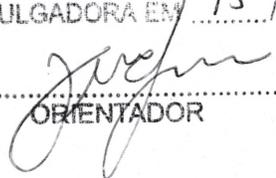


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR MAURÍCIO ROSELLI  
SICA..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 15/07/2011

  
.....  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA**

Mauricio Roselli Sica

**Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos  
Não-Lineares com Parâmetros Dependentes do  
Deslocamento**

106-2011

Maurício Roselli Sica

# **Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares com Parâmetros Dependentes do Deslocamento**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Engenharia Automobilística da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Automobilística.

Área de Concentração: Dinâmica

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

Campinas

2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA  
- BAE - UNICAMP

Si12i Sica, Maurício Roselli  
Identificação inversa de sistemas dinâmicos  
não-lineares com parâmetros dependentes do deslocamento /  
Maurício Roselli Sica. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.  
Dissertação de Mestrado (Profissional) - Universidade  
Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Automóveis - Dinâmica. 2. Identificação de sistemas.  
3. Sistemas não-lineares. 4. Resposta em frequência  
(Dinâmica). I. Santos, José Maria Campos dos. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Inverse identification for non-linear dynamic systems  
with displacement dependent parameters

Palavras-chave em Inglês: Automobiles - Dynamics, Identification systems,  
Nonlinear systems, Frequency response (Dynamics)

Área de concentração: Dinâmica

Titulação: Mestre em Engenharia Automobilística

Banca examinadora: Pablo Siqueira Meirelles, Belisario Nina Huallpa

Data da defesa: 15-07-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA**

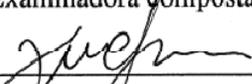
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL**

**Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos  
Não-Lineares com Parâmetros Dependentes do  
Deslocamento**

Autor: Maurício Roselli Sica

Orientador: Professor Doutor José Maria Campos dos Santos

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente  
Instituição: DMC/FEM - UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles  
Instituição: DMC/FEM - UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Belisario Nina Huallpa  
Instituição: Ford Motor Company – Tatuí Proving Ground

## Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, José Luiz (*in memorium*) e Dina, por terem me ensinado a paixão pelo trabalho e a compaixão pelo próximo;

Dedico também este trabalho a todos aqueles que dispensam parte do seu tempo, parte do seu dia e até parte de suas vidas ao ofício do ensino.

## **Agradecimentos**

Sou muito agradecido ao meu orientador, Professor Doutor José Maria Campos dos Santos, pela sua dedicação, pela sua orientação neste trabalho e pela sua amizade;

Agradeço também ao Professor Doutor Pablo Siqueira Meirelles pelo seu encorajamento e valiosa ajuda;

Agradeço a TRW Automotive por ter me proporcionado a oportunidade de participar do curso de Mestrado Profissional em Engenharia Automobilística;

Agradeço aos colegas de mestrado que me acompanharam, me incentivando durante o curso.

Agradeço em especial a minha esposa Josély, pelo apoio e compreensão durante o tempo em que me dediquei a este trabalho.

“God doesn't require us to succeed; he only requires that you try”.

Mother Teresa

*Indian (Albanian-born) humanitarian & missionary (1910 – 1997)*

“I'm convinced that about half of what separates the successful entrepreneurs from the non-successful ones is pure perseverance”.

Steve Jobs, Interview, 1995

*US computer engineer & industrialist (1955 - )*

## Resumo

SICA, Maurício Roselli, *Identificação Inversa de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares com Parâmetros Dependentes do Deslocamento*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011, 120p. Dissertação (Mestrado)

As simulações físicas em laboratórios da indústria automotiva são realizadas utilizando informações colhidas de veículos que são submetidos a ciclos de testes em rotas urbanas. Medir as respostas em pontos específicos durante uma rota de teste, não significa conhecer as excitações a que o veículo está sendo submetido, visto que este normalmente é composto por sistemas mecânicos não lineares. O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo que possibilite através dos dados de resposta medidos em campo, conhecer as excitações de entrada, contribuindo para a reprodução da rota de teste. A metodologia utilizada está baseada na obtenção de funções de resposta em frequência, de modelos lineares simples e no desenvolvimento de sinais de entrada, capazes de reproduzir as mesmas respostas medidas nas rotas nos sistemas não lineares. O algoritmo desenvolvido foi avaliado com simulações em sistemas lineares e não lineares de um, dois e quatro graus de liberdade. Através dos sinais de resposta medidos em um sistema e, utilizando sinal de identificação tipo Schroeder, foi possível estimar as forças de excitação, com um erro menor do que 1,0% para sistemas de dois graus de liberdade lineares e não lineares. No caso de sistemas com quatro graus de liberdade este valor foi menor do que 1,5%, utilizando sinais de identificação do tipo multisseno.

Discute-se a metodologia utilizada para a obtenção das funções de resposta em frequência comparando-a com outras empregadas em equipamentos comerciais, bem como a influência de fatores no processo de convergência do algoritmo, como o grau de não linearidade, a qualidade do sinal medido e a importância da escolha do sinal para a identificação dos sistemas.

*Palavras Chave:* Comportamento Dinâmico, Identificação Inversa, Problema Inverso.

## Abstract

SICA, Maurício Roselli, *Inverse Identification for Non-Linear Dynamic Systems with Displacement Dependent Parameters*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2011, 120p. Master's Thesis.

Laboratory simulation testing in the automotive industry is carried out considering information acquired from vehicle urban routes testing. Due to the non-linearity of the vehicle mechanical systems, the output measuring collected from routes on specific points, does not mean the knowledge of the input signal excitation which it is submitted. The present study focuses on the development of an iterative algorithm that knowing the output signals measured, it is able to search for the input excitations, so given subsidies to reproduce events of the urban route, with its load amplitude and its frequencies. The methodology is based on the frequency response function of simple linear models and on the development of input signal, which is capable to reproduce the same measured responses of non-linear system. The developed algorithm was validated with simulations on linear and non linear system with one, two and four degrees of freedom. Making use of the Schroeder identification signal, it was possible to estimate input forces with an error lower than 1,0%, for linear and non-linear systems with two degrees of freedom. In the case of four degrees of freedom the algorithm converges to estimate input force with a tolerance of error lower than 1,5%, using multissine identification signal.

A discussion about the methodology used to obtain the frequency function response is carried out, comparing it with others found in commercial test equipments, as well the influence of some factors on the algorithm process of convergence, as the level of the non-linearity of the system, the quality of the acquisition of signal response and the importance of the correct choice of the input signal for the system identification.

Key Words: System Dynamic Behaviour, Inverse Load Identification, Inverse Problem.

## Lista de Figuras

Figura 1 – Sinal de identificação do sistema: Schroeder. ....	19
Figura 2 – Sinal de identificação do tipo Multisseno (chirp). ....	20
Figura 3 - Representação do Método Proposto .....	27
Figura 4 – Fluxograma do Algoritmo Proposto. ....	30
Figura 5 - Sistema linear de um grau de liberdade Linear .....	31
Figura 6 – Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação aleatória; .....	34
Figura 7 - Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação multisseno; .....	35
Figura 8 - Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação cosseno; .....	36
Figura 9 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação aleatória; .....	38
Figura 10 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação multisseno; .....	39
Figura 11 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação cosseno; .....	41
Figura 12 - Sistema Linear de dois graus de liberdade .....	44
Figura 13 – Sistema 2GDL submetido a excitação original aleatória; .....	48
Figura 14 – Sistema de dois graus de liberdade Não Linear .....	49
Figura 15 – Sistema 2GDL Não Linear submetido a excitação aleatória; .....	52
Figura 16 – Sistema 2GDL Não Linear submetido a excitação aleatória e SNR=12; .....	54
Figura 17 - Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 12 kN, SNR = 12 e passo reduzido; .....	55
Figura 18 - Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 6 kN e SNR = 12; .....	56
Figura 19 – Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 12 kN, SNR = 30; .....	58
Figura 20 - Veículo de tamanho e peso médio .....	61
Figura 21 - Clássico modelo de vibração bicicleta para um veículo - 4GDL. ....	61
Figura 22 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade .....	62
Figura 23 - Deslocamento vertical do veículo; .....	63
Figura 24 - Sistema de 4GDL Linear. Respostas originais para simulação em “pista”, quando submetido a excitação aleatória; .....	69

Figura 25 - Sistema de 4GDL Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação; .....	70
Figura 26 - Sistema de 4GDL Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação; .....	71
Figura 27 - Sistema de 4GDL Linear. Curvas de Convergência;.....	71
Figura 28 - Sistema de 4GDL Linear. Resposta original e estimada, e diferença das respostas; .....	72
Figura 29 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade.....	73
Figura 30 - Sistema de 4GDL Não Linear. Respostas originais para simulação em pista, quando submetido a excitação aleatória;.....	75
Figura 31 - Sistema de 4GDL Não Linear. Comparativo entre FRF com dados de pista (original) e FRF com dados da identificação; .....	76
Figura 32 - Sistema de 4GDL Não Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação; .....	76
Figura 33 - Sistema de 4GDL Não Linear. Curvas de Convergência;.....	77
Figura 34 - Sistema de 4GDL Não Linear. Resposta original e estimada, e diferença das respostas; .....	78
Figura 35- Sistema linear de um grau de liberdade.....	85
Figura 36 - Diagrama de corpo livre para massa $m_1$ .....	85
Figura 37 - Diagrama de corpo livre para massa $m_1$ .....	86
Figura 38 - Sistema Linear de dois graus de liberdade .....	88
Figura 39 - Diagrama de corpo livre da massa $M$ .....	88
Figura 40 - Diagrama de corpo livre da massa não suspensa $m_2$ .....	89
Figura 41 - Diagrama de corpo livre da massa $M$ . .....	90
Figura 42 - Diagrama de corpo livre da massa não suspensa $m_2$ .....	91
Figura 43 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade Linear. ....	93
Figura 44 - Deslocamento vertical do corpo do veículo. ....	93
Figura 45 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade Não Linear.....	98

## Lista de Tabelas

Tabela 1 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade com excitação original ALEATÓRIO , tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1;.....	43
Tabela 2 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade com excitação original CHIRP, tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1 (sistema linear); .....	43
Tabela 3 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade, com excitação original COSSENO, tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1; .....	43
Tabela 4 - Comparação dos resultados simulados para 2 graus de liberdade com excitação original ALEATÓRIA.....	60
Tabela 5 - Comparação dos resultados simulados para 4 graus de liberdade com excitações simultâneas ALEATÓRIAS, Amplitude de 10 KN. ....	79

## Notação

Neste trabalho utilizou-se a seguinte notação para representar, matrizes, vetores e variáveis no domínio do tempo e da frequência.

- As matrizes estão representadas por letras minúsculas ou maiúsculas sempre em itálico e entre colchetes, como por exemplo:  $[H]$ ;  $[h]$ ;  $[H(\omega)]$ ;  $[h(t)]$ .

- Os vetores estão representados por letras minúsculas, sempre em itálico e em negrito, como por exemplo:  $\mathbf{a}(t)$ ;  $\mathbf{h}(n)$ .

- Os escalares estão representados por letras minúsculas e sempre em itálico, como por exemplo:  $a$ ;  $b$ .

- As variáveis que representam sinais no domínio do tempo estão em letras minúsculas e sempre em itálico, como por exemplo:  $\mathbf{a}(t)$ ;  $\mathbf{h}(n)$ ;  $\mathbf{a}$ ;  $\mathbf{h}$ ;  $[h]$ ;  $[h(t)]$ .

- As variáveis que representam sinais no domínio da frequência estão em letras maiúsculas e sempre em itálico, como por exemplo:  $H(\omega)$ ;  $\mathbf{H}(\omega)$ ;  $F$ ;  $[H(\omega)]$ .

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### *Letras Latinas*

$A_f$	amplitude da frequência	<i>qualquer</i>
$c$	coeficiente de amortecimento	$[N.s/m]$
$\mathbb{D}$	dissipação de energia do sistema	$[N.m]$
$df$	discretização em frequência	$[Hz]$
$dt$	discretização no tempo	$[s]$
$erro_{-}$	erro ou diferença entre a resposta original medida e a resposta estimada	<i>qualquer</i>
$f_o; F, x, X$	força ou excitação de entrada	$[N]$
$f_{am}$	frequência de amostragem	$[Hz]$
$f_e$	força estimada	$[N]$
$F_i$	força ou entrada para identificação do sistema	$[N]$
$f_{max}$	máxima frequência do sinal	$[Hz]$
$h$	sistema dinâmico qualquer	$[m/N]$
$H$	função de resposta em frequência	$[m/N]$
$H^{-1}$	inversa da função de resposta em frequência	$[N/m]$
$[H_{1id}]$	matriz de FRF que representa o sistema 4GDL, quando utiliza-se SIMO	$[m/N]$
$[H_{1o}]$	matriz de FRF que representa o sistema 4GDL, quando utiliza-se MIMO	$[m/N]$
$i$	número de saídas em um sistema	<i>adimens.</i>
$I$	momento inercial lateral da metade do corpo de um veículo médio	$[kg.m^2]$
$j$	número de entradas em um sistema	<i>adimens.</i>
$k$	rigidez	$[N/m]$
$l$	distância do centro de massa do veículo à roda	$[m]$
$lambda$	parcela da força de correção adicionada a força estimada a cada interação	<i>adimens.</i>
$M; m$	massa	$[kg]$
$n$	quantidade de pontos de um vetor ou uma de uma seqüência	<i>adimens.</i>
$mod_2$	operador matemático	<i>adimens.</i>
$mi$	quantidade de harmônicas da série de Fourier para o sinal de Schroeder	<i>adimens.</i>

$p$	posição de um instante de tempo no vetor do tempo	<i>adimens.</i>
$q_i$	i-essima coordenada generalizada	<i>qualquer</i>
$Q_i$	força generalizada na i-essima coordenada generalizada	<i>[N]</i>
$r$	representa a harmônica da componente de frequência	<i>adimens.</i>
$R_{xx}$	função de autocorrelação	<i>adimens.</i>
$S_{xx}$	densidade espectral de potencia	<i>qualquer</i>
$sch$	sinal de Schroeder no tempo	<i>qualquer</i>
$T$	período de uma função	<i>[s]</i>
$\mathbb{T}$	energia cinética do sistema	<i>[N.m]</i>
$tol$	tolerância aceitável para o erro em porcentagem	<i>%</i>
$Tol$	tolerância aceitável para o erro	<i>qualquer</i>
$U$	função linear qualquer	<i>qualquer</i>
$\mathbb{V}$	energia potencial elástica do sistema	<i>[N.m]</i>
$vtb9\_3$	integrador numérico de quarta ordem	<i>não se aplica</i>
$\mathbb{W}$	trabalho realizado	<i>[N.m]</i>
$Y, y, z$	resposta ou saída de um sistema	<i>qualquer</i>
$Y_{dif}; y_{dif}$	erro ou diferença entre a resposta original e resposta calculada	<i>qualquer</i>
$\mathcal{F}$	transformada de Fourier.	<i>não se aplica</i>
$\mathcal{F}^{-1}$	transformada inversa de Fourier.	<i>não se aplica.</i>

.....

### ***Letras Gregas***

$\beta$	ângulo de fase	<i>[°]</i>
$\Psi$	ângulo formado entre a vertical e a haste no sistema pêndulo	<i>[°]</i>
$\tau$	diferença de tempo entre os valores no qual um sinal $x(t)$ foi amostrado	<i>[s]</i>
$\rho$	coeficiente de correlação linear	<i>adimens.</i>
$\varphi$	média quadrática	<i>adimens.</i>
$\omega$	frequência	<i>[rd/s]</i>

$\omega_o$       freqüência fundamental      [rd/s]

.....

***Subscritos***

<i>dif</i>	referente a diferença entre duas variáveis;	<i>não se aplica</i>
<i>e</i>	referente a variáveis estimadas pelo algoritmo;	<i>não se aplica</i>
<i>L</i>	referente a sistema linear;	<i>não se aplica</i>
<i>NL</i>	referente a um sistema não linear;	<i>não se aplica</i>
<i>o</i>	referente as variáveis originais do sistema (medidas em pista);	<i>não se aplica</i>
<i>S</i>	referente a característica da suspensão;	<i>não se aplica</i>
<i>cr</i>	referente a correção (força)	<i>não se aplica</i>

.....

***Abreviações***

<i>Ampl.</i>	Amplitude	<i>qualquer</i>
--------------	-----------	-----------------

.....

***Siglas***

FRF	Função de resposta em freqüência	[m/N]
1GDL	sistema com um grau de liberdade;	<i>não se aplica</i>
2GDL	sistema com dois graus de liberdade;	<i>não se aplica</i>
4GDL	sistema com dois graus de liberdade;	<i>não se aplica</i>
<i>ifft</i>	transformada inversa de Fourier	<i>não se aplica</i>

.....

## SUMÁRIO

Resumo .....	vii
Abstract .....	viii
Lista de Figuras .....	ix
Lista de Tabelas .....	xi
Notação.....	xii
Lista de Abreviaturas e Siglas .....	xiii
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Aspectos práticos.....	1
1.2 Objetivo.....	3
2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	4
3 REVISÃO DA LITERATURA.....	5
4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	8
4.1 Sistemas Lineares .....	8
4.1.1. Sistemas Invariantes no Tempo.....	9
4.1.2. Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.....	9
4.2 Sistemas Não Lineares .....	12
4.3 Sinais Determinísticos e Aleatórios .....	13
4.4 Análise de Fourier .....	13
4.5 Função de Autocorrelação.....	15
4.6 Densidade Espectral de Potência (DEP) .....	16
4.7 Identificação de Sistemas .....	17
4.7.1 Aspectos Gerais.....	17
4.7.2 Sinais de Identificação .....	17
4.7.2.1 Sinal Schroeder .....	18
4.7.2.2 Sinal Multisseno.....	20
5 MÉTODO PROPOSTO .....	21
5.1. Considerações sobre o Método Proposto .....	21
5.2. Algoritmo Proposto .....	22
5.2.1 Metodologia .....	22

6 EXEMPLOS SIMULADOS .....	31
6.1. Sistemas com um grau de liberdade .....	31
6.1.1. Sistema linear .....	31
6.1.1.1. Excitação Original Aleatória .....	33
6.1.1.2. Excitação Original Multisseno .....	34
6.1.1.3. Excitação Original Cosseno .....	35
6.1.2. Sistemas Não Lineares .....	37
6.1.2.1. Excitação Original Aleatória .....	37
6.1.2.2. Excitação Original Multisseno .....	38
6.1.2.3. Excitação Original Cosseno .....	40
6.1.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares .....	42
6.2. Sistemas com dois graus de liberdade .....	44
6.2.1 Sistema Linear .....	44
6.2.1.1 Excitação Original Aleatória .....	46
6.2.2 Sistema Não Linear .....	49
6.2.2.1 Excitação Original Aleatório Sem Ruído .....	51
6.2.2.2. Excitação Original Aleatório com Ruído Gaussiano .....	53
6.2.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares. ....	59
6.3. Sistemas com quatro graus de liberdade .....	61
6.3.1 Sistema Linear .....	61
6.3.1.1 Excitação Simultânea (MIMO) Aleatória. ....	69
6.3.2 Sistema Não Linear .....	72
6.3.2.1 Excitação Simultânea (MIMO) Aleatória .....	75
6.3.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares de 4GDL. ....	78
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA OS PRÓXIMOS TRABALHOS .....	80
7.1. Conclusões .....	80
7.2 Sugestões para os próximos trabalhos.....	82
Referências Bibliográficas .....	83
ANEXO A – Sistema 1GDL .....	85
A.1 Sistema Linear .....	85

A.2 Sistema Não Linear .....	86
ANEXO B – Sistema 2GDL .....	88
B.1 Sistema Linear .....	88
B.2 Sistema Não Linear .....	90
ANEXO C – Sistema 4GDL .....	93
C.1 Sistema Linear .....	93
C.2 Sistema Não Linear .....	98

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 Aspectos práticos**

O desenvolvimento de um produto seja de alta performance ou não, requer a verificação de sua capacidade de resistir às condições da realidade. Na indústria automobilística esta questão é essencial dada às necessidades de segurança, desempenho, conforto e durabilidade. Nesta busca submetem-se veículos e seus componentes, a provas em pista que por muitas vezes devem ser repetidas, implicando em longos períodos de teste e alto custo de desenvolvimento. Para minimizar estas dificuldades as engenharias realizam cada vez mais simulações virtuais com modelos matemáticos e simulações físicas, com protótipos de veículos ou com subconjuntos montados em laboratório. Estes são submetidos a ciclos de carga em atuadores hidráulicos, visando reproduzir as condições de campo e contribuindo para aproximar os conceitos ao produto final de mercado.

A realização destes testes com eficiência passa pelo conhecimento dos esforços que os veículos sofrem na realidade, de modo que estas grandezas possam ser aplicadas pelas engenharias, em pontos específicos dos modelos e das estruturas físicas.

As respostas percebidas em uma estrutura ou veículo são de fácil medição em campo, através de instrumentos como transdutores de curso, acelerômetros e outros, instalados em pontos determinados. A metodologia para isto é bastante difundida na indústria e sua análise e lógica é de fácil entendimento. No entanto não basta conhecer os efeitos ou respostas medidas, pois dada a não linearidade das estruturas utilizadas em veículos, não se consegue somente com estas informações simular as condições da realidade com eficiência, sendo necessário, portanto conhecer as entradas, ou seja, os sinais de excitação original da estrutura, também chamados de sinais de pista.

Esta questão passa pela resolução do sistema de equações não lineares que representam a estrutura do veículo e seu comportamento dinâmico. Para isto algoritmos foram desenvolvidos e são utilizados em equipamentos de testes conhecidos como “hidropulse” ou “four poster”. Neste trabalho propõe-se um algoritmo que trata o sistema não linear como linear, utiliza funções de resposta em frequência, para o cálculo do sinal de excitação estimado e realiza iterações utilizando parcelas desta excitação para a minimização do erro entre o sinal procurado e o sinal obtido. Todo o trabalho é desenvolvido através de simulações em computador onde o sinal de pista real que se procura, é um sinal aleatório sintético (“sinal de pista” chamado de sinal original). A solução dos sistemas não lineares é obtida através de um integrador numérico Runge Kutta, vtb9\_3, do “software” Matlab, que trabalha com passo fixo de integração. Os fatores importantes para o sucesso da convergência deste tipo de algoritmo são discutidos, como: a escolha do sinal utilizado para a identificação do sistema, o cálculo da função de resposta em frequência; o nível de não linearidade do sistema, e a qualidade da aquisição do sinal de resposta medido através da variação da relação sinal ruído. Estuda-se também a minimização do erro para otimização da solução do sistema não linear, que é realizada comparando a norma euclidiana de cada grau de liberdade.

Por fim, propõe se um algoritmo, que deve contribuir para o conhecimento do comportamento dinâmico de sistemas não lineares utilizados em veículos, além de revelar os sinais de excitação a que estes são submetidos em pista.

## **1.2 Objetivo**

Este trabalho propõe desenvolver um algoritmo capaz de identificar a excitação de entrada, responsável pelas respostas dinâmicas medidas em sistemas físicos reais. Tal algoritmo contribuirá para a compreensão do processo de identificação inversa de força e para a realização de simulações físicas em laboratório de teste, que reproduzam eventos ocorridos em rotas urbanas e testes de campo com veículos.

## **2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA**

O problema examinado é o de como reproduzir em laboratório uma excitação a que um veículo é submetido em pista, conhecido como problema inverso.

Tentativas foram realizadas no passado com o objetivo de se levantar o sinal que correspondesse ao perfil da pista. Como já mencionado, a simples medição de parâmetros de resposta, como a aceleração ou deslocamento realizadas em campo, não garantem o conhecimento das entradas no sistema (perfil da pista). As não linearidades do sistema dificultaram a obtenção de um modelo, que possa mostrar uma boa correlação entre as respostas medidas no campo e as experimentadas nas bancadas de teste. Um método bastante utilizado é o de submeter subconjuntos e componentes a testes padronizados de durabilidade e fadiga em laboratório, que prescrevem ciclos de cargas aplicadas com amplitudes e frequências constantes, ou mesmo com variação de frequência, cobrindo faixas que se supõe estarem próximas daquelas encontradas no campo. No entanto este método não garante a reprodução de todas as condições de campo, o que recai na necessidade de uma homologação do veículo completo em campo e ou na reprodução desta em laboratório.

A seguir o problema da busca do perfil da pista de teste, é analisado utilizando o conceito de identificação inversa de forças, e resolvido em simulação computacional através de um algoritmo que converte dados de resposta do sistema em informações de entrada do mesmo.

### **3 REVISÃO DA LITERATURA**

Um problema inverso pode ser definido como uma forma ou um método utilizado para converter um conjunto de dados observados em informações sobre um sistema de interesse. Isto se faz útil à medida que desejamos obter informações que não conseguimos medir diretamente. Os primeiros trabalhos no campo do problema inverso são datados de 1907 quando Wiechert e Herglotz, interessados na teoria dos abalos sísmicos, desenvolveram um método para determinar a distribuição da velocidade no interior da Terra a partir de informações conhecidas sobre as ondas sísmicas. Em 1929 o físico Viktor Ambartsumian, levantou a questão sobre a possibilidade de se encontrar as equações a que uma família de autovalores pertence, quando apenas estes são conhecidos.

Atualmente a teoria do problema inverso é amplamente utilizada em vários ramos da ciência como: a matemática, a estatística, a ciência da imagem, a geofísica e outros.

A identificação das forças que agem em um veículo quando em pista, a partir do conhecimento das respostas deste sistema é também um problema inverso.

A identificação inversa de força ganha impulso considerável nos anos 70 com o desenvolvimento da tecnologia associada sistemas hidráulicos com atuadores mais sofisticados, controlados eletronicamente através de servo-válvulas.

Empresas como a Instrom-Schenck e MTS desenvolveram equipamentos de teste que atualmente são bastante utilizados pelos laboratórios de desenvolvimento de produtos e veículos. O conceito do método aqui utilizado esta baseado nos seis passos apresentados na publicação MTS “*Introduction to RPC*” Murphy (2010).

Em pesquisa percebe-se que nos últimos anos trabalhos como De Cuyper et al., (1998), Roberts e Hay (2005), e Nordberg (2004), estudam o conceito da identificação inversa de força, abordando técnicas e métodos diferentes sobre o assunto.

O conceito do algoritmo que procura as forças de entrada responsáveis por uma resposta medida é abordado no Brasil por Siqueira (1989), onde o autor realiza simulações em computador do comportamento dinâmico de estruturas lineares ou não, utilizando o integrador de Newmark escrito em linguagem C. Experimentos, com um protótipo simples são realizados, onde é possível observar os limites do algoritmo através da variação das não linearidades do protótipo construído. Os fatores importantes para o sucesso da convergência deste tipo de algoritmo, são discutidos, como a escolha do sinal utilizado para o cálculo da função de resposta em frequência, levando em consideração suas amplitudes e fases, e seus efeitos no grau de não linearidade resultante. Dado a excelente didática apresentada por este autor, o mesmo servirá como linha mestra para o desenvolvimento deste trabalho.

Enquanto muitos autores trabalham no processo de otimização do algoritmo, Roberts e Hay (2005) procuram atacar o problema da não linearidade reformulando o como um sistema de equações algébricas não lineares. Com este intuito realizam uma “discretização” da equação do movimento do sistema, de modo a obter um sistema de equações algébricas não lineares. Esta abordagem matemática permite a aplicação de técnicas alternativas de solução obtendo melhores performances do algoritmo através da escolha do ganho (incremento) usado a cada iteração.

Algumas técnicas interessantes podem ser encontradas pesquisando o programa computacional comercializado pela LMS International's, o TWR (“Time Waveform Replication Monitor”) desenvolvido por De Cuyper et al., (1998). Estes dispensaram uma atenção especial para a identificação do sistema, ou seja, o cálculo da Função de Resposta em Frequência (FRF). Em princípio calcula-se a função de coerência múltipla que dará uma indicação da qualidade da FRF medida. Sabe-se que um baixo valor da função de coerência pode ser devido a não linearidades, a ruídos externos ou a uma matriz de excitação linearmente dependente (singular). Nestes casos recalcula-se o sinal de excitação, levando em consideração que o sinal deve excitar o sistema no mesmo nível de amplitude e fase ocorrida na medição original de pista e que o sinal deve ser uma matriz ou vetor, linearmente independente. Ainda com relação ao cálculo da FRF, estes autores propõem um processo iterativo onde varias FRFs são calculadas consecutivamente para que através da média das FRF e da função de coerência se obtenha a FRF que melhor representa o sistema. Primeiramente De Cuyper et al., (1998), obtém uma FRF utilizando um sinal de

excitação que conjuga baixa e alta frequência e posteriormente através de sinais de excitação que são obtidos através da multiplicação da resposta original procurada com a inversa da FRF anteriormente calculada. Neste processo, a FRF que difere muito da anteriormente calculada, é descartada e a FRF que se aproxima da anteriormente é preservada para o cálculo de uma FRF média. O critério utilizado para descartar ou preservar a FRF recém calculada é um critério baseado na qualidade da FRF, através da avaliação da função de coerência desta FRF. Assim sendo, a FRF que tiver uma função de coerência mais próxima de 1, tem seu valor ponderadamente “privilegiado” com relação a uma anteriormente calculada. Este processo é feito comparando os valores de função de coerência para cada frequência, e a partir desta comparação se pondera a melhor FRF para cada frequência, da menor até a maior frequência. O resultado é uma FRF de boa qualidade. O processo estabiliza após varias iterações que são realizadas utilizando grupos de excitações de forma aleatória.

Alternativamente a utilização da FRF, De Cuyper et al., (1998), abordam também os benefícios da utilização de modelos no domínio do tempo. Os modelos obtidos no domínio do tempo são modelos paramétricos. Isto significa que o modelo no domínio do tempo descreve o sistema com um número limitado de parâmetros, ao invés de uma matriz de números complexos para cada linha de frequência, como nos casos da FRF. Duas principais técnicas são utilizadas: modelos de entrada e saída e modelos em espaço de estado.

A transformada de wavelet é utilizada por Nordberg (2004), que através da aceleração vertical do eixo da roda e da velocidade do veículo chega ao deslocamento vertical do eixo em função do deslocamento horizontal do veículo na pista. Utiliza-se então este sinal para obter uma primeira estimativa de sinal de excitação do veículo, por meio de decomposição de wavelet. Esta primeira estimativa é usada no algoritmo de Lavenberg-Marquardt, para minimizar o erro entre o valor de resposta medido e o estimado. Nesse trabalho, Nordberg (2004), obtêm seus resultados através de simulações por meio de um modelo de veículo, construído em um Simulador Multi-Corpos (MBS), ADAMS/Car.

## 4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 4.1 Sistemas Lineares

A questão da linearidade de um sistema esta intimamente ligada à faixa de operação do mesmo, pois a relação entre a excitação de entrada e a resposta pode se alterar em função da faixa de operação do mesmo. Um simples sistema massa mola pode operar linearmente até certo ponto de compressão ou distensão da mola e passar a operar não linearmente a partir deste ponto. O clássico exemplo do pêndulo pode ser estudado de forma linear, se e somente se a amplitude do ângulo  $\psi$ , formado entre a vertical e a haste mantém-se suficientemente pequena de modo que seja possível assumir  $\text{sen}(\psi)$  igual a  $\psi$ . Mas o mesmo sistema se torna não linear para valores maiores do que este.

Conforme comentado a solução do problema analisado neste trabalho, passa pela solução de sistemas não lineares que representam a estrutura ou o veículo em estudo. A seguir apresentam-se fundamentos teóricos sobre sistemas lineares e não lineares que servirão de base para a apresentação do método proposto.

Se  $\mathbf{y}_1(t)$  e  $\mathbf{y}_2(t)$  são respostas de um sistema, funções de uma variável independente  $t$ , quando  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $\mathbf{x}_2(t)$  são respectivamente suas entradas, também funções de uma variável independente  $t$ , então o sistema é linear se e somente se

$$U(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)) = U(\mathbf{x}_1(t)) + U(\mathbf{x}_2(t)) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \quad (1)$$

e

$$U(a\mathbf{x}(t)) = aU(\mathbf{x}(t)) = a\mathbf{y}(t) \quad (2)$$

onde  $a$ , é uma constante arbitraria e  $t$  na maioria das aplicações é o tempo.

A primeira propriedade é chamada propriedade aditiva e a segunda é chamada de propriedade homogênea. Estas duas propriedades podem ser combinadas no princípio da superposição, determinado como

$$U(ax_1(t) + bx_2(t)) = aU(x_1(t)) + bU(x_2(t)) \quad (3)$$

para constantes arbitrárias  $a$  e  $b$ .

### 4.1.1. Sistemas Invariantes no Tempo

Um sistema invariante no tempo é aquele em que um atraso ou avanço de uma seqüência de entradas causa um atraso ou avanço de uma seqüência de saídas. Mais especificamente o sistema transforma valores de uma seqüência  $x(t)$  em uma seqüência de saída com valores de  $y(t)$ .

### 4.1.2. Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Sistemas que combinam as duas propriedades, ou seja, lineares e invariantes no tempo são particularmente importantes, pois a relação entre suas entradas e saídas podem ser definidas pela convolução no domínio do tempo,

$$y(t) = h(t) * x(t), \quad (4)$$

indicado como uma seqüência de valores de entrada  $x(t)$  é transformado em uma seqüência de valores de saída quando passa através do sistema  $h(t)$ .

Assim considerando  $x(t)$  como um vetor de força com valores tomados no tempo, aplicado em um determinado ponto e com uma determinada direção em um sistema mecânico  $h(t)$ , obteremos um vetor de saída com uma seqüência de valores de deslocamentos  $y(t)$  também em função do tempo.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{x}(t) \quad (5)$$

Usando a notação para matrizes e aplicando a transformada de Fourier na equação acima temos:

$$[\mathbf{Y}(\omega)] = [\mathbf{H}(\omega)] \cdot [\mathbf{X}(\omega)], \quad (6)$$

onde  $\omega$  é a variável frequência angular. Assim para sistemas lineares invariantes no tempo podemos definir a função de resposta em frequência  $[H(\omega)]$ , que estabelece no domínio da frequência a relação entre as entradas e saídas a que o sistema é submetido.

Esta relação é a base do algoritmo proposto, pois conhecendo a resposta do sistema pode se calcular os esforços a que o mesmo esta sendo submetido.

$$[\mathbf{X}(\omega)] = [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \cdot [\mathbf{Y}(\omega)] \quad (7)$$

Importante notar que a equação (7) só é possível de ser resolvida quando a função de resposta em frequência  $[H(\omega)]$  é uma matriz quadrada, ou seja, uma matriz possível de ser invertida. Para isto a quantidade de variáveis desconhecidas (pontos de aplicação da força) tem que ser igual a quantidade variáveis conhecidas (pontos de saídas monitoradas) no sistema.

No caso de um sistema de equações onde a matriz de resposta em frequência  $[H(\omega)]$ , não for uma matriz quadrada, ou seja, a quantidade de variáveis conhecidas for maior que a quantidade de variáveis desconhecidas, tem-se uma matriz  $[H(\omega)]$  retangular não possível de ser invertida. Neste caso da equação (7) deve ser manipulada de forma a obtermos um sistema de equações possível de solução.

Assim considerando  $[F(\omega)]$  uma matriz desconhecida de força, aplicada em  $j$  determinados pontos (entradas) de um sistema mecânico que varre uma faixa de frequência com  $n$  pontos. E  $[Y(\omega)]$  uma matriz conhecida de deslocamentos medidos em  $i$  pontos (saídas) deste sistema com uma faixa de frequência também de  $n$  pontos, sendo que  $i$  é maior do que  $j$  e que  $n$  (quantidade de pontos da faixa de frequência em questão), pode assumir valores como  $n=1; 2; 3...$ , temos:

$$[\mathbf{Y}(\boldsymbol{\omega})]_{(i \times n)} = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]_{(i \times j)} \cdot [\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})]_{(j \times n)} \quad (8)$$

Analisando a equação para cada faixa de frequência e utilizando a notação simplificada abaixo:

$$[\mathbf{Y}]_{(i \times 1)} = [\mathbf{H}]_{(i \times j)} \cdot [\mathbf{F}]_{(j \times 1)} \quad (9)$$

e pré-multiplicando a equação (9) pela transposta da matriz de resposta em frequência conforme sugerido por Siqueira (1989), temos:

$$[\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{Y}]_{(i \times 1)} = [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{H}]_{(i \times j)} [\mathbf{F}]_{(j \times 1)} \quad (10)$$

O termo

$$[\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t \cdot [\mathbf{H}]_{(i \times j)} = [\mathbf{H}]_{(j \times j)}, \quad (11)$$

resulta em uma matriz quadrada. Com o objetivo de encontrar  $[\mathbf{F}]_{(j \times 1)}$ , podemos pré-multiplicar a equação (10) pela inversa desta matriz quadrada resultante de (11).

$$[\mathbf{H}]_{(j \times j)}^{-1} [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{Y}]_{(i \times 1)} = [\mathbf{H}]_{(j \times j)}^{-1} [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{H}]_{(i \times j)} [\mathbf{F}]_{(j \times 1)}, \quad (12)$$

podemos agora isolar o termo procurado,  $[\mathbf{F}]_{(j \times 1)}$ , matriz de força para obter a equação

$$[\mathbf{F}]_{(j \times 1)} = [\mathbf{H}]_{(j \times j)} \{ [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t \cdot [\mathbf{H}]_{(i \times j)} \}^{-1} [\mathbf{H}]_{(j \times j)}^{-1} [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{Y}]_{(i \times 1)} \quad (13)$$

$$[\mathbf{F}]_{(j \times 1)} = \mathbf{I} \cdot \{ [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t \cdot [\mathbf{H}]_{(i \times j)} \}^{-1} [\mathbf{H}]_{(j \times i)}^t [\mathbf{Y}]_{(i \times 1)} \quad (14)$$

Ou seja:

$$[\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})]_{(j \times 1)} = \mathbf{I} \cdot \{[\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]_{(j \times i)}^t \cdot [\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]_{(i \times j)}\}^{-1} [\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]_{(j \times i)}^t [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\omega})]_{(i \times 1)} \quad (15)$$

Esta equação torna possível a solução do sistema de equações quando a matriz de função de resposta em frequência  $[H(\omega)]$  é retangular. Uma vez tendo calculado os esforços a que o sistema esta submetido no domínio da frequência é possível através da transformada inversa de Fourier ( $\mathcal{F}^{-1}$ ) obter os esforços em função do tempo.

$$[\mathbf{f}(t)] = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})], \quad (16)$$

onde  $\mathcal{F}^{-1}$  é a transformada inversa de Fourier de  $[F(\omega)]$ , uma matriz de força de excitação.

Portanto conhecendo o sistema e as respostas do mesmo, é possível se calcular as entradas através das equações (7) e (14). Estas equações valem para os sistemas lineares, onde a resposta medida em um determinado ponto do sistema para uma determinada frequência é a soma das respostas nesta frequência, apuradas neste ponto devido a todas as entradas aplicadas ao sistema.

## 4.2 Sistemas Não Lineares

No caso de sistemas não lineares a amplitude da resposta observada em um determinado ponto para uma determinada frequência é afetada por harmônicas da frequência da excitação de entrada neste ponto como também por sub-harmônicas presentes em outras entradas. Este fato eliminaria a possibilidade de se utilizar as equações (7) e (14) para sistemas não lineares. A utilização destas implica em um erro relacionado a não linearidade do sistema. A proposta do algoritmo é que este seja capaz de aproximar o cálculo das entradas de um sistema mecânico não linear utilizando as equações (7) e (14), através de minimização de erro feitas usando de um processo iterativo.

### 4.3 Sinais Determinísticos e Aleatórios

Um Sinal pode ser definido como um meio que transporta informações sobre um fenômeno da natureza ou sobre um sistema. Estas informações podem ser grandezas que assumem valores dependentes de uma variável independente. É comum associar um sinal a uma função matemática dependente do tempo, de modo que seja possível avaliar um sistema ao longo de um período quanto o seu comportamento ou quanto o seu estado.

Os sinais determinísticos são sinais que podem ser representados por funções e equações matemáticas, sendo o sinal senoidal harmônico,  $a \cdot \text{sen}(\omega t + \beta)$ , o exemplo mais simples de um sinal determinístico, pois caracterizado por uma amplitude  $a$ , um ângulo de fase  $\beta$  e uma frequência  $\omega$ , é facilmente explicado como a projeção do movimento de rotação circular uniforme de uma partícula. Assim o valor da função matemática assume sempre o mesmo valor dentro de um determinado período de tempo  $T$ , podendo se repetir infinitamente. Isto define bem um sinal determinístico periódico.

No entanto um sinal pode não perdurar no tempo, sendo o resultado de um fenômeno que tende a zero dentro de um determinado período limitado, tais como impactos e descontinuidades de uma operação, estes são chamados de determinísticos transitórios.

De outro modo existem sinais não periódicos e não transitórios cujo comportamento no tempo futuro não é possível de ser previsto, portanto não podem ser bem representados por equações matemáticas. Estes são os sinais aleatórios e só podem ser estudados por suas propriedades estatísticas.

### 4.4 Análise de Fourier

Um sinal periódico pode não ser harmônico, ou seja, pode não ser formado por apenas uma frequência, podendo ter varias. No entanto conforme a teoria desenvolvida por *Fourier*, qualquer sinal  $x(t)$ , com um período  $T$ , pode ser representado por séries infinitas convergentes de funções harmônicas, cujas frequências são inteiros múltiplos de uma frequência fundamental  $\omega_0$ . Isto vale desde que o sinal obedeça às condições de Diritchlet:  $x(t) = x(t \mp nT)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$ , ou seja, exista e seja finito. As

freqüências representadas por inteiros múltiplos são harmônicas, com a freqüência fundamental sendo a primeira harmônica. Estas séries são conhecidas como as séries de *Fourier* e conforme Arruda e Huallpa (2008) são da forma:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)), \quad (17)$$

onde  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$  e os termos  $a_o$ ,  $a_n$  e  $b_n$ , que representam uma medida da participação das componentes das harmônicas  $\cos(n\omega_o t)$  e  $\sin(n\omega_o t)$  no sinal  $\mathbf{x}(t)$ , são obtidos através da equações:

$$a_o = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) \cos(n\omega_o t) dt, n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) \sin(n\omega_o t) dt, n = 1, 2, \dots,$$

Pode-se chegar também à forma exponencial,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_o t}, \quad (18)$$

onde,  $\alpha_n$ , é o coeficiente complexo associado a freqüência correspondente do termo da série:  $n\omega_o$  em (rad/seg), que pode ser calculado por,

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t) e^{-in\omega_o t} dt \quad (19)$$

No caso de sinais determinísticos transitórios pode-se utilizar o mesmo conceito se considerarmos um período  $T$  tendendo ao infinito, e que satisfaça as condições de

Diritchlet, em todo intervalo finito, tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$  existe e pode ser expresso da forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega \quad (20)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\omega t} dt \quad (21)$$

As equações (20) e (21) permitem transformar um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice e versa, e são conhecidas como transformada inversa e transformada de *Fourier* respectivamente.

## 4.5 Função de Autocorrelação

Como mencionado, os sinais aleatórios não podem ser previstos através de uma função matemática, ou seja, não é possível focar no detalhe do sinal como se faz com um sinal puramente determinístico, no entanto podem ser representados através de suas propriedades estatísticas. A primeira informação que se faz necessária é se o sinal é estacionário ou não. Um sinal é estacionário se as suas propriedades estatísticas (média ou média quadrática) não se alteram com o tempo. Nestes casos um sinal não pode ser pensado como uma historia temporal de um evento, mas sim como um grupo com várias. Se as propriedades médias avaliadas no tempo para qualquer sinal individual forem iguais as propriedades avaliadas a partir de médias de conjuntos, o sinal é denominado *ergótico*.

Para que as propriedades estatísticas de um sinal aleatório sejam representativas do sinal, é importante saber qual o tamanho da amostra, ou por quanto tempo amostrá-lo, o que só pode ser respondido se conhecer o quão rápido os valores das variáveis do sinal se alteram. Isto é possível através da função de autocorrelação (22), definida como a média dos produtos dos valores do sinal nos tempos  $t$  e  $(t + \tau)$ ,

$$R_{xx}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k(t) \mathbf{x}_k(t + \tau), \quad (22)$$

onde  $\tau$  é a diferença de tempo entre os valores no qual o sinal  $\mathbf{x}(t)$  foi amostrado. Pode-se também definir a função de intercorrelação (23) entre dois sinais aleatórios  $x_k$  e  $y_k$ .

$$R_{xy}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) y_k(t + \tau) \quad (23)$$

No caso do estudo de dois sinais, mede-se o grau de relação linear entre os mesmos através do coeficiente de correlação,

$$\rho_{xy}^2 = \frac{R_{xy}^2}{\varphi_x^2 \varphi_y^2} \leq 1, \text{ para sinais de média nula.} \quad (24)$$

Sendo  $\varphi_x^2$  e  $\varphi_y^2$  as médias quadráticas dos sinais.

$$\varphi_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t) \quad (25)$$

## 4.6 Densidade Espectral de Potência (DEP)

Visto que a representação de um sinal aleatório no domínio do tempo se faz através da sua função de autocorrelação (22), é possível através da transformada de Fourier desta função, representá-lo no domínio da frequência (densidade espectral de potencia), ou seja:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau \quad (26)$$

Que no caso de dois sinais é escrito como densidade espectral de potencia cruzada:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau$$

(27)

## 4.7 Identificação de Sistemas

### 4.7.1 Aspectos Gerais

Um dos desafios da engenharia mecânica é encontrar equações matemáticas que possam representar um determinado sistema mecânico que a princípio desconhecido responde de forma imprevisível a comandos de entrada. Uma forma utilizada para realizar esta representação é através da Identificação do Sistema. A identificação do sistema, também chamada por caracterização, tem por finalidade inferir sobre a relação entre a entrada e saída de um determinado sistema, o que é abordada através de equações algébricas para os casos estáticos, mas nos casos dinâmicos se faz necessário uma dependência temporal.

O trabalho aqui proposto está intimamente ligado a esta questão, visto que o objetivo é determinar os sinais de entrada através das respostas de um sistema desconhecido. Dentre as quatro formas expostas por Oliveira (1988), utilizaremos a matriz de resposta em frequência, FRF, que estabelece no domínio da frequência, uma relação única entre elementos de entrada e de saída de um sistema linear invariante no tempo

A identificação do sistema será abordada com o objetivo de servir ao processo de desenvolvimento do algoritmo e será realizada de forma experimental, ou seja, calcula-se a FRF do sistema através da multiplicação no domínio da frequência do sinal de resposta (saída) pela inversa do sinal de excitação (entrada).

### 4.7.2 Sinais de Identificação

O sinal de identificação do sistema deve possuir algumas características importantes, a saber:

- Possuir um baixo fator de pico, ou seja, a diferença entre as amplitudes máxima e mínima, dividida pela média quadrática das amplitudes, deve resultar um baixo valor. Esta característica faz com que o sinal quando utilizado para excitar o sistema minimize o efeito das não linearidades na resposta, o que contribui para uma boa identificação.
- Não ter frequências com amplitudes iguais a zero, pois isto corresponderia a respostas também iguais a zero, inviabilizando o processo de identificação.
- Ser periódico, de modo a evitar uma resposta transiente.

Este trabalho foi realizado utilizando três tipos de sinais de identificação, a saber: Impulso, Schroeder e Multisseno. A escolha esta baseada no fato destes proporcionarem respostas em faixas de frequências, próximas daquela onde acontece a resposta medida originalmente.

#### 4.7.2.1 Sinal Schroeder

O sinal de Schroeder,  $sch(t)$  é um multisseno construído no tempo, com baixo fator de pico. Para isto sugerem-se ângulos de fase adequados para cada senóide que compõe o sinal. De modo que a somatória destas senóides com fases alternadamente opostas minimize o fator de pico. Restringem-se os valores dos ângulos de fase somente aos valores 0 e  $\pi$ , resultando em um espectro simétrico com relação à linha horizontal.

Conforme Siqueira (1989) o sinal pode ser gerado através da equação:

$$sch(t) = \sum_{j=1}^{mi} \left\{ (Af) \cos \left( \frac{r * p}{T} \right) \right\} \quad (28)$$

onde  $mi$ , é a quantidade de termos (harmônicas) da serie de Fourier para o sinal de Schroeder (ou seja a quantidade de frequências que se deseja varrer),  $r$  representa a harmônica da componente de frequência,  $T$  é quantidade de pontos do vetor tempo, (ou seja o período do sinal),  $p$ , é a posição do instante  $t$ , no vetor tempo e  $Af$ , representa a amplitude da frequência, sendo calculado através da equação

$$Af = \left( 1 - 2 \left[ \frac{r^2}{(2 * mi)} \right] \text{mod}_2 \right) \quad (29)$$

onde  $\text{mod}_2$ , é um operador que calcula o resto da divisão entre os termos de dentro do colchete, garantindo um valor para  $Af$  igual a 1 ou -1.

Elaborou-se uma rotina para o cálculo do sinal de Schroeder no Matlab, possibilitando variar a faixa de frequência através da modulação da quantidade de termos da série, onde  $mi$  assume valores sempre menores do que a metade da quantidade de pontos do vetor de tempo. Isto possibilita que a frequência máxima do sinal de Schroeder seja sempre menor que a metade da frequência de amostragem adotada, obedecendo ao Teorema de Amostragem de Nyquits, onde,  $f_{am} \geq 2,5f_{max}$ , sendo  $f_{am}$ , a frequência de amostragem e  $f_{max}$  a frequência máxima do sinal.

Abaixo apresenta-se o sinal de excitação Schroeder (obtido através da rotina elaborada), utilizado no processo de identificação dos sistemas nas simulações do capítulo 6.

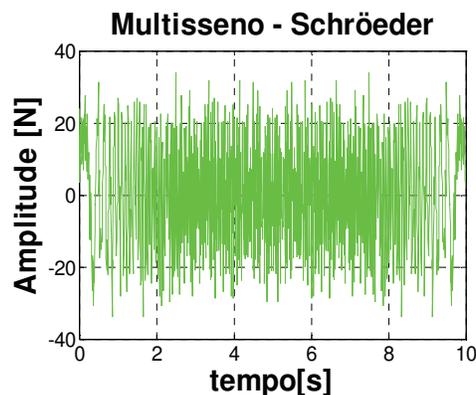


Figura 1 – Sinal de identificação do sistema: Schroeder.

É possível observar através de simulações apresentadas no capítulo 6, que o algoritmo proposto apresenta uma boa eficiência para valores de  $mi$  (frequência máxima do sinal de identificação), que possibilitam a relação de frequência de amostragem dividida por  $mi$  maior igual a 2,5.

#### 4.7.2.2 Sinal Multisseno

O sinal multisseno pode ser gerado através do comando “chirp” do Matlab. Trata-se de uma função que gera um sinal a partir de uma varredura linear de frequências para instantes do vetor de tempo definido por  $t$ . O sinal  $x$  (chirp), é obtido através da linha de comando:

$$x = chirp(t, \omega_0, t_1, \omega_1) \quad (30)$$

onde a frequência para o instante  $t = 0$  é  $\omega_0$  em Hertz e a frequência  $\omega_1$ , é atingida no instante  $t_1$ . Sendo  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , arbitradas conforme a faixa de frequência que se quer analisar.

Abaixo se apresenta o sinal excitação multisseno (chirp), obtido através da função do Matlab descrita acima, utilizado no o processo de identificação dos sistemas nas simulações do capítulo 6.

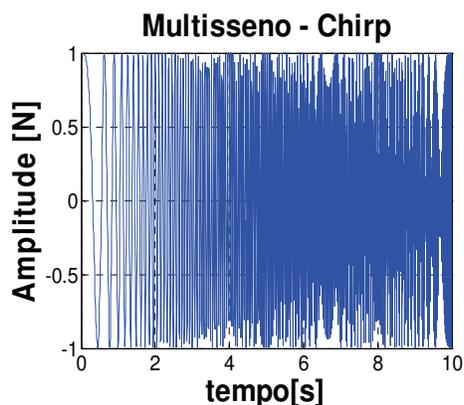


Figura 2 – Sinal de identificação do tipo Multisseno (chirp).

## 5 MÉTODO PROPOSTO

### 5.1. Considerações sobre o Método Proposto

O sinal de excitação capaz de reproduzir respostas dinâmicas medidas, é estimado com base na relação da equação (5), entre a entrada  $x(t)$  e a saída,  $y(t)$ , para sistemas lineares, ou seja:

$$y(t) = h(t) * x(t), \quad (31)$$

onde,  $h(t)$  é a função resposta ao impulso e (\*) representa um produto de “convolução”. Apesar dos sistemas estudados não serem lineares, trata-os como lineares; tratativa conveniente para que através dela se obtenham respostas, que mesmo não correspondendo as respostas reais não lineares, serão utilizadas no processo de otimização do algoritmo até que se aproximem das respostas reais, dentro de uma faixa de tolerância especificada e satisfatória para o estudo.

Considerando  $x(t)$  como um vetor de força com valores tomados no tempo, aplicado em um determinado ponto em um sistema mecânico  $h(t)$ , obteremos um vetor de saída com uma seqüência de valores de deslocamentos  $y(t)$  também em função do tempo.

Aplicando a transformada de Fourier na equação (31) temos

$$Y(\omega) = H(\omega).X(\omega), \quad (32)$$

onde  $\omega$  é a variável frequência em radianos/segundos. Assim para sistemas lineares invariantes no tempo podemos definir a função de resposta em frequência  $H(\omega)$ , que

estabelece no domínio da frequência a relação entre as entradas e saídas a que o sistema é submetido.

Esta relação é a base do algoritmo proposto, pois conhecendo a resposta do sistema pode se calcular os esforços a que o mesmo esta sendo submetido.

$$X(\omega) = (H(\omega))^{-1} \cdot Y(\omega) \quad (33)$$

Com o objetivo de desenvolver o algoritmo iniciou-se os trabalhos com modelos lineares do tipo massa e mola, com um grau de liberdade. Desta forma pôde-se certificar a correta lógica do processo. Feito isto, modificou-se o sistema introduzindo não linearidades de modo a forçar a busca da variável procurada. Aumentou-se a quantidade de graus de liberdade passando-se de um para dois GDL de forma a comprovar a lógica do algoritmo também para vários graus de liberdade. A necessidade de desenvolvimento do algoritmo trouxe também a necessidade de conhecer o comportamento dinâmico dos sistemas e a análise deste comportamento quando submetidos a diferentes tipos de sinais, assim utilizou-se não só de sinais com apenas uma frequência de excitação do tipo senóides, como também de sinais compostos por mais de uma frequência.

## 5.2. Algoritmo Proposto

### 5.2.1 Metodologia

Para melhor entender o método é interessante retornar ao problema em questão, que é “identificar a excitação de entrada, responsável pela resposta observada em um sistema não linear”. Ou seja, a partir de uma resposta medida, estimar a entrada relacionada.

Sendo  $Y_o(\omega)$ , a resposta no domínio da frequência observada de um sistema não linear, e considerando que se quer saber a excitação de entrada  $F(\omega)$ , responsável por esta

resposta, a primeira idéia para solução seria utilizar a equação (33), caso este sistema fosse linear e sua função de resposta em frequência  $\mathbf{H}(\omega)$  fosse conhecida. No entanto como mencionado, o sistema não é linear e logo não possui uma função de resposta em frequência. Neste momento vale-se convenientemente do principal artifício do método, que é: tratar um sistema não linear como um sistema linear e assim calcular uma função de resposta em frequência,  $\mathbf{H}'(\omega)$  que representaria fielmente o sistema se este fosse linear. Este artifício de cálculo introduz um erro em  $\mathbf{H}'(\omega)$ . O método serve para minimizar esse erro de forma iterativa. O cálculo é feito utilizando o processo de identificação para sistemas lineares, onde se excita o sistema real,  $\mathbf{H}(\omega)$ , com um sinal de identificação,  $\mathbf{F}_i(\omega)$ , colhe-se uma resposta,  $\mathbf{Y}_i(\omega)$  e calcula-se  $\mathbf{H}'(\omega)$ . Aqui cabe ressaltar que este processo é experimental e que o sistema real,  $\mathbf{H}(\omega)$ , pode ser interpretado como uma estrutura ou um veículo sendo excitado por um atuador hidráulico e sua resposta sendo medida por um sensor de deslocamento.

$$\mathbf{H}'(\omega) = \mathbf{Y}_i(\omega) \cdot (\mathbf{F}_i(\omega))^{-1} \quad (34)$$

Considerando-se que agora temos uma função de resposta em frequência,  $\mathbf{H}'(\omega)$ , que “representa” o sistema e que conhecemos uma resposta original observada,  $\mathbf{Y}_o(\omega)$  deste sistema, podemos então calcular uma primeira estimativa de excitação de entrada,  $\mathbf{F}_e(\omega)$ ,

$$(\mathbf{H}'(\omega))^{-1} \cdot \mathbf{Y}_o(\omega) = \mathbf{F}_e(\omega). \quad (35)$$

Esta excitação de entrada,  $\mathbf{F}_e(\omega)$  calculada é dita estimada porque carrega o erro da não linearidade, pois a função de resposta em frequência,  $\mathbf{H}'(\omega)$  utilizada não representa fielmente o sistema. Esta tratativa é intencional e sabe-se que através dela a excitação estimada não corresponde àquela capaz de gerar a mesma resposta original observada. Portanto, inicia-se o processo de busca da excitação de entrada estimada que reproduza a resposta original observada.

Aplica-se então esta excitação estimada obtida inicialmente ao sistema real  $\mathbf{H}(\omega)$ , e mede-se agora uma resposta estimada  $\mathbf{Y}_e(\omega)$ . Mais uma vez cabe ressaltar que esta

operação é física e que o sistema real,  $H(\omega)$ , não é uma função conhecida, a excitação e a obtenção da resposta são experimentais.

$$H(\omega) \cdot F_e(\omega) = Y_e(\omega) \quad (36)$$

Neste momento temos condições de comparar a resposta originalmente observada,  $Y_o(\omega)$ , e a resposta estimada  $Y_e(\omega)$  através do método. Deste modo calcula-se a diferença ou erro entre elas, chamando esta diferença de,  $Y_{dif}(\omega)$ .

$$Y_{dif}(\omega) = Y_o(\omega) - Y_e(\omega) \quad (37)$$

Conhecendo a diferença,  $Y_{dif}(\omega)$ , entre a resposta original e a resposta estimada, é intuitivo supor que seja possível calcular a parcela da excitação que corrige esta diferença. Deste modo, com este valor,  $Y_{dif}(\omega)$ , e com a inversa da função de resposta em frequência  $H'(\omega)^{-1}$ , calcula-se então uma excitação de correção,  $F_{cr}(\omega)$  utilizando a equação (35),

$$H'(\omega)^{-1} \cdot Y_{dif}(\omega) = F_{cr}(\omega), \quad (38)$$

$F_{cr}(\omega)$  deve ser a parcela que adicionada à excitação estimada, (previamente calculada), completa a excitação de entrada que soluciona o problema, ou seja, compõe a excitação de entrada que quando aplicada ao sistema reproduz uma resposta original observada  $Y_o(\omega)$ . Deste modo adiciona-se  $F_{cr}(\omega)$  à primeira excitação estimada,  $F_e(\omega)$ , aplica-se o resultado desta soma ao sistema real,  $H(\omega)$ , com o objetivo de obter uma nova resposta estimada agora possivelmente mais próxima da resposta originalmente observada.

$$H(\omega) \cdot (F_{cr}(\omega) + F_e(\omega)) = Y_e(\omega) \quad (39)$$

O processo é repetido quantas vezes forem necessárias, a fim de se aproximar a resposta estimada da resposta original observada dentro de uma tolerância aceitável.

A seguir representa-se o método considerando o caso de um veículo instrumentado, submetido a uma pista de teste, onde se mede a resposta original em deslocamento. A seguir o veículo é levado ao laboratório para o processo de identificação (cálculo da função de resposta em frequência  $H'(\omega)$ ). E posteriormente realiza-se o processo de busca da excitação de entrada estimada, através da minimização da diferença entre a resposta original medida e a resposta estimada (erro). A figura 3 mostra a representação do método passo a passo e esta baseada no conceito do RPC da MTS, Murphy (2010).

Passos do Método Proposto conforme figura 3:

Passo 1 – Mede-se a resposta original (deslocamento) de um veículo real instrumentado e submetido a uma pista de teste;

Passo 2 – Leva-se o veículo a um laboratório onde o mesmo é submetido a uma excitação de identificação, colhe-se uma resposta da identificação e calcula-se uma função de resposta em frequência considerando o sistema como linear;

Passo 3 – Utilizando a função de resposta em frequência calculada e a resposta original medida, calcula-se uma primeira estimativa de excitação;

Passo 4 – Utilizando esta primeira estimativa de excitação, excita-se o veículo em laboratório e mede-se uma primeira resposta estimada; Importante considerar apenas uma parcela da primeira excitação, pois se utilizarmos toda a amplitude do sinal corre-se o risco de danificar a estrutura do veículo, visto que a primeira estimativa pode conter um erro muito alto;

Passo 5 – Calcula-se a diferença entre a resposta original e a primeira resposta estimada, ou seja, calcula-se o erro da primeira iteração;

Passo 6 – Utilizando a função de resposta em frequência e o erro, calcula-se a primeira excitação de correção;

Passo 7 – Utilizando o resultado da soma de uma parcela da excitação de correção com uma parcela da excitação estimada, excita-se novamente o veículo em laboratório e mede-se uma nova resposta estimada;

Passo 8 – Recalcula-se o erro, ou seja, a diferença entre a resposta original e a nova resposta estimada e verifica-se a convergência comparando este erro com um valor de tolerância aceitável definido previamente;

Passo 9 – Caso a diferença entre as respostas (erro) for maior ou igual à tolerância, realiza-se mais uma iteração, voltando ao passo 6, caso a diferença for menor do que a tolerância, significa que o processo convergiu para um valor aceitável de excitação estimada, que quando aplicada ao sistema real, em laboratório, irá reproduzir a resposta original medida em “pista de teste”;

## Método Proposto

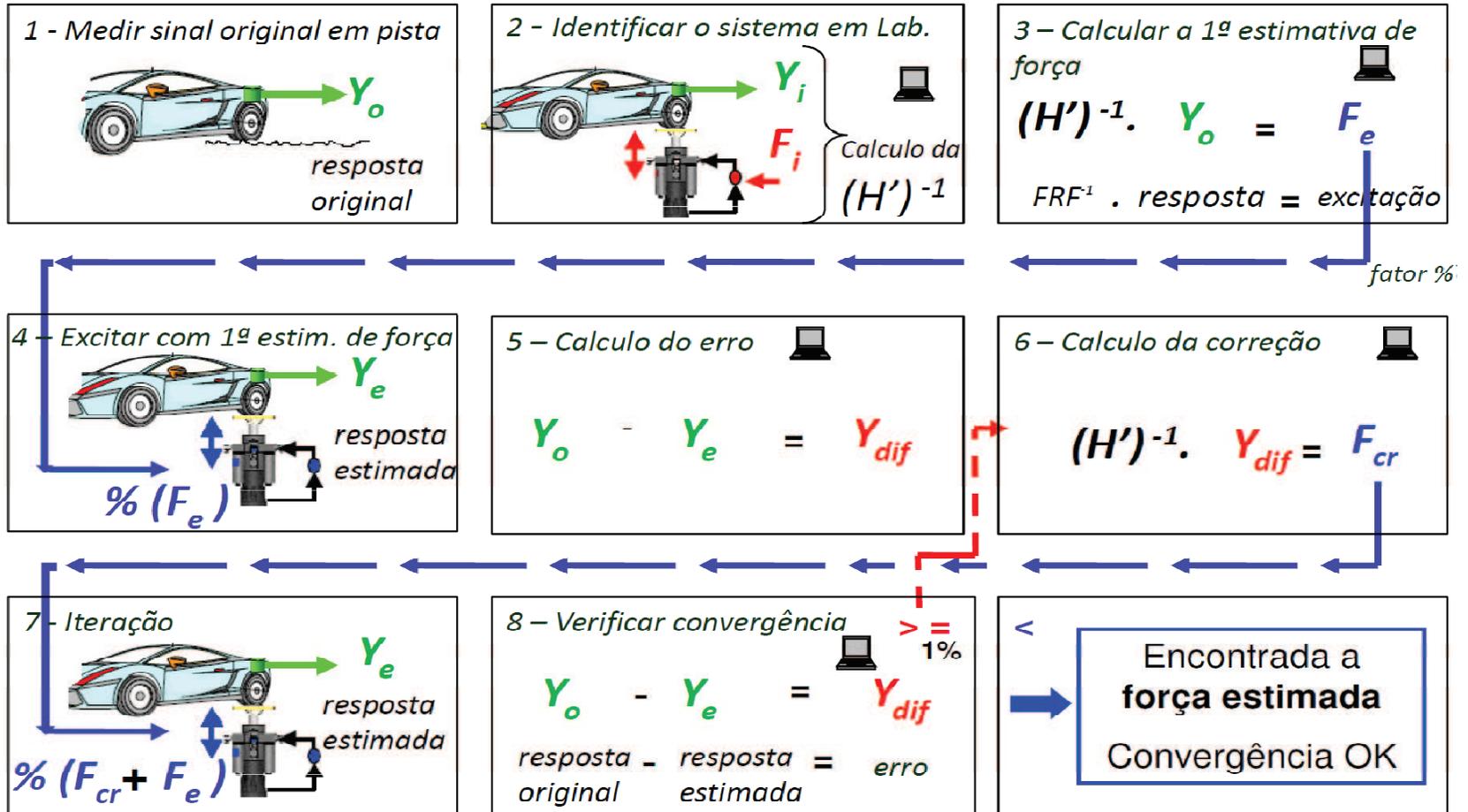


Figura 3 - Representação do Método Proposto Baseado na publicação do RPC/MTS, Murphy (2010).

A figura 3 apresenta o método de uma forma simplificada. A preparação do algoritmo proposto neste trabalho, escrito em linguagem computacional, segue o mesmo conceito, porém com algumas variações conforme descrito a seguir e representado no fluxograma da figura 4.

Passos do algoritmo proposto conforme figura 4:

1. Mede-se a resposta dinâmica original da simulação de teste em pista,  $\mathbf{y}_o(t)$ , de um sistema não linear;
2. Defini-se um valor de tolerância aceitável em termos de porcentagem para o algoritmo,  $tol$  (%), e calcula-se a Tolerância Aceitável,  $Tol$ , para o processo de busca da força estimada  $\mathbf{f}_e(t)$ . Força esta que deverá ser capaz de reproduzir no sistema a “mesma” resposta dinâmica original medida em 1;
3. Introduce-se como dado inicial, uma força de excitação estimada inicial,  $\mathbf{F}_e(\omega)$ , igual a zero, com o objetivo de servir como valor inicial para a variável do processo iterativo;
4. Aloca-se à variável diferença das respostas,  $\mathbf{y}_{dif}$ , o valor da resposta original  $\mathbf{y}_o$ , medida em 1;
5. Transforma-se a resposta original, agora alocada em  $\mathbf{y}_{dif}$ , do domínio do tempo para o domínio da frequência,  $\mathbf{Y}_{dif}$ ;
6. Realiza-se a fase de identificação do sistema:
  - a. Submete-se o sistema a uma excitação de identificação,  $\mathbf{f}_i(t)$ , ruído branco; Schroeder; multisseno ou impulso; etc.
  - b. Transforma-se a excitação de identificação,  $\mathbf{f}_i(t)$  e a resposta obtida neste processo,  $\mathbf{y}_i(t)$  do domínio do tempo para o domínio da frequência, ou seja,  $\mathbf{F}_i(\omega)$  e  $\mathbf{Y}_i(\omega)$ ;
7. Calcula-se a função de resposta em frequência do sistema, (tratativa para sistemas lineares, representada na equação (34) com a notação  $\mathbf{H}'(\omega)$ );
8. Calcula-se a força de correção,  $\mathbf{F}_{cr}(\omega)$ , utilizando a inversa da função de resposta em frequência,  $(\mathbf{H}'(\omega))^{-1}$ , calculada em 7 e a “diferença das respostas” também chamada de “erro”,  $\mathbf{Y}_{dif}(\omega)$ ;

9. Calcula-se uma nova força de excitação estimada,  $F_e(\omega)$ , através da adição da força de correção calculada,  $F_{cr}(\omega)$ , com o valor de força de excitação estimada anterior,  $F_e(\omega)$ . Sendo que na primeira vez,  $F_e(\omega)$ , tem o valor igual a zero, conforme alocado no item 3 e a partir do primeiro “looping” de iteração, assume um valor diferente de zero (valores que são calculados neste item 9, a cada iteração). Através da transformada inversa de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , obtêm-se a força estimada no domínio do tempo,  $f_e(t)$ ;
10. Utiliza-se esta força estimada,  $f_e(t)$ , para excitar novamente o sistema, agora obtendo uma resposta chamada de resposta estimada,  $y_e(t)$ ;
11. Calcula-se a diferença entre a resposta original,  $y_o(t)$ , medida em 1, e a resposta estimada,  $y_e(t)$ , calculada pelo algoritmo no item anterior e aloca-se esta diferença (erro) na variável  $ydif(t)$ ;
12. Compara-se a diferença das respostas (erro),  $ydif(t)$ , calculada no item anterior, com a Tolerância Aceitável,  $Tol$ , definida em 3;
  - a. no caso da diferença das resposta,  $ydif(t)$ , ser maior que a Tolerância Aceitável  $Tol$ , parte-se para mais uma iteração, transformando-se a diferença das respostas,  $ydif(t)$ , calculada no item 12, do domínio do tempo para o domínio da frequência. E repetem-se os itens de 8 a 12;
  - b. no caso da diferença (erro),  $ydif(t)$ , for menor que a Tolerância Aceitável,  $Tol$  encerra-se o algoritmo apresentando a mensagem : “A Força Estimada para reproduzir a Resposta Dinâmica Original foi Encontrada e esta alocada na Variável  $f_e(t)$ ”.

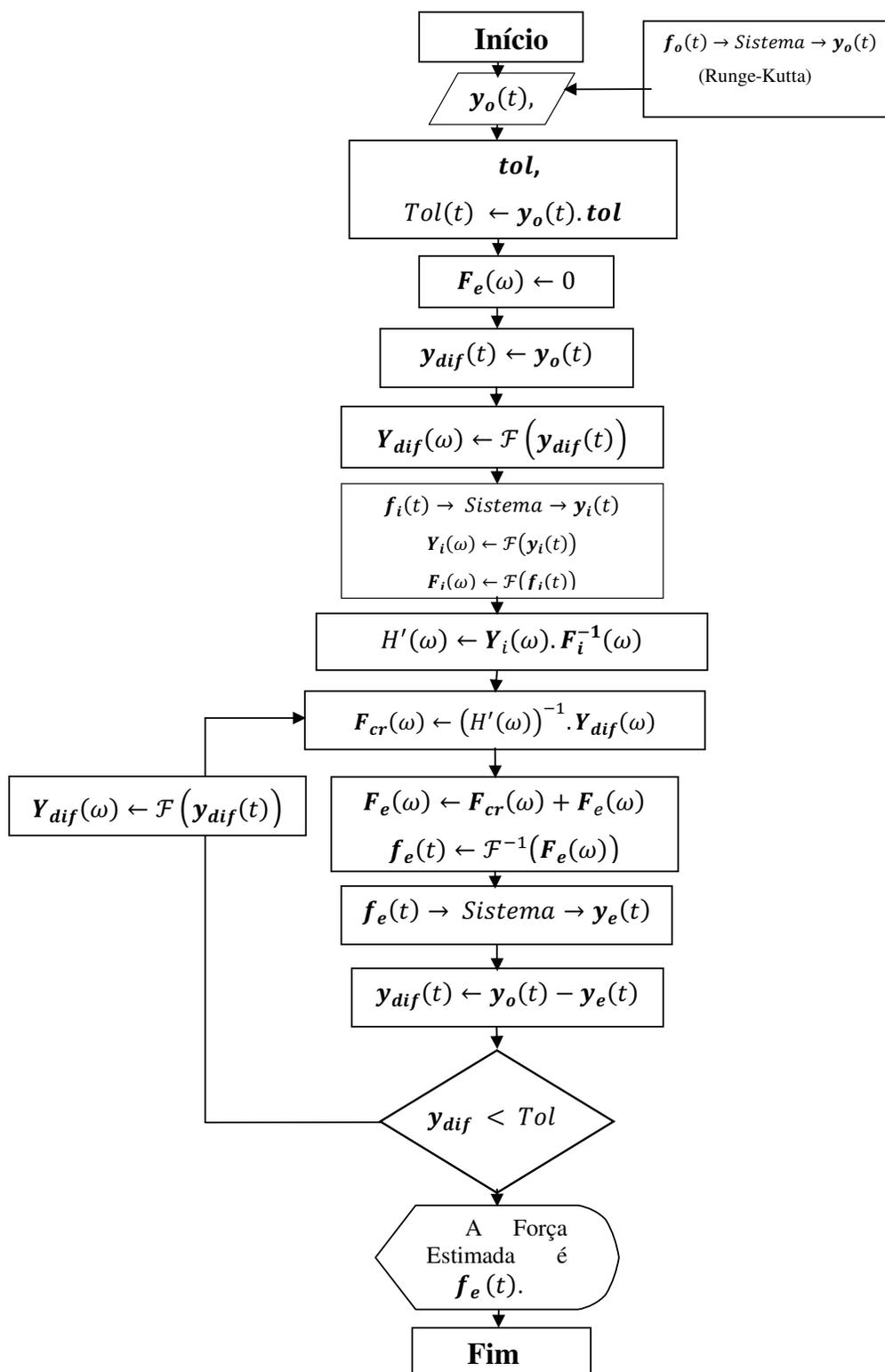


Figura 4 – Fluxograma do Algoritmo Proposto.

## 6 EXEMPLOS SIMULADOS

### 6.1. Sistemas com um grau de liberdade

#### 6.1.1. Sistema linear

Conforme já mencionado, o objetivo do algoritmo é encontrar o sinal de entrada que um sistema foi submetido a partir de uma determinada resposta conhecida.

Ou seja, a partir de uma resposta medida, calcular qual foi a entrada aplicada ao sistema.

O algoritmo deve servir para sistemas lineares e não lineares, com um ou vários graus de liberdade. No entanto dado a complexidade destes últimos, optou-se por validar a lógica do algoritmo para sistemas simples com um grau de liberdade lineares e a medida que se obteve a comprovação da eficiência, utilizou-se sistemas com mais graus de liberdade até se chegar a 4 graus. As não linearidades também foram adicionadas passo a passo utilizando molas cúbicas adicionadas em posições paralelas às molas lineares.

Como primeiro exemplo considerou-se o sistema linear massa mola com um grau de liberdade abaixo:

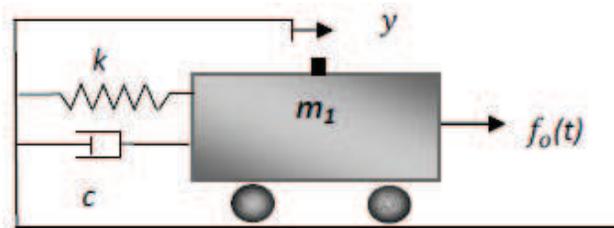


Figura 5 - Sistema linear de um grau de liberdade Linear (1GDL Linear)

Com o objetivo de simular a procura de um sinal de entrada responsável por um sinal de saída medido, escreve-se a equação do movimento do sistema.

$$m_1 \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + ky(t) = f_o(t) \quad (40)$$

O anexo A, mostra o diagrama de corpo livre do sistema 1GDL e a equação do movimento na forma de espaço de estado, que foi utilizada para solução e obtenção da resposta do sistema em função do tempo.

Considera-se como  $f_o(t)$  uma força externa de excitação aplicada em um ponto específico do sistema.

A medição do sinal de resposta seria feita fisicamente utilizando um sistema que poderia ser um veículo ou um sistema montado em bancada. No entanto como o objetivo é o desenvolvimento do algoritmo, propõe-se aqui simular a medição de resposta do sistema através do Matlab utilizando um integrador numérico de quarta ordem Runge Kutta que calcula as respostas do sistema dado o seu modelo analítico. A realização das medições em laboratório pode ser abordada futuramente como aplicação prática deste trabalho.

Assim sendo e com o objetivo de testar a eficiência do algoritmo para o sistema da figura 5, utilizou-se o integrador Runge-Kutta para simular o sistema sendo submetido a uma determinada força de excitação  $f_o(t)$ , que aqui para efeito de simulação é considerada desconhecida, e mediram-se as saídas ou respostas do sistema. Estas considerações permitem uma interação rápida para o desenvolvimento do algoritmo.

Nos itens seguintes são apresentados os resultados simulados para um sistema submetido a três tipos de força de excitação diferentes em cada exemplo, a saber: Força Aleatória (Ruído Branco); Multisseno (Chirp) e Senoidal (Cosseno); O cálculo da função de resposta em frequência foi realizado excitando o sistema, com um pulso unitário. O critério de convergência adotado pressupõe que a norma euclidiana da diferença entre a resposta original medida e a resposta estimada pelo algoritmo deve ser menor ou igual à norma euclidiana da tolerância, ou seja, uma porcentagem pequena do sinal original. No caso das simulações com o sistema de 1GDL, trabalhou-se com 10% do sinal original.

Estipulou-se um número máximo de 50 interações possíveis, sendo que acima disto assumiu-se que não houve convergência.

Nas simulações realizadas consideraram-se os seguintes parâmetros:

$m_I=100$  kg (massa do carrinho);

$k=20.000$  N/m (rigidez da mola linear);

$c=20$  N.s/m (coeficiente de amortecimento);

$dt=0,01$  s (discretização do vetor de tempo);

$df=0,1$  Hz (discretização da frequência);

$\lambda=1,0$  adimensional (parcela da força de correção adicionada a força estimada a cada interação);

$f_{am}=100$  Hz (frequência de amostragem);

Assumiram-se valores diferentes para a amplitude da força de excitação original,  $f_o$ , conforme o tipo de excitação de cada simulação, os mesmos são mostrados junto com os resultados de cada simulação.

Os resultados das tabelas e gráficos foram obtidos através do algoritmo escrito em Matlab.

#### **6.1.1.1. Excitação Original Aleatória**

A Figura 6 mostra os resultados do sistema de 1 GDL submetido a uma força de excitação original aleatória, que foi considerada um sinal determinístico para efeito do cálculo da transformada de *Fourrier*. A Figura 6a mostra o sinal da força de excitação aleatória, simulação em computador para um “sinal de pista”, aqui chamado de sinal original. A Figura 6b mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL. A Figura 6c mostra um comparativo entre a FRF desconhecida obtida através da resposta original e excitação proveniente da “pista” e a FRF obtida através da resposta a um pulso unitário. A Figura 6d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas. Neste caso a convergência acontece logo na primeira iteração confirmando a linearidade do sistema.

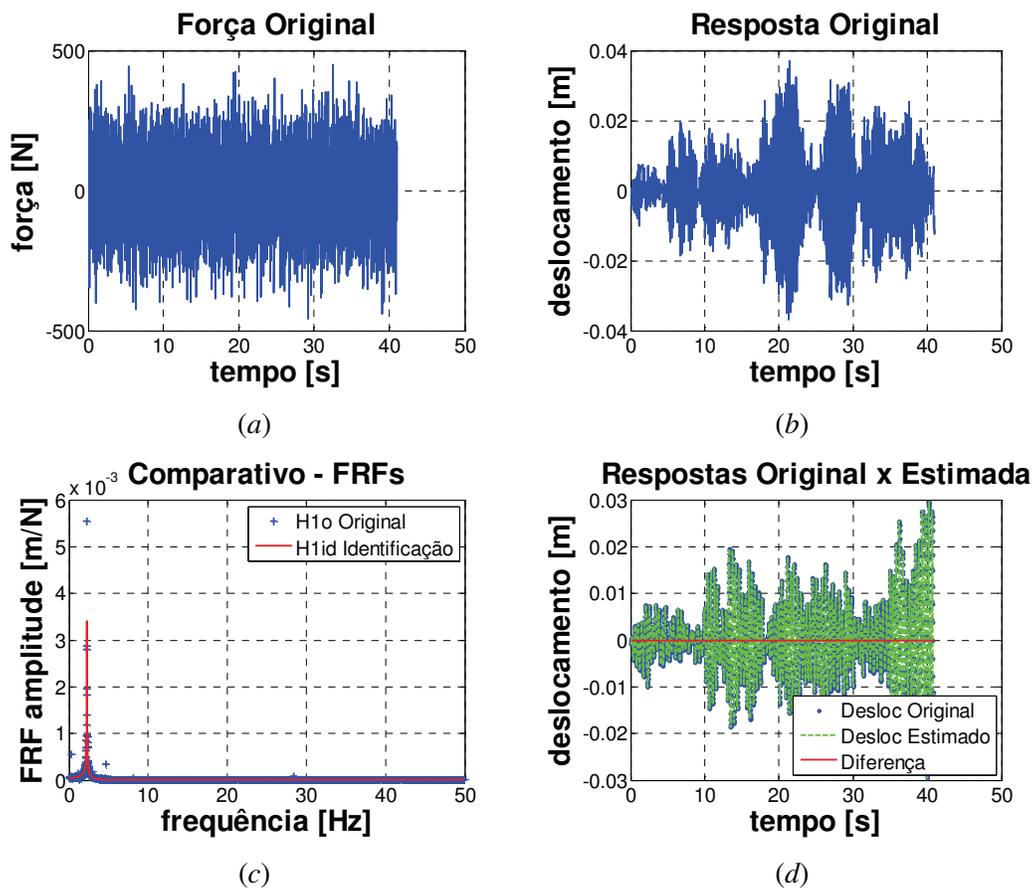


Figura 6 – Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação aleatória;  
 a) Força de excitação; b) Resposta do sistema de 1 GDL; c) Comparativo entre FRF com dados de “pista” original (sinal aleatório gerado em computador) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; d) Resposta original e estimada, e diferença das respostas.

### 6.1.1.2. Excitação Original Multisseno

A Figura 7 mostra os resultados do sistema de 1 GDL submetido a uma força de excitação original multisseno. A Figura 7a mostra o sinal da força de excitação multisseno, simulação em computador para um “sinal de pista”. A Figura 7b mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL. A Figura 7c como no item anterior mostra um comparativo entre a FRF original e a FRF obtida através da resposta a um pulso unitário. A Figura 7d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Pode-se observar

uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.

Também como no item anterior a convergência acontece logo na primeira iteração.

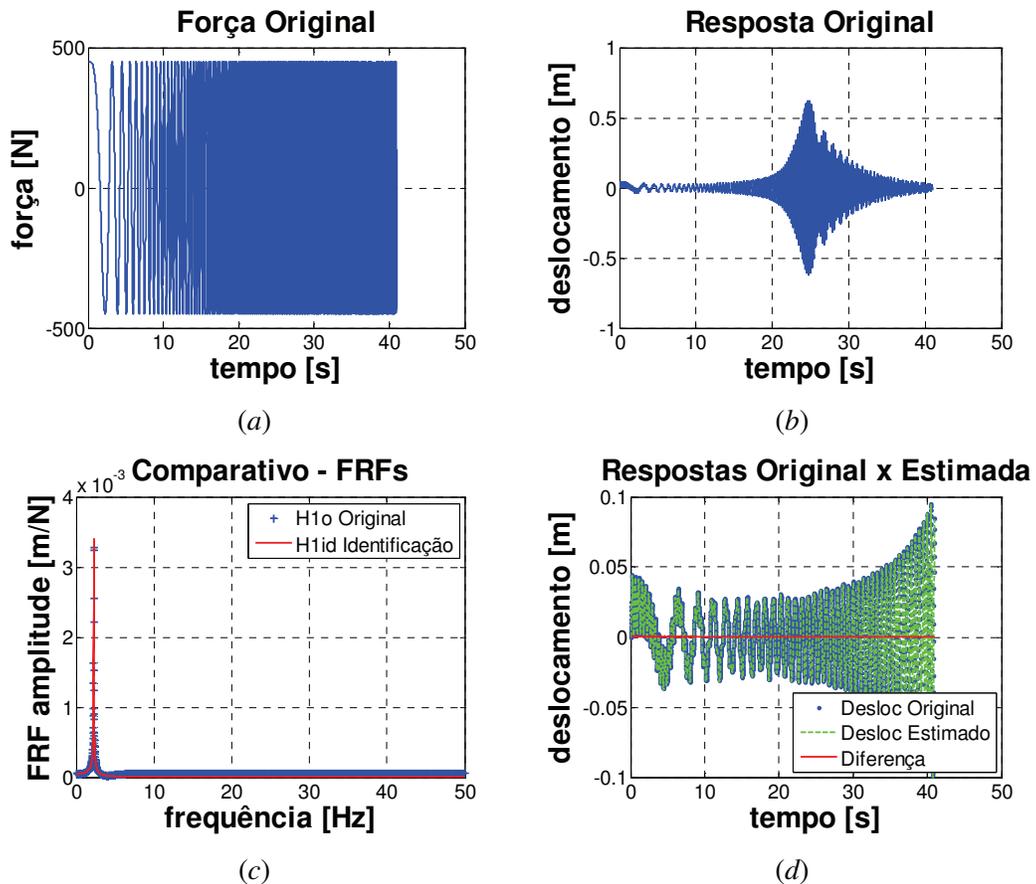


Figura 7 - Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação multissenso;  
*a)* Sinal da Força de Excitação; *b)* Resposta do sistema de 1 GDL; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; *d)* Resposta original e estimada, e diferença das respostas.

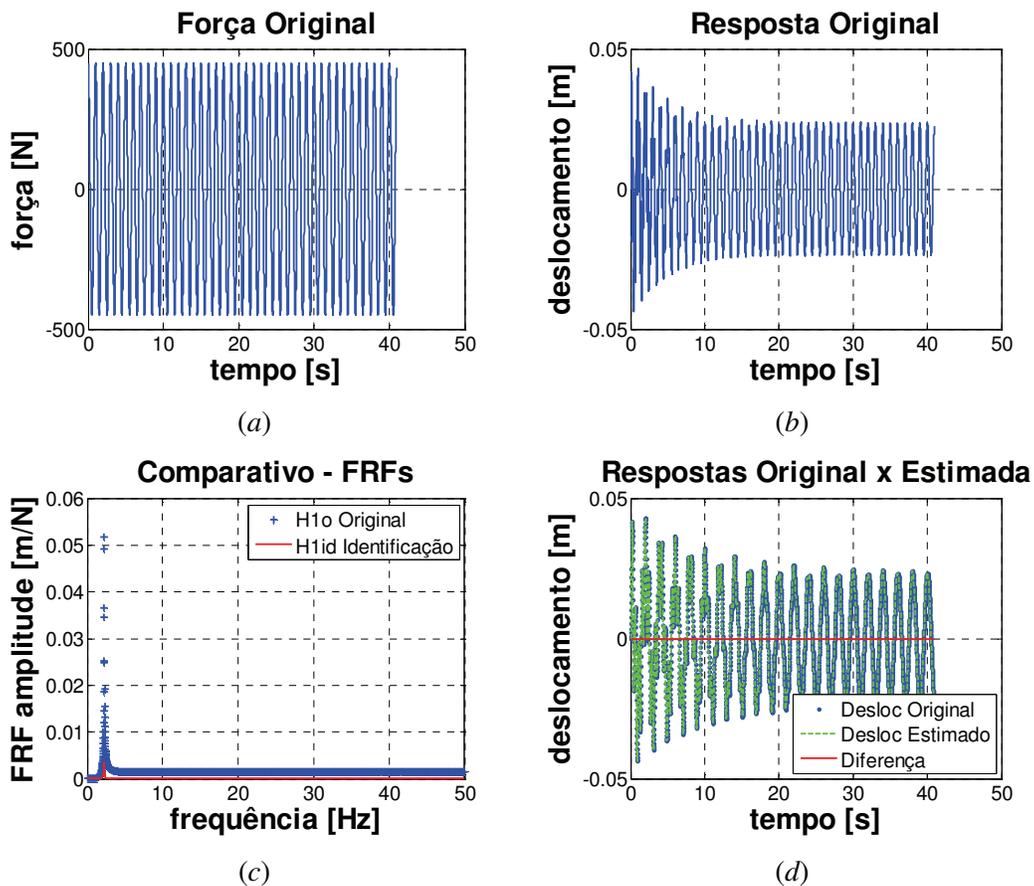
### 6.1.1.3. Excitação Original Cosseno

A Figura 8 mostra os resultados do sistema de 1 GDL submetido a uma força de excitação original cosseno, simulação em computador para um “sinal de pista” (original). A

Figura 8a mostra o sinal da força de excitação cosseno usada no teste simulado. A Figura 8b mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL. A Figura 8c como nos itens anteriores mostra um comparativo entre a FRF original e a FRF obtida através da resposta a um pulso unitário. A Figura 8d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.

Também como nos itens anteriores a convergência acontece logo na primeira iteração.

Os resultados estão sumarizados na tabela do item 6.1.3.



**Figura 8 - Sistema 1 GDL Linear submetido a excitação cosseno;**  
*a)* Sinal da Força de Excitação; *b)* Resposta do sistema de 1 GDL; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; *d)* Resposta original e estimada, e diferença das respostas.

## 6.1.2. Sistemas Não Lineares

Adiciona-se uma mola não linear de rigidez ( $k_{NL}$ ), paralela à mola linear, e repetem-se as simulações apresentadas em 6.1.1.

$$m_1\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + k_{NL}y^3(t) = f_o(t) \quad (41)$$

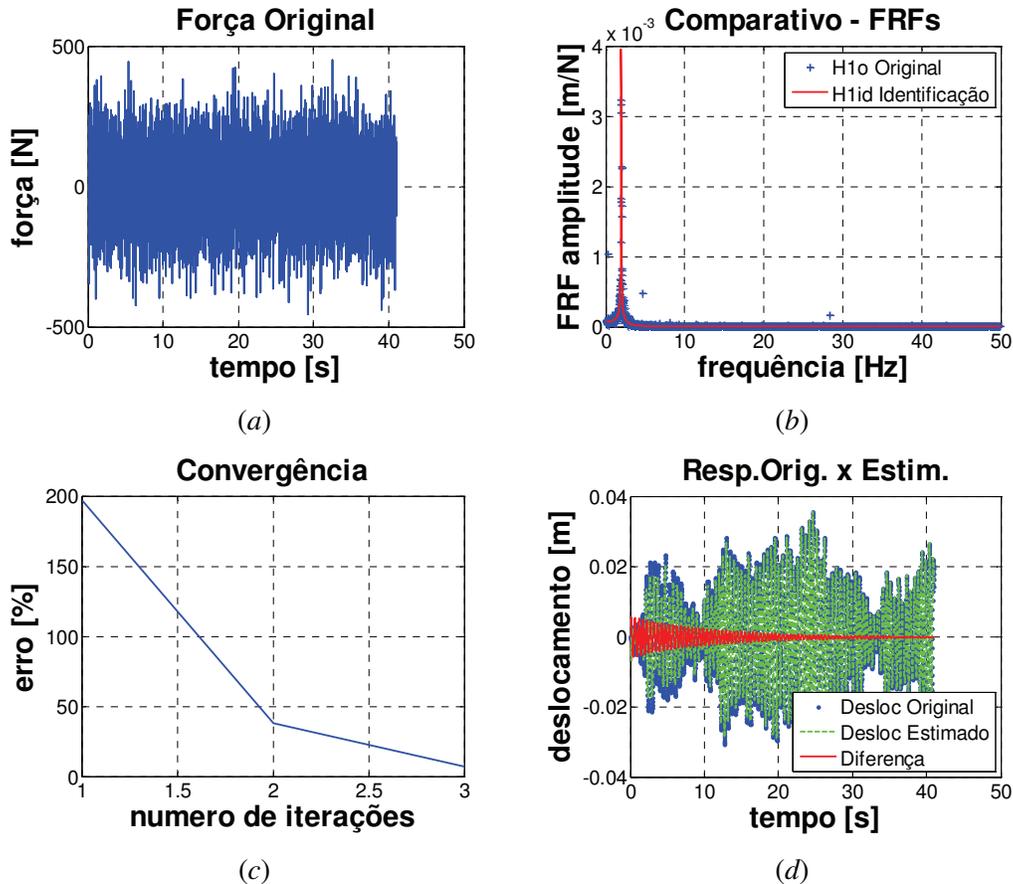
Nos itens seguintes são apresentados os resultados simulados para um sistema 1GDL, não linear, submetido a três tipos de força de excitação diferentes, a saber: Força Senoidal (Cosseno); Multisseno (Chirp); e Aleatório, simulações em computador para os “sinais de pista” (originais). Também aqui foi utilizado um pulso unitário para gerar a função de resposta em frequência.

Os valores de massa, força de excitação e a demais variáveis utilizadas nas simulações dos itens 6.1.2.1 e 6.1.2.2 e 6.1.2.3, são os mesmos utilizados no item 6.1.1, com a exceção da rigidez que foi distribuída em linear,  $k$  e não linear  $k_{NL}$ , com a adição de uma mola cúbica.

### 6.1.2.1. Excitação Original Aleatória

A Figura 9 mostra os resultados do sistema de 1 GDL agora acrescentado de não linearidade (uma mola cúbica paralela a mola linear), submetido a uma força de excitação original aleatória simulação em computador para um “sinal de pista” (original), que foi considerada um sinal determinístico para efeito do cálculo da transformada de *Fourier*. A Figura 9a mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL não linear. A Figura 9b mostra um comparativo entre a FRF desconhecida obtida através da resposta original e excitação proveniente da pista e a FRF obtida através da resposta a um pulso unitário. A Figura 9c mostra a curva de convergência, onde se observa que a resposta estimada converge para a resposta original pelo critério da tolerância (10,0% do sinal original) em 3 interações das 50 possíveis. A Figura 9d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Com exceção do período de tempo inicial da resposta, o qual inclui a

fase transitória da resposta do sistema, pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.



**Figura 9 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação aleatória;**  
*a)* Resposta do sistema de 1 GDL Não Linear; *b)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; *c)* Curva de convergência; *d)* Resposta original e estimada, e diferença das respostas.

### 6.1.2.2. Excitação Original Multisseno

A Figura 10 mostra os resultados do sistema de 1 GDL agora acrescentado de não linearidade (uma mola cúbica paralela a mola linear), submetido a uma força de excitação original multisseno, simulação em computador para um “sinal de pista” (original). A Figura 10a mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL Não Linear. A Figura 10b mostra como no item anterior um comparativo entre a FRF original e a FRF obtida através

da resposta a um pulso unitário. A Figura 10c mostra a curva de convergência, onde se observa que a resposta estimada converge para a resposta original pelo critério da tolerância (10,0% do sinal original) em 7 interações das 50 possíveis. A Figura 10d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.

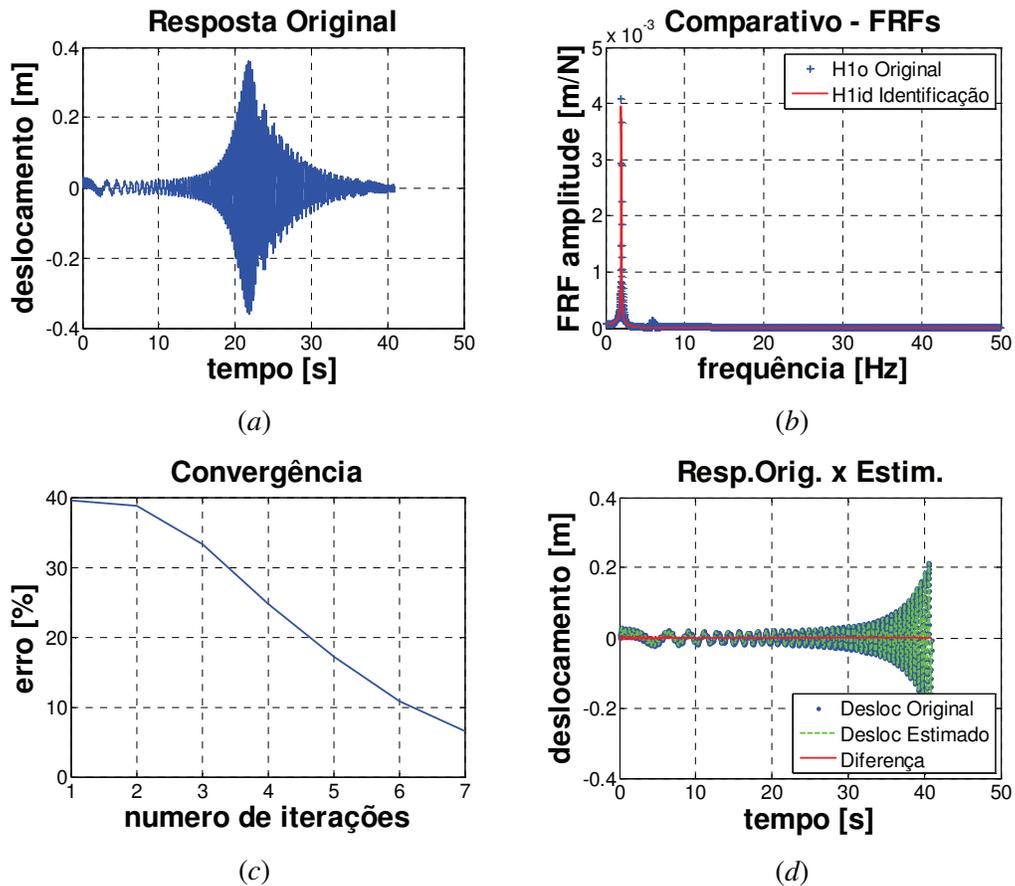
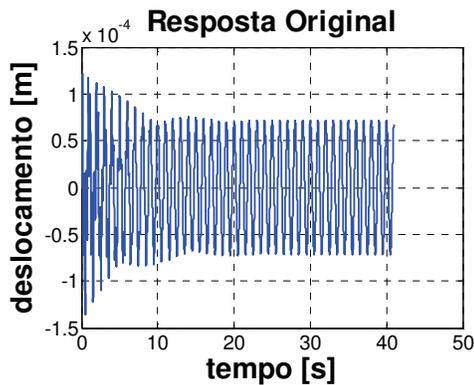


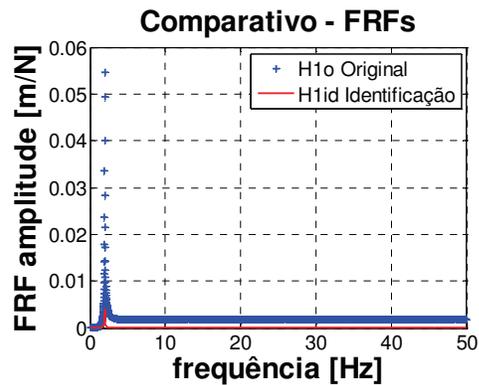
Figura 10 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação multissenso;  
*a)* Resposta do sistema de 1 GDL Não Linear; *b)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; *c)* Curva de convergência; *d)* Resposta original e estimada, e a diferença das respostas

### 6.1.2.3. Excitação Original Cosseno

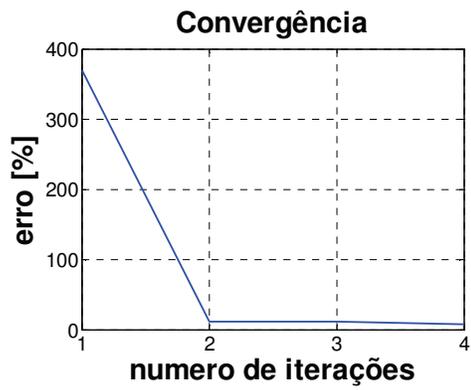
A Figura 11 mostra os resultados do sistema de 1 GDL agora acrescentado de não linearidade (uma mola cúbica paralela a mola linear), submetido a uma força de excitação original cosseno, simulação em computador para um “sinal de pista” (original). A Figura 11a mostra a resposta em deslocamento do sistema de 1 GDL não linear. A Figura 11b mostra como no item anterior um comparativo entre a FRF original e a FRF obtida através da resposta a um pulso unitário. A Figura 11c mostra a curva de convergência, onde se observa que a resposta estimada converge para a resposta original pelo critério da tolerância (10,0% do sinal original) em 4 interações das 50 possíveis. A Figura 11d mostra as respostas original e estimada, e a diferença entre elas. Com exceção do período de tempo inicial da resposta, o qual inclui a fase transitória da resposta do sistema, pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.



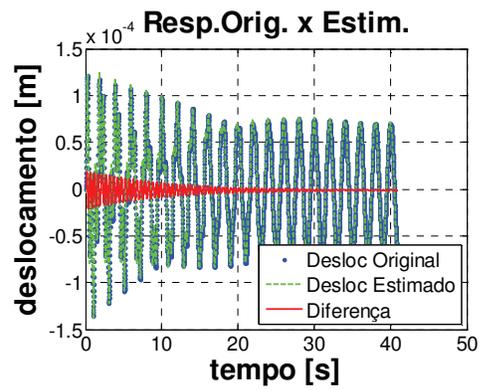
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 11 - Sistema 1 GDL Não Linear submetido a excitação cosseno;  
*a)* Resposta do sistema de 1 GDL Não Linear; *b)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF obtida através da resposta ao pulso unitário; *c)* Curva de convergência; *d)* Resposta original e estimada, e diferença das respostas.

### **6.1.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares**

As tabelas 1, 2 e 3 apresentam resultados das simulações realizadas com excitação original aleatória, multisseno e cosseno respectivamente, para sistemas lineares e não lineares com um grau de liberdade. Os gráficos apresentados foram obtidos através do algoritmo escrito em Matlab.

Nota-se que o algoritmo estimou uma força de excitação capaz de reproduzir uma resposta aproximada da resposta original dentro de uma tolerância menor do que 1,0% para o caso dos sistemas lineares e menor do que 10,0% para os sistemas não lineares.

Nota-se que nos sistemas lineares a convergência acontece logo na primeira iteração, como era de se esperar a função de resposta em frequência representa nestes casos, fielmente o sistema. Isto, no entanto, não acontece para os casos não lineares, sendo necessário mais do que uma iteração até a convergência. É possível perceber também a influencia da excitação original (frequência e amplitude), no processo de convergência do algoritmo, sendo que o sinal multisseno “chirp”, dado a faixa de frequência utilizada, apresentou maior dificuldade para a convergência. Neste caso, quando se utiliza o valor do passo de iteração igual a um, acontece divergência nas primeiras iterações do algoritmo. Ou seja, a função encontrada para a excitação estimada produz valores de resposta com amplitudes muito maiores do que a original. Para se evitar a divergência utilizou-se um passo de iteração menor do que o valor um, de modo a possibilitar “pequenas” iterações, evitando que se “ultrapasse” o ponto de convergência da função e assim prevenindo a divergência logo nas primeiras iterações.

Tabela 1 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade com excitação original ALEATÓRIO , tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1;

Sistema	Sinal de identificação	Rigidez não linear $k_{NL}$ [N/m]	Rigidez Linear $k$ [N/m]	Ampl [N]	Tolerância Aceitável em %.	Diferença ou erro em % ( $y_o - y_e$ )	Nº de Iterações	Convergência
Linear	Pulso	0	20.000	450	<=10,0	0,1231	1	OK
Não Linear	Pulso	5.000	15.000	450	<=10,0	6,6053	3	OK

Tabela 2 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade com excitação original CHIRP, tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1 (sistema linear);

Sistema	Sinal de identificação	Rigidez não linear $k_{NL}$ [N/m]	Rigidez Linear $k$ [N/m]	Ampl. [N]	Tolerância Aceitável em %.	Diferença ou erro em % ( $y_o - y_e$ )	Nº de Iterações	Convergência
Linear	Pulso	0	20.000	220	<=10,0	0,3720	1	OK
* Não Linear	Pulso	5.000	15.000	220	<=10,0	6,6110	7	OK

\*utilizou-se um passo de iteração de 0,6.

Tabela 3 - Comparação dos resultados simulados para 1 grau de liberdade, com excitação original COSSENO, tolerância de 10% e passo de iteração igual a 1;

Sistema	Sinal de identificação	Rigidez não linear $k_{NL}$ [N/m]	Rigidez Linear $k$ [N/m]	Ampl. [N]	Tolerância Aceitável em %.	Diferença ou erro em % ( $y_o - y_e$ )	Nº de Iterações	Convergência
Linear	Pulso	0	20.000	450	<=10,0	0,1518	1	Ok
Não Linear	Pulso	5.000	15.000	450	<=10,0	7,3426	4	Ok

## 6.2. Sistemas com dois graus de liberdade

### 6.2.1 Sistema Linear

Neste exemplo, utiliza-se um sistema linear simples com dois graus de liberdade, que pode ser usado para representar um quarto de veículo. A Figura (12) mostra um diagrama esquemático desse sistema o qual é constituído por: uma massa suspensa  $M$  (1/4 da massa total do veículo), rigidez  $k_s$  (mola da suspensão), coeficiente de amortecimento  $c_s$  (amortecedor da suspensão), uma massa não suspensa  $m_2$  (massa da roda) e rigidez  $k_t$  (rigidez do pneu).

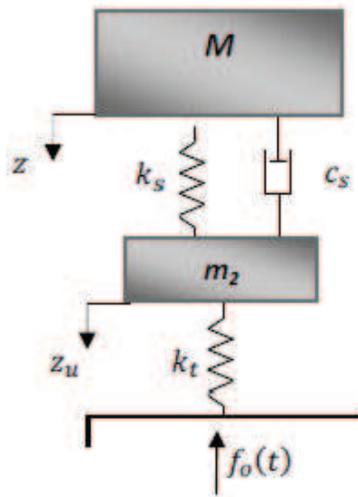


Figura 12 - Sistema Linear de dois graus de liberdade (2GDL Linear)

Com o objetivo de simular as respostas do sistema,  $z(t)$  e  $z_u(t)$  à uma força de entrada,  $f_o(t)$ , escreve-se as equações do movimento do sistema, (42) e (43), utilizando a 2ª lei de Newton. O anexo B mostra os diagramas de corpo livre do sistema 2GDL e as equações do movimento na forma de espaço de estado, que foram utilizadas para solução e obtenção da resposta do sistema em função do tempo.

$$M\ddot{z} = -k_s(z - z_u) - c_s(\dot{z} - \dot{z}_u), \quad (42)$$

$$m_2 \ddot{z}_u = k_s(z - z_u) + c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_t z_u - f_o. \quad (43)$$

Nos itens seguintes são apresentados os resultados simulados para este sistema de 2GDL linear, submetido Força de Excitação Aleatória, simulação em computador para um “sinal de pista” (original). Os resultados são apresentados em forma de gráficos no item 6.2.1.1 e em tabelas no item 6.2.3.

O sinal de identificação utilizado para gerar a função de resposta em frequência foi o sinal Multisseno, que varre uma faixa de frequência entre 0 e 50 Hz, conforme detalhado no item 4.7.2.2.

Considerou-se os seguintes parâmetros abaixo:

$M=240$  kg (massa suspensa);

$m_2 = 36$  kg (massa não suspensa);

$k_s = 42.000$  N/m (rigidez da mola linear da suspensão);

$c_s = 980$  N.seg/m (coeficiente de amortecimento da suspensão);

$k_t=320.000$  N/m (rigidez do pneu);

$dt=0,01$  s (discretização do tempo);

$df=0,1$  Hz (discretização da frequência);

$lambda=0,5$  (valor adimensional, refere-se a parcela da força de correção adicionada a força estimada a cada interação);

$f_{am} = 100$  Hz (frequência de amostragem);

A amplitude da força de excitação original aleatória,  $f_o(t)$ , foi de  $12.000$  N, para o caso de sistema linear, mas este parâmetro assume outros valores no item 6.2.2.

O critério de convergência adotado pressupõe que a diferença entre a resposta original medida e a resposta estimada pelo algoritmo deve ser menor ou igual à tolerância adotada, ou seja, uma pequena porcentagem do sinal original. No caso das simulações com o sistema de 2GDL, trabalhou-se com 1,0% do sinal original. Estipulou-se um número máximo de 50 interações possíveis, sendo que acima disto assumiu-se que não houve convergência

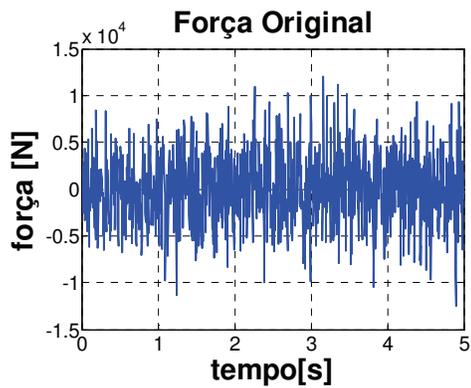
As variáveis,  $Tol$ , tolerância admissível e  $erro$ , diferença entre a resposta original medida e resposta estimada, assumem no caso de 2GDL as formas  $Tol_1$ ,  $erro_1$  e  $Tol_2$ ,

$erro_2$  e referem-se aos graus de liberdade da massa suspensa e não suspensa respectivamente. Ainda com relação ao caso 2GDL, ambas as respostas de cada grau de liberdade devem convergir para os valores originais ao mesmo tempo. Para facilitar este processo considerou-se neste caso, a convergência de uma resposta única, ou seja, seqüenciou-se em uma única variável, as respostas dos dois graus de liberdade, compondo um vetor único de resposta. Assim utilizou-se  $Tol_u$ , para a tolerância admissível do erro único e  $erro_u$  e para a diferença entre a resposta original única e resposta estimada única.

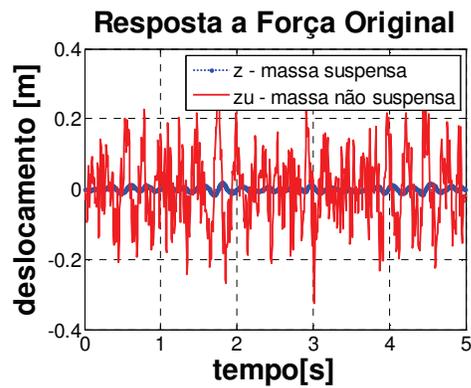
Os resultados das tabelas e gráficos foram obtidos a partir do algoritmo escrito em Matlab.

### 6.2.1.1 Excitação Original Aleatória

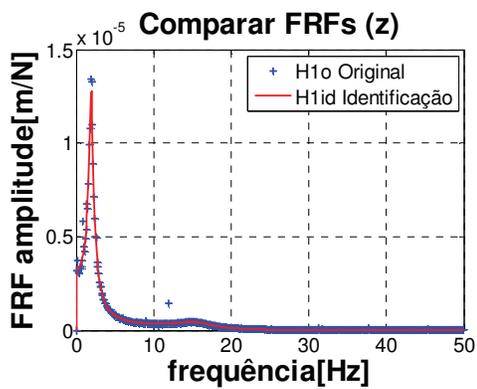
A Figura 13 mostra os resultados do sistema de 2 GDL submetido a uma força de excitação original aleatória **com amplitude de 12 KN**. A Figura 13a mostra a excitação a que o sistema foi submetido, simulação em computador para um “sinal de pista” (original). A Figura 13b, mostra as respostas em deslocamento da massa suspensa e não suspensa. As Figuras 13c e 13d mostram as FRFs desconhecidas do sistema original com dados da simulação em “pista” e as FRFs obtidas pelo processo de identificação do sistema para os dois graus de liberdade, nota-se que com exceção de alguns pontos, há uma boa coincidência entre elas. As Figuras 13e e 13f, mostram as curvas de convergência, onde observa-se que as respostas estimadas convergem para as respostas originais pelo critério da tolerância (1,0% do sinal original) em 7 interações das 50 possíveis. As Figuras 13g e 13h mostram as respostas originais, as respostas estimadas, e as diferenças entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.



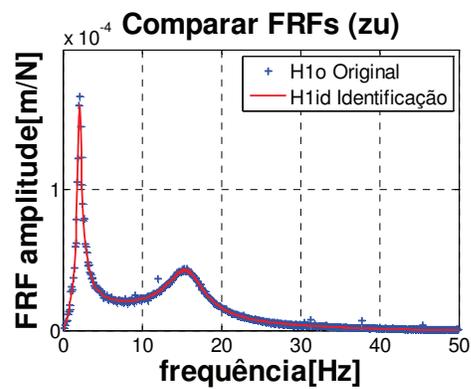
(a)



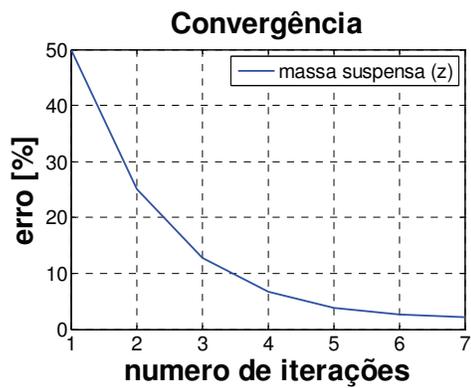
(b)



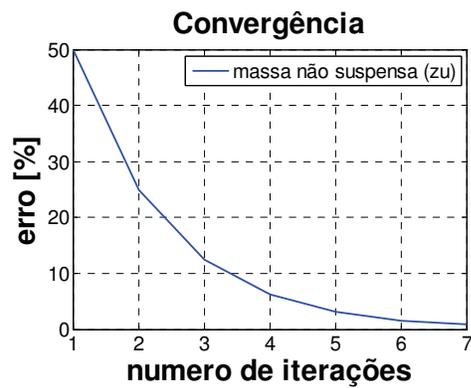
(c)



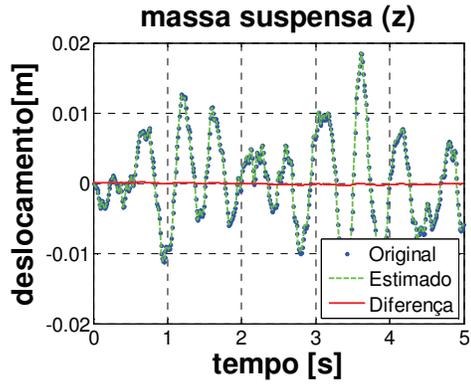
(d)



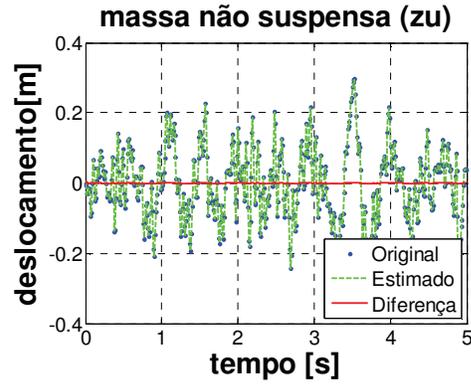
(e)



(f)



(e)



(f)

Figura 13 – Sistema 2GDL submetido a excitação original aleatória; *a)* Força de excitação original aleatória; *b)* Respostas do sistema; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa suspensa; *d)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa não suspensa; *e)* e *f)* Curvas de convergência; *g)* e *h)* Respostas original e estimada, e diferença entre estas respostas.

## 6.2.2 Sistema Não Linear

Adicionando ao sistema do item 6.2.1 uma mola cúbica paralela à mola da suspensão e também uma mola cúbica paralela ao pneu, estuda-se a eficiência do algoritmo para sistemas de 2GDL não lineares.

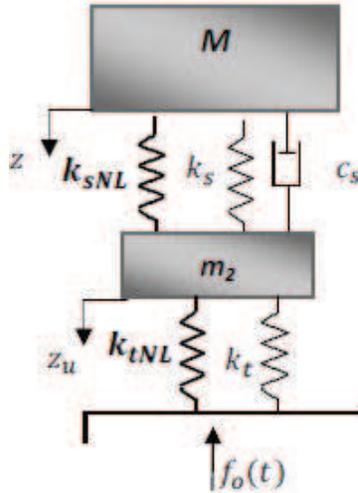


Figura 14 – Sistema de dois graus de liberdade Não Linear

Abaixo escreve-se as equações do movimento do sistema 2GDL não linear utilizando a 2ª Lei de Newton.

$$M\ddot{z} = -k_s(z - z_u) - c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_{sNL}(z - z_u)^3 \quad (44)$$

$$m_2\ddot{z}_u = k_s(z - z_u) + k_{sNL}(z - z_u)^3 + c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_t z_u - k_{tNL} z_u^3 - f_o \quad (45)$$

Considera-se como  $f_o$  uma força externa de excitação aplicada em um ponto específico do sistema.

Da mesma forma que nas outras simulações obtêm-se as respostas em função do tempo, através do integrador numérico de quarta ordem, Runge Kutta. Estas respostas foram consideradas como medições originais do sistema.

As simulações para um sistema 2GDL não linear foram realizadas apenas com a força de excitação Aleatória, simulação em computador para um “sinal de pista” (original).

Considerou-se os mesmos valores de massa, rigidez e demais parâmetros utilizados no item 6.2.1, com exceção a rigidez do sistema e a amplitude da força de excitação original. A rigidez do sistema foi modificada com a adição de não linearidades representadas através de molas cúbicas colocadas paralelas a mola da suspensão e ao pneu do sistema quarto de veículo. Sendo:

$k_s = 10.500 \text{ N/m}$  (rigidez da mola linear da suspensão);

$k_{sNL} = 31.500 \text{ N/m}$  (rigidez da mola não linear da suspensão);

$k_t = 80.000 \text{ N/m}$  (rigidez da mola linear que representa o pneu);

$k_{tNL} = 240.000 \text{ N/m}$  (rigidez da mola não linear que representa o pneu);

Com o objetivo de avaliar a sensibilidade do processo de convergência à variação da amplitude da força de excitação original, realizou-se simulações com um valor alto de amplitude, como  $12.000 \text{ N}$  e também com um valor menor,  $6.000 \text{ N}$ .

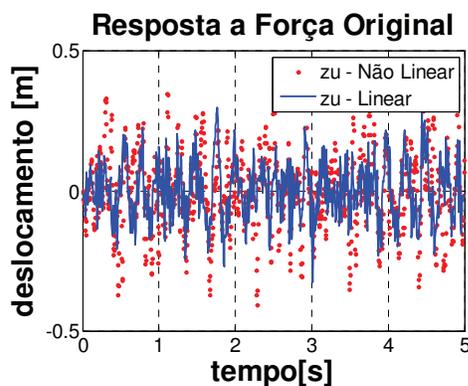
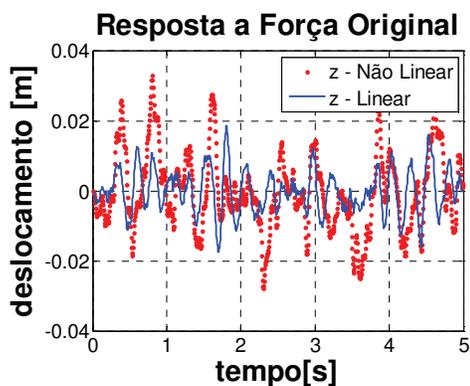
Estudou-se também no item 6.2.2.2, a influência da qualidade do sinal obtido na resposta medida, através da simulação de casos variando a relação sinal ruído, SNR (a relação sinal / ruído, indica o quanto a magnitude do sinal puro é maior que a do ruído do meio, onde o sinal está imerso).

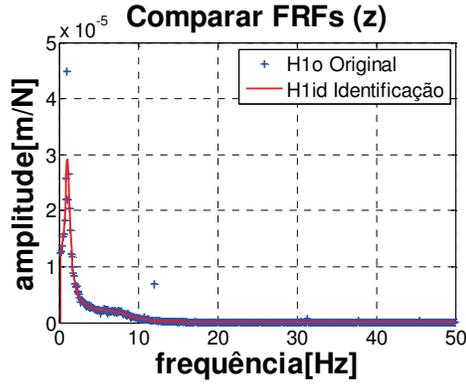
Os resultados são apresentados em forma de gráficos e tabelas, sendo que a tabela 4 consolida todas as simulações para dois graus de liberdade, incluído as simulações do sistema linear do item anterior 6.2.1.1 e as simulações para o sistema não linear dos itens 6.2.2.1 e 6.2.2.2.

Em suma as simulações para dois graus de liberdade são: No item 6.2.1.1, o sistema é linear e foi submetido a excitação com amplitude de  $12.000 \text{ N}$ ; No item 6.2.2.1, o sistema é não linear e também foi submetido a excitação com amplitude de  $12.000 \text{ N}$ ; No item 6.2.2.2.- a), o sistema é não linear, foi submetido a excitação com amplitude de  $12.000 \text{ N}$ , porém a resposta apresenta ruído gaussiano com SNR igual a 12; No item 6.2.2.2. – b), o sistema é não linear, também foi submetido a excitação com amplitude de  $12.000 \text{ N}$  e a resposta apresenta ruído gaussiano com SNR igual a 12, porém com passo de iteração de 0,01; No item 6.2.2.2. – c), o sistema é não linear, foi submetido a excitação com amplitude de  $6.000 \text{ N}$ , e a resposta apresenta ruído gaussiano SNR igual a 12; Finalmente no item 6.2.2.2. – d), o sistema é não linear, foi submetido a excitação com amplitude de  $12.000 \text{ N}$ , e a resposta apresenta ruído gaussiano com SNR igual a 30;

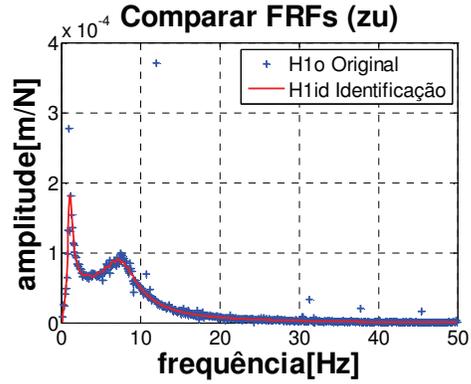
### 6.2.2.1 Excitação Original Aleatório Sem Ruído

A Figura 15 mostra os resultados do sistema de 2 GDL agora acrescentado de **não linearidades** (molas cúbicas paralelas as molas lineares do exemplo anterior), submetido a uma força de excitação original aleatória **com amplitude de 12 KN, sem ruído**. Para se ter uma noção das não linearidades acrescentadas, apresenta-se nas Figuras 15a e 15b, respostas em deslocamento do sistema de 2 GDL linear e também respostas do mesmo sistema com a adição das não linearidades. As Figuras 15c e 15d, mostram as FRFs desconhecidas do sistema original (simulação de dados de “pista”) e as FRFs obtidas pelo processo de identificação do sistema, nota-se que com exceção de alguns pontos, há uma boa coincidência entre elas. As Figuras 15e e 15f mostram as curvas de convergência para cada grau de liberdade. Cabe lembrar que o critério da convergência utiliza um vetor composto pelos vetores das respostas dos dois graus de liberdade, seqüenciados em um vetor de resposta único. Para este vetor único observa-se a convergência, com tolerância menor do que 1,0% do sinal original, em 8 interações das 50 possíveis. As Figuras 15g e 15h mostram as respostas originais e estimadas, e as diferenças entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas.

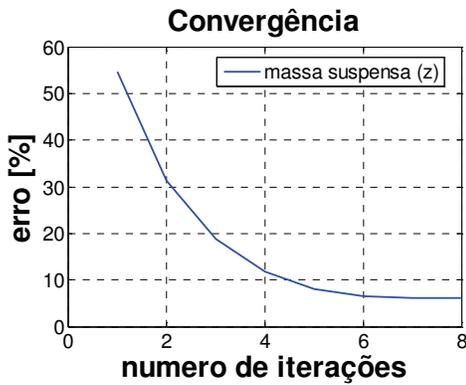




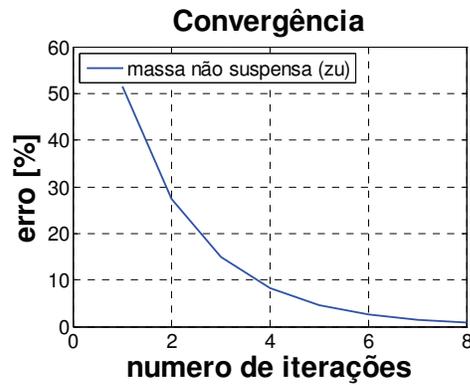
(c)



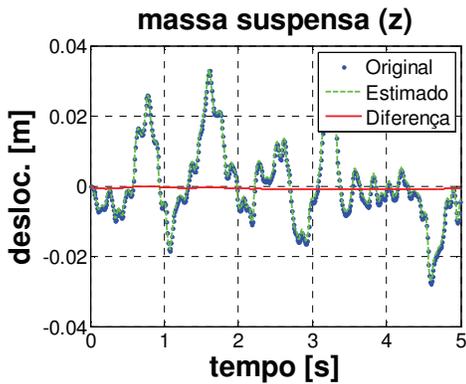
(d)



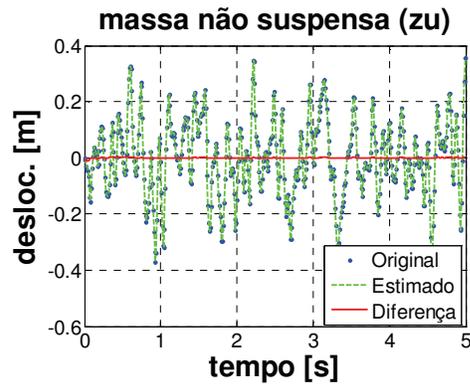
(e)



(f)



(g)



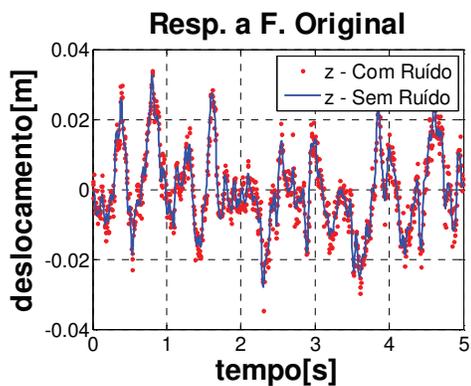
(h)

Figura 15 – Sistema 2GDL Não Linear submetido a excitação aleatória; *a) e b)* Respostas do sistema Linear e respostas do mesmo sistema com as não linearidades acrescentadas; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa suspensa; *d)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa não suspensa; *e) e f)* Curvas de convergência; *g) e h)* Respostas originais e estimadas, e diferenças entre estas respostas.

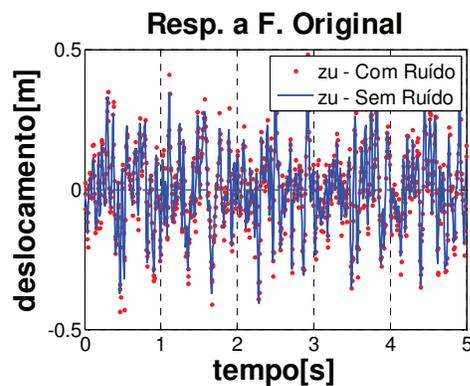
### 6.2.2.2. Excitação Original Aleatório com Ruído Gaussiano

a)- Amplitude de Excitação de 12.000 N e Resposta com SNR =12

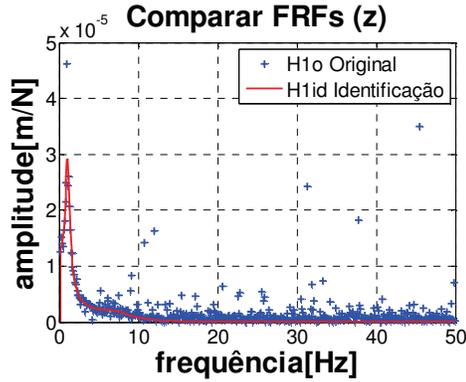
A Figura 16 mostra os resultados do sistema de 2 GDL Não Linear (molas cúbicas paralelas as molas lineares), submetido a uma força de excitação original aleatória **com amplitude de 12kN e com ruído gaussiano com relação sinal ruído igual a 12**. Para se ter uma noção do ruído acrescentado, apresenta-se nas Figuras 16a e 16b, respostas em deslocamento do sistema de 2 GDL não linear sem ruído e também respostas do mesmo sistema com a adição de ruído na saída. A Figura 16c e 16d mostram as FRFs desconhecidas do sistema original e as FRFs obtidas pelo processo de identificação do sistema, para os dois graus de liberdade. As Figuras 16e e 16f mostram as curvas de convergência, onde se observa que a resposta estimada para a massa suspensa **não converge** para a resposta original pelo critério da tolerância (1,0% do sinal original) em 50 interações das 50 possíveis. As Figuras 16g e 16h mostram as respostas originais e estimadas, e as diferenças entre elas. Neste caso a alta amplitude de excitação original, produz valores também altos de resposta do sistema. Isto faz com que o algoritmo busque valores para força estimada excessivamente grande. Pode-se observar que não há uma coincidência das curvas de resposta estimada e original e a diferença entre elas não mostra estabilidade, ou seja, o ruído adicionado dificulta o processo de convergência.



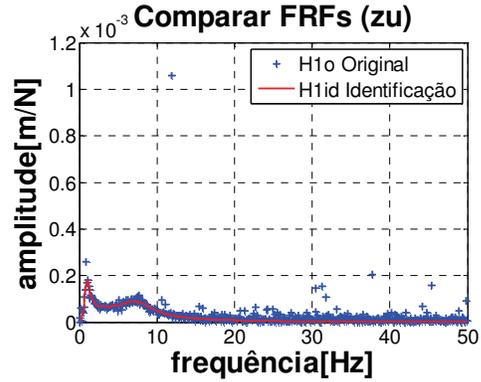
(a)



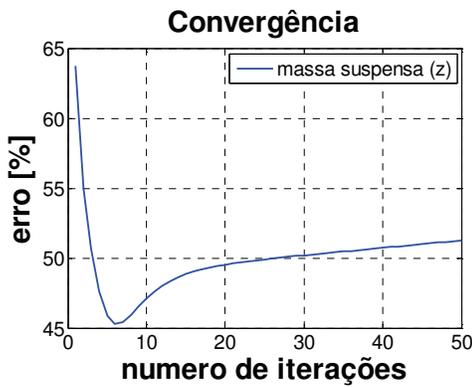
(b)



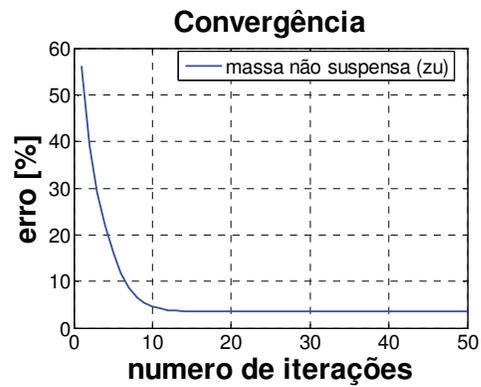
(c)



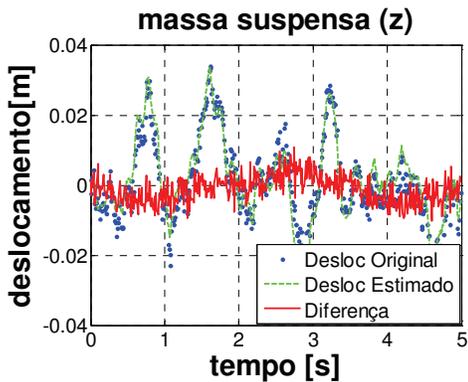
(d)



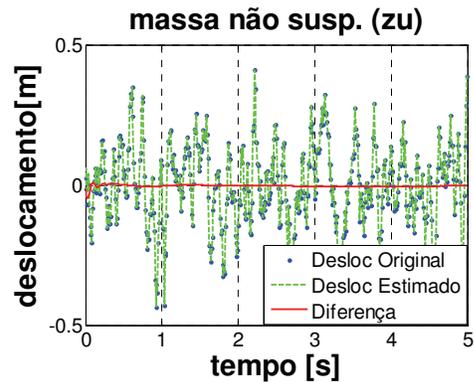
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 16 – Sistema 2GDL Não Linear submetido a excitação aleatória e SNR=12; *a) e b)* Respostas do sistema sem ruído e respostas do mesmo sistema acrescentadas de ruído; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa suspensa; *d)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa não suspensa; *e) e f)* Curvas de convergência; *g) e h)* Respostas originais e estimadas, e diferenças entre estas respostas.

b)-Amplitude de Excitação de 12.000 N e Resposta com SNR =12. Avaliação do algoritmo aumentando o número de iterações.

A Figura 17 mostra os resultados do sistema de 2 GDL Não Linear (molas cúbicas paralelas as molas lineares), submetido às mesmas condições do item anterior (6.2.2.2 a), excitação original aleatória **com amplitude de 12KN** e **com ruído gaussiano com relação sinal ruído igual a 12**. No entanto, com o objetivo de avaliar o algoritmo, modificou-se o valor do passo de iteração de 0,5 para 0,01. Deste modo soma-se à força estimada parcelas menores da força de correção. No entanto mesmo em 500 iterações, não houve a convergência. As Figuras 17a e 17b mostram apenas as curvas de convergência. Nota-se que a resposta estimada **não converge** para a resposta original pelo critério da tolerância (1,0% do sinal original).

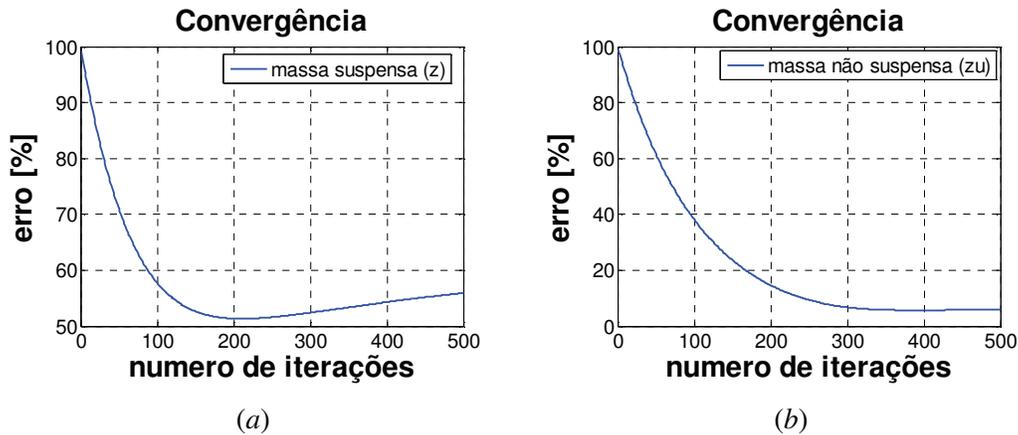


Figura 17 - Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 12 kN, SNR = 12 e passo reduzido;  
a) Curvas de convergência;

c) - Amplitude de Excitação de 6.000 N. e Resposta com SNR =12

A Figura 18 mostra os resultados do sistema de 2 GDL Não Linear (molas cúbicas paralelas as molas lineares), submetido agora a uma força de excitação original aleatória **com amplitude de 6KN** e **com ruído gaussiano com relação sinal ruído igual a 12**. As Figuras 18a e 18b mostram a curvam de convergência, onde se observa que as respostas

estimadas **não convergem** para as respostas originais pelo critério da tolerância (1,0% do sinal original) em 50 iterações das 50 possíveis.

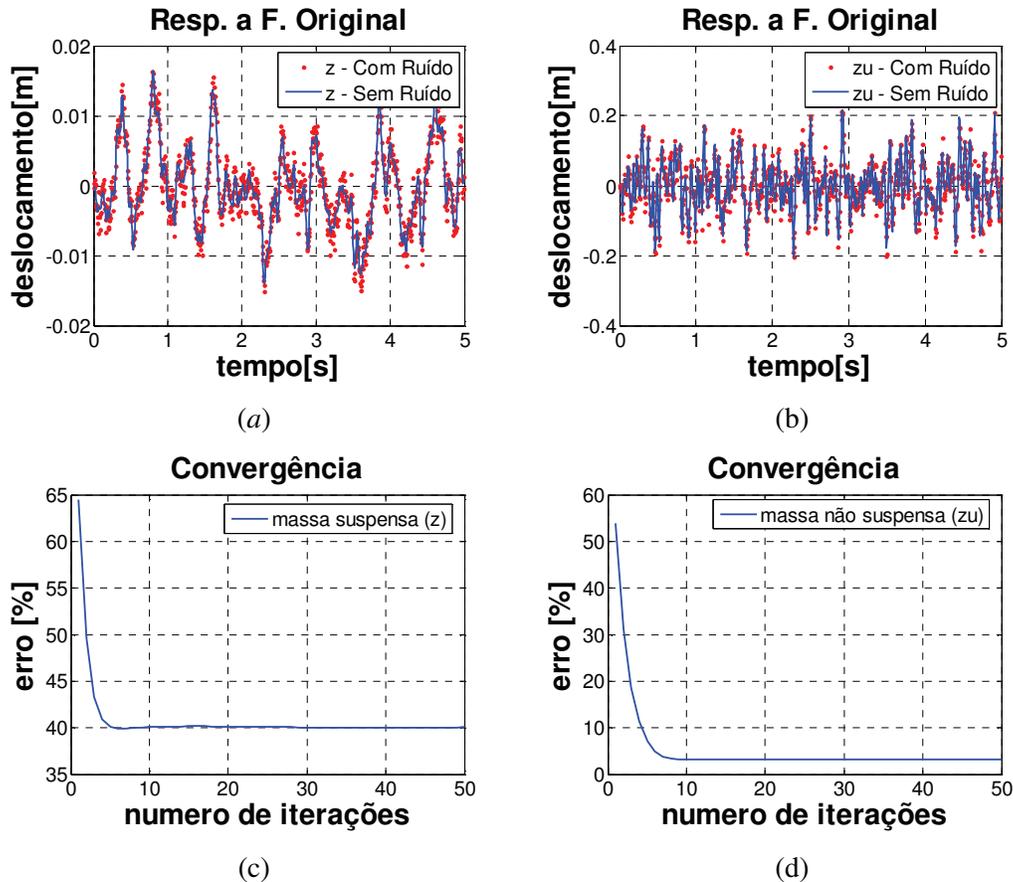


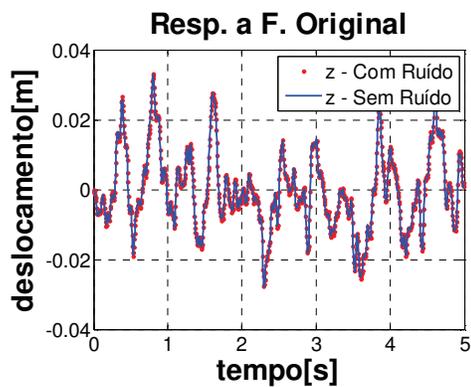
Figura 18 - Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 6 kN e SNR = 12;

a) e b) Respostas do sistema sem ruído e respostas do mesmo sistema acrescentadas de ruído; c) e d) Curvas de convergência;

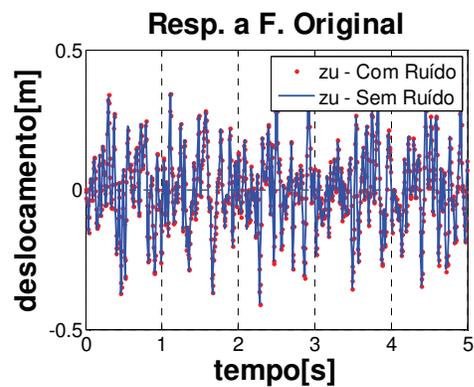
d) - Amplitude de Excitação de 12.000 N. e Resposta com SNR =30

A Figura 19 mostra os resultados do sistema de 2 GDL não linear (molas cúbicas paralelas as molas lineares), submetido a uma força de excitação original aleatório **com amplitude de 12 KN, com ruído gaussiano com relação sinal ruído igual a 30**. As Figuras 19a e 19b, mostram as respostas em deslocamento do sistema de 2 GDL não linear. As Figuras 19c e 19d, mostram as FRFs desconhecidas do sistema original e as FRFs obtidas pelo processo de identificação do sistema, para os dois graus de liberdade. A Figura

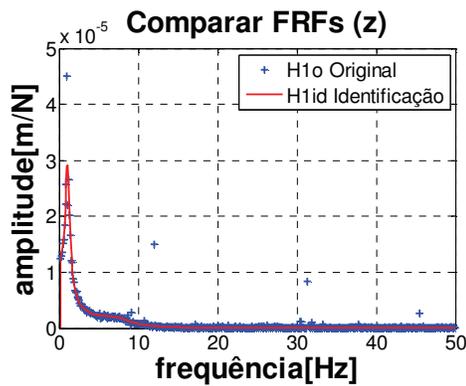
19e e 19f mostram as curvas de convergência, onde se observa que as respostas estimadas **convergem** para as respostas originais pelo critério da tolerância (1,0% do sinal original) em 9 interações das 50 possíveis. As Figuras 19g e 19h mostram as respostas originais e estimadas, e as diferenças entre elas. Pode-se observar uma boa coincidência das curvas de resposta estimada e original confirmada pela tendência a zero da diferença entre elas. Comparando este item com anterior, percebe-se que houve uma melhora na qualidade do sinal de resposta “aquisitado”, isto influencia também a qualidade da FRF identificada, facilitando o processo de convergência do algoritmo.



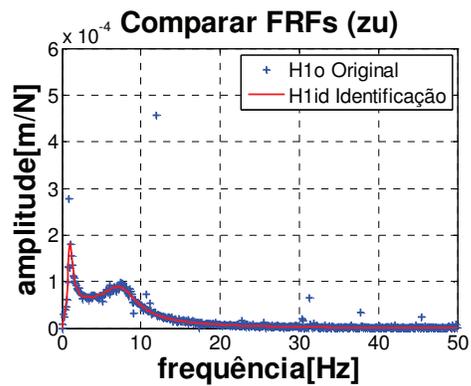
(a)



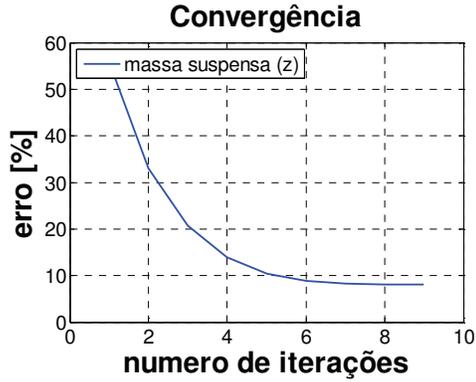
(b)



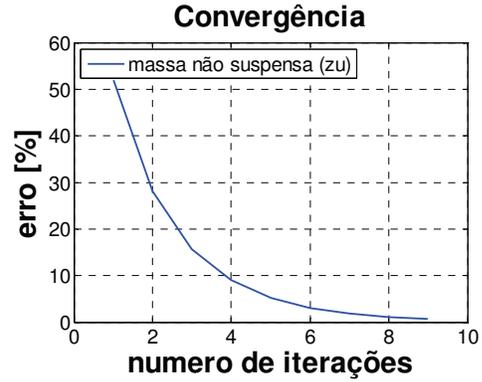
(c)



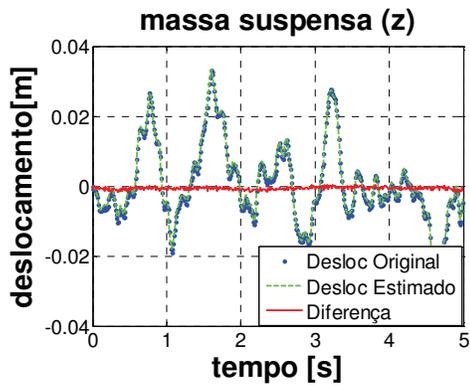
(d)



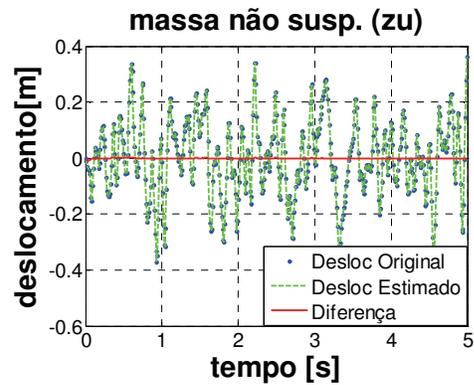
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 19 – Sistema 2GDL Não Linear, amplitude de excitação de 12 kN, SNR = 30;  
*a) e b)* Respostas do sistema sem ruído e respostas do mesmo sistema acrescentadas de ruído; *c)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa suspensa; *d)* Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação para massa não suspensa; *e) e f)* Curvas de convergência; *g) e h)* Respostas originais e estimadas, e diferenças entre estas respostas.

### 6.2.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares.

Os resultados das simulações mostram que através do algoritmo é possível estimar a força de excitação capaz de reproduzir uma resposta aproximada da resposta original medida em “pista” (simulação de dados de “pista”) para o sistema de 2GDL linear e não linear, com e sem ruído gaussiano, com uma tolerância aceitável, para os casos estudados, de 1%.

Nota-se que nas simulações dos itens 6.2.1.1. e 6.2.2.1 a não linearidade acrescentada, não impede a convergência, mesmo considerando uma alta amplitude de excitação.

Nas simulações dos itens 6.2.2.2. *a*, *b*, *c* e *d*, a existência de ruído na resposta, dificulta a convergência, o que é facilmente percebido quando se compara os resultados do item *a* com os do item *d*. O ruído aqui adicionado pode ser interpretado como qualquer variação no processo, podendo ser desde a habilidade do técnico em realizar o teste em pista ou em bancada, até fatores como a qualidade da aquisição do sinal devido ao equipamento de medição ou a características do sistema que não são conhecidas ou controladas como a alteração nos parâmetros de amortecimento e rigidez. Observou-se que quando a não linearidade é muito alta (alta amplitude combinada com alto nível de ruído), como em *a* e *b*, a convergência é impossível, mesmo quando se experimenta um passo de iteração menor, para tornar possível um número maior de iterações. Ou seja, a alta não linearidade impede o cálculo de uma FRF representativa do sistema. Casos como estes estão relacionados a uma pista muito irregular. Quando se compara *b* e *c* verifica-se que o erro do segundo é menor do que o do primeiro, mesmo com um número maior de iterações, isto denota a influencia da redução da amplitude do sinal de excitação na não linearidade do sistema. No item *d* o processo volta a convergir quando através da redução do nível de ruído na resposta, melhora-se a qualidade do sinal “aquisitado”. Esta melhora pode ser notada quando se compara os gráficos *18a* e *18b* com os gráficos *19a* e *19b*.

**Tabela 4 - Comparação dos resultados simulados para 2 graus de liberdade com excitação original ALEATÓRIA.**

Sistema Linear -  $k_s = 42.000$  [N/m];  $k_{SNL} = 0$  [N/m] ;  $k_t = 320.000$  [N/m];  $k_{tNL} = 0$  [N/m];

Sistema Não Linear -  $k_s = 10.500$  [N/m];  $k_{SNL} = 31.500$  [N/m] ;  $k_t = 80.000$  [N/m];  $k_{tNL} = 240.000$  [N/m];

Simulação item	Sistema	Sinal de Identificação	$f_o$ (ampl.) [N]	Ruído SNR	Passo	Tolerância aceitável em %.	Diferença_u ou erro_u em % ( $z_o - z_e$ )	Nº de Iterações	Convergência
6.2.1.1	Linear	Multi-seno	12.000	sem ruído	0,5	$\leq 1$	0,8330	7	Ok
6.2.2.1	Não Linear	Multi-seno	12.000	sem ruído	0,5	$\leq 1$	0,9284	8	Ok
6.2.2.2. a)	Não Linear	Multi-seno	12.000	12	0,5	$\leq 1$	<b>5,4559</b>	<b>50</b>	<b>Não</b>
6.2.2.2. b)	Não Linear	Multi-seno	12.000	12	0,01	$\leq 1$	<b>7,4345</b>	<b>500</b>	<b>Não</b>
6.2.2.2. c)	Não Linear	Multi-seno	6.000	12	0,5	$\leq 1$	<b>3,9627</b>	<b>50</b>	<b>Não</b>
6.2.2.2. d)	Não Linear	Multi-seno	12.000	30	0,5	$\leq 1$	0,9925	9	Ok

## 6.3. Sistemas com quatro graus de liberdade

### 6.3.1 Sistema Linear

Para verificar a eficiência do algoritmo em sistemas mais complexos estuda-se aqui a dinâmica veicular relativa aos movimentos de “body bounce”, “body pitch”, e movimentos verticais das rodas de um veículo de tamanho e peso médio, mostrado na Figura (20). Para isto utiliza-se como sistema a metade de um veículo, representado pelo clássico modelo de vibração bicicleta para um veículo, conforme a Figura (21). As figuras (20) e (21) foram extraídas da referência Jazar (2008),

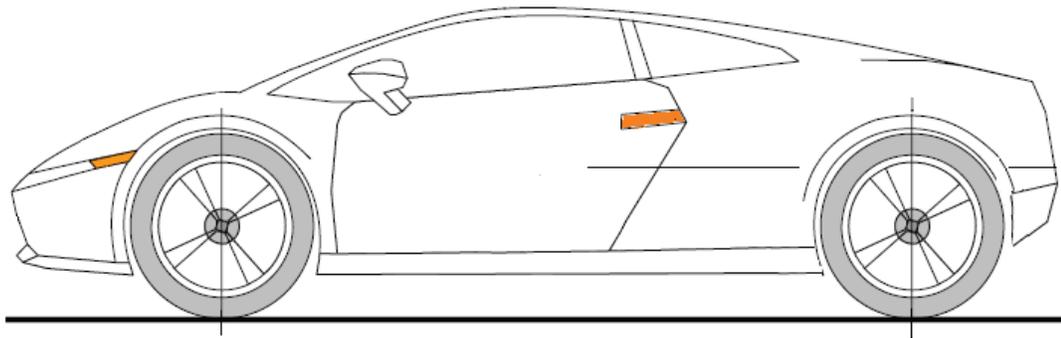


Figura 20 - Veículo de tamanho e peso médio

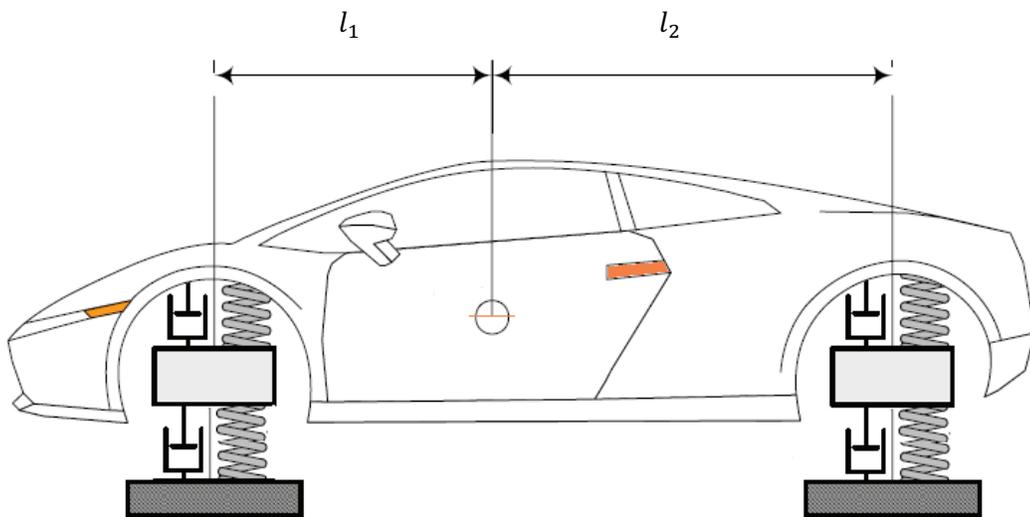


Figura 21 - Clássico modelo de vibração bicicleta para um veículo - 4GDL.

A figura 22 facilita a interpretação do modelo de vibração onde assume-se uma barra rígida como a metade do corpo do veículo. Esta barra possui características como massa,  $M_a$  e momento de inércia lateral,  $I$  que são iguais a metade da massa total e metade do momento de inércia lateral total do corpo do veículo. O modelo é completado pelas molas das suspensões dianteira e traseira com constantes de rigidez,  $k_1$  e  $k_2$ , pelos amortecedores dianteiro e traseiro com coeficientes de amortecimento  $c_1$  e  $c_2$ , pela roda dianteira e traseira, com massas,  $m_{a1}$  e  $m_{a2}$ , com constantes de rigidez,  $k_3$  para a dianteira e  $k_4$  para a traseira e coeficientes de amortecimento  $c_3$  para a dianteira e  $c_4$  para a traseira. A rotação do corpo do veículo no plano z-y, é descrita pelo ângulo  $z_2$ , o movimento vertical para cima e para baixo da massa  $M_a$ , da massa da roda dianteira,  $m_{a1}$ , e da massa da roda traseira,  $m_{a2}$ , foram descritos pelas coordenadas  $z_1, z_3, z_4$ , respectivamente, lembrando que para valores de  $z_2$ , muito pequenos considerou-se,  $\text{sen}(z_2) = z_2$ . Convencionou-se o ângulo  $z_2$  como positivo no sentido horário e o deslocamento vertical, como positivo no sentido para baixo. Este modelo desconsidera os movimentos de “roll” e “yaw”. Realiza-se uma simulação, excitando simultaneamente o modelo pelas das rodas dianteiras e traseiras através das forças de excitação,  $f_a(t)$  e  $f_b(t)$ , que correspondem a irregularidades da pista.

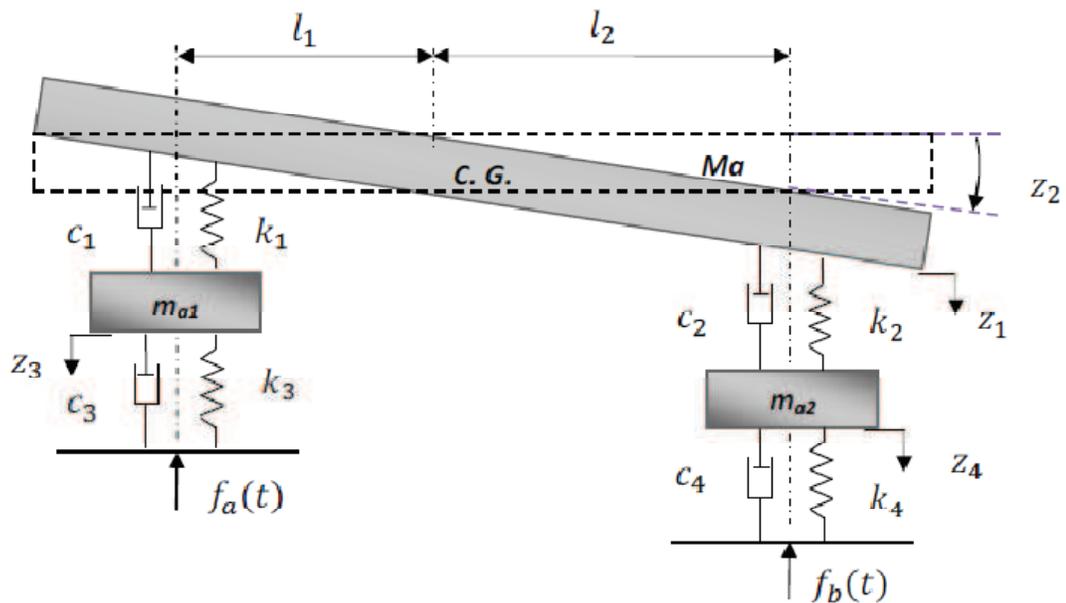
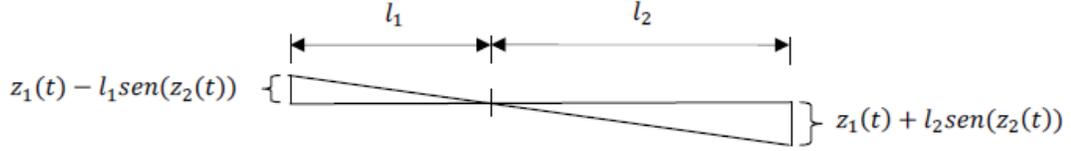


Figura 22 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade



**Figura 23 - Deslocamento vertical do veículo;**

As dimensões  $l_1$  e  $l_2$ , referem-se às distâncias do centro de massa do veículo à roda dianteira e à roda traseira respectivamente e  $z_1(t) - l_1 \text{sen}(z_2(t))$  e  $z_1(t) + l_2 \text{sen}(z_2(t))$ , se referem ao deslocamento vertical do corpo do veículo.

Através do método de Lagrange apresentado no Anexo C, é possível escrever as equações de movimento do sistema vibratório de quatro graus de liberdade.

Assim desenvolve-se a equação de Lagrange para cada grau de liberdade:

Para  $z_1(t)$ , referente ao movimento vertical da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$M_a \ddot{z}_1 + c_1((\dot{z}_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3) + c_2((\dot{z}_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4) + k_1(z_1 - l_1 z_2 - z_3) + k_2(z_1 + l_2 z_2 - z_4) = 0 \quad (46)$$

Para  $z_2(t)$ , referente ao movimento rotacional da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$I z_2'' + c_1(l_1^2 \dot{z}_2 - l_1 \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_3) + c_2(l_2^2 \dot{z}_2 + l_2 \dot{z}_1 - l_2 \dot{z}_4) + k_1(l_1^2 z_2 - l_1 z_1 + l_1 z_3) + k_2(l_2^2 z_2 + l_2 z_1 - l_2 z_4) = f_a l_1 - f_b l_2 \quad (47)$$

Para  $z_3(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a1}$ , da roda dianteira, temos:

$$m_{a1} \ddot{z}_3 + c_1(\dot{z}_3 - \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_2) + c_3(\dot{z}_3) + k_1(z_3 - z_1 + l_1 z_2) + k_3(z_3) = -f_a \quad (48)$$

Para  $z_4(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a2}$  da roda traseira, temos:

$$m_{a2} \ddot{z}_4 + c_2(\dot{z}_4 - \dot{z}_1 - l_2 \dot{z}_2) + c_4(\dot{z}_4) + k_2(z_4 - z_1 - l_2 z_2) + k_4(z_4) = -f_b \quad (49)$$

As equações (46), (47), (48) e (49) compõem as equações do movimento do sistema, que pode ser escrito na forma de matriz, como segue:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_{a1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_{a2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_4 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & (c_2 l_2 - c_1 l_1) & -c_1 & -c_2 \\ (c_2 l_2 - c_1 l_1) & (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) & c_1 l_1 & -c_2 l_2 \\ -c_1 & -c_1 l_1 & (c_1 + c_3) & \mathbf{0} \\ -c_2 & -c_2 l_2 & \mathbf{0} & (c_2 + c_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) & -k_1 & -k_2 \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2) & k_1 l_1 & -k_2 l_2 \\ -k_1 & -k_1 l_1 & (k_1 + k_3) & \mathbf{0} \\ -k_2 & -k_2 l_2 & \mathbf{0} & (k_2 + k_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (f_a l_1 - f_b l_2) \\ -f_a \\ -f_b \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{50}$$

O anexo C mostra os diagramas de corpo livre do sistema 4GDL Linear e as equações do movimento na forma de espaço de estado, que foram utilizadas para solução e obtenção da resposta do sistema em função do tempo.

Da mesma forma que nas outras simulações, obtêm-se as respostas em função do tempo através do integrador numérico de quarta ordem, Runge Kutta. Estas respostas foram consideradas como medições originais do sistema, ou seja, simulações de “medições de pista”.

Neste caso, para representar a condição de excitação do veículo em “pista”, a simulação foi realizada com duas forças de excitação aleatórias aplicadas simultaneamente nas rodas dianteira e traseira do veículo (MIMO, “multiple input and multiple output”). Sendo que para o caso de sistema Linear, tanto para a força aplicada na roda dianteira como na roda traseira utilizou-se um sinal aleatório com amplitude máxima de  $10.000\text{ N}$

Considerou-se os valores de massa, rigidez e demais parâmetros, extraídos da referência Rill (2009), para um veículo médio.

No item 6.3.2 a rigidez do sistema foi modificada com a adição de não linearidades representadas através de molas cúbicas colocadas paralelas a mola da suspensão e a roda do veículo.

Os sinais de identificação utilizados para gerar as funções de resposta em frequência foram sinais Multissenos (Schroeder), que varrem uma faixa de frequência entre 0 e 50 Hz, conforme detalhado no item 5.2.2.2.

Abaixo são apresentados os parâmetros do sistema de 4GDL conforme Rill (2009),

$M_a = 1.100,00/2 \text{ kg}$  (metade da massa suspensa do veículo);

$I = 1.500,00/2 \text{ kg.m}^2$  (metade do momento de inércia lateral da massa suspensa do veículo);

$l_1 = 1,100 \text{ m}$  (distância entre o centro de gravidade da massa suspensa ao ponto de aplicação da força na roda dianteira);

$l_2 = 1,400 \text{ m}$  (distância entre o centro de gravidade da massa suspensa ao ponto de aplicação da força na roda traseira);

$k_1 = 18.400,00 \text{ N/m}$  (rigidez da mola linear da suspensão dianteira);

$k_2 = 20.000,00 \text{ N/m}$  (rigidez da mola linear da suspensão traseira);

$c_1 = 3.969,00 \frac{\text{N}}{\text{m}}/\text{s}$  (coeficiente de amortecimento da suspensão dianteira);

$c_2 = 3.969,00 \frac{\text{N}}{\text{m}}/\text{s}$  (coeficiente de amortecimento da suspensão traseira);

$m_1 = 80,00/2 \text{ kg}$  (massa não suspensa dianteira do veículo);

$m_2 = 80,00/2 \text{ kg}$  (massa não suspensa traseira do veículo);

$k_3 = 220.000,00 \text{ N/m}$  (rigidez da roda dianteira);

$k_4 = 220.000,00 \text{ N/m}$  (rigidez da roda traseira);

$c_3 = 31,69 \frac{\text{N}}{\text{m}}/\text{s}$  (coeficiente de amortecimento da roda dianteira);

$c_4 = 31,69 \frac{\text{N}}{\text{m}}/\text{s}$  (coeficiente de amortecimento da roda traseira);

$dt = 0,01 \text{ s}$  (“discretização” do tempo);

$df = 0,0122 \text{ Hz}$  (“discretização” da frequência);

$\lambda=0,60$  (valor adimensional, refere-se a parcela da força de correção adicionada a força estimada a cada interação);

$f_{am}=100$  Hz (frequência de amostragem);

O critério de convergência foi o mesmo do item 6.2.1., com faixa de tolerância aceitável de convergência de 1,5% do sinal original (simulação de pista). Estipulou-se um número máximo de 20 interações possíveis, sendo que acima disto assumiu-se que não houve convergência.

As variáveis,  $Tol$ , tolerância admissível e  $erro$ , diferença entre a resposta original medida e resposta estimada, assumem no caso de 4GDL as formas  $Tol_1$  e  $erro_1$ , para o grau de liberdade referente ao movimento vertical da massa suspensa, ou seja, corpo do veículo  $Ma$ ;  $Tol_2$  e  $erro_2$ , para o grau de liberdade referente ao movimento angular (pitch) deste mesmo corpo  $Ma$ ;  $Tol_3$  e  $erro_3$  para o grau de liberdade referente ao movimento vertical da roda dianteira  $m_{a1}$ ; e  $Tol_4$  e  $erro_4$  para o grau de liberdade referente ao movimento vertical da roda traseira do veículo  $m_{a2}$ .

Nos casos de 4GDL, as respostas de cada grau de liberdade devem convergir para os valores originais ao mesmo tempo.

O algoritmo idealizado pode ser dividido em três fases principais: A primeira fase quando se faz a medição em veículo da resposta que se quer reproduzir, aqui realizada através de simulação em computador utilizando um modelo dinâmico de meio veículo. A segunda fase quando se faz a identificação do sistema. E a terceira fase, quando se faz a busca da excitação estimada, capaz de reproduzir uma resposta próxima daquela medida na primeira fase. Importante aqui comentar como foram realizadas as excitações e como foram obtidas as respostas em cada uma destas três fases do algoritmo. Para as simulações com modelos de meio veículo (4GDL), utilizou-se MIMO na primeira e na terceira fase do algoritmo. Na segunda fase, que correspondente ao processo de identificação do sistema, utilizou-se SIMO. Isto porque apesar da identificação utilizando MIMO proporcionar respostas mais próximas das condições de pista, pois leva em consideração os efeitos não lineares do acoplamento cruzado entre diferentes entradas e saída obteve-se neste trabalho melhores resultados com a identificação através de SIMO. Isto pode ser explicado quando se entende o processo de cálculo usado.

Quando se utiliza MIMO, a matriz de FRF que representa o sistema, aqui mostrado com a notação  $[H_{1o}]$  na equação (51), é obtida calculando o estimador  $H_1$ , aqui mostrado com a notação  $\frac{S_{x_j y_i}}{S_{x_j x_j}}$ , para cada elemento da matriz FRF, segundo Bendat e Piersol (1986).

$$[H_{1o}] = \begin{bmatrix} \frac{S_{x_j y_i}}{S_{x_j x_j}} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde:

$[H_{1o}]$ , é a matriz FRF (MIMO) que representa o sistema;

$S_{x_j y_i}$ , é a densidade espectral de potencia cruzada da entrada  $x_j$ , com a resposta  $y_i$ ;

$S_{x_j x_j}$ , é a densidade espectral de potencia da entrada  $x_j$ ;

$\frac{S_{x_j y_i}}{S_{x_j x_j}}$ , são os estimadores  $H_1$ , de cada elemento que compõe a matriz FRF (MIMO),

sendo que  $j$  varia com a quantidade de entradas e  $i$ , com a quantidade de saídas, com

$i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ . Onde  $n$  e  $m$  são inteiros reais.

Nos casos estudados observou-se que os estimadores,  $\frac{S_{x_j y_i}}{S_{x_j x_j}}$ , não produziram uma matriz FRF,  $[H_{1o}]$ , de boa qualidade a ponto de facilitar a convergência do algoritmo. Associou-se isto ao fato do vetor de resposta apresentar linhas correlacionadas, ou parcialmente correlacionadas, dificultando o cálculo da FRF. Conforme De Cuyper *et al.*, (1998), existem técnicas para contornar este problema, como processar o vetor de resposta “aleatorizando” as fases dos sinais e sem alterar as amplitudes, de modo que se adquire um novo vetor com linhas não correlacionadas, no entanto esta técnica não foi utilizada neste trabalho. Preferiu-se aqui realizar a fase de identificação através de SIMO. Para isto assumiu-se um período infinito, para os sinais aleatórios, ou seja, considerou-os como sinais determinísticos, o que possibilita a utilização da transformada de *Fourier*. Desta forma obteve-se a matriz FRF, mostrada neste caso com a notação,  $[H_{1id}]$ , calculando um

estimador  $H_1$ , mostrado com a notação  $\frac{Y_i^j(\omega)}{X_j(\omega)}$ , para cada elemento da matriz, conforme a equação (52):

$$[H_{1id}] = \begin{bmatrix} \frac{Y_i^j(\omega)}{X_j(\omega)} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \end{bmatrix} \quad (52)$$

onde:

$\frac{Y_i^j(\omega)}{X_j(\omega)}$ , são os estimadores  $H_1$ , para cada elemento da matriz FRF  $[H_{1id}]$ , (SIMO);

$Y_i^j(\omega)$  refere-se às transformadas de *Fourier* das respostas  $y_i^j(t)$ , medidas nos pontos  $i$ , quando o sistema é excitado através de uma força  $x_j(t)$ , aplicada em pontos “ $j$ ”, sendo  $X_j(\omega)$ , as transformadas *Fourier* destes sinais de excitação;

É importante observar que neste método (SIMO) cada grupo de respostas,  $y_i^j(t)$ , só tem a influencia de uma única excitação  $x_j(t)$ . De modo que cada coluna da matriz FRF,  $[H_{1id}]$ , foi obtida separadamente, através de excitação independente, com  $i = 1, \dots, n$  e  $j=1, \dots, m$ , (onde  $n$  e  $m$  são inteiros reais),

Diferentemente dos casos anteriores de 2GDL apresentados, o processo de convergência foi realizado separadamente para cada grau de liberdade.

Os resultados e gráficos do item 6.3.1.1, foram obtidos a partir do algoritmo escrito em Matlab.

### 6.3.1.1 Excitação Simultânea (MIMO) Aleatória.

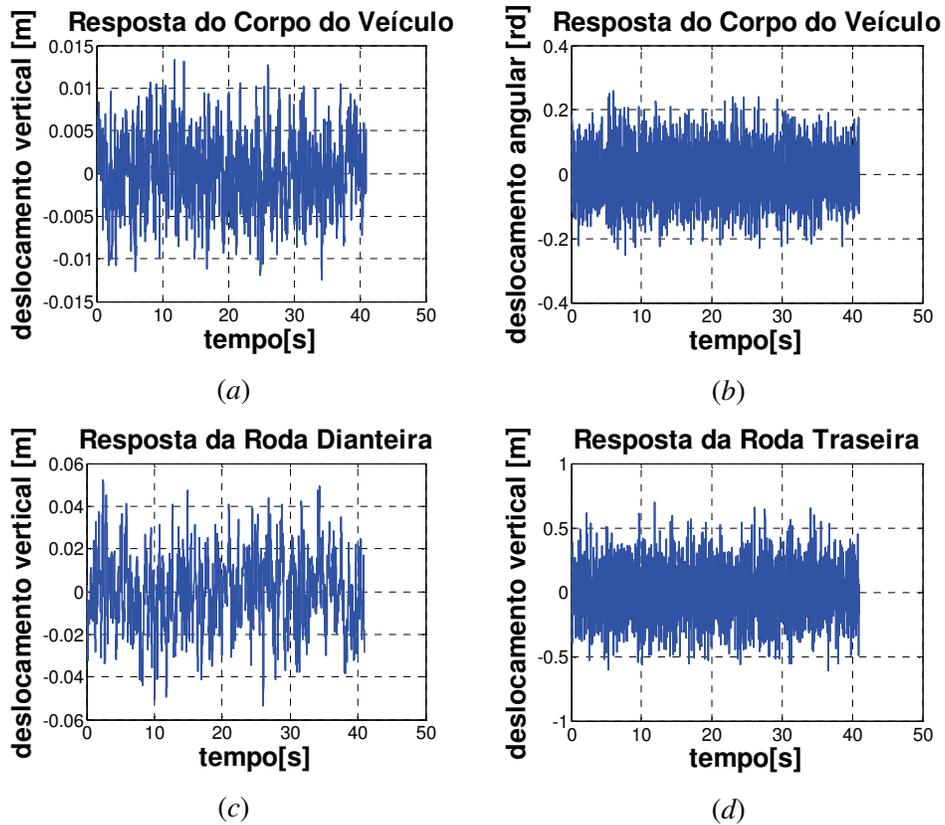
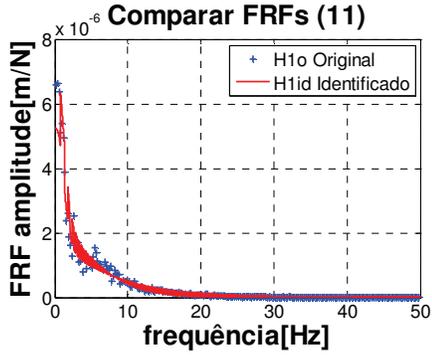
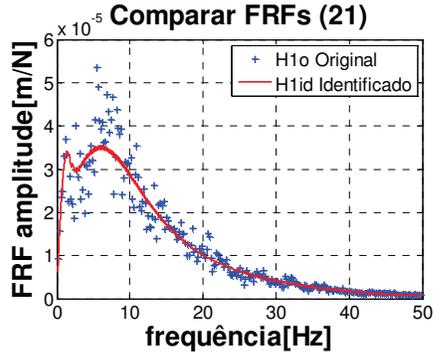


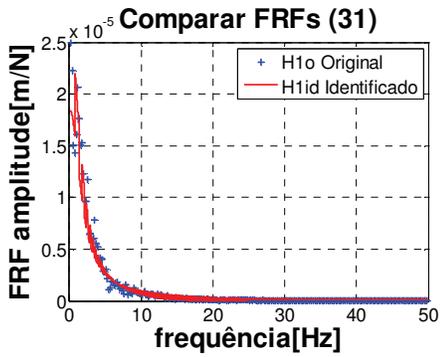
Figura 24 - Sistema de 4GDL Linear. Respostas originais para simulação em “pista”, quando submetido a excitação aleatória;  
*a)* 1º GDL movimento vertical do corpo do veículo; *b)* 2ºGDL movimento angular do corpo do veículo;  
*c)* 3º GDL, movimento vertical da roda dianteira; *d)* 4ºGDL, movimento vertical da roda traseira.



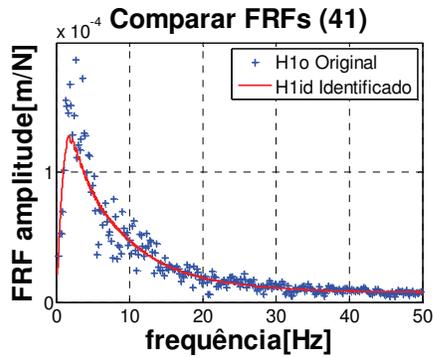
(a)



(b)

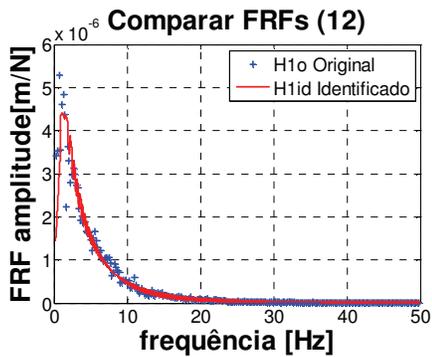


(c)

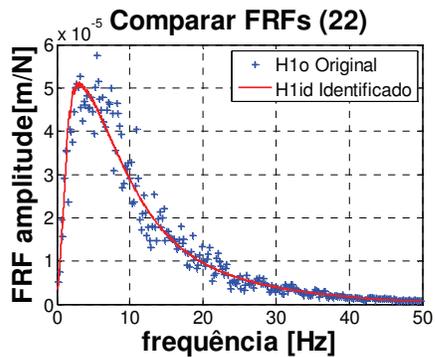


(d)

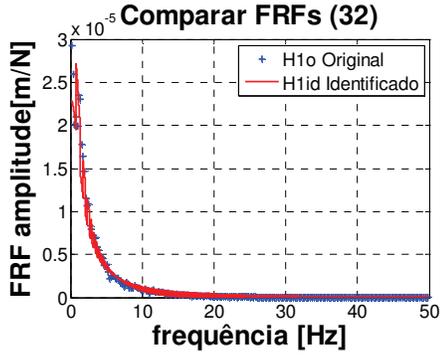
Figura 25 - Sistema de 4GDL Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação;  
*a)* para saída 1 e entrada 1; *b)* para saída 2 e entrada 1 ; *c)* para saída 3 e entrada 1; *d)* para saída 4 e entrada 1.



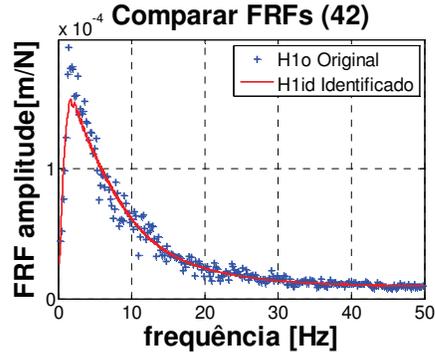
(a)



(b)



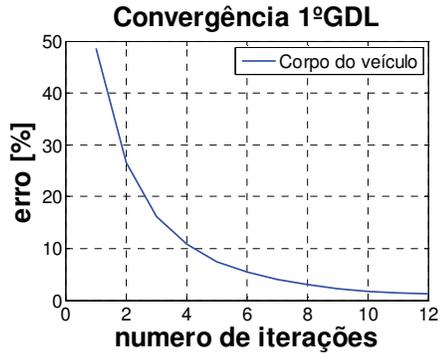
(c)



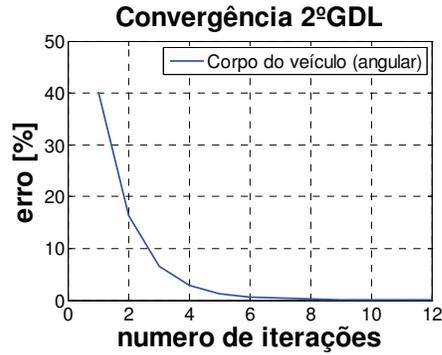
(d)

Figura 26 - Sistema de 4GDL Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação;

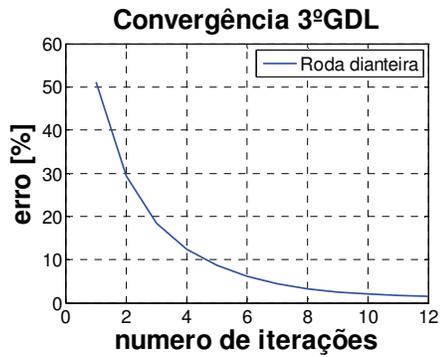
a) para saída 1 e entrada 2; b) para saída 2 e entrada 2; c) para saída 3 e entrada 2; d) para saída 4 e entrada 2.



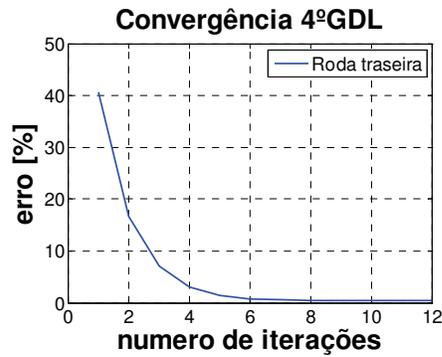
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 27 - Sistema de 4GDL Linear. Curvas de Convergência;

a) Convergência para o 1º GDL ; b) Convergência para o 2ºGDL; c) Convergência para o 3ºGDL; d) Convergência para o 4ºGDL.

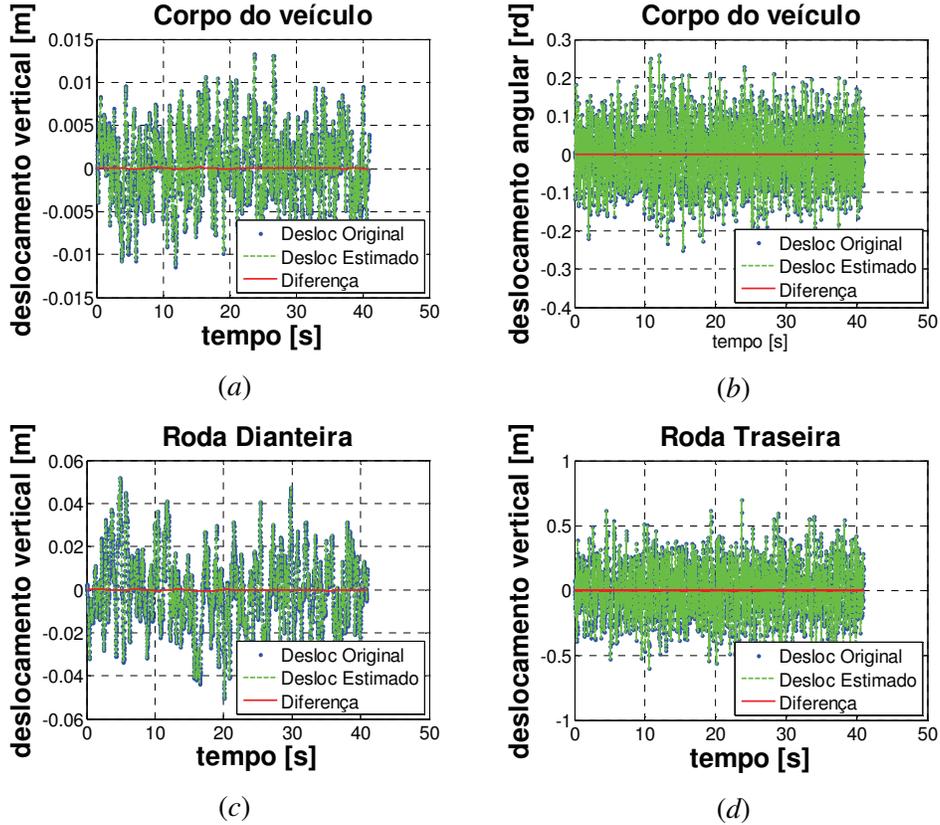


Figura 28 - Sistema de 4GDL Linear. Resposta original e estimada, e diferença das respostas;  
*a)* 1º GDL movimento vertical do corpo do veículo; *b)* 2º GDL movimento angular do corpo do veículo;  
*c)* 3º GDL, movimento vertical da roda dianteira; *d)* 4º GDL, movimento vertical da roda traseira.

### 6.3.2 Sistema Não Linear

Adicionando molas cúbicas paralelas nas suspensões do veículo e nas rodas, pode se analisar o veículo como sendo um sistema não linear.

A figura (29) representa o modelo do veículo adicionado das não linearidades,  $k_{1NL}$ ,  $k_{2NL}$ , referentes a rigidez das suspensão dianteira, suspensão traseira, e  $k_{3NL}$ ,  $k_{4NL}$ , referentes a rodas dianteira e traseira respectivamente.

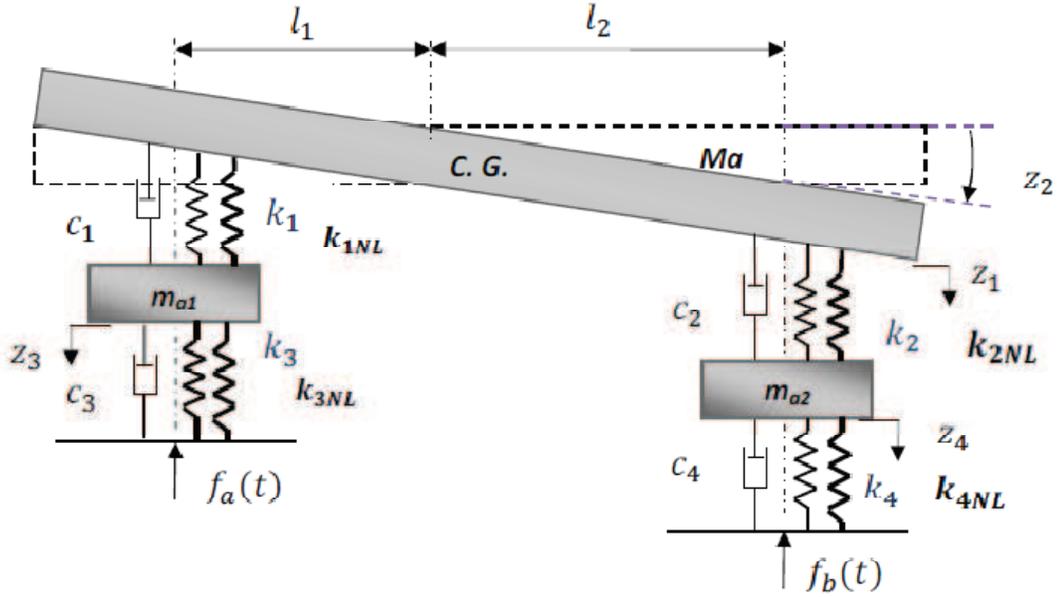


Figura 29 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade (4GDL Não Linear).

Através do método de Lagrange apresentado no Anexo C, é possível escrever as equações de movimento do sistema vibratório de quatro graus de liberdade.

Assim desenvolve-se a equação de Lagrange para cada grau de liberdade:

Para  $z_1(t)$ , referente ao movimento vertical de metade da massa do veículo  $M_a$ , temos:

$$\begin{aligned}
 M_a \ddot{z}_1 + c_1((\dot{z}_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3) + c_2((\dot{z}_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4) + k_1(z_1 - l_1 z_2 - z_3) \\
 + k_2(z_1 + l_2 z_2 - z_4) \\
 + k_{1NL}[2z_1^3 - 6l_1 z_1^2 z_2 - 6z_1^2 z_3 - 2z_3^3 - 2l_1^3 z_2^3 + 6l_1^2 z_1 z_2^2 - 6l_1^2 z_2^2 z_3 \\
 + 12l_1 z_1 z_2 z_3 - 6l_1 z_2 z_3^2 + 6z_1 z_3^2] \\
 + k_{2NL}[2z_1^3 + 6l_2 z_1^2 z_2 - 6z_1^2 z_4 - 2z_4^3 + 2l_2^3 z_2^3 + 6l_2^2 z_1 z_2^2 - 6l_2^2 z_2^2 z_4 \\
 - 12l_2 z_1 z_2 z_4 + 6l_2 z_2 z_4^2 + 6z_1 z_4^2] = 0
 \end{aligned}$$

(53)

Para  $z_2(t)$ , referente ao movimento rotacional da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$\begin{aligned}
I\mathbf{z}_2'' + c_1(l_1^2\dot{\mathbf{z}}_2 - l_1\dot{\mathbf{z}}_1 + l_1\dot{\mathbf{z}}_3) + c_2(l_2^2\dot{\mathbf{z}}_2 + l_2\dot{\mathbf{z}}_1 - l_2\dot{\mathbf{z}}_4) + k_1(l_1^2\mathbf{z}_2 - l_1\mathbf{z}_1 + l_1\mathbf{z}_3) \\
+ k_2(l_2^2\mathbf{z}_2 + l_2\mathbf{z}_1 - l_2\mathbf{z}_4) \\
+ k_{1NL}(2l_1^4\mathbf{z}_2^3 - 2l_1\mathbf{z}_1^3 - 6l_1^3\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^2 + 6l_1^3\mathbf{z}_2^2\mathbf{z}_3 + 2l_1\mathbf{z}_3^3 + 6l_1^2\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_2 + 6l_1^2\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3^2 \\
- 12l_1^2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3 + 6l_1\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_3 - 6l_1\mathbf{z}_1\mathbf{z}_3^2) \\
+ k_{2NL}(2l_2^4\mathbf{z}_2^3 + 2l_2\mathbf{z}_1^3 + 6l_2^3\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^2 + 6l_2^3\mathbf{z}_2^2\mathbf{z}_4 - 2l_2\mathbf{z}_4^3 + 6l_2^2\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_2 + 6l_2^2\mathbf{z}_2\mathbf{z}_4^2 \\
- 12l_2^2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_4 - 6l_2\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_4 + 6l_2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_4^2) = \mathbf{f}_a l_1 - \mathbf{f}_b l_2
\end{aligned} \tag{54}$$

Para  $\mathbf{z}_3(\mathbf{t})$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a1}$ , da roda dianteira, temos:

$$\begin{aligned}
m_{a1}\ddot{\mathbf{z}}_3 + c_1(\dot{\mathbf{z}}_3 - \dot{\mathbf{z}}_1 + l_1\dot{\mathbf{z}}_2) + c_3(\dot{\mathbf{z}}_3) + k_1(\mathbf{z}_3 - \mathbf{x}_1 + l_1\mathbf{z}_2) + k_3(\mathbf{z}_3) \\
+ k_{1NL}(2\mathbf{z}_3^3 - 2\mathbf{z}_1^3 - 6\mathbf{z}_1\mathbf{z}_3^2 + 2l_1^3\mathbf{z}_2^3 + 6l_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3^2 + 6l_1^2\mathbf{z}_2^2\mathbf{z}_3 - 6l_1^2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^2 \\
+ 6l_1\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_2 - 12l_1\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3 + 6\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_3) + k_{3NL}(2\mathbf{z}_3^3) = -\mathbf{f}_a
\end{aligned} \tag{55}$$

Para  $\mathbf{z}_4(\mathbf{t})$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a2}$  da roda traseira, temos:

$$\begin{aligned}
m_{a2}\ddot{\mathbf{z}}_4 + c_2(\dot{\mathbf{z}}_4 - \dot{\mathbf{z}}_1 - l_2\dot{\mathbf{z}}_2) + c_4(\dot{\mathbf{z}}_4) + k_2(\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_1 - l_2\mathbf{z}_2) + k_4(\mathbf{z}_4) \\
+ k_{2NL}(2\mathbf{z}_4^3 - 2\mathbf{z}_1^3 - 6\mathbf{z}_1\mathbf{z}_4^2 - 2l_2^3\mathbf{z}_2 - 6l_2\mathbf{z}_2\mathbf{z}_4^2 + 6l_2^2\mathbf{z}_2^2\mathbf{z}_4 - 6l_2^2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^2 \\
- 6l_2\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_2 + 12l_2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_4 + 6\mathbf{z}_1^2\mathbf{z}_4) + k_{4NL}(2\mathbf{z}_4^3) = -\mathbf{f}_b
\end{aligned} \tag{56}$$

O anexo C mostra os diagramas de corpo livre do sistema 4GDL não linear, e as equações do movimento na forma de espaço de estado, que foram utilizadas para solução e obtenção da resposta do sistema em função do tempo.

A seguir são apresentados os resultados simulados para um sistema de 4GDL não linear, submetido a duas forças de excitação simultâneas aleatórias; Os resultados e gráficos do item 6.3.2.1 foram obtidos a partir de simulações realizada com o algoritmo escrito Matlab.

### 6.3.2.1 Excitação Simultânea (MIMO) Aleatória

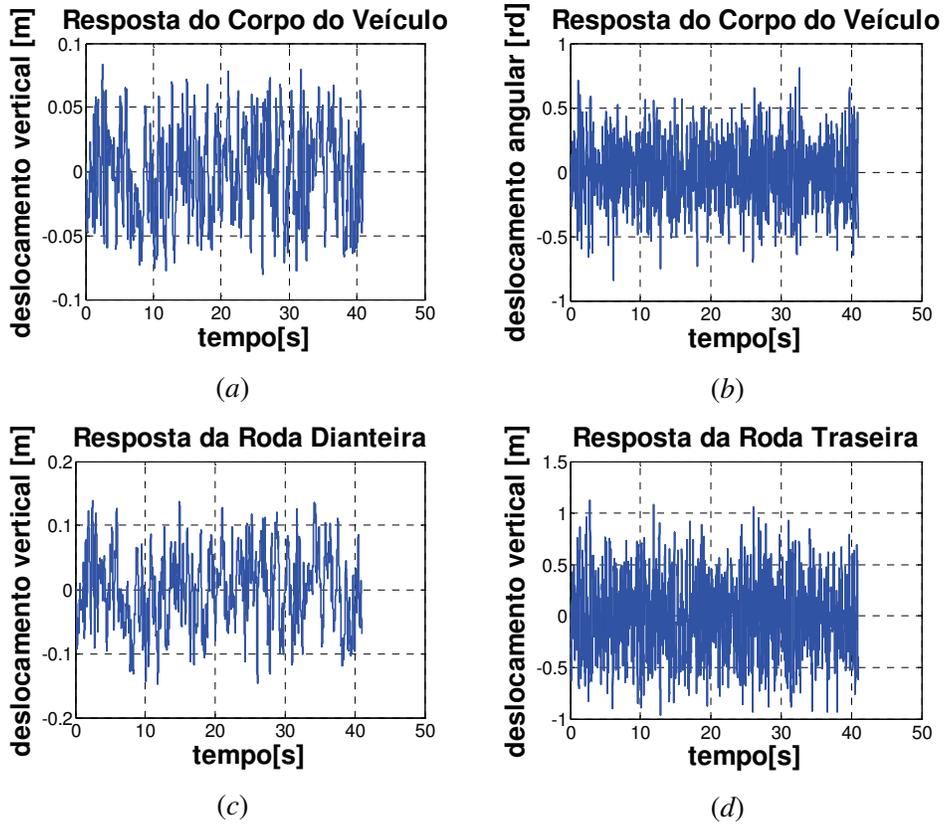
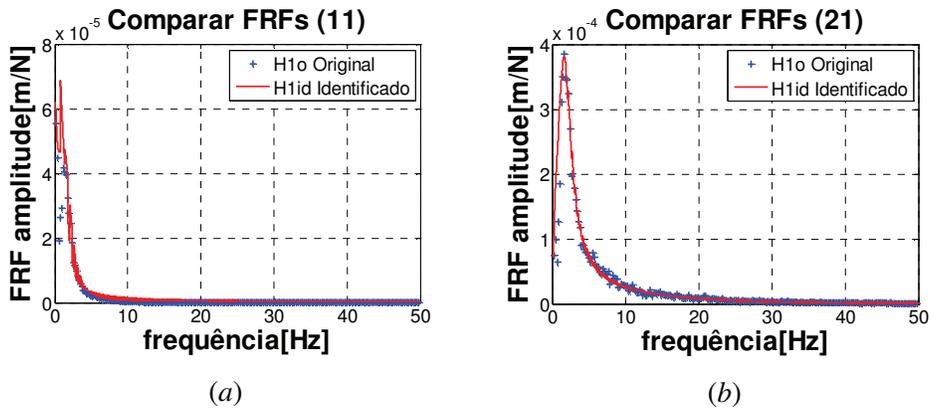
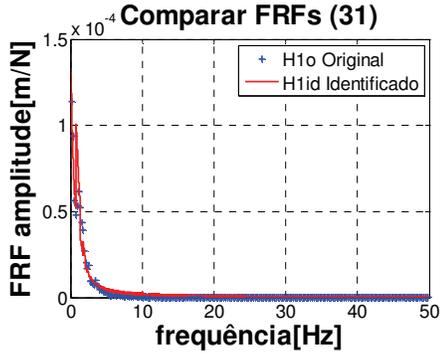
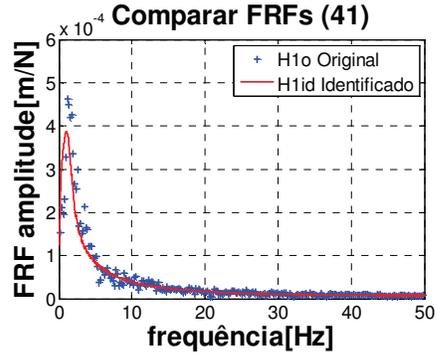


Figura 30 - Sistema de 4GDL Não Linear. Respostas originais para simulação em pista, quando submetido a excitação aleatória; a) 1º GDL movimento vertical do corpo do veículo; b) 2º GDL movimento angular do corpo do veículo; c) 3º GDL, movimento vertical da roda dianteira; d) 4º GDL, movimento vertical da roda traseira.





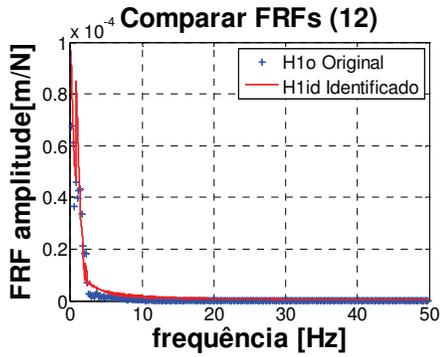
(c)



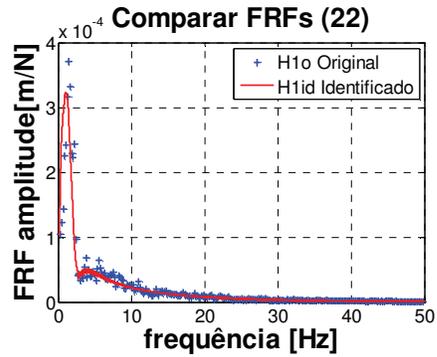
(d)

Figura 31 - Sistema de 4GDL Não Linear. Comparativo entre FRF com dados de pista (original) e FRF com dados da identificação;

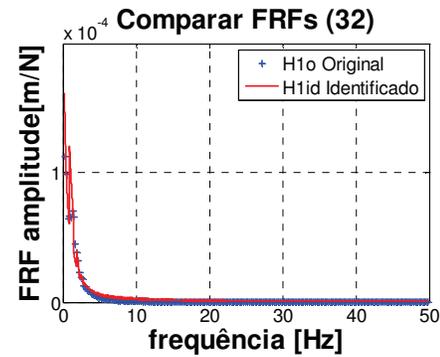
a) para saída 1 e entrada 1; b) para saída 2 e entrada 1; c) para saída 3 e entrada 1; d) para saída 4 e entrada 1.



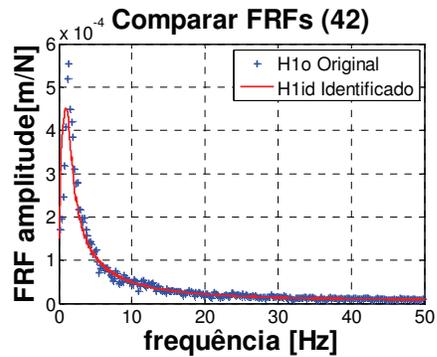
(a)



(b)



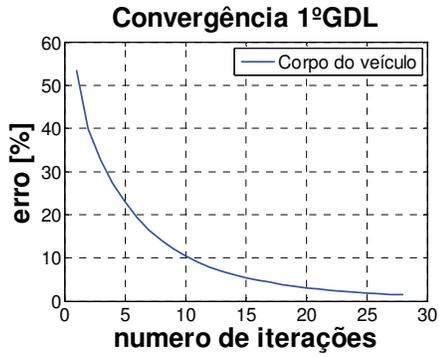
(c)



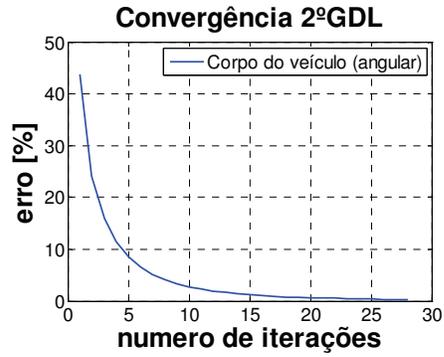
(d)

Figura 32 - Sistema de 4GDL Não Linear. Comparativo entre FRF com dados de “pista” (original) e FRF com dados da identificação;

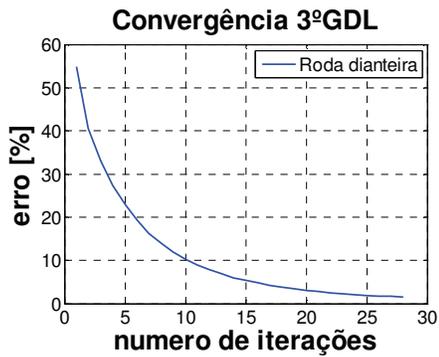
a) para saída 1 e entrada 2; b) para saída 2 e entrada 2 ; c) para saída 3 e entrada 2; d) para saída 4 e entrada 2.



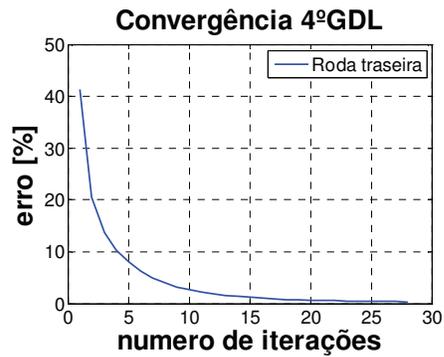
(a)



(b)



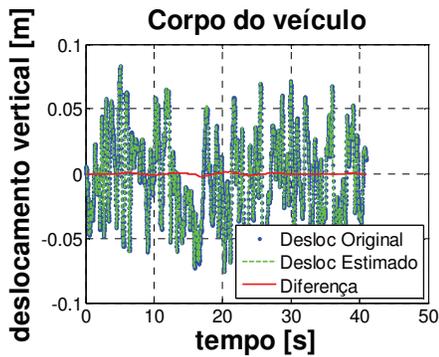
(c)



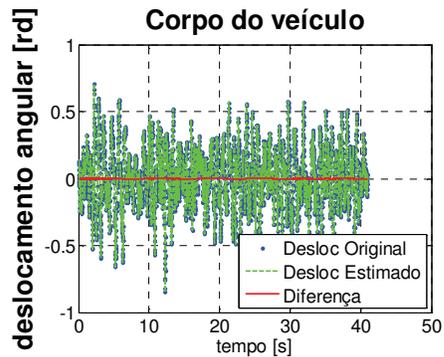
(d)

Figura 33 - Sistema de 4GDL Não Linear. Curvas de Convergência;

a) Convergência para o 1º GDL ; b) Convergência para o 2ºGDL; c) Convergência para o 3ºGDL; d) Convergência para o 4ºGDL



(a)



(b)

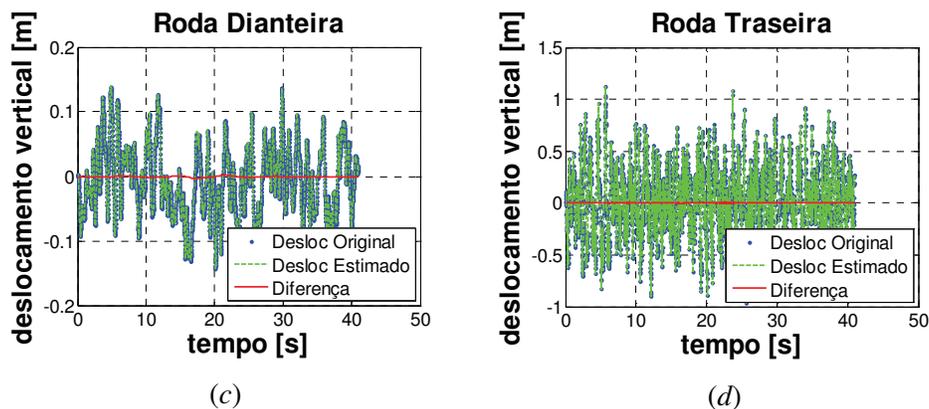


Figura 34 - Sistema de 4GDL Não Linear. Resposta original e estimada, e diferença das respostas; *a)* 1º GDL movimento vertical do corpo do veículo; *b)* 2º GDL movimento angular do corpo do veículo; *c)* 3º GDL, movimento vertical da roda dianteira; *d)* 4º GDL, movimento vertical da roda traseira.

### 6.3.3 Comparação dos resultados para sistemas lineares e não lineares de 4GDL.

Os resultados das simulações mostram que através do algoritmo é possível estimar a força de excitação capaz de reproduzir uma resposta aproximada da resposta original para os movimentos de “body bounce”, “body pitch” e movimentos verticais das rodas, do sistema de 4GDL linear e não linear, com uma tolerância de erro, menor que 1,5%.

No caso linear, item 6.3.1.1, a convergência acontece com treze iterações do algoritmo, enquanto que para o sistema não linear é necessário 29 iterações.

**Tabela 5 - Comparação dos resultados simulados para 4 graus de liberdade com excitações simultâneas ALEATÓRIAS, Amplitude de 10 KN.**

Sistema Linear:  $k_1 = 18.400$ ;  $k_2 = 20.000$ ;  $k_3 = k_4 = 220.000$  [N/m];  $c_1 = c_2 = 3.969$ ;  $c_3 = c_4 = 39,69$  [ $\frac{Ns}{m}$ ];

Sistema Não Linear:  $k_1 = 4.600$ ;  $k_2 = 5.000$ ;  $k_{1NL} = 13.800$ ;  $k_{2NL} = 15.000$ ;  $k_3 = k_4 = 55.000$ ;  $k_{3NL} = k_{4NL} = 165.000$  [N/m];

$c_1 = c_2 = 3.969$ ;  $c_3 = c_4 = 39,69$  [ $\frac{Ns}{m}$ ];

Simulação	Sistema	Tolerância Aceitável em % ,	Erro_1 em % (z <sub>o</sub> - z <sub>e</sub> )	Erro_2 em % (z <sub>o</sub> - z <sub>e</sub> )	Erro_3 em % (z <sub>o</sub> - z <sub>e</sub> )	Erro_4 em % (z <sub>o</sub> - z <sub>e</sub> )	Nº de Interações	Convergência
6.2.2.1	Linear	<=1,5	1,1421	0,0823	1,4492	0,3407	13	Ok
6.2.2.2	Não Linear	<=1,5	1,3640	0,2441	1,4585	0,3088	29	Ok

## **7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA OS PRÓXIMOS TRABALHOS**

### **7.1. Conclusões**

Neste trabalho desenvolveu-se um algoritmo capaz de identificar a excitação de entrada, responsável pelas respostas medidas em sistemas físicos reais.

Através de simulações realizadas em computador comprovou-se o método de identificação inversa de forças utilizando funções de resposta em frequência. Verificou-se que é possível associar a um sistema não linear um modelo aproximado linear de modo a obter por um processo iterativo respostas que convergem para as respostas do sistema não linear.

No desenvolvimento do algoritmo notou-se que alguns fatores têm influência fundamental para o processo de convergência do algoritmo, dos quais, destacam-se: a fase de identificação do sistema através do cálculo da função de resposta em frequência; o tipo de sinal utilizado para a identificação do sistema; o nível de não linearidade do sistema; e as formas de excitação e resposta, SIMO ou MIMO.

O algoritmo idealizado pode ser dividido em três fases principais. A primeira fase quando se mede a resposta que se quer reproduzir, aqui realizada através de simulação em computador utilizando um modelo dinâmico de meio veículo. A segunda fase quando se faz a identificação do sistema. E a terceira fase, quando se faz a busca da excitação estimada, capaz de reproduzir uma resposta próxima daquela medida na primeira fase. Importante aqui observar como foram realizadas as excitações e como foram obtidas as respostas em cada uma destas três fases do algoritmo. Para as simulações com modelos de meio veículo (4GDL), utilizou-se MIMO na primeira e na terceira fase do algoritmo. Na segunda fase,

que correspondente ao processo de identificação do sistema, utilizou-se SIMO. Isto porque apesar da identificação utilizando MIMO proporcionar respostas mais representativas das condições de pista, pois leva em consideração os efeitos não lineares do acoplamento cruzado entre diferentes entradas e saídas, obteve-se neste trabalho melhores resultados com a identificação através de SIMO. Nos casos estudados com a identificação MIMO, observaram-se vetores de resposta com linhas correlacionadas, resultando em uma FRF de má qualidade e impossibilitando a convergência do algoritmo.

Com relação ao tipo do sinal utilizado na identificação, notou-se que este deve possuir faixas de frequência e amplitudes as mais próximas possíveis dos valores encontrados no sinal de resposta original que se quer reproduzir. Ou seja, deve se identificar o sistema o mais próximo possível da condição em estudo, minimizando o erro introduzido pelas não linearidades e possibilitando, para uma dada condição, a melhor aproximação linear para um sistema de características não lineares. Isto porque as características de rigidez e amortecimento de um sistema não linear, identificadas numa dada condição poderão ser significativamente diferentes em qualquer outra condição. Desta forma quando se busca um sinal de identificação convenientemente próximo do sinal de resposta procurado, obtêm-se uma FRF mais representativa. Assim sinais “sintéticos” que possibilitam um controle da faixa de frequência do tipo ruído branco, Schroeder e Multissenso, se mostraram mais apropriados para a identificação, pois através destes foi possível, encontrar a faixa de frequência a que o sistema responde com amplitudes e frequências semelhantes às originais medidas em “pista”.

Pôde se também avaliar a influencia da adição de ruído nos sinais de resposta, fato que normalmente faz parte do processo de medição e que pode estar associado a qualquer variável não controlada como: o equipamento utilizado, a habilidade do técnico ou a características do sistema. Dentro deste contexto, realizaram-se simulações de casos relacionados a medições em pista muito irregulares, com valas profundas, onde se combinou altos níveis de ruído e altas amplitudes de excitação, resultando em aumento das não linearidades do sistema, que tornaram impossível o cálculo da matriz FRF. Ainda com relação as simulações com altos níveis de não linearidade, observou-se divergência logo nas primeiras iterações do algoritmo, devido à busca por uma força estimada muito alta. Isto na prática pode significar danos na estrutura do sistema testado. A exemplo de outros

algoritmos utilizou-se de um fator, de modo a reduzir a correção feita à força estimada, minimizando o risco de dano, mas por outro lado aumentando o número de iterações realizadas. Ficou evidente, portanto que os casos de insucesso de convergência do algoritmo estão associados ao alto nível de não linearidade e ou a má qualidade da função de resposta em frequência, quando a identificação do sistema é realizada utilizando SIMO. Conforme comentado não se utilizou MIMO na fase de identificação devido ao fato do vetor de resposta apresentar linhas correlacionadas.

O algoritmo proposto se mostrou capaz de estimar respostas com tolerâncias menores do que 1,5% para sistemas não lineares de 4GDL, o que pode ser considerado bastante razoável, pois em pesquisa com laboratórios de montadoras de veículos, notou-se que os algoritmos comerciais trabalham com uma faixa de tolerância de 5% e proporcionam uma ótima correlação entre testes de pista e simulações de bancada. Outro paralelo com alguns dos algoritmos comerciais é que apesar do código fonte destes serem inacessíveis, pôde se verificar através dos procedimentos de teste que estes utilizam dos mesmos conceitos adotados neste trabalho com relação a medição do sinal de resposta em pista através de MIMO; a identificação do sistema com SIMO; e a busca do vetor de excitação estimado através de MIMO;

Como resultado final deste trabalho fica a proposta de um algoritmo, que deve contribuir para o conhecimento do comportamento dinâmico de sistemas não lineares utilizados em veículos, além de revelar os sinais de excitação a que estes são submetidos em pista.

## **7.2 Sugestões para os próximos trabalhos**

Implementar na fase de identificação do algoritmo o cálculo da Função de Resposta em Frequência utilizando Excitação Multisseno MIMO.

Pesquisar métodos de identificação de sistemas mecânicos não lineares.

## Referências Bibliográficas

- AMBARTSUMIAN, V. A. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie* (On a Problem of the Theory of Eigenvalues) // *Zeitschrift für Physik*, 1929 Vol. 53, Nos. 9-10, p. 690-695.
- ARRUDA, F.J.R.; HUALLPA, B. N., *Análise Espectral de Sinais e Sistemas Lineares*. Campinas: Apostila Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2008. 178p.
- BENDAT, J.S.; PIERSOL, A.G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. 2ª Edition, N.Y: John Wiley e Sons Inc., 1986. 428p.
- DE CUYPER, J.; COPPENS, D.; LIEFOOGHE, C.; SWEVER, J.; VERHAEGEN, M., *Advanced drive file development methods for improved service load simulation on multi axial durability test rigs*. Proceedings of Acoustics and Vibration Asia. 1998, pp. 339-354.
- HERGLOTZ, G., *Über das Benndorf'sche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen*. *Physikal. Zeitschr.*, 1907, Bd. 8, 145-147.
- HERGLOTZ, G.; WIECHERT, E., *Determination of the earth's structure*. [http://www.oge.or.at/Lecture\\_EarthStructure.pdf](http://www.oge.or.at/Lecture_EarthStructure.pdf)
- INMAN, E.J., *Engineering Vibration*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs New Jersey. USA, 1996, 560p.
- JAZAR, R.N., *Vehicle Dynamics, Theory and Applications*. Springer Science Business Media, LLC, NY, USA, 2008, cap.13, p.853-877.

- MIEROVICH, L., *Elements of Vibration Analysis*. 2ª Edition, McGraw-Hill Book Co – Singapore, 1986, 567p.
- MURPHY, D., *Introduction to RPC – Remote Parameter Control - (six steps)*, Publicação MTS, <http://www.mts.com>, 2010.
- NORDBERG, T. P., *An Iterative Approach to Road/Profile Identification Utilizing Wavelet Parameterization*, Vehicle System Dynamics, Vol. 42, Nº 6, pp 413-432, 2004.
- OLIVEIRA, N. V., *Identificação de Parâmetros de Sistemas Mecânicos com Aplicações em Mancais*. 1988, 484p, Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- OPPENHEIM, A.V.; Schafer, R.W., *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. 870p.
- RILL, G., *Vehicle Dynamics, Lecture Notes*, 2009. cap7, p.106-111
- ROBERTS, D.E., Hay, N.C., *Dynamic response simulation for a non-linear system*, Journal of Sound and Vibration, (281), 783-798, 2005.
- SIQUEIRA Meirelles, P., *Simulação experimental de vibrações para teste dinâmico de estruturas com não linearidades*. 1989, 156p, Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- WIECHERT, E; GEIGER, L, *Bestimmung des Weges von Erdbebenwellen im Erdinneren*. Physikal. Zeitschr. 1901, Bd. 11, 394-411.

## ANEXO A – Sistema 1GDL

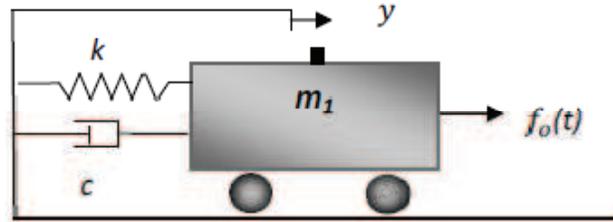


Figura 35- Sistema linear de um grau de liberdade

### A.1 Sistema Linear

Abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre da massa  $m_1$ :

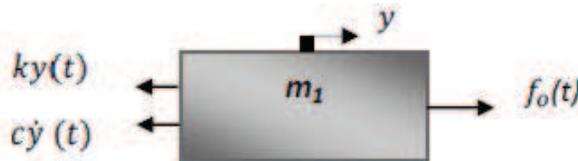


Figura 36 - Diagrama de corpo livre para massa  $m_1$

Através da 2ª lei de Newton pode se escrever a equação do movimento,

$$m_1 \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + ky(t) = f_o(t) . \quad (57)$$

Dividindo-se ambos os termos da equação (57) pela massa “ $m_1$ ” temos,,

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = f_o(t) . \quad (58)$$

Sendo:  $\omega_n = \sqrt{k/m_1}$ ;  $\xi = c/c_r$ ;  $c_r = 2m_1\omega_n$  (59)

Para conhecer a solução de equações de segunda ordem, vale-se aqui da integração numérica realizada através do Matlab, que é realizada convenientemente utilizando

equações de primeira ordem. Portanto a equação dinâmica do movimento (58) será reescrita na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y \\
 \dot{y}_1 &= \dot{y} \\
 y_2 &= \dot{y} \\
 \dot{y}_2 &= \ddot{y} = -2\xi\omega_n y_2 - \omega_n^2 y_1 + f_o
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

A resposta em função do tempo do sistema de 1GDL linear é obtida através da integração do conjunto de equações (60) e os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.1.1..

## A.2 Sistema Não Linear

Abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre da massa  $m_1$ , para o sistema não linear



Figura 37 - Diagrama de corpo livre para massa  $m_1$

Através da 2ª lei de Newton pode se escrever a equação do movimento,

$$m_1 \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) + k_{NL} y^3(t) = f_o(t)
 \tag{61}$$

Dividindo a equação (61) por  $m_1$  temos:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha y^3(t) = f_o(t)
 \tag{62}$$

Sendo:  $\omega_n = \sqrt{k/m_1}$ ;  $\xi = c/c_r$ ;  $c_r = 2m_1\omega_n$

$$\tag{63}$$

A seguir escreve-se a equação (62) na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ \dot{y}_1 &= \dot{y} \\ y_2 &= \dot{y} \\ \dot{y}_2 &= \ddot{y} = -2\xi\omega_n y_2 - \omega_n^2 y_1 - \alpha y_1^3 + f_o\end{aligned}\tag{64}$$

assumindo

$$\alpha = k_{NL}/m_1\tag{65}$$

A resposta em função do tempo do sistema de 1GDL linear é obtida através da integração do conjunto de equações (64) e os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.1.2..

## ANEXO B – Sistema 2GDL

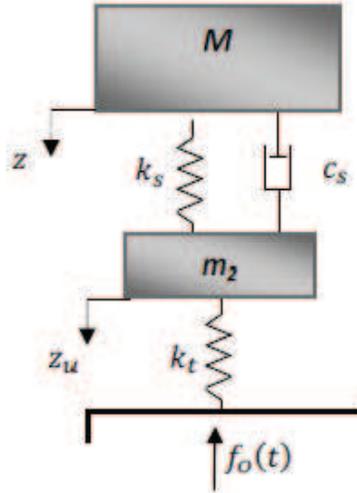


Figura 38 - Sistema Linear de dois graus de liberdade

### B.1 Sistema Linear

Abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre da massa  $M$ :

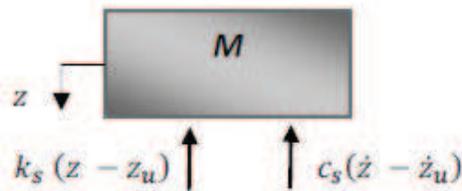


Figura 39 - Diagrama de corpo livre da massa  $M$

Através da 2ª lei de Newton pode se escrever a equação do movimento,

$$M\ddot{z} = -k_s(z - z_u) - c_s(\dot{z} - \dot{z}_u), \quad (66)$$

Dividindo-se ambos os membros da equação (66) pela massa  $M$ , teremos

$$\ddot{z} = [-k_s(z - z_u) - c_s(\dot{z} - \dot{z}_u)]/M \quad (67)$$

A figura (40) apresenta o diagrama do corpo livre da massa,  $m_2$  e a equação (68) mostra a equação do movimento deste corpo.

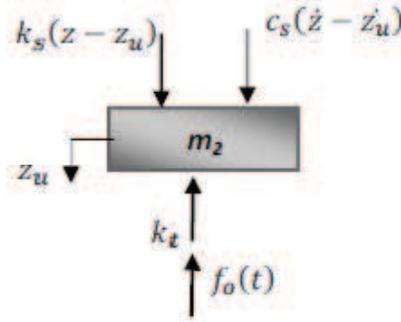


Figura 40 - Diagrama de corpo livre da massa não suspensa  $m_2$

$$m_2 \ddot{z}_u = k_s(z - z_u) + c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_t z_u - f_o. \quad (68)$$

Dividindo-se ambos os termos da equação (68) pela massa  $m_2$ , tem-se

$$\ddot{z}_u = [k_s(z - z_u) + c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_t z_u - f_o]/m_2. \quad (69)$$

A seguir escrevem-se as equações (67) e (69) na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned} y_1 &= z \\ \dot{y}_1 &= \dot{z} \\ y_2 &= \dot{z} \\ \dot{y}_2 &= \ddot{z} = [-k_s y_1 + k_s y_3 - c_s y_2 + c_s y_4]/M \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} y_3 &= z_u \\ \dot{y}_3 &= \dot{z}_u \\ y_4 &= \dot{z}_u \\ \dot{y}_4 &= \ddot{z}_u = [k_s y_1 - k_s y_3 + c_s y_2 - c_s y_4 - k_t y_3 - f_o]/m_2 \end{aligned} \quad (71)$$

A resposta em função do tempo do sistema de 2GDL linear é obtida através da integração do conjunto de equações (70) e (71) e os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.2.1..

## B.2 Sistema Não Linear

O diagrama de corpo livre da massa suspensa “M” para um sistema de 2GDL Não Linear, é apresentado na figura (41) e a equação (72) é referente a equação do movimento para este corpo.

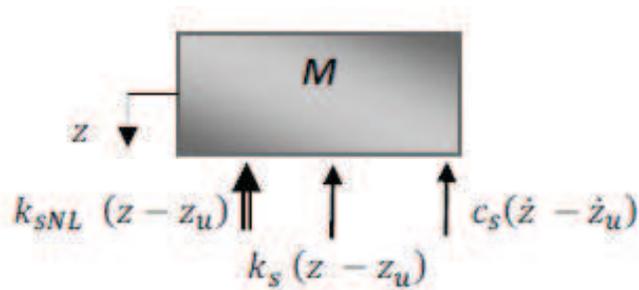


Figura 41 - Diagrama de corpo livre da massa M.

$$M\ddot{z} = -k_s(z - z_u) - c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_{sNL}(z - z_u)^3 \quad (72)$$

Dividindo-se ambos os membros da equação (72) pela massa M, teremos

$$\ddot{z} = [-k_s z + k_s z_u - c_s \dot{z} + c_s \dot{z}_u - k_{sNL} z^3 - 3k_{sNL} z z_u^2 + 3k_{sNL} z^2 z_u + k_{sNL} z_u^3]/M, \quad (73)$$

A figura (42) apresenta o diagrama do corpo livre da massa,  $m_2$  e a equação (74) mostra a equação do movimento deste corpo.

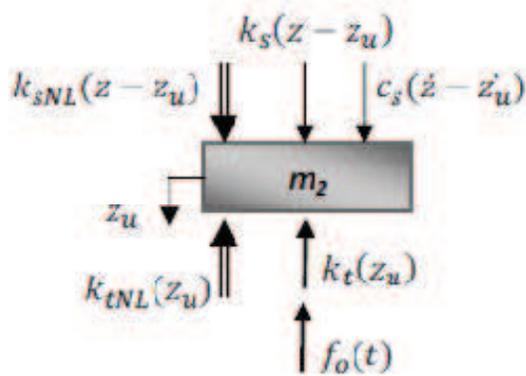


Figura 42 - Diagrama de corpo livre da massa não suspensa  $m_2$

$$m_2 \ddot{z}_u = k_s(z - z_u) + k_{sNL}(z - z_u)^3 + c_s(\dot{z} - \dot{z}_u) - k_t z_u - k_{tNL} z_u^3 - f_o \quad (74)$$

Dividindo-se ambos os termos da equação (74) pela massa “ $m_2$ ”,

$$\ddot{z}_u = [k_s z - k_s z_u + k_{sNL} z^3 + 3k_{sNL} z z_u^2 - 3k_{sNL} z^2 z_u - k_{sNL} z_u^3 + c_s \dot{z} - c_s \dot{z}_u - k_t z_u + k_{tNL} z_u^3 - f_o] / m_2 \quad (75)$$

A seguir escreve-se as equações (73) e (75) na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned} y_1 &= z \\ \dot{y}_1 &= \dot{z} \\ y_2 &= \dot{z} \\ \dot{y}_2 &= \ddot{z} = \left[ \begin{array}{c} -k_s y_1 + k_s y_3 - c_s y_2 + c_s y_4 - k_{sNL} y_1^3 - 3k_{sNL} y_1 y_3^2 + 3k_{sNL} y_1^2 y_3 \\ + k_{sNL} y_3^3 \end{array} \right] / M \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= z_u \\
\dot{y}_3 &= \dot{z}_u \\
y_4 &= \dot{z}_u \\
\dot{y}_4 &= \ddot{z}_u = [k_s y_1 - k_s y_3 + c_s y_2 - c_s y_4 + k_{sNL} y_1^3 + 3k_{sNL} y_1 y_3^2 - 3k_{sNL} y_1^2 y_3 - k_{sNL} y_3^3 \\
&\quad - k_t y_3 - k_{tNL} y_3^3 - f_o] / m_2
\end{aligned}
\tag{77}$$

A resposta em função do tempo do sistema de 2GDL não linear é obtida através da integração do conjunto de equações (76) e (77). Os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.2.2..

## ANEXO C – Sistema 4GDL

### C.1 Sistema Linear

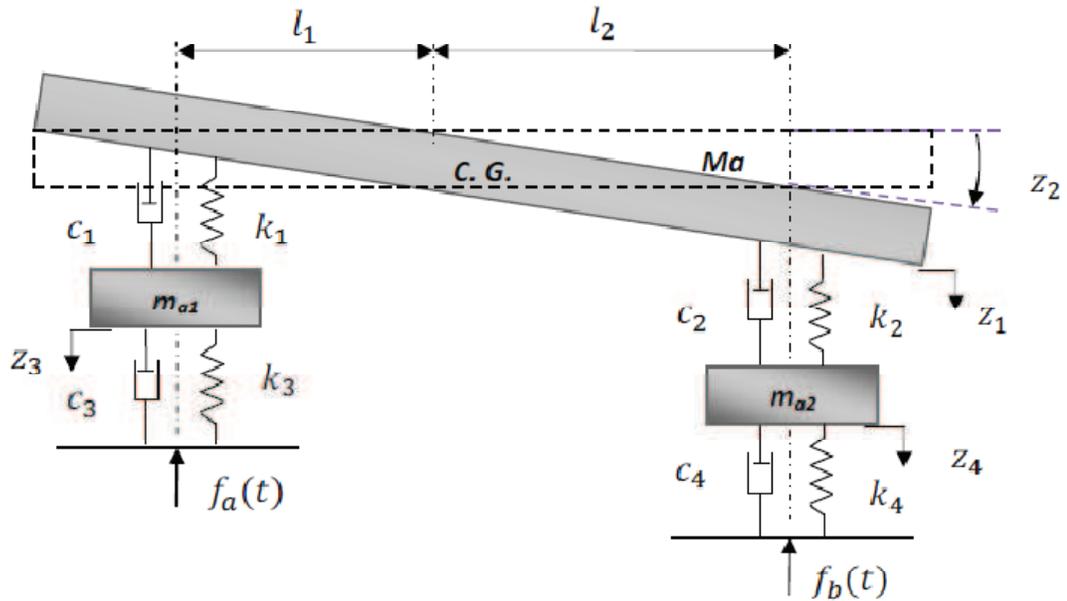


Figura 43 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade Linear.

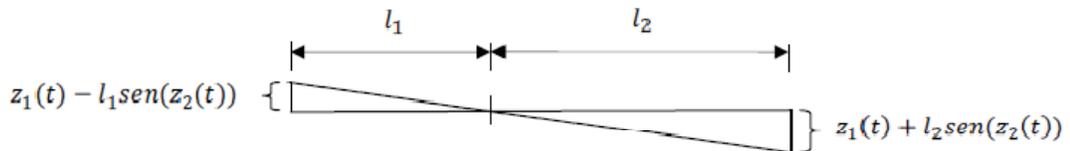


Figura 44 - Deslocamento vertical do corpo do veículo.

As dimensões  $l_1$  e  $l_2$ , referem-se as distâncias do centro de massa a roda dianteira e traseira respectivamente e  $z_1(t) - l_1 \text{sen}(z_2(t))$  e  $z_1(t) + l_2 \text{sen}(z_2(t))$ , se referem ao deslocamento vertical do corpo do veículo.

Através do método de Lagrange, é possível escrever as equações de movimento do sistema vibratório de quatro graus de liberdade.

Associa-se a cada corpo em movimento uma coordenada generalizada,  $q_i(t)$ .

A força generalizada (ou momento) na  $i$ -ésima coordenada generalizada denominada como  $Q_i$ , esta relacionada ao trabalho realizado em modificar uma determinada coordenada  $q_i$ , de uma quantidade  $\partial q_i$ , e é definido como:

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (78)$$

onde  $W$  é o trabalho realizado.

Abaixo as Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (79)$$

onde  $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ , é a velocidade generalizada,  $T$  é a energia cinética do sistema,  $V$  é a energia potencial do sistema,  $D$  é função de dissipação de energia do sistema e  $Q_i$ , representa todas as forças não conservativas correspondentes a cada coordenada generalizada. Para sistemas conservativos  $Q_i = 0$ , portanto a equação (79) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (80)$$

Escrevemos primeiro as equações de energia do sistema para serem utilizadas nas equações de Lagrange e assim obtermos as equações de movimento do sistema:

Energia Cinética ( $T$ )

$$T = \frac{1}{2} M_a \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} m_{a1} \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} m_{a2} \dot{z}_4^2 \quad (81)$$

sendo,  $I$  a inércia de metade de um veículo.

Energia Potencial ( $V$ )

$$V = \frac{1}{2} k_1 [(z_1 - l_1 z_2) - z_3]^2 + \frac{1}{2} k_2 [(z_1 + l_2 z_2) - z_4]^2 + \frac{1}{2} k_3 [z_3]^2 + \frac{1}{2} k_4 [z_4]^2. \quad (82)$$

Dissipação de Energia ( $D$ )

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} c_1 [((z_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3)]^2 + \frac{1}{2} c_2 [((z_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4)]^2 + \frac{1}{2} c_3 [(\dot{z}_3)]^2 + \frac{1}{2} c_4 [(\dot{z}_4)]^2 \quad (83)$$

Desenvolvendo a equação de Lagrange para cada grau de liberdade.

Para  $z_1(t)$ , referente ao movimento vertical de metade da massa do veículo  $M_a$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial z_1} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{z}_1} + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z_1} = \mathbb{Q}_{z_1} \quad (84)$$

$$M_a \ddot{z}_1 + c_1 ((z_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3) + c_2 ((z_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4) + k_1 (z_1 - l_1 z_2 - z_3) + k_2 (z_1 + l_2 z_2 - z_4) = 0 \quad (85)$$

Para  $z_2(t)$ , referente ao movimento rotacional de metade da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial \dot{z}_2} \right) - \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial z_2} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{z}_2} + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z_2} = \mathbb{Q}_{z_2} \quad (86)$$

$$I z_2'' + c_1 (l_1^2 \dot{z}_2 - l_1 \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_3) + c_2 (l_2^2 \dot{z}_2 + l_2 \dot{z}_1 - l_2 \dot{z}_4) + k_1 (l_1^2 z_2 - l_1 z_1 + l_1 z_3) + k_2 (l_2^2 z_2 + l_2 z_1 - l_2 z_4) = f_a f_1 - f_b f_2 \quad (87)$$

Para  $z_3(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a1}$ , da roda dianteira, temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial \dot{z}_3} \right) - \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial z_3} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{z}_3} + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z_3} = \mathbb{Q}_{z_3} \quad (88)$$

$$m_{a1} \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_3 - \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_2) + c_3 (\dot{z}_3) + k_1 (z_3 - z_1 + l_1 z_2) + k_3 (z_3) = -f_a \quad (89)$$

Para  $z_4(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a2}$  da roda traseira, temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_4} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_4} + \frac{\partial V}{\partial z_4} = Q_{z_4} \quad (90)$$

$$m_{a2} \ddot{z}_4 + c_2 (\dot{z}_4 - \dot{z}_1 - l_2 \dot{z}_2) + c_4 (\dot{z}_4) + k_2 (z_4 - z_1 - l_2 z_2) + k_4 (z_4) = -f_b \quad (91)$$

As equações (85), (87), (89) e (91) compõem as equações do movimento do sistema, que pode ser escrito na forma de matriz, como segue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{a1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{a2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_4 \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & (c_2 l_2 - c_1 l_1) & -c_1 & -c_2 \\ (c_2 l_2 - c_1 l_1) & (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) & c_1 l_1 & -c_2 l_2 \\ -c_1 & -c_1 l_1 & (c_1 + c_3) & 0 \\ -c_2 & -c_2 l_2 & 0 & (c_2 + c_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) & -k_1 & -k_2 \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2) & k_1 l_1 & -k_2 l_2 \\ -k_1 & -k_1 l_1 & (k_1 + k_3) & 0 \\ -k_2 & -k_2 l_2 & 0 & (k_2 + k_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ (f_a l_1 - f_b l_2) \\ -f_a \\ -f_b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (92)$$

As equações do movimento do sistema são escritas na forma de espaço de estado:

Para a coordenada  $z_1$ :

$$y_1 = z_1$$

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_1$$

$$y_2 = \dot{z}_1$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{z}_1 = \frac{(-c_1(y_2 - l_1 y_4 - y_6) - c_2(y_2 + l_2 y_4 - y_6) - k_1(y_1 - l_1 y_3 - y_5) - k_2(y_1 + l_2 y_3 - y_7))}{M_a}$$

(93)

Para a coordenada  $z_2$ :

$$y_3 = z_2$$

$$\dot{y}_3 = \dot{z}_2$$

$$y_4 = \dot{z}_2$$

$$\dot{y}_4 = \ddot{z}_2 = (-c_1(l_1^2 y_4 - l_1 y_2 + l_1 y_5) - c_2(l_2^2 y_4 + l_2 y_2 - l_2 y_8) - k_1(l_1^2 y_3 - L_1 y_1 + L_1 y_5) - k_2(L_2^2 y_3 + l_2 y_1 - l_2 y_7) - f_a l_1 - f_b l_2) / I$$

(94)

Para a coordenada  $z_3$ :

$$y_5 = z_3$$

$$\dot{y}_5 = \dot{z}_3$$

$$y_6 = \dot{z}_3$$

$$\dot{y}_6 = \ddot{z}_3 = (-c_1(y_6 - y_2 + l_1 y_4) - c_3(y_6) - k_1(y_5 - y_1 + l_1 y_3) - k_3(y_5) - f_a) / m_{a1}$$

(95)

Para a coordenada  $z_4$ :

$$y_7 = z_4$$

$$\dot{y}_7 = \dot{z}_4$$

$$y_8 = \dot{z}_4$$

$$\dot{y}_8 = \ddot{z}_4 = (-c_2(y_8 - y_2 - l_2 y_4) - c_4(y_8) - k_2(y_7 - y_1 - l_2 y_3) - k_4(y_7) - f_b) / m_{a2}$$

(96)

A resposta em função do tempo do sistema de 4GDL linear é obtida através da integração do conjunto de equações (93), (94), (95) e (96) e os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.3.1..

## C.2 Sistema Não Linear

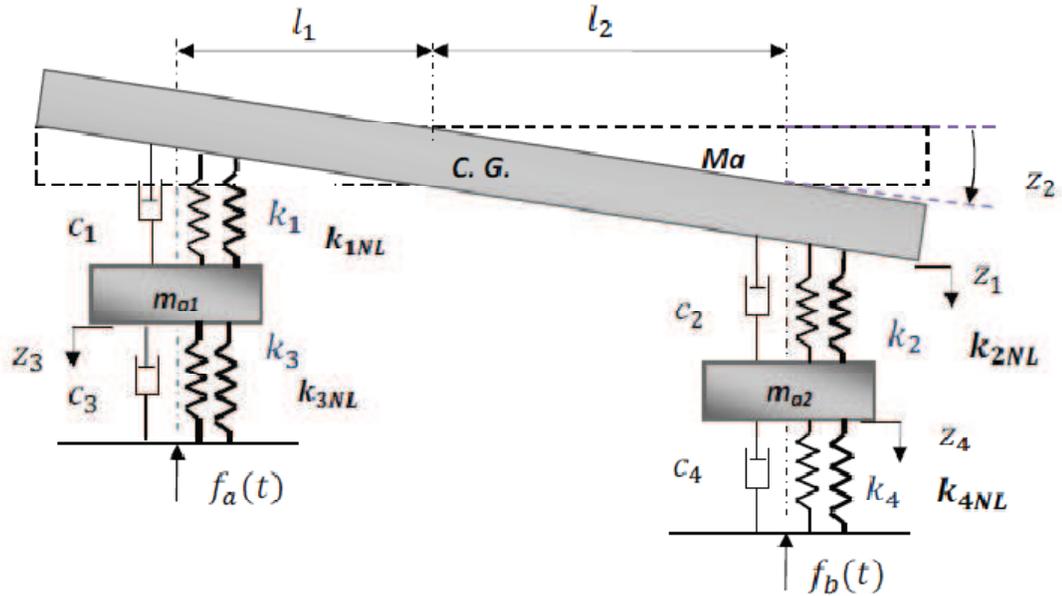


Figura 45 - Modelo de vibração do veículo com quatro graus de liberdade Não Linear

Energia Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} M_a \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} m_{a1} \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} m_{a2} \dot{z}_4^2 \quad (97)$$

Energia Potencial (V)

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} k_1 [(z_1 - l_1 z_2) - z_3]^2 + \frac{1}{2} k_2 [(z_1 + l_2 z_2) - z_4]^2 + \frac{1}{2} k_3 [(z_3)]^2 \\ & + \frac{1}{2} k_4 [(z_4)]^2 + \frac{1}{2} k_{1NL} [(z_1 - l_1 z_2) - z_3]^4 \\ & + \frac{1}{2} k_{2NL} [(z_1 + l_2 z_2) - z_4]^4 + \frac{1}{2} k_{3NL} [(z_3)]^4 + \frac{1}{2} k_{4NL} [(z_4)]^4 \end{aligned} \quad (98)$$

Dissipação de Energia ( $\mathbb{D}$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & \frac{1}{2} c_1 [((z_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3)]^2 + \frac{1}{2} c_2 [((z_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4)]^2 + \frac{1}{2} c_3 [(\dot{z}_3)]^2 \\ & + \frac{1}{2} c_4 [(\dot{z}_4)]^2 \end{aligned} \quad (99)$$

Desenvolvendo a equação de Lagrange para cada grau de liberdade.

Para  $z_l(t)$ , referente ao movimento vertical da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$\begin{aligned} M_a z_1'' + c_1 ((z_1 - l_1 \dot{z}_2) - \dot{z}_3) + c_2 ((z_1 + l_2 \dot{z}_2) - \dot{z}_4) + k_1 (z_1 - l_1 z_2 - x_3) \\ + k_2 (z_1 + l_2 z_2 - x_4) \\ + k_{1NL} [2z_1^3 - 6l_1 z_1^2 z_2 - 6z_1^2 z_3 - 2z_3^3 - 2l_1^3 z_2^3 + 6l_1^2 z_1 z_2^2 - 6l_1^2 z_2^2 z_3 \\ + 12l_1 z_1 z_2 z_3 - 6l_1 z_2 z_3^2 + 6z_1 z_3^2] \\ + k_{2NL} [2z_1^3 + 6l_2 z_1^2 z_2 - 6z_1^2 z_4 - 2z_4^3 + 2l_2^3 z_2^3 + 6l_2^2 z_1 z_2^2 - 6l_2^2 z_2^2 z_4 \\ - 12l_2 z_1 z_2 z_4 + 6l_2 z_2 z_4^2 + 6z_1 z_4^2] = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Para  $z_2(t)$ , referente ao movimento rotacional da massa do veículo  $M_a$  temos:

$$\begin{aligned} I z_2'' + c_1 (l_1^2 \dot{z}_2 - l_1 \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_3) + c_2 (l_2^2 \dot{z}_2 + l_2 \dot{z}_1 - l_2 \dot{z}_4) + k_1 (l_1^2 z_2 - l_1 z_1 + l_1 z_3) \\ + k_2 (l_2^2 z_2 + l_2 z_1 - l_2 z_4) \\ + k_{1NL} (2l_1^4 z_2^3 - 2l_1 z_1^3 - 6l_1^3 z_1 z_2^2 + 6l_1^3 z_2^2 z_3 + 2l_1 z_3^3 + 6l_1^2 z_1^2 z_2 + 6l_1^2 z_2 z_3^2 \\ - 12l_1^2 z_1 z_2 z_3 + 6l_1 z_1^2 z_3 - 6l_1 z_1 z_3^2) \\ + k_{2NL} (2l_2^4 z_2^3 + 2l_2 z_1^3 + 6l_2^3 z_1 z_2^2 + 6l_2^3 z_2^2 z_4 - 2l_2 z_4^3 + 6l_2^2 z_1^2 z_2 + 6l_2^2 z_2 z_4^2 \\ - 12l_2^2 z_1 z_2 z_4 - 6l_2 z_1^2 z_4 + 6l_2 z_1 z_4^2) = f_a l_1 - f_b l_2 \end{aligned} \quad (101)$$

Para  $z_3(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a1}$ , da roda dianteira, temos:

$$\begin{aligned} m_{a1} \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_3 - \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_2) + c_3 (\dot{z}_3) + k_1 (z_3 - x_1 + l_1 z_2) + k_3 (z_3) \\ + k_{1NL} (2z_3^3 - 2z_1^3 - 6z_1 z_3^2 + 2l_1^3 z_2^3 + 6l_1 z_2 z_3^2 + 6l_1^2 z_2^2 z_3 - 6l_1^2 z_1 z_2^2 \\ + 6l_1 z_1^2 z_2 - 12l_1 z_1 z_2 z_3 + 6z_1^2 z_3) + k_{3NL} (2z_3^3) = -f_a \end{aligned} \quad (102)$$

Para  $z_4(t)$ , referente ao movimento vertical da massa,  $m_{a2}$  da roda traseiro, temos:

$$\begin{aligned}
m_{a2}\ddot{z}_4 + c_2(\dot{z}_4 - \dot{z}_1 - l_2\dot{z}_2) + c_4(\dot{z}_4) + k_2(z_4 - z_1 - l_2z_2) + k_4(z_4) \\
+ k_{2NL}(2z_4^3 - 2z_1^3 - 6z_1z_4^2 - 2l_2^3z_2 - 6l_2z_2z_4^2 + 6l_2^2z_2^2z_4 - 6l_2^2z_1z_2^2 \\
- 6l_2z_1^2z_2 + 12l_2z_1z_2z_4 + 6z_1^2z_4) + k_{4NL}(2z_4^3) = -f_b
\end{aligned}
\tag{103}$$

Escrevendo as equações (100), (101) (102) e (103) em espaço de estado temos:

Para a coordenada  $z_1$ :

$$\begin{aligned}
y_1 &= z_1 \\
\dot{y}_1 &= \dot{z}_1 \\
y_2 &= \dot{z}_1 \\
\dot{y}_2 = \ddot{z}_1 &= \left( -c_1(y_2 - l_1y_4 - y_6) - c_2(y_2 + l_2y_4 - y_6) - k_1(y_1 - l_1y_3 - y_5) \right. \\
&\quad - k_2(y_1 + l_2y_3 - y_7) \\
&\quad - k_{1NL}(2y_1^3 - 6l_1y_1^2y_3 - 6y_1^2y_5 - 2y_5^3 - 2l_1^3y_3^3 + 6l_1^2y_1y_3^2 - 6l_1^2y_3^2y_5 \\
&\quad + 12l_1y_1y_3y_5 - 6l_1y_3y_5^2 + 6y_1y_5^2) \\
&\quad - k_{2NL}(2y_1^3 + 6l_2y_1^2y_3 - 6y_1^2y_7 - 2y_7^3 + 2l_2^3y_3^3 + 6l_2y_1y_3^2 - 6l_2^2y_3^2y_7 \\
&\quad \left. - 12l_2y_1y_3y_7 + 6l_2y_3y_7^2 + 6y_1y_7^2) \right) / M_a
\end{aligned}
\tag{104}$$

Para a coordenada  $z_2$ :

$$\begin{aligned}
y_3 &= z_2 \\
\dot{y}_3 &= \dot{z}_2 \\
y_4 &= \dot{z}_2 \\
\dot{y}_4 = \ddot{z}_2 &= \left( -c_1(l_1^2y_4 - l_1y_2 + l_1y_5) - c_2(l_2^2y_4 + l_2y_2 - l_2y_8) - k_1(l_1^2y_3 - l_1y_1 + l_1y_5) \right. \\
&\quad - k_2(l_2^2y_3 + l_2y_1 - l_2y_7) \\
&\quad - k_{1NL}(2l_1^4y_3^3 - 2l_1y_1^3 - 6l_1^3y_1y_3^2 + 6l_1^3y_3^2y_5 + 2l_1y_5^3 + 6l_1^2y_1^2y_3 \\
&\quad + 6l_1^2y_3y_5^2 - 12l_1^2y_1y_3y_5 + 6l_1y_1^2y_5 - 6l_1y_1y_5^2) \\
&\quad - k_{2NL}(2l_2^4y_3^3 + 2l_2y_1^3 + 6l_2^3y_1y_3^2 + 6l_2^3y_3^2y_7 - 2l_2y_7^3 + 6l_2^2y_1^2y_3 \\
&\quad \left. + 6l_2^2y_3y_7^2 - 12l_2^2y_1y_3y_7 - 6l_2y_1^2y_7 + 6l_2y_1y_7^2) - f_a l_1 - f_b l_2 \right) / I
\end{aligned}
\tag{105}$$

Para a coordenada  $z_3$ :

$$y_5 = z_3$$

$$\dot{y}_5 = \dot{z}_3$$

$$y_6 = \dot{z}_3$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_6 = \ddot{z}_3 = & (-c_1(y_6 - y_2 + l_1 y_4) - c_3(y_6) - k_1(y_5 - y_1 + l_1 y_3) - k_3(y_5) \\ & - k_{1NL}(2y_5^3 - 2y_1^3 - 6y_1 y_5^2 + 2l_1^3 y_3^3 + 6l_1 y_3 y_5^2 + 6l_1^2 y_3^2 y_5 - 6l_1^2 y_1 y_3^2 \\ & + 6l_1 y_1^2 y_3 - 12l_1 y_1 y_3 y_5 + 6y_1^2 y_5) - k_{3NL}(2y_5^3) - f_a)/m_{a1} \end{aligned} \quad (106)$$

Para a coordenada  $z_4$ :

$$y_7 = z_4$$

$$\dot{y}_7 = \dot{z}_4$$

$$y_8 = \dot{z}_4$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_8 = \ddot{z}_4 = & (-c_2(y_8 - y_2 - l_2 y_4) - c_4(y_8) - k_2(y_7 - y_1 - l_2 y_3) - k_4(y_7) \\ & - k_{2NL}(2y_7^3 - 2y_1^3 - 6y_1 y_7^2 - 2l_2^3 y_3^3 - 6l_2 y_3 y_7^2 + 6l_2^2 y_3^2 y_7 - 6l_2^2 y_1 y_3^2 \\ & - 6l_2 y_1^2 y_3 + 12l_2 y_1 y_3 y_7 + 6y_1^2 y_7) - k_{4NL}(2y_7^3) - f_b)/m_{a2} \end{aligned} \quad (107)$$

A resposta em função do tempo do sistema de 4GDL linear é obtida através da integração do conjunto de equações (104), (105), (106) e (107). e os resultados são apresentados nos gráficos do item. 6.3.2.