

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
Como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SUBDOMÍNIOS
NA SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS
NATURALMENTE FRATURADOS

*Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida pela
Enga. Gislene Aparecida da Silva e aprovada pela comissão
Julgadora em 17/12/91.*

[Assinatura]
Prof. Dr. Antonio Cláudio de França Corrêa

Autora : Gislene Aparecida da Silva
Orientador : Antonio Cláudio de F. Corrêa
Co-Orientador : Fernando Rodríguez de la Garza

65/91

dezembro de 1991

9204150-81

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

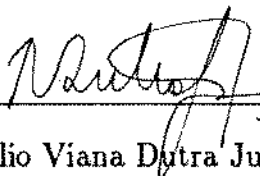
A dissertação "Aplicação do Método de Subdomínios na Simulação de Reservatórios Naturalmente Fraturados", elaborada por Gislene Aparecida da Silva e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Sub-Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 17 de dezembro de 1991.

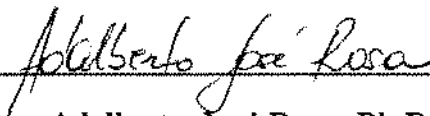
Banca Examinadora



Antonio Cláudio de França Corrêa, Ph.D.



Tarcílio Viana Dutra Junior, Ph.D.



Adalberto José Rosa, Ph.D

Agradecimentos

Aos colegas da UNICAMP e da PETROBRÁS pelo companheirismo e solidariedade durante todo o período do curso.

Aos professores do curso pelo empenho e dedicação.

Aos funcionários do CEPETRO por terem sido sempre prestativos e simpáticos no auxílio dos nossos problemas.

À minha família pelo carinho e incentivo com que sempre me acompanhou.

À PETROBRÁS pelo apoio técnico e financeiro para participação neste curso de mestrado .

Resumo

Na aplicação do método de subdomínios para simulação de reservatórios naturalmente fraturados, um bloco representativo de matriz é discretizado com o objetivo de conseguir uma resolução dos gradientes de pressão e saturação dentro do bloco de matriz.

O simulador desenvolvido é unidimensional, bifásico, óleo-gás e totalmente implícito. As formulações convencional e de subdomínios para reservatórios naturalmente fraturados são consideradas. Na formulação de subdomínios são usadas as opções de fluxo disperso e de fluxo segregado nas fraturas. Para todos os casos são apresentados resultados de simulações de depleção primária.

As soluções geradas através das diversas opções de modelagem da interação matriz-fratura são analisadas comparativamente e é discutido o efeito que teria o uso de modelos de interação simplificados na previsão do comportamento de reservatórios.

Abstract

In applying the subdomain method for simulation of naturally fractured reservoirs, a representative matrix block is discretized in order to obtain pressure and saturation distribution in the matrix block.

A two-phase, oil-gas, one-dimensional, fully implicit simulator is presented, which uses the conventional and the subdomain formulation for naturally fractured reservoirs. In the subdomain formulation, disperse and segregated fracture fluid options are used. Simulation of primary depletion are presented for all cases.

The solutions obtained through the use of several options for modelling the matrix-fracture interaction are analysed in a comparative way. The effect of the simplified interaction models on the the prediction of reservoirs performance is discussed.

Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	4
3 Equações de Escoamento no Meio Poroso Fraturado	11
3.1 Equações para o Modelo Convencional	11
3.2 Equações para os Modelos com Subdomínios	14
4 Solução Numérica	17
4.1 Equações em Diferenças	17
4.1.1 Formulação Convencional	17
4.1.2 Formulação com Subdomínios	20
4.1.3 Opção de Fluido Disperso nas Fraturas	24
4.1.4 Opção de Fluidos Segregados nas Fraturas	24
4.2 Linearização das Equações – Método de Newton-Raphson	27
4.2.1 Formulação Convencional	27
4.2.2 Formulação com Subdomínios	36
5 Validação	45
6 Comparação dos Modelos – Convencional e de Subdomínios – Resultados	49

6.1	Formulação Convencional versus Formulação com Subdomínios	49
6.2	Comportamento do Reservatório Considerando as Diversas Formulações . .	64
6.3	Análise Geral	75
7	Conclusões e Recomendações	77
	Apêndice A: Funções de Resíduos – Método Convencional	85
	Apêndice B: Funções de Resíduos – Formulação com Subdomínios	87
	Apêndice C: Matriz Jacobiana	90
	Apêndice D: Termo de Transferência Matriz/Fratura	101
	Apêndice E: Derivadas do Termo de Transferência Matriz/Fratura	105
	Apêndice F: O Fator de Forma (σ)	116
	Apêndice G: Solução de δX_m no subdomínio em termos de δX_f	122

Lista de Figuras

2.1	Idealização de Warren e Root [28] para reservatórios naturalmente fraturados	5
2.2	Discretização esquemática de blocos de matriz: a) MINC, b) convencional, c) malha refinada. Extraído de Wu e Pruess [29]	9
3.1	Discretização do bloco de matriz, de acordo com Gilman [12]	15
4.1	Idealização do Fluxo Gravitacional, [13]	26
5.1	P_{wf} vs. Tempo	47
5.2	P_{wf} vs. Tempo	48
6.1	Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo	54
6.2	Vazão de Óleo vs. Tempo	55
6.3	RGO vs. Tempo	55
6.4	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	56
6.5	Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo	56
6.6	Vazão de óleo vs. Tempo	57
6.7	RGO vs. Tempo	57
6.8	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	58
6.9	Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo	59
6.10	Vazão de Óleo vs. Tempo	60
6.11	RGO vs. Tempo	60
6.12	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	61

6.13	Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo	61
6.14	Vazão de Óleo vs. Tempo	62
6.15	RGO vs. Tempo	62
6.16	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	63
6.17	Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo	65
6.18	Vazão de Óleo vs. Tempo	66
6.19	RGO vs. Tempo	66
6.20	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	67
6.21	Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo	67
6.22	Vazão de Óleo vs. Tempo	68
6.23	RGO vs. Tempo	68
6.24	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	69
6.25	Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo	70
6.26	Vazão de Óleo vs Tempo	71
6.27	RGO vs. Tempo	71
6.28	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	72
6.29	Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo	72
6.30	Vazão de Óleo vs. Tempo	73
6.31	RGO vs. Tempo	73
6.32	Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo	74
7.1	Transferência Matriz-Fratura para a Formulação Convencional	116
7.2	Transferência Matriz-Fratura para Formulação com Subdomínios	119

Lista de Tabelas

5.1	Dados utilizados nas simulações para validação	46
6.1	Dados Básicos	50
6.2	Propriedades PVT do óleo	51
6.3	Propriedades PVT do Gás	51
6.4	Dados de Permeabilidade Relativa e Pressão Capilar da Matriz	52
6.5	Dados de Permeabilidade Relativa e Pressão Capilar das Fraturas	52
6.6	Dados Geométricos para Comparação das Formulações Convencional e de Subdomínios	53
6.7	Caso 1 - Dados Geométricos	64
6.8	Caso 2 - Dados Geométricos	65

Capítulo 1

Introdução

Desde que o conceito de dupla porosidade foi introduzido para descrever o comportamento de reservatórios naturalmente fraturados, muita pesquisa sobre o assunto tem sido realizada. Este conceito considera que o meio poroso fraturado é representado por dois meios porosos distintos, denominados de rede de fraturas e blocos de rocha matriz. A rede de fraturas é contínua através de todo o reservatório e é o principal conduto do fluxo dos fluidos. Os blocos de rocha matriz são considerados descontínuos e consistem no espaço poroso responsável pela maior parte do armazenamento dos fluidos, funcionando como fonte ou sumidouro para a rede de fraturas. Os dois meios são acoplados através de uma função de transferência.

No modelo de dupla porosidade, introduzem-se dois valores para a pressão e para a saturação em cada ponto do reservatório. Um valor para a pressão e para a saturação médias do fluido, num dado ponto da rocha matriz, e outro para a pressão média e a saturação média do fluido nas fraturas em torno deste ponto.

O modelo de dupla porosidade foi introduzido por Barenblatt *et alii* (1960) [2]. Warren e Root (1963) [28] apresentaram uma solução analítica para o fluxo monofásico, considerando regime pseudo-permanente para a modelagem do fluxo entre matriz e fratura, objetivando a aplicação em análises em testes de pressão em poços de petróleo. Kazemi *et alii* (1976) [15] estenderam tal modelo visando estudar o comportamento de reservatórios fraturados através de simulação numérica.

Uma função de transferência que descreva o mais precisamente possível o fluxo

matriz-fratura é um dos requisitos mais importantes no estudo de reservatórios naturalmente fraturados. Na formulação convencional de modelos de dupla porosidade, os blocos de matriz são considerados sem nenhuma definição geométrica no subdomínio que ocupam. Consequentemente, não são obtidos os gradientes de pressão e saturação nos blocos de matriz, e portanto as características do fluxo na interface matriz-fratura não podem ser bem representadas, resultando num cálculo impreciso da função de transferência dos fluidos. Saidi (1983) [24] sugeriu uma aproximação em que os blocos de matriz eram discretizados. Desta maneira, o cálculo da transferência de fluidos dependia da localização da matriz em relação ao contato entre os fluidos no sistema de fraturas.

O trabalho de Saidi [24] deu origem ao método de subdomínios. Este método foi usado por Gilman (1983) [12], que discretizou o bloco de matriz na direção vertical, pretendendo assim modelar apropriadamente a segregação gravitacional dentro dos blocos de matriz e o seu efeito na transferência de fluidos matriz-fratura. O fluido nas fraturas foi considerado disperso e sem qualquer correção em relação à elevação. Pruess e Narasimhan (1985) [20] utilizaram a aproximação MINC, "multiple interacting continua", para reservatórios geotérmicos, e Wu e Pruess (1988) [29] utilizaram esta aproximação em reservatórios de petróleo, onde os blocos de matriz foram discretizados em forma de anéis. Gilman e Kazemi (1988) [13] aperfeiçoaram o modelo de Gilman [12] para o cálculo de deslocamento gravitacional, considerando segregação completa dos fluidos nas fraturas, similar ao cálculo de Saidi [24]. Chen *et alii* (1987) [5] apresentaram um simulador térmico composicional para reservatórios fraturados, usando o método de subdomínios com a consideração de fluxo disperso nas fraturas.

O método de subdomínios é um método de refinamento de malha que implica no aumento do esforço computacional. Segundo Gilman [12], quando se considera fluxo unidimensional na escoamento, este esforço adicional não é tão acentuado a ponto de se tornar inviável e que o tempo de computação aumenta de 20 a 80 por cento para problemas grandes, embora o número de incógnitas possa aumentar de 50 a 200 por cento.

Neste trabalho, desenvolvemos um simulador numérico unidimensional, bifásico, óleo/gás, que pode ser utilizado para reservatórios fraturados e não fraturados. No caso

de reservatórios fraturados, partimos da formulação de Kazemi *et alii* [15] que considera apenas um valor médio para as propriedades dos fluidos nos blocos de matriz e nas fraturas. Depois implementamos a formulação de subdomínios proposta por Gilman [12], incluindo as considerações de fluxo segregado nas fraturas conforme Gilman e Kazemi [13], e também as considerações de fluxo disperso nas fraturas adaptadas de Chen *et alii* [5]. Estas três situações, para o estudo de reservatórios naturalmente fraturados, foram analisadas e comparadas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O conceito de dupla porosidade para representar reservatórios naturalmente fraturados foi descrito por Barenblatt *et alii* (1960) [2], para reservatórios geotérmicos, e introduzido na literatura de petróleo por Warren e Root (1963) [28]. Este conceito descreve o reservatório como um sistema formado por dois meios porosos interconectados, formados por blocos de rocha matriz e por uma rede de fraturas.

O meio poroso primário é composto por blocos descontínuos de rocha matriz e não existe fluxo direto entre eles. A permeabilidade é baixa e a capacidade de fluxo é desprezível. A capacidade de acumulação de fluidos é alta, agindo como fonte ou sumidouro para a rede de fraturas. O fluxo matriz-fratura é descrito através de uma função de transferência com características de fluxo darciano.

O meio poroso secundário consiste de uma rede de fraturas contínua por todo o reservatório. Possui baixa capacidade de acumulação e é muito permeável, sendo o principal responsável pelo escoamento dos fluidos no reservatório.

O modelo de Warren e Root [28] descreve um sistema idealizado formado por paralelepípedos idênticos, separados por um sistema ortogonal de fraturas, conforme a Fig. 2.1. A função de transferência matriz-fratura é calculada, considerando fluxo monofásico pseudo-permanente, por:

$$q_{mf} = \sigma \frac{k_m}{\mu_m} (P_m - P_f) \quad (2.1)$$

onde q_{mf} corresponde a vazão de fluidos entre a rocha matriz e o sistema de fraturas por unidade de volume e σ é um fator característico da geometria do sistema.

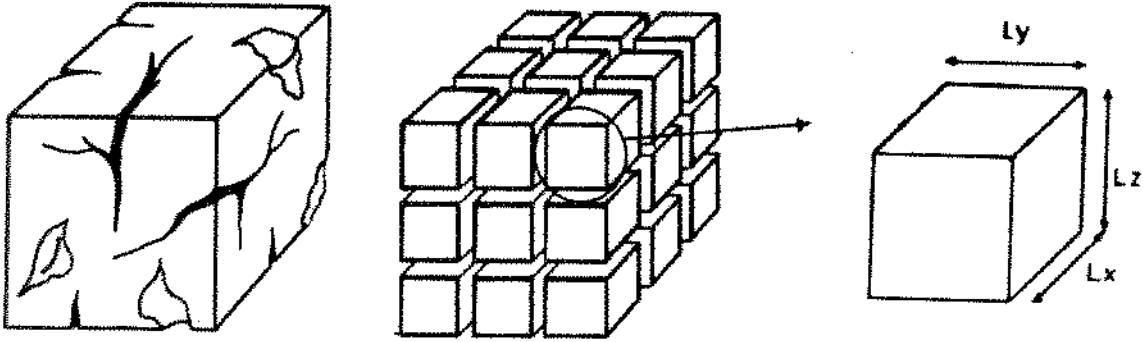


Figura 2.1: Idealização de Warren e Root [28] para reservatórios naturalmente fraturados

O fator de forma σ foi calculado considerando a geometria de bloco representativo de matriz, com dimensões L_x , L_y e L_z , Fig. 2.1, como:

$$\sigma = \frac{60}{L^2}, \quad (2.2)$$

onde L é uma dimensão características do sistema, ou seja, é a idealização de um sistema de dimensões idênticas que possua a mesma relação área/volume.

Considerando planos ortogonais de fraturas, o fator de forma σ é dado por:

$$\sigma = \frac{4N(N+2)}{L^2}, \quad (2.3)$$

onde N é o número de dimensões e:

$$L = \begin{cases} L_x, & \text{se } N = 1, \\ 2L_xL_y/(L_x + L_y), & \text{se } N = 2, \\ 3L_xL_yL_z/(L_xL_y + L_xL_z + L_yL_z), & \text{se } N = 3. \end{cases} \quad (2.4)$$

Warren e Root [28] definiram ainda dois parâmetros que, segundo eles, eram suficientes para caracterizar reservatórios fraturados a partir de testes de poços. Estes parâmetros são o coeficiente de transferência de fluxo, λ , e a razão de armazenamento do sistema, ω , onde:

$$\lambda = \sigma r_w^2 \frac{k_m}{k_f}, \quad (2.5)$$

e

$$\omega = \frac{\phi_f V_f c_{t_f}}{\phi_f V_f c_{t_f} + \phi_m V_m c_{f_m}} = \frac{(\phi V c_t)_f}{(\phi V c_t)_{f+m}}. \quad (2.6)$$

Com estes dois parâmetros e mais os dados de rocha e fluido, eles apresentaram as soluções analíticas para o comportamento da pressão considerando aproximações válidas para longo e curto tempo. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [28].

Kazemi *et alii* (1976) [15] estenderam o modelo para fluxo monofásico de Warren e Root [28], para um simulador numérico tridimensional, bifásico óleo/água, com formulação totalmente implícita. Consideraram que o escoamento ocorria nas fraturas entre células adjacentes, e entre matriz e fratura numa mesma célula modelado por um termo de transferência. Para o cálculo do termo de transferência, foi considerado um bloco representativo de matriz, localizado no centro da célula e o volume total transferido entre matriz e fratura foi calculado como o volume transferido do ou para o bloco representativo multiplicado pelo número total de blocos de matriz da célula. Desta maneira, todos os blocos de matriz numa dada célula possuem os mesmos valores de pressão e saturação.

Não foram considerados efeitos gravitacionais na transferência matriz-fratura. Os fluidos nas fraturas foram considerados dispersos. As equações para as fraturas e para a matriz foram discretizadas por diferenças finitas. Para esta formulação e para um bloco de matriz em forma de paralelepípedo com dimensões L_x , L_y e L_z , o fator de forma σ é dado por:

$$\sigma = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right), \quad (2.7)$$

sendo o mecanismo de fluxo matriz-fratura determinado pela diferença de pressões entre os dois meios. Na curva de permeabilidade relativa para as fraturas considerou-se toda a variação de saturações, entre 0 e 1, e na matriz a permeabilidade relativa é restrita à saturação móvel. Eles também usaram os mesmos valores extremos de pressão capilar para a matriz e para a fratura para que a zona de transição fosse idêntica nos dois meios. Desta maneira, pretendiam obter um equilíbrio estático na distribuição inicial das pressões e saturações.

O modelo de Kazemi *et alii* [15] torna-se inadequado para descrever fenômenos transientes, tal como segregação gravitacional dentro do bloco de matriz, principalmente se os blocos de matriz forem muito grandes ou se as vazões forem baixas, quando então estes fenômenos tornam-se mais importantes. Por causa deste problema, boa parte da literatura subsequente foi dedicada ao desenvolvimento da modelagem dos efeitos gravitacionais no cálculo da função de transferência matriz-fratura. Segundo análises de Gilman e Kazemi (1988) [13], Thomas *et alii* (1983) [26] usaram pseudo funções baseadas nas condições de equilíbrio vertical, mas não discutiram como as mesmas poderiam ser geradas. Gilman e Kazemi [13] também analisaram o trabalho de Sonier *et alii* (1988) [25], os quais usaram um método de segregação local de fase em cada célula e em cada passo de tempo para os cálculos de deslocamento gravitacional, e o trabalho de Litvak (1985) [17] que calculou um potencial gravitacional máximo para um bloco de matriz saturado com óleo, cercado por gás ou água. Gilman e Kazemi [13] concluíram que, dependendo das considerações adotadas, pode-se mostrar que os métodos de Litvak [17] e Sonier *et alii* [25] são idênticos.

Os modelos de Litvak [17] e Sonier *et alii* [25] não são apenas modelos de dupla

porosidade, mas também modelos de dupla permeabilidade. O modelo de dupla permeabilidade considera continuidade entre os blocos de matriz, o que é diferente do modelo de dupla porosidade, onde os blocos de matriz são considerados descontínuos. A desvantagem dos modelos de dupla permeabilidade é que exigem um tempo de computação muito maior do que os modelos de dupla porosidade.

Saidi (1983) [24] apresentou a idéia original do método de subdomínios com a divisão dos blocos de matriz em várias células. Para considerar os efeitos gravitacionais no fluxo matriz-fratura, os fluidos na fratura foram considerados completamente segregados e esta condição segregada foi utilizada no cálculo da pressão da fratura nas elevações correspondentes à cada célula do bloco de matriz, e na determinação da transmissibilidade na interface matriz-fratura na presença de contato de fluidos na face da célula. Os blocos de matriz eram cilíndricos e foram divididos nas direções $r-z$. A equação da continuidade foi discretizada, permitindo o cálculo das distribuições de pressão e saturação dentro dos blocos. O simulador era trifásico, tridimensional e totalmente implícito.

Pruess e Narasimhan (1985) [20] apresentaram um esquema de malha para calcular transferência de calor e movimento de fluidos em blocos de matriz, em reservatórios geotérmicos fraturados, considerando que todo o volume de matriz a uma dada distância da fratura estava a uma única pressão e temperatura. Esta aproximação ficou conhecida como método MINC, "multiple interacting continua", e trata do fluxo transiente multidimensional e multifásico através de uma aproximação numérica. Neste método, a discretização do bloco de matriz pode ser vista como um conjunto de paralelepípedos em forma de anéis, conforme a Fig.2.2.a.

Em 1988, Wu e Pruess [29] utilizaram o método MINC para modelar o processo de embebição água/óleo. Eles mostraram o erro possível na representação do processo transiente, com um modelo pseudo-permanente, para um bloco de matriz saturado com óleo e imerso em água. Compararam o método MINC com o método convencional de dupla porosidade e com a simulação com malha bem refinada no bloco de matriz, Figs. 2.2.b. e 2.2.c. Houve um bom ajuste entre o método MINC e a simulação com malha refinada, enquanto o método convencional apresentou diferenças, pelo fato de não consi-

derar fluxo transiente na matriz. Nos tempos iniciais, o método convencional subestima o gradiente capilar próximo à superfície do bloco de matriz. Isto acontece porque no modelo pseudo-permanente, as forças capilares agem sobre uma distância fixa a partir do centro do bloco de matriz até a superfície da fratura. Esta é bem maior do que a distância da primeira célula do bloco de matriz do método MINC. Nos tempos finais, uma saturação alta de água se desenvolve localmente próximo a superfície do bloco, causando uma redução no gradiente capilar e na permeabilidade relativa ao óleo. O resultado é uma diminuição da taxa de embebição e, conseqüentemente, do fluxo de óleo da matriz para as fraturas. Concluíram então que, em tempos intermediários, o método convencional de dupla porosidade superestima a taxa de embebição e que em tempos finais esta taxa é subestimada. Quando o tempo tende a infinito, os dois métodos convergem para o mesmo valor de recuperação final de óleo, devido ao equilíbrio capilar entre matriz e fratura. As diferenças entre os dois métodos podem ser mais acentuadas se os blocos de matriz forem grandes e se a viscosidade do fluido e a permeabilidade da matriz forem baixas.

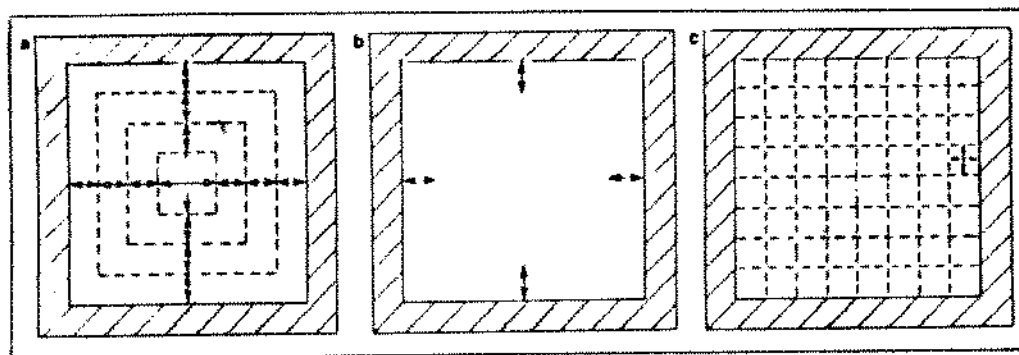


Figura 2.2: Discretização esquemática de blocos de matriz: a) MINC, b) convencional, c) malha refinada. Extraído de Wu e Pruess [29]

Gilman (1983) [12] foi o primeiro a usar o termo subdomínio para a discretização do bloco de matriz. Apresentou um simulador numérico totalmente implícito, bidimensional onde o bloco representativo de matriz é discretizado verticalmente. A transferência de fluidos matriz-fratura é calculada com o uso de um fator de forma. O fluido na fra-

tura é considerado disperso sem qualquer correção da pressão da fratura na elevação do subdomínio. Quando analisou o fluxo transiente monofásico, mostrou o erro na solução causado pelo uso do modelo convencional, pseudo-permanente, para representar a transferência de fluidos matriz-fratura. Realizou uma simulação bifásica de injeção de água, onde constatou que a simulação convencional previa uma recuperação final de óleo muito otimista. Como o método de subdomínios é um tipo de método de refinamento de malha, Gilman comparou os tempos de simulação e constatou que para simulações em larga escala, o tempo de solução aumenta de 20 a 80 % para um aumento nos nós de simulação de 50 a 200%.

A técnica de subdomínios com a consideração de fluxo disperso nas fraturas foi aperfeiçoada por Chen *et alii* (1987) [4], num simulador térmico, composicional trifásico. O bloco representativo de matriz foi dividido em duas direções, $r - z$, como no trabalho de Saidi [24]. A consideração de fluxo disperso nas fraturas foi feita considerando uma média dos pesos específicos dos fluidos da fratura.

Baseados nas idéias de Saidi [24], Gilman e Kazemi (1988) [13] aperfeiçoaram a modelagem da transferência matriz-fratura com a consideração de segregação completa nas fraturas. Para o cálculo da transferência de fluidos entre matriz e fratura, a altura do bloco de matriz é igual a altura da célula do simulador e a pressão de cada fase na fratura é corrigida a partir do centro da fratura até o contato dos fluidos e daí até a elevação de cada uma das células do subdomínio.

Beckner *et alii* (1991) [3] apresentaram recentemente um trabalho que combina o método MINC [20] e a discretização de Gilman [12], considerando as opções de fluxo disperso e segregado nas fraturas. No trabalho desenvolvido por eles, a pressão capilar gás-óleo e a permeabilidade das fraturas são consideradas como dependentes da pressão, e são mostrados os resultados para estas situações.

Capítulo 3

Equações de Escoamento no Meio Poroso Fraturado

Para as equações utilizadas neste trabalho, foram considerados os fluidos do tipo “black oil”. Neste caso o componente água está presente apenas na fase água, o componente óleo está presente apenas na fase óleo e o componente gás pode estar presente nas fases gás e óleo. A água foi considerada imóvel porém compressível. As equações básicas são as equações de conservação de massa do óleo, gás e água em cada meio e as velocidades das fases são dadas pela Lei de Darcy [1].

Como condição inicial foi considerado que havia equilíbrio capilar e gravitacional na distribuição de pressão e saturações. A fronteira externa foi considerada fechada ao fluxo e a produção ocorria na fronteira interna.

3.1 Equações para o Modelo Convencional

O modelo numérico foi desenvolvido de acordo com a teoria de Kazemi *et alii* [15]. De acordo com as idéias vistas anteriormente, apresentamos a seguir as equações de escoamento no meio poroso fraturado. As equações das fraturas podem ser vistas como as equações de escoamento em um meio poroso não fraturado, acrescidas de um termo de fluxo matriz-fratura:

- equação de conservação do óleo:

$$\nabla \cdot [\lambda_o(\nabla P_o - \gamma_o \nabla D)] + q_{omf} + q_o - \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_o b_o) = 0, \quad (3.1)$$

- equação de conservação do gás:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot [\lambda_g(\nabla P_g - \gamma_g \nabla D) + \lambda_o R_s(\nabla P_o - \gamma_o \nabla D)] \\ & + q_{gmf} + (q_o R_s)_{mf} + q_g + (q_o R_s) - \frac{\partial}{\partial t} [\phi(S_g b_g + S_o b_o R_s)] = 0, \quad (3.2) \end{aligned}$$

- equação de conservação da água:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w b_w) = 0. \quad (3.3)$$

Os termos q_{omf} , q_{gmf} e $(q_o R_s)_{mf}$ definem o fluxo de transferência matriz-fratura por unidade de volume.

As equações de conservação para o bloco de matriz são:

- equação de conservação do óleo:

$$- q_{omf} - \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_o b_o)_m = 0, \quad (3.4)$$

- equação de conservação do gás:

$$-q_{gmf} - (q_o R_o)_{mf} - \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_g b_g + \phi R_o S_o b_o)_m = 0 , \quad (3.5)$$

- equação de conservação da água:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w b_w)_m = 0 , \quad (3.6)$$

onde:

$$q_{omf} = \lambda_{omf} \sigma [\nabla P_o - (\gamma_o \nabla D)_{mf}] , \quad (3.7)$$

e:

$$q_{gmf} = \lambda_{gmf} \sigma [\nabla P_g - (\gamma_g \nabla D)_{mf}] . \quad (3.8)$$

Para completar o problema, as seguintes relações adicionais são utilizadas:

$$S_o + S_g + S_{wc} = 1 , \quad (3.9)$$

$$S_{om} + S_{gm} + S_{wcm} = 1 , \quad (3.10)$$

$$P_g = P_o + P_{cgo} , \quad (3.11)$$

$$P_{gm} = P_{om} + P_{cgo_m} . \quad (3.12)$$

As equações (3.1) a (3.12) e mais as condições inicial e de fronteira definem o problema de fluxo em reservatórios naturalmente fraturados, quando usamos a formulação convencional de dupla porosidade.

3.2 Equações para os Modelos com Subdomínios

Na idealização de Warren e Root [28], um reservatório fraturado é composto de blocos descontínuos de matriz em forma de paralelepípedos numa rede contínua de fraturas. O fluxo dentro dos blocos e os consequentes gradientes de pressão e saturação não são considerados.

Na modelagem que é apresentada a seguir, os blocos de matriz são considerados subdomínios, nos quais o escoamento do fluxo é modelado. Pretende-se assim, detalhar o processo de fluxo de fluidos dentro dos blocos de matriz e representar mais apropriadamente a interação matriz-fratura.

Neste trabalho, o bloco representativo de matriz foi discretizado verticalmente, de acordo com as idéias de Gilman [12]. Com esta configuração, as equações de conservação para as fraturas vistas no item anterior continuam válidas, porém os termos de transferência matriz-fratura deverão ser redefinidos. As equações de conservação da matriz neste caso são:

– equação de conservação do óleo:

$$\nabla \cdot [\lambda_o(\nabla P_o - \gamma_o \nabla Z_m)]_m - q_{omf} - \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_o b_o)_m = 0 , \quad (3.13)$$

- equação de conservação do gás:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot [\lambda_g (\nabla P_g - \gamma_g \nabla Z) + \lambda_o R_g (\nabla P_o - \gamma_o \nabla Z)]_m \\ & - q_{gmf} - (q_o R_g)_{mf} - \frac{\partial}{\partial t} [\phi (S_g b_g + S_o b_o R_g)]_m = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A equação (3.6) continua válida para a conservação da água.

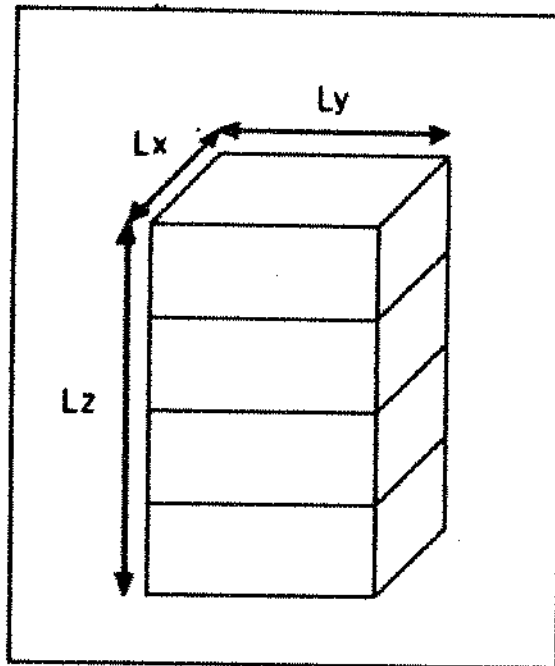


Figura 3.1: Discretização do bloco de matriz, de acordo com Gilman [12]

Os termos q_{omf} e q_{gmf} representam a vazão de transferência matriz-fratura do óleo e do gás respectivamente que, para todo bloco de matriz, são calculados como:

$$q_{omf} = \int_{A_{mf}} \lambda_{omf} \nabla \Phi_{omf} dA_{mf} , \quad (3.15)$$

$$q_{gmf} = \int_{A_{mf}} \lambda_{gmf} \nabla \Phi_{gmf} dA_{mf} . \quad (3.16)$$

O fluxo matriz-fratura foi modelado de duas maneiras, considerando os fluidos dispersos nas fraturas, adaptado de Chen *et alii* [5] e considerando-os segregados, como Gilman e Kazemi [13]. Na opção de fluidos dispersos, os fluidos nas fraturas são substituídos por um único fluido de peso específico equivalente. A opção de fluidos segregados pode definir uma interface dos fluidos na fratura ao longo dos blocos de matriz.

As formulações para os termos de fluxo matriz-fratura são apresentados no Apêndice D.

Capítulo 4

Solução Numérica

As equações diferenciais do capítulo anterior são linearizadas e o sistema é resolvido através do método de Newton-Raphson.

4.1 Equações em Diferenças

As equações diferenciais não lineares do escoamento em meios porosos, vistas no capítulo anterior, são discretizadas através de um esquema em diferenças finitas. Os termos de fluxo são aproximados mediante diferenças centradas no espaço e os termos de acumulação mediante diferenças regressivas no tempo, resultando num sistema de equações não lineares para cada passo de tempo.

Na discretização foi utilizado o esquema de nós distribuídos, com produção na fronteira interna. Não foi considerado um modelo de poço.

Na nossa notação, a partir deste ponto, não usaremos subscrito para identificar os termos das fraturas, mas os subscritos permanecem nos termos do fluxo matriz-fratura e da matriz. Consideraremos também que os termos fonte são iguais a zero.

4.1.1 Formulação Convencional

As equações para o escoamento dos fluidos nas fraturas em forma de diferenças são:

- equação do óleo:

$$\begin{aligned} & \Delta [T_o (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + T_{omfi}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} \\ &= \frac{V_{ri}}{\Delta t} \left[(\phi b_o (1 - S_w - S_g))_i^{n+1} - (\phi b_o (1 - S_w - S_g))_i^n \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

- equação do gás:

$$\begin{aligned} & \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + \\ & T_{gmfi}^{n+1} (P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo})_i^{n+1} + (T_o R_s)_{mfi}^{n+1} (P_{om} - P_o)_i^{n+1} \\ &= \frac{V_{ri}}{\Delta t} \left[(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))_i^{n+1} \right. \\ & \left. - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))_i^n \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

- e equação da água:

$$S_{wi}^{n+1} = \frac{S_{wi}^n b_{wi}^{n+1}}{b_{wi}^n [1 + c_r (P_o^{n+1} - P_o^n)]_i}, \quad (4.3)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, I$ I - número de células do reservatório,

$n = 0, 1, 2, \dots$ n - passo de tempo conhecido,
 $n + 1$ - passo de tempo a ser calculado.

As equações em diferenças para os blocos de matriz são:

- equação do óleo:

$$-T_{omfi}^{n+1}(P_{om} - P_o)_i^{n+1} = \frac{V_{ri}}{\Delta t} \left[(\phi b_o(1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o(1 - S_w - S_g))^n \right]_{m_i}, \quad (4.4)$$

- equação do gás:

$$\begin{aligned} & -T_{gmfi}^{n+1}(P_{om} - P_o + P_{cgo_m} - P_{cgo}_i)^{n+1} - (T_o R_s)_{mfi}^{n+1}(P_{om} - P_o)_i^{n+1} \\ & = \frac{V_{ri}}{\Delta t} \left[(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s(1 - S_w - S_g))^{n+1} \right. \\ & \quad \left. - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s(1 - S_w - S_g))^n \right]_{m_i}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

- e equação da água,

$$S_{um_i}^{n+1} = \frac{S_{um_i}^n b_{um_i}^{n+1}}{b_{um_i}^n [1 + c_{rm} (P_{om}^{n+1} - P_{om}^n)_i]}. \quad (4.6)$$

Os seguintes termos que aparecem nas equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) são definidos para o fluxo linear, unidimensional como:

$$\Delta P_o = P_{o_{i+1}} - P_{o_i} \text{ ou } P_{o_i} - P_{o_{i-1}}, \quad (4.7)$$

$$T_{oi} = \frac{A}{\Delta x_i} k \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_i, \quad (4.8)$$

$$T_{omfi} = \sigma V_{r_i} k_m \left[\omega_{oi} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_i + (1 - \omega_{oi}) \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mi} \right], \quad (4.9)$$

$$\Delta P_g = P_{g_{i+1}} - P_{g_i} \text{ ou } P_{g_i} - P_{g_{i-1}}, \quad (4.10)$$

$$T_{gi} = \frac{A}{\Delta x_i} k \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_i, \quad (4.11)$$

$$T_{gmfi} = \sigma V_{r_i} k_m \left[\omega_{gi} \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_i + (1 - \omega_{gi}) \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_{mi} \right], \quad (4.12)$$

onde $\omega_o = 1$ se o fluxo de óleo for na direção fratura→matriz ou $\omega_o = 0$ na situação contrária. O mesmo acontece com ω_g em relação ao fluxo de gás.

O fator de forma σ , que está definido no Apêndice F, é o mesmo da equação (2.7).

4.1.2 Formulação com Subdomínios

Como foi mencionado no capítulo anterior, deseja-se o detalhamento do escoamento nos blocos de matriz. Assim, aparecem nas equações da matriz termos de fluxo que introduzem variações espaciais de pressões e saturações dentro dos blocos, que resultam da discretização espacial destes blocos e na criação de subdomínios. Para evitar qualquer confusão, vamos nos referir a células quando tratarmos da discretização do meio contínuo, as fraturas, e de subcélulas quando se tratar da discretização dos subdomínios, os blocos

da matriz.

As equações de escoamento, em diferenças finitas para as fraturas são:

– equação do óleo:

$$\begin{aligned} & \Delta [T_o (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]^{n+1} + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [T_{omf_{ij}} \Delta \Phi_{omf_{ij}}^*]^{n+1} \\ &= \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o (1 - S_w - S_g))^n]_i, \quad (4.13) \end{aligned}$$

– equação do gás:

$$\begin{aligned} & \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + \\ & \quad \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [T_{gmf_{ij}} \Delta \Phi_{gmf_{ij}}^*]^{n+1} + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [(T_o R_s)_{mf_{ij}} \Delta \Phi_{omf_{ij}}^*]^{n+1} \\ &= \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^n]_i, \quad (4.14) \end{aligned}$$

$j = 1, 2, 3, \dots, N_{\text{sub}}, \quad N_{\text{sub}} - \text{número de subcélulas do bloco de matriz}$

A equação (4.3) continua válida para a água.

Os termos de transmissibilidade matriz–fratura são agora aplicados a cada subcélula j na célula i :

$$T_{omf_{ij}} = \sigma_j V_{r_i} k_m \left[\omega_{o_{ij}} \left(\frac{k_{r_o}}{\mu_o B_o} \right)_i + (1 - \omega_{o_{ij}}) \left(\frac{k_{r_o}}{\mu_o B_o} \right)_{m_{ij}} \right], \quad (4.15)$$

e

$$T_{gmf_{ij}} = \sigma_j V_{r_i} k_m \left[\omega_{g_{ij}} \left(\frac{k_{r_g}}{\mu_g B_g} \right)_i + (1 - \omega_{g_{ij}}) \left(\frac{k_{r_g}}{\mu_g B_g} \right)_{m_{ij}} \right], \quad (4.16)$$

onde $\omega_{o_{ij}}$ e $\omega_{g_{ij}}$ são semelhantes ao caso convencional para cada subcélula j na célula i .

O fator de forma σ_j , para as faces verticais é dado por:

$$\sigma_j = \frac{4}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right], \quad (4.17)$$

e para as faces horizontais é:

$$\sigma_H = \frac{2}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{2}{L_x^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{1}{(L_z/N_{\text{sub}})^2} \right]. \quad (4.18)$$

A definição do fator de forma para estas situações também está apresentada no Apêndice F.

As equações da matriz serão escritas para a subcélula j , na célula i :

– equação do óleo:

$$\Delta [T_o (\Delta P_o - \gamma_o \Delta Z)]_{m_{ij}}^{n+1} - T_{omf_{ij}} (\Delta \Phi_{omf_{ij}}^*)^{n+1}$$

$$= \frac{V_{r_{ij}}}{\Delta t} \left[(\phi b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o (1 - S_w - S_g))^n \right]_{m_{ij}}, \quad (4.19)$$

- equação do gás:

$$\begin{aligned} & \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_{m_{ij}}^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta Z)]_{m_{ij}}^{n+1} - \\ & T_{gm_{ij}}^{n+1} (\Delta \Phi_{gm_{ij}}^*)^{n+1} - (T_o R_s)_{m_{ij}}^{n+1} (\Delta \Phi_{om_{ij}}^*)^{n+1} \\ = & \frac{V_{r_{ij}}}{\Delta t} \left[(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^{n+1} \right. \\ & \left. - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^n \right]_{m_{ij}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

- equação da água:

$$S_{w_{m_{ij}}}^{n+1} = \frac{S_{w_{m_{ij}}}^n b_{w_{m_{ij}}}^{n+1}}{b_{w_{m_{ij}}}^n [1 + c_r (P_{om}^{n+1} - P_{om}^n)_{ij}]}. \quad (4.21)$$

As equações (4.1) a (4.6) formam o sistema de equações da formulação convencional onde, para cada nó, temos como incógnitas P_{o_i} , S_{g_i} , P_{om_i} e S_{gm_i} . As equações (4.13), (4.14), (4.19) a (4.21) e mais a equação (4.3) formam o sistema de equações para formulação com subdomínios. Neste caso, além das incógnitas da fratura, P_{o_i} e S_{g_i} , temos N_{sub} incógnitas da matriz, $P_{om_{ij}}$ e $S_{gm_{ij}}$, em cada nó.

Os termos $\Delta \Phi_{om_{ij}}^*$ e $\Delta \Phi_{gm_{ij}}^*$ são definidos para duas condições de fluidos nas fraturas, disperso e segregado, e estão definidos como veremos a seguir.

4.1.3 Opção de Fluido Disperso nas Fraturas

Nesta opção, adaptada de Chen *et alii* [5], as diferenças de potencial são calculadas considerando um potencial especial na fratura, que é definido como:

$$\Phi^* = P + Z_j \gamma^* \quad (4.22)$$

onde:

$$\gamma^* = (\gamma_o S_o) + (\gamma_g S_g), \quad (4.23)$$

e Z_j é a elevação na face da subcélula j , em relação a base do bloco de matriz. Considerando que a pressão capilar na fratura é igual a zero, o potencial da fase gás é igual ao potencial da fase óleo neste meio.

Para o fluxo matriz/fratura em cada subcélula, a pressão na fratura deve ser corrigida com a equação (4.22). Foi considerado que a pressão calculada em cada célula computacional é a pressão adjacente à subcélula do centro do bloco de matriz. Estas correções para cada elevação estão apresentadas no Apêndice D.

4.1.4 Opção de Fluidos Segregados nas Fraturas

Esta formulação considera segregação completa das fases na fratura para descrever dinamicamente as mudanças nos efeitos gravitacionais. O bloco de matriz deve ter a mesma altura L_z da célula computacional para que seja válido o cálculo da posição dos contatos entre as fases. Os níveis das fases nas fraturas para cada célula são definidos como:

$$Z_g = \left[\frac{S_g - S_{ge}}{1 - S_{or} - S_{wc} - S_{gc}} \right] L_z, \quad (4.24)$$

$$Z_{oi} = L_z - Z_{gi} \quad (4.25)$$

Considerando que há ausência de pressão capilar e quando a segregação de fase é completa, as pressões nas fases devem ser as mesmas em qualquer elevação da fratura numa mesma célula, Fig. 4.1. Escrevendo as equações em diferenças finitas sobre o centro da célula da fratura, onde a altura corresponde a $L_z/2$, a pressão na interface, I , gás/óleo é:

$$P_{Ii} = P_i + \gamma_i(Z_g - L_z/2)_i, \quad (4.26)$$

onde P é a pressão no centro da célula da fratura e o gradiente estático de pressão depende de Z_{gi} ser maior ou menor que $L_z/2$. Se $Z_{gi} > L_z/2$, γ_i é o gradiente do gás, senão é o gradiente do óleo.

A pressão na fratura, na elevação de cada célula, pode ser calculado a partir da pressão na interface das fases:

$$P_{ij} = P_{Iij} + \gamma_{ij}(Z_{gi} - Z_{ij}), \quad (4.27)$$

onde Z_{ij} é a elevação da subcélula e o gradiente estático de γ_{ij} é γ_{oi} se $Z_{oi} > Z_{ij}$ ou γ_{ij} é γ_{gi} se $Z_{oi} < Z_{ij}$.

A diferença de potencial entre a matriz e a fratura para cada subcélula, j , pode ser calculado por:

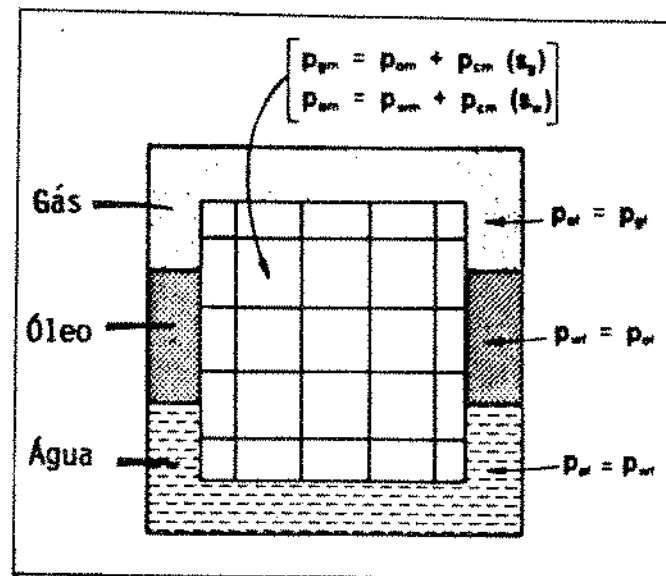


Figura 4.1: Idealização do Fluxo Gravitacional, [13]

$$\Delta\Phi_{mfj}^* = P_{ij} - P_{m_{ij}} \quad (4.28)$$

Quando a fratura estiver na direção a montante, suas propriedades são usadas no cálculo do fluxo matriz/fratura. As permeabilidades relativas devem ser corrigidas para representar a segregação das fases, ou seja, se a face de uma determinada subcélula estiver acima do contato gás-óleo, a k_{r_o} será igual a unidade, se estiver abaixo do contato será igual a zero e se houver contato na face da subcélula, a k_{r_o} será calculada usando a saturação normalizada. As saturações normalizadas nas fraturas para as fases óleo e gás são:

$$S_{gij}^* = Z_{ij} + \frac{L_z}{2} - Z_{oi} , \quad (4.29)$$

$$S_{oij}^* = 1 - S_{gij}^* . \quad (4.30)$$

Quando as curvas de permeabilidade relativa das fraturas são linhas retas, variando de 0 a 1, as saturações normalizadas representam diretamente as permeabilidades relativas. Quando a dependência da permeabilidade relativa em relação a saturação não for linear e as saturações irreduzíveis forem diferentes de zero, as permeabilidades relativas serão calculadas da maneira normal, usando S_g^* . Maiores detalhes do fluxo matriz/fratura na opção de fluidos segregados nas fraturas podem ser vistos no Apêndice D.

4.2 Linearização das Equações – Método de Newton-Raphson

A linearização das equações em diferenças não lineares vistas no item anterior, foi feita de maneira totalmente implícita, utilizando o Método de Newton-Raphson. Este método requer a definição das funções de resíduos para cada meio e cada fase.

4.2.1 Formulação Convencional

As seguintes funções de resíduos são definidas para a fratura:

– equação do óleo:

$$F_{oi}^{n+1}(P_{oi-1}, S_{gi-1}, P_{oi}, S_{gi}, P_{oi+1}, S_{gi+1}, P_{omi}, S_{gmi}) =$$

$$\begin{aligned} & \Delta [T_o (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + T_{omf_i}^{n+1} (P_{om_i} - P_o)_i^{n+1} \\ & - \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o (1 - S_w - S_g))^n]_i = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

– equação do gás:

$$\begin{aligned} & F_{g_i}^{n+1} (P_{o_{i-1}}, S_{g_{i-1}}, P_{o_i}, S_{g_i}, P_{o_{i+1}}, S_{g_{i+1}}, P_{om_i}, S_{gm_i}) = \\ & \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} \\ & + T_{gmf_i}^{n+1} (P_{om_i} - P_{o_i} + P_{cgom_i} - P_{cgo_i})^{n+1} + (T_o R_s)_{mf_i}^{n+1} (P_{om_i} - P_{o_i})^{n+1} \\ & - \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^{n+1} \\ & - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^n]_i = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

ou generalizando:

$$F_{f_i}^{n+1} (P_{o_{i-1}}, S_{g_{i-1}}, P_{o_i}, S_{g_i}, P_{o_{i+1}}, S_{g_{i+1}}, P_{om_i}, S_{gm_i}) = 0,$$

onde $f = \text{óleo, gás}$.

Para os blocos de matriz definem-se:

– equação do óleo:

$$\begin{aligned}
F_{om_i}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_i}, S_{gm_i}) &= -T_{om_i}^{n+1}(P_{om} - P_o)_i^{n+1} \\
-\frac{V_{r_i}}{\Delta t} [(\phi b_o(1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o(1 - S_w - S_g))^n]_{m_i} &= 0, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

- equação do gás:

$$\begin{aligned}
F_{gm_i}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_i}, S_{gm_i}) &= \\
-T_{gm_i}^{n+1}(P_{om_i} - P_{o_i} + P_{cgom_i} - P_{cgo_i})^{n+1} - (T_o R_g)_{m_i}^{n+1}(P_{om_i} - P_{o_i})^{n+1} \\
-\frac{V_{r_i}}{\Delta t} [(\phi b_g S_g + \phi b_o R_g(1 - S_w - S_g))^{n+1} \\
-(\phi b_g S_g + \phi b_o R_g(1 - S_w - S_g))^n]_{m_i} &= 0, \quad (4.34)
\end{aligned}$$

ou generalizando:

$$F_{f_i}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_i}, S_{gm_i}) = 0.$$

Para estabelecer o processo iterativo de Newton-Raphson, as funções de resíduos de cada meio e para cada fase na iteração $(\nu + 1)$ são expandidas em série de Taylor em torno da iteração (ν) , ficando retidos os termos de ordem inferior. Assim, temos que, para as fraturas:

$$\begin{aligned}
F_{f_i}^{(\nu+1)} &= F_{f_i}^{(\nu)} + \sum_{l=i-1}^{i+1} \left\{ \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_l}} \delta P_{o_l}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_l}} \delta S_{g_l}^{(\nu+1)} \right\} \\
&\quad + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{om_i}} \delta P_{om_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{gm_i}} \delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} = 0, \quad (4.35)
\end{aligned}$$

onde ν é o nível de iteração conhecido e $\nu + 1$ é o nível de iteração a ser calculado, e para a matriz:

$$F_{f_{m_i}}^{(\nu+1)} = F_{f_{m_i}}^{(\nu)} + \frac{\partial F_{f_{m_i}}^{(\nu)}}{\partial P_{om_i}} \delta P_{om_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_{m_i}}^{(\nu)}}{\partial S_{gm_i}} \delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_{m_i}}^{(\nu)}}{\partial P_{o_i}} \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_{m_i}}^{(\nu)}}{\partial S_{g_i}} \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} = 0. \quad (4.36)$$

As equações (4.35) e (4.36) formam um sistema linear, onde as incógnitas são as variações das pressões e das saturações nas fraturas e na matriz, δP_o , δS_g , δP_{om} e δS_{gm} , no nível de iteração ($\nu + 1$).

A estrutura do sistema, numa forma compacta, é:

$$J^{(\nu)} \delta X^{(\nu+1)} = -F^{(\nu)}, \quad (4.37)$$

onde J é a matriz de derivadas ou matriz Jacobiana, δX é o vetor de incógnitas e F é o vetor das funções de resíduos.

O sistema possui uma estrutura tridiagonal em blocos, como:

são as derivadas das funções de resíduos da matriz em relação as incógnitas da fratura e da matriz, respectivamente.

As submatrizes das diagonais inferior e superior possuem estrutura similar, porém apenas a submatriz das derivadas das funções de resíduos das fraturas em relação as incógnitas das fraturas possuem elementos diferentes de zero.

Explicitando os elementos das submatrizes, a , b e c , para o nó i , teremos:

$$a_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi}} \end{bmatrix}, \quad (4.40) \quad a_{fm_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gmi}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gmi}} \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$a_{mf_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{omi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{omi}}{\partial S_{gi}} \\ \frac{\partial F_{gmi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gmi}}{\partial S_{gi}} \end{bmatrix}, \quad (4.42) \quad a_{mm_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{omi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{omi}}{\partial S_{gmi}} \\ \frac{\partial F_{gmi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{gmi}}{\partial S_{gmi}} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

$$b_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi+1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi+1}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi+1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.44) \quad c_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi-1}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi-1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi-1}} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Os elementos dos vetores de incógnitas e das funções de resíduos são os seguintes:

$$\delta X_i = \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \end{bmatrix}_i, \quad (4.46) \quad \delta X_{mi} = \begin{bmatrix} \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \end{bmatrix}_i, \quad (4.47)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \end{bmatrix}_i, \quad (4.48) \quad F_{mi} = \begin{bmatrix} F_{om} \\ F_{gm} \end{bmatrix}_i. \quad (4.49)$$

De acordo com o desenvolvimento mostrado por Rodriguez [21], é possível acoplar as equações da matriz nas equações das fraturas e reduzir o sistema de equações da maneira descrita a seguir.

As equações da matriz, para o nó i , podem ser representadas como:

Capítulo 5

Validação

A validação do simulador desenvolvido, foi realizada para a formulação convencional, comparando-se com a solução analítica de Warren e Root [28] para um sistema infinito. A solução se aplica ao comportamento transiente de um sistema com geometria radial.

O problema de Warren e Root foi resolvido no campo de Laplace e invertido para o campo real usando as assíntotas das funções de Bessel.

Os dados utilizados na validação são apresentados na Tab. 5.1. O raio externo do reservatório utilizado foi bastante grande para minimizar os efeitos de fronteira. A fronteira externa foi considerada fechada ao fluxo e calculou-se o declínio da pressão na fronteira interna, devido a produção com vazão constante.

Os resultados obtidos para blocos de matriz em forma de cubo, com as dimensões de 5 e 20 m estão mostrados nas figuras (5.1) e (5.2), respectivamente.

Nas figuras (5.1) e (5.2) observamos que houve uma boa concordância entre as soluções analítica e numérica. Outros testes foram feitos e mostraram resultados semelhantes. De acordo com estes resultados, consideramos o simulador desenvolvido como validados para a formulação convencional de reservatórios de dupla porosidade, para a situação descrita por Warren e Root [28].

As derivadas das funções de resíduos da matriz em relação as incógnitas da fratura e matriz, respectivamente.

As submatrizes das diagonais inferior e superior possuem estrutura similar, apenas a submatriz das derivadas das funções de resíduos das fraturas em relação as incógnitas das fraturas possuem elementos diferentes de zero.

Explicitando os elementos das submatrizes, a , b e c , para o nó i , teremos:

$$a_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi}} \end{bmatrix}, \quad (4.40) \quad a_{fm_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gmi}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gmi}} \end{bmatrix}, \quad (4.41) \quad (1.51)$$

$$a_{mf_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{omi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{omi}}{\partial S_{gi}} \\ \frac{\partial F_{gmi}}{\partial P_{oi}} & \frac{\partial F_{gmi}}{\partial S_{gi}} \end{bmatrix}, \quad (4.42) \quad a_{mm_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{omi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{omi}}{\partial S_{gmi}} \\ \frac{\partial F_{gmi}}{\partial P_{omi}} & \frac{\partial F_{gmi}}{\partial S_{gmi}} \end{bmatrix}, \quad (4.43) \quad (1.52)$$

$$b_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi+1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi+1}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi+1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.44) \quad c_{ff_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{oi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi-1}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{oi-1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi-1}} \end{bmatrix}. \quad (4.45) \quad (1.53)$$

Os elementos dos vetores de incógnitas e das funções de resíduos são os seguintes:

$$\delta X_i = \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \end{bmatrix}_i, \quad (4.46) \quad \delta X_{mi} = \begin{bmatrix} \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \end{bmatrix}_i, \quad (4.47) \quad (1.54)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \end{bmatrix}_i, \quad (4.48) \quad F_{mi} = \begin{bmatrix} F_{om} \\ F_{gm} \end{bmatrix}_i. \quad (4.49) \quad (1.55)$$

De acordo com o desenvolvimento mostrado por Rodriguez [21], é possível acoplar as equações da matriz nas equações das fraturas e reduzir o sistema de equações da matriz descrita a seguir.

As equações da matriz, para o nó i , podem ser representadas como:

$$(4.56)$$

$$\delta S_{gm_i}^{(\nu+1)} = \alpha_{go_i}^{(\nu)} \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \alpha_{gg_i}^{(\nu)} \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} + \beta_{g_i}^{(\nu+1)}. \quad (4.57)$$

Substituindo as equações (4.56) e (4.57) na equação (4.35) e rearrumando, vem:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_i}} + \theta_{fo_i}^{(\nu)} \right] \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_i}} + \theta_{fg_i}^{(\nu)} \right] \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} \\ & + \sum_{l=i-1, i+1} \left\{ \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_l}} \delta P_{o_l}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_l}} \delta S_{g_l}^{(\nu+1)} \right\} \\ & = -(F_{f_i}^{(\nu)} + \xi_{f_i}^{(\nu)}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde:

$$\theta_{oo_i} = \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_i}} \alpha_{oo_i} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_i}} \alpha_{go_i}, \quad (4.59)$$

$$\theta_{og_i} = \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_i}} \alpha_{og_i} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_i}} \alpha_{gg_i}, \quad (4.60)$$

$$\theta_{go_i} = \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_i}} \alpha_{oo_i} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_i}} \alpha_{go_i}, \quad (4.61)$$

$$\theta_{gg_i} = \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_i}} \alpha_{og_i} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_i}} \alpha_{gg_i}, \quad (4.62)$$

$$\xi_{o_i} = \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_i}} \beta_{o_i} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_i}} \beta_{g_i}, \quad (4.63)$$

$$\xi_{g_i} = \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_i}} \beta_{o_i} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_i}} \beta_{g_i}. \quad (4.64)$$

Usando a equação (4.58), temos um sistema com a mesma estrutura de um sistema convencional, não fraturado. Neste caso, temos um sistema tridiagonal em blocos com dimensão (2×2) .

O esquema matricial para o nó i torna-se, então:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_{i-1}}} & \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_{i-1}}} \\ \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_{i-1}}} & \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_{i-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_i}} + \theta_{oo_i} \right) & \left(\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_i}} + \theta_{og_i} \right) \\ \left(\frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_i}} + \theta_{go_i} \right) & \left(\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_i}} + \theta_{gg_i} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_{i+1}}} & \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_{i+1}}} \\ \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_{i+1}}} & \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_{i+1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta P_o \end{bmatrix}_{i-1}^{(\nu+1)} \\ & \begin{bmatrix} \delta S_g \end{bmatrix}_{i-1}^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \delta P_o \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \delta S_g \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \delta P_o \end{bmatrix}_{i+1}^{(\nu+1)} \\ & \begin{bmatrix} \delta S_g \end{bmatrix}_{i+1}^{(\nu+1)} \\ & = - \begin{bmatrix} F_o + \xi_o \\ F_g + \xi_g \end{bmatrix}_i \quad (4.65) \end{aligned}$$

Segundo Rodriguez [21], o acoplamento da equações da matriz nas equações das fraturas reduz de maneira sensível a quantidade de memória e o esforço computacional.

O processo iterativo de Newton-Raphson é iniciado supondo que na iteração zero a distribuição de pressões e saturações, tanto nas fraturas como nos blocos de matriz, é a distribuição do passo de tempo n , conhecido. Após o cálculo das mudanças iterativas

das incógnitas da fratura, as equações (4.56) e (4.57) são utilizadas para o cálculo das mudanças iterativas das incógnitas da matriz. A solução do processo iterativo é alcançada no passo de tempo $n + 1$, quando as mudanças iterativas das incógnitas das fraturas e dos blocos de matriz são menores que uma tolerância estipulada, TOL , para cada nó i , ou seja:

$$|\delta X_i^{(\nu+1)}|_{V_i} \leq TOL ,$$

e:

$$|\delta X_{m_i}^{(\nu+1)}|_{V_i} \leq TOL .$$

As formas expandidas das funções de resíduos para este caso podem ser encontradas no Apêndice A. O Apêndice C contém os elementos da matriz Jacobiana, sendo que as derivadas dos termos de fluxo matriz-fratura são encontradas no Apêndice E.

4.2.2 Formulação com Subdomínios

As seguintes funções de resíduos são definidas para o sistema de fraturas:

- equação do óleo:

$$\begin{aligned} & F_{o_i}^{n+1}(P_{o_{i-1}}, S_{g_{i-1}}, P_{o_i}, S_{g_i}, P_{o_{i+1}}, S_{g_{i+1}}, P_{om_{i1}}, \dots, P_{om_{iN_{\text{sub}}}}, S_{gm_{i1}}, \dots, S_{gm_{iN_{\text{sub}}}}) = \\ & \Delta [T_o(\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [T_{om_{f_{ij}}}(\Delta \Phi_{om_{f_{ij}}}^*)]^{n+1} - \\ & \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_o(1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o(1 - S_w - S_g))^n]_i = 0 , \end{aligned} \quad (4.66)$$

- equação do gás:

$$\begin{aligned}
& F_{g_i}^{n+1}(P_{o_{i-1}}, S_{g_{i-1}}, P_{o_i}, S_{g_i}, P_{o_{i+1}}, S_{g_{i+1}}, P_{om_{i1}}, \dots, P_{om_{iN_{\text{sub}}}}, S_{gm_{i1}}, \dots, S_{gm_{iN_{\text{sub}}}}) = \\
& \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [T_{gm_{fij}} (\Delta \Phi_{gm_{fij}}^*)]^{n+1} + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [(T_o R_s)_{mfij} (\Delta \Phi_{om_{fij}}^*)]^{n+1} \\
& - \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^{n+1} - \\
& (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^n]_i = 0, \tag{4.67}
\end{aligned}$$

ou generalizando:

$$F_{f_i}^{n+1}(P_{o_{i-1}}, S_{g_{i-1}}, P_{o_i}, S_{g_i}, P_{o_{i+1}}, S_{g_{i+1}}, P_{om_{i1}}, \dots, P_{om_{iN_{\text{sub}}}}, S_{gm_{i1}}, \dots, S_{gm_{iN_{\text{sub}}}}) = 0.$$

Para os blocos de matriz definiu-se:

equação do óleo:

$$\begin{aligned}
& F_{om_{ij}}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_{ij-1}}, S_{gm_{ij-1}}, P_{om_{ij}}, S_{gm_{ij}}, P_{om_{ij+1}}, S_{gm_{ij+1}}) = \\
& \Delta [T_o (\Delta P_o - \gamma_o \Delta_o Z)]_{m_{ij}}^{n+1} - T_{om_{fij}}^{n+1} (\Delta \Phi_{om_{fij}}^*)^{n+1} \\
& - \frac{V_{rij}}{\Delta t} [(\phi b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} - (\phi b_o (1 - S_w - S_g))^n]_{m_{ij}} = 0, \tag{4.68}
\end{aligned}$$

– equação do gás:

$$\begin{aligned}
 & F_{gm_{ij}}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_{ij-1}}, S_{gm_{ij-1}}, P_{om_{ij}}, S_{gm_{ij}}, P_{om_{ij+1}}, S_{gm_{ij+1}}) = \\
 & \Delta [T_g (\Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_{m_{ij}}^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta P_o - \gamma_o \Delta Z)]_{m_{ij}}^{n+1} \\
 & - T_{gm_{ij}}^{n+1} (\Delta \Phi_{gm_{ij}}^*) - (T_o R_s)_{m_{ij}}^{n+1} (\Delta \Phi_{om_{ij}}^*) \\
 & - \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^{n+1} \\
 & - (\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_w - S_g))^n]_{m_{ij}} = 0, \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, N_{\text{sub}}$ e $n = 0, 1, 2, \dots$

Generalizando:

$$F_{fm_{ij}}^{n+1}(P_{o_i}, S_{g_i}, P_{om_{ij-1}}, S_{gm_{ij-1}}, P_{om_{ij}}, S_{gm_{ij}}, P_{om_{ij+1}}, S_{gm_{ij+1}}) = 0.$$

Expandindo-se as funções de resíduos na iteração $(\nu + 1)$ em série de Taylor em torno de (ν) e retendo-se os termos de ordem inferior, estabelece-se o seguinte esquema iterativo de solução no nível de tempo $n + 1$:

– fraturas:

$$\begin{aligned}
 F_{f_i}^{(\nu+1)} &= F_{f_i}^{(\nu)} + \sum_{l=i-1}^{i+1} \left\{ \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_l}} \delta P_{o_l}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_l}} \delta S_{g_l}^{(\nu+1)} \right\} \\
 &+ \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{om_{ij}}} \delta P_{om_{ij}}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{gm_{ij}}} \delta S_{gm_{ij}}^{(\nu+1)} \right\} = 0, \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

- matriz:

$$F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu+1)} = F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu)} + \sum_{k=j-1}^{j+1} \left\{ \frac{\partial F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu)}}{\partial P_{om_{ik}}} \delta P_{om_{ik}}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu)}}{\partial S_{gm_{ik}}} \delta S_{gm_{ik}}^{(\nu+1)} \right\} \\ + \frac{\partial F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu)}}{\partial P_{oi}} \delta P_{oi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_{m_{ij}}}^{(\nu)}}{\partial S_{gi}} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} = 0 . \quad (4.71)$$

para $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, N_{\text{sub}}$ e $\nu = 0, 1, 2, \dots$

O sistema de equações lineares formado pelas equações (4.70) e (4.71) possui a estrutura tridiagonal em blocos mostrada em (4.38). As dimensões dos blocos neste caso são $2(N_{\text{sub}} + 1) \times 2(N_{\text{sub}} + 1)$, com as características de que as submatrizes a_{ff_i} , b_{ff_i} e c_{ff_i} , tem, como no caso convencional, dimensões de (2×2) e são definidas como as equações (4.40), (4.41) e (4.42) respectivamente. As demais submatrizes tem as seguintes dimensões:

$$a_{fm_i} : 2 \times N_{\text{sub}} ; \quad (4.72)$$

$$a_{mf_i} : N_{\text{sub}} \times 2 ; \quad (4.73)$$

$$a_{mm_i} : N_{\text{sub}} \times N_{\text{sub}} . \quad (4.74)$$

As submatrizes a_{fm_i} , a_{mf_i} e a_{mm_i} são definidas da seguinte maneira:

$$a_{fm_i} = \left[\bar{a}_{fm_{i1}}, \bar{a}_{fm_{i2}}, \dots, \bar{a}_{fm_{iN_{\text{sub}}}} \right] , \quad (4.75)$$

onde:

$$\bar{a}_{fm_{ij}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial F_{oi}}{\partial P_{om_{ij}}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial P_{om_{ij}}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gm_{ij}}} \end{array} \right] ; \quad (4.76)$$

e:

$$\bar{c}_{mm_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om_{ij}}}{\partial P_{om_{ij-1}}} & \frac{\partial F_{om_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}} \\ \frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial P_{om_{ij-1}}} & \frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}} \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Os subvetores de incógnitas, δX_i , e de funções de resíduo, F_i , são definidos como:

$$\delta X_i = \begin{bmatrix} \delta X_f \\ \delta X_m \end{bmatrix}_i, \quad (4.83)$$

e

$$F_i = \begin{bmatrix} F_f \\ F_m \end{bmatrix}_i \quad (4.84)$$

onde:

$$\delta X_{f_i} = [\delta P_{o_i} \quad \delta S_{g_i}]^T, \quad (4.85)$$

e:

$$\delta X_{m_i} = \left[\delta P_{om_{i1}} \delta S_{gm_{i1}} \dots \delta P_{om_{iN_{\text{sub}}}} \delta S_{gm_{iN_{\text{sub}}}} \right]^T. \quad (4.86)$$

De maneira similar:

$$F_{f_i} = [F_{o_i} \quad F_{g_i}]^T \quad (4.87)$$

e:

$$F_{m_i} = \left[F_{om_{i1}} \quad F_{gm_{i1}} \quad \dots \quad F_{om_{iN_{\text{sub}}}} \quad F_{gm_{iN_{\text{sub}}}} \right]^T. \quad (4.88)$$

O acoplamento das equações da matriz nas equações das fraturas, na formulação

com subdomínios, é feita de maneira similar à formulação convencional.

Para o nó i , o subsistema de equações dos blocos de matriz pode ser escrito como:

$$\alpha_{mm_i}^{(\nu)} \delta X_{m_i}^{(\nu+1)} + a_{mf_i} \delta X_{f_i}^{(\nu+1)} = -F_{m_i}^{(\nu)}, \quad (4.89)$$

e colocando-se as incógnitas da matriz em função das incógnitas das fraturas, vem:

$$\delta X_{m_i}^{(\nu+1)} = -a_{mf_i}^{*(\nu)} \delta X_{f_i}^{(\nu+1)} - F_{m_i}^{(\nu)}. \quad (4.90)$$

Os detalhes da solução expressa em (4.89) são apresentados no Apêndice G.

De maneira análoga às equações (4.56) e (4.57), podemos escrever para a subcélula j do nó i :

$$\delta P_{om_{ij}}^{(\nu+1)} = \alpha_{oo_{ij}}^{(\nu)} \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \alpha_{og_{ij}}^{(\nu)} \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} + \beta_{o_{ij}}^{(\nu)}, \quad (4.91)$$

e:

$$\delta S_{gm_{ij}}^{(\nu+1)} = \alpha_{go_{ij}}^{(\nu)} \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \alpha_{gg_{ij}}^{(\nu)} \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} + \beta_{g_{ij}}^{(\nu)}. \quad (4.92)$$

Substituindo-se as equações (4.91) e (4.92) na equação (4.70) e rearrumando-se,

temos:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial P_{o_i}} + \theta_{fo_i}^{(\nu)} \right] \delta P_{o_i}^{(\nu+1)} + \left[\frac{\partial F_{f_i}^{(\nu)}}{\partial S_{g_i}} + \theta_{fg_i}^{(\nu)} \right] \delta S_{g_i}^{(\nu+1)} \\ & + \sum_{l=i-1, i+1} \left\{ \frac{\partial F_{f_l}^{(\nu)}}{\partial P_{o_l}} \delta P_{o_l}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{f_l}^{(\nu)}}{\partial S_{g_l}} \delta S_{g_l}^{(\nu+1)} \right\} \\ & = -(F_{f_i}^{(\nu)} + \xi_{f_i}^{(\nu)}), \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde:

$$\theta_{oo_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \alpha_{oo_{ij}} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \alpha_{go_{ij}} \right\}, \quad (4.94)$$

$$\theta_{og_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \alpha_{og_{ij}} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \alpha_{gg_{ij}} \right\}, \quad (4.95)$$

$$\theta_{go_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \alpha_{oo_{ij}} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \alpha_{go_{ij}} \right\}, \quad (4.96)$$

$$\theta_{gg_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \alpha_{og_{ij}} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \alpha_{gg_{ij}} \right\}, \quad (4.97)$$

$$\xi_{o_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \beta_{o_{ij}} + \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \beta_{g_{ij}} \right\}, \quad (4.98)$$

$$\xi_{g_i} = \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} \left\{ \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_{ij}}} \beta_{o_{ij}} + \frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} \beta_{g_{ij}} \right\}. \quad (4.99)$$

A equação (4.93) e a equação (4.58) possuem a mesma estrutura, estando a diferença nos elementos acoplados.

O esquema matricial para o nó i é o mesmo da equação (4.65) e o processo iterativo de Newton-Raphson é feito da mesma maneira que na formulação convencional. Conhecendo-se as incógnitas das fraturas, as equações (4.91) e (4.92) são utilizadas para encontrar as incógnitas da matriz. A solução do processo iterativo acontece quando as incógnitas da matriz e das fraturas são menores que a tolerância estipulada.

O Apêndice B contém as formas expandidas das funções de resíduos para este caso. No Apêndice D são encontrados os termos de fluxo matriz-fratura. Os termos da

Capítulo 5

Validação

A validação do simulador desenvolvido, foi realizada para a formulação convencional, comparando-se com a solução analítica de Warren e Root [28] para um sistema infinito. A solução se aplica ao comportamento transiente de um sistema com geometria radial.

O problema de Warren e Root foi resolvido no campo de Laplace e invertido para o campo real usando as assíntotas das funções de Bessel.

Os dados utilizados na validação são apresentados na Tab. 5.1. O raio externo do reservatório utilizado foi bastante grande para minimizar os efeitos de fronteira. A fronteira externa foi considerada fechada ao fluxo e calculou-se o declínio da pressão na fronteira interna, devido a produção com vazão constante.

Os resultados obtidos para blocos de matriz em forma de cubo, com as dimensões de 5 e 20 m estão mostrados nas figuras (5.1) e (5.2), respectivamente.

Nas figuras (5.1) e (5.2) observamos que houve uma boa concordância entre as soluções analítica e numérica. Outros testes foram feitos e mostraram resultados semelhantes. De acordo com estes resultados, consideramos o simulador desenvolvido como validados para a formulação convencional de reservatórios de dupla porosidade, para a situação descrita por Warren e Root [28].

Raio do poço, <i>m</i>	0,1036
Espessura, <i>m</i>	100
Dimensão da matriz, <i>m</i>	5 e 20
Pressão inicial, <i>MPa</i>	24
Vazão de óleo, <i>m³/dia</i>	5000
Permeabilidade da fratura, <i>m²</i>	$9,869233 \times 10^{-3}$
Porosidade da fratura, <i>fração</i>	0,005
Compressibilidade da fratura, <i>MPa⁻¹</i>	$1,062 \times 10^{-1}$
Permeabilidade da matriz, <i>m²</i>	$9,869233 \times 10^{-6}$
Porosidade da matriz, <i>fração</i>	0,142
Compressibilidade da matriz, <i>MPa⁻¹</i>	$1,062 \times 10^{-1}$
Viscosidade do óleo, <i>Pa.s</i>	$0,8 \times 10^{-3}$
Fator volume de formação do óleo	1,24
Nº de células	30
Passo de tempo máximo, <i>dia</i>	20
Passo de tempo mínimo, <i>dia</i>	1×10^{-8}
Varição de saturação máxima, <i>fração</i>	0,05
Varição de pressão máxima, <i>MPa</i>	0,1378

Tabela 5.1: Dados utilizados nas simulações para validação

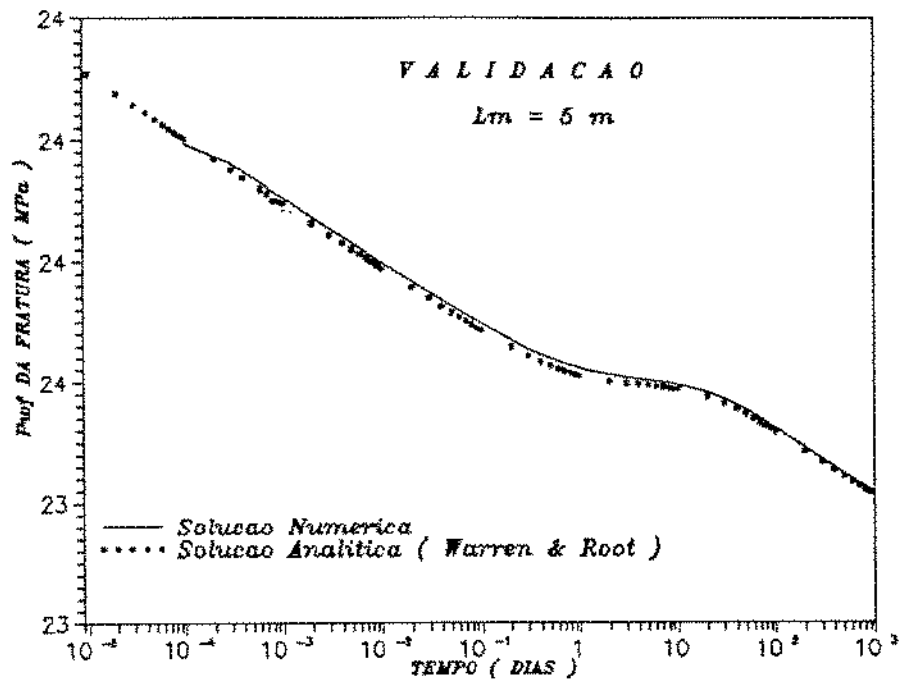


Figura 5.1: P_{wf} vs. Tempo

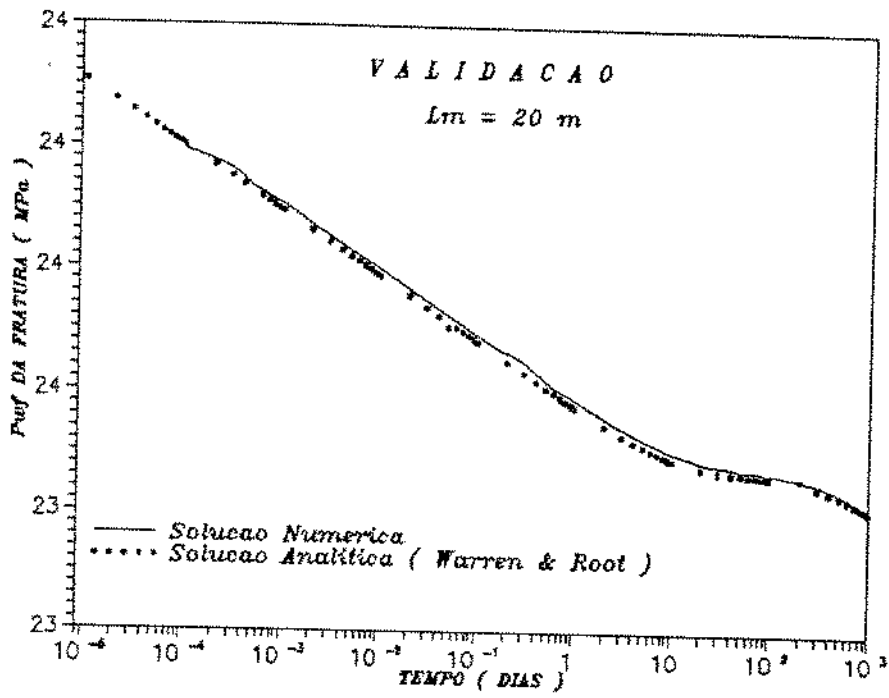


Figura 5.2: P_{wf} vs. Tempo

Capítulo 6

Comparação dos Modelos – Convencional e de Subdomínios – Resultados

Várias simulações foram realizadas comparando as formulações convencional e de subdomínios. Os dados básicos de rocha e fluidos são apresentados na Tabela (6.1). As propriedades PVT do óleo e do gás estão nas Tabelas (6.2) e (6.3) respectivamente. Os dados de permeabilidade relativa e pressão capilar da matriz estão na Tabela (6.4) e os da fratura estão na Tabela (6.5).

6.1 Formulação Convencional versus Formulação com Subdomínios

Para enfatizar as diferenças nos resultados, quando usamos a formulação convencional e a formulação com subdomínios, várias simulações foram realizadas para um reservatório linear, nos casos horizontal e vertical. Para esta análise, não usamos a formulação de subdomínios com a opção de fluidos segregados nas fraturas, pois esta formulação foi elaborada apenas para o caso do reservatório horizontal e não se aplica ao caso do reservatório vertical.

O bloco de matriz foi considerado em forma de cubo e foi utilizado o fator de forma de Kazemi *et alii* [14].

A transferência de fluidos foi considerada através de todas as faces do bloco para

Dados de Rocha e Fluidos	
Porosidade da matriz, <i>fração</i>	0,147
Permeabilidade absoluta da matriz, m^2	$9,869233 \times 10^{-16}$
Compressibilidade da matriz, MPa^{-1}	$7,25 \times 10^{-4}$
Saturação de água irreduzível na matriz, <i>fração</i>	0
Porosidade das fraturas, <i>fração</i>	0,02
Permeabilidade absoluta das fraturas, m^2	$9,869233 \times 10^{-13}$
Compressibilidade das fraturas, MPa^{-1}	$7,25 \times 10^{-4}$
Saturação de água irreduzível nas fraturas, <i>fração</i>	0
Densidade do óleo relativa à água, <i>adimensional</i>	0,8
Densidade do gás relativo ao ar, <i>adimensional</i>	0,65
Dados do Poço	
Pressão de fluxo de fundo mínima, MPa	8,5
Vazão de óleo para abandono, m^3/dia	50

Tabela 6.1: Dados Básicos

Pressão (MPa)	μ_o (Pa.s)	B_o (m ³ /m ³)	R_s (m ³ /m ³)
0,0	$1,0400 \times 10^{-3}$	1,0620	0,178
1,72	$0,9750 \times 10^{-3}$	1,1500	16,117
3,45	$0,9100 \times 10^{-3}$	1,2070	32,057
6,89	$0,8300 \times 10^{-3}$	1,2950	66,073
13,79	$0,6950 \times 10^{-3}$	1,4350	113,268
17,24	$0,6410 \times 10^{-3}$	1,5000	138,023
18,96	$0,6175 \times 10^{-3}$	1,5325	151,825
20,68	$0,6290 \times 10^{-3}$	1,5267	151,825
27,58	$0,6750 \times 10^{-3}$	1,5035	151,825

Tabela 6.2: Propriedades PVT do óleo

Pressão (MPa)	μ_g (Pa.s)	B_g (m ³ /m ³)
0,0	$0,0080 \times 10^{-3}$	0,935800
1,38	$0,0096 \times 10^{-3}$	0,067902
3,45	$0,0112 \times 10^{-3}$	0,035228
6,89	$0,0140 \times 10^{-3}$	0,017951
13,79	$0,0189 \times 10^{-3}$	0,009063
17,24	$0,0208 \times 10^{-3}$	0,007266
20,68	$0,0228 \times 10^{-3}$	0,006064
27,58	$0,0268 \times 10^{-3}$	0,004554

Tabela 6.3: Propriedades PVT do Gás

S_{gm} (fração)	kr_{ogm}	kr_{gm}	P_{cgom} (MPa)
0,0	1,00	0,0	0,0
0,04	0,60	0,0	0,013652
0,10	0,33	0,0220	0,041437
0,20	0,10	0,1000	0,068189
0,30	0,02	0,2400	0,088942
0,40	0,0	0,3400	0,170301
0,50	0,0	0,4200	0,697060
0,60	0,0	0,5000	0,756355
0,70	0,0	0,8125	0,776350
0,78	0,0	1,0	0,802550
1,0	0,0	1,0	0,832197

Tabela 6.4: Dados de Permeabilidade Relativa e Pressão Capilar da Matriz

S_g (fração)	kr_{og}	kr_g	P_{cgo} (MPa)
0,0	1,0	0,0	0,0
0,5	0,5	0,5	0,0
1,0	0,0	1,0	0,0

Tabela 6.5: Dados de Permeabilidade Relativa e Pressão Capilar das Fraturas

as duas formulações utilizadas. Os dados adicionais utilizados no exemplo apresentado encontram-se na Tab. (6.6).

Dados Geométricos	
Largura do reservatório, m	80
Espessura do reservatório, m	80
Comprimento do reservatório, m	800
Dimensão do bloco de matriz, m	20

Tabela 6.6: Dados Geométricos para Comparação das Formulações Convencional e de Subdomínios

Nos casos apresentados, o reservatório foi submetido a um período inicial de produção a vazão constante até alcançar uma pressão mínima no poço. A partir deste instante, a pressão foi mantida constante até que alcançasse a vazão de abandono. Dois valores de vazão inicial foram utilizados para cada inclinação do reservatório, ou seja, $500 \text{ m}^3/\text{dia}$ e $100 \text{ m}^3/\text{dia}$.

O reservatório foi discretizado com 10 células na direção horizontal, para o caso horizontal, e com o mesmo número de células na direção vertical, para o caso vertical. O bloco representativo de matriz foi discretizado com 10 subcélulas na direção vertical para os dois casos.

Os resultados do caso horizontal, com vazão inicial de $500 \text{ m}^3/\text{dia}$, estão apresentados nas figuras (6.1) a (6.4) e, com vazão inicial de $100 \text{ m}^3/\text{dia}$, estão nas figuras (6.5) a (6.8).

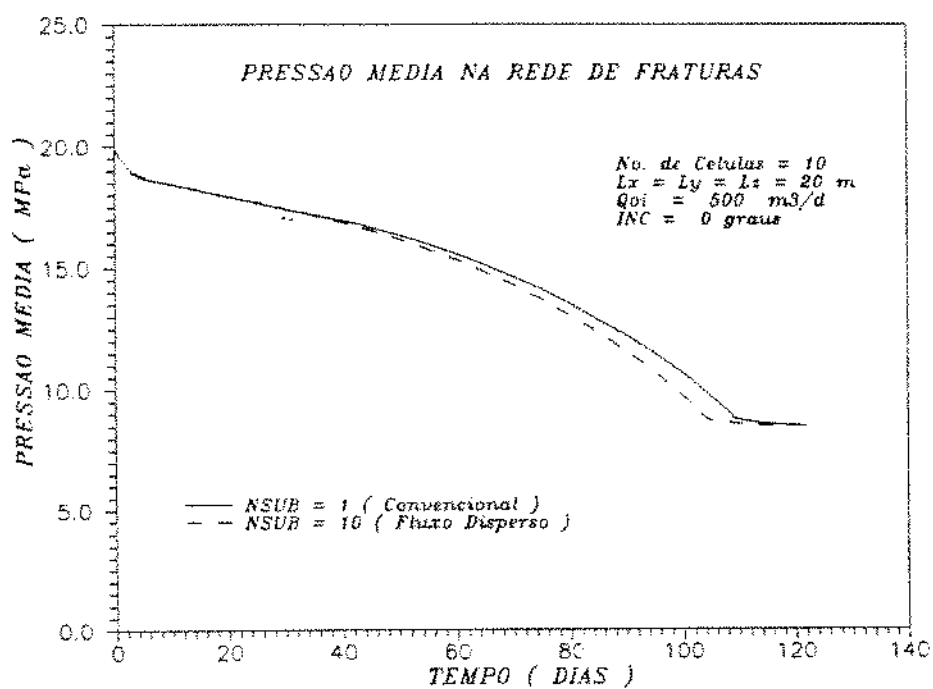


Figura 6.1: Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo

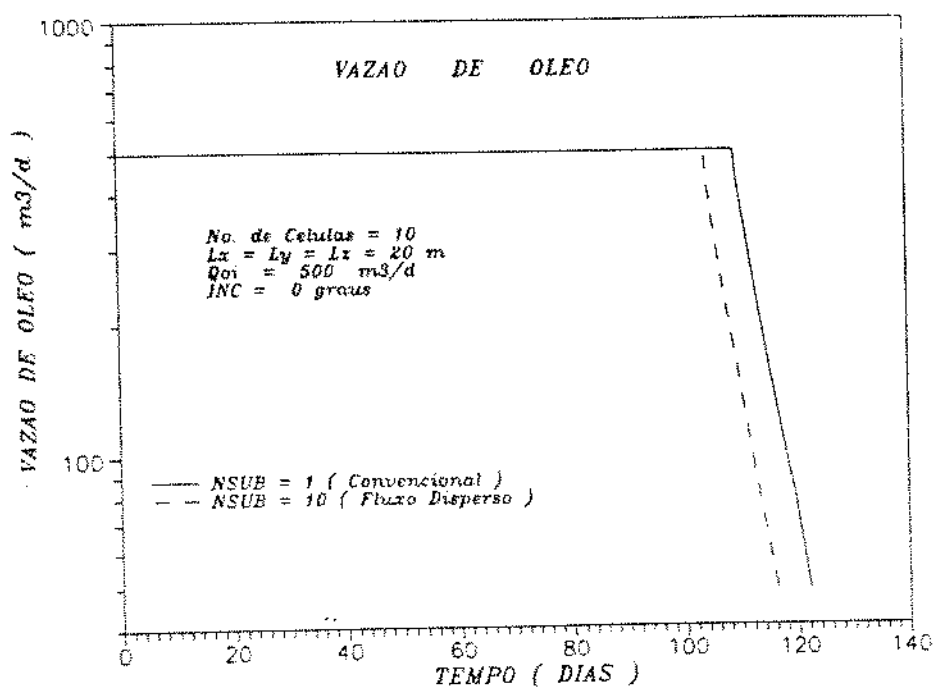


Figura 6.2: Vazão de Óleo vs. Tempo

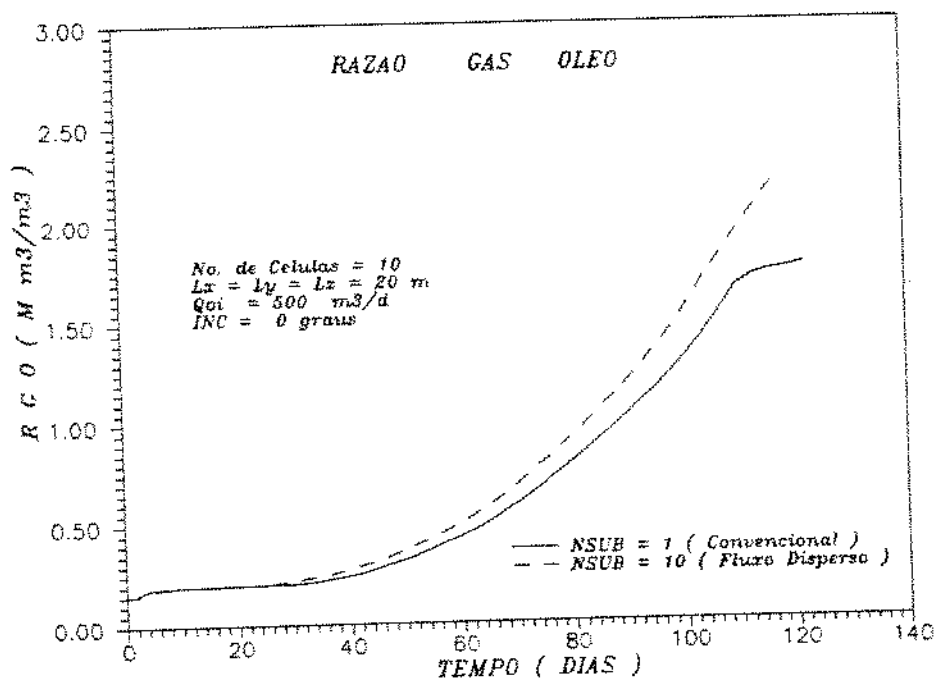


Figura 6.3: RGO vs. Tempo

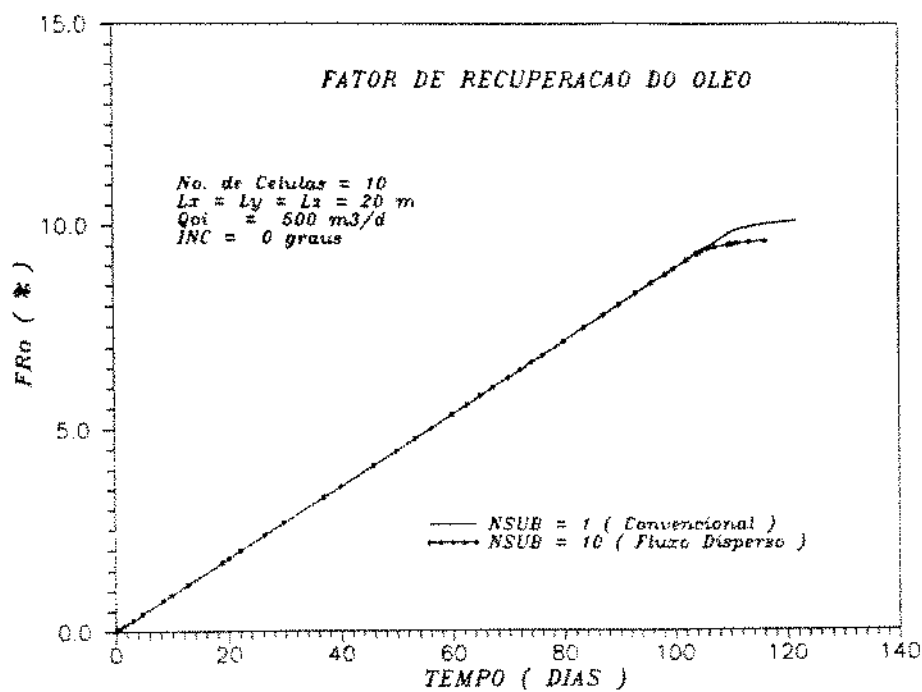


Figura 6.4: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

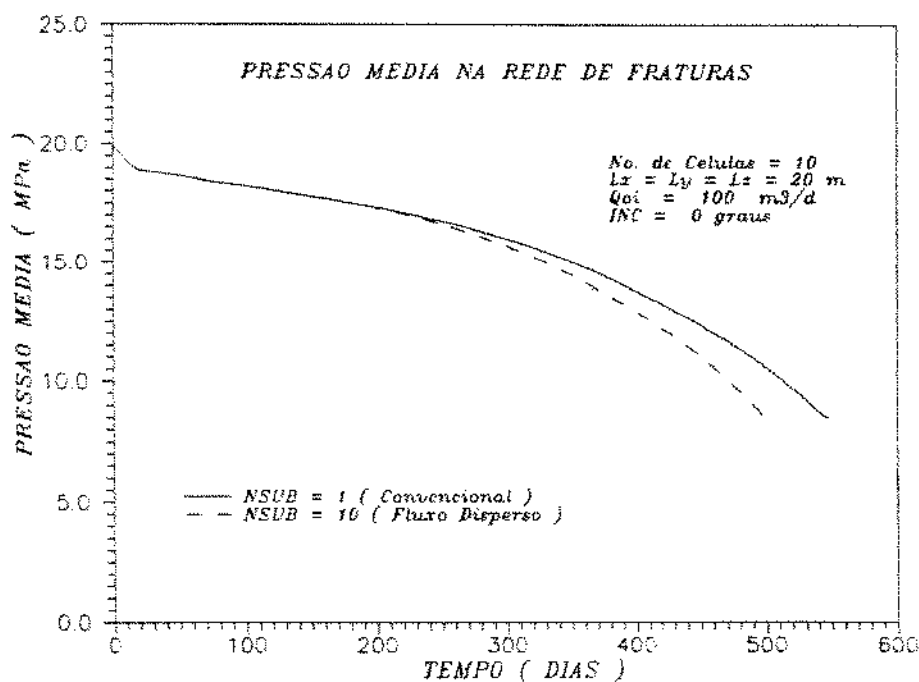


Figura 6.5: Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo

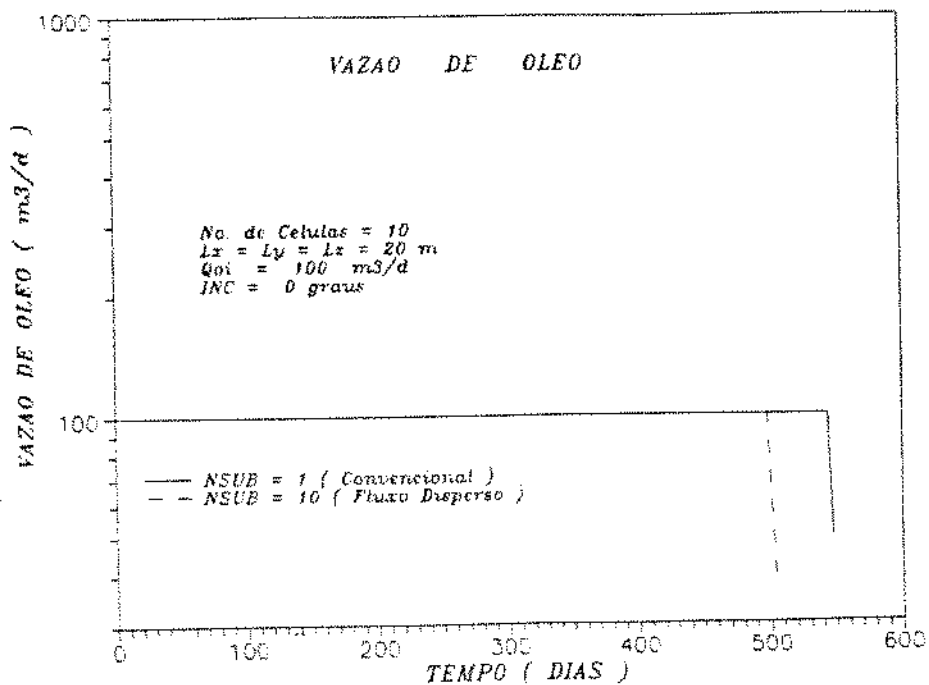


Figura 6.6: Vazão de óleo vs. Tempo

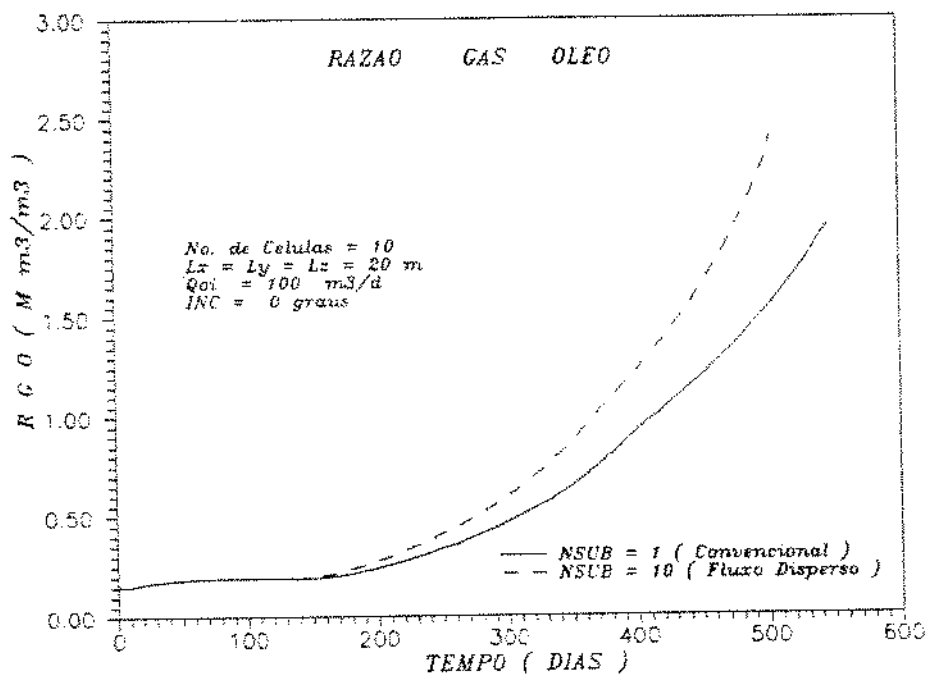


Figura 6.7: RGO vs. Tempo

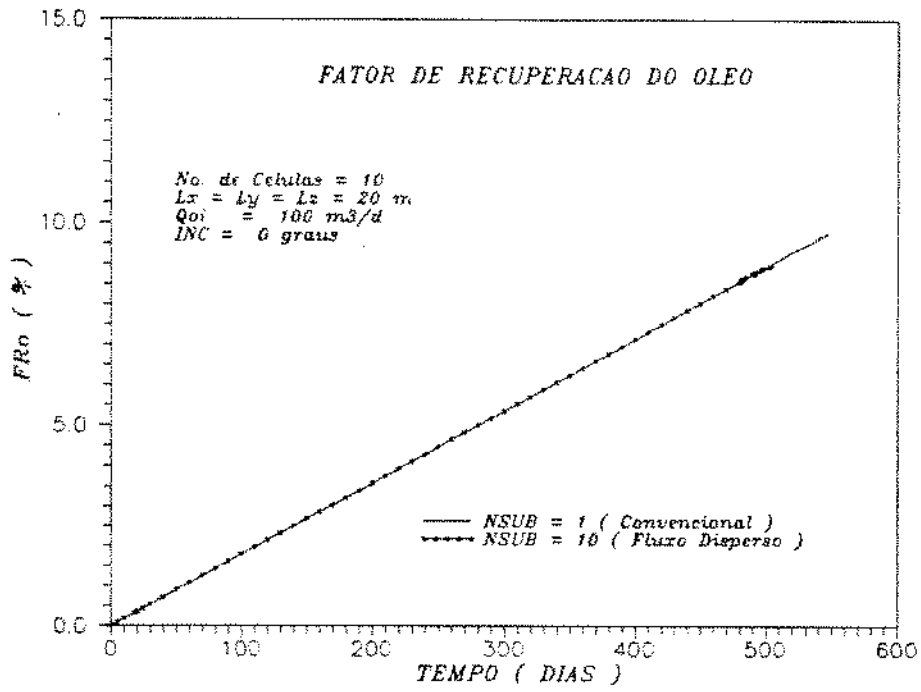


Figura 6.8: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

De acordo com os resultados, percebe-se que a formulação convencional apresenta um desempenho mais otimista do reservatório. Considerando a formulação com subdomínios, onde o bloco de matriz é discretizada e a área de cada subcélula para o cálculo de transferência de fluidos matriz-fratura é menor do que no caso convencional onde é usada a área total da face do bloco, como mais representativa da física do problema, há uma diferença no fator de recuperação do óleo de aproximadamente 8%, para o caso de vazão inicial de $500 \text{ m}^3/\text{dia}$, Fig. (6.4), e de 10,5% para o caso da vazão inicial de $100 \text{ m}^3/\text{dia}$, Fig. (6.8), quando o reservatório é horizontal. As figuras (6.1), (6.5), (6.2), (6.6), (6.3) e (6.7) mostram que as diferenças são mais acentuadas para o caso de vazão mais baixa.

No caso vertical, os resultados estão apresentados nas figuras (6.9) a (6.12), para vazão inicial de $500 \text{ m}^3/\text{dia}$, e nas figuras (6.13) a (6.16), para vazão inicial de $100 \text{ m}^3/\text{dia}$.

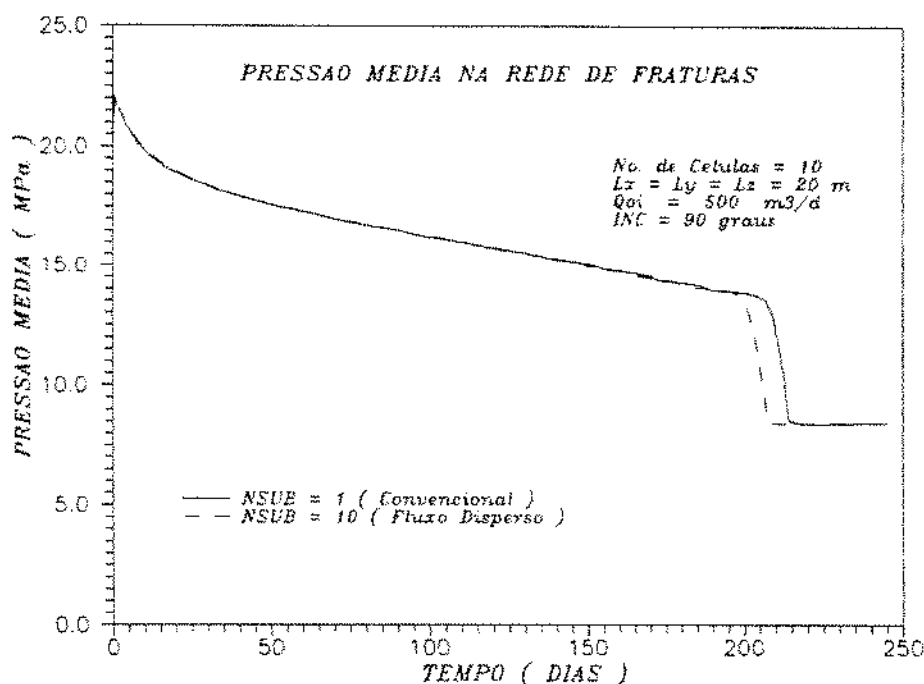


Figura 6.9: Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo

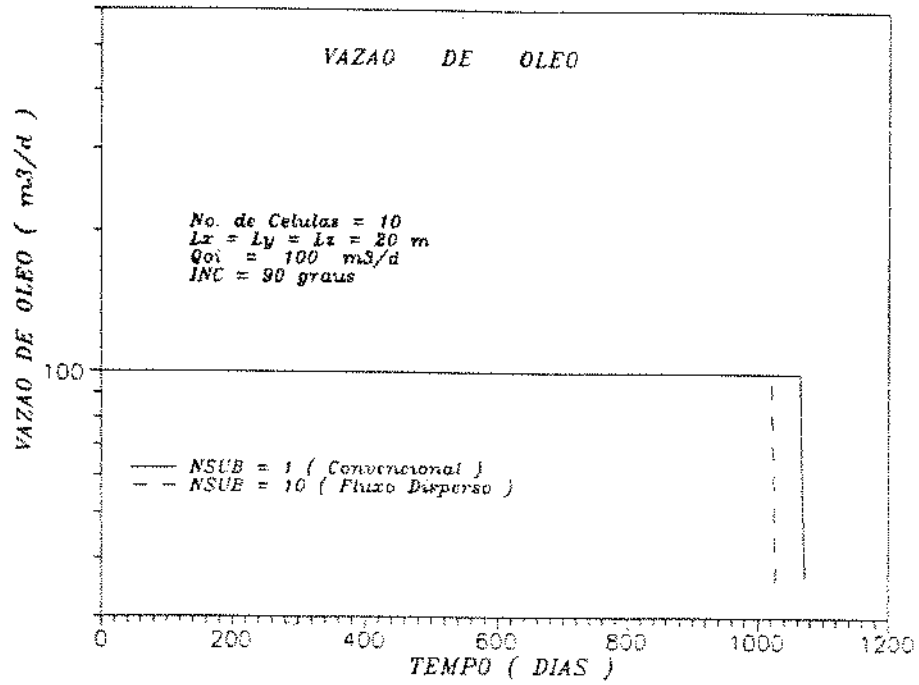


Figura 6.10: Vazão de Óleo vs. Tempo

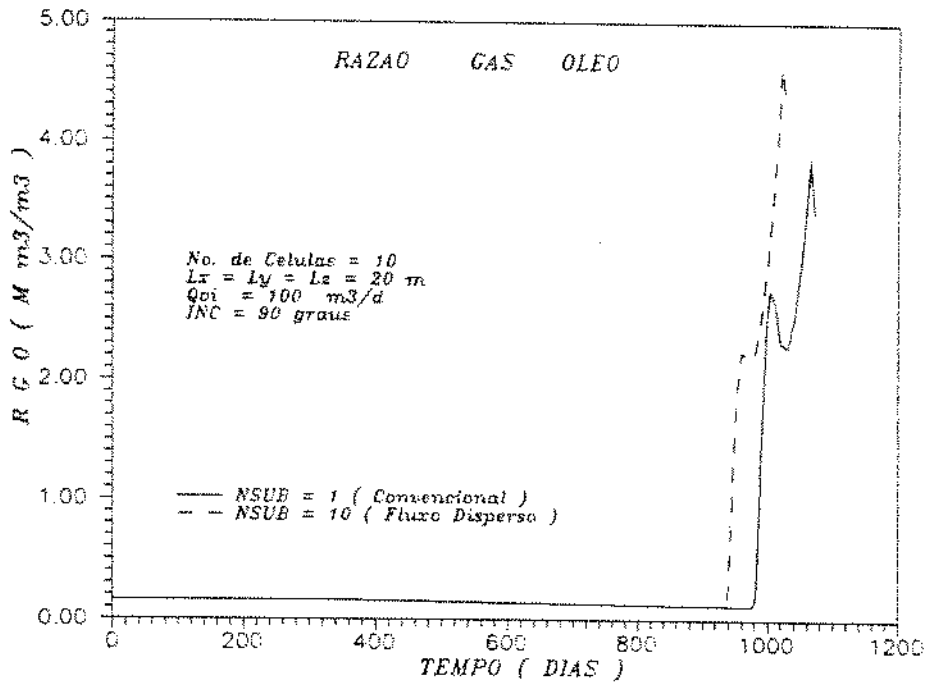


Figura 6.11: RGO vs. Tempo

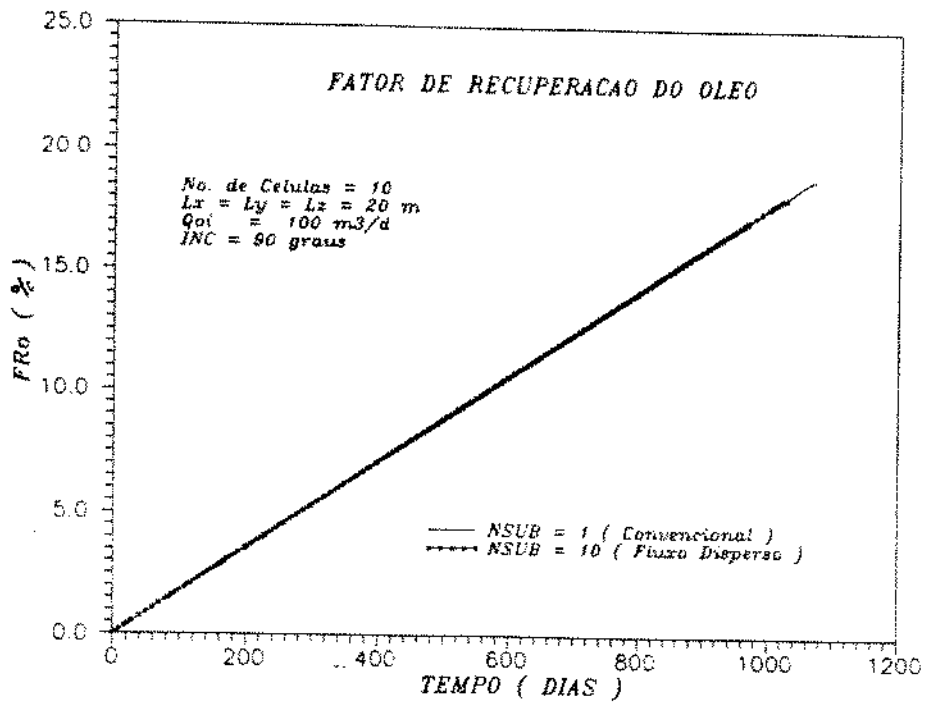


Figura 6.12: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

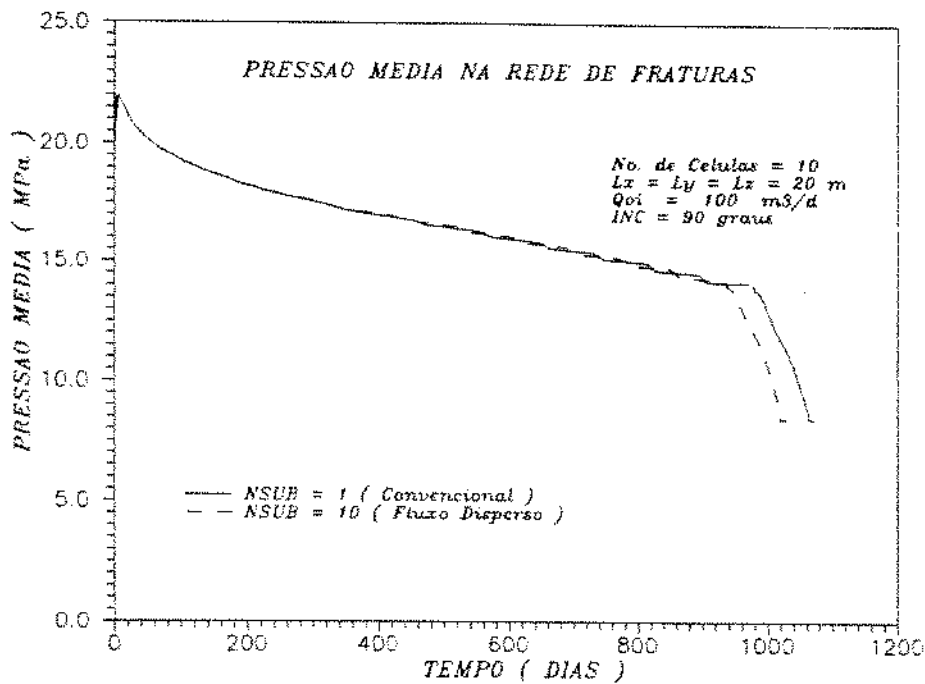


Figura 6.13: Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo

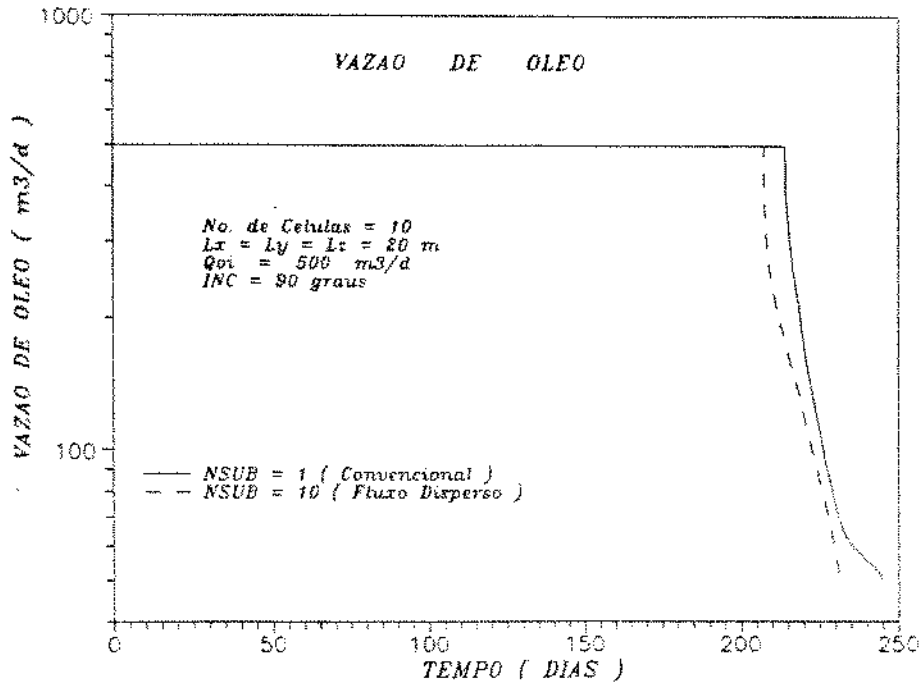


Figura 6.14: Vazão de Óleo vs. Tempo

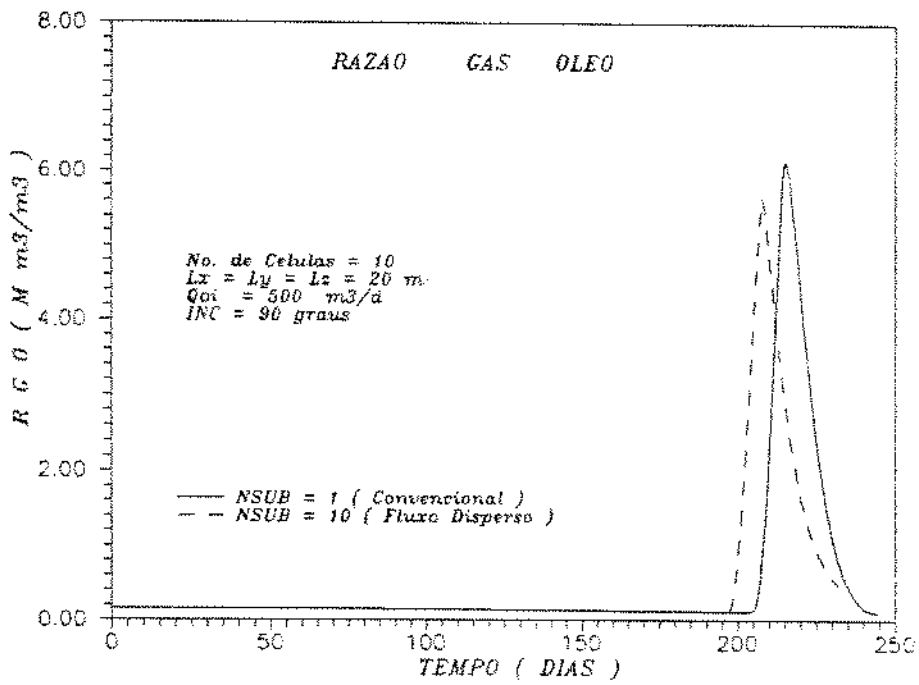


Figura 6.15: RGO vs. Tempo

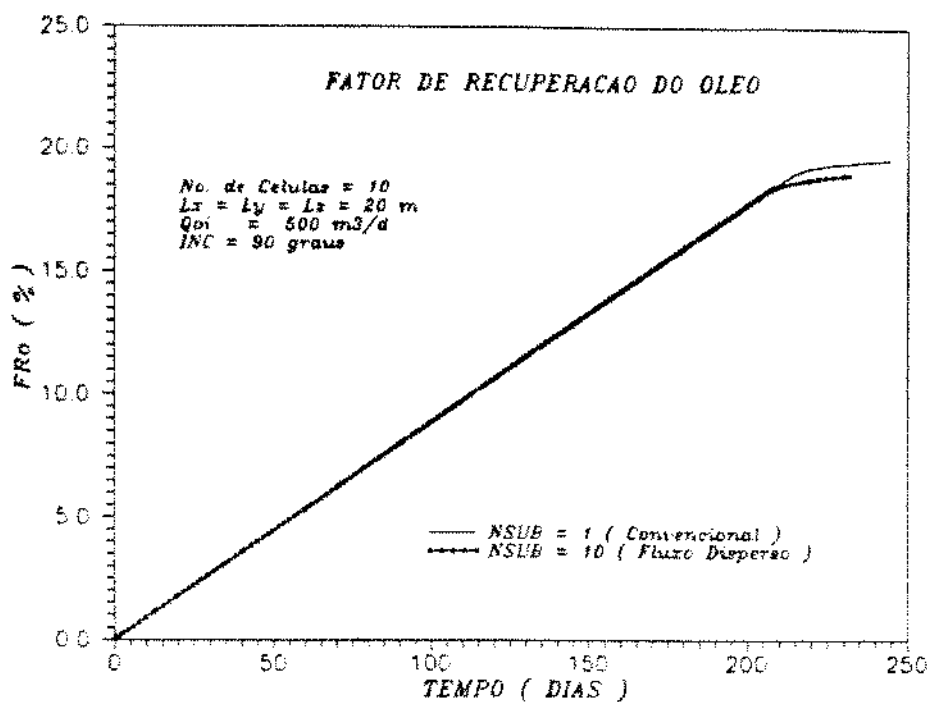


Figura 6.16: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

Para este problema, as diferenças entre as respostas das duas formulações é bem menos acentuada. Com os dois valores de vazão inicial, as diferenças no fator de recuperação do óleo estão em torno de 4% a 5%, Figs. (6.12) e (6.16). A pressão média na rede de fraturas, Figs. (6.9) e (6.13), apresenta um declínio menos acentuado em relação ao caso horizontal, e uma queda brusca quando o gás começa a ser produzido. A razão gás-óleo se mantém baixa durante quase todo o tempo de produção, Figs. (6.11) e (6.15), devido a segregação do gás. Quando não é mais possível impedir a produção do gás livre, há um aumento brusco da RGO. Isto acontece ainda no período de vazão constante, Figs. (6.10) e (6.14).

As diferenças entre o fator de recuperação do caso horizontal com o caso vertical ficaram em torno de 100% ou mais. Esta diferença resulta do mecanismo de segregação gravitacional que é adicionado ao mecanismo de gás em solução, permitindo uma melhor manutenção da pressão ao longo do reservatório.

6.2 Comportamento do Reservatório Considerando as Diversas Formulações

Para as análises deste item, considerou-se que a transferência de fluidos matriz-fratura ocorria apenas ao longo das faces verticais, e o fator de forma foi adaptado para esta situação, conforme descrito no Apêndice F. Esta mudança se fez necessária para colocar as formulações convencional e de subdomínios com a opção de fluxo disperso na fratura, na mesma situação básica da formulação de subdomínios com opção de fluxo segregado na fratura.

Os casos apresentados foram para reservatórios horizontais e com a altura do bloco de matriz igual a altura da célula do simulador, como exige a formulação de fluxo segregado. O reservatório foi discretizado com 10 células na direção horizontal e o bloco representativo de matriz foi discretizado com 10 subcélulas na direção vertical.

Os resultados são para dois casos de blocos com tamanhos diferentes. Os dados adicionais encontram-se na tabelas (6.7) e (6.8).

Dados Geométricos	
Largura do reservatório, m	80
Espessura do reservatório, m	80
Comprimento do reservatório, m	800
Dimensão do bloco de matriz, m	80

Tabela 6.7: Caso 1 - Dados Geométricos

O período de produção foi considerado da mesma maneira que no item anterior, com um período inicial de vazão constante até que uma pressão mínima no poço seja alcançada, e daí com pressão constante até alcançar a vazão de abandono.

Foram considerados os mesmos valores de vazão inicial e, com os resultados obtidos, constatações interessantes foram feitas.

Dados Geométricos	
Largura do reservatório, m	3
Espessura do reservatório, m	3
Comprimento do reservatório, m	30
Dimensão do bloco de matriz, m	3

Tabela 6.8: Caso 2 - Dados Geométricos

Caso 1 :

Os resultados estão apresentados nas figuras (6.17) a (6.20), para vazão inicial de $500 \text{ m}^3/\text{dia}$, e nas figuras (6.21) a (6.24), para o outro valor de vazão.

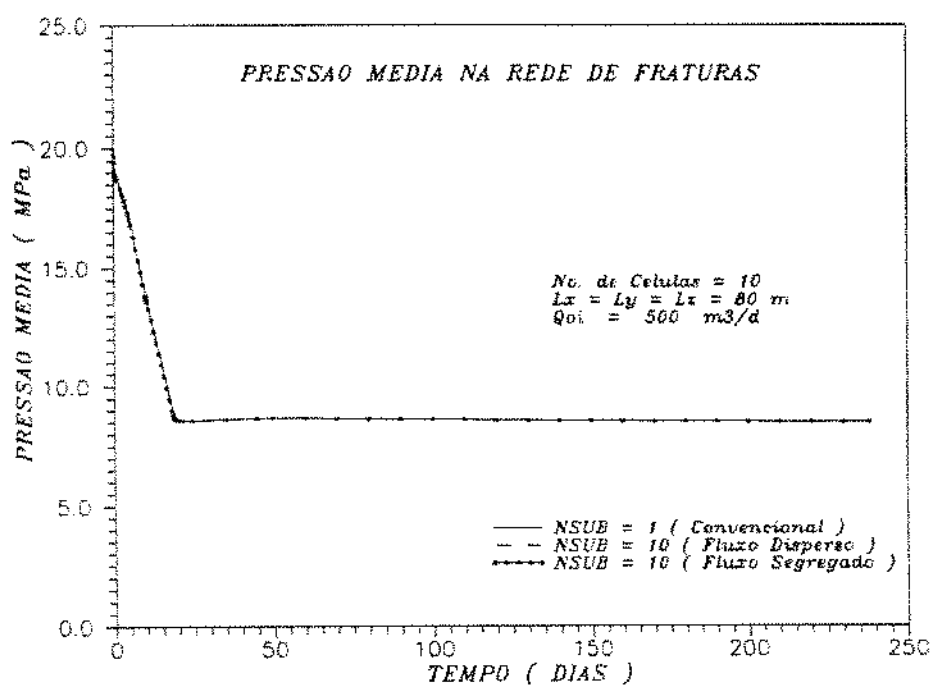


Figura 6.17: Pressão Média na Rede de Fraturas vs. Tempo

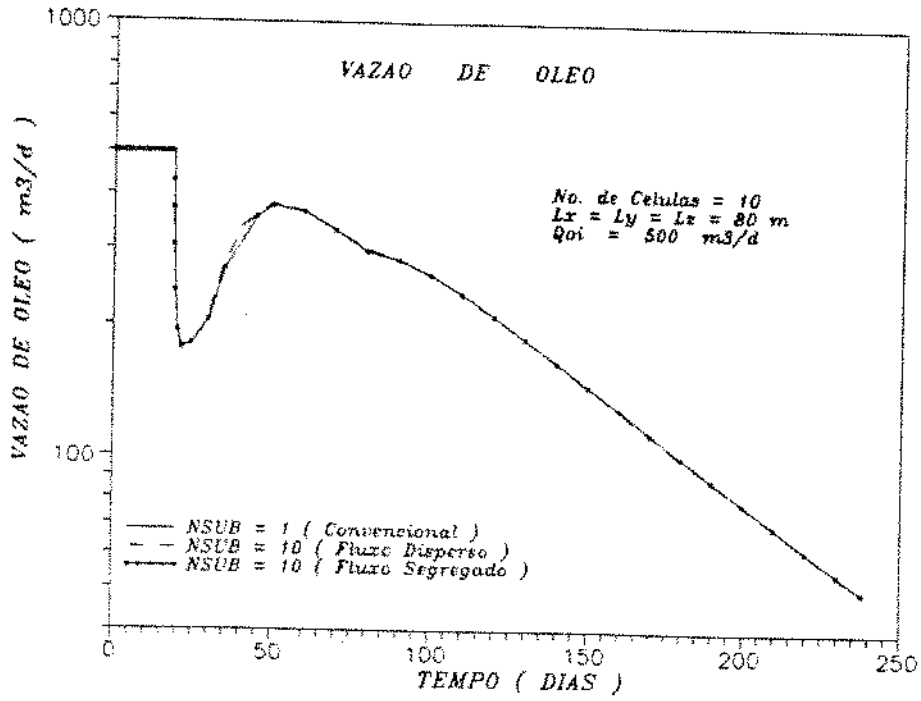


Figura 6.18: Vazão de Óleo vs. Tempo

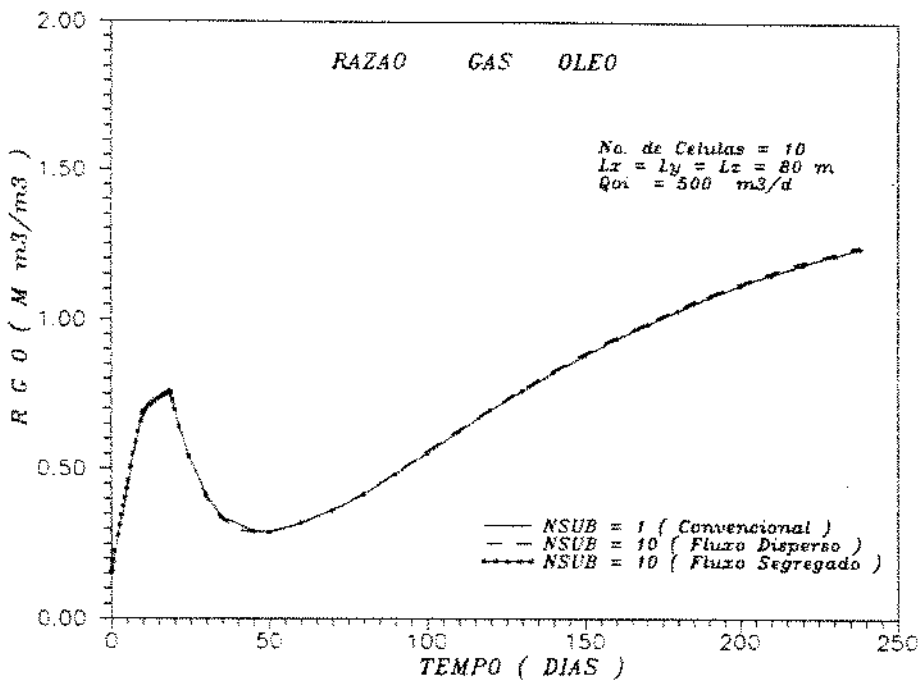


Figura 6.19: RGO vs. Tempo

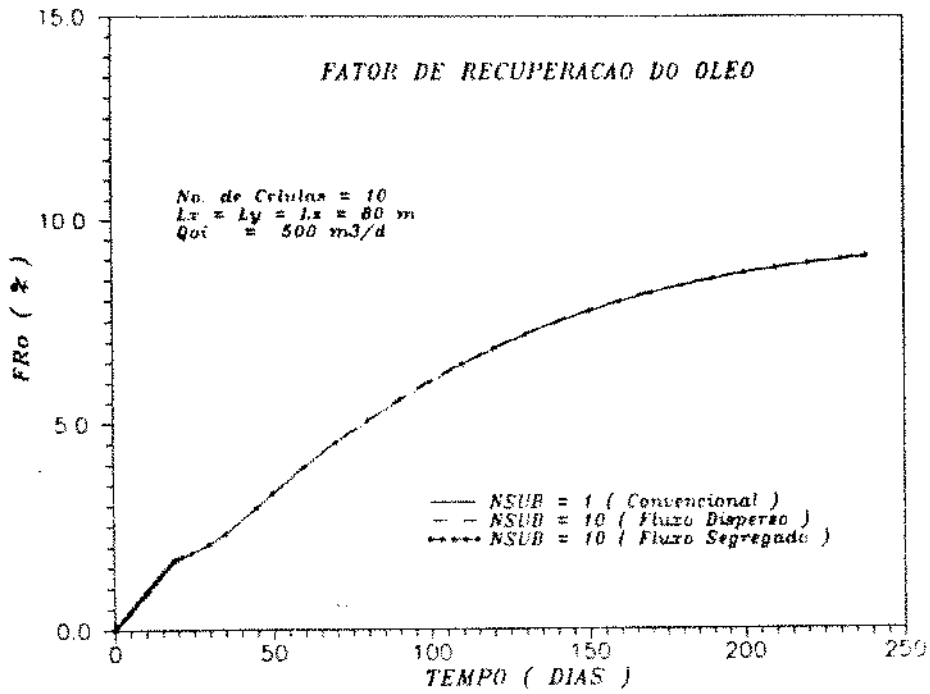


Figura 6.20: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

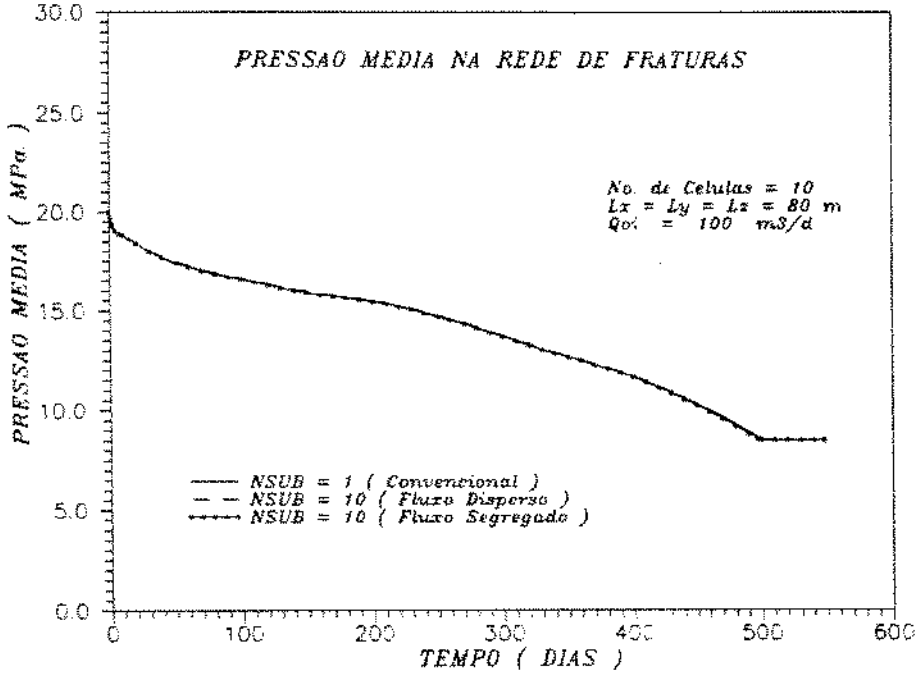


Figura 6.21: Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo

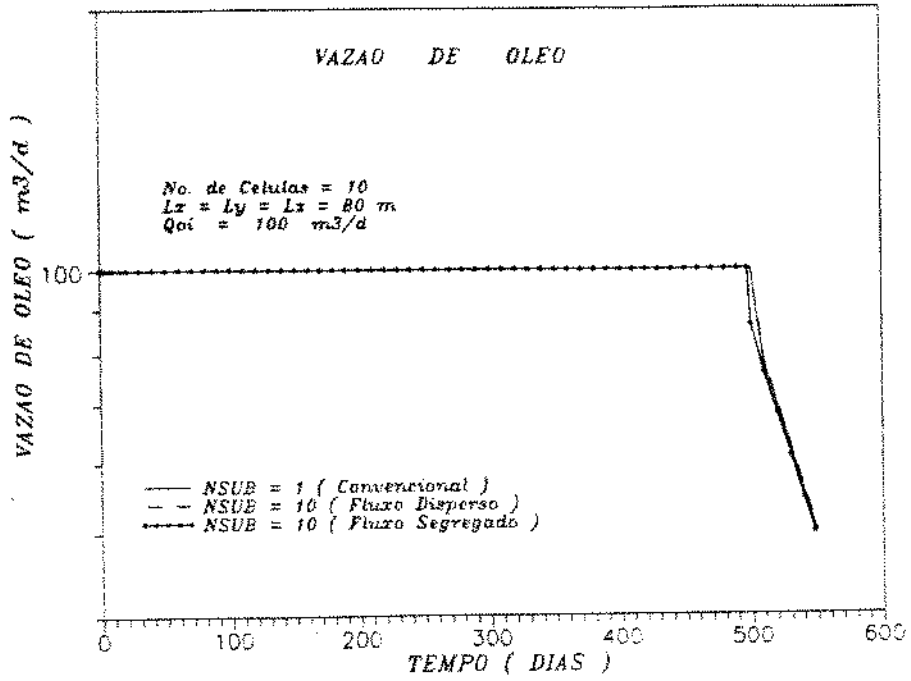


Figura 6.22: Vazão de Óleo vs. Tempo

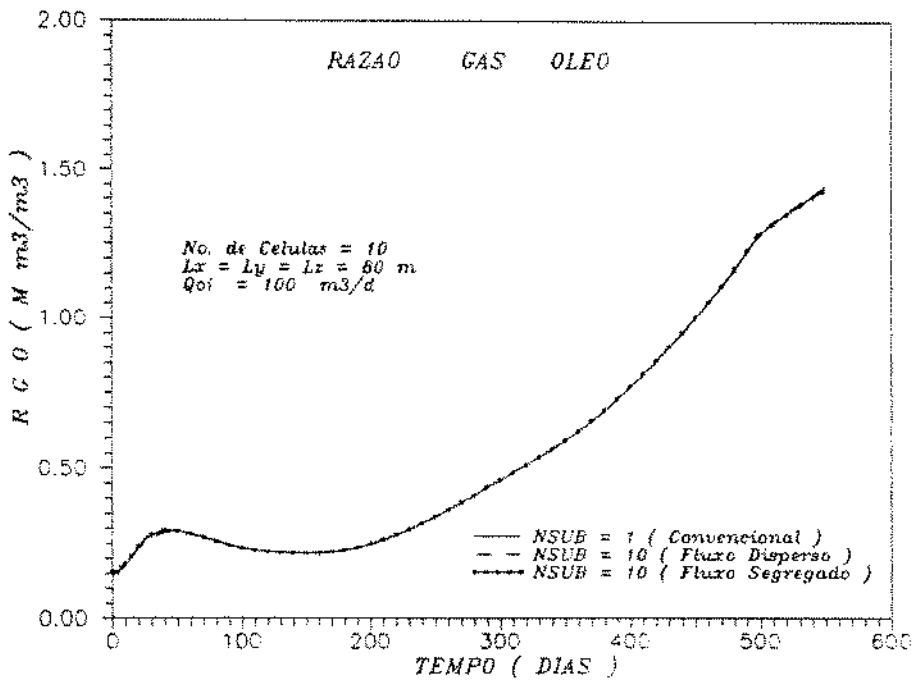


Figura 6.23: RGO vs. Tempo

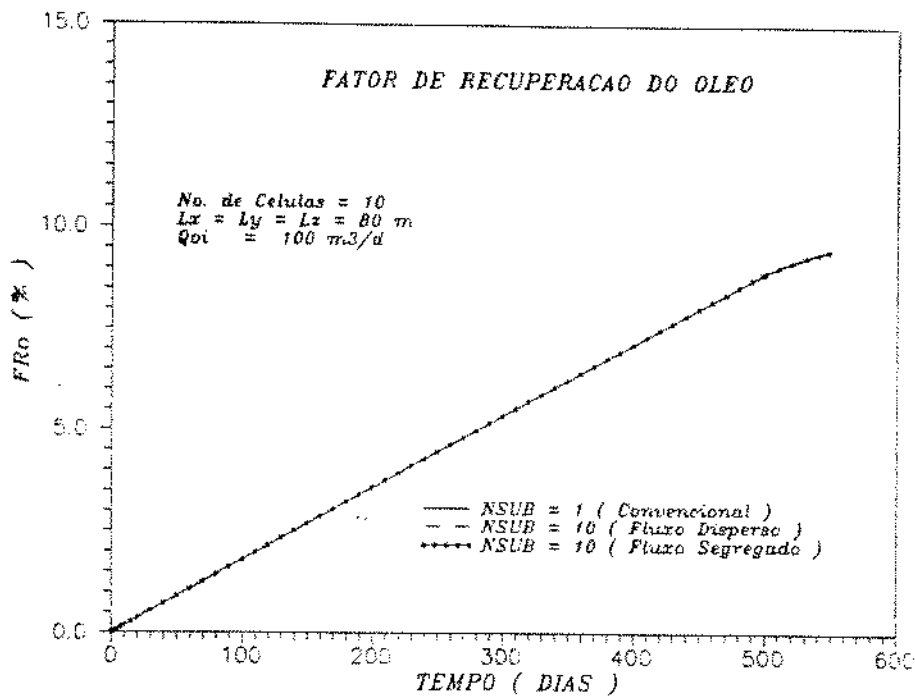


Figura 6.24: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

Neste caso, onde o bloco de matriz é maior, foi observado que o período de vazão constante é bem curto quando a vazão inicial é mais alta. A partir do momento em que a pressão de fluxo se torna constante, há uma queda brusca da vazão, Fig. (6.18), que logo depois volta a subir e então declina de maneira menos acentuada. Este comportamento está diretamente ligado ao tamanho do bloco e ao valor da vazão de produção utilizado. Outras situações foram investigadas e foi observado o mesmo comportamento para blocos grandes. Não foi determinado qual seria o valor ótimo de vazão em relação ao tamanho do bloco de matriz. Os resultados observados decorreram do fato da interação matriz-fratura para blocos grandes ser mais lenta, em termos relativos, do que para blocos pequenos. Quando a pressão de fluxo torna-se constante, o óleo existente nas fraturas é rapidamente produzido e, depois de um certo período em que as condições do reservatório tendem a se

equilibrar, a matriz torna a alimentar as fraturas, causando um aumento na produção de óleo que, logo após, começa a declinar com uma taxa de declínio menor do que no período inicial.

Esta característica ocorre para vazões até determinados valores. Se o valor da vazão inicial estiver abaixo do ponto mínimo visto na figura (6.18), logo após o período de vazão constante, este comportamento não é observado, como na figura (6.22), onde a vazão inicial é de $100 \text{ m}^3/\text{d}$. Neste caso, a interação matriz-fratura é mais equilibrada e o período de vazão constante é maior. A pressão média nas fraturas cai suavemente, conforme indica a Fig. (6.21) e a RGO, mostrada na Fig. (6.23), não apresenta variações bruscas.

Caso 2 :

Os resultados estão mostrados nas figuras (6.25) a (6.28), para a vazão inicial de $500 \text{ m}^3/\text{dia}$, e nas figuras (6.29) a (6.32), para a vazão de $100 \text{ m}^3/\text{dia}$.

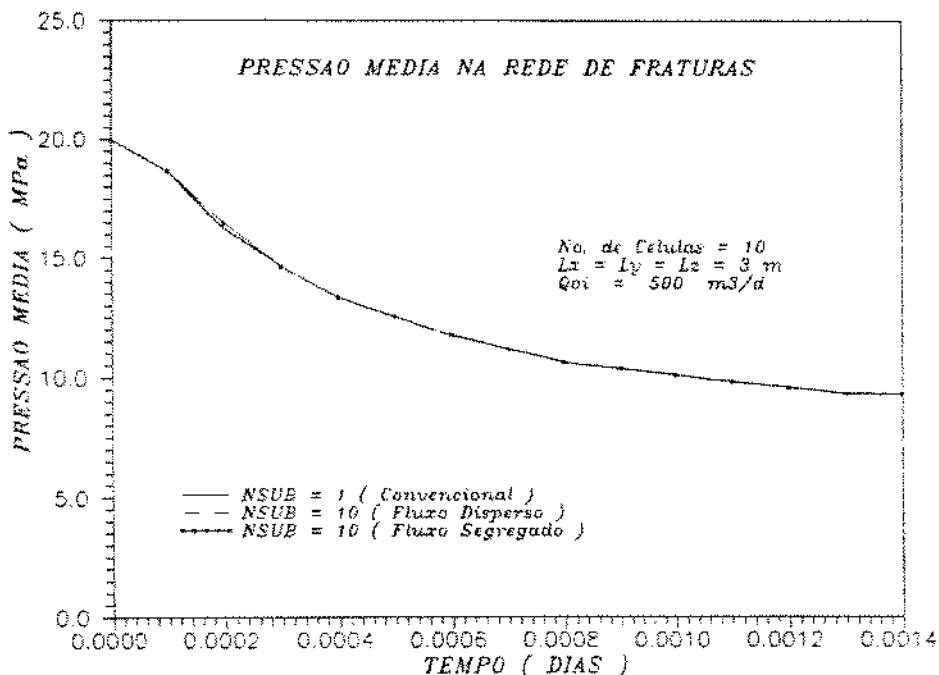


Figura 6.25: Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo

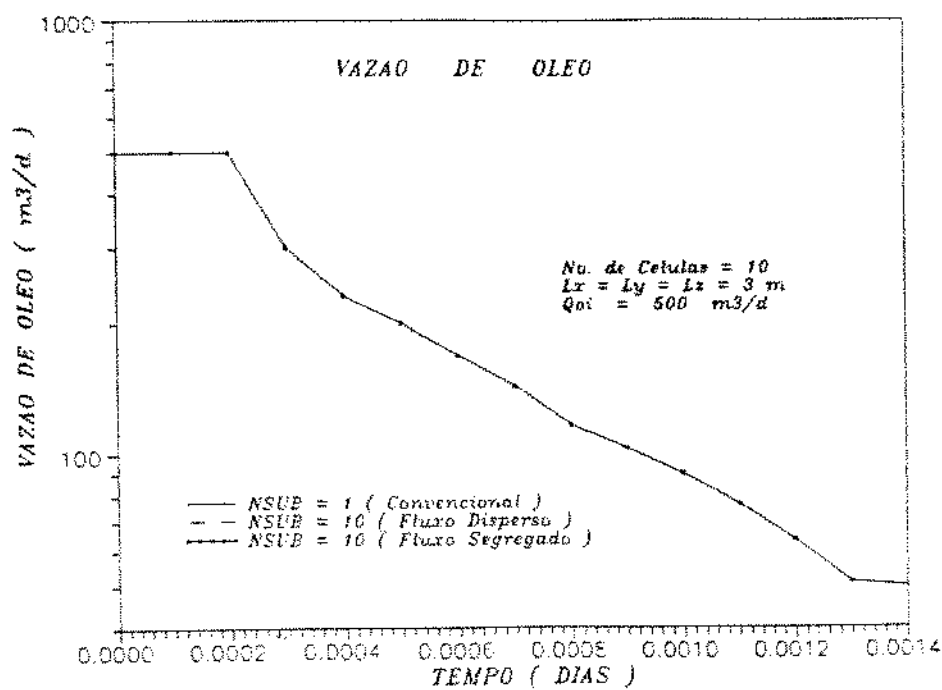


Figura 6.26: Vazão de Óleo vs Tempo

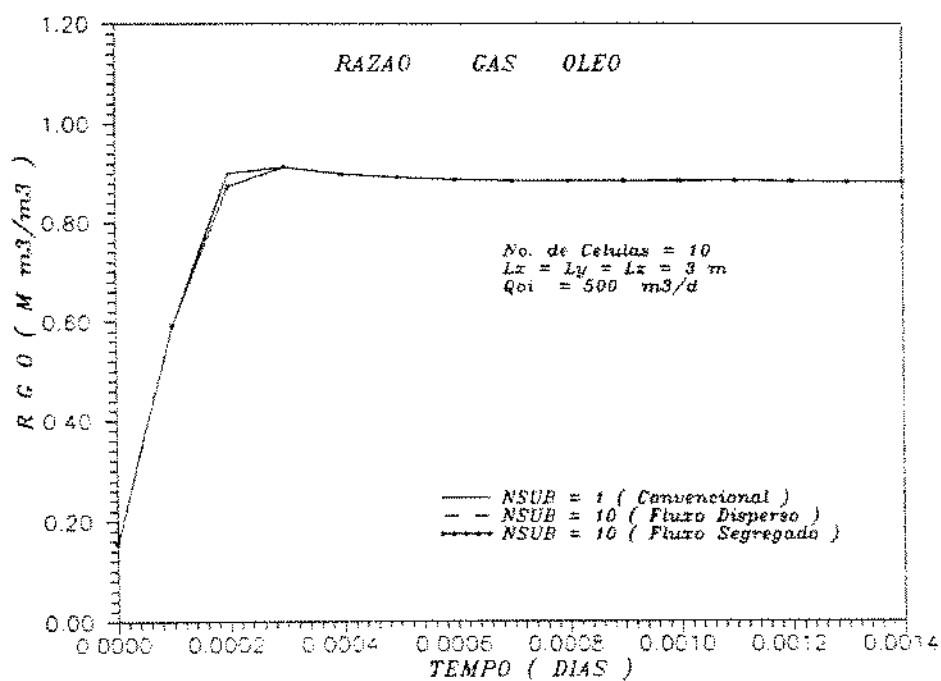


Figura 6.27: RGO vs. Tempo

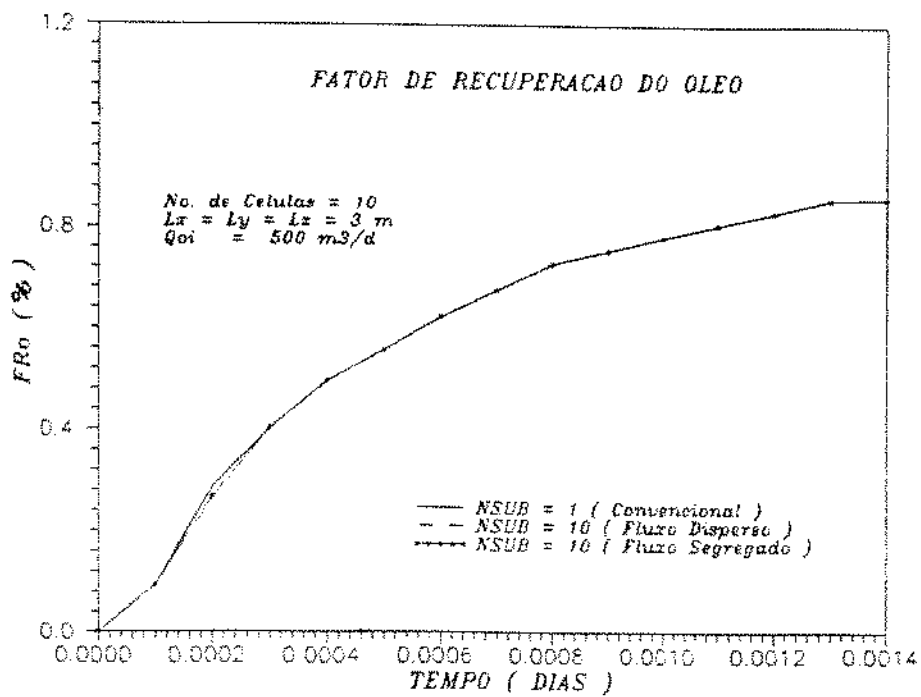


Figura 6.28: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

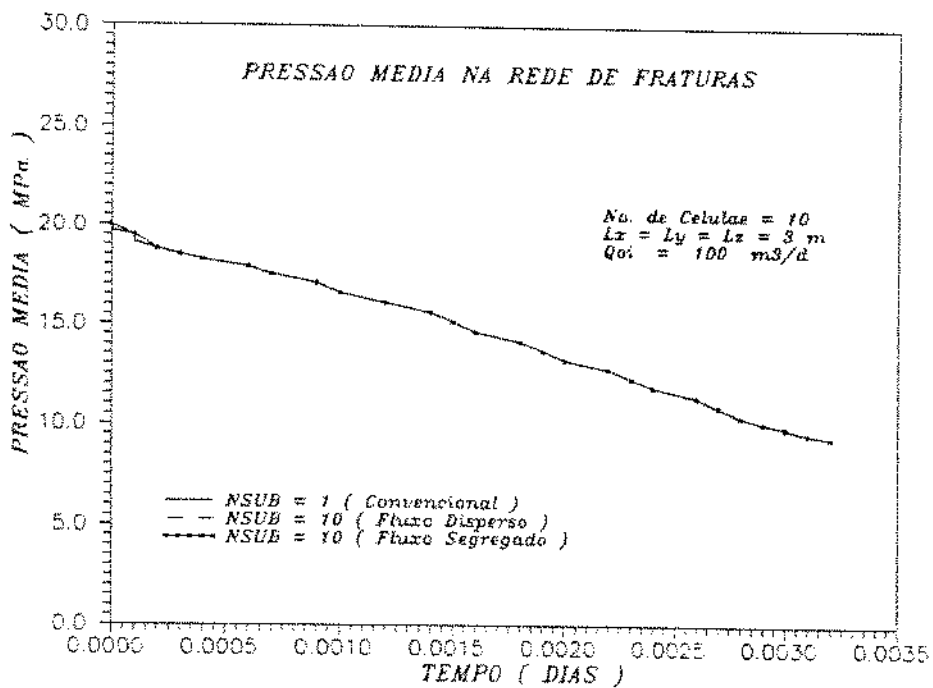


Figura 6.29: Pressão Média na Rede de Fratura vs. Tempo

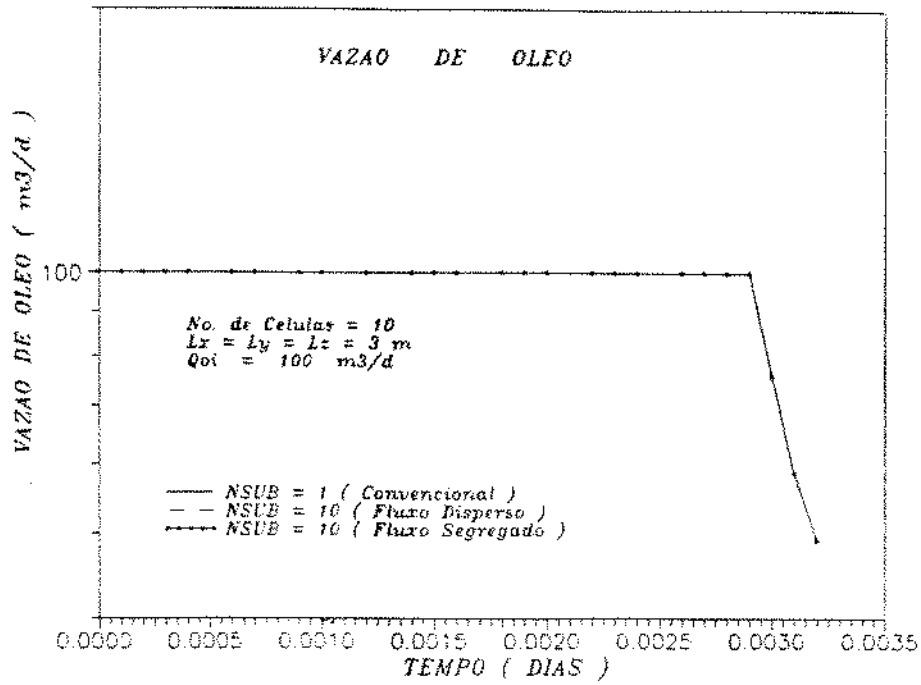


Figura 6.30: Vazão de Óleo vs. Tempo

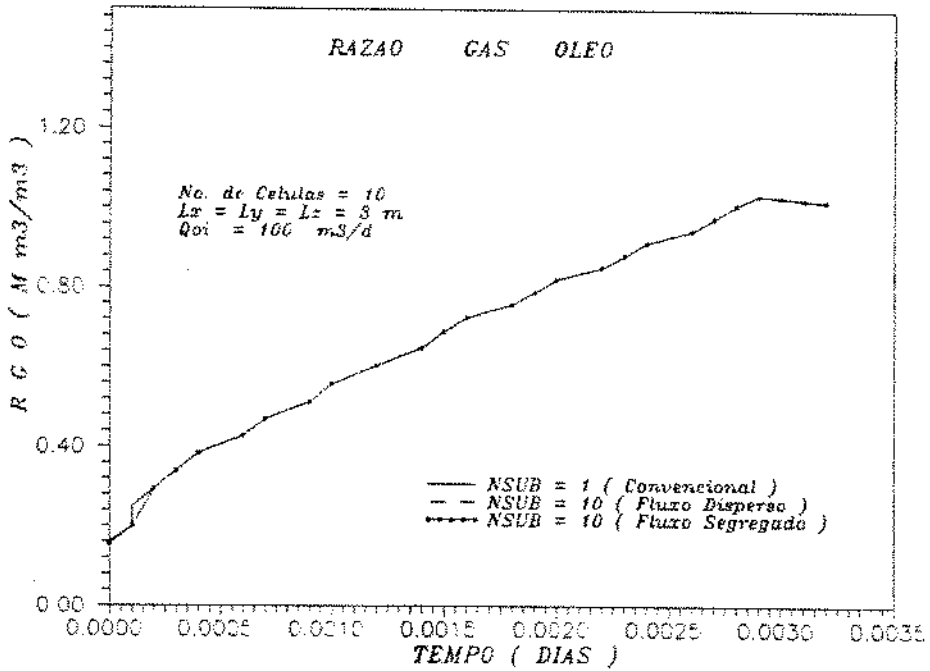


Figura 6.31: RGO vs. Tempo

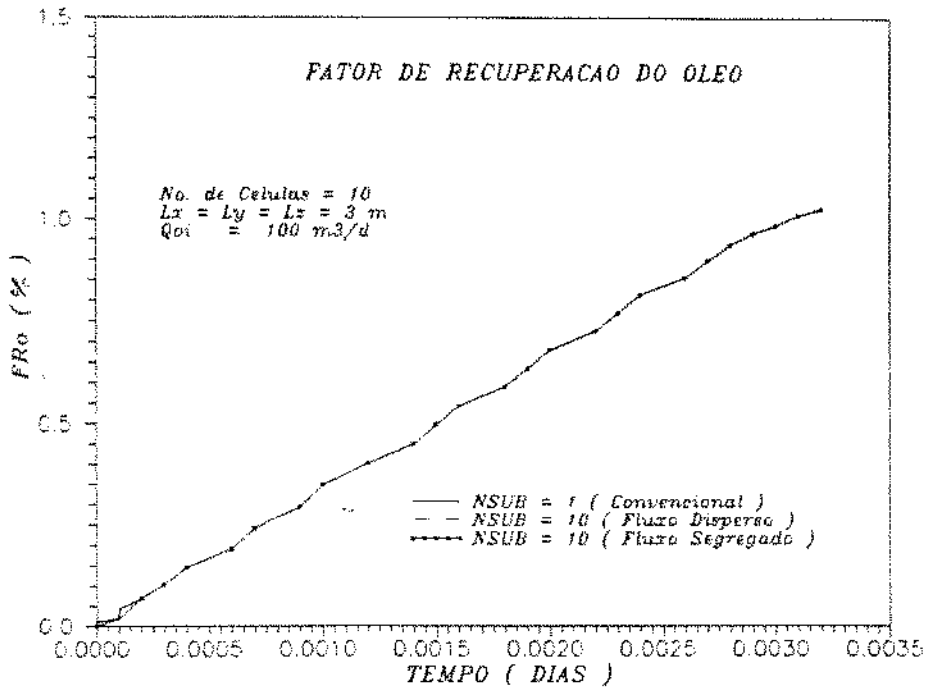


Figura 6.32: Fator de Recuperação do Óleo vs. Tempo

O comportamento do reservatório neste caso é bem diferente do caso anterior. Como o bloco de matriz é pequeno, a interação matriz-fratura é bem mais acentuada e não foram observadas mudanças bruscas, mesmo com a vazão inicial alta.

Como esperado, o período de vazão constante foi menor no caso da vazão mais alta e, nesta situação, o período de pressão constante foi maior do que o de vazão constante, Fig.(6.26). No caso da vazão mais baixa, como existem melhores condições para a interação matriz-fratura, o período de vazão constante foi maior. O comportamento da RGO, Figs. (6.27) e (6.31), está diretamente ligado ao comportamento da vazão.

6.3 Análise Geral

Observou-se no item anterior, que não houve diferenças sensíveis nos resultados para as diversas formulações, nos casos apresentados, enquanto as mesmas apareceram no item (6.1). No caso do item (6.1), foi escolhido um problema onde fosse possível trabalhar melhor com o bloco de matriz e também analisar o sistema vertical. Com as limitações de fluxo segregado na fratura, não foi possível muita especulação. Porém, com os resultados obtidos nos dois itens, foram decididas mais algumas investigações. A diferença do tratamento nos dois casos foi, basicamente, a área exposta ao fluxo matriz-fratura, que no primeiro item considerou todas as faces do bloco de matriz e, no segundo item apenas as faces laterais. Depois que os resultados do segundo item foram obtidos, foram refeitos os problemas do primeiro item, colocando-os na mesma situação do segundo, ou seja, a transferência matriz-fratura ocorrendo apenas nas faces laterais e os resultados das duas formulações foram coincidentes, concordando com os resultados do segundo item. Percebeu-se então que, nos casos simulados, a diferença entre as duas formulações resultaram da área exposta ao fluxo. Quando as faces horizontais do bloco de matriz foram consideradas, houve uma resposta mais otimista da formulação convencional, mas quando apenas as faces laterais foram consideradas as duas formulações tenderam aos mesmos resultados. Seriam necessárias mais investigações, variando os diversos parâmetros do problema, para verificar se esta tendência sempre continuaria a ocorrer.

Outras observações interessantes decorreram da variação da permeabilidade absoluta da matriz. O aumento na permeabilidade da matriz teve resposta semelhante a da diminuição do tamanho do bloco, e a diminuição na permeabilidade obteve um efeito contrário. Seria interessante estudar melhor a variação do tamanho e da permeabilidade dos blocos de matriz, e analisar quais seriam as situações em que o método de subdomínios seria recomendável.

Um outro fator que merece ser mais estudado é a influência da curva de pressão capilar em relação ao tamanho dos blocos de matriz. Nas pesquisas iniciais, estava sendo usada uma curva de pressão capilar que não estava favorecendo a transferência do óleo

da matriz para a fratura. Para verificar a influência desta curva, foram analisadas as distribuições de saturação nos blocos de matriz, através de uma das formulações com sub-domínios. Sabe-se que, num reservatório real, não se pode simplesmente mudar a curva de pressão capilar, mas este tipo de análise pode ser efetuada para entender quais os possíveis fatores que estão influenciando no comportamento do reservatório e decidir qual a melhor maneira do mesmo ser produzido.

Capítulo 7

Conclusões e Recomendações

O simulador desenvolvido usa a formulação convencional para reservatórios de dupla porosidade e também foi implantada a formulação com subdomínios, com as opções de fluxo disperso e de fluxo segregado nas fraturas. O simulador é unidimensional, bifásico óleo-gás e usa uma formulação totalmente implícita.

Foi empregada uma técnica que permitiu a colocação das variáveis da matriz em função das variáveis das fraturas, resultando num sistema final de equações com a mesma estrutura do caso não fraturado, uma matriz tridiagonal com blocos de dimensão (2×2). Esta técnica foi aplicada tanto a formulação convencional como na formulação com subdomínios e, desta maneira foi possível a redução do esforço computacional.

A formulação com subdomínios foi implementada com o objetivo de modelar melhor a transferência de fluidos matriz-fratura e de se conseguir uma definição da distribuição das pressões e saturações dos fluidos dentro dos blocos de matriz.

A opção de fluxo segregado nas fraturas é a que melhor representa a física do problema, porém apresenta a limitação de ser aplicável apenas a reservatórios horizontais, unidimensional e, portanto não pode ser comparada com as outras formulações em todos os casos.

Nos resultados apresentados, observou-se que a formulação convencional, quando todas as faces do bloco de matriz foram consideradas, obteve resultados mais otimistas do que os resultados da formulação com subdomínios, principalmente para o caso horizontal. Estas diferenças diminuem quando o reservatório é vertical e aparece o efeito adicional

da segregação do gás, que é favorecido pela alta permeabilidade das fraturas e, também quando o bloco de matriz é pequeno e a sua permeabilidade não é muito baixa.

As diferenças nos resultados das duas formulações também diminuíram bastante quando apenas as faces laterais foram consideradas. Recomenda-se que sejam realizados estudos que definam a influência da área exposta ao fluxo, na transferência matriz-fratura, nos resultados de cada formulação. Para blocos grandes, a diferença de pressão entre a matriz e a fratura é maior e, portanto, a interação entre os dois meios é menos acentuada. Quando uma vazão inicial muito alta foi usada, foi observado um declínio brusco da vazão, no início do período de pressão constante, e logo após com a realimentação das fraturas pela matriz, houve um certo aumento seguido de um declínio menos acentuado do que no período inicial.

Para entender melhor o problema da segregação gravitacional no reservatório e nos blocos de matriz, recomenda-se o estudo de uma formulação capaz de representar estas situações na direção vertical em um reservatório fraturado.

Nos casos simulados para comparar as diversas formulações não foram observadas diferenças significativas. Recomenda-se a investigação dos fatores que reforçam estas diferenças e também quais as situações onde a formulação convencional não seja adequada e em que, mesmo tendo um esforço computacional maior, a formulação com subdomínios seja importante.

Nomenclatura :

- A - área exposta ao fluxo (m^2)
- B_g - fator volume de formação do gás (m^3 / m^3)
- b_g - $1/B_g$, fator de encolhimento do gás (m^3 / m^3)
- B_o - fator volume de formação do óleo (m^3 / m^3)
- b_o - $1/B_o$, fator de encolhimento do óleo (m^3 / m^3)
- B_w - fator volume de formação da água (m^3 / m^3)
- b_w - $1/B_w$, fator de encolhimento da água (m^3 / m^3)
- c_r - compressibilidade da rocha (MPa^{-1})
- D - profundidade, no reservatório, (m)
- F_o - função de resíduos do óleo
- F_g - função de resíduos do gás
- I - número de células
- k - permeabilidade absoluta, (m^2)
- k_{ro} - permeabilidade relativa ao óleo, *adimensional*
- k_{rg} - permeabilidade relativa ao gás, *adimensional*
- L_x - dimensão na direção x do bloco de matriz, (m)
- L_y - dimensão na direção y do bloco de matriz, (m)
- L_z - dimensão na direção z do bloco de matriz, (m)
- N_{sub} - número de subcélulas do bloco de matriz
- P_o - pressão na fase óleo (MPa)
- P_g - pressão na fase gás (MPa)
- P_{cgo} - pressão capilar gás - óleo (MPa)

- q_o - termo fonte/sumidouro do óleo, (m^3/dia)
 q_g - termo fonte/sumidouro do gás, (m^3/dia)
 q_{omf} - transferência matriz - fratura do óleo
 q_{gmf} - transferência matriz - fratura do gás
 R_s - razão de solubilidade do óleo, (m^3 / m^3)
 S_g - saturação do gás, *fração*
 S_o - saturação do óleo, *fração*
 S_w - saturação da água, *fração*
 T_o - transmissibilidade do óleo
 T_g - transmissibilidade do gás
 t - tempo, (*dia*)
 V_r - volume de rocha, (m^3)
 V_p - volume poroso, (m^3)
 Z - profundidade, no bloco de matriz, (m)

Letras Gregas :

- δ - mudança ao longo de uma iteração
 ∇ - operador diferencial
 Δ - operador de diferenças
 γ - peso específico
 Φ - potencial
 ϕ - porosidade
 λ - mobilidade

Subescritos :

- o - óleo
- g - gás
- m - matriz
- f - fratura
- mf - matriz-fratura
- i - variação das células no reservatório
- j - variação das subcélulas no bloco de matriz

Sobreescritos :

- n - número do intervalo de tempo
- T - transposta de um vetor
- ν - número da iteração Newtoniana

Bibliografia

- [1] Aziz, K. and Settari, A., *Petroleum Reservoir Simulation*, London, Applied Science Pub., 1979.
- [2] Barenblatt, G.E., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N., "Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks", *J. Appl. Math.*, vol.24, n^o 05, pp. 1286 - 1303, 1960.
- [3] Beckner, B.L., Chan, H.M., Wooten, S.O. and Jones, T.A., "Simulating Naturally Fractured Reservoirs Using a Subdomain Method", *Society of Petroleum Engineers, SPE 21241, 1991*.
- [4] Bonnet, L., Simulação Numérica de Reservatórios Utilizando um Método de Implícitude Auto-Adaptável, Dissertação de Mestrado, FEM, Unicamp, 1990
- [5] Chen, W.H., Wasserman, M.L. and Fitzmorris, R.E., "A Thermal Simulator for Naturally Fractured Reservoirs", *Society of Petroleum Engineers, SPE 16008, 1987*.
- [6] Coats, K.H., "Implicit Compositional Simulaton of Single-Porosity and Dual- Porosity Reservoirs", *Society of Petroleum Engineers, SPE 18427, 1989*.
- [7] Correa, A.C.F., Reservatórios Naturalmente Fraturados, Curso de Fluxo de Fluidos em Meios Porosos, CEN-NOR, Petrobrás, 1988.
- [8] Festø, S. and Van Golf-Racht, T.D., "Gas Gravity Drainage in Fractured Reservoirs Through New Dual Continuum Approach", *Society of Petroleum Engineers, SPE 16980, 1987*.

- [9] Firoozabadi, A. and Hauge, J., "Capillary Pressure in Fractured Porous Media", *Journal of Petroleum Technology*, vol.43, n^o2, pp. 784-791, 1991.
- [10] Firoozabadi, A. and Thomas, L.K., "Sixth SPE Comparative Solution Project: Dual Porosity Simulators", *Journal of Petroleum Technology*, vol.42, n^o6, pp. 710-715, 1990.
- [11] Fung, L.S.-K., "Simulation of Block-to-Block Processes in Naturally Fractured Reservoirs", *Society of Petroleum Engineers, SPE 20019*, 1990.
- [12] Gilman, J.R., "Numerical Simulation of Phase Segregation in the Primary Porosity (Matrix Blocks) in Two-Porosity Media", *Society of Petroleum Engineers, SPE 12271*, 1983.
- [13] Gilman, J.R. and Kazemi, H., "Improved Calculations for Viscous and Gravity Displacement in Matrix Blocks in Dual - Porosity Simulators", *Journal of Petroleum Technology*, vol.40, n^o1, pp.60-70,1988.
- [14] Horie, T., Firoozabadi, A. and Ishimoto, K., "Laboratory Studies of Capillary Interaction in Fracture/Matrix Systems", *SPE Reservoir Engineering*, vol.5,n^o3, pp.353-360,1990
- [15] Kazemi, H., Merrill, L., Porterfield, K. and Zeman, P., "Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Fractured Reservoirs", *Trans. SPE of AIME*, vol. 261, pp. 317-326, 1976.
- [16] Lins Jr., A. G. e Silva, G. A., Simulação de Reservatórios Fraturados, Projeto n^o 3 do Curso de Simulação Numérica de Reservatórios II, FEM, Unicamp, 1990
- [17] Litvak, B.L., "Simulation and Characterization of Naturally Fractured Reservoirs", *Proceedings of the Reservoir Characterization Technical Conference*, pp.561-583, Dallas, Texas, Academic Press, New York, 1985.

- [18] Peaceman, D.W., *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Amsterdam, Elsevier, 1977.
- [19] Pinto, A . C. C., Simulação de Reservatórios de Dupla Porosidade, Projeto n^o 3 do Curso de Simulação Numérica de Reservatórios II, FEM, Unicamp, 1990.
- [20] Pruess, K. and Narasimhan, T.N., "A Practical Method for Modeling Fluid and Heat Flow in Fractured Porous Media", *Trans. SPE of AIME*, vol. 279, pp.14-26,1985.
- [21] Rodriguez de la Garza, F., "Um Simulador Numerico del Flujo Multifasico Hacia Pozos Naturalmente Fraturados", *Ingenieria Petrolera*, pp.17-25, Junio de 1987.
- [22] Rodriguez de la Garza F., "A General Approach of Reservoir Simulation Methods", Notas de Aula do Curso de Simulação Numérica de Reservatórios II, Unicamp, 1990.
- [23] Rossen, R.H. and Shen, E.I.C., "Simulation of Gas/Oil Drainage and Water/Oil Imbibition in Naturally Fractured Reservoirs", *Trans SPE of AIME*, vol.287, pp. 464-470, 1989.
- [24] Saidi, A.M., "Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", *Society of Petroleum Engineers, SPE* 12270, 1983.
- [25] Sonier, F., Souillard, P. and Blaskovich, F.T., "Numerical Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", *SPE Reservoir Engineering*, vol. 3, n^o4, pp.1114-1122, 1988.
- [26] Thomas, L.K., Dixon, T.N. and Pierson, R.G., "Fractured Reservoir Simulation", *Trans. SPE of AIME*, vol.275, pp.42-54, 1983.
- [27] Van Golf-Racht, T.D., *Fundamentals of Fractured Reservoir*, Amsterdam, Elsevier, 1982.
- [28] Warren, J.E. and Root, P.J., "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", *Trans. SPE of AIME*, vol.228, pp.245-2555, 1963.
- [29] Wu, Y.S. and Pruess, K., "A Multiple-Porosity Method for Simulation of Naturally Fractured Petroleum Reservoirs". *Trans. SPE of AIME*, vol. 285, pp.327-336, 1988.

Apêndice A : Funções de Resíduos – Método Convencional

As equações em diferenças finitas na forma expandidas, das funções de resíduos, para sistemas convencionais de dupla-porosidade para célula i são:

Fratura:

Óleo:

$$\begin{aligned}
 F_{o_i} = & T_{o_{i+1/2}} [(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2}] \\
 & - T_{o_{i-1/2}} [(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2}] \\
 & + T_{om_i} (P_{om_i} - P_{o_i}) - \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [(\phi S_o b_o) - (\phi S_o b_o)^n]_i = 0, \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Gás:

$$\begin{aligned}
 F_{g_i} = & T_{g_{i+1/2}} [(P_{o_{i+1}} - P_{cgo_{i+1}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2}] \\
 & - T_{g_{i-1/2}} [(P_{o_i} - P_{cgo_i}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cgo_{i-1}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2}] \\
 & + (T_o R_s)_{i+1/2} [(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2}] \\
 & - (T_o R_s)_{i-1/2} [(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2}] \\
 & + T_{gm_i} [(P_{om_i} - P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \\
 & + (T_o R_s)_{m_i} (P_{om_i} - P_{o_i}) - \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [(\phi S_g b_g + R_s S_o b_o) \\
 & - \phi^n (S_g b_g + R_s S_o b_o)^n]_i = 0, \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

Matriz:

Óleo:

$$F_{om_i} = T_{om_f_i}(P_{om_i} - P_{o_i}) + \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [\phi_m(S_o b_o)_m - \phi_m^n(S_o b_o)_m^n]_i = 0, \quad (A.3)$$

Gás:

$$\begin{aligned} F_{gm_i} = & T_{gm_f_i} [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \\ & - (T_o R_s)_{m_f_i} (P_{om_i} - P_{o_i}) \\ & + \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [\phi_m(S_g b_g + R_s S_o b_o)_m - \phi_m^n(S_g b_g + R_s S_o b_o)_m^n]_i = 0, \quad (A.4) \end{aligned}$$

onde:

$$\Delta D_{i+1/2} = D_{i+1} - D_i,$$

$$\Delta D_{i-1/2} = D_i - D_{i-1}.$$

Apêndice B : Funções de Resíduos – Formulação com Subdomínios

As equações em diferenças finitas na forma expandidas, das funções de resíduos, usando a formulação de subdomínios para sistemas de dupla-porosidade são apresentadas para célula i .

Nas equações da fratura, o termo de transferência matriz/fratura é um somatório contendo os termos de transferência de todos as subcélulas j da matriz, em uma célula i .

As equações da matriz são escritas para a subcélula j na célula i .

Fratura:

Óleo:

$$\begin{aligned}
 F_{o_i} = & T_{o_{i+1/2}} [(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2}] \\
 & - T_{o_{i-1/2}} [(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2}] \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [T_{omf_{ij}} (\Delta \Phi_{omf_{ij}}^*)] \\
 & - \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [(\phi S_o b_o) - (\phi S_o b_o)^n]_i = 0, \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Gás:

$$\begin{aligned}
 F_{g_i} = & T_{g_{i+1/2}} [(P_{o_{i+1}} + P_{cgo_{i+1}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2}] \\
 & - T_{g_{i-1/2}} [(P_{o_i} - P_{cgo_i}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cgo_{i-1}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(T_o R_s)_{i+1/2} [(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2}] \\
& -(T_o R_s)_{i-1/2} [(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2}] \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [(T_{gm} f_{ij} (\Delta \Phi_{gm}^* f_{ij}))] \\
& + \sum_{j=1}^{N_{\text{sub}}} [(T_o R_s)_{m f_{ij}} (\Delta \Phi_{om}^* f_{ij})] \\
& - \frac{V_{r_i}}{\Delta t} [\phi (S_g b_g + R_s S_o b_o) - \phi^n (S_g b_g + R_s S_o b_o)^n]_i = 0 , \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Matriz:

Óleo:

$$\begin{aligned}
F_{om_{ij}} & = T_{om f_{ij}} (\Delta \Phi_{om}^* f_{ij}) \\
& - T_{om_{ij+1/2}} [(P_{om_{ij+1}} - P_{om_{ij}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2}] \\
& + T_{om_{ij-1/2}} [(P_{om_{ij}} - P_{om_{ij-1}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2}] \\
& + \frac{V_{r_{ij}}}{\Delta t} [(\phi S_o b_o)_m - (\phi S_o b_o)_m^n]_{ij} = 0 , \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Gás:

$$\begin{aligned}
F_{gm_{ij}} &= T_{gm_{f_{ij}}}(\Delta\Phi_{gm_{f_{ij}}}^*) \\
&+ (T_o R_s)_{m_{f_{ij}}}(\Delta\Phi_{om_{f_{ij}}}^*) \\
&- T_{gm_{f_{ij+1/2}}} \left[(P_{o_{ij+1}} + P_{cgom_{ij+1}}) - (P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \\
&+ T_{gm_{ij-1/2}} \left[(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{om_{ij-1}} + P_{cgom_{ij-1}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \\
&- (T_o R_s)_{j_{i+1/2}} \left[(P_{om_{ij+1}} - P_{om_{ij}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \\
&+ (T_o R_s)_{ij-1/2} \left[(P_{om_{ij}} - P_{om_{ij-1}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \\
&+ \frac{V_{r_i}}{\Delta t} \left[\phi_m (S_g b_g + R_s S_o b_o) - \phi_m^n (S_g b_g + R_s S_o b_o)_m^n \right]_{ij} = 0, \tag{B.4}
\end{aligned}$$

onde:

$$\Delta Z_{m_{ij+1/2}} = Z_{m_{ij+1}} - Z_{m_{ij}},$$

$$\Delta Z_{m_{ij-1/2}} = Z_{m_{ij}} - Z_{m_{ij-1}}.$$

Apêndice C : Matriz Jacobiana

As derivadas das funções de resíduos são apresentadas para a matriz e a fratura. As derivadas dos termos de transferência matriz/fratura serão explicitadas mais adiante.

Fratura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_{i-1}}} &= T_{o_{i-1/2}} + T_{o_{i-1/2}} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} \\ &\quad - \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_i}} &= -T_{o_{i+1/2}} - T_{o_{i+1/2}} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} + \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &\quad - T_{o_{i-1/2}} + T_{o_{i-1/2}} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} + \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &\quad + \frac{\partial (q_{omf_i})}{\partial P_{o_i}} - \frac{V_{P_i}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_r (P_o - P_o^n)_i] S_{o_i} \frac{db_{o_i}}{dP_{o_i}} + c_r (S_o b_o)_i \right\}, \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{o_{i+1}}} &= T_{o_{i+1/2}} - T_{o_{i+1/2}} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} \\ &\quad + \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}}, \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_{i-1}}} = - \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial S_{g_{i-1}}}, \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_{i+1}}} &= \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial S_{g_i}} - \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial S_{g_i}} \\ &+ \frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial S_{g_i}} - \frac{V_{P_i}^n}{\Delta t} \{ [1 + c_r(P_o - P_o^n)_i] [-b_{o_i}] \}, \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{g_{i+1}}} = \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial S_{g_{i+1}}}, \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_{i-1}}} &= T_{g_{i-1/2}} + T_{g_{i-1/2}} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} \\ &- \left[(P_{o_i} + P_{cg_{o_i}}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cg_{o_{i-1}}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} \\ &+ (T_o R_s)_{i-1/2} + (T_o R_s)_{i-1/2} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} \\ &- \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \left[R_{s_{i-1/2}} \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} + T_{o_{i-1/2}} \frac{\partial R_{s_{i-1/2}}}{\partial P_{o_{i-1}}} \right], \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_i}} &= -T_{g_{i+1/2}} - T_{g_{i+1/2}} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &+ \left[(P_{o_{i+1}} + P_{cg_{o_{i+1}}}) - (P_{o_i} + P_{cg_{o_i}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &- T_{g_{i-1/2}} + T_{g_{i-1/2}} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &- \left[(P_{o_i} + P_{cg_{o_i}}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cg_{o_{i-1}}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\ &- (T_o R_s)_{i+1/2} - (T_o R_s)_{i+1/2} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \left[R_{s_{i+1/2}} \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} + T_{o_{i+1/2}} \frac{\partial R_{s_{i+1/2}}}{\partial P_{o_i}} \right] \\
& - (T_o R_s)_{i-1/2} + (T_o R_s)_{i-1/2} \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} \\
& + \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] \left[R_{s_{i-1/2}} \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} + T_{o_{i-1/2}} \frac{\partial R_{s_{i-1/2}}}{\partial P_{o_i}} \right] \\
& + \frac{\partial (q_{gm} f_i)}{\partial P_{o_i}} - \frac{V_{P_i}^n}{\Delta t} \left\{ \left[1 + c_\tau (P_{o_i} - P_{o_i}^n) \right] \left[S_{g_i} \frac{db_{g_i}}{dP_{o_i}} \right. \right. \\
& \left. \left. + S_{o_i} \frac{d(b_o R_s)_i}{dP_{o_i}} \right] + [b_{g_i} S_{g_i} + b_{o_i} R_{s_i} S_{o_i}] c_\tau \right\}, \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{o_{i-1}}} & = -T_{g_{i+1/2}} - T_{g_{i+1/2}} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} \\
& + \left[(P_{o_{i+1}} + P_{cgo_{i+1}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} \\
& - (T_o R_s)_{i+1/2} - (T_o R_s)_{i+1/2} \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} \\
& + \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] \left[R_{s_{i+1/2}} \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} + T_{o_{i+1/2}} \frac{\partial R_{s_{i+1/2}}}{\partial P_{o_{i+1}}} \right] \tag{C.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_{i-1}}} & = - \left[(P_{o_i} + P_{cgo_i}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cgo_{i-1}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i-1/2}}}{\partial S_{g_{i-1}}} \\
& - T_{g_{i-1/2}} \left(\frac{\partial P_{cgo_{i-1}}}{\partial S_{g_{i-1}}} + \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i-1/2}}}{\partial S_{g_{i-1}}} \right) \\
& - \left[(P_{o_i} + P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] R_{s_{i-1/2}} \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial S_{g_i}}, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_i}} = & \left[(P_{o_{i+1}} + P_{cg_{o_{i+1}}}) - (P_{o_i} + P_{cg_i}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i+1/2}}}{\partial S_{g_i}} \\
& - T_{g_{i+1/2}} \left[\frac{\partial P_{cg_{o_i}}}{\partial S_{g_i}} + \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i+1/2}}}{\partial S_{g_i}} \right] \\
& - \left[(P_{o_i} + P_{cg_{o_i}}) - (P_{o_{i-1}} + P_{cg_{o_{i-1}}}) - (\gamma_g \Delta D)_{i-1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i-1/2}}}{\partial S_{g_i}} \\
& - T_{g_{i-1/2}} \left[\frac{\partial P_{cg_{o_i}}}{\partial S_{g_i}} + \Delta D_{i-1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i-1/2}}}{\partial S_{g_i}} \right] \\
& + \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] R_{s_{i+1/2}} \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial S_{g_i}} \\
& - \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - (\gamma_o \Delta D)_{i-1/2} \right] R_{s_{i-1/2}} \frac{\partial T_{o_{i-1/2}}}{\partial S_{g_i}} \\
& + \frac{\partial(q_{m,i})}{\partial S_{g_i}} \\
& - \frac{V_{P_i}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_r(P_o - P_o^n)]_i \left[bg_i + S_{g_i} \frac{\partial b_{g_i}}{\partial S_{g_i}} - b_{o_i} R_{s_i} \right] \right\}, \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{g_{i+1}}} = & \left[(P_{o_{i+1}} + P_{cg_{o_{i+1}}}) - (P_{o_i} + P_{cg_i}) - (\gamma_g \Delta D)_{i+1/2} \right] \frac{\partial T_{g_{i+1/2}}}{\partial S_{g_{i+1}}} \\
& + T_{g_{i+1/2}} \left[\frac{\partial P_{cg_{o_{i+1}}}}{\partial S_{g_{i+1}}} + \Delta D_{i+1/2} \frac{\partial \gamma_{g_{i+1/2}}}{\partial S_{g_{i+1}}} \right] \\
& - \left[(P_{o_{i+1}} + P_{o_i}) - (\gamma_o \Delta D)_{i+1/2} \right] R_{s_{i+1/2}} \frac{\partial T_{o_{i+1/2}}}{\partial S_{g_{i+1}}}. \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Formulação Convencional:

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_i}} = \frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial P_{om_i}}, \quad (C.13)$$

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_i}} = \frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial S_{gm_i}}, \quad (C.14)$$

$$\frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_i}} = \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial P_{om_i}}, \quad (C.15)$$

$$\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_i}} = \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial S_{gm_i}}. \quad (C.16)$$

Formulação com Subdomínios:

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial P_{om_{ij}}} = \frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial P_{om_{ij}}}, \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial F_{o_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} = \frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial S_{gm_{ij}}}, \quad (C.18)$$

$$\frac{\partial F_{g_i}}{\partial P_{om_{ij}}} = \frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial P_{om_{ij}}}, \quad (C.19)$$

$$\frac{\partial F_{g_i}}{\partial S_{gm_{ij}}} = \frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial S_{gm_{ij}}}. \quad (C.20)$$

Matriz:

Formulação Convencional:

$$\frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{om_i}} = \frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial P_{om_i}} +$$

$$\frac{V_{P_{m_i}}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_{rm}(P_{om_i} - P_{om_i}^n)] S_{om_i} \frac{db_{om_i}}{dP_{om_i}} + c_{rm}(S_{om_i} b_{om_i})_i \right\}, \quad (C.21)$$

$$\frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{gm_i}} = \frac{\partial(q_{om_i} f_i)}{\partial S_{gm_i}} + \frac{V_{P_{m_i}}^n}{\Delta t} \{ [1 + c_{rm}(P_{om_i} - P_{om_i}^n)] b_{om_i} \} \quad (C.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} = & \frac{\partial(q_{gm_i} f_i)}{\partial P_{om_i}} + \frac{V_{P_{m_i}}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_{rm}(P_{om_i} - P_{om_i}^n)]_i \left[S_{gm_i} \frac{\partial b_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} \right. \right. \\ & \left. \left. + S_{om_i} \frac{\partial(b_{om_i} R_{sm})_i}{\partial P_{om_i}} \right] [b_{gm_i} S_{gm_i} + b_{om_i} R_{sm_i} S_{om_i}] c_{rm} \right\}, \quad (C.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} = & \frac{\partial(q_{gm_i} f_i)}{\partial S_{gm_i}} \\ & + \frac{V_{P_{m_i}}^n}{\Delta t} \{ [1 + c_{rm}(P_{om_i} - P_{om_i}^n)]_i [b_{gm_i} \\ & + S_{gm_i} \frac{\partial b_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} - b_{om_i} R_{sm_i}] \}, \quad (C.24) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{om_i}}{\partial P_{o_i}} = \frac{\partial(q_{om_i} f_i)}{\partial P_{o_i}}, \quad (C.25)$$

$$\frac{\partial F_{om_i}}{\partial S_{g_i}} = \frac{\partial(q_{om_i} f_i)}{\partial S_{g_i}}, \quad (C.26)$$

$$\frac{\partial F_{gm_i}}{\partial P_{o_i}} = \frac{\partial(q_{gm_i} f_i)}{\partial P_{o_i}}, \quad (C.27)$$

$$\frac{\partial F_{gm_i}}{\partial S_{g_i}} = \frac{\partial(q_{gm_i} f_i)}{\partial S_{g_i}}. \quad (C.28)$$

Formulação com Subdomínios:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{omij}}{\partial P_{omij-1}} = & -T_{omij-1/2} - T_{omij-1/2} \Delta Z_{mij-1/2} \frac{\partial \gamma_{omij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} \\ & + \left[(P_{omij} - P_{omij-1}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{omij-1/2}}{\partial P_{omij-1}}, \end{aligned} \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{omij}}{\partial P_{omij}} = & T_{omij+1/2} + T_{omij+1/2} \Delta Z_{mij+1/2} \frac{\partial \gamma_{omij+1/2}}{\partial P_{omij}} \\ & - \left[(P_{omij+1} - P_{omij}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{omij+1/2}}{\partial P_{omij}} \\ & + T_{omij-1/2} - T_{omij-1/2} \Delta Z_{mij-1/2} \frac{\partial \gamma_{omij-1/2}}{\partial P_{omij}} \\ & + \left[(P_{omij} - P_{omij-1}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{omij-1/2}}{\partial P_{omij}} \\ & + \frac{\partial (q_{omfij})}{\partial P_{omij}} + \frac{V_{P_{mij}}^n}{\Delta t} \{ [1 + c_{rm} (P_{om} - P_{om}^n)_{ij}] \\ & S_{om_i} \frac{db_{om_i}}{dP_{om_i}} + c_{rm} (S_{om} b_{om})_i \}, \end{aligned} \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{omij}}{\partial P_{omij+1}} = & -T_{omij+1/2} + T_{omij+1/2} \Delta Z_{mij+1/2} \frac{\partial \gamma_{omij+1/2}}{\partial P_{omij+1}} \\ & + \left[(P_{omij+1} - P_{omij}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{omij+1/2}}{\partial P_{omij+1}}, \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$\frac{\partial F_{omij}}{\partial S_{gmij-1}} = \left[(P_{omij} - P_{omij-1}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{omij-1/2}}{\partial S_{gmij-1}}, \quad (C.32)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{omij}}{\partial S_{gmij}} &= - \left[(P_{omij+1} - P_{omij}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{omij+1/2}}{\partial S_{gmij}} \\
&\quad + \left[(P_{omij} - P_{omij-1}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{omij-1/2}}{\partial S_{gmij}} \\
&\quad + \frac{\partial(q_{omfij})}{\partial S_{gmij}} + \frac{V_{P_{mij}}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_{rm}(P_{om} - P_{om}^n)_{ij}] [b_{omij}]_i \right\}, \quad (C.33)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{omij}}{\partial S_{gmij+1}} = - \left[(P_{omij+1} - P_{omij}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{omij+1/2}}{\partial S_{gmij+1}}, \quad (C.34)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{gmij}}{\partial P_{omij-1}} &= -T_{gmij-1/2} - T_{gmij-1/2} \Delta Z_{mij-1/2} \frac{\partial \gamma_{gmij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} \\
&\quad + \left[(P_{omij} + P_{cgomij}) - (P_{omij-1} + P_{cgomij-1}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{gmij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} \\
&\quad - (T_o R_s)_{mij-1/2} - (T_o R_s)_{mij-1/2} \Delta Z_{mij-1/2} \frac{\partial \gamma_{gmij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} \\
&\quad + \left[(P_{omij} - P_{omij-1}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \\
&\quad \left[R_{gmij-1/2} \frac{\partial T_{omij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} + T_{omij-1/2} \frac{\partial R_{gmij-1/2}}{\partial P_{omij-1}} \right], \quad (C.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{gmij}}{\partial P_{omij}} &= T_{gmij+1/2} + T_{gmij+1/2} \Delta Z_{mij+1/2} \frac{\partial \gamma_{gmij+1/2}}{\partial P_{omij}} \\
&\quad - \left[(P_{omij+1} + P_{cgomij+1}) - (P_{omij} + P_{cgomij}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{gmij+1/2}}{\partial P_{omij}} \\
&\quad + T_{gmij-1/2} - T_{gmij-1/2} \Delta Z_{mij-1/2} \frac{\partial \gamma_{gmij-1/2}}{\partial P_{omij}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{om_{ij-1}} + P_{cgom_{ij-1}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{gm_{ij-1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} \\
& + (T_o R_s)_{m_{ij+1/2}} + (T_o R_s)_{m_{ij+1/2}} \Delta Z_{m_{ij+1/2}} \frac{\partial \gamma_{om_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} \\
& - \left[(P_{om_{ij+1}} - P_{om_{ij}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \\
& \left[R_{sm_{ij+1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} + T_{om_{ij+1/2}} \frac{\partial R_{sm_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} \right] \\
& + (T_o R_s)_{m_{ij-1/2}} - (T_o R_s)_{m_{ij-1/2}} \Delta Z_{m_{ij-1/2}} \frac{\partial \gamma_{om_{ij-1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} \\
& + \left[(P_{om_{ij}} - P_{om_{ij-1}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \\
& \left[R_{sm_{ij-1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij-1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} + T_{om_{ij-1/2}} \frac{\partial R_{sm_{ij-1/2}}}{\partial P_{om_{ij}}} \right] \\
& \frac{\partial (q_{gm_{ij}})}{\partial P_{om_{ij}}} + \frac{V_{P_{m_{ij}}}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_{\gamma m} (P_{om_i} - P_{om_i}^n)] \right. \\
& \left. \left[S_{gm_i} \frac{\partial b_{gm_i}}{\partial P_{om_i}} + S_{om_i} \frac{d(b_{om} R_{sm})_i}{dP_{om_i}} \right] \right. \\
& \left. + [b_{gm_i} S_{gm_i} + b_{om_i} R_{sm_i} S_{om_i}] c_{\gamma m} \right\}, \tag{C.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} & = -T_{gm_{ij+1/2}} + T_{gm_{ij+1/2}} \Delta Z_{m_{ij+1/2}} \frac{\partial \gamma_{gm_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} \\
& - \left[(P_{om_{ij+1}} + P_{cgom_{ij+1}}) - (P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{gm_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} \\
& - (T_o R_s)_{m_{ij+1/2}} + (T_o R_s)_{m_{ij+1/2}} \Delta Z_{m_{ij+1/2}} \frac{\partial \gamma_{om_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} \\
& - \left[(P_{om_{ij+1}} - P_{om_{ij}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right]
\end{aligned}$$

$$\left[R_{sm_{ij+1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} + T_{om_{ij+1/2}} \frac{\partial R_{sm_{ij+1/2}}}{\partial P_{om_{ij+1}}} \right], \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}} &= \left[(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{om_{ij-1}} + P_{cgom_{ij-1}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{gm_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ &\quad - T_{gm_{ij-1/2}} \left[\frac{\partial P_{cgom_{ij-1}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}} - \Delta Z_{m_{ij-1/2}} \frac{\partial \gamma_{gm_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}} \right] \\ &\quad + \left[(P_{om_{ij}} - P_{om_{ij-1}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] R_{sm_{ij-1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij-1}}}, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}} &= - \left[(P_{om_{ij+1}} + P_{cgom_{ij+1}}) - (P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \frac{\partial T_{gm_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ &\quad + T_{gm_{ij+1/2}} \left[\frac{\partial P_{cgom_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}} - \Delta Z_{m_{ij+1/2}} \frac{\partial \gamma_{gm_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \right] \\ &\quad + \left[(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{om_{ij-1}} + P_{cgom_{ij-1}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] \frac{\partial T_{gm_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ &\quad + T_{gm_{ij}} \left[\frac{\partial P_{cgom_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}} - \Delta Z_{m_{ij-1/2}} \frac{\partial \gamma_{gm_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \right] \\ &\quad - \left[(P_{om_{ij+1}} - P_{om_{ij}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] R_{sm_{ij+1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ &\quad + \left[(P_{om_{ij}} - P_{om_{ij-1}}) - (\gamma_{om} \Delta Z_m)_{ij-1/2} \right] R_{sm_{ij-1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij-1/2}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \\ &\quad + \frac{\partial(q_{gm_{ij}})}{\partial S_{gm_{ij}}} + \frac{V_{P_{m_{ij}}}^n}{\Delta t} \left\{ [1 + c_{\tau m} (P_{om} - P_{om}^n)_{ij}] [bgm_i \right. \\ &\quad \left. + S_{gm_{ij}} \frac{\partial b_{gm_i}}{\partial S_{gm_i}} - b_{om_i} R_{sm_i}] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij+1}}} &= - \left[(P_{om_{ij+1}} + P_{cgom_{ij+1}}) - (P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] \\
&\quad \frac{\partial T_{gm_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij+1}}} - T_{gm_{ij+1/2}} \left[\frac{\partial P_{cgom_{ij+1}}}{\partial S_{gm_{ij+1}}} - \Delta Z_{m_{ij+1/2}} \frac{\partial \gamma_{gm_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij+1}}} \right] \\
&\quad - \left[(P_{om_{ij+1}} - P_{cgom_{ij}}) - (\gamma_{gm} \Delta Z_m)_{ij+1/2} \right] R_{gm_{ij+1/2}} \frac{\partial T_{om_{ij+1/2}}}{\partial S_{gm_{ij+1}}}, \quad (C.40)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{om_{ij}}}{\partial P_{o_i}} = \frac{\partial(q_{om_{ij}})}{\partial P_{o_i}}, \quad (C.41)$$

$$\frac{\partial F_{om_{ij}}}{\partial S_{g_i}} = \frac{\partial(q_{om_{ij}})}{\partial S_{g_i}}, \quad (C.42)$$

$$\frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial P_{o_i}} = \frac{\partial(q_{gm_{ij}})}{\partial P_{o_i}}, \quad (C.43)$$

$$\frac{\partial F_{gm_{ij}}}{\partial S_{g_i}} = \frac{\partial(q_{gm_{ij}})}{\partial S_{g_i}}. \quad (C.44)$$

Apêndice D : Termo de Transferência Matriz/Fratura

Formulação Convencional:

$$q_{omf_i} = T_{omf_i}(P_{om_i} - P_{o_i}) , \quad (D.1)$$

$$q_{gmf_i} = T_{gmf_i} [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] . \quad (D.2)$$

Formulação com subdomínios considerando fluxo disperso nas fraturas:

$$q_{omf_{ij}} = T_{omf_{ij}}(\Delta\Phi_{omf_{ij}}^*) , \quad (D.3)$$

$$q_{gmf_{ij}} = T_{gmf_{ij}}(\Delta\Phi_{gmf_{ij}}^*) , \quad (D.4)$$

Para face horizontal do topo:

$$\Delta\Phi_{om_{ij}}^* = (P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} , \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{gm_{ij}}^* = & [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \\ & - (\gamma_{gm_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} , \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\text{onde } \gamma_i^* = \gamma_{o_i} S_{o_i} + \gamma_{g_i} S_{g_i} . \quad (\text{D.7})$$

Para a face horizontal da base:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{omf_{ij}}^* &= (P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\ &\quad + (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*)\frac{\Delta Z_m}{2} , \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{gmf_{ij}}^* &= [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \\ &\quad - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m + (\gamma_{gm_{ij}} - \gamma_i^*)\frac{\Delta Z_m}{2} , \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Para as faces laterais:

$$\Delta\Phi_{omf_{ij}}^* = (P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m , \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{gmf_{ij}}^* &= [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \\ &\quad - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m . \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Formulação com subdomínios, considerando fluxo segregado nas fraturas. A

transferência matriz/fratura ocorre apenas através das faces verticais do bloco de matriz.

$$q_{omf_{ij}} = T_{omf_{ij}} \Delta \Phi_{omf_{ij}}^* , \quad (D.12)$$

$$q_{gmf_{ij}} = T_{gmf_{ij}} \Delta \Phi_{gmf_{ij}}^* , \quad (D.13)$$

$$\text{onde: } \Delta \Phi_{omf_{ij}} = P_{om_{ij}} - P_{f_{ij}} , \quad (D.14)$$

$$\Delta \Phi_{gmf_{ij}} = P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}} - P_{f_{ij}} . \quad (D.15)$$

e $P_{f_{ij}}$ é a pressão na fratura na face da subcélula.

$$P_{f_{ij}} = P_{f_{i_i}} + \gamma_{x_{ij}} (Z_{m_{ij}} - Z_{g_{f_i}}) , \quad (D.16)$$

$$\gamma_{x_{ij}} = \begin{cases} \gamma_{g_i} & \text{se } Z_{of_i} < Z_{m_{ij}} , \\ \gamma_{o_i} & \text{se } Z_{of_i} > Z_{m_{ij}} , \end{cases} \quad (D.17)$$

Z_{of_i} – altura da coluna de óleo na fratura, na célula i

Z_{gf_i} – altura da coluna de gás na fratura, na célula i

$$Z_{gf_i} = \left(\frac{S_{g_i}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \right) L_{z_m} , \quad (D.18)$$

$$Z_{of_i} = L_{z_m} - Z_{gf_i} , \quad (D.19)$$

P_{fi} , pressão na fratura, na célula i , no contato g/o

$$P_{fci} = P_{oi} + \gamma_i \left(Z_{gfi} - \frac{L_{zm}}{2} \right), \quad (\text{D.20})$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma_g & \text{se } Z_{gfi} > \frac{L_{zm}}{2}, \\ \gamma_o & \text{se } Z_{gfi} < \frac{L_{zm}}{2}, \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

Saturações normalizadas, na face de cada subcélula, para representarem corretamente a segregação das fases no cálculo do fluxo matriz/fratura, quando a fratura estiver a montante:

$$S_{gij}^* = Z_{mij} + \frac{\Delta Z_m}{2} - Z_{ofi}, \quad (\text{D.22})$$

$$S_{gij}^* = \begin{cases} 1 - S_{or} - S_{wc} & \text{se } S_{gij}^* > (1 - S_{or} - S_{wc}), \\ 0 & \text{se } S_{gij}^* < 0. \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

Apêndice E : Derivadas do Termo de Transferência Matriz/Fratura

Formulação convencional:

Fratura:

$$\frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial P_{o_i}} = -T_{omf_i} + (P_{om_i} - P_{o_i}) \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial P_{o_i}}, \quad (E.1)$$

$$\frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial S_{g_i}} = (P_{om_i} - P_{o_i}) \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial S_{g_i}}, \quad (E.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial P_{o_i}} = & -T_{gmf_i} + [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \frac{\partial T_{gmf_i}}{\partial P_{o_i}} \\ & - (T_o R_s)_{mf_i} + (P_{om_i} - P_{o_i}) \left[R_{smf_i} \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial P_{o_i}} + T_{omf_i} \frac{dR_{smf_i}}{dP_{o_i}} \right], \quad (E.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial S_{g_i}} = & -T_{gmf_i} \frac{\partial P_{cgo_i}}{\partial S_{g_i}} + [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] , \\ & \frac{\partial T_{gmf_i}}{\partial S_{g_i}} + (P_{om_i} - P_{o_i}) R_{smf_i} \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial S_{g_i}}, \quad (E.4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial P_{om_i}} = T_{omf_i} + (P_{om_i} - P_{o_i}) \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial P_{om_i}}, \quad (E.5)$$

$$\frac{\partial(q_{omf_i})}{\partial S_{gm_i}} = (P_{om_i} - P_{o_i}) \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial S_{gm_i}}. \quad (E.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial P_{om_i}} &= T_{gmf_i} + [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{oi} + P_{cgo_i})] \frac{\partial T_{gmf_i}}{\partial P_{om_i}} \\ &\quad + (T_o R_s)_{mf_i} + (P_{om_i} - P_{oi}) \left[R_{smf_i} \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial P_{om_i}} + T_{omf_i} \frac{dR_{smf_i}}{dP_{om_i}} \right], \end{aligned} \quad (E.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{gmf_i})}{\partial S_{gm_i}} &= -T_{gmf_i} \frac{\partial P_{cgom_i}}{\partial S_{gm_i}} + [(P_{om_i} + P_{cgom_i}) - (P_{oi} + P_{cgo_i})] \\ &\quad \frac{\partial T_{gmf_i}}{\partial S_{g_i}} + (P_{om_i} - P_{oi}) R_{smf_i} \frac{\partial T_{omf_i}}{\partial S_{gm_i}} \end{aligned} \quad (E.8)$$

Formulação com subdomínio considerando fluxo disperso nas fraturas:

Para a face horizontal do topo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial P_{oi}} &= -T_{omf_{ij}} + T_{omf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\ &\quad + \left[(P_{om_{ij}} - P_{oi}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial P_{oi}}, \end{aligned} \quad (E.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial S_{g_i}} &= T_{omf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\ &\quad + \left[(P_{om_{ij}} - P_{oi}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial S_{g_i}}, \end{aligned} \quad (E.10)$$

$$\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial P_{oi}} = -T_{gmf_{ij}} + T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} \frac{\Delta Z_m}{2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ [(P_{om_{ij}} - P_{cgom_i}) - (P_{o_i} - P_{cgo_i})] - \right. \\
& \left. - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right\} \frac{\partial T_{gm_{ij}}}{\partial P_{o_i}} \\
& - (T_o R_s)_{m_{f_i}} + (T_o R_s)_{m_{f_i}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{o_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
& \left[R_{sm_{f_{ij}}} \frac{\partial T_{om_{f_{ij}}}}{\partial P_{o_i}} + T_{om_{f_{ij}}} \frac{dR_{sm_{f_{ij}}}}{dP_{o_i}} \right], \tag{E.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gm_{f_{ij}}})}{\partial S_{g_i}} & = -T_{gm_{f_{ij}}} \frac{\partial P_{cgo_i}}{\partial S_{g_i}} + T_{gm_{f_{ij}}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + \left\{ [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} - P_{cgo_i})] - (\gamma_{gm} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right\} \frac{\partial T_{gm_{f_{ij}}}}{\partial S_{g_i}} \\
& + (T_o R_s)_{m_{f_{ij}}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] R_{sm_{f_{ij}}} \frac{\partial T_{om_{f_{ij}}}}{\partial S_{g_i}}, \tag{E.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{om_{f_{ij}}})}{\partial P_{om_{ij}}} & = T_{om_{f_{ij}}} - T_{om_{f_{ij}}} \frac{\partial \gamma_{om_{f_{ij}}}}{\partial P_{om_{ij}}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{om_{f_{ij}}}}{\partial P_{om_{ij}}}, \tag{E.13}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(q_{om_{f_{ij}}})}{\partial S_{gm_{ij}}} = \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{om_{f_{ij}}}}{\partial S_{gm_{ij}}}, \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gm,ij})}{\partial P_{om,ij}} &= T_{gm,ij} - T_{gm,ij} \frac{\partial \gamma_{gm,ij}}{\partial P_{om,ij}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
&+ \left[(P_{om,ij} + P_{cgom,ij}) - (P_{oi} + P_{cgoi}) - (\gamma_{gm,ij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
&\frac{\partial T_{gm,ij}}{\partial P_{om,ij}} + (T_o R_s)_{m,ij} - (T_o R_s)_{m,ij} \frac{\partial \gamma_{om,ij}}{\partial P_{om,ij}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
&+ \left[(P_{om,ij} - P_{oi}) - (\gamma_{om,ij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
&\left[R_{sm,ij} \frac{\partial T_{om,ij}}{\partial P_{om,ij}} + T_{om,ij} \frac{dR_{sm,ij}}{dP_{om,ij}} \right], \tag{E.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gm,ij})}{\partial S_{gm,ij}} &= T_{gm,ij} \frac{\partial P_{cgm,ij}}{\partial S_{gm,ij}} - T_{gm,ij} \frac{\partial \gamma_{gm,ij}}{\partial S_{gm,ij}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
&+ \left[(P_{om,ij} + P_{cgom,ij}) - (P_{oi} + P_{cgoi}) - (\gamma_{gm,ij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
&\frac{\partial T_{gm,ij}}{\partial S_{gm,ij}} + \left[(P_{om,ij} - P_{oi}) - (\gamma_{om,ij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
&R_{sm,ij} \frac{\partial T_{om,ij}}{\partial S_{gm,ij}}, \tag{E.16}
\end{aligned}$$

Para a face horizontal da base:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{om,ij})}{\partial P_{om,i}} &= -T_{om,ij} - T_{om,ij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
&- T_{om,ij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} \frac{\Delta Z_m}{2} + \left[(P_{om,ij} - P_{oi}) \right. \\
&\left. - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{om,ij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{om,ij}}{\partial P_{oi}}, \tag{E.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial S_{g_i}} &= -T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m - T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
&+ \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \right. \\
&\left. + (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial S_{g_i}}, \tag{E.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial P_{o_i}} &= -T_{gmf_{ij}} - T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{o_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
&- T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{o_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} + \left[(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i}) \right. \\
&- \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{gm_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \left. \right] \frac{\partial T_{gmf_{ij}}}{\partial P_{o_i}} \\
&- (T_o R_s)_{mf_{ij}} - (T_o R_s)_{mf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{o_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
&- (T_o R_s)_{mf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{o_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} + \left[(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) \right. \\
&- \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{om_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \left. \right] \\
&\left[R_{smf_{ij}} \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial P_{o_i}} + T_{omf_{ij}} \frac{dR_{smf_{ij}}}{dP_{o_i}} \right], \tag{E.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial S_{g_i}} &= -T_{gmf_{ij}} \frac{\partial P_{cgo_i}}{\partial S_{g_i}} - T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m - T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
&+ \left[(P_{om_{ij}} - P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} - P_{cgo_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{gm_{ij}} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right] \\
&\frac{\partial T_{gmf_{ij}}}{\partial S_{g_i}} - (T_o R_s)_{mf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(T_o R_s)_{mfij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} \frac{\Delta Z_m}{2} + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
& + (\gamma_{omij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2}] R_{smfij} \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{g_i}}, \tag{E.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{omfij})}{\partial P_{omij}} &= T_{omfij} + T_{omfij} \frac{\partial \gamma_{omij}}{\partial P_{omij}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
& + (\gamma_{omij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2}] \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{omij}}, \tag{E.21}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(q_{omfij})}{\partial S_{gmij}} = [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{omij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2}] \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gmij}}, \tag{E.22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmfij})}{\partial P_{omij}} &= T_{gmfij} + T_{gmfij} \frac{\partial \gamma_{gmij}}{\partial P_{omij}} \frac{\Delta Z_m}{2} \\
& + \left\{ [(P_{omij} + P_{cgomij}) - (P_{oi} + P_{cgoi})] - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \right. \\
& \left. + (\gamma_{gmij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right\} \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial P_{omij}} + (T_o R_s)_{mfij} \\
& + (T_o R_s)_{mfij} \frac{\partial \gamma_{omij}}{\partial P_{omij}} \frac{\Delta Z_m}{2} + [(P_{omij} - P_{oi}) \\
& - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m + (\gamma_{omij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2}] \left[R_{smfij} \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{omij}} \right. \\
& \left. T_{omfij} \frac{dR_{smfij}}{dP_{omij}} \right], \tag{E.23}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(q_{gmfij})}{\partial S_{gmij}} = T_{gmfij} \frac{\partial P_{cgomij}}{\partial S_{gmij}} + T_{gmfij} \frac{\partial \gamma_{gmij}}{\partial S_{gmij}} \frac{\Delta Z_m}{2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ [(P_{omij} + P_{cgomij}) - (P_{oi} + P_{cgoi})] - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \right. \\
& + \left. (\gamma_{gmij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2} \right\} \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial S_{gmij}} \\
& + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\
& + (\gamma_{omij} - \gamma_i^*) \frac{\Delta Z_m}{2}] R_{smfij} \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gmij}}. \tag{E.24}
\end{aligned}$$

Para as faces laterais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{omfij})}{\partial P_{oi}} & = -T_{omfij} - T_{omfij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} (N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\
& + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m] \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{oi}}, \tag{E.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{omfij})}{\partial S_{gi}} & = -T_{omfij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{gi}} (N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\
& + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m] \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gi}}, \tag{E.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmfij})}{\partial P_{oi}} & = -T_{gmfij} - T_{gmfij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} (N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\
& + \left\{ [(P_{omij} - P_{cgomij}) - (P_{oi} - P_{cgoi})] - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \right\} \\
& \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial P_{oi}} - (T_o R_s)_{mfij} - (T_o R_s)_{mfij} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial P_{oi}} (N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m \\
& + [(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^*(N_{\text{sub}} - j)\Delta Z_m] \left[R_{smfij} \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{oi}} \right. \\
& \left. + T_{omfij} \frac{dR_{smfij}}{dP_{oi}} \right], \tag{E.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial S_{g_i}} &= -T_{gmf_{ij}} \frac{\partial P_{cgo_i}}{\partial S_{g_i}} - T_{gmf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
&+ \left\{ [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \right\} \\
&\frac{\partial T_{gmf_{ij}}}{\partial S_{g_i}} - (T_o R_s)_{mf_{ij}} \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial S_{g_i}} (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \\
&+ [(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m] R_{smf_{ij}} \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial S_{g_i}} \quad (E.28)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial P_{om_{ij}}} = T_{omf_{ij}} + [(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m] \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial P_{om_{ij}}} \quad (E.29)$$

$$\frac{\partial(q_{omf_{ij}})}{\partial S_{gm_{ij}}} = [(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m] \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}} \quad (E.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial P_{om_{ij}}} &= T_{gmf_{ij}} + \left\{ [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] \right. \\
&\quad \left. - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \right\} \frac{\partial T_{gmf_{ij}}}{\partial P_{om_{ij}}} + (T_o R_s)_{mf_{ij}} \\
&+ [(P_{om_{ij}} - P_{o_i}) - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m] \left[R_{smf_{ij}} \frac{\partial T_{omf_{ij}}}{\partial P_{om_{ij}}} \right. \\
&\quad \left. + T_{omf_{ij}} \frac{dR_{smf_{ij}}}{dP_{om_{ij}}} \right], \quad (E.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(q_{gmf_{ij}})}{\partial S_{gm_{ij}}} &= T_{gmf_{ij}} \frac{\partial P_{cgom_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}} + \left\{ [(P_{om_{ij}} + P_{cgom_{ij}}) \right. \\
&\quad \left. - (P_{o_i} + P_{cgo_i})] - \gamma_i^* (N_{\text{sub}} - j) \Delta Z_m \right\} \frac{\partial T_{gmf_{ij}}}{\partial S_{gm_{ij}}}
\end{aligned}$$

$$+ \left[(P_{omij} - P_{oi}) - \gamma_i^* (N_{sub} - j) \Delta Z_m \right] R_{smfij} \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gmij}} . \quad (E.32)$$

Formulação com subdomínios considerando fluxo segregado nas fraturas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (q_{omfij})}{\partial P_{omi}} &= T_{omfij} \left\{ - \left[1 + \frac{\partial \gamma_i}{\partial P_{oi}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \gamma_{xij}}{\partial P_{oi}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{oi}} (P_{omij} - P_{fij}) , \end{aligned} \quad (E.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (q_{omfij})}{\partial S_{gmi}} &= T_{omfij} \left\{ - \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial S_{gi}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) + \gamma_i \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{gi}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \gamma_{xij}}{\partial S_{gi}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) - \gamma_{xij} \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{gi}} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gi}} (P_{omij} - P_{fij}) , \end{aligned} \quad (E.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (q_{gmfij})}{\partial P_{omi}} &= T_{gmfij} \left\{ - \left[1 + \frac{\partial \gamma_i}{\partial P_{oi}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \gamma_{xij}}{\partial P_{oi}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial P_{oi}} (P_{omij} - P_{cgomij} - P_{fij}) \\ &\quad + (T_o R_o)_{mfij} \left\{ - \left[1 + \frac{\partial \gamma_i}{\partial P_{oi}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \gamma_{xij}}{\partial P_{oi}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial (T_o R_s)_{mfij}}{\partial P_{oi}} (P_{omij} - P_{fij}) , \quad (\text{E.35})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (q_{gmfij})}{\partial S_{gm_i}} &= T_{gmfij} \left\{ - \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial S_{g_i}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad + \gamma_i \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{g_i}} + \frac{\partial \gamma_{x_{ij}}}{\partial S_{g_i}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) \\ &\quad \left. \left. - \gamma_{x_{ij}} \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{g_i}} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial S_{g_i}} (P_{omij} - P_{cgomij} - P_{fij}) \\ &\quad + (T_o R_s)_{mfij} \left\{ - \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial S_{g_i}} \left(Z_{gf_i} - \frac{Lz_m}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad + \gamma_i \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{g_i}} + \frac{\partial \gamma_{x_{ij}}}{\partial S_{g_i}} (Z_{ij} - Z_{gf_i}) \\ &\quad \left. \left. - \gamma_{x_{ij}} \frac{\partial Z_{gf_i}}{\partial S_{g_i}} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial (T_o R_s)_{mfij}}{\partial S_{g_i}} (P_{omij} - P_{fij}) , \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

$$\frac{\partial (q_{omfij})}{\partial P_{omij}} = T_{omfij} + \frac{\partial T_{omfij}}{\partial P_{omij}} (P_{omij} - P_{fij}) , \quad (\text{E.37})$$

$$\frac{\partial (q_{omfij})}{\partial S_{gm_{ij}}} = \frac{\partial T_{omfij}}{\partial S_{gm_{ij}}} (P_{omij} - P_{fij}) , \quad (\text{E.38})$$

$$\frac{\partial (q_{gmfij})}{\partial P_{omij}} = T_{gmfij} + \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial P_{omij}} (P_{omij} + P_{cgomij} - P_{fij})$$

$$(T_o R_s)_{mjij} + \frac{\partial (T_o R_s)_{mjij}}{\partial P_{omij}} (P_{omij} - P_{fij}) , \quad (\text{E.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (q_{gmfij})}{\partial S_{gmij}} &= T_{gmfij} \frac{\partial P_{cgomij}}{\partial S_{gmij}} \\ &+ \frac{\partial T_{gmfij}}{\partial S_{gmij}} (P_{omij} + P_{cgomij} - P_{fij}) \\ &+ \frac{\partial (T_o R_s)_{mjij}}{\partial S_{gmij}} (P_{omij} - P_{fij}) . \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Apêndice F : O Fator de Forma (σ)

Formulação Convencional

O fator de forma que utilizamos foi proposto por Kazemi *et alii* [15] para simulação com diferenças finitas. Parte-se da equação de conservação, para um bloco de matriz:

$$-q_{mf}^* = \frac{\partial}{\partial t}(\phi b S)_m, \quad (\text{F.1})$$

onde,

$$q_{mf}^* = \frac{\text{vazão volumétrica nas condições padrão}}{\text{unidade de volume}} \quad (\text{F.2})$$

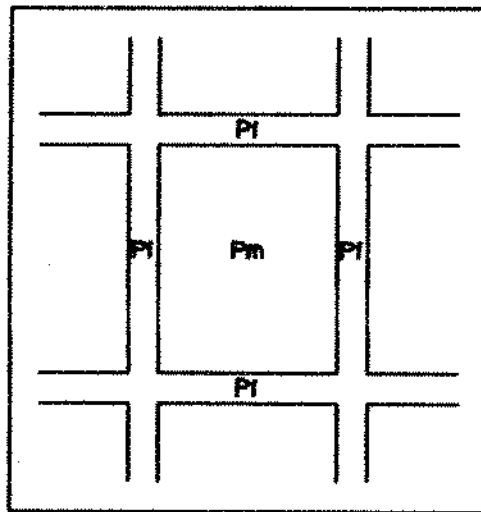


Figura 7.1: Transferência Matriz-Fratura para a Formulação Convencional

Considerando que a pressão na fratura, em torno do bloco de matriz, não varia,

então:

$$\begin{aligned}
 q_{mf}^* &= q_{mf_x}^* + q_{mf_y}^* + q_{mf_z}^* \\
 &= \left[T_{mf_{x+1/2}} + T_{mf_{x-1/2}} + T_{mf_{y+1/2}} \right. \\
 &\quad \left. + T_{mf_{y-1/2}} + T_{mf_{z+1/2}} + T_{mf_{z-1/2}} \right] (P_m - P)
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

onde,

$$T_{mf_{x\pm 1/2}} = \left(\frac{L_y L_z}{L_x/2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_x, \tag{F.4}$$

$$T_{mf_{y\pm 1/2}} = \left(\frac{L_x L_z}{L_y/2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_y, \tag{F.5}$$

$$T_{mf_{z\pm 1/2}} = \left(\frac{L_x L_y}{L_z/2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_z. \tag{F.6}$$

Considerando que,

$$\left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_x = \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_y = \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_z = k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \tag{F.7}$$

$$q_{mf}^* = 2 \left[\frac{L_y L_z}{L_x/2} + \frac{L_x L_z}{L_y/2} + \frac{L_x L_y}{L_z/2} \right] k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} (P_m - P) \tag{F.8}$$

Para todos os blocos em uma célula computacional:

$$q_{mf} = 4 \left[\frac{L_y L_z}{L_x} + \frac{L_x L_z}{L_y} + \frac{L_x L_y}{L_z} \right] \frac{V_r}{L_x L_y L_z} k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} (P_m - P) \tag{F.9}$$

onde V_r é o Volume da célula computacional e $\frac{V_r}{L_x L_y L_z}$ é a quantidade de blocos de matriz na célula, e:

$$q_{mf} = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) V_r k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right) (P_m - P) \quad (\text{F.10})$$

Definindo,

$$\sigma = 4 \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right] \quad (\text{F.11})$$

chegamos ao fator de forma, como sugerido por Kazemi *et alii* [15].

Formulação Com Subdomínios

Na formulação com subdomínios, a dedução é similar à formulação convencional:

Para um bloco de matriz:

– subcélula do topo:

$$q_{mf_T} = [T_{mf_{x+1/2}} + T_{mf_{x-1/2}} + T_{mf_{y+1/2}} + T_{mf_{y-1/2}} + T_{mf_{z+1/2}}] \Delta \Phi_{mf_T}^* \quad (\text{F.12})$$

onde,

$$T_{mf_{(x\pm 1/2)_T}} = \left(\frac{L_y L_z / N_{\text{sub}}}{L_x / 2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_{x_T}, \quad (\text{F.13})$$

$$T_{mf_{(y\pm 1/2)_T}} = \left(\frac{L_x L_z / N_{\text{sub}}}{L_y / 2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_{y_T}, \quad (\text{F.14})$$

$$T_{mf_{(z\pm 1/2)_T}} = \left(\frac{L_x L_y}{(L_z / N_{\text{sub}}) / 2} \right) \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_{z_T}, \quad (\text{F.15})$$

com considerações similares às da formulação convencional:

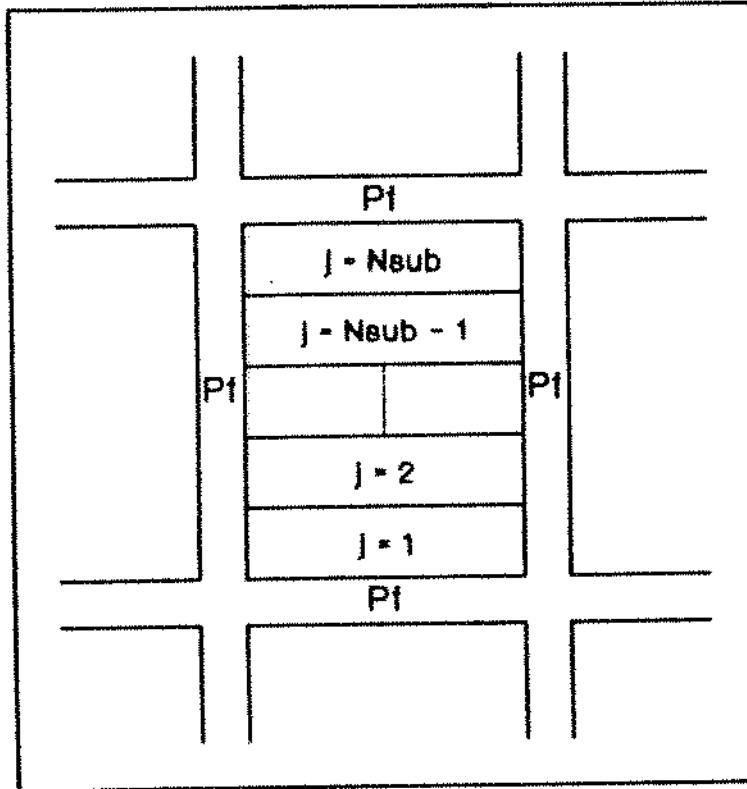


Figura 7.2: Transferência Matriz-Fratura para Formulação com Subdomínios

$$q_{mfT}^* = \left[4 \left(\frac{L_y L_z / N_{\text{sub}}}{L_x} + \frac{L_x L_z / N_{\text{sub}}}{L_y} \right) + 2 \frac{L_x L_y}{L_z / N_{\text{sub}}} \right] \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_T \Delta \Phi_{mfT}^* \quad (\text{F.16})$$

– as subcélulas internas não terão fluxo matriz-fratura na direção vertical, então:

$$q_{mf_s}^* = 4 \left[\frac{L_y L_z / N_{\text{sub}}}{L_x} + \frac{L_x L_z / N_{\text{sub}}}{L_y} \right] \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_s \Delta \Phi_{mf_s}^* \quad (\text{F.17})$$

Para todos os blocos em uma célula computacional:

– subcélula do topo:

$$q_{mfT} = 2 \left[2 \left(\frac{L_y L_z / N_{\text{sub}}}{L_x} + \frac{L_x L_z / N_{\text{sub}}}{L_y} \right) + \frac{L_x L_y}{L_z / N_{\text{sub}}} \right] \frac{V_m}{L_x L_y L_z / N_{\text{sub}}} \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_T \Delta \Phi_{mfT}^* \quad (\text{F.18})$$

$$q_{mfT} = \frac{2}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{2}{L_x^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{1}{(L_z / N_{\text{sub}})^2} \right] V_r \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_T \Delta \Phi_{mfT}^* \quad (\text{F.19})$$

– subcélulas internas:

$$q_{mf_s} = 4 \left[\frac{L_y L_z / N_{\text{sub}}}{L_x} + \frac{L_x L_z / N_{\text{sub}}}{L_y} \right] \frac{V_r}{L_x L_y L_z / N_{\text{sub}}} \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_s \Delta \Phi_{mf_s}^* \quad (\text{F.20})$$

$$q_{mf_s} = \frac{4}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right] V_r \left[k_m \left(\frac{k_r b}{\mu} \right)_{mf} \right]_s \Delta \Phi_{mf_s}^* \quad (\text{F.21})$$

Das equações (F.19) e (F.21) temos,

– subcélula do topo:

$$\sigma_T = \frac{2}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{2}{L_x^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{1}{(L_z/N_{\text{sub}})^2} \right], \quad (\text{F.22})$$

- subcélulas internas:

$$\sigma_s = \frac{4}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right], \quad (\text{F.23})$$

A equação (F.22) também vale para a subcélula de base, ou seja:

$$\sigma_B = \frac{2}{N_{\text{sub}}} \left[\frac{2}{L_x^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{1}{(L_z/N_{\text{sub}})^2} \right].$$

A diferença de potencial matriz-fratura, $\Delta\Phi_{mf}^*$, na formulação com subdomínios é discutida no Apêndice D.

$$- \begin{bmatrix} \bar{a}_{mf_{i1}} \\ \bar{a}_{mf_{i2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{a}_{mf_{ij}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{a}_{mf_{iN_{\text{sub}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_{f_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F}_{m_{i1}} \\ \bar{F}_{m_{i2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_{m_{ij}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_{m_{iN_{\text{sub}}}} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.11})$$

– da primeira linha da equação anterior:

$$\bar{g}_{i1} = (\bar{\omega}_{i1})^{-1}(-\bar{a}_{mf_{i1}})\delta X_{f_i} + (\bar{\omega}_{i1})^{-1}(-\bar{F}_{m_{i1}}), \quad (\text{G.12})$$

ou, redefinindo:

$$g_{i1} = a_{mf_i}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{i1}}^*, \quad (\text{G.13})$$

– da segunda linha de (G.11):

$$\bar{c}_{i2}\bar{g}_{i1} + \bar{\omega}_{i2}\bar{g}_{i2} = (-\bar{a}_{mf_{i2}})\delta \bar{X}_{f_i} - \bar{F}_{m_{i2}}, \quad (\text{G.14})$$

$$\bar{g}_{i2} = (\bar{\omega}_{i2})^{-1} \left[(-\bar{a}_{mf_{i2}})\delta \bar{X}_{f_i} - \bar{F}_{m_{i2}} - \bar{c}_{i2}(a_{mf_i}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{i1}}^*) \right], \quad (\text{G.15})$$

$$\bar{g}_{i2} = (\bar{\omega}_{i2})^{-1} \left[(-\bar{a}_{mf_{i2}} - \bar{c}_{i2} a_{mf_1}^*) \delta X_{f_i} + (\bar{F}_{m_{i2}} - \bar{c}_{i2} F_{m_1}^*) \right], \quad (\text{G.16})$$

$$\bar{g}_{i2} = a_{mf_2}^* \delta X_{f_i} + F_{m_2}^* \quad (\text{G.17})$$

onde:

$$a_{mf_2}^* = (\bar{\omega}_{i2})^{-1} \left[(-\bar{a}_{mf_{i2}} - \bar{c}_{i2} a_{mf_1}^*) \right] \quad (\text{G.18})$$

e

$$F_{m_2}^* = (\bar{\omega}_{i2})^{-1} \left[\bar{F}_{m_{i2}} - \bar{c}_{i2} F_{m_1}^* \right], \quad (\text{G.19})$$

em geral, para $j = 2, 3, \dots, N_{\text{sub}}$:

$$\bar{g}_{ij} = a_{mf_j}^* \delta X_{f_i} + F_{m_j}^*, \quad (\text{G.20})$$

onde:

$$a_{mf_j}^* = (\bar{\omega}_{ij})^{-1} \left[-\bar{a}_{mf_{ij}} - \bar{c}_{ij} a_{mf_{j-1}}^* \right] \quad (\text{G.21})$$

e

$$F_{m_j}^* = (\bar{\omega}_{ij})^{-1} \left[\bar{F}_{m_{ij}} - \bar{c}_{ij} F_{m_{j-1}}^* \right]. \quad (\text{G.22})$$

Explicitando g :

$$\begin{bmatrix} a_{mf_1}^* \\ a_{mf_2}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mf_j}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mf_{N_{\text{sub}}}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_{f_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{m_1}^* \\ \bar{F}_{m_2}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_{m_j}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_{m_{N_{\text{sub}}}}^* \end{bmatrix}, \quad (\text{G.24})$$

onde:

$$\delta \bar{X}_{m_{iN_{\text{sub}}}} = a_{mf_{N_{\text{sub}}}}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}}}}^*, \quad (\text{G.25})$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{X}_{m_{iN_{\text{sub}-1}}} &= a_{mf_{N_{\text{sub}-1}}}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}-1}}}^* - \bar{q}_{iN_{\text{sub}-1}} \delta \bar{X}_{m_{iN_{\text{sub}}}} \\ &= a_{mf_{N_{\text{sub}-1}}}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}-1}}}^* - \bar{q}_{iN_{\text{sub}-1}} (a_{mf_{N_{\text{sub}}}}^* \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}}}}^*) \\ &= (a_{mf_{N_{\text{sub}-1}}}^* - \bar{q}_{iN_{\text{sub}-1}} a_{mf_{N_{\text{sub}}}}^*) \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}-1}}}^* - \bar{q}_{iN_{\text{sub}-1}} F_{m_{N_{\text{sub}}}}^* \\ &= a_{mf_{N_{\text{sub}-1}}}^{**} \delta X_{f_i} + F_{m_{N_{\text{sub}-1}}}^{**}, \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

- em geral, para $j = N_{\text{sub}-1}, N_{\text{sub}-2}, \dots, 1$:

$$\delta \bar{X}_{m_{ij}} = a_{mf_j}^{**} \delta X_{f_i} + F_{m_j}^{**} \quad (\text{G.27})$$

onde:

$$a_{mf_j}^{**} = a_{mf_j}^* - \bar{q}_{ij} a_{mf_{j+1}}^{**} \quad (\text{G.28})$$

e

$$F_{m_j}^{**} = F_{m_j}^* - \bar{q}_{ij} F_{m_{j+1}}^{**} . \quad (\text{G.29})$$