

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**INJEÇÃO DE VAPOR EM
RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS
COM DUPLA POROSIDADE**

*Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida pelo Eng.º Abel Gomes Lins Junior e aprovada
pela Comissão Julgadora em 16/12/91.*

64/91

Antonio Cláudio de França Corrêa
Prof. Dr. Antonio Cláudio de França Corrêa

Autor : Abel Gomes Lins Junior *64/91*
Orientador : Antonio Cláudio de França Corrêa *X*
Co-orientador : Fernando Rodríguez de la Garza *X*

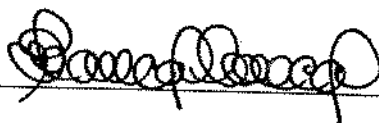
dezembro de 1991

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

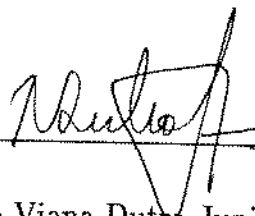
A dissertação "Injeção de Vapor em Reservatórios Heterogêneos com Dupla Porosidade", elaborada por Abel Gomes Lins Junior e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 16 de dezembro de 1991.

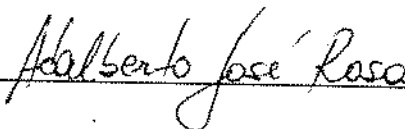
Banca Examinadora



Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph.D.



Tarcílio Viana Dutra Junior, Ph.D.



Adalberto José Rosa, Ph.D

..

Aos

meus pais

Abel (*in memoriam*)

e

Edilene

Agradecimentos

À minha esposa Tereza e aos meus filhos Daniel e Tiago pela compreensão, carinho, apoio e incentivo à minha participação neste curso.

Aos meus colegas, inclusive os distantes, pela amizade e companheirismo demonstrados que tornaram esta tarefa ainda mais gratificante.

À Petróleo Brasileiro S.A. pelo apoio técnico e financeiro que tornou possível a participação no curso de mestrado e o desenvolvimento deste trabalho.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
3	FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	8
3.1	Balanço de Massa	10
3.1.1	Componente óleo	12
3.1.2	Componente gás	12
3.1.3	Componente água	13
3.2	Balanço de Energia	15
3.3	Sistema de Dupla Porosidade	20
3.3.1	Fratura	20
3.3.2	Blocos de Matriz	22
3.4	Equações Complementares	24
3.5	Condições Iniciais e de Contorno	25
3.6	Perdas de Calor Para Formações Adjacentes	26

3.6.1	Formulação do Problema	26
3.6.2	Solução Analítica	27
3.6.3	Aproximação Numérica	30
3.6.4	Termos de Correção	31
3.7	Modelo de Poço	34
3.8	Características Gerais do Simulador	35
4	PROPRIEDADES FÍSICAS	37
4.1	Propriedades do Vapor Saturado	37
4.2	Permeabilidade Relativa Trifásica	37
4.3	Viscosidades	38
4.4	Fator Volume de Formação	41
4.5	Condutividade Térmica	42
4.6	Capacidade Térmica	42
4.7	Entalpia	43
4.8	Energia Interna	44
4.9	Pressão Capilar	44
5	SOLUÇÃO NUMÉRICA	46
5.1	Discretização	46
5.2	Solução do Sistema não Linear de Equações	49
6	VALIDAÇÃO	53

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

55

8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

67

8.1 Conclusões 67

8.2 Recomendações 68

Apêndice A 74

Apêndice B 79

Apêndice C 82

Lista de Tabelas

3.1	Frações Mássicas	11
6.1	Dados Usados Para Validação por Warren e Root	54
7.1	Dados de Entrada Para o Caso Padrão	56
7.2	Permeabilidades Relativas	57
7.3	Dados de PVT	57
7.4	Dados de Viscosidade do Óleo	58

Lista de Figuras

2.1	Modelo de Dupla-Porosidade de Warren e Root	4
3.1	Fluxo de Energia	15
3.2	Perda de Calor para Formações adjacentes	27
3.3	Fluxograma Simplificado do Simulador	36
4.1	Gráfico ASTM	40
5.1	Exemplo de Solução pelo Método de Newton	49
6.1	Validação por Warren e Root	54
7.1	Efeito do σ na Vazão de Óleo	60
7.2	Efeito do σ na Acumulada de Óleo	60
7.3	Efeito do σ na Vazão de Água	61
7.4	Efeito de Q_{inj} na Vazão de Óleo	61
7.5	Efeito de Q_{inj} na Acumulada de Óleo	62
7.6	Efeito de Q_{inj} na Vazão de Água	62

7.7	Efeito do "Soaking" na Vazão de Óleo	63
7.8	Efeito do "Soaking" na Acumulada de Óleo	63
7.9	Fluxo Matriz-Fratura	64
7.10	Comportamento da Pressão	64
7.11	Comportamento da Temperatura	65
7.12	Comportamento da Saturação de Gás	65
7.13	Comportamento da Saturação de Vapor	66

NOMENCLATURA

- A_m - área superficial dos blocos de matriz expostos ao fluxo
- A_{hot} - área superficial da interface rocha reservatório - rocha selante
- b_j - inverso do fator volume de formação (fvf) da fase "j"
- b_{gg} - inverso do fvf do componente gás na fase gasosa
- b_{wg} - inverso do fvf do vapor
- B_{gg} - fator volume de formação do componente gás na fase gasosa
- C_α - coeficiente angular
- C_{adm} - constante de adimensionalização do fluxo térmico
- C_{ij} - fração mássica do componente "i" na fase "j"
- C_l - coeficiente linear
- D_g - densidade do gás
- D_z - distância de um elemento, em relação a um plano horizontal de referência, no sistema de coordenadas considerado
- $\vec{E}_i$ - vetor energia
- $\vec{E}_{conv}$ - fluxo de calor por convecção
- $\vec{E}_{cond}$ - fluxo de calor por condução
- $\vec{E}_{rad}$ - fluxo de calor por radiação
- E_{inj} - energia injetada/produzida por fontes externas ao reservatório
- F_k - função resíduo do componente "k" na célula "i"

- $\vec{g}$ - vetor gravidade
 H - entalpia específica total
 H_j - entalpia específica da fase "j"
 IP - índice de produtividade do poço
 J - fator de conversão de unidades
 $\bar{J}$ - matriz jacobiana
 $\bar{J}_{mm}$ - matriz jacobiana referente às derivadas das funções resíduos dos blocos de matriz em relação às incógnitas dos blocos de matriz
 $\bar{J}_{mf}$ - matriz jacobiana referente às derivadas das funções resíduos dos blocos de matriz em relação às incógnitas das fraturas
 k - permeabilidade absoluta do meio
 k_{rj} - permeabilidade relativa da fase "j"
 k_{rji} - permeabilidade relativa da fase "j" na presença de "i"
 $k_{r_{ocw}}$ - permeabilidade relativa ao óleo na presença de água conata e saturação nula de gás
 L - distância característica
 L_x - comprimento do bloco de matriz na direção "x"
 m_{ij} - massa do componente "i" na fase "j"
 M_R - capacidade térmica volumétrica da rocha
 $\vec{n}$ - versor normal a uma superfície
 N_p - número de fases presentes
 P_c - pressão crítica

- P_j - pressão da fase "j"
 P_{wf} - pressão de fundo de poço
 P_{ini} - pressão inicial do reservatório
 q_j^* - vazão mássica da fase "j" por unidade de volume de rocha
 q_j - vazão volumétrica da fase "j" por unidade de volume de rocha
 q_{lc} - fluxo de calor para estratos adjacentes para o problema de temperatura constante na interface
 q_l - fluxo de calor para estratos adjacentes para o problema de temperatura variável na interface
 Q_j - vazão volumétrica da fase "j"
 Q_{lc} - perda acumulada de calor para estratos adjacentes para o problema de temperatura constante na interface
 Q_l - perda acumulada de calor para estratos adjacentes para o problema de temperatura variável na interface
 r_e - raio da fronteira externa do reservatório
 r_i - raio da célula "i"
 $r_{i \pm 1/2}$ - raio da fronteira "i $\pm$ 1/2"
 r_w - raio do poço
 R_{so} - razão de solubilidade do óleo
 R_{wg} - razão de solubilidade do vapor na fase gás
 s - variável do campo de Laplace

- S_j - saturação da fase "j"
 S_{ij} - saturação do componente "i" na fase "j"
 S_v - saturação do vapor
 t - tempo
 t_{ts} - tempo total de simulação
 T_c - temperatura crítica
 T_{if} - temperatura na interface rocha reservatório - rocha selante
 T_{ini} - temperatura inicial
 TOL - tolerância assumida
 $T_{p(i \pm 1/2)}$ - transmissibilidade da fase "p" na fronteira " $i \pm 1/2$ "
 $\vec{u}_j$ - vetor velocidade da fase "j"
 U_j - energia interna específica da fase "j"
 U - energia interna específica total
 V_i - volume do componente "i"
 V_{ij} - volume do componente "i" na fase "j"
 V_{ics} - volume do componente "i" em condições padrão
 V_m - volume dos blocos de matriz
 V_{R_i} - volume da célula "i"
 $\dot{W}$ - ($= \partial W / \partial t$) energia proveniente do trabalho realizado por: fontes externas de aquecimento, contra o campo de pressão e contra a gravidade
 $\dot{W}_{pv}$ - razão de trabalho realizado contra o campo de pressão

Π_2^+ - razão de trabalho realizado contra a gravidade

$\bar{X}$ - vetor incógnitas da fratura

$\bar{X}_m$ - vetor incógnitas dos blocos de

y - fração molar matriz

LETRAS GREGAS

α - difusividade térmica da rocha

γ_j - peso específico

λ - condutividade térmica da formação adjacente

λ_j - mobilidade da fase "j"

λ_{Ti} - condutividade térmica total

μ_j - viscosidade da fase "j"

μ_{gg} - viscosidade do componente gás na fase gasosa

μ_{wg} - viscosidade do componente água na fase gasosa

ϕ - porosidade efetiva da fratura

ϕ_{ef} - porosidade referente exclusivamente à fratura

ϕ_{cm} - porosidade referente exclusivamente à rocha matriz

ϕ_f - fração volumétrica ocupada pela fratura em relação ao volume total da rocha

ϕ_m - porosidade efetiva dos blocos de matriz

Φ_j - potencial da fase "j"

ρ_j - massa específica da fase "j"

ρ_{ij} - massa específica do componente "i" na fase "j"

ρ_{jcs} - massa específica da fase "j" em condições padrão

σ - fator de forma do sistema matriz-fratura

SOBRESCRITO

- n - intervalo de tempo conhecido
 $n + 1$ - intervalo de tempo desconhecido
 ν - nível de iteração conhecido
 $\nu + 1$ - nível de iteração desconhecido
 T - transposta da matriz

SUBSCRITO

- D - variável adimensionalizada
 h - solução da equação homogênea equivalente
 i - célula "i"
 I - número total de células consideradas
 m - blocos de matriz
 mf - interface matriz-fratura
 p - solução particular
 sc - condições "standard"

RESUMO

A injeção de vapor é, de todos os métodos de recuperação suplementar, o mais amplamente usado. Sua aplicação tem se mostrado bastante promissora inclusive em reservatórios naturalmente fraturados.

O objetivo deste trabalho foi a construção de um simulador numérico para reservatório heterogêneo com características de dupla porosidade, sujeito à injeção de vapor, para geometrias de fluxo linear ou radial. Foram estudadas as equações que governam os fluxos de óleo, gás, água e energia no reservatório, além das características de fluido e rocha.

O simulador desenvolvido utiliza uma formulação totalmente implícita, tendo sido implementado um procedimento que acopla as equações do sistema de fraturas nas equações dos blocos de matriz, de modo que o tempo requerido de simulação para o sistema de dupla porosidade não é significativamente maior do que aquele requerido para simulação de um sistema convencional.

O modelo permite a simulação de reservatórios inclinados para o caso de fluxo linear e também a simulação de reservatórios não fraturados ou de processos isotérmicos.

ABSTRACT

Steam injection is the most used enhanced oil recovery method nowadays. Its application has gained wide acceptance even in the case of naturally fractured reservoirs.

In this work, was developed a thermal numerical simulator for oil reservoirs with radial or linear flux geometries. The equations that control oil, gas, water and energy flux were studied, as well as the characteristics of fluid and rock.

This simulator is based on a fully implicit formulation. A procedure is implemented, desacoupling the calculation of fracture equations from matrix blocks equations, becoming the simulation time required for double porosity no greater than that necessary to a conventional system

It's possible the simulation of tilted reservoir in a linear geometry flux case and the solution of non-fractured or isothermal process.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Na recuperação primária de petróleo utilizam-se apenas os mecanismos naturais de produção: expansão dos líquidos, gás em solução, expansão da capa de gás, segregação gravitacional e influxo de água. A energia natural da jazida tende a se dissipar rapidamente, resultando em baixas recuperações. Esta energia pode ser complementada com a injeção de um fluido para conter o decréscimo de pressão, que apesar de aumentar a recuperação, ainda pode deixar no reservatório uma boa quantidade de óleo residual, pois não atua nas forças retentoras do petróleo na jazida. Como esta injeção normalmente ocorre após algum tempo de produção por mecanismos naturais, denomina-se de recuperação suplementar.

Os métodos especiais de recuperação agem justamente para minimizar tais forças retentoras, as quais podem ser de origem capilar ou viscosa, e podem ser aplicados desde o início da vida produtiva do campo, após o período de produção primária, ou depois do período de recuperação secundária, quando então é denominada de recuperação terciária. De todos os métodos especiais atualmente existentes, a injeção de vapor é o mais comprovado comercialmente e o mais amplamente empregado (*Lima e Andrade, 1987*). Vários mecanismos, provenientes do aumento de temperatura do reservatório provocado pela injeção de vapor, atuam no processo produtivo, influenciando no aumento de recuperação (*Reis, 1990*), dentre os quais ressaltam-se :

- Redução da viscosidade do óleo
- Destilação dos componentes mais leves da fase oleosa para a fase gasosa
- Craqueamento dos componentes de maior peso molecular
- Expansão térmica do óleo
- Alteração da tensão interfacial óleo-água.

Estados Unidos, Venezuela e Canadá lideram a aplicação do método de injeção de vapor. Fora destes países, há projetos importantes na Europa, na Indonésia e no Brasil (*Andrade et alii*, 1985).

As fraturas nas rochas reservatórios são mais comumente associadas a origens tectônicas, embora algumas vezes possam ser causadas por diagênese ou litificação em razões diferenciadas. O entendimento do processo das fraturas tem progredido significativamente, passando de formulações puramente empíricas para formulações mais científicas, favorecendo uma melhor descrição e modelamento de reservatórios (Golf-Racht 1982).

Reservatórios possuidores de óleo pesado (denso e viscoso) são os que melhor respondem ao aquecimento, e são justamente os que mais deixam óleo residual, sendo portanto os mais indicados à injeção de vapor. Metade do óleo "in place" existente no mundo é constituído de óleo pesado, embora os mesmos constituam menos de 10% das reservas (*Andrade et alii*, 1985). O volume de óleo pesado "in place" contido em reservatórios carbonáticos foi estimado em $2.5 \times 10^8 m^3$ (*Briggs*, 1989)

Neste trabalho será enfatizado o principal mecanismo resultante do aumento de temperatura, o qual consiste na redução de viscosidade do óleo.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A simulação numérica do escoamento de fluidos em reservatórios naturalmente fraturados tem progredido significativamente desde que foi estabelecido o conceito de *dupla porosidade* por *Barenblatt et alii* em 1960. Este conceito implica na existência de dois meios interpenetrados estendendo-se por todo o reservatório, sendo um meio contínuo representando o sistema de fraturas e o outro meio discreto formado por blocos de matriz. *Warren e Root* (1963) apresentaram um modelo conceitualmente semelhante ao de *Barenblatt et alii*, considerando fluidos pouco compressíveis, cujo esquema está apresentado na figura (2.1). Com este modelo, onde os blocos de matriz possuem a forma de paralelepípedos e o fluxo é monofásico, foi possível encontrar uma equação para representar o fator de forma “ σ ” para o tratamento da transferência de massa entre o sistema de fraturas e os blocos de matriz, o qual é dado por:

$$\sigma = \frac{4N(N+2)}{L^2}, \quad (2.1)$$

onde N é o número de dimensões em que se consideram distribuídas as fraturas e L define-se como:

$$L = \begin{cases} L_x, & \text{para } N = 1, \\ 2L_xL_y/(L_x + L_y), & \text{para } N = 2, \\ 3L_xL_yL_z/(L_xL_y + L_yL_z + L_xL_z), & \text{para } N = 3. \end{cases}$$

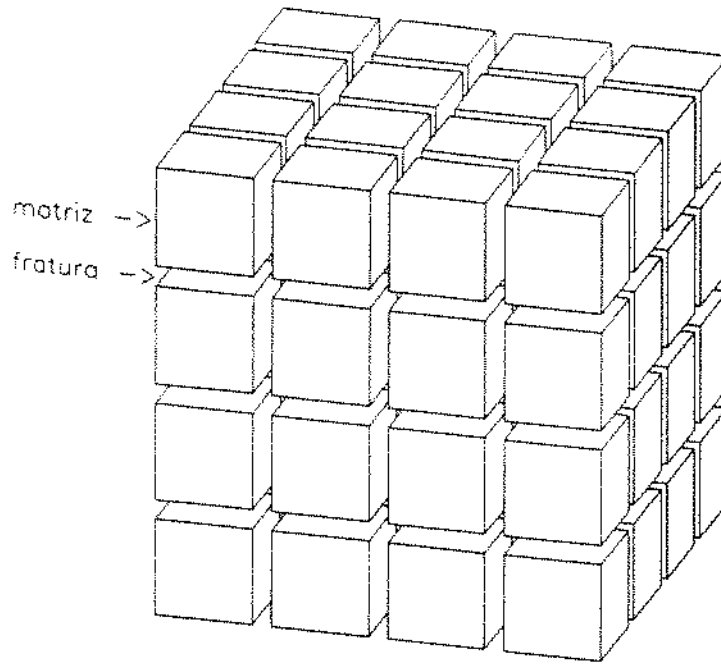


Figura 2.1: Modelo de Dupla-Porosidade de Warren e Root

As equações de fluxo monofásico encontradas por *Warren e Root* foram extendidas por *Kazemi et alii* (1976) para equações de fluxo bifásico, incluindo-se forças capilares e gravitacionais. Para um meio tridimensional, *Kazemi et alii* propuseram a seguinte expressão para o cálculo do fator de forma:

$$\sigma = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right). \quad (2.2)$$

Em 1983, *Thomas et alii*, *Gilman e Kazemi*, e *Saidi* desenvolveram simuladores para reservatórios naturalmente fraturados, trifásicos e tridimensionais, usando formulações totalmente implícitas. *Thomas et alii* usaram pseudo-curvas de permeabilidade

relativa e de pressão capilar, tanto para matriz como para fratura. Sugeriram para o cálculo do fator de forma a seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{A_m}{LV_m} \quad (2.3)$$

Saidi sugeriu a discretização dos blocos de matriz em diversas células, de modo que o fluxo matriz/fratura passasse a depender da localização relativa de cada célula de matriz em relação ao contato gás-óleo e/ou óleo-água na fratura.

Blaskovich et alii (1983) apresentaram um modelo de *dupla porosidade / dupla permeabilidade*, que inclui a flexibilidade adicional de permitir fluxo entre os blocos de matriz localizados entre células adjacentes, além de permitir a localização de poços também nos blocos de matriz.

A utilização da injeção de vapor em reservatórios de petróleo com o principal objetivo de reduzir a viscosidade do óleo e consequentemente aumentar a recuperação, data inicialmente de 1931-32, quando injetou-se vapor continuamente durante 235 dias em um campo no Texas (Prats, 1982).

A injeção cíclica de vapor, também conhecida como "huff and puff", teve início devido a um fato no mínimo curioso, conforme descrito por Prats: *Em outubro de 1959, foi interrompido um projeto piloto de injeção contínua de vapor no campo de "Mene Grande (Venezuela)", devido às altas pressões registradas no reservatório terem superado a pressão de "overburden", acarretando erupções de vapor e óleo na superfície nas proximidades dos poços injetores. Posteriormente, a companhia responsável (CSV) decidiu aliviar a pressão nos poços injetores, colocando-os em produção. Para surpresa de todos, estes poços passaram a produzir pequenas quantidades de vapor e grandes quantidades de óleo (100 a 200 bpd), apesar de nunca terem produzido antes.*

Em 1965, Spilette apresentou uma solução numérica para a equação da energia e, neste mesmo ano, Gottfried resolveu as equações de balanço de massa juntamente com

a equação da energia. Em 1966, *Boberg e Lantz* apresentaram um modelo analítico para o cálculo da temperatura, considerando o deslocamento do tipo pistão e desprezando os efeitos gravitacionais.

Em 1980, *Coats* apresentou um modelo composicional com formulação totalmente implícita. Ele observou que o uso desta formulação resultou em máxima eficiência e menor custo computacional.

Trabalhos de atividades de campo, como os de *Sahuquet e Ferrier* (1982) e de *Chierici et alli* (1985), mostram que a injeção de vapor é um método viável para recuperação de óleo pesado de reservatórios naturalmente fraturados. Surge, portanto, a necessidade de simuladores térmicos para estes tipos de reservatórios.

Pruess e Narasimhan (1985) modelaram os fluxos de fluido e calor dentro dos blocos de matriz usando o método "MINC", o qual consiste de uma generalização do conceito de *dupla-porosidade* onde os blocos de matriz são sub-divididos em elementos, nos quais supõe-se existir equilíbrio termodinâmico. Tal modelo assume que as condições termodinâmicas dentro da rocha matriz são controladas primariamente pela distância da fratura, definindo uma malha onde os elementos estão concentricamente arranjados.

Chen et alii (1987) apresentaram um simulador térmico composicional tridimensional usando o conceito de dupla porosidade e permitindo que os blocos de matriz fossem subdivididos em elementos bidimensionais ($r - z$).

Em 1989, *Pruess e Wu*, propuseram o uso de um método analítico para o modelamento dos fluxos de fluido e calor nos blocos de matriz, como uma extensão da técnica desenvolvida por *Vinsome e Westerveld* (1980) para o cálculo da perda de calor para formações adjacentes.

Briggs (1989) usa um modelo de embebição para modelar o fluxo dos fluidos que passam da fratura para a matriz, e para o fluxo no sentido inverso, considera a expansão dos fluidos e da rocha matriz. Considera ainda que o fluxo térmico na rocha

matriz ocorre apenas por condução.

Neste trabalho procura-se modelar um sistema heterogêneo que possa ser representado por dois meios distintos, onde apenas um destes seja efetivamente o responsável pelo fluxo, fazendo-se uma analogia com sistemas de dupla porosidade.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A formulação matemática é obtida pela combinação dos seguintes princípios físicos:

- Conservação da massa
- Lei de *Darcy*
- Conservação da energia

Com as equações complementares:

- Equações de estado
- Relações de capilaridade
- Relações de restrições do sistema,

em conjunto com as condições de contorno e condição inicial do sistema.

O modelo térmico adotado é do tipo "BLACK OIL", onde são considerados três componentes e três fases, a saber:

<u>Componente</u>	<u>Fase</u>
óleo	oleosa
gás	gasosa
água	aquosa

Admite-se que o componente óleo seja encontrado somente na fase oleosa, enquanto que o componente gás pode apresentar-se tanto na fase gasosa quanto dissolvido na fase oleosa. O componente água pode encontrar-se tanto na fase aquosa quanto na fase gasosa, em forma de vapor.

De forma a ser possível a simulação não só de reservatórios naturalmente fraturados, onde as fraturas são constituídas por espaços vazios de rocha com 100% de porosidade, mas também a de qualquer reservatório heterogêneo que possa ser representado por dois meios distintos, onde um deles seja efetivamente responsável pelo fluxo, serão definidas para o sistema matriz-fratura, as seguintes variáveis:

$$\phi_{cm} = \frac{\text{volume de vazios da matriz}}{\text{volume total da matriz}},$$

$$\phi_{cf} = \frac{\text{volume de vazios da fratura}}{\text{volume total da fratura}},$$

$$\phi_f = \text{fração vol. ocupada pela frat.} = \frac{\text{volume total da fratura}}{\text{volume total da fratura e matriz}},$$

$$\phi_m = \phi_{cm}(1 - \phi_f), \quad \text{porosidade efetiva da matriz,}$$

$$\phi = \phi_f \phi_{cf}, \quad \text{porosidade efetiva da fratura.}$$

3.1 Balanço de Massa

Para cada um dos componentes, $j = \text{óleo, gás ou água}$, podemos obter uma equação de balanço de massa para um volume genérico V contido no reservatório, a qual é dada simbolicamente por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Razão de entrada} \\ \text{do componente } i \\ \text{em } V \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Razão de saída do} \\ \text{componente } i \text{ em} \\ V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Razão de acumula-} \\ \text{ção do compo-} \\ \text{nente } i \text{ em } V \end{array} \right\}.$$

A equação genérica de balanço do componente "i" em um sistema trifásico pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ C_{io} \frac{\rho_o k k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + C_{ig} \frac{\rho_g k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + C_{iw} \frac{\rho_w k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \right\} \\ + C_{io} q_o^* + C_{ig} q_g^* + C_{iw} q_w^* = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [C_{io} \rho_o S_o + C_{ig} \rho_g S_g + C_{iw} \rho_w S_w] \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

As seguintes condições de restrição também devem ser obedecidas:

$$\sum_{i=o,g,w} C_{ij} = 1, \quad j = o, g, w.$$

onde "i" representa o componente e "j" a fase.

Na tabela (3.1) são apresentadas as expressões para cálculo das frações mássicas de um dado componente em cada fase.

Componentes	óleo	gás	água	$\sum_i C_{ij}$
fase oleosa	$C_{oo} = \frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}}$	$C_{go} = \frac{m_{go}}{m_{oo} + m_{go}}$	$C_{wo} = 0.$	1.
fase gasosa	$C_{og} = 0.$	$C_{gg} = \frac{m_{gg}}{m_{wg} + m_{gg}}$	$C_{wg} = \frac{m_{wg}}{m_{wg} + m_{gg}}$	1.
fase aquosa	$C_{ow} = 0.$	$C_{gw} = 0.$	$C_{ww} = 1.$	1.

Tabela 3.1: Frações Mássicas

Os fatores de encolhimento para cada fase são expressos em termos das frações mássicas dos componentes e das densidades das fases:

$$b_o = \frac{V_{ocs}}{V_o} = \frac{m_{oo}/\rho_{ocs}}{(m_{oo} + m_{go})/\rho_o} = \frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}} \frac{\rho_o}{\rho_{ocs}}, \quad (3.2)$$

$$b_g = \frac{V_{gcs}}{V_g} = \frac{m_{gg}/\rho_{gcs}}{(m_{gg} + m_{wg})/\rho_g} = \frac{m_{gg}}{m_{gg} + m_{wg}} \frac{\rho_g}{\rho_{gcs}}, \quad (3.3)$$

$$b_w = \frac{V_{wcs}}{V_w} = \frac{m_{ww}/\rho_{wcs}}{m_{ww}/\rho_w} = \frac{\rho_w}{\rho_{wcs}}. \quad (3.4)$$

A razão de solubilidade do componente gás na fase oleosa é dada por:

$$R_{so} = \frac{V_{gocs}}{V_{oocs}} = \frac{m_{go}/\rho_{gcs}}{m_{oo}/\rho_{ocs}} = \frac{m_{go}}{m_{oo}} \frac{\rho_{ocs}}{\rho_{gcs}}. \quad (3.5)$$

A razão de solubilidade do vapor na fase gasosa será definida neste trabalho como:

$$R_{wg} = \frac{C_{wg}\rho_g}{\rho_{wcs}b_g}.$$

As equações de escoamento para cada um dos componentes, obtidas a partir da combinação do princípio de conservação da massa com a lei de *Darcy*, serão descritas a seguir.

3.1.1 Componente óleo

A equação de escoamento para o componente óleo é dada por:

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}} \rho_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) \right\} + \frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}} q_o^* = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \left(\frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}} \right) \rho_o S_o \right\}. \quad (3.6)$$

Da equação (3.2) temos que $\frac{m_{oo}}{m_{oo} + m_{go}} = b_o \rho_{ocs} / \rho_o$, e portanto a equação do componente óleo se reduz a:

$$\nabla \cdot \left[b_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) \right] + \frac{b_o q_o^*}{\rho_o} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o S_o]. \quad (3.7)$$

Sendo $\lambda_o = b_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o}$ a mobilidade da fase óleo e $q_o = b_o \frac{q_o^*}{\rho_o}$ a vazão volumétrica de óleo por unidade de volume de rocha, pode-se reduzir a equação (3.7) a:

$$\nabla \cdot [\lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z)] + q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o S_o]. \quad (3.8)$$

3.1.2 Componente gás

Para o componente gás, a equação do escoamento se torna:

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{m_{go}}{m_{oo} + m_{go}} \rho_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \frac{m_{gg}}{m_{gg} + m_{wg}} \rho_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) \right\} + \frac{m_{go}}{m_{oo} + m_{go}} q_o^* + \frac{m_{gg}}{m_{gg} + m_{wg}} q_g^* = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \left[\frac{m_{go}}{m_{go} + m_{oo}} \rho_o S_o + \frac{m_{gg}}{m_{gg} + m_{wg}} \rho_g S_g \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Das equações (3.2), (3.3) e (3.5) pode-se determinar que

$\frac{m_{gg}}{m_{gg}+m_{wg}} = \frac{b_g \rho_{gcs}}{\rho_g}$ e $\frac{m_{go}}{m_{oo}+m_{go}} = \frac{m_{go}}{m_{oo}} \frac{m_{oo}}{m_{oo}+m_{go}} = R_{so} \frac{b_o \rho_{ocs}}{\rho_o}$, portanto a equação (3.9) pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \left\{ R_{so} b_o \frac{k k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + b_g \frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) \right\} + R_{so} \frac{b_o q_o^*}{\rho_o} + \frac{b_g q_g^*}{\rho_g} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o S_o + b_g S_g] \}. \quad (3.10)$$

Sendo $\lambda_g = b_g \frac{k k_{rg}}{\mu_g}$ a mobilidade da fase gás e $q_g = b_g \frac{q_g^*}{\rho_g}$ a vazão volumétrica de gás por unidade de volume de rocha, pode-se reduzir a equação (3.10) para:

$$\nabla \cdot \{ R_{so} \lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_g (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) \} + R_{so} q_o + q_g = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o S_o + b_g S_g] \}. \quad (3.11)$$

3.1.3 Componente água

A conservação do componente água produz a seguinte equação de escoamento:

$$\nabla \cdot \left\{ C_{wg} \rho_g \frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \rho_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \right\} + C_{wg} q_g^* + q_w^* = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi (C_{wg} \rho_g S_g + \rho_w S_w) \}. \quad (3.12)$$

Da equação (3.4) extrai-se que $\rho_w = \rho_{wcs} b_w$, cuja substituição na equação (3.12) produz:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ C_{wg} \rho_g \frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \rho_{wcs} b_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \right\} \\ & + C_{wg} \frac{\rho_g}{b_g} \left(\frac{b_g q_g^*}{\rho_g} \right) + \rho_{wcs} \left(\frac{b_w q_w^*}{\rho_w} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [C_{wg} \rho_g S_g + \rho_{wcs} b_w S_w] \}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definindo-se $\lambda_w = b_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w}$ como a mobilidade da fase aquosa e $q_w = b_w \frac{q_w^*}{\rho_w}$ a vazão volumétrica de água por unidade de volume de rocha, a equação (3.13) é sintetizada por:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{ R_{wg} \lambda_g (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_w (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \} + \\ & R_{wg} q_g + q_w = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{wg} b_g S_g + b_w S_w] \}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2 Balanço de Energia

Para um elemento de volume V , arbitrário, no domínio do reservatório, esquematizado na figura (3.1), o seguinte balanço de energia pode ser aplicado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo de energia} \\ \text{que entra em} \\ V \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo de energia} \\ \text{que sai de} \\ V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razão de acu-} \\ \text{mulação de} \\ \text{energia em } V \end{array} \right\}.$$

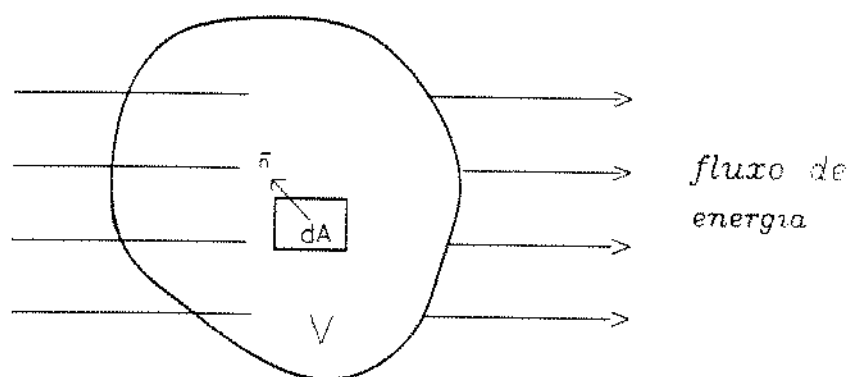


Figura 3.1: Fluxo de Energia

Desconsiderando-se a produção ou o consumo de energia no interior do elemento, o fluxo líquido de energia que passa através das fronteiras de V é o resultado da diferença entre a energia que entra menos a que sai de V , ou seja:

$$- \int_A \vec{n} \cdot \vec{E} dA. \quad (3.15)$$

A razão de energia injetada em V , provocada por uma fonte externa, é:

$$\int_V \dot{W} dV, \quad (3.16)$$

onde $\dot{W}$ representa a soma das fontes externas de aquecimento, E_{inj} , da razão de trabalho realizado contra o campo de pressão, $\dot{W}_{pv}$, e contra o campo gravitacional, $\dot{W}_g$, ou seja:

$$\dot{W} = E_{inj} + \dot{W}_{pv} + \dot{W}_g,$$

onde $\dot{W}_{pv} = -\sum_{j=1}^{N_p} \nabla \cdot (P_j \vec{u}_j)$ e $\dot{W}_g = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} = -\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j g \vec{u}_j \cdot \nabla D_z$, sendo N_p o número de fases presentes.

A razão de acumulação de energia em V pode ser expressa matematicamente como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) dV. \quad (3.17)$$

Substituindo-se as equações (3.15), (3.16) e (3.17) na equação de balanço de energia, obtém-se a seguinte equação:

$$-\int_A (\vec{n} \cdot \vec{E}) dA + \int_V \dot{W} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) dV. \quad (3.18)$$

Pelo teorema da divergência, temos que:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_A (\vec{n} \cdot \vec{E}) dA,$$

e portanto a equação (3.18) pode ser escrita como:

$$\int_V \left\{ \nabla \cdot \vec{E} - \dot{W} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) \right\} dV = 0. \quad (3.19)$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando deve ser nulo para satisfazer a

igualdade acima, resultando:

$$\nabla \cdot \vec{E} - \dot{W} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) = 0. \quad (3.20)$$

O fluxo de energia, $\vec{E}$, é composto de três parcelas:

$$\vec{E} = \vec{E}_{conv} + \vec{E}_{cond} + \vec{E}_{rad}, \quad (3.21)$$

onde:

$\vec{E}_{conv}$ = Fluxo de calor por convecção que decorre do movimento macroscópico de matéria de uma região para outra, ou seja:

$$\vec{E}_{conv} = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right], \quad (3.22)$$

$\vec{E}_{cond}$ = Fluxo de calor por condução que decorre de colisões moleculares de uma região de mais alta temperatura para uma de mais baixa, sem que haja fluxo de matéria. É descrito pela lei de *Fourier* (Prats, 1982):

$$\vec{E}_{cond} = -\lambda_{Ti} \cdot \nabla T, \quad (3.23)$$

$\vec{E}_{rad}$ = Fluxo de calor por radiação que decorre da transferência de calor através de ondas eletromagnéticas. É descrito pela lei de *Stefan - Boltzmann*. Devido à pouca radiação de materiais opacos como é o caso da rocha, este não é considerado um mecanismo importante da transferência de calor no meio poroso, podendo ser desprezado.

Introduzindo-se as equações (3.21), (3.22) e (3.23) na equação (3.20), temos que:

$$\nabla \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] - \lambda_{Ti} \nabla T \right\} + \sum_{j=1}^{N_p} \nabla \cdot (P_j \vec{u}_j) + \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j g \vec{u}_j \cdot \nabla D_z -$$

$$E_{inj} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right\} = 0. \quad (3.24)$$

..

Observando-se que, $\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j g \vec{u}_j \cdot \nabla D_z = g \sum_{j=1}^{N_p} \nabla \cdot (\rho_j \vec{u}_j D_z) - \sum_{j=1}^{N_p} g D \nabla \cdot (\rho_j \vec{u}_j)$, a equação (3.24) se torna:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + g D_z + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] \right\} - \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) + \sum_{j=1}^{N_p} \nabla \cdot (P_j \vec{u}_j) - \\ & E_{inj} - \sum_{j=1}^{N_p} g D_z \nabla \cdot (\rho_j \vec{u}_j) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Porém, como $\sum_{j=1}^{N_p} \nabla \cdot (P_j \vec{u}_j) = \nabla \cdot \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \frac{P_j}{\rho_j}$ e definindo-se $H_j = U_j + \frac{P_j}{\rho_j}$ como a entalpia da fase j, a equação (3.25) se reduz a:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + g D_z + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] \right\} - \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) - \\ & - E_{inj} - \sum_{j=1}^{N_p} g D_z \nabla \cdot (\rho_j \vec{u}_j) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Somando-se as equações de balanço de massa para cada um dos componentes (o, g e w), obtém-se a chamada *equação da continuidade*, ou *balanço total de massa*, a qual é dada por:

$$\nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \right) = 0. \quad (3.27)$$

onde $\vec{u}_j = -\frac{k k_{rj}}{\mu_j} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z)$.

A equação (3.27) pode ser escrita na forma:

$$-gD_z \left(\nabla \cdot \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \right) = gD_z \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \right). \quad (3.28)$$

Substituindo-se a equação (3.28) na equação (3.26), o resultado é:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + gD_z + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] \right\} - \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) - E_{inj} + \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho U + gD_z \phi \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em processos de *injeção de vapor*, os termos da equação de balanço de energia referentes à energia potencial e à energia cinética podem ser desprezados, e a equação (3.29) pode ser reduzida a:

$$\nabla \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j H_j \right\} - \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) - E_{inj} + \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho U \} = 0, \quad (3.30)$$

onde $\rho U = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j U_j + (1 - \phi) M_r (T - T_{ini})$.

Desenvolvendo-se os termos da equação (3.30) para as três fases ($j = o, g$ e w), obtém-se a equação geral de transporte de energia:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ \lambda_{ho} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_{hg} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_{hw} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \} + \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) + \\ E_{inj} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [\rho_o U_o S_o + \rho_g U_g S_g + \rho_w U_w S_w] + (1 - \phi) M_r (T - T_{ini}) \}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\lambda_{ho} = \rho_o H_o k k_{ro} / \mu_o$, $\lambda_{hg} = \rho_g H_g k k_{rg} / \mu_g$ e $\lambda_{hw} = \rho_w H_w k k_{rw} / \mu_w$.

3.3 Sistema de Dupla Porosidade

Em reservatórios naturalmente fraturados, as fraturas podem possuir permeabilidade várias ordens de grandeza maior do que o restante da formação, enquanto que sua porosidade pode ser significativamente menor. Assim, as fraturas controlam o fluxo de fluidos, enquanto os blocos de matriz são os responsáveis pelo armazenamento destes fluidos (Reis, 1990).

A hipótese básica do modelo de dupla porosidade é a de que o fluxo de fluidos ocorre exclusivamente nas fraturas. Os blocos de matriz são isolados entre si e limitados em toda a sua extensão pelas fraturas, estando distribuídos uniformemente ao longo destas e atuando como fontes ou sorvedouros puntiformes.

A transferência de calor entre o sistema matriz-fratura verifica-se pela troca de fluidos aquecidos entre os dois meios (convecção) e também pela condução térmica, uma vez que a fratura encontra-se em contato com a matriz.

Será adotado neste trabalho o modelo descrito por Kazemi *et alii* (1976), com fluxo em regime pseudo-permanente entre matriz e fratura.

Devido à dificuldade na obtenção do fator de forma " σ " em laboratório, na prática este torna-se um parâmetro de ajuste do simulador e pode ser estimado através de um teste de poço (Lee e Tan, 1987).

Para análise dos balanços de massa e energia no sistema de *dupla porosidade*, podemos tomar um volume arbitrário V que esteja contido no reservatório e que seja grande o suficiente para conter os dois meios, ou seja, blocos de matriz e fraturas.

3.3.1 Fratura

As equações de balanço para o sistema de fratura são semelhantes às anteriormente descritas, com a exceção de que o sistema de matriz age como fonte ou sorvedouro puntiforme. Assim, pode-se substituir o termo fonte " q " que aparece nas equações (3.8), (3.11), (3.14) e (3.31), por um termo fonte referente ao que é injetado ou produzido por

um poço localizado na célula, mais um termo equivalente ao que é fornecido ou absorvido pelos blocos de matriz. As equações de conservação neste caso são descritas a seguir, onde os mobilidades são calculadas sempre a montante do fluxo.

A conservação do componente óleo no sistema de fraturas se torna:

$$\nabla \cdot \{ \lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) \} + q_{omf} + q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o S_o], \quad (3.32)$$

onde a transferência do componente óleo da matriz para as fraturas é dada por:

$$q_{omf} = \lambda_{omf} (P_{om} - P_o),$$

sendo $\lambda_{omf} = \sigma b_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o}$ a mobilidade do óleo para fluxo matriz-fratura.

A conservação do componente gás é descrita por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ R_{so} \lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_g (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) \} + q_{gmf} + R_{so} q_{omf} \\ + R_{so} q_o + q_g = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o S_o + b_g S_g] \}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde o fluxo matriz-fratura para o componente gás é dado por:

$$q_{gmf} = \lambda_{gmf} (P_{gm} - P_g),$$

sendo $\lambda_{gmf} = \sigma b_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g}$ a mobilidade da fase gás para fluxo matriz-fratura.

Analogamente, a conservação do componente água é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ R_{wg} \lambda_g (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_w (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \} + q_{wmf} + R_{wg} q_{gmf} \\ + R_{wg} q_g + q_w = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{wg} b_g S_g + b_w S_w] \}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde o fluxo matriz-fratura para a água é dado por:

$$q_{wmf} = \lambda_{wmf}(P_{wm} - P_w),$$

sendo $\lambda_{wmf} = \sigma b_g \frac{k k_{rw}}{\mu_w}$ a mobilidade da fase água para fluxo matriz-fratura.

Para o transporte de energia no sistema de fraturas, temos que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ \lambda_{ho} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_{hg} (\nabla P_g - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_{hw} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D_z) \} + \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) + \\ \lambda_{homf}(P_{om} - P_o) + \lambda_{ghmf}(P_{gm} - P_g) + \lambda_{hwmf}(P_{wm} - P_w) + \lambda_{Tmf}(T_m - T) + E_{inj} = \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [\rho_o U_o S_o + \rho_g U_g S_g + \rho_w U_w S_w] + (\phi_f - \phi) M_r (T - T_{ini}) \}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde o fluxo térmico matriz-fratura se compõe do fluxo por convecção de cada uma das fases e do fluxo condutivo, o qual é dado por:

$$q_{Tmf} = \lambda_{Tmf}(T_m - T),$$

sendo $\lambda_{Tmf} = \sigma \lambda_{Tt}$.

3.3.2 Blocos de Matriz

As equações de balanço para os blocos de matriz só contemplam os termos de transferência matriz-fratura pois, pela própria definição do modelo, não há fluxo dentro dos blocos de matriz.

Para o componente óleo, a conservação nos blocos de matriz fornece:

$$- \lambda_{omf}(P_{om} - P_o) = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o S_o]_m. \quad (3.36)$$

A conservação de gás na matriz produz:

$$- \lambda_{gmf}(P_{gm} - P_g) - R_{so} \lambda_{omf}(P_{om} - P_o) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o S_o + b_g S_g] \}_m. \quad (3.37)$$

O componente água deve obedecer à seguinte equação de conservação na matriz:

$$-\lambda_{wmf}(P_{wm} - P_w) - R_{wg}\lambda_{gmf}(P_{gm} - P_g) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{wg}b_g S_g + b_w S_w] \}_m. \quad (3.38)$$

A conservação de energia na matriz é descrita por:

$$-\lambda_{homf}(P_{om} - P_o) - \lambda_{hgmf}(P_{gm} - p_g) - \lambda_{hwmf}(P_{wm} - P_w) - \lambda_{Tmf}(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi_m [\rho_o U_o S_o + \rho_g U_g S_g + \rho_w U_w S_w]_m + (1 - \phi_f - \phi_m)[M_r(T - T_{ini})]_m \}. \quad (3.39)$$

3.4 Equações Complementares

As oito equações, (3.32) a (3.39), descrevem o transporte de óleo, gás, água e energia nas fraturas e nos blocos de matriz, em um reservatório de petróleo naturalmente fraturado. Estas equações estão escritas em termos de 16 incógnitas, P_o , P_g , P_w , S_o , S_g , S_w , T , R_{wg} , P_{om} , P_{gm} , P_{wm} , S_{om} , S_{gm} , S_{wm} , T_m e R_{wgm} , sendo necessárias mais oito equações que relacionem estas variáveis entre si de modo a deixar o problema em função de apenas oito incógnitas.

Seis destas equações são obtidas das restrições da saturação e das relações de capilaridade, ou seja:

$$S_o + S_g + S_w = 1 \rightarrow S_o = 1 - S_g - S_w, \quad (3.40)$$

$$P_{cgo} = P_g - P_o \rightarrow P_g = P_o + P_{cgo}, \quad (3.41)$$

$$P_{cow} = P_o - P_w \rightarrow P_w = P_o - P_{cow}, \quad (3.42)$$

$$S_{om} + S_{gm} + S_{wm} = 1 \rightarrow S_{om} = 1 - S_{gm} - S_{wm}, \quad (3.43)$$

$$P_{cgom} = P_{gm} - P_{om} \rightarrow P_{gm} = P_{om} + P_{cgom}, \quad (3.44)$$

$$P_{cwom} = P_{om} - P_{wm} \rightarrow P_{wm} = P_{om} - P_{cwom}. \quad (3.45)$$

As duas outras equações serão obtidas a depender da existência ou não de vapor nas fraturas ou nos blocos de matriz. As seguintes alternativas são consideradas:

- Caso não haja vapor na fratura, teremos que $R_{wg} = 0$, e T será uma incógnita primária.
- Caso haja vapor na fratura, teremos $T = f(P_w)$, e R_{wg} será a incógnita primária, sendo que $f(P_w)$ é a função que correlaciona pressão e temperatura para vapor saturado.
- O mesmo se repete para os blocos de matriz, ou seja, caso não haja vapor, $R_{wgm} = 0$, e T_m será a incógnita primária. Caso haja vapor, $T_m = f(P_{wm})$.

As oito equações assim formadas terão oito incógnitas, P_o , S_g , S_w , P_{om} , S_{gm} , S_{wm} e, (T, T_m) ou (R_{wg}, R_{wgm}) , a depender da existência ou não do vapor. Devido à dificuldade em se trabalhar com R_{wg} , pelo fato de que quando na fase gasosa só existir vapor

esta variável assumirá valor ilimitado, foi feita uma substituição de variáveis, conforme descrito no Apêndice A.

3.5 Condições Iniciais e de Contorno

As seguintes condições são admitidas para o tratamento do problema:

- Não há fluxo térmico nem fluxo de fluidos no início do processo, ou seja, o reservatório encontra-se em equilíbrio, quanto à pressão e temperatura, o que pode ser descrito por:

$$P_f(x, 0) = P_{f_{ini}}, \quad (3.46)$$

$$T(x, 0) = T_{ini}, \quad (3.47)$$

onde $f = o, g$ e w

- Não há fluxo de fluidos através das fronteiras do reservatório, ou seja:

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_I} = 0. \quad (3.48)$$

- Não há fluxo térmico através das fronteiras externa e interna, isto é:

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_I} = 0, \quad (3.49)$$

onde x_0 vale zero para fluxo linear e r_w para fluxo radial, e x_I pode ser substituído por L , comprimento máximo do reservatório, para fluxo linear e r_e para fluxo radial.

3.6 Perdas de Calor Para Formações Adjacentes

O cálculo da perda de calor para as formações adjacentes ao reservatório é feito tradicionalmente por intermédio de métodos numéricos ou analíticos. No modelo numérico, são consideradas células nas formações adjacentes, através das quais há fluxo térmico por condução. Quanto maior o número de células adotadas, maior precisão se alcança, porém maior é o esforço computacional e a memória requerida.

No modelo analítico, uma solução analítica utilizando a teoria da superposição é acoplada à equação discretizada do reservatório. Este método tem o inconveniente de requerer grande quantidade de memória para acumular o histórico de temperatura.

Será utilizado neste trabalho um modelo semi-analítico descrito por *Souza et alii* (1986) a partir das idéias de *Leung* (1983) e aplicado por *Dutra Jr.* (1987), onde não há a necessidade do uso de células nas formações adjacentes, nem de se acumular o histórico de temperatura.

3.6.1 Formulação do Problema

A figura 3.2 mostra como parte do calor injetado é perdido para formações adjacentes.

Considerando-se A_{hot} como a área da superfície interfacial entre a rocha reservatório e os extratos adjacentes, e "z" como a cota vertical a partir desta interface, o fluxo de calor passando para as formações vizinhas será expresso pela lei de *Fourier*, como:

$$q_t = -\lambda A_{hot} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (3.50)$$

O fluxo de calor nos extratos adjacentes é um processo puramente condutivo, uma vez que não há fluxo de fluidos por se tratar de camadas impermeáveis, podendo ser descrito pela equação de um fluxo linear de calor em um meio limitado, ou seja:

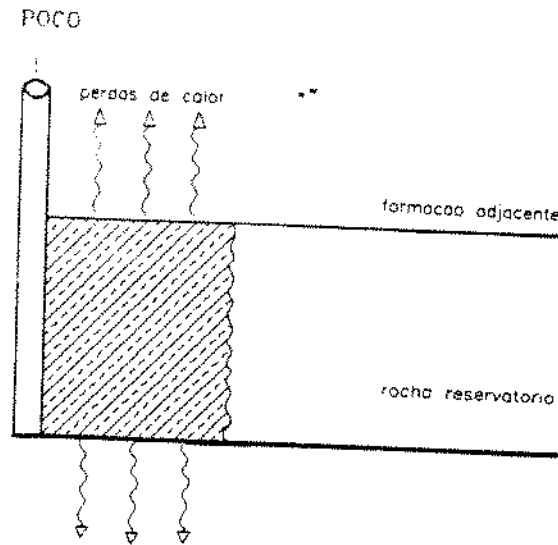


Figura 3.2: Perda de Calor para Formações adjacentes

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.51)$$

onde as seguintes condições inicial (C.I.), de fronteira interna (C.F.I.), e de fronteira externa (C.F.E.), devem ser obedecidas:

$$\text{C.I. : } T(z, 0) = T_r,$$

$$\text{C.F.I.: } T(0, t) = T_{if},$$

$$\text{C.F.E.: } T(H, t) = T_r,$$

onde H é a altura do estrato adjacente em relação a interface rocha Reservatório - rocha selante e T_r é a temperatura inicial da rocha.

3.6.2 Solução Analítica

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação (3.51), e utilizando-se a condição inicial, temos que:

$$\frac{d^2 \bar{T}(z, s)}{dz^2} = \frac{1}{\alpha} [s \bar{T}(z, s) - T_r],$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 \bar{T}(z, s)}{dz^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(z, s) = -\frac{T_r}{\alpha},$$

onde $\bar{T}(z, s)$ é a transformada de Laplace de $T(z, t)$.

As transformadas das condições de fronteira interna e externa são respectivamente:

$$\bar{T}(0, s) = T_{if}/s,$$

e:

$$\bar{T}(H, s) = T_r/s.$$

A solução da equação diferencial homogênea relativa à equação transformada é:

$$\bar{T}_h(z, s) = A_1 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} z} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} z},$$

e a solução particular também relativa à equação transformada é dada por:

$$\bar{T}_p(z, s) = \frac{T_r}{s}.$$

Portanto, a solução geral da equação transformada se torna:

$$\bar{T}(z, s) = \bar{T}_h(z, s) + \bar{T}_p(z, s)$$

Aplicando-se as condições de fronteira de modo a determinar as constantes A_1 e A_2 , chega-se a:

$$\bar{T}(z, s) = \frac{T_r}{s} + \frac{T_{if} - T_r}{s} \frac{\sinh \left[\sqrt{\frac{s}{\alpha}} (H - z) \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{s}{\alpha}} H \right]}.$$

A inversão do campo de Laplace ¹ para o espaço real produz a seguinte solução para o comportamento de temperatura:

$$T(z, t) = T_{if} + (T_r - T_{if}) \frac{z}{H} + (T_r - T_{if}) \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m^2 \pi^2 \alpha t / H^2} \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{H}. \quad (3.52)$$

¹Obtida da tabela 33.152, página 171 do livro de Spiegel(1973)

O fluxo de calor para estratos adjacentes é obtido pela equação (3.50), a partir da derivada espacial da equação (3.52), resultando:

$$q_{lc}(t) = -\lambda A_{hot} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\lambda A_{hot}}{H} (T_{if} - T_r) + \frac{2\lambda A_{hot}}{H} (T_{if} - T_r) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \pi^2 \alpha t / H^2}. \quad (3.53)$$

A quantidade de calor perdida para as formações adjacentes até um determinado tempo t , é obtida integrando-se a equação (3.53) em relação ao tempo:

$$Q_{lc}(t) = \int_0^t q_{lc}(t') dt' = A_{hot} H \rho_r C_{pr} (T_{if} - T_r) \left\{ \frac{\alpha t}{H^2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-m^2 \pi^2 \alpha t / H^2} \right\}. \quad (3.54)$$

Adimensionalizando-se o tempo e a quantidade de calor perdida nas seguintes formas:

$$t_D = \frac{\alpha t}{H^2},$$

$$Q_D = \frac{Q}{C_{adm} (T_{if} - T_r)},$$

onde $C_{adm} = A_{hot} H \rho_r C_{pr}$, então a equação (3.54) se reduz a:

$$Q_{lcD}(t_D) = t_D + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-m^2 \pi^2 t_D}. \quad (3.55)$$

A equação (3.53) é válida para condição de temperatura constante na interface entre o reservatório e os estratos adjacentes, $T(0, t) = T_{if}$, o que não se observa na prática. Para considerar a variação desta temperatura com o tempo, $T(0, t) = T_{if}(t)$, pode-se fazer uso da teoria da convolução (Leung, 1989). Neste caso, a quantidade total de calor perdida até o instante t_D será dada por:

$$Q_l(t_D) = C_{adm} \int_0^{t_D} Q_{lcD}(t_D - \tau) \frac{\partial T_{if}(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.56)$$

3.6.3 Aproximação Numérica

Para um dado instante, correspondente a um tempo adimensional $t_D^{(n)}$, a equação (3.55) pode ser substituída na integral de convolução, equação (3.56), que após algumas simplificações resulta em:

$$Q_l(t_D^{(n)}) = C_{adm} \left\{ \frac{t_D^{(n)}}{3} - t_D^{(n)} T_r - \frac{T_r}{3} + \int_0^{t_D^{(n)}} T_{if}(\tau) d\tau - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} \right\}, \quad (3.57)$$

onde $B_m^{(n)} = \int_0^{t_D^{(n)}} \frac{1}{m^2} e^{[-m^2 \pi^2 (t_D^{(n)} - \tau)]} \frac{\partial T_{if}(\tau)}{\partial \tau} d\tau$.

Usando-se o mesmo raciocínio para calcular $Q_l(t_D^{(n+1)})$, verifica-se que é possível obter-se B_m recursivamente, sem que haja necessidade de conhecimento do histórico de temperatura na interface, ou seja:

$$B_m^{(n+1)} = B_m^{(n)} e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} + \frac{T_{if}(t_D^{(n+1)}) - T_{if}(t_D^{(n)})}{m^4 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right), \quad (3.58)$$

onde $\Delta t_D^{(n)} = t_D^{(n+1)} - t_D^{(n)}$ e $\frac{\partial T_{if}(t_D)}{\partial t_D} \cong \frac{T_{if}(t_D^{(n+1)}) - T_{if}(t_D^{(n)})}{\Delta t_D^{(n)}}$.

O fluxo de calor perdido para as formações adjacentes entre o intervalo $t_D^{(n)}$ e $t_D^{(n+1)}$ será dado por:

$$q_l^{(n)} = \frac{Q_l(t_D^{(n+1)}) - Q_l(t_D^{(n)})}{t_D^{(n+1)} - t_D^{(n)}}. \quad (3.59)$$

Usando-se as equações (3.57) e (3.59) e a aproximação:

$$\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn+1}} T_{if}(\tau) d\tau \cong T_{if}(t_{Dn+1}) \Delta t_{Dn},$$

obtem-se a expressão da perda de calor para os estratos adjacentes, para um dado intervalo de tempo:

$$\begin{aligned}
q_l^{(n)} = & \frac{C_{adm}}{\Delta t^{(n)}} \left\{ \left[-\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^4 \Delta t_D^{(n)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) \right] T_{if}(t_D^{(n)}) \right. \\
& - T_r \Delta t_D^{(n)} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) \\
& \left. + \left[\frac{1}{3} + \Delta t_D^{(n)} - \frac{2}{\pi^4 \Delta t_D^{(n)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) \right] T_{if}(t_D^{(n+1)}) \right\}. \quad (3.60)
\end{aligned}$$

3.6.4 Termos de Correção

Para valores muito pequenos de t_D , a convergência das séries da equação (3.60) é muito lenta, exigindo um número elevado de termos para se alcançar a tolerância almejada. Para suprir tal deficiência, incluem-se termos de correção¹ válidos apenas para t_D pequeno.

A solução analítica da equação do fluxo linear de calor para uma barra semi-infinita com temperatura constante na sua base é dada por:

$$Q_D(t_D) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t_D}. \quad (3.61)$$

Para pequenos valores de tempo, a barra limitada do nosso problema comporta-se como se fosse infinita, e portanto, a sua solução deve igualar-se à equação (3.61). Considerando-se R_{20} como a diferença entre as soluções da equação (3.55), calculada com uma série de 20 termos e da equação (3.61), que é a solução exata para barra infinita, então temos:

$$R_{20} = t_D + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{20} \frac{1}{m^2} e^{-m^2 \pi^2 t_D} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t_D}. \quad (3.62)$$

Devido à dificuldade de convergência da série, R_{20} tenderá a se afastar de zero à medida que o tempo diminui. Assim, para que $R_{20} \cong 0$, adicionam-se termos de correção

¹obtidas de Dutra Jr. (1987)

na equação (3.62), os quais podem também ser usados na equação (3.55) para representar o comportamento de curto tempo, resultando em:

$$Q_{lcD}(t) = t_D + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-m^2 \pi^2 t_D} - \sum_{k=1}^6 a_k e^{-b_k t_D}. \quad (3.63)$$

Os coeficientes dos termos de correção são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3.49466 \text{ e } b_1 = 5624.0113 \text{ para } t_d \leq 10^{-3} \text{ e } a_1 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-3} \\ a_2 &= 3.91630 \text{ e } b_2 = 22094.495 \text{ para } t_d \leq 10^{-4} \text{ e } a_2 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-4} \\ a_3 &= 1.68080 \text{ e } b_3 = 181839.11 \text{ para } t_d \leq 10^{-5} \text{ e } a_3 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-5} \\ a_4 &= 5.44125 \text{ e } b_4 = 1831719.1 \text{ para } t_d \leq 10^{-6} \text{ e } a_4 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-6} \\ a_5 &= 1.69677 \text{ e } b_5 = 18742839. \text{ para } t_d \leq 10^{-7} \text{ e } a_5 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-7} \\ a_6 &= 5.30849 \text{ e } b_6 = 190076220. \text{ para } t_d \leq 10^{-8} \text{ e } a_6 = 0, \text{ para } t_d > 10^{-8} \end{aligned}$$

Para o caso da temperatura variável na interface, aplica-se a convolução, chegando-se então à expressão final para perda de calor:

$$\begin{aligned} q_l^{(n)} &= \frac{C_{adm}}{\Delta t^{(n)}} \left\{ \left[\frac{-1}{3} + \frac{2}{\pi^4 \Delta t_D^{(n)}} \sum_{m=1}^{20} \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) + \frac{1}{\Delta t_D^{(n)}} \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{b_k} \left(1 - e^{-b_k \Delta t_D^{(n)}} \right) \right] T_{if}(t_D^{(n)}) \right. \\ &- T_r \Delta t_D^{(n)} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{20} B_m^{(n)} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) + \sum_{k=1}^6 d_k^{(n)} \left(1 - e^{-b_k \Delta t_D^{(n)}} \right) + \left[\frac{1}{3} + \Delta t_D^{(n)} \right. \\ &- \left. \left. \frac{2}{\pi^4 \Delta t_D^{(n)}} \sum_{m=1}^{20} \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \Delta t_D^{(n)}} \right) - \frac{1}{\Delta t_D^{(n)}} \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{b_k} \left(1 - e^{-b_k \Delta t_D^{(n)}} \right) \right] T_{if}(t_D^{(n+1)}) \right\}, \quad (3.64) \end{aligned}$$

onde:

$$d_k^{(n+1)} = d_k^{(n)} e^{-b_k \Delta t_D^{(n)}} + \frac{T_{if}(t_D^{(n+1)}) - T_{if}(t_D^{(n)})}{\Delta t_D^{(n)}} \frac{a_k}{b_k} \left(1 - e^{-b_k \Delta t_D^{(n)}} \right).$$

Para aplicação do cálculo da perda de calor em um reservatório com dois meios distintos, assume-se que tanto a fratura como os blocos de matriz estão em contato com o estrato impermeável. Como $(1 - \phi_f)$ representa a fração volumétrica ocupada pela matriz,

$(1 - \phi_f)^{2/3}$ representará a fração da área superficial de matriz em contato com o estrato impermeável, enquanto que $[1 - (1 - \phi_f)^{2/3}]$ representará o contato do meio fraturado com o estrato impermeável.

O valor de H deve ser tal que durante todo o tempo previsto de simulação, o fluxo térmico mantenha um comportamento transiente. Baseado nisto, *Souza et alii* (1986) propõem que o comprimento mínimo do estrato adjacente seja dado por: $H = 4\sqrt{\alpha t_{is}}$, que é a condição utilizada neste trabalho.

3.7 Modelo de Poço

O objetivo do modelo de poço é o de se obter a pressão de fluxo no poço a partir da pressão do bloco que o contém, quando as vazões no poço são especificadas, ou obter estas vazões quando a pressão de fluxo é especificada.

O modelo permite a utilização de um único poço, podendo admitir uma das cinco opções disponíveis:

- STATUS 1 -poço produzindo com vazão de óleo constante,
- STATUS 2 -poço produzindo com pressão de fundo " P_{wf} " constante.
- STATUS 3 -poço fechado,
- STATUS 4 -poço injetando com vazão de água equivalente constante,
- STATUS 5 -poço injetando com pressão de fundo constante.

Para condição de poço produzindo, o modelo admite que:

$$Q_{oi} = IP_{oi} \cdot (P_{oi} - P_{wf}), \quad (3.65)$$

com IP_o podendo ser fornecido como dado de entrada do modelo, ou calculado por $IP_o = C \cdot \frac{2\pi k k_{ro} h}{B_o \mu_o \ln(r_1/r_w)}$ para fluxo radial, com todas as propriedades sendo tomadas na célula do poço, onde C é uma constante que depende das unidades utilizadas.

Para condição de injeção, considera-se que:

$$Q_{wi} = IP_{wi} \cdot (P_{wf} - P_{wi}), \quad (3.66)$$

com IP_w podendo ser fornecido como dado de entrada ou calculado por $IP_w = C \cdot \frac{2\pi k h}{B_w \mu_w \ln(r_1/r_w)}$ para fluxo radial, com todas as propriedades sendo tomadas com base na pressão de injeção do poço.

3.8 Características Gerais do Simulador

O simulador, implementado em linguagem Fortran, apresenta as seguintes características gerais:

- * Permite a produção a pressão constante ou a vazão de óleo constante,
- * Permite a injeção de vapor a pressão constante ou a vazão de água equivalente constante, ou seja, a vazão de água em forma de vapor,
- * Durante a injeção, o título do vapor é mantido constante,
- * As transmissibilidades são sempre calculadas a montante,
- * A pressão de injeção e o título são tomados em frente à formação e não na saída do gerador,
- * A identificação da existência do vapor em uma célula pode ser feita entre passos da iteração dentro de um mesmo "time-step", ou entre "time-steps". O primeiro modo tem a desvantagem de poder encontrar valores negativos de saturação de vapor, não superiores a 1%, uma vez que só se permite a mudança de estado na célula uma vez em cada passo de tempo. O segundo usa um número de passos de tempo maior ou igual que o primeiro para chegar ao resultado.

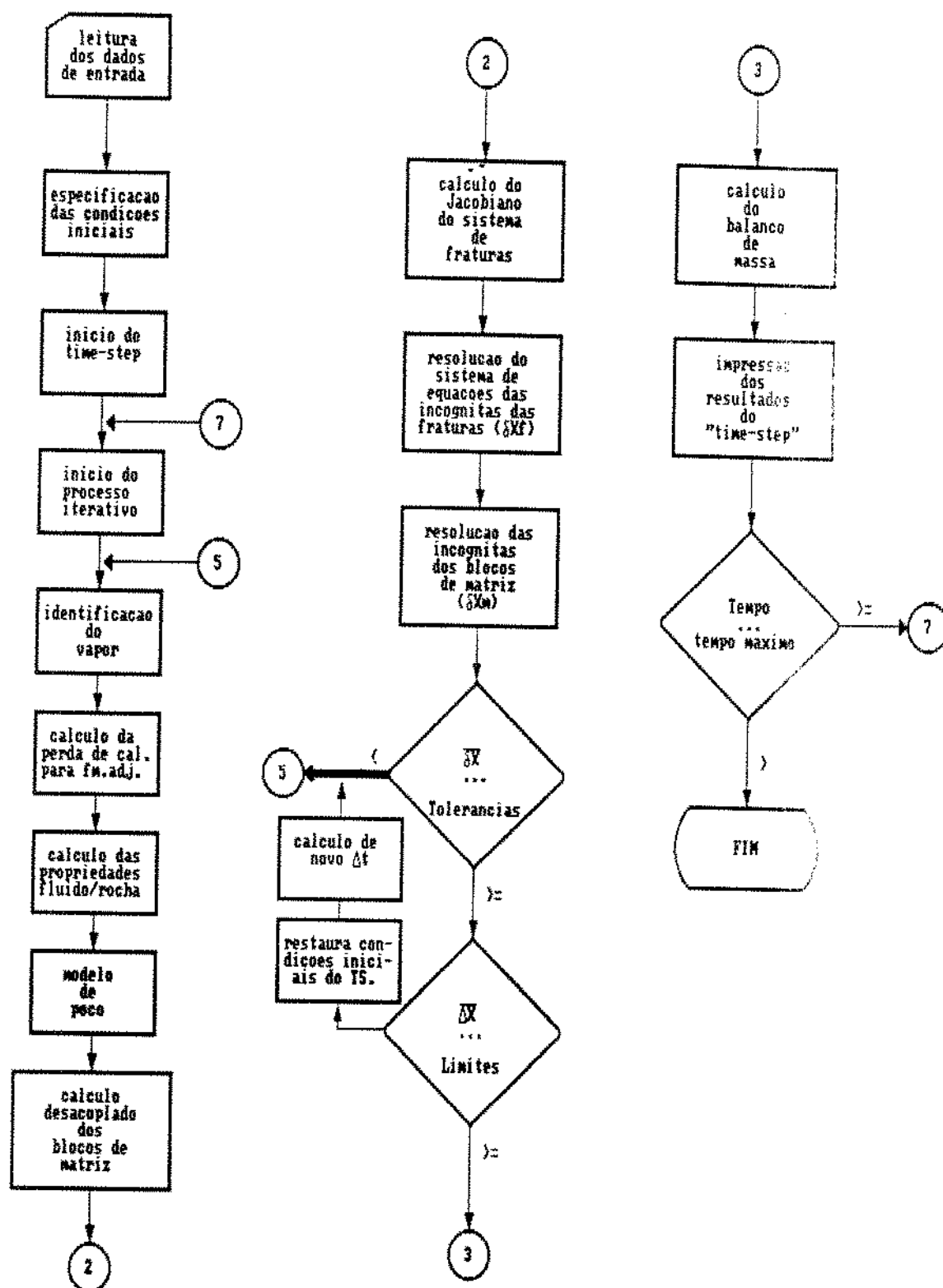


Figura 3.3: Fluxograma Simplificado do Simulador

CAPÍTULO 4

PROPRIEDADES FÍSICAS

As características do sistema rocha-fluido necessitam ser descritas em função das variáveis primárias. A seguir se apresentam as características mais comuns usadas na literatura.

4.1 Propriedades do Vapor Saturado

As propriedades do sistema *água-vapor* necessárias para simulação térmica do reservatório, tais como entalpia, volume específico e viscosidade, podem ser obtidas diretamente através de interpolação em tabelas obtidas de *Prats*(1982).

4.2 Permeabilidade Relativa Trifásica

Para o cálculo das permeabilidades relativas trifásicas, utilizou-se o *método II de Stone*, discutido por *Fayers e Matthews* (1984).

O método faz uso das curvas de permeabilidade relativa bifásica para o deslocamento óleo/água na ausência de gás, ou sejam:

$$K_{rw} = K_{rw}(S_w), \quad (4.1)$$

$$K_{row} = \bar{K}_{row}(S_w), \quad (4.2)$$

e das permeabilidades relativas ao deslocamento gás/óleo na presença de água conata:

$$K_{rg} = K_{rg}(S_g), \quad (4.3)$$

$$K_{rog} = K_{rog}(S_g). \quad (4.4)$$

A fase aquosa é considerada como predominantemente molhante e a fase gasosa como predominantemente não molhante para cada um dos deslocamentos bifásicos, de modo que para o fluxo trifásico, a permeabilidade relativa destas duas fases dependem inteiramente de suas saturações individuais, como indicado nas equações (4.1) e (4.3).

Já para a fase oleosa, a permeabilidade relativa é uma função da saturação de água e de gás, sendo obtida pelo *método II de Stone*, segundo *Aziz e Settari* (1979), resultando:

$$K_{ro}(S_g, S_w) = K_{row} \left[\left(\frac{K_{row}}{K_{row}} + K_{rw} \right) \left(\frac{K_{rog}}{K_{row}} + K_{rg} \right) \right] - (K_{rw} + K_{rg}). \quad (4.5)$$

4.3 Viscosidades

Óleo

O gráfico da viscosidade cinemática do óleo morto versus temperatura em um papel ASTM, log log x log, fornece uma linha reta (*Braden*, 1966)¹, como pode ser visto na figura 4.1. Uma vez que, para óleos pesados, com baixo grau API, a densidade é muito próxima à unidade, e este é justamente o tipo de óleo mais propício aos métodos

¹Esta correlação é válida para óleo que possua comportamento de fluido Newtoniano. Desvios devido à decomposição térmica, craqueamento, e não homogeneidades do mesmo não são considerados.

térmicos por apresentar uma grande diminuição da sua viscosidade com o aumento de temperatura, podemos considerar o comportamento linear da viscosidade dinâmica com a temperatura quando grafado em papel ASTM:

$$\log[\log(\mu_o + 0.6)] = C_l + C_a \log(T + 460). \quad (4.6)$$

Para o caso em questão, onde o óleo possui gás dissolvido, fornece-se como dado de entrada do modelo o comportamento da viscosidade com a pressão, sendo estes dados tomados como válidos para temperatura inicial do reservatório. Considera-se neste trabalho que o comportamento linear da viscosidade com a temperatura em papel ASTM não se altera, e que, com a variação de pressão, serão geradas novas retas paralelas à primeira. Assim, o coeficiente angular permanece inalterado com a variação de pressão, enquanto que o coeficiente linear é uma função direta da pressão, ou seja:

$$\log[\log(\mu_o + 0.6)] = C_l(P_o) + C_a \log(T + 460), \quad (4.7)$$

onde os valores de $C_l(P_o)$ são obtidos dos dados de variação de μ_o versus P_o .

Gás

Na fase gasosa há uma mistura de vapor, cuja viscosidade é calculada na forma descrita na seção 4.1, e gás natural. A viscosidade do gás natural pode ser calculada, segundo *Lee et alii* (1966), de acordo com as seguintes equações:

$$\mu = K e^{(X \rho^Y)}, \quad (4.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} K &= \frac{(9.4 + 0.02 M_g)(T + 460)^{1.5}}{209 + 19 M_g + (T + 460)}, \\ X &= 3.5 + \frac{986}{T + 460} + 0.01 M_g, \\ Y &= 2.4 - 0.2 X, \end{aligned}$$

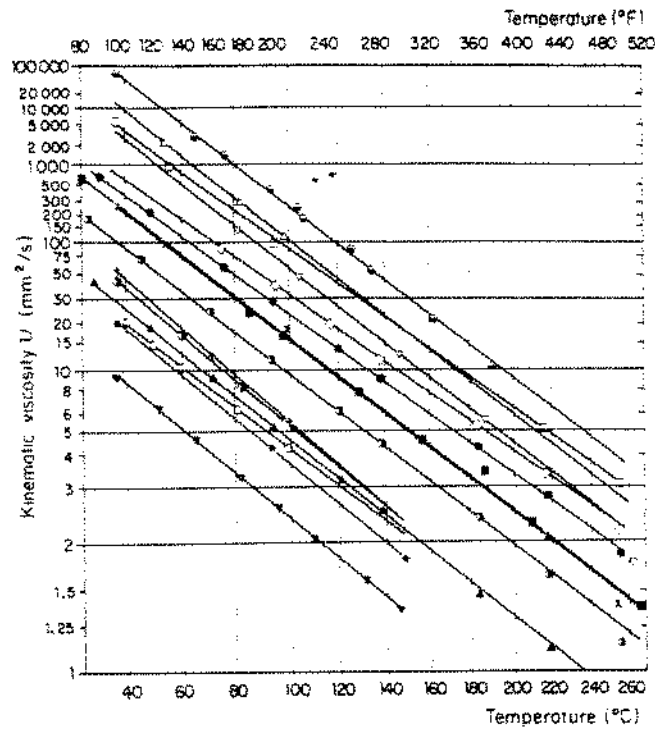


Figura 4.1: Gráfico ASTM

sendo $M_g \approx 28.97 D_g$ o peso molecular do gás,
e: μ em micropoise, ρ em gr/cm^3 , T em $^{\circ}\text{F}$.

Para o vapor, a viscosidade é obtida a partir da tabela de vapor saturado e para mistura de gás hidrocarboneto e vapor, utiliza-se a correlação:

$$\mu_g = \frac{\mu_{gg} y_{gg} \sqrt{PM_{gg}} + \mu_{wg} y_{wg} \sqrt{PM_{wg}}}{y_{gg} \sqrt{PM_{gg}} + y_{wg} \sqrt{PM_{wg}}},$$

onde PM_{gg} e PM_{wg} são os pesos moleculares do gás hidrocarboneto e do vapor respectivamente.

4.4 Fator Volume de Formação

Óleo e água

Os fatores volume de formação das fases óleo e água são fornecidos como dados de entrada do modelo, em forma de tabela, contemplando apenas as variações com a pressão, não sendo consideradas as suas variações com a temperatura.

Gás

Para o gás hidrocarboneto, o fator volume de formação calcula-se como:

$$B_{gg} = \frac{P_{sc}}{T_{sc}} \frac{T}{P} Z, \quad (4.9)$$

O fator de compressibilidade do gás, Z , pode ser encontrado mediante a correlação de *Dranchuk et alii* (1974):

$$Z = 1 + \left(A_1 + \frac{A_2}{T_r} + \frac{A_3}{T_r^3} \right) \rho_r + \left(A_4 + \frac{A_5}{T_r} \right) \rho_r^2 + A_5 A_6 \frac{\rho_r^5}{T_r} + A_7 \frac{\rho_r^2}{T_r^3} (1 + A_8 \rho_r^2) e^{-A_8 \rho_r^2}, \quad (4.10)$$

onde:

$$\rho_r = 0.27 P_r / (Z T_r),$$

$$A_1 = 0.31506237, \quad A_4 = 0.53530771, \quad A_7 = 0.68157001,$$

$$A_2 = -1.04670990, \quad A_5 = -0.61232032, \quad A_8 = 0.68446549,$$

$$A_3 = -0.57832729, \quad A_6 = -0.10488813.$$

A pressão e a temperatura reduzidas podem ser encontradas a partir dos seus valores críticos que podem ser estimados através das correlações apresentadas por *Thomas*,

Hankinson e Phillips (1970):

$$T_c = 170.491 + 307.344D_g, \quad [\text{em } ^\circ\text{R}],$$

$$P_c = 709.604 - 58.718D_g, \quad [\text{em Psia}].$$

Uma vez que Z aparece implicitamente na equação (4.10), torna-se necessário o uso de técnicas iterativas para sua obtenção.

Para o vapor, o fator volume de formação pode ser obtido a partir da sua massa específica, fornecida em forma de tabela, como descrito na seção 4.1 .

4.5 Condutividade Térmica

As condutividades térmicas para cada uma das fases e para a rocha são consideradas constantes com a pressão e a temperatura, e são fornecidas como dados de entrada do simulador.

A condutividade térmica total equivalente será obtida como a média ponderada pelo volume de cada elemento, ou sejam:

Fratura :

$$\lambda_{Ti} = (\phi_f - \phi)\lambda_{T_{rf}} + \phi \left\{ (1 - S_g - S_w)\lambda_{T_o} + S_g\lambda_{T_g} + S_w\lambda_{T_w} \right\}, \quad (4.11)$$

Matriz :

$$\lambda_{Ti} = (1 - \phi_f - \phi_m)\lambda_{T_{rm}} + \phi_m \left\{ (1 - S_g - S_w)\lambda_{T_o} + S_g\lambda_{T_g} + S_w\lambda_{T_w} \right\}. \quad (4.12)$$

4.6 Capacidade Térmica

A capacidade térmica por unidade de massa aumenta com a temperatura, podendo ser obtida conforme Burger (1985), através de:

$$\text{óleo} \rightarrow C_{po} = a_o + b_o T,$$

$$\text{água} \rightarrow C_{pg} = a_g + b_g T + c_g T^2,$$

onde a_o, b_o, a_g, b_g, c_g são constantes fornecidas como dados de entrada do modelo.

A variação da capacidade térmica com a pressão será desprezada. Para a rocha, a capacidade térmica volumétrica será dada por $M_r = C_{ps}(T - T_{ref})$, onde C_{ps} é constante.

4.7 Entalpia

Considerando-se que, para efeitos práticos, a variação da entalpia com a pressão pode ser desprezada, esta pode ser calculada para cada uma das fases como descrito a seguir:

A entalpia da fase aquosa é obtida diretamente da tabela de vapor saturado, conforme indicado na seção 4.1.

A entalpia da fase oleosa é obtida, segundo *Burger*, através da relação:

$$H_o = \int_{T_{ref}}^T C_{po} dT. \quad (4.13)$$

Fazendo-se uso da equação da capacidade térmica do óleo, descrita na seção 4.6, obtém-se:

$$H_o = a_o(T - T_{ref}) + \frac{b_o}{2}(T^2 - T_{ref}^2). \quad (4.14)$$

A entalpia da fase gasosa é obtida de forma semelhante à da fase oleosa, ou seja:

$$H_g = \int_{T_{ref}}^T C_{pg} dT. \quad (4.15)$$

Fazendo-se uso da equação da capacidade térmica do gás, temos:

$$H_g = a_g(T - T_{ref}) + \frac{b_g}{2}(T^2 - T_{ref}^2) + \frac{c_g}{3}(T^3 - T_{ref}^3). \quad (4.16)$$

4.8 Energia Interna

Para as fases oleosa e aquosa, a energia interna pode ser considerada como sendo igual à entalpia, uma vez que sua compressibilidade é pequena, ou seja:

$$U_o = H_o,$$

e

$$U_w = H_w.$$

Para o gás hidrocarboneto na fase gasosa, a energia interna é calculada a partir da entalpia e do trabalho realizado pela expansão do gás, da forma:

$$U_{gg} = H_{gg} - \frac{P_g}{J\rho_{gg}}.$$

Analogamente, para o vapor:

$$U_{wg} = H_{wg} - \frac{P_g}{J\rho_{wg}}.$$

4.9 Pressão Capilar

As curvas de pressão capilar, tanto para óleo-gás como para água-óleo, são fornecidas em forma de tabela, considerando-se somente sua variação com a saturação, não sendo consideradas as suas variações com a temperatura e a pressão. Na condição inicial de simulação admite-se que o reservatório esteja em equilíbrio, ou seja, que não haja fluxo de fluidos entre células, nem entre os blocos de matriz e o sistema de fraturas dentro de uma mesma célula. As saturações iniciais, tanto das fraturas como dos blocos

de matriz, são dados de entrada do modelo e, a depender destas saturações, a pressão capilar pode assumir valores diferentes para os dois meios, acarretando fluxo entre matriz e fratura. Com o objetivo de se prover o equilíbrio no início da simulação, faz-se uso de pseudo-curvas de pressão capilar, que são valores constantes adicionados à curva original de pressão capilar dos blocos de matriz, dados por:

$$\text{Pseudo } P_{cgo} = (P_{cgo})_f - (P_{cgo})_m, \text{ e } \text{Pseudo } P_{cwo} = (P_{cwo})_f - (P_{cwo})_m.$$

Este cálculo é feito apenas no início da simulação, com valores considerados constantes durante toda a simulação.

CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para obtenção da solução do problema formulado no capítulo 3 é necessário inicialmente se discretizar as equações de transporte do modelo térmico aqui considerado.

5.1 Discretização

As oito equações de balanço definidas anteriormente são discretizadas através do método de diferenças finitas. Para os termos espaciais são utilizadas as diferenças centrais e para o termo temporal a diferença regressiva. No **Apêndice B** encontra-se o desenvolvimento da discretização usada, gerando as equações, apresentadas a seguir, colocadas na forma de funções resíduos para cada célula i , visando a aplicação do método de *Newton-Raphson*.

Para o sistema de fraturas, as funções resíduos assumem a seguinte forma:

$$F_{oi}^{(n+1)} = \Delta(T_o \Delta \Phi_o)_i^{n+1} + T_{omfi}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + Q_o^{n+1} - \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi b_o (1 - S_g - S_w)]_i^{n+1} - [\phi b_o (1 - S_g - S_w)]_i^n \} = 0, \quad (5.1)$$

$$F_{gi}^{(n+1)} = \Delta(T_g \Delta \Phi_g)_i^{n+1} + \Delta(R_s T_o \Delta \Phi_o)_i^{n+1} + (T_{omf} R_{so})_i^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + T_{gmfi}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} + Q_g^{n+1} - \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi (S_g - S_v) b_{gg}]_i^{n+1} - [\phi (S_g - S_v) b_{gg}]_i^n + \phi b_o R_{so} (1 - S_g - S_w)_i^{n+1} - [\phi (S_g - S_v) b_{gg} + \phi b_o R_{so} (1 - S_g - S_w)]_i^n \} = 0, \quad (5.2)$$

$$F_{wi}^{(n+1)} = \Delta(T_w \Delta \Phi_w)_i^{n+1} + \Delta(T_{wg} \Delta \Phi_g)_i^{n+1} + Q_w^{n+1} + T_{wmfi}^{n+1} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo})_i^{n+1} + T_{wgmfi}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} - \frac{V_i}{\Delta t} \left\{ \left[\phi \left(b_w S_w + \frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v \right) \right]_i^{n+1} - \left[\phi \left(b_w S_w + \frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v \right) \right]_i^n \right\} = 0, \quad (5.3)$$

$$F_{Ti}^{(n+1)} = \Delta(T_{ho} \Delta \Phi_o)_i^{n+1} + \Delta(T_{hg} \Delta \Phi_g)_i^{n+1} + \Delta(T_{hw} \Delta \Phi_w)_i^{n+1} + Q_{Ti}^{n+1} + T_{Tmfi}^{n+1} (T_m - T)_i + T_{homfi}^{n+1} (P_{om} - P_o) + T_{hgmfi}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} + T_{hw mfi}^{n+1} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo})_i^{n+1} - \frac{V_i}{\Delta t} \{ \{ \phi_{fe} [\rho_o S_o U_o + \rho_{wg} S_v U_{wg} + \rho_w S_w H_w + (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg}] + (\phi_f - \phi) M_R \Delta T \}_i^{n+1} - \{ \phi [\rho_o S_o U_o + \rho_{wg} S_v U_{wg} + (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg} + \rho_w S_w H_w] + (\phi_f - \phi) M_R \Delta T \}_i^n \} = 0. \quad (5.4)$$

Para os blocos de matriz, as funções resíduos tornam-se:

$$F_{omi}^{(n+1)} = T_{omfi}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi_m b_o (1 - S_g - S_w)]_i^{n+1} - [\phi_m b_o (1 - S_g - S_w)]_i^n \}_m = 0, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
F_{gm_i}^{(n+1)} &= T_{gm_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} + (T_{om_f} R_{so})_i^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} \\
&+ \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi_m (S_g - S_v) b_{gg} + \phi_m b_o R_s (1 - S_g - S_w)]_i^{n+1} \\
&- [\phi_m (S_g - S_v) b_{gg} + \phi_m b_o R_s (1 - S_g - S_w)]_i^n \}_m = 0,
\end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
F_{wm_i}^{(n+1)} &= T_{wm_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo})_i^{n+1} + T_{wg_m_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} \\
&+ \frac{V_i}{\Delta t} \left\{ \left[\phi_m \left(b_w S_w + \frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v \right) \right]_i^{n+1} - \left[\phi_m \left(b_w S_w + \frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v \right) \right]_i^n \right\}_m = 0, \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{Tm_i}^{(n+1)} &= T_{hom_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i + T_{hgm_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} + T_{Tm_f_i}^{n+1} (T_m - T) \\
&+ T_{hum_f_i}^{n+1} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo})_i^{n+1} + \frac{V_i}{\Delta t} \{ \{ \phi_m [\rho_o S_o U_o + \rho_w S_w U_{wg} \\
&+ (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg} + \rho_w S_w H_w] + (1 - \phi_f - \phi_m) M_R \Delta T \}_i^{n+1} - \{ \phi_m [\rho_o S_o U_o \\
&+ \rho_w S_w U_{wg} + (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg} + \rho_w S_w H_w] + (1 - \phi_f - \phi_m) M_R \Delta T \}_i^n \}_m = 0.
\end{aligned} \quad (5.8)$$

Temos então, para cada célula do reservatório, oito equações não lineares, que são as equações de balanço para fratura e para matriz, de óleo, gás, água e energia respectivamente, com oito incógnitas primárias, $P_{om}, S_{gm}, S_{wm}, T_m, P_o, S_g, S_w$ e T , onde T_m e T podem ser substituídos pelas saturações do vapor na matriz, S_{vm} , e na fratura, S_v , se houver presença de vapor em algum destes meios.

As equações, (5.1) a (5.8), formam um sistema não linear de equações que podem ser resolvidas através do método de *Newton-Raphson*.

5.2 Solução do Sistema não Linear de Equações

A solução das equações discretizadas será obtida fazendo-se uso do método de *Newton*. Este método combina duas idéias básicas e muito freqüentes nas aproximações numéricas: linearização e iteração.

Na linearização, substitui-se localmente as equações não lineares, normalmente de difícil resolução, por suas aproximações lineares, de mais fácil resolução. Esta aproximação é obtida pelo uso dos primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor. No processo iterativo procura-se, através da repetição sistemática de um procedimento bem estabelecido, alcançar o grau de aproximação necessário.

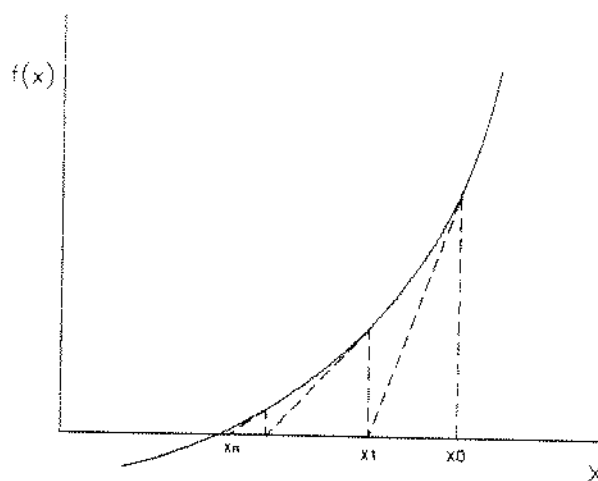


Figura 5.1: Exemplo de Solução pelo Método de Newton

As oito funções resíduos, obtidas na seção anterior, possuem a seguinte relação de dependência com as incógnitas primárias:

Fratura : $F_{p_i}^{n+1} = F_{p_i} \left[(P_o, S_g, S_w, T)_i^{n+1}, (P_{om}, S_{gm}, S_{wm}, T_m)_i^{n+1} \right] = 0,$

Matriz : $F_{pm_i}^{n+1} = F_{pm_i} \left[(P_o, S_g, S_w, T)_i^{n+1}, (P_{om}, S_{gm}, S_{wm}, T_m)_i^{n+1} \right] = 0,$

onde $p = o, g, w$ e T ; $\ell = i - 1, i$ e $i + 1$.

Linearizando-se as equações da fratura e dos blocos de matriz para aplicação do método de Newton através da expansão em série de Taylor, e considerando-se apenas o termo de primeira ordem desta série, obtém-se o seguinte esquema iterativo para os sistemas de fratura e de matriz:

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} \left\{ \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial P_{o_k}} \delta P_{o_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{g_k}} \delta S_{g_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{w_k}} \delta S_{w_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial T_k} \delta T_k^{(\nu+1)} \right\} +$$

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial P_{om_i}} \delta P_{om_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{gm_i}} \delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{wm_i}} \delta S_{wm_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial T_{m_i}} \delta T_{m_i}^{(\nu+1)} = -F_{p_i}^{(\nu)}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial P_{oi}} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{gi}} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{wi}} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial T_i} \delta T_i^{(\nu+1)} +$$

$$\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial P_{om_i}} \delta P_{om_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{gm_i}} \delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial S_{wm_i}} \delta S_{wm_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial T_{m_i}} \delta T_{m_i}^{(\nu+1)} = -F_{pm_i}^{(\nu)}. \quad (5.10)$$

A equação resultante para o problema unidimensional com um número I de células assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}}_1 & \overline{\overline{B}}_1 & & & \\ \overline{\overline{C}}_2 & \overline{\overline{A}}_2 & \overline{\overline{B}}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \circ & & \overline{\overline{C}}_{I-1} & \overline{\overline{A}}_{I-1} & \overline{\overline{B}}_{I-1} \\ & & & \overline{\overline{C}}_I & \overline{\overline{A}}_I \end{bmatrix}^{\nu} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\delta X}_1 \\ \vdots \\ \overline{\delta X}_I \end{bmatrix}^{\nu+1} = - \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \vdots \\ \overline{F}_I \end{bmatrix}^{\nu},$$

onde $\overline{\overline{A}}_i, \overline{\overline{B}}_i$ e $\overline{\overline{C}}_i$ são sub-matrizes de ordem 8 x 8.

As equações referentes aos blocos de matriz, equação (5.10), podem ser acopladas às equações das fraturas (Rodríguez de la Garza, 1987), como se indica no Apêndice C. Essas equações podem ser escritas matricialmente, para cada célula "i", da seguinte forma:

$$\overline{\overline{J}}_{mm_i}^{(\nu)} \overline{\delta X}_{m_i}^{(\nu+1)} + \overline{\overline{J}}_{mf_i}^{(\nu)} \overline{\delta X}_i^{(\nu+1)} = -\overline{F}_{m_i}^{(\nu)}. \quad (5.11)$$

A partir da equação (5.11), obtém-se:

$$\overline{\delta X}_{m_i}^{(\nu+1)} = - \left(\overline{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \cdot \left(\overline{J}_{mf_i}^{(\nu)} \overline{\delta X}_i^{(\nu+1)} + \overline{F}_{m_i}^{(\nu)} \right). \quad (5.12)$$

Definindo-se $\overline{\alpha}_i^{(\nu)} = - \left(\overline{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \cdot \left(\overline{J}_{mf_i}^{(\nu)} \right)$ e $\overline{\beta}_i^{(\nu)} = - \left(\overline{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \cdot \overline{F}_{m_i}^{(\nu)}$, e substituindo tais definições na equação (5.12), resulta:

$$\overline{\delta X}_{m_i}^{(\nu+1)} = \overline{\alpha}_i^{(\nu)} \overline{\delta X}_i^{(\nu+1)} + \overline{\beta}_i^{(\nu)}. \quad (5.13)$$

Substituindo este resultado na equação da fratura, teremos as equações finais do modelo devidamente acopladas :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i-1, i+1} \left\{ \frac{\partial F_{p_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_k}} \delta P_{o_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{p_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_k}} \delta S_{g_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{p_i}^{(\nu)}}{\partial S_{w_k}} \delta S_{w_k}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{p_i}^{(\nu)}}{\partial T_k} \delta T_k^{(\nu+1)} \right\} + \\ \left[\frac{\partial F_{p_i}}{\partial P_{o_i}} + \Theta_{p o_i} \right]^{(\nu)} \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{p_i}}{\partial S_{g_i}} + \Theta_{s g_i} \right]^{(\nu)} \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{p_i}}{\partial S_{w_i}} + \Theta_{s w_i} \right]^{(\nu)} \delta S_{w_i}^{(\nu+1)} + \\ \left[\frac{\partial F_{p_i}}{\partial T_i} + \Theta_{T_i} \right]^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} = - [F_{p_i} + \Psi_{p_i}]^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $i = 1, 2, \dots, I$ e $\nu = 0, 1, 2, \dots$.

O sistema de equações encontrado, tridiagonal blocado com sub-matrizes de ordem 4×4 , tem a mesma estrutura de um sistema não fraturado. Uma vez resolvido o sistema (5.14) para a iteração $\nu + 1$, são obtidas as incógnitas do sistema de fraturas, utilizando-se então o sistema (5.13) para resolver as incógnitas dos blocos de matriz para a mesma iteração.

O processo iterativo de *Newton-Raphson* inicia-se com a suposição de que as distribuições de pressões, saturações e temperatura, tanto nas fraturas como nos blocos de matriz, é igual aquela obtida no passo de tempo anterior, ou seja:

$$\overline{\delta X}^{(\nu=0)} = \overline{\delta X}^{(n)},$$

$$\overline{\delta X}_m^{(\nu=0)} = \overline{\delta X}_m^{(n)},$$

e encerra-se quando os módulos das variações das incógnitas, em cada iteração, são menores que uma determinada tolerância, definidas por:

$$|\delta P|^{(\nu+1)} \leq TOL_p,$$

$$|\delta S|^{(\nu+1)} \leq TOL_s,$$

$$|\delta T|^{(\nu+1)} \leq TOL_T.$$

CAPÍTULO 6

VALIDAÇÃO

A validação do programa foi feita comparando-se o resultado da simulação do comportamento de pressão durante a produção de um reservatório naturalmente fraturado, com a solução do modelo descrito por *Warren e Root* (1963). Este modelo apresenta uma solução analítica para o comportamento da pressão de um poço produzindo a vazão constante, considerando-se fluxo unifásico.

Para a validação do modelo, consideram-se os dados fornecidos na tabela (6.1). Como mostrado na figura (6.1), obteve-se um bom ajuste entre as curvas de comportamento de pressão dos modelos analítico e numérico, este último representado pelo simulador.

Não se encontrou na literatura um modelo analítico compatível com o modelo numérico descrito neste trabalho para validação do processo térmico.

DADOS DE ENTRADA	unidade	SI	unidade	usual
pressão inicial do reservatório	6.895	MPa	1000	psi
raio do poço	0.09144	m	0.3	ft
raio externo do reservatório	228.6	m	750.	ft
espessura porosa com óleo	60.96	m	200.	ft
porosidade da fratura	1	%	1	%
porosidade da matriz	25	%	25	%
permeabilidade da fratura	0.987	μm^2	1000	mD
permeabilidade da matriz	0.00987	μm^2	10	mD
viscosidade do fluido	0.1	Pa.s	100	cp
fator volume de formação	1.0		1.0	
compressibilidade da rocha	7.252×10^{-4}	MPa^{-1}	5×10^{-6}	psi^{-1}
comprimento dos bl.de mat.	5	m	16.51	ft

Tabela 6.1: Dados Usados Para Validação por Warren e Root

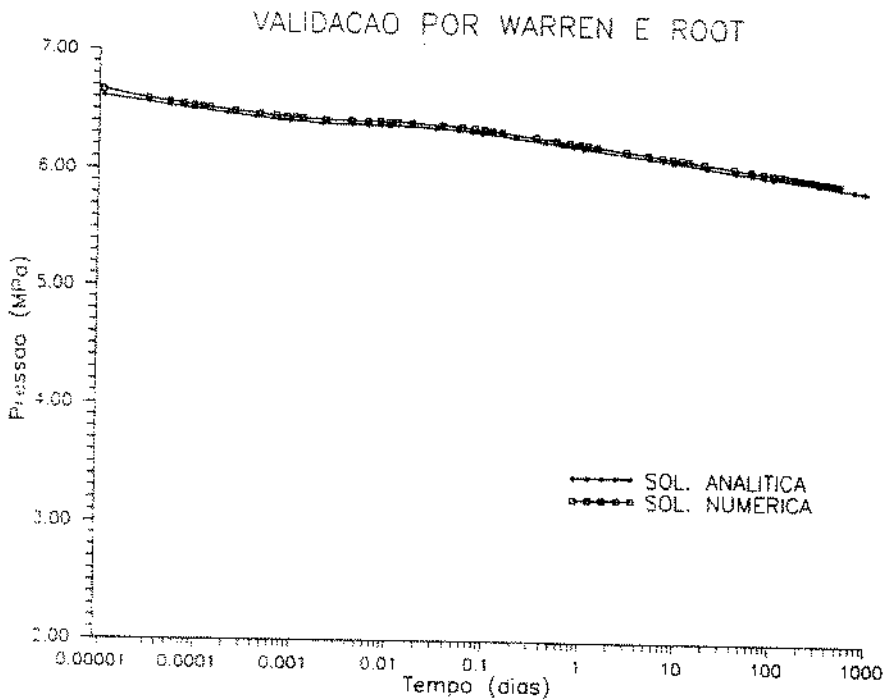


Figura 6.1: Validação por Warren e Root

CAPÍTULO 7

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O modelo computacional foi testado para o caso de uma simulação de injeção cíclica de vapor em um reservatório heterogêneo, com comportamento de dupla porosidade, e cujas características são apresentadas nas tabelas (7.1), (7.2) e (7.3). Os dados de viscosidade do óleo em função da temperatura, para pressão inicial de 6.55 MPa, são fornecidas na tabela (7.4).

Foram testadas algumas situações de modo a verificar a sensibilidade do modelo ao tamanho dos blocos de matriz, à vazão de injeção e ao tempo de "soaking".

Inicialmente considerou-se o poço injetando durante 10 dias a uma vazão de $65,6 \text{ m}^3/\text{d}$ de água, na forma de vapor, com título de 50%. Logo após, iniciou-se o período de "soaking", ou condensação, onde considerou-se o poço fechado durante sete dias para uma melhor distribuição de temperatura e pressão no reservatório. Findo este período, colocou-se o poço em produção, com pressão de fundo constante e igual a 0.345 MPa, durante 100 dias.

DADOS DE ENTRADA		unidade	SI	unidade	usual
pressão inicial do reservatório	6550		kPa	950	psi
raio do poço	0.09144		m	0.3	ft
raio externo do reservatório	228.6		m	750.	ft
espessura porosa com óleo	60.96		m	200.	ft
condutividade térmica do óleo	31.15		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	5	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
condutividade térmica da água	31.15		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	5	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
condutividade térmica do gás	31.15		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	5	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
capacidade térmica do óleo	2.09		$kJ/(K_g.^{\circ}K)$	0.5	$\frac{Btu}{lbm.^{\circ}F}$
capacidade térmica da água	4.19		$kJ/(K_g.^{\circ}K)$	1.0	$\frac{Btu}{lbm.^{\circ}F}$
capacidade térmica do gás	2.09		$kJ/(K_g.^{\circ}K)$	0.5	$\frac{Btu}{lbm.^{\circ}F}$
FRATURA					
fração de rocha ocupada pela frat.	50		%	50	%
porosidade da rocha	30		%	30	%
permeabilidade	0.987		μm^2	1000	mD
comprimento dos blocos de matriz	3.3		m	11	ft
compressibilidade da rocha	7.252×10^{-4}		MPa^{-1}	5×10^{-6}	psi^{-1}
capacidade térmica vol. da rocha	1677		$kJ/(m^3.^{\circ}K)$	25	$\frac{Btu}{ft^3.^{\circ}F}$
condutividade térmica da rocha	218.1		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	35	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
saturação inicial de gás	10		%	10	%
saturação inicial de água	25		%	25	%
BLOCOS DE MATRIZ					
porosidade da rocha	25		%	25	%
permeabilidade	0.0494		μm^2	50	mD
compressibilidade da rocha	7.252×10^{-4}		MPa^{-1}	5×10^{-6}	psi^{-1}
capacidade térmica vol. da rocha	1677		$kJ/(m^3.^{\circ}K)$	25	$\frac{Btu}{ft^3.^{\circ}F}$
condutividade térmica da rocha	218.1		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	35	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
saturação inicial de gás	10		%	10	%
saturação inicial de água	25		%	25	%
FORMAÇÕES ADJACENTES					
capacidade térmica vol.	1677		$kJ/(m^3.^{\circ}K)$	25	$\frac{Btu}{ft^3.^{\circ}F}$
condutividade térmica da rocha	186.9		$kJ/(D.^{\circ}K.m)$	30	$\frac{Btu}{D.^{\circ}F.ft}$
massa específica da rocha	640.7		Kg/m^3	40	lbm/ft^3

Tabela 7.1: Dados de Entrada Para o Caso Padrão

SG	K_{rog}	K_{rg}	P_{cgo} (MPa)	SW	K_{row}	K_{rw}	P_{cwo} (MPa)
0.00	1.00	0.00	0.0	0.00	1.00	0.00	0.069
0.04	0.60	0.000	0.023	0.25	1.00	0.00	0.050
0.10	0.33	0.002	0.057	0.30	0.75	0.01	0.043
0.20	0.10	0.022	0.115	0.40	0.40	0.02	0.034
0.30	0.02	0.10	0.172	0.50	0.18	0.06	0.029
0.40	0.00	0.28	0.228	0.60	0.07	0.13	0.023
0.50	0.00	0.42	0.288	0.70	0.00	0.22	0.017
0.60	0.00	0.60	0.345	0.78	0.00	0.35	0.000
0.70	0.00	0.8125	0.431	1.00	0.00	0.60	0.000
0.78	0.00	1.00	0.500				
1.00	0.00	1.00	0.689				

Tabela 7.2: Permeabilidades Relativas

Pressão (MPa)	μ_o (μm^2)	B_o	R_{so}	Pressão (MPa)	μ_w ($10^{-3} \mu m^2$)	B_w
0.00	0.104	1.0000	0.0	0.00	0.5000	1.0190
1.72	0.098	1.0700	15.0	3.75	0.5005	1.0175
3.45	0.094	1.1000	55.0	6.89	0.5010	1.0160
6.89	0.089	1.1200	90.0	10.34	0.5015	1.0145
13.79	0.089	1.1120	90.0	13.79	0.5020	1.0130
17.24	0.089	1.1080	90.0	20.68	0.5032	1.0105
18.96	0.089	1.1060	90.0	27.58	0.5050	1.0080
20.68	0.089	1.1040	90.0			
27.58	0.089	1.0960	90.0			

Tabela 7.3: Dados de PVT

Temperatura (°K)	Viscosidade (10^{-3} Pa.s)
310.8	89.5
588.6	3.0

Tabela 7.4: Dados de Viscosidade do Óleo

A figura 7.1 apresenta as vazões de óleo e a figura 7.2 apresenta as acumuladas de óleo para três casos distintos onde se procurou observar os efeitos da variação do tamanho dos blocos de matriz. Nota-se, logo após o poço ter iniciado a produção, uma alta vazão de óleo com acentuado declínio e uma posterior reversão deste declínio, ocasionada possivelmente por uma maior alimentação dos blocos de matriz. Quanto maior o tamanho dos blocos de matriz, ou seja, menor o valor de σ , menor também é esta reversão. A vazão de água, indicada na figura 7.3, não apresenta tal comportamento, uma vez que a água, por ser a fase molhante, tende a embeber preferencialmente os blocos de matriz, ficando assim retida no reservatório.

As figuras 7.4, 7.5 e 7.6 mostram os efeitos nas vazões de óleo, nas acumuladas de óleo e nas vazões de água, respectivamente, quando se duplica a vazão de injeção. Nota-se uma maior recuperação quando se aumenta a vazão de calor injetado. Pode-se encontrar através de simulações semelhantes, uma vazão de injeção ótima. Entretanto, é necessário que se leve em conta as perdas de calor nas linhas de injeção e no próprio poço, que tendem a aumentar com a temperatura de injeção, consequência do aumento da vazão de injeção, além de se considerar limitações, tais como a da capacidade do gerador de vapor.

As figuras 7.7 e 7.8 apresentam uma análise de sensibilidade ao tempo de "soaking". É possível desta forma se encontrar um tempo ótimo de fechamento do poço. Para os casos apresentados, não se nota significativas diferenças entre as curvas de acumuladas de óleo, entretanto, verifica-se uma maior vazão inicial de óleo para tempos de fechamentos entre 7 e 12 dias.

O fluxo matriz-fratura pode ser visualizado na figura 7.9, onde os valores positivos indicam fluxo saindo da matriz em direção às fraturas e negativos indicam fluxo em sentido contrário.

As figuras 7.10 a 7.13, mostram o comportamento de pressão, temperatura e saturações de gás e de vapor, para as células 1,5 e 20. Como fatos mais relevantes, observam-se:

- Um rápido declínio de temperatura assim que o poço entra em produção, devido às altas vazões iniciais,
- A vaporização de parte da água presente nos blocos de matriz nas primeiras células do reservatório, decorrente do rápido decréscimo de pressão, é acompanhado de um decréscimo mais lento de temperatura dentro dos blocos de matriz.

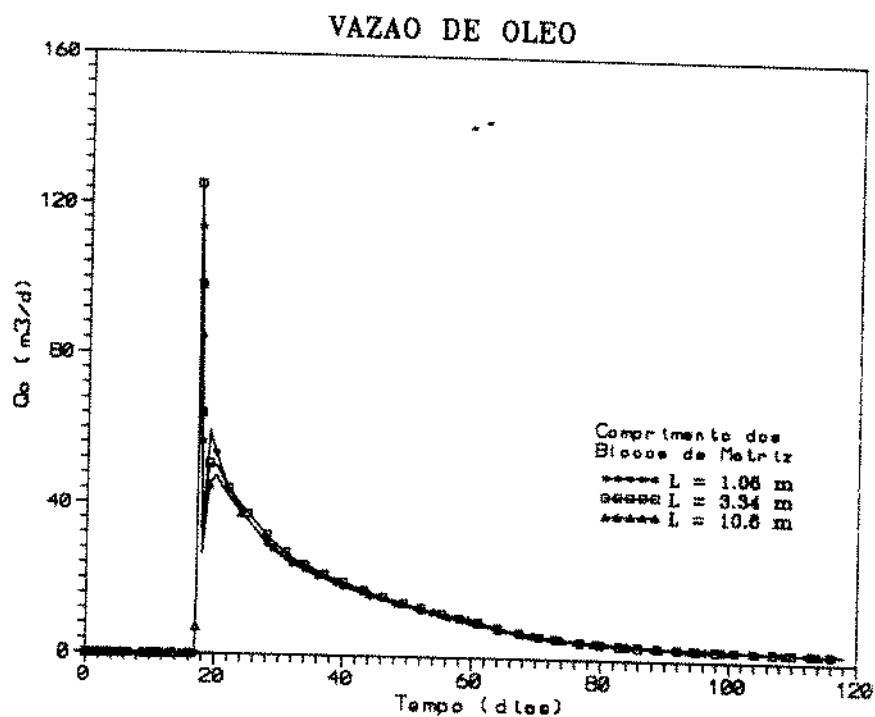


Figura 7.1: Efeito do σ na Vazão de Óleo

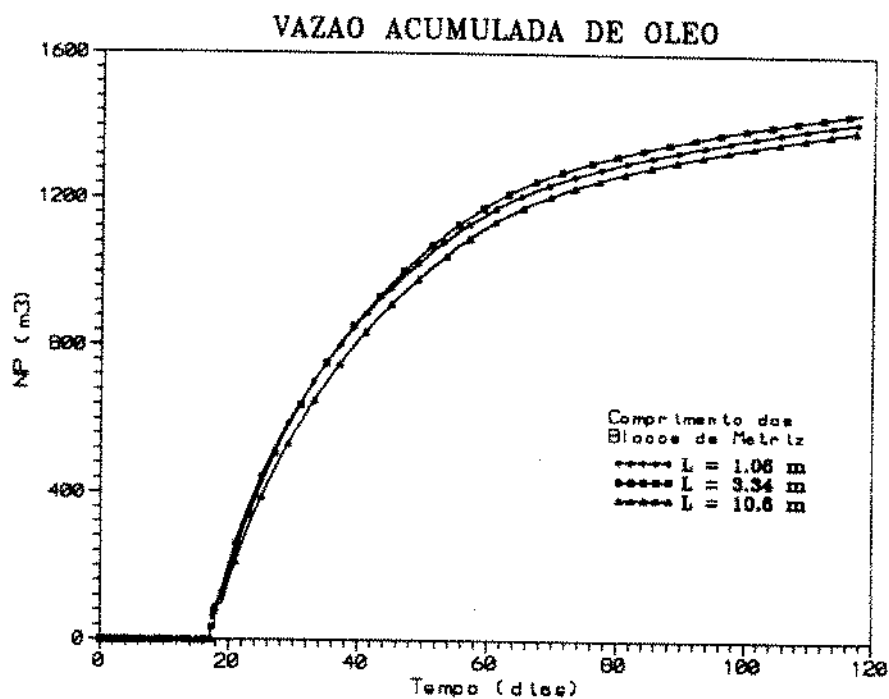


Figura 7.2: Efeito do σ na Acumulada de Óleo

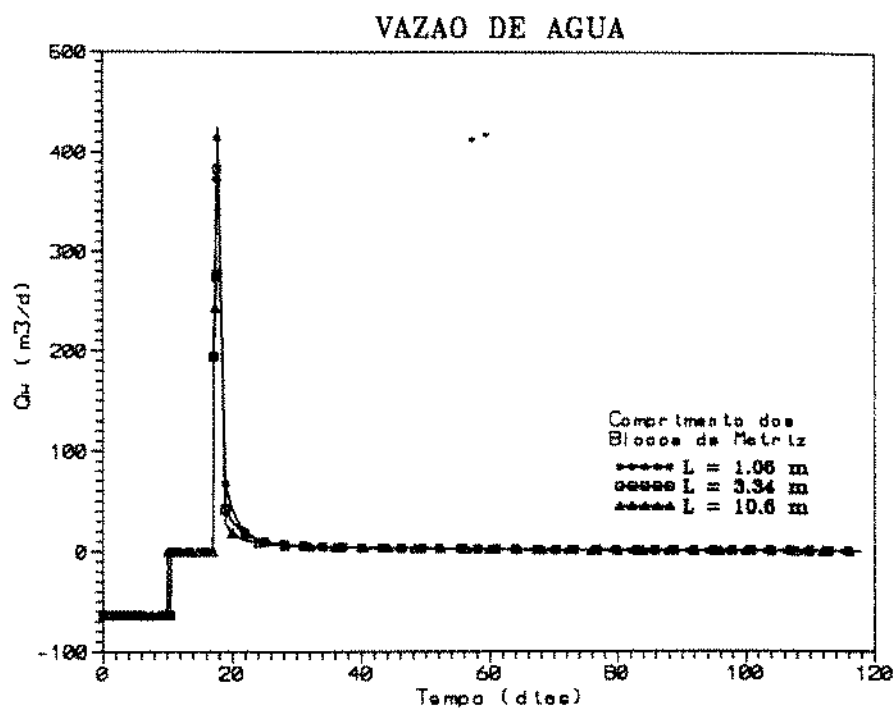


Figura 7.3: Efeito do σ na Vazão de Água

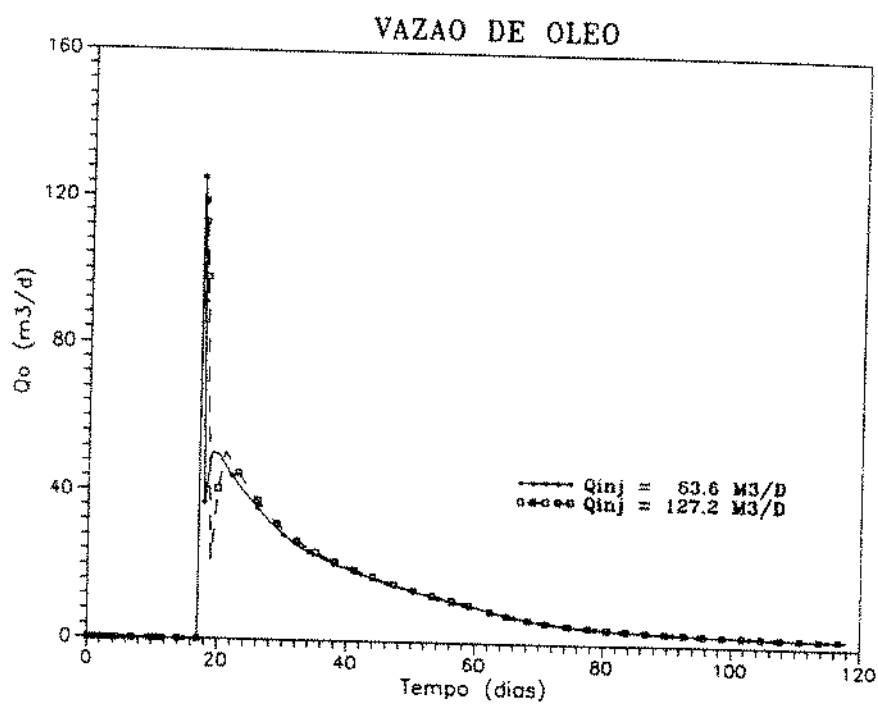


Figura 7.4: Efeito de Q_{inj} na Vazão de Óleo

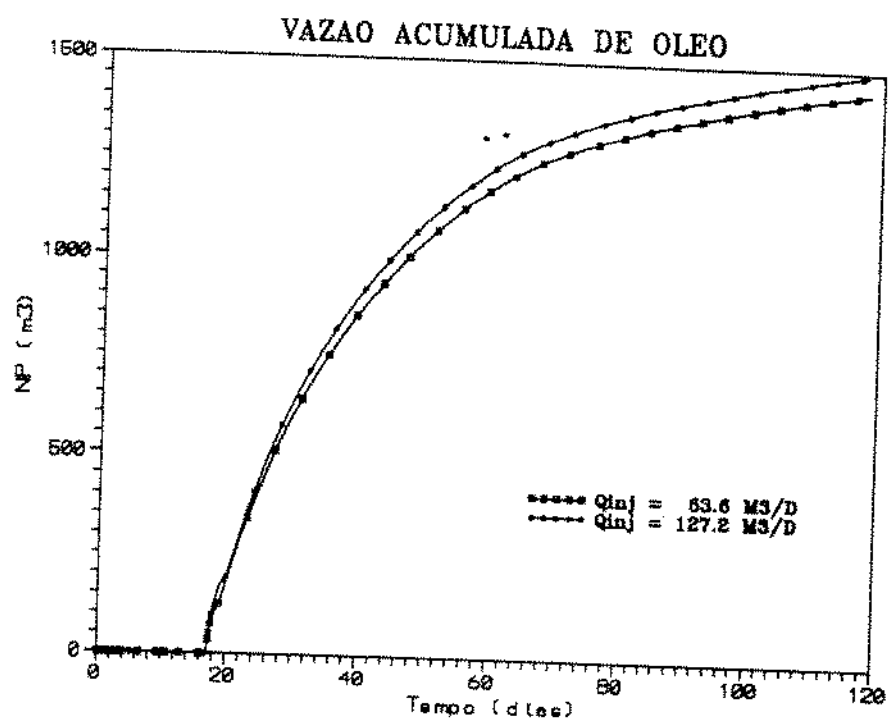


Figura 7.5: Efeito de Q_{inj} na Acumulada de Óleo

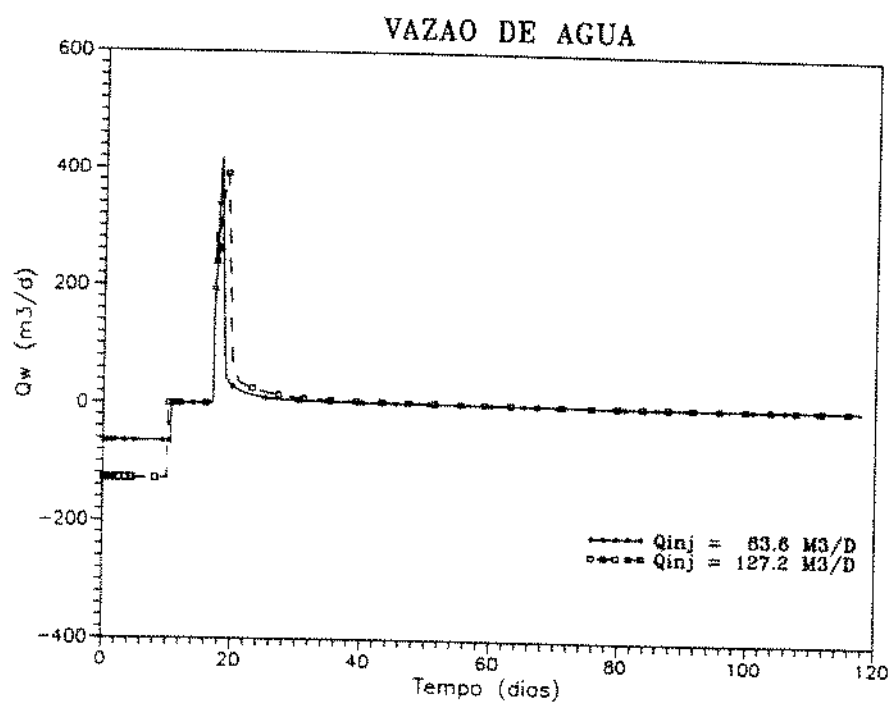


Figura 7.6: Efeito de Q_{inj} na Vazão de Água

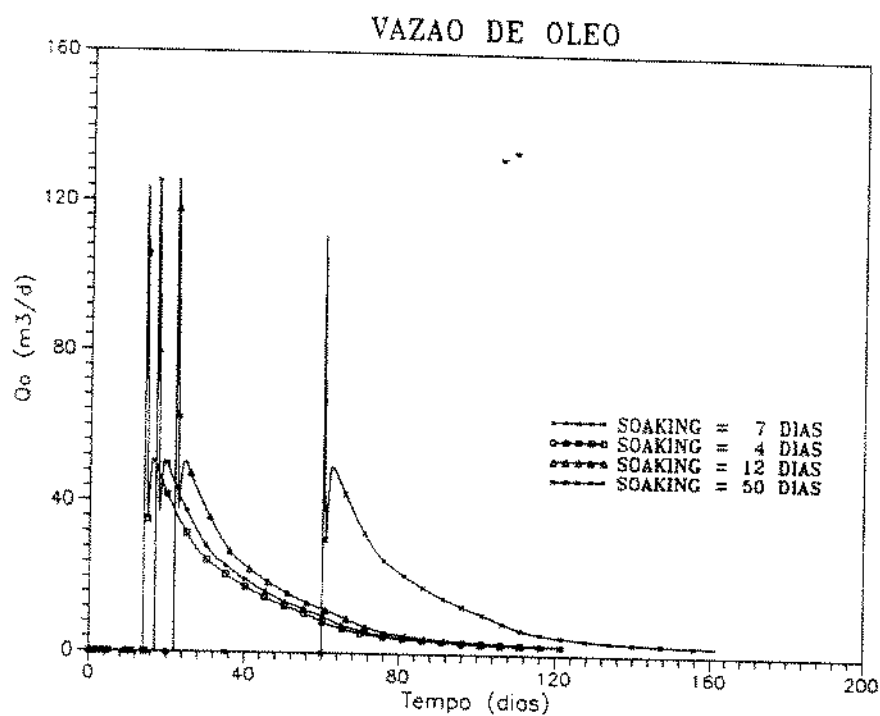


Figura 7.7: Efeito do "Soaking" na Vazão de Óleo

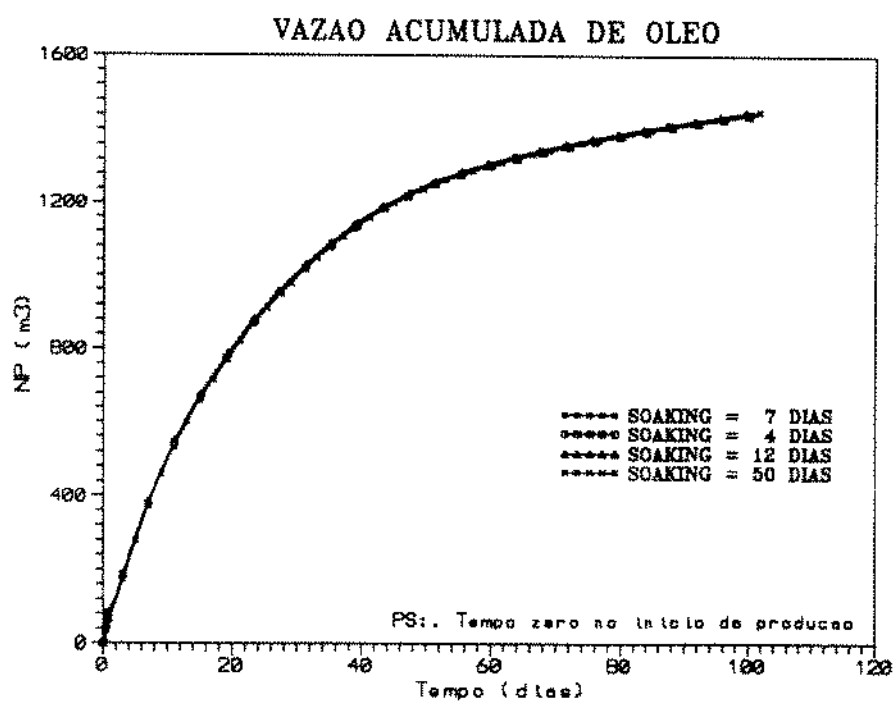


Figura 7.8: Efeito do "Soaking" na Acumulada de Óleo

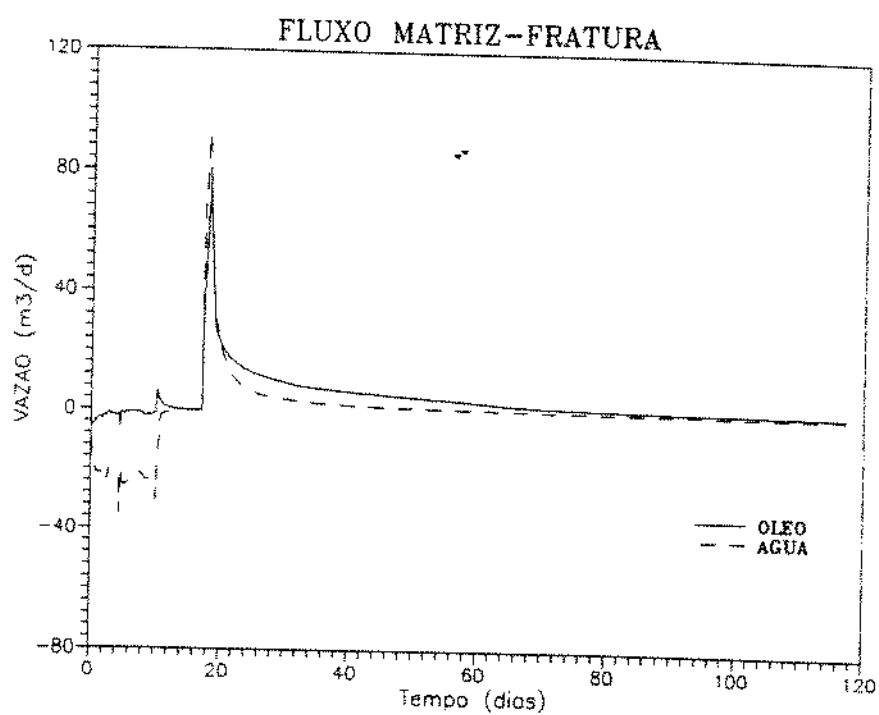


Figura 7.9: Fluxo Matriz-Fratura

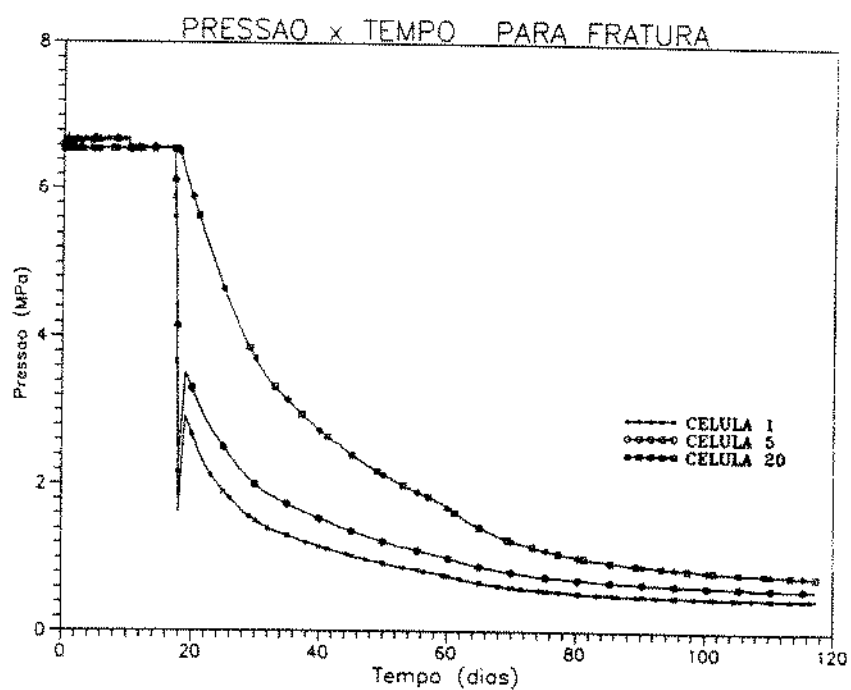


Figura 7.10: Comportamento da Pressão

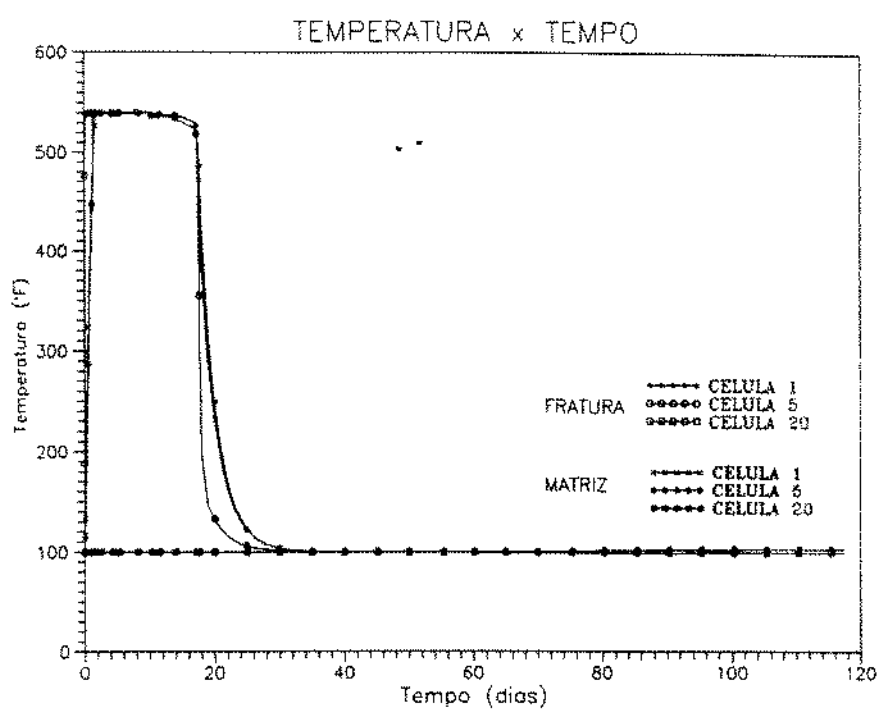


Figura 7.11: Comportamento da Temperatura

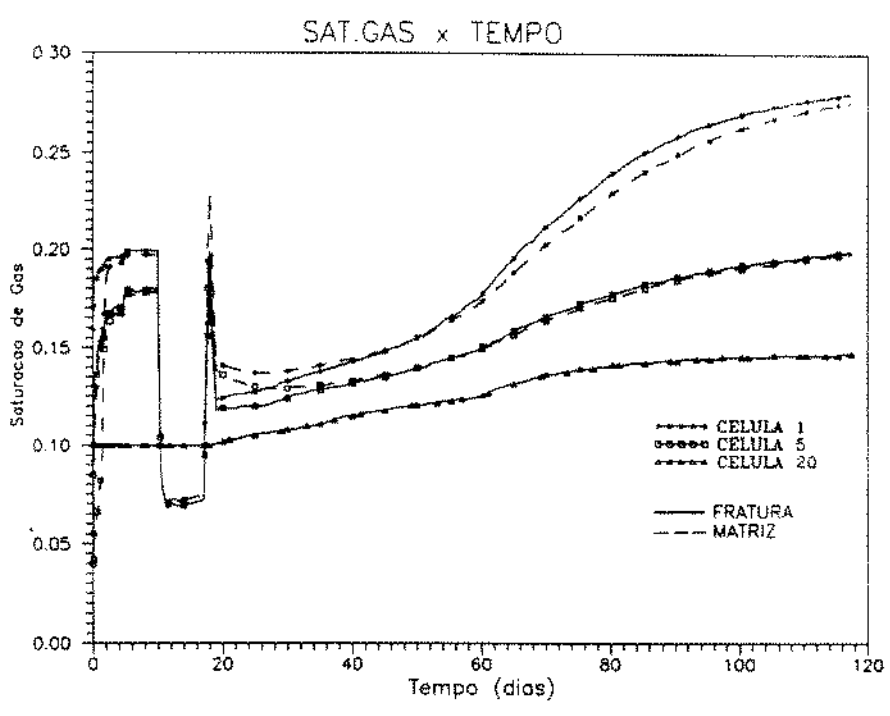


Figura 7.12: Comportamento da Saturação de Gás

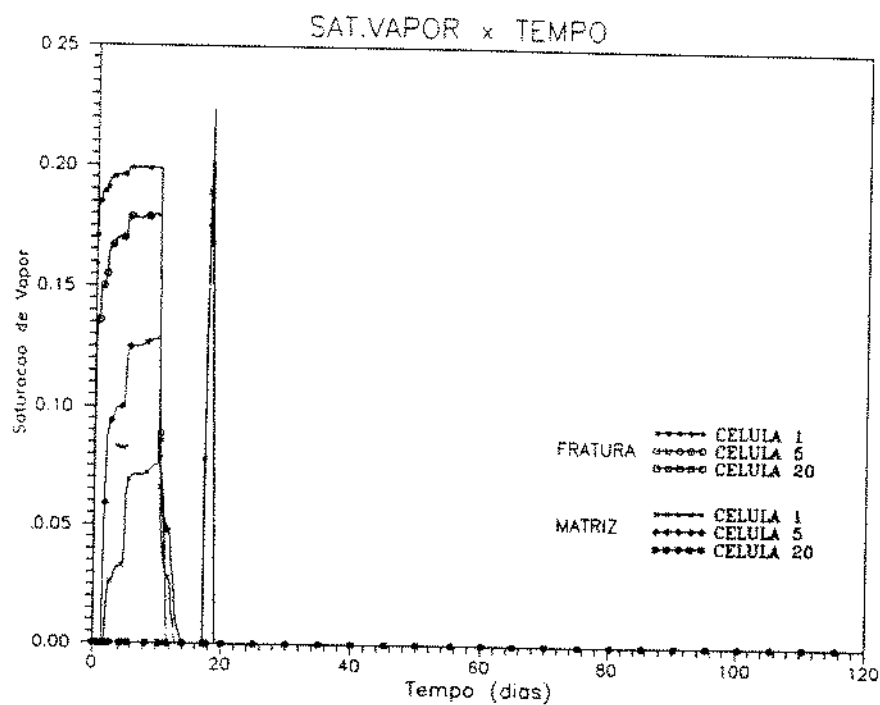


Figura 7.13: Comportamento da Saturação de Vapor

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1 Conclusões

1. Foi desenvolvido um simulador térmico unidimensional trifásico para reservatório heterogêneo com dupla porosidade baseado numa formulação totalmente implícita que otimiza o uso dos recursos computacionais utilizados na solução do problema.
2. São apresentadas equações de escoamento que permitem a presença de gás hidrocarboneto e vapor de água na fase gasosa.
3. O cálculo da perda de calor para formações adjacentes é feito por um método recursivo semi-analítico, publicado na literatura, onde não há necessidade de se armazenar o histórico de temperatura nem do uso de discretização dos estratos adjacentes.
4. O presente trabalho se presta como ferramenta para se otimizar parâmetros de injeção, como por exemplo: tempo de “soaking” e vazão de injeção.

8.2 Recomendações

1. Para a simulação da injeção contínua de vapor é importante a implementação de pelo menos mais uma dimensão.
2. Para um tratamento mais rigoroso e eficiente do fluxo matriz-fratura é necessário um modelo que contemple o regime transiente de fluxo, descrevendo a distribuição de fluidos e de temperatura dentro dos blocos de matriz.
3. O uso de diferenças finitas para simulação de injeção de vapor produz efeitos de dispersão numérica. Sugere-se o uso de técnicas, como as descritas por *Pinto* (1991), que minimizem tais efeitos.
4. O uso de modelos de perdas de carga e de calor nas linhas de injeção e no interior do poço tornaria mais precisa e realista a simulação de processos de injeção de vapor. Sugere-se a modelagem do processo desde o gerador, o que pode ser feito acoplando-se o trabalho de *Moura* (1991) ao modelo aqui descrito.

5. Sugere-se usar ponto de bolha variável com a temperatura e com a pressão. Como exemplo, pode-se usar a relação de *Standing*, referenciada no livro de *Prats*, a qual é dada por:

$$P_b = 18.2 \left[\left(\frac{R_g}{\rho_g} \right)^{0.83} \cdot 10^{(T/1100 - ^\circ API/80.0)} - 1.4 \right]. \quad (8.1)$$

6. Sugere-se também que a permeabilidade relativa e a pressão capilar sejam calculadas considerando-se a dependência com a temperatura.
7. As condições adotadas no modelo, que permitem a variação da viscosidade do óleo com a pressão e a temperatura, podem ser examinadas comparando-se seus resultados aos de um simulador PVT.

Bibliografia

- [1] Andrade, P.J.V., Lima, H. e Costa, F. M.A.: " Situação atual e perspectivas futuras da injeção de vapor ". *Curso de métodos especiais de recuperação/injeção de vapor, Salvador, Bahia* (1985).
- [2] Aziz, K. and Settari, A.: " Petroleum Reservoir Simulation ". Essex: Applied Science Publisher LTD. (1979)
- [3] Barenblatt, G.I. , Zheltov, I.P. and Kochina, I.N.: " Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks ". *Soviet Applied Mathematics and Mechanics* (1960).
- [4] Blaskovich, F.T., Cain, G.M., Sonier, F., Waldren, D. and Webb, S.J.: "A multicomponent isothermal system for efficient reservoir simulation ". *Presented at the SPE Middle East oil technical conference held in Manama, Bahran*, (march 1983)
- [5] Boberg, T.C. and Lantz, R.B.: "Calculation of Production Rate of a Thermally Stimulated Well ". *Journal of Petr. Tech.*, (december 1966) 1613-1623.
- [6] Braden, W. B.: " A Viscosity-Temperature Correlation at Atmospheric Pressure for Gas-Free Oil ". *Journal of Petroleum Technology - JPT* (november 1966) 1487-1490.
- [7] Briggs, P.J.: " A simulator for the recovery of heavy oil from naturally fractured reservoirs using cyclic steam injection ". *Presented at the SPE Middle East oil technical conference held in Manama, Bahran*, (March 1989).
- [8] Burger, J., Sourieau, P. and Combarous: " Thermal method of oil recovery ". Paris: Editions Technip (1985).

- [9] Chen, W.H. , Wasserman, M.L. and Fitzmorris, R.E. " A Thermal Simulator for Naturally Fractured Reservoirs ". *Presented at the ninth SPE symposium on reservoir simulation held in San Antonio, Texas* (february 1987) 169-180
- [10] Chierici, G.L., Canne, A.D. and Properzi, O.: " Steam Drive in a Fractured Carbonate: The Vallecupa, Italy, Pilot Plant ". *Presented at the 3rd AGIP SPA et al. Improved Oil Recovery Europe. Meeting held in Rome, Italy* (1985) vol 1. 391-404.
- [11] Coats, K.H.: " In-situ combustion model ". *Society of Petroleum Engineering Journal - SPEJ* (December 1980).
- [12] Dranchuk, P.M., Purvis, R.A., Robinson, D.B.: "Computer Calculation of Natural Gas Compressibility Factors Using the Standing and Katz Correlations ". *Institute of Petroleum Technology - IP-74-008* (1974).
- [13] Dreher, K.D. and Kenyon, D.E.: " Heat Flow During Steam Injection Into a Fractured Carbonate Reservoir ". *SPE/DOE Fifth Symposium on EOR held in Tulsa, OK.* (April 1986)
- [14] Dutra Jr., T.V.: " Desenvolvimento de um simulador numérico para a injeção cíclica de vapor ". *Tese de Mestrado - UFOP, Ouro Preto, MG* . (abril 1987)
- [15] Fayers, F.J., Matthews, J.D.: " Evaluation of Normalized Stone's Methods for Estimating Three-Phase Relative Permeabilities ". *Soc. of Petr. Eng. Journal* (april 1984) 224-232.
- [16] Gilman, J.R. and Kazemi, H.: " Improvement in simulation of naturally fractured reservoirs ". *Soc. Pet. Eng. J.* (august 1983).
- [17] Gilman, J.R., Kazemi, H.: " Improved Calculations for Viscous and Gravity Displacement in Matrix Blocks in Dual-Porosity Simulators ". *Journal of Petroleum Technology* (January 1988).
- [18] Golf-Racht, T.D. Van.: " Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering ". *Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company* (1982).

- [19] Gottfried, B.S.: " A Mathematical Model of Thermal Oil Recovery in Linear Systems ". *Soc. Pet. Eng. J.* (september 1965) 196-210.
- [20] Horle, T. , Firoozabadi, A. and Ishimoto, K.: " Laboratory Studies of Capillary Interaction in Fracture/Matrix Systems ". *SPE Reservoir Engineering* (august 1990).
- [21] Kazemi, H. and Gilman, J.R.: " Analytical and Numerical Solution of Oil Recovery From Fractured Reservoirs Using Empirical Transfer Functions ". *Presented at the 64th Annual Technical Conference and Exhibition of the SPE held in San Antonio, Texas* (october 1989).
- [22] Kazemi, H., Merrill, L.S.Jr., Portfield, K.P. and Zeman, P.R.: " Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoir ". *Soc. Pet. Eng. J.* (december 1976)
- [23] Kossatz, H.: " Equações Diferenciais Parciais ". *Curso de Equações Diferenciais Parciais. CAMENGE - Petrobrás. Rio* (1989)
- [24] Lima, H. e Andrade, P.J.V.: " A Importância dos Métodos de Recuperação ". *Brasil Mineral* (março 1987).
- [25] Lee, A.L., Gonzales, M.H. and Eakin, B.E.: " The Viscosity of Natural Gases ". *J. Pet. Tech.* (1966) 997-1000.
- [26] Lee, B.Y.Q. and Tan, T.B.S.: " Application of a Multiple Porosity/Permeability Simulator in Fractured Reservoir Simulation ". *Presented at the ninth SPE symposium on reservoir simulation held in San Antonio, Texas* (february 1987) 181-192
- [27] Leung, W.: " A New Pseudo Steady-State Aquifer Model: Part1- Single Porosity Formations ". *Presented at the seventh SPE Symposium on Reservoir Simulation held in San Francisco, CA.* (november 1983)
- [28] Moura, L.S.S.: " Estudo Numérico da Transferência de Calor e do Gradiente de Pressão na Injeção de Vapor Saturado em Poços de Petróleo " *Tese de Mestrado - Unicamp, Campinas, SP* (novembro 1991).

- [29] Pinto, A.C.C.: "Esquemas de Alta Resolução para Controle da Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios". *Tese de Mestrado - Unicamp, Campinas, SP* (novembro 1991).
- ..
- [30] Prats, M.: "Thermal Recovery". *Monograph, vol 7, SPE of AIME* (1982).
- [31] Pruess, K. and Narasimhan, T.N.: "A Practical Method for Modeling Fluid and Heat Flow in Fractured Porous Media". *Soc. Pet. Eng. J.* (February 1985) 14-26.
- [32] Pruess, K. and Wu, Y.: "A New Semianalytical Method for Numerical Simulation of Fluid and Heat Flow in Fractured Reservoir". *Soc. Pet. Eng. J.* (1989)
- [33] Reis, J.C.: "Oil Recovery Mechanisms in Fractured Reservoirs During Steam Injection". *Presented at seventh SPE/DOE symposium on enhanced oil recovery held in Tulsa, Oklahoma* (april 1990) 313-320.
- [34] Rodríguez de la Garza, F.: "Un Simulador Numerico del Flujo Multifasico Hacia Pozos Naturalmente Fracturados". *Ingenieria Petrolera, México* (Junio de 1987).
- [35] Rossen, R.H. and Shen, E.I.C.: "Simulation of Gas/Oil Drainage and Water/Oil Imbibition in Naturally Fractured Reservoirs". *SPE Res. Eng.* (november 1989).
- [36] Sahuquet, B.C. and Ferrier, J.J.: "Steam-Drive Pilot in a Fractured Carbonated Reservoir : Lacq Supérieur Field". *Journal of Petroleum Technology - JPT* (april 1982) 873-880.
- [37] Saidi, A.M.: "Simulation of naturally fractured reservoirs". *Presented at the Seventh SPE Symposium on Reservoir Simulation held in San Francisco, CA.* (november 1983).
- [38] Sammon, P.H. and Rubin, Barry: "Practical Control of Timestep Selection in Thermal Simulation". *Presented at the seventh SPE Symposium on Reservoir Simulation held in San Francisco, CA.* (november 1983)
- [39] Sammon, P.H.: "An Analysis of Upstream Differencing". *SPE Res. Eng.* (august 1988).

- [40] Souza, A.L.S., Pedrosa, O.A. e Marchesin, D.: " A new approach for calculating formation heat losses ". *Apresentado no congresso brasileiro do petróleo, Rio de Janeiro* (1986).
- [41] Spiegel, M.R.: " Manual de Fórmulas Matemáticas ". *Coleção Schaum, Editora McGRAW-Hill do Brasil* (1973).
- [42] Spillette, A.G.: " Heat Transfer During Hot Fluid Injection Into an Oil Reservoir ". *Journal of Canadian Petroleum Tech.-JCPT* (december 1965) 213-218.
- [43] Thomas, L.K. , Dixon, T.N. and Pierson, R.G.: " Fractured Reservoir Simulation ". *Soc. Pet. Eng. J.* (february 1983)
- [44] Thomas, L.K., Hankinson, R.W., Phillips, K.A.: " Determination of Acoustic Velocities for Natural Gas ". *Journal of Pet. Tech.* (1970) 889-895.
- [45] Vinsome, P.K.W. and Westerveld, J.: " A Simple Method for Predicting Cap and Base Rock Heat Losses in Thermal Simulators ". *Journal of Canadian Petroleum Tech.* (1980) 87-90
- [46] Warren, J.E. and Root, P.J.: " The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs ". *Soc. Pet. Eng. J.* (september 1963).
- [47] Watson, A.Ted , Gatens III, J.M. , Lee, W.J. and Rahim, Z.: " An Analytical Model for History Matching Naturally Fractured Reservoir Production Data ". *SPE Res. Eng.* (August 1990)
- [48] White, P.D. and Moss, J.T.: " Thermal recovery methods ". Tulsa: Pennwell Publishing Company (1983).
- [49] Wu, Y., Pruess, K. : " A Multiple-Porosity Method for Simulation of Naturally Fractured Petroleum Reservoirs ". *SPE Res. Eng.* (February 1990)

APÊNDICE A

Equações de Balanço Modificadas

As equações de balanço, após a substituição das equações complementares, assumem as formas:

Fraturas:

$$\nabla \cdot \{ \lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) \} + \lambda_{omf} (P_{om} - P_o) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o (1 - S_g - S_w)], \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{ R_{so} \lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_g (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z) \} + R_{so} \lambda_{omf} (P_{om} - P_o) + \\ & \lambda_{gmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + R_{so} q_o + q_g = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o (1 - S_g - S_w) + b_g S_g] \}, \quad (A.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{ R_{wg} \lambda_g (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_w (\nabla P_o - \nabla P_{cwo} - \gamma_w \nabla D_z) \} + \\ & \lambda_{wmf} (P_{wm} - P_w - P_{cwom} + P_{cwo}) + R_{wg} \lambda_{gmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + \end{aligned}$$

$$R_{wg}q_g + q_w = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{wg}b_gS_g + b_wS_w] \}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{ \lambda_{ho} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_{hg} (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_{hw} (\nabla P_o - \nabla P_{cwo} - \gamma_w \nabla D_z) \} + \\ & \nabla \cdot (\lambda_{Tt} \nabla T) + \lambda_{hgmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + \lambda_{hwmf} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo}) + \\ & \lambda_{homf} (P_{om} - P_o) + \lambda_{Tmf} (T_m - T) + E_{inj} = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [\rho_o U_o (1 - S_g - S_w) + \rho_g U_g S_g + \rho_w U_w S_w] + (\phi_f - \phi) M_r (T - T_{ini}) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Blocos de Matriz:

$$-\lambda_{omf} (P_{om} - P_o) = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o (1 - S_g - S_w)]_m, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{gmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) - R_{so} \lambda_{omf} (P_{om} - P_o) = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o (1 - S_g - S_w) + b_g S_g] \}_m, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{wmf} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo}) - R_{wg} \lambda_{gmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{wg} b_g S_g + b_w S_w] \}_m, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{hgmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) - \lambda_{hwmf} (P_{om} - P_o - P_{cwom} + P_{cwo}) - \\ & \lambda_{homf} (P_{om} - P_o) - \lambda_{Tmf} (T_m - T) = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi_m [\rho_o U_o (1 - S_g - S_w) + \rho_g U_g S_g + \rho_w U_w S_w] + (1 - \phi_f - \phi_m) M_r (T - T_{ini}) \}_m. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Devido a dificuldade de se trabalhar com R_{wg} da forma como foi definida anteriormente, será feita neste ponto uma substituição de variáveis. A incógnita primária deixará de ser R_{wg} e passará a ser S_{vap} , saturação do vapor, onde $S_{vap} = S_{wg} = S_g - S_{gg}$.

A fração mássica de vapor na fase gasosa, fica então:

$$C_{wg} = \frac{m_{wg}}{m_{wg} + m_{gg}} = \frac{\rho_{wg} V_{wg}}{\rho_{wg} V_{wg} + \rho_{gg} V_{gg}} = \frac{S_{wg}}{S_{wg} + S_{gg} \frac{\rho_{gg}}{\rho_{wg}}},$$

e como $\rho_{gg} = b_{gg} \rho_{gcs}$, vem:

$$C_{wg} = \frac{S_{wg}}{S_{wg} + S_{gg} \rho_{gcs} \frac{b_{gg}}{\rho_{wg}}},$$

e portanto:

$$C_{wg} = \frac{S_{vap}}{S_{vap} + (S_g - S_{vap}) \rho_{gcs} \frac{b_{gg}}{\rho_{wg}}}.$$

As dependências de b_g e ρ_g em relação a C_{wg} devem ser utilizadas, pois $b_g = \frac{m_{gg}}{m_{gg} + m_{wg}} \cdot \frac{\rho_g}{\rho_{gcs}}$ e sabendo-se que: $V_g = V_{gg} + V_{wg} = \frac{m_{gg}}{\rho_{gg}} + \frac{m_{wg}}{\rho_{wg}} = \frac{m_g}{\rho_g} = \frac{m_{gg} + m_{wg}}{\rho_g}$, então temos:

$$\begin{aligned} b_g &= \frac{1}{\frac{\rho_{gcs}}{\rho_{gg}} + \frac{m_{wg} \rho_{gcs}}{m_{gg} \rho_{wg}}}, \text{ ou ainda } \frac{m_{wg}}{m_{gg}} = \frac{C_{wg}}{1 - C_{wg}}, \\ b_g &= \frac{(1 - C_{wg})}{(1 - C_{wg}) B_{gg} + C_{wg} \frac{\rho_{gcs}}{\rho_{wg}}}, \\ \rho_g &= \frac{\rho_{gcs}}{(1 - C_{wg}) B_{gg} + C_{wg} \frac{\rho_{gcs}}{\rho_{wg}}}, \\ b_g &= (1 - C_{wg}) \frac{\rho_g}{\rho_{gcs}} = \left(1 - \frac{S_v}{S_g}\right) b_{gg}. \end{aligned}$$

As seguintes relações também serão utilizadas:

$$\begin{aligned} b_g S_g &= \frac{(1 - C_{wg}) S_g}{(1 - C_{wg}) B_{gg} + C_{wg} \frac{\rho_{gcs}}{\rho_{wg}}} = (S_g - S_v) b_{gg}, \\ R_{wg} b_g S_g &= C_{wg} \rho_g \frac{S_g}{\rho_{wcs}} = \frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v, \\ \rho_g S_g U_g &= \rho_{gg} S_{gg} U_{gg} + \rho_{wg} S_v U_v = \rho_{gcs} b_{gg} (S_g - S_v) U_{gg} + \rho_{wg} S_v U_v, \\ R_{wg} \lambda_g &= \frac{C_{wg} \rho_g}{\rho_{wcs}} \frac{k_{rg}}{\mu_g} = \frac{\rho_{wg} k_{rg}}{\rho_{wcs} \mu_g} \frac{S_v}{S_g}. \end{aligned}$$

Introduzindo-se estas relações, as equações de balanço se transformam em:

Fraturas:

$$\nabla \cdot \{\lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z)\} + \lambda_{omf}(P_{om} - P_o) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o(1 - S_g - S_w)], \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{R_{so}\lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_g (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z)\} + R_{so}\lambda_{omf}(P_{om} - P_o) + \\ \lambda_{gmf}(P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + R_{so}q_o + q_g = \frac{\partial}{\partial t} \{\phi [R_{so}b_o(1 - S_g - S_w) + b_{gg}(S_g - S_v)]\}, \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{R_{wg}\lambda_g (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_w (\nabla P_o - \nabla P_{cwo} - \gamma_w \nabla D_z)\} + \\ \lambda_{wmf}(P_{wm} - P_w - P_{cworm} + P_{cwo}) + R_{wg}\lambda_{gmf}(P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + \\ R_{wg}q_g + q_w = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \left[\frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v + b_w S_w \right] \right\}, \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{\lambda_{ho} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D_z) + \lambda_{hg} (\nabla P_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla D_z) + \lambda_{hw} (\nabla P_o - \nabla P_{cwo} - \gamma_w \nabla D_z)\} + \\ \nabla \cdot (\lambda_{Ti} \nabla T) + \lambda_{hgmf}(P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) + \lambda_{hwmf}(P_{om} - P_o - P_{cworm} + P_{cwo}) + \\ \lambda_{homf}(P_{om} - P_o) + \lambda_{Tmf}(T_m - T) + E_{inj} = \frac{\partial}{\partial t} \{\phi [\rho_o U_o(1 - S_g - S_w) + \\ \rho_{wg} U_{wg} S_v + (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg} + \rho_w U_w S_w] + (\phi_f - \phi) M_r (T - T_{ini})\}, \end{aligned} \quad (A.12)$$

Blocos de Matriz:

$$- \lambda_{omf}(P_{om} - P_o) = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o(1 - S_g - S_w)]_m, \quad (A.13)$$

$$- \lambda_{gmf}(P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) - R_{so}\lambda_{omf}(P_{om} - P_o) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi [R_{so} b_o (1 - S_g - S_w) + b_{gg} (S_g - S_v)] \}_m, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{wmf} (P_{om} - P_o - P_{cwo} + P_{cwo}) - R_{wg} \lambda_{gmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \left[\frac{\rho_{wg}}{\rho_{wcs}} S_v + b_w S_w \right] \right\}_m, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_{hgmf} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo}) - \lambda_{hwmf} (P_{om} - P_o - P_{cwo} + P_{cwo}) - \\ & \lambda_{homf} (P_{om} - P_o) - \lambda_{Tmf} (T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi_m [\rho_o U_o (1 - S_g - S_w) + \\ & \rho_{wg} U_{wg} S_v + (S_g - S_v) b_{gg} \rho_{gcs} U_{gg} + \rho_w U_w S_w] + (1 - \phi_f - \phi_m) M_r (T - T_{ini}) \}_m. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

APÊNDICE B

Discretização Utilizada

A discretização dos termos espaciais será feita pelo esquema central de diferenças finitas. Como exemplo, considere $u_{(x,t)}$ uma função genérica de x e t , tal que:

$$\left(\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i} \cong \frac{u_{x_{i+1/2}} - u_{x_{i-1/2}}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} \quad (\text{B.1})$$

e :

$$\left(\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=x_i} \cong \frac{u_{x_{i+1}} - 2u_{x_i} + u_{x_{i-1}}}{\Delta x^2} \quad (\text{B.2})$$

Os termos temporais serão discretizados por diferenças finitas do tipo regressiva, tendo como exemplo:

$$\left(\frac{\partial u_{(x,t)}}{\partial t} \right)^{(n+1)} \cong \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{t^{(n+1)} - t^{(n)}} = \frac{\Delta_t u}{\Delta t}. \quad (\text{B.3})$$

Os operadores apresentados tem o seguinte significado:

$$\Delta u_{x_i} = u_{x_{i+1/2}} - u_{x_{i-1/2}},$$

e:

$$\Delta_t u^{(n+1)} = u^{(n+1)} - u^{(n)}.$$

A equação diferencial que descreve o fluxo de óleo na fratura em um sistema unidimensional possui a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial P_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D_z}{\partial x} \right) \right] + \lambda_{omf} (P_{om} - P_o) + q_o = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_o S_o). \quad (B.4)$$

Discretizando-se tal equação para uma célula genérica, i , temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \left(\frac{\lambda_o}{\Delta x} \right)_{i+1/2} [\Delta P_o - \gamma_o \Delta D]_{i+1/2} - \left(\frac{\lambda_o}{\Delta x} \right)_{i-1/2} [\Delta P_o - \gamma_o \Delta D]_{i-1/2} \right\}^{n+1} \\ & + \lambda_{omf_i}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i + q_{o_i}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \{ [\phi b_o S_o]_i^{n+1} - [\phi b_o S_o]_i^n \}. \end{aligned} \quad (B.5)$$

Multiplicando-se toda a equação (B.4) por V_i , volume da célula i , onde $V_i = A_i \Delta x_i$, vem que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{A \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i+1/2} (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)_{i+1/2} - \left(\frac{A \lambda_o}{\Delta x} \right)_{i-1/2} (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right\}^{n+1} + \\ & V_i \lambda_{omf_i}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + q_{o_i}^{n+1} = \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi b_o S_o]_i^{n+1} - [\phi b_o S_o]_i^n \}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

Definindo-se:

$T_{o, \pm 1/2} = (A \lambda_o / \Delta x)_{\pm 1/2}$ como a transmissibilidade da fase oleosa,

$T_{omf_i} = V_i \lambda_{omf_i}$ como a transmissibilidade da fase oleosa para fluxo matriz-fratura e

$\Delta \Phi_{o, \pm 1/2} = (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)_{\pm 1/2}$ como a diferença de potencial do óleo, temos que:

$$\begin{aligned} & T_{o, i+1/2}^{n+1} \Delta \Phi_{o, i+1/2}^{n+1} - T_{o, i-1/2}^{n+1} \Delta \Phi_{o, i-1/2}^{n+1} + T_{omf_i}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + Q_{o_i}^{n+1} = \\ & \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi b_o S_o]_i^{n+1} - [\phi b_o S_o]_i^n \}. \end{aligned} \quad (B.7)$$

ou em forma reduzida,

$$\Delta (T_o \Delta \Phi_o)_i^{n+1} + T_{omf,i}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} + Q_{o,i}^{n+1} = \frac{V_i}{\Delta t} \{ [\phi b_o S_o]_i^{n+1} - [\phi b_o S_o]_i^n \}. \quad (B.8)$$

Para o caso do fluxo radial, pode-se mostrar que a equação discretizada é semelhante à equação (B.8), apenas mudando as formas de cálculo do volume " V_i " e da transmissibilidade. Para este caso, temos que $V_i = \pi h (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)$ e $T_{o,i\pm 1/2} = 2\pi h \lambda_o r_{i\pm 1/2} / \Delta r_{i\pm 1/2}$

O mesmo processo de discretização pode ser aplicado às outras equações de balanço.

As transmissibilidades ficam assim definidas:

$$\begin{aligned} T_o &= cb_o \frac{k k_{ro}}{\mu_o}, \\ T_g &= c \left(1 - \frac{S_v}{S_g} \right) b_{gg} \frac{k k_{rg}}{\mu_g}, \\ T_w &= cb_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w}, \\ T_{wg} &= c \left(\frac{S_v}{S_g} \right) \frac{\rho_{wg} k k_{rg}}{\rho_{wg} \mu_g}, \\ T_{ho} &= (\rho_{ocs} + R_{so} \rho_{gcs}) H_o T_o, \\ T_{hg} &= c \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \cdot \left\{ \rho_{wg} \frac{S_v}{S_g} H_{wg} + \left(1 - \frac{S_v}{S_g} \right) b_{gg} \rho_{gcs} H_{gg} \right\}, \\ T_{hw} &= \rho_{wcs} H_w T_w, \\ T_T &= A \lambda_T / \Delta x. \end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende da geometria utilizada.

APÊNDICE C

Acoplamento das Equações

A técnica de acoplamento das equações reduz fortemente a quantidade de memória e tempo de computação requeridos na simulação de reservatórios naturalmente fraturados, tornando-os ligeiramente maiores do que os necessários para simulação de reservatórios não fraturados (Rodríguez de la Garza, 1987).

A equação para o problema unidimensional, com um número I de células, possui a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}}_1 & \overline{\overline{B}}_1 & & & \\ \overline{\overline{C}}_2 & \overline{\overline{A}}_2 & \overline{\overline{B}}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & \overline{\overline{C}}_{I-1} & \overline{\overline{A}}_{I-1} & \overline{\overline{B}}_{I-1} \\ & & & \overline{\overline{C}}_I & \overline{\overline{A}}_I \end{bmatrix}^{\nu} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\delta X}_1 \\ \vdots \\ \overline{\delta X}_I \end{bmatrix}^{\nu+1} = - \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \vdots \\ \overline{F}_I \end{bmatrix}^{\nu},$$

onde:

$$\begin{aligned} \overline{\delta X}_i &= (\delta P_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta T, \delta P_{om}, \delta S_{gm}, \delta S_{wm}, \delta T_m)_i^T, \\ \overline{F}_i &= (F_o, F_g, F_w, F_T, F_{om}, F_{gm}, F_{wm}, F_{Tm})_i^T, \end{aligned}$$

As equações dos blocos de matriz podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial T_{m_i}} \end{bmatrix}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_{om_i} \\ \delta S_{gm_i} \\ \delta S_{wm_i} \\ \delta T_{m_i} \end{bmatrix}^{(\nu+1)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{Tm_i}}{\partial T_i} \end{bmatrix}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_{oi} \\ \delta S_{gi} \\ \delta S_{wi} \\ \delta T_i \end{bmatrix}^{(\nu+1)} = - \begin{bmatrix} F_{oi} \\ F_{gi} \\ F_{wi} \\ F_{Ti} \end{bmatrix}^{(\nu)},$$

ou ainda:

$$\bar{J}_{mm_i}^{(\nu)} \delta \bar{X}_{m_i}^{(\nu+1)} + \bar{J}_{mfi}^{(\nu)} \delta \bar{X}_i^{(\nu+1)} = -\bar{F}_{m_i}^{(\nu)}.$$

Uma vez obtido $(\bar{J}_{mm_i}^{(\nu)})^{-1}$, podemos escrever:

$$\delta \bar{X}_{m_i}^{(\nu+1)} = - \left(\bar{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \left(\bar{J}_{mfi}^{(\nu)} \delta \bar{X}_i^{(\nu+1)} + \bar{F}_{m_i}^{(\nu)} \right).$$

Definindo-se: $\bar{\alpha}_i = - \left(\bar{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \left(\bar{J}_{mfi}^{(\nu)} \right)$ e $\bar{\beta}_i = - \left(\bar{J}_{mm_i}^{(\nu)} \right)^{-1} \bar{F}_{m_i}^{(\nu)}$, o sistema se reduz à:

$$\begin{bmatrix} \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \\ \delta S_{wm} \\ \delta T_m \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)} = \begin{bmatrix} \alpha_{oo} & \alpha_{og} & \alpha_{ow} & \alpha_{oT} \\ \alpha_{go} & \alpha_{gg} & \alpha_{gw} & \alpha_{gT} \\ \alpha_{wo} & \alpha_{wg} & \alpha_{ww} & \alpha_{wT} \\ \alpha_{To} & \alpha_{Tg} & \alpha_{Tw} & \alpha_{TT} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \\ \delta T \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)} + \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_g \\ \beta_w \\ \beta_T \end{bmatrix}_i^{(\nu)},$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{oo} & \alpha_{og} & \alpha_{ow} & \alpha_{ot} \\ \alpha_{go} & \alpha_{gg} & \alpha_{gw} & \alpha_{gt} \\ \alpha_{wo} & \alpha_{wg} & \alpha_{ww} & \alpha_{wt} \\ \alpha_{to} & \alpha_{tg} & \alpha_{tw} & \alpha_{tt} \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial T_{m_i}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial T_i} \\ \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{wi}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial T_i} \end{bmatrix}$$

e:

$$\begin{bmatrix} \beta_{oi} \\ \beta_{gi} \\ \beta_{wi} \\ \beta_{ti} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{om_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{wm_i}}{\partial T_{m_i}} \\ \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial P_{om_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{gm_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial S_{wm_i}} & \frac{\partial F_{tm_i}}{\partial T_{m_i}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{om_i} \\ F_{gm_i} \\ F_{wm_i} \\ F_{tm_i} \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que:

$$\delta P_{om_i}^{(\nu+1)} = \alpha_{oo_i}^{(\nu)} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{og_i}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ow_i}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ot_i}^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} + \beta_{oi}^{(\nu)}, \quad (C.1)$$

$$\delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} = \alpha_{go_i}^{(\nu)} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{gg_i}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{gw_i}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \alpha_{gt_i}^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} + \beta_{gi}^{(\nu)}, \quad (C.2)$$

$$\delta S_{wm_i}^{(\nu+1)} = \alpha_{wo_i}^{(\nu)} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wg_i}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ww_i}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wt_i}^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} + \beta_{wi}^{(\nu)}, \quad (C.3)$$

$$\delta T_{m_i}^{(\nu+1)} = \alpha_{To_i}^{(\nu)} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{Tg_i}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{Tw_i}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \alpha_{TT_i}^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} + \beta_{Ti}^{(\nu)}. \quad (C.4)$$

Substituindo-se estas equações nas equações da fratura, teremos as equações finais acopladas:

$$\sum_{k=i-1, i+1} \left\{ \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial P_{ok}} \delta P_{ok}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gk}} \delta S_{gk}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wk}} \delta S_{wk}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial T_k} \delta T_k^{(\nu+1)} \right\} +$$

$$\left[\frac{\partial F_{pi}}{\partial P_{oi}} + \Theta_{poi} \right]^{(\nu)} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gi}} + \Theta_{sgi} \right]^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wi}} + \Theta_{swi} \right]^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} +$$

$$\left[\frac{\partial F_{pi}}{\partial T_i} + \Theta_{Ti} \right]^{(\nu)} \delta T_i^{(\nu+1)} = - [F_{pi} + \Psi_{pi}]^{(\nu)}, \quad (C.5)$$

onde:

$$\begin{aligned}\Theta_{kl_i} &= \frac{\partial F_{k_i}}{\partial P_{om_i}} \alpha_{lo_i} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial S_{gm_i}} \alpha_{lg_i} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial S_{wm_i}} \alpha_{lw_i} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial T_{m_i}} \alpha_{lT_i}, \\ \Psi_{k_i} &= \frac{\partial F_{k_i}}{\partial P_{om_i}} \beta_{oi} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial S_{gm_i}} \beta_{gi} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial S_{wm_i}} \beta_{wi} + \frac{\partial F_{k_i}}{\partial T_{m_i}} \beta_{Ti},\end{aligned}$$

para $k = o, g, w$ e T e $l = o, g, w$ e T .