

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA Tese DEFENDIDA POR Heraldo Nélio
Cambráia E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 27 11 90.

Prof. Dr. Roberto de Aguiar
ORIENTADOR

DETECÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES EM SISTEMAS
MECÂNICOS

Heraldo Nélio Cambráia 343

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos
para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

031/90

Campinas

- 1990 -

031/90

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

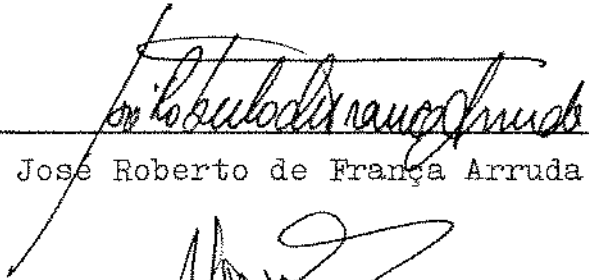
Tese de: Mestrado

Título da Tese: Detecção e caracterização de não linearidades em sistemas mecânicos

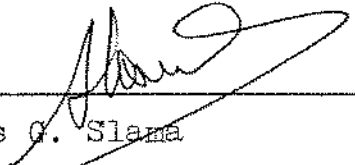
Autor: Heraldo Nélcio Cambraia

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

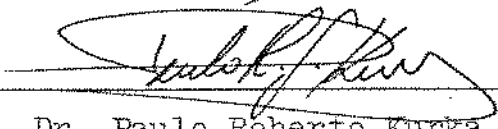
Aprovado por:



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda Presidente



Prof. Dr. Jules G. Slama



Prof. Dr. Paulo Roberto Kurka

Campinas, 27 de novembro de 1990.

Aos meus pais

INDICE

	Página
AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - DETECÇÃO DE NÃO LINEARIDADES DE UM SISTEMA A PARTIR DA TRANSFORMADA DE HILBERT DA FUN- ÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	7
2.1 - TRANSFORMADA DE HILBERT E SISTEMAS LI- NEARES	7
2.2 - TRANSFORMADA DE HILBERT E SISTEMAS NÃO LINEARES	15
2.3 - APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE HILBERT PA- RA DETECÇÃO DE NÃO LINEARIDADES DE SISTEMAS	19
CAPÍTULO 3 - MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO AS SÉRIES DE VOLTERRA E WIENER	30
3.1 - SÉRIE DE VOLTERRA E A REPRESENTAÇÃO DA ENTRADA/SAÍDA NO DOMÍNIO DO TEMPO	30
3.2 - REPRESENTAÇÃO DA ENTRADA/SAÍDA NO DOMÍ- NIO DA FREQUÊNCIA	33
3.3 - SÉRIE DE WIENER. FUNCIONAIS DE WIENER	34
3.4 - SÉRIE DE WIENER E A REPRESENTAÇÃO DA EN- TRADA/SAÍDA NO DOMÍNIO DO TEMPO	37

CAPÍTULO 4 - MODELAGEM QUADRÁTICA DE SISTEMAS	
NÃO LINEARES	39
4.1 - MODELO NÃO LINEAR QUADRÁTICO	40
4.2 - CÁLCULO DAS FRFs UTILIZANDO TÉCNICAS DE	
ANÁLISES ESPECTRAL E BIESPECTRAL	43
4.3 - CÁLCULO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FRE-	
QUÊNCIA $H_2(\omega_i, \omega_j)$	46
4.4 - APLICAÇÃO DA MODELAGEM QUADRÁTICA EM SIS-	
TEMAS NÃO LINEARES	51
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTU-	
ROS TRABALHOS	66
APÊNDICE A - OPERADOR DE VOLTERRA DE P-ÉSIMA OR-	
DEM	69
APÊNDICE B - FUNCIONAIS DE WIENER	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. José R.F. Arruda pela orientação e o valioso estímulo que me tem dispensado;

Aos amigos da FEM e do IMECC, em particular aos colegas do curso de mestrado da FEM e aos professores que contribuíram na minha formação acadêmica;

À Ruth pela amizade e colaboração oportuna em uma das etapas da elaboração deste trabalho;

Ao laboratório de computação do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP) onde realizei parte das simulações apresentas;

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um método para detectar a presença de não linearidades em sistemas físicos e a implementação da modelagem não linear quadrática no domínio da frequência.

O método de detecção consiste em comparar a função de resposta em frequência (FRF) do sistema, estimado por varredura senoidal, com sua transformada de Hilbert (TH). Se a FRF for igual sua TH o sistema é linear, caso contrário ele é não linear.

A implementação da modelagem quadrática conta com a ajuda das análises espectral e bi-espectral para o cálculo das funções de resposta a frequência linear e quadrática. Este modelo é não paramétrico.

São realizadas simulações numéricas de alguns sistemas não lineares para ilustrar a aplicação destas técnicas implementadas.

ABSTRACT

This work presents a method for the detection of non-linearities in a physically realizable system based on the Hilbert transform and the implementation of the quadratic mathematical model in the frequency domain. This model is non-parametric, based on the Volterra and Wiener series and uses the spectral and biespectral analysis to obtain the frequency response function. Some non-linear systems are simulated to illustrate the use and validity of the presented techniques.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico da maioria dos sistemas mecânicos, tratados no domínio da frequência, é descrito por modelos lineares [1,2]. A implementação deste tipo de modelagem requer a estimação das funções de resposta em frequência (FRFs). No entanto, muitas vezes os parâmetros estimados de um dado sistema (tais como frequência natural, fator de amortecimento, rigidez, etc) modelado linearmente apresentam erros. É sabido também que as curvas das FRFs calculadas a partir deste tipo de modelagem apresentam desvios quando comparadas com as obtidas experimentalmente. Esta falta de coerência entre os resultados reais e os estimados utilizando a modelagem linear é frequentemente atribuída à presença de não linearidades no sistema.

Assim, em análise modal e nas diversas áreas onde aplicam-se estes modelos é interessante ao dinamicista saber se o sistema em questão pode realmente ser considerado linear ou não. Então, todo teste modal, por exemplo, pode ter como um primeiro estágio a verificação da linearidade do sistema. Caso for detectada alguma não linearidade, o segundo estágio pode consistir na sua linearização, ou na implementação de modelos não lineares para identificação dos efeitos não lineares presentes no mesmo. Este possível procedimento, que pode ser adotado especificamente nos testes modais em sistemas nos quais suspeita-se da existência de não linearidades, é ilustrado na figura (1.1).

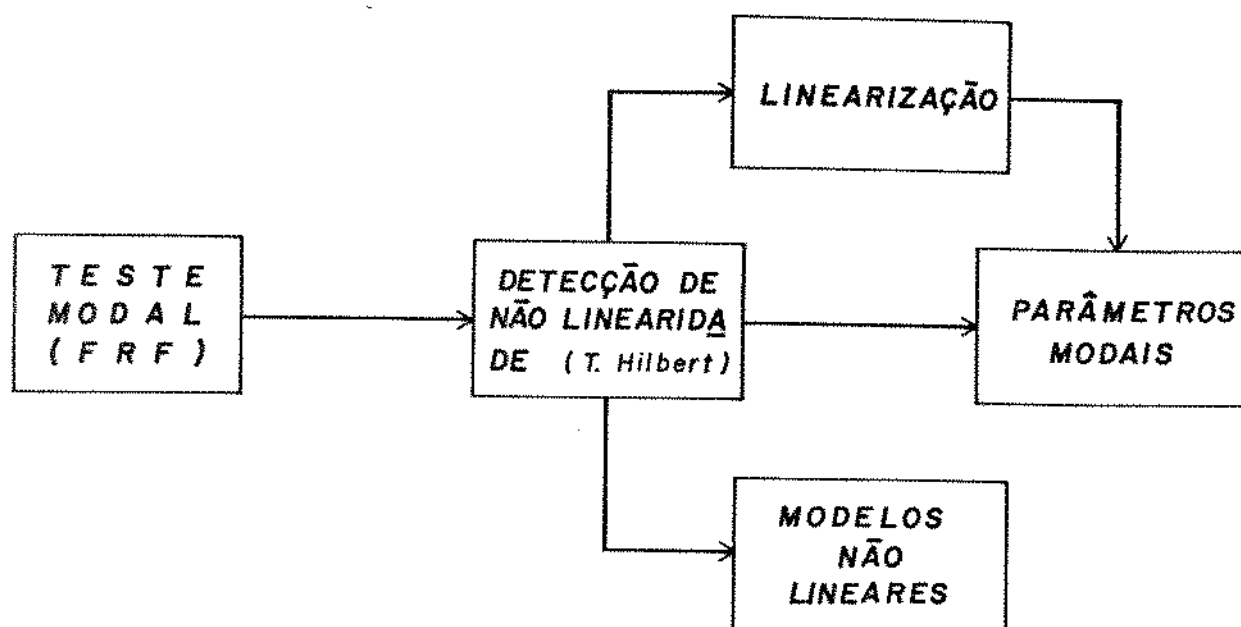


Figura (1.1)– Procedimento para testes modais considerando a presença de não linearidades no sistema.

Um método bastante eficaz na realização da detecção de não linearidades (ou a verificação da linearidade) em sistemas físicos é baseado em uma versão da transformada de Hilbert (TH) aplicada às FRFs do sistema analisado. A aplicação deste método consiste simplesmente em comparar as FRFs de um sistema obtidas por varredura senoidal, com filtragem na frequência de excitação, com suas THs. Se as FRFs forem iguais às suas THs o sistema é linear, caso contrário garante-se que ele é não linear. A diferença entre uma FRF e sua TH, em sistemas não lineares, ocorre devido a uma não causalidade *artificial* apontada pela resposta ao impulso (RI) quando esta é obtida através da transformada de Fourier inversa (TFI) da FRF (por esta função apresentar uma espécie de distorção pelo fato de ter sido obtida por varredura senoidal). Este assunto é discutido no capítulo 2 deste trabalho.

Os primeiros trabalhos relacionados à descrição das propriedades da TH, evidentemente depois de Hilbert, datam de 1937 com o trabalho de Titchmarsh [3], depois os de Erdelyi, Magnus, Oberhettinger e Tricomi [4]. No período de 1940 até 1970 foram realizados também vários trabalhos envolvendo a TH nas áreas de processamento de sinais [5,6,7,8], eletricidade [9,10], acústica [11], modelagem linear [12,13], etc, porém todos voltados à teoria de sistemas lineares.

As primeiras aplicações da TH em sistemas não lineares (para detecção de não linearidade em sistemas mecânicos) surgiram na década de 1980 pelas equipes dos professores Tomlinson [14,15] e Vinh [16].

Uma vez detectada a presença da não linearidade têm-se duas alternativas: uma consiste na linearização das FRFs (quando o sistema for fracamente não linear); e outra na implementação de modelos não lineares.

Realizada a linearização pode-se, a seguir, proceder à estimação dos parâmetros modais do sistema a partir das FRF's linearizadas como indica o procedimento mostrado na figura (1.1).

Com relação à modelagem não linear, existem, basicamente, três abordagens para realização da descrição dinâmica, listadas a seguir:

- 1) modelagem não linear paramétrica (nos domínios do tempo ou da frequência),
- 2) modelagem não linear não paramétrica (nos domínios do tempo ou da frequência),

3) abordagem caótica que vem sendo recentemente implementada à luz da teoria de sistemas dinâmicos empregando conceitos da geometria diferencial.

Cada uma destas abordagens distinguem-se pelas ferramentas matemáticas utilizadas e pelas características que o problema apresenta, principalmente o tipo de entrada do sistema. A modelagem não paramétrica vem sendo bastante empregada para descrição de sistemas não lineares com entrada aleatória (através da aplicação da análise poliespectral) [26,40], e a abordagem caótica para sistemas com entrada e/ou saída determinísticas (através da utilização de ferramentas como os expoentes de Lyapunov, dimensão fractal, mapas de Poincaré, etc) [42].

Neste trabalho é discutida a modelagem não paramétrica nos domínios do tempo e da frequência para sistemas com entrada Gaussiana.

O modelo não linear (não paramétrico), no domínio do tempo discutido aqui é uma extensão do linear e baseia-se na série de Volterra (SV). Segundo esta modelagem, a relação entrada/saída de um sistema não linear é dada por uma soma de funcionais- representados por integrais de convolução de primeira ordem e de ordem superior no domínio do tempo- entre a entrada do sistema e os chamados núcleos de Volterra, onde estes núcleos representam respostas ao impulso de primeira ordem e de ordem superior. Os primeiros estudos da teoria de sistemas não lineares no domínio do tempo utilizando a SV foram desenvolvidos por Volterra [17] e Wiener [18] em 1930. Esta teoria pode ser encontrada também em trabalhos mais recentes, como por exemplo, os de Wiener [19], Schetzen [20], Billings [21], Barrett [22], Rugh [23] e outros. Este assunto é

discutido no capítulo 3 deste trabalho.

Existe uma formulação equivalente desta modelagem no domínio da frequência, onde os núcleos de Volterra estão relacionados com as FRFs através da transformada de Fourier (TF) de primeira ordem e de ordem superior. Os efeitos não lineares sobre o sistema podem ser identificados quando determina-se estes núcleos ou as FRFs correspondentes a eles, que teoricamente são infinitos. Então, a caracterização de um sistema não linear está diretamente ligada à determinação destes núcleos ou destas FRFs. Neste trabalho optou-se por realizar esta caracterização no domínio da frequência pela maior facilidade da interpretação dos efeitos não lineares procedendo desta maneira.

Considerando a entrada de um sistema como um processo Gaussiano, é possível obter sua relação entrada/saída, em uma primeira aproximação, por um modelo quadrático no domínio da frequência. Este modelo é chamado quadrático pois requer o cálculo de apenas as FRF's de primeira (linear) e segunda ordens, devido a um truncamento feito no modelo básico utilizado. Este truncamento é realizado por limitações associadas à velocidade e capacidade de memória computacional. As FRFs linear e quadrática são calculadas por meio das análises espectral [38] e biespectral [39].

Então, segundo a modelagem quadrática no domínio da frequência, as FRFs linear e quadrática identificam, respectivamente, o comportamento linear e não linear do sistema.

A formulação deste modelo é baseada nos trabalhos de Tick

[27], Barrett [22] e principalmente de Powers [24,28,41]. As publicações deste último autor são mais atuais (datam da década de 80) e foram bastante utilizadas na elaboração deste trabalho. Esta formulação é apresentada no capítulo 4.

As aplicações deste modelo e da análise biespectral vêm sendo cada vez mais crescentes e podem ser encontradas em várias áreas de investigação científica, como por exemplo, plasmas [24], oceanografia [29,30], geofísica [31], bio-medicina [32] séries temporais em economia [33], mecânica dos fluidos [34] e sistemas mecânicos estruturais [28].

O objetivo deste trabalho é a discussão e implementação das técnicas aqui mencionadas, isto é, a detecção de não linearidades através da utilização da TH, e a implementação da modelagem quadrática no domínio da frequência onde as FRFs são calculadas utilizando as técnicas das análises espectral e biespectral. Sistemas não lineares de um grau de liberdade são simulados numericamente a fim de ilustrar a aplicação destes métodos. Tendo por base os resultados numéricos são feitas algumas considerações sobre a utilização e limitações do modelo não linear quadrático na modelagem da resposta dinâmica para entrada Gaussiana.

CAPÍTULO 2

DETECÇÃO DE NÃO LINEARIDADES DE UM SISTEMA A PARTIR DA TRANSFORMADA
DE HILBERT DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Neste capítulo apresenta-se um método que permite detectar a presença de não linearidades em sistemas físicos a partir de sua Função de Resposta em Frequência (FRF). A aplicação deste método consiste simplesmente em comparar a FRF do sistema; estimada por varredura senoidal, com filtragem em torno da frequência de excitação, com sua Transformada de Hilbert (TH). É mostrado que a utilização desta técnica permite em alguns casos identificar o tipo da não linearidade presente no mesmo. Além disso, este método permite realizar a linearização do sistema, sem o conhecimento prévio de seu modelo matemático. Alguns sistemas com um grau de liberdade com não linearidades conhecidas são simulados numericamente para ilustrar a aplicação deste método.

2.1-TRANSFORMADA DE HILBERT E SISTEMAS LINEARES

A transformada de Hilbert (TH) é usualmente definida na literatura para aplicações sobre funções reais, no entanto, nesta seção, é apresentada uma versão desta transformada para aplicação à FRF (pois esta função é complexa), onde, para sistemas lineares, a TH da FRF é igual a própria FRF.

O fato da FRF de um sistema linear ser igual à sua TH,

constitui a base para a implementação de um método de detecção de não linearidades em sistemas físicos.

A TH de uma função real $f(x)$ é definida como:

$$\mathcal{H} \left\{ f(x) \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{x - \tau} d\tau, \quad (2.1.1)$$

onde $\mathcal{H}$ denota transformada de Hilbert e x a variável independente da função $f(x)$.

A equação (2.1.1) pode também ser escrita como um produto de convolução no domínio x , isto é:

$$\mathcal{H} \left\{ f(x) \right\} = \frac{1}{\pi} \left(f(x) * \frac{1}{x} \right), \quad (2.1.2)$$

onde $*$ denota produto de convolução.

Analizando as equações (2.1.1) ou (2.1.2) percebe-se, que ao contrário da transformada de Fourier (TF), a TH transforma uma função definida em um determinado domínio para este mesmo domínio, vide figura (2.1.1).

A seguir mostra-se a relação existente entre a FRF de um sistema linear e sua TH.

Seja um sistema linear, estável e causal com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, a relação entre $y(t)$ e $x(t)$, no domínio do tempo, é dada pela seguinte integral de convolução (linear):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.1.3)$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso (RI) do sistema.

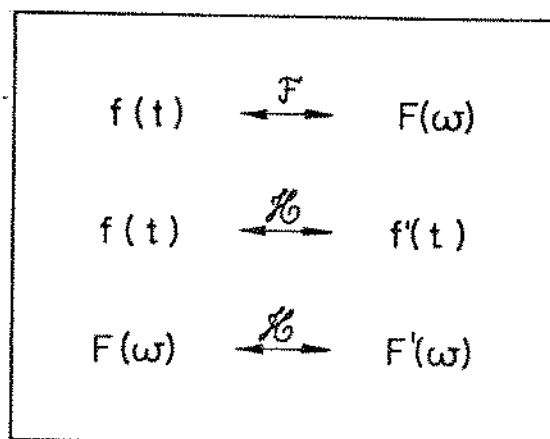


Figura (2.1.1)- Diferença entre a transformada de Fourier ($\mathcal{F}$) e a transformada de Hilbert ($\mathcal{H}$) no sentido de para qual domínio é levada a transformação.

Como a saída $y(t)$ deve ser causal, então a função $h(t)$ deve satisfazer a seguinte condição de causalidade:

$$h(t) = 0, \quad \text{para} \quad t < 0. \quad (2.1.4)$$

Aplicando a TF nos dois lados da equação (2.1.3) obtém-se:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (2.1.5)$$

onde as funções $h(t)$ e $H(\omega)$ estão relacionadas através da TF, ou seja:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1.6)$$

e $j = \sqrt{-1}$.

A função $H(\omega)$ é a FRF do sistema e é complexa. A fim de obter a relação entre esta função e sua TH, é conveniente escrevê-la em função de um argumento complexo s . Considerando a causalidade de $h(t)$ do sistema escreve-se $H(\omega)$ como:

$$H(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} h(t) e^{-ist} dt, \quad (2.1.7)$$

onde $s = \omega + jc$, (note que esta variável s é diferente da usualmente adotada na teoria de controle $s = \omega + \epsilon$).

A função $H(s)$ pode também ser escrita como a razão entre dois polinômios, isto é:

$$H(s) = A \frac{(s - a_1) \dots (s - a_n)}{(s - b_1) \dots (s - b_n)}, \quad (2.1.8)$$

onde A é uma constante e as constantes a_i e b_i são os zeros e polos da função $H(s)$ que representam respectivamente as anti-ressonâncias e ressonâncias do sistema.

Assumindo que o sistema considerado é estável, os polos de $H(s)$ estão situados na metade superior do plano s , vide figura (2.1.2). Então $H(s)$ é não singular (não contém polos) para os valores de s situados na metade inferior do plano s , ou seja, para ϵ negativo, pois o fator $e^{-\epsilon t}$ introduz simplesmente um decaimento exponencial na integral (2.1.7).

Seja $f(s)$ uma nova função também definida convenientemente como:

$$f(s) = \frac{H(s)}{s - u}, \quad (2.1.9)$$

onde u é real.

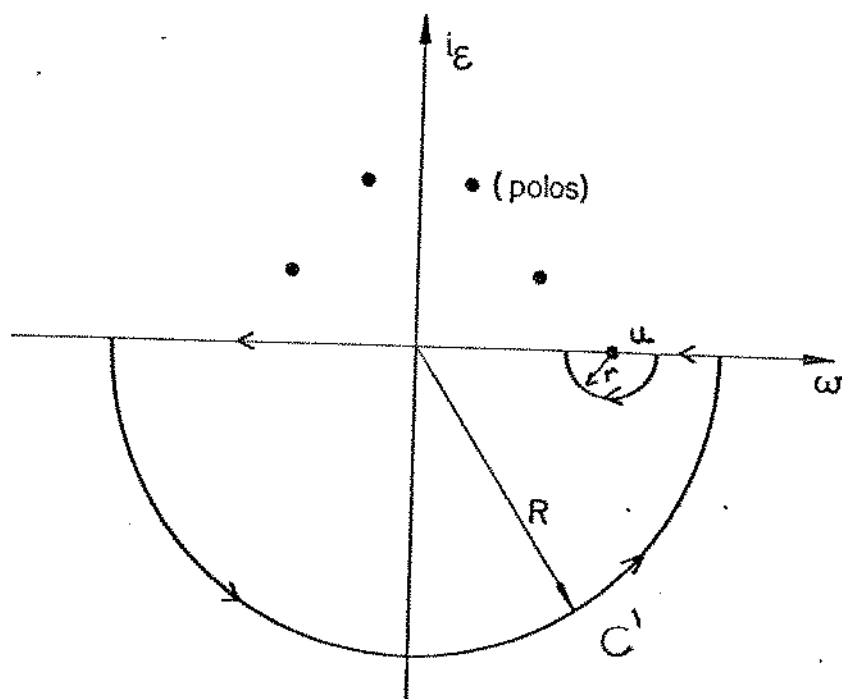


Figura (2.1.2)-Localização dos polos de $H(s)$. Contorno de integração de $f(s)$.

Integrando $f(s)$ (que tem uma singularidade em $s=u$) ao longo do contorno C' no sentido positivo de integração [35], que é formado por dois semi-círculos -um de raio maior R e outro de raio menor r para evitar o polo $s=u$ de $f(s)$ - (vide figura (2.1.2)), pelo teorema de Cauchy [35] tem-se:

$$\int_{C'} f(s) ds = \int_{C'} \frac{H(s)}{s - u} ds = 0. \quad (2.1.10)$$

Como $H(s) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow -\infty$, fazendo-se o raio R tender ao infinito a equação (2.1.10) fica:

$$\int_{C'} \frac{H(s)}{s-u} ds = \int_{\infty}^{u+r} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega + \int_{u-r}^{-\infty} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega +$$

$$\int_0^{-\pi} \frac{H(u + re^{j\phi})}{u + re^{j\phi} - u} ire^{j\phi} d\phi = 0 \quad (2.1.11)$$

Para resolver a integral (2.1.11) aplica-se o valor principal de Cauchy (PV) [35], que neste caso é definido como:

$$-PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(s)}{s-u} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{\infty}^{u+r} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega + \int_{u-r}^{-\infty} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega \right] \quad (2.1.12)$$

onde, o sinal negativo do lado esquerdo da equação (2.1.12) foi introduzido para compensar a inversão do sentido de integração $(-\infty, \infty)$.

Substituindo a equação (2.1.12) em (2.1.11) e rearranjando, obtém-se:

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} H(u + re^{j\phi}) id\phi = -j\pi H(u), \quad (2.1.13)$$

ou,

$$H(u) = -\frac{1}{j\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\omega)}{\omega-u} d\omega \quad (2.1.14)$$

Fazendo a mudança de variável $u=\omega$ para estender a equação

(2.1.14) à qualquer valor de ω no eixo real do plano s obtém-se:

$$H(\omega) = - \frac{1}{j \pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(u)}{u - \omega} du, \quad (2.1.15a)$$

ou,

$$H(\omega) = \frac{1}{j \pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(u)}{\omega - u} du. \quad (2.1.15b)$$

A equação (2.1.15b) é uma versão da TH (vide equação (2.1.1)), aplicada à FRF $H(\omega)$ e indica que a FRF de um sistema linear é igual à sua TH, isto é:

$$H(\omega) = \mathcal{H} \left\{ H(\omega) \right\} = \frac{1}{j \pi \omega} * H(\omega). \quad (2.1.16)$$

A FRF é uma função complexa, isto é:

$$H(\omega) = \text{Re}H(\omega) + j\text{Im}H(\omega). \quad (2.1.17)$$

Substituindo a equação (2.1.17) em (2.1.15b) e separando as partes real e imaginária obtém-se:

$$\text{Re}H(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}H(u)}{\omega - u} du \quad (2.1.18)$$

e,

$$\text{Im}H(\omega) = - \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}H(u)}{\omega - u} du \quad (2.1.19)$$

As equações (2.1.18) e (2.1.19) são conhecidas na

literatura como relações de Kramers-Kronig e indicam que as partes real e imaginária da FRF de um sistema linear, estável e causal estão relacionadas entre si pela TH. Aqui estas relações são utilizadas para mostrar, a seguir, que o fato da FRF de um sistema linear ser igual à sua TH é consequência da causalidade do sistema.

Substituindo a equação (2.1.19) em (2.1.17) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \text{Re}H(\omega) + i \left[-\frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}H(u)}{\omega - u} du \right] \\
 &= \text{Re}H(\omega) + \left[-\frac{i}{\pi \omega} * \text{Re}H(\omega) \right].
 \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Aplicando a TF inversa nos dois lados da equação (2.1.20) e lembrando que,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{i}{\pi \omega} \right\} = \text{sgn}(t), \tag{2.1.21}$$

onde, $\text{sgn}(t) = 1$ para $t > 0$ e -1 para $t < 0$; e que a TF de um produto de convolução é o produto das transformadas, pode-se escrever a equação (2.1.20) como:

$$h(t) = E(t) \left[1 + \text{sgn}(t) \right], \tag{2.1.22}$$

onde $E(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{Re}H(\omega) \right\}.$

Como $\text{Re}H(\omega)$ é uma função real e par, sua TF inversa $E(t)$ é também real e par, logo a RI $h(t)$ obtida por (2.1.22) é real e causal. Com base nesta equação, nota-se que $h(t)$ é real e causal para todo sistema cuja FRF é igual à sua TH e vice-versa, ou seja, o fato da FRF

ser igual sua à TH é consequência da causalidade do sistema.

2.2- TRANSFORMADA DE HILBERT E SISTEMAS NÃO LINEARES

Sabe-se da seção 2.1 que em se tratando de sistemas lineares, estáveis e causais, $H(\omega) = \mathcal{H} \left\{ H(\omega) \right\}$ e que esta igualdade é consequência da causalidade do sistema. Sabe-se também que todos os sistemas físicos são causais tanto os lineares quanto os não lineares. No entanto, quando a FRF $H(\omega)$ de um sistema não linear é calculado por varredura senoidal, com filtragem em torno da frequência de excitação, constata-se que a FRF é diferente de sua TH, isto é,

$$H(\omega) \neq \mathcal{H} \left\{ H(\omega) \right\} = \hat{H}(\omega), \quad (2.2.1)$$

onde, $\hat{H}(\omega)$ denota a função TH de $H(\omega)$.

Esta simples comparação constitui um método para detecção de não linearidades (ou verificação da linearidade) de um sistema genérico. A aplicação deste método consiste em comparar a FRF (estimada por varredura senoidal) com sua transformada de Hilbert : " Se $H(\omega) = \hat{H}(\omega)$, o sistema é linear, porém, se $H(\omega) \neq \hat{H}(\omega)$, o sistema é não linear".

A versão da TH da FRF, $\hat{H}(\omega)$ é dada pela seguinte expressão (vide equações (2.1.15) e (2.1.16)):

$$\hat{H}(\omega) = \text{Re}\hat{H}(\omega) + i \text{Im}\hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\pi\omega} * H(\omega). \quad (2.2.2)$$

Levando em conta que a TF inversa de um produto de convolução de duas funções no domínio da frequência é o produto das transformadas inversas destas funções e que,

$$\mathcal{F} \left\{ \text{sgn}(t) \right\} = \frac{1}{j \pi \omega}, \quad (2.2.3)$$

onde $\text{sgn}(t)$ é a função sinal no domínio do tempo, a equação (2.2.2) pode ser reescrita como:

$$\hat{H}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \text{sgn}(t) \mathcal{F}^{-1} \left\{ H(\omega) \right\} \right\}, \quad (2.2.4)$$

onde,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ H(\omega) \right\} = h(t) \quad (2.2.5)$$

A equação (2.2.4) mostra que a TH da FRF, $\hat{H}(\omega)$, pode ser calculada utilizando a transformada de Fourier. O procedimento para o cálculo de $\hat{H}(\omega)$ conforme indica a equação (2.2.4) é mostrado na figura (2.2.1).

Uma vez calculada a FRF $H(\omega)$ por varredura senoidal, este método detecta a não linearidade de um sistema devido ao surgimento de uma não causalidade *artificial* (pois todos os sistemas físicos são causais, tanto os lineares quanto os não lineares) na resposta ao impulso $h(t)$ quando obtida pela TF inversa de $H(\omega)$. Esta não causalidade *artificial* ocorre devido a uma distorção apresentada na FRF.

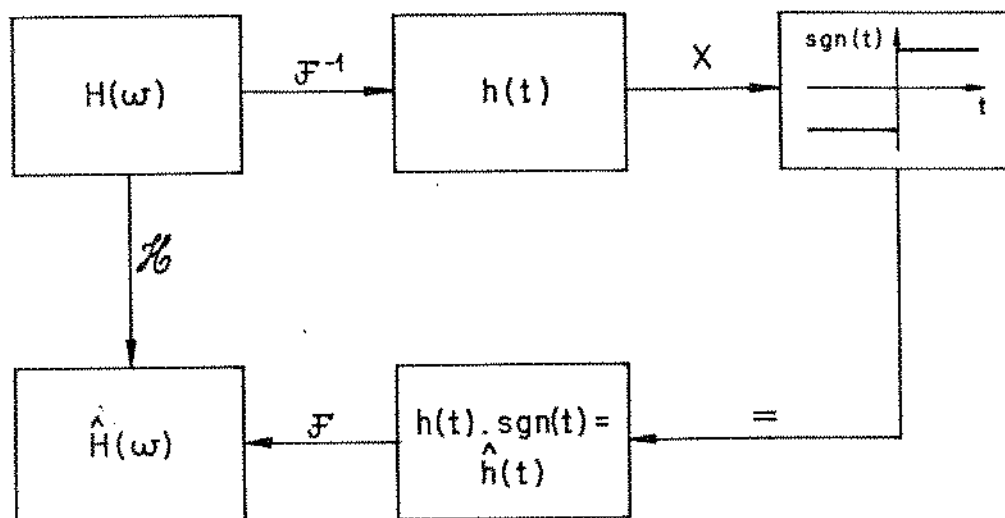
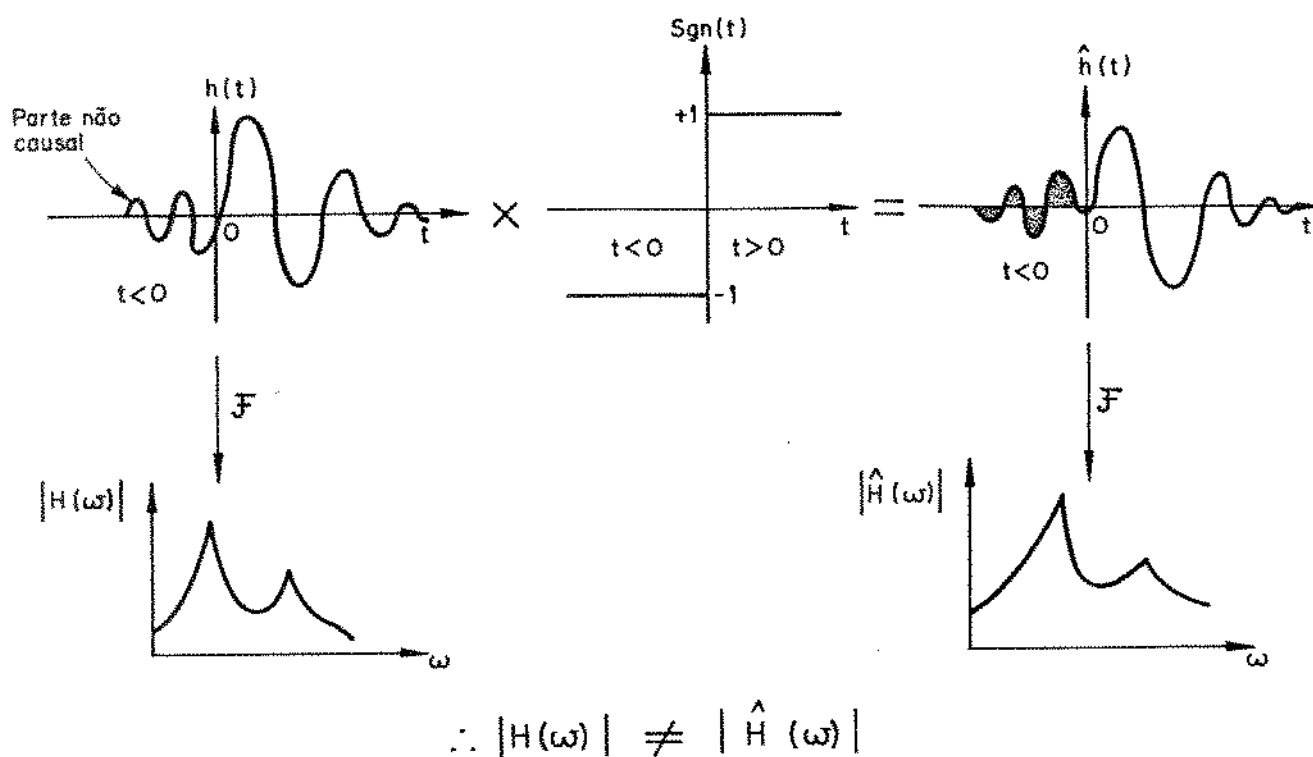


Figura (2.2.1)– Cálculo da transformada de Hilbert da FRF utilizando a transformada de Fourier.

A figura (2.2.2) ajuda a interpretação deste método, note que no caso dos sistemas não lineares, a parte não causal de $\hat{h}(t)$ assume valores de sinal contrário ao da parte não causal de $h(t)$ devido à multiplicação por $\text{sgn}(t)$, logo a TF destas duas funções são diferentes. Como a resposta ao impulso $h(t)$ de sistemas lineares não apresenta esta não causalidade *artificial*, a TH da FRF é a própria FRF.

A figura (2.2.3) mostra o procedimento utilizado para detectar a não linearidade de um sistema a partir da TH, esta figura mostra também como pode ser realizada a linearização a partir deste método. A linearização é feita simplesmente removendo a não causalidade *artificial* da função $\hat{h}(t)$ obtida pela TF inversa da FRF. Note que em casos práticos este tipo de linearização pode ser realizado sem o conhecimento prévio do modelo matemático do sistema, basta conhecer sua FRF.

Sistema não linear



Sistema linear

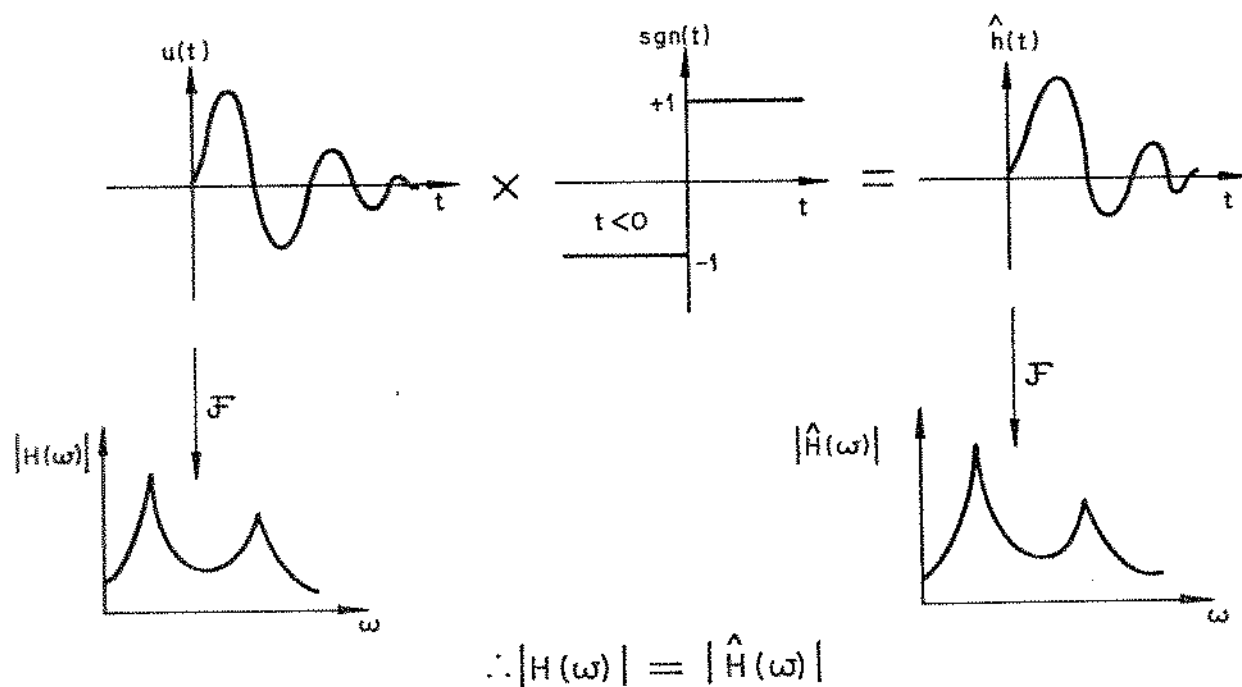


Figura (2.2.2) - Interpretação do método de detecção da não linearidades utilizando a TH.

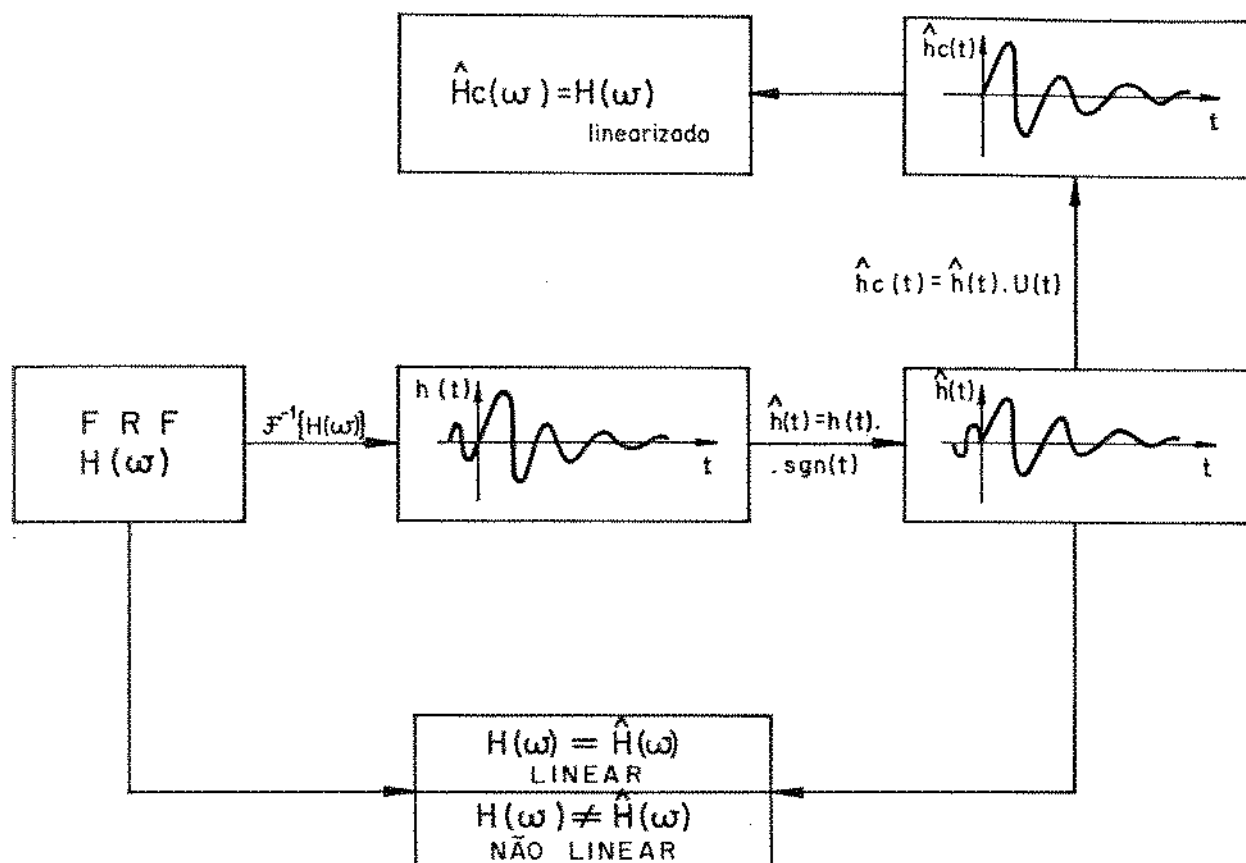


Figura (2.2.3) - Utilização da TH na linearização.

2.3- APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE HILBERT PARA DETECÇÃO DE NÃO LINEARIDADES DE SISTEMAS

Nesta seção mostra-se alguns exemplos que ilustram a aplicação do método discutido nas seções anteriores. Aqui as FRFs são estimadas por varredura senoidal, onde a saída do sistema é obtida por integração numérica da seguinte equação diferencial:

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) + g(y, \dot{y}) = A \sin(\omega t), \quad (2.3.1)$$

onde $g(y,y)$ representa uma força de natureza não linear.

A TH da FRF, $\hat{H}(\omega)$, é calculada através procedimento discutido na seção (2.2) e ilustrado na figura (2.2.1). As curvas $H(\omega)$ e $\hat{H}(\omega)$ são apresentadas nas formas:

- i) parte real e parte imaginária versus frequência e;
- ii) forma de Nyquist.

A figura (2.3.1) mostra que, para sistemas lineares, a FRF é igual à sua TH.

As figuras de (2.3.2) até (2.3.5) referem-se a sistemas não lineares. Os tipos de não linearidades simulados são os seguintes: rigidez cúbica (com característica que enrijece, figura (2.3.2); e que amolece figura (2.3.3)); amortecimento quadrático, figura (2.3.4) e amortecimento de Coulomb, figura (2.3.5). Os modelos matemáticos destes sistemas e os parâmetros utilizados nas simulações estão indicados nas legendas das figuras correspondentes. As unidades das grandezas utilizadas nas simulações estão conforme o Sistema Internacional e a frequência em Hz.

Uma grande vantagem da utilização deste método é a possibilidade de identificar o tipo de não linearidade presente em um sistema genérico mediante a comparação da posição relativa das curvas da FRF com sua TH. Note que para cada tipo de não linearidade presente no sistema as curvas da FRF e de sua TH assumem uma posição relativa diferente.

Na prática, conhecendo-se o tipo de não linearidade predominante no sistema, muitas vezes é possível selecionar um modelo matemático que represente aquele sistema que pode inclusive, em alguns casos, ter solução analítica conhecida.

Desta forma, a análise dos resultados obtido por este método traz duas informações importantes ao dinamicista:

- i) Existência de não linearidade presente no sistema e,
- ii) Identificação do tipo de não linearidade predominante no sistema.

Ocorre um fato curioso com o modelo matemático que descreve o comportamento de sistemas com amortecimento estrutural. Este tipo de sistema é representado pela seguinte equação diferencial:

$$m \ddot{y}(t) + k \left(1 + h\eta \right) y(t) = f(t). \quad (2.3.2)$$

É sabido que a FRF deste sistema é dado pela seguinte expressão [1]:

$$H(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + i \eta k}. \quad (2.3.3)$$

A FRF $H(\omega)$ dada pela equação (2.3.3) é diferente de sua TH $\hat{H}(\omega)$, figura (2.3.6), logo conclui-se que a resposta ao impulso $h(t)$ obtida pela transformada de Fourier inversa de $H(\omega)$ é não causal.

Com isso fica claro que é a não causalidade que é detectada pela TH, pois, neste caso, o sistema é linear, porém, devido à representação matemática do amortecimento histerético, existe uma não causalidade artificial.

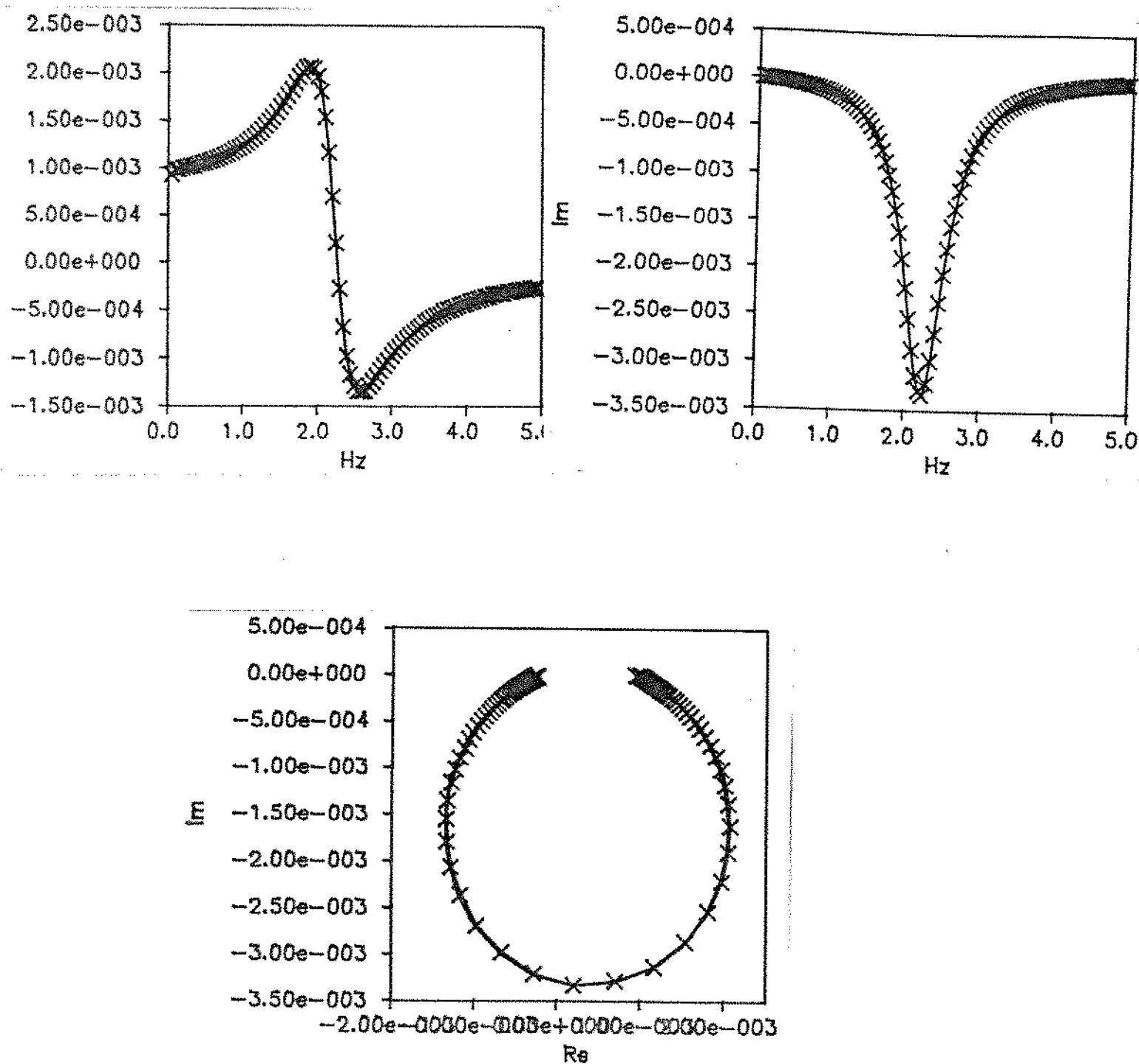


Figura (2.3.1)-FRF e TH da FRF-Sistema linear
 $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A\cos(\omega t)$, simulado com os seguintes parâmetros: $m=5$, $c=20$,
 $k=1000$ e $A=500$.
 xxxxxxxx TH
 — FRF

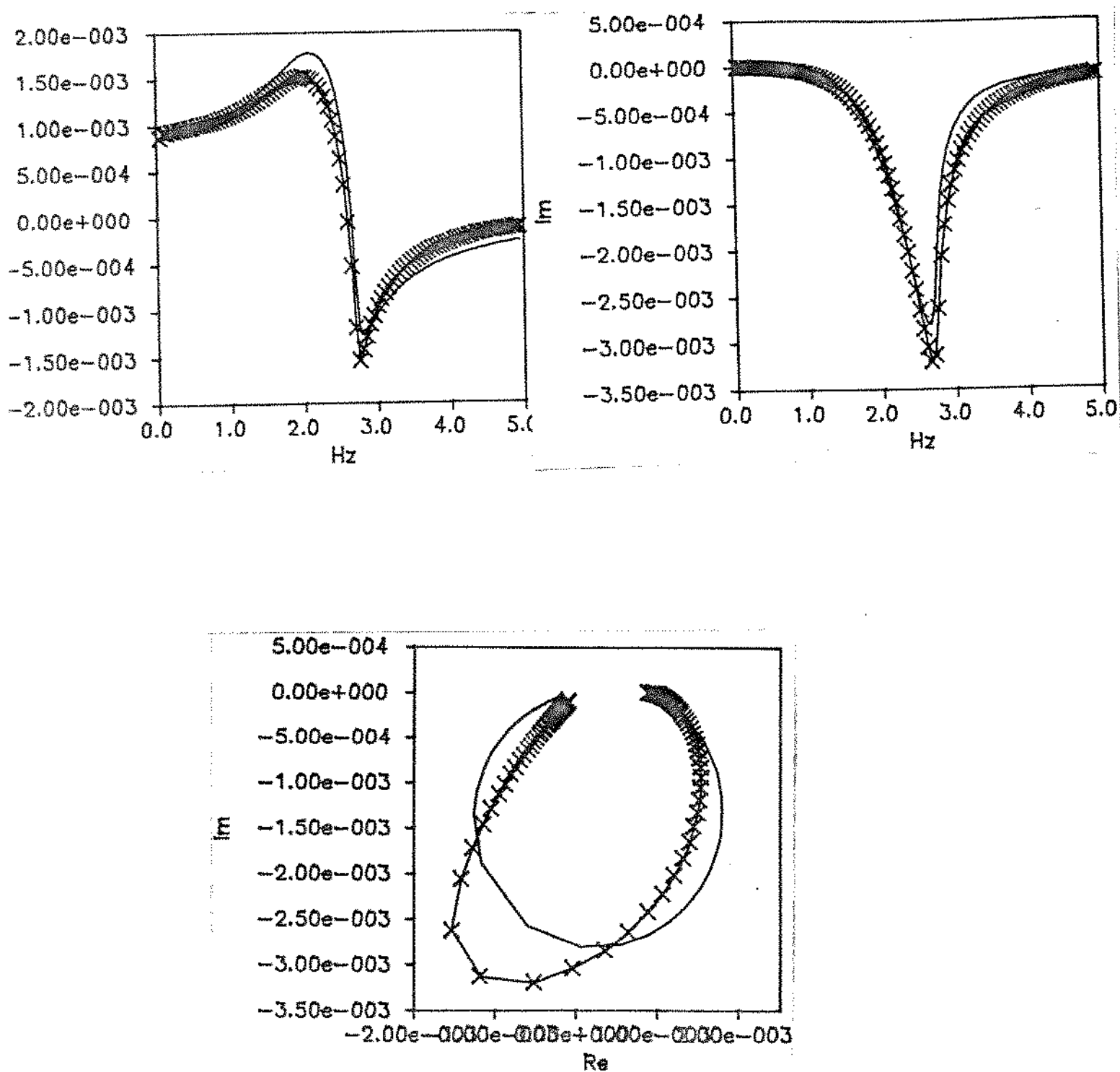


Figura (2.3.2)- FRF e TH da FRF- Sistema não linear com regidez cúbica que enrijece $m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y + \beta y^3) = A \cos(\omega t)$ simulado com os seguintes parâmetros: $m=5$, $c=20$, $k=1000$, $\beta=0.25$ e $A=500$.

xxxxxxx TH
 — FRF

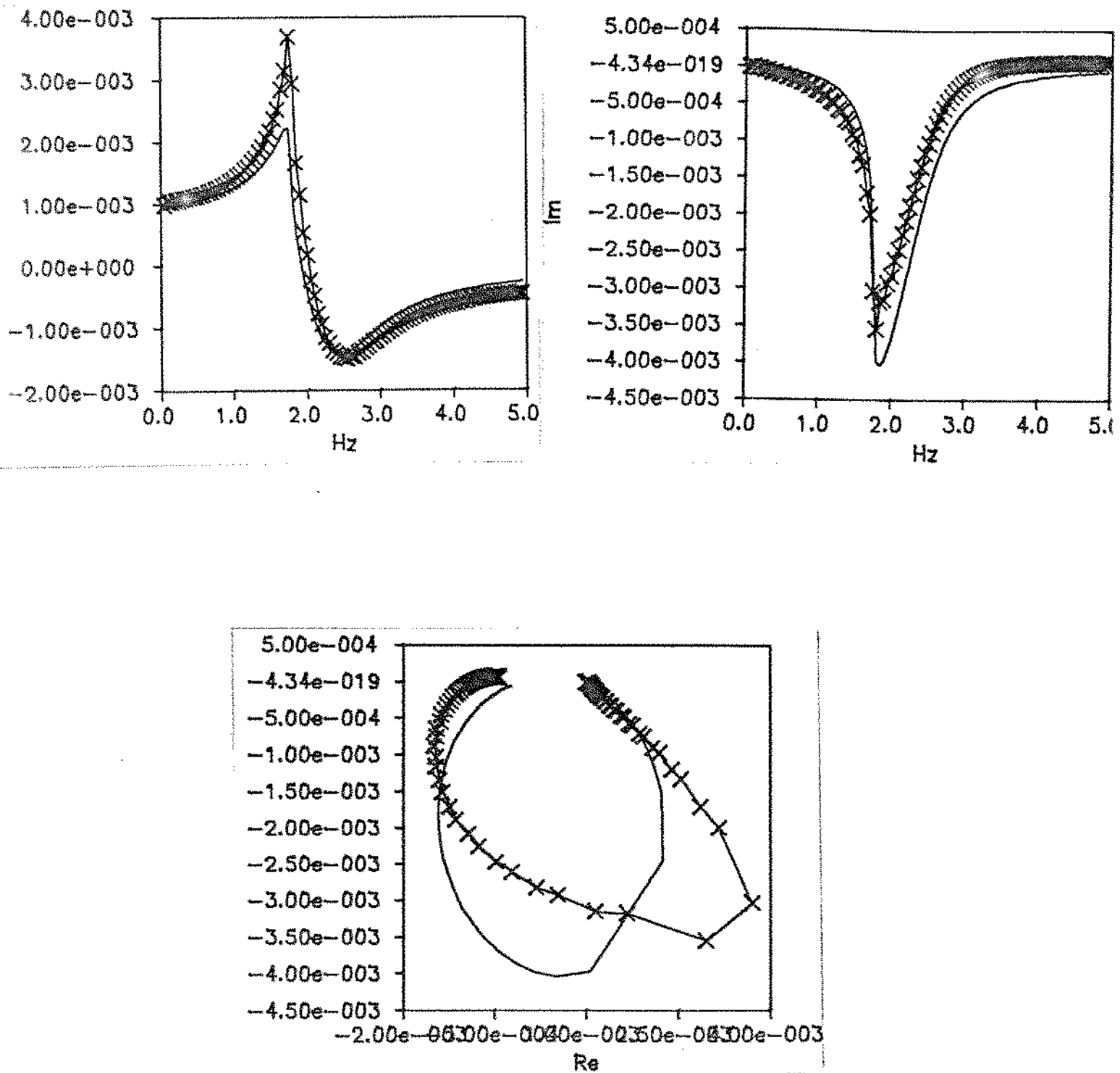
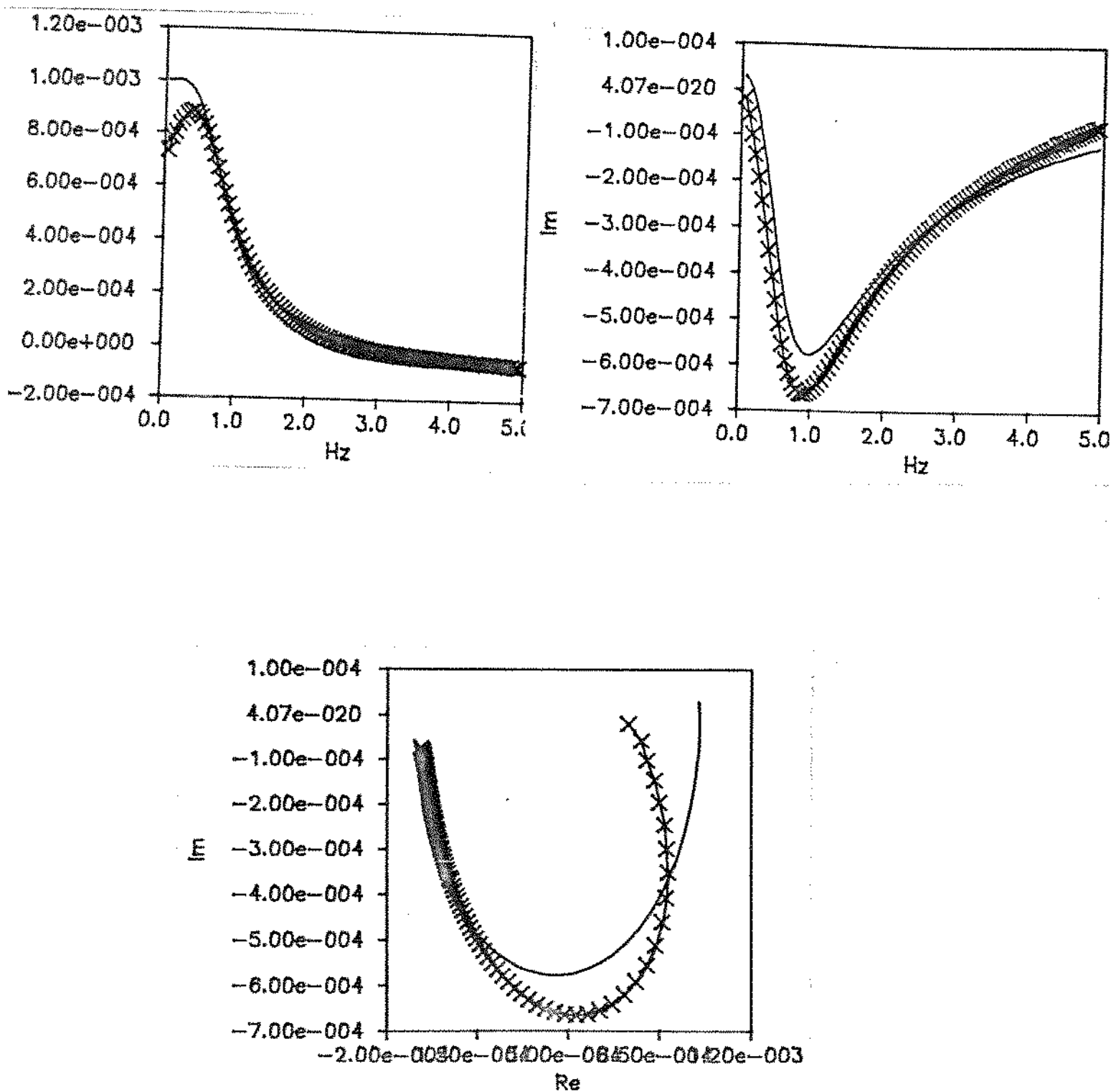


Figura (2.3.3)- FRF e TH da FRF- Sistema não linear com rigidez cúbica que amolece $m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y - \beta y^3) = A \cos(\omega t)$ simulado com os seguintes parâmetros: $m=5$, $c=20$, $k=1000$, $\beta=0.1$ e $A=500$.

xxxxxxx TH

———— FRF



Figura(2.3.4)- FRF e TH da FRF- Sistema não linear com amortecimento quadrático $m\ddot{y} + c\dot{y}|\dot{y}| + ky = A\cos(\omega t)$ simulado com os seguintes parâmetros: $m=5, c=20, k=1000$ e $A=500$.

xxxxxxx TH

———— FRF

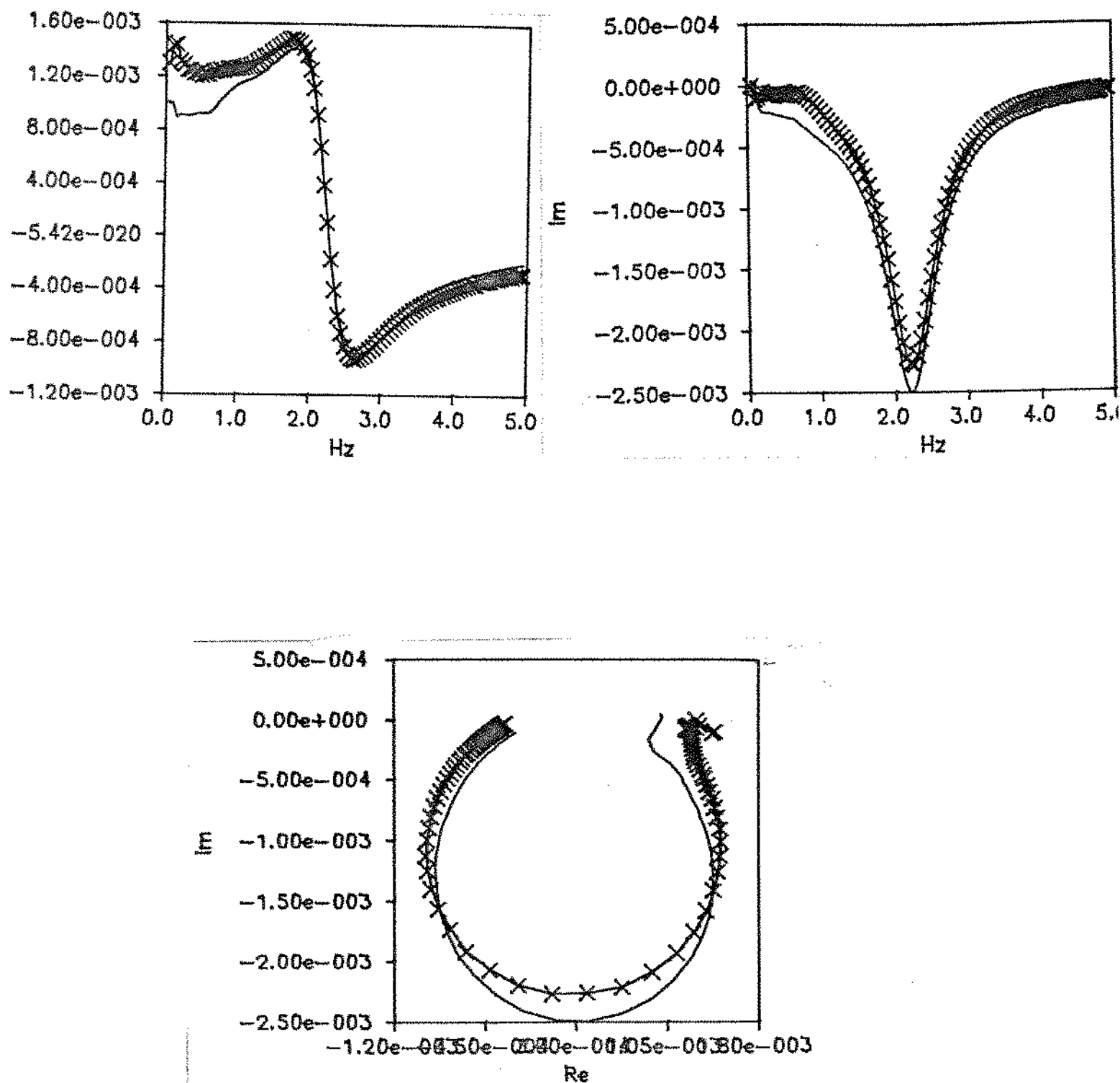


Figura (2.3.5)- FRF e TH da FRF- Sistema não linear com amortecimento de Coulomb $m\ddot{y} + fat.sgn(y) + ky = A\cos(\omega t)$ simulado com os seguintes parâmetros: $m=5$, $fat=100$, $k=1000$ e $A=500$.

xxxxxxx TH

_____ FRF

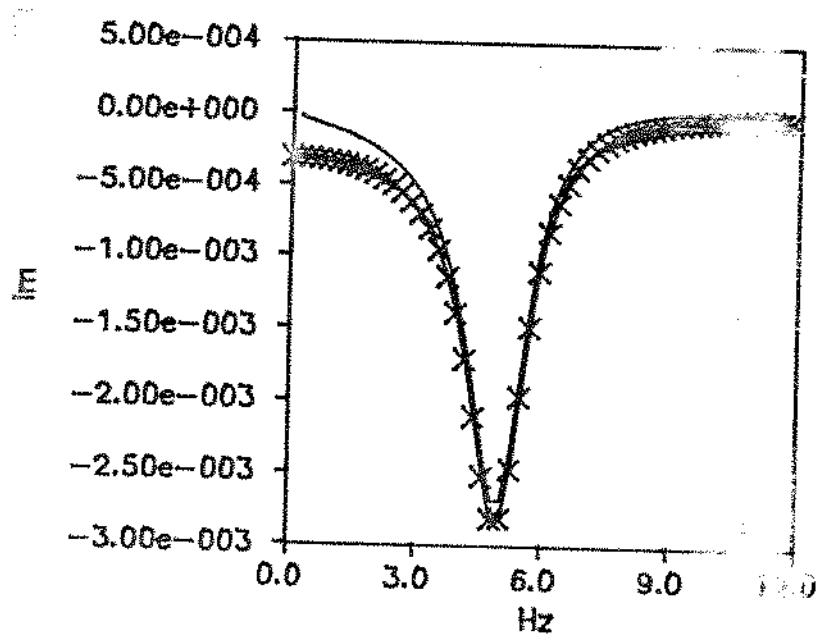
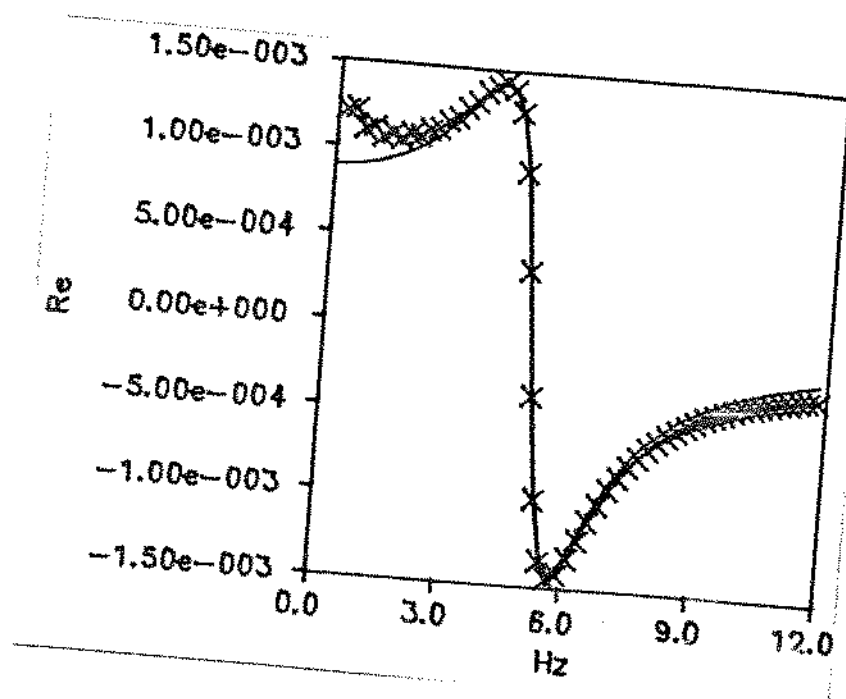


Figura (2.3.6)- FRF e TH da FRF do modelo utilizado para
simulação do amortecimento estrutural com os seguintes parâmetros:
 m=1, k=1000 e $\eta=0.35$.
 xxxxxxxx TH
 ——— FRF

Utilizou-se também entrada Gaussiana para calcular as FRFs de alguns sistemas não lineares, mas neste caso não é possível aplicar o método aqui discutido para detectar a presença da não linearidade. A figura (2.3.7) mostra um exemplo onde a FRF de um sistema não linear (simulado com os mesmos parâmetros e o mesmo nível de excitação que o da figura 2.3.2) obtida por excitação Gaussiana é igual sua TH. Este resultado mostra que a entrada Gaussiana causaliza a RI do sistema. Note também que a FRF estimada por excitação Gaussiana não apresenta distorções como a obtida por varredura senoidal.

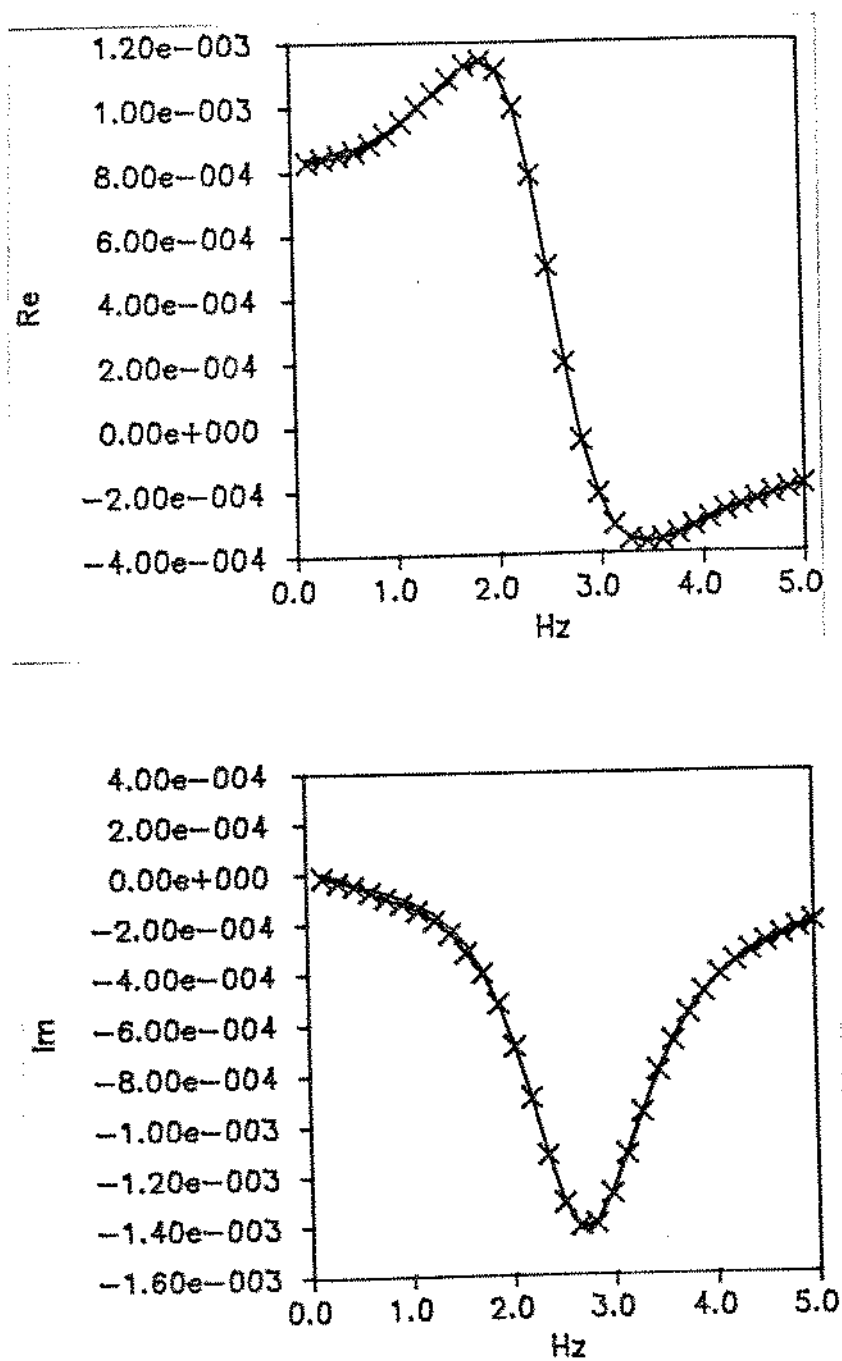


Figura (2.3.7)- FRF e TH da FRF do sistema $my+cy+k(y+\beta y^3)=F(t)$ simulado com os seguintes parâmetros: $m=5$, $c=20$, $k=1000$, $\beta=0.25$ e o nível de excitação de $F(t)$ é 500.

xxxxxxx TH
 — FRF

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO AS SÉRIES DE
VOLTERRA E DE WIENER

As séries de Volterra e de Wiener constituem a base para a formulação de vários modelos matemáticos utilizados para descrever a relação entrada/saída de sistemas não lineares no domínio do tempo.

Neste capítulo são discutidas resumidamente as teorias relacionadas a estas séries e a formulação equivalente desta modelagem no domínio da frequência.

3.1- SÉRIE DE VOLTERRA E A REPRESENTAÇÃO DA ENTRADA/SAÍDA
NO DOMÍNIO DO TEMPO

Considerando um sistema não linear S , invariante no tempo, com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, a relação entre $y(t)$ e $x(t)$ pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots
 \end{aligned}$$

(3.1.1)

onde $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0$ para qualquer $\tau_i < 0$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

A série de potência descrita pela equação (3.1.1) é chamada série de Volterra (SV) e as funções $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ são chamadas núcleos de Volterra de ordem n .

A SV é uma série funcional, pois ela representa operações (em termos de integrais de convolução) entre os núcleos $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e a entrada $x(t)$ e o resultado obtido por cada um dos seus termos é um número, para um instante t considerado.

Uma outra maneira de representar a série (3.1.1) é a seguinte:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbb{H}_1[x(t)] + \mathbb{H}_2[x(t)] + \dots + \mathbb{H}_n[x(t)] + \dots \\ &= y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

onde,

$$\mathbb{H}_n[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (3.1.3)$$

Nesta representação, o símbolo $\mathbb{H}_n$ que representa uma integral de convolução (linear para $n = 1$ e multilinear de ordem n para $n > 1$) é chamado de operador de Volterra de ordem n . Este operador, é classificado como invariante no tempo e define um sistema de Volterra de n -ésima ordem invariante no tempo [20].

Segundo as equações (3.1.2) e (3.1.3), cada operador $\mathbb{H}_n$, quando aplicado à entrada $x(t)$, define uma função $y_n(t)$ que é

responsável por uma parcela da resposta total do sistema $y(t)$, vide figura (3.1.1). Então a resposta total de um sistema, segundo este modelo, é dada pela soma de uma resposta puramente linear ($y_1(t)$) mais respostas de natureza não linear ($y_n(t)$, $n > 1$).

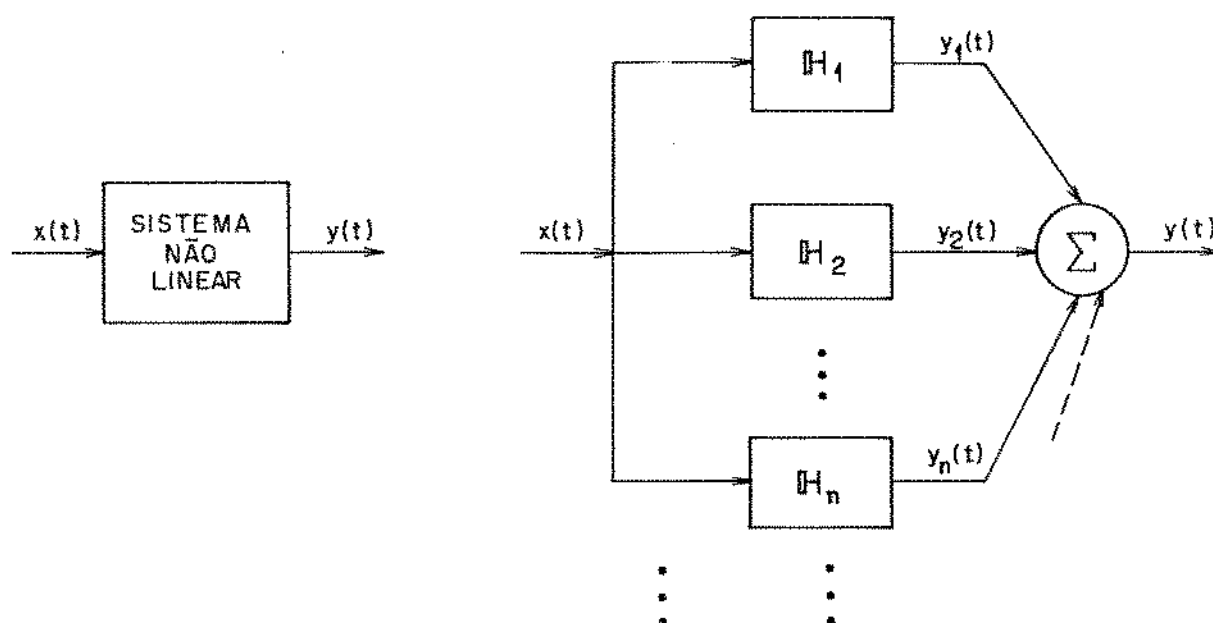


Figura (3.1.1)– Representação esquemática da relação entrada/saída de sistemas não lineares segundo a série de Volterra.

A série de Volterra constitui a base para a formulação da modelagem não paramétrica no domínio do tempo, onde a determinação da saída $y(t)$ (observada tanto sob o ponto de vista do operador, equação (3.1.1), quanto do funcional, equação (3.1.2)) requer o conhecimento dos núcleos $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Estes núcleos representam resposta ao impulso de primeira ordem ($n = 1$) e de ordem superior ($n > 1$).

Assim como um sistema linear é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso, o núcleo $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ caracteriza um

sistema de Volterra de ordem n .

No apêndice A é discutida resumidamente a teoria relativa aos diversos operadores de Volterra.

3.2- REPRESENTAÇÃO DA ENTRADA/SAÍDA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A função resposta ao impulso, $h(t)$, e a função de resposta em frequência, $H(\omega)$, caracterizam completamente um sistema linear (no sentido que conhecendo qualquer uma delas, é possível identificar os parâmetros do sistema). Estas duas funções estão relacionadas pela transformada de Fourier, ou seja:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.2.1)$$

Este conceito é extendido aos operadores de Volterra de ordem superior. Isto é, assim como o núcleo h_n de um operador de Volterra caracteriza completamente um sistema de Volterra de ordem n a função de resposta em frequência $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ também o caracteriza. Neste caso, o sistema só é possível de ser identificado não parametricamente.

A relação entre $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ é dada pela transformada de Fourier n -dimensional, isto é:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n$$

(3.2.2)

A modelagem de sistemas não lineares baseada na série de Volterra e implementada no domínio da frequência, é uma extensão do caso linear, onde a relação entrada/saída é dada pela seguinte expressão [22]:

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1) X(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega) d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1) X(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \\ & d\omega_1 d\omega_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

onde $Y(\omega)$ e $X(\omega)$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier da entrada e da saída do sistema e δ é o delta de Dirac. As FRFs $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ponderam todas as interações espectrais $X(\omega_1) \dots X(\omega_n)$ da entrada para formação de novas componentes espectrais na saída $Y(\omega)$, onde $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$. Esta modelagem truncada em seu segundo termo é discutida no capítulo 4 deste trabalho.

3.3 SÉRIE DE WIENER . FUNCIONAIS DE WIENER.

A série de Volterra apresenta duas limitações básicas associadas à sua aplicação em problemas reais. A primeira delas está

ligada à sua convergência e a segunda à dificuldade em se calcular os núcleos h_n devido à grande dificuldade de isolar as parcelas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), \dots$ da resposta total $y(t)$ do sistema, conforme mostra figura (3.1.1) [20].

Wiener propôs a solução deste problema estendendo a idéia de ortogonalidade a funcionais, e formou um conjunto de funcionais ortogonais a partir dos funcionais de Volterra quando a entrada é um processo Gaussiano branco. Os funcionais de Wiener têm o mesmo sentido físico dos de Volterra, porém, não apresentam as limitações inerentes a estes.

Dois funcionais $T_1[x(t)]$ e $T_2[x(t)]$ são ortogonais relativos a um processo aleatório estacionário se [22]:

$$\langle T_1[x(t)] T_2[x(t)] \rangle = 0, \quad (3.3.1)$$

onde $\langle \rangle$, denota a operação de média.

Antes de discutir a teoria relacionada aos funcionais de Wiener é importante definir um funcional de Volterra homogêneo. Um funcional de Volterra é chamado homogêneo quando [20]:

$$H_n \left[c x(t) \right] = c^n H_n \left[x(t) \right], \quad (3.3.2)$$

onde c é uma constante. Isto significa que a variação na amplitude da entrada $x(t)$ implica apenas na variação da amplitude da saída, porém não na sua forma de onda.

Se a condição acima não for satisfeita então este funcional é não homogêneo. Os funcionais de Volterra não homogêneos são formados a partir de uma soma de funcionais homogêneos.

O funcional de Volterra não homogêneo de p -ésima ordem, é

definido como:

$$\begin{aligned}
 g_p \left[h_p, h_{p-1}(p), \dots, h_0(p); x(t) \right] &= \sum_{n=0}^p \mathbb{H}_n(p) \left[x(t) \right] \\
 &= h_0(p) + \sum_{n=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(p)(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.3}$$

onde o sub-índice p ao lado de n , indica que os funcionais de Volterra homogêneos de ordens $n = 0, \dots, p-1$, são membros do p -ésimo funcional não homogêneo g_p . $x(t)$ representa a entrada e h_0 é o funcional de Volterra de ordem zero (a resposta a uma dada excitação é constante).

Com base na equação (3.3.3), o funcional de Volterra não homogêneo de segunda ordem é definido como:

$$\begin{aligned}
 g_2 \left[h_2, h_1(z), h_0(z); x(t) \right] &= \mathbb{H}_2 \left[x(t) \right] + \mathbb{H}_1(z) \left[x(t) \right] + \mathbb{H}_0(z) \left[x(t) \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(z)(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + h_0(z)
 \end{aligned}
 \tag{3.3.4}$$

onde, o sub-índice 2 entre parênteses, indica que os funcionais homogêneos de primeira ordem e de ordem zero são membros do funcional não homogêneo de segunda ordem.

Os funcionais de Wiener são definidos como um conjunto de funcionais de Volterra não homogêneos, $g_n \left[k_n, k_{n-1}(n), \dots, k_0(n); x(t) \right]$,

com a seguinte propriedade:

$$\langle \mathbb{H}_m \left[x(t) \right] \mid g_n \left[k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}; x(t) \right] \rangle = 0 \quad \text{para } m < n, \quad (3.3.5)$$

onde $\langle \rangle$ denota operação de média, quando $x(t)$ é um processo Gaussiano branco com média zero. Esta equação indica que o n -ésimo funcional de Wiener é o n -ésimo funcional de Volterra não homogêneo g_n ortogonal à qualquer funcional de Volterra homogêneo $\mathbb{H}_m$ de ordem m menor que n .

O funcional de Wiener $g_n \left[k_n, k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}; x(t) \right]$ é denotado por $\mathbb{G}_n \left[k_n; x(t) \right]$, uma vez que os demais núcleos $k_{n-1(n)}, \dots, k_{0(n)}$, podem ser determinados a partir de k_n [20].

No apêndice B é discutida a teoria relacionada aos núcleos de Wiener, entretanto, um estudo mais profundo deste assunto é recomendado.

3.4- SÉRIE DE WIENER E A REPRESENTAÇÃO DA ENTRADA/SAÍDA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A relação entrada/saída de um sistema não linear, invariante no tempo, pode ser modelada a partir dos funcionais de Wiener como [20]:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{G}_n \left[k_n; x(t) \right]. \quad (3.4.1)$$

A série (3.4.1) formada a partir dos funcionais de Wiener é chamada série de Wiener. Assim como na representação de Volterra, a

identificação de um sistema modelado por esta requer o conhecimento dos núcleos de Wiener k_n .

Existem vários procedimentos de ortogonalização para funcionais no sentido de modelar a resposta não linear de sistemas e calcular os núcleos de Wiener, o leitor pode encontrar-los em trabalhos ,como por exemplo, os de Barrett [22], Schetzen [20] e Billings [21]. O objetivo principal deste trabalho não é de descrever tais procedimentos.

CAPÍTULO 4

MODELAGEM QUADRÁTICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES

O comportamento dinâmico de muitos sistemas mecânicos é descrito por mecanismos lineares e não lineares.

Desprezando-se os efeitos não lineares, as frequências que aparecem na saída do são as mesmas contidas na entrada. Entretanto, sabe-se que em sistemas não lineares surge uma grande quantidade de novas componentes espectrais na saída, formadas pela inter-relação das componentes espectrais da entrada, situadas em frequências cujo valor é dado pela soma e/ou diferença das frequências destas componentes inter-relacionadas da entrada. Este fenômeno é conhecido na literatura como interação onda-onda ("wave-wave interaction") [24]. A presença destas novas componentes espectrais na saída não é prevista por modelos puramente lineares.

Neste capítulo a relação entre a entrada (assumida estacionária Gaussiana com média zero) e a saída de um sistema não linear é descrita por um modelo baseado na série de Volterra ou de Wiener truncada em seu termo de segunda ordem e implementado no domínio da frequência. Este modelo é quadrático, pois devido a este truncamento utiliza-se apenas as funções de resposta em frequência de primeira e segunda ordens, correspondente à transformada de Fourier dos respectivos núcleos de Volterra ou de Wiener de primeira e segunda ordens. Então, este modelo prevê a produção de novas componentes espectrais na saída considerando apenas as inter-relações espectrais

que envolvem pares de componentes espectrais da entrada. Por isso, as funções de resposta em frequência linear e de segunda ordem são calculadas com a ajuda das análises espectral e biespectral.

4.1- MODELO NÃO LINEAR QUADRÁTICO

Conforme foi discutido no capítulo 3, a relação entrada/saída de um sistema não linear, invariante no tempo, pode ser descrita por um modelo baseado na série de Volterra. Truncando-se esta série em seu termo de segunda ordem obtém-se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.1.1)$$

onde $x(t)$ é a entrada, $y(t)$ a saída, $h_1(\tau)$ e $h_2(\tau_1, \tau_2)$ são os núcleos de Volterra de primeira e segunda ordens que representam respectivamente as respostas ao impulso do sistema de primeira e segunda ordens.

Assumindo a entrada $x(t)$ como um processo estacionário Gaussiano com média zero, o valor médio da saída $y(t)$ segundo (4.1.1) é dado por:

$$\langle y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.1.2)$$

onde $\langle \rangle$ denota operação de média.

A equação (4.1.2) indica que se $x(t)$ tiver média zero o

valor médio da saída é de natureza puramente não linear.

Calculando $y(t) - \langle y(t) \rangle$ com base nas equações acima obtém-se:

$$y(t) - \langle y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.1.3)$$

A equação (4.1.3) é a série de Wiener truncada em seu núcleo de segunda ordem (a menos do núcleo de ordem zero) para entrada Gaussiana.

Comparando as equações (4.1.1) e (4.1.3) observa-se que a resposta dinâmica de sistemas não lineares quadráticos, a menos de seu valor médio, pode ser modelada tanto pela série de Volterra quanto pela série de Wiener.

Com base no capítulo 3, a representação equivalente do modelo quadrático no domínio da frequência é a seguinte:

$$Y(\omega_m) = H_1(\omega_m) X(\omega_m) + \sum_{\omega_m = \omega_i + \omega_j} H_2(\omega_i, \omega_j) X(\omega_i) X(\omega_j), \quad (4.1.4)$$

onde $X(\omega_m)$ e $Y(\omega_m)$ são as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, $H_1(\omega_m)$ e $H_2(\omega_i, \omega_j)$ são as funções de resposta em frequência linear (FRFL) e quadrática (FRFQ).

Segundo este modelo, cada componente espectral da resposta $Y(\omega_m)$ é composta de duas partes: uma de natureza linear, onde a componente espectral da entrada $X(\omega_m)$ é modificada pela FRFL $H_1(\omega_m)$; e outra de natureza não linear modelada pela soma de todas as interações

espectrais da entrada, aos pares, $X(\omega_i)X(\omega_j)$ modificadas pela FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$, onde $\omega_m = \omega_i + \omega_j$, vide figura (4.1.1).

A FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$ é simétrica, isto é,

$$H_2(\omega_i, \omega_j) = H_2(\omega_j, \omega_i) = H_2^*(-\omega_i, -\omega_j) = H_2^*(-\omega_j, -\omega_i), \quad (4.1.5)$$

e pondera todas as interações quadráticas $X(\omega_i)X(\omega_j)$ dos tipos soma (quando $\omega_i > 0$ e $\omega_j > 0$) e diferença (quando $\omega_i > 0$ e $\omega_j < 0$ ou $\omega_i < 0$ e $\omega_j > 0$) na formação de $Y(\omega_m)$, onde $\omega_m = \omega_i + \omega_j$.

A implementação desta modelagem requer o conhecimento das FRFs lineares e quadráticas, $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega_i, \omega_j)$. No que segue, é apresentado um método para determina-las, tendo em mente a preocupação de separar os efeitos linear e não linear da resposta total do sistema.

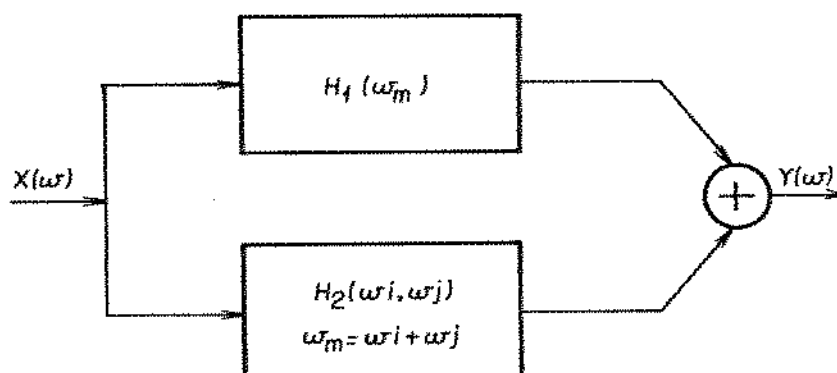


Figura (4.1.1)– Representação esquemática do modelo não linear quadrático no domínio da frequência.

4.2- CÁLCULO DAS FRFs UTILIZANDO TÉCNICAS DE ANÁLISES ESPECTRAL E BIESPECTRAL.

Aqui as FRFs são calculadas com a ajuda das teorias espectral e biespectral, onde o processo da entrada $x(t)$ é assumido estacionário Gaussiano com média zero.

A determinação de $H_1(\omega_m)$ é realizada multiplicando-se os dois lados de (4.1.4) por $X^*(\omega_m)$, onde $*$ denota complexo conjugado, e tomando-se o valor médio de ambos os lados, isto é:

$$\langle Y(\omega_m) X^*(\omega_m) \rangle = H_1(\omega_m) \langle |X(\omega_m)|^2 \rangle + \sum_{\omega_m = \omega_i + \omega_j} H_2(\omega_i, \omega_j) \langle X(\omega_i) X(\omega_j) X^*(\omega_m) \rangle. \quad (4.2.1)$$

Como a entrada $\{x(t)\}$ é um processo Gaussiano com média zero, vale a seguinte expressão:

$$\langle X(\omega_i) X(\omega_j) X^*(\omega_m) \rangle = 0, \quad \omega_m = \omega_i + \omega_j \quad (4.2.2)$$

O lado esquerdo da equação (4.2.2) é conhecida como biespectro de $x(t)$, e é nulo para processos estacionários Gaussianos [39,40]. Este resultado vem da teoria biespectral que está relacionada à teoria dos momentos de ordem superior ou cumulantes.

Assim como o espectro de potência de um processo estocástico é definido como a transformada de Fourier unidimensional de sua auto-correlação (assumindo-se de média nula), o biespectro é definido como a transformada de Fourier bidimensional da tri-relação, $s(\tau_1, \tau_2) = x(t)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)$, deste processo, isto é:

$$\langle X(\omega_i)X(\omega_j)X^*(\omega_m) \rangle \xleftrightarrow{\mathcal{F}^2} S(\tau_1, \tau_2) \quad (4.2.3)$$

Substituindo (4.2.2) em (4.2.1), obtém-se FRFL $H_1(\omega_m)$ como:

$$H_1(\omega_m) = \frac{\langle |Y(\omega_m)X^*(\omega_m)| \rangle}{\langle |X(\omega_m)|^2 \rangle} \quad (4.2.4)$$

A expressão (4.2.4) é bastante conhecida [38] e modela a relação linear entre as componentes espectrais da entrada e da saída.

Analogamente, determina-se a FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$ multiplicando-se cada lado da equação (4.1.4) por $X^*(\omega_1)X^*(\omega_2)$, onde $\omega_m = \omega_1 + \omega_2$, e tomando-se o valor médio de ambos os lados, isto é:

$$\begin{aligned} \langle Y(\omega_m)X^*(\omega_1)X^*(\omega_2) \rangle &= H_1(\omega_m)\langle X(\omega_m)X^*(\omega_1)X^*(\omega_2) \rangle + \\ &\quad \sum_{\omega_m = \omega_i + \omega_j} H_2(\omega_i, \omega_j)\langle X(\omega_i)X(\omega_j)X^*(\omega_1)X^*(\omega_2) \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

O termo $\langle X(\omega_i)X(\omega_j)X^*(\omega_1)X^*(\omega_2) \rangle$ de (4.2.5) é um momento espectral de quarta ordem, e para um processo Gaussiano com média zero ele pode ser escrito como [39,40]:

$$\langle X(\omega_i)X(\omega_j)X^*(\omega_1)X^*(\omega_2) \rangle = \begin{cases} \langle |X(\omega_i)X(\omega_j)|^2 \rangle & (\omega_1, \omega_2) = (\omega_i, \omega_j) \\ 0 & (\omega_1, \omega_2) \neq (\omega_i, \omega_j) \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Substituindo (4.2.2) e (4.2.6) em (4.2.5) e considerando a

propriedade de simetria de $H_2(\omega_i, \omega_j)$ dada por (4.1.5) obtém-se:

$$H_2(\omega_i, \omega_j) = \frac{\langle Y(\omega_m) X^*(\omega_i) X^*(\omega_j) \rangle}{2 \langle X(\omega_i) X(\omega_j) \rangle^2}, \quad \omega_m = \omega_i + \omega_j \quad (4.2.7)$$

O numerador da equação (4.2.7) é conhecido como inter-biespectro e neste caso mede a dependência estatística entre a componente espectral da saída $Y(\omega_m)$ e o resultado da interação quadrática da entrada $X(\omega_i)X(\omega_j)$, onde $\omega_m = \omega_i + \omega_j$.

Note que o fato da entrada ser Gaussiano com média zero permite a separação das respostas linear e não linear (assumida quadrática), possibilitando o cálculo das FRFs linear e quadrática do sistema.

Mostra-se que o espectro de potência da saída, previsto pela modelagem quadrática, pode ser calculado como [41]:

$$\langle Y(\omega_m) \rangle^2 = H_1(\omega_m)^2 \langle X(\omega_m) \rangle^2 + \sum_{\omega_m = \omega_i + \omega_j} |H_2(\omega_i, \omega_j)|^2 \langle X(\omega_i) X(\omega_j) \rangle^2, \quad (4.2.8)$$

onde esta expressão só é válida desde que valham (4.2.2) e (4.2.6).

4.3- CÁLCULO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA QUADRÁTICA

$$H_2(\omega_i, \omega_j).$$

O cálculo da FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$ requer a estimativa do inter-biespectro (IBSP) $B(\omega_i, \omega_j)$:

$$B(\omega_i, \omega_j) = \langle Y(\omega_m) X^*(\omega_i) X^*(\omega_j) \rangle, \quad \omega_m = \omega_i + \omega_j \quad (4.3.1)$$

Os espectros de ordem superior são definidos como a transformada de Fourier (de ordem superior) dos momentos estatísticos de ordem superior [39,40]. Neste trabalho o inter-biespectro é calculado por meio da equação (4.3.1). Note que procedendo desta maneira utiliza-se a transformada de Fourier unidimensional.

O IBSP é simétrico [39,40], isto é:

$$B(\omega_i, \omega_j) = B(\omega_j, \omega_i) = B^*(-\omega_i, -\omega_j) = B^*(-\omega_j, -\omega_i). \quad (4.3.2)$$

Devido à frequência limite de Nyquist $\omega_N = 1/2\Delta t$, o IBSP é definido sobre uma área hexagonal, vide figura (4.3.1), mas considerando sua propriedade de simetria ele pode ser calculado apenas na área delimitada por:

$$\omega_i \geq \omega_j, \quad -\omega_N \leq \omega_i, \omega_j \leq \omega_N \quad \text{e} \quad -\omega_N \leq \omega_i + \omega_j \leq \omega_N, \quad (4.3.3)$$

que correspondem as regiões S e D da figura (4.3.1), onde S e D denotam respectivamente as regiões de interação espectral do tipo soma e diferença.

As propriedades de simetria do IBSP $B(\omega_i, \omega_j)$ são estendidas à FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$, isto é:

$$H_2(\omega_i, \omega_j) = H_2(\omega_j, \omega_i) = H_2^*(-\omega_i, -\omega_j) = H_2^*(-\omega_j, -\omega_i). \quad (4.3.4)$$

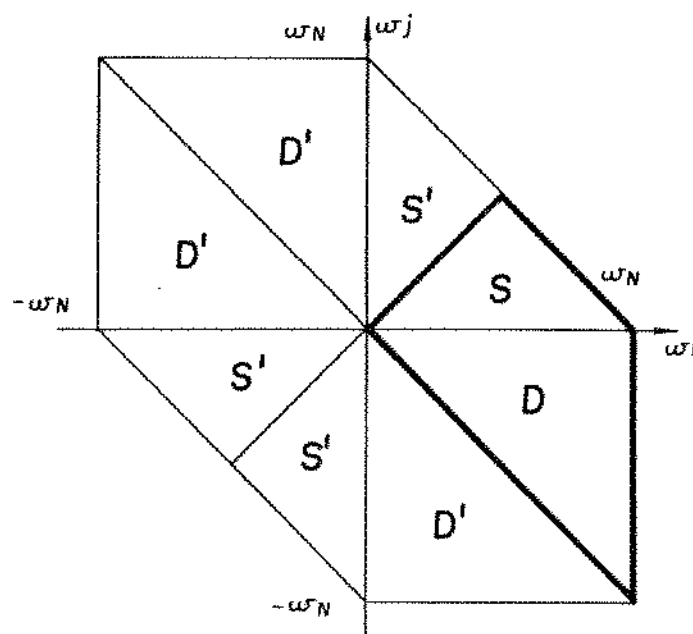


Figura (4.3.1)– Domínio do inter-biespectro. S e D denotam respectivamente áreas de interação espectral do tipo soma e diferença.

O procedimento computacional utilizado neste trabalho para o cálculo do IBSP $B_2(\omega_i, \omega_j)$ entre os processos $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ é o seguinte:

1) Discretiza-se $x(t)$ e $y(t)$ com um intervalo Δt , formando M conjuntos $x^{(m)}(i)$ e $y^{(m)}(j)$ com N pontos cada um, onde $\Delta t = T/N$ e T é o período de amostragem:

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x^m(i), \quad i = 1, \dots, N & ; & \quad m = 1, \dots, M \\ y(t) &\longrightarrow y^m(j), \quad j = 1, \dots, N & ; & \quad m = 1, \dots, M \end{aligned}$$

2) Subtrai-se o valor médio de cada conjunto:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x^m(j)$$

$$\mu_y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^m(j)$$

$$x^m(j) = x^m(j) - \mu_x, \quad j = 1, \dots, N$$

$$y^m(j) = y^m(j) - \mu_y, \quad j = 1, \dots, N$$

3) Aplica-se a janela de Hanning para reduzir o "leakage"[38].

4) Aplica-se a transformada de Fourier em cada conjunto de N pontos $x^m(j)$ e $y^m(j)$:

$$X^m(k) = X^{*m}(-k) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ x^m(j) \right\}$$

$$Y^m(k) = Y^{*m}(-k) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ y^m(j) \right\}$$

$$k = 1, \dots, N/2 \quad , \quad m = 1, \dots, M$$

5) O IBSP $B(f_i, f_j)$ é calculado realizando um "looping" dos itens 2 até 4 para calcular a média dada por (4.3.1), como:

$$B(k, l) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X^*(k) X^*(l) Y(k+l)$$

com

$$k = 1, \dots, N/4$$

$$l = 1, \dots, k$$

e

$$k = N/4 + 1, \dots, N/2$$

$$l = N/2 - k, \dots, 1$$

para as interações do tipo soma, e;

$$B(k, l) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^m X^*(k) X(l) Y(k-l)$$

com

$$k = 1, \dots, N/2$$

$$l = 1, \dots, k$$

para as interações do tipo diferença, vide figura (4.3.2).

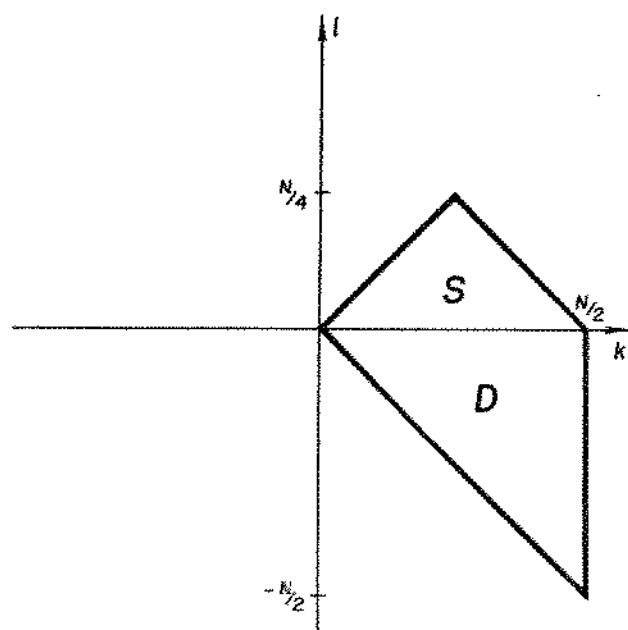


Figura (4.3.2)– Região para computação de $B(k,l)$ e $H_2(k,l)$.

4.4- APLICAÇÃO DA MODELAGEM QUADRÁTICA EM SISTEMAS NÃO LINEARES.

Nesta seção apresenta-se algumas simulações numéricas a fim de ilustrar a aplicação da modelagem quadrática apresentada neste capítulo. As unidades empregadas nos testes a seguir estão de acordo com o S.I. e a frequência em Hz.

As FRFs $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega_1, \omega_j)$ são calculadas como indicam as equações (4.2.4) e (4.2.7). Implementou-se também um programa computacional para calcular o espectro de potência da saída do sistema com base no modelo não linear quadrático segundo a equação (4.2.8).

Nos testes que seguem, o espectro de potência da saída obtido das respostas simuladas $y(t)$ é calculado por:

$$S_{yy}(\omega) = \langle |Y(\omega)|^2 \rangle, \quad (4.4.1)$$

Este é o espectro real da saída, e é comparado com os espectros da saída calculados através das modelagens puramente linear.

$$S_{yy1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \langle |X(\omega)|^2 \rangle, \quad (4.4.2)$$

e linear mais quadrática (ou quadrática) conforme a equação (4.2.8) reescrita abaixo:

$$S_{yy1q}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \langle |X(\omega)|^2 \rangle + \sum_{\omega = \omega_1 + \omega_j} |H_2(\omega_1, \omega_j)|^2 \langle |X(\omega_1)X(\omega_j)|^2 \rangle. \quad (4.4.3)$$

TESTE 1

Afim de comparar os resultados obtidos por nossos programas com os existentes na literatura, analisou-se o seguinte sistema discreto:

$$y(t) = -0,64x(t) + x(t-2) + 0,9x^2(t) + x^2(t-2) \quad (4.4.4)$$

onde $x(t)$ é um processo Gaussiano com média zero e variância 1, e $y(t)$ é a resposta.

Este sistema foi analisado por Powers e Kim [41]. A figura (4.4.1) mostra as curvas da amplitude e fase da FRFQ $H_2(\omega_1, \omega_2)$ obtida por eles e a figura (4.4.2) mostra as curvas desta função obtidas pelos nossos programas. Nota-se a grande semelhança entre os resultados.

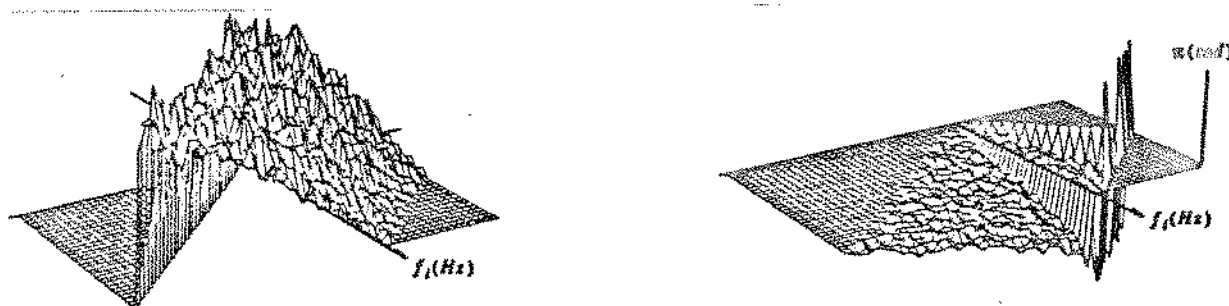


Figura (4.4.1)- Amplitude e fase da FRFQ calculada por Powers E Kim [41].

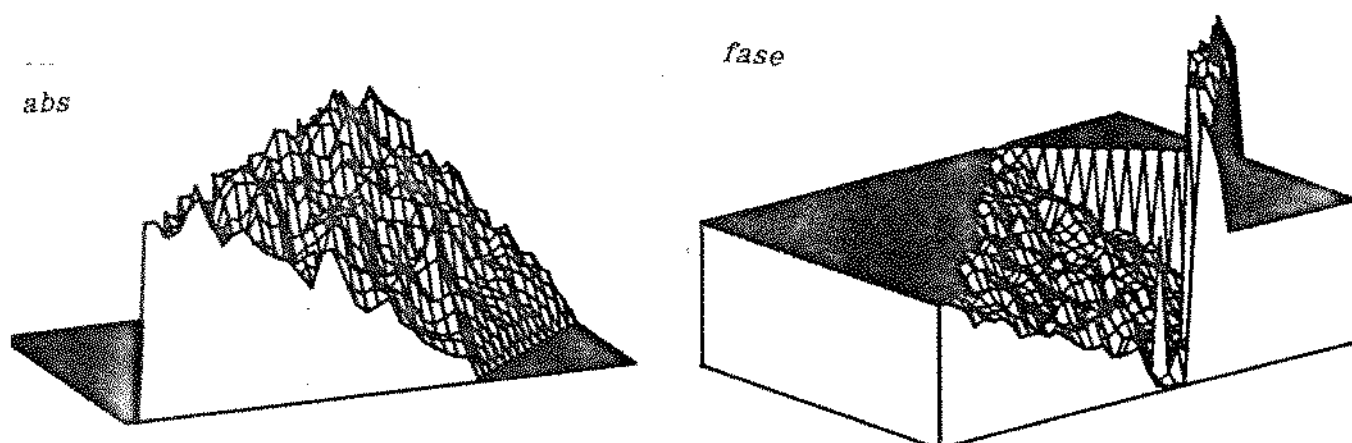


Figura (4.4.2)- Amplitude e fase da FRFQ calculada por nossos programas.

A figura (4.4.3) mostra tres curvas que representam os seguintes espectros de potência:

- 1) espectro de potência real da saída calculado por (4.1.1), com dados obtidos da simulação da equação (4.4.4),
- 2) espectro da saída previsto pela modelagem puramente linear, calculado pela equação (4.4.2), e,
- 3) espectro da saída previsto pela modelagem quadrática, calculado pela equação (4.4.3).

Analisando estes resultados percebe-se claramente a melhor qualidade do ajuste (coerência) entre o espectro real e o estimado pela modelagem quadrática comparada com o obtido pela modelagem puramente linear.

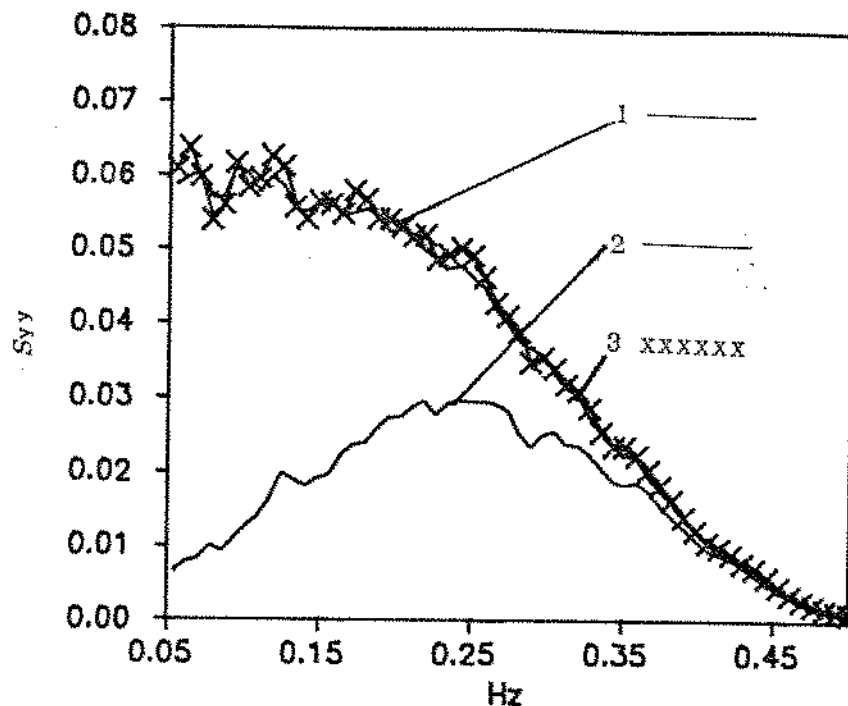


Figura (4.4.3)- Espectros de potência da saída (TESTE 1)-
1-Real, 2- Estimado por modelagem puramente linear, 3- Estimado por
modelagem quadrática.

Simulou-se numericamente também a resposta de um sistema
mecânico não linear através da seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t)|\dot{y}(t)| + k(y(t) + \beta y(t)|y(t)|) = A\tilde{f}(t). \quad (4.4.5)$$

onde $\tilde{f}(t)$ é um processo Gaussiano com média zero e variância 1, e A
representa o nível da excitação. Os parâmetros utilizados nesta
simulação foram os seguintes: $m=5$, $c=500$, $k=100000$, $\beta=10000$.

TESTE 2

Neste teste adotou-se em (4.4.5) o nível da excitação como $A=2500$. O espectro da entrada para o cálculo das FRFs está mostrado na figura (4.4.4). As curvas da amplitude e fase das FRFs linear e quadrática estão mostradas nas figuras (4.4.5) e (4.4.6) respectivamente.

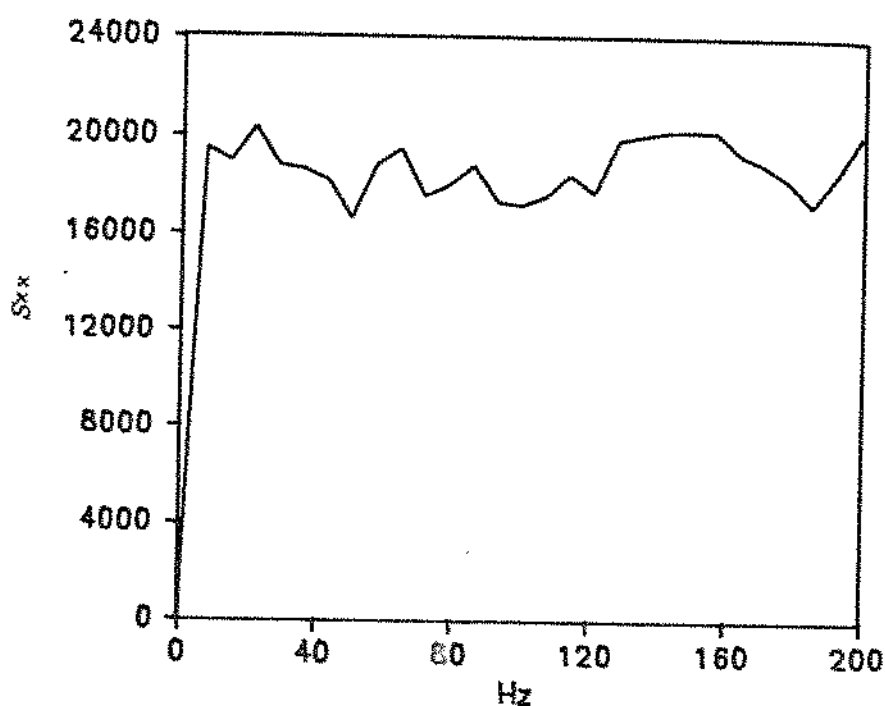


Figura (4.4.4)- Espectro de potência da entrada (TESTE 2).

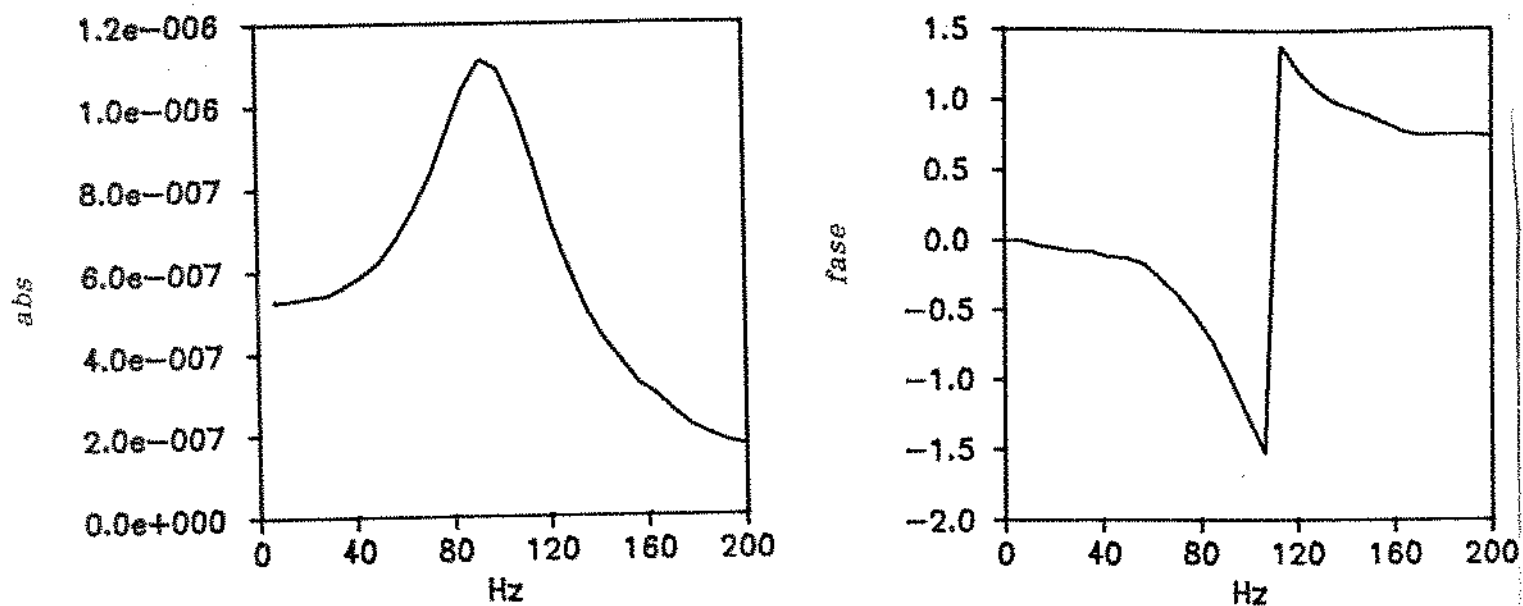


Figura (4.4.5)- Função de resposta em frequência linear
(TESTE 2).

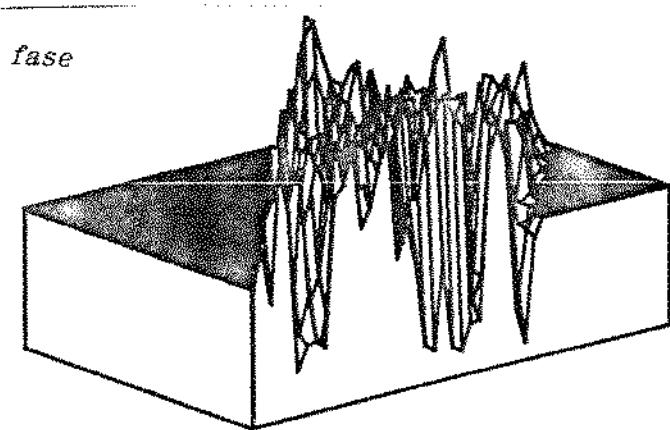
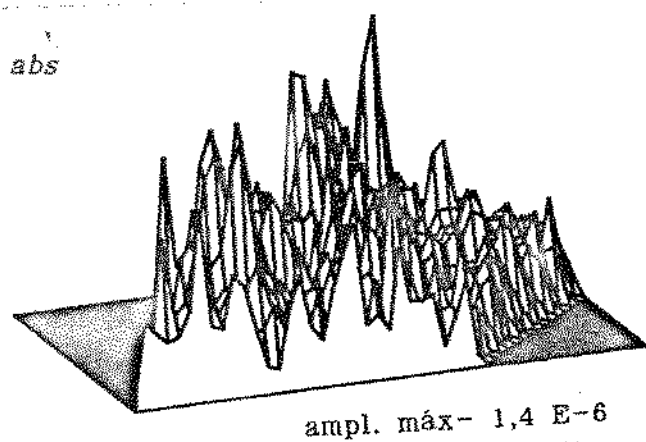


Figura (4.4.6)- Função de resposta em frequência quadrática
(TESTE 2).

A figura (4.4.7) mostra as curvas dos seguintes espectros:

1) espectro real da saída obtido através dos dados da simulação de (4.4.5),

2) espectro da saída calculado pela modelagem puramente linear, e,

3) espectro da saída calculado pela modelagem quadrática.

Analisando os resultados percebe-se a melhor qualidade do ajuste entre os espectros real e o previsto pelo modelo quadrático.

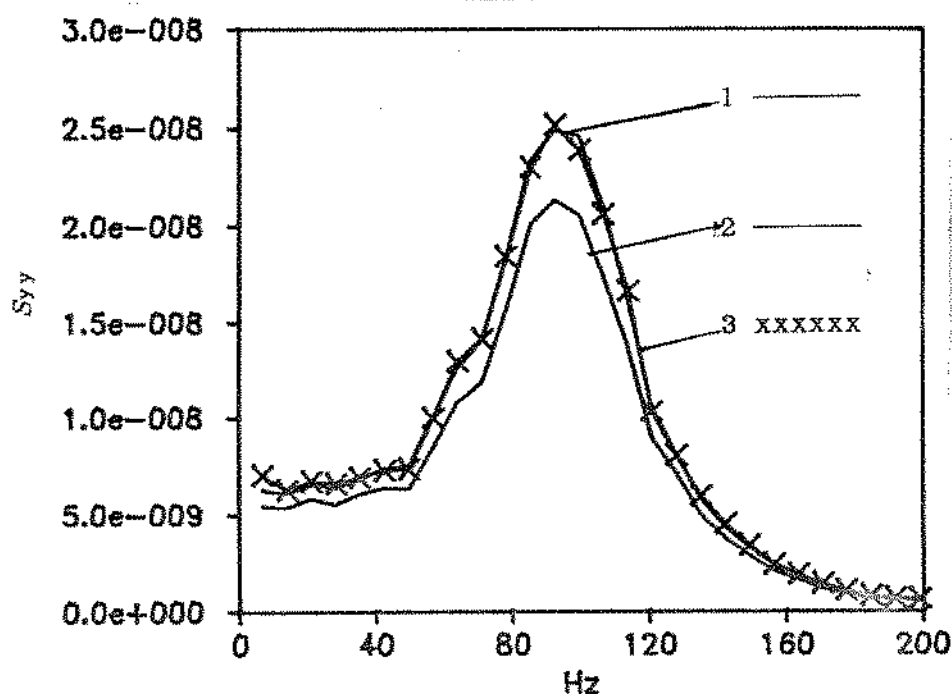


Figura (4.4.7)- Espectro de potência da saída (TESTE 2)- 1- Real, 2- Estimado por modelagem puramente linear, 3- Estimado por modelagem quadrática.

Se o sistema analisado for linear é possível prever com muito boa precisão, por meio da modelagem puramente linear, as respostas para qualquer nível de excitação da entrada, mesmo ele sendo diferente do nível de excitação utilizado para o cálculo da FRFL.

A afirmação acima não é válida para sistemas não lineares. Logo, a modelagem quadrática pode ajudar prever a resposta do sistema (em termos de seu espectro de potência, pois a resposta analisada aqui é aleatória) somente para o mesmo nível de excitação utilizado para o cálculo das FRFs. Os testes 3 e 4 trazem exemplos neste sentido.

TESTE 3

Simulou-se a resposta do sistema através da equação (4.4.5) com uma nova entrada cuja forma espectral foi alterada porém não variando seu nível. Em seguida calculou-se o espectro de potência da saída por (4.4.1). Os espectros de potência previstos por meio das modelagens linear e quadráticas foram estimadas utilizando as FRFs obtidas na simulação do TESTE 2.

A figura (4.4.8) mostra o espectro desta nova entrada.

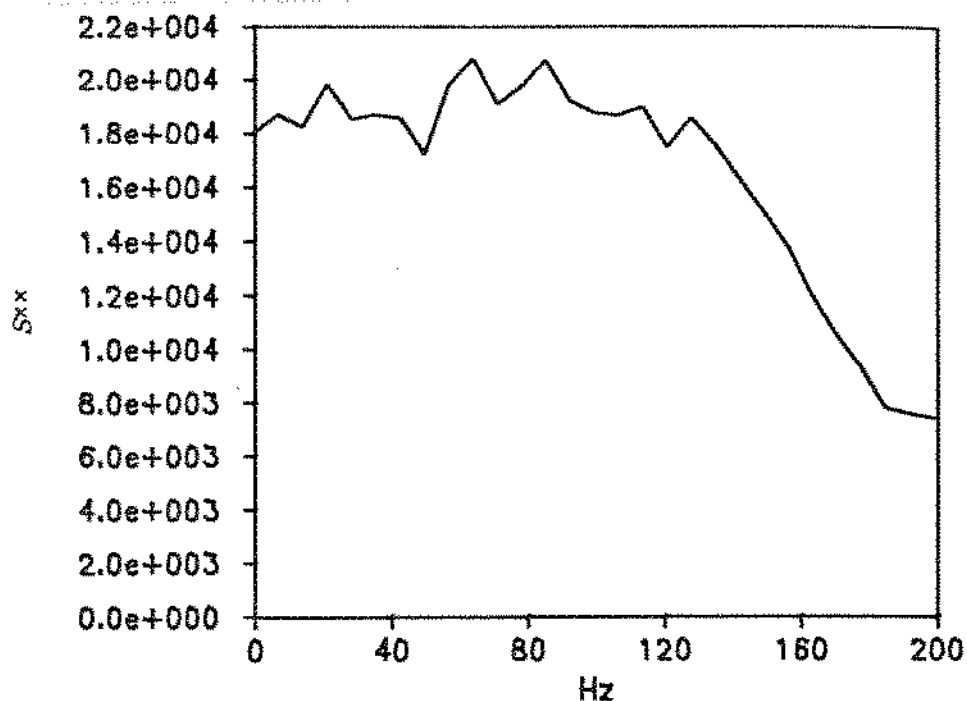


Figura (4.4.8)- Espectro de potência da entrada (TESTE 3).

A figura (4.4.9) mostra as curvas dos seguintes espectros:

1) espectro de potência real da saída calculado a partir dos dados obtidos da simulação de (4.4.5) cujo espectro da excitação utilizada está mostrado na figura (4.4.8),

2)espectro da saída calculado pelo modelo puramente linear utilizando as FRF linear obtida no TESTE 2,e,

3)espectro da saída calculado pelo modelo quadrático utilizando as FRFs obtidas no TESTE 2.

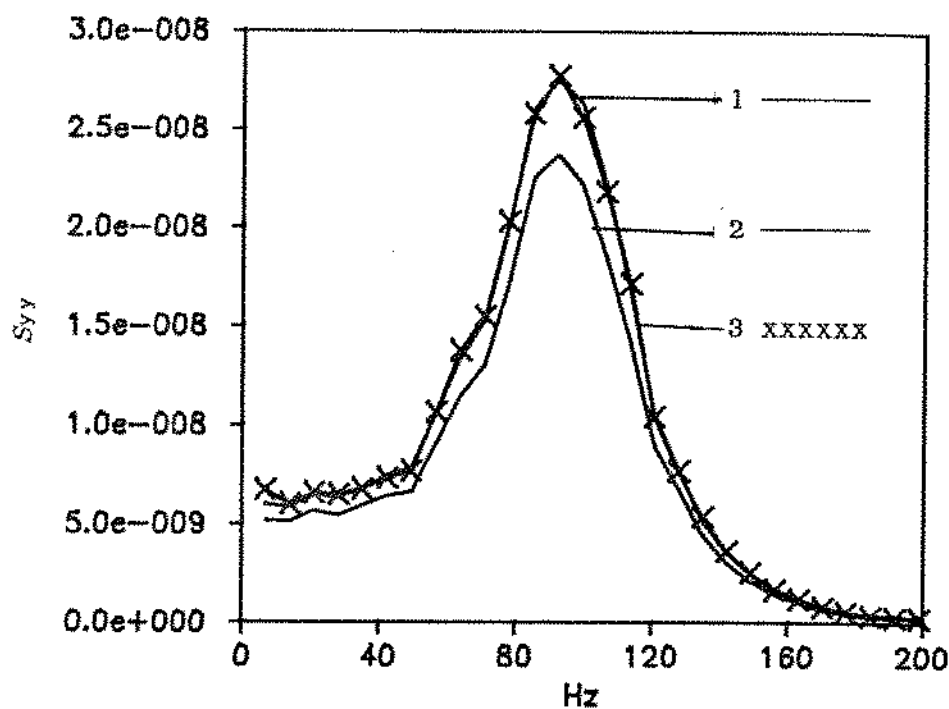


Figura (4.4.9)- Espectro de potência da saída (TESTE 3)- 1- Real, 2- Estimado por modelagem puramente linear, 3- Estimado por modelagem quadrática.

TESTE 4

Neste teste variou-se o nível de excitação do sistema representado pela equação (4.4.5) a fim de tentar prever o espectro de potência da saída para esta nova saída por meio da modelagem quadrática utilizando as FRFs já calculadas no TESTE 2.

O novo nível de excitação adotado foi $A = 2800$. A figura (4.4.10) mostra seu espectro de potência.

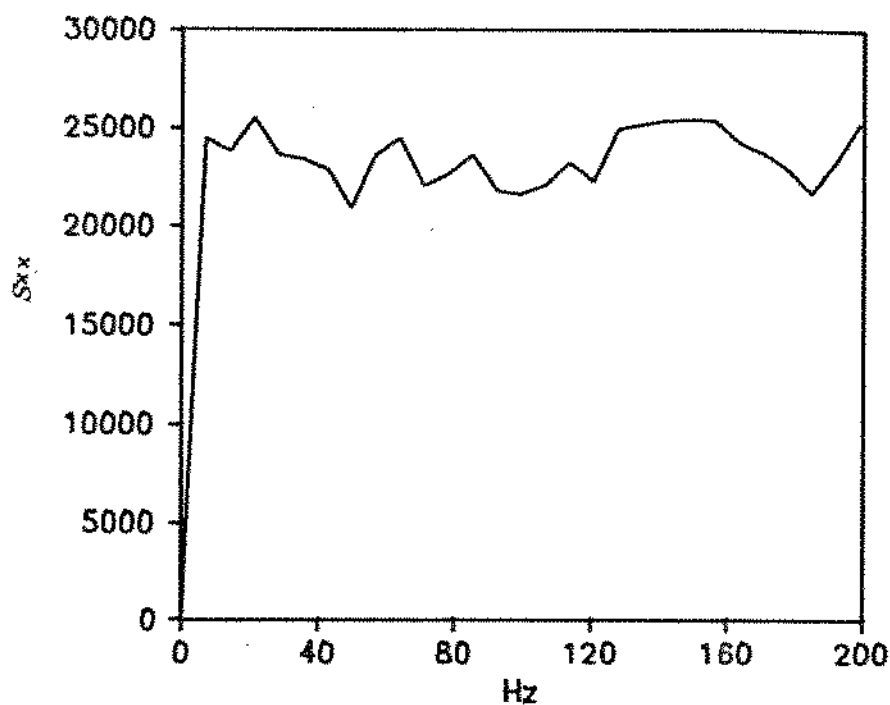


Figura (4.4.10)- Espectro de potência da entrada (TESTE 4).

A figura (4.4.11) mostra as curvas dos seguintes espectros de potência:

- 1) espectro real da saída obtido através dos dados da simulação para um nível maior de excitação,
- 2) espectro da saída previsto pela modelagem puramente linear utilizando a FRF linear calculada no TESTE 2,
- 3) espectro da saída previsto pela modelagem quadrática utilizando as FRFs calculadas no TESTE 2.

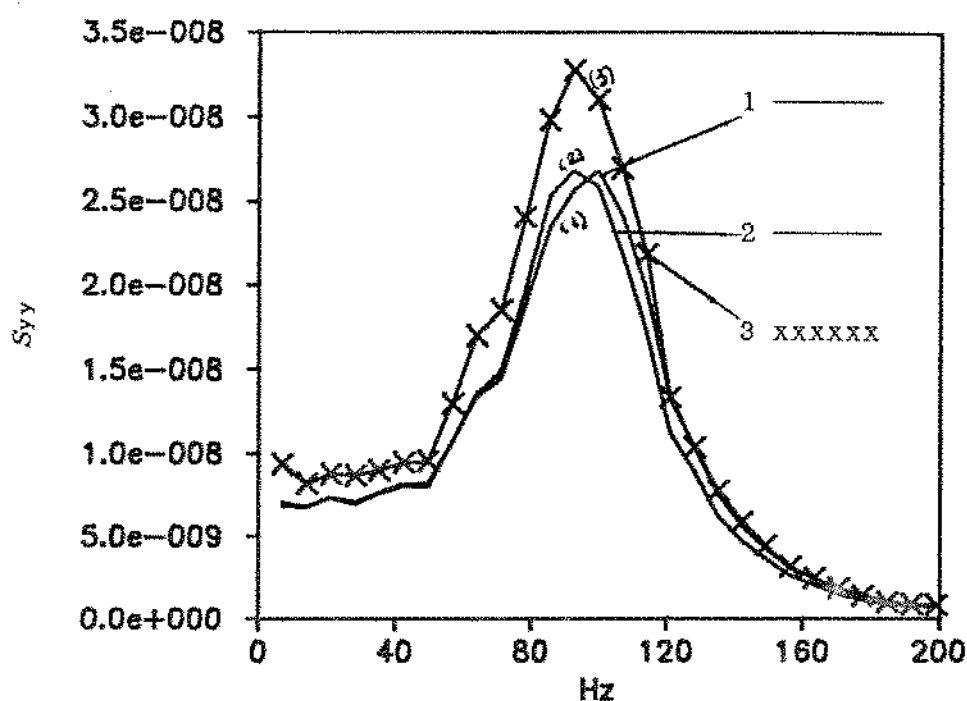


Figura (4.4.11)- Espectro de potência da saída (TESTE 4)-
 1- Real, 2- Estimado por modelagem puramente linear, 3- Estimado por
 modelagem quadrática.

Analisando as curvas da figura (4.4.11) observa-se que não foi possível prever o espectro da saída do sistema por nenhuma das modelagens. As estimativas falharam tanto na predição da amplitude do espectro quanto na frequência onde ocorre a amplitude máxima.

TESTE 5

Neste teste simulou-se numericamente a resposta de um outro sistema não linear representado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} - 1/2 (y - y^3) = A f(t), \quad (4.4.6)$$

com os seguintes parâmetros: $\beta = 0.168$ e $A = 0.8$, onde $f(t)$ representa um processo Gaussiano com média zero e variancia 1.

Procedendo da mesma maneira que nos testes anteriores calculou-se os espectros real da saída, e os estimados pelos modelos puramente linear e quadrático para o mesmo nível de excitação mostrados na figura (4.4.12). Analizando os resultados observa-se uma melhor coerência entre o espectro real (curva 1) e o previsto por meio da modelagem quadrática (curva 3), mesmo assim a semelhança entre estas duas curvas não é satisfatória como nos testes 1,2 e 3.

Esta falta de coerência é atribuída ao fato do sistema analisado não ter um comportamento não linear essencialmente quadrático.

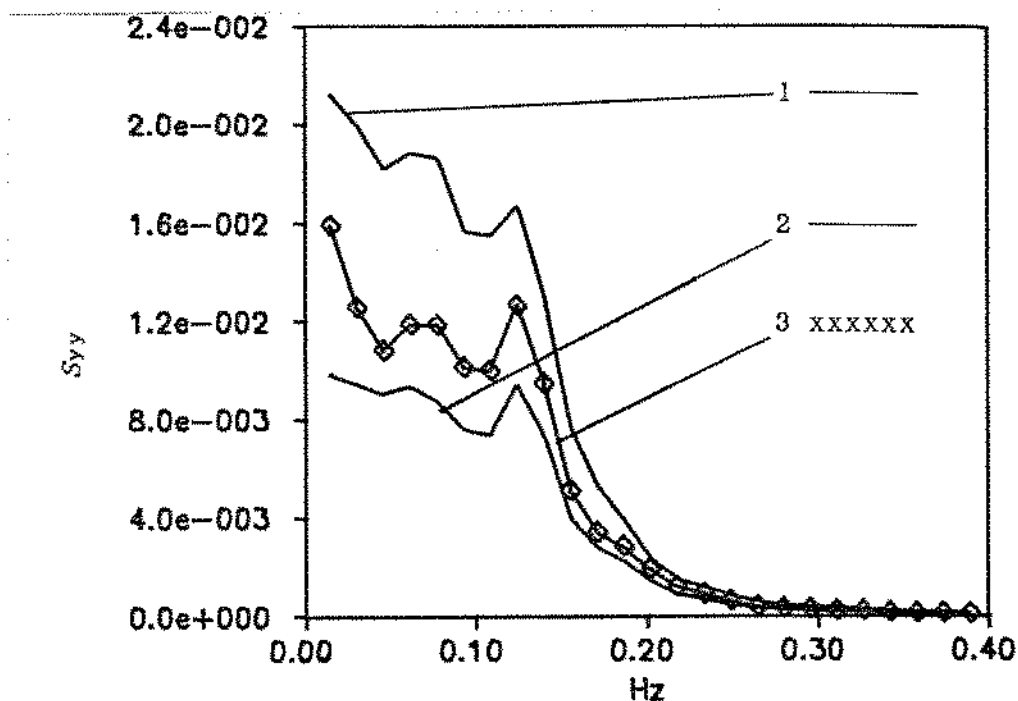


Figura (4.4.12)- Espectro de potência da saída (TESTE 5)-
1- Real, 2- Estimado por modelagem puramente linear, 3- Estimado por modelagem quadrática.

Tomando por base os resultados obtidos destes testes fica claro que é possível predizer o espectro de potência da saída de um sistema não linear empregando o modelo quadrático somente quando o nível de excitação da entrada for o mesmo do utilizado para o cálculo de suas FRFs e as não linearidades presentes no sistema serem essencialmente de segunda ordem.

O fato do espectro de potência da saída real e a estimada pela modelagem quadrática serem bastante semelhantes, como ocorreu nos

testes 1 2 e 3 significa que para aquele nível de excitação, o sistema analisado pode ser considerado de segunda ordem.

A estimativa da FRFQ $H_2(\omega_i, \omega_j)$ envolve um cálculo de média entre três componentes espectrais, (vide equação (4.3.1)). O número de segmentos utilizados para realizar esta operação deve ser, segundo a literatura, maior que 500 para que os erros aleatórios presentes estejam a níveis toleráveis. A estimativa dos erros (erros aleatórios e de resolução) envolvidos na implementação destas técnicas são temas de discussão dos especialistas nesta área e de difícil predição [41]. Neste trabalho foram utilizados 450 segmentos para o cálculo da FRFQ com 128 pontos cada. Técnicas de "overlapping" também foram utilizadas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho apresenta técnicas de detecção, caracterização e modelagem de sistemas não lineares partindo, basicamente, da idéia de Volterra e Wiener que consideraram a resposta de um sistema não linear como uma soma da resposta puramente linear (ou de primeira ordem), mais as respostas multi-lineares (ou de ordem superior).

A transformada de Hilbert mostrou ser uma ferramenta eficaz na implementação de um teste para detecção de não linearidades em sistemas físicos quando a função de resposta em frequência (FRF) é obtida por varredura senoidal. Caso a excitação seja aleatória ou impulsiva, a função de resposta ao impulso obtida via a aplicação da transformada de Fourier inversa na FRF tende a causalizar-se impossibilitando a aplicação desta técnica.

Este teste pode ser utilizado, principalmente, como um alerta ao dinamicista a respeito da existência de não linearidades no sistema, considerando que, na maioria dos casos, a análise do comportamento dinâmico dos sistemas físicos é realizada por modelos puramente lineares. Assim, este simples teste (realizado em poucos segundos) pode ser incluído como a primeira etapa nos testes modais, ou na análise de sistemas físicos em outras áreas da engenharia. Além disso, uma vantagem em utilizar este método é a facilidade com que pode ser realizada a linearização do sistema (a partir das FRFs).

Os núcleos da série de Volterra ou de Wiener caracterizam o

sistema não linear, para um dado nível de excitação, no sentido que, conhecendo-se estas funções pode-se prever a resposta do sistema a qualquer entrada de nível semelhante. Como as FRFs linear e de ordem superior estão relacionadas com estes núcleos através da transformada de Fourier as FRFs também caracterizam o sistema.

Então, a caracterização de sistemas não lineares pode ser, a rigor, realizada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Optou-se aqui por fazê-la no domínio da frequência devido à maior facilidade na interpretação dos fenômenos não lineares inerentes aos sistemas físicos (como por exemplo, a interação onda-onda). Além disso, a maioria das publicações relacionadas à identificação e modelagem, formalizadas no domínio do tempo, não se referem à aplicações práticas (no sentido de calcular e analisar os núcleos) e sim a formalismos matemáticos complexos com o intuito de estudar representações ortogonais para exprimir a relação entrada/saída de sistemas não lineares [19,20,21,22] como, por exemplo, a série funcional de Wiener discutida resumidamente no capítulo 3 deste trabalho.

Como, em aplicações práticas, é necessário truncar estas séries em sua segunda ordem devido ao elevado custo computacional exigido, não importa muito a análise dos diversos procedimentos de ortogonalização existentes, uma vez que, quando truncados na segunda ordem eles se equivalem. Assim, elegeu-se o modelo quadrático no domínio da frequência para estudar e implementá-lo computacionalmente.

O modelo quadrático no domínio da frequência discutido no capítulo 4 deste trabalho, requer o cálculo das FRFs de primeira e segunda ordens. Estas funções foram calculadas aqui com a ajuda das técnicas da análise espectral e biespectral, que permitem o desacoplamento das parcelas linear e não linear da resposta do

sistema. A aplicação deste modelo é restrito a sistemas quadráticos, onde os efeitos não lineares superiores à segunda ordem possam ser desprezados.

Em termos práticos, a FRFL descreve o comportamento puramente linear do sistema e a FRFQ o comportamento não linear quadrático.

A FRFQ permite a determinação dos pares de frequência onde ocorrem as interações quadráticas entre os componentes espectrais da entrada e saída.

A identificação da ordem da não linearidade presente no sistema pode ser realizada comparando o seu espectro de potência real com o espectro modelado. Se a semelhança entre estes espectros for grande, pode-se dizer que os efeitos não lineares presentes são de segunda ordem, caso contrário aponta a existência de efeitos de ordem superior à quadrática.

Este trabalho ilustra a aplicação das técnicas apresentadas a partir de simulações numéricas e os resultados obtidos validam a implementação realizada.

Para trabalhos futuros pode-se, em primeiro lugar, implementar a modelagem quadrática no domínio da frequência para entrada não-Gaussiana. Vêm sendo publicados recentemente trabalhos neste sentido [41], obtendo-se curvas para a FRFQ mais suaves que as obtidas pelo método aqui implementado. As curvas do espectro de potência modeladas também são consideravelmente melhoradas.

Em segunda etapa pode-se pesquisar a aplicação deste modelo para a excitação periódica e transitória, com as FRFs calculadas com entrada aleatória. O objetivo destas pesquisas poderia ser aplicar esta modelagem a sistemas físicos reais.

APÊNDICE A

OPERADOR DE VOLTERRA DE P-ÉSIMA ORDEM

Seja um operador de p-ésima ordem T_p definido como aquele cuja resposta $y_p(t)$ a uma combinação linear de entradas $x_n(t)$ é dada por uma operação multilinear de p-ésima ordem sobre estas entradas, isto é:

$$\begin{aligned}
 y_p(t) &= T_p \left[x(t) \right] = T_p \left[\sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \right] \\
 &= \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_p=1}^N T_p \left\{ c_{n_1} x_{n_1}(t), \dots, c_{n_p} x_{n_p}(t) \right\} \\
 &= \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_p=1}^N c_{n_1} \dots c_{n_p} T_p \left\{ x_{n_1}(t), \dots, x_{n_p}(t) \right\},
 \end{aligned}$$

(A.1)

onde $T_p \left\{ x_1(t), \dots, x_p(t) \right\}$ é uma operação p-linear, ou seja, ela é linear para um dado argumento quando fixa os outros.

Se o operador T_p é invariante no tempo, então ele é classificado como um operador de Volterra de p-ésima ordem e caracteriza sistema de Volterra de p-ésima ordem.

A relação entrada/saída de um sistema de Volterra de p-ésima ordem invariante no tempo, na notação do operador é a

seguinte:

$$y_p(t) = \mathbb{H}_p \left[x(t) \right]. \quad (\text{A.2})$$

onde, $\mathbb{H}_p$ denota um operador de Volterra de p -ésima ordem.

A caracterização funcional da regra indicada por (A.2) é a seguinte:

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p. \quad (\text{A.3})$$

onde,

$$h_p(\tau_1, \dots, \tau_p) = \mathbb{H}_p \left\{ \delta(\tau_1, \dots, \tau_p) \right\}. \quad (\text{A.4})$$

onde a equação (A.3) é uma integral de convolução multilinear e $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ é o p -ésimo núcleo de Volterra correspondente ao p -ésimo operador de Volterra $\mathbb{H}_p$. Este núcleo é simétrico em relação à qualquer combinação de argumentos τ_i .

O núcleo $h_p(\tau_1, \dots, \tau_p)$ é interpretado fisicamente como a resposta ao impulso p -dimensional.

Os núcleos de de Volterra têm as seguintes propriedades:

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \quad \text{para qualquer } \tau_i < 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{\tau_i \rightarrow \infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \quad \text{para qualquer } i \quad (\text{A.6})$$

Então os núcleos de Volterra são por definição: simétricos.

causais e têm memória finita.

Vinh e Chouychaj realizaram trabalhos no sentido de determinar o segundo núcleo de Volterra de estruturas mecânicas [36].

APÊNDICE B

B1- FUNCIONAIS DE WIENER DE ORDEM ZERO E DE PRIMEIRA ORDEM.

O funcional de Wiener de ordem zero é definido como:

$$\mathbb{G}_0 \left[k_0; x(t) \right] = k_0, \quad (\text{B1.1})$$

onde k_0 é uma constante e depende do valor da entrada $x(t)$.

O funcional de Wiener de primeira ordem, $\mathbb{G}_1 \left[k_1; x(t) \right]$, de acordo com a definição no capítulo 3, é o primeiro funcional de Volterra não homogêneo,

$$\begin{aligned} g_1 \left[k_1, k_0(1); x(t) \right] &= \mathbb{K}_1 \left[x(t) \right] + \mathbb{K}_0(1) \left[x(t) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + k_0(1), \end{aligned} \quad (\text{B1.2})$$

com a seguinte propriedade:

$$\langle \mathbb{H}_0 \left[x(t) \right] g_1 \left[k_1, k_0(1); x(t) \right] \rangle = 0, \quad (\text{B1.3})$$

onde $x(t)$ é um processo Gaussiano branco, com média zero e auto-correlação $\Phi_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$.

Substituindo a equação (B1.2) em (B2.3) e considerando que $x(t)$ tem média zero obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle G_0 \left[x(t) \right] G_1 \left[k_1, k_0(t); x(t) \right] \rangle &= h_0 \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau_1) \langle x(t-\tau_1) \rangle d\tau_1 + h_0 k_0(t) \\ &= h_0 k_0(t). \end{aligned} \quad (B1.4)$$

Como a equação (B1.4) deve ser zero, $k_0(t)=0$. Substituindo $k_0(t)=0$ na equação (B1.2) o funcional de Wiener de primeira ordem, $G_1 \left[x(t) \right]$, é:

$$G_1 \left[k_1; x(t) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1. \quad (B1.5)$$

Este funcional representa a resposta de um sistema linear a uma entrada $x(t)$, onde $k_1(t)$ é a resposta ao impulso do sistema e coincide com o operador de Volterra de primeira ordem.

B2- FUNCIONAIS DE WIENER DE ORDEM SUPERIOR

O funcional de Wiener de segunda ordem, $G_2 \left[k_2; x(t) \right]$, de acordo com a definição no capítulo 3, é o segundo funcional não homogêneo de Volterra:

$$\begin{aligned}
g_2 \left[k_2, k_1(z), k_0(z); x(t) \right] &= K_2 \left[x(t) \right] + K_1(z) \left[x(t) \right] + K_0(z) \left[x(t) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(z)(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + k_0(z)
\end{aligned}
\tag{B2.1}$$

com a seguinte propriedade:

$$\langle H_0 \left[x(t) \right] g_2 \left[k_2; k_1(z); k_0(z); x(t) \right] \rangle = 0, \tag{B2.2}$$

e

$$\langle H_1 \left[x(t) \right] g_2 \left[k_2; k_1(z); k_0(z); x(t) \right] \rangle = 0 \tag{B2.3}$$

para $x(t)$ um processo Gaussiano branco, com média zero e auto-correlação $\Phi_{xx}(\tau) = A\delta(\tau)$.

Substituindo a equação (B2.1) em (B2.2) e (B2.3) obtém-se o núcleo $k_0(z)$ e $k_1(z)$ respectivamente, substituindo estes núcleos em (B2.1) obtém-se o segundo funcional de Wiener, isto é:

$$\begin{aligned}
G_2 \left[k_2; x(t) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1
\end{aligned}
\tag{B2.4}$$

Se o processo da entrada $x(t)$ for Gaussiano, não branco e com média zero, este funcional é escrito como [22]:

$$\mathbb{G}_2[k_2; x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2$$

(B2.5)

Esta expressão é mencionada no capítulo 4 deste trabalho.

Os demais funcionais de Wiener podem ser determinados de maneira análoga a utilizada para obtenção destes três primeiros.

Os núcleos de Wiener podem ser calculados utilizando técnicas de correlação [20].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]- Meirovitch, L. - "Methods of Analytical Dynamics". MacGraw-Hill, 1970.

- [2]- Ewins, D. J. - "Modal Testing: Theory and Practice". John Wiley & sons, 1984.

- [3]- Titchmarsh, E. C. - "Introduction to the Fourier Integral Transforms", Oxford Press, 1937.

- [4]- Erdelyi, Magnus, Oberhettinger & Tricomi - "Tables of Integral Transforms", vol. 2, MacGraw-Hill.

- [5]- Gold B., Oppenheim A. V. & Rader C. M. - "Theory and Implementation of the Discret Hilbert Transform", Symp.Computer Processing in Communication. vol. 19- Polytechnic Press, New York. 1970.

- [6] Rabiner L. R. & Schafer T. W. - "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transform". Bell System J., vol. 53, 2. pp. 361 - 388, 1974.

- [7] Hermann O. - "Transverselfilter sur Hilbert Transformation", Arch. Electronik Übertragungstechnik, vol. 23, 12, pp. 581-587.

- [8] Oppenheim A. V. & Scherfer R. W. - "Digital Signal

Processing", Prentice Hall, 1975.

[9] Frohlich - "Theory of Dielectrics", Clarendon Press, Oxford, 1958.

[10] Kronig R.L. - "On the theory and Dispersion of X Rays", J. Opt Soc. Amer., vol. 12, p. 547.

[11] Donnell M., Jaynes E. T. & Miller J. G. - "Kramers-Kronig Relationship Between Ultrasonic Attenuation and Phase Velocity", J. Acoust. Soc. Am., vol. 69, (3), pp. 696-701, 1981.

[12] Guillemin E.A. - "Theory of Linear Physical Systems", John Wiley & Sons, New York, 1963.

[13] Bode H.W. - "Network Analysis and Feedback Amplifiers Design", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1945.

[14] Simon M. & Tomlinson G. R. - "Application of the Hilbert Transform in the Modal Analysis of Linear and Non Linear Systems", Jnl. of Sound and Vibn., vol. 90, (2), pp. 275-282, 1983.

[15] Simon M. & Tomlinson G. R. - "Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-Linear Structures", Jnl. of sound and Vibn., vol. 96, (4), pp. 421-436, 1984.

[16] Vinh T., Haoni A. & Chevallier Y. - "Extension of Modal Analysis to Non Linear Structure by Using Hilbert Transform", IMAC, pp. 852-857, 1984.

- [17] Volterra V. - "Theory of Functional". Blackie, 1930.
- [18] Wiener. N. - "Acta. Math. Stockh.", pp. 55-117, 1930
- [19] Wiener N. - "Non Linear Problems in Random Theory". Technology Press, 1958.
- [20] Schetzen M. - "The Volterra and Wiener Theory of Non-Linear Systems", John Wiley & sons, 1980.
- [21] Billings S. A. - "Identification of Non Linear System, A Survey", IEEE Proc., Vol. 117, 6, 1980.
- [22] Barret J. F. - "The Use of Fuctionals in the Analysis of Non Linear Physiscal Systems", J. Electronics Control, 15, pp. 567-615, 1969.
- [23] Rugh W. J. - "Nonlinear System Theory", The Johns Hopkins University Press, Baltimore.1981.
- [24] Kim Y. C. & Powers E. J. - "Digital Bispectral Analysis and Application to Non linear Wave Interaction", IEEE Transactions on Plasma Science, PS, 7, vol. 2, pp., 120-131, 1981.
- [25] Hagedorn P. - "Oscilações Não Lineares", Editora Edgard Blucier, 1982.
- [26] Brillinger D. R. - "An Introduction to polyspectra". Annals

of Mathematical Statistics, vol. 36, pp. 1351-1374, 1965.

[27] Tick L. J. - "The Estimation of the Transfer Function of Quadratic System", Technometrics vol. 3,(4), pp. 563-567, 1961.

[28] Choi D. W., Miksad R. W. & Powers E. J. - "Application of Digital Cross-Bispectral Analysis Techniques to Model the Non Linear Response of a Moored Vessel System in Random Seas", Jnl. of Sound and Vibr., vol. 99,(3), pp. 309-326, 1985.

[29] German V.K., Levikov S.P. & Tsuetsinskii A. - "Bispectral Analysis of Sea-Level Variations", Sov. Meteorol. Hydrol., vol. 11, pp. 50-57, 1980.

[30] Hasselman K., Munk W. & MacDonald G. - "Bispectral of ocean waves," In Time Series Analysis, M. Rosenblatt Editor, Wiley, 1963, pp. 125-130.

[31] Hinich M.J. & Clay C.S. - "The Application of the Discrete Fourier Transform in the Estimation of Power Spectra Coherence and Bispectra of Geophysical Data, Rev. Geophys., vol. 6 ,3, pp.347-363, 1968.

[32] Korein J., Tick L.J., Zeitlin R. A. & Randt C.T. - "Linear and Non Linear Spectral Analytic Techniques Applied to the Human Electroencephalogram.", Con. Sci. Health Res. Council, vol. 4, pp. 1126-1128.

[33] Godfruy M.D. - "An Exploratory Study of the Bispectrum of

Economic Time Series". Appl. Statist., vol. 14, pp.48-69, 1965.

[34] Hering J.R. - "Theoretical Calculation on Turbulent Bispectra", J. Fluid Mech. vol.97, pp. 193-204, 1980.

[35] Hilderbrand F.B. - "Advanced Calculus for Applications", 2nd edition, Prencite-Hall,1976.

[36] Chaydraj T. - "Comportement Dynamique Non Lineaire des Structures". These de Docteur-Ingenieur, L' Institut Superieur des Materiaux et de la Constuction Mecanique. 1986.

[37] Rao T. S. - "Bispectral Analysis of Non Linear Stationary Time Series". Article in Handbook of statistics 3, edited by Brillinger, Krishnaiah, North Holland, pp. 293-319. 1983.

[38] Bendat J.S. & Piersol A.G. - "Engineering Applications of Correlations and Spectral Analysis. Willey, 1980.

[39] Brillinger D.R. & Roseblatt M. - "Computation and Interpretation of k-th Order Spectra", in Spectral Analysis of Time Series (B. Harris editor), Willey, 1967.

[40] Priestley M.B. - "Spectral Analysis and Time Series I and II", London Academic, 1981.

[41] Kim K.I. & Powers E.J. - "A Digital Method of Modeling Quadratically Nonlinear Systems With a General Random Input", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Prossing, vol. 36 (11). pp.

1758-1769. 1988.

[42] Pezeshki C., Elgar S. & Krishna R. - "Biespectral Analysis of Possessing Chaotic Motion", Journal of Sound and Vibration, vol 137 (3), pp 357-368, 1990.