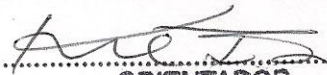


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Célia Vanda
Alves de Godoy Rosolen E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 03.10.2011


.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Célia Vanda Alves de Godoy Rosolen

**Desenvolvimento Analítico e Numérico de
Perfis e Cascatas Joukowski e NACA pela
Técnica de Distribuição de Vórtices**

Campinas, 2011.

Célia Vanda Alves de Godoy Rosolen

Desenvolvimento Analítico e Numérico de Perfis e Cascatas Joukowski e NACA pela Técnica de Distribuição de Vórtices

Tese apresentada ao Curso de Doutorado da
Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas, como
requisito para a obtenção do título de Doutor
em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R733d Rosolen, Célia Vanda Alves de Godoy
Desenvolvimento analítico e numérico de perfis e
cascatas Joukowski e NACA pela técnica de distribuição
de vórtices / Célia Vanda Alves de Godoy Rosolen. --
Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Kamal Abdel Radi Ismail.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Turbomáquinas. 2. Aerodinâmica. 3. Projeto -
Modelos matemáticos. 4. Cálculos numéricos –
Programas de computador. I. Ismail, Kamal Abdel Radi.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Analytical and numerical development of Joukowski and NACA
profiles and cascades by the vortex distribution technique

Palavras-chave em Inglês: Turbomachines, Aerodynamics, Project -
Mathematical models, Numerical calculations -
Computer programs

Área de concentração: Térmica e Fluidos

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Luiz Felipe Mendes de Moura, Inácio Maria Dal Fabbro,
Fernando Martini Catalano, Vicente Luiz Scalon

Data da defesa: 03-08-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

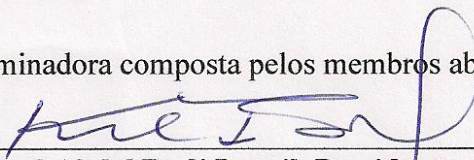
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E DE FLUIDOS**

TESE DE DOUTORADO

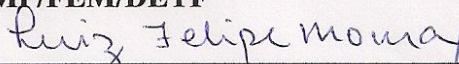
**Desenvolvimento Analítico e Numérico de
Perfis e Cascatas Joukowski e NACA pela
Técnica de Distribuição de Vórtices**

Autor: Célia Vanda Alves de Godoy Rosolen
Orientador: Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail

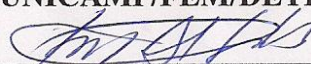
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



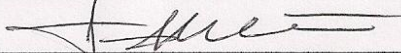
Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail, Presidente
UNICAMP/FEM/DETF



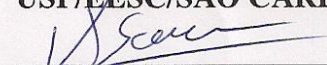
Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura
UNICAMP/FEM/DETF



Prof. Dr. Inácio Maria Dal Fabbro
UNICAMP/FEAGRI



Prof. Dr. Fernando Martini Catalano
USP/EESC/SÃO CARLOS



Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon
UNESP/FEB/BAURU

Campinas, 03 de agosto de 2011

Agradecimentos

Agradeço a DEUS pela vida, pela saúde e pelos dons recebidos; pelas oportunidades e por todas as pessoas boas e amigas que o Senhor coloca em meu caminho, e que me ajudam a crescer pessoal e profissionalmente.

À minha mãe Teresinha e ao meu pai Clóvis (*In Memoriam*), por sua dedicação à família, pelo empenho na formação integral de seus filhos, pelo incentivo constante, por serem exemplos de vida e de fé.

À minha família, ao meu esposo Davi e aos meus filhos Rafael Augusto e Paulo Victor, pelo apoio incondicional, carinho e convivência acolhedora.

Em especial, agradeço ao meu orientador Professor Kamal por esta oportunidade e por ter compartilhado comigo seus conhecimentos e sua sabedoria, com lealdade, amizade e paciência.

Aos professores, colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica por terem me ajudado de forma direta ou indireta na conclusão deste trabalho.

E ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Minha sincera gratidão.

Célia

Resumo

O presente trabalho tem como objetivos principais a elaboração de uma metodologia de cálculo de perfis e de cascatas em escoamento potencial baseado na distribuição de vórtices na superfície, o desenvolvimento de um código computacional próprio e a convalidação dos resultados obtidos. A metodologia baseia-se nos trabalhos de Martensen (1959), de Murugesan e Raily (1969) e de Lewis (1991). O comportamento aerodinâmico e os parâmetros característicos de um perfil isolado são totalmente conhecidos e existem várias técnicas analíticas e numéricas para avaliar e determinar o comportamento desses perfis. Essas técnicas analíticas podem ser estendidas para tratar os perfis experimentais como os perfis NACA com bons resultados. Neste trabalho o cálculo de perfis isolados compreende o uso do método de vórtices na superfície numa aproximação inversa. Inicialmente uma distribuição de velocidade é especificada a partir do ponto de estagnação do bordo de ataque. A distribuição de velocidade calculada sobre a superfície de um perfil inicial arbitrário é comparada com aquela requerida. A diferença entre elas é utilizada como sendo o valor de uma distribuição de vórtices que é imposta sobre o contorno. Devido ao campo desta distribuição de vórtices adicional, aparece uma distribuição de velocidades normais à superfície o que viola o conceito de linha de corrente. O contorno volta a ser uma linha de corrente quando sua inclinação local é ajustada de acordo com a razão entre os valores das velocidades normal e requerida. O perfil obtido é submetido a uma nova análise direta e a distribuição de velocidade obtida é comparada com a distribuição requerida. Os cálculos são repetidos até alcançar a convergência. O algoritmo numérico resultante foi aplicado a dois tipos de perfis, analítico (Joukowski) e experimental (NACA), para os casos de aerofólios simétrico e assimétrico. Os perfis NACA utilizados são NACA 65-010 e NACA 65-1210. Em todos os casos os perfis foram gerados usando a metodologia de distribuição de vórtices e os resultados foram comparados com os respectivos perfis originais, mostrando boa concordância. Tendo verificado que a técnica proposta e o código elaborado são válidos e produzem bons resultados, eles são aplicados à análise de cascatas de aerofólios NACA 65-1210 e de uma cascata de aerofólios de Gostelow.

Palavras-chave: Aerodinâmica; Cascatas; Distribuição de vórtices; Aerofólios de Joukowski; Aerofólios NACA.

Abstract

This work presents a method to calculate airfoils and cascades in potential flow based upon the distribution of vortices on the profile surface, develop a computational code and validate the predictions with available well accepted results. The technique is based upon Martensen (1959), Murugesan and Raily (1969) and Lewis (1991). Cascades are usually specified according to the application and they can be stationary or moving. The aerodynamic behavior and the aerodynamic characteristics of isolated foil are known and many techniques to calculate these foils are available. These analytic techniques can be extended to handle nicely experimental foils such as the NACA's. In the present work, the method of distributing the vortices over the surface of the foil is used in the reverse sense. Initially a velocity profile is specified starting from the leading edge stagnation point. It is calculated the velocity distribution over the surface of an initial arbitrary foil and it is compared with that required. The difference between them is used as an additional distribution of vortices imposed over the surface. A distribution results in a velocity component normal to the surface and this violates the concept of the stream line. The contour turns to be a streamline when its local inclination is adopted according to the ratio of the normal velocity and the required velocity. The resultant foil is reanalyzed and the velocity distribution obtained is compared with the required distribution. The calculations are repeated until convergence is achieved. The numerical code was applied to two types of foils, analytical (Joukowski) and experimental (NACA) for the cases of symmetrical and asymmetrical foils. NACA foils used are the NACA 65-010 and NACA 65-1210. In all the cases the foils were generated using the vortex distribution technique and the resulting profiles were compared with the original profiles indicating a good agreement. These comparisons validate the proposed technique and the developed code. They were applied to analyse cascades of NACA 65-1210 foils and a cascade of the Gostelow foils.

Key Words: Aerodynamics, Cascades, Vortex distribution, Airfoils Joukowski, Airfoils NACA.

Lista de Figuras

3.1	Modelo de vorticidade na superfície comparado com uma camada limite verdadeira	37
3.2	Geometria da cascata e triângulos de velocidade.....	47
3.3	Transformação circular introduzida por Wilkinson para definição dos pontos de controle sobre um aerofólio bidimensional.....	55
3.4	Método de espaçamento dos pontos sobre a superfície do aerofólio.....	56
3.5	Comparação entre as transformações circular, elíptica e adicional de Wilkinson quanto à distribuição dos pontos de controle ao longo do eixo x.....	57
3.6	Comparação entre as transformações circular, elíptica ($\omega^p - 1$) e adicional de Wilkinson (k) quanto à distribuição dos pontos de controle ao longo do eixo x	59
3.7	Velocidade auto induzida de um elemento de vorticidade na superfície	60
3.8	Circulação induzida no interior do perfil por um único vórtice unitário localizado sobre o contorno	64
4.1	Coordenadas curvilíneas de um contorno de aerofólio.	80
4.2	Soluções possíveis no método de projeto se o ângulo α dos elementos adjacentes aos pontos de estagnação não é restringido.....	89
4.3	Geometria inicial elíptica adotada nos exemplos de projeto.....	92
4.4	Cilindro infinito circular em escoamento potencial uniforme	94
4.5	Projeto de um cilindro infinito circular com $2N = 120$ pontos de controle.....	95
4.6	Evolução da geometria durante as iterações do projeto do cilindro circular.....	95
4.7	Erros durante o projeto de um cilindro infinito circular ($2N = 120$).....	96
4.8	Projeto de um cilindro infinito circular com $2N = 40$ pontos de controle	97
4.9	Erros durante o projeto de um cilindro infinito circular ($2N = 40$)	97
4.10	Correção dos bordos de ataque e de fuga com arcos circulares ($2N = 120$).....	98
4.11	Velocidade normal calculada nas iterações do projeto do cilindro circular.....	99
4.12	Razão v_N/v_R nas iterações do projeto do cilindro circular ($2N = 120$).....	99
5.1	Transformação de Joukowski $\zeta = z + b^2/z$ gerando um aerofólio simétrico.....	101

5.2	Distribuição de velocidade analítica na superfície de um aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ em escoamento paralelo à corda	104
5.3	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso ($2N = 480$).....	104
5.4	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 480$).....	105
5.5	Evolução da geometria no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico.....	105
5.6	Ajustes nos BA e BF na iteração 04 - aerofólio de Joukowski simétrico.....	106
5.7	Ajustes nos BA e BF na iteração 08 - aerofólio de Joukowski simétrico.....	107
5.8	Ajustes nos BA e BF na iteração 30 - aerofólio de Joukowski simétrico.....	107
5.9	Velocidade normal calculada nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico.....	108
5.10	Razão v_N/v_R calculada - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 480$).....	108
5.11	Ajustes nos BA e BF na iteração 114 - aerofólio de Joukowski simétrico.....	110
5.12	Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski ($2N = 480$)	111
5.13	Desvio absoluto, demais erros e tempo computacional obtidos no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico ao variar o número de pontos de controle	112
5.14	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 80$) obtida com o método inverso	113
5.15	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 80$)	113
5.16	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso	114
5.17	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$).....	114
5.18	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso - Procedimento B ($2N = 160$)	116
5.19	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento B	116
5.20	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski – Procedimento B	117
5.21	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso – Procedimento C ($2N = 160$)	118
5.22	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C	118

5.23	Evolução da geometria no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico.....	119
5.24	Ajustes nos BA e BF na iteração 05 - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C	119
5.25	Velocidade normal calculada no procedimento inverso para o aerofólio de Joukowski simétrico	120
5.26	Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico.....	121
5.27	Razão v_N/v_R - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$).....	121
5.28	Ajustes nos BA e BF na iteração 65 - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C	122
5.29	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski - Procedimento C	123
5.30	Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski e Procedimento C.....	123
5.31	Distribuição de velocidade analítica na superfície de um aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$	125
5.32	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$	126
5.33	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_\infty = 10^\circ$	126
5.34	Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$	127
5.35	Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$	128
5.36	Razão v_N/v_R - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_\infty = 10^\circ$	128
5.37	Ajustes na iteração 299 - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$	129
5.38	Ajustes na iteração 499 - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$	130
5.39	Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico e escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$	131
5.40	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$	132
5.41	Velocidade na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski em escoamento inclinado de $\beta_\infty = 10^\circ$ ($2N = 160$).....	132

5.42	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ sem ajustes nas geometrias	134
5.43	Erros nas iterações sem ajustes nas geometrias - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	134
5.44	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ com ajustes na iteração 299	135
5.45	Erros nas iterações com ajustes na iteração 299 - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	135
5.46	Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ com ajustes nas iterações 299 e 349.....	136
5.47	Erros nas iterações com ajustes nas iterações 299 e 349 - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	137
5.48	Transformação de Joukowski $\zeta = z + b^2/z$ gerando um aerofólio arqueado.....	138
5.49	Velocidade analítica prescrita do aerofólio de Joukowski arqueado de razão $b/r_0 = 0,9298$ em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	141
5.50	Geometria do aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	142
5.51	Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$).....	142
5.52	Ajustes na iteração 799 - aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	143
5.53	Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski arqueado e escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	144
5.54	Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	144
5.55	Razão v_N/v_R - aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	145
5.56	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	146
5.57	Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski arqueado e escoamento $\beta = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	146

6.1	Velocidade prescrita do aerofólio NACA 65-010 em escoamento $\beta_{\infty} = 0^{\circ}$	148
6.2	Geometria do aerofólio NACA 65-010 obtida com o método inverso ($2N = 160$).....	149
6.3	Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$)	149
6.4	Ajustes nos BA e BF na iteração 65 - aerofólio NACA 65-010.....	150
6.5	Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-010.....	151
6.6	Razão v_N/v_R - aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$)	151
6.7	Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-010.....	152
6.8	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio NACA 65-010.....	152
6.9	Velocidade prescrita do aerofólio NACA 65-010 em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	153
6.10	Geometria do aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	154
6.11	Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)	154
6.12	Ajustes nos BA e BF na iteração 1199 - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	155
6.13	Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	156
6.14	Razão v_N/v_R - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	156
6.15	Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-010 em escoamento inclinado $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	157
6.16	Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	157
6.17	Velocidade prescrita pelo cálculo direto do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	158
6.18	Geometria do aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	159
6.19	Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	159
6.20	Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	160

6.21	Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	161
6.22	Razão v_N/v_R - aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	161
6.23	Geometria final dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	162
6.24	Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-1210 e escoamento $\beta = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	163
6.25	Distribuição de pressão correspondente à velocidade prescrita pelo cálculo direto do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	163
6.26	Velocidade prescrita corrigida para o cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	164
6.27	Geometria do aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ com velocidade prescrita corrigida.....	166
6.28	Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	166
6.29	Geometria final dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$	167
6.30	Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita corrigida igual à de NACA 65-1210 e escoamento $\beta = 10^{\circ}$ ($2N = 160$).....	167
7.1	Distribuição de pressão medida e calculada sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 30^{\circ}$, $t/l = 1,0$) para $\beta_1 = 45^{\circ}$; e para o método proposto com $\beta_{\infty} = 35,8^{\circ}$	170
7.2	Coeficiente de pressão sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 30^{\circ}$, $t/l = 1,0$) para $\beta_1 = 45^{\circ}$; o método proposto fornece $\beta_2 = 23,5^{\circ}$ com $N = 80$	171
7.3	Distribuição de velocidade experimental e teórica sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^{\circ}$, $t/l = 1,0$) com $\beta_{\infty} = 52,4^{\circ}$; variando N para o método proposto	173

7.4	Distribuição de velocidade experimental e teórica sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^\circ$, $t/l = 1,0$) ; com $\beta_1 = 60^\circ$ e variando N para o método proposto	174
7.5	Distribuição de velocidade sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^\circ$, $t/l = 1,0$) calculada pelo método proposto com $N = 80$, para $\beta_1 = 60^\circ$, resultando $\beta_2 = 40,7^\circ$	175
7.6	Distribuição de pressão da cascata de aerofólios de Gostelow ($\chi = 37,5^\circ$, $t/l = 0,9901573$) para $\beta_1 = 53,5^\circ$, tabelada e calculada com o método proposto variando N	177
7.7	Perfil do aerofólio e distribuição de pressão da cascata de aerofólios de Gostelow ($\chi = 37,5^\circ$, $t/l = 0,9901573$) para $\beta_1 = 53,5^\circ$ calculada com o método proposto e com $N = 240$, resultando $\beta_2 = 29,63^\circ$ ou $\beta_\infty = 43,83^\circ$	178

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

a	corda axial do perfil; limite inferior de um intervalo real	
b	vetor dos termos independentes ; limite superior de um intervalo real	
des_{ABS}	desvio absoluto (Equação 4.36)	
err_{CG}	erro de convergência geométrica (Equação 4.37)	
err_{QM}	erro quadrático médio (Equação 4.35)	
f	função qualquer	
k	contador inteiro;	
k	semieixo da elipse;	[m]
$k(s_m, s; \dots)$	coeficiente de acoplamento com o valor da velocidade em s_m paralela à superfície do corpo e induzida por um elemento de vorticidade $\gamma(s)ds$ unitário localizado em s	[m ⁻¹]
ℓ	corda do aerofólio	[m]
n	coordenada normal à superfície de um corpo e dirigida para fora do mesmo (para o escoamento exterior)	[m]
p	parâmetro da transformação elíptica	
s	coordenada curvilínea tangente ao contorno de um corpo	[m]
t	<i>pitch</i> ou espaçamento entre os perfis da cascata;	[m]
	indica que o coeficiente de acoplamento refere-se a uma cascata	
v	distribuição superficial sobre o contorno C fechado simples e suave de um corpo imerso num escoamento potencial incompressível no equacionamento de Martensen, a qual representa a magnitude da velocidade do escoamento externo em torno deste contorno	[m/s]
$v_R(s)$	distribuição prescrita ou requerida de velocidade na superfície	[m/s]
x	variável qualquer; abscissa de um sistema de eixos cartesianos; eixo cartesiano na direção axial da cascata de perfis	[m]
y	ordenada de um sistema de eixos cartesianos qualquer; eixo cartesiano na direção da cascata de perfis	[m]

C	contorno fechado simples e suave de um corpo	
$F(x, y; \xi, \eta; t)$	função do integrando da relação envolvendo a função de corrente ψ no método de Martensen, obtida com o uso do teorema de Green	
K	coeficiente de acoplamento da equação integral de contorno de Martensen;	$[m^{-1}]$
	matriz ou elemento da matriz do sistema de equações resultante	
$K(s_m, s; t \text{ ou } \infty)$		$[m^{-1}]$
$K(\phi_m, \phi; t \text{ ou } \infty)$		
N	metade do número de pontos utilizados na discretização de um contorno fechado	
P	polinômio de aproximação de uma função qualquer	
U	componente da velocidade relativa na direção axial	$[m/s]$
V	componente da velocidade relativa na direção da cascata	$[m/s]$
W_∞	velocidade relativa do escoamento médio equivalente	$[m/s]$
X	abscissa do ponto de controle da nova geometria	$[m]$
Y	ordenada do ponto de controle da nova geometria	$[m]$

.....

Letras Gregas

β	ângulo do escoamento relativo com a direção axial	$[grau]$
δ	expressão paramétrica utilizada na transformação elíptica	
ϕ	variável independente angular em radianos no sentido anti-horário utilizada na parametrização e discretização de um contorno fechado	
$\gamma(s)$	intensidade de vorticidade por unidade de comprimento no ponto do contorno de coordenada curvilínea s	$[m/s]$
$\gamma(\phi)$	intensidade de vorticidade no ponto do contorno de parâmetro angular ϕ	$[m^2/s]$
γ_m	intensidade de vorticidade no ponto de controle m adimensionalizada por W_∞	$[m]$

η	ordenada do ponto de integração no contorno; ordenada do ponto do contorno em relação à direção da corda do aerofólio	[m]
ω	razão entre os semieixos maior e menor da elipse	
ξ	abscissa do ponto de integração no contorno; coordenada do ponto do contorno do aerofólio na direção da corda	[m]
$\psi(x, y)$	função de corrente do escoamento ou sobre o contorno C	[m ² /s]
Γ	circulação total em torno do aerofólio ou de cada perfil da cascata	[m ² /s]

.....

∇^2	operador diferencial, chamado operador de Laplace, definido por	
	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	

.....

Superscritos

j	iteração do projeto à qual a grandeza está relacionada	
*	adimensionalizado em relação ao comprimento total da superfície aerodinâmica em questão	
$\wedge$	para diferenciar sistemas de coordenadas cartesianas com origem não coincidentes	
'	derivada; sinal para indicar uma variável diferente	

.....

Subscritos

1	ponto localizado a montante do aerofólio ou cascata	
2	ponto localizado a jusante do aerofólio ou cascata	
e	ponto localizado junto à superfície do corpo no exterior do seu contorno C ;	

i	ponto localizado junto à superfície do corpo no interior do seu contorno C ; ponto de controle genérico sobre a superfície; contador
m	ponto específico sobre o contorno do corpo; ponto sobre o qual calcula-se a influência dos demais pontos de controle do contorno
n	ponto específico sobre o contorno do corpo; ponto cuja influência sobre outro ponto de controle qualquer está sendo calculada
p	grandeza relacionada à superfície de pressão
s	grandeza relacionada à superfície de sucção; ou à superfície como um todo
x	grandeza relacionada à direção do eixo x de coordenadas cartesianas
y	grandeza relacionada à direção do eixo y de coordenadas cartesianas
BF	grandeza relacionada ao ponto de estagnação no bordo de fuga do aerofólio
C	ponto localizado sobre o contorno C da superfície do corpo
∞	grandeza relacionada ao escoamento médio equivalente; ou ao aerofólio isolado

.....

Abreviações

BA	bordo de ataque
BF	bordo de fuga

.....

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DA LITERATURA	3
2.1 Assuntos correlatos	10
2.1.1 O método de vórtices	10
2.1.2 O método inverso	14
2.1.3 Dinâmica dos Fluidos Computacional.....	21
3 ANÁLISE – MÉTODO DE VORTICIDADE NA SUPERFÍCIE	35
3.1 Significado físico do modelo de vorticidade na superfície	35
3.2 Equacionamento do Método de Martensen	39
3.2.1 Representação paramétrica do contorno e discretização	49
3.2.2 Considerações para a resolução do sistema de equações	52
a) Pontos de controle	54
b) Velocidade auto induzida de um elemento de vorticidade	59
c) Tratamento dos dados de entrada	61
d) Influência do elemento oposto	62
e) Somatório nulo das colunas da matriz	63
f) Condição de contorno no bordo de fuga de um corpo de sustentação	66
g) Circulação e características globais de um corpo de sustentação	69
4 MÉTODO INVERSO	74
4.1 Uso iterativo do Método de Martensen	77
4.1.1 Distribuição de velocidade prescrita	78
4.1.2 Ponto de estagnação frontal e coordenada curvilínea	79
4.1.3 Critério de convergência	81
a) Erro quadrático médio	82
b) Desvio absoluto	83
c) Erro de convergência geométrica	84

4.1.4 Distribuição de velocidade normal.....	84
4.1.5 Integração do novo perfil	86
4.1.6 Fechamento do perfil	87
4.1.7 Geometria dos bordos de ataque e de fuga	88
4.1.8 Geometria inicial.....	91
4.2 Aplicação do método inverso – Cilindro infinito circular	93
5 MÉTODO INVERSO - AEROFÓLIO DE JOUKOWSKI	100
5.1 Aerofólio de Joukowski simétrico analítico	100
5.1.1 Cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico alinhado com o escoamento	102
5.1.2 Cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico em escoamento inclinado	124
5.2 Aerofólio de Joukowski assimétrico	138
5.2.1 Cálculo inverso de aerofólio de Joukowski assimétrico	140
6 MÉTODO INVERSO - AEROFÓLIO NACA.....	147
6.1 Cálculo inverso do aerofólio NACA simétrico.....	147
6.2 Cálculo inverso do aerofólio NACA simétrico em escoamento inclinado	153
6.3 Cálculo inverso do aerofólio NACA arqueado	158
7 APLICAÇÃO EM CASCATA	168
7.1 Cascata de aerofólios NACA série 65	168
7.1.1 “Cascata de Horlock”	168
7.1.2 “Cascata de NASA SP-36”	171
7.2 Cascata de aerofólios de Gostelow.....	176
8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	180
REFERÊNCIAS.....	182
ANEXO A - Representação paramétrica do contorno	191

1 INTRODUÇÃO

O comportamento aerodinâmico e os parâmetros característicos de um perfil isolado são totalmente conhecidos e existem várias técnicas analíticas e numéricas para avaliar e determinar o comportamento desses perfis. As técnicas disponíveis incluem métodos de singularidades, métodos de transformação conformal e técnicas que envolvem a distribuição de singularidades sobre a linha de arqueamento ou sobre a superfície do perfil. Essas técnicas analíticas podem ser estendidas para tratar os perfis experimentais como os perfis NACA com bons resultados.

A cascata é definida como uma fileira infinita de corpos similares equidistantes, normalmente na forma de aerofólio, que podem ser perfis pré-definidos ou perfis mais elaborados provenientes de um projeto acurado. Essas fileiras de pás, móveis ou fixas, são usadas diretamente na prática de engenharia quando se deseja mudar a direção de uma corrente de fluido, por exemplo, em túneis de vento e unidades de ventilação.

Em mecânica dos fluidos a cascata é um modelo, ou seja, uma simplificação física e matemática com o objetivo de se obter uma análise das relações e um entendimento mais profundo do escoamento real. O uso mais comum é no projeto de turbomáquinas (máquinas de fluxo rotativas) e na análise de seus desempenhos. Tanto bombas (bomba, ventilador, soprador ou compressor) quanto turbinas eficientes devem ter um bom projeto de cascata. De fato, a cascata é uma parte essencial dessas máquinas na conversão de energia e requer um projeto de qualidade para obtenção de máquinas silenciosas e eficientes com baixa manutenção e alta confiabilidade. Essas características são importantes frente às exigências atuais, principalmente, quando se trata de aplicação aeronáutica.

Nas aplicações em máquinas rotativas uma fonte de ruído aerodinâmico proveniente das cascatas normalmente aparece devido a choques aerodinâmicos no escoamento, por não satisfazer a condição de Kutta no bordo de fuga, por formação de bolhas de separação, etc. Nesse tipo de aplicação o desenvolvimento da cascata deve ser bem elaborado com as condições de projeto obedecidas. A mudança da distribuição de pressão pode provocar problemas sérios como ondas de choque ou cavitação, no caso de água.

A literatura é rica em estudos experimentais, teóricos e numéricos relacionados ao modelo de cascata. Várias teorias de cascata foram desenvolvidas, com base no método de transformação conformal ou no método de singularidades. Este último mostrou-se superior e com aplicação mais generalizada com destaque para o método de distribuição de vórtices na superfície, originalmente creditado a Martensen, para perfis aerodinâmicos de formato arbitrário, isolados ou em cascata; e que foi aplicado também à solução do problema inverso.

Grande avanço tem sido alcançado na solução dos escoamentos de cascata com a aplicação dos métodos numéricos. No entanto, o escoamento no interior de uma turbomáquina permanece desafiador devido à sua complexidade de escoamento viscoso, tridimensional e não permanente. Assim, muitos trabalhos são realizados com a finalidade de modelar algumas dessas características do escoamento e, também, de vencer as dificuldades técnicas e numéricas de modelagem, integração, geração de malhas, modelos de turbulência, escoamentos secundários, vibração e interação estrutural, entre outras.

A motivação inicial deste trabalho é o projeto de um ventilador axial de baixo ruído aerodinâmico. Para isso, faz-se necessário o emprego de uma ferramenta computacional eficiente para o cálculo dos perfis da cascata de pás e das distribuições de pressão na superfície desses perfis.

Este trabalho desenvolve uma ferramenta computacional própria que utiliza a técnica de distribuição de vórtices na superfície, e emprega a condição de contorno de Dirichlet, para o cálculo do escoamento potencial bidimensional em torno de aerofólios isolados ou dispostos em cascatas. E, também, aplica esse método direto de maneira iterativa para a resolução do problema inverso, em que a geometria do aerofólio é calculada para atender a uma determinada distribuição de velocidade em seu contorno.

O objetivo desse estudo é possibilitar um melhor conhecimento das particularidades do cálculo aerodinâmico do escoamento em torno de aerofólios e de cascatas de aerofólios, além de adquirir experiência em como tratar as dificuldades de modelagem e resolução numérica desses escoamentos de fluido.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O escoamento real no interior de uma turbomáquina é tridimensional, viscoso e não permanente, muitas vezes compressível, ou seja, é bastante complexo devido aos efeitos da geometria, da viscosidade, de turbulências e de vibração. Além disso, sinais acústicos são gerados como resultado das interações aerodinâmicas e também têm um efeito aerodinâmico, conforme Gostelow (1984).

A análise do escoamento em uma turbomáquina necessita de hipóteses simplificadoras. Um modelo clássico é o escoamento bidimensional, irrotacional e incompressível através de uma cascata. Trata-se de um escoamento potencial bidimensional governado pela equação de Laplace. E a definição de cascata é uma fileira infinita de corpos similares equidistantes, sendo que esses corpos têm a forma do perfil aerodinâmico da roda de pás.

No início do século vinte a tecnologia aerodinâmica estava disponível apenas para aerofólios isolados, não havia ainda desenvolvimentos específicos para tratar a complicada fileira de pás necessária para representar o rotor ou o estator das turbomáquinas. Em paralelo ao melhoramento sistemático da arte aerodinâmica e à custa de cálculo considerável, gradualmente a teoria de asas isoladas foi sendo estendida para cascatas, aliada a uma maior compilação de dados de cascatas. A demanda era por um compressor axial de alta eficiência para a turbina a gás idealizada pelos projetistas nesses tempos de guerra. Assim, os fundamentos para a turbina a gás moderna foram estabelecidos. O desenvolvimento histórico detalhado da teoria de cascata para o escoamento potencial incompressível é apresentado por Gostelow (1984).

A teoria de cascata iniciou-se com o trabalho pioneiro de Sergei A. Chaplygin no ano de 1911, o qual possibilitou uma solução para cascatas de placas planas, que foi estendida para cascatas de aerofólios com camber e espessura no início da década de 30. O conjunto de aproximações de sua teoria forma a base do trabalho de Merchant e Collar (1941), que por sua vez formou a base da solução exata para cascata desenvolvida por Gostelow (1964). Ainda no início dos anos 30, Weinig descobriu a função de transformação de uma cascata infinita de placas planas para um círculo único, resultando na fórmula para o cálculo do coeficiente de sustentação

da cascata. Além disso, sua teoria mostrou que para toda cascata de qualquer perfil deve existir uma cascata equivalente de placas planas que produz a mesma deflexão do escoamento.

Durante esse período inicial, anterior à Segunda Guerra Mundial, várias outras teorias de cascata foram desenvolvidas, algumas mais restritivas quanto à aplicação, outras esbarrando na complexidade matemática das possíveis soluções. Nos vinte anos seguintes o problema foi atacado matematicamente de duas maneiras distintas, resultando nos métodos de transformação conformal, com destaque para os trabalhos de Howell (1948) e Garrick (1944), e nos métodos de singularidades, com Schlichting (1955). A divergência entre os métodos de transformação e de singularidades cessou apenas com os desenvolvimentos matematicamente rigorosos da aproximação de singularidades, a exemplo do método de Martensen (1959).

Se dois contornos de corpos podem ser obtidos um a partir do outro por meio de uma transformação conformal conhecida analiticamente, então o escoamento potencial sobre um corpo pode ser calculado analiticamente a partir do escoamento potencial do outro. Este procedimento resulta em soluções analíticas bastante úteis de escoamento potencial, mas em geral restritas a determinadas formas de corpos (HESS E SMITH, 1967), normalmente corpos circulares ou rombudos e alguns tipos de aerofólios. As soluções analíticas obtidas pelo método de transformação conformal podem ainda ser utilizadas na validação de outros métodos em desenvolvimento, aproximados ou numéricos exatos.

Além disso, a transformação conformal pode ser utilizada como um artifício especial para se obter maior velocidade computacional e maior precisão do método de singularidades, por meio de um ajuste prévio da forma do corpo. Assim, uma forma mais complicada pode ser transformada pelo mapeamento conformal em uma forma mais simples e suave, sem quinas externas. Isso permite que o escoamento seja calculado precisamente com um número de elementos menor do que seria necessário para a forma original.

De fato, no método de distribuição de singularidades apresentado por Hess e Smith (1967) a precisão do cálculo é determinada pelo número e distribuição dos elementos usados para aproximar a superfície do corpo. Nas regiões do contorno onde a curvatura é maior ou onde as propriedades do escoamento, assim como a densidade da singularidade, variam mais rapidamente, os elementos utilizados na discretização do contorno devem estar mais concentrados. Essas regiões compreendem especialmente o bordo de ataque e o bordo de fuga de um aerofólio ou as

quinas externas do contorno. Além disso, o tamanho dos elementos deve variar gradualmente entre as regiões de maior e de menor concentração dos mesmos.

Os métodos de singularidades na superfície desenvolveram-se muito naturalmente a partir das teorias de aerofólio linearizadas precedentes. Nessas teorias linearizadas, desenvolvidas conforme a teoria dos aerofólios finos, o escoamento é aproximado por distribuições de singularidades sobre uma superfície de referência simplificada, gerada a partir da linha de corda do aerofólio. Essas distribuições de fontes e vórtices representam, respectivamente, a espessura do perfil e a circulação da pá. A equação integral linearizada resultante possibilita diversas reduções analíticas empregando funções bem conhecidas ou tabeladas.

A teoria do aerofólio fino fornece bons resultados para os coeficientes de sustentação e de momento de um aerofólio esbelto, mas ignora o efeito (pequeno, mas importante na prática) da distribuição de espessura sobre esses coeficientes, conforme Moran (1984). Além disso, a teoria do aerofólio fino dá bons resultados sobre a distribuição de pressão apenas longe dos pontos de estagnação. No entanto, a especificação apropriada de um aerofólio requer uma previsão precisa de sua distribuição de pressão. De fato, a distribuição de pressão influencia o comportamento do fluido na camada limite próximo à superfície, e esse comportamento controla tanto o arrasto do aerofólio quanto a sua sustentação máxima.

Como os métodos de singularidades eram complicados e trabalhosos para serem aplicados, havia a tendência em se fazer simplificações convenientes para facilitar os cálculos, mesmo com sacrifício da precisão. No entanto, com o desenvolvimento dos computadores modernos, com alta capacidade de armazenamento, houve o retorno às verdadeiras equações governantes fundamentais, com a finalidade de se obter soluções exatas para o escoamento sobre corpos de formas arbitrárias.

Nos métodos de singularidades, sem as simplificações inerentes à teoria linearizada, a superfície do corpo é coberta por uma folha superficial de singularidades distribuídas. Uma equação integral resulta da aplicação de uma condição de contorno que torna a superfície do corpo uma linha de corrente do escoamento exterior. Essa equação representa as influências em cada ponto do contorno das singularidades distribuídas em todos os pontos da superfície e também do escoamento uniforme incidente. Encontrar uma solução analítica da equação integral válida em toda a fronteira de um corpo com geometria arbitrária é tarefa complexa.

Tradicionalmente, dois métodos distintos foram desenvolvidos cada um com um tipo de singularidade distribuída na superfície: o método de fonte e o método de vórtice.

O método de vórtices na superfície original é creditado a Martensen (1959), para perfis aerodinâmicos de formato arbitrário, isolados ou em cascata. O interior do corpo é trocado por uma região de fluido em repouso separada do escoamento externo por uma folha de vórtices de espessura infinitesimal que cobre a superfície do corpo. Essa idéia, segundo Martensen, foi apresentada anteriormente por Prandtl em 1918 e utilizada por Prager em 1928 que obteve bons resultados numéricos para aerofólios isolados espessos e também por Goldstein e Jerison em 1947 e por Isay em 1953 que adaptaram a idéia para cascatas de aerofólios. Martensen faz um desenvolvimento matemático minucioso do problema que resulta na solução de uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, com núcleo contínuo e periódico, tendo como incógnita a intensidade da distribuição de vórtices no contorno. A equação integral resulta da aplicação da condição de contorno de Dirichlet de anular a componente tangencial da velocidade sobre toda a superfície interna da folha de vórtices, garantindo que o contorno do corpo é uma linha de corrente do escoamento exterior. Uma fórmula de quadratura é utilizada para avaliar a integral que é então substituída por uma soma ponderada de valores do integrando avaliado em certos pontos do contorno (pontos de controle). De acordo com a formulação de Martensen a velocidade no contorno externo dos perfis iguala-se à própria intensidade dos vórtices. Assim, além de ser uma ferramenta poderosa para o cálculo de escoamentos potenciais, o método de vórtices na superfície, segundo Lewis e Ryan (1972), é uma interpretação física do fenômeno real que ocorre no escoamento próximo à superfície do corpo quando a viscosidade tende a zero (escoamento potencial) e a camada limite tende à folha de vórtices infinitesimal.

O método de fontes na superfície desenvolvido na companhia *Douglas Aircraft Company* é conhecido como método de Hess e Smith (1967) ou método de Douglas-Neumann para cálculo do escoamento potencial sobre corpos de forma arbitrária. Esse método foi estendido para cascatas de aerofólios por Giesing (1964). O método de Hess e Smith, na verdade, distribui fontes e também vórtices sobre elementos retos na superfície do corpo, visto que distribuição de fontes apenas não permite modelar corpo de sustentação. A intensidade da distribuição de vórtices é admitida constante sobre o todo o contorno do aerofólio e satisfaz a condição de Kutta, responsável pela unicidade da solução da equação de Laplace. A distribuição de fontes tem

intensidade constante em cada elemento do contorno, mas varia entre elementos adjacentes. A intensidade da distribuição de fontes é calculada pela imposição da condição de contorno de Neumann de anular a componente normal da velocidade nos pontos médios (pontos de controle) dos elementos. O objetivo dessa condição é garantir que o campo de velocidade total (devido ao escoamento incidente e às distribuições de fontes e de vórtices) seja tangente à superfície do corpo. Embora seja o mais difundido, esse método apresenta como desvantagem em relação ao método de vórtices na superfície a necessidade de avaliar uma segunda série de equações integrais para obter as velocidades tangenciais na superfície externa do corpo, processo elaborado e sujeito a imprecisões.

Segundo Hess (1973) a maneira mais simples de avaliar a integral é por meio de uma fórmula de quadratura, onde o efeito de uma distribuição de singularidade é aproximado por uma soma de singularidades pontuais concentradas. O espaçamento dos pontos de quadratura deve ser pequeno comparado com todas as dimensões físicas do contorno. Esse procedimento não é satisfatório para corpos finos como os aerofólios, principalmente, no bordo de fuga, mesmo com um número grande de pontos de quadratura. Por isso, a maioria das aproximações para uso em computador usa pequenos elementos de superfície sobre os quais a singularidade é distribuída. E a solução da equação integral do método de vórtices na superfície pode seguir o mesmo procedimento numérico do método de fontes.

Genericamente, a superfície é subdividida em um número de elementos de superfície e a integral é substituída por um somatório de integrais que representam as influências de todos os elementos. A variação da intensidade da singularidade sobre cada elemento é escrita em uma forma paramétrica e a equação integral ou somatório passa a ser função desses parâmetros. Por fim, a condição de contorno avaliada em diversos pontos da superfície conduz a um sistema de equações algébricas, cuja solução resulta na distribuição apropriada da singularidade em questão.

Existem várias maneiras de se estabelecer um método de singularidades no contorno dependendo basicamente do conjunto adotado para: o tipo de condição de contorno, a forma do elemento, o tipo de singularidade e a intensidade da singularidade por unidade de comprimento do elemento. Para se evitar as imprecisões da teoria do aerofólio fino, tanto a condição de contorno quanto as singularidades deveriam ser aplicadas sobre a superfície ou o mais próximo possível da mesma.

A contribuição de cada elemento para a equação integral (ou somatório) envolve uma integral difícil de avaliar, mesmo para formas simples de intensidades de singularidades, segundo Moran (1984), a menos que a superfície sobre a qual estão distribuídas seja uma linha reta. Assim, normalmente, os elementos em que o contorno é subdividido são tomados como segmentos retos com as extremidades (nós ou pontos nodais) sobre o contorno.

O tipo de singularidade empregada pode ser fonte, dipolo ou vórtice (ou suas combinações) e a intensidade da singularidade constitui-se na incógnita do problema. Para avaliar as integrais assume-se uma forma paramétrica para a variação da intensidade da singularidade sobre cada elemento. Essa é a única aproximação importante do método de painéis, conforme Moran (1984), a qual se torna mais precisa tanto com o aumento do número de painéis (e/ou da realidade das hipóteses) quanto com o aumento das variações das intensidades da singularidade.

Assim, o problema de calcular o escoamento potencial incompressível bidimensional sobre um corpo de geometria arbitrária tornou-se possível em termos de singularidades distribuídas na superfície do corpo, onde a função de distribuição é a solução de uma equação integral que expressa a condição de contorno da velocidade. Essa técnica, com frequência denominada de método dos painéis, é uma técnica consagrada e amplamente utilizada na indústria aeronáutica desde aproximadamente 1970.

Existem diferenças importantes entre as várias formulações de singularidade na superfície do problema de escoamento potencial. No entanto, a análise numérica envolvida no cálculo da integral que aparece na equação integral básica é essencialmente a mesma em todas as formulações. De fato, os núcleos das equações governantes, assim como as velocidades devido a uma fonte e a um vórtice pontual, estão estreitamente relacionados. A avaliação eficiente desta integral é o assunto do artigo de Hess (1973), ele investiga sistematicamente a eficácia de aproximações de ordem maior da equação integral. As aproximações que utilizam elementos retos com intensidade constante da singularidade em cada elemento ou elementos parabólicos com intensidade linear são aproximações matematicamente consistentes. Enquanto que a aproximação comum baseada em elementos retos com intensidade da singularidade variando linearmente é matematicamente inconsistente. Para os casos mais comuns de escoamento exterior sobre corpos convexos o método básico de elemento reto com intensidade da singularidade constante é bom o suficiente. Para escoamentos sobre corpos com regiões côncavas acentuadas, como a região da

superfície de pressão próxima ao bordo de fuga de aerofólios muito arqueados, por exemplo, a utilização de elemento parabólico com intensidade linear permite aumento significativo da precisão do método. Mas mesmo nesses casos o método básico funciona bem com um número maior de elementos, conforme Hess.

Devido à variedade de escolhas possíveis entre forma dos elementos do contorno, tipo de singularidade e variação da intensidade da singularidade no elemento encontra-se na literatura diversas combinações na tentativa de estabelecer o método mais adequado para diversas aplicações. Por exemplo, Lewis (1991) investe no método original de Martensen com elementos retos e singularidade tipo vórtice concentrada nos pontos médios dos elementos. Amorim (1987) utiliza uma formulação baseada na equação integral de Martensen, mas com a discretização do contorno em elementos retos com distribuição de singularidade tipo vórtice de intensidade constante; Alcântara Pereira (2002) e Ricci (2002) adotam formulação semelhante. Petrucci et al. (2001) e Silva (2005) utilizam o método dos painéis com distribuição linear de vorticidade sobre os painéis retos (matematicamente inconsistente conforme Hess). Uma vantagem significativa da modelagem com distribuição linear, segundo Silva, é a continuidade da função nos pontos nodais (exceto no bordo de fuga), o que representa melhor a distribuição real de vorticidade ao longo da superfície do corpo. A utilização de distribuições de ordem superior como a quadrática, analisadas em Pereira e Bodstein (2004), aumenta em muito a complexidade da formulação. E modelos mais elaborados não correspondem necessariamente ao melhor custo benefício para a simulação numérica do escoamento, conclui.

Para simular o escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos isolados ou dispostos em grades lineares e circulares Amorim (1987) utiliza uma técnica de painéis semelhante à desenvolvida por Mavriplis (1971), que se baseia na formulação de Martensen (1971). A equação integral é obtida pela aplicação da condição de contorno sobre o campo de velocidades total obtido pela superposição do campo de velocidade uniforme e do campo de velocidades induzidas. O campo de velocidades induzidas deve-se às distribuições contínuas de vórtices sobre o contorno de todos os perfis da grade, utilizando funções de variáveis complexas. O somatório das contribuições de todos os perfis da grade é uma série infinita que corresponde à função cotangente hiperbólica presente no núcleo da integral resultante. O contorno do perfil referência é discretizado em elementos de superfície retos com distribuição de vórtices de intensidade

constante para a avaliação da integral. Os cálculos necessários são efetuados diretamente através da álgebra complexa do computador. O procedimento descrito é semelhante à extensão feita para cascata por Giesing (1964) no caso de painéis de fontes.

Com a aplicação dos métodos numéricos, grande avanço foi alcançado na solução dos escoamentos de cascata. Possivelmente, a característica do campo de escoamento mais importante e difícil de trabalhar seja sua viscosidade. Mas, somente uma solução viscosa, completamente tridimensional e não permanente pode vir a representar corretamente os fenômenos do escoamento real nas turbomáquinas. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos com o objetivo de modelar alguma dessas características do escoamento. E, conforme previsto por Gostelow (1984), o modelo de cascata continua sendo elemento chave nesse processo, constituindo-se em ferramenta importante para checagem de precisão e entendimento físico do fenômeno.

2.1 Assuntos correlatos

2.1.1 O método de vórtices

O atrativo do método de vorticidade na superfície é sua base física que tenta modelar diretamente a natureza de vórtice dos escoamentos de fluido. Desde 1979, segundo Lewis (1991), tem-se tirado proveito do alcance muito maior dos métodos de vorticidade na superfície para modelagem direta de escoamentos reais complexos, com objetivo de tentar resolver as equações de Navier-Stokes bidimensionais. A simulação do escoamento de um fluido viscoso em torno de corpos tem se tornado possível com o crescente avanço na área computacional. Todos os escoamentos reais envolvendo interação de corpos com correntes uniformes são controlados fundamentalmente pela vorticidade criada na superfície e contida dentro da camada limite. Corpos com superfícies suaves (círculos, aerofólios, etc.) apresentam uma dificuldade adicional devido ao ponto de separação do escoamento constituir-se em uma incógnita. O Método de Vórtices, em versão lagrangiana pura ou híbrida (esta sujeita aos problemas inerentes à necessária malha de discretização da região fluida), simula numericamente a evolução da vorticidade em um meio fluido. Simulação esta que abrange o cálculo da influência do corpo no campo de velocidades no interior da esteira, a geração e o transporte de vorticidade junto à superfície sólida do corpo e o

processo de difusão de vorticidade. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos para o aprimoramento da técnica, tanto da qualidade da representação do escoamento real, quanto da redução do considerável esforço computacional envolvido. Entre eles destaca-se o trabalho de Alcântara Pereira (2002) que utiliza o método de vórtices discretos para simular o escoamento de um fluido viscoso ao redor de uma grade linear de turbomáquina, incluindo a modelagem de turbulência.

Diversos trabalhos de desenvolvimento e aplicação do método de vórtices ao escoamento ao redor de corpos rombudos e aerodinâmicos têm sido realizados pela equipe do Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica da COPPE/UFRJ, segundo Alcântara Pereira (2002) e Silva (2005), entre eles: Araújo (1994), Moreira da Silva (1995), Fonseca (1996), Araújo (1997), Guedes et al. (1998); Mustto (1998), Malta (1998) e Mustto (2004) que combinam o Teorema do Círculo (Milne-Thompson, 1955) com o Método de Vórtices; Carreiro (2002) que combina a transformação conformal com o método de vórtices. Essas aplicações ficam limitadas a formas mais simples de corpos com superfície circular ou geometrias com transformações conhecidas. Guedes (2003) utiliza o método de painéis com fontes e vórtices de Lamb, satisfazendo às condições de impenetrabilidade e não escorregamento simultaneamente, e o método de vórtices para evolução da esteira, para geometrias de cilindros circulares.

Alcântara Pereira (2002) utiliza o método de vórtices discretos com modelagem sub-malha de turbulência (que considera o modelo de Função Estrutura de Velocidade de Segunda Ordem adaptada ao Método de Vórtices Discretos) para simular o escoamento de um fluido viscoso ao redor de perfis aerodinâmicos de uma grade linear de turbomáquina. Para o cálculo da influência do corpo no campo de velocidades no interior da esteira, ou seja, na solução do problema potencial, Alcântara Pereira (1999 e 2002) utiliza o Método dos Painéis, distribuindo vórtices sobre painéis planos e assume que a densidade da distribuição é constante sobre cada painel, conforme a formulação apresentada por Amorim (1987). A vantagem de empregar o Método dos Painéis é a possibilidade de simular corpos com forma genérica. Uma melhor precisão dos resultados é obtida com o aumento do número de painéis. No entanto, aumentando-se este número, há necessidade de maior capacidade computacional, uma vez que o número de vórtices discretos da nuvem também aumenta. De fato, no Método de Vórtices após cada incremento de tempo novos vórtices discretos são gerados e desprendidos ao longo da superfície do perfil

aerodinâmico nas vizinhanças dos pontos de controle. Assim, Alcântara Pereira adota um número menor de painéis e considera uma correção de curvatura. Para a validação do algoritmo apresentado Alcântara Pereira calcula o escoamento ao redor de perfis aerodinâmicos da série NACA 65 (NACA65-410 e NACA65-1210) e faz comparações com resultados experimentais disponíveis na literatura (EMERY et al., 1957) para o campo de pressões e para o ângulo de deflexão da grade.

Ricci (2002) desenvolve um trabalho paralelo e complementar ao de Alcântara Pereira para a modelagem do escoamento no interior das turbomáquinas, com semelhante fundamentação no método de vórtices. O rotor de pás se desloca em relação à carcaça (voluta) e o escoamento desenvolvido pode ser modelado, inicialmente, como o escoamento em torno de um aerofólio nas proximidades de uma superfície plana, envolvendo fenômenos conhecidos popularmente como “efeito solo”. Em trabalho anterior, Fonseca et al. (1997) analisam a influência do solo em um escoamento bidimensional não-permanente em torno de um aerofólio simétrico, sem considerar os efeitos viscosos; a esteira deve-se à liberação de vórtices apenas no bordo de fuga do perfil. Ricci (2002) analisa o escoamento, não permanente, de um fluido newtoniano em torno de um corpo de forma arbitrária, disposto nas proximidades de uma superfície plana, sem considerar os efeitos da turbulência. O algoritmo apresentado conforme o método de vórtices simula os processos de geração, convecção e de difusão da vorticidade gerada nas superfícies do aerofólio e do solo. Para a simulação do corpo o algoritmo utiliza o método dos painéis, com painéis planos e distribuição de vorticidade de densidade constante. A presença da superfície plana é simulada pelo método das imagens, com a imposição adicional de escorregamento nulo na superfície, garantindo a inclusão dos efeitos da formação da camada limite junto ao solo. Ricci (2002) apresenta os resultados dos experimentos numéricos realizados com os aerofólios NACA 0012 e NACA 0018, e também com o cilindro circular; como corpos isolados e com a presença da parede plana; e com diferentes ângulos de ataque do escoamento uniforme incidente. Dessa maneira, o autor realiza um estudo das influências da forma do corpo e do ângulo de ataque sobre qual efeito solo predomina em cada caso: a diminuição da sustentação associada à aceleração do fluido que aparece com a restrição ao escoamento entre o corpo e a superfície, ou o aumento da sustentação associada ao deslocamento do ponto de estagnação, do bordo de ataque, para um ponto localizado nas suas vizinhanças, porém na face inferior do corpo.

Silva (2005) utiliza essa técnica do método de vórtices associado ao método dos painéis para o estudo numérico do escoamento bidimensional, transiente e incompressível ao redor de perfis aerodinâmicos isolados, mas com um número consideravelmente maior de vórtices que o empregado por Alcântara Pereira (1999). O método dos painéis, com distribuição linear de singularidades do tipo vórtice sobre painéis retos, é utilizado para calcular a contribuição do corpo no escoamento. A distribuição linear de vórtices é empregada por Silva com a finalidade de explorar a vantagem de ser contínua nos pontos nodais, representando melhor a distribuição real de vorticidade ao longo da superfície do corpo, quando comparada à distribuição constante. Modelos mais elaborados, com a utilização de distribuições de ordem superior, como a quadrática, aumentam em muito a complexidade da formulação e não necessariamente correspondem ao melhor custo benefício para a simulação numérica do escoamento.

Com o programa FORTRAN desenvolvido, Silva (2005) faz simulações com o aerofólio simétrico NACA 0012, devido à abundância de resultados disponíveis na literatura, e com o aerofólio NACA 4415, devido à sua geometria com curvatura e sua similaridade com aerofólios utilizados em aplicações comerciais, além desse tipo de aerofólio ter sido utilizado nos primeiros projetos de turbinas eólicas. No entanto, a simulação de aerofólios com bordo de fuga muito fino, como o NACA 63-415, apresenta erros numéricos no cálculo do campo de velocidade nessa região, devido à proximidade dos pontos de controle dos painéis. Nestes casos, segundo Silva (2005), são necessários tratamentos numéricos especiais, tais como a correção da diagonal oposta do sistema ou um grande refinamento dos painéis nesta região.

Flutt (2008) desenvolve um algoritmo que emprega o método dos painéis para a solução do escoamento potencial através de uma grade linear de turbomáquina. O método adota a distribuição de vorticidade sobre a superfície de painéis retos, sendo implementado de três maneiras diferentes: conforme Lewis (1991), concentrando a vorticidade de cada painel sobre seu ponto médio; ou, conforme Katz e Plotkin (2001), utilizando vorticidade uniforme ou, ainda, vorticidade linear sobre cada painel. Os métodos são aplicados à análise de perfis isolados ou em cascata: o aerofólio analítico simétrico de Van der Vooren, o perfil NACA 0012, e também o perfil NACA 65-410, este último de ampla aplicação em compressores axiais. O método de Lewis mostra-se mais consistente para a grade linear, convergindo para a solução de aerofólio isolado com o aumento do espaçamento da grade; e também se apresenta superior aos métodos de singularidades de

ordem maior no tratamento do bordo de fuga esbelto, graças ao benefício da correção da diagonal oposta.

2.1.2 O método inverso

O problema de calcular o escoamento potencial incompressível bidimensional, além da sua utilização associada ao método de vórtices como exposto anteriormente, tem recebido atenção devido à aplicabilidade dos resultados para o cálculo inverso de aerofólio. No problema inverso ou problema de projeto a geometria do perfil do corpo deve ser determinada para que certas características do escoamento sejam obtidas, por exemplo, para uma dada distribuição de velocidade ao longo da superfície.

O método inverso para aerofólios em cascata de Murugesan e Raily (1969) é uma extensão do método de Martensen, tão bem sucedido para o cálculo direto da distribuição de velocidade para uma dada geometria de pá. Esse método inverso emprega o método direto juntamente com a modificação da geometria da pá iterativamente, a partir de uma geometria inicial arbitrária, para satisfazer o requisito de uma distribuição de velocidade desejada na superfície. A diferença entre essa distribuição de velocidade requerida e aquela calculada sobre a superfície é usada para determinar o valor de uma distribuição de vórtices que é adicionada sobre o contorno. Isso resulta no aparecimento de uma distribuição de velocidades normais ao contorno. E para que o contorno seja uma linha de corrente do escoamento sua inclinação local é ajustada de acordo com a razão entre os valores das velocidades normal calculada e tangencial requerida. A distribuição de velocidade requerida ao longo da superfície, segundo os autores, pode ser especificada em função do comprimento a partir do ponto de estagnação frontal, para cada uma das superfícies de sucção e de pressão, e pode inclusive ser selecionada das considerações de camada limite.

Bristow (1977) incorpora a terceira identidade de Green a um método de painel de distribuição de fontes e vórtices combinados, que satisfaz a condição de contorno de Neumann, para o cálculo do escoamento potencial bidimensional sobre aerofólios genéricos. Trata-se de um método de painel de precisão de segunda ordem utilizando elementos curvos com intensidade das singularidades (fonte e vórtice) variando linearmente, conforme fórmulas de aproximação consistentes de Hess (1973). Este método fornece distribuições bastante suaves quando

comparado àqueles que utilizam somente fontes ou somente vórtices. Embora, métodos de distribuição de vórtices satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet também produzam distribuições suaves (de fato, a base do método de Martensen é o uso do teorema de Green para a função de corrente do escoamento). McFarland (1982) estende o método de Bristow para a análise de cascatas lineares, conforme Giesing (1964), e incorpora correções para tratamento aproximado de escoamentos compressíveis. Bristow (1977) também compara as soluções para um exemplo de cálculo de cilindro circular utilizando dois métodos numéricos de distribuição de singularidades que variam linearmente sobre painéis retos, um com fontes e vórtices combinados e outro com apenas vórtices. Ambos os métodos não incorporam a terceira identidade de Green e envolvem a iteração entre a respectiva solução do problema direto e uma fórmula de correção da geometria, que altera a inclinação dos painéis sem alterar seu tamanho. Ele conclui que os métodos de vórtices não são adequados nas regiões de estagnação para soluções de problemas inversos. Nessas regiões de baixa velocidade e, portanto, de baixa intensidade da singularidade, a forma (inclinação) da geometria resultante pode variar muito sem comprometer a condição de contorno prescrita. Enquanto que a aproximação de fontes e vórtices combinados apresenta bons resultados.

Petrucci (1998) propõe uma metodologia numérica para a solução do problema inverso do escoamento potencial incompressível em torno de perfis aerodinâmicos isolados ou em grades lineares de turbomáquinas. Emprega um procedimento iterativo semelhante ao de Murugesan e Raily (1969), mas utilizando um método de Hess e Smith modificado em vez do método de Martensen. A modificação no método dos painéis de Hess e Smith tem por finalidade evitar os carregamentos espúrios em um bordo de fuga afilado e consiste no uso de uma distribuição variável de vórtices no contorno do perfil, com valor nulo no bordo de fuga e valor máximo nas proximidades do bordo de ataque, conforme sugerido por Girardi e Bizarro (1995). Petrucci utiliza uma distribuição de vórtices senoidal. A intensidade dessa distribuição é calculada na posição do ponto de controle de cada painel, sendo igual ao valor máximo da distribuição multiplicado por um fator que varia entre 0 e 1 conforme a função senoidal. Essa intensidade de vórtices é então admitida constante sobre cada painel e o fator é incorporado ao coeficiente de influência correspondente no método dos painéis de Hess e Smith tradicional.

Após a análise do perfil, a intensidade da distribuição de vórtices efetiva a ser adicionada ao contorno em cada iteração, denominada distribuição fictícia por Petrucci, é limitada por um filtro com a finalidade de evitar a divergência do método. Sem a utilização desse filtro pode ocorrer o aparecimento de saliências ou concavidades espúrias na região do bordo de ataque, devido às grandes variações da densidade de vórtices fictícia, impedindo um controle adequado das inclinações dos painéis. Essa distribuição efetiva também inclui um fator de aceleração do processo iterativo.

O ajuste na geometria é feito a partir do bordo de fuga, eliminando a necessidade de determinar a posição do ponto de estagnação no bordo de ataque em cada etapa iterativa. Um procedimento explícito é adotado para garantir o fechamento dos perfis. No caso de grades lineares, para acelerar o processo iterativo, faz-se um pré-cálculo da orientação do perfil inicial em relação ao escoamento médio para que a posição do ponto de estagnação sobre o contorno total do perfil coincida, dentro de certa precisão, com a posição do ponto de estagnação requerido.

Petrucci faz a aplicação dos métodos de Hess e Smith tradicional e modificado em problemas de análise e em problemas inversos, com perfis de Joukowski, NACA e grade linear de Gostelow (1984) e grade linear de Merchant e Collar (1941). Ele conclui que a distribuição de vórtices deve ser suave no bordo de fuga para evitar os carregamentos espúrios e permitir que o método dos painéis produza uma solução convergente no modo inverso. E também que a forma escolhida para a distribuição de vórtices tem influência significativa sobre as distribuições de velocidades resultantes, influência esta que pode ser intensificada pelo efeito de grade. Esse fato fica evidente na análise da grade de Merchant e Collar onde o método de Hess e Smith tradicional apresenta melhores resultados, provavelmente, devido ao ponto de estagnação se afastar do ponto de simetria da distribuição de vórtices previsto pela função senoidal adotada para o método modificado.

Diante da grande influência exercida pela distribuição de vórtices no método de Hess e Smith, Petrucci (1998) sugere que um método de painéis com distribuição de vórtices como incógnita principal seja utilizado no modo inverso. Além disso, acrescenta que o método deveria utilizar distribuições de singularidades de ordem mais alta com a finalidade de produzir distribuições de velocidades mais suaves, principalmente, para melhor controle dos efeitos de

curvatura e do afilamento do bordo de fuga. Sendo assim, um forte candidato seria o método de painéis proposto por Bristow (1977) baseado na 3ª identidade de Green.

Goto et al. (1984) desenvolvem um método de cálculo aerodinâmico de cascata de compressor, para escoamento incompressível bidimensional, que associa dois métodos inversos: um de camada limite e outro de cascata. O método de camada limite inverso produz uma distribuição ótima de velocidade na superfície. Esta distribuição de velocidade é obtida, basicamente, a partir de uma distribuição prescrita do fator de forma da camada limite que garante uma aproximação de escoamento turbulento não separado na superfície de sucção, no estado de equilíbrio, além de considerar também as regiões de camada limite laminar e de transição. O triângulo de velocidade é prescrito da especificação do projeto, restringindo a escolha do ângulo de escalonamento. E a distribuição de velocidade do lado de pressão é selecionada para resultar em uma seção de pá razoável, tanto aerodinâmica quanto mecanicamente, com pequena solidez da cascata. A seguir, o método de cálculo inverso de cascata é executado, conforme cálculo de escoamento potencial inverso proposto por Goto e Shirakura (1984). Neste método, a cascata é transformada em uma matriz de cilindros circulares e a seção da pá é calculada para a distribuição de velocidade prescrita, triângulo de velocidade e solidez por meio da resolução das equações simultâneas sobre a função de mapeamento. Para demonstrar a aplicabilidade desse método para o projeto de turbomáquina, pás de rotor e estator de um ventilador axial de estágio único são projetadas, testadas e os resultados comparados com aqueles de um fan convencional projetado com uma cascata série NACA 65, em Goto (1987). O fan projetado inversamente obtém eficiência maior e uma faixa de operação mais ampla comparado com o convencional.

Elizarov e Fokin (1992) propõem um método de cálculo inverso aerodinâmico de aerofólios para uma dada faixa de ângulos de ataque, baseado na solução de um problema de valor de contorno inverso. As distribuições de velocidade são prescritas, em função da coordenada de arco de contorno e independentemente para as superfícies superior e inferior com seus respectivos ângulos de ataque, de acordo com o critério de não separação da camada limite turbulenta proposta por Stepanov. Essas distribuições de velocidade são trabalhadas com um mínimo de modificações de maneira a garantir condições físicas realizáveis para o aerofólio projetado, por exemplo, que ele seja fechado e com superfícies não intersectantes.

Selig e Maughmer (1992a) propõem um método inverso para aerofólios que leva em consideração vários pontos de operação. O procedimento é baseado no método de transformação conformal, para escoamento potencial incompressível. O aerofólio é subdividido em um número desejado de segmentos e, para cada segmento, é dada a distribuição de velocidade requerida juntamente com o ângulo de ataque correspondente a esta distribuição. Selig e Maughmer (1992b) acoplam esse método inverso híbrido multipontos a um método de análise de camada limite direto, para prescrever ao longo dos segmentos do aerofólio outras características de interesse, além da distribuição de velocidade, tais como o desenvolvimento da camada limite por meio da prescrição do fator de forma, a geometria local ou a razão de espessura. Essas condições prescritas ficam sujeitas às restrições de que a forma do aerofólio deve ser fechada e sem cruzamento e de que a distribuição de velocidade deve ser contínua. A solução do sistema de equações algébricas não lineares do problema é obtida pelo método de Newton-Raphson. Selig (1994) salienta que os métodos inversos de cascata são normalmente baseados na distribuição de singularidades, aplicáveis a apenas um ponto de operação. Outros trabalhos utilizando a transformação conformal permitem a resolução do problema inverso de cascata para dois pontos, resultando em uma faixa de operação para a cascata. Neste caso, a distribuição de velocidade é prescrita sobre a superfície superior para um determinado ângulo de entrada e sobre a superfície inferior para um ângulo diferente. Selig (1994) estendeu a metodologia inversa multiponto para o cálculo de perfis em cascata.

Limache (1995) apresenta um método inverso para gerar a geometria do aerofólio que satisfaz tanto requisitos dinâmicos (como a distribuição de pressão prescrita) quanto requisitos geométricos, impostos por meio do contorno de velocidade no plano hodográfico. O método utiliza a técnica de mapeamento conformal sucessivo: o contorno de velocidade prescrito no plano hodográfico sofre uma série de transformações, por meio do teorema de mapeamento de Riemann, até que uma forma aproximadamente circular seja obtida; este quase círculo é mapeado para um círculo exato pelo método de Theodorsen-Garrick; e o aerofólio correspondente no plano físico é então conhecido.

O método dos painéis utilizado por Petrucci (2003) emprega painéis retos com distribuições lineares de vórtices e aplica a condição de contorno de Neumann nos pontos de controle para a análise do escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos, com ênfase no problema dos

bordos de fuga afilados. A motivação do trabalho está no cálculo inverso de aerofólios para grades lineares representativas de turbomáquinas geradoras (bombas, compressores e ventiladores axiais), onde há o emprego de perfis com bordo de fuga afilado.

Um problema típico dos métodos de painéis que empregam distribuições lineares de vórtices e a condição de contorno de Neumann é que produzem carregamentos aerodinâmicos espúrios (variações do coeficiente de pressão) na região do bordo de fuga afilado, caso a condição de Kutta não seja imposta de modo consistente; sendo que a condição de regularização ($\gamma_{m+1} = -\gamma_1$) sozinha não é suficiente. Petrucci propõe que a velocidade tangencial total (incidente mais induzida) seja igualada à densidade de vórtices correspondente no bordo de fuga ($W_{tbf} = -\gamma_1$). Com isso, o sistema de equações torna-se sobre determinado ($m+1$ equações, m incógnitas) e sua solução é efetuada pelo método dos mínimos quadrados. Desse modo, as dificuldades no tratamento de bordos de fuga afilados ficam superadas de modo consistente, mesmo com o emprego de um número bem reduzido de painéis. E o método é válido para perfis com outros tipos de bordo de fuga também.

Os resultados obtidos com este método direto são comparados com o método anterior de Hess e Smith modificado de baixa ordem, para vários perfis Joukowski isolados e para a grade de Gostelow (1984). O método proposto por Petrucci (2003) obtém resultados satisfatórios e consistentes, inclusive na região do bordo de fuga, mesmo com um número bem reduzido de painéis (16 ou 20). Enquanto que os resultados do método de Hess e Smith modificado afastam-se bem mais dos analíticos não só no bordo de fuga, mas em todo o contorno do perfil, embora a diferença diminua com o aumento do número de painéis (80 ou 90).

O método inverso proposto por Petrucci (2003) utiliza iterativamente o método direto validado com distribuição linear de vórtices sobre painéis retos, conforme procedimento proposto por Petrucci (1998) com base no método de Murugesan e Raily (1969). O avanço geométrico apresenta uma característica diferente ao manter as abscissas pré-fixadas e obter as ordenadas do novo perfil pela variação da inclinação dos painéis, em função do excesso de velocidades normais induzidas pela diferença entre as velocidades tangenciais requeridas e as calculadas (distribuição fictícia de vórtices). Algumas medidas são adotadas com a finalidade de diminuir o número de iterações necessárias para alcançar a convergência. Um fator constante é aplicado à distribuição de

vórtices fictícios. O perfil inicial é escolhido com forma próxima à do perfil requerido, por exemplo, uma elipse com relação de semieixos igual a 0,1. No caso de grades, a inclinação do perfil inicial é adotada igual ao ângulo médio do escoamento β_∞ , desde que normalmente ele é do conhecimento do projetista, o que fornece uma boa estimativa da atitude final do perfil. A matriz de influência da primeira iteração é utilizada no cálculo das velocidades normais induzidas pelos vórtices fictícios em todas as demais iterações, porque o número de condição dessa matriz é menor, diminuindo a possibilidade de propagação de erros e, em consequência, necessitando de um número bem menor de iterações. Além disso, um filtro automático é aplicado à distribuição de velocidade normal calculada, limitando os valores excessivos na região do bordo de ataque e mantendo a distribuição de velocidade normal suave. Essa medida evita o surgimento de saliências e concavidades espúrias na região do bordo de ataque, quando da geração de um novo perfil, o que poderia prejudicar o processo de convergência. Esse método inverso proposto por Petucci é aplicado ao cilindro circular e aerofólios Joukowski isolados e ao perfil de Gostelow em grade. Os resultados mostram que o método requer pequeno número de iterações, apresenta alta taxa de convergência geométrica, maior precisão e suavidade no contorno, quando comparado com o método anterior que utiliza Hess e Smith modificado. Mesmo assim, pequenas oscilações geométricas são observadas na região do bordo de ataque, as quais são comparadas com os resultados do método híbrido.

Petrucci (2003) propõe outro método inverso, denominado híbrido, que combina uma técnica de transformação conforme (transformação de Joukowski para o caso de perfis isolados e transformação de Weinig para o caso de perfis em grade) e o método dos painéis com distribuição linear de vórtices. Dada a distribuição de velocidade requerida no contorno do perfil do aerofólio no plano físico, o método busca o círculo ou quase círculo alvo através de um processo iterativo que compreende o cálculo dos parâmetros da transformação, o cálculo do escoamento com o método dos painéis e o avanço geométrico, todos realizados no plano transformado. Como o quase círculo não sofre oscilações geométricas bruscas, não há necessidade de fatores de aceleração de convergência, nem mesmo de filtros no cálculo da velocidade normal induzida pela densidade de vórtices fictícios. A aplicação da técnica de transformação conforme aumenta a precisão do procedimento inverso, atenuando sensivelmente as eventuais oscilações geométricas

na região do bordo de ataque e garantindo a geração de formatos aerodinâmicos suaves em todo o contorno.

Para a validação do método inverso híbrido proposto, no caso de perfis isolados foram escolhidos os perfis Joukowski analíticos e o perfil da grade de Gostelow (1984) considerado isolado, com velocidades requeridas estipuladas numericamente. Para o caso de grades lineares, foram escolhidas as grades analíticas de Weinig e de Gostelow e perfis Joukowski considerados em grade, com velocidades requeridas estipuladas numericamente. Em todos os casos é feita a análise de uma gama significativa de situações prováveis, enfocando a influência do arqueamento e do ângulo de ataque no processo iterativo.

O método inverso híbrido testado apresenta resultados bastante suaves na região do bordo de ataque, com um número de painéis relativamente baixo (24 a 50) e com um número bem menor de iterações (no máximo 10), quando comparado ao método inverso anterior. Em uma situação normal de uso, no entanto, um número maior de painéis (200 ou mais) é necessário para representar fielmente um perfil aerodinâmico. Outra vantagem da aplicação da transformação conforme é que não há necessidade de concentrar um número maior de painéis nos bordos de ataque e de fuga. A desvantagem do método está na necessidade de se conhecer um tipo de transformação conforme para cada classe de problemas. As transformações conformes adotadas (Joukowski e Weinig) servem apenas para representar perfis aerodinâmicos com bordo de fuga afilado, podendo ser estendidas para tratar perfis com bordo de fuga arredondado (ponto crítico a jusante localizado dentro do quase círculo); mas, para perfis com bordo de fuga agudo outros tipos de transformação conforme devem ser pesquisados. Além disso, no método híbrido de Petrucci (2003), tanto o ângulo de ataque de aerofólio isolado como o ângulo de montagem de grade constituem-se em dado do problema, não mais resultando do processo iterativo, como no método anterior.

2.1.3 Dinâmica dos Fluidos Computacional

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics* – CFD) estuda e denomina o conjunto de métodos e ferramentas computacionais utilizados para a simulação numérica de fenômenos que envolvem fluidos em movimento, conforme diversos autores.

Uma revisão dos principais métodos de CFD aplicados a escoamentos de turbomáquinas com ênfase nas vantagens e limitações práticas das técnicas é apresentada por Denton e Dawes (1999). Eles alertam sobre a importância de que o projetista ao utilizar CFD conheça e avalie as hipóteses subjacentes e as limitações dos códigos que está usando.

O primeiro sucesso em aerodinâmica computacional foi o desenvolvimento de métodos integrais de contorno para a solução da equação linearizada do escoamento potencial subsônico em torno de geometrias arbitrárias, que pode ser reduzida para a equação de Laplace, conforme Jameson (1983 e 1995).

O método integral de contorno tem a vantagem de reduzir a dimensionalidade do problema quando comparado aos métodos de campo, que resolvem as incógnitas no domínio inteiro do escoamento. É mais fácil dividir a superfície ou contorno em painéis do que dividir o domínio tridimensional ou bidimensional, respectivamente, em células. Assim, conforme Jameson (1983), os métodos de painéis continuam a ser amplamente utilizados para a solução de escoamentos subsônicos em baixos números de Mach, onde os efeitos de compressibilidade são desprezíveis, e também para a solução de escoamentos supersônicos em altos números de Mach, para os quais a equação linearizada é uma boa aproximação.

Quanto aos métodos de campo, na década de setenta, houve o desenvolvimento de formulações aerodinâmicas para a solução de escoamentos em regime transônico com base nas equações de pequenas perturbações. No entanto, segundo Jameson (1983), para a correta descrição do escoamento transônico invíscido deve-se resolver as equações de Euler não lineares, o que se tornou viável com os métodos desenvolvidos no início dos anos oitenta. Há métodos de solução de estado permanente e métodos iterativos baseados no conceito de integração das equações no tempo até que elas atinjam um estado permanente. Denton (1983) desenvolveu um método de Euler notável para cálculos de escoamento de cascata que mereceu amplo uso na indústria pela sua relativa robustez, rapidez e simplicidade, destacam Liu e Jameson (1993a).

As aproximações invíscidas não são mais adequadas quando os efeitos viscosos tornam-se significativos como em regiões de escoamento separado devido à presença de ondas de choque fortes. Na década de oitenta, métodos viscosos foram desenvolvidos acoplando-se iterativamente um esquema para a solução de camada limite com um esquema invíscido. Basicamente, o escoamento invíscido é primeiro resolvido sem uma camada limite, e a camada limite é calculada

usando a pressão de parede da solução invíscida como uma condição de contorno. O escoamento invíscido é então recalculado com uma condição de contorno que leva em conta a presença da camada limite, e o processo é repetido até a convergência, podendo tornar-se instável próximo a um ponto de separação. Essa dificuldade levou, conforme Jameson (1983), à introdução de métodos semi-inversos em que a condição de contorno de transpiração é prescrita em ambos os cálculos do escoamento invíscido e da camada limite.

Mead e Melnik (1985) descrevem a operação do código computacional GRUMFOIL, cuja formulação teórica e numérica detalhada é apresentada por Melnik et al. (1985). O programa calcula o escoamento transônico viscoso em regime permanente sobre aerofólios bidimensionais usando uma aproximação de iteração entre escoamento não viscoso e escoamento de camada limite viscosa. A solução não viscosa é obtida por meio de um método de diferenças finitas de multigrid para a equação potencial completa. A solução de camada limite é baseada em métodos integrais de arrastamento (*integral entrainment methods*) para previsão do desenvolvimento de camadas limites laminar e turbulenta e esteiras. A teoria inclui um tratamento dos efeitos de iteração viscosa induzidos pela esteira e considera os efeitos do gradiente de pressão normal através da camada limite próximo ao bordo de fuga. O código é aplicável a aerofólios com bordo de fuga cúspide ou agudo. Um esquema iterativo direto é usado para tratar o conjunto completo de condições de acoplamento entre os campos de escoamento viscoso e não viscoso. Esta versão do código GRUMFOIL, além de outras melhorias, incorpora a correção de entropia de Hafez, que o torna eficiente para tratar escoamentos viscosos transônicos até próximo da sustentação máxima, onde ondas de choque fortes e separação do escoamento estão presentes e o efeito da entropia é importante.

Um método de cálculo de escoamentos transônicos e de baixo número de Reynolds sobre aerofólios é implementado no código ISES de análise e de cálculo inverso viscoso/não viscoso apresentado por Drela e Giles (1987). As equações de Euler permanentes na forma integral são discretizadas sobre uma grade de linha de corrente conservativa para representar o escoamento não viscoso. Esse tipo de formulação viscosa, com compatibilidade entre as formulações laminar e turbulenta, é empregada para que a transição seja representada de maneira analiticamente contínua e bem-colocada. E essa localização precisa da transição em uma bolha de separação determina o tamanho da bolha e as perdas associadas, sendo decisiva na análise de aerofólios em número de

Reynolds baixo. Além disso, uma formulação de previsão de transição do tipo e^9 é derivada e incorporada à formulação viscosa. Os escoamentos viscoso e não viscoso são completamente acoplados por meio da espessura de deslocamento, sendo que o código ISES apresenta uma técnica de solução inovadora para resolver as equações viscosas e não viscosas acopladas. Em vez de iterar entre *solvers* não viscoso e viscoso por meio de lei de iteração aproximada, o conjunto inteiro de equação não linear é resolvido simultaneamente como um sistema completamente acoplado por um método de Newton-Raphson global, procedimento este muito estável. Os resultados demonstram que o método empregado pelo ISES é rápido, robusto e confiável para tratar interações viscosa/não viscosa que ocorrem em escoamentos transônicos de baixo número de Reynolds sobre aerofólios.

A solução das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds e a análise mais precisa dos escoamentos, por meio de uma melhor discretização do domínio, tornaram-se possíveis a partir da década de noventa com a evolução dos computadores modernos, dado o contínuo aumento da capacidade de armazenamento e da velocidade computacional.

Liu e Jameson (1993a) apresentam um método de volumes finitos para as equações de Euler para o cálculo de escoamentos de cascata bi e tridimensionais, incluindo escoamentos com perfis de velocidade de camada limite de *end-wall*. Trata-se de um método de volumes finitos de cinco estágios, centralizado na célula e com multigrades (malhas auxiliares para acelerar a convergência). O esquema explícito de multiestágios no tempo foi desenvolvido inicialmente por Jameson et al. (1981) para escoamentos externos, ele tem a vantagem de apresentar as discretizações espacial e no tempo separadamente e de ser de fácil implementação. Os resultados mostram boa convergência e precisão global para pás com bordos de fuga arredondados, sem cúspide, nas condições de projeto. Em condições fora do ponto de projeto, o método é capaz de capturar as características qualitativas do escoamento secundário devido às camadas limites da parede lateral na entrada. No entanto, a previsão quantitativa de escoamentos secundários com um método de Euler precisa ser cuidadosa, o ideal seria um *solver* de Navier-Stokes.

Liu e Jameson (1993b) apresentam um método de volumes finitos com um esquema multiestágios no tempo para solução das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds em três dimensões. O método numérico utiliza esquema baseado no vértice da célula para melhor precisão sobre malhas irregulares e o modelo de turbulência algébrico de Baldwin-Lomax. Este

método obteve melhores soluções dos escoamentos com separação, tanto nas condições de projeto quanto fora do ponto de projeto, quando comparadas aos cálculos efetuados com as equações de Euler do método anterior de Liu e Jameson (1993a). Mapas do coeficiente de atrito de pele mostram as bolhas de separação que foram observadas no experimento. No entanto, há incertezas nos cálculos quanto à localização da transição e quanto ao modelo de turbulência adotado. E são necessários estudos mais detalhados sobre o tamanho da discretização da grade, a interação entre a pá e a camada limite *end-wall* e o desenvolvimento de escoamentos secundários. Mesmo assim, o método proposto fornece uma ferramenta viável para a análise de escoamento e projeto de engenharia de cascatas de turbomáquinas.

Para a solução do escoamento com as equações de Navier-Stokes com média de Reynolds é necessário adotar-se um modelo de turbulência para fechar o problema. No entanto, nenhum modelo de turbulência é aplicável a todos os tipos de escoamento, conforme Denton e Dawes (1999). E a pesquisa por modelos de turbulência adequados para determinadas condições de escoamento permanece como um grande desafio dentro da Dinâmica dos Fluidos Computacional, conforme Souza (2009).

Os métodos bi e tridimensionais de Léonard e Van den Braembussche (1992) e Demeulenaere e Van den Braembussche (1996) possibilitam que uma distribuição de pressão seja imposta sobre a superfície da pá inteira. Eles são baseados nas equações de escoamento invíscido e no princípio de transpiração. As linhas de corrente do escoamento calculado são então aproximadas com o método de transpiração, e tomadas como a nova forma da pá. O fluxo de transpiração é calculado por meio de um *solver* de Euler modificado, no qual as paredes da pá são contornos permeáveis do domínio numérico, ao longo dos quais a distribuição de pressão prescrita é imposta (DEMEULENAERE et al., 1997).

O método inverso viscoso bidimensional desenvolvido por Demeulenaere et al. (1997) para o cálculo inverso de pás de compressor e de turbina resolve as equações de Navier-Stokes dependentes do tempo em um domínio numérico do qual alguns contornos (as paredes das pás) movem-se durante a parte transiente do cálculo. O algoritmo de modificação da geometria é baseado no princípio de transpiração, aplicado a partir do ponto de estagnação até o bordo de fuga, sobre cada uma das superfícies de pressão e de sucção, separadamente. O deslocamento do ponto da grade ocorre na direção normal à superfície da pá e sua amplitude é calculada da

aplicação da conservação de massa na célula definida entre as paredes da pá antiga e nova. A distribuição de velocidade normal necessária é calculada da diferença entre as distribuições de pressão real e prescrita, e a distribuição de velocidade tangencial é aquela da borda externa da camada limite. Os lados de sucção e de pressão resultantes são girados em torno do bordo de ataque de maneira a impor uma espessura do bordo de fuga constante. Após a modificação da forma da pá, uma nova malha é gerada em torno do perfil. O movimento da grade de uma iteração para outra induz termos adicionais importantes no equacionamento, principalmente, para a taxa de convergência dos cálculos de escoamento transônico com choques. O *solver* de Navier-Stokes é baseado em uma aproximação de volume finito *up-wind* bidimensional; mais detalhes e validação estão no artigo associado de Léonard et al. (1997). Uma estratégia de multiblocos permite uma concentração seletiva de pontos da malha nas regiões de altos gradientes (ondas de choque, esteiras e camadas limites); e possibilita também o uso de grades hiperbólicas tipos O e C em torno dos perfis, garantindo uma perfeita ortogonalidade das células da malha próximo às paredes. A precisão do cálculo do escoamento e a eficiência do método inverso proposto por Demeulenaere et al. (1997) são ilustradas por meio de duas aplicações: o reprojetado de uma pá de bocal de turbina VKI-LS89 e o reprojetado de uma pá de compressor NACA 65. No entanto, segundo Van den Braembussche (2002), um novo método mais robusto foi desenvolvido posteriormente por de Vito e Van den Braembussche em 2001. Este método combina o cálculo do escoamento viscoso em torno da pá, por meio de um *solver* de Navier-Stokes (a fase de análise), com um *solver* de Euler sobre uma malha restrita próximo à pá, para a fase de cálculo inverso.

De fato, quanto mais ortogonal a grade menores são os erros numéricos devido à discretização e menos pontos de grade são necessários, afirmam Denton e Dawes (1999). Há muita discussão sobre o tipo ótimo de grade para ser usado nos cálculos de Euler ou de Navier-Stokes, no entanto, nenhum tipo de grade é ideal para todos os tipos de rodas de pás e a geração das grades mais sofisticadas podem requerer considerável intervenção humana. As grades desestruturadas, por exemplo, justificam-se para geometrias mais complexas, visto que um *solver* desestruturado é sempre mais lento do que um estruturado.

Qualquer sistema confiável de projeto de compressor de vários estágios deve levar em conta a interação entre o percurso de fluido secundário (escoamento de cavidade de disco, escoamentos

de vazamento no anel externo, gás quente entrante, etc.) e o escoamento primário ou principal. Para isso, conforme Denton e Dawes (1999), o código de CFD deve simular ambos os percursos de escoamento primário e secundário simultaneamente, o que implica na utilização de malhas desestruturadas ou, pelo menos, de malhas estruturadas em multiblocos.

Rosic, Denton e Pullan (2006) utilizam um método multiblocos e multiestágios, com esquema de aproximação no plano de mistura, para cálculo tridimensional permanente do escoamento através de uma turbina modelo de baixa velocidade e de três estágios; todos os escoamentos de vazamento e cavidades são considerados, e mostram-se necessários para que boa concordância entre os cálculos e os experimentos seja obtida.

Assim, apesar de todo o desenvolvimento atingido pelos métodos de CFD, aponta Jameson (2003), há aplicações de engenharia que ainda precisam ser resolvidas adequadamente, por exemplo, os escoamentos internos através de motores a jato (incluindo compressor, câmara de combustão, turbina e escoamentos de refrigeração). Esses escoamentos são particularmente desafiadores por que são normalmente não permanentes, e envolvem transição, turbulência e separação. No entanto, os algoritmos continuam sendo melhorados pelas inúmeras pesquisas em desenvolvimento em todo o mundo. Por exemplo, os métodos de reconstrução de ordem mais alta tornam-se muito complexos e caros sobre malhas não estruturadas comuns, as quais são normalmente necessárias para tratar geometrias muito complexas. Consequentemente, o método de Galerkin descontínuo está atraindo muito interesse como uma maneira de conseguir precisão de ordem mais alta com uma malha de discretização compacta.

Camilo (2003) implementa um código computacional próprio para resolução das equações de Euler pelo método das diferenças finitas, utilizando o método explícito de MacCormack, para cálculo do escoamento transônico estacionário em torno de aerofólios, sem regiões de separação. Uma malha estruturada do tipo C é utilizada na discretização do campo ao redor de um aerofólio NACA0012. Os resultados obtidos mostram a formação de ondas de choque identificadas pelos contornos de número de Mach e pelas variações bruscas da distribuição de pressão em torno do aerofólio. Esse trabalho dá o início para a representação dos escoamentos aerodinâmicos em regime transônico pelo grupo de pesquisa do Laboratório de Aeroelasticidade da EESC/USP. Um dos objetivos do grupo era a análise de ferramentas computacionais não lineares em aeroelasticidade para estabelecer uma investigação da estabilidade de sistemas considerando as

não linearidades estruturais e aerodinâmicas no modelamento. Assim, Camilo (2007) estuda o sistema aeroelástico que representa o movimento oscilatório descrito por um aerofólio sem amortecimento estrutural em regime transônico, utilizando duas metodologias diferentes. A primeira é uma metodologia de marcha no tempo que faz a integração, pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, da análise do escoamento transônico utilizando o código de CFD não estacionário desenvolvido por Azevedo (1992) do CTA/IAE. Este código resolve as equações de Euler em 2D no contexto de malhas não estruturadas com um método de volumes finitos e uma formulação explícita. A outra metodologia considerada é a análise de bifurcação de Hopf (ferramenta oriunda da teoria de sistemas dinâmicos) do sistema aeroelástico para o cálculo da fronteira de *flutter* desenvolvido por Badcock et al. (2004) da *University of Liverpool*, Inglaterra. Essa metodologia emprega um código de CFD no estado estacionário para representar o escoamento transônico através das equações de Euler bidimensionais no contexto de malhas estruturadas. Camilo (2007) emprega ambas as metodologias com um modelo estrutural linear e outro não linear e compara os resultados obtidos.

Souza (2009) dá continuidade aos trabalhos desenvolvidos no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) para a análise numérica de escoamentos compressíveis turbulentos sobre aerofólios, por meio da resolução do sistema de equações de Navier-Stokes com média de Reynolds. O código de CFD, baseado no método de volumes finitos, é implementado com a utilização de malhas estruturadas tipo O geradas algebricamente, com o esquema explícito de Jameson, com um modelo não linear de viscosidade artificial, e com o modelo de turbulência de uma equação de Spalart e Allmaras. O aerofólio NACA 0012 é utilizado para simulações numéricas com esse código computacional para comparações com outros modelos e resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

O Grupo de Turbina a Gás no ITA tem desenvolvido ferramentas numéricas para projeto e cálculos de desempenho de componentes de turbina a gás. Tomita (2009) apresenta um código computacional escrito em FORTRAN que emprega técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para calcular escoamentos internos tridimensionais em turbomáquinas axiais. O código desenvolvido permite resolver as equações de Navier-Stokes na condição de estado permanente, pelo método dos volumes finitos, com uso de malhas não estruturadas com elementos hexaédricos. Diferentes esquemas e métodos numéricos são implementados para a

integração no tempo e no espaço, e para melhorar a estabilidade. O código de computador de curvatura de linha de corrente desenvolvido anteriormente por Tomita, produz solução axissimétrica precisa sendo utilizado para gerar as condições iniciais para o cálculo tridimensional.

Segundo Denton e Dawes (1999), a maneira clássica de projetar envolve projetistas criativos que tenham intuição desenvolvida e entendimento físico adquiridos em muitos anos de atividades focadas em projeto. CFD pode ajudar a desenvolver esse entendimento por meio do estudo de muito mais projetos de pá, faixas de parâmetros, etc. do que seria praticável experimentalmente, mas isso leva tempo também. Além disso, a sofisticação crescente dos métodos de análise de CFD somente se justifica se os mesmos aliviarem a pressão comercial para que componentes da mais alta qualidade sejam produzidos no tempo mais curto possível. De fato, a habilidade para efetuar uma simulação de CFD em si mesma não melhora o projeto e realizar muitas simulações caríssimas pode inviabilizá-lo, adiando a descoberta de um projeto satisfatório com um método mais simples.

Os métodos de CFD atualmente atingiram um alto nível de confiabilidade e são empregados muito frequentemente para estudar escoamentos de fluidos. No entanto, segundo Van den Braembussche (2002), duas realidades ainda impedem o uso mais eficiente de CFD no processo de projeto: a dificuldade de apresentar os resultados do escoamento 3D sobre uma tela ou desenho 2D, no futuro as técnicas de realidade virtual poderão ser utilizadas para visualizar o escoamento e para verificar o efeito de mudanças geométricas; e a abundância de informação fornecida pelos cálculos de Navier-Stokes, mais do que o cérebro humano pode compreender e aproveitar completamente em novos e melhores projetos. Esta última opinião é compartilhada também por Jameson (2003), que acrescenta ainda a não disponibilidade de modelos de turbulência eficientes.

O cálculo inverso aerodinâmico pode ser realizado de maneira primitiva por meio do emprego de um método direto que avalia o desempenho da geometria real, a qual o projetista modifica em função dos resultados calculados e de acordo com regras empíricas ou sua própria experiência. Estratégias de cálculo mais eficientes e rápidas são obtidas com os métodos inversos e/ou com os métodos de otimização, que permitem a geração direta de geometrias que alcançam um desempenho imposto, descreve Demeulenaere et al. (1997), podendo ser utilizados também para melhorar um projeto preliminar. Os métodos inversos usam modelos físicos para deduzir as mudanças geométricas necessárias para alcançar o desempenho prescrito.

Os métodos de otimização numérica modificam iterativamente um conjunto de parâmetros geométricos até que a melhor combinação seja encontrada, definindo a geometria que corresponde ao valor mínimo de uma função erro ou função objetivo, enquanto satisfaz as condições de contorno, as restrições mecânicas e as equações do escoamento, conforme Van den Braembussche (2002). A função objetivo (*OF*) pode expressar o desempenho aerodinâmico (ângulo de saída do escoamento, escoamento em massa, arrasto mínimo, sustentação máxima etc.) ou atender a restrições mecânicas, restrições geométricas (espessura, arqueamento, suavidade, fechamento, não cruzamento dos perfis, técnicas de fabricação e de montagem, peso etc.), restrições quanto aos coeficientes de perda ou quanto a distribuições de número de Mach indesejáveis, etc. Os métodos de otimização de gradiente, comumente usados em muitas aplicações de engenharia, requerem uma quantidade enorme de análises de escoamento para definir a direção do gradiente máximo da *OF* e o comprimento de passo ótimo. Assim, tornam-se muito caros em termos de tempo de CPU (*Central Processing Unit*), principalmente, quando combinados a um *solver* de Navier-Stokes.

O método de otimização desenvolvido no Instituto *von Karman*, apresentado por Van den Braembussche (2002), usa um modelo de avaliação de desempenho rápido baseado em uma Rede Neural Artificial e em uma base de dados com resultados de projetos prévios, e emprega um Algoritmo Genético para definir a forma de pá ótima. A partir de uma geometria de pá inicial, definida por curvas de Bézier como uma função de 15 parâmetros, uma primeira geração de pás é criada por perturbação aleatória dos 15 parâmetros. Em vez de cada pá ser analisada por um *solver* de Navier-Stokes muito caro, o método usa um modelo muito rápido de avaliação de desempenho baseado em uma Rede Neural Artificial. Esse modelo pesquisa a pá geometricamente mais próxima entre os resultados prévios de cálculos inversos e de análises contidos na base de dados DATABASE, e assume o seu desempenho. Os resultados armazenados na base de dados são: requisitos aerodinâmicos, parâmetros geométricos, eficiência e forma obtida da distribuição de número de Mach pelo *solver* de Navier-Stokes. As diferentes geometrias e suas correspondentes funções *OF* guiam o Algoritmo Genético para definir a próxima geração de pás a partir da pá com *OF* mais baixa, que supostamente está mais próxima da ótima. A geometria, uma vez otimizada por meio desse processo aproximado e rápido, é então verificada por um *solver* de Navier-Stokes mais preciso e confiável, e os resultados são também armazenados enriquecendo a base de dados. O *loop* inteiro é repetido até que o *solver* de Navier-Stokes confirme que a

geometria é ótima com relação à função objetivo especificada. Esse método reduz fortemente o esforço computacional comparado a uma otimização clássica. A única maneira que o projetista pode influenciar o resultado é pela modificação das penalidades e seus pesos na Função Objetivo.

Outro método de otimização faz a combinação de CFD com a teoria de controle para calcular formas aerodinâmicas otimizadas e foi proposto primeiramente por Jameson (1989). Ele derivou o sistema adjunto de equações diferenciais parciais para o escoamento potencial transônico com as equações de Euler. Posteriormente, o método adjunto foi refinado e estendido para as equações de Euler e de Navier-Stokes por vários colaboradores, dentre eles Luidi Martinelli e James Reuther.

Ceze (2008) emprega o método adjunto contínuo aplicado às equações de Euler para o projeto inverso de aerofólios em condições de regime de escoamento transônico bidimensional, com desenvolvimento próprio semelhante ao trabalho de Reuther (1996). O método de volumes finitos é empregado tanto para a solução das equações do escoamento quanto para a solução das equações adjuntas. A validação do programa de solução das equações de Euler (CellJam2D) foi feita por comparação com os resultados obtidos com o programa CFD++, desenvolvido pela *Metacomp Technologies*. O método adjunto baseia-se na teoria de controle ótimo e foi proposto inicialmente por Jameson (1997) para aplicações aerodinâmicas. A medida de mérito adotada é definida pela diferença entre a distribuição de pressão na superfície do aerofólio e a distribuição de pressão desejada, e o algoritmo utilizado para a busca do mínimo da função de mérito é o *steepest descent*. Outra característica do método é que a representação geométrica da superfície utiliza a parametrização da função de forma com os binômios de Bernstein, conforme proposta de Kulfan e Bussoletti (2006), com a vantagem de parametrizar o aerofólio inteiro. E o algoritmo de triangulação de Delaunay é utilizado para a discretização não estruturada do domínio, sendo que a geração da malha é feita com o software comercial Gambit da *Fluent Inc.*. Os resultados do ciclo de cálculo inverso mostram o bom desempenho do método adjunto Euler proposto para eliminar e também posicionar uma onda de choque. No entanto, há uma dificuldade sistemática do ciclo em corrigir o bordo de fuga, basicamente devido a pouca contribuição dessa região para a integral da função de mérito.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional para a simulação numérica de escoamentos de fluidos tem sido bastante difundida no meio industrial e no meio acadêmico. A utilização das

técnicas de CFD, aliada às análises teóricas e técnicas experimentais, pode reduzir o número de testes experimentais necessários, o tempo dispendido e o custo do projeto ou da pesquisa. Ela é útil ainda para explorar fenômenos que não podem ser estudados em laboratório, por exemplo, em medições detalhadas nas passagens das rodas de pás móveis das turbomáquinas que são normalmente difíceis, caras e, muitas vezes, impossíveis de serem realizadas na prática.

Diante dessa extensa revisão da literatura, constata-se que houve um desenvolvimento intenso das ciências aerodinâmica e computacional no decorrer de praticamente meio século de pesquisas científicas. Pacotes comerciais de CFD estão disponíveis atualmente para ampla faixa de aplicações. O projetista precisa conhecer e entender o que está por trás desses pacotes, para que possa escolher entre os métodos, esquemas e modelos disponíveis, aplicá-los adequadamente ao problema específico que precisa ser resolvido, como também interpretar e usar os resultados obtidos de forma correta. Além disso, trata-se de uma ferramenta de alto custo computacional e financeiro que deve ser utilizada de maneira eficiente. Essa necessidade é apresentada por diversos autores e aparece especialmente na simulação de escoamentos de turbomáquinas devido à complexidade do escoamento e da geometria. Muitas vezes o acesso ao código fonte de CFD é importante para sua melhor aplicação e, principalmente, para sua implementação ou desenvolvimentos novos. No entanto, poucas instituições possuem esse tipo de conhecimento e as informações sobre os códigos de CFD são bastante restritas. Portanto, principalmente na área acadêmica, é importante que o projetista/pesquisador desenvolva seus próprios códigos computacionais, contribuindo com os desenvolvimentos científicos dos métodos de CFD e também com a formação dos recursos humanos necessários.

O escoamento real no interior de uma turbomáquina é bastante complexo, sendo viscoso, tridimensional e não permanente. Conforme a revisão da literatura realizada, inúmeros trabalhos em Dinâmica dos Fluidos Computacional têm sido desenvolvidos com o objetivo de modelar algumas dessas características do escoamento por meio de: métodos de painéis acoplados ao método de vórtices, métodos de solução das equações de Euler para escoamento transônico, esquema invíscido e esquema de camada limite acoplados iterativamente, métodos de solução das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds e modelo de turbulência, etc. E para o projeto aerodinâmico das pás são utilizados os métodos inversos propriamente ou os métodos de

otimização que minimizam uma função objetivo (por gradiente, com algoritmo genético e rede neural, ou pela teoria de controle, chamado método adjunto).

O aprimoramento e implementação dessas técnicas numéricas tornam-se possíveis graças ao contínuo aumento da velocidade e da capacidade de armazenamento dos computadores modernos. Verifica-se, no entanto, que os pesquisadores ainda buscam soluções para muitos aspectos de modelagem do escoamento, esquemas numéricos para integração no espaço e no tempo, geração de malhas para a discretização espacial das geometrias intrincadas das passagens internas de fluido, modelos de turbulência, escoamentos secundários, vazamentos, vibração, interação com a estrutura, etc.

O presente trabalho tem por objetivos, primeiramente, a elaboração de uma metodologia de cálculo do escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos isolados e em cascatas baseada na distribuição de vórtices na superfície, com a condição de contorno de Dirichlet, a exemplo do método de Martensen.

O objetivo seguinte é a solução do problema inverso, por meio do emprego desse método direto de forma iterativa, combinado com a modificação da geometria do perfil a partir de uma geometria inicial arbitrária, para atender uma distribuição de velocidade requerida na superfície, baseado no método de Murugesan e Rally.

Um código computacional próprio escrito em linguagem FORTRAN é desenvolvido conforme essa metodologia para ambos os cálculos direto e inverso.

Por fim, é feita a convalidação da metodologia e do código computacional por meio de testes de casos. O modelo numérico elaborado é aplicado a dois tipos de perfis: os perfis teóricos representados pelos perfis de Joukowski e os perfis experimentais representados pelos perfis NACA. Então, o modelo é empregado na análise da cascata de Gostelow e de uma cascata de aerofólios NACA.

Os perfis de Joukowski são obtidos analiticamente por meio da transformação conformal de um círculo para o perfil desejado, utilizando a transformada de Joukowski. Neste caso, são tratados um perfil simétrico e outro assimétrico, ambos gerados a partir da metodologia de distribuição de vórtices. Os resultados finais são comparados com os respectivos perfis originais de Joukowski.

Quanto aos perfis experimentais NACA, são tratados um perfil simétrico NACA 65-010 e um perfil assimétrico NACA 65-1210. Esses dois perfis também são gerados pela técnica da distribuição de vórtices e os resultados são comparados com os perfis originais, e mostram boa concordância. Nestes casos, a distribuição de velocidade requerida é obtida numericamente aplicando o método direto ao perfil original.

O perfil da cascata analítica de Gostelow é obtido por transformação conformal, a cascata é analisada com o método proposto, e os resultados obtidos para a distribuição de pressão em torno do perfil são comparados com aqueles tabelados.

Outra cascata com resultados disponíveis na literatura é analisada, trata-se de uma cascata de aerofólios NACA 65-1210.

3 ANÁLISE – MÉTODO DE VORTICIDADE NA SUPERFÍCIE

O método integral de contorno de vorticidade na superfície é a técnica mais natural para modelar o escoamento potencial. A publicação original nesta área é o célebre artigo de Martensen (1959), que com frequência nomeia o método. Segundo Lewis (1991), Martensen não apenas apresentou a base de uma nova técnica computacional poderosa, mas também estendeu sua nova teoria integral de contorno para tratar cascatas de turbomáquinas. Gostelow (1984) também afirma que o mérito da solução do problema do escoamento de cascata deve-se a Martensen.

No entanto, segundo Lewis (1991), para que o método de vorticidade na superfície pudesse tornar-se uma ferramenta preditiva de engenharia confiável, problemas de modelagem e de metodologia prática tiveram que ser resolvidos. E neste aspecto destaca-se o trabalho de Wilkinson (1967), fundamental para as aplicações computacionais.

No método de vorticidade na superfície ou método de Martensen o corpo é coberto por uma folha de vorticidade contínua de espessura infinitesimal que separa o escoamento externo do escoamento interno imóvel. Segundo Lewis e Ryan (1972), tal modelo automaticamente satisfaz os requisitos dos corpos de sustentação e é simplesmente uma descrição do escoamento real.

3.1 Significado físico do modelo de vorticidade na superfície

Uma interpretação física simples do modelo de vorticidade na superfície é feito por Lewis (1991). Este esclarecimento é bastante útil, pois permite acompanhar melhor o desenvolvimento do método apresentado pelo próprio Martensen (1959) e também por Gostelow (1984). Ele também auxilia no entendimento da equação integral de contorno de Martensen, a qual pode receber tratamentos numéricos variados e costuma ser o ponto de partida para as aplicações do método em problemas específicos, conforme atestam numerosos artigos.

Nos escoamentos reais uma camada limite desenvolve-se adjacente à superfície de um corpo, Figura 3.1(a), e vorticidade suficiente está presente nesta camada para reduzir a velocidade do fluido de v_s logo no exterior da camada limite para o valor zero sobre a superfície do corpo. Esta vorticidade e consequente difusão normal à superfície são provocadas pela ação da viscosidade. E

a taxa de produção de vorticidade adjacente à superfície está diretamente relacionada ao gradiente de pressão do escoamento exterior.

Supondo que num escoamento de fluido real a viscosidade do fluido seja reduzida gradualmente e desprezando-se as instabilidades (separação ou turbulência) da camada limite associadas ao número de Reynolds muito elevado, no limite, a viscosidade aproxima-se de zero e o número de Reynolds aproxima-se de infinito, enquanto que a camada limite tende a uma espessura infinitesimal. Assim, um escoamento potencial não viscoso pode ser pensado como um tipo especial de escoamento de número de Reynolds infinito em que a superfície do corpo é coberta por uma folha de vórtices contínua e extremamente fina, Figura 3.1(c). E que, através dela, a velocidade do fluido muda descontinuamente de zero logo abaixo da folha e ainda sobre a superfície do corpo para v_s paralela à superfície logo acima da folha. Portanto, o método de vorticidade na superfície reflete verdadeiramente a realidade física do escoamento adjacente à superfície.

Da circulação sobre o contorno $abcd$, conforme Figura 3.1(b) (dois lados opostos paralelos e os outros dois perpendiculares às linhas de corrente), em torno de um pequeno elemento de vorticidade $\gamma(s)ds$ segue que

$$(v_{s_e} - v_{s_i})ds = \gamma(s)ds$$

onde v_{s_e} e v_{s_i} são as velocidades do fluido tangentes à superfície do corpo tomadas no ponto s do contorno imediatamente no exterior e no interior da folha de vórtices, respectivamente; e $\gamma(s)$ é a intensidade de vorticidade por unidade de comprimento no ponto s da folha de vórtices.

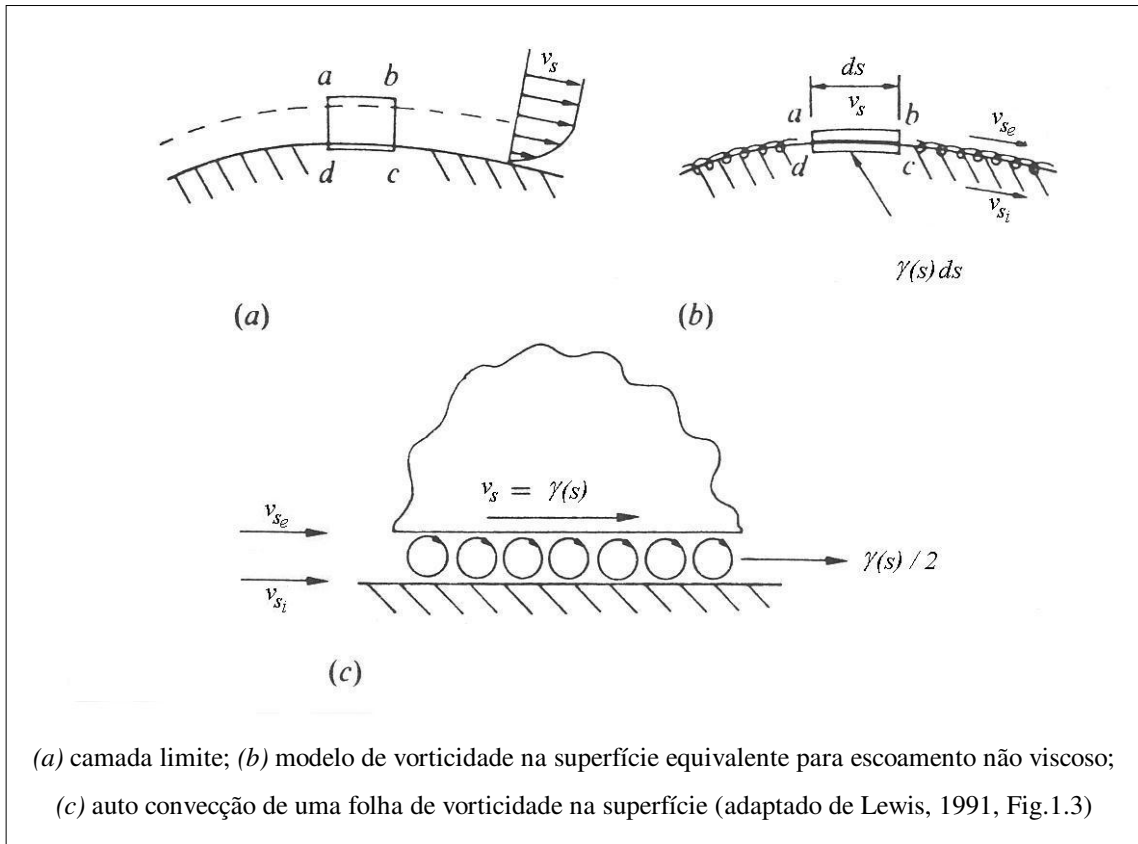


Figura 3.1 Modelo de vorticidade na superfície comparado com uma camada limite verdadeira

Aplicando-se a condição de contorno de Dirichlet, ou seja, de que a velocidade é nula sobre a superfície no interior do corpo, obtém-se

$$v_{s_i} = 0 \quad (3.1)$$

o que implica em

$$v_{s_e} = v_s = \gamma(s) \quad (3.2)$$

A engenhosidade do método de Martensen reside nestas duas últimas equações. A primeira delas é a base da equação integral de contorno de Martensen que possibilita o cálculo da distribuição de vorticidade na superfície $\gamma(s)$ adequada para modelar o escoamento potencial. E a

segunda equação indica que a velocidade próxima à superfície do corpo v_s é imediatamente conhecida, sendo igual à densidade de vorticidade na superfície $\gamma(s)$.

Como no escoamento real onde a vorticidade da camada limite desloca-se continuamente por convecção sobre a superfície na direção do escoamento, também no escoamento potencial a folha de vorticidade desloca-se, assim como a camada limite infinitesimal que ela representa. E a velocidade de convecção da folha é exatamente igual à metade de sua intensidade local $\frac{1}{2}\gamma(s)$, conforme demonstrado, por exemplo, em Lewis (1991). Assim, no escoamento potencial sobre um corpo de forma qualquer, localmente no ponto s a velocidade muda de zero sobre a superfície logo abaixo da folha de vórtices, para a velocidade de convecção da folha $v_f = \frac{1}{2}\gamma(s)$ no centro da folha de vorticidade, e para $v_s = \gamma(s)$ logo no exterior da folha, Figura 3.1(c). Além disso, $\gamma(s)$ varia em magnitude ao longo da parede, se a mesma não é plana. Logo, se a vorticidade de um ponto desloca-se por convecção e sempre em contato com a superfície para outro ponto escoamento abaixo e neste o valor da vorticidade é diferente significa que a vorticidade está continuamente sendo criada ou destruída na superfície do corpo em um escoamento não viscoso, quer o movimento seja permanente ou não permanente. E esta variação da vorticidade ao deslocar-se por convecção sobre a superfície é devido ao gradiente de pressão.

De fato, a vorticidade líquida por unidade de comprimento $d\gamma(s)$ gerada no ponto s no tempo dt deve igualar o fluxo de vorticidade líquido deixando o volume de controle $abcd$, Figura 3.1(b), como indica a equação a seguir

$$d\gamma(s)ds = \left\{ \frac{1}{2}(v_s + dv_s)(\gamma(s) + d\gamma(s)) - \frac{1}{2}v_s\gamma(s) \right\} dt$$

Assim, desprezando-se os produtos de segunda ordem e lembrando que $v_s = \gamma(s)$, obtém-se

$$\frac{d\gamma(s)}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{v_s^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

Esta equação revela a influência do gradiente de pressão na superfície, imposto pelo escoamento potencial externo, sobre a produção de vorticidade na folha que se desloca por convecção sobre a superfície. Para o escoamento potencial permanente a pressão local é obtida da equação de Bernoulli, sendo a pressão de estagnação p_0 constante através do fluido.

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v_s^2$$

Por fim, é interessante ressaltar que não existe vorticidade presa num escoamento de fluido por que toda a vorticidade na superfície, uma vez criada sob a influência do gradiente de pressão na superfície, está livre para se deslocar por convecção ou por difusão (no caso da camada limite real). No entanto, o conceito de intensidade de vórtice de contorno total Γ é muito útil para calcular forças de sustentação, sendo dada no caso bidimensional pela integral de contorno seguinte.

$$\Gamma = \oint \gamma(s) ds \quad (3.3)$$

Assim, mesmo na situação especial de escoamento permanente sobre aerofólios ou cascatas, a vorticidade local na superfície é trocada continuamente, porém no mesmo nível, dando a impressão de estar presa à superfície.

3.2 Equacionamento do Método de Martensen

Martensen (1959) apresenta o desenvolvimento da solução do escoamento potencial bidimensional sobre perfis em cascata, enquanto que Martensen (1971) apresenta inicialmente a solução do escoamento potencial sobre um perfil isolado e estende-a para o caso da cascata. A distribuição de velocidade na superfície do corpo resulta em uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, permitindo que as propriedades de continuidade e diferenciação da teoria de Fredholm sejam utilizadas para estabelecer a existência e continuidade da solução.

Segundo Martensen (1971), é desejável obter a distribuição de velocidade (assim como a distribuição de pressão) sobre o contorno C fechado simples e suave de um corpo isolado imerso num escoamento potencial incompressível de velocidade de corrente livre W_∞ . O problema é determinar um campo de escoamento que vai para W_∞ no infinito e que tenha o contorno C como uma linha de corrente, isto é, uma função de corrente ψ com as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla^2 \psi = 0$ no exterior de C ;
- (ii) $\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_\infty = W_\infty \cos \beta_\infty = U_\infty$, $\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_\infty = W_\infty \sin \beta_\infty = V_\infty$;
- (iii) ψ constante ao longo do contorno externo de C .

No caso de uma cascata, em que o contorno C repete-se em intervalos iguais t na direção y em ambos os sentidos, as condições de contorno para o campo de escoamento (i) e (iii) devem ser satisfeitas em todos os contornos. Quanto ao requisito (ii), W_∞ e β_∞ permanecem como parâmetros livres no equacionamento até que seja possível esclarecer que, de fato, correspondem ao módulo e direção da chamada “velocidade do escoamento médio equivalente”, conforme demonstrado por Martensen e definida adiante.

Conforme Murugesan e Raily (1969), a base do método de Martensen é o uso do teorema de Green para obter uma relação envolvendo a função de corrente ψ . E, num escoamento potencial em torno de um contorno fechado C simples e suave, isolado ou em cascata, a função de corrente (Martensen, 1959) em qualquer ponto (x, y) no escoamento ou sobre o contorno C , é dada por

$$\psi(x, y) = \phi + U_\infty y - V_\infty x + \frac{1}{2\pi} \int_C F v ds \quad (3.4)$$

sendo que, para a cascata a função F é a seguinte

$$F(x, y; \xi, \eta; t) = \ln \frac{1}{\sqrt{2 \left[\cosh \frac{2\pi(x - \xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y - \eta)}{t} \right]}} \quad (3.5)$$

e, para o aerofólio isolado,

$$F(x, y; \xi, \eta; \infty) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (3.6)$$

onde,

- ϕ é uma constante;
- v é uma distribuição superficial ao longo do contorno C ;
- s é a variável de integração ao longo do contorno, de coordenadas (ξ, η) ;
- t é o *pitch* ou espaçamento da cascata;

U_∞ e V_∞ são as componentes da velocidade relativa W_∞ do escoamento, com inclinação β_∞ em relação ao eixo x paralelo à direção axial. Para o aerofólio isolado, W_∞ é a velocidade do escoamento sem perturbação distante do aerofólio W_1 , enquanto que para a cascata, W_∞ é a “velocidade do escoamento médio equivalente” (conforme verificado adiante).

A função F de (ξ, η) comporta-se próximo a (x, y) como $\ln(1/r)$, onde r é a distância entre os pontos. Para o escoamento sobre um aerofólio isolado, a função F é igual a $\ln(1/r)$.

Das Equações 3.4 e 3.5 constata-se a periodicidade da solução para cascata, pois

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y; t) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y + kt; t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y; t) &= \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y + kt; t) \end{aligned} \right\}, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

o que significa que se um requisito é satisfeito para o contorno C , então ele é satisfeito em todos os demais perfis da cascata.

A solução dada pela Equação 3.4 satisfaz o requisito (i) e, para aerofólio isolado, o requisito (ii) também. Além disso, segundo Martensen (1971) esta função apresenta as seguintes propriedades de diferenciação provadas por Courant e Hilbert (1931 e 1937), ou seja, quando se atravessa o contorno C os valores das derivadas em relação à normal (voltada para o escoamento externo) saltam como indicado pelas expressões seguintes:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_e - \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = -\frac{v}{2} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C - \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_i = -\frac{v}{2} \quad (3.8)$$

Enquanto que, ao atravessar o contorno C , as derivadas tangenciais permanecem constantes,

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_i = \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_C = \left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_e$$

Pode ser demonstrado, conforme afirmam Lewis e Ryan (1972), que a condição de Dirichlet sozinha é uma afirmação suficiente das condições de contorno para garantir que a superfície do corpo torna-se uma superfície de corrente do escoamento exterior, satisfazendo o requisito (iii). Assim, impondo-se esta condição de que a componente da velocidade paralela ao contorno C internamente e junto a ele deve ser nula, ou seja,

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_i = 0 \quad (3.9)$$

e combinando-se a mesma com as Equação 3.8, obtém-se

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = -\frac{v}{2} \quad (3.10)$$

e, esta última com a Equação 3.7, resulta em

$$v = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_e \quad (3.11)$$

Isto significa que na Equação 3.4 a distribuição na superfície v representa a magnitude da velocidade do escoamento externo em torno do contorno C , sendo positiva no sentido anti-horário.

Se o teorema de Green, dado por

$$\iint \left(\psi \nabla^2 \psi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \int_C \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

é aplicado ao interior de C e o requisito (i) e a Equação 3.9 são satisfeitos, obtém-se o seguinte

$$\iint \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \int_C \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \Big|_i ds = 0$$

Assim, na região interna ao contorno C o campo de velocidade anula-se identicamente,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

E, sobre o contorno em sua face interna, esta equação é equivalente a escrever, juntamente com a Equação 3.9, a equação dada a seguir

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_i = 0$$

a qual, desde que as derivadas tangenciais permanecem constantes ao atravessar o contorno, conduz a

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_e = 0$$

Portanto, a condição de contorno de Dirichlet, Equação 3.9, implica na satisfação do requisito (iii) de que o contorno deve ser uma linha de corrente do escoamento externo.

A diferenciação da Equação 3.4 com relação à normal ao contorno e voltada para o escoamento fornece a seguinte equação

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_c = U_\infty \frac{\partial y}{\partial n} - V_\infty \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_c F v ds$$

que, combinada com a condição de contorno de Dirichlet, conforme Equação 3.10, conduz à solução para a distribuição de velocidade ao longo do contorno, dada por uma equação integral de Fredholm de segunda espécie não-singular, segundo Lewis (1981) e Murugesan e Raily (1969), como segue

$$v + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_c F v ds = 2 \left\{ U_\infty \frac{\partial x}{\partial s} + V_\infty \frac{\partial y}{\partial s} \right\} \quad (3.13)$$

onde foram utilizadas também as relações geométricas seguintes

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s}$$

Prosseguindo-se na diferenciação do termo integral da Equação 3.13, e observando-se as Equações 3.5 e 3.6, obtém-se a equação integral de contorno de Martensen para escoamento potencial bidimensional na seguinte forma

$$v(s_m) - \frac{1}{2\pi} \int_C K(s_m, s; t) v(s) ds = 2 W_\infty \left(\cos \beta_\infty \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s_m} + \sin \beta_\infty \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s_m} \right) \quad (3.14)$$

onde, s_m e s são as distâncias medidas em torno do perfil de uma referência arbitrária ou as coordenadas curvilíneas dos pontos sobre o contorno de coordenadas cartesianas (x, y) e (ξ, η) , respectivamente, sendo s a variável de integração. E o coeficiente de acoplamento $K(s_m, s; t)$ para cascata é dado por

$$K(s_m, s; t) = \frac{2\pi}{t} \frac{\frac{\partial y}{\partial s} \sinh \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi) \right] - \frac{\partial x}{\partial s} \sinh \left[\frac{2\pi}{t} (y - \eta) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (y - \eta) \right]}$$

e, para um perfil isolado, é dado por

$$K(s_m, s; \infty) = 2 \frac{\frac{\partial y}{\partial s} (x - \xi) - \frac{\partial x}{\partial s} (y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Tendo-se concluído, por intermédio da Equação 3.11, que v é a distribuição de velocidade na superfície do corpo, pode-se pesquisar qual é o significado do parâmetro livre W_∞ no equacionamento de cascata. Das Equações 3.4 e 3.5 obtém-se que

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y; t) &= W_{\infty} \cos \beta_{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y; t) &= -W_{\infty} \sin \beta_{\infty} + \frac{1}{2t} \int_c v ds \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y; t) &= -W_{\infty} \sin \beta_{\infty} - \frac{1}{2t} \int_c v ds \end{aligned} \right\}$$

E, desde que a integral da velocidade no contorno corresponde à circulação total Γ em torno de cada perfil da cascata, obtém-se para as componentes das velocidades do escoamento distantes da cascata a montante W_1 e a jusante W_2 as expressões a seguir

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_2 = W_{\infty} \cos \beta_{\infty} \\ V_1 &= W_{\infty} \sin \beta_{\infty} - \frac{\Gamma}{2t} \\ V_2 &= W_{\infty} \sin \beta_{\infty} + \frac{\Gamma}{2t} \end{aligned} \right\}$$

Logo, as parcelas $U_{\infty} = W_{\infty} \cos \beta_{\infty}$ e $V_{\infty} = W_{\infty} \sin \beta_{\infty}$ são as componentes da chamada “velocidade do escoamento médio equivalente” W_{∞} que, conforme ilustrado na Figura 3.2, corresponde à média vetorial das velocidades do escoamento W_1 e W_2 .

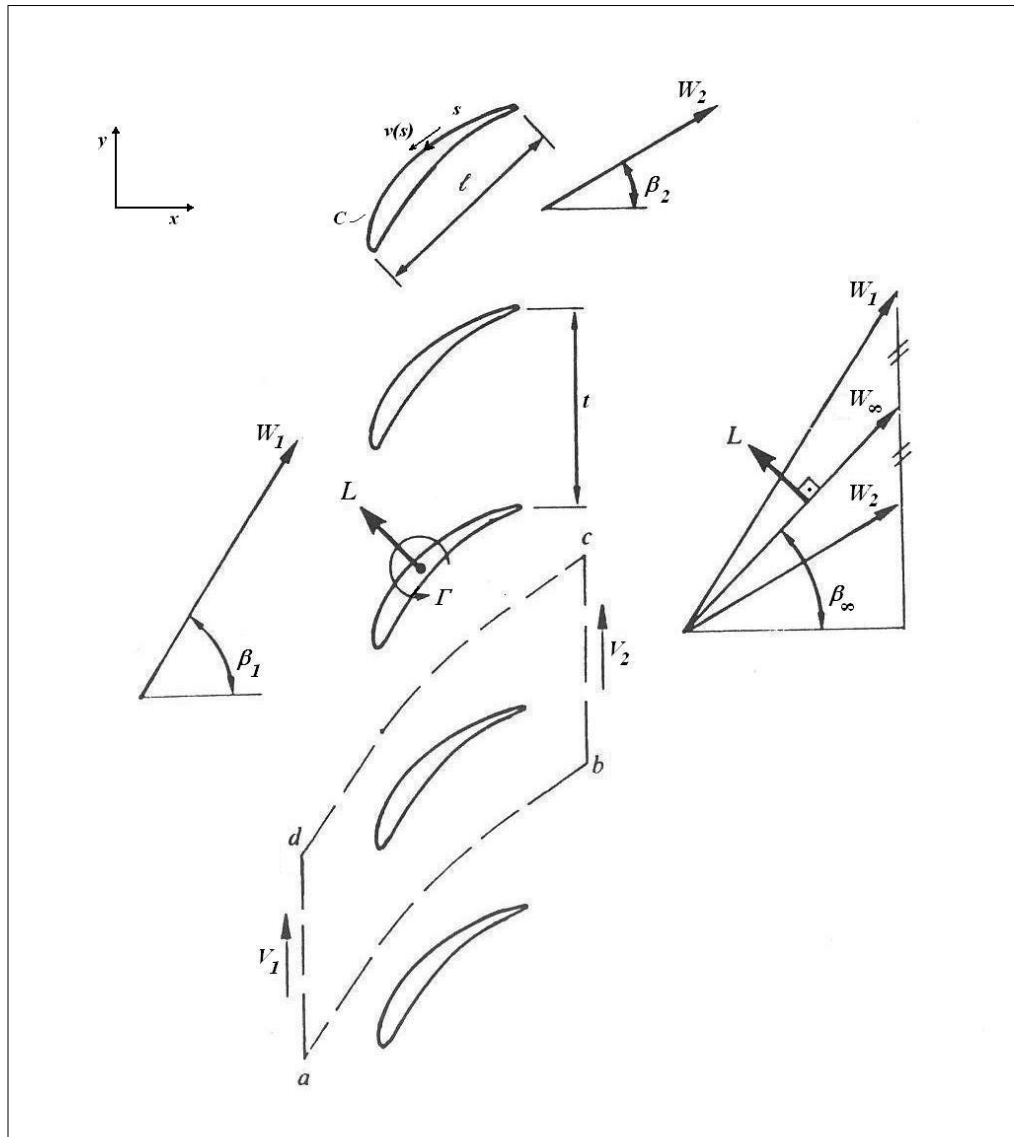


Figura 3.2 Geometria da cascata e triângulos de velocidade (com base em Lewis, 1991, Fig.2.12)

A função de uma cascata é produzir deflexão do fluido de uma velocidade uniforme W_1 em $-\infty$ para W_2 em $+\infty$, e a deflexão característica causada pela cascata é dada por

$$V_2 - V_1 = \frac{\Gamma}{t}$$

Concluindo, a solução pesquisada por Martensen para o escoamento potencial em torno de um corpo isolado ou em cascata, e exposta nos parágrafos anteriores, revela a equivalência entre este escoamento e aquele em que o corpo é trocado por uma região de fluido em repouso, Equação 3.12, e seu contorno é coberto por uma folha de vórtices de espessura infinitesimal e de intensidade $\gamma(s)$. Conforme apresentado na Seção 3.1, a velocidade próxima a esta folha de vorticidade caracteriza-se por saltar do valor nulo logo no interior da folha para $\gamma(s)/2$ sobre a folha e para $\gamma(s)$ logo no exterior da folha. Algo semelhante ocorre com as velocidades tangentes ao contorno do corpo dadas respectivamente pelas Equações 3.9, 3.10 e 3.11. Estas últimas provêm das propriedades da solução de Martensen, descritas pelas Equações 3.7 e 3.8.

De fato, reescrevendo-se a Equação 3.14, desde que a velocidade é o mesmo que a intensidade da folha de vórtices sobre o perfil $v(s)=\gamma(s)$, obtém-se

$$-\frac{\gamma(s_m)}{2} + \int_C k(s_m, s; t) \gamma(s) ds + W_\infty \left(\cos \beta_\infty \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s_m} + \sin \beta_\infty \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s_m} \right) = 0 \quad (3.14b)$$

O coeficiente de acoplamento $k(s_m, s; t) = K(s_m, s; t)/(4\pi)$ tem o valor da velocidade em s_m paralela à superfície do corpo e induzida por um elemento de vorticidade $\gamma(s)ds$ unitário localizado em s . Logo, a integral de contorno resulta a velocidade paralela à superfície em s_m devido ao todo da vorticidade de contorno $\gamma(s)$ em torno do perfil. O terceiro termo leva em conta a componente de W_∞ paralela à superfície do corpo. E o primeiro termo $-\frac{1}{2}\gamma(s_m)$ acrescenta a diferença de velocidade entre as localizações exatamente sobre a folha de vorticidade e infinitesimalmente junto a ela, mas no interior do corpo, devido à presença do elemento de vorticidade $\gamma(s_m)ds_m$. Ou seja, a soma de todas as contribuições à velocidade no ponto s_m junto ao contorno e no interior do corpo resulta nula.

3.2.1 Representação paramétrica do contorno e discretização

O contorno C pode ser representado parametricamente, conforme Martensen (1971), por

$$x = x(\phi), \quad y = y(\phi), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

com ϕ crescente no sentido anti-horário. E, para garantir que o contorno não apresente descontinuidades, é imposta a condição de que o módulo do vetor tangente (ver Anexo A, conforme Kreyszig, 1993) em cada ponto sobre o contorno não se anula, ou seja,

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} \neq 0$$

A Equação 3.14 deve ser satisfeita em todos os pontos sobre a superfície do corpo. Soluções aproximadas podem ser obtidas com a seleção de um número finito de pontos de controle representativos da superfície. Conforme Lewis e Ryan (1972), os pontos de controle não precisam estar a intervalos iguais de s para uma representação precisa pela regra trapezoidal, porque o núcleo da integral varia muito com s devido à $\gamma(s)$. Uma distribuição de pontos de controle com variação gradual dos intervalos em s pode ser obtida, para intervalos iguais da nova variável adimensional ϕ , pela transformação:

$$\gamma(\phi) d\phi = \gamma(s) ds \quad \text{ou} \quad (3.15)$$

$$\gamma(s) = \frac{\gamma(\phi)}{ds/d\phi} = \frac{\gamma(\phi)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}} \quad (3.16)$$

sendo que ϕ varia de 0 a 2π enquanto s completa uma volta em torno do perfil do corpo, em conformidade com a parametrização sugerida por Martensen.

Assim, a Equação 3.14 pode ser escrita na variável angular ϕ como

$$\frac{\gamma(\phi_m)}{W_\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\phi_m, \phi; t) \frac{\gamma(\phi)}{W_\infty} d\phi = 2 (x'_m \cos \beta_\infty + y'_m \sin \beta_\infty) \quad (3.17)$$

onde,

$$x'_m = \left. \frac{dx}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_m}, \quad y'_m = \left. \frac{dy}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_m}$$

E o coeficiente de acoplamento para uma cascata infinita de perfis idênticos, como

$$K(\phi_m, \phi; t) = \frac{2\pi}{t} \frac{y'_m \sinh \left[\frac{2\pi}{t} (x_m - x) \right] - x'_m \sin \left[\frac{2\pi}{t} (y_m - y) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (x_m - x) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (y_m - y) \right]} \quad (3.18)$$

e, para um perfil isolado,

$$K(\phi_m, \phi; \infty) = 2 \frac{y'_m (x_m - x) - x'_m (y_m - y)}{(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2} \quad (3.19)$$

sendo que, t é o *pitch* ou espaçamento entre os perfis da cascata, o eixo x é paralelo à direção axial, o eixo y é paralelo à direção da cascata (condições estas inerentes às Equações 3.4 e 3.5) e

$$x_m = x(\phi = \phi_m) \quad , \quad y_m = y(\phi = \phi_m)$$

A integral de contorno da Equação 3.17 é avaliada pela regra trapezoidal com $2N$ pontos de controle igualmente espaçados em ϕ , conforme Lewis e Ryan (1972). Para tanto, procede-se à discretização do contorno do corpo em $2N$ elementos de mesmo comprimento angular $\Delta\phi_n = 2\pi/2N$, sendo que a cada elemento corresponde um ponto de controle no ponto médio, onde se localiza um vórtice pontual equivalente de intensidade $\gamma(\phi_n)\Delta\phi_n$. Assim, a Equação 3.17 aplicada ao m -ésimo ponto resulta

$$\sum_{n=1}^{2N} K_{mn} \gamma_n = -4N(x'_m \cos \beta_\infty + y'_m \sin \beta_\infty) \quad (3.20)$$

onde define-se

$$\gamma_n = \frac{\gamma(\phi_n)}{W_\infty},$$

$$\left. \begin{aligned} K_{mn} &= K(\phi_m, \phi_n; t), & n &\neq m \\ K_{mm} &= K(\phi_m, \phi_n; t) - 2N, & n &= m \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$b_m = -4N(x'_m \cos \beta_\infty + y'_m \sin \beta_\infty)$$

Aplicando-se esta Equação 3.20 a cada ponto de controle resulta em um sistema de $2N$ equações lineares simultâneas, mostrado a seguir

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,2N} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{2N,1} & K_{2N,2} & \dots & K_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2N} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Uma vez obtidas as soluções γ_m , a velocidade na superfície segue prontamente

$$v(s_m) = \gamma(s_m) = \frac{\gamma_m W_\infty}{\sqrt{(x'_m)^2 + (y'_m)^2}}$$

3.2.2 Considerações para a resolução do sistema de equações

O problema do escoamento incompressível em torno de uma cascata plana é colocado matematicamente como a solução da equação de Laplace num campo potencial para condições de contorno específicas, a exemplo do equacionamento do Método de Martensen apresentado na Seção 3.2. A cascata plana constitui-se em uma fileira infinita de corpos semelhantes e o campo do escoamento estende-se até o infinito em todas as direções sendo contornado apenas pelos contornos dos corpos da cascata. O perfil do corpo pode apresentar uma ou mais quinas que se constituem nas singularidades do campo do escoamento, como acontece com os perfis aerodinâmicos com bordo de fuga agudo (bem marcado) ou cúspide (com ângulo interno nulo).

A solução do problema potencial fica indeterminada quando o perfil não apresenta descontinuidades porque, como será visto adiante, a matriz do sistema resultante da Equação 3.22 é singular. Neste caso, as condições do escoamento a montante e a jusante devem ser ambas especificadas. Assim, o problema para pás com bordos de fuga arredondados, conforme Gostelow (1984), não apresenta solução única enquanto os efeitos da viscosidade não forem considerados no modelo.

Para cascatas de pás com bordos de ataque ou de fuga agudos, ou mesmo cúspides, o escoamento potencial apresenta uma solução única, pois a condição de Kutta-Joukowski deve ser satisfeita. E apenas uma das condições do escoamento a montante ou a jusante precisa ser prescrita.

Na prática, por razões de resistência e de fabricação, os bordos de fuga das pás das turbomáquinas são arredondados. No entanto, o caso do escoamento potencial em torno de pás com bordo de fuga agudo aliado à condição de Kutta-Joukowski constitui-se numa ferramenta útil, pois permite o cálculo rápido do escoamento sem a necessidade de considerar a viscosidade, para uma forma simplificada das pás de uma cascata real.

No problema direto ou de análise a proposta é encontrar uma solução para o escoamento em torno de uma cascata de geometria conhecida. Conforme Gostelow (1984), as seguintes informações devem ser fornecidas:

1. Geometria da cascata, especificada como uma função $y = f(x)$.
2. Ângulo do escoamento na entrada (convencionalmente no infinito a montante).
3. Condição de descarga, dada como uma das seguintes opções:
 - (i) o ângulo do escoamento no infinito a jusante; ou
 - (ii) a circulação em torno de uma pá da cascata; ou
 - (iii) a satisfação da condição de Kutta-Joukowski para uma pá com um bordo de fuga agudo.

E pode-se esperar como resultado da análise o seguinte:

4. A distribuição de velocidade em torno da cascata, normalizada por uma velocidade de referência ou dada como um coeficiente de pressão.
5. Dependendo da condição de descarga escolhida em (3) acima, as informações adicionais seguintes são obtidas, respectivamente:
 - (i) a circulação em torno de uma pá e a posição do ponto de estagnação traseiro; ou
 - (ii) o ângulo do escoamento a jusante e a posição do ponto de estagnação; ou
 - (iii) a circulação e o ângulo do escoamento a jusante.

Assim, para que o sistema de equações apresentado, Equação 3.22, possa ser resolvido, estas e outras considerações adicionais são feitas a seguir.

a) Pontos de controle. A transformação da Equação 3.16 é especialmente útil por concentrar os pontos de controle na região do bordo de ataque onde $\gamma(s)$ varia consideravelmente com a incidência e na região do bordo de fuga onde a satisfação da condição Kutta requer uma representação particularmente precisa.

As extremidades dos elementos sobre o contorno do aerofólio são definidas, em geral, pelas interseções do perfil com segmentos normais à linha de arqueamento, Figura 3.3. As posições sobre a linha de arqueamento são obtidas das suas projeções sobre a linha de corda, as quais são definidas por uma transformação circular com espaçamento angular uniforme. Assim,

$$\frac{x_n}{\ell} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi_n) \quad (3.23)$$

onde,

$$\phi_n = \phi'_n = \frac{n\pi}{N} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N)$$

Alguns pesquisadores adotam essas interseções, as extremidades dos elementos, como pontos de controle. E, para satisfazer a condição de Kutta, impõem que o ponto zero no bordo de fuga seja um ponto de estagnação $\gamma_0 = 0$, condição esta que é bastante restritiva.

Lewis e Ryan (1972), por outro lado, adotam uma distribuição de pontos de controle modificada (ver Figura 3.3) mais eficiente, na qual os pontos médios ϕ''_n dos $2N$ elementos são utilizados como sendo os pontos de controle ϕ_n ,

$$\phi_n = \phi''_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N}$$

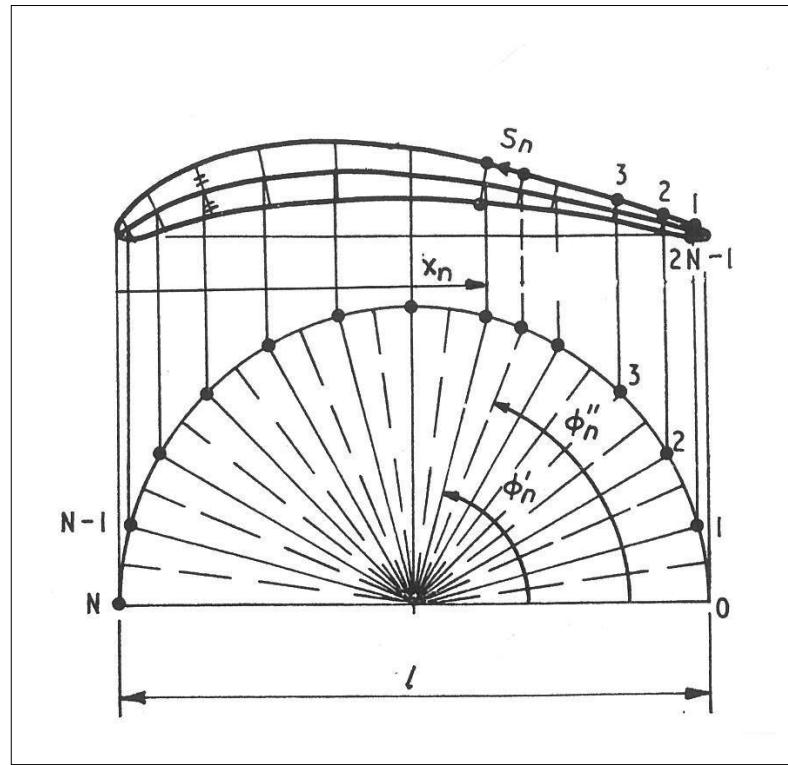


Figura 3.3 Transformação circular introduzida por Wilkinson para definição dos pontos de controle sobre um aerofólio bidimensional (Lewis e Ryan, 1972, Fig. 6)

Com esta aproximação, para o mesmo número total $2N$ de interseções, aumenta-se a concentração de pontos nas regiões dos bordos de ataque e de fuga. Os pontos de controle s_1 e s_{2N} também se situam mais próximos ao bordo de fuga.

Logo, com a técnica dos pontos de controle nos pontos médios dos elementos não é necessária uma afirmação sobre a localização do ponto de estagnação traseiro. E a condição de Kutta se estabelece naturalmente como um descarregamento do aerofólio próximo ao bordo de fuga, como será discutido adiante.

O posicionamento dos pontos de controle em posições opostas em relação à linha de arqueamento, conforme Figura 3.3, resulta em uma melhor precisão numérica do modelo. No entanto, neste trabalho a discretização do contorno é feita por meio da divisão do semicírculo que compreende a corda do perfil conforme exposto anteriormente. Mas, a posição x dos pontos sobre o contorno tanto da superfície de sucção quanto da superfície de pressão é obtida diretamente pela Equação 3.23 no caso da transformação circular, como mostrado na Figura 3.4.

Discretização semelhante a esta é apresentada em Katz e Plotkin (2001, Fig. 11.18) para dividir a corda em painéis com densidade maior próximo aos bordos de ataque e de fuga, principalmente nos casos de aerofólios espessos.

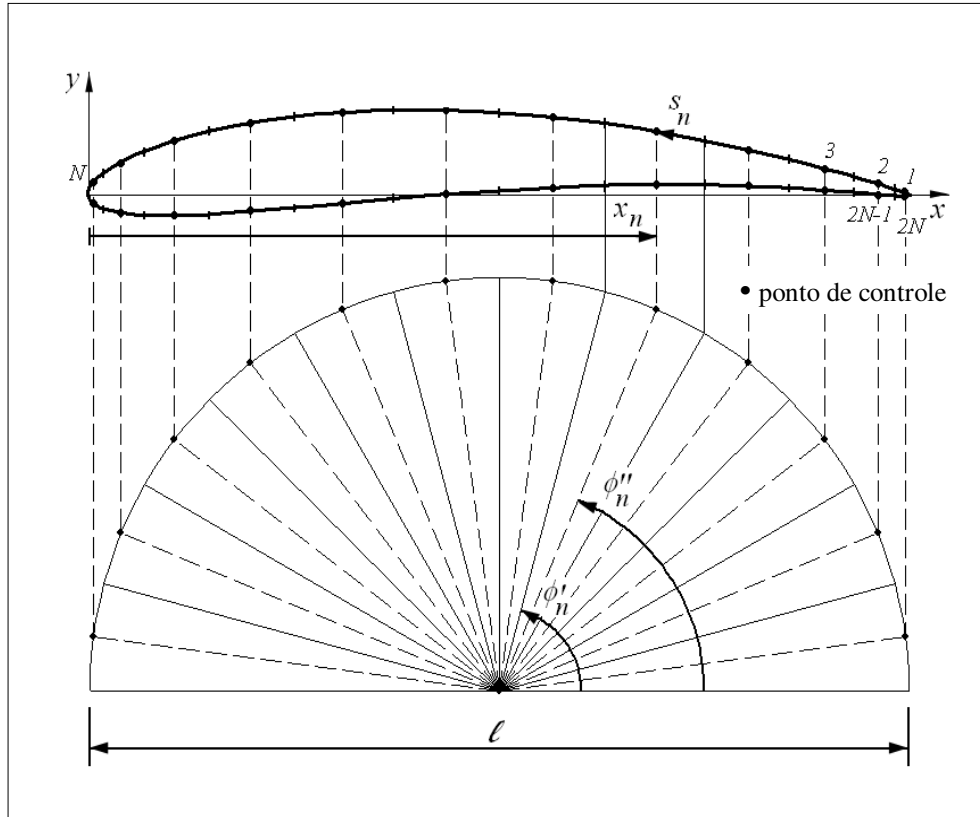


Figura 3.4 Método de espaçamento dos pontos sobre a superfície do aerofólio

Além da transformação circular, outras transformações podem ser utilizadas para esconder ainda mais os pontos de controle em direção aos bordos do aerofólio, conforme descrito por Lewis e Ryan (1972), por exemplo, a transformação elíptica e a transformação adicional de Wilkinson. Uma comparação entre essas transformações é apresentada na Figura 3.5 e na Figura 3.6 para $2N = 60$ pontos.

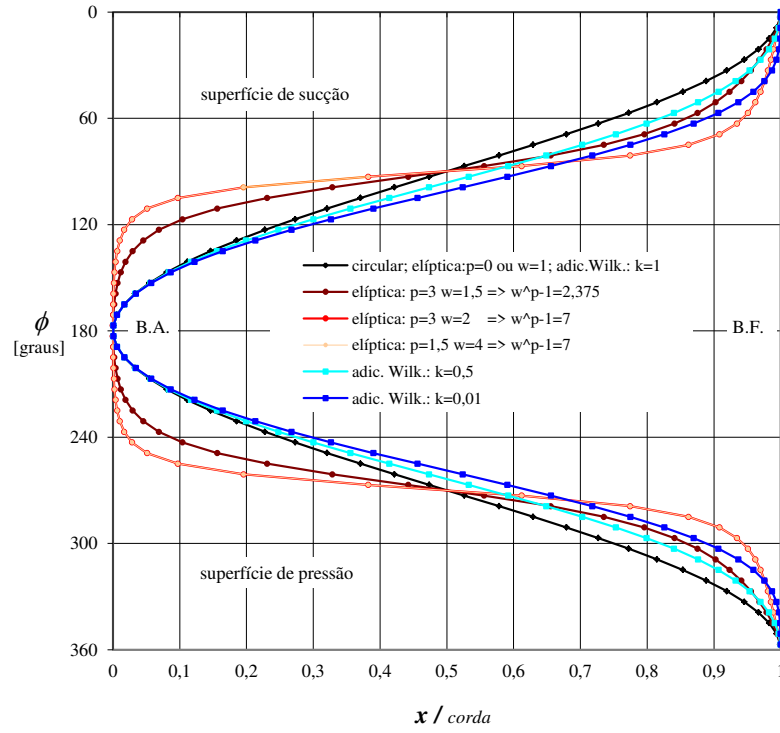


Figura 3.5 Comparação entre as transformações circular, elíptica e adicional de Wilkinson quanto à distribuição dos pontos de controle ao longo do eixo x

A transformação elíptica desloca os pontos sobre o contorno, igualmente espaçados em ϕ , em direção aos bordos de ataque e de fuga (isto é, em direção aos vértices da elipse), comparada à transformação circular. A abscissa é calculada em função do ângulo central ϕ e dos parâmetros $(\omega^p - 1)$ e k_x pela transformação

$$x_n = k_x \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 \tan^2 \phi_n}} \right) \quad (3.24)$$

sendo que, emprega-se o sinal positivo para $\phi_n \leq \pi/2$ ou $\phi_n \geq 3\pi/2$ e o sinal negativo para $\pi/2 < \phi_n < 3\pi/2$. O parâmetro k_x é o semieixo da elipse na direção x , logo, $x_n / corda = x_n / (2k_x)$. E o parâmetro δ é dado pela expressão seguinte

$$\delta = \begin{cases} \left[1 + \frac{\phi_n}{\pi} (\omega^p - 1) \right]^{-1} & , \quad \phi_n \leq \pi \\ \left[1 + \frac{2\pi - \phi_n}{\pi} (\omega^p - 1) \right]^{-1} & , \quad \phi_n > \pi \end{cases} \quad (p > 1)$$

onde ω é a razão entre os eixos maior e menor da elipse, logo $\omega \geq 1$.

A ordenada da elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados, com centro deslocado da origem de k_x apenas na direção de x positivo, é dada por

$$y = \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{k_x^2 - (x - k_x)^2} \quad (3.25)$$

sendo que, o sinal positivo é utilizado quando $\phi_n \leq \pi$ e o negativo, quando $\phi_n > \pi$. O parâmetro $\omega = k_x/k_y$ é a razão entre os semieixos da elipse nas direções x e y , ou seja, as Equações 3.24 e 3.25 combinadas aplicam-se à elipse com o eixo maior na direção x .

Por sua vez, a transformação adicional de Wilkinson comparada às transformações anteriores desloca os pontos somente em direção ao bordo de fuga, sendo dada por

$$\left(\frac{x_n^*}{\ell} \right) = \frac{x_n}{\ell} \left\{ 1 + (1 - k) \left(1 - \frac{x_n}{\ell} \right) \left(\frac{x_n}{\ell} \right) \right\}$$

onde $0 < k < 1,0$ e x_n/ℓ é a abscissa resultante da transformação circular da Equação 3.23.

Para as transformações com $k = 0,5$ e $k = 0,01$ apresentadas na Figura 3.6 são adotados, respectivamente, $\omega = 4$ e $\omega = 2$, apenas para possibilitar a visualização dos resultados, uma vez que o parâmetro ω não interfere nos valores de x obtidos pela transformação adicional de Wilkinson.

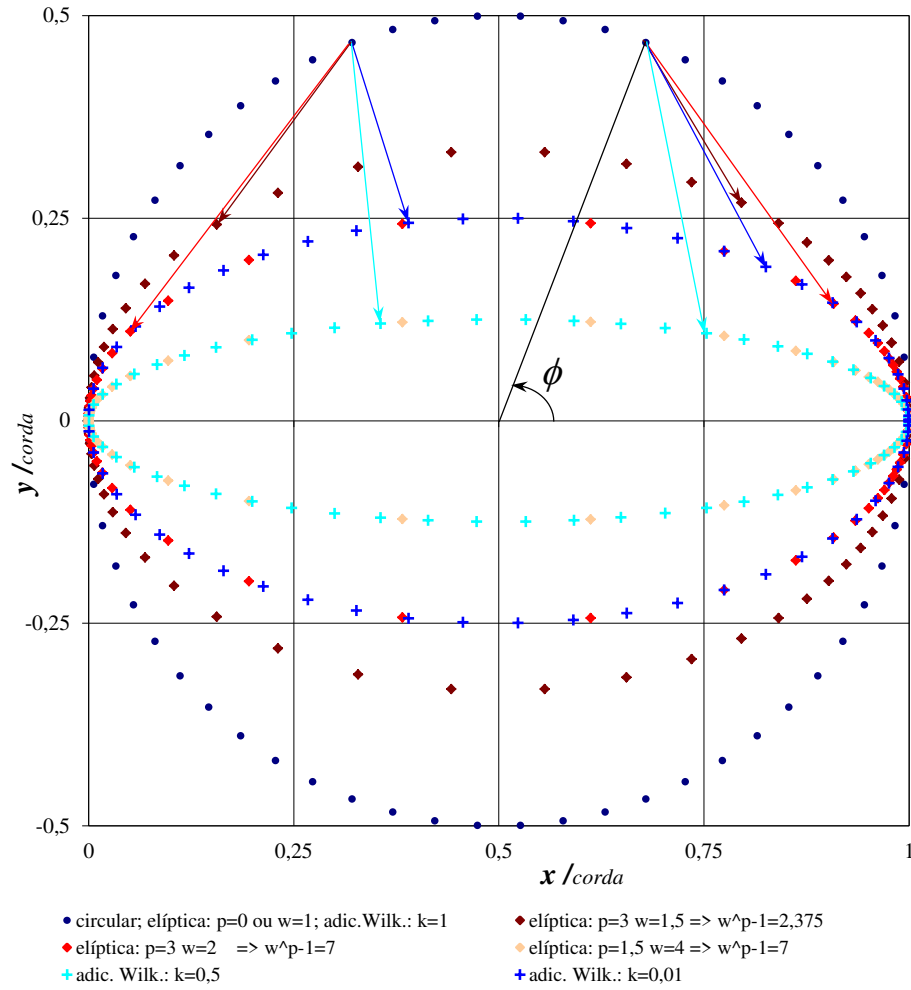


Figura 3.6 Comparação entre as transformações circular, elíptica ($\omega^p - 1$) e adicional de Wilkinson (k) quanto à distribuição dos pontos de controle ao longo do eixo x

b) Velocidade auto induzida de um elemento de vorticidade. O coeficiente de acoplamento $K(\phi_m, \phi_m; t)$ está associado à velocidade paralela à superfície do corpo em m induzida pelo próprio elemento m com vorticidade de intensidade unitária, logo, representa a velocidade auto induzida pelo elemento m .

Observa-se que os termos K_{mm} da diagonal principal dados pela Equação 3.21, das Equações 3.18 e 3.19 para $x \rightarrow x_m$, são indeterminados desde que ambos o numerador e o denominador de $K(\phi_m, \phi_m; t)$ se anulam. Porém, uma forma determinada torna-se possível pela aplicação da regra de l'Hospital duas vezes. As coordenadas (x_m, y_m) , que representam a

geometria local do elemento m , são tratadas como variáveis durante a diferenciação enquanto (x, y) permanecem constantes, resultando:

$$K(\phi_m, \phi_m; t) = \frac{y_m'' x_m' - x_m'' y_m'}{x_m'^2 + y_m'^2} \quad (3.26)$$

Isto mostra que a velocidade auto induzida depende das derivadas de segunda ordem, ou seja, da curvatura local do elemento de vorticidade (ver Figura 3.7). Assim, quando elementos de vorticidade retos são adotados na discretização do contorno, as velocidades auto induzidas são nulas e os termos da diagonal principal $K_{mm} = -2N$. No entanto, se os elementos de vorticidade apresentam curvatura, além das derivadas de primeira ordem, também as de segunda ordem devem ser avaliadas com precisão.

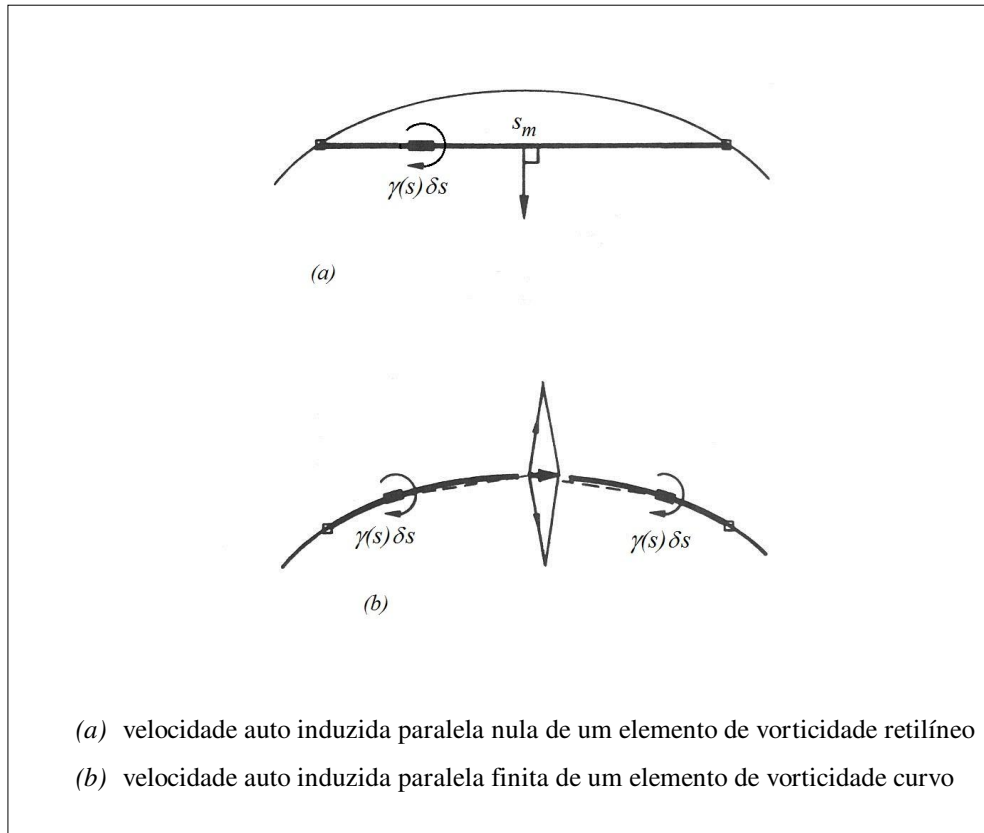


Figura 3.7 Velocidade auto induzida de um elemento de vorticidade na superfície (com base em Lewis, 1991, Fig.1.8)

Nos casos de corpos espessos (cilindro, por exemplo), a diagonal principal é dominante, ou seja, conforme Lewis (1991), todos os outros elementos da matriz são pequenos comparados a ela. Por este motivo, deve-se tomar cuidado para representar K_{mm} precisamente ao incluir a velocidade auto induzida devido à curvatura local.

As derivadas de primeira e de segunda ordem na Equação 3.26 são calculadas por meio da técnica de diferenças finitas utilizando as fórmulas de cinco pontos de Burden e Faires (1989) em suas equações (4.14), (4.15) e (4.20).

c) Tratamento dos dados de entrada. Descontinuidades na primeira ou segunda derivadas desestabilizam o programa de cálculo numérico. A experiência mostra que a qualidade dos dados de entrada é importante e que se devem garantir curvas suaves como entrada para o programa, recomenda Gostelow (1984).

A maioria dos pesquisadores pioneiros neste campo, conforme citado por Lewis (1991), introduziu procedimentos de ajuste de curva e de suavização dos dados de entrada tabelados do perfil com a finalidade de estimar as derivadas de primeira e de segunda ordem da Equação 3.26.

Os procedimentos de ajuste de curva aos dados iniciais, sozinhos, não apresentam bons resultados para a avaliação das derivadas por que, embora a curva ajustada normalmente aproxime-se bem da curva real, as derivadas obtidas com ela não se aproximam das derivadas reais. Por esse mesmo motivo, Martensen (1959) e Wilkinson (1967) admitem que os métodos de séries de Fourier não são adequados. Algo semelhante acontece, por exemplo, ao se ajustar um polinômio a cada cinco pontos sucessivos sobre toda a superfície do corpo. Isto pode produzir boa interpolação de valores (x, y) entre os pontos, mas derivadas de ordem maior errôneas.

A avaliação das derivadas por diferenças finitas a partir dos dados tabelados do perfil costuma produzir erros ainda maiores devido à imprecisão dos dados iniciais do perfil, sugerindo a necessidade de suavizar os dados iniciais.

A aproximação mais usual consiste em trabalhar com suavização dos dados e ajuste de curva simultaneamente ao adotar um procedimento polinomial de mínimos quadrados. Esta afirmação está de acordo com a conclusão de Wilkinson (1967 apud LEWIS, 1991) que, após comparar os erros de vários métodos, defendeu a seguinte estratégia: ajuste por mínimos quadrados de uma parábola através de cinco pontos para suavizar os dados de entrada iniciais e subsequente

avaliação das derivadas de ordem mais alta. Essa estratégia de Wilkinson é utilizada neste trabalho para a suavização do contorno do aerofólio durante o projeto, conforme apresentado adiante.

Nesta linha, D. G. Graham (1972 apud LEWIS, 1991) “aplicou uma aproximação de mínimos quadrados semelhante, utilizando polinômios de segunda e de terceira ordem, para suavizar os dados de entrada, seguida pelo ajuste de curva polinomial de terceira ordem aos dados suavizados a fim de obter as derivadas do perfil pela técnica de diferenças finitas”.

d) Influência do elemento oposto. O termo da diagonal secundária da matriz dos coeficientes de acoplamento $K_{m\ 2N+1-m}$ está associado à velocidade paralela à superfície do corpo em m induzida pelo elemento de vorticidade oposto a m , normalmente identificado por $n_{op} = (2N + 1 - m)$.

O método de vorticidade na superfície, segundo Lewis (1991), produz maior precisão se os pontos de controle sobre as superfícies superior e inferior são localizados diretamente opostos um ao outro formando pares. Inclusive, Goslelow (1984) recomenda que onde a pá é delgada deve-se colocar pares de pontos opostos um ao outro com relação à linha de arqueamento.

À medida que os corpos se tornam finos, devido à proximidade entre as superfícies de sucção e de pressão, as influências do elemento oposto e de seus vizinhos tendem a aumentar, podendo assumir enormes proporções. Há evidências de que problemas numéricos aparecem quando a magnitude (valor absoluto) dos termos da diagonal secundária aproxima-se daquela da diagonal principal. De fato, conforme Kreyszig (1999), o bom-condicionamento pode ser garantido se as entradas da diagonal principal da matriz são grandes em valor absoluto comparadas às entradas fora da diagonal.

Além disso, à medida que a influência do elemento oposto aumenta, a parcela do erro inerente à aproximação da integral de contorno pela regra trapezoidal (descrita pela Equação 3.20) devido ao elemento oposto também cresce, podendo ser da ordem da contribuição de todos os demais elementos do contorno à integral. Isto significa que a imposição da condição de Dirichlet, fundamento do método de vorticidade na superfície, fica prejudicada.

A forma mais direta de se contornar estes “erros de pontos opostos” para corpos finos (diagonal secundária predominante e erro na integração numérica) consiste em refinar a discretização do contorno aumentando o número $2N$ de elementos de vorticidade. Porém, mais relevante do que o número de elementos, segundo Lewis (1991), é a razão da espessura local do

perfil pelo comprimento do elemento de vorticidade $(\Delta T_m / \Delta s_m)$, a qual deve ser maior do que 0,64 ou, por segurança, maior do que a unidade.

Dois métodos alternativos podem ser utilizados para reduzir estes “erros de pontos opostos”:

- (i) Uso de subelementos, indicado apenas para aerofólios e corpos finos. Em vez de se adotar um número de elementos na discretização de forma que $\Delta s_m < \Delta T_m$, Lewis (1991) sugere adotar-se $\Delta s_m > \Delta T_m > 0,5\Delta s_m$ e dois subelementos, diminuindo-se o tamanho da matriz do sistema a ser armazenada. O coeficiente de acoplamento K_{mn} é obtido pela média das contribuições dos subelementos do elemento n .
- (ii) Correção dos elementos da diagonal secundária para garantir a circulação interna nula. Esta técnica, geralmente adotada para corpos de sustentação, é apresentada a seguir.

e) Somatório nulo das colunas da matriz. Para o perfil de contorno C , sem escoamento externo $W_\infty = 0$, se apenas um vórtice unitário $\gamma(s_n)ds_n = 1$ está localizado sobre o contorno em s_n , a velocidade induzida sobre o contorno em s_m é igual a $k(s_m, s_n; t)\gamma(s_n)ds_n = k(s_m, s_n; t)$. Este é ainda o valor aproximado da velocidade induzida em s_m sobre um contorno C_i junto a C , porém deslocado internamente de uma distância infinitesimal. No entanto, neste caso, a velocidade induzida em s_n tem um termo adicional $-\gamma(s_n)/2$ devido à presença da própria vorticidade, conforme visto na Seção 3.1. A Figura 3.8 apresenta um esquema do corpo com essas velocidades induzidas.

A circulação $\Delta\Gamma_n$ induzida no contorno C_i por este vórtice unitário $\gamma(s_n)ds_n = 1$ localizado em s_n logo no exterior do contorno é calculada pela integral de contorno da velocidade induzida, como indica a expressão seguinte:

$$\Delta\Gamma_n = -\frac{\gamma(s_n)}{2} ds_n + \int_{C_i} k(s_m, s_n; t) \gamma(s_n) ds_n ds_m$$

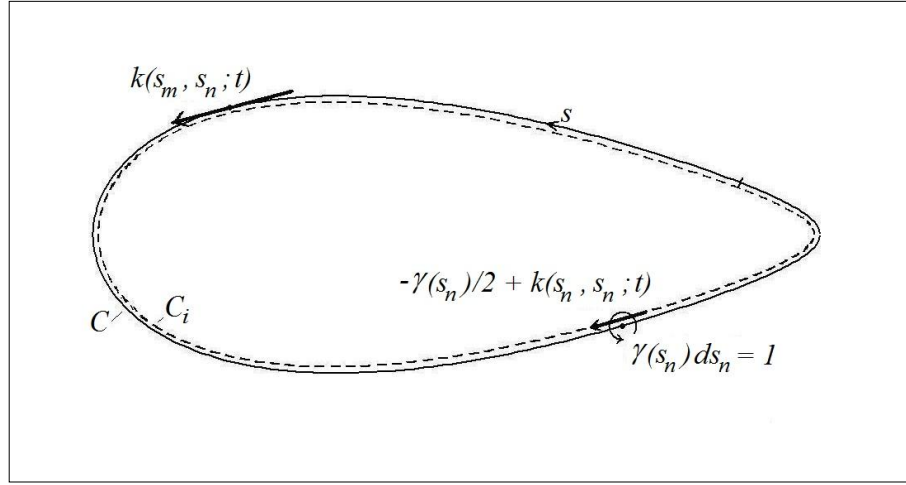


Figura 3.8 Circulação induzida no interior do perfil por um único vórtice unitário localizado sobre o contorno

Assim, essa circulação $\Delta\Gamma_n$ é nula pelo Teorema de Kelvin, visto que o vórtice localiza-se no exterior do contorno considerado. E, desde que o vórtice é unitário, a expressão é simplificada como:

$$\Delta\Gamma_n = -\frac{1}{2} + \int_{C_i} k(s_m, s_n; t) ds_m = 0 \quad (3.27)$$

Lembrando que $k(s_m, s; t) = K(\phi_m, \phi; t) / (4\pi ds/d\phi|_m)$, a circulação pode ser escrita também na variável angular ϕ como:

$$\Delta\Gamma_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(\phi_m, \phi_n; t) d\phi_m = 0$$

E, aplicando-se a integração pela regra trapezoidal, desde que os pontos de controle são igualmente espaçados em ϕ , ou seja, $\Delta\phi = 2\pi/2N$, obtém-se para todos os valores de $n = 1, 2, \dots, 2N$ o seguinte resultado para a circulação:

$$\Delta\Gamma_n = \frac{1}{4N} \left[-2N + \sum_{m=1}^{2N} K(\phi_m, \phi_n; t) \right] = 0$$

Observa-se que o termo entre colchetes corresponde ao somatório dos elementos da coluna n da matriz do sistema de equações lineares de Martensen, conforme Equações 3.21 e 3.22. Assim,

$$\sum_{m=1}^{2N} K_{mn} = 0 \quad (3.28)$$

A partir deste resultado Jacob e Riegels (1963) recomendam a reavaliação do coeficiente de acoplamento $K_{m_{op}n}$ para garantir que a circulação líquida em torno do interior do perfil no modelo numérico seja nula:

$$K_{m_{op}n} = - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_{op}}}^{2N} K_{mn}$$

onde m_{op} é o elemento oposto ao elemento n . Em geral, o elemento m_{op} é igual a $(2N + 1 - n)$ e pertence à diagonal secundária da matriz do sistema de equações lineares de Martensen.

A Equação 3.28 estabelece que o somatório independente de cada coluna n da matriz do sistema da Equação 3.22 é nulo, ou que qualquer equação é igual à soma de todas as demais equações, sendo a matriz do sistema de equações singular. No entanto, para escoamentos em torno de corpos de sustentação, esta característica permite a resolução do sistema de equações ao se aplicar a condição de contorno de Kutta no bordo de fuga. Diante disso, a “correção da diagonal secundária” constitui-se numa técnica útil para diminuir os “erros de pontos opostos” que ocorrem nos corpos finos com sustentação.

A correção da diagonal secundária é uma técnica superior ao emprego de subelementos, eliminando inclusive a necessidade da utilização desta última devido à precisão extra que incorpora ao modelo. Além disso, ela possibilita uma economia de elementos na discretização, sendo que,

em alguns casos, a razão $(\Delta T_m / \Delta s_m)$ pode ser até um pouco menor do que 0,64, conforme (Lewis, 1991).

f) Condição de contorno no bordo de fuga de um corpo de sustentação. As características básicas de qualquer teoria de aerofólio, herdadas da teoria de Joukowski, são duas: a sustentação total é proporcional à circulação gerada pelo aerofólio e a magnitude desta circulação deve manter finita a velocidade na vizinhança do bordo de fuga (HOUGHTON e CARRUTHERS, 1982). Logo, também na análise de um corpo de sustentação pelo método de vorticidade na superfície deve-se impor esta condição de contorno no bordo de fuga.

Segundo Ashley e Landahl (1965), Joukowski e Kutta descobriram independentemente a necessidade de a circulação restituir o escoamento bidimensional, de densidade constante em torno de um corpo com um bordo de fuga pontudo de forma razoável fisicamente (condição de Kutta-Joukowski). Horlock (1973) denomina como condição de Joukowski a necessidade de que, no escoamento sobre um aerofólio, o fluido deixe o bordo de fuga suavemente com velocidade finita. E, ainda, outros autores denominam esta condição de contorno no bordo de fuga como condição de Kutta.

Alguns pesquisadores, a exemplo de Jacob e Riegels (1963), localizam um ponto de controle no bordo de fuga e assumem-no como um ponto de estagnação, sendo que desta maneira satisfazem a condição de Kutta e, ao eliminar a linha e a coluna correspondentes, resolvem o problema da matriz singular devido à correção da diagonal secundária.

De fato, tratar o bordo de fuga como ponto de estagnação descreve bem o escoamento irrotacional e sem viscosidade sobre um aerofólio tanto com bordo de fuga agudo quanto com bordo de fuga arredondado. No caso do bordo de fuga agudo a localização do ponto de estagnação traseiro sobre a ponta evita justamente o aparecimento de velocidade infinita.

No entanto, para o bordo de fuga arredondado não há a tendência para velocidade infinita sobre o perfil ficando incógnita a localização do ponto de estagnação traseiro. Devido à importância desta variável adicional no cálculo de cascata, pois pequena alteração na mesma implica em variação considerável no ângulo de saída do escoamento, Gostelow (1984) defende a necessidade de considerar-se o efeito da viscosidade no escoamento próximo ao bordo de fuga para que a localização do ponto de estagnação traseiro não seja arbitrária. O teorema de Kelvin

aplicado ao escoamento em regime permanente em torno do aerofólio estabelece que é nulo o fluxo líquido de vorticidade para fora de um circuito fechado que engloba o aerofólio e suas camadas limites, e que corta as linhas de corrente em ângulos retos na região da esteira a jusante. Chega-se assim à relação importante de que as pressões estáticas sobre as superfícies da pá tendem para o mesmo valor quando se aproxima do bordo de fuga por qualquer superfície, tanto de sucção quanto de pressão. E, utilizando esta constatação física, Gostelow prossegue na determinação da posição do ponto de estagnação traseiro.

Esta constatação apresentada por Gostelow corrobora a sugestão de Lewis (1991) de que uma alternativa à imposição do ponto de estagnação no bordo de fuga é estabelecer que a pressão estática aproxima-se do mesmo valor movendo-se em direção ao bordo de fuga ao longo das superfícies superior e inferior, a exemplo do comportamento observado em aerofólios no escoamento de um fluido real.

Para o método de vorticidade na superfície a condição de Kutta alternativa sugerida por Wilkinson (1967 apud Lewis, 1991) é que a pressão estática e, portanto, a vorticidade na superfície nos dois elementos adjacentes ao bordo de fuga sobre as superfícies superior e inferior deve ter o mesmo valor:

$$\gamma(s_{2N}) = -\hat{\alpha} \gamma(s_1)$$

onde $\hat{\alpha}$ seria normalmente unitário, descarregando o aerofólio próximo ao bordo de fuga (Lewis e Ryan, 1972).

Em termos do parâmetro angular ϕ obtém-se:

$$\gamma_{2N} = -\alpha \gamma_1$$

onde $\alpha = \hat{\alpha} (s'_{2N}/s'_1)$, com $s'_m = \left. \frac{ds}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_m}$.

Nota-se a importância das técnicas apresentadas anteriormente para a localização dos pontos de controle bem próximos ao bordo de fuga, afim de que a condição de contorno de Kutta seja incorporada ao modelo numérico de forma satisfatória.

As equações simultâneas 3.22 após a aplicação da condição de Kutta passam a ser escritas como

$$\begin{bmatrix} K'_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,2N-1} \\ K'_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{2N,1} & K_{2N,2} & \cdots & K_{2N,2N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{2N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2N} \end{bmatrix}$$

onde, $K'_{m,1} = K_{m,1} - \alpha K_{m,2N}$

Desde que γ_{2N} e γ_1 estão agora diretamente relacionados, tem-se uma incógnita a menos de vorticidade na superfície, sendo mandatório eliminar uma equação do sistema. A princípio, poder-se-ia simplesmente desprezar uma equação, por exemplo, aquela correspondente ao elemento $2N$ junto ao bordo de fuga. No entanto, Lewis recomenda adicionar as duas equações que representam os elementos do bordo de fuga. A vantagem desta última, segundo Wilkinson, é que a correção da diagonal secundária pode ser aplicada à matriz dos coeficientes de acoplamento original e, depois, ao eliminar-se uma coluna pela imposição da condição de Kutta e uma linha pela adição das equações dos elementos do bordo de fuga, a matriz deixa de ser singular, mas retém as características de circulação interna nula, adquiridas com a correção da diagonal secundária. O sistema de equações de Martensen final é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} K''_{1,1} & K''_{1,2} & \cdots & K''_{1,2N-1} \\ K'_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{2N-1,1} & K_{2N-1,2} & \cdots & K_{2N-1,2N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{2N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde, $K''_{1,n} = K_{1,n} + K_{2N,n}$ para $n \neq 1$, $K''_{1,1} = K'_{1,1} + K'_{2N,1}$ e $b''_1 = b_1 + b_{2N}$.

g) Circulação e características globais de um corpo de sustentação. A sustentação se manifesta quando há movimento relativo entre o aerofólio e a porção de fluido na qual está imerso, pois a sustentação é uma consequência da circulação imposta sobre um escoamento uniforme, fenômeno conhecido como “efeito Magnus” (HOUGHTON e CARRUTHERS, 1982). E a circulação gerada pelo aerofólio é igual à própria intensidade de vórtice de contorno total Γ obtida pelo método de vorticidade na superfície (Equação 3.3), pois $v_s = \gamma(s)$ (Equação 3.2). Logo, utilizando-se as Equações 3.16 e 3.21, a circulação é obtida numericamente pela expressão seguinte:

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{2N} \gamma(\phi_m) \Delta\phi_m = W_\infty \sum_{m=1}^{2N} \gamma_m \Delta\phi_m \quad (3.30)$$

A circulação em torno do aerofólio permanece constante em qualquer circuito fechado que englobe o aerofólio, inclusive para um circuito distante que acompanha as linhas de corrente acima e abaixo do aerofólio e que é paralelo à direção y por uma extensão t (unitário para o aerofólio isolado e igual ao espaçamento para a cascata) longe a montante e a jusante, conforme indicado na Figura 3.2, podendo-se escrever:

$$\Gamma = t (V_2 - V_1) \quad (3.31)$$

Da equação da continuidade para o escoamento incompressível em regime permanente sobre o aerofólio obtém-se que a componente da velocidade paralela ao eixo x não se altera:

$$U_1 = U_2 = U_\infty \quad (3.32)$$

A partir destas duas últimas equações e dos triângulos de velocidade, obtém-se:

$$\Gamma = t W_\infty \cos \beta_\infty (\tan \beta_2 - \tan \beta_1) \quad (3.33)$$

No caso de um aerofólio isolado, desde que $W_\infty = W_1$ e $\beta_\infty = \beta_1$, dado a geometria do aerofólio (x, y) e as condições do escoamento livre na entrada W_1 e β_1 , da análise de vorticidade na superfície, Equação 3.29, obtém-se a distribuição de vorticidade γ_m ; da Equação 3.30, a circulação total Γ e, por fim, utilizando-se a Equação 3.33, o ângulo de saída do escoamento β_2 .

Para a cascata de aerofólios, a distribuição de vorticidade na superfície e a circulação total em torno de cada perfil da cascata são obtidas de forma semelhante se a geometria da cascata e as condições do escoamento médio equivalente W_∞ e β_∞ são prescritas inicialmente. Os ângulos de entrada β_1 e de saída β_2 do escoamento são calculados pela Equação 3.33 juntamente com a definição do escoamento médio equivalente,

$$\tan \beta_\infty = \frac{1}{2}(\tan \beta_1 + \tan \beta_2)$$

que fornece a seguinte relação:

$$\beta_1 = \arctan\left(\tan \beta_\infty - \frac{\Gamma}{2 t W_\infty \cos \beta_\infty}\right)$$

No entanto, prescrever as condições do escoamento médio equivalente como dados de entrada não é comum. Na prática de engenharia o problema que se apresenta normalmente é a previsão das condições de saída β_2 e W_2 para uma faixa de escoamentos de entrada β_1 e W_1 prescritos para uma dada geometria de cascata. Para isto, faz-se necessário seguir o procedimento indicado por Lewis (1991), pois as equações de Martensen para cascata envolvem as quantidades do escoamento médio.

Desde que o lado direito do sistema da Equação 3.22, conforme Equação 3.21, tem duas parcelas independentes, pode-se separar em dois sistemas e resolvê-los para componentes unitárias da velocidade do escoamento médio equivalente $(U_\infty = 1 \text{ m/s}; \beta_\infty = 0^\circ)$ e $(V_\infty = 1 \text{ m/s}; \beta_\infty = 90^\circ)$. As respectivas soluções γ_u e γ_v para a distribuição de intensidade de

vorticidade adimensionalizada fornecem as circulações de contorno unitárias correspondentes Γ_u e Γ_v , a exemplo da Equação 3.30, dadas a seguir:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u &= \sum_{m=1}^{2N} \gamma_u(\phi_m) \Delta\phi_m = \sum_{m=1}^{2N} \gamma_{u_m} \Delta\phi_m \\ \Gamma_v &= \sum_{m=1}^{2N} \gamma_v(\phi_m) \Delta\phi_m = \sum_{m=1}^{2N} \gamma_{v_m} \Delta\phi_m \end{aligned} \right\}$$

Para um escoamento genérico W_∞ e β_∞ a solução pode ser obtida a partir das soluções unitárias, como segue:

$$\Gamma = U_\infty \Gamma_u + V_\infty \Gamma_v$$

ou, ainda,

$$\gamma(\phi_m) = U_\infty \gamma_u(\phi_m) + V_\infty \gamma_v(\phi_m)$$

logo:

$$\gamma_m = \cos \beta_\infty \gamma_{u_m} + \sin \beta_\infty \gamma_{v_m}$$

E as velocidades na direção y a montante V_1 e a jusante V_2 longe da cascata podem ser escritas, conforme visto anteriormente, como:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_\infty - \frac{V_\infty \Gamma_v}{2t} - \frac{U_\infty \Gamma_u}{2t} \quad em \ x = -\infty \\ V_2 &= V_\infty + \frac{V_\infty \Gamma_v}{2t} + \frac{U_\infty \Gamma_u}{2t} \quad em \ x = +\infty \end{aligned} \right\}$$

Subtraindo-se estas equações após dividi-las por U_∞ , observando-se a Equação 3.32, obtém-se uma expressão para o ângulo de saída β_2 do escoamento em função das circulações unitárias Γ_u e Γ_v e do ângulo de entrada β_1 :

$$\beta_2 = \arctan \left\{ \left(\frac{1 + \Gamma_v/2t}{1 - \Gamma_v/2t} \right) \tan \beta_1 + \left(\frac{2}{1 - \Gamma_v/2t} \right) \frac{\Gamma_u}{2t} \right\}$$

Obtidos os ângulos e velocidades do escoamento na entrada e na saída, as demais características globais do escoamento potencial em torno do aerofólio em cascata podem ser calculadas. Da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y obtém-se as componentes da força de sustentação ($\mathbf{L} = L_x + iL_y$) que atua sobre o aerofólio em um escoamento não viscoso, dadas por

$$\left. \begin{aligned} L_x &= (p_1 - p_2)t = \frac{1}{2} \rho (W_2^2 - W_1^2)t \\ L_y &= \rho U_\infty t (V_1 - V_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

A partir destas expressões e com auxílio das relações obtidas dos triângulos de velocidade chega-se ao seguinte resultado: $\tan \beta_L = L_y/L_x = -\cot \beta_\infty$, logo, a força de sustentação é perpendicular à direção do vetor velocidade do escoamento médio equivalente W_∞ , ou seja, $\beta_L = \beta_\infty + 90^\circ$. Além disso, as Equações 3.34, junto com a Equação 3.31 e os triângulos de velocidade, mostram que a “lei de Magnus” aplica-se individualmente às componentes U_∞ e V_∞ do vetor velocidade média do escoamento: $L_x = \rho V_\infty \Gamma$ e $L_y = -\rho U_\infty \Gamma$ e, consequentemente, $L = -\rho W_\infty \Gamma$.

O coeficiente de sustentação com base na velocidade do escoamento médio equivalente e na velocidade do escoamento na entrada é dado, respectivamente, por:

$$C_{L_\infty} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2 \ell} = 2 \left(\frac{t}{\ell} \right) \cos \beta_\infty (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

$$C_{L_1} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho W_1^2 \ell} = C_{L_\infty} \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_\infty} \right)^2 = 2 \left(\frac{t}{\ell} \right) \left(\frac{\cos^2 \beta_1}{\cos \beta_\infty} \right) (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

Para aplicações em aerofólios é mais usual do que a distribuição de velocidade na superfície ($v_s = \gamma(s)$) falar-se em distribuição de pressão na superfície definindo-se o coeficiente de pressão superficial:

$$C_{p_\infty} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2} = 1 - \left(\frac{\gamma(s)}{W_\infty} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\gamma(\phi)}{\frac{ds}{d\phi} W_\infty} \right)^2$$

E, desde que no projeto e teste de cascata as condições de entrada são normalmente especificadas, o coeficiente de pressão superficial pode também ser definido como:

$$C_{p_1} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho W_1^2} = C_{p_\infty} \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_\infty} \right)^2$$

4 MÉTODO INVERSO

O problema direto ou análise compreende a solução do escoamento em torno de um dispositivo de geometria conhecida. Enquanto que, no problema indireto, também denominado inverso ou de projeto, a distribuição de velocidade sobre o comprimento da superfície é prescrita e a geometria, ou a forma das superfícies que produz esta distribuição, deve ser obtida automaticamente. Portanto, o problema inverso em teoria de cascata é mais complexo do que o problema direto.

Os métodos inversos de singularidades, segundo Lewis (1991), são basicamente de dois tipos:

- (i) Uso iterativo de uma análise direta: método inverso que utiliza uma análise direta iterativamente com aproximações sucessivas na forma da geometria. A cada iteração a última estimativa da geometria do dispositivo é analisada, sua distribuição de velocidade é comparada com aquela prescrita e o erro é usado para efetuar uma correção na geometria de maneira que o mesmo seja reduzido;
- (ii) Métodos inversos verdadeiros: a distribuição de velocidade (vorticidade) prescrita é imposta sobre as sucessivas aproximações da geometria do dispositivo. A cada iteração as componentes da velocidade induzida em cada ponto sobre o contorno são calculadas considerando a velocidade do escoamento livre e a influência de todos os elementos de vorticidade prescrita do contorno. E uma nova geometria é gerada seguindo a inclinação do vetor velocidade resultante em cada ponto.

As primeiras soluções para o problema indireto em escoamento de cascata fizeram uso das teorias de singularidades de Betz (1915) para aerofólios isolados e de Pistolesi (1937) para cascatas de aerofólios finos. Na teoria de singularidade de Ackeret (1942) os efeitos de interferência das outras pás sobre o escoamento em torno de um aerofólio típico foram aproximados por um método de superposição simples, avaliação esta provavelmente ainda válida. No entanto, segundo Gostelow (1984), as maiores aproximações no método de Ackeret são: o uso da aproximação de ordem-zero para a linha de arqueamento, obtida da hipótese inicial de número infinito de pás finas, como uma base para a distribuição de vorticidade periódica; a

hipótese de que as distribuições de singularidades encontram-se no interior do perfil, sendo necessário, além da distribuição de vórtices, também uma distribuição de fontes e sorvedouros para representar a espessura das pás; e a hipótese de que a superfície do aerofólio é paralela à linha de arqueamento ao avaliar a distribuição de velocidade.

“Embora as teorias de singularidade linearizadas, tais como a de Raily (1965) seguindo o método de Ackeret (1942), que são do tipo (ii) e usam singularidades internas, tenham sido amplamente utilizados para o cálculo inverso de ventilador axial e de fluxo-misto, suas linearizações impõem restrições que limitam suas aplicabilidades”, conforme Lewis (1991).

O êxito obtido com o emprego do método de Martensen nas soluções do problema direto, devido à sua precisão e confiabilidade incentivou a busca por maneiras de empregá-lo também nas soluções do problema inverso.

O uso do método de Martensen numa aproximação inversa foi demonstrado primeiramente por Wilkinson (1967) que obteve grande sucesso na aplicação da técnica iterativa (i) para aerofólios e cascatas, com ou sem *slots*, representando um avanço em relação às técnicas de singularidade linearizadas antecedentes, de acordo com Gostelow (1984), Lewis (1991) e Murugesan e Raily (1969).

Wilkinson (1967) adaptou algumas características essenciais do método de Weber (1955), método inverso de aerofólios com arqueamento pequeno e espessura moderada baseado na teoria do aerofólio fino, em particular suas expressões para distribuições de vorticidade na linha de arqueamento, de maneira a produzir um método inverso mais avançado pelo uso do método de vorticidade na superfície, não sujeito a quaisquer restrições sobre o arqueamento ou espessura permissíveis, segundo Lewis (1991).

Dadas a distribuição de velocidade prescrita apenas sobre a superfície superior, a distribuição de espessura da pá requerida e uma estimativa inicial da linha de arqueamento, o método de Wilkinson consiste do seguinte procedimento iterativo: a espessura requerida é superposta normal à última estimativa da linha de arqueamento; o perfil formado é submetido à análise de Martensen padrão; o erro obtido em relação à velocidade prescrita na superfície superior é convertido numa folha de vórtices equivalente sobre a linha de arqueamento; as velocidades normais e tangenciais à linha de arqueamento induzidas pela folha de vorticidade “equivalente ao erro” são calculadas; a inclinação local da linha de arqueamento é ajustada de

acordo com a razão dos valores computados das velocidades normal e tangencial, de maneira a restabelecer a condição de que a linha de arqueamento é uma linha de corrente média. Assim, o perfil é reconstruído e submetido a uma nova análise, sendo o procedimento iterativo repetido até que a convergência seja alcançada.

O método inverso para aerofólios em cascata de Murugesan e Raily (1969) é semelhante ao elaborado por Wilkinson que opera pela modificação da geometria de uma forma inicial de pá escolhida arbitrariamente para satisfazer o requisito de uma distribuição de velocidade requerida. No entanto, a distribuição de velocidade requerida é especificada em termos do comprimento de arco medido ao longo do contorno do perfil, a partir do ponto de estagnação frontal até o bordo de fuga, sobre ambas as superfícies de sucção e de pressão. E no lugar de uma distribuição ao longo da linha de arqueamento, uma folha de vórtices adicional é imposta sobre o contorno. O valor dessa distribuição adicional de vórtices é igual à diferença entre a distribuição de velocidade requerida e a distribuição de velocidade real calculada sobre o contorno pelo método de Martensen. Uma equação para a distribuição de velocidade normal em torno da pá, devido à distribuição de vorticidade adicional no contorno, é derivada por Murugesan e Raily. Para que o contorno seja formado por linhas de corrente do escoamento exterior, a geometria da pá é ajustada de acordo com a razão dos valores das velocidades normal e tangencial. Esse ajuste é feito a partir do ponto de estagnação frontal ao longo das superfícies de pressão e de sucção, separadamente.

Contudo, segundo Gostelow (1984), foi Lewis (1982) que publicou um procedimento verdadeiramente inverso de vorticidade na superfície, conforme a técnica (ii), visando à seleção de perfis de aerofólios ou cascatas com distribuição de velocidade na superfície prescrita. Dados a distribuição de velocidade prescrita e um perfil inicial arbitrário, o método inverso verdadeiro de Lewis compreende basicamente o seguinte procedimento: o perfil da pá é traçado por elementos; um valor de vorticidade concentrada no ponto médio é associado a cada elemento de acordo com a distribuição de velocidade ou vorticidade prescrita; as componentes de velocidade induzida em cada elemento são calculadas incluindo a influência de todos os outros elementos de vorticidade do contorno mais a corrente uniforme; as linhas de corrente da pá são reconstruídas a partir dos vetores de velocidade resultante; e uma condição de fechamento do perfil é imposta. O novo perfil é então submetido a uma nova iteração, até a convergência.

4.1 Uso iterativo do Método de Martensen

O método inverso de aerofólios isolados ou em cascata utilizado neste trabalho é do tipo (i), pois emprega iterativamente o método de análise de vorticidade na superfície ou método de Martensen exposto no Capítulo 3. O procedimento adotado, em linhas gerais, segue aquele de Murugesan e Raily (1969), no entanto, alguns aspectos são incorporados do trabalho de Lewis (1991) ou atendem a um desenvolvimento próprio.

Os passos básicos adotados no cálculo da geometria do aerofólio podem ser resumidos como segue:

- (i) Inicialmente uma distribuição de velocidade (ou vorticidade) na superfície $v_R(s)$ é especificada como uma função da distância medida ao longo do contorno a partir do ponto de estagnação frontal até o bordo de fuga, independentemente para as superfícies de sucção e de pressão;
- (ii) Uma forma inicial do perfil é escolhida como primeira aproximação da geometria, por exemplo, uma elipse ou um aerofólio padrão;
- (iii) O contorno do perfil inicial é discretizado em $2N$ elementos com espaçamento angular uniforme em relação à sua corda;
- (iv) A distribuição de velocidade no contorno é calculada como resultado da análise do perfil pelo método de Martensen;
- (v) O ponto de estagnação frontal é localizado, o comprimento do contorno entre o ponto de estagnação frontal e o ponto de controle de cada elemento é calculado, e o valor da velocidade prescrita ou requerida nesse ponto é interpolado da distribuição de velocidade especificada inicialmente;
- (vi) Os valores de velocidade calculada e prescrita são comparados e o critério de convergência verificado;
- (vii) Uma distribuição de vorticidade adicional de intensidade igual à diferença entre as velocidades prescrita e calculada é assumida sobre a superfície;
- (viii) A distribuição de velocidade normal sobre o contorno induzida pela folha de vórtices adicional é calculada;

- (ix) A mudança local na inclinação do contorno é obtida ao tomar-se a razão dessa velocidade normal pela velocidade tangencial total imposta. E a integração desta nova inclinação a partir do ponto de estagnação frontal dá origem a um novo contorno para cada uma das superfícies de sucção e de pressão;
- (x) Se os pontos do bordo de fuga obtidos nas superfícies de sucção e de pressão não coincidem adota-se um critério de fechamento do perfil.

Este último perfil é então submetido a uma nova análise direta, o ponto de estagnação frontal é localizado e a distribuição de velocidade calculada é comparada com a distribuição requerida. Assim, o processo (iv)-(x) é repetido até que a convergência em (vi) seja alcançada. À medida que as iterações se sucedem, existe a tendência de que a distribuição de velocidade calculada aproxime-se daquela requerida ou as geometrias sucessivas modifiquem-se cada vez menos. Desta forma as condições impostas são atingidas dentro de certa tolerância admitida.

Definidos os passos básicos método inverso, a seguir alguns deles são apresentados de uma maneira mais detalhada ou algumas considerações importantes são salientadas.

4.1.1 Distribuição de velocidade prescrita

Ao especificar uma distribuição de velocidade sobre o contorno para cada uma das superfícies de sucção e de pressão obtém-se o cálculo automático do perfil do aerofólio inteiro. No entanto, segundo Lewis (1991), caso o projetista especifique uma distribuição de velocidade impossível o perfil pode resultar com cruzamento entre as superfícies de sucção e de pressão ou, mesmo uma distribuição de velocidade válida pode resultar numa distribuição de espessura impraticável. Por essa razão surgiu o método, proposto originalmente por Wilkinson (1967), de prescrever a distribuição de velocidade apenas sobre a superfície de sucção e também a distribuição de espessura.

Conforme Murugesan e Raily (1969), idealmente, a distribuição de velocidade prescrita deve ser a distribuição de velocidade que é desejável das considerações da camada limite; por isso, é vantajoso que ela seja medida a partir do ponto de estagnação frontal. Schwering (1971) também afirma que a qualidade da cascata projetada depende diretamente da prescrição adequada

da distribuição de velocidade; e a formulação da mesma deve ser desenvolvida e incrementada com base nos cálculos da camada limite.

Como visto, Goto (1984) obtém a distribuição ótima de velocidade na superfície de sucção a partir de um método de camada limite inverso, este considera uma distribuição prescrita do fator de forma da camada limite que garante uma aproximação de escoamento turbulento não separado. Então, a distribuição de velocidade do lado de pressão é selecionada para resultar em uma seção de pá razoável.

Assim, a prescrição adequada da distribuição de velocidade na superfície depende muito da experiência do projetista. Com a finalidade de desenvolver e testar o método inverso em questão, a distribuição de velocidade prescrita é adotada de forma analítica ou obtida pela análise direta, respectivamente, conforme o exemplo em estudo seja um aerofólio analítico ou um aerofólio padrão conhecido. Além disso, ela é prescrita a partir do ponto de estagnação frontal sobre cada uma das superfícies de sucção e de pressão.

4.1.2 Ponto de estagnação frontal e coordenada curvilínea

Após a análise da geometria do aerofólio ou cascata pelo método de vorticidade na superfície, o ponto de estagnação frontal precisa ser localizado a fim de possibilitar a determinação do valor de velocidade prescrita em cada ponto de controle e a subsequente comparação com os valores calculados, bem como a reconstrução do perfil.

Para tanto, procede-se a uma pesquisa, na região do bordo de ataque, dos pontos de controle identificados como $i = i_{BA}$ e $i = i_{BA} + 1$ em que o valor da intensidade de vorticidade γ_i troca de sinal. Logo, o ponto de estagnação deve estar localizado entre estes pontos. A posição angular ϕ_{BA} do ponto de estagnação é definida como a média entre os valores desses pontos, ou seja, $(\phi_{i_{BA}} + \phi_{i_{BA}+1})/2$. E cada uma das coordenadas cartesianas do ponto de estagnação frontal x_{BA} e y_{BA} é obtida por interpolação por *spline* cúbica em função da variável angular, considerando os pontos adjacentes sobre as superfícies de sucção e de pressão ($i = i_{BA-1}, \dots, i_{BA+2}$).

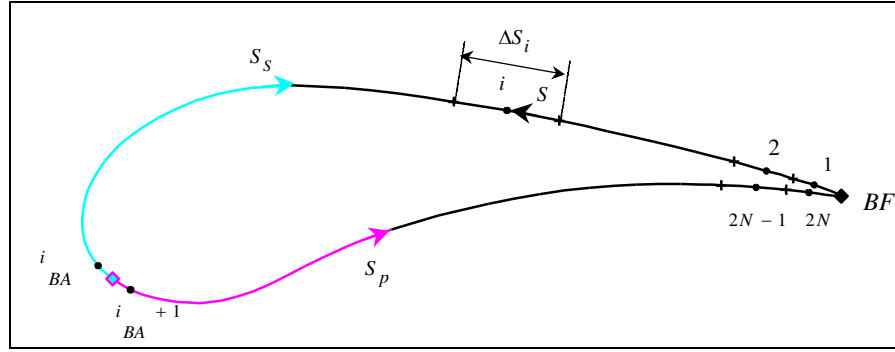


Figura 4-1 Coordenadas curvilíneas de um contorno de aerofólio

A coordenada curvilínea s_s da superfície de sucção medida a partir do ponto de estagnação do bordo de ataque, conforme indica a Figura 4-1, é calculada pela equação seguinte:

$$s_{s_j} = s_{s_{j-1}} + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{ds}{d\phi} \right|_i + \left. \frac{ds}{d\phi} \right|_{i+1} \right) (\phi_{i+1} - \phi_i) \quad , \quad j=2, \dots, n_s \quad , \quad i = i_{BA} + 1 - j$$

onde, n_s é o número de pontos de controle sobre a superfície de sucção incluindo o ponto de estagnação do bordo de fuga. Esta expressão pode ser utilizada também para o primeiro ponto sobre a superfície de sucção $j=1$ desde que as variáveis com subscritos i e $i+1$ recebam, respectivamente, os valores correspondentes ao ponto de controle $i=i_{BA}$ e ao ponto de estagnação frontal.

E a coordenada adimensionalizada em relação ao comprimento total da superfície aerodinâmica de sucção $s_{s_{BF}} = s_{s_j}$, para $j = n_s$, é obtida por:

$$s_{s_j}^* = s_{s_j} / s_{s_{BF}}$$

Para a superfície de pressão as expressões são análogas a estas últimas, apenas substituem-se as variáveis s_s e n_s pelas variáveis s_p e n_p , respectivamente, e o cálculo do ponto de controle por $i = i_{BA} - 1 + j$. E para o primeiro ponto sobre a superfície de pressão $j=1$ as variáveis com

subscritos i e $i+1$ recebem, respectivamente, os valores correspondentes ao ponto de estagnação frontal e ao ponto de controle $i = i_{BA} + 1$.

4.1.3 Critério de convergência

À medida que os cálculos do aerofólio ou cascata são efetuados, ou seja, que as iterações se sucedem, faz-se necessário aplicar um critério de parada do programa. A definição deste critério deve estar associada à convergência do método de cálculo proposto.

Segundo Lewis (1991) duas condições devem ser satisfeitas para garantir que a convergência do método inverso de vorticidade na superfície para aerofólios e cascatas é alcançada, a saber:

- (i) a geometria praticamente não varia de uma iteração para a seguinte; e
- (ii) a distribuição de velocidade calculada para esta geometria resulta próxima àquela prescrita.

A primeira condição estabelece a convergência propriamente, enquanto que a segunda, o nível de precisão obtida.

Para tanto, fórmulas para os erros são definidas com base naqueles adotados pelas teorias de aproximação, onde uma função deve ser aproximada por uma função mais simples. Genericamente, se o objetivo é aproximar a função $f(x)$ de uma variável x qualquer num intervalo $[a, b]$ por um polinômio $P(x)$, os coeficientes do polinômio são obtidos de forma a minimizar uma função erro (BURDEN e FAIRES, 1989). Na técnica de mínimos quadrados, por exemplo, emprega-se o erro quadrático total, assim denominado por Kreyszig (1993) e dado por

$$E = \int_a^b (f - P)^2 dx$$

Outra forma de erro é o desvio absoluto em que a função a ser minimizada é a integral de $|f - P|$ em vez de $(f - P)^2$. É interessante observar, da análise de Burden e Faires (1989) sobre qual é a melhor das aproximações lineares discretas, que o método que utiliza o desvio absoluto

faz apenas uma média dos erros nos diversos pontos, não ponderando de forma satisfatória um ponto que esteja consideravelmente fora da linha de aproximação. Enquanto que, a aproximação de mínimos quadrados coloca substancialmente mais peso sobre o ponto de maior erro em relação aos demais sem deixar, no entanto, que ele domine completamente a aproximação.

Ambos estes tipos de erro são utilizados a seguir para definir o erro quadrático médio e o desvio absoluto utilizados com a finalidade de testar a precisão do método inverso. É definida também uma fórmula para o erro de convergência geométrica.

a) Erro quadrático médio. Baseia-se na fórmula de erro a ser minimizado na teoria de aproximação de mínimos quadrados, tomando-se a média no domínio. No caso do método inverso de vorticidade na superfície, a função distribuição de velocidade requerida $v_R(s)$ nos pontos s do contorno fechado C do aerofólio deve ser aproximada pela velocidade calculada na análise da geometria obtida na última iteração $\gamma(s)$. Assim, normalizando-se em relação à velocidade do escoamento médio equivalente W_∞ , o erro quadrático médio err_{QM} fica definido pela equação seguinte

$$err_{QM} = \frac{1}{C} \oint_C \left(\frac{v_R(s) - \gamma(s)}{W_\infty} \right)^2 ds$$

Substituindo-se a integração no contorno fechado C por duas integrais sobre as superfícies de sucção e de pressão a partir do ponto de estagnação frontal até o ponto do bordo de fuga, como se pode observar na Figura 4-1, o erro quadrático médio pode ser rescrito como

$$err_{QM} = \frac{1}{(s_{sBF} + s_{pBF})} \left[\int_0^{s_{sBF}} \left(\frac{v_R(s_s) - \gamma(s_s)}{W_\infty} \right)^2 ds_s + \int_0^{s_{pBF}} \left(\frac{v_R(s_p) - \gamma(s_p)}{W_\infty} \right)^2 ds_p \right]$$

A discretização do contorno conforme apresentado anteriormente, obtém-se os somatórios das propriedades avaliadas nos pontos de controle i dos elementos e assumidas constantes ao longo de seu comprimento Δs_i , como mostra a Equação 4.1

$$err_{QM} = \left(\frac{1}{s_{sBF} + s_{pBF}} \right) \left[s_{sBF} \sum_{i=1}^{i_{BA}} \left(\frac{v_R(s_i) - \gamma(s_i)}{W_\infty} \right)^2 \Delta s_{s_j}^* + s_{pBF} \sum_{i=i_{BA}+1}^{2N} \left(\frac{v_R(s_i) - \gamma(s_i)}{W_\infty} \right)^2 \Delta s_{p_k}^* \right] \quad (4.1)$$

onde o subscrito j é o ponto correspondente da superfície de sucção $j = i_{BA} + 1 - i$ e o subscrito k é o ponto correspondente da superfície de pressão $k = i - i_{BA}$. E os comprimentos adimensionalizados são dados, respectivamente, por

$$\Delta s_{s_j}^* = \left(s_{s_{j+1}}^* - s_{s_{j-1}}^* \right) / 2 \quad \text{e}$$

$$\Delta s_{p_k}^* = \left(s_{p_{k+1}}^* - s_{p_{k-1}}^* \right) / 2$$

b) Desvio absoluto. É definido como a média da função $|(v_R(s) - \gamma(s))/W_\infty|$ no contorno do aerofólio, conforme mostrado a seguir

$$des_{ABS} = \frac{1}{C} \oint_C \left| \frac{v_R(s) - \gamma(s)}{W_\infty} \right| ds$$

Analogamente ao desenvolvimento feito para o erro quadrático médio, a discretização do contorno conduz ao resultado dado pela Equação 4.2,

$$des_{ABS} = \left(\frac{1}{s_{sBF} + s_{pBF}} \right) \left[s_{sBF} \sum_{i=1}^{i_{BA}} \left| \frac{v_R(s_i) - \gamma(s_i)}{W_\infty} \right| \Delta s_{s_j}^* + s_{pBF} \sum_{i=i_{BA}+1}^{2N} \left| \frac{v_R(s_i) - \gamma(s_i)}{W_\infty} \right| \Delta s_{p_k}^* \right] \quad (4.2)$$

c) Erro de convergência geométrica. Mede a distância média entre as geometrias obtidas em duas iterações sucessivas $(k-1)$ e k . O erro de convergência geométrica err_{CG} é definido pela Equação 4.3

$$err_{CG} = \sum_{i=0}^{2N+1} \sqrt{(x_i^k - x_i^{k-1})^2 + (y_i^k - y_i^{k-1})^2} / (2N + 2) \quad (4.3)$$

sendo que os pontos calculados para o bordo de fuga nas superfícies de sucção ($i=0$) e de pressão ($i=2N+1$) também são computados.

4.1.4 Distribuição de velocidade normal

No processo inverso pelo uso iterativo de uma análise direta, a análise da geometria do aerofólio ou cascata, inicial ou de uma iteração qualquer, normalmente resulta em uma distribuição de velocidade (ou de vorticidade) no contorno que não é igual àquela requerida. Logo, faz-se necessário obter uma estimativa melhorada da geometria do aerofólio.

Como parte do método de reconstrução do perfil, no método inverso de Murugesan e Raily (1969), uma distribuição de vorticidade adicional γ_A é imposta sobre o contorno com intensidade igual à diferença entre as velocidades prescrita v_R e calculada da análise pelo método de Martensen γ , ou seja,

$$\gamma_A(s) = v_R(s) - \gamma(s)$$

No entanto, além de tornar a velocidade tangente ao contorno igual à requerida, esse procedimento induz velocidade normal à superfície e o contorno deixa de ser uma linha de corrente do escoamento. Para que a geometria possa ser modificada conforme a inclinação do vetor de velocidade resultante, deve-se obter uma equação que possibilite o cálculo da distribuição de velocidade normal induzida pela folha adicional de vórtices sobre o contorno.

A função de corrente ψ_A para a distribuição de vorticidade adicional no contorno γ_A pode ser expressa por uma equação de função de corrente de Martensen, análoga à Equação 3.4, como segue:

$$\psi_A(x, y) = \phi' + \frac{1}{2\pi} \int_C F \gamma_A ds$$

A velocidade normal ao contorno é obtida pela diferenciação da função de corrente ψ_A com relação à coordenada tangencial s e desde que as derivadas tangenciais permanecem constantes ao atravessar o contorno resulta:

$$v_N(s) = \frac{\partial \psi_A}{\partial s} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \int_C F \gamma_A(s) ds$$

Assim, diferenciando-se o termo integral, com F dado pela Equação 3.5, e reescrevendo-se a equação resultante em função do parâmetro angular ϕ , dado pela Equação 3.16, obtém-se

$$v_N(\phi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\phi_m, \phi; t) \gamma_A(\phi) d\phi \quad (4.4)$$

onde, para uma cascata infinita de perfis idênticos,

$$H(\phi_m, \phi; t) = \frac{\pi}{t} \frac{x'_m \sinh\left[\frac{2\pi}{t}(x_m - x)\right] + y'_m \sinh\left[\frac{2\pi}{t}(y_m - y)\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(x_m - x)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_m - y)\right]}$$

e para um perfil isolado,

$$H(\phi_m, \phi; \infty) = \frac{x'_m(x_m - x) + y'_m(y_m - y)}{(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2}$$

Fazendo-se a discretização do contorno conforme Seção 3.2.1, a integral de contorno da Equação 4.4 pode ser avaliada pela regra trapezoidal com $2N$ pontos de controle igualmente espaçados em ϕ , sendo que para o m -ésimo ponto de controle obtém-se:

$$v_{Nm} = \sum_{n=1}^{2N} H_{mn} \gamma_{A_n}$$

onde define-se $v_{Nm} = v_N(\phi_m)/W_\infty$, $H_{mn} = H(\phi_m, \phi_n; t)/2N$ e $\gamma_{A_n} = \gamma_A(\phi_n)/W_\infty$.

O integrando na Equação 4.4 tem uma singularidade no ponto $\phi_n = \phi_m$ e a contribuição da integral numa região infinitesimal em torno deste ponto é nula conforme estudo de Murugesan e Raily (1969). De fato, o termo H_{mm} está associado à velocidade normal à superfície do corpo em m induzida pelo próprio elemento m de vorticidade constante que, conforme mostra a Figura 3.7, é nula quer o elemento seja reto ou curvo. Logo, $H_{mm} = 0$.

4.1.5 Integração do novo perfil

Calculada a distribuição de velocidade normal induzida pela folha de vórtices adicional procede-se ao ajuste da geometria. O novo contorno é obtido ao modificar-se a inclinação da geometria anterior de maneira que ela fique tangente ao vetor velocidade total ao longo do contorno. Esse procedimento é aplicado separadamente para as superfícies de sucção e de pressão a partir do ponto de estagnação frontal. E a integração da inclinação modificada dá origem a uma nova geometria.

Supõe-se que a distância entre dois pontos de controle consecutivos é dada por $(s_{sj} - s_{sj-1})$ e que a inclinação local do contorno altera-se de um valor igual à média de $dn/ds = v_N(s)/v_R(s)$ dos dois pontos. As novas coordenadas cartesianas (X_m, Y_m) do m -ésimo ponto de controle relativo à superfície de sucção são obtidas pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned}
X_m - X_{BA} &= x_m - x_{BA} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left[(s_{sj}^* - s_{sj-1}^*) s_{sBF} \left(\left. \frac{dn}{ds_s} \right|_j + \left. \frac{dn}{ds_s} \right|_{j-1} \right) \left. \frac{dy}{ds_s} \right|_j \right] \\
Y_m - Y_{BA} &= y_m - y_{BA} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left[(s_{sj}^* - s_{sj-1}^*) s_{sBF} \left(\left. \frac{dn}{ds_s} \right|_j + \left. \frac{dn}{ds_s} \right|_{j-1} \right) \left. \frac{dx}{ds_s} \right|_j \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

sendo que $m = 1, \dots, n_s$ e

$$\left. \frac{dy}{ds_s} \right|_j = - \left(\frac{dy}{d\phi} / \frac{ds}{d\phi} \right)_i, \quad \left. \frac{dx}{ds_s} \right|_j = - \left(\frac{dx}{d\phi} / \frac{ds}{d\phi} \right)_i \quad \text{e} \quad \left. \frac{dn}{ds_s} \right|_j = \left. \frac{dn}{ds} \right|_i = \frac{v_N(s_i)}{v_R(s_i)}$$

com $i = i_{BA} + 1 - j$.

Para a superfície de pressão as expressões são as mesmas, desde que as variáveis s_s e n_s sejam substituídas pelas variáveis s_p e n_p , respectivamente, e o cálculo do ponto de controle por $i = i_{BA} - 1 + j$. Apenas o sinal das derivadas seguintes é que se alteram:

$$\left. \frac{dy}{ds_p} \right|_j = \left(\frac{dy}{d\phi} / \frac{ds}{d\phi} \right)_i \quad \text{e} \quad \left. \frac{dx}{ds_p} \right|_j = \left(\frac{dx}{d\phi} / \frac{ds}{d\phi} \right)_i$$

As coordenadas do ponto de estagnação frontal (X_{BA}, Y_{BA}) e (x_{BA}, y_{BA}) podem ser assumidas coincidentes e a posição e a forma do novo perfil ficam completamente definidas.

4.1.6 Fechamento do perfil

O fechamento do perfil após a integração do contorno é uma condição essencial para a solução plenamente convergida no final do processo inverso, conforme Lewis (1991). Que a forma integrada do novo perfil é uma forma fechada, segundo Murugesan e Raily (1969), segue do fato de que o integrando à direita na Equação 4.5 é uma função unicamente avaliada formada

por funções de um único parâmetro, o comprimento ao longo do contorno s ; desse modo, a integração sobre um caminho fechado é nula, mesmo que seja feita separadamente sobre cada uma das superfícies complementares.

No entanto, durante o cálculo inverso, após a integração numérica do contorno das superfícies de sucção e de pressão separadamente, costuma ocorrer que os pontos do bordo de fuga obtidos em cada superfície não coincidem. Neste caso adota-se um critério de fechamento do perfil a cada iteração, conforme estratégia apresentada por Lewis (1991): calcula-se o ponto médio entre os bordos de fuga de cada superfície; este ponto ligado ao ponto de estagnação do bordo de ataque forma uma corda média; faz-se uma rotação de cada superfície em torno do bordo de ataque até que o bordo de fuga fique alinhado com a corda média obtida; faz-se um escalonamento de cada superfície de maneira que os bordos de fuga coincidam com o ponto médio calculado inicialmente.

4.1.7 Geometria dos bordos de ataque e de fuga

De acordo com o procedimento inverso exposto até aqui a nova geometria a cada iteração resulta deformada nos bordos de ataque e de fuga. Este erro deve-se, principalmente, à avaliação numérica da distribuição de velocidade normal próximo aos pontos de estagnação nos bordos de ataque e de fuga que conduz a valores não nulos e normalmente elevados para dn/ds e, conseqüentemente, a uma mudança local exagerada na inclinação da superfície.

De fato, Lewis (1991) afirma que as regiões próximas aos pontos de estagnação frontal e traseiro são muito vulneráveis para a aplicação do método de vorticidade distribuída na superfície. Devido à distribuição de velocidade prescrita variar rapidamente nessas regiões onde a velocidade da corrente livre W_∞ é quase normal à superfície requerida, a solução é menos estável se os elementos adjacentes aos pontos de estagnação permanecem livres para se ajustarem entre as iterações. Assim, podem ser obtidas soluções aberrantes do tipo indicado na Figura 4-2 em que aparecem reentrâncias ou saliências ou ainda cruzamento entre as superfícies de sucção e de pressão em forma de “oito”. Nesta figura apenas a primeira forma está correta.

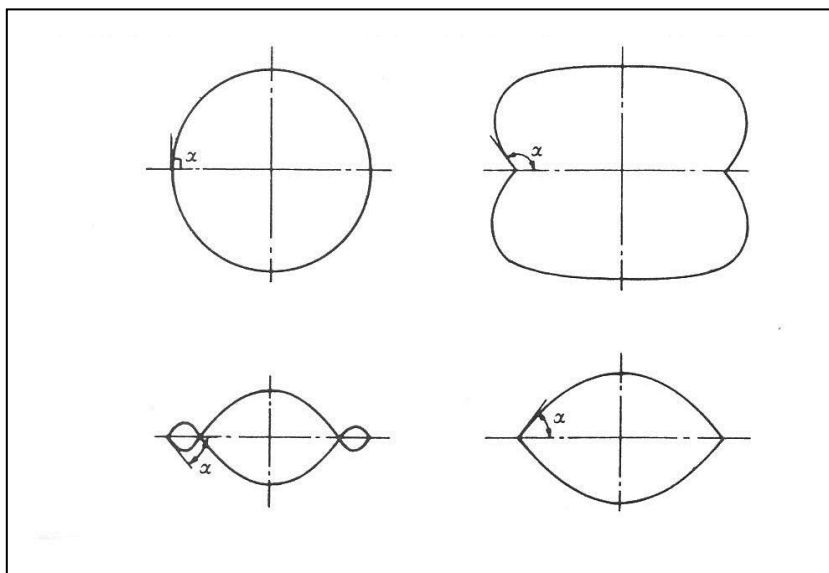


Figura 4-2 Soluções possíveis no método inverso se o ângulo α dos elementos adjacentes aos pontos de estagnação não é restringido (Lewis, 1991, Fig.7.10)

Para solucionar esse problema Murugesan e Raily (1969) recomendam que a mudança na inclinação seja trabalhada a partir dos pontos vizinhos por interpolação, enquanto que Lewis (1991) recomenda que a inclinação dos elementos adjacentes aos pontos de estagnação nos bordos de ataque e de fuga fique restrita ao ângulo correto predeterminado.

Esta última recomendação parece interessante quando se está testando a programação do método inverso com exemplos conhecidos de geometria de aerofólio e distribuição de velocidade associada. Mas, em um caso genérico parece ser muito artificial forçar um determinado ângulo de inclinação para os elementos próximos aos pontos de estagnação.

A interpolação da mudança na inclinação próxima aos pontos de estagnação, na verdade, constitui-se em uma correção da própria distribuição de velocidade normal calculada, a qual deve-se à distribuição adicional de vorticidade imposta sobre o contorno. Esta é uma forma indireta de correção da geometria dos bordos do aerofólio e difícil de ser aplicada, pois a geometria é muito sensível a qualquer variação na velocidade. Diversas possibilidades de interpolação dos valores de velocidade normal foram pesquisadas: linear, por *spline* cúbica, por uma única função no bordo de ataque ou funções independentes nas superfícies de sucção e de pressão, etc., porém, nenhuma delas mostrou-se adequada. Finalmente, verificou-se que resultados razoáveis são obtidos

simplesmente zerando-se os valores exorbitantes de velocidade normal, próximos aos pontos de estagnação e ao bordo de fuga, o que se constitui em uma contribuição deste trabalho.

No cálculo inverso de aerofólio simétrico, com bordo de fuga agudo, alinhado com o escoamento uniforme é suficiente apenas corrigir-se a geometria obtida, sem que qualquer alteração tenha sido feita na distribuição da velocidade normal calculada, por meio do ajuste de um arco circular no bordo de ataque e de segmentos retos no bordo de fuga. Exemplos típicos são apresentados adiante.

No entanto, para o problema inverso genérico, de aerofólio ou cascata de aerofólios com arqueamento ou em um escoamento inclinado, verifica-se a necessidade de zerar a velocidade normal próximo aos pontos de estagnação ou ao bordo de fuga sempre que apresente valores exorbitantes. Mesmo assim, à medida que as iterações são efetuadas, nota-se uma deformação do bordo de ataque próxima ao ponto de estagnação, inicialmente suave, que vai aumentando, transforma-se em uma reentrância ou “dente” e, por fim, desfaz-se automaticamente de maneira imprevisível. Assim, opta-se por antecipar esta correção da geometria do bordo de ataque por meio de interpolação por *spline* cúbica em ϕ .

Quando necessário, além da correção da geometria do bordo de ataque, faz-se também uma suavização de todo o contorno do aerofólio conforme estratégia de Wilkinson (1967) apresentada na Subseção 3.2.2(c) sobre tratamento dos dados de entrada. Esta estratégia consiste do ajuste por mínimos quadrados de uma parábola através de e a cada cinco pontos de controle para suavizar o contorno e possibilitar uma melhor avaliação das derivadas pela técnica de diferenças finitas.

Diante dessas recomendações e dos estudos feitos neste trabalho, adota-se dois procedimentos complementares: os valores exorbitantes de velocidade normal próximo aos pontos de estagnação ou ao ponto do bordo de fuga são zerados; e, quando necessário, faz-se a correção da geometria obtida próximo aos bordos do aerofólio e a suavização do contorno por mínimos quadrados.

Além disso, com o passar das iterações do procedimento inverso ocorre um deslocamento dos pontos de controle da superfície de pressão para a superfície de sucção, deixando também os bordos com poucos pontos de controle. Isso prejudica a precisão do método de vorticidade na superfície uma vez que se perde a correspondência entre pontos opostos nas duas superfícies e a

definição dos bordos também fica prejudicada, assim como a imposição da condição de Kutta no bordo de fuga. Procede-se, então, a uma redistribuição dos pontos de controle em torno do contorno.

4.1.8 Geometria inicial

O método inverso em estudo é um processo iterativo e, portanto, faz-se necessário especificar uma geometria para iniciar os cálculos. A geometria inicial pode ser um perfil qualquer com um escalonamento também qualquer, conforme Murugesan e Raily (1969), embora seja comum partir-se de um perfil sistematizado como um NACA série 65 padrão com distribuição de espessura especificada arbitrariamente, conforme Schwering (1971).

Nos exemplos de cálculos deste trabalho, a geometria inicial adotada é uma elipse alongada na direção do escoamento médio equivalente. Assim, pode-se verificar se as diferentes porções do contorno, tanto o bordo de ataque normalmente arredondado quanto o bordo de fuga muitas vezes agudo ou cúspide, evoluem bem durante o processo iterativo.

O caso geral da elipse com centro $\hat{O}$ e eixos paralelos aos eixos coordenados, conforme Figura 4.3, é equacionado como

$$\frac{\hat{x}^2}{k_x^2} + \frac{\hat{y}^2}{k_y^2} = 1$$

podendo ser reescrita como

$$y = \hat{y} = \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{k_x^2 - \hat{x}^2} \quad (4.6)$$

sendo que, o sinal positivo é utilizado quando $\phi \leq \pi$ e o negativo, quando $\phi > \pi$. O parâmetro $\omega = k_x/k_y$ é a razão entre os semieixos da elipse nas direções x e y . Logo, a ordenada é obtida a partir da abscissa correspondente e em função dos parâmetros ω e k_x da elipse.

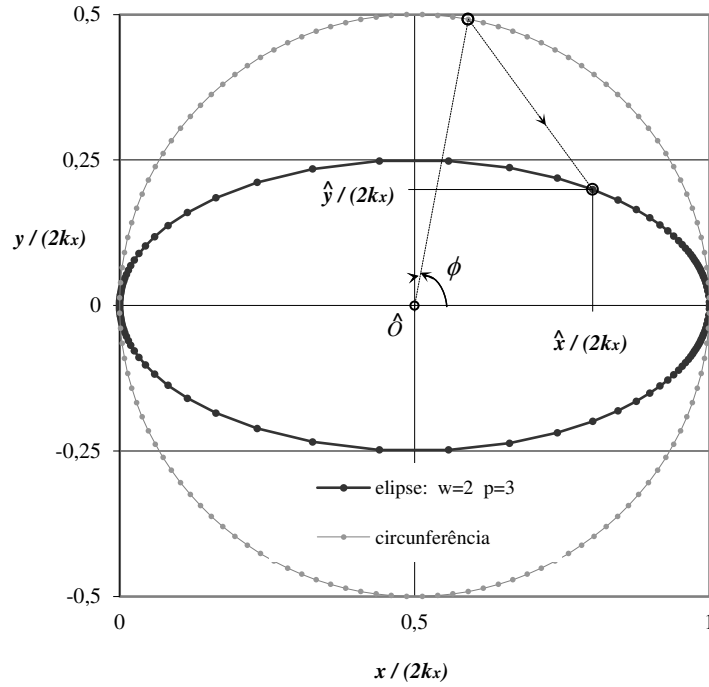


Figura 4.3 Geometria inicial elíptica adotada nos exemplos de aplicação do método inverso

A transformação elíptica, como apresentado na Subseção 3.2.2(a), desloca os pontos sobre o contorno, igualmente espaçados em ϕ , em direção aos bordos de ataque e de fuga comparada à transformação circular. A abscissa é calculada em função do ângulo central ϕ e dos parâmetros $(\omega^p - 1)$ e k_x pela transformação dada pela Equação 3.24 e transcrita a seguir

$$x = k_x + \hat{x} = k_x \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 \tan^2 \phi}} \right) \quad (4.7)$$

sendo que, emprega-se o sinal positivo para $\phi \leq \pi/2$ ou $\phi \geq 3\pi/2$ e o sinal negativo para $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$.

E o parâmetro δ é dado pela expressão seguinte

$$\delta = \begin{cases} \left[1 + \frac{\phi}{\pi} (\omega^p - 1) \right]^{-1} , & \phi \leq \pi \\ \left[1 + \frac{2\pi - \phi}{\pi} (\omega^p - 1) \right]^{-1} , & \phi > \pi \end{cases} \quad (p > 1)$$

onde ω é a razão entre os eixos maior e menor da elipse, logo $\omega \geq 1$, ou seja, as Equações 3.25 e 3.24 combinadas aplicam-se à elipse com o eixo maior na direção x . A Figura 4.3 apresenta a elipse de parâmetros $\omega = 2$ e $p = 3$ com $2N = 120$ pontos de controle.

4.2 Aplicação do método inverso – Cilindro infinito circular

Nos capítulos seguintes são apresentadas algumas aplicações do método inverso de aerofólio isolado ou em cascata que emprega iterativamente o método de análise de vorticidade na superfície ou método de Martensen, conforme exposto nas seções anteriores.

O caso mais simples de um cilindro infinito circular é apresentado a seguir.

Cilindro infinito circular. No escoamento potencial o cilindro infinito de raio r_0 pode ser modelado por um *doublet* de intensidade $\mu = 2\pi W_\infty r_0^2$ em um escoamento uniforme de velocidade W_∞ e com inclinação $\beta_\infty = \arctan(V_\infty/U_\infty)$, estando o eixo do *doublet* a uma inclinação $(\beta_\infty + \pi)$ em relação ao eixo real x (HOUGHTON e CARRUTHERS, 1982). A solução exata para a velocidade na superfície é dada por

$$v_s = -2W_\infty \sin(\theta_c - \beta_\infty)$$

onde θ_c é o ângulo com vértice no centro do cilindro medido a partir do diâmetro paralelo ao eixo real no sentido anti-horário.

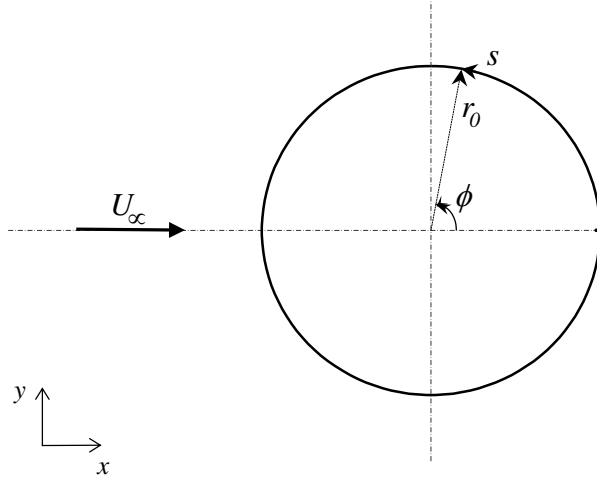


Figura 4.4 Cilindro infinito circular em escoamento potencial uniforme

No caso do cálculo inverso de um cilindro num escoamento paralelo ao eixo das abscissas ($\beta_\infty = 0$ e $\theta_c = \phi$) a velocidade requerida na superfície em função da coordenada curvilínea s , lembrando-se que a corda axial a corresponde ao dobro do raio do cilindro e que o ângulo θ_c coincide com o ângulo ϕ medido a partir do ponto de estagnação no bordo de fuga, pode ser escrita como

$$v_R(s) = -2U_\infty \sin(2s/a) \quad (4.8)$$

sendo que, o sinal negativo indica que o sentido de v_R não concorda com o sentido positivo de s ou de θ_c .

O método inverso de vorticidade na superfície com esta distribuição de velocidade prescrita no contorno resulta na geometria apresentada na Figura 4.5. Neste exemplo são utilizados $2N = 120$ pontos de controle.

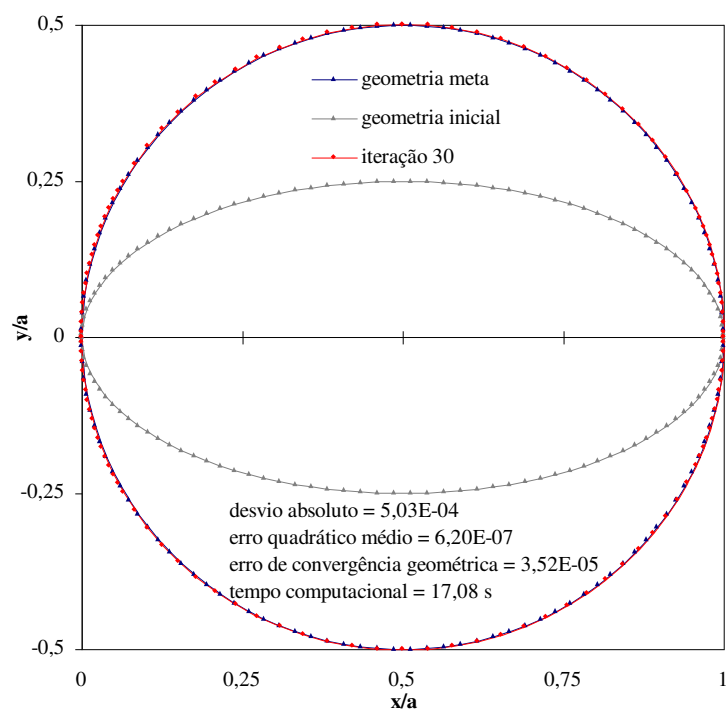


Figura 4.5 Cilindro infinito circular com $2N = 120$ pontos de controle

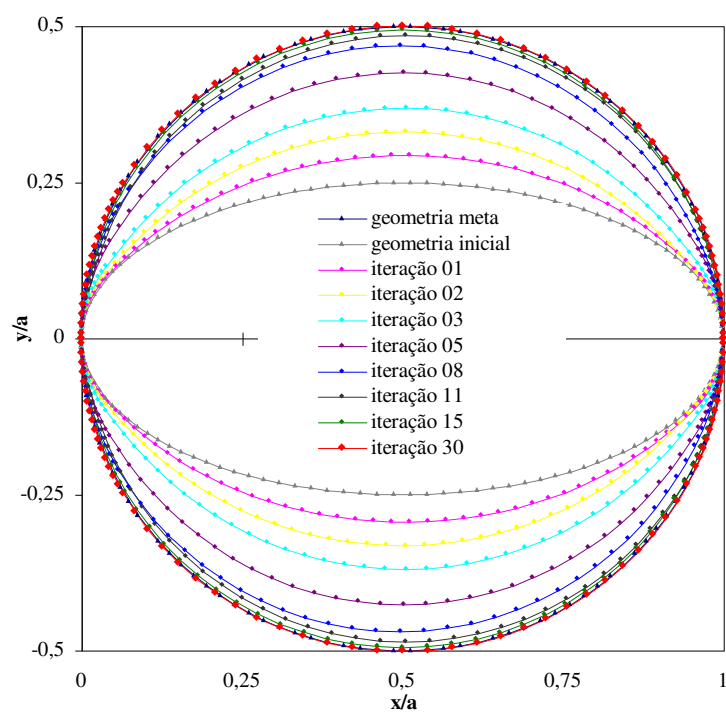


Figura 4.6 Evolução da geometria do cálculo inverso do cilindro circular

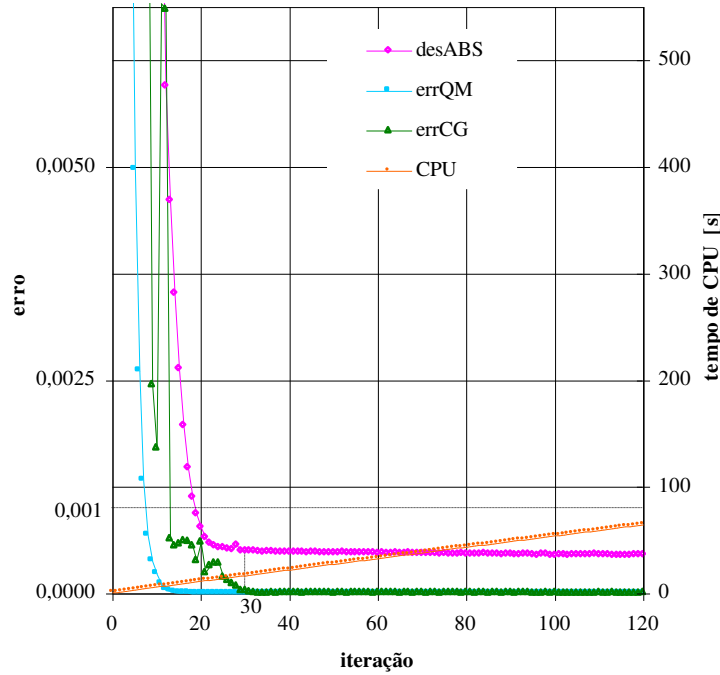


Figura 4.7 Erros durante o cálculo inverso de um cilindro infinito circular ($2N = 120$)

Na Figura 4.6 são apresentadas ainda algumas geometrias calculadas em iterações intermediárias, além da geometria inicial elíptica e da geometria do cilindro circular, ou seja, geometria meta, para uma visualização da convergência do processo de cálculo.

No caso do cálculo inverso do cilindro infinito circular com $2N = 120$ pontos de controle, com apenas 19 iterações o desvio absoluto da distribuição de velocidade é da ordem de 0,001, no entanto, nota-se que a convergência do método inverso ocorre com aproximadamente 30 iterações, quando da estabilização do erro de convergência geométrica, conforme se observa na Figura 4.7, sendo o desvio absoluto ainda menor. Por outro lado, com $2N = 80$ pontos de controle, embora o erro de convergência geométrica estabilize-se com 30 iterações também, somente com 44 iterações o desvio absoluto torna-se menor que 10^{-3} . E com $2N = 40$ pontos de controle, embora a convergência geométrica seja obtida com apenas 24 iterações, o desvio absoluto é da ordem de $3 \cdot 10^{-3}$ e a geometria não é tão próxima da geometria meta como nos casos anteriores, como se pode observar na Figura 4.8 e na Figura 4.9, respectivamente.

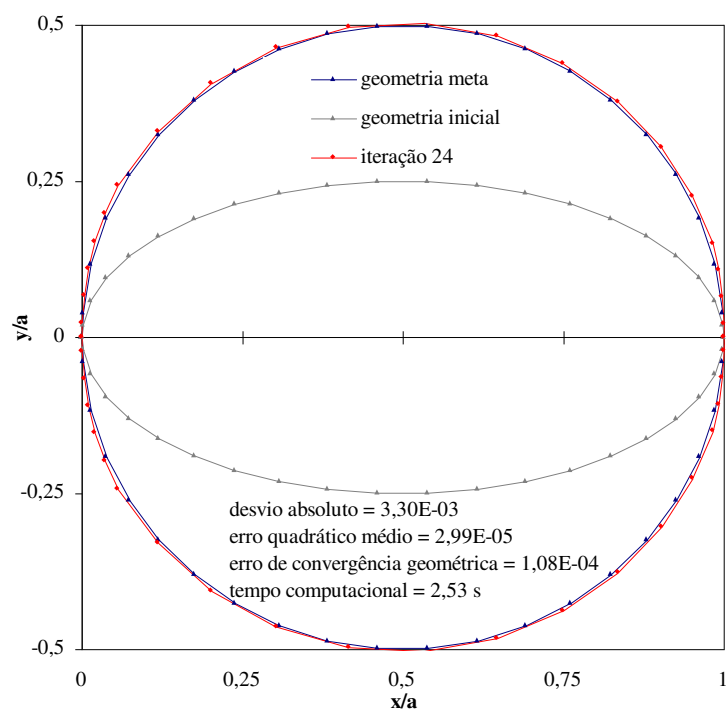


Figura 4.8 Cilindro infinito circular com $2N = 40$ pontos de controle

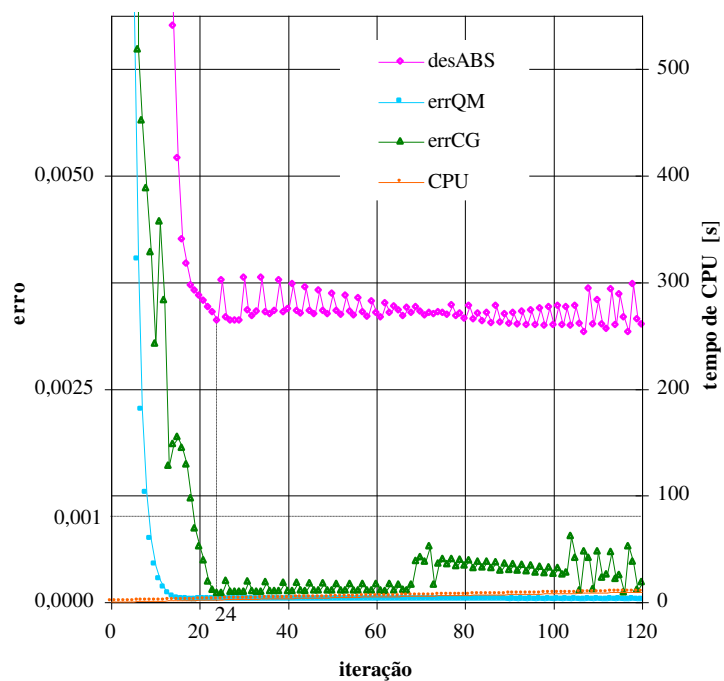


Figura 4.9 Erros durante o cálculo inverso de um cilindro infinito circular ($2N = 40$)

Conforme exposto anteriormente, devido à avaliação numérica da distribuição de velocidade normal resultar em valores exorbitantes próximos aos pontos de estagnação, faz-se necessário corrigir a geometria dos bordos de ataque e de fuga. Pode-se observar a geometria calculada com fechamento do perfil na Figura 4.10 e as correspondentes distribuições de velocidade normal na Figura 4.11 e da razão v_N/v_R na Figura 4.12 para $2N = 120$ pontos de controle.

Quando o problema é simétrico, com bordo arredondado e a posição do ponto de estagnação bem definida, a interpolação com arco circular parece ser uma solução bastante natural. Assim sendo, opta-se por corrigir as geometrias dos bordos de ataque e de fuga a cada iteração com um arco circular tangente à superfície no ponto de abscissa mínima ou máxima, respectivamente, como no caso do aerofólio de Joukowski simétrico adiante, ou no ponto de inflexão próximo aos bordos, como acontece neste caso do cilindro circular. A Figura 4.10 mostra esta correção dos bordos para a primeira iteração.

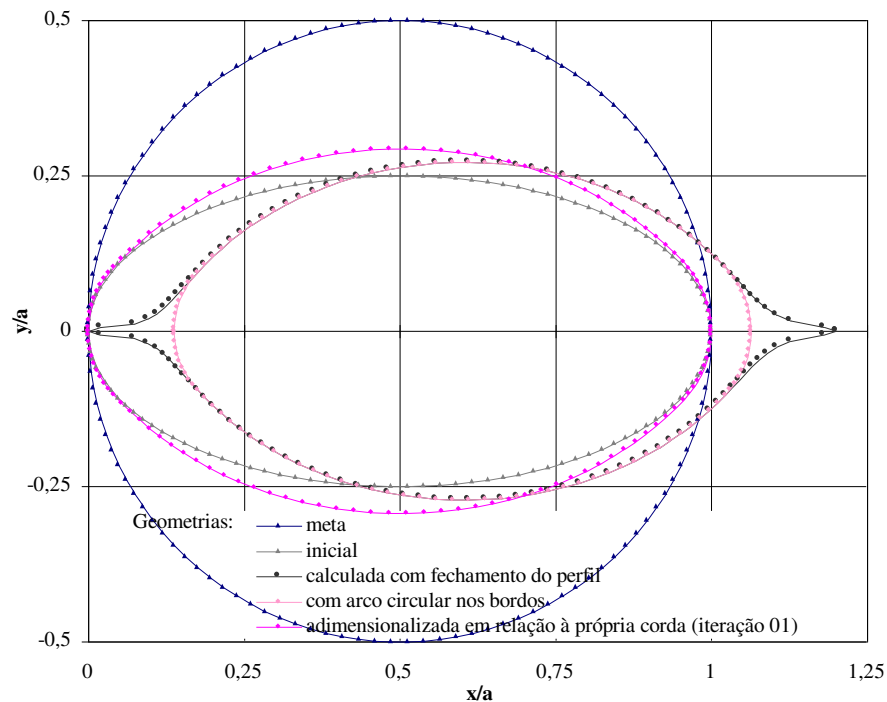


Figura 4.10 Correção dos bordos de ataque e de fuga com arcos circulares ($2N = 120$)

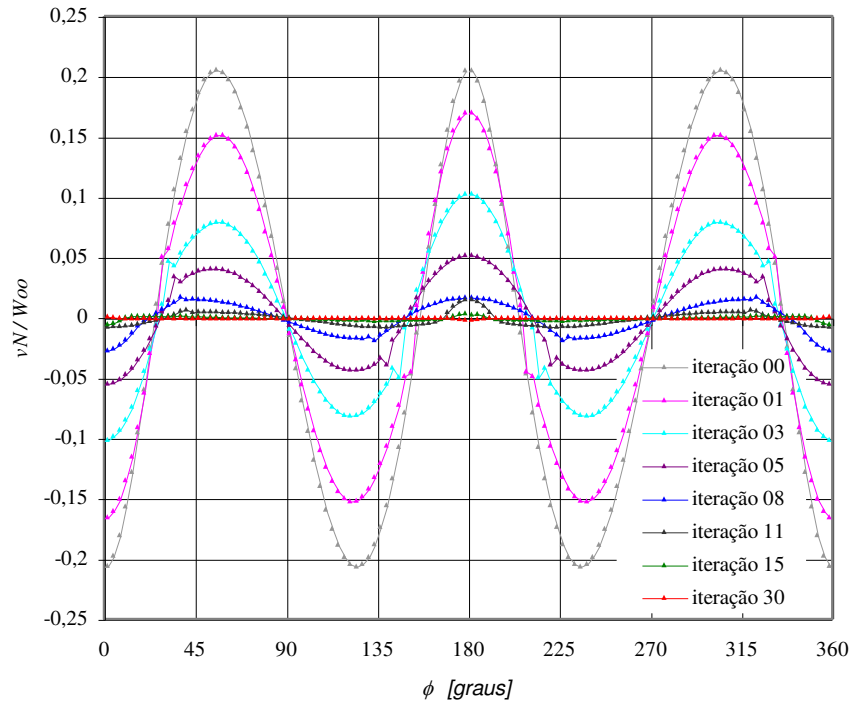


Figura 4.11 Velocidade normal calculada no cálculo inverso do cilindro circular

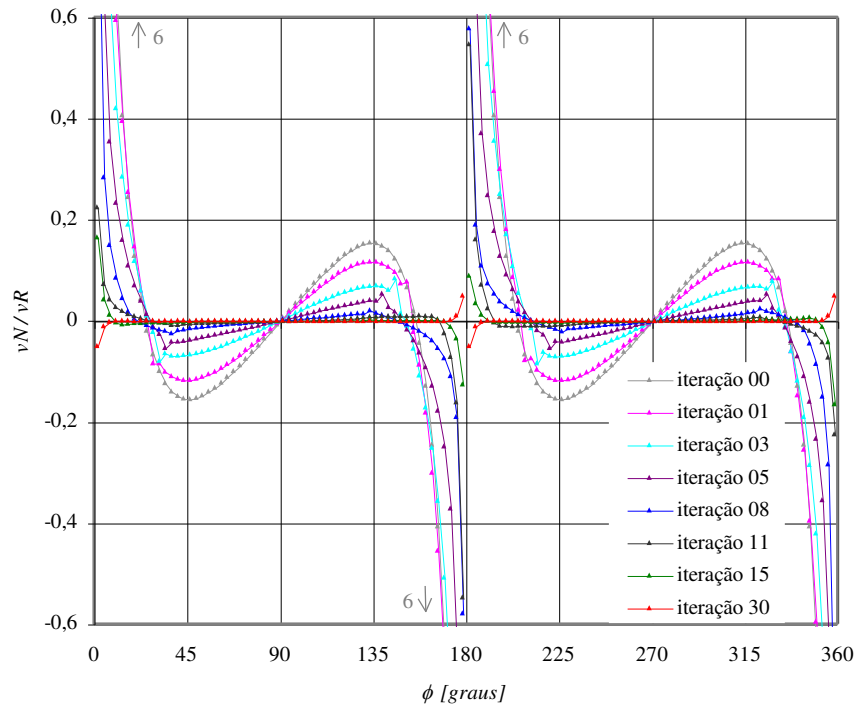


Figura 4.12 Razão v_N/v_R no cálculo inverso do cilindro circular ($2N = 120$)

5 MÉTODO INVERSO - AEROFÓLIO DE JOUKOWSKI

Inicialmente, uma solução exata ou proveniente da análise de um aerofólio isolado conhecido é empregada como distribuição de velocidade prescrita para o cálculo inverso, de maneira que tanto a geometria quanto a distribuição de velocidade que são obtidas pelo programa numérico possam ser checadas. A solução exata do aerofólio de Joukowski é bastante indicada para este propósito.

De fato, a transformação de Kutta-Joukowski é a mais simples de todas as transformações que produzem contornos em forma de aerofólio. Embora as seções obtidas apresentem várias desvantagens como aerofólios práticos, essa transformação é útil quando é necessário gerar um perfil e obter distribuições teóricas para comparação dos resultados obtidos com outros métodos em desenvolvimento (HOUGHTON e CARRUTHERS, 1982).

5.1 Aerofólio de Joukowski simétrico analítico

O aerofólio de Joukowski no plano transformado ζ é obtido pela transformação conformal de um cilindro circular infinito no plano z por meio da função de transformação de Joukowski, dada pela Equação 5.1. Se o centro $C(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ do círculo está deslocado da origem apenas na direção do eixo real ($\varepsilon_1 \neq 0; \varepsilon_2 = 0$) e se a relação entre o raio do círculo r_0 e o parâmetro b da função de transformação é dada por $r_0 = b + \varepsilon_1$, então o aerofólio obtido é simétrico com bordo de fuga cúspide.

$$\zeta = f(z) = z + \frac{b^2}{z} \quad (5.1)$$

A Figura 5-1 apresenta esta transformação geométrica de um círculo no plano z em um aerofólio de Joukowski simétrico no plano ζ , cuja forma adimensionalizada em relação à corda depende apenas da relação (b/r_0) .

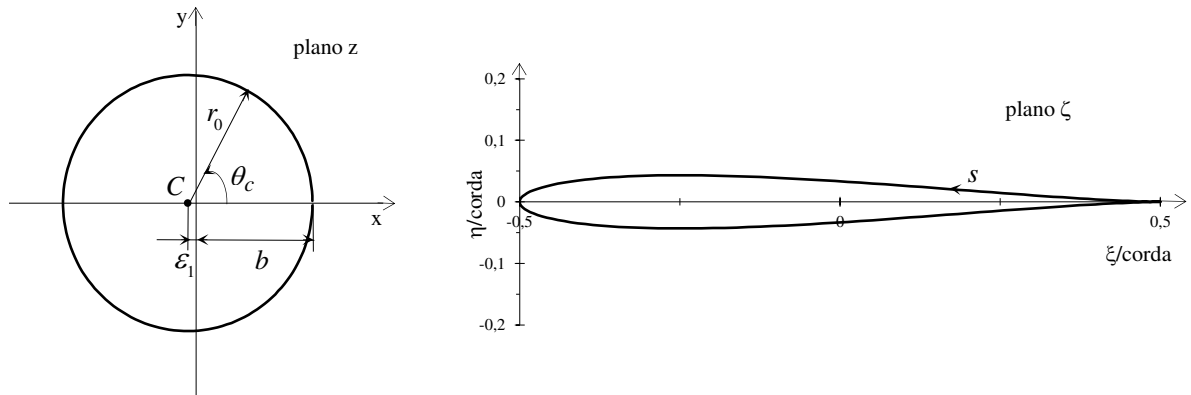


Figura 5-1 Transformação de Joukowski $\zeta = z + b^2/z$ gerando um aerofólio simétrico

As coordenadas polares do círculo no plano original são dadas por

$$r/r_0 = \sqrt{(\cos \theta_c + b/r_0 - 1)^2 + \sin^2 \theta_c}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c + b/r_0 - 1}\right)$$

e as coordenadas cartesianas do ponto ζ correspondente sobre o aerofólio de Joukowski simétrico são obtidas por

$$\xi = \left[1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2\right] (r_0 \cos \theta_c - \epsilon_1)$$

$$\eta = \left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right] (r_0 \sin \theta_c)$$

A velocidade do escoamento sobre um aerofólio de Joukowski qualquer é escrita como

$$v_s = \frac{2W_\infty \sin(\theta_c - \beta_\infty) + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{b/r_0}{r/r_0}\right)^2 \cos 2\theta\right]^2 + \left(\frac{b/r_0}{r/r_0}\right)^4 \sin^2 2\theta}} \quad (5.2)$$

Sendo que para um aerofólio de Joukowski simétrico tradicional (com bordo de fuga cúspide) esta velocidade depende apenas da relação (b/r_0) porque neste caso a circulação de Joukowski completa Γ é dada por

$$\Gamma = 4\pi r_0 W_\infty \sin \beta_\infty$$

E o numerador da Equação 5.2 torna-se $2U_\infty \sin \theta_c$ se o escoamento for paralelo ao eixo real ($\beta_\infty = 0$), ou seja, alinhado com o aerofólio simétrico e, portanto, sem sustentação.

A velocidade exata sobre o ponto de coordenadas cartesianas (ξ, η) ou de coordenada curvilínea s sobre a superfície do aerofólio é expressa em termos da variável angular θ_c do ponto correspondente sobre o círculo no plano z . O ângulo θ_c pode ser adotado como sendo o parâmetro angular ϕ presente nas equações do método de vorticidade na superfície. A coordenada curvilínea s contorna o aerofólio totalmente a partir do ponto de estagnação no bordo de fuga à medida que ϕ varia de 0 a 2π . De fato, no intervalo $0 \leq \theta_c \leq \pi$ a coordenada s descreve o contorno da superfície superior desde o ponto de estagnação no bordo de fuga até o ponto de estagnação no bordo de ataque, e no intervalo $\pi \leq \theta_c \leq 2\pi$ a coordenada curvilínea s descreve a superfície inferior até o bordo de fuga.

5.1.1 Cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico alinhado com o escoamento

O emprego de aerofólio simétrico alinhado com o escoamento permite avaliar o funcionamento do processo iterativo propriamente, pois a variação da geometria deve ocorrer de

forma simétrica em relação à corda do aerofólio que permanece na direção do escoamento, sendo que as posições dos pontos de estagnação nos bordos de ataque e de fuga são bem definidas.

Para o cálculo de um aerofólio de Joukowski simétrico pelo método inverso de vorticidade na superfície, em $2N$ pontos igualmente espaçados em θ_c são calculados os pontos correspondentes sobre o aerofólio (ξ, η) . Avalia-se a coordenada curvilínea s de cada ponto, ou ainda as coordenadas curvilíneas complementares s_s e s_p tomadas sobre as superfícies superior (“de sucção”) e inferior (“de pressão”), respectivamente, a partir do ponto de estagnação do bordo de ataque. Calcula-se, então, a velocidade exata a ser prescrita v_R , dada pela Equação 5.2 aplicada ao caso do aerofólio de Joukowski simétrico. Desta maneira os N pares (s, v_R) , ou (ϕ, v_R) , sobre cada uma das superfícies podem ser utilizados para interpolar o valor de velocidade requerida nos pontos de controle da geometria obtida em cada iteração.

O cálculo pelo método inverso de vorticidade na superfície com a distribuição de velocidade prescrita no contorno igual à do aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ e com $2N = 480$ pontos de controle resulta na geometria apresentada na Figura 5-3. A geometria final é obtida na iteração 114 quando o desvio absoluto torna-se mínimo e igual a $1,76 \cdot 10^{-3}$, como se pode observar no gráfico da Figura 5-4. A distribuição de velocidade prescrita $v_R(s)$ e os valores interpolados na iteração 114 são apresentados na Figura 5-2, e algumas geometrias intermediárias são apresentadas na Figura 5-5.

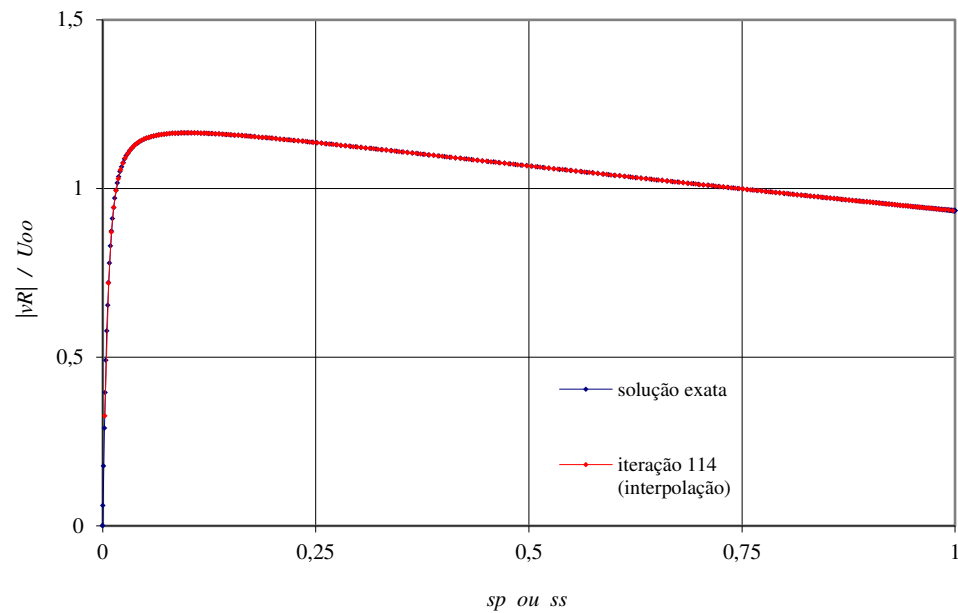


Figura 5-2 Distribuição de velocidade analítica na superfície de um aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ em escoamento paralelo à corda

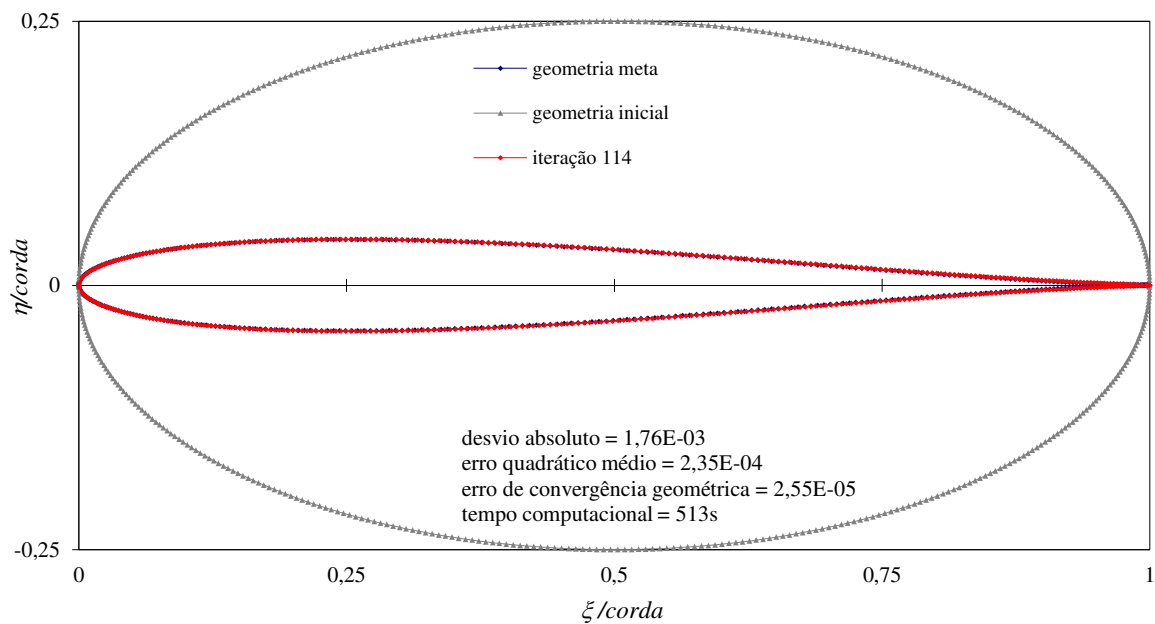


Figura 5-3 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso ($2N = 480$)

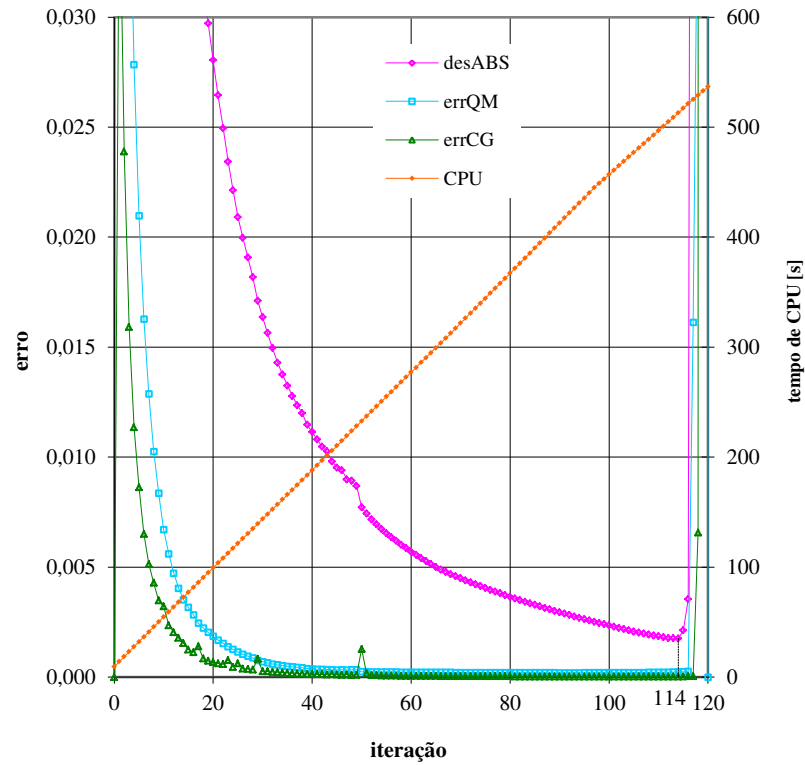


Figura 5-4 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 480$)

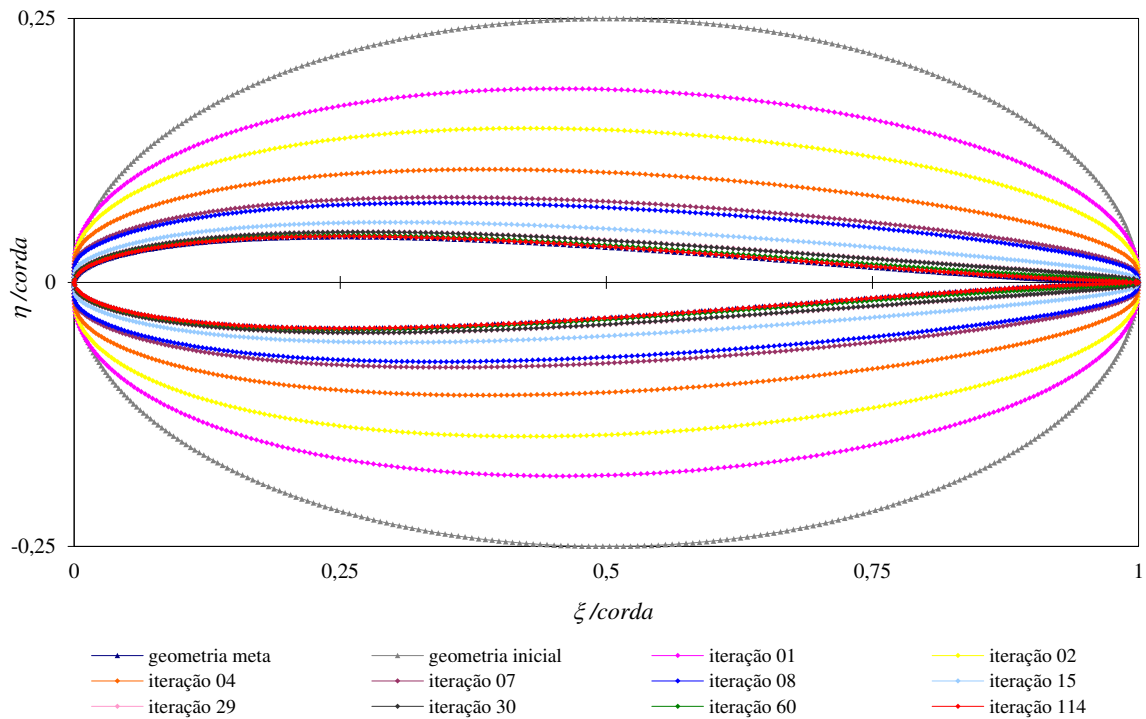


Figura 5-5 Evolução da geometria no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico

Conforme se observa na Figura 5-4, em torno de 30 iterações o erro de convergência geométrica já é pequeno, ou seja, a geometria varia muito pouco de uma iteração para a seguinte, tanto que as geometrias das iterações 29 e 30 praticamente coincidem visualmente na Figura 5-8. No entanto, nesta iteração a distribuição de velocidade no contorno ainda está distante do valor prescrito, principalmente na região próxima ao bordo de fuga, conforme indica o gráfico da Figura 5-12, o valor do desvio absoluto na Figura 5-4 e também a comparação com a geometria meta na Figura 5-5.

A geometria da iteração 114 é definida como sendo a geometria final porque apresenta o menor desvio absoluto para a distribuição de velocidade. Nas iterações seguintes ocorre instabilidade no cálculo, provavelmente, devido à presença de poucos pontos de controle nas regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga do aerofólio.

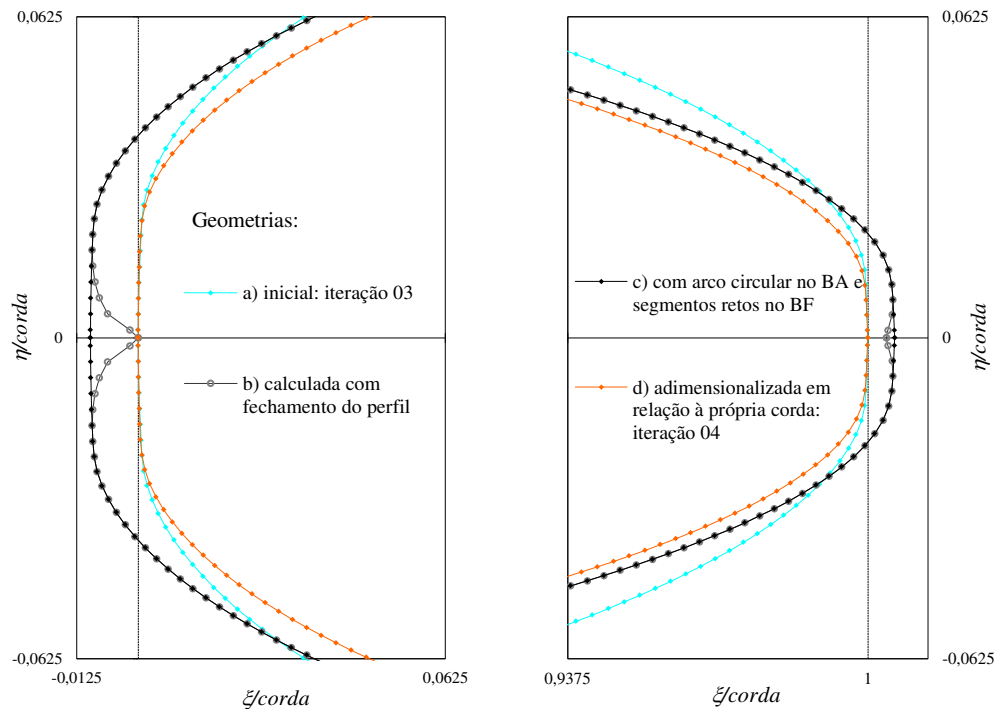


Figura 5-6 Ajustes nos BA e BF na iteração 04 - aerofólio de Joukowski simétrico

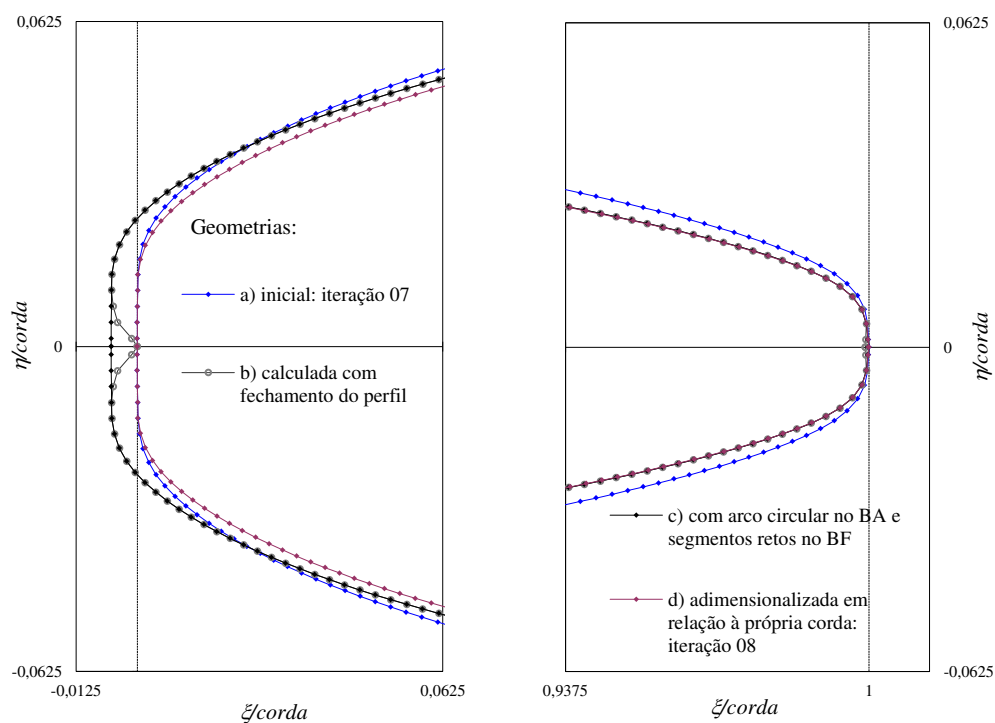


Figura 5-7 Ajustes nos BA e BF na iteração 08 - aerofólio de Joukowski simétrico

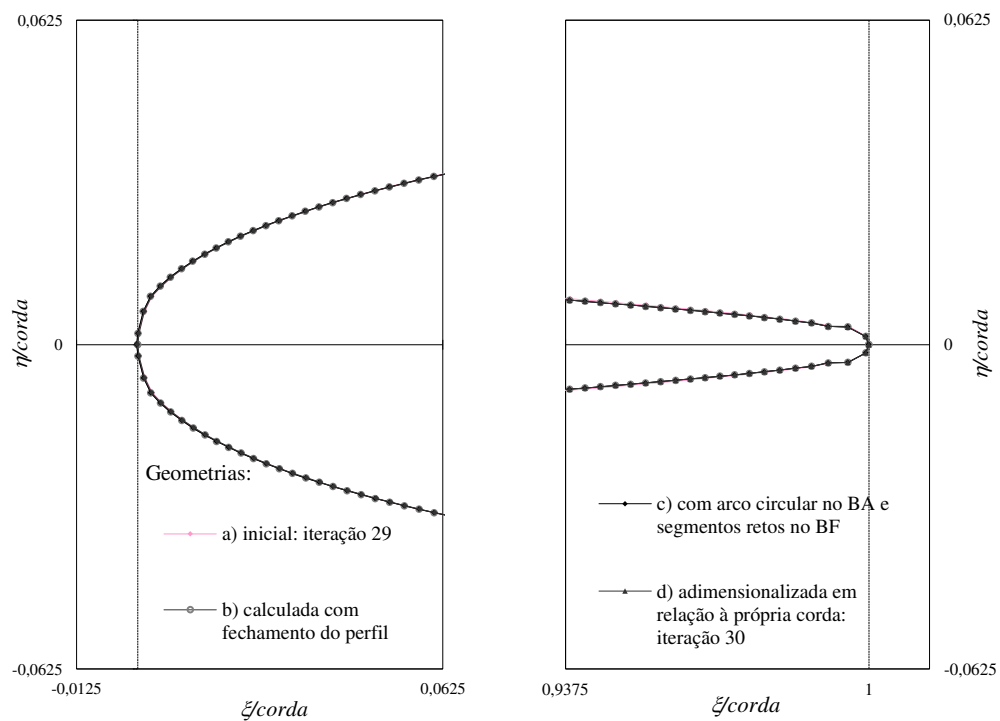


Figura 5-8 Ajustes nos BA e BF na iteração 30 - aerofólio de Joukowski simétrico

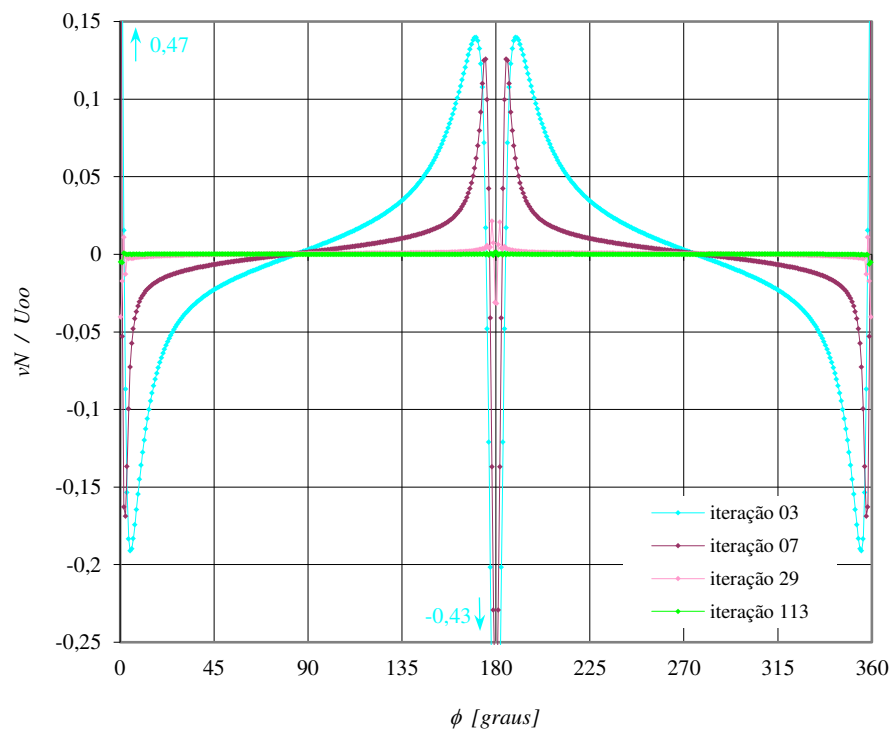


Figura 5-9 Velocidade normal calculada nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico

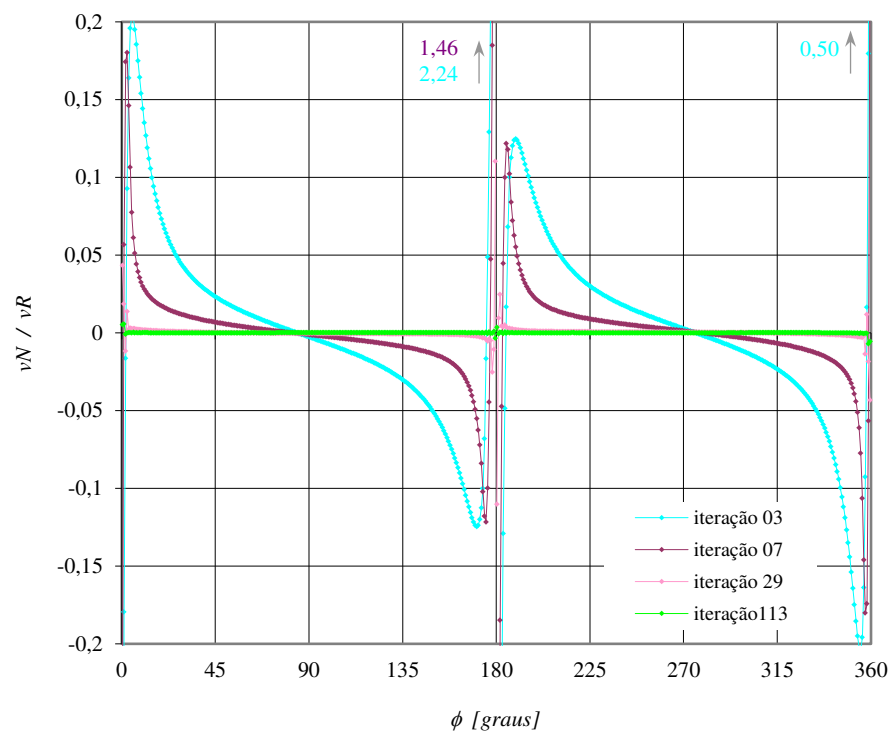


Figura 5-10 Razão v_N / v_R calculada - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 480$)

Nos bordos de ataque e de fuga são feitos ajustes na geometria a cada iteração, conforme apresentado na Figura 5-6, na Figura 5-7 e na Figura 5-8 para as iterações 4, 8 e 30, respectivamente. Para o aerofólio simétrico utiliza-se arco circular para o bordo de ataque arredondado e segmentos retos para o bordo de fuga cúspide. Para as iterações 3, 7 e 29 as velocidades normais sobre as superfícies de sucção ou de pressão das respectivas geometrias são apresentadas na Figura 5-9, enquanto que os valores de v_N/v_R utilizados no cálculo das geometrias imediatamente seguintes são apresentados na Figura 5-10.

Observa-se que esses ajustes na geometria fazem-se necessários nas primeiras iterações do procedimento inverso e devem-se, principalmente, aos valores altos, em módulo, da distribuição de velocidade normal calculada numericamente para a geometria da iteração anterior próximo aos bordos do aerofólio. Na região do bordo de ataque há grande variação na distribuição de velocidade requerida que desacelera rapidamente à medida que se aproxima do ponto de estagnação frontal da geometria meta; enquanto que, a variação da distribuição de velocidade calculada é mais suave no bordo de ataque para as geometrias mais rombudas das primeiras iterações. Na região do bordo de fuga cúspide da geometria meta a distribuição de velocidade requerida varia pouco até o ponto do bordo de fuga; no entanto, a distribuição de velocidade calculada para as geometrias das primeiras iterações com bordo de fuga ainda arredondado ou agudo varia significativamente na direção de um ponto de estagnação. Assim, nas regiões dos bordos do aerofólio é grande a diferença entre a distribuição de velocidade calculada pela análise da geometria em estudo e a distribuição de velocidade requerida do perfil meta. Logo, a distribuição adicional de vorticidade imposta sobre o perfil em estudo apresenta valores maiores nessas regiões e, conseqüentemente, induz uma distribuição de velocidade normal calculada de valores altos também, visto que recebe forte influência da distribuição de vorticidade dos elementos adjacentes. Além disso, principalmente no bordo de ataque, a razão entre essa velocidade normal e a velocidade requerida apresenta valores ainda mais altos, em módulo, devido aos valores pequenos da velocidade requerida próximo ao ponto de estagnação. Dessa maneira, no cálculo da nova geometria aparecem variações abruptas na inclinação dos elementos e reentrâncias na geometria dos bordos do perfil.

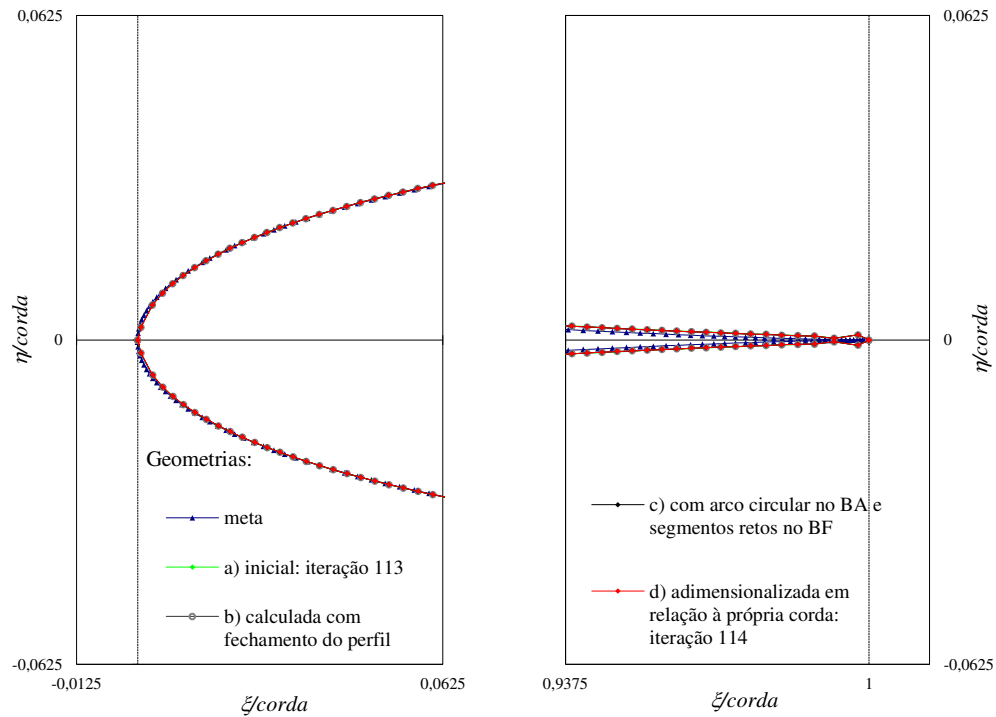


Figura 5-11 Ajustes nos BA e BF na iteração 114 - aerofólio de Joukowski simétrico

Para o caso do aerofólio simétrico projetado pelo método de vorticidade na superfície com $2N = 480$ pontos de controle e distribuição de velocidade prescrita igual à do aerofólio de Joukowski, os detalhes da geometria final nos bordos de ataque e de fuga são mostrados na Figura 5-11. As distribuições de velocidade tangente às superfícies de sucção ou de pressão obtidas nas iterações 4, 8 e 30, assim como aquela associada à geometria final da iteração 114, são apresentadas na Figura 5-12. Tanto a velocidade quanto a geometria podem ser comparadas com aquelas exatas nas respectivas figuras.

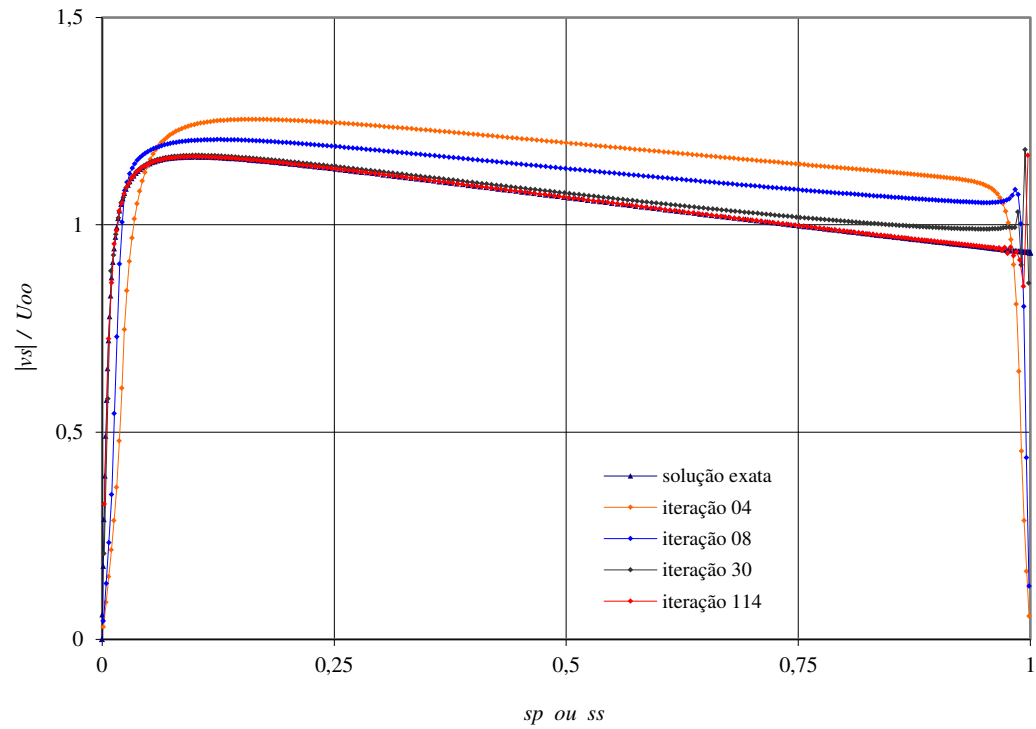


Figura 5-12 Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski ($2N = 480$)

No estudo feito nos parágrafos anteriores o número de pontos de controle adotado na discretização do contorno do aerofólio é $2N = 480$ com base nos resultados obtidos quando este número varia de 80 a 520 conforme indica a Figura 5-13 a seguir.

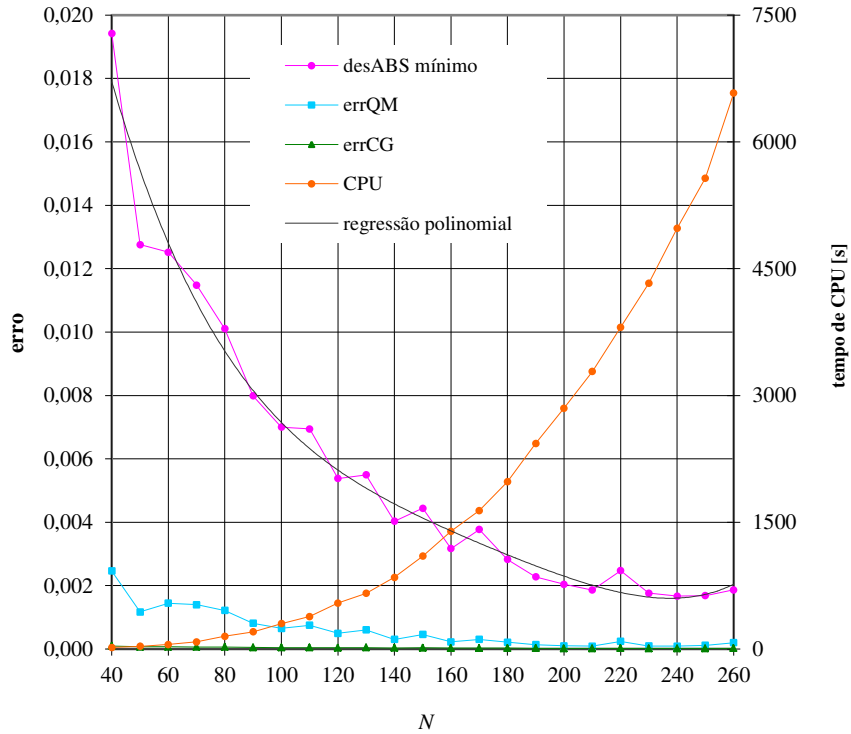


Figura 5-13 Desvio absoluto, demais erros e tempo computacional obtidos no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico ao variar o número de pontos de controle

Para cada número de pontos de controle adotado no cálculo obtém-se um gráfico similar àquele da Figura 5-4 que, monitorado visualmente pelo gráfico da evolução da geometria conforme Figura 5-5, possibilita identificar em qual iteração ocorre a convergência do método de cálculo e os valores dos erros e tempo computacional associados. Assim, o gráfico da Figura 5-13 pode ser construído. Observa-se que os erros diminuem à medida que o número de pontos de controle aumenta até $2N = 480$, sendo que para números maiores o desvio absoluto tende a aumentar. Além disso, o tempo computacional necessário aumenta com o número de pontos de controle em uma proporção cúbica.

A seguir são apresentados os resultados obtidos para o cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico com $2N = 80$ na Figura 5-14 e na Figura 5-15, e com $2N = 160$ na Figura 5-16 e na Figura 5-17. Em ambos os casos a geometria final é definida pela iteração que apresenta desvio absoluto próximo do valor mínimo, iteração 80 e 95, respectivamente. Nas iterações seguintes a essas ocorre instabilidade nos cálculos, por isso o aumento nos valores dos desvios.

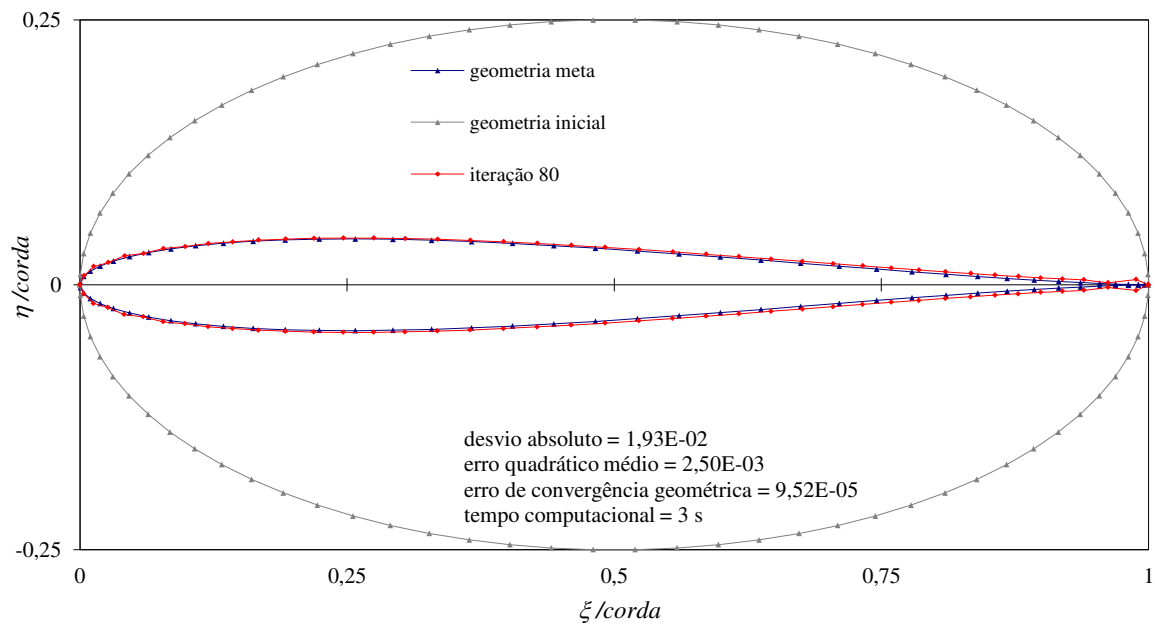


Figura 5-14 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 80$) obtida com o método inverso

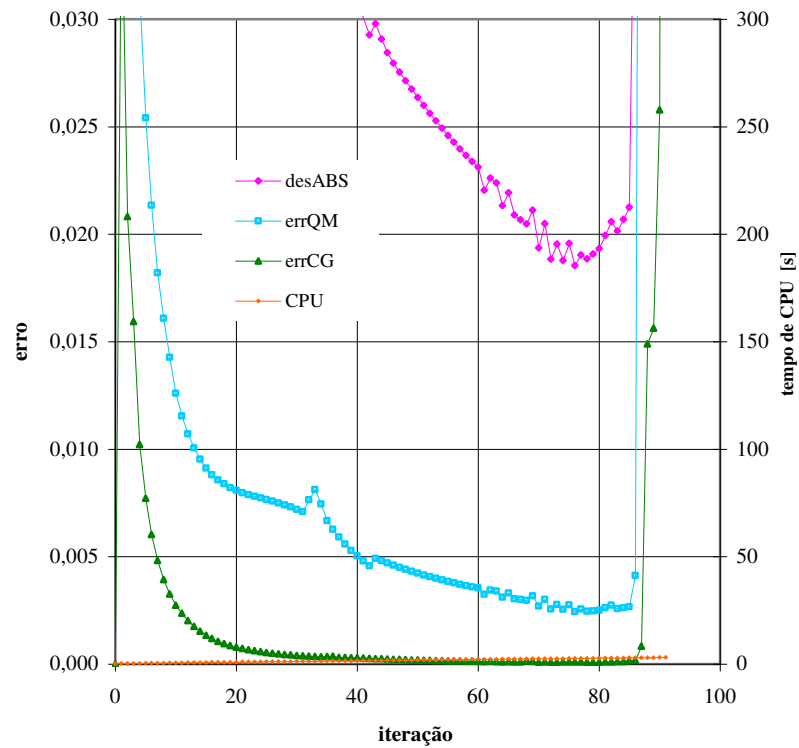


Figura 5-15 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 80$)

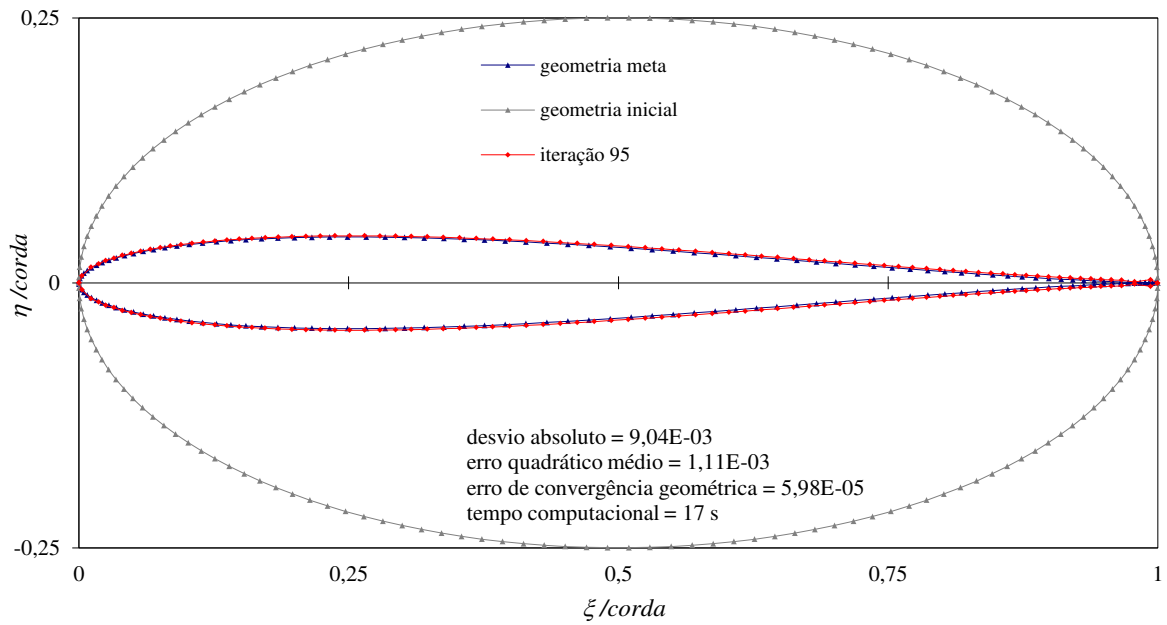


Figura 5-16 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso

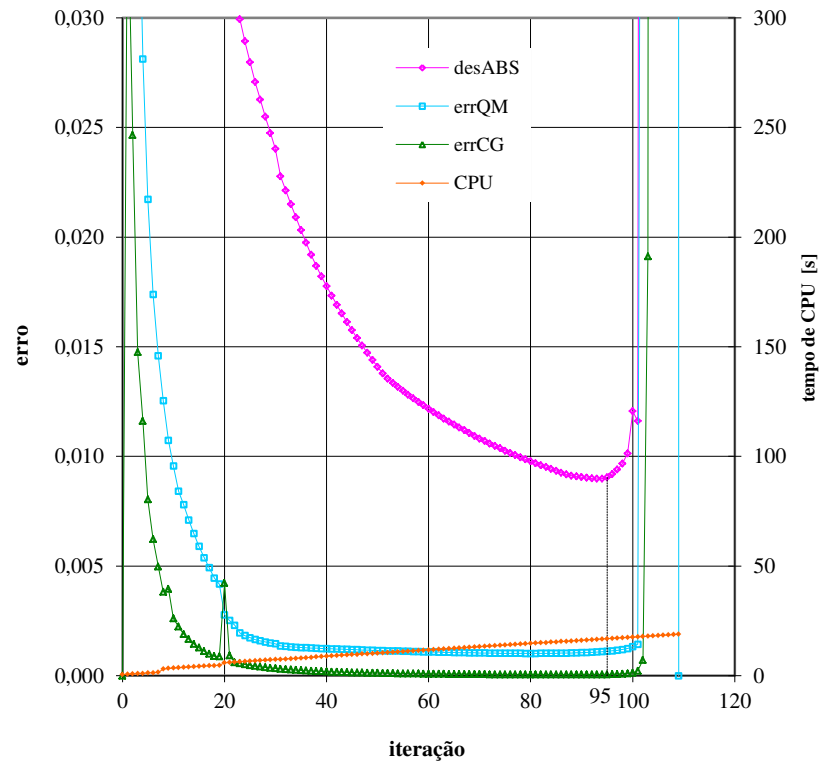


Figura 5-17 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$)

Conforme exposto até aqui, o ajuste da geometria obtida a cada iteração por meio de um arco circular no bordo de ataque e de segmentos retos no bordo de fuga é adequado para o cálculo inverso de aerofólio simétrico com bordo de fuga agudo e alinhado com o escoamento uniforme. No entanto, pode-se também utilizar outro procedimento, denominado Procedimento B, principalmente no cálculo inverso de aerofólio ou de cascata de aerofólios com arqueamento ou que esteja em um escoamento inclinado.

No **Procedimento B** de ajuste da geometria, proposto neste trabalho, os valores elevados de velocidade normal próximo ao ponto de estagnação e bordo de fuga são zerados a cada iteração. Em algumas iterações estratégicas a geometria do bordo de ataque é ajustada por meio de *splines* cúbicas $x = f(\phi)$ e $y = f(\phi)$ e a geometria do bordo de fuga, por segmentos retos. Todo o contorno do aerofólio pode então ser suavizado por meio de interpolação por mínimos quadrados de uma parábola a cada cinco pontos de controle, para $x = f(\phi)$ e $y = f(\phi)$, sendo avaliados os três pontos intermediários. E, na última iteração ou em uma das iterações finais, acrescenta-se a redistribuição dos pontos de controle de maneira que se concentrem mais próximos aos bordos do aerofólio. Inicialmente, o programa roda sem quaisquer ajustes, verifica-se o gráfico de erros e escolhe-se a iteração onde aplicar o ajuste e/ou suavização da geometria. A seguir, o programa é rodado novamente e o procedimento de ajuste é realizado automaticamente. Na Subseção 5.1.2 apresenta-se com mais detalhes como é feita a interferência no processo de convergência para a aplicação dos procedimentos de ajuste da geometria e de redistribuição dos pontos de controle no contorno.

De acordo com o Procedimento B, a geometria convergida do aerofólio de Joukowski simétrico, mostrada na Figura 5-18, é obtida na iteração 1977 do cálculo inverso, com $2N = 160$ pontos de controle. Assim, o número de pontos de controle é bem menor, o tempo computacional dispendido é inferior e os valores de erros são menores do que aqueles do procedimento anterior de ajuste de arco circular no bordo de ataque, conforme se observa ao comparar a Figura 5-18 com a Figura 5-3 e a Figura 5-19 com a Figura 5-4. Além disso, a geometria do bordo de fuga resulta mais próxima da geometria meta (ver Figura 5-11 e Figura 5-20). As geometrias do bordo de ataque e do bordo de fuga são ajustadas e o contorno do aerofólio é suavizado por mínimos quadrados somente nas iterações 999 e 1899, sendo que nesta última é feita a redistribuição dos pontos de controle.

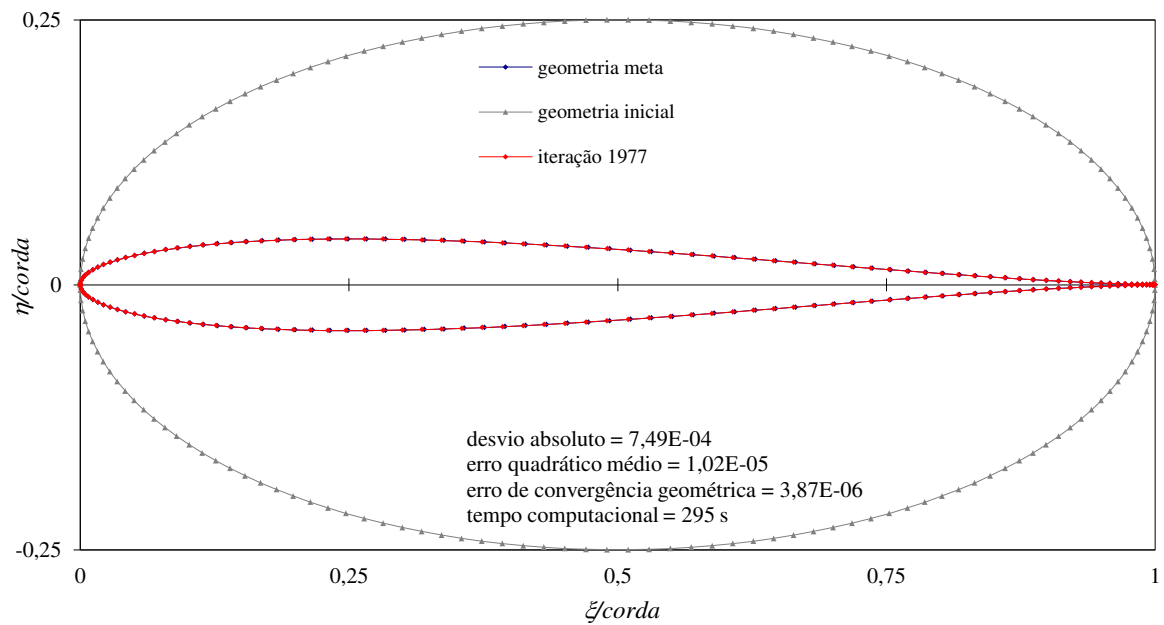


Figura 5-18 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso - Procedimento B ($2N = 160$)

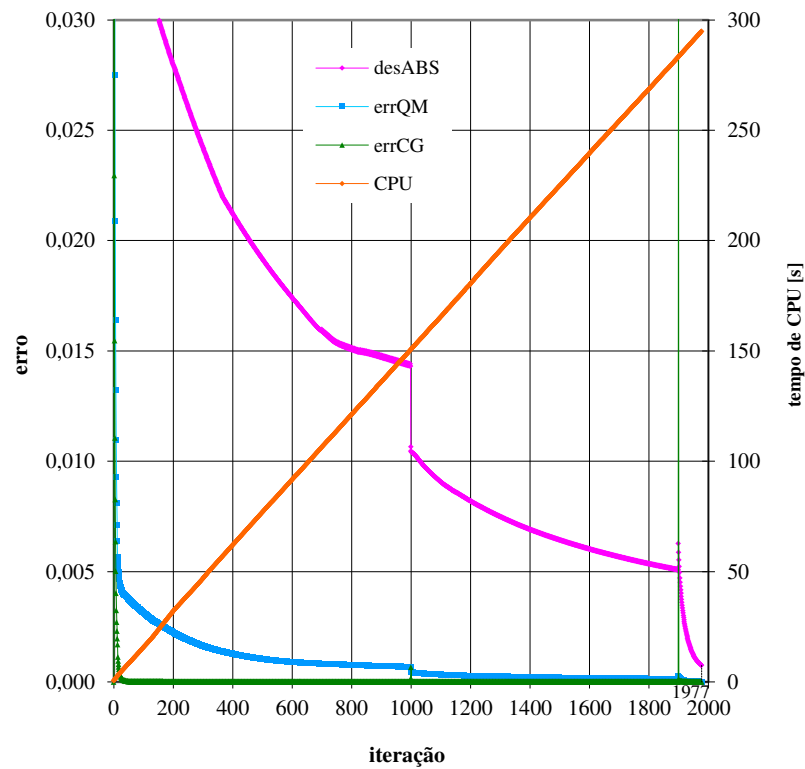


Figura 5-19 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento B

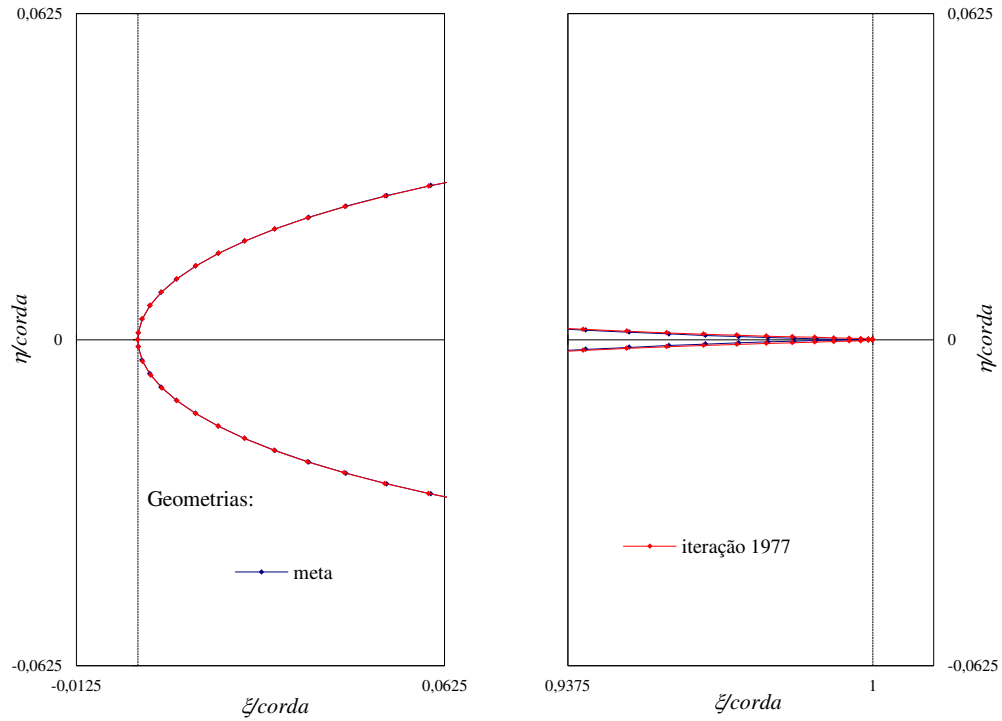


Figura 5-20 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski – Procedimento B

O **Procedimento C**, uma variação do procedimento anterior, consiste em ajustar a geometria do bordo de ataque por *splines* cúbicas e suavizar o contorno do aerofólio por mínimos quadrados em todas as iterações; assim como, anular os valores muito elevados em módulo obtidos numericamente para a velocidade normal, próximos ao ponto de estagnação do bordo de ataque e ao bordo de fuga. A redistribuição dos pontos de controle continua sendo feita apenas em uma iteração estratégica, podendo ser ou não a iteração final.

A seguir são apresentados os resultados deste Procedimento C aplicado ao cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico em questão, de razão $b/r_0 = 0,9333$ em um escoamento paralelo à corda e utilizando-se $2N = 160$ pontos de controle. A geometria final é apresentada na Figura 5-21. A convergência é obtida com apenas 137 iterações, sendo que os erros obtidos são menores e o tempo computacional necessário, muito baixo quando comparados aos procedimentos anteriores (Figura 5-3 e Figura 5-18). A Figura 5-22 apresenta a evolução dos erros com as iterações durante este procedimento inverso, sendo que algumas geometrias intermediárias são apresentadas na Figura 5-23.

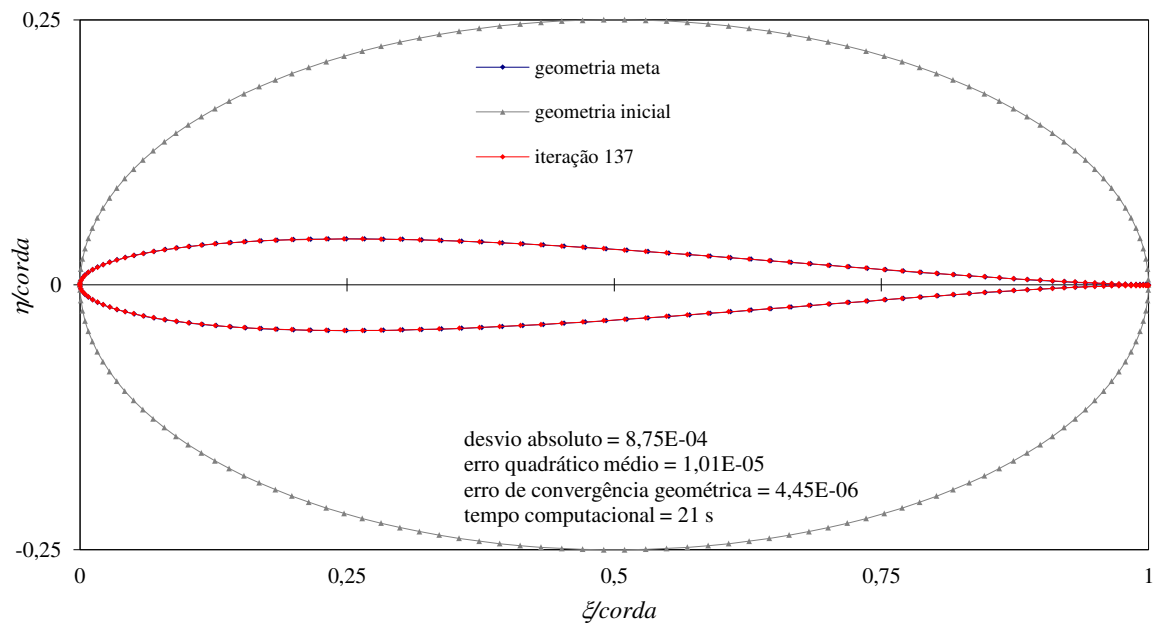


Figura 5-21 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico obtida com o método inverso – Procedimento C ($2N = 160$)

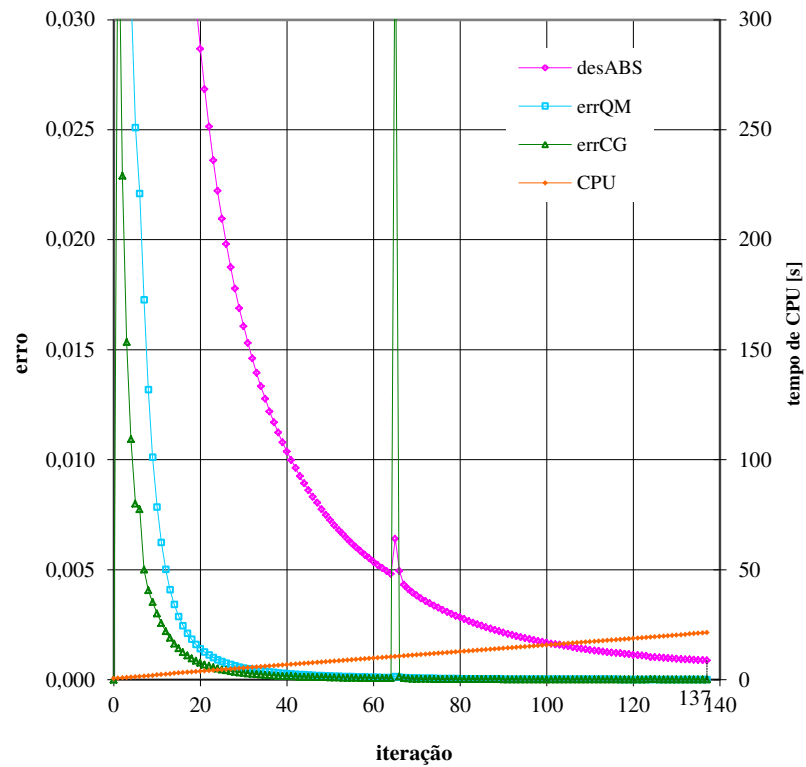


Figura 5-22 Erros nas iterações – aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C

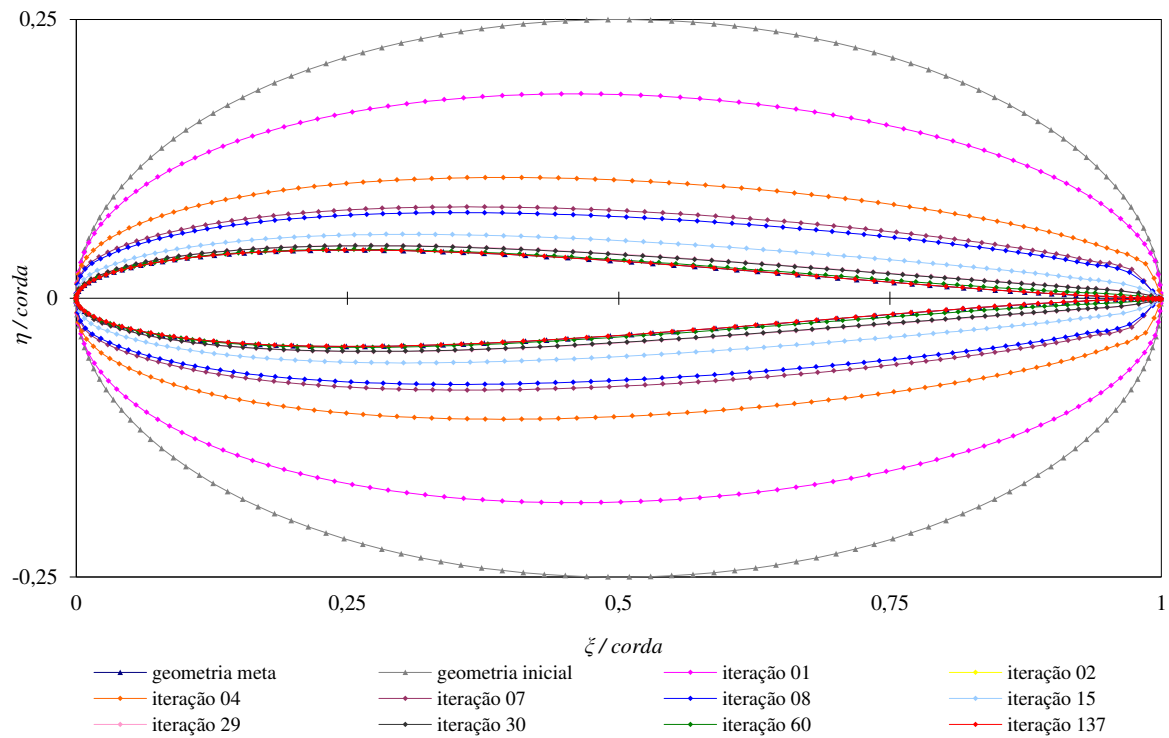


Figura 5-23 Evolução da geometria no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico

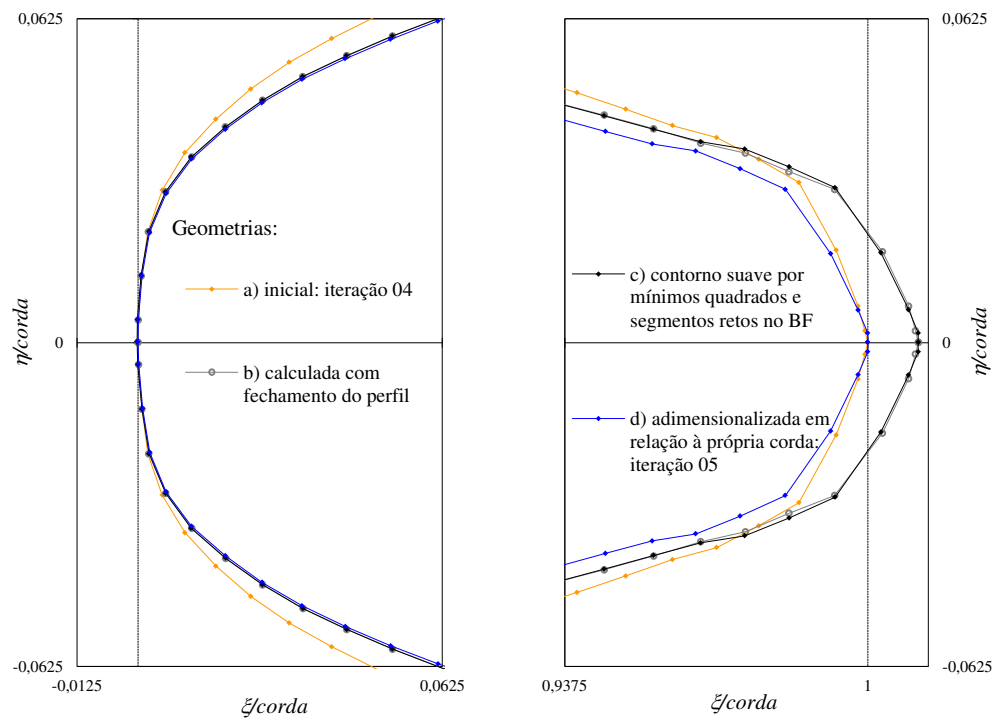


Figura 5-24 Ajustes nos BA e BF na iteração 05 - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C

Nos bordos de ataque e de fuga são feitos ajustes na geometria a cada iteração, conforme apresentado na Figura 5-24 para a iteração 5. Interpolação por mínimos quadrados é utilizada para suavizar o bordo de ataque arredondado e também todo o contorno do aerofólio, e segmentos retos, para o bordo de fuga cúspide. Observa-se que esses ajustes são mais amenos do que no primeiro procedimento (ver Figura 5-6 e Figura 5-7) uma vez que os valores muito elevados de velocidade normal próximos ao ponto de estagnação frontal e ao bordo de fuga na geometria anterior são zerados, o que se observa ao comparar a Figura 5-25 com a Figura 5-26. Para algumas iterações as velocidades normais sobre a superfície das respectivas geometrias são apresentadas na Figura 5-26, enquanto que os valores de v_N/v_R utilizados no cálculo das geometrias imediatamente seguintes são apresentados na Figura 5-27.

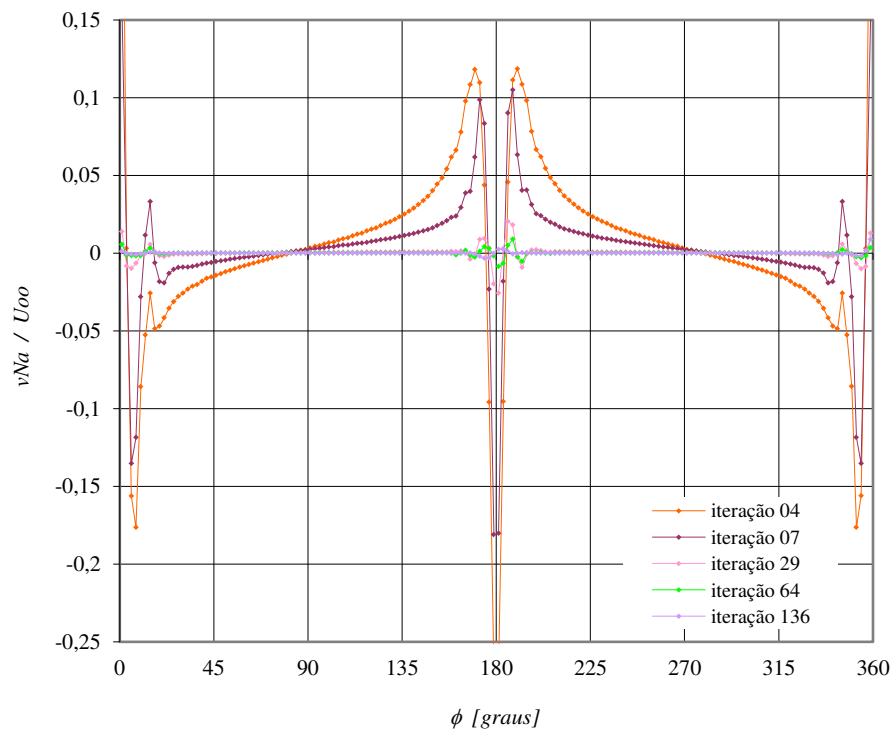


Figura 5-25 Velocidade normal calculada no procedimento inverso para o aerofólio de Joukowski simétrico

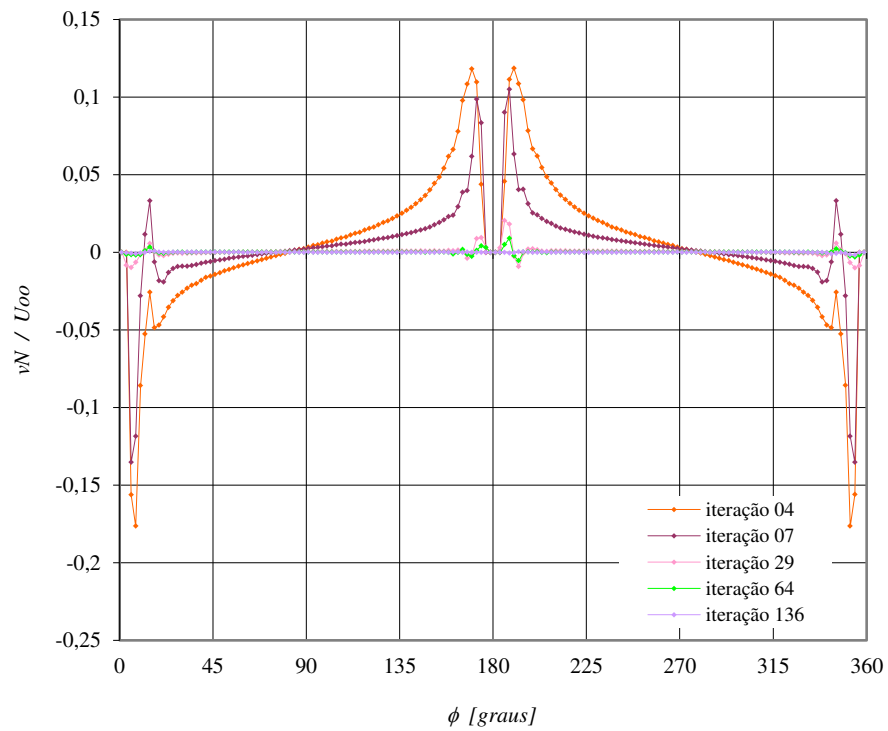


Figura 5-26 Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico

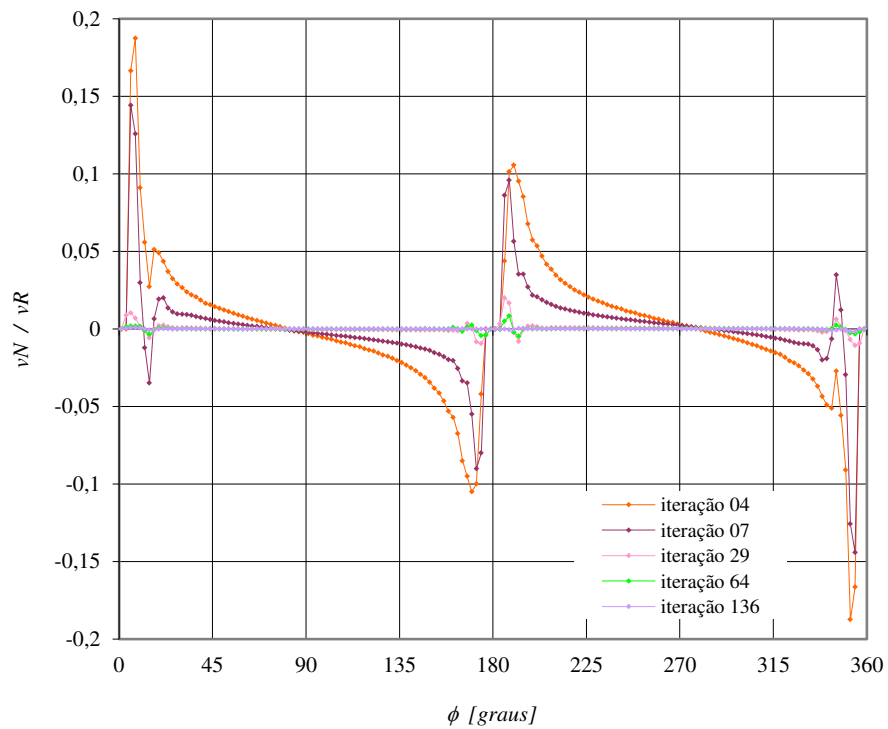


Figura 5-27 Razão v_N / v_R - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$)

A Figura 5-28 mostra os ajustes nos bordos de ataque e de fuga, especialmente a redistribuição dos pontos de controle na iteração 65. Os pontos de controle afastam-se dos bordos do aerofólio com o passar das iterações, como se observa nessa figura para a iteração 64, devido aos valores altos de v_N/v_R remanescentes nessas regiões. A redistribuição dos pontos de controle torna a localizá-los mais próximos aos bordos do aerofólio como na geometria inicial.

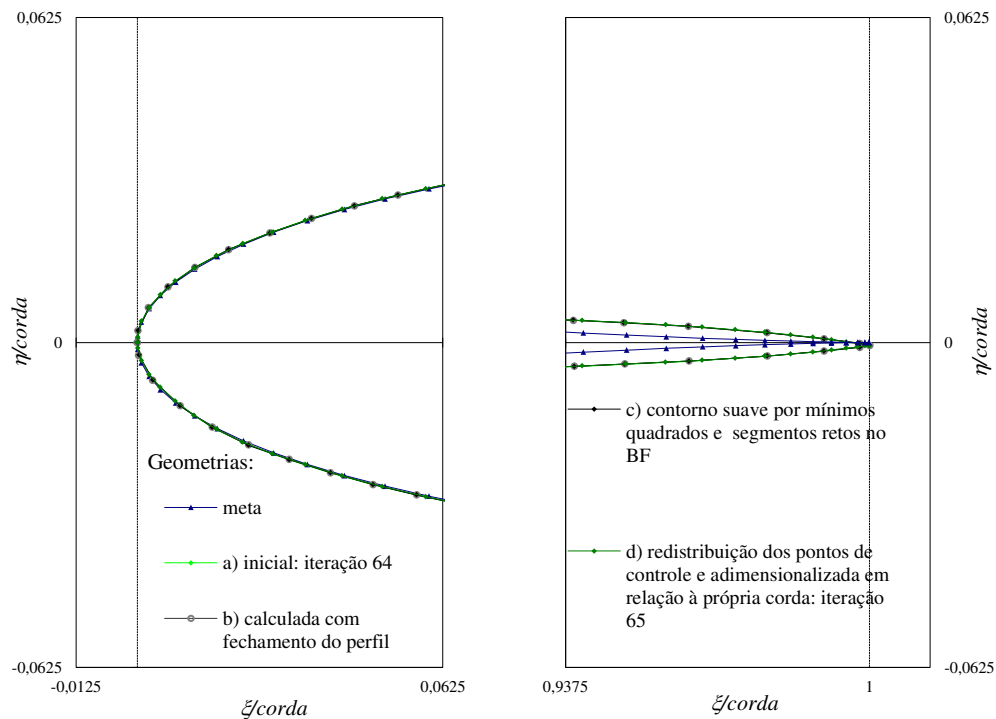


Figura 5-28 Ajustes nos BA e BF na iteração 65 - aerofólio de Joukowski simétrico – Procedimento C

A Figura 5-29 apresenta detalhes dos bordos de ataque e de fuga da geometria final do aerofólio de Joukowski simétrico obtida na iteração 137. Pode-se observar que ocorre um desvio do bordo de fuga de aproximadamente 0,06% da corda em relação ao perfil meta que é simétrico. E a Figura 5-30 mostra as distribuições de velocidade calculadas na superfície das geometrias de algumas iterações intermediárias e da geometria final, comparadas à solução exata do aerofólio de Joukowski simétrico alinhado com o escoamento.

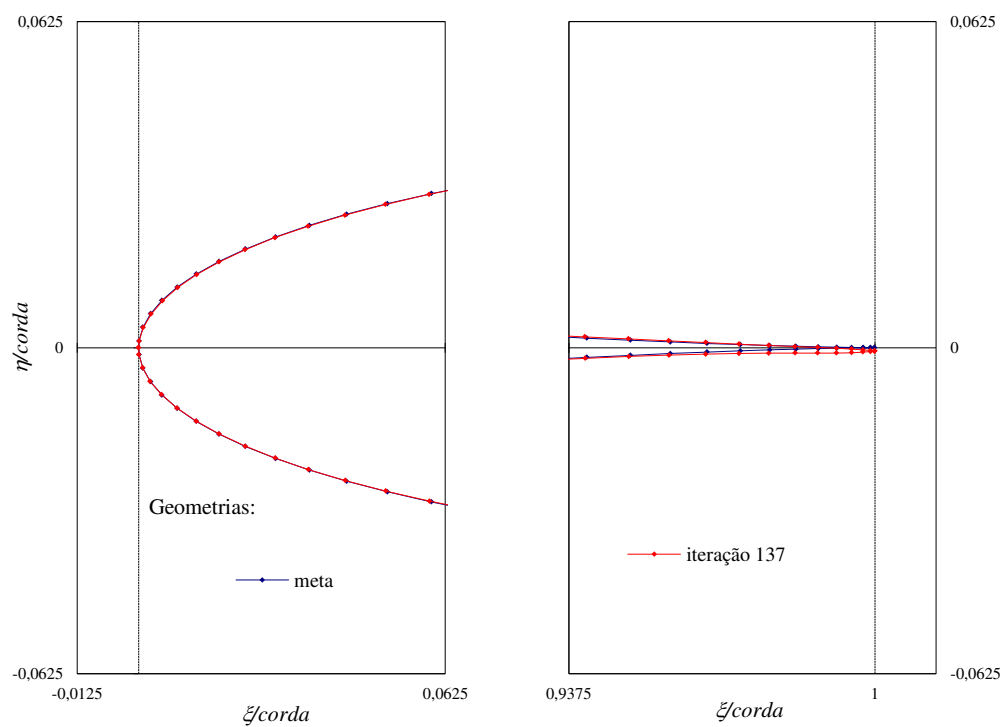


Figura 5-29 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski - Procedimento C

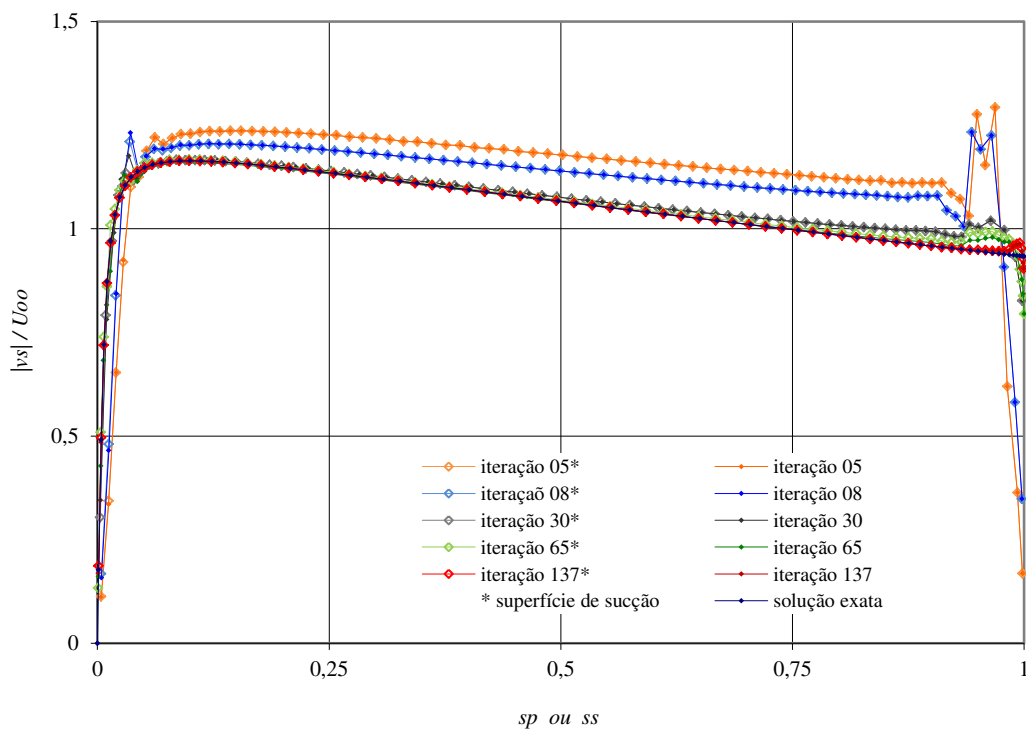


Figura 5-30 Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski e Procedimento C

No cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico, o Procedimento C apresenta tempo computacional mais baixo do que o Procedimento B. A geometria final de ambos os procedimentos são próximas à meta. No entanto, o bordo de fuga do Procedimento B, Figura 5-20, resulta melhor, pois mantém a simetria, do que o bordo de fuga do Procedimento C, Figura 5-29. Nos cálculos inversos seguintes deste trabalho utiliza-se o Procedimento B, evitando-se assim interferir muitas vezes no procedimento de cálculo.

5.1.2 Cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico em escoamento inclinado

O mesmo aerofólio da seção anterior, o aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$, localizado em um escoamento inclinado de ângulo $\beta_\infty = 10^\circ$ em relação à corda constitui variação interessante para o emprego do código numérico deste trabalho.

A distribuição de velocidade requerida para o método inverso é calculada analiticamente pela Equação 5.2 com β_∞ não nulo o que resulta em nova localização para o ponto de estagnação frontal e distribuição diferente da velocidade sobre as superfícies de sucção e de pressão, conforme indica a Figura 5-31. Desta maneira, $N = 80$ pontos (s, v_R) sobre cada uma das superfícies de sucção e de pressão são obtidos e utilizados para interpolar o valor de velocidade requerida $v_R(s)$ nos pontos de controle da geometria em cada iteração.

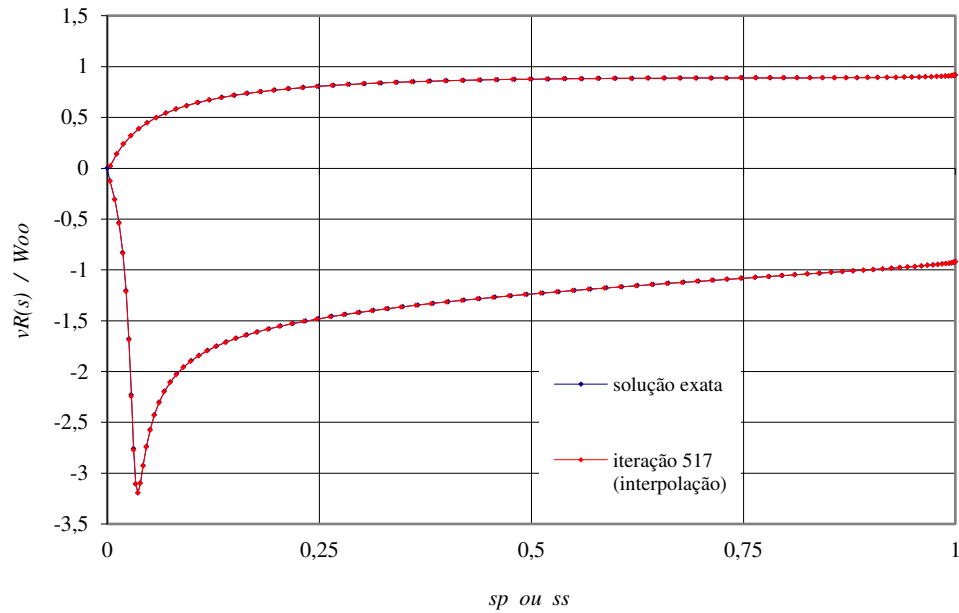


Figura 5-31 Distribuição de velocidade analítica na superfície de um aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$

O método inverso de vorticidade na superfície com a distribuição de velocidade prescrita no contorno igual à do aerofólio de Joukowski simétrico de razão $b/r_0 = 0,9333$ e com $2N = 160$ pontos de controle resulta na geometria apresentada na Figura 5-32. Esta geometria é obtida na iteração 517 quando o desvio absoluto torna-se mínimo e igual a $1,15 \cdot 10^{-3}$, como se pode observar no gráfico da Figura 5-33.

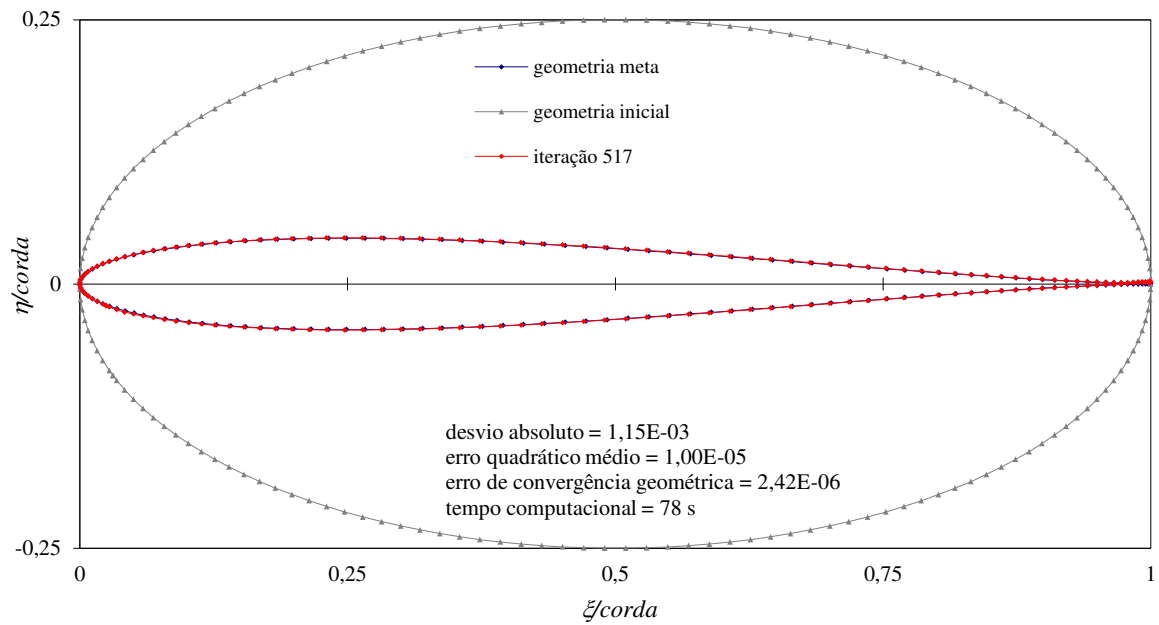


Figura 5-32 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

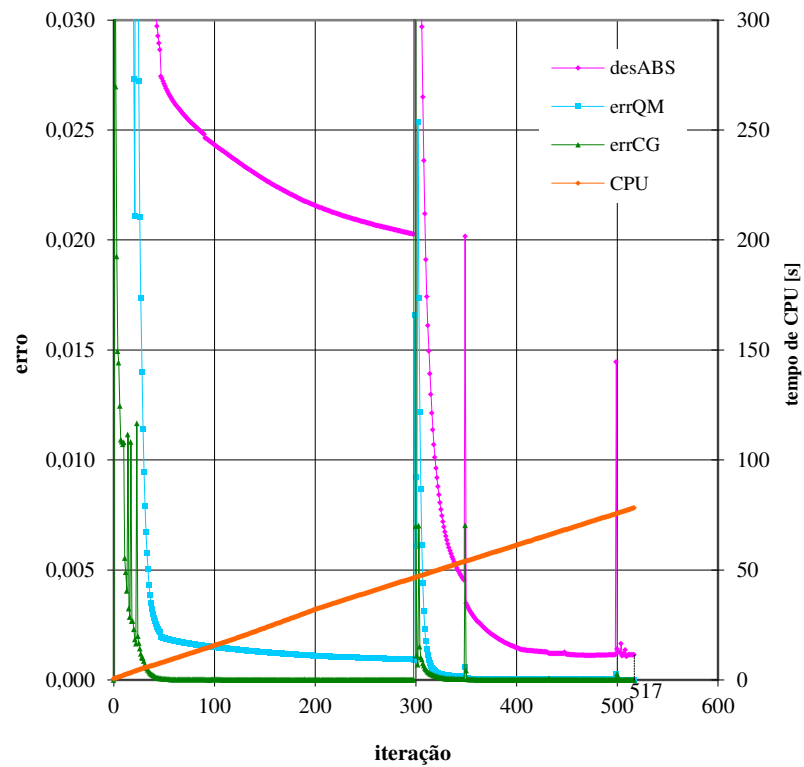


Figura 5-33 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

A cada iteração, os valores muito elevados de velocidade normal, obtidos numericamente na geometria anterior, próximos ao ponto de estagnação e ao bordo de fuga, e devidos à distribuição adicional de vorticidade na superfície, são zerados. Para algumas iterações as velocidades normais sobre as superfícies de sucção ou de pressão das respectivas geometrias são apresentadas na Figura 5-34 e na Figura 5-35, enquanto que os valores de v_N/v_R utilizados no cálculo das geometrias imediatamente seguintes são apresentados na Figura 5-36.

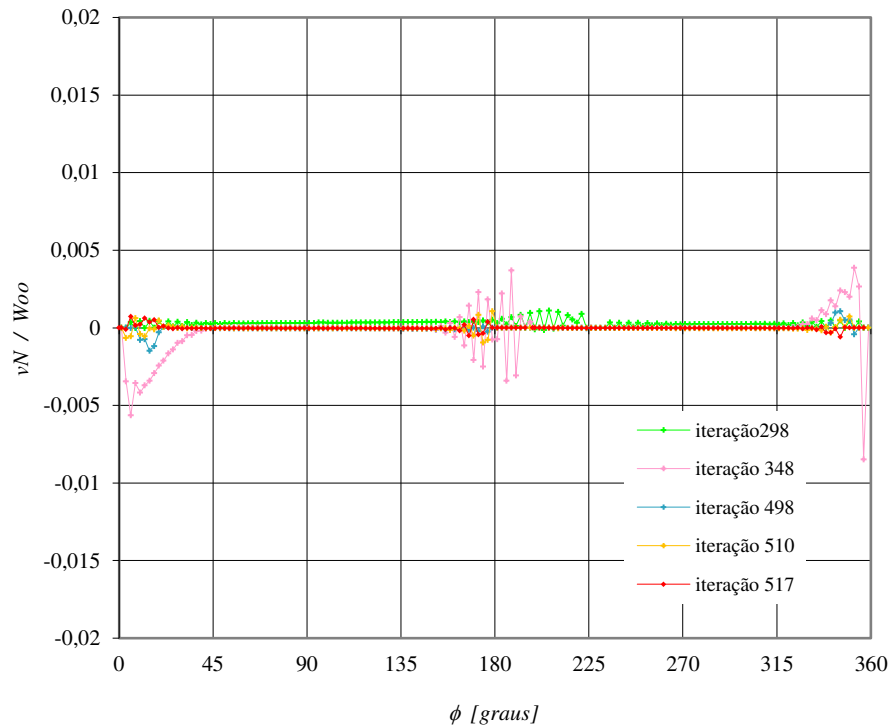


Figura 5-34 Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_\infty = 10^\circ$

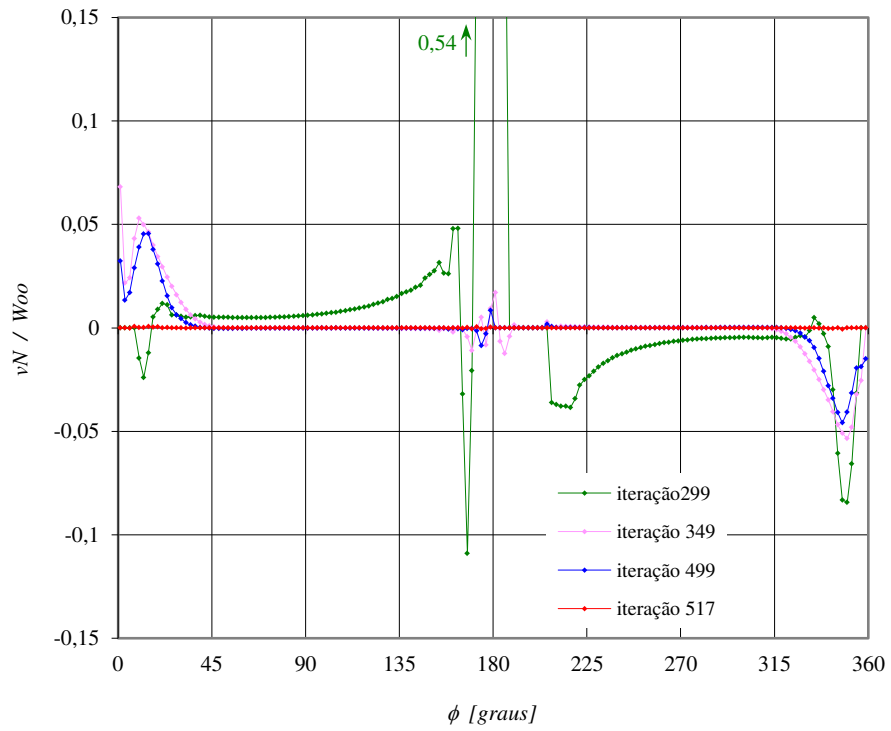


Figura 5-35 Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

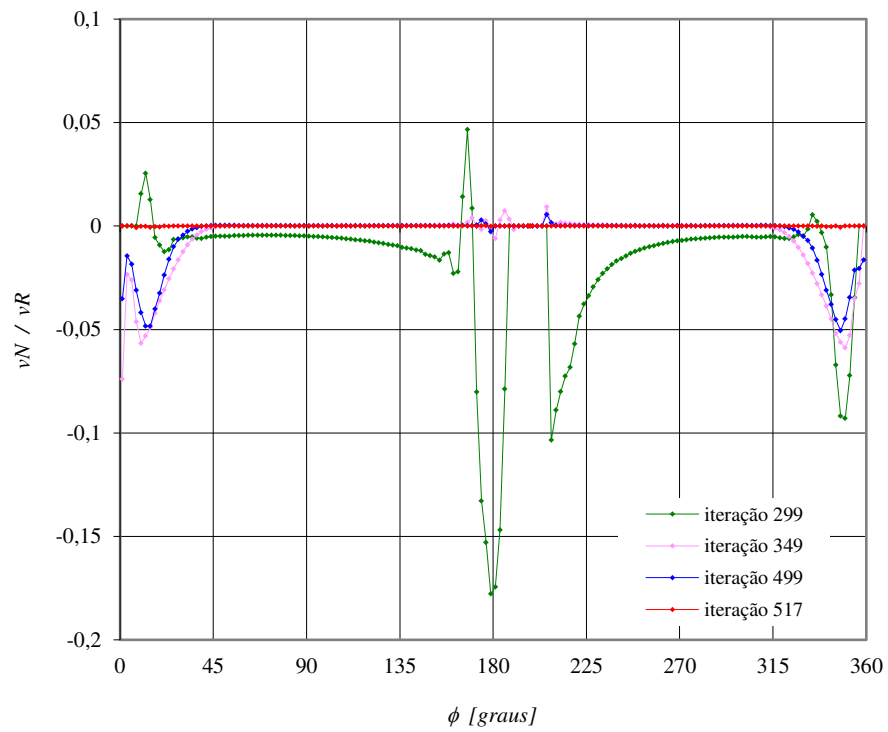


Figura 5-36 Razão v_N / v_R - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Nas iterações 299, 349 e 499, para a nova geometria obtida o bordo de ataque é ajustado por meio de *splines* cúbicas e o bordo de fuga, por segmentos retos, e todo o contorno do aerofólio é suavizado automaticamente por meio da interpolação por mínimos quadrados, conforme o Procedimento B. Faz-se também nessas iterações a redistribuição dos pontos de controle no contorno, como se pode observar na Figura 5-37 e na Figura 5-38. A evolução das geometrias no cálculo é mostrada na Figura 5-39.

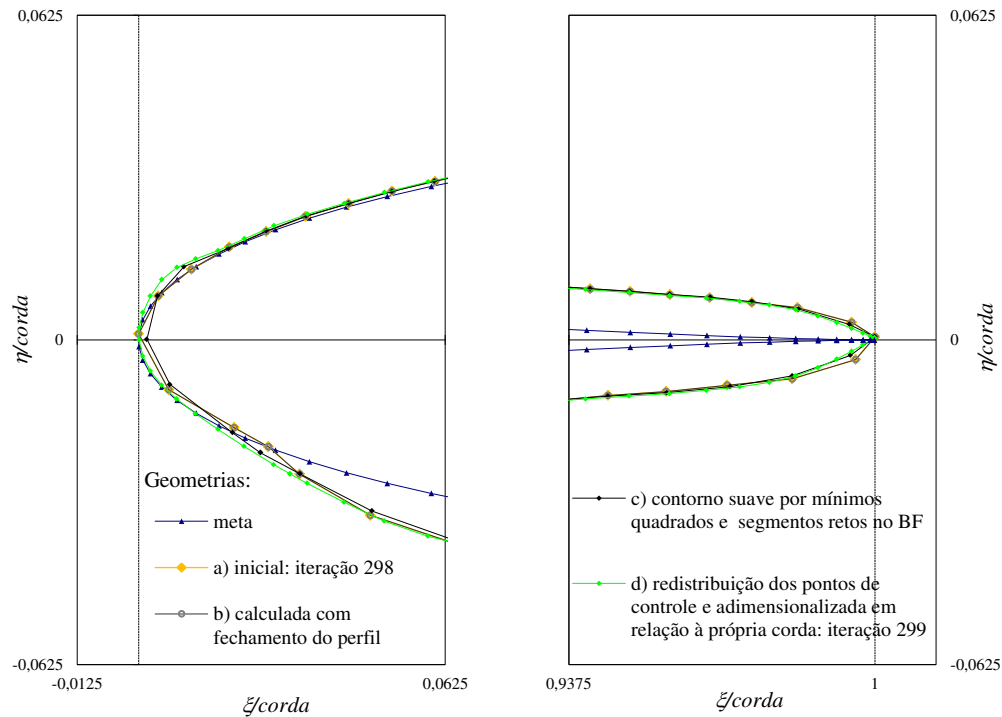


Figura 5-37 Ajustes na iteração 299 – aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Observa-se que no início do procedimento inverso, sendo a geometria inicial distante da meta, entre iterações consecutivas a mudança na geometria é acentuada, assim como o valor da distribuição de velocidade normal devido à vorticidade adicional. Conforme o procedimento avança e aproxima-se da meta, a geometria varia cada vez menos entre iterações consecutivas resultado dos valores menos elevados da distribuição de velocidade normal. Além disso, nessas iterações avançadas, como acontece na iteração 298 do exemplo desta seção, os pontos de controle encontram-se mal distribuídos no contorno, pois se concentram mais na superfície superior e estão distantes dos bordos do perfil. A distribuição dos pontos fica muito pobre comparada àquela ideal para o método de vorticidade na superfície, que se caracteriza por

apresentar pontos opostos correspondentes entre as superfícies superior e inferior e também pontos próximos aos bordos de ataque e de fuga do aerofólio.

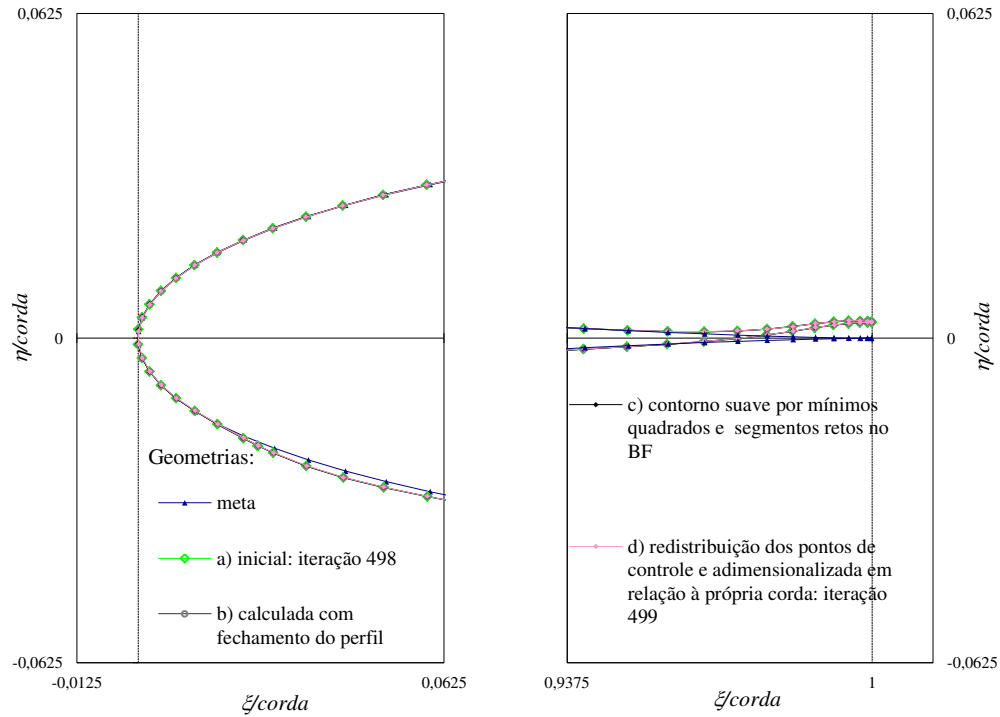


Figura 5-38 Ajustes na iteração 499 – aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Quando o contorno do aerofólio é suavizado e os pontos de controle são redistribuídos, como nas iterações 299, 349 e 499 deste exemplo, cada uma das superfícies superior e inferior volta a ter metade dos pontos da discretização, além de concentrá-los junto aos bordos. Assim, nas iterações seguintes a geometria modifica-se mais rapidamente em direção à geometria meta, melhorando a convergência do método. Essas características são mostradas especialmente na Figura 5-37 e na Figura 5-39.

Para a redistribuição dos pontos de controle no contorno, primeiramente acrescenta-se alguns pontos no bordo de ataque utilizando *splines* cúbicas $x = f(\phi)$ e $y = f(\phi)$ e no bordo de fuga utilizando segmentos retos, para garantir uma melhor interpolação nessas regiões. A seguir, para pontos igualmente espaçados em ϕ calcula-se a abscissa $x = (\ell/2)\cos\phi$ e obtém-se a ordenada por meio de *spline* cúbica $y = f(x)$, de maneira independente para as superfícies superior e inferior.

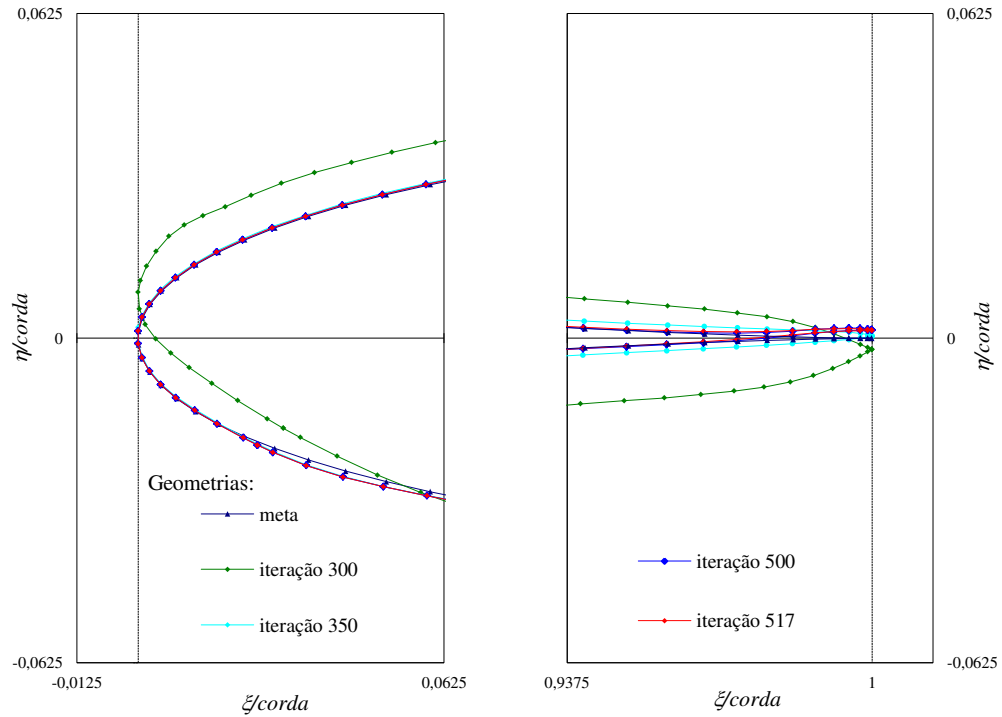


Figura 5-39 Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico e escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

A Figura 5-40 apresenta detalhes dos bordos de ataque e de fuga da geometria final do aerofólio de Joukowski simétrico isolado em escoamento inclinado de $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$, com $2N = 160$ pontos de controle, obtida na iteração 517 do procedimento inverso. O desvio entre esta geometria calculada e a geometria meta é da ordem de 0,12% da corda na região do bordo de ataque próximo ao ponto de estagnação na superfície de pressão e de 0,16% da corda no bordo de fuga.

A distribuição de velocidade na superfície desse aerofólio final calculado com o método de distribuição de vórtices é mostrada na Figura 5-41 e comparada àquela da solução exata de Joukowski.

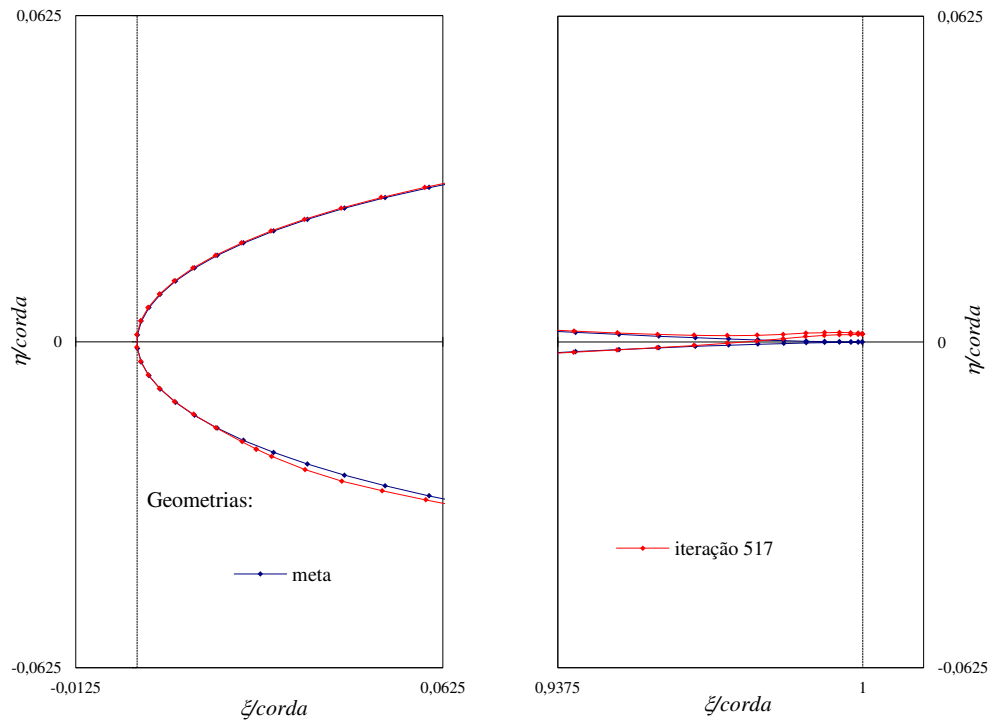


Figura 5-40 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski simétrico e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

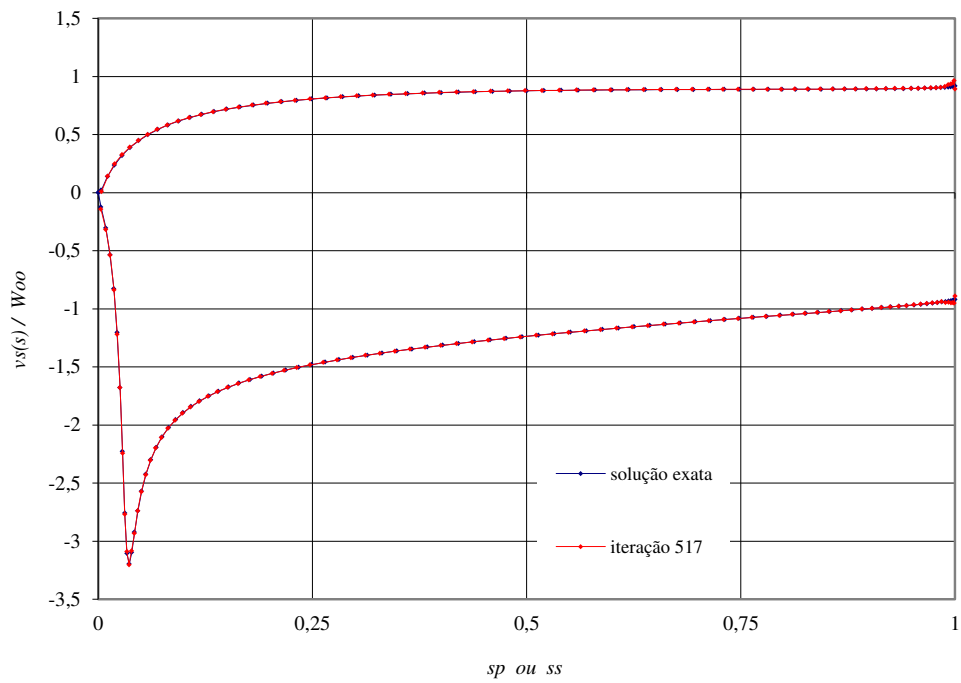


Figura 5-41 Velocidade na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski em escoamento inclinado de $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

A interferência no processo de convergência para a aplicação dos procedimentos de ajuste da geometria e de redistribuição dos pontos de controle no contorno é apresentada em detalhes a seguir, tendo o cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) em escoamento inclinado de $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ como exemplo.

Na Figura 5-42 são apresentadas algumas geometrias de iterações do cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$, obtidas sem quaisquer ajustes na geometria dos bordos de ataque e de fuga, sem suavização do contorno e sem redistribuição dos pontos de controle no contorno durante as iterações. Nota-se que ocorre uma alteração automática na geometria da região do bordo de ataque na superfície de sucção próximo ao ponto de estagnação, entre as iterações 800 e 850, mais precisamente logo após a iteração 842. Isso conduz a uma melhora na geometria do bordo de fuga, como se observa da iteração 850 para a iteração 1450. E, posteriormente, a geometria praticamente não varia entre as iterações 1450 e 3000, assim como os valores de erros, conforme mostra a Figura 5-43. A geometria da iteração 1450 desse cálculo inverso, considerada a geometria final, apresenta uma reentrância no bordo de ataque e os pontos de controle estão mal distribuídos no contorno do aerofólio. Assim, propõe-se fazer novo cálculo inverso com ajustes na geometria do aerofólio, suavização do contorno e redistribuição dos pontos de controle em uma iteração anterior à iteração 842.

O cálculo inverso do aerofólio de Joukowski simétrico em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$, com ajustes na geometria (do bordo de ataque por *splines* cúbicas e do bordo de fuga por segmentos retos, e a suavização do contorno por mínimos quadrados) e com redistribuição dos pontos no contorno na iteração 299 resulta na geometria da Figura 5-44. Nesse caso ocorre um aumento na taxa de convergência do método. A geometria da iteração 340 é considerada a geometria final e resulta mais próxima da geometria meta, quando comparada ao cálculo anterior sem quaisquer ajustes. Embora o menor desvio absoluto ocorra na iteração 385, o bordo de fuga bastante delgado apresenta um arqueamento espúrio acima da iteração 350, aproximadamente, o qual aumenta com as iterações e leva à instabilidade do método de cálculo, conforme mostra a Figura 5-45. Detalhes da correção da geometria dos bordos de ataque e de fuga na iteração 299 são apresentados na Figura 5-37 anterior.

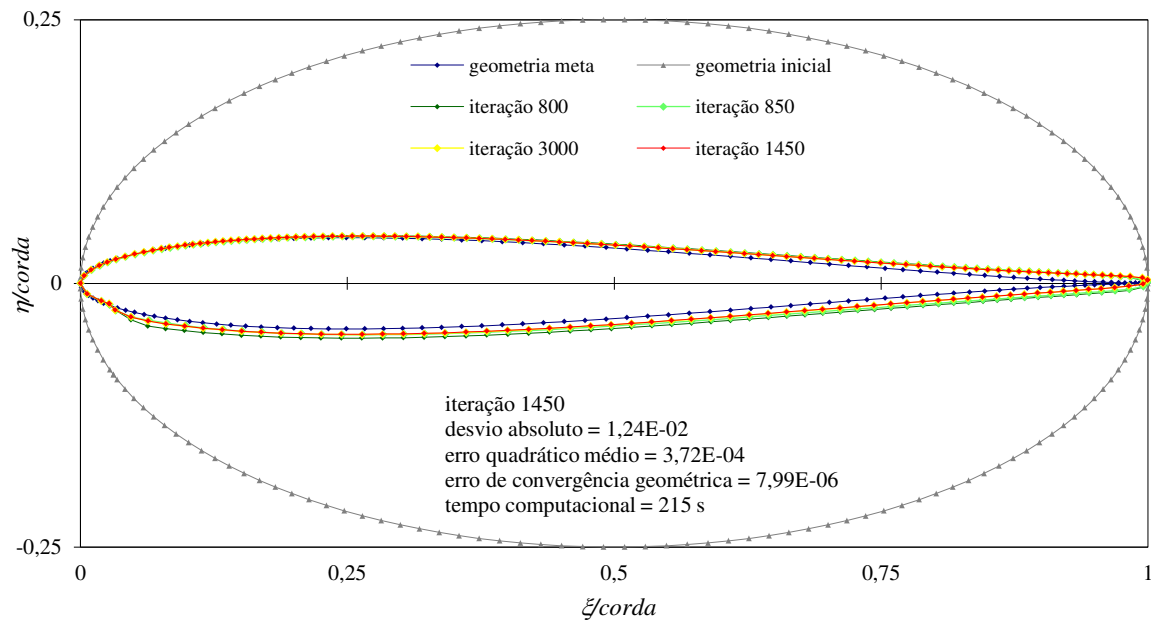


Figura 5-42 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ sem ajustes na geometria nas iterações

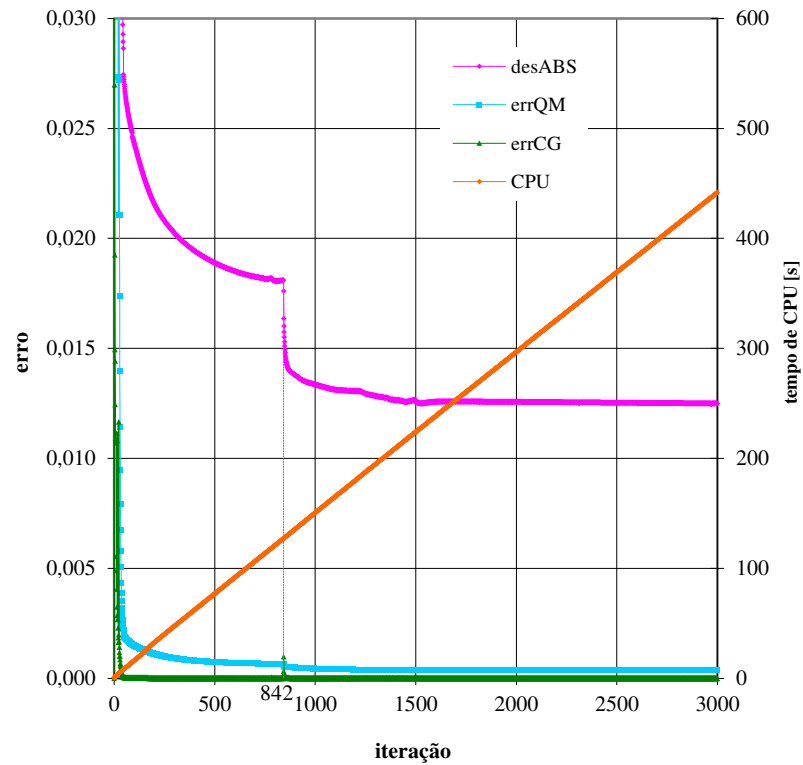


Figura 5-43 Erros nas iterações sem ajustes nas geometrias - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

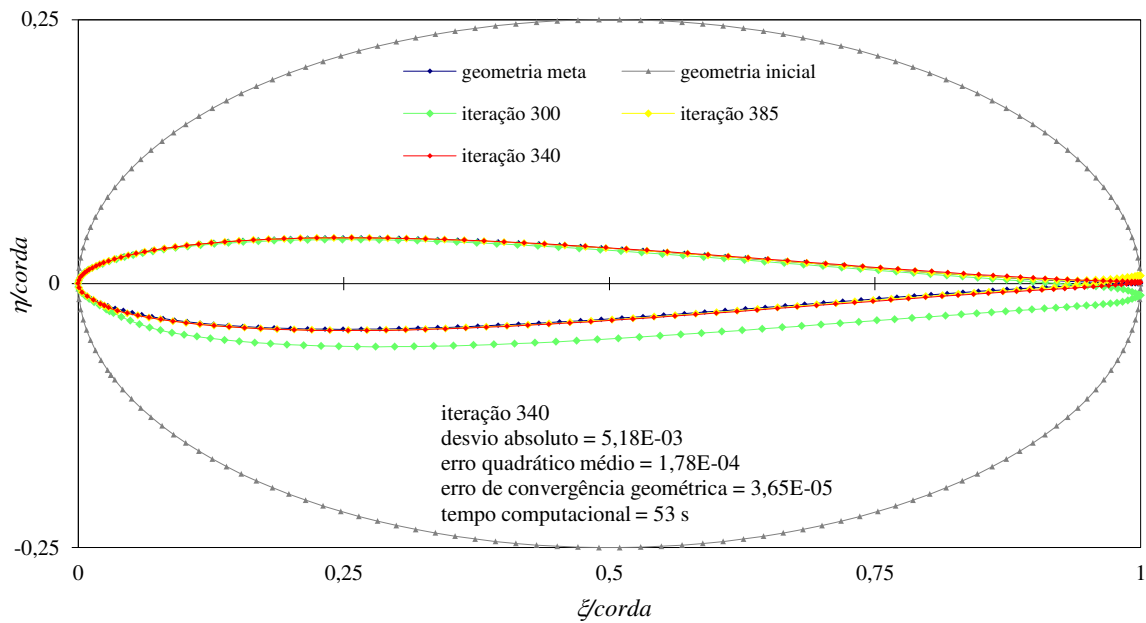


Figura 5-44 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$ com ajustes na iteração 299

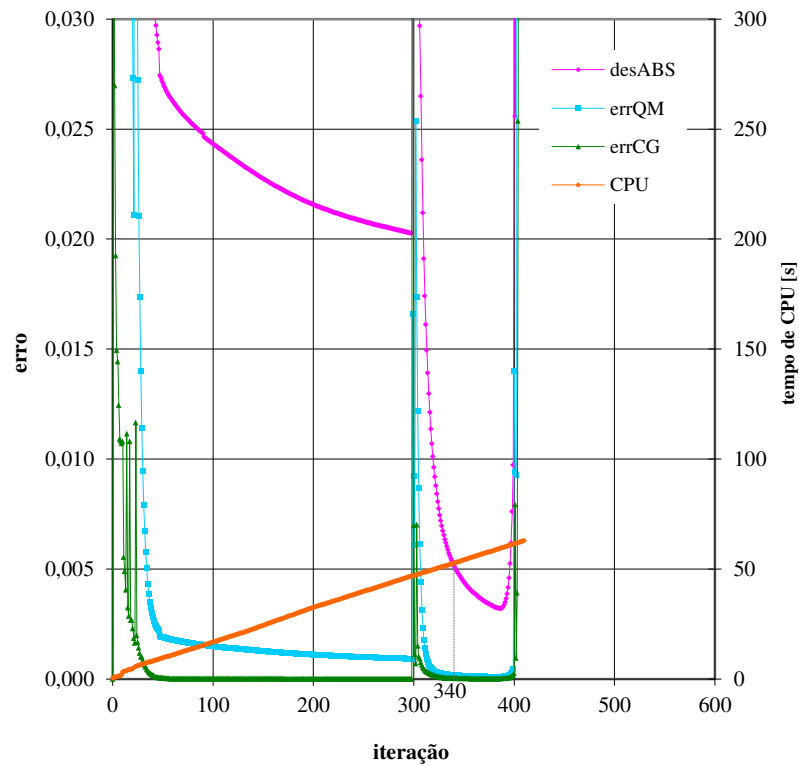


Figura 5-45 Erros nas iterações com ajustes na iteração 299 - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_\infty = 10^\circ$

O cálculo inverso desse mesmo aerofólio de Joukowski simétrico, mas com ajustes na geometria e com redistribuição dos pontos no contorno nas iterações 299 e 349 resulta na geometria da Figura 5-46, que destaca a iteração 400 como a geometria final, ainda mais próxima da geometria meta. Aproximadamente, a partir da iteração 450 o bordo de fuga bastante delgado apresenta arqueamento espúrio crescente, o que desestabiliza o cálculo inverso, conforme mostra a Figura 5-47.

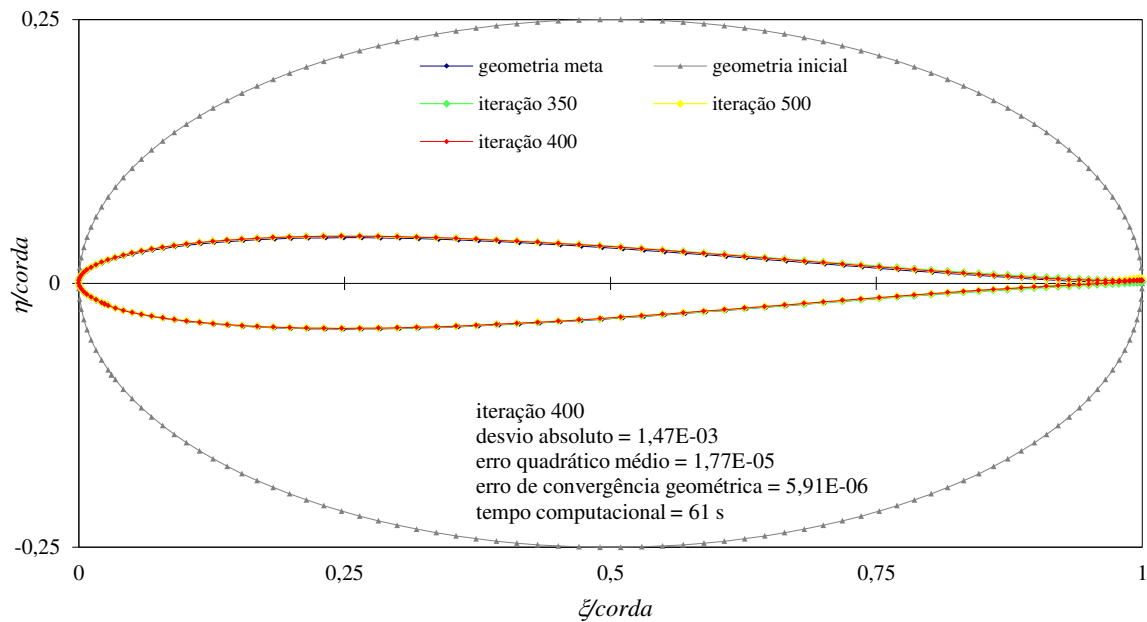


Figura 5-46 Geometria do aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ com ajustes nas iterações 299 e 349

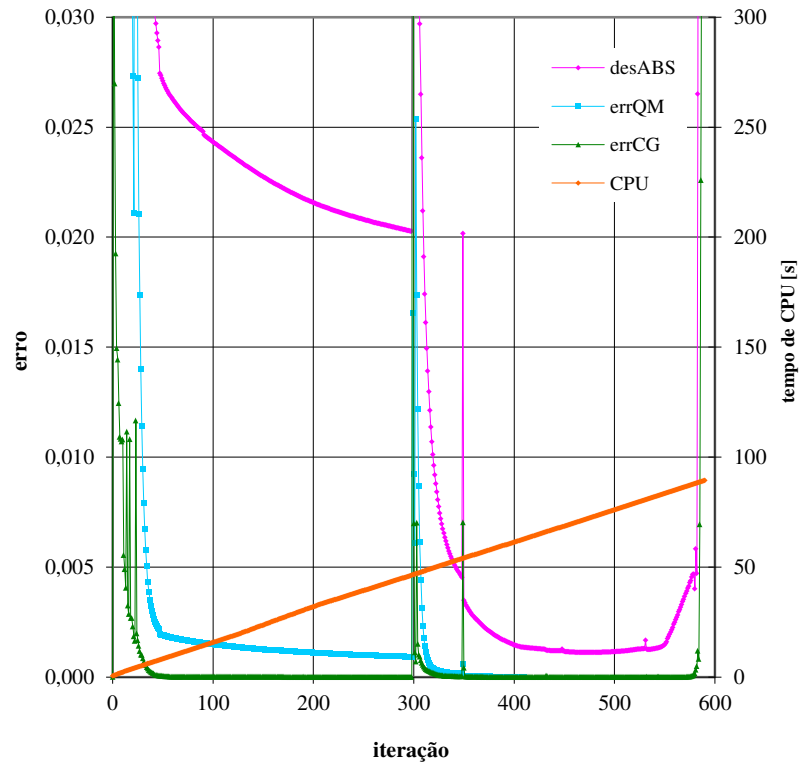


Figura 5-47 Erros nas iterações com ajustes nas iterações 299 e 349 - aerofólio de Joukowski simétrico ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Finalmente, com ajustes nas iterações 299, 349 e 499 obtém-se a geometria apresentada anteriormente neste trabalho na Figura 5-32.

5.2 Aerofólio de Joukowski assimétrico

A transformação conformal de Joukowski, dada pela Equação 5.1, aplicada ao círculo no plano z com centro $C(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ deslocado da origem nas direções dos eixos real e imaginário ($\varepsilon_1 \neq 0; \varepsilon_2 \neq 0$) produz no plano transformado ζ um aerofólio com espessura e arqueamento (ou camber). E se o círculo de raio r_0 passa pelo ponto singular da transformação $z = +b$ o bordo de fuga do aerofólio é cúspide. A Figura 5-48 apresenta um aerofólio de Joukowski assimétrico obtido dessa maneira.

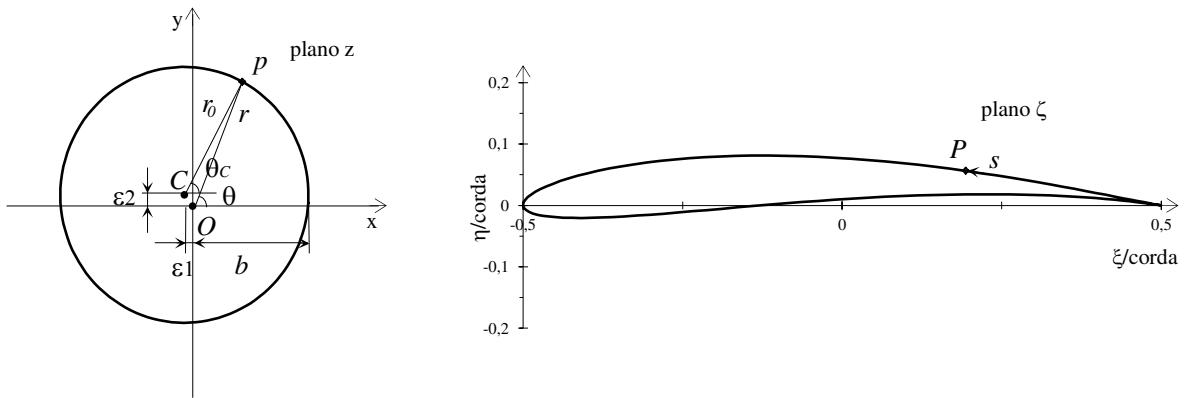


Figura 5-48 Transformação de Joukowski $\zeta = z + b^2/z$ gerando um aerofólio arqueado

A relação entre os parâmetros r_0 , ε_1 e ε_2 do círculo e b da função de transformação é a seguinte

$$r_0 = \sqrt{(b + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}$$

E as coordenadas do aerofólio de Joukowski em função desses parâmetros são dadas por

$$\xi = \left[1 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] x$$

$$\eta = \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] y$$

onde, x e y são as coordenadas cartesianas correspondentes sobre o círculo no plano z , dadas por

$$x = r \cos \theta = r_0 \cos \theta_c - \mathcal{E}_1 \quad (5.3)$$

$$y = r \sin \theta = r_0 \sin \theta_c + \mathcal{E}_2$$

e r e θ são as coordenadas polares dos pontos sobre o círculo no plano z , escritas como

$$r = \sqrt{(r_0 \cos \theta_c - \mathcal{E}_1)^2 + (r_0 \sin \theta_c + \mathcal{E}_2)^2}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{r_0 \sin \theta_c + \mathcal{E}_2}{r_0 \cos \theta_c - \mathcal{E}_1} \right)$$

A velocidade do escoamento sobre o aerofólio de Joukowski é aquela da Equação 5.2, mas a circulação de Joukowski completa Γ para o aerofólio com arqueamento passa a ser

$$\Gamma = 4\pi r_0 W_\infty \sin(\beta_\infty + \delta_{BF}) \quad (5.4)$$

onde, o ângulo δ_{BF} é formado entre o raio do círculo que passa pela singularidade do bordo de fuga e a direção do eixo x e é obtido pela seguinte expressão

$$\delta_{BF} = \arctan(\mathcal{E}_2 / (b + \mathcal{E}_1))$$

No caso do aerofólio com arqueamento, a variável θ_c em torno do centro do círculo não é adequada para o parâmetro angular ϕ utilizado nas equações do método de vorticidade na superfície, conforme Capítulo 3. De fato, a posição $\theta_c = 0$ não corresponde ao bordo de fuga do aerofólio, além de que, se fossem utilizados pontos igualmente espaçados em θ_c o número de pontos sobre a superfície superior seria maior que na inferior. Adota-se o ângulo θ em torno da origem como sendo o parâmetro angular ϕ , pois favorece os requisitos mencionados: no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ a coordenada s descreve o contorno da superfície superior desde o ponto do bordo de fuga até o ponto do bordo de ataque, e no intervalo $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ a coordenada curvilínea s descreve a superfície inferior até o bordo de fuga. No entanto, é necessário obter os valores de θ_c correspondentes aos valores de θ dos pontos de controle para então calcular as coordenadas cartesianas (ξ, η) , as coordenadas curvilíneas s e as respectivas velocidades exatas v_s sobre a superfície do aerofólio. Assim, das Equações 5.3 obtém-se uma função cuja solução é o valor de θ_c procurado e que é dada por

$$f(\theta_c) = (r_0 \sin \theta) \cos \theta_c - (r_0 \cos \theta) \sin \theta_c - (\varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_2 \cos \theta) = 0 \quad (5.5)$$

5.2.1 Cálculo inverso de aerofólio de Joukowski assimétrico

Um aerofólio de Joukowski com arqueamento e bordo de fuga cúspide é utilizado a seguir para avaliação adicional do método inverso proposto neste trabalho, o qual emprega o Método de Martensen iterativamente. E, também, para avaliação do desempenho do programa de cálculo numérico desenvolvido conforme essa metodologia.

Para cada um dos $2N$ pontos igualmente espaçados em θ , calcula-se o valor correspondente θ_c pela Equação 5.5 e as coordenadas (ξ, η) do ponto correspondente sobre o aerofólio. Avaliam-se as coordenadas curvilíneas complementares s_s ou s_p deste ponto, tomadas sobre as superfícies de sucção ou de pressão, respectivamente, a partir do ponto de estagnação do bordo de ataque. E calcula-se a velocidade exata a ser prescrita v_R , dada pelas Equações 5.2 e

5.4. Assim, em cada iteração, os dois conjuntos de valores (s, v_R) , ou (ϕ, v_R) , das superfícies de sucção e de pressão podem ser utilizados para interpolar o valor de velocidade requerida nos pontos de controle da geometria obtida.

Neste exemplo de aplicação, a distribuição de velocidade prescrita no contorno é igual à do aerofólio de Joukowski com arqueamento e bordo de fuga cúspide, obtido pela transformação conformal do círculo de parâmetros $r_0 = 10$, $\varepsilon_1 = 0,664129798$ e $\varepsilon_2 = 0,871557427$ ($b/r_0 = 0,9297817$) (ou com os parâmetros “clássicos”: $r_0 = 10$, $e = 1/14$ e $\beta = 5^\circ$), em um escoamento com inclinação $\beta_\infty = 10^\circ$. A distribuição de velocidade prescrita e os valores interpolados na iteração 820, com a discretização de $2N = 160$ pontos de controle, são apresentados na Figura 5-49.

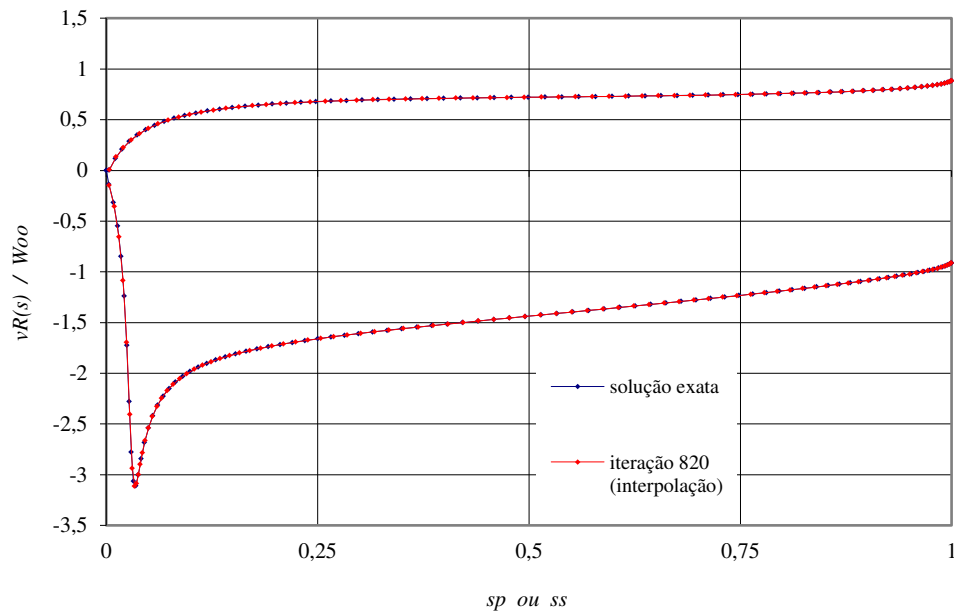


Figura 5-49 Velocidade analítica prescrita do aerofólio de Joukowski arqueado de razão $b/r_0 = 0,9298$ em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$

A Figura 5-50 apresenta a geometria obtida na iteração 820, comparada à geometria meta. Esta última é a geometria analítica do aerofólio de Joukowski arqueado que corresponde à distribuição de velocidade prescrita. A Figura 5-51 mostra os erros obtidos nas iterações.

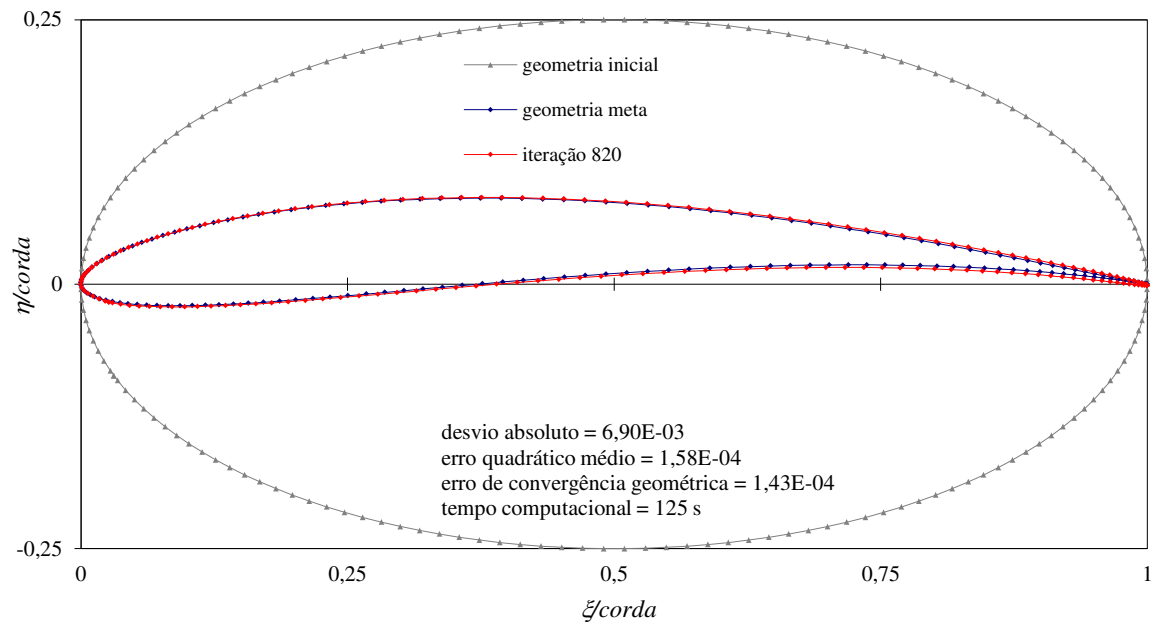


Figura 5-50 Geometria do aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

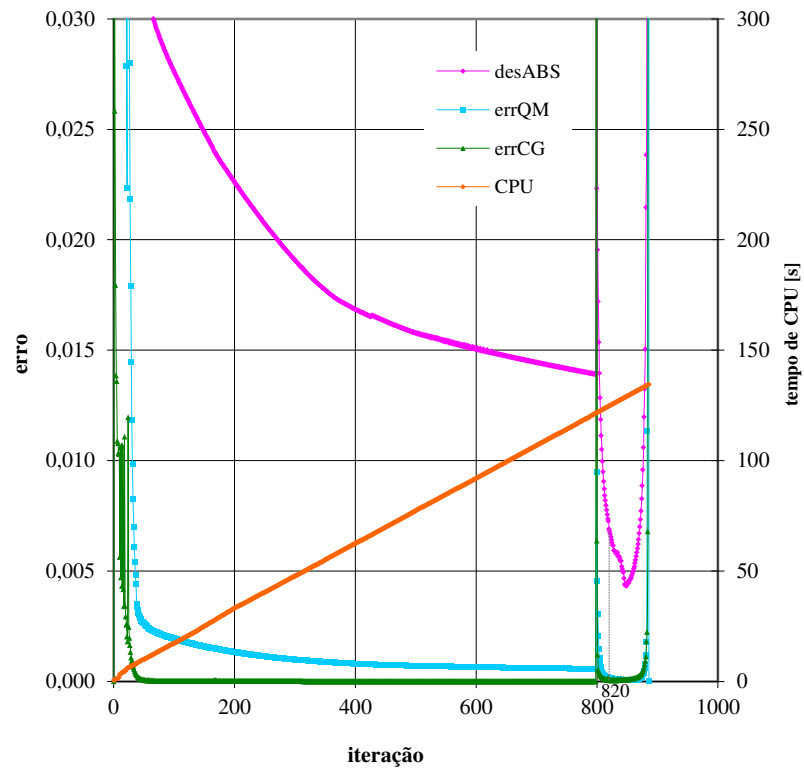


Figura 5-51 Erros nas iterações - aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$) e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Na iteração 799 são feitos ajustes nos bordos de ataque e de fuga e suavização do contorno por mínimos quadrados, e também a redistribuição dos pontos de controle no contorno, como mostra a Figura 5-52. Após a redistribuição, os valores de velocidade normal nos pontos próximos ao bordo de fuga resultam bastante elevados, conforme Figura 5-54 e Figura 5-55. A evolução das geometrias dos bordos de ataque e de fuga em algumas iterações é apresentada na Figura 5-53. Observa-se que a redistribuição dos pontos feita na iteração 799 melhora a curvatura do bordo de fuga, logo a seguir na iteração 800. A geometria evolui bem, sendo que na iteração 820 apresenta arqueamento semelhante ao da geometria meta e espessura um pouco maior na extensão de 50% da corda até o bordo de fuga. E na iteração 850, onde o desvio absoluto da distribuição de velocidade é mínimo, a geometria aproxima-se bastante da geometria meta, exceto na porção de 93% da corda até o bordo de fuga, onde o arqueamento torna-se exagerado. Nas iterações seguintes ocorre instabilidade do método de cálculo, o que se atribui ao bordo de fuga muito arqueado e fino.

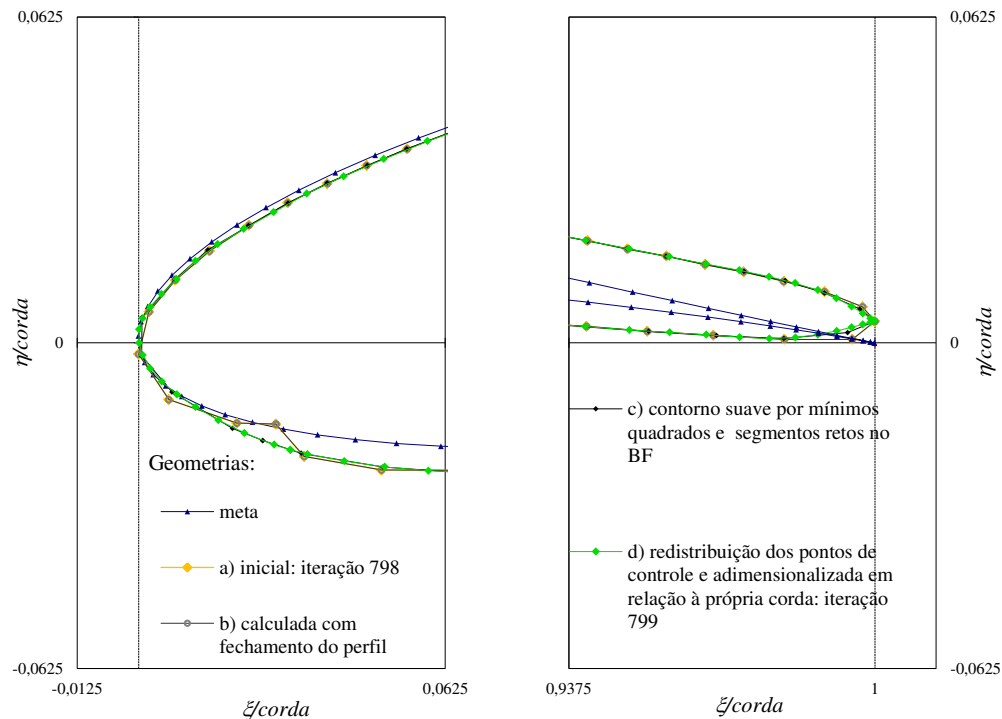


Figura 5-52 Ajustes na iteração 799 - aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

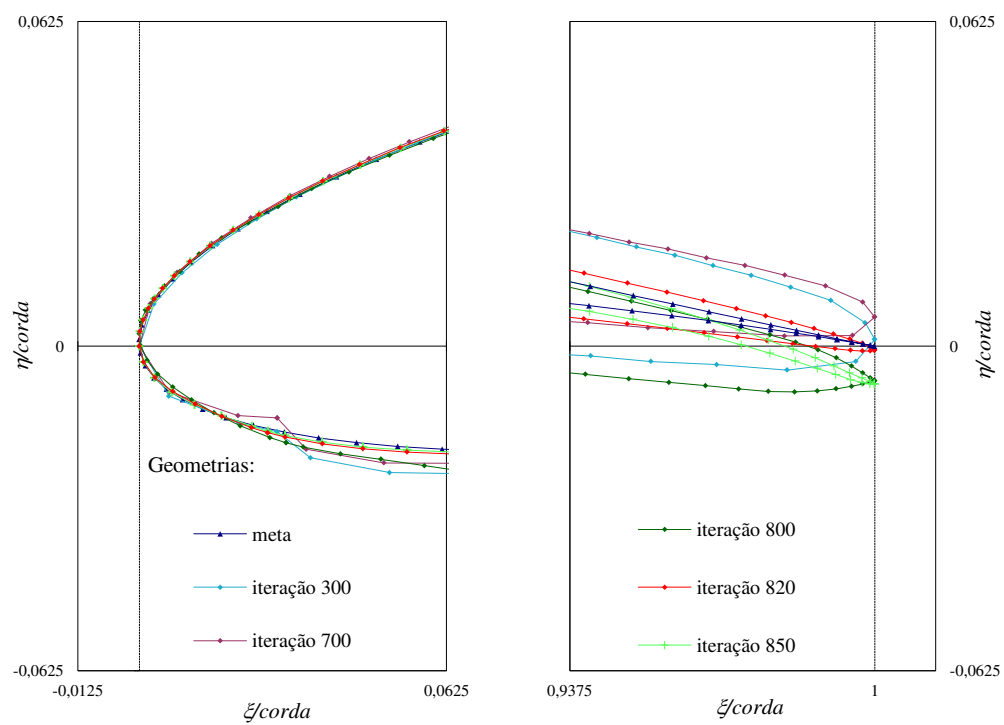


Figura 5-53 Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio de Joukowski arqueado e escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

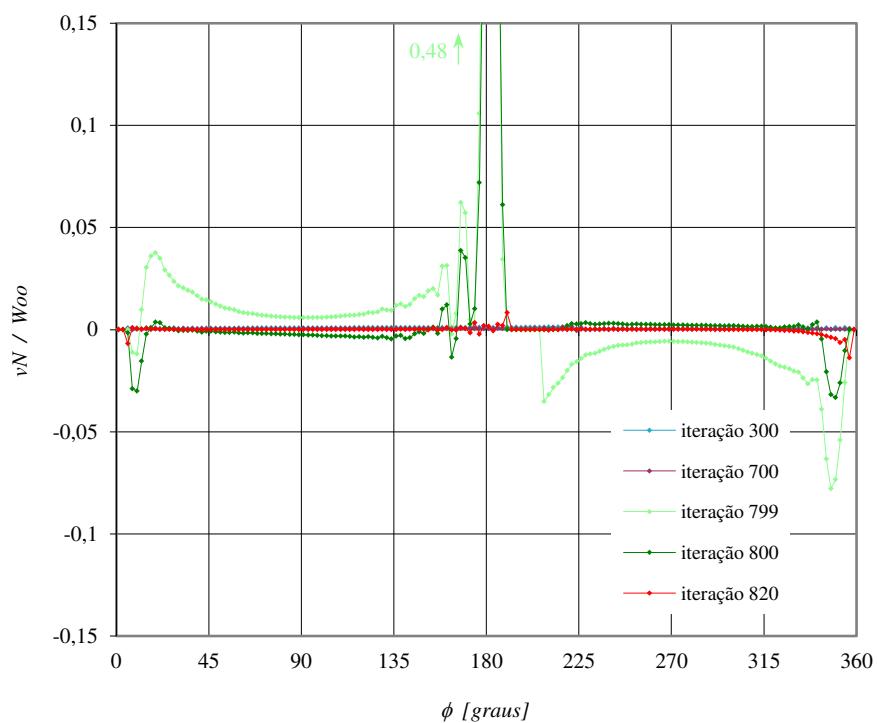


Figura 5-54 Velocidade normal utilizada - aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

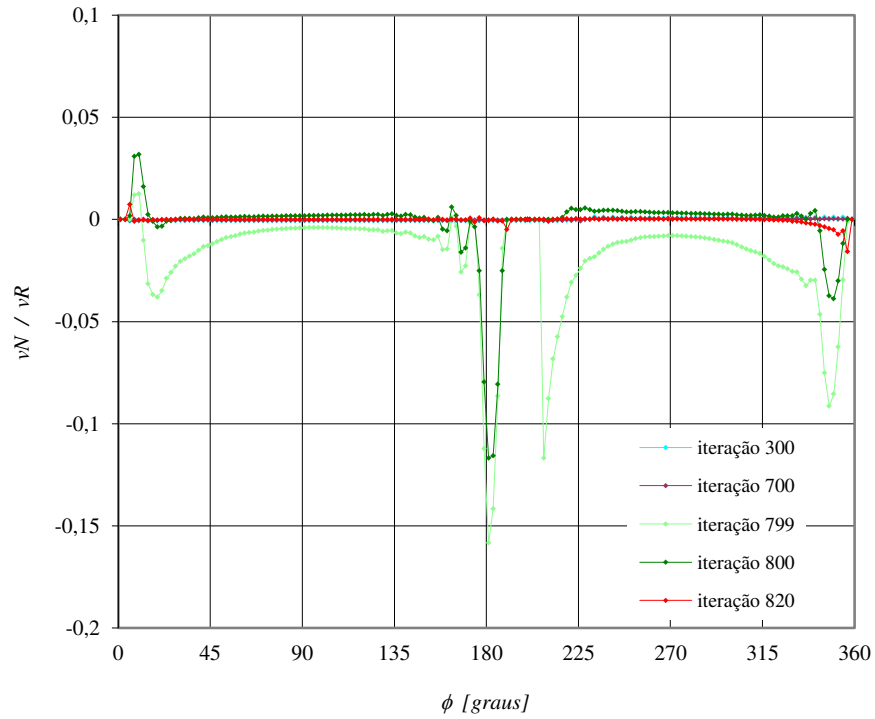


Figura 5-55 Razão v_N / v_R - aerofólio de Joukowski arqueado ($2N = 160$) e $\beta_\infty = 10^\circ$

A Figura 5-56 apresenta detalhes da geometria final (Figura 5-50) para o cálculo inverso do aerofólio de Joukowski com arqueamento, isolado em um escoamento uniforme de inclinação $\beta_\infty = 10^\circ$, obtida com o programa numérico deste trabalho na iteração 820. Na região do bordo de fuga o arqueamento do aerofólio resulta bem próximo daquele da geometria meta, sendo o desvio do ponto do bordo de fuga em torno de 0,08% da corda. A espessura resultante nessa região também é maior do que a meta, sendo que a diferença máxima entre as espessuras das geometrias é de aproximadamente 0,53% da corda, na posição ξ igual a 90,00% da corda do aerofólio.

A Figura 5-57 mostra a distribuição de velocidade na superfície deste aerofólio, calculada com o método de distribuição de vórtices utilizado pelo programa mencionado, comparada àquela da solução exata de Joukowski.

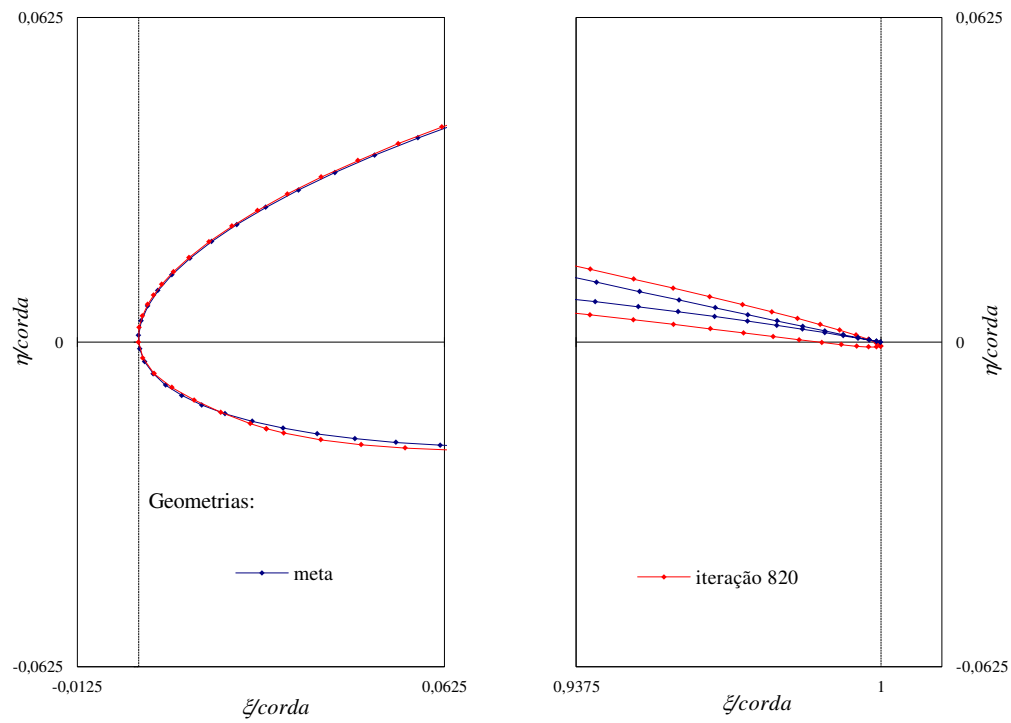


Figura 5-56 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio de Joukowski arqueado e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

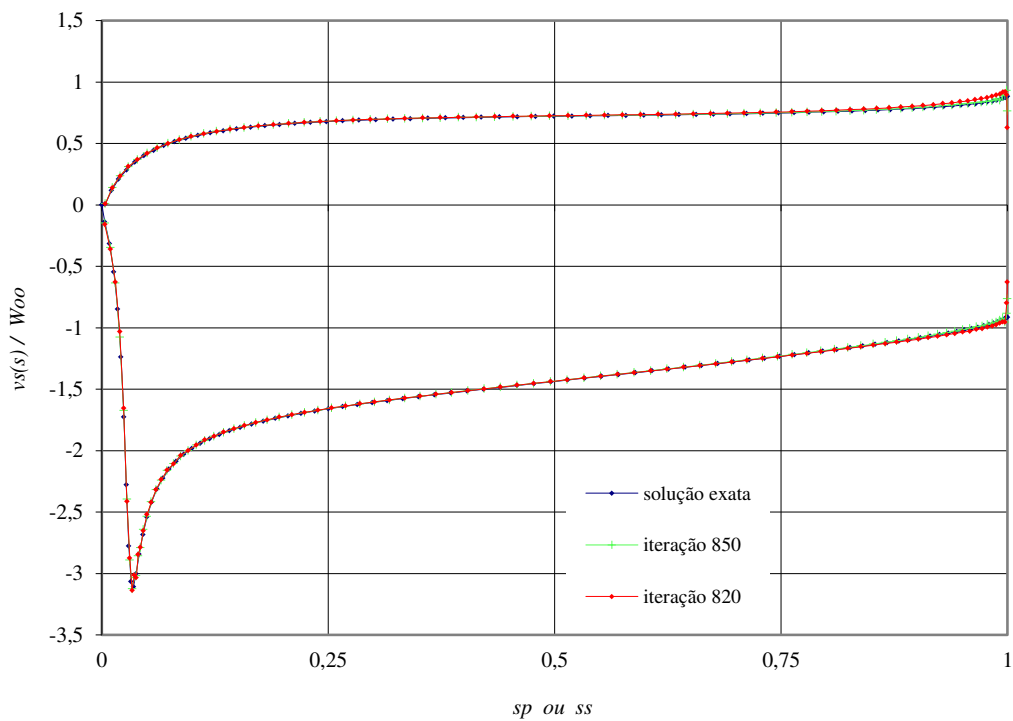


Figura 5-57 Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de Joukowski arqueado em escoamento $\beta = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

6 MÉTODO INVERSO - AEROFÓLIO NACA

A validação do modelo numérico e do código computacional elaborados para o cálculo de perfis e de cascatas, com base na metodologia da distribuição de vórtices na superfície, prossegue com a aplicação dos mesmos para gerar outro tipo de perfil, o experimental, como o são os perfis NACA.

O aerofólio NACA série 65 é empregado em cascatas de pás de compressor, conforme atesta a literatura (EMERY et al, 1958), com desempenho muito satisfatório. Neste Capítulo são tratados um perfil simétrico NACA 65-010 e um perfil assimétrico NACA 65-1210 como aerofólios isolados. A geometria de cada um desses perfis pode ser obtida em Abbott e von Doenhoff (1959). E a distribuição de velocidade em torno desses perfis é calculada por meio de uma análise com o método de distribuição de vorticidade.

6.1 Cálculo inverso do aerofólio NACA simétrico

A série NACA de aerofólios de cascata constitui-se de uma forma de perfil definida (distribuição de espessura ao longo da corda) associada a uma série de linhas de arqueamento básicas, cada uma sendo referenciada pelo coeficiente de sustentação de projeto para o aerofólio isolado (C_{L_0}) multiplicado por dez, seguido pela espessura máxima em porcentagem da corda.

Para o cálculo inverso de um aerofólio NACA simétrico isolado e alinhado com o escoamento livre, adota-se o aerofólio NACA 65-010, com forma de perfil da série 65, coeficiente de sustentação nulo (perfil simétrico) e com espessura máxima igual a 10% da corda. A distribuição de espessura e a distribuição de velocidade teórica encontram-se no Apêndice I de Abbott e von Doenhoff (1959, p.362).

Com a geometria dada, interpola-se por *spline* $2N$ pontos igualmente espaçados na variável angular ϕ , sentido anti-horário, com vértice no cento de um círculo cujo diâmetro coincide com a corda do aerofólio e que determina o ponto do bordo de fuga em $\phi=0$, de coordenadas cartesianas adimensionalizadas em relação à corda $(x_c, y_c)=(1,0)$, e o ponto do bordo de ataque

em $\phi = \pi$, ou $(x_c, y_c) = (0,0)$. A análise deste perfil pelo método de vorticidade distribuída resulta a distribuição de velocidade no contorno. As coordenadas curvilíneas complementares s_s e s_p dos pontos sobre as superfícies de sucção e de pressão, respectivamente, são também calculadas.

O cálculo inverso de um aerofólio com a distribuição de velocidade requerida igual àquela obtida para o aerofólio NACA 65-010 é executado, a partir de uma geometria inicial elíptica. Essa distribuição requerida e os valores interpolados na iteração 230 com a discretização do contorno em $2N = 160$ pontos de controle são apresentados na Figura 6.1.

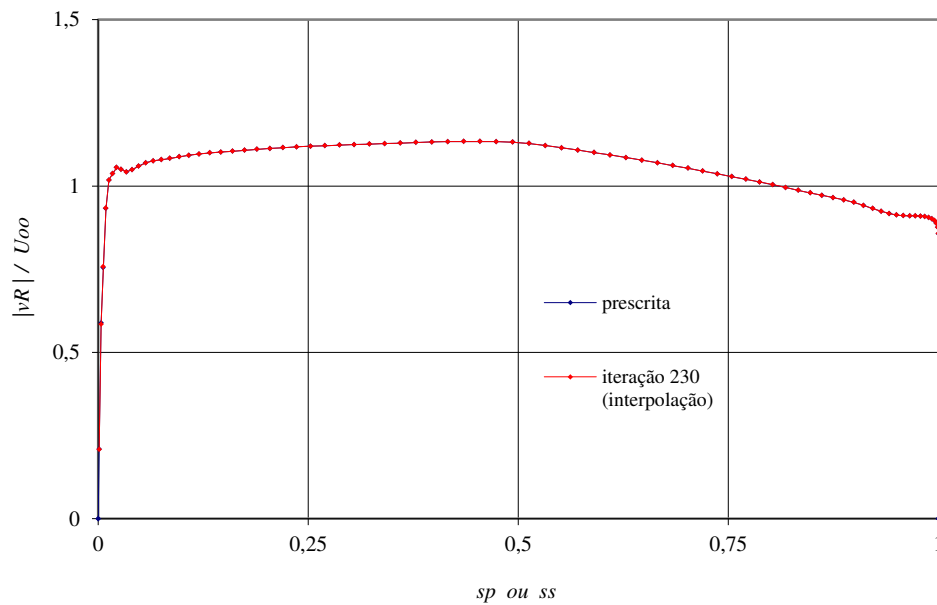


Figura 6.1 Velocidade prescrita do aerofólio NACA 65-010 em escoamento $\beta_\infty = 0^\circ$

A convergência é obtida na iteração 230 e os erros obtidos durante o procedimento inverso são apresentados na Figura 6.3. A geometria final é apresentada na Figura 6.2 para a iteração 230, quando o desvio absoluto torna-se igual a $7,74 \cdot 10^{-4}$. E os detalhes dos bordos de ataque e de fuga da geometria final são mostrados na Figura 6.8.

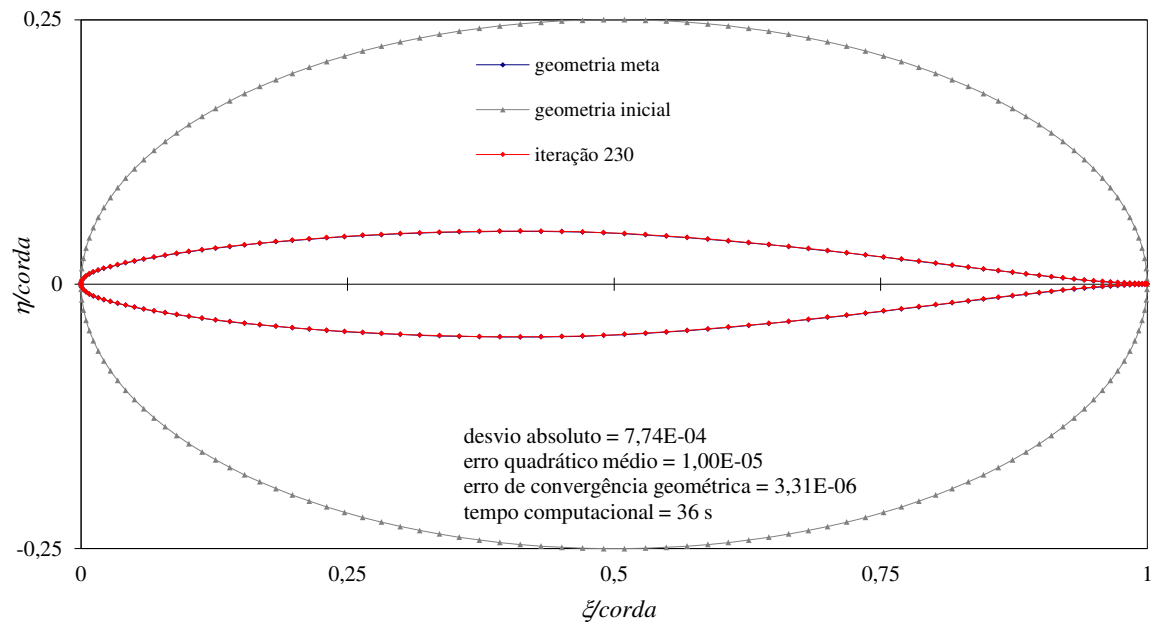


Figura 6.2 Geometria do aerofólio NACA 65-010 obtida com o método inverso ($2N = 160$)

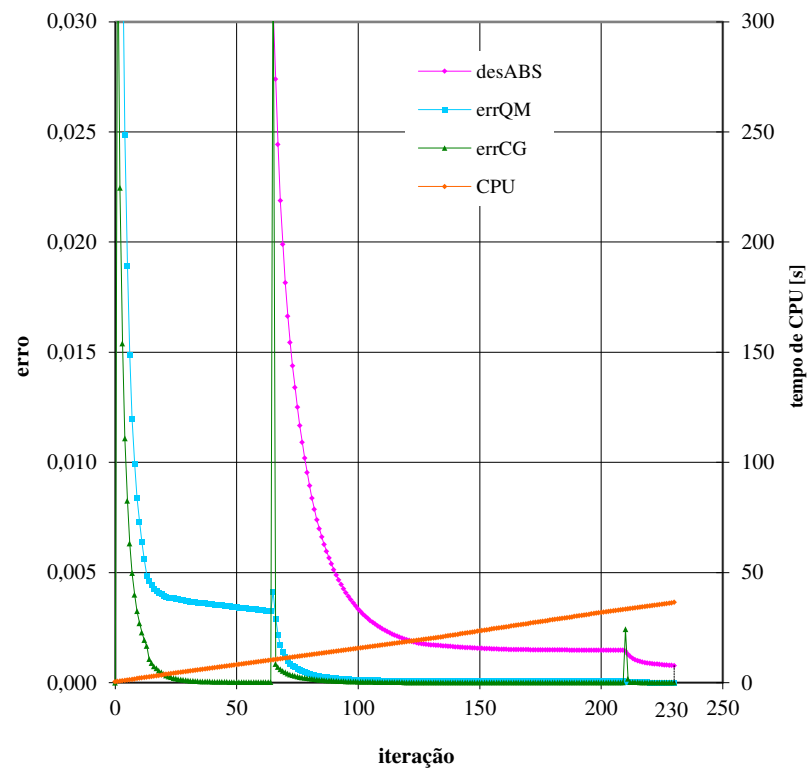


Figura 6.3 Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$)

Este método segue o **Procedimento B** descrito anteriormente. Os valores elevados de velocidade normal próximo aos pontos de estagnação são zerados a cada iteração. A geometria do bordo de ataque é corrigida e todo o contorno do aerofólio é suavizado por meio de interpolação por mínimos quadrados nas iterações 65 e 210. E, nessas mesmas iterações, faz-se a redistribuição dos pontos de controle de maneira que eles ficam mais próximos aos bordos do aerofólio, como se observa nos detalhes mostrados na Figura 6.4 para a iteração 65.

Para algumas iterações as velocidades normais sobre as superfícies de sucção ou de pressão das respectivas geometrias são apresentadas na Figura 6.5, enquanto que os valores de v_N/v_R utilizados no cálculo das geometrias imediatamente seguintes são apresentados na Figura 6.6.

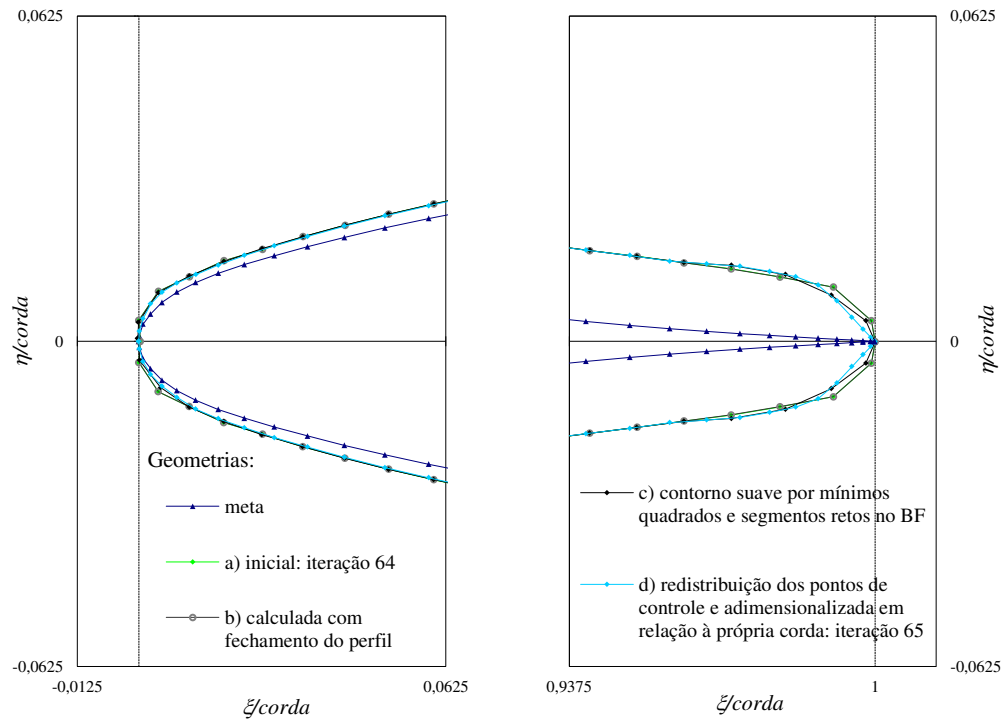


Figura 6.4 Ajustes nos BA e BF na iteração 65 - aerofólio NACA 65-010

Observa-se na Figura 6.8 que a geometria obtida no cálculo inverso praticamente coincide com a geometria meta do aerofólio NACA 65-010.

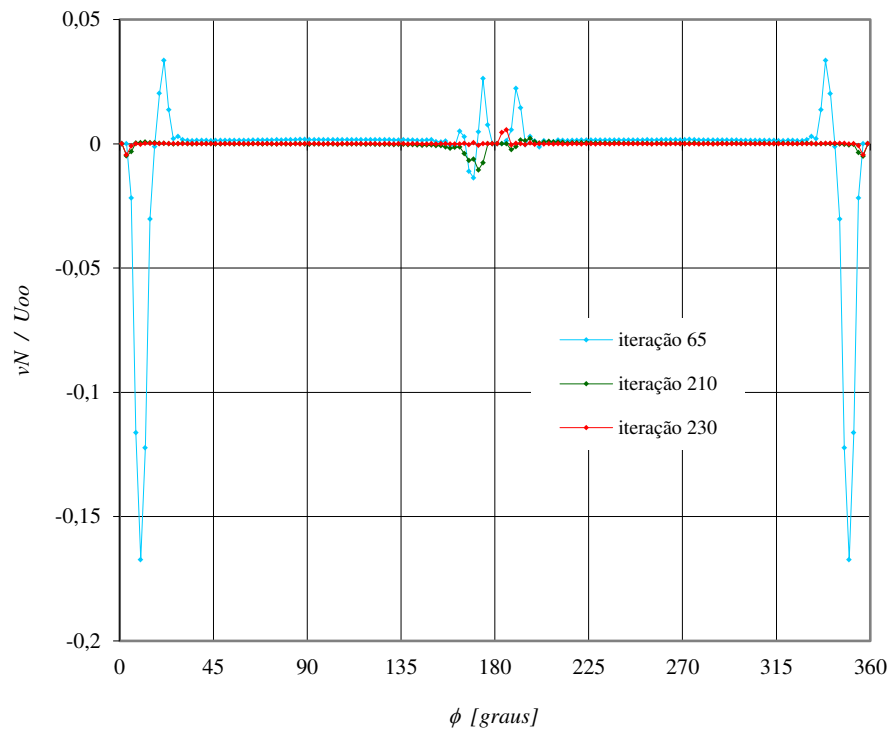


Figura 6.5 Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-010

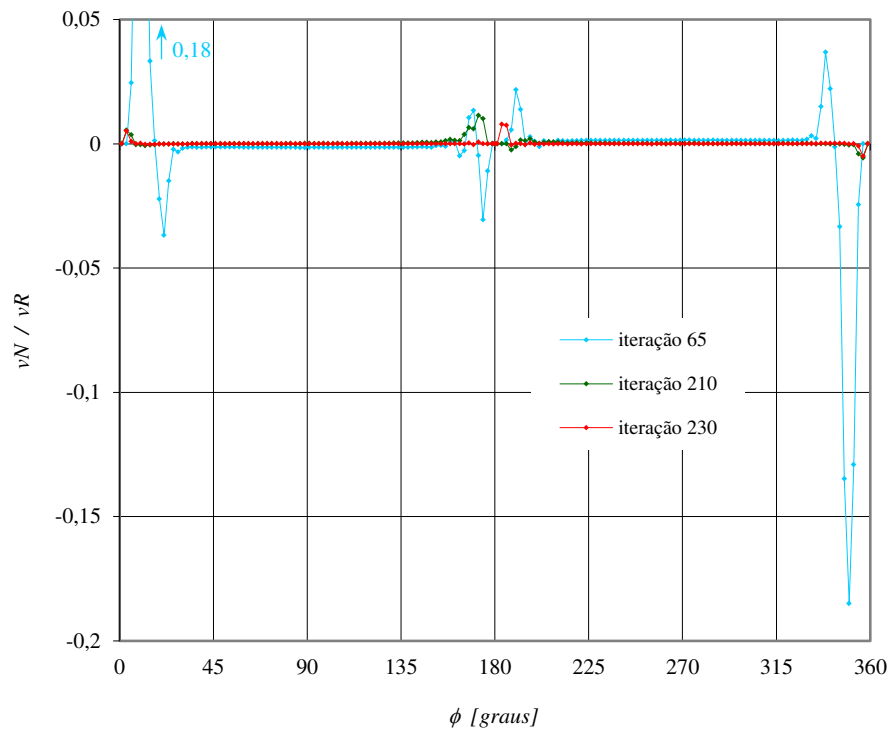


Figura 6.6 Razão v_N / v_R - aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$)

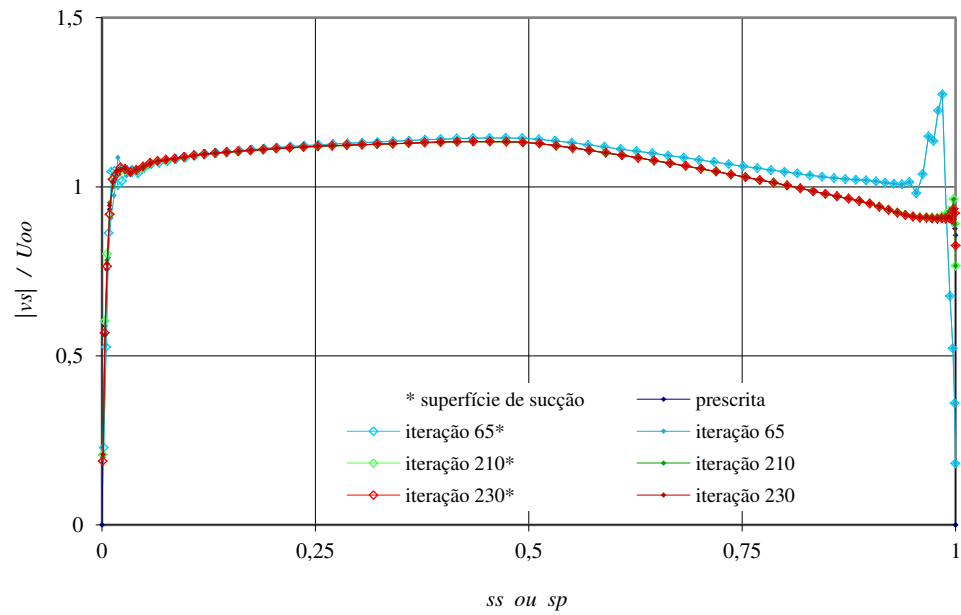


Figura 6.7 Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-010

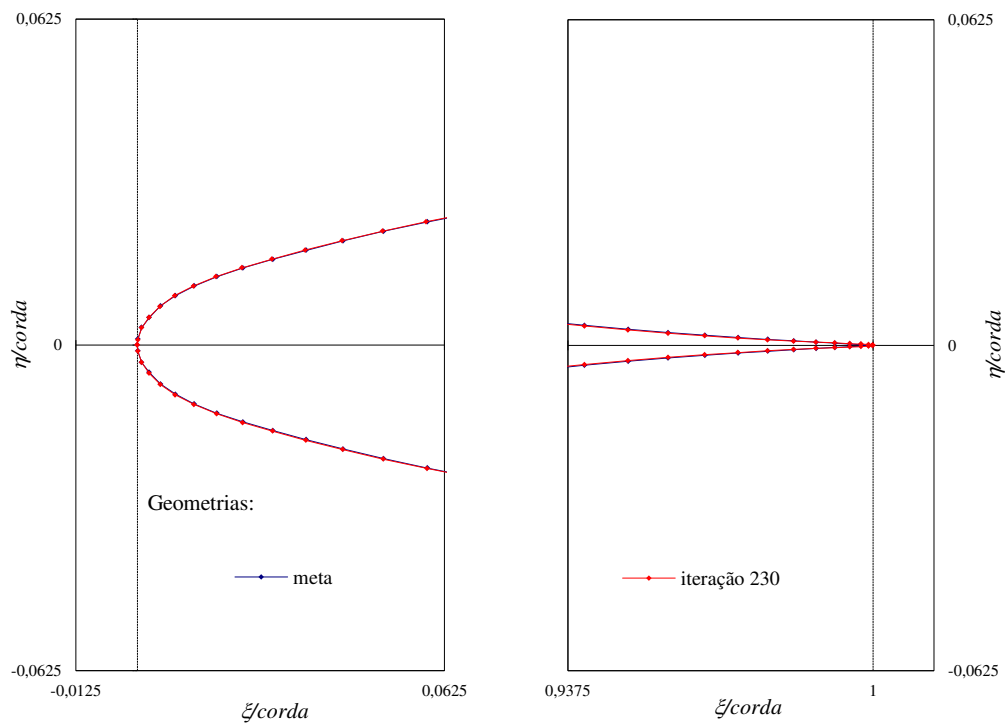


Figura 6.8 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio NACA 65-010

6.2 Cálculo inverso do aerofólio NACA simétrico em escoamento inclinado

Para o cálculo inverso de um aerofólio NACA simétrico isolado em um escoamento livre inclinado $\beta_\infty = 10^\circ$ em relação à corda do aerofólio, adota-se o mesmo aerofólio NACA 65-010 da subseção anterior. Obtém-se a distribuição de velocidade no contorno deste aerofólio por meio da análise pelo método de vorticidade distribuída com $2N = 160$ pontos de controle. E essa passa a ser a distribuição de velocidade requerida (ou prescrita), mostrada na Figura 6.9, para o cálculo a partir de uma elipse como geometria inicial, conforme Figura 6.10.

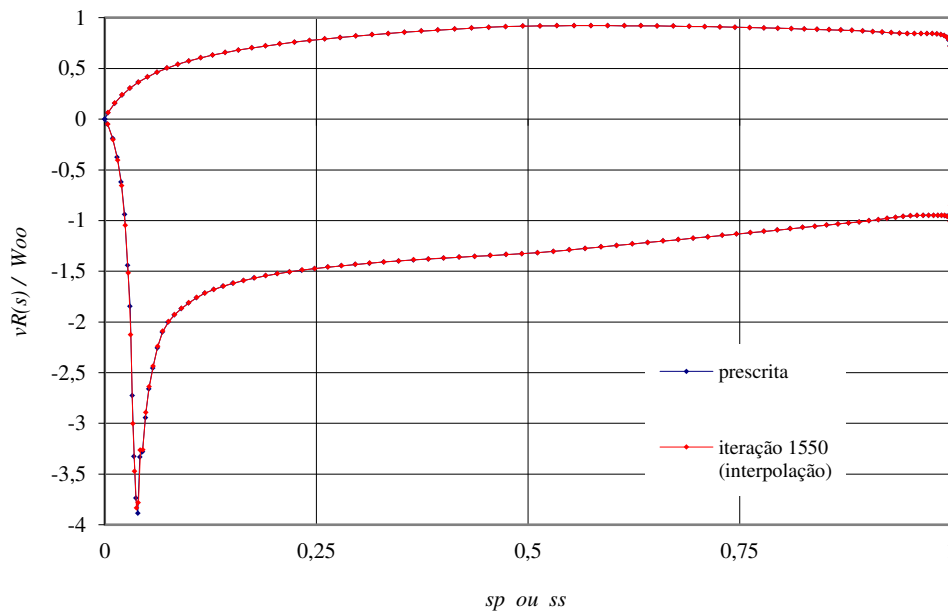


Figura 6.9 Velocidade prescrita do aerofólio NACA 65-010 em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$

Os erros obtidos nas iterações são apresentados na Figura 6.11 que indica que o erro permanece estável em torno da iteração 1500. A Figura 6.10 apresenta a geometria final como a iteração 1550, quando o desvio absoluto torna-se igual a $1,79 \cdot 10^{-3}$.

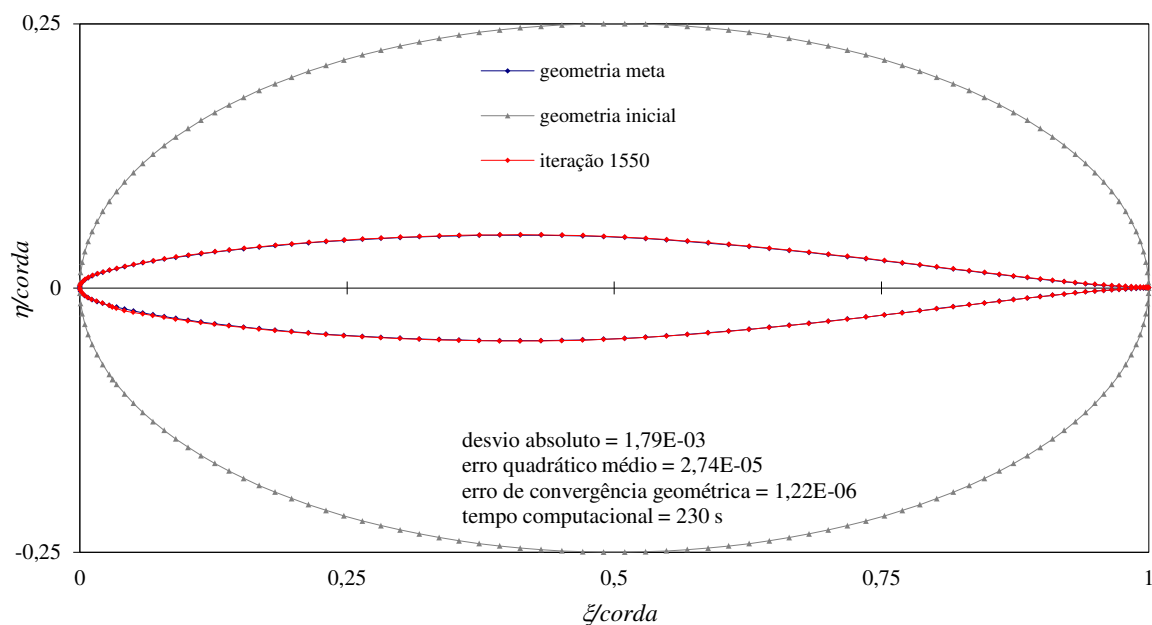


Figura 6.10 Geometria do aerofólio NACA 65-010 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

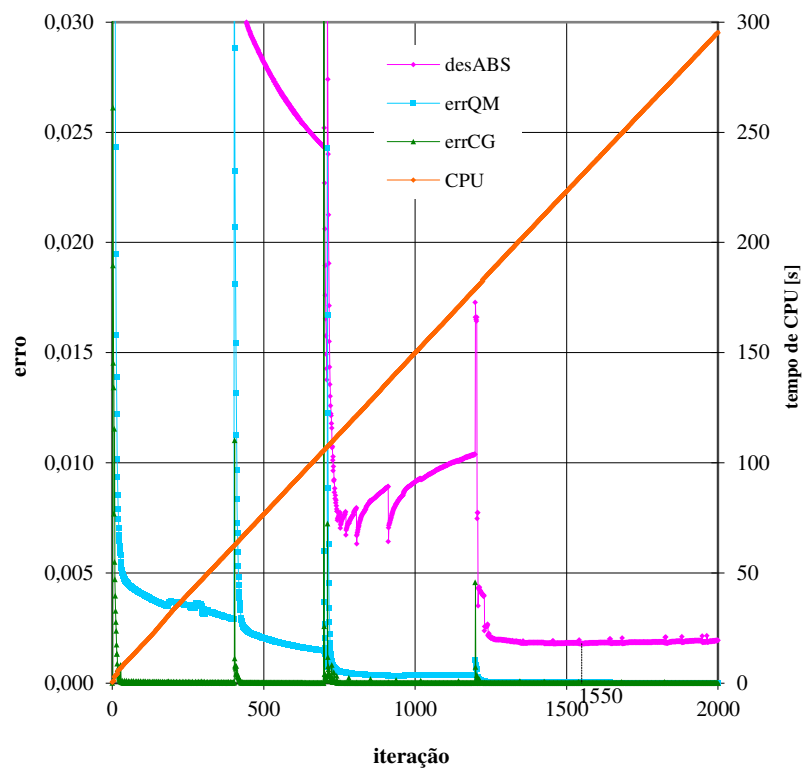


Figura 6.11 Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

Nas iterações 699 e 1199, conforme Procedimento B, a geometria do bordo de ataque é ajustada por *splines* e todo o contorno do aerofólio é suavizado por meio de interpolação por mínimos quadrados. Em seguida, os pontos de controle são redistribuídos no contorno por meio de interpolação de pontos igualmente espaçados em ϕ com coordenada cartesiana dada pela transformação circular $x_c = 0,5(1 + \cos \phi)$. A Figura 6.12 mostra esses ajustes na iteração 1199.

As velocidades normais sobre as superfícies de sucção ou de pressão e os valores de v_N/v_R para algumas iterações são apresentadas na Figura 6.13 e Figura 6.14, respectivamente.

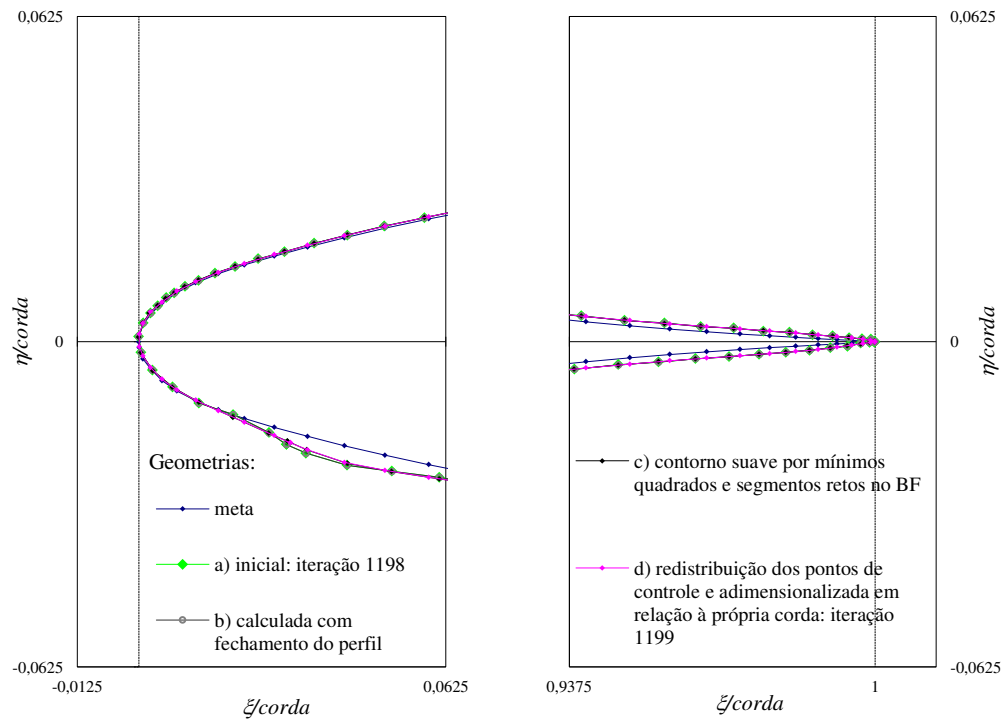


Figura 6.12 Ajustes nos BA e BF na iteração 1199 – aerofólio NACA 65-010 e $\beta_\infty = 10^\circ$

A Figura 6.15 apresenta a distribuição de velocidade na superfície do aerofólio v_s (em relação à velocidade W_∞ do escoamento livre) obtida no cálculo inverso comparada à solução prescrita igual à do aerofólio NACA 65-010 em escoamento inclinado $\beta_\infty = 10^\circ$. E a Figura 6.16 mostra os detalhes dos bordos de ataque e de fuga da geometria final comparada com a geometria meta. O desvio entre elas é da ordem de 0,17% da corda na região do bordo de ataque próximo ao ponto de estagnação na superfície de pressão e de 0,04% da corda no bordo de fuga.

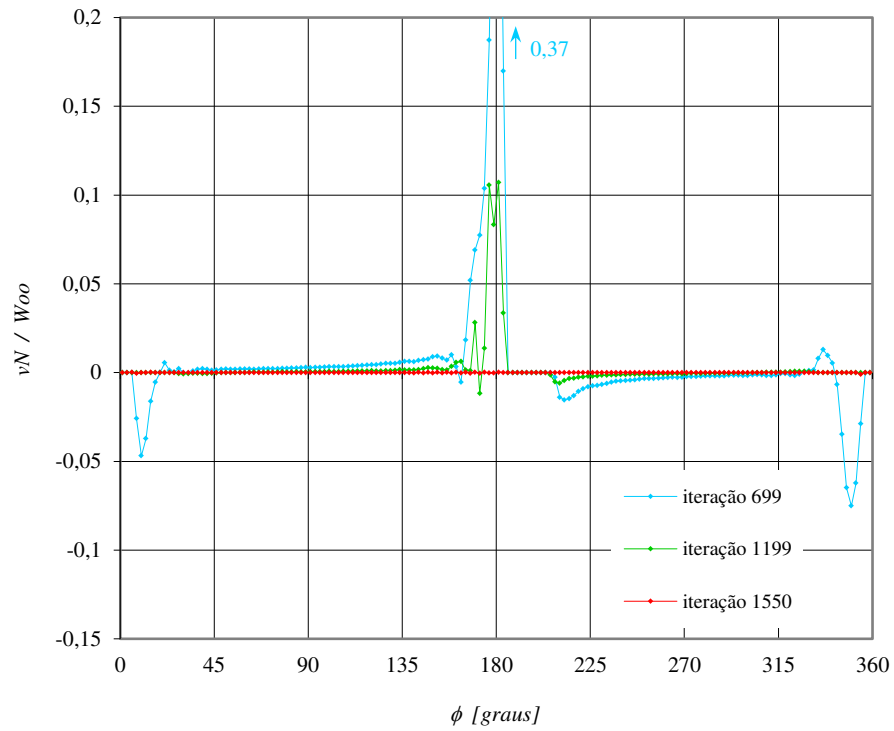


Figura 6.13 Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^\circ$

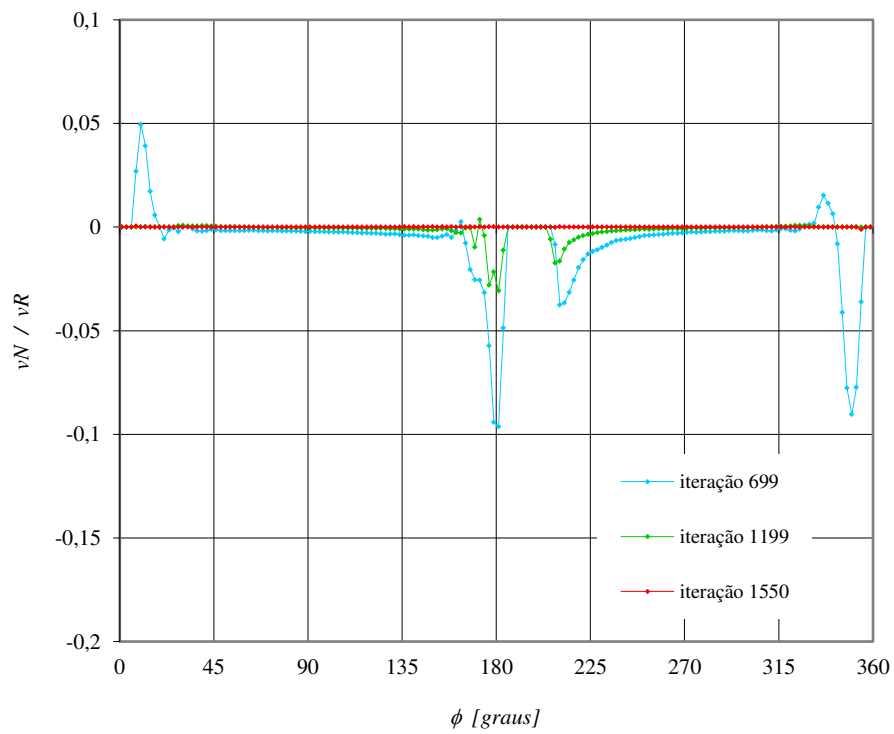


Figura 6.14 Razão v_N / v_R - aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^\circ$ ($2N = 160$)

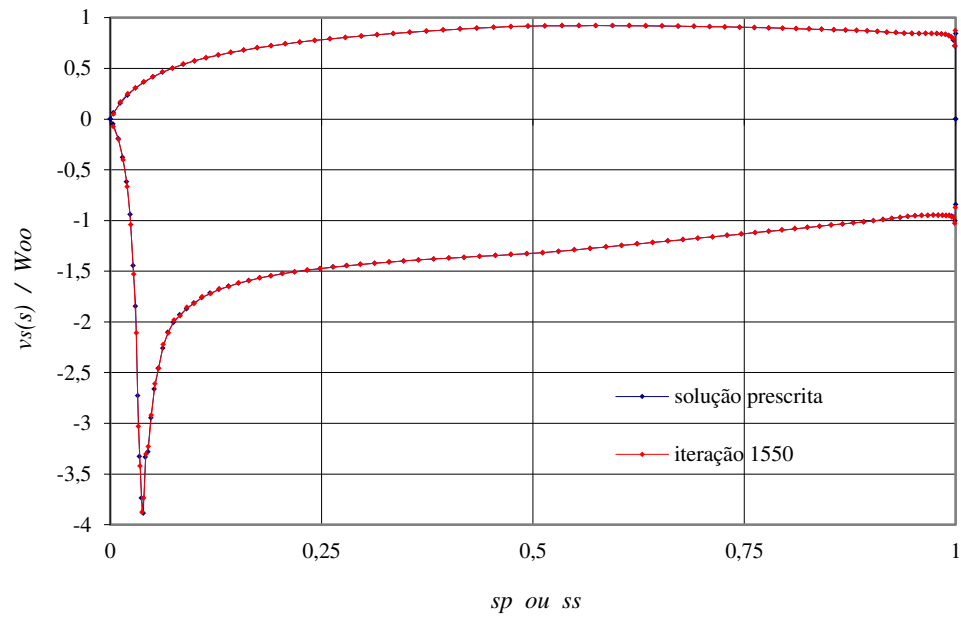


Figura 6.15 Velocidade obtida na superfície do aerofólio simétrico calculado com distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-010 em escoamento inclinado $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

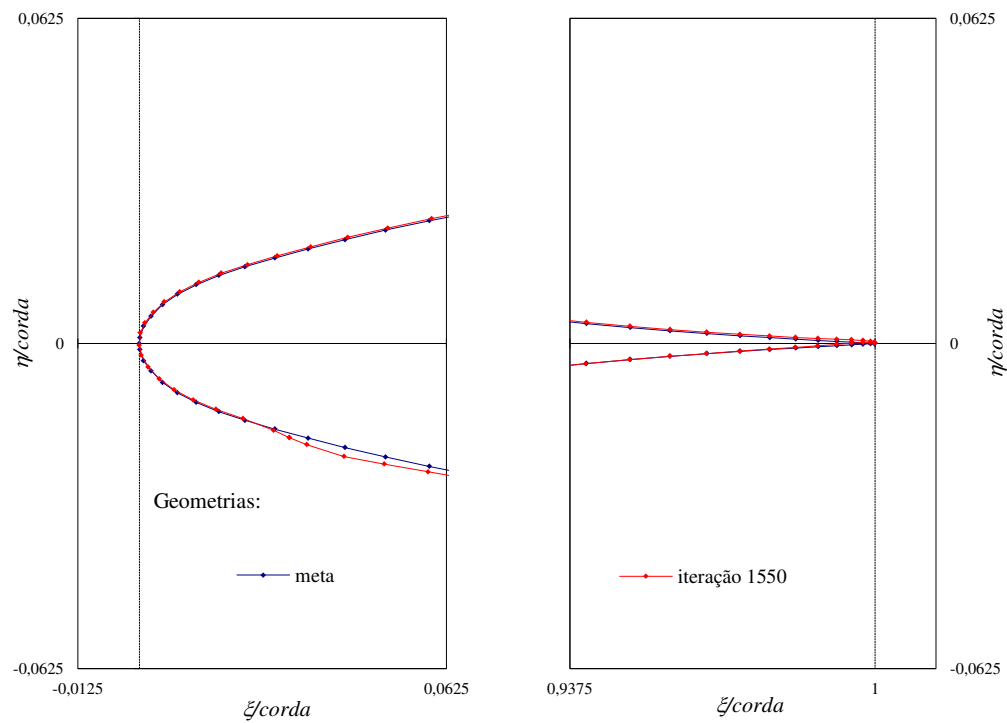


Figura 6.16 Geometrias finais dos BA e BF do aerofólio NACA 65-010 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

6.3 Cálculo inverso do aerofólio NACA arqueado

Adota-se o perfil NACA 65-1210 para o cálculo inverso de um aerofólio NACA arqueado isolado em um escoamento livre com inclinação $\beta_\infty = 10^\circ$ em relação à corda do aerofólio. Os dados do NACA 65-1210 são obtidos conforme Abbott e von Doenhoff (1959). Este aerofólio apresenta a mesma distribuição de espessura básica do aerofólio NACA 65-010, com espessura máxima igual a 10% da corda, que se encontra em Abbot e von Doenhoff (1959, Apêndice I, p.362). A linha de arqueamento tem as características da linha média NACA $a = 1,0$ (*ibidem*, Apêndice II, p.405) multiplicadas pelo coeficiente de sustentação de projeto deste aerofólio $C_\ell = 1,2$. A distribuição de velocidade teórica também pode ser obtida a partir dos dados das mesmas tabelas.

A distribuição de velocidade prescrita é obtida pelo cálculo direto do escoamento sobre o aerofólio NACA 65-1210. Esta distribuição e os valores interpolados na iteração 2000 do cálculo inverso, com a discretização de $2N = 160$ pontos de controle, são apresentados na Figura 6.17.

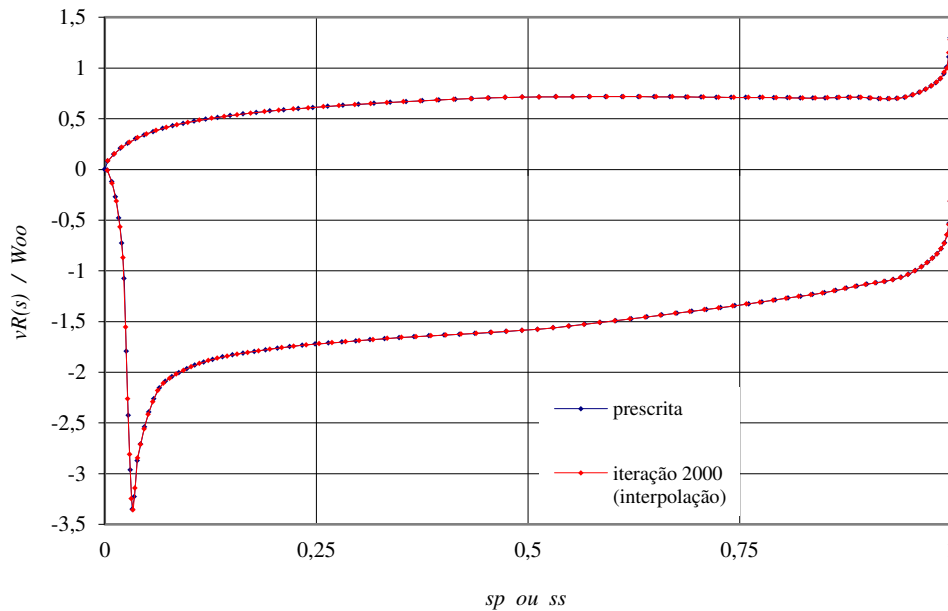


Figura 6.17 Velocidade prescrita do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$

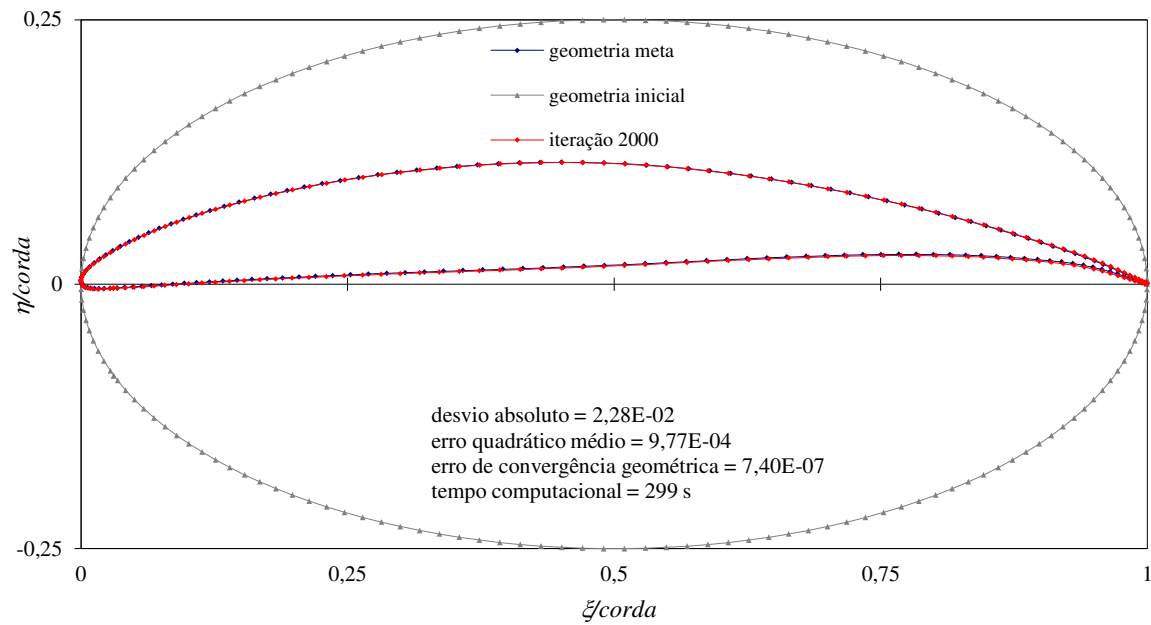


Figura 6.18 Geometria do aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

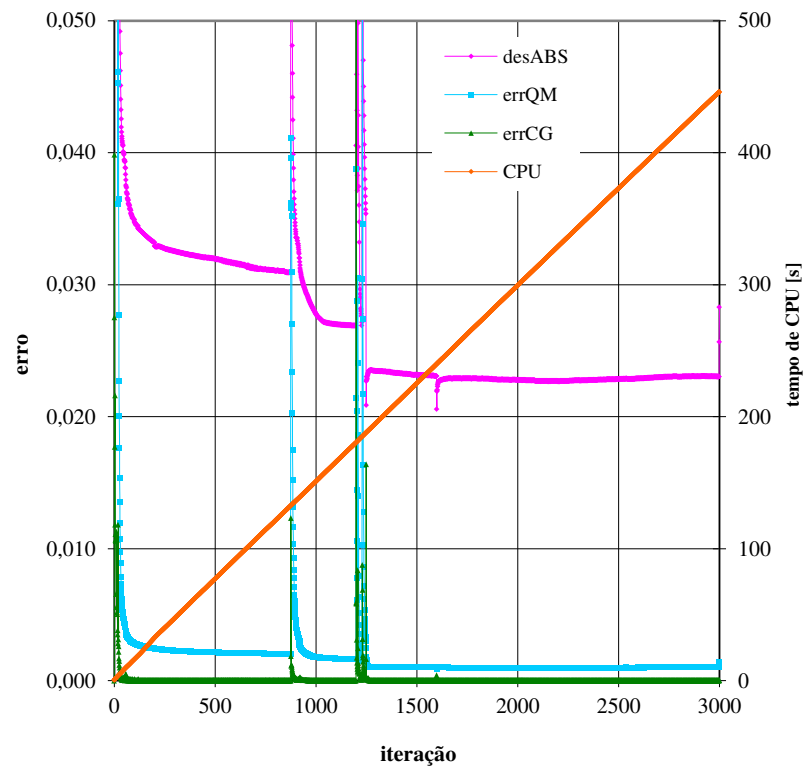


Figura 6.19 Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

A Figura 6.18 apresenta a geometria obtida na iteração 2000, comparada à geometria meta, ou seja, do aerofólio NACA 65-1210 que corresponde à distribuição de velocidade prescrita. E a Figura 6.19, os erros obtidos nas iterações.

Nas iterações 1199, 1249 e 1599 são feitas correções nos bordos de ataque e de fuga e suavização do contorno por mínimos quadrados, e também a redistribuição dos pontos de controle nessas iterações. Na iteração 2999, apenas a suavização do contorno. Após a redistribuição, os valores de velocidade normal nos pontos próximos ao bordo de fuga resultam bastante elevados, conforme Figura 6.21e Figura 6.22, devido à pequena espessura nesta região e consequente proximidade entre os pontos opostos. Assim, para atenuar o problema e evitar cruzamento entre as superfícies, o bordo de fuga é corrigido por mínimos quadrados nas iterações 1200 a 1248. A evolução das geometrias dos bordos de ataque e de fuga nessas últimas iterações é apresentada na Figura 6.20. Observa-se que a redistribuição dos pontos melhora a curvatura do bordo de fuga.

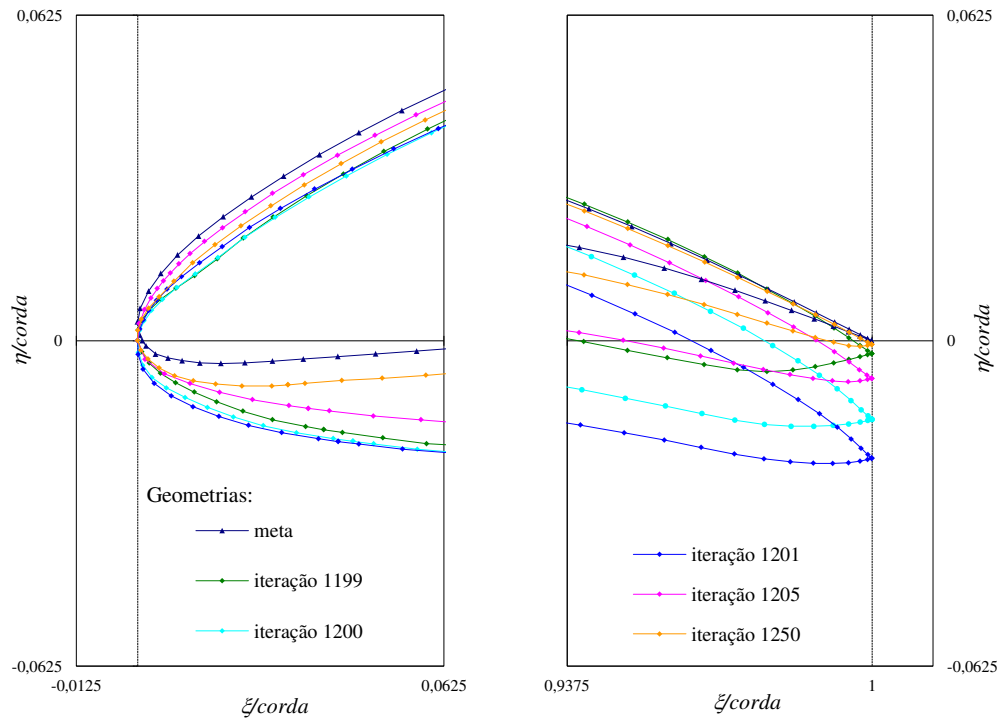


Figura 6.20 Geometrias dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

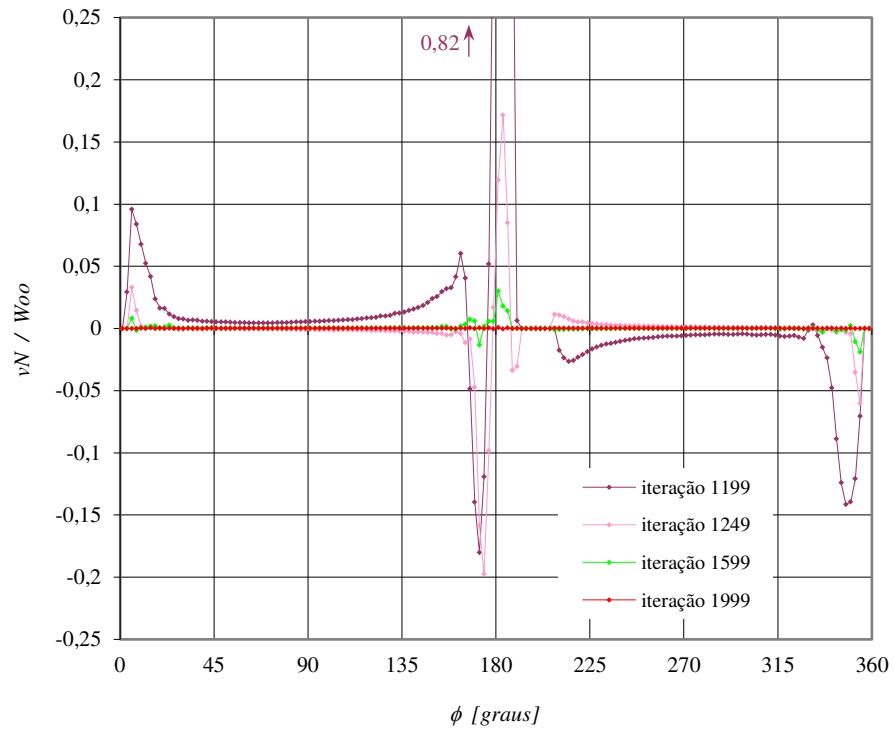


Figura 6.21 Velocidade normal utilizada - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_\infty = 10^\circ$

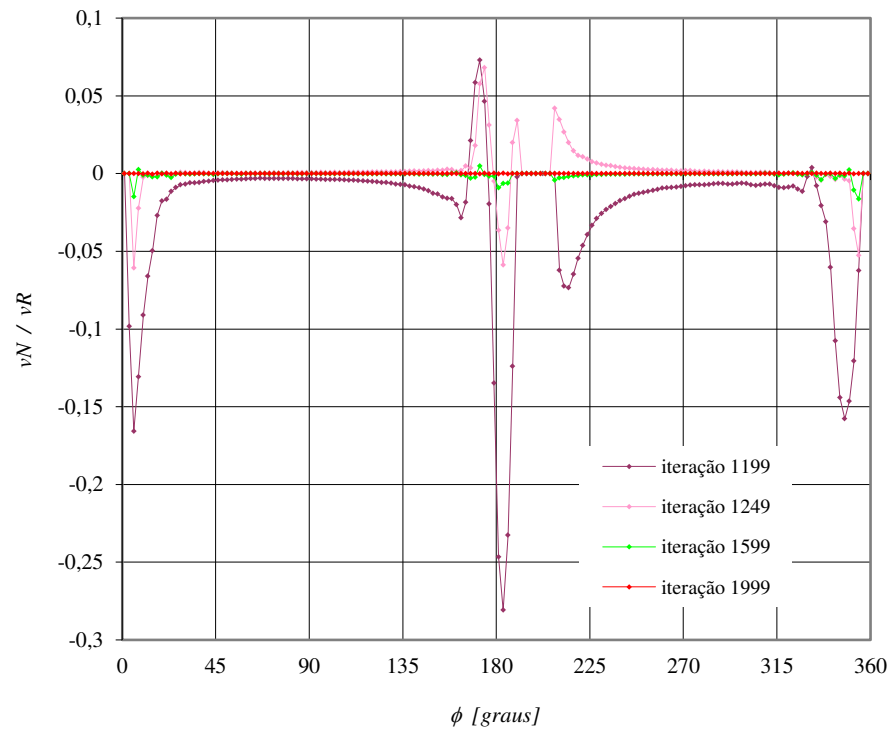


Figura 6.22 Razão v_N / v_R - aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) e $\beta_\infty = 10^\circ$

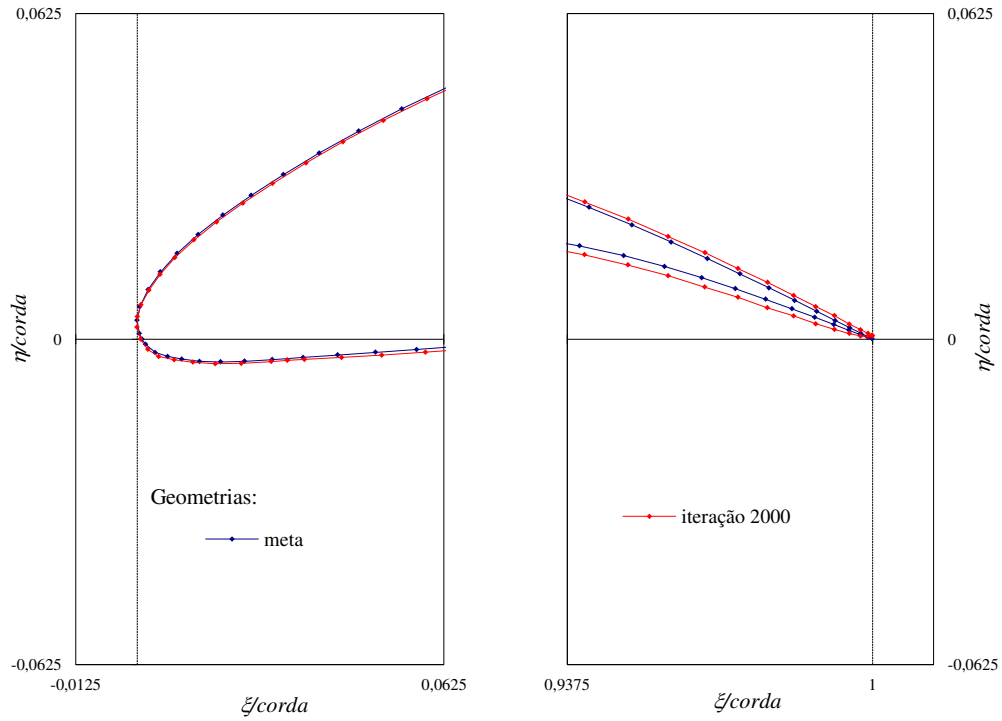


Figura 6.23 Geometria final dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

A Figura 6.23 apresenta detalhes da geometria final (Figura 6.18) para o cálculo inverso de um aerofólio NACA 65-1210, isolado em um escoamento uniforme de inclinação $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$, obtida com o programa numérico deste trabalho. A comparação com a geometria meta mostra que o arqueamento obtido para a região do bordo de fuga é bastante razoável. E a máxima diferença de espessura obtida em relação à geometria meta é de aproximadamente 0,24% da corda na posição 96,5% da corda do aerofólio.

E a Figura 6.24 mostra a distribuição de velocidade na superfície deste aerofólio, calculada com o método de distribuição de vórtices utilizado pelo programa mencionado, comparada àquela da solução prescrita.

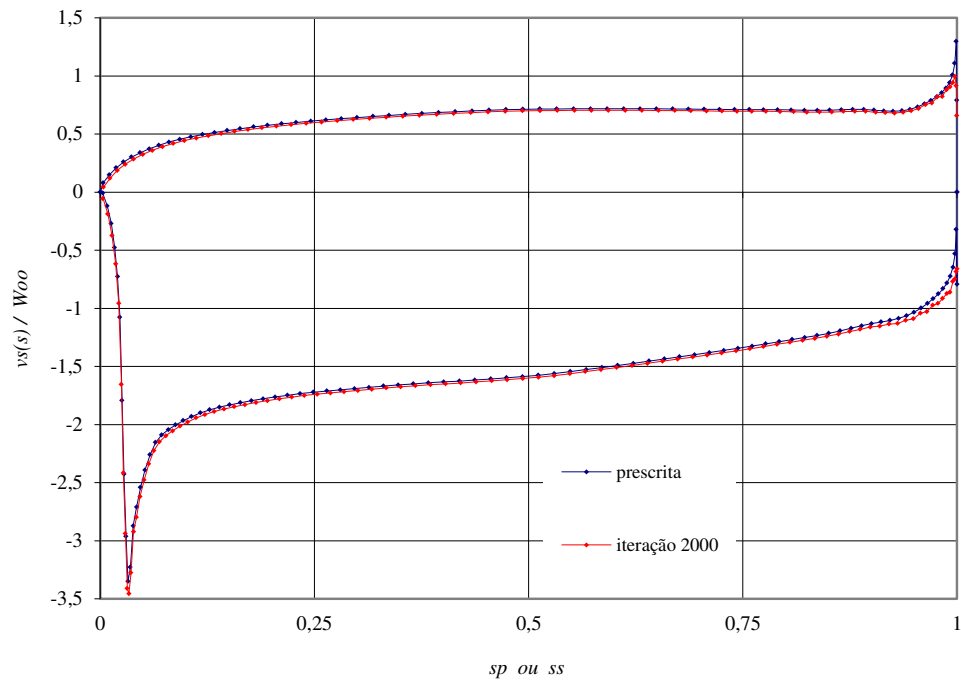


Figura 6.24 Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita igual à de NACA 65-1210 e escoamento $\beta = 10^\circ$ ($2N = 160$)

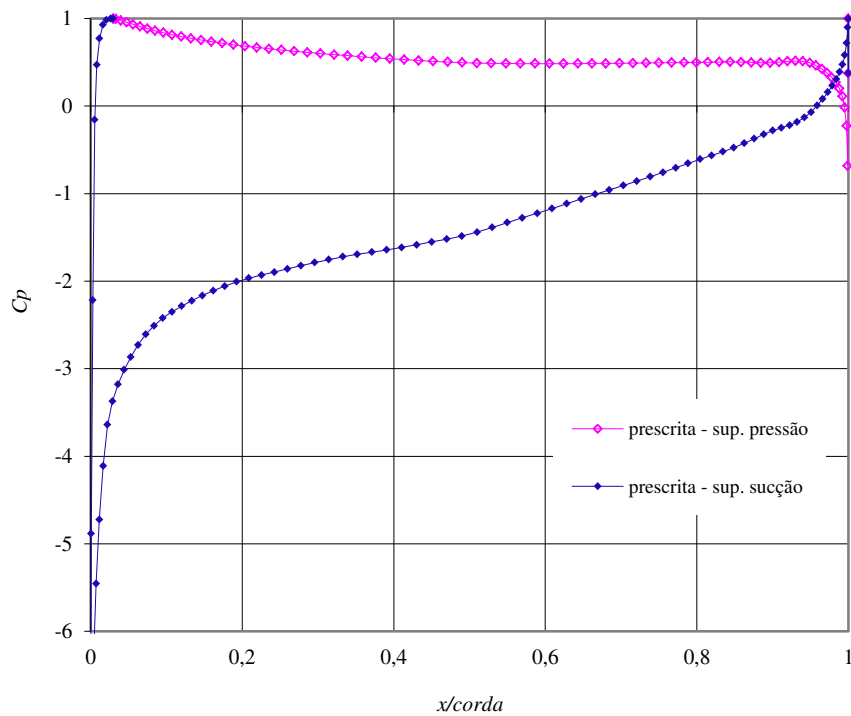


Figura 6.25 Distribuição de pressão correspondente à velocidade prescrita pelo cálculo direto do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_\infty = 10^\circ$

No entanto, a distribuição de velocidade prescrita na Figura 6.17, ou na Figura 6.24, obtida pelo cálculo direto do aerofólio meta, apresenta-se inconsistente na região do bordo de fuga agudo, com cruzamento entre as distribuições de velocidade (em módulo) das superfícies de sucção e de pressão, ou ainda entre as distribuições de pressão dessas superfícies, conforme indica a Figura 6.25 correspondente.

Assim, propõe-se fazer o cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 a partir da distribuição de velocidade prescrita corrigida, conforme apresentada na Figura 6.26, juntamente com os valores interpolados na iteração 1241 desse novo cálculo.

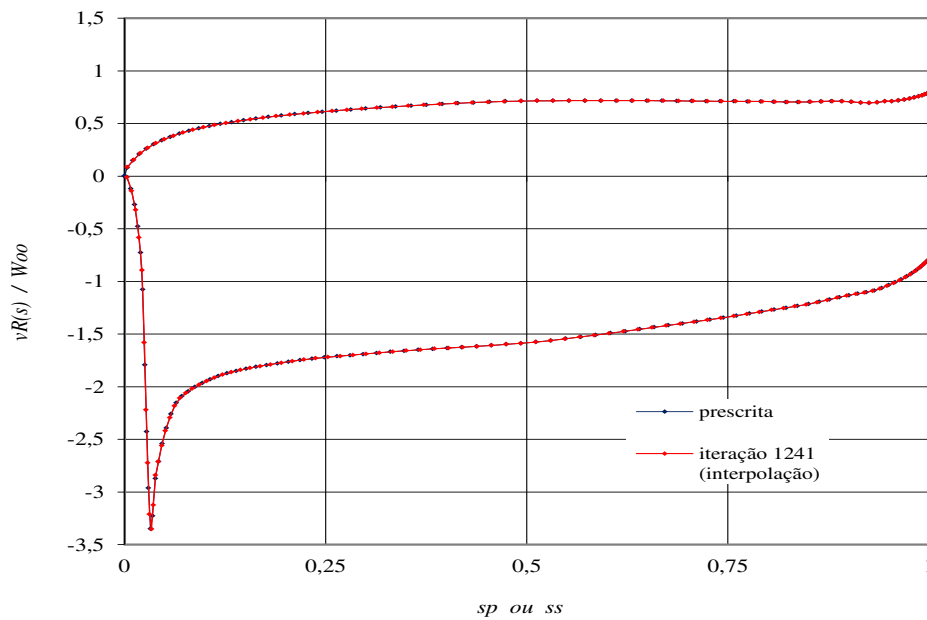


Figura 6.26 Velocidade prescrita corrigida para o cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 em escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

Nas iterações 1199, 1234 e 1239 são feitas correções nos bordos de ataque e de fuga e suavização do contorno por mínimos quadrados, e também a redistribuição dos pontos de controle. Observa-se que este procedimento, de imediato, provoca aumento na espessura da região frontal do aerofólio, deslocando a superfície de pressão, e também aumento da curvatura da região do bordo de fuga. Nas iterações seguintes, o efeito da redistribuição dos pontos é a melhoria da geometria calculada, que se aproxima mais da geometria meta. No entanto, antes de atingir uma geometria tão boa quanto aquela calculada com a velocidade prescrita sem correção

da Figura 6.18, ocorre instabilidade do cálculo devido ao acentuado estreitamento do bordo de fuga.

A Figura 6.27 apresenta a geometria final, iteração 1241, para o cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210, isolado em um escoamento uniforme de inclinação $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$, obtida com o programa numérico deste trabalho. E a Figura 6.29 apresenta detalhes dos bordos de ataque e de fuga dessa geometria. A comparação com a geometria meta mostra que o aerofólio calculado apresenta arqueamento maior na região do bordo de fuga e que, embora a superfície de sucção apresente curvatura semelhante à meta, a superfície de pressão afasta-se da meta na região do bordo de ataque.

Essa questão precisa ser corrigida, oportunamente, pois uma variação no arqueamento do aerofólio na região do bordo de fuga aumenta o coeficiente de sustentação, de maneira semelhante à atuação de um flap. E o método compensa o aumento da sustentação do aerofólio devido ao arqueamento do bordo de fuga modificando o perfil na região do bordo de ataque.

A Figura 6.28 apresenta os erros obtidos nas iterações durante o procedimento de cálculo inverso. E a Figura 6.30 mostra a distribuição de velocidade na superfície do aerofólio calculado, comparada àquela da solução prescrita corrigida, o que evidencia a dificuldade do método proposto em tratar o bordo de fuga agudo com ângulo incluso bem pequeno.

Uma sugestão seria diminuir o número de pontos de controle utilizados no cálculo próximo ao bordo de fuga do aerofólio nessas iterações finais.

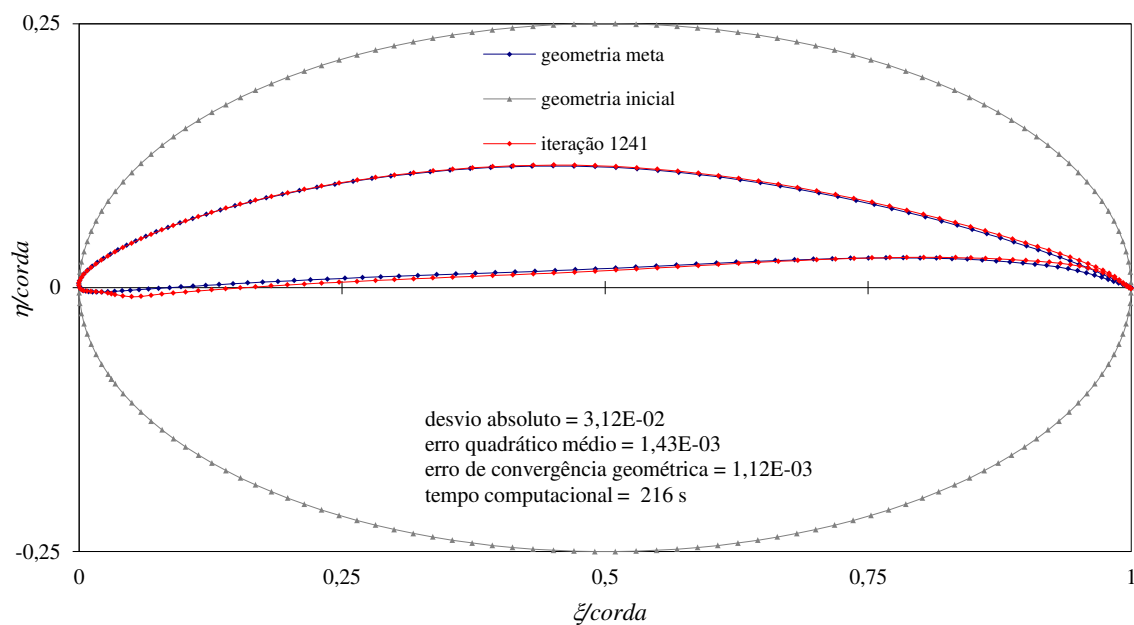


Figura 6.27 Geometria do aerofólio NACA 65-1210 ($2N = 160$) obtida com o método inverso para escoamento $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ com velocidade prescrita corrigida

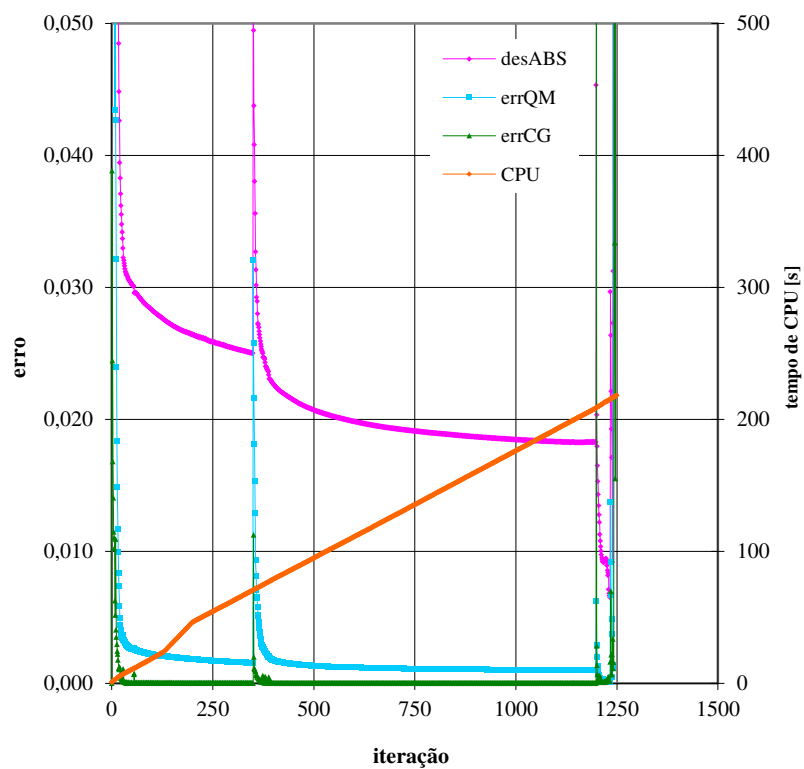


Figura 6.28 Erros nas iterações - aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

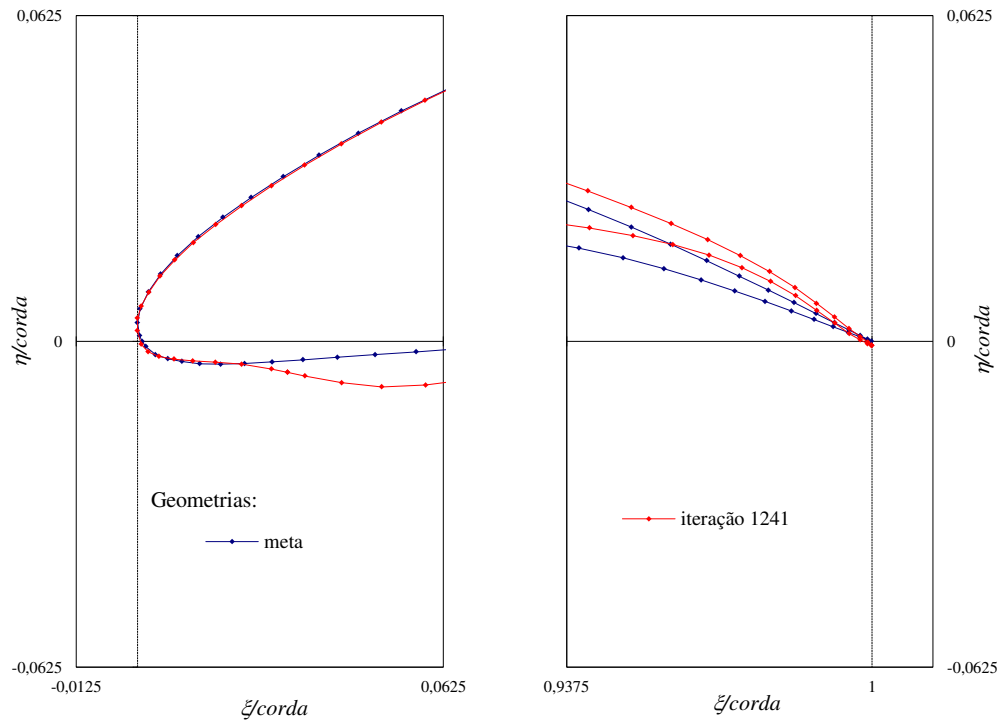


Figura 6.29 Geometria final dos BA e BF no cálculo inverso do aerofólio NACA 65-1210 e $\beta_{\infty} = 10^{\circ}$

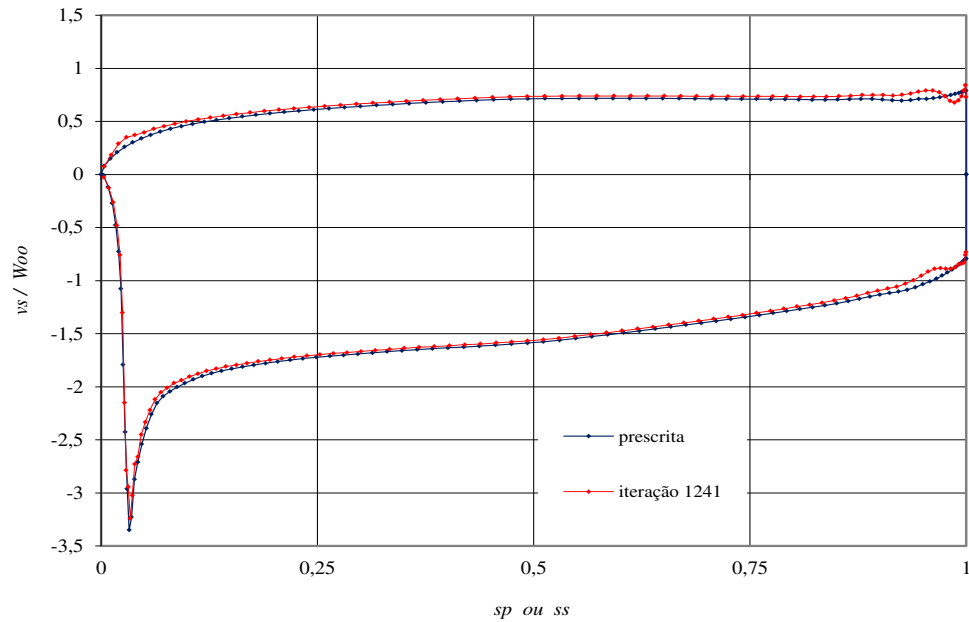


Figura 6.30 Velocidade obtida na superfície do aerofólio calculado com a distribuição de velocidade prescrita corrigida igual à de NACA 65-1210 e escoamento $\beta = 10^{\circ}$ ($2N = 160$)

7 APLICAÇÃO EM CASCATA

Em mecânica dos fluidos a cascata é um modelo que compreende simplificações físicas e matemáticas do escoamento real que ocorre, por exemplo, no interior de uma turbomáquina, com a intenção de fornecer uma análise e melhor entendimento desses escoamentos. Trata-se de uma fileira infinita de pás similares equidistantes, normalmente, na forma de aerofólios, conforme Gostelow (1984). E o método de distribuição de vórtices no contorno ou método de Martensen é uma técnica computacional muito eficiente para modelar o escoamento potencial e, em especial, para tratar cascatas de turbomáquinas.

Neste capítulo, a metodologia e o código computacional desenvolvidos neste trabalho de acordo com o método de distribuição de vórtices na superfície são aplicados à análise de cascatas de aerofólios para convalidação.

7.1 Cascata de aerofólios NACA série 65

Inicialmente, os resultados da análise de duas cascatas de aerofólios NACA da série 65 de compressores axiais são apresentados e comparados com exemplos da literatura.

7.1.1 “Cascata de Horlock”

Horlock (1973) apresenta os resultados para cascatas da série 65 da NACA calculados por K. Schneider (do *Massachusetts Institute of Technology*) utilizando o método de singularidades de Ackeret e compara-os com resultados experimentais. Este método também foi utilizado por Schlichting e por Scholz, segundo Horlock, sendo que Gostelow (1984) denomina-o método de Schlichting. O escoamento em torno de um aerofólio de espessura finita com arqueamento e incidência é dado pela superposição de dois escoamentos, sendo um deles em torno de um aerofólio simétrico de espessura finita, representado por uma distribuição de fontes e sorvedouros, e o outro escoamento em torno da linha de arqueamento infinitamente fina com incidência, representado por uma distribuição de vórtices. As expressões para as velocidades induzidas devido

às singularidades são obtidas em função da geometria da cascata (razão espaçamento pela corda, escalonamento e geometria do aerofólio) e das distribuições de singularidades, as quais são escritas como séries de Fourier, conforme Glauert e Allen. Tomando-se as inclinações da espessura e da linha de arqueamento em n pontos do aerofólio, obtém-se $2n$ equações diferenciais com $2n$ incógnitas (os primeiros n coeficientes de Fourier em cada equação) a serem determinadas.

As Figuras 7.1 e 7.2 desta Subseção reproduzem a Figura 2.14 de Horlock acrescentando os resultados da análise com o método proposto de distribuição de vórtices no contorno, para a cascata de aerofólios NACA 65-1210 de escalonamento $\chi = 30^\circ$ e razão espaçamento pela corda $t/l = 1,0$.

Da Figura 2.13 de Horlock pode-se deduzir que a inclinação do escoamento de entrada é $\beta_1 = 45^\circ$, correspondente ao ângulo de ataque $(\beta_1 - \chi)$ indicado de aproximadamente 15° , e que a deflexão do escoamento $(\beta_1 - \beta_2)$ que a cascata proporciona resulta do cálculo teórico em aproximadamente 20° e das medidas experimentais em 21° . Assim, a inclinação do escoamento na saída da cascata resulta em $\beta_2 = 25^\circ$ para o cálculo teórico e em $\beta_2 = 24^\circ$ para os dados experimentais.

Conforme visto no Capítulo 3, as equações de Martensen para cascata envolvem as quantidades do escoamento médio, de maneira que se a geometria da cascata e as condições do escoamento médio equivalente W_∞ e β_∞ são prescritas a distribuição de velocidade ou de pressão na superfície do aerofólio pode ser obtida. Inicialmente, para a cascata adotada utiliza-se o código computacional para sua análise com os dados do escoamento médio equivalente a $\beta_1 = 45^\circ$ e $\beta_2 = 24^\circ$, ou seja, com $\beta_\infty = 35,8^\circ$.

Ao variar o número de pontos de controle N pode-se avaliar a sua influência nos resultados ao compará-los na Figura 7.1 com os resultados publicados por Horlock. Observa-se que aumentando N até 80 tem-se uma melhor concordância da distribuição do coeficiente de pressão no bordo de fuga do aerofólio, enquanto que para valores maiores o resultado não se mantém, mas a solução começa a divergir, provavelmente devido a erros de arredondamento.

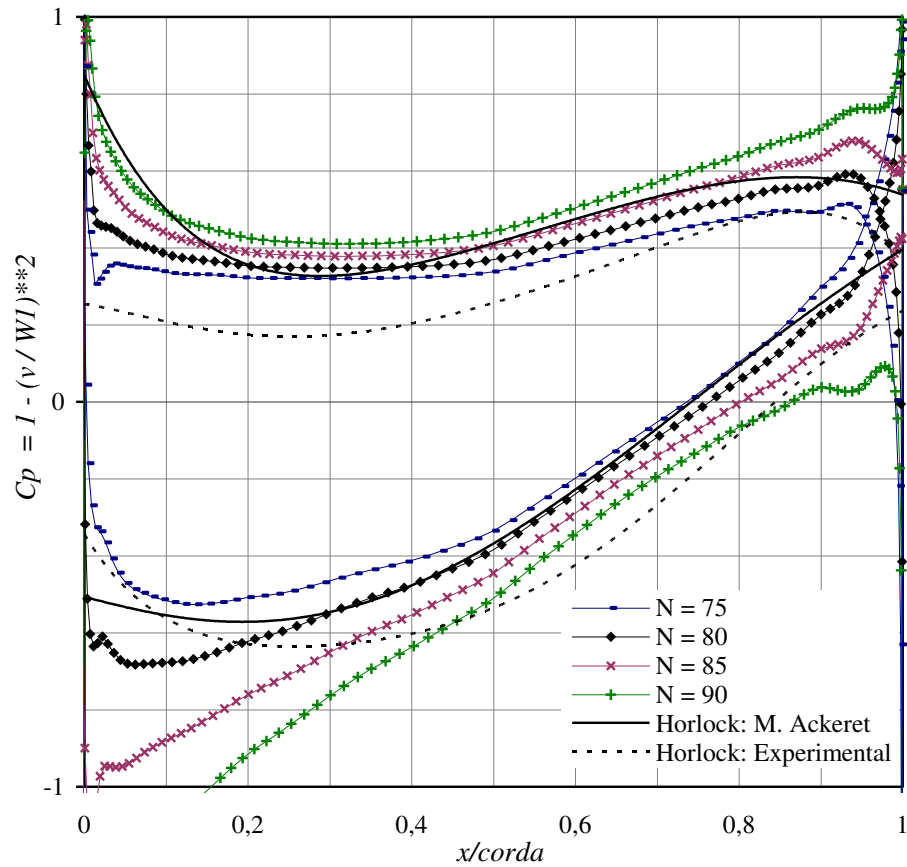


Figura 7.1 Distribuição de pressão medida e calculada sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 30^\circ$, $t/l = 1,0$) para $\beta_1 = 45^\circ$; e para o método proposto com $\beta_\infty = 35,8^\circ$

O código computacional é então utilizado para a análise da cascata dada, em um escoamento de entrada $\beta_1 = 45^\circ$, com a previsão do ângulo β_2 de saída. Para isso, segue-se o procedimento descrito no Capítulo 3 para o cálculo das soluções unitárias e por fim o cálculo da inclinação β_2 . Os resultados são apresentados na Figura 7.2 para o cálculo com $N = 80$ pontos de controle, sendo que o valor obtido é $\beta_2 = 23,5^\circ$ ou $\beta_\infty = 35,6^\circ$.

Na distribuição de pressão resultante aparecem ondulações próximas aos bordos de ataque e de fuga devido aos pontos tabelados do aerofólio NACA serem insuficientes para conduzir adequadamente a *spline* nessas regiões, quando da distribuição inicial dos pontos de controle no contorno, principalmente, na transição entre o círculo do bordo de ataque e os demais pontos tabelados.

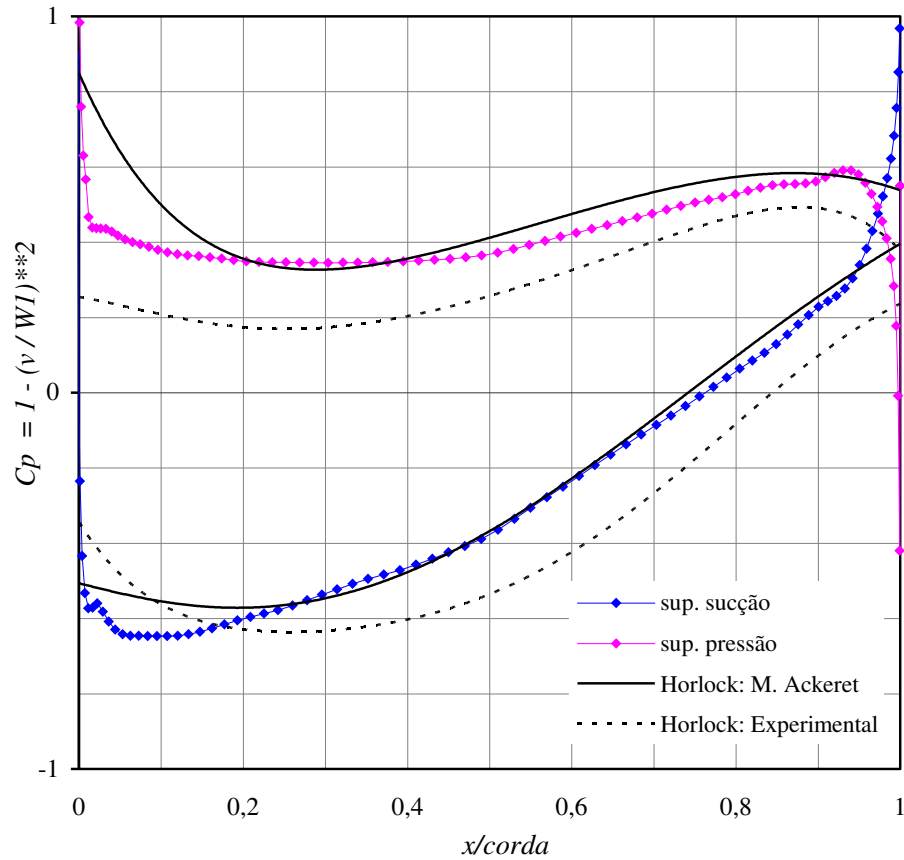


Figura 7.2 Coeficiente de pressão sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 30^\circ$, $t/l = 1,0$) para $\beta_1 = 45^\circ$; o método proposto fornece $\beta_2 = 23,5^\circ$ com $N = 80$

7.1.2 “Cascata de NASA SP-36”

O documento NASA SP-36 (1965) apresenta o método teórico de Katzoff, Finn e Laurence (1947) como um método adequado para resolver o problema direto de uma cascata de baixa ou média solidez (até 1,5), ou seja, para razão espaçamento pela corda acima de 0,67. Dados a geometria da cascata e o vetor velocidade média equivalente, a solução é obtida pela superposição de escoamentos. Primeiro, a transformação de Theodorsen é utilizada para determinar as distribuições de pressão em torno do aerofólio central isolado no escoamento médio equivalente. Depois, a distribuição de pressão obtida é corrigida para os efeitos de interferência devido aos outros aerofólios na cascata usando distribuições adequadas de fontes e vórtices, isoladas ou

contínuas, ao longo das linhas de arqueamento ou em torno dos perfis. Por fim, dois escoamentos são adicionados, um que torna a pá central uma linha de corrente e outro, circulatório, que obriga o escoamento resultante a deixar a pá no bordo de fuga. Gostelow (1980) comenta que esse procedimento iterativo utilizava cartas padronizadas para os efeitos de interferência e tornou-se obsoleto quando os computadores foram introduzidos.

Os resultados experimentais e teóricos obtidos para uma cascata de aerofólios NACA 65-1210 de escalonamento $\chi = 45,9^\circ$ e razão espaçamento pela corda $t/l = 1,0$, na condição de escoamento de entrada com inclinação $\beta_1 = 60^\circ$ são apresentados na Figura 74 de NASA SP-36 (1965). O ângulo formado entre o escoamento médio e a corda do aerofólio é $(\beta_\infty - \chi) = 6,5^\circ$ e o coeficiente de sustentação obtido é $C_L = 1,31$ para a solução teórica, ou seja, a inclinação do escoamento médio equivalente resulta $\beta_\infty = 52,4^\circ$ e a inclinação do escoamento na saída da cascata, $\beta_2 = 40,9^\circ$. Os dados experimentais estão associados a um coeficiente de sustentação $C_L = 0,96$. A análise dessa cascata com o método proposto de distribuição de vórtices no contorno é apresentada nas Figuras 7.3 a 7.5, as quais também reproduzem a Figura 74 de NASA SP-36 para comparação.

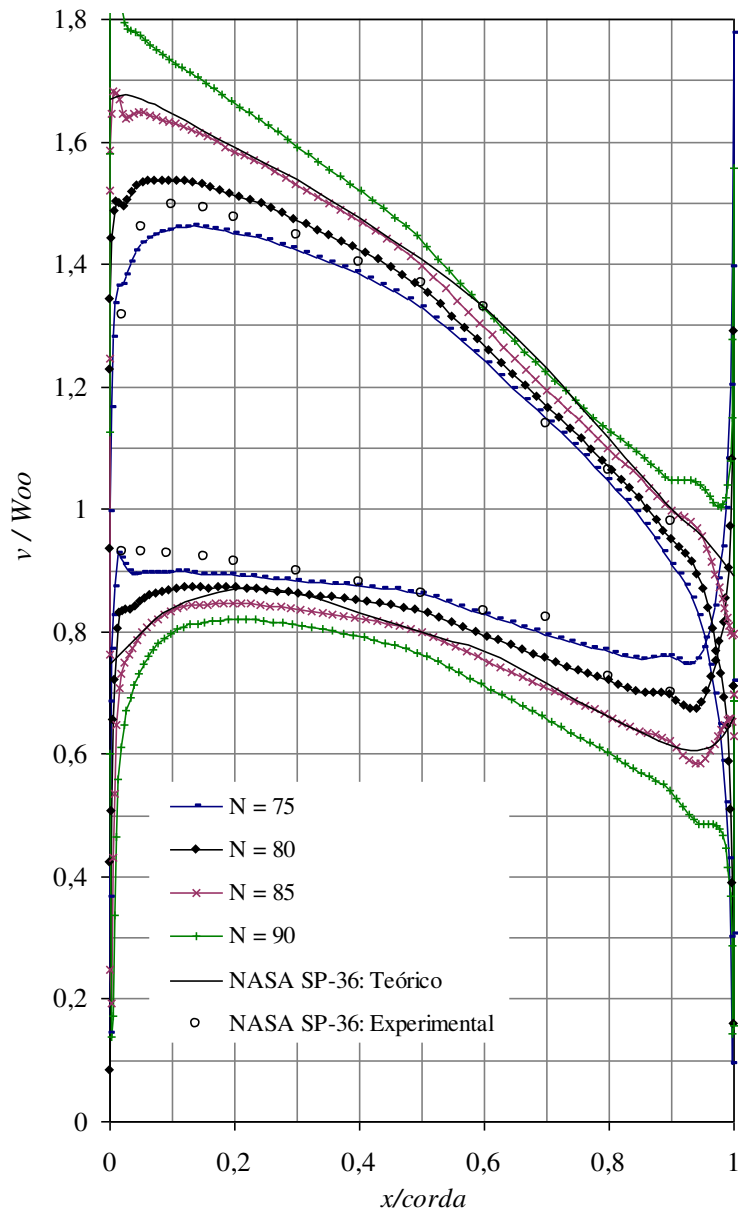


Figura 7.3 Distribuição de velocidade experimental e teórica sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^\circ$, $t/l = 1,0$) com $\beta_\infty = 52,4^\circ$; variando N para o método proposto

A análise dessa cascata com o método proposto de distribuição de vórtices no contorno, para o escoamento médio equivalente com inclinação $\beta_\infty = 52,4^\circ$ e variando o número de pontos de controle N , é apresentada na Figura 7.3. Observa-se que conforme N aumenta a solução aproxima-se daquela de NASA SP-36 quando $N = 85$. De fato, para $N = 85$ o coeficiente de

sustentação resulta $C_L = 1,30$ e, se $\beta_1 = 60^\circ$, o ângulo de inclinação do escoamento na saída é $\beta_2 = 40,9^\circ$. E, para valores de N maiores, a solução diverge, de maneira análoga ao que acontece com a “cascata de Horlock” da Subseção 7.1.1 que é formada pelo mesmo tipo de aerofólio.

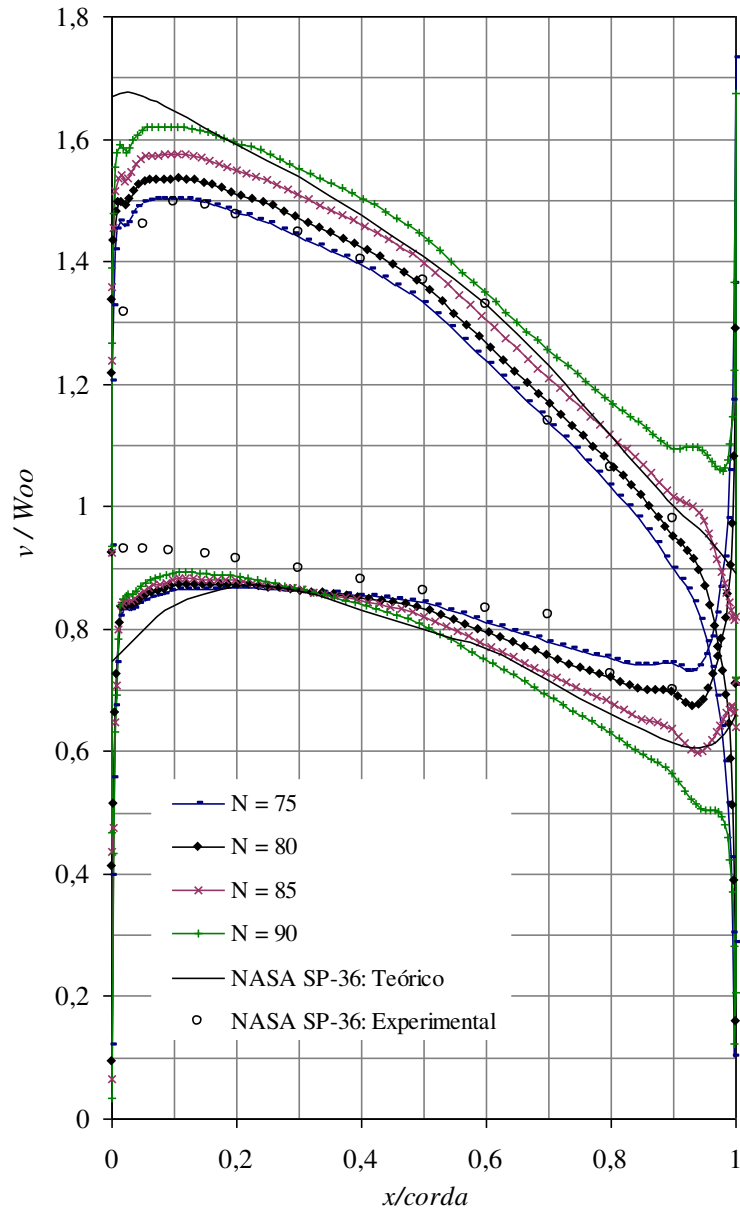


Figura 7.4 Distribuição de velocidade experimental e teórica sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^\circ$, $t/l = 1,0$) ; com $\beta_1 = 60^\circ$ e variando N para o método proposto

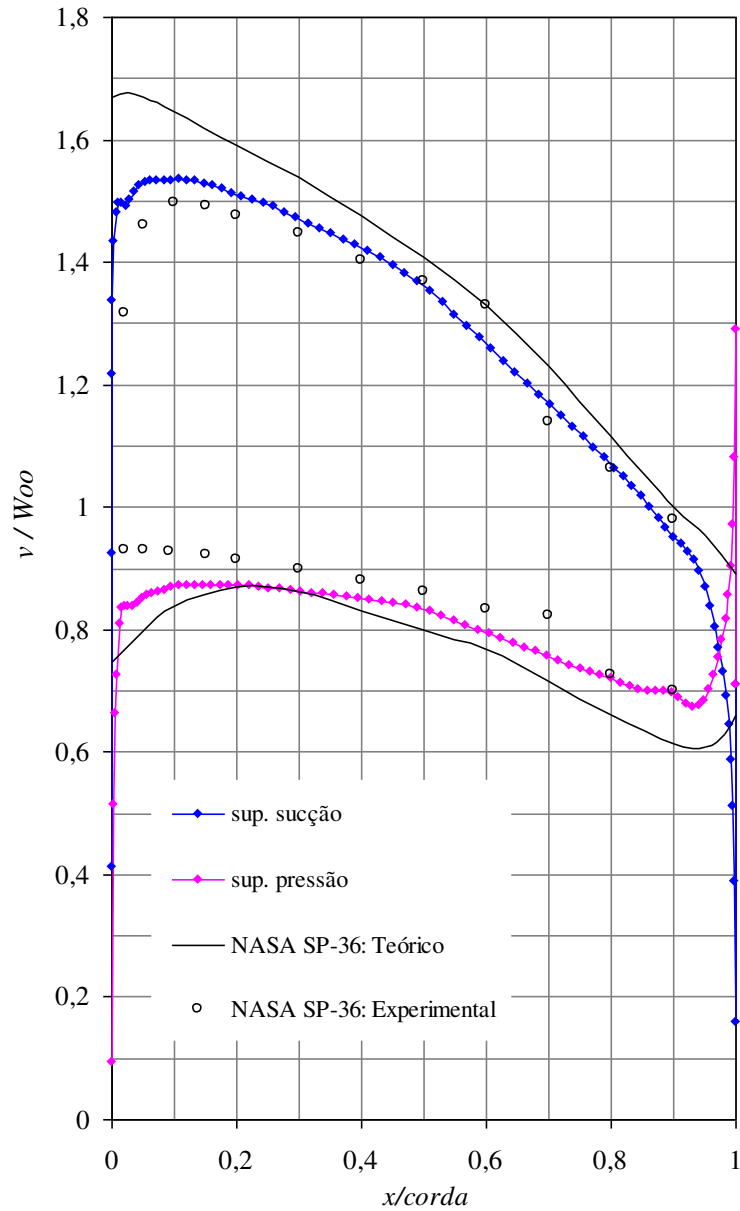


Figura 7.5 Distribuição de velocidade sobre aerofólio NACA 65-1210 em cascata ($\chi = 45,9^\circ$, $t/l = 1,0$) calculada pelo método proposto com $N = 80$, para $\beta_1 = 60^\circ$, resultando $\beta_2 = 40,7^\circ$

O código computacional proposto possibilita a análise da cascata em um escoamento de entrada $\beta_1 = 60^\circ$ com a previsão do ângulo β_2 de saída utilizando-se o cálculo das soluções unitárias. Os resultados são apresentados na Figura 7.4 para alguns valores de N . Neste caso, a curva de distribuição de velocidade resultante do cálculo com $N = 80$ é a que mais se aproxima

dos valores experimentais de NASA SP-36 em grande parte do contorno. O coeficiente de sustentação desta solução é $C_L = 1,06$ e o ângulo de saída é $\beta_2 = 40,74^\circ$ o que equivale ao ângulo do escoamento médio $\beta_\infty = 52,36^\circ$, praticamente o mesmo valor dos cálculos da Figura 7.3. De fato, as curvas para $N = 80$ nas duas Figuras praticamente coincidem, sendo esta solução destacada na Figura 7.5.

7.2 Cascata de aerofólios de Gostelow

Gostelow (1964) desenvolveu várias soluções de cascata padrão utilizando a teoria de transformação conformal exata de Merchant & Collar com a finalidade de checar a validade das diversas adaptações numéricas das teorias de singularidades linearizadas. O desenvolvimento das equações para cálculo do perfil da pá e da distribuição de velocidade é apresentado no capítulo 5 de Gostelow (1984). Por exemplo, Gostelow conseguiu produzir um perfil analítico de pá muito semelhante ao perfil de base C4 distribuído sobre uma linha de arqueamento 70° de arco circular (C4/70C50), bastante comum à prática de compressor vigente no Reino Unido. Esta solução analítica foi utilizada como padrão por Lewis (1991) para testar seu código computacional de distribuição de vórtices no contorno a partir dos dados do perfil tipo C4, sendo que as pequenas diferenças na distribuição de pressão foram atribuídas a não coincidência entre os perfis.

Gostelow desenvolveu também um perfil de cascata com arqueamento elevado (120°) para testar a teoria linearizada de Schlichting ao extremo, a qual se mostrou inadequada para isso. Já os resultados de Lewis, com o método de Martensen, para essa mesma cascata concordam bem com a teoria de transformação conformal de Gostelow exceto na região do bordo de fuga, diferenças que foram atribuídas às arbitrariedades na seleção do ponto de estagnação do bordo de fuga arredondado na análise de Gostelow.

O perfil da pá e a distribuição de pressão para uma cascata com aerofólios com bordo de fuga cúspide são apresentados na Figura 5.14 e os parâmetros necessários para o cálculo da transformada estão no Apêndice A de Gostelow (1984). Os parâmetros globais da cascata são o escalonamento $\chi = 37,5^\circ$, a razão espaçamento pela corda $t/l = 0,9901573$ e também o ângulo de

inclinação do escoamento na entrada $\beta_1 = 53,5^\circ$. O escoamento de saída resulta com $\tan \beta_2 = 0,57793012$, ou seja, $\beta_2 = 30,02^\circ$ e $\beta_\infty = 43,97^\circ$.

Esta cascata de Gostelow, obtida analiticamente por transformação conformal, é analisada com a metodologia de cálculo proposta no presente trabalho. Embora as equações de Gostelow tenham sido utilizadas, o perfil calculado não coincide com o perfil tabelado no Apêndice A de Gostelow (1984), conforme se pode constatar na Figura 7.7.

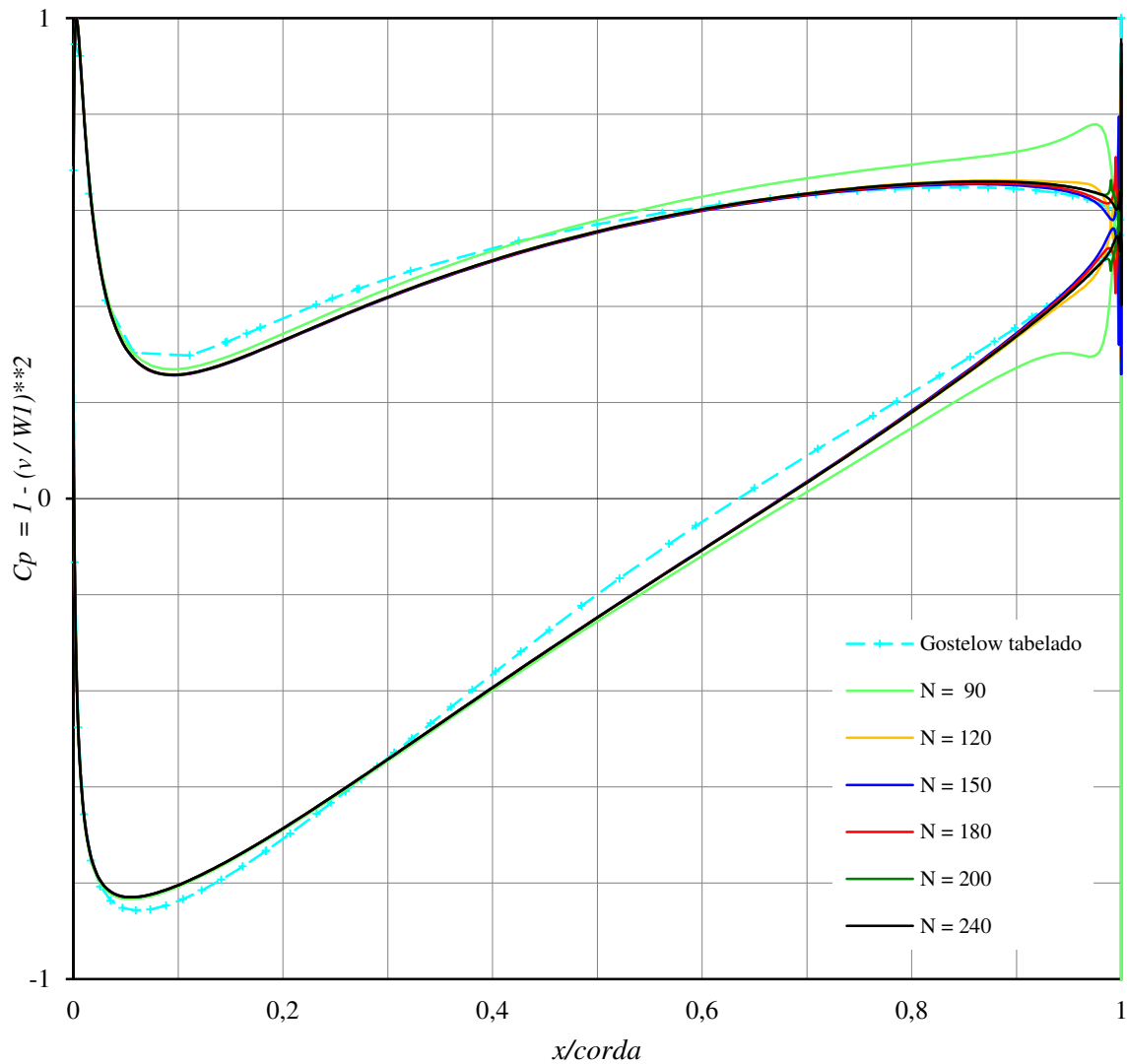


Figura 7.6 Distribuição de pressão da cascata de aerofólios de Gostelow ($\chi = 37,5^\circ$, $t/l = 0,9901573$) para $\beta_1 = 53,5^\circ$, tabelada e calculada com o método proposto variando N

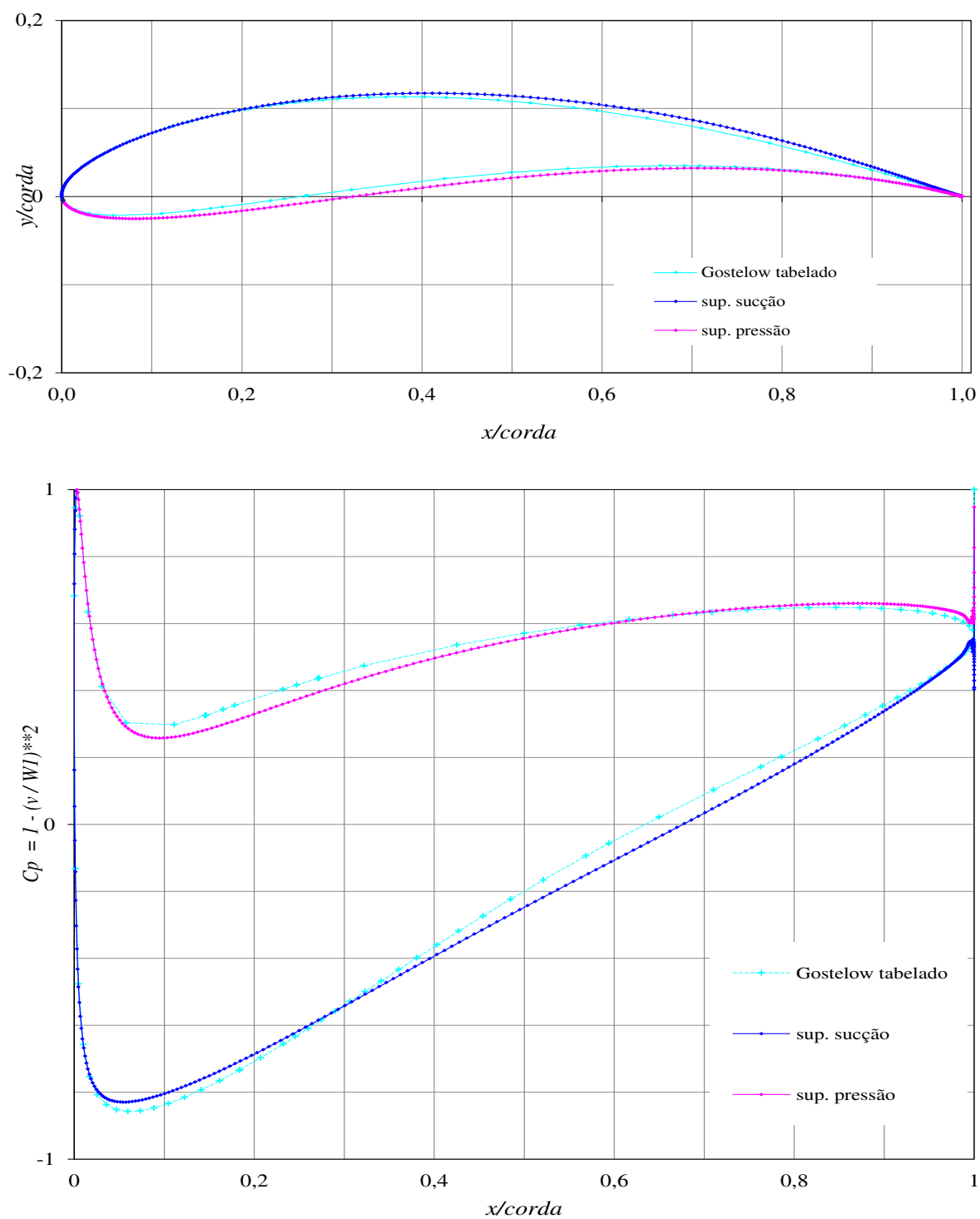


Figura 7.7 Perfil do aerofólio e distribuição de pressão da cascata de aerofólios de Gostelow ($\chi = 37,5^\circ$, $t/l = 0,9901573$) para $\beta_1 = 53,5^\circ$ calculada com o método proposto e com $N = 240$, resultando $\beta_2 = 29,63^\circ$ ou $\beta_\infty = 43,83^\circ$

A Figura 7.6 mostra a distribuição do coeficiente de pressão calculada na análise do perfil variando-se o número de pontos de controle N . Há discordância em relação à distribuição de pressão tabelada visto que os perfis também não coincidem. Observa-se que à medida que N aumenta a distribuição do coeficiente de pressão calculada aproxima-se da distribuição de pressão tabelada, sendo que o cruzamento inconsistente entre as distribuições de pressão das superfícies de sucção e de pressão move-se em direção ao bordo de fuga do aerofólio. E a solução para $N = 240$ apresenta distribuição de pressão mais adequada na região do bordo de fuga. Esta solução é mostrada separadamente na Figura 7.7 para as superfícies de sucção e de pressão.

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Uma ferramenta computacional própria foi desenvolvida para o cálculo de perfis aerodinâmicos, isolados ou em cascata, utilizando o método de distribuição de vórtices no contorno. Os resultados obtidos mostram-se consistentes e com boa precisão.

As distribuições de velocidade ou de pressão no contorno dos perfis, tanto das cascatas NACA quanto da cascata de Gostelow, obtidas da análise desses perfis concordam bem com os resultados teóricos linearizados e experimentais apresentados na literatura e utilizados para comparação.

O cálculo inverso de perfis aerodinâmicos isolados, que emprega o método direto iterativamente, apresenta bons resultados. A geometria calculada apresenta-se bem próxima da geometria meta, cuja distribuição de velocidade é utilizada como prescrita. Esses cálculos inversos são realizados para os perfis analíticos de Joukowski e também para os perfis experimentais NACA, para os casos de perfil simétrico, com e sem ângulo de ataque, e perfil arqueado com ângulo de ataque.

Observa-se que o método empregado é bastante sensível ao cálculo de perfis com bordo de fuga agudo de pequeno ângulo interno, sensibilidade intensificada para arqueamento do perfil, apresentando irregularidades na distribuição de velocidade calculada próximo ao bordo de fuga.

Para convalidar o programa de cálculo em definitivo e estabelecer claramente suas possibilidades e faixa de aplicação, faz-se necessário estudar outros casos e compará-los com os resultados de outros métodos disponíveis na literatura, tais como os métodos de painéis com distribuição linear de vórtices.

O programa precisa também ser trabalhado em suas rotinas para um desempenho satisfatório em termos de tempo computacional e de otimização dos cálculos. É importante tornar o programa o mais automatizado possível, sem a necessidade de interferência do usuário no processo de cálculo, de maneira que a necessidade de redistribuição dos pontos de controle em torno do perfil, por exemplo, seja detectada e aplicada automaticamente. Além disso, deve-se desenvolver uma interface amigável com o usuário para a entrada de dados e a exibição dos resultados.

Como proposta de continuação do trabalho sugere-se o desenvolvimento do programa computacional para o estudo da influência dos efeitos do escoamento em cascata, assim como dos efeitos da formação de bolhas de separação ou da separação da camada limite, sobre a geração de ruído aerodinâmico.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, I.H.; von DOENHOFF, A.E. **Theory of wing sections** – including a summary of airfoil data. New York: Dover Publications, 1959. 705p.

Aerodynamic design of axial-flow compressors. Cleveland, National Aeronautics and Space Administration, Lewis Research Center, **NASA SP-36**, 1965. 524p.

AMORIM, J.C.C. **Cálculo do escoamento potencial em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas**. 1987. 66p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá.

ASHLEY, H.; LANDAHL, M. **Aerodynamics of wings and bodies**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1965. 287p.

BRISTOW, D. R. Recent improvements in surface singularity methods for flow field analysis about two-dimensional airfoils. In: Computational Fluid Dynamics Conference, 3rd, 1977, New York. **Proceedings...** New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977. AIAA paper 77-641, p.95-105.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 4th ed. Boston: PWS-KENT, 1989.

CAMILO, E. **Solução numérica das equações de Euler para representação do escoamento transônico em aerofólios**. 2003. 82p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CAMILO, E. **Aeroelasticidade computacional transônica em aerofólios com modelo estrutural não linear**. 2007. 233p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CEZE, M.A.B. **Projeto inverso aerodinâmico utilizando o método adjunto aplicado às equações de Euler**. 2008. 80p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

DEMEULENAERE, A.; LÉONARD, O.; VAN den BRAEMBUSSCHE, R. Two-dimensional Navier-Stokes inverse solver for compressor and turbine blade design. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy**, v.211, n.4, p.299-307, 1997.

DENTON, J.D.; DAWES, W.N. Computational fluid dynamics turbomachinery design. **Proc Instn Mech Engrs**, v.213, Part C, p.107-124, 1999.

DRELA, M.; GILES, M.B. Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils. **AIAA Journal**, v.25, n.10, p.1347-1355, 1987.

ELIZAROV, A.M., FOKIN, D.A. Design and optimization of airfoils in non-stalling incompressible flow with a prescribed range of the angle of attack. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, n.1, p.121-132, Jul 1992.

EMERY, J.C.; HERRIG, L.J.; ERWIN, J.R.; FELIX, R. Systematic two-dimensional cascade tests of NACA 65-Series compressor blades at low speeds. Langley Field, National Advisory Committee for Aeronautics, Langley Aeronautical Laboratory, **NACA Report 1368**, Jan. 1958. 85p.

FLUTT, A.F. **Estudo numérico do escoamento ao redor de um aerofólio montado em uma grade linear de turbomáquina**. 2008. 119p. Dissertação (Mestrado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

GARRICK, I.E. On the plane potential flow past a lattice of arbitrary airfoils. Langley Field, National Advisory Committee for Aeronautics, Langley Memorial Aeronautical Laboratory, **NACA Report 788**, Nov. 1943. 16p.

GIESING, J.P. Extension of the Douglas Neumann program to problems of lifting, infinite cascades. Douglas Aircraft Co., Inc., Long Beach, Calif., AD-605207, **Douglas Report LB 31653**, 1964. 79p.

GOSTELOW, J.P. Potential flow through cascades. Extensions to an exact theory. **ARC CP 808**, 1964. 39p.

GOSTELOW, J. P. **Cascade aerodynamics**. – (Thermodynamics and fluid mechanics series). 1st ed. Oxford: Pergamon Press, 1984. 286p.

GOTO, A.; SHIRAKURA, M.; ENOMOTO, H. Compressor cascade optimization based on inverse boundary layer method and inverse cascade method: 2nd Report, An inverse boundary layer method and wind-tunnel tests of optimized compressor cascade with high loading. **Bulletin of JSME**, v.27, n.229, p.1366-1377, 1984.

GOTO, A. Application of an inverse cascade design method to an axial fan. **JSME International Journal**, v.30, n.267, p.1414-1422, 1987.

HESS, J.L.; SMITH, A.M.O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. In: KUCHEMANN, D. (Ed.). **Progress in aeronautical sciences**. Oxford: Pergamon Press, 1967. v.8, p.1-138.

HESS, J.L. Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.2, p.1-15, Feb. 1973.

HORLOCK, J.H. **Axial flow compressors: fluid mechanics and thermodynamics**. New York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1973. 223p. (Reprint with supplemental material; Original edition 1958)

HOUGHTON, E.L.; CARRUTHERS, N.B. **Aerodynamics for engineering students**. 3rd ed. London: Edward Arnold, 1982. 704p.

HOWELL, A.R. A theory of arbitrary aerofoils in cascade. **Philosophical Magazine**, v.39, n.299, p.913-927, 1948.

JAMESON, A. The evolution of computational methods in aerodynamics. **Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME**, v.50, p.1052-1070, Dec. 1983.

JAMESON, A. The presente status, challenges, and future developments in CFD. In: AGARD Seventy-seventh Fluid Dynamics Panel Symposium, 1995, Seville.

KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Low-speed aerodynamics**. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2001. 613p.

KATZOFF, S.; FINN, R.S.; LAURENCE, J.C. Interference method for obtaining the potential flow past an arbitrary cascade of airfoils. **NACA Report 879**, 1947. 19p. (Substitui **NACA TN 1252**. 55p.)

KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. 7th ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

LÉONARD, O.; VAN den BRAEMBUSSCHE, R.A. Design method for subsonic and transonic cascade with prescribed Mach number distribution. **Journal of Turbomachinery, Transactions of the ASME**, v.114, p.553-560, July 1992.

LEWIS, R.I.; RYAN, P.G. Surface vorticity theory for axisymmetric potential flow past annular aerofoils and bodies of revolution with application to ducted propellers and cowls. **Journal Mechanical Engineering Science**, v.14, n.4, p.280-291, 1972.

LEWIS, R. I. A method for inverse aerofoil and cascade design by surface vorticity. **ASME Paper No. 82-GT-154**, 1982.

LEWIS, R.I. **Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems.**— (Cambridge engine technology series.) 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 587p.

LIMACHE, A.C. Inverse method for airfoil design. **Journal of Aircraft**, v.32, n.5, p.1001-1011, October 1995.

LIU, F.; JAMESON, A. Cascade flow calculations by multigrid Euler method. **Journal of Propulsion and Power**, v.9, n.1, p.90-97, 1993a.

LIU, F.; JAMESON, A. Multigrid Navier-Stokes calculations for three-dimensional cascades. **AIAA Journal**, v.31, n. 10, p.1785-1791, 1993b.

MARTENSEN, E. Calculation of pressure distribution over profiles in cascade in two-dimensional potential flow by means of a Fredholm integral equation. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v.3, n.3, p.235-270, 1959. (em Alemão)

MARTENSEN, E. The calculation of pressure distribution on a cascade of thick airfoils by means of Fredholm integral equations of the second kind. **NASA TT F-702**, 1971. 61 p. (NASA Technical Translation of Nr.23, Max-Planck-Institute for Fluid Research and Aerodynamic Experimental Station, Göttingen, 1959)

McFARLAND, E.R. Solution of plane cascade flow using improved surface singularity methods. **Journal of Engineering for Power, Transactions of the ASME**, v.104, n.3, p.668-674, 1982. (81-GT-169)

MEAD, H.R.; MELNIK, R.E. **GRUMFOIL: a computer code for the viscous transonic flow over airfoils.** National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC. **NASA CR-3806**, October 1985. 76p.

MORAN, Jack **An introduction to theoretical and computational aerodynamics.** New York: John Wiley & Sons, 1984. 464p.

MURUGESAN, K.; RAILLY, J. W. Pure design method for aerofoils in cascade. **Journal Mechanical Engineering Science**, v.11, n.5, p.454-467, 1969.

PEREIRA, L.A.A. **Simulação numérica do escoamento ao redor de perfis aerodinâmicos montados em grades lineares de turbomáquinas utilizando o Método de Vórtices Discretos com modelagem sub-malha de turbulência.** 2002. 106p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

PETRUCCI, D.R. **Problema inverso do escoamento em torno de perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas.** 1998. 133p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

PETRUCCI, D.R. **Métodos inversos para o projeto aerodinâmico de grades de turbomáquinas axiais.** 2003. 97p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

RICCI, J.E.R. **Simulação numérica do escoamento ao redor de um corpo de forma arbitrária, estacionado nas imediações de uma superfície plana, com o emprego do Método de Vórtices.** 2002. 108p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

SCHWERING, W. Design of cascades for incompressible plane potential flows with prescribed velocity distribution. **Journal of Engineering for Power, Transactions of the ASME**, v.93, n.3, p.321-332, 1971.

SELIG, Michael S.; MAUGHMER, Mark D. Multipoint inverse airfoil design method based on conformal mapping. **AIAA Journal**, v.30, n.5, p.1162-1170, 1992.

SELIG, Michael S.; MAUGHMER, Mark D. Generalized multipoint inverse airfoil design. **AIAA Journal**, v.30, n.11, p.2618-2625, 1992. (27 refs.)

SELIG, Michael S. Multipoint inverse design of an infinite cascade of airfoils. **AIAA Journal**, v.32, n.4, p.774-782, 1994.

SILVA, D.F.C. **Simulação numérica do escoamento ao redor de aerofólios via método de vórtices associado ao método dos painéis.** 2005. 175p. Dissertação (Mestrado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

TOMITA, J.T. **Three-dimensional flow calculations of axial compressor and turbines using CFD techniques.** 2009. 230f. Thesis (Doctor of Science-DSc) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, São José dos Campos-SP-Brazil.

VAN den BRAEMBUSSCHE, R.A. Turbomachinery component design by means of CFD. **Task Quarterly**, v.6, n.1, p.39-61, 2002.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

ACKERET, J. Zum entwurf Dichtstehendes Schaufelgitter Schweiz. **Bauzeitung**, v.120, n.9, 1942. (Disponível como: The design of closely spaced blade grids. **Min. of Aviation translation RTP** 2007, 1942.)

AZEVEDO, J. On the development of unstructured grid finite volume solver for high speed flows. In: **Report NT-075-ASE-N/92 – Instituto de Aeronáutica e Espaço**. São José dos Campos, SP, Brasil: [s.n.], 1992.

BADCOCK, K. J.; WOODGATE, M. A.; RICHARDS, B. E. Hopf bifurcation calculations for symmetric airfoil in transonic flow. **AIAA Journal**, v. 42, n. 5, May 2004.

BETZ, A. Untersuchung einer Joukowskychen Tragfläche. **ZFM6** 173-179, 1915.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of Mathematics Physics**. Berlim, 1931, Vol. I e 1937, Vol. II.

DE VITO, L; VAN DEN BRAEMBUSSCHE, R.A. A Novel Viscous Inverse Design Method: Blending a Navier-Stokes Solver for the Analysis with an Euler Solver for the Inverse Design. **VKI Pr-2001**, 2001.

DEMEULENAERE, A., VAN den BRAEMBUSSCHE, R. A. Three-dimensional inverse method for turbomachinery blading design. **ASME Paper 96-GT-039**, 1996.

FONSECA, G.F. **Interação bidimensional entre um aerofólio e um vórtice próximo a uma superfície: influência da esteira**. 1996. Dissertação (Mestrado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

FONSECA, G.F.; BODSTEIN, G.C.R.; HIRATA, M.H. A numerical inviscid vortex model applied to parallel blade vortex interaction. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v.XIV, n.3, 1997.

GIRARDI, R.M.; BIZARRO, A.F. Modification of the Hess-Smith Method for Calculating Cascades and Airfoils with Cusped Trailing Edge. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA (XIII COBEM), 1995, Belo Horizonte. **Proceedings of the 13th Brazilian Congress and 2nd Iberian American Congress of Mechanical Engineering**. Belo Horizonte, 1995.

GOTO, A.; SHIRAKURA, M. Compressor cascade optimization based on inverse boundary layer method and inverse cascade method: 1st Report, An inverse cascade method for incompressible two-dimensional potential flow. **Bulletin of JSME**, v.27, n.226, p.653-659, 1984.

HESS, J.L. Panel Methods in Computational Fluid Dynamics. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v.22, p.255-274, 1990.

GRAHAM, D.G. **Some effects of sweep in annular and straight cascades**. 1972. Ph.D. Thesis – University of Newcastle upon Tyne.

JACOB, K.; RIEGELS, F.W. The calculation of the pressure distributions over sections of finite thickness with and without flaps and slats. **Z. Flugwiss**, v.11, n.9, p.357-367, 1963. (Available as R.A.E. Library translation No. 1101, 1965).

JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical solution of Euler Equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. In: **FLUID AND PLASMA DYNAMICS CONFERENCE**, 14th, 1981, Palo Alto. Palo Alto: **AIAA**, June 1981. AIAA Paper 81-1259.

JAMESON, A. Re-engineering the design process through computation. In: **AIAA 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**. Reno, NV: AIAA, 1997. AIAA-97-0641.

KULFAM, B.M., BUSSOLETTI, J.E. Fundamental parametric geometry representations for aircraft component shapes. In: **11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference**. [S.l.: s.n.], 2006.

LÉONARD, O., ROGIEST, P., DELANAYE, M. Blade analysis and design using an implicit flow solver. In: **SECOND EUROPEAN CONFERENCE ON TURBOMACHINERY- Fluid Dynamics and Thermodynamics**, 5-7 March 1997, Antwerp, Belgium. p.331-338.

MAVRIPLIS, F. Aerodynamic research on high lift systems. **Canadian Aeronautics and Space Journal**, v.17, p.175-183, 1971.

MELNIK, R.E., CHOW, R.R., MEAD, H.R., JAMESON, A. An improved viscous/inviscid interaction procedure for transonic flow over airfoils. **NASA CR-3805**, 1985.

MERCHANT, W.; COLLAR, A.R. Flow of an ideal fluid past a cascade of blades. (Part II). **ARC R&M 1893**, 1941.

PEREIRA, L.H.G.; BODSTEIN, G.C.R. Método dos painéis com distribuições de singularidades quadráticas aplicadas a escoamentos bidimensionais sobre aerofólios. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS TÉRMICAS (ENCIT-10), 2004, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2004.

PISTOLESI, E. On the calculation of an infinite cascade of thin aerofoils. **L'Aerotechnica** V17, 1937.

RAMIREZ, R.G.; MANZANARES FILHO, N.; PETRUCCI, D.R. Interação viscosa/não-viscosa para o cálculo do escoamento separado e colado em grades de turbomáquinas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA (COBEM), 2001, Uberlândia. **Proceedings of COBEM 2001, Fluid Mechanics**. Uberlândia, 2001.

REUTHER, J.J. **Aerodynamic shape optimization using control theory**. 1996. Tese (Doutorado) – University of California Davis.

SCHLICHTING, H. Problems and results of investigations on cascade flow. **J. aero. Sci.**, v.21, n.3, 1954.

WEBER, J. The calculation of the pressure distribution on the surface of thick cambered wings and the design of wings given pressure distribution. **A.R.C., R&M. No. 3026**, 1955.

WILKINSON, D.H. A numerical solution of the analysis and design problems for the flow past one or more aerofoils or cascades. **A.R.C. R.&M. No. 3545**, 1967.

ANEXO A - Representação paramétrica do contorno

O contorno C pode ser representado parametricamente, conforme Martensen (1971), pelo vetor posição dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi) = x(\phi)\mathbf{i} + y(\phi)\mathbf{j}$$

sendo ϕ o parâmetro dessa representação, crescente no sentido anti-horário e no intervalo $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Um vetor tangente ao contorno, segundo Kreyszig (1993, p.459), é dado pela derivada de $\mathbf{r}(\phi)$,

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} = \frac{dx}{d\phi}\mathbf{i} + \frac{dy}{d\phi}\mathbf{j}$$

cujo módulo é

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}$$

A coordenada curvilínea s corresponde ao comprimento de arco da curva C do contorno (Kreyszig, 1993, p.461) que é dado pela seguinte função

$$s(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} d\tilde{\phi}$$

onde ϕ_0 é o parâmetro ϕ da origem de s .

Diferenciando-se esta equação obtém-se

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = |\mathbf{r}'|$$

Assim, das equações anteriores pode-se escrever o módulo do vetor tangente à curva C como

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}$$

Para evitar que o contorno apresente *cusps*, é imposta a condição de que o módulo do vetor tangente em cada ponto sobre o contorno não se anule (Martensen, 1971), ou seja,

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} \neq 0$$