UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Autor: Renato Picelli Sanches

Otimização Estrututural Evolucionária Usando Malhas Hexagonais

Campinas, 2011

155/2011

Autor: Renato Picelli Sanches

Otimização Estrututural Evolucionária Usando Malhas Hexagonais

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Sanches, Renato Picelli
Sa55o	Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais / Renato Picelli Sanches. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.
	Orientador: Renato Pavanello.
	Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Otimização Estrutural. 2. Método dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Evolutionary structural optimization using hexagonal meshes
Palavras-chave em Inglês: Structural Optimization, Finite element method
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Marco Lúcio Bittencourt, Jun Sérgio Ono Fonseca
Data da defesa: 16-09-2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Otimização Estrutural Evolucionária Usando Malhas Hexagonais

Autor: Renato Picelli Sanches
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelo membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca
DEMEC/UFRGS

Campinas, 16 de Setembro de 2011.

À minha avó Alzira,
sempre uma das melhores recordações da minha infância.

Agradecimentos

A Deus, que não me permite um caminhar sozinho.

À minha família, Ludimeri, José Carlos, Emília e Luiz, sem a qual eu seria absolutamente nada.

À minha namorada, Ana, por fazer a vida em Barão Geraldo valer a pena.

A Jack Kerouac, pela estrada sem fim.

Ao meu professor orientador Renato Pavanello, pela preciosíssima confiança depositada em mim e pela parceria neste trabalho. A todos os outros professores da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp, pela atenção e pelas aulas ministradas.

Ao meu primeiro orientador, Cleber Santiago Alves, pela amizade e pelo meu início na carreira acadêmica.

Ao meu orientador de TCC, Fábio Lúcio Santos, pelo grande incentivo na escolha do meu caminho.

Aos grandes companheiros de laboratório, pelo apoio e amizade diária.

Aos amigos do Flat do Barão, pela vida universitária fundamental na minha formação.

Ao Estado e à Federação, pela universidade, a igreja da razão.

Sempre que você tiver vontade de criticar alguém, lembre-se de que criatura alguma neste mundo teve as vantagens de que você desfrutou.

F. Scott Fitzgerald, em O Grande Gatsby

Resumo

PICELLI, Renato. *Otimização Estrutural Evolucionária usando malhas hexagonais.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2011.

A otimização estrutural topológica é uma ferramenta aplicada em muitos campos da engenharia. Diversos métodos de otimização topológica (MOT) têm sido desenvolvidos a partir da consolidação do método dos elementos finitos e da evolução das capacidades computacionais. Dentre os diversos métodos, o método denominado de Otimização Estrutural Evolucionária (*ESO - Evolutionary Structural Optimization*) tem se consolidado na área através da aplicação de estratégias heurísticas na análise do modelo estrutural. Esse método se baseia na eliminação sucessiva de elementos em uma malha de elementos finitos que cobre o espaço de soluções definido inicialmente. Atualmente, a otimização evolucionária conta com a versão bidirecional (*BESO - Bidirectional ESO*) em que os elementos não são apenas eliminados, mas também adicionados ao domínio inicial. Um dos problemas comuns aos métodos de otimização topológica é o Tabuleiro de Xadrez, que consiste na obtenção de soluções intermediárias com padrões sólido-vazios alternados que sub ou supervalorizam a rigidez da estrutura e divergem da solução ótima. Como soluções para este problema, são utilizados elementos finitos de alta ordem, filtros e a aplicação de malhas hexagonais. Entretanto, as duas primeiras opções implicam no aumento do custo computacional. Neste trabalho, investiga-se o uso de malhas hexagonais nos métodos ESO/BESO, cuja metodologia ainda não foi explorada nos métodos evolucionários. Além de eliminar o Tabuleiro de Xadrez, as malhas hexagonais possibilitam a obtenção de topologias com contornos mais suaves e livres de conexões por apenas um nó. São implementados os métodos ESO em critérios de tensão e rigidez, ESO em otimização de forma e o método BESO para critério baseado em rigidez. A aplicação de malhas hexagonais é investigada em todos esses casos.

Palavras Chave: Otimização Estrutural, Métodos ESO/BESO, Malhas Hexagonais.

Abstract

PICELLI, Renato Picelli. *Evolutionary Structural Optimization using hexagonal meshes.* Master thesis. Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas. 2011.

The Structural Topology Optimization technique has been applied in many fields of engineering. Several optimization methods have been developed with the Finite Element Method consolidation and the evolution of computational capabilities. Among many techniques, Evolutionary Structural Optimization (ESO) has been consolidated in the area through the successive application of heuristic strategies in the structural analysis. This method is based on a rule of successive elimination of elements in a finite element mesh that covers the feasible solution space defined initially. The Bidirectional Evolutionary Structural Optimization method (BESO) was recently proposed, in which the elements are not only eliminated but also added to the initial domain. One of the common problems in topology optimization methods is the checkerboard that consists in obtaining intermediate solutions with solid-void alternated patterns that under or overvalue the stiffness of the structure and diverges from the optimum solution. As solutions for this problem were investigated the use of high order finite elements, filters and the application of hexagonal meshes. However, the two first options require high computational performance. This work investigates the use of hexagonal meshes in ESO/BESO methods. Besides checkerboard elimination, hexagonal meshes provide topologies with smoother contours and free of one-node hinges. Herewith, the ESO method under stress and stiffness criteria, ESO applied to shape optimization and the convergent and mesh-independent BESO method are implemented. The application of hexagonal meshes is investigated in all cases.

Key words: Structural Optimization, ESO/BESO Methods, Hexagonal Meshes.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Os métodos de Otimização Estrutural Topológica buscam encontrar o *layout* ou topologia de uma quantidade fixa de material que satisfaça determinados conjuntos de restrições em projetos estruturais. Com os avanços dos estudos e aplicações em problemas práticos, a otimização topológica se tornou nos últimos anos uma ferramenta poderosa de projeto em meios acadêmicos e industriais, sendo que esta ferramenta já se encontra integrada a softwares comerciais de análise por elementos finitos, Quint (2011). Dentre os métodos de otimização topológica, destacaram-se na última década os métodos baseados na Otimização Estrutural Evolucionária, enfoque deste trabalho.

O procedimento evolucionário é baseado na remoção simples e gradual de material ineficiente da região de projeto, que é fixa, pré-definida e discretizada utilizando o tipo de aproximação adotado na malha de elementos finitos escolhida, Cook et al. (2002), cuja discretização exerce papel fundamental no algoritmo. De acordo com Xie and Steven (1993), a idéia básica do método ESO é executar a análise de elementos finitos ao longo do domínio inicial fixo da estrutura e, após uma análise de sensibilidade, eliminar gradualmente os elementos com menor eficiência no problema.

Apesar da maturidade da área, muitas questões ainda estão abertas à pesquisa, principalmente em relação aos métodos evolucionários de otimização. Uma dessas questões se refere aos problemas clássicos de otimização topológica em geral, dentre eles o problema de tabuleiro de xadrez ("checkerboard"). Diversas técnicas foram propostas como solução desse problema. Dentre essas técnicas, a aplicação de malhas hexagonais foi proposta como uma alternativa eficaz de solução para o método SIMP, Talischi et al. (2009). Neste trabalho, a influência do uso de malhas hexagonais é analisado para os métodos mais comuns de otimização estrutural evolucionária. Como motivação desse estudo, considera-se o fato de que, até então, a abordagem hexagonal não foi aplicada aos métodos evolucionários de otimização topológica. Os resultados alcançados nesta dissertação englobam análises das principais características das malhas hexagonais e a influência das mesmas nas versões clássica e bidirecional da Otimização Estrutural Evolucionária, sob critérios de nível de tensão e de maximização da rigidez.

1.1 Estado da arte

Desde a década de 80, muitos estudos têm sido desenvolvidos sobre a teoria e métodos de otimização estrutural topológica com aplicações em projeto de novas estruturas e materiais. Dentre as várias técnicas numéricas usadas na otimização topológica, a Otimização Estrutural Evolucionária (ESO - *Evolutionary Structural Optimization*) foi proposta como um algoritmo simples e heurístico de otimização.

A literatura científica sobre o método ESO se iniciou em 1993 com o primeiro artigo escrito por Xie and Steven (1993) e essa área ainda é muito ativa, Xie and Huang (2010). Grandes avanços foram obtidos com esse método. Paralelamente, discussões sobre a sua validade foram apresentadas, Zhou and Rozvany (2001). Dentre essas discussões, destaca-se o questionamento sobre a falta de embasamento matemático do método. Contudo, de acordo com Tanskanen (2002), o método ESO tem uma base teórica equivalente ao método de otimização baseado em programação linear sequencial seguido do algoritmo Simplex, quando o critério de rejeição adotado no método ESO é o da energia de deformação. Atualmente, o método é bem estabelecido e tem alcançado versões mais complexas como a versão ESO bidirecional (BESO), Huang and Xie (2007), a versão multiobjetiva e baseada em elementos fixos (MESO), Tanskanen (2006), o método ESO genético (GESO), Liu et al. (2008), entre outros. Huang and Xie (2010) apresentaram recentemente uma última revisão dos métodos ESO/BESO, onde fica claro o estágio de amadurecimento encontrado por esta técnica.

Para cada tipo de projeto existirá um ou mais critérios para a eliminação de elementos, que podem ser critérios baseados em rigidez, Chu et al. (1996), nível de tensão, Xie and Steven (1997), frequência natural e problemas dinâmicos, Xie and Steven (1996), condução de calor, Li et al. (2000), flambagem e outros, Li and Steven (2001). Os problemas tratados neste trabalho são analisados sob critérios de rigidez e nível de tensão. Para cada critério, adota-se um número de sensibilidade, que é a representação da eficiência de cada elemento na estrutura com referência à função objetivo. Os elementos menos eficientes serão removidos do domínio de projeto.

As deficiências mais comuns nas aplicações do método ESO são as instabilidades numéricas como os padrões de tabuleiro de xadrez, Xie and Huang (2010), Li and Steven (2001), dependência da malha, Xie and Huang (2010), Chu et al. (1997) e a tendência para mínimos locais, Huang and Xie (2010).

Os padrões de tabuleiro de xadrez são anomalias encontradas na topologia resultante caracterizadas por padrões sólido-vazio alternados ao longo da malha de elementos finitos. Em uma estrutura contínua discretizada por elementos bilineares de baixa ordem, em um caso 2D, os números de sensibilidade podem se tornar C^0 descontínuos através das fronteiras dos elementos. Isso leva aos padrões de tabuleiro de xadrez na topologia final, Jog and Haber (1996). A presença do tabuleiro de xadrez dificulta a interpretação e a manufatura da solução ótima, Xie and Huang (2010). Considerando que este problema é causado por instabilidades numéricas dos elementos de baixa ordem, elementos de alta ordem foram aplicados como uma solução para o problema em otimização topológica com o método SIMP, Sigmund and Peterson (1998). Filtros também foram propostos por alguns autores como uma técnica de eliminação dos padrões de tabuleiro de xadrez. Li and Steven (2001) propuseram o primeiro filtro de suavização do número de sensibilidade para o método ESO. Entretanto, o uso de filtros ou elementos de alta ordem pode implicar em um aumento do custo computacional, sendo que este pode ser muito elevado, o que caracteriza um desafio na programação destes métodos. Mesmo que essas técnicas alcancem topologias livres de padrões de tabuleiro de xadrez, elas não obtem soluções independentes da malha.

Dependência da malha se refere ao problema de obtenção de diferentes topologias para diferentes tamanhos de malhas ou discretizações, Sigmund and Peterson (1998). Quando uma malha fina é usada, o algoritmo de otimização topológica obterá uma topologia diferente com mais membros ou menores tamanhos no desenho final da estrutura, Xie and Huang (2010). Idealmente, o refino da malha deveria resultar em um modelagem melhor de elementos finitos da mesma topologia ótima e uma melhor caracterização de seus contornos, mas não em uma estrutura diferente. Para superar esses problemas, filtros e técnicas como controle de perímetro, métodos de restrição e outras foram aplicadas no método SIMP, Sigmund and Peterson (1998). Para métodos evolucionários algumas dessas técnicas também foram aplicadas. No artigo de Yang et al. (2003), o controle de perímetro no método BESO é apresentado. Soluções independentes da malha e um novo método BESO são apresentados por Huang and Xie (2007), cujas soluções são alcançadas com a aplicação de um esquema de filtro proposto pelo autor. De forma similar ao processo de eliminação do tabuleiro de xadrez, o custo computacional pode ser aumentado com algoritmos extras para obtenção de soluções independentes da malha em otimização topológica e, para solucionar ambos os problemas, a capacidade computacional exigida pode ser alta.

Através dos estudos e dos casos mencionados acima, outras alternativas foram propostas para solucionar os problemas numéricos das técnicas de otimização topológica. Para obter topologias livres de tabuleiro de xadrez, Talischi et al. (2009) apresentam o elemento hexagonal com funções de Wachspress aplicado ao algoritmo SIMP. Os autores propõem a utilização de malhas em formato de favo de mel e, devido à geometria do elemento, elas eliminam a chance de existência de conexões por apenas um nó entre elementos, cujas conexões formam os padrões de tabuleiro de xadrez. Elementos hexagonais compartilham mais arestas e nós com seus vizinhos do que os elementos quadrilaterais tradicionais, além de apresentarem mais linhas de simetria. Outros autores também usam a idéia de malhas hexagonais, como Zhou (2010) com um método de discretização híbrida para otimização de mecanismos compliantes através de algoritmos genéticos. Também para mecanismos compliantes, Saxena and Saxena (2007) usaram malhas hexagonais criadas por blocos montados com dois elementos quadrilaterais em otimização topológica com formulações SIMP, PEAK e SIGMOID.

A partir do estudo bibliográfico realizado, não foram encontradas aplicações de malhas hexagonais na implementação dos métodos ESO/BESO. Considerando que estes algoritmos também apresentam problemas de instabilidades numéricas, decidiu-se investigar a aplicação dessas malhas nos algoritmos evolucionários, como forma de contribuição para os métodos.

Este trabalho apresenta uma alternativa de obtenção de topologias livres de tabuleiro de xadrez no método ESO com malhas hexagonais em critério de rigidez e nível de tensão. As topologias resultantes não apresentam padrões de tabuleiro de xadrez e nem conexões por um nó entre elementos quando a malha em forma de favo de mel é aplicada. Além do mais, os contornos das estruturas obtidas são suavizados devido à geometria da malha hexagonal. A dependência da malha também é descrita. Mesmo que a otimização evolucionária esteja atingindo versões mais atuais e complexas como a versão BESO, o método ESO básico ainda é utilizado, Ansola et al. (2006); Ghaffarianjam and Absolbashari (2010); Jia et al. (2011); Silva and Pavanello (2010b).

O Grupo de Métodos Computacionais em Mecânica do Contínuo (GMCMC) do Departamento de Mecânica Computacional (DMC) da Unicamp também já realizou trabalhos nesta área. Da Silva desenvolveu sua dissertação de mestrado ao investigar os métodos evolucionários de otimização, da Silva (2001). Silva foi além e investigou problemas de absorção acústica utilizando os métodos ESO e SIMP, Silva (2007a), Silva and Pavanello (2010b). Porto e Pizzirani também colaboraram na área ao publicarem trabalhos na área de otimização utilizando métodos de homogeneização, Porto (2006); Porto and Pavanello (2007), e algoritmos genéticos, Pizzirani (2003), respectivamente. Foram publicados também diversos trabalhos sobre otimização em anais de congresso, dentre eles, Casas et al. (2004); Pavanello and Gomes (2006); Silva and Pavanello (2010a).

1.2 Objetivos e contribuições

O objetivo geral deste trabalho é a investigação e a implementação de métodos ESO/BESO de otimização estrutural topológica e de forma baseados em critérios de tensão e rigidez, com ênfase na análise da influência do uso de malhas hexagonais nos algoritmos. Esses métodos foram aplicados à soluções de problemas elasto-estáticos lineares de estado plano de tensão.

Como objetivos específicos do trabalho, pode-se mencionar:

- Estudo e revisão dos métodos evolucionários de otimização e da aplicação de malhas hexagonais em otimização estrutural.
- Implementação de pré-processadores básicos para geração de malhas quadrilaterais e hexagonais.
- Implementação dos algoritmos ESO em critérios de tensão e rigidez, do algoritmo ESO aplicado em otimização de forma e do algoritmo BESO convergente e independente da malha em ambiente MATLAB.

Como contribuições do trabalho para o DMC, são destacados:

- Implementação de métodos evolucionários de otimização topológica, com possibilidade dos seguintes módulos em elasticidade plana:

  ESO em nível de tensão: tradicional e com malhas hexagonais.

  ESO em maximização da rigidez: tradicional e com malhas hexagonais.

  ESO aplicado à otimização de forma: tradicional e com malhas hexagonais.

  BESO com soluções convergentes e independentes da malha: tradicional (Huang and Xie (2007)) e com malhas hexagonais.
- Desenvolvimento de pré-processadores básicos próprios, para geração de malhas quadrilaterais e hexagonais.
- Investigação da aplicação de malhas hexagonais em métodos ESO/BESO, ainda não exploradas em métodos evolucionários, e avaliação da influência da geometria hexagonal nas soluções obtidas.

1.3 Descrição do trabalho

Neste primeiro capítulo, foi destacado o estado da arte dos métodos evolucionários e das aplicações de malhas hexagonais em otimização estrutural topológica, assim como os objetivos e contribuições do trabalho.

No Capítulo 2, são formulados os métodos de análise estrutural utilizados, assim como a construção do elemento hexagonal presente neste trabalho.

O Capítulo 3, por sua vez, apresenta o conceito e um breve histórico da otimização estrutural. As formulações dos métodos evolucionários implementados são apresentadas e o problema clássico de tabuleiro de xadrez é discutido, assim como a implementação do filtro numérico de Li and Steven (2001) utilizado e a influência da malha hexagonal na solução desse problema.

O Capítulo 4 aborda alguns aspectos computacionais relevantes neste trabalho, como a geração das malhas quadrilaterais e hexagonais.

A validação dos programas implementados é apresentada no Capítulo 5. Topologias clássicas são apresentadas e discutidas para os métodos ESO em critério de tensão e rigidez e também para o método BESO convergente e independente da malha em maximização da rigidez. O resultado do filtro para eliminação do problema de tabuleiro de xadrez é apresentado para os métodos ESO.

O Capítulo 6 primeiramente apresenta a eliminação do tabuleiro de xadrez com o uso de malhas hexagonais, assim como uma discussão sobre a dependência da malha do método, a razão de aspecto dos blocos hexagonais e uma análise breve de custo computacional. Posteriormente, aplicações do método ESO em maximização da rigidez são apresentadas com o uso de malhas hexagonais. O método ESO em nível de tensão e malha hexagonal é então discutido, assim como a aplicação do método em Otimização de Forma. Por fim, uma análise do método BESO implementado com o uso de malhas hexagonais é feita.

Por fim, no Capítulo 7, são feitas as conclusões acerca do trabalho desenvolvido e são apresentadas as sugestões de continuidade do tema estudado para trabalhos futuros, com a utilização dos códigos implementados.

Capítulo 2

Modelagem e Análise de Estruturas

2.1 Projeto ótimo de estruturas

Engenharia consiste em uma série de atividades bem estabelecidas como: pesquisa, projeto, análise, fabricação, vendas e desenvolvimento de sistemas. Estes processos estão em contínuo desenvolvimento desde séculos. Entre os produtos desse desenvolvimento estão os edifícios, pontes, rodovias, automóveis, aviões, máquinas industriais e outros. Contudo, a evolução dessas tecnologias tem sido lenta, pois o processo completo demanda tempo, dinheiro e recursos humanos em alta escala. Assim, o projeto e a fabricação desses bens devem ser realizados de forma a encontrar o melhor projeto dentre muitas possibilidades, Arora (2004).

Para que o projeto seja realizado de forma otimizada, faz-se necessário o uso extensivo de cálculos e considerações das variáveis de projeto. Com o grande avanço do último século na tecnologia de computação e cálculo numérico computacional, o processamento de todos os dados de projeto pôde ser realizado de forma rápida. A otimização estrutural e o projeto de engenharia se beneficiam desses avanços. Desde então, sistemas melhores podem ser projetados com direção ao projeto ótimo, ou seja, mais eficientes e com minimização de gastos.

2.1.1 Projeto versus análise

É interessante expor as diferenças entre as análises de engenharia e as atividades de projeto. Nas análises, cálculos são realizados a fim de se conhecer o comportamento de determinado sistema sob certos parâmetros de entrada. Neste processo, todas as dimensões são conhecidas, ou seja, o desenho é conhecido. Nas atividades de projeto, cálculos são realizados a fim de se obter as dimensões necessárias para atender as solicitações do sistema.

Este é um processo que geralmente é realizado usando-se uma metodologia de tentativa e erro. Estimam-se as dimensões do sistema e então são verificadas se essas são suficientes para suportar as solicitações. No caso de serem suficientes, tem-se um projeto aceitável. Contudo, modificações podem ser desejadas e realizadas, a fim de que o que está sendo projetado ganhe eficiência e tenha seu custo reduzido, por exemplo. São necessárias as análises dos projetos para se realizar decisões posteriores. Conclui-se então que a capacidade de análise de engenharia deve estar disponível nas atividades de projeto, Arora (2004). É valido ressaltar também que o projeto e a análise de estruturas são essencialmente dependente da criatividade e experiência do engenheiro.

2.2 Análise estrutural e Método dos Elementos Finitos

O vertiginoso crescimento da capacidade de processamento numérico e gráfico dos computadores nos últimos 15 anos trouxe um grande impacto na sociedade em geral e com certeza nas atividades de ensino. Na área de engenharia, o computador permitiu criar o conceito de protótipo virtual, através do qual se pode conceber, projetar e modificar elementos de um sistema de engenharia usando o computador.

Uma das atividades relacionadas ao projeto virtual é o estudo da integridade estrutural de componentes do sistema, usando métodos numéricos de simulação computacional. Dentre esses métodos, destacam-se o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Elementos Finitos (MEF), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos de Contorno (MEC), todos com vantagens e desvantagens na sua utilização, Bittencourt (2010).

O Método de Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido inicialmente para aplicações em engenharia civil. Com o trabalho de matemáticos, desenvolveu-se uma sólida base teórica para o método. Dessa forma, pode-se considerar o MEF, basicamente, como um método numérico para a solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC) envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais e respectivas condições de contorno, Bittencourt (2010).

Como grande parte dos fenômenos físicos de engenharia pode ser descrita por equações diferenciais, tem-se aplicado o MEF principalmente para problemas de mecânicas dos fluidos, transferências de calor e mecânica dos sólidos. A seguir, serão descritas as formulações do MEF e da mecânica dos sólidos utilizadas neste trabalho.

2.2.1 Estado plano de tensões

Um caso comum no campo da mecânica dos sólidos, presente em muitas referências, é conhecido como estado plano de tensões. Com base no texto Hutton (2001), esse estado é definido conforme as considerações a seguir:

1. O corpo é pequeno em uma direção (no eixo z, por convenção) quando comparado com as outras dimensões. A direção z (aqui adotada como a espessura t do corpo) é uniforme e simétrica em relação ao plano médio xy.

2. O corpo é sujeito a carregamentos apenas no plano xy.

3. O material do corpo é considerado com comportamento mecânico elástico linear, isotrópico e homogêneo.

A última consideração não é requisito para o modelo de estado plano de tensões, porém é utilizada quando se consideram apenas deformações elásticas. A Figura 1 ilustra um caso de estado plano de tensões para uma chapa de espessura t, sujeita a forças pontuais F_i e forças distribuídas $f(x,y)$.

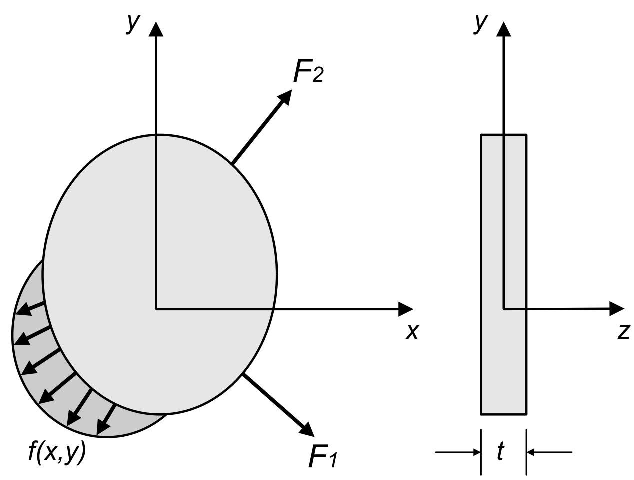


Figura 2.1: Caso de estado plano de tensões.

Dada uma situação que satisfaça as condições de estado plano de tensões, as únicas componentes do tensor de tensões não nulas são σ_x, σ_y e τ_{xy}, o que por hipótese permite afirmar que:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \tag{2.1}$$

É possível observar que as componentes do tensor de tensões perpendiculares ao plano xy, representadas na equação (1), são nulas devido às considerações de estado plano de tensões.

Modelo cinemático

Para o problema de estado plano de tensões, os deslocamentos sob um determinado carregamento podem ser descritos pelas equações (2) e (3).

$$u = u(x,y,z) \tag{2.2}$$

$$v = v(x,y,z) \tag{2.3}$$

Os termos u e v são os deslocamentos de um ponto material, representados no referencial fixo (x,y), nas direções x e y, respectivamente.

Os deslocamentos podem ser representados em função de x e y e as deformações podem ser definidas como as derivadas parciais dos deslocamentos. Para pequenas deformações lineares no estado plano de tensões, estas são escritas como nas equações (4) a (6).

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.6}$$

em que ϵ_x e ϵ_y representam as deformações normais e γ_{xy} a deformação cisalhante.

As equações anteriores constituem o modelo cinemático para o estado plano de tensões e são relacionadas na definição do modelo constitutivo.

Modelo constitutivo

As relações tensão-deformação integram o modelo constitutivo de um problema de mecânica estrutural. O modelo constitutivo da teoria da elasticidade pode conter até 81 constantes independentes. Porém, para o caso de material homogêneo, isotrópico e linear existem apenas duas constantes relacionadas, basicamente definidas pela Lei de Hooke na equação (7). Para um caso uniaxial:

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \tag{2.7}$$

em que E é o módulo de elasticidade do material. Para as considerações adotadas, isto é, estado plano de tensões, têm-se as relações tensão-deformação da elasticidade apresentadas nas equações (8), (9) e (10).

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \tag{2.8}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \tag{2.9}$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \tag{2.10}$$

E as componentes das tensões em função das deformações são:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_x + \nu\epsilon_y\right) \tag{2.11}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_y + \nu\epsilon_x\right) \tag{2.12}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{2.13}$$

em que ν é o coeficiente de Poisson do material e G é o módulo de cisalhamento.

Escrevendo as equações constitutivas convenientemente na forma matricial, obtêm-se:

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = [D]\left\{\begin{array}{c}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} \tag{2.14}$$

em que $[D]$ é a matriz de elasticidade do problema de estado plano de tensão.

Uma vez definidos os modelos cinemático e constitutivo, é possível a obtenção das equações de equilíbrio para o problema. Para tal, pode-se aplicar o princípio da mínima energia potencial. Para o estado plano de tensão, a energia de deformação por unidade de volume é dada a seguir:

$$u_e = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) \tag{2.15}$$

Na forma matricial:

$$u_e = \frac{1}{2}\left\{\epsilon\right\}^T\left\{\sigma\right\} = \frac{1}{2}\left\{\epsilon\right\}^T[D]\left\{\epsilon\right\} \tag{2.16}$$

sendo $\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$ e $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ os vetores com os termos dos tensores de deformação e de tensão, respectivamente.

A energia total de deformação será:

$$U_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left\{\epsilon\right\}^T[D]\left\{\epsilon\right\}dV \tag{2.17}$$

em que V é o volume total do corpo e $dV = tdxdy$. A forma da equação (17) não será restrita apenas ao caso plano de tensão e é também extensivamente usada no princípio do mínimo da energia potencial.

2.2.2 Equação de equilíbrio

A equação de equilíbrio pode ser escrita segundo o princípio da mínima energia potencial, o qual define que a situação de estacionariedade (equilíbrio) se dará quando a energia potencial Π da estrutura for mínima. Essa energia é descrita pela soma da energia potencial de deformação U_e com o trabalho W dos carregamentos atuantes

$$\Pi = U_e + W \tag{2.18}$$

Considerando uma estrutura contínua sem deformações e tensões iniciais, a energia de deformação U_e, definida pela equação (17), é dada por:

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV \tag{2.19}$$

Ao se discretizar essa estrutura, tem-se:

$$\{\epsilon\} = [B] \{a\} \tag{2.20}$$

em que $\{a\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $[B]$ a matriz com derivadas das funções de forma do elemento de discretização.

Reescreve-se a equação (19) da seguinte forma

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \{a\}^T [B]^T [D] [B] \{a\} \, dV \tag{2.21}$$

Da formulação da matriz de rigidez, sabe-se que esta é resultante da integral da multiplicação das matrizes $[B]^T$, $[D]$ e $[B]$. Portanto, reescreve-se a equação anterior como:

$$U_e = \frac{1}{2}\{a\}^T[K]\{a\} \tag{2.22}$$

Definindo como a soma de todos os carregamentos, sejam eles forças de corpo, forças de superfícies e forças externas, a seguinte equação:

$$\{W\} = -\{F\}\{a\} \tag{2.23}$$

A energia potencial total é expressa então conforme a equação a seguir:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{a\}^T[K]\{a\} - \{F\}\{a\} \tag{2.24}$$

A condição de mínimo da equação de energia será quando a sua primeira variação em relação às variáveis generalizadas for igual a zero.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{a\}} = [K]\{a\} - \{F\} = 0 \tag{2.25}$$

o que resultará será a equação de equilíbrio da estrutura, dada por

$$[K]\{a\} = \{F\} \tag{2.26}$$

2.3 Formulação isoparamétrica dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma importante ferramenta na análise de engenharia que foi desenvolvido durante as últimas décadas e, com o avanço da tecnologia em computação, tornou-se extensivamente utilizado. O conceito empregado é o da discretização, em que o domínio analisado é subdividido em elementos finitos interconectados por nós. Cada elemento contribui, conforme a natureza do problema, para a formação de um sistema de equações globais através de seus nós adjacentes, cujas incógnitas correspondem aos valores nodais de interesse.

A formulação adotada neste trabalho é a isoparamétrica, a fim de facilitar o mapeamento do domínio. Ela se define em escolher as funções polinomiais que interpolam a geometria como as mesmas que interpolam os deslocamentos. As vantagens básicas desse método são as de que a integração de cada elemento é facilitada e as coordenadas dos mesmos se tornam bem regulares. A seguir, é apresentada a formulação do elemento finito quadrilateral isoparamétrico de quatro nós.

2.3.1 Elemento finito quadrilateral isoparamétrico de quatro nós

Um elemento geral, plano e quadrilátero, assim como seus nós e deslocamentos são apresentados na Figura 2.

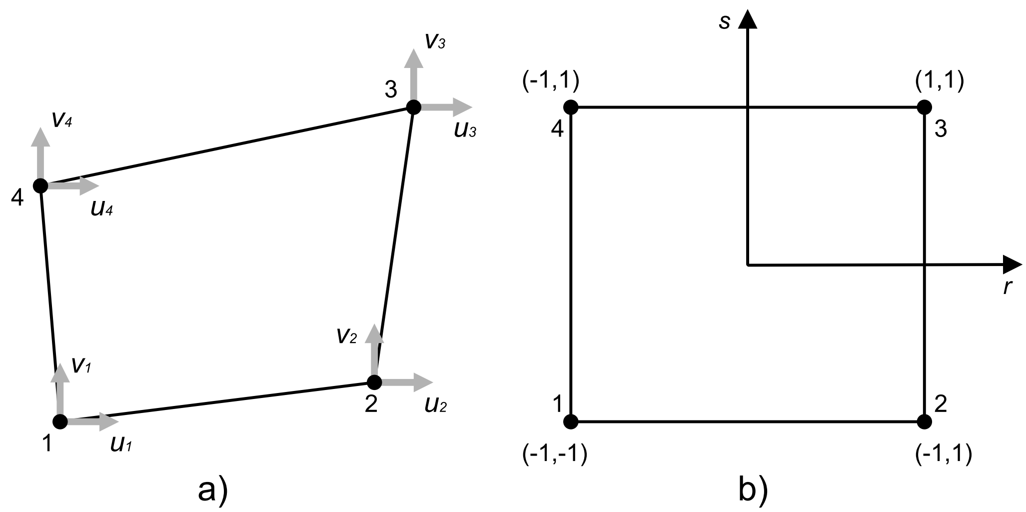


Figura 2.2: (a)Elemento quadrilátero de 4 nós bidimensional. (b)Elemento nas coordenadas locais.

O elemento geral é mapeado segundo o elemento em sua forma original na Figura 2(a). Esse mapeamento é definido pelas equações (27) e (28).

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i\,(r,s)\,x_i \tag{2.27}$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i\,(r,s)\,y_i \tag{2.28}$$

em que $N_i(r,s)$ são as funções de interpolação e x_i e y_i são as coordenadas nodais.

Da definição da formulação isoparamétrica, as funções de interpolação dos deslocamentos são as mesmas da interpolação geométrica anterior, conforme as equações (29) e (30).

$$u\,(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i\,(r,s)\,u_i \tag{2.29}$$

$$v\,(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i\,(r,s)\,v_i \tag{2.30}$$

em que u_i e v_i são as variáveis nodais, isto é, os deslocamentos dos nós nas direções x e y, respectivamente.

As componentes da deformação podem ser representadas na forma matricial como sendo:

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} \tag{2.31}$$

Para se relacionar as coordenadas globais x e y com as locais r e s, a matriz Jacobiana $[J]$ é utilizada.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = [J] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{2.32}$$

sendo

$$[J] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{array} \right] \tag{2.33}$$

Formalmente, o sistema de equações (32) pode ser resolvido para as derivadas parciais da componente de deslocamento u com respeito a x e y com a multiplicação do sistema pela matriz inversa da Jacobiana. O resultado na forma matricial é:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{|J|} \left[\begin{array}{cc} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{array} \right\} \tag{2.34}$$

O determinante da matriz Jacobiana $|J|$ é comumente chamado de Jacobiano.

Assim como as funções de interpolação são as mesmas para ambas as componentes de deslocamento, um procedimento idêntico ao anterior resulta nas derivadas parciais da componente v do deslocamento em função das coordenadas globais.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{|J|} \left[\begin{array}{cc} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{array} \right\} \tag{2.35}$$

Assim, retornando ao problema do cálculo da deformação, ao se utilizar as equações (34) e (35), as componentes da deformação são definidas no sistema de equações (36) apresentado de forma matricial, como se segue:

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{array} \right\} = \frac{1}{|J|} \left[\begin{array}{cccc} J_{22} & 0 & -J_{12} & 0 \\ 0 & -J_{21} & 0 & J_{11} \\ -J_{21} & J_{22} & J_{11} & -J_{12} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{array} \right\} \tag{2.36}$$

em que se pode denominar a matriz de mapeamento geométrico $[G]$ como:

$$[G] = \frac{1}{|J|} \left[\begin{array}{cccc} J_{22} & 0 & -J_{12} & 0 \\ 0 & -J_{21} & 0 & J_{11} \\ -J_{21} & J_{22} & J_{11} & -J_{12} \end{array} \right] \tag{2.37}$$

É necessário expandir a matriz coluna do lado extremo direito da equação (36) em termos de uma aproximação discretizada dos deslocamentos. Via equações (29) e (30), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} = [P]\{a\} \tag{2.38}$$

em que $[P]$ é a matriz de derivadas parciais das funções de interpolação e $\{a\}$ o vetor das componentes dos deslocamentos nodais.

Combinando-se as equações (36) e (38), obtêm-se a relação da deformação em função dos deslocamentos nodais.

$$\{\epsilon\} = [G]\,[P]\,\{a\} \tag{2.39}$$

Com referências das formulações clássicas de elementos finitos, chama-se de $[B]$ o produto das matrizes $[G]$ e $[P]$. Logo,

$$\{\epsilon\} = [B]\,\{a\} \tag{2.40}$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento plano quadrilátero é definida por:

$$\left[k^{(e)}\right] = t\int_A [B]^T\,[D]\,[B]\,dA \tag{2.41}$$

em que t é a espessura constante do elemento e a integral é dada sobre a área do quadrilátero. A matriz de rigidez pode ser calculada para estados planos de tensão e deformação. Para o estado plano de tensão, a matriz de elasticidade $[D]$ foi definida pela equação (14) e aqui é repetida.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

A integral indicada na equação (41) é sobre o plano xy, mas a matriz $[B]$ é definida em termos de coordenadas locais. Mais análises são necessárias para se obter a forma final da equação que calcula a matriz rigidez do elemento. No espaço físico, o diferencial de área é $dA = dxdy$. Porém, é desejado que se integre nos limites de -1 a +1, nas coordenadas locais. Na formulação isoparamétrica, o caso não é tão simples e a sua dedução foge ao escopo deste texto. Porém, muitos textos apresentam a equação (43) como ajuste de coordenadas para a integração citada.

$$dA = dxdy = |J|\, drds \tag{2.43}$$

Assim, a equação (41) é reescrita como:

$$\left[k^{(e)}\right] = t\int\limits_{A} [B]^T [D]\, [B]\, |J|\, drds = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [D]\, [B]\, |J|\, drds \tag{2.44}$$

Os termos da matriz de rigidez da equação (41) são integrais de índices de polinômios e a integração é, geralmente, muito difícil de ser realizada de forma exata. Para a resolução desse problema se utiliza a quadratura de Gauss e as integrações são substituídas por somatórios de integrandos calculados em pontos de Gauss. Para a integração na variável r e a integração na variável s, a matriz de rigidez é aproximada por:

$$\left[k^{(e)}\right] = t\sum_{i=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} \alpha_i\alpha_j \left[B\left(r_i,s_j\right)\right]^T [D] \left[B\left(r_i,s_j\right)\right] \left|J\left(r_i,s_j\right)\right| W_iW_j \tag{2.45}$$

em que W_i e W_j são os pesos e r_i e s_j são os pontos da quadratura Gaussiana.

Neste trabalho, a integração é realizada com 2x2 pontos de Gauss.

Para o quadrilátero da Figura 2, adota-se como funções de forma as expressões a seguir, Hutton (2001):

$$N_1\,(r,s) = \frac{1}{4}\,(1-r)\,(1-s) \tag{2.46}$$

$$N_2\,(r,s) = \frac{1}{4}\,(1+r)\,(1-s) \tag{2.47}$$

$$N_3\,(r,s) = \frac{1}{4}\,(1+r)\,(1+s) \tag{2.48}$$

$$N_4\,(r,s) = \frac{1}{4}\,(1-r)\,(1+s) \tag{2.49}$$

As funções de forma, então, são utilizadas para interpolar a geometria ou o deslocamento do elemento finito.

2.3.2 Construção do elemento hexagonal

Neste trabalho, o elemento hexagonal (H6) é construído através da união de dois elementos quadrilaterais isoparamétricos de 4 nós (Q4). Com a união desses dois elementos, cria-se o bloco hexagonal utilizado na geração das malhas hexagonais desta dissertação. Este bloco hexagonal é ilustrado na Figura 3.

Ao se construir o bloco hexagonal, os elementos quadrilaterais são deformados previamente à análise de elementos finitos. Assim, o resultado dessa análise será influenciado pela geometria deformada dos elementos. A seguir, serão descritos testes realizados com os blocos hexagonais e a influência da distorção da malha dos elementos quadrilaterais nos cálculos de deslocamentos nodais. Esses testes são semelhantes aos propostos por Cook et al. (2002).

Influência da geometria hexagonal

Testes simples podem demonstrar a precisão da discretização adotada na análise de elementos finitos. Para a geometria dos blocos hexagonais descritos anteriormente, com elementos quadrilaterais com ângulos internos de 60^o e 120^o, discretizou-se uma viga engastada

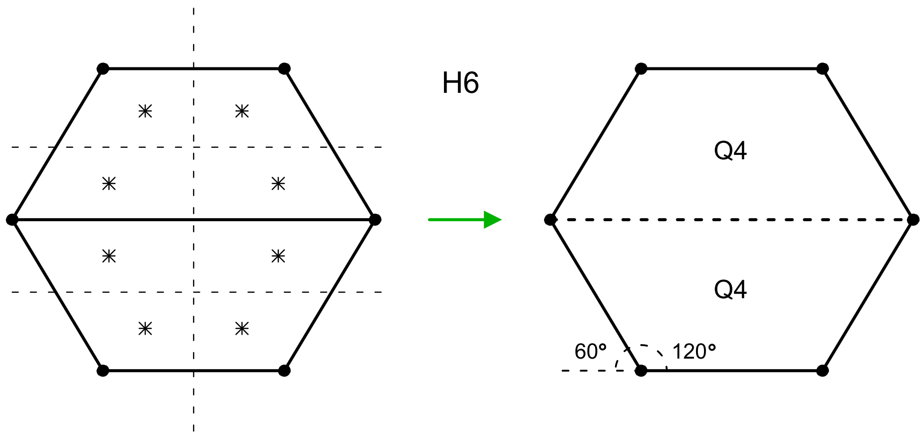


Figura 2.3: Construção do elemento hexagonal com a junção de dois elementos Q4.

livre com uma fileira de 7 elementos. Essa malha foi analisada em tração e também em flexão pura. Os modelos destes casos são ilustrados na Figura 4.

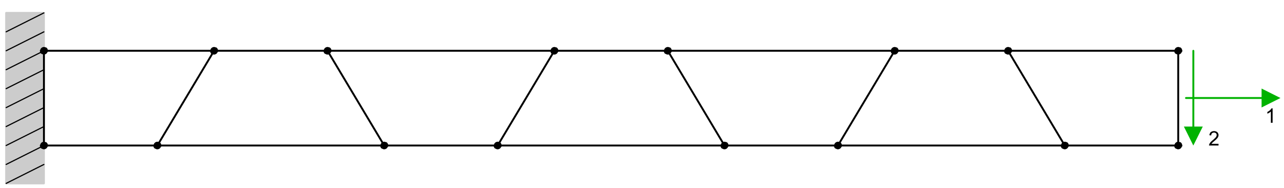


Figura 2.4: Casos para avaliação dos deslocamentos nodais: 1) tração; 2) flexão pura.

Esse modelo de viga engastada livre possui solução analítica. A Tabela 1 traz a comparação dos resultados obtidos pelo modelo analítico e pelo modelo numérico, com deslocamentos relativos à solução analítica. Os deslocamentos analisados (v) foram os da extremidade livre da estrutura.

Tabela 2.1: Deslocamentos relativos entre modelos analítico e numérico.

Caso	Descrição	Numérico	Analítico
1	Tração - u	0,99628	1
2	Flexão pura - v	0,27849	1

Observa-se que a malha com elementos deformados teve resultado muito próximo ao analítico no caso de tração, com erro de menos de 1%. Entretanto, no caso de flexão pura a resposta numérica apresentou um erro de cerca de 72% em relação à solução analítica. Esse resultado era previsto, pois o elemento quadrilateral regular (quadrado) já apresenta erros de resultado em malhas grosseiras com relação à flexão. Cook et al. (2002) apresenta um caso de viga engastada livre de proporção de dimensão 5x1 com 5 elementos quadrilaterais regulares, em que o erro do cálculo de deslocamento sob flexão chega a cerca de 32%.

Como avaliação da convergência de resultados da malha hexagonal, a Tabela 2 apresenta os deslocamentos relativos obtidos com modelos numéricos para diferentes graus de refinamento na mesma estrutura engastada livre com proporção de dimensão 5x1, semelhante ao caso apresentado por Cook et al. (2002). nh é o número de elementos quadrilaterais na horizontal, nel é o número total de elementos quadrilaterais construindo a malha hexagonal e v é o deslocamento no ponto de aplicação da carga do modelo numérico com relação à solução analítica. Θ é a média dos desvios dos ângulos internos dos blocos hexagonais da malha gerada com relação a um hexágono regular, ou seja, um grau de deformação relativo do bloco hexagonal.

Tabela 2.2: Diferentes graus de refinamento em malhas hexagonais para um caso de viga engastada livre e convergência do cálculo do deslocamento no ponto de aplicação da carga.

nh	nel	Θ	v
9	18	0,9702	0,8024
15	60	0,9814	0,9244
21	126	0,9859	0,9700
27	216	0,9883	0,9911
31	310	0,9961	0,9975

Observa-se na Tabela 2 que os resultados obtidos com o modelo numérico convergem para a solução analítica conforme o refinamento da malha aumenta. Com 9 elementos quadrilaterais na horizontal, sendo 18 elementos ao total na malha, o erro do resultado chega perto de 20%. Para 27 elementos na horiztonal, com total de 216, o erro do resultado numérico já é menor que 1%, o que é aceitável. Observa-se também que o erro dos ângulos internos dos blocos das malhas hexagonais geradas vai diminuindo, ou seja, os blocos hexagonais convergem para um hexágono regular conforme o refinamento da malha aumenta. Considerando que, na otimização topológica, as malhas são sempre na ordem de milhares de elementos, as malhas apresentadas na Tabela 2 são muito grosseiras. Como essas malhas hexagonais já apresentam convergência de resultados com grau baixo de refinamento, conclui-se que a modelagem numérica dos blocos hexagonais é viável e de aproximação adequada para o uso em otimização topológica. A Figura 5 apresenta a malha de 216 elementos, a primeira a apresentar erro menor que 1% dentre as analisadas.

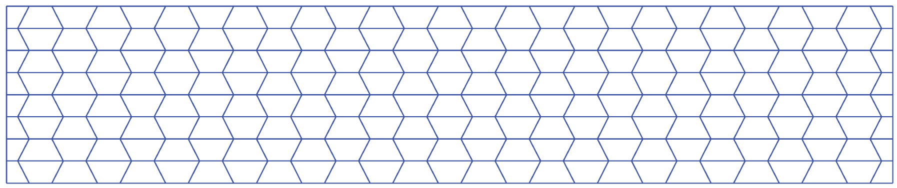


Figura 2.5: Malha de 27 elementos quadrilaterais na horizontal, com total de 216 elementos, sendo a primeira a apresentar erro menor que 1% dentre as malhas analisadas.

Capítulo 3

Otimização Estrutural

3.1 Introdução

A otimização estrutural é a escolha de um projeto (estrutura) final dentre vários possíveis, que seja o melhor segundo o objetivo prescrito e que seja adequado às restrições impostas ao mesmo Bahia (2005); Porto (2006). Essas restrições podem ser: volume máximo de material utilizado, dimensões e deslocamentos pré-definidos, frequência natural, entre outras.

Existem duas abordagens para o projeto estrutural. A primeira é a abordagem de análise. Esta consiste em analisar diversas configurações possíveis de uma estrutura. Mediante o resultado são construídos gráficos ou tabelas do desempenho obtido em função de certos parâmetros variáveis, como representado na Figura 6. Com esses gráficos de desempenho, analisa-se e define-se a configuração de melhor desempenho dentre as obtidas.

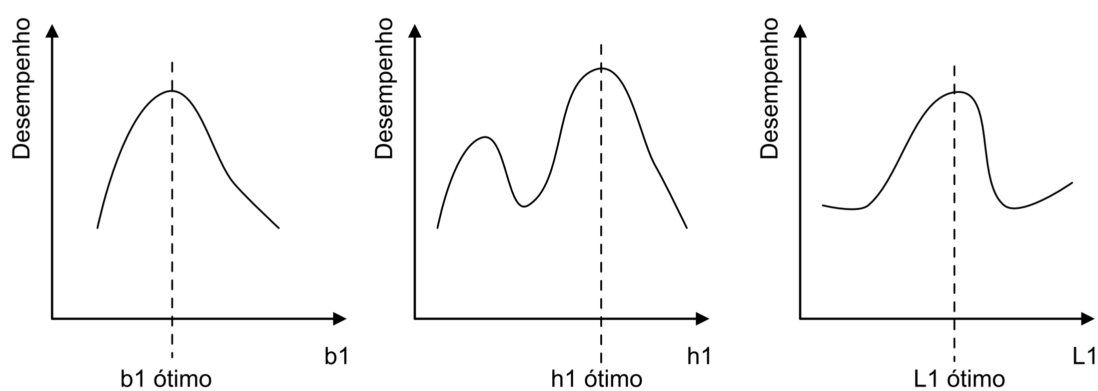


Figura 3.1: Gráficos de desempenho em função dos valores dos parâmetros, Silva (2001).

Conforme o número de parâmetros de projeto aumenta, a quantidade necessária de análises também aumenta e, consequentemente, o número de possíveis configurações do projeto tende a ser drasticamente grande. Isso torna o processo de análise inviável para sistemas muito complexos.

A segunda abordagem é a de síntese, ou otimização. Nessa abordagem são utilizados métodos computacionais que buscam, de forma racional, a configuração ótima para o projeto, ou seja, o algoritmo irá buscar, dentre um espaço de soluções possíveis, a combinação que fornece o melhor desempenho para o projeto. Assim, o termo otimização é corretamente utilizado quando se aplica um método matemático de busca sistemática da solução ótima e não simplesmente quando se executa a análise de diversas configurações baseadas em tentativa e erro, por exemplo, Silva (2001).

Como exemplo do uso equivocado do termo otimização, pode-se citar que, em diversas conferências de engenharia é comum encontrar trabalhos do tipo "Otimização da suspensão de um automóvel". Contudo, o que geralmente se percebe ao ler artigos desse tipo é que o autor propôs um novo tipo de configuração, o qual aumentou o desempenho do sistema. Essa proposta é baseada em uma concepção intuitiva devido à experiência do engenheiro e, por análises do problema ou um processo de tentativa e erro, o novo sistema realmente tem seu desempenho melhorado. Entretanto, não há garantias de que essa nova configuração proposta seja a melhor ou de que outro engenheiro tenha uma concepção diferente e proponha um sistema ainda melhor. Esse é um ponto importante da otimização. Define-se que, a princípio, a solução considerada ótima seja obtida por qualquer um que assim a buscasse.[1]

Essa confusão não se deve aos engenheiros e cientistas, mas sim ao processo de surgimento dos softwares de CAE baseados em elementos finitos, que se iniciou nos anos 60. Somente a abordagem de análise era utilizada e a otimização estrutural era secundária nessa época. Contudo, o conceito de otimização mudou consideravelmente com softwares ganhando algoritmos do chamado método de otimização topológica. Percebe-se também que a otimização se confunde com o próprio conceito de engenharia, que é projetar algo da melhor forma possível, Silva (2001). A seguir é apresentado um breve histórico desse processo.

3.1.1 Breve histórico da otimização

O conceito de otimização estrutural é muito antigo. Problemas de otimização de vigas chamaram a atenção de Galileu (1638), em que ele apresentou uma definição e solução lógica

[1]Desconsiderando, obviamente, questões como o tipo de algoritmo utilizado ou a natureza do problema de otimização.

para a forma de uma viga engastada livre sob carregamento uniforme como representado na Figura 7, Lee (2007); Porto (2006).

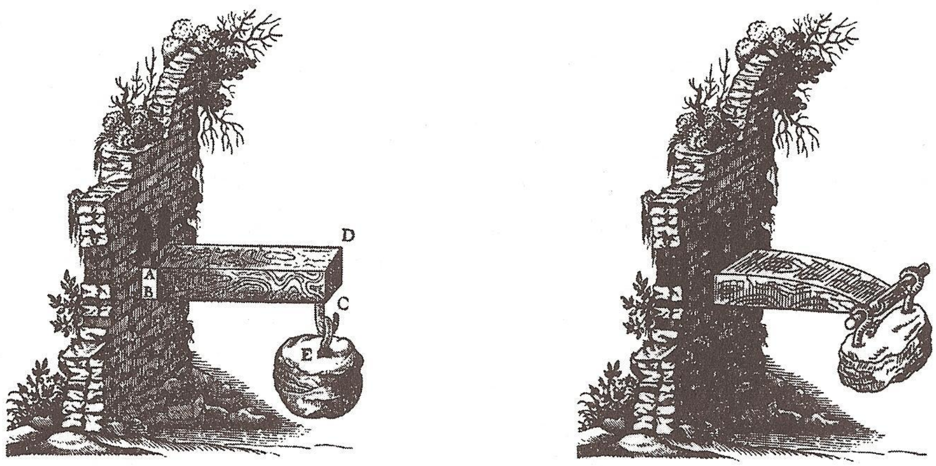


Figura 3.2: Problema de otimização de forma definido por Galileu em 1638.

Já em 1872, Maxwell aplicou conceitos de otimização no projeto de uma ponte. O cientista estudou problemas bem simples utilizando conceitos de teoria da elasticidade, já que não havia computadores na época. A idéia era essencialmente a de que, dado um carregamento atuando em um domínio infinito e os pontos de apoio desse domínio, pode-se calcular o campo de tensões, assim como as direções principais deste campo, utilizando a teoria da elasticidade. Assim, a estrutura ótima (menor peso e máxima rigidez) seria um conjunto de estruturas unidimensionais dispostas nas direções das tensões principais.

Michell, em 1904, retomou as idéias de Maxwell aplicando-as em diversas outras estruturas, com o objetivo de projetá-las com o menor volume de material possível. A Figura 8 representa o resultado obtido por Michell para a otimização de uma estrutura biapoiada.

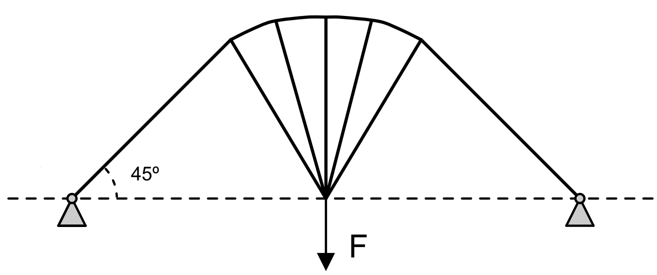


Figura 3.3: Otimização estrutural obtida por Michell.

Esses resultados foram considerados acadêmicos e com difícil aplicação prática. No entanto, na década de 80, estes problemas foram revistos no contexto dos softwares de otimização estrutural, que reproduziram os resultados e metodologias propostas por Michell em 1904.

Entre 1904 e 1960, os estudos eram principalmente acadêmicos e de cunho analítico ou experimental. Com o surgimento de computadores e o método dos elementos finitos, problemas práticos passam a ser estudados, principalmente no ramo da aeronáutica. Diz-se que, na verdade, os algoritmos já existiam e os métodos só puderam ser postos em prática com a evolução computacional.

Na década de 80, softwares de otimização surgem e também alguns softwares de CAE incluindo módulos de otimização em seus códigos. No final da década surge o método de otimização topológica, que representa o conceito da síntese estrutural em sua essência, Silva (2001).

Desde então, a escassez de recursos existentes na natureza, políticas ambientais exigentes, competição tecnológica, elevados custos com material, dentre outros fatores cada vez mais acoplados aos problemas de engenharia, motivam a continuidade e pesquisa na área de otimização estrutural. Nesse sentido, destaca-se a grande contribuição do método dos elementos finitos para o processo. Atualmente, os métodos de otimização são aplicados em diversas áreas, tais como mecânica, civil, materiais, aeronáutica, aeroespacial, biomecânica e outras.

3.2 Otimização Estrutural

O problema de otimização consiste, basicamente, em encontrar as variáveis de projeto x_1, x_2, ..., x_n que:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizem} & f(\{x\}) \\ \text{sujeito a} & h(\{x\}) = 0 \\ & g(\{x\}) \leq 0 \end{array} \tag{3.1}$$

em que $\{x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$, a função escalar $f(\{x\})$ é a chamada função objetivo e $h(\{x\}) = \{h_1(x), h_2(x), ..., h_p(x)\}^T$ e $g(\{x\}) = \{g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x)\}^T$ representam as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, Herskovits (2007).

Resolver um problema de otimização significa encontrar a configuração do vetor de variáveis de projeto $\{x\}$, que forneça o mínimo ou o máximo da função objetivo. No caso de uma peça mecânica, a função objetivo pode ser a rigidez, a frequência de ressonância, o volume da peça e outros. As restrições são os limites impostos à solução como, por exemplo, a máxima massa ou volume que a peça pode apresentar, o deslocamento máximo ou o valor da tensão que pode ocorrer em determinado ponto. Logo, o método busca a solução ótima em função desses limites (restrições) que o projeto exige. As variáveis de projeto são os valores que podem ser alterados na otimização, como a distribuição de material ao longo da estrutura, as suas razões de dimensões, o seu perímetro e outros. É importante observar que uma vez reduzidos à forma padrão, todos os problemas de otimização se tornam semelhantes. Assim, diversos problemas podem ser analisados de maneira unificada, Silva (1997).

Existem três abordagens principais em problemas de otimização estrutural. Elas se diferem no tipo de resultado que será obtido, as quais podem ser definidas da seguinte forma, Bahia (2005); Silva (2007b):

- Otimização Paramétrica ou Dimensional: As variáveis aqui consideradas são parâmetros geométricos como a dimensão transversal, tamanho de furo e outros. O processo busca encontrar, por exemplo, a melhor área da seção transversal de modo que se obtenha a maximização da rigidez com o menor volume de material. A forma e a topologia da estrutura são mantidas fixas.

- Otimização de Forma: Apresenta a forma como variável, em que o contorno dos segmentos e a posição dos furos são modificados para se extremizar a função objetivo.

- Otimização Topológica (OT): Esse método trabalha com um domínio fixo de existência da solução. Na busca da solução ótima, distribui-se o material por todo o domínio, de tal forma que se possa extremizar a função objetivo sob determinado critério/restrição. Isso gera buracos na estrutura, ou seja, determina regiões de não existência de material, o que aumenta o desempenho da estrutura e diminui a sua massa, por exemplo. Por essas vantagens, a OT vem se estabelecendo cada vez mais na indústria automotiva e aeronáutica.

O que se busca também é a integração dessas três abordagens no projeto de peças mecânicas. Pesquisas têm sido realizadas a fim de se obter o melhor de cada tipo de otimização em uma só abordagem ou algoritmo, até mesmo com a possibilidade de se envolverem disciplinas de diferentes áreas de estudo. Uma quarta categoria pode ser chamada de Otimização de Layout que objetiva determinar a topologia, forma e dimensões de estruturas reticuladas, assim como o posicionamento de suas juntas, de acordo com Porto (2006), com base em Hassani and Hinton (1999); Zhou and Rozvany (1991). O mesmo autor ainda cita as contribuições que cada abordagem tem na engenharia de produto, ou seja, na concepção e execução das fases de projetos, ilustradas na Figura 9. São elas:

- Otimização Topológica: Muito útil na *fase de concepção do produto*, fase esta altamente dependente do engenheiro.

- Otimização de forma: Uma vez determinada a topologia ótima, o contorno da estrutura pode então ser otimizada. Esta abordagem pode ser aplicada na *fase de projeto preliminar*.

- Otimização Paramétrica: Obtidas a topologia e forma ótimas, o objetivo seguinte é determinar valores ótimos para os parâmetros geométricos. Esta abordagem é útil na *fase de projeto detalhado*.

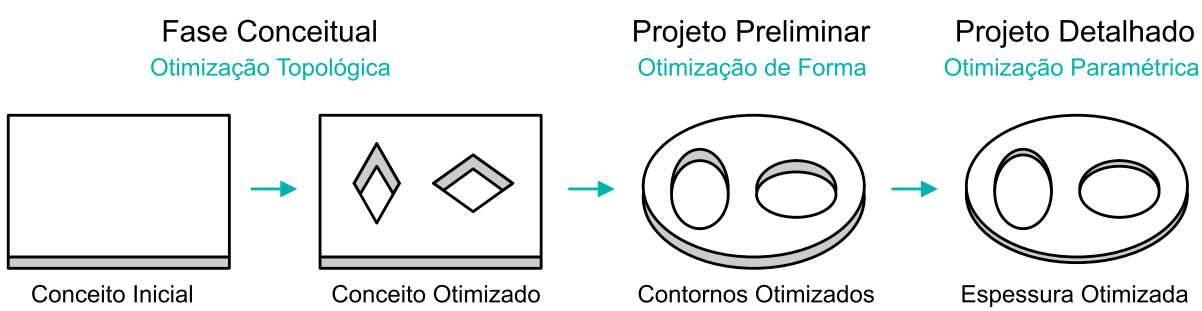


Figura 3.4: Tipos de otimização estrutural e as fases de projeto, Porto (2006).

Inserindo o conceito da otimização topológica em um ambiente CAE, o projeto de engenharia pode ser desenvolvido através dos seguintes passos, Porto (2006); Silva (2007b):

1. O problema e suas condições de contorno são delimitados pelas equipes de projeto e concepção.

2. O domínio fixo é estabelecido.

3. É gerada uma malha por elementos finitos para esse domínio.

4. Os carregamentos e as condições de contorno são aplicados e uma simulação numérica é realizada.

5. Os resultados do item anterior servem como dados para que o código de Otimização Topológica - OT distribua pelo domínio a quantidade de material limitada. Assim, são obtidas idealmente a topologia ótima e a forma quase ótima da estrutura.

6. A topologia e a forma final são definidas conforme a viabilidade de fabricação.

7. A estrutura é novamente simulada por elementos finitos, para validar a escolha da topologia e forma final do item anterior.

8. Satisfeitos os critérios de projeto, o produto é então manufaturado.

O grande potencial da otimização topológica está na capacidade de auxílio na fase de concepção do produto, o que a torna uma ferramenta valiosa no estágio inicial do desenvolvimento estrutural. Atualmente, a OT tem sido utilizada em várias áreas como a automotiva, aeronáutica, aeroespacial, naval, civil, dentre outras.

3.3 Otimização Estrutural Evolucionária

Desde a década de 1980, muitos estudos foram desenvolvidos sobre a teoria, métodos e aplicações da otimização topológica. Dentre vários métodos numéricos, a Otimização Estrutural Evolucionária (ESO - *Evolutionary Structural Optimization*) e a Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (BESO - *Bi-Directional ESO*) foram propostas como algoritmos simples e heurísticos de otimização.

A literatura científica sobre ESO é mais vasta, com inúmeras publicações desde 1992 com o primeiro artigo escrito por Xie and Steven (1993). Muito progresso tem sido obtido com esses métodos e, desde então, inúmeros grupos de pesquisa têm atuado na temática, Xie and Huang (2010).

O procedimento evolucionário se baseia na simples remoção gradual de material ineficiente da estrutura, cuja análise pode ser feita pelo Método dos Elementos Finitos. A idéia básica do método é analisar por elementos finitos o domínio completo em que a estrutura pode existir e, a seguir, após a avaliação de algum número de sensibilidade, retirar gradualmente os elementos de menor eficiência no problema, Xie and Huang (2010). Para cada tipo de análise existirá um ou mais tipos de critério para essa remoção de material, os quais podem ser critérios de rigidez, nível de tensão, frequência natural, condução de calor, flambagem e outros. Segundo Chu et al. (1997), os passos básicos de um algoritmo ESO geral são:

- *Passo 1.* Discretizar o domínio possível da estrutura utilizando uma malha fina de elementos finitos.

- *Passo 2.* Analisar a estrutura sob os carregamentos impostos.

- *Passo 3.* Calcular o número de sensibilidade para cada elemento segundo o critério adotado.

- *Passo 4.* Remover os elementos com o menor número de sensibilidade.

- *Passo 5.* Repetir os passos 2 a 4 até que o critério adotado seja satisfeito.

A Figura 10 apresenta uma viga biapoiada obtida através da otimização estrutural evolucionária, como exemplo do método.

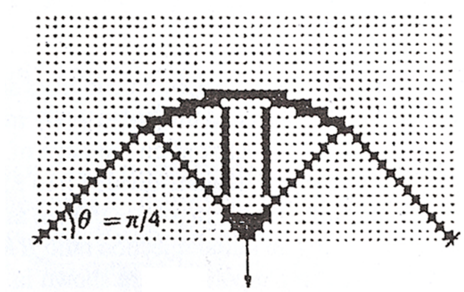


Figura 3.5: Exemplo de estrutura obtida através da otimização estrutural evolucionária retirado de Xie and Huang (2010).

As seções a seguir descrevem basicamente alguns tipos dos métodos ESO/BESO.

3.3.1 ESO baseada em nível de tensão

O nível de tensão em uma estrutura pode ser obtido ao se realizar uma análise por elementos finitos. Um indicador confiável da eficiência de cada elemento pode ser o nível de tensão em partes da estrutura. Isso leva a um critério de rejeição baseado no nível local de tensão, em que material sob baixa tensão é considerado sub-utilizado e, assim, removido da estrutura, Xie and Steven (1997).

Dado que a estrutura é discretizada em pequenos elementos, a remoção de material é convenientemente representada ao se excluir os elementos da malha de elementos finitos, em função do critério de projeto adotado.

A tensão em cada ponto, ou em cada elemento, pode ser comparada com uma média geral de tensão. Para isso, a tensão equivalente de von Mises tem sido utilizada mais frequentemente para materiais isotrópicos, Tanskanen (2002); Xie and Steven (1997).

Para problemas em estado plano de tensão, a tensão equivalente de von Mises σ^{vm} é definida como:

$$\sigma^{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{3.2}$$

em que σ_x e σ_y são as tensões normais nas direções x e y, respectivamente, e τ_{xy} é a tensão de cisalhamento. Neste trabalho, o estado de tensão é calculado como os valores absolutos das médias das tensões nos 4 pontos de Gauss do elemento.

O nível de tensão em cada elemento é determinado ao se comparar a tensão equivalente de von Mises do elemento σ_e^{vm} com a tensão equivalente de von Mises máxima da estrutura inteira ${\sigma_{max}}^{vm}$. Ao fim de cada análise por elementos finitos, todos os elementos que satisfazem a condição a seguir são excluídos do modelo:

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{{\sigma_{max}}^{vm}} < RR_i \tag{3.3}$$

em que RR_i é o atual *índice de rejeição (RR)*.

O ciclo de análise por elementos finitos (uma iteração por análise) é repetido utilizando o mesmo valor de RR até que um estado estável, em que não haja mais material a ser removido para o RR atual, seja atingido, Xie and Steven (1997). Isto implica que o número de elementos retirados a cada análise não será necessariamente o mesmo para todas as iterações. Neste ponto, um *índice evolucionário (ER)* é introduzido no índice de rejeição:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \qquad\qquad i = 0,1,2,3... \tag{3.4}$$

Neste trabalho, a maioria das análises é realizada com os índices RR_i inicial e ER valendo 0,5%.

Com o índice de rejeição aumentado, as iterações são realizadas até que um novo estado estável seja atingido. O procedimento continua até que um desenho ótimo desejado seja obtido, como por exemplo, quando não há mais material na estrutura final com nível de tensão menor do que 25% do máximo (RR_i final). Isso implica que a estrutura otimizada terá uma distribuição de tensão mais homogênea do que a estrutura inicial, pois o percentual de variação de tensão de um elemento para outro será reduzido. Esse processo evolucionário pode ser resumido nos seguintes passos, Xie and Steven (1997):

- *Passo 1.* Discretizar o domínio inicial da estrutura utilizando uma malha fina de elementos finitos.
- *Passo 2.* Analisar a estrutura por elementos finitos.
- *Passo 3.* Remover os elementos que satisfaçam a condição em (52).
- *Passo 4.* Aumentar o índice de rejeição de acordo com a equação (53) se um estado estável for atingido. Senão, repita os passos 2 e 3.
- *Passo 5.* Repetir os passos 2 a 4 até que um desenho ótimo desejado seja obtido.

A implementação destes passos permite desenvolver um código básico de OT com critério de tensão. A Figura 11 apresenta um fluxograma para ilustração do algoritmo do método ESO sob critério em nível de tensão.

3.3.2 ESO para otimização da rigidez

Rigidez é um fator fundamental a ser considerado no projeto de estruturas. Comumente, é considerada nos cálculos a energia de deformação C (do inglês "compliance"), Chu et al. (1996). A energia de deformação média pode ser definida como a energia de deformação total da estrutura ou o trabalho das forças externas como:

$$C = \frac{1}{2} \{f\}^T \{u\} \tag{3.5}$$

em que $\{f\}$ é o vetor de forças e $\{u\}$ o vetor de deslocamentos.

Em análise de elementos finitos, a equação de equilíbrio estático de uma estrutura é expressa como:

$$[K] \{u\} = \{f\} \tag{3.6}$$

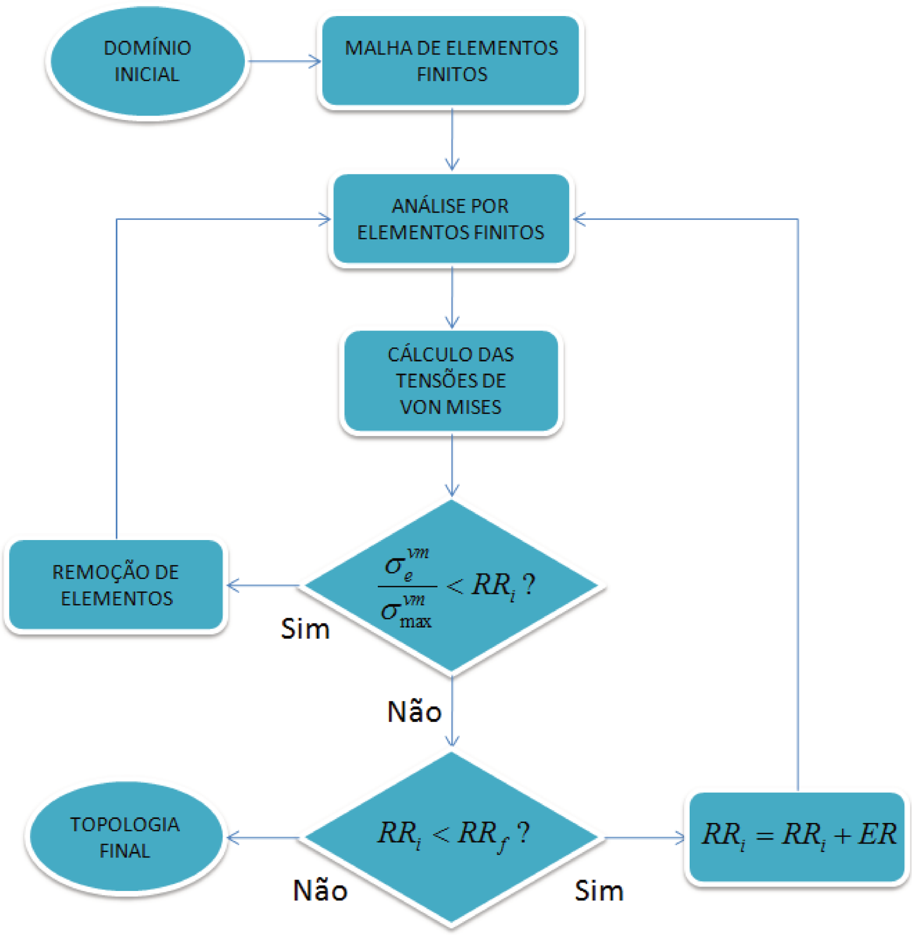


Figura 3.6: Fluxograma do algoritmo ESO em nível de tensão.

em que $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\{u\}$ é o vetor das variáveis nodais e $\{f\}$ o vetor de carregamento total.

Quando o i-ésimo elemento é removido da estrutura, a matriz de rigidez mudará conforme o esquema abaixo:

$$[\Delta K] = [K^*] - [K] = -[K_i] \tag{3.7}$$

em que $[K^*]$ é a matriz de rigidez da estrutura resultante após a remoção do elemento i e $[K_i]$ é a matriz de rigidez do mesmo. Assume-se que a remoção do elemento não afeta o vetor de forças $\{f\}$. Variando os lados da equação (55), considerando $\{f\}$ constante e ignorando o termo de alta ordem, a mudança do vetor de deslocamento obtida é:

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1}[\Delta K]\{u\} \tag{3.8}$$

Das equações (54) e (57), tem-se:

$$\Delta C = \frac{1}{2}\{f\}^T\{\Delta u\} = -\frac{1}{2}\{f\}^T[K]^{-1}[\Delta K]\{u\} = \frac{1}{2}\{u_i\}^T[K_i]\{u_i\} \tag{3.9}$$

em que $\{u_i\}$ é o vetor de deslocamento do i-ésimo elemento.

Assim, o número de sensibilidade para a energia de deformação média pode ser definido como, Chu et al. (1996):

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2}\{u_i\}^T[K_i]\{u_i\} \tag{3.10}$$

A equação acima indica que o aumento na energia de deformação média como resultado da remoção do i-ésimo elemento é igual à energia de deformação do elemento. Para minimizar a energia de deformação média (o que significa maximizar a rigidez) através da remoção de elementos, é evidente que a maneira mais efetiva é o de eliminar os elementos com os menores valores de α_i, assim, o aumento de C será mínimo, Xie and Steven (1997).

O número de elementos a serem retirados é determinado pelo *índice de rejeição (ER)*, que é definido pelo quociente do número de elementos retirados por iteração pelo número total inicial do modelo de elementos finitos, Xie and Steven (1997). Os elementos serão retirados até que se atinja um percentual pré-definido para o volume da estrutura. Neste trabalho, adotou-se como padrão a retirada de dois elementos por iteração. Os passos para a otimização evolucionária com critério de rigidez com restrição de volume são:

- *Passo 1.* Discretizar o domínio inicial da estrutura utilizando uma malha fina de elementos finitos. Aplicar as condições de contorno e carregamentos prescritos.

- *Passo 2.* Analisar a estrutura por elementos finitos.

- *Passo 3.* Calcular o número de sensibilidade para cada elemento usando a equação (59).

- *Passo 4.* Remover uma quantia de elementos com os menores números de sensibilidade de acordo com o índice de rejeição ER pré-definido.

- *Passo 5.* Repetir os passos 2 a 4 até que o volume médio da estrutura resultante atinja os limites impostos.

É válido observar que não existe estado estável na otimização de rigidez, como no procedimento baseado em nível de tensão descrito na seção anterior. A sequência iterativa apresentada também permite escrever um código para a aplicação do método ESO com critério de rigidez. A Figura 12 apresenta um fluxograma para ilustração do algoritmo do método sob este critério.

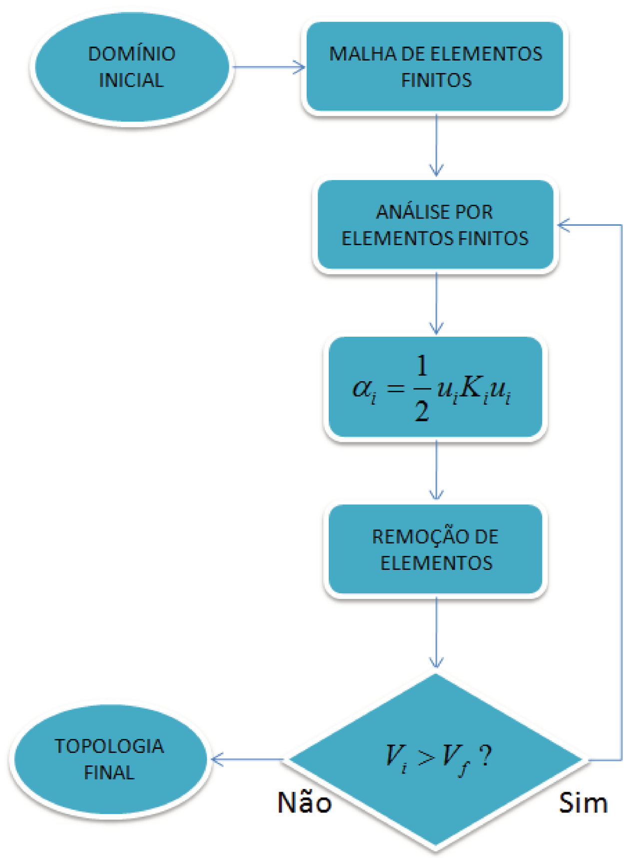


Figura 3.7: Fluxograma do algoritmo ESO em critério de rigidez.

3.3.3 ESO em otimização de forma

Em geral, na otimização de forma existe apenas uma região da estrutura que é de interesse para a análise. Assim, somente essa região é disponível para o processamento pelo método de otimização e o resto da estrutura é estabelecido como fixo. Em otimização de forma, apenas material das bordas pode ser removido. Logo, o processo é muito semelhante ao do ESO em otimização topológica, exceto o domínio escolhido para análise.

A seguir, o algoritmo ESO para otimização de forma é descrito com base em critério de tensão. Quando o critério é rigidez, o algoritmo é diferente apenas no esquema da remoção de elementos, Xie and Steven (1997). O algoritmo de otimização de forma usando o método ESO é dado por:

- *Passo 1.* Discretizar a região a ser otimizada com uma malha fina de elementos finitos. A região fixa pode ser discretizada com malhas mais grosseiras. Se um perfil externo está sob otimização, então o modelo deve considerar apenas a superfície como disponível para retirada de material. Se um perfil interno está sendo considerado, então um buraco inicial pequeno deve ser criado para que a superfície interna esteja disponível para retirada de material.

- *Passo 2.* Aplicar as condições de contorno, carregamentos e propriedades do material.

- *Passo 3.* Realizar a análise por elementos finitos. Para os elementos suscetíveis de serem retirados, as tensões de von Mises devem ser calculadas. Aqueles elementos em que a condição (52) é satisfeita devem ser eliminados do modelo.

- *Passo 4.* Repetir o passo 3 até que não haja mais elementos para remoção sob o índice de rejeição RR atual. Quando este estado for alcançado, o índice RR deve ser aumentado com o índice de evolução ER.

- *Passo 5.* Repetir os itens 3 e 4 até que o índice de rejeição final RR_f seja alcançado.

Tipicamente, a otimização de forma considera os detalhes da estrutura ou componente, como por exemplo a forma de um furo em um campo de tensões complexo. Esse tipo de otimização não tem como objetivo apenas reduzir o volume de material utilizado mas também reduzir tensões locais e suavizar os pontos com concentrações de tensão.

3.3.4 BESO em critério de rigidez

O problema de otimização com restrição de volume é definido como:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathrm{C} = \frac{1}{2}\{f\}^T \{u\} \\ \text{sujeito a} & \mathrm{V}^* - \sum_{i=1}^{N} V_i x_i = 0 \\ & \mathrm{x}_i = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \tag{3.11}$$

em que $\{f\}$ e $\{u\}$ são os vetores de carga aplicada e deslocamentos e C é a energia de deformação total da estrutura. V_i é o volume individual do i-ésimo elemento e V^* é o volume final prescrito da estrutura. A variável binária x_i declara a presença (1) ou ausência (0) de um elemento.

O problema acima tem sido extensivamente utilizado para otimização topológica de estruturas contínuas, Bendsoe and Sigmund (2003), mas difere do utilizado nos métodos ESO/BESO originais. De fato, os métodos ESO/BESO originais apresentam algumas dificuldades com relação ao problema apresentado, como por exemplo, a função objetivo pode não convergir se o volume for mantido constante para satisfazer sua restrição. Um dos objetivos da versão mais recente do método BESO, Huang and Xie (2007), é fazer com que o algoritmo seja estável e convergente ao atender as condições do problema (60). A seguir serão apresentados os parâmetros e os procedimentos do método BESO, segundo Huang and Xie (2007), cujo algoritmo permite a remoção e a adição simultânea de material na estrutura.

Número de sensibilidade

Quando um elemento sólido é removido da estrutura, a mudança da energia de deformação total da estrutura é igual à energia de deformação do elemento, Chu et al. (1996). Essa mudança é definida como o número de sensibilidade:

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2}\{u_i\}^T [K_i] \{u_i\} \tag{3.12}$$

em que $\{u_i\}$ é o vetor de deslocamento nodal do i-ésimo elemento e $[K_i]$ é a matriz de rigidez elementar, idêntico ao caso ESO sob critério de rigidez.

Os números de sensibilidade para os elementos vazios são assumidos como zero, inicialmente. Para adicionar material no domínio de projeto, um esquema de filtro será utilizado para obter números de sensibilidade para os elementos vazios e para suavizar os números de sensibilidade ao longo de todo o domínio. O mais importante é que, ao se utilizar o filtro proposto, os problemas de tabuleiro de xadrez e dependência da malha serão eliminados.

Filtro e estabilização do processo evolucionário

Antes de aplicar o esquema de filtro, números de sensibilidade nodais, que não carregam significado físico, são definidos pela média ponderada dos números de sensibilidade elementares como:

$$\alpha_j^n = \frac{\sum_{i=1}^{M} V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{M} V_i} \tag{3.13}$$

em que M denota o número total de elementos conectados ao nó j.

Os números de sensibilidade nodais devem ser então convertidos em elementares. Essa conversão é realizada ao se projetar os números de sensibilidade nodais no domínio. Essa projeção é baseada em uma escala de comprimento r_{min} que não muda com o refinamento da malha. O papel principal dessa escala é identificar os nós que influenciarão o i-ésimo elemento. Isso pode ser visualizado ao se desenhar um círculo de raio r_{min} centrado no centróide do i-ésimo elemento, gerando o sub-domínio Ω_i. Assim, todos os nós que estão dentro de Ω_i terão seus respectivos números de sensibilidade computados nos novos números de sensibilidade elementares, definidos como:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{i=1}^{M} w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{i=1}^{M} w(r_{ij})} \tag{3.14}$$

em que M é o número total de nós dentro do sub-domínio Ω_i e $w(r_{ij})$ é o fator de peso linear definido como:

$$w(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \tag{3.15}$$

em que r_{ij} é a distância entre o centro do elemento i e o nó j.

Apesar do uso do filtro, a função objetivo e a topologia podem não ser convergentes. Isso se deve ao cálculo impreciso dos números de sensibilidade, principalmente para os elementos a serem adicionados (originalmente vazios) que não estão envolvidos na análise de elementos finitos. Para contornar este problema, é proposto considerar o histórico da sensibilidade de cada elemento. Isso pode ser realizado com a média do número de sensibilidade atual e o da iteração anterior como:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \tag{3.16}$$

em que k é o número da iteração atual.

Adição/remoção de elementos e critério de convergência

Antes que elementos sejam adicionados/removidos, a fração de volume da próxima iteração V_{k+1} deve ser determinada. Como o volume prescrito para a estrutura final V^* pode ser maior ou menor do que o volume atual ou solução inicial proposta, o volume alvo da próxima iteração V_{k+1} pode crescer ou decrescer passo a passo até que se atinja a fração de volume final. assim,

$$V_{k+1} = V_k(1 \pm ER) \tag{3.17}$$

em que ER é o índice de evolução do volume.

Uma vez que o volume final seja atingido, a fração de volume da estrutura será mantida constante para as iterações remanescentes.

$$V_{k+1} = V^* \tag{3.18}$$

Como próximo passo, os números de sensibilidade de todos os elementos são calculados conforme descrito na seção anterior. Os elementos são ordenados de acordo com os valores de seus números de sensibilidade em ordem decrescente. Para elementos sólidos (1), eles serão removidos (mudados para 0) se:

$$\alpha_i \leq \alpha_{del}^{ath} \tag{3.19}$$

Para elementos vazios (0), eles serão adicionados (mudados para 1) se:

$$\alpha_i \leq \alpha_{add}^{ath} \tag{3.20}$$

em que α_{del}^{ath} e α_{add}^{ath} são os números de sensibilidade limites para remoção e adição de elementos. α_{del}^{ath} e α_{add}^{ath} são determinados de acordo com os três seguintes passos:

1. Primeiramente, adote $\alpha_{del}^{ath} = \alpha_{add}^{ath} = \alpha^{ath}$, assim α^{ath} pode ser facilmente determinado para um volume de referência V_{k+1}. Por exemplo, existem 1000 elementos no domínio de projeto e $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_{1000}$ são os números de sensibilidade ordenados em ordem decrescente. Se V_{k+1} corresponde a uma fração de volume com 725 elementos, então $\alpha^{ath} = \alpha_{725}$.

2. Calcule o índice de admissão de volume (AR), que é definido como o número de elementos adicionados dividido pelo número total de elementos no domínio de projeto. Se $AR \leq AR_{max}$, em que AR_{max} é o índice de admissão de volume máximo prescrito, pule o passo 3. Senão, calcule α_{del}^{ath} e α_{add}^{ath} como no passo 3.

3. Calcule α_{add}^{ath} ao se ordenar primeiramente os números de sensibilidade dos elementos vazios (0). O número de elementos a serem adicionados será igual a AR_{max} multiplicado pelo número total de elementos no domínio de projeto. α_{add}^{ath} é o número de sensibilidade do elemento ranqueado logo após o último elemento adicionado. Assim, α_{del}^{ath} é o número de sensibilidade que fará com que o volume removido seja igual a (volume de elementos adicionados - V$_{k+1} + V_k$).

O ciclo de análise de elementos finitos e adição/remoção de elementos continua até que o volume objetivo V^* seja atingido e o seguinte critério de convergência (definido em termos da mudança da função objetivo) seja satisfeito

$$erro = \frac{|\sum_{i=1}^{N} C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{N} C_{k-N-i+1}|}{\sum_{i=1}^{N} C_{k-i+1}} \leq \tau \tag{3.21}$$

em que k é o número da iteração atual, τ é a tolerância permitida para convergência e N é um número inteiro. Normalmente, N é selecionado como 5, o que implica em que a mudança na função objetivo através das 10 últimas iterações é aceitavelmente pequena.

Algoritmo BESO

O processo evolucionário do método BESO é dado como:

1. Discretizar o domínio de projeto usando uma malha fina de elementos finitos e declarar valores iniciais das propriedades (0 ou 1) dos elementos para construir uma solução inicial.

2. Realizar a análise de elementos finitos e calcular o número de sensibilidade elementar, de acordo com a equação (63). Salvar o número de sensibilidade para a próxima iteração.

3. Determinar a fração de volume da próxima iteração de acordo com a equação (66).

4. Adicionar e remover elementos de acordo com o procedimento descrito na seção anterior.

5. Repetir os passos 2 a 5 até que a restrição de volume (V^*) seja alcançada e o critério de convergência (70) seja satisfeito.

3.4 O problema de tabuleiro de xadrez

O problema do tabuleiro de xadrez ("checkerboard") está presente em vários métodos de otimização topológica de estruturas que utilizam malha fixa de elementos finitos. Esse problema se caracteriza por padrões sólido-vazio ordenados como um tabuleiro de xadrez presentes na estrutura final e começam a ser formados durante a evolução do algoritmo. Na Otimização Estrutural Evolucionária, o problema tem sido detectado sob vários critérios de análise e os padrões sólido-vazio fortalecem a idéia de que o critério adotado ora é superestimado e ora subestimado através dos elementos. A presença do tabuleiro de xadrez dificulta a interpretação da solução ótima e também da manufatura da estrutura.

Os padrões de tabuleiro de xadrez tem sua origem em problemas de aproximação numérica, Diaz and Sigmund (1995) e Jog and Haber (1996). Quando os elementos quadrilaterais tradicionais de quatro nós são utilizados, as restrições cinemáticas da estrutura discretizada resultam em uma rigidez alta e artificial induzida numericamente. Esses elementos podem apresentar conexões de apenas um nó com seus elementos vizinhos, o que possibilita a formação do tabuleiro de xadrez e/ou singularidades de rigidez, Saxena and Saxena (2007). A Figura 13 ilustra a formação desses padrões com elementos quadrilaterais.

Para solucionar essas dificuldades numéricas no contexto dos algoritmos do tipo SIMP, Bendsoe and Sigmund (1999), pesquisadores têm proposto a utilização de elementos de alta

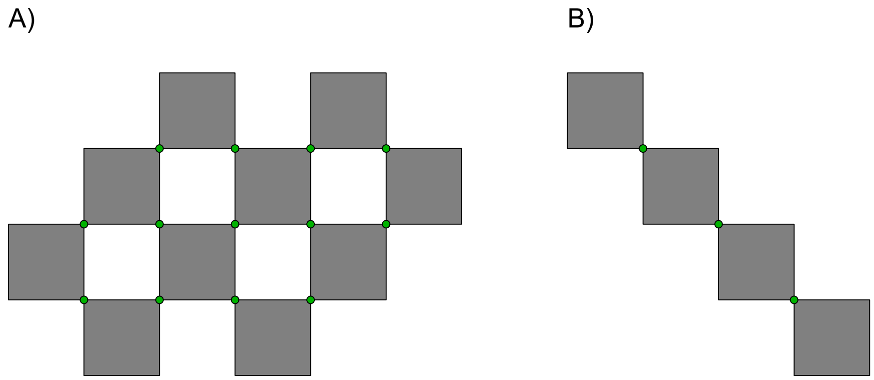


Figura 3.8: A) Padrão de tabuleiro de xadrez; B) Um segmento contínuo com conexões de apenas um nó.

ordem, os quais Diaz and Sigmund (1995) mostram ser mais estáveis, filtros numéricos, Poulsen (2002) e Hu et al. (2009), ou até mesmo elementos com funções especiais, Talischi et al. (2009). Contudo, essas alternativas podem não ser as melhores, pois o aumento no custo computacional pode ser muito elevado. No método ESO, o problema de tabuleiro de xadrez também é detectado em análises sob critério de rigidez baseadas em elementos quadrilaterais de quatro nós. Li and Steven (2001) propõem um filtro baseado na suavização do número de sensibilidade ao longo da estrutura para eliminar o problema no método ESO. Uma alternativa a essas técnicas complementares (filtros e elementos de alta ordem) é baseada no uso de elementos hexagonais. Talischi et al. (2009) propõem a utilização de um elemento hexagonal especial com funções do tipo Wachspress para eliminar os padrões de tabuleiro de xadrez, sem o uso de filtros ou algoritmos extras no método SIMP. Recentemente, outros autores têm estudado a combinação de elementos triangulares e quadrilaterais para criar elementos (blocos) hexagonais e/ou malhas híbridas para a eliminação do problema em métodos tradicionais de otimização, como Zhou (2010), Nguyen et al. (2010), Rahmatalla and Swan (2004) e outros. A seguir, serão descritos os métodos de eliminação do Tabuleiro de Xadrez através de um filtro numérico e de malhas hexagonais.

3.4.1 Filtro de suavização do número de sensibilidade

O filtro utilizado neste trabalho para a supressão do problema de tabuleiro de xadrez em malhas quadrilaterais foi proposto por Li and Steven (2001). O artigo detalha um algoritmo simples para a supressão do problema com uma técnica intuitiva de suavização do número de sensibilidade. De forma breve, esse algoritmo consiste em dois passos básicos:

1. Calcular o fator de referência em cada nó como uma média ponderada dos números de sensibilidade dos elementos conectados ao nó como:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^{ne} V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{ne} V_i} \tag{3.22}$$

   em que ne denota o número total de elementos conectados ao nó k, e α_i e V_i o número de sensibilidade do i-ésimo elemento de conexão e seu volume, respectivamente. Para o caso bidimensional, basta utilizar a área do elemento ao invés de seu volume.

2. Calcular o número de sensibilidade do elemento candidato e ao fazer a média dos valores das sensibilidades nodais calculados anteriormente, segundo os nós conectados ao elemento, como:

$$\alpha_e = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} N_k \alpha_k dV \tag{3.23}$$

   ou para elementos quadrilaterais regulares,

$$\alpha_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \tag{3.24}$$

   em que N_k são as funções de forma do elemento candidato e, n denota o número de nós desse elemento e V_e o volume do mesmo.

Isso é apresentado como uma técnica de suavização de primeira ordem, em que o número de sensibilidade do elemento é calculado através da média dos valores de seus elementos adjacentes, como representado na Figura 14. Quando necessário, uma suavização de segunda ordem pode ser aplicada, em que os números de sensibilidade são suavizados utilizando elementos além dos adjacentes, como representado na Figura 15.

Desse algoritmo simples de dois passos, o número de sensibilidade suavizado do elemento e pode ser formulado como:

$$\alpha_e = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i V_i} \tag{3.25}$$

em que m é o número total de elementos envolvidos na suavização e w_i representa o parâmetro de filtro w_i, que geralmente satisfaz:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \tag{3.26}$$

Para o elemento quadrilateral regular de 4 nós, o parâmetro de filtro w_i (i=1,2,...,m) é dado nas Figuras 14 e 15 para os filtros de primeira e segunda ordem, respectivamente.

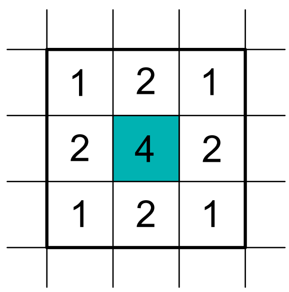


Figura 3.9: Coeficiente ponderado $16w_i$ para o esquema de suavização de primeira ordem, Li and Steven (2001).

É válido observar que o filtro de primeira ordem enfatiza mais o número de sensibilidade do próprio elemento (25%) do que o filtro de segunda ordem (14%) o faz, Li and Steven (2001). Sob muitas circunstâncias, evidentes problemas de tabuleiro de xadrez exemplificam a idéia de que o número de sensibilidade é sub e supervalorizado. Por essa razão, o filtro de segunda ordem pode prover maior correção às instabilidades numéricas. Para esse trabalho, o filtro de primeira ordem foi suficiente para suprimir os padrões de tabuleiro de xadrez. A Figura 16 mostra um exemplo de como o algoritmo apresentado atua no problema.

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Figura 3.10: Coeficiente ponderado $256w_i$ para o esquema de suavização de segunda ordem, Li and Steven (2001).

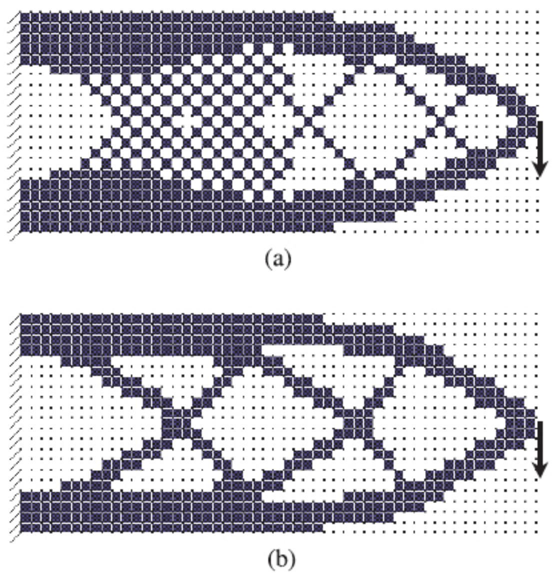


Figura 3.11: a) ESO sem supressão do checkerboard. b) ESO com supressão do checkerboard, Li and Steven (2001).

3.4.2 A malha hexagonal e seu papel

Em malhas hexagonais (em forma de favo de mel), os elementos compartilham mais arestas e nós entre si do que em malhas quadrilaterais tradicionais. Os blocos hexagonais compartilham pelo menos 2 nós e uma aresta com seus vizinhos em virtude de sua geometria. Isso suprime a possibilidade da formação de conexões por apenas um nó e naturalmente exclui a existência do tabuleiro de xadrez. Além do mais, a topologia final da estrutura é obtida com contornos mais suaves ao longo da malha, pois os blocos hexagonais sofrem menos com restrições direcionais do que os elementos quadrilaterais e possuem mais linhas de simetria em suas arestas. Essas linhas de simetria criam mais direções possíveis de formação dos membros estruturais. A Figura 17 apresenta uma comparação entre as conexões dos dois tipos de malha em questão, em que se observa a conexão entre elementos. Na figura, os elementos sólidos conectados entre si são representados com a cor mais escura e os vazios com a cor mais clara, assim como as conexões dos nós. A Figura 18 apresenta as possíveis direções de formação de membros estruturais em uma malha hexagonal.

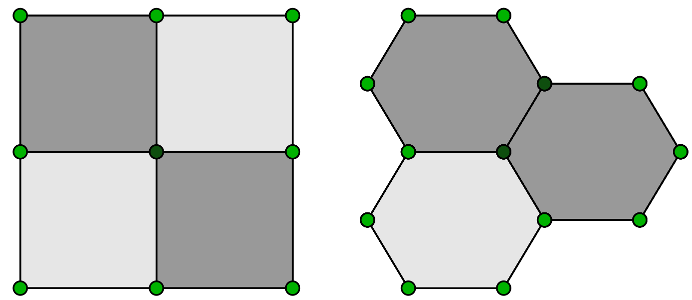


Figura 3.12: Comparação entre as possíveis conexões de malhas quadrilaterais e hexagonais. Quadriláteros podem apresentar conexões por apenas um nó, enquanto hexágonos sempre compartilham dois nós através de uma aresta.

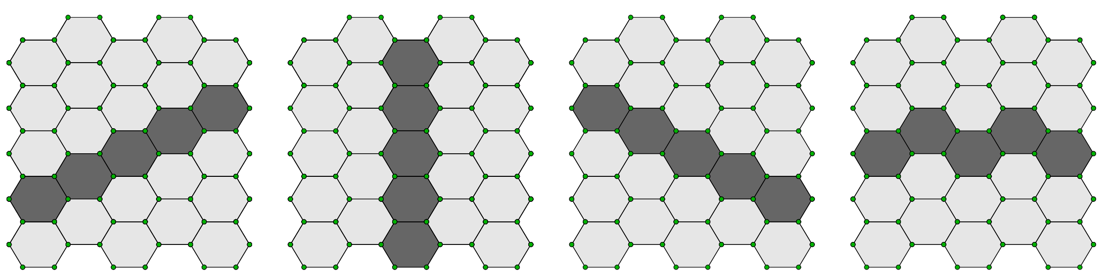


Figura 3.13: Possíveis direções dos membros estruturais na malha hexagonal.

O bloco hexagonal proposto neste trabalho é criado pela combinação de dois elementos quadriláteros isoparamétricos de 4 nós. Na prática, a análise de elementos finitos é realizada apenas com elementos quadrilaterais em uma malha hexagonal, entretanto, esses elementos são anexados dois a dois e considerados como blocos hexagonais no algoritmo evolucionário. É importante salientar que existe um número de sensibilidade para cada elemento quadrilateral no bloco hexagonal. A escolha de qual elemento deve ser retirado da malha é baseada na análise individual de cada quadrilátero, considerando que há sempre a união com seu elemento parente dentro do bloco hexagonal e os dois devem ser retirados juntos. O cálculo da média do número de sensibilidade para cada bloco hexagonal também foi testada, assim como feito por Saxena and Saxena (2007), contudo, a princípio, isso não garante a simetria da topologia sem a introdução de algoritmos de verificação extras. A Figura 19 apresenta a construção do bloco hexagonal implementada neste trabalho, assim como as suas linhas de simetria através das arestas de ligação.

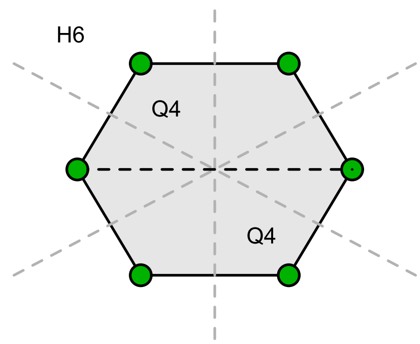


Figura 3.14: Combinação de dois quadriláteros em um bloco hexagonal e suas três linhas de simetria.

Capítulo 4

Aspectos Computacionais

Este capítulo tem por finalidade descrever alguns aspectos computacionais relevantes nesta pesquisa. Serão apresentados os pré-processadores implementados neste trabalho, assim como discussões sobre os tipos de malhas geradas.

4.1 Geradores de malha

Para a análise e otimização de diversos casos presentes na literatura científica, foram implementados cinco tipos de geradores de malha com domínios iniciais retangulares, sendo um gerador de malha quadrilateral e os outros quatro de malhas hexagonais.

4.1.1 Malhas quadrilaterais

O gerador de malhas quadrilaterais é o mais simples dentre os implementados. O mesmo é uma função dependente do número de elementos na horizontal e na vertical, assim como da largura e altura do domínio inicial. Como esse domínio é retangular e os elementos quadrados ou retângulos regulares, a geração da malha é relativamente simples. O gerador foi utilizado para a validação do programa e do método ESO sob critério de tensão e rigidez. A Figura 20 apresenta uma malha 6×3 quadrilateral e regular gerada automaticamente com domínio inicial de $10m \times 5m$.

4.1.2 Malhas hexagonais

Ao se gerar malhas hexagonais em um domínio fixo retangular, as bordas da estrutura inicial não são retas, como pode ser observado no item A da Figura 21. Para cobrir todo o

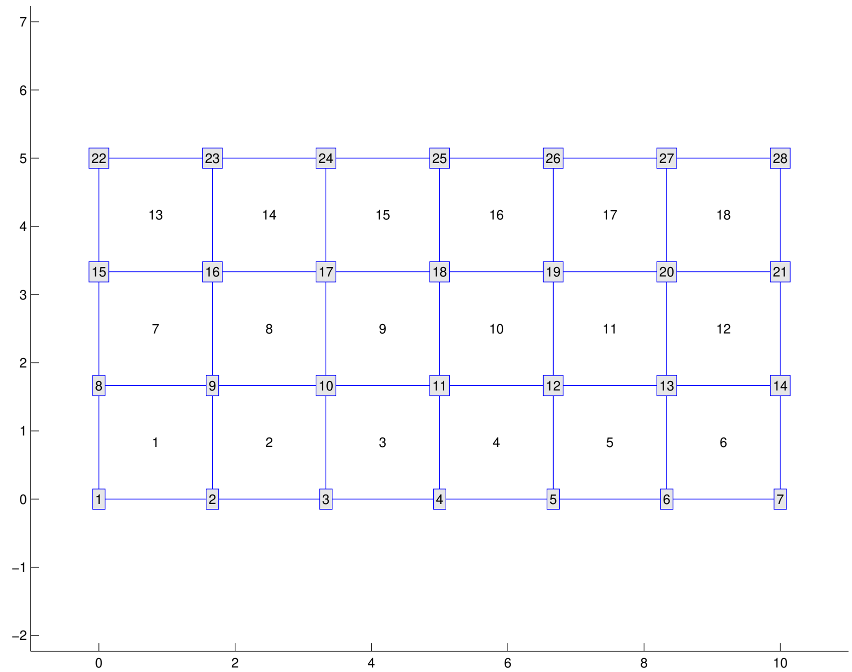


Figura 4.1: Malha quadrilateral gerada automaticamente.

domínio inicial, inicialmente se faz necessária a inserção de elementos triangulares e quadrilaterais nas bordas da malha. Considerando que apenas uma camada de elementos diferentes é inserida na malha, Talischi et al. (2009) afirmam que o efeito no processo de otimização devido a essa camada é esperado como negligenciável. O item B da Figura 21 apresenta a inserção de elementos não hexagonais na obtenção de malhas hexagonais com bordas retas.

Neste trabalho, quatro funções para geração de malhas hexagonais foram consideradas, cada uma com a sua particularidade. Os geradores são funções da largura e altura da estrutura, assim como do número de colunas e linhas de blocos hexagonais. A seguir são apresentados as malhas geradas e uma breve discussão sobre a sua influência no objetivo deste trabalho.

Malha Hexagonal H6 preenchida com elementos triangulares e quadrilaterais

Esta função gera malhas hexagonais com elementos triangulares e quadrilaterais da mesma forma apresentada no item B da Figura 21. Esta malha tem como objetivo a inserção ou criação de elementos hexagonais de 6 nós, para utilização em trabalhos futuros. Entre-

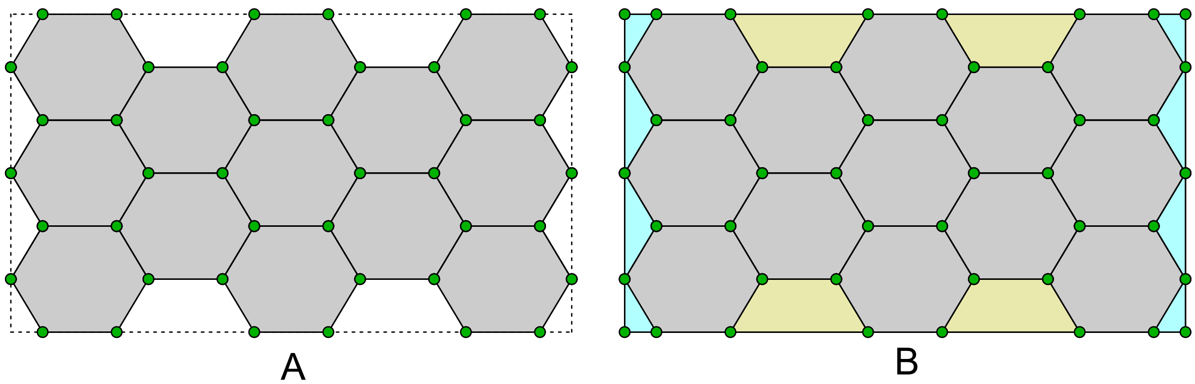


Figura 4.2: Discretização do domínio fixo retangular inicial: A) sem elementos na borda da estrutura e B) com elementos triangulares (em azul) e quadrilaterais (em amarelo) completando a malha.

tanto, neste trabalho não houve a criação de um novo elemento, mas sim a criação de um bloco hexagonal, conforme já detalhado em seções anteriores. A Figura 22 apresenta uma malha gerada com essa função.

Malha Hexagonal H6/Q4 preenchida com elementos triangulares e quadrilaterais

Este gerador se assemelha ao anterior. A única mudança é a troca do elemento hexagonal por um bloco hexagonal formado pela combinação de dois elementos quadrilaterais isoparamétricos de 4 nós. A Figura 23 apresenta a malha gerada neste caso.

Na prática, esta malha é composta apenas por elementos triangulares e quadrilaterais e as análises de otimização poderiam ser iniciadas. Entretanto, a fim de simplificar o programa implementado e não misturar elementos diferentes em uma mesma análise, apresenta-se as malhas descritas a seguir.

Malha Hexagonal H6/Q4 preenchida apenas com elementos quadrilaterais

Esta função gera malhas preenchidas apenas com elementos quadrilaterais em suas bordas. Há uma extensão dos elementos triangulares que antes completavam as bordas laterais da estrutura inicial, assim como a criação de mais nós e a adição de dois quadriláteros para cada triângulo anteriormente existente. Os quadriláteros das bordas laterais passam a formar então, dois a dois, metades de hexágonos. A Figura 24 ilustra a idéia deste gerador.

Na prática, a malha é formada apenas por elementos quadrilaterais sendo que a junção dos mesmos, dois a dois, sejam considerados como blocos a fim de formar a malha hexagonal. A Figura 25 apresenta uma malha gerada com esta função. Este foi o gerador adotado para

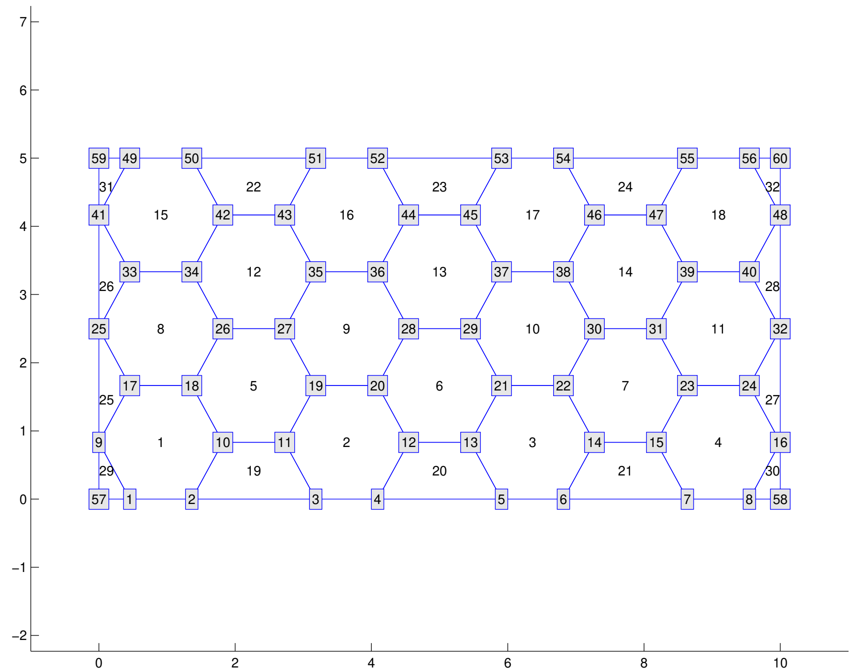


Figura 4.3: Malha hexagonal H6 $7x3$ com inserção de elementos triangulares e quadrilaterais nas bordas.

muitos casos analisados neste trabalho. A Figura 26 apresenta o modelo de malha escolhido como padrão para este trabalho.

Ao se arbitrar o número de linhas e colunas de blocos hexagonais presentes na malha inicial, faz-se com que possam ser geradas malhas formadas por elementos já bem deformados e com razão de aspecto ruim. Assim, o analista deve atentar às características iniciais dos elementos. A razão de aspecto do bloco hexagonal é discutida na seção seguinte, assim como a implementação de um gerador de malha hexagonal com blocos mais próximos do hexágono regular.

4.1.3 Razão de aspecto dos elementos

Antes de se abordar a razão de aspecto dos blocos hexagonais, é válido fazer observações sobre o desempenho da malha na otimização topológica. Mesmo que seja possível a utilização de malhas não-regulares, como por exemplo malhas adaptativas vistas em Costa and Alves (2003) e Wang (2007), é mais comum a modelagem dos problemas de otimização topológica

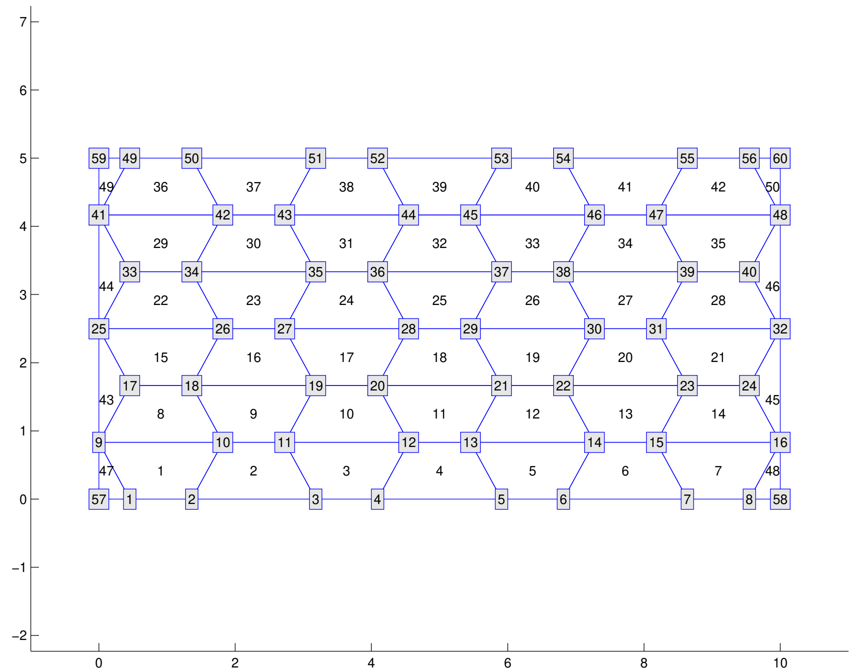


Figura 4.4: Malha hexagonal H6/Q4 $7x3$ com inserção de elementos triangulares e quadrilaterais nas bordas.

com malhas regulares como, por exemplo, malhas contendo apenas quadrados de mesmo tamanho. O analista deve atentar a este fato pois, ao se utilizar malhas não-uniformes, partes do domínio inicial podem ser favorecidas e, a priori, não se sabe onde a solução final estará, de acordo com Talischi et al. (2009). Além do mais, uma outra vantagem no uso de malhas regulares é no cálculo das matrizes elementares, que serão idênticas entre si nesse caso, o que leva a um ganho de performance computacional na solução do problema, segundo Borrvall and Peterson (2001), principalmente para casos em 3D.

Gerador de malha hexagonal com proporção de hexágono regular

Para o uso de malhas hexagonais, de forma análoga ao de malhas quadrilaterais, é oportuno pensar que a razão de aspecto dos blocos hexagonais ou a regularidade da malha exercem influência no método de otimização topológica. O bloco hexagonal regular é o hexágono perfeito, com todos os ângulos internos valendo 120^o. Para isso, implementou-se uma outra opção de gerador de malha como uma função dependente apenas das dimensões

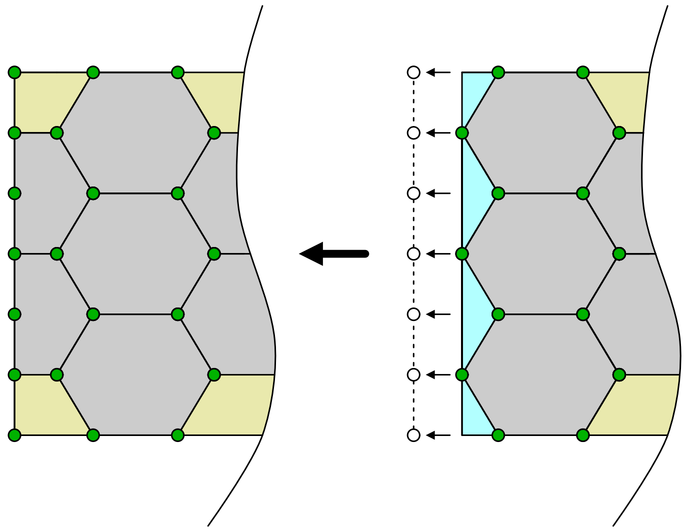


Figura 4.5: Extensão dos elementos triangulares em elementos quadrilaterais para o novo gerador.

do domínio e do número de colunas dos blocos hexagonais. A função calcula a proporção de um hexágono regular e também o número de linhas de blocos necessárias para completar o domínio da forma mais regular possível. A Figura 27 apresenta quatro discretizações geradas com essa função. A malha segue o mesmo princípio do gerador anterior e é construída apenas com elementos quadrilaterais.

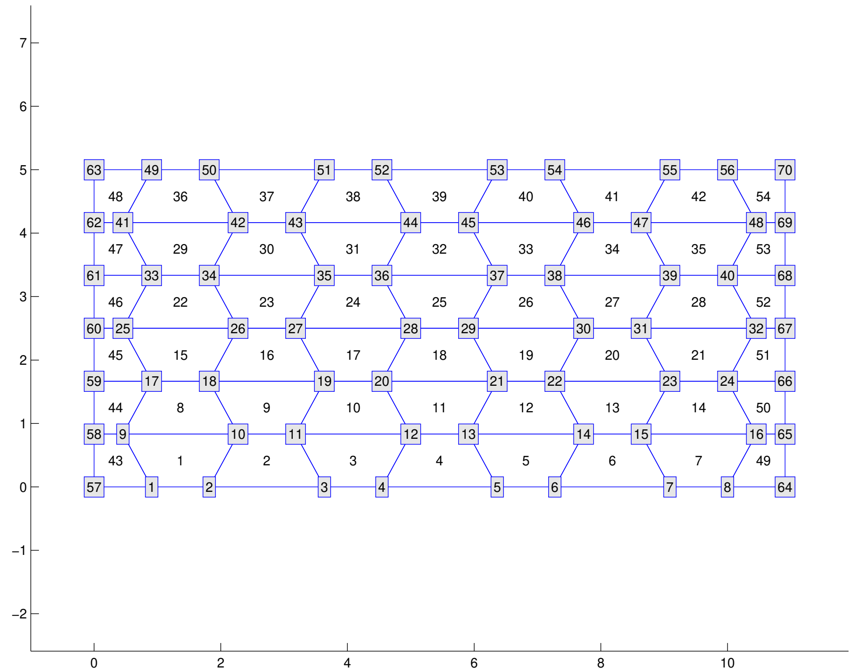


Figura 4.6: Malha Hexagonal H6/Q4 $7x3$ preenchida apenas com elementos quadrilaterais.

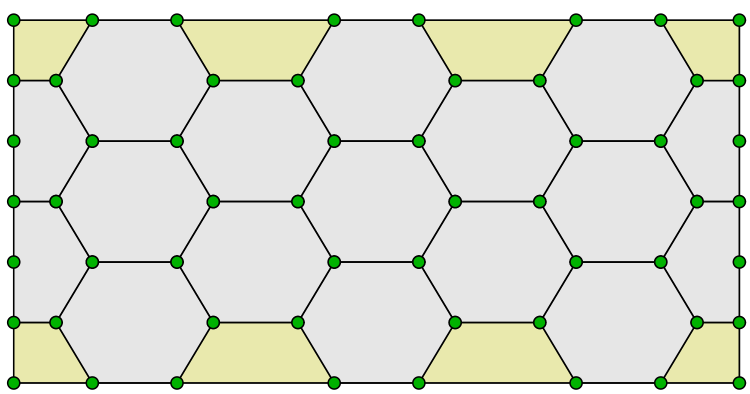
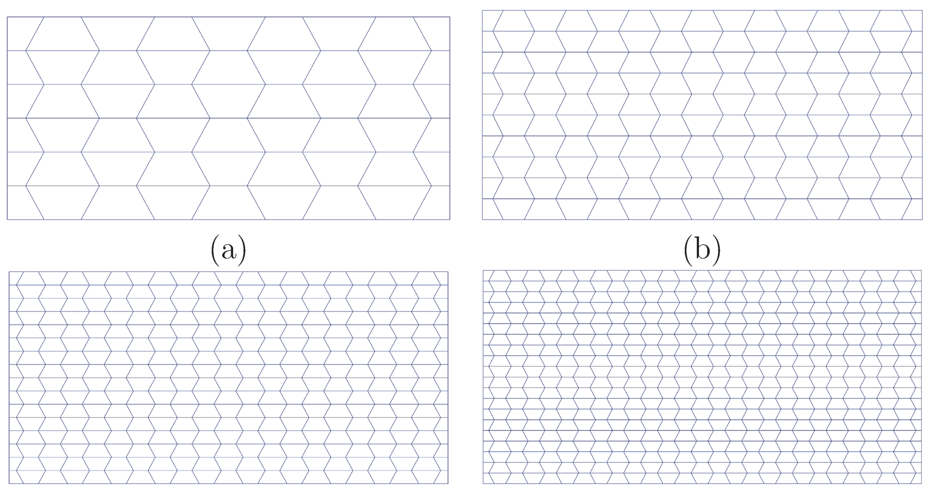


Figura 4.7: Domínio inicial com malha hexagonal e limites externos completados com elementos quadrilaterais.



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.8: Malhas geradas com cálculo de proporção regular do bloco hexagonal: a) 7 colunas de blocos hexagonais, b) 13 colunas, c) 19 colunas e d) 25 colunas.

Capítulo 5

Validação dos Programas

Esse capítulo descreve os resultados obtidos para validação dos códigos de ESO implementados em MATLAB para algoritmos com critério baseado em nível de tensão e de rigidez, com e sem filtro de supressão do problema de tabuleiro de xadrez, além de resultados obtidos com o método BESO convergente e independente da malha.

5.1 ESO baseada em nível de tensão

É observado que algoritmos de otimização estrutural tendem a obter estruturas com aparência reticulada. Os resultados deste trabalho apresentam essa tendência, principalmente as estruturas obtidas com o critério baseado em nível de tensão. A seguir serão apresentadas análises do exemplo clássico de viga engastada livre (estrutura de duas barras), assim como um caso de viga biapoiada para a validação do programa de ESO em nível de tensão. O filtro de Li and Steven (2001) não foi aplicado nestes casos.

5.1.1 Viga engastada livre - duas barras

Esse modelo foi o primeiro a ser analisado e discutido em Xie and Huang (2010) para o método ESO. É um exemplo clássico também conhecido como duas barras. O resultado teórico é apresentado na Figura 28:

Neste trabalho, o domínio de projeto mostrado na Figura 29, cuja dimensão é 10×24m, foi modelada com 26×60 elementos finitos quadrilaterais regulares de 4 nós, no total de 1560 elementos. Um carregamento pontual de $1000KN$ foi imposto no meio da aresta direita da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson 0,3 e

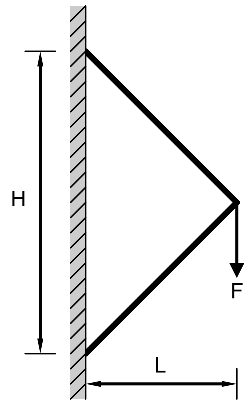


Figura 5.1: Estrutura téorica de duas barras.

espessura 0,1m. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,5%. O domínio de trabalho é engastado em sua lateral esquerda.

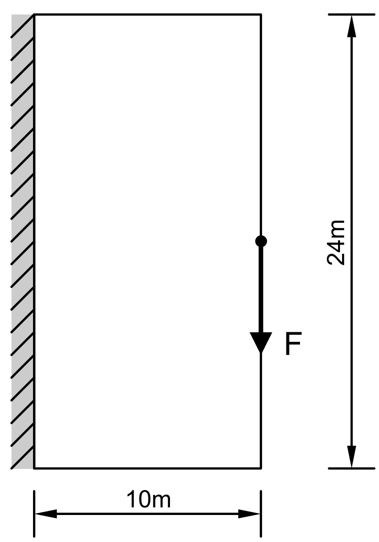


Figura 5.2: Domínio de projeto da estrutura.

As Figuras 30, 31, 32 e 33 apresentam as estruturas obtidas com razão de rejeição final de 1%, 6%, 18% e 30%.

Observa-se que a estrutura obtida é coerente com o resultado teórico mostrado na Figura 28, ou seja, ela também apresenta como resultado ótimo as duas barras que sustentam o carregamento imposto e o ângulo entre as barras é de 90^o, o que valida o código implementado.

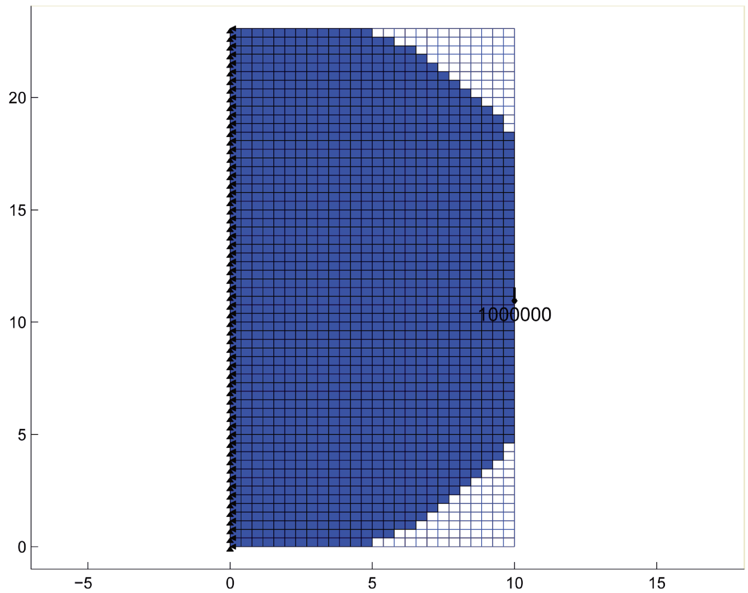


Figura 5.3: Viga engastada livre com $RR = 1\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

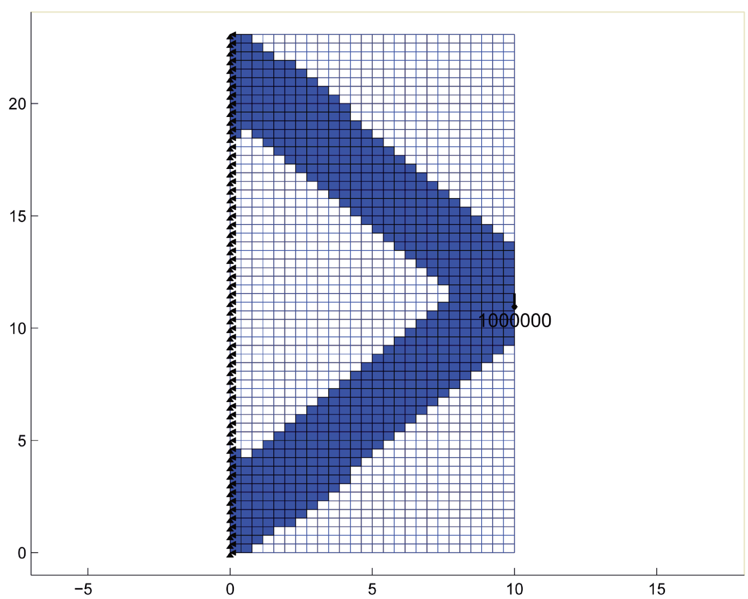


Figura 5.4: Viga engastada livre com $RR = 6\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

Os resultados obtidos para índice de rejeição final de 18% e 30% apresentam estruturas quase idênticas. Isso mostra que o nível de tensão entre elementos já está suficientemente mais homogêneo e um estado ótimo foi atingido. Essa é a característica do método ESO em nível de tensão. A convergência para esse estado pode ser observada com o gráfico apresentado na Figura 34.

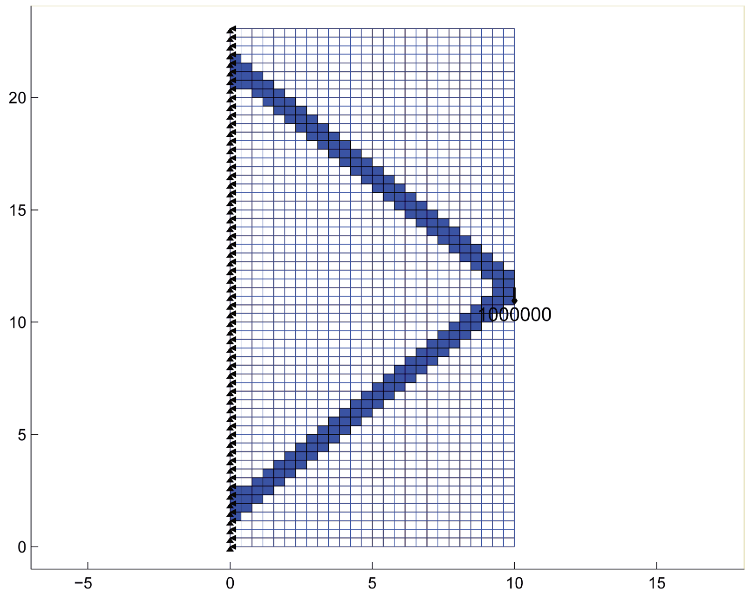


Figura 5.5: Viga engastada livre com $RR = 18\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

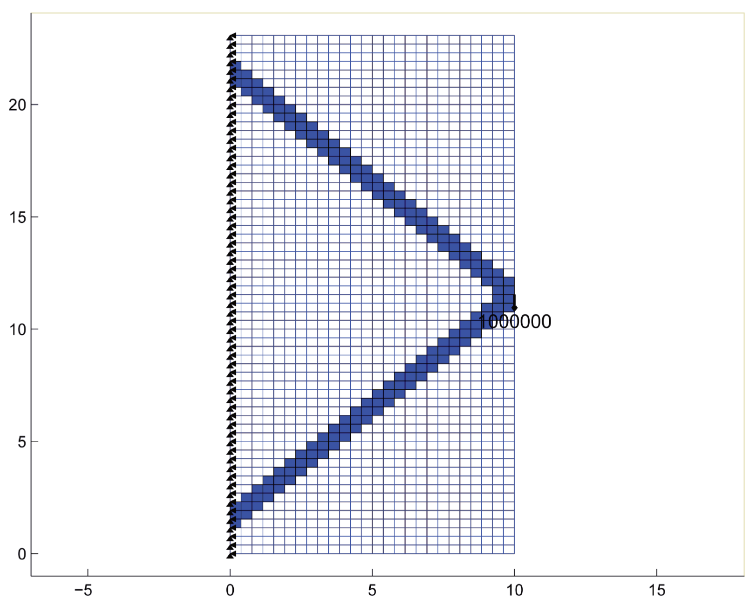


Figura 5.6: Viga engastada livre com $RR = 30\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

Na Figura 34, observa-se patamares na curva, os quais indicam a procura do algoritmo por elementos com percentual de tensão menor do que o *índice de rejeição* (ER) da iteração até que o estado estável seja atingido e, assim, o ER seja aumentado.

A distribuição de tensão ao longo da estrutura é o fator mais ponderante no critério ESO em tensão. Para observar esse nível de tensão de modo geral, gerou-se diagramas de

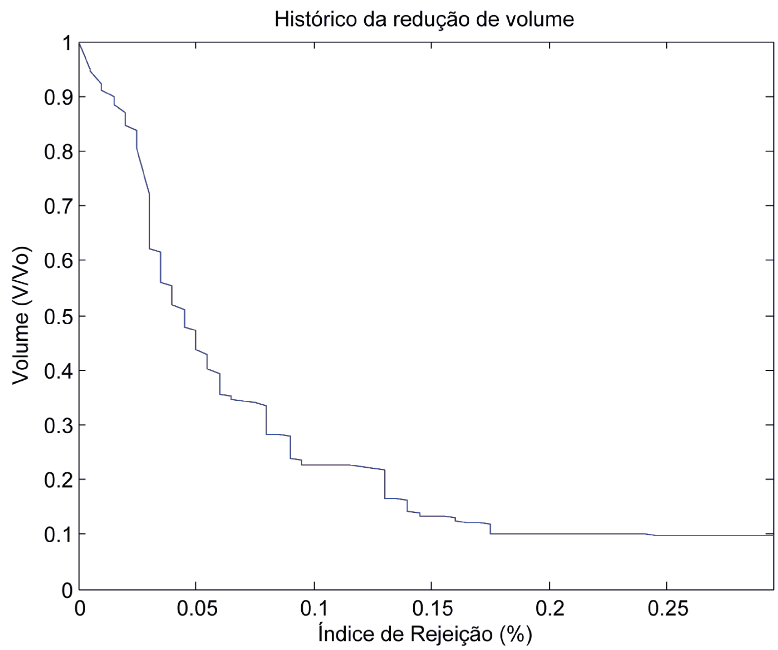


Figura 5.7: Histórico da redução de volume no método ESO para o modelo de "duas barras".

cores com os valores da tensão em cada nó, sendo estes as médias das tensões dos elementos conectados ao i-ésimo nó. Para ilustrar a evolução do nível desses valores e comparar com as figuras anteriores, as Figuras 35, 36, 37 e 38 apresentam o diagrama de cores da tensão normal em X para as estruturas otimizadas com índices de rejeição de 1%, 6%, 18% e 30%.

Observa-se que a distribuição de tensão apresenta um aspecto mais geral na Figura 35 para $ER = 1\%$. Ao se formar as duas barras, a partir da Figura 36, essa distribuição passa a ser predominantemente de compressão na barra inferior e tração na barra superior, como pode ser melhor observado na Figura 38 para $ER = 30\%$. Isso caracteriza a melhor utilização dos elementos da estrutura, o que era previsto na otimização, uma vez que a estrutura passou a ter aparência reticulada.

Ainda na questão da distribuição de tensão, pode-se observar que o nível de tensão de cada elemento torna-se mais próximo um do outro a cada evolução do algoritmo. Para comprovar isso, gerou-se gráficos com a tensão equivalente de von Mises utilizada como referência do nível de tensão elementar. As Figuras 39 e 40 apresentam as tensões elementares tomadas como referência para o critério de rejeição.

Observa-se que na Figura 40 para $ER = 18\%$, o nível de tensão entre os elementos é muito mais homogêneo ao longo da estrutura do que na Figura 39 para $ER = 1\%$. Isso ilustra bem como o algoritmo elimina o material subutilizado da estrutura.

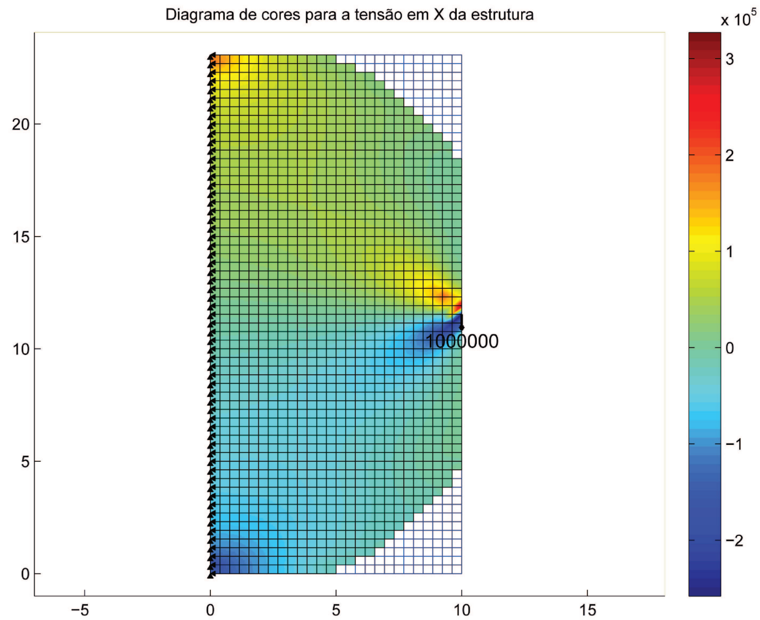


Figura 5.8: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 1\%$.

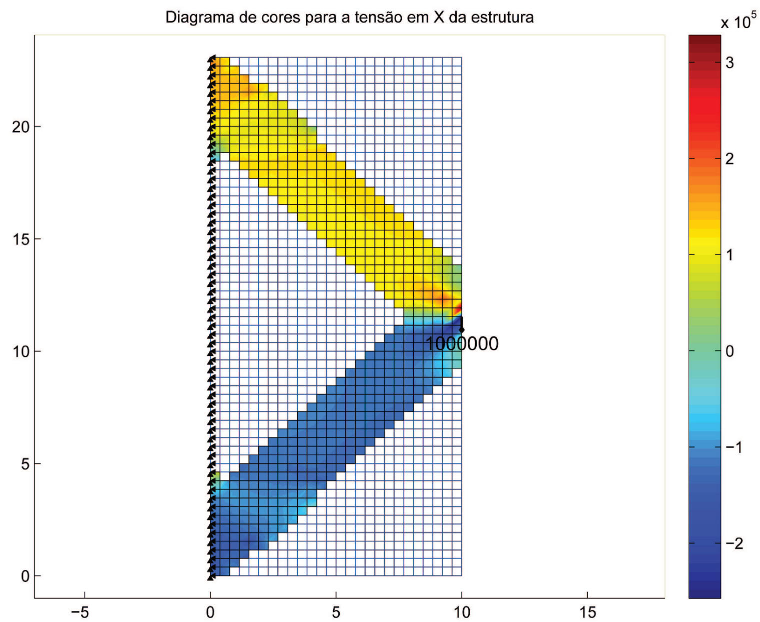


Figura 5.9: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 6\%$.

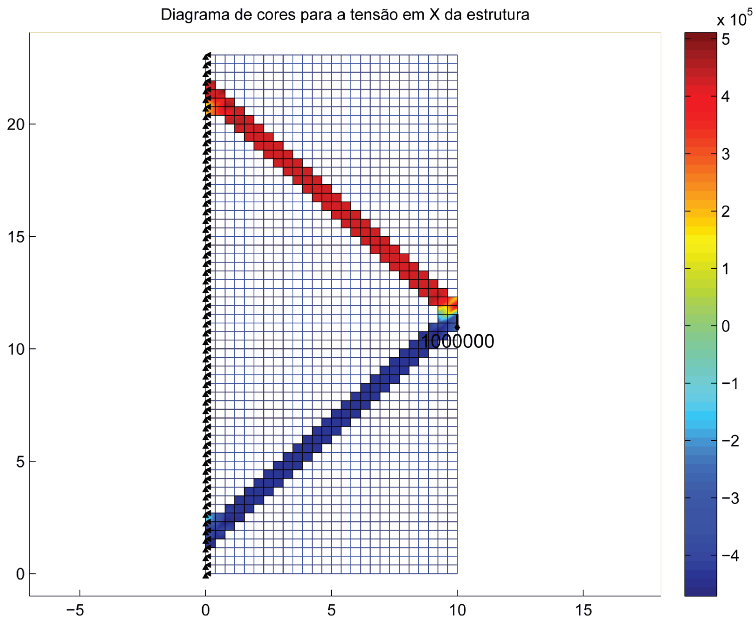


Figura 5.10: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 18\%$.

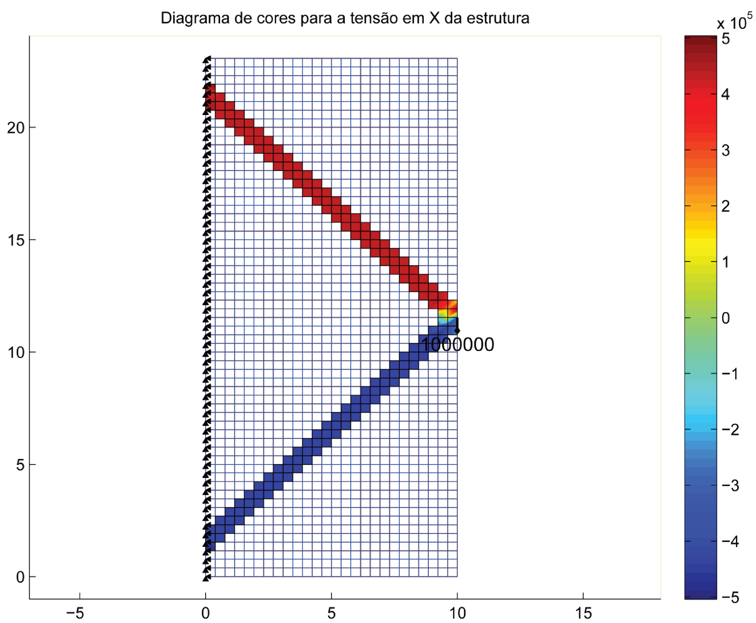


Figura 5.11: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 30\%$.

5.1.2 Viga biapoiada

Um outro caso frequentemente estudado é apresentado. Trata-se do problema de viga biapoiada de dimensões $10 \times 5m$ conforme apresentada na Figura 41, que foi modelada com

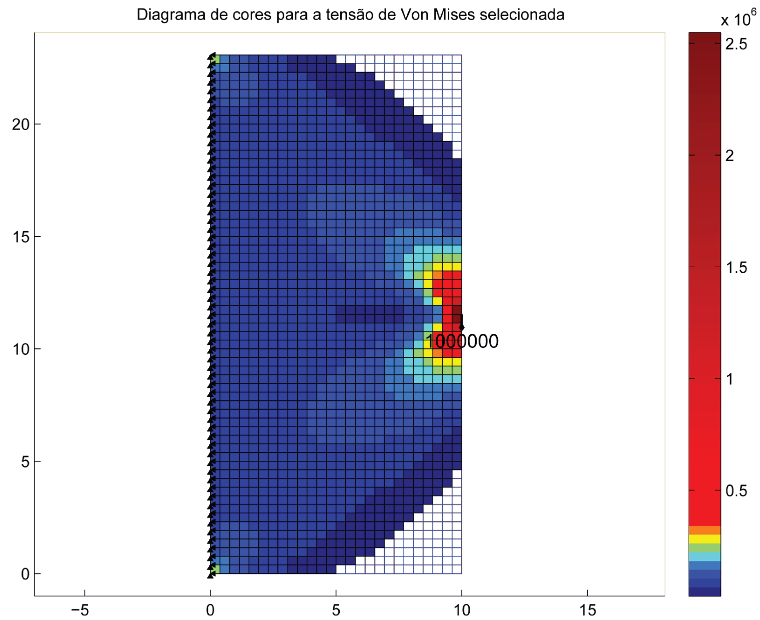


Figura 5.12: Diagrama de cores para a tensão equivalente de von Mises tomada como referência no critério de rejeição de material, para a estrutura otimizada com $RR = 1\%$.

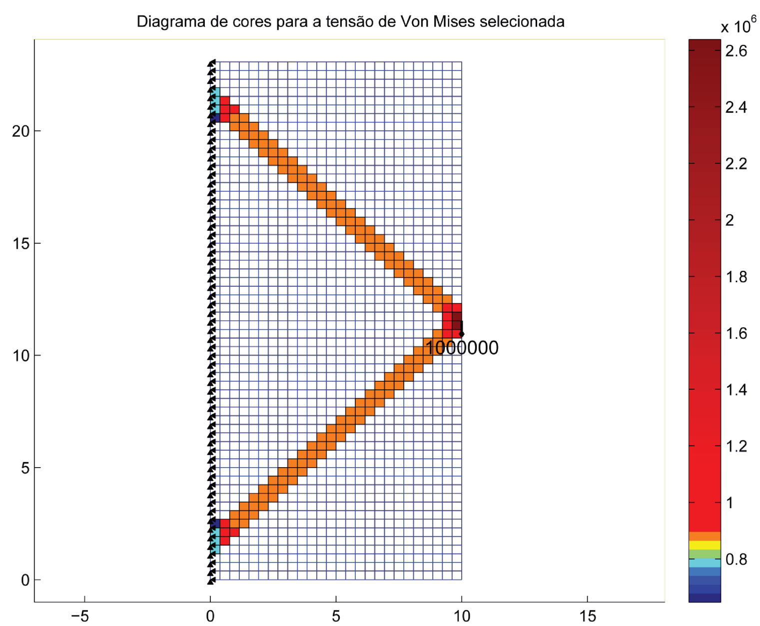


Figura 5.13: Diagrama de cores para a tensão equivalente de von Mises tomada como referência no critério de rejeição de material, para a estrutura otimizada com $RR = 18\%$.

50×26 elementos finitos regulares quadrilaterais de 4 nós, no total de 1300 elementos. Um carregamento pontual de $1KN$ foi imposto no meio da aresta inferior da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson 0,3 e espessura $0{,}1m$. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,5%. O modelo é apoiado em seus vértices inferiores.

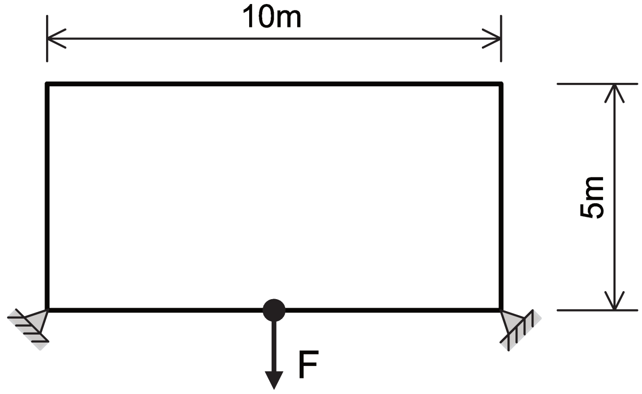


Figura 5.14: Domínio de projeto da estrutura.

As Figuras 42, 43, 44 e 45 apresentam as estruturas obtidas com o algoritmo de ESO em nível de tensão, para razões de rejeição final de 3%, 9%, 15% e 24%.

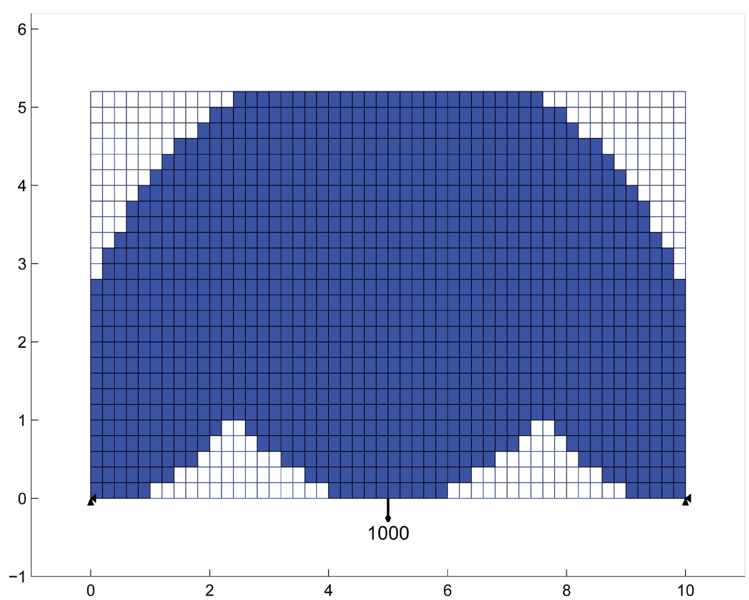


Figura 5.15: Viga biapoiada com $RR = 3\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

Mais uma vez, a estrutura passou a ter a aparência reticulada. Observa-se que a evolução da retirada de material foi diminuindo e convergindo para a topologia final, pois os casos com $RR = 15\%$ e 24% já apresentam topologias bem semelhantes. Para esta análise, como

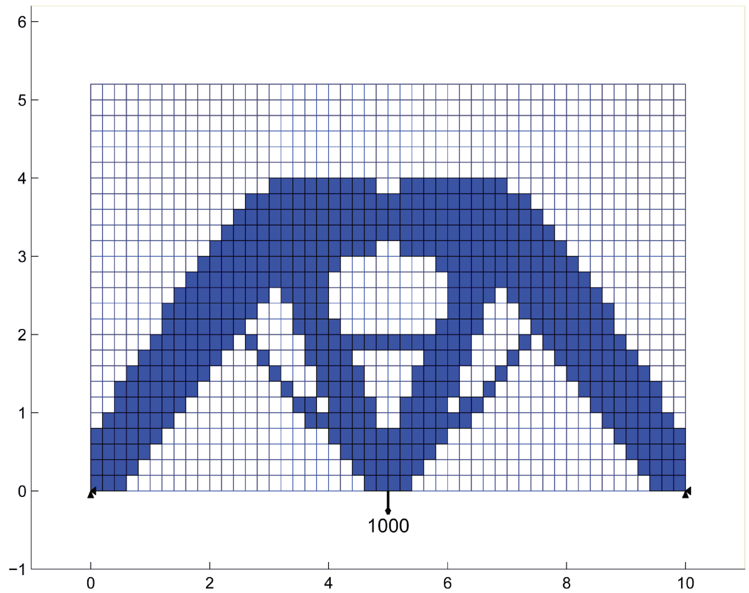


Figura 5.16: Viga biapoiada com $RR = 9\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

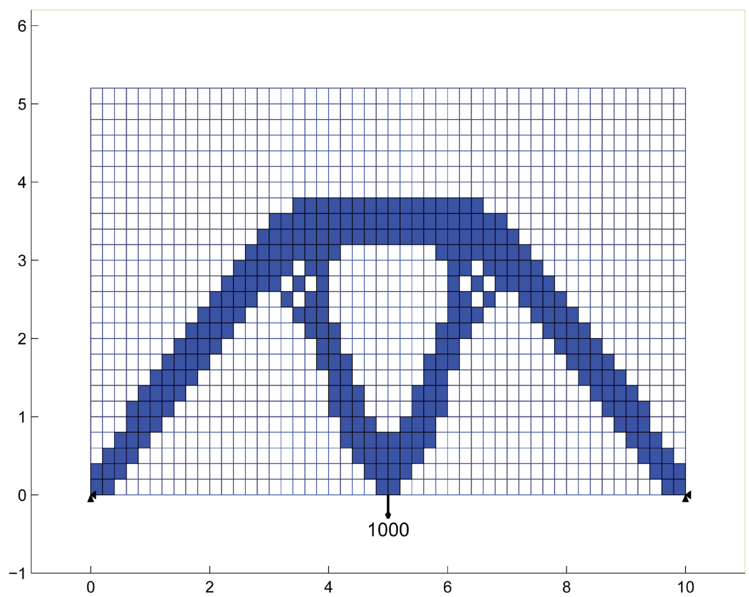


Figura 5.17: Viga biapoiada com $RR = 15\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

no caso anterior, gerou-se a curva do histórico de redução do volume da estrutura final. Este está apresentado na Figura 46.

Com relação ao nível de tensão, pode-se observar novamente a distribuição mais geral desses valores entre os elementos no começo do processo e o nível mais homogêneo na topologia final. Para analisar essa diferença, gerou-se o gráfico de tensão normal em X para as

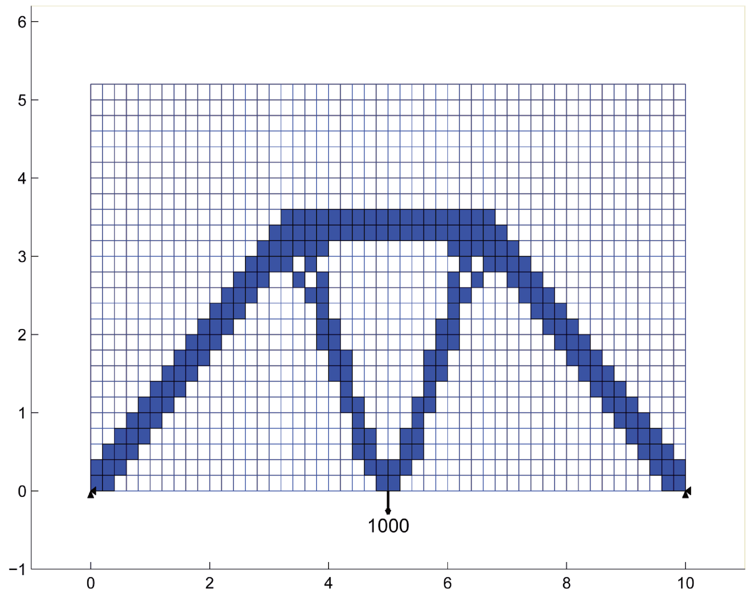


Figura 5.18: Viga biapoiada com $RR = 24\%$ obtida com ESO em nível de tensão.

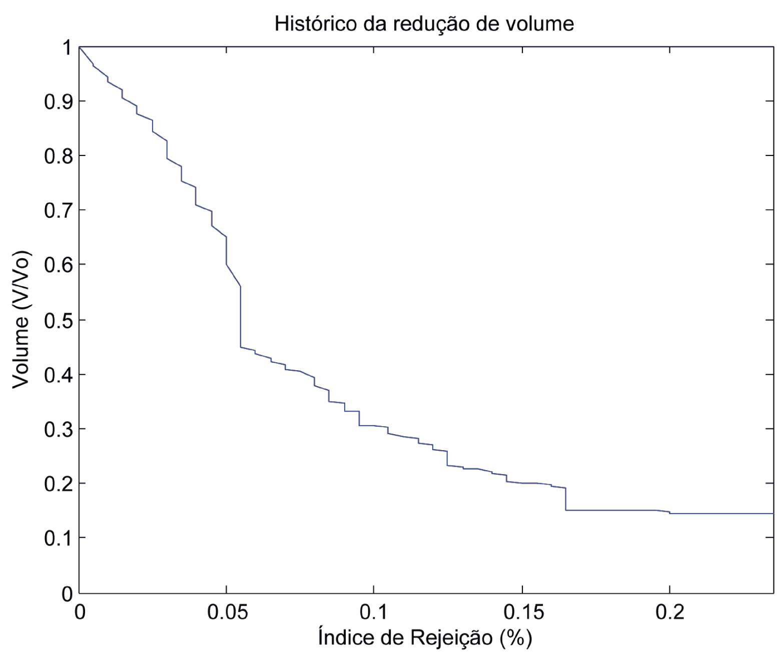


Figura 5.19: Histórico da redução de volume no método ESO para o modelo de viga biapoiada.

topologias obtidas com $RR = 3\%$ e 24%. Estas são apresentadas nas Figuras 47 e 48.

Observa-se que a estrutura final ($RR = 24\%$) apresenta cinco partes funcionando como barras. O nível de tensão é homogêneo em cada uma das barras e se pode observar que as duas inferiores do meio estão sob tração, enquanto as outras sob compressão.

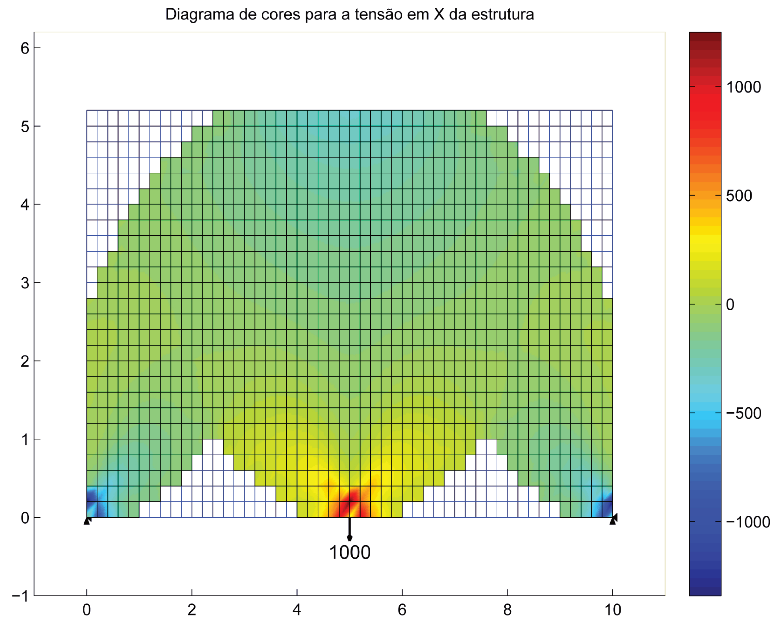


Figura 5.20: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 3\%$.

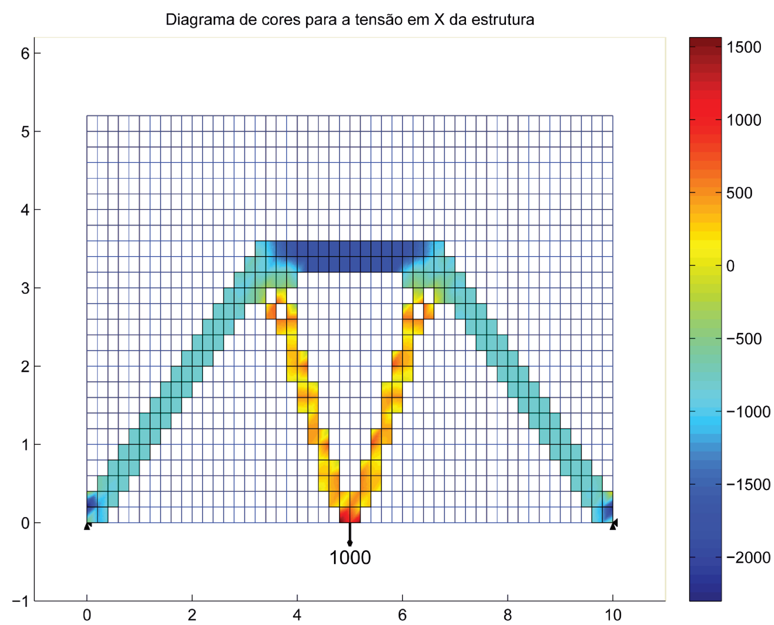


Figura 5.21: Diagrama de cores da tensão normal em X para a estrutura otimizada com $RR = 24\%$.

Outro aspecto ainda não discutido é o deslocamento máximo das estruturas obtidas. Para essa análise, gerou-se diagrama de cores com os valores absolutos dos deslocamentos nodais das topologias finais. As Figuras 49 e 50 apresentam os diagramas para os casos com $RR = 3\%$ e 24%.

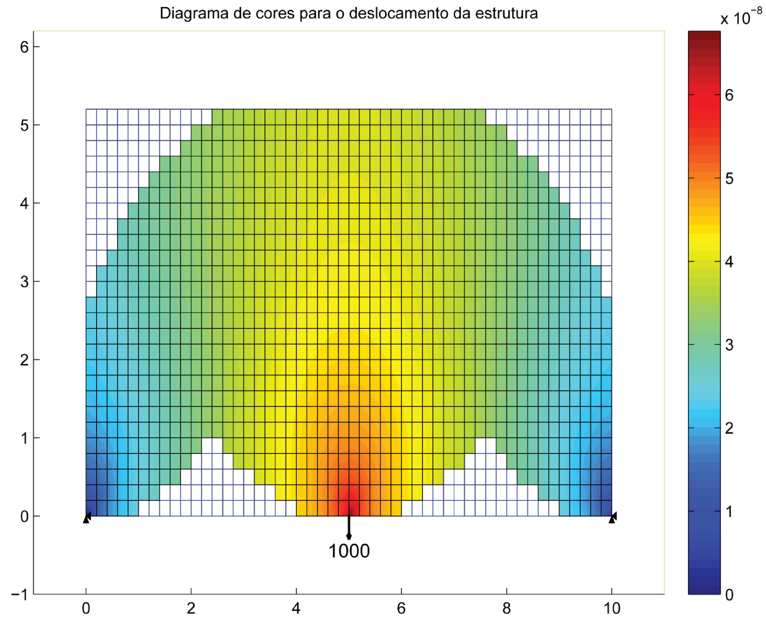


Figura 5.22: Diagrama de cores dos deslocamentos nodais para a estrutura otimizada com $RR = 3\%$.

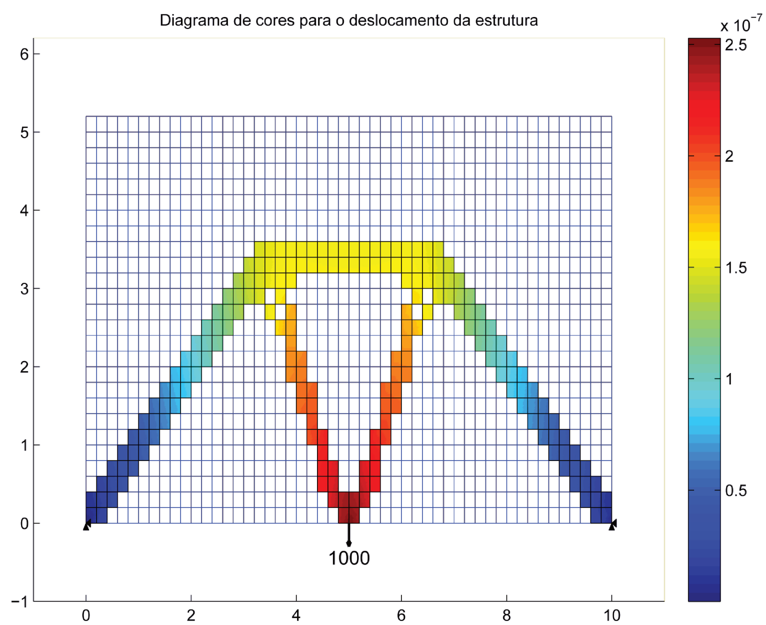


Figura 5.23: Diagrama de cores dos deslocamentos nodais para a estrutura otimizada com $RR = 24\%$.

O deslocamento máximo da estrutura é no ponto de aplicação da força F. Para o caso da Figura 49 com $RR = 3\%$, o deslocamento máximo absoluto é em torno de 6×10^{-8}m, enquanto para a estrutura com $RR = 24\%$ o deslocamento máximo absoluto é em torno de 2,5 $\times 10^{-7}$m. Essa diferença pode ser pequena e satisfatória, considerando que, no segundo caso, o volume da topologia ótima é menor do que 20% da estrutura inicial e que a redução da rigidez não é tão elevada. Por último, salienta-se que houve a tendência do surgimento do esquema de tabuleiro de xadrez para RR igual a 15% e 24%, o que era esperado, uma vez que o filtro não foi aplicado neste caso.

5.2 ESO em maximização da rigidez

Para a programação do método ESO em critério de rigidez, fez-se necessária a aplicação de filtro para a supressão do problema de tabuleiro de xadrez. O filtro utilizado foi o de primeira ordem apresentado por Li and Steven (2001), cujo algoritmo já foi detalhado em seções anteriores. A seguir serão apresentados resultados da aplicação desse critério em viga curta engastada livre e biapoiada nos vértices inferiores.

5.2.1 Viga curta

Uma viga curta engastada livre foi modelada com domínio inicial de $10m \times 5m$ e com uma malha de 50×25 elementos finitos quadrilaterais, no total de 1250 elementos. Um carregamento pontual de $1000KN$ foi imposto no meio da aresta direita da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson 0,3 e espessura 0,1m. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,16%, fazendo com que fossem retirados dois elementos por iteração. A estrutura é engastada em sua lateral esquerda. O modelo inicial é apresentado na Figura 51.

Este foi o caso inicial para a validação da implementação do filtro de suavização do número de sensibilidade. Verificou-se o surgimento de padrões de tabuleiro de xadrez logo quando 15% do material foi retirado. O filtro de primeira ordem implementado foi suficiente para suprimir esses padrões indesejados no programa. A Figura 52 apresenta esse modelo de viga curta com formação de tabuleiro de xadrez e sem a formação do mesmo, após a implementação do filtro proposto por Li and Steven (2001).

Após a implementação e validação do filtro de suavização do número de sensibilidade, foram realizadas análises do mesmo modelo de viga curta para a verificação da topologia obtida. A Figura 53 apresenta o resultado final da estrutura contendo 30% do volume inicial

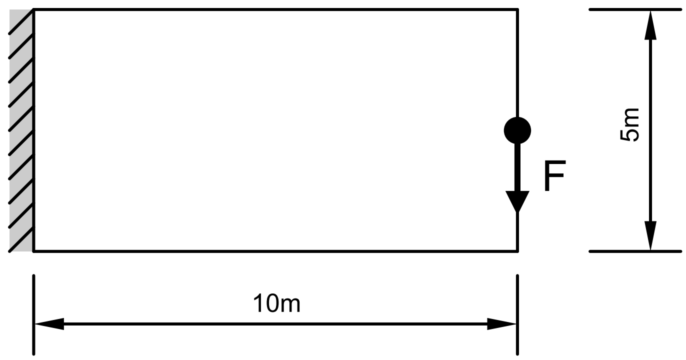
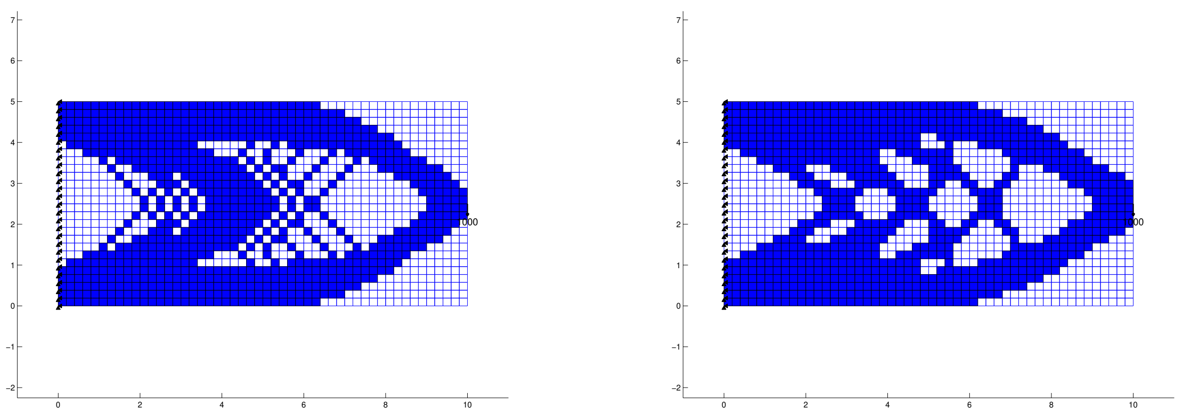


Figura 5.24: Modelo inicial de viga curta engastada.



a) b)

Figura 5.25: Vigas curtas otimizadas pelo método ESO com 60% do volume inicial: a) Com padrões de tabuleiro de xadrez e b) Após a implementação do filtro.

do modelo.

Observa-se que a estrutura foi formada por membros esbeltos após o algoritmo evolucionário. Comparando-se a topologia obtida com resultados de modelos semelhantes apresentados por Chu et al. (1996) para ESO em maximização da rigidez, conclui-se que o resultado obtido pelo programa implementado é coerente. A Figura 54 apresenta os resultados em questão, entretanto, também é válido salientar que o critério de parada adotado por Chu et al. (1996) foi de deslocamento, enquanto neste trabalho trabalhou-se com restrição de volume.

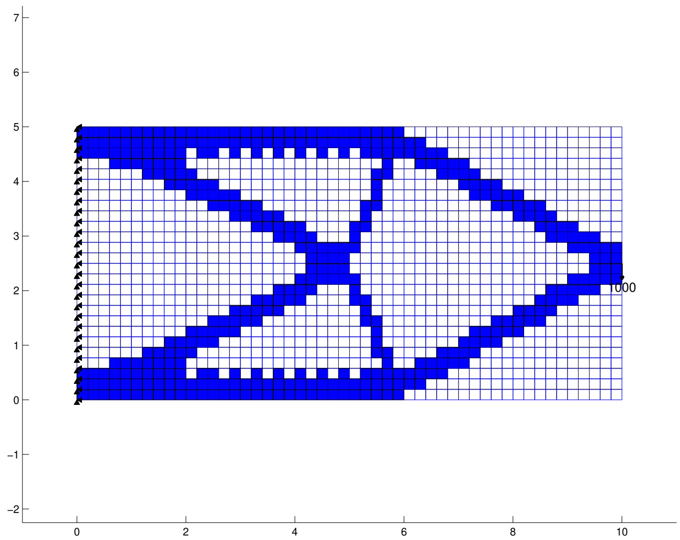


Figura 5.26: Viga curta otimizada pelo método ESO com 30% do volume inicial do modelo.

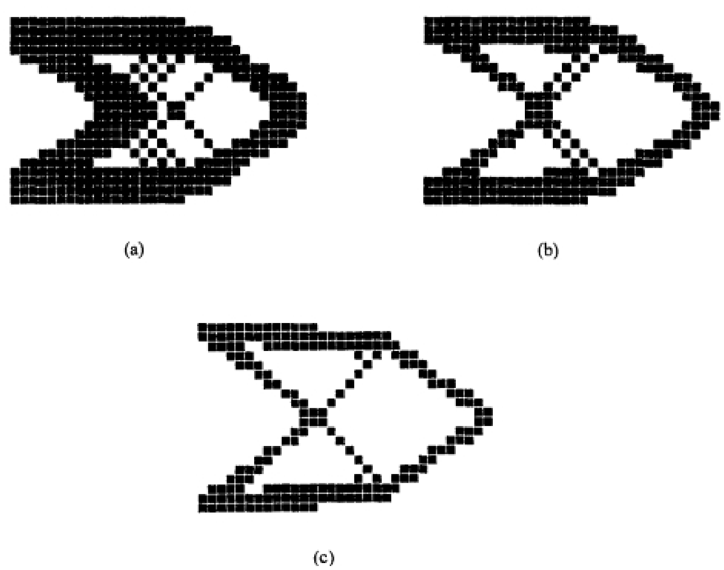


Figura 5.27: Topologias de ESO para otimização da rigidez com vários limites de deslocamento, Chu et al. (1996): (a) $u^* = 0{,}50mm$; (b) $u^* = 0{,}75mm$; (c) $u^* = 1{,}00mm$;.

Da mesma forma que para ESO em nível de tensão, plotou-se um gráfico com o número de sensibilidade (α) da estrutura em uma escala alterada para a melhor observação do mesmo. No caso, o número α é a variação da energia de deformação e cada elemento possui um valor.

A Figura 55 apresenta a distribuição de α ao longo da estrutura com 90% do volume inicial e a Figura 56 para uma estrutura com 30% do volume inicial.

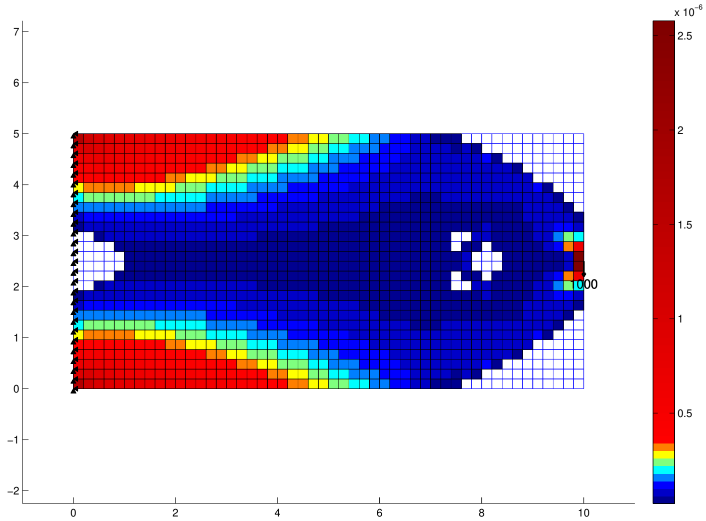


Figura 5.28: Distribuição do número de sensibilidade α ao longo da estrutura com 90% do volume inicial.

Os resultados para esse modelo de viga curta se mostraram coerentes com os resultados publicados na literatura e, portanto, validam o programa implementado.

5.2.2 Viga biapoiada

Uma viga biapoiada foi modelada com domínio inicial de $10m \times 5m$ e com uma malha de 50×25 elementos finitos quadrilaterais, no total de 1250 elementos. Um carregamento pontual de $1000KN$ foi imposto no meio da aresta inferior da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson 0,3 e espessura $0{,}1m$. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,16%, fazendo com que fossem retirados dois elementos por iteração, como no caso anterior. O modelo inicial é apresentado na Figura 57.

Sabe-se que, para este modelo, existe uma solução teórica. A Figura 58 é uma das estruturas de Michell, Michell (1904). Ela representa o resultado ótimo teórico em um modelo de viga biapoiada.

A Figura 60 apresenta o resultado após o método evolucionário ter eliminado 80% do volume inicial. A topologia é coerente com a estrutura teórica de Michell. Isso confirma o

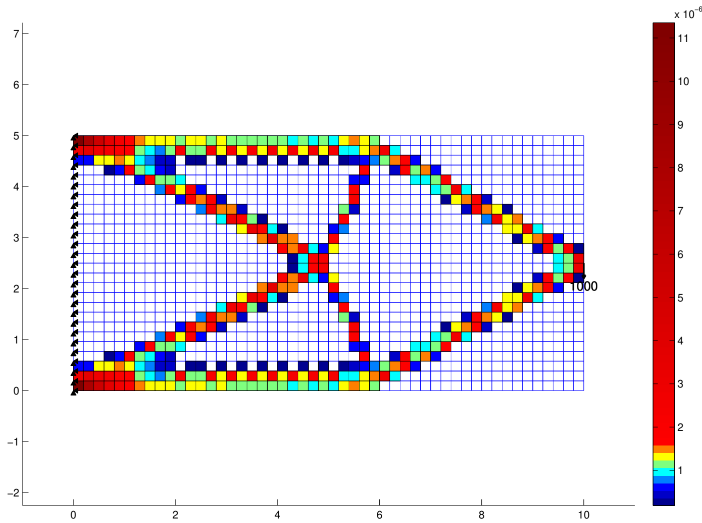


Figura 5.29: Distribuição do número de sensibilidade α ao longo da estrutura com 30% do volume inicial.

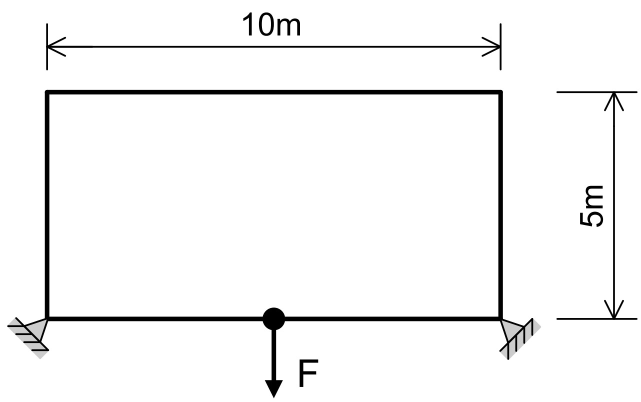


Figura 5.30: Modelo inicial de viga biapoiada.

algoritmo implementado e valida o programa de ESO em critério de rigidez.

Uma variação desse modelo pode ser feita ao se trocar o engaste da direita por um apoio simples, ou seja, liberar o movimento da estrutura (nó do canto inferior direito) na direção horizontal. A Figura 60 apresenta a topologia obtida para esse novo caso, que se torna uma viga simplesmente apoiada.

Observa-se que a diferença dos casos de otimização da viga simplesmente apoiada para

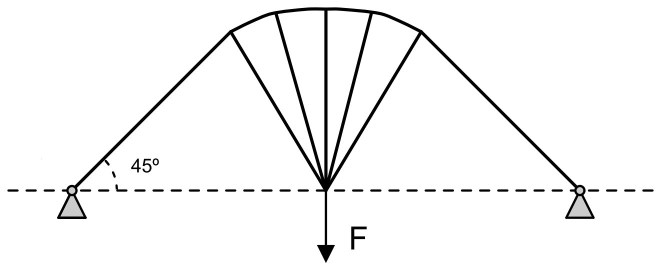


Figura 5.31: Estrutura teórica de Michell.

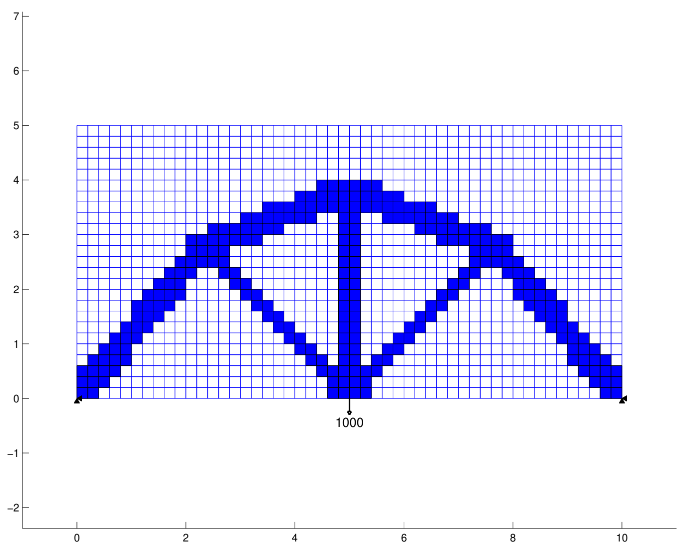


Figura 5.32: Viga biapoiada otimizada pelo método ESO com 20% do volume inicial do modelo.

a viga biapoiada é o surgimento de um novo membro estrutural na parte inferior da estrutura. Este novo membro restringirá o movimento na horizontal, cuja restrição era feita pelo engaste inserido no caso da viga biapoiada.

Os resultados apresentados condizem com a literatura e validam o programa implementado para os métodos ESO em nível de tensão e maximização da rigidez.

5.3 Validação do programa BESO

Com o algoritmo de Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional (BESO), Huang and Xie (2007) alcançaram soluções convergentes e independentes da malha para critério

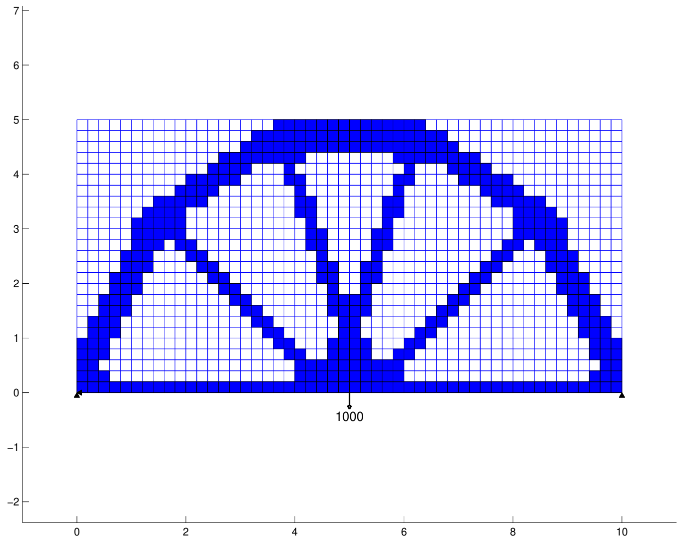


Figura 5.33: Viga simplesmente apoiada otimizada pelo método ESO com 30% do volume inicial do modelo.

de rigidez. Esta seção apresenta os resultados de validação do programa para este método, implementado neste trabalho.

Os exemplos a seguir têm por finalidade a comparação dos resultados obtidos com as soluções apresentadas por Huang and Xie (2007).

5.3.1 Viga engastada livre

A otimização topológica de uma viga engastada livre com uma carga concentrada no centro de sua aresta direita foi considerada conforme o modelo apresentado na Figura 61.

O modelo foi construído inicialmente com um domínio de $80mm \times 50mm$ e $1mm$ de espessura com a carga imposta de $100N$. O módulo de elasticidade do material foi $100GPa$ e o coeficiente de Poisson 0,3. O volume final de material disponível é de 50%. Para o método BESO partindo de uma solução inicial completa, o domínio inicial foi modelado com duas malhas diferentes, sendo elas 80×50 e 160×100 elementos quadrilaterais. Os parâmetros BESO utilizados foram $AR_{max} = 5\%$, $\tau = 0{,}01\%$, $r_{min} = 3mm$ e $ER = 1\%$. As soluções obtidas são apresentadas na Figura 62.

As topologias obtidas são as mesmas para as duas malhas, ou seja, as soluções se mostraram independentes da malha. Huang and Xie (2007) afirmam que essa independência

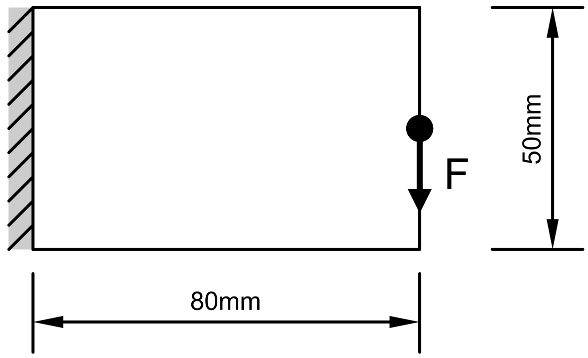
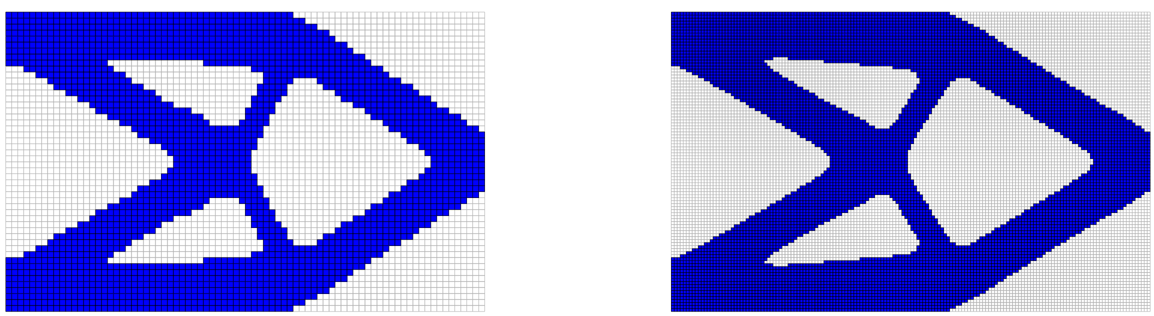


Figura 5.34: Modelo inicial de viga biengastada.



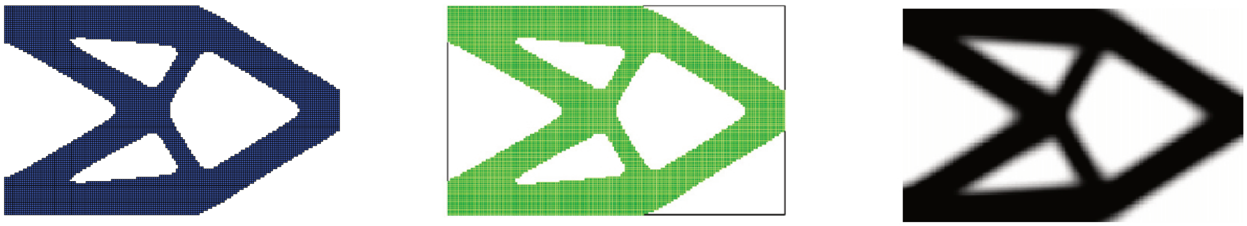
a) b)

Figura 5.35: Estruturas otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha: a) 80×50; b) 160×100.

da malha é obtida através da aplicação do filtro proposto pelos autores. A Figura 63 apresenta a comparação entre a topologia obtida neste trabalho e as topologias apresentadas em Huang and Xie (2007).

É observado que as soluções apresentadas na Figura 63 são muito semelhantes entre si, o que valida o resultado obtido com o programa implementado. O gráfico da convergência deste caso é apresentado na Figura 64.

Este exemplo foi gerado a partir do domínio inicial completo. O método ainda permite que o algoritmo seja rodado a partir de uma solução inicial com uma certa fração do volume



a) b) c)

Figura 5.36: Estruturas otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha 160×100: a) Programa BESO implementado neste trabalho; b) Topologia pelo método BESO apresentada em Huang and Xie (2007); c) Topologia pelo método SIMP apresentada em Huang and Xie (2007).

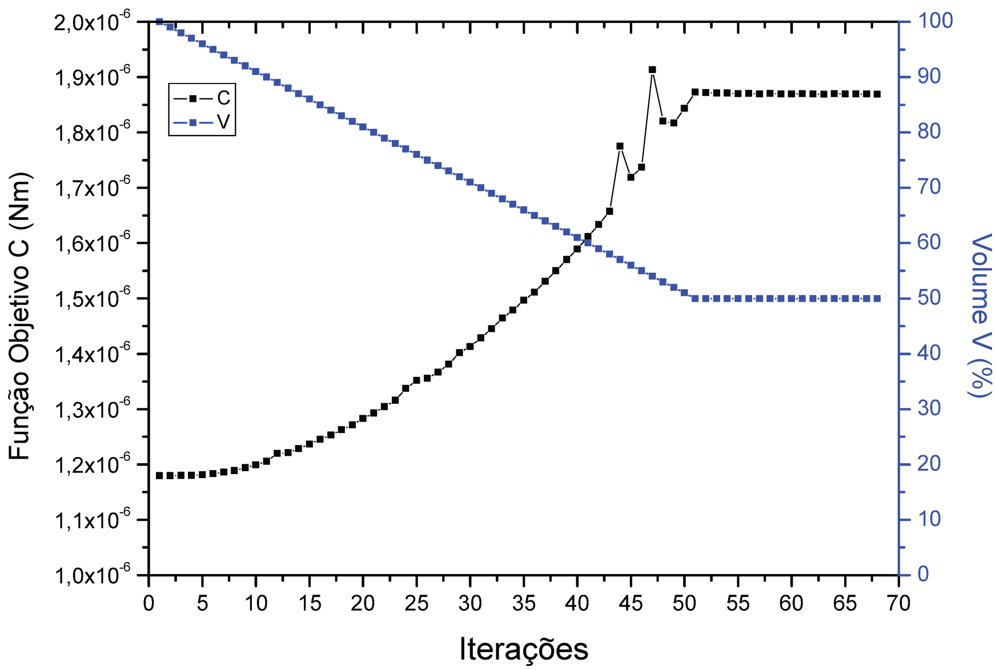


Figura 5.37: Histórico da evolução do algoritmo para viga engastada livre com 50% do volume inicial em uma malha de 160 × 100 elementos finitos.

total do domínio. Para o método BESO a partir de uma solução inicial, o mesmo exemplo foi avaliado para malha de 80×50 elementos. A Figura 65 apresenta a evolução do algoritmo através de resultados intermediários a partir da solução inicial adotada, enquanto a Figura

66 apresenta a solução final obtida.

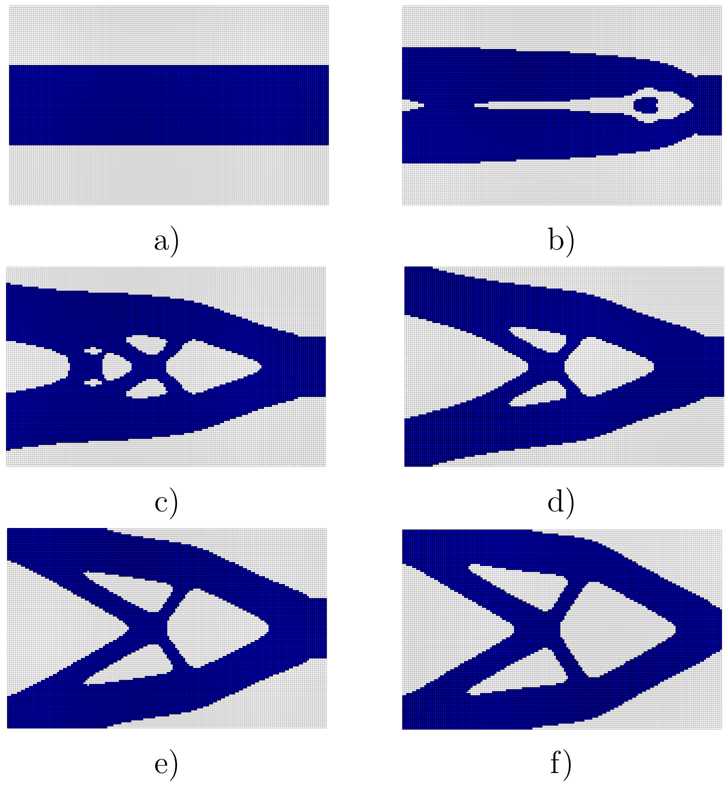


Figura 5.38: Resultados intermediários do algoritmo: a) Solução inicial; b) Iteração 5; c) Iteração 10; d) Iteração 15; e) Iteração 30; f) Iteração 50.

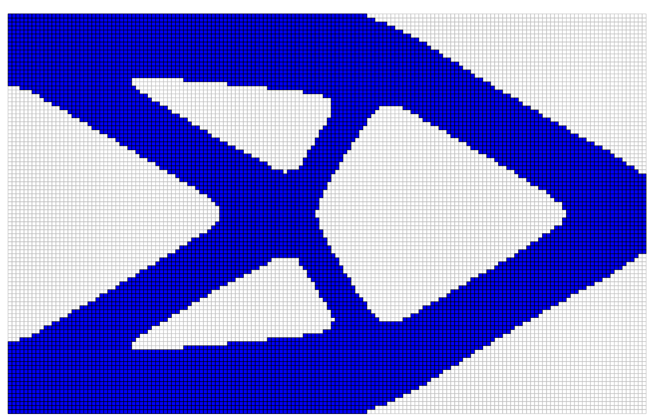


Figura 5.39: Topologia final obtida para o caso de engastada livre a partir de uma solução inicial.

O histórico da evolução e convergência do método a partir de uma solução inicial da Figura 65a é apresentado na Figura 67. Este histórico conta com uma instabilidade da função

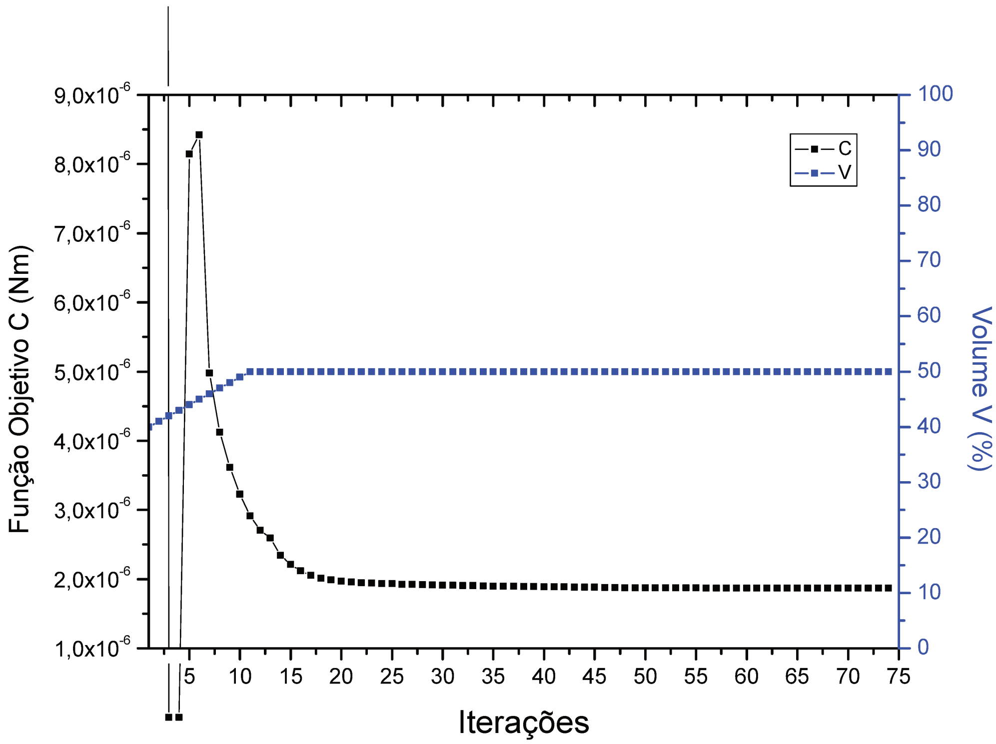


Figura 5.40: Histórico da evolução do algoritmo para viga engastada livre com 50% do volume total a partir de uma solução inicial em uma malha de 160×100 elementos finitos.

objetivo para as primeiras iterações causada pelas singularidades na solução por elementos finitos das estruturas não contínuas semelhantes à apresentada na Figura 65b, em que há um elemento estrutural não conectado ao restante da estrutura. Essa instabilidade é comum para tais topologias, Huang and Xie (2007). A topologia final obtida para este caso foi semelhante à aquela obtida a partir do domínio completo. Huang and Xie (2007) afirmam que o método BESO com avaliação do domínio completo inicial evolui para uma solução ótima, enquanto que, a partir de uma solução inicial proposta, o algoritmo pode alcançar ótimos locais como solução final. Como alternativa para redução do trabalho computacional, o método a partir de uma solução inicial pode ser empregado. Entretanto, para a busca da solução ótima, o domínio completo deve ser utilizado na primeira análise de elementos finitos, pois assim todos os elementos seriam avaliados ao mínimo uma vez durante o método.

5.3.2 Viga MBB

Um domínio inicial de $240mm \times 40mm$ e espessura $1mm$ foi considerado para otimização topológica. Este caso se caracteriza como o caso clássico de otimização conhecido como viga MBB. Esse modelo é apresentado na Figura 68.

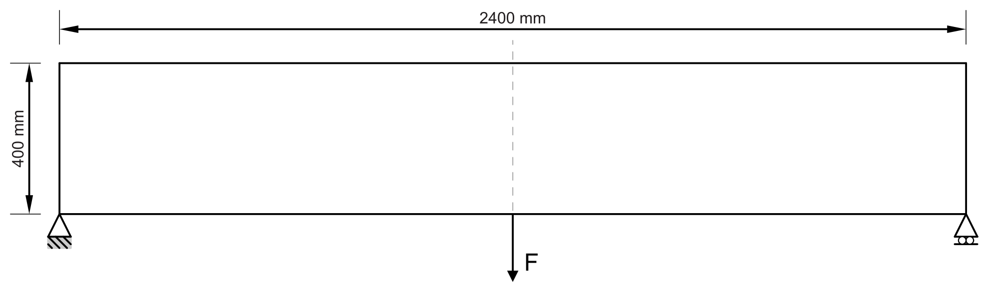
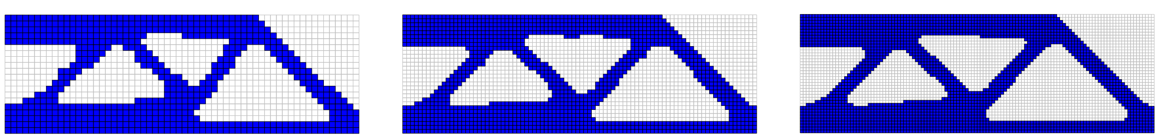


Figura 5.41: Modelo de viga MBB.

Devido a simetria do modelo, apenas a metade direita da estrutura foi analisada, sendo esta modelada com 60×20, 90×30 e 120×40 elementos quadrilaterais. O módulo de elasticidade do material utilizado foi de $200GPa$ e o coeficiente de Poisson foi adotado como 0,3, enquanto o volume final de material permitido foi de 50%. Os parâmetros BESO utilizados foram $AR_{max} = 5\%$, $\tau = 0{,}01\%$, $r_{min} = 6mm$ e $ER = 1\%$. A Figura 69 apresenta as topologias obtidas para as três malhas analisadas.

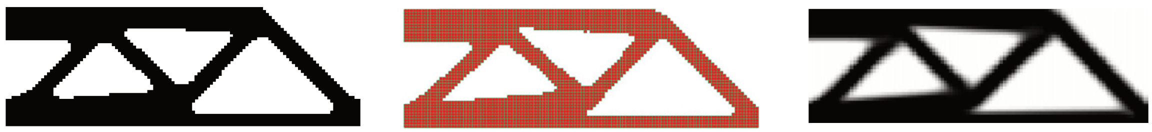


a) b) c)

Figura 5.42: Vigas MBB otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malhas: a) 60×20; b) 90×30; c) 120×40.

A Figura 70 apresenta a comparação de soluções, com os resultados apresentados por Huang and Xie (2007). É observado que as topologias apresentadas são semelhantes entre si, o que confirma a aplicação do programa implementado. O histórico da evolução do algoritmo para este caso é apresentado na Figura 71

Após a realização dos testes de validação dos métodos ESO e BESO, pode-se aplicá-los em associação com o esquema de malhas hexagonais, conforme será mostrado no próximo capítulo.



a) b) c)

Figura 5.43: Vigas MBB otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha 120×40: a) Programa BESO implementado neste trabalho; b) Topologia pelo método BESO apresentada em Huang and Xie (2007); c) Topologia pelo método SIMP apresentada em Huang and Xie (2007).

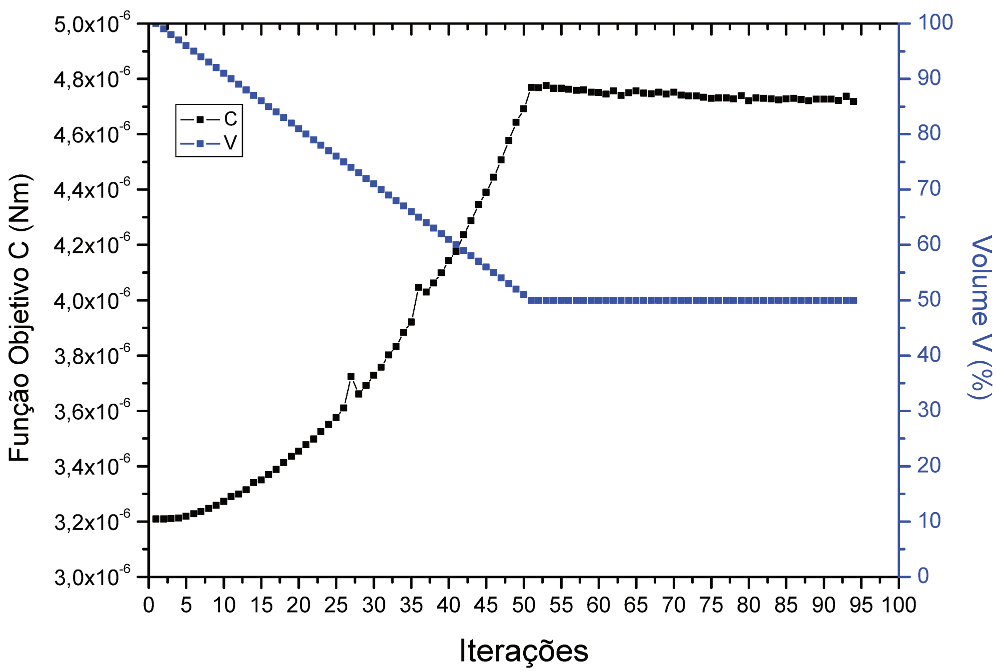


Figura 5.44: Histórico da evolução do algoritmo para viga mbb com 50% do volume inicial em uma malha de 120×40 elementos finitos.

Capítulo 6

Resultados e Aplicações com Malhas Hexagonais

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos com o uso de malhas hexagonais nos métodos ESO e BESO. Primeiramente, analisa-se a influência dos blocos hexagonais na evolução do algoritmo ao se eliminar o problema de tabuleiro de xadrez. Análises de dependência da malha, estudo da influência da razão de aspecto dos elementos e análise do custo computacional são apresentados, assim como aplicações do método. Prosseguindo, o critério de nível de tensão em otimização evolucionária topológica e de forma é discutido. Por fim, uma análise preliminar do método BESO com o uso de malhas hexagonais é apresentado.

6.1 ESO Hex para maximização da rigidez

6.1.1 Eliminação do tabuleiro de xadrez

Uma viga curta engastada livre com razão de aspecto $2H \times H$ foi otimizada pelo método ESO sob critério de rigidez com restrição de volume. O coeficiente de Poisson do material é tomado como $\nu = 0{,}3$ e o módulo de elasticidade $E = 100GPa$. A Figura 72 apresenta o modelo inicial de dimensões $10m \times 5m$ com espessura unitária.

O domínio foi discretizado com 53×26 blocos hexagonais e também com 53×52 quadriláteros, cujas malhas foram adotadas como equivalentes, considerando que nesta abordagem o hexágono é formado por dois elementos quadrilaterais em sua direção vertical. Assim, as malhas escolhidas como equivalentes possuem o mesmo número total de elementos no domínio inicial. O objetivo aqui é projetar a estrutura mais rígida possível ao minimizar a energia

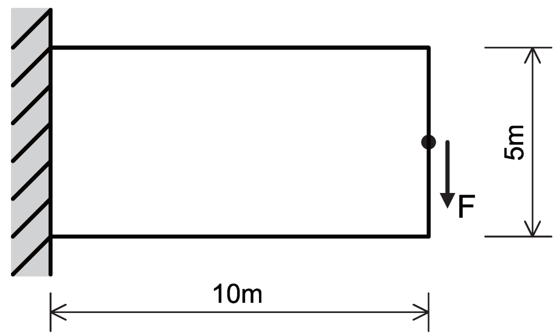


Figura 6.1: Modelo de viga engastada livre.

de deformação com 50% de material do modelo inicial. A Figura 73 apresenta a evolução da otimização da viga curta pelo método ESO com elementos quadrilaterais e a Figura 74 apresenta a mesma otimização com abordagem de malha hexagonal. Ambos os gráficos mostram a fração de volume e a energia de deformação calculada em cada iteração. É possível notar que a fração de volume decresce linearmente durante a evolução do método, enquanto a energia de deformação cresce com a remoção dos elementos, o que é compatível com a idéia do ESO.

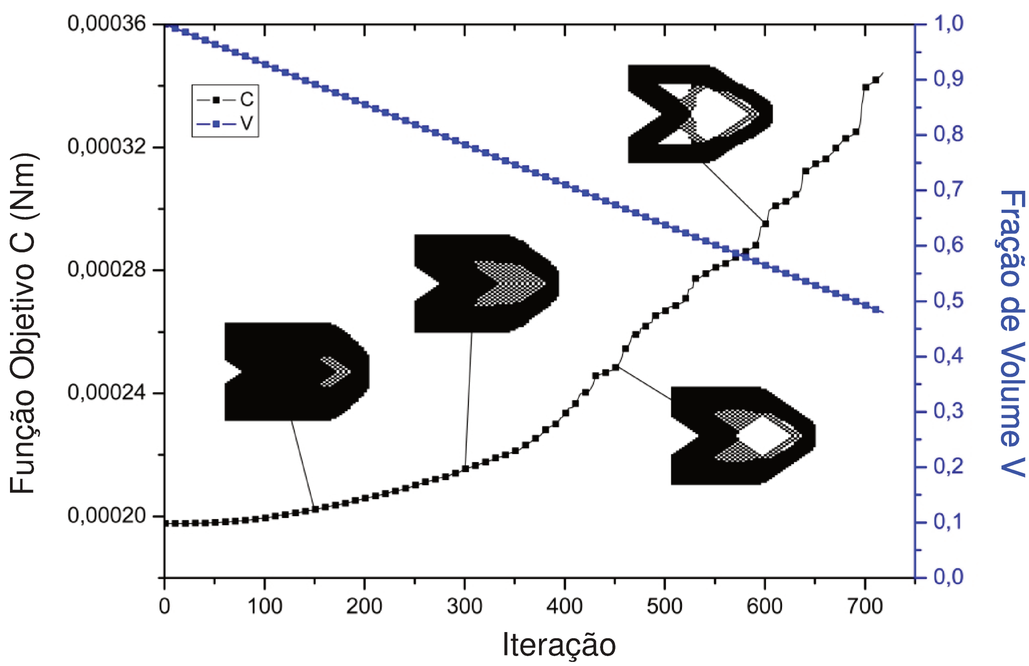


Figura 6.2: Histórico evolucionário da energia de deformação média, fração de volume e topologia com malha quadrilateral.

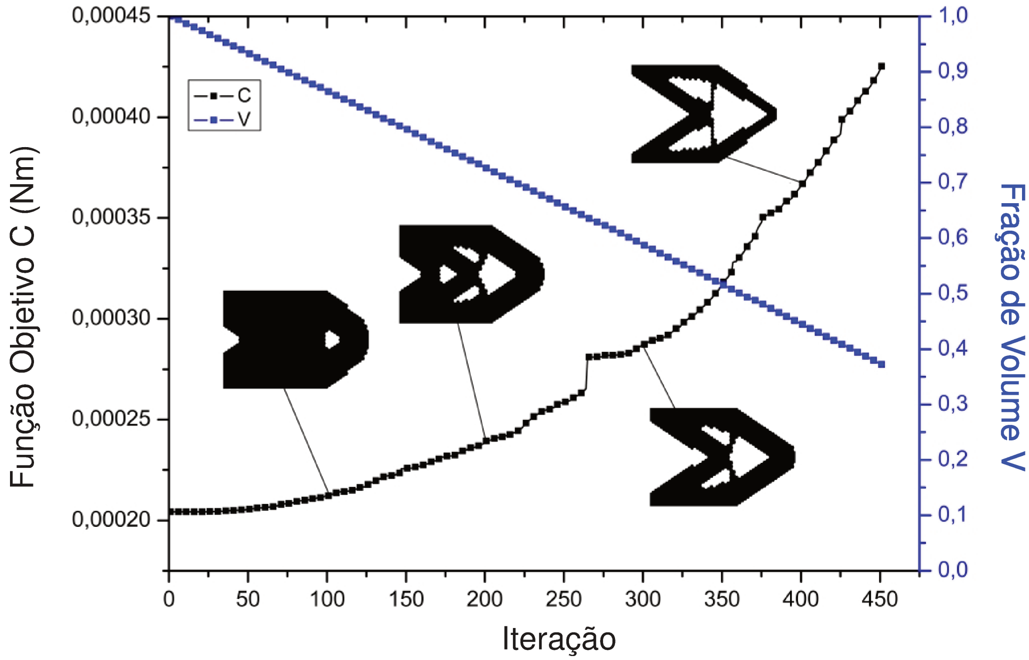


Figura 6.3: Histórico evolucionário da energia de deformação média, fração de volume e topologia com malha hexagonal.

Os gráficos também apresentam o histórico evolucionário da topologia da estrutura. É possível observar a formação do tabuleiro de xadrez na malha quadrilateral, enquanto a malha hexagonal evita a formação desses padrões. A explicação para o porque da evolução levar tantas iterações é a de que apenas dois elementos foram removidos por iteração, a fim de garantir uma certa simetria inicial. Considerando isso, deve ser apontado o fato de que a retirada de dois blocos hexagonais equivale a retirada de quatro elementos quadrilaterais, o que leva a redução de cerca de metade das iterações necessárias na evolução do algoritmo com malha hexagonal. Adicionalmente, outro resultado importante é que para redução de 50% do volume da estrutura, a energia de deformação C é a mesma para ambos os casos, mesmo com a redução do número de iterações necessárias no algoritmo com a malha hexagonal. A Figura 75 apresenta as topologias obtidas para redução de 50% do volume do domínio inicial para comparação da otimização de ambas as malhas com melhor visualização.

Na Figura 75, a topologia com malha quadrilateral contém padrões de tabuleiro de xadrez enquanto que na malha hexagonal tais padrões não são observados e nem possuem chance de serem formados. As arestas dos blocos hexagonais suavizaram o contorno da topologia final e conexões por apenas um nó foram banidas da solução. Filtros ou elementos especiais não foram utilizados e, assim, a solução livre de tabuleiro de xadrez é atribuída à

A

B

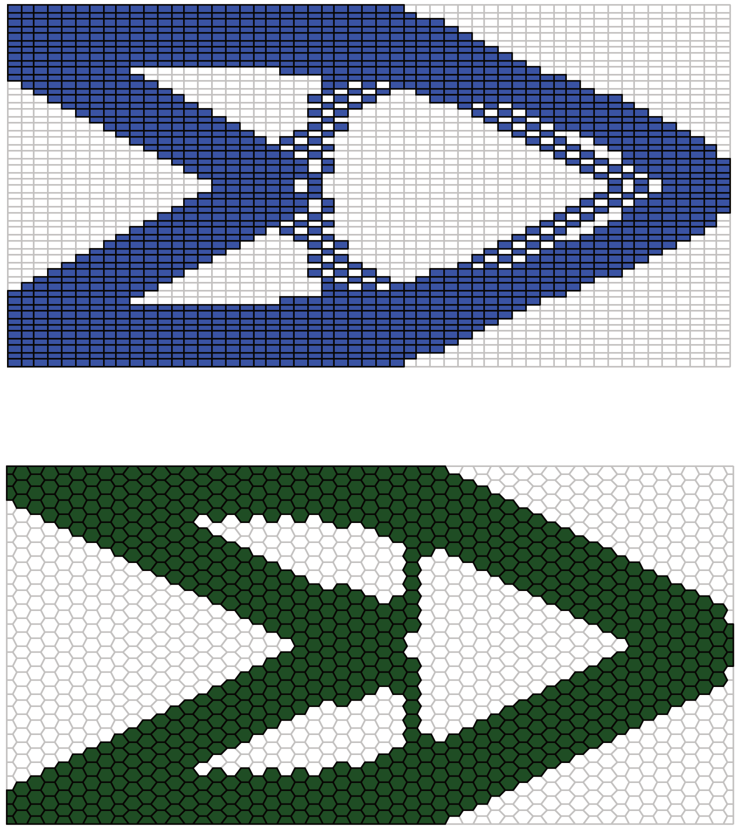


Figura 6.4: Vigas engastadas otimizadas por ESO com critério de rigidez e 50% do volume do domínio inicial. A) Malha quadrilateral. B) Malha hexagonal.

geometria dos blocos hexagonais, o que confirma a sua utilização.

6.1.2 Dependência da malha

Uma vez comprovado o fato de que a malha hexagonal atinge soluções livres de tabuleiro de xadrez com o método ESO, mais análises foram realizadas para o mesmo caso de viga curta da seção anterior. Desta vez, malhas de tamanhos diferentes foram utilizadas, a fim de se verificar a dependência da malha nesta nova abordagem. É mostrado que o método ESO com malhas hexagonais é dependente da malha, assim como ESO com malhas quadrilaterais, considerando que o método é baseado em análises por elementos finitos e técnicas extras (filtros para independência da malha, controle de perímetro e etc.) não são utilizadas neste trabalho para o método ESO. A dependência da malha do método ESO com blocos hexagonais é apresentada na linha A da Figura 76.

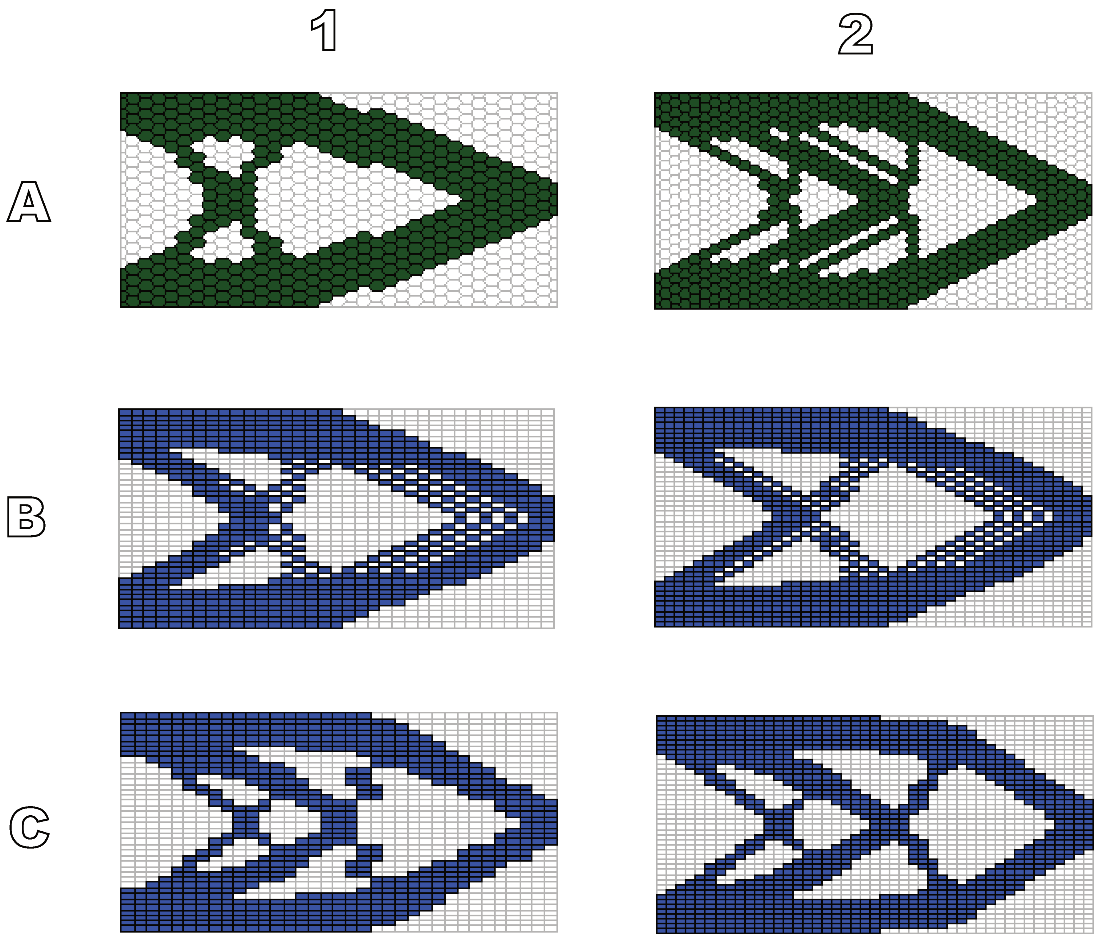


Figura 6.5: Vigas engastadas otimizadas com ESO em critério de rigidez com 50% do volume do modelo inicial e comparações entre malhas. A) Malha hexagonal. B) Malha quadrilateral. C) Malha quadrilateral com o filtro de supressão de Tabuleiro de Xadrez de Li and Steven (2001). 1) 35×30 blocos hexagonais e 35×40 quadriláteros. 2) 45×22 blocos hexagonais e 45×44 quadriláteros

As otimizações foram realizadas com os mesmos parâmetros e propriedades da viga engastada da seção anterior, exceto suas malhas. A Figura 76 apresenta a comparação entre malhas hexagonais 35×20 e 45×22 e suas malhas quadrilaterais equivalentes 35×40 e 45×44, respectivamente. Essas análises foram realizadas como: ESO clássico para malha hexagonal (A), ESO clássico para malha quadrilateral (B) e ESO com filtro de tabuleiro de xadrez para malha quadrilateral (C). É observado que na otimização com blocos hexagonais a dependência da malha existe, assim como em ESO com malhas quadrilaterais. A linha B mostra a dependência da malha para malhas quadrilaterais sem filtros extras enquanto a linha C apresenta a mesma análise com o filtro de Li and Steven (2001) para supressão do tabuleiro de xadrez. É válido observar a eficácia do filtro implementado. Entretanto, mesmo que o tabuleiro de xadrez seja eliminado com o uso do filtro, conexões por apenas um nó ainda são obtidas na topologia final com malha quadrilateral, o que representa outra vantagem na utilização de malhas hexagonais, uma vez que, neste tipo de malha, tais conexões não existem. Assim, é confirmado que a otimização estrutural evolucionária com malha hexagonal é uma alternativa viável para o método tradicional, mesmo que a dependência da malha ainda exista.

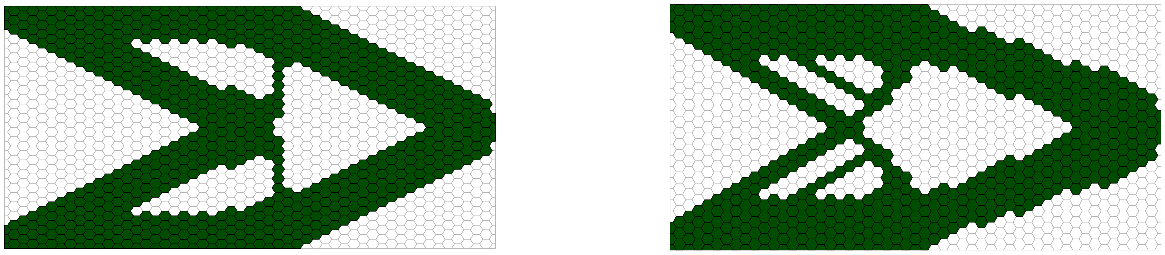
6.1.3 Razão de aspecto dos blocos nas malhas hexagonais

Salienta-se que a dependência da malha, explicitada anteriormente para a abordagem hexagonal, é acentuada. As soluções obtidas com malhas quadrilaterais diferentes, com pouco refinamento, foram mais semelhantes entre si do que as topologias obtidas com as malhas hexagonais. Isso leva ao questionamento de quão diferentes são os caminhos que as soluções percorrem entre as otimizações com malhas quadrilaterais e hexagonais. Entretanto, não é utilizado nenhum critério de otimalidade no presente uso do método ESO. Assim, não é possível (nem se pretende) afirmar que o algoritmo implementado leva ao mínimo do problema, de forma semelhante ao concluído por Labanowski (2004). O interesse aqui é a obtenção de topologias viáveis com a abordagem hexagonal.

A diferença acentuada entre as soluções obtidas com as malhas hexagonais pode ser explicada como uma alta sensibilidade da razão de aspecto dos blocos hexagonais e da disposição desses blocos entre si. Pode-se supor que, quanto mais próximo o bloco esteja de ser um hexágono perfeito, melhor seja a solução obtida. As topologias obtidas com malha hexagonal até então foram obtidas com malhas geradas de forma arbitrária. Para se comparar a diferença entre essas soluções e possíveis soluções em malhas com blocos hexagonais perfeitos, gerou-se novamente o mesmo caso de viga curta da seção anterior, desta vez com gerador de malha com proporção de hexágono regular (gerador PRO), apresentado no item b) da Figura 77. Até então, o gerador utilizado foi o H6/Q4 com preenchimento de apenas elementos quadrilaterais, com escolha arbitrária do número de blocos na horizontal e vertical.

Observa-se que a topologia obtida com o gerador PRO foi significativamente diferente da obtida com a malha arbitrária. Mais membros estruturais surgiram na nova topologia. O contorno da topologia obtida com a malha arbitrária foi mais bem definido, assim como as suas cavidades. A princípio, a primeira solução pode ser mais facilmente manufaturada do que a segunda e, assim, cabe ao analista a escolha e interpretação dos resultados obtidos.

Conclui-se assim que, a malha e a razão de aspecto dos blocos hexagonais influem na



a) b)

Figura 6.6: Vigas curtas otimizadas pelo método ESO com 50% do volume inicial: a) Malha 53×26 gerada de forma arbitrária e b) Malha 53×22 obtida com gerador com proporção de hexágono regular.

topologia obtida pelo método ESO com abordagem hexagonal. A modificação dos parâmetros da malha pode levar a resultados diferentes com poucas alterações no número e proporção dos blocos hexagonais. Além do mais, utilizar blocos de hexágonos regulares não garante a obtenção de uma topologia melhor.

6.1.4 Custo computacional

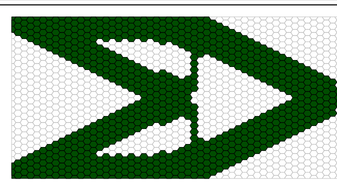
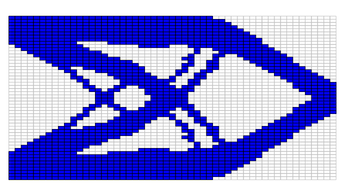
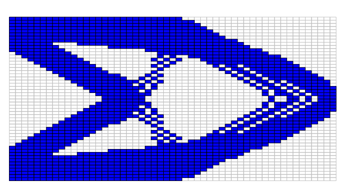
Uma das vantagens do uso de malhas hexagonais é a ausência de filtros no algoritmo de otimização. Para a avaliação do custo computacional de algoritmos com e sem filtro e da aplicação de malhas hexagonais, o mesmo modelo de estrutura engastada livre da seção anterior, apresentado na Figura 72, foi utilizado. Foram fixados o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a espessura da chapa para análises dos algoritmos com malha hexagonal, quadrilateral com filtro e quadrilateral sem filtro. A Tabela 3 apresenta os parâmetros físicos do modelo.

Tabela 6.1: Parâmetros físicos do modelo para a análise de custo computacional.

Parâmetro	Descrição	Valor
L	Largura do domínio	10m
H	Altura do domínio	5m
E	Módulo de elasticidade	100GPa
ν	Coeficiente de Poisson	0,3
t	Espessura da estrutura	0,1m
ER	Razão de evolução	0,1%
V_f	Volume final	50%

O volume final da estrutura para todas as análises foi de 50% do inicial. As malhas adotadas foram de 53 × 26 blocos hexagonais e as suas equivalentes de 53x52 elementos quadrilaterais. O índice de evolução ER para retirada de material foi considerado como 0,1% do número inicial de elementos, o que implica em uma retirada de quatro elementos quadrilaterais por iteração. A Tabela 4 apresenta os resultados da análise computacional realizada para os casos de malha hexagonal, e malha quadrilateral com filtro e sem filtro, em que nel é o número de elementos total da malha, I é o número de iterações utilizado e C é o valor da função objetivo (energia de deformação) da estrutura final. O tempo é apresentado com relação ao tempo de processamento do algoritmo com o uso de malha hexagonal.

Tabela 6.2: Custo computacional comparativo entre malhas hexagonal e quadrilateral.

Análise	Topologia	nel	Tempo	I	$C(Nm)$
Hexagonal		2756	1	360	0,0878
Quad com filtro		2756	1,014	345	0,0812
Quad sem filtro		2756	1,015	345	0,0823

O número de elementos para todas as análises foi o mesmo. O tempo relativo de processamento foi menor para o algoritmo com malha hexagonal. Entretanto, a variação do tempo para os outros casos foi desprezível, sendo esta de 1,4% para a malha quadrilateral com filtro e 1,5% para a malha quadrilateral sem filtro. Essa variação desprezível do tempo pode ser creditada à análise de elementos finitos, que se apresentou muito mais custosa computacionalmente do que as outras ferramentas utilizadas nos algoritmos, incluindo os filtros. Observa-se também que os tempos relativos de processamento para os algoritmos de malha quadrilateral com e sem filtro foram praticamente os mesmos, contando apenas com uma ínfima variação entre eles. Esse dado indica a idéia de que o custo computacional do filtro é baixo, comparado ao da análise de elementos finitos, sendo esta comum à todas as análises. Mesmo que se possa otimizar a análise de elementos finitos implementada, conclui-se que, a princípio, o uso de malha hexagonal, na implementação efetuada, não reduz significativamente o custo computacional com relação ao uso de filtros.

Na Tabela 4, observa-se ainda que foram necessárias mais iterações com malha hexagonal. Isto se deve ao fato de que neste tipo de malha, há o complemento dos limites do domínio com elementos quadrilaterais e, quando estes são retirados, menos elementos são eliminados por iteração, uma vez que quando o bloco hexagonal é retirado, dois elementos quadrilaterais são eliminados por bloco. Ainda assim, o tempo de processamento foi próximo para todas as análises. É válido ressaltar também que a função objetivo (energia de deformação), calculada pela soma de todos os números de sensibilidade da estrutura, foi obtida na estrutura final com valores próximos entre os três casos analisados. A variação desse valor para o caso de malha hexagonal foi de 8% para mais, com relação ao uso de malha quadrilateral com filtro.

Em suma, tendo em vista a implementação realizada, e os exemplos processados, não é possível comprovar uma significativa diferença entre as versões do método ESO implementadas.

6.2 ESO Hexagonal para critério de rigidez

Esta seção tem como objetivo apresentar aplicações do método ESO com malha hexagonal sob critério de rigidez. Dois exemplos serão discutidos, um suporte do tipo mão-francesa e uma viga biapoiada sob flexão.

6.2.1 Mão-francesa

Uma estrutura de domínio inicial $1m \times 1m$ e espessura $0{,}05m$ foi discretizada com 35×28 blocos hexagonais em uma configuração de suporte conhecida como "Mão-francesa". Essa malha foi gerada utilizando o gerador PRO, de proporção regular de hexágonos. Um carregamento pontual de $1000N$ foi imposto no canto superior direito da estrutura. O módulo de elasticidade adotado foi de $100GPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$. A estrutura possui dois engastes de $0{,}06m$ de comprimento nos cantos do limite lateral esquerdo do domínio, conforme apresentado na Figura 78.

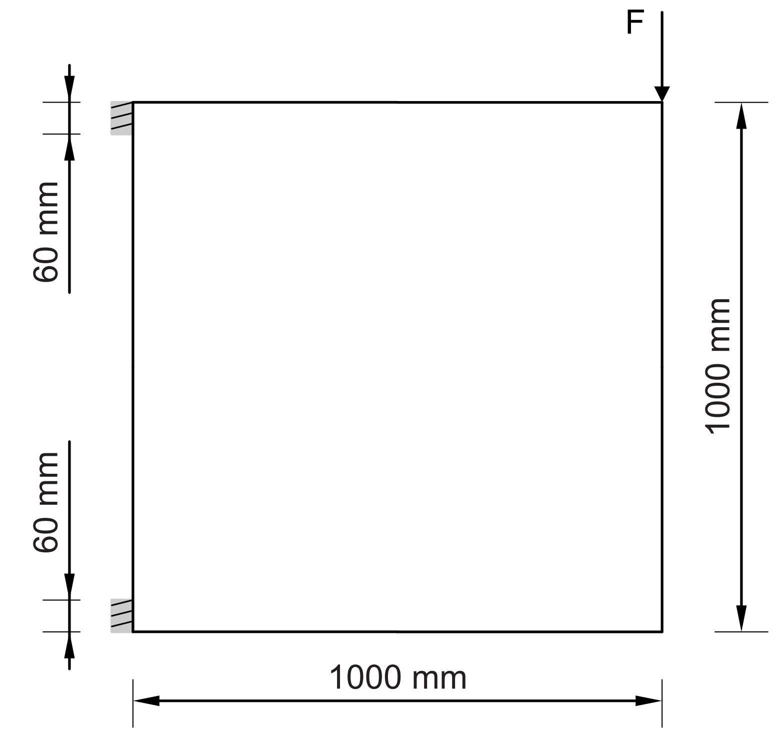


Figura 6.7: Modelo inicial do suporte mão-francesa.

A razão de evolução de rejeição ER do método ESO adotada neste caso foi de 0,2% e o volume desejado para a estrutura final foi de 35% do domínio inicial. Na Figura 79, a topologia obtida é comparada com os resultados apresentados em Labanowski (2004) para o método ESO tradicional e em Simonetti (2009) para uma suavização do método ESO proposta sob critério de tensão.

Observa-se que as três topologias apresentadas na Figura 79 têm seus membros estruturais com inclinações semelhantes entre si. Isso mostra que a solução está convergindo para

(a) (b) (c)

Figura 6.8: Suportes tipo Mão-francesa otimizados com restrição de 35% de volume pelos métodos: a) ESO com malha hexagonal; b) ESO tradicional em critério de rigidez, Labanowski (2004); c) ESO suavizado em critério de tensão, Simonetti (2009).

mínimos locais próximos. As malhas utilizadas nos casos b) e c) possuem 23014 e 6400 elementos triangulares, respectivamente. A malha hexagonal utilizada no caso a) é formada por apenas 1960 elementos quadrilaterais montando blocos hexagonais. Não obstante, a topologia obtida com a malha hexagonal apresentou contornos tão suaves ou até mais definidos do que os outros casos com malhas muito mais refinadas. É válido observar que uma pequena linha de blocos hexagonais ainda estavam sendo eliminadas da estrutura quando o algoritmo atingiu o limite de 35% de restrição de material. Continuando a evolução do algoritmo, ao se atingir 34% do volume inicial, essa pequena linha de material é eliminada e o membro estrutural atinge uma forma com melhor definição de sua inclinação. Essa topologia é apresentada na Figura 80.

É válido ressaltar que a ótima definição da direção de alguns membros da estrutura se deve as propriedades geométricas da malha hexagonal, cujas linhas de simetria possibilitaram a criação dos membros estruturais com linhas inteiras de blocos hexagonais. Concluindo, neste caso, o uso de malha hexagonal se mostrou extremamente viável, pois apresentou contorno suave e boa definição dos membros estruturais da topologia final com poucos elementos na malha. Além disso, os padrões com conexões por apenas um nó foram eliminados sem a necessidade de uso de filtros. Ao se prolongar a evolução do algoritmo até que o volume de material final seja de 20% do inicial, a estrutura apresenta a mesma topologia, sendo que seus membros estruturais se tornaram mais esbeltos. A topologia com essa fração de volume é apresentada na Figura 81.

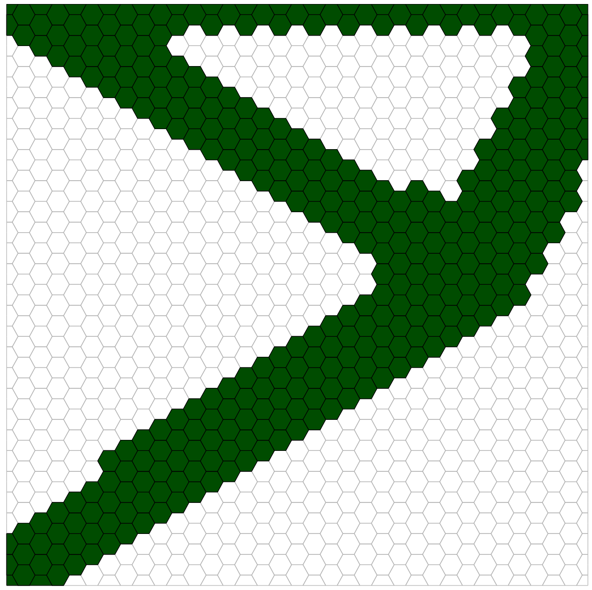


Figura 6.9: Suporte tipo “Mão-francesa” otimizado com método ESO e malha hexagonal 35×28 em critério de rigidez e restrição de 34% de volume.

6.2.2 Viga biapoiada sob flexão

Uma viga apoiada está sujeita a uma carga pontual e central de $1000N$ no limite inferior de seu domínio inicial. Esse domínio é de $1{,}6m \times 0{,}4m$ e $0{,}1m$ de espessura e foi discretizado com 109×23 blocos hexagonais utilizando o gerador PRO. Os seus apoios se encontram nos cantos inferiores da estrutura. O módulo de elasticidade adotado foi de $100GPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$. O modelo inicial é apresentado na Figura 82.

A razão de evolução de rejeição ER do método ESO adotada neste caso foi de 0,16% e o volume desejado para a estrutura final foi de 25% do domínio inicial. A topologia obtida é apresentada na Figura 83(a). Observa-se nessa topologia, uma maior esbeltez na região que se conecta com o apoio. Analisando as próximas iterações, conclui-se que o algoritmo começava a retirar elementos desse membro estrutural, o que reduziria a sua espessura. Isso é comprovado com a topologia da Figura 83(b), obtida algumas poucas iterações além, para volume final igual a 23,6% do inicial.

Se, hipoteticamente, a disponibilidade de material fosse um pouco maior, verifica-se que nas iterações anteriores o algoritmo ainda não começava a retirar elementos para reduzir a

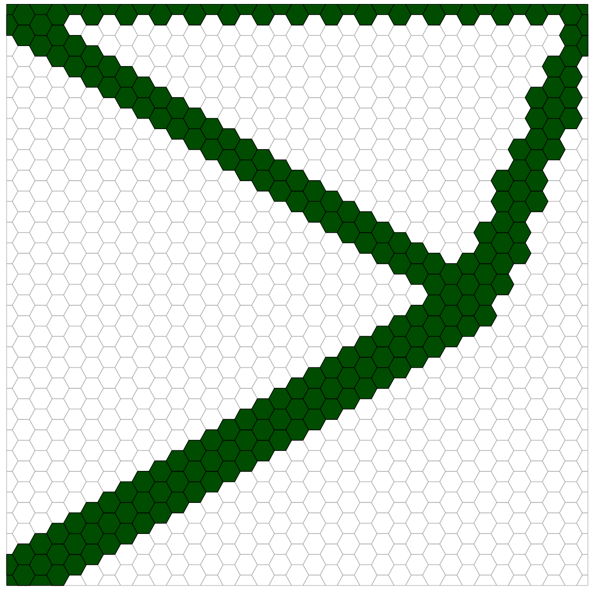


Figura 6.10: Suporte tipo “Mão-francesa” otimizado com método ESO e malha hexagonal 35×28 em critério de rigidez e restrição de 20% de volume.

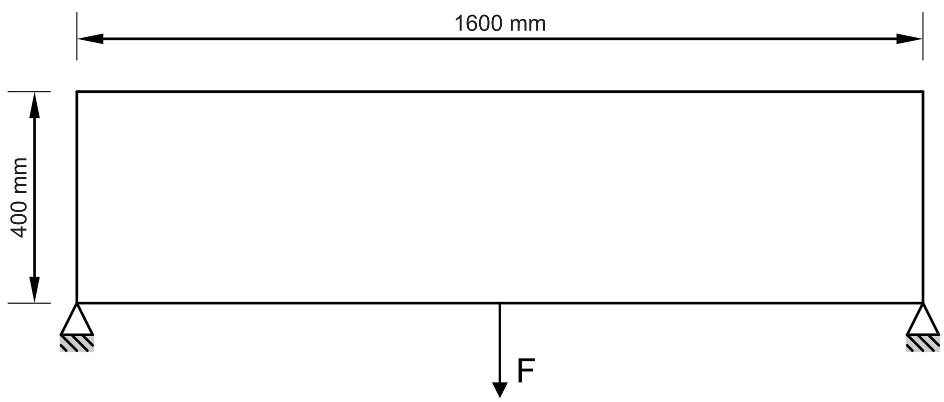
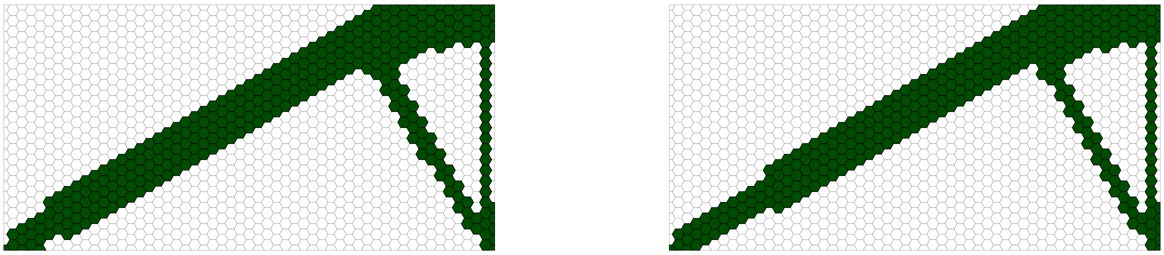


Figura 6.11: Modelo inicial da viga biapoiada sob flexão.

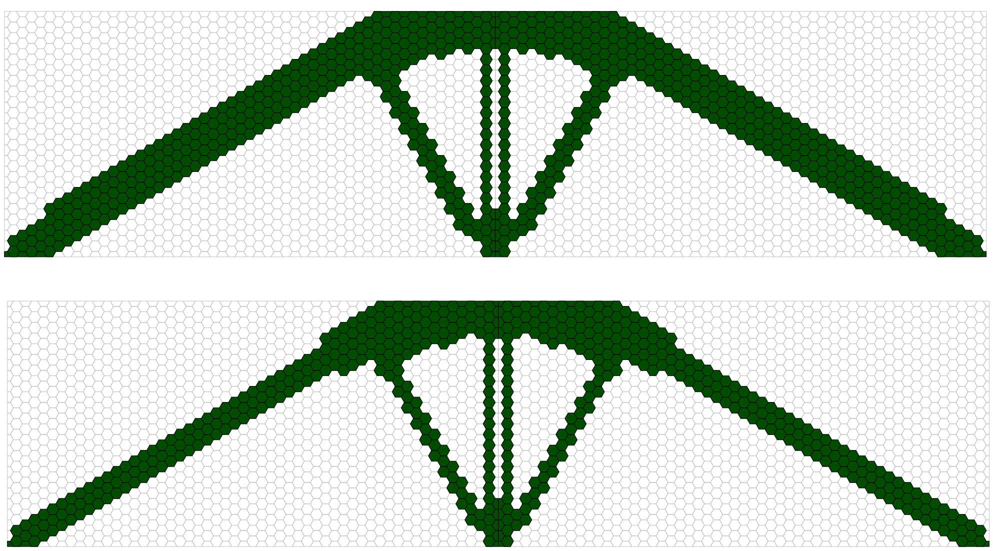
espessura do membro estrutural perto do apoio. Assim, a espessura do membro estrutural seria mais uniforme ao longo da estrutura. Essa topologia, obtida pouquíssimas iterações antes da fração de volume inicialmente estipulada, é apresentada na Figura 84(a) e possui 25,5% do volume inicial. Continuando a evolução do algoritmo, verifica-se a redução da espessura do membro estrutural em questão, apresentada na Figura 84(b) com cerca de



(a) (b)

Figura 6.12: Metade esquerda de uma viga biapoiada sob flexão otimizada pelo método ESO com malha hexagonal e critério de rigidez para: a) 25% do volume inicial; b) 23,6% do volume inicial.

20,0% do volume inicial.



(a)

(b)

Figura 6.13: Viga biapoiada sob flexão otimizada pelo método ESO com malha hexagonal e critério de rigidez para: (a) 25,5% do volume inicial; (b) 20,0% do volume inicial.

Novamente se observa a aplicabilidade da malha hexagonal no método ESO. Os contornos obtidos foram suaves ao mesmo tempo em que houve uma flexibilidade na obtenção de diferentes direções de membros estruturais. Filtros não foram necessários e conexões por apenas um nó ou padrões de Tabuleiro de Xadrez não foram formados.

6.3 ESO Hex em nível de tensão

6.3.1 Estrutura de duas barras

O problema da estrutura de duas barras já foi discutido neste trabalho durante a validação do programa ESO com malhas quadrilaterais. Para a abordagem ESO com malhas hexagonais, um domínio inicial de $10m \times 24m$ foi discretizado com 41×60 blocos hexagonais. O modelo inicial é apresentado na Figura 85

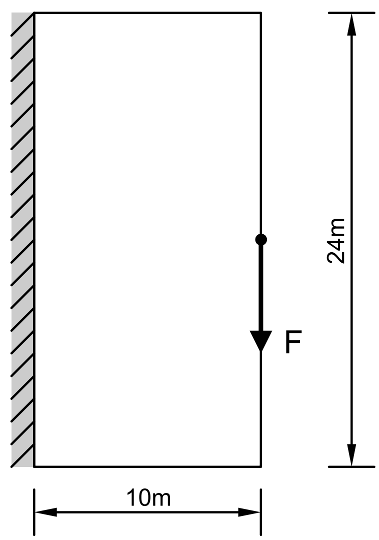


Figura 6.14: Domínio de projeto da estrutura.

Um carregamento pontual de $1000KN$ foi imposto no meio da aresta direita da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson valendo 0,3 e espessura 0,1m. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,5%. A topologia final obtida com malha hexagonal, apresentada na Figura 86, também foi a estrutura de duas barras. O índice de rejeição final utilizado no processo foi $RR = 30\%$. O histórico da evolução da rejeição nesta análise é apresentado na Figura 87.

A fim de comparar os resultados, a Figura 88 apresenta a topologia obtida para o caso de duas barras em malha quadrilateral e a nova topologia obtida com o uso de malha hexagonal.

Observa-se que as topologias obtidas para ambas as malhas foram semelhantes, ou seja, próximas do resultado teórico da estrutura de duas barras. Entretanto, observa-se apenas

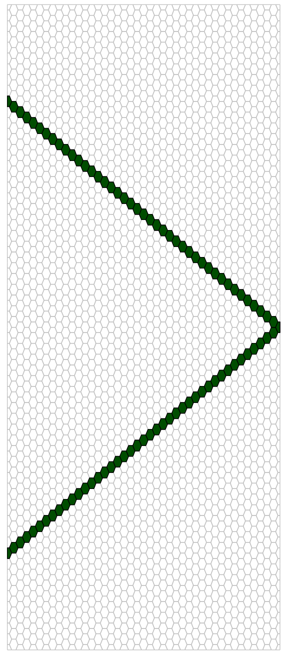


Figura 6.15: Estrutura de duas barras com método ESO e malha hexagonal para índice de rejeição final $RR = 30\%$.

uma linha de blocos hexagonais em cada membro estrutural da solução final, o que a tornou mais esbelta e reduziu ainda mais o volume de material. Uma grande vantagem é o contorno da topologia, que foi suavizado no caso hexagonal por amenizar o aspecto serrilhado da topologia com malha quadrilateral. Outra vantagem é referente às já discutidas conexões por apenas um nó, as quais são eliminadas no uso de malha hexagonal. Mesmo que a estrutura apresente apenas uma linha de blocos hexagonais, estes fazem com que as conexões entre eles sejam bem definidas por uma aresta e dois nós, o que não aconteceria na malha quadrilateral. Estes resultados confirmam as vantagens geométricas do uso de malhas hexagonais. A Figura 89 apresenta o mesmo caso de estrutura de duas barras para malhas 21×30, 33×45 e 41×60. Todas as características discutidas anteriormente são observadas para essas três diferentes malhas. Além do mais, por se tratar de um caso simples, as topologias obtidas são as mesmas, exceto na espessura das barras que foram dependentes da dimensão dos hexágonos.

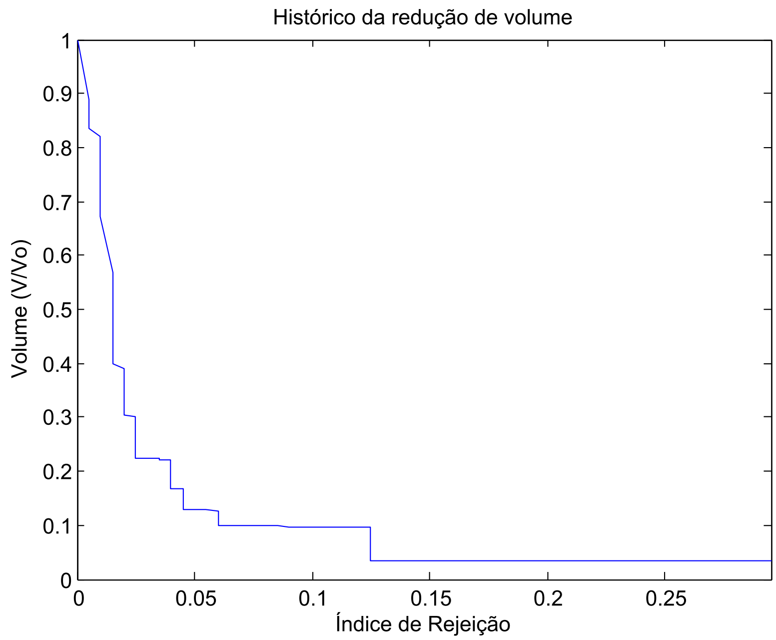
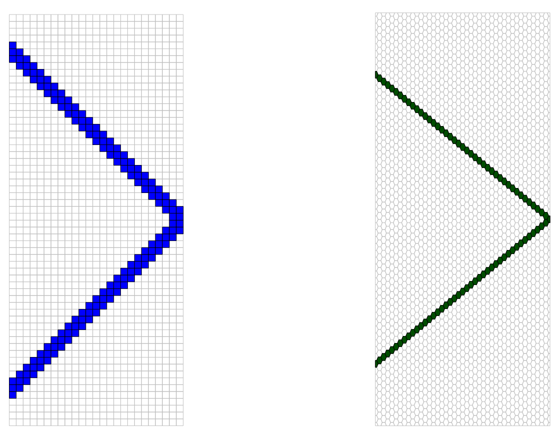


Figura 6.16: Histórico da evolução do índice de rejeição para a estrutura de duas barras obtida com malha hexagonal.



a) b)

Figura 6.17: Estrutura de duas barras obtidas com a) malha quadrilateral e b) malha hexagonal.

6.3.2 Viga biapoiada

Um domínio inicial de $10m \times 5m$ foi discretizado com uma malha de 52×27 blocos hexagonais. Esta estrutura foi modelada como uma viga biapoiada e uma força central na

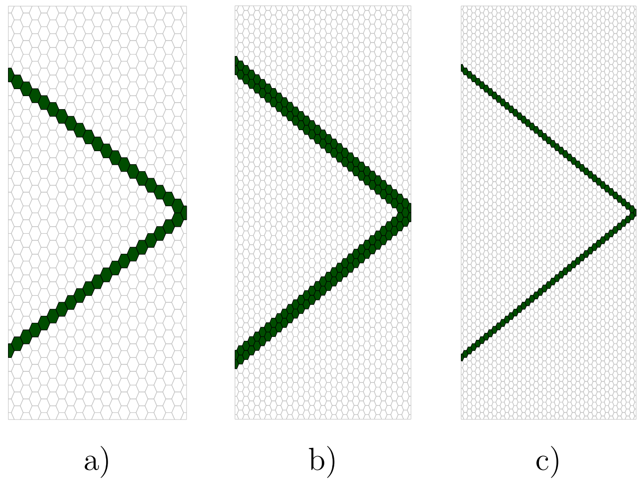


Figura 6.18: Estrutura de duas barras obtidas pelo método ESO com malhas hexagonais: a) 21×30, b) 33×45 e c) 41×60.

aresta inferior, conforme o modelo apresentado na Figura 90.

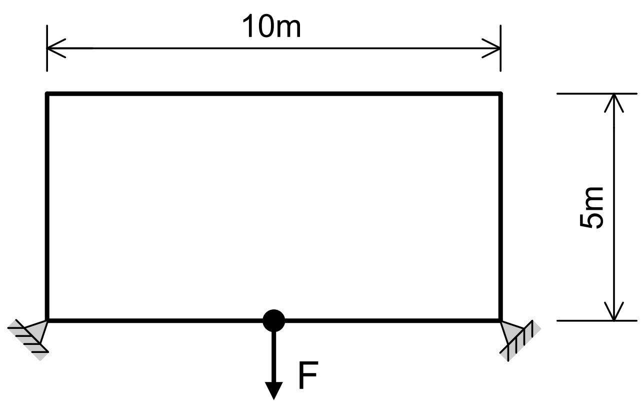


Figura 6.19: Domínio de projeto da estrutura.

Um carregamento pontual de $1000KN$ foi imposto no meio da aresta direita da estrutura. O módulo de elasticidade escolhido foi de $100GPa$, coeficiente de Poisson valendo 0,3 e espessura $0{,}1m$. A razão ER de evolução da rejeição foi de 0,5%.

Este exemplo já foi discutido na validação do programa ESO com malhas quadrilaterais. A topologia final obtida para ESO em nível de tensão com malha hexagonal para este caso é apresentada na Figura 91. O índice de rejeição final foi $RR = 19{,}5\%$.

Novamente, observa-se que a estrutura otimizada foi formada por linhas simples de blocos hexagonais, exceto nas junções dos membros estruturais. O resultado foi semelhante ao

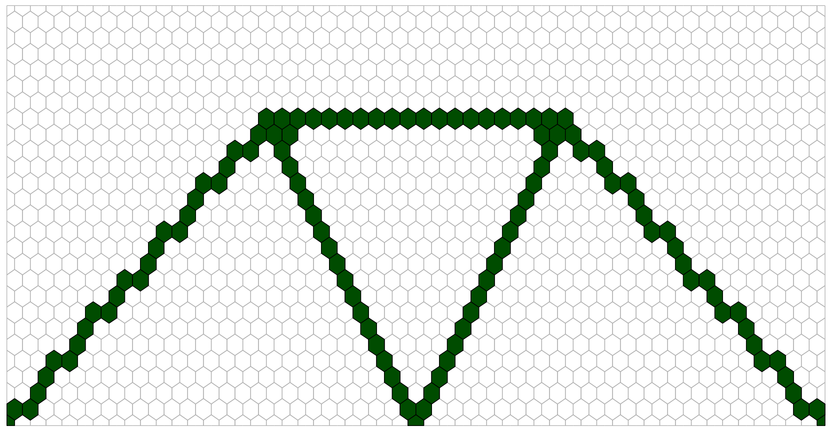
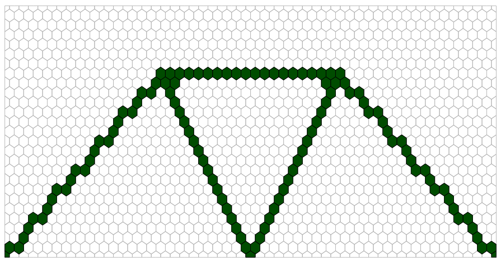


Figura 6.20: Topologia obtida para viga engastada com ESO em nível de tensão e malha hexagonal. Índice de rejeição final $RR = 19{,}5\%$.

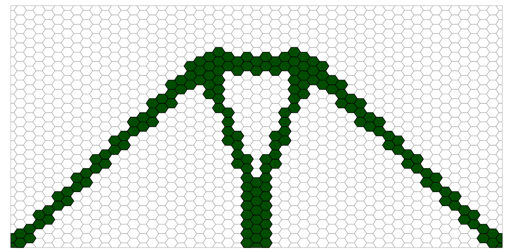
apresentado na Figura 45 com malha quadrilateral. Nota-se a existência das duas barras laterais como membros estruturais inclinados em 45^o. Mesmo que no uso dos blocos hexagonais não exista linha de simetria na direção de 45^o, as barras laterais foram formadas por apenas uma linha construída por arranjos lineares de blocos hexagonais. O contorno novamente é suavizado e a existência de conexões por um nó é eliminada.

É importante explicitar que, neste caso, a disposição dos blocos hexagonais foi diferente. A malha original gerada foi rotacionada em 90^o e a estrutura foi modelada a partir desta nova disposição. A diferença entre as topologias obtidas com disposições de malha diferentes foi considerável. Contudo, as condições de contorno foram um pouco diferentes. A malha teve uma leve alteração devido aos dados de entrada do gerador de malhas e o carregamento central extrapolado para o elemento central e seus dois nós da aresta inferior. Mesmo assim, pode-se observar a tendência de alinhamento em algumas direções dos blocos hexagonais na topologia final. Isso fortalece a idéia de que a modelagem e a discretização inicial, com malha hexagonal, influem no resultado final e devem ser analisadas previamente. A Figura

92 apresenta as duas estruturas obtidas com diferentes disposições das malhas.



a)



b)

Figura 6.21: Topologias obtidas pelo método ESO com abordagem hexagonal: a) malha 52×27 rotacionada em 90^o e b) malha 53×26 original.

6.4 ESO Hex em otimização de forma

Em projeto de estruturas, a redução dos pontos de concentrações de tensão é uma tarefa necessária. Dentre as técnicas empregadas para redução da concentração de tensão, estão o reforço em bordas de furos, redução e redistribuição de carregamentos, eliminação de cantos vivos ou curvas com raios pequenos. Contudo, é frequente que os elementos estruturais apresentem concentrações de tensão, uma vez que as formas da estrutura são condicionadas às questões geométricas e de fabricação. Uma questão lógica a ser considerada é: qual seria a melhor forma das regiões de conexão das estruturas que minimize a concentração de tensão? Este é um problema típico de otimização de forma, Xie and Steven (1997).

A junção de dois ou mais componentes estruturais implica em concentração de tensões e, assim, juntas são regiões possíveis de falha estrutural. Um tipo de junta bastante utilizada na área aeronáutica é criada a partir da colagem de dois ou mais membros estruturais, Tong and Steven (1999). Esta seção apresenta a otimização de forma com malha hexagonal para uma junta sobreposta colada SLJ, do termo em inglês *Single Lap Joint*, conforme a configuração apresentada na Figura 93. Para otimização de forma, apenas elementos das bordas da estrutura poderão ser removidos.

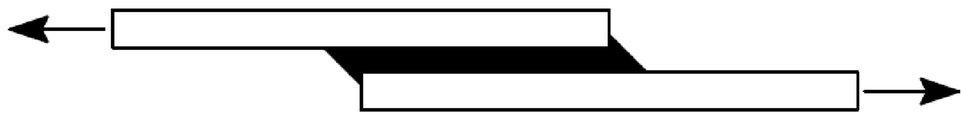


Figura 6.22: Configuração de uma junta sobreposta simples.

6.4.1 Geometria e condições de contorno

A geometria da junta sobreposta está de acordo com a norma ASTM D1002, como pode ser visto na Figura 94. As duas áreas externas hachuradas correspondem às áreas de engaste em um experimento real. Uma das áreas hachuradas é considerada como engastada, enquanto a outra é restrita apenas na direção vertical. A carga (P) é equivalente a $1MPa$ e foi aplicada no extremo do aderente inferior, conforme representado na Figura 94. O elemento adesivo é considerado como um elemento elástico linear padrão, apenas com propriedades diferentes dos aderentes. As propriedades dos materiais foram as mesmas utilizadas por Tong and Steven (1999). O módulo de elasticidade (E) dos aderentes vale $70000MPa$ e o coeficiente de Poisson (ν) é 0,3, enquanto que para o adesivo o módulo de elasticidade (E_a) vale $2000MPa$ e o coeficiente de Poisson (ν_a) é 0,3. As dimensões são apresentadas na Tabela 5

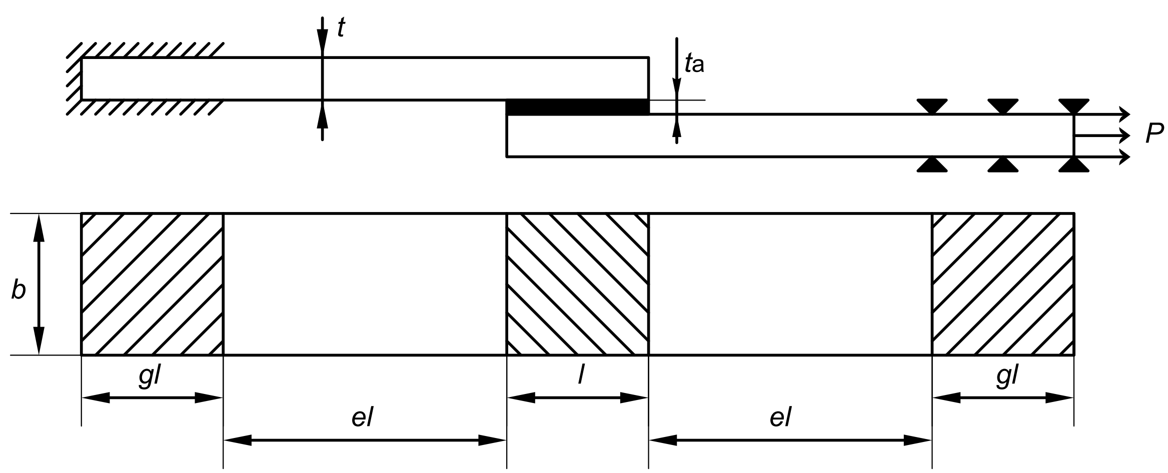


Figura 6.23: Geometria e condições de contorno da SLJ de acordo com a norma ASTM D1002.

Tabela 6.3: Dimensões consideradas no modelo numérico.

Variável	Descrição	Valor (mm)
b	Largura da junta	25,4
gl	Comprimento do engaste	25,4
el	Comprimento da área livre do aderente	63,5
l	Comprimento da zona colada 4	12,7
t	Espessura do aderente	1,62
t_a	Espessura do adesivo	0,19

6.4.2 Análise numérica

O estado plano de deformação foi considerado neste modelo. O domínio inicial de projeto foi considerado conforme a zona hachurada da Figura 95. A forma otimizada da SLJ analisada é apresentada na Figura 96. O problema de otimização de forma foi realizado sob critério de rejeição em nível de tensão, utilizando a tensão equivalente de von Mises, com índice de rejeição (RR) final de 1,7% e índice de evolução 0,1%. O índice de rejeição foi aplicado levando em consideração toda a estrutura, o que significa que cada elemento tem pelo menos 1,7% da tensão de von Mises máxima encontrada na estrutura.

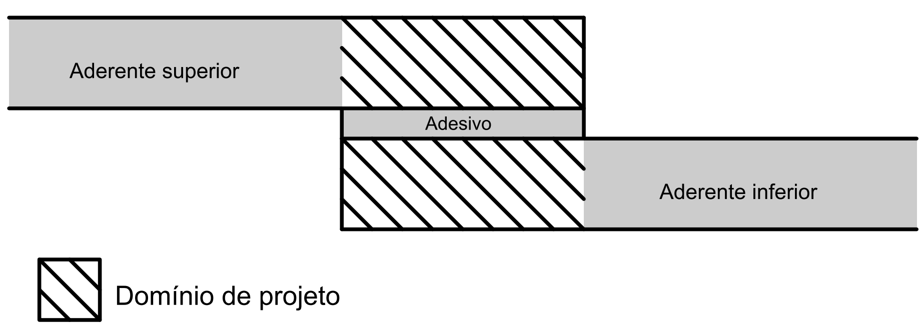


Figura 6.24: Domínio de projeto considerado para a otimização de forma de uma junta sobreposta simples.

Um gerador automático de malhas foi implementado para esse modelo. O domínio a ser otimizado foi considerado como as partes dos aderentes em contato com o adesivo. Para este domínio, a malha gerada é hexagonal. Para o restante do modelo, as malhas são quadrilaterais e seus elementos não foram considerados para retirada de elementos. Cada bloco hexagonal é formado por dois elementos quadrilaterais, conforme apresentado em seções anteriores. Entretanto, neste caso, para cada bloco hexagonal, calculou-se a média da tensão equivalente de von Mises de cada quadrilátero. Assim, cada bloco possui um valor de tensão, considerado na remoção de elementos das bordas da estrutura.

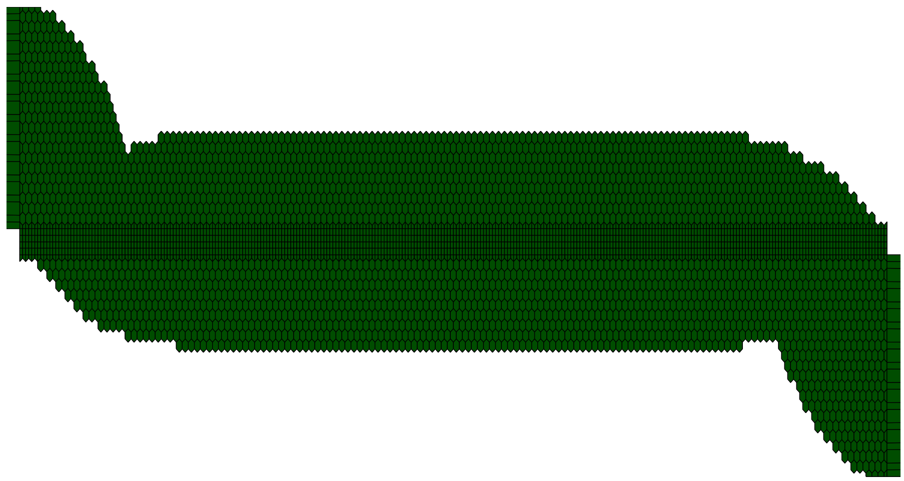


Figura 6.25: Forma otimizada de uma SLJ com elementos hexagonais e RR de 1,7%.

Na forma otimizada, a tensão máxima de cisalhamento cresceu de 0,78MPa para 0,92MPa, um aumento relativo de 17,9%. Por outro lado, a tensão máxima normal (tensão de "peel" na direção y) decresceu de 1,14MPa para 0,77MPa, um decréscimo de 48%. Este resultado é considerado interessante, pois, neste modelo, a tensão normal é mais crítica do que a de cisalhamento, além de ser mais alta. Além do mais, a tensão máxima de cisalhamento foi transferida para dentro da zona colada o equivalente a um elemento de distância (0,04mm), enquanto a tensão máxima normal foi transferida na direção externa também a um elemento de distância. Não obstante, uma redução de 47,5% do volume foi obtida no domínio de projeto após a otimização de forma. Essa redução representa pouco em relação a peça total. No entanto, o objetivo maior é reduzir a concentração de tensão. A Figura 96 apresenta a forma final obtida. A Figura 97 apresenta a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da linha média do adesivo antes e após a otimização de forma, enquanto a Figura 98 apresenta a distribuição da tensão normal na mesma região.

A Figura 99a) apresenta um zoom da forma obtida e o contorno interpolado nos nós externos da malha hexagonal, enquanto a Figura 99b) apresenta o contorno obtido para malha quadrilateral. Observa-se a suavidade do contorno obtido com as malhas hexagonais. Entretanto, não houve diferença significativa na interpolação do contorno ao se comparar os

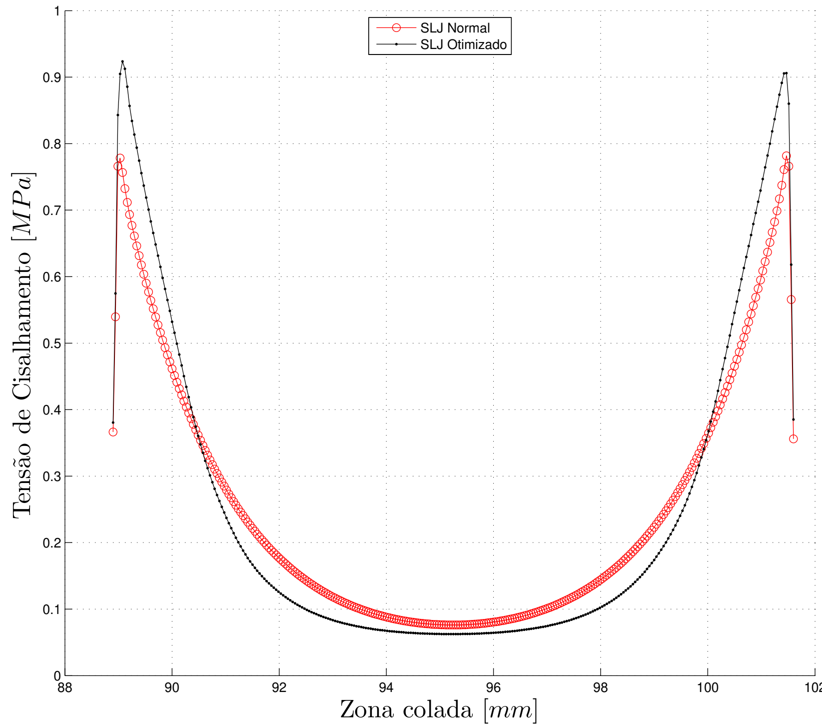


Figura 6.26: Tensão de cisalhamento no adesivo antes e após a otimização de forma com malha hexagonal.

dois tipos de malha implementados, sendo apenas considerado como vantagem a eliminação do aspecto serrilhado da malha quadrilateral. O contorno completo para o domínio de projeto com malha hexagonal é apresentado na Figura 100.

O problema de otimização topológica e de forma usando modelos mecânicos discretizados conduz geralmente a problemas de mínimos locais e tem convergência complexa. Estes aspectos deverão ser melhor estudados em trabalhos futuros.

6.5 BESO com malha hexagonal

Esta seção tem como objetivo a análise do método BESO com o uso de malhas hexagonais. Serão apresentados exemplos idênticos aos discutidos por Huang and Xie (2007), que também foram utilizados na seção de validação do programa de BESO e que correspondem a exemplos padrão utilizados para validação deste tipo de método.

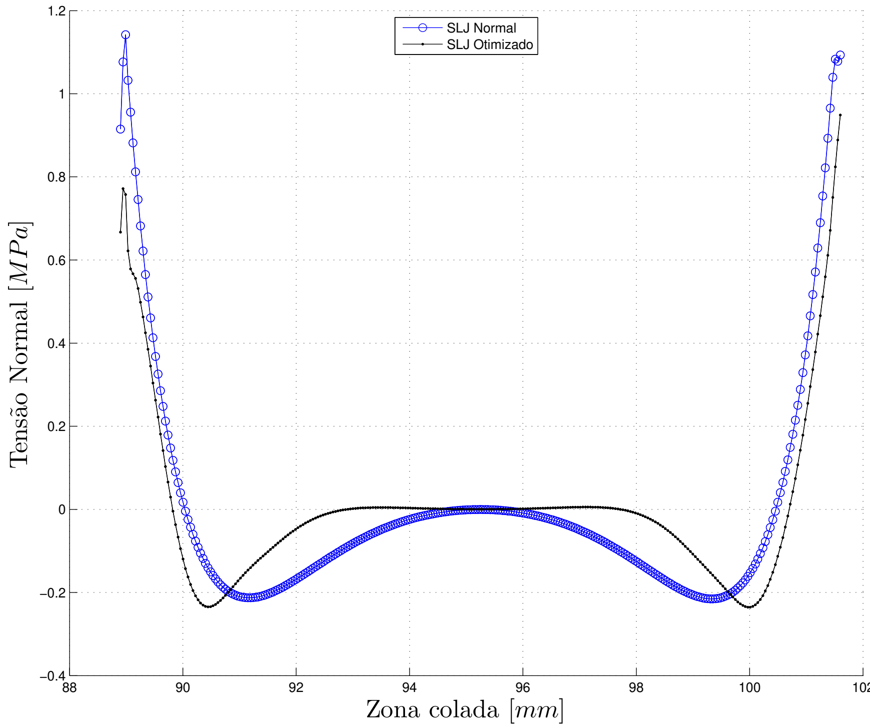
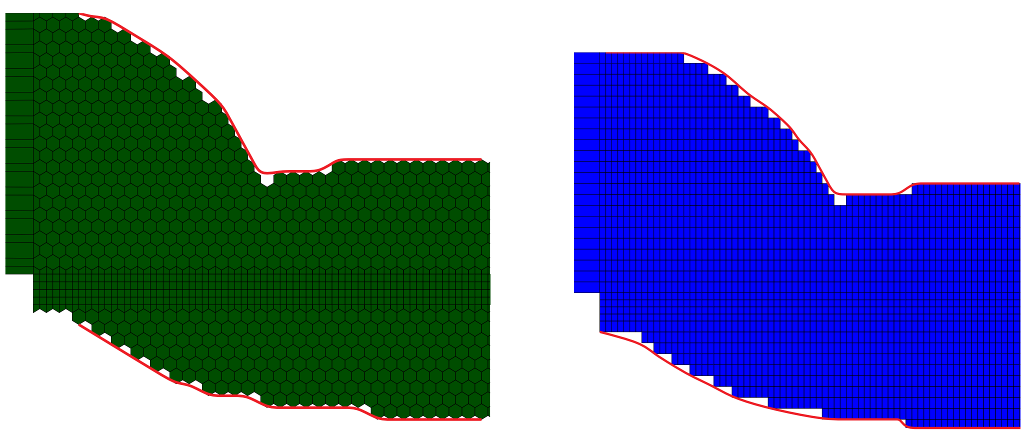


Figura 6.27: Tensão normal no adesivo antes e após a otimização de forma com malha hexagonal.



a) b)

Figura 6.28: Detalhe das formas otimizadas para malhas hexagonais e quadrilaterais.

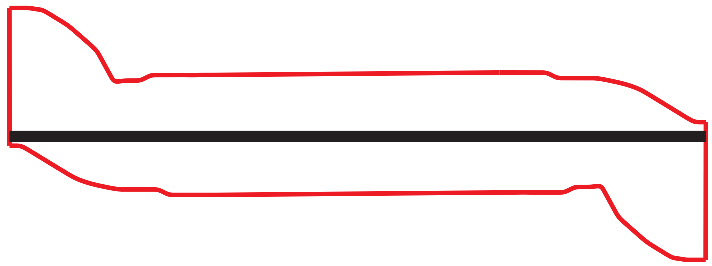


Figura 6.29: Contorno da forma otimizada.

6.5.1 Viga engastada livre

Uma viga engastada livre foi considerada para otimização pelo método BESO com malha hexagonal. O modelo considerado é apresentado na Figura 101.

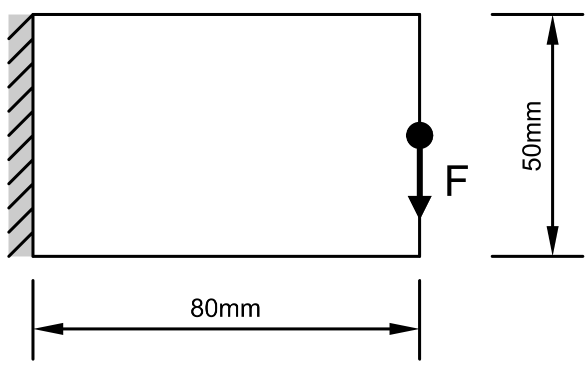
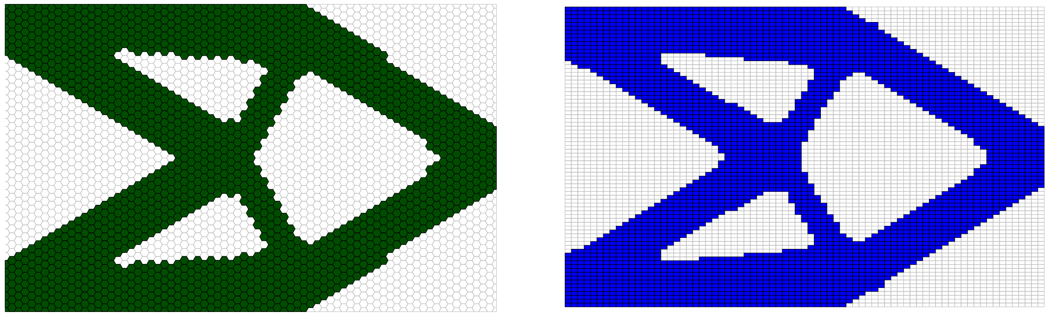


Figura 6.30: Modelo inicial de viga biapoiada.

O modelo foi construído inicialmente com um domínio de $80 \times 50mm$ e $1mm$ de espessura com a carga imposta de $100N$. O módulo de elasticidade do material foi $100GPa$ e o coeficiente de Poisson 0,3. O volume final de material disponível é de 50%. Para o método BESO utilizando malha hexagonal, o domínio foi discretizado com 75×39 blocos hexagonais, utilizando o gerador de malha com cálculo de proporção de hexágono regular. Os parâmetros BESO utilizados foram $AR_{max} = 5\%$, $\tau = 0{,}01\%$, $r_{min} = 3mm$ e $ER = 1\%$. A solução obtida para este caso é apresentada na Figura 102a) e a sua correspondente em malha quadrilateral na Figura 102b). As duas malhas apresentadas possuem 5850 elementos quadrilaterais em seu domínio inicial.



a) b)

Figura 6.31: Estruturas otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha: a) 75×39 blocos hexagonais; b) 75×78 elementos quadrilaterais.

Observa-se que as topologias obtidas com malhas hexagonais e quadrilaterais são muito semelhantes entre si. Os cantos vivos presentes na malha quadrilateral foram eliminados com o uso da malha hexagonal e determinadas bordas da estrutura se tornaram mais suaves. Contudo, por se tratar de soluções muito próximas entre si, o aspecto geral da topologia na malha quadrilateral também foi bem definido, pois nesse tipo de malha há a liberdade de se retirar um elemento individual sem a retirada obrigatória de seu elemento vizinho, como acontece na retirada dos blocos hexagonais.

Uma das vantagens do uso de malhas hexagonais no método ESO é a eliminação da necessidade de filtros numéricos. Foi comprovado em seções anteriores que a geometria dos blocos hexagonais naturalmente elimina o problema de tabuleiro de xadrez sem o uso de filtros. Entretanto, no método BESO, o filtro é parte fundamental do algoritmo e não realiza apenas o papel de eliminação do tabuleiro de xadrez, mas também extrapola o número de sensibilidade para elementos vazios, o que possibilita o retorno desses elementos na malha. Huang and Xie (2007) afirmam que esse filtro é equivalente ao filtro de independência da malha apresentado em Sigmund and Peterson (1998). Assim, uma das grandes características da malha hexagonal no método ESO não é relevante no que se refere à eliminação da implementação de filtros para o método BESO, cujo algoritmo sempre exigirá o uso do filtro de suavização do número de sensibilidade.

A Figura 103 apresenta o mesmo caso em questão para outras duas malhas, sendo elas 55×28 e 85×45 blocos hexagonais.

Para diferentes malhas, este caso de viga engastada livre com o método BESO e blocos hexagonais teve maior sensibilidade, o que implicou em diferentes soluções finais. Além de serem diferentes entre si, as topologias apresentadas na Figura 103 não são próximas às das apresentadas na Figura 102. Assim, uma vez que, ao considerar o método BESO como

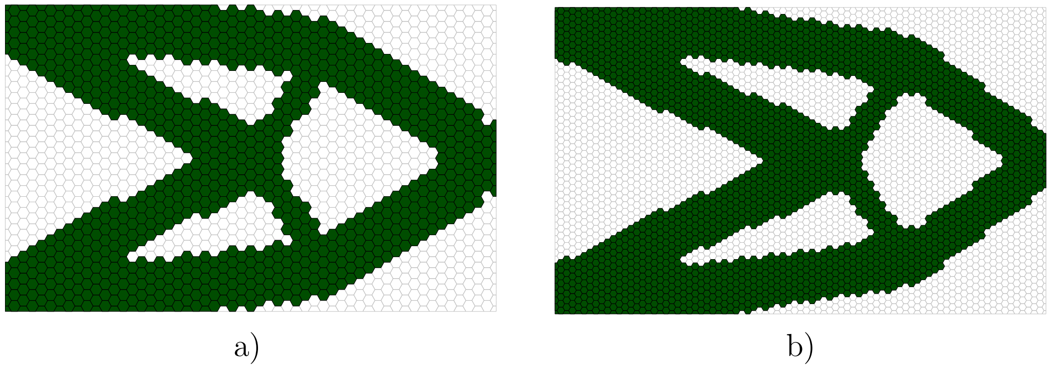


Figura 6.32: Estruturas otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO coms malhas hexagonais: a) 55×28; b) 85×45.

convergente e independente da malha para elementos quadrilaterais, o método com malha hexagonal não se mostrou vantajoso neste caso. Em malhas dessa magnitude, a retirada de elementos parentes (blocos hexagonais) dificultaram a convergência do resultado. Essa convergência pode ser observada no histórico de evolução do algoritmo, apresentado na Figura 104, para a malha de 75×39 blocos hexagonais.

6.5.2 Viga MBB

Uma viga MBB, Huang and Xie (2007), segundo o modelo apresentado na Figura 105, foi considerada para otimização topológica pelo método BESO com malha hexagonal.

O modelo foi construído inicialmente com um domínio de $120mm \times 40mm$ e $1mm$ de espessura com a carga imposta de $100N$. O módulo de elasticidade do material foi $200GPa$ e o coeficiente de Poisson 0,3. O volume final de material disponível é de 50%. Para o método BESO utilizando malha hexagonal, o domínio foi modelado com 85×24 blocos hexagonais, utilizando o gerador de malha com cálculo de proporção de hexágono regular. Os parâmetros BESO utilizados foram $AR_{max} = 5\%$, $\tau = 0{,}01\%$, $r_{min} = 6mm$ e $ER = 1\%$. A solução obtida para este caso é apresentada na Figura 107a) e a sua correspondente em malha quadrilateral na Figura 107b). As duas malhas apresentadas possuem 4080 elementos quadrilaterais em seu domínio inicial e todos os elementos entraram na solução de partida do método BESO.

Observa-se que as topologias obtidas neste caso foram muito semelhantes entre si. Como no exemplo anterior, os cantos vivos característicos das malhas quadrilaterais foram eliminados. Entretanto, a vantagem do contorno da estrutura ao se utilizar malha hexagonal não é evidente neste caso, pois o aspecto serrilhado do quadrilátero foi apenas substituído pelo aspecto serrilhado da geometria hexagonal. O aspecto geral da estrutura foi o mesmo para as

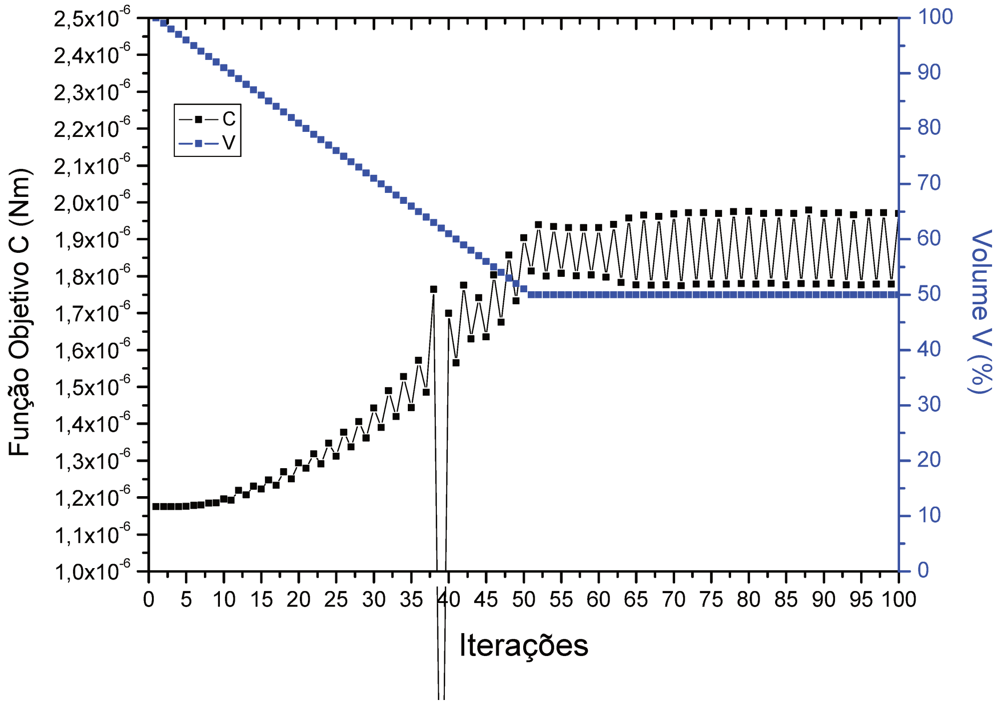


Figura 6.33: Histórico da evolução do algoritmo para viga engastada livre com 50% do volume inicial em uma malha de 75 × 39 blocos hexagonais.

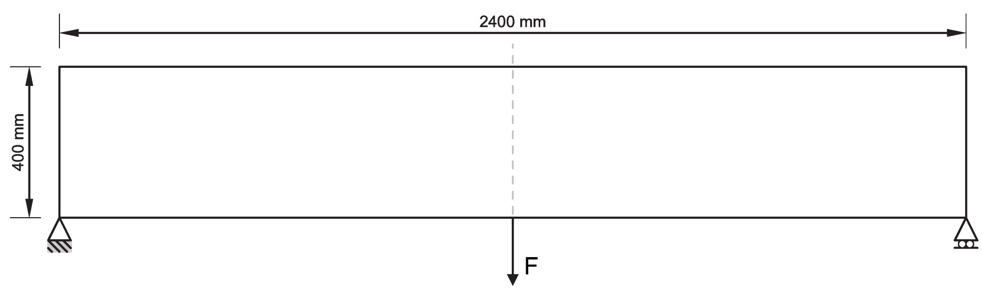
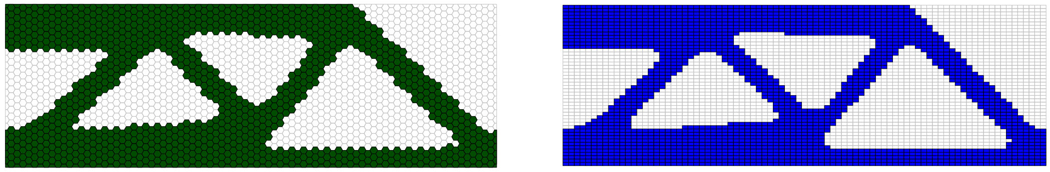


Figura 6.34: Modelo de viga MBB.

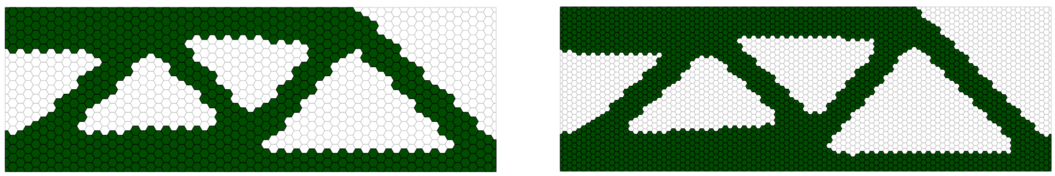
duas topologias, o que caracteriza a aplicabilidade da malha hexagonal neste caso. A Figura 107 apresenta outras duas malhas para o mesmo caso de viga MBB, sendo elas construídas com 65 × 18 e 105 × 29 blocos hexagonais.

Observa-se que as topologias obtidas foram muito semelhantes entre si para diferentes malhas utilizadas, o que caracterizou a análise como independente da malha. Isso confirma a aplicabilidade da malha hexagonal neste caso. Entretanto, como discutido no caso anterior,



a) b)

Figura 6.35: Vigas MBB otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha: a) 85×24 blocos hexagonais; b)85×48 elementos quadrilaterais.



a) b)

Figura 6.36: Vigas MBB otimizadas para 50% do volume inicial pelo método BESO com malha: a) 65×18; b) 105×29 blocos hexagonais.

o uso de filtro se faz sempre necessário no método BESO. Assim, a primeira grande vantagem do uso de malha hexagonal não é aproveitada. O uso desse tipo de malha pode ser usado como indicador de uma solução ótima ou próxima da ótima, considerando apenas as características geométricas dos blocos hexagonais na topologia final. Apesar da solução ter sido alcançada com essa malha, a convergência do caso foi atrapalhada pela eliminação dos blocos hexagonais, como pode ser visto na Figura 108, para a malha de 85×24 blocos hexagonais. Nota-se neste caso, uma oscilação nos valores da função objetivo ao longo das iterações. Tanto neste caso de viga MBB como no de engastada livre, adotou-se como critério de parada o número máximo de iterações, sendo este definido como 100. Essa instabilidade na convergência do resultado pode ser explicada pelo fato de que, na malha hexagonal, os elementos parentes (que formam o bloco hexagonal) são sempre retirados conjuntamente. Assim, um elemento que não seria eliminado na malha quadrilateral pode ser eliminado na malha hexagonal, devido à eliminação do seu elemento parente. Nota-se que, na Figura 108, esta oscilação do resultado não aparece para o caso das malhas quadrilaterais, o que demonstra que o problema de oscilação da função objetivo está associado à metodologia usada na abordagem hexagonal do método.

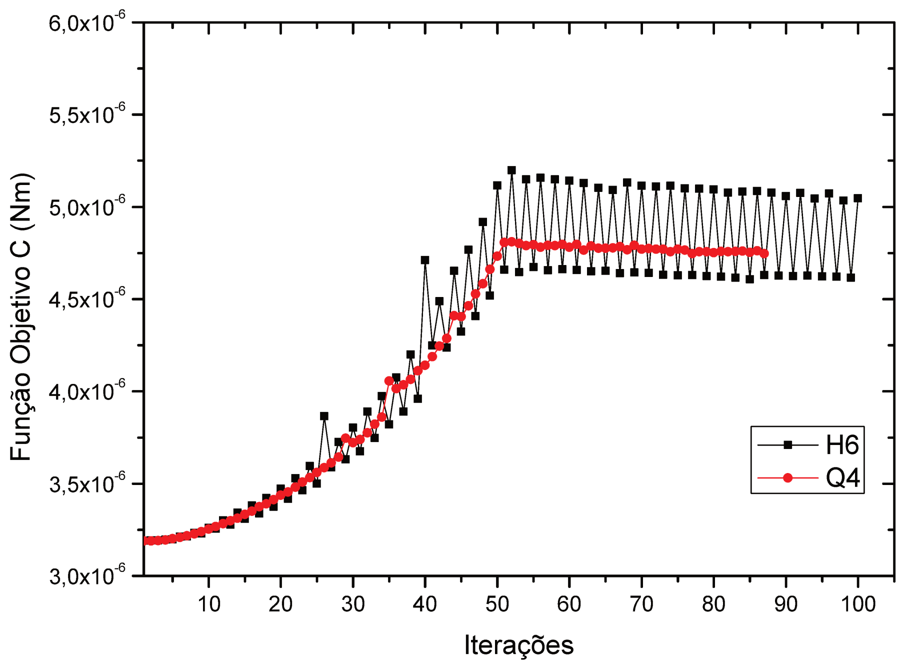


Figura 6.37: Histórico da evolução do algoritmo para viga mbb com 50% do volume inicial em uma malha de 85×24 blocos hexagonais.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Conclusões específicas

Este trabalho teve como objetivo principal a análise da influência do uso de malhas hexagonais em métodos ESO/BESO de otimização estrutural topológica. A criação de pré-processadores básicos próprios e a revisão dos métodos evolucionários de otimização também foram consideradas nos objetivos gerais. Em suma, dentre as principais conclusões acerca do trabalho desenvolvido, destacam-se:

- Por características geométricas e considerando os exemplos aqui estudados, pode-se afirmar que o uso de malhas hexagonais em formato de favo de mel elimina a possibilidade de formação do problema de tabuleiro de xadrez no método ESO. Com isso, filtros numéricos não são necessários no algoritmo.

- O método ESO com malha hexagonal é dependente da malha, assim como o método tradicional. Além do mais, a discretização inicial e a razão de aspecto dos blocos hexagonais influem no resultado final, cabendo assim ao projetista analisar essas questões de maneira prévia.

- Quanto ao custo computacional, o tempo relativo de processamento entre as malhas analisadas foi semelhante. Assim, a eliminação da necessidade de filtros, pelo uso da malha hexagonal, não contribui significativamente para o custo computacional na escala das malhas analisadas. A análise por elementos finitos continua é o fator de maior exigência computacional do método. Este fator pode ser alterado para o caso de malhas com grande número de elementos.

- As aplicações de malhas hexagonais no método ESO se mostraram viáveis. Topologias coerentes foram obtidas com o uso de malhas relativamente grosseiras e, pelas características da malha, com contornos suaves e bem definidos. Assim, o método ESO com malha hexagonal possui boa aplicabilidade e se torna uma nova alternativa no projeto de estruturas sob critério de nível de tensão e de maximização da rigidez.

- A extensão do método ESO em nível de tensão aplicado em otimização de forma também se mostrou viável. A distribuição de tensões foi suavizada ao longo da estrutura final. A caracterização do contorno da estrutura obtida foi mais suave devido a geometria hexagonal. Entretanto, a interpolação do contorno nos nós externos da estrutura não sofreu alterações drásticas, quando comparada com o uso de malha quadrilateral.

- No método BESO, a aplicação de malhas hexagonais obteve menor êxito do que no método ESO. A primeira grande vantagem do uso de malha hexagonal, que é eliminar o tabuleiro de xadrez sem o uso de filtros numéricos, não é relevante no BESO. Neste método, o filtro exerce papel fundamental no algoritmo, não só eliminando as instabilidades numéricas, mas também extrapolando os números de sensibilidade aos elementos vazios, fazendo com que esses possam retornar à condição de elementos sólidos. Assim, o filtro proposto no método BESO será sempre necessário. Os contornos obtidos nas topologias finais foram suaves, mas não melhores do que com as malhas quadrilaterais, devido a independência da malha do método. Com relação à esta independência da malha, o método BESO com malha hexagonal sofreu instabilidades, tanto na obtenção da topologia final como na convergência do resultado, devido à remoção de elementos parentes (blocos hexagonais) da estrutura, nos casos de malhas grosseiras. Conclui-se que, de maneira preliminar, as vantagens obtidas com o uso de malha hexagonal no método ESO não são eficazes no BESO, na escala das malhas analisadas.

7.2 Conclusão geral e sugestões de continuidade

No geral, o método ESO com malha hexagonal se mostrou eficaz e aplicável no projeto de novas estruturas em critério de nível de tensão e maximização da rigidez, assim como em otimização de forma. De maneira preliminar, o método BESO com malha hexagonal não obteve o mesmo sucesso.

Como continuações do trabalho aqui desenvolvido, são sugeridas:

- Implementação de outros critérios de projeto como: frequência natural, condução de calor e outros.

- Construção do elemento hexagonal com funções de forma do tipo Wachspress, Talischi et al. (2009), ou até mesmo a construção de blocos hexagonais com seis elementos finitos triangulares.
- Desenvolvimento de um método de otimização estrutural evolucionária utilizando malhas hexagonais em análise com interação fluido-estrutura.
- Análise de malhas com alto grau de refinamento.
- Implementação de um algoritmo para identificação e interpolação dos contornos das topologias finais obtidas.
- Agregação dos códigos implementados com pacotes comerciais de elementos finitos.

Referências Bibliográficas

Ansola, R., Canales, J., Tárrago, J. A., 2006. An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization (eso) of continuum structures subjected to self-wieght loads. Finite Elements in Analysis and Design 42, 12220–1230.

Arora, J. S., 2004. Introduction to Optimum Design. Elsevier Academic Press.

Bahia, M. T., 2005. Otimização topológica aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.

Bendsoe, M. P., Sigmund, O., 1999. Material interpolation schemes in topology optimization. Archive of Applied Mechanics 69, 635–654.

Bendsoe, M. P., Sigmund, O., 2003. Topology Optimization - Theory, Methods and Applications. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

Bittencourt, M. L., 2010. Análise computacional de estruturas: com aplicação do Método de Elementos Finitos. Editora da Unicamp, Campinas, SP.

Borrvall, T., Peterson, J., 2001. Large-scale topology optimization in 3d using parallel computing. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190, 6201–6229.

Casas, W. J. P., Pavanello, R., Zannin, P. T., 2004. Assessment of the solution and prediction algorithms during the optimization of fluid-structure interaction dynamic systems. Canadian Acoustics 32, 47–52.

Chu, D. N., Xie, Y. M., Hira, A., Steven, G. P., 1996. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. Finite Elements in Analysis and Design 21, 239–251.

Chu, D. N., Xie, Y. M., Hira, A., Steven, G. P., 1997. On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. Finite Elements in Analysis and Design 24, 197–212.

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J., 2002. Concepts and applications of finite element analysis. Wiley.

Costa, J. C. A., Alves, M. K., 2003. Layout optimization with h-adaptivity of structures. International Journal for Numerical Methods In Engineering 58, 83–102.

da Silva, J. A. B., 2001. Investigação de um método evolucionário de otimização estrutural. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica.

Diaz, A., Sigmund, O., 1995. Checkerboard patterns in layout optimization. Structural Optimization 10, 40–45.

Ghaffarianjam, H. R., Absolbashari, M. H., 2010. Performance of the evolutionary structural optimization-based approaches with different criteria in the shape optimization of beams. Finite Elements in Analysis and Design 46, 348–356.

Hassani, B., Hinton, E., 1999. Homogenization and Structural Topology Optimization. Springer.

Herskovits, J., 2007. Optimization of Structural and Mechanical Systems. World Scientific, Ch. Optimization of Large Scale Systems, pp. 35–57.

Hu, S. B., Chen, L. P., Zhang, Y. Q., Yang, J., Wang, S. T., 2009. A crossing sensitivity filter for structural topology optimization with chamfering, rounding, and checkerboard-free patterns. Structural and Multidisciplinary Optimization 37, 529–540.

Huang, X., Xie, Y., 2010. A further review of eso type methods for topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 41, 671–683.

Huang, X., Xie, Y. M., 2007. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. Finite Elements in Analysis and Design 43, 1039–1049.

Hutton, D. V., 2001. Fundamentals of Finite Element Analysis. Mc Graw-Hill.

Jia, H., Beom, H. G., Wang, Y., Lin, S., Liu, B., 2011. Evolutionary level set method for structural topology optimization. Computers and Structures 89, 445–454.

Jog, C. S., Haber, R. B., 1996. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 130, 203–226.

Labanowski, A., 2004. Análise comparativa de métodos de otimização topológica em elasticidade 2d e 3d. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.

Lee, T. H., 2007. Optimization of Structural and Mechanical Systems. World Scientific, Ch. Shape Optimization, pp. 149–159.

Li, Q., Steven, G. P., 2001. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 22, 230–239.

Li, Q., Steven, G. P., Querin, O. M., 2000. Structural topology design with multiple thermal criteria. Engineering Computations 17, 715–734.

Liu, X., Yi, W., Li, Q. S., Shen, P., 2008. Genetic evolutionary structural optimization. Journal of Constructional Steel Research 64, 305–311.

Michell, A. G. M., 1904. The limits of economy of material in frame-structures. Philosophical Magazine 8, 589–597.

Nguyen, T. H., Paulino, G., Song, J., Le, C. H., 2010. A computational paradigm for multiresolution topology optimization (mtop). Structural and Multidisciplinary Optimization 41, 525–539.

Pavanello, R., Gomes, T. C. M., 2006. Análise de sensibilidade de restrições em tensão no problema de otimização topológica. In: XXXII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural. Vol. 1. Campinas, pp. 299–309.

Pizzirani, F., 2003. Otimização topológica de estruturas utilizando algoritmos genéticos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica.

Porto, E. C. B., 2006. Método da homogeinização aplicado à otimização estrutural topológica. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica.

Porto, E. C. B., Pavanello, R., 2007. Influência dos parâmetros de homogeneização sobre a solução estrutural topológica ótima. In: 8ž Congreso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica. Vol. 1. Cusco - Peru, pp. 1–9.

Poulsen, T. A., 2002. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 24, 396–399.

Quint, 2011. Otishape-ts - total solution for structural optimization. online.
URL `http://www.quint.co.jp/eng/pro/ots/index.htm`

Rahmatalla, S. F., Swan, C. C., 2004. A q4/q4 continuum structural topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 27, 130–135.

Saxena, R., Saxena, A., 2007. On honeycomb representation and sigmoid material assignment in optimal topology synthesis of compliant mechanisms. Finite Elements in Analysis and Design 43, 1082–1098.

Sigmund, O., Peterson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural Optimization 16, 68–75.

Silva, C. A. C., 1997. Otimização estrutural e análise de sensibilidade orientadas por objetos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica.

Silva, E. C. N., 2001. Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas, Apostila. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP, São Paulo, Brasil.

Silva, F. I., 2007a. Síntese computacional de absorvedores acústicos poroelásticos. Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica.

Silva, F. I., Pavanello, R., 2010a. Otimização paramétrica de sistemas de isolação acústica. CONEM 2010 VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica 1, 1–8.

Silva, F. I., Pavanello, R., 2010b. Synthesis of porous-acoustic absorbing systems by an evolutionary optimization method. Engineering Optimization 42 (10), 887–905.

Silva, M. C., 2007b. Aplicação do método da otimização topológica para o objeto de mecanismos flexíveis menos suscetíveis à ocorrência de dobradiças. Master's thesis, Escola Politécnica - USP.

Simonetti, H. L., 2009. Otimização topológica de estruturas bidimensionais. Master's thesis, Universidade Federal de Ouro Preto.

Talischi, C., Paulino, G. H., Le, C. H., 2009. Honeycomb wachspress finite elements for structural topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 6, 569–583.

Tanskanen, P., 2002. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 22, 5485–5498.

Tanskanen, P., 2006. A multiobjective and fixed elements based modification of the evolutionary structural optimization method. Computer methods in applied mechanics and engineering 196, 76–90.

Tong, L., Steven, G., 1999. Analysis and Design of Structural Bonded Joints. Kluwer Academic Publishers.

Wang, S., 2007. Krylov subspace methods for topology optimization on adaptive meshes. Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, USA.

Xie, Y., Huang, X., 2010. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, 1st Edition. John Wiley Sons, West Sussex.

Xie, Y. M., Steven, G. P., 1993. A simple evolutionary procedure for structural optimization. Computer and Structures 49, 885–896.

Xie, Y. M., Steven, G. P., 1996. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. Computer and Structures 58, 1067–1073.

Xie, Y. M., Steven, G. P., 1997. Evolutionary Structural Optimization. Springer-Verlag, London.

Yang, X. Y., Xie, Y. M., Liu, J. S., Parks, G. T., Clarkson, P. J., 2003. Perimeter control in the bidirectional evolutionary structural optimization method. Structural and Multidisciplinary Optimization 24, 430–440.

Zhou, H., 2010. Topology optimization of compliant mechanisms using hybrid discretization model. Journal of Mechanical Design 132, 111003–1.

Zhou, M., Rozvany, G. I. N., 1991. The coc algorithm, part ii: topological, geometrical and generalized shape optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 89, 309–336.

Zhou, M., Rozvany, G. I. N., 2001. On the validity of eso type methods in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 21, 80–83.