

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise Estatística e Otimização de Parâmetros
de Projeto em Componentes de Sistemas
Mecânicos**

Autora: Zilda de Castro Silveira
Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca

12/2003

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Análise Estatística e Otimização de Parâmetros de Projeto em Componentes de Sistemas Mecânicos

Autora: Zilda de Castro Silveira
Orientadora: Prof. Dra. Katia Lucchesi Cavalca

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003.
SP - Brasil

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPÍTULO 1

1.1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.2. CONTEÚDO DO TRABALHO

1.3 ESTUDO, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL E METODOLOGIA DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (MSR) EM COMPONENTES MECÂNICOS PARA MÁQUINAS ROTATIVAS

CAPÍTULO 2

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

CAPÍTULO 3

3.1 HISTÓRICO

3.1.1 Considerações sobre projeto e planejamento robusto

3.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DOS PLANEJAMENTOS EXPERIMENTAIS

3.2.1 Princípios básicos de experimentação

3.3 PROJETO DE EXPERIMENTOS

3.3.1 Considerações sobre Planejamento Experimental

3.3.2 Planejamentos Fatoriais

3.3.2.1 Planejamentos experimentais fatoriais 2^k

3.3.2.2 Estimativa do erro experimental

3.3.3 Planejamento fatorial fracionário

3.3.3.1 Frações meias de planejamentos fatoriais

3.3.3.2 Relações geradoras de planejamentos fatoriais fracionários

3.3.4 Planejamentos saturados

3.4 METODOLOGIA DE TAGUCHI – PROJETO ROBUSTO

3.4.1 Qualidade pelo Projeto

3.4.2 Projeto dos Parâmetros

[3.4.3 Razão Sinal-Ruído \(S/N\)](#)

[3.4.4 Arranjos Ortogonais](#)

CAPÍTULO 4

[4.1 METODOLOGIA DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA](#)

[4.2 ANÁLISE DE REGRESSÃO LINEAR COM MODELOS POLINOMIAIS \(MODELOS EMPÍRICOS\)](#)

[4.2.1 Método dos Mínimos Quadrados](#)

[4.2.2 – Matrizes ortogonais](#)

[4.3 PLANEJAMENTO PARA AJUSTE DE 1^º ORDEM - EXPERIMENTO FATORIAL COM PONTO CENTRAL](#)

[4.4 PLANEJAMENTOS PARA AJUSTE DE 2^º ORDEM - PLANEJAMENTO COMPOSTO CENTRAL](#)

[4.5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO](#)

[4.5.1 Otimização sem restrição](#)

[4.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO PONTO ÓTIMO](#)

[4.6.1. Análise Canônica da Superfície de Resposta](#)

CAPÍTULO 5

[5.1 METODOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROGRAMA PARA PLANEJAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE EXPERIMENTOS E APLICAÇÃO EM COMPONENTES DE SISTEMAS MECÂNICOS](#)

[5.2 DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROGRAMA VOLTADO AO PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS \(ÓTIMA\) E OTIMIZAÇÃO DE COMPONENTES MECÂNICOS](#)

[5.2.1 Ferramentas computacionais utilizadas](#)

[5.2.2 Metodologia de implementação](#)

5.3 – APLICAÇÕES

[5.3.1 – Sistema Vibratório \(Massa- Mola-Amortecedor\)](#)

[5.3.2 – Estudo e aplicação da metodologia em mancais radiais hidrodinâmicos de máquinas rotativas.](#)

CAPÍTULO 6

[6.1 CONCLUSÕES](#)

[6.2 SUGESTÕES](#)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APÊNDICE A

[A.1\) ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES BÁSICAS EM ESTATÍSTICA](#)

[A.1.1. Inferências sobre grandes amostras](#)

[A.1.1.1 Estimativa por ponto da média populacional \(\$\mu\$ \)](#)

[A.1.1.2 Intervalos de confiança para \$\mu\$](#)

[A.2 TESTE DE HIPÓTESES](#)

[A.2.1. Determinação do tamanho amostral](#)

A.2.2 Análise da Variância (ANOVA)

APÊNDICE B

B.1 LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

B.2 MODELAGEM DOS MANCAIS HIDRODINÂMICOS

LISTA DE FIGURAS

[FIGURA 2.1 – ARTIGOS CLASSIFICADOS POR FERRAMENTAS ESTATÍSTICAS NA ÁREA DE ENGENHARIA MECÂNICA \[OLIVEIRA, 2001\].](#)

[FIGURA 3.1 – MODELO GERAL DE UM SISTEMA](#)

[FIGURA 3.2 – DIFERENTES ESTRATÉGIAS PARA BUSCA DO VALOR OBJETIVO](#)

[FIGURA 3.3 – DIAGRAMA DE CAUSA E EFEITO PARA QUEBRAS NO PROCESSO DE MANUFATURA DE MOLAS \(BOX & BISGAARD; 1988\).](#)

[FIGURA 3.4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA PARA UM PLANEJAMENTO FATORIAL COM DOIS NÍVEIS E TRÊS FATORES, PARA O EXEMPLO DE QUEBRA DE MOLAS. \(BOX & BISGAARD; 1988\)](#)

[FIGURA 3.5 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS EFEITOS EM UM PLANEJAMENTO \$2^2\$, OS EFEITOS PRINCIPAIS SÃO CONTRASTES ENTRE ARESTAS OPOSTAS](#)

[FIGURA 3.6 – GRÁFICO DE EFEITOS PRINCIPAIS \(PLANEJAMENTO FATORIAL \$2^k\$ \).](#)

[FIGURA 3.7 – GRÁFICOS DE EFEITOS DE INTERAÇÃO](#)

[FIGURA 3.8 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE CONTRASTES CORRESPONDENDO AOS EFEITOS PRINCIPAIS E ÀS INTERAÇÕES NO PLANEJAMENTO \$2^3\$; \(A\) EFEITOS PRINCIPAIS; \(B\) INTERAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM E C\) INTERAÇÃO DE TERCEIRA ORDEM.](#)

[FIGURA 3.9 - PROJEÇÃO DE UM PLANEJAMENTO \$2^{3-1}\$ EM TRÊS PLANEJAMENTOS \$2^2\$.](#)

[FIGURA 3.10 - PERDA DE QUALIDADE EM FUNÇÃO DO AFASTAMENTO DO VALOR NOMINAL: VISÃO TRADICIONAL \(A\) E A VISÃO DE TAGUCHI \(B\) SEGUNDO TAGUCHI; ELSAYED E HSINAG \(1990\).](#)

[FIGURA 3.11 – EXEMPLO DE UMA MATRIZ EXPERIMENTAL PARA O PROJETO DOS PARÂMETROS.](#)

[FIGURA 3.12 – O SISTEMA \(DIAGRAMA-P\).](#)

[FIGURA 4.1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM PLANEJAMENTO FATORIAL COM PONTO CENTRAL.](#)

[FIGURA 4.2 – REGRESSÃO LINEAR.](#)

[FIGURA 4.3 – EXPERIMENTO \$2^2\$ COM PONTO CENTRAL.](#)

[FIGURA 4.4 - REPRESENTAÇÃO DO CUBO EXPERIMENTAL PARA UM PLANEJAMENTO COMPOSTO CENTRAL](#)

[FIGURA 4.5 – ROTAÇÃO DE \$\alpha\$ NO ESPAÇO PARA A OBTENÇÃO DO PLANEJAMENTO COMPOSTO CENTRAL](#)

[FIGURA 4.7 – TRANSLAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA.](#)

FIGURA 4.8 (A) (B) - GRÁFICOS DE CONTORNOS (CURVAS DE NÍVEL) PARA AS SUPERFÍCIES DE RESPOSTA [MYERS & MONTGOMERY, 1994].

FIGURA 5.1 – DIFERENTES ABORDAGENS PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS EMPÍRICOS (SIMPSON, ET AL. 1997).

FIGURA 5.2 – FLUXOGRAMA DO PROGRAMA IMPLEMENTADO PARA PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL E MSR.

FIGURA 5.3 (A) (B) – VISÃO GERAL DO PROGRAMA E DOS MÓDULOS IMPLEMENTADOS.

FIGURA 5.4 (A) – TELA DE ENTRADA (MONTAGEM DA MATRIZ EXPERIMENTAL); (B) TELA DOS CÁLCULOS DOS EFEITOS E PROBABILIDADE NORMAL.

FIGURA 5.5 – (A) TELA DE GRÁFICO DE PROBABILIDADE NORMAL E (B) TELA DA ANÁLISE DA VARIÂNCIA (ANOVA) PARA OS EFEITOS

FIGURA 5.6 – INTERFACE PARA O AJUSTE POLINOMIAL.

FIGURA 5.7 – BUSCA ATRAVÉS DO GRADIENTE

FIGURA 5.8 – TELA DE ENTRADA DE DADOS PARA PLANEJAMENTOS DE 2^a ORDEM.

FIGURA 5.9 – O GRÁFICO DE PROBABILIDADE NORMAL DO EXPERIMENTO MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

FIGURA 5.10 - GRÁFICO DE RESÍDUOS X RESPOSTA AJUSTADA (FREQUÊNCIA NATURAL AMORTECIDA).

FIGURA 5.11 - VARIACÃO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (COM O AMORTECIMENTO FIXO).

FIGURA 5.12 - VARIACÃO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (COM A RIGIDEZ FIXA).

FIGURA 5.13 - VARIACÃO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (COM A MASSA FIXA).

FIGURA 5.14 – SISTEMAS DE COORDENADAS (REFERÊNCIAS) DE UM ROTOR

FIGURA 5.15 - BLOCOS FUNCIONAIS QUE COMPÕEM O ROTORTEST®

FIGURA 5.16 – CONJUNTO EIXO-MANCAL-MASSA DO PROGRAMA ROTORTEST®.

FIGURA 5.17 (A) – EXEMPLO DO GRÁFICO DE RIGIDEZ [KGF/MM] CALCULADA NOS EIXOS X E Y DOS MANCAIS; (B) VARIACÃO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO [KGF.S/MM] EM FUNÇÃO DA ROTACÃO PARA O MANCAL

FIGURA 5.18 - RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO DE 3 GRAMAS – NÓ DE APLICAÇÃO (UNIDADES DE DESLOCAMENTO EM MILÍMETROS – EIXO VERTICAL – E VELOCIDADE DE ROTACÃO EM RPM – EIXO HORIZONTAL).

FIGURA 5.19 – DEFORMADA DO ROTOR – VELOCIDADE DE 1440 RPM.

FIGURA 5.20 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA BANCADA EXPERIMENTAL

FIGURA 5.21 – ESQUEMA DO EXPERIMENTO SIMULADO NO PROGRAMA ROTORTEST®.

FIGURA 5.21 – GRÁFICO DE RESÍDUOS PARA O EXPERIMENTO ROTOR, PARA UM MODELO DE 1^a. ORDEM.

FIGURA 5.22 – GRÁFICO DE RESÍDUOS PARA O MODELO DE 2^a. ORDEM.

FIGURA 5.23 – INTERAÇÃO FOLGA RADIAL (Cd)X TEMPERATURA (T) COM A RESPOSTA (AMPLITUDE DE VIBRAÇÃO NA DIREÇÃO X), PARA VALORES FIXOS INTERMEDIÁRIOS DE DIÂMETRO (D) E COMPRIMENTO (L).

FIGURA A1.1 – DISTRIBUIÇÃO DAS FREQUÊNCIAS PARA UM JOGO DE DADOS NÃO VICIADOS.

FIGURA A2.2 – GRÁFICO DE DISTRIBUIÇÃO NORMAL.

FIGURA A 3.3 - A NOTACÃO $Z_{\alpha/2}$.

FIGURA A3.4 - REJEIÇÃO DA HIPÓTESE NULA SEGUNDO A ESTATÍSTICA F.

FIGURA A3.5 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA ANÁLISE DA VARIÂNCIA EM TERMOS DE UMA PROJEÇÃO ORTOGONAL DO VETOR Y EM RELAÇÃO AOS VETORES A, T E R.

FIGURA B.1 (A) (B)- FORMAÇÃO DO PERFIL DE SUSTENTAÇÃO DO ÓLEO ATRAVÉS DO EFEITO HIDRODINÂMICO

FIGURA B.2 (A)(B)(C) (D)(E) – PERFIL DE PRESSÃO AO LONGO DO EIXO – DIREÇÃO AXIAL.

FIGURA B.3 – EFEITO DO MANCAL HIDRODINÂMICO

FIGURA B.4 - MONTAGEM E O MODELO FÍSICO DOS MANCAIS HIDRODINÂMICOS.

FIGURA B.5 - DIVISÃO DO FILME DE ÓLEO EM GRADES NAS DIREÇÕES X E Y.

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – TABELA PARA UM PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTO ORGANIZADO EM BLOCO.

TABELA 3.2 – PLANEJAMENTO QUADRADO LATINO.

TABELA 3.3 – PLANEJAMENTO QUADRADO GRECO-LATINO.

TABELA 3.4 – EXPERIMENTO FATORIAL DE DOIS FATORES, CASO GERAL (MONTGOMERY, 1991).

TABELA 3.4 – MATRIZ EXPERIMENTAL PARA UM PLANEJAMENTO 2^3 .

TABELA 3.5 - DIFERENTES NOTAÇÕES PARA UM EXPERIMENTO FATORIAL 2^3 [JURAN & GRZYNA, 1993].

TABELA 3.6 – MATRIZ DE PLANEJAMENTO PARA EXPERIMENTO 2^3

TABELA 3.7 – MATRIZ DE PLANEJAMENTO PARA EXPERIMENTO FRACIONÁRIO 2^{4-1}

TABELA 3.8 – MATRIZ DE PLANEJAMENTO PARA EXPERIMENTO FRACIONÁRIO 2^{4-1} .

TABELA 3.9 – RELAÇÕES ENTRE OS CONTRASTES CALCULADOS NA FRAÇÃO MEIA 2^{4-1} E OS EFEITOS OBTIDOS COM O PLANEJAMENTO COMPLETO 2^3 .

TABELA 3.10 – ARRANJO ORTOGONAL L_4 , PROPOSTO POR TAGUCHI.

TABELA 4.1 – ANÁLISE DA VARIÂNCIA PARA O MODELO DE REGRESSÃO.

TABELA 4.2 – PARTE AXIAL DE PLANEJAMENTO ROTACIONÁVEIS COM TRÊS FATORES.

TABELA 5.1 – PLANEJAMENTOS SEQUENCIAIS OU CAMINHO DE (MÁXIMA OU MÍNIMA) INCLINAÇÃO.

TABELA 5.2 – NÍVEIS DOS FATORES

TABELA 5.3 – MATRIZ EXPERIMENTAL (PFC), COM TRÊS REPETIÇÕES NO PONTO CENTRAL

TABELA 5.4 – ANOVA DOS EFEITOS DO SISTEMA VIBRATÓRIO.

TABELA 5.5 - RESÍDUO DO AJUSTE POLINOMIAL.

TABELA 5.6 – ANOVA DO MODELO DE REGRESSÃO DE 1ª. ORDEM

TABELA 5.7 – NÍVEIS DOS FATORES

TABELA 5.8 – MATRIZ EXPERIMENTAL FATORIAL COM 4 RÉPLICAS NO PONTO CENTRAL.

TABELA 5.9 – TABELA DE EFEITOS E ANÁLISE DA VARIÂNCIA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO PLANEJAMENTO INICIAL

TABELA 5.10 - RESÍDUO DO AJUSTE DO MODELO DE 1ª ORDEM.

TABELA 5.11 – ANOVA PARA O MODELO DE REGRESSÃO DE 1ª. ORDEM.

TABELA 5.12 – PLANEJAMENTO COMPOSTO CENTRAL COM 6 RÉPLICAS NO PONTO CENTRAL. (MANCAL HIDRODINÂMICO)

TABELA 5.13 – ANÁLISE DA VARIÂNCIA PARA O MODELO DE 2ª. ORDEM.

TABELA A3.1 – QUADRO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA PARA UMA QUANTIDADE GENÉRICA DE NÍVEIS E RÉPLICAS.

TABELA A3.2 – QUANTIDADE DE NÍVEIS E RÉPLICAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANOVA – Análise da Variância

PF – Planejamento Fatorial

PFC – Planejamento Fatorial Centralizado

PCC – Planejamento Composto Central

F – Distribuição de Snedecor

FV – Fonte de Variabilidade

G.L – Graus de liberdade

MEF – Método dos Elementos Finitos

MQ – Média Quadrática

MMQ – Método dos Mínimos Quadrados

RSM- *Response Surface Methodology*

R² – Coeficiente de Correlação

SS_(efeito) – Contraste dos efeitos

SQ – Soma Quadrática

TLC – Teorema do Limite Central

VB – *Visual Basic* ®

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus queridos pais Maria e José, às minhas irmãs Damiane e Sandra, e a minha querida sobrinha Bárbara que dá os primeiros passos neste, muitas vezes complicado, livro da vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo valioso presente que nos deu: a vida.

Dedico este trabalho a um conjunto de pessoas, sem as quais o caminho a ser percorrido seria muito mais árduo:

À minha família, pelo apoio constante em todos os momentos de dificuldade e de alegria, e por seus valores de honestidade e humildade;

Ao Pedro, pelas palavras sempre bem colocadas nos momentos de cansaço e apoio incondicional;

A professora Dra. Katia Lucchesi Cavalca pela oportunidade, amizade e orientação deste trabalho;

Aos professores: Dr. Sérgio Tonini Button, Dr. Roy Edward Bruns, Dr. Armando Mário Infante e Dr. Franco Giuseppe Dedini pelas orientações e opiniões dadas no trabalho;

Ao Daniel pela ajuda na implementação dos programas e discussões;

Aos amigos: Carlos Silva, Abdon, Alex, Cristina, Marco Adolph e Marcelo Morello, pelas conversas sobre a tese e pelos momentos de motivação e descontração;

A Unicamp e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pela infra-estrutura e bolsa de estudos, respectivamente concedidas;

As secretárias do DPM, Denise e Cleusa pelo constante apoio logístico e à Raquel e Fernando pelo apoio do SIFEM e;

A todos que contribuíram para a minha evolução acadêmica e humana.

“...As maiores almas são capazes tanto das maiores virtudes, quanto dos maiores vícios, e aqueles que marcham lentamente podem avançar muito mais, se seguirem o caminho certo, do que os que correm, porém, dele se afastam.”

Descartes, Discurso sobre o Método, Parte I.

RESUMO

SILVEIRA, Z. de C. **Análise estatística e otimização de parâmetros de projeto em componentes de sistemas mecânicos**. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 160p. Tese (Doutorado).

Os sistemas mecânicos são projetados para desempenhar funções específicas, e por essa razão as suas funções devem ser medidas para garantir seu desempenho dentro de uma certa precisão ou tolerância. A grande complexidade em se projetar e analisar novos projetos é a inserção de novas tecnologias, que envolvem aspectos multidisciplinares. Assim, o desenvolvimento e melhoria de projetos e produtos colocam o engenheiro projetista frente a diversas fontes de variabilidade, como por exemplo, as propriedades dos materiais, condições operacionais e ambientais e incertezas nas suposições feitas sobre seu funcionamento. Em termos de modelagem matemática, as aproximações inerentes e hipóteses feitas durante a concepção do sistema, conduz normalmente a diferentes respostas obtidas através de simulações e/ou medidas experimentais. Dessa forma, em uma fase anterior à modelagem matemática, durante a concepção do sistema ou produto, as aplicações de ferramentas estatísticas e métodos de otimização podem fornecer estimativas sobre faixas de valores ou valores ótimos para parâmetros significativos de projeto, dentro do espaço experimental estudado. Esse tipo de abordagem estatística teve sua fundamentação teórica durante as décadas de 20 e 30 por Fisher, com a aplicação da teoria estatística sob diversos aspectos, como por exemplo: testes de hipóteses, estimativa de parâmetros, seleção de modelos, planejamento experimental e, mais tarde, no controle e melhoria de processos e produtos. Assim, este trabalho propõe um procedimento de estudo e otimização, integrando a teoria de planejamento experimental, a metodologia da superfície de resposta e otimização numérica sem restrição, para se obter a sensibilidade dos parâmetros de projeto de componentes mecânicos. Em específico, foram utilizados dados dos mancais hidrodinâmicos, em função de algumas respostas obtidas para um rotor. O estudo implica em minimizar as amplitudes nas direções x ou y, identificar os fatores de maior influência sobre as respostas e, posteriormente otimizá-las. Um outro objetivo do trabalho, foi desenvolver um programa para planejamentos experimentais, incluindo a metodologia de superfície de resposta, com plataforma aberta, para inserção de outros métodos estatísticos e de otimização.

Palavras-chave: *planejamento experimental, sensibilidade paramétrica, metodologia da superfície de resposta, máquinas rotativas.*

ABSTRACT

SILVEIRA, Z. de C. **Statistical analysis and optimization in design parameters in mechanical systems**. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 160p. Tese (Doutorado).

The current mechanical systems are designed considering multi-disciplinary aspects. Their development and analysis expose the designer to a series of unknown parameters from several sources such as material properties, environmental and operational conditions. In terms of mathematical modeling, the inherent approximation and hypotheses made during system conception leads to different responses obtained by simulations and/or experimental measurements. So, in a previous phase of mathematical modeling, during the design analysis, the application of statistical tools and optimization methods is possible to estimate the values and/or ranges of the critical design parameters inside an experimental space. The connection between optimization and statistic data back at least to the early part of the 20th century and encompasses many aspects of applied and theoretical statistics, including hypothesis testing, parameter estimation, model selection, design of experiments and process and product control. So, this work proposes a link between theory of design of experiments, response surface methodology and non-restricted numerical optimization, in order to obtain parametric sensitivities for rotor components. The validation and application of this study was carried out with the application of design of experiments on hydrodynamic bearing parameters to minimize amplitudes in the x and y directions and to get robustness in the first natural frequency of the system. This study makes possible the estimation of a range for significant parameter's inside the operational range, and it optimizes the model of components and systems by identifying the parameters influence on the response robustness.

Keywords: *design of experiments, parametric sensitivity, response surface methodology, rotating machines.*

CAPÍTULO 1

1.1 Introdução

Atualmente, o projeto de sistemas mecânicos envolve uma ampla gama de conhecimentos multidisciplinares, que engloba modelagem matemática, simulações numéricas e realização de experimentos, quando possível. Em termos de modelagem matemática, as aproximações e hipóteses inerentes ao estudo do sistema abrem margem a respostas analíticas e numéricas distintas das respostas obtidas em medições experimentais. Em uma fase anterior ao modelo matemático é possível, através da aplicação de ferramentas estatísticas e de otimização numérica, estimar as faixas de valores dos parâmetros mais críticos do sistema dentro do espaço experimental de estudo.

Neste contexto, as teorias de Planejamento Experimental e Metodologia da Superfície de Resposta auxiliam na exploração de regiões, nas quais podem ser otimizados simultaneamente os parâmetros de maior relevância no sistema em estudo. A partir de dados experimentais, medidos ou simulados dos componentes ou do sistema mecânico, o procedimento e o programa propostos neste trabalho, buscam identificar os parâmetros de maior influência, assim como otimizá-los para se obter um projeto mais robusto mediante certas condições de funcionamento estudadas. Com essa estimativa, o modelo matemático pode ser simplificado, uma vez que algumas variáveis para determinadas faixas de operação podem não afetar de forma significativa a(s) resposta(s) do sistema.

O presente trabalho propõe o estudo integrado da teoria sobre Planejamento Experimental, Metodologia da Superfície de Resposta e otimização numérica, com o objetivo de se obter um procedimento para a análise paramétrica em componentes mecânicos.

Para o estudo e validação do programa desenvolvido neste trabalho, foram feitas duas aplicações: um sistema vibratório composto de massa-mola-amortecedor e dois mancais hidrodinâmicos cilíndricos, que atualmente estão montados na bancada experimental do Laboratório de Vibrações do Departamento de Projeto Mecânico, que simula um rotor. Esses mancais suportam um eixo, que por sua vez possui um disco simétrico centrado. O conjunto se encontra montado sobre uma fundação flexível. O modelo matemático do sistema baseia-se no método de elementos finitos para o rotor, e no modelo dos mancais, através da equação de Reynolds, por diferenças finitas. As respostas foram obtidas através de simulações numéricas realizadas no programa Rotortest[®].

1.1 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem como objetivo o estudo e aplicação integrada da teoria sobre Planejamentos Experimentais, Metodologia da Superfície de Resposta e Otimização numérica para o levantamento e otimização de parâmetros críticos em componentes mecânicos, bem como o desenvolvimento de um programa baseado nestas teorias. Esse estudo possibilita o refinamento e identificação de faixas de trabalho dos parâmetros mais críticos do sistema ou componente em estudo, podendo reduzir de forma significativa, equações matemáticas e medições experimentais envolvidas no estudo teórico-experimental do sistema.

O programa desenvolvido tem como finalidade: o aprendizado com os métodos estatísticos e matemáticos inseridos nas teorias descritas acima, e a construção de uma interface amigável e flexível voltada para a área experimental. A primeira versão do programa desenvolvido é um trabalho de pesquisa, e não tem como objetivo se igualar aos pacotes computacionais: SAS[®], Minitab[®] ou Statistica[®], já consolidados para aplicações na área teórica da Estatística e de experimentos.

Em termos de aplicações, o programa proposto e implementado neste trabalho, bem como a teoria estudada tem como objetivo auxiliar o pesquisador quanto ao desenvolvimento e estudo de sistemas, componentes e processos mecânicos, nas áreas de:

- Concepção de novos projetos;
- Desenvolvimento de processos e otimização;
- Confiabilidade e teste de vida;
- Configuração de novos produtos;
- Determinação das tolerâncias de componentes;
- Melhoria de processos em engenharia.

1.2. Conteúdo do trabalho

O trabalho foi organizado de forma a apresentar a seqüência dos temas necessários para o seu desenvolvimento: a dificuldade em se realizar experimentos em componentes mecânicos (por exemplo: mancais hidrodinâmicos radiais) e estender o estudo ao sistema completo (rotor), sem estimativas de parâmetros, que dificultam a análise teórico-experimental. Dessa forma, utilizar ajustes de modelo ou métodos de otimização, por exemplo, pode gerar resultados duvidosos, que às vezes não correspondem a dimensões físicas reais. Posteriormente, são apresentadas as teorias sobre Planejamentos Experimentais, Modelos Empíricos e Otimização, avançando até a proposta de trabalho, o desenvolvimento do programa para planejamento experimental e do método de Superfície de Resposta.

Assim, foram propostos seis capítulos, referência bibliográfica citada, dois Apêndices e 1 Anexo, apresentando o seguinte conteúdo:

1. *Introdução* – é apresentada a proposta de trabalho, seus objetivos e o conteúdo do trabalho;
2. *Revisão Bibliográfica* – é apresentada uma revisão teórica sobre as teorias estudadas;

3. *Teoria de Planejamentos Experimentais* – é apresentada a teoria sobre planejamentos experimentais;

4. *Modelos Empíricos, Metodologia da Superfície de Resposta, e Otimização (análise canônica e análise de cristas)* – é feito um estudo sobre modelos empíricos e ajuste de dados, bem como a escolha dos métodos de otimização e análise matemática da estabilidade do ponto de ótimo;

5. *Desenvolvimento de uma metodologia baseada em Projeto Robusto e otimização estatística para ajuste de parâmetros em sistemas mecânicos* – no qual se faz a proposta do trabalho e desenvolvimento de suas etapas, a utilização do programa RotorTest[®] para as simulações experimentais e aplicação do método em duas aplicações mecânicas e;

6. *Conclusões e Propostas futuras* – são discutidas as vantagens, limitações do procedimento e trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas;

Apêndice A – é feita uma breve revisão de conceitos estatísticos;

Apêndice B – apresenta-se uma breve revisão teórica sobre mancais.

Anexo – são descritas as implementações feitas no Matlab[®].

1.3 Estudo, implementação computacional e aplicação de técnicas de planejamento experimental e Metodologia da Superfície de Resposta (MSR) em componentes mecânicos para máquinas rotativas

Através da análise da dinâmica de rotores, é possível identificar diversos tipos de falhas em equipamentos mecânicos. Em rotores, essas vibrações podem ser originárias, por exemplo, de acoplamentos desalinhados, desbalanceamento de componentes mecânicos, deformação de eixos, folgas excessivas ou não nos mancais, falta de rigidez no conjunto. O monitoramento e os registros dessas vibrações podem ser feitos, através de sensores posicionados em pontos

estratégicos do conjunto mecânico, transformando a energia mecânica de vibração em sinais elétricos, registrados e analisados posteriormente. Os níveis de vibrações em componentes ou conjuntos mecânicos podem ser representados de diversas formas, sendo mais comum sua representação sob a forma de frequências, ou seja, a amplitude da vibração [μm] é dada em função da frequência [rad/s ou rpm].

Vários modelos matemáticos têm sido concebidos para simular as condições de trabalho de sistemas rotativos e avaliar seu comportamento real, isto é, a pesquisa segue tentando modelar máquinas reais como turbogeradores e bombas multi-estágios, no caso de máquinas rotativas de grande porte horizontais. Grande parte das medições em rotores é feita nos mancais, e a mobilidade mecânica determina as amplitudes de movimento relativas entre eixo, mancais e estruturas de suporte. Normalmente, as medições de deslocamento devem ser realizadas em pontos nos quais as amplitudes são maiores. Dessa forma, concentrando-se na formulação e discretização dos mancais, há geralmente, uma maior precisão dos resultados de modelos matemáticos. A aplicação da teoria de Reynolds na formulação dos fenômenos de lubrificação hidrodinâmica permite obter modelos confiáveis para mancais hidrostáticos e hidrodinâmicos [Jacon, 2000].

Em termos de ajuste de modelos em rotores, há diversos trabalhos que tentam corrigir os modelos obtidos pelo método de elementos finitos, através do processamento da resposta dinâmica de estruturas testadas experimentalmente. A validação de tais modelos é feita geralmente, a partir da comparação dos resultados de frequências naturais e modos próprios adquiridos em testes modais. Com esse procedimento procura-se corrigir os parâmetros imprecisos no modelo, de forma a garantir a concordância entre as previsões numéricas e os testes experimentais. Em 1992, Mottershead & Friswell apresentaram um artigo que continha uma revisão de trabalhos abordando ajuste de modelos com o método de elementos finitos, uma das técnicas bastante utilizada para estruturas mecânicas e máquinas rotativas. Portanto, sendo possível realizar simulações computacionais, estas podem prever certos comportamentos do sistema ou de componentes que são úteis para uma posterior montagem experimental. Para a simulação de máquinas rotativas, os modelos computacionais mais recentes utilizam o método de elementos finitos para a discretização do sistema. Em se tratando de discretização, devem ser

consideradas hipóteses sobre diversas situações de funcionamento, como: parametrização incorreta ou modelos matemáticos imprecisos, que geram erros de modelagem, o que é uma realidade para toda e qualquer representação matemática de sistemas físicos. A idéia deste trabalho em se utilizar a teoria de planejamento experimental e um método estatístico de otimização, é fazer um pré-estudo das faixas de operação do sistema e se obter conjuntos ótimos de parâmetros, sob os quais os modelos numéricos ou analíticos possam ser mais explorados, com maior confiança.

Assim, para o desenvolvimento do trabalho foi utilizado um programa de simulação de rotores, RotorTest®, desenvolvido pelo departamento de Projeto Mecânico, com o grupo de pesquisa da Prof.^a. Dr.^a. Katia Lucchesi Cavalca. O modelo simulado foi baseado no trabalho de Cavalcante & Cavalca (1998), cuja configuração representa um rotor horizontal apoiado sobre dois mancais hidrodinâmicos. Segundo Cavalcante & Cavalca (1998), a validação do modelo experimental apresentou algumas lacunas, devido ao fato de não haver um tratamento teórico para o experimento. A aplicação da teoria de planejamento experimental e da Metodologia da Superfície de Resposta (MSR), tem como objetivo, através das simulações computacionais, identificar os parâmetros críticos de componente mancal hidrodinâmico para uma determinada faixa de trabalho e otimizá-los. A estratégia utilizada para o rotor foi escolher um planejamento experimental adequado (neste caso, fatorial completo), pois o número de parâmetros permitiu que as simulações numéricas fossem realizadas em um período de tempo relativamente curto. As respostas estudadas foram a primeira frequência natural do sistema [rpm] e a amplitude da direção $x[\mu\text{m}]$. Os fatores de projeto variados foram: comprimento (L), Diâmetro (D), folga radial (C_d) e temperatura (T).

O modelo massa-mola-amortecedor foi utilizado para validar o programa desenvolvido em planejamento experimental, bem como avaliar a Metodologia da Superfície de Resposta em problemas mecânicos.

CAPÍTULO 2

2.1 Revisão Bibliográfica

A evolução da tecnologia e, conseqüentemente, o aumento da complexidade dos sistemas têm aberto um espaço cada vez maior para o conceito de qualidade durante o desenvolvimento e avaliação de projeto englobando áreas como: confiabilidade, planejamentos experimentais e otimização de sistemas. Um projeto é dito factível, se o seu desempenho estiver de acordo com as especificações, podendo ser continuamente melhorado sob diversos aspectos [Arora, 1989]. O estudo, a análise e a verificação de um projeto envolvem diversas etapas de estudo, como o desenvolvimento de modelos matemáticos e diferentes técnicas de análise e comparação de resultados, podendo compreender simulações numéricas e realização de experimentos, que auxiliam no entendimento do problema físico. Neste trabalho, o enfoque é dado em relação às áreas de confiabilidade e planejamentos de experimentos, que têm em comum a grande utilização de ferramentas estatísticas para o estudo do comportamento inicial de um sistema ou componente mecânico.

Oliveira (2001) mostra um estudo sobre a aplicação e a utilização de ferramentas estatísticas dentro da Engenharia. Para isso, selecionou algumas ferramentas de interesse comparando-as em áreas e ramificações da Engenharia, ressaltando que a Análise da Variância é uma das ferramentas estatísticas de maior utilização na Engenharia. Na área da Engenharia Mecânica, a classificação de artigos por Ferramenta Estatística é feita em ordem decrescente: análise de incertezas (1), análise da variância (2), planejamentos fatoriais (3) e superfície de resposta (4), como apresentado na Figura 2.1:

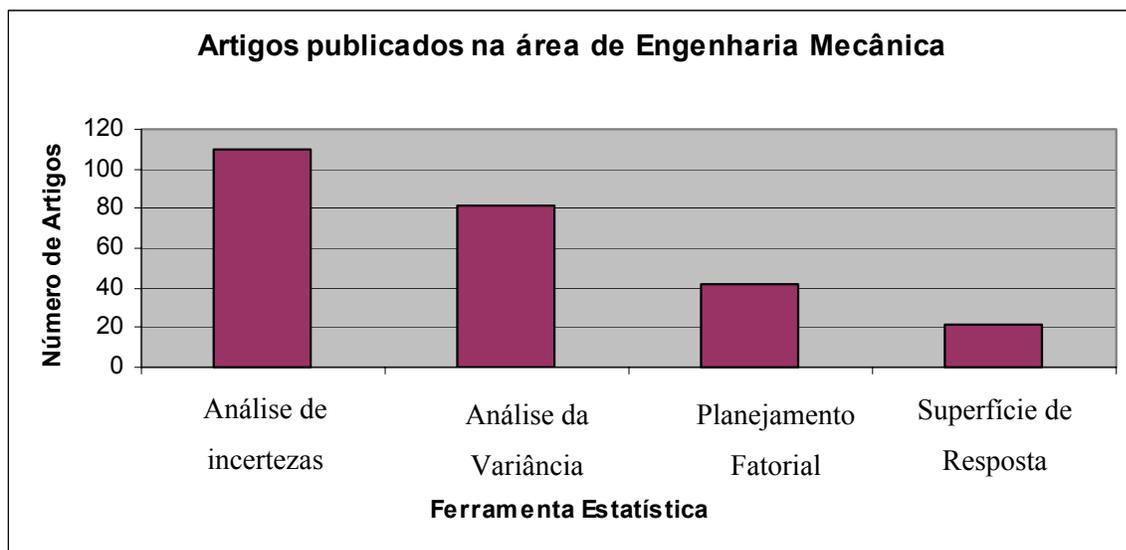


Figura 2.1 – Artigos classificados por Ferramentas Estatísticas na área de Engenharia Mecânica [Oliveira, 2001].

Além dessas técnicas, a área da confiabilidade é outro exemplo que aplica conceitos estatísticos para análise de desempenho (previsão dos tempos de falhas, através de distribuições estatísticas e testes acelerados) durante o desenvolvimento do sistema ou produto. Portanto, é interessante ressaltar que a Estatística pode auxiliar de forma significativa estudos experimentais sobre diferentes projetos em Engenharia Mecânica.

Hann & Hoerl (1998) citam que as aplicações de ferramentas estatísticas, nos meios de produção geraram resultados satisfatórios e de grande contribuição para o controle de diversas atividades industriais, desde a aplicação de gráficos de controle propostos por Shewart durante a década de 30, as cartas de controle de processo (CEP), até a técnica de Seis Sigma aplicada pela Motorola e *General Electric*. Porém, estas ferramentas e suas aplicações forneceram a falsa idéia de que a Estatística não poderia ser aplicada em outros segmentos. Na área de desenvolvimento de produtos, os autores ressaltam que a qualidade final, normalmente atribuída aos meios de produção, é na prática determinada durante o desenvolvimento do produto, ou ainda, na fase de projeto propriamente dita. Portanto, é nesta fase que se obtêm um melhor desempenho, uma melhor qualidade do produto. Menções feitas, anteriormente por Taguchi e Deming nas décadas

de 60 e 70, enfatizaram que uma grande parte da variabilidade é atribuída durante a própria concepção do sistema, na qual devem ser adequadas ferramentas estatísticas especificamente voltadas ao projeto.

O termo Projeto é associado ao ato de gerar novas idéias, novas soluções para diversos problemas da sociedade como um todo, ou seja, a Engenharia utiliza conceitos das ciências puras, como por exemplo, física e matemática em conjunto com tecnologias para construir algo que ainda não existe ou melhorar produtos. Por outro lado, as ciências puras procuram identificar elementos existentes na natureza, tentando explicá-los. Cross (1993) relaciona estas e outras definições, através da definição e evolução da linha de pesquisa em Metodologia de Projeto, desde suas primeiras definições até aplicações atuais, englobando a visão de Taguchi sobre a utilização de conceitos estatísticos na fase de desenvolvimento de projetos.

Chen *et al.* (1996) coloca o conceito de projeto robusto sob dois aspectos: a) associado com a minimização do desvio de desempenho em função de ruídos ou variáveis não controladas; b) associado com a minimização do desvio de desempenho causado pela variação de algum fator ou parâmetro de projeto. Os autores propõem uma abordagem mais geral que tem como objetivo superar as limitações do método experimental proposto por Taguchi através da utilização da Metodologia de Superfície de Respostas e Tomadas de Decisão. Os autores aplicam o método em um sistema de irrigação acionado por energia solar.

Box & Bisgaard (1988) apresentam em seu artigo várias ferramentas estatísticas existentes, destacando a importância das mesmas na retomada da indústria japonesa. Apresentam no contexto experimental, as desvantagens de se utilizar “um fator de cada vez”. Neste tipo de procedimento, os fatores ou parâmetros de projeto são estudados experimentalmente variando-se um fator de cada vez, enquanto os outros são mantidos constantes. Algumas questões ficam em aberto, como por exemplo: em quais níveis esses fatores devem ficar constantes? Se o nível for alterado, o resultado será o mesmo? Dessa forma, os autores apresentam conceitos e ferramentas estatísticas que avançam às respostas das questões acima, utilizando planejamentos experimentais e algumas de suas variações, efeitos de bloco e a aleatorização, método da superfície de resposta, variação da média, componentes da variância, influência do ambiente. O estudo de fatores e suas

interações podem proporcionar ao engenheiro de projeto um maior número de resultados com melhor qualidade e menor consumo de recursos, do que experimentos não planejados. Os autores enfatizam no trabalho que a Estatística aplicada à engenharia atua como uma ferramenta poderosa no levantamento de dados e análise de diversos problemas de projeto e processo.

A variabilidade está presente em praticamente todas as áreas de atuação humana, e a área de engenharia é um exemplo significativo, no qual a necessidade de controle da variabilidade em níveis aceitáveis é imprescindível. Cafeo & Thomas (1997) abordam que a variabilidade de um produto depende das variações dos materiais e processos, desde o seu projeto até a sua manufatura. Os resultados obtidos através de simulações durante o desenvolvimento do produto são, normalmente, confirmados por testes feitos com protótipos. Porém, tanto a simulação quanto os testes em protótipos estão sujeitos a uma determinada variabilidade, que deve ser estimada para se ajustar modelos e ensaios. A diferença entre teoria e experimento pode indicar uma deficiência do modelo, que deverá ser refinado. Entretanto, esta conclusão é correta se o erro estiver além da faixa de incerteza dos dados experimentais. Se esta situação não ocorrer, o modelo não necessita de refinamento. Os autores destacam que a Estatística foi desenvolvida para entender e quantificar a variabilidade, e por outro lado, a Engenharia muitas vezes assume apenas modelos determinísticos. A melhoria de um produto, sistema ou processo necessita de um estudo mais amplo sobre a análise estatística sobre grande parte dos processos de desenvolvimento e produção de produtos. Os autores colocam também, o fato de que poucos cientistas estão familiarizados com a Estatística, ou seja, que vão além do cálculo de médias e desvio-padrão.

Powell (1997) utilizou métodos estatísticos para estudar a distribuição da resposta dinâmica de um protótipo para um componente aeroespacial, sujeito a vibrações aleatórias. O trabalho analisou se a resposta espacial da variação estrutural de um componente poderia ser representada por uma distribuição *lognormal*, avaliada pelo teste de Kolmogorv-Smirnov.

Bisgaard & Steinberg (1997) desenvolveram um método de projeto e análise de protótipos que combina polinômios ortogonais com planejamento fatorial em dois níveis. O trabalho apresenta o método aplicando-o em um problema para redução de emissão de monóxido de carbono de um motor de combustão interna. Para o estudo foi utilizado um planejamento

fracionário 2^{7-4} . Para a resposta ser obtida foram levantadas curvas com os valores de emissão de CO para três rotações do motor. Dois fatores mostraram maiores efeitos sobre as respostas e os outros cinco obtiveram valores quase insignificantes. Após este estudo, o método foi aplicado em um protótipo utilizado para controlar o fluxo de monóxido de carbono, através de um planejamento fatorial 2^3 , perfazendo um total de oito ensaios ou diferentes condições de trabalho. No final do trabalho, discutiu-se as possíveis variações do método proposto com relação ao polinômio utilizado, e também o alto custo que pode envolver a utilização de protótipos.

Carlyle & *et al.* (2000) argumenta que muitos dos problemas relacionados com o controle estatístico da qualidade devem ser estudados em conjunto com técnicas de otimização. Neste contexto, pode-se construir um modelo do sistema em estudo, e a partir das informações atuais deste, podem ser aplicados métodos ou técnicas de otimização para determinar valores que melhorem o desempenho do sistema, tanto em termos de processo, quanto de desempenho. Os autores citam essas aplicações como as mais recentes, porém a regressão linear e o método dos mínimos quadrados têm sido utilizados desde o século XIX, envolvendo a determinação de valores para parâmetros de modelos experimentais, que minimizam a soma do quadrado das diferenças entre o valor previsto e o valor observado. Na verdade, trata-se de um método de otimização sem restrição, no qual o modelo previsto é uma função linear de parâmetros desconhecidos, e por essa característica dificulta a extrapolação do modelo. Os autores colocam que a estimação de parâmetros é um bom exemplo da interface otimização-estatística, e fazem uma pequena revisão sobre alguns desses métodos.

Os artigos mencionados representam uma amostra da importância em se utilizar ferramentas estatísticas em Engenharia. Porém, outras áreas do conhecimento humano como a Química, Engenharia de Alimentos e Bioengenharia já fazem um uso relativamente amplo de técnicas estatísticas para desenvolvimento e análise de seus problemas, demonstrando um esforço abrangente para avançar os conhecimentos.

O estado da arte da dinâmica entre rotor e mancais, do ponto de vista computacional, têm avançado significativamente desde 1970. Vários métodos como matrizes de transferência e elementos finitos, bem como as sínteses de modos componentes (sub-estruturação) têm sido

desenvolvidas e aplicadas intensamente à análise dinâmica dos sistemas rotor-mancal-fundação. Entretanto, há poucos trabalhos que incorporaram um modelo exato ou simplificado de todos os elementos constituintes do rotor, como por exemplo, a inserção de acoplamentos dentro da análise do sistema. O principal objetivo de uma análise experimental em rotores consiste em analisar o comportamento dinâmico do sistema real e uma das áreas para o estudo de rotores é a análise modal. Em análise modal, buscam-se as frequências naturais do sistema e seus respectivos modos próprios. Os métodos usados para isso são bastante diversos e com resultados amplamente discutidos na literatura. Os testes experimentais normalmente são utilizados com o objetivo de verificação sobre as condições de projeto e/ou normas foram seguidas na concepção e construção do equipamento.

Hino & *et al.* (1987) utilizou para a análise de vibrações de rotores, o método de subestruturas, no qual o sistema completo composto por: rotor, suportes, carcaça e fundação. O sistema composto por esses elementos é dividido em subestruturas, e as funções de transferência de cada parte são medidas através de teste de impacto sendo os parâmetros modais são extraídos através de procedimentos de ajuste de curvas. Com isso, as características modais obtidas de todas as subestruturas são sintetizadas através do método de síntese modal, obtendo desta forma as características dinâmicas de toda a estrutura. Os mancais hidrodinâmicos também são elementos importantes em sistemas mecânicos rotativos, sendo utilizados amplamente nesses sistemas para transmitir potência, tornando-se um aspecto crítico de qualquer sistema de eixos. Cheli & Cavalca (1992) apresentaram um trabalho experimental, no qual a influência da estrutura de suporte do tipo flexível sobre o comportamento dinâmico do rotor foi avaliada através de técnicas de identificação de parâmetros modais.

Rajalingham & Prabhu (1987) investigaram a influência da temperatura nas características físicas dos mancais hidrodinâmicos, no qual concluíram que a variação da temperatura do óleo na direção axial pode ser desprezada sem afetar a precisão dos resultados hidrodinâmicos para o filme de óleo. Cavalca *et al.* (1996) apresentam os resultados de uma abordagem matemática para modelagem de mancais hidrodinâmicos baseada na linearização da solução numérica da equação de Reynolds, visando obter os coeficientes diretos e acoplados de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos.

Cavalcante & Cavalca (1998) apresentam estudos sobre o comportamento dinâmico da fundação e sua influência no sistema rotativo. Através de parâmetros modais (massa modal, fator de amortecimento e frequência natural) e da análise da função de transferência a partir da excitação harmônica unitária da estrutura completa (aplicada em um dos nós da fundação), é possível, a partir das funções de resposta em frequência, analisar a influência do comportamento dinâmico da fundação.

Lee & Lee (1999), apresentaram um trabalho sobre modelamento e análise das vibrações de um sistema de rotores desalinhados com mancais de rolamentos. Nesse estudo, elaborou-se um modelo dinâmico usando o método de elementos finitos para o sistema rotor-mancal acionado através de um acoplamento flexível. Consideram-se as reações, as cargas e as deformações nos mancais e no acoplamento como efeitos do desalinhamento. A fim de se verificar o modelo do sistema de rotores desalinhados, foram realizados testes experimentais. Os resultados de simulação analítica e os resultados experimentais tiveram uma boa correspondência, mostrando que, conforme o desalinhamento angular aumenta, as órbitas descritas pelo eixo tendem a tornar-se uma linha reta e a frequência natural do sistema desalinhado, associada à direção do desalinhamento, aumenta significativamente. O aumento nas frequências naturais do sistema ocorre, principalmente, devido ao aumento na rigidez dos mancais associado à direção do desalinhamento.

Assis & Steffen (2002) colocam em seu trabalho a dificuldade em se determinar parâmetros de mancais em máquinas rotativas. A determinação desses parâmetros varia muito em rotordinâmica, mas são necessários para a análise dinâmica do sistema em relação aos diferentes tipos de projeto. Os autores propõem uma metodologia geral baseada sobre otimização híbrida (algoritmos genéticos e *simulated annealing*) para identificar esses parâmetros em rotores flexíveis. No trabalho, técnicas de identificação baseadas na resposta ao desbalanceamento em rotores flexíveis são utilizadas para estimar parâmetros desconhecidos nos mancais. Os autores aplicaram um programa de otimização, composto de um método clássico, algoritmo genético e *simulated annealing*, no qual a função objetivo é otimizada através de algoritmos numéricos consagrados, que são entradas dos métodos posteriores.

Tapia (2003), desenvolveu um modelo através do método de elementos finitos, considerando as modelagens simplificadas de acoplamentos existentes na literatura. O trabalho surgiu, devido à escassa pesquisa existente sobre a modelagem eixo-mancais-acoplamentos. Nas simulações teóricas, verificou-se que o comportamento dinâmico do sistema é diferente, dependendo do modelo considerado, tanto em relação às frequências naturais, quanto às amplitudes de vibração. Foram obtidas através de experimentos as FRF's (Funções da Resposta em Frequência) por desbalanceamento e excitação aleatória através de um *shaker*. As curvas experimentais foram ajustadas através do Método de Mínimos Quadrados Não-Linear. A conclusão do trabalho mostrou que os melhores modelos dos acoplamentos são aqueles representados através dos parâmetros de rigidez e amortecimento.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho teve sua origem, a partir do trabalho de doutoramento de Tapia, A. T. (2003). Sem a utilização de técnicas de planejamentos experimentais, e um método que indicasse valores de projeto para uma determinada faixa de operação, houve um trabalho experimental e teórico bastante longo. Não houve um estudo sobre a sensibilidade dos parâmetros envolvidos, dificultando em certos momentos o entendimento do comportamento do sistema.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo é feita uma revisão sobre a teoria de planejamentos experimentais que foram implementados no programa computacional, mais especificamente os planejamentos fatoriais e suas variações. Também é feita uma revisão sobre a metodologia de Taguchi, complementando os planejamentos voltados para o estudo de sistemas, produtos e processos em Engenharia Mecânica.

3.1 Histórico

O trabalho pioneiro de Fisher na Estação Agrícola Experimental de Rothamsted, Inglaterra, durante as décadas de 20 e 30 estabeleceu solidamente o papel da estatística no planejamento experimental e vice-versa, voltado para a teoria de erros, redução de dados, estimação de parâmetros, desenvolvendo a técnica de Análise da Variância (ANOVA) [Montgomery, 1991]. Inicialmente, Fisher foi admitido para analisar dados a partir de estudos conduzidos na Estação de Rothamsted na área de agricultura, mas em pouco tempo algumas questões importantes não podiam ser analisadas e concluídas, devido à falta de robustez de muitos dos planejamentos existentes neste período [Steinberg & Hunter, 1984]. Em 1933, Fisher tornou-se professor da Universidade de Londres e, posteriormente, da Universidade de Cambridge, na qual conheceu o matemático Yates. Juntos, Fisher e Yates desenvolveram muito do que se conhece sobre a teoria de Planejamento de Experimentos. O trabalho de Fisher foi conduzido pela percepção de que a análise estatística de dados poderia ser fundamentada de forma mais precisa, através da aplicação de idéias que conduzissem a uma correta coleta de dados em primeiro lugar [Steinberg & Hunter, 1984]. Em 1980, Box G.E.P descreveu o trabalho de Fisher sobre planejamento ou projetos

experimentais, e toda sua contribuição na área de experimentação: aleatorização, blocagem e utilização de réplicas; o desenvolvimento de novas classes de planejamentos experimentais e o trabalho conjunto com pesquisadores de diversas áreas com a aplicação das técnicas que ele desenvolvia. Assim, desde a introdução dos primeiros princípios de planejamento experimental, muito têm sido feito quanto à estatística aplicada nas áreas de agricultura, química, biologia, e em diversas áreas da engenharia.

3.1.1 Considerações sobre projeto e planejamento robusto

Em estatística, o termo “robusto” ou “robustez” foi proposto por Box, G.E.P em 1953. O termo robustez está relacionado à aplicação de algum procedimento que fornece resultados satisfatórios, dentro do contexto de análise, mesmo havendo violações em algumas hipóteses pré-estabelecidas. Seguindo a linha de pesquisa iniciada por Pearson (1931), Box em 1953 examinou os efeitos da análise da variância com o teste inicial de normalidade de Bartlett, considerando uma hipótese que englobava ambos os procedimentos. A pesquisa inicial desenvolvida por Pearson indicou que a análise da variância é robusta para hipóteses que consideram o teste de normalidade, mas ele sugeriu que estas conclusões não deveriam ser estendidas para as comparações de estimativas da variância baseada em amostras independentes. Box, ainda em 1953, concluiu que certamente o teste de Bartlett é significativamente sensível ao teste de normalidade [Steinberg & Hunter, 1984]. Este resultado o conduziu a observar que o teste de Bartlett poderia ser utilizado como um teste preliminar para a análise da variância, uma prática recomendada por alguns estatísticos, com a ressalva de que o problema não é conhecido previamente, sendo necessário aplicações dessas técnicas, para depois se obter conclusões, e repetir esse procedimento, quando não há respostas conclusivas. A análise de técnicas tradicionais da estatística para a determinação de sensibilidade por hipóteses e o desenvolvimento de novas técnicas menos sensíveis a diversas condições, têm sido o foco da pesquisa em estatística aplicada nas últimas décadas [Steinberg & Hunter, 1984]. O planejamento experimental é uma área na qual se concentram as questões de investigação da robustez, pois as suposições dos pesquisadores têm uma influência extremamente significativa na elaboração do projeto experimental. Entretanto, o planejamento deve ser escolhido anteriormente à coleta de

dados, e estes não podem ser descartados se as suposições estiverem erradas. Assim, o interesse por planejamentos que forneçam respostas robustas pode incorporar variações não previstas, e ainda assim gerar respostas aceitáveis. A hipótese que se destaca em vários trabalhos de pesquisa em planejamento experimental está associada à equação:

$$\text{Resposta} = f(x) + \varepsilon \quad (3.1)$$

O modelo representa o efeito das variáveis previstas sobre a resposta e os erros descritos de forma geral a partir deste modelo. Os pesquisadores frequentemente utilizam modelos provenientes de experiências anteriores, cada um baseado em considerações teóricas, ou então utilizam um modelo empírico mais simples, considerando que este se adequará ao estudo. É improvável, entretanto, que o pesquisador estará completamente certo em qualquer tentativa empreendida para se obter um modelo adequado e a estratégia de planejamento que falhar, levando em conta essa incerteza, deve ser vista com um certo ceticismo. Particularmente, são planejamentos obtidos com critérios de ótimos (planejamentos ótimos), pois são significativamente dependentes do modelo escolhido. Esses planejamentos tendem a concentrarem todos os experimentos realizados sobre um número pequeno de pontos experimentais, e são normalmente adequados para a estimativa dos coeficientes do modelo assumido, que podem fornecer insuficiente ou nenhuma verificação para a falta de ajuste. Hipóteses sobre o componente erro (3.1) são caracterizadas, normalmente, em termos de uma distribuição de probabilidade, também sujeita a incertezas. Há duas abordagens diferentes, mas complementares, que propõem o planejamento experimental em relação à incerteza do modelo: a) Planejamentos com modelos robustos e b) Planejamentos de modelos com sensibilidade. Neste trabalho, será dada apenas uma introdução para cada modelo, pois não é foco direto deste trabalho, mas em uma possível continuação.

Box e Draper (1959) consideraram o efeito de assumir um polinômio de regressão de primeiro grau, quando na verdade um modelo de segundo grau seria mais adequado. Eles concluíram que planejamentos que minimizam a média quadrada do erro eram similares à minimização dos desvios dos componentes individuais, porém diferentes da minimização da variância. Portanto, a minimização dos desvios nos planejamentos ortogonais difere

significativamente dos critérios de ótimos tradicionais em planejamentos ótimos, que consideram apenas as funções de variância. Os planejamentos que possuem desvios mínimos podem ser obtidos através da escolha de pontos de planejamento, como um caminho que especifica momentos de partida do planejamento, a partir de uma distribuição uniforme de probabilidade sobre a região de interesse. O segundo modelo, refere-se à análise de um planejamento robusto ou insensível para possíveis incertezas do modelo ou erros durante a especificação do modelo. Em um estudo inicial do pesquisador, o modelo adotado provavelmente terá incertezas e deverá modificar ou refinar o modelo anteriormente obtido. Neste caso, o pesquisador precisará de um planejamento que tenha sensibilidade para diferentes modelos alternativos. Sob este aspecto, tanto o modelo robusto quanto o modelo de sensibilidade são bastante similares, pois a idéia básica por trás de ambos os conceitos é a tentativa de propor modelos que nunca são exatos. Alguns trabalhos de planejamentos com modelos de sensibilidade tem sido motivados por estudos de modelos não-lineares, embora a teoria desenvolvida seja aplicável a modelos lineares. Com base no mecanismo dos experimentos ou experiência anteriores, os pesquisadores buscam a escolha entre os modelos levantados. [Steinberg & Hunter, 1984] apud Atkinson (1972) propôs um critério para o planejamento de experimentos com modelos de regressão lineares, que tem como objetivo: auxiliar na estimação de parâmetros e escolher modelos, numa tentativa de assumir um modelo e testar a inadequação deste modelo. Esse modelo é dado por:

$$Y_i = f_1(x_i)' \beta_1 + f_2(x_i)' \beta_2 + \varepsilon_i \quad (3.2)$$

sendo que $f_1(x_i)$ corresponde ao modelo proposto, e $f_2(x_i)$ corresponde aos termos adicionais de prováveis erros. O polinômio f_1 pode ser de primeiro grau e f_2 pode ser uma função que contém termos quadráticos. Seleccionando classes (planejamentos) padrões como planejamentos fatoriais e planejamentos compostos centrais, Atkinson encontrou planejamentos experimentais que satisfaziam as duas metas anteriormente propostas.

Alguns anos depois, na década de 50, Genichi Taguchi forneceu um outro contexto aos planejamentos experimentais dentro da engenharia de projeto e de qualidade, introduzindo o termo projeto robusto. A Metodologia Taguchi utiliza algumas das técnicas provenientes da teoria de planejamentos experimentais: a escolha do planejamento adequado ao problema, as

interações e a otimização pela relação Sinal-Ruído. Taguchi percebeu que projetar da melhor maneira um produto elétrico ou mecânico, não é como comparar um processo químico ou biológico: um protótipo físico torna-se análogo à produção de lotes. Porém, nas áreas da Engenharia Mecânica e Elétrica os modelos matemáticos e as medidas experimentais muitas vezes excedem àqueles disponíveis dentro das ciências puras.

Apesar disto, grande parte das ciências puras ou aplicadas podem utilizar de forma lucrativa os planejamentos experimentais e suas associações com modelos empíricos [Hunter, 1985]. As técnicas para se obter um projeto robusto baseadas nos conceitos da qualidade dentro do projeto, tem encontrando novas aplicações na indústria moderna, principalmente pela aplicação do método de Taguchi, no desenvolvimento de projetos, processos e sistemas, nos quais há dificuldades em se obter modelos matemáticos relativos ao desempenho do produto, e então os projetos de experimentos são conduzidos para se determinar conjuntos ótimos de variáveis de projeto insensíveis a fatores externos [Kunjur & Krishnamurty, 1997]. Segundo Taguchi, a qualidade é medida através do desvio que uma característica funcional apresenta em relação ao valor esperado do mesmo. O fator ruído (perturbações), como por exemplo, temperatura ambiente, umidade do ar, poeira, deterioração, falha na operação do produto, tensão da rede de energia, causam tais desvios e resultam em perda de qualidade do produto. O método proposto por Taguchi segue a filosofia na qual, a obtenção da qualidade deve ser obtida durante o projeto do produto. A qualidade é medida, a partir do seu desvio em relação ao valor nominal (projeto). Assim, a redução da variação em torno do valor nominal deve ter um baixo custo.

Assim, a metodologia assume uma abordagem dentro do conceito de projeto robusto. O estudo tem como objetivo a redução da variação, sem necessariamente remover a causa de variação. A melhoria consistente para o desempenho torna o produto ou sistema insensível às influências externas e fatores não-controláveis. A construção de um projeto robusto pode incluir: simulações analíticas (nas fases iniciais do projeto); teste de desenvolvimento (durante a fase de projeto e desenvolvimento); desenvolvimento de processos; confiabilidade e teste de vida, determinação de tolerâncias, manufatura e solução de quase todas as áreas de fabricação. As técnicas para se obter projetos robustos estão baseadas no conceito de construção de qualidade

dentro do projeto, e vêm sendo intensificado devido às novas aplicações na indústria e pesquisa pela sua relativa simplicidade e rapidez [Carpinetti, 2003].

3.2 Contextualização dos Planejamentos Experimentais

Um experimento é um teste ou uma série de testes [Montgomery & Runger, 1996]. A utilização de experimentos aplica-se para o estudo do desempenho funcional de um produto, processo ou sistema, os quais nas áreas da engenharia e pesquisa são fundamentais para a compreensão do funcionamento das partes individuais e de todo o conjunto. Experimentos são representados pelas investigações em áreas, nas quais há questionamentos de várias naturezas e, portanto, é uma ferramenta direcionada para explorar possibilidades sobre algum procedimento de análise. Literalmente um experimento é um teste, ou seja, um projeto experimental é um teste ou uma série de testes, nos quais são realizadas alterações pré-definidas nas variáveis de entrada de um processo ou sistema, de forma que possam ser observadas e identificadas causas das mudanças nas respostas [Montgomery, 1991]. O projeto ou processo em estudo pode ser representado por um modelo simplificado, como apresentado na Figura 3.1.

O planejamento de experimentos é uma forma eficiente de eliminar várias fontes de variabilidade e identificá-las, assegurando que o experimento forneça informações precisas sobre as respostas de interesse. Em um planejamento experimental, a primeira etapa é determinar quais são os fatores e respostas de interesse para o sistema em estudo. Os fatores de entrada e os parâmetros de controle podem ter origem qualitativa (como por exemplo, diferentes tipos de eixo ou materiais) ou quantitativa (como por exemplo, temperatura do óleo e força atuante no sistema) e, obviamente, pode haver mais de uma resposta de interesse. É necessário que sejam definidos os objetivos do experimento, para que se escolha um planejamento adequado.

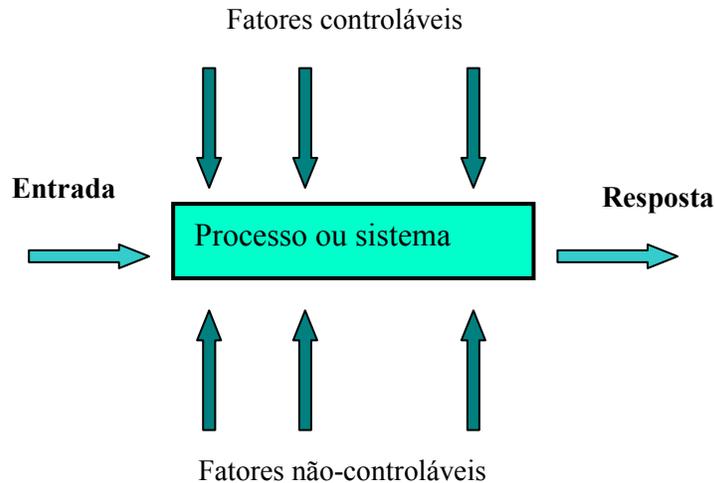


Figura 3.1 – Modelo geral de um sistema.

As técnicas de planejamento de experimentos podem ser utilizadas nas etapas do projeto preliminar, projeto do produto, processo de fabricação e durante as avaliações e melhorias. Nestas etapas, torna-se necessário analisar a influência de um ou mais fatores sobre o produto, sistema ou processo. A utilização do projeto experimental na engenharia contribui para menor tempo de projeto e desenvolvimento do produto, melhoria de desempenho e confiabilidade, melhoria em sua fabricação e reduções de custos.

Em um sistema ou processo, as entradas podem ser representadas por diversas combinações, como por exemplo, combinações de componentes, métodos, materiais, instrumentação, que geram uma ou mais respostas. Um sistema pode ser considerado como uma função (a princípio desconhecida) ligando fatores (variáveis de entrada) às respostas (variáveis de saída). Algumas variáveis do sistema ou processo são controláveis (x_1, x_2, \dots, x_q). Entretanto, há variáveis (z_1, z_2, \dots, z_q), que não podem ser efetivamente controladas, porém seus efeitos podem ser minimizados durante o experimento. A exploração experimental e a otimização dessas variáveis podem ser estudadas, através de experimentos construídos matematicamente e estatisticamente contribuindo para:

- Determinação das variáveis de maior influência sobre a resposta (y);
- Determinação da localização do conjunto de influência dos x'_s , de tal forma que y sempre esteja próximo do valor nominal.
- Localização do conjunto de influência dos x'_s , de modo que os efeitos das variáveis não-controláveis (z_1, z_2, \dots, z_q) sejam minimizadas.

Como aplicações na área de projeto da utilização de técnicas experimentais, pode-se citar:

- Avaliação e comparação das configurações básicas de projeto;
- Avaliação de diferentes e novos materiais;
- Seleção dos parâmetros de projeto, de tal forma que o produto possa desempenhar suas funções dentro de uma ampla faixa de valores e condições de contorno, ou seja, um produto robusto e;
- Determinação do conjunto de parâmetros ótimos do projeto, que influenciam significativamente para o desempenho do produto.

3.2.1 Princípios básicos de experimentação

Há três princípios básicos para a utilização de técnicas experimentais: repetição, aleatorização e blocagem.

Repetição (réplicas): é o processo de repetir cada uma das combinações (linhas) da matriz experimental sob as mesmas condições de experimentação. Montgomery (1991) enfatiza o fato que a utilização de réplicas apresenta duas propriedades importantes: permite obter uma estimativa do erro experimental. Essa estimativa do erro torna-se a unidade básica de medição para se determinar se as diferenças observadas nos dados são estatisticamente diferentes. Além dessa condição, sendo a média amostral utilizada para estimar o efeito de um fator no experimento, a repetição permite a obtenção de uma estimativa mais precisa desde efeito, pois o desvio-padrão amostral (S) deve ser inversamente proporcional ao tamanho da amostra \sqrt{n} ;

Aleatorização: é a suposição básica para a validação de métodos estatísticos em Planejamento Experimental, pois a utilização da distribuição Normal e suas “variações” possuem o pressuposto no qual, as observações devem ser variáveis aleatórias independentes. A aleatorização deve ser observada durante a alocação de material e equipamento para os experimentos e, que a ordem pela qual os experimentos são ensaiados devem ser aleatoriamente definida. Através da aleatorização, pode se minimizar os efeitos de fatores não-controláveis;

Blocagem: o planejamento utilizando blocos tem como objetivo eliminar o efeito de um ou mais fatores no resultado do experimento. Com isso, realiza-se o experimento em condições (blocos) mais homogêneas. Desta forma, têm-se um maior controle do experimento (efeito dentro de cada bloco), assim como as informações, uma vez que se evidencia o efeito dos blocos (efeito entre blocos).

Cabe ressaltar que em um planejamento experimental, há a necessidade de um significativo domínio sobre a metodologia estatística necessária para o planejamento e análise dos dados. Portanto, o pesquisador deve conhecer exatamente o que deseja estudar, como obter os dados, bem como ter uma estimativa qualitativa sobre a análise desses dados. Sempre que possível, é necessário o estabelecimento de um modelo físico-matemático, que estabeleça as funções relacionadas às diversas variáveis de influência, bem como aos resultados que devem ser analisados. A elaboração de um modelo físico, mesmo que aproximado, possibilita um planejamento experimental mais detalhado, que define valores para o estudo adequado das variáveis.

Aschar (1995) divide a investigação experimental nas seguintes etapas:

A) Fase do planejamento (projeto experimental):

- o que deve ser medido?
- há experiências anteriores?
- qual é a amplitude da variabilidade?
- quais os prováveis fatores (parâmetros de projeto) de maior influência?

B) Fase do Planejamento Experimental:

- controle de fontes conhecidas de variabilidade;
- estimativa da variabilidade não controlada;
- escolha dos níveis das variáveis e definição dos níveis (valores) para cada uma;
- definição do tamanho da amostra (número de réplicas), seqüência dos ensaios, necessidade de utilização de blocos.
- a experimentação é um processo iterativo;

C) Fase da Análise Estatística:

- realizar inferências nos fatores de planejamento;
- direcionar planejamentos seqüenciais;
- sugerir modelos apropriados.

Segundo Montgomery (1991) e Carpinetti (2003), o procedimento para o planejamento e para a análise dos resultados deve considerar:

- Reconhecimento e formulação do problema: Muitas vezes, a definição de um problema torna-se uma tarefa bastante complexa, considerando o desenvolvimento das idéias sobre o comportamento do produto. Uma definição clara do problema, muitas vezes contribui substancialmente para um melhor entendimento do fenômeno e para a solução final do problema;
- Escolha dos fatores e níveis: são definidos os fatores a serem variados no experimento, a faixa dentro da qual cada fator sofrerá variações e os níveis para os quais os testes serão feitos;
- Seleção da variável de resposta e fatores de controle: nesta etapa, devem ser selecionados os fatores de controle (variáveis independentes), as faixas de variação dos níveis de ajuste desses fatores e as respostas do experimento (variáveis dependentes), assim como, definidos método de medição dos fatores de controle e a escala dimensional que será utilizada para avaliar as respostas do experimento definido na etapa anterior;

- Planejamento do Experimento/ Seleção da matriz experimental: essa fase envolve a escolha da técnica experimental a ser utilizada no experimento; escolha da variável de resposta (considerando o item anterior); a definição do número de repetições e a definição da ordem dos testes;

- Condução do experimento: durante os experimentos, é necessário o monitoramento cuidadoso do sistema, para garantir que haja uma concordância com as diretrizes iniciais. Erros cometidos no procedimento experimental terão uma grande probabilidade de invalidar o resultado do experimento;

- Análise dos resultados: segundo Achcar (1995) os métodos estatísticos devem ser utilizados para analisar os dados, de tal forma que os resultados e as conclusões sejam objetivas, realizando inicialmente inferências nos fatores de planejamento e direcionando para planejamentos seqüenciais. Análises residuais e adequação de modelos são técnicas importantes de validação dos resultados. Os métodos estatísticos em planejamentos experimentais, quando corretamente aplicados, permitem que sejam estimados os erros experimentais e, as respostas podem ser previstas com certo grau de confiança;

- Conclusões e recomendações: uma vez que os dados tenham sido analisados, as conclusões e recomendações permitirão que as decisões sejam tomadas a respeito do processo em estudo. Uma documentação extensa, com a utilização de gráficos e tabelas, permite que se apresentem os resultados obtidos, a análise efetuada, bem como futuras repetições do procedimento empregado. Dificilmente se obtêm respostas para todas as questões no início do processo experimental, mas o conhecimento vai sendo acumulado conforme a investigação avança: alguns fatores serão descartados, outros serão estudados em novos níveis, seqüencialmente, pois a experimentação é um processo iterativo.

Werkena & Aguiar (1996) ressaltam que o trabalho realizado deve ser descrito, identificando-se as limitações práticas e teóricas encontradas, as recomendações para futuros experimentos e as conclusões obtidas. A obtenção dessa realimentação auxilia no processo de avaliação do desempenho de planejamentos industriais, como também para o processo de revisão.

Essa etapa é importante porque demonstra que o estudo desenvolvido é um processo contínuo de aprendizado [Montgomery, 1991].

3.3 Projeto de Experimentos

Segundo Pillet (1992), a realização de um planejamento experimental consiste em adotar uma estratégia de otimização para a condução mínima de ensaios. Em função do objetivo do estudo, há diferentes estratégias, sendo conveniente dividi-las em:

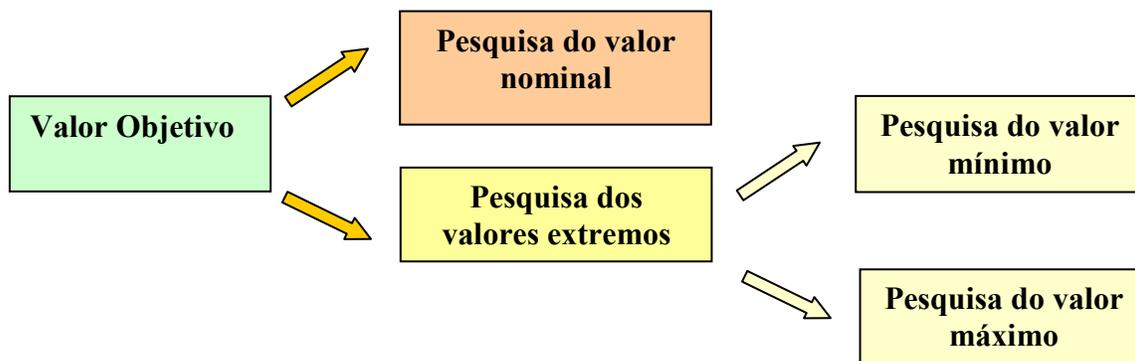


Figura 3.2 – Diferentes estratégias para busca do valor objetivo.

A grande questão no planejamento experimental é decidir qual o caminho dos pontos experimentais que se revelam melhores em determinados aspectos para uma análise [Box; Hunter; Hunter, 1978]. Para o estudo de um sistema, há duas opções estratégicas considerando a pesquisa de valores extremos. A primeira consiste em se determinar um conjunto de fatores de influência, ou seja, o objetivo corresponde a uma pesquisa de extremos (valores máximos e mínimos). A segunda estratégia consiste na pesquisa do valor nominal, ou seja, pesquisar ou obter a modelagem do sistema. Portanto, pesquisa-se um modelo capaz de fornecer a resposta do sistema por uma configuração arranjada dos fatores. Por exemplo, considerando uma instalação química piloto, sensível a fatores externos como temperatura e umidade. A função de estado dos parâmetros será conhecida, a partir desses parâmetros de controle, de modo a fornecer uma

resposta constante. A escolha de uma estratégia para o caso da pesquisa de extremos consiste em se estudar o maior número possível de fatores, mas considerando o mínimo de níveis. Neste caso, a interação entre os fatores pode ser tratada com menor enfoque. A combinação dos diferentes fatores fornece as respostas máximas e mínimas do sistema. As interações estão relacionadas ao efeito principal, mas o estudo é feito com um número significativo de fatores em relação à suas interações. Na estratégia de pesquisa ao valor nominal, faz-se uma análise mais refinada. O número de níveis é mais elevado. Neste caso, são estudados os principais fatores que afetam o sistema, não ultrapassando 5 – 6 fatores de cada vez, considerando suas interações, já que o objetivo é detalhá-las. Portanto, a escolha da estratégia permite ao pesquisador fundamentar uma condução de experimentos confiável. Quando há diferentes variáveis, cujos efeitos parecem ser relevantes para o fenômeno em estudo, o modelo do delineamento é apropriado para identificar as variáveis importantes, e também os possíveis efeitos de interação (quando houver) entre essas mesmas variáveis.

3.3.1 Considerações sobre Planejamento Experimental

Dependendo da situação experimental, há a necessidade da aplicação de diferentes técnicas de planejamentos. Segundo Juran & Gryna (1993) os experimentos podem ser classificados pelo: a) número de fatores experimentais a serem investigados; b) pela estrutura do delineamento (por exemplo, delineamento com blocagem de experimento fatorial; aninhado ou de superfície de resposta e c) pelo tipo de informações às quais o experimento se destina primeiramente a fornecer (por exemplo, estimativas dos efeitos, estimativas da variância ou mapeamento empírico).

A elaboração e o estudo de planejamentos experimentais requerem que o experimentador conheça algumas definições estatísticas pertinentes a essa área de pesquisa, definidas a seguir:

- Tratamento: em experimentos, um tratamento é alguma ação que será conduzida por pesquisadores para unidades experimentais. Por exemplo, um professor pode adotar diferentes métodos de ensino para diferentes grupos em sua classe para tentar obter o melhor método ou resultado.

- Fator: um fator de um experimento é uma variável independente controlada, uma variável cujos níveis são ajustados para cada experimento. Um fator é uma categoria de tratamentos. Diferentes tratamentos constituem diferentes níveis de um fator.

- Análise da variância com um fator (*One Way Analysis of Variance*): A análise da variância com um fator, permite comparar vários grupos de observações, possibilitando uma média diferente para cada grupo. Um teste de importância maior é verificar se as médias são ou não iguais. Todas as observações surgem a partir de vários grupos diferentes (ou tendo sido exposto dentre os vários tratamentos, a um em específico). Estas são classificadas *one-way* de acordo com o grupo ou tratamento.

- Análise da variância com dois fatores (*Two-Way Analysis of Variance*): A análise da variância com dois fatores é um meio de estudar os efeitos de dois fatores separadamente com seus efeitos principais e, algumas vezes juntos com os efeitos de interação.

- Projeto completamente aleatorizado: a estrutura de um experimento em um projeto completamente aleatorizado, é assumido de tal forma, que os tratamentos sejam alocados para unidades experimentais completamente aleatorizados.

- Projeto com blocos completamente aleatorizados: neste tipo de projeto experimental os fatores são emparelhados de acordo com uma variável a ser controlada. Os fatores são colocados dentro de grupos (blocos) de mesmo tamanho, assim como o número de tratamentos. Os membros de cada bloco são aleatorizados, e atribuídos para diferentes grupos de tratamento.

- Efeito Principal: é o efeito simples de um fator sobre uma variável dependente. É o efeito do fator individual somado aos níveis de outros fatores.

- Interação: uma interação é a variação entre as diferentes médias para diferentes níveis de um fator sobre diferentes níveis de outros fatores.

Como citado anteriormente, há diferentes tipos de planejamentos experimentais que variam em função do número e tipo de fatores, bem como das condições experimentais, como por exemplo:

a) Completamente aleatorizado: o experimento é adequado para o estudo de apenas um fator. Neste caso, faz-se uma estimativa e comparação dos efeitos de tratamento e da variância;

b) Comparação entre dois tratamentos: neste caso, há a necessidade de se testar diferenças entre dois componentes diferentes. Por exemplo, analisar a vida útil entre duas ferramentas de corte com materiais diferentes. Há neste caso, um fator de controle (material da ferramenta) em 2 níveis (materiais). Para a condução deste experimento (usinagem de barras de aço), o planejamento é feito de modo que a influência da variação da dureza da barra de aço usinada seja minimizada. Neste caso, se utiliza a aleatorização e emparelhamento dos dados. Para a análise das diferenças em termos de vida útil, utiliza-se o teste de hipóteses;

c) Comparação de mais de dois tratamentos: no exemplo anterior, se houvessem quatro ferramentas e se fosse necessário testar se existem diferenças, em termos de vida útil, entre as 4 ferramentas, haveria um novo fator (material) e 4 níveis (4 tipos de materiais diferentes). Para minimizar a influência no resultado de fontes de variação externas são utilizadas a aleatorização e réplicas. A análise dos dados é feita através da análise da variância (ANOVA);

d) Comparação de mais de dois tratamentos, com uma variável bloqueada: com o exemplo anterior, sabe-se que a variação da dureza entre as diferentes barras de aço (material) utilizadas para o teste de vida útil (usinagem) é um fator que contribuirá para aumentar a variabilidade da vida útil das ferramentas, e dificultar ou confundir a diferenciação entre elas. Neste caso, trabalha-se em grupos, com o mesmo material para se testar a vida dos quatro tipos de ferramentas, para se eliminar essa fonte de variação identificável. As fontes de variação externas podem ser minimizadas novamente com experimentos aleatórios e com a utilização de réplicas. Neste caso, tem-se: 1 fator de controle: tipo de ferramenta em 4 níveis (materiais: A,B,C e D) e 1 variável bloco: Barra de aço em 4 níveis (1,2,3 e 4). Neste experimento, cada barra de aço (bloco) é

utilizado para testar um tipo de ferramenta nível, como ilustrado na Tabela 3.1. Para a análise dos dados é utilizado a ANOVA.

Bloco (Barra)	Tratamento (Materiais)			
	A	B	C	D
1	Resultados dos experimentos aleatorizados e replicados			
2				
3				
4				

Tabela 3.1 – Tabela para um planejamento de experimento organizado em bloco.

e) Planejamento com mais de uma variável blocada: considerando ainda o teste de vida útil das quatro ferramentas (níveis do fator, para o caso anterior), assume-se que a seqüência de testes ocorrerá em 4 máquinas diferentes (o que implica em novas diferenças). Neste caso, há duas fontes de variabilidade conhecidas: 1 fator de controle (material da ferramenta em quatro níveis, A,B,C e D); 1 variável bloco (máquina, em 4 níveis: I, II, III e IV) e mais uma variável bloco (barra de aço, em 4 níveis: 1,2,3 e 4). Neste caso, utiliza-se o planejamento quadrado latino:

Máquina	Barra			
	1	2	3	4
I	A	B	C	D
II	B	C	D	A
III	C	D	A	B
IV	D	A	B	C

Tabela 3.2 – Planejamento Quadrado Latino.

Neste caso, também se utiliza a ANOVA para a análise de dados. O Planejamento Quadrado Latino, também pode ser utilizado para se estudar três variáveis de controle simultaneamente.

f) Planejamento com mais de duas variáveis blocadas: se no exemplo anterior fosse acrescentado o operador, este seria mais uma fonte de variabilidade conhecida. Assim, soma-se ao fator de controle e 2 variáveis blocos, mais uma variável blocada definida como: operador, em 4 níveis,

α , β , γ e δ . Este planejamento é chamado Quadrado Greco-Latino, sendo ilustrado pela Tabela 3.3. É possível estudar quatro fatores de controle simultaneamente, neste tipo de planejamento.

Máquina	Barra			
	1	2	3	4
I	A α	B γ	C δ	D β
II	B β	C δ	D α	A γ
III	C γ	D α	A β	B δ
IV	D δ	A β	B γ	C α

Tabela 3.3 – Planejamento Quadrado Greco-Latino.

Para se estudar planejamentos com mais de três variáveis bloqueadas, ou seja, com mais uma fonte de variabilidade conhecida, tem-se o planejamento Quadrado Hiper-Greco-Latino. Neste caso, à Tabela 3.3 é adicionada mais uma letra latina (minúscula) identificando a quarta variável bloqueada: *a*, *b*, *c* e *d* (como por exemplo: vibração). Para analisar os dados é utilizada a ANOVA.

g) Delineamento de misturas: assim como os planejamentos fatoriais, a serem descritos a seguir, o delineamento de mistura é uma forma de se estudar vários fatores simultaneamente e a interação entre esses fatores. Juran (1993) o descreve em termos de estrutura, sob a forma de muitas matrizes únicas. Os grupos de fatores são limitados, sendo que seus níveis são percentagens que devem totalizar 100%. Neste tipo de planejamento obtém-se a estimativa e comparação dos efeitos de diversos fatores, a estimativa de possíveis efeitos de interação e da variância (assim como nos planejamentos fatoriais).

O delineamento por superfícies de respostas, que constitui uma outra classe de experimentos, será estudado mais detalhadamente no Capítulo 4.

3.3.2 Planejamentos Fatoriais

Os planejamentos fatoriais foram desenvolvidos por Fisher e Yates na Estação Experimental de Rothamsted, Inglaterra. Constituem uma das maiores contribuições da estatística dentro do planejamento experimental. Sua característica básica é o estudo simultâneo de vários

fatores em contrapartida da idéia de variar um fator de cada vez [Steinberg & Hunter, 1984]. Como Fisher observou em 1926, os planejamentos fatoriais oferecem muitas vantagens: cada experimento executado fornece informações sobre vários fatores, não de apenas um como era feito anteriormente; o pesquisador obtém mais informações deste conjunto de fatores, do que variando apenas um fator. Estudos adicionais de informações ou valores podem ser feitos, como o estudo das interações entre fatores. Não havendo interações, as conclusões para os efeitos principais de fatores podem ser feitos de forma mais clara e precisa, desde que o efeito tenha sido observado em um determinado número de condições experimentais [Box & Draper, 1986]. Em pesquisas acadêmicas e na indústria, um problema comum é determinar a influência de uma ou mais variáveis sobre outra variável de interesse, ou seja, como a resposta depende dos fatores ou parâmetros do sistema, produto ou processo.

De uma forma resumida, como um determinado número de parâmetros $[F_1, F_2, \dots, F_k]$ influenciam ou produzem as respostas $[R_1, R_2, \dots, R_k]$ [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. O sistema atua como uma função, desconhecida inicialmente, que age sobre as variáveis de entrada (parâmetros) e produz como saída as respostas observadas. Segundo Button (2001), o planejamento fatorial é indicado na fase inicial do procedimento experimental, quando há necessidade de se decidir os fatores mais importantes e estudar os efeitos sobre a variável de resposta escolhida, sendo por essa característica, indicado para estudos na área de engenharia de fabricação, materiais e, recentemente com a abordagem de Projeto Robusto por Taguchi, na engenharia de projeto. Ainda, “... é um modelo de efeitos fixos, ou seja, a análise dos efeitos provocados pelos fatores não podem ser transferida para outros níveis que não os analisados no planejamento...”. Por exemplo, considerando um experimento com dois fatores - 2^2 (A e B), cada um deles poderá ser testados em a níveis para o fator A e b níveis para o fator B. Esse experimento contém ab combinações de testes. A matriz de planejamento fatorial para dois fatores de controle, nos níveis a e b é representada pela Tabela 3.3. Essa organização também representa o caso geral do experimento fatorial de dois fatores, para uma resposta y_{ijk} observada quando o fator A está no i -ésimo nível ($i=1, 2, \dots, a$). O índice j se refere ao nível do fator B; ij a interação entre os fatores A e B; o índice k para um terceiro fator C, e assim por diante. As observações abn devem ser feitas aleatoriamente (Montgomery, 1991). Com o experimento organizado dessa forma, é possível verificar se:

- a resposta é alterada significativamente, altera o nível do fator A;
- a resposta é alterada significativamente, altera o nível do fator B;
- a interação dos fatores (coluna x linha), altera significativamente a resposta.

		Fator B			
		Níveis	1	2	...
Fator A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{11n}$...	$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{11n}$...	$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$

	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$...	$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Tabela 3.4 – Experimento fatorial de dois fatores, caso geral (Montgomery, 1991).

O modelo estatístico para planejamentos experimentais é definido, segundo Montgomery (1991) e Barros; Scarmínio; Bruns, (2001), pela equação (3.3):

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.3)$$

Sendo,

μ é a média dos resultados;

τ_i é o efeito principal do fator A;

β_j é o efeito principal do fator B;

$(\tau\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre os fatores A e B;

ε_{ijk} é o erro experimental.

Este modelo pode ser analisado pela ANOVA em termos de identificação dos efeitos como significativos ou não. Em planejamentos fatoriais encontram-se planejamentos que consideram dois, três ou mais níveis. Como citado anteriormente, os planejamentos fatoriais com dois níveis são utilizados para os estudos iniciais do sistema, porém com o auxílio de outras técnicas matemáticas e estatísticas, pode-se chegar a resultados satisfatórios sem aumentar o número de níveis. Autores como: Barker (1985) e Cochran & Cox (1957), apresentam exemplos de planejamentos de até três níveis.

3.3.2.1 Planejamentos experimentais fatoriais 2^k

Em um planejamento do tipo 2^k ou 3^k , a base indica o número de níveis e o expoente o número fatores de controle. Por exemplo, em um planejamento do tipo 2^3 há 3 fatores de controle e 2 níveis pré-estabelecidos para cada fator. Há 8 combinações de fatores deste planejamento, que estão associados aos efeitos principais dos 3 fatores (A,B e C), às interações dos fatores (AB, AC e BC) e à interação de dos três fatores (ABC). Se houvesse três níveis (alto, médio e baixo, por exemplo), o número mínimo de ensaios subiria para $3^2 = 9$ experimentos. O objetivo é se obter o máximo possível de informações sobre essas variáveis, sobre seus efeitos na resposta e sobre suas eventuais inter-relações, ao menor custo possível. Nesse sentido, às vezes, o custo de se levar adiante um experimento fatorial torna-se muito elevado, pois há um grande número de combinações entre as variáveis, ou seja, quanto maior a quantidade de fatores, maior será a quantidade de ensaios que deve garantir as mesmas condições, o que implica em aumento no custo experimental. Uma opção para se reduzir a matriz experimental, sem grandes prejuízos em termos de informações sobre o sistema ou produto em análise são os planejamentos fracionários, que serão discutidos no item 3.3.

Em um planejamento 2^2 são analisados dois fatores **A** e **B**, com dois níveis cada um (alto e baixo, por exemplo), sendo necessários quatro experimentos, no mínimo. É possível, avaliar tanto o efeito de **A** sobre a resposta quanto o efeito de **B**, e também avaliar se há efeito da interação **AB** – isto é, se **A** age sobre a resposta de forma diferente na presença ou na ausência do fator **B**. A lista dessas combinações é chamada de matriz de planejamento [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. Box & Bisgaard (1988) descrevem várias técnicas de criatividade e ferramentas de qualidade em projeto e processo para identificar parâmetros de influência ou até parâmetros de projeto/produto. Por exemplo, foi feito o diagrama de Causa e Efeito para o processo de manufatura da mola, ilustrado na Figura 3.3.

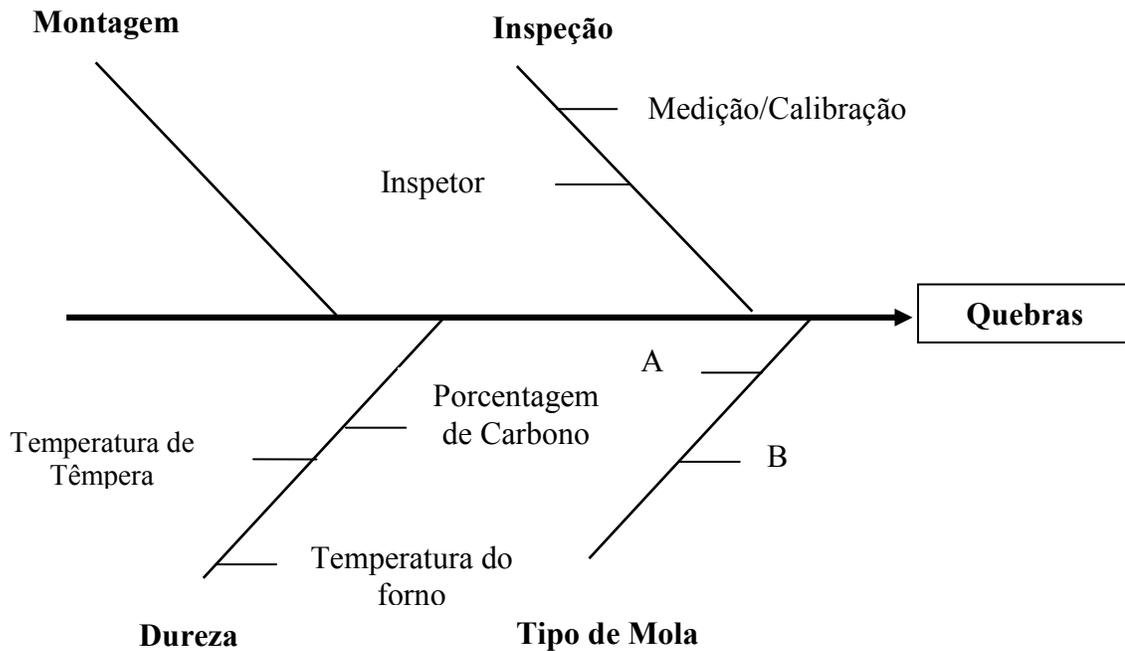


Figura 3.3 – Diagrama de Causa e Efeito para quebras no processo de manufatura de molas (Box & Bisgaard; 1988).

Os experimentos realizados em um produto, sistema ou processo de manufatura, possuem como objetivo estudar e analisar os efeitos de variações de alguns fatores que são críticos para o desempenho das funções de um produto ou sistema. Os estudos experimentais, como já mencionado, eram realizados variando somente um fator de cada vez. Na técnica de planejamentos fatoriais, todos os fatores (parâmetros) são variados simultaneamente. Para se fornecer uma breve seqüência para um planejamento fatorial, apresenta-se um exemplo real contido no artigo de Box & Bisgaard (1988). Inicialmente foi feito um planejamento fatorial 2^3 com três variáveis (temperatura de têmpera, temperatura do óleo e porcentagem de carbono) em dois níveis (valor mínimo e máximo), em um total de oito experimentos. A quebra da mola durante o processo de manufatura é a resposta ou o parâmetro de estudo. Assim, foram definidos dois níveis para cada fator de controle: temperatura (T) do aço antes da têmpera: 1450 [F] (788°C) e 1600 [F] (871°C); temperatura do óleo (O): 70F (21°C) e 120 [F] (49°C); porcentagem de carbono (C): 0,50% e 0,70%. A Tabela 3.4 apresenta as variações realizadas na seqüência

experimental. A combinação dos níveis e colunas ($2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^k$) proposto por Yates, fornecem todas as possíveis combinações entre os fatores de controle. O planejamento fatorial pode ser representado geometricamente por um cubo (Figura 3.4), no qual seus vértices representam os níveis dos fatores em seus valores máximos e mínimos. Com essa disposição pode se encontrar os efeitos principais, obtidos pelas faces do cubo e as interações entre os fatores de controle ou parâmetros obtidos pelas intersecções dos planos, como representado na Figura 3.8. Por exemplo, no terceiro experimento da Tabela 3.4, tem-se a temperatura de têmpera no nível inferior (1450 F), a porcentagem de carbono no nível superior (0.70%) e a temperatura do óleo no nível inferior (70 F). Essa combinação é mostrada pelos vértices da esquerda, superior e frontal do cubo e a resposta para essa combinação, ou seja, o número de molas sem quebra é de 61 %.

Experimento	Temperatura de Têmpera [T]	(%) de Carbono (C)	Temperatura do óleo (O)	(%) de molas sem quebra
1	1450 (-)	0.50 (-)	70 (-)	67
2	1600 (+)	0.50 (-)	70 (-)	79
3	1450 (-)	0.70 (+)	70 (-)	61
4	1600 (+)	0.70 (+)	70 (-)	75
5	1450 (-)	0.50 (-)	120 (+)	59
6	1600 (+)	0.50 (-)	120 (+)	90
7	1450 (-)	0.70 (+)	120 (+)	52
8	1600 (+)	0.70 (+)	120 (+)	87

Tabela 3.4 – Matriz experimental para um planejamento 2^3 .

Esta tabela é um exemplo de um planejamento fatorial 2^3 , mas pode ser utilizada para exemplificar a construção de uma matriz genérica do experimento fatorial 2^k . Assim, na matriz de planejamento as colunas representam o conjunto de fatores investigados ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$) e as linhas representam os diferentes níveis ou combinações dos fatores [níveis codificados -1 (valor inferior) e +1 (valor superior)]. Assim:

- Para x_1 , a coluna será definida pela combinação dos níveis -1,+1, -1,+1, -1,+1, -1,+1,..., ou seja, o sinal dessa coluna alterna em grupos de $2^0=1$;
- Para x_2 , a coluna será definida pela combinação dos níveis -1, -1, +1, +1, -1,-1, +1,+1,..., ou seja, o sinal dessa coluna alterna em grupos de $2^1=2$;

- Para x_3 , a coluna será definida pela combinação dos níveis $-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, \dots$, ou seja, o sinal dessa coluna alterna em grupos de $2^2=4$;

- Para x_4 , o sinal alterna em grupos de $2^3=8$;

Esse procedimento será o mesmo para x_5, x_6, \dots, x_k . Para x_k , o sinal alterna em grupos de $2^{(k-1)}$ o mesmo que $2^{(k-1)} \times (-1)$, seguido de $2^{(k-1)} \times (+1)$.

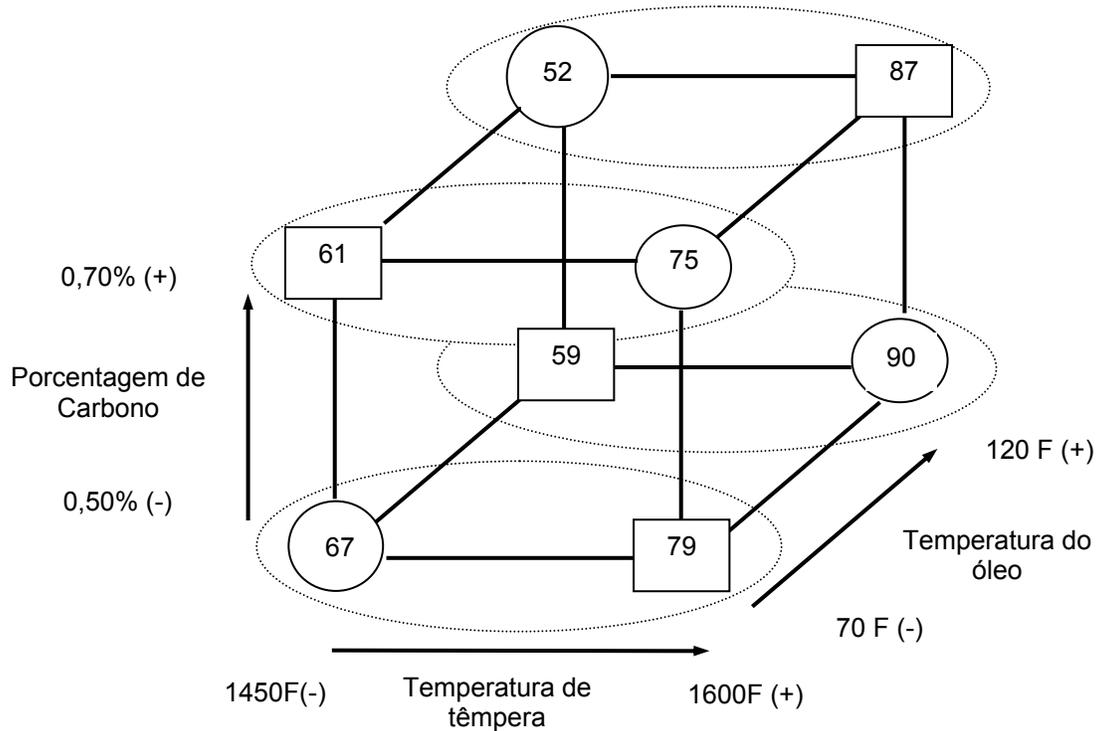


Figura 3.4 – Representaça3o geom6trica para um planejamento Fatorial com dois n6veis e tr6s fatores, para o exemplo de quebra de molas. (Box & Bisgaard; 1988).

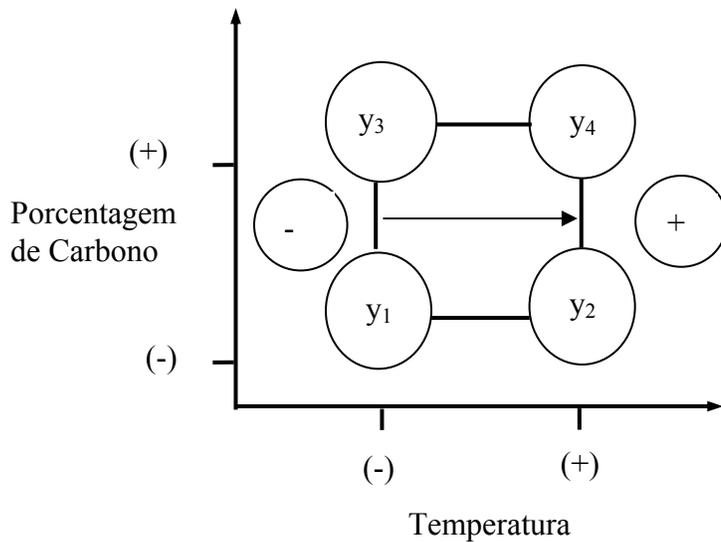


Figura 3.5 – Interpretação geométrica dos efeitos em um planejamento 2^2 , os efeitos principais são contrastes entre arestas opostas.

Para cada leitura nos efeitos principais ou de interação, um fator permanece constante. Por exemplo, no cubo experimental da Figura 3.4, podem ser feitas quatro comparações para analisar o efeito de se alterar somente a temperatura:

$$79-67 = 12; 75-61 = 14; 90-59 = 31; 87-52 = 35 \text{ e a Média} = + 23.$$

Pela comparação dos quatro pares correspondentes ao longo dos eixos superiores e inferiores, e dos quatro pares ao longo dos eixos anteriores e posteriores, pode-se fazer os mesmos cálculos para porcentagem de carbono e temperatura de óleo e obter um efeito médio do carbono de -5.0 e um efeito médio da temperatura de óleo de $+ 1.5$. As mesmas quantidades podem ser calculadas utilizando a média de quatro níveis na face esquerda, e subtraindo-os da média dos quatro níveis da face direita. Da mesma forma, o efeito do carbono pode ser calculado subtraindo-se a média dos quatro níveis da face inferior da média dos quatro níveis da face superior. Utilizando um planejamento fatorial pode-se testar 8 experimentos cada um com três fatores, reduzindo significativamente o número de experimentos sem perder a precisão dos

efeitos principais e de interações. Os efeitos principais correspondem à mudança da resposta média quando o nível de um fator é alterado de (-1) para (+1), mantendo os outros fatores constantes. Os efeitos de interação são obtidos algebricamente por:

$$Efeito = \frac{\bar{y}_{(+)} - \bar{y}_{(-)}}{2} \quad (3.4)$$

Assim, para o exemplo anteriormente citado tem-se os seguintes efeitos principais: temperatura (T) = +23; Porcentagem de Carbono (C) = -5.0 e Temperatura do óleo (O) = + 1.5.

Para representar e interpretar graficamente os efeitos principais e de interação é necessário definir duas propriedades: a) o sinal (\pm) indica a direção do efeito, isto é, se a resposta aumenta ou decresce com a variação do nível (-1) para (+1) e b) a grandeza indica a intensidade do efeito.

A representação gráfica para o efeito principal (E_i) é dada pela Figura 3.6. Esse gráfico linear representa a variação média das respostas em função da mudança no nível (-1, +1) de um fator (x_i), mantendo os outros níveis constantes.

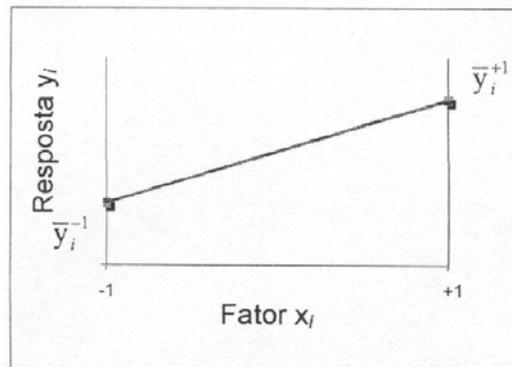


Figura 3.6 – Gráfico de efeitos principais (planejamento fatorial 2^k).

Os gráficos dos efeitos de interação descrevem a variação média de um fator em função dos níveis de outros fatores. Na Figura 3.7 (a) o efeito provocado pela mudança de nível do fator x_1 na resposta depende do nível do fator x_2 . Na Figura 3.7 (b) o efeito provocado pela mudança de nível do fator x_1 na resposta independe do nível do fator x_2 .

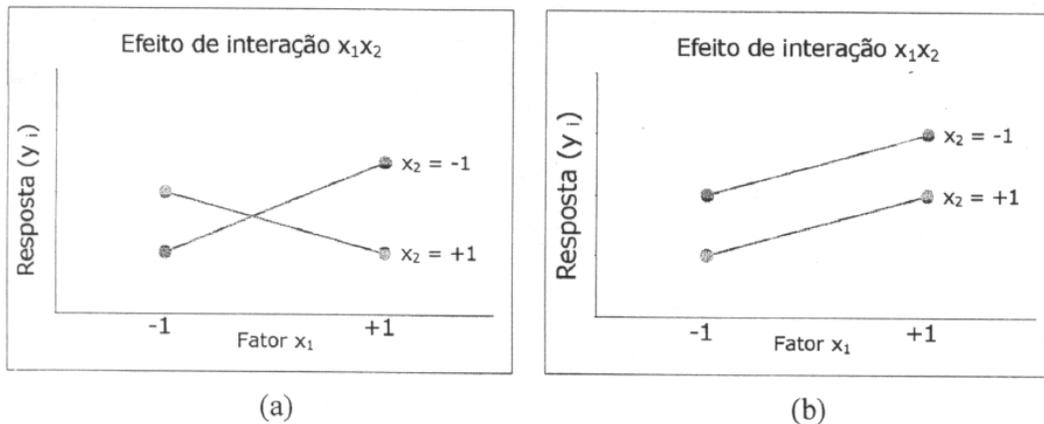


Figura 3.7 – Gráficos de efeitos de interação.

Voltando ao exemplo de Box & Bisgaard (1988), e analisando a temperatura ou o efeito da temperatura: +12; +14; +31 e +35, pode-se extrair mais informações sobre o cubo experimental. Na Figura 3.4 percebe-se que os dois primeiros números representam um contraste sobre a face posterior do cubo, na qual a temperatura do óleo é 70 [F], e os pares posteriores do cubo têm a temperatura do óleo a 120 [F]. Isto indica que, a temperatura do aço varia de acordo com a mudança da temperatura do óleo de 70 ou 120 [F], concluindo-se que a temperatura do aço e a temperatura do óleo interagem (T x O). Assim, o efeito da temperatura do aço considerando 120 [F] será: $(31+35)/2 = 33$. O efeito da temperatura do aço a 70 [F] será: $(12+14)/2 = 13$.

Assim, a diferença entre os dois efeitos principais é 20, e o efeito de interação será $20/2 = 10$. De forma similar os cálculos das interações T x C e O x C podem ser calculados e serão: T = +23; C = -5.0; O = 1.5; TC = 1.5; TO = 1.5 e OC = 10.0.

Portanto, o experimento com oito ensaios permite a estimativa dos três efeitos principais com precisão e a determinação das três interações entre os pares de fatores, que seria extremamente difícil e impreciso com a utilização da técnica com um fator de cada vez.

As equações utilizadas para calcular os efeitos principais e de interação utilizam todas as respostas observadas, nas quais cada efeito é metade das diferenças de duas médias. Metade das observações contribui para uma das médias, e a outra metade para o restante das mesmas. Para os planejamentos fatoriais de dois níveis, essa é uma característica importante. A interpretação geométrica para o planejamento fatorial com dois níveis pode ser visualizada por um cubo (Figura 3.8), cujos vértices representam os níveis das variáveis, e para o estudo dos efeitos utiliza um sistema cartesiano (plano para dois fatores), com um eixo para cada fator, colocando quatro ensaios em cada quadrado (Figura 3.5). Atribuindo sinais algébricos aos ensaios, de acordo com as equações de efeito principais e de interação, percebe-se que os efeitos principais são contrastes (diferenças médias) entre valores situados nas arestas opostas e perpendiculares ao eixo do fator correspondente. O efeito de interação, por sua vez, é o contraste entre duas diagonais, considerando positiva a diagonal que liga o ensaio (--) ao ensaio (++). Por isso, divide-se por 2, quando se calcula o efeito de interação, no exemplo, TC. Dessa forma, esse o termo efeito pode ser interpretado geometricamente como uma diferença média.

Para os planejamentos 2^k com mais de três fatores, ilustrado pelo exemplo do processo de quebra de molas, têm-se um cubo experimental. A Figura 3.8 representa os efeitos principais e suas interações. É fácil perceber que a visualização multidimensional se torna extremamente difícil aumentando o número de fatores.

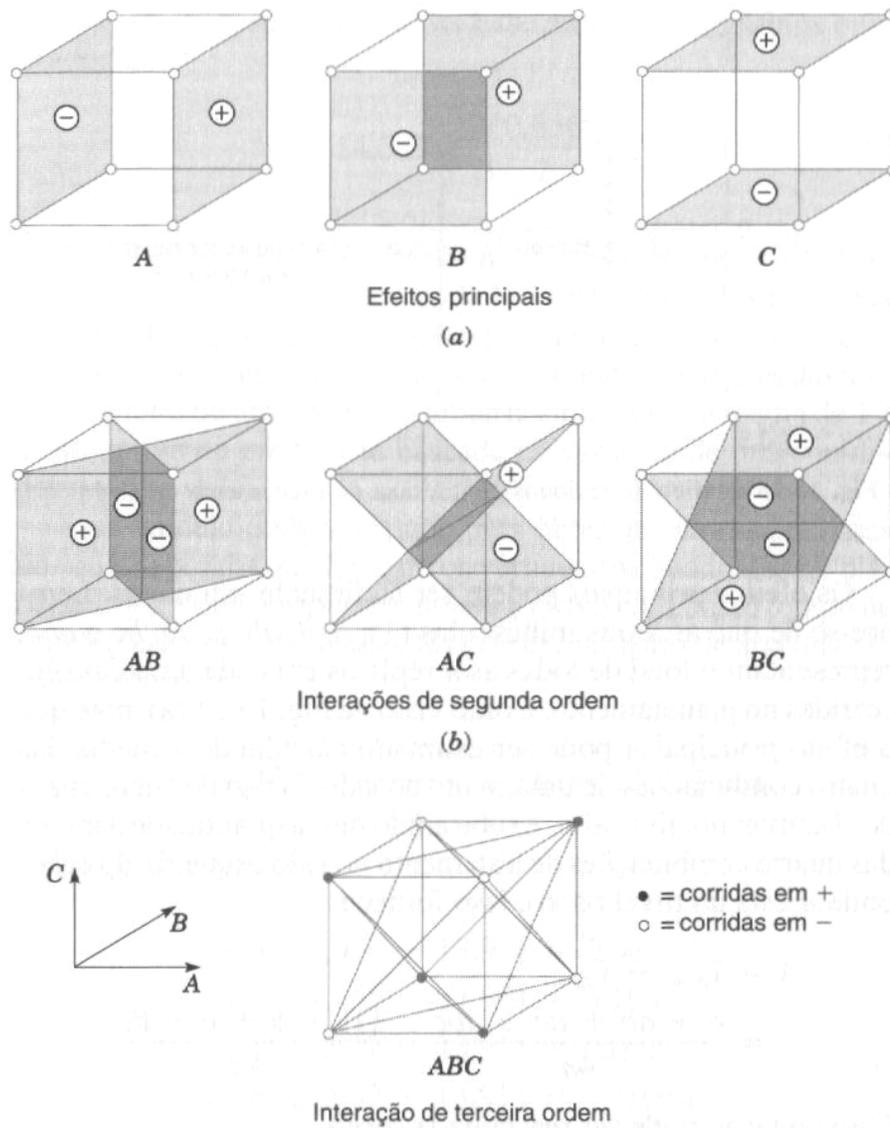


Figura 3.8 – Interpretação geométrica de contrastes correspondendo aos efeitos principais e às interações no planejamento 2^3 ; (a) Efeitos principais; (b) Interações de segunda ordem e c) Interação de terceira ordem.

Assim, a estimativa de qualquer efeito principal ou interação em um planejamento 2^k é determinada pela multiplicação das combinações dos tratamentos na primeira coluna da tabela pelos sinais na coluna de efeito principal ou da interação correspondente, pela adição do resultado de modo a produzir um contraste. Esse contraste dividido pela metade do número total de

experimentos fornece o efeito. Assim, a equação para qualquer planejamento 2^k com n réplicas, as estimativas dos efeitos são dadas por:

$$SS_{(Efeito)} = \frac{Contraste}{n2^{k-1}} \quad (3.5)$$

Sendo, n = número de réplicas; k = número de fatores assim a soma quadrática para qualquer efeito é dada por:

$$SQ = \frac{(Contraste)^2}{n2^k} \quad (3.6)$$

Para facilitar os cálculos, os fatores são substituídos por sinais algébricos que identificam o nível, como sendo superior ou inferior. Na tabela 3.4 (exemplo de quebra de molas), os sinais estão colocados em parênteses com o valor natural. A matriz abaixo somente ilustra a notação em planejamento experimental em variáveis naturais para variáveis codificadas.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 40 & A \\ 60 & A \\ 40 & B \\ 60 & B \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} - & - \\ + & - \\ - & + \\ + & + \end{bmatrix} \\ T & C & T & C \end{array}$$

Para se obter a tabela dos coeficientes de contrastes, acrescenta-se à matriz acima, uma coluna de sinais positivos, a primeira, e uma outra coluna cujos sinais são os produtos da interação TC e obtém-se uma matriz 4 x 4:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{bmatrix} & \text{ou} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \\ M & T & C & TC \end{array}$$

Nota-se que os efeitos principais são causados pela influência de fatores principais, ou seja, a resposta sofre uma alteração quando passa de seu nível inferior para o superior (ou vice-versa), independente da posição das demais. Os efeitos de interação são os que ocorrem quando duas ou mais fatores mudam de níveis simultaneamente, e com isso causam uma alteração da resposta. As interações podem ser obtidas utilizando a equação para combinações:

$$C_n^k = \frac{k!}{(k-n)!(n!)} \quad (3.7)$$

Sendo que, k = número de fatores e n = interações envolvidas na interação. Por exemplo, para se estimar os 16 efeitos de um planejamento fatorial completo 2^4 , ter-se-ia:

- 4 efeitos principais: efeitos 1,2,3 e 4;
- 6 efeitos com 2 interações: 12;13;14;23;24;34;
- 4 efeitos com 3 interações: 123; 124; 234; 431 e ;
- 1 efeito com 4 interações: 1233.

Porém, como será visto no item sobre planejamentos fracionários, dentro dessas 210 interações, há um grande número de interações possuem um efeito insignificante sobre o sistema e podem ser confundidos (superpostos) com outros efeitos [Barker, 1985].

Uma das propriedades da matriz experimental (planejamento experimental) é a sua ortogonalidade, que permite a análise independente de cada fator e de suas interações. Para isso a matriz apresenta as seguintes propriedades matemáticas: a) a soma do produto dos sinais em qualquer par de colunas é zero, ou seja, as colunas são ortogonais; b) o produto de qualquer campo de pares de colunas na tabela, por exemplo: $A \times B = AB$ e $AB \times ABC = A^2B^2C$, faz com que qualquer coluna multiplicada por ela mesma, junto com a propriedade comutativa, resulte em uma coluna identidade [Montgomery & Hunter, 2003]. Assim, o objetivo do pesquisador, em princípio, é obter uma função, ou pelo menos obter uma aproximação satisfatória para ela, para analisar o efeito dos fatores sobre a(s) resposta (s), permitindo a escolha da melhor combinação ou condições de funcionamento de um sistema.

Em termos de notação, há quatro tipos: os sinais (-) e (+) são utilizados para indicar os níveis baixo e alto dos fatores em estudo, sendo a forma japonesa dada pela notação (1) e (2) para indicar esses mesmo níveis ou uma forma alternativa de indicar por (0) e (1). A Tabela 3.5 apresenta as diferentes notações para um experimento fatorial 2^3 . No programa desenvolvido para a tese, foram utilizados os números arábicos para se identificar efeitos principais e de interação e para as variáveis (fatores) letras do alfabeto em Português.

Exp.	Notação geométrica			Notação alternativa			Notação japonesa			Notação clássica		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	-	-	-	0	0	0	1	1	1	1		
2	+	-	-	1	0	0	2	1	1	a		
3	-	+	-	0	1	0	1	2	1	b		
4	+	+	-	1	1	0	2	2	1	ab		
5	-	-	+	0	0	1	1	1	2	c		
6	+	-	+	1	0	1	2	1	2	ac		
7	-	+	+	0	1	1	1	2	2	bc		
8	+	+	+	1	1	1	2	2	2	abc		

Tabela 3.5 - Diferentes notações para um experimento fatorial 2^3 [Juran & Gryna, 1993].

A análise do resíduo para um planejamento 2^k , pode ser obtida através do ajuste de um modelo de regressão linear. Considerando os efeitos 1, 2 e 12, o modelo de regressão para obter os valores previstos será:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \quad (3.8)$$

no qual, x_1 representa o fator 1, x_2 representa o fator 2 e x_{12} representa a interação 12. Os coeficientes de regressão β_1 , β_2 e β_{12} são estimados como sendo a metade das estimativas dos efeitos correspondentes e β_0 é a média global.

Assim, para cada linha do experimento, pode calcular o resíduo dado por: $e = y - \hat{y}$. Para se verificar se o modelo é adequado, ou seja, se os erros se localizam em torno de uma reta, utiliza-se o gráfico de probabilidade normal x resíduos. Sendo que a probabilidade normal é dada pela equação:

$$P_i = \frac{100(i - 0.5)}{2^{k-1}} \quad (3.9)$$

sendo i = número do experimento correspondente e k número de fatores.

Esse gráfico auxilia nas decisões sobre a análise de dados, quando não há réplicas. Sem a utilização de réplicas, não há como se obter uma estimativa independente do erro experimental para julgar a importância dos efeitos principais e de interação. O gráfico de probabilidade normal também auxilia no julgamento da importância relativa dos efeitos que não têm influência significativa sobre o sistema em estudo. Esses efeitos se distribuem segundo uma distribuição normal centrada em 0 com desvio σ^2 .

3.3.2.2 Estimativa do erro experimental

Através da utilização réplicas pode-se estimar o erro experimental, e a partir do erro avaliar a significância estatística dos efeitos [Barros Neto, B.; Scarmínio, I.S; Bruns, R. E; 2001]. Para que isso ocorra é necessário que as repetições sejam autênticas, isto é, a realização dos experimentos de forma repetitiva devem ser feitos sob as mesmas condições do primeiro ensaio. Essa condição é importante, pois se as repetições forem feitas de forma imprópria, sem incluir a variabilidade do processo experimental, os efeitos podem não corresponder à realidade. Por isso, como citado no item 3.2.1 é necessário que os ensaios sejam feitos de forma aleatória. A variabilidade deve aparecer em toda a faixa de estudo do experimento, e não somente em uma determinada combinação de níveis. Assim, é uma condição importante quando o número de fatores aumenta. A partir das repetições feitas em uma dada combinação de níveis pode-se obter uma estimativa do erro experimental nesta combinação. O desvio- padrão pode ser representado pela equação:

$$s^2 = \frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 \dots + v_m s_m^2}{v_1 + v_2 + \dots + v_m} \quad (3.10)$$

ou

$$s(\text{desvio} - \text{padrão}) = \sqrt{\frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 \dots + v_m s_m^2}{v_1 + v_2 + \dots + v_m}} \quad (3.11)$$

Sendo, $v_i = n_i - 1$ é o número de graus de liberdade de s_i^2 , que por sua vez é a estimativa da variância do i -ésimo ensaio. Extraindo a raiz do valor obtido nessa equação, tem-se o erro experimental característico. Sem a utilização de réplicas não se pode estimar a variância (σ^2) diretamente dos pontos experimentais. Assumindo que haja interações com pelo menos 3 fatores pouco significativos (essas interações mediriam diferenças devido ao erro experimental), seriam utilizadas as interações de ordem mais alta, calculando os erros-padrão para os efeitos estimados. Achcar [1995] coloca que o erro padrão de um efeito pode ser obtido pela raiz quadrada do estimador da variância dado por:

$$EP(\text{Erro Padrão}) = \sqrt{\frac{(\sum \text{interações de ordem maior})^2}{n}} \quad (3.12)$$

Sendo n = número de pontos experimentais.

Alguns autores recomendam que, para garantir a aplicação efetiva da técnica de planejamentos fatoriais 2^k utilizando a equação (3.12), os ensaios devem ser realizados com no mínimo 4 fatores, pois com um número inferior de parâmetros torna-se difícil decidir sobre as estimativas que pertencem a uma distribuição com média igual a zero.

As principais vantagens da técnica fatorial 2^k são: através da análise dos experimentos pode se indicar as principais tendências e determinar uma melhor direção para as experimentações subsequentes [Montgomery & Hunter, 2003], além de ser possível quantificar o erro experimental. As limitações atribuídas ao planejamento fatorial 2^k incluem [Montgomery & Hunter, 2003]:

- com esse tipo de planejamento experimental, não é possível obter informações dos fatores de nível intermediário;

- em alguns experimentos não é possível realizar réplicas, pelo alto custo devido ao tamanho da matriz experimental, o que impede a estimativa de erros experimentais;
- em ambiente industrial e até acadêmico, pode ser restringido quando houver um grande número de parâmetros;
- o planejamento pode ter um experimento super dimensionado, uma vez que são considerados vários fatores para a realização dos testes.

Uma das alternativas para as limitações do planejamento fatorial completo é a construção de experimentos reduzidos, utilizando a técnica de confundimento ou superposição (*factorial experiments with design confounded*) ou de planejamento de experimentos fatoriais fracionários 2^{k-p} . A técnica de planejamentos fracionários acomoda um planejamento fatorial completo em blocos, no qual o tamanho do bloco é menor do que o número de tratamentos de uma réplica [Montgomery, 1991; Cochran & Cox, 1957].

3.3.3 Planejamento fatorial fracionário

Um avanço feito a partir dos planejamentos fatoriais, foi a introdução dos planejamentos fatoriais fracionários propostos por Finney em 1945. Esses planejamentos permitem ao pesquisador estudar os efeitos principais e interações de baixa ordem de vários fatores com um número menor de experimentos em relação ao planejamento fatorial completo, sacrificando por outro lado interações de alta ordem. Os planejamentos fracionários oferecem grande economia de tempo e recursos, quando em muitos casos, as interações de alta ordem possam ser desprezadas [Steinberg & Hunter, 1984]. Plackett & Burman (1946) descreveram uma classe muito utilizada de planejamentos altamente fracionários ortogonais, nos quais os efeitos principais de $n-1$ níveis são estimados apenas por n experimentos. Para um experimento inicial, utiliza-se um subconjunto ou fração do delineamento fatorial completo (um fatorial fracionário). A notação de um experimento fatorial fracionado é feita na forma de 2^{k-p} . Esta notação indica que 2^{-p} é o grau de fracionamento de um experimento fatorial completo 2^k , com número mínimo de ensaios igual a 2^{k-p} . Conforme o número de parâmetros (fatores) aumenta, o planejamento fatorial pode se tornar extremamente extenso, o que implica em um grande número de ensaios e aumento de custos. Por

exemplo, se fosse necessário avaliar a importância dos efeitos de 10 fatores de controle em dois níveis, haveria 1024 experimentações, o que geraria um grande número de interações, sendo que muitas delas poderiam ser desprezadas, pelo efeito mínimo ou nulo sobre ou entre os outros efeitos. Por exemplo, utilizando a combinação (3.7), se fosse necessário o estudo da interação entre quatro fatores, haveria a necessidade de 210 interações, obtidas pela combinação:

$$C_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!(4)!} = 210 \text{ interações com 4 fatores}$$

Assim sendo, sabe-se que o número de interações de ordem mais alta aumenta significativamente com o número de fatores. Porém, na maioria dos casos essas interações têm valores pequenos e são destituídas de qualquer importância prática [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. Como na expansão em série de uma função, os efeitos principais, ou de primeira ordem, tendem a ser maior que as interações de dois fatores, ou de segunda ordem, que por sua vez são mais importantes do que as interações de três fatores, e assim por diante. Essa condição se acentua com os fatores de ordem mais alta [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. Tendo em vista essa condição, havendo efeitos não significativos estes podem ser eventualmente retirados do planejamento. Pode-se considerar também o fato de que, quando o número de fatores aumenta, crescem as chances de que um ou mais desses fatores não afetem significativamente a resposta, seja por meio dos efeitos principais, seja devido aos efeitos de interação. O cuidado que se deve tomar é que em muitas situações não se conhece, a priori, a relação completa de todas as variáveis que afetam significativamente a resposta.

3.3.3.1 Frações meias de planejamentos fatoriais

Considerando um planejamento fatorial completo 2^4 , o número de experimentos que devem ser realizados envolve 16 combinações. Para reduzir o número de experimentos, por exemplo, para 8, deve-se utilizar na verdade metade do experimento 2^4 , ou seja, $2^4 \times \frac{1}{2} = 2^{4-1} = 8$ combinações. A notação 2^{4-1} indica que há quatro fatores, cada um com dois níveis, mas que foram realizada apenas oito ensaios. Assim, o fator (-1) no expoente do planejamento experimental (2^{4-1}) significa que o experimento foi dividido por dois, ou seja, meia fração do experimento fatorial completo. Se o expoente for (-2) significa que o experimento foi dividido

(fracionado) em quatro partes, por exemplo. No experimento 2^{4-1} , o experimento básico é um experimento 2^3 , com uma matriz experimental descrita a seguir:

Experimento	x_1	x_2	x_3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Tabela 3.6 – Matriz de planejamento para experimento 2^3 .

Entretanto, uma quarta variável, x_4 , precisa ser introduzida neste planejamento. Supondo que x_4 seja introduzida no experimento de forma que a coluna de sinais correspondente ao efeito 123 seja utilizada para definir se os níveis de x_4 para as oito combinações de teste. A tabela abaixo ilustra a estrutura desse tipo de planejamento, para um experimento fictício:

Experimento	1	2	3	4=123
1	-	-	-	-
2	+	-	-	+
3	-	+	-	+
4	+	+	-	-
5	-	-	+	+
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	+

Tabela 3.7– Matriz de planejamento para experimento fracionário 2^{4-1} .

A matriz do cálculo dos efeitos para um planejamento 2^{4-1} é dada pela Tabela 3.8:

Exp.	I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	123 4	Respost a
1	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	52
10	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	86
11	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	201
4	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+	113
13	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	122
6	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	66
7	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	185
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	286

Tabela 3.8 – Matriz de planejamento para experimento fracionário 2^{4-1} .

Para se obter os níveis tanto no planejamento fatorial completo, quanto no fracionário basta multiplicar duas a duas as colunas dos efeitos que interagem. Neste planejamento fatorial de meia fração, são feitos 8 experimentos, ao invés dos 16 experimentos que seriam necessários para o planejamento fatorial completo [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. Para exemplificar a construção de um planejamento fracionário, supõe-se que o pesquisador tenha escolhido ao acaso os experimentos descritos na tabela acima.

Calculando alguns efeitos principais, interações e a média para o planejamento fracionário, tem-se que: $\mathbf{m} = 138,87$; $l_1 = -2,25$; $l_2 = 113,75$; $l_3 = 51,75$; $l_4 = 69,75$; $l_{12} = 8,75$; $l_{13} = 23,75$; $l_{14} = 26,75$; $l_{23} = 26,75$; $l_{24} = 23,75$; $l_{34} = 8,75$.

Comparando os mesmos dados com os resultados obtidos para um planejamento fatorial completo: $\mathbf{m} = 143,31$; $l_1 = -2,38$; $l_2 = 109,38$; $l_3 = 53,38$; $l_4 = 67,13$; $l_{12} = -1,13$; $l_{13} = 2,88$; $l_{14} = 1,13$; $l_{23} = 25,63$; $l_{24} = 21,88$; $l_{34} = 9,8$; $l_{123} = 2,63$; $l_{124} = -2,63$; $l_{134} = 5,38$; $l_{234} = 0,13$ e $l_{1234} = -8,88$.

Em termos de nomenclatura, a notação l significa contraste (diferença entre médias), sendo um estimador da soma de valores médios dos efeitos superpostos. Comparando os valores mais significativos, percebe-se que as estimativas da média e dos efeitos principais apresentam valores próximos, o que significa, que se pode estimar de forma relativamente precisa a média e os efeitos principais utilizando apenas oito dos 16 experimentos. Os valores das interações mais significativas para o planejamento fracionário completo, estão próximos das grandezas calculadas no planejamento completo. Alguns fatores podem ser subestimados ou superestimados, como por

exemplo, os valores relacionados ao efeito principal 1 e suas interações, que estão superestimados. O motivo dessa condição é que com a redução dos ensaios para 8 ou metade do fatorial, é possível estimar oito grandezas independentes. Assim, após o cálculo das médias e dos quatro efeitos principais, restam apenas três graus de liberdade, que é insuficiente para fornecer estimativas independentes de todas as seis interações de dois fatores. Assim, os valores $l_{12}=l_{34}$, $l_{13}=l_{12}=l_{24}$ e $l_{14}=l_{23}$ são relativamente iguais. Neste caso, pode-se verificar que as colunas 12, 13 e 14 são idênticas às colunas 34, 23 e 23. Admitindo que as interações envolvendo o fator 1 não são importantes, uma vez que seu efeito é pouco importante, então pode-se concluir que $l_{12}\cong l_{13}\cong l_{14}\cong 0$. Esses novos valores, juntamente com $l_{23}=26,75$, $l_{24}=23,75$ e $l_{34}=8,75$, são estimativas boas das interações de dois fatores calculadas com as respostas dos 16 experimentos. Assim, as colunas $l_{12}=l_{34}$ são praticamente iguais, condição que se estende para outras colunas. Portanto, conclui-se que dentre os 16 experimentos, apenas oito colunas são únicas, ou seja, a combinação linear para o cálculo do efeito da variável um é o mesmo para o cálculo do efeito da interação 233. Da mesma forma, pode-se obter outras relações entre as colunas de sinais para o planejamento fatorial completo:

$$1 = 234; 2 = 134; 3 = 124; 4 = 123; 12 = 34; 13 = 24; 23 = 14; \text{Média (I)} = 1233.$$

Assim, a construção de planejamento fracionário 2^{4-1} é um sub-conjunto do planejamento fatorial 2^3 . Barros; Scarmínio; Bruns (2001) sugerem, a seguinte construção:

- É construído um planejamento fatorial básico 2^3 para os fatores 1, 2 e 3;
- Para o fator 4 atribuí-se o produto das colunas 1, 2 e 3.

O que se percebe é que com essa construção, os contrastes l_{123} e l_4 se tornam idênticos, pois as colunas possuem o mesmo sinal, semelhante à técnica de blocagem, que é utilizada quando não há um mesmo tipo de material ou medidas suficientes para se concluir o experimento, e como consequência se introduz mais uma possível fonte de variação. Mas, neste caso, pode-se isolar os efeitos que, apesar de influenciar a resposta, não são significantes. Essas condições de contrastes idênticas, se repetirão nas interações de 2 fatores e também interações de ordem mais alta, o que leva a concluir que há outras identidades entre contrastes. Uma opção para se obter as relações

que faltam seria fazer todos os produtos de colunas, o que não é a forma mais adequada para se obter esses contrastes. Através de duas propriedades da álgebra, pode se estabelecer relações entre os contrastes. Assim:

- Fator 4 = 123 (relação definidora do fracionamento);

- Para se obter as relações entre os contrastes são consideradas que: a multiplicação de uma coluna por ela mesma, isto é, a elevação de todos os seus elementos ao quadrado, sempre produz uma coluna contendo apenas sinais positivos. Por sua vez, essa coluna quando aplicada sobre outra qualquer, deixa-a inalterada, ou seja, tem-se o elemento identidade (I).

Assim, $11=22=33=I$;

A segunda propriedade apenas reconhece que a multiplicação das colunas é comutativa e associativa, assim:

$$123=(1)(23)=(23)(1)=(12)(3)=321=(2)(31)=(23)(1)=...$$

Dessa forma, para se obter as relações entre os vários contrastes, multiplica-se a expressão definidora do fracionamento: 4 = 123 por algum produto de colunas e aplicam-se as propriedades descritas acima. Para se identificar à equivalência dos contrastes da fração escolhida em termos de efeitos do fatorial, é necessário que o contraste aparece em um dos lados da relação definidora. Por exemplo, para o contraste l_2 o procedimento seria, partindo da relação geradora:

$$(13)(4) = (13) (123) = (11)(33)(2) = (I)(I)(2), \text{ ou seja,}$$

$$4 = 123 \tag{3.13}$$

Assim, $l_{134} = l_2$, ou seja, na terminologia estatística, a utilização da fração meia confunde o efeito principal 2 com a interação 133. Assim, o valor do contraste no planejamento fracionário, l_2 ou (l_{134}) é na verdade a estimativa da soma dos dois efeitos que corresponde ao efeito l_2 em um planejamento fatorial. A notação utilizada que indica que o contraste calculado confunde os dois efeitos e estima sua soma é dada por: $l_2 \rightarrow 2+134$

Barros; Scarmínio; Bruns (2001) apresentam as relações entre os contrastes calculados na fração meia 2^{4-1} e os efeitos obtidos com o planejamento completo 2^4 (confundimento ou superposição), apresentados na tabela 3.9. A meia fração foi obtida através da igualdade $4=123$, a qual formalmente equivale a $I=1234$, que é obtida multiplicando-se os dois lados da equação por (4). Essa forma, na qual o elemento identidade aparece isolado, é chamada de geratriz ou relação geradora do fatorial fracionário, sendo suficiente para definir toda a fração meia com todos os sinais da matriz experimental. Portanto, cada possível fração de um planejamento completo sempre é definida por um certo número de relações definidoras. Os oito ensaios restantes do planejamento fatorial, que não foram utilizados nos cálculos do fatorial fracionário, também constituem uma metade (meia fração) do planejamento completo. Na verdade os sinais do fator 4 nesses ensaios são contrários aos sinais do produto 123, ou seja: $4=-123$ ou a geratriz é $I = -1233$. Achcar (1995) coloca que contrastes são estimativas entre a diferença de dois efeitos do planejamento completo, ou seja, $l_2^* \rightarrow 2-133$. As relações entre os novos contrastes (indicados pelo asterisco) e os efeitos do planejamento completo são as mesmas da segunda coluna da tabela a seguir, porém com os sinais negativos. Essa segunda fração também poderia ser utilizada para estimar os efeitos do fatorial. Os resultados conduziram às mesmas conclusões, considerando os sinais de forma apropriada: $l_2^* \rightarrow 103,00$, estando muito próximo ao efeito principal 2 obtido no planejamento fatorial completo: $E_2 = 109,38$.

Relações entre as colunas de sinais	Contrastes da meia fração 2^{4-1} , considerando efeitos do fatorial 2^4
1=234	$l_1=l_{234} \rightarrow 1+234$
2=134	$l_2=l_{134} \rightarrow 2+134$
3=124	$l_3=l_{124} \rightarrow 3+124$
4=123	$l_4=l_{123} \rightarrow 4+123$
12=34	$l_{12}=l_{34} \rightarrow 12+34$
13=24	$l_{13}=l_{24} \rightarrow 13+24$
14=23	$l_{14}=l_{23} \rightarrow 14+23$
$I=1234$	$l_I \rightarrow \text{Média} + 1/2(1234)$

Tabela 3.9 – Relações entre os contrastes calculados na fração meia 2^{4-1} e os efeitos obtidos com o planejamento completo 2^3 .

3.3.3.2 Relações geradoras de planejamentos fatoriais fracionários

A relação geradora suficiente para se definir toda a meia fração, pois permite obter todos os sinais da matriz de planejamento. Cada possível fração de um planejamento completo é definida por um certo número de relações geradoras. A estrutura de superposição de um efeito principal ou de interação em um experimento é determinada pela multiplicação do efeito com a relação geradora, como já visto no item anterior. Não existe superposição entre efeitos principais, mas há nas interações.

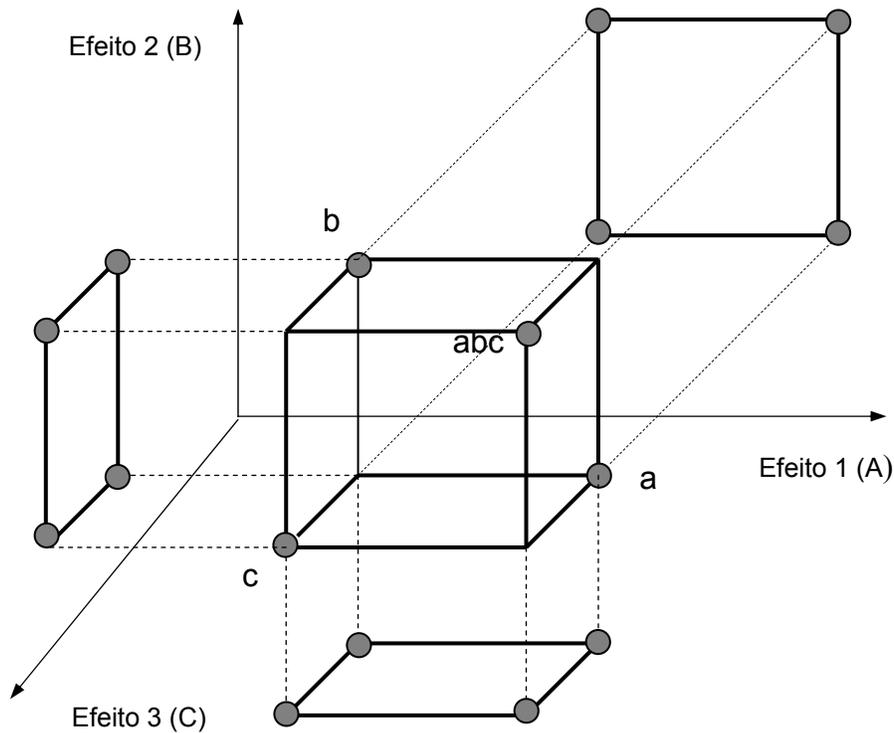


Figura 3.9 - Projeção de um planejamento 2^{3-1} em três planejamentos 2^2 .

Se um ou mais fatores de uma meia fração de um planejamento fatorial básico 2^k puderem ser descartados, o planejamento se projetará em um planejamento fatorial completo [Montgomery & Runger, 2003]. Essa propriedade de projeção, ilustrada pela Figura 3.9 é altamente útil na

seleção de fatores, permitindo que fatores com influência pouco significativa sejam eliminados, resultando em um experimento focalizado nos fatores de maior influência. Dessa forma, um aspecto importante que deve ser considerado nos experimentos fatoriais fracionados é a resolução que se utiliza. Segundo Montgomery (1991), a resolução de um planejamento fatorial fracionado está relacionada ao padrão de superposição entre os efeitos dos fatores. Segundo (Montgomery & Runger, 2003) o conceito de resolução é uma maneira útil de catalogar planejamentos fatoriais fracionários de acordo com os padrões de associação que eles produzem. O autor recomenda que nos experimentos deve-se utilizar a maior resolução possível, pois os efeitos de ordem mais alta podem ser ignorados. Montgomery (1991), Steinberg & Hunter (1984), Achar (1995) sugerem as resoluções III, IV e V como as mais importantes para experimentos industriais, para seleção (screening) de fatores [Montgomery & Runger, 2003].

Resolução III: superpõe efeitos principais com interações de 2 fatores.

$$2_{III}^{3-1} \text{ Representação: } I = \pm 123.$$

Resolução IV: não confunde efeitos principais com efeitos de interação com 2 fatores, mas confunde efeitos de 2 fatores com 2 fatores.

$$\text{Representação: } 2_{IV}^{4-1} \text{ } I = \pm 1233.$$

Resolução V: não confunde efeitos principais com interações de 2 fatores, mas superpõe interações de 2 fatores com 3 fatores.

$$2_{V}^{5-1} \text{ Representação: } I = \pm 12345.$$

As resoluções acima podem ser obtidas não somente de meia fração (1/2), mas de um quarto de fração (1/4) ou (1/8), que incluem mais de uma relação geradora. Por exemplo,

2_{III}^{7-4} supondo um planejamento do tipo tem-se as seguintes relações:
 $4=12$ ou $I=124$; $5=13$ ou $I=135$; $6=23$ ou $I=236$; $7=123$ ou $I=1237$.

Partindo dos geradores, obtém-se todas as combinações de 2, 3 e 4 interações e os efeitos principais. O produto distributivo de cada par das relações geradoras: (124) x (135) x (236) x (1237), fornece:

$I = 1^2 2345 = 12^2 346 = 1^2 2^2 347 = 123^2 56 = 1^2 23^2 57 = 12^2 3^2 67$, ou seja:

$$I = 2345 = 1346 = 347 = 1256 = 257 = 167$$

Da mesma forma o produto de cada terno: (124) x (135) x (236) x (1237), fornece:

$I = 1^2 2^2 3^2 456 = 1^2 12^2 3^2 457 = 1^2 2^2 23^2 467 = 1^2 2^2 3^2 3567$, ou seja,

$$I = 456 = 1457 = 2467 = 3567$$

Por fim, multiplicando as relações definidoras 2_{III}^{7-4} simultaneamente, tem-se: $I = 1234567$. Portanto, a partir das relações definidoras para o planejamento tem-se o seguinte padrão de superposição: $I = 124 = 135 = 236 = 1237 = 2345 = 1346 = 347 = 1256 = 257 = 167 = 456 = 1457 = 2467 = 3567 = 1234567$.

A superposição para as colunas da matriz experimental será:

Para duas interações, que são mais significativas, tem-se:

$I(=1) = 24 = 35 = 1236 = 237 = 12345 = 346 = 1347 = 256 = 1257 = 67 = 1456 = 457 = 12467 = 13567 = 234567$, ou seja:

$$I_1 \rightarrow 1 + 24 + 35 + 67$$

$I(=2) = 14 = 1235 = 36 = 137 = 345 = 12346 = 2347 = 156 = 57 = 1267 = 2456 = 12457 = 467 = 23567 = 134567$, ou seja:

$$I_2 \rightarrow 2 + 14 + 36 + 57$$

$I(=3) = 124 = 15 = 26 = 127 = 245 = 146 = 47 = 12356 = 2357 = 1367 = 3456 = 13457 = 23467 = 567 = 124567$, ou seja:

$$I_4 \rightarrow 3 + 15 + 26 + 47$$

$I(=4) = 12 = 1345 = 2346 = 12347 = 235 = 136 = 37 = 12456 = 2457 = 1467 = 56 = 157 = 267 = 34567 = 123567$, ou seja:

$$I_4 \rightarrow 4 + 12 + 37 + 56$$

Observa-se que, como comentado anteriormente, o número elevado ao quadrado é o elemento identidade ($I = 1$). Da mesma forma feita nos planejamentos fracionários com meia

fração, pode-se utilizar as relações geradoras com sinal negativo (fração alternativa): $4 = -12$; $5 = -13$; $6 = -23$ e $7 = -123$.

3.3.4 Planejamentos saturados

Os planejamentos saturados foram propostos por Plackett & Burman (1946). Esses planejamentos permitem estimar todos $k = n-1$ efeitos principais, sendo n o número de experimentos com variância mínima. Os planejamentos Plackett-Burman têm como característica em comum com os outros planejamentos fracionários, que as colunas são todas ortogonais. Por exemplo: os $n/2$ sinais positivos de qualquer coluna sempre correspondem, nas demais colunas, a $n/4$ sinais positivos e $n/4$ sinais negativos. Esse tipo de planejamento permite que os efeitos principais dos fatores sejam determinados isoladamente, admitindo-se que alguns efeitos de interação sejam desprezíveis [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001]. Em um planejamento saturado com n ensaios pode-se estudar até $n-1$ fatores, porém a literatura aconselha que um número menor seja estudado, para que as colunas não utilizadas façam o papel de variáveis inertes e possam ser utilizadas para estimar o erro associado aos contrastes. No caso dos planejamentos de Plackett-Burman, recomenda-se que o número de fatores reais não ultrapasse $n-3$. Por exemplo, em um planejamento com $n = 12$, pode haver 11 variáveis a serem estudadas, porém as três últimas colunas (9, 10 e 11) ou os últimos três graus de liberdade, devem ser utilizado para estimar os erros nos valores calculados para os efeitos principais. Uma desvantagem desse planejamento é a complexidade na determinação das relações entre os contrastes, tornado difícil escolher os ensaios adicionais necessários para desconfundir (separar) os efeitos.

3.4 Metodologia de Taguchi – Projeto Robusto

Em 1949, com o término da Segunda Guerra Mundial, a derrota do Japão fez com que houvesse um grande esforço para a reconstrução do país. Nesta época, os japoneses contavam com uma frente de trabalho significativa, materiais brutos de boa qualidade, equipamentos de manufatura de alta qualidade e engenheiros habilidosos. O desafio foi então a produção de produtos com alta qualidade e sua constante melhoria. A tarefa de desenvolver uma metodologia

que contemplasse essas limitações foi proposta por Genichi Taguchi, diretor de desenvolvimento de certos produtos de telecomunicações da *Electrical Communications Laboratory* (ECL) of *Nippon Telephone and Telegraph Company* (NTT). As pesquisas realizadas por Taguchi entre os anos 50 e 60 conduziram ao conceito de projeto robusto e validaram sua filosofia básica para aplicações no desenvolvimento de produtos. Em 1980, Taguchi fez uma visita técnica nos Estados Unidos para auxiliar a indústria Americana de Telecomunicações para a aplicação de seus métodos, sendo que a primeira associação foi com a *AT&T Bell Laboratories* em New Jersey. Os métodos propostos por Taguchi foram adotados na AT&T e, no início da década de 80, outras empresas também adotaram seus métodos, como a *Ford Motor Company* e a *Xerox Corporation*. Taguchi apoiou grande parte de seu método, nos trabalhos de Fisher e Yates dentro do escopo da engenharia de produto e de qualidade.

As aplicações iniciais de planejamentos experimentais ocorreram na área da engenharia agrícola e biologia. Ainda na década de 30, o método foi aplicado na indústria têxtil e de lã na Inglaterra. Após a Segunda Guerra Mundial, os métodos de planejamentos experimentais foram introduzidos na indústria química e processos industriais nos Estados Unidos e Europa Oriental. Dessa forma, a teoria de planejamentos experimentais estendeu-se para o desenvolvimento de processos e projetos, e aplicados com sucesso na indústria eletrônica e de semicondutores [Montgomery, 1991]. A utilização de conceitos estatísticos aplicados à engenharia mecânica e o termo Projeto Robusto, nos quais se utilizam os conhecimentos adquiridos pelos engenheiros na área experimental, fez com que a metodologia de Taguchi se tornasse conhecida na indústria.

Em termos de planejamento experimental, Taguchi procurou reduzir significativamente o número de experimentos, através da aplicação de matrizes ortogonais (arranjos ortogonais) e tabelas triangulares. A metodologia é complementada pelos conceitos da função-perda, projeto do sistema, dos parâmetros e das tolerâncias e pela razão Sinal-Ruído [Phadke, 1989]. Taguchi trata a qualidade sob dois aspectos: na Engenharia de Projeto (Off-Line) a perda de qualidade aumenta com os desvios dos valores de parâmetros de projeto em relação ao valor alvo (nominal), que é o ponto máximo de desempenho. Com essa concepção, a variabilidade relaciona-se com o processo de fabricação e com a utilização do produto. [Carpinetti, 2003]. Taguchi argumenta que a perda é minimizada quando o parâmetro da qualidade se encontra em seu valor nominal.

A função perda de qualidade é quantificada como perda para a sociedade, decorrente de sua utilização, sejam por variações funcionais e diversos efeitos prejudiciais. Na engenharia de manufatura (*On-Line Engineering*) os esforços devem se voltar para a realização da melhoria da qualidade através do projeto do processo da manufatura, que assim como na engenharia de projeto, afasta-se do Controle Estatístico de Processo, que é utilizado para a correção de falhas tanto em projeto, quanto em processo. A qualidade é projetada, não manufaturada, no produto. A ênfase é dada, portanto, ao termo qualidade na engenharia de projeto (*Off-Line Engineering*) que são atividades de controle de qualidade e de custos durante a concepção e estudo do projeto do produto, melhorando sua confiabilidade e fabricação. Segundo Kackar (1984), para se obter produtos com alta qualidade devem ser utilizadas ferramentas e técnicas de controle de qualidade off-line, ou durante a concepção do projeto, como: revisão de projetos, análise de sensibilidade, testes com protótipos, testes de ensaios de vida acelerados e estudos em confiabilidade. Mesmo a indústria, necessita de métodos científicos para identificar especificações do processo do projeto e do produto, que reduzam tanto as variações de desempenho, quanto os custos de manufatura, que incluem os valores nominais e as tolerâncias. Algumas definições são necessárias para se entender a metodologia proposta por Genichi Taguchi:

Função Perda: é o cerne da filosofia de Taguchi, a Função Perda de Qualidade. Uma vez que o parâmetro de projeto se encontra em seu valor nominal, qualquer desvio é visto como uma perda da qualidade. É utilizada uma função quadrática, como ilustrada na Figura 3.10.

A função perda de qualidade é definida como a expectativa do consumidor em adquirir produtos, que sejam mais duradouros sob vários aspectos e a expectativa do fabricante em manufaturar produtos com um custo menor [Ross, 1991]. Minimizar a perda para a sociedade é a estratégia que incentiva produtos mais uniformes e custos reduzidos na produção e no consumo. Phadke (1989), define que o nível de qualidade de um produto pode sofrer perdas incorridas pela sociedade, devido à falha do produto em seu desempenho funcional e, também devido aos efeitos prejudiciais do produto, além de custos operacionais inerentes. Quantificar esta perda é difícil, pois o mesmo produto pode ser utilizado por diferentes consumidores, para diferentes aplicações, sob diferentes condições ambientais. Como as respostas dos produtos sofrem desvios em relação

ao valor nominal, a qualidade é reduzida progressivamente [Phadke, 1989]. Taguchi propõe três funções de perda da qualidade, dependentes do valor meta para o parâmetro de qualidade: valor nominal, valor mínimo e valor máximo.

Função Perda da Qualidade para o valor nominal: essa função é matematicamente descrita por:

$$L(y) = k(y - m)^2 \quad (3.14)$$

sendo, m o valor nominal, y a variável de interesse e $k = \frac{A}{\Delta^2}$, sendo Δ metade da faixa de tolerância (limitação funcional) e A o custo para se reparar a limitação funcional do produto ou descartá-lo.

Função Perda da Qualidade para o valor mínimo (quanto menor melhor) dado pela expressão:

$$L(y) = ky^2 \quad (3.15)$$

Função Perda da Qualidade para o valor máximo (quanto maior melhor) dado pela expressão:

$$L(y) = k(1/y)^2 \quad (3.16)$$

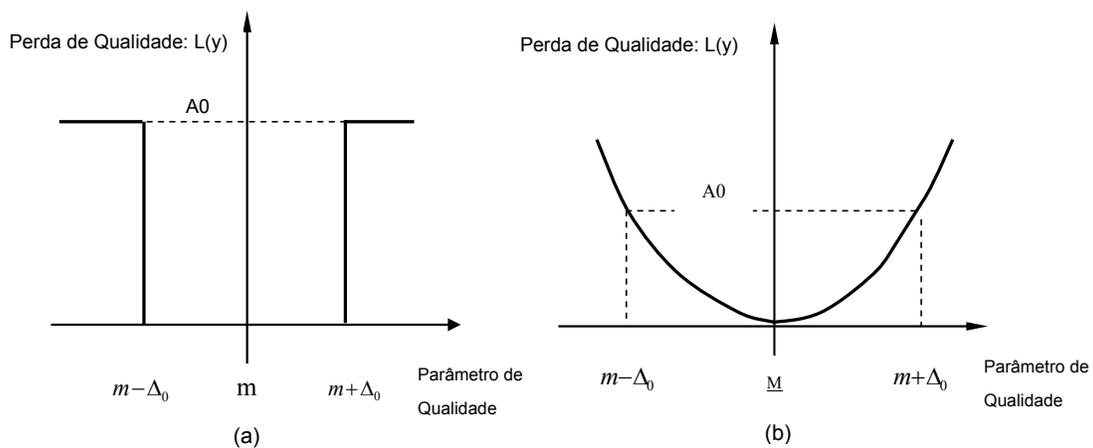


Figura 3.10 - Perda de qualidade em função do afastamento do valor nominal: visão tradicional (a) e a visão de Taguchi (b) segundo Taguchi; Elsayed e Hsinag (1990).

3.4.1 Qualidade pelo Projeto

Cada resposta do produto é observada com o propósito de avaliar a perda de qualidade ou otimizar o projeto do produto, denominando-se características de qualidade. Assim, a abordagem de Taguchi, propõe a utilização de planejamento experimental e análise de experimentos para: projetar produtos robustos (insensíveis ou menos sensíveis) a variações das condições de uso (ruídos externos); projetar produtos robustos a variações dos componentes quando em utilização (ruídos internos); e minimizar a variabilidade da resposta de interesse em torno do valor meta (Nominal é melhor; Menor Melhor e Maior Melhor), dependente da variabilidade de outros parâmetros de projeto (ruídos variacionais). Para isso, Taguchi refere-se às atividades da engenharia de projeto, tendo em vista a complexidade atual para a concepção e melhoria de produtos em três etapas: (1) Projeto do sistema global; (2) Projeto dos subsistemas e; (3) Projeto dos componentes [Phadke, 1989]. Sendo que para cada etapa podem ser aplicados os três estágios de desenvolvimento de produtos e processos propostos por Taguchi:

a) Projeto do Sistema: nesta etapa ocorre um processo de aplicação de conhecimentos científicos e tecnológicos para se produzir uma base funcional para o protótipo do projeto (sistema, produto ou processo). O modelo ou protótipo define o conjunto inicial das características do projeto;

b) Projeto dos parâmetros: esta etapa é uma investigação conduzida para identificar conjuntos que minimizam a variação de desempenho. Um sistema ou produto pode desempenhar suas funções projetadas para diferentes conjuntos de características de qualidade. Entretanto, alterações ou mudanças nas características de desempenho podem variar com a mudança desses conjuntos, que podem aumentar ou não os custos de manufatura e do ciclo de vida do sistema. É nesta etapa que são aplicadas técnicas de planejamento experimental e análise de experimentos para se determinar os valores nominais dos parâmetros do projeto, minimizando a perda da qualidade decorrente dos fatores de ruído;

c) Projeto das tolerâncias: depois de selecionar na fase anterior os valores nominais dos parâmetros críticos do projeto, deve-se definir a precisão necessária para esses valores, uma vez que durante a manufatura sempre existe um grau de variabilidade inerente aos processos de

fabricação. As técnicas de planejamento podem ser novamente utilizadas, para evidenciar os componentes críticos do produto, para os quais deve ser imposta restrições adicionais à variabilidade. Além disso, pode-se identificar o grau de interação entre os parâmetros, para se determinar se há a necessidade de uma tolerância mais fechada ou não. Dessa forma, por projeto das tolerâncias toma-se o conjunto de tolerâncias do projeto para a manufatura. Percebe-se que cumprindo essas etapas há a idéia de engenharia simultânea, tanto para o projeto, quanto para a manufatura.

3.4.2 Projeto dos Parâmetros

Na etapa do projeto dos parâmetros, o objetivo é identificar os valores dos parâmetros de projeto do sistema que minimizam as perdas. Para isso, são utilizadas algumas técnicas modificadas de delineamento de experimentos. As variáveis que afetam o desempenho podem ser de quatro tipos:

a) Fatores de Sinal (Entradas): são os fatores que podem ser ajustados pelo pesquisador, para alterar a resposta para um nível requerido. Em sistemas dinâmicos, a resposta depende da grandeza do sinal de entrada. Por exemplo, no sistema de direção de um carro, o raio de giro do motor é a resposta do sistema de direção para um fator de sinal (entrada) que é o ângulo de giro da direção;

b) Fatores de Controle ou parâmetros de projeto: são as características do produto cujos valores nominais são especificados na fase de projeto e são aqueles que apresentam melhor desempenho. No exemplo anterior do sistema de direção de um carro, são representados pelas características dimensionais e geométricas dos componentes e materiais;

c) Fatores de Ruído: são os fatores que não podem ser controlados pelo engenheiro ou pesquisador, e que em muitos casos também apresentam um alto custo para serem controlados [Phadke, 1989]. São as variáveis que causam os desvios dos valores nominais. Esses fatores podem ser divididos da seguinte forma: (a) Ruídos externos: decorrentes das condições

ambientais e fatores de carga; (b) Ruídos variacionais ou de unidade para unidade: decorrentes da variabilidade do processo de manufatura ou de não uniformidade do material; e (c) Ruídos internos: decorrentes da deterioração e desgaste [Carpinetti, 2003]. No sistema de direção exemplificado, os fatores de ruído podem ser: vibrações excessivas (ruído externo), desgaste mecânico, deterioração do lubrificante (ruídos internos), e erros dimensionais e geométricos (ruídos variacionais).

d) Fatores de ajuste: é uma variação do fator de controle, o qual pode ser ajustado para atingir uma relação desejada entre o fator de sinal e a resposta. No exemplo dado, seria a relação de engrenamento do sistema mecânico.

3.4.3 Razão Sinal-Ruído (S/N)

Em termos de construção da matriz experimental, Taguchi utiliza arranjos ortogonais. Como resultado, pode-se estudar um grande número de variáveis com poucos experimentos, o que em termos econômicos e de tempo oferecem uma vantagem significativa. A utilização da relação S/N enfatiza a relação entre variabilidade, qualidade e importância em se reduzir à variabilidade total, como forma de se reduzirem as perdas da qualidade. Taguchi sugere que a razão Sinal-Ruído (S/N) seja calculada para cada condição de teste da matriz interna (parâmetros de projeto), para se identificar os níveis de ruído para que a variabilidade destes sejam mínimos. Assim, maximizar a razão S/N é considerado equivalente a minimizar a perda de qualidade. Taguchi define três casos:

a) Razão S/N para a condição Valor nominal menor é Melhor (S/N_s):

$$S/N = -10 \log_{10} \frac{\sum y_i^2}{n} \quad (3.17)$$

Neste caso, minimizar a perda média da qualidade é equivalente a minimizar a resposta $\frac{\sum y_i^2}{n}$ média quadrática, e minimizá-la por sua vez, equivale a maximizar a razão S/N.

b) Razão S/N para a condição Valor maior é Melhor (S/N_i):

$$S / N = -10 \log_{10} \frac{\sum 1/y_i^2}{n} \quad (3.18)$$

Neste caso, minimizar a perda média equivale a minimizar, que por sua vez, equivale a maximizar a razão S/N.

c) Razão S/N para a condição Valor nominal é Melhor (S/N_i):

$$S / N = -10 \log_{10} \frac{\bar{y}_i}{s^2} \quad (3.19), \text{ sendo}$$

Sendo para os três casos, a média e desvio-padrão calculados por:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \quad (3.20)$$

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1} \quad (3.21)$$

Neste caso, maximizar a razão S/N equivale a minimizar a razão entre a resposta média e a variância. Deve-se observar que a condição de teste para a razão S/N máxima pode não ser aquela de menor variabilidade. Dessa forma, Taguchi argumenta que a utilização da razão S/N, em conjunto com um procedimento de otimização em dois estágios, conduz a uma combinação de fatores em que se tem a média no valor esperado e a variabilidade minimizada [Carpinetti, 2003]. O procedimento de otimização consiste em dois estágios:

a) Identificação do conjunto de fatores que afetam a razão S/N (fatores de controle) e ajuste dos mesmos para níveis que maximizem a razão S/N;

b) Identificação do conjunto de fatores que afetam a média, mas não influenciam a razão S/N (fatores de sinal) e ajuste dos mesmos de forma que a resposta média esteja em torno do ideal (maior, menor e nominal).

3.4.4 Arranjos Ortogonais

Para a realização de experimentos envolvendo fatores de controle e fatores de ruído, Taguchi recomenda a utilização de arranjos ortogonais, com dois níveis para a construção do projeto da matriz. Arranjos ortogonais são generalizações do planejamento Quadrado Greco-Latino, cujo planejamento pode incluir duas ou mais variáveis blocos, devido a fontes de variabilidade conhecidas (esse planejamento foi apresentado no início deste capítulo). Segundo Kackar (1985) há quatro componentes básicas para o planejamento de uma matriz experimental: matriz de planejamento – que inclui o número de testes e os parâmetros de projeto ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$); fatores de ruído (w_1, w_2, \dots, w_3), a característica de desempenho ou resposta do sistema (Y_1, \dots, Y_n) e o desempenho estatístico – $[Z(\theta)]_1 \dots [Z(\theta)]_k$ dado pela média, variância e razão S/N. A resposta do sistema em estudo é obtida por $Y = f(\theta, w)$. A Figura 3.11 mostra a construção proposta por Taguchi [Phadke, 1989; Kackar, 1985]. Carpinetti (2003) denomina a matriz de parâmetros de projeto como uma matriz, externa e dos fatores de ruído, como uma matriz interna, sendo que a combinação dessas matrizes fornece a razão S/N. Em Phadke (1989) há a descrição dos arranjos ortogonais recomendados por Taguchi. Para exemplificar esses arranjos, por exemplo, um arranjo L_4 equivalente a um planejamento fracionário 2^{3-1} , com quatro experimentos, um planejamento fatorial básico 2^2 e o terceiro efeito (3) superposto (confundido, segundo alguns autores). A Tabela 3.10 ilustra esse tipo de arranjo ortogonal, nesta notação (japonesa) o nível 1 equivale a (-1), o nível 2 a (+1) e um nível 3 à (0).

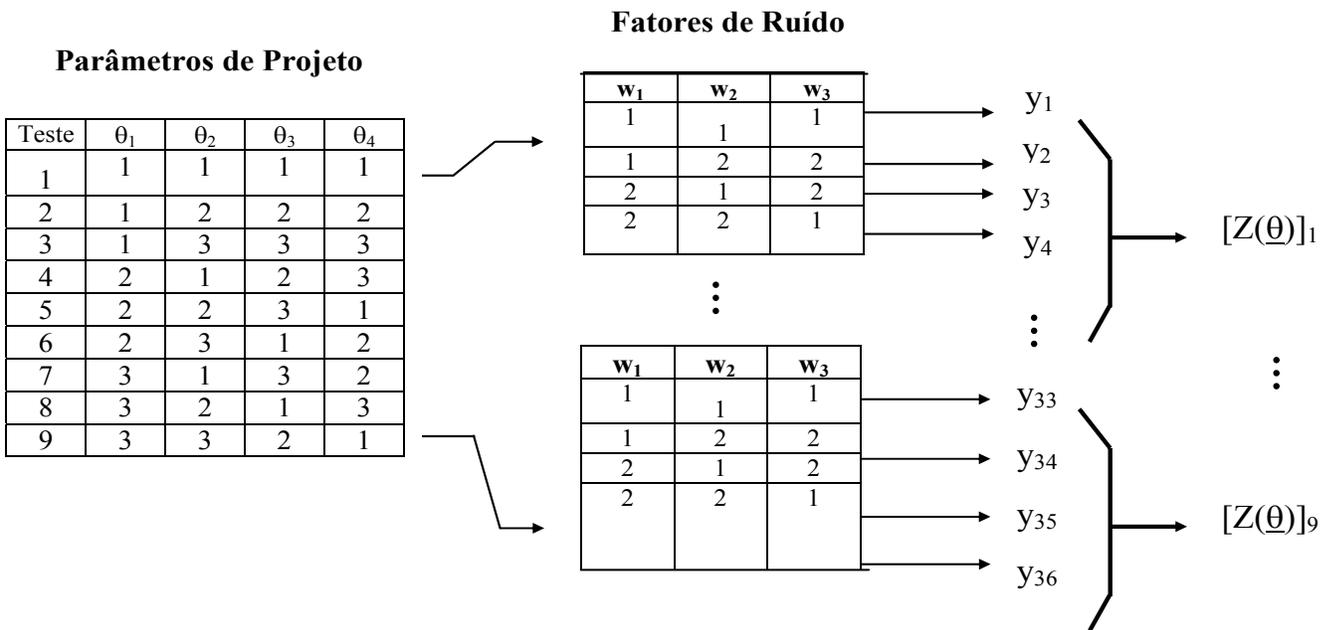


Figura 3.11 – Exemplo de uma matriz experimental para o Projeto dos Parâmetros.

Experimento	Fatores de controle		
	x_1	x_2	x_3 (Efeito Superposto)
1	1	1	1
2	2	1	2
3	1	2	2
4	2	2	1

Tabela 3.10 – Arranjo ortogonal L_4 , proposto por Taguchi.

Segundo Phadke (1989) há diversos arranjos propostos por Taguchi, como o arranjo ortogonal L_8 , por exemplo, (2_{III}^{7-4}) ; L_9 ; L_{12} , L_{16} , nos quais os índices indicam o número de experimentos a serem realizados e que possuem equivalência com outros tipos de planejamentos fracionários. Assim, a matriz externa (parâmetros de projeto) é cruzada com a matriz interna (fatores de ruído) fornecendo o tamanho da matriz experimental. A teoria geral de arranjos ortogonais foi proposta por Rao (1947) *apud* Kackar (1985). Taguchi propôs também os chamados gráficos lineares e arranjos ortogonais, como ferramentas que auxiliam no entendimento da aplicação estatística e o Diagrama P. O Diagrama-P é uma ferramenta gráfica para representação e caracterização de vários parâmetros que influenciam nas respostas do

sistema, como apresentado na Figura 3.12. É um diagrama equivalente a representação de um sistema com fatores de entrada, Resposta e variáveis de influência (controle e ruído).

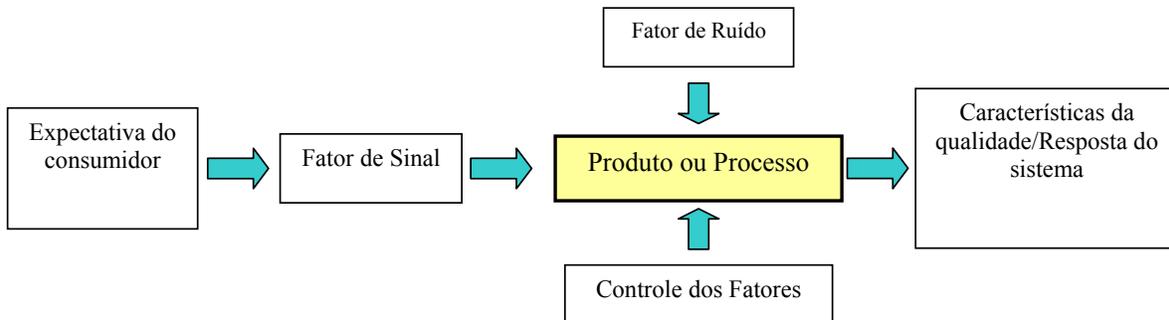


Figura 3.12 – O sistema (Diagrama-P).

O desenvolvimento de um Projeto Robusto requer uma análise detalhada da engenharia de forma a escolher as características de qualidade e determinar a razão S/N. Segundo Padke (1989): “a seleção das características da qualidade e condições de teste para a avaliação da sensibilidade de fatores de ruído, da razão S/N e fatores de controle é uma tarefa difícil que consome um tempo significativo durante o planejamento do projeto Robusto. Assim, é necessário um bom conhecimento técnico sobre as especificações de projeto e de sua natureza”. Apesar de diversas aplicações na indústria, o método de Taguchi sofre forte crítica por parte da comunidade estatística, a qual argumenta que não há um tratamento estatístico consistente dos dados experimentais, particularmente em relação ao indicador razão sinal-ruído. Essa crítica é reforçada pelo fato de que, em qualquer procedimento estatístico, a média e a variância são analisadas separadamente, enquanto que o método proposto por Taguchi analisa ambos parâmetros em conjunto, através da razão S/N. Vários autores como Montgomery e Myers (1995), argumentam que os mesmos resultados podem ser obtidos de forma mais eficiente os planejamentos fatoriais e suas variações.

Os arranjos ortogonais conduzem a um número de ensaios relativamente grande e, podem ignorar interações entre os fatores ou parâmetros controlados. Uma alternativa, por exemplo, seria substituir um arranjo $L_8 \times L_4$, que forneceria 32 experimentos, por um planejamento

fracionário 2^{7-3} combinando sete fatores, com apenas 16 ensaios e não confundiria efeitos principais com interações de dois fatores [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001].

Entretanto, o aspecto realmente inovador do método de Taguchi é a estrutura conceitual que engloba a melhoria contínua da qualidade e o robustecimento do produto ou processo. Box (1985), argumenta que a engenharia de qualidade e as técnicas estatísticas são áreas diferentes, no que diz respeito à pesquisa, mas que podem ser aplicadas em conjunto para o estudo de diversos problemas. Box (1985) argumenta que Taguchi introduziu algumas novas e importantes idéias na engenharia de qualidade, como: a idéia da função perda de qualidade, em específico, ao conceito de se aproximar ao máximo para o valor nominal, ao invés do termo “dentro das especificações”; utilizar o planejamento estatístico para formular um produto ou processo que funciona dentro do valor nominal com mínima variância, além de considerar a insensibilidade em ambientes com perturbações ou ruídos. Porém, Box (1985) lista algumas críticas ao método proposto por Taguchi, como por exemplo: a natureza seqüencial de investigação não é explorada; a utilização do termo S/N para a escolha de um critério é vago que pode misturar proximidade do valor nominal (alvo) com flutuações causadas por ruído. Os arranjos ortogonais são recomendados para otimização computacional, quando os procedimentos de otimização possuem restrições e o problema é bem conhecido.

No capítulo 4 é descrita uma outra classe de planejamento experimental através da construção de superfícies de resposta, ou a metodologia da superfície de resposta. Nesta abordagem, busca-se procurar e otimizar uma região na qual se encontram os parâmetros ou fatores de projeto em relações a diferentes respostas do sistema.

CAPITULO 4

4.1 Metodologia da Superfície de Resposta

Myers et al. (1989) definem a Metodologia da Superfície de Resposta (MSR ou RSM – do inglês *Response Surface Methodology*) como um conjunto de técnicas de planejamento e análise de experimentos utilizados na modelagem matemática de respostas. O método foi desenvolvido por Box, G. da Universidade de Princeton (EUA), com a colaboração de outros autores na década de 1940.

O MSR surgiu em função da necessidade de se ter um procedimento que pudesse auxiliar na determinação de condições ótimas (ou níveis ótimos) de variáveis independentes (fatores), em respostas de sistemas e processos [Myers *et. al.*, 1989]. Entretanto, segundo a literatura, os conceitos da MSR foram efetivamente aplicados na indústria durante a década de 1980, principalmente nas indústrias japonesas e americanas. A aplicação do método na indústria pode contribuir na melhoria da qualidade dos produtos ou processos de fabricação, aumentar a produtividade e reduzir o tempo de desenvolvimento de produtos.

Algumas das áreas que utilizam os conceitos de planejamentos experimentais e MSR com maior frequência são: Engenharia de Alimentos; Agrícola e Industrial e áreas da ciência pura, como a Química e a Física [Myers & Montgomery, 1995; Box & Draper, 1987]. A MSR pode ser aplicada na otimização de sistemas e processos, que possuem como saída uma ou mais respostas [Myers & Montgomery, 1995]. A resposta de interesse é influenciada por diversas variáveis, sendo que o objetivo é otimizar essa resposta. Frequentemente, em estudos

experimentais, não se conhece o relacionamento entre a resposta e as variáveis ou fatores de controle. Assim, é necessário que seja gerado um modelo empírico, a partir do qual haja uma aproximação adequada destes relacionamentos, ou seja, entre a resposta e os fatores. Com o desenvolvimento dessa técnica, pode-se estimar e analisar pontos de ótimo (máximo ou mínimo), para uma determinada função, obtida a partir de resultados experimentais, estudando-se o comportamento de uma ou mais respostas em função das variáveis independentes. Em termos de superfície, são localizados pontos estacionários, que são posições nas quais a variação de uma resposta é nula ou muito pequena em relação às variáveis, indicando pontos de máximo, mínimo ou de sela. Esses pontos localizam-se em regiões notoriamente curvas e, quando se afastam desses setores, a superfície assume pouca ou nenhuma curvatura [Box & Draper, 1987]. Assim, as superfícies podem ser representadas por polinômios lineares ou quadráticos, sendo otimizados através do método numérico *Steepest Ascent* (maximizando a resposta) ou *Descent* (minimizando a resposta).

Em alguns sistemas mecânicos, a natureza do relacionamento entre a resposta y e os fatores x 's pode ser conhecido através de conhecimento das áreas de engenharia, ciências exatas e tecnologia [Myers & Montgomery, 1994]. Trata-se de se obter um modelo mecanístico ou determinístico sob a forma de $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \xi$, no qual o termo ξ representa o erro no sistema. Entretanto, em muitas situações, o mecanismo que rege o sistema ou processo não é totalmente conhecido e o pesquisador deve aproximar uma função desconhecida g para um modelo empírico apropriado dado por:

$$y = g(x_1, x_2) + \varepsilon \quad (4.1)$$

Na qual:

ε = é o erro experimental e;

$f(x_1, x_2)$ = é a função que representa a superfície de resposta.

A função g pode ser representada por um polinômio, para o qual o modelo empírico é chamado de Modelo da Superfície de Resposta. Esta metodologia inicia-se com uma matriz experimental estudada estatisticamente, havendo um processo iterativo de busca da melhor região

experimental e, então é ajustado um polinômio, que é otimizado numericamente. A utilização da Metodologia da Superfície de Resposta (MSR) encontra aplicações em projetos, mais especificamente no desenvolvimento e formulação de novos produtos, processos e sistemas. Em muitas aplicações, o MSR envolve mais de uma resposta, na qual as variáveis de entrada são as variáveis independentes (fatores), e normalmente são controladas pelo pesquisado. O campo de resposta da superfície consiste em uma estratégia experimental, para que o espaço do processo, ou variáveis independentes, seja explorado e modelado empiricamente para desenvolver uma aproximação apropriada entre o campo, e as variáveis do processo e os métodos de otimização para se encontrar os níveis ou valores do processo, que produzem variáveis esperadas em relação às respostas (maximizar ou minimizar).

Quando se inicia um estudo experimental, sendo a resposta e o relacionamento entre a resposta e variáveis independentes, muitas vezes desconhecidos, o primeiro passo é identificar uma função matemática que modele relativamente bem a variação dos fatores de controle. Assim, para um estudo inicial, pode-se utilizar um polinômio de 1^o ordem, para uma superfície plana:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (4.2)$$

Uma vez encontrada a região de interesse, procede-se com um estudo mais detalhado entre as variações dos fatores de controle e de resposta. Se houver curvatura na superfície, esta é modelada por um polinômio de 2^a ordem:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (4.3)$$

Para a metodologia da superfície de resposta, são utilizados planejamentos fatoriais ampliados, que podem estimar o erro experimental (no caso de não haver réplicas) e abranger um espaço experimental maior, para se determinar uma região de ótimo. Em um sistema sobre o qual não há muitas informações entre a relação entre os parâmetros de projeto e a resposta, pode ser feito um estudo inicial com um planejamento fatorial 2^k, para se identificar as variáveis de maior influência, ou então, no caso de muitas variáveis, um planejamento fatorial fracionário (*Screening Planning*). Na Figura 4.1 as esferas escuras localizadas nos vértices do cubo representam os

experimentos, nos quais o posicionamento está associado ao nível da variável independente. As variáveis dependentes, ou fatores de controle, ou ainda, parâmetros de projeto são representadas por x_1 , x_2 e x_3 e são as variáveis independentes e y_i a resposta obtida para cada ensaio. O ponto claro central tem uma função importante na verificação de uma possível curvatura da resposta, e conseqüentemente na determinação dos erros experimentais. Sendo este ponto replicado pelo menos uma vez, já permite a estimativa do erro experimental.

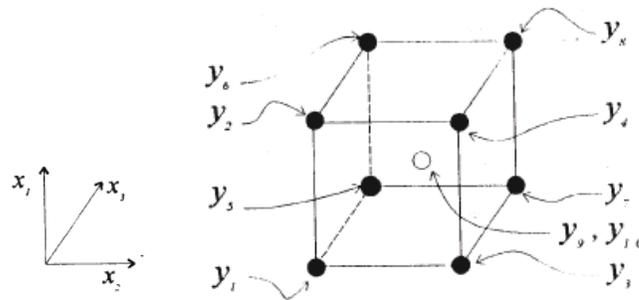


Figura 4.1 – Representação gráfica de um planejamento fatorial com ponto central.

4.2 Análise de Regressão Linear com modelos polinomiais (Modelos Empíricos)

Durante a fase de experimentação pode-se ter duas ou mais variáveis relacionadas entre si. Assim, modelando-se empiricamente os dados, os objetivos consistem em verificar se:

- As variáveis estão relacionadas entre si;
- Qual a forma deste relacionamento e;
- Se uma variável de interesse pode ser prevista, a partir das observações das outras variáveis.

A relação obtida entre as variáveis x e y representa um modelo linear. Este modelo empírico pode ser obtido através da regressão linear, que é uma técnica estatística para investigação e modelagem da relação entre variáveis. Assim, com os dados obtidos a partir de experimentos, pode-se traçar um modelo de regressão linear ilustrado na Figura 4.2:

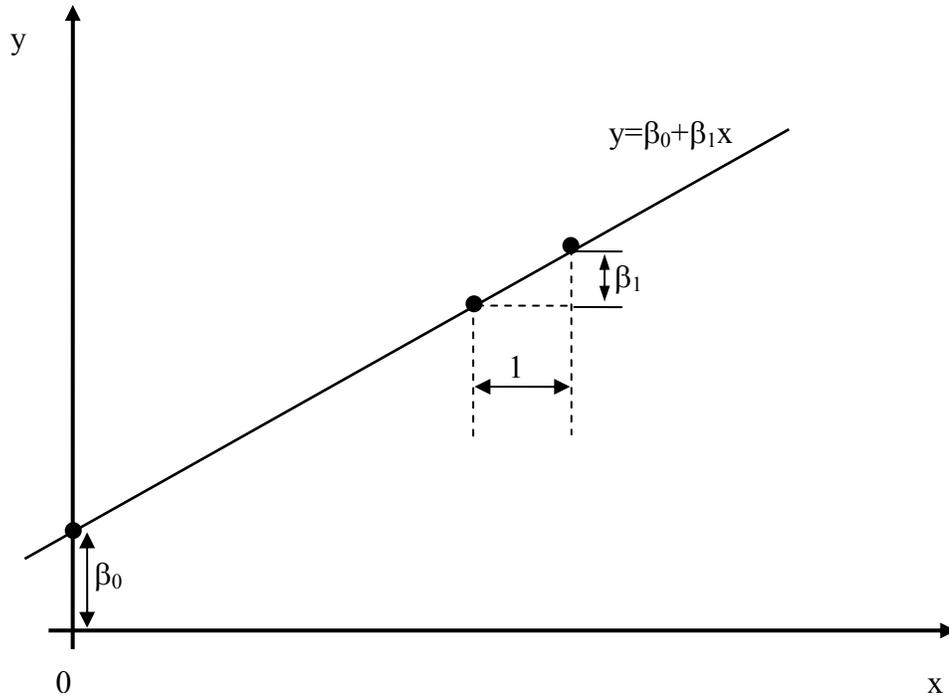


Figura 4.2 – Regressão Linear.

Em regressão linear, os modelos mais utilizados são os polinomiais, que funcionam como uma aproximação de funções para relações de não-linearidade desconhecidas ou muito complexas. Neste contexto, o modelo polinomial é uma expansão da série de Taylor de funções desconhecidas.

Os modelos polinomiais foram inicialmente adotados, em função da dificuldade de se manipular manualmente a álgebra linear e métodos de otimização. Mesmo com a utilização intensiva de computadores, e métodos numéricos cada vez mais robustos, os modelos polinomiais apresentam um bom comportamento e representatividade para construção de modelos locais.

Considerando o relacionamento linear entre uma variável aleatória y e uma variável controlada x , pode-se obter um modelo empírico dado pela equação (4.4):

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 \tag{4.4}$$

Na qual:

- β_0 é o intercepto da linha de regressão com o eixo y;
- β_1 é o coeficiente de inclinação da reta, ou o coeficiente que mede o número de unidades em y para cada unidade da variável independente x.

Em termos estatísticos, esse modelo é acrescido de um erro aleatório, inerente ao processo experimental, assim a equação é dada por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (4.4a)$$

Para: $i = 1, 2, \dots, n$, na qual:

- a variável aleatória y_i representa a resposta para o i -ésimo ponto experimental associado a um valor x_i da variável independente;
- as variáveis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ representam componentes de erros desconhecidos e, são consideradas variáveis aleatórias não observadas. Essas variáveis são supostamente aleatórias, normalmente distribuídas (independentes e identicamente distribuídas) $N\{0, \sigma\}$;
- os parâmetros β_0 e β_1 são desconhecidos.

A partir dessas suposições, tem-se que: $y_i \sim N\{\beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma\}$, ou seja, y_i tem distribuição normal com médias na reta $\beta_0 + \beta_1 x_i$. Cabe ressaltar algumas considerações quanto à utilização de modelos polinomiais:

a) Ordem do modelo: é importante que se escolha, sempre que possível, uma ordem menor do polinômio. Quando a função de resposta tem a forma curvilínea, transformações matemáticas são necessárias para adaptá-la em um modelo polinomial de primeira ordem. Se não for possível utilizar o modelo de primeira ordem, a ordem do polinômio deve ser aumentada para um polinômio de segunda ordem. Ajustes arbitrários de polinômios de ordem mais alta constituem um sério abuso da análise de regressão. O senso de parsimônia deve ser sempre mantido, ou seja, a utilização de modelos mais simples, sempre que possível, que sejam consistentes com os dados e o conhecimento do ambiente do problema [Montgomery, *et al.* 2002];

b) Estratégia da construção do modelo: há estratégias para a escolha da ordem do polinômio. Uma dessas abordagens é ajustar sucessivamente modelos de ordem mais alta, até que o teste t ou F da ordem mais alta seja insignificante (seleção direta). Um procedimento alternativo é ajustar para um polinômio de ordem mais alta, e depois retirar os termos de forma apropriada, iniciando-se pelos termos de ordem maior, de acordo com a significância estatística (seleção inversa);

c) Extrapolação: extrapolar modelos polinomiais pode resultar em respostas sem nenhum significado físico, e conseqüentemente em respostas erradas. Por isso, os polinômios têm grande aplicação em modelagens locais. Um outro cuidado na utilização de polinômios, ocorre em relação ao aumento de termos no mesmo. Conforme o número de variáveis dependentes aumenta, a matriz $X'X$ torna-se mal-condicionada o que significa que a inversa da matriz calculada terá imprecisões e um erro considerado poderá ser introduzido nas estimativas dos parâmetros. Outra questão se refere ao limite da faixa dos valores de x'_s (variáveis independentes), que por serem pequenos, podem apresentar um mal-condicionamento ou multi-colinearidade nas colunas da matriz X . Em termos de hierarquia, o polinômio se apresenta com os estimadores (β'_s) em ordem crescente de termos, com os efeitos principais, de interação e termos quadráticos. Deixar o polinômio nesta ordem, facilita uma transformação linear. Por exemplo, na Metodologia da Superfície de Resposta, o ajuste é feito em termos de variáveis codificadas, e convertidas posteriormente em variáveis naturais.

4.2.1 Método dos Mínimos Quadrados

Ao se determinar um modelo através da regressão linear, que ajuste os dados experimentais, os valores dos coeficientes β_i serão os próprios efeitos dos respectivos termos. Assim, o coeficiente β_1 assume o valor do efeito de x_1 , e assim por diante.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (4.5)$$

O princípio de mínimos quadrados considera a estimação dos parâmetros desconhecidos β_i 's pelos valores que minimizam a soma de quadrados dos erros. Considerando dois parâmetros: x_1, x_2 tem-se:

$$Erro(S) = S(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2)] \quad (4.6)$$

Os coeficientes β_0, β_1 e β_2 , que minimizam (4.6) são denominados estimadores de mínimos quadrados (EMQ). Assim, derivando-se a equação (4.6) em relação aos β 's:

$$\frac{\partial(Erro)}{\partial\beta_0} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_{12} x_1 x_2) \cdot (-2) = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial(Erro)}{\partial\beta_2} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_{12} x_1 x_2) \cdot (-2)x_2 = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial(Erro)}{\partial\beta_1} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_{12} x_1 x_2) \cdot (-2)x_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial(Erro)}{\partial\beta_{12}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_{12} x_1 x_2) \cdot (-2)x_1 x_2 = 0 \quad (4.10)$$

Colocando as expressões na forma matricial tem-se que:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i}^2 \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{1i} x_{2i} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

A matriz obtida $\hat{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$, é simétrica, e no caso de um Planejamento Fatorial seus valores são todos iguais a zero com exceção da diagonal. Neste caso, o cálculo dos coeficientes fica bastante simplificado, e coincide com o procedimento que foi descrito para o cálculo dos efeitos. Os planejamentos fatoriais e fracionários são ortogonais. Assim sendo, identificam os resultados dos termos principais e de interações das variáveis envolvidas. A equação matricial apresenta a vantagem de permanecer válida para casos gerais. Assim, não importa o número de observações feitas ou o número de parâmetros do modelo, desde que ampliada de forma cuidadosa [Barros; Scarmínio; Bruns, 2001].

A melhor reta é a que se aproxima da maioria dos pontos, ou seja, minimiza a distância ou comprimento vertical global dos pontos em relação à reta. A forma tradicional de se obter esse resultado é localizar a reta de tal maneira que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínima, conforme obtido pelo ajuste por mínimos quadrados ou análise de regressão [termo utilizado pela primeira vez pelo matemático Sir Francis Galton, em 1884]. O resíduo é dado por $e_i = y_i - \hat{y}$. Assim, para a equação matricial: $\hat{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$, sendo:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \cdot \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Tem-se:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (4.13)$$

Para que possa ser utilizada essa equação, a matriz deve apresentar duas propriedades matemáticas:

A matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ deve ser ortogonal e não-singular;

Os modelos devem ser lineares nos coeficientes $\boldsymbol{\beta}$'s.

A ANOVA pode ser novamente utilizada, desta vez para avaliar a qualidade do modelo de regressão. Barros; Scarmínio; Bruns (2001) sugerem a Tabela 4.1, descrita a seguir.

Fonte de variação	Soma quadrática	Graus de Liberdade	Média Quadrática
Regressão	$SQ_R = \sum_i^m \sum_j^{n_i} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	p-1	$MQ_R = \frac{SQ_R}{p-1}$
Resíduos	$SQ_r = \sum_i^m \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_i)^2$	n-p	$MQ_r = \frac{SQ_r}{n-p} = s^2$
Falta de ajuste	$SQ_{faj} = \sum_i^m \sum_j^{n_i} (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$	m-p	$MQ_{faj} = \frac{SQ_{faj}}{m-p}$
Erro puro	$SQ_{ep} = \sum_i^m \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	n-m	$MQ_{ep} = \frac{SQ_{ep}}{n-m}$
% da variação explicada	$R^2 = \frac{SQ_R}{SQ_T}$ (Coef. de Correlação Múltipla)		
% máxima da variação explicável	$Var_{expl} = \frac{SQ_T - SQ_{ep}}{SQ_T}$		
<p><i>Indicativo do ajuste do modelo</i> = $\frac{MQ_R}{MQ_r}$ (relação alta - modelo bem ajustado)</p> <p><i>Indicativo de falta de ajuste</i> = $\frac{MQ_{faj}}{MQ_{EP}}$ (relação baixa - modelo bem ajustado)</p>			
<p>m = número de níveis distintos das variáveis independentes; p = número de parâmetros do modelo; n = número de ensaios.</p>			

Tabela 4.1 - Análise da Variância para o modelo de regressão.

4.2.2 – Matrizes ortogonais

Uma matriz real A é ortogonal se $AA^T=A^T A=I$ (quadrada e não-singular) com a inversa $A^{-1}=A^T$, sendo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e considerando uma matriz arbitrária } 3 \times 3: A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Se A é ortogonal, então:

$$A * A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim:

$$\begin{array}{lll} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = 0 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 & c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}$$

ou,

$$\begin{array}{lll} u_1 * u_1 = 1 & u_1 * u_2 = 0 & u_1 * u_3 = 0 \\ u_2 * u_1 = 0 & u_2 * u_2 = 1 & u_2 * u_3 = 0 \\ u_3 * u_1 = 0 & u_3 * u_2 = 0 & u_3 * u_3 = 1 \end{array}$$

sendo:

$u_1 = (a_1, a_2, a_3)$; $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$ e $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$, que representam as linhas da matriz A e são mutuamente ortogonais, com comprimento unitário, formando um conjunto ortonormal de

vetores dado por: $(A^T A) = I$. A condição de os vetores u_1, u_2, \dots, u_m formarem um conjunto ortonormal pode ser descrita simplesmente por: $u_i \cdot u_k = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} delta de Kronecker.

Portanto, o seguinte teorema matemático é válido para as matrizes experimentais: “Seja A uma matriz real. Então as seguintes afirmações são equivalentes: (a) A é ortogonal; (b) as linhas de A formam um conjunto ortonormal e (c) as colunas de A formam um conjunto ortonormal.”

4.3 Planejamento para ajuste de 1ª Ordem - Experimento Fatorial com Ponto Central

Este método consiste em adicionar um ponto de experimentação no nível $x_i = 0$, intermediário aos níveis (-1; +1), para os fatores x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Assume-se, neste caso, que os k fatores sejam quantitativos. Por exemplo, no caso de um experimento 2^2 , nos níveis (-1, -1); (-1, 1); (1, -1) e (1, 1), observações também nos níveis (0,0), que podem ser replicados e ilustrados na Figura 4.3:

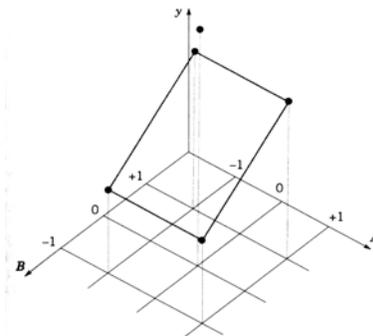


Figura 4.3 – Experimento 2^2 com ponto central.

Sendo y_F a média dos resultados nos quatro pontos fatoriais de um planejamento 2^2 , e y_C a média dos resultados obtidos em n_C experimentos no ponto central. Se a diferença das médias ($y_F - y_C$) for pequena, então é assumido que o ponto central está contido ou próximo ao plano que contém as respostas do experimento fatorial (superfície plana), e portanto não há curvatura. Porém, se essa diferença é grande, assume-se que a superfície de resposta nessa região é curva. Para se testar

estatisticamente se existe ou não curvatura na região central, calcula-se a seguinte soma de quadrados [Montgomery & Hunter, 2003]:

$$SS_{curvatura} = \frac{n_f n_c (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_f + n_c} \quad (4.14)$$

Na qual n_f o número de resultados na parte fatorial do experimento e n_c o número de resultados no ponto central. A estatística F é dada por:

$$F = \frac{SS_{curvatura}}{\hat{\sigma}^2} \quad (4.15)$$

sendo, $\hat{\sigma}^2$ é uma estimativa do erro experimental calculada a partir dos resultados no ponto central,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{pontocentral} (y_i - \bar{y})^2}{n_c - 1} \quad (4.16)$$

na qual, \bar{y} a média dos resultados no ponto central. Para aceitar ou rejeitar a hipótese de curvatura, analisa-se a estatística F. Se o valor calculado for maior do que o valor de F tabelado, então a superfície é plana e um modelo linear poderá ser utilizado. Se o valor de F for maior do que o valor F tabelado, então há curvatura, e deve ser utilizado um modelo de ordem maior. Cabe ressaltar que deve ser escolhido um valor de α (intervalo de confiança) para a busca na tabela para a estatística F $\alpha, 1, (nc-1)$.

A curvatura testa as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \sum_{j=1}^k \beta_{jj} &= 0 \\ H_1 : \sum_{j=1}^k \beta_{jj} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se os pontos fatoriais no planejamento não forem replicados, os n_c pontos centrais são utilizados para se estimar o erro com $nc-1$ graus de liberdade. Assim, novamente é feita a Análise da Variância sobre os parâmetros de projeto em estudo, considerando a curvatura.

Uma vez obtida a região de experimentação, modelada por uma função linear dos fatores de controle, pode-se iniciar um procedimento de busca para a melhor condição de operação, ou seja, buscar a região de ótimo, na qual os níveis das variáveis independentes otimizam a resposta do sistema. Para isso, novos experimentos são realizados, variando-se os parâmetros na direção que, segundo o modelo matemático, conduzirá a uma otimização mais rápida da resposta (*Steepest Ascent*, no caso de maximização da resposta) ou (*Steepest Descent*, no caso de uma minimização). A direção de busca corresponde à linha que passa pelo centro do experimento, sendo normal às linhas de contorno da superfície de resposta. Os pontos de experimentação são proporcionais aos coeficientes β_i 's do polinômio ($y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + \beta_kx_k + \varepsilon$) e o intervalo de experimentação definido de acordo com a condição do experimento. Para a definição dos pontos experimentais deve seguir algumas etapas:

- Inicia-se do ponto central, em unidades codificadas, $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$;
- Define-se um intervalo de variação (incremento - Δ) para um determinado fator de controle, (x_j), baseado no conhecimento do pesquisador sobre o sistema;
- Os intervalos de variação dos outros fatores serão proporcionais aos x_j dados pela equação:

$$\Delta x_i = \frac{\beta_i}{\beta_j / \Delta x_j}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, k; i \neq j \quad (4.18)$$

- Aplicando-se esta técnica de otimização em novos planejamentos seqüenciais, identifica-se pontos experimentais de máximo ou mínimo, ou seja, uma região de pontos ótimos, ou ainda, os níveis ótimos dos parâmetros ou fatores de controle para a resposta do sistema ou processo.

4.4 Planejamentos para ajuste de 2ª ordem - Planejamento Composto Central

Os modelos de 2ª ordem devem envolver 3 níveis de cada fator (variáveis independentes) para que os coeficientes dos modelos sejam estimados [Aschar, 1994]. Uma escolha razoável seriam os planejamentos fatoriais com três níveis (3^k); porém com um valor elevado para k , haveria um grande número de pontos experimentais. Os planejamentos compostos centrais são planejamentos fatoriais de 1ª ordem aumentados por pontos adicionais, para permitir a estimativa dos coeficientes de uma superfície de 2ª ordem, e são uma alternativa aos planejamentos fatoriais 3^k . Segundo Barros; Scarmínio; Bruns (2001), um planejamento composto central para k fatores (considerando as variáveis codificadas) é formado por três partes:

- a) Uma parte chamada de fatorial (cúbica) contendo um total de n_{fat} pontos de coordenadas $x_i = -1$ ou $x_i = +1$, para todos os $i_s = 1, \dots, k$;
- b) Uma parte axial (octogonal) formada por $n_{\text{ax}} = 2k$, pontos com todas as coordenadas nulas, exceto uma, que é igual a um valor α ou $(-\alpha)$;
- c) Um total de n_{cent} ensaios realizados no ponto central, no qual, $x_1, \dots, x_k = 0$.

Portanto, para se realizar um planejamento composto central, é necessário definir como, ou quantos serão os experimentos necessários para cada uma dessas partes.

Na Figura 4.3, há quatro ensaios na parte cúbica, quatro ensaios axiais, com $k = 2$ e três repetições no ponto central. Os pontos cúbicos podem ser idênticos aos de um planejamento fatorial de dois níveis, porém algumas resoluções de planejamentos fatoriais fracionários podem ser utilizadas, como por exemplo, de resolução V, que permite estimar os efeitos principais e as interações de dois fatores, com uma superposição relativamente baixa [Barros; Scarmínio; Bruns 2001]. O total de níveis distintos em um planejamento composto central é $n_{\text{fat}} + 2k + 1$. O modelo quadrático completo para k fatores é dado pela equação (4.19), que possui $(k+1)(k+2)/2$ parâmetros.

$$y = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_i \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (4.19)$$

O valor de α varia entre 1 e \sqrt{k} . Quando $\alpha = \sqrt[3]{k^4}$ os pontos cúbicos e os pontos axiais ficam sobre a superfície de uma esfera com mais de três dimensões e o planejamento é chamado de esférico. Dependendo do valor de α , os pontos periféricos podem estar sobre uma mesma circunferência ou os pontos axiais podem estar nos centros das faces do espaço multi-dimensional do cubo definido pela parte cúbica (fatorial) do planejamento. Este caso é interessante quando o espaço experimental é cúbico, o que ocorre quando os fatores são variados de forma independente. Se $\alpha = \sqrt[3]{k^4}$ os pontos no formato de estrela estarão cada vez mais distantes do ponto central. À medida que o número de fatores aumentar, há o risco de não se estudar a região intermediária. Barros; Scarmínio; Bruns (2001) *apud* Box e Hunter (1947) descrevem o conceito de rotabilidade como critério para escolher o valor de α . Um planejamento pode ser girado, se a variância de suas estimativas $V(\hat{y})$ depender somente da distância em relação ao ponto central, ou seja, se a precisão da resposta prevista for igual em todos os pontos situados numa dada (hiper) esfera com centro no próprio centro do planejamento. Essa variação no experimento garante algumas propriedades necessárias para a modelagem de superfícies de resposta de 2ª ordem, como: rotabilidade e ortogonalidade, que minimizam a variância. Em relação à repetição no ponto central (planejamento composto central) há duas finalidades básicas: fornecer uma medida do erro puro e estabilizar a variância da resposta prevista. Segundo Barros; Scarmínio; Bruns (2001), para se estabilizar a variância, uma regra prática é se realizar de 3 a 4 ensaios repetidos se α estiver próximo de \sqrt{k} , e somente um ou dois se estiver próximo de 1. A Tabela 4.2 ilustra a parte axial de planejamentos rotacionais com $k = 3$ (três fatores), com a parte cúbica (fatorial completo) 2^3 .

k = 3		
x_1	x_2	x_3
-1,68 (- α)	0	0
1,68 (α)	0	0
0	-1,68 (- α)	0
0	1,68 (α)	0
0	0	-1,68 (- α)
0	0	1,68 (α)

Tabela 4.2 – Parte axial de planejamentos rotacionáveis com três fatores.

A expressão $\alpha = \sqrt[4]{n_{fat}}$, demonstra a rotabilidade para planejamentos fatoriais completos e fracionários de resolução V (parte cúbica). Se houver a necessidade de se estudar a região mais próxima das faces do hipercubo, o valor de α deve ser menor do que o valor rotabilidade. O valor de α pode conduzir a ensaios inviáveis, nos quais devem ser definidas novas condições experimentais. Esse princípio de rotabilidade experimental pode ser desfeito, se houver a necessidade de se alterar as escalas das variáveis. Wu & Hamada (2000) apud Barros; Scarmínio; Bruns (2001) propõem uma quase rotabilidade, como critério, que consiste em um planejamento fatorial 2^k adicionando $2k$ pontos axiais acrescido de pontos centrais. Os 2^k pontos axiais localizam-se em $(\pm\alpha, 0, \dots, 0)$; $(0, \pm\alpha, \dots, 0)$; $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$, sendo $\alpha = (2^k)^{1/4}$, ilustrado pela Figura 4.4 e 4.6. Assim, para um planejamento composto central com dois fatores, seriam necessários os seguintes pontos experimentais:

2^k pontos fatoriais: $(-1;-1)$, $(+1;-1)$, $(-1;+1)$, $(+1;+1)$;

2^k pontos axiais: $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; -\sqrt{2})$; $(0; \sqrt{2})$;

n_c pontos centrais: $(0;0)$, $(0;0)$, $(0;0)$, $(0;0)$.

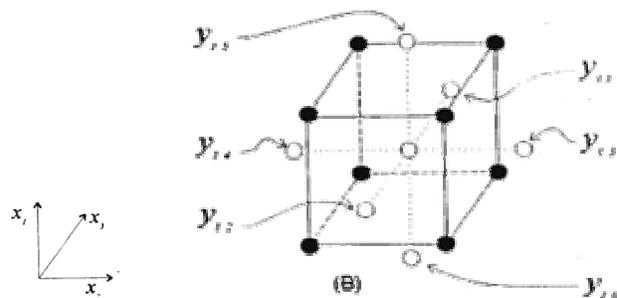


Figura 4.4 - Representação do cubo experimental para um planejamento composto central.

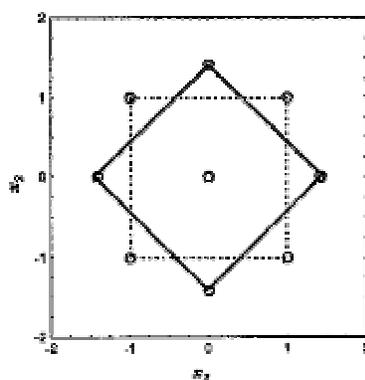


Figura 4.5 – Rotação de α no espaço para a obtenção do planejamento composto central.

Uma outra vantagem dos planejamentos compostos centrais é a forma seqüencial do planejamento, separada em três partes diferentes. Se não houver indicação de curvatura na superfície de resposta, então não há a necessidade de um modelo quadrático. Portanto, a parte cúbica (fatorial) pode ajustar um modelo linear, e em seqüência, pode-se deslocar para outra região de maior interesse na superfície. Se houver dúvidas sobre a existência de curvatura, são aplicadas repetições no ponto central, gerando um terceiro nível para as variáveis e então, testa-se sua significância. Havendo curvatura, pode-se completar o planejamento com pontos axiais, o que caracteriza os ensaios em dois blocos: um cúbico e depois um axial. Supondo que as respostas do bloco axial contenham um erro sistemático em relação às respostas obtidas no primeiro bloco, dentro de certas condições, esse erro não afetará as estimativas dos coeficientes do modelo, ou seja, o efeito de bloco não se confundirá com os efeitos de outros fatores. Para que

essa condição ocorra, a blocagem do planejamento deve ser ortogonal, que depende do valor de α . Segundo Montgomery (1997), a blocagem será ortogonal se:

$$\alpha = \frac{n_{fat}(n_{ax} + n_{centr,ax})}{2(n_{fat} + n_{centr,fat})} \quad (4.20)$$

na qual, $n_{centr,fat}$ e $n_{centr,ax}$ são ensaios no ponto central no bloco cúbico e no bloco axial. Na verdade, quando se faz o planejamento em blocos ortogonais, sacrifica-se sua rotabilidade, mas existem outros tipos de planejamentos nos quais as duas condições são aproximadamente satisfeitas.

4.5 Problemas de otimização

Problemas associados com projetos ótimos tem sido o centro de significativa atenção nos últimos anos. Durante várias décadas o campo de otimização de projetos avançou muito nas áreas de projeto de sistemas, controle dinâmico e análise de engenharia [Ertas & Jones, 1993]. Com os recentes avanços na área computacional, novos métodos de otimização têm sido desenvolvidos, e projetos de sistemas mais complexos tiveram sua configuração otimizada, inserido em um tempo computacional muito menor do que no passado. Há duas classes de características inerentes associadas a qualquer elemento mecânico ou sistema:

- a) Características indesejáveis como: custo elevado; carga excessiva; grandes deflexões e vibrações;
- b) Características desejáveis como: vida útil longa, eficiente saída de energia, boa capacidade de transmissão de potência, boa capacidade de refrigeração e robustez de sistemas, como neste estudo.

Um projeto ótimo pode ser definido como a melhor configuração possível do ponto de vista da característica mais significativa, ou seja, minimizando características indesejáveis e/ou maximizando as características desejáveis [Ertas & Jones, 1993]. A aplicação de técnicas de

otimização em projeto mecânico requerem algumas formulações sobre as funções objetivo tal como: peso, custo ou forma, e expressões de restrições, sob a forma de equações ou inequações. A função objetivo (U), formulada em termos de parâmetros de projeto, deve apresentar uma solução ótima, dada por:

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.21)$$

na qual, x é a variável de projeto e n é o número das variáveis de projeto.

Em um processo de otimização, há certas condições a serem satisfeitas pelas variáveis de projeto. Essas condições ou limitações são chamadas de restrições. A procura da solução ótima para uma dada função objetivo, obedece as seguintes equações e inequações:

$$\begin{aligned} h_i(x) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 & i=1, 2, \dots, m \\ g_j(x) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 & j=1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Nas quais $h_i(x)$ e $g_j(x)$ são as equações e inequações de restrições, respectivamente. A variável de projeto pode ser uma propriedade de um material, dimensões de estruturas (espessura, largura e comprimento) ou dados geométricos (coordenadas de pontos de nós de uma estrutura), por exemplo. Assim, os problemas de otimização podem envolver:

- 1) somente restrições na forma de equações;
- 2) somente restrições sob a forma de inequações;
- 3) restrições dos dois tipos;
- 4) sem restrições.

Nos problemas do tipo (4), tem-se a otimização sem restrições ou limitações de projeto. Em geral, há dois tipos de problemas de otimização:

- a) Aqueles que possuem critério único, nos quais o objetivo de projeto é minimizar ou maximizar somente uma função objetivo. Neste caso, o ponto de ótimo é um valor máximo ou mínimo;

b) Aqueles que apresentam multicritério, nos quais a meta do pesquisador é minimizar ou maximizar alguns critérios simultaneamente. Assim, todas as funções objetivos podem ser consideradas para encontrar a solução ótima.

Os métodos matemáticos para otimização de projetos, são classificados em duas categorias:

a) Métodos Analíticos: nos quais há métodos variacionais, diferenciais e a utilização dos multiplicadores de Lagrange;

b) Métodos Numéricos: que incluem programação linear e métodos de programação não-linear, como:

- *Métodos de minimização uni-dimensional:* Fibonacci, Seção Áurea;

- *Métodos multivariáveis sem restrições:* a) Métodos utilizando derivadas (método de gradientes): *Steepest Ascent*; Gradiente Conjugado; Newton; b) Métodos sem derivadas (métodos de busca direta): Busca aleatória e Busca por caminho;

- *Métodos multivariáveis com restrições:* a) Métodos utilizando derivadas: métodos de funções com penalidades de barreiras; b) métodos sem a utilização de derivadas: Rosenbrock.

- *Outros métodos:* programação geométrica, programação estocástica, teoria dos jogos, teoria do controle ótimo, algoritmos genéticos e *Simulated Annealing*.

Há uma gama de livros que tratam de diversos tipos de problemas de otimização como, Arora (1989); e Luenberger (1989), que surgiram desde o estabelecimento da teoria do cálculo diferencial. Cada método é adequado a um certo tipo ou classe de problemas, devido à sua natureza de operação e base teórica. Segundo Luenberger (1989), os métodos numéricos (ou diretos) fornecem a solução ótima através de iterações, e a cada uma o valor da função objetivo aproxima-se do ótimo. Por outro lado, os métodos analíticos (ou indiretos) são aqueles nos quais a solução ótima é obtida em apenas um passo.

4.5.1 Otimização sem restrição

Os problemas de otimização sem restrição são classificados como uni-dimensional quanto ao caminho de busca e problemas multidimensionais [Arora, 1989], como ilustrado pela Figura 4.4:

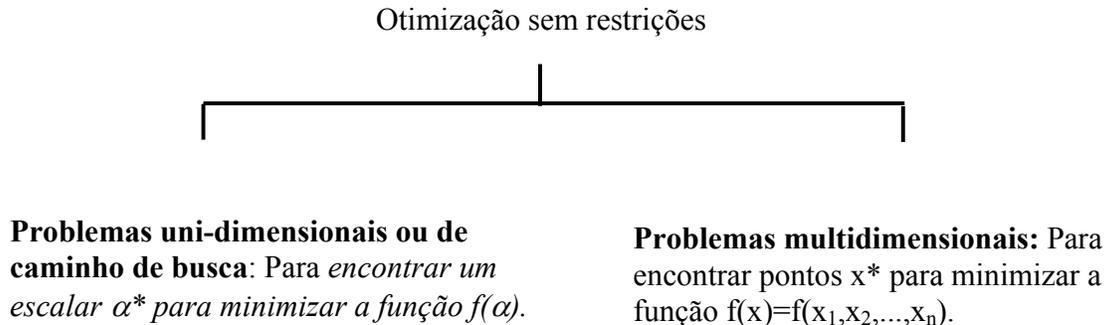


Figura 4.6 – Classificação de problemas de otimização sem restrição.

Os métodos de otimização numérica sem restrição baseiam-se em buscas iterativas dados pela equação (4.22), mudando o critério de busca unidimensional ou linha de busca e a determinação do tamanho do passo ou incremento.

$$\Delta x^{(k)} = \alpha_k d^{(k)} \quad (4.22)$$

As condições para que α^* seja um ponto de mínimo local são:

- 1) $\frac{df}{d\alpha}(\alpha^*) = 0$ (Condição Necessária)
- 2) $\frac{d^2 f}{d\alpha^2}(\alpha^*) \geq 0$ (Condição Necessária)
- 3) $\frac{d^2 f}{d\alpha^2}(\alpha^*) > 0$

As condições 1 e 2 são condições necessárias e as condições 1 e 3 são condições suficientes.

Os métodos de otimização para encontrar pontos de mínimos locais e globais correspondem a métodos descendentes básicos, que buscam a solução iterativa de problemas de minimização irrestrita. A estrutura fundamental desses métodos consiste na: a) existência de um ponto de partida; b) existência de uma direção de busca pré-determinada e; c) existência de um incremento para mudança de direção caso o ponto de mínimo seja ultrapassado.

Assim, o que difere os métodos descendentes são as regras que definem ou alteram a direção de busca. A seguir serão brevemente discutidos os métodos implementados neste trabalho, para otimizar as equações polinomiais.

O primeiro passo para otimizar as funções sem restrições é obter os intervalos de busca. A idéia básica de qualquer método de busca unidimensional é o de reduzir sucessivamente o intervalo de incerteza para um pequeno valor aceitável. Neste caso, foi escolhido o Método da Secante para a busca unidimensional, que possui uma implementação relativamente simples e se aplica aos métodos de numéricos de otimização implementados: Newton e Quasi-Newton.

a) O método da Secante para busca unidimensional é dado para minimizar:

$$\min_{\alpha} f(\{x\}_i + \alpha\{d\}); \quad (4.23)$$

sendo:

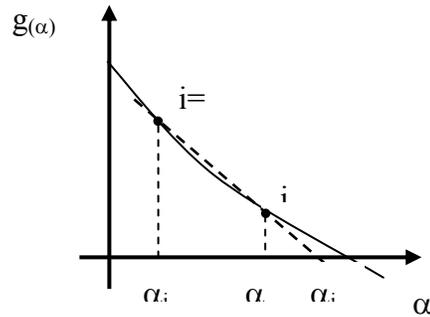
$\{x\}_i$ = ponto de início (conhecido) e $\{d\}$ direção de descida conhecida.

Buscando o gradiente nulo, tem-se a equação:

$$g(\alpha) = \{\nabla f(\alpha)\} \cdot \frac{\{d\}}{\|\{d\}\|} \quad (4.24)$$

A derivada direcional, que é a derivada da função na direção $\{d\}$, projeção do gradiente na direção de descida.

Por semelhança de triângulos têm-se:



$$\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{0 - g(\alpha_{i-1})}{g(\alpha_i) - g(\alpha_{i-1})} \Rightarrow \quad (4.25)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i-1} - \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{g(\alpha_i) - g(\alpha_{i-1})} * g(\alpha_{i-1}) \quad (4.26)$$

A qual é a equação para iteração do método da secante. Para verificar se o intervalo contém um zero, pode-se iniciar o método com passo = 1,0 e determinar o próximo ponto pela equação:

$$\{x\}_1 = \{x\}_0 + \alpha_1 \frac{\{d\}}{\|\{d\}\|} \quad (4.27)$$

Aplicando-se a derivada direcional:

$$g_1 = \{\nabla f(\{x\}_1)\}' + \alpha_1 \frac{\{d\}}{\|\{d\}\|} \quad (4.28)$$

Verifica-se se o intervalo possui um zero: se $g_1 * g_0 < 0$ há um zero. Se $g_1 * g_0 > 0$, então não contém um zero. Neste caso, o intervalo deve ser redefinido, por exemplo, $\alpha_1 = \alpha * d_1$ e voltar para a equação (4.27). Se houver um zero de função, então é aplicada a equação da secante (4.26) e acha-se o próximo ponto (α_2) e função. Faz-se o teste de convergência para verificar se o valor

calculado possui o erro mínimo para ser considerado ótimo. Se o ponto calculado não estiver próximo do ótimo, o intervalo de confiança é redefinido.

b) O Método de Newton modificado: utiliza informações do gradiente ou primeira derivada da função e da segunda derivada ou matriz Hessiana, para que a função tenha uma razão quadrática de convergência. Assim, se a matriz é quadrada e positiva definida, o método convergirá somente em uma iteração e o incremento será único [Arora, 1989]. A idéia básica do Método de Newton é utilizar a expansão da série de Taylor de segunda ordem na função sobre o ponto em estudo, ou seja, $f(x)$ é aproximada por uma função quadrática.

$$f(x) \cong g(x) = f(\{x\}_i) + \{\nabla f(\{x\}_i)\}^T (\{x\} - \{x\}_i) + \frac{1}{2} (\{x\} - \{x\}_i)^T [H(\{x\}_i)] (\{x\} - \{x\}_i) \quad (4.29)$$

Na equação, H é a matriz Hessiana (segunda derivada da função objetivo) da função f no ponto x , sendo que o ponto mínimo de $g(x)$ é a aproximação para o mínimo de $f(x)$. Assim, $g(\{x\})$: $\{\nabla g(\{x\})\} = \{0\}$.

A direção de descida é dada por:

$$\{d\}_i = -[H(\{x\}_i)]^{-1} \{\nabla f(\{x\}_i)\} \quad \text{ou} \quad \{d\}_i = -[H(\{x\}_i)]^{-1} \{g\}_i \quad (4.30)$$

A equação da iteração terá o passo:

$$\{x\}_{i+1} = \{x\}_i - \alpha [H(\{x\}_i)]^{-1} \{\nabla f\{x\}_i\} \quad (4.31)$$

O Método de Quasi-Newton é um método mais robusto que utiliza somente a primeira derivada. Possui uma taxa de convergência melhor do que o método de Newton e do método do Gradiente. A direção de descida é dada por:

$$\{d\}_i = -[D]_i \{g\}_i \quad (4.32)$$

Na qual, $- [D]_i$ é uma matriz $n \times n$, simétrica, positiva definida, com direção de descida $\{d\}_i$; $\{g\}_i$ é o vetor gradiente. Sendo que a condição para direção de descida será:

$$\{d\}_i^t \{g\}_i < 0 \Rightarrow -\{g\}_i^t [D]_i \{g\}_i < 0 \Rightarrow [D]_i > 0 \text{ (Positiva Definida)} \quad (4.33)$$

Se a matriz $[D]_i = [I]$, tem-se o método do gradiente;

Se a matriz $[D]_i = [H(\{x\}_i)]^{-1}$, tem-se o método de Newton e;

Se a matriz $[D]_i = [H(\{x\}_0)]^{-1}$, tem-se o método de Newton-Raphson modificado. Assim, $[D]_i$ é construída para aproximar-se da inversa da Hessiana $[H(\{x\}_k)]^{-1}$, utilizando as informações: $[D]_{i+1}$, $\{x\}_{i-1}$, $\{x\}_i$, $\{g\}_{i-1}$, $[g]_i$.

Para a geração da matriz $[D]_{i+1}$, tem-se:

$$[D]_{i+1} = [D]_i + [\Delta D]_i \quad (4.34)$$

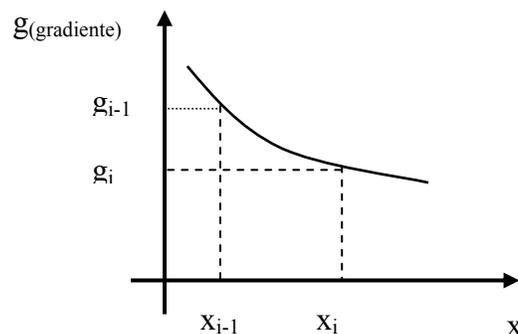
Sendo: $[D]_i$ = estimativa anterior e $[\Delta D]_i$ a correção, na qual deve ser garantida a simetria, e montar $[D]_{i+1} > 0$ (positiva-definida).

$[\Delta D]_i = f([D]_i, \{x\}_{i-1}, \{x\}_i, \{g\}_{i-1}, \{g\}_i)$, que são informações anteriores.

$\{\Delta x\} = \{x\}_i - \{x\}_{i-1} = \{s\}_i$ (variação do ponto)

$\{\Delta g\} = \{g\}_i - \{g\}_{i-1} = \{y\}_i$ (variação do gradiente)

Assim, no caso uni-dimensional:



Uma aproximação para a segunda derivada é dada por:

$$g' \cong \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g_i - g_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i}{s_i} \quad (4.35)$$

(inclinação da reta passando por i e $i-1$), assim:

$g' s_i = y_i$ ou $(g')^{-1} y_i = s_i$ (aproximação para a segunda derivada) e, generalizando tem-se que:
 $[D]_{i+1} \{y\}_i = \{s\}_i$, que é a equação de Quasi-Newton.

Para o cálculo da nova matriz $[D]_i$ utilizou-se a fórmula de DFP (Davidson-Fletcher-Powell) dada por:

$$[D]_{i+1} = [D]_i + \frac{\{s\}_i \{s\}_i^t}{\{s\}_i^t \{y\}_i} - \frac{[D]_i \{y\}_i \{y\}_i^t [D]_i}{\{y\}_i^t [D]_i \{y\}_i} \quad (4.36)$$

4.6 Análise de Estabilidade do Ponto Ótimo

Há várias medidas de correlações que expressam os relacionamentos entre duas ou mais variáveis. Por exemplo, o coeficiente de correlação (r) de Pearson, que mede a extensão do relacionamento entre duas variáveis; há várias medidas não-paramétricas do relacionamento que também estão baseados na similaridade de faixas entre duas variáveis, a Regressão Múltipla que permite explorar o relacionamento entre uma variável dependente e um conjunto de variáveis independentes e a Análise de Correspondência Múltipla, utilizada para explorar os relacionamentos entre um conjunto de variáveis qualitativos (categóricos). A correlação canônica é um procedimento adicional para assegurar o relacionamento entre variáveis. Esta análise permite investigar o relacionamento entre dois conjuntos de variáveis. Algumas definições são importantes para se utilizar a análise canônica:

Raízes características de uma matriz: Seja A ($m \times m$), uma matriz quadrada e λ um escalar. A matriz $A - \lambda I_m$ é a matriz característica de A . O determinante $f(\lambda) = |A - \lambda I_m|$ é a função característica da matriz A . As raízes da equação $f(\lambda) = 0$ são chamadas raízes características ou raízes latentes de A . [Achcar, 1994]. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ a equação característica é dada por: } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Encontrando-se as raízes λ_1 e λ_2 e substituindo-as na matriz, obtém-se o autovetor X. Esse autovetor está associado com a raiz característica λ , sendo definido como um vetor X, que é solução da equação:

$$AX = \lambda X \quad (4.37)$$

$$(A - \lambda I_m)X = 0 \text{ (} I_m \text{ é a matriz identidade)} \quad (4.38)$$

Com essa propriedade, as raízes características de uma matriz simétrica real são também reais.

Forma quadrática real: uma forma quadrática em k variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ é uma expressão escalar da forma:

$$Q = \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j \quad (4.39)$$

na qual, todos os elementos a_{ij} são reais ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Assim, pode-se escrever que: $Q = X'AX$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ & & & \cdot \\ \text{simétrica} & & & a_{kk} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Sendo, A uma matriz simétrica.

A redução de uma forma quadrática para uma forma canônica: no estudo da forma de uma superfície de resposta e localização das regiões e condições ótimas, a opção de reduzir uma forma quadrada para uma forma canônica pode reduzir o trabalho computacional e o estudo em si.

Assim, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são raízes características (todas reais) da matriz simétrica real A , então existe uma transformação ortogonal $X = P w$, tal que a forma quadrática real $Q = X'AX$ é transformada para a forma canônica $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_k w_k^2$. Ou seja, a forma quadrática Q é transformada para uma forma com uma matriz diagonal, na qual seus elementos diagonais são as raízes características da matriz A .

Uma vez aplicado o procedimento da MSR e identificada a região de interesse, um polinômio de ordem maior (normalmente de 2º grau) é ajustado [Achcar, 1994]. Este modelo tem como objetivo determinar os níveis ótimos do sistema investigado. Montgomery (1991) e Box & Draper (1987) sugerem uma forma de localizar o ponto ótimo, através da localização do ponto estacionário e do planejamento composto central (ajuste de 2ª ordem). Existindo o ponto ótimo, na região investigada, dado pelos pontos (x_1, x_2, \dots, x_k) , então as suas derivadas parciais devem ser:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0 \quad (4.41)$$

Esse ponto é denominado de ponto estacionário, representando um ponto de máximo, mínimo ou ponto de sela [Montgomery, 1991; Achcar, 1994]. A solução geral do ponto estacionário é obtida a partir do modelo de segunda ordem dado por:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (4.42)$$

que pode ser escrito em notação matricial:

$$y = \beta_0 + x'b + x'Bx \quad (4.43)$$

Na qual:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12}/2 & \dots & \beta_{11}/2 \\ & \beta_{22} & \dots & \beta_{21}/2 \\ & & \dots & \cdot \\ & & & \beta_{kk} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix}$$

Nesta representação matricial, b é um vetor ($k \times 1$) dos termos lineares, B é uma matriz simétrica ($k \times k$), cujos elementos diagonais são coeficientes quadráticos puros (β_{ii}), e os elementos que estão fora da diagonal correspondem à metade dos termos de interação ($\beta_{ij}, i \neq j$) do polinômio ajustado.

A derivada da equação (4.43) com relação aos elementos do vetor x é dada pela equação:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b + 2Bx = 0 \tag{4.44}$$

Assim, o ponto estacionário é a solução da equação (4.44), cujo resultado é dado pela equação:

$$x_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}b \tag{4.45}$$

Com a determinação do ponto estacionário, pode-se caracterizar a superfície de resposta com a vizinhança imediata a esse ponto, feita a partir da análise canônica [Achcar, 1994; Box & Hunter, 1987].

4.6.1. Análise Canônica da Superfície de Resposta

Uma vez que o ponto estacionário (x_0) é determinado, assim como os níveis ótimos dos fatores ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$) que maximizam, minimizam ou representam um ponto de sela (*Saddle*

Point), pode-se caracterizar a superfície de resposta em torno desses pontos [Achcar, 1984; Box & Draper, 1987; Myers & Montgomery, 1994].

Considerando uma translação da superfície de resposta da origem $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (0, 0, \dots, 0)$ para o ponto estacionário X_0 , a função de respostas passa a ser formulada em termos de novas variáveis w_1, w_2, \dots, w_k cujos eixos correspondem aos eixos principais do sistema de contornos, conforme ilustra a Figura 4.7:

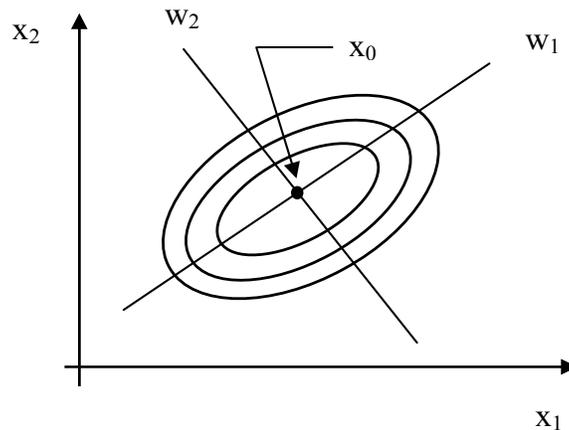


Figura 4.7 – Translação da superfície de resposta.

A função de respostas em termos das novas variáveis w_1, w_2, \dots, w_k (forma canônica) é dada por:

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_k w_k^2 \quad (4.46)$$

Nesse novo sistema de coordenadas, o ponto estacionário passa a ser a origem, e os eixos (w_k), devem ser rotacionados até o ponto em que são paralelos aos eixos principais da superfície de resposta. Box, Hunter & Hunter (1978) ressaltam que com esse novo sistema de coordenadas, as equações de segunda ordem são simplificadas e a natureza da geometria fica mais visível.

Assim, \hat{y}_0 é a resposta estimada no ponto estacionário: $X_0 = -\frac{1}{2} B^{-1} b$; w_k são combinações lineares de x_i e λ_i representa as constantes ou raízes da matriz **B**.

$$[B - \lambda I] = 0 \quad (4.47)$$

na qual, B é uma matriz formada pelos coeficientes quadráticos puros (diagonal) e pelo valor médio dos coeficientes de interação (fora da diagonal), λ são as raízes do polinômio quadrático e I (determinante) é o operador matemático que transforma a matriz quadrática em números reais. Construído o modelo canônico, algumas características podem ser atribuídas à superfície de resposta:

a) Se todas as raízes λ_i são negativas, significa que os gráficos de curvas de nível Figura 4.8(a) da superfície de resposta terá a forma de uma elipse, na qual o centro x_0 (ponto estacionário) do sistema é o ponto de máximo. Caso os sinais sejam positivos, significa que esse ponto é uma reposta de mínimo;

b) Se os sinais λ_i são diferentes, significa que x_0 é um ponto de sela, como representado na Figura 4.8(b). Se ao comparar as raízes do modelo canônico, uma delas for menor quando comparada que a outra, pode-se dizer que a pendente da superfície no eixo de menor raiz será atenuada.

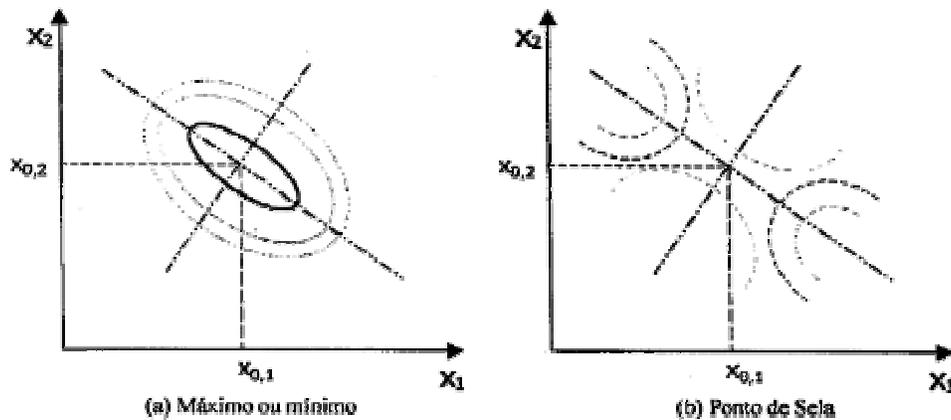


Figura 4.8 (a) (b) - Gráficos de Contornos (curvas de nível) para as superfícies de resposta
[Myers & Montgomery, 1994].

CAPÍTULO 5

5.1 Metodologia para o desenvolvimento e implementação de um programa para planejamento e otimização de experimentos e aplicação em componentes de sistemas mecânicos

O objetivo de uma metodologia é melhorar os procedimentos e critérios aplicados na condução de uma pesquisa. A inserção de uma metodologia padronizada na ciência é quase análoga ao procedimento de se ter um padrão de medida, pois esta condição fornece regiões nas quais a pesquisa pode ser controlada. Nas engenharias, muitas das metodologias utilizadas tiveram suas origens em experiências adquiridas pelas ciências puras, como a matemática, física, química e biologia.

A Engenharia Mecânica é uma ciência aplicada que necessita de estudos teórico-experimentais sobre o comportamento de sistemas mecânicos, considerando seus mais diversos aspectos. Devido às constantes evoluções tecnológicas, como por exemplo, a inserção da eletrônica, de novos materiais, de novos tipos de lubrificantes, nos projetos mecânicos, há ainda a própria dificuldade de se identificar e entender o comportamento de diversos componentes mecânicos atuando em conjunto. Portanto, o conhecimento e aplicação de ferramentas matemática-estatísticas para o projeto, condução, análise e otimização de experimentos, podem auxiliar no estudo das melhores condições experimentais, bem como estimar valores para os fatores mais críticos do projeto, otimizando-os em determinadas regiões operacionais.

Na indústria automobilística nacional, há um esforço em se tentar utilizar planejamentos experimentais, movidos pela crescente complexidade dos projetos de sistemas automotivos. Porém, em muitos casos a engenharia experimental utiliza apenas parte da teoria, não alcançando resultados plenamente confiáveis. Em termos de pesquisa, a utilização de simulações computacionais é um recurso muito utilizado para o estudo e análise de comportamento de sistemas mecânicos, sendo extremamente válido. Porém, nem sempre é possível modelar um sistema ou componente mecânico que corresponda ao seu comportamento real. Em muitas pesquisas, costuma-se utilizar técnicas de ajuste de modelos. Esses métodos em geral, podem ser descritos como implementações computacionais de origem heurística, muitas vezes adotados pelos pesquisadores e engenheiros em ambientes de projeto, com maior experiência sobre o comportamento físico do sistema em estudo. Essa abordagem relaciona-se com um tipo de análise de sensibilidade, na qual são variados alguns parâmetros de projeto, baseados na intuição do pesquisador e na teoria aplicada. Quanto mais complexo o projeto, maior o número de suposições feitas pelo pesquisador, mesmo baseado nas teorias correspondentes e maior será o custo computacional.

Assim, em contrapartida aos modelos determinísticos, que em sua maioria utilizam equações diferenciais e fazem uma aproximação numérica da resposta e dos parâmetros de projeto, nem sempre correspondendo a valores reais; os modelos empíricos são indicados para representar comportamentos mais específicos de um determinado sistema, ajustados para um conjunto pré-estabelecido de fatores de projeto. As técnicas de modelos empíricos são desenvolvidas resumidamente da seguinte forma:

- a) Projeto experimental: um espaço de projeto, que inclui possíveis faixas de projeto. Este projeto experimental pode ser entendido como uma estrutura de observação do fenômeno a ser modelado;
- b) Escolha de um modelo: a natureza do modelo empírico é determinada pelas relações das respostas, obtidas durante a coleta de dados;

c) Ajuste do modelo: o modelo definido em b) é ajustado para os dados coletados em a) Diferenças no ajuste do modelo podem afetar a eficácia do modelo empírico na solução do problema em questão;

d) Verificação do ajuste do modelo: os três passos anteriores são suficientes para construir um primeiro modelo do sistema, que deve ser avaliado em termos de análise da variância, gráfico de resíduos e interações entre as variáveis.

Dessa forma, cada combinação do espaço amostral (a), escolha do modelo (b) e procedimento de ajuste (c) conduz à utilização de procedimentos específicos de verificação (4). A Figura 5.1 ilustra possíveis combinações de diferentes técnicas para a construção de modelos empíricos.

Dentre as técnicas descritas na Figura 5.1, a Metodologia da Superfície de Resposta (MSR) fornece uma análise global para modelos empíricos, tendo um baixo custo computacional. A metodologia de superfícies de resposta é constituída basicamente de duas etapas: modelagem e deslocamento. Essas etapas são repetidas até que se atinja uma região ótima (máxima ou mínima) para que essa superfície seja estudada. A modelagem normalmente é feita ajustando-se modelos lineares ou quadráticos a resultados experimentais, obtidos em planejamentos fatoriais centrados ou planejamentos compostos centrais.

A proposta deste trabalho é o estudo e aplicação do planejamento experimental, de aproximações de modelos polinomiais (MSR) e métodos de otimização numérica para componentes mecânicos. Foi desenvolvido um programa, com base nas teorias de planejamento experimental, MSR e otimização, voltados para o estudo de componentes mecânicos em máquinas rotativas. A metodologia é descrita no próximo item.

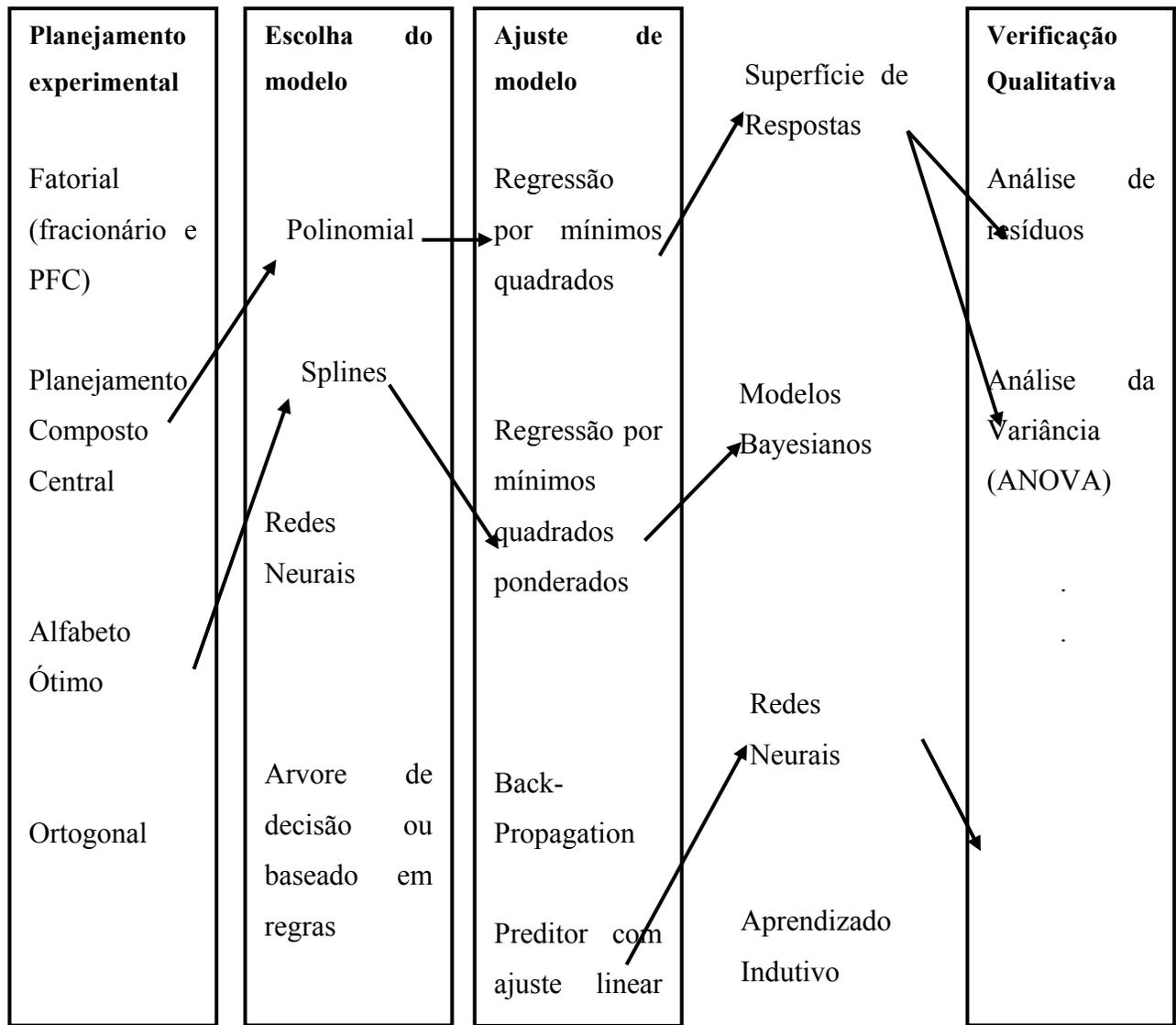


Figura 5.1 – Diferentes abordagens para construção de modelos empíricos (Simpson, et al. 1997).

5.2 Desenvolvimento e implementação de um programa voltado ao planejamento de experimentos (Ótima) e otimização de componentes mecânicos

5.2.1 Ferramentas computacionais utilizadas

O programa para planejamento e análise de experimentos foi desenvolvido para ter uma interface amigável com o usuário, utilizando a plataforma Windows[®], sendo escolhida a linguagem *Visual Basic* 5.0[®]. Para trabalhos futuros, este programa poderá ser acoplado ao programa de confiabilidade do Departamento de Projeto Mecânico (DPM).

A opção por uma ferramenta computacional visual ocorreu devido ao fato de que a interação entre o usuário e o programa de aplicação é muito importante para a utilização mais eficiente dos recursos proporcionados por um programa. Interfaces gráficas implementadas através de ícones, caixas de diálogo, figuras e gráficos facilitam o aprendizado e tornam mais natural a interação entre o homem e a máquina, do que interfaces do tipo comando e consulta, utilizadas anteriormente no sistema operacional DOS. O *Visual Basic*[®] é um programa amplamente utilizado para se criar aplicativos no sistema operacional Windows[®], fornecendo uma gama completa de ferramentas para os programadores. O pacote Matlab 5.5[®] também foi utilizado para a implementação das rotinas de otimização numérica, execução de gráficos e verificação dos resultados experimentais, pois oferece um ambiente próprio para tratamento numérico e incorpora uma série de bibliotecas.

5.2.2 Metodologia de implementação

O objetivo principal do desenvolvimento e implementação de um programa para planejamento experimental e MSR é o entendimento sobre essa linha de pesquisa e sua adequação aos problemas de ajuste de modelos em componentes de máquinas rotativas. Há uma perspectiva futura de juntar esse programa a dois programas já implementados pelo grupo de

trabalho: confiabilidade de sistemas mecânicos e otimização com métodos heurísticos. O Fluxograma do programa é ilustrado pela Figura 5.2.

Na etapa da definição do problema, o pesquisador deve conhecer o comportamento e o tipo de sistema que está estudando. Sem esse conhecimento prévio, toda a teoria sobre planejamentos experimentais e otimização, pode resultar em respostas equivocadas. Portanto, há o reforço de que essas técnicas matemática-estatísticas devem ser utilizadas em conjunto com o conhecimento técnico sobre o sistema que será testado e inferido.

Os planejamentos experimentais implementados foram: planejamento fatorial (2 níveis), planejamentos fracionários (alguns casos), planejamentos fatoriais com ponto central (PFC); parcialmente os arranjos ortogonais propostos por Taguchi dentro da metodologia de projeto robusto e os Planejamentos Compostos Centrais (PCC). Foram implementados uma opção para os planejamentos seqüências de 1ª. Ordem com busca através do gradiente e dois métodos de otimização: Newton e Quasi-Newton.

As Figuras 5.3 (a) e (b) apresentam a estrutura do programa em VB ® e a tela de entrada para o projeto experimental.

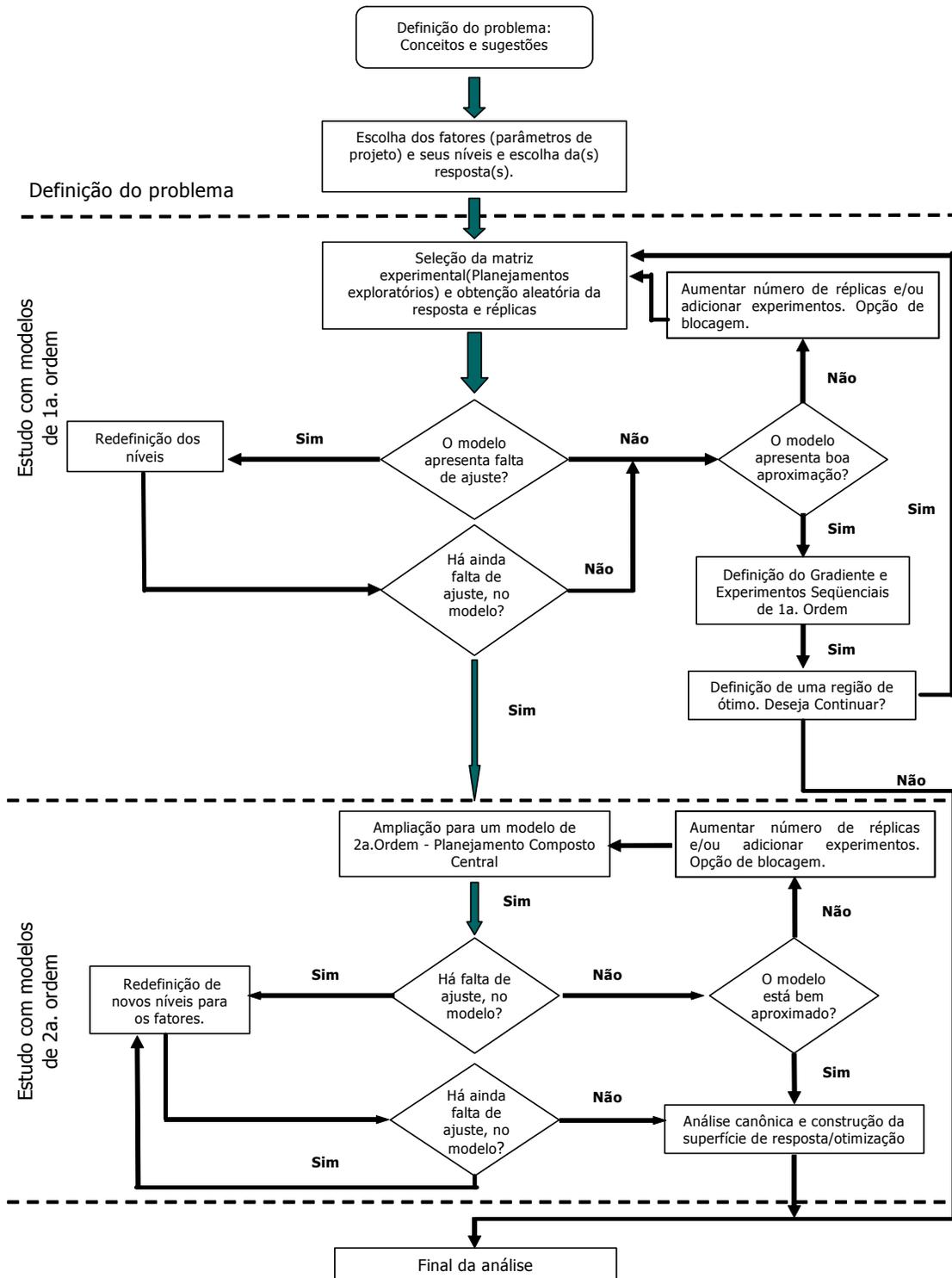
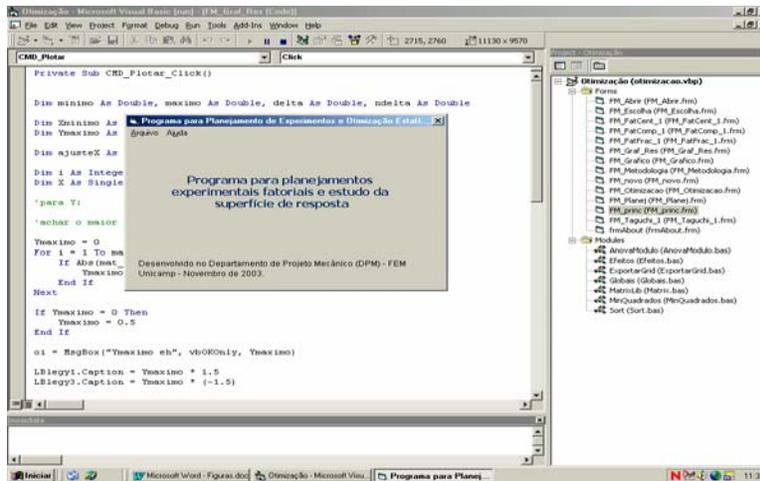
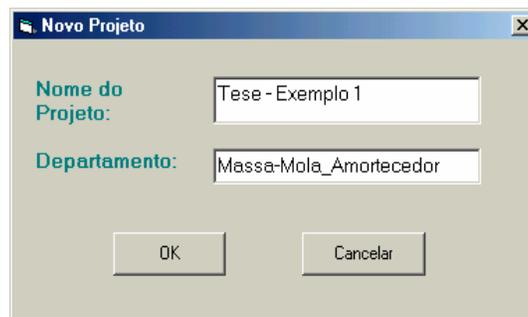


Figura 5.2 – Fluxograma do Programa Implementado para Planejamento Experimental e MSR.



(a)



(b)

Figura 5.3 (a) (b) – Visão geral do programa e dos módulos implementados.

A) Para gerar a matriz experimental foi utilizado o algoritmo de Yates, seguindo uma ordem padrão (Cada coluna da matriz segue a ordem de 2^n experimental), utilizando a codificação das variáveis naturais para um intervalo de $[-1,1]$. Esse procedimento facilita o trabalho algébrico, bem como a construção da matriz experimental. No programa foi utilizada a seguinte expressão:

$$x_i = \frac{\xi_i - n_c}{\Delta x_i} \tag{5.1}$$

na qual, ξ_i representa o nível da variável natural do projeto ou sistema, n_c é o ponto central utilizado no experimento e Δx_i é o valor de escala ou o incremento na variável independente.

B) Foi implementado um algoritmo de combinações, para se obter além dos efeitos principais, todas as interações com n fatores, utilizando a equação de combinações:

$$C_n^k = \frac{k!}{(k-n)!(n!)} \quad (5.2)$$

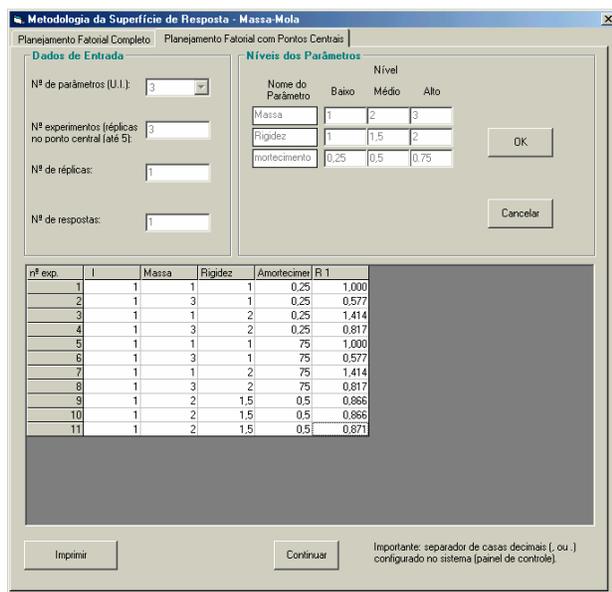
C) Após as combinações entre os fatores, foi implementado o cálculo do efeito principal – contraste com a equação (5.3), e os efeitos de interação é dado pela equação (5.4).

$$\text{Efeito Principal} = \bar{y}_+ - \bar{y}_- \quad (5.3)$$

$$\text{Interações} = \frac{\bar{y}_+ - \bar{y}_-}{2} \quad (5.4)$$

O erro padrão é dado pela expressão (5.5):

$$\hat{EP} = \frac{\sum(\text{termos de ordem mais alta})}{n} \quad (5.5)$$



(a)



(b)

Figura 5.4 (a) – Tela de entrada (montagem da matriz experimental); (b) tela dos cálculos dos efeitos e probabilidade normal.

Com os efeitos principais (contrastes) e os efeitos de interação, realiza-se o teste de ANOVA e traça-se um gráfico baseado na distribuição Normal (Probabilidade Normal).

Nesta fase do estudo da significância de efeitos, a ANOVA tem como fontes de variabilidade (F.V) os efeitos principais e os efeitos de interação (SS na equação 5.7). A Média Quadrática (MQ) é obtida pelo quociente entre a SQ (equação 5.8) e o número de graus de liberdade de cada efeito (principal e de interação). Com isso, cada efeito contribui para a Soma Total da Variabilidade no experimento [Figura 5.5 (b)]. A relação $MQ_{\text{efeito}}/MQ_{\text{erro}}$ é a relação F_0 (calculada), que é comparada individualmente com o valor correspondente tabelado da distribuição $F_{\alpha, g, l}$ (em função do intervalo de confiança adotado e do número de graus de liberdade), testando-se a hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}, \text{ ou seja, verifica-se se o efeito não altera ou altera significativamente a resposta.}$$

$$SS_{(Efeito)} = \frac{\text{Contraste}}{n2^{k-1}} \quad (5.7)$$

$$SQ = \frac{(\text{Contraste})^2}{n2^k} \quad (5.8)$$

Sendo o Contraste = $\bar{y}_+ - \bar{y}_-$

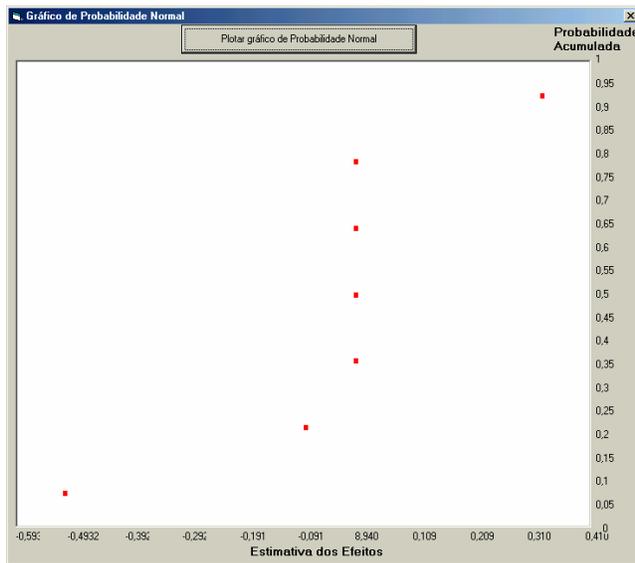
O gráfico de probabilidade normal [Figura 5.4(a)] é uma ferramenta visual que auxilia na visualização dos efeitos (principais e de interação), considerando uma distribuição normal centrada em (zero; σ^2), que auxilia o teste da ANOVA dos dados. Assim, os efeitos que são desprezíveis tendem a se concentrar próximos a uma reta. Com isso, a probabilidade normal tende a isolar os efeitos importantes daqueles que se diferenciam de zero devido ao erro experimental.

O cálculo da Probabilidade Acumulada é dado pela expressão:

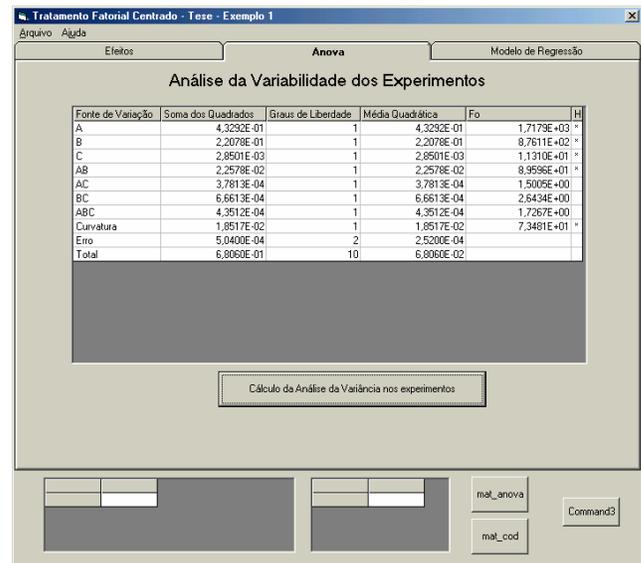
$$P_i = \frac{100(i - 0.5)}{2^{k-1}} \quad (5.9)$$

Sendo k = número de parâmetros e i = número (ordem crescente) do experimento.

As Figuras 5.5 (a) e (b) apresentam a saída do programa para esta análise.



(a)



(b)

Figura 5.5 – (a) Tela de Gráfico de Probabilidade Normal e (b) tela da Análise da Variância (ANOVA) para os efeitos.

O procedimento descrito acima para a entrada de dados do planejamento experimental, a construção da matriz experimental, cálculo dos efeitos, Análise da Variância e Gráfico de Probabilidade é repetido para planejamentos fracionários, com a diferença que há a necessidade de se definir a fração utilizada (1/2; 1/4;...), pois as combinações ficam reduzidas em função dos fatores que serão confundidos, porém o procedimento de cálculo é basicamente o mesmo. A implementação dos planejamentos de Taguchi segue a teoria descrita no Capítulo 3 (item 3.4). As matrizes são compostas por três níveis utilizando arranjos ortogonais.

Os planejamentos fatoriais e fracionários são *Screening Plannings*, ou seja, quando há um número elevado de parâmetros, esses experimentos são indicados para um estudo inicial para refinar os parâmetros. Dessa forma, pode se utilizar novamente outro planejamento experimental. Com um experimento de dois níveis, obtêm-se um polinômio de 1ª. Ordem para modelar a relação entre a resposta e os fatores (parâmetros de projeto). A avaliação do ajuste do polinômio é feita através da Análise da Variância e dos gráficos de resíduos. Entretanto, planejamentos com dois níveis não apresentam precisão suficiente para identificar possíveis curvaturas sobre a superfície. Neste caso, amplia-se o planejamento fatorial com pontos centrais (PFC). Neste tipo de planejamento são adicionados valores intermediários dos níveis para cada fator, na notação codificada (0), replicados no ponto central, não alterando as estimativas feitas pelo planejamento fatorial. Com esse tipo de planejamento, é possível se obter uma estimativa do erro, através das réplicas no ponto central e identificar possíveis curvaturas ($SQ_{curvatura}$), dada por:

$$SQ_{curvatura} = \frac{n_F n_C - (y_F - y_C)^2}{n_F + n_C} \quad (5.11)$$

Segundo Montgomery & Runger (2003), quando são adicionados pontos centrais ao planejamento 2^k tem-se o modelo:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^k \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon \quad (5.12)$$

No qual a parcela β_{jj} representa os efeitos quadráticos puros. O teste de curvatura testa a hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \sum_{j=1}^k \beta_{jj} = 0 \\ H_1 : \sum_{j=1}^k \beta_{jj} \neq 0 \end{cases}$$

Se o modelo estiver bem ajustado, significa que a superfície representa a relação fatores x resposta. Portanto, através de pequenas extrapolações, com ensaios seqüenciais pode-se caminhar sobre uma reta, representada pelo gradiente da função, para procurar um ponto ótimo (máximo ou

mínimo). Cada polinômio ajustado é avaliado pela ANOVA e pelo gráfico de resíduos. Dessa forma, a Metodologia de Superfície de Resposta é constituída de duas partes: modelagem e deslocamento. Essas etapas são repetidas até que se atinja uma região ótima (máxima ou mínima) da superfície investigada. A modelagem normalmente é feita ajustando-se os modelos lineares ou quadráticos aos resultados experimentais obtidos em planejamentos fatoriais replicados no ponto central. A Figura 5.6 apresenta o modelo ajustado e a Análise da Variância para verificar sua representatividade.

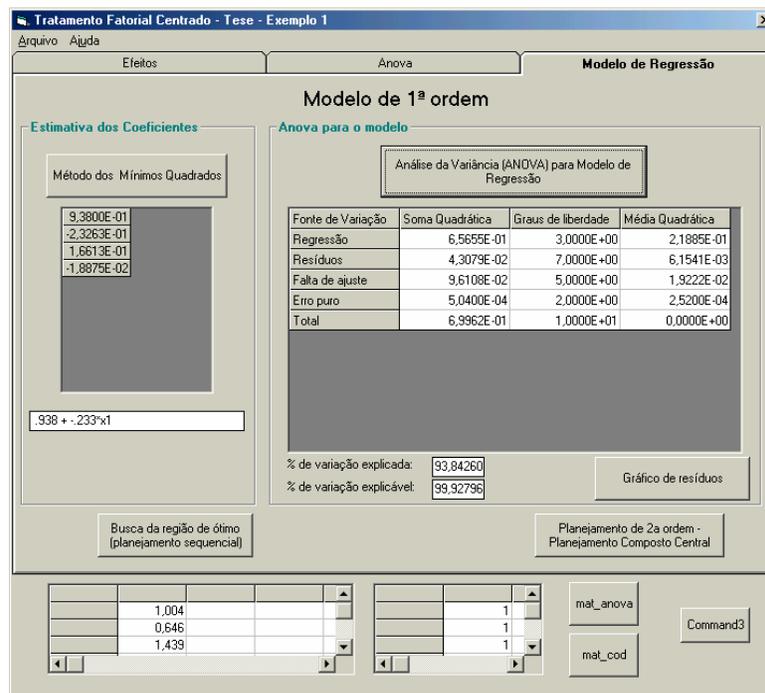


Figura 5.6 – Interface para o ajuste polinomial.

Uma vez obtida a superfície de resposta e, estando o modelo bem ajustado, o experimentador pode melhorar a resposta do componente ou sistema através de novos experimentos seqüenciais. A partir do ponto central (PFC), é traçada uma reta perpendicular às curvas de nível para identificar regiões de máximo ou mínimo, ou seja, é determinado o gradiente da função, como mostra a Figura 5.7.

Assim, o caminho de máxima ou mínima inclinação inicia-se a partir dos pontos intermediários (dentro do experimento fatorial centrado). O caminho de procura é percorrido ao longo das

variáveis x_1, x_2, \dots, x_k . É comum, assumir uma [1] unidade de deslocamento, para o coeficiente de maior valor. Por exemplo, em um polinômio com duas variáveis, assumindo que x_1 tenha o coeficiente de maior valor, pode-se utilizar o valor de b_2/b_1 para o incremento de x_2 . Assim, a partir do ponto central, tem-se um planejamento seqüencial que avança sobre o polinômio extrapolado para encontrar pontos de máximo ou mínimo locais. Uma vez encontrada uma mudança na resposta, indicando uma “descida” ou “subida” é realizado um novo planejamento fatorial centrado nas combinações dos valores encontrados na inversão da resposta. Na porção fatorial é dado um incremento nos níveis a partir do valor no ponto central. Dessa forma, obtém-se um novo polinômio linear, que será novamente testado. Se o modelo linear ainda representar a região, então o processo descrito é repetido com centro no novo ponto central. Se o modelo linear apresentar falta de ajuste, então opta-se por um polinômio de ordem maior (quadrático), a partir de um novo planejamento (planejamento composto central).

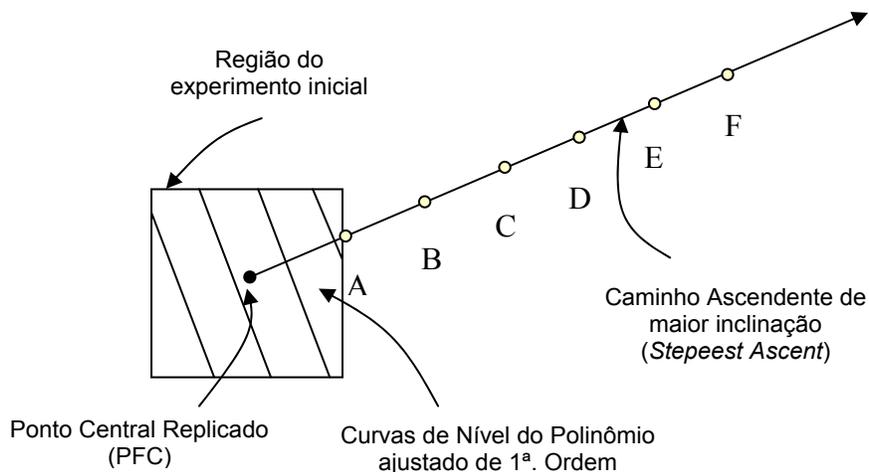


Figura 5.7 – Busca através do gradiente.

Neste caso, pode-se assumir um passo unitário para o maior coeficiente (em módulo) da equação. Assim, a relação para os incrementos das demais variáveis é dada por:

$$\Delta x_j = \frac{b_j}{b_i} \Delta x_i \quad (5.13)$$

Para exemplificar esse procedimento, considera-se o seguinte polinômio:

$$\hat{y} = 0,938 - 0,2326 * x_1 + 0,1661 * x_2 - 0,0189 * x_3$$

O vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -0,2326 \\ 0,1661 \\ -0,189 \end{bmatrix}$$

O vetor define a direção e o sentido dos incrementos dados ao novo planejamento de forma seqüencial. Assim, a relação de correspondência de x_1 com x_2 será: $x_2 = 0,1661/-0,2326 x_1$. Da mesma forma: $x_3 = -0,189/-0,2326 x_1$. A Tabela 5.1 apresenta um exemplo de condução experimental, até que seja obtida uma mudança na resposta indicando um aumento ou diminuição da reposta.

Passo	x_1	x_2	x_3	M	K	C	y
Centro	0	0,00	0,00	2	1,5	0,5	0,859, 0,889,0,865
Centro + Δ	-1	0,69	-0,81	1	1,86	0,29	0,75
Centro + 2Δ
...

Tabela 5.1 - Planejamentos seqüenciais ou caminho de (máxima ou mínima) inclinação.

Uma vez que o procedimento encontre o valor desejado de resposta, o que ocorre quando o modelo linear deixa de ser uma boa interpolação, opta-se por um modelo de ordem maior. No caso, deve ser utilizado um modelo quadrático. A segunda parte do programa refere-se ao planejamento seqüencial com um modelo de 1º. Ordem, ajuste de modelos com ordem maior obtidos pelo Planejamento Composto Central (PCC).A Figura 5.8 apresenta a interface desde módulo do programa.

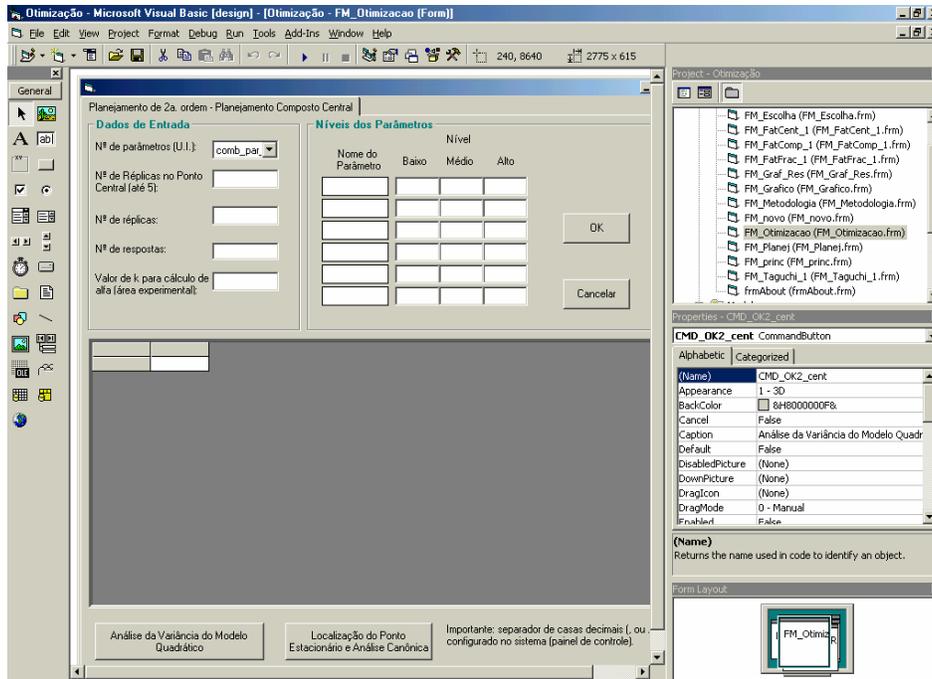


Figura 5.8 – Tela de entrada de dados para planejamentos de 2ª ordem.

Uma vez ajustado um modelo de 2ª ordem e, verificada sua representatividade com a Análise da Variância e dos Gráficos de Resíduos, pode-se aplicar métodos de otimização numéricos, como por exemplo, Quasi-Newton.

5.3 – APLICAÇÕES

5.3.1 – Sistema Vibratório (Massa- Mola-Amortecedor)

Um sistema massa-mola-amortecedor é uma forma reduzida de se representar sistemas mecânicos vibratórios, considerando propriedades como: a massa (M), a rigidez (K) e amortecimento (C). Com o objetivo de estudar e aplicar a teoria de planejamentos experimentais e a Metodologia da Superfície de Resposta, bem como testar o programa em desenvolvimento em uma aplicação mecânica mais simples, optou-se por este sistema vibratório reduzido. Assim, o problema foi dividido em algumas etapas, descritas a seguir.

A) Determinação dos níveis dos fatores (variáveis independentes)

Fatores	Níveis		
	Inferior (-1)	Intermediário (0)	Superior (+1)
M - Massa [kgf]	1	2	3
K - Rigidez [kgf.s/m]	1	1,5	2
C - Amortecimento [kgf.m]	0,25	0,5	0,75

Resposta: Frequência Natural Amortecida [rad/s].

Tabela 5.2 – Níveis dos Fatores

As frequências de um sistema massa-mola-amortecedor podem ser obtidas pelas equações:

A frequência natural não amortecida pode ser calculada pela equação: $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

O fator de amortecimento é dado por: $\zeta = \frac{c}{c_{crit}}$

O amortecimento crítico é dado por: $C_{crit} = 2m * w_n$

Assim, a frequência natural amortecida é calculada pela expressão: $w_d = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}$

B) Codificação das variáveis

A Tabela 5.3 apresenta as variáveis independentes na forma codificada (x_1 , x_2 e x_3) e natural (M, K e C). Ambas exprimem limites de variação de modo distintos, ou seja, na forma natural tem-se os valores reais e suas respectivas grandezas, e na forma codificada os valores são divididos pela faixa de variação, transformando-se em números adimensionais (um tipo de parametrização). As expressões utilizadas para codificar os fatores são:

$$x_{i1} = M - 2 \quad x_{i2} = \frac{K - 1,5}{0,5} \quad x_{i3} = \frac{C - 0,5}{0,25}$$

C) Montagem da matriz experimental

O sistema foi simulado computacionalmente, no qual as respostas foram multiplicadas por um vetor (ruído) para simular erros aleatórios. A matriz experimental é obtida com a utilização de um planejamento fatorial centrado (3 repetições no ponto central), o qual permite estimar o erro aleatório.

N.Exp	Parâmetros de Controle			Variáveis Codificadas			Resposta
	M [kgf]	K [kgf.m]	C [kgf.s/m]	x ₁	x ₂	x ₃	w _d [rad/s]
1	1	1	0,25	-1	-1	-1	1,004
2	3	1	0,25	1	-1	-1	0,646
3	1	2	0,25	-1	1	-1	1,439
4	3	2	0,25	1	1	-1	0,839
5	1	1	0,75	-1	-1	1	0,949
6	3	1	0,75	1	-1	1	0,589
7	1	2	0,75	-1	1	1	1,391
8	3	2	0,75	1	1	1	0,848
9	2	1,5	0,5	0	0	0	0,865
10	2	1,5	0,5	0	0	0	0,859
11	2	1,5	0,5	0	0	0	0,889

Tabela 5.3 – Matriz experimental (PFC), com três repetições no ponto central.

D) Calculo dos efeitos, interações e identificação dos efeitos mais significativos pela ANOVA

Fonte de Variabilidade (F.V)	S.Q (Soma Quadrática)	G.L (Graus de liberdade)	Q.M (Média Quadrática)	F (Distribuição)	Efeitos
Média/Intersecção					0,963
x_1 – Massa (M)	0,433	1	0,433	171,8	- 0,465
x_2 – Rigidez (K)	0,221	1	0,221	87,6	0,332
x_3 – Amortecimento (C)	0,029	1	0,029	11,3	0,038
Massa x Rigidez	0,023	1	0,023	89,5	-0,106
Massa x Amortecim.	0,0004	1	0,0004	1,5	0,014
Rigidez x Amortecim.	0,0007	1	0,0007	2,64	0,018
Massa x Rigidez x Amort.	0,0004	1	0,0004	1,73	0,015
Curvatura	0,019	1	0,019	73,4	
Resíduo	0,0005	2	0,0025		
Total	0,681	10			

Tabela 5.4 – ANOVA dos efeitos do sistema vibratório.

A análise da variância foi utilizada para testar hipóteses sobre os efeitos principais e de interação, e confirma que os efeitos mais significativos no exemplo são os efeitos principais de Massa e Rigidez e a interação entre ambas, já o efeito principal de amortecimento e suas interações são pouco pronunciados. Este comportamento era teoricamente esperado e o planejamento experimental o confirmou. O gráfico de Probabilidade Normal pode ser utilizado como uma ferramenta visual para confirmar os resultados obtidos da tabela de ANOVA dos efeitos. Pode-se verificar através do cálculo dos efeitos, que mesmo tendo o amortecimento, a massa e a rigidez são as variáveis que mais influenciam na resposta da frequência natural amortecida. Os demais efeitos se distribuem próximo de uma reta, mostrando que não há distribuições tendenciosas.

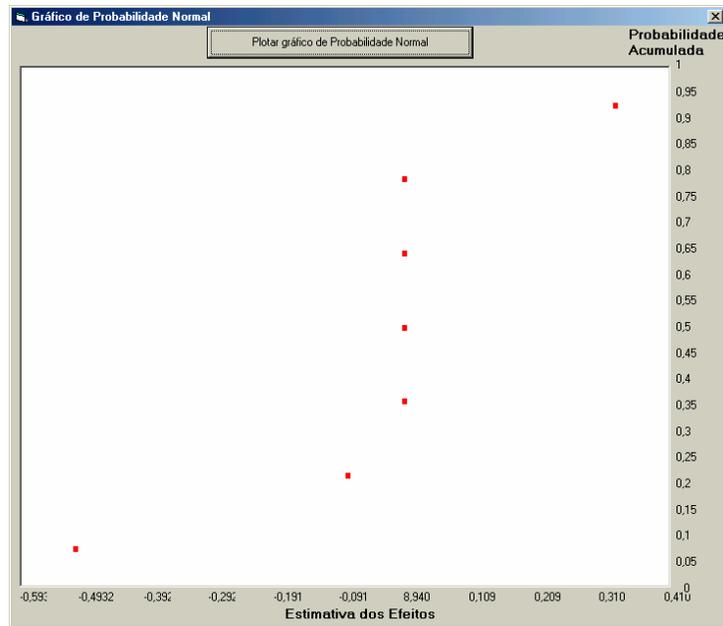


Figura 5.9 – O gráfico de Probabilidade Normal do experimento massa-mola-amortecedor.

E) Estimativa dos parâmetros do polinômio: Modelo de 1a. Ordem

O teste F para a curvatura, sugerido por Montgomery & Runger (2003) se mostrou pronunciado (73,4) o que indica que possivelmente um modelo de ordem mais alta representaria melhor a superfície. Entretanto, o planejamento utilizado é indicado para modelos de 1ª. Ordem e, este foi utilizado para testar o programa, dado por:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

O ajuste dos parâmetros (β_s) pelo método dos mínimos quadrados é dado por:

$$\beta = (X'X)^{-1} * X'*y$$

Considerando-se X , a matriz dos parâmetros codificados, e y o vetor de respostas do sistema, tem-se o vetor: $\beta^T = [0,980 - 0,2326 \ 0,1661 - 0,0189]$, ou seja,

$$\hat{y} = 0,980 - 0,2326 * x_1 + 0,1661 * x_2 - 0,0189 * x_3$$

A equação é expressa sob a forma codificada, a qual deve ser substituída pelos valores reais dos fatores. (As expressões são dadas pelo item B)

$$\hat{y} = 0,980 - 0,2326 * M + 0,4652 + \left[\frac{0,1661K - 0,2491}{0,5} \right] - \left[\frac{0,0189C - 0,0095}{0,25} \right]$$

Assim, o polinômio ajustado será:

$$\hat{y} = 0,867 - 0,2326 * M + 0,0332 * K - 0,0756 * C$$

A Tabela 5.3 apresenta o resíduo entre a resposta experimental e a resposta ajustada:

Experimento	Resposta (y) [rad/s]	Resposta ajustada [rad/s]	Resíduo	Resíduo (%)
1	1,004	1,023	- 0,019	1,9
2	0,646	0,558	0,088	8,8
3	1,439	1,356	0,083	8,3
4	0,839	0,890	- 0,051	5,1
5	0,949	0,986	- 0,037	3,7
6	0,589	0,520	0,069	5,9
7	1,391	1.318	0,073	7,3
8	0,848	0,853	- 0,0046	0,46
9	0,865	0,938	- 0,0730	7,3
10	0,859	0,938	- 0,0730	7,3
11	0,889	0,938	- 0,0730	7,3

Tabela 5.5 - Resíduo do ajuste polinomial.

F) Análise da variância (ANOVA) para o modelo de regressão

Considerando um intervalo de confiança de 95%, para a ANOVA, testa-se as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

Assim, a Análise da Variância verifica duas condições: sendo a hipótese nula (H_0) aceita, significa que não há relação entre a resposta e os fatores no modelo ajustado. Se essa hipótese for rejeitada, então a hipótese alternativa (H_1), indica que há relação entre os fatores e a resposta ajustada, indicando que o modelo utilizado representa a superfície obtida.

Fontes de variabilidade	Soma quadrática	Graus de Liberdade	Média Quadrática
Regressão	0,657 (SS_R)	3	0,219
Resíduos	0,0431 (SS_r)	7	0,0062
Falta de ajuste	0,0135 (SS_{faj})	5	0,0027
Erro puro	0,0005 (SS_{ep})	2	0,00025
Total	0,6996	10	0,070

Tabela 5.6 – ANOVA do modelo de regressão de 1a.Ordem.

$$\% \text{ da variação explicada: } \frac{SQ_R}{SQ_T} = \mathbf{93,8\%}$$

$$\% \text{ variação explicável: } \frac{SQ_T - SQ_{ep}}{SQ_T} = \mathbf{99\%}$$

$$\text{O desvio-padrão pode ser obtido por: } s^2 = \frac{SQ_r}{n-2} = \mathbf{0,0048}$$

Além dos índices calculados, através das somas quadráticas dos resíduos e da regressão em relação à variação total, pode-se avaliar o modelo com relação às somas quadráticas do Erro Puro e da Falta de Ajuste.

O valor teórico é comparado com o valor da distribuição F com 95% de intervalo de confiança, sendo v_1 = graus de liberdade da média quadrática e v_2 = graus de liberdade da média

$$\text{quadrática do resíduo, dado por: } \frac{MQR}{MQr} \cong F_{v_1, v_2}$$

Sendo $\frac{MQR}{MQr} > F_{v_1, v_2}$, pode-se descartar a possibilidade de $\beta = 0$, ou seja, há relação entre a resposta e os parâmetros.

Assim, para o sistema massa-mola-amortecedor tem-se: $v_1 = 3$; $v_2 = 7$.

$$\frac{MQ_R}{MQ_r} = \frac{0,219}{0,0062} = 35,5, \text{ que é comparado com o valor tabelado da distribuição } F_{3,7}(4,35).$$

Assim, **F_{calc} > F_{teórico}**, ou seja, **35,5 > 4,35**. Neste caso, a hipótese nula é rejeitada, e tem-se que a hipótese alternativa é aceita, ou seja, o modelo ajustado representa a relação entre a resposta e os parâmetros, ou ainda a regressão é estatisticamente significativa.

Outra verificação considerando a distribuição F (95% de confiança), verifica a relação $\frac{MQ_{faj}}{M_{ep}}$. Um valor alto para essa relação indicaria muita falta de ajuste no modelo de regressão.

Comparando com o valor F tabelado com $v_1 = 5$; $v_2 = 2$ ($F_{5,2}$) tem-se que: **10,68 < 19,33**.

Neste caso, a relação da média quadrática da falta de ajuste e do erro puro é menor do que o valor tabelado indicando uma falta de ajuste baixa, ou seja, o modelo ajusta os dados.

G) Gráfico de resíduos

O gráfico de resíduos verifica visualmente se há deficiências no modelo ajustado, definido em termos relativos, dado por $e = y - \hat{y}$. Assim, para o sistema massa-mola-amortecedor, a Análise da Variância mostra que o modelo de regressão linear fornece uma boa aproximação entre os fatores (M, K e C) e a Resposta (Frequência Natural Amortecida). Entretanto, a verificação sobre a Falta de Ajuste do modelo, apresenta valores próximos entre os valores da distribuição F tabelada e a razão F calculada, indicando que o modelo pode ter falta de ajuste. Essa conclusão é reforçada pelo gráfico de resíduo (Figura 5.10), que apresenta um formato curvilíneo dos resíduos. Assim, se os resíduos não indicassem uma tendência quadrática, poderia se optar pelo modelo linear, ou seja, que é um modelo mais simples.

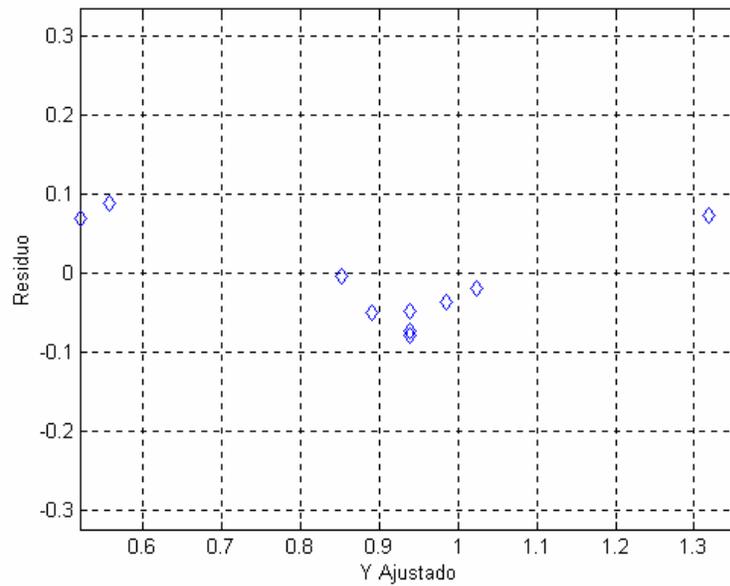
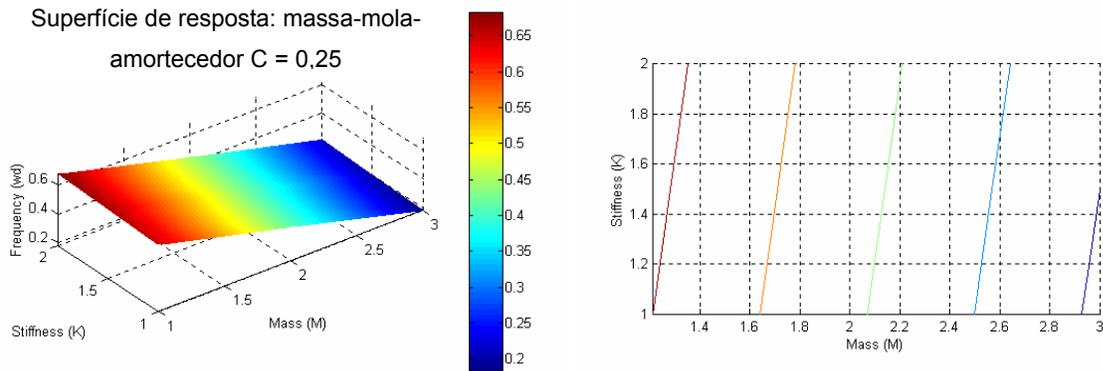


Figura 5.10 - Gráfico de resíduos x resposta ajustada (Frequência Natural Amortecida).

H) Superfície de resposta da relação parâmetros (M, K e C) e da resposta w_d (frequência natural amortecida)



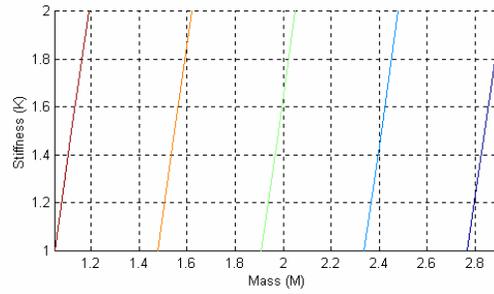
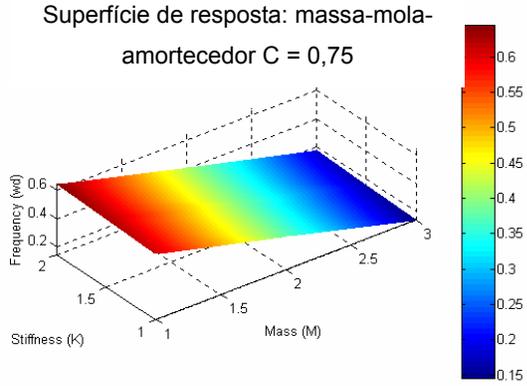


Figura 5.11 - Variação da superfície de resposta (com o amortecimento fixo).

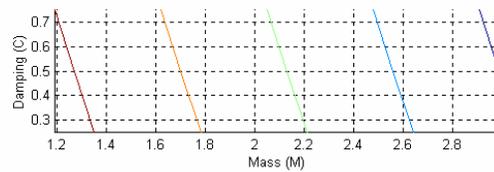
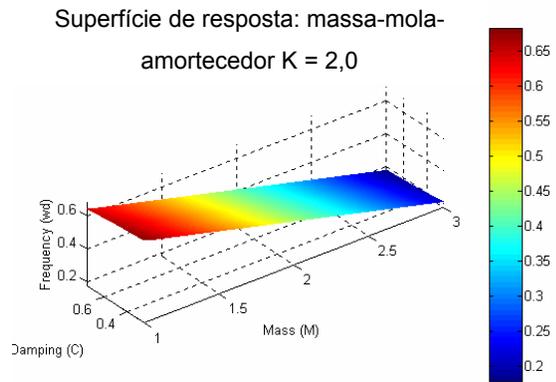
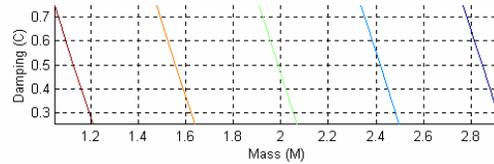
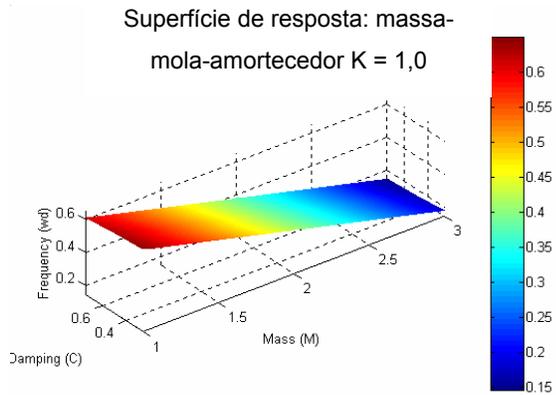


Figura 5.12 - Variação da superfície de resposta (com a rigidez fixa).

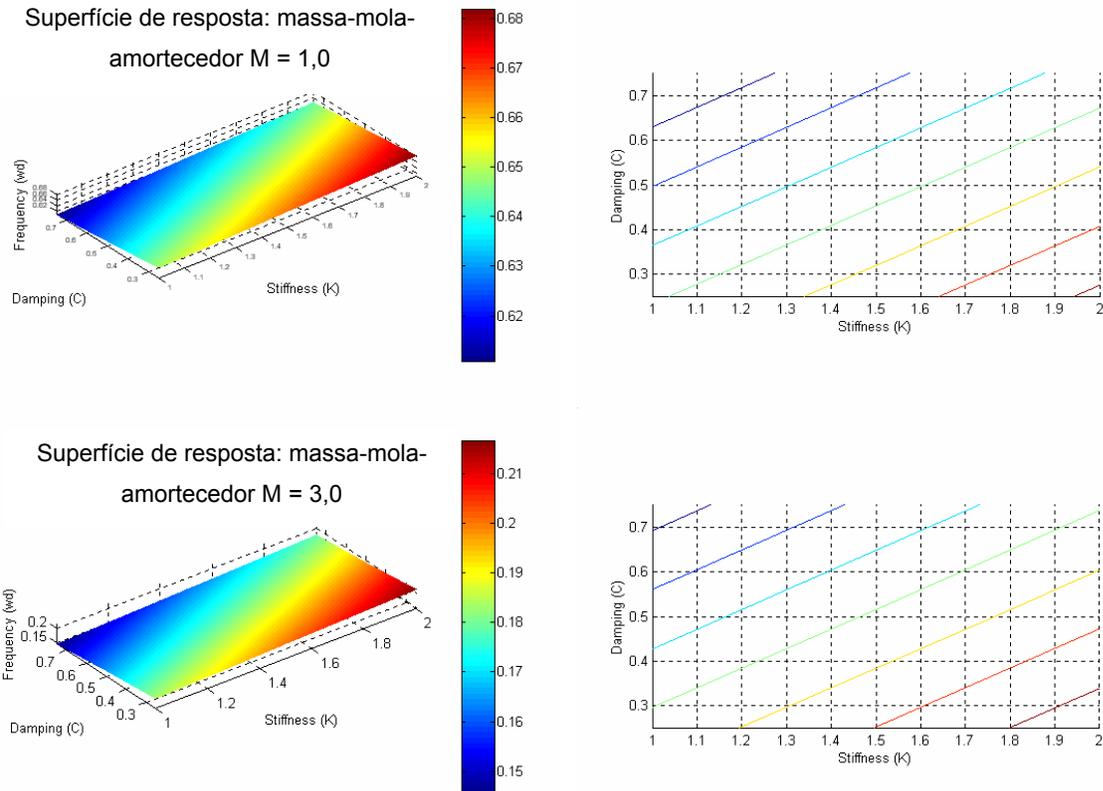


Figura 5.13 - Variação da superfície de resposta (com a massa fixa).

Com essa aplicação, conclui-se que o programa é capaz de montar o planejamento experimental, estimar os efeitos sobre a resposta, realizar o teste de ANOVA para confirmar os efeitos de maior influência, traçar o gráfico de probabilidade normal, ajustar o polinômio de primeira ordem e, verificar sua representatividade pelo teste de ANOVA para o modelo. O gráfico de superfície de resposta foi implementado no Matlab 6.5 ® pela facilidade das ferramentas disponíveis nesse ambiente, podendo ser futuramente implementado no Visual Basic® como módulo do programa principal. Para se obter novas respostas para o sistema Massa-Mola-Amortecedor, o planejamento de primeira ordem pode ser ampliado com um planejamento rotacionado com \sqrt{k} , para verificar se o modelo de 2ª. Ordem melhora a razão entre a falta de ajuste e o erro puro.

5.3.2 – Estudo e aplicação da metodologia em mancais radiais hidrodinâmicos de máquinas rotativas.

Com o crescente desenvolvimento computacional em diversas áreas da engenharia, a utilização de ferramentas computacionais dedicadas a análise específica de rotores, tem sido cada vez mais aplicadas. Uma das preocupações em se estudar e projetar máquinas rotativas, além do monitoramento e determinação de picos excessivos de amplitudes para determinadas frequências, causando possíveis falhas em componentes mecânicos, é também determinar as frequências próprias de ressonância dos componentes mecânicos que a compõem. Assegurando que tais frequências de ressonância não apareçam durante o regime normal de funcionamento, somente em regimes transitórios. A análise das vibrações em máquinas rotativas pode ocorrer de duas formas, uma pelo estudo das vibrações em estruturas e a outra na dinâmica de rotores. A análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas horizontais (turbogeradores) é bastante complexa, constituída geralmente por rotores, eixos, mancais, acoplamentos, carcaça, fundação e outros equipamentos auxiliares. O comportamento dinâmico é determinado pela interação de todos esses componentes, sendo que esses possuem uma maior ou menor influência na resposta dinâmica do sistema rotor-fundação (Abdon, 2003 apud Piotrowski, 1995). Matematicamente, um rotor pode ser modelado através do método dos elementos finitos, composto basicamente por três elementos: disco, eixo e mancais. A Figura 5.14 ilustra o sistema de coordenadas inerciais (X, Y, Z) e o sistema de coordenadas (x, y, z) fixado no disco.

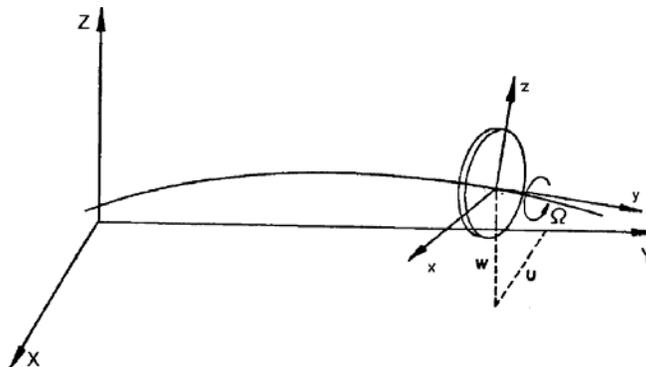


Figura 5.14 – Sistemas de coordenadas (referências) de um rotor.

O método de elementos finitos expressa o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, multiplicando esses pontos nodais por uma função de interpolação. Este método produz resultados satisfatórios no estudo de problemas estruturais. As equações de movimento dos componentes do sistema mecânico podem ser deduzidas aplicando-se a equação de Lagrange definida pela equação 5.14, nas expressões das energias cinéticas (E_c), e potenciais (E_p) dos componentes.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (5.14)$$

Sendo q_i é a i -ésima coordenada generalizada; F_{q_i} é a força generalizada atuando na direção da i -ésima coordenada generalizada.

Sendo que a equação de movimento do rotor pode ser descrita pela equação:

$$[M]\ddot{q}(t) + [C]\dot{q}(t) + [K]q(t) = \{f_e\} + \{f_o\} - \{p\}, \quad (5.15)$$

sendo,

$[M]$	a matriz de massa do eixo e dos elementos a ele associados;
$[C]$	a matriz de amortecimento do eixo, incluindo a matriz giroscópica;
$[K]$	a matriz de rigidez do eixo;
$\{f_e\}$	o vetor de forças externas;
$\{f_o\}$	o vetor de forças relativas ao filme de óleo;
$\{p\}$	a força peso do disco que compõe o rotor;
$\{\ddot{q}\}$	o vetor de aceleração em relação ao centro do eixo (em coordenadas generalizadas);
$\{\dot{q}\}$	o vetor de velocidade em relação ao centro do eixo (em coordenadas generalizadas);
$\{q\}$	o vetor de deslocamento em relação ao centro do eixo (em coordenadas

generalizadas

As forças externas $\{f_e\}$ podem ser posicionadas sobre o disco rígido, como forças de desbalanceamento no rotor devido a presença de excentricidade da massa. O vetor de forças que surgem no sistema devido ao filme de óleo é representado por $\{f_o\}$, e depende da posição e da velocidade do rotor, em relação as coordenadas do centro do mancal.

O programa RotorTest[®] foi iniciado com os professores Katia Lucchesi Cavalca e Franco Giuseppe Dedini durante o período de doutorado de ambos na Itália, para que fossem realizados experimentos simulados com rotores. O Rotortest[®] é um programa de gerenciamento, análise e simulação de rotores horizontais, capaz de montar os modelos matemáticos, e obter as soluções de resposta em frequência dos rotores durante o projeto e seu funcionamento. O programa foi implementado inicialmente em linguagem Fortran, tendo interface com usuário através da linguagem Visual Basic 5.0[®]. O Visual Basic[®] possui uma programação baseada em eventos e objetos. Isso significa dizer que o programador não é mais responsável pelo fluxo do programa, mas sim o usuário. O usuário seleciona entre as opções apresentadas, e o programa encarrega-se de responder corretamente. Isso resulta em um programa de interface interativa com o usuário (*user friendly*). Em comparação com as linguagens procedurais como C e Fortran, por exemplo, nos quais o programa é sempre lido do início ao fim. A programação em Visual Basic é feita em seções menores, com uma seção para cada tipo de evento, tendo-se uma programação enxuta, organizada e mais acessível para correções. A opção pelo uso do Visual Basic para a construção da interface com o pacote Rotortest[®] se deve a três características que tal pacote apresenta: ambiente gráfico acessível para qualquer tipo de usuário, interface interativa com o usuário e facilidade de programação. O pacote Rotortest[®] é formado por 165 programas escritos em linguagem Fortran 90, divididos em blocos funcionais, ilustrados pela Figura 5.15.

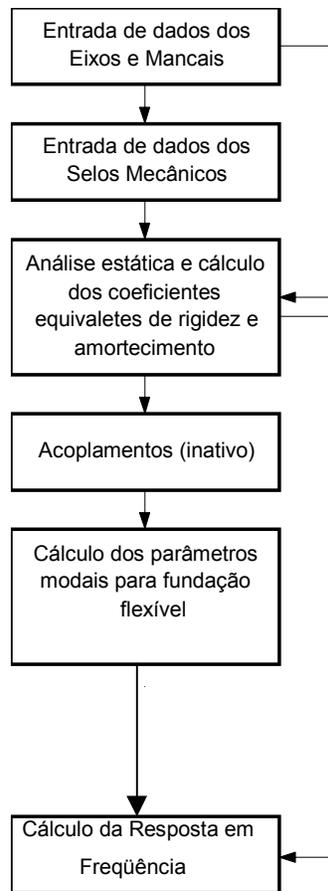


Figura 5.15 - Blocos funcionais que compõem o Rotortest[®]

Esses programas estão acoplados internamente. Assim, à medida que se executa cada um dos blocos, são realizados cálculos sobre o sistema rotativo e a estrutura (fundação), como por exemplo, a modelagem por elementos finitos do conjunto eixo-mancal-massa, cálculo de resistência dos materiais e montagem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema. Essas informações são armazenadas em arquivos do tipo .txt e linguagem de máquinas (para facilitar cálculos mais longos), e o resultado gráfico e numérico são apresentados através de curvas de respostas em frequência ou resposta ao desbalanceamento para cada um dos nós do rotor, coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais para cada velocidade e curvas das deformações do rotor em cada nó especificado. A figura 5.16 apresenta o conjunto eixo-mancais e massa concentrada, discretizados pelo método dos Elementos Finitos. As figuras 5.17 (a), (b) e (c) apresentam algumas saídas do programa Rotortest[®]

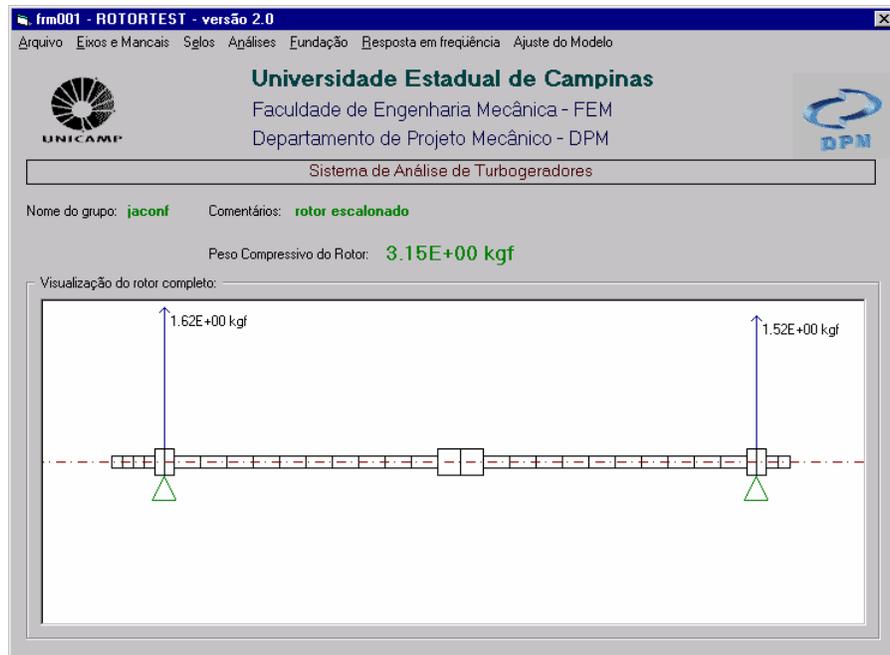
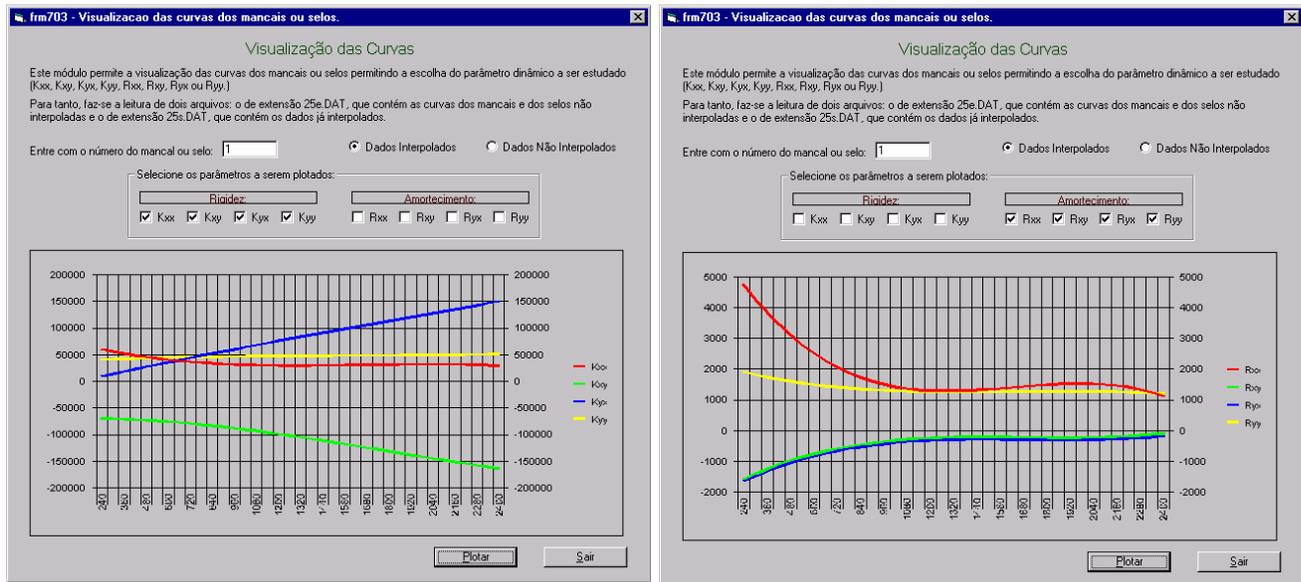


Figura 5.16 – Conjunto eixo-mancal-massa do programa Rotortest®.

A entrada de dados no programa é interativa, sendo solicitada de acordo com o tipo de processamento necessário a cada momento. Todos estes módulos estão associados através do “Menu Principal” do sistema, que transfere o controle para os diferentes blocos funcionais, que, por sua vez, são compostos de diferentes sub-rotinas específicas. A transferência de dados de uma rotina ou módulo para outro é realizada através de arquivos (uma vez que se tratam de vários programas executáveis diferentes), que podem ser criados iterativamente pelo usuário ou automaticamente, como saída de subprogramas. O primeiro passo para que se realize a entrada de dados, é a definição da geometria de cada elemento que compõe o eixo. O usuário entra com dados como diâmetro externo, diâmetro interno, massa concentrada e comprimento para cada um dos elementos dos eixos. Além disso, também são solicitados os dados como posição e tipo de mancais utilizados. Ao final da entrada de dados relativos aos elementos do eixo, este é esquematizado graficamente para a apreciação do usuário. Neste passo, o programa monta as matrizes de massa, rigidez e amortecimento correspondentes ao eixo. O passo seguinte consiste na entrada de dados relativos aos mancais do sistema. Os dados necessários são: tipo de mancal (neste caso, cilíndrico), folga radial, número de lóbulos, dimensão angular dos lóbulos, largura da ranhura, temperatura do lubrificante, o coeficiente de discretização da malha para o método de diferenças finitas para o cálculo da rigidez do filme de óleo, e imposição de deslocamento ou

força no locus inicial do eixo. Neste passo, o programa calcula os coeficientes diretos e acoplados de rigidez e amortecimento do filme de óleo. Então, tais termos são inseridos nas matrizes de rigidez e amortecimento montadas para o eixo. Com os dados fornecidos e os calculados nos programas do terceiro bloco, é possível realizar o cálculo da resposta do rotor, a partir de uma velocidade inicial até uma velocidade final, com um determinado passo de velocidade, sendo que todos estes parâmetros são definidos pelo usuário do programa. É possível também a realização de uma avaliação de estabilidade do sistema em todas estas velocidades. Neste passo, os termos associados ao disco são inseridos e, bem como a matriz de efeitos giroscópicos. Neste ponto, também é definido o vetor de carregamento atuante no sistema. Com o sistema global montado, a solução dinâmica do sistema pode ser obtida.



(a)

(b)

Figura 5.17 (a) – Exemplo do Gráfico de rigidez [kgf/mm] calculada nos eixos x e y dos mancais; **b)** Variação dos coeficientes de amortecimento [kgf.s/mm] em função da rotação para o mancal.

Com a definição do intervalo de velocidades para análise, entrada da temperatura do filme de óleo, velocidades para cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais e imposição de deslocamento nos nós do eixo na coordenada dos mancais, é possível visualizar as curvas de variação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo em função da

velocidade de rotação. Os pontos calculados são interpolados por uma função cúbica para obtenção das curvas. A Figura 5.17(a) (b) apresenta a variação dos coeficientes de rigidez e do amortecimento (K_{xx} , K_{xy} , K_{yx} e K_{yy}) com a velocidade de rotação do sistema, respectivamente.

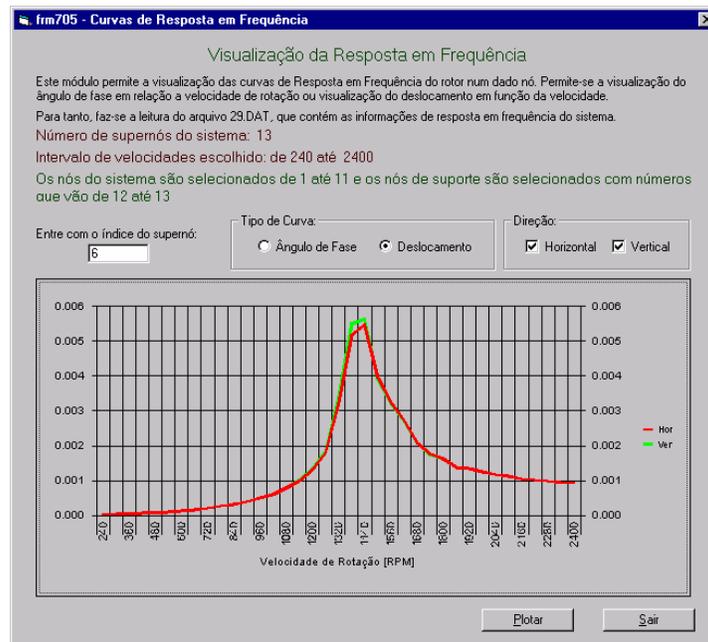


Figura 5.18 - Resposta ao desbalanceamento de 3 gramas – nó de aplicação (unidades de deslocamento em milímetros – eixo vertical – e velocidade de rotação em RPM – eixo horizontal).

Com esse cálculo levanta-se a primeira velocidade crítica do rotor, que para a bancada montada no laboratório de vibrações do DPM, é de 1440 RPM. A Figura 5.19 é uma das saídas do pacote Rotortest® referente às deformadas do rotor (neste caso, é a primeira deformada).

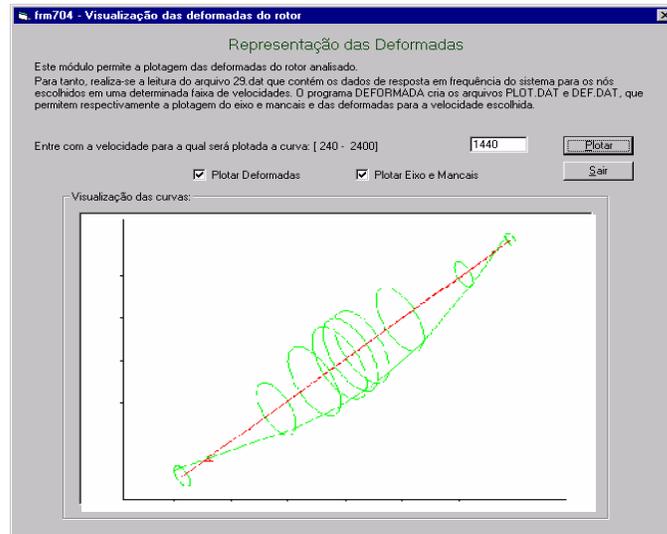


Figura 5.19 – Deformada do rotor – velocidade de 1440 RPM.

A) Simulações Preliminares

Uma série de diferentes configurações para o rotor foi testada, com base nas possibilidades físicas e de medição do sistema. As tentativas iniciais visaram obter uma configuração para o rotor, de modo que o mesmo apresentasse duas velocidades críticas dentro da faixa de 0 a 3600 RPM (velocidade máxima disponível no motor de acionamento).

Em uma primeira etapa, foram avaliados rotores com eixo de comprimento 112 [cm] e diâmetro 1,20 [cm], com um disco no centro do eixo. Essa configuração resultou numa primeira velocidade crítica próxima a 400 [RPM], e numa segunda acima de 3600 RPM. Uma segunda alteração foi reduzir gradativamente o comprimento do eixo para 80 e 60 [cm], obtendo-se resposta para a primeira velocidade crítica, os valores de 800 e 1300 RPM, respectivamente, e para a segunda crítica, valores acima de 3600 [RPM]. Assim, a configuração final do eixo constituiu-se de uma massa centrada, que forneceu a maior velocidade crítica (primeira velocidade). É apresentado um croqui e uma foto da bancada montada (Figuras 5.20 e 5.21) no laboratório de vibrações do Departamento de Projeto Mecânico.

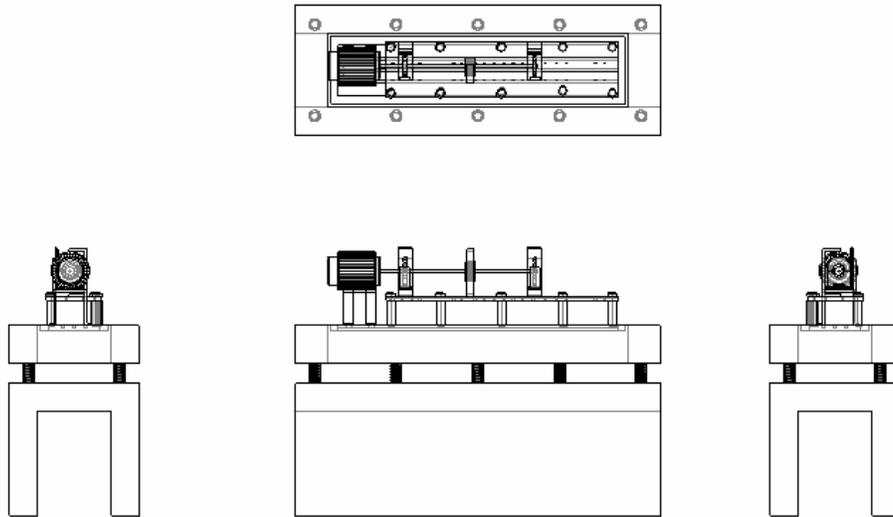


Figura 5.20 – Representação gráfica da bancada experimental.



Figura 5.21 – Esquema do experimento simulado no programa RotorTest[®].

B) Modelo Final

O modelo simulado é uma referência à montagem da bancada, constituído de um eixo (aço 1030), de comprimento 69 [cm] e diâmetro 1,20 [cm], com um disco de 4,70 [cm] de comprimento e 9 [cm] de diâmetro e de 2,339 [kg] na posição de 34,5 [cm], correspondente ao meio da distância entre os mancais [Jacon & Cavalca, 2000].

Foram escolhidos três conjuntos de mancais cilíndricos, para se estudar suas influências nas respostas da primeira velocidade crítica e na amplitude na direção x , considerando a massa concentrada, com desbalanceamento de 50 [μm]. Foram utilizados mancais curtos e com um lóbulo, com relação L/D - modelo de Ocvirk do tipo cilíndrico plano, que encontram muita aplicação na indústria metal-mecânica. Quanto à excitação do sistema, foi considerada uma massa de desbalanceamento de 3 gramas a uma distância de 5 [cm] da linha neutra do eixo. A Figura 5.20 apresenta a configuração geométrica do eixo e as posições dos mancais. Nesta etapa da execução do programa, todos os dados relativos à geometria dos elementos finitos para o eixo, bem como os dados geométricos dos mancais são inseridos, e o programa executa a análise estática do sistema.

O rotor foi modelado pelo método dos Elementos Finitos com a configuração de escalonamentos. Os escalonamentos dos mancais, com comprimento de 2,0 [cm] e diâmetro de 3,0 [cm] correspondem às buchas de fixação do eixo, para posterior montagem nos mancais hidrodinâmicos. O escalonamento central foi considerado devido ao fato de que, pelo comprimento relativamente grande do disco em relação ao diâmetro do eixo (4,7 [cm] de comprimento para o diâmetro de 1,2 [cm] do eixo), esta alteração acarretaria em um aumento da rigidez do eixo nesta região. Alterou-se essa seção de 1,2 [cm] para 3,0 [cm], visando contemplar a rigidez. Esse efeito de aumento na rigidez poderia acarretar na obtenção de uma velocidade crítica para o primeiro modo de flexão superior ao valor real. Desta forma, optou-se por representar a massa restante do disco como massa concentrada no nó central. O modelo de elementos finitos resultante foi de um modelo com 32 elementos de viga de Euler com 33 nós no total. Com a definição do intervalo de velocidades para análise, entrada da temperatura do filme de óleo e imposição de deslocamento nos mancais, é possível obter e visualizar as curvas de variação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo em função da velocidade de rotação. Os pontos calculados são interpolados por uma função cúbica para obtenção das curvas [Jacon & Cavalca, 2000]. A carga nominal do sistema corresponde ao peso próprio do mesmo, que é de 3,14 [kgf]. Para a aplicação da teoria de planejamentos experimentais e metodologia da superfície de reposta foram utilizadas três folgas radiais, ou seja, três pares de

mancais radiais hidrodinâmicos: 150, 250 e 350 [µm], previamente estimadas no projeto da bancada experimental.

C) Planejamento Experimental – Modelo de 1ª. Ordem

a) Determinação dos níveis das variáveis independentes (parâmetros)

Fatores	Níveis		
	Inferior (-1)	Intermediário (0)	Superior (+1)
L – Comprimento do mancal [mm]	15	25	35
Cd – Folga radial [mm]	0,015	0,025	0,035
T – Temperatura [°C]	10	20	30
D - Diâmetro [mm]	15	25	35

Resposta: Amplitude da massa concentrada na direção x em [mm]

Tabela 5.7 – Níveis dos fatores.

b) Codificação das variáveis

$$x_1 = \frac{(L - 25)}{10} \quad x_2 = \frac{(C_d - 0,025)}{0,01} \quad x_3 = \frac{(T - 20)}{10} \quad x_4 = \frac{(D - 25)}{10}$$

c) Montagem da matriz experimental

Em um primeiro estudo optou-se por um planejamento fatorial central, com 4 réplicas no ponto central. Como o número de parâmetros é relativamente pequeno, não há a necessidade da utilização de planejamentos fracionários, indicados para refinar planejamentos com um número elevado de parâmetros.

As respostas foram simuladas no Rotortest®, com base na matriz experimental montada no Programa Otima 1.0. Nas respostas foram adicionados erros simulados no Matlab 6.5 ® através do comando “Rand”, para representar erros aleatórios inerentes à experimentação física.

Variáveis Independentes (Fatores)									
Exp.	Variáveis naturais				Variáveis codificadas				Resposta
	L [mm]	C _d [mm]	T [°C]	D [mm]	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	Amplitude em x [μm]
1	15	0,15	10	15	-1	-1	-1	-1	0,55
2	35	0,15	10	15	+1	-1	-1	-1	0,89
3	15	0,35	10	15	-1	+1	-1	-1	0,28
4	35	0,35	10	15	+1	+1	-1	-1	0,29
5	15	0,15	30	15	-1	-1	+1	-1	0,69
6	35	0,15	30	15	+1	-1	+1	-1	0,71
7	15	0,35	30	15	-1	+1	+1	-1	0,90
8	35	0,35	30	15	+1	+1	+1	-1	0,36
9	15	0,15	10	35	-1	-1	-1	+1	0,76
10	35	0,15	10	35	+1	-1	-1	+1	1,3
11	15	0,35	10	35	-1	+1	-1	+1	0,29
12	35	0,35	10	35	+1	+1	-1	+1	0,73
13	15	0,15	30	35	-1	-1	+1	+1	0,59
14	35	0,15	30	35	+1	-1	+1	+1	0,87
15	15	0,35	30	35	-1	+1	+1	+1	0,52
16	35	0,35	30	35	+1	+1	+1	+1	0,29
17	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,31
18	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,28
19	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,25
20	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,27

Tabela 5.8 – Matriz experimental fatorial com 4 réplicas no ponto central.

d) Estimativa dos efeitos, identificação dos mais significativos e ANOVA

Fonte de Variabilidade (F.V)	S.Q (Soma Quadrática)	G.L (Graus de liberdade)	Q.M (Média Quadrática)	F (Distribuição)	Efeitos
Média/Intersecção		1			0,686
x ₁ – Comprimento do Mancal (C)	0,003	1	0,003	0,47	0,028
x ₂ – Folga Radial (Cd)	0,265	1	0,265	41,28	-0,257
x ₃ – Temperatura do óleo (T)	0,014	1	0,014	2,24	0,060
x ₄ – Diâmetro (D)	0,0049	1	0,0049	0,76	-0,035
Comp x Folga radial	0,379	1	0,379	58,8	-0.308
Comp x Temperat.	0,476	1	0,476	74,1	-0.345
Comp x Diam.	0,211	1	0,211	32,9	0,023
Folga radial x Temp.	0,270	1	0,270	42,1	0,260
Folga radial x Diam.	0,109	1	0,109	16,9	-0,165
Temp x Diam.	0,276	1	0,276	42,8	-0.265
Comp x Folga xTemp	0,102	1	0,102	15,9	-0.16
Comp x Folga xDiam	0,096	1	0,096	14,9	0.16
Comp x Temp x Diam.	0,051	1	0,051	7,87	0,11
Folga x Temp. x Diam.	0,116	1	0,116	16,4	-0.16
Comp x Folga x Temp. x Diam.	0,013	1	0,013	2,05	0,057
Curvatura	0,61	1	0,61	95,8	
Erro	0,019	3	0,0064		
Total	2,37	19	0,125		

Tabela 5.9 – Tabela de efeitos e Análise da Variância dos resultados obtidos pelo planejamento inicial.

A análise da variância foi utilizada para testar hipóteses sobre os efeitos principais e de interação. A ANOVA indica que os efeitos mais pronunciados são: Folga radial, a interação Folga radial x Comprimento, a interação Comprimento x Temperatura, a interação Folga radial x Temperatura, Folga radial x Diâmetro e Temperatura x Diâmetro. A curvatura apresenta um valor significativo, indicando que um modelo de ordem maior seria mais apropriado.

e) Estimativa dos coeficientes do polinômio: Modelo de 1ª.Ordem

Inicia-se a análise ajustando um modelo de primeira ordem:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

Através do método dos mínimos quadrados, os valores dos parâmetros (β_s) podem ser calculados pela expressão:

$$\beta = (X'X)^{-1} * X'*y$$

Sendo X, a matriz dos parâmetros codificados e y o vetor de respostas do sistema.

O vetor obtido é: $\hat{\beta} = [0,54 - 0,059 - 0,056 \ 0,103 \ -0,091]$, ou seja,

$$\hat{y} = 0,54 - 0,059 * x_1 + 0,056 * x_2 + 0,103 * x_3 - 0,091 * x_4$$

A obtenção dos resíduos entre as respostas experimentais e as respostas ajustadas é feita a partir da equação obtida pelo método de mínimos quadrados. Sendo substituída pelas expressões descritas no item A. Assim, o polinômio ajustado será:

$$\hat{y} = 0,54 - 0,059 * [L - 25] - 0,056 * \left[\frac{Cd - 0,025}{0,01} \right] + 0,103 * \left[\frac{T - 20}{10} \right] - 0,091 * [D - 25]$$

A Tabela 5.10 apresenta o resíduo entre a resposta experimental e a resposta ajustada:

Experimento	Resposta (y) [μm]	Resposta (y_{ajustado}) [μm]	Resíduo [μm]
1	0,55	0,6425	-0,0925
2	1,05	0,5237	0,5263
3	0,28	0,5312	-0,2512
4	0,29	0,4125	-0,1225
5	0,69	0,8488	-0,1588
6	0,71	0,7300	-0,0200
7	1,70	0,7375	0,9625
8	0,36	0,6187	-0,2587
9	0,76	0,5066	0,2534
10	1,3	0,3878	-0,2578
11	0,29	0,3953	-0,1053
12	0,73	0,2766	0,4534
13	0,59	0,7128	-0,1228
14	0,87	0,5941	0,2759
15	0,52	0,6016	-0,0816
16	0,29	0,4828	-0,1928
17	0,31	0,5400	-0,2300
18	0,28	0,5400	-0,2600
19	0,25	0,5400	-0,4100
20	0,27	0,5400	-0,2700

Tabela 5.10 - Resíduo do ajuste do modelo de 1ª Ordem.

F) Análise da variância (ANOVA) do modelo de regressão

A ANOVA, considerando um intervalo de confiança de 95%, testa as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

Assim, a análise da variância verifica duas condições: sendo a hipótese nula (H_0) aceita, significa que não há relação entre a resposta e as variáveis independentes com o modelo ajustado. Se essa hipótese for rejeitada, então a hipótese alternativa (H_1), indica que há relação entre as variáveis e, portanto o modelo foi bem ajustado, entre os parâmetros e a resposta em estudo.

Fontes de variabilidade	Soma quadrática	Graus de Liberdade	Média Quadrática
Regressão	0,3582	3	0,1194
Resíduos	2,2265	16	0,1392
Falta de ajuste	0,3422	13	0,0263
Erro puro	0,0193	3	0,0064
Total	2,671		

Tabela 5.11 – ANOVA para o modelo de regressão de 1ª. Ordem.

$$\% \text{ da variação explicada: } \frac{SQ_R}{SQ_T} = \mathbf{13,41\%}$$

$$\% \text{ variação explicável: } \frac{SQ_T - SQ_{ep}}{SQ_T} = \mathbf{99,28\%}$$

Além dos índices calculados, através das somas quadráticas dos resíduos e regressão em relação à variação total, pode-se avaliar o modelo com relação às somas quadráticas do erro puro e da falta de ajuste.

O valor teórico é comparado com o valor da distribuição F com 95% de intervalo de confiança, sendo v_1 = graus de liberdade da média quadrática e v_2 = graus de liberdade da média

quadrática do resíduo, dado por: $\frac{MQR}{MQR} \cong F_{v_1, v_2}$

Sendo $\frac{MQR}{MQR} > F_{v_1, v_2}$, pode-se descartar a possibilidade de $\beta = 0$, ou seja, há relação entre a resposta e os parâmetros.

Assim, para o rotor: $v_1 = 3$; $v_2 = 15$.

$$\frac{MQ_R}{MQ_r} = \frac{0.1194}{0.1392} = 0.86, \text{ que é comparado com o valor tabelado da distribuição } F_{3,16}$$

(3.24).

Assim, $F_{calc} > F_{teórico}$, ou seja, $0,86 < 3,24$. Portanto o resíduo é muito pronunciado e o modelo de regressão não consegue representar satisfatoriamente a superfície local.

Outra verificação considerando a distribuição F (com 95% de intervalo de confiança), verifica a relação $\frac{MQ_{faj}}{M_{ep}} = 4,11$. Neste caso, um valor alto para essa relação indicaria muita falta de ajuste no modelo de regressão. Comparando com o valor F tabelado com $\nu_1 = 13$; $\nu_2 = 3$ ($F_{13,2} = 8,70$) tem-se que: $F_{calc} < F_{tab}$, ou seja, $4,11 < 8,70$.

Neste caso, a relação da média quadrática da falta de ajuste e do erro puro é menor do que o valor tabelado indicando falta de ajuste baixa, ou seja, o modelo ajustaria os dados. Porém, a relação anterior entre a média quadrática do modelo de regressão com a média quadrática do resíduo apresentou um valor muito baixo indicando pouca relação entre a resposta e as variáveis independentes.

g) Gráfico de resíduos

O gráfico de resíduos mostra visualmente que o modelo de 1ª.Ordem não ajusta os dados experimentais, confirmando o teste de ANOVA. Assim, o modelo de regressão linear não apresentou um bom ajuste para a variação explicada pelo modelo utilizado na regressão e o gráfico de resíduos (Figura 5.21) também não apresenta um comportamento aleatório, já que segue uma distribuição normal. Neste caso, pode-se optar para um modelo de ordem maior (quadrático), ou/e alteram-se as faixas dos fatores, reduzindo-as.

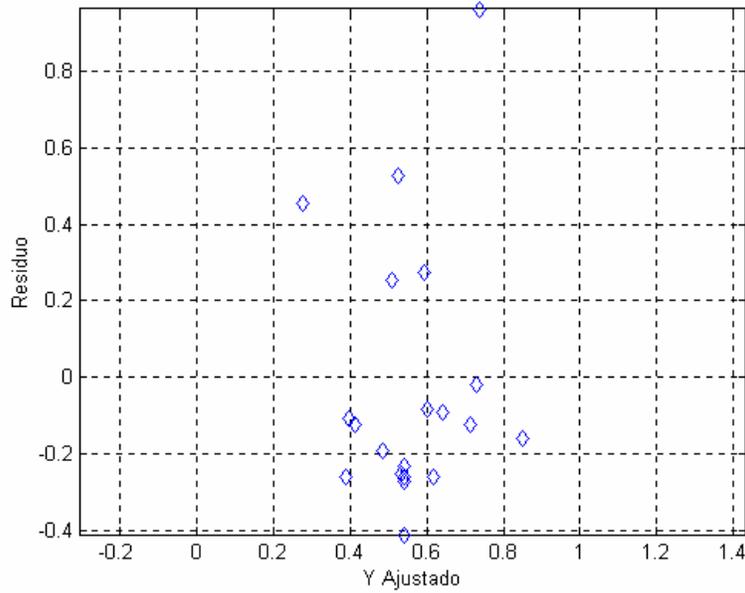


Figura 5.21 – Gráfico de resíduos para o experimento rotor, para um modelo de 1ª. Ordem.

a.1) Planejamento Experimental – Modelo de 2ª. Ordem (Matriz experimental para o mancal hidrodinâmico, expandida para o Planejamento Composto Central com 6 réplicas no ponto central).

Para não se alterar as faixas dos fatores (parâmetros de projeto), o experimento foi estendido adicionando-se ao planejamento fatorial e às réplicas no ponto central, um planejamento rotacionado com $\alpha = \sqrt{k}$, adotando-se $k = 1$, para não ampliar muito a região experimental, trabalhando-se nas faces do cubo experimental. Assim, a matriz experimental é expandida, como mostra a Tabela 5.12.

Fatores de Projeto									
Exp.	Variáveis Naturais				Variáveis Codificadas				Resposta
	L [mm]	C _d [mm]	T [°C]	D [mm]	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	Amplitude x [μm]
1	15	0,15	10	15	-1	-1	-1	-1	0,55
2	35	0,15	10	15	+1	-1	-1	-1	0,89
3	15	0,35	10	15	-1	+1	-1	-1	0,28
4	35	0,35	10	15	+1	+1	-1	-1	0,29
5	15	0,15	30	15	-1	-1	+1	-1	0,69
6	35	0,15	30	15	+1	-1	+1	-1	0,71
7	15	0,35	30	15	-1	+1	+1	-1	1,70
8	35	0,35	30	15	+1	+1	+1	-1	0,36
9	15	0,15	10	35	-1	-1	-1	+1	0,76
10	35	0,15	10	35	+1	-1	-1	+1	0,82
11	15	0,35	10	35	-1	+1	-1	+1	0,29
12	35	0,35	10	35	+1	+1	-1	+1	0,73
13	15	0,15	30	35	-1	-1	+1	+1	0,59
14	35	0,15	30	35	+1	-1	+1	+1	0,87
15	15	0,35	30	35	-1	+1	+1	+1	0,52
16	35	0,35	30	35	+1	+1	+1	+1	0,29
17	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,31
18	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,28
19	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,25
20	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,27
21	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,28
22	25	0,25	20	25	0	0	0	0	0,29
23	15	0,25	20	25	-1	0	0	0	0,36
24	35	0,25	20	25	1	0	0	0	0,45
25	25	0,15	20	25	0	-1	0	0	0,73
26	25	0,35	20	25	0	1	0	0	0,27
27	25	0,25	10	25	0	0	-1	0	0,64
28	25	0,25	30	25	0	0	1	0	0,37
29	25	0,25	20	15	0	0	0	-1	0,31
30	25	0,25	20	35	0	0	0	1	0,42

Tabela 5.12 – Planejamento Composto Central com 6 réplicas no ponto central. (Mancal hidrodinâmico)

A análise da variância utilizada para testar as hipóteses sobre os efeitos principais e de interação continua válida para o Planejamento Composto Central (dado pelo item d), para o modelo quadrático. Assim, os efeitos mais pronunciados são: Folga radial, a interação Folga

radial x Comprimento, a interação Comprimento x Temperatura, a interação Folga radial x Temperatura, Folga radial x Diâmetro e Temperatura x Diâmetro.

a.2) Estimativa dos coeficientes do polinômio de 2ª. Ordem

Como o modelo linear apresentou falta de ajuste e a ANOVA indica que um modelo de ordem maior pode ajustar os dados a uma superfície mais representativa. É aplicado novamente o método de mínimos quadrados aos dados, com a matriz experimental expandida para se obter os termos quadráticos do polinômio.

Assim, o novo polinômio ajustado em variáveis naturais é dado por:

$$\hat{y} = 0,318 + 0,026 * L - 0,142 * Cd + 0,0028 * T + 0,0172 * D + 0,0048 * L^2 + 0,078 * Cd^2 + 0,1484 * T^2 + 0,0084 * D^2$$

Assim, considerando novamente um intervalo de confiança de 95%, testa-se as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

Aplica-se a Análise da Variância para o modelo ajustado dada pela Tabela 5.13:

Fonte de Variação	Soma quadrática	Graus de liberdade	Média quadrática
Regressão (SS _R)	0,829	7	0,1185
Resíduos(SS _r)	0,561	22	0,0260
Falta de ajuste	0,0694	17	0,0041
Erro Puro	0,117	5	0,0233
Total	1,419	29	

Tabela 5.13 – Análise da Variância para o modelo de 2ª. Ordem.

% Variabilidade explicada: $\frac{SQ_R}{SQ_T} = 58,4\%$

% Máxima variabilidade explicável : $\frac{SQ_T - SQ_{ep}}{SQ_T} = 91,79\%$

Com $s^2 = 0,00154$

Portanto, é calculada a razão entre o resíduo do modelo de regressão e da variabilidade total dos dados, que explica a variabilidade em função do próprio método de regressão. Neste caso, o modelo quadrático (**58,4%**) ajustou melhor a superfície obtida pelo modelo linear (**13,41%**). O modelo pode ser avaliado também em relação à média quadrática da regressão do modelo e dos resíduos aleatórios dos dados, através da relação: $\frac{MQ_R}{MQ_r} \cong F_{v_1, v_2}$

Com a verificação da desigualdade $\frac{MQ_R}{MQ_r} > F_{v_1, v_2}$, pode-se descartar a possibilidade de que $\beta'_s = 0$, indicando que há interação entre os fatores. Os graus de liberdade para esta relação entre regressão e resíduo, para os mancais hidrodinâmicos são: $v_1=7$; $v_2=22$. Portanto,

$$\frac{MQ_R}{MQ_r} = \frac{0,1185}{0,0260} = 4,56 \text{ que é comparado com o valor teórico ou tabelado dado por: } F_{7,22} = \mathbf{2,46}.$$

Assim, $F_{\text{calc}} > F_{\text{tabelado}}$, ou seja, **4,56 > 2,46**.

Com essa verificação conclui-se que a equação obtida pela regressão é significativa, porém como os valores estão muito próximos, pode indicar que as faixas consideradas para os fatores estejam pequenas e, seus efeitos podem ser confundidos pela extensão dos erros experimentais (aleatórios). Portanto, para confirmar essa suposição o gráfico de resíduo deve ser levantado. Observando-se o gráfico de resíduos para o modelo de 2ª. Ordem (Figura 5.22), pode-se confirmar o que há falta de ajuste no modelo. Para uma posterior exploração do mancal hidrodinâmico, as faixas dos fatores (parâmetros do mancal) devem ser reduzidas, porém dentro de valores aceitáveis de projeto.

Outra verificação, é comparar as médias quadráticas da falta de ajuste do modelo com a média quadrática do erro puro (erros aleatórios), dada pela relação: $\frac{MQ_{faj}}{MQ_{ep}} = \frac{0,0041}{0,0023} = 0,18$, que também deve ser comparada com o valor tabelado. Portanto, os graus de liberdade para a falta de

ajuste e erro puro são, respectivamente: $\nu_1=17$; $\nu_2=5$, ou seja, $F_{17,5}= 4,56$. Assim, $F_{\text{calc}} > F_{\text{tabelado}}$, ou seja, $0,18 < 4,56$, indicando novamente a falta de ajuste do modelo, dentre os erros aleatórios.

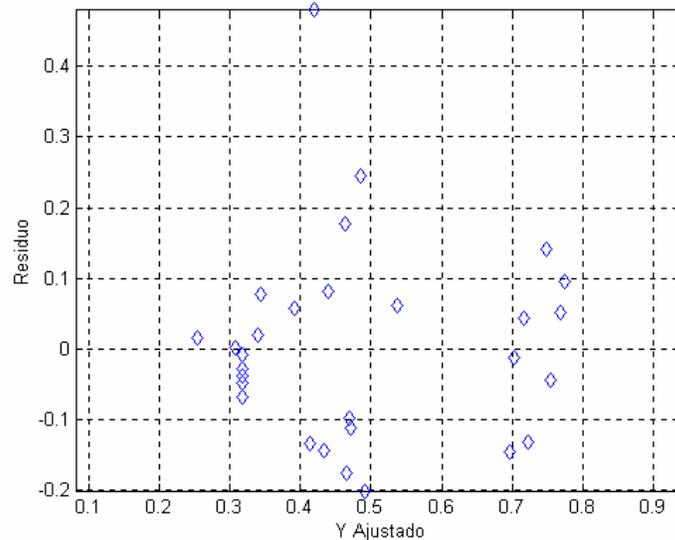
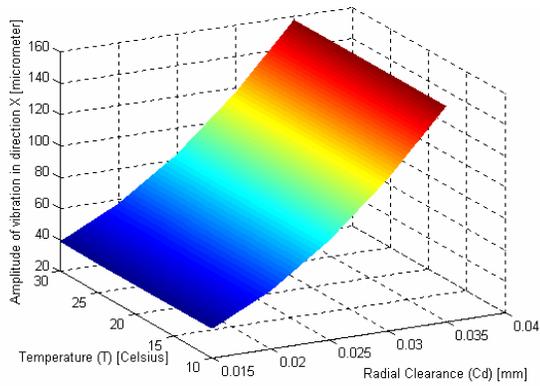


Figura 5.22 – Gráfico de resíduos para o modelo de 2ª. Ordem.

Portanto, o modelo de 2ª. Ordem ainda não consegue representar as relações entre os fatores do mancal hidrodinâmico e a resposta (amplitude de vibração na direção x), apesar de ter ajustado 58,4% dos dados em relação ao modelo de 1ª. Ordem que ajustou apenas 13,4%.

As superfícies de respostas obtidas para o polinômio de segunda ordem podem ser traçadas. Como já colocado anteriormente, as superfícies de respostas auxiliam na visualização das interações dos efeitos e de suas variações em relação à(s) resposta(s) estudadas. A Figura 5.23 apresenta para os valores fixos do Diâmetro (D) e Comprimento (L), ambos com 25 [mm] a variação da Folga Radial (Cd) x Temperatura (T) em função da resposta Amplitude de Vibração na direção x [μm]. O comportamento da superfície descreve os efeitos mais significativos obtidos pela Análise da Variância dos efeitos. A variação da Folga Radial (Cd) é muito significativa e a Temperatura (T) é menos sensível à variação da resposta. Estes gráficos podem ser estendidos à outras interações, para se analisar melhor a superfície, quando o modelo empírico satisfaz todos os critérios estatísticos de significância.

Superfície de resposta: mancal hidrodinâmico



Superfície de resposta: mancal hidrodinâmico

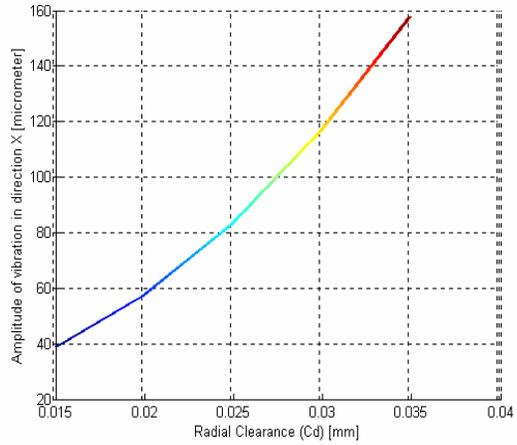


Figura 5.23 – Interação folga radial (Cd)x Temperatura (T) com a resposta (Amplitude de vibração na direção x), para valores fixos intermediários de Diâmetro (D) e Comprimento (L).

CAPÍTULO 6

6.1 Conclusões

Este trabalho teve como objetivos principais o estudo e a demonstração de que a utilização de métodos estatísticos para experimentação e construção de modelos empíricos, como parte da teoria sobre planejamento de experimentos e Metodologia da Superfície de Resposta, bem como métodos de otimização numérica podem ser aplicados em conjunto ou parcialmente no estudo e otimização de componentes mecânicos para máquinas rotativas.

A utilização de modelos empíricos permite uma significativa flexibilidade na definição de problemas de otimização numérica, associada com a investigação de conceitos, experimentos e operação nos mancais hidrodinâmicos voltados para máquinas rotativas, as quais apresentam complexas equações matemáticas. Possíveis variações no projeto experimental permitem separar parâmetros de projeto dos fatores de ruído, permitindo a investigação da robustez do projeto através da solução de soluções ou conjuntos ótimos de fatores. Além disso, a obtenção de modelos empíricos possui duas características importantes para a área de engenharia: baixo custo computacional e bom condicionamento numérico. Essas características permitem possibilidades de estudo sobre vários níveis dos fatores de projeto.

Conforme se avançou no estudo sobre as ferramentas descritas, foi desenvolvido também um programa computacional (Otima 1.0) baseado na teoria de planejamento experimental e na metodologia da superfície de resposta. Tal ferramenta tem por finalidade auxiliar a realização de

experimentos na área de engenharia de projeto e de produto, bem como a otimização de componentes mecânicos e sistemas mecânicos utilizando o estudo das superfícies de resposta. Não houve nenhum intuito de comparação, entre o programa desenvolvido neste trabalho com os pacotes comerciais existentes, como o SAS[®] ou Minitab[®], uma vez que o objetivo do desenvolvimento de programa foi adaptar a teoria de planejamento experimental, metodologia da superfície de resposta e sua análise em problemas de conceituação e operação de componentes em máquinas rotativas.

Desta forma, como visto no Capítulo 5, as técnicas de planejamentos experimentais implementadas no programa, mostraram-se aplicáveis em componentes mecânicos para máquinas rotativas. Essa condição foi constatada, a partir da validação dos resultados obtidos pelo programa, com um exemplo que dispunha de modelo determinístico e literatura consagrada. Além disso, a análise do problema de um sistema massa-mola-amortecedor comprovou a capacidade do método de gerar um modelo linear e verificar a qualidade do seu ajuste, fundamental para a otimização da resposta, utilizando a metodologia de superfície de resposta. Por outro lado, o segundo exemplo do Capítulo 5 mostrou a capacidade da ferramenta desenvolvida de identificar os parâmetros e interações mais influentes para um sistema mais complexo, como é uma máquina rotativa. Com esse trabalho, podem ser obtidos diferentes graus de polinômios (com diferentes superfícies de respostas). Um estudo posterior será realizado variando-se as faixas de valores (inicialmente reduzindo-os) para os fatores de projeto, já que a ANOVA e os gráficos de resíduos indicaram para ambos os modelos ajustados para os mancais hidrodinâmicos, que esses valores devem ser redimensionados. Por outro lado, a ferramenta desenvolvida (Ótima 1.0) apresenta as características necessárias para encerrar um estudo de um experimento, desde o seu planejamento até a otimização das respostas de interesse.

Enfim, este trabalho não encerra de forma alguma, a continuidade do estudo e da aplicação das teorias de planejamento experimental e técnicas de otimização para a melhoria de produtos e sistemas, uma vez que tais técnicas ainda são pouco utilizadas para o desenvolvimento de projetos mecânicos. As técnicas de planejamento de experimentos tem sido intensamente aplicadas em áreas como a Química e Engenharia de Alimentos. No entanto, sua difusão na Engenharia Mecânica, principalmente nas áreas de projeto e de produto, bem como na pesquisa

acadêmica, tem sido lenta. Nesse sentido, os estudos desenvolvidos neste trabalho buscam incentivar a aplicação desses métodos através do oferecimento de uma ferramenta de software direcionada ao engenheiro experimental, bem como conceitos adaptados ao ambiente de projeto mecânico.

6.2 Sugestões

Como pode ser visto no segundo exemplo do Capítulo 5 em mancais hidrodinâmicos, pode-se identificar os fatores de maior influência (folga radial e temperatura) sobre a resposta (amplitude de vibração em uma determinada direção). O modelo linear que apresentou falta de ajuste, pôde ser expandido para um modelo quadrático. Esse segundo modelo apresentou uma melhor representatividade dos dados, porém também apresentou falta de ajuste. Portanto, uma das propostas para dar seqüência ao estudo em mancais hidrodinâmicos é escolher um polinômio de 3ª. Ordem e/ou realizar alterações nas faixas de operação dos parâmetros, premissa que segundo a literatura consultada pode ser a causa da falta de ajuste e má distribuição de resíduos, ambos sintomas observados nessa aplicação. Encontrando-se um modelo suficientemente ajustado, pode se explorar as superfícies otimizando-as através da Análise Canônica ou outros métodos numéricos, como por exemplo: algoritmos genéticos ou otimização multi-critério.

Os exemplos abordados neste trabalho foram simulações numéricas, que são aproximações do experimento físico. Portanto, uma sugestão natural é o desenvolvimento de uma aplicação experimental, na qual seja possível avançar na utilização da ferramenta, além do visto nos exemplos do sistema reduzido massa-mola-amortecedor e nos mancais hidrodinâmicos, considerando as reais condições de funcionamento, que conduzam a uma superfície de resposta mais complexa.

Finalmente, esse trabalho pode aplicar e levantar as vantagens e desvantagens em se adaptar e utilizar ferramentas estatísticas, aplicadas ao projeto mecânico seja durante a sua fase de concepção, ou durante a vida útil do componente mecânico ou do sistema global.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACKOFF, R.L. *et al.* **Scientific method: optimizing applied research decisions.** John Wiley & Sons, Inc. 464 p. 1962.
- ACHCAR, J. A. **Planejamento de experimentos em engenharia e indústria.** Apostila. ICMSC-USP, São Carlos, SP. São Carlos. 251p. 1995.
- ACHCAR, J. A; RODRIGUES, J. **Introdução à Estatística para ciências e tecnologia.** Apostila. ICMC-USP, São Carlos, SP. São Carlos. 191p. 2000.
- ARORA, J.S. **Introduction to Optimum Design.** McGrawHill, NewYork. 1989.
- ASSIS, E.G. STEFFEN, Jr.V. Inverse problems in rotor dynamics using optimization techniques. **IFTToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics.** Sydney, Australia.2002.
- BARKER, T.B. **Quality by experimental design.** New York: Marcel Dekker. 1985.
- BISGAARD, S.; ANKENMAN, B. Standard errors for the eigenvalues in second-order response surface models. **Technometrics.** n.3, v.38, p. 238-246. August 1996.
- BISGAARD, S.; GRAVES, S.; SHIN, G. Tolerancing mechanical assemblies with CAD and DOE. **Journal of quality technology.** p. 231-240. v.32, n.3, July 2000.
- BISGAARD, S.; BOX, G. E. P. Statistical tools for improving designs. **Mechanical Design.** p.32-41. 1988.
- BOX, G.E.P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J.S. **Statistics for experimenters: an introduction to design, analysis and model building.** John Wiley & Sons. p. 1-14; 291-344; 510-552. 1978.
- BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. **Empirical model-building and response surfaces.** John Wiley & Sons. 667 p. 1987.
- BOX, G.E.P.; HUNTER, J.S. The 2^{k-p} fractional factorial designs Part 1. **Technometrics.** v. 42, n.1, p. 28-47, Feb 2001.

- BRUNS R. E; SCARMÍNIO I.S.; BARROS NETO, B. **Como fazer experimentos: Pesquisa e desenvolvimento na ciência e na indústria**. Campinas: Editora da Unicamp, p. 401, 2001.
- BUTKEWITSCH, S. Projeto ótimo robusto multi-disciplinar mediante experimentos computacionais: uma contribuição à segurança veicular. UFU, Faculdade de Engenharia Mecânica. Tese (Doutorado). 214p. 2002.
- BUTTON, S.T. IM 317- Metodologia para planejamento experimental e análise de resultados. FEM-UNICAMP, Set.2000. 70p.
- CAFEO, J.A; THOMAS, R.S. The use of statistical tools to contend with variability in engineering. **Experimental techniques**. p. 26-28. Sep/Oct. 1997.
- CARLYLE, W.M; MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C. Optimization problems and methods in quality control and improvement. **Journal of quality technology**. v.32, n.1, p.1–17. January 2000.
- CARPINETTI, L. C. R. **Planejamento e análise de experimentos**. USP, EESC, Departamento de Produção. 216p. Março, 2003.
- CAVALCA, K.L.; CAVALCANTE, P.F. **Modelagem e análise de máquinas rotativas e estruturas de suporte**. Apostila do Curso. DPM, FEM, Unicamp. 2000.
- CAVALCA K. L., LIMA E. N., The dynamical analysis of a rotating system supported by non-linear hydrodynamic bearings., 2nd IC-HBRSD, Xi'na-China, p. 313-318. 1997.
- CAVALCA, K. L., DEDINI, F. G. Bancada didática para visualização e análise de fenômenos dinâmicos **In: XXVI COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, São Paulo: ABENGE vol. 7, p. 3121-3136. 1998.
- CAVALCANTE, P. F., CAVALCA, K. L., Method to analyze the interaction between rotor-foundation systems. In: 16th International modal analysis conference, IMAC, **Proceedings of ...** New York: Union Coll. p.775-781. 1998.
- CHEN, W. *et al.* A procedure for robust design: minimizing variations caused by noise factors and control factors. **Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design**. v. 118, p. 478-485. Dec. 1996.
- CHEN, W.; XIAOPING, D. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design. **Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design**. v. 122, p. 385-394. Dec. 2000.
- CHELI, F. & CAVALCA, K. L. & DEDINI, F. G. – Supporting structure effects on rotating machinery vibrations. **Proceedings of Institute of Mechanical Engineers - ImechE**, 1992.
- CHRISTENSEN, R. Analysis of variance, design and regression. **Applied statistical methods**. Chapman & Hall. 586p. 1998.

- COSTA Neto, **Estatística**. Edgar Blücher. 266p. 1977.
- CROSS, N. Science and design methodology: a review. **Research in engineering design**. p.63-69. 1993.
- CUNHA, M.C.C. **Métodos Numéricos**. Editora da Unicamp. 275p. 2003.
- DRAPER, N.R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. John Wiley & Sons, Inc. 701p.1988.
- DUNSMORE, W. et al. Developing methodologies for robust mechanical engineering design. **Proceedings of Institute Mechanical Engineering - ImechE** .v.211 (Parte B). p. 179-188. 1997.
- ERTAS, A; JONES, J.C. **The engineering design process**. John Wiley & Sons, Inc. 595p. 1993.
- HANN, G.; HOEL, R. Key Challenges for statisticians in Business and Industry. **Technometrics**, v.40, n.3, p.195-200. 1998.
- HINO, J., *et al.* , Vibration analysis of a compact motor by the substructure synthesis method. **Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu**, v. 53, n. 491, p. 1384-1390. Jul. 1987.
- HUNTER, J.S. Statistical design applied to product design. **Journal of quality technology**. v.17, n.4, p. 210-236. Oct. 1985.
- JACON, F. P., CAVALCA, K. L. **Ajuste de Modelos Lineares Aplicados a máquinas Rotativas**, Faculdade de Engenharia Mecânica – Unicamp – Dissertação (Mestado), Julho de 2000.
- JURAN, J.M; GRZYNA, F.M. Controle de qualidade: Métodos especiais de apoio à qualidade. vol. VII., São Paulo: McGrawHill, 1993.
- KACKAR, R.N. Off-line quality control, parameter design and the Taguchi method. **Journal of quality technology**. v.17, n.4, p. 176-189. Oct. 1985.
- KONDA, R. et al. Design experiments to study and optimize process performance. **International Journal of quality & reliability management**, v. 16, n.1, p. 56-71. 1999.
- KUNJUR, A.; KRISHNAMURTY, S. A robust multi-criteria optimization approach, **Mech. Mach. Theory**, v.32, n.7, p. 797-810, 1997.
- LALANE, M. FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. John Wiley and Sons.1990.
- LEE,C.W., LEE, Y.S. Modeling and vibration analysis of misaligned rotor-ball bearing systems. **Journal of sound and vibration**, v. 224, n.1, p. 17-32, 1999.

- MONTGOMERY, D.C; RUNGER, G.C. **Applied and probability for engineers**. John Wiley & Sons. p. 687-800. 1996.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. John Wiley & Sons. 538p. 1994.
- MONTGOMERY, D. C, *et al.* **Introduction to linear regression analysis**. John Wiley & Sons. 2002.
- MYERS, R.H.; MONTGOMERY, D.C. Response surface methodology: Process and product optimization using designed experiments. New York: John Wiley & Sons, Inc., 699p. 1995.
- MYERS, R.H. ; KIM, Y.; GRIFFITHS, K.L. Response surface methods and the use of noise variables. **Journal of quality technology**. v. 29, n.4. p. 429-440. Oct. 1997.
- NICOLETTI, R. Medidas experimentais em mancais deslizantes. Relatório técnico. FEM, 1997.
- OLIVEIRA NETO, P.L. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, p. 1-33; 84-106; 133-222.1987.
- OLIVEIRA, S. J. Otimização e análise do desempenho de sistemas frigoríficos utilizando o método de superfície de resposta, o planejamento de experimentos e ensaios de protótipos. SEM- EESC – USP, Tese (Doutorado). São Carlos. 166p. 2001.
- OSBORNE, D.M.; ARMACOST, R.L. Review of techniques for optimizing quality characteristics in product development. **Computers Industrial Engineering (Elsevier Science)**. v. 31. n1/2. p. 107-110. 1996.
- PHADKE, M. S. **Quality engineering using robust design**. AT&T Bell Laboratories Prentice Hall. 334p. 1989.
- PARKINSON, D. B. Robust design employing a genetic algorithm. **Quality and reliability engineering international**. p. 201-208. 2000.
- POWELL, R. E Distribution of spatial variability in vibration response. **Experimental Techniques**, p.33-35, Nov/Dec. 1997.
- PRAPAAISRI, S.; McDowell, E.D. A comparasion of two approaches to automating robust design, **Computers Industrial Engineering (Elsevier Science)** v.33, n. 1-2. p. 117-120. 1997.
- MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C.; **Applied statistics and probability for engineers**. John Wiley & Sons. 1994. 895p.
- RAJALINGHAM, C., PRABHU, B. S. – The influence of variation of viscosity with temperature on the steady state characteristics of journal bearings – simplified analysis. **Transactions of Tribology international**. v. 20 No 5, Butterworth & co. Publishers Ltd. Oct. 1987.

- ROSS, P.J. **Aplicações das Técnicas de Taguchi na engenharia de qualidade**. São Paulo: Makron Books do Brasil. 333p. 1991.
- RUSTAGI, J. S. **Optimization techniques in statistics**. Academic Press. 358 p. 1994.
- SIMPSON, T.W. *et al.* Metrics for assessing design freedom and information certainty in the early stages of design. **Journal of mechanical engineering**, (Transactions of the ASME). v.120, p. 628-635. 1998.
- STATNIKOV, R. Multicriteria design: optimization and identification. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- STEINBERG, D.M. HUNTER, W.G. Experimental design: review and comment. **Technometrics**. v.26, n.2, p. 71-97. May 1984.
- TAPIA, A.T., **Modelagem dos Acoplamentos Mecânicos nos Sistemas Horizontais Rotor-Acoplamento-Mancal**, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual. de Campinas, Tese (Doutorado), 250p. 2003.
- THOMSON, W.T.; DAHLEH, M. D. **Theory of vibration with applications**. p. 1-189. 1998.
- VANDERPLAATS, G.N. Numerical **optimization techniques for engineering design**. McGraw Hill Book Company. p. 1-119; 186-233. 1984.
- WATTS, D.G. Understanding canonical analysis. **Journal of quality technology**. v. 27, n.1, p. 40-44. Jan. 1995.
- WILCOCK, D.F.; BOOSER, E.R. **Bearing design and applications**. New York: McGraw Hill Book, 465p. 1957.

APÊNDICE A

Neste apêndice é feita uma breve revisão sobre conceitos estatísticos associados à inferência, estimativa, nível de confiança e testes de hipóteses. Esses conceitos em sua maioria estão associados à teoria de planejamento experimental e metodologia da superfície de resposta.

A.1) Alguns conceitos e definições básicas em Estatística

População: Qualquer coleção de valores ou indivíduos, finita ou infinita;

Amostra: Uma parte da população, normalmente selecionada com o objetivo de se fazer inferências sobre a população;

Amostra aleatória: amostra de N valores ou indivíduos obtida de tal forma que todos os possíveis conjuntos de N valores na população tenham a mesma chance de serem escolhidos;

Variável aleatória discreta: uma variável aleatória discreta assume um número finito ou infinito contável de valores numéricos;

Variável aleatória contínua: uma variável aleatória contínua assume um valor dado por uma medida numa escala contínua, ou seja, todos os valores possíveis num intervalo real;

Parâmetros de uma população e de uma amostra: as medidas descritivas ou parâmetros de uma população finita de elementos x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ são:

$$\text{Média populacional: } \mu = E(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\text{Variância populacional: } \sigma^2 = \text{Var}(x) = E(x - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Desvio-padrão populacional: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$

As medidas descritivas ou parâmetros de uma amostra de tamanho n são:

Média amostral: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Variância Amostral: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Desvio-padrão amostral: $S = \sqrt{S^2}$

Estatística: uma quantidade calculada do conjunto de dados amostrais (Ex: \bar{y}).

Erros - Um medida sempre possui erros que são inerentes a qualquer procedimento experimental.

Os erros podem ser classificados basicamente em dois tipos:

a) *Erro grosseiro:* o procedimento do experimento é feito de forma errônea, como por exemplo, erros de instrumentação e leitura, falta de calibração de equipamentos;

b) *Erro sistemático:* são erros que afetam o resultado sempre na mesma direção. Podem ser originários de erros na instrumentação ou de variações ambientais. O conjunto desses efeitos conduz a uma variação do valor nominal dentro de uma faixa para um valor acima ou abaixo do esperado (nominal). Os erros sistemáticos podem ser minimizados, porém os valores podem ser bem parecidos, mas nunca idênticos [Barros Neto; Scarminio; Bruns, 2002]. Os valores obtidos em medições apresentam variações, mas tendem a se concentrar em torno de um certo valor intermediário de forma aleatória. O tratamento estatístico para se entender erros aleatórios é admitir alguma hipótese sobre a sua distribuição que, em se tratando de erros aleatórios, pode ser considerada como a distribuição Gaussiana ou Normal;

Graus de liberdade: os desvios de n observações de \bar{y} somam zero. Por exemplo,

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = 0$. Essa condição constitui uma restrição linear nos desvios ou resíduos,

$y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y}$, utilizados no cálculo da variância amostral $s^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) / (n - 1)$.

Isto implica que quaisquer, $n-1$ observações determinam completamente a outra observação, tendo-se, portanto, $n-1$ graus de liberdade.

Teorema do limite central (TLC): O teorema do limite central diz que: Se a flutuação total em uma certa variável aleatória for o resultado da soma das flutuações de muitas variáveis independentes e de importância mais ou menos igual, a sua distribuição tenderá para a normalidade, não importa qual seja a natureza das distribuições das variáveis individuais [Barros Neto; Scarminio; Bruns, 2001]. Um exemplo clássico das implicações do teorema do limite central é o jogo de dados. A distribuição das probabilidades durante a observação de um certo número de pontos, jogando um dado não viciado é mostrado na Figura A1.1:

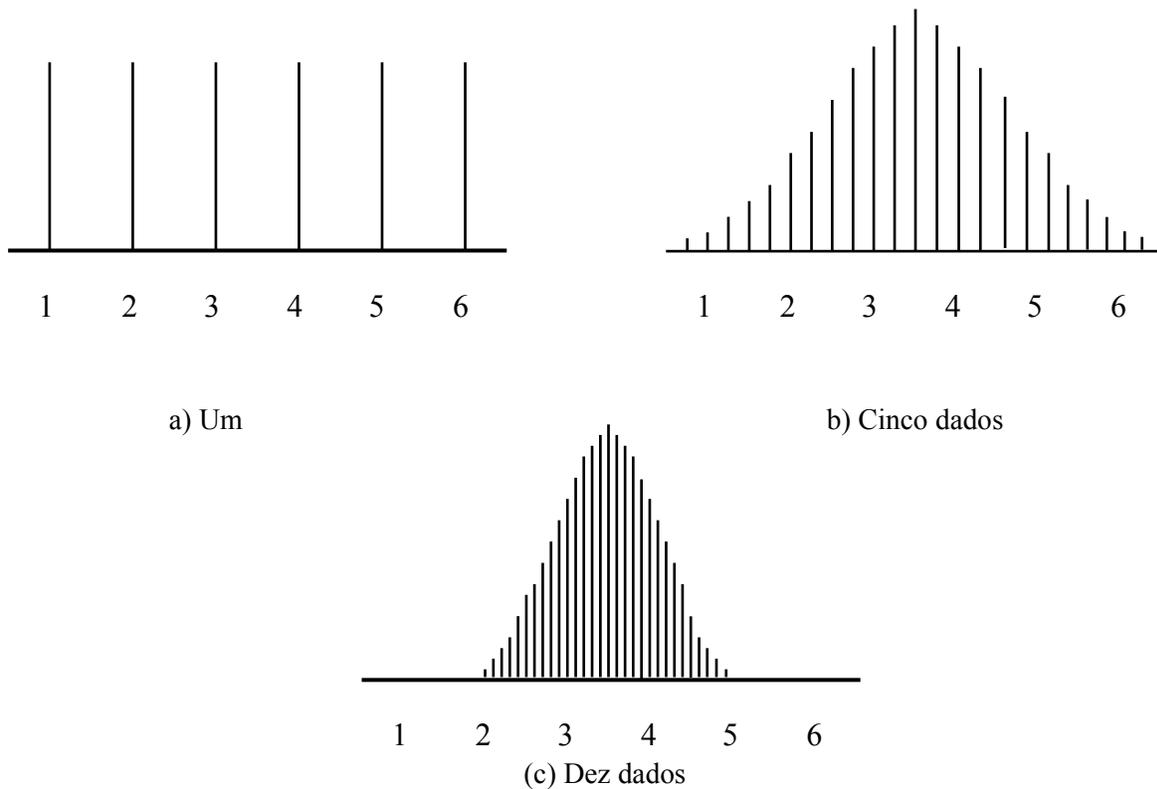


Figura A1.1 – Distribuição das freqüências para um jogo de dados não viciados.

Os valores possíveis são os inteiros de 1 a 6 e, sendo um dado honesto, todos tem as mesmas chances de ocorrer em um distribuição que não é normal. Se forem jogados cinco dados ou apenas um dado, cinco vezes consecutivas, pode-se tirar a média dos cinco valores observados. Neste caso, a média é uma função de cinco variáveis aleatórias, cada uma distribuindo-se independentemente das demais, já que o valor observado para cada jogada não interfere nos resultados das outras observações. O número de pontos de cada dado contribui com

o mesmo peso para o resultado final. As duas premissas do teorema do limite central: a) flutuações independentes e; (b) de igual importância são, portanto satisfeitas, e o resultado toma forma na Figura A1.1(b). Quando o número de observações que compõem o resultado final aumenta, a tendência para a normalidade torna-se mais pronunciada, como mostra a Figura A1.1(c). Muitas vezes, o erro final de um valor obtido experimentalmente é originário da agregação de vários erros individuais mais ou menos independentes, sem que nenhum deles seja dominante. Assim, o teorema do limite central mostra que o erro final se distribuirá de forma aproximadamente normal, tanto mais normal quanto mais numerosas forem as fontes de erros individuais. Essas situações são muito comuns na prática e, por isso, a hipótese normal é tão utilizada. Porém, em casos duvidosos podem ser aplicados outros testes com distribuições diferentes. Portanto, de acordo com o Teorema do Limite Central na seleção de uma amostra de uma população qualquer com média μ e desvio-padrão σ , a distribuição da amostra é aproximadamente normal, com a média μ e desvio-padrão: $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, quando N é suficientemente grande [Achcar; Rodrigues, 2000].

Independentemente da distribuição populacional ser contínua, discreta, simétrica ou assimétrica, o teorema do limite central estabelece que se a variância populacional é finita, a distribuição da média amostral é \bar{x} aproximadamente normal se o tamanho da amostra é grande;

Distribuições Estatísticas: Uma distribuição estatística é uma função que descreve o comportamento de uma variável aleatória. Uma variável aleatória é uma grandeza, que pode assumir qualquer valor dentro do conjunto de valores possíveis para o sistema ao qual ele se refere, porém cada valor tem possui uma probabilidade de ocorrência, governada por uma distribuição de probabilidade. Uma distribuição contínua é aquela, na qual a variável pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo previamente definido. Há alguns modelos que representam a distribuição de dados (medidas) e a escolha deste deve ser feita com base nas seguintes condições: a) Postular um modelo para representar os dados extraídos da população de interesse; b) Verificar se essa representação é satisfatória. Sendo satisfatória, deve-se obter conclusões apropriadas; caso essas não sejam satisfatórias, o modelo deverá ser alterado, e novamente analisado. [Achcar & Rodrigues, 2000];

Distribuição Normal: um dos modelos estatísticos mais importantes é dado pela distribuição Gaussiana ou Normal. Essa distribuição foi proposta no início do século XIX pelo matemático Gauss, Karl F., cujo objetivo era calcular as probabilidades de ocorrências de erros em medições.

A distribuição Gaussiana é um dos modelos fundamentais na estatística, mas há diversas situações experimentais nas quais há outras distribuições para casos específicos [Barros Neto; Scarminio; Bruns, 2001]. A distribuição Normal é uma distribuição contínua, na qual uma variável pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo previamente definido. Para uma variável normalmente distribuída, o intervalo é de $(-\infty, +\infty)$, o que significa que a variável pode assumir, a princípio qualquer valor real. Uma distribuição contínua da variável x é definida pela sua densidade de probabilidade $f(x)$, que é uma expressão matemática que contém um certo número de parâmetros. No caso a distribuição normal é bi-paramétrica, ou seja, seus parâmetros são a média e a variância populacional. Pode-se indicar que uma variável aleatória x se distribui normalmente, com média μ e variância σ^2 , cuja notação é dada por $x \approx N(\mu, \sigma^2)$. Se a média $x = 0$ e a variância $= 1$, a notação será $x \approx N(0,1)$ o que indica que x segue uma distribuição normal padrão ou reduzida. Assim, a curva padronizada em forma de sino que corresponde ao gráfico de probabilidade de uma distribuição normal-padrão dada por:

$$f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{A1.1})$$

na qual : $f(x)$ = Densidade de probabilidade da variável aleatória; μ = Média populacional e σ^2 = Variância populacional.

A curva é simétrica em torno do ponto central ($\mu = 0$). O valor da densidade é máximo sobre a média, e declina rapidamente à medida que se desloca do centro da curva para ambos os lados.

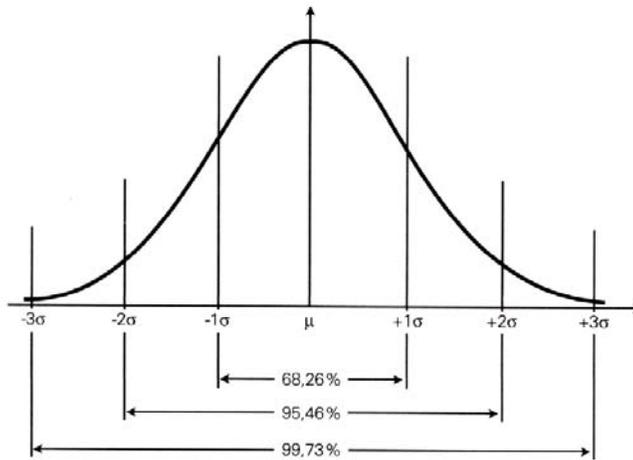


Figura A2.2 – Gráfico de Distribuição Normal.

Da distribuição normal tem-se a probabilidade de um elemento da população recair entre os valores $(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.683$; $(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.954$ e $(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$ (isto é, 68,3%, 95,4% e 99,7%). O efeito da padronização torna-se evidente quando se utiliza a definição de variável padronizada para substituir x por z , na expressão geral da distribuição normal. Assim sendo, diz-se que uma distribuição normal ou reduzida (padronizada) com $x \approx N(0,1)$ é dada por: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$. Se as amostras aleatórias de tamanho n são selecionados

de uma população com média μ e desvio-padrão σ , então as médias amostrais formarão uma distribuição da seguinte forma, para populações finitas: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

A.1.1. Inferências sobre grandes amostras

A inferência estatística tem como objetivo obter conclusões sobre populações, através de distribuições obtidas a partir de análises de dados amostrais. Para isso são consideradas: a) tamanho da amostra e modos de seleção da mesma; b) natureza da inferência desejada e; c) precisão das conclusões. Assim, há dois tipos de inferências: estimativa de parâmetros e testes de hipóteses.

A.1.1.1 Estimativa por ponto da média populacional (μ)

Considerando uma amostra aleatória de tamanho n dada por X_1, X_2, \dots, X_n , a média amostral é dada por: $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$. Um estimador é uma estatística utilizada para estimar um parâmetro. O desvio-padrão de um estimador é chamado Erro-Padrão (EP) [Aschar, 1995]. Como um exemplo de estimador pode-se considerar a média amostral \bar{X} (estimador de μ). Com um n grande, \bar{X} é aproximadamente distribuída por uma distribuição Normal com média μ e desvio-padrão $\sigma\sqrt{n}$ (teorema do limite central). Como $\bar{X} \approx N\{\mu, \sigma^2/n\}$ observa-se que $P\left\{\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 0.954$, isto é, 95,4% de confiança de que o erro de estimativa está dentro de ± 2 (EP). Como em geral σ é desconhecido, pode-se considerar um estimador de σ

dado pelo desvio-padrão amostral: $s = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{n-1}$, com n grande aproxima-se $\sigma\sqrt{n}$ por $s\sqrt{n}$.

A.1.1.2 Intervalos de confiança para μ

Uma alternativa à estimativa por ponto da média populacional μ é a construção de um intervalo de confiança para ela. A confiança traduz a probabilidade de que o intervalo de confiança contenha o parâmetro em estudo. Para enfatizar que se trata de uma estimativa por intervalo, utiliza-se o termo confiança ao invés de probabilidade [Costa Neto, 1997]. Assim, seleciona-se uma amostra aleatória para calcular um intervalo que contenha o verdadeiro valor do parâmetro para uma dada probabilidade, ou nível de confiança. Este nível de confiança em geral, é fixado em 0.90, 0.95 ou 0.99. A partir de uma distribuição normal com média μ desconhecida e desvio-padrão σ conhecido, a média amostral é considerada como base para determinar as inferências sobre a média \bar{X} populacional. Por exemplo, considerando-se uma probabilidade de 0.95, pode-se interpretar que esse $X \approx N\{\mu, \sigma\}$ resultado significa

que em amostras repetidas, o intervalo aleatório inclui o parâmetro desconhecido μ , com uma probabilidade de 0.95. Assim, esse intervalo é um intervalo de confiança com 95% para μ , quando a população tem distribuição normal com σ desconhecido.

Em geral, um intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ para a média populacional μ de uma distribuição normal com desvio-padrão σ conhecido é dado por:

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{A1.2})$$

Sendo o ponto $Z_{\alpha/2}$ determinado por uma distribuição normal padronizada, na qual a área à direita de $Z_{\alpha/2}$ é igual a $\alpha/2$, como mostra a Figura A3.3.

Cabe ressaltar que o intervalo de $P = \{\bar{X} - 1,96\sigma / \sqrt{n}; \bar{X} + 1,96\sigma / \sqrt{n}\}$ com confiança 0.95 é um intervalo aleatório com objetivo de cobrir o verdadeiro valor do parâmetro μ . Por outro lado, a $P = \{\bar{X} - 1,96\sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{X} + 1,96\sigma / \sqrt{n}\} = 0,95$ pode ser interpretada como uma frequência relativa considerando muitas repetições de amostras do mesmo tamanho n . Assim, aproximadamente 95% dos intervalos construídos cobrirão o verdadeiro valor de μ .

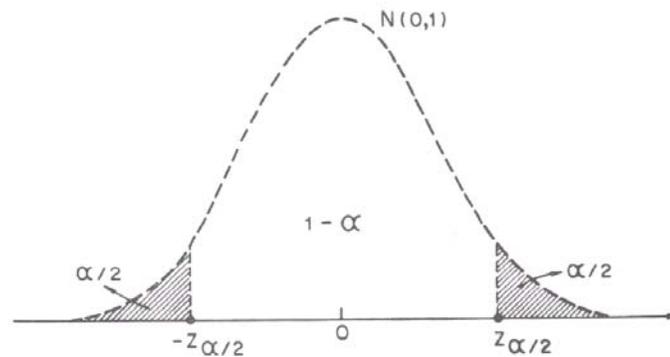


Figura A 3.3 - A notação $Z_{\alpha/2}$.

A.2 Teste de Hipóteses

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações, e o procedimento de tomada de decisão sobre a hipótese é chamada de teste de hipóteses [Montgomery & Runger, 1994]. Este é um dos aspectos mais importantes da inferência estatística, uma vez que vários tipos de tomadas de decisão em problemas, testes ou experimentos na engenharia podem ser formulados com problemas de teste de hipóteses. Uma vez que se são utilizadas distribuições de probabilidades para representar populações, uma hipótese estatística pode ser comparada como uma afirmação sobre a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória. Associado a teste de hipóteses, há dois tipos de erros possíveis:

- a) Rejeitando a hipótese nula (H_0) quando esta é verdadeira, é definido como Erro Tipo I;
- b) Aceitando a hipótese nula, quando esta é falsa, é definido como Erro Tipo II.

Ilustrando com a nomenclatura correspondente tem-se:

Decisão	H0 é verdadeira	H0 é falsa
Aceitar H_0	Não há erro	Erro Tipo II (β)
Rejeitar H_0	Erro Tipo I (α)	Não há erro

A probabilidade do Erro Tipo I é chamada também de *nível de significância* ou tamanho do teste. Segundo Aschar & Rodrigues (2000) para a construção de testes de hipóteses deve ser observado alguns critérios, como identificar a hipótese de nulidade H_0 e a hipótese alternativa H_1 em termos de parâmetros populacionais; escolher o teste estatístico, estabelecer o nível de significância α , determinado a região de rejeição, e verificar os valores do teste estatístico com relação aos dados. A construção do teste de hipóteses seria, por exemplo, da seguinte forma:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

sendo μ_0 um valor numérico de μ .

A.2.1. Determinação do tamanho amostral

Em geral, o pesquisador tem interesse em determinar o número necessário de unidades amostrais antes de iniciar um experimento, para atingir determinada precisão. Supondo uma média amostral \bar{X} esta é considerada um estimador pontual da média populacional μ e sabendo-se que o intervalo de confiança 100 (1- α)% para μ é dado por $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$, o erro máximo

possível d , é dado por: $d = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Portanto, o número necessário de unidades para se atingir

um erro d é dado por: $n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{d} \right)^2$.

Observa-se que d é fixo, σ é suposto conhecido e $Z_{\alpha/2}$ é determinado a partir de uma tabela de distribuição normal padronizada. Com $n \geq 30$, a aproximação normal para \bar{X} é satisfatória.

A.2.2 Análise da Variância (ANOVA)

A principal e mais importante técnica utilizada que envolve a comparação de várias médias é a Análise da Variância (ANOVA), que foi desenvolvida pelo estatístico britânico Fisher, R.A como instrumento para análise de experimentos agrícolas [COSTA NETO, 1997]. O estudo dos resíduos é fundamental para que se possa avaliar a qualidade do ajuste de qualquer modelo e, portanto deve haver um erro relativo pequeno entre a resposta experimental e a resposta ajustada ou os resíduos devem ser pequenos, considerando um comportamento aleatório. A ANOVA é um método que avalia numericamente a qualidade do ajuste de um modelo (polinomial, neste trabalho). A ANOVA é feita através de uma decomposição algébrica dos desvios das respostas observadas em relação à resposta média global. Assim, comparando mais de dois tratamentos (parâmetros ou fatores), é necessário estabelecer com base no teste de hipóteses considerando, por exemplo, que as médias das respostas medidas são iguais. Se não forem iguais, deve-se explorar se as diferenças são significativas ou não [Carpinetti, 2003]. Assim, se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ são

as médias de k populações amostradas, pode se aplicar a hipótese nula em que todas as médias são iguais, ou seja:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots, \mu_k.$$

Contra a hipótese alternativa de que pelo menos uma das médias populacionais seja diferente, dada por:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 = \dots, \mu_k$$

Esta é uma hipótese básica à aplicação do modelo, no qual se considera que as k populações tenham a mesma variância (σ^2) (condição de homocedasticidade) e que a variável de interesse seja normalmente distribuída em todas as populações. Entretanto, o método é robusto, ou seja, qualquer afastamento das hipóteses básicas ainda leva a resultados válidos com razoável aproximação. Deve-se considerar ainda a diferenciação entre os modelos de efeitos fixos ou modelos aleatórios da ANOVA. Considera-se um problema, no qual as k populações que serão comparadas em relação às médias resultem da aplicação de k diferentes tratamentos sobre os elementos de estudo. A questão é aceitar ou não a hipótese de que todos os tratamentos produzem, em média, o mesmo efeito. Pode ocorrer que os k tratamentos representem a totalidade dos tratamentos que é interessante para o estudo (modelo fixo), mas pode ocorrer também que os k tratamentos utilizados sejam apenas uma amostra aleatória da uma população de possíveis tratamentos (modelo aleatório) [Costa Neto, 1997]. Em ambos os casos, deseja-se fazer uma indução sobre a população de tratamentos, mas há uma diferença básica de situações: na maioria dos problemas, σ^2 não é conhecido e não há outra alternativa a não ser estimar σ^2 baseado nos dados amostrais. Considerando três amostras que provem de populações idênticas, pode se utilizar qualquer uma das variâncias (S_1, S_2, S_3), como uma estimativa. Porém, pode-se utilizar a média das três variâncias como uma estimativa $\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{3}$. Neste caso, a estimativa é baseada na variação dentro das amostras.

Snedecor G. adaptou convenientemente as distribuições F, anteriormente estudadas por Fisher, adotando-se a denotação F em homenagem à este grande estatístico [Costa Neto, 1997].

Assim, a variável F é definida com ν_1 graus de liberdade no numerador e ν_2 graus de liberdade no denominador F_{ν_1, ν_2} , dada por:

$$F_{\nu_1, \nu_2} = \frac{\chi_{\nu_1}^2 / \nu_1}{\chi_{\nu_2}^2 / \nu_2} \quad (\text{A1.6})$$

Em (A1.6), conforme a própria notação indica, $\chi_{\nu_1}^2$, representa uma variável aleatória com distribuição χ^2 com ν_1 graus de liberdade. As distribuições χ^2 consideradas devem ser independentes. A definição geral precedente engloba uma família de distribuições de probabilidade para cada par de valores (ν_1, ν_2) . Por exemplo, para uma distribuição F com $\nu_1=5$ e $\nu_2=20$ e probabilidade $(P) = 5$, de acordo com a tabela F , tem-se um valor de 2,71, ou seja, para uma distribuição com 5 graus de liberdade no numerador e 20 no denominador, a probabilidade de se obter um valor aleatório superior a 2,71 é igual a 5. Para a ANOVA a decisão em aceitar ou rejeitar a hipótese nula é baseada neste critério obtido pela distribuição F ilustrada na Figura A3.4:

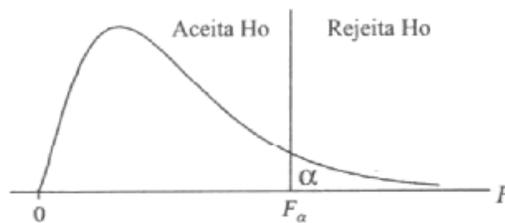


Figura A3.4 - Rejeição da hipótese Nula segundo a estatística F .

Os valores de F são obtidos em tabelas, considerando seu nível de significância (α) e os graus de liberdade (ν_1, ν_2) . Com isso, compara-se o valor de F_{exp} e $F_{\text{teórico}}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$, com uma confiança de $[(1 - \alpha)100\%]$. O teste evidencia se as diferenças entre as médias são significativamente grandes. A estatística F é o critério utilizado para testar a hipótese H_0 . Se H_0 for verdadeiro, isto é, se não existem diferenças significativas entre as médias dos tratamentos, então essas duas estimativas devem ser parecidas. Se elas não forem parecidas, suspeita-se que as médias dos tratamentos são diferentes. O valor esperado do F_{exp} é aproximadamente igual a 1 se H_0 for verdadeira. Quando maior for o valor de F_{exp} , maior é a evidência de que H_0 é falso. Ao

se comparar os valores de F_{exp} e $F_{teórico}$, se $F_{exp} \gg F_{teórico}$ significa que as duas estimativas de variâncias são consideradas incompatíveis. Ao contrário do que se supõe na hipótese H_0 , de que somente uma população está sendo amostrada, acredita-se que isto está ocorrendo em duas ou mais populações que possuam médias diferentes. Duas características são importantes nos experimentos: a aleatorização e o sequenciamento, para que erros como: falta de calibração ou erro de leitura em um equipamento, sejam uniformemente distribuídos. Com isso, minimiza-se a influência desses fatores sem importância, que possivelmente estarão presentes.

O objetivo da análise de variância ou quadro de ANOVA é expressar a variação total de um conjunto de dados como uma soma de termos, os quais possam ser atribuídos à fontes específicas de variação [Carpinetti, 2003].

$$S_{total} = S_{Média} + S_{tratamentos} + S_{resíduos} \quad (A1.7)$$

sendo:

S_{total} = Soma de Quadrados Total; $S_{Média}$ = Soma de Quadrados devido à média; $S_{tratamentos}$ = Soma de Quadrados entre Tratamentos e $S_{resíduos}$ = Soma de Quadrados dentro de tratamentos (resíduos).

Para verificar a normalidade do erro, sua distribuição centrada em torno de zero e sua constância da variância, são sugeridos os seguintes testes: gráfico de probabilidade normal; gráfico de *resíduos x valor estimado* e gráfico de *resíduos x tempo* [Carpinetti, 2003; Montgomery 1001]. Um exemplo de ANOVA para um planejamento fatorial com três variáveis e uma quantidade genérica de níveis e réplicas é apresentado na Tabela A3.1. Assim, tem-se que na coluna da esquerda identifica-se as Fontes de Variabilidade, composta pelas variáveis e suas interações. A Soma dos Quadrados representa a variabilidade total para termos da coluna à esquerda. Os Graus de Liberdade representam o tamanho da amostra relativo à respectiva Fonte de Variabilidade. O Quadrado Médio é a razão entre a Soma de Quadrados e o respectivo Grau de Liberdade, dando uma idéia da dispersão dos dados causada pela Fonte de Variabilidade [Oliveira, 2001]. Na última coluna tem-se o valor F, que neste caso, é a razão entre duas variabilidades, de cada Fonte e a do Erro. Assim, conhecendo-se os graus de liberdade relativos

às duas variabilidades envolvidas, pode-se determinar o nível de significância de F assumir o valor calculado. A avaliação feita para a estatística F só é utilizada se o resíduo tiver um comportamento independente e identicamente distribuídos seguindo uma distribuição Normal, com desvio-padrão constante e, média igual a zero. A análise do resíduo pode ser feita inicialmente, por um gráfico de erro em função dos valores lidos, ou pela ordem temporal. Para a verificação mais detalhada podem ser feitos testes de normalidade que estabelecem níveis de significância para a distribuição do erro, como o teste de Kolmogorov – Smirnov.

Fontes de variabilidade	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado médio	Razão F	F_{α} (Tabelado)
A	SQ_A	a-1	QM_A	$F = SQ_A / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
B	SQ_B	b-1	QM_B	$F = SQ_B / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
C	SQ_C	c-1	QM_C	$F = SQ_C / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
AB	SQ_{AB}	(a-1)(b-1)	QM_{AB}	$F = SQ_{AB} / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
AC	SQ_{AC}	(a-1)(c-1)	QM_{AC}	$F = SQ_{AC} / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
BC	SQ_{BC}	(b-1)(c-1)	QM_{BC}	$F = SQ_{BC} / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
ABC	SQ_{ABC}	(a-1)(b-1)(c-1)	QM_{ABC}	$F = SQ_{ABC} / SQ_E$	$F_{\alpha, v1, v1}$
Erro	SQ_E	abc(n-1)	QM_E		
Total	SQ_T	abcn-1			

Tabela A3.1 – Quadro de Análise de Variância para uma quantidade genérica de níveis e réplicas.

Variável A	$i = 1, 2, \dots, a$ (níveis)
Variável B	$j = 1, 2, \dots, b$ (níveis)
Variável C	$k = 1, 2, \dots, c$ (níveis)
Réplicas	$l = 1, 2, \dots, n$

Tabela A3.2 – Quantidade de níveis e réplicas.

O cálculo para as colunas e linhas é descrito a seguir:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y^2_{ijkl} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn} \quad (\text{A1.8})$$

$$SQ_A = \frac{1}{bcn} \sum_{i=1}^a y^2_{i\dots} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} \quad (\text{A1.9})$$

$$SQ_B = \frac{1}{acn} \sum_{j=1}^b y^2_{\dots j\dots} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} \quad (\text{A1.10})$$

$$SQ_C = \frac{1}{abn} \sum_{k=1}^c y^2_{\dots \dots k} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} \quad (\text{A1.11})$$

$$SQ_{AB} = \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y^2_{ij\dots} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} - SQ_A - SQ_B \quad (\text{A1.12})$$

$$SQ_{AC} = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c y^2_{i\dots k} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} - SQ_A - SQ_C \quad (\text{A1.13})$$

$$SQ_{BC} = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y^2_{\dots jk\dots} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} - SQ_B - SQ_C \quad (\text{A1.14})$$

$$SQ_{ABC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y^2_{ijk\dots} - \frac{y^2_{\dots}}{abcn} - SQ_A - SQ_B - SQ_C - SQ_{AB} - SQ_{AC} - SQ_{BC} \quad (\text{A1.15})$$

$$SQ_{subtotais(ABC)} = SQ_A + SQ_B + SQ_C + SQ_{AB} + SQ_{AC} + SQ_{BC}$$

$$SQ_E = SQ_T - SQ_{subtotais(ABC)} \quad (\text{A1.16})$$

Em termos de interpretação geométrica, a ANOVA [Box,; Hunter & Hunter, 1978] pode ser representada pela Figura A3.5:

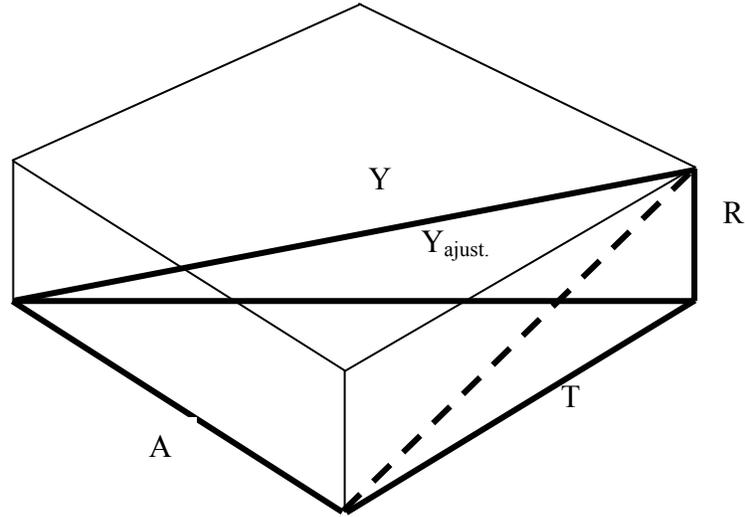


Figura A3.5 – Representação geométrica da análise da variância em termos de uma projeção ortogonal do vetor Y em relação aos vetores A , T e R .

Supondo uma análise com 24 observações, uma representação geométrica completa destes dados requereria 24 dimensões. Para se ter uma melhor visualização, será considerado um exemplo geométrico de três dimensões. Considera-se que no quadro (tabela) da ANOVA, cada resultado individual é decomposto na média geral \bar{y} , nos desvios entre tratamentos $\bar{y}_t - \bar{y}$, e nos desvios dentro de tratamentos (resíduos) $\bar{y}_{t_i} - \bar{y}_t$. Assim, $Y = A + T + R$ ou $y_{t_i} = \bar{y} + (\bar{y}_t - \bar{y}) + (\bar{y}_{t_i} - \bar{y}_t)$ [Aschar, 1995]. Considerando um exemplo, no qual foram decompostos os desvios de tratamentos, resíduos (dentro dos tratamentos) e a grande média, em relação às observações, tem-se que:

Observações (y_{ti})	Média geral	Desvios entre tratamentos	Resíduos (desvios dentro do tratamento)
$\begin{bmatrix} 62 & 63 & 68 & 56 \\ 60 & 67 & 66 & 62 \\ 63 & 71 & 71 & 60 \\ 59 & 64 & 67 & 61 \\ & 65 & 68 & 63 \\ & 66 & 68 & 64 \\ & & & 63 \\ & & & 59 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ & 64 & 64 & 64 \\ & 64 & 64 & 64 \\ & & & 64 \\ & & & 64 \\ & & & 64 \end{bmatrix}$	$+ \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ & 2 & 4 & -3 \\ & 2 & 4 & -3 \\ & & & -3 \\ & & & -3 \end{bmatrix}$	$+ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ & -1 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 3 \\ & & & 2 \\ & & & -2 \end{bmatrix}$

Vetor:	Y	=	A	+	T	+	R
SQ:	98644	=	98304	+	228	+	112
GL:	24	=	1	+	3	+	20

Nota-se que a relação de aditividade vetorial da ANOVA: $S=S_A+S_T+S_R$ é análoga ao teorema de Pitágoras. Assim, com os dados das matrizes acima, tem-se: $Y_{(24,1)} = (62,60,\dots,59)$; $A_{(24,1)} = (64,64,\dots,64)$; $D_{(24,1)} = (62-64,60-64,\dots, 59-64)$, assim: $D = Y - A$.

Observando que $D \perp A$, pois $\sum_{j=1}^N \bar{y}(y_j - \bar{y}) = 0$; $T_{(24,1)} = (-3,-3,-3,-3, 2,\dots,-3)$;

$R_{(24,1)} = (1,-1,2,-2,\dots,2,-2)$. Como:

- a) $\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (\bar{y}_t - \bar{y}) = 0$, tem - se $A \perp T$;
- b) $\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} \bar{y}_t (\bar{y}_t - \bar{y}_t) = 0$, tem - se $A \perp R$;
- c) $\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (\bar{y}_t - \bar{y})(\bar{y}_t - \bar{y}_t) = 0$, tem - se $R \perp T$.

Assim, o vetor dos valores estimados: $\hat{Y} = A + T$, e, $Y = \hat{Y} + R$, ou seja, a primeira expressão indica como os valores estimados são obtidos, e na segunda expressão há o relacionamento entre as observações, os valores estimados e resíduos.

APÊNDICE B

B.1 Lubrificação hidrodinâmica

A lubrificação hidrodinâmica ocorre da seguinte forma: um eixo rotativo instalado em um mancal com uma folga radial Δ e sujeito à ação de um carregamento P assume a posição excêntrica em relação ao centro do mancal Figura B.1 (a). O espaçamento nos dois lados do ponto, no qual o eixo está mais próximo do mancal assume a forma de uma cunha. À medida, em que o óleo entra em contato com o eixo rotativo, este carrega consigo parte do óleo para dentro do espaçamento em cunha, por efeito de adesão do fluido à superfície metálica. Devido à força interna de fricção do fluido, cada vez mais óleo entra na região de menor espaçamento entre o eixo e o mancal. O eixo assume a condição de uma bomba, jogando o óleo no interior da região da cunha. Conforme o óleo converge para a região de menor espaçamento radial, este tende a escoar tangencial e axialmente em relação ao mancal, em direção aos limites laterais do mancal. Sendo o óleo incompressível, na pressão de operação do mancal, este escoamento é impedido pelos efeitos viscosos. Assim, uma distribuição de pressão se forma no filme de óleo, que aumenta progressivamente à medida, em que se aproxima do ponto de menor folga radial entre o eixo e o mancal, e o eixo passa a ser sustentado por essa distribuição de pressão e perde contato com o mancal, conforme a Figura B.3 (b) ilustra [Nicolleti, 1997]. Uma parte do óleo tende a sair axialmente pelas laterais do mancal, na direção oposta à velocidade de rotação do eixo. O óleo restante escoar através da folga radial. As forças de pressão que se desenvolvem no filme de óleo sustentam o eixo, e simultaneamente o desloca na direção de rotação. O estado de equilíbrio é estabelecido, quando a folga radial atinge um valor mínimo que permita o suficiente escoamento de todo o óleo restante no mancal.

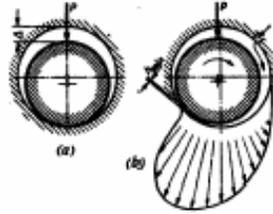


Figura B.1 (a) (b)- Formação do perfil de sustentação do óleo através do efeito hidrodinâmico.

A máxima pressão na área de maior aproximação do eixo ao mancal tem ordem duas ou três vezes maior do que a pressão média unitária aplicado ao eixo $k = \frac{P}{d * l}$, sendo d o diâmetro do mancal e l o comprimento do mancal. O perfil de pressão ao longo do eixo em um mancal alinhado tem a forma de uma curva parabólica, ilustrado pela Figura B.2 (a) e apresenta um gradiente elevado nos limites do mancal, em função da fuga de óleo axialmente. O perfil de pressão real pode ser significativamente diferente do perfil teórico devido a deformações elásticas do eixo Figura B.2 (b), desalinhamentos Figura B.2 (c), desvios de geometria do eixo Figura B.2 (d). Além disso, uma redução significativa do nível de pressão do filme de óleo, pode ser detectada nas regiões próximas às ranhuras de suprimento de óleo.

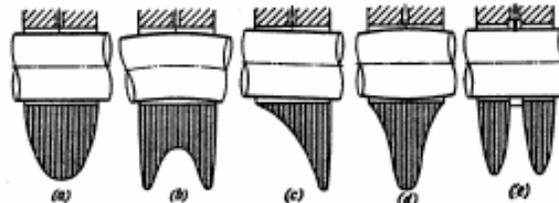


Figura B.2 (a)(b)(c) (d)(e) – Perfil de pressão ao longo do eixo – Direção axial.

O sistema rotativo de uma máquina interage com as outras partes rotativas da mesma, assim como com a estrutura de suporte da máquina, através de uma variedade de mecanismos. Os mais comuns são os rolamentos, mancais hidrodinâmicos, amortecedores, selos, acoplamentos e mecanismos de conexão aerodinâmica. Na maioria dos casos, esses componentes apresentam características não lineares. Assumindo que a máquina rotativa opera próxima de sua configuração estática de equilíbrio em flexão, podem ser utilizadas relações força-deslocamento e força-velocidade lineares.

B.2 Modelagem dos Mancais Hidrodinâmicos

Mancais hidrodinâmicos são mancais cujas superfícies estão completamente separadas pelo filme lubrificante. O carregamento, que tende a provocar o contato entre as superfícies, é inteiramente suportado pela pressão do fluido, causada pelo próprio movimento relativo entre as superfícies, gerado pela rotação entre os elementos do mancal, sendo inoperante no início e no final do movimento. Problemas como desgaste das superfícies são raros (apenas em cavitação ou instabilidade), e as perdas por atrito são devidas apenas ao atrito viscoso do lubrificante, sendo a vida limitada por vibrações e contaminação do lubrificante.

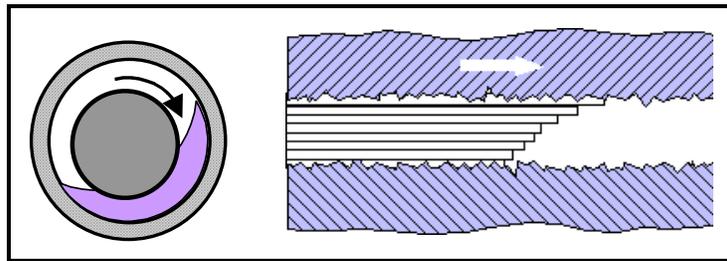


Figura B.3 – Efeito do Mancal Hidrodinâmico.

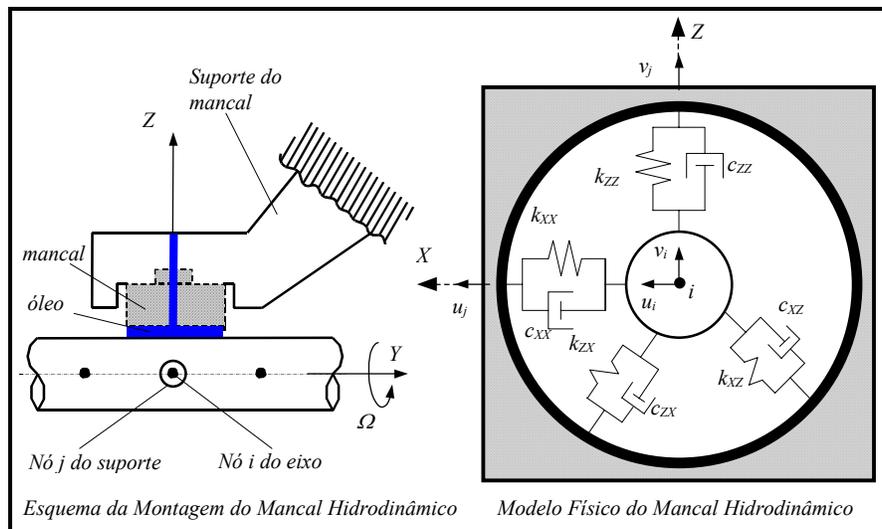


Figura B.4 - Montagem e o Modelo físico dos mancais hidrodinâmicos.

A modelagem de mancais hidrodinâmicos visa representar matematicamente seu filme de óleo, considerando o carregamento devido ao peso do rotor e às características geométricas do mancal, que definem a expressão para a espessura do filme de lubrificante responsável, por sua vez, pelo campo de pressões e forças hidrodinâmicas de sustentação. O lubrificante é discretizado num modelo massa-mola-amortecedor e caracterizado por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento respectivamente, conforme dado pela B.4, onde se visualiza um esquema da montagem de um mancal, e o modelo físico simplificado do mancal hidrodinâmico, no qual: k_{XX} , c_{XX} e k_{ZZ} , c_{ZZ} são a rigidez e o amortecimento nas direções dos eixos X e Z respectivamente; k_{XZ} , c_{XZ} são a rigidez e o amortecimento na direção X, porém com efeitos na direção do eixo Z; k_{ZX} , c_{ZX} correspondem à rigidez e amortecimento na direção Z, mas com efeitos na direção X; (u_i, v_i) e (u_j, v_j) são os deslocamentos do centro do eixo e do suporte do mancal respectivamente.

A caracterização dos mancais hidrodinâmicos e do seu filme de óleo visa, desta maneira, fornecer suporte numérico para a quantificação das forças transmitidas por estes componentes, forças estas causadas pelo próprio peso do rotor ou por um desbalanceamento deste, ou até por excitação externa, por exemplo. Isto é feito para que se conheça o comportamento do sistema estudado, neste caso, um rotor suportado por mancais hidrodinâmicos, caracterizando os modos de vibrar deste sistema (suas frequências naturais).

O filme de óleo do mancal hidrodinâmico é representado pela equação de Reynolds, cuja solução permite obter o campo de pressão existente em um ponto qualquer do fluido, e cuja integral fornece o campo de forças hidrodinâmicas de sustentação. Será feito o cálculo dos coeficientes dinâmicos, fazendo uso das diversas soluções possíveis desta equação - obtidas com variadas hipóteses e simplificações acerca do modelo estudado em particular, visto que esta equação não possui solução exata. Estes coeficientes servirão como suporte para o cálculo da transmissão de forças entre o eixo e os mancais.

A equação de Reynolds, desenvolvida por Osborne Reynolds, é a base da teoria moderna da lubrificação. Desta podem ser obtidas variadas soluções, aplicáveis a casos especiais de interesse formulados com as hipóteses necessárias. Ao ser aplicada no estudo do filme de óleo de mancais, a solução desta equação fornece a distribuição de pressão no óleo, ou seja, determina-se $p(x,y)$ de

acordo com a geometria do mancal. Este campo de pressões é a informação necessária para a resolução da maioria dos problemas básicos na análise de mancais hidrodinâmicos. Para qualquer geometria de filme de óleo, a equação de Reynolds é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(U_0 + U_1)h] + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right\}, \quad (\text{B.1})$$

na qual: $p = p(x,y)$ é a distribuição de pressão ao longo do filme de óleo; x e y são as coordenadas do centro do rotor, h é a espessura local do filme de óleo; μ é a viscosidade absoluta do filme de óleo; $\partial h/\partial t$ o termo que descreve a taxa de variação da espessura do filme de óleo em relação ao tempo; ω é a velocidade angular do eixo; r é o raio do eixo; $U_0 = \omega \cdot r$ é a velocidade tangencial da parede do eixo; U_1 é a velocidade tangencial da parede interna do mancal, geralmente igual a zero para mancais estacionários.

Na formulação da equação de Reynolds, são utilizadas as seguintes hipóteses:

- efeitos de cisalhamento viscoso predominam, portanto o único parâmetro importante do fluido é a sua viscosidade absoluta;
- as forças de inércia do fluido são desprezadas;
- o fluido é incompressível;
- a espessura do filme é pequena, ou seja, pode-se considerar a pressão constante através desta espessura e a curvatura do filme também é desprezível;
- a viscosidade é constante ao longo do fluido e;
- não há deslizamento na interface do fluido e das superfícies sólidas.

A equação (B.1) possui uma solução iterativa, amplamente adotada em algoritmos computacionais, onde divide-se o fluido em “grades” (ver Figura B.5) nas direções x e y e, para o cálculo da pressão em um dado ponto (p_P), faz-se uso dos “pontos vizinhos” a este, cujas pressões são, também, calculadas iterativamente. Seu uso é relativamente simples, pois envolve apenas os valores das dimensões da grade, Δx e Δy , o diâmetro D do munhão do mancal, a sua largura L , e a espessura h do filme de óleo neste ponto.

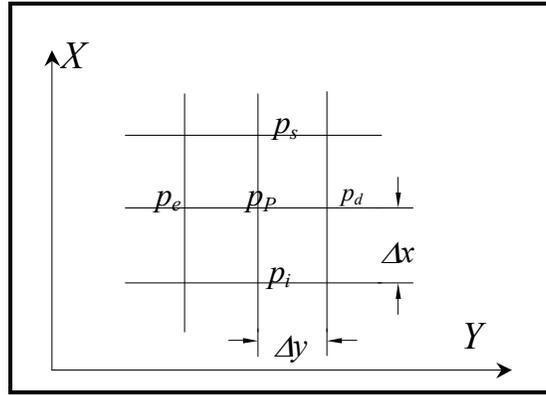


Figura B.5 - Divisão do filme de óleo em grades nas direções x e y.

$$p_p = \frac{6\pi \frac{(h_e - h_d)}{\Delta y} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_s^3}{\Delta x^2} p_s + \frac{h_d^3}{\Delta y^2} p_d + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_i^3}{\Delta x^2} p_i + \frac{h_e^3}{\Delta y^2} p_e}{\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_s^3}{\Delta x^2} + \frac{h_d^3}{\Delta y^2} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_i^3}{\Delta x^2} + \frac{h_e^3}{\Delta y^2}} \quad (\text{B.2})$$

Desta forma, é necessário conhecer o valor da pressão em algum ponto do fluido, geralmente o ponto de entrada do fluido ou as bordas do mancal, que podem estar sob pressão superior ou igual à pressão ambiente, constituindo as condições de contorno do problema. Pode-se, ainda, como primeira simplificação, classificar os mancais em mancais longos, com $L/D > 1$ ou mancais curtos, com $L/D \leq 1$.

Para mancais longos, a equação deve ser resolvida em coordenadas cilíndricas, pois ambos gradientes de pressão circunferencial e longitudinal são significativos. Para mancais curtos, tem-se que o gradiente de pressão circunferencial é desprezível, se comparado ao termo longitudinal. Conhecido o campo de pressões no filme de óleo, tem-se a informação necessária para prosseguir no cálculo das forças transmitidas pelo filme de lubrificante.

A equivalência entre o filme de óleo e o conjunto de molas e amortecedores equivalentes, faz uso de equações linearizadas simples, cujas respostas obtidas coincidem, na maioria dos

casos, com sistemas reais estudados. Estas equações envolvem o conhecimento das forças de sustentação do eixo, que podem ser obtidas por integração numérica da pressão distribuída:

$$\vec{F} = \int_A p_A \cdot d\vec{A} \quad (\text{B.3})$$

sendo $d\vec{A}$ um elemento da área interna do mancal e p_A o campo de pressão que atua sobre dita área. Utilizam-se, então, métodos iterativos de integração, como:

$$F = \sum p_A \cdot \Delta A \quad (\text{B.4})$$

sendo ΔA um elemento de área da parede do mancal ($\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$), que são as malhas de discretização do óleo. Sendo que, desta equação, obtém-se o campo de forças que definem F_x e F_z , uma vez conhecido o campo de forças atuantes no fluido, através da solução da equação de Reynolds. No geral, as componentes das forças generalizadas devido aos mancais atuantes entre as estações i e j , como é mostrada pela Figura 1.3, podem ser representadas pelas relações:

$$F_x = f(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \omega) \text{ e } F_z = f(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \omega), \quad (\text{B.5})$$

sendo: $u = u_j - u_i$, $v = v_j - v_i$, $\dot{u} = \dot{u}_j - \dot{u}_i$, $\dot{v} = \dot{v}_j - \dot{v}_i$ são os deslocamentos e as velocidades relativas entre as duas estações; ω é a rotação do eixo.

Na proximidade da posição de equilíbrio (u_0, v_0), as componentes das forças generalizadas podem ser obtidas através da série de Taylor. Considerando somente os termos lineares teremos, para ω constante:

$$\begin{aligned} F_x &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial u} \right)_o u + \left(\frac{\partial F_x}{\partial v} \right)_o v + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} \right)_o \dot{u} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}} \right)_o \dot{v}, \\ F_z &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial u} \right)_o u + \left(\frac{\partial F_z}{\partial v} \right)_o v + \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} \right)_o \dot{u} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{v}} \right)_o \dot{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$k_{XX} = \left(\frac{\partial F_X}{\partial u} \right)_o, \quad k_{XZ} = \left(\frac{\partial F_X}{\partial v} \right)_o, \quad c_{XX} = \left(\frac{\partial F_X}{\partial \dot{u}} \right)_o, \quad c_{XZ} = \left(\frac{\partial F_X}{\partial \dot{v}} \right)_o,$$

$$k_{ZZ} = \left(\frac{\partial F_Z}{\partial v} \right)_o, \quad k_{ZX} = \left(\frac{\partial F_Z}{\partial u} \right)_o, \quad c_{ZZ} = \left(\frac{\partial F_Z}{\partial \dot{v}} \right)_o, \quad c_{ZX} = \left(\frac{\partial F_Z}{\partial \dot{u}} \right)_o.$$

A equação de movimento linear B.6 para os mancais entre as estações i e j, podem ser escritas na forma matricial como:

$$[C_m] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \end{Bmatrix} + [K_m] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \{F_{con}\} \quad (B.7)$$

sendo:

[Cm] é a matriz de amortecimento do mancal expressa por:

$$[C_m] = \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} & -c_{XX} & -c_{ZX} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} & -c_{ZX} & -c_{ZZ} \\ -c_{XX} & -c_{XZ} & c_{XX} & c_{XZ} \\ -c_{ZX} & -c_{ZZ} & c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix};$$

[Km] é a matriz rigidez do mancal definida como:

$$[K_m] = \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} & -k_{XX} & -k_{ZX} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} & -k_{ZX} & -k_{ZZ} \\ -k_{XX} & -k_{XZ} & k_{XX} & k_{XZ} \\ -k_{ZX} & -k_{ZZ} & k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix};$$

{F_{con}} são forças de interação com os outros componentes.

Neste modelo físico do mancal hidrodinâmico, é assumido que estes componentes de conexão só dependem das coordenadas de translação do munhão e do suporte do mancal, e que os efeitos tanto devido à flexão (rotações) como os devido à inércia dos mancais (suporte e óleo) são considerados desprezíveis. Porém, como no sistema Rotor-Acoplamento-Mancal, modelado no presente trabalho a estrutura de suporte (fundação) é considerada rígida, os deslocamentos e as

velocidades dos nós do suporte são nulas ($u_j=v_j=0$, $\dot{u}_j = \dot{v}_j = 0$). Conseqüentemente, a equação B.7 de movimento dos mancais hidrodinâmicos pode ser re-escrita como:

$$\begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \{F_{con}\}. \quad (\text{B.8})$$