos de SEA.

1.2.3 Método dos Elementos Espectrais

O Método dos Elementos Espectrais (SEM) é uma técnica de modelagem de estruturas em altas frequências, baseada na solução exata da equação da onda, e portanto foi utilizado como referência para avaliar os métodos aproximados investigados nesta tese. O SEM baseia-se na construção das matrizes de rigidez dinâmica que relacionam as forças aplicadas a uma estrutura com deslocamentos resultantes. Neste método a estrutura é dividida em um número de elementos estruturais que depende das descontinuidades existentes na estrutura, sendo que cada um destes é modelado apenas com um elemento espectral para cada tipo de onda. No apêndice B encontra-se uma breve descrição para elemento de barra, mas pode ser encontrada literatura para outros tipos de estruturas, tais como: pórticos (Doyle, 1997), algumas membranas simétricas e casca, placas simplesmente apoiadas ao longo de dois contornos paralelos, (Lee e Lee, 1999), placas dobradas, (Danial *et al.*, 1996), e placas reforçadas

por vigas, (Donadon *et al.*, 2004).

1.2.4 Método do Elemento Espectral de Energia

O Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM) é uma proposta original desta tese que surgiu da idéia de utilizar o mesmo conceito do SEM, o qual prevê as respostas em altas frequências de sistemas estruturais dinâmicos no domínio espectral com base nas variáveis primárias de deslocamento e força (vide apêndice B), mas usando como variáveis primárias o fluxo e a densidade de energia EFEM. Considerando que esta proposta surgiu no final do desenvolvimento deste trabalho, e que a quantidade e os tipos de exemplos analisados ainda estão limitados a alguns casos de elementos de barras e vigas, seria prematuro afirmar algumas das vantagens ou desvantagens do método neste momento. Embora o ESEM tenha muitas similaridades com o SEM, espera-se que ele seja uma maneira mais eficiente de tratar os problemas de propagação de ondas em estruturas com complicados contornos e descontinuidades. Com base no trabalho de Doyle (1997) desenvolveu-se uma metodologia matricial a partir da solução analítica da equação diferencial de energia obtida pelo EFA no domínio da frequência. O elemento espectral de energia é equivalente a um número infinito de elementos finitos de energia permitindo a sua utilização para predição de respostas dinâmicas em médias e altas frequências. Como o ESEM está baseado na equação diferencial de energia aproximada pelo EFA, sua solução (para ondas longitudinais e transversais) é ainda uma aproximação quando comparado à solução exata do SEM.

1.3 Organização da Tese

As metodologias aplicadas, assim como as contribuições específicas desta tese estão organizadas e apresentadas nos próximos parágrafos.

No segundo capítulo, serão apresentadas as equações do fluxo de energia e da densidade de energia a partir da solução analítica do deslocamento para os elementos estruturais do tipo barra e viga, a qual é conhecida como o Método da Análise do Fluxo de Energia (EFA). Estas equações são geradas a partir de um balanço de energia, e têm como aplicação a predição da distribuição do fluxo de energia e da densidade de energia. Também serão apresentadas as relações de acoplamentos, que são utilizadas para quantificar os efeitos sobrepostos de todas as ondas transmitidas e refletidas em ambos os lados das juntas.

No terceiro capítulo será apresentada a metodologia denominada por: Método do Fluxo de Energia Utilizando Elementos Finitos (EFEM), que é utilizada para determinar as densidades de energia médias através de uma solução aproximada pelo método dos elementos finitos para a equação diferencial de energia obtida pelo EFA.

No quarto capítulo será apresentado desenvolvimento do Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM), que é a proposta original desta tese que surgiu da idéia de utilizar o mesmo conceito do Método dos Elementos Espectrais (SEM) na solução da equação diferencial do EFA.

No quinto capítulo, serão mostrados os resultados simulados dos métodos desenvolvidos nesta tese. Ao longo deste capítulo, serão apresentados alguns exemplos simulados de aplicação dos métodos EFEM e ESEM, onde são calculados densidades e fluxos de energias médios totais e parciais. Estes resultados são comparados e discutidos com base naqueles obtidos por SEM.

No sexto capítulo serão apresentados os resultados de dois experimentos envolvendo uma estrutura composta de duas barras colineares e outra estrutura na forma de um "T". No primeiro experimento determinou-se a densidade de energia longitudinal experimental, que foi comparada com os resultados simulados por EFEM e SEM. No segundo experimento calculou-se os fluxos e densidades de energias médias totais e parciais através de interpolações feitas por SEM (vide apêndice B.1). Em seguida, os fluxos e as densidades de energias experimentais são comparados aos resultados simulados obtidos por EFEM e ESEM. As respostas vibracionais (FRFs) medidas na viga também foram utilizadas em um estudo preliminar que tinha como objetivo estimar os fatores de perda por acoplamento ("Coupling Loss Factor - CLFs") de SEA para uma estrutura na forma de T.

No sétimo capítulo serão apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA

2.1 Introdução

Análise do fluxo de energia (EFA) é uma ferramenta analítica para previsão da resposta média em frequência da vibração de estruturas em altas frequências. O procedimento está baseado no desenvolvimento das equações diferenciais que governam as quantidades relacionadas com a propagação de energia em elementos estruturais simples tipo barras, vigas, e placas, bem como, na derivação das relações de acoplamentos em termos das quantidades relacionadas com a energia. Essas quantidades são representadas pelos coeficientes de transmissão e reflexão, os quais descrevem a transferência de energia entre diferentes tipos de juntas (barra-barra, viga-viga, barra-viga, placa-placa). Neste capítulo apresentam-se as equações do fluxo de potência e da densidade de energia a partir da solução analítica do deslocamento para os elementos estruturais do tipo barra e viga. Estas equações são geradas a partir de um balanço de energia, e têm como aplicação a predição da distribuição do fluxo de potência e da densidade de energia. O desenvolvimento aqui apresentado está baseado nos trabalhos de Wohlever (1988) e Cho (1993).

2.2 Solução Analítica da Vibração Longitudinal de uma Barra

Considere o caso de uma barra longa e esbelta vibrando longitudinalmente. A equação de movimento para uma barra excitada por uma força harmônica, como mostra a figura 2.1,

é dada por:

$$E_c A_T \frac{d^2 U(x, t)}{dx^2} = \rho A_T \frac{d^2 U(x, t)}{dt^2} - F \delta(x - x_0) e^{j\omega t} \quad (2.1)$$

sendo que:

- $E_c A_T$: rigidez longitudinal por unidade de comprimento;
- $U(x, t)$: deslocamento longitudinal da barra como uma função da posição e do tempo;
- ρA_T : densidade por unidade de comprimento;
- $F \delta(x - x_0) e^{j\omega t}$: força harmônica aplicada na posição x_0 ;

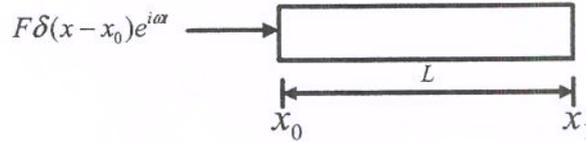


Figura 2.1: Barra excitada longitudinalmente por uma força harmônica.

O termo de amortecimento utilizado na modelagem do mecanismo de absorção de energia da barra é introduzido na formulação através do módulo de elasticidade complexo, dado pela equação:

$$E_c = E(1 + j\eta) \quad (2.2)$$

- η : fator de amortecimento estrutural;
- E : módulo de elasticidade.

Visto que a força de excitação é harmônica, e o regime de vibração da barra é permanente, então, o deslocamento da estrutura $U(x, t)$ também será harmônico. Assim, considerando-se solução do tipo harmônica na forma:

$$U(x, t) = u(x) e^{j\omega t} \quad (2.3)$$

Substituindo-se as equações 2.2 e 2.3 em 2.1, obtém-se a equação de movimento:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2 (1 - j\eta)}{c^2 (1 + \eta^2)} u(x) = \frac{-F}{E_c A_T} \delta(x - x_0) \quad (2.4)$$

sendo que:

- c : velocidade de fase;

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.5)$$

Define-se o número de onda através da equação:

$$k^2 = \frac{\omega^2 (1 - j\eta)}{c^2 (1 + \eta^2)} \quad (2.6)$$

substituindo-se a equação 2.6 na equação 2.4:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = \frac{-F}{E_c A_T} \delta(x - x_0) \quad (2.7)$$

a solução homogênea da equação 2.7 é dada por:

$$u(x) = A_L e^{-jkx} + B_L e^{jkx} \quad (2.8)$$

que, escrita em função da posição e do tempo, é dada por:

$$U(x, t) = (A_L e^{-jkx} + B_L e^{jkx}) e^{j\omega t} \quad (2.9)$$

O primeiro termo da equação 2.8, $A_L e^{-jkx}$, representa a onda propagante para direita (direção + x), e o termo $B_L e^{jkx}$ (direção - x) representa a onda propagante para a esquerda.

As amplitudes A_L e B_L do deslocamento são determinadas aplicando-se as condições de contorno. Neste caso, as condições de contorno da estrutura são representadas por uma força harmônica em x_0 e livre em x_1 .

2.2.1 Determinação do fluxo de energia e da densidade de energia em uma barra

O fluxo de potência instantâneo q_i em um ponto da barra é definido como o produto da força axial pela velocidade e pode ser escrita em termos da solução de deslocamento como (Cremer e Heckl, 1988):

$$q_i = -EA_T \frac{dU(x, t)}{dx} \frac{dU(x, t)}{dt} \quad (2.10)$$

sendo que:

- $-EA_T \frac{dU(x,t)}{dx}$: força axial;
- $\frac{dU(x,t)}{dt}$: velocidade longitudinal.

Nesta tese assumiu-se o fluxo de energia como sendo fluxo de potência. Cho e Bernhard (1998) definiram fluxo de potência como sendo fluxo de energia, ou vice-versa.

As dimensões da densidade de energia, fluxo de energia e potência injetada são apresentadas na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Dimensões das variáveis de energia em EFEM.

	Densidade de energia	Fluxo de energia	Potência injetada
1D (barra e viga)	[J/m]	[W]	[W]
2D (placa)	[J/m ²]	[W/m]	[W]
3D (espaços acústicos)	[J/m ³]	[W/m ²]	[W]

A mesma solução pode ser usada para desenvolver as expressões da barra para as densidades de energia cinética e potencial instantâneas como:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} EA_T \left(\frac{dU(x,t)}{dx} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \rho A_T \left(\frac{dU(x,t)}{dt} \right)^2 \quad (2.12)$$

A densidade de energia total instantânea, e_i , é a soma das energias cinética e potencial instantâneas.

Como o objetivo principal desta análise é obter o fluxo de energia líquido na barra, as expressões da média temporal de q_i e e_i serão de maior interesse do que seu valores instantâneos (Kinsler *et al.*, 1982). Assim, a média temporal do fluxo de energia pode ser escrita como:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q_i dt \quad (2.13)$$

ou de outra forma, como a metade da parte real do produto da força axial pelo conjugado da velocidade, ou seja,

$$\langle q \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle -F \left(\frac{dU(x,t)}{dt} \right)^* \right\rangle \quad (2.14)$$

- $\left(\frac{dU(x,t)}{dt}\right)^*$: complexo conjugado da velocidade longitudinal
- $\langle \rangle$: valor médio no tempo.

Para facilitar a dedução do fluxo de energia e da densidade de energia, o número de onda definido pela equação 2.6 será re-escrito da seguinte forma:

$$k = k_1 + jk_2 \quad (2.15)$$

Substituindo-se as equações 2.9 e 2.13 em 2.14, pode-se obter o fluxo de energia médio como:

$$\begin{aligned} \langle q \rangle = \frac{1}{2} \omega E A_T \{ & k_1 [|A_L|^2 e^{2k_2 x} - |B_L|^2 e^{-2k_2 x}] \\ & - 2k_2 [\text{Im}(A_L B_L^*) \cos(2k_1 x) - \text{Re}(A_L B_L^*) \sin(2k_1 x)] \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo-se a força axial na equação 2.11 e a velocidade longitudinal na equação 2.12, as expressões para densidades de energia potencial e cinética média no tempo podem ser escritas como:

$$\langle E \rangle_{pot} = \frac{1}{4} E A_T |k|^2 \{ [|A_L|^2 e^{2k_2 x} + |B_L|^2 e^{-2k_2 x}] - 2[\text{Re}(A_L B_L^*) \cos(2k_1 x) + \text{Im}(A_L B_L^*) \sin(2k_1 x)] \} \quad (2.17)$$

$$\langle E \rangle_{cin} = \frac{1}{4} \rho A_T \omega^2 \{ [|A_L|^2 e^{2k_2 x} + |B_L|^2 e^{-2k_2 x}] + 2[\text{Re}(A_L B_L^*) \cos(2k_1 x) + \text{Im}(A_L B_L^*) \sin(2k_1 x)] \} \quad (2.18)$$

Assim, a densidade de energia total média no tempo será:

$$\begin{aligned} \langle e \rangle = \frac{1}{4} \{ & [|A_L|^2 e^{2k_2 x} + |B_L|^2 e^{-2k_2 x}] \{ E A_T |k|^2 + \rho A_T \omega^2 \} \\ & - \frac{1}{2} \{ \text{Re}(A_L B_L^*) \cos(2k_1 x) + \text{Im}(A_L B_L^*) \sin(2k_1 x) \} \{ E A_T |k|^2 - \rho A_T \omega^2 \} \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.2 Simplificação das equações do fluxo e da densidade de energia para uma barra

Assumindo-se que o amortecimento dado na equação 2.6 é muito pequeno ($\eta \ll 1$), então, a parte real e a imaginária do número de onda complexo são:

$$k_1 \approx \frac{\omega}{c} \quad (2.20)$$

$$k_2 \approx -\frac{\eta\omega}{2c} = -\frac{\eta}{2}k_1 \quad (2.21)$$

Para essa análise, conclui-se que a parte imaginária do número de onda (k) é muito menor do que a parte real. Esta hipótese é uma excelente aproximação para valores de amortecimento encontrados em materiais comuns, tais como aço (Wohlever, 1988). Aplicando-se a hipótese de que $|k_1| \gg |k_2|$ na equação 2.16, observa-se que o segundo termo que envolve as funções senos e cossenos é muito menor que o primeiro termo, portanto, pode ser desprezado. Assim, o fluxo de energia médio no tempo será:

$$\langle q \rangle \approx \frac{1}{2}\omega EA_T k_1 \{ |A_L|^2 e^{2k_2 x} - |B_L|^2 e^{-2k_2 x} \} \quad (2.22)$$

A simplificação da densidade de energia total média no tempo, representada pela equação 2.19, é feita considerando-se que o fator de amortecimento é muito pequeno ($\eta \ll 1$), e que o quadrado da magnitude do número de onda ($|k|^2$) é:

$$|k|^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.23)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação 2.23 por EA_T e substituindo c^2 por $\frac{E}{\rho}$, tem-se:

$$EA_T |k|^2 \approx EA_T \frac{\omega^2}{c^2} = EA_T \frac{\omega^2 \rho}{E} = \rho A_T \omega^2 \quad (2.24)$$

Substituindo-se a equação 2.24 em 2.19, o segundo termo da equação 2.19 torna-se zero, simplificando a equação. Assim, a densidade de energia total média no tempo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle e \rangle \approx \frac{1}{2} \rho A_T \omega^2 \{ |A_L|^2 e^{2k_2 x} + |B_L|^2 e^{-2k_2 x} \} \quad (2.25)$$

As densidades de energia potencial e cinética média no tempo são funções espacialmente harmônicas, e estão em diferença de fase. A razão desta diferença está na forma da solução de deslocamento, equação 2.9, e no modo em que as densidades de energia potencial e cinética são armazenadas. As componentes harmônicas das densidades de energia potencial e cinética, são essencialmente iguais em magnitude mas negativa uma em relação a outra. Para a hipótese que o amortecimento é pequeno ($\eta \ll 1$), observou-se que a soma das densidades de energia potencial e cinética resulta no cancelamento das componentes harmônicas e que a densidade de energia total média no tempo é bem representada pela equação 2.25. Wohlever (1988) exemplificou o comportamento da distribuição de energia para uma barra excitada por uma força harmônica em uma extremidade e livre na outra, figura 2.2. A densidade de energia potencial, equação 2.11, é proporcional ao quadrado da primeira derivada da solução de

deslocamento em relação a x . A densidade de energia cinética, equação 2.12, é proporcional ao quadrado da primeira derivada da solução de deslocamento em relação a t . Devido à natureza harmônica da solução, a primeira derivada do deslocamento e o deslocamento estão fora de fase um em relação ao outro de $1/4$ de comprimento de onda. Conseqüentemente, a soma das densidades de energia potencial e cinética resulta no cancelamento das suas porções harmônicas. Assim, a densidade de energia total é aparentemente constante, mas com um leve decaimento devido à dissipação de energia ao longo da barra, figura 2.3. Os resultados das densidades de energia total, potencial e cinética foram calculadas utilizando-se o SEM para uma frequência de 1000 Hz, obtendo-se os mesmos os efeitos estudados por Wohlever (1988) sobre essa estrutura. Os parâmetros da barra de alumínio encontram-se na tabela 2.2.

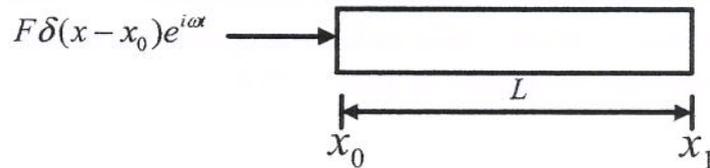


Figura 2.2: Barra excitada por uma força harmônica em uma extremidade e livre na outra.

Tabela 2.2: Parâmetros da estrutura (Barra)

Área	$4e - 04 [m^2]$
Densidade	$2700 [\frac{kg}{m^3}]$
Módulo de elasticidade	$7.1e10 [Pa]$
Comprimento	$6 [m]$

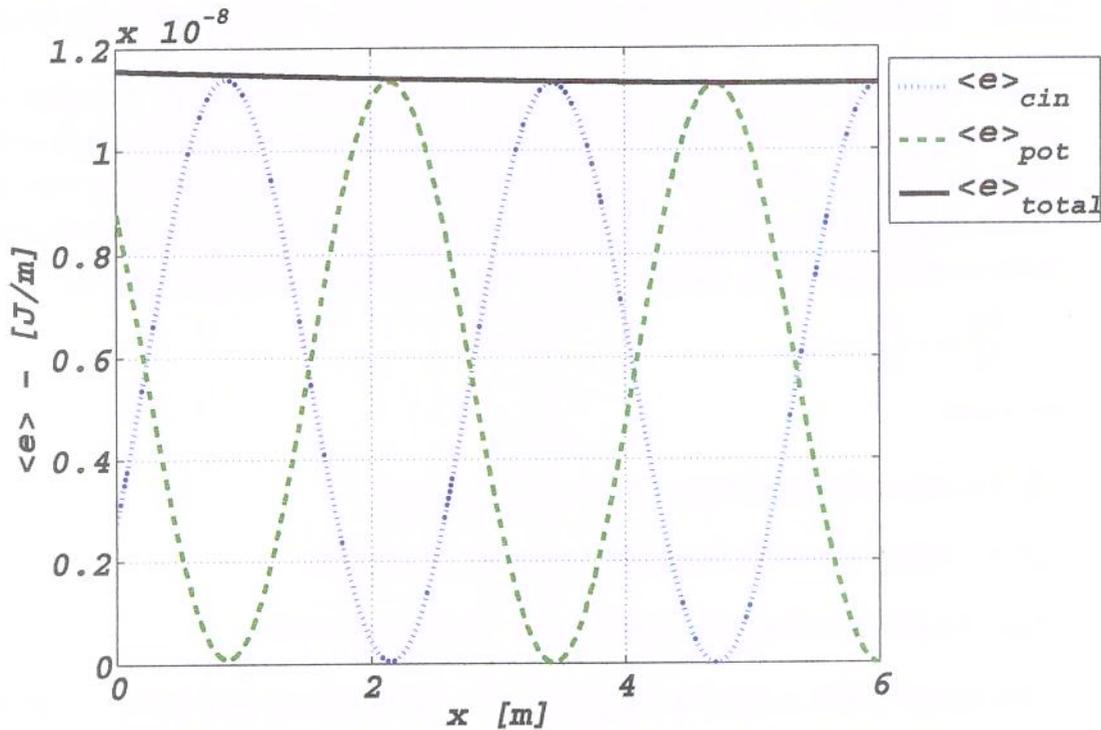


Figura 2.3: Densidade de energia cinética, potencial e total média para uma barra excitada longitudinalmente em uma $f=1000$ [Hz].

2.3 Equação diferencial de energia para barra

2.3.1 Relação entre o fluxo de energia e a densidade de energia

Aplicando-se o gradiente na equação 2.25, obtém-se:

$$\frac{d\langle e \rangle}{dx} = \frac{1}{2} \rho A_T \omega^2 k_2 \{ |A_L|^2 e^{2k_2 x} - |B_L|^2 e^{-2k_2 x} \} \quad (2.26)$$

Dividindo-se a expressão aproximada do fluxo de energia médio, equação 2.22, pelo gradiente da densidade de energia média aproximada, equação 2.26, obtém-se uma relação simples entre fluxo e o gradiente de energia:

$$\langle q \rangle = - \frac{c^2}{\eta \omega} \frac{d\langle e \rangle}{dx} \quad (2.27)$$

2.3.2 Balanço de energia em um elemento diferencial de barra

Para se obter a equação diferencial de energia para barra, um balanço de energia em um elemento diferencial é realizado, como mostra a figura 2.10. A taxa de densidade de energia dentro do elemento diferencial deve ser igual à potência injetada (q), menos a variação do fluxo de energia saindo do volume de controle, e menos o fluxo de energia dissipado no mesmo (Wohlever e Bernhard, 1992). Assim, a equação resultante do balanço de energia é:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - \pi_{diss} \quad (2.28)$$

sendo que:

- $\frac{\partial e}{\partial t}$: é a taxa de energia dentro do volume de controle;
- $\frac{\partial q}{\partial x}$: é a variação do fluxo de energia no volume de controle;
- π_{diss} : é a potência dissipada no interior do volume de controle.

Na equação 2.28, a taxa da densidade de energia torna-se zero devido à condição de regime permanente da barra. Também considera-se que a potência injetada (q) é aplicada no contorno. Assim, a partir dessas hipóteses e substituindo-se a relação entre o fluxo e a densidade de energia, equação 2.27 na equação 2.28, consegue-se expressar o gradiente do fluxo de energia em termos da segunda derivada da densidade de energia. Portanto, a forma da equação 2.28 em regime permanente é:

$$\frac{c^2}{\eta\omega} \frac{d^2 \langle e \rangle}{dx^2} - \langle \pi \rangle_{diss} = 0 \quad (2.29)$$

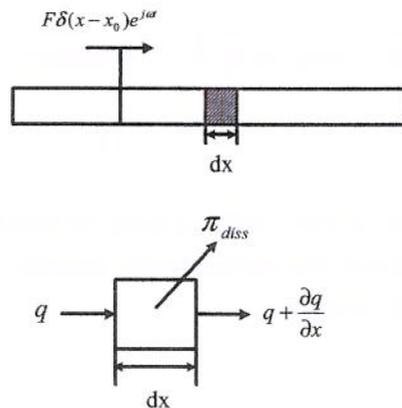


Figura 2.4: Balanço de energia em um elemento diferencial de barra.

Em condição de regime permanente, a equação 2.29 mostra que a potência dissipada naquele ponto é proporcional à segunda derivada da densidade de energia naquele ponto. Calculando-se a segunda derivada da densidade de energia, e substituindo-se na equação 2.29, obtém-se a potência dissipada:

$$\langle \pi \rangle_{diss} = \frac{1}{2} \rho A_T \omega^2 \eta \omega [|A_L|^2 e^{2k_2 x} + |B_L|^2 e^{-2k_2 x}] \quad (2.30)$$

Dividindo-se a expressão da densidade de energia, equação 2.25 pela equação 2.30, e resolvendo para potência dissipada, tem-se a seguinte expressão:

$$\langle \pi \rangle_{diss} = \eta \omega \langle e \rangle \quad (2.31)$$

Portanto, a potência dissipada em um ponto é proporcional à densidade de energia naquele ponto. Nefske e Sung (1989), que aplicaram a análise do fluxo de energia em vigas, desenvolveram o termo de dissipação de energia a partir de uma hipótese da Análise Estatística de Energia (SEA), a qual diz que a potência dissipada é proporcional à energia total de um subsistema na banda de frequência em que está sendo executada a análise.

Para finalizar a dedução da equação diferencial de energia proposta por Wohlever (1988), o resultado da equação 2.31 deve ser substituído em 2.29:

$$\frac{d^2 \langle e \rangle}{dx^2} - \varphi^2 \langle e \rangle = 0 \quad (2.32)$$

sendo que, $\varphi = \frac{\eta \omega}{c}$

A solução geral para equação 2.32 é:

$$\langle e \rangle = G_1 e^{\varphi x} + G_2 e^{-\varphi x} \quad (2.33)$$

As amplitudes G_1 e G_2 são obtidas através da aplicação das condições de contorno. Conhecendo-se estas constantes, pode-se determinar o fluxo de energia pela substituição da equação 2.33 em 2.27:

$$\langle q \rangle = -c \{ G_1 e^{\varphi x} - G_2 e^{-\varphi x} \} \quad (2.34)$$

As condições de contorno de EFA são similares às utilizadas em SEA, ou seja, o fluxo de energia injetado na estrutura é conhecido, e pretende-se determinar os níveis de energia.

2.4 Solução Analítica da Vibração Transversal de uma Viga

Para desenvolver a equação de movimento utilizada na modelagem do fluxo e da densidade de energia, utilizou-se a teoria de Bernoulli-Euler. A teoria é válida para as hipóteses: o comprimento de onda é grande comparado à dimensão da seção transversal da viga, a inércia rotacional e a deformação devido ao cisalhamento são desprezadas. Portanto, pode-se considerar que os planos da seção transversal são normais à linha neutra como mostra a figura 2.5, e a função de inclinação $\phi(t) = \frac{\partial V}{\partial x}$ de qualquer seção ao longo da viga pode ser obtida pela diferenciação do deslocamento transversal $V(x,t)$.

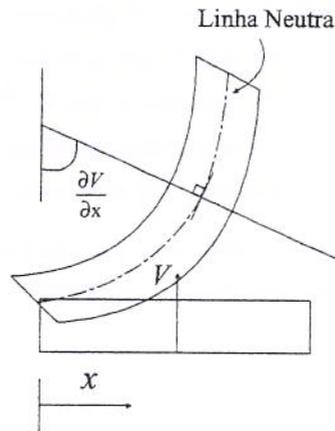


Figura 2.5: Deformação da seção da viga de Bernoulli-Euler.

Assim, a equação do movimento da viga pode ser escrita como:

$$E_c I \frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} + \rho A_T \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = F \delta(x - x_0) \quad (2.35)$$

Sendo que:

- $E_c I$: rigidez transversal;
- $V(x,t)$: deslocamento transversal de uma viga como uma função de posição e tempo;
- ρA_T : densidade por unidade de comprimento;
- $F \delta(x - x_0)$: força harmônica aplicada na posição x_0 .

Como no caso da barra, considera-se que o sistema está em regime permanente e que o amortecimento está incluso no módulo de elasticidade complexo. A excitação consiste de uma força transversal harmônica, 2.6. Assim, a equação 2.35 pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2 \rho A_T (1 - j\eta)}{E_c I (1 + \eta^2)} v(x) = \frac{F}{E_c I} \delta(x - x_0) \quad (2.36)$$

sendo que, neste caso o número de onda k é dado por:

$$k^4 = \frac{\omega^2 \rho A_T (1 - j\eta)}{E_c I (1 + \eta^2)} \quad (2.37)$$

Substituindo-se k^4 na equação 2.36, então a equação de movimento na forma espectral é:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^4 v(x) = \frac{F}{E_c I} \delta(x - x_0) \quad (2.38)$$

a solução homogênea da equação 2.38 é dada por:

$$v(x) = A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} + D_F e^{kx} \quad (2.39)$$

que, escrita em função da posição e do tempo, é dada por:

$$V(x, t) = (A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} + D_F e^{kx}) e^{j\omega t} \quad (2.40)$$

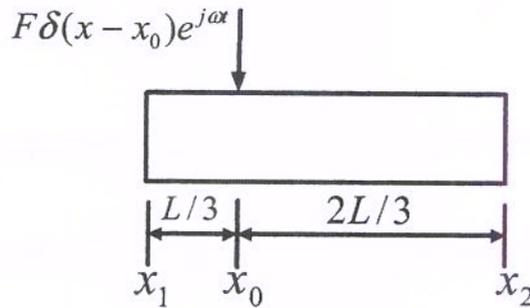


Figura 2.6: Viga livre-livre vibrando transversalmente.

Na equação 2.39 os dois primeiros termos, $A_F e^{-jkx}$ e $B_F e^{jkx}$, representam as ondas propagantes para a direita e para a esquerda, respectivamente. Os últimos termos, $C_F e^{-kx}$ e $D_F e^{kx}$, representam as ondas evanescentes que se extinguem dentro do campo próximo, para

a direita e para a esquerda, respectivamente. As amplitudes A_F , B_F , C_F e D_F da solução geral são determinadas aplicando-se as condições de contorno da viga. As condições de contorno são dadas por deslocamentos vertical, rotação, momento fletor e esforço cortante. A condição de deslocamento em $x = x_0$ é:

$$v(x_0) = v_0 \quad (2.41)$$

A condição de rotação é:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \phi_0 \quad (2.42)$$

onde v_0 e ϕ_0 são valores conhecidos. As condições de contorno de momento fletor e força cortante podem ser escritas da seguinte forma:

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.43)$$

e a força cortante:

$$V = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (2.44)$$

A convenção de sinais para os esforços que atuam na viga está representada na figura 2.7.

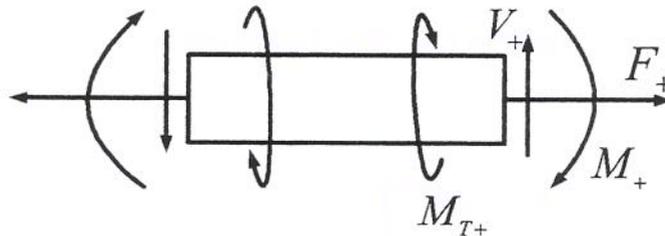


Figura 2.7: Convenção de sinais para os esforços que atuam em uma viga.

2.4.1 Determinação do fluxo de energia e da densidade de energia em uma viga

Diferentemente do caso da barra, onde somente a força axial está envolvida neste mecanismo de transmissão de energia, o fluxo de energia em uma viga é transportado pela força cortante e pelo momento fletor. Assim, o fluxo de energia médio no tempo associado com a força é obtido por:

$$\langle q \rangle_c = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left(EI \frac{\partial^3 V(x, t)}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \right)^* \right\} \quad (2.45)$$

- $EI \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3}$: força cortante;
- $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$: velocidade transversal.

O fluxo de energia médio no tempo associado com o momento fletor é dado por:

$$\langle q \rangle_m = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left(EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right) \left(\frac{-\partial^2 V(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^* \right\} \quad (2.46)$$

- $EI \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$: momento fletor;
- $\frac{-\partial^2 V(x,t)}{\partial x \partial t}$: velocidade angular.

Substituindo a solução geral, equação 2.40, nas equações 2.45 e 2.46, os fluxos de energia associados à força cortante, e ao momento fletor podem ser escritos na forma:

$$\langle q \rangle_c = -\frac{1}{2} EI \omega \text{Re} \{ j k^3 [j A_F e^{-jkx} - j B_F e^{jkx} - C_F e^{-kx} + D_F e^{kx}] [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} + D_F e^{kx}]^* \} \quad (2.47)$$

$$\langle q \rangle_m = \frac{1}{2} EI \omega |k|^2 \text{Re} \{ j k [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} - C_F e^{-kx} - D_F e^{kx}] [j A_F e^{-jkx} - j B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} - D_F e^{kx}]^* \} \quad (2.48)$$

A densidade de energia total para uma viga vibrando transversalmente é representada pela soma das densidades de energia potencial e cinética. A densidade de energia potencial, é dada por:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 V(x,t)}{dx^2} \right)^2 \quad (2.49)$$

e a densidade de energia cinética por:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \rho A_T \left(\frac{dV(x,t)}{dt} \right)^2 \quad (2.50)$$

Substituindo-se a equação 2.40 na equação 2.48 e 2.49, e calculando-se os valores médios, as equações resultantes são:

$$\langle E \rangle_{pot} = \frac{1}{4} EI |k|^2 \text{Re} \{ [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} - C_F e^{-kx} - D_F e^{kx}] [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} - C_F e^{-kx} - D_F e^{kx}]^* \} \quad (2.51)$$

$$\langle E \rangle_{cin} = \frac{1}{4} \rho A_T \omega^2 \text{Re} \{ [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} + D_F e^{kx}] [A_F e^{-jkx} + B_F e^{jkx} + C_F e^{-kx} + D_F e^{kx}]^* \} \quad (2.52)$$

O número de onda para uma viga é definido na equação 2.37. Para um amortecimento muito pequeno, ou seja, $\eta \ll 1$, a parte real de k^4 será muito maior do que a parte imaginária. Utiliza-se a hipótese de que a parte real e imaginária do k possa ser:

$$k_1 \approx \left(\frac{\omega^2 \rho A_T}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\omega}{c_g} \quad (2.53)$$

$$k_2 \approx -\frac{\eta}{4} \left(\frac{\omega^2 \rho A_T}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} = -\frac{\eta}{4} k_1 \quad (2.54)$$

sendo que, $c_g = \left(\frac{\omega^2 EI}{\rho A_T} \right)^{\frac{1}{4}}$, é a velocidade de grupo para ondas de transversais na viga.

As expressões para as densidades de energia potencial e cinética médias no tempo podem ser expandidas em termos dos coeficientes da solução analítica, equação 2.40,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{pot} = & \frac{1}{4} EI |k^2|^2 \{ |A_F|^2 e^{2k_2 x} + |B_F|^2 e^{-2k_2 x} + |C_F|^2 e^{-2k_1 x} + |D_F|^2 e^{2k_1 x} \\ & - 2e^{-z_2 x} [\text{Re}(A_F C_F^*) \cos(z_2 x) + \text{Im}(A_F C_F^*) \sin(z_2 x)] - 2e^{z_1 x} [\text{Re}(A_F D_F^*) \cos(z_1 x) \\ & + \text{Im}(A_F D_F^*) \sin(z_1 x)] - 2e^{-z_1 x} [\text{Re}(C_F B_F^*) \cos(z_1 x) + \text{Im}(C_F B_F^*) \sin(z_1 x)] \\ & - 2e^{z_2 x} [\text{Re}(D_F B_F^*) \cos(z_2 x) + \text{Im}(D_F B_F^*) \sin(z_2 x)] + 2[\text{Re}(A_F B_F^*) \cos(2k_1 x) \\ & + \text{Im}(A_F B_F^*) \sin(2k_1 x)] + 2[\text{Re}(C_F D_F^*) \cos(2k_2 x) + \text{Im}(C_F D_F^*) \sin(2k_2 x)] \} \end{aligned} \quad (2.55)$$

e,

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{cin} = & \frac{1}{4} \rho A_T \omega^2 \{ |A_F|^2 e^{2k_2 x} + |B_F|^2 e^{-2k_2 x} + |C_F|^2 e^{-2k_1 x} + |D_F|^2 e^{2k_1 x} \\ & + 2e^{-z_2 x} [\text{Re}(A_F C_F^*) \cos(z_2 x) + \text{Im}(A_F C_F^*) \sin(z_2 x)] + 2e^{z_1 x} [\text{Re}(A_F D_F^*) \cos(z_1 x) \\ & + \text{Im}(A_F D_F^*) \sin(z_1 x)] + 2e^{-z_1 x} [\text{Re}(C_F B_F^*) \cos(z_1 x) + \text{Im}(C_F B_F^*) \sin(z_1 x)] \\ & + 2e^{z_2 x} [\text{Re}(D_F B_F^*) \cos(z_2 x) + \text{Im}(D_F B_F^*) \sin(z_2 x)] + 2[\text{Re}(A_F B_F^*) \cos(2k_1 x) \\ & + \text{Im}(A_F B_F^*) \sin(2k_1 x)] + 2[\text{Re}(C_F D_F^*) \cos(2k_2 x) + \text{Im}(C_F D_F^*) \sin(2k_2 x)] \} \end{aligned} \quad (2.56)$$

sendo que,

$$z_1 = k_1 + k_2 = k_1 \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \quad (2.57)$$

e,

$$z_2 = k_1 - k_2 = k_1 \left(1 + \frac{\eta}{4} \right) \quad (2.58)$$

Utilizando-se a hipótese de $\eta \ll 1$, algumas simplificações podem ser feitas para densidade de energia total. Então, quando $\eta \ll 1$, a magnitude de $|k^2|^2$ é:

$$|k^2|^2 \approx \omega^2 \frac{\rho A_T}{EI} \quad (2.59)$$

Multiplicando-se ambos lados da 2.59 por EI ,

$$EI|k^2|^2 \approx EI\omega^2 \frac{\rho A_T}{EI} = \rho A_T \omega^2 \quad (2.60)$$

A densidade de energia total média aproximada pode ser obtida substituindo-se a equação 2.60 na densidade de energia potencial média, equação 2.55. Em seguida, adicionando-se as equações 2.55 e 2.56, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle e \rangle = & \frac{1}{2} \rho A_T \omega^2 \{ |A_F|^2 e^{2k_2 x} + |B_F|^2 e^{-2k_2 x} + |C_F|^2 e^{-2k_1 x} + |D_F|^2 e^{2k_1 x} + 2[\operatorname{Re}(A_F B_F^*) \cos(2k_1 x) \\ & + \operatorname{Im}(A_F B_F^*) \sin(2k_1 x)] + 2[\operatorname{Re}(C_F D_F^*) \cos(2k_2 x) + \operatorname{Im}(C_F D_F^*) \sin(2k_2 x)] \} \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.4.2 Simplificação das equações do fluxo de energia e da densidade de energia para uma viga

Expandindo-se as equações 2.45 e 2.46, em termos dos coeficientes da solução analítica:

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_c = & -\frac{1}{2} EI \omega \operatorname{Re} \{ j k^3 [j |A_F|^2 e^{2k_2 x} + j(A_F B_F^*) e^{-2jk_1 x} + j(A_F C_F^*) e^{-(1+j)z_2 x} + j(A_F D_F^*) e^{(1-j)z_1 x} \\ & - j(B_F A_F^*) e^{2jk_1 x} - j|B_F|^2 e^{-2k_2 x} - j(B_F C_F^*) e^{-(1-j)z_1 x} - j(B_F D_F^*) e^{(1+j)z_2 x} \\ & - (C_F A_F^*) e^{-(1-j)z_2 x} - (C_F B_F^*) e^{-(1+j)z_1 x} - |C_F|^2 e^{-2k_1 x} - (C_F D_F^*) e^{-2jk_2 x} \\ & + (D_F A_F^*) e^{(1+j)z_1 x} + (D_F B_F^*) e^{(1-j)z_2 x} + (D_F C_F^*) e^{2jk_2 x} + |D_F|^2 e^{2k_1 x}] \} \end{aligned} \quad (2.62)$$

e

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_m = & -\frac{1}{2} EI \omega \operatorname{Re} \{ j k |k|^2 [j |A_F|^2 e^{2k_2 x} - j(A_F B_F^*) e^{-2jk_1 x} - (A_F C_F^*) e^{-(1+j)z_2 x} + (A_F D_F^*) e^{(1-j)z_1 x} \\ & + j(B_F A_F^*) e^{2jk_1 x} - j|B_F|^2 e^{-2k_2 x} - (B_F C_F^*) e^{-(1-j)z_1 x} + (B_F D_F^*) e^{(1+j)z_2 x} \\ & - j(C_F A_F^*) e^{-(1-j)z_2 x} + j(C_F B_F^*) e^{-(1+j)z_1 x} + |C_F|^2 e^{-2k_1 x} - (C_F D_F^*) e^{-2jk_2 x} \\ & - j(D_F A_F^*) e^{(1+j)z_1 x} + j(D_F B_F^*) e^{(1-j)z_2 x} + (D_F C_F^*) e^{2jk_2 x} - |D_F|^2 e^{2k_1 x}] \} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Um procedimento que representa uma média espacial local (suavização) deve ser realizado para que o fluxo de energia tenha um comportamento constante em relação ao espaço. Essa média espacial é executada ao longo de um trecho da estrutura de comprimento λ , e é definida por:

$$\langle \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \langle q \rangle dx \quad (2.64)$$

sendo que:

- $\langle q \rangle$: é a soma da densidade de energia média no tempo devido à força cortante, equação 2.62, e ao momento, equação 2.63;

- $\lambda = \frac{2\pi}{k}$: comprimento de onda;

assim, $\langle \bar{q} \rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q} \rangle = & \frac{EI\omega}{4\pi} \{ 4\pi((k_1)^3 - k_1(k_2)^2)[|A_F|^2 e^{2k_2x} - |B_F|^2 e^{-2k_2x}] + ((k_1)^2 k_2 - (k_2)^3)[|D_F|^2 e^{2k_1x+4\pi} \\
& - |C_F|^2 e^{-2k_1x}] + 2 \frac{(k_1)^4 - k_1^2(k_2)^2}{k_2} [\text{Re}(C_F D_F^*) [\cos(2k_2x) - \cos(2k_2)(x + \lambda)] \\
& + \text{Im}(C_F D_F^*) [\sin(2k_2x) - \sin(2k_2)(x + \lambda)]] + 2(k_1)^2 k_2 e^{-k_1x} [\text{Re}(A_F C_F^*) \sin(k_1x) \\
& - \text{Im}(A_F C_F^*) \cos(k_1x) + \text{Re}(C_F B_F^*) \sin(k_1x) - \text{Im}(C_F B_F^*) \cos(k_1x)] \\
& + 2(k_1)^2 k_2 e^{2\pi+k_1x} [\text{Re}(A_F D_F^*) \sin(k_1x) - \text{Im}(A_F D_F^*) \cos(k_1x) + \text{Re}(D_F B_F^*) \sin(k_1x) \\
& - \text{Im}(D_F B_F^*) \cos(k_1x)] \}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Uma idéia similar é aplicada para derivada da equação 2.48, resultando no gradiente médio espacial da densidade de energia total:

$$\frac{d\langle \bar{e} \rangle}{dx} = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \frac{d\langle e \rangle}{dx} dx \tag{2.66}$$

Sendo que:

- $\frac{d\langle e \rangle}{dx}$: é o gradiente da densidade de energia média no tempo;

portanto, a expressão resultante da integração é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle \bar{e} \rangle}{dx} = & \frac{FI}{4\pi} \{ 4\pi(k_1)^4 k_2 [|A_F|^2 e^{2k_2x} - |B_F|^2 e^{-2k_2x}] - |C_F|^2 e^{-2k_1x} + |D_F|^2 e^{4\pi+2k_1x} \\
& + \text{Re}(C_F D_F^*) [\cos(2k_2)(x + \lambda) - \cos(2k_2x)] + \text{Im}(C_F D_F^*) [\sin(2k_2)(x + \lambda) - \sin(2k_2x)] \}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Algumas aproximações com base em $\eta \ll 1$ são utilizadas na simplificação do fluxo e do gradiente da densidade de energia média espacial:

$$z_1 \approx z_2 \approx k_1 \tag{2.68}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx \frac{2\pi}{k_1} \tag{2.69}$$

$$e^{4\pi} - 1 \approx e^{4\pi} \quad (2.70)$$

$$e^{-4\pi} - 1 \approx -1 \quad (2.71)$$

$$e^{4\pi \frac{k_2}{k_1}} - 1 \approx 4\pi \frac{k_2}{k_1} \quad (2.72)$$

$$e^{-4\pi \frac{k_2}{k_1}} - 1 \approx -4\pi \frac{k_2}{k_1} \quad (2.73)$$

$$(k_1)^3 - k_1(k_2)^2 = (k_1)^3 \left(1 - \frac{\eta^2}{16}\right) \approx (k_1)^3 \quad (2.74)$$

A presença de termos de campo próximo na solução analítica de deslocamento para viga resultam em expressões do fluxo de energia médio espacial e do gradiente da densidade de energia média espacial, equação 2.65 e 2.67, que não são simples. Wohlever (1988) mostrou que, em altas frequências, a solução analítica de deslocamento, equação 2.39, pode ter uma aproximação adequada para grande parte do comprimento da viga. Para isso considera-se que a solução analítica é composta somente dos termos de campo distante. Assim, pela aplicação do conjunto de equações, de 2.68 a 2.74, mais a hipótese de campo distante, as expressões que descrevem o fluxo de energia médio espacial e o gradiente da densidade de energia média espacial, equações 2.65 e 2.67, podem ser simplificadas, resultando em:

$$\langle \bar{q} \rangle = EI\omega \{ (k_1)^3 [|A_F|^2 e^{2k_2x} - |B_F|^2 e^{-2k_2x}] \} \quad (2.75)$$

$$\frac{d\langle \bar{e} \rangle}{dx} = EI \{ (k_1)^4 k_2 [|A_F|^2 e^{2k_2x} - |B_F|^2 e^{-2k_2x}] \} \quad (2.76)$$

Dividindo-se a equação 2.75 pela 2.76, e resolvendo para $\langle \bar{q} \rangle$, determina-se uma relação entre o fluxo de energia e o gradiente de densidade energia média:

$$\langle \bar{q} \rangle = -\frac{4c_g^2}{\eta\omega} \frac{d\langle \bar{e} \rangle}{dx} \quad (2.77)$$

assim, o fluxo de energia médio é proporcional ao gradiente da densidade de energia média.

Wohlever (1988) também exemplificou o comportamento da distribuição de energia a partir da solução de deslocamento, equação 2.40. Esta solução possui quatro termos, sendo que os dois primeiros são similares aos da solução de barra, e conseqüentemente representam uma onda que se propaga. Os dois últimos termos são referidos como solução de campo próximo, desde que os efeitos deste termos são considerados próximo às descontinuidades (duas vigas de geometria ou materiais diferentes, ou então a posição onde age a força de excitação). Os termos de campo próximo podem ser seguramente desprezados quando consideram-se pontos

distantes um ou mais comprimentos de onda de uma descontinuidade. Essa hipótese, que representa o campo distante, é razoavelmente comum em análise de fluxo de energia.

Para ilustrar a distribuição de energia, considere uma viga apoiada em ambas as extremidades, e excitada por uma força harmônica na posição central, figura 2.8. As densidades de energia potencial e cinética são iguais em quase toda extensão da estrutura, figura 2.9. Somente na posição onde está localizada a excitação, as duas energias diferem. Esse comportamento é um resultado do efeito do campo próximo. A densidade de energia total é espacialmente harmônica, porque diferentemente do caso de barra, quando a densidade de energia cinética está em seu máximo a densidade de energia potencial também está no seu máximo. Os resultados das densidades de energia total, potencial e cinética foram calculadas utilizando-se o SEM para uma frequência de 1000 Hz, obtendo-se os mesmos os efeitos estudados por Wohlever (1988) sobre essa estrutura. A tabela 2.3 apresenta os parâmetros da viga de alumínio, que é excitada por uma força transversal.

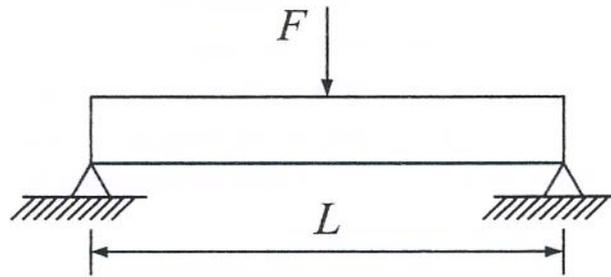


Figura 2.8: Viga apoiada em ambas as extremidades, e excitada por uma força harmônica na posição central.

Tabela 2.3: Parâmetro da estrutura (Viga)

Área	$4e - 04 [m^2]$
Densidade	$2700 [\frac{kg}{m^3}]$
Módulo de elasticidade	$7.1e10 [Pa]$
Momento de inércia	$1.33e-08 [m^4]$

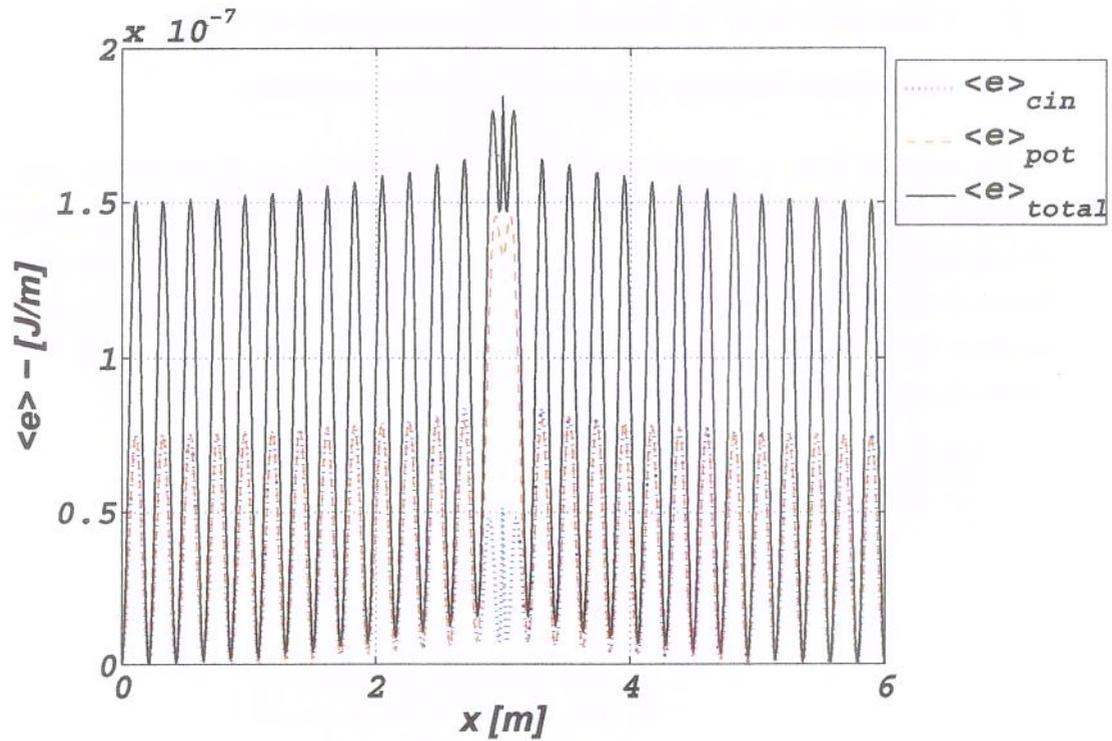


Figura 2.9: Densidades de energia cinética, potencial e total calculadas por SEM para uma viga excitada transversalmente em uma frequência $f=1000$ [Hz].

2.5 Equação diferencial de energia para viga

2.5.1 Balanço de energia em um elemento diferencial de viga

O mesmo procedimento utilizado para se obter a equação diferencial de energia de barra é aplicado para a viga. Portanto, um balanço de energia em um elemento diferencial de viga é realizado, figura 2.10. A taxa de variação da densidade de energia dentro do elemento diferencial deve ser igual à potência injetada (q), menos a variação do fluxo de energia saindo do volume de controle, e menos o fluxo de energia dissipado no mesmo, (Wohlever e Bernhard, 1992). Assim, a equação resultante do balanço de energia é:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - \pi_{diss} \quad (2.78)$$

sendo que:

- $\frac{\partial e}{\partial t}$: é a taxa de variação da densidade de energia dentro do volume de controle;

- $\frac{\partial q}{\partial x}$: é a taxa de variação do fluxo de energia no volume de controle;
- π_{diss} : é a potência dissipada no interior do volume de controle.

Na equação 2.78, a taxa de variação da densidade de energia torna-se zero devido à condição de regime permanente da viga. Também considera-se que a potência injetada (q) está aplicada no contorno. Assim, a partir dessas hipóteses e substituindo-se a relação entre o fluxo e densidade de energia, equação 2.77, na equação 2.78, consegue-se expressar o gradiente do fluxo de energia em termos da segunda derivada da densidade de energia. Portanto, a forma da equação 2.78 em regime permanente é dada por:

$$\frac{4c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2 \langle \bar{e} \rangle}{dx^2} - \langle \bar{\pi} \rangle_{diss} = 0 \quad (2.79)$$

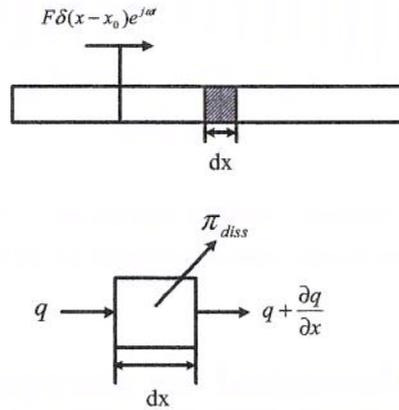


Figura 2.10: Balanço de energia em um elemento diferencial de viga.

Em condição de regime permanente, a equação 2.79 mostra que a potência média dissipada é proporcional à segunda derivada da densidade de energia. Calculando-se a segunda derivada da densidade de energia média, equação 2.76, e substituindo-se na equação 2.79, obtém-se a potência dissipada média:

$$\langle \bar{\pi} \rangle_{diss} = \frac{1}{2} \rho A_T \omega^2 \eta \omega \{ |A_F|^2 e^{2k_2 x} + |B_F|^2 e^{-2k_2 x} \} \quad (2.80)$$

A densidade de energia média espacial é obtida integrando-se a equação 2.76:

$$\langle \bar{e} \rangle = \frac{\rho A_T \omega^2}{2} \{ |A_F|^2 e^{2k_2 x} + |B_F|^2 e^{-2k_2 x} \} \quad (2.81)$$

Dividindo-se a equação 2.80 pela equação 2.81 e resolvendo para a potência dissipada, tem-se a seguinte expressão:

$$\langle \bar{\pi} \rangle_{diss} = \eta \omega \langle \bar{e} \rangle \quad (2.82)$$

Portanto, a potência dissipada média espacial é proporcional à densidade de energia média. A equação diferencial de energia para viga proposta por Wohlever (1988), pode ser obtida substituindo-se a equação 2.82 em 2.79:

$$\frac{d^2 \langle \bar{e} \rangle}{dx^2} - \psi^2 \langle \bar{e} \rangle = 0 \quad (2.83)$$

sendo que, $\psi = \frac{\eta \omega}{2c_y}$

A solução geral para equação 2.83 é:

$$\langle \bar{e} \rangle = G_1 e^{\psi x} + G_2 e^{-\psi x} \quad (2.84)$$

As constantes G_1 e G_2 são obtidas através da aplicação das condições de contorno. Conhecendo-se estas constantes pode-se determinar o fluxo de energia pela substituição da equação 2.84 em 2.77, resultando em:

$$\langle \bar{q} \rangle = -2c_y \{ G_1 e^{\psi x} - G_2 e^{-\psi x} \} \quad (2.85)$$

2.6 Relações de acoplamento de barras e vigas

O principal objetivo do EFA é fornecer uma forma pela qual a propagação da energia vibracional através de um sistema vibroacústico possa ser entendida. As equações que governam os modelos de fluxo e densidade de energia para um elemento individual de barra e viga foram desenvolvidas. Contudo, para analisar a energia em uma estrutura composta por vários destes elementos, um método de acoplamento precisa ser definido. Muitas pesquisas em SEA têm sido feitas com objetivo de desenvolver parâmetros de acoplamento, também conhecidos como fatores de perda por acoplamento (CLFs), (Scharton, 1968), (Remington e Manning, 1975), (Newland, 1968), (Newland, 1966), (Crandall e Lotz, 1971) e (Brooks e Maidanik, 1977). Uma técnica comum utilizada para acoplar estruturas em SEA conhecida como o método da transmissão de ondas foi usada neste trabalho e será descrita nesta seção. Acoplamentos são descontinuidades na estrutura, também referidas como juntas, as quais podem ser representados por variações do material, da geometria (seção transversal, momento de inércia) ou das configurações estruturais (por exemplo, conexões da estrutura na forma de T,

L, Y, etc.). As relações de acoplamento são utilizadas para quantificar os efeitos sobrepostos de todas as ondas transmitidas e refletidas em ambos os lados das juntas. Os parâmetros utilizados na descrição da troca de energia entre os elementos envolvidos são chamados de coeficientes de transmissão ou reflexão. Estes coeficientes são definidos como uma taxa de energia transmitida ou refletida na junta.

2.6.1 Relações de acoplamento de barras colineares

Considere duas barras finitas acopladas, A e B , sendo excitadas por uma força axial harmônica como mostrado na figura 5.3. As ondas incidentes sobre a junta produzirão ondas parcialmente refletidas em A e transmitidas em B . As ondas transmitidas encontram a extremidade da barra B , e são totalmente refletidas de volta sobre a junta, sendo parcialmente transmitidas para barra A e refletidas para B . A primeira onda que foi refletida na junta sobre a barra A encontrará a extremidade desta e será totalmente refletida de volta sobre a junta. Este processo continuará indefinidamente enquanto a fonte de excitação injetar potência no sistema.

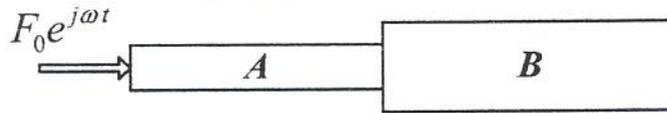


Figura 2.11: Duas barras colineares acopladas excitadas por uma força harmônica.

Para quantificar o efeito de sobreposição de todas as ondas transmitidas e refletidas, o comportamento das juntas em estruturas finitas será descrito localmente através de um modelo de junta em barras semi-infinitas. Considere um modelo de junta composto por barras semi-infinitas acopladas, A e B , como mostrado na figura 2.12.

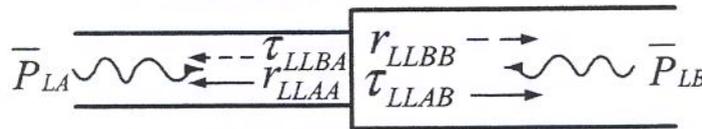


Figura 2.12: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes longitudinais em cada barra, \bar{P}_{LA} e \bar{P}_{LB} .

Uma onda longitudinal vindo da barra A (\bar{P}_{AL}) e outra da barra B (\bar{P}_{BL}) simultaneamente, incidem sobre a junta sendo parcialmente transmitidas e parcialmente refletidas.

Desta forma, a componente longitudinal do fluxo de energia na barra B pode ser representado como a soma das contribuições devido à onda parcialmente refletida em B e à onda parcialmente transmitida de A para B . Um sinal positivo ou negativo do fluxo de energia é convenicionado em função da direção do fluxo de energia que chega ou sai da junta, respectivamente. Assim, o fluxo de energia líquida propagando da junta para a barra B (saindo da junta) é dado por:

$$\langle q \rangle_{\bar{L}B}^- = \tau_{LLAB} \langle q \rangle_A^+ + r_{LLBB} \langle q \rangle_B^+ \quad (2.86)$$

sendo que,

- τ_{LLij} : coeficiente de transmissão longitudinal na barra j devido a uma onda incidente longitudinal na barra i ($i, j=A, B$);
- r_{LLii} : coeficiente de reflexão longitudinal na barra i devido a uma onda incidente longitudinal na barra i .

A componente longitudinal do fluxo de energia na barra A pode ser representada como a soma das contribuições devido à onda parcialmente refletida em A e à onda parcialmente transmitida de B para A . Então, o fluxo de energia líquido propagando da junta para a barra A é dado por:

$$\langle q \rangle_{\bar{L}A}^- = r_{LLAA} \langle q \rangle_A^+ + \tau_{LLBA} \langle q \rangle_B^+ \quad (2.87)$$

Em estruturas unidimensionais, os coeficientes, $\tau_{LLij} = \tau_{LLji}$ e $r_{LLii} = r_{LLjj}$. Assim, apenas um conjunto de coeficientes de transmissão e reflexão precisa ser calculado. Visto que para juntas conservativas, a soma de $\tau_{LLAB} + r_{LLAB} = 1$, a soma das equações 2.86 e 2.87 produz uma relação de equilíbrio do fluxo de energia na junta,

$$\langle q \rangle_{\bar{L}A}^+ - \langle q \rangle_{\bar{L}A}^- = \langle q \rangle_{\bar{L}B}^+ - \langle q \rangle_{\bar{L}B}^- = 0 \quad (2.88)$$

a qual é uma reiteração da conservação do fluxo de energia através da junta. Desta forma, as equações 2.86 e 2.87 são uma representação alternativa do princípio da conservação da energia. O desenvolvimento das relações dos coeficientes de transmissão e reflexão para barras colineares acopladas encontra-se no apêndice A.1.

2.6.2 Relações de acoplamento para vigas colineares

No caso de vigas colineares acopladas, figura 5.5, o fluxo de energia em ambos os lados da junta também pode ser representado utilizando-se os coeficientes de transmissão e reflexão. Os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes transversais propagantes da direita, \bar{A}_{BF} , e da esquerda, \bar{A}_{FA} , são representados em vigas semi-infinitas na figura 2.14 como linhas sólidas e tracejadas, respectivamente.

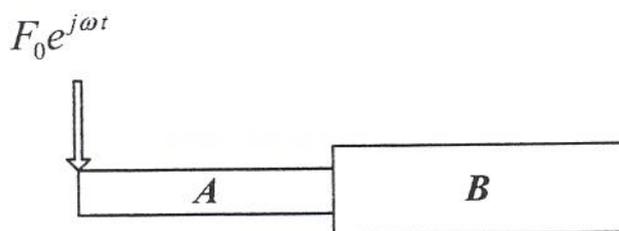


Figura 2.13: Duas vigas colineares acopladas excitadas por uma força harmônica.

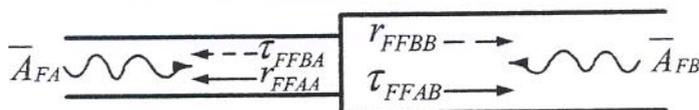


Figura 2.14: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes transversais em cada viga, \bar{A}_{FA} e \bar{A}_{FB} .

Assim, o fluxo de energia líquido propagando da junta para a viga B é dado por:

$$\langle q \rangle_{FB}^- = \tau_{FFAB} \langle q \rangle_A^+ + r_{FFBB} \langle q \rangle_B^+ \quad (2.89)$$

e o fluxo de energia propagando da junta para a viga A é dado por:

$$\langle q \rangle_{FA}^- = r_{FFAA} \langle q \rangle_A^+ + \tau_{FFBA} \langle q \rangle_B^+ \quad (2.90)$$

sendo que:

- τ_{FFij} : coeficiente de transmissão transversal na viga j devido a uma onda incidente transversal na viga i ($i, j=A, B$);
- r_{FFii} : coeficiente de reflexão transversal na viga i devido a uma onda incidente transversal na viga i ;

- $\langle q \rangle_{FB}^-$: a componente transversal do fluxo de energia na viga B pode ser representado como a soma das contribuições devido à onda parcialmente refletida em B e da onda parcialmente transmitida de A para B .

De forma similar ao da barra, também para vigas os coeficientes $\tau_{FFij} = \tau_{FFji}$ e $r_{FFii} = r_{FFjj}$. O desenvolvimento das relações entre os coeficientes de transmissão e reflexão para vigas colineares acopladas encontram-se no apêndice A.2.

2.6.3 Relações de acoplamento para duas vigas acopladas em ângulo arbitrário

Para duas vigas acopladas em um ângulo arbitrário, figura 2.15, qualquer um dos dois tipos de excitação, longitudinal ou transversal, produzirá na estrutura fluxos de energia com componentes de ondas longitudinal (axial) e transversal (flexão).

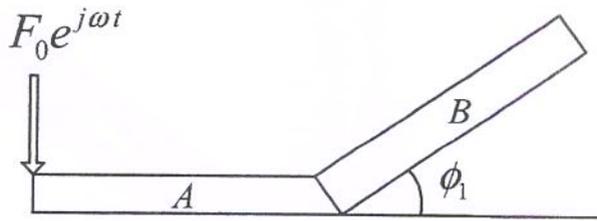


Figura 2.15: Duas vigas acopladas em um ângulo arbitrário excitadas por uma força harmônica.

Um modelo similar aos anteriores, os quais utilizavam vigas semi-infinitas, pode ser também aplicado neste caso. Os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente transversal propagante da direita, \bar{A}_{FA} , são representados por linhas sólidas na figura 2.16. Os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente transversal propagante da esquerda, \bar{A}_{FB} , são representados por linhas tracejadas na figura 2.16.

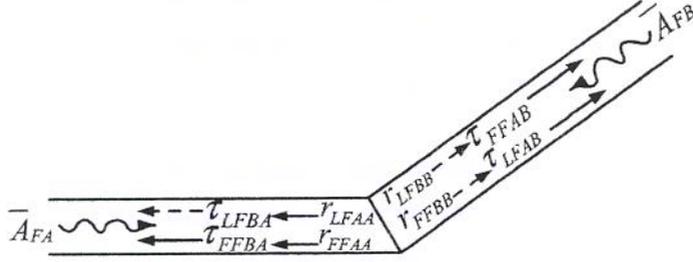


Figura 2.16: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes transversais em cada viga, \bar{A}_{FA} e \bar{A}_{FB} .

Na figura 2.17, os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente longitudinal propagante da direita, \bar{P}_{LA} , são representados por linhas sólidas. Já os coeficientes de transmissão e reflexão provenientes de uma onda incidente longitudinal propagante da esquerda, \bar{P}_{LB} , são representados por linhas tracejadas, 2.17.

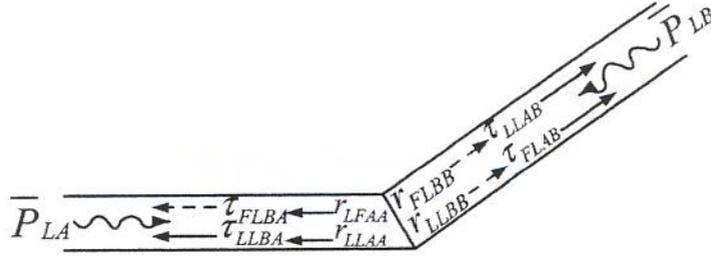


Figura 2.17: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de ondas incidentes longitudinais em cada viga, \bar{P}_{LA} e \bar{P}_{LB} .

Os fluxos de energia transversal e longitudinal propagando-se da junta para a viga B e A são representados pelas seguintes equações:

$$\langle q \rangle_{FB}^- = \tau_{FFAB} \langle q \rangle_{FA}^+ + r_{FFBB} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{LFAB} \langle q \rangle_{LA}^+ + r_{LFBB} \langle q \rangle_{LB}^+ \quad (2.91)$$

$$\langle q \rangle_{FA}^- = r_{FFAA} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FFBA} \langle q \rangle_{FB}^+ + r_{LFAA} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LFBA} \langle q \rangle_{LB}^+ \quad (2.92)$$

$$\langle q \rangle_{LB}^- = \tau_{LFAB} \langle q \rangle_{FA}^+ + r_{FLBB} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{LLAB} \langle q \rangle_{LA}^+ + r_{LLBB} \langle q \rangle_{LB}^+ \quad (2.93)$$

e

$$\langle q \rangle_{LA}^- = r_{FLAA} \langle q \rangle_{FA}^+ + r_{FLBA} \langle q \rangle_{FB}^+ + r_{LLAA} \langle q \rangle_{LA}^+ + r_{LLBA} \langle q \rangle_{LB}^+ \quad (2.94)$$

sendo que:

- r_{mni} : coeficiente de transmissão do tipo de onda n na viga j devido a uma onda incidente do tipo m na viga i ($i, j = A, B$ e $m, n =$ transversal, longitudinal);
- r_{mni} : coeficiente de reflexão do tipo de onda n na viga j devido a uma onda incidente do tipo m na viga i ;
- $\langle q \rangle_{FB}^-$: é o fluxo de energia transversal propagando-se da junta para a viga B . $\langle q \rangle_{FB}^-$ é representado pela soma das seguintes contribuições: componente transversal do fluxo de energia transmitido parcialmente de A para B na direção negativa, componente transversal do fluxo de energia refletido parcialmente em B na direção negativa, componente longitudinal do fluxo de energia transmitido parcialmente de A para B na direção negativa e componente longitudinal do fluxo de energia refletido parcialmente em B na direção negativa.

O desenvolvimento das relações entre os coeficientes de transmissão e reflexão para vigas acopladas em ângulo arbitrário encontram-se no apêndice A.3.

2.6.4 Relações de acoplamento para um sistema de vigas ramificadas

Para um sistema de vigas ramificado, figura 2.18, somente os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de duas ondas incidentes, \bar{A}_{FA} e \bar{P}_{LA} , de um total de seis são apresentados nas figuras 2.19 e 2.20, porque as figuras ficariam demasiadamente complicadas. Portanto, os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente transversal propagante da direita, \bar{A}_{FA} , podem ser vistos na figura 2.19. Os coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente longitudinal propagante da direita, \bar{P}_{LA} , podem ser vistos na figura 2.20. Os fluxos líquidos longitudinais e transversal na junta são dados por:

$$\langle q \rangle_{FB}^- = r_{FFAB} \langle q \rangle_{FA}^+ + r_{FFBB} \langle q \rangle_{FB}^+ + r_{FFCB} \langle q \rangle_{FC}^+ + r_{LFAB} \langle q \rangle_{LA}^+ + r_{LFBB} \langle q \rangle_{LB}^+ + r_{LFCB} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.95)$$

$$\langle q \rangle_{FA}^- = \tau_{FFAA} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FFBA} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{FFCA} \langle q \rangle_{FC}^+ + \tau_{LFAA} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LFBA} \langle q \rangle_{LB}^+ + \tau_{LFCA} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.96)$$

$$\langle q \rangle_{FC}^- = \tau_{FFAC} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FFBC} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{FFCC} \langle q \rangle_{FC}^+ + \tau_{LFAC} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LFBC} \langle q \rangle_{LB}^+ + \tau_{LFCC} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.97)$$

$$\langle q \rangle_{LB}^- = \tau_{FLAB} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FLBB} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{FLCB} \langle q \rangle_{FC}^+ + \tau_{LLAB} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LLBB} \langle q \rangle_{LB}^+ + \tau_{LLCB} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.98)$$

$$\langle q \rangle_{LA}^- = \tau_{FLAA} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FLBA} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{FLCA} \langle q \rangle_{FC}^+ + \tau_{LLAA} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LLBA} \langle q \rangle_{LB}^+ + \tau_{LLCA} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.99)$$

e

$$\langle q \rangle_{LC}^- = \tau_{FLAC} \langle q \rangle_{FA}^+ + \tau_{FLBC} \langle q \rangle_{FB}^+ + \tau_{FLCC} \langle q \rangle_{FC}^+ + \tau_{LLAC} \langle q \rangle_{LA}^+ + \tau_{LLBC} \langle q \rangle_{LB}^+ + \tau_{LLCC} \langle q \rangle_{LC}^+ \quad (2.100)$$

sendo que:

- $\langle q \rangle_{FB}^-$: é o fluxo de energia transversal propagando-se da junta para a viga B . $\langle q \rangle_{FB}^-$ é representado pela soma das seguintes contribuições: componente transversal do fluxo de energia transmitido parcialmente de A para B na direção negativa, componente transversal do fluxo de energia refletido parcialmente em B na direção negativa, componente transversal do fluxo de energia transmitido parcialmente de C para B na direção negativa, componente longitudinal do fluxo de energia transmitido parcialmente de A para B na direção negativa, componente longitudinal do fluxo de energia refletido parcialmente em B na direção negativa e componente longitudinal do fluxo de energia transmitido parcialmente de C para B na direção negativa.

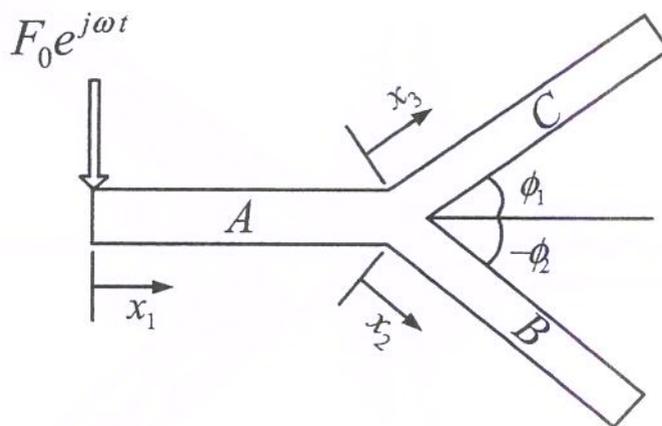


Figura 2.18: Três vigas acopladas em ângulos arbitrários excitadas por uma força harmônica.

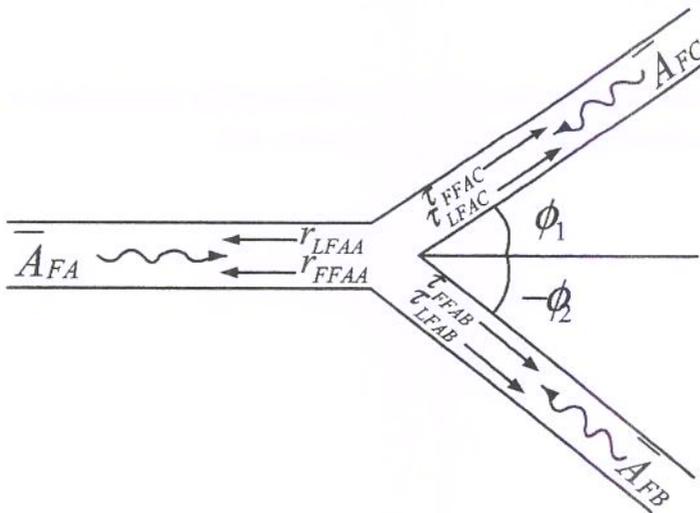


Figura 2.19: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente transversal, \bar{A}_{FA} , na viga A.

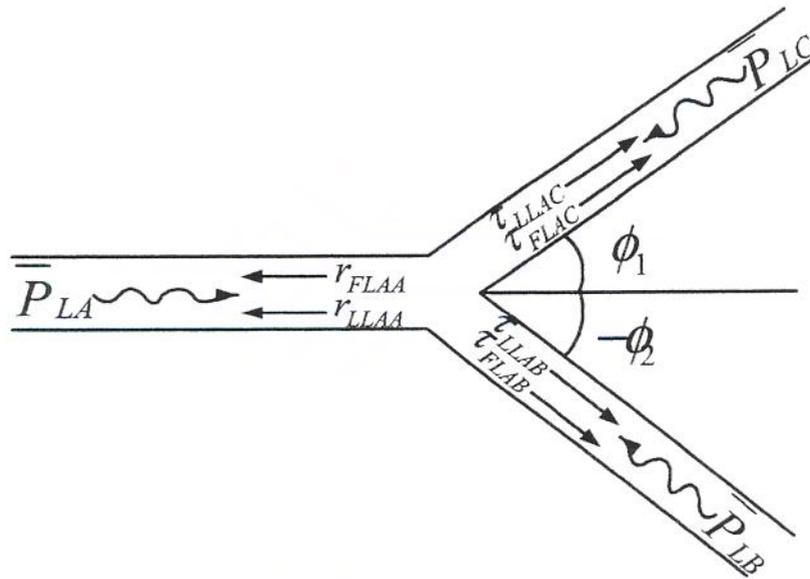


Figura 2.20: Coeficientes de transmissão e reflexão resultantes de uma onda incidente longitudinal, \bar{P}_{LA} , na viga A .

O desenvolvimento das relações entre os coeficientes de transmissão e reflexão para um sistema de vigas ramificadas encontra-se no apêndice A.4.

Capítulo 3

MÉTODO DO FLUXO DE ENERGIA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução

As equações diferenciais de densidade de energia obtidas no capítulo 2 podem ser resolvidas numericamente através da formulação do método dos elementos finitos. Conhecido como "Energy Finite Element Method-(EFEM)" e aqui denominado como Método do Fluxo de Energia utilizando Elementos Finitos, esta metodologia será apresentada neste capítulo. Baseado nas equações de equilíbrio de energia, o EFEM prevê a densidade de energia em sub-sistemas (elementos) estruturais ou acústicos discretos. Portanto, o EFEM é capaz de prever a variação espacial da energia mecânica de forma suave. Um outro resultado, é que o EFEM pode tratar de forma mais simples a aplicação de efeitos locais tais como potência injetada e amortecimento. Uma vantagem importante do EFEM é que as equações de energia nestes elementos finitos são conceitualmente similares às equações de fluxo de calor. Em EFEM, a variável primária e secundária é representada pela densidade de energia e pelo fluxo de energia, respectivamente. O número de graus de liberdade em cada nó é igual ao número de tipos de ondas propagantes, ou, pelo menos, igual ao número de tipos de ondas que realmente estão sendo levadas em conta. A formulação dos elementos finitos aplicada nesse capítulo para equações unidimensionais de energia, é amplamente conhecida e tem como objetivo deduzir as matrizes elementares (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Neste capítulo, não será calculado o fluxo de energia ($\langle q \rangle$) porque a resolução do sistema de equações do EFEM determina a densidade de energia em cada nó do modelo. Entretanto, para o cálculo do fluxo

de energia seria necessária a derivada da densidade de energia. Uma solução seria montar um sistema de equações a partir da solução geral da equação diferencial de energia, e utilizar os valores nodais da densidade de energia para se obter por interpolação os coeficientes da solução (G_1 e G_2). Isso tornaria possível calcular a derivada, e portanto, obter o fluxo de energia. No próximo capítulo será apresentado um método que possibilita calcular de forma exata o fluxo e a densidade de energia.

3.2 Formulação do Elemento Finito de Energia Unidimensional

Considere a equação diferencial unidimensional de energia apresentada no Capítulo 2, equação 2.32, a qual re-apresentamos aqui como:

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = \pi_{in} \quad (3.1)$$

sendo que:

- c_g : velocidade de grupo;
- η : fator de amortecimento;
- π_{in} : potência injetada;
- ω : frequência circular;
- ∇^2 : operador de Laplace;
- $\langle e \rangle$: densidade de energia média temporal (no caso de viga $\langle e \rangle = \langle \bar{e} \rangle$, o qual representa a densidade média espacial suavizada).

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados de Galerkin na equação 3.1, resulta na formulação integral equivalente dada por:

$$\int_{\Gamma} \xi \left(-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle - \pi_{in} \right) d\Gamma = 0 \quad (3.2)$$

Sendo que:

- Γ : é o domínio da estrutura, que pode ser uni, bi ou tridimensional;

- ξ : função teste ou de ponderação.

A equação deve ser satisfeita para qualquer função de ponderação ξ que apenas está definida dentro do elemento e seu contorno. Aplicando-se na equação 3.2 o teorema do gradiente e da divergência, obtém-se a formulação fraca da equação diferencial de energia:

$$\int_{\Gamma} \frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \xi \bullet \vec{\nabla} \langle e \rangle d\Gamma + \int_{\Gamma} \eta\omega \xi \langle e \rangle d\Gamma - \int_S \xi \frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \langle e \rangle \bullet \vec{n} dS - \int_{\Gamma} \xi \pi_{in} d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

Sendo que:

- \vec{n} : é o vetor unitário normal ao contorno S do domínio Γ ;

O terceiro termo desta expansão pode ser interpretado como a componente normal do fluxo de energia através do contorno S, desde que $\langle \vec{q} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \langle e \rangle$. Portanto, esse termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$- \int_S \xi \frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \langle e \rangle \bullet \vec{n} dS = \int_S \xi \langle \vec{q} \rangle \bullet \vec{n} dS = \int_S \langle q \rangle_n dS \quad (3.4)$$

sendo que, $\langle q \rangle_n$ é a componente normal do fluxo de energia.

A variável de campo, $\langle e \rangle$, pode ser aproximada por um número de funções de forma N_i :

$$\langle e \rangle = \sum_{i=1}^p N_i \langle e \rangle_i = [N] \{ \langle e \rangle_i \} \quad (3.5)$$

sendo que:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & N_p \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\{ \langle e \rangle_i \} = \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1 \\ \langle e \rangle_2 \\ \langle e \rangle_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle e \rangle_p \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

- $\langle e \rangle_i$: são os valores das densidades de energia nos nós (graus de liberdade);

- p : é o número de funções de forma, que é igual ao número de graus de liberdade.

O vetor $[N]$ contém p funções de forma, onde as mais utilizadas são polinomiais do tipo linear, quadrática e cúbica. Nesta formulação foram utilizadas funções de forma quadráticas.

A aproximação do gradiente da densidade de energia pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla \langle e \rangle = [\nabla] [N] \{ \langle e \rangle_i \} = [B] \{ \langle e \rangle_i \} \quad (3.8)$$

- $[\nabla]$: é o vetor do operador gradiente, que tem dimensão de acordo com o tipo de componente (uni, bi ou tridimensional);

- $[B]$: contém as componentes do gradiente das funções de forma N_i .

As funções de ponderação ξ são expandidas em relação ao mesmo conjunto de funções de forma utilizadas para densidade de energia. Então, a função de ponderação ξ é dada por:

$$\xi = \sum_{i=1}^p N_i \xi_i = [N] \{ \xi_i \} \quad (3.9)$$

e o gradiente da função de ponderação ξ é:

$$\nabla \xi = [\nabla] [N] \{ \xi_i \} = [B] \{ \xi_i \} \quad (3.10)$$

Substituindo-se as equações 3.5, 3.9 e 3.10 na formulação fraca de energia, equação 3.3:

$$\{ \xi_j \}^T \left[\int_{\Gamma} \left(\frac{c_g^2}{\eta\omega} [B]^T [B] + \eta\omega [N]^T [N] \right) d\Gamma \{ \langle e \rangle_i \} + \int_S [N]^T \langle q \rangle_n dS - \int_{\Gamma} [N]^T \pi_{in} d\Gamma \right] = 0 \quad (3.11)$$

A equação 3.11 é verdadeira para toda função ou conjunto de funções de ponderação de valores $\{ \xi_i \}$. Portanto, a equação 3.11 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{c_g^2}{\eta\omega} [B]^T [B] + \eta\omega [N]^T [N] \right) d\Gamma \{ \langle e \rangle_i \} = - \int_S [N]^T \langle q \rangle_n dS + \int_{\Gamma} [N]^T \pi_{in} d\Gamma \quad (3.12)$$

Desde que as funções de forma globais N_i e as suas derivadas, são diferentes de zero nos elementos pertencentes aos nós i , portanto, a integração em todo o domínio Γ pode ser calculada como uma soma das integrais sobre cada um dos domínios elementares. Considerando-se que as funções de forma elementares são idênticas às funções de formas globais, então, a equação 3.12 pode ser reescrita para cada elemento na forma matricial:

$$[K^{(e)}] \{ \langle e \rangle^{(e)} \} = \{ Q^{(e)} \} + \{ F^{(e)} \} \quad (3.13)$$

e

$$[K^{(e)}] = \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{c_g^2}{\eta\omega} [B]^T [B] + \eta\omega [N]^T [N] \right) \{ \langle e \rangle_i \} d\Gamma^{(e)} \quad (3.14)$$

$$\{ Q^{(e)} \} = - \int_{S^{(e)}} [N]^T \langle q \rangle_n dS^{(e)} \quad (3.15)$$

$$\{ F^{(e)} \} = \int_{\Gamma^{(e)}} [N]^T \pi_{in} d\Gamma^{(e)} \quad (3.16)$$

sendo que:

- π_{in} : é a potência injetada;
- $\{ F^{(e)} \}$: representa o fluxo de energia devido a uma fonte externa nos nós do elemento (e);
- $\{ Q^{(e)} \}$: é o fluxo de energia avaliado nos nós entre elementos;
- $\{ \langle e \rangle^{(e)} \}$: contém os valores nodais da densidade de energia;
- $[K^{(e)}]$: a matriz descreve o fluxo através do elemento (primeiro termo da integral) e a dissipação de energia no elemento (segundo termo na integral).

3.2.1 Montagem da matriz global dos elementos estruturais acoplados

No FEM tradicional, a compatibilidade das variáveis primárias (deslocamentos), e a continuidade das variáveis secundárias (forças) nos nós entre elementos são utilizados para montar as equações matriciais dos elementos dentro do sistema matricial global do problema. No EFEM, se os nós entre os elementos estruturais unidimensionais acoplados (barra ou viga) não correspondem a uma junta, as variáveis primárias (densidades de energia) e secundárias (fluxos de energia) são contínuas nesses nós. Portanto, as relações de compatibilidade e de continuidade nos nós entre elementos do FEM asseguram que o procedimento de montagem do sistema matricial elementar no sistema matricial global também pode ser utilizado em EFEM. Entretanto, se os nós entre elementos correspondem a uma junta, a densidade de energia não é contínua enquanto o fluxo permanece contínuo. Assim, um procedimento especial deve ser adotado para montar o sistema matricial elementar no sistema global.

O procedimento possui duas características essenciais, a primeira é que vários nós podem estar localizados em uma junta de elementos estruturais múltiplamente acoplados, e por isso, múltiplos valores de densidade de energia podem ser previstos. O segundo, é que na junta os elementos estruturais são conectados através de um mecanismo especial que leva em conta o efeito de acoplamento dos diferentes tipos de ondas (longitudinal e transversal) propagando na estrutura. Esse mecanismo, denominado de elemento de junta é único para cada tipo de configuração estrutural e tipos de ondas propagantes na estrutura. No capítulo 2, foram discutidos alguns destes tipos de mecanismo de junta propostos por Cho (1993), os quais serão utilizados aqui para obtenção das matrizes de junta para o EFEM.

Para um melhor entendimento do procedimento de montagem do sistema matricial global, equação 3.13, será apresentado um exemplo. Considere uma estrutura composta por duas vigas colineares acopladas (A e B), com propriedades geométricas (seção transversal) ou tipo de materiais diferentes, que são excitadas por uma força harmônica transversal como mostra a figura 3.1 (a).

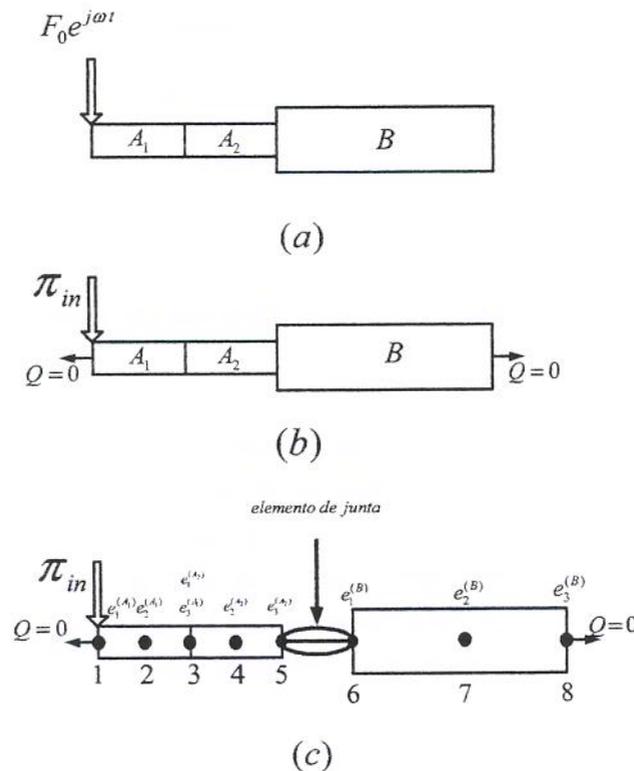


Figura 3.1: (a) Duas vigas colineares excitadas por uma força harmônica, (b) problema equivalente de energia e (c) modelo de energia (EFEM).

Considere que a viga A seja discretizada com dois elementos (A_1 e A_2) e a viga B com um elemento. A figura 3.1 (b) mostra o problema equivalente de energia, onde pode-se observar que existe uma potência que está sendo injetada na estrutura devido à força harmônica transversal e que, devido às extremidades livre-livre do sistema, não há transferência de fluxo de energia nas extremidades da viga. Finalmente, a figura 3.1 (c) mostra o modelo de EFEM do problema, onde entre os elementos A_1 e A_2 o acoplamento é feito sem descontinuidades nos elementos (acoplamento contínuo), enquanto no acoplamento entre os elementos A_2 e B existe uma descontinuidade entre os elementos (acoplamento de junta). O nó 1 global e 1 do elemento A_1 é a posição onde a potência está sendo injetada, os nós 3 do elemento A_1 e 1 do elemento A_2 transformam-se no nó 3 global, enquanto os nós 3 do elemento A_2 e 1 do elemento B transformam-se nos nós globais 5 e 6, representando o elemento de junta.

O primeiro passo do procedimento de montagem do sistema matricial global ocorre antes da aplicação das relações de compatibilidade e continuidade nos nós entre elementos. Portanto, o sistema matricial global é montado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & K_{13}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} & K_{23}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{(A_1)} & K_{32}^{(A_1)} & K_{33}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & K_{13}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & K_{23}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(A_2)} & K_{32}^{(A_2)} & K_{33}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} & K_{13}^{(B)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} & K_{23}^{(B)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(B)} & K_{32}^{(B)} & K_{33}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_3^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_1^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_3^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_1^{(B)} \\ \langle e \rangle_2^{(B)} \\ \langle e \rangle_3^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle F \rangle_1^{(A_1)} \\ \langle F \rangle_2^{(A_1)} \\ \langle F \rangle_3^{(A_1)} \\ \langle F \rangle_1^{(A_2)} \\ \langle F \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle F \rangle_3^{(A_2)} \\ \langle F \rangle_1^{(B)} \\ \langle F \rangle_2^{(B)} \\ \langle F \rangle_3^{(B)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \langle q \rangle_1^{(A_1)} \\ \langle q \rangle_2^{(A_1)} \\ \langle q \rangle_3^{(A_1)} \\ \langle q \rangle_1^{(A_2)} \\ \langle q \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle q \rangle_3^{(A_2)} \\ \langle q \rangle_1^{(B)} \\ \langle q \rangle_2^{(B)} \\ \langle q \rangle_3^{(B)} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Como os nós globais 2, 4 e 7 não correspondem a nós entre elementos, portanto, $\langle q \rangle_2^{(A_1)} = \langle q \rangle_2^{(A_2)} = \langle q \rangle_2^{(B)} = 0$. As condições de contorno globais do problema são $\langle q \rangle_1^{(A_1)} = \langle q \rangle_3^{(B)} = 0$. Desde que, o nó 3 não corresponde a uma junta, a relação de continuidade do fluxo de energia é dado por:

$$\langle q \rangle_3^{(A_1)} + \langle q \rangle_1^{(A_2)} = 0 \quad (3.18)$$

e a relação de compatibilidade da densidade de energia é:

$$\langle e \rangle_3^{(A_1)} = \langle e \rangle_1^{(A_2)} \quad (3.19)$$

assim, quando as equações 3.18 e 3.19 são inseridas no sistema matricial global, a equação resultante torna-se:

$$\begin{bmatrix}
K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & K_{13}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} & K_{23}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{31}^{(A_1)} & K_{32}^{(A_1)} & K_{33}^{(A_1)} + K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & K_{13}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & K_{23}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{31}^{(A_2)} & K_{32}^{(A_2)} & K_{33}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} & K_{13}^{(B)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} & K_{23}^{(B)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(B)} & K_{32}^{(B)} & K_{33}^{(B)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\langle c \rangle_1^{(A_1)} \\
\langle e \rangle_2^{(A_1)} \\
\langle e \rangle_3^{(A_1)} \\
\langle e \rangle_2^{(A_2)} \\
\langle e \rangle_3^{(A_2)} \\
\langle e \rangle_1^{(B)} \\
\langle e \rangle_2^{(B)} \\
\langle e \rangle_3^{(B)}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\langle F \rangle_1^{(A_1)} \\
\langle F \rangle_2^{(A_1)} \\
\langle F \rangle_3^{(A_1)} \\
\langle F \rangle_2^{(A_2)} \\
\langle F \rangle_3^{(A_2)} \\
\langle F \rangle_1^{(B)} \\
\langle F \rangle_2^{(B)} \\
\langle F \rangle_3^{(B)}
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\langle q \rangle_3^{(A_2)} \\
\langle q \rangle_1^{(B)} \\
0 \\
0
\end{Bmatrix}
\tag{3.20}$$

Os nós entre elementos 5 e 6 correspondem à junta, e como foi mencionado anteriormente, a densidade de energia não é contínua, mas o fluxo de energia é contínuo. Portanto, para o fluxo, a relação de continuidade torna-se:

$$\langle q \rangle_3^{(A_2)} + \langle q \rangle_1^{(B)} = 0 \tag{3.21}$$

Este exemplo trata do caso de vigas colineares acopladas com um tipo de onda propagando-se ao longo delas. Assim, será desenvolvido em seguida o elemento de junta para acoplar os elementos estruturais A_2 e B com estas características.

Para modelar a matriz elementar de junta de uma estrutura finita é utilizada uma estrutura semi-infinita (duas barras ou vigas colineares acopladas) com um tipo de onda propagando-se ao longo dela, figura 3.2. Na junta, o fluxo de energia resultante é representado como a soma do fluxo de energia propagando-se na direção positiva (saindo da junta) e negativa (chegando na junta):

$$\langle q \rangle_{mA} = \langle q \rangle_{mA}^+ - \langle q \rangle_{mA}^- \tag{3.22}$$

$$\langle q \rangle_{mB} = \langle q \rangle_{mB}^+ - \langle q \rangle_{mB}^- \tag{3.23}$$

os fluxos de energia positivos e negativos em cada nó, também podem ser representados por:

$$\langle q \rangle_{mi}^+ = c_{gmi} \langle e \rangle_{mi}^+ \tag{3.24}$$

$$\langle q \rangle_{mi}^- = c_{gmi} \langle e \rangle_{mi}^- \tag{3.25}$$

sendo que:

- i : indica que o nó pertence ao elemento i ($i=A, B$);

- m : indica o tipo de onda (m = transversal, longitudinal);

Para se obter a equação 3.24, a densidade de energia na direção positiva na barra A , é definida por:

$$\langle e \rangle_{mA}^+ = A^+ e^{-\frac{\eta\omega x}{c_{gmA}}} \quad (3.26)$$

Substituindo-se a equação 3.26 na equação 2.27, tem-se:

$$\langle q \rangle_{mA}^+ = \frac{c_{gmA}^2}{\eta\omega} \frac{\eta\omega}{c_{gmA}} A^+ e^{-\frac{\eta\omega x}{c_{gmA}}} = c_{gmA} \langle e \rangle_{mA}^+ \quad (3.27)$$

Esse procedimento também é utilizado para se obter a equação 3.25.

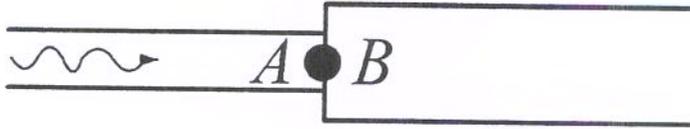


Figura 3.2: Localização do nó em uma junta de dois elementos colineares acoplados, para um tipo de onda propagando-se ao longo deles.

Substituindo-se a equação 2.90 e 3.24 em 3.22, obtém-se a seguinte relação:

$$\langle q \rangle_{mA} = c_{gmA}(1 - r_{mmAA})\langle e \rangle_{mA}^+ - c_{gmB}\tau_{mmBA}\langle e \rangle_{mB}^+ \quad (3.28)$$

Substituindo-se a equação 2.89 e 3.24 em 3.23, obtém-se outra relação entre o fluxo de energia e as densidades nos nós:

$$\langle q \rangle_{mB} = -c_{gmA}\tau_{mmBA}\langle e \rangle_{mA}^+ + c_{gmB}(1 - r_{mmBB})\langle e \rangle_{mB}^+ \quad (3.29)$$

As equações 3.28 e 3.29 podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_{mA} \\ \langle q \rangle_{mB} \end{Bmatrix} = [P]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA}^+ \\ \langle e \rangle_{mB}^+ \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

sendo que,

$$[P]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{gmA}(1 - r_{mmAA}) & -c_{gmB}\tau_{mmBA} \\ -c_{gmA}\tau_{mmBA} & c_{gmB}(1 - r_{mmBB}) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Os valores nodais da densidade de energia na junta são expressos em termos da densidade de energia propagando-se na direção positiva e negativa. Portanto, a densidade de energia total, pode ser representada pelas equações:

$$\langle e \rangle_{mA} = \langle e \rangle_{mA}^+ + \langle e \rangle_{mA}^- \quad (3.32)$$

$$\langle e \rangle_{mB} = \langle e \rangle_{mB}^+ + \langle e \rangle_{mB}^- \quad (3.33)$$

Uma vez que os valores nodais do fluxo de energia, equação 3.30, são expressos em termos da densidade de energia propagando-se na direção positiva e negativa nos nós A e B , portanto, os valores nodais da densidade de energia, equação 3.32 e 3.33, também podem ser expressos em termos das relações dadas pelas equações 2.89, 2.90 e 3.25. Assim, as novas relações obtidas para densidade de energia total são dadas por:

$$\langle e \rangle_{mA} = (1 + r_{mmAA})\langle e \rangle_{mA}^+ + \frac{c_{gmB}}{c_{gmA}}\tau_{mmBA}\langle e \rangle_{mB}^+ \quad (3.34)$$

$$\langle e \rangle_{mB} = \frac{c_{gmA}}{c_{gmB}}\tau_{mmAB}\langle e \rangle_{mA}^+ + (1 + r_{mmBB})\langle e \rangle_{mB}^+ \quad (3.35)$$

As equações 3.34 e 3.35 podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA} \\ \langle e \rangle_{mB} \end{Bmatrix} = [E]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA}^+ \\ \langle e \rangle_{mB}^+ \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

sendo que,

$$[E]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 + r_{mmAA} & \frac{c_{gmB}}{c_{gmA}}\tau_{mmBA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gmB}}\tau_{mmAB} & 1 + r_{mmBB} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

As equações 3.30 e 3.36 são combinadas, resultando uma nova relação, na qual os valores nodais do fluxo de energia na junta podem ser expressos em termos dos valores nodais da densidade de energia na junta. Na forma matricial, os valores nodais do fluxo de energia são:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_{mA} \\ \langle q \rangle_{mB} \end{Bmatrix} = [J]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA} \\ \langle e \rangle_{mB} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

sendo que,

$$[J]_{2 \times 2} = [P]_{2 \times 2} [E]_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2c_{gmA}\tau_{mmAB} & -2c_{gmB}\tau_{mmBA} \\ -2c_{gmA}\tau_{mmAB} & 2c_{gmB}\tau_{mmBA} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e

$$\Delta = 2(r_{mmAA} + r_{mmBB}) \quad (3.40)$$

- $[J]_{2 \times 2}$: é a matriz elementar de junta para propagação de um tipo onda em dois elementos unidimensionais colineares acoplados.

Como se tem a propagação de um tipo de onda em dois elementos colineares acoplados, pode-se, a partir das relações de reciprocidade, simplificar a matriz elementar de junta, $T_{mmAB} = T_{mmBA}$ e $T_{mmAB} = T_{mmBA}$. Este procedimento pode ser aplicado para outros tipos de acoplamento para obtermos as matrizes de junta e alguns deles estão descritos na próxima seção.

O elemento de junta, equação 3.38, é substituído no lado direito do sistema matricial global, equação 3.21, após isso essas parcelas são transferidas para o lado esquerdo do sistema global. O próximo passo é aplicar as seguintes condições de contorno: $\langle F \rangle_2^{(A_1)} = \langle F \rangle_3^{(A_1)} = \langle F \rangle_1^{(A_2)} = \langle F \rangle_2^{(A_2)} = \langle F \rangle_3^{(A_2)} = \langle F \rangle_1^{(B)} = \langle F \rangle_2^{(B)} = \langle F \rangle_3^{(B)} = 0$, então, o sistema matricial global pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & K_{13}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} & K_{23}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^{(A_1)} & K_{32}^{(A_1)} & K_{33}^{(A_1)} + K_{11}^{A_2} & K_{12}^{A_2} & K_{13}^{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & K_{23}^{(A_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{31}^{(A_2)} & K_{32}^{(A_2)} & K_{33}^{(A_2)} - \frac{TFFABC_gFB}{2rFFAA} & \frac{TFFABC_gFB}{2rFFAA} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{TFFABC_gFB}{2rFFAA} & K_{11}^{(B)} - \frac{TFFABC_gFB}{2rFFAA} & K_{12}^{(B)} & K_{13}^{(B)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} & K_{23}^{(B)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(B)} & K_{32}^{(B)} & K_{33}^{(B)} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_3^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_3^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_1^{(B)} \\
 \langle e \rangle_2^{(B)} \\
 \langle e \rangle_3^{(B)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \langle Q_{in} \rangle \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.41)$$

sendo que:

- $\langle Q_{in} \rangle$: é a potência injetada (π_{in}), como mostra a estrutura da figura 3.1.

A equação 3.41 pode ser escrita na forma compacta:

$$[[K] + [J]] \{e\} = \{F\} \quad (3.42)$$

O sistema matricial global é resolvido para as densidades de energia em cada nó. Embora, as matrizes elementares de junta são não-simétricas, e portanto o sistema matricial global também é não-simétrico (Cho, 1993). Apesar disso, o simples procedimento para montagem matricial, como em FEM, e a necessidade da utilização de poucos elementos para modelar grandes estruturas em altas frequências, justifica esta técnica (EFEM) como um método numérico viável para a predição do comportamento vibracional (estrutural ou acústico) em altas frequências.

3.2.2 Matriz de junta para dois elementos acoplados em ângulo arbitrário

Para a dedução da matriz elementar de junta, uma estrutura semi-infinita em ângulo arbitrário é utilizada. Ao longo dessa estrutura existem dois tipos de ondas propagando-se, figura 3.3, e o nó na junta possui dois graus de liberdade em decorrência do acoplamento das ondas. Na junta, o fluxo de energia resultante pode ser representado como a diferença entre o fluxo de energia propagando-se na direção positiva e negativa para cada tipo de onda:

$$\langle q \rangle_{mA} = \langle q \rangle_{mA}^+ - \langle q \rangle_{mA}^- \quad (3.43)$$

$$\langle q \rangle_{mB} = \langle q \rangle_{mB}^+ - \langle q \rangle_{mB}^- \quad (3.44)$$

$$\langle q \rangle_{nA} = \langle q \rangle_{nA}^+ - \langle q \rangle_{nA}^- \quad (3.45)$$

$$\langle q \rangle_{nB} = \langle q \rangle_{nB}^+ - \langle q \rangle_{nB}^- \quad (3.46)$$

$$\langle q \rangle_{mi}^+ = c_{gmi} \langle e \rangle_{mi}^+ \quad (3.47)$$

$$\langle q \rangle_{mi}^- = c_{gmi} \langle e \rangle_{mi}^- \quad (3.48)$$

$$\langle q \rangle_{ni}^+ = c_{gni} \langle e \rangle_{ni}^+ \quad (3.49)$$

$$\langle q \rangle_{ni}^- = c_{gni} \langle e \rangle_{ni}^- \quad (3.50)$$

Sendo que:

- i : indica que o nó pertence ao elemento i ($i=A, B$);

- m e n : indicam os tipos de ondas (transversal e longitudinal, respectivamente);
- $\langle q \rangle_{im}^+$, $\langle q \rangle_{im}^-$, $\langle q \rangle_{im}^+$ e $\langle q \rangle_{im}^-$: são os fluxos de energia propagando-se na direção positiva e negativa, respectivamente.

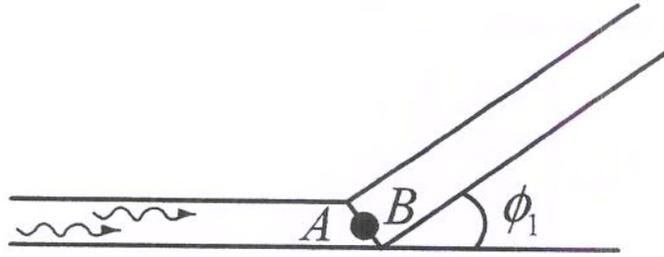


Figura 3.3: Localização do nó em uma junta de dois elementos acoplados em ângulo arbitrário, para dois tipos de ondas propagando-se ao longo deles.

Quando as equações 2.91, 2.92, 2.93 e 2.94 são substituídas nas equações 3.43, 3.44, 3.45 e 3.46, os valores nodais do fluxo de energia podem ser expressos em termos da densidade de energia para cada tipo de onda:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_{mA} \\ \langle q \rangle_{mB} \\ \langle q \rangle_{nA} \\ \langle q \rangle_{nB} \end{Bmatrix} = [P]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA}^+ \\ \langle e \rangle_{mB}^+ \\ \langle e \rangle_{nA}^+ \\ \langle e \rangle_{nB}^+ \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

sendo que,

$$[P]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} c_{gmA}(1 - r_{mmAA}) & -c_{gmB}\tau_{mmBA} & -c_{gnA}(r_{nmAA}) & -c_{gnB}\tau_{nmBA} \\ -c_{gmA}\tau_{mmAB} & -c_{gmB}(r_{mmBB} - 1) & -c_{gnA}\tau_{nmAB} & -c_{gnB}\tau_{nmBB} \\ -c_{gmA}r_{mnAA} & -c_{gmB}\tau_{mnBA} & c_{gnA}(1 - r_{nnAA}) & -c_{gnB}\tau_{nnBA} \\ -c_{gmA}\tau_{mnAB} & -c_{gmB}\tau_{mnBB} & -c_{gnA}\tau_{nnAB} & -c_{gnB}(r_{nnBB} - 1) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Na junta, os valores nodais da densidade de energia de cada tipo de onda podem ser representados como a soma das densidades de energia propagando-se na direção positiva e negativa para cada tipo de onda:

$$\langle e \rangle_{mA} = \langle e \rangle_{mA}^+ + \langle e \rangle_{mA}^- \quad (3.53)$$

$$\langle e \rangle_{mB} = \langle e \rangle_{mB}^+ + \langle e \rangle_{mB}^- \quad (3.54)$$

$$\langle e \rangle_{nA} = \langle e \rangle_{nA}^+ + \langle e \rangle_{nA}^- \quad (3.55)$$

$$\langle c \rangle_{nB} = \langle c \rangle_{nB}^+ + \langle c \rangle_{nB}^- \quad (3.56)$$

Quando as equações 3.47, 3.48, 3.49 e 3.50 são substituídas nas equações 3.53, 3.54, 3.55 e 3.56, os valores nodais da densidade de energia podem ser expressos em termos das densidades de energia para cada tipo de onda:

$$\begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA} \\ \langle e \rangle_{mB} \\ \langle e \rangle_{nA} \\ \langle e \rangle_{nB} \end{Bmatrix} = [E]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA}^+ \\ \langle e \rangle_{mB}^+ \\ \langle e \rangle_{nA}^+ \\ \langle e \rangle_{nB}^+ \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

sendo que,

$$[E]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 + r_{mmAA} & \frac{c_{gmB}}{c_{gmA}} \tau_{mmBA} & \frac{c_{gnA}}{c_{gmA}} \tau_{nmAA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gmA}} \tau_{nmBA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnB}} \tau_{mmAB} & 1 + r_{mmBB} & \frac{c_{gnA}}{c_{gnB}} \tau_{nmAB} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnB}} \tau_{nmBB} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnA}} \tau_{mnAA} & \frac{c_{gmB}}{c_{gnA}} \tau_{mnBA} & 1 + r_{nnAA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnA}} \tau_{nnBA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnB}} \tau_{mnAB} & \frac{c_{gmB}}{c_{gnB}} \tau_{mnBB} & \frac{c_{gnA}}{c_{gnB}} \tau_{nnAB} & 1 + r_{nnBB} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

As equações 3.51 e 3.57 são combinadas, resultando uma relação cujos valores nodais do fluxo de energia na junta podem ser expressos em termos dos valores nodais da densidade de energia na junta. Na forma matricial, os valores nodais do fluxo de energia são:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_{mA} \\ \langle q \rangle_{mB} \\ \langle q \rangle_{nA} \\ \langle q \rangle_{nB} \end{Bmatrix} = [J]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_{mA} \\ \langle e \rangle_{mB} \\ \langle e \rangle_{nA} \\ \langle e \rangle_{nB} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

sendo que,

$$[J]_{4 \times 4} = [P]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 4}^{-1} \quad (3.60)$$

- $[J]_{4 \times 4}$: é a matriz elemental de junta para propagação de dois tipos ondas em dois elementos estruturais unidimensionais acoplados em ângulo arbitrário.

3.2.3 Matriz de junta para três elementos acoplados em ângulos arbitrários

Nesta seção, para a dedução da matriz elementar de junta, será utilizada uma estrutura semi-infinita composta de três vigas acopladas em ângulos arbitrários. Ao longo dessa estrutura semi-infinita existem dois tipos de ondas propagando-se, figura 3.4. A junta possui três nós, e cada nó tem dois graus de liberdade em decorrência do acoplamento das ondas. Esse sistema de vigas acopladas, por onde propagam-se dois tipos de ondas, requer $2 \times (\text{número de ramos})$ relações de acoplamentos. Então, para três elementos acoplados, seis relações de acoplamentos são necessárias. Portanto, a ordem da matriz elementar de junta é $[J]_{6 \times 6}$. Aplicando-se procedimentos similares utilizados nas seções anteriores, obtém-se os valores nodais do fluxo de energia expressos em termos da densidade de energia propagando-se na direção positiva e negativa para cada tipo de onda:

$$\{\langle q \rangle^{(ie)}\} = [P]_{6 \times 6} \{\langle \bar{e} \rangle^{(ie)}\} \quad (3.61)$$

sendo que,

$$[P]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} c_{gmA}(1 - r_{mmAA}) & -c_{gmB}\tau_{mmBA} & -c_{gmC}\tau_{mmCA} \\ -c_{gmA}\tau_{mmAB} & -c_{gmB}(r_{mmBB} - 1) & -c_{gmC}\tau_{mmCB} \\ -c_{gmA}\tau_{mmAC} & -c_{gmB}\tau_{mmBC} & -c_{gmC}(\tau_{mmCC} - 1) \\ -c_{gmA}r_{nnAA} & -c_{gmB}\tau_{nnBA} & c_{gmC}\tau_{nnCA} \\ -c_{gmA}\tau_{nnAB} & -c_{gmB}\tau_{nnBB} & -c_{gmC}\tau_{nnCB} \\ -c_{gmA}\tau_{nnAC} & -c_{gmB}\tau_{nnBC} & -c_{gmC}\tau_{nnCC} \\ -c_{gnA}(r_{nnAA}) & -c_{gnB}\tau_{nnBA} & -c_{gnC}\tau_{nnCA} \\ -c_{gnA}\tau_{nnAB} & -c_{gnB}\tau_{nnBB} & -c_{gnC}\tau_{nnCB} \\ -c_{gnA}\tau_{nnAC} & -c_{gnB}\tau_{nnBC} & -c_{gnC}\tau_{nnCC} \\ c_{gnA}(1 - r_{nnAA}) & -c_{gnB}\tau_{nnBA} & -c_{gnC}\tau_{nnCA} \\ -c_{gnA}\tau_{nnAB} & -c_{gnB}(r_{nnBB} - 1) & -c_{gnC}\tau_{nnCB} \\ -c_{gnA}\tau_{nnAC} & -c_{gnB}\tau_{nnBC} & -c_{gnC}(\tau_{nnCC} - 1) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\{\langle q \rangle^{(ie)}\} = \{ \langle q \rangle_{mA} \quad \langle q \rangle_{mB} \quad \langle q \rangle_{mC} \quad \langle q \rangle_{nA} \quad \langle q \rangle_{nB} \quad \langle q \rangle_{nC} \}^T \quad (3.63)$$

$$\{\langle \bar{e} \rangle^{(ie)}\} = \{ \langle e \rangle_{mA}^+ \quad \langle e \rangle_{mB}^+ \quad \langle e \rangle_{mC}^+ \quad \langle e \rangle_{nA}^+ \quad \langle e \rangle_{nB}^+ \quad \langle e \rangle_{nC}^+ \}^T \quad (3.64)$$

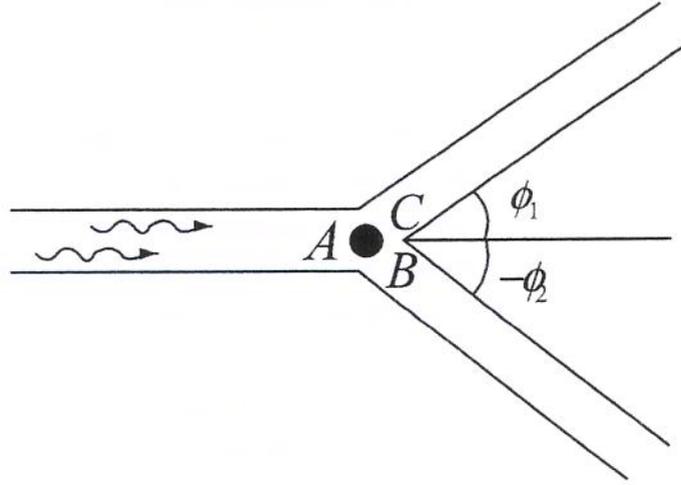


Figura 3.4: Localização do nó em uma junta de três elementos acoplados em ângulos arbitrários, para dois tipos de ondas propagando-se ao longo deles.

Os valores nodais da densidade de energia são expressos em termos da densidade de energia propagando-se na direção positiva e negativa para cada tipo de onda.

$$\left\{ \langle e \rangle^{(ie)} \right\} = [E]_{6 \times 6} \left\{ \langle \bar{e} \rangle^{(ie)} \right\} \quad (3.65)$$

sendo que,

$$[E]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 + r_{mmAA} & \frac{c_{gmB}}{c_{gmA}} T_{mmBA} & \frac{c_{gmC}}{c_{gmA}} T_{mmCA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gmA}} T_{nmAA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gmA}} T_{nmBA} & \frac{c_{gnC}}{c_{gmA}} T_{nmCA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gmB}} T_{mmAB} & 1 + r_{mmBB} & \frac{c_{gmC}}{c_{gmB}} T_{mmCB} & \frac{c_{gnA}}{c_{gmB}} T_{nmAB} & \frac{c_{gnB}}{c_{gmB}} T_{nmBB} & \frac{c_{gnC}}{c_{gmB}} T_{nmCB} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gmC}} T_{mmAC} & \frac{c_{gmB}}{c_{gmC}} T_{mmBC} & 1 + r_{mmCC} & \frac{c_{gnA}}{c_{gmC}} T_{nmAC} & \frac{c_{gnB}}{c_{gmC}} T_{nmBC} & \frac{c_{gmB}}{c_{gmA}} T_{nmBA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnA}} T_{nnAA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnA}} T_{nnBA} & \frac{c_{gnC}}{c_{gnA}} T_{nnCA} & 1 + r_{nnAA} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnA}} T_{nnBA} & \frac{c_{gnC}}{c_{gnA}} T_{nnCA} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnB}} T_{nnAB} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnB}} T_{nnBB} & \frac{c_{gmC}}{c_{gnB}} T_{nnCB} & \frac{c_{gnA}}{c_{gnB}} T_{nnAB} & 1 + r_{nnBB} & \frac{c_{gnC}}{c_{gnB}} T_{nnCB} \\ \frac{c_{gmA}}{c_{gnC}} T_{nnAC} & \frac{c_{gmB}}{c_{gnC}} T_{nnBC} & \frac{c_{gmC}}{c_{gnC}} T_{nnCC} & \frac{c_{gnA}}{c_{gnC}} T_{nnAC} & \frac{c_{gnB}}{c_{gnC}} T_{nnBC} & 1 + r_{nnCC} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

e,

$$\{\langle e \rangle^{(ie)}\} = \{ \langle e \rangle_{mA} \quad \langle e \rangle_{mB} \quad \langle e \rangle_{mC} \quad \langle e \rangle_{nA} \quad \langle e \rangle_{nB} \quad \langle e \rangle_{nC} \}^T \quad (3.67)$$

As equações 3.61 e 3.65 são combinadas. assim, os valores nodais do fluxo de energia podem ser expressos em termos dos valores nodais da densidade de energia para dois tipos de ondas. Na forma matricial, os valores nodais do fluxo de energia para dois tipos de ondas em três elementos acoplados são dados por:

$$\{\langle q \rangle^{(ic)}\} = [J]_{6 \times 6} \{\langle e \rangle^{(ic)}\} \quad (3.68)$$

sendo que,

$$[J]_{6 \times 6} = [P]_{6 \times 6} [E]_{6 \times 6}^{-1} \quad (3.69)$$

- $[J]_{6 \times 6}$: é a matriz elemental de junta para propagação de dois tipos de ondas em três elementos estruturais unidimensionais acoplados em ângulos arbitrários.

Outros elementos de junta e suas correspondentes matrizes de junta têm sido desenvolvidos e podem ser encontrados em Cho (1993).

Capítulo 4

MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL DE ENERGIA

4.1 Introdução

O Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM) é uma proposta original desta tese que surgiu da idéia de utilizar os conceitos do Método do Elemento Espectral - (SEM) (vide apêndice B) e da Análise do fluxo de energia (EFA). Considerando que esta proposta surgiu no final do desenvolvimento deste trabalho, e que a quantidade e os tipos de exemplos analisados ainda estão limitados a alguns casos de elementos de barras e vigas, seria prematuro afirmar algumas das vantagens ou desvantagens do método neste momento. Embora o ESEM tenha muitas similaridades com o SEM, espera-se que ele seja uma maneira mais eficiente de tratar os problemas de propagação de ondas em estruturas com complicados contornos e descontinuidades. Com base no trabalho de Doyle (1997) desenvolveu-se uma metodologia matricial a partir da solução analítica da equação diferencial de energia obtida pelo EFA no domínio da frequência. O elemento espectral de energia é equivalente a um número infinito de elementos finitos de energia permitindo a sua utilização para predição de respostas dinâmicas em altas frequências. Como o ESEM está baseado nas equações diferenciais de energia aproximada (vide capítulo 2), sua solução (para ondas longitudinais e transversais) é ainda uma aproximação quando comparada à solução exata do SEM.

4.2 Formulação Espectral Aplicada à Energia

A metodologia do ESEM é a mesma utilizada pelo SEM, ou seja, as matrizes dinâmicas são obtidas através das funções de forma, as quais são utilizadas para determinar as energias em quaisquer posições ao longo da estrutura. Por exemplo, no FEM as funções de forma são polinômios, e já para os métodos SEM e ESEM essas funções são resultantes das soluções analíticas das equações diferenciais. Para o estado de regime permanente, a equação diferencial unidimensional de energia obtida pelo EFA para ondas longitudinais, é dada pela expressão:

$$-\frac{c^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = 0 \quad (4.1)$$

e a sua solução:

$$\langle e \rangle = G_1 e^{\psi x} + G_2 e^{-\psi x} \quad (4.2)$$

sendo que, $\psi = \eta\omega/c$

As amplitudes G_1 e G_2 são determinadas pelas condições de contorno. Os valores da densidade de energia nas extremidades de um elemento com dois nós, como mostra a figura 4.1, são dados por:

$$\langle e \rangle_1(0) = G_1 + G_2 \quad (4.3)$$

$$\langle e \rangle_2(L) = G_1 e^{\psi L} + G_2 e^{-\psi L} \quad (4.4)$$

Escrevendo-se as equações 4.3 e 4.4 na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1 \\ \langle e \rangle_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\psi L} & e^{-\psi L} \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

No capítulo 2 foi apresentada uma relação entre o fluxo e o gradiente de densidade energia média:

$$\langle q \rangle = -\frac{c^2}{\eta\omega} \frac{d\langle e \rangle}{dx}$$

Assim, os valores do fluxo de energia nas extremidades de um elemento com dois nós, como mostra a figura 4.1, são dados por:

$$\langle q \rangle_1(0) = -\frac{c^2}{\eta\omega} [\psi G_1 - \psi G_2] \quad (4.6)$$

$$\langle q \rangle_2(L) = -\frac{c^2}{\eta\omega} [\psi G_1 e^{\psi L} - \psi G_2 e^{-\psi L}] \quad (4.7)$$

Escrevendo-se as equações 4.6 e 4.7 na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_1 \\ \langle q \rangle_2 \end{Bmatrix} = -\frac{c^2}{\eta\omega} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi & -\psi \\ \psi e^{\psi L} & -\psi e^{-\psi L} \end{bmatrix}}_{[G]} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Reescrevendo a equação 4.5 em termos dos coeficientes G_1 e G_2 :

$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = [M]^{-1} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1 \\ \langle e \rangle_2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

e substituindo-se a equação 4.9 em 4.8:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle \end{Bmatrix} = \underbrace{-\frac{c^2}{\eta\omega} [G] [M]^{-1}}_{[K(\omega)]} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle \end{Bmatrix} = [K(\omega)] \begin{Bmatrix} \langle e \rangle \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Sendo que:

- c : velocidade de propagação da onda;
- $\{\langle q \rangle\}$: é o vetor dos valores nodais do fluxo de energia;
- $[K(\omega)]$: é a matriz elementar dinâmica no domínio da frequência;
- $\{\langle e \rangle\}$: é o vetor dos valores nodais da densidade de energia.

As densidades de energia podem ser obtidas em diferentes nós para cada frequência, e de forma exata devido às funções de forma utilizadas. A formulação foi desenvolvida para os tipos de equações diferenciais de energia analisadas nesta tese, que são para ondas longitudinais e transversais. O que diferencia as duas equações diferenciais são as velocidades de propagação da onda.

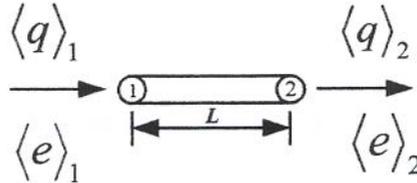


Figura 4.1: Graus de liberdade de um elemento de energia.

A montagem do sistema matricial global, equação 4.11, é feita utilizando-se um procedimento similar ao do EFEM, mostrado no capítulo 3. Considere o exemplo de uma estrutura composta de duas barras (A e B) colineares acopladas, com propriedades geométricas ou tipos de materiais diferentes. A estrutura é excitada por uma força harmônica longitudinal na extremidade do elemento A , como mostra a figura 4.2 (a). A figura 4.2 (b), mostra o problema equivalente de energia.

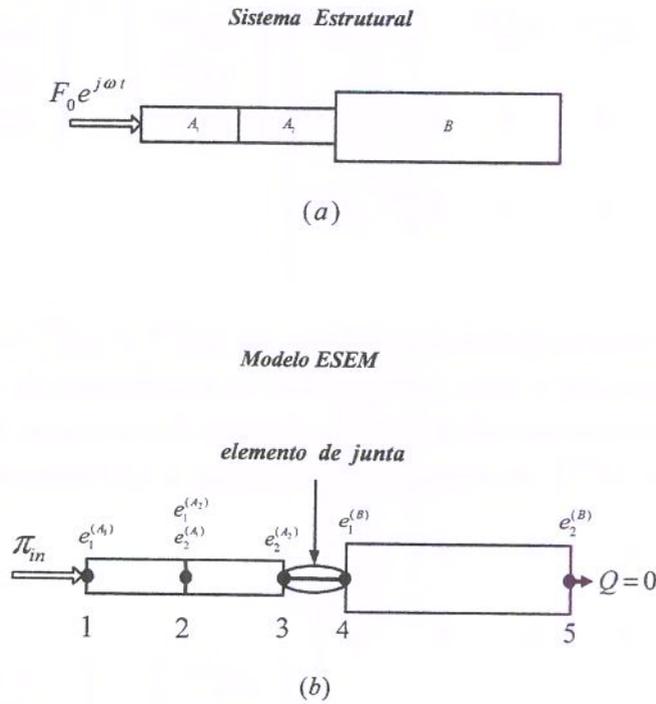


Figura 4.2: (a) Duas barras colineares excitadas por uma força harmônica, (b) problema equivalente de energia.

O sistema matricial global é dado por:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_1^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_1^{(B)} \\
 \langle e \rangle_2^{(B)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \langle q \rangle_1^{(A_1)} \\
 \langle q \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle q \rangle_1^{(A_2)} \\
 \langle q \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle q \rangle_1^{(B)} \\
 \langle q \rangle_2^{(B)}
 \end{Bmatrix}
 \quad (4.12)$$

As condições de contorno globais do problema são $\langle q \rangle_1^{(A_1)} = \langle q \rangle_2^{(B)} = 0$, pois não existem outros elementos conectados a esses, portanto, não há transferência de energia. Uma outra condição global é a potência injetada no nó 1 do elemento A, e portanto, deve ser incorporado um vetor de potência, $\{F_i^{(e)}\}$, na equação 4.12. Portanto, a 4.12 torna-se:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle e \rangle_1^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle e \rangle_1^{(B)} \\
 \langle e \rangle_2^{(B)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 \langle q \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle q \rangle_1^{(A_2)} \\
 \langle q \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle q \rangle_1^{(B)} \\
 0
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{Bmatrix}
 \langle F \rangle_1^{(A_1)} \\
 \langle F \rangle_2^{(A_1)} \\
 \langle F \rangle_1^{(A_2)} \\
 \langle F \rangle_2^{(A_2)} \\
 \langle F \rangle_1^{(B)} \\
 \langle F \rangle_2^{(B)}
 \end{Bmatrix}
 \quad (4.13)$$

Como o nó 2 não corresponde a uma junta, a relação de continuidade do fluxo de energia é dado por:

$$\langle q \rangle_2^{(A_1)} + \langle q \rangle_1^{(A_2)} = 0 \quad (4.14)$$

e a relação de compatibilidade da densidade de energia é:

$$\langle e \rangle_2^{(A_1)} = \langle e \rangle_1^{(A_2)} \quad (4.15)$$

assim, inserindo as equações 4.14 e 4.15 no sistema matricial global, tem-se:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} + K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{11}^{(B)} & K_{12}^{(B)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_1^{(B)} \\ \langle e \rangle_2^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \langle q \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle q \rangle_1^{(B)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \pi_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Este exemplo, trata do caso de barras colineares acopladas com uma onda longitudinal propagando-se ao longo delas. Portanto, a equação matricial de junta para onda longitudinal, equação 3.38, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \langle q \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle q \rangle_1^{(B)} \end{Bmatrix} = \frac{\tau_{LLAB}}{2r_{LLAA}} \begin{bmatrix} c_{gLA} & -c_{gLB} \\ -c_{gLA} & c_{gLB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_1^{(B)} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

- τ_{LLAB} : é coeficiente de transmissão longitudinal na barra B devido a uma onda incidente longitudinal na barra A ;
- r_{LLAA} : é coeficiente de reflexão longitudinal na barra A devido a uma onda incidente longitudinal na barra A ;
- c_{gLA} e c_{gLB} : são velocidades de propagação das ondas logitudinais na barra A e B , respectivamente.

O elemento de junta, equação 4.17, é substituído no lado direito do sistema matricial global, equação 4.16, após isso essas parcelas são transferidas para o lado esquerdo do sistema global, resultando:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(A_1)} & K_{12}^{(A_1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(A_1)} & K_{22}^{(A_1)} + K_{11}^{(A_2)} & K_{12}^{(A_2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(A_2)} & K_{22}^{(A_2)} - \frac{\tau_{LLABCgLA}}{2r_{LLAA}} & \frac{\tau_{LLABCgFB}}{2r_{LLAA}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_{LLABCgLA}}{2r_{LLAA}} & K_{11}^{(B)} - \frac{\tau_{LLABCgLA}}{2r_{LLAA}} & K_{12}^{(B)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(B)} & K_{22}^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle e \rangle_1^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_1)} \\ \langle e \rangle_2^{(A_2)} \\ \langle e \rangle_1^{(B)} \\ \langle e \rangle_2^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

- Q_{in} : é a potência injetada (π_{in}), como mostra a estrutura da figura 4.2.

O sistema matricial global é resolvido para as densidades de energia em cada nó. Em geral, as matrizes elementares de junta são não-simétricas, e portanto o sistema matricial global também é não-simétrico. Apesar disso, o simples procedimento para montagem matricial, como em FEM, e a necessidade da utilização de poucos elementos para modelar grandes estruturas em altas frequências, justifica esta técnica (ESEM) como um método numérico viável para a predição do comportamento vibracional (estrutural ou acústico) em altas frequências.

Capítulo 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS SIMULADOS

5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados os resultados de exemplos simulados utilizados na verificação dos métodos estudados nesta tese. O objetivo desses métodos é mostrar como a energia está fluindo pela estrutura, ou seja, identificar como a vibração está se propagando por via estrutural através da variação da energia. Os casos analisados dizem respeito aos modelos de barras e vigas colineares, duas e três vigas acopladas em ângulo arbitrário e uma estrutura na forma de "T". Todas essas estruturas são consideradas livre-livre, e são excitadas por forças harmônicas longitudinal e transversal em uma de suas extremidades. O Método dos Elementos Espectrais - (SEM) será utilizado como referência, porque representa a solução exata da equação da onda. Por ser um método já bastante explorado em outras teses do Laboratório de Vibroacústica - LVA/DMC/FEM-UNICAMP (Ahmida, 2001), (Alves, 2001), (Donadon, 2002) e (Nunes, 2005), portanto, realizou-se apenas uma breve descrição do mesmo (vide apêndice B). Na primeira seção, avaliam-se exemplos estruturais de barras e vigas utilizando o EFEM, cujos resultados são comparados com SEM e em alguns poucos casos com EFA também. Nestes exemplos são calculadas as densidades de energias médias totais, assim como as densidades de energias médias parciais que surgem devido ao acoplamento das ondas longitudinais e transversais. As densidades de energias parciais foram de grande importância na identificação da convenção dos sinais das matrizes de juntas (Cho, 1993). Também é feita uma avaliação do processo de convergência do EFEM. Na segunda seção, as densidades de energias médias totais e parciais, bem como, os fluxos de energias médios totais e parciais são calculados por ESEM para diferentes exemplos e comparados com

EFEM e SEM. Na última seção, são apresentados os resultados das densidades e fluxos de energias médios totais e parciais obtidos com modelos de energia por EFEM e ESEM para o caso particular de uma estrutura na forma de um "T", a qual representa a viga real utilizada na parte experimental deste trabalho.

5.2 Exemplos simulados modelados por EFEM

Nesta seção, diferentes casos foram simulados utilizando-se os métodos EFEM e EFA os quais são comparados com os resultados de SEM. As configurações das estruturas são as seguintes: barras e vigas colineares acopladas livre-livre e vigas acopladas em ângulos arbitrários livre-livre. Os estudos realizados têm como propósito analisar o comportamento dinâmico das estruturas em altas frequências. Para isso, as equações diferenciais de energia obtidas no capítulo 2 são utilizadas na modelagem das estruturas propostas, e estão sujeitas a hipóteses que tornam-nas aproximadas em relação à equação da onda.

Juntamente com as equações de energia, são utilizadas as equações de juntas, as quais modelam os acoplamentos das ondas nas estruturas. Estes mecanismos de troca de energia nas juntas utilizam os coeficientes de transmissão e reflexão (τ_{mnij} e r_{mni}) que são determinados a partir de elementos estruturais acoplados semi-infinitos ou infinitos em uma banda de frequência de interesse. Portanto, estruturas finitas são modeladas a partir de estruturas semi-infinitas ou infinitas. Esta hipótese é válida desde que a banda de frequência sobre a qual a média em frequência será calculada, seja suficientemente grande para que as respostas médias em frequência de elementos finitos aproximem-se das respostas médias dos elementos semi-infinitos ou infinitos (Cho, 1993). Estas hipóteses e aproximações se verificam desde que um número mínimo de modos estejam presentes na banda de frequências considerada. Dois indicadores amplamente utilizados em SEA são: o número de modos na banda de frequência, ("mode count - $N(f)$ "), que indica o número aproximado de modos excitados na banda de frequência de interesse, e o fator de sobreposição modal, ("modal overlap factor - MOF "), que indica o espaçamento entre os modos na banda de interesse.

Lyon (1975) sugere um $N(f)$ com pelo menos 3 modos na banda de frequência de interesse, enquanto Plunt, Fredo e Sanderson (1993) sugerem um MOF maior do que 0.5, para que as respostas vibracionais de estruturas finitas sejam similares às de estruturas semi-infinitas ou infinitas. Portanto, para SEA, se os sub-sistemas têm muitos modos na banda de interesse, a confiabilidade das predições estatísticas aumenta. Nesta tese, os resultados do fluxo e da densidade de energia são obtidos através de médias em frequência. Desta forma, $N(f)$ e o MOF , que são parâmetros que descrevem a natureza modal das estruturas em altas

freqüências (SEA), também serão utilizados como uma indicação da quantidade de modos na banda de freqüência de interesse. Essa é uma forma de avaliar os limites da região (em freqüência) para a qual as hipóteses e aproximações do EFEM sejam válidas. Existem outros indicadores utilizados para validar a região limite do EFEM (Cho, 1993) (Moens, 2001).

A formulação dos parâmetros $N(f)$ e MOF pode ser encontrada em Lyon e Dejong (1995). Definem-se os parâmetros $N(f)$ e MOF para ondas longitudinais em barras por:

$$N(f) = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{E}} (\omega_2 - \omega_1) \quad (5.1)$$

e

$$MOF = \frac{2\eta L}{\lambda} \quad (5.2)$$

e a definição de $N(f)$ e MOF para ondas de flexão em vigas é, respectivamente, dada por:

$$N(f) = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} (\sqrt{\omega_2} - \sqrt{\omega_1}) \quad (5.3)$$

e

$$MOF = \frac{\eta L}{\lambda} \quad (5.4)$$

Os parâmetros $N(f)$ e MOF para as barras e vigas de alumínio, utilizadas em alguns dos exemplos desta seção, foram calculados a partir das seguintes propriedades: $A_A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_B = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E=71 \text{ GPa}$, $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$, $\eta=0,03$ e $L_A = L_B=3,0 \text{ m}$. Para as bandas de freqüências em terços de oitava com as seguintes freqüências centrais: $f_c = 25, 32, 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150, 4000, 5000, 6300, 8000, 10000, 12500, 16000$ e 20000 [Hz] . Na figura 5.1 observa-se que as barras A e B atingem o valor mínimo (3 modos) de $N(f)$ em torno de 10,0 kHz, enquanto que para as vigas A e B o valor é atingido em torno de 500 Hz e 1000 Hz, respectivamente. Já o MOF , como mostra a figura 5.2, o valor mínimo (0.5) é atingido em aproximadamente 12 kHz para as barras A e B , enquanto nas vigas A e B é atingido em aproximadamente em 5,0 kHz e 10,0 kHz, respectivamente.

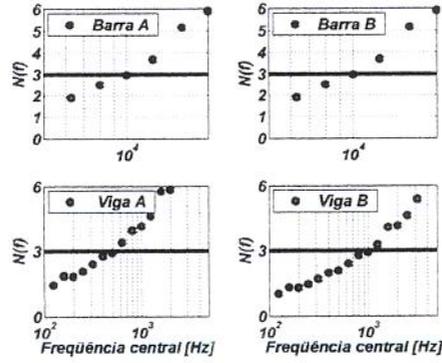


Figura 5.1: Número de modos na banda $N(f)$ em função da frequência central f_c , para as barras e vigas A e B em bandas de frequência de 1/3 oitava.

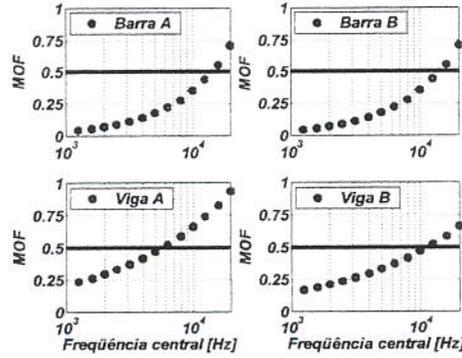


Figura 5.2: Fator de sobreposição modal MOF em função da frequência central f_c , para as barras e vigas A e B em bandas de 1/3 oitava.

5.2.1 Exemplos de barras e vigas colineares acopladas

A figura 5.3 mostra duas barras colineares livre-livre acopladas, com as seguintes propriedades: $A_A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_B = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E=71 \text{ GPa}$, $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$, $\eta=0,03$ e $L_A = L_B = 3,0 \text{ m}$. A estrutura feita de alumínio é excitada por uma força unitária localizada na extremidade da barra A . Esta força unitária foi utilizada no cálculo dos deslocamentos por SEM e no cálculo da potência injetada (Q_{in}) aplicada na equação 3.41 do EFEM e do EFA. Deve ser mencionado que, para este caso, devido ao acoplamento das barras ser colinear, não ocorrem acoplamentos das ondas longitudinais e transversais. Assim, o mesmo tipo de onda utilizado na excitação se propagará ao longo de toda a estrutura, neste caso apenas ondas longitudinais, o que nos levará ao modelo de junta mais simples.

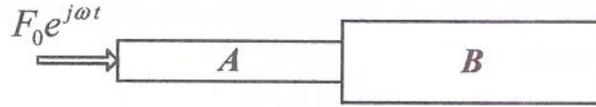


Figura 5.3: Duas barras colineares acopladas, excitadas por uma força longitudinal harmônica.

Os valores médios em frequência da densidade de energia total longitudinal ao longo do comprimento das barras AB , $\langle e \rangle_{LAB}$, foram calculados por SEM, EFEM e EFA para a banda de frequências de 1/3 de oitava com frequência central $f_c=6.3$ kHz, e para a banda de frequências de 1/12 de oitava com frequência central de $f_c=12.5$ kHz, como mostram as figuras 5.4(a) e (b), respectivamente. Os resultados apresentam uma boa concordância do EFA e do EFEM com o SEM na banda com $f_c=12.5$ kHz, mas apresentam diferenças para a banda com $f_c=6.3$ kHz. Uma indicação dessas diferenças é devida ao fato de que o número de modos na banda $N(f)$ e o fator de sobreposição modal MOF neste caso encontram-se abaixo dos limites mínimos para essa banda de frequência, como pode ser observado nas figuras 5.1 e 5.2. Portanto, o comportamento vibracional da estrutura finita não se aproxima do comportamento das semi-infinitas ou infinitas.

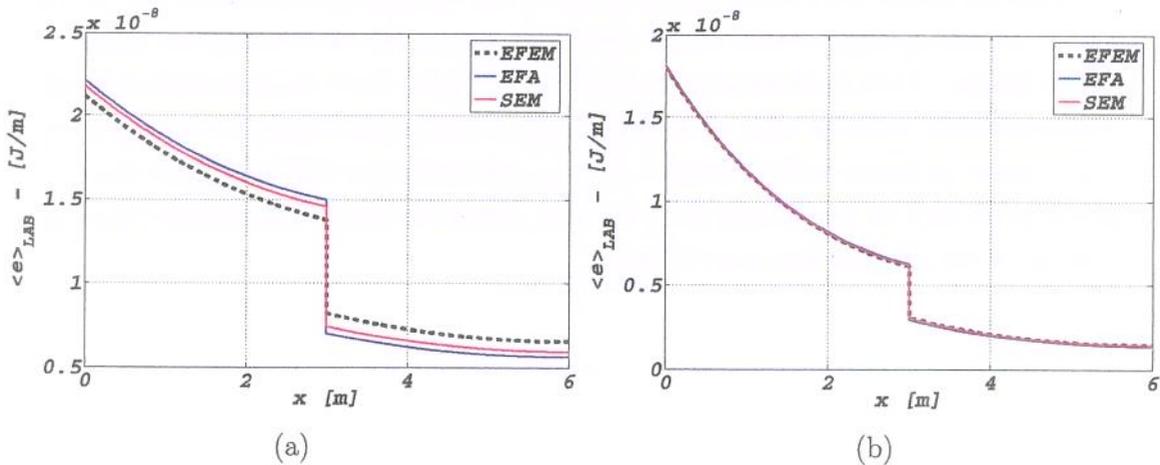


Figura 5.4: Densidade de energia total média longitudinal ao longo das barras AB , calculada por EFEM, EFA e SEM em bandas de 1/3 e 1/12 de oitava com frequências centrais de: (a) $f_c=6.3$ kHz; e (b) $f_c=12.5$ kHz.

A figura 5.5 mostra duas vigas colineares acopladas livre-livre com as mesmas propriedades das barras AB da estrutura apresentada anteriormente, mas com uma excitação transversal

unitária na extremidade da viga A . A junta para esse caso também é simples, e contempla apenas ondas transversais.

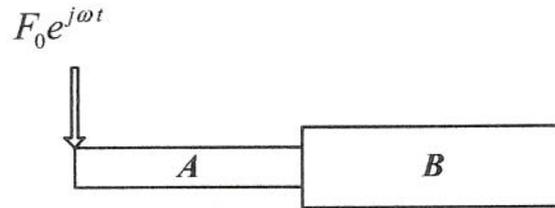


Figura 5.5: Duas vigas colineares acopladas, excitadas por uma força harmônica transversal.

A densidade de energia total média transversal ao longo do comprimento das vigas A e B , $\langle e \rangle_{FAB}$, foi calculada por EFEM, EFA e SEM para a banda de frequências de 1/3 de oitava com frequência central $f_c=6.3$ kHz, e para a banda de frequências de 1/12 de oitava com frequência central de $f_c=12.5$ kHz, como mostram as figuras 5.6 (a) e (b), respectivamente. De forma similar ao caso anterior das barras A e B , os resultados das vigas AB apresentam também uma boa concordância do EFA e do EFEM com o SEM para a banda de $f_c=12.5$ kHz, mas apresentam divergências para a banda de $f_c=6.3$ kHz. Embora neste caso o número de modos na banda $N(f)$ tenha alcançado seu valor mínimo para a banda com $f_c=6.3$ kHz, o fator de sobreposição modal MOF ainda está muito distante do mínimo sugerido nesta mesma banda. O que pode ser observado nas figuras 5.1 e 5.2 é que, nos resultados das vigas, para frequências centrais mais altas existem mais modos por banda e o espaçamento entre eles é menor, portanto as densidades $\langle e \rangle_{FAB}$ calculadas por EFA e EFEM tornam-se mais próximas no caso da banda com $f_c=12.5$ kHz, apesar de existir uma região crítica na junta onde as curvas não têm boa concordância.

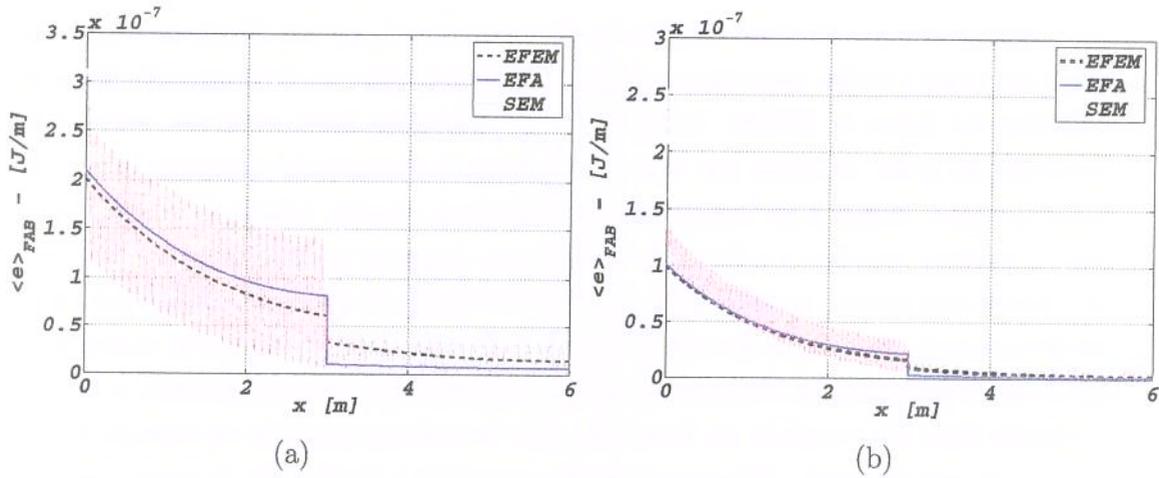


Figura 5.6: Densidade de energia total média transversal ao longo das vigas AB , calculada por EFEM, EFA e SEM em bandas com frequência central de: (a) $f_c=6.3$ kHz e (b) $f_c=12.5$ kHz.

5.2.2 Exemplos de vigas conectadas em ângulo arbitrário

A figura 5.7 mostra o caso de duas vigas conectadas em um ângulo arbitrário, e excitadas por forças unitárias longitudinal e transversal. As análises foram feitas para diferentes ângulos de 0° a 90° para um tipo de excitação de cada vez. As bandas de frequências de $1/3$ e $1/12$ de oitava e as respectivas frequências centrais de 6.3 e 12.5 kHz, juntamente com os parâmetros estruturais dos casos de barras e vigas colineares foram utilizados neste exemplo. A única exceção é a área da seção transversal que neste caso é $A_T = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ para ambas as vigas.

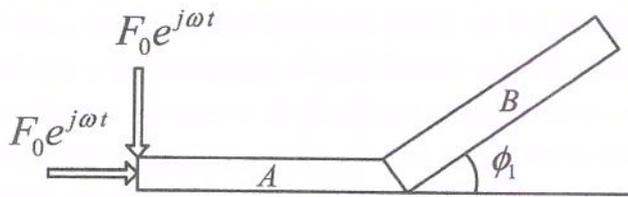


Figura 5.7: Duas vigas conectadas em ângulo arbitrário, excitadas por forças harmônicas longitudinal e transversal.

Embora a estrutura seja excitada por uma única força que gera um único tipo de onda, a forma da conexão em ângulo (ϕ_1) entre as vigas A e B gera o acoplamento das ondas refletidas e transmitidas na junta em formas de ondas longitudinais e transversais. Nestes

casos, uma convenção de sinais consistente deve ser adotada para o cálculo do fluxo e da densidade de energia média para obter um resultado consistente na determinação das equações matriciais de juntas do EFEM. A fim de evitar problemas desta natureza, como ocorre na convenção de sinais adotadas por Cho (1993) como já mencionado anteriormente, usaremos uma convenção similar à da Resistência dos Materiais, ou seja, o fluxo de energia que sai da junta é positivo (tração) e o fluxo de energia que chega na junta é negativo (compressão). Para poder identificar o sentido físico do efeito dos sinais na obtenção das matrizes de junta, calcularam-se as densidades de energias médias parciais, ou seja, a parcela referente a cada tipo de onda (longitudinal e transversal) propagando na estrutura e verificando a consistência do sentido físico do resultado em função do tipo de onda transmitida ou refletida sobre a estrutura em consideração. Este procedimento permitiu a verificação de todos os sinais das equações matriciais de junta para todos os casos abordados nesta tese. Deve ser mencionado que neste caso só foram obtidos resultados calculados por EFEM e SEM. Resultados por EFA não foram calculados devido às dificuldades na obtenção das relações de acoplamento, bem como, por não ser objeto deste trabalho explorar esta técnica.

No primeiro caso a ser analisado, considera-se que o ângulo $\phi_1 \approx 0^\circ$, para que não se tenha problemas numéricos devido ao tipo de elemento de junta utilizado. O objetivo desta análise é simular o caso de barras ou vigas colineares usando as matrizes de junta para ângulo arbitrário. Como a área da seção transversal é a mesma para ambos elementos A e B , os resultados para este caso deveriam corresponder àqueles de uma viga de comprimento $A + B$, conseqüentemente não existirá descontinuidade na densidade de energia média total na posição da junta entre A e B . Na figura 5.8 pode-se confirmar esta previsão dos resultados obtidos para as densidades de energia média parciais ($\langle e \rangle_{LLAB}$, $\langle e \rangle_{LFAB}$, $\langle e \rangle_{FFAB}$ e $\langle e \rangle_{FLAB}$), total longitudinal ($\langle e \rangle_{LAB}$) e total transversal ($\langle e \rangle_{FAB}$) para uma banda de frequências de 1/3 de oitava com frequência central $f_c=6.3$ kHz. Pode-se observar também, que os resultados das densidades de energias médias parciais cruzadas ($\langle e \rangle_{LFAB}$ e $\langle e \rangle_{FLAB}$) são bem menores (cerca de 6 ordens de grandeza) que as densidades de energias parciais não-cruzadas ($\langle e \rangle_{LLAB}$ e $\langle e \rangle_{FFAB}$), pois o problema degenera para o caso de vigas colineares, e portanto não existem acoplamentos entre as ondas longitudinais e transversais. As densidades de energias totais são escritas em função das densidades de energia parciais da seguinte forma: $\langle e \rangle_{LAB} = \langle e \rangle_{LLAB} + \langle e \rangle_{LFAB}$ e $\langle e \rangle_{FAB} = \langle e \rangle_{FFAB} + \langle e \rangle_{FLAB}$.

Sendo que:

- $\langle e \rangle_{LAB}$: densidade de energia média longitudinal total na estrutura AB ;
- $\langle e \rangle_{FAB}$: densidade de energia média transversal total na estrutura AB ;

- $\langle e \rangle_{LLAB}$: densidade de energia média longitudinal na estrutura AB devido a uma onda longitudinal;
- $\langle e \rangle_{LFAB}$: densidade de energia média longitudinal na estrutura AB devido a uma onda transversal;
- $\langle e \rangle_{FFAB}$: densidade de energia média transversal na estrutura AB devido a uma onda transversal;
- $\langle e \rangle_{FLAB}$: densidade de energia média transversal na estrutura AB devido a uma onda longitudinal.

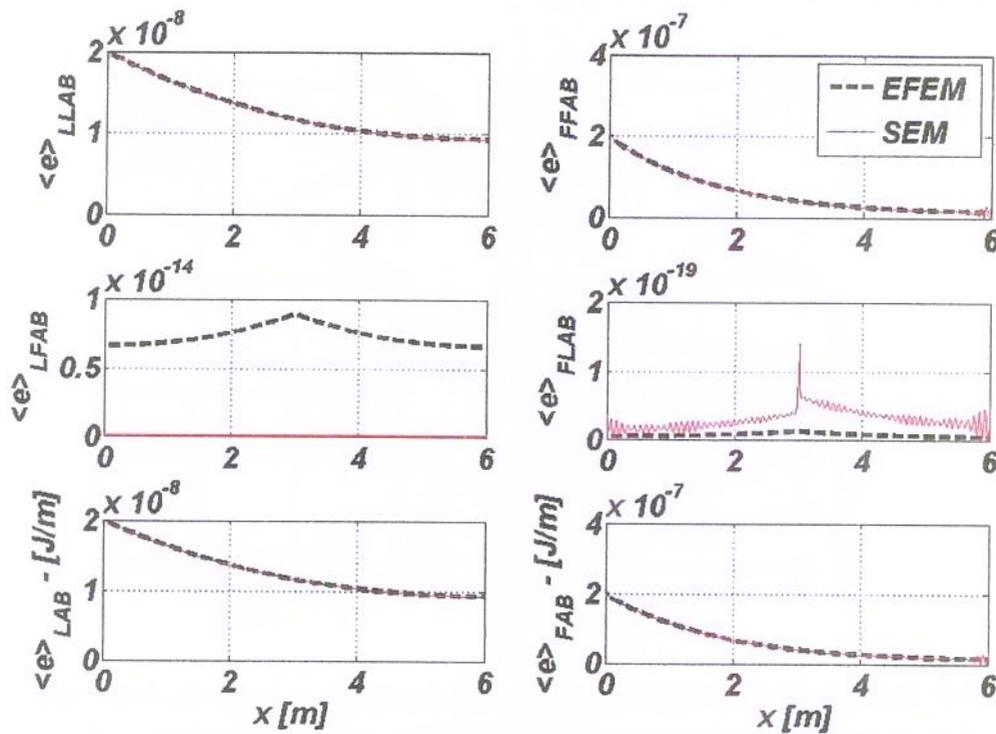


Figura 5.8: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 0° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

Para o caso em que o ângulo $\phi = 30^\circ$, os resultados das densidades de energias médias totais e parciais para uma banda de frequências 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz podem ser observados na figura 5.9. Então, pode ser visto que o comportamento das densidades de energias médias parciais ($\langle e \rangle_{LFAB}$ e $\langle e \rangle_{FLAB}$) obtidas por EFEM e SEM é bem

similar, e a pequena diferença entre os métodos não afeta o resultado das densidades de energias médias totais longitudinais e transversais. Pode-se observar na figura 5.10, que a diferença entre as densidades de energias médias parciais calculadas pelos dois métodos são minimizadas na banda de frequências de 1/12 oitava com $f_c=12.5$ kHz, onde valores do $N(f)$ e MOF são mais adequados para a aplicação do EFEM. As mesmas análises nas bandas de frequências de 1/3 e 1/12 de oitava com as respectivas $f_c=6.3$ kHz e $f_c=12.5$ kHz foram feitas para outras configurações estruturais (60° e 90°), e podem ser visualizadas nas figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14. Como nos casos anteriores, os resultados demonstram mais uma vez que o EFEM apresenta um bom desempenho em faixas de frequências mais altas com a capacidade de resolver o problema local na estrutura, o que não é possível com outras técnicas de altas-frequências como o SEA.

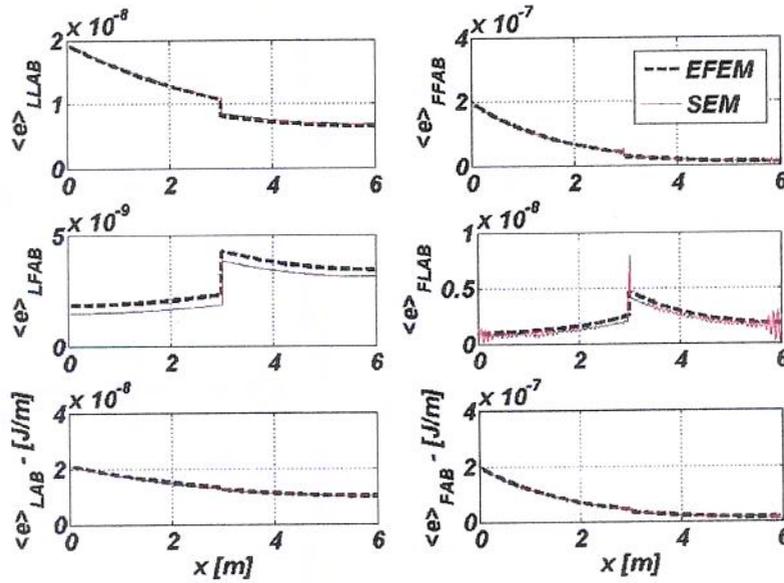


Figura 5.9: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 30° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

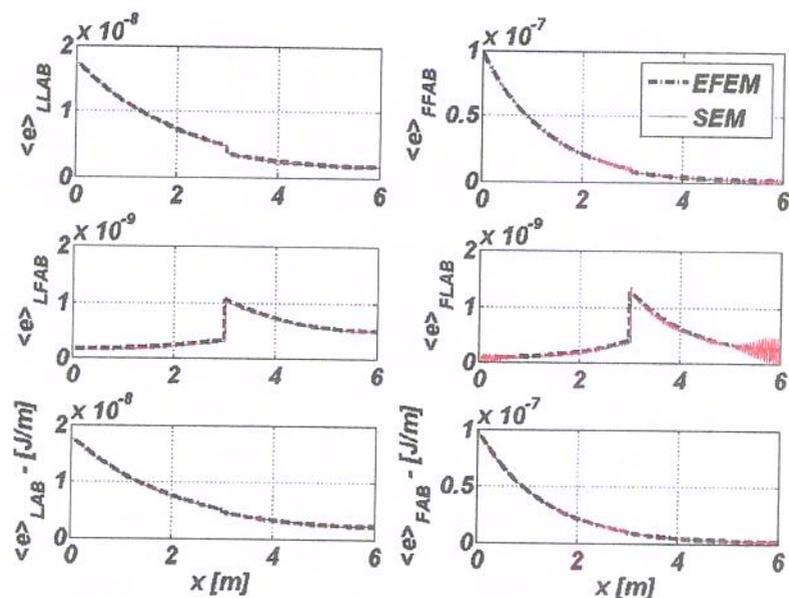


Figura 5.10: Densidades de energia médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 30° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

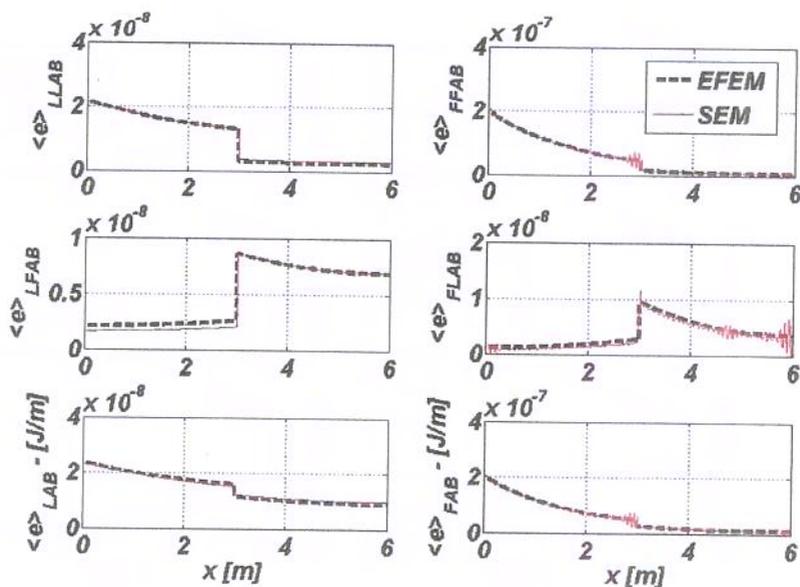


Figura 5.11: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c=6.3$ kHz.

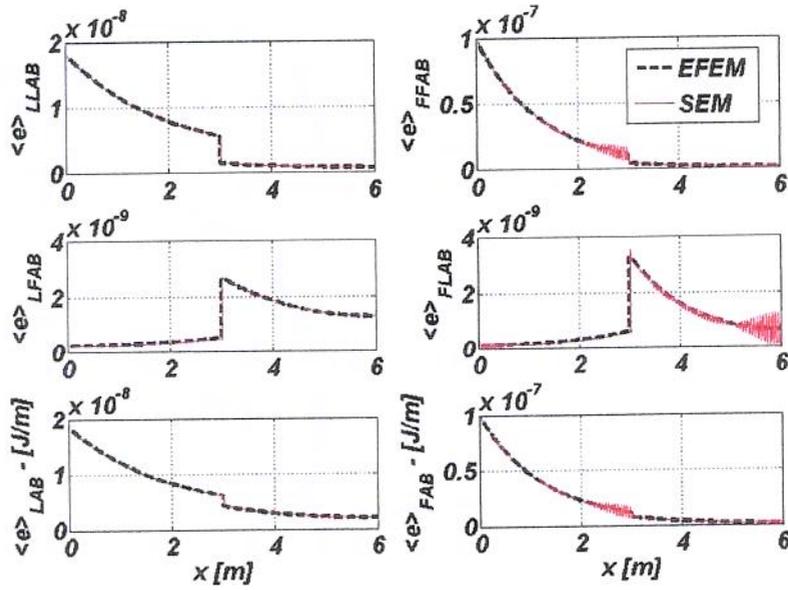


Figura 5.12: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

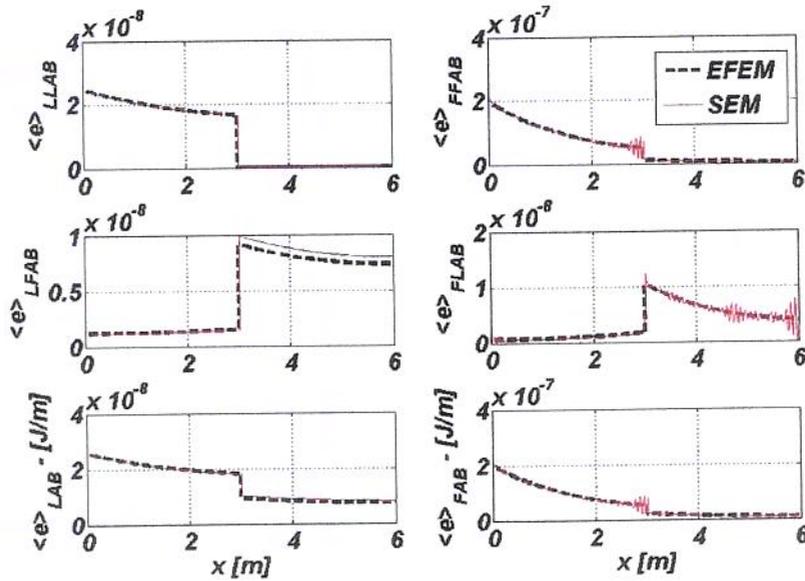


Figura 5.13: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 90° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c=6.3$ kHz.

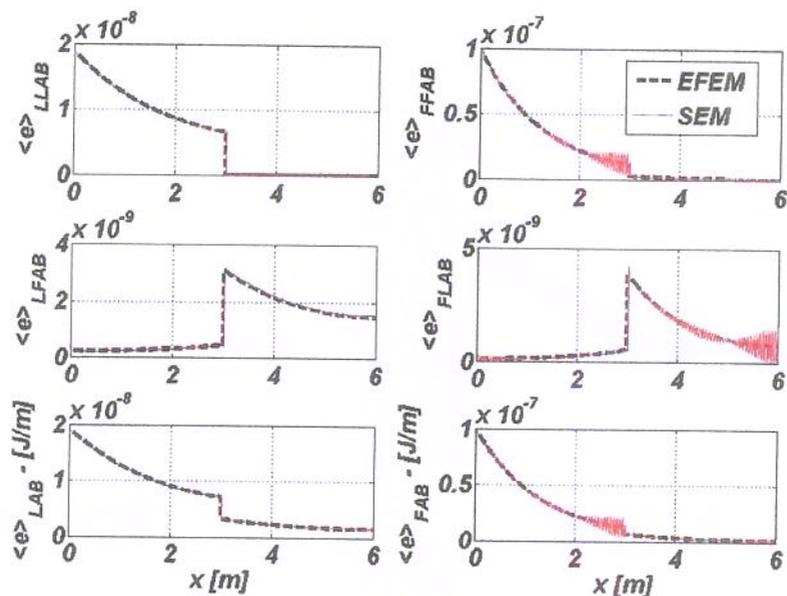
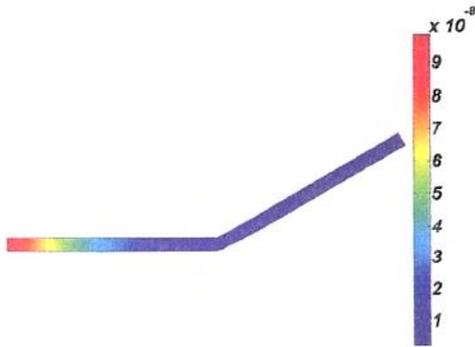
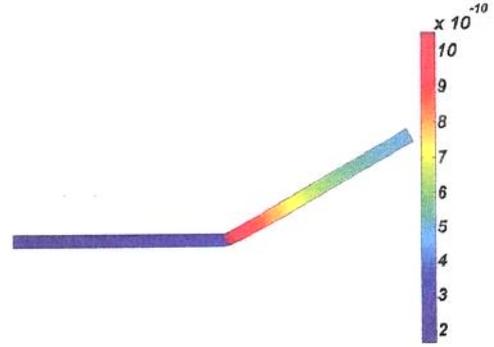


Figura 5.14: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 90° , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

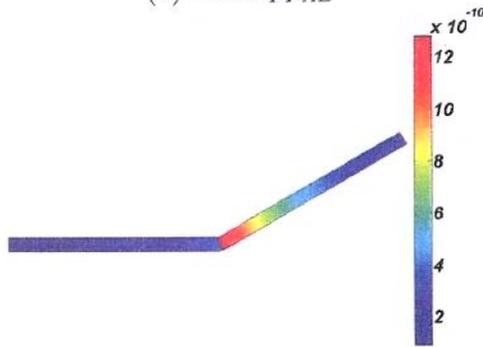
Uma outra forma de visualização dos resultados é apresentada na figura 5.15, a qual mostra as densidades de energias totais e parciais ($\langle e \rangle_{LAB}$, $\langle e \rangle_{FAB}$, $\langle e \rangle_{LLAB}$, $\langle e \rangle_{LFAB}$, $\langle e \rangle_{FFAB}$ e $\langle e \rangle_{FLAB}$) para o caso de vigas acopladas em um ângulo de $\phi = 30^\circ$ calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz. Essa forma gráfica mostra como as densidades de energia estão fluindo na estrutura, e conseqüentemente a variação espacial da densidade de energia. A predição de ruído propagado por via estrutural ("structure-borne noise"), é um assunto de grande interesse no que diz respeito a minimizar as vibrações e os níveis de ruído (Wohlever e Bernhard, 1992). Por exemplo, vibrações a partir de uma parte remota de uma máquina podem ser transmitidas ao longo da estrutura para o interior de um ambiente na forma de som. Na figura 5.15 pode-se observar que algumas densidades de energias médias ($\langle e \rangle_{LLAB}$, $\langle e \rangle_{FFAB}$) têm o seu maior nível na viga A e outras ($\langle e \rangle_{LFAB}$, $\langle e \rangle_{FLAB}$) na viga B, mas a soma delas, para esse caso, tem o seu nível maior na viga A.



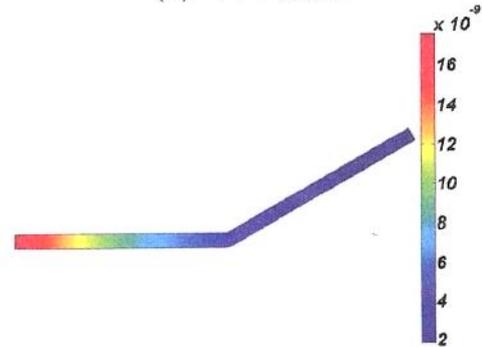
(a) $\langle e \rangle_{FFAB}$



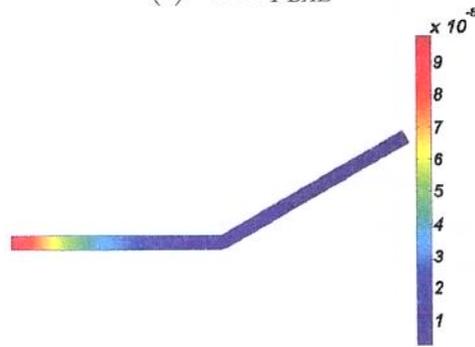
(b) $\langle e \rangle_{LFAB}$



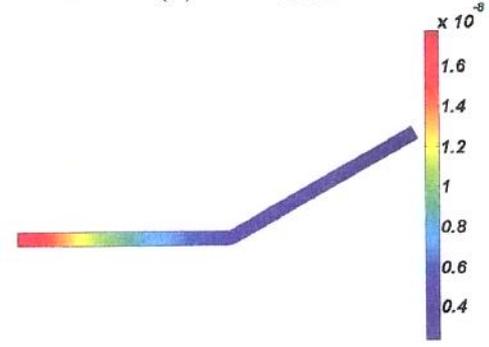
(c) $\langle c \rangle_{FLAB}$



(d) $\langle c \rangle_{LLAB}$



(e) $\langle c \rangle_{FAB}$



(f) $\langle c \rangle_{LAB}$

Figura 5.15: Densidades de energias médias totais e parciais, figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 oitavas com $f_c = 12.5kHz$, para um ângulo de 30° .

Um outro caso, como mostra a figura 5.16, tem a configuração estrutural representada por três vigas A , B e C conectadas por uma junta com ângulos de 0° , -30° e 30° em relação ao eixo horizontal, respectivamente. A estrutura é excitada por forças unitárias longitudinal e transversal, que são aplicadas uma de cada vez. Os parâmetros da estrutura são os mesmos do caso de duas vigas acopladas em ângulo arbitrário, onde apenas mais uma viga C foi incorporada à junta do sistema estrutural. As densidades de energias médias totais e parciais foram calculadas para as bandas de frequências de $1/3$ e $1/12$ de oitavas e as suas respectivas frequências centrais $f_c=6.3$ kHz e $f_c=12.5$ kHz. Os resultados obtidos para a estrutura da figura 5.16, mantém o mesmo comportamento do caso de duas vigas acopladas em ângulos arbitrários. Portanto como pode ser visto pelas figuras 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20, as densidades de energias médias totais e parciais melhoram com o aumento em frequência.

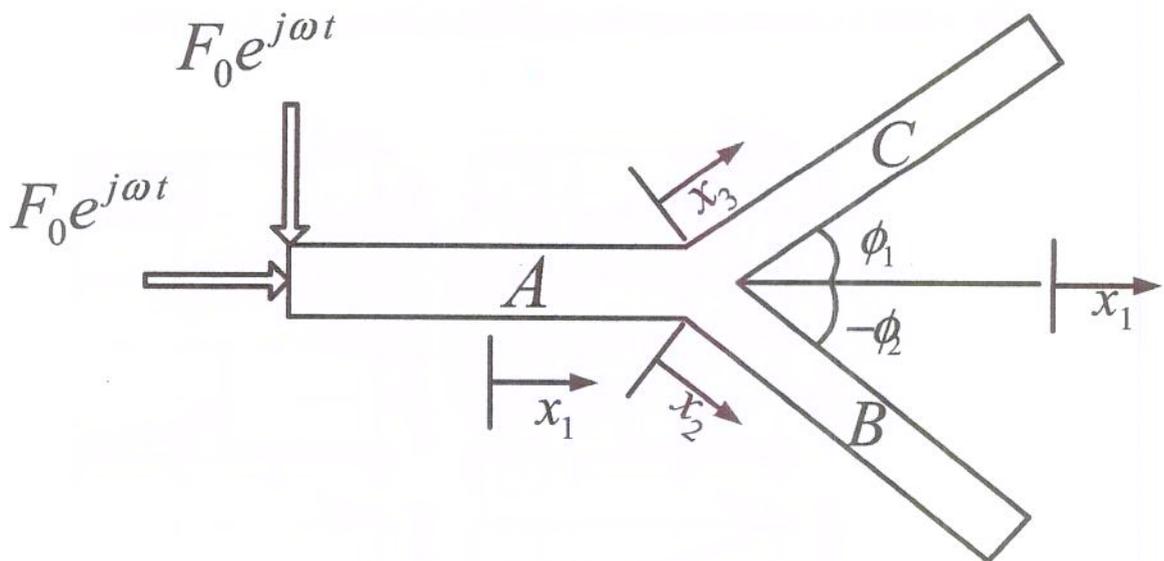


Figura 5.16: Três vigas A , B e C conectadas por uma junta com ângulos de 0° , -30° e 30° , e excitadas por uma força harmônica longitudinal e transversal na extremidade da viga A .

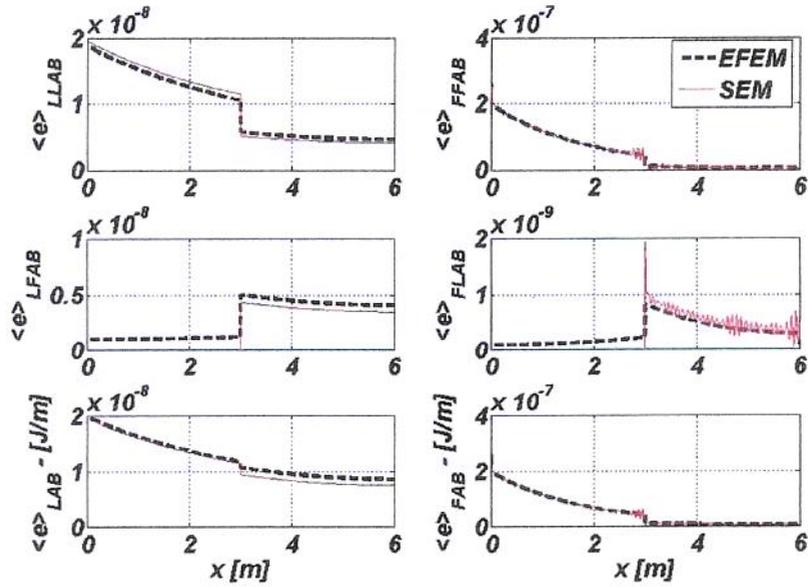


Figura 5.17: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c=6.3$ kHz.

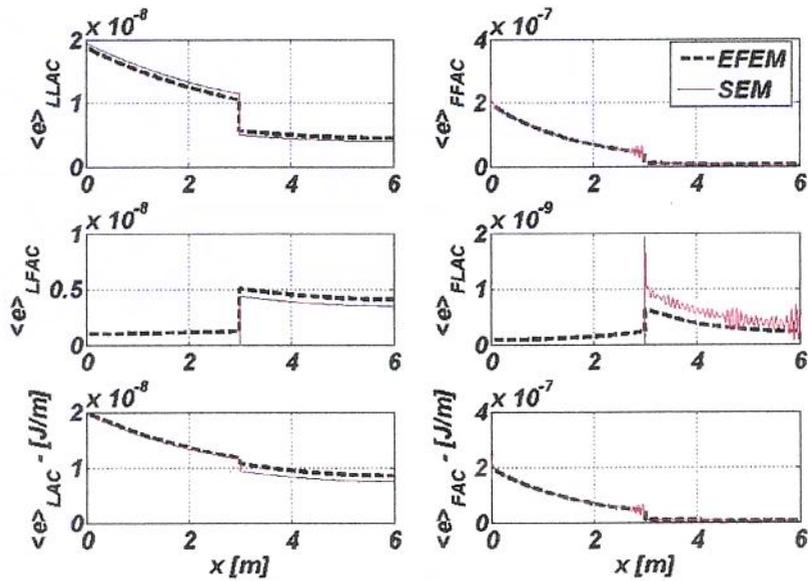


Figura 5.18: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c=6.3$ kHz.

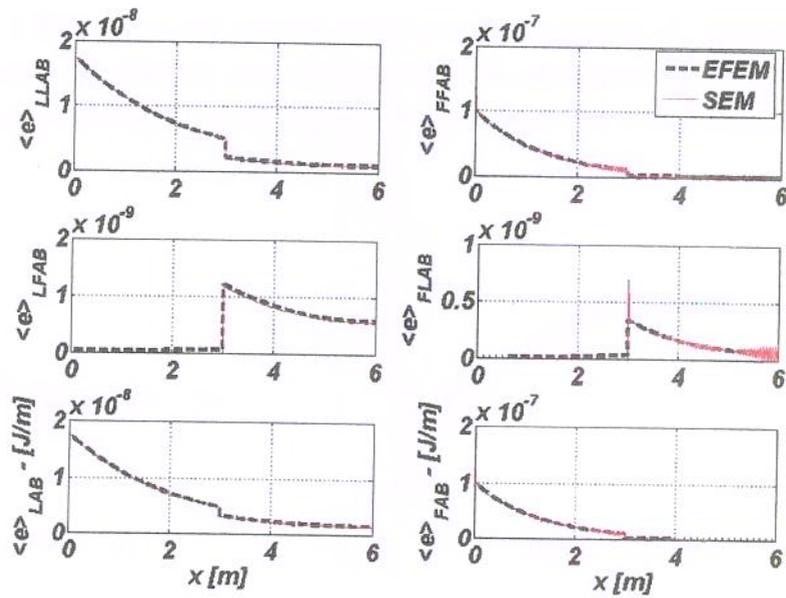


Figura 5.19: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

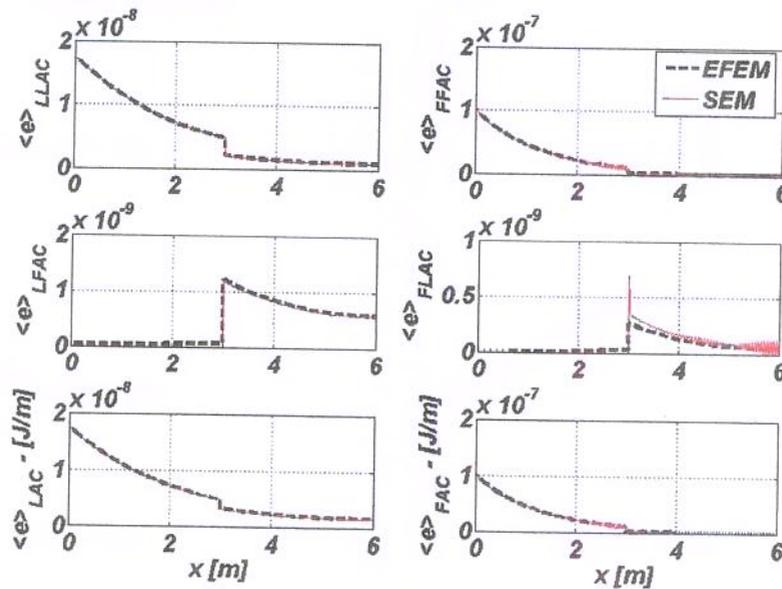


Figura 5.20: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC , calculadas por EFEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

As densidades de energias médias totais e parciais nos ramos AB e AC , calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, são apresentadas novamente nas figura 5.21 e 5.21 utilizando a forma gráfica aqui proposta, respectivamente.

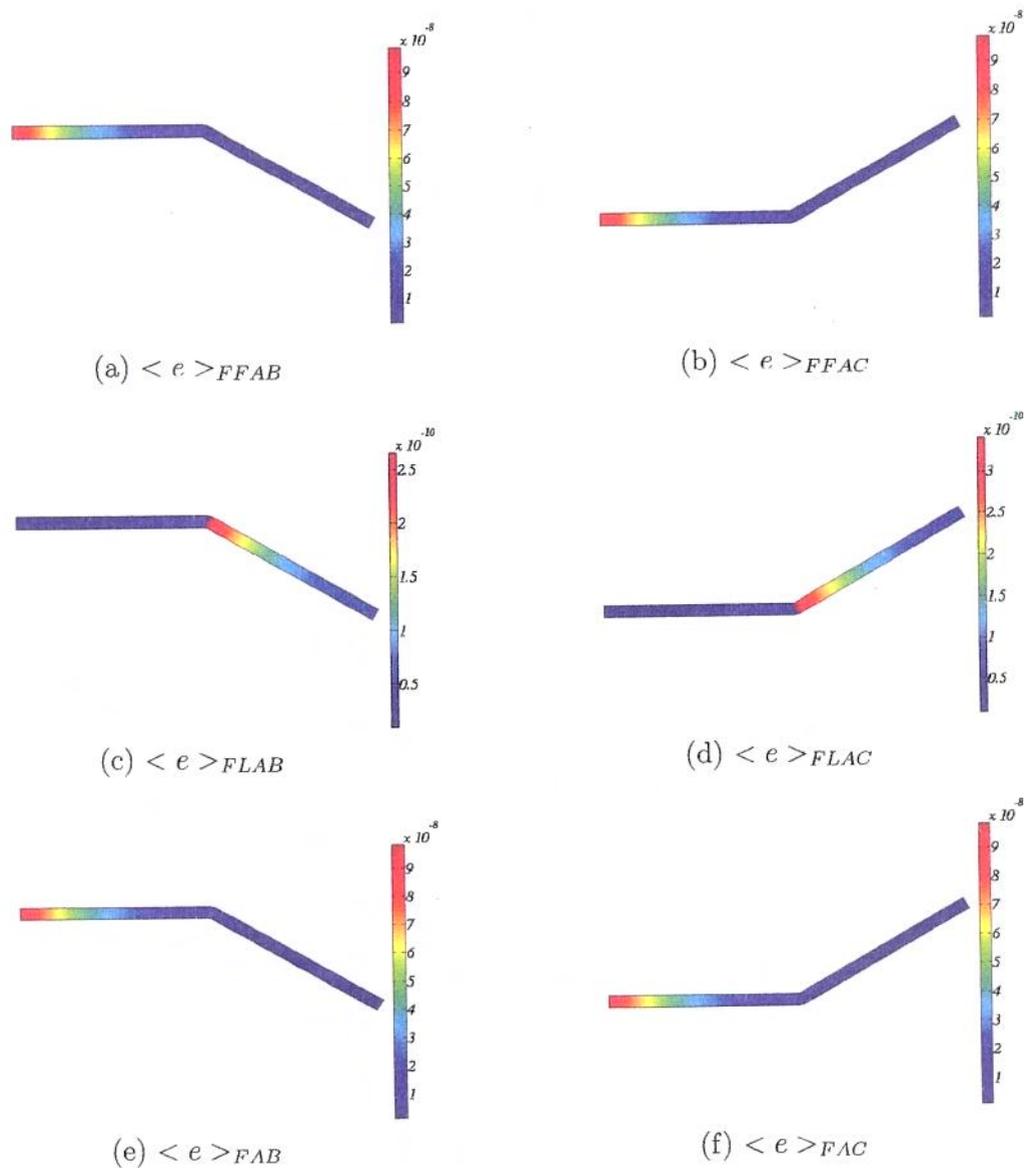


Figura 5.21: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB e AC , calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de 30° .

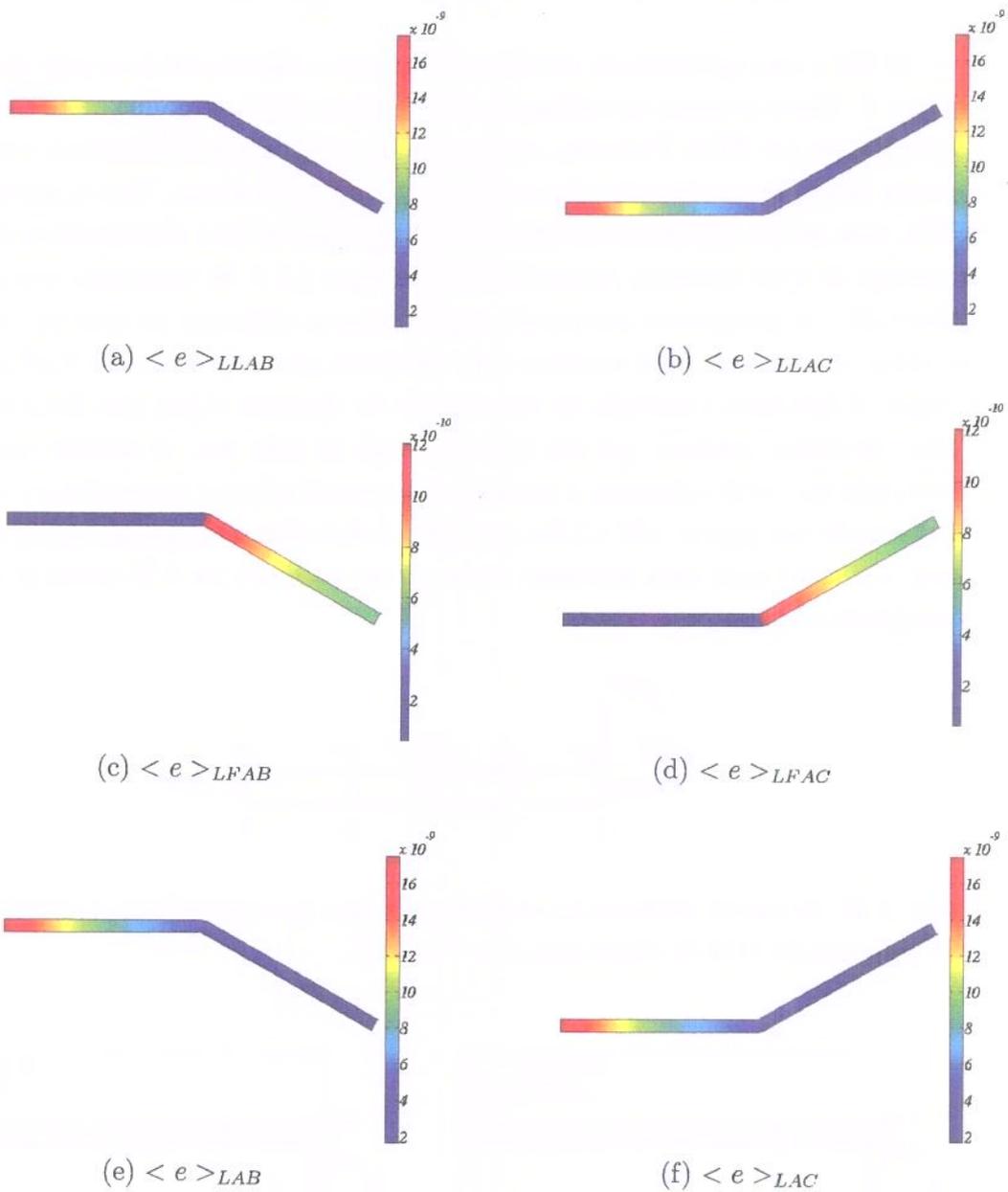


Figura 5.22: Densidades de energias médias totais e parciais no ramos AB e AC , calculadas por EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitavas com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de 30° .

5.2.3 Avaliação do processo de convergência

O EFEM é uma aproximação numérica das equações diferenciais de energia deduzidas no capítulo 2. Como qualquer aproximação, aqui também existe erro, que neste caso é devido à aproximação por FEM. Portanto, o erro pode ser minimizado reduzindo-se o tamanho do elemento na análise ou aumentando a ordem das funções de forma. Para a convergência do EFEM, uma análise qualitativa do refinamento da malha foi feita observando-se a densidade de energia de uma estrutura composta de duas vigas (A e B) acopladas, como mostra a figura 5.23. Os parâmetros estruturais são os mesmos utilizados no caso de barra e viga colineares, exceto para seção transversal da estrutura que é $A_T = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ para ambas as vigas. A estrutura é excitada na extremidade do elemento A por uma força longitudinal e outra de flexão unitárias, que são aplicadas uma de cada vez. O domínio estrutural foi discretizado de 2 a 48 elementos, e cada elemento possui três nós (quadráticos). Como pode ser observado nas figuras 5.24 e 5.25, com apenas dois elementos as densidades de energias totais calculadas para cada excitação estão dentro do limite de 5 % adotado, portanto a convergência é satisfatória.

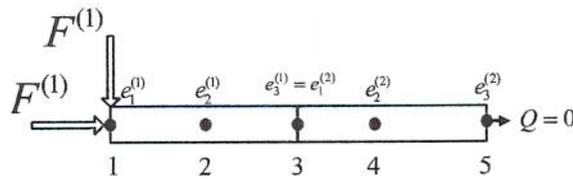


Figura 5.23: Estrutura utilizada na análise qualitativa da convergência do EFEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5 \text{ kHz}$.

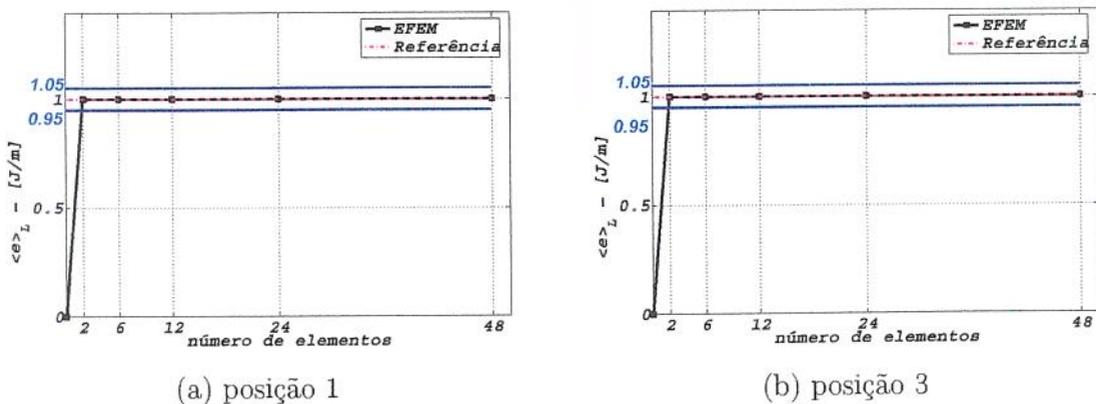


Figura 5.24: Análise de convergência do EFEM.

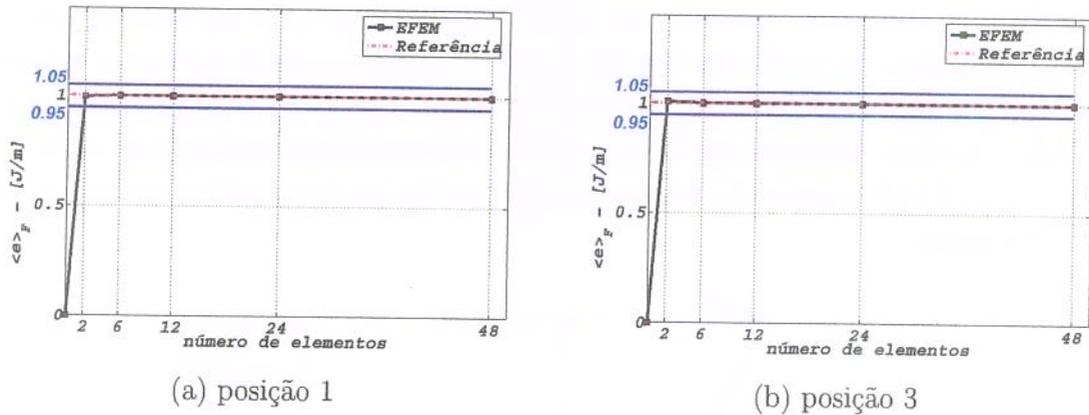


Figura 5.25: Análise de convergência do EFEM.

5.3 Exemplos simulados modelados por ESEM

Nesta seção, serão apresentados os resultados de exemplos simulados com o Método dos Elementos Espectrais de Energia (ESEM), os quais são comparados com os métodos SEM e EFEM. As densidades de energias médias totais e parciais, e os fluxos de energias médios totais e parciais são calculados por ESEM de forma similar ao SEM, ou seja, através de uma formulação matricial.

5.3.1 Exemplos de barras e vigas colineares acopladas

Os exemplos desta seção utilizam os modelos dos casos de duas barras e de duas vigas de alumínio colineares, as quais foram analisadas por EFEM, EFA e SEM. As estruturas são excitadas por uma força unitária longitudinal e outra transversal na extremidade do elemento A (barra ou viga), (figuras 5.3 e 5.5). Esta força unitária foi utilizada no cálculo dos deslocamentos por SEM e no cálculo da potência injetada (Q_{in}) aplicada na equação 3.41 do EFEM e na equação 4.16 do ESEM. As propriedades da estrutura são: $A_A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_B = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E=71 \text{ GPa}$, $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$, $\eta=0,03$ e $L_A = L_B=3,0 \text{ m}$. As análises foram feitas para banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5 \text{ kHz}$. As figuras 5.26 e 5.27 mostram a densidade de energia média total longitudinal calculada por ESEM, SEM e EFEM e o fluxo de energia médio total longitudinal calculado por ESEM e SEM. Nestas figuras pode-se observar que os resultados obtidos por EFEM e ESEM estão em conformidade com aqueles calculados por SEM. As figuras 5.28 e 5.29 mostram a densidade de energia média total transversal, calculada por ESEM, SEM e EFEM e o fluxo de energia

médio total transversal calculado por ESEM e SEM. O que pode ser observado nas figuras 5.1 e 5.2 é que, nos resultados das vigas, para frequências centrais mais altas existem mais modos por banda e o espaçamento entre eles é menor, portanto as densidades $\langle e \rangle_{FAB}$ e fluxo $\langle q \rangle_{FAB}$ calculadas por EFEM e ESEM tornam-se mais próximas no caso da banda com $f_c = 12.5$ kHz, apesar de existir uma região crítica na junta onde as curvas não têm boa concordância.

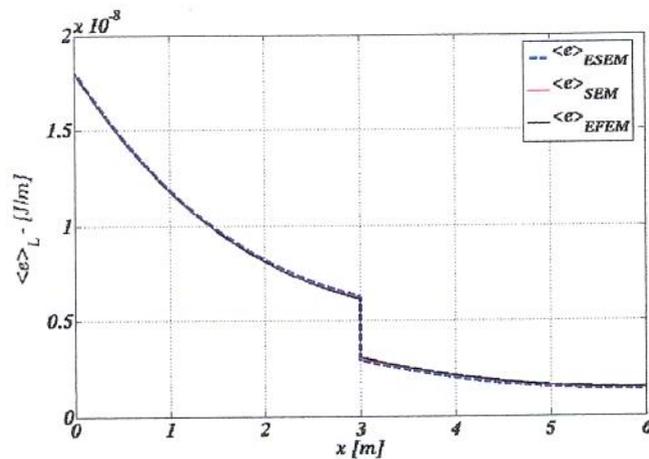


Figura 5.26: Densidade de energia total média longitudinal ao longo das barras AB , calculada por ESEM, SEM e EFEM na banda 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.

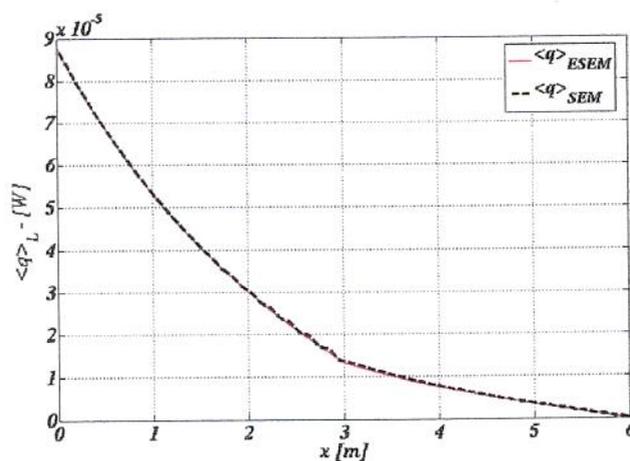


Figura 5.27: Fluxo de energia médio total longitudinal ao longo das barras AB , calculado por ESEM e SEM na banda 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.

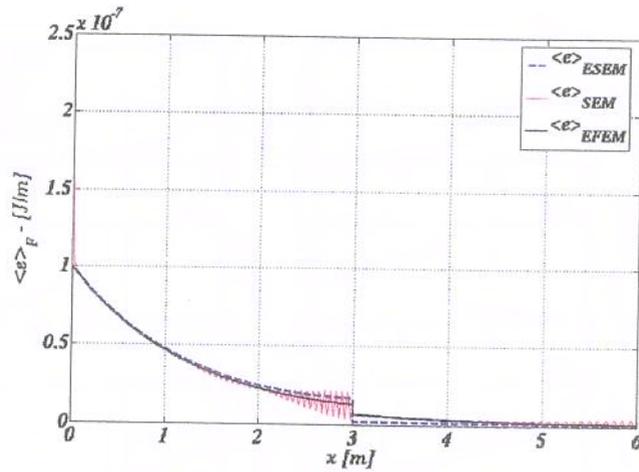


Figura 5.28: Densidade de energia total média transversal ao longo das vigas AB , calculada por ESEM, SEM e EFEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

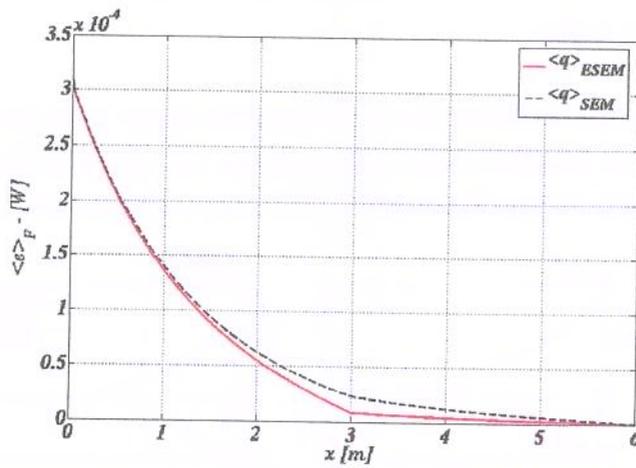


Figura 5.29: Fluxo de energia médio total transversal ao longo das vigas AB , calculado por ESEM e SEM na banda 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

5.3.2 Exemplos de vigas conectadas em ângulo arbitrário

Este exemplo utiliza o modelo do caso de duas vigas acopladas em ângulo arbitrário, figura 5.7. As análises foram feitas para o ângulo de 60° , e banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz. A figura 5.30 mostra as densidades de energias médias totais e parciais calculadas por ESEM, SEM e EFEM. Nesta figura pode-se observar que os resultados obtidos por ESEM estão em conformidade com aqueles calculados por SEM.

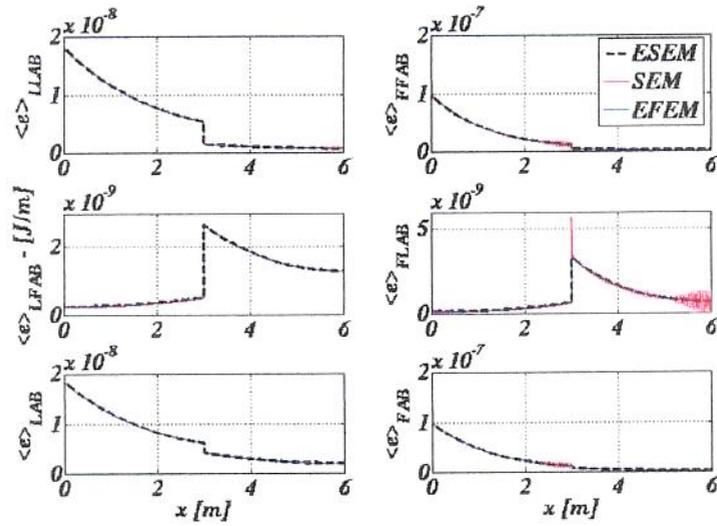


Figura 5.30: Densidades de energias médias totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculadas por EFEM, ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

A figura 5.31 mostra os fluxos de energias médios totais e parciais obtidos por ESEM e SEM. Nesta banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, o ESEM apresentou uma grande concordância com SEM, que é a referência utilizada nesta tese.

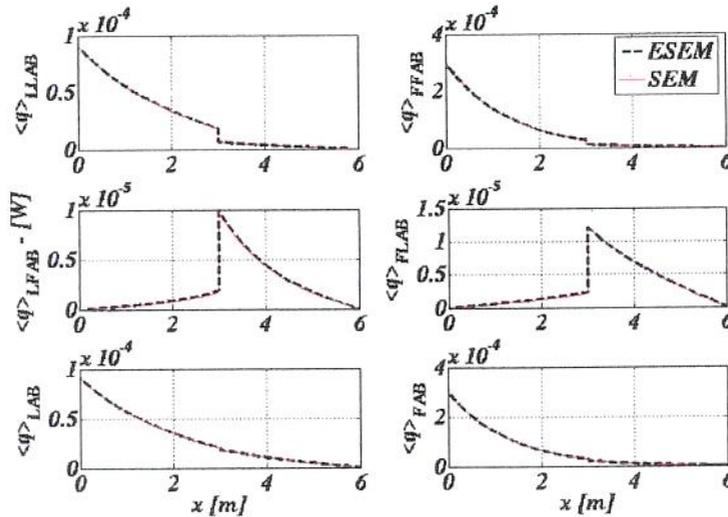


Figura 5.31: Fluxos de energias médios totais e parciais ao longo de duas vigas acopladas em um ângulo de 60° , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz.

As densidades de energias médias totais e parciais e os fluxos de energias médios totais e parciais, calculados por ESEM para a banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, são apresentados nas figuras 5.32 e 5.33 a partir de uma outra forma de visualização gráfica.

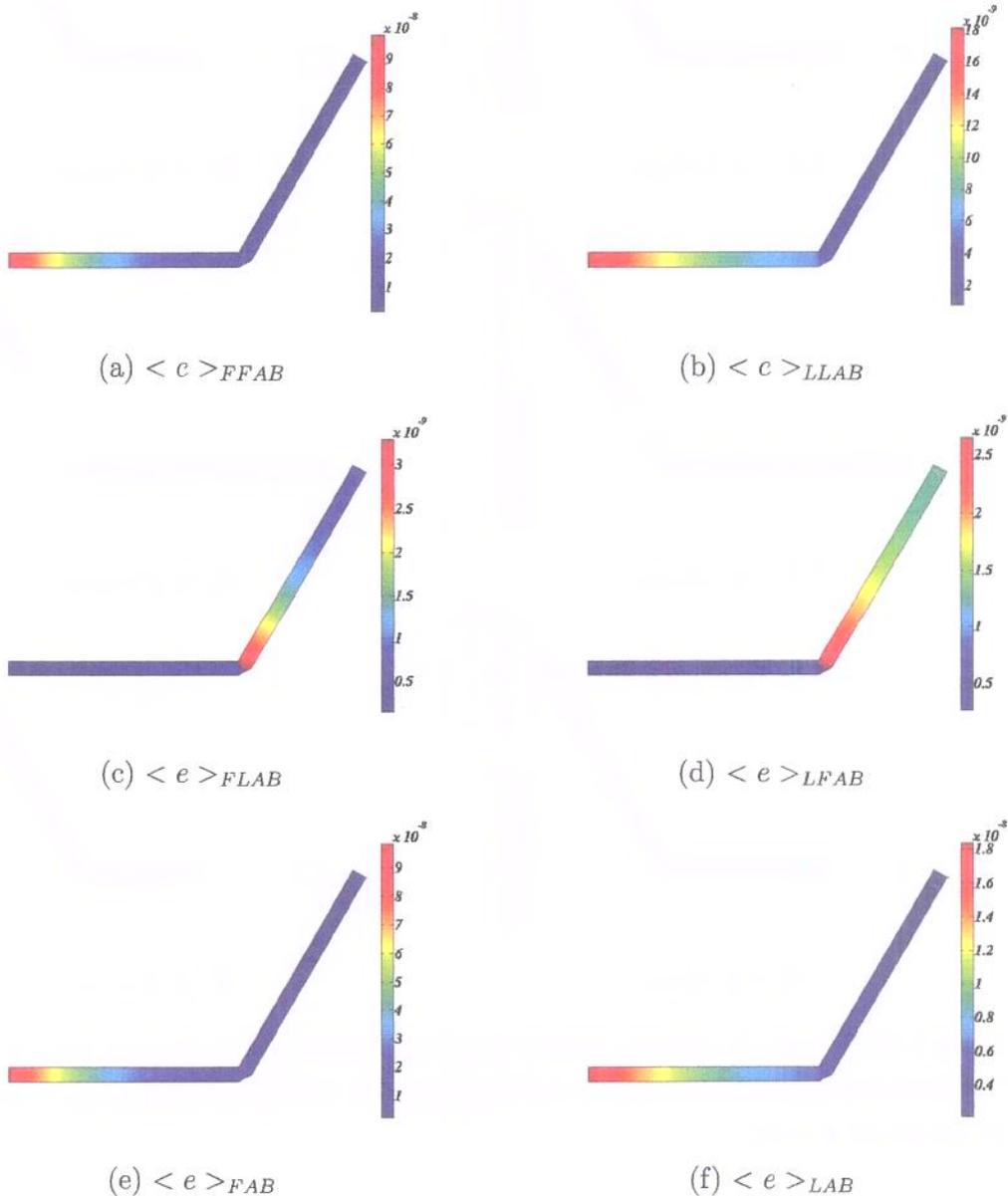


Figura 5.32: Densidades de energias médias totais e parciais, figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculadas por ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz, para um ângulo de $\phi = 60^\circ$.

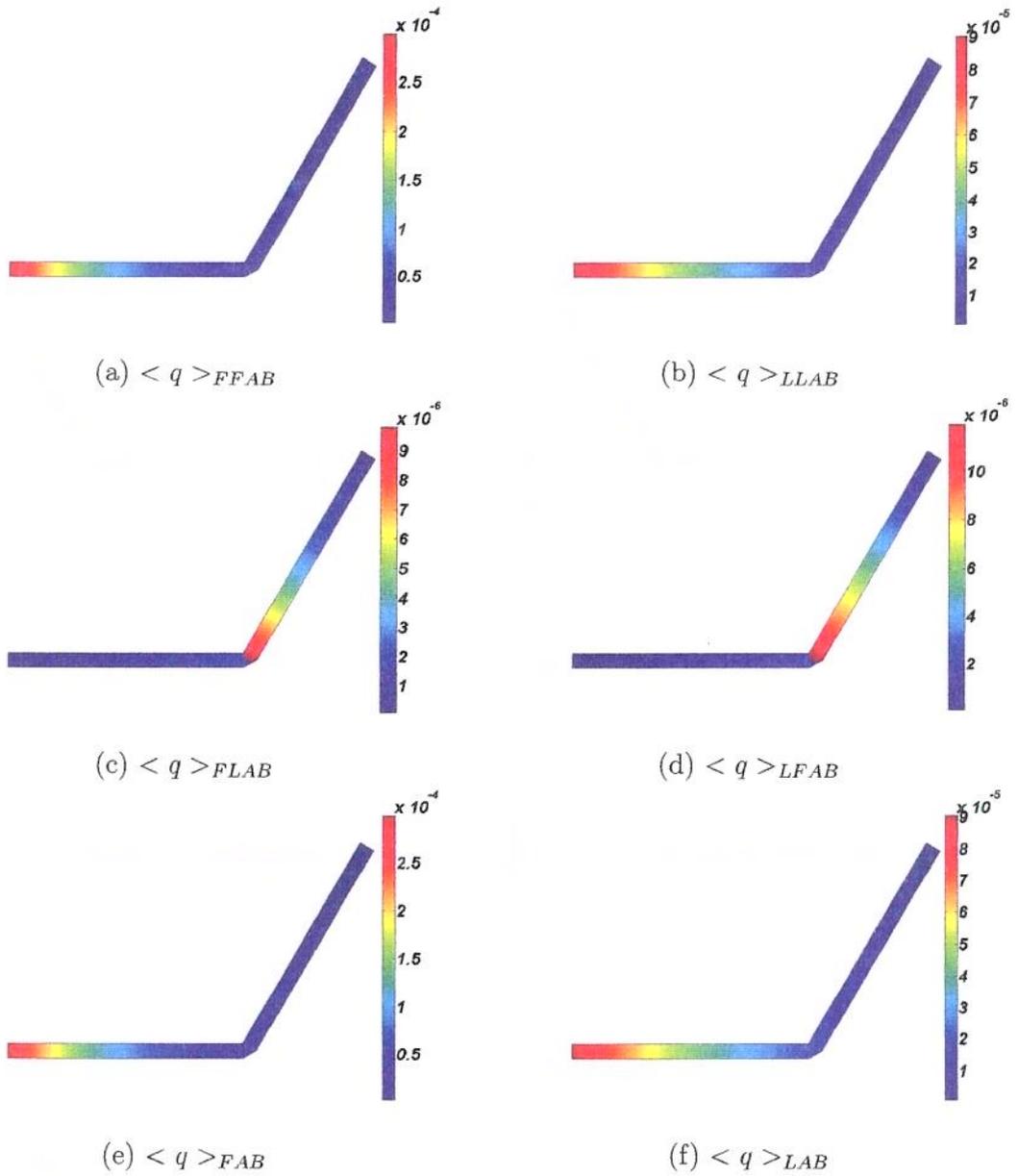


Figura 5.33: Fluxos de energias médios totais e parciais das figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f), calculados por ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c=12.5$ kHz, para um ângulo de $\phi = 60^\circ$.

5.4 Simulação de uma estrutura real modelada por EFEM, ESEM e SEM

A figura 5.34 mostra uma estrutura na forma de um "T", a qual pode ser interpretada como um caso particular daquele apresentado na seção 5.2.2, onde 3 três vigas (*A*, *B* e *C*) estão conectadas em uma única junta com ângulos de 0°, 90° e 180°, em relação a um eixo horizontal.

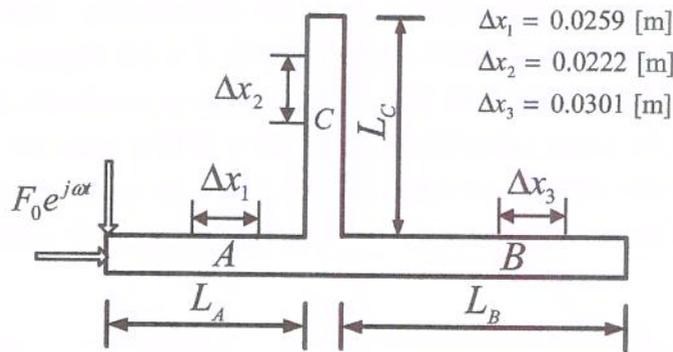


Figura 5.34: Viga *T* sub-dividida nas vigas *A*, *B* e *C*, excitada por uma força harmônica longitudinal e outra transversal.

A estrutura real, aqui denominada por viga *T*, fez parte de um "round-robin" entre várias universidades ao redor do mundo com a finalidade de ser usada em medições relacionadas a pesquisas na área de propagação de energia em estruturas, (Szwerc e Hambric, 1996). A viga *T* é feita de Lexan (poli-carbonato), e as suas propriedades são: $L_A = 0.7779$ m, $L_B = 1.0827$ m, $L_C = 0.9303$ m $\rho = 1280$ kg/m³, $\nu = 0.25$, $I = 1.4334E-7$ m⁴, $A_T = 1.7118 \times 10^{-3}$ m², $\eta = 0.01$ e $E = 2.62$ GPa. As forças de excitação (longitudinal e transversal) aplicadas no modelo são unitárias. As análises foram feitas para a banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz, e para a banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ e 12.5 kHz. Os resultados das densidades e fluxos de energias calculados por EFEM e ESEM são comparados com os de SEM, os quais podem ser observados nas figuras 5.35 a 5.46.

Para a banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ Hz, observam-se desvios bastante significativos em alguns dos gráficos de densidades (figuras 5.35 e 5.36) e fluxos (figuras 5.37 e 5.38) de energias médios parciais. Contudo, deve-se observar que estas parcelas com grandes desvios (por exemplo, $\langle e \rangle_{LFAB}$ na figura 5.35) apresentam, em geral, valores de energia ou fluxo uma ordem de grandeza abaixo daquela que deverá se somar a ela (\langle

$e >_{LLAB}$) para a obtenção do valor total ($\langle e \rangle_{LAB}$). Entretanto, neste caso, ainda existe uma diferença significativa entre os valores da outra parcela ($\langle e \rangle_{LLAB}$) de energia ou fluxo, de modo que tanto as densidades de energias médias totais quanto os fluxos de energias médios totais em ambos os ramos da viga T (AB e AC) calculados por EFEM e ESEM apresentam alguns desvios quando comparados com os resultados de SEM. Considerando que estas diferenças mostram-se mais acentuadas nas parcelas de energia ou fluxo associadas às ondas longitudinais e considerando-se que em vigas o número de modos longitudinais em bandas de frequências mais baixas é bem inferior aos transversais, é possível supor que neste caso que as diferenças ocorrem devido ao número de modos ser inferior ao número mínimo necessário nesta banda. Esta hipótese pode ser parcialmente confirmada pelos resultados obtidos para bandas de frequências mais altas com $f_c = 6.3$ (figuras 5.39, 5.40, 5.41 e 5.42) e $f_c = 12.5$ Hz (figuras 5.43, 5.44, 5.45 e 5.46), onde os resultados das densidades e fluxos de energias médios totais calculados por EFEM e ESEM estão de acordo com as obtidas por SEM, e somente algumas parcelas diferem. Contudo, como comentado anteriormente, a contribuição destas parcelas torna-se desprezível na obtenção do resultado total.

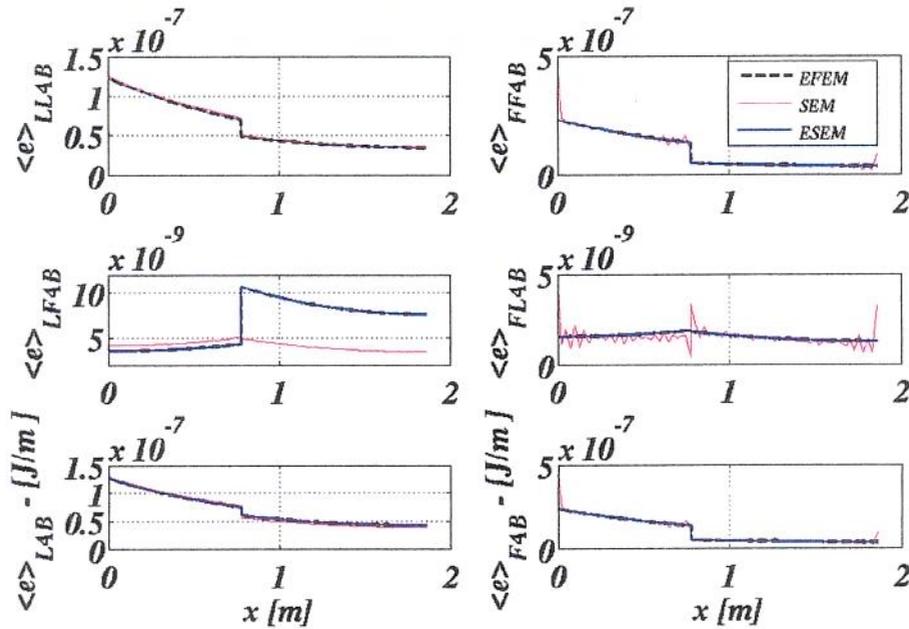


Figura 5.35: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.

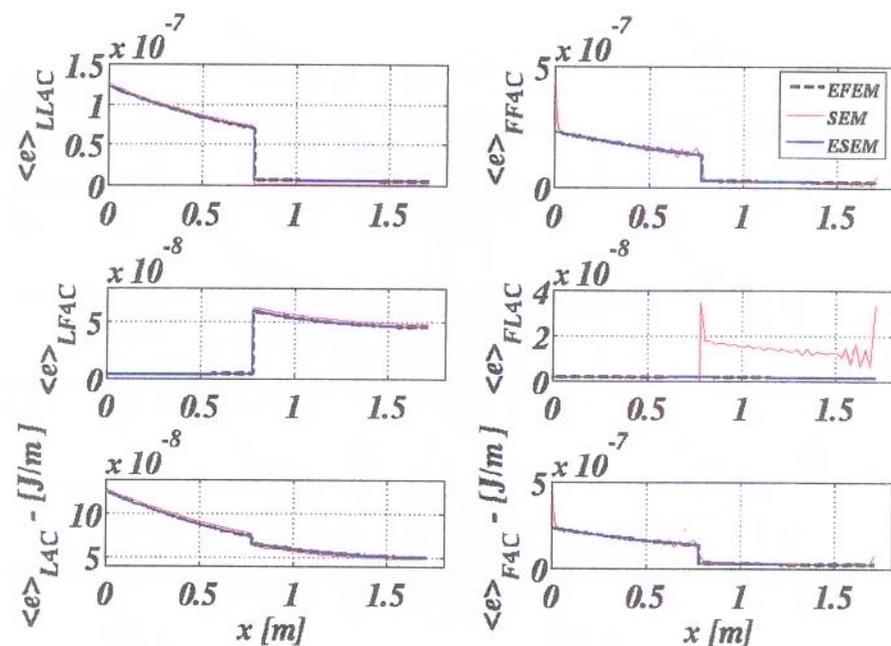


Figura 5.36: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.

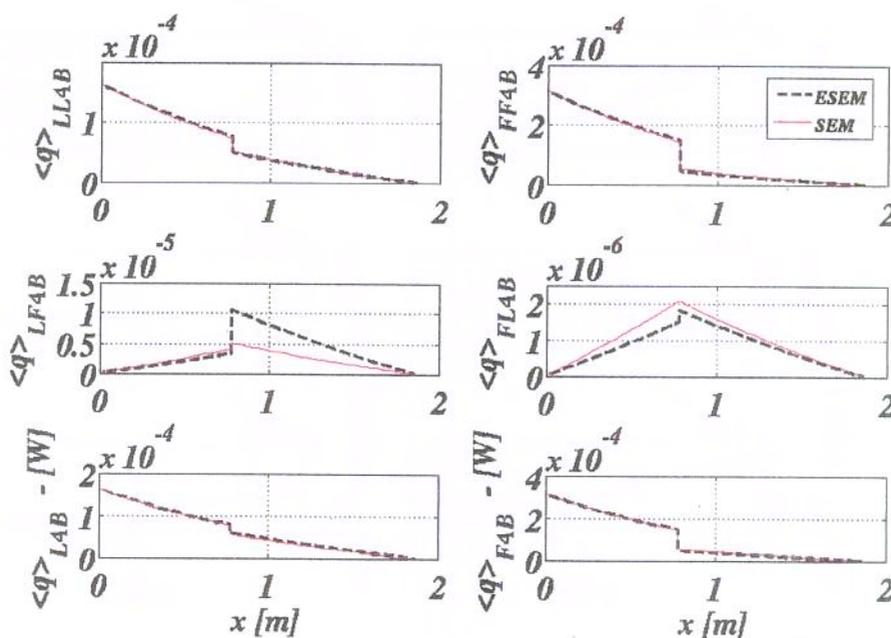


Figura 5.37: Fluxos de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.

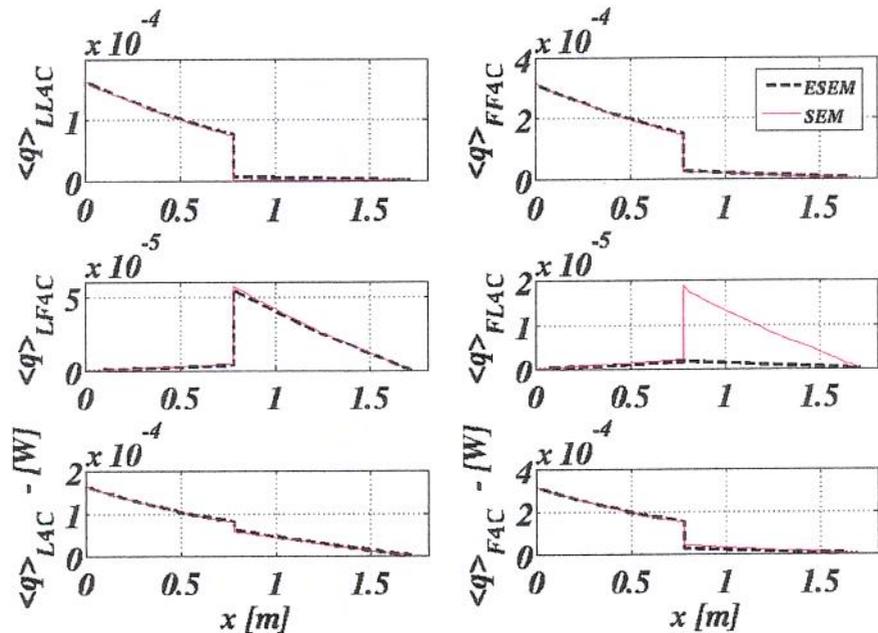


Figura 5.38: Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AC da viga T, calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 4.0$ kHz.

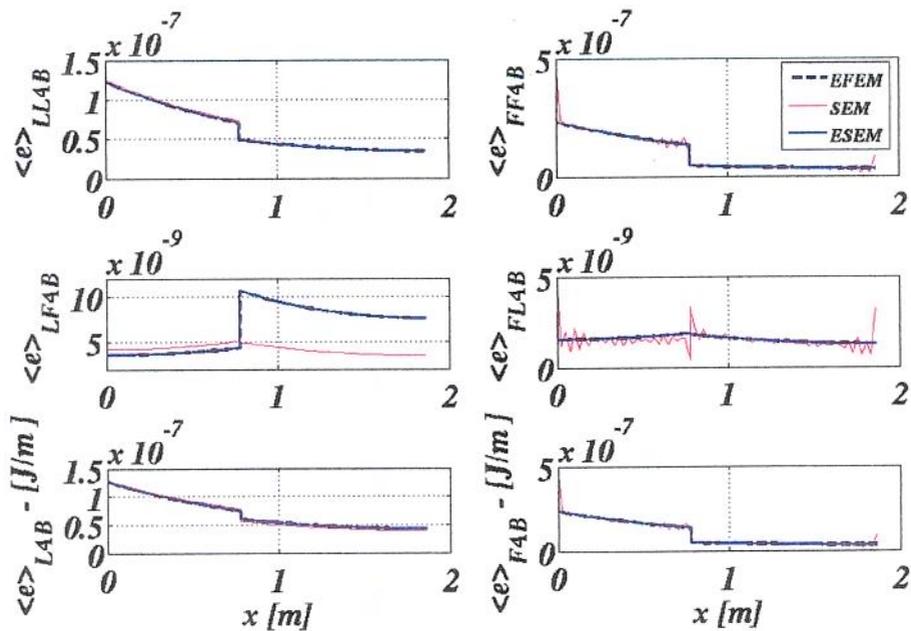


Figura 5.39: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T, calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

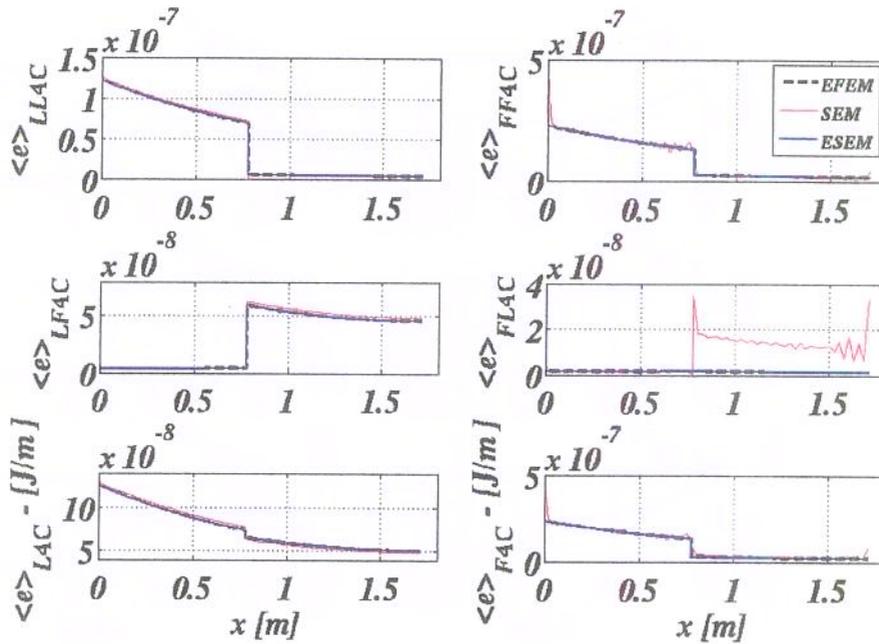


Figura 5.40: Densidades de energias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

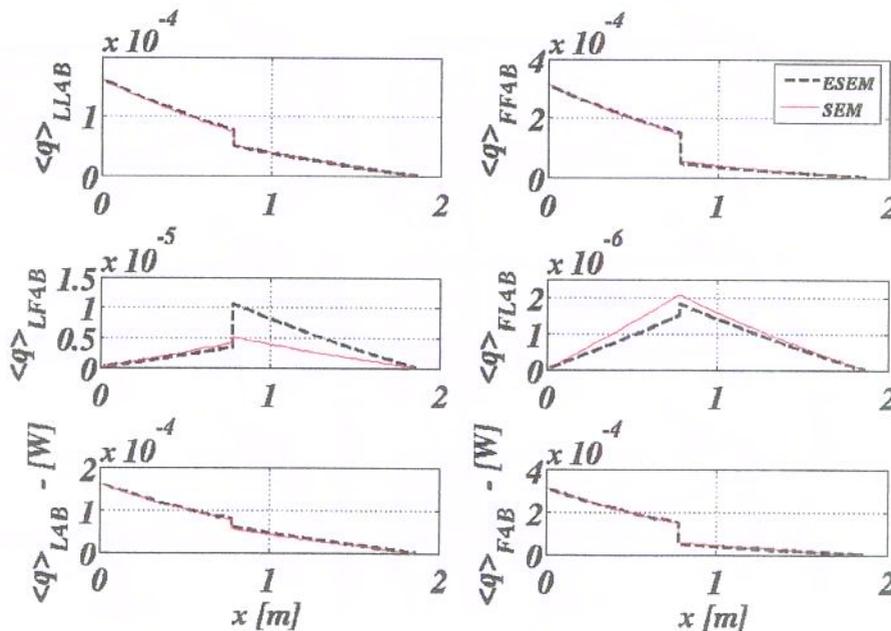


Figura 5.41: Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

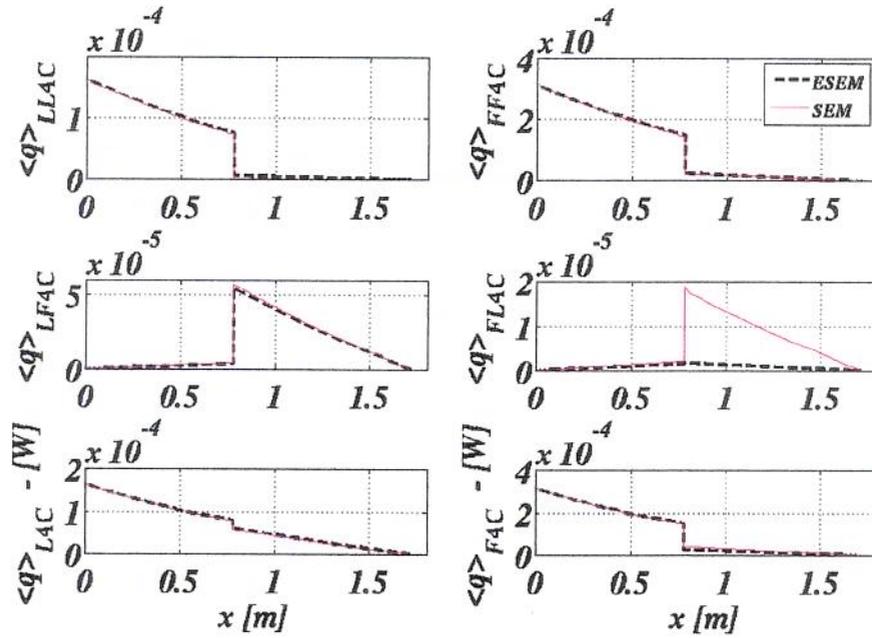


Figura 5.42: Fluxos de energias médios totais e parciais no ramo AC da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

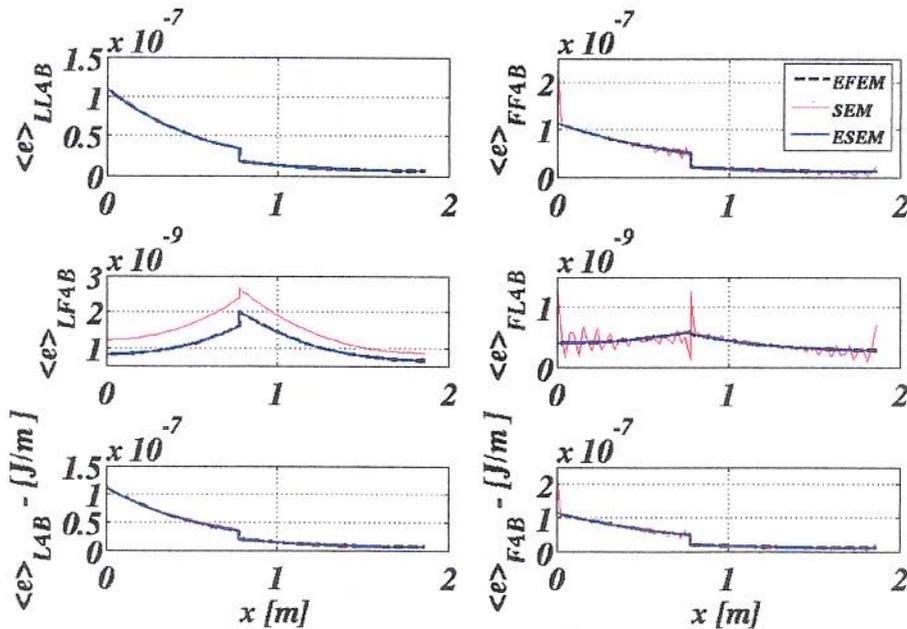


Figura 5.43: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.

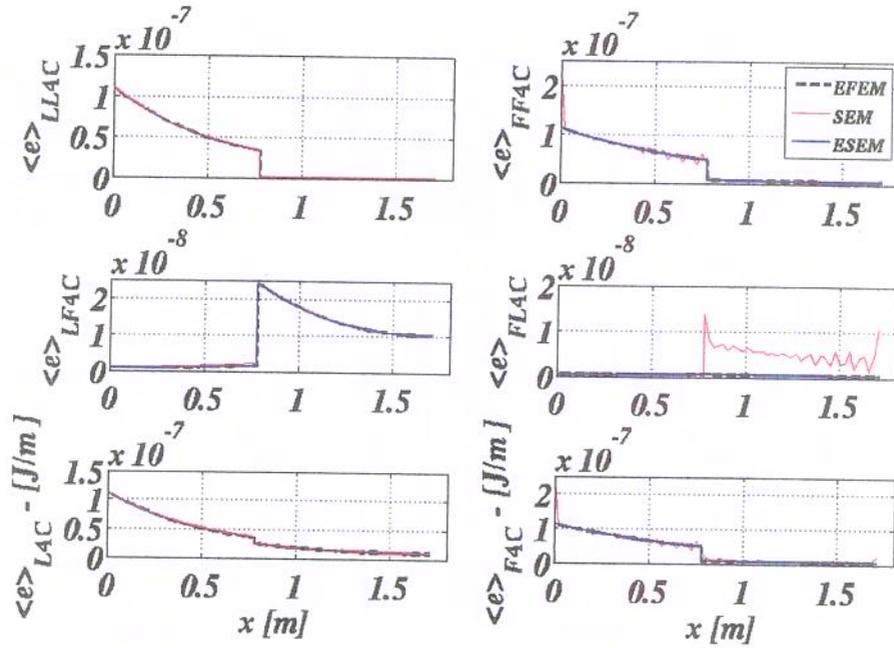


Figura 5.44: Densidades de energias médias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculadas por EFEM, SEM e ESEM na banda de frequências de 1/12 oitava com $f_c = 12.5$ kHz.

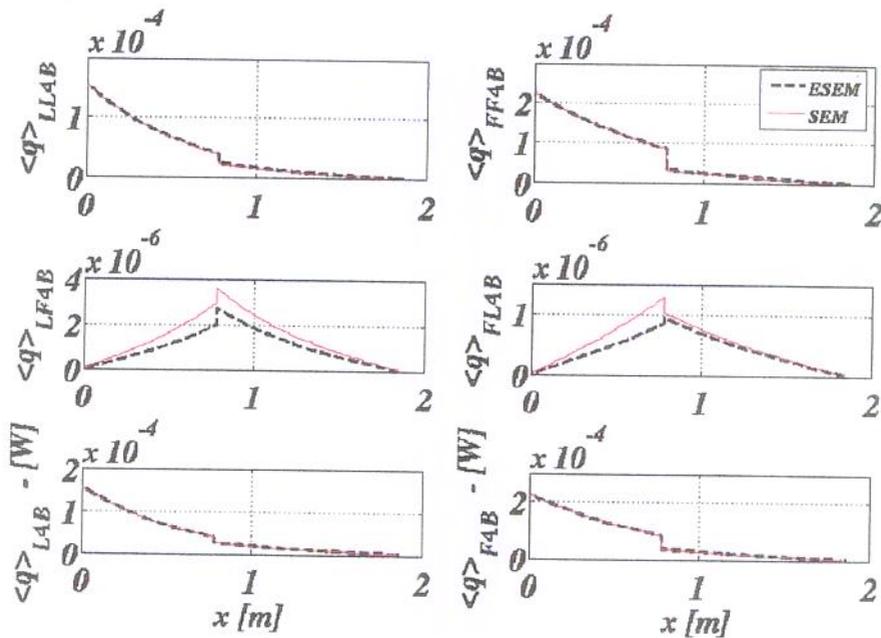


Figura 5.45: Fluxos de energias médias totais e parciais no ramo AB da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 com $f_c = 12.5$ kHz.

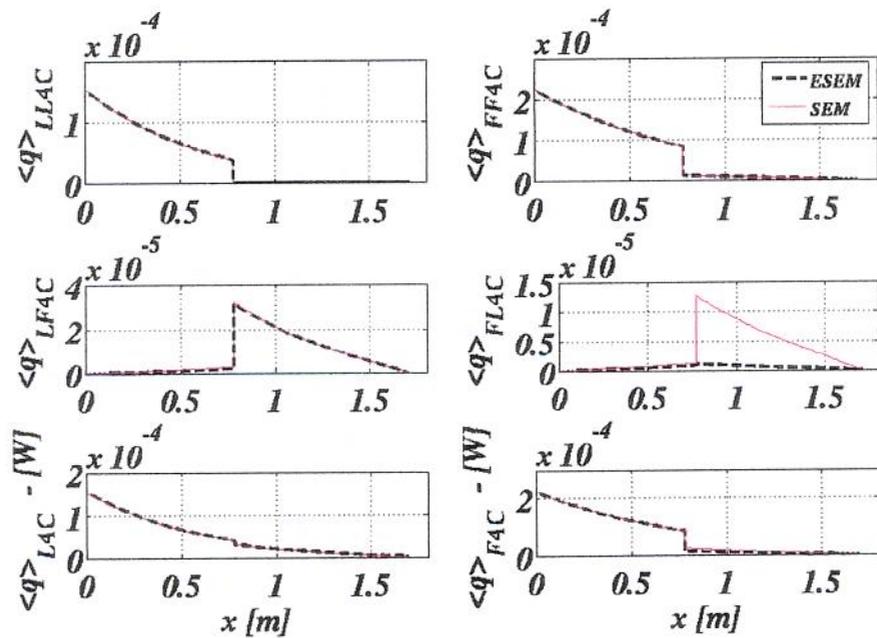


Figura 5.46: Fluxos de energias totais e parciais no ramo AC da viga T , calculados por ESEM e SEM na banda de frequências de 1/12 de oitava com $f_c = 12.5$ kHz.

Capítulo 6

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados de dois experimentos envolvendo uma estrutura composta de duas barras colineares e outra estrutura na forma de um "T" (Viga-T). O primeiro experimento foi realizado por Nunes (2005), que cedeu os dados experimentais para a utilização nesta tese. Com estes dados foi possível determinar a densidade de energia longitudinal experimental, a qual foi comparada com os resultados simulados por EFEM e SEM. Os resultados obtidos do segundo experimento foram utilizados no cálculo dos fluxos e densidades de energias médias totais e parciais através de interpolações feitas por SEM (vide apêndice B.1). Em seguida, os fluxos e as densidades de energias experimentais são comparados aos resultados simulados obtidos por EFEM e ESEM. As respostas vibracionais (FRFs) medidas na viga também foram utilizadas em um estudo preliminar que tinha como objetivo estimar os fatores de perda por acoplamento (CLFs) e os fatores de amortecimento interno da viga T. Estes fatores são determinados pelo Método da Potência Injetada ("Power Injection Method - PIM"), que representa a forma inversa da Análise Estatística de Energia (SEA). Em seguida, os CLFs e os fatores de amortecimento interno obtidos pelo PIM são comparados às expressões analíticas apresentadas por Cremer e Heckl (1988). Uma revisão dos dois métodos encontra-se no apêndice C.

6.2 Resultados experimentais de duas barras colineares acopladas

A figura 6.1 mostra o esquema de uma estrutura composta de duas barras cilíndricas colineares de diâmetros diferentes. As barras estão conectadas entre si através de um ajuste prensado e apresentam as seguintes propriedades: $A_A = 1.7349 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $A_B = 1.8627 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E=2.71 \text{ GPa}$, $\rho=1140 \text{ kg/m}^3$, $\eta=0.03$ e $L_A=0.20 \text{ m}$ $L_B=2.46 \text{ m}$. O material das barras é *Nylon* e a estrutura foi excitada por uma força harmônica longitudinal localizada na extremidade da barra *A* através de um excitador eletrodinâmico, como mostra a figura 6.2. O sinal de excitação é um ("chirp") senoidal na banda de frequências de 0 – 16 kHz, com discretização em frequência de 0.25 Hz. As funções de resposta em frequência (FRFs) de aceleração foram medidas em quatro pontos, um em cada extremidade da estrutura e outros dois na junta. A partir das duas FRFs medidas na junta é feita uma média a fim de cancelar os efeitos da sensibilidade lateral dos acelerômetros e evitar as componentes das acelerações transversais.

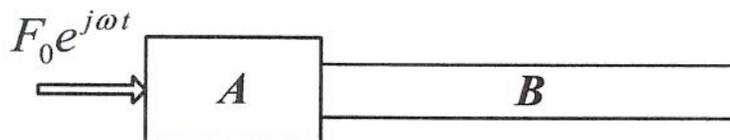


Figura 6.1: Uma estrutura composta de duas barras acopladas excitadas por uma força harmônica.

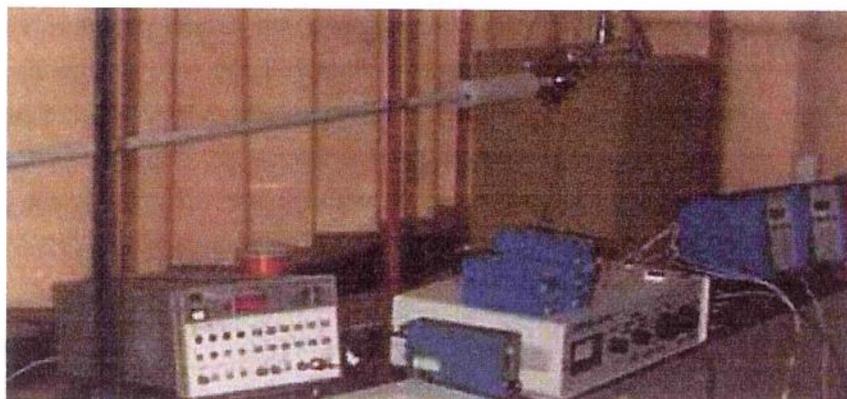


Figura 6.2: A montagem experimental consiste de duas barras colineares de seções distintas acopladas.

O fator de sobreposição modal, MOF , e o número de modos na banda de interesse, $N(f)$, são utilizados aqui também para analisar a validade do EFEM. Assim, $N(f)$ e MOF foram calculados para a estrutura da figura 6.1, e podem ser vistos nas figuras 6.3 e 6.4, respectivamente. Na figura 6.3 observa-se que o valor mínimo de $N(f)$ (3 modos), é atingido para a barra A em aproximadamente 40 kHz e para a barra B em aproximadamente 2 kHz. Na figura 6.4, o valor mínimo (0.5) do MOF , é atingido para a barra A em aproximadamente 60 kHz, e para a barra B em aproximadamente 5 kHz.

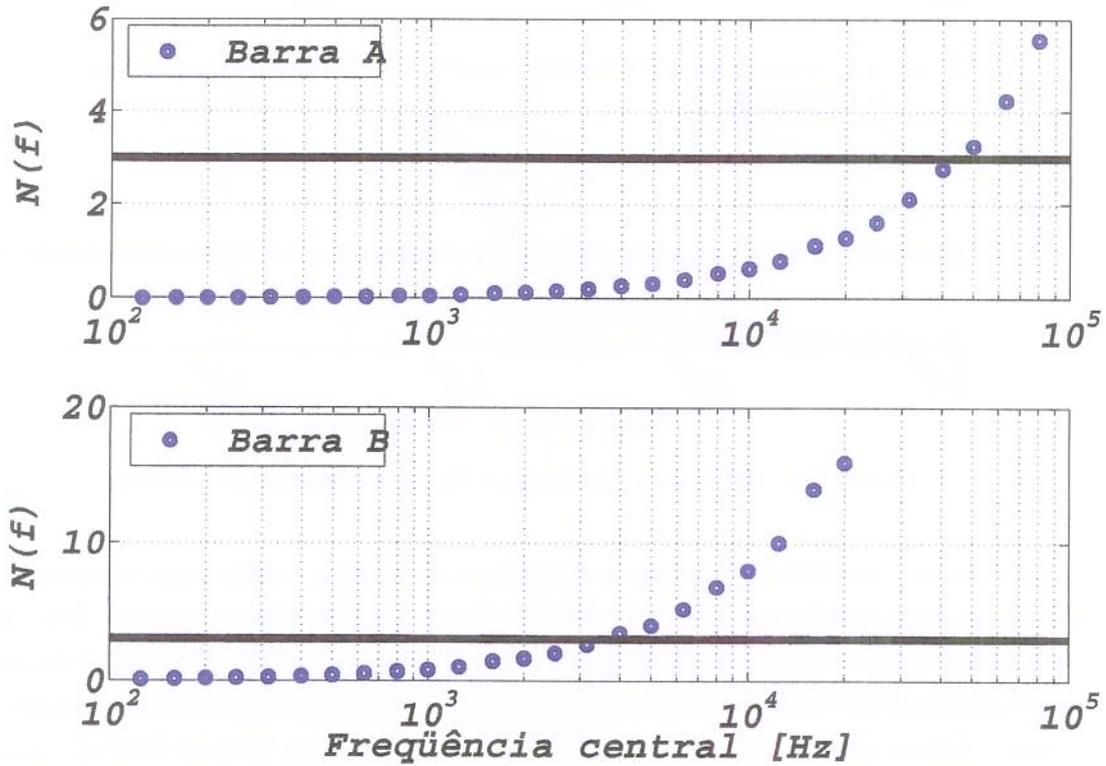


Figura 6.3: $N(f)$ para barras (A e B) em bandas de 1/3 oitavas.

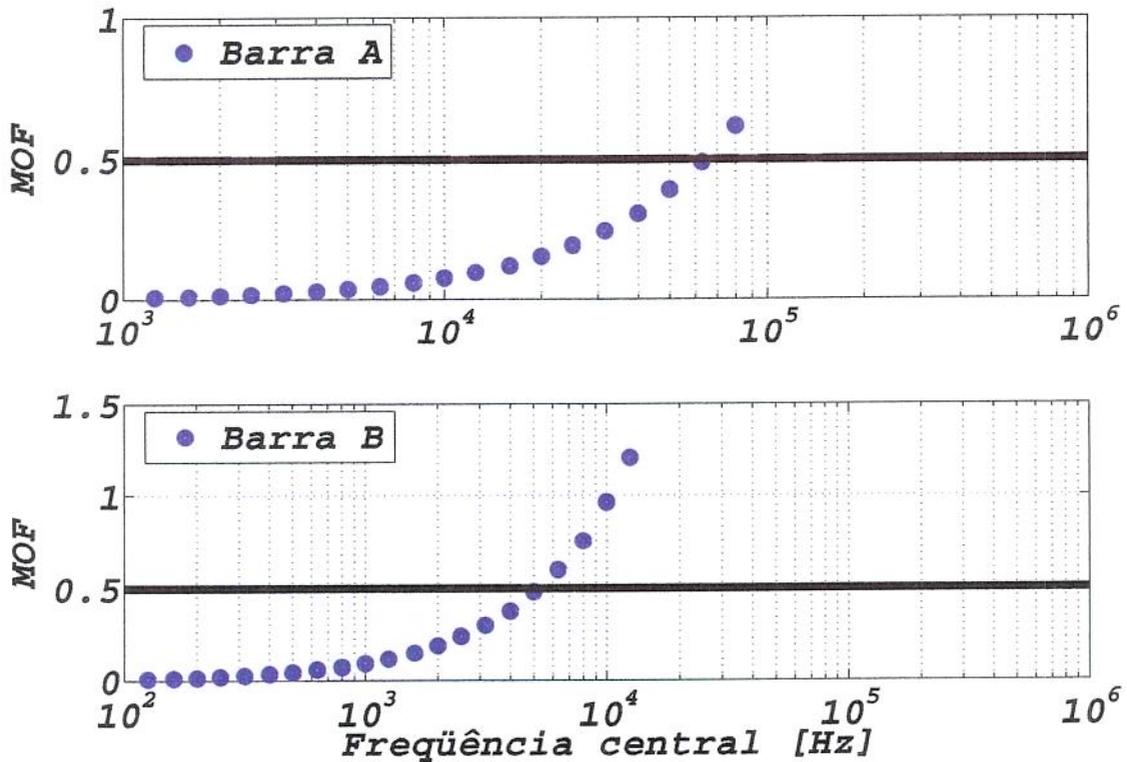


Figura 6.4: *MOF* para barras (A e B) em bandas de 1/3 oitavas.

A primeira tentativa de estimar a densidade de energia longitudinal experimental foi através de interpolações por SEM, da mesma forma apresentada no apêndice B.1. A diferença agora é que os dados utilizados nas interpolações por SEM são as funções de resposta em frequência (FRFs) de aceleração, as quais foram medidas ao longo do comprimento da estrutura. Antes de estimar as energias por SEM, integrou-se duas vezes as FRFs de aceleração para se obter as FRFs de deslocamentos que foram utilizadas nas interpolações. Os resultados obtidos após as interpolações por SEM apresentaram grandes divergências em relação aos dados simulados. Acredita-se que estas divergências surgem devido ao número de pontos medidos ao longo da estrutura ser muito baixo (4 pontos ao longo do comprimento total), e portanto não serão apresentados aqui. Para superar esse problema adotou-se outra metodologia, que consiste em assumir duas hipóteses: a primeira é de massa concentrada, e a segunda considera que a energia total pode ser aproximada como sendo duas vezes a energia cinética, ambas são aplicáveis em altas frequências. A partir dessas hipóteses e integrando-se uma vez as FRFs de aceleração, obtém-se as FRFs de velocidades que são utilizadas no cálculo da densidade de energia média longitudinal ($\langle e \rangle_{LAB}$) em cada ponto medido e, portanto, denominadas de densidade de energia média longitudinal experimental (EX). A densidade

de energia média longitudinal simulada por EFEM foi obtida utilizando a potência injetada experimental calculada a partir da FRF de velocidade no ponto de excitação, e a densidade de energia média longitudinal simulada por SEM foi determinada a partir de uma força de excitação longitudinal unitária. Uma banda de frequências de 1/3 de oitava com frequência central de $f_c=6.3$ kHz foi utilizada na determinação da densidade de energia média longitudinal por EFEM, EX e SEM. A figura 6.5 mostra uma comparação entre a densidade de energia média longitudinal por EFEM, EX e SEM. Os pontos relacionados com a barra mais longa, (*B*), mostram razoável aproximação entre os resultados experimentais e simulados, enquanto que os pontos da barra curta, (*A*), apresentam grandes diferenças na amplitude. Estas diferenças na barra *A* podem ser atribuídas ao baixo número de modos ($N(f)$) e também a um baixo fator de sobreposição modal (MOF) na banda de frequências analisada ($f_c=6.3$ kHz), enquanto acontece o oposto com a barra *B* (vide figuras 6.3 e 6.4).

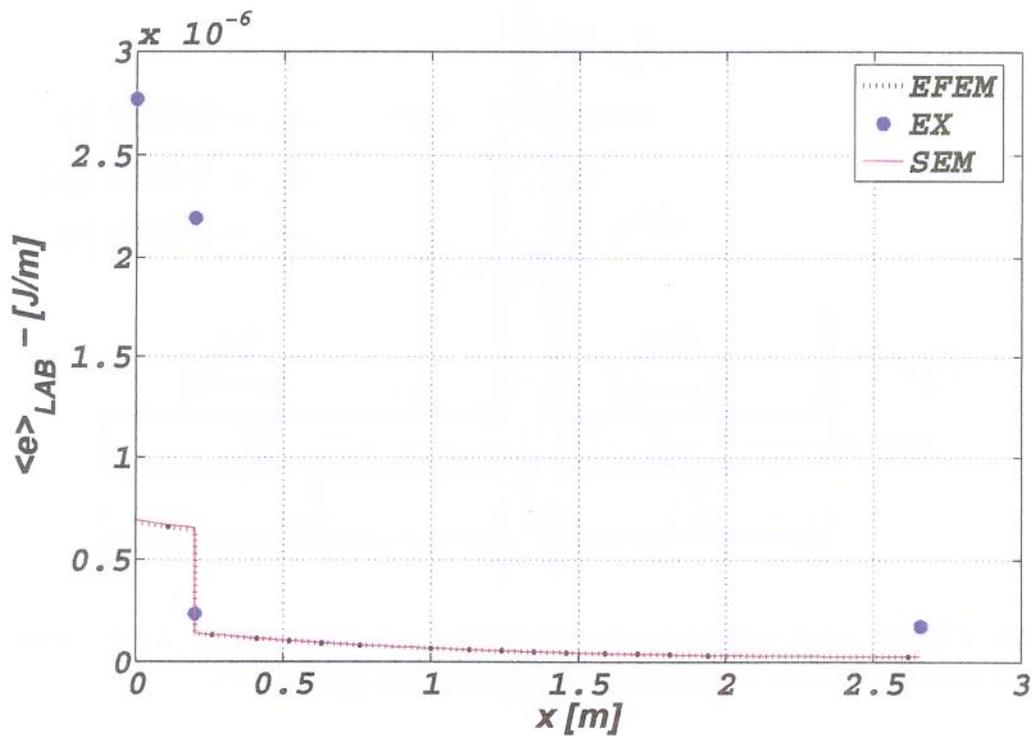


Figura 6.5: Densidade de energia média longitudinal para barras colineares acopladas.

6.3 Resultados experimentais da Viga T

6.3.1 Montagem experimental da viga T

A estrutura utilizada neste experimento tem a forma de "T", e será denominada aqui por viga T , (figura 6.6). A viga T foi concebida a partir da usinagem de uma placa de Lexan (policarboneto), resultando-se em uma estrutura contínua. Esta estrutura fez parte de um "round-robin" entre várias universidades ao redor do mundo com a finalidade de ser utilizada em medições relacionadas a pesquisas na área de propagação de energia em estruturas (Szwerc e Hambric, 1996).

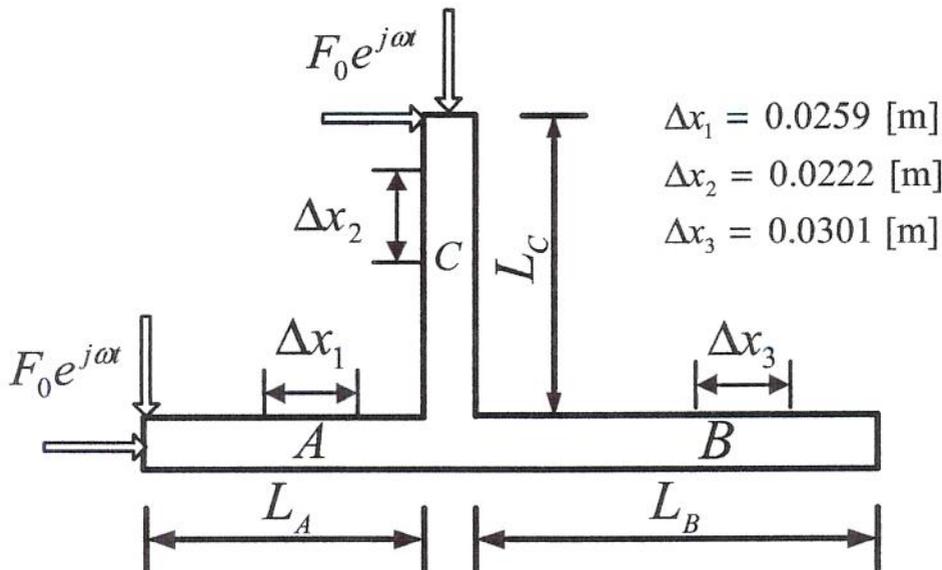


Figura 6.6: Três vigas conectadas por uma junta com ângulos de 0° , 0° e 90° , e excitadas por duas forças harmônicas longitudinais e transversais no ramo A e C.

Neste experimento mediram-se as respostas vibracionais longitudinais e transversais (FRFs) de aceleração ao longo do comprimento da viga T . Estas foram utilizadas primeiramente em um estudo preliminar deste trabalho que teve como objetivo estimar os coeficientes de perda por acoplamento de SEA através do Método da Potência Injetada (PIM), cujos resultados serão apresentados no final deste capítulo. Posteriormente, estes mesmos dados foram usados para a determinação da potência injetada experimental e na interpolação do SEM com dados experimentais (vide apêndice B.1) para obtenção dos fluxos e densidades de energias

médias totais e parciais experimentais. Em seguida, os resultados dos fluxos e das densidades de energias experimentais (Exp) foram comparados aos resultados simulados por EFEM e ESEM.

O procedimento experimental realizado para viga T é constituído das seguintes etapas: primeiramente a estrutura foi suspensa por fios de *Nylon* em três pontos, com o objetivo de simular as condições de contorno livre-livre, como pode ser observado na montagem experimental da figura 6.7.

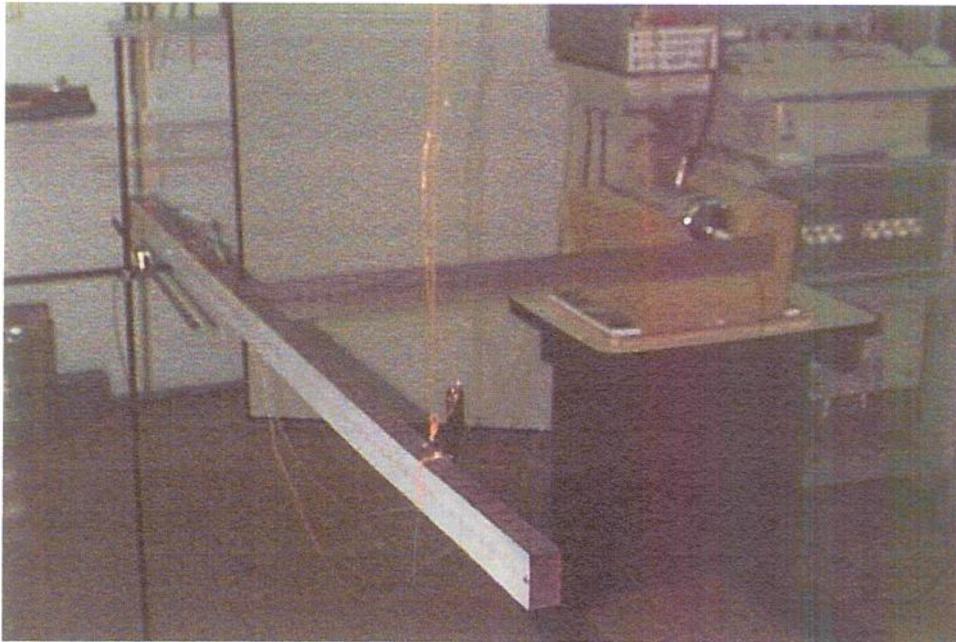


Figura 6.7: Montagem experimental.

Em seguida, foram aplicadas excitações harmônicas, uma de cada vez, nas direções transversais e longitudinais dos ramos A e C da viga T . O sinal utilizado nas excitações foi um ("chirp") sinal senoidal na faixa de frequência de 0-8 kHz. Uma outra etapa foi a medição das FRFs das componentes de aceleração longitudinais e transversais. As FRFs das componentes de aceleração longitudinais foram medidas em ambos os lados da estrutura (figura 6.8) e feita uma média destes valores. Este procedimento foi adotado a fim de minimizar o efeito da sensibilidade lateral dos acelerômetros e evitar a influência das componentes transversais na obtenção das componentes longitudinais. Finalmente, as componentes transversais foram obtidas diretamente com uma medida das FRFs de um acelerômetro nas posições transversais medidas ao longo da estrutura, como mostrado, também na figura 6.8.

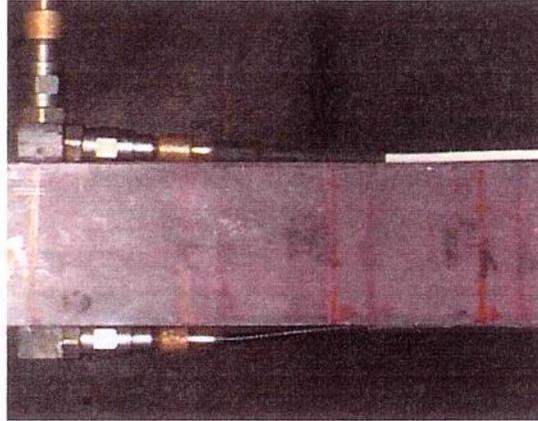


Figura 6.8: Posição dos acelerômetros.

A distância entre cada ponto de medida e as posições de excitações podem ser vistas na figura 6.6. As propriedades da viga T são: $L_A = 0.7779$ m, $L_B = 1.0827$ m, $L_C = 0.9303$ m, $\rho = 1280$ kg/m³, $\nu = 0.25$, $I = 1.4334E-7$ m⁴, $A_T = 1.7118 \times 10^{-3}$ m², $\eta = 0.01$ e $E = 2.62$ GPa. Os equipamentos utilizados no experimento estão descritos na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Equipamentos.

Equipamentos	Modelo	Sensibilidade	Faixa de frequência
Excitador eletrodinâmico	PR 9270/01	-----	5-15 kHz
Amplificador	Pa 100	-----	-----
Gerador de funções	HP 3314A	-----	-----
Sistema de aquisição	HP 75000	-----	-----
Condicionador de sinais	PCB 482AC5	-----	-----
Transdutor de força	PCB 208A02	82,55400 N/V	*
Acelerômetro	PCB 353B68	98.5930 m/s ² /v	1-10 kHz
Acelerômetro	PCB 353B68	101.6580 m/s ² /v	1-10 kHz
Acelerômetro	PCB 353B68	100.2043 m/s ² /v	1-10 kHz

* Observação: frequência natural de 50 kHz.

6.4 Comparação entre os resultados experimentais e simulados por EFEM e ESEM

Nesta seção, as densidades e fluxos de energias médias totais e parciais experimentais são comparadas com as simuladas por EFEM e ESEM e os resultados discutidos. As figuras 6.9 e 6.10 mostram os resultados das densidades de energia média total e parcial experimental e simuladas por EFEM e ESEM para uma banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz. As figuras 6.11 e 6.12 mostram os fluxos de energia média total e parcial experimental e simulados por EFEM e ESEM para uma banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz.

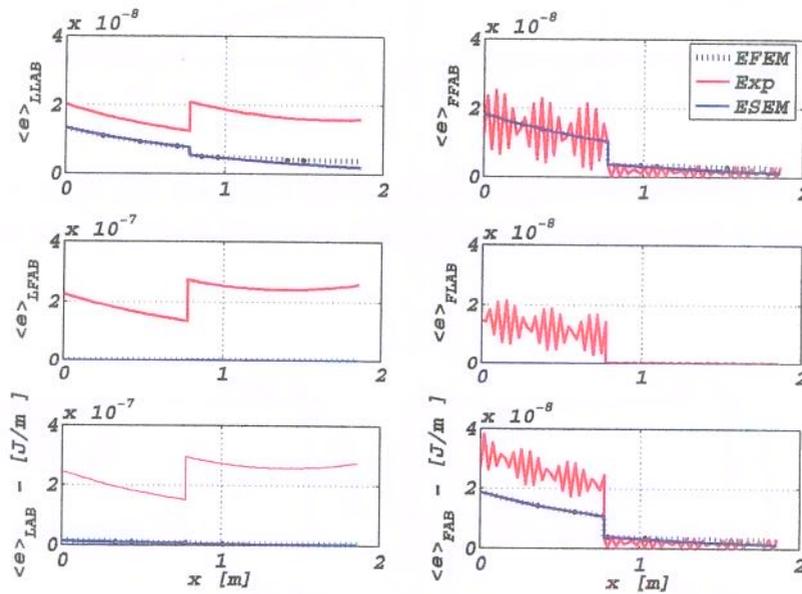


Figura 6.9: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas *A* e *B*, calculadas por EFEM, dados Experimentais (Exp) e ESEM na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

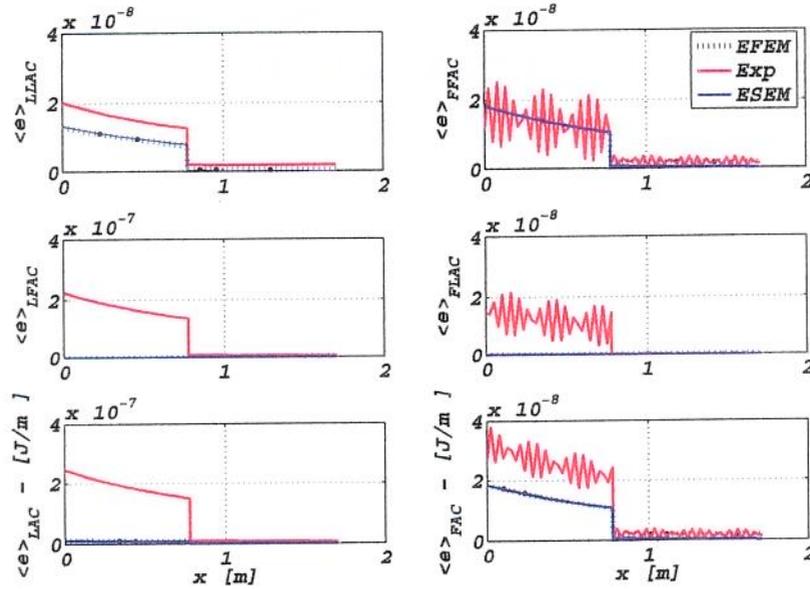


Figura 6.10: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas *A* e *C*, calculadas por EFEM, dados Experimentais (Exp) e ESEM na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

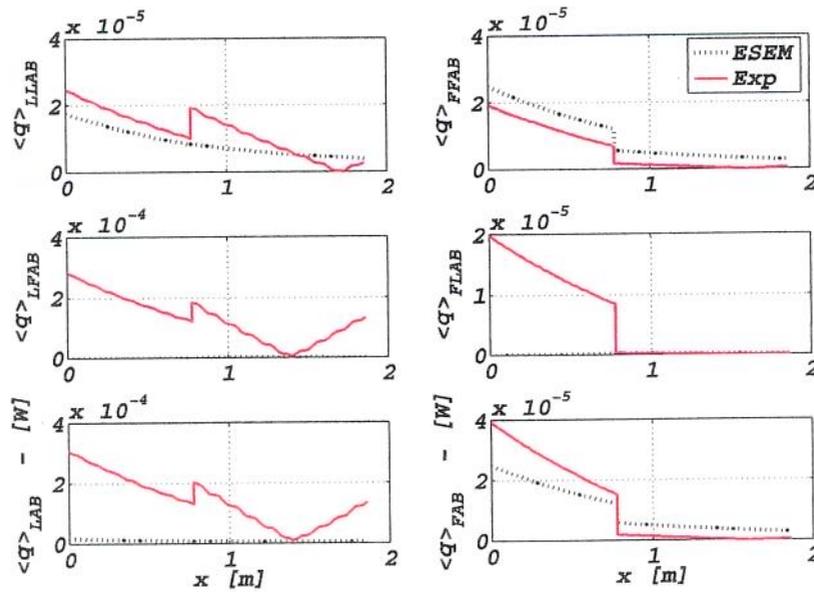


Figura 6.11: Fluxos de energias médias totais e parciais nas vigas *A* e *B*, calculados por ESEM e dados Experimentais (Exp) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

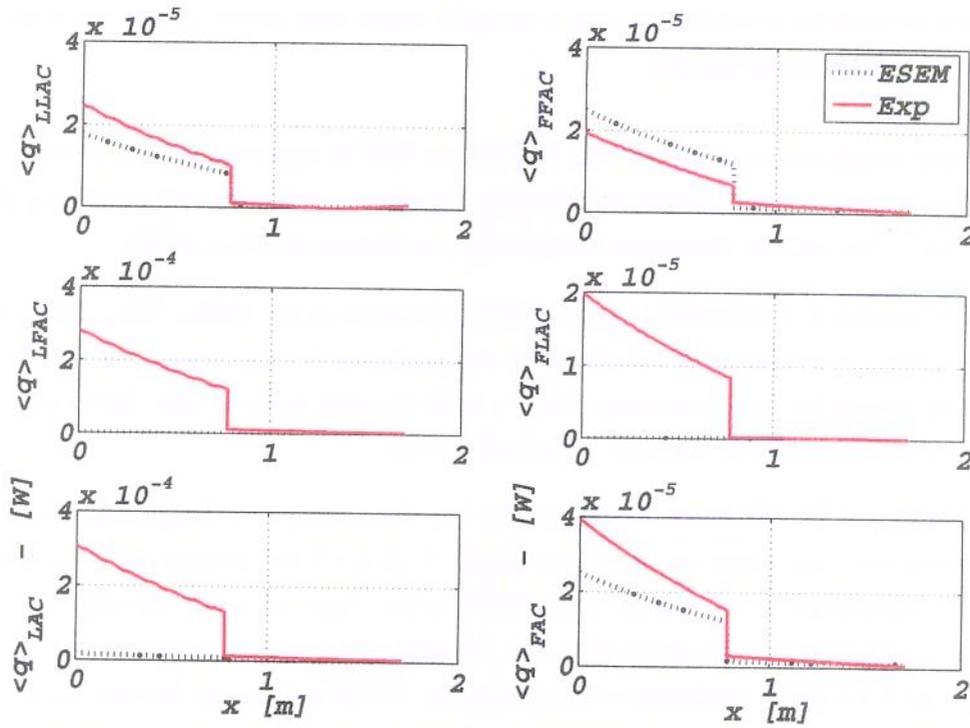


Figura 6.12: Fluxos de energias médios totais e parciais nas vigas *A* e *C*, calculados por ESEM e dados Experimentais (Exp) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

Uma observação global desses resultados mostra que a maioria dos resultados simulados não apresentam o mesmo comportamento daqueles obtidos experimentalmente. Observa-se também que em alguns casos onde os comportamentos são similares, as densidades e os fluxos de energia simulados apresentam diferenças de amplitude significativas em relação às experimentais. Algumas exceções devem ser mencionadas como no caso das parcelas das densidades de energia transversais devido a uma excitação transversal $\langle e \rangle_{FFAB}$ (figura 6.9) e $\langle e \rangle_{FFAC}$ (figura 6.10), que apresentam uma boa concordância entre os resultados experimental e simulados. Contudo, devido às grandes diferenças no comportamento das parcelas das densidades de energia transversais devido a uma excitação longitudinal $\langle e \rangle_{FLAB}$ (figura 6.9) e $\langle e \rangle_{FLAC}$ (figura 6.10), principalmente sobre o comprimento referente à viga *A*, as densidades de energia totais transversais apresentam diferenças significativas também neste trecho. Os resultados obtidos para as energias longitudinais apresentam comportamentos totalmente diferentes, não sendo possível estabelecer qualquer termo de comparação entre os mesmos. Estas mesmas considerações podem ser aplicadas aos resultados obtidos para os fluxos de energia (figuras 6.11 e 6.12). Resultados similares foram obtidos usando-se outras faixas de frequências diferentes da apresentada.

Antes de tentarmos extrair alguma conclusão destes resultados, devem ser levantadas em conta as seguintes considerações:

- Os casos simulados com os métodos EFEM ou ESEM apresentados no Capítulo 5, mostraram resultados bastante consistentes quando comparando com o método SEM, bem como, com aqueles simulados encontrados na literatura (Cho, 1993);
- Alguns trabalhos publicados (Ahmida, 2001), (Donadon *et al.*, 2004), (Cho, 1993) têm apresentado resultados bem razoáveis de comparações de simulações por EFEM ou SEM com resultados experimentais. Muito embora estes tenham sido feitos em função da frequência em vez da posição, como nesta tese;
- Uma análise mais criteriosa dos resultados das densidades de energia experimentais esperadas em cada ramo da estrutura (vigas A , B e C) em função do tipo (longitudinal ou transversal) e da posição (extremidade das vigas A ou C) da excitação aplicada, revela que alguns dos resultados das densidades de energia experimentais obtidos (figuras 6.9 e 6.10) mostram-se inconsistentes. Por exemplo, na parcela da densidade de energia transversal obtida por uma excitação longitudinal na extremidade da viga A , $\langle e \rangle_{FLAB}$ (figura 6.9), não era de se esperar uma amplitude da densidade de energia transversal no ramo da viga A com valor próximo daquela que foi obtida para uma excitação transversal na extremidade da viga A , $\langle e \rangle_{FFAB}$ (figura 6.9). Da mesma forma que não seria esperada uma parcela da densidade de energia transversal, $\langle e \rangle_{FLAC}$ (figura 6.10), próxima de zero para o ramo da viga C , também não era esperada uma amplitude alta no ramo da viga A para uma excitação longitudinal na extremidade da viga A .

Tais considerações indicaram fortes evidências de que as densidades e fluxos de energias experimentais apresentavam distorções em seus resultados. Desta forma iniciou-se uma averiguação do processo de obtenção das densidades e fluxos de energias desde o seu dado mais primitivo, as FRFs medidas, até a obtenção do seu valor final, a interpolação por SEM.

Uma análise mais criteriosa dos dados experimentais mostrou que as FRFs medidas apresentam valores de coerência ordinária próximos de 1.0 em todas as bandas de frequências analisadas. Também, que o processo de integração das FRFs de aceleração para obtenção das FRFs de velocidade e deslocamento é robusto e trivial. Desta forma, concluiu-se que as possíveis divergências dos resultados deveriam estar mais à frente, ou seja, no processo de interpolação por SEM com os resultados dos deslocamentos experimentais. A partir deste ponto foram realizadas algumas comparações de resultados simulados através de SEM

com aqueles experimentais obtidos com interpolação por SEM de dados dos deslocamentos experimentais.

A primeira tentativa foi feita utilizando-se um modelo de viga mais preciso na formulação do SEM. O modelo usado até o momento era o da viga Bernoulli- Euler que foi substituído pelo modelo de Timoshenko. Usando-se os dois modelos de viga foi realizado um caso simulado para a viga T , para uma banda de frequências de 1/3 de oitava com $f_c = 6.3$ kHz, cujos resultados estão mostrados nas figuras 6.13 e 6.14. Pode-se observar que os modelos apresentam comportamentos similares em alguns resultados, $\langle e \rangle_{LAB}$ (figura 6.13), mas bastante diferentes em outros $\langle e \rangle_{FAB}$ (figura 6.13).

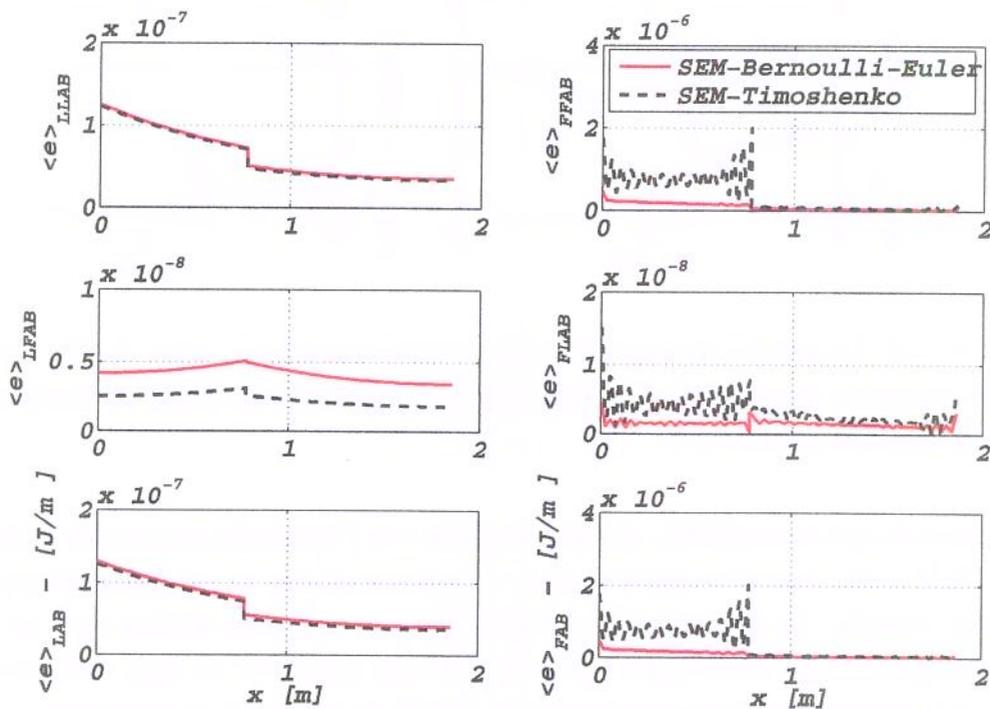


Figura 6.13: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e B , calculadas por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

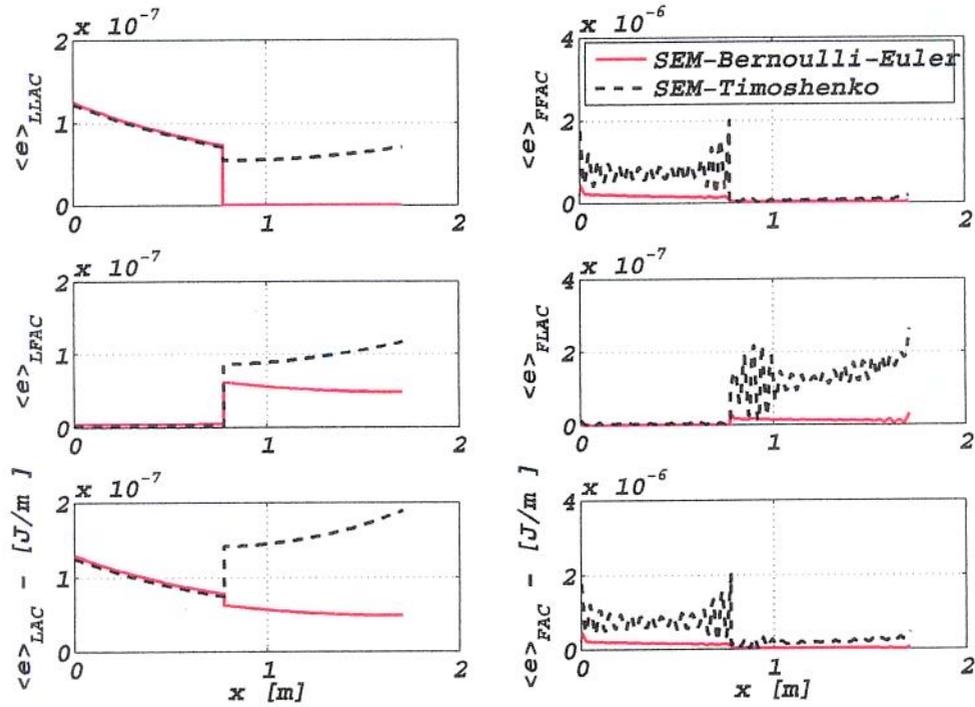


Figura 6.14: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e C , calculadas por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

Baseado nestes resultados, aplicou-se o modelo de Timoshenko no processo de interpolação por SEM com resultados experimentais e comparou-se com os resultados simulados pelo o mesmo modelo. As figuras 6.15 e 6.16 mostram os resultados obtidos para as densidades de energias médias totais e parciais para os ramos AB e AC da viga, onde não é possível observar nenhuma melhora significativa no sentido de aproximar os resultados simulados dos experimentais.

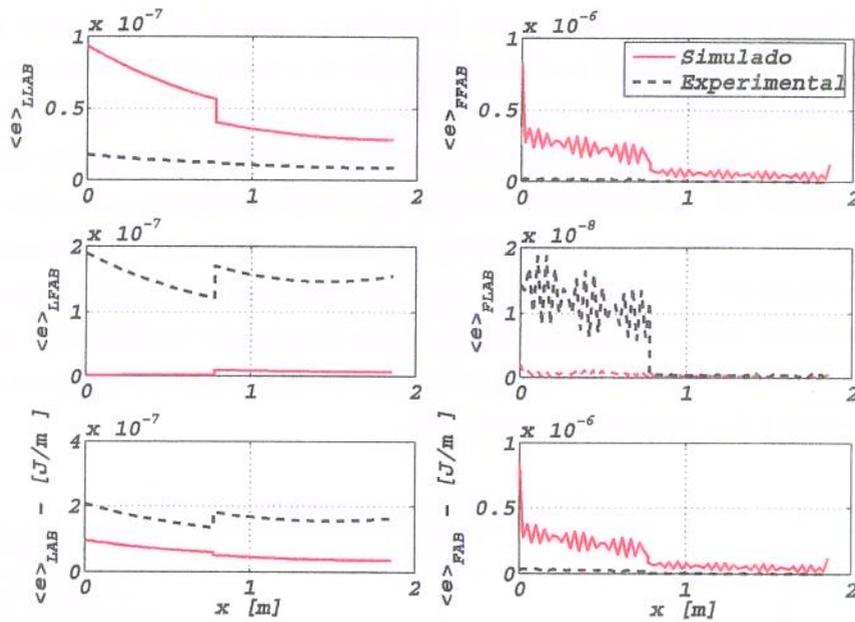


Figura 6.15: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e B simuladas por SEM, e interpoladas por SEM (EXP) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

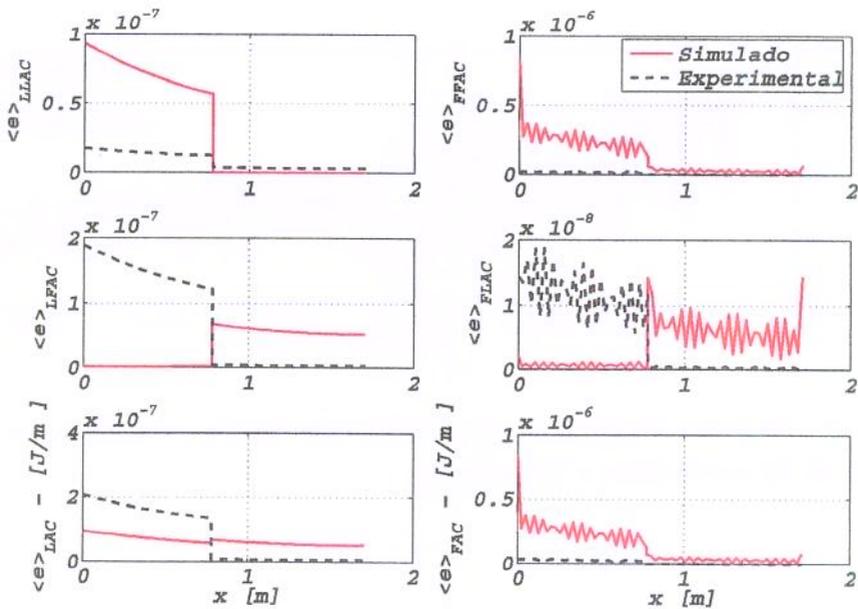


Figura 6.16: Densidades de energias médias totais e parciais nas vigas A e C , simuladas por SEM, e interpoladas por SEM (EXP) na banda de frequências de 1/3 oitava com $f_c=6.3$ kHz.

Uma outra investigação do processo foi realizada através das simulações das FRFs de deslocamento ao longo da viga T por SEM utilizando-se a teoria de Bernoulli-Euler e Timoshenko, e essas foram comparadas às FRFs de deslocamentos medidas na viga T . Os resultados apresentados demonstram que para baixas frequências (0-500 Hz) as respostas simuladas por SEM estão próximas das experimentais, entretanto, quando avançamos para faixas de frequências mais altas (500-7.000 Hz) os resultados se deterioram e não existe mais termo de comparação entre os resultados. Este resultado permanece inmutável independentemente do modelo de viga (Bernoulli-Euler ou Timoshenko) usado na formulação do SEM. Isso pode ser visto nas figuras 6.17, 6.18, 6.19, que mostram as respostas longitudinais, e as figuras 6.20, 6.21 e 6.22, as quais mostram as respostas transversais.

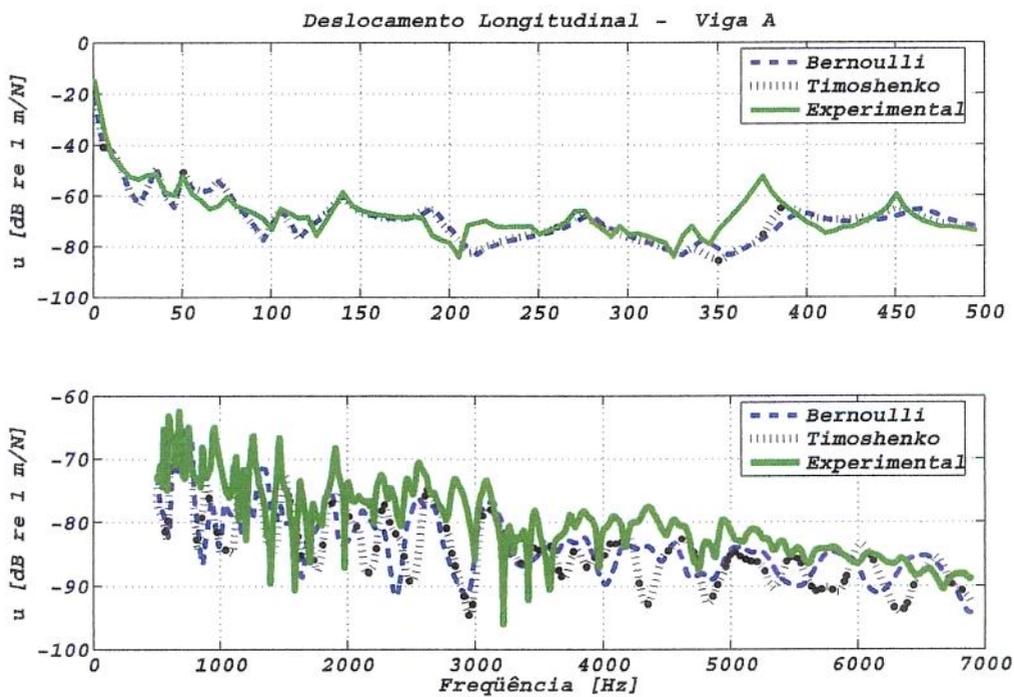


Figura 6.17: Resposta longitudinal experimental da viga A, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

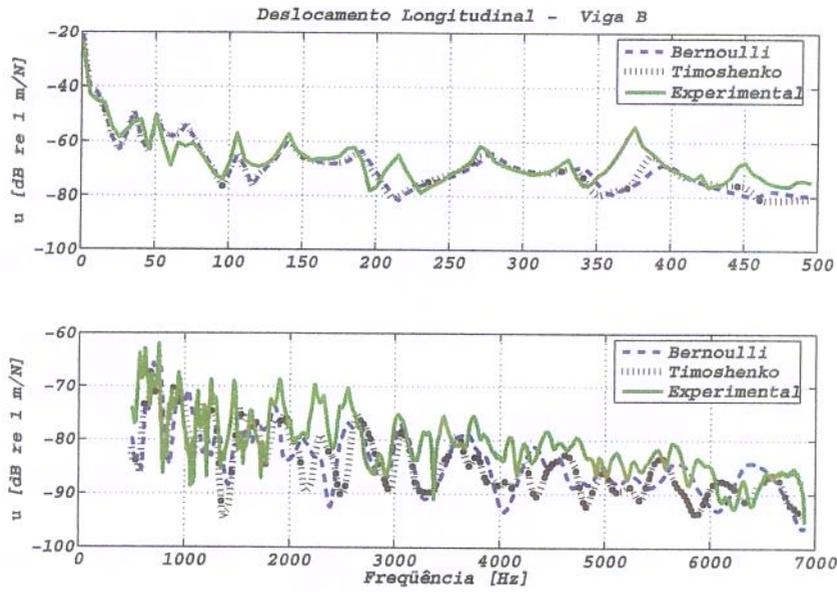


Figura 6.18: Resposta longitudinal experimental da viga B, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

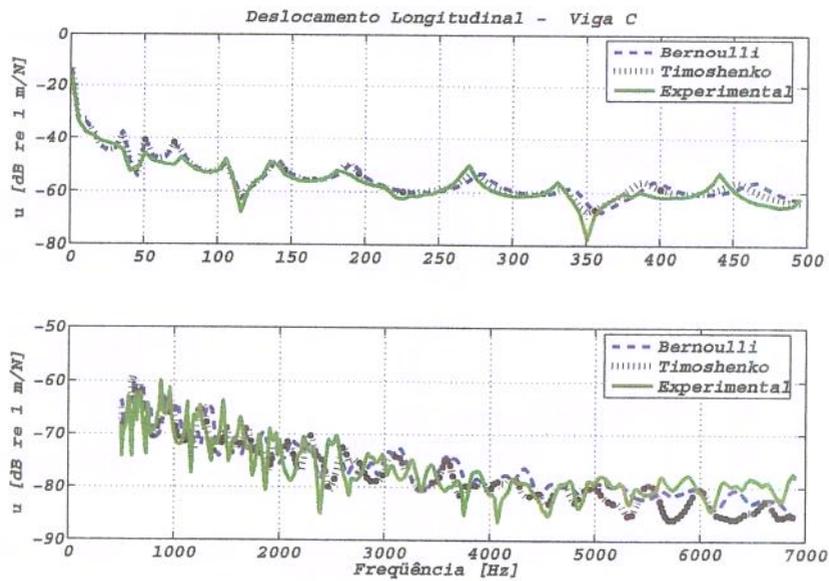


Figura 6.19: Resposta longitudinal experimental da viga C, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

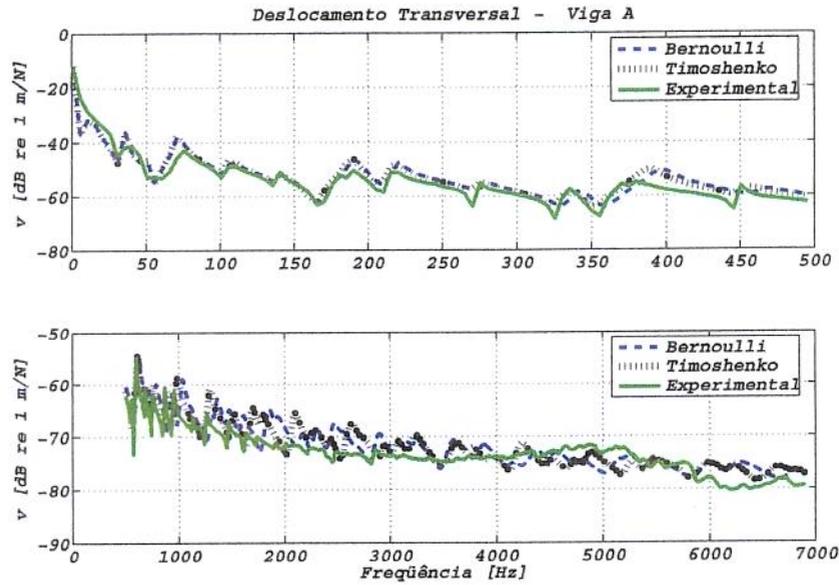


Figura 6.20: Resposta transversal experimental da viga A, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

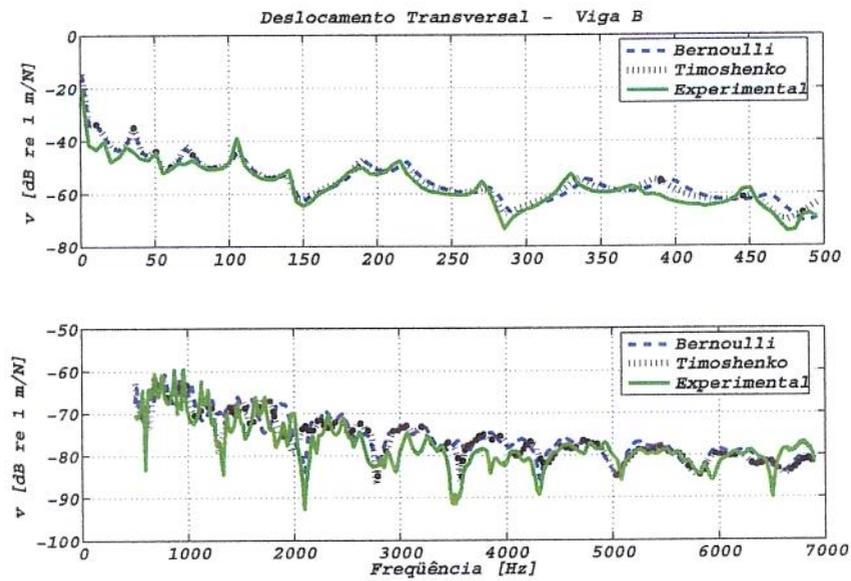


Figura 6.21: Resposta transversal experimental da viga B, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

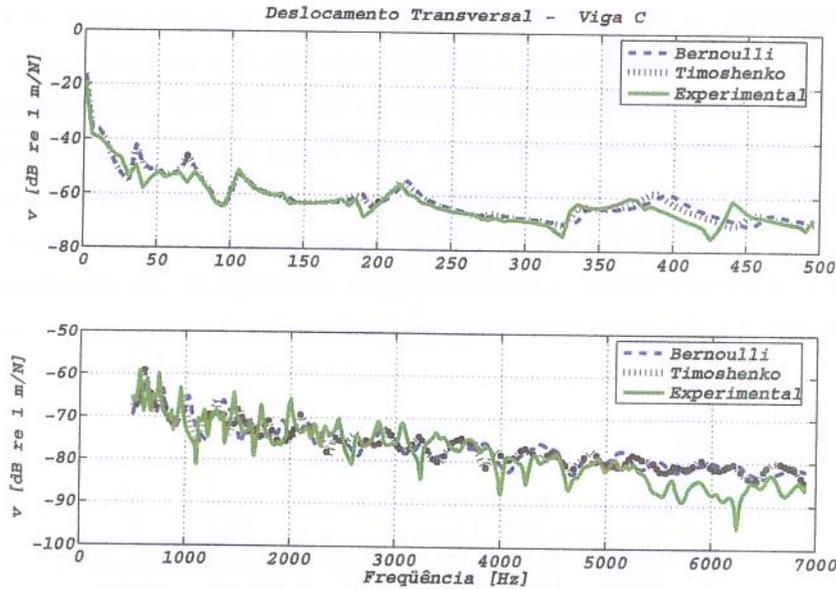


Figura 6.22: Resposta transversal experimental da viga C, e calculada por SEM utilizando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko.

Neste trabalho o método do SEM tem sido utilizado como uma referência para que se possa comparar com os resultados simulados obtidos por EFEM e ESEM. Não era um objetivo desenvolver o SEM, entretanto, a partir do momento em que se tentou aplicar a mesma metodologia usada para os casos simulados nos casos experimentais, o SEM interpolado com dados experimentais não conseguiu representar de maneira adequada o comportamento das densidades e dos fluxos de energias. Um número maior de investigações e testes precisa ser realizado com o método de SEM usando a variação espacial, a fim de obter uma melhor concordância entre os resultados simulados e experimentais.

6.4.1 Determinação experimental dos fatores de perda por acoplamento usando PIM

Nesta seção apresenta-se uma outra aplicação dos resultados experimentais da viga T , realizados no início do desenvolvimento deste trabalho. Neste caso o objetivo era estimar os fatores de perda por acoplamento, η_{ij} , um parâmetro de grande importância em Análise Estatística de Energia (SEA), usando o Método da Potência Injetada (PIM). Os fatores de perda por acoplamento caracterizam o comportamento dinâmico entre os sub-sistemas (grupos de modos com energias similares) e são requeridos para prever níveis de vibração e

ruído em estruturas ou cavidades acústicas por SEA. Para se determinar os fatores de perda por acoplamento, η_{ij} , são utilizadas a potência injetada e as energias médias totais de cada sub-sistema. O PIM é a metodologia inversa de SEA, portanto, será apresentado o modelo de SEA para um melhor entendimento de como foram obtidos os η_{ij} . Para se elaborar o modelo de SEA, primeiramente a estrutura foi dividida em sub-sistemas, ou seja, em cada ramo A, B e C da viga T foram consideradas apenas as ondas longitudinais e transversais no plano (x,y) . Conseqüentemente, o modelo de SEA consistirá de seis sub-sistemas, que podem ser vistos na figura 6.23, assim como os caminhos de troca de energia entre cada sub-sistema.

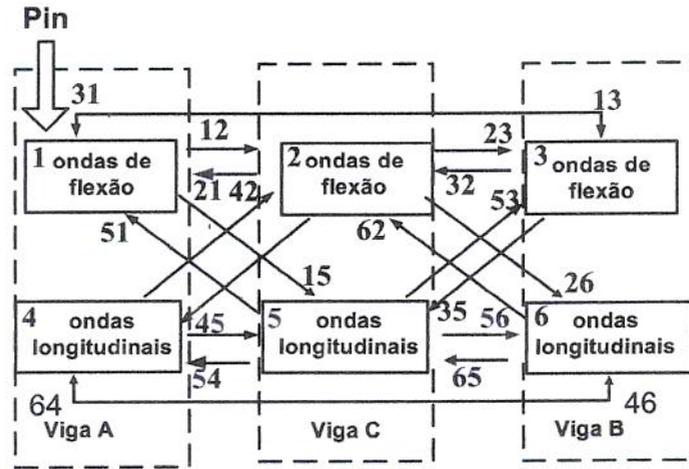


Figura 6.23: Modelo de SEA da Viga T para uma excitação.

A estrutura foi excitada nas direções transversais e longitudinais do ramo A e B , totalizando-se quatro excitações, sendo que para cada excitação um sistema linear composto de seis equações é obtido. Este sistema, que é representado pela figura 6.23, é dado pela equação:

$$\begin{pmatrix} \langle P_{in} \rangle^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \eta_{11} & -\eta_{21} & -\eta_{31} & 0 & -\eta_{51} & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_{22} & -\eta_{32} & -\eta_{42} & 0 & -\eta_{62} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_{33} & 0 & -\eta_{53} & 0 \\ 0 & -\eta_{24} & 0 & \eta_{44} & -\eta_{54} & -\eta_{64} \\ -\eta_{15} & 0 & -\eta_{35} & -\eta_{45} & \eta_{55} & -\eta_{65} \\ 0 & -\eta_{26} & 0 & -\eta_{46} & -\eta_{56} & \eta_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \langle E \rangle_{11}^{(A)} \\ \langle E \rangle_{21}^{(A)} \\ \langle E \rangle_{31}^{(A)} \\ \langle E \rangle_{41}^{(B)} \\ \langle E \rangle_{51}^{(B)} \\ \langle E \rangle_{61}^{(B)} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

ou de forma compacta:

$$\omega [\eta] \langle E \rangle = \langle P_{in} \rangle^i \quad (6.2)$$

O PIM pode ser obtido expressando a equação 6.2 em termos dos CLFs desconhecidos. Portanto, as potências injetadas nos sub-sistemas dos ramos A e C (1 e 2-transversal e 4 e 5-longitudinal), e as energias totais de todos os sub-sistemas são utilizadas na determinação dos fatores de perda por acoplamento, η_{ij} e η_{ii} . Neste caso a energia média total de um sub-sistema i devido a uma excitação no sub-sistema j é assumida como sendo duas vezes a energia cinética e a massa é considerada como concentrada, assim podemos escrever a energia como:

$$E_{ij} = m_i \langle V_i^2 \rangle \quad (6.3)$$

e a potência injetada no sub-sistema i é dada por:

$$P_{in}^i = \frac{1}{2} \text{Re}(-F_i V_i^*) \quad (6.4)$$

sendo que, F_i é uma força de excitação, V_i^* é o complexo conjugado da velocidade e E_{ij} , é a energia média total em um sub-sistema i devido à excitação no sub-sistema j .

A figura 6.24 mostra a energia transversal no sub-sistema 1 devido a uma potência injetada no mesmo, (E_{11}), em função das frequências centrais da banda considerada. Este sub-sistema de energia, assim como todos os outros, foi determinado a partir das medidas experimentais com base nas hipóteses assumidas e pela simulação por SEM utilizando a teoria de Timoshenko considerando ou não os graus de liberdade de rotação. As energias são comparadas em bandas de 1/3 de oitava, com frequências centrais de: 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150, 4000 e 5000. Embora a hipótese de massa concentrada possa ser um método aproximado, pois trata a estrutura como sendo um sistema não contínuo, os níveis de energia estimados em relação ao SEM utilizando a teoria de Timoshenko são satisfatórios.

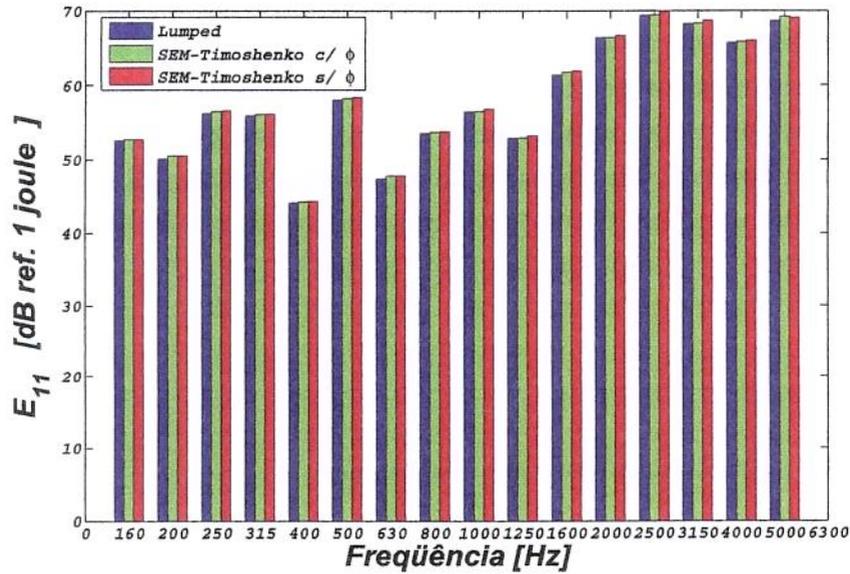


Figura 6.24: Energia cinética calculada pela hipótese de massa concentrada (“*lumped – mass*”), SEM-Timoshenko com rotação e SEM-Timoshenko sem rotação.

Aplicando o PIM no caso da viga T para as 4 excitações experimentais, obtém-se um sistema de equações com um total de 26 CLFs desconhecidos. Devido à simetria estrutural os CLFs simétricos são iguais ($\eta_{ij} = \eta_{ji}$) e o número de incógnitas é reduzido para 22 resultando em um sistema linear de equações sobre-determinado, o qual pode ser resolvido por uma solução de mínimos quadrados linear.

Expressões analíticas dos CLFs para vigas também foram desenvolvidas por Cremer e Heckl (1988), as quais podem ser escritas como:

$$\eta_{ij} = \frac{c_i \tau_{mnij}}{2\omega L_i} \quad (6.5)$$

sendo que,

- c_i : velocidade de propagação da onda;
- τ_{mnij} : coeficiente de transmissão da onda n na viga j devido a uma onda incidente m na viga i ;
- L_i : comprimento da viga.

Os coeficientes de transmissão para cada tipo de onda podem ser calculados pelas seguintes expressões:

$$\tau_{FFij} = \frac{2\beta^2 + 1}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (6.6)$$

$$\tau_{FLij} = \tau_{LF} = \frac{8\beta^2 + 5\beta}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (6.7)$$

$$\tau_{LLij} = \frac{\beta^2}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (6.8)$$

$$\beta = c_g/c \quad (6.9)$$

sendo que,

- τ_{FFij} : representa o coeficiente de transmissão transversal na viga j devido a uma onda incidente transversal na viga i ;
- $\tau_{FLij} = \tau_{LFij}$: representa o coeficiente longitudinal na viga j devido a uma onda incidente transversal na viga i , ou representa o coeficiente transversal na viga j devido a uma onda incidente longitudinal na viga i ;
- τ_{LLij} : representa o coeficiente de transmissão longitudinal na viga j devido a uma onda incidente longitudinal na viga i ;
- c_g : é a velocidade de grupo;
- c : é a velocidade de fase.

Na figura 6.25 estão os CLFs determinados a partir das energias obtidas com os dados experimentais (CLF-Experimental), os CLFs calculados a partir das energias obtidas por SEM utilizando a teoria de viga de Timoshenko (CLF-SEM-Timoshenko), e os CLFs obtidos pela expressão analítica dada pela equação 6.5 (CLF-Teórico). De forma geral, observa-se que os resultados para CLF-Experimental e CLF-SEM-Timoshenko apresentam comportamentos similares, os quais na média tendem a aproximar-se dos resultados obtidos com CLF-Teórico quando a frequência aumenta.

Assim como estimaram-se CLF-Experimental e CLF-SEM-Timoshenko que apresentaram boa conformidade em relação aos CLF-Teórico, também obtiveram-se CLF-Experimental e CLF-SEM-Timoshenko super ou sub-estimados. Uma alternativa para minimizar as diferenças associadas aos cálculos dos CLFs a partir do PIM, está relacionada a um CLF específico, ou seja, este novo fator pode ser estimado sem ter que resolver todo o sistema de

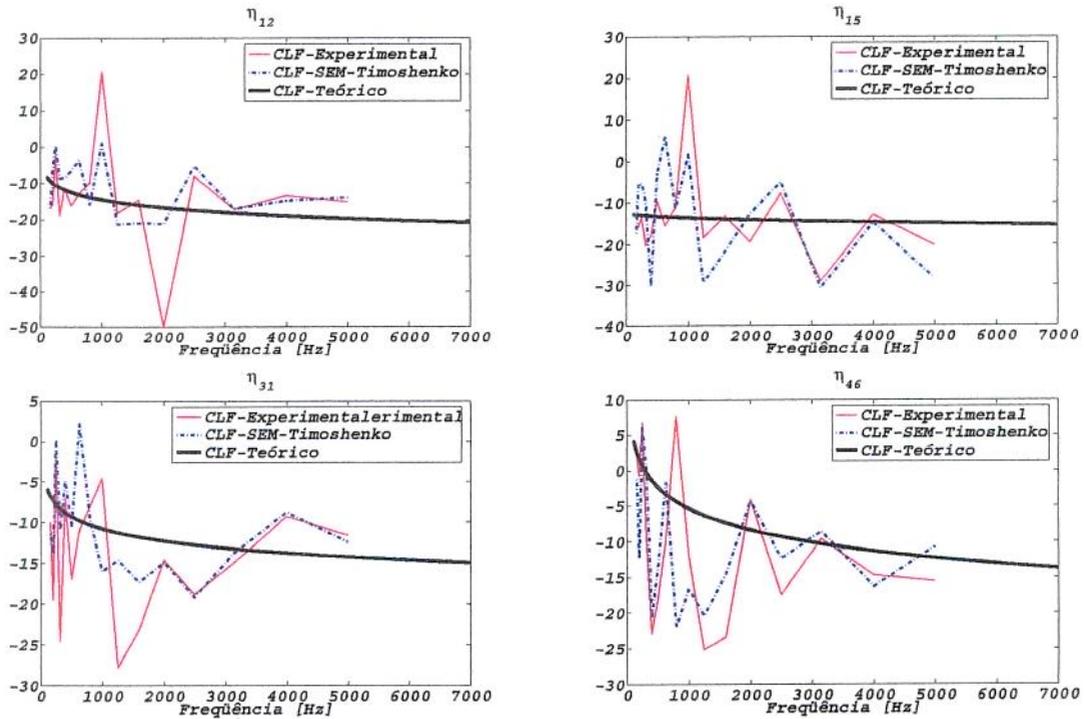


Figura 6.25: Fatores de perda por acoplamento calculados a partir dos dados experimentais, por SEM-Timoshenko e analiticamente.

equação do PIM. Esta formulação simplificada foi primeiramente mencionada por Stimpson e Lalor (1991). Ahmida (2001) aplicou esta metodologia simplificada juntamente com o método clássico do PIM para se obter numericamente os fatores de perda por acoplamento de uma viga L. Essa formulação também foi utilizada nesta tese, com o objetivo de melhorar os CLFs (Experimental e SEM-Timoshenko) obtidos a partir do PIM. Assim, as principais relações são dadas por:

$$\eta_{ij}^{SL} \cong \frac{F_{ij}^n}{F_{iu}^n F_{jj}^n} \quad (6.10)$$

$$E_{ij}^n = \frac{\omega E_{ij}}{P_{in}^i} \quad (6.11)$$

A figura 6.26 mostra os fatores de perda por acoplamento, η_{45} e η_{42} , que foram estimados por PIM utilizando-se as energias obtidas das resposta medidas (CLF-Experimental), simuladas por SEM (CLF-SEM-Timoshenko) e obtidos analiticamente (CLF-Teórico). Observa-se que os resultados CLF-Experimental e CLF-SEM-Timoshenko comportam-se de forma similar, mas não estão de acordo com os obtidos pelo CLF-Teórico. Para obter uma melhor

estimativa dos CLFs, foi aplicada a metodologia simplificada de Stimpson e Lalor (1991), onde obtiveram-se os resultados mostrados na figura 6.27. Nesta metodologia observa-se que os mesmos coeficientes de perda por acoplamento, η_{45} e η_{42} , apresentam agora resultados praticamente coincidentes para CLF-Experimental e CLF-SEM-Timoshenko, os quais apresentam na média resultados bem mais próximos daqueles obtidos analiticamente pelo CLF-Teórico.

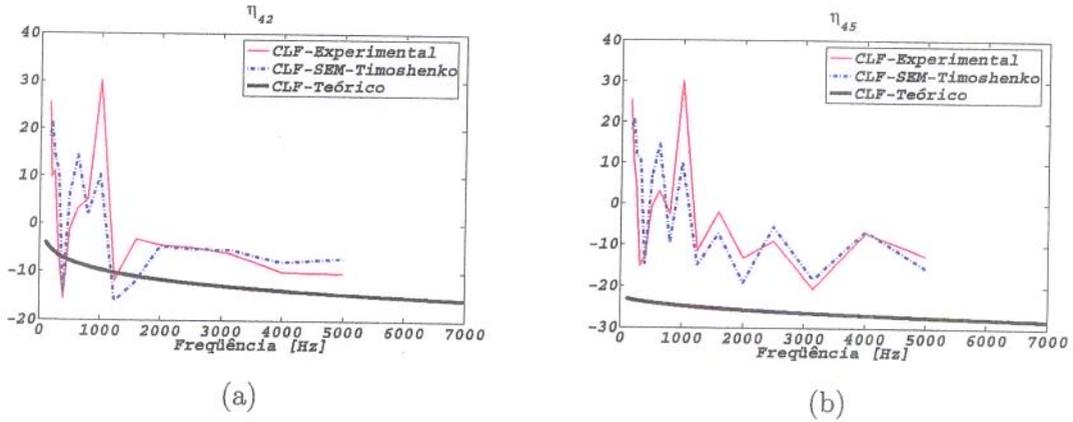


Figura 6.26: Fatores de perda por acoplamento calculados a partir dos dados experimentais, por SEM-Timoshenko e analiticamente.

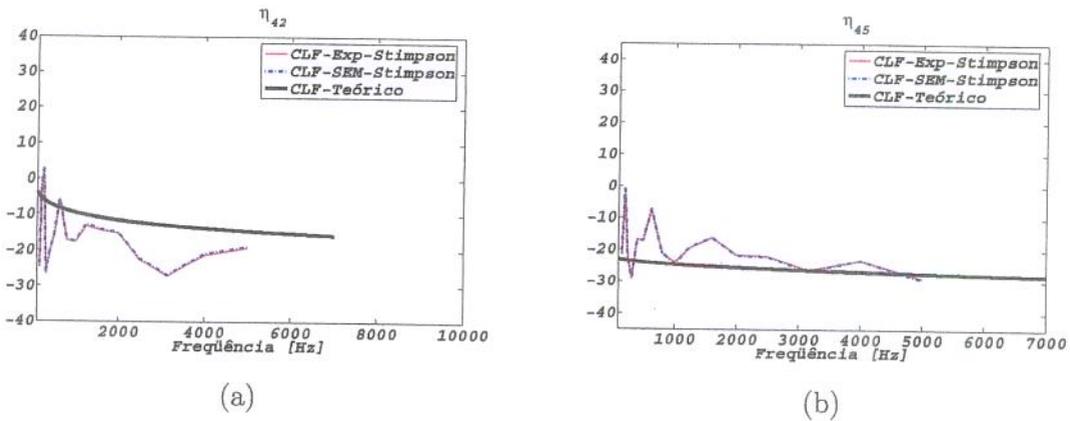


Figura 6.27: Fatores de perda por acoplamento calculados a partir da formulação simplificada de Stimpson e Lalor (1991) usando dados experimentais e respostas simuladas por SEM-Timoshenko, e obtidos analiticamente.

Dos resultados obtidos é possível observar que a formulação simplificada de Stimpson e Lalor (1991) apresenta estimativas dos CLFs bem melhores que aquelas obtidas pelo PIM.

Este fato está associado ao problema do condicionamento da matriz de energia. Quando o PIM é aplicado em sistemas pequenos, ou seja, com poucos sub-sistemas, obtém-se boas estimativas dos CLFs devido ao pequeno tamanho da matriz de energia envolvida (Ahmida, 2001). Já para sistemas grandes e complexos, a matriz de energia pode ter problemas de mal condicionamento numérico.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

7.1 Conclusões

Este trabalho está direcionado para modelagem de sistemas estruturais na faixa de altas frequências. Como mencionado na introdução, existe a necessidade de se utilizar métodos que se adaptem melhor a essa faixa de frequência, pois em muitas aplicações de engenharia, a vibração de estruturas e o campo sonoro no interior de cavidades acústicas envolvem modos de alta ordem com comprimentos de ondas muito pequenos comparados as dimensões da estrutura ou da cavidade acústica. Isto conduz a modelos com grande número de graus de liberdade, que para serem resolvidos demandariam um alto custo computacional, tornando-se proibitivo a utilização de métodos determinísticos para análises nessa faixa de frequência de interesse. Portanto, métodos utilizados para prever o comportamento dinâmico médio suavizado das respostas vibracionais estruturais são de grande valia em altas frequências.

Uma avaliação do comportamento vibracional médio em frequência-espaço para estruturas foi feita com objetivo de identificar como a vibração está se propagando por via estrutural. Para isso, foram investigados os fluxos e as densidades de energias médias totais e parciais a partir dos métodos EFA, EFEM, ESEM e SEM para estruturas simples tais como barras e vigas colineares, vigas acopladas em ângulos arbitrários e uma viga na forma de T . Neste estudo, utilizaram-se as equações diferenciais de energia desenvolvidas por Wohlever (1988) e as equações diferenciais de movimento para propagação de ondas longitudinais e transversais no plano (x,y) , na modelagem das respostas vibracionais. Os métodos EFEM, ESEM e SEM foram implementados e verificados para alguns casos aplicados a estruturas 1D tipo barras e vigas com diferentes tipos de acoplamentos. O SEM foi usado como referência na verificação destes métodos.

O primeiro método, EFA, consiste de uma formulação analítica na forma de uma equação diferencial de densidade de energia e do fluxo de energia. O segundo, EFEM, é uma solução aproximada por elementos finitos da equação diferencial de densidade de energia, a qual proporciona informações das respostas dinâmicas espaciais suavizadas com um baixo custo computacional a partir da utilização de um parâmetro base que é similar ao empregado na análise clássica do comportamento dinâmico por FEM. O ESEM é uma formulação similar à empregada no método SEM que prevê também as respostas em altas frequências de sistemas estruturais dinâmicos no domínio espectral, mas tendo como variáveis primárias a densidade e o fluxo de energia como feito pelo EFA e EFEM. O ESEM é uma contribuição original desta tese, mas considerando que esta proposta surgiu no final do desenvolvimento do trabalho, e que os exemplos analisados ainda estão limitados a alguns casos de elementos de barras e vigas, seria prematuro afirmarmos quais as vantagens ou desvantagens do método neste momento. O ESEM utiliza a abordagem do SEM para tratar as equações de fluxo de energia. Uma contribuição do ESEM diante dos outros métodos similares (EFA e EFEM) é a possibilidade de se resolver de forma exata a equação do fluxo de energia. O SEM, cuja formulação tem como base a solução analítica da equação diferencial da onda foi aplicado apenas como método de referência para averiguação dos outros métodos.

A análise das densidades e fluxos de energia médios parciais através das juntas consiste em uma outra contribuição deste trabalho. Esta forma de analisar o problema permite mostrar de forma mais clara como as ondas longitudinais e transversais estão se acoplando nas juntas e como está sendo esta redistribuição entre os elementos acoplados. Além disso, as densidades de energias parciais foram de grande importância na identificação de uma convergência de sinais consistente para o fluxo de energia e conseqüentemente para as matrizes de juntas no EFEM.

Um estudo a respeito da aplicabilidade do EFEM foi realizado com intuito de saber se a faixa de frequência de interesse é adequada à aplicação da metodologia. Esse estudo é feito porque juntamente com as equações de energia, são utilizadas as equações de juntas, as quais modelam os acoplamentos das ondas nas estruturas. Estes mecanismos de troca de energia nas juntas utilizam os coeficientes de transmissão e reflexão (τ_{ijmn} e r_{iimn}) que são determinados a partir de elementos estruturais acoplados semi-infinitos ou infinitos em uma banda de frequência de interesse. Portanto, estruturas finitas são modeladas a partir de estruturas semi-infinitas ou infinitas. Esta hipótese é válida desde que a banda de frequência sobre a qual a média em frequência está sendo executada seja suficientemente grande para que as respostas médias em frequência de elementos finitos aproximem-se das respostas médias dos elementos semi-infinitos ou infinitos (Cho, 1993). Para verificar estas hipóteses são utilizados dois parâmetros: o número de modos na banda, ("mode count - $N(f)$ "), que indica o número aproximado de modos excitados na banda de frequência de interesse, e o fator de

sobreposição modal, ("*modal overlap factor - MOF*"), que indica o espaçamento entre os modos na banda de interesse. Essa avaliação foi feita para os casos simulados, o que explicou algumas diferenças e não conformidade dos resultados simulados obtidos por EFEM em relação aos obtidos com SEM para algumas bandas de interesse.

Três casos experimentais foram realizados e os resultados foram comparados com aqueles simulados pelos métodos implementados. O primeiro caso experimental consiste de duas barras colineares com seção transversal e comprimentos diferentes, conectadas entre si através de um ajuste prensado. A estrutura foi excitada em uma extremidade e as FRFs de aceleração medidas em 4 pontos, uma em cada extremidade e duas na conexão. As densidades de energias experimentais foram obtidas usando-se a hipótese de massa concentrada e a de que a densidade de energia pode ser aproximada como duas vezes a densidade de energia cinética. Estes resultados são comparados com os seus equivalentes simulados por EFEM e SEM, onde para o trecho da barra longa os resultados apresentaram uma boa aproximação, mas para a barra mais curta isto não se verifica. Contudo, uma avaliação da validade do EFEM feita através do número de modos mínimos necessários na banda analisada, mostra que para a barra mais curta este critério não foi respeitado, isto justifica as divergências dos resultados.

O segundo caso experimental consiste de uma estrutura contínua na forma de um T , a qual foi excitada em dois dos ramos do T por forças harmônicas nas direções longitudinais e transversais. FRFs de aceleração longitudinais e transversais são medidas ao longo do comprimento dos 3 ramos e usadas na obtenção das densidades e fluxos de energias totais e parciais experimentais através de um processo de interpolação por SEM. Os resultados são comparados com aqueles simulados por EFEM e ESEM, onde para quase todos os ramos da estrutura os resultados simulados não correspondem aos experimentais. Algumas considerações baseadas nos resultados simulados, em outros trabalhos sobre o assunto, assim como em evidências indicadas por resultados esperados para as densidades de energia parciais, levaram à conclusão de que os resultados experimentais apresentavam erros que provavelmente se originaram na dificuldade em medir as acelerações longitudinais e no processo de interpolação por SEM. Uma investigação do processo foi realizada e os resultados apresentados demonstram que, para baixas frequências (0-500 Hz) as respostas simuladas por SEM estão próximas das experimentais, entretando, quando avançamos para faixas de frequências mais altas (500-7000 Hz) os resultados se deterioram e não existe mais termo de comparação entre os resultados. Este resultado ocorre independentemente do modelo de viga (Bernoulli-Euler ou Timoshenko) usado na formulação do SEM. O método do SEM foi utilizado como uma referência para que se pudesse comparar com os resultados simulados obtidos por EFEM e ESEM. Não era um objetivo desenvolver o SEM, entretanto, a partir do momento em que se tentou aplicar a mesma metodologia usada para os casos simulados nos casos experimentais,

o SEM interpolado com dados experimentais não conseguiu representar de maneira adequada o comportamento das densidades e dos fluxos de energias nas faixas de frequências desejadas. Acredita-se que mais investigações e testes precisam ainda ser realizados com o método de SEM usando a variação espacial a fim de obter uma melhor concordância entre os resultados simulados e experimentais.

O terceiro caso experimental é na realidade uma variação do segundo caso, o qual foi realizado nos estágios iniciais da tese, onde utilizaram-se os resultados do experimento da viga T para obtenção experimental dos fatores de perda por acoplamento de SEA através do Método da Potência Injetada (PIM). Os valores estimados experimentalmente são comparados com aqueles obtidos por expressões analíticas desenvolvidas por Cremer e Heckl (1988). A maioria dos fatores de perda por acoplamento estimados pelo PIM apresentam resultados que, na média convergem para os resultados analíticos, mas em alguns casos apresentam resultados não muito bons. A fim de melhorar as estimativas dos fatores de perda por acoplamento, um procedimento simplificado de Stimpson e Lalor (1991) foi aplicado e os resultados obtidos convergem na média para os resultados analíticos.

7.2 Perspectivas Futuras

Com base na experiência adquirida no desenvolvimento deste trabalho ficam aqui algumas sugestões de trabalhos que podem ser desenvolvidos no futuro:

- Explorar o ESEM para outros tipos de estruturas compostas por elementos 1D (barras e vigas), bem como mais complicadas compostas por elementos 2D (placas, membranas, etc) e 3D (elementos acústicos).
- Explorar o EFEM para outros tipos de estruturas compostas por elementos 2D (placas, membranas, etc) e 3D (elementos acústicos).
- Explorar outras técnicas e formas de obtenção experimental da densidade e fluxos de energia, bem como, verificar o processo de interpolação por SEM com vistas à obtenção de resultados experimentais;
- Desenvolver de outras técnicas de obtenção das relações de acoplamento de propagação de ondas entre os elementos estruturais acoplados;
- Desenvolver de métodos de energia mais adequados para análises na faixa das médias frequências.

Referências Bibliográficas

- Ahmida, K. M. *Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Freqüências*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Mecânica Computacional, 2001.
- Alves, P. S. L. *Análise Numérica e Experimental do Fluxo de Energia em Estruturas*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Mecânica Computacional, 2001.
- Belov, V. D., Rybak, S. A., Tartakovskii, B. D. Propagation of vibration energy in absorbing structures. *Soviet Physics and Acoustic*, v. 23(2), p. 115–119, 1977.
- Bies, D. A., Hamid, S. In situ determination of loss and coupling loss factors by power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 70(2), p. 187–204, 1980.
- Bitsie, F. *The Structural-Acoustic Energy Finite Element Method and Energy Boundary Element Method*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1996.
- Bouthier, O. M. *Energetics of Vibrating Systems*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1996.
- Brooks, J. E., Maidanik, G. Loss and coupling loss factor of two coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 55, p. 315–325., 1977.
- Cho, P. E. *Energy Flow Analysis of Coupled Structures*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1993.
- Cho, P. E., Bernhard, R. J. Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration.*, v. 211(4), p. 593–605., 1998.
- Crandall, S. H., Lotz, R. On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 49(1), p. 352–356., 1971.

- Cremer, L., Heckl, M. *Structure-Borne Sound*. New York: Springer: Verlag., 1988. 573p. p.
- Danial, A. N., Doyle, J. F., Rizzi, S. A. Dynamics analysis of folded plate structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 118(4), p. 591–598, 1996.
- Donadon, L. V. *Análise Teórica e Experimental de Estratégias de Controle Ativo de Ruído*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Mecânica Computacional, 2002.
- Donadon, L. V., Albuquerque, E. L., Arruda, J. R. F. Modelling reinforced plates using the spectral element method. *The 33rd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering- Internoise*, 2004.
- Doyle, J. F. *Wave Propagation in Structure*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997.
- Kinsler, L. E., Frey A. R., Coppens A. B, Sanders J. V. *Fundamentals of Acoustics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1982.
- Lee, U., Lee, J. Spectral element method for levy-type plates subject to dynamics loads. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 125(2), p. 243–247, 1999.
- Lyon, R. H. *Statistical Energy Analysis of Dynamics Systems, Second edition*. [S.l.]: M.I.T.-Press, 1975.
- Lyon, R. H., Dejong, G. R. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second edition*. 313 Washington Street Newton-USA: Butterworth-Heinemann, 1995.
- Moens, I. *On The Use and The Validity of The Energy Finite Element Method for High Frequency Vibrations*. Tese (Doutorado) — Leuven Catholic University - Faculty Toegepaste Wetenschappen Arenbergkasteel, Leuven-Belgium, 2001.
- Nefske, D. J., Sung, S. H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: Basic theory and application to beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design - Transactions of the ASME*, v. 111, p. 94–100, 1989.
- Newland, D. E. Calculation of power flow between coupled oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 3, p. 262–276., 1966.
- Newland, D. E. Power flow between a class of coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 43(3), p. 553–559., 1968.

- Nunes, R. F. *Análise Dinâmica de Problemas Não Determinísticos Usando Métodos Baseados em Conjunto Nebulosos*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Mecânica Computacional, 2005.
- Plunt, J., Fredo, C., Sanderson, M. On the use and misuse of the statistical energy analysis for vehicle noise control. *Proceedings of the SAE Noise and Vibration Conference*, p. 319–328, 1993.
- Remington, P. J., Manning, J. E. Comparison of statistical energy analysis power flow predictions with an exact calculation. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 57(2), p. 374–379., 1975.
- Scharton, T. D., Lyon, R. H. Power flow and energy sharing in random vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 43(6), p. 1332–1343., 1968.
- Stimpson, G., Lalor, N. Practical noise modelling of a car body structures using energy flow analysis. *Proceedings Internoise*, p. 1233–1236., 1991.
- Szwerc, R. P., Hambric, S. A. The measurement of intensity of longitudinal and flexural waves in intersecting beams. *Proceeding NOISECON.*, p. 473–478., 1996.
- Unglenieks, R. J. *Estimation of Flexural Wave Energy Parameters Using Wavenumber Transform Technique*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2000.
- Wang, S. *High Frequency Energy Flow Method: Numerical Implementation, Applications and Verification*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2000.
- Wohlever, J. C. *Vibrational Power Flow Analysis of Rods and Beams*. Dissertação (Mestrado) — School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1988.
- Wohlever, J. C., Bernhard, R. J. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 153(1), p. 1–19, 1992.
- Zienkeiwicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems - Vol. 1*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1989.

Apêndice A

Determinação dos coeficientes de transmissão e reflexão para estruturas semi-infinitas acopladas

A.1 Coeficientes de transmissão e reflexão de barras colineares acopladas

Duas barras semi-infinitas de materiais, e ou, geometria diferentes, são acopladas em $x = 0$, figura A.1. Quando uma onda longitudinal de amplitude \bar{P}_{LA} incide sobre a junta, a onda é parcialmente transmitida e refletida. O deslocamento longitudinal na barra A é expresso por:

$$u_A(x) = \bar{P}_{LA}e^{-jk_{LA}x} + Q_{LA}e^{jk_{LA}x} \quad (\text{A.1})$$

O deslocamento longitudinal na barra A é expresso por:

$$u_B(x) = P_{LB}e^{-jk_{LB}x} \quad (\text{A.2})$$

sendo que, k_{LA} e k_{LB} são os números de onda longitudinais nas barras A e B , respectivamente. As amplitudes complexas Q_{LA} e P_{LB} são determinadas pelas condições de equilíbrio na junta. Uma das condições é dada pelo equilíbrio de forças axiais. A expressão da força axial é dada por:

$$F = EA_T \frac{du}{dx} \quad (\text{A.3})$$

sendo que, E é o módulo de elasticidade, e A_T é a seção transversal da barra. A convenção de sinais para força axial positiva está representada na figura 2.7. A relação de equilíbrio de força na junta é dada por:

$$F_A|_{x=0} - F_B|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.4})$$

A outra condição é a de continuidade dos deslocamentos axiais na junta, que é:

$$u_A|_{x=0} = u_B|_{x=0} \quad (\text{A.5})$$

A aplicação das condições de equilíbrio nas equações A.1 e A.2, resultam em:

$$\bar{P}_{LA} + Q_{LA} = P_{LB} \quad (\text{A.6})$$

e,

$$(EA_T)_{AK_{LA}}Q_{LA} + (EA_T)_{BK_{LB}}P_{LB} = (EA_T)_{AK_{LA}}\bar{P}_{LA} \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo-se as equações A.6 e A.7 para as amplitudes Q_{LA} e P_{LB} :

$$Q_{LA} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\bar{P}_{LA} \quad (\text{A.8})$$

$$P_{LB} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\bar{P}_{LA} \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma = \frac{(EA_T)_{AK_{LA}}}{(EA_T)_{BK_{LB}}} \quad (\text{A.10})$$

Para se obter os coeficientes de transmissão e reflexão será utilizado o fluxo de energia médio no tempo. Portanto, para uma excitação harmônica, o fluxo de energia médio em uma barra é dado por:

$$\langle P \rangle_L = \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle -F \frac{du^*}{dt} \right\rangle \quad (\text{A.11})$$

sendo que, $\frac{du^*}{dt}$ é o conjugado complexo da velocidade longitudinal.

Pelo princípio da conservação de energia aplicado ao modelo de junta semi-infinita de uma barra, o fluxo de energia incidente é igual à soma do fluxo de energia transmitido e refletido.

$$\langle P \rangle_{LAinc} = \langle P \rangle_{LAref} + \langle P \rangle_{LBtran} \quad (\text{A.12})$$

Ambos os lados da equação A.12 são divididos por $\langle P \rangle_{LAinc}$, resultando em:

$$1 = \frac{\langle P \rangle_{LAref}}{\langle P \rangle_{LAinc}} + \frac{\langle P \rangle_{LBtran}}{\langle P \rangle_{LAinc}} = r_{LLAA} + \tau_{LLAB} \quad (\text{A.13})$$

O coeficiente de transmissão de potência longitudinal é uma taxa entre a potência transmitida e refletida:

$$\tau_{LLAB} = \frac{\langle P \rangle_{LBtrans}}{\langle P \rangle_{LAinc}} = \frac{(EA_T)_B k_{LB} |P_{LB}|^2}{(EA_T)_A k_{LA} |\bar{P}_{LA}|^2} = \frac{(EA_T)_B k_{LB}}{(EA_T)_A k_{LA}} \left| \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right|^2 \quad (\text{A.14})$$

O coeficiente de reflexão de potência longitudinal é uma taxa entre a potência refletida e a potência incidente:

$$r_{LLAA} = \frac{\langle P \rangle_{LAref}}{\langle P \rangle_{LAinc}} = \frac{|Q_{LA}|^2}{|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.15})$$

sendo que:

- τ_{LLAB} : é o coeficiente de transmissão de potência longitudinal na barra B devido a uma onda longitudinal incidente na barra A ;
- r_{LLAA} : é o coeficiente de reflexão de potência longitudinal na barra A devido a uma onda longitudinal incidente na barra A ;
- k_{Li} : número de onda longitudinal na barra i ($i=A,B$).

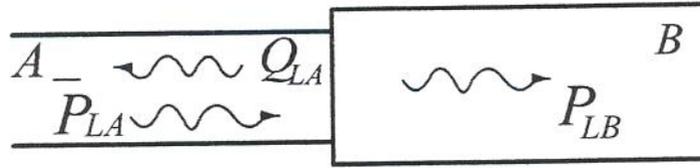


Figura A.1: Ondas longitudinais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) incidente sobre a junta.

A.2 Coeficientes de transmissão e reflexão de vigas colineares acopladas

Duas vigas semi-infinitas de materiais, e ou, de propriedades geométricas diferentes estão acopladas em $x = 0$, como mostra a figura A.2. Quando uma onda transversal de amplitude \bar{A}_{FA} incide sobre a junta, esta é parcialmente transmitida e refletida. O deslocamento transversal da viga A pode ser representado por:

$$v_A(x) = \bar{A}_{FA} e^{-jk_{FA}x} + C_{FA} e^{jk_{FA}x} + D_{FA} e^{k_{FA}x} \quad (\text{A.16})$$

O deslocamento transversal na viga B é dado por:

$$v_B(x) = A_{FB}e^{-jk_{FB}x} + B_{FB}e^{-k_{FB}x} \quad (\text{A.17})$$

sendo que, k_{FA} e k_{FB} são os números de onda na viga A e B , respectivamente.

As amplitudes complexas, C_{FA} , D_{FA} , A_{FB} e B_{FB} são determinadas a partir das condições de equilíbrio na junta, onde existem quatro condições de equilíbrio. As primeiras condições de equilíbrio aplicadas na junta são o momento e força cortante. As expressões para o momento e força cortante, respectivamente, são:

$$M = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (\text{A.18})$$

e

$$V = -EI \frac{d^3v(x)}{dx^3} \quad (\text{A.19})$$

sendo que, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia de área da viga.

A convenção positiva de sinais para o momento e força cortante está representada na figura 2.7. A relação de equilíbrio para o momento e força cortante na junta é dada por:

$$M_A|_{x=0} - M_B|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.20})$$

e

$$V_A|_{x=0} - V_B|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.21})$$

As outras duas condições de contorno impostas são de continuidade do deslocamento transversal e de rotação, que são representadas pelas respectivas expressões:

$$v_A(x)|_{x=0} = v_B(x)|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.22})$$

e

$$\frac{dv_A}{dx}(x)|_{x=0} = \frac{dv_B}{dx}(x)|_{x=0} \quad (\text{A.23})$$

Quando as condições de equilíbrio são aplicadas na junta, um sistema de equações é obtido:

$$C_{FA} + D_{FA} - A_{FB} - B_{FB} = -\bar{A}_{FA} \quad (\text{A.24})$$

$$jk_{FA}C_{FA} + k_{FA}D_{FA} + jk_{FB}A_{FB} + k_{FB}B_{FB} = jk_{FA}\bar{A}_{FA} \quad (\text{A.25})$$

$$-(EI)_A k_{FA}^2 C_{FA} + (EI)_A k_{FA}^2 D_{FA} + (EI)_B k_{FB}^2 A_{FB} - (EI)_B k_{FB}^2 B_{FB} = (EI)_A k_{FA}^2 \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.26})$$

$$-j(EI)_A k_{FA}^3 C_{FA} + (EI)_A k_{FA}^3 D_{FA} - j(EI)_B k_{FB}^3 A_{FB} + (EI)_B k_{FB}^3 B_{FB} = -j(EI)_A k_{FA}^3 \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.27})$$

As equações A.24, A.25, A.26 e A.27 são resolvidas simultaneamente para amplitudes complexas C_{FA} , D_{FA} , A_{FB} e B_{FB} . As expressões resultantes são:

$$C_{FA} = \{2\alpha_A \alpha_B (k_{FA}^2 - k_{FB}^2) - j k_{FA} k_{FB} (\alpha_A - \alpha_B)^2\} \frac{\bar{A}_{FA}}{\Delta} \quad (\text{A.28})$$

$$D_{FA} = \{k_{FA} k_{FB} (\alpha_A^2 - \alpha_B^2) (1 - j)\} \frac{\bar{A}_{FA}}{\Delta} \quad (\text{A.29})$$

$$A_{FB} = \{2\alpha_A k_{FA} (\alpha_A + \alpha_B) (k_{FA} + k_{FB})\} \frac{\bar{A}_{FA}}{\Delta} \quad (\text{A.30})$$

e

$$B_{FB} = \{2\alpha_A k_{FA} (\alpha_A - \alpha_B) (k_{FA} - j k_{FB})\} \frac{\bar{A}_{FA}}{\Delta} \quad (\text{A.31})$$

sendo que,

$$\Delta = 2\alpha_A \alpha_B (k_{FA}^2 + k_{FB}^2) + k_{FA} k_{FB} (\alpha_A + \alpha_B)^2$$

$$\alpha_A = (EI)_A k_{FA}^2$$

e

$$\alpha_B = (EI)_B k_{FB}^2$$

Para uma excitação harmônica, a expressão do fluxo de energia médio no tempo em uma viga é:

$$\langle P \rangle_F = \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle -V \frac{dv^*}{dt} - M \frac{d^2v^*}{dxdt} \right\rangle \quad (\text{A.32})$$

sendo que, dv^*/dt é o conjugado complexo da velocidade transversal e $d^2v^*/dxdt$ é o conjugado complexo da velocidade angular.

Pelo princípio da conservação de energia aplicado ao modelo de junta semi-infinita de uma viga, a mesma relação obtida para modelo de barras colineares é obtido:

$$\langle P \rangle_{FAinc} = \langle P \rangle_{FAref} + \langle P \rangle_{FBtran} \quad (\text{A.33})$$

$$1 = \frac{\langle P \rangle_{FAref}}{\langle P \rangle_{FAinc}} + \frac{\langle P \rangle_{FBtran}}{\langle P \rangle_{FAinc}} = r_{FFAA} + \tau_{FFAB} \quad (\text{A.34})$$

O coeficiente de transmissão de potência transversal é uma taxa entre a potência transmitida e refletida.

$$\tau_{FFAB} = \frac{\langle P \rangle_{FBtran}}{\langle P \rangle_{FAinc}} = \frac{(EI)_B k_{FB}^3 |A_{FB}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} = \frac{(EI)_B k_{FB}^3}{(EI)_A k_{FA}^3} \{2\alpha_A k_{FA} (\alpha_A + \alpha_B) (k_{FA} + k_{FB}) / \Delta\}^2 \quad (\text{A.35})$$

O coeficiente de reflexão de potência transversal é uma taxa entre a potência refletida e a potência incidente.

$$r_{FFAA} = \frac{\langle P \rangle_{FAref}}{\langle P \rangle_{FAinc}} = \frac{|C_{FA}|^2}{|\bar{A}_{FA}|^2} = \{ (2\alpha_A \alpha_B (k_{FA}^2 - k_{FB}^2) - j k_{FA} k_{FB} (\alpha_A - \alpha_B)^2) / \Delta \}^2 \quad (\text{A.36})$$

sendo que:

- τ_{FFAB} : é o coeficiente de transmissão de potência transversal na viga B devido a uma onda transversal incidente na viga A ;

- r_{FFAA} : é o coeficiente de reflexão de potência transversal na viga A devido a uma onda transversal incidente na viga A ;

- k_{Fi} : número de onda transversal na viga i ($i=A,B$).

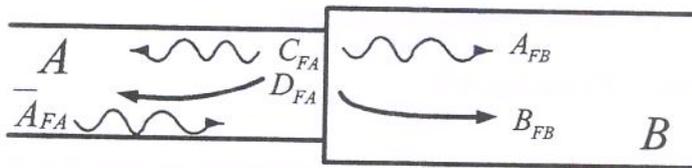


Figura A.2: Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda transversal (\bar{A}_{FA}) incidente sobre a junta.

A.3 Coeficientes de transmissão e reflexão de duas vigas acopladas em ângulo arbitrário

Duas vigas semi-infinitas de materiais, e ou, propriedades geométricas diferentes, são acopladas em um ângulo arbitrário em $x_1 = x_2 = 0$. Ambas as ondas transversais e longitudinais podem ser incidentes sobre a junta a partir da viga A . Quando a onda transversal de amplitude, \bar{A}_{FA} , ou a onda longitudinal de amplitude, \bar{P}_{LA} , incide sobre a junta, ondas transversais e longitudinais (refletidas e transmitidas) são geradas em cada uma das duas vigas semi-infinitas. Portanto, o deslocamento transversal na viga A é dado por:

$$v_A(x_1) = \bar{A}_{FA}e^{-jk_{FA}x_1} + C_{FA}e^{jk_{FA}x_1} + D_{FA}e^{k_{FA}x_1} \quad (\text{A.37})$$

O deslocamento longitudinal na viga A é dado por:

$$u_A(x_1) = \bar{P}_{LA}e^{-jk_{LA}x_1} + Q_{LA}e^{jk_{LA}x_1} \quad (\text{A.38})$$

O deslocamento transversal na viga B é dado por:

$$v_B(x_2) = A_{FB}e^{-jk_{FB}x_2} + B_{FB}e^{-k_{FB}x_2} \quad (\text{A.39})$$

O deslocamento longitudinal na viga B é dado por:

$$u_B(x_2) = P_{LB}e^{-jk_{LB}x_2} \quad (\text{A.40})$$

Na junta, seis condições de equilíbrio são necessárias para determinar as seguintes amplitudes complexas desconhecidas: C_{FA} , D_{FA} , Q_{LA} , A_{FB} , B_{FB} e P_{LB} . Três condições de contorno estabelecem o equilíbrio de forças e momento sobre a junta. Assim, na junta, a soma das forças na direção horizontal é dada por:

$$-F_A + F_B \cos(\phi_2) - V_B \sin(\phi_2) = 0 \quad (\text{A.41})$$

A soma das forças na direção vertical é dada por:

$$-V_A + V_B \cos(\phi_2) + F_B \sin(\phi_2) = 0 \quad (\text{A.42})$$

sendo que, F_A , F_B , V_A e V_B são forças axiais e cortantes na viga A e B , respectivamente.

A relação de equilíbrio de momento sobre a junta é dada por:

$$M_B - M_A = 0 \quad (\text{A.43})$$

sendo que, M_A e M_B são os momentos na viga A e B , respectivamente.

As outras três condições de equilíbrio sobre a junta são de continuidade de deslocamento e de rotação. A continuidade de deslocamento axial é representada pela seguinte relação:

$$u_A = -v_B \sin(\phi_2) + u_B \cos(\phi_2) \quad (\text{A.44})$$

e a continuidade de deslocamento transversal é dada por:

$$v_A = v_B \cos(\phi_2) + u_B \sin(\phi_2) \quad (\text{A.45})$$

A continuidade de rotação é representada pela seguinte relação:

$$\frac{dv_A}{dx_1} = \frac{dv_B}{dx_2} \quad (\text{A.46})$$

A aplicação das seis condições de equilíbrio na junta, resulta em um sistema de equações:

$$\begin{aligned} -j(EA_T)_A \frac{k_{LA}}{k_{FB}^3} Q_{LA} + j(EI)_B \sin(\phi_2) A_{FB} - (EI)_B \sin(\phi_2) B_{FB} \\ - \frac{k_{I,B}}{k_{FB}^3} (EA_T)_B \cos(\phi_2) P_{LB} = -j(EA_T)_A \frac{k_{LA}}{k_{FB}^3} \bar{P}_{LA} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} -j(EI)_A \frac{k_{FA}^3}{k_{FB}^3} C_{FA} + (EI)_A \frac{k_{FA}^3}{k_{FB}^3} D_{FA} - j(EI)_B \cos(\phi_2) A_{FB} + (EI)_B \cos(\phi_2) B_{FB} \\ - j(EA)_B \frac{k_{LB}}{k_{FB}^3} \sin(\phi_2) P_{LB} = -j(EI)_A \frac{k_{FA}^3}{k_{FB}^3} \bar{A}_{FA} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$(EI)_A \frac{k_{FA}^2}{k_{FB}^2} C_{FA} - (EI)_A \frac{k_{FA}^2}{k_{FB}^2} D_{FA} - (EI)_B A_{FB} + (EI)_B B_{FB} = -(EI)_A \frac{k_{FA}^2}{k_{FB}^2} \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.49})$$

$$j \frac{k_{FA}}{k_{FB}} C_{FA} + \frac{k_{FA}}{k_{FB}} D_{FA} + j A_{FB} + B_{FB} = j \frac{k_{FA}}{k_{FB}} \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.50})$$

$$-Q_{LA} - \sin(\phi_2) A_{FB} - \sin(\phi_2) B_{FB} + \cos(\phi_2) P_{LB} = \bar{P}_{LA} \quad (\text{A.51})$$

e

$$-C_{FA} - D_{FA} + \cos(\phi_2) A_{FB} + \cos(\phi_2) B_{FB} + \sin(\phi_2) P_{LB} = \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.52})$$

Portanto, as amplitudes complexas desconhecidas são determinadas numericamente para um dado material e propriedades geométricas das vigas. Em seguida, os coeficientes de transmissão e reflexão são calculados a partir das amplitudes complexas. Para isso, considera-se que a estrutura ao ser excitada por uma onda incidente transversal de amplitude \bar{A}_{FA} , a outra onda incidente longitudinal de amplitude \bar{P}_{LA} é considerada zero. E quando a estrutura é excitada por uma onda incidente longitudinal de amplitude \bar{P}_{LA} , a outra onda incidente transversal de amplitude \bar{A}_{FA} é considerada zero. Assim, a partir das expressões dos fluxos de energias médios no tempo representadas pelas equações A.11 e A.32, as expressões dos coeficientes de transmissão e reflexão são deduzidas. Portanto, as expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga B , devido a uma onda incidente transversal na viga A são:

$$\tau_{FFAB} = \frac{(EI)_B k_{FB}^3 |A_{FB}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.53})$$

$$\tau_{FLAB} = \frac{\frac{1}{2}(EA_T)_B k_{LB} |P_{LB}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.54})$$

As expressões dos coeficientes de reflexão longitudinal e transversal na viga A , devido a uma onda incidente transversal na viga A são:

$$r_{FFAA} = \frac{|C_{FA}|^2}{|\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.55})$$

$$r_{FLAA} = \frac{\frac{1}{2}(EA_T)_A k_{LA} |Q_{LA}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.56})$$

As expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga B , devido a uma onda incidente longitudinal na viga A são:

$$\tau_{LLAB} = \frac{(EA_T)_B k_{LB} |P_{LB}|^2}{(EA_T)_A k_{LA} |\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.57})$$

$$\tau_{LFAB} = \frac{(EI)_B k_{FB}^3 |A_{FB}|^2}{\frac{1}{2}(EA_T)_A k_{LA} |\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.58})$$

As expressões dos coeficientes de reflexão longitudinal e transversal na viga A , devido a uma onda incidente longitudinal na viga A são:

$$r_{LFAA} = \frac{(EI)_A k_{FA}^3 |C_{FA}|^2}{\frac{1}{2}(EA_T)_A k_{LA} |\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.59})$$

$$r_{LLAA} = \frac{|Q_{LA}|^2}{|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.60})$$

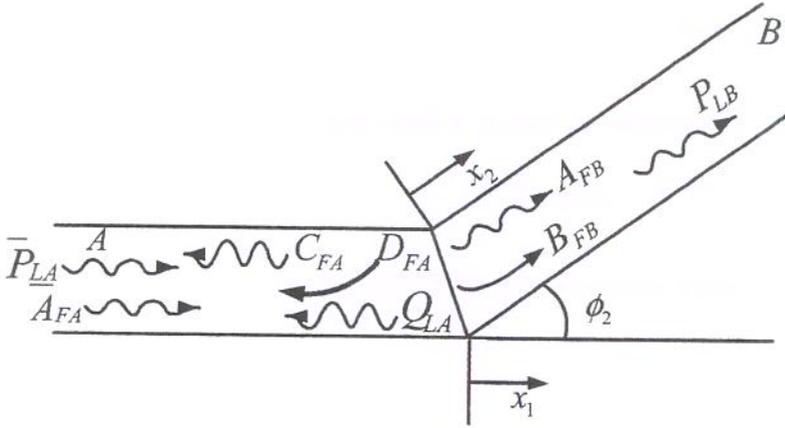


Figura A.3: Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) e transversal (\bar{A}_{FA}) incidentes sobre a junta.

A.4 Coeficientes de transmissão e reflexão para um sistema de vigas ramificadas

Três vigas semi-infinitas de materiais, e ou, propriedades geométricas diferentes, estão acopladas em um ângulo arbitrário em $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Os ângulos são medidos a partir da linha neutra da viga A no sentido anti-horário, como mostra a figura A.4. Ambas as ondas transversais e longitudinais podem ser incidentes sobre a junta a partir da viga A . Quando a onda transversal de amplitude, \bar{A}_{FA} , ou a onda longitudinal de amplitude, \bar{P}_{LA} , incide sobre a junta, ondas transversais e longitudinais (refletidas e transmitidas) são geradas em cada uma das três vigas semi-infinitas. Portanto, o deslocamento transversal na viga A é dado por:

$$v_A(x_1) = \bar{A}_{FA}e^{-jk_{FA}x_1} + C_{FA}e^{jk_{FA}x_1} + D_{FA}e^{k_{FA}x_1} \quad (\text{A.61})$$

O deslocamento longitudinal na viga A é dado por:

$$u_A(x_1) = \bar{P}_{LA}e^{-jk_{LA}x_1} + Q_{LA}e^{jk_{LA}x_1} \quad (\text{A.62})$$

O deslocamento transversal na viga B é dado por:

$$v_B(x_2) = A_{FB}e^{-jk_{FB}x_2} + B_{FB}e^{-k_{FB}x_2} \quad (\text{A.63})$$

O deslocamento longitudinal na viga B é dado por:

$$u_B(x_2) = P_{LB} e^{-jk_{LB}x_2} \quad (\text{A.64})$$

O deslocamento transversal na viga C é dado por:

$$v_B(x_3) = A_{FC} e^{-jk_{FC}x_3} + B_{FC} e^{-k_{FC}x_3} \quad (\text{A.65})$$

O deslocamento longitudinal na viga C é dado por:

$$u_C(x_3) = P_{LC} e^{-jk_{LC}x_3} \quad (\text{A.66})$$

Na junta, nove condições de equilíbrio são necessárias para determinar as seguintes amplitudes complexas desconhecidas: C_{FA} , D_{FA} , Q_{LA} , A_{FB} , B_{FB} , P_{LB} , A_{FC} , B_{FC} e P_{LC} . Três condições de contorno estabelecem o equilíbrio de forças horizontais e verticais, e do momento sobre a junta. A convenção positiva de sinais para o momento e as forças estão representadas na figura 2.7. A primeira das nove condições de equilíbrio, na junta, é dado pela soma das forças na direção horizontal:

$$-F_A + F_B \cos(\phi_2) + F_C \cos(\phi_3) - V_B \sin(\phi_2) - V_C \sin(\phi_3) = 0 \quad (\text{A.67})$$

sendo que, F_A , F_B e F_C são forças axiais na viga A , B e C , respectivamente. V_B e V_C são forças cortantes na viga B e C . A expressão para força axial é dada pela equação A.3 no apêndice A.1, e as expressões para o momento e força cortante são representadas pelas equações A.18 e A.19, respectivamente, no apêndice A.2.

A segunda é representada pela soma das forças na direção vertical:

$$-V_A + F_B \sin(\phi_2) + F_C \sin(\phi_3) + V_B \cos(\phi_2) + V_C \cos(\phi_3) = 0 \quad (\text{A.68})$$

A terceira é dada pela relação de equilíbrio de momento sobre a junta:

$$-M_A + M_B + M_C = 0 \quad (\text{A.69})$$

sendo que, M_A , M_B e M_C são os momentos na viga A , B e C , respectivamente. Outras quatro condições de equilíbrio sobre a junta são de continuidade de deslocamento. Duas impõem a continuidade de deslocamento axial e as outras duas, transversal. A continuidade de deslocamento axial entre as vigas A e B , e A e C são representadas pelas relações:

$$u_A = u_B \cos(\phi_2) - v_B \sin(\phi_2) \quad (\text{A.70})$$

$$u_A = u_3 \cos(\phi_3) - v_C \sin(\phi_3) \quad (\text{A.71})$$

A continuidade de deslocamento transversal entre as vigas A e B , e A e C são representadas pelas relações:

$$v_A = u_B \sin(\phi_2) + v_B \cos(\phi_2) \quad (\text{A.72})$$

$$v_A = u_3 \sin(\phi_3) + v_C \cos(\phi_3) \quad (\text{A.73})$$

As duas últimas condições de equilíbrio são representadas pela continuidade de rotação:

$$\frac{dv_A}{dx_1} = \frac{dv_B}{dx_2} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{dv_A}{dx_1} = \frac{dv_C}{dx_3} \quad (\text{A.75})$$

A aplicação das nove condições de equilíbrio na junta, resulta em um sistema de equações:

$$\begin{aligned} & -j(EA_T)_A k_{LA} Q_{LA} + j(EI)_B k_{FB}^3 \sin(\phi_2) A_{FB} - (EI)_B k_{FB}^3 \sin(\phi_2) B_{FB} - jk_{LB} (EA_T)_B \cos(\phi_2) P_{LB} \\ & + j(EI)_C k_{FC}^3 \sin(\phi_3) A_{FC} - (EI)_C k_{FC}^3 \sin(\phi_3) B_{FC} - jk_{LC} (EA_T)_C \cos(\phi_3) P_{LC} = -j(EA_T)_A k_{LA} \bar{P}_{LA} \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} & -j(EI)_A k_{FA}^3 C_{FA} + (EI)_A k_{FA}^3 D_{FA} - j(EI)_B k_{FB}^3 \cos(\phi_2) A_{FB} + (EI)_B k_{FB}^3 \cos(\phi_2) B_{FB} \\ & - j(EA_T)_B k_{LB} \sin(\phi_2) P_{LB} - j(EI)_C k_{FC}^3 \cos(\phi_3) A_{FC} + (EI)_C k_{FC}^3 \cos(\phi_3) B_{FC} \\ & - j(EA_T)_C k_{LC} \sin(\phi_3) P_{LC} = -j(EI)_A k_{FA}^3 \bar{A}_{FA} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

$$\begin{aligned} & (EI)_A k_{FA}^2 C_{FA} - (EI)_A k_{FA}^2 D_{FA} - (EI)_B k_{FB}^2 A_{FB} + (EI)_B k_{FB}^2 B_{FB} \\ & - (EI)_C k_{FC}^2 A_{FC} + (EI)_C k_{FC}^2 B_{FC} = -(EI)_A k_{FA}^2 \bar{A}_{FA} \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

$$j \frac{k_{FA}}{k_{FB}} C_{FA} + \frac{k_{FA}}{k_{FB}} D_{FA} + j A_{FB} + B_{FB} = j \frac{k_{FA}}{k_{FB}} \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.79})$$

$$j \frac{k_{FA}}{k_{FC}} C_{FA} + \frac{k_{FA}}{k_{FC}} D_{FA} + j A_{FC} + B_{FC} = j \frac{k_{FA}}{k_{FC}} \bar{A}_{FA} \quad (\text{A.80})$$

$$\sin(\phi_2)A_{FB} + \sin(\phi_2)B_{FB} + Q_{LA} - \cos(\phi_2)P_{LB} = -\bar{P}_{LA} \quad (\text{A.81})$$

$$C_{FA} + D_{FA} - \cos(\phi_2)A_{FB} - \cos(\phi_2)B_{FB} - \sin(\phi_2)P_{LB} = -\bar{A}_{FA} \quad (\text{A.82})$$

$$\sin(\phi_3)A_{FC} + \sin(\phi_3)B_{FC} + Q_{LA} - \cos(\phi_3)P_{LC} = -\bar{P}_{LA} \quad (\text{A.83})$$

e

$$C_{FA} + D_{FA} - \cos(\phi_3)A_{FC} - \cos(\phi_3)B_{FC} - \sin(\phi_3)P_{LC} = -\bar{A}_{FA} \quad (\text{A.84})$$

Portanto, as amplitudes complexas desconhecidas são determinadas numericamente para um dado material e propriedades geométricas das vigas. Em seguida, seis coeficientes de transmissão e reflexão para uma onda incidente transversal e outros seis para uma onda incidente longitudinal são calculados a partir das amplitudes complexas. Para isso, considera-se que a estrutura ao ser excitada por uma onda incidente transversal de amplitude \bar{A}_{FA} , a outra onda incidente longitudinal de amplitude \bar{P}_{LA} é considerada zero. E quando a estrutura é excitada por uma onda incidente longitudinal de amplitude \bar{P}_{LA} , a outra onda incidente transversal de amplitude \bar{A}_{FA} é considerada zero. Assim, a partir das expressões dos fluxos de energias médios no tempo representadas pelas equações A.11 e A.32, as expressões dos coeficientes de transmissão e reflexão são deduzidas. Portanto, as expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga B , devido a uma onda incidente transversal na viga C são:

$$\tau_{FFAC} = \frac{(EI)_C k_{FC}^3 |A_{FC}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.85})$$

$$\tau_{FLAC} = \frac{\frac{1}{2}(EA_T)_C k_{LC} |P_{LC}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.86})$$

As expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga B , devido a uma onda incidente transversal na viga A são:

$$\tau_{FFAB} = \frac{(EI)_B k_{FB}^3 |A_{FB}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.87})$$

$$\tau_{FLAB} = \frac{\frac{1}{2}(EA_T)_B k_{LB} |P_{LB}|^2}{(EI)_A k_{FA}^3 |\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.88})$$

As expressões dos coeficientes de reflexão longitudinal e transversal na viga A , devido a uma onda incidente transversal na viga A são:

$$r_{FFAA} = \frac{|C_{FA}|^2}{|\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.89})$$

$$r_{FLAA} = \frac{\frac{1}{2}(EA_T)_{AK_{LA}}|Q_{LA}|^2}{(EI)_{AK_{FA}^3}|\bar{A}_{FA}|^2} \quad (\text{A.90})$$

As expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga C , devido a uma onda incidente longitudinal na viga A são:

$$\tau_{LFAC} = \frac{(EI)_{CK_{FC}^3}|A_{FC}|^2}{\frac{1}{2}(EA_T)_{AK_{LA}}|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.91})$$

$$\tau_{LLAC} = \frac{(EA_T)_{CK_{LC}}|P_{LC}|^2}{(EA_T)_{AK_{LA}}|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.92})$$

As expressões dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal na viga B , devido a uma onda incidente longitudinal na viga A são:

$$\tau_{LFAB} = \frac{(EI)_{BK_{FB}^3}|A_{FB}|^2}{\frac{1}{2}(EA_T)_{AK_{LA}}|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.93})$$

$$\tau_{LLAB} = \frac{(EA_T)_{BK_{LB}}|P_{LB}|^2}{(EA_T)_{AK_{LA}}|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.94})$$

As expressões dos coeficientes de reflexão longitudinal e de flexão na viga A , devido a uma onda incidente longitudinal na viga A são:

$$r_{LLAA} = \frac{|Q_{LA}|^2}{|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.95})$$

$$r_{FLAA} = \frac{(EI)_{AK_{FA}^3}|C_{FA}|^2}{\frac{1}{2}(EA_T)_{AK_{LA}}|\bar{P}_{LA}|^2} \quad (\text{A.96})$$

Para ondas incidentes longitudinais e transversais na viga B e C , são obtidas expressões similares para os coeficientes de transmissão e reflexão através da substituição dos índices B e C . Wohlever (1988) apresentou outras expressões dos coeficientes de transmissão e reflexão, para casos de juntas que não foram utilizadas nesta tese.

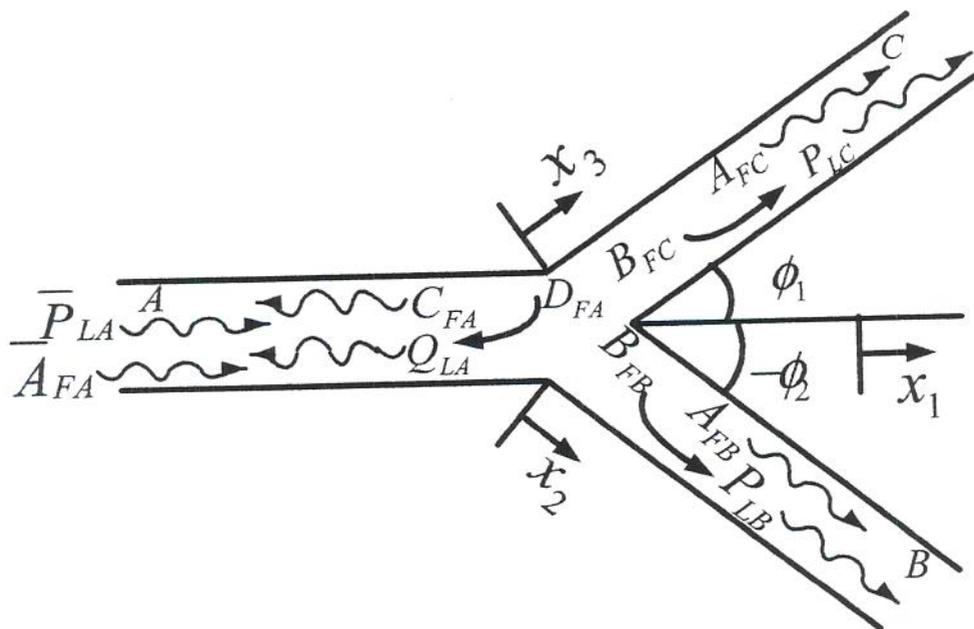


Figura A.4: Ondas transversais transmitidas e refletidas devido a uma onda longitudinal (\bar{P}_{LA}) e transversal (\bar{A}_{FA}) incidentes sobre a junta da viga A.

Apêndice B

Método dos elementos espectrais

Atualmente, o interesse na utilização de novos métodos na modelagem do comportamento dinâmico de estruturas em altas frequências tem aumentado. Uma técnica muito utilizada, mas que não é viável nessa faixa de frequência é o FEM, isto porque, o comprimento de onda λ de vibração decresce com o aumento da frequência. Portanto, para modelar o comportamento dinâmico de estruturas nessa faixa de frequência através do FEM deve-se aumentar a ordem das funções de formas (interpolação) ou melhorar o refinamento da malha. Uma consequência dessas medidas seria o alto custo computacional. O FEM assume que todos os parâmetros envolvidos no problema são bem conhecidos, e a solução não é extremamente sensível a variações típicas desses parâmetros para as análises em baixa frequência. Enquanto que, para as análises em altas frequências, os parâmetros requeridos tornam-se altamente incertos e a solução é extremamente sensível às variações desses parâmetros, (Wohlever e Bernhard, 1992).

Uma técnica utilizada para contornar essas dificuldades é o método dos elementos espectrais (SEM). SEM é aplicado no modelamento de estruturas em altas frequências, porque ele representa a solução exata da equação da onda, ou seja, não existe aproximação implícita na discretização, como no caso do FEM. Esta característica permite o modelamento de grandes estruturas com um elemento sem perder a precisão. Assim, SEM é interpretado como uma maneira sistemática de resolver a equação da onda. Entretanto, o SEM ainda não tem sido expandido para diversos tipos de problemas, como no FEM. As soluções disponíveis na literatura incluem pórticos, (Doyle, 1997), algumas membranas simétricas e casca, placas simplesmente apoiadas ao longo de dois contornos paralelos, (Lee e Lee, 1999), placas dobradas, (Danial *et al.*, 1996), e placas reforçadas por vigas, (Donadon *et al.*, 2004).

Nesta tese, foi utilizada como referência para os casos estudados, a formulação do SEM aplicada à estrutura do tipo pórtico. Estudos realizados com esse tipo de estrutura podem

ser encontrados em Ahmida (2001).

Os elementos utilizados no modelamento do comportamento dinâmico das estruturas estudadas obedecem às equações de movimento de barra e viga, respectivamente:

$$E_c A_T \frac{d^2 u}{dx^2} - \rho A_T \frac{d^2 u}{dt^2} = F \quad (\text{B.1})$$

$$E_c I \frac{d^4 v}{dx^4} - \rho A_T \frac{d^2 v}{dt^2} = F \quad (\text{B.2})$$

O módulo de elasticidade complexo é dado por:

$$E_c = E(1 + j\eta)$$

- $E_c A_T$: é a rigidez axial complexa;

- $E_c I$: é a rigidez transversal complexa;

- ρA_T : é a densidade por unidade de comprimento;

- η : é o fator de amortecimento estrutural.

A formulação do SEM será desenvolvida para um elemento de barra de dois nós, como mostra a figura B.1.

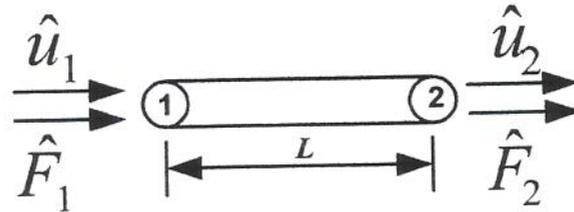


Figura B.1: Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra.

Para estado de regime permanente, e utilizando uma representação espectral de deslocamento,

$$u(x, t) = \sum_n \hat{u}_n(x_n, \omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (\text{B.3})$$

tem-se a equação de movimento na forma espectral:

$$E_c A_T \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \omega^2 \rho A_T \hat{u} = 0 \quad (\text{B.4})$$

A equação B.4 tem uma solução exponencial harmônica e^{-jkx} , que resulta em uma representação geral do deslocamento longitudinal, para um elemento de comprimento L:

$$u(x) = Pe^{-jkx} + Qe^{-jk(L-x)} \quad (\text{B.5})$$

As constantes P e Q são determinadas pelas condições de contorno, e k é o número de onda. Os valores do deslocamento nas extremidades de um elemento com dois nós, figura B.1, são dados por:

$$\hat{u}(0) \equiv \hat{u}_1 = P + Q \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{u}(L) \equiv \hat{u}_2 = Pe^{-jkL} + Qe^{jkL} \quad (\text{B.7})$$

Escrevendo-se as equações B.6 e B.7 na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jkL} & e^{jkL} \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Os valores da força axial, equação A.3, nas extremidades de um elemento com dois nós, figura B.1, são dados por:

$$\hat{F}(0) \equiv -\hat{F}_1 = E_c A_T (-jkP - jkQ) \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{F}(L) \equiv \hat{F}_2 = E_c A_T (-jkPe^{-jkL} + jkQe^{jkL}) \quad (\text{B.10})$$

Escrevendo-se as equações B.9 e B.10 na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = E_c A_T \underbrace{\begin{bmatrix} jk & -jk \\ -jke^{-jkL} & jke^{jkL} \end{bmatrix}}_{[G]} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Reescrevendo-se a equação B.8 em termos dos coeficientes P e Q :

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

e substituindo-se a equação B.12 em B.11:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F} \end{Bmatrix} = \underbrace{E_c A_T [G] [R]^{-1}}_{[K(\omega)]} \begin{Bmatrix} \hat{u} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

sendo que $[K(\omega)]$ é a matriz elementar de rigidez dinâmica para o elemento de barra. Esta matriz é uma função dependente da frequência, simétrica e geralmente complexa. Esta matriz exibe uma faixa dinâmica muito grande, ou seja, $[K(\omega)]$ seria a mesma tanto para um elemento, quanto para vários elementos espectrais. Pode-se provar também que este elemento espectral corresponde a um número infinito de elementos finitos, (Ahmida, 2001). Nesta tese, também utilizaram-se elementos do tipo viga de Bernoulli-Euler, que juntamente com elemento de barra foram aplicados na modelagem das estruturas estudadas. A formulação de SEM para viga é similar à de barra e pode ser encontrada em Doyle (1997).

B.1 Interpolações pelo Método dos Elementos Espectrais

De uma forma geral, a determinação das densidades e dos fluxos de energias médios totais e parciais para os casos simulados e experimentais seguem um procedimento que consiste em fazer interpolações utilizando-se as funções de resposta em frequência (FRFs) de deslocamento (simuladas ou experimentais). As FRFs de deslocamento simuladas (receptâncias) são obtidas aplicando-se as condições de contorno ($F(x_1) = 1$ e $F(x_2) = 0$) na equação B.13. Nos casos experimentais, as FRFs de acelerações medidas (inertância) ao longo da estruturas, são integradas duas vezes, obtendo-se as FRFs de deslocamentos experimentais. Em seguida, esses dados (FRFs de deslocamentos simuladas ou experimentais) são introduzidos na solução espectral (equação 2.8 no caso de barra), montando-se assim um sistema linear de equações. Esse sistema é resolvido para os coeficientes da própria solução espectral, que são utilizados para montar novamente a solução. Finalmente, a partir da solução analítica obtida da interpolação das FRFs de deslocamento simuladas ou experimentais por SEM, pode-se determinar as derivadas que serão utilizadas nas expressões das densidades e dos fluxos de energias exatas. Essas expressões são dadas por:

$$\langle e \rangle_F = \frac{1}{4}EI \left\{ \frac{d^2\widehat{v}}{dx^2} \frac{d^2\widehat{v}^*}{dx^2} \right\} + \frac{1}{4}\rho A_T \left\{ \frac{dv}{dt} \frac{dv^*}{dt} \right\} \quad (\text{B.14})$$

$$\langle q \rangle_F = \frac{1}{2}EI \text{Re} \left\{ \frac{d^3\widehat{v}}{dx^3} \frac{d\widehat{v}^*}{dt} - \frac{d^2\widehat{v}}{dx^2} \frac{d^2v^*}{dx dt} \right\} \quad (\text{B.15})$$

$$\langle e \rangle_L = \frac{1}{4}E A_T \left\{ \frac{d\widehat{u}}{dx} \frac{d\widehat{u}^*}{dx} \right\} + \frac{1}{4}\rho A_T \left\{ \frac{du}{dt} \frac{du^*}{dt} \right\} \quad (\text{B.16})$$

$$\langle q \rangle_L = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -EA_T \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{du^*}{dt} \right\} \quad (\text{B.17})$$

Sendo que:

$-\langle e \rangle_F$: é a densidade de energia média temporal devido a ondas transversais;

$-\langle e \rangle_L$: é a densidade média temporal devido a ondas longitudinais;

$-\langle q \rangle_F$: é o fluxo de energia médio temporal devido a ondas transversais;

$-\langle q \rangle_L$: é o fluxo de energia médio temporal devido a ondas longitudinais;

$-\frac{d\hat{v}^*}{dt}$: é o conjugado complexo da velocidade transversal;

$-\frac{d^2\hat{v}^*}{dxdt}$: é o conjugado complexo da velocidade angular;

A convenção de sinais utilizada para dedução das densidades de energia e fluxo de energia para ondas transversais e longitudinais pode ser vista na figura 2.7.

A primeira e segunda parcela das equações B.14 e B.16 são referidas como densidade de energia potencial média temporal e densidade de energia cinética média temporal, respectivamente. As equações B.15 e B.17 são referidas como sendo o fluxo de energia médio temporal para ondas transversais longitudinais.

A média em frequência da densidade e do fluxo de energia são obtidas utilizando as seguintes relações:

$$\langle e \rangle = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \langle e \rangle d\omega \quad (\text{B.18})$$

$$\langle q \rangle = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \langle q \rangle d\omega \quad (\text{B.19})$$

Apêndice C

Análise Estatística de Energia (SEA)

O interesse em identificar os caminhos de transmissão de vibração em sistemas dinâmicos vem da necessidade de prever os níveis de vibração estrutural em altas densidades modais. Um dos principais métodos utilizado na previsão de vibração em altas frequências é a Análise Estatística de Energia (SEA), que foi originalmente proposto por Lyon (1975) em 1960. SEA estima a distribuição de energia em uma estrutura, que é representada em termos de um conjunto de sub-sistemas conectados (grupos de modos similares em termos de propriedades energéticas). Cada sub-sistema tem uma quantidade de energia vibracional armazenada que é relacionada com a potência injetada através de alguns parâmetros conhecidos, tais como fator de perda por acoplamento ("Coupling Loss Factor - (CLFs)") e o fator de amortecimento interno. Caso os CLFs e o fator de amortecimento interno não sejam conhecidos ou tenham que ser verificados como uma proposta de confirmação de alguma técnica de previsão, então, pode ser desejável medi-los em uma estrutura (Bies e Hamid, 1980). Uma maneira de se fazer isso é medir os níveis de energia devido a diferentes potências injetadas em muitos pontos da estrutura. Portanto, para um grande número de potências injetadas aplicadas em uma estrutura, um sistema linear de equações é obtido. Esse sistema pode ser invertido para que se possa determinar os CLFs e os fatores de amortecimento interno. Esse enfoque é denominado por Método da Potência Injetada (PIM), e foi aplicado para o caso da viga T . Em seguida, os CLFs e fatores de amortecimento interno obtidos pelo o PIM são comparados às expressões analíticas apresentadas por Cremer e Heckl (1988).

As equações básicas de SEA expressam o balanço de energia dos diferentes sub-sistemas do modelo. Alguns sub-sistemas têm a potência injetada diretamente de uma fonte independente, por exemplo, uma força de excitação sobre um ramo da estrutura. De uma forma geral, os sub-sistemas recebem potência de fontes externas, dissipam potência devido ao fator de amortecimento interno e trocam energia com outros sub-sistemas acoplados. Portanto,

para um subsistema i conectado a muitos sub-sistemas j , a equação de balanço de potência pode ser escrita como:

$$P_{in}^i = P_{diss}^i + \sum_{j \neq i} P_{trans}^{ij} \quad (C.1)$$

sendo que:

- P_{in}^i : é a potência injetada em um sub-sistema i de uma fonte externa;
- P_{diss}^i : é a potência dissipada dentro do sub-sistema i pelo amortecimento interno;
- P_{trans}^{ij} : é o fluxo líquido de potência transferido do sub-sistema i para o sub-sistema j através do acoplamento dinâmico.

Deve ser salientado que as componentes de potência (P_{in}^i , P_{diss}^i e P_{trans}^{ij}) são quantidades médias-temporais, e a estrutura está em estado de regime permanente. A potência dissipada interna é usualmente calculada por:

$$P_{diss}^i = \omega \eta_i E_i \quad (C.2)$$

sendo que:

- ω : é a frequência central da banda de interesse;
- η : é o fator de amortecimento interno;
- E_i : é a energia média temporal armazenada no sub-sistema i .

A parcela correspondente à potência transferida é calculada por:

$$P_{trans}^{ij} = \omega \eta_{ij} N_i \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right) \quad (C.3)$$

sendo que:

- ω : é a frequência central da banda de interesse;
- η_{ij} : é o fator de perda por acoplamento entre o sub-sistema i e j ;
- $\frac{E_i}{N_i}$: é a energia modal (energia do sub-sistema i dividido pelo número de modos do sub-sistema i).

Escrevendo-se a C.1 na forma matricial:

$$\{P\} = \omega[\eta] \{E\} \quad (C.4)$$

sendo que:

- $\{P\}$: é o vetor de potência injetada para o sub-sistema i ;
- E : é o vetor de energia do sub-sistema i ;
- $[\eta]$: é a matriz que depende da frequência e dos parâmetros: fatores de perda por acoplamento, fatores de amortecimento interno e a densidade modal.

Como foi mencionado, o objetivo é determinar os fatores de perda por acoplamento e os fatores de amortecimento interno. Para isso, será utilizado o Método da Potência Injetada (PIM) que representa a forma inversa da SEA. Assim, escrevendo C.4 em função dos CLFs:

$$\{\eta\} = \frac{1}{\omega}[E]^{-1} \{P\} \quad (C.5)$$