

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica

*Dissertação apresentada ao Curso de Doutorado
da Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Estadual de Campinas, como
requisito parcial à obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica.*

**Modelagem Viscoelástica
do
Fraturamento Hidráulico**

Publicação:

FEM 26/94

Área de concentração: Materiais e Processos

Orientador: Antonio Celso Fonseca de Arruda. ^t

Co-orientador: Euclides José Bonet. ^{tb}

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Marcos
Antonio Rosolen E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19,08,94.

ORIENTADOR

Marcos Antonio Rosolen ^{mb}

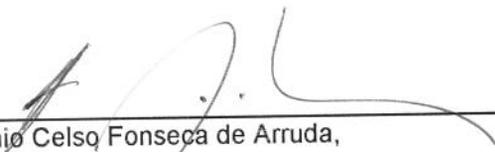
agosto de 1994

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

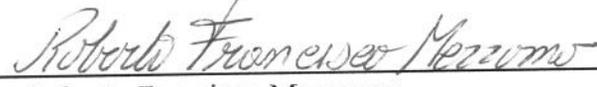
TÍTULO: **Modelagem Viscoelástica do Fraturamento Hidráulico.**
AUTOR: Marcos Antonio Rosolen
ORIENTADOR: Antonio Celso Fonseca de Arruda
CO-ORIENTADOR: Euclides José Bonet

APROVADO POR:

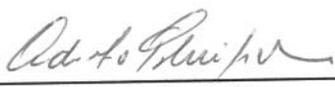


Prof. Dr. Antonio Celso Fonseca de Arruda,

Presidente



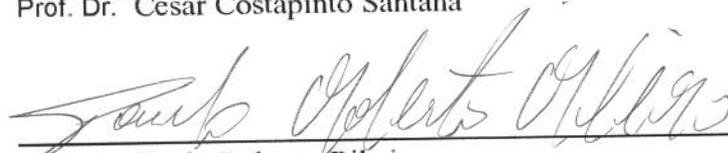
Prof. Dr. Roberto Francisco Mezzomo



Prof. Dr. Adolfo Polillo Filho



Prof. Dr. César Costapinto Santana



Prof. Dr. Paulo Roberto Ribeiro

Campinas, 19 de agosto de 1984.

À minha esposa, Stela.

Este projeto de doutorado contou com o suporte financeiro da

PETROBRÁS - Petróleo Brasileiro S.A.

Sumário

	PÁG.
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	ix
RESUMO	1
1. INTRODUÇÃO	3
2. REVISÃO DA LITERATURA	10
3. MODELAGEM	25
3.1 - ESCOAMENTO NÃO-NEWTONIANO EM PLACAS PARALELAS	26
3.1.1 - HIPÓTESES ASSUMIDAS	26
3.1.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	27
3.2 - FILTRAÇÃO	31
3.3 - QUEDA DE PRESSÃO NA FRATURA	37
3.3.1 - MODELO DE PLACAS PARALELAS	37
3.3.2 - MODELO PARA ELIPSE	40
3.4 - GEOMETRIA DA FRATURA	42
3.4.1 - INCLUSÃO DA TEORIA DE FILTRAÇÃO PROPOSTA	43
3.4.2 - INCLUSÃO DA TEORIA REOLÓGICA PROPOSTA	47
4. MATERIAIS E MÉTODOS	50
4.1 - O APARATO EXPERIMENTAL	51
4.2 - O FLUIDO	53
4.3 - TRATAMENTO DOS DADOS	56
5. ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
5.1 - VISCOSIDADE	69

5.2 -	PARÂMETROS DINÂMICOS	80
5.3 -	COEFICIENTES DE TENSÃO NORMAL	100
5.4 -	EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS REOLÓGICOS COM A TEMPERATURA E A CONCENTRAÇÃO	111
5.5 -	EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS REOLÓGICOS COM O TEMPO	121
6.	DISCUSSÃO	125
6.1 -	FLUIDO PADRÃO	125
6.2 -	DIMENSIONAMENTO DA FRATURA	127
6.3 -	NÚMERO DE DÉBORA	136
7.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	139
8.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES	144
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
	ABSTRACT	170
	APÊNDICES	
A.	ANÁLISE TENSORIAL	
B.	A GOMA GUAR E SEUS DERIVADOS	
C.	PARÂMETROS REOLÓGICOS	
D.	MODELOS REOLÓGICOS	
E.	REOMETRIA	
F.	MODELOS DE GEOMETRIA DE FRATURA	
G.	ESCOAMENTO DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS EM MEIOS POROSOS	
H.	VARIÁVEIS COMPLEXAS	
I.	MECÂNICA DE FRATURAS	

Lista de figuras

	PÁG.	
1	MODELO SIMPLIFICADO PROPOSTO	27
2	GRÁFICO PARAMÉTRICO DE VAZÕES E REPRESENTAÇÕES POLARES	34
3	RELACIONAMENTO DOS PARÂMETROS ϵ , β , α	36
4	PERFIL DO DIFERENCIAL DE PRESSÃO NO MODELO DE PLACAS PARALELAS	39
5	PERFIL DO DIFERENCIAL DE PRESSÃO NO MODELO ELÍPTICO	39
6	MODELO DE FRATURA PROPOSTO	42
7	FUNÇÃO TRANSCENDENTE DE LERCH	44
8	PERFIL DA ABERTURA DA FRATURA	46
9	PERFIL DA TENSÃO SUPLEMENTAR AO LONGO DA FRATURA	47
10	MÓDULO COMPLEXO ANTES DA REDUÇÃO	61
11	TANGENTE DE PERDA ANTES DA REDUÇÃO	61
12	MÓDULO COMPLEXO APÓS A REDUÇÃO	62
13	TANGENTE DE PERDA APÓS A REDUÇÃO	62
14	SISTEMA 4 PRÉ-GEL - FORÇA NORMAL MEDIDA X LOG (TAXA)	65
15	DADOS OBTIDOS NAS GEOMETRIAS PLACA-PLACA E CILINDROS COAXIAIS	66
16	GRÁFICO DE LOG (F_N) X LOG (TAXA) APÓS DESLOCAMENTO VERTICAL	68
17	GRÁFICO DE LOG (F_N) X LOG (TAXA) APÓS DESSUPERPOSIÇÃO DA RELAXAÇÃO	68
18	CURVA DE VISCOSIDADE PARA A SOLUÇÃO POLIMÉRICA	75
19	CURVA DE VISCOSIDADE PARA O SISTEMA 1: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	76
20	CURVA DE VISCOSIDADE PARA O SISTEMA 2: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	77
21	CURVA DE VISCOSIDADE PARA O SISTEMA 3: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	78
22	CURVA DE VISCOSIDADE PARA O SISTEMA 4: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	79
23	PRÉ-GEL: (A) MÓDULO COMPLEXO, (B) TANGENTE DE PERDA	82
24	PRÉ-GEL: MÓDULOS DE (A) ARMAZENAMENTO E (B) DE PERDA	84

25	PRÉ-GEL: (A) VISCOSIDADE DINÂMICA E (B) ELASTICIDADE	86
26	PRÉ-GEL: COMPLACÊNCIAS (A) DE ARMAZENAMENTO E (B) DE PERDA	87
27	GEL: (A) MÓDULO COMPLEXO, (B) TANGENTE DE PERDA	89
28	GEL: MÓDULOS (A) DE ARMAZENAMENTO E (B) DE PERDA	90
29	GEL: (A) VISCOSIDADE DINÂMICA E (B) ELASTICIDADE	91
30	GEL: COMPLACÊNCIAS (A) DE ARMAZENAMENTO E (B) DE PERDA	92
31	TEORIA DE ROUSE - COMPORTAMENTO TEÓRICO DOS COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO	92
32	SOLUÇÃO E SISTEMA 1: COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO	93
33	SISTEMA 1: COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO. CURVA COMPOSTA.	96
34	SISTEMA 2: COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO. CURVA COMPOSTA.	97
35	SISTEMA 3: COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO. CURVA COMPOSTA.	98
36	SISTEMA 4: COMPONENTES DO MÓDULO COMPLEXO. CURVA COMPOSTA.	99
37	SISTEMA 2: DIFERENÇAS DE TENSÕES NORMAIS (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	102
38	SISTEMA 2: COEFICIENTES DE TENSÕES NORMAIS (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	103
39	SISTEMA 4: DIFERENÇAS DE TENSÕES NORMAIS (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	107
40	SISTEMA 4: COEFICIENTES DE TENSÕES NORMAIS (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	108
41	FATORES DE CORREÇÃO PARA (A) A FREQUÊNCIA E (B) O MÓDULO COMPLEXO	113
42	COMPORTAMENTO DE A_G EM RELAÇÃO À CONCENTRAÇÃO E TEMPERATURA	114
43	VISCOSIDADE VERSUS TEMPERATURA, C = 2.4 G/L: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	117
44	VISCOSIDADE VERSUS TEMPERATURA, C = 4.8 G/L: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	118
45	VISCOSIDADE VERSUS TEMPERATURA, C = 6.0 G/L: (A) PRÉ-GEL, (B) GEL	119
46	EFEITO DE MEMÓRIA NO GEL DO SISTEMA 3	121
47	EFEITO DE RELAXAÇÃO NO GEL DO SISTEMA 1	122
48	ESPECTRO DE RELAXAÇÃO DA SOLUÇÃO POLIMÉRICA	123
49	CURVAS REOLÓGICAS PARA O FLUIDO PADRÃO	127
50	ABERTURA MÁXIMA DA FRATURA - SEM (TRACEJADA) E COM (CHEIA) TENSÕES NORMAIS	130

51	DIMENSÕES DA FRATURA EM FUNÇÃO DO VOLUME BOMBEADO - ABERTURA MÁXIMA (CHEIA), COMPRIMENTO X 10^4 (TRACEJADA)	130
52	QUEDAS DE PRESSÃO CISALHANTE (CHEIA), NORMAL (PONTILHADA), E TOTAL (TRACEJADA) AO LONGO DA FRATURA	131
53	GRÁFICO SIMILAR AO ANTERIOR PARA $N = 0.3$	131
54	ABERTURA MÁXIMA DA FRATURA EM FUNÇÃO DO VOLUME BOMBEADO	134
55	COMPRIMENTO DA FRATURA EM FUNÇÃO DO VOLUME BOMBEADO	134
56	RELAÇÃO ENTRE A ABERTURA MÁXIMA E O COMPRIMENTO DA FRATURA	135
57	VARIAÇÃO DA PRESSÃO AO LONGO DA FRATURA	135
58	GEOMETRIA DE FLUXO PARA DEFINIÇÃO DO NÚMERO DE DÉBORA	137
A.1	SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS	A-10
A.2	VECTOR POSIÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE	A-17
B.1	UNIDADE ESTRUTURAL DA GOMA GUAR	B-11
B.2	UNIDADE ESTRUTURAL DO HPG (FRENTE E VERSO)	B-12
C.1	ESCOAMENTO CISALHANTE SIMPLES	C- 1
C.2	CUBO UNITÁRIO DE MATERIAL	C- 2
C.3	ESCOAMENTO CISALHANTE SIMPLES PERMANENTE	C- 2
C.4	TIPOS DE ESCOAMENTO EXTENSIONAL	C- 2
D.1	MODELOS BÁSICOS DE VISCOELASTICIDADE LINEAR	D- 5
E.1	GEOMETRIA DE CILINDROS COAXIAIS	E- 2
E.2	GEOMETRIA CONE-PLACA	E- 4
E.3	GEOMETRIA PLACA-PLACA	E- 6
G.1	DESLOCAMENTO DE FLUIDOS MISCÍVEIS	G-30

G.2	SEGREGAÇÃO GRAVITACIONAL EM MEIOS POROSOS	G-35
H.1	REGIÃO CONECTADA LIMITADA POR CONTORNOS SUAVES QUE NÃO SE INTERCEPTAM	H- 9
I.1	TETRAEDRO CURVILÍNEO INFINITESIMAL	I - 8
I.2	VETOR FORÇA NA CURVA QUE SEPARA AS REGIÕES 1 E 2	I -38
I.3	PONTO DE SINGULARIDADE NO CONTORNO	I -47
I.4	SEMI-PLANO LIMITADO INTERNAMENTE POR CONTORNOS SUAVES NÃO-INTERCEPTANTES	I -54
I.5	CUNHA INFINITA	I -62
I.6	COORDENADAS BI-POLARES	I -69

Lista de tabelas

	PÁG.	
1	MODELOS REOLÓGICOS EMPÍRICOS	12
2	PARÂMETROS DE VISCOSIDADE	72
3	PARÂMETROS INICIAIS DINÂMICOS	82
4	DADOS RELATIVOS AOS EXPERIMENTOS DE TENSÃO NORMAL	110
5	FATORES DE REDUÇÃO PARA A SOLUÇÃO POLIMÉRICA	112
6	EQUAÇÕES REOLÓGICAS PARA O FLUIDO PADRÃO	127
B.1	COMPOSIÇÃO DOS COMPONENTES DA SEMENTE DO GUAR	B- 2
B.2	VISCOSIDADES COMPARATIVAS DE SOLUÇÕES HIDRATADAS DE GOMAS	B-14
C.1	PARÂMETROS PARA O ESCOAMENTO CISALHANTE SIMPLES	C- 5
C.2	PARÂMETROS PARA O ESCOAMENTO EXTENSIONAL	C- 6

Lista de abreviaturas e símbolos

- a parâmetro do modelo de Carreau-Yasuta.
- a_c fator de correção de concentração.
- a_G fator geral de correção.
- a_T fator de correção de temperatura.
- A área (m^2);
constante de equação iterativa.
- API American Petroleum Institute.
- B constante de equação iterativa.
- c concentração (Kg/m^3);
constante de ajuste da primeira diferença de tensões normais.
- C constante de filtração ($m.s^{0.5}$).
- C_1, C_2 constantes de integração.
- d constante de ajuste da segunda diferença de tensões normais.
- e parâmetro da relação entre áreas e tempos de Nolte.
- f designação genérica de função.
- f_R fator de redução de concentração e temperatura.
- F força (N).
- FINEP Financiadora de Estudos e Projetos.
- G módulo de rigidez (Pa).
- G^* módulo complexo (Pa).
- G' módulo de armazenamento (Pa).
- G'' módulo de perda (Pa).
- $G(t)$ função de relaxação.
- h altura da fratura (m).
- $H(t)$ espectro de relaxação.

HPG	hidroxi-propil-guar.
K	índice de consistência do fluido - modelo de potência ($Pa.s^n$).
K_1	primeiro índice de elasticidade - modelo de potência ($Pa.s^n$).
K_2	segundo índice de elasticidade - modelo de potência ($Pa.s^n$).
J^*	conformação complexa (Pa^{-1}).
J'	conformação de armazenamento (Pa^{-1}).
J''	conformação de perda (Pa^{-1}).
J_e^0	conformação de armazenamento inicial (Pa^{-1}).
KGD	método de dimensionamento de Geertsma & de Klerk.
L	comprimento molhado da fratura (m).
m	declividade da curva logarítmica de espectro.
M	massa molecular ($u.m.a.$).
$M(t)$	função de memória.
n	índice de comportamento do fluido.
n'	primeiro índice de comportamento elástico.
n''	segundo índice de comportamento elástico.
N_1	primeira diferença de tensões normais (Pa).
N_2	segunda diferença de tensões normais (Pa).
p	pressão (Pa).
\bar{p}	pressão média (Pa).
PADCT	Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
pH	concentração hidrogeniônica.
PKN	método de dimensionamento de Perkins & Kern.
q	vazão de fluido.
r	módulo de variável complexa - forma polar.
R	constante universal dos gases = $8.3166 \frac{J}{mol.^{\circ}K}$
S	tensão tectônica (Pa).

$S_{1...}$	sistema 1...
SPE	Society of Petroleum Engineers.
t	tempo (s) .
T	temperatura ($^{\circ}C$ ou $^{\circ}K$)
$tg \delta$	tangente de perda.
u	variável interna de comprimento (m) .
v	velocidade (m/s) .
V	volume (m^3) .
x, y, u	variáveis reais genéricas.
w	frequência (s^{-1}) .
z	variável complexa genérica.
α	parâmetro de Carter.
β	parâmetro de filtração.
χ	grupo adimensional volumétrico.
δ	delta de Kronecker.
ε	eficiência do fluido.
ϕ	ângulo em círculo trigonométrico (rad) .
γ	deformação (m) .
Γ	coeficiente de tensão normal.
$\dot{\gamma}$	taxa de cisalhamento ou deformação (s^{-1}) .
η	viscosidade ($Pa.s$) .
η^*	viscosidade complexa ($Pa.s$) .
η'	viscosidade dinâmica ($Pa.s$) .
η''	elasticidade ($Pa.s$) .
κ	constante de proporcionalidade.
λ	constante de tempo do modelo de Carreau-Yasuta (s) .

Λ	comprimento mecânico da fratura (m).
μ	viscosidade newtoniana ($Pa.s$).
ν	módulo de Poisson.
π	tensão total (Pa).
θ	ângulo em círculo trigonométrico (rad).
Φ	função transcendente de Lerch.
Σ	coeficiente de tempo.
τ	tensão (Pa); tempo de exposição do fluido (s).
ξ	comprimento da fratura virtual (m).
Ω	coeficiente de rocha.
Ψ_1	coeficiente da primeira diferença de tensões normais ($Pa.s^2$).
Ψ_2	coeficiente da segunda diferença de tensões normais ($Pa.s^2$).
ζ	função do tempo de exposição.
Υ	coeficiente de fluxo.
Δp	diferencial de pressão (Pa).
∇p	gradiente de pressão (Pa/m).

Subscritos

O	inicial.
∞	infinito ou final.
corr.	corrigido.
crit.	crítico.
D	adimensional.
F	fratura.
l	filtração.
N	tensão normal.
p	pressão.
R	reduzido.
s	solvente.
x, y, z	coordenadas do sistema.
w	poço.
(i)	i-ésima derivada de tensor.

Resumo

O fraturamento hidráulico é um processo utilizado na Indústria do Petróleo para a estimulação de poços. Consiste na abertura e consolidação de uma fratura em uma formação rochosa criando um canal de fluxo altamente permeável. O meio físico que possibilita tal tratamento é um fluido de características especiais através do qual se transmite à rocha a potência hidráulica necessária para a realização deste trabalho. Este fluido deve, também, carregar eficientemente o agente granular que será o responsável pela sustentação da fratura.

O projeto de um fraturamento resulta da composição de tópicos de diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico, e o domínio do comportamento reológico deste fluido é fundamental para o correto equacionamento dos fenômenos envolvidos. Diversas formulações de fluidos de fraturamento encontram-se disponíveis no mercado, sendo a mais utilizada a obtida a partir do polímero HPG. Este polissacarídeo é derivado da goma guar e apresenta alta economicidade, gerando fluidos operacionalmente seguros.

Tal fluido, como todo fluido polimérico, é viscoelástico, porém seu componente elástico não é computado nas teorias disponíveis para o dimensionamento de fraturas hidráulicas, que o tratam como newtoniano ou, nas mais elaboradas, como não-newtoniano. O advento de modernos aparatos experimentais possibilita, atualmente, uma avaliação mais completa dos parâmetros reológicos destes fluidos, permitindo a formulação de um modelo mais aprimorado para seu escoamento.

O presente trabalho reporta a investigação da viscoelasticidade dos fluidos de fraturamento, levantando seus parâmetros reológicos e remodelando seu escoamento. É feita

uma revisão do estado-da-arte das modelagens disponíveis e são propostas contribuições a diversos aspectos teóricos inerentes a este processo, com verificação experimental.

Dentre as contribuições teóricas introduzidas destacam-se: a formulação tensorial do escoamento do fluido dentro da fratura, a proposição de uma nova abordagem para o fenômeno da filtração de fluido pelas suas paredes, o equacionamento analítico do comportamento da pressão em seu interior e o acoplamento direto das áreas envolvidas na modelagem de seu dimensionamento.

Os parâmetros viscosos e elásticos dos fluidos de fraturamento estudados foram medidos experimentalmente, sendo apresentadas novas expressões analíticas relacionando os parâmetros elásticos aos viscosos. São estabelecidas relações que permitem a extrapolação do comportamento reológico destes fluidos para outras faixas de variação de temperatura e concentração.

A introdução destes conceitos teóricos na modelagem repercute na geometria final da fratura alterando seu perfil de elíptico para cuneiforme, o que se traduz em fraturas mais longas que as normalmente previstas com o equacionamento convencional. O componente elástico dos fluidos introduz uma tensão adicional no equacionamento e seu reflexo na geometria da fratura é dependente dos parâmetros reológicos dos mesmos, bem como das especificações do projeto.

1. Introdução

O fraturamento hidráulico é um processo industrial que objetiva a abertura e consolidação de uma fratura em uma formação rochosa através da aplicação de potência hidráulica. Este processo é largamente utilizado na produção de petróleo com o objetivo de aumentar a produtividade de poços produtores de óleo e/ou gás, ou a injetividade de poços injetores de água ou de outros fluidos para efeito de descarte ou de recuperação suplementar.

O principal componente deste processo é o fluido de fraturamento, um fluido viscoso e, em geral, gelificado, que deve ser projetado para atender a diversos objetivos:

- ✓ Transmitir, de forma segura e eficiente, a potência gerada na superfície para a formação rochosa.
- ✓ Percorrer a coluna de produção com a mínima perda de carga possível para evitar desperdício de potência.
- ✓ Dentro da fratura, formar um reboco eficiente em sua parede de forma a minimizar a perda de fluido por filtração para a formação produtora.
- ✓ Carregar eficientemente o agente de sustentação da fratura, um material granular, em geral areia selecionada, e distribuí-lo uniformemente em toda a fratura.
- ✓ Possuir boa estabilidade química e térmica, não provocar danos à formação, e ser inerte em relação aos fluidos do reservatório.

Como a maioria dos processos industriais, o fraturamento desenvolveu-se, inicialmente, de forma empírica, e seu aprimoramento tecnológico ocorreu naturalmente com a difusão de sua aplicação em função dos excelentes resultados que promove, e que o tornaram o principal método de estimulação de poços. Ele foi introduzido na década de 40 nos Estados Unidos e o fluido inicialmente utilizado foi gasolina gelificada com napalm.

Atualmente, seu solvente natural é a água, o que atende satisfatoriamente à primeira condição acima, embora o petróleo ainda seja utilizado em casos específicos, e existam outras formulações, como a espuma, sendo desenvolvidas e testadas paralelamente.

O terceiro e quarto objetivos são conseguidos através da viscosificação e gelificação do fluido a partir de diversos polímeros, polissacarídeos como a goma guar ou derivados de celulose. O polímero mais utilizado é o HPG (HidroxiPropilGuar), obtido da alquilação da goma guar. O fluido deve ser projetado de forma a ter sua gelificação retardada suficientemente para percorrer a maior parte do comprimento da coluna de produção, atendendo, desta forma, ao segundo item listado, e deve ser adequadamente aditivado para satisfazer ao quinto item.

Após cumprir suas funções, o fluido bombeado deve ser recuperado, o que é conseguido pela reversão de seu fluxo. Para tanto, as cadeias poliméricas são quebradas através de aditivação química apropriada e com o auxílio do aumento de temperatura resultante do contato com a formação rochosa, e o fluido volta a ter características próximas à do solvente original, sendo recuperado sem maiores problemas operacionais.

O processo é, portanto, centrado no projeto, no preparo e no escoamento deste fluido. O projeto de um fraturamento é complexo por envolver a integração de diversas áreas científicas e tecnológicas, e este trabalho vai se deter, especificamente, em três pontos deste universo: a reologia, a mecânica dos fluidos e a mecânica de fraturas, especialmente no primeiro item e no estudo de seu reflexo nos outros dois tópicos.

O fluido de fraturamento é um líquido classificado como viscoelástico, ou seja, apresenta simultaneamente caráter viscoso e elástico. No dimensionamento tradicional do fraturamento ele é tratado simplesmente como líquido não-newtoniano, isto é, um líquido cujo comportamento se desvia do previsto pela Lei de Newton para a viscosidade. Tal tratamento somente incorpora o caráter viscoso do fluido ignorando os efeitos, neste

dimensionamento, de seu caráter elástico. A motivação principal deste trabalho é o estudo experimental deste aspecto e dos reflexos de sua inclusão no projeto de um fraturamento hidráulico.

Os conceitos de viscosidade e elasticidade são geralmente associados a substâncias líquidas e sólidas, respectivamente, porém, tal correspondência não é exclusiva. Ao ser testado em um aparato reológico, um líquido pode apresentar propriedades de um sólido, e um sólido, propriedades de um líquido, a depender da faixa de tensões, de tempo ou de frequência utilizadas. Portanto, uma substância não deve ser rotulada simplesmente de sólida ou líquida, mas classificada de acordo com o comportamento reológico apresentado.

O parâmetro que define convenientemente este comportamento é o *número de Débora*^(19, 256), assim chamado em referência à Débora, citada no Livro dos Juízes do Velho Testamento, que cantou: "*As montanhas se moveram diante do Senhor,...*". A idéia é que tudo se move, desde que se espere o tempo suficiente, mesmo as montanhas! Tal parâmetro é definido por $D_e = \frac{\tau}{T}$ onde T é um tempo característico do processo de deformação sendo observado e τ é um tempo característico do material. O tempo τ é infinito para um sólido perfeitamente elástico (*hookeano*), e nulo para um líquido perfeitamente viscoso (*newtoniano*).

Um número de Débora alto corresponde a um comportamento sólido enquanto que um D_e baixo indica comportamento líquido. Uma substância pode, portanto, apresentar um comportamento sólido por ter um tempo característico elevado, ou porque o processo de deformação transcorreu muito rapidamente. A partir desta proposição define-se um sólido como uma substância que não muda continuamente seu perfil quando submetida a uma dada tensão, e líquido quando este perfil é modificado continuamente, ou seja, quando a substância flui.

O termo *viscoelasticidade* é usado para descrever um comportamento situado entre os extremos clássicos definidos pelos materiais perfeitamente elásticos e perfeitamente viscosos. Os líquidos que não respeitam a Lei de Newton, ou seja, cujo comportamento não pode ser descrito com base nas equações de Navier-Stokes, são chamados *líquidos não-newtonianos*. Tais líquidos podem, ou não, possuir propriedades viscoelásticas aparentes, porém, todo líquido viscoelástico é um líquido não-newtoniano. Na realidade, tanto o sólido hookeano quanto o líquido newtoniano são conceitos idealizados e pode-se considerar que todo material real possui comportamento viscoelástico⁽¹³¹⁾.

As leis de Newton e de Hooke são equações lineares que relacionam o estado de tensões às deformações ou suas taxas. Quando reunidas às equações de Navier-Stokes, elas geram um sistema acoplado de equações diferenciais que permite a resolução de diversos problemas práticos e a conexão, no caso de fluidos, à teorias especiais que investigam a estrutura molecular dos materiais. Para os fluidos viscoelásticos, tais relações não são lineares e são denominadas equações constitutivas ou equações reológicas de estado, das quais as leis acima são casos particulares. Existem diversas equações de estado para estes fluidos listadas na literatura, e sua utilização depende da determinação dos parâmetros que definem suas formulações.

O objetivo deste trabalho é, portanto, o levantamento experimental de parâmetros reológicos que possibilitem a obtenção de uma equação de estado adequada e mais representativa para o tipo de fluido em estudo, seu acoplamento à modelagem do processo, e a avaliação do reflexo de sua inclusão no projeto de fraturamento hidráulico. São introduzidas algumas propostas na modelagem das dimensões de uma fratura, com ênfase na teoria de filtração utilizada.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, os quais, além deste primeiro, podem ser resumidos a:

- ✓ O segundo capítulo se destina a efetuar uma revisão da literatura envolvida nos aspectos abordados no trabalho.
- ✓ No terceiro capítulo é apresentada a modelagem proposta para a análise dos dados experimentais. Sua primeira parte se dedica a equacionar o escoamento do fluido na fratura, introduzindo conceitos de viscoelasticidade na formulação deste escoamento, que é desenvolvido em forma tensorial. A segunda parte estuda o fenômeno da filtração, a chave para o equacionamento volumétrico do processo; nela é introduzido o conceito de fratura virtual, que possibilita o acoplamento das áreas envolvidas no mesmo. Tais conceitos são reunidos na terceira parte resultando na determinação do perfil de pressão dentro da fratura. Finalmente, tal perfil é transformado em dimensão de fratura com a aplicação de equações da Mecânica das Rochas na quarta parte.
- ✓ O quarto capítulo apresenta os resultados experimentais obtidos descrevendo os materiais e métodos utilizados em seu processamento. Nele são descritos os fluidos testados, o aparato reológico, e as metodologias usadas no tratamento dos dados medidos.
- ✓ A análise destes resultados compõe o quinto capítulo, que está dividido em cinco partes: a análise do caráter viscoso do fluido, de suas propriedades dinâmicas, de seu caráter elástico, de sua dependência com a concentração e temperatura, e de seu comportamento no tempo. O fluido é devidamente modelado quanto a estes aspectos e são apresentadas propostas para o inter-relacionamento dos mesmos, algumas inéditas na literatura.
- ✓ O sexto capítulo se destina à discussão dos resultados encontrados, integrando a parte experimental à modelagem proposta. Este modelo é, então, confrontado com os modelos básicos de dimensionamento de fraturamento para validação e exposição dos efeitos introduzidos no equacionamento do processo. Finalmente, o conceito de número de Débora é introduzido na modelagem do fraturamento hidráulico, fornecendo um critério operacional para o projeto.
- ✓ O sétimo capítulo apresenta as conclusões resultantes do material estudado, enfatizando sinteticamente aspectos importantes analisados nos capítulos anteriores e destacando outros resultantes da interpretação dos resultados obtidos. Apresenta, também, no oitavo capítulo, recomendações e sugestões para trabalhos futuros.

Na bibliografia, os autores foram dispostos em ordem alfabética e numerados de forma a poderem ser referenciados das duas formas. A citação nominal e em letras maiúsculas de um autor no corpo do trabalho indica estar o mesmo listado na bibliografia.

Complementando o trabalho são apresentados sete apêndices que abordam aspectos importantes à compreensão do texto principal:

- ✓ Análise tensorial - operações e propriedades dos tensores; notação gráfica e indicial; estudo de casos específicos.
- ✓ A goma guar e seus derivados - estrutura, propriedades e aplicações industriais da goma guar.
- ✓ Parâmetros reológicos - caracterização dos principais parâmetros reológicos.
- ✓ Modelos reológicos - descrição e classificação dos principais modelos reológicos: empíricos, viscoelásticos lineares, não-lineares expandidos, diferenciais e integrais.
- ✓ Reometria - descrição e equacionamento das três principais geometrias utilizadas na caracterização reológica dos fluidos viscoelásticos: cilindros concêntricos, placa-placa e cone-placa.
- ✓ Modelos de geometria de fraturas - equacionamento dos dois principais modelos de dimensionamento de fraturas: PKN e KGD. Introdução ao método proposto por Nolte.
- ✓ Escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos - uma visão do estado-da-arte neste assunto, com ênfase nos estudos desenvolvidos por Pascal.
- ✓ Variáveis complexas - introdução das variáveis complexas na Teoria da Elasticidade conforme proposto por Muskhelishvili.
- ✓ Mecânica de fraturas - desenvolvimento da Teoria da Elasticidade com notação indicial e com a introdução de variáveis complexas, baseado em Green & Zerna.

Esta dissertação foi editada no processador de textos AmiPro 3.0 ^I, no ambiente Windows 3.1 ^{II}. O tratamento dos dados foi feito através das planilhas SuperCalc IV ^{III}, otus

^I Lotus Development Corporation.

^{II} Microsoft Corporation.

^{III} Computer Associates International, Inc.

1-2-3 4.0^I e Excel 4.0^{II} ou de programas preparados em Fortran 5.0^{II} e Turbo Pascal 5.5^{IV}. Os itens de modelagem foram simulados em programas nestes softwares e, mais freqüentemente, em Mathematica 2.0^V e Mathcad 5.0^{VI}, de onde alguns gráficos foram transpostos. Os demais gráficos foram traçados no Grapher 1.0 para Windows^{VII}, ou retirados das citadas planilhas. As figuras ilustrativas incluídas foram feitas no citado processador ou no CorelDraw 3.0^{VIII}. Na obtenção dos dados foram utilizados os softwares que acompanham os aparatos experimentais, descritos no capítulo 4.

^{IV} Bordland International, Inc.

^V Wolfran Research, Inc.

^{VI} MathSoft Inc.

^{VII} Golden Software, Inc.

^{VIII} Corel Corporation.

2. Revisão da literatura

O termo **Reologia** foi primeiramente utilizado pelo professor Bingham⁽¹⁵⁾, que o definiu como o estudo da deformação e escoamento da matéria, sendo esta definição aceita pela Sociedade Americana de Reologia^(156, 168) por ocasião de sua fundação em 1929. Porém, sua fundamentação teórica vem sendo construída há três séculos.

Em 1687, Robert Hooke propôs em *De Potentia Restitutiva* que "*Ut tensio sic vis; ou seja, a potência de uma mola é proporcional à tensão a ela aplicada*", a Lei de Hooke, que é a premissa básica da Teoria Clássica da Elasticidade. Nove anos após, Isaac Newton publicou *Principia* onde lançou a seguinte hipótese associada ao escoamento cisalhante permanente: "*a resistência que surge devido à falta de escorregamento de partes de um líquido, mantidas as demais variáveis fixas, é proporcional à velocidade com que tais partes são separadas umas das outras*". Este é o enunciado da Lei de Newton que define a viscosidade, a falta de escorregamento, base da Mecânica dos Fluidos.

Estas duas leis delimitam os extremos de uma teoria da física-matemática denominada Mecânica do Contínuo⁽¹⁹⁾ que estuda a resposta de corpos ideais à força aplicada e à deformação. Sua formulação matemática foi concebida por Leonhard Euler em 1745, porém sua consolidação somente se deu um século depois, em 1845, quando George Stokes formulou um conjunto de equações diferenciais que estenderam aos fluidos os princípios gerais de estabilidade dos corpos sólidos deduzidos por Louis-Marie-Henri Navier em 1821. Tal formulação se baseou em elementos da teoria molecular, a partir de conceitos desenvolvidos por Augustin-Louis Cauchy (1822) e Simon-Denis Poisson (1828), que estabeleceram as bases da Teoria da Elasticidade Linear.

Em 1848, Lorde Kelvin incorporou à teoria conceitos de Termodinâmica. Tal histórico pode ser acompanhado, em detalhes, em LOVE, VOLTERRA & GAINES e JOSEPH.

Os princípios básicos da **Mecânica do Contínuo** são⁽²⁵¹⁾:

- ✓ 1. Conservação de massa.
- ✓ 2. Conceito de tensão.
- ✓ 3. Simetria do tensor tensão (do balanço de momento angular).
- ✓ 4. Equações de movimento (do balanço de momento linear).
- ✓ 5. Análise de tensão e deformação.
- ✓ 6. Conservação da energia.

e estes princípios estão consubstanciados em equações e procedimentos amplamente divulgados na literatura.

A Mecânica do Contínuo é generalista e comporta conceitos tanto da Elasticidade quanto da Mecânica de Fluidos, sempre descrevendo os fenômenos que envolvem a matéria do ponto de vista macroscópico. A Reologia se baseia nos princípios matemáticos da Mecânica do Contínuo, porém os reinterpreta a partir de idéias obtidas dos estudos da microestrutura dos corpos envolvidos. Ela somente adquiriu importância a partir de 1920, quando o comportamento mecânico de materiais industriais como a borracha, os plásticos, as argilas, as tintas e outros importantes fluidos biológicos começaram chamar a atenção de físicos, matemáticos, engenheiros e químicos.

O primeiro questionamento quanto à aplicabilidade das equações de Navier-Stokes aos fluidos em geral foi levantado por James Clerk Maxwell em 1871⁽¹²⁹⁾, ao observar o comportamento do asfalto quando submetido a um estado de tensões não-hidrostático. Diversos cientistas se dedicaram ao estudo de fluidos que não obedeciam a este equacionamento, centrados especialmente em gelatina e no sangue, e, somente em 1911 foi reportado o relacionamento entre a viscosidade e a taxa de cisalhamento.

A partir de 1920 começaram a surgir os primeiros **modelos empíricos** relacionando a viscosidade à taxa de cisalhamento. Baseado em experimentos com argilas e tintas, Bingham formulou seu modelo para substâncias que somente entram em fluxo após ser atingido um nível crítico de tensão,

$$\begin{cases} \tau - \tau_0 = \eta_p \dot{\gamma}; & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0; & |\tau| \leq \tau_0 \end{cases}$$

onde τ_0 é chamado limite de escoamento, e η_p , viscosidade plástica, é o coeficiente linear da curva de escoamento linearizada. Ele propôs que estas substâncias não sejam classificadas como fluidos, e sim como materiais plásticos devido a esta característica. Logo após, o modelo de potência foi introduzido por de Waele (1923) e Ostwald (1925), na forma

$$\tau = K|\dot{\gamma}|^{n-1}\dot{\gamma}$$

onde K é denominado índice de consistência e n , índice de comportamento.

Vários outros modelos empíricos foram desenvolvidos^(47, 51, 53, 104, 237), alguns dos quais estão listados na tabela 1. O modelo simples mais completo é atribuído a Carreau (1968), aperfeiçoado por Yasuda (1979), e possui cinco parâmetros conseguindo, em geral, descrever adequadamente os resultados experimentais de viscosidade, sendo dado por

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a}$$

Este modelo será melhor descrito posteriormente. Além destes modelos simples, vários outros foram propostos em forma de séries. Tais ajustes empíricos podem ser polinomiais⁽¹²⁹⁾ ou por funcionais⁽⁸⁰⁾.

modelo	equação	Obs.
<i>Herchel-Buckley</i>	$\begin{cases} \tau - \tau_0 = K \dot{\gamma} ^{n-1}\dot{\gamma}; & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0; & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$	Combinação dos modelos de potência e de Bingham.
<i>Eyring</i> ($\eta_1 = 0, \alpha = 1$); <i>Powell-Eyring</i> ($\alpha = 1$); <i>Sutterby</i> ($\eta_1 = 0$)	$\eta = \lambda_0 \tau_0 \left(\frac{\arcsin \lambda_0 \dot{\gamma}}{\lambda_0 \dot{\gamma}} \right)^\alpha + \eta_1$	Modelo obtido a partir da teoria molecular.
<i>Ellis</i>	$\frac{\eta_0}{\eta} = 1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}$	$\tau_{1/2}$ é o valor da tensão para a viscosidade $h = h_0/2$
<i>Casson</i>	$\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_0} = \sqrt{\eta_0 \dot{\gamma}}; \quad \tau > \tau_0$	Indicado para sólidos.

Tab. 1 - Modelos reológicos empíricos⁽²¹⁾.

Os estudos sobre os efeitos de **tensão normal** são mais recentes, tendo sido iniciados na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, em materiais para lança-chamas, por Garner, Nissan, Wood e Weissenberg. Garner propôs um método para a determinação da distribuição de pressões normais em fluxo torsional posicionando tubos de vidro em orifícios em um disco. Weissenberg preparou uma série de experimentos práticos em que estes efeitos estão presentes de forma intensa e projetou o dispositivo cone-placa para sua medição. Como a viscosidade, estes efeitos podem ser representados por modelos empíricos^(67, 251).

O período pós-guerra é caracterizado por um rápido crescimento comercial da utilização de polímeros em diversas aplicações tecnológicas. O estudo de suas propriedades reológicas e sua caracterização físico-química tornaram-se prioritários em diversos ramos industriais, o que provocou um rápido desenvolvimento nestes campos^(127, 133, 220, 253, 270) e no aprimoramento de dispositivos destinados à medição destas propriedades, gerando a **Reometria**.

Em 1953, Greensmith e Rivlin publicaram um cuidadoso estudo sobre o fluxo torsional permanente, no dispositivo placa-placa, mostrando que a tensão normal gerada pela rotação é função exclusiva da taxa de cisalhamento.

Diversos aparatos reológicos estão disponíveis atualmente, envolvendo geometrias e princípios diversificados. Uma visão geral destes dispositivos pode ser encontrada em WALTERS, WHORLOW e BIRD, ARMSTRONG & HASSAGER.

Os modelos empíricos podem representar corretamente o comportamento viscoso dos fluidos, porém não contemplam seu componente elástico. Suas equações tratam as variáveis envolvidas como escalares, ignorando o caráter tensorial inerente ao relacionamento de variáveis que descrevem o movimento e deformação de corpos (ver CHRISTENSEN).

A incorporação da Lei de Newton às equações de equilíbrio gera um sistema de equações que descreve perfeitamente os fenômenos relacionados aos fluidos perfeitamente viscosos, porém falha em relação aos fluidos viscoelásticos, mesmo com a substituição da referida lei pelos modelos empíricos citados, válidos somente como uma aproximação que, em determinados casos, fornece resultados aceitáveis.

Esta questão foi retomada em 1945 por Reiner, RIVLIN e Truesdell, que propuseram uma equação de estado relacionando tensão e deformação em forma polinomial, introduzindo um termo de segunda ordem na deformação. Tal equação mostrou bons resultados para algumas soluções poliméricas. Tais resultados foram consolidados em 1955, quando Rivlin e Ericksen publicaram sua teoria consolidando definitivamente a análise tensorial nesta área.

Em 1950, OLDROYD lançou as bases para a formulação adequada de **equações reológicas de estado**, estabelecendo seus princípios básicos:

- ✓ As equações constitutivas devem ser independentes do sistema de referência usado para descrevê-las. Tal princípio é automaticamente satisfeito caso tais equações sejam expressas numa forma tensorial consistente, o que é necessário em qualquer teoria física.
- ✓ As equações constitutivas devem ser independentes do movimento absoluto no espaço. Qualquer superposição de movimento de corpo rígido não pode afetar a resposta do material.

- ✓ O comportamento de um elemento do corpo depende somente de sua história anterior, independentemente do estado dos elementos situados em sua vizinhança. Expressando de outra forma, a tensão é determinada pelo histórico de deformação, e a tensão em um determinado ponto do corpo é determinada unicamente pelo histórico de deformação de uma vizinhança arbitrariamente pequena daquele ponto. Este princípio introduz o conceito de que a memória do fluido deve ser associada a elementos do corpo, e não a pontos no espaço.
- ✓ No caso de líquidos elásticos, a história de deformação de um elemento do corpo em um passado distante deve ter menor influência que a de um passado recente. Este é conhecido como *princípio da memória atenuada*.
- ✓ As equações de estado devem ser consistentes com os princípios termodinâmicos.

Neste mesmo trabalho, Oldroyd introduziu o sistema de coordenadas convectivo, que é acoplado ao corpo, movimentando-se e deformando-se com ele, e que automaticamente satisfaz os três primeiros princípios. Tal sistema é, na realidade, a adaptação do sistema lagrangiano de coordenadas, em contraposição ao sistema euleriano, amplamente utilizado na Mecânica dos Fluidos. Princípios da Termodinâmica Clássica são encontrados em VAN WYLEN & SONNTAG.

A partir destes princípios e da base matemática formulada, diversos **modelos viscoelásticos** foram desenvolvidos, e constam do Apêndice D. No presente capítulo constarão somente como parte do histórico do desenvolvimento da Mecânica do Contínuo.

A viscoelasticidade linear foi desenvolvida a partir do modelo proposto por Maxwell, que se resume a uma equação linear simples, e de aperfeiçoamentos incorporados a este modelo, como o sugerido por Jeffreys (1929), que se destaca pela correta descrição qualitativa do comportamento viscoelástico linear. O modelo de Maxwell pode ser generalizado através do princípio da superposição de Boltzmann (1876), que o resume a uma forma integral simples. Os modelos moleculares se enquadram, em geral, neste modelo generalizado, como os atribuídos a Rouse (1953) e Doi & Edwards (1978). Os modelos

lineares são importantes no estudo do movimento oscilatório de pequena amplitude, e em fenômenos semi-estáticos como a relaxação da tensão após um rápido deslocamento cisalhante ou após o término de um escoamento cisalhante permanente, o crescimento da tensão no início de um escoamento permanente cisalhante, a determinação do espectro de relaxação^(85, 193), e outros estudos similares, equacionados em FERRY (1980) e BIRD, ARMSTRONG & HASSAGER (1987). Tais modelos não conseguem descrever a dependência da viscosidade a taxa de cisalhamento, nem os efeitos de tensão normal.

A partir da formulação tensorial proposta por Rivlin e Ericksen, as equações de estado passaram a ser formuladas em expansões de movimento retardado, onde o tensor tensão é expresso em uma série de Taylor do tensor taxa de deformação. O truncamento na primeira derivada modela os fluidos incompressíveis de primeira ordem, na segunda derivada, os fluidos incompressíveis de segunda ordem, e assim por diante. Destacam-se, neste campo, os trabalhos de Langlois e Rivlin (1963), de Pipkin e Rivlin (1963), de Giesekus (1963), e de Tanner e Pipkin (1969), que desenvolvem importantes teoremas para o escoamento destes fluidos. De grande influência, nesta fase, é o texto de COLEMAN, MARKOVITZ & NOLL (1966) sobre o desenvolvimento teórico e experimental destes fluidos. Tal formulação permitiu o desenvolvimento de equações de estado para fluidos de baixo número de Débora, possibilitando a análise de não-linearidades como os efeitos de tensão normal e da viscosidade extensional, porém apresenta problemas de estabilidade e é muito dependente da escolha das constantes da expansão⁽⁵⁷⁾.

A próxima etapa de desenvolvimento das equações de estado resultou da introdução de não-linearidades no tensor tensão, além das já citadas no tensor taxa de deformação, iniciada a partir do texto básico de Oldroyd, anteriormente citado. Este autor sugeriu um modelo para um fluido que denominou B , que é uma adaptação convectiva do modelo de Jeffreys, e que, simplificado, gera o modelo convectivo de Maxwell. Em 1963, White &

Metzner propuzeram um modelo diferencial simples, uma modificação do modelo convectivo de Maxwell, onde incluíram o segundo invariante do tensor taxa de deformação, ou seja, a taxa de cisalhamento. Em trabalhos posteriores ao citado, Oldroyd sugeriu a inclusão de termos quadráticos no gradiente de velocidade do modelo de Jeffreys, gerando seu modelo de oito parâmetros. GIESEKUS, em 1982, propôs seu modelo diferencial incluindo termos não-lineares em tensão, um modelo de quatro parâmetros que se mostrou, em aplicações práticas, extremamente versátil e abrangente. Existe uma grande variedade de modelos diferenciais citados na literatura^(196, 255), porém eles podem sempre ser classificados como variações dos modelos básicos citados, que são, por sua vez, generalizações do modelo de Jeffreys. O maior problema enfrentado pelos modelos diferenciais refere-se à fixação de algumas constantes de tempo em suas formulações, o que resulta em sua inabilidade de descrever corretamente a viscoelasticidade linear.

A modelagem mais completa dos fenômenos viscoelásticos é dada pelas equações constitutivas integrais, que partem do modelo generalizado de Maxwell, no qual são introduzidas não-linearidades. Os primeiros modelos registrados na literatura, dentro deste escopo, são atribuídos a Lodge (1964): o modelo do líquido elástico, onde o tensor deformação é substituído pelo tensor de deformação finita de Finger, e o modelo reticulado, que é uma adaptação do modelo anterior. Os modelos integrais completos combinam os tensores de deformação finita de Finger e de Cauchy em duas equações básicas: o K-BKZ⁽²⁵⁷⁾, atribuído a Kaye (1962) e a Bernstein, Kearsley & Zapas (1963), independentemente, e o Rivlin-Sawyers (1971), sendo tais modelos equivalentes. Estas equações englobam os modelos moleculares e são bastante abrangentes. A partir delas foram propostos diversos modelos, entre eles o de WAGNER (1979), o mais testado experimentalmente. Tais modelos possuem pouquíssimas limitações, porém sua utilização prática conduz, em geral, a soluções numéricas^(57, 132).

Na área da Mecânica das Rochas (ver GOODMAN e JAEGER & COOK), e em áreas correlatas como a Teoria da Elasticidade e a Mecânica do Contínuo, o item pesquisado foi a **Mecânica de Fraturas**. Este trabalho restringe sua área de estudos às fraturas verticais obtidas a partir da aplicação de pressão hidráulica em uma formação rochosa. Tais fraturas, em um poço de petróleo, possuem dois estágios: a iniciação e a propagação. No estágio de iniciação, ou quebra, o poço é pressurizado de forma a gerar um estado de tensões tal que a tensão tangencial induzida na parede do poço vença a resistência imposta pela coesão estrutural da rocha. Este item é intimamente ligado ao estudo de estabilidade de poços, o que, por sua vez, abrange aspectos mecânicos^(26, 27, 32, 35, 42, 61, 77, 97, 117, 158), geológicos^(3, 40, 86, 267, 288) e operacionais^(6, 62, 142). Aberta a fratura, a mesma será propagada pela imposição de uma tensão superior à mínima tensão principal, e esta propagação seguirá a direção definida pelo plano ortogonal à esta tensão mínima, e é neste estágio que serão centrados os estudos do presente trabalho.

A modelagem teórica da propagação de fraturas tem dois estágios fundamentais dentro da evolução da Teoria da Elasticidade (a teoria básica de Elasticidade pode ser pesquisada em TIMOSHENKO & GOODIER e UGURAL & FENSTER e a mecânica analítica em FAIRES & CHAMBERS e POPOV). No início dos anos 20, Griffith publicou dois artigos onde propôs um critério para o fenômeno de fraturas em materiais frágeis (*brittle fractures*) em termos da energia necessária para sua propagação. Em obra fundamental, somente divulgada no Ocidente duas décadas após sua publicação inicial, MUSKHELISHVILI (1933) sistematizou a utilização das variáveis complexas em problemas da Teoria da Elasticidade. Estes dois trabalhos alavancaram o desenvolvimento da Mecânica de Fraturas para o nível observado no estágio atual. Dois textos, SOKOLNIKOFF (1946) e GREEN & ZERNA (1954), consolidaram e generalizaram esta técnica na Mecânica do Contínuo.

A modelagem propriamente dita de uma fratura foi explicitada por SNEDDON (1945) para o caso tri-dimensional (denominado *penny-shaped* na literatura), usando transformadas de Hankel, e por ENGLAND & GREEN (1962) para o caso bi-dimensional, usando variáveis complexas, para os estados de tensão e deformação planas. Uma fratura modelada a partir destes conceitos e com uma pressão interna uniforme apresenta um perfil elíptico, com uma concentração infinita de tensão em suas extremidades. Tal fato induz uma condição de instabilidade que pode ser contornada pela aplicação de critérios adequados. Em 1955, KHRISTIANOVICH & ZHELTOV, estudando o fraturamento hidráulico, propuseram um modelo de fratura parcialmente carregada, onde o fluido fraturante não atinge suas extremidades, contornando o problema. BARENBLATT, em 1962, desenvolveu uma teoria de equilíbrio para fraturas em materiais frágeis baseada na reação proporcionada pelas forças coesivas estruturais destes materiais. A ação destas forças foi devidamente equacionada, para os modelos teóricos disponíveis, por KEER (1964) e GOODIER (*in* LIEBOWITZ).

Existem outros enfoques para a modelagem de fraturas disponíveis na literatura. O mais completo parte da Teoria da Poroelasticidade^(69, 130, 189) desenvolvida por Biot (1941) e Terzaghi (1943), que acopla equações de difusão à Teoria da Elasticidade. Outra vertente importante, denominada Teoria da Fratura Linear Elástica^(34, 174, 291), foi iniciada por Orowan (1952) e Irwin (1957) através de modificações introduzidas na teoria de Griffith para incluir processos de energia dissipativa como o escoamento plástico e as microfraturas. Esta teoria define fatores de intensidade de tensão, que quantificam a intensidade das singularidades em tensão presentes na extremidade da fratura (ver BROEK e SIH). Em geral, tais teorias levam a soluções numéricas, sendo recomendáveis para simulações tri-dimensionais de fraturas e consomem razoável recurso computacional.

Na Engenharia do Petróleo, a **modelagem do fraturamento hidráulico** começou a ser tratada por volta de 1957 (HUBBERT e HOWARD & FAST no Ocidente, e alguns autores

russos somente publicados posteriormente), e ela é, normalmente, a resultante do acoplamento de três teorias básicas: o escoamento de fluidos em dutos, a filtração e a mecânica de fraturas. Em geral, os trabalhos sobre o processo apresentam tais teorias em conjunto. Sobre a teoria de filtração, vários artigos^(81, 105, 166, 205, 227, 285) estão disponíveis na literatura, além dos textos básicos sobre o processo. Quanto ao escoamento de fluidos em dutos, em geral são utilizadas teorias baseadas na Mecânica dos Fluidos com adaptações para as condições próprias deste tipo de tratamento^(55, 68, 167).

O modelo pioneiro de fraturamento foi apresentado por PERKINS & KERN (1961), que, a partir do modelo tri-dimensional de SNEDDON, dimensionaram fraturas horizontais e verticais impermeáveis. Tal modelo é complementado pela teoria de filtração proposta por CARTER (1961), resultando em uma técnica iterativa de dimensionamento de fraturas devido ao fato desta teoria ser lagrangiana, enquanto que a outra foi desenvolvida sob o ponto de vista euleriano⁽¹⁷²⁾. Esta primeira teoria recebeu o nome de *modelo PKN* em homenagem aos autores e a NORDGREN (1972), que reuniu ambas as teorias em uma única equação diferencial, de solução numérica⁽¹³⁵⁾.

A partir do equacionamento proposto por England & Green, GEERTSMA & DE KLERK (1969) formularam o *modelo KGD*, utilizando o critério de Barenblatt para a estabilidade da fratura e princípios formulados por KRISTIANOVICH. Tal modelo é abordado por GEERTSMA em uma série de outros artigos⁽⁸⁹⁻⁹²⁾. Este modelo é euleriano, e, por ser acoplado à teoria de Carter, torna-se, também, iterativo. Posteriormente, DANESHY (1973), partindo dos mesmos princípios, porém com uma teoria de filtração própria, desenvolveu um modelo numérico de dimensionamento de fraturamento.

Uma inovação relevante nesta área foi introduzida por NOLTE, que numa série de artigos publicados a partir de 1979, propôs uma nova teoria de filtração, inicialmente

utilizada para a avaliação dos resultados de um fraturamento e posteriormente estendida para aspectos de sua modelagem^(151, 214, 224). Após a consolidação dos modelos bi-dimensionais de fraturamento, os esforços concentraram-se no desenvolvimento de modelos pseudo-3D^(141, 159) e tri-dimensionais^(23, 58, 147, 173, 178, 179), invariavelmente numéricos no último caso. Os progressos relativos a esta área podem ser acompanhados nas diversas monografias específicas publicadas pela SPE sobre o assunto e em Le TIRANT & GAY, BOUTECA & SARDA, CLEARY, MEYER e VEATCH. Informações gerais sobre o processo podem ser obtidas em publicações específicas^(4, 13, 66, 72, 106, 107, 161, 162, 180, 212, 226), assim como quanto a aspectos relativos à modelagem^(2, 59, 84, 104, 112, 153, 207, 233, 239, 240) e a técnicas e condições operacionais^(56, 111, 146, 149, 215, 280).

Os principais formuladores de modelos numéricos para a simulação de fraturamento hidráulico são CLEARY, SETTARI e CLIFTON, empregando, em geral, técnicas de diferenças finitas (ver AZIZ & SETTARI), porém outras técnicas computacionais se mostram, também, adequadas, como a de volumes de controle (PATANKAR), elementos finitos (BATHE & WILSON), elementos de contorno (BECKER e HARTMANN) e elementos discretos.

Os **fluxos** permanente e transiente de fluidos não-newtonianos **em meios porosos** tem recebido estudos a partir do final da década de 60 visando explorar as suas potencialidades como agente deslocante em projetos de recuperação de petróleo. Mais recentemente, a intensificação da produção de petróleos mais pesados, classificados como fluidos não-newtonianos que seguem o modelo generalizado de potência por recentes estudos reológicos, mostrou a necessidade de um aprofundamento na compreensão dos mecanismos envolvidos nestes fluxos.

Uma das primeiras tentativas de caracterizar as propriedades reológicas destes fluidos objetivando sua utilização em projetos de recuperação secundária foi registrada por

GOGARTY, que apresentou algumas correlações teóricas e experimentais para a determinação da viscosidade efetiva deste fluidos. Logo após, van POOLEN & JARGON apresentaram um estudo para o equacionamento dos fluxos permanente e transiente dos mesmos com a utilização das correlações acima citadas.

Em 1969, SAVINS apresentou um trabalho fundamental em termos reológicos, que estabelece toda a base teórica e experimental, dentro deste aspecto, dos mecanismos responsáveis pelo comportamento observado no escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos. Em 1979, e coincidentemente no mesmo volume do SPEJ, IKOKU & RAMEY e ODEH & YANG lançaram dois artigos, com diferentes enfoques reológicos, nos quais consolidaram a teoria para o fluxo transiente destes fluidos. Um resumo dos mesmos pode ser acompanhado no Apêndice G.

No ano seguinte, TEEWN & HESSELINK abordaram diversos aspectos práticos referentes ao comportamento de soluções bio-poliméricas em meios porosos. Por meio de experimentos com cromatografia hidrodinâmica eles apresentaram interessante abordagem para os fenômenos de volume poroso inacessível e retenção bio-polimérica. LUND & IKOKU sugeriram a utilização de fluidos não-newtonianos em testes de injetividade em reservatórios compostos, dado os pobres resultados conseguidos com fluidos newtonianos.

A partir de 1981, PASCAL iniciou a publicação de uma série de artigos abordando diversos aspectos ligados à Engenharia de Reservatório relativos a fluidos não-newtonianos, e estabeleceu a base definitiva para a interpretação do escoamento destes fluidos em meios porosos.

Na área de Completação ^(184, 205) diversos trabalhos foram consultados visto a utilização intensiva destes fluidos em operações de cimentação e, principalmente, fraturamento hidráulico. Destaque-se, nesta área, os trabalhos de TOROK & ADVANI que propõe melhoramentos na teoria desenvolvida por Pascal com a utilização das Séries de

Lie⁽¹²⁶⁾ no tratamento de equações não-autônomas em problemas de valor inicial. Outras áreas afins consultadas foram a Perfuração⁽²⁴⁾ e a Produção⁽³⁰⁾.

O outro campo científico que interage fortemente com os aspectos abordados neste trabalho é a **Química**, justamente devido à sua importância dentro da Reologia. Nem sempre os dados necessários para o estudo de fluidos de fraturamento estão disponíveis, por se tratar de informação tecnológica em geral protegida por patentes, porém são dados subsidiários dentro do escopo deste trabalho. As informações básicas envolvidas podem ser encontradas tanto em textos acadêmicos - SIENKO (1970), ROSEN (1971) e PANCHENKOV & LEBEDEV (1976) -, quanto em textos específicos - WHISTLER (1973) e VINOGRADOV & MALKIN (1977) -, e em diversos artigos técnicos^(53, 68, 96, 110, 115, 149, 163, 281).

Foram estudados vários aspectos relacionados ao desenvolvimento do tema proposto que, embora não citados no corpo do trabalho, têm importante papel no processo de fraturamento hidráulico. O fenômeno de **redução de arrasto** (*drag reduction*) é essencial no dimensionamento do fluido e dos equipamentos utilizados, e se relaciona com a mudança do comportamento viscoso do fluido quando em regime de escoamento turbulento, que ocorre no estágio em que o fluido percorre a coluna utilizada no tratamento. Além dos textos que tratam do escoamento do fluido já citados, tal assunto pode ser pesquisado em outros livros^(232, 165) e artigos publicados^(76, 100, 109, 140, 145, 208, 260) sobre o tema.

Outro aspecto importante refere-se à **viscosidade extensional** (ou elongacional) do fluido de fraturamento que deve ter influência na entrada do fluido na fratura, dado que neste ponto ele passa por um orifício, o canhoneado do poço, e dentro da própria fratura devido aos diferenciais de tensão à que é submetido. Além de textos já citados, tal ponto tem desenvolvimento clássico em PETRIE e em outras referências^(137, 209).

Quanto ao **agente de sustentação**, responsável pela consolidação da fratura e formação do leito de alta permeabilidade e, portanto, pelo aumento de produtividade do poço, diversos trabalhos encontram-se disponíveis tratando deste aspecto experimentalmente^(11, 83, 164, 231, 253), de seu dimensionamento^(29, 88, 136, 150, 164), e de sua simulação matemática⁽⁶⁴⁾. Além destes artigos específicos, este item, devido sua importância, é tratado na maioria das referências que tratam do processo em questão. A produtividade da fratura pode ser avaliada por técnicas de escoamento permanente⁽²²³⁾ ou transiente⁽⁴⁶⁾.

A teoria **matemática** utilizada no desenvolvimento do tema, pode ser encontrada em CARSLAW, CHURCHILL, CUSHING, ERDÉLYI, FIGUEIREDO, FINLAYSON, GUEST, HAUSER, HILDEBRAND, INCE, KREYSZIG, KREIDER ET ALII, LANG, MORSE ET ALII, PALIOURAS ET ALII, SPIEGEL, TIJONOV ET ALII, WILSON ET ALII, além dos títulos citados no corpo do trabalho.

3. Modelagem

A modelagem do fraturamento hidráulico é complexa por envolver a integração de conhecimentos em diversas áreas da Engenharia, Física, Química e Matemática. Como a geometria da fratura hidráulica induzida nos corpos rochosos é considerada, teoricamente, elíptica, uma abordagem analítica rigorosa do escoamento de fluidos na mesma apresenta dificuldades matemáticas muitas vezes intransponíveis, somente resolvidas através de métodos numéricos ou da introdução de simplificações no curso do desenvolvimento.

Como a compreensão qualitativa deste fluxo é fundamental e básica para uma formulação coerente dos fenômenos envolvidos, assumiu-se neste trabalho modelos geométricos e reológicos simples, porém mais completos e representativos que os normalmente utilizados, objetivando a obtenção de parâmetros mais realistas.

Na literatura disponível sobre o assunto as referências (19) e (92) são básicas para uma compreensão global do mesmo. A primeira faz uma abordagem completa a respeito da reologia de soluções poliméricas enquanto que a segunda descreve os variados aspectos envolvidos no dimensionamento do fraturamento hidráulico e analisa os dois métodos analíticos bi-dimensionais mais utilizados: o *PKN*, que considera uma fratura de seção transversal elíptica, onde atua uma pressão de fluido constante, na qual a propagação longitudinal é influenciada somente pela resistência viscosa ao fluido de fraturamento, e o *KGD*, que considera uma fratura de seção transversal retangular, incorporando em sua propagação os fenômenos de escoamento e mecânica das rochas.

3.1 Escoamento Viscoelástico em Placas Paralelas

3.1.1. Hipóteses assumidas.

π

- ✓ A fratura é vertical, confinada em sua altura e propagada simetricamente em relação ao poço, apresentando uma seção transversal retangular (como no modelo KGD). Possui uma altura h e um comprimento total $2L$.
- ✓ A excentricidade da elipse é praticamente unitária, sendo portanto a fratura representada por duas placas paralelas separadas por uma abertura w . Os efeitos de borda devido às extremidades superior e inferior são desconsiderados devido à esta hipótese.
- ✓ A filtração de fluido pelas paredes da fratura não será considerada neste item, embora seja importante, sendo incorporada posteriormente.
- ✓ O fluido utilizado é incompressível e não-newtoniano, bombeado à uma vazão constante q_0 pelo poço, e possui componentes viscosos e elásticos. O escoamento é considerado cisalhante simples e permanente sendo as funções viscométricas dadas pela lei de potência:

$$\text{viscosidade} \quad \eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

$$\text{coeficiente da primeira diferença de tensões normais} \quad \Psi_1(\dot{\gamma}) = K_1 \dot{\gamma}^{n'-2}$$

$$\text{coeficiente da segunda diferença de tensões normais} \quad \Psi_2(\dot{\gamma}) = K_2 \dot{\gamma}^{n''-2}$$

onde, conforme a literatura, a segunda diferença é, em módulo, bem menor que a primeira. A equação reológica de estado adotada é a CEF (Criminale-Ericksen-Filbey)⁽¹⁹⁾, a mais indicada para este tipo de escoamento, dada por (tensores em negrito):

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta\boldsymbol{\gamma}_{(1)} + \frac{1}{2}\Psi_1\boldsymbol{\gamma}_{(2)} - \Psi_2\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \bullet \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\} \quad (1)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ são os tensores tensão e deformação e os índices subscritos entre parêntesis indicam o grau da derivada covariante do tensor deformação.

- ✓ A influência da temperatura não é considerada neste item, sendo o escoamento descrito pelas equações da continuidade e da conservação do momento para escoamento permanente, desprezando-se os efeitos inerciais e gravitacionais, dadas por:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad e \quad [\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}] = 0 \quad (2)$$

onde \mathbf{v} e $\boldsymbol{\pi}$ representam velocidade e tensão total.

- ✓ Convenção de sinais adotada para a tensão: a compressão é positiva.

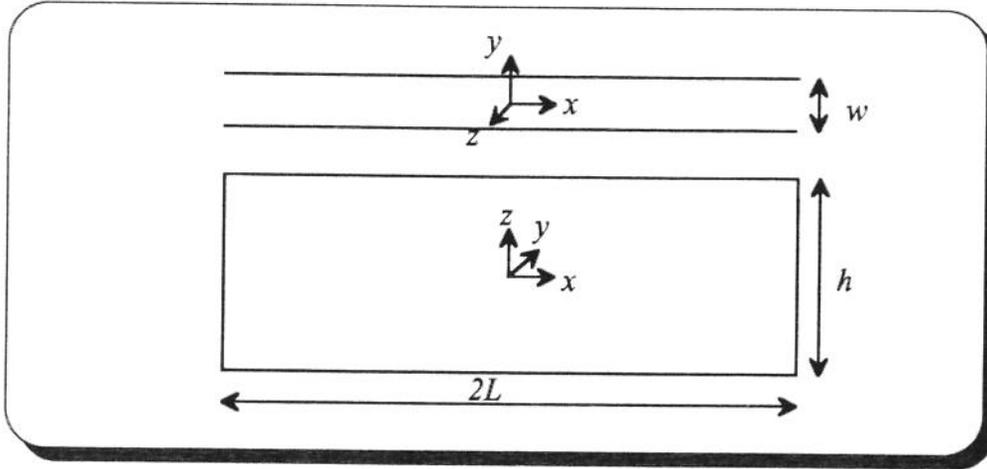


Fig.1 - Modelo simplificado proposto

3.1.2. Formulação matemática

No escoamento cisalhante permanente simples, os componentes do vetor velocidade são dados por:

$$v_x = v(y) \quad v_y = v_z = 0 \quad (3)$$

portanto

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(1)} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx} \quad \{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}^2$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(2)} = -\{(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)} + \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot (\nabla \mathbf{v})\} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}^2$$

O tensor total de tensão pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

onde p é a pressão hidrostática e $\boldsymbol{\delta}$ é o delta de Kronecker. O tensor tensão, $\boldsymbol{\tau}$, de acordo com a equação CEF, é expresso em sua forma matricial por:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} -(\Psi_1 + \Psi_2) \dot{\gamma}_{yx}^2 & -\eta \dot{\gamma}_{yx} & 0 \\ -\eta \dot{\gamma}_{yx} & -\Psi_2 \dot{\gamma}_{yx}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Portanto, o escoamento de um fluido não-newtoniano em uma fratura introduz em seu equacionamento duas tensões adicionais: uma na direção do fluxo, que atuará sempre no sentido de mantê-la; e outra ortogonal à direção do fluxo, que atuará sobre as paredes da fratura, que serão dadas pelas diferenças entre as tensões normais na forma:

$$\begin{cases} N_1 = \tau_{yy} - \tau_{xx} = \Psi_1 \dot{\gamma}_{yx}^2 \\ N_2 = \tau_{zz} - \tau_{yy} = \Psi_2 \dot{\gamma}_{yx}^2 \end{cases}$$

O escoamento aqui considerado é retilíneo[†], ou seja, todas as componentes de movimento são função somente de y pois a única velocidade não-nula, v_x , é função somente desta coordenada, sendo portanto a taxa de cisalhamento e a tensão, também, funções somente dela. Portanto as equações de conservação de momento se reduzem a:

$$\frac{d}{dy} \eta \dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} p = \nabla p_x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dy} \Psi_2 \dot{\gamma}_{yx}^2 = \frac{\partial}{\partial y} p = \nabla p_y \quad (7)$$

submetidas às seguintes condições de contorno:

$$[v_x]_{y=\pm \frac{a}{2}} = 0 \quad e \quad [\dot{\gamma}_{yx}]_{y=0} = \left[-\frac{d}{dy} v_x \right]_{y=0} = 0 \quad (8)$$

† Este tipo de escoamento - retilíneo - é governado pelo Teorema de Langlois, Rivlin e Pipkin para fluidos de segunda ordem⁽¹⁹⁾.

A primeira condição resulta da necessária aderência entre o fluido e a parede, e a segunda se deve à simetria do escoamento (seu sinal negativo se deve à convenção de sinais adotada).

Substituindo-se as funções viscométricas e resolvendo-se a equação (6) obtém-se

$$\dot{\gamma}_{yx} = \left[\frac{y \nabla p_x + C_1}{K} \right]^{1/n} \Rightarrow [C_1 = 0]_{y=0}$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = \left[\frac{y \nabla p_x}{K} \right]^{1/n} \quad \text{ou,} \quad \nabla p_x = \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{y} \eta(\dot{\gamma}) = -\frac{\tau_{yx}}{y} \quad (9)$$

devido à segunda condição de contorno. Nas placas tem-se

$$y = \frac{w}{2} \Rightarrow \dot{\gamma}_w = \left[\frac{w \nabla p_x}{2K} \right]^{1/n} \quad (10)$$

Da primeira condição tem-se

$$v_x = \int -\dot{\gamma}_{yx} dy = -\left(\frac{\nabla p_x}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} y^{\frac{n+1}{n}} + C_2 \Rightarrow \left[C_2 = \left(\frac{\nabla p_x}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]_{y=w/2}$$

$$v_x = \left(\frac{\nabla p_x}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[\left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} - y^{\frac{n+1}{n}} \right] = \frac{n}{n+1} \frac{w}{2} \dot{\gamma}_w \left[1 - \left(\frac{2y}{w}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (11)$$

Como a vazão é conhecida ($q_0 = \text{cte.}$), e divide-se simetricamente para cada asa da fratura, pode-se, através da velocidade média, explicitar uma expressão para o gradiente de pressão na direção do fluxo:

$$\frac{q_0}{2} = hw\bar{v}_x = 2h \int_0^{\frac{w}{2}} v_x dy \Rightarrow q_0 = \frac{hw^2}{2+\frac{1}{n}} \dot{\gamma}_w$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla p_x = \frac{2K}{w} \dot{\gamma}_w^n = \frac{2K}{w} \left[\left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{q_0}{hw^2} \right]^n} \quad (12)$$

A taxa de cisalhamento, em função dos dados de entrada, será dada por

$$\dot{\gamma}_{yx} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{q_0}{hw^2} \left(\frac{2y}{w}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Da segunda equação obtém-se:

$$\nabla p_y = \frac{d}{dy} \left[K_2 \dot{\gamma}_{yx}^{n''-2} \dot{\gamma}_{yx}^2 \right] = K_2 \frac{d}{dy} \left[\frac{\nabla p_x}{K} y \right]^{\frac{n''}{n}} = \left(\frac{\nabla p_x}{K}\right)^{\frac{n''}{n}} K_2 \frac{n''}{n} y^{\left(\frac{n''}{n}-1\right)}$$

$$\nabla p_y = K_2 \frac{n''}{n} \frac{\dot{\gamma}_{yx}^{n''}}{y} \quad \text{ou,} \quad \nabla p_y = \frac{n''}{n} \frac{\dot{\gamma}_{yx}^2}{y} \psi_2(\dot{\gamma}_{yx}) = \frac{n''}{n} \frac{\tau_{zz} - \tau_{yy}}{y} \quad (13)$$

nas placas tem-se

$$\nabla p_{y_w} = \frac{n''}{n} \frac{2}{w} \psi_2 \dot{\gamma}_w^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla p_{y_w} = \frac{n''}{n} \frac{2K_2}{w} \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{q_0}{h w^2} \right]^{n''}} \quad (14)$$

que é a tensão adicional aplicada às placas no sentido de separá-las.

Portanto, a introdução de uma modelagem mais completa para a reologia do fluido de fraturamento, incluindo conceitos de viscoelasticidade no equacionamento de seu escoamento através de uma equação de estado mais realista, permite a obtenção, em expressões analíticas simples, dos gradientes de pressão nas duas direções de interesse para o dimensionamento de fraturas confinadas.

A solução completa deste escoamento exigiria o acoplamento, ao sistema inicial de equações, da equação de conservação de energia, o que permitiria a introdução das variáveis concentração e temperatura na solução apresentada. Porém, devido à complexidade resultante da introdução da formulação tensorial no problema, tal sistema de equações só poderia ser resolvido através de métodos numéricos, o que foge ao escopo deste trabalho, sendo tais variáveis incluídas posteriormente com bases em leis e modelos consagrados na literatura.

3.2 Filtração

A filtração do fluido de fraturamento através das paredes da fratura durante uma operação de fraturamento hidráulico em geral define seu sucesso ou fracasso. Sua inclusão tanto no dimensionamento do fraturamento quanto na análise de seus resultados é feita através de relações empíricas obtidas em testes de filtração efetuados em laboratório.

O teste padrão de filtração consiste na medição do volume filtrado em relação ao tempo resultante da pressurização de uma câmara filtrante contendo uma amostra de fluido de fraturamento e é conhecido como *teste estático de filtração*⁽²⁰⁵⁾. Observa-se durante o teste a formação de um reboco espesso na superfície do filtro, e o volume recuperado, conhecido como *filtrado*, apresenta uma viscosidade muito inferior à do fluido da amostra original, que se aproxima da viscosidade do solvente.

Tal teste se caracteriza pela recuperação quase que imediata de um determinado volume de filtrado (*spurt loss*), que ocorre enquanto o reboco ainda é insipiente e se encontra em formação, seguida de um estágio em que o volume de filtrado é proporcional à raiz quadrada do tempo, quando a filtração é controlada pelo reboco. A velocidade de filtração é, então, descrita por $v_f = \frac{C}{\sqrt{t}}$.

Outro teste bastante difundido é o *teste de filtração dinâmica*⁽²⁸⁵⁾ onde o fluido de fraturamento é escoado sob pressão tangencialmente a uma amostra de rocha porosa. Além dos dois estágios descritos anteriormente, tal teste apresenta um terceiro estágio no qual, após um determinado tempo, a espessura do reboco se mantém constante devido ao arrasto pelo fluido de partículas que o constituem, o que resulta em uma velocidade constante de filtração.

Algumas teorias de fraturamento hidráulico incorporam o conceito de filtração dinâmica^(284, 285), porém sua aceitação ainda é polêmica pois tal operação é considerada como um processo quase-estático, sendo o teste estático de filtração, nestas condições, mais

representativo, embora o teste dinâmico tenha uma formulação que mais se aproxima da realidade operacional. Possivelmente ambos conceitos prevalecem na operação, com maior ênfase para o primeiro.

Tomando-se a filtração estática como a mais representativa, é possível chegar-se a uma expressão matemática para o escoamento do fluido de fraturamento dentro da fratura. Para uma fratura desenvolvida verticalmente em uma formação rochosa, propagada simétrica e diametralmente ao poço, dentro dos pressupostos de isotropia e homogeneidade geralmente considerados nestes casos, a velocidade de filtração pelas paredes da fratura será dada por

$$v = \frac{2C}{\sqrt{t-\tau}} \quad (15)$$

onde o fator 2 se deve às duas faces da fratura e τ é o tempo em que um determinado ponto da fratura entra em contato com o fluido, sendo $t - \tau$ denominado *tempo de exposição*.

A vazão (taxa volumétrica) de filtração será dada por

$$q_l(x, t) = \int_0^x v_l dA = 2Ch \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{t-\tau}}$$

onde h é a altura de fratura. A variável τ , que é função do tempo e posição, deve ser colocada em função destas variáveis para a resolução da integral. Esquemáticamente tem-se o seguinte

$$\frac{0}{\cdot} \quad \frac{x}{\tau} \quad \frac{L}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{t} = \zeta\left(\frac{x}{L}\right)$$

Embora as teorias clássicas de dimensionamento de fraturamento apresentem resultados diferentes para as diversas variáveis envolvidas, todas convergem para um mesmo comprimento de fratura (L) na solução assintótica de longo tempo, ou seja, quando o efeito volumétrico torna-se muito mais importante que o mecânico, ou quando todo o fluido bombeado tende a ser filtrado pelas faces da fratura, resultando

$$L = \xi = \frac{q_0 \sqrt{t}}{2\pi Ch} \quad \text{ou} \quad q_l(L, t) = \frac{q_0}{2} = \frac{\pi Ch \xi}{\sqrt{t}} \quad (16)$$

onde a metade da vazão de bombeio q_0 é a vazão de entrada em cada asa da fratura, e ξ é o comprimento da fratura virtual para o qual converge assintoticamente a solução de longo tempo. A fratura virtual é, portanto, uma fratura hipotética que seria criada quando a taxa de entrada do fluido na fratura atingisse sua taxa de perda pelas paredes. Tal definição não se traduz no estacionamento do crescimento da fratura pois a taxa de entrada de fluido é constante enquanto que a taxa de perda é continuamente decrescente com o tempo, o que implica que o comprimento virtual cresce continuamente em razão inversa à raiz quadrada do tempo de bombeio, conforme traduzido em (16). Neste limite tem-se

$$\frac{2Ch}{\sqrt{t}} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{\xi}}} = \frac{\pi Ch \xi}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{\xi}}} = \frac{\pi \xi}{2}$$

Uma integral deste tipo corresponde à função circular inversa arco-seno desde que a função proposta seja dada por $\zeta(\frac{x}{L}) = (\frac{x}{\xi})^2$ o que seria de se esperar devido à geometria elíptica esperada para a fratura. Portanto, a vazão de filtração pode ser equacionada por

$$q_l = \frac{2Ch}{\sqrt{t}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{\xi})^2}} = \frac{2Ch\xi}{\sqrt{t}} \sin^{-1} \frac{x}{\xi} = \frac{q_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \quad (17)$$

Tal resultado é reportado por GEERSTMA & DE KLERK e NORDGREN em suas análises.

O balanço volumétrico na fratura, em termos das vazões, é dado por

$$\frac{q_0}{2} = q_x + q_l \quad \Rightarrow \quad q_x = \frac{q_0}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \right] = \frac{q_0}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\xi} \quad (18)$$

que, para $x = L$, resulta

$$|q_x|_{x=L} = \frac{q_0}{\pi} \cos^{-1} \beta \quad \text{e} \quad |q_l|_{x=L} = \frac{q_0}{\pi} \sin^{-1} \beta \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{L}{\xi} \quad (19)$$

Da formulação acima verifica-se que $\frac{x}{\xi} = \sin \pi \frac{q_l}{q_0} = \cos \pi \frac{q_x}{q_0}$, relações que podem ser representadas sinteticamente em suas formas polares através de círculos trigonométricos

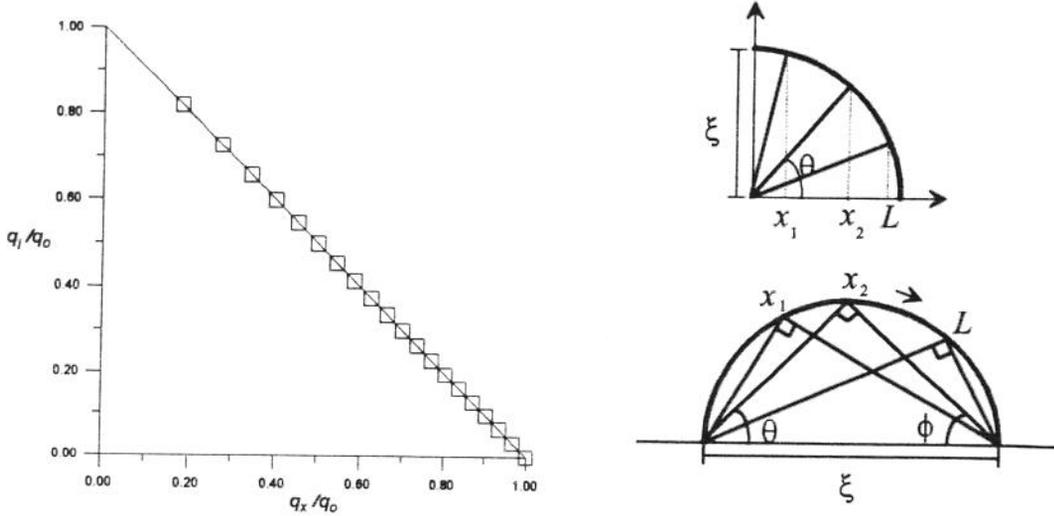


Fig. 2 - Gráfico paramétrico de vazões e representações polares.

onde $\theta = \pi \frac{q_x}{q_0}$ e $\phi = \pi \frac{q_l}{q_0}$. Outra forma de se representar tal formulação é considerando-se a variável complexa z definida por

$$z = x + iy = \xi e^{i\theta} = \xi(\cos\theta + i \sin\theta) \quad \xi = |z|; \quad \theta = \pi \frac{q_x}{q_0}$$

Para um dado tempo t tem-se um determinado comprimento da fratura virtual ξ dado por (16). O comprimento real L da fratura e os pontos internos de seu eixo variarão conforme mostrado na figura 2 em relação ao comprimento da fratura virtual. A utilização da Teoria das Variáveis Complexas possivelmente generalizará e simplificará a metodologia proposta.

Tal formulação é semelhante à utilizada por NOLTE diferenciando-se apenas pela utilização de uma relação exata entre áreas e tempos enquanto que o referido autor faz esta análise dentro de uma faixa compreendida pelos dois casos extremos de filtração: para uma perda de fluido desprezível e para uma perda de fluido predominante, que correspondem a uma relação linear entre áreas e tempos no primeiro caso, e quadrática no segundo

A *eficiência* do fluido de fraturamento (ϵ), definida como a razão entre o volume de fratura e o volume de fluido bombeado, será dada por

$$\epsilon = \frac{V_F}{V_0} = \frac{2whL}{q_0 t} = \frac{2\pi ChL}{q_0 \sqrt{t}} \frac{w}{2C\sqrt{\pi t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{\alpha}} \quad (20)$$

onde $\alpha = \frac{2C\sqrt{\pi l}}{w}$ é o parâmetro de Carter⁽³⁹⁾. Tal relação é interessante por conectar os dois parâmetros teóricos da teoria de filtração ao parâmetro físico mais importante no fraturamento, a eficiência do fluido.

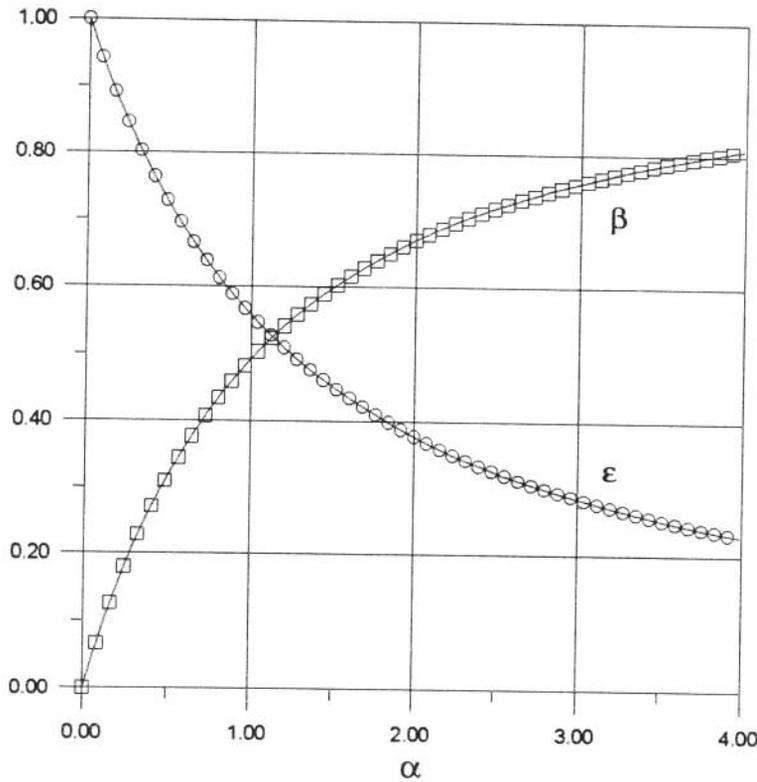


Fig. 3 - Relacionamento dos parâmetros ϵ , β , α .

Esses parâmetros estão diretamente ligados pela relação

$$\beta = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} (1 - \exp \alpha^2 \operatorname{erfc} \alpha) \quad (21)$$

A relação (21) é obtida substituindo-se em (20) a expressão deduzida para a eficiência através do modelo formulado por Carter, e a figura 3 mostra a relação entre estes dois parâmetros, β vs. α . A curva descendente representa a eficiência do fluido.

Note-se no gráfico a complementaridade entre as duas curvas. Dentro de uma margem de erro máxima de 5% pode-se expressar a equação (20) na forma

$$\epsilon \cong 1 - \beta \quad (22)$$

Portanto β representa a ineficiência do fluido em termos do volume da fratura, ou sua taxa relativa de perda por filtração.

A introdução do conceito de fratura virtual no dimensionamento do fraturamento hidráulico possibilita a obtenção de expressões analíticas compactas que descrevem o fenômeno da filtração pelas paredes da fratura ao longo de todo seu comprimento. Utilizando elementos obtidos a partir da modelagem clássica proposta por CARTER , tal conceito amplia sua abrangência e possibilita o estudo discretizado do comportamento da pressão em seu interior através de seu acoplamento à modelagem de escoamento obtida na seção anterior, o que será desenvolvido a seguir.

PASCAL (apêndice G) mostra que o fluxo de fluidos não-newtonianos em meios porosos é melhor representado quando considerado proporcional à uma potência do tempo que é função do índice de consistência do fluido, o que foi, também, proposto empiricamente por NOLTE. Uma análise mais aprofundada do fenômeno da filtração evidencia ter o mesmo grande influência no estado poro-elástico da região rochosa afetada pelo fraturamento (NIERODE propõe o conceito de *back-stress* neste sentido e apresenta uma relação empírica para quantificá-lo). Verifica-se, portanto, que este fenômeno requer estudos e pesquisas mais aprofundados para sua melhor conceituação e equacionamento.

3.3 Queda de pressão na fratura.

O gradiente de pressão gerado pelo escoamento entre duas placas paralelas de um fluido não-newtoniano representado pela lei de potências é dado por (12), ou,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2K}{w} \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{q_0}{hw^2} \right]^n$$

para uma vazão de fluido $\frac{q_0}{2}$ constante para cada asa da fratura, e modelo reológico $\eta = K \dot{\gamma}^{n-1}$. Caso plotado tal gradiente contra a abertura média da fratura (w), em gráfico log-log, serão obtidas retas descendentes com inclinação $2n+1$. Como a fratura é modelada por uma elipse de excentricidade unitária, e se considera, para efeito de estabilidade da fratura, que o fluido não atinge a região de sua extremidade, onde a curvatura da elipse poderia introduzir um fator geométrico importante na descrição do escoamento na fratura, se tomará inicialmente o modelo de placas paralelas como representativo para o escoamento na fratura.

3.3.1 Modelo de Placas Paralelas

O equacionamento da queda de pressão na fratura é crítico na modelagem do fraturamento hidráulico. Em geral, verifica-se uma grande preocupação com o comportamento geométrico da fratura e a utilização de diversas expressões empíricas para se contornar as não-linearidades por ele introduzidas. Ao contrário, o efeito da filtração, de grande importância devido à variação que impõe à vazão de fluido na fratura, não é devidamente considerado.

Tal efeito pode ser introduzido substituindo-se a expressão (18) na equação acima e integrando-se

$$\Delta p(x, t) = \nabla p_w \int_0^x \left(\frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{\xi} \right)^n dx \quad (23)$$

onde $\nabla p_w = \frac{2K}{w} \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{q_0}{2hw^2} \right]^n$ é o gradiente de pressão do modelo de placas paralelas, constante para cada abertura (ou tempo) considerada.

Tal integral não possui solução analítica, porém, como $n \leq 1$, ela pode ser simplificada⁽¹⁾ resultando

$$\Delta p(x, t) \cong \nabla p_w \int_0^x \left(1 - C_1 \frac{x}{\xi} \right) \left(1 - \frac{x}{\xi} \right)^{\frac{n}{2}} dx \quad C_1 \cong \frac{10n}{88.5-n} \approx \frac{n}{9}$$

Tal integração é importante para a visualização do comportamento de pressão na fratura.

$$\Delta p(x, t) = p_w - p(x, t) \cong \lambda \nabla p_w \frac{2C_1}{C_2(n+4)} \left[1 - \left(1 - C_2 \frac{x}{\xi} \right) \left(1 - \frac{x}{\xi} \right)^{\frac{n}{2}+1} \right] \quad (24)$$

$$\text{onde } C_2 = \frac{C_1(n+2)}{4+n-2C_1} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{C_1}{C_2} = 2 \Rightarrow [\Delta p(x, t)]_{n \rightarrow 0} = x \nabla p_w$$

Na figura 4 tem-se o gráfico de $\frac{\Delta p}{\xi \nabla p_w}$ vs. $\frac{x}{\xi}$ para diversos valores de n , mostrando a variação do diferencial de pressão ao longo da fratura, de acordo com a simplificação efetuada. Pela definição adotada para os eixos, as curvas representam a fração de diferencial de pressão em relação ao diferencial de um fluido newtoniano fluindo em um sistema de placas paralelas. A curva para $n = 0$, que fisicamente corresponderia ao escoamento de um fluido hookeano, é equivalente ao escoamento de um fluido através de placas impermeáveis, com filtração nula.

Para um fluido newtoniano, $n = 1$, a integral tem solução analítica, dada por

$$\Delta p(x, t) = \frac{2}{\pi} \xi \nabla p_w \left[\frac{x}{\xi} \cos^{-1} \frac{x}{\xi} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\xi^2}} + 1 \right]$$

e, para $x = L = \xi$ ($\beta = 1$) o termo entre colchetes desaparece. O diferencial médio de pressão ao longo da fratura será dado por uma expressão similar à que gerou a figura 4.

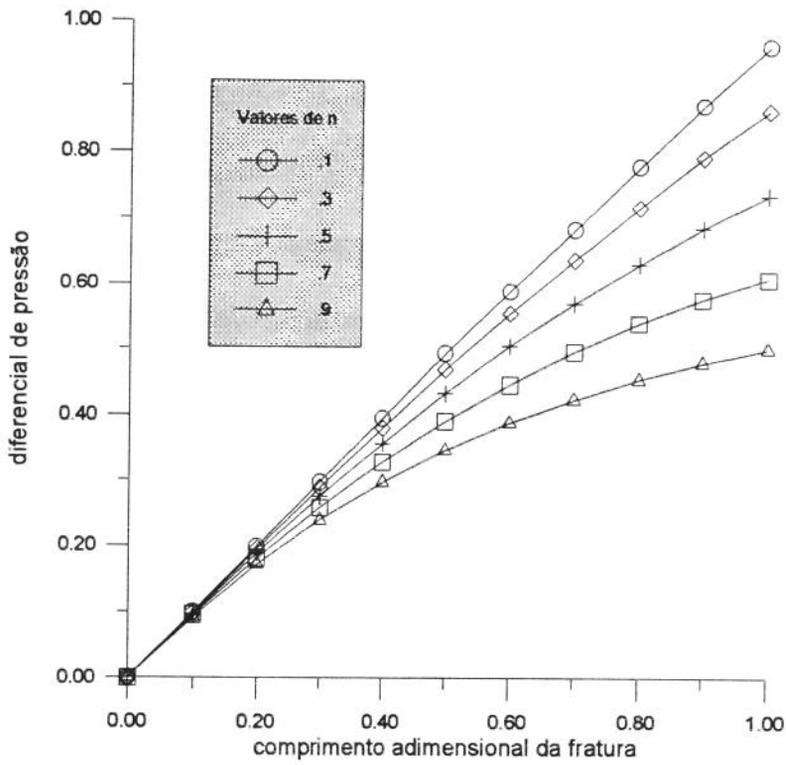


Fig. 4 - Perfil do diferencial de pressão no modelo de placas paralelas.

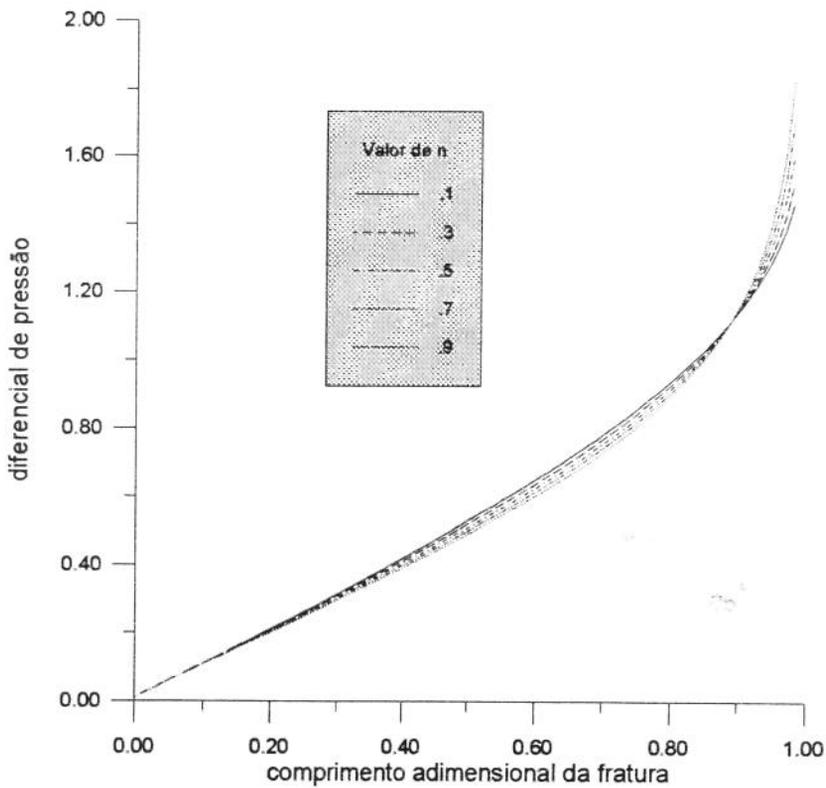


Fig. 5 - Perfil do diferencial de pressão para o modelo elíptico.

3.3.2 Modelo para elipse

O outro enfoque que pode ser dado ao aspecto em estudo é a consideração da geometria elíptica da fratura no equacionamento do comportamento do diferencial de pressão devido ao escoamento de fluidos entre suas paredes. Para tanto usa-se uma metodologia consagrada na Reologia denominada *aproximação de lubrificação*^(19, 256). Neste caso, a abertura da fratura será representada por $w = w_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{\xi^2}}$ e a expressão para o diferencial de pressão será dada por

$$\Delta p(x, t) = \xi \nabla p_0 \int_0^{\frac{x}{\xi}} \left[\frac{2}{\pi} \frac{\cos^{-1} \frac{x}{\xi}}{1 - \frac{x^2}{\xi^2}} \right]^n \frac{d(\frac{x}{\xi})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\xi^2}}} \quad (25)$$

onde $\nabla p_0 = \frac{2K}{w_0} \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{q_0}{2hw_0^2} \right]^n = \nabla p_w \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n+1}$

Através da forma polar mostrada no capítulo anterior, $\frac{x}{\xi} = \cos \theta$, esta integral se transforma em

$$\Delta p(x, t) = \xi \nabla p_0 \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^n d\theta}{\sin^{2n}\theta}$$

que só tem solução analítica para $n = 0$ e $n = 1$, nas formas:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p(x, t) = \xi \nabla p_0 \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \quad (26)$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta p(x, t) = \frac{2}{\pi} \xi \nabla p_0 \left[\frac{x}{\xi} \frac{\theta}{\sin \theta} - \ln(\sin \theta) \right] \quad \theta = \cos^{-1} \frac{x}{\xi}$$

A integração numérica da expressão completa fornece o gráfico da figura 5, onde verifica-se que a tendência inicial das curvas segue o gráfico para as placas paralelas, mas ao longo da fratura nota-se uma reversão da tendência com as curvas seguindo para infinito, porém, bastante próximas à curva correspondente a $n = 0$, que segue os valores do seno inverso. Pode-se tentar o ajustamento de tais curvas através de expressões polinomiais, porém

constata-se que esta curva pode ser tomada como uma média representativa das demais, pois a variação de pressão é relativamente insensível à variação de n neste caso.

A obtenção de uma expressão analítica para a queda de pressão ao longo da fratura é crucial para o acoplamento dos modelos já estudados à formulação obtida da teoria de propagação de fraturas da Mecânica das Rochas. Os modelos tradicionais de fraturamento hidráulico trabalham, em geral, com a pressão média desenvolvida no interior da fratura, o que simplifica tal acoplamento mas pode induzir a erros na avaliação volumétrica do processo, extremamente importante devido à importância operacional desta variável, o volume de fluido preparado para o tratamento.

3.4 Geometria da fratura

A Mecânica das Rochas fornece algumas expressões para a propagação de fraturas verticais confinadas. ENGLAND & GREEN⁽⁷³⁾, sob a hipótese de deformação plana, desenvolveram tal equação na forma (ver Apêndice I)

$$w(x) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \left[\int_x^L \frac{u \, du}{\sqrt{u^2-x^2}} \int_0^u \frac{p(y) \, dy}{\sqrt{u^2-y^2}} \right] \quad (27)$$

onde ν e G são parâmetros de rocha, os módulos de Poisson e de rigidez, respectivamente, $p(x) = p_w - \Delta p(x) - S$ é a pressão líquida dentro da fratura, sendo S a tensão tectônica normal às faces da fratura, e u e y são variáveis de integração. Tal relação leva a uma concentração infinita de tensões na extremidade da fratura, o que pode ser contornado com a hipótese de que o fluido em movimento dentro da fratura nunca atinge sua extremidade⁽¹³⁸⁾, de forma que tal concentração se torna finita e igual ao módulo de coesão da rocha. No caso, o fluido age como uma cunha, como mostrado na figura abaixo, e a fratura tem um comprimento molhado $2L$ (hachurado) e um comprimento total $2A$.

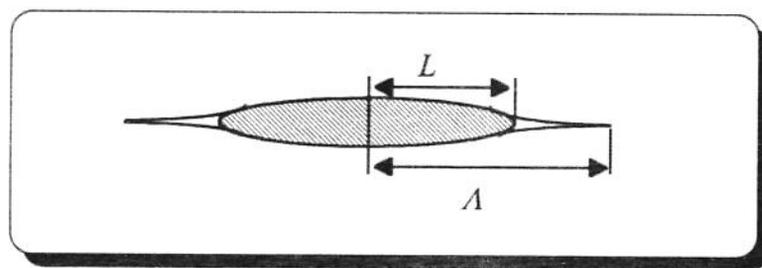


Fig. 6 - Modelo de fratura proposto.

Desenvolvendo tal linha, BARENBLATT⁽¹⁴⁾ propôs como critério de equilíbrio móvel de fraturas que a distribuição de pressão nas faces da fratura seja tal que ela feche suavemente em sua extremidade, o que, para a configuração considerada, implica

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\Lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\Lambda \frac{p(x) \, dx}{\sqrt{\Lambda^2-x^2}} = 0$$

onde considerou desprezível o módulo de coesão da rocha, e tomou a seguinte distribuição de pressão:

$$p(x) = \begin{cases} \bar{p} - S & 0 \leq x \leq L \\ -S & L < x \leq \Lambda \end{cases}$$

resultando na condição: $\sin^{-1} \frac{L}{\Lambda} = \frac{\pi S}{2\bar{p}}$. Como a relação entre a tensão tectônica original e a pressão média durante o fraturamento é aproximadamente unitária, conclui-se que o comprimento molhado da fratura é praticamente igual ao seu comprimento total.

Além do critério de Barenblatt, outros estão presentes na literatura, podendo-se destacar o critério tradicional, no qual a tensão que atua na extremidade da fratura é considerada suficiente para superar a resistência a tração da rocha⁽³⁵⁾, e o critério proposto por DUGDALE, apoiado em conceitos de energia como o de Barenblatt, porém indicado para materiais dúcteis⁽¹⁵⁴⁾.

3.4.1 Inclusão da Teoria de Filtração Proposta

Aplicando-se o resultado do capítulo anterior à este critério obtém-se

$$p(x, t) = \begin{cases} p_w - \xi \nabla p_0 \sin^{-1} \frac{x}{\xi} - S & 0 \leq x \leq L \\ -S & L < x \leq \Lambda < \xi \end{cases}$$

resultando em

$$\int_0^L p_w \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}} - \int_0^L \xi \nabla p_0 \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}} - \int_0^\Lambda S \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}} = 0 \quad (30)$$

A integral intermediária não possui solução analítica, porém se a condição de contorno for relaxada tomando-se $L \approx \Lambda$, conforme concluído anteriormente, ela resulta em

$$\int_0^L \xi \nabla p_0 \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \frac{dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = \frac{1}{4} \nabla p_0 L \Phi(\beta^2, 2, \frac{1}{2}); \quad \beta = \frac{L}{\lambda} \quad (30)$$

onde $\Phi(x, a, b)$ é a *função transcendente de Lerch*⁽²⁹⁰⁾, um tipo especial de função hipergeométrica definida† por

$$\Phi(x, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(b+n)^a} \Rightarrow \frac{1}{4}\Phi(\beta^2, 2, \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{9}\beta^2 + \frac{1}{25}\beta^4 + \frac{1}{49}\beta^6 + \dots \quad (31)$$

O gráfico de $\frac{1}{4}\Phi(\beta^2, 2, \frac{1}{2})$ vs. β está plotado a seguir

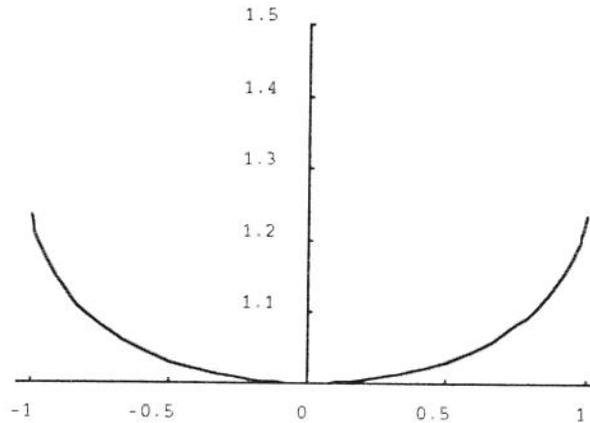


Fig. 7 Função transcendente de Lerch.

Esta função de Lerch é definida, para o campo real, no intervalo $[-1, 1]$, além do qual assume valores complexos. Na origem ela vale 1 e, nos extremos, $\frac{\pi^2}{8}$; no ponto 0.5 ela tem o valor de 1.03065. Como, na prática, os valores de β em um fraturamento se situam no intervalo $[0, .5]$, pode-se considerar tal função como, aproximadamente, unitária, o que

reduz a integral a
$$\int_0^L \xi \nabla p_0 \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \frac{dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} \cong L \nabla p_0 \quad (32)$$

o que, aplicado em (30), com as simplificações propostas, resulta em

$$\boxed{\frac{\nabla p_0 L}{p_w - S} \cong \frac{\pi}{2}} \quad (33)$$

† A função transcendente de Lerch é uma generalização das funções Zeta de Riemann, Beta de Catalan e polilogarítmica e é relacionada à distribuição da Fermi-Dirac na Mecânica Estatística e às séries L de Dirichlet que aparecem na Teoria dos Números

Portanto, o critério de Barenblatt, sujeito aos mecanismos de escoamento e filtração, fornece a relação entre a pressão interna e a externa que atuam na fratura, necessária para sua propagação estável, e acopla a mecânica de fraturas aos mecanismos citados.

Seguindo-se os mesmos procedimentos pode-se resolver a equação de England & Green para a distribuição de pressão deduzida

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \left[\int_x^L \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \int_0^u [p_w - S - y \nabla p_0] \frac{dy}{\sqrt{u^2 - y^2}} \right] \\
 w(x, t) &= \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \int_x^L \left[\frac{\pi}{2} (p_w - S) - u \nabla p_0 \right] \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \\
 w(x, t) &= \frac{2(1+\nu)}{G} p_0 \sqrt{L^2 - x^2} - \frac{2(1+\nu)}{\pi G} \nabla p_0 \left[L \sqrt{L^2 - x^2} + x^2 \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - x^2}}{x} \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

que é a forma clássica da solução da equação de England & Green ($p_0 = p_w - S$ é a pressão líquida na entrada da fratura) acrescida de um termo adicional que acopla, à solução, a filtração, o escoamento e a reologia do fluido de fraturamento. Se o critério de Barenblatt, (33), for aplicado à solução obtida, obtém-se

$$w(x) = 2 \frac{1-\nu}{G} p_0 L \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} - \frac{1-\nu}{G} p_0 L \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} + \frac{x^2}{L^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}}{\frac{x}{L}} \right]$$

ou, de forma simplificada,

$$\boxed{w(x) = \frac{1-\nu}{G} p_0 L \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} - \frac{x^2}{L^2} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{L} \right]} \quad (35)$$

que pode ser expressa, alternativamente, nas formas diferenciais

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{2(1-\nu) p_0}{G L} \sqrt{u^2 - x^2} = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \nabla p_0 \sqrt{u^2 - x^2}; \quad x \leq u \leq L$$

Verifica-se nesta equação que o critério de Barenblatt reduz os efeitos dos mecanismos citados às suas implicações à geometria da fratura, permitindo a expressão analítica da abertura da fratura em função de sua pressão de entrada (nos demais métodos ela

é expressa, em geral, em função de sua pressão média), e introduzindo uma nova variável no equacionamento.

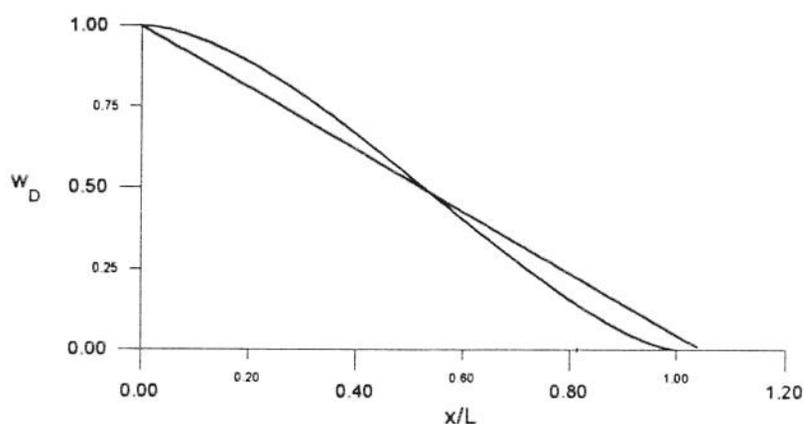


Fig. 8 - Perfil da abertura da fratura.

A figura 8, onde $w_D = \frac{G}{1-\nu} \frac{w(x)}{p_0 L}$, mostra que os mecanismos que atuam internamente durante o processo atenuam a forma elíptica da fratura, aproximando-a a de uma cunha. A integral desta curva,

$$\int_0^x w_D d\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{3} \left[2\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x^6}{L^6}\right) \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

para $x = L$ resulta em $\frac{\pi}{6}$, que é a área de metade da fratura. Para efeito de balanço volumétrico, a fratura pode ser representada por uma cunha com extremidade um pouco além da unidade, o que representa graficamente a hipótese de que o fluido não atinge a extremidade da fratura, com geometria expressa por:

$$w(x) = \frac{1-\nu}{G} p_0 \left(L - \frac{3}{\pi} x \right) \quad (36)$$

O volume da fratura resultante pode ser expresso por

$$V_F = \frac{\pi}{3} w_0 h L = \frac{\pi}{3} \frac{1-\nu}{G} p_0 h L^2 \quad (37)$$

3.4.2 Inclusão da Teoria Reológica Proposta

A inclusão da tensão normal adicional nas paredes da fratura calculada no segundo capítulo modifica a distribuição de pressão na fratura. O novo diferencial de pressão na fratura será dado por $\Delta p'(x, t) = (\Delta p_x + \Delta p_y)_w$

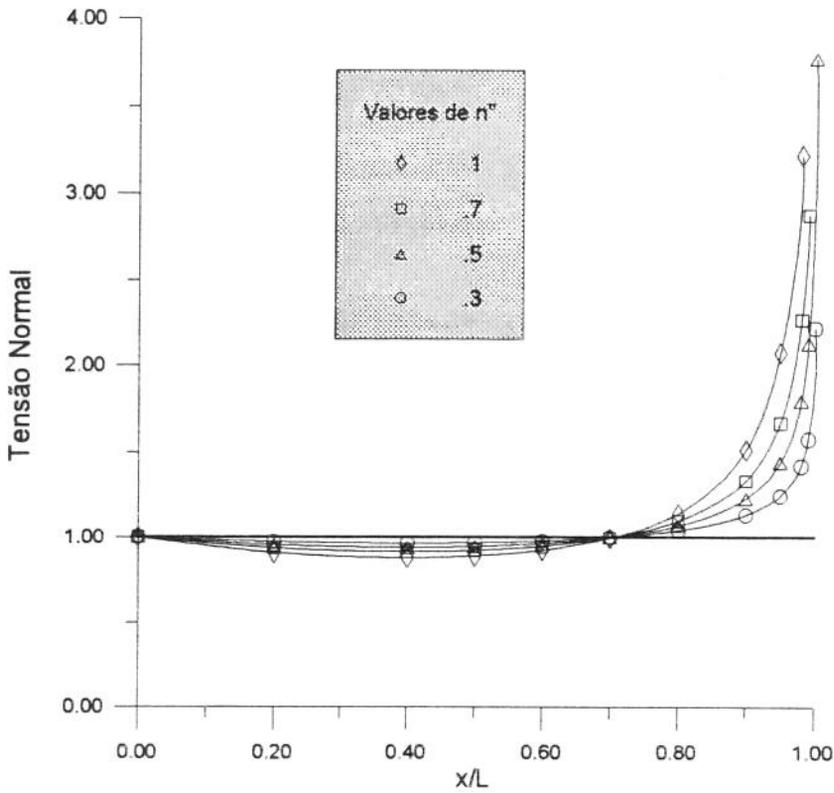


Fig. 9 - Perfil da tensão suplementar ao longo da fratura.

A figura 9 mostra a atuação desta tensão suplementar ao longo da fratura para quatro valores de n'' . As curvas mostram uma tendência para um valor constante por boa parte do comprimento da fratura, desviando-se para infinito em sua extremidade, seguindo a tendência do perfil da taxa de cisalhamento. Quanto menor o valor de n'' , mais a curva se aproxima da reta unitária. Os perfis das curvas para esta tensão normal se assemelham aos encontrados

para a tensão cisalhante, sendo, porém, mais dramáticos por serem função do quadrado da taxa de cisalhamento.

A distribuição de pressões na fratura será dada por

$$p(x, t) = \begin{cases} p_w - \Delta p'(x, t) - S & 0 \leq x \leq L \\ -S & L < x < \Lambda \end{cases}$$

O critério de Barenblatt será equacionado por

$$\int_0^L (p_w - S) \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}} - \int_0^L \xi (\nabla p_0 + \nabla p_N) \sin^{-1} \frac{x}{\xi} \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}} = \int_L^\Lambda S \frac{dx}{\sqrt{\Lambda^2 - x^2}}$$

onde $\nabla p_N = \frac{n''}{n} \frac{2K_2}{w_0} \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{q_0}{2hw_0^2} \right]^{n''}$ conforme deduzido anteriormente. Efetuando-se as mesmas considerações anteriores chega-se a resultados similares substituindo-se Δp_0 por Δp_F onde

$$\Delta p_F = \Delta p_0 + \Delta p_N$$

Como no caso da variação de pressão ao longo da fratura estudado anteriormente, a análise numérica do comportamento da variação desta tensão adicional mostra que a mesma, quando integrada, é relativamente insensível à variação de n'' , sendo a curva para esse parâmetro nulo representativa para as demais. A partir dessa simplificação, a equação de England & Green se torna

$$w(x, t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \left[\int_x^L \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \int_0^u [p_0 - y \nabla p_F] \frac{dy}{\sqrt{u^2 - y^2}} \right]$$

$$w(x, t) = \frac{2(1+\nu)}{G} p_0 \sqrt{L^2 - x^2} - \frac{2(1+\nu)}{\pi G} \nabla p_F \left[L \sqrt{L^2 - x^2} + x^2 \ln \frac{L - \sqrt{L^2 - x^2}}{x} \right] \quad (38)$$

que se reduz à expressão (35) com a aplicação do critério de Barenblatt,

$$L \nabla \Delta p_F \cong \frac{\pi}{2} p_0 \quad (39)$$

$$w(x) = \frac{1-\nu}{G} p_0 L \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} - \frac{x^2}{L^2} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{L} \right]$$

O novo volume da fratura obtido por esta formulação, dado por $V_F = \frac{\pi}{3} w_0 h L$, não modifica a eficiência equacionada no início do capítulo com base na teoria de Carter, que considera uma fratura de perfil retangular:

$$\varepsilon = \frac{V_F}{V_T} = \frac{\pi w_0 h L}{3 q_0 t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta$$

onde, para o parâmetro α de Carter, considerou-se a abertura média da fratura, e obteve-se resultado idêntico ao anteriormente deduzido, o que valida a aproximação $\varepsilon \cong 1 - \beta$.

Desta forma, todos os modelos envolvidos no dimensionamento do fraturamento hidráulico estão diretamente acoplados numa formulação única e simples. Qualquer outro critério de estabilidade pode ser utilizado no equacionamento do fenômeno; se ele for expresso numa relação entre as pressões interna e externa que atuam na fratura, como o de Barenblatt, sua equação resultante terá forma similar a (35), diferenciando-se apenas por constantes multiplicativas.

4. Material e Métodos

Neste capítulo são abordados os procedimentos experimentais adotados no manuseio dos equipamentos e na preparação dos fluidos testados e a metodologia empregada no tratamento dos dados obtidos.

4.1 O aparato experimental

Os conjuntos de equipamentos utilizados compõem-se basicamente de um viscosímetro (Haake - M5), um reômetro (PenKem - Vilastic 3) e um reogoniômetro (Haake - CV20N)¹, dotados de interface analógico-digital e interligados a microcomputadores que possibilitam a automatização de testes através de *softwares* próprios. Permitem, ainda, a variação e monitoração de temperatura através de conexão a um banho termostático (Haake - RC20), sendo o primeiro equipamento dotado de recursos para a pressurização da amostra em teste.

Tais equipamentos foram financiados pelo FINEP-PADCT para o desenvolvimento de estudos em materiais eletro-reológicos, estando instalados no Laboratório de Fluidos do Departamento de Engenharia do Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp, sendo operados pelo técnico Luís Benedicto Pompeo Neto que prestou decisivo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

¹ Conforme Walters⁽²⁷⁹⁾, o viscosímetro mede a viscosidade do fluido em teste, o reômetro mede, além da viscosidade, os parâmetros reológicos dinâmicos do fluido, e o reogoniômetro, além dos parâmetros citados, mede os coeficientes relativos às diferenças entre as tensões normais que atuam no fluido.

O viscosímetro M5 opera no modo *Searle*, em uma geometria de cilindros coaxiaisⁱⁱ, e é comandado pelo *software Rotation* versão 2.3, desenvolvido por *Haake Mess-Technik GmbH u. Co.*, que permite a obtenção da tensão cisalhante e da viscosidade em função da taxa de cisalhamento, em regime de fluxo permanente. Tal equipamento, por ser pressurizável, opera com o fluido confinado, o que se tornou imperativo, principalmente na fase gel de alguns sistemas, devido ao importante componente inercial induzido durante o cisalhamento das amostras (tal componente tende a expulsar o fluido durante os testes no CV20N).

O reômetro Vilastic 3 utiliza um método não-convencional de determinação dos parâmetros viscoelásticos de fluidos: a pulsação da amostra em um tubo capilar. Ele opera com vários diâmetros de tubos, o que permite a adequação do fluido à faixa de frequência (ou de taxa de cisalhamento) mais representativa. Tal equipamento é comandado por três *softwares* desenvolvidos por *Vilastic Scientific, Inc.*:

- ✓ *Stretcher*, de tensão, que corresponde ao programa rotacional acima descrito, mas que simula um regime de fluxo pseudo-permanente pois superpõe uma frequência (de operação) à taxa de cisalhamento variável.
- ✓ *Shaker*, de frequência, que permite a determinação dos parâmetros reológicos dinâmicos, como os módulos de acumulação (G') e de perda (G''), dos componentes da viscosidade dinâmica (η' e η''), a tangente de perda ($tg \delta$) e outros em função da frequênciaⁱⁱⁱ.
- ✓ *Timert*, de tempo, que permite o acompanhamento da variação dos parâmetros reológicos com o tempo, fixando-se as demais variáveis.

ⁱⁱ A geometria de cilindros coaxiais operando no modo *Searle* se caracteriza por um cilindro externo, chamado copo, que se mantém estático durante o experimento, e um interno, chamado bob, que gira à velocidade desejada e promove o cisalhamento do fluido. O perfil de viscosidade no anular entre os cilindros é constante, e o perfil de velocidades é crescente, sendo a velocidade nula na parede do cilindro externo, e máxima na parede do interno.

ⁱⁱⁱ Os parâmetros reológicos estão definidos no Apêndice C.

Os parâmetros básicos de leitura deste equipamento (ou seja, os dados básicos a partir dos quais os demais parâmetros são calculados) são a pressão e o fluxo volumétrico a uma frequência selecionada, que são funções das dimensões do capilar utilizado. A tensão, a taxa e a deformação de cisalhamento são calculadas de relações obtidas da equação de Navier-Stokes resolvida para esta geometria. Detalhes teóricos desta metodologia podem ser encontrados nos artigos de THURSTON.

O reogoniômetro CV20N opera no modo *Couette*^{IV} e permite a utilização de diversas geometrias, entre as quais foram usadas a de cilindros coaxiais, a de placas paralelas e a cone-placa^V, sendo comandado por três *softwares* da Haake:

- ✓ *Rotation 2.3*, já descrito, operando com os citados tipos de geometria. O parâmetro básico de medida é a viscosidade aparente.
- ✓ *Oscillation R/O 1.1*, com os mesmos tipos de geometria, que se destina à obtenção dos parâmetros reológicos dinâmicos. Os parâmetros básicos de medida são a amplitude do módulo complexo (G^*) e a tangente de perda ($tg \delta$).
- ✓ *Normal Stress 1.4*, que opera em regime de fluxo permanente e utiliza a combinação das geometrias placa-placa e cone-placa para a determinação dos coeficientes Ψ_1 e Ψ_2 relativos às diferenças entre as tensões normais que atuam no fluido quando em escoamento, em função da taxa de cisalhamento. O parâmetro básico medido é a força normal (F_n) que age nas placas.

Os equipamentos Haake permitem a variação da temperatura através do banho termostático citado, e são conectados à interface analógico-digital Rotovisco RV20 (Haake), possibilitando o controle automatizado dos testes. Os softwares disponíveis são bastante

^{IV} Para uma mesma amostra, os modos Searle e Couette dão o mesmo valor de viscosidade absoluta, porém apresentam, no caso de cilindros coaxiais, o perfil de velocidades invertido, sendo a mesma nula na parede do cilindro interno e máxima na parede do externo.

^V O termo *placa* é indevido mas será mantido no corpo deste trabalho por ser consagrado na Reologia. Na realidade, as referidas placas são discos.

flexíveis e permitem a programação de diversos tipos de testes com pulsos, degraus e rampas de taxas de cisalhamento ou frequência de oscilação.

O reômetro permite, também, o controle de temperatura, porém tal parâmetro não foi variado nos testes com o Vilastic pois notou-se um comportamento anormal do fluido neste equipamento, o que será detalhado posteriormente.

4.2 O fluido

Os testes experimentais em fluidos de fraturamento estão regulamentados pela Norma API RP 39. Foram testados quatro sistemas de fluidos baseados no polímero HPG (Apêndice 2), numerados de 1 a 4, que são compostos, cada um deles, de três fases distintas:

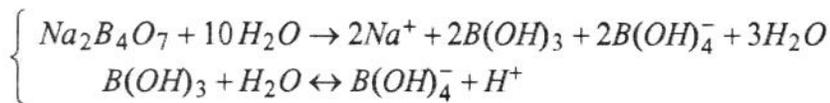
- ✓ A primeira fase, denominada solução polimérica, comum aos quatro sistemas, é composta basicamente pelo polímero hidratado por agitação. Sua preparação obedece a critérios pré-fixados (norma citada). Foram escolhidas quatro concentrações de polímero entre as mais representativas das utilizadas na prática: 2,4 g/l, 3,6 g/l, 4,8 g/l e 6,0 g/l^{vi}. Tais quantidades foram adicionadas à uma solução 2% KCl em água destilada, sal normalmente utilizado nos fluidos de fraturamento para prevenir o inchamento de argilas, sendo, neste caso, usado para fornecer os contrastes visual e densimétrico adequados para a operação com o Vilastic.
- ✓ A solução polimérica, que tem pH 7, é tamponada quimicamente gerando uma segunda fase, denominada pré-gel. Tal tamponamento é efetuado por ácidos fracos ou sais e objetiva a estabilização posterior do pH do sistema em patamares compatíveis à obtenção de géis estáveis. Cada sistema possui uma composição própria e os produtos químicos utilizados nessa fase são designados genericamente por *reticuladores* ou *controladores de pH*. Tais ácidos ou sais contêm, em sua composição, o metal que será responsável pela reticulação do sistema. Essa fase apresenta um determinado grau de gelificação proporcional ao desvio

^{vi} Para transformação em unidades práticas utilizadas na Engenharia do Petróleo, 1 g/l = 8.345 lb/Mgal.

de pH causado pela adição de tais produtos. Os sistemas 1 e 2 atingem, nesta fase, os pH 9 e 8 respectivamente, enquanto que os outros dois sistemas pouco se desviam do pH 7.

- ✓ A terceira fase, denominada gel, é obtida a partir da adição de bases fortes, designadas genericamente por *ativadores*, que proporcionam um choque de pH, liberando os íons metálicos que promoverão a reticulação do sistema. O pH final alcançado se situa na faixa de 9 a 11 a depender do sistema e concentrações usadas, que é uma faixa apropriada para o HPG fornecer géis estáveis.

O pré-gel do Sistema 1 é obtido a partir da solução polimérica pela adição de um borato, o tetraborato de sódio ou bórax ($\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$). Na presença de água o bórax se dissocia em ácido bórico, que é um ácido extremamente fraco ($K_1 = 6.0 \times 10^{-10}$), e no íon monoborato, que entram em equilíbrio na solução através das reações:



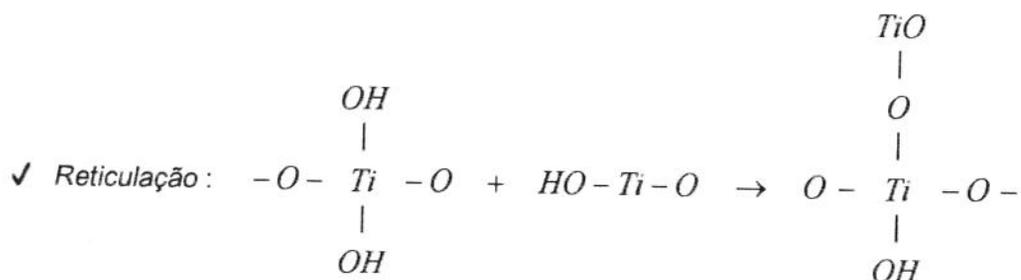
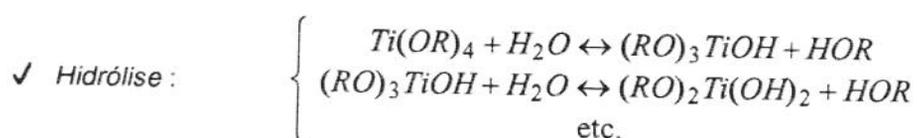
A reticulação deste sistema ocorre com a adição de soda cáustica (NaOH), que desloca o equilíbrio da segunda reação para a direita através do aumento de pH, propiciando a ligação dos íons monoborato aos grupos cis-hidroxil do HPG formando um gel de estrutura tri-dimensional.

O Sistema 2 é uma simplificação do Sistema 1, sendo o bórax diretamente substituído pelo ácido bórico que estabelece imediatamente a segunda reação. A diferença entre estes sistemas é verificada no nível de pH que diferencia os dois pré-géis resultantes: o pH do pré-gel do Sistema 2 é menor que o do Sistema 1, o que se reflete num maior grau de gelificação deste último nesta fase. A reticulação do Sistema 2 é, também, conseguida pela adição de soda cáustica.

Os dois outros sistemas são mais elaborados devido à necessidade da obtenção de géis mais estáveis a altas temperaturas, visto que os géis a base de borato somente são recomendados para temperaturas abaixo de 100°C. A pesquisa de diversos sais complexos

indicam que os baseados nos metais titânio e zircônio são os mais efetivos em termos da estabilidade dos géis com a temperatura, praticamente dobrando o limite citado⁽²⁴⁵⁾. O Sistema 3 é um fluido híbrido, cujo pré-gel é obtido do tamponamento da solução polimérica pela mistura de ácido bórico, em concentração bem menor que nos dois sistemas anteriores, e de um complexo de titânio e zircônio (tal pré-gel tem um componente viscoso importante, como será visto posteriormente, embora o pH resultante não se desvie significativamente e, portanto, não apresente gelificação aparente). A ativação do gel desse sistema é obtida pela adição de carbonato de sódio, ou soda (Na_2CO_3).

O Sistema 4 apresenta características importantes: seu pré-gel possui basicamente o mesmo comportamento reológico da solução polimérica, e seu gel possui boa estabilidade térmica. O tamponamento da solução polimérica é feito pela adição de ácido fumárico ($\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_4$) e bicarbonato de sódio (NaHCO_3), que mantêm neutro o pH do pré-gel, e sua reticulação é promovida pelo titanato de trietanolamina. Este titanato é um quelato e sua reação com o pré-gel ocorre em três etapas⁽⁹⁶⁾:



Vários outros aditivos químicos são adicionados aos fluidos de fraturamento com funções específicas que não serão estudadas neste trabalho por não afetarem, desde que

utilizados de forma adequada, a reologia dos mesmos durante a propagação da fratura. O mais importante destes aditivos é o *quebrador*, em geral um sal como o persulfato de amônio, $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$, um poderoso agente oxidante, que quebrará a estrutura complexa do gel formado, facilitando a recuperação do fluido fraturante através da reversão do fluxo após o fechamento da fratura. O correto dimensionamento deste aditivo é crítico para o sucesso de um fraturamento.

Os fluidos testados foram considerados homogêneos, porém CAMERON mostra, em testes em um fluido similar ao aqui considerado Sistema 4, que esta condição não é verdadeira, e apresenta resultados onde o desvio da mesma é quantificado e modelado.

Um gel pode ser definido como um sólido poroso, conforme SILBERBERG (*in* GLASS⁽⁹⁶⁾). Seu elemento sólido é uma matriz contínua, um esqueleto, que dota o sistema da necessária estabilidade mecânica e coesão. Se a cadeia polimérica é uma estrutura permanente, ela possuirá uma configuração de referência em estado de repouso, à qual retornará se as forças que a deformam forem removidas, o que caracteriza a memória do material; se for lábil, o espaço de tempo para o qual tal memória é ativada será limitado pelo tempo de vida das conexões moleculares na estrutura. O espaço poroso do gel é ocupado, em geral, pelo solvente, que, neste caso, é a água. O gel de HPG tem um estudo bastante completo quanto à sua estrutura e propriedades viscométricas feito por PRUD'HOMME ET ALII na referência acima citada e em (245), estudando um fluido similar ao Sistema 4 descrito.

A revisão da literatura efetuada no início deste trabalho cita diversas referências técnicas que podem ser consultadas a respeito da formulação química dos fluidos de fraturamento.

4.3 Tratamento dos dados

Cada sistema, em cada fase e em cada concentração, foi testado em diversas temperaturas para a obtenção de um conjunto de dados bastante representativos. A combinação destes fatores às facilidades oferecidas pelos equipamentos (*softwares* e geometrias) gerou uma quantidade expressiva de arquivos de dados.

A metodologia escolhida para a validação e condensação destes dados denomina-se *redução de variáveis* e é amplamente discutida na literatura^(19, 78). Embora tenha sido desenvolvida empiricamente, ela foi posteriormente confirmada pelas teorias moleculares que buscam dar à Reologia um embasamento teórico mais consistente. Tais teorias apresentam, em geral, uma grande complexidade matemática e se restringem à modelagem das soluções poliméricas infinitamente diluídas, que se caracterizam por concentrações infinitesimais de polímeros de forma que suas moléculas possam ser consideradas suficientemente separadas, evitando-se o fenômeno de *emaranhamento* ("entanglement") das moléculas devido às forças de interação intermoleculares. Certamente tal fenômeno ocorre nas concentrações utilizadas, porém a base teórica do método pode ser adaptada conforme exhaustivamente mostrado na literatura.

A teoria molecular mais importante é atribuída a Rouse^(20, 78), que modelou a macro-molécula polimérica como um conjunto de sub-moléculas representadas por contas, ligadas entre si por um cordão elástico (por isso denominado *modelo bead-spring*). Esta teoria é baseada na mudança da energia livre associada à diminuição de entropia em configurações não-aleatórias e na tendência do sistema em se acomodar num estado aleatório; a partir desses pressupostos são calculadas a dissipação e acumulação de energia devido a deformações oscilatórias, resultando na viscosidade complexa (η^*) e no módulo complexo (G^*)^{VII}. A teoria de Zimm, que é uma generalização da teoria de Rouse, assume que a força

exercida em cada conta é calculada como o somatório da força de arrasto hidrodinâmico devido ao solvente, da força associada ao movimento browniano e da força sobre as molas exercida por duas sub-moléculas vizinhas.

Numa solução infinitamente diluída, define-se os módulos intrínsecos de acumulação e de perda como:

$$[G'] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{G'}{c} \quad ; \quad [G''] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{G'' - \omega \eta_s}{c}$$

e as correspondentes viscosidades intrínsecas como:

$$[\eta'] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\eta' - \eta_s}{c \eta_s} \quad ; \quad [\eta''] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\eta''}{c \eta_s}$$

Com base nas teorias moleculares verifica-se que tais módulos são proporcionais a $\frac{cRT}{M}$, de modo que os módulos intrínsecos são reduzidos adimensionalmente às formas^{VIII}:

$$[G']_R = [G'] \frac{M}{RT} \quad ; \quad [G'']_R = [G''] \frac{M}{RT}$$

Tais grupos adimensionais definem a base para o método de redução de variáveis empregado no tratamento dos dados obtidos. Cada fase de cada sistema estudado teve seus dados reduzidos para uma mesma condição de temperatura e concentração que, neste caso, por ser a mais utilizada nas operações de fraturamento hidráulico, na superfície, é fixada em

$$T_0 = 20^\circ C; \quad c_0 = 4,8 \frac{g}{l},$$

que será denominada *condição de operação*^{IX}. Portanto, cada módulo utilizado será dividido por suas correspondentes concentração e temperatura (cT) e multiplicados por $c_0 T_0$, o que corresponde a um deslocamento das ordenadas em um gráfico log-log, homogeneizando desta forma as condições de concentração e temperatura. Os valores das abscissas são

^{VII} A viscosidade complexa é definida por $\eta^* = \eta' - i \eta''$.

O módulo complexo é definido por $G^* = G' + i G''$, $G^* = \omega \eta^*$.

^{VIII} A temperatura deve ser expressa em escala absoluta (°K).

^{IX} Para polímeros fundidos, a concentração deve ser substituída pela densidade.

multiplicados pelo mesmo fator corrigidos por um deslocamento adicional correspondente à relação entre a viscosidade inicial do fluido em sua condição de concentração e temperatura (η_0) e a viscosidade inicial na condição de operação (η_0)₀, o fator a_T :

$$a_T = \frac{\eta_0}{(\eta_0)_0} \frac{c_0 T_0}{c T}$$

Na prática verifica-se que tais deslocamentos nem sempre são suficientes para condensar todos os dados em uma única curva pois os parâmetros envolvidos são experimentais e embutem erros de medida e dosagem inerentes a qualquer experimento. A metodologia aqui adotada é uma adaptação do *método WLF* (Apêndice C), consagrado na literatura⁽⁷⁸⁾. Neste método o parâmetro dinâmico adotado para o ajuste é a *conformação J*, definida por:

$$J^* = \frac{1}{G^*} \Rightarrow J' = \frac{G'}{(G'^2 + G''^2)} = \frac{G'}{G^{*2}}; \quad J'' = \frac{G''}{G^{*2}}$$

Os dados de conformação, para uma mesma concentração, são corrigidos pelo citado fator e plotados contra a frequência em gráfico log-log, o que resulta em uma família de curvas distanciadas por um fator proporcional a a_T . Tais fatores são tabulados e plotados contra a temperatura, gerando uma relação funcional para a_T . A correção para concentração é feita de forma similar, com dados de conformação para uma mesma temperatura, gerando o fator a_C .

No presente trabalho foram efetuadas algumas modificações nesta técnica devido às facilidades introduzidas por modernos programas computacionais. Optando-se pelo tratamento do parâmetro complexo (G^* , η^* , ou J^*) e da tangente de perda ($tg \delta$) ao invés de seus componentes dinâmicos, conforme sugerido no *WLF*, pois tais componentes sempre podem ser escritos em função destes parâmetros e a tangente de perda é invariável no eixo das ordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \delta = \frac{G''}{G'} = \frac{\eta'}{\eta''} = \frac{J''}{J'} \\ G' = G^* \cos \delta ; \quad G'' = G^* \sin \delta \\ \eta' = \eta^* \sin \delta ; \quad \eta'' = \eta^* \cos \delta \\ J' = J^* \cos \delta ; \quad J'' = J^* \sin \delta \end{array} \right.$$

O parâmetro complexo escolhido foi sempre o que apresentou, em gráfico log-log, a curva de maior a(de)clividade. Os valores das abscissas e ordenadas foram corrigidos pelo fator^x $\frac{c_0 T_0}{cT}$ e, desta forma, as curvas resultantes de cada teste foram ajustadas pelo deslocamento horizontal de forma a gerar uma única curva, que representa tal parâmetro complexo naquela fase e dentro das condições operacionais ($c_0 T_0$). Em geral, para os dados dinâmicos o parâmetro escolhido foi o módulo complexo pois ele é a medida básica nos equipamentos Haake, e os demais parâmetros são calculados a partir dele.

Tal procedimento mostrou-se necessário devido às diferentes características reológicas apresentadas por cada fase de cada sistema. Como tal fator de correção se origina da teoria molecular para soluções infinitamente diluídas de polímeros lineares, o grau de gelificação de cada fase tende a distorcer tal relação (a gelificação implica a formação de uma estrutura tri-dimensional onde as macro-moléculas poliméricas são ligadas entre si por um íon metálico; tal estrutura é, evidentemente, não-linear), e tal distorção é corrigida por um deslocamento adicional no eixo horizontal.

Como exemplo da técnica empregada são apresentados os gráficos de G^{*XI} e $\operatorname{tg}(\delta)$ contra a frequência antes e após a correção (figuras 10 a 13). Neste caso foram selecionados apenas alguns testes efetuados com a solução polimérica, uma temperatura para cada concentração, com a geometria de cilindros coaxiais, no reogoniômetro. A quantidade de

^x A viscosidade complexa não necessita desta correção pois resulta da divisão do módulo complexo pela frequência e, portanto, tal fator é cancelado.

^{XI} O módulo complexo é definido por sua amplitude e fase. Neste trabalho, sempre que este parâmetro for tratado como um dado subentenda-se tratar-se de sua amplitude, ou valor modular.

dados para esta fase é muito superior, porém, a apresentação de todos em um único gráfico seria redundante e resultaria numa nuvem de pontos que não possibilitaria a visualização da metodologia aplicada.

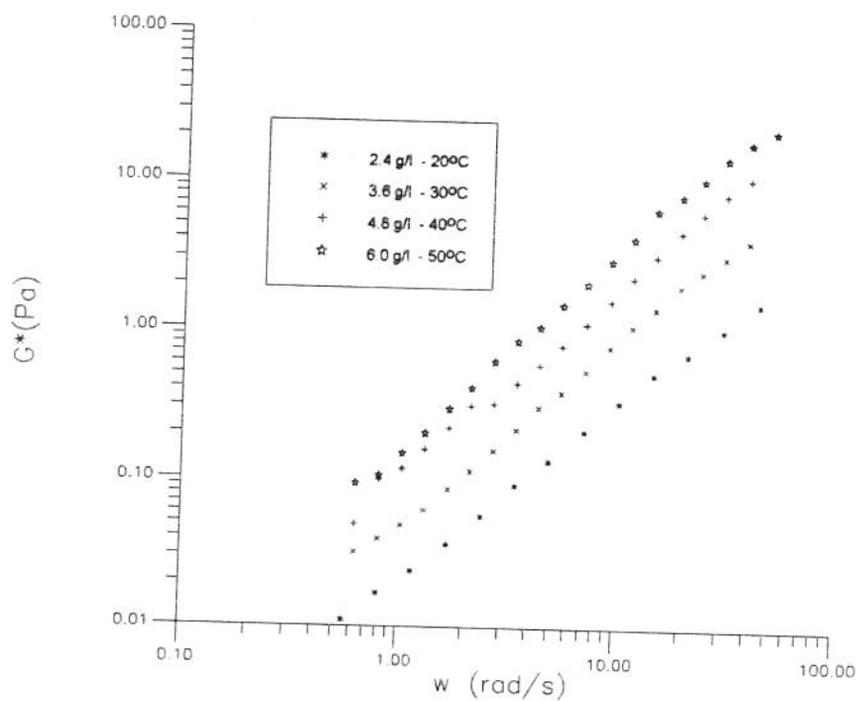


Fig.10 Módulo complexo antes da redução.

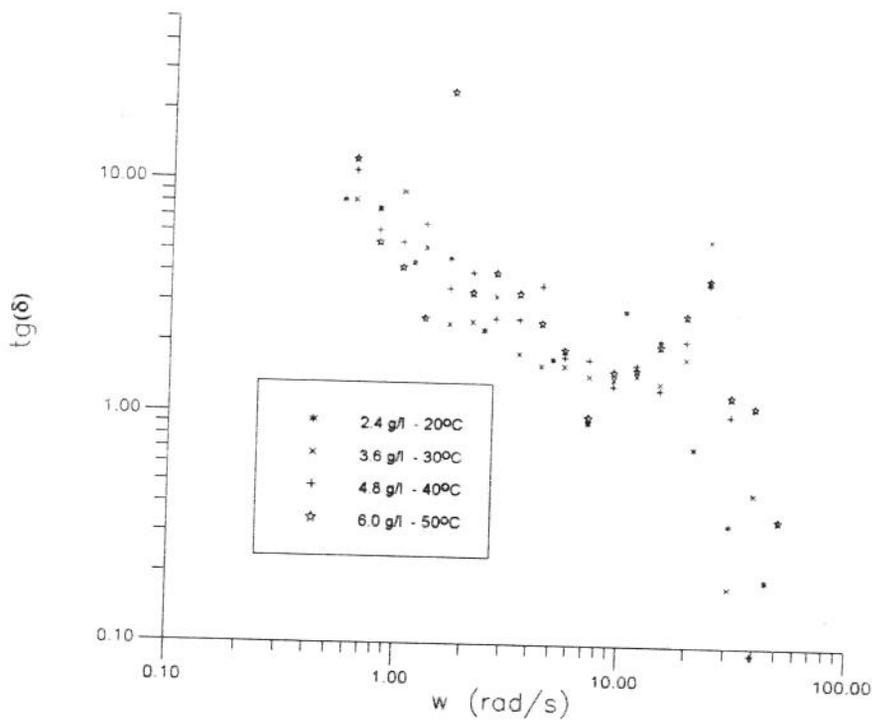


Fig.11 Tangente de perda antes da redução.

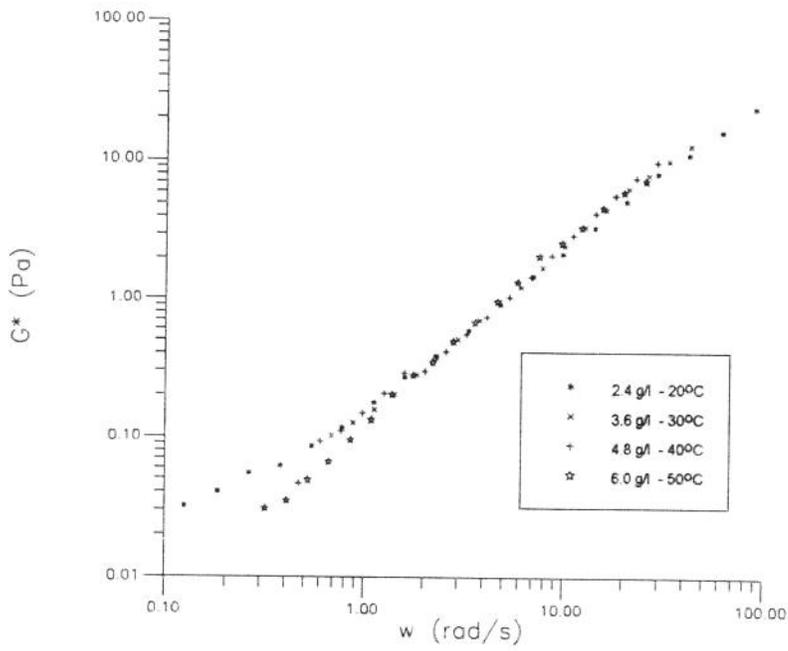


Fig.12 Módulo complexo após a redução.

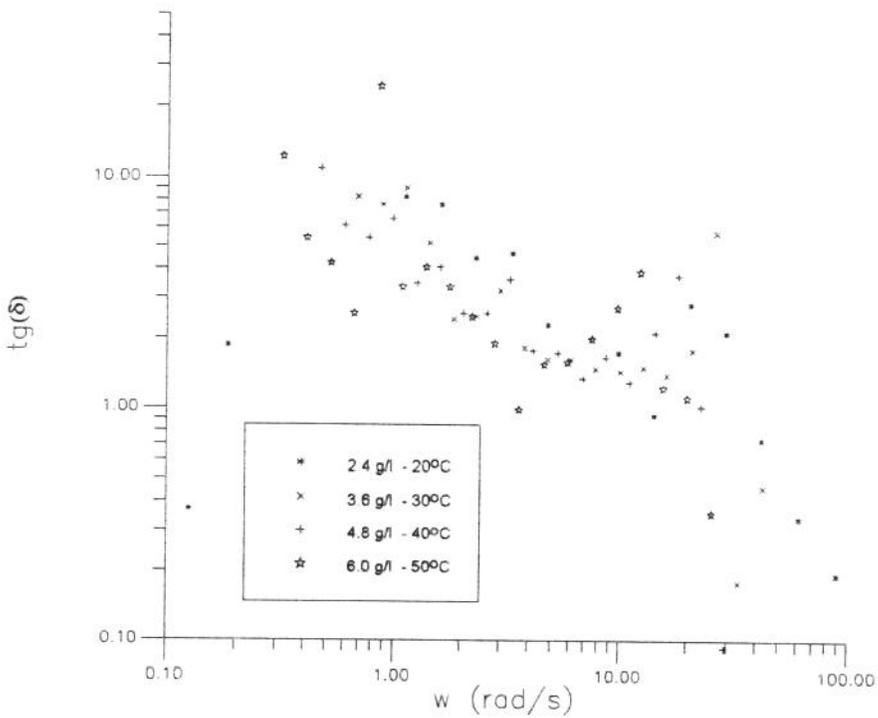


Fig. 13 Tangente de perda após a redução.

Verifica-se que os dados não corrigidos do módulo complexo sugerem, visualmente, que um deslocamento de eixos é suficiente para o alinhamento dos pontos, o que é comprovado pelo gráfico dos pontos corrigidos; a dispersão observada para baixas frequências é atenuada pela inclusão dos dados disponíveis, que irão indicar a real tendência da curva nesta faixa. Já a curva de tangente de perda apresenta uma dispersão maior, mas a inclusão dos demais dados delineiam aceitavelmente sua tendência. Apesar desta dispersão, verifica-se que os deslocamentos efetuados foram efetivos. O tratamento de dispersão dos dados, quando necessário, foi feito através da suavização das curvas empregando-se análise de Fourier⁽²¹⁶⁾.

Os dados obtidos através do Vilastic 5 apresentaram distorções importantes e por isso não entraram na confecção das curvas reduzidas dos parâmetros reológicos. Verificou-se que, embora os testes neste equipamento apresentassem uma boa repetibilidade em um determinado tubo capilar, os resultados obtidos quando da mudança de geometria, ou seja, num diâmetro de capilar diferente, eram discrepantes. Notou-se, também, que os dados não eram redutíveis conforme as regras expostas anteriormente, necessitando, em geral, de correções adicionais, que nem sempre produziam um resultado satisfatório.

Não obstante tais restrições, os resultados dos testes com este equipamento apresentam uma dispersão menor e uma resolução gráfica mais apurada. Os perfis das curvas dos parâmetros reológicos obtidas destes testes concordam, qualitativamente, com o comportamento esperado para os mesmos. Desta forma, tais resultados foram usados para validar tendências observadas em alguns casos e para a descrição da evolução do comportamento de alguns parâmetros com o tempo pois, neste caso, todas as demais variáveis são mantidas invariáveis durante os testes.

Embora a metodologia utilizada para a redução de variáveis tenha sido apresentada em relação aos parâmetros reológicos dinâmicos, ela é extrapolável, sem nenhuma

modificação, aos dados obtidos pelos *softwares* rotacional e de tensões normais. No último caso, Bird⁽¹⁹⁾ recomenda o uso da constante a_T elevada ao quadrado nos coeficientes de tensão normal, enquanto Ferry⁽⁷⁸⁾ recomenda sua utilização sem nenhuma modificação diretamente na diferença de tensões normais; ambas conduzem a idênticos resultados sendo adotada, neste trabalho, a última opção, e a redução dos dados foi conseguida sem maiores problemas nestas operações.

Os problemas verificados com os dados de tensões normais obtidos nos testes com o reogoniômetro se concentraram em outro aspecto. Os coeficientes de tensão normal são definidos por:

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2}; \quad \Psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{yy} - \tau_{zz}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} .$$

Por sua vez, as diferenças entre as tensões são calculadas a partir dos dados de força normal medidos em duas geometrias diferentes: as geometrias cone-placa e placa-placa fornecem, respectivamente, as relações:

$$N_1 = \frac{2F_n}{\pi R^2}; \quad |(N_1 - N_2)|_{\dot{\gamma}_R} = \frac{2F_n}{\pi R^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln F_n}{\partial \ln \dot{\gamma}_R} \right]$$

Portanto, através da combinação das geometrias e destas relações, os coeficientes de tensão normal são calculados.

A relação entre a força normal e a taxa de cisalhamento deve ser representada por uma função positiva (caso contrário, a segunda relação seria, matematicamente, indefinida) e crescente, porém verificou-se, na maioria dos testes efetuados, a leitura de forças negativas . A figura 14 mostra o comportamento medido da força normal na geometria cone-placa para o pré-gel do Sistema 4.

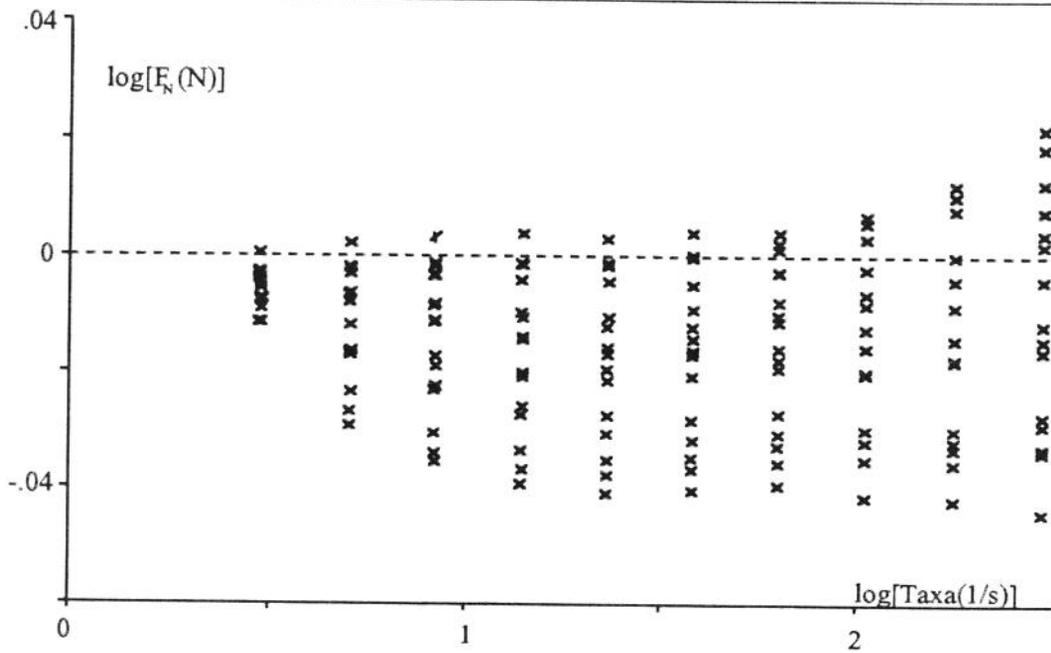


Fig. 14 Sistema 4 pré-gel - Força normal medida x taxa de cisalhamento.

Note-se que somente a primeira curva, correspondente à concentração de 4,8 g/l e à temperatura de 20°C apresentou todos os seus valores positivos. Tal comportamento foi observado nos demais sistemas, excetuando-se o Sistema 2, que forneceu dados válidos para o cálculo dos coeficientes na maioria de seus testes. Uma das referências encontrada na literatura a um fenômeno que pode ser relacionado ao observado é dada por Walters⁽²⁷⁹⁾ a respeito do *stress-overshoot* observado no início do cisalhamento de fluidos. O autor cita que tanto a tensão cisalhante quanto a primeira diferença entre tensões normais sofrem uma perturbação no início do cisalhamento, atingindo valores muito superiores ao esperado e relaxando, a seguir, até alcançar tal valor. Este tempo de relaxação é muito maior para a diferença entre tensões normais que para a tensão cisalhante.

De fato observa-se, em vários testes dinâmicos, que, para baixas frequências no início dos testes, os valores de tensão medidos são extremamente altos quando usadas geometrias de placa (o mesmo não é observado para cilindros coaxiais), que logo após é relaxada. A figura

15 mostra este fenômeno (as curvas são geradas pelo software da Haake - note-se os elevados valores do módulo complexo na faixa inicial de frequência).

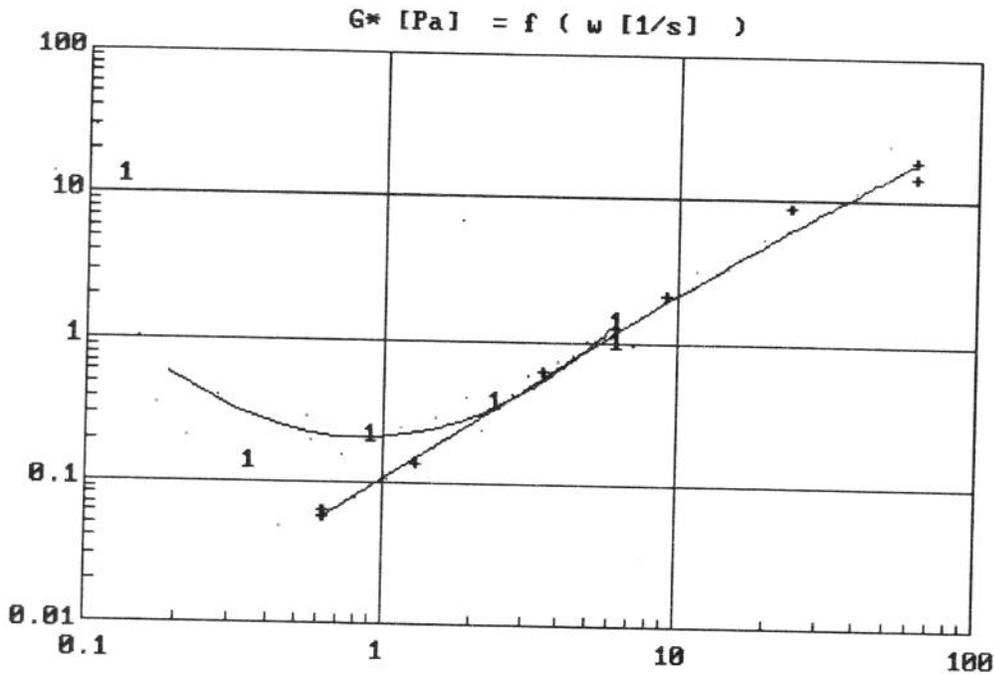


Fig. 15 Dados obtidos nas geometrias placa-placa (+) e cilindros coaxiais (1)

A análise dos dados obtidos conduz às seguintes considerações:

- ✓ Como o fluido testado possui um componente elástico importante, o que deve ser normalmente esperado em fluidos viscoelásticos deste tipo, o posicionamento do sensor sobre a amostra de fluido comprime-a contra a base, e, mesmo após a relaxação da tensão resultante, permanece acumulada na amostra uma tensão negativa residual devido à coesão característica das moléculas poliméricas.
- ✓ Ao se colocar o equipamento em operação, o programa, automaticamente, considera nula a tensão inicial e inicia o cisalhamento da amostra. Tal movimentação vence a coesão molecular, que é estática, e a tensão residual é relaxada.
- ✓ O efeito de tal relaxação corresponde matematicamente a um sistema de pulsos iniciado por um pulso negativo na origem, e pode ser encarado como um ruído que é convolvido com os

demais sinais lidos pelo sistema, resultando nos valores negativos de força normal armazenados pelo sistema.

A deconvolução posterior deste ruído é praticamente impossível devido ao desconhecimento de sua natureza e de sua conformação. Entretanto, tal fenômeno pode ser empiricamente tratado considerando-se a existência de uma curva de relaxação superposta ao sinal medido e dessuperpondo-a de forma a limpar o sinal. Tal procedimento é essencialmente empírico, porém foi aplicado ao Sistema 4 com sucesso (este sistema foi escolhido por ter um conjunto completo de dados em termos das concentrações e temperaturas propostas para estudo). A metodologia empregada foi a seguinte:

- ✓ Corrige-se os efeitos de concentração e temperatura, como anteriormente.
- ✓ Aplica-se aos sinais contaminados pela relaxação um deslocamento vertical para que todos os testes em exame apresentem forças normais positivas (figura 16). Tal deslocamento é empírico, porém é feito observando-se a tendência apresentada pelas curvas menos contaminadas, de forma que os sinais, corrigidos por um deslocamento horizontal, se superponham.
- ✓ Em gráfico log-log, traça-se uma reta tangente à parte inicial da curva resultante, que é descendente e que será considerada a curva de relaxação deste conjunto de testes.
- ✓ Dessuperpõe-se do sinal original a curva de relaxação. Com os novos valores de força normal (figura 17) calculam-se as diferenças entre tensões e os coeficientes de tensão normal. Alguns pontos da curva descendente serão perdidos devido ao ajuste da tangente; os pontos da curva ascendente, principalmente os finais, praticamente não sofrerão modificação significativa.

Tal metodologia tem duas variáveis de ajuste: o deslocamento vertical e a tangente de relaxação. Tais variáveis são ajustadas de forma a se obter parâmetros compatíveis com os obtidos através de outros métodos indiretos, que serão descritos posteriormente.

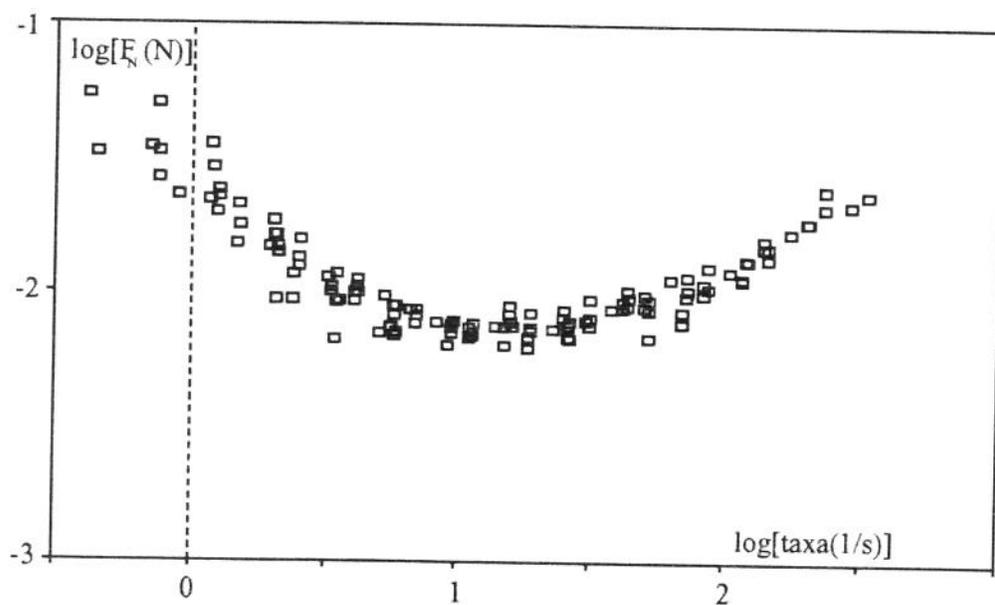


Fig. 16 Gráfico de $\log(F_n)$ x $\log(\text{taxa})$ após deslocamento vertical.

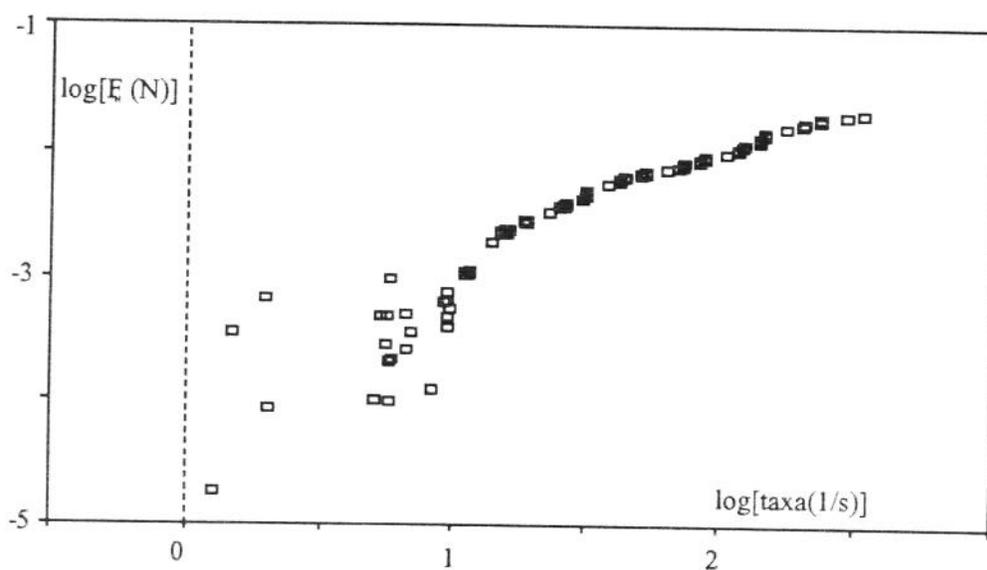


Fig. 17 Gráfico de $\log(F_n)$ x $\log(\text{taxa})$ após dessuperposição da relaxação.

5. Análise dos Resultados

Este capítulo está dividido em cinco partes, cada qual destinada ao estudo de aspectos específicos: a viscosidade, os parâmetros dinâmicos, os coeficientes de tensão normal, a evolução dos parâmetros com a temperatura e a concentração, e a evolução dos parâmetros com o tempo. Os dados obtidos experimentalmente foram processados e organizados na forma descrita no capítulo anterior. Os gráficos que a ilustram, em sua maioria, resultam da condensação e agrupamento dos dados para as condições normais de operação, conforme a técnica de redução de variáveis anteriormente definida.

5.1 Viscosidade

A medição de viscosidade foi feita, principalmente, através do *software Rotation* com diversas geometrias de fluxo, em regime de fluxo permanente. O *software* de tensão normal também fornece este parâmetro, oferecendo, porém, recursos gráficos e de análise de dados menos sofisticados, e, do *software* oscilatório, ele pode ser estimado através de correlação (lei de Cox-Merz). A geometria utilizada na maioria dos testes foi a de cilindros coaxiais. Os dados obtidos foram reduzidos para as condições normais de operação (concentração de 4,8 g/l e temperatura de 20°C) e ajustados pelo modelo de potência, de dois parâmetros, e de Carreau-Yasuda, de cinco parâmetros.

Os fluidos poliméricos possuem, como característica reológica marcante, a propriedade de apresentar uma diminuição de viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento (*shear-thinning*). As curvas de viscosidade em relação a esta taxa, em geral apresentadas em gráficos log-log, apresentam uma região inicial caracterizada por um

patamar, onde o valor lido de viscosidade recebe o nome de viscosidade inicial (η_0), ou viscosidade de taxa nula de cisalhamento, seguida por uma curva descendente cuja inclinação (n), neste tipo de gráfico, define o expoente do modelo de potência, terminando em um novo patamar que ocorre a elevadas taxas de cisalhamento, cujo valor é denominado de viscosidade final (η_{∞}), ou viscosidade de taxa infinita de cisalhamento. Em geral, os valores das viscosidades inicial e final não são conseguidos em medições em regime permanente, sendo extrapolados de valores conseguidos pela utilização de outros métodos de medição ou análise.

A viscosidade é representada no modelo de potência pela expressão:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}$$

onde n é chamado de índice de comportamento e determinado conforme citado anteriormente, e K é denominado índice de consistência, sendo determinado da extrapolação da reta definida por n até a taxa de cisalhamento unitária, onde se lê o correspondente valor de viscosidade, que é o valor assumido para este índice. Este é o modelo mais utilizado na prática por possibilitar um ajuste confiável da curva de viscosidade na faixa desejada de taxa de cisalhamento, porém o ajuste conseguido se restringe a esta faixa de taxas e sua extrapolação para outras faixas pode levar a erros importantes. O índice K só tem significado físico quando associado a outros parâmetros, como será visto adiante.

O modelos de Carreau-Yasuda é representado pela expressão:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}}$$

onde, além dos parâmetros já definidos, λ é uma constante de tempo cujo inverso é um indicativo da taxa de cisalhamento na qual o efeito de *shear-thinning* começa a aparecer no gráfico log-log, e a é um parâmetro de ajuste introduzido por Yasuda, que na expressão

original proposta por Carreau vale 2, cujo valor, conforme citações na literatura, é relacionado ao peso molecular do polímero testado.

O modelo de potência pode ser deduzido a partir do modelo de Carreau-Yasuda quando a viscosidade final pode ser desprezada. Neste caso, o índice de consistência pode ser calculado por:

$$\eta_{\infty} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad K = \eta_0 \lambda^{n-1}$$

A tabela 2 lista o valor destes parâmetros para os sistemas estudados em suas diversas fases, e nas condições normais de operação. O valor de K foi calculado de acordo com a relação acima, porém esta pode não ser a melhor opção para baixas taxas de cisalhamento .

<i>fase</i>		η_0 (Pa.s)	η_{∞} (Pa.s)	λ (s)	a (-)	n (-)	K (Pa.s ⁿ)	<i>pH</i> médio
Solução polimérica		0,13	0,001	0,01	1	0,4	1,78	7
Sistema 1	pré-gel	4,6	0,001	0,23	2	0,5	9,6	9
	gel	8,3	0,5	0,1	1,5	0,3	20 [†]	11
Sistema 2	pré-gel	0,23	0,001	0,08	0,9	0,4	1,09	8
	gel	14	0,001	0,1	1,2	0,55	39,5	10
Sistema 3	pré-gel	3	0,001	0,5	1	0,35	4,7	7
	gel	3,5	0,001	0,07	2	0,5	13,2	10
Sistema 4	pré-gel	0,13	0,001	0,02	1	0,4	1,55	7
	gel	2	0,001	0,17	2	0,2	8,25	10
† Como η_{∞} não é desprezível neste caso, este valor de K corresponde a um $n = 0.5$.								

Tab. 2 - Parâmetros de viscosidade.

Diversos outros modelos empíricos foram desenvolvidos para o ajuste da curva de viscosidade, citados no capítulo 2 e no apêndice C, porém deve-se sempre ter em consideração que se tratam de ajuste empíricos de curvas obtidos para condições específicas, e que mudanças nestas condições, em geral, inviabilizam a utilização prática dos mesmos, a não ser que tais variações estejam previstas em relações adicionais.

Verifica-se, na análise dos dados da tabela 2, que os sistemas e suas fases apresentam-se como fluidos distintos, com características próprias. Os principais pontos a serem destacados são os seguintes:

- ✓ O pré-gel do Sistema 4 tem um comportamento reológico similar ao apresentado pela solução polimérica, o que é consequência de seu tamponamento que, praticamente, não altera o pH da solução. Já o Sistema 1 apresenta um pré-gel com parâmetros elevados, e com razoável grau de gelificação devido ao alto valor de pH que atinge.
- ✓ O pré-gel do Sistema 2 apresenta características próximas às do Sistema 4, porém sua constante de tempo é maior, implicando um início da faixa de *shear-thinning* em taxas de cisalhamento menores. Seu tamponamento eleva o nível de pH do fluido, o que implica um determinado grau de gelificação, porém, tal observação prática não se reflete nos parâmetros medidos.
- ✓ O contrário é observado no pré-gel do Sistema 3, que apresenta valores elevados para os parâmetros medidos, embora seu pH se mantenha praticamente neutro e não seja observado sinal aparente de gelificação. Os dois últimos itens mostram que não se deve associar diretamente os conceitos de viscosidade e gelificação pois representam fenômenos diversos, um associado ao movimento do fluido, e o outro, à sua estrutura molecular.
- ✓ O gel do Sistema 1 é o único fluido que não apresenta uma viscosidade final (η_{∞}) extrapolável para a do solvente original, a água, embora não se disponha de dados suficientes, com exceção da solução polimérica e do gel do Sistema 4, para garantir tal fato ou que os demais fluidos tendam para este limite.
- ✓ Os três géis que possuem o Boro em sua composição (Sistemas 1, 2 e 3) têm curvas de viscosidade próximas, com perfis similares. O gel do Sistema 4 apresenta perfil diferenciado, sendo que, em altas taxas de cisalhamento, as curvas do gel e do pré-gel deste sistema se confundem, conforme poderá ser verificado nas curvas apresentadas a seguir.
- ✓ Em termos de bombeamento, os pré-géis dos sistemas 2 e 4 apresentaram menores viscosidades em altas taxas de cisalhamento, o que implica menor perda de potência na

coluna durante uma operação de fraturamento. Dentro da fratura, onde são esperadas baixas taxas de cisalhamento, o gel de melhor desempenho foi o do Sistema 4.

- ✓ Os géis apresentaram tendência a subir pela haste do cilindro interno (*rod-climbing*) durante as medições, que é um efeito comumente observado em fluidos poliméricos resultante da ação das tensões normais induzidas nos fluidos pelo seu escoamento. A exceção do gel do Sistema 4, que permitiu testes no reogoniômetro, os demais tiveram que ser testados no Haake - M5, onde o cisalhamento dos fluidos ocorre em ambiente confinado.
- ✓ Conforme anotado por GRAESSLEY [*in* (163)], a constante de tempo λ , combinada ao parâmetro a podem dar informações sobre a estrutura molecular da solução polimérica; quanto maior o valor desta constante, menos linear (ou mais ramificada) ela será, e maior a probabilidade de ocorrência de *entanglements*.

Nas páginas seguintes estão dispostas as curvas de viscosidade (figuras 18 a 26) levantadas em testes. Na faixa de baixas taxas de cisalhamento, as curvas foram complementadas com dados de viscosidade complexa (η^*), comprovando a regra de Cox-Merz (Apêndice C) para os fluidos estudados, e pela curva relativa ao modelo de Carreau-Yasuda ajustada para cada fluido, todas para as condições normais de operação,

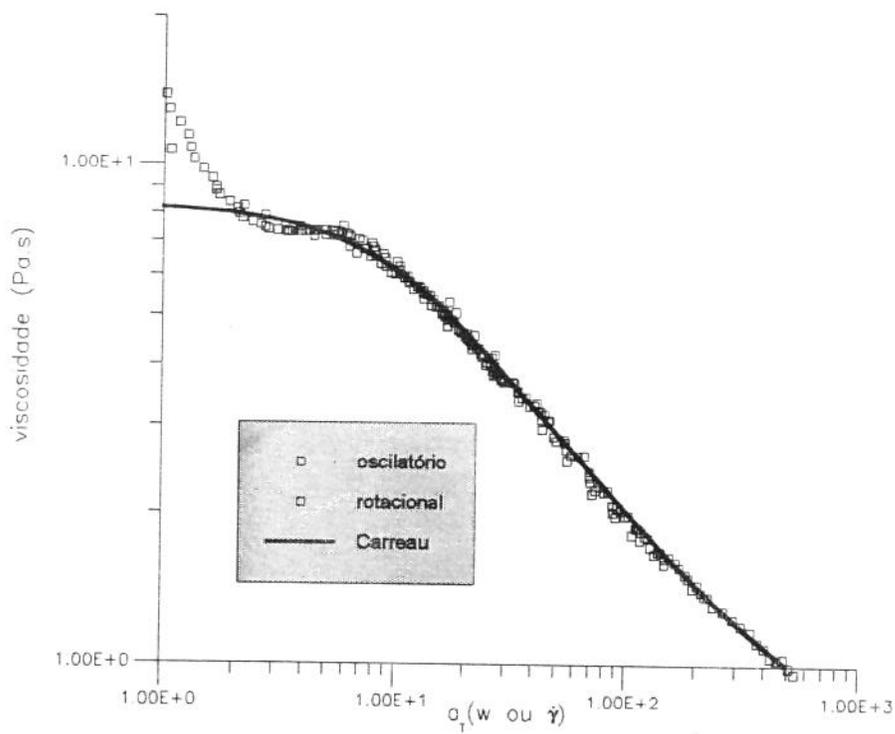
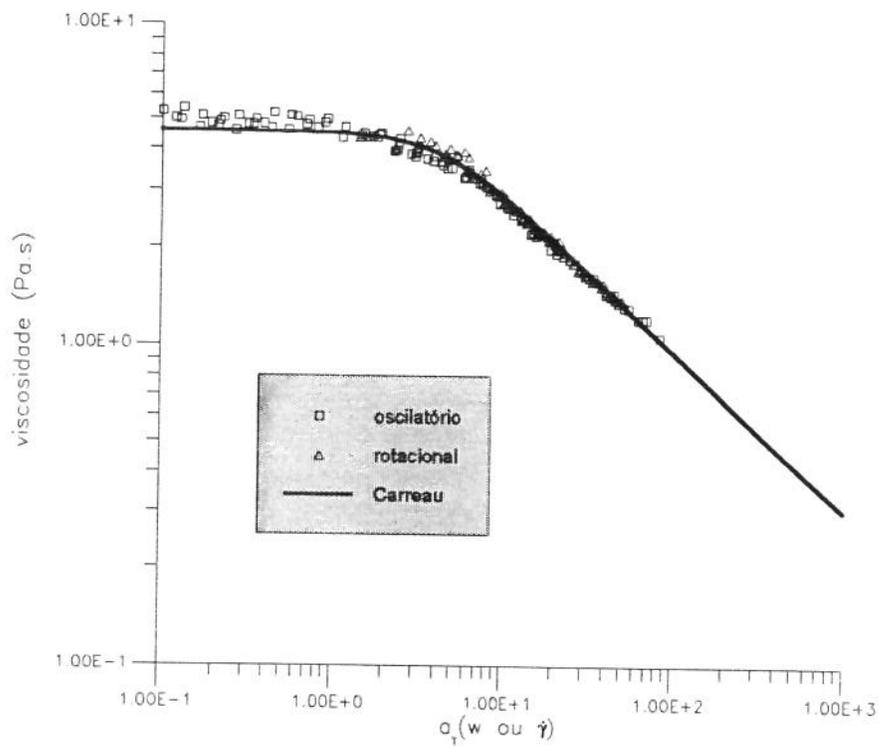


Fig. 19 Curvas de viscosidade para o Sistema 1: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

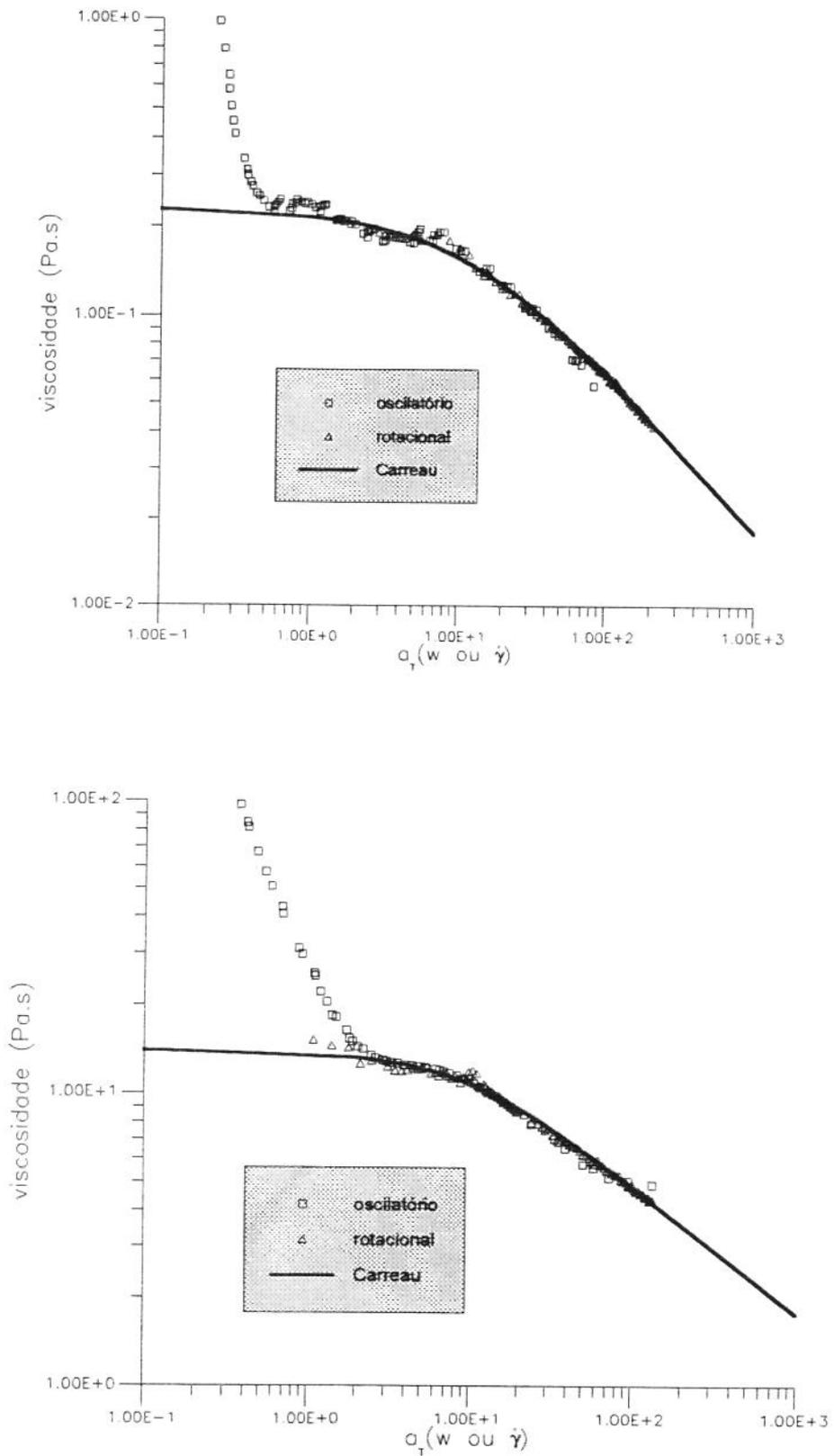


Fig. 20 Curvas de viscosidade para o Sistema 2: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

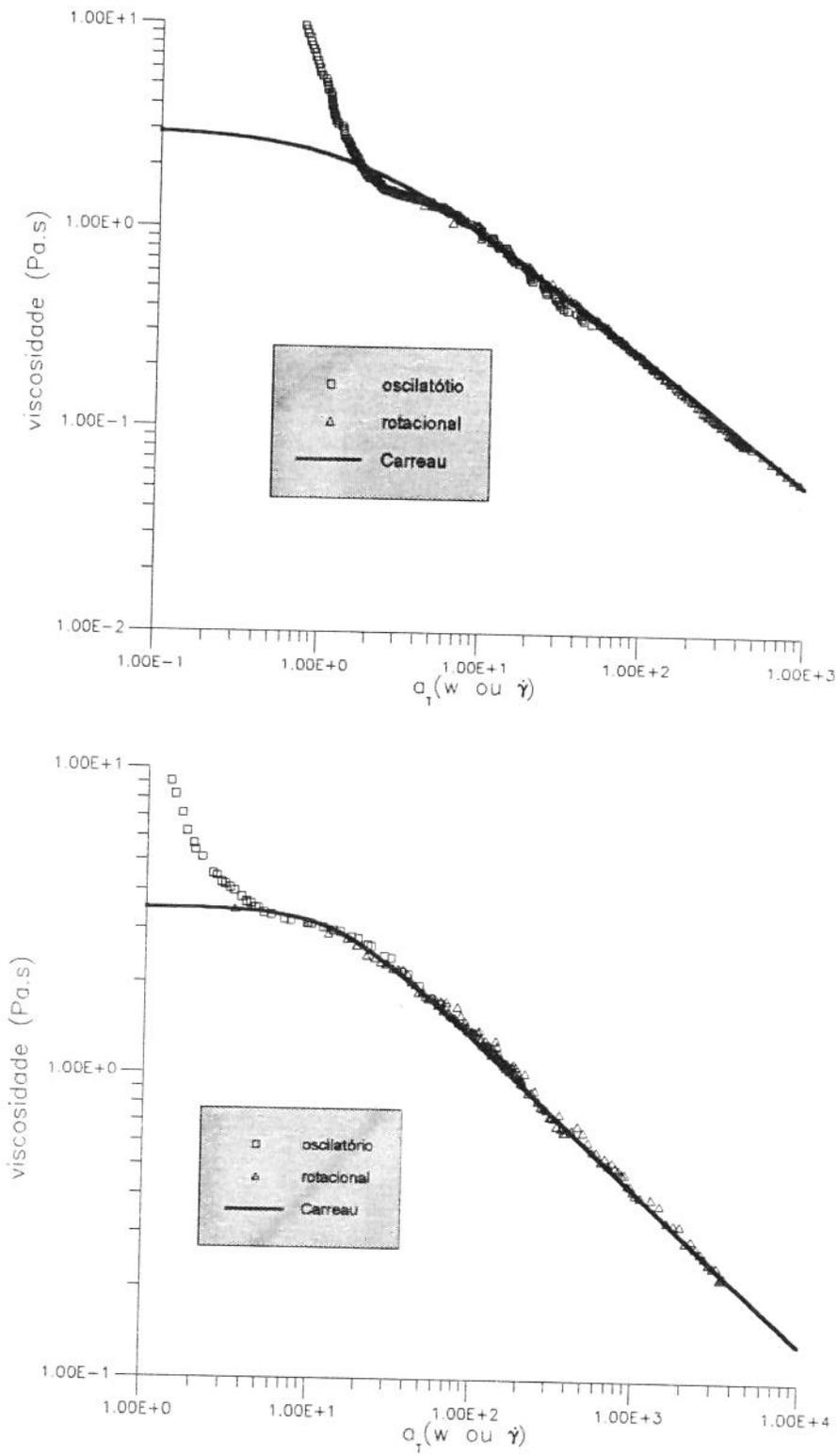


Fig. 21 Curvas de viscosidade para o Sistema 3: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

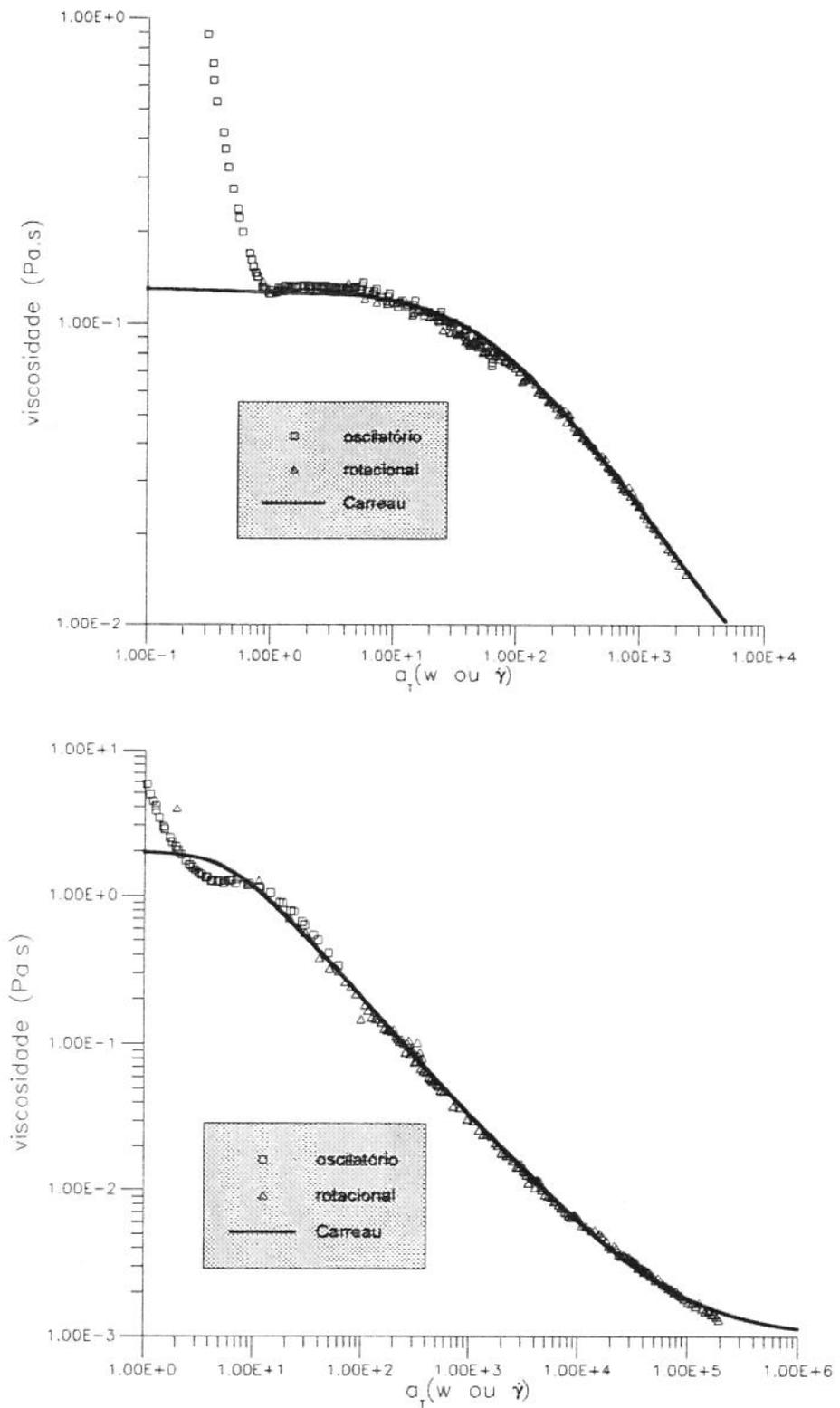


Fig. 22 Curvas de viscosidade para o Sistema 4: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

5.2 Parâmetros dinâmicos

Os testes para obtenção dos parâmetros dinâmicos foram feitos com as geometrias de cilindros coaxiais e placa-placa. Nesta última, a distância entre os discos foi fixada em 1mm. A faixa de frequências aceita pelo reogoniômetro é de 0.01 a 10 Hz, e o ângulo de deformação escolhido foi de 4° . O equipamento automaticamente conduz os testes variando a frequência dentro da faixa estabelecida: são aplicadas deformações oscilatórias à amostra de fluido e medidas as tensões oscilatórias resultantes (magnitude e fase); tais dados são processados através de análise de Fourier, fornecendo o módulo complexo (G^*) e a tangente de perda ($tg \delta$). A partir destes parâmetros são calculados os demais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \gamma_0 \exp(i\omega t) \Rightarrow \tau = \tau_0 \exp(i\omega t + \delta) \\ |G^*| = \frac{\tau_0}{\gamma_0}; \quad |\eta^*| = \frac{G^*}{\omega}; \quad |J^*| = \frac{1}{G^*} \\ G^* = G' + iG''; \quad G' = |G^*| \cos \delta; \quad G'' = |G^*| \sin \delta \\ \eta^* = \eta' - i\eta''; \quad \eta' = \frac{G''}{\omega}; \quad \eta'' = \frac{G'}{\omega} \\ J^* = J' + iJ''; \quad J' = \frac{G'}{|G^*|}; \quad J'' = \frac{G''}{|G^*|} \end{array} \right.$$

Duas importantes expressões relacionam os parâmetros dinâmicos aos parâmetros obtidos em regime permanente de escoamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'(\omega) \\ \Psi_{1,0} = 2\eta_0^2 J_e^0 \end{array} \right. \quad \text{onde } J_e^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} J'(\omega) = \text{conformação recuperável.}$$

A conformação inicial (ou recuperável) nem sempre é observada na curva de $J'(\omega)$ devido aos fenômenos de memória e de relaxação observados, em geral, na faixa inicial de frequências.

Dois tipos de análise serão feitos com os resultados obtidos nos testes dinâmicos, baseados nos gráficos obtidos para as condições normais de operação: por parâmetros e por fluidos. Sobre o comportamento dos parâmetros dinâmicos, destacam-se os seguintes pontos:

- ✓ A figuras 23 mostra a evolução dos parâmetros básicos, G^* e $\tan \delta$, para os pré-géis (incluindo a solução polimérica). A amplitude do módulo complexo, conforme definido anteriormente, representa a razão entre a tensão medida e a deformação imposta, enquanto que a tangente de perda resulta da relação entre os componentes do módulo e expressa a relação entre as energias perdida e acumulada em uma deformação cíclica. Verifica-se que o módulo complexo do pré-gel do Sistema 4 tem, praticamente, o mesmo comportamento que o observado na solução polimérica, e um pouco inferior ao do Sistema 2. O módulo do pré-gel do Sistema 1 apresenta o mesmo perfil que o da solução polimérica, porém tem valor cerca de dez vezes maior; e o pré-gel do Sistema 3 tem um comportamento diferenciado neste parâmetro, similar ao que será descrito para os géis. O perfil esperado para a curva da amplitude do módulo complexo assemelha-se ao apresentado pelo Sistema 1. O patamar inicial verificado na curva da solução polimérica e as curvas descendentes observadas nos outros pré-géis indicam um forte componente de rigidez: durante os testes verifica-se, na faixa de baixas frequências, que o fluido se comporta como um sólido, apresentando forte reação ao cisalhamento, que é atenuada com o aumento de frequência. Portanto, esta parte descendente das curvas pode ser interpretada como uma espécie de relaxação destes fluidos.

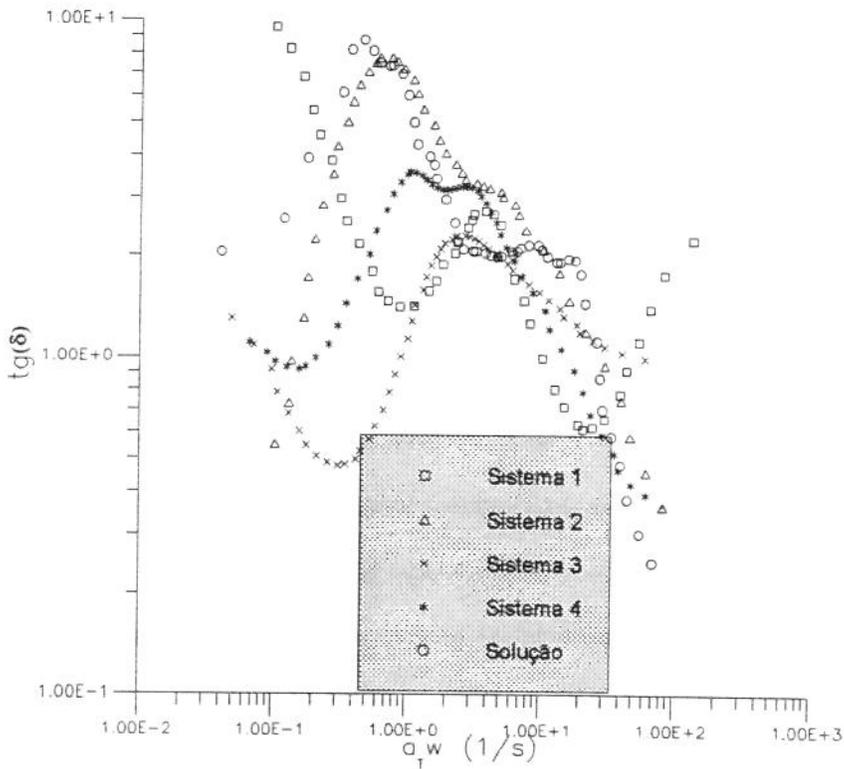
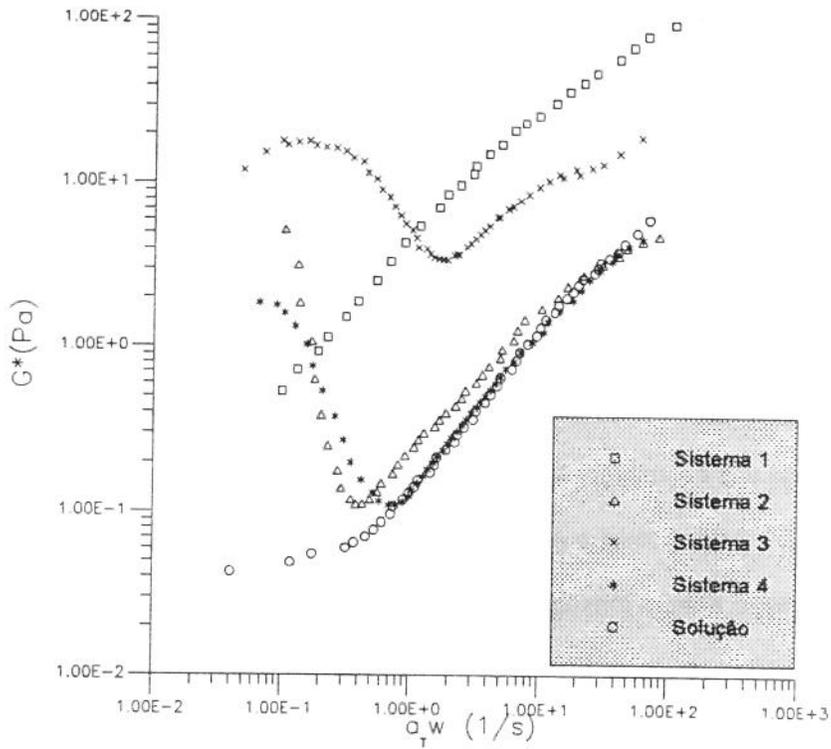


Fig. 23 Pré-gel - (acima) módulo complexo, (abaixo) tangente de perda.

- ✓ Os perfis das curvas de tangente de perda dos pré-géis seguem padrões descritos na literatura; das curvas mostradas na Figura 23 (abaixo), a referente ao Sistema 1 tem o comportamento esperado para este parâmetro, ou seja, uma parte inicial descendente, quando ele se comporta de forma inversamente proporcional à frequência, passando por um mínimo e seguindo para um máximo bem delimitado, que pode se desenvolver em forma de patamar, e de uma nova região descendente que pode conter um novo mínimo. Esta aparente oscilação da tangente de perda deve se localizar, segundo a literatura e o observado nas curvas, em torno do valor unitário da tangente.
- ✓ A figura 24 (acima) mostra a curva do módulo de armazenamento, $G'(w)$, que é definida como a razão entre a tensão em fase com a deformação e a deformação, em um cisalhamento oscilatório. Ele mede a energia armazenada e recuperada por ciclo. Uma das propriedades deste módulo é a sua reciprocidade gráfica com o módulo de relaxação, $G(t)$, que mostra a evolução da razão tensão-deformação com o tempo, ou seja, ambos os módulos apresentam resultados similares considerando-se $t = 1/w$. Como para o módulo complexo, verifica-se que os sistemas 2 e 4 apresentam curvas similares à da solução polimérica e os sistemas 1 e 3 apresentam curvas diferenciadas. Novamente, o efeito de relaxação anteriormente citado aparece na faixa inicial de frequências. Segundo a literatura, este módulo deve se anular quando a frequência tende a zero e deve apresentar, na faixa de baixas frequências, uma tangente à curva de valor 2 (em gráfico log-log), o que pode ser notado na tendência exibida após a inflexão das curvas que apresentam tal relaxação.
- ✓ O módulo de perda, $G''(w)$ é apresentado na figura 24 (abaixo) para os pré-géis analisados. Tal módulo é definido pela razão entre a tensão defasada de 90° em relação à deformação e a deformação, e mede a energia dissipada, ou perdida, por ciclo. A análise do comportamento das curvas é similar ao item anterior. Este módulo deve se anular quando a frequência tender a zero e deve ser proporcional à frequência na faixa de baixas frequências (tangente à curva = 1).

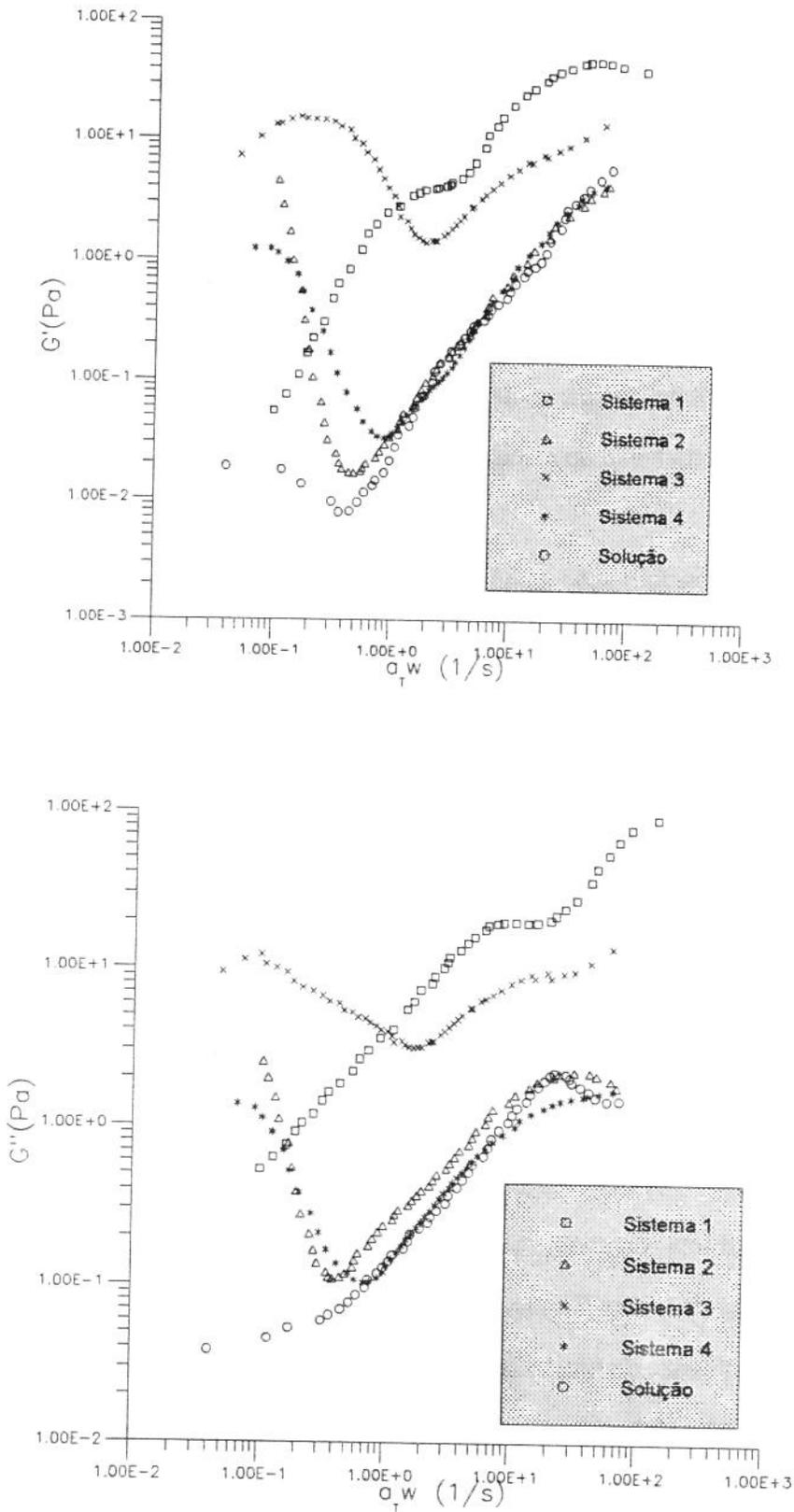


Fig. 24 Pré-gel - módulos de (acima) armazenamento e (abaixo) de perda.

- ✓ Os componentes da viscosidade complexa dos pré-géis estão grafados na figura 25. A parte real é denominada viscosidade dinâmica e a imaginária é chamada, por alguns autores, de elasticidade⁽²⁶⁰⁻²⁶³⁾. As descrições efetuadas anteriormente para os componentes do módulo complexo podem ser estendidas para os componentes da viscosidade, pois são similares (conforme suas definições). A importância da viscosidade complexa reside na lei de Cox-Merz (Apêndice C), válida para os fluidos em estudo conforme mostrado anteriormente, e na obtenção de um valor confiável para a viscosidade inicial (η_0) através do limite da viscosidade dinâmica quando a frequência tende a zero. Fornece, também, uma estimativa para o comportamento do primeiro coeficiente de tensão normal através da regra de Laun (Apêndice C).
- ✓ O parâmetro conformação é pouco utilizado na descrição reológica de líquidos poliméricos, mas tem grande importância no caso dos polímeros fundidos. A amplitude da conformação complexa é definida como a razão entre a deformação medida e a tensão cisalhante imposta a uma amostra. Seus componentes são denominados conformação de armazenamento, $J'(w)$, e de perda, $J''(w)$, que são definidos de forma similar aos componentes do módulo complexo (vide definições no início desta seção). No caso dos fluidos examinados, os parâmetros de conformação foram obtidos a partir de suas definições analíticas, e não de sua determinação experimental. As curvas destes parâmetros para os pré-géis estão mostradas na figura 26. Como no caso do módulo de armazenamento, a conformação de armazenamento pode ser utilizada para a obtenção do parâmetro $J(t)$, que descreve o comportamento, ao longo do tempo, da deformação determinada pela aplicação de uma tensão cisalhante constante. O valor de J_e^0 é obtido do patamar inicial observado na curva de $J'(w)$ na faixa de baixas frequências, e é utilizado para a estimativa do valor inicial do primeiro coeficiente de tensão normal (vide início desta seção), porém encontra-se, em geral, mascarada pelo efeito de relaxação já citado. A curva de $J''(w)$ pode ser utilizada para estimar o valor da viscosidade inicial pois, para baixas frequências $J''(w) = \frac{1}{w\eta_0}$.

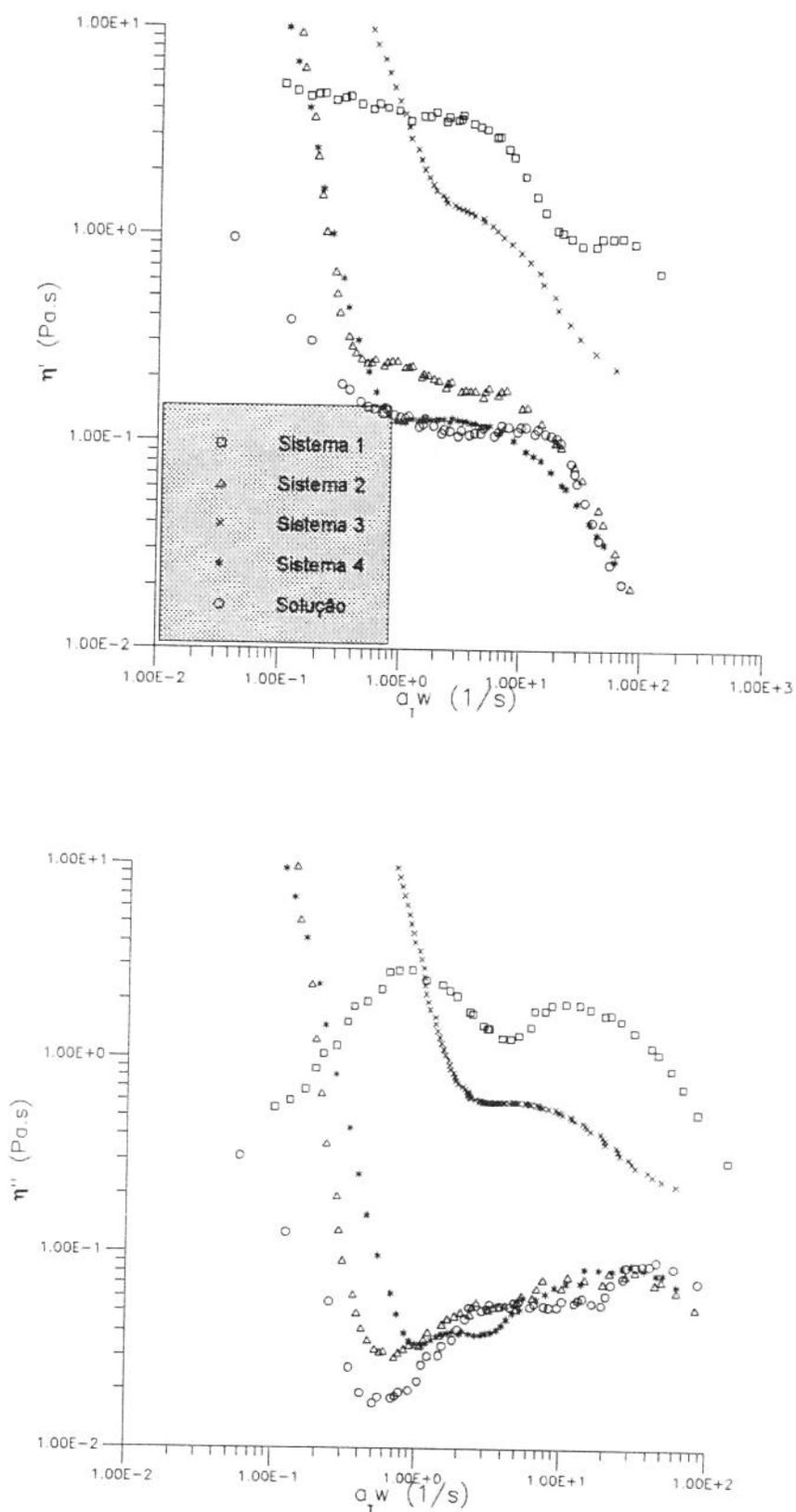


Fig. 25 Pré-gel: (acima) viscosidade dinâmica e (abaixo) elasticidade.

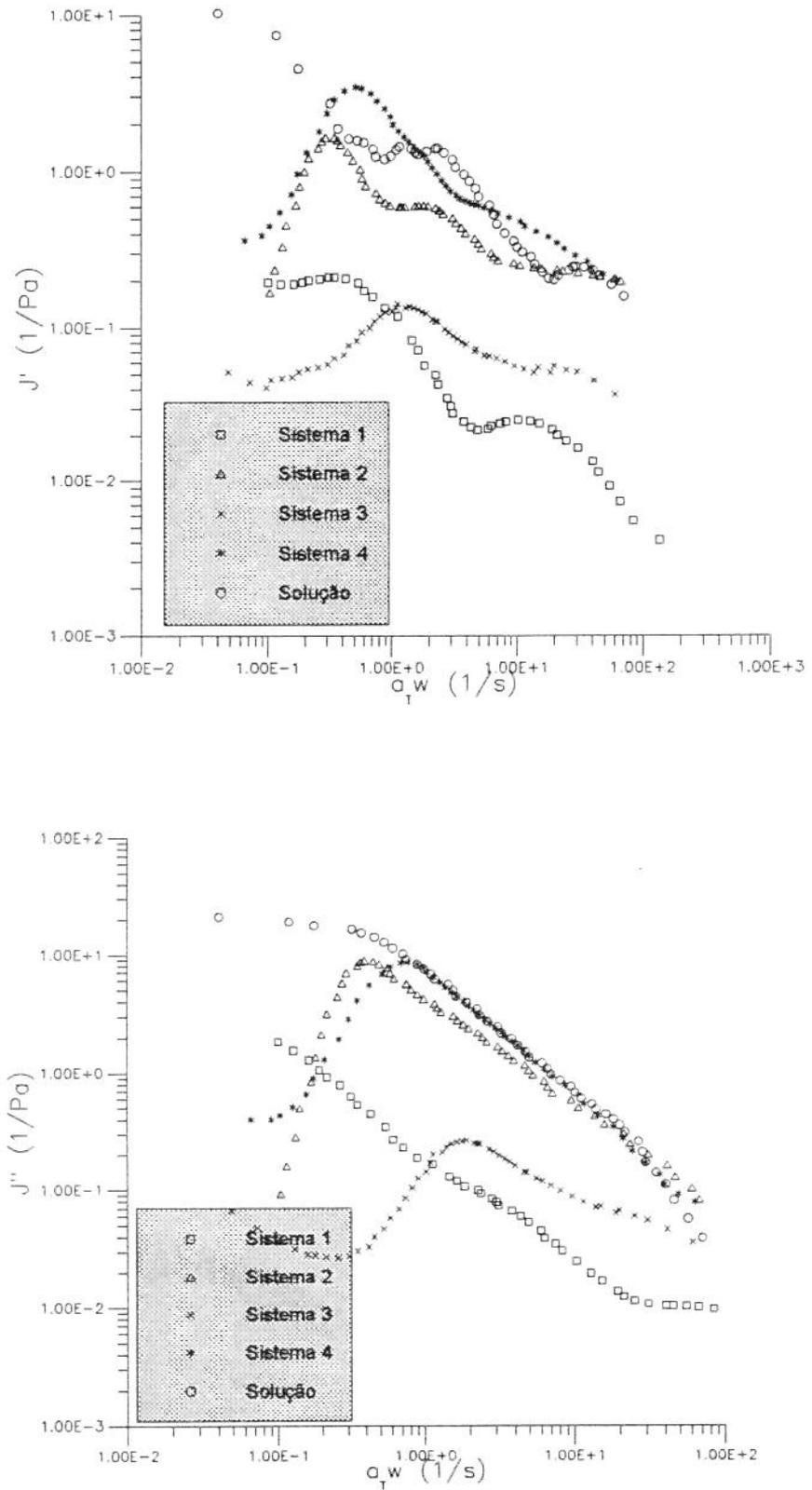


Fig. 26 Pré-gel: Conformações (acima) de armazenamento e (abaixo) de perda.

✓ As figuras 27-30 apresentam os mesmos gráficos anteriores para os géis testados. Nota-se que as curvas de tangente de perda apresentam perfis similares aos verificados nos pré-géis. O mesmo ocorre com as amplitudes do módulo complexo, porém com valores muito maiores (entre 10 e 100 vezes maiores) que os observados para os pré-géis. O efeito de relaxação constatado anteriormente se repete com maior intensidade, e, novamente, as curvas que mais se aproximam aos padrões esperados referem-se ao Sistema 1. Tal relaxação contamina os sinais na faixa de baixas frequências e compromete a obtenção de parâmetros iniciais, η^0 e J_e^0 , confiáveis, principalmente no caso deste último, que é definido no início desta faixa. Tais parâmetros estão sintetizados na tabela 3, e foram estimados com o auxílio das figuras 32-35 além das já citadas. Os dados de conformação inicial foram obtidos, em geral, de extrapolações das curvas obtidas, sendo, por isso, pouco confiáveis.

fluido	pré-gel		gel	
	η_0 (Pa.s)	J_e^0 (1/Pa)	η_0 (Pa.s)	J_e^0 (1/Pa)
Solução	0,13	1,3	-	-
Sistema 1	4,6	0,2	8,3	0,07
Sistema 2	0,23	0,6	14	0,07 ^l
Sistema 3	3	0,1	3,5	0,03
Sistema 4	0,13	1	2	0,3

Tab. 3 - Parâmetros iniciais dinâmicos.

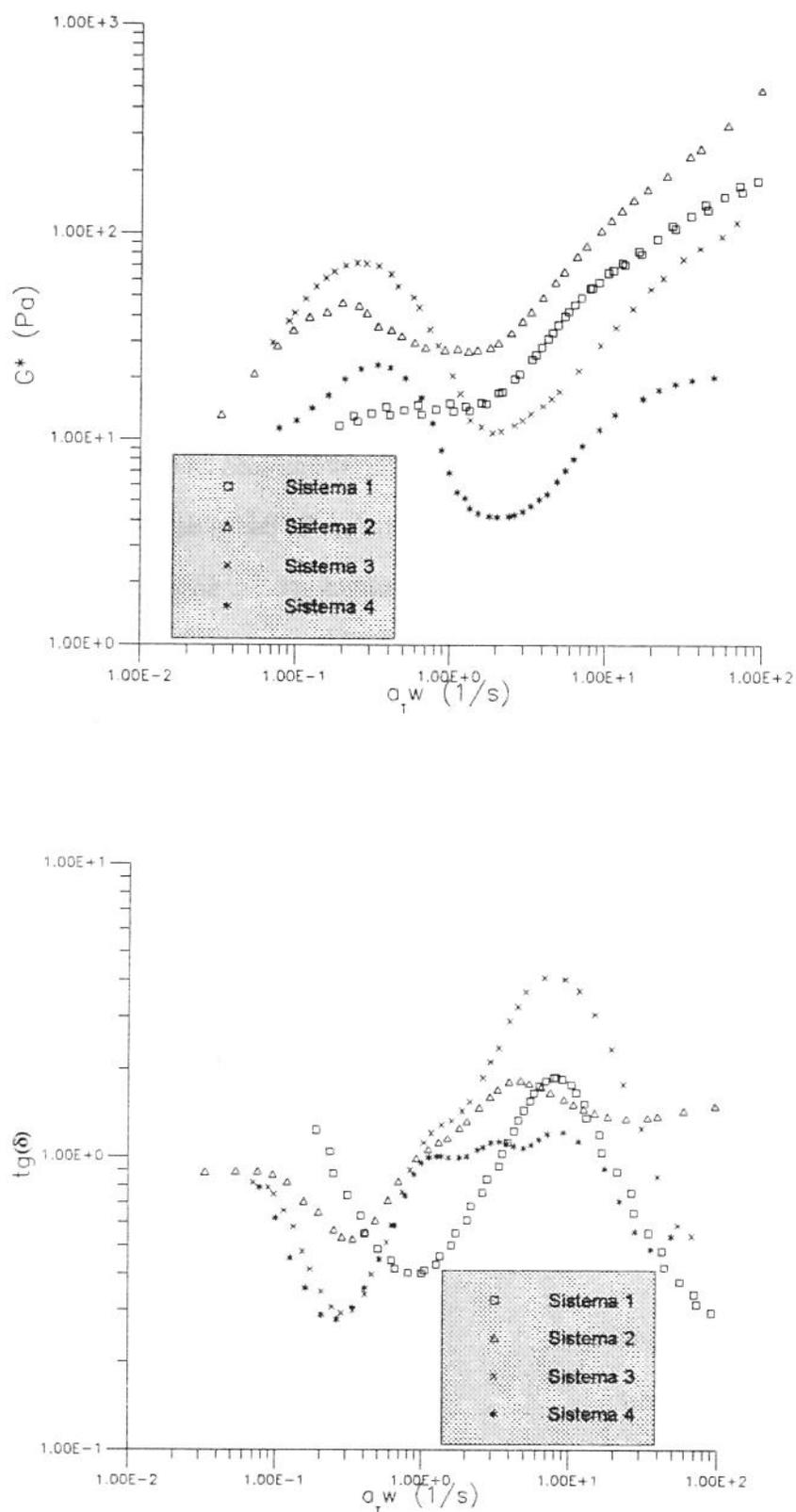


Fig. 27 Gel: (acima) módulo complexo e (abaixo) tangente de perda.

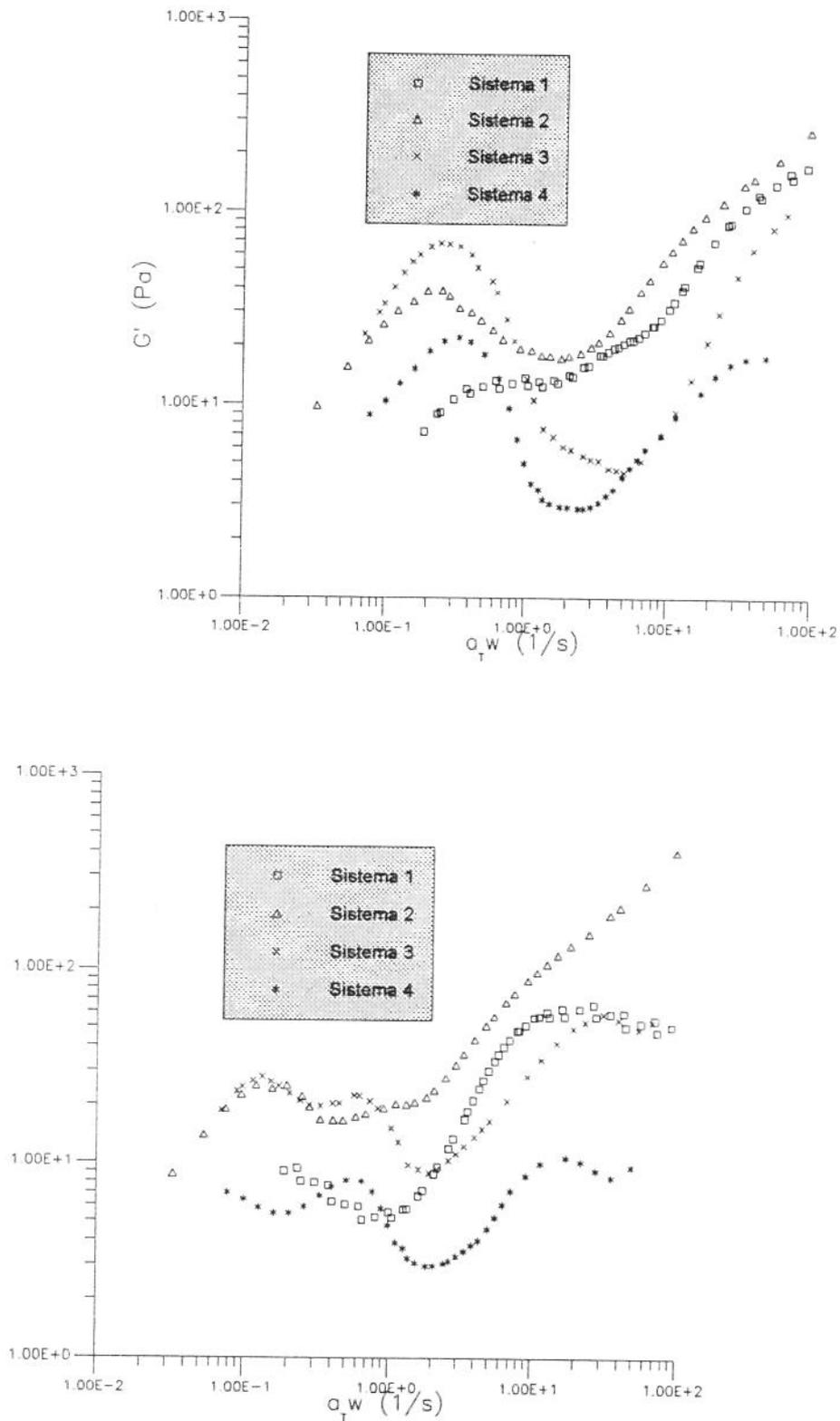


Fig. 28 Gel: módulos (acima) de armazenamento e (abaixo) de perda.

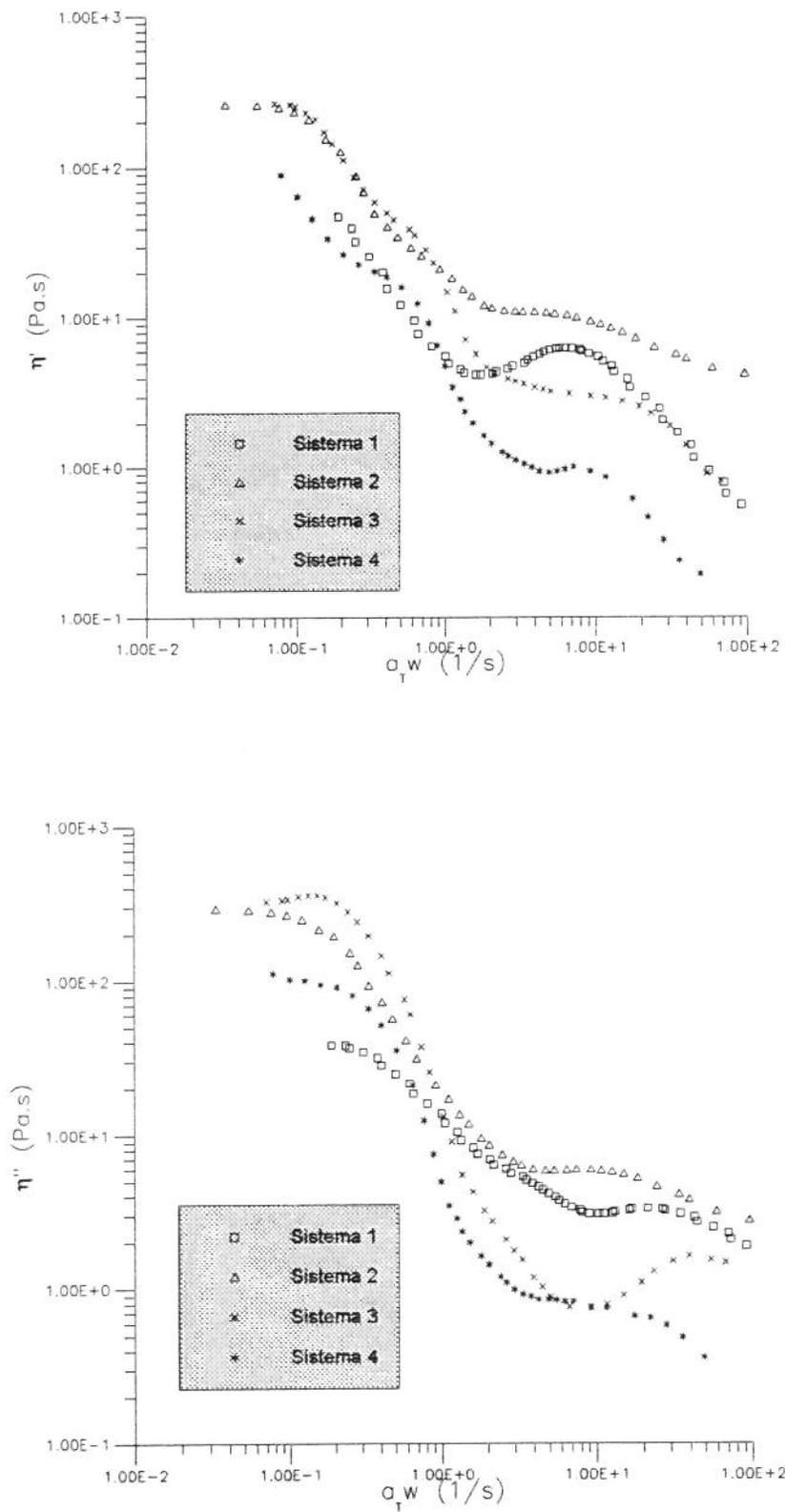


Fig. 29 Gel: (acima) viscosidade dinâmica e (abaixo) elasticidade.

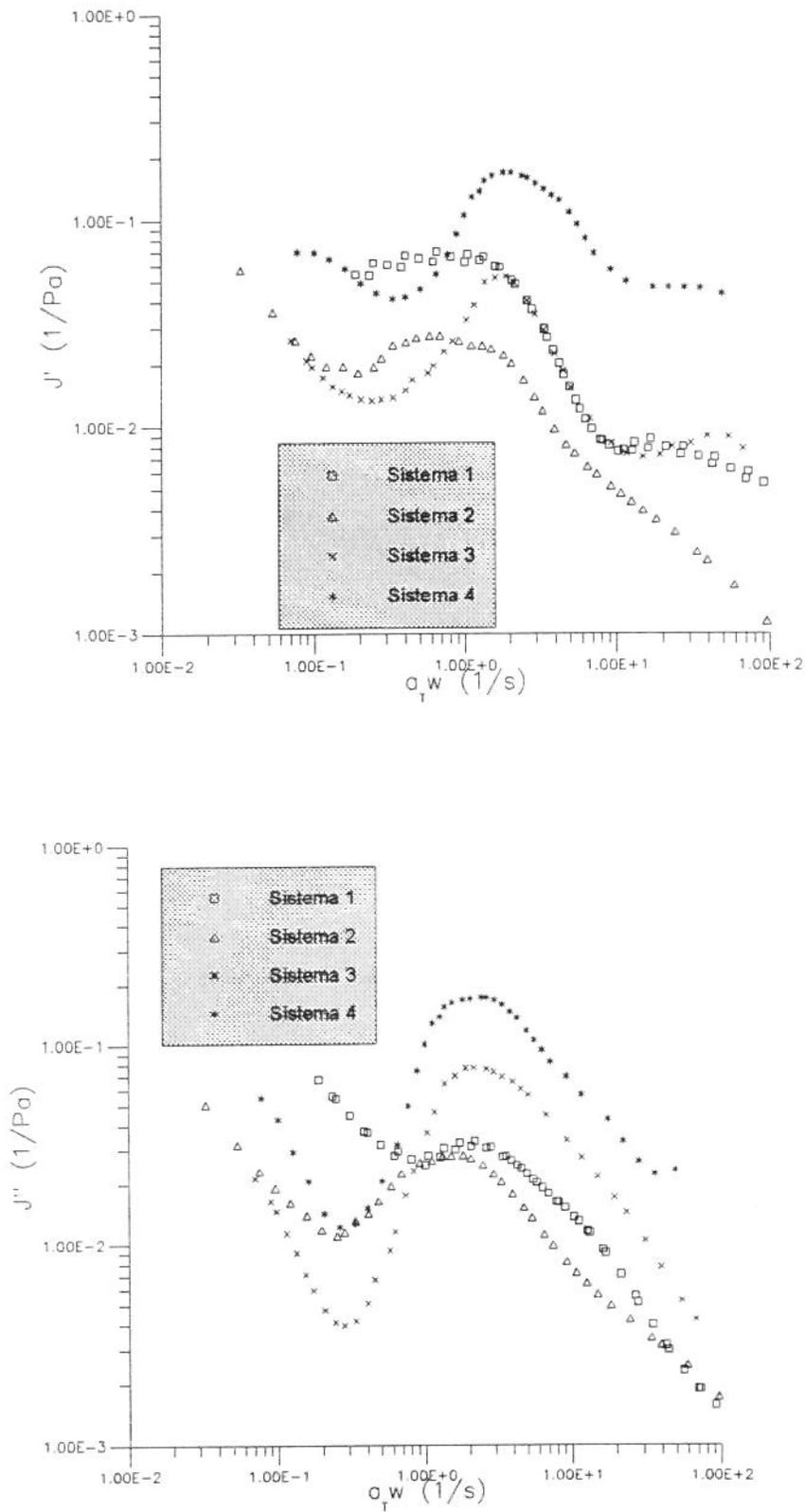


Fig. 30 Gel: conformações (acima) de armazenamento e (abaixo) de perda.

Uma outra forma de caracterização reológica dinâmica de fluidos poliméricos descrita na literatura é dada pela análise conjunta dos componentes do módulo complexo. Tal análise é comparativa, tomando por base os dados teóricos obtidos do desenvolvimento analítico para soluções poliméricas infinitamente diluídas (teoria de Rouse) e de sua extensão para as soluções concentradas.

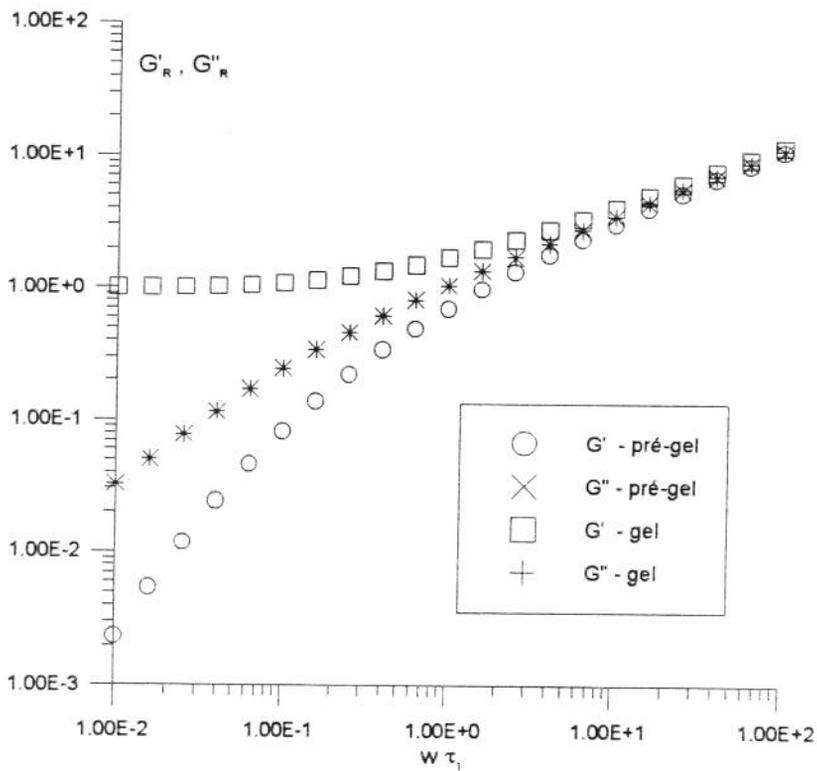


Fig 31 Teoria de Rouse - Comportamento teórico dos componentes do módulo complexo.

Observe-se na figura 31 o comportamento dos componentes do módulo complexo contra a frequência (todos os valores estão reduzidos conforme a teoria): o módulo de perda (G'') não apresenta variação significativa; o módulo de armazenamento (G') possui valores inferiores aos observados no módulo de perda na fase pré-gel e valores superiores (e em ordenadas reduzidas, sempre positivos) na fase gel. Esta é a principal mudança a ser esperada (figuras 32 - 35) devido à reticulação.

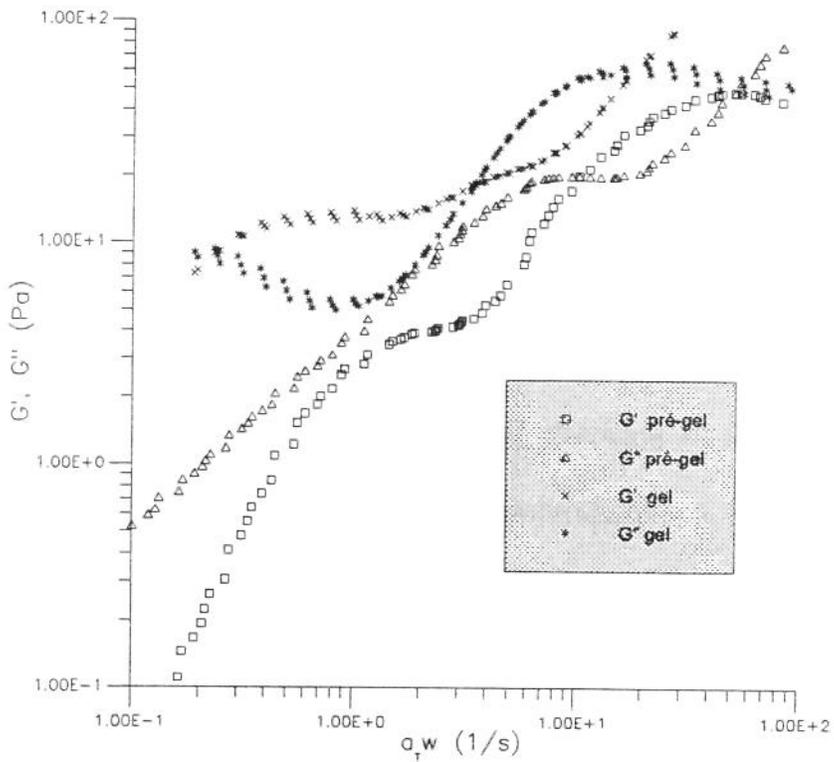
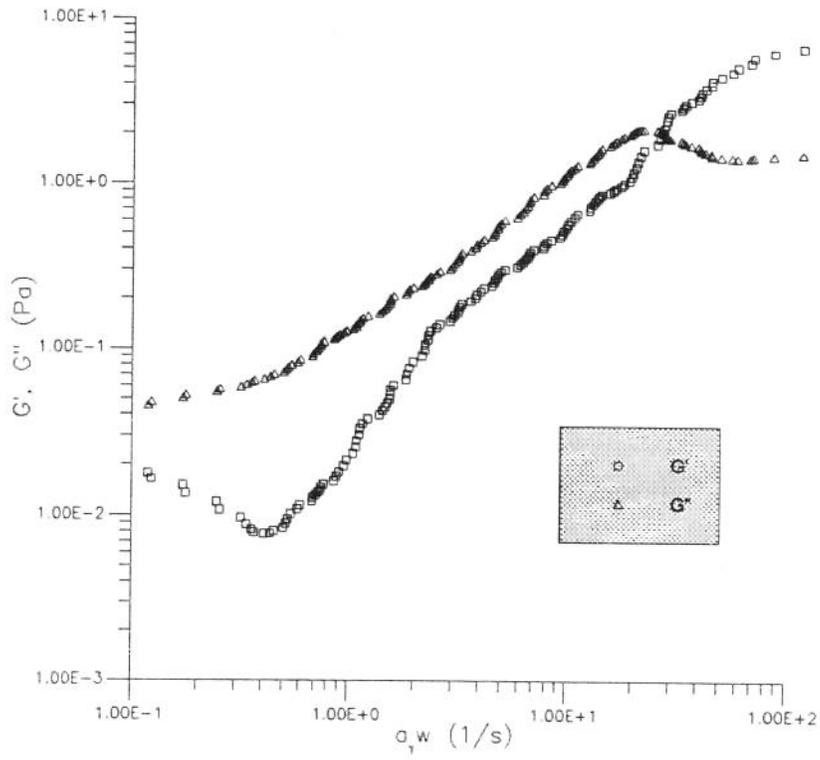


Fig. 32 Solução e Sistema 1: Componentes do módulo complexo.

A figura 32 mostra o comportamento dos componentes do módulo complexo para a solução polimérica e para o Sistema 1 (pré-gel e gel). No casos deste sistema, verifica-se uma boa concordância com a figura 31, baseada na adaptação da teoria de Rouse para soluções concentradas. Embora as curvas experimentais mostrem alguma variação, em termos médios as duas figuras se equivalem†. Nas curvas da solução polimérica nota-se, na faixa intermediária de frequências, um patamar que define, segundo a literatura, a zona de platô, que é uma das regiões onde se identifica a existência de *entanglements*, que são caracterizados pelo entrelaçamento das curvas dos componentes, o que pode ser verificado para a faixa nesta zona.

O efeito de *entanglements* pode também ser verificado nas curvas dos sistemas mostradas a seguir (figuras 33 - 36), para os componentes do módulo complexo. Nestas, foram superpostas as curvas para os pré-géis e os géis dos sistemas 1, 2, 3 e 4, mostrando que, também para as fases, a propriedade de redução de variáveis é válida, porém as constantes de deslocamento dos eixos varia de sistema para sistema, sendo, provavelmente, dependente da estrutura molecular de cada um deles (somente o Sistema 1 não apresentou o perfil esperado para suas curvas, sendo seus eixos quase coincidentes). Tal superposição permite uma grande extensão destas curvas, possibilitando a visualização das principais regiões reológicas definidas para os fluidos poliméricos, perfeitamente definidas nas curvas dos Sistema 2 e 4: na região de baixas frequências, denominada *terminal*, $G'(w)$ é muito menor que $G''(w)$ e a resposta viscosa predomina (esta região não foi detectada nos dados obtidos para o Sistema 3); na região intermediária, chamada *platô*, $G'(w)$ torna-se maior que $G''(w)$ e este patamar é denominado, na literatura, de módulo de platô; a seguir ocorre a *zona de transição*, onde a tendência é novamente revertida e as curvas tendem a seguir

† Os valores das coordenadas não coincidem pois a redução de variáveis, na teoria de Rouse, é absoluta.

paralelamente, terminando na *zona vítrea*, onde, em geral, $G''(w)$ tende a decrescer abruptamente, conforme pode ser verificado nos sistemas 1, 3 e 4, cruzando novamente a curva de $G'(w)$.

O princípio da superposição de Boltzmann, definido por:

$$\begin{cases} G'(w) = w \int_0^{\infty} G(t) \sin wt \, dt \\ G''(w) = w \int_0^{\infty} G(t) \cos wt \, dt \end{cases}$$

onde $G(t)$ é o módulo de relaxação do fluido, explica convenientemente tais comportamentos.

Na região terminal, o módulo de armazenamento deve se desenvolver proporcionalmente ao quadrado da frequência, e o módulo de perda, proporcionalmente à frequência, tendo inclinações de valor 2 e 1 no gráfico log-log. O módulo de platô é dado por:

$$G_N^0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_p''(w) \, d \ln w$$

e define o patamar inicial da zona de transição.

Conforme citado, dois outros importantes parâmetros podem ser estimados a partir destas curvas: a viscosidade inicial e a conformação recuperável, dadas por

$$\eta_0 = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{G''(w)}{w} \quad \text{e} \quad J_e^0 = \frac{1}{\eta_0^2} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{G'(w)}{w^2}$$

Maiores detalhes a respeito do comportamento reológico e fisico-químico destas regiões podem ser encontrados em FERRY ou GRAESSLEY [*in* (163)]. Estas últimas quatro figuras mostram que a técnica de redução de variáveis pode ser estendida para as modificações estruturais do tipo sol-gel, e tal constatação, experimental, não encontra citação na literatura consultada sobre o assunto. A determinação dos fatores de redução neste caso requer um estudo mais aprofundado sobre as estruturas moleculares dos fluidos estudados, visto que a gelificação resulta em uma grande elevação de suas massas moleculares.

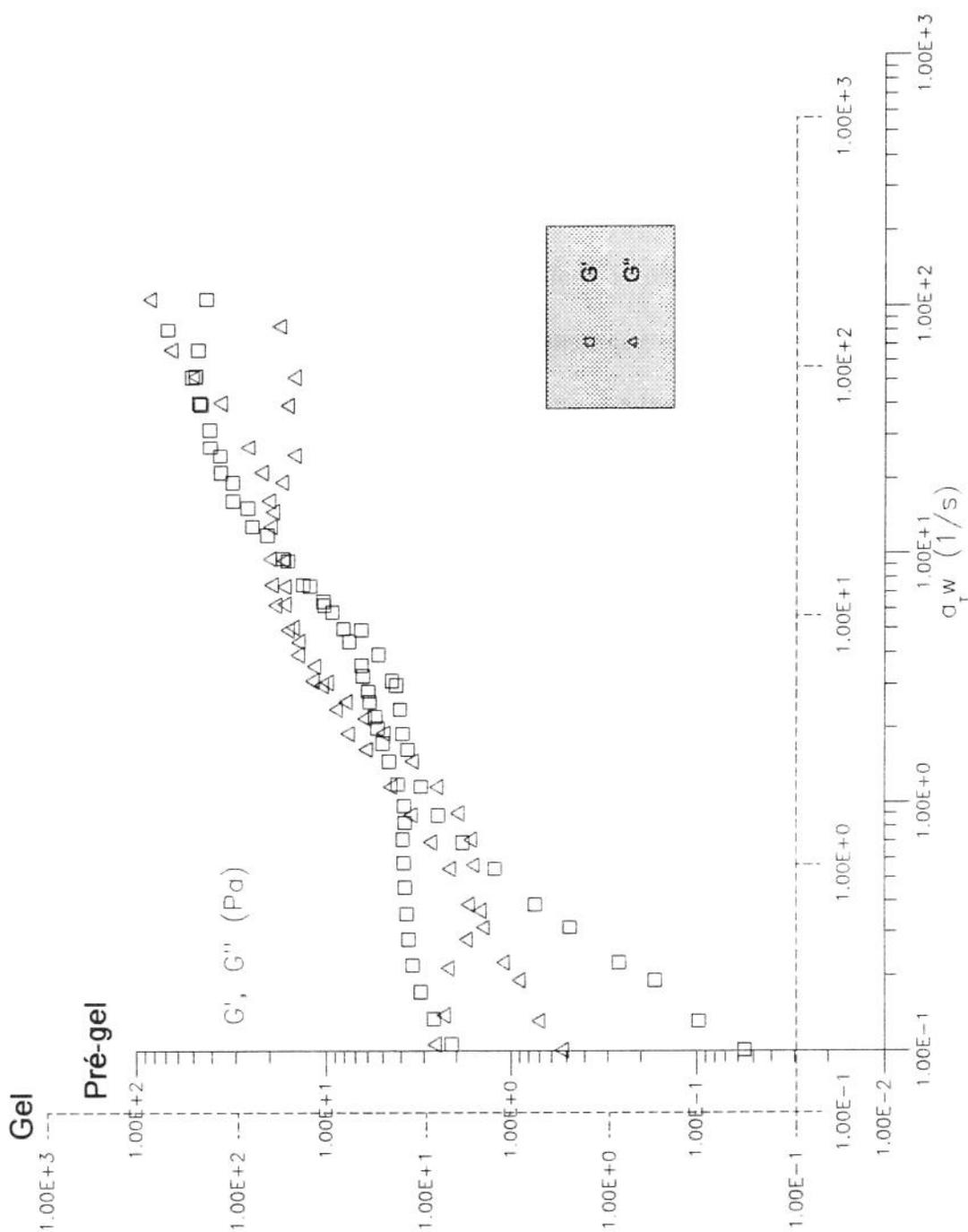


Fig. 33 Sistema 1: Componentes do módulo complexo - Gráfico composto.

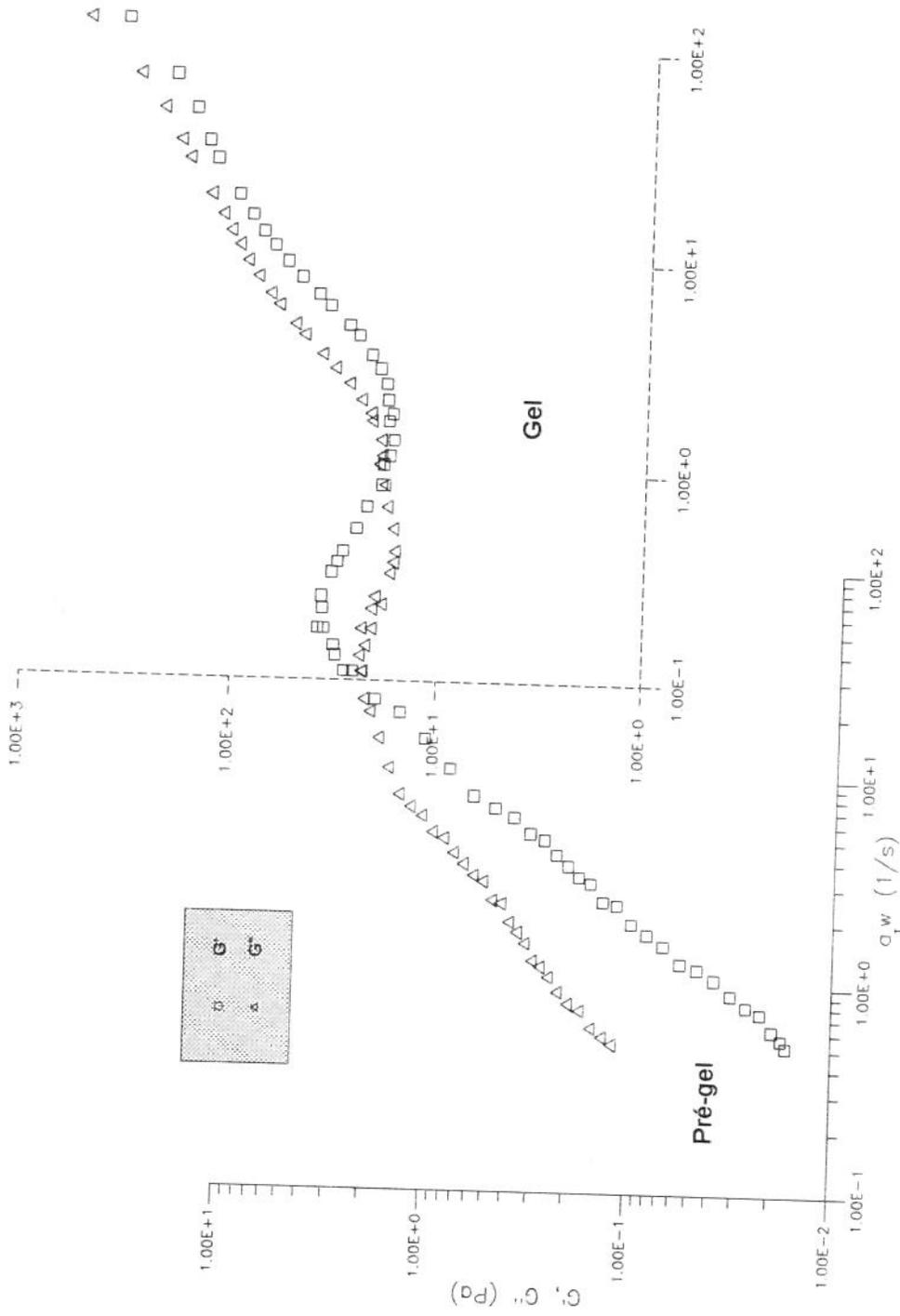


Fig. 34 Sistema 2: Componentes do módulo complexo - Gráfico composto.

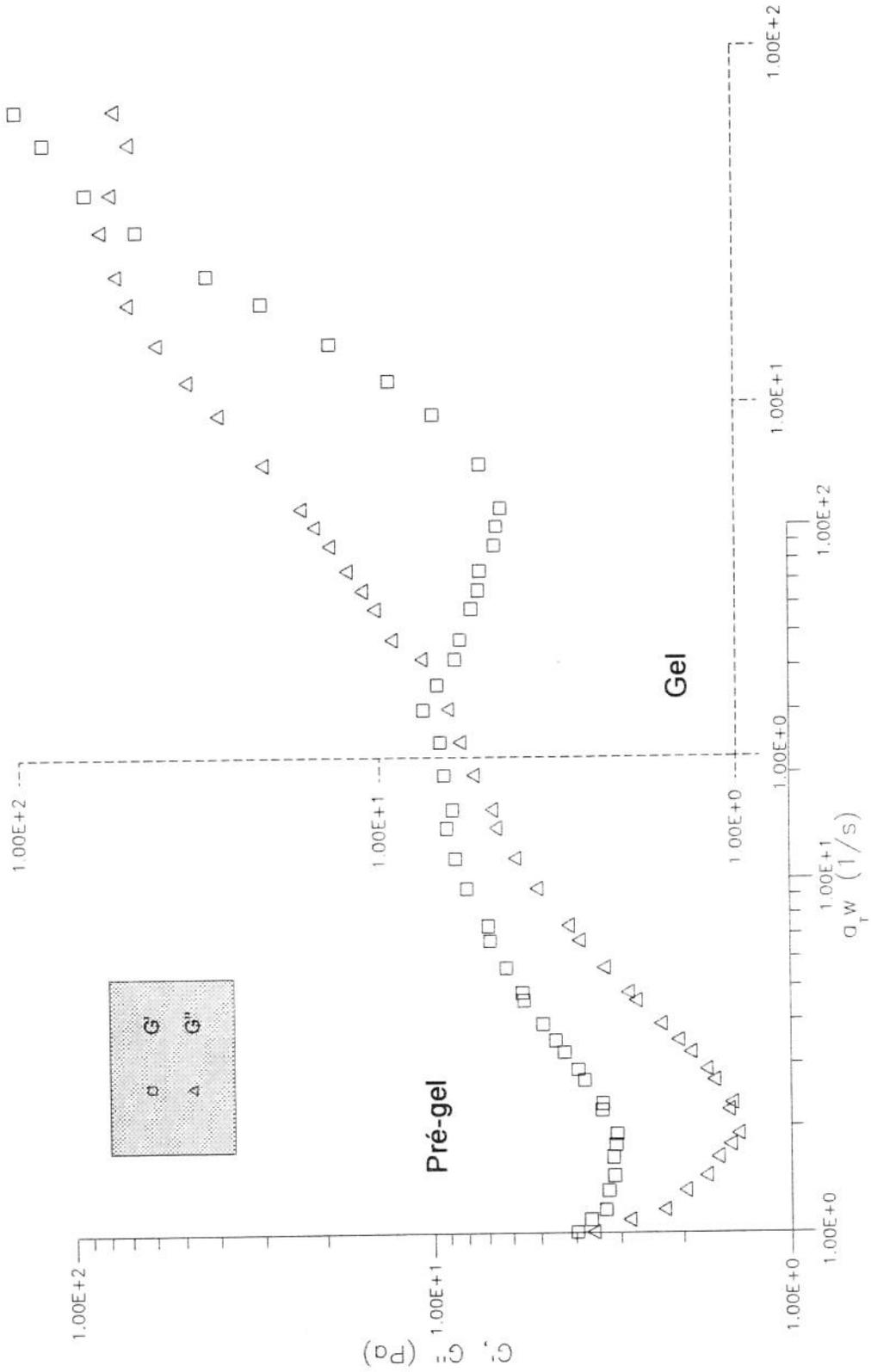


Fig. 35 Sistema 3: Componentes do módulo complexo - Gráfico composto.

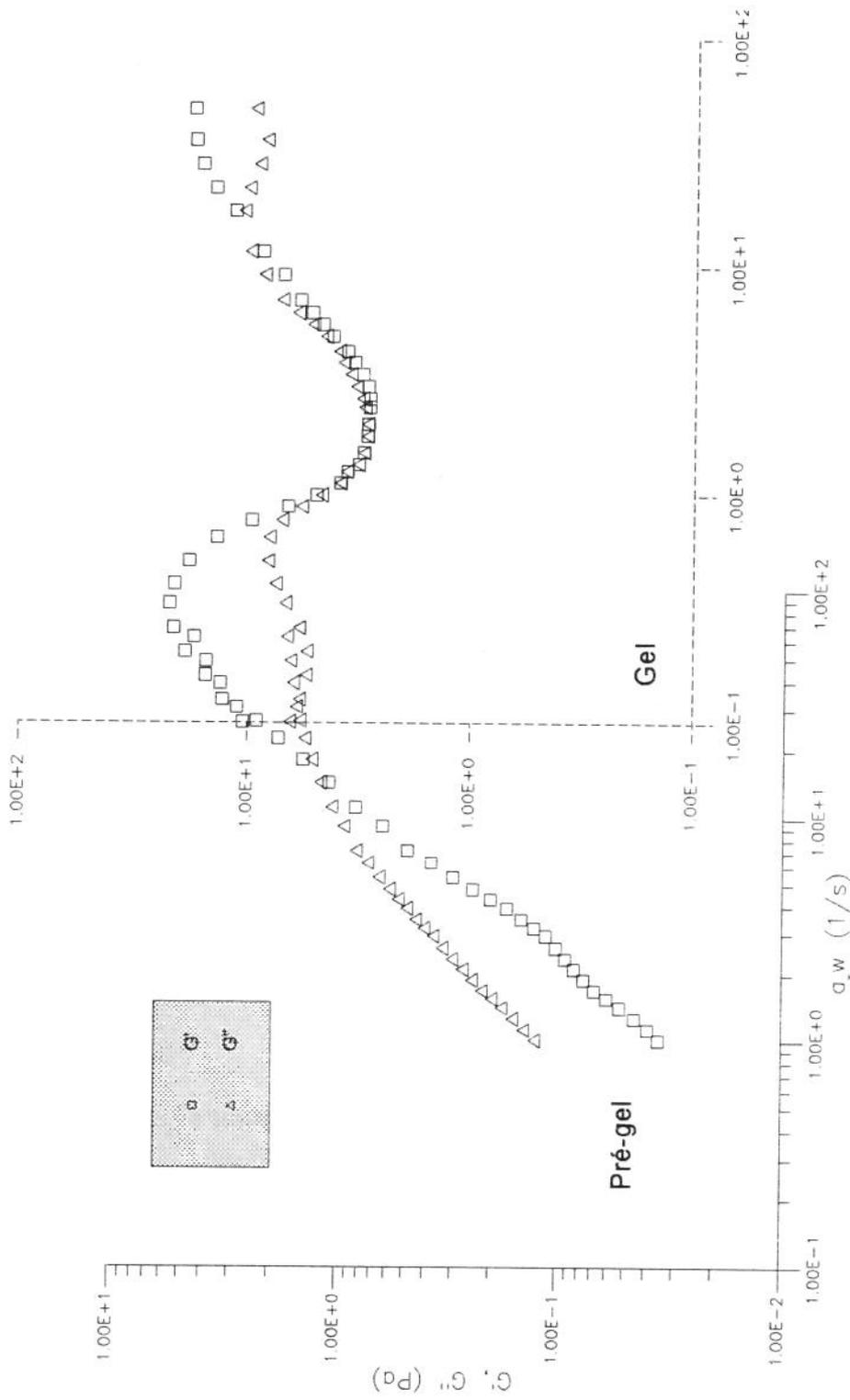


Fig. 36 Sistema 4: Componentes do módulo complexo - Gráfico composto.

5.3 Coeficientes de tensão normal

Conforme discutido no capítulo anterior, o efeito de relaxação observado no início dos testes da maioria dos experimentos efetuados se apresenta mais fortemente nas medições dos coeficientes de tensão normal. Dos sistemas estudados, somente o Sistema 2, principalmente na fase gel, forneceu dados em que tal efeito não comprometeu o perfil das curvas geradas, permitindo o processamento direto das medições efetuadas. Deste modo, foram concentrados neste sistema os esforços para o devido equacionamento dos coeficientes de tensão normal deste tipo de fluido. Tal equacionamento foi, posteriormente, estendido ao Sistema 4, escolhido por ter um conjunto mais completo de dados, que teve suas curvas reprocessadas com o objetivo de atenuar os efeitos dessa relaxação e permitir a comprovação dos resultados obtidos com o Sistema 2 e sua extrapolação para os demais sistemas.

O primeiro coeficiente de tensão normal (Ψ_1) tem perfil similar ao da viscosidade, com um patamar inicial, em gráfico log-log, que define seu valor inicial, $\Psi_{1,0}$, e uma região de potência, caracterizada por uma curva descendente neste tipo de gráfico, que pode ser aproximada por uma reta, a qual possui, em geral, declividade maior que a observada na curva de viscosidade. Aparentemente, o primeiro coeficiente não possui um patamar final definido, como o verificado na viscosidade.

O primeiro coeficiente de tensão normal pode ser obtido de correlações empíricas com os outros parâmetros reológicos^(19, 67, 251). Diversas correlações estão listadas na literatura, sendo que três metodologias, em especial, foram utilizadas neste trabalho: o teste de recuo forçado (*constrained recoil*), em que uma amostra submetida a uma taxa de cisalhamento constante tem, subitamente, tal taxa reduzida a zero, e que fornece uma estimativa para o valor inicial deste parâmetro; a regra de Laun, análoga à regra de Cox-Merz (Apêndice C), que relaciona este coeficiente a parâmetros de testes dinâmicos; e o método de Wagner, que

expressa este parâmetro em função da primeira derivada da curva de viscosidade obtida em regime permanente. Tais relações, nesta ordem, são expressas por:

$$\Psi_{1,0} = 2\eta_0^2 J_e$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2 \frac{\eta''(w)}{w} \left[1 + \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 \right]^{0.7} \Big|_{w=\dot{\gamma}}$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = -\frac{1}{c} \frac{d\eta(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}}$$

Para o segundo coeficiente de tensão normal não são encontradas, na literatura, correlações consideradas confiáveis, pois tal parâmetro não foi, ainda, tão extensivamente estudado em laboratório quanto o primeiro coeficiente e a viscosidade. Sabe-se que sua amplitude é menor que a do primeiro coeficiente (estima-se que este é, aproximadamente, 10% daquele), e que é negativo. Por muito tempo o mesmo foi considerado nulo, o que implica $\tau_{yy} = \tau_{zz}$, que é uma relação conhecida por *hipótese de Weissenberg*; porém sabe-se, atualmente, que esta não é correta. Dos experimentos disponíveis verifica-se que o segundo coeficiente possui uma região de potência bem definida, em geral com declividade maior que a observada no primeiro coeficiente, porém seus patamares inicial e final não são detectados facilmente devido à dificuldade de obtenção de dados destes parâmetros nas regiões de baixa e alta taxas de cisalhamento.

As figuras 5.20 e 5.21 mostram os resultados medidos para as diferenças de tensões normais e para seus coeficientes relativos ao Sistema 2, nas fases pré-gel e gel.

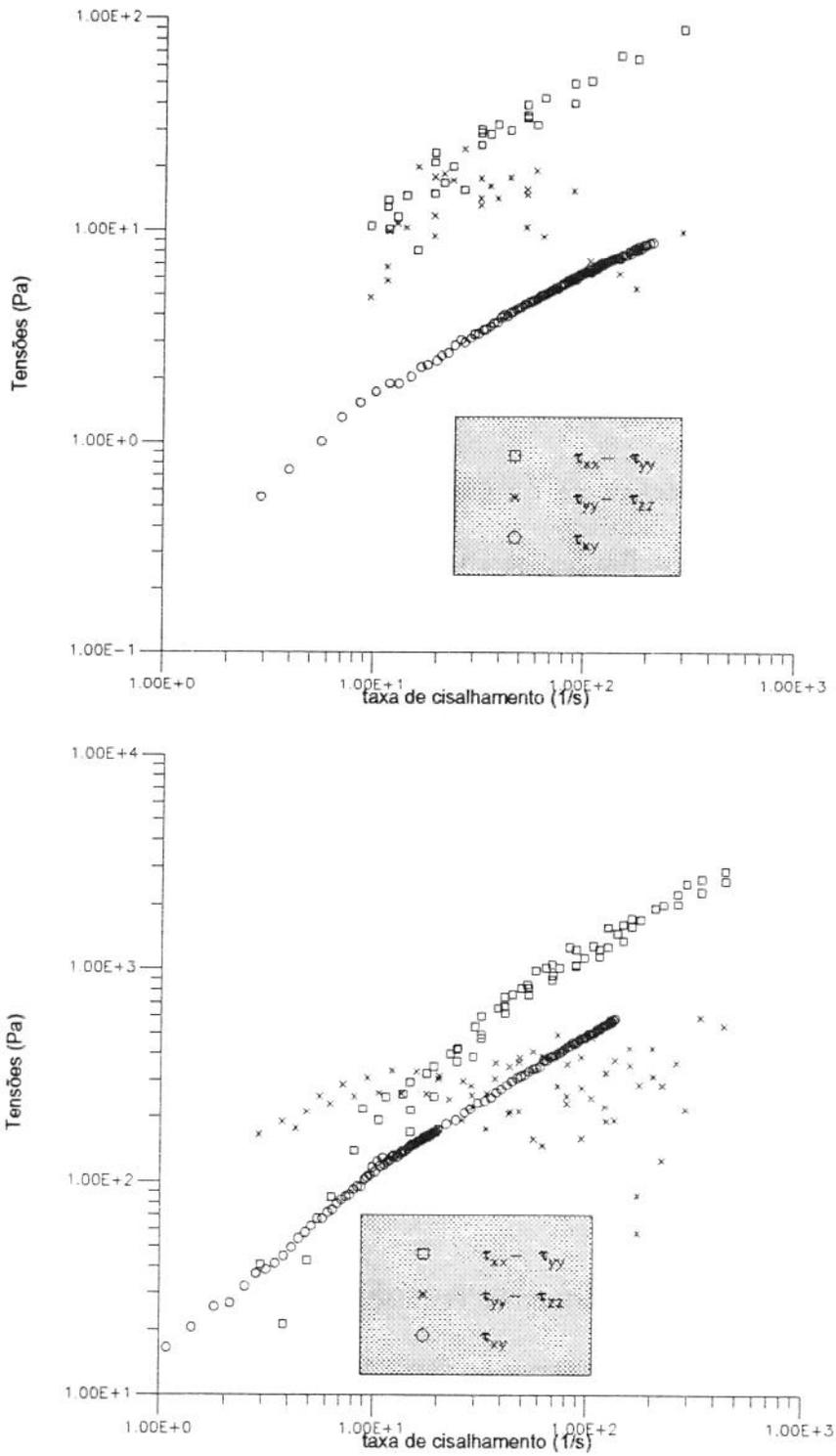


Fig. 37 - Sistema 2: Diferenças de tensões normais (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

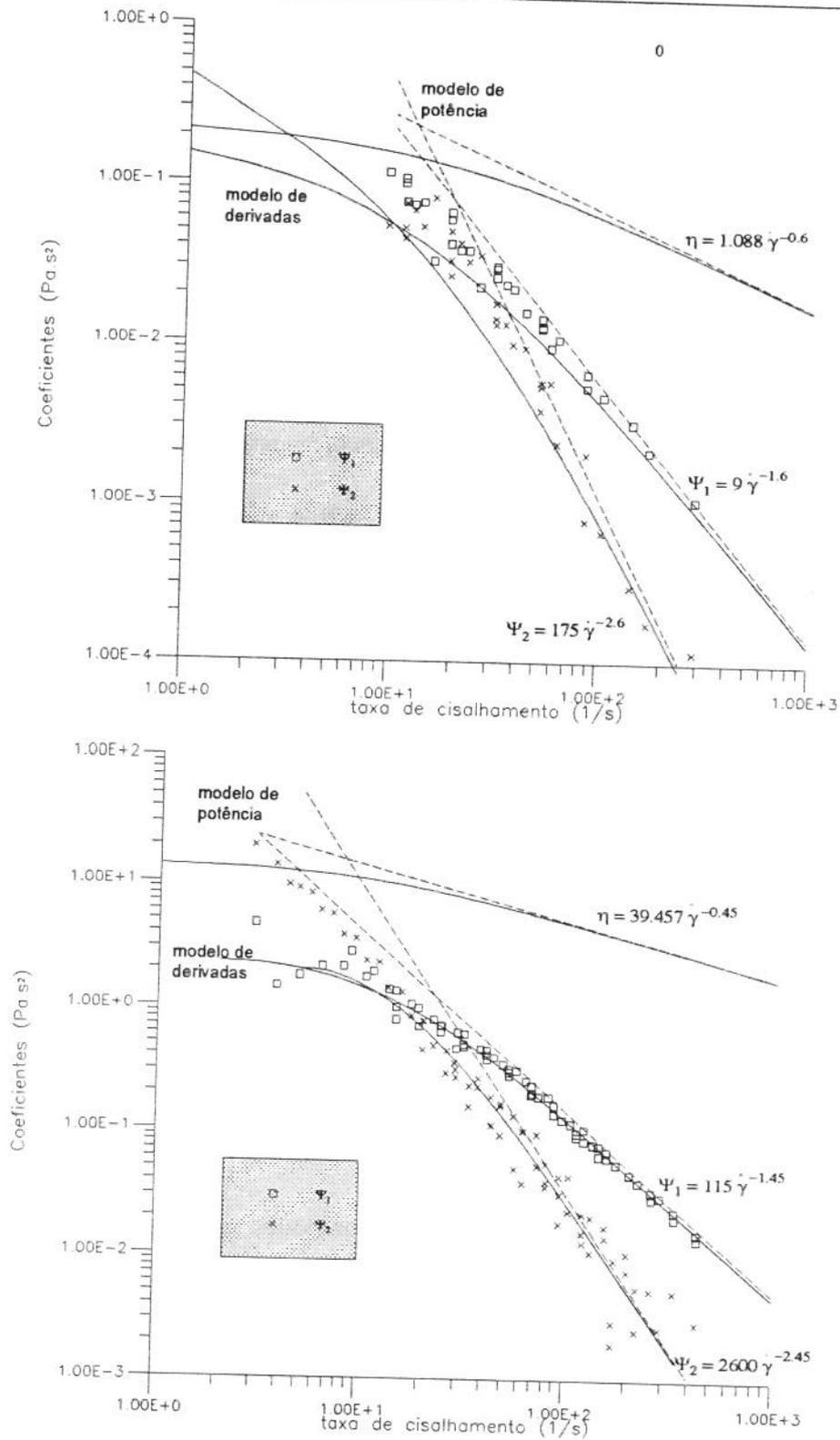


Fig. 38 - Sistema 2: Coeficientes de tensões normais (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

Foram incluídos nestes gráficos os dados de tensão cisalhante e viscosidade para efeito de comparação. Verifica-se nos gráficos de tensão a importância do estudo do efeito das tensões normais nestes fluidos: a primeira diferença de tensões assume valores bem superiores à tensão cisalhante e a segunda diferença se mantém aproximadamente em um patamar, com valores da ordem da tensão cisalhante. Nos gráficos dos coeficientes de tensão normal foram traçadas duas curvas empíricas, a primeira referente ao método proposto por Wagner, onde o primeiro coeficiente é considerado proporcional à primeira derivada da viscosidade, definida pelo modelo de Carreau-Yasuda, e a segunda, proposta neste trabalho, em que o segundo coeficiente é considerado proporcional à segunda derivada da viscosidade.

Tal proposição resulta da análise gráfica dos dados obtidos, onde verificou-se que a região de potência dos coeficientes apresentavam declividades, em gráficos conjuntos ou de testes individuais, que confirmavam esta regra. A partir do modelo de Carreau-Yasuda tem-se:

$$\eta_D = \frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty}; \quad \dot{\gamma}_D = \lambda \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \eta_D = (1 + \dot{\gamma}_D^a)^{\frac{n-1}{a}}$$

$$\frac{d\eta_D}{d\dot{\gamma}_D} = (n-1)\dot{\gamma}_D^{a-1}(1 + \dot{\gamma}_D^a)^{\frac{n-1-a}{a}} = \frac{n-1}{\dot{\gamma}_D} \frac{\dot{\gamma}_D^a}{1 + \dot{\gamma}_D^a} \eta_D$$

$$\frac{d^2\eta_D}{d\dot{\gamma}_D^2} = \frac{n-1}{\dot{\gamma}_D^2} \frac{(a-1)\dot{\gamma}_D^a + (n-2)\dot{\gamma}_D^{2a}}{(1 + \dot{\gamma}_D^a)^2} \eta_D = \frac{n-2}{\dot{\gamma}_D} \left(\frac{a-1}{n-2} + \frac{\dot{\gamma}_D^a}{1 + \dot{\gamma}_D^a} \right) \frac{d\eta_D}{d\dot{\gamma}_D}$$

Tomando-se $a = 2$ (modelo de Carreau), estas expressões são simplificadas para:

$$\eta_D = (1 + \dot{\gamma}_D^2)^{\frac{n-1}{2}}; \quad \frac{d\eta_D}{d\dot{\gamma}_D} = (n-1) \frac{\dot{\gamma}_D}{1 + \dot{\gamma}_D^2} \eta_D; \quad \frac{d^2\eta_D}{d\dot{\gamma}_D^2} = (n-1) \frac{1 + (n-2)\dot{\gamma}_D^2}{(1 + \dot{\gamma}_D^2)^2} \eta_D$$

Para $a = 1$, presente na solução polimérica, na maioria dos pré-géis, e podendo ser tomado como o valor mais significativo para este parâmetro nos fluidos analisados, tem-se

$$\eta_D = (1 + \dot{\gamma}_D)^{n-1}; \quad \frac{d\eta_D}{d\dot{\gamma}_D} = \frac{n-1}{1 + \dot{\gamma}_D} \eta_D; \quad \frac{d^2\eta_D}{d\dot{\gamma}_D^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{(1 + \dot{\gamma}_D)^2} \eta_D$$

Para o modelo de potência a simplificação é mais significativa:

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}; \quad \frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} = (n-1)K\dot{\gamma}^{n-2}; \quad \frac{d^2\eta}{d\dot{\gamma}^2} = (n-1)(n-2)K\dot{\gamma}^{n-3}$$

Das definições e das considerações anteriores, para o modelo de potência:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yx} = -\eta\dot{\gamma}_{yx} = K\dot{\gamma}^{n-1} \\ N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1\dot{\gamma}_{yx}^2; \\ N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2\dot{\gamma}_{yx}^2 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = K_1\dot{\gamma}^{n'-2} = -\frac{1}{c}\frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} \\ \Psi_2 = K_2\dot{\gamma}^{n''-2} = -\frac{1}{d}\frac{d^2\eta}{d\dot{\gamma}^2} \end{array} \right.$$

Destas equações obtêm-se

$$n = n' = n'' + 1; \quad c = \frac{K}{K_1}(1-n); \quad d = \frac{K}{K_2}(1-n)(2-n) = c\frac{K_1}{K_2}(2-n)$$

Os valores de K_1 e K_2 estimados através da análise de comportamento assintótico, para taxas de cisalhamento elevadas, das expressões completas deduzidas para os coeficientes de tensão normal fornecem os mesmos resultados acima. Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \eta_0\lambda^{n-1} \\ K_1 = -\frac{n-1}{c}\eta_0\lambda^{n-2} = -\frac{n-1}{c}\frac{K}{\lambda} \\ K_2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{d}\eta_0\lambda^{n-3} = -\frac{(n-1)(n-2)}{d}\frac{K}{\lambda^2} \end{array} \right.$$

Tal resultado unifica a teoria utilizada e mostra que, caso se expresse a lei de potência ou a equação de Carreau-Yasuda em uma forma adimensional conveniente, as mesmas podem ser compactadas e generalizadas em uma formulação única que pode ser estendida para outros modelos empíricos:

$$\eta_D = \frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty}; \quad \dot{\gamma}_D = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda\dot{\gamma} & \text{(modelo de potência)} \\ [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{1/a} & \text{(Carreau-Yasuda)} \end{array} \right. \Rightarrow \eta_D = \dot{\gamma}_D^{n-1}$$

A partir das relações encontradas é possível a obtenção de expressões simplificadas para os gradientes de pressão formulados no capítulo anterior. Desta forma,

$$\nabla P_0 = \frac{2K}{w_0} \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{hw_0^2} \right)^n$$

$$\nabla p_N = \frac{n''}{n} \frac{2K_2}{w_0} \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{hw_0^2} \right)^{n''} = -\frac{n-1}{n} \frac{(n-1)(n-2)\lambda^2}{d} \frac{2K}{w_0} \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{hw_0^2} \right)^{(n-1)}$$

$$\nabla p_N = -\nabla p_0 \frac{\lambda^2(n-1)^2(n-2)}{d(2n+1)} \frac{2hw_0^2}{q_0}$$

$$\nabla p_F = \nabla p_0 + \nabla p_N = \nabla p_0 \left[1 + \frac{\lambda^2(1-n)^2(2-n)}{d(2n+1)} \frac{2hw_0^2}{q_0} \right]$$

As curvas 5.22 e 5.23 mostram os resultados conseguidos pelo re-processamento, conforme o capítulo anterior, para os dados do Sistema 4. O segundo coeficiente de tensão normal é negativo, conforme mencionado na literatura, e está apresentado em módulo nas curvas.

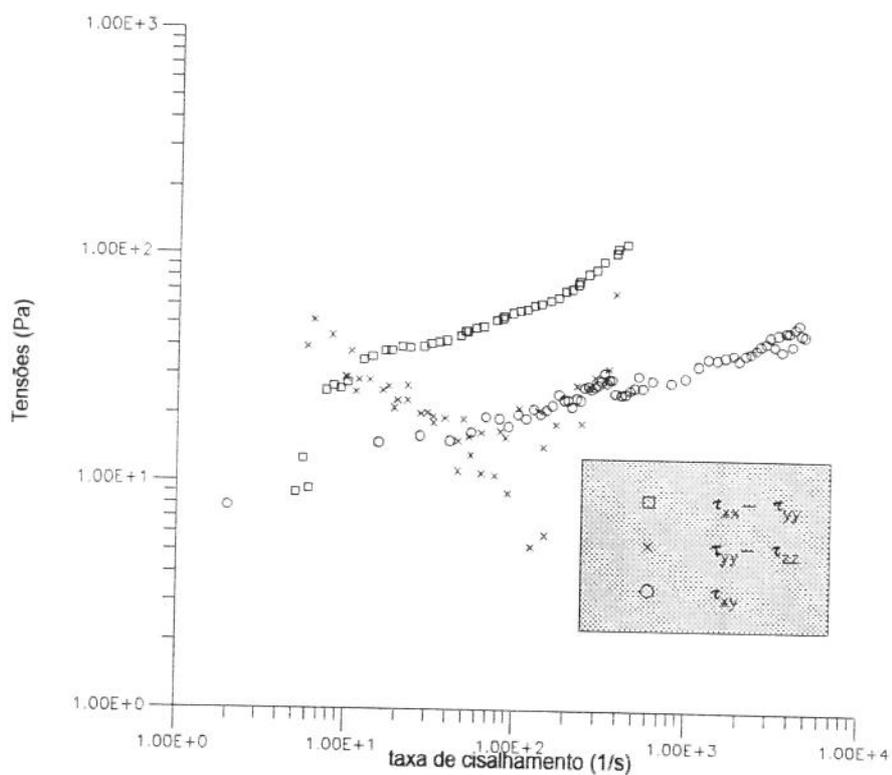
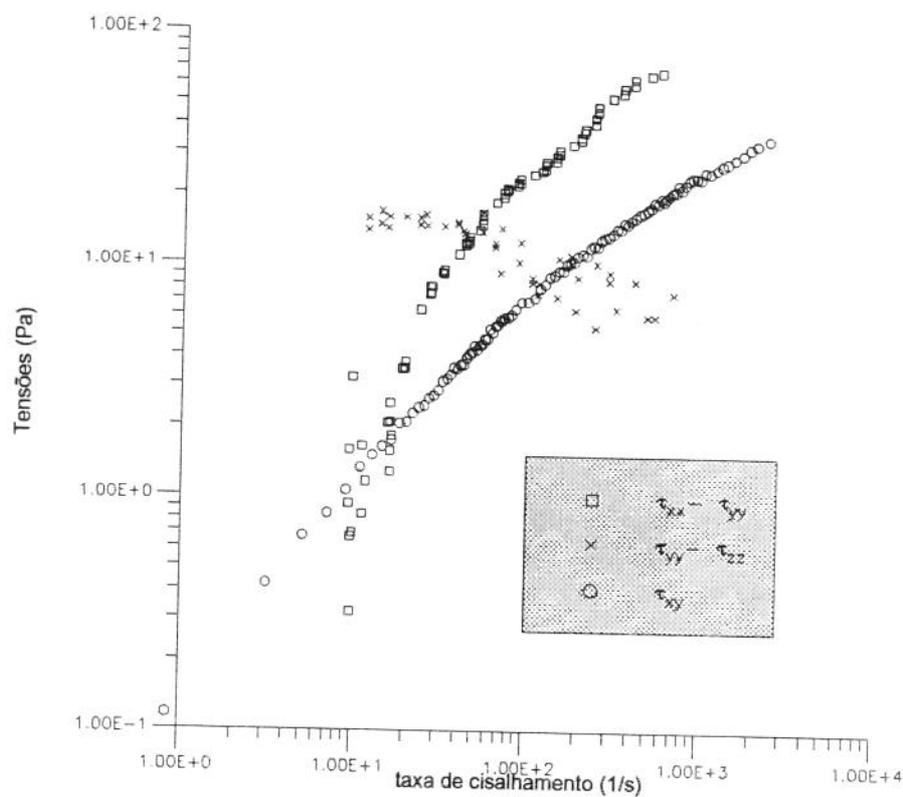


Fig. 39 - Sistema 4: Diferenças de tensões normais (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

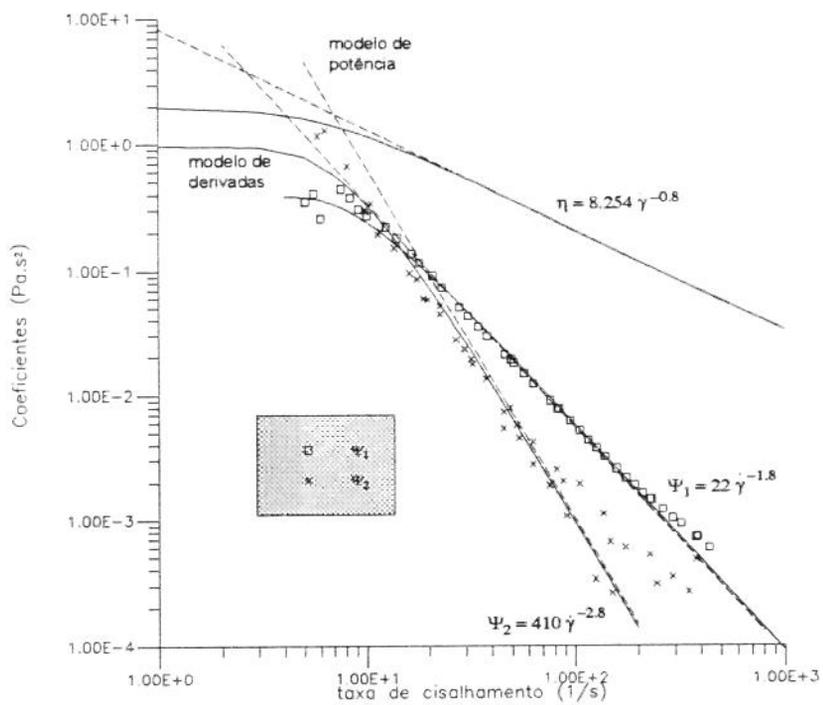
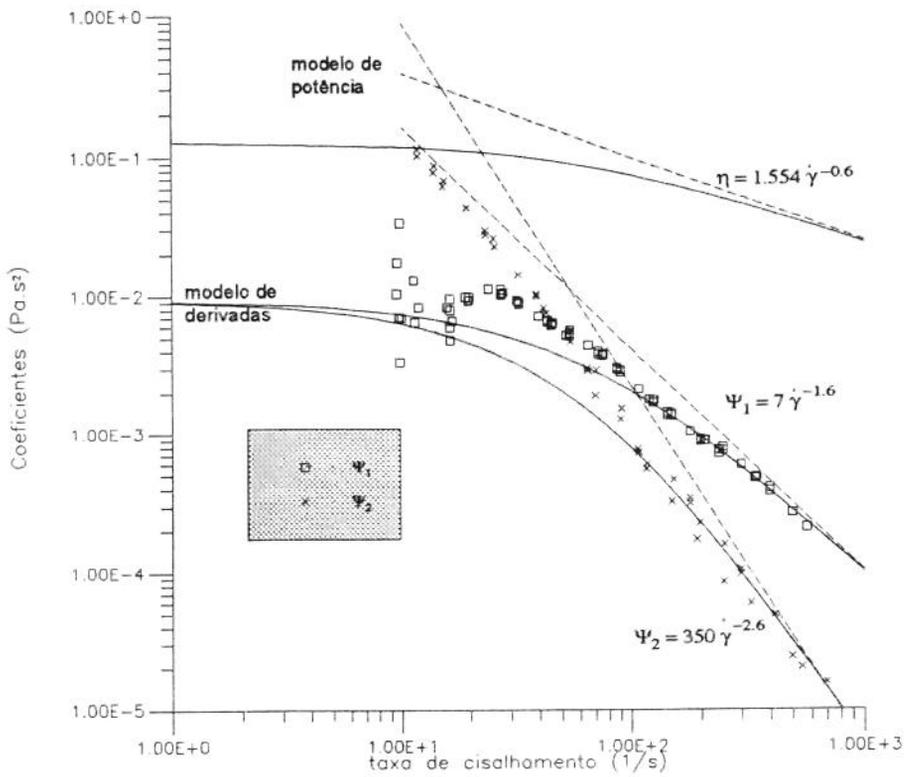


Fig. 40 - Sistema 4: Coeficientes de tensões normais (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

Uma característica visível nas curvas teóricas presentes nos gráficos dos coeficientes de tensão normal é que os valores iniciais do primeiro e segundo coeficientes, $\Psi_{1,0}$ e $\Psi_{2,0}$, tendem a valores próximos, e que as maiores discrepâncias entre os valores medidos e os teóricos, conforme citado na literatura, também ocorre na região em que estes valores iniciais são definidos, ou seja, na faixa inicial de taxas de cisalhamento. Devido a este fato, o modelo empírico mais recomendado para utilização em aplicações é o de potência, por ser o mais simples e bastante representativo na região de potência, onde os valores teóricos e medidos não apresentam desvios significativos, exceto no caso do pré-gel do Sistema 4. Nota-se inclusive, principalmente nas curvas do segundo coeficiente, que a lei de potência representa melhor a tendência dos pontos obtidos na faixa de baixas taxas de cisalhamento.

A expressão para o valor inicial do primeiro coeficiente de tensão normal extraída do teste de recuo forçado não foi utilizada, pois o valor de J_c^0 não pôde ser extraído da curva de $J'(w)$ de forma confiável. A lei de Laun não apresentou boa correlação com os primeiros coeficientes de tensão normal, contrariamente ao que foi verificado com a lei de Cox-Merz em relação à viscosidade. Como o modelo de Wagner mostrou-se representativo para estes coeficientes, a expressão que se apresenta como a mais recomendável para a relação entre este coeficiente e os parâmetros dinâmicos resulta da combinação destes dois empirismo, ou seja,

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dw} \eta^*(w) \Big|_{w=\dot{\gamma}}$$

onde o valor da constante c deve ser estimada a partir de dados experimentais. De maneira similar, o segundo coeficiente de tensão normal, para estes fluidos, pode ser aproximado por:

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = -\frac{1}{d} \frac{d^2}{dw^2} \eta^*(w) \Big|_{w=\dot{\gamma}}$$

A tabela 4 resume os dados medidos nos experimentos de tensão normal efetuados:

	Sistema 2		Sistema 4	
	pré-gel	gel	pré-gel	gel
viscosidade	$\eta = 1,088 \dot{\gamma}^{-0,6}$	$\eta = 39,457 \dot{\gamma}^{-0,45}$	$\eta = 1,554 \dot{\gamma}^{-0,6}$	$\eta = 8,254 \dot{\gamma}^{-0,8}$
primeiro coeficiente	$\Psi_1 = 9 \dot{\gamma}^{-1,6}$	$\Psi_1 = 115 \dot{\gamma}^{-1,45}$	$\Psi_1 = 7 \dot{\gamma}^{-1,6}$	$\Psi_1 = 22 \dot{\gamma}^{-1,8}$
segundo coeficiente	$\Psi_2 = -175 \dot{\gamma}^{-2,6}$	$\Psi_2 = -2600 \dot{\gamma}^{-2,45}$	$\Psi_2 = -350 \dot{\gamma}^{-2,6}$	$\Psi_2 = -410 \dot{\gamma}^{-2,8}$
c	0,0725	0,1544	0,1332	0,3
d	0,0097	0,0099	0,004262	0,029
c / λ	0,967	1,544	8,325	1,765
d / λ^2	1,061	0,99	16,65	1,003

Tab. 4 - Dados relativos aos experimentos de tensão normal.

Os valores contidos nas duas últimas linhas da tabela resultam de uma observação prática efetuada durante a análise dos dados do Sistema 2, que foi examinado inicialmente devido à consistência de seus dados. Verificou-se que os valores dos parâmetros c e d se aproximavam dos valores de λ e λ^2 respectivamente. Quando foram examinados os dados do Sistema 4, os valores destas constantes para o gel seguiram a mesma tendência, porém o mesmo não foi confirmado para o pré-gel. Porém, conforme citado anteriormente, o pré-gel do Sistema 2 apresenta uma evidente gelificação, comum aos sistemas reticulados por boratos, o que não ocorre com o pré-gel do Sistema 4, que apresenta um comportamento neutro, similar ao da solução polimérica. Tais observações levam à hipótese de que tais aproximações podem ser adequadas aos sistemas baseados no HPG que apresentam gelificação, o que depende de uma confirmação posterior, através da análise de uma maior quantidade de informações.

Para efeito de aproximação, para estes géis podem ser considerados os valores:

$$\begin{cases} c \approx \lambda \\ d \approx \lambda^2 \end{cases}$$

5.4 Evolução dos parâmetros reológicos com a temperatura e a concentração.

Nesta seção serão desenvolvidas tabelas e relações que permitam estender a validade dos parâmetros reológicos para condições diferentes das condições normais de operação. Conforme mostrado anteriormente, os gráficos de parâmetros obtidos são compostos pelo deslocamento dos dados experimentais através de fatores calculados a partir da teoria molecular para soluções poliméricas diluídas. Nesta teoria, os módulos intrínsecos são reduzidos teoricamente pelo fator $\frac{cRT}{M}$, e esta é a base para a obtenção dos demais fatores envolvidos.

A redução dos módulos e das conformações é feita pelo fator $f_R = \frac{c_0 T_0}{cT}$. A redução da abscissa (taxa de cisalhamento ou frequência) é feita através do parâmetro a_T , que é função do tempo de relaxação específico do material, e que pode ser escrita a partir do fator acima multiplicando-o pela razão entre a viscosidade inicial nas condições experimentais e nas condições de operação. Na prática, utilizou-se, para a abscissa, o mesmo fator da ordenada acrescido de um deslocamento horizontal, que substituiu a razão entre as viscosidades iniciais, pois o aumento da complexidade estrutural do fluido provocado por sua (pré-)gelificação introduz modificações neste relacionamento, além da compensação necessária para a correção de imprecisões de leitura e dosagem durante os experimentos.

Uma característica muito importante apresentada por estes fluidos é conhecida por memória, que traduz a influência do tempo de exposição a que são submetidos, e que será detalhada na próxima seção. Resumidamente, o efeito de memória atenua os parâmetros reológicos e implica um deslocamento adicional de suas curvas para a obtenção das curvas conjuntas. O parâmetro que melhor reflete este efeito é a constante de tempo λ presente no modelo de Carreau: quanto menor seu valor, menor a memória do fluido. Um fluido newtoniano possui λ nulo e, portanto, não tem memória[†]. Os dois fluidos com menor

constante de tempo estudados são a solução polimérica e o pré-gel do Sistema 4 que, praticamente, se comportam da mesma forma. Em tais fluidos, este efeito pode ser desprezado na obtenção de relações válidas que caracterizem a influência da temperatura e concentração nos parâmetros reológicos, e, posteriormente, extrapolados aos demais fluidos analisados.

A tabela 5 apresenta os fatores utilizados para correção de temperatura e concentração nos testes dinâmicos da solução polimérica.

Temperatura (°C)	20		30		40		50	
Concentração (g/l)	a_T	a_c	a_T	a_c	a_T	a_c	a_T	a_c
2,4	2	16	1,93	15,47	1,69	14,98	1,45	14,51
3,6	1,33	3,2	1,1	3,22	0,94	3	0,85	2,9
4,8	1	1	0,87	0,97	0,75	0,94	0,64	0,91
6	0,8	0,44	0,7	0,43	0,6	0,41	0,51	0,33

Tab. 5 - Fatores de redução para a solução polimérica.

O parâmetro a_c , na tabela, é proporcional ao fator f_R anteriormente definido. Graficamente, tais fatores podem ser visualizados nas figuras 41 *a* e *b*.

† Para λ nulo o modelo de Carreau se reduz a $\eta = \eta_0$

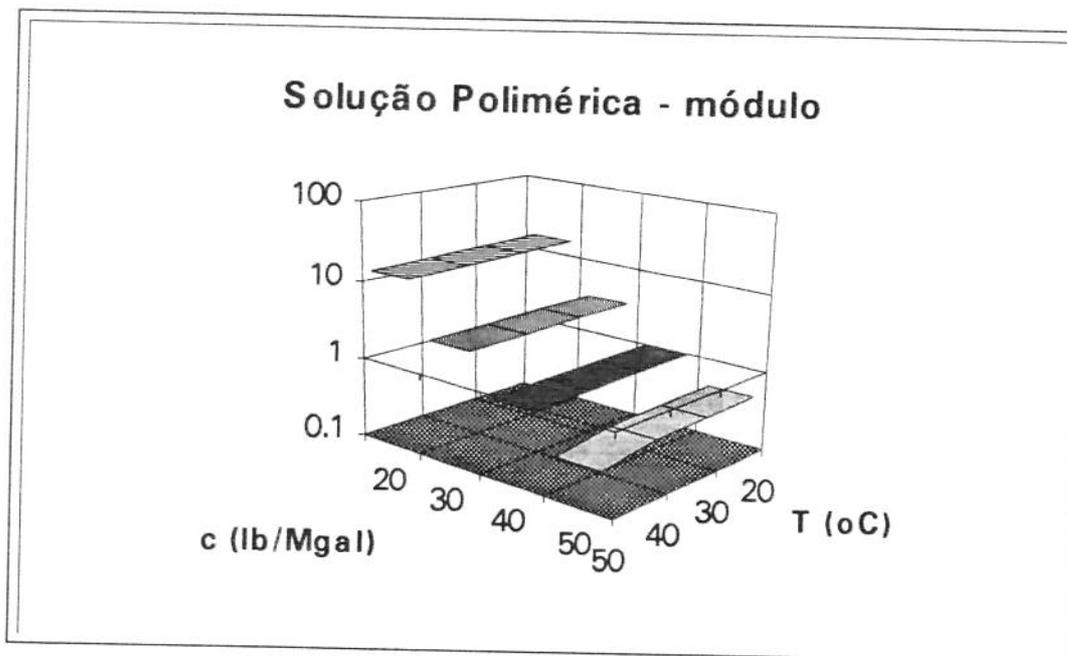
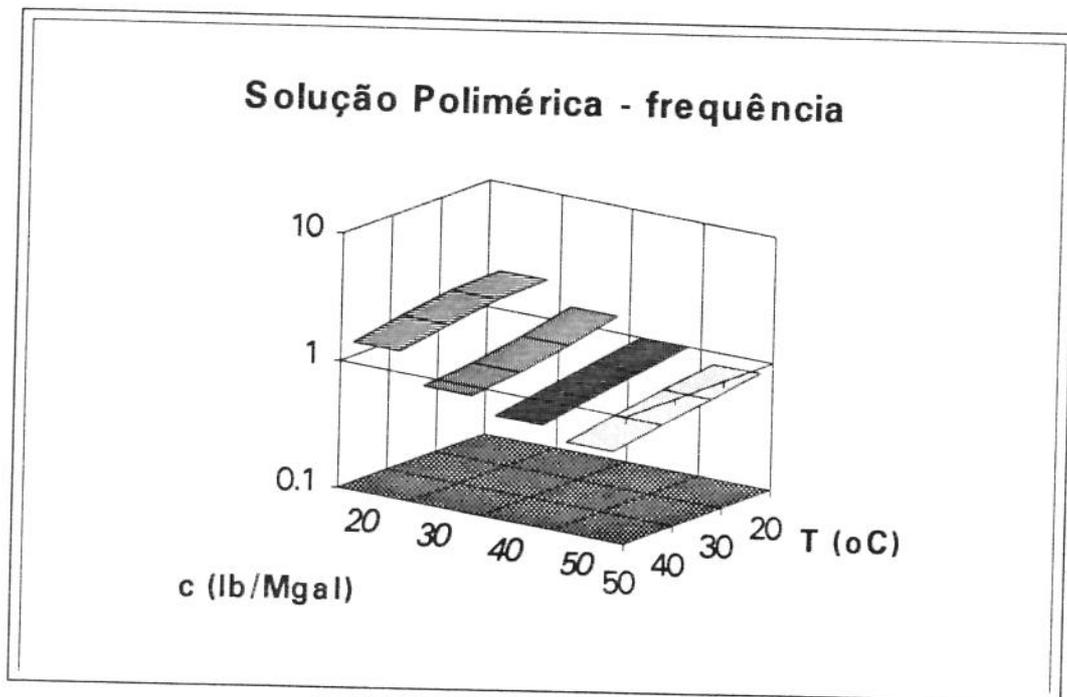


Fig 41 Fatores de correção para (a) a frequência e (b) o módulo complexo.

Verifica-se, a partir dos dados tabulados, que os parâmetros a_T e a_c podem ser escritos em função de f_R como:

$$f_R = \frac{c_0 T_0}{c T} \Rightarrow \begin{cases} a_T = f_R \left(1 - \frac{T - T_0}{100}\right) \\ a_c = f_R \left(\frac{c_0}{c}\right)^3 \end{cases}$$

Portanto, a correção dos módulos e das conformações é feita multiplicando-se a ordenada pelo fator f_R e a abscissa pelo parâmetro a_T , pois, em geral, parte-se de uma determinada formulação de fluido e deseja-se estudar seu comportamento com a variação de temperatura. Caso se conheça somente os dados do fluido em concentração diferente da utilizada, o parâmetro a_c pode ser utilizado para a transformação, que, neste caso, é isotérmica. Caso se necessite utilizar os dois parâmetros ao mesmo tempo, os mesmos devem ser multiplicados porém deverá ser usado somente um fator de redução pois ele já engloba as duas variáveis em transformação. Neste caso tem-se, de forma generalizada,

$$a_G = a_T a_c = f_R \left(1 - \frac{T - T_0}{100}\right) \left(\frac{c_0}{c}\right)^3$$

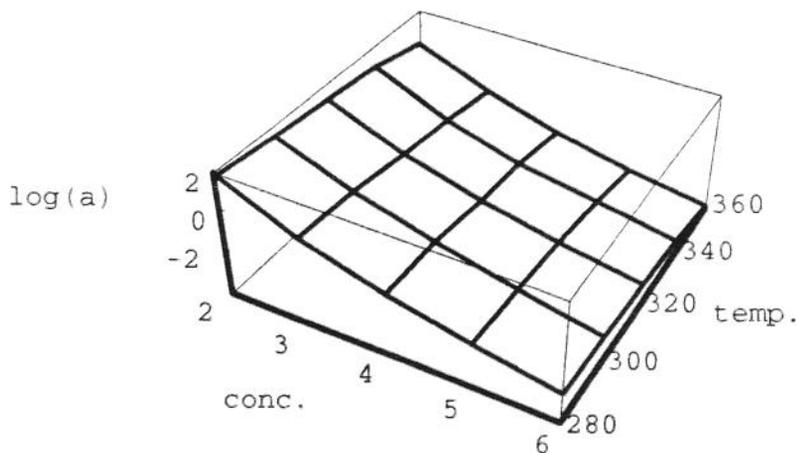


Fig. 42 Comportamento de a_G em relação à concentração e temperatura.

A figura 42 mostra o gráfico tri-dimensional do parâmetro a_G em função da concentração e da temperatura. A relação conseguida é importante para os fluidos estudados por permitir a estimativa de seu comportamento a partir de dados conhecidos em uma outra condição de concentração e temperatura.

Para a viscosidade, a correção da ordenada é diferente pois, por definição, a viscosidade resulta da razão entre o módulo e a frequência (no caso de medidas dinâmicas. Para regime permanente, a abscissa é a taxa de cisalhamento e tal conceito pode ser estendido, conforme mostrado na literatura.), implicando que a viscosidade corrigida resulte

$$\eta_{corr.} = \eta \frac{f_R}{a_G} = \frac{\eta}{\left(1 - \frac{T-T_0}{100}\right) \left(\frac{c_0}{c}\right)^3} = \frac{100 c^3}{(100+T_0-T) c_0^3}$$

Se a viscosidade for expressa segundo o modelo de Carreau-Yasuta, a correção pode ser feita diretamente em seus parâmetros dividindo-se a viscosidade inicial (η_0) pelo fator acima, pois, em geral, a viscosidade final é a viscosidade do solvente, não necessitando, neste caso, de correção, e multiplicando-se sua constante de tempo (λ) por a_G , que será sua nova constante de tempo.

Conseqüentemente, a viscosidade segundo o modelo de potência será dada por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K_{corr.} \dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{onde} \quad K_{corr.} = \eta_0 \frac{a_G}{f_R} (a_G \lambda)^{n-1} = \frac{a_G^n}{f_R} K$$

Tais relações empíricas são válidas para a solução polimérica estudada, dentro das faixas de concentração e temperatura especificadas na tabela. Neste trabalho, serão utilizadas para as demais fases dos sistemas estudados devido à complexidade introduzida pelo efeito de memória em seus comportamentos reológicos.

Sobre o efeito da temperatura sobre a reologia destes fluidos, foram levantadas, experimentalmente, as curvas de viscosidade em relação a esta variável para cada fase de

cada sistema estudado, através do viscosímetro ou, preferencialmente, do reogoniômetro, a depender da intensidade do efeito de *rod-climbing* observado.

As figuras 43 a 45 mostram algumas das curvas levantadas para o comportamento da viscosidade em relação à temperatura. Nos testes efetuados para este fim, a amostra foi submetida a uma taxa de cisalhamento constante e a temperatura foi continuamente variada a uma taxa média de 1 °C/min. Os dados obtidos são transientes em relação à temperatura e as taxas de cisalhamento empregadas variaram de caso para caso, a depender do comportamento da amostra em cada teste. Portanto tais curvas só têm valor para efeito de análise qualitativa.

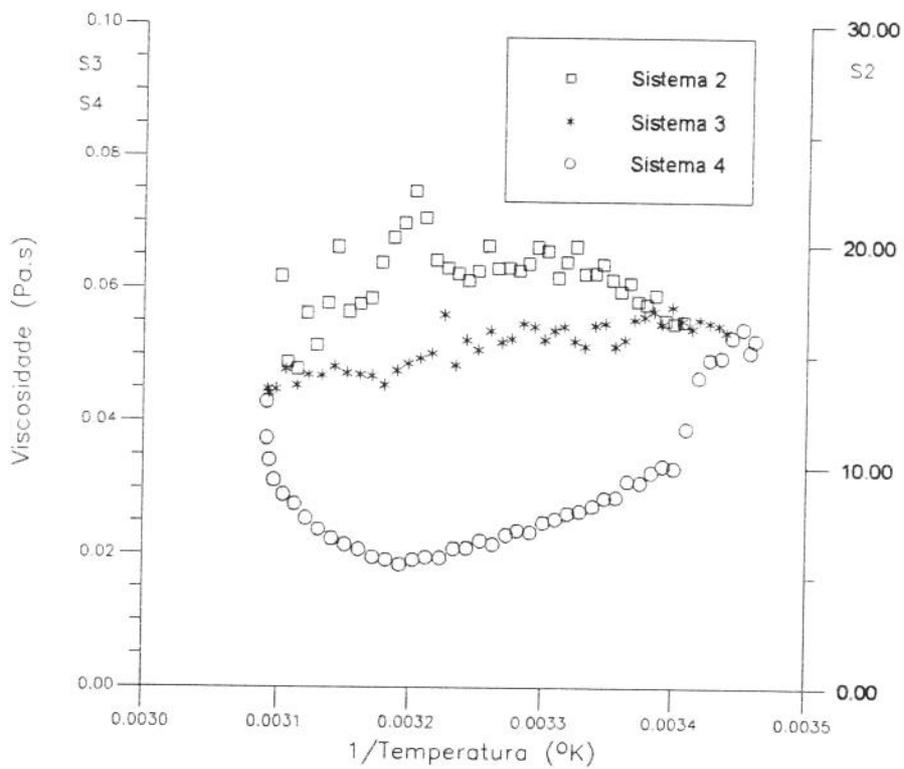
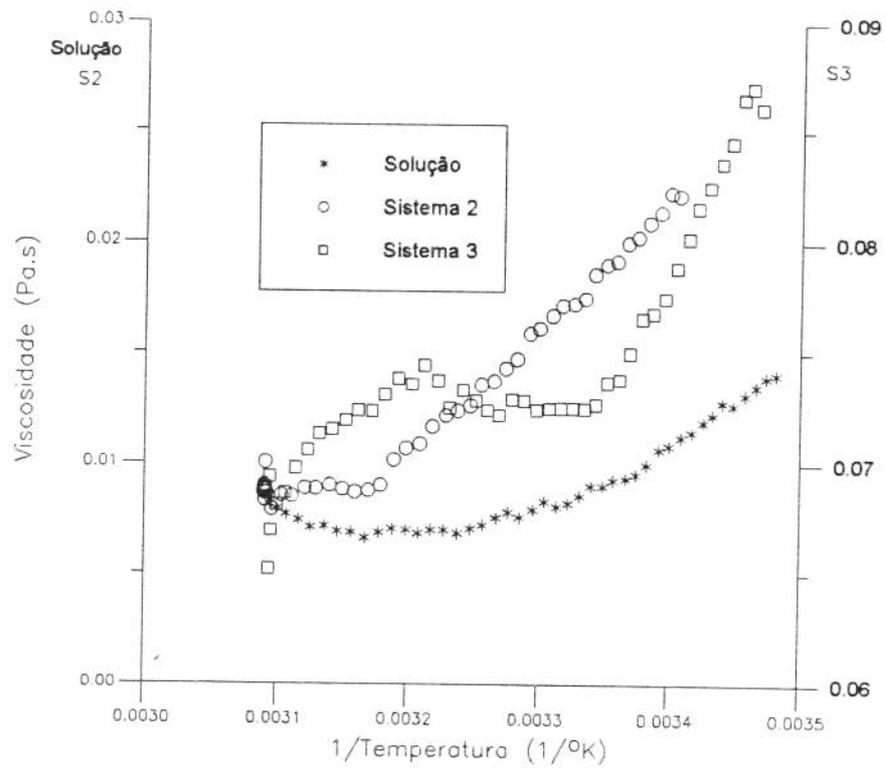


Fig. 43 Viscosidade versus temperatura, $c = 2,4 \text{ g/l}$: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

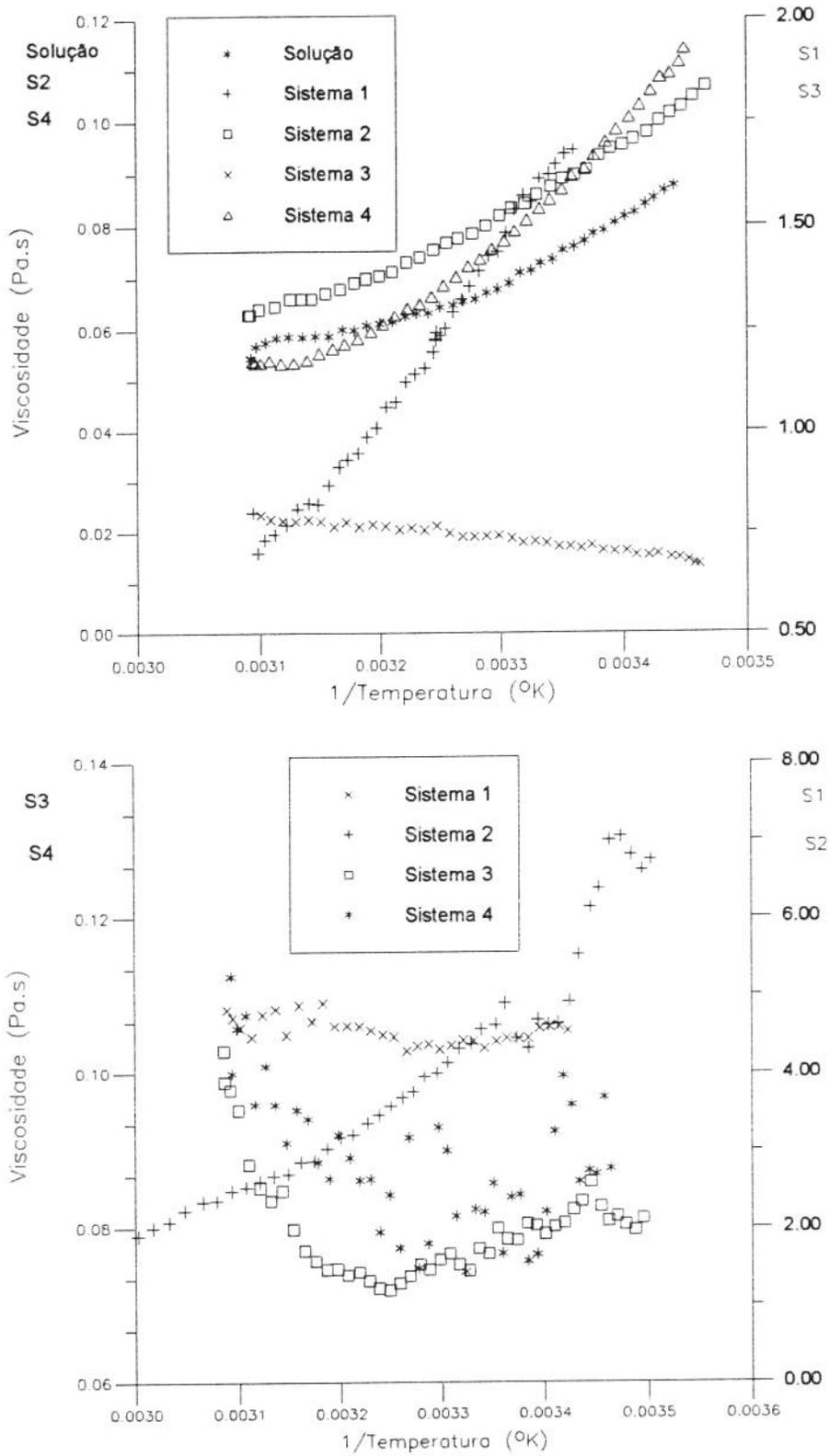


Fig. 44 Viscosidade versus temperatura, $c = 4,8 \text{ g/l}$: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

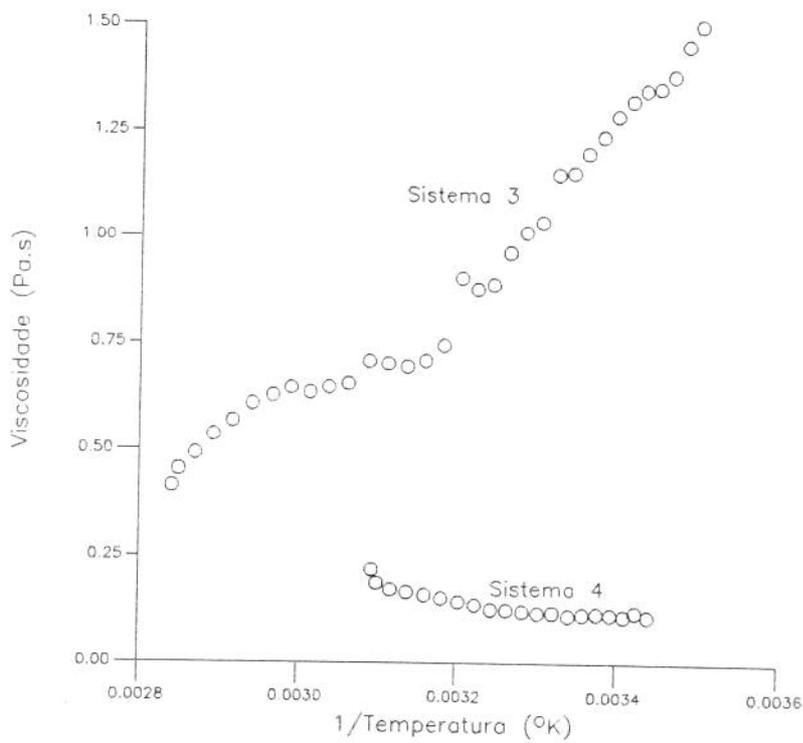
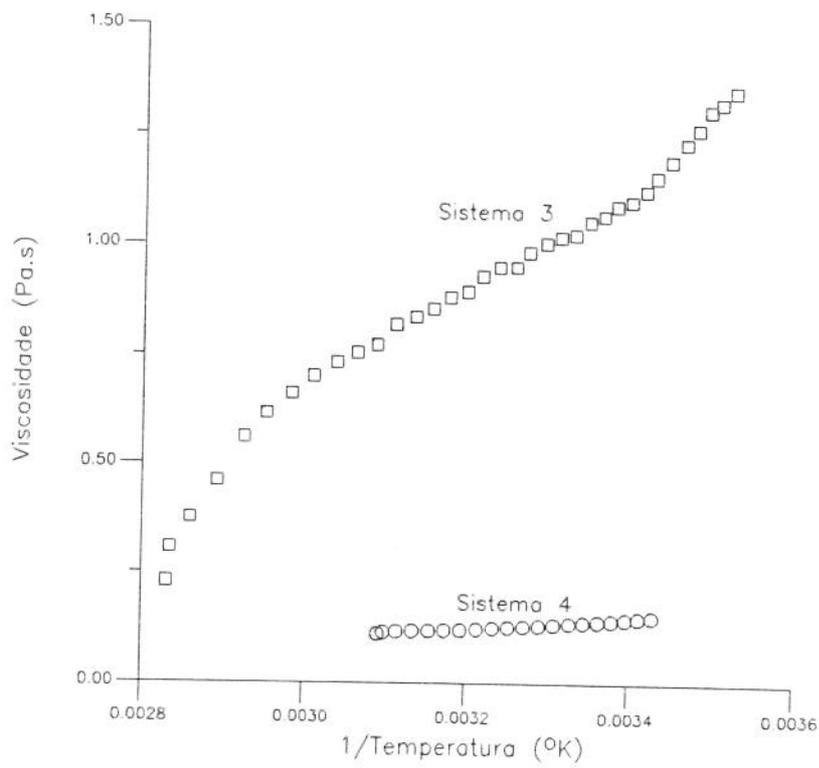


Fig. 45 Viscosidade versus temperatura, $c = 6,0 \text{ g/l}$: (acima) pré-gel, (abaixo) gel.

Estes gráficos mostram o comportamento da viscosidade em relação ao inverso da temperatura (em unidade absoluta), que deve apresentar uma tendência linear segundo proposto por Arrhenius. Tal linearidade pode ser aceita com restrições, conforme observado nas curvas. Alguns pontos podem ser destacados:

- ✓ Os géis à base de borato (sistemas 1 e 2) apresentam viscosidade superior aos demais, com boa estabilidade térmica na faixa de temperaturas testada. O gel do Sistema 1, na concentração de 4,8 g/l, foi testado em um ciclo completo de temperatura (subida e descida) e apresentou o efeito de histerese, com sinais de desestruturação observados nos intervalos onde sua curva apresenta descontinuidade.
- ✓ O Sistema 3 apresenta, em geral, comportamento atípico, possivelmente justificado por tratar-se de um sistema híbrido. Seu pré-gel apresenta alta viscosidade, como o Sistema 1, com comportamento inverso ao esperado em relação ao inverso da temperatura; seu gel mostra degradação térmica acentuada acima de 50°C.
- ✓ O gel do Sistema 4, reticulado por titanato, apresenta boa estabilidade térmica. A elevação de viscosidade com o aumento da temperatura, observada principalmente na concentração de 6 g/l, foi verificada em diversos testes com os fluidos testados. Aparentemente tal comportamento é similar ao apresentado por soluções de amido, outro polissacarídeo, que apresenta aumento de viscosidade com aquecimento.

5.5 Evolução dos parâmetros reológicos com o tempo.

Os fluidos poliméricos apresentam memória, ou seja, seu estado de tensões, em determinado instante de tempo, é determinado pelas condições mecânicas e termodinâmicas a que está submetido e pelos seus estados anteriores de tensões. Portanto, a determinação de seu estado atual de tensões depende do conhecimento de seu histórico de tensões. Esta condição física é expressa, matematicamente, pela convolução, e, para os fluidos, é definida pela *equação de Boltzmann*

$$\tau = -\int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{\gamma}(t')dt' = \int_{-\infty}^t M(t-t')\gamma(t,t')dt'; \quad M(t-t') = \frac{\partial}{\partial t'}G(t-t')$$

onde $G(t-t')$ é o módulo de relaxação e $M(t-t')$ é chamada de função memória. Tal modelo é também chamado de *princípio de superposição de Boltzmann* (Apêndice D).

Tal memória, ou relaxação, em fluidos pode ser claramente notada na figura abaixo:

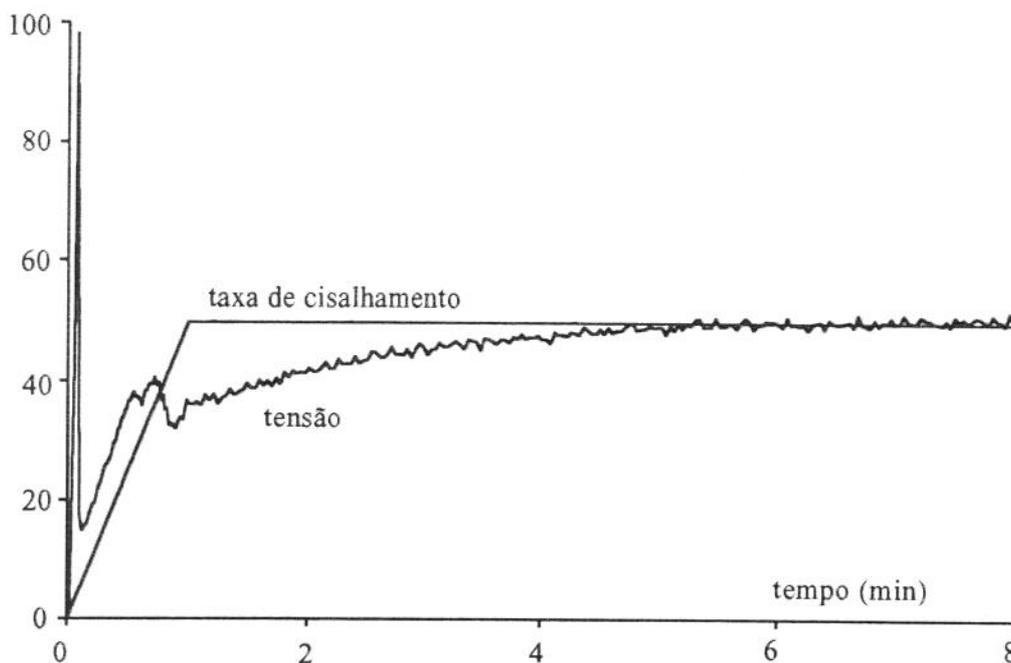


Fig. 46 Efeito de memória no gel do Sistema 3

Esta figura é bastante representativa do comportamento dos sistemas gelificados em estudo. Observe-se que o gel, inicialmente, se comporta como um sólido, onde uma pequena

deformação gera uma resposta em tensão muito elevada, atingindo perto de 100 Pa, quando ocorre uma espécie de fratura ou ruptura estrutural seguida de rápida relaxação, e, a seguir o fluido entra em fluxo, acompanhando a variação da taxa de cisalhamento, que está programada para uma rampa de 0 a 50/s em 1 min. Podem ser observados, ainda neste estágio, dois outros ajustes estruturais no fluido. No próximo estágio, a taxa de cisalhamento é mantida constante, 50/s, e a tensão segue num reajustamento ascendente, partindo de 35 Pa até atingir a estabilização no patamar de 50 Pa.

Outro aspecto interessante neste gráfico é sua similaridade com as cartas de pressão - vazão gravadas em operações de fraturamento hidráulico.

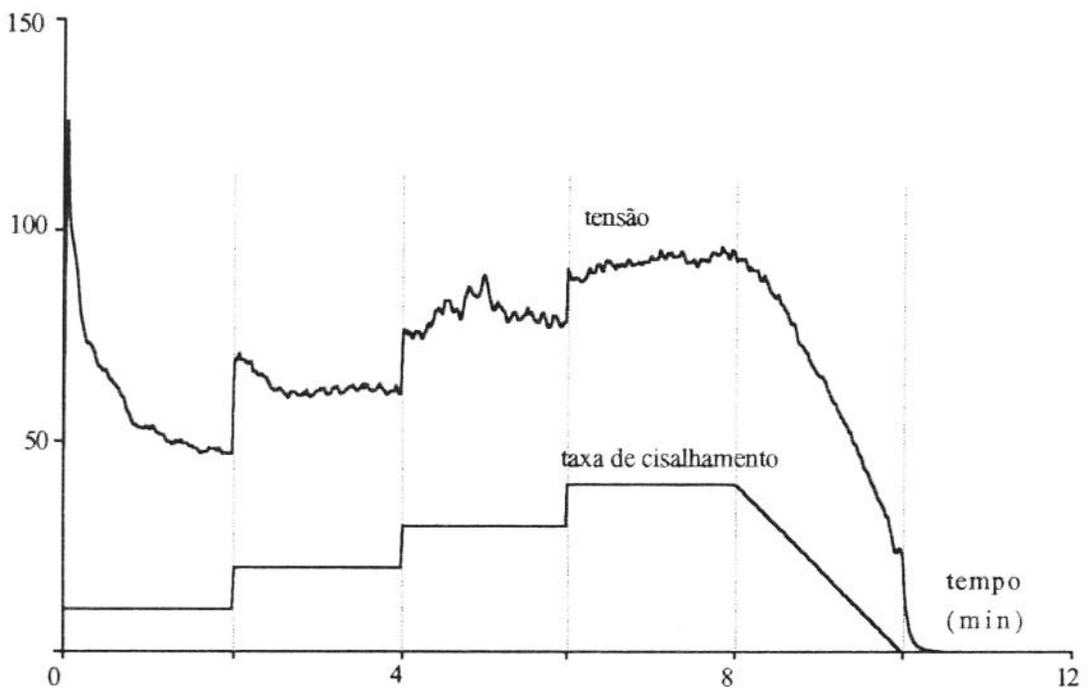


Fig. 47 Efeito de relaxação no gel do Sistema 1

O efeito de relaxação está mostrado na figura 47, num teste efetuado com o gel do Sistema 1. Neste teste foram programados quatro degraus de taxa de cisalhamento (de 10 a 40/s) e uma rampa descendente até a taxa nula. Em cada degrau observa-se a relaxação do

fluido e a superposição destes efeitos. Note-se que ao final da rampa a tensão não se anula, mantendo um valor residual que é, posteriormente, relaxado até zero.

O efeito de relaxação em fluidos pode ser melhor entendido pelo levantamento de seu espectro. Se o fluido for representado por um número infinito de elementos de Maxwell (vide Apêndice D), o resultado será um espectro contínuo onde cada contribuição infinitesimal para a rigidez $F d\tau$ estará associada a tempos de relaxação situados na faixa entre τ e $\tau + d\tau$. O espectro de relaxação da solução polimérica está mostrado na figura 48.

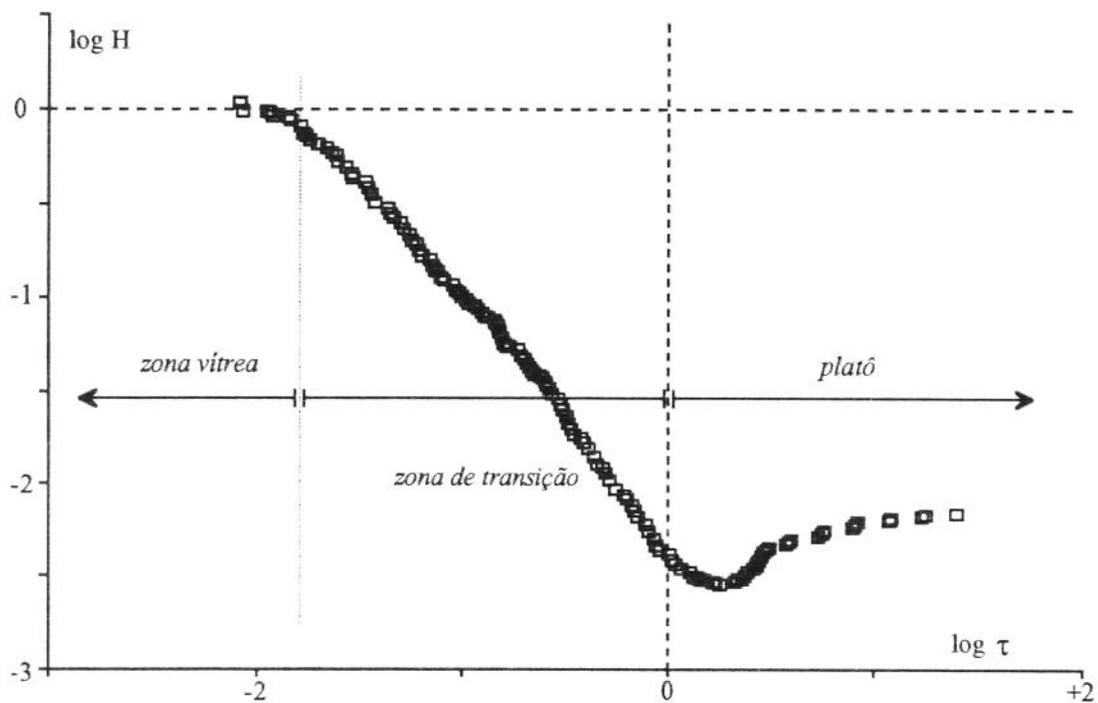


Fig. 48 Espectro de relaxação da solução polimérica

O espectro de relaxação é uma excelente ferramenta para a visualização das zonas características de um fluido viscoelástico, conforme anotado no gráfico, e para sua classificação. FERRY classifica um fluido deste tipo como um polímero amorfo de alto peso molecular com longos grupos laterais. A partir do espectro os demais parâmetros reológicos podem ser determinados.

O método utilizado para o cálculo do espectro de relaxação foi proposto por Williams & Ferry e é dos mais simples encontrado na literatura. A partir do gráfico log-log do espectro de relaxação determina-se a declividade negativa da curva, denominada m , e calcula-se o espectro através das fórmulas:

$$m = -\frac{d \log H(\tau)}{d \log \tau} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m < 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(\tau) = A G' \frac{d \log G'}{d \log w} \Big|_{\frac{1}{w}=\tau} \\ \text{onde } A = \frac{\sin(m \frac{\pi}{2})}{m \frac{\pi}{2}} \end{array} \right. \\ \\ 1 < m < 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(\tau) = A' G' (2 - \frac{d \log G'}{d \log w} \Big|_{\frac{1}{w}=\tau}) \\ \text{onde } A' = \frac{\sin(m \frac{\pi}{2})}{\pi(1 - \frac{m}{2})} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

O cálculo por este método é iterativo: inicialmente faz-se $A = 1$, encontra-se a estimativa inicial de $H(\tau)$ e calcula-se o valor de m . A partir dos valores de m calcula-se os novos valores de A e recalcula-se $H(\tau)$. A base deste método é o tratamento dos dados através da transformada de Fourier. Diversos outros métodos, mais complexos e baseados nas transformadas de Fourier e Laplace, estão disponíveis na literatura^(85, 193).

6. Discussão

Nesta seção, o modelo teórico proposto será submetido aos resultados obtidos experimentalmente. Inicialmente será definido um fluido padrão, resultado dos dados colhidos experimentalmente, e que pode ser considerado representativo para a classe de géis de fraturamento à base de HPG estudados. A seguir tal fluido será estudado dentro do modelo proposto para a definição da geometria da fratura e para a descrição do escoamento gerado durante o processo e os resultados conseguidos serão comparados aos fornecidos pelos modelos básicos tradicionalmente utilizados em projetos de fraturamento hidráulico. Finalmente, o número de Débora será introduzido na modelagem, fornecendo um novo critério operacional para incorporação no projeto de fraturamento hidráulico.

6.1 Fluido padrão

A modelagem teórica proposta poderia ser testada para cada um dos fluidos examinados, porém é possível definir um fluido padrão representativo em termos das variáveis determinadas experimentalmente. Para manter a sua generalidade, o fluido padrão será definido de acordo com os parâmetros do modelo de Carreau-Yasuda, o modelo empírico simples mais completo disponível, a partir do qual serão extraídas as expressões referentes ao modelo de potência que serão utilizadas nesta discussão.

O fluido padrão será definido em fase gel, que é a que deve preponderar durante o escoamento do fluido na fratura, e nas condições normais de operação, definida anteriormente.

A transposição do fluido para outras condições deve ser feita com a utilização das regras definidas no capítulo 4. Os parâmetros do fluido padrão são dados por:

$$\eta_0 = 5 \text{ Pa.s}; \quad \eta_\infty = 0,001 \text{ Pa.s}; \quad \lambda = 0,1 \text{ s}; \quad n = 0,5; \quad a = 1 \quad (1)$$

e a variação destes parâmetros com a temperatura e a concentração é dada pelas relações:

$$f_r = \frac{c_0 T_0}{c T} \quad a_G = f_r \left(1 - \frac{T - T_0}{100} \right) \left(\frac{c_0}{c} \right)^3$$

conforme mostrado no capítulo anterior.

Conforme verificado na análise dos géis testados, a viscosidade para taxa infinita de cisalhamento pode ser desprezada devido sua pequena magnitude em relação à viscosidade inicial. A partir destes parâmetros, as equações reológicas serão dadas por:

	modelo de Carreau-Yasuda	modelo de potência
viscosidade	$\eta = \frac{5}{\sqrt{(1+0,1\dot{\gamma})}}$	$\eta = \frac{15,8}{\sqrt{\dot{\gamma}}}$
primeiro coeficiente de tensão normal	$\Psi_1 = \frac{2,5}{(1+0,1\dot{\gamma})^{\frac{3}{2}}}$	$\Psi_1 = \frac{79}{\dot{\gamma}^{\frac{3}{2}}}$
segundo coeficiente de tensão normal	$\Psi_2 = \frac{-37,5}{(1+0,1\dot{\gamma})^{\frac{5}{2}}}$	$\Psi_2 = \frac{-1185}{\dot{\gamma}^{\frac{5}{2}}}$

Tab. 6 - Equações reológicas para o fluido padrão.

As equações reológicas, para os dois modelos propostos, estão plotadas em gráfico na figura 49, a seguir, onde o segundo coeficiente de tensão normal está apresentado em módulo, por ser negativo.

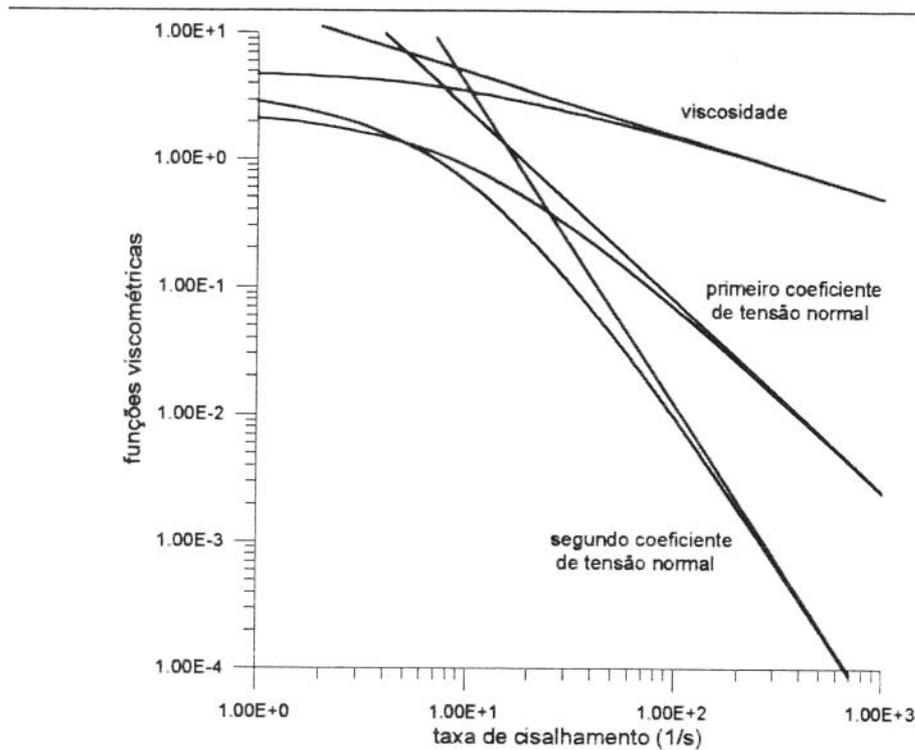


Fig. 49 Curvas reológicas para o fluido padrão.

6.2 Dimensionamento da fratura

A equação de England & Green, na forma aqui utilizada, foi desenvolvida a partir de um estado plano de deformação, e é a base do método *KGD* de dimensionamento de fraturas; portanto as modificações desenvolvidas aplicam-se a esse método. O equacionamento do método *PKN* segue formulação diferente, e os conceitos introduzidos podem posteriormente ser a ele adaptados. A utilização intensiva destes métodos no dimensionamento de fraturamentos mostra que o primeiro tende a gerar fraturas mais espessas e curtas que o segundo⁽⁹²⁾.

O dimensionamento de uma fratura deve se basear nas expressões para a abertura da fratura no poço e seu volume, dadas por

$$w_0 = \frac{1-\nu}{G} p_0 L \quad \text{e} \quad V_F = \frac{\pi}{3} w_0 h L$$

onde, pelo critério de Barenblatt e pelo modelo de queda de pressão na fratura adotado

$$p_0 = \frac{2}{\pi} L \nabla p_F \quad \text{e} \quad \nabla p_F = \frac{2K}{w_0} \left[\left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{hw_0^2} \right)^{n-1} \frac{\lambda^2(1-n)^2(2-n)}{dn} + \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{hw_0^2} \right)^n \right]$$

Condensando-se tais expressões numa única equação geral obtém-se

$$\frac{w_0^{n+1}}{L} = \sqrt{\frac{4(1-\nu)}{\pi G} K \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{h} \right)^{n-1} \left[\frac{\lambda^2(1-n)^2(2-n)}{dn} w_0^2 + \frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{h} \right]} \quad (2)$$

onde todos os parâmetros contidos na raiz, com exceção da abertura, são conhecidos, sendo, portanto, uma equação implícita na abertura da fratura e explícita em seu comprimento. Para os fluidos analisados, $d = \lambda^2$, o que simplifica o primeiro termo entre colchetes e torna a equação geral independente em relação aos modelos de Carreau-Yasuda e de derivadas, dependendo somente, quanto à caracterização do fluido, dos parâmetros do modelo de potência.

A equação geral pode ser apresentada numa forma mais amigável definindo-se alguns grupos específicos:

- ✓ coeficiente de rocha : $\Omega = \frac{4(1-\nu)}{\pi G}$
- ✓ coeficiente de fluxo : $\Upsilon = \frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{h}$
- ✓ coeficiente de tensão normal : $\Gamma = \frac{(1-n)^2(2-n)}{n}$
- ✓ taxa média de cisalhamento no poço : $\dot{\gamma}_0 = \frac{\Upsilon}{w_0^2}$
- ✓ viscosidade média no poço : $\bar{\eta}_w = K \dot{\gamma}_0^{n-1}$

onde, nos dois últimos parâmetros, entenda-se "no poço" como "na entrada da fratura".

Portanto,
$$w_0 = L \sqrt{\Omega \bar{\eta}_w (\Gamma + \dot{\gamma}_0)} \quad (3)$$

Note-se que, caso a influência da tensão normal não seja considerada, anula-se seu coeficiente e a equação é simplificada, deixando de ser iterativa. Obtém-se de (2),

$$w_0^{n+1} = L \sqrt{\frac{4(1-\nu)}{\pi G} K \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{q_0}{h} \right)^n} = \kappa L \quad (4)$$

que, para fluidos newtonianos, resulta em $w_0 = \sqrt[4]{\frac{6(1-\nu)q_0}{\pi G} \frac{\mu L^2}{h}}$.

Como, em geral, o comprimento da fratura é um dado de projeto, o processo de dimensionamento torna-se iterativo. A equação geral pode ser colocada na forma

$$w_0^{n+1} = L\sqrt{Aw_0^2 + B} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} A = \Omega\Gamma K\Upsilon^{n-1} \\ B = \Omega K\Upsilon^n \end{cases} \quad (5)$$

que pode ser resolvida através de métodos numéricos^(16, 36, 216). Com a abertura obtida, calcula-se o volume da fratura.

O cálculo da eficiência do fraturamento, e conseqüentemente do volume de fluido necessário para o tratamento, pressupõe o conhecimento do tempo de bombeio, que é uma variável implícita no parâmetro de filtração β , o qual, por sua vez, foi desprezado na simplificação da função transcendente de Lerch quando da aplicação do critério de Barenblatt. Tal variável pode ser recuperada resolvendo-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} V_F = \varepsilon q_0 t \\ \varepsilon = 1 - \beta \\ \beta = \frac{2\pi ChL}{q_0 \sqrt{t}} \end{cases} \quad \text{onde} \quad V_F = \frac{\pi}{3} w_0^3 h$$

o qual resulta na equação de segundo grau

$$\frac{q_0}{2V_F} t^2 - \left(1 + \frac{1}{\chi}\right)t + \frac{V_F}{2q_0} = 0 \quad \text{onde} \quad \chi = \frac{2q_0 V_F}{(2\pi ChL)^2} = \frac{2\varepsilon}{\beta^2}$$

que possui duas raízes reais positivas dadas por:

$$t = \frac{V_F}{\chi q_0} (1 + \chi \pm \sqrt{1 + 2\chi}) \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\chi}{1 + \chi \pm \sqrt{1 + 2\chi}} \quad (6)$$

onde deve-se sempre considerar a raiz calculada com o sinal positivo, visto que a com sinal negativo resulta em eficiências superiores à unidade.

Simulando-se diversos comprimentos de fraturas por este método obteve-se

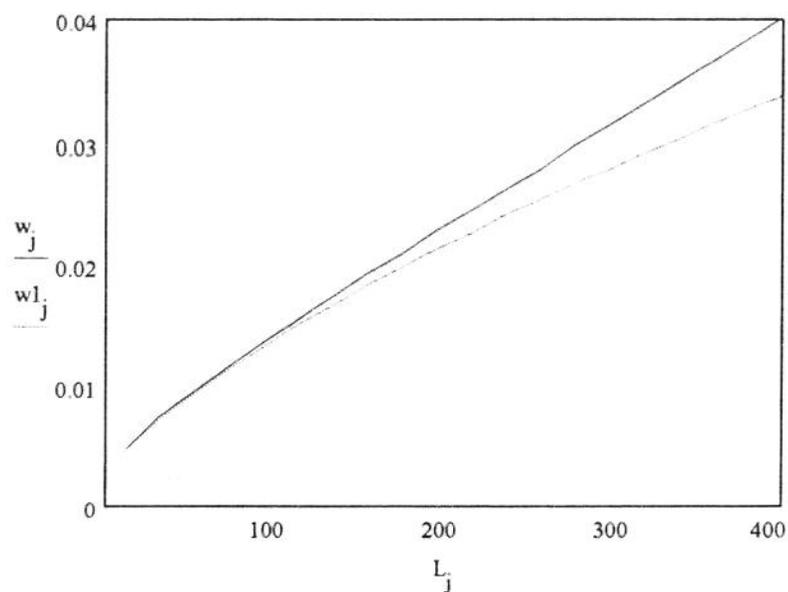


Fig. 50 Abertura máxima da fratura - sem (tracejada) e com (cheia) tensões normais.

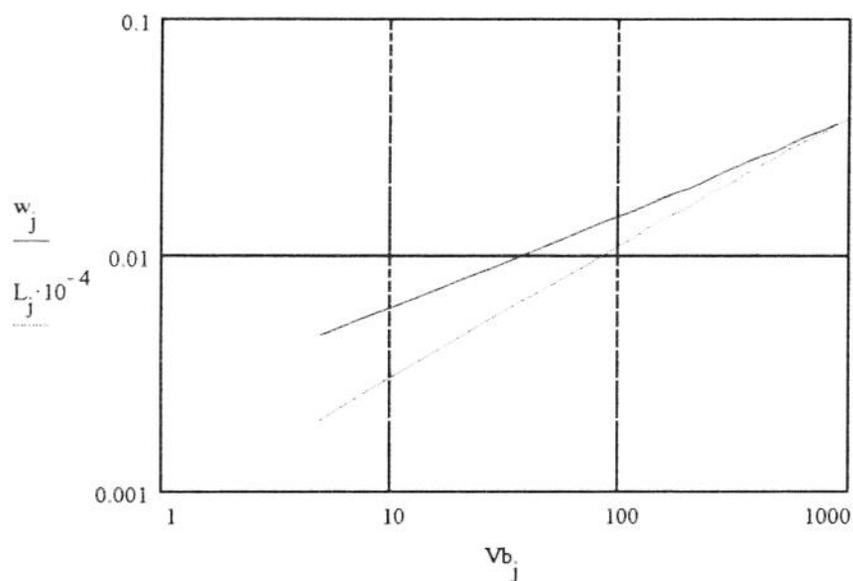


Fig. 51 Dimensões da fratura em função do volume bombeado -
Abertura máxima (cheia), comprimento $\times 10^4$ (tracejada).

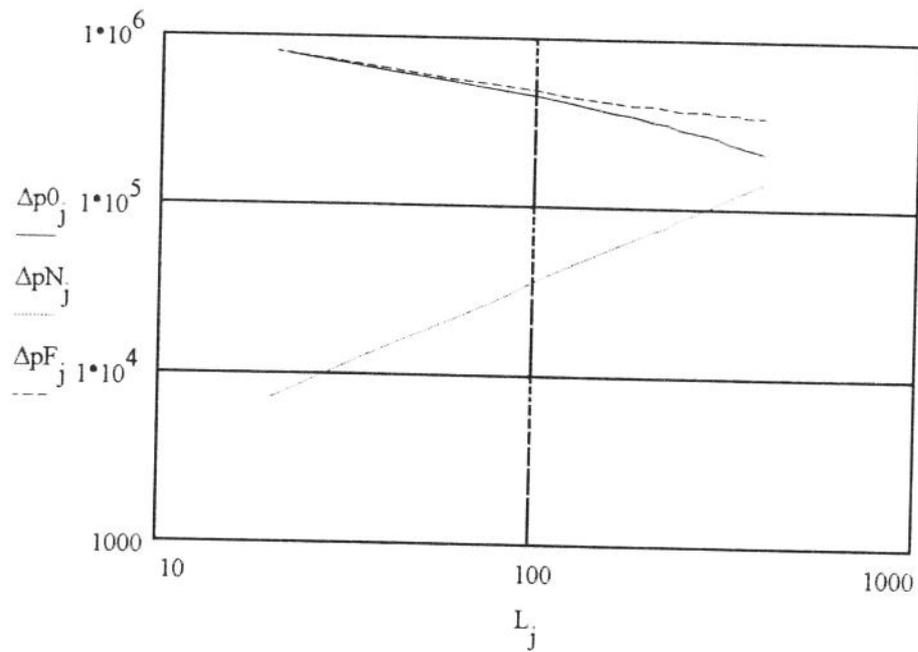


Fig. 52 Quedas de pressão cisalhante (cheia), normal (pontilhada), e total (tracejada) ao longo da fratura.

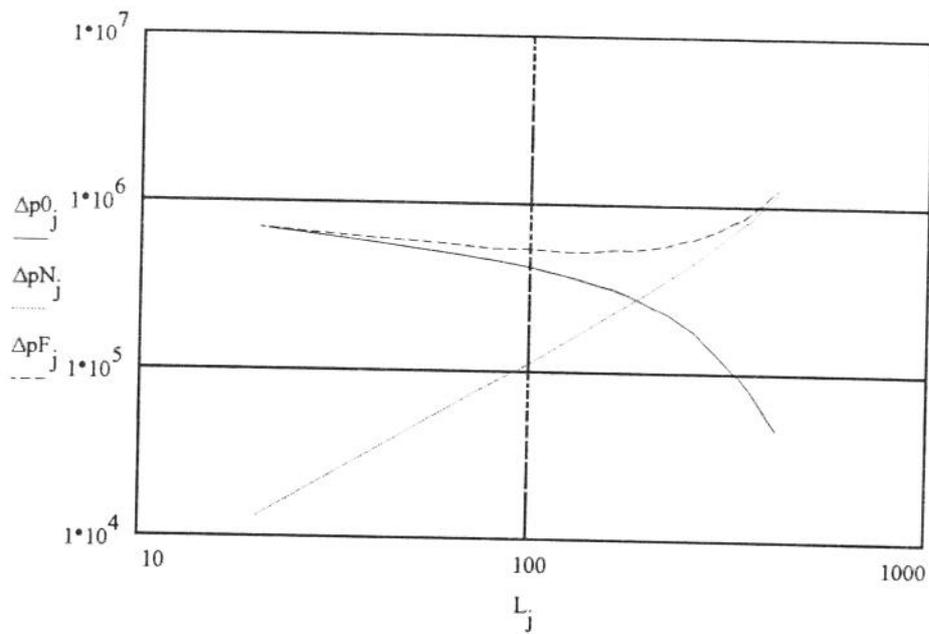


Fig. 53 Gráfico similar ao anterior para $n = 0.3$.

Os dados usados em tais simulações, além dos parâmetros definidos para o fluido padrão, foram:

$$\text{operacionais: } q_0 = 0.026 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}; \quad h = 30 \text{ m}$$

$$\text{rocha: } G = 3 \cdot 10^8 \text{ Pa}; \quad \nu = 0.15$$

$$\text{filtração: } C = 3.873 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{s}}}$$

Nota-se na figura 52 que o diferencial de pressão devido às tensões normais gerado pelo escoamento, contrariamente ao notado devido ao cisalhamento, é sempre crescente, embora de magnitude inferior. Verifica-se que, para o índice de comportamento ($n = 0.5$) utilizado, o gradiente de perda de pressão é constante, sendo tal índice um ponto de corte acima do qual tal gradiente é descendente, e abaixo do qual é ascendente. Considerando-se o valor de tal índice igual a 0.3, tal comportamento é mostrado na figura 53.

Portanto, quanto menor o índice de comportamento do fluido, o que caracteriza um maior desvio da Lei de Newton, maior o reflexo em termos da queda de pressão observada ao longo da fratura, podendo a mesma ter seu perfil invertido, tornando-se ascendente.

Caso se queira simular o comportamento da fratura em função do tempo de bombeio, o procedimento se torna mais complexo pois exige um novo estágio iterativo. Os seguintes passos são recomendados:

✓ Para o tempo de bombeio desejado, assume-se uma eficiência para o fluido (recomenda-se, inicialmente, o valor 0.5).

✓ A partir da expressão para o volume da fratura relaciona-se seu comprimento e sua abertura

$$V_F = \varepsilon V_T \rightarrow \frac{\pi}{3} w_0 h L = \varepsilon q_0 t \rightarrow L = \frac{3 q_0 \varepsilon t}{\pi h w_0}$$

✓ Substituindo-se tal relação na expressão geral, define-se uma nova equação de iteração, onde a eficiência e o tempo estão presentes, dada por

$$w_0^{n+2} = \Sigma \sqrt{A w_0^2 + B} \quad \text{onde} \quad \Sigma = \frac{3 q_0}{\pi h} \varepsilon t \rightarrow \text{coeficiente de tempo} \quad (7)$$

- ✓ Com a abertura obtida na iteração, recalcula-se o comprimento da fratura e obtém-se seu novo volume e nova eficiência

$$L = \frac{3\varepsilon q_0 t}{\pi h w_0} \rightarrow V_F = \frac{\pi}{3} w_0 h L \rightarrow \varepsilon = \frac{V_F}{V_T}$$

- ✓ Com a nova eficiência, retorna-se à equação de iteração, calcula-se a nova abertura e repete-se o processo até a obtenção da convergência.

Tal procedimento não é o mais recomendado, pois tal simulação (com o tempo) pode ser feita indiretamente através do procedimento anterior, que é mais simples. Como a influência da pressão normal é principalmente sentida em fraturas de grandes comprimentos, pode-se utilizar a expressão reduzida fornecida pelo método proposto nos casos em que tal variável não é crítica, que é direta e simplifica o dimensionamento da fratura.

Os gráficos seguintes comparam os resultados encontrados com o método proposto aos obtidos com os métodos tradicionais de dimensionamento de um fraturamento hidráulico, descritos no Apêndice G. Os dados utilizados são os mesmos já listados anteriormente. Os resultados referentes ao presente método estão apresentados em linha cheia, os referentes ao método proposto por Perkins & Kern (também denominado *PKN*) em linha pontilhada, e os relativos ao método de Geertsma & de Kerk (*KGD*) em linha tracejada.

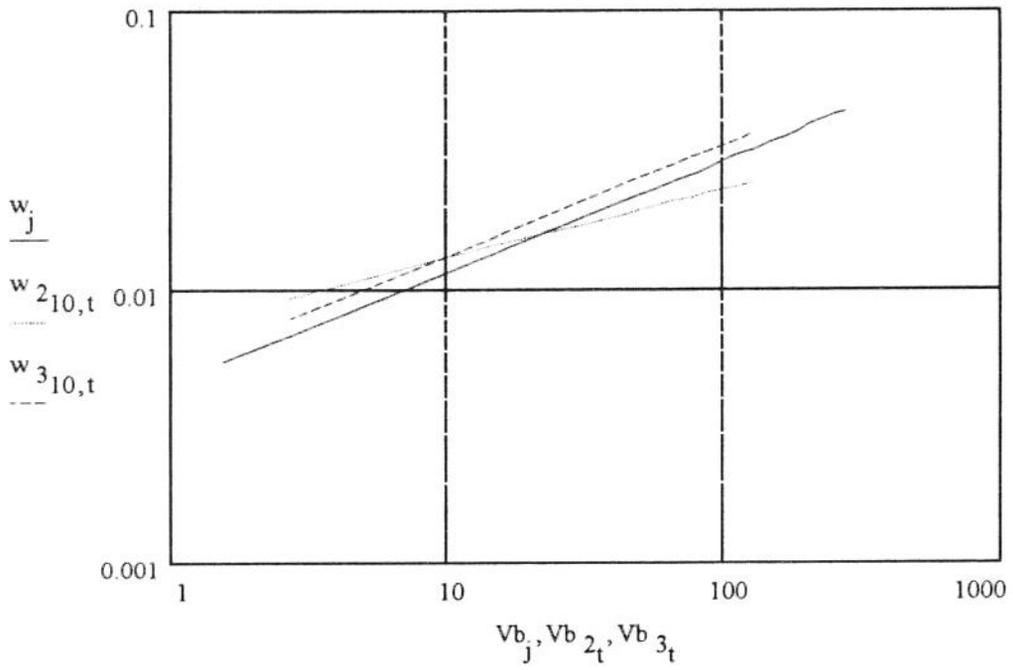


Fig. 54 Abertura máxima da fratura em função do volume bombeado.

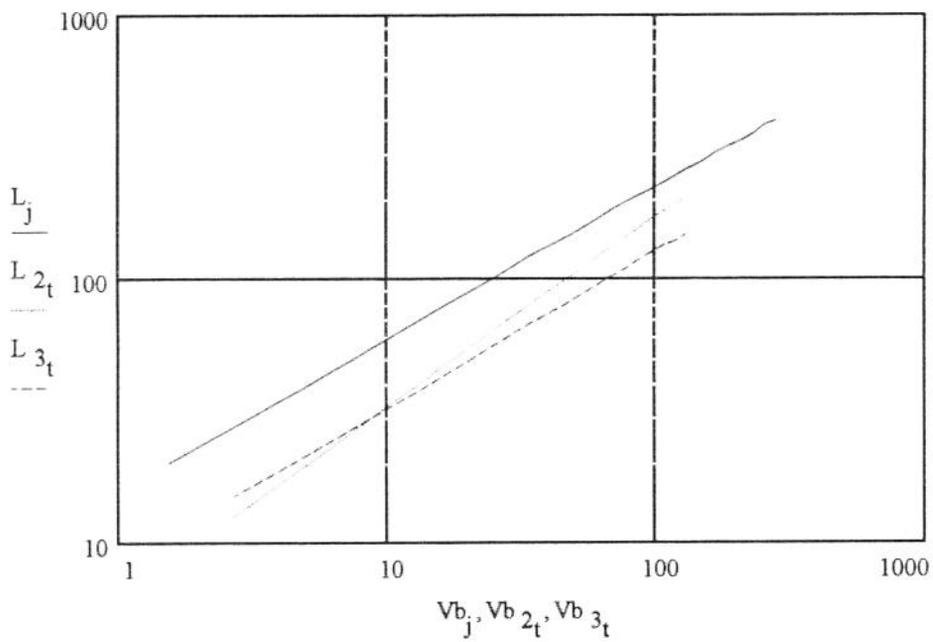


Fig. 55 Comprimento da fratura em função do volume bombeado.

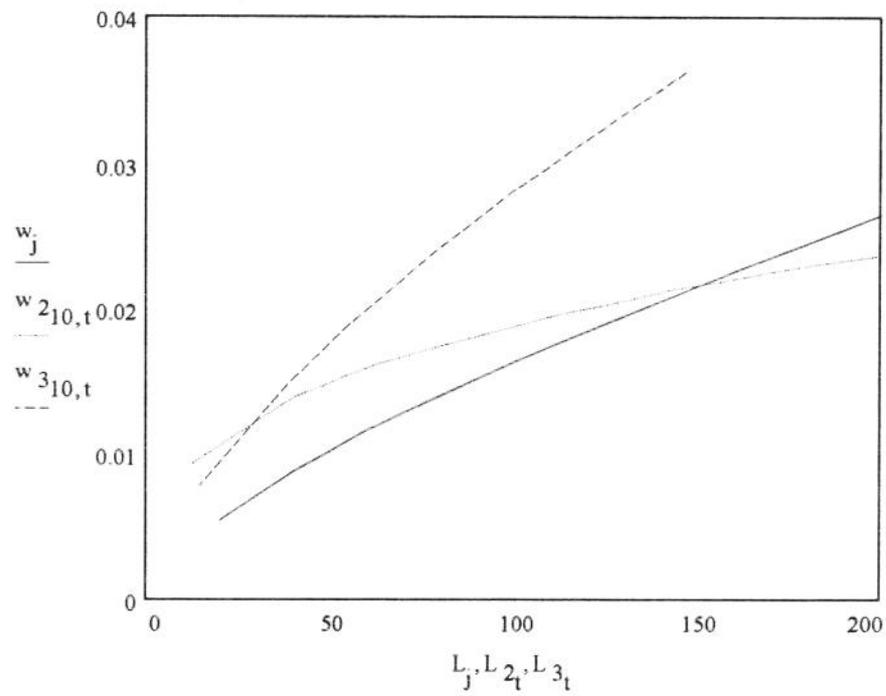


Fig. 56 Relação entre a abertura máxima e o comprimento da fratura.

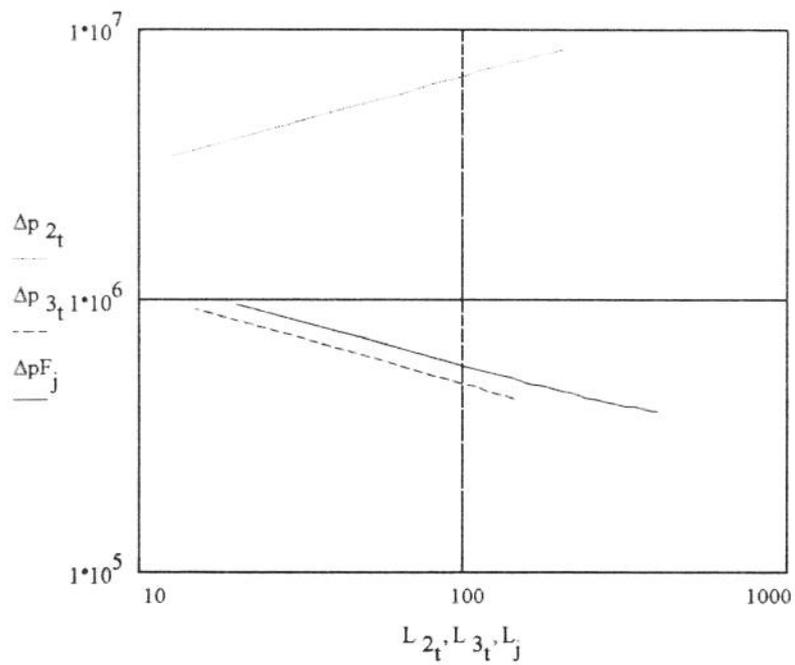


Fig. 57 Variação de pressão ao longo da fratura.

As figuras 54 e 55 mostram a evolução da abertura máxima e do comprimento da fratura em função do volume bombeado, que corresponde ao tempo de bombeio. A abertura máxima obtida no método proposto é similar à fornecida pelo KGD, como era de se esperar pois ambos os modelos partem da mesma equação básica, de England & Green. Os comprimentos de fratura encontrados no equacionamento proposto são superiores aos dados pelos dois outros modelos pois tal variável é determinada através do balanço volumétrico do processo, e o presente modelo sugere um perfil cuneiforme para a fratura, enquanto que os demais a tratam como elíptica; para um mesmo volume de fluido, o modelo proposto sempre irá fornecer comprimentos de fratura superiores aos outros.

A figura 56 é uma condensação das duas anteriores, expressando a abertura máxima em função do comprimento, e a figura 57 mostra o comportamento da variação de pressão ao longo da fratura. Novamente o modelo proposto segue o KGD pelos mesmos motivos acima expostos. Conforme a especificação do índice de comportamento do fluido, tal perfil pode variar conforme citado anteriormente.

6.3 Número de Débora

O número de Débora foi introduzido por Reiner em 1964 e pode ser interpretado como a relação entre as magnitudes das forças elásticas e viscosas que atuam em um fluxo de um fluido viscoelástico, tendo para este a importância que o número de Reynolds tem para os fluidos newtonianos⁽¹⁹⁾. Ele é definido como a relação entre um tempo característico do fluido (no caso será considerada a constante de tempo λ) e um tempo característico do fluxo, t_F .

$$De = \frac{\lambda}{t_F}$$

O tempo característico de fluxo é, em geral, considerado como um intervalo de tempo no qual um seu elemento típico experimenta uma seqüência significativa de eventos cinemáticos. Tal situação pode ser visualizada na figura abaixo:

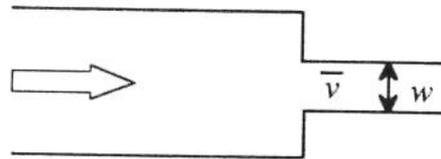


Fig. 58 Geometria de fluxo para definição do número de Débora.

Portanto, para esta geometria, onde o canal de maior abertura representa o poço e o de menor, a fratura, o número de Débora pode ser definido por^(19, 256):

$$t_F = \frac{\bar{v}}{w/2} \Rightarrow De = 2\lambda \frac{\bar{v}}{w}$$

A velocidade média na fratura, conforme mostrado anteriormente, é dada por

$$\bar{v} = \frac{q_0}{2hw} \Rightarrow \boxed{De = \frac{\lambda q_0}{hw^2}}$$

Para o fluido padrão considerado e para as condições operacionais especificadas, tomando-se uma abertura média de 0.01m., que ocorre para uma fratura com comprimento de 160m., o número de Débora assume o valor $De \cong 0.85$. A literatura recomenda como valor crítico para este parâmetro, $De_{crit.} = 1$, acima do qual registra-se a ocorrência de vórtices (tal fato torna-se crítico para $De > 3$, quando fluxo perde a simetria, e, para $De > 8$, quando o fluxo torna-se errático). Portanto, o caso examinado mostra-se adequado neste contexto, e sugere um critério operacional para a relação entre a vazão de bombeio e a espessura da formação, dado por

$$\boxed{\frac{q_0}{h} \leq 3 \frac{w^2}{\lambda}}$$

A utilização de condições operacionais que acarretem números de Débora elevados não conduz, à priori, a problemas operacionais, porém compromete a validade do uso da

equação de estado CEF para o equacionamento do fluxo na fratura visto ser a mesma de segunda ordem, embora possua coeficientes variáveis, o que estende sua faixa de aplicação e explica a escolha do valor $\underline{3}$ (que é o limite de simetria no fluxo) para o número de Débora de corte. A simetria do fluxo deve ser preservada por ser uma condição de contorno do equacionamento do escoamento.

A entrada da fratura é um ponto crítico no processo devido à presença dos canhoneados. Caso o poço tenha sido canhoneado normalmente para produção, provavelmente tal fenômeno não ocorrerá, porém, caso se opte pelo fraturamento pela técnica de *entrada limitada*⁽¹⁴⁶⁾, tal instabilidade poderá ocorrer na entrada da fratura, embora não seja problemática por ser localizada. O cálculo do número de Débora neste caso é similar ao mostrado, substituindo-se a abertura da fratura pelo diâmetro dos canhoneados e distribuindo-se a vazão de injeção pelos mesmos.

O critério proposto é uma restrição de projeto para a modelagem aqui proposta que, embora apresente avanços em relação à tradicionalmente utilizada, não possui a abrangência suficiente para cobrir todos os efeitos observados no processo estudado, principalmente os transientes, visto ser esta equação formulada para fluxo permanente. A utilização de uma equação de estado de maior ordem provavelmente conduzirá à soluções numéricas, o que foge ao escopo deste trabalho.

7. Conclusões

O fraturamento hidráulico é um processo industrial de grande complexidade operacional, cuja modelagem resulta da integração de teorias desenvolvidas em diversos campos do conhecimento científico e tecnológico. Esta dissertação concentra-se na determinação das dimensões da fratura induzida no processo, uma de suas etapas, e, para tanto, um grande número de experimentos foram efetuados objetivando validar o modelamento matemático proposto para tal. As principais conclusões a respeito da modelagem proposta estão listadas a seguir:

- ✓ O fluido de fraturamento é um fluido viscoelástico, portanto o equacionamento de seu escoamento deve ser tensorialmente coerente e suas características reológicas devem ser incorporadas através de equações de estado representativas desta condição. Tal tratamento não implica, a priori, um aumento da complexidade desta etapa da modelagem, tornando-a matemática e fisicamente mais consistente.
- ✓ A utilização da equação de estado CEF, uma equação para fluidos de segunda ordem, permite identificar, neste escoamento, os efeitos do comportamento viscoelástico do fluido de fraturamento. O componente viscoso deste fluido induz um gradiente de pressão na direção da propagação da fratura cuja expressão analítica obtida corresponde àquela tradicionalmente utilizada no dimensionamento de fraturas. O componente elástico, enfatizado neste trabalho, gera um gradiente de pressão que atua perpendicularmente às paredes da fratura, no sentido de separá-las,
- ✓ O conceito de fratura virtual introduzido neste trabalho possibilita um tratamento analítico discretizado do fenômeno de filtração que ocorre durante o fraturamento, permitindo a determinação do perfil de pressão no interior da fratura. Tal conceito incorpora resultados da teoria de Carter, que governa volumetricamente o dimensionamento da fratura determinando

seu comprimento, e, por ser euleriano, integra-se à modelagem tensorial de escoamento proposta de forma simples e direta.

- ✓ A partir do perfil de pressão definido, a equação de England & Green permite transformar tais esforços em deformação, definindo a abertura da fratura. A utilização do critério de Barenblatt, que define as condições para uma propagação estável da fratura, permite o acoplamento total dos vários modelos envolvidos ao relacionar os esforços internos que atuam no processo aos externos. Desta forma, as dimensões da fratura ficam diretamente dependentes do conhecimento da pressão de entrada na fratura e da tensão tectônica que atua na direção normal à sua direção de propagação.

Quanto ao levantamento experimental efetuado, foram levantados os parâmetros reológicos para quatro sistemas de fluidos de fraturamento, em suas três fases básicas: solução polimérica, pré-gel e gel, e para variadas condições de temperatura e concentração.

As seguintes conclusões podem ser formuladas:

- ✓ Os fluidos poliméricos à base de HPG apresentam comportamento pseudo-plástico, ou seja, sua viscosidade decresce com o aumento da taxa de cisalhamento ou frequência de oscilação. O modelo empírico que melhor descreve sua viscosidade é o atribuído a Carreau-Yasuda. Este modelo reológico possui cinco parâmetros: as viscosidades inicial e final do fluido; sua constante de tempo, que dimensiona os períodos em que o fluido se comporta como newtoniano e não-newtoniano; o índice de comportamento, que fornece a taxa com que o mesmo se distancia do comportamento newtoniano; e um índice de ajuste, ligado à massa molecular do fluido. Outro modelo empírico extensivamente utilizado no equacionamento de escoamentos, o modelo de potência, possui dois parâmetros: os índices de consistência e de comportamento. Tais índices podem ser derivados dos parâmetros citados anteriormente, conforme deduzido no corpo do trabalho.
- ✓ O estudo do comportamento reológico dinâmico dos fluidos de fraturamento é importante pela possibilidade do estabelecimento de relações entre os parâmetros dinâmicos medidos e as teorias moleculares desenvolvidas para fluidos poliméricos (como as teorias de Rouse e Zimm), e as teorias lineares de viscoelasticidade (como os modelos de Maxwell e de

Boltzmann, entre outros). A regra de Cox-Merz, relação entre as viscosidades obtidas em experimentos dinâmicos e em regime permanente, apresentou-se como uma boa correlação para os resultados obtidos.

- ✓ A não-linearidade destes fluidos pode ser modelada através de coeficientes obtidos de diferenças entre as tensões normais que atuam durante o escoamento. O coeficiente relativo à primeira diferença possui diversos estudos e alguns modelos citados na literatura. Para os fluidos analisados, o modelo proposto por Wagner, que expressa tal coeficiente proporcionalmente à derivada da viscosidade, mostrou-se adequado. A constante de proporcionalidade obtida experimentalmente mostrou-se, nos resultados obtidos, proporcional à constante de tempo definida pelo modelo de Carreau-Yasuda.
- ✓ O coeficiente da segunda diferença tem poucos estudos na literatura, sendo seu comportamento pouco conhecido. A partir dos resultados obtidos, este trabalho propõe para tal coeficiente um modelo empírico, no qual ele se comporta proporcionalmente à segunda derivada da viscosidade, sendo sua constante de proporcionalidade expressa como o quadrado da constante de tempo acima citada.
- ✓ A regra de Laun, proposta na literatura para relacionar o coeficiente da primeira diferença entre tensões normais aos componentes dinâmicos da viscosidade, não apresentou boa correlação quando aplicada aos fluidos testados. Como a regra de Cox-Merz mostrou-se efetiva nestes fluidos, sugere-se, a partir dos resultados citados nos dois itens anteriores, que os coeficientes da primeira e segunda diferenças sejam expressos proporcionalmente às primeira e segunda derivadas da viscosidade complexa, usando-se os coeficientes de proporcionalidade anteriormente definidos.
- ✓ Para a extrapolação dos valores de viscosidade, ou outro parâmetro reológico, para condições de temperatura e concentração diferentes das apresentadas neste trabalho, são propostos fatores de correção obtidos empiricamente, porém baseados tanto na lei de Arrhenius para a variação de temperatura, quanto na teoria molecular de Rouse para a variação de concentração.
- ✓ Complementando as informações relativas aos aspectos reológicos dos fluidos testados, foi estudado o comportamento da solução polimérica em relação ao tempo e levantou-se seu

espectro de relaxação, que pode ser utilizado para a delimitação das faixas características de seu comportamento reológico, e para a definição de seus parâmetros a partir de relações encontradas na literatura.

Quanto a discussão dos resultados obtidos, propõe-se as seguintes conclusões:

- ✓ A influência das tensões normais (especificamente de suas diferenças) nas dimensões de uma fratura é particularmente dependente do índice de comportamento do fluido utilizado no tratamento. Quanto maior o desvio do comportamento newtoniano, caracterizado por um menor índice de comportamento, maior é esta influência, podendo até reverter o perfil de pressão dentro da fratura, que é esperado ser descendente com o tempo de bombeio.
- ✓ Os parâmetros de rocha (módulos de Young e de Poisson) e a constante de filtração do fluido também influenciam neste comportamento pois definem, respectivamente, a transformação dos esforços em deformação e a efetividade desta transformação. Porém tal influência não é crítica e somente grandes variações nestes parâmetros podem modificar significativamente os resultados de um projeto.
- ✓ Dois dados de entrada têm importância fundamental em um projeto de fraturamento: a vazão de bombeio do fluido e a altura (ou espessura) da formação rochosa. A relação entre estes dados, juntamente com os parâmetros reológicos, define a taxa de cisalhamento e, portanto, o comportamento reológico do fluido de fraturamento em cada ponto da fratura. Ela define, também, o número de Débora, um parâmetro adimensional que classifica o fluxo de fluidos viscoelásticos e que foi introduzido neste trabalho para a caracterização destes fluidos, permitindo o estabelecimento de um novo critério operacional para utilização em projetos de fraturamento hidráulico.
- ✓ O perfil de pressão no interior da fratura segue, basicamente, o previsto pelo modelo KGD, o que era de se esperar pois ambos modelos partem de pressupostos similares. As aberturas obtidas situam-se, em geral, entre as calculadas pelos dois métodos clássicos, seguindo a tendência indicada pelo método KGD. Os comprimentos calculados são superiores aos estimados por estes métodos devido à modificação proposta no perfil da abertura da fratura, de elíptico para cuneiforme.

8. Sugestões para Trabalhos Posteriores

Devido à variedade de assuntos e áreas abordados neste trabalho, várias sugestões para trabalhos posteriores podem ser listadas:

- ✓ Introdução do modelo de fratura virtual na análise proposta por Nolte para o declínio de pressões em mini-fracs e fraturamentos hidráulicos.
- ✓ Aprofundamento do estudo experimental da filtração objetivando a determinação da influência do índice de comportamento na velocidade de filtração.
- ✓ Inclusão, através de simulação numérica, da poro-elasticidade no fenômeno da filtração.
- ✓ Simulação numérica da modelagem proposta, introduzindo a equação de energia no sistema de equações proposto para o escoamento.
- ✓ Automatização do processo de tratamento da superposição ou deconvolução de sinais para facilitar as análises de dados contaminados por efeitos de relaxação observado nos experimentos efetuados.
- ✓ Aprofundamento dos estudos relacionando os resultados medidos em experimentos reológicos com fluidos de fraturamento aos obtidos dos modelos moleculares (Rouse, Zimm, etc.) e viscoelásticos mais completos (diferenciais e integrais).
- ✓ Estudo das propriedades moleculares dos fluidos de fraturamento objetivando a obtenção de relações que equacionem o acoplamento sol-gel verificado em laboratório.
- ✓ Aprofundamento do estudo sobre a influência do tempo nos parâmetros reológicos destes fluidos através da obtenção de suas funções memória e seus espectros de relaxação.
- ✓ Confrontação dos resultados obtidos pela modelagem proposta aos dados de avaliação disponíveis de trabalhos efetuados.

Bibliografia

- 1 ABRAMOWITZ, Milton & STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc. 1970 New York.
- 2 ADVANI, S. H., TOROK, J. S., et alli: *Explicit Time-Dependent Solutions and Numerical Evaluations for Penny-Shaped Hydraulic Fracture Models*, J. Geophys. Res. 92/B8 1987 8049.
- 3 AFROUZ, A. & HARVEY, Jon M.: *Rheology of Rocks Within the Soft to Medium Strength Range*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 11 1974 281.
- 4 AHMED, U. & ANDERSON, R.: *Fracturing - Theory Behind the Practice*, The Technical Review 34/3 1986 20.
- 5 AKCELRUD, L. & SALGUEIRO C. A. M.: *Reticulação Controlada do HP-Guar*, CENPES 779 - STE 02.04.35 1987.
- 6 AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE : *Recommended Practice for Standard Procedures for Evaluation of Hydraulic Fracturing Fluids*, API 1983 Washington.
- 7 AMYX, J. W., BASS, D. M. & WHITING, R. L.: *Petroleum Reservoir Engineering - Physical Properties*, McGraw-Hill Book Co. 1960 New York
- 8 ANDERSON, R. A., INGRAM, D. S. & ZANIER, A. M.: *Determining Fracture Pressure Gradients from Well Logs*, J. Pet. Tech. Nov. 1973 1259.
- 9 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT: *Apresentação de Dissertações e Teses*, Proj. 14:02.02-002 Out. 1984.
- 10 AZIZ, Khalid & SETTARI, Antonín : *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers Ltd. 1983 London.

- 11 BABCOCK, R. E., PROKOP, C. L. & KEHLE, R. O.: *Distribution of Propping Agents in Vertical Fractures*, Producers Monthly Nov. 1967 11.
- 12 BAIJAL, S. K.: *Flow Behavior of Polymers in Porous Media*, PennWell Publishing Co. 1982 Tulsa.
- 13 BAKER Oil Tools : *Tech Facts*, Baker Oil Tools Group 1977 USA.
- 14 BARENBLATT, G. I.: *The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*, in *Advances in Applied Mechanics VII* 1962 55.
- 15 BARNES, H. A., HUTTON, John F. & WALTERS, Kenneth : *An Introduction to Rheology*, Elsevier Science Publishers B.V. 1989 Amsterdan.
- 16 BARROSO, L. C., BARROSO, M. M. A., et alli: *Cálculo Numérico*, Harper & Row do Brasil Ltda. 1983 São Paulo.
- 17 BATHE, K.-Jürgen & WILSON, Edward L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc. 1976 Englewood Cliffs.
- 18 BECKER, A. A.: *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill Book Co., 1992 Cambridge.
- 19 BIRD, R. Byron, ARMSTRONG, Robert C. & HASSAGER, Ole : *Dynamics of Polymeric Liquids - Fluid Mechanics*, V.1, John Wiley & Sons, Inc. 1987 New York.
- 20 BIRD, R. Byron, ARMSTRONG, Robert C. & HASSAGER, Ole : *Dynamics of Polymeric Liquids - Kinetic Theory*, V.2, John Wiley & Sons, Inc. 1987 New York.
- 21 BIRD, R. Byron, STEWART, Warren E. & LIGHTFOOT, Edwin N.: *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons 1960 New York.
- 22 BIRET, F. & VALENTIN, G.: *Mesure de l'Influence de la Pression sur la Propagation de Fissure dans les Roches*, Révue de l'Inst. Fran. du Pét. 42/6 1987 807.

- 23 BOONE, T. J., WAWRZYNEK, P. A. & INGRAFFEA, A. R.: *Simulation of the Fracture Process in Rock with Application to Hydrofracturing*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 23/3 1986 255.
- 24 BOURGOYNE, A. T.: *Drilling Hydraulics*, material didático 1984.
- 25 BOUTECA, M. & SARDA, J.-P.: *État de l'Art en Fracturation Hydraulique*, Révue de l'Inst. Fran. du Pét. 42/1 1987 39.
- 26 BRADLEY, W. B.: *Failure of Inclined Boreholes*, Trans. ASME 101 1979 232.
- 27 BRADLEY, W. B.: *Mathematical Concept - Stress Cloud - Can Predict Borehole Failure*, The Oil & Gas J. Feb.19,1979 92.
- 28 BRANNON, H. D. & AULT, M. G.: *New, Delayed Borate-Crosslinked Fluid Provides Improved Fracture Conductivity in High-Temperature Applications*, SPE 22838 1991.
- 29 BRATLI, R. K. & RISNES, R.: *Stability and Failure of Sand Arches*, Soc. Pet. Eng. Tech. Apr. 1981 236.
- 30 BRILL, James P. & BEGGS, H. Dale: *Two-Phase Flow in Pipes*, Publicado pelos autores 1978 Tulsa.
- 31 BROEK, David: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers 1986 Dordrecht.
- 32 BROWN, S., PLUMB, R., et alli: *Basics of Failure Mechanics*, The Technical Review 34/3 1986 10.
- 33 CAMERON, J. R.: *Viscometry of Nonhomogeneous Flows and the Behavior of a Titanium-Crosslinked Hydroxypropyl Guar Gel in Couette Flow*, Journal of Rheology 33/1 1989 15.
- 34 CAMPOS, J. C. B.: *Resumo da Teoria da Fratura Elástica Linear*, Comunicação Particular 1992.

- 35 CAMPOS, J. C. B.: *Tensões na Parede de um Poço Circular Segundo a Teoria da Elasticidade*, Bol. Tec. Petrobrás 30(2/3) 1984 115.
- 36 CARNAHAN, Brice , LUTHER, H. A. & WILKES, James O.: *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc. 1969 New York
- 37 CARSLAW, H. S.: *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover Publications, Inc. 1950 New York.
- 38 CARSLAW, H. S. & JAEGER, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press 1979 Oxford.
- 39 CARTER, R. D.: *Derivation of the General Equation for Estimating the Extent of the Fractured Area*, The Can. Min. and Met. Bull. Feb. 1961.
- 40 CARUSO, L., SIMMONS, G. & WILKENS, R.: *The Physical Properties of a Set of Sandstones - Part I. The Samples*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 22/6 1985 381.
- 41 CAWIEZEL, K. E. & ELBEL, J. L.: *A New System for Controlling the Crosslinking Rate of Borate Fracturing Fluids*, SPE Prod. Eng. Aug. 1992 275.
- 42 CHEATHAM Jr., J. B.: *Wellbore Stability*, J. Pet. Tech. Jun. 1984 889.
- 43 CHRISTENSEN, Richard M.: *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, Inc. 1982 New York.
- 44 CHURCHILL, Ruel V.: *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1960 Tokio.
- 45 CHURCHILL, Ruel V.: *Operational Mathematics*, McGraw-Hill Book Co. 1958 New York.
- 46 CINCO-L., H., SAMANIEGO-V., F. & DOMINGUEZ-A., N.: *Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture*, Soc. Pet. Eng. J. Aug. 1978 153.

- 47 CLARK, P. E.: *Stimulation Fluid Rheology - A New Approach*, SPE 8300 **1978**.
- 48 CLEARY, M. P.: *Comprehensive Design Formulae for Hydraulic Fracturing*, SPE 9259 **1980**.
- 49 CLEARY, M. P.: *The Engineering of Hydraulic Fractures - State of the Art and Technology of the Future*, J. Pet. Tech. Jan. **1988** 13.
- 50 CLIFTON, R. J. & ABOU-SAYED, A. S.: *On the Computation of the Three-Dimensional Geometry of Hydraulic Fractures*, SPE 7943.
- 51 CLOUD, J. E. & CLARK, P. E.: *Alternatives to the Power Law Fluid Model for Crosslinked Fluids*, SPE Journal Dec. **1980** 935.
- 52 COLEMAN, Bernard D., MARKOVITZ, Hershel & NOLL, Walter : *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids - Theory and Experiment*, Springer-Verlag **1966** Berlin.
- 53 CONWAY, M. W., ALMOND, S. W., et alli: *Chemical Model for the Rheological Behavior of Crosslinked Fluid Systems*, J. Pet. Tech. Feb. **1983** 315.
- 54 CRAFT, B. C. & HAWKINS, M. F.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, Prentice-Hall, Inc. **1959**, Englewood Cliffs.
- 55 CRAIG, D. P., YONG, Fan & HOLDITCH, S. A.: *Viscous Property Measurement of Delayed Titanate Crosslinked Gels Containing Oxidative Breakers*, SPE 24340 **1992**.
- 56 CRAIGIE, L. J.: *A New Method for Determining the Rheology of Crosslinked Fracturing Fluids using Shear History Simulation*, SPE 11635 **1983**.
- 57 CROCHET, M. J., DAVIES, A. R. & WALTERS, K.: *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier Science Publishers B.V. **1984** Amsterdan.
- 58 CROCKETT, A. R., OKUSU, N. M. & CLEARY, M. P.: *A Complete Integrated Model and Real-Time Analysis of Hydraulic Fracturing Operations*, SPE 15069 **1986**.
- 59 CROCKETT, A. R. & WILLIS Jr., R. M.: *Improvement of Hydraulic Fracture Predictions by Real-Time History Matching on Observed Pressures*, SPE 15264 **1986**.

- 60 CUSHING, James T.: *Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists*, John Wiley & Sons, Inc. 1975 New York.
- 61 DAILY, F. H. & OWENS, T. C.: *Stress Around a Wellbore*, SPE 2557 1969.
- 62 DAINES, S. R.: *Prediction of Fracture Pressures for Wildcat Wells*, J. Pet. Tech. Abr. 1982 863.
- 63 DAKE, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier Scientific Publishing Co. 1978 Amsterdam.
- 64 DANESHY, A. A.: *Numerical Solution of Sand Transport in Hydraulic Fracturing*, J. Pet. Tech. Jan. 1978 132.
- 65 DANESHY, A. A.: *On the Design of Vertical Hydraulic Fractures*, J. Pet. Tech. Jan. 1973 83.
- 66 DANIEL, G. & WHITE, J.: *Fundamentals of Fracturing*, SPE 9064 1980.
- 67 de KEE, D., & STASNA, J.: *Primary Normal Stress Coefficient Predictions*, J. Rheology 30/1 1986 207.
- 68 de KRULJF, A. S., ROODHART, L. P. & DAVIES, D. R.: *Relation between Chemistry and Flow Mechanics of Borate-Crosslinked Fracturing Fluids*, SPE Prod.& Facil. Aug. 1993 165.
- 69 DETOURNAY, E., MCLENNAN, J. D. & ROEGIERS, J.-C.: *Poroelastic Concepts Explain Some of the Hydraulic Fracturing Mechanisms*, SPE 15262 1986.
- 70 DEUEL, H., NEUKOM, H. & WEBER, F.: *Reaction of Boric Acid with Polysaccharides*, Nature Jan. 1948 96.
- 71 DUGDALE, D. S.: *Yielding of Steel Sheets Containing Slits*, J. Mech. Phys. Solids 8 1960 100.
- 72 ELY, John W.: *Stimulation Treatment Handbook*, PennWell Publishing Co. 1977 Tulsa.

- 73 ENGLAND, A. H. & GREEN, A. E.: *Some Two-Dimensional Punch and Crack Problems in Classical Elasticity*, Proc. Camb. Phil. Soc. 59 1963 489.
- 74 ERDÉLYI, A. (editor): *Tables of Integral Transforms, Vol I-II*, McGraw-Hill Book Co. 1954 New York.
- 75 FAIRES, Virgil M. & CHAMBERS, Sherman D.: *Analytic Mechanics*, The Macmillan Co. 1952 New York.
- 76 FELSON, I. M. & SMITH, T. G.: *Turbulent Flow Drag Reduction by Dilute Poly(Ethylene Oxide) Solutions in Capillary Tubes*, AIChE Symposium Series 130 69 1973 58.
- 77 FENG, S.: *Modeling Failure in Consolidated Rocks*, The Technical Review 34/3 1986 15.
- 78 FERRY, John D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*, John Wiley & Sons, Inc. 1980 New York.
- 79 FIGUEIREDO, Djairo G. de : *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Editora Edgard Blücher Ltda. 1977 São Paulo.
- 80 FINLAYSON, Bruce A.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, Inc. 1972 New York.
- 81 FORD, W. G. F. & PENNY, G. S.: *Influence of Downhole Conditions on the Leakoff Properties of Fracturing Fluids*, SPE Prod. Eng. Feb. 1988 43.
- 82 FRANÇA, Júnia L.: *Manual para Normalização de Publicações Técnico-Científicas*, Editora UFMG 1990 Belo Horizonte.
- 83 FREIMAN, S. W. & FULLER Jr., E. R. (editores) : *Fracture Mechanics for Ceramics, Rocks and Concrete*, American Society for Testing and Materials 1981 Baltimore.
- 84 FRISINGER, M. & COOPER, R. E.: *Techniques for Quantifying Formation Stress and Fracture Fluid Response for Optimum Hydraulic Fracture Design*, SPE 14015.

- 85 FULCHIRON, R. et ali.: *Deconvolution of Polymer Melt Stress Relaxation by the Padé-Laplace Method*, J.Rheology 37/1 1993 17.
- 86 GARDNER, D. C.: *High Fracturing Pressures for Shales and Which Tip Effects May Be Responsible*, SPE 24852 1992.
- 87 GARDNER, D. C. & EIKERTS, J. V.: *Rheological Characterization of Crosslinked and Delayed Crosslinked Fracturing Fluids using a Closed-loop Pipe Viscometer*, SPE 12028 1983.
- 88 GARDNER, D. C. & EIKERTS, J. V.: *The Effects of Shear and Proppant on the Viscosity of Crosslinked Fracturing Fluids*, SPE 11066 1982.
- 89 GEERTSMA, J.: *Problems of Rock Mechanics in Petroleum Production Engineering*, Proc. 1st Congr. of the Intl. Soc. of Rock Mech. I 1966 585.
- 90 GEERTSMA, J.: *Some Rock-Mechanical Aspects of Oil and Gas Well Completions*, Eur. Offshore Pet. Conf. & Exhib. 1978 301.
- 91 GEERTSMA, J.: *Some Rock-Mechanical Aspects of Oil and Gas Well Completions*, Soc. Pet. Eng. J. Dec. 1985 848.
- 92 GEERTSMA, J. & HAAFKENS, R.: *A Comparison of the Theories for Predicting Width and Extend of Vertical Hydraulically Induced Fracture*, J. of En. Res. Tech. 101 1979 8.
- 93 GEERTSMA, J. & de KLERK, F.: *A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hidraulically Induced Fractures*, J. Pet. Tech. Dec. 1969 1571.
- 94 GIESEKUS, H.: *A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation-Dependent Tensorial Mobility*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 11 1982 69.
- 95 GIESEKUS, H.: *On Configuration-Dependent Generalized Oldroyd Derivatives*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 14 1984 47.

- 96 GLASS, J. Edwards : *Advances in Chemistry Series 223 - Polymers in Aqueous Media*, American Chemical Society **1989** Washington.
- 97 GNIRK, P. F.: *The Mechanical Behavior of Uncased Wellbores Situated in Elastic/Plastic Media under Hydrostatic Stress*, Soc. Pet. Eng. J. Feb. **1972** 49.
- 98 GOGARTY, W. B.: *Rheological Properties of Pseudo-Plastic Fluids in Porous Media*, Soc. Pet. Eng. J. Jun. **1967** 149.
- 99 GOODMAN, R. E.: *Introduction to Rock Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. **1980** New York.
- 100 GORDON, R. J., BALAKRISHNAN, C. & PAHWA, S.: *Importance of Filament Formation in Turbulent Drag Reduction*, AIChE Symposium Series 130 69 **1973** 3.
- 101 GREEN, A. E. & ZERNA, W.: *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press **1968** Oxford.
- 102 GUEST, Paul B.: *Laplace Transforms and an Introduction to Distributions*, Ellis Horwood Ltd. **1991** Chinchester.
- 103 GUILLOT, D. & DUNAND, A.: *Rheological Characterization of Fracturing Fluids using a Laser Anemometry*, SPE Journal Feb. **1985** 39.
- 104 HAIMSON, B. & FAIRHURST, C.: *Initiation and Extension of Hydraulic Fracturing in Rocks*, J. Pet. Tech. Sept. **1967** 310.
- 105 HALL Jr., C. D. & DOLLARHIDE, F. E.: *Performance of Fracturing Fluid Loss Agents Under Dynamic Conditions*, J. Pet. Tech. July **1968** 763.
- 106 HALLIBURTON Co.: *Hydraulic Fracturing*, Revised 10YA **1976**.
- 107 HALLIBURTON Co.: *The Fracbook II - Design/Data Manual for Hydraulic Fracturing*, Halliburton Services **1986** Duncan.
- 108 HANNAH, R. R. & MATSON, B. G.: *A Family of Viscous Gelled Water Featuring Moderate Polymer Loading and Low Residue on Breaking*, SPE 6380 **1977**.

- 109 HANSEN, R. J.: *A Theoretical Study of Transient Shear Effects in Drag Reduction*, AIChE Symposium Series 130 69 1973 20.
- 110 HARRIS, P. C.: *Chemistry and Rheology of Borate Crosslinked Fluids at Temperatures Up to 300°F*, SPE 24339 1992.
- 111 HARRIS, P. C. & PENNY, G. S.: *Influence of Temperature and Shear History on Fracturing Fluid Efficiency*, SPE 14258 1985.
- 112 HARRISON, E., KISCHNICK, W. P. & MCGUIRE, W. J.: *The Mechanics of Fracture Induction and Extension*, Trans. AIME 201 1954 232.
- 113 HARTMANN, Friedel : *Introduction to Boundary Elements - Theory and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989 Berlin.
- 114 HAUSER Jr., Arthur A.: *Variable Compleja*, Fondo Educativo Interamericano S.A. 1973 Bogotá.
- 115 HEYNE, E & WHISTLER, R. L.: *Chemical Composition and Properties of Guar Polysaccharides*, J. Amer. Chem. Soc. 70 1948 2249.
- 116 HILDEBRAND, F. B.: *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, Inc. 1949 New York.
- 117 HOEK, E.: *Brittle Failure of Rock*, in *Rock Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons 1968 99.
- 118 HOWARD, G. C. & FAST, C. R.: *Factors Controlling Fracture Extension*, The Can. Min. and Met. Bul. Feb. 1961.
- 119 HOWARD, G. C. & FAST, C. R.: *Hydraulic Fracturing*, Monograph of SPE of AIME 1970 Dallas.
- 120 HUBBERT, M. King : *Darcy's Law and the Field Equations of the Flow of Underground Fluids*, Trans. AIME 207 1956 222.

- 121 HUBBERT, M. King : *Horizontal Fractures - Debunking a Myth*, The Technical Review 34/3 1986 4.
- 122 HUBBERT, M. King : *Mechanical Basis for Certain Familiar Geologic Structures*, Bull. of the Geol. Soc. Am. 62 1961 355.
- 123 HUBBERT, M. King : *Mechanics of Hydraulic Fracturing*, Trans. AIME 210 1957 153.
- 124 HUBBERT, M. King & WILLIS, D. G.: *Mechanics of Hydraulic Fracturing*, Trans. AIME 210 1957 153.
- 125 IKOKU, C. U. & RAMEY Jr., H. J.: *Transient Flow of Non-Newtonian Power-Law Fluids in Porous Media*, Soc. Pet. Eng. J. Jun. 1979 164.
- 126 INCE, E. L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc. 1956 New York.
- 127 ISAYEV, A. I.: *Unsteady Channel Flow of Polymeric Fluids*, J.Rheology 28/4 1984 411.
- 128 JAEGER, John C. & COOK, Neville G. W.: *Fundamentals of Rock Mechanics*, Chapman and Hall Ltd. 1979 London.
- 129 JELMERT, T. A.: *Theory and Application of Polynomial Type Curves*, SPE 25876 1993.
- 130 JOHNSON, D.: *Evaluating S_H with Biot's Poroelastic Theory*, The Technical Review 34/3 1986 24.
- 131 JOSEPH, Daniel D.: *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Springer-Verlag 1990 New York.
- 132 KAEUBLE, D. H.: *Computer-Aided Design of Polymers and Composites*, Marcel Dekker, Inc. 1985 New York.

- 133 KALIKA, D. S. & MORTON, M. D.: *Wall Slip and Extrudate Distortion in Linear Low-Density Polyethylene*, J.Rheology 31/8 1987 815.
- 134 KEER, L. M.: *Stress Distribution at the Edge of an Equilibrium Crack*, J. Mech. Phys. Solids 12 1964 149.
- 135 KEMP, L. F.: *Study of Nordgren's Equation of Hydraulic Fracturing*, SPE 18959 1989.
- 136 KERN, L. R., PERKINS, T. K. & WYANT, R. E.: *The Mechanics of Sand Movement in Fracturing*, Trans. AIME 216 1959 403.
- 137 KHAGRAM, M., GUPTA, R. K. & SRIDHAR, T.: *Extensional Flow of Xanthan Gum Solutions*, J.Rheology 29/2 1985 191.
- 138 KHRISTIANOVICH, S. A. & ZHELTOV, Y. P.: *Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Liquid*, Proc 4th World Pet. Congress II 1955 579.
- 139 KHRISTIANOVITCH, S.A., ZHELTOV, Y.P., BARENBLATT, G.I. & MAXIMOVICH, G.K.: *Theoretical Principles of Hydraulic Fracturing of Oil Strata*, Proc.5th World Pet. Congress II 1959 289.
- 140 KIM, K. E., LITTLE, R. C. & TING, R. Y.: *Polymer Structural Effects in Turbulent Drag Reduction*, AIChE Symposium Series 130 69 1973 39.
- 141 KIRBY, T. M.: *Shreveport Rock Busters find Frac Height Using Log Techniques*, Tech. Review 26/2 17.
- 142 KOHLHAAS, C. A.: *Evaluation of Well Completions in Southeast Asia for Sand Control*, Offshore Southeast Asia Conference 1976 166.
- 143 KREIDER, Donald , KULLER, Robert C., et alli: *Introdução à Análise Linear, Vol.I-III* Ao Liv. o 7 i. o . . A 1972 Rio de Janeiro.
- 144 KREYSZIG, Erwin : *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. 1988 New York.

- 145 KUMOR, S. M. & SYLVESTER, N. D.: *Effects of a Drag-Reducing Polymer on the Turbulent Boundary Layer*, AIChE Symposium Series 130 69 1973 1.
- 146 LAGRONE, K. W. & RASMUSSEN, J. W.: *A New Development in Completion Methods - The Limited Entry Technique*, J. Pet. Tech. Jul. 1963 695.
- 147 LAM, K. Y., CLEARY, M. P. & BARR, D. T.: *A Complete Three-Dimensional Simulator for Analysis and Design of Hydraulic Fracturing*, SPE 15266 1986.
- 148 LANG, Serge : *Álgebra Linear*, Editora Edgard Blücher Ltda. 1971 São Paulo.
- 149 LaGRONE, C. C., BAUMGARTNER, S. A. & WOODROOF Jr., R. A.: *Chemical Evolution of a High-Temperature Fracturing Fluid*, Soc. Pet. Eng. J. Oct. 1985 623.
- 150 le TIRANT, P. & GAY, L.: *Manuel de Fracturation Hydraulique*, Éditions Technip 1972 Paris.
- 151 LEE, W. S.: *Study of the Effects of Fluid Rheology on Minifrac Analysis*, SPE 16916 1987.
- 152 LEE, W. S. & JANTZ, E. L.: *A 3-D Hydraulic Propagation Theory Coupled with 2-D Proppant Transport*, SPE 19770 1989.
- 153 LI, E., GREENHORN, R. C. & SCARTH, B. R.: *Measurement of Rheological Properties of Fracturing Fluids in Dynamic Mode*, J. Can Pet. Tech. 27/4 1988 55.
- 154 LIEBOWITZ, H. (editor): *Fracture - An Advanced Treatise - Mathematical Fundamentals*, Vol.II Academic Press, Inc. 1968 New York.
- 155 LOBATO, C. S. D. D.: *Avaliação do Teor de Resíduo em Diversas Composições de Fluidos de Fraturamento*, CENPES 1041 - STE 02.04.38 1990.
- 156 LODGE, Arthur S., RENARDY, Michael & NOHEL, John A. (editores): *Viscoelasticity and Rheology*, Academic Press, Inc. 1985 Orlando.
- 157 LOVE, A. D. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, Inc. 1944 New York.

- 158 LUBINSKI, A.: *The Theory of Elasticity for Porous Bodies displaying a Strong Pore Structure*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech. **1954** 27.
- 159 LUISKUTTY, C. T. & TOMUTSA, L.: *A Semianalytical Model of Hydraulic Fracture Growth Through Weak Barrier*, SPE 15012 **1986**.
- 160 LUND, O. & IKOKU, C. U.: *Pressure Transient Behavior of Non-Newtonian/Newtonian Fluid Composite Reservoirs*, Soc. Pet. Eng. J. Apr. **1981** 271.
- 161 MACDONALD, R. G. & CASWELL, G. R.: *Design and Analysis of Fracture Treatments on the Medicine Hat Formation Using a Hydraulic Fracture Simulator*, 34th Ann. Tech. Meet. Pet. Soc. Cim - paper n°. 83-34-35 **1983**.
- 162 MARTINS, A. S. & RODRIGUES, V. F.: *Fraturamento Hidráulico sob a Ótica Operacional*, SEDES (material didático).
- 163 MARK, James E. et alii : *Physical Properties of Polymers*, American Chemical Society **1984** Washington.
- 164 MASHELKAR, R. A., MUJUMDAR, A. S. & KAMAL, R. (editores): *Transport Phenomena in Polymeric Systems*, Ellis Horwood Ltd. **1989** London.
- 165 McCABE, Warren L., SMITH, Julian C. & HARRIOTT, Peter : *Unit Operations of Chemical Engineering*, McGraw-Hill Book Co. **1985** Singapore.
- 166 McDANIEL, R. R., DEYSARKAR, A. K., et alii: *An Improved Method for Measuring Fluid Loss at Simulated Fracture Conditions*, Soc. Pet. Eng. J. Aug. **1985** 482.
- 167 MELTON, L. L. & MALONE, W. T.: *Fluid Mechanics Research and Engineering Application in Non-Newtonian Fluid System*, Ann. SPE Fall Meet **1963**.
- 168 MENA, Baltasar, GARCIA-REJON, Andres & RANGEL-NAFAILE, Carlos (editores): *Advances in Rheology, Vol.I-IV*, Universidad Nacional Autónoma de Mexico **1984** Mexico.

- 169 MEYER, B. R.: *Design Formulae for 2-D and 3-D Vertical Hydraulic Fractures - Model Comparison and Parametric Studies*, SPE 15240 **1986**.
- 170 MEYER, B. R.: *Three-Dimensional Hydraulic Fracturing Simulation on Personal Computers - Theory and Comparison Studies*, SPE 19329 **1989**.
- 171 MEYER, B. R. & HAGEL, M. W.: *Simulated Mini-Frac Analysis*, J. Can. Pet. Tech. 28/5 **1989** 63.
- 172 MICKLEY, Harold S., SHERWOOD, Thomas K. & REED, Charles H.: *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, McGraw-Hill Book Co. **1957** New York.
- 173 MORALES, R. H.: *Microcomputer Analysis of Hydraulic Fracture Behavior using a Quasi 3-D Simulator*, SPE 15305 **1986**.
- 174 MORITA, N., WHITFILL, D. L. & WAHL, H. A.: *Stress-Intensity Factor and Fracture Cross-Sectional Shape Predictions from a 3-D Model for Hydraulically Induced Fractures*, J. Pet. Tech. Oct. **1988** 1329.
- 175 MORSE, Philip M. & FESHBACH, Herman : *Methods of Theoretical Physics*, McGraw- Hill Book Co. **1953** New York.
- 176 MUSKAT, M.: *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, International Human Resources Development Co. **1982** Boston.
- 177 MUSKHELISHVILI, N. I.: *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, trad. J. R. M. Radok, P. Noordhoff Ltd. **1962** Groningen.
- 178 NACEUR, K. B., THIERCELIN, M. & TOUBOUL, E.: *Simulation of Fluid Flow in Hydraulic Fracturing: Implications for 3D Propagation*, SPE Production Engineering May **1982** 133.
- 179 NGHIEM, L. X., FORSYTH, P. A. & BEHIE, A.: *A Fully Implicit Hydraulic Fracture Model*, SPE 10506 **1982**.

- 180 NIERODE, D. E.: *Comparison of Hydraulic Fracture Design Methods to Observed Field Results*, SPE 12059 **1983**.
- 181 NOLTE, K. G.: *A General Analysis of Fracturing Decline with Application to Three Models*, SPE Form. Eval. Dec. **1986** 571.
- 182 NOLTE, K. G.: *Application of Fracture Design Base on Pressure Analysis*, SPE Prod. Eng. Feb. **1988** 31.
- 183 NOLTE, K. G.: *Determination of Fracture Parameters from Fracturing Pressure Decline*, SPE 8341 **1979**.
- 184 NOLTE, K. G.: *Fluid Flow Considerations in Hydraulic Fracturing*, SPE 18537 **1988**.
- 185 NOLTE, K. G.: *Principles for Fracture Design Base on Pressure Analysis*, SPE Prod. Eng. Feb. **1988** 22.
- 186 NOLTE, K. G., MACK, M. G. & LIE, W. L.: *A Systematic Method for Applying Pressure Decline: Part I*, SPE 25845 **1993**.
- 187 NOLTE, K. G. & SMITH, M. B.: *Interpretation of Fracturing Pressures*, SPE 8297 **1979**.
- 188 NORDGREN R. P.: *Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture*, Soc. Pet. Eng. J. Aug. **1972** 306.
- 189 NUR, A. & BYERLEE, J. D.: *An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rock with Fluids*, J. Geoph. Res. 76/26 **1971** 6414.
- 190 ODEH, A. S. & YANG, H. T.: *Flow of Non-Newtonian Fluids in Porous Media*, Soc. Pet. Eng. J. Jun. **1979** 155.
- 191 OLDROYD, J. G.: *An Approach to Non-Newtonian Fluid Mechanics*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 14 **1984** 9.
- 192 OLDROYD, J. G.: *On the formulation of Rheological Equations of State*, Proc. Roy. Soc. London A200 **1950** 523.

- 193 ORBEY, N. & DEALY, J. M.: *Determination of the Relaxation Spectrum from Oscillatory Shear Data*, J.Rheology 35/6 1991 1035.
- 194 PALIOURAS, John D. & MEADOWS, Douglas S.: *Complex Variables for Scientists and Engineers*, Macmillan Publishing Co. 1990 New York.
- 195 PANCHENKOV, G. M. & LEBEDEV, V. P.: *Chemical Kinetics and Catalysis*, trad. G.Leib, Mir Publishers 1976 Moscow.
- 196 PAPANASTASIOU, A. C., SCRIVEN, L. E. & MACOSKO, C. W.: *An Integral Equation for Mixed Flows: Viscoelastic Characterization*, J. Rheology, 27/4 1983 387.
- 197 PASCAL, H.: *Dynamics of Moving Interface in Porous Media for Power-Law Fluids with Yield Stress*, Int. J. Eng. Sci. 22/5 1984 577.
- 198 PASCAL, H.: *Nonsteady Flow of Non-Newtonian Fluids Through a Porous Medium*, Int. J. Eng. Sci. 21/3 1983 199.
- 199 PASCAL, H.: *Nonsteady Flow Through Porous Media in the Presence of a Threshold Gradient*, Acta Mechanica 39 1981 207.
- 200 PASCAL, H.: *Rheological Behavior Effect of Non-Newtonian Fluids on Dynamic of Moving Interface in Porous Media*, Int. J. Eng. Sci. 22/3 1984 227.
- 201 PASCAL, H.: *Rheological Effects of Non-Newtonian Fluids on Gravitational Segregation Mechanism in a Porous Media*, Int. J. Eng. Sci. 22/7 1984 857.
- 202 PASCAL, H.: *Some Problems Related to the Quantitative Evaluation of Physical Properties of the Porous Medium from Flow Tests with Non-Newtonian Fluids*, Int. J. Eng. Sci. 23/3 1985 307.
- 203 PASCAL, H. & PASCAL, F.: *Flow of Non-Newtonian Fluids Through Porous Media*, Int. J. Eng. Sci. 23/5 1985 307.
- 204 PATANKAR, Suhas V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Co. 1980 New York.

- 205 PENNY, G. S., CONWAY, M. W. & LEE, W.: *Control and Modeling of Fluid Leakoff During Hydraulic Fracturing*, J. Pet. Tech. June **1985** 1071.
- 206 PERKINS, T. K. & KERN, L. R.: *Widths of Hydraulic Fractures*, J. Pet. Tech. Sept. **1961** 937.
- 207 PERKINS, T. K. & KRECH, W. W.: *The Energy Balance Concept of Hydraulic Fracturing*, Soc. Pet. Eng. J. Mar. **1968** 1.
- 208 PETERSON, J. P., ZIELINSKI, P. B. & CASTRO, W. E.: *High Polymer Drag Reduction in Open Channel Flow*, AIChE Symposium Series 130 69 **1973** 82.
- 209 PETRIE, C. J. S.: *Extensional Flows of Oldroyd Fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 14 **1984** 189.
- 210 PETRIE, Chris J. S.: *Elongational Flows - Aspects of the Behavior of Model Elastico-viscous Fluids*, Pitman Publishing Ltd. **1979** London.
- 211 PIRSON, Silvain J.: *Elements of Oil Reservoir Engineering*, McGraw-Hill Book Co. **1950** New York.
- 212 PITOMBO, N. E. S.: *Fraturamento Hidráulico*, SEDES (material didático)
- 213 POPOV, Egor P.: *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Editora Edgard Blücher Ltda. **1978** São Paulo.
- 214 POULSEN, D. K.: *Fracturing Net Pressure Analysis for Variable-Rate Injection*, SPE 23434 **1991**.
- 215 POULSEN, D. K. & LEE, W. S.: *Fracture Design With Time- and Temperature-Dependent Fluid Properties*, SPE 12483 **1984**.
- 216 PRESS, William H., FLANNERY, Brian P., et alli: *Numerical Recipes (Fortran version)*, Cambridge University Press **1989** New York.
- 217 RAUDKIVI, A. J. & CALLANDER, R. A.: *Analysis of Groundwater Flow*, Edward Arnold Ltd. **1975** London.

- 218 REID, Robert C., PRAUSNITZ, John M. & POLING, Bruce E.: *The Properties of Gases & Liquids*, McGraw-Hill Book Co. **1988** Singapore.
- 219 RIVLIN, R. S.: *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids. I*, Proc. Roy. Soc. London A193 **1948** 260.
- 220 ROCHEFORT, W. E. & MIDDLEMAN. S.: *Rheology of Xanthan Gum: Salt, Temperature and Strain Effects in Oscillatory and Steady Shear Experiments*, J. Rheology 31/4 **1987** 337.
- 221 ROSEN, Stephen L.: *Fundamental Principles of Polymeric Materials for Practicing Engineers*, Barnes & Noble, Inc. **1971** New York.
- 222 ROSOLEN, M. A.: *Escoamento de Fluidos Não-Newtonianos em Meios Porosos*, Unicamp (material didático) **1991**.
- 223 ROSOLEN, M. A. & CAMPOS. J. C. B.: *Produtividade de Poços Estimulados por Fraturas Verticais*, Bol. Tec. Petrobrás 30(2/3) **1987** 115.
- 224 SARDA, J. P., DETIENNE, J. L. & LASSUS-DESSUS, J.: *Recommendations for Micro-fracturing Implementations and the Interpretations of Micro- and Pre-Fracturing*, Révue de l'Inst. Fran. du Pét. 42/2 **1992** 179.
- 225 SAVINS, J. G.: *Non-Newtonian Flow Through Porous Media*, Ind. and Eng. Chem. Oct. **1969** 18.
- 226 SCHECHTER, Robert S.: *Oil Well Stimulation*, Prentice Hall, Inc. **1992** Englewood Cliffs, New Jersey.
- 227 SETTARI, A.: *A New General Model of Fluid Loss in Hydraulic Fracturing*, SPE 11625 **1983**.
- 228 SETTARI, A.: *Simulation of Hydraulic Fracturing Process*, Soc. Pet. Eng. J. Dec. **1980** 487.

- 229 SETTARI, A. & CLEARY, M. P.: *Three-Dimensional Simulation of Hydraulic Fracturing*, J. Pet. Tech. July **1984** 1177.
- 230 SETTARI, A. & PRICE, W. S.: *Simulation of Hydraulic Fracturing in Low Permeability Reservoirs*, SPE 8939.
- 231 SHAH, S. N.: *Rheological Characterization of Hydraulic Fracturing Slurries*, SPE 22839 **1991**.
- 232 SHERMAN, Frederick S.: *Viscous Flow*, McGraw-Hill Publishing Co. **1990** Singapore.
- 233 SHLYAPOBERSKY, J.: *Energy Analysis of Hydraulic Fracturing*, 26th US Symp. Rock Mech. **1985** 539.
- 234 SIENKO, Michell J. & PLANE, Robert A.: *Química*, Cia. Editora Nacional **1970** São Paulo.
- 235 SIH, G. C. (editor): *Mechanics of Fracture - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff International Publishing **1973** Leyden.
- 236 SILVA, M. G. P. & LOBATO, C. S. D. D.: *Reologia de Fluidos Reticulados em Função da Temperatura*, CENPES 769 - STE 02.04.40 **1987**.
- 237 SINCLAIR, A. R.: *Rheology of Viscous Fracturing Fluids*, JPT Jun. **1991** 711.
- 238 SMITH, Dwight K.: *Cementing*, Monograph of SPE of AIME **1976** Dallas.
- 239 SMITH, M. B.: *Stimulation Design for Short, Precise Hydraulic Fractures*, Soc. Pet. Eng. J. June **1985** 371.
- 240 SMITH, M. B., MILLER II, W. K. & HAGA, J.: *Tip Screenout Fracturing - A technique for Soft, Unstable Formations*, SPE Prod. Eng. May **1987** 95.
- 241 SNEDDON, I. N.: *The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid*, Proc. Roy. Soc. London A187 **1946** 229.

- 242 SNEDDON, Ian N.: *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill Book Co. 1972 New York.
- 243 SOKOLNIKOFF, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co. 1956 New York.
- 244 SPE Reprint Series : *Well Completions*, SPE of AIME 1970 Dallas.
- 245 SPE Reprint Series : *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*, SPE of AIME 1992 Dallas.
- 246 SPE Reprint Series : *Well Completions*, Vol I,II SPE of AIME 1978 Dallas.
- 247 SPIEGEL, Murray R.: *Análise de Fourier*, McGraw-Hill Book Co. 1976 São Paulo.
- 248 SPIEGEL, Murray R.: *Análise Vetorial*, McGraw-Hill Book Co. 1980 São Paulo.
- 249 SPIEGEL, Murray R.: *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, McGraw-Hill Book Co. 1973 São Paulo.
- 250 SPIEGEL, Murray R.: *Variáveis Complexas*, McGraw-Hill Book Co. 1981 São Paulo.
- 251 STASNA, J. & De KEE D.: *On the Predictions of the Primary Normal Stress Coefficients from Shear Viscosity* , J. Rheology 26/6 1982 565.
- 252 SUMAN Jr., G. O.: *Unconsolidated Sand Stabilization Through Wellbore Stress State Control*, SPE 5717 1975.
- 253 TAM, K. C., TIU, C.: *Steady and Dynamic Shear Properties of Aqueous Polymer Solutions*, J. Rheology 33/2 1992 257.
- 254 TAN, H. C., WESSELOWSKI, K. S. & WILLINGHAM, J. D.: *Delayed Borate Crosslinked Fluids Minimize Pipe Friction Pressure*, SPE 24342 1992.
- 255 TANNER, Roger I.: *A New Constitutive Equation for Dilute Polymer Solution and Some Numerical Studies in Random Velocity Fields*, AIChE Symposium Series 130 69 1973 24.

- 256 TANNER, Roger I.: *Engineering Rheology*, Oxford University Press **1988** Oxford.
- 257 TANNER, Roger I.: *From A to (BK)Z in Constitutive Relations*, J.Rheology 32/7 **1988** 673.
- 258 TEEUW, D. & HASSELINK, F. T.: *Power-Law Flow and Hydrodynamic Behavior of Bio-polymer in Porous Media*, SPE 8982 **1980**.
- 259 THOMAS, L. C., GREENE, H. L., et alli: *Turbulence Studies of Steady and Pulsed Flow of Drag-Reducing Solutions*, AIChE Symposium Series 130 69 **1973** 14.
- 260 THURSTON, G. B.: *Rheology of Drilling Fluids*, Rheology Laboratory - PenKem, Inc.
- 261 THURSTON, G. B.: *The Effects of Frequency of Oscillatory Flow on the Impedance of Rigid, Blood-Filled Tubes*, Biorheology 13 **1976** 191.
- 262 THURSTON, G. B.: *Theory of Oscillation of a Viscoelastic Fluid in a Circular Tube*, The Journal of the Acoustical Society of America Feb **1960** 210.
- 263 THURSTON, G. B.: *Viscoelastic Properties of Xanthan Gum Gels*, Rheology Laboratory - PenKem, Inc.
- 264 TIJONOV, A. N. & SAMARSKY, A. A.: *Ecuaciones de la Fisica Matematica*, trad. J. J. Tolosa, Editorial Mir **1980** Moscu.
- 265 TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co. **1982** Tokio.
- 266 TOKSÖS, M. N., CHENG, C. H. & TIMUR, A.: *Velocities of Seismic Waves in Porous Rocks*, Geophysics 41/4 **1976** 621
- 267 TOROK, J. S. & ADVANI, S. H.: *Continuous Transformation Groups and Series Solution of Initial Value Problems*, Int. J. Non-Linear Mech. **1985** 283.
- 268 TOROK, J. S. & ADVANI, S. H.: *Non-Newtonian Fluid Flow in a Reservoir - An Application to Hydraulic Fracturing*, J. En. Res. Tech. (Trans. ASME) Mar. **1987** 6.

- 269 UGURAL, A. C. & FENSTER, S. K.: *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Elsevier Science Publishers B.V. 1975 New York.
- 270 VAIRON, J. P.: *Proprietes Mecaniques des Polymeres*, Universite P. et M. Curie.
- 271 van POOLEN, H. K. & JARGON, J. R.: *Steady- State and Unsteady-State Flow of Non- Newtonian Fluids Through Porous Media*, Soc. Pet. Eng. J. Mar. 1969 80.
- 272 van WYLEN, Gordon J. & SONNTAG, Richard E.: *Fundamentos da Termodinâmica Clássica*, Editora Edgard Blücher 1973 São Paulo.
- 273 VEATCH Jr., R. W.: *Overview of Current Hydraulic Fracturing and Treatment Technology - Part 2*, J. Pet. Tech. Apr. 1983 677.
- 274 VEATCH Jr., R. W.: *Overview of Current Hydraulic Fracturing and Treatment Technology - Part 1*, J. Pet. Tech. Mai. 1983 853.
- 275 VEATCH Jr., R. W. & MOSCHOVIDIS, Z. A.: *An Overview of Recent Advances in Hydraulic Fracturing Technology*, SPE 14085 1986.
- 276 VINOGRADOV, G. V. & MALKIN, A. Ya.: *Rheology of Polymers - Viscoelastic and Flow of Polymers*, trad. Artavaz Beknazarov, Mir Publishers 1980 Moscow.
- 277 VOLTERRA, Enrico & GAINES, J. H.: *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, Inc. 1971 Englewood Cliffs.
- 278 WAGNER, M. H.: *Zur Netzerktheorie von Polymer-Schmelzen*, Rheol. Acta 18 1979 33.
- 279 WALTERS, K.: *Rheometry*, Chapman and Hall Ltd. 1975 London.
- 280 WEBSTER, K. R. & BERRY, S. C.: *A Continuous Multistage Fracturing Technique*, SPE 977 1965.
- 281 WHISTLER, R. L. & DURSO, D. F.: *A New Crystalline Trisaccharide from Partial Acid Hydrolysis of Guaran and the Structure of Guaran*, J. Amer. Chem. Soc. 74 1952 5140.

- 282 WHORLOW, R. W.: *Rheological Techniques*, Ellis Horwood Ltd. **1980** Chichester.
- 283 WILKENS, R., SIMMONS, G., et alli: *The Physical Properties of a Set of Sandstones - Part I. The Effects of Fine-grained Pore-filling Material on Compressional Wave Velocity*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 23/4 **1986** 313.
- 284 WILLIAMS, B. B.: *Fluid Loss from Hidraulically Induced Fractures*, Trans. AIME **249** **1970**.
- 285 WILLIAMS, Bert B., GIDLEY, John L. & SCHECHTER, Robert S.: *Acidizing Fundamentals*, Monograph of SPE of AIME **1979** Dallas.
- 286 WILSON Jr., E. Brigh : *An Introduction to Scientific Research*, McGraw-Hill Book Co. **1952** New York.
- 287 WISSLER, T. M. & SIMMONS, G.: *The Physical Properties of a Set of Sandstones - Part I. Permanent and Elastic Strains During Hydrostatic Compression to 200 MPa*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 22/6 **1985** 393.
- 288 WHISTLER, Roy L.: *Industrial Gums - Polysaccharides and Their Derivatives*, Academic Press, Inc. **1973** London.
- 289 WOLFRAN, Stephen: *Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Co. **1993** Reading.
- 290 YEW, C. H. & LIU, G. F.: *Fracture Tip and Critical Stress Intensity Factor of a Hydraulically Induced Fracture*, SPR Pro.& Facil. Aug. **1993** 171.

Abstract

Hydraulic Fracturing is a process used in Petroleum Industry for wells stimulation and it consists in the opening and consolidation of a fracture in a rock formation, creating a flow channel with high permeability. The physical medium employed in this treatment is a fluid of special characteristics which transmits to the rock the necessary hydraulic power for having this work done. This fluid also must carry efficiently the proppant agent that will support the fracture.

The project of a hydraulic fracturing results from the composition of topics of many fields of scientific and technological knowledge, and the control of the rheological behavior of the fluid is fundamental to equate correctly the involved phenomena. Various fracturing fluid formulations are available in the market, but the most used is that obtained from the HPG polymer. This polysaccharide is derived from the guar gum and it have high economics, generating fluids operationally safes.

This fluid, like all polymeric fluids, is viscoelastic, but its elastic component is not included in the available hydraulic fracturing models, which consider it as a newtonian fluid or, in the most elaborated theories, as a non-newtonian fluid. Now, the advent of modern experimental apparatus makes possible a more complete evaluation of the rheological parameters of this fluid and the formulation of an improved model for this flow.

The present work reports the investigation into the fracturing fluids viscoelasticity, obtaining its rheological parameters and remodeling this flow. It is made a revision of the state-of-art of the available models and it is proposed contributions to many aspects of this process, with experimental verification.

Among the introduced theoretical contributions can be mentioned: the tensorial formulation of the fluid flow in the fracture, the proposition of a new approach to the fluid filtration phenomenon through its walls, the analytical equating of the pressure behavior in its interior and the direct coupling of the involved fields in the modeling of its dimensions.

The viscous and elastic parameters from this fracturing fluids are acquired experimentally, and new analytical expressions relating the elastic to the viscous parameters are provided. It is established relations that allow the extrapolation of its rheological behavior to others temperature and concentration ranges.

The introduction of this theoretical concepts in the modeling reflects on the fracture final geometry changing its elliptical profile to cuneiform, resulting longer fractures than the usually obtained by the conventional models. The fluid elastic component introduces an additional tension on the equating and its consequence in the fracture geometry depends on the rheological parameters and on the project specifications.

Résumé

La fracturation hydraulique est un procédé utilisé dans l'industrie pétrolière pour la stimulation des puits, consistant à ouvrir et à consolider une fracture dans une formation rocheuse, ayant pour but la création d'un canal d'écoulement très perméable. L'agent qui rend possible ce procédé est un fluide avec des caractéristiques spéciales qui permet la transmission de la puissance nécessaire à la roche pour la réalisation du travail, et qui doit, aussi, transporter efficacement le matériel granulaire qui va soutenir la fracture.

Le projet d'une fracturation résulte de la composition des topiques de divers domaines de la connaissance scientifique et technologique, et le contrôle de la conduite rhéologique de ce fluide est fondamental pour résoudre correctement les équations des phénomènes présents. Diverses formulations de ce fluide sont disponibles, mais la plus utilisée c'est celle qui est obtenue du HPG, un polisaccharide dérivé de la gomme de guar, à cause de son aspect économique et sa sécurité opérationnelle.

Cet fluide, comme n'importe quel fluide polymérique, il est viscoélastique, mais son composant élastique n'est pas computé dans les théories disponibles par le calcul des dimensions des fractures hydrauliques, qui le traitent comme un fluide qui obéit la loi de Newton ou, dans les théories les plus élaborées, comme un qui ne l'obéit pas. L'apparition récente de nouveaux appareils expérimentaux rend possible une évaluation plus complète des paramètres rhéologiques de ces fluides en permettant la formulation d'un modèle plus accompli pour cet écoulement.

Cet ouvrage se propose à rechercher cet aspect du problème, en déterminant ses paramètres rhéologiques et en modelant son écoulement avec l'inclusion de sa conduite

élastique. Pour y arriver, tout le modelage traditionnel est revu et des contributions sont incluses à divers aspects inhérents à ce procédé, qui peuvent être étendues à des applications dans d'autres domaines en corrélation.

Les innovations introduites sont: la formulation tensorielle d'écoulement du fluide dans la fracture, l'obtention des équations analytiques de la conduite de la pression dans son intérieur, la proposition d'un nouvel abordage pour le phénomène de la filtration du fluide par les parois, le couplage direct des domaines présents dans le modelage de ses dimensions, l'obtention expérimentale des paramètres visqueux et élastiques de ces fluides de fracturation, l'expression analytique des paramètres élastiques en fonction des visqueux, et l'établissement des relations qui permettent l'extrapolation de sa conduite rhéologique dans des segments de variations de température et de concentration.

L'introduction de ces concepts et de ces résultats répercute dans la géométrie finale de la fracture en changeant son profil de elliptique en cunéiforme, en résultant des fractures plus longues que celles obtenues normalement avec le modelage traditionnel. Le composant élastique des fluides introduit une contrainte additionnelle dans les équations et son reflet dans la géométrie de la fracture dépend de ses paramètres rhéologiques et des spécifications du projet.

Apêndice A - Análise tensorial

As leis físicas, para serem válidas, devem ser independentes dos sistemas de coordenadas usados para exprimi-las matematicamente. Esta independência é conseguida expressando-se as grandezas físicas através de operadores matemáticos n-dimensionais chamados *tensores* que promovem a transformação entre sistemas de coordenadas, preservando suas propriedades, através de produtos de relações diferenciais entre as coordenadas dos sistemas envolvidos. A análise tensorial é uma generalização da análise vetorial, estendendo seus conceitos para o espaço n-dimensional.

Em termos matemáticos, um *campo* pode ser definido como um conjunto de funções associadas às coordenadas de um ponto no espaço. Conceitualmente, um campo é uma idealização matemática conveniente de uma situação física na qual a *extensão* é um elemento essencial, ou seja, na qual ela não pode ser analisada em termos das posições de um número finito de partículas. Densidade, temperatura e pressão são exemplos de campos pois podem ser representados por funções das três coordenadas espaciais e do tempo, sendo obviamente idealizações aproximadas por não levarem em conta as propriedades atômicas da matéria; são conhecidos como *campos materiais*. Já os campos potenciais e de forças permitem a análise de *ações à distância*, nos quais o movimento relativo e a posição de um corpo afetam o comportamento de outro; seus valores em um dado ponto no espaço são as medidas da influência dos elementos do corpo naquele ponto.

Um campo é dito *escalar* quando pode ser representado por um simples número ou uma função de espaço e tempo. Os campos materiais acima descritos são exemplos de campos escalares. Sua principal propriedade é sua invariância sob uma transformação de

coordenadas espaciais. O valor de um campo em um determinado ponto independe do sistema de coordenadas usado para expressá-lo. A derivada de um campo escalar em relação às coordenadas de um sistema de coordenadas retangular mede a rapidez com que este campo varia devido a uma mudança de posição e é chamada *gradiente*. Sua derivada segunda, chamada *laplaciano*, desempenha papel fundamental na descrição matemática de fenômenos físicos, e representa, em termos gráficos, uma curvatura da função no ponto considerado. O laplaciano de um campo em um determinado ponto mede a diferença entre o valor do campo neste ponto e os valores médios do mesmo nos pontos vizinhos, ou seja, se o laplaciano de um campo em uma determinada região for nulo, o que se traduz na *equação de Laplace*, tal campo não terá máximos nem mínimos nesta região. Se esta região possuir uma carga (elétrica, mecânica, térmica, etc.), o laplaciano do campo gerado por esta carga será, num determinado ponto desta região, proporcional à densidade superficial de carga neste ponto; portanto, o equacionamento deste fenômeno resulta na *equação de Poisson*.

O *campo vetorial*, além de sua amplitude necessita da explicitação de sua direção em cada ponto para completa caracterização. Os campos de força são os principais exemplos deste tipo de campo. Os vetores não são invariantes a uma troca de sistema de coordenadas no mesmo sentido em que os escalares são.

As grandezas físicas encontradas tanto na dinâmica dos fluidos poliméricos quanto na mecânica das rochas, podem ser colocadas nas seguintes categorias: *escalares*, que são tensores de ordem zero, como o deslocamento, taxa de cisalhamento, temperatura, energia e tempo; *vetores*, tensores de ordem um, como a velocidade, momento, aceleração e força; e tensores de segunda ordem, chamados simplesmente de *tensores*, como os tensores tensão, deformação, taxa de deformação e vorticidade. Pode-se distinguir tais quantidades através da seguinte notação, conhecida como *notação de Gibbs*:

e = escalar (itálico)

\mathbf{v} = vetor (itálico em negrito)

$\boldsymbol{\tau}$ = tensor de segunda ordem (grego em negrito)

\mathbf{B} = Tensor de ordem arbitrária (sem serifa em negrito)

Símbolos gregos em negrito acompanhados de um índice subscrito, como δ_1 , são vetores. Os vetores e tensores podem ser multiplicados de diversas formas, e tais operações são indicadas por símbolos especiais: \cdot , $:$ e \times , e agrupadas, quando ocorrem, por símbolos que indicam o tipo de grandeza produzida pela multiplicação:

$()$ = escalar; $[\]$ = vetor; $\{ \}$ = tensor de segunda ordem

Um vetor é definido como uma grandeza determinada por sua magnitude e direção. A *adição* e *subtração* de dois vetores obedecem às propriedades comutativa e associativa e são definidas por uma construção geométrica bastante conhecida. O *produto* de um vetor por um escalar, além dessas propriedades, também é associativa e altera somente sua magnitude, mantendo sua direção.

O *produto escalar* de dois vetores é definido por

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v w \cos \phi_{vw}$$

sendo, portanto, a magnitude de \mathbf{w} multiplicada pela projeção de \mathbf{v} em \mathbf{w} , ou vice-versa, e independente do sistema de coordenadas utilizado, o que o torna um escalar verdadeiro, o mais simples invariante formado numa operação entre dois vetores. Obedece às propriedades comutativa e distributiva, não sendo associativo. O trabalho realizado por um corpo em movimento é o produto escalar da força pelo deslocamento.

O *produto vetorial* entre dois vetores é definido por

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \{v w \sin \phi_{vw}\} \mathbf{n}_{vw}$$

onde \mathbf{n}_{vw} é um vetor unitário normal ao plano formado pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} apontando no sentido dado pela regra da mão direita. A magnitude deste produto representa a área do paralelogramo formado por estes vetores. O momento angular de uma partícula sobre um

ponto é representado pelo produto vetorial de seu momento pelo raio que determina sua posição em relação à origem, o que define, por exemplo, o torque.

O *produto misto* de três vetores, representado por $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}])$, fornece o volume do paralelogramo definido pelos vetores.

A descrição das operações entre tensores em termos das coordenadas do sistema de referência é facilitada pela utilização de dois operadores, o *delta de Kronecker* δ_{ij} , e o símbolo de permutação ϵ_{ijk} , definidos por:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1, & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk} = +1, & \text{se } ijk = 123, 231, \text{ ou } 312 \\ \epsilon_{ijk} = -1, & \text{se } ijk = 321, 132, \text{ ou } 213 \\ \epsilon_{ijk} = 0, & \text{se dois subscritos forem iguais} \end{cases}$$

Note-se que $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

As seguintes relações são úteis:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{hjk} = 2\delta_{ih}; \quad \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

A partir do delta de Kronecker define-se os três vetores unitários, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, mais utilizados na literatura como $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, cujos produtos fornecem as relações:

$$(\delta_i \cdot \delta_j) = \delta_{ij}; \quad [\delta_i \times \delta_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \delta_k$$

Um vetor e sua magnitude podem ser completamente especificados por:

$$\mathbf{v} = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \delta_i v_i; \quad |\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

As operações elementares entre vetores serão dadas por:

Adição : $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_i \delta_i v_i + \sum_i \delta_i w_i = \sum_i \delta_i (v_i + w_i)$

Produto por escalar: $s\mathbf{v} = s \left\{ \sum_i \delta_i v_i \right\} = \sum_i \delta_i \{s v_i\}$

Produto escalar : $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \left(\left\{ \sum_i \delta_i v_i \right\} \cdot \left\{ \sum_i \delta_i w_i \right\} \right) = \sum_i \sum_j (\delta_i \cdot \delta_j) v_i w_j$
 $= \sum_i \sum_j \delta_{ij} v_i w_j = \sum_i \sum_j v_i w_j$

Produto vetorial : $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \left[\left\{ \sum_j \delta_j v_j \right\} \times \left\{ \sum_k \delta_k w_k \right\} \right] = \sum_j \sum_k [\delta_j \cdot \delta_k] v_j w_k$
 $= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i v_j w_k = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

Produto misto : $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

A localização de um ponto no espaço será especificada pelo vetor posição:

$$\mathbf{r} = \sum_i \delta_i x_i; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Outra notação bastante utilizada para a representação das operações com vetores e tensores é a *notação indicial*, que omite todos os símbolos de somatório e os elementos unitários baseada na premissa de que os índices repetidos em uma expressão correspondem a uma soma em n termos desta expressão variando-se tal índice de 1 a n e mantendo-se os demais fixos, desde que não seja especificado o contrário; o índice variável é chamado de *índice mudo*, e o fixo de *índice livre*. É a chamada *convenção da soma*. Como exemplo, nesta notação os produtos escalar e vetorial são apresentados como:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \sum_i \sum_j v_i w_j = v_i w_j \\ [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i v_j w_k = \varepsilon_{ijk} v_j w_k \end{array} \right.$$

A expressão intermediária é denominada notação estendida e exprime matematicamente todas as operações realizadas. Ocasionalmente, a notação matricial pode ser utilizada, como acima, para mostrar os componentes de um vetor ou tensor em relação ao sistema de coordenadas. A notação de Gibbs é compacta, fácil de ler, e independe do sistema de coordenadas, porém pressupõe a perfeita compreensão de sua simbologia; devido à sua qualidade pictórica ela é, em geral, usada na apresentação de resultados e nas discussões gerais, porém, para o desenvolvimento de expressões e identidades, a notação indicial é universalmente aceita por indicar explicitamente as operações envolvidas de forma concisa, embora possa provocar erros na leitura ou escrita de seus índices. Ela requer uma certa experiência em sua manipulação e torna, muitas vezes, herméticas suas expressões. Neste apêndice ela será extensivamente utilizada no final; na apresentação das definições iniciais, as notações de Gibbs e estendida serão preferencialmente apresentadas.

Um tensor é geralmente definido em termos de regras de transformação. Um tensor de segunda ordem pode ser entendido como uma grandeza que associa um escalar à cada par ordenado de coordenadas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau = & \delta_1 \delta_1 \tau_{11} + \delta_1 \delta_2 \tau_{12} + \delta_1 \delta_3 \tau_{13} + \delta_2 \delta_1 \tau_{21} + \delta_2 \delta_2 \tau_{22} + \delta_2 \delta_3 \tau_{23} \\ & + \delta_3 \delta_1 \tau_{31} + \delta_3 \delta_2 \tau_{32} + \delta_3 \delta_3 \tau_{33} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_i \delta_j \tau \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \tau_{ij}$$

Os termos τ_{ij} são chamados componentes do tensor τ e o pares ordenados $\delta_i \delta_j$ são denominados *diadas*, as unidades básicas de um tensor de segunda ordem, formadas pelo produto entre vetores unitários (chamado *produto diádico*) sendo, também, tensores de segunda ordem. Tais unidades são necessárias para a descrição completa de grandezas que exigem a especificação simultânea de duas direções, podendo-se citar, como exemplo, o

fluxo de uma componente x de momento através de uma área unitária de uma superfície perpendicular à direção y ; como o fluxo da componente y deste momento perpendicular à direção x pode não ser igual àquele, a especificação das duas direções não é suficiente para sua caracterização, devendo-se considerar, também, a ordem em que tais direções são dadas.

Um tensor é dito *simétrico* se $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, e *anti-simétrico* se $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$. Um tensor *transposto* é definido por $\tau^T = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ji}$ e o tensor unitário é dado por $\delta = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \delta_{ij}$.

A magnitude de um tensor é definida por

$$|\tau| = \tau = \sqrt{\frac{1}{2}(\tau : \tau^T)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \tau_{ij}^2}.$$

O símbolo de dois pontos (:) é utilizado para indicar o produto escalar de dois tensores enquanto que o de um ponto (·) indica o produto tensorial. Um tensor e um vetor podem ser multiplicados e tais operações são classificadas como produto vetorial (simbolizada por um ponto) e produto tensorial (por um \mathbf{x}). Tais operações, aplicadas aos vetores unitários, resultam em:

$$(\delta_i \delta_j : \delta_k \delta_l) = (\delta_j \cdot \delta_k)(\delta_i \cdot \delta_l) = \delta_{jk} \delta_{il}$$

$$[\delta_i \delta_j \cdot \delta_k] = \delta_i (\delta_j \cdot \delta_k) = \delta_i \delta_{jk}$$

$$[\delta_i \cdot \delta_j \delta_k] = (\delta_i \cdot \delta_j) \delta_k = \delta_{ij} \delta_k$$

$$(\delta_i \delta_j \cdot \delta_k \delta_l) = \delta_i (\delta_j \cdot \delta_k) \delta_l = \delta_{jk} \delta_i \delta_l$$

$$\{\delta_i \delta_j \times \delta_k\} = \delta_i [\delta_j \times \delta_k] = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \delta_l$$

$$\{\delta_i \times \delta_j \delta_k\} = [\delta_i \times \delta_j] \delta_k = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijl} \delta_l \delta_k$$

Podem-se definir escalares especiais de vetores e tensores que independem do sistema de coordenadas adotado. Tais escalares são denominados *invariantes* (termo já utilizado anteriormente na descrição do produto escalar de dois vetores). A magnitude de um vetor é um invariante. Para um tensor, pode-se definir três invariantes principais:

$$\begin{cases} I = \text{tr } \boldsymbol{\tau} = \sum_i \tau_{ii} \\ II = \text{tr } \boldsymbol{\tau}^2 = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \tau_{ji} \\ III = \text{tr } \boldsymbol{\tau}^3 = \sum_i \sum_j \sum_k \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki} \end{cases}$$

Outros escalares podem ser formados a partir destes.

As operações diferenciais com tensores e vetores tem suas notações simplificadas pela utilização do operador diferencial ∇ , conhecido como *nabla* ou *del*, e definido em coordenadas cartesianas por:

$$\nabla = \delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

O gradiente e o laplaciano de um campo escalar são dados por:

$$\nabla s = \text{grad } s = \delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} s + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} s + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} s = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} s$$

$$\nabla^2 s = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} s + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} s + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} s = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} s$$

Um campo vetorial comporta as seguintes operações diferenciais:

$$\text{gradiente : } \quad \nabla \mathbf{v} = \text{grad } \mathbf{v} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

$$\text{divergente : } \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \text{div } \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_i$$

$$\text{rotacional : } \quad [\nabla \times \mathbf{v}] = \text{rot } \mathbf{v} = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$$

$$\text{laplaciano : } \quad [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] = \nabla^2 \mathbf{v} = \sum_j \delta_j \left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_j \right)$$

Os tensores são operados somente pelo divergente:

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] = \sum_j \delta_j \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \right)$$

Tais operações e os conceitos anteriormente colocados são utilizados sem restrições em sistemas de coordenadas ortogonais, porém nem sempre funcionam adequadamente em sistemas não-ortogonais, que são comuns na literatura referente à reologia e mecânica dos fluidos. Uma formulação matemática coerente exige, nestes casos, o uso da teoria generalizada de tensores, de onde os conceitos enunciados são derivados. Tal teoria é assentada no conceito de *vetores de base*. Como exemplo, os vetores de base de um sistema de coordenadas esféricas, na qual $\mathbf{r} = \delta_r r$, são definidos por:

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \delta_r; \quad \mathbf{g}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = r \delta_\theta; \quad \mathbf{g}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r} = r \sin \theta \delta_\phi$$

Os vetores de base diferem dos vetores unitários somente pela inclusão de um *fator de escala*. Pode-se também definir vetores *recíprocos de base* na forma:

$$\mathbf{g}^r = \nabla \mathbf{r} = \delta_r; \quad \mathbf{g}^\theta = \nabla \theta = \frac{1}{r} \delta_\theta; \quad \mathbf{g}^\phi = \nabla \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \delta_\phi$$

que são compostos pelos recíprocos dos fatores de escala. Portanto pode-se afirmar que:

$$(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = r, \theta \text{ ou } \phi$$

Os vetores podem ser escritos como:

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha} \mathbf{g}_\alpha v^\alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \sum_{\alpha} \mathbf{g}^\alpha v_\alpha$$

onde v_α e v^α são chamados, respectivamente, de componentes *covariante* e *contravariante* do vetor \mathbf{v} .

O mesmo procedimento se repete para os tensores e para os operadores diferenciais, e todas as relações anteriormente descritas podem ser transferidas para a nova nomenclatura substituindo-se, tão somente, os vetores unitários pelos vetores de base e seus recíprocos.

Considere-se, então, um sistema de coordenadas curvilíneas qualquer. A localização de um ponto no espaço é dada em termos de coordenadas q^i ($i = 1, 2, 3$) e as coordenadas curvilíneas são relacionadas com as cartesianas (figura abaixo) por:

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3) \quad e \quad q^i = q^i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

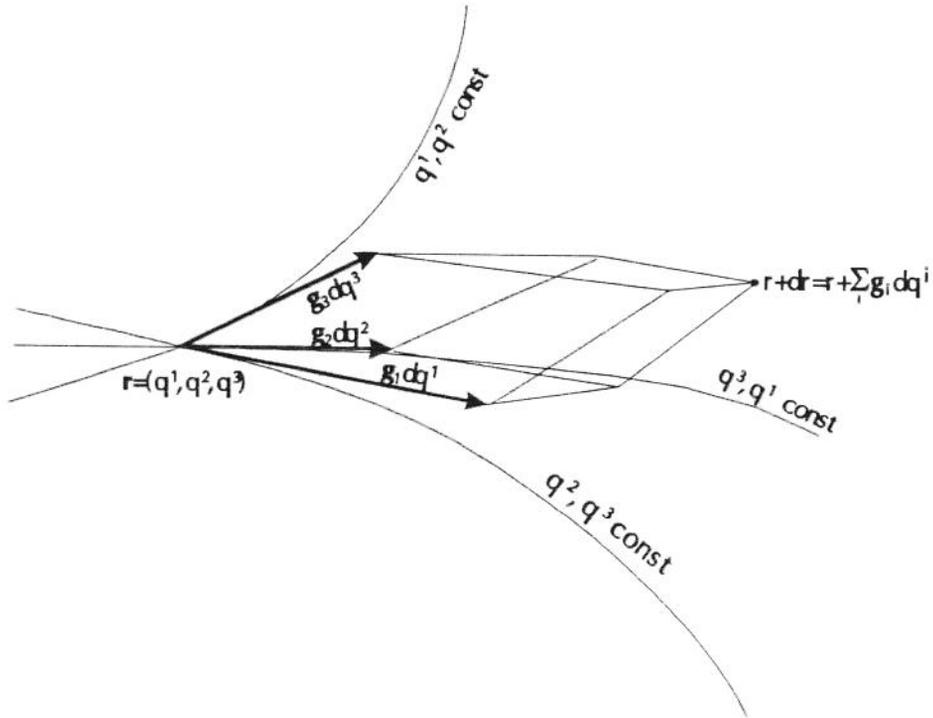


Fig. A.1 Sistema de coordenadas curvilíneas

O segmento de linha orientado $d\mathbf{r}$, ligando dois pontos separados por uma distância infinitesimal, pode ser escrito como:

$$d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{g}_i dq^i$$

o que define os vetores de base deste sistema de coordenadas como:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{r} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q^i} \delta_j$$

Portanto os vetores de base podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores unitários. Os vetores de base se direcionam tangencialmente às curvas coordenadas, mas não possuem comprimento unitário.

Os vetores recíprocos de base são obtidos de:

$$\mathbf{g}^i = \nabla q^i = \sum_j \frac{\partial q^i}{\partial x_j} \delta_j$$

Das definições anteriores tem-se que:

$$(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = \delta_j^i; \quad (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = \delta_i^j$$

onde o delta de Kronecker está notado de forma conveniente. O outro produto escalar fornece os coeficientes métricos, ou *tensores métricos*, definidos por:

$$g_{ij} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j); \quad g^{ij} = (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j)$$

O determinante de g_{ij} é chamado g , e $\sqrt{g} = (\mathbf{g}_1 \cdot [\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3])$. Tais equações são análogas às encontradas para as coordenadas ortogonais.

Do produto vetorial obtêm-se as relações:

$$[\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j] = \sum_k \xi_{ijk} \mathbf{g}^k; \quad \xi_{ijk} = \epsilon_{ijk} \sqrt{g}$$

$$[\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j] = \sum_k \xi^{ijk} \mathbf{g}_k; \quad \xi^{ijk} = \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}}$$

As operações diádicas também são análogas às referentes as coordenadas ortogonais. É possível agora expressar-se vetores e tensores em termos dos vetores de base na forma:

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{g}_i v^i = \sum_i \mathbf{g}^i v_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \sum_j \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \tau^{ij} = \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \tau_{ij} = \sum_i \sum_j \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j \tau^i_j = \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \tau_j^i$$

onde aparecem os componentes covariante e contravariante do vetor e tensor, sendo que nos dois últimos termos aparecem os componentes mistos do tensor.

Os componentes covariante e contravariantes são relacionadas por:

$$v_j = \sum_i g_{ij} v^i; \quad \tau^{ij} = \sum_k \sum_l g^{ik} g^{jl} \tau_{kl}$$

Os diversos tipos de multiplicação tensorial podem ser resumidos como:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \sum_i v^i w_j = \sum_i \sum_j g_{ij} v^i w^j$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] = \sum_i \sum_j \mathbf{g}_i \tau^{ij} v_j$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \sum_i \sum_j \sum_k \xi_{ijk} \mathbf{g}^k v^i w^j$$

As operações de diferenciação são realizadas de modo similar às descritas anteriormente. Devido à generalidade da formulação usada, a derivada espacial de um vetor unitário resulta numa combinação linear de todos os vetores unitários. As derivadas dos vetores de base são dadas na forma:

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{g}_i = \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_k; \quad \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{g}^i = -\sum_k \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} \mathbf{g}^k$$

onde os coeficientes $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ são chamados *símbolos de Christoffel*, não devendo ser confundidos com tensores de terceira ordem. Tais símbolos são definidos como:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_l \mathbf{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right)$$

O operador diferencial *del*, analogamente, é escrito como:

$$\nabla = \sum_i \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

Portanto, o gradiente de um escalar é dado por

$$\nabla s = \sum_i \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial q^i} s = \sum_i \mathbf{g}^i s_{,i}$$

onde a derivada foi representada sinteticamente por uma vírgula seguida do índice referente à componente sobre o qual ela se processa.

Para um vetor

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \left(\frac{\partial}{\partial q^i} v_j - \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\} v_k \right) \equiv \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j v_{j|i} \\ &= \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \left(\frac{\partial}{\partial q^i} v^j - \sum_k \left\{ \begin{matrix} j \\ ki \end{matrix} \right\} v^k \right) \equiv \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j v^{j|i} \end{aligned}$$

Para um tensor de segunda ordem tem-se quatro possibilidades

$$\nabla \tau = \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \mathbf{g}^k \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \tau_{jk} - \sum_l \left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} \tau_{lk} - \sum_l \left\{ \begin{matrix} l \\ ki \end{matrix} \right\} \tau_{jl} \right) \equiv \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \mathbf{g}^k \tau_{jk|i}$$

$$\nabla \tau = \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \tau^{jk} + \sum_l \left\{ \begin{matrix} j \\ li \end{matrix} \right\} \tau^{lk} + \sum_l \left\{ \begin{matrix} k \\ li \end{matrix} \right\} \tau^{jl} \right) \equiv \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k \tau^{jk|i}$$

As duas outras possibilidades envolvem componentes mistos.

Nas expressões acima os termos entre parêntesis introduzem o conceito de *diferenciação covariante*, notada resumidamente com uma barra, na qual os símbolos de Christoffel aparecem devido às derivadas dos vetores unitários (no sistema cartesiano, tais símbolos são nulos e a derivada covariante se reduz à derivada normal). Note-se ainda que, a depender da componente utilizada, os índices resultantes sobem ou descem sempre respeitando as regras de operações já citadas. Caso um mesmo índice resulta tanto na parte superior quanto na inferior, eles se anulam numa operação chamada *contração*.

Algumas importantes propriedades da diferenciação covariante podem ser citadas: o *lema de Ricci* $g_{ij|k} = g^{ij|k} = g_j^i|_r = \delta_j^i|_k = 0$, e $g^{ij|k} = 0$ visto que os tensores métricos são constantes em coordenadas ortogonais, o que ocorre, também, com os símbolos de permutação $\epsilon_{rst|i} = 0$ e $\epsilon^{rst|i} = 0$. Vale também a aplicação usual das regras de cálculo:

$$(v_i w_j)|_k = v_i|_k w_j + v_i w_j|_k$$

Várias outras operações com o operador *del* podem ser mostradas, como, por exemplo:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \sum_i v^i|_i$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}] = \sum_i \sum_j \sum_k \xi^{ijk} \mathbf{g}_i v_k|_j$$

$$\nabla^2 s = \sum_i \sum_j g^{ij} s|_{ij}$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] = \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{g}^i g^{jk} \tau_{ji}|_k = \sum_i \sum_j \mathbf{g}^i \tau^j_{\cdot i}|_k$$

Note-se no último exemplo uma operação de contração.

A derivada covariante de um tensor é, também, um tensor, pode-se calcular sua segunda derivada covariante e assim por diante. A partir da segunda derivada covariante do vetor v_r , pode-se chegar, após alguns cálculos, a

$$v_r|_{st} - v_r|_{ts} = R^P_{..rst} v_p, \quad \text{onde } R^P_{..rst} = \left\{ \begin{matrix} P \\ rts \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} P \\ rs,t \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ rt \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P \\ ms \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ rs \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P \\ t \end{matrix} \right\}$$

A função $R^P_{..rst}$ é um tensor chamado *tensor de Riemann-Christoffel* e consiste somente dos componentes do tensor métrico e suas derivadas superiores à segunda ordem. Tais tensores são identicamente nulos num sistema de coordenadas cartesianas e todos os demais sistemas que possam ser estabelecidos em um espaço euclidiano.

Como a notação indicial já foi devidamente introduzida, ela passará a ser utilizada no restante deste apêndice, visto ser a mais utilizada na literatura. Considere-se um novo sistema de coordenadas \bar{q}^i que se relacionará com o sistema q^i através da transformação de coordenadas:

$$\bar{q}^i = \bar{q}^i(q^1, q^2, q^3); \quad q^i = q^i(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{q}^3)$$

que são assumidos biunívocos e diferenciáveis. Pode-se escrever:

$$d\bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} dq^j; \quad dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} d\bar{q}^j$$

Chamando-se $\bar{\mathbf{g}}_i$ os vetores de base do sistema transformado, pode-se escrever em termos de ambos os sistemas:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_i dq^i; \quad d\mathbf{r} = \bar{\mathbf{g}}_i d\bar{q}^i$$

Combinando-se as relações acima tem-se, para os vetores de base e seus recíprocos:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} \bar{\mathbf{g}}_j; \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \bar{\mathbf{g}}^j; \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \mathbf{g}_j; \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \mathbf{g}^j$$

Conhecendo-se as regras de transformação dos vetores de base, facilmente pode-se determinar as componentes de qualquer vetor ou tensor. Considere-se um vetor escrito em suas duas formas e em ambos os sistemas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_i v^i = \bar{\mathbf{g}}_i \bar{v}^i; \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}^i v_i = \bar{\mathbf{g}}^i \bar{v}_i$$

Pelas regras anteriores suas componentes podem ser escritas como:

$$v_i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \bar{v}_j; \quad v^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \bar{v}^j; \quad \bar{v}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} v_j; \quad \bar{v}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} v^j$$

Para um tensor de segunda ordem transformado tem-se, por exemplo,

$$\bar{\tau}^{ij} = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^l} \tau^{kl}; \quad \bar{\tau}_{ij} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^l}{\partial \bar{q}^j} \tau_{kl}; \quad \bar{\tau}^i{}_{.j} = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial \bar{q}^j} \tau^k{}_{.l}$$

Os índices de um tensor podem trocar de posição através de operações elementares envolvendo os tensores métricos e a operação de contração. Por exemplo, um tensor misto pode ser gerado a partir de um covariante como a seguir

$$\tau^i{}_{.k} = g^{ij} \tau_{jk}.$$

O ponto é colocado antes de k para indicar que é o segundo índice, e o índice j foi eliminado por contração. Ambos os índices podem, por exemplo, subir:

$$\tau^{ij} = g^{ik} g^{jl} \tau_{kl}$$

Os tensores obtidos desta forma são chamados *tensores associados*, e tal regra pode ser estendida para operações de tensores de quaisquer ordem. Tais operações, em geral, produzem simplificações importantes na álgebra tensorial.

Considere-se a equação diferencial

$$A|_{,r}^r = 0$$

onde A é um invariante. Usando as regras anteriores tal equação pode ser colocada na forma

$$g^{rs} A|_{,rs} = 0$$

Em coordenadas cartesianas ela se reduz a

$$\delta^{rs} A_{,rs} = 0 \quad \text{ou} \quad A_{,rr} = 0$$

que é a conhecida equação de potencial escrita em notação indicial. As funções que satisfazem estas equações são chamadas harmônicas, ou potenciais.

Da mesma forma, a equação diferencial

$$A|_{,rs}^{rs} = 0$$

se reduz a

$$A_{,rrss} = 0$$

em coordenadas cartesianas e é a conhecida equação bi-harmônica, que é satisfeitas pelas funções bi-harmônicas.

O laplaciano pode ser escrito nas formas

$$\nabla^2 \phi = (g^{rs} \phi_{,s})_{,r} = g^{rs} \phi_{,rs} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} g^{rs} \phi_{,s}),$$

Se \mathbf{v} for um vetor definido em todo um volume Ω limitado por uma superfície S , e se \mathbf{n} for um vetor unitário normal a esta superfície, então o teorema de Gauss será dado por

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Alternativamente, em notação tensorial, ele se torna

$$\iiint_{\Omega} v^r_{,r} \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g}} (v^r \sqrt{g})_{,r} \, d\Omega = \iint_S v^r n_r \, dS$$

onde $\mathbf{n} = n_r \mathbf{g}^r$.

A partir deste ponto será examinado um caso especial de geometria que reduz o volume de referência a uma superfície através da anulação de uma coordenada. Tal caso tem grande importância física por reduzir um problema em três dimensões a um bi-dimensional. Na Teoria da Elasticidade Clássica ele corresponderá aos problemas de tensão e deformação planas onde uma das coordenadas é desprezada, o que simplifica a resolução dos problemas.

Considere-se o vetor posição de um ponto expresso na forma especial

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta_3 \mathbf{a}_3,$$

onde \mathbf{r} é uma função somente de θ_1, θ_2 e \mathbf{a}_3 é um vetor unitário que depende, também, somente destas coordenadas (ver figura A.2)

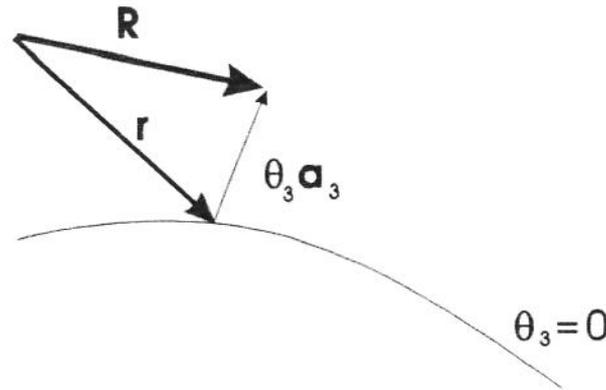


Fig. A.2 Vetor posição de uma superfície

A equação $\theta_3 = 0$ determina a superfície $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$. O vetor \mathbf{a}_3 é perpendicular à superfície e é chamado vetor normal. Se θ_2 for mantido constante \mathbf{r} descreverá uma curva que acompanha o perfil da superfície e, se tal constante variar, ter-se-á uma família de curvas chamadas *curvas* θ_1 . O mesmo ocorre mantendo-se θ_1 constante, gerando-se uma família de *curvas* θ_2 . Tais curvas serão chamadas *curvas coordenadas* e θ_1, θ_2 será chamado de sistema de coordenadas curvilíneas superficial.

Pode-se definir outros conjuntos de coordenadas curvilíneas superficiais como

$$\theta_\alpha = \theta_\alpha(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2), \quad \bar{\theta}_\alpha = \bar{\theta}_\alpha(\theta_1, \theta_2)$$

onde as transformações já vistas na análise tensorial podem ser aplicadas. Observe-se que $d\theta^\alpha$ define um tensor contravariante de superfície de ordem um. Os deltas de Kronecker para a superfície são definidos como

$$\delta_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad \delta_\beta^\alpha = 1 \quad (\alpha = \beta, \beta \text{ não somado})$$

e, como $\frac{\partial \bar{\theta}^\alpha}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$, eles formam um tensor misto de ordem dois.

Os vetores covariantes de base neste espaço, segundo as regras usuais, são

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \theta_3 \mathbf{a}_{3,\alpha}, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3, \quad \text{onde } \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$$

e, portanto, \mathbf{a}_α é transformado de acordo com a regra covariante de transformação de coordenadas. Tem-se ainda que

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = 0,$$

e, quando $\mathbf{a}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{g}_r = \mathbf{a}_r, \mathbf{g}^r = \mathbf{a}^r, g_{rs} = a_{rs}, g^{rs} = a^{rs}$. Portanto, das regras anteriores,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta &= a_{\alpha\beta}, & a_{3\alpha} &= 0, & a_{33} &= 1 \\ a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} &= \delta_\alpha^\gamma, & a^{3\alpha} &= 0, & a^{33} &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a},$$

onde

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Ainda, para $\theta_3 = 0$ encontra-se

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta, \quad \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}$$

e

$$|\mathbf{a}_\alpha| = \sqrt{\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha} = \sqrt{a_{\alpha\alpha}}, \quad |\mathbf{a}^\alpha| = \sqrt{\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\alpha} = \sqrt{a^{\alpha\alpha}}, \quad (\alpha \text{ não-somado})$$

Os vetores \mathbf{a}^α são os vetores contravariantes de base da superfície e $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$ são os tensores métricos superficiais, simétricos. Todos esses vetores e tensores satisfazem as leis apropriadas de transformação de coordenadas superficiais.

Como $d\mathbf{r} = \mathbf{a}_\alpha d\theta^\alpha = \mathbf{a}^\alpha d\theta_\alpha$, onde $d\theta_\alpha = a_{\alpha\beta} d\theta^\beta$ o elemento de linha da superfície tem a forma

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta = a^{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta = \delta_\beta^\alpha d\theta_\alpha d\theta^\beta = d\theta_\alpha d\theta^\alpha$$

que é uma equação conhecida como *primeira forma fundamental* da superfície.

Os elementos de linha ao longo das curvas coordenadas podem ser representados pelos vetores $d\mathbf{s}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha d\theta^\alpha$ (α não-somado), com magnitudes $ds_\alpha = \sqrt{a_{\alpha\alpha}} d\theta^\alpha$, e ângulo ϕ entre as curvas coordenadas dado por

$$\cos \phi = \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{ds_1 ds_2} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

Se as curvas coordenadas forem ortogonais, então $a_{12} = a^{12} = 0$

O elemento de superfície dS é obtido na forma $dS = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$

Os símbolos de permutação são definidos como $\varepsilon_{\alpha\beta 3}, \varepsilon^{\alpha\beta}$, quando $\theta_3 = 0$ são dados por $\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon^\alpha$. Portanto,

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{a}, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0.$$

Como ε_{rst} é transformado pela regra $\bar{\varepsilon}_{rst} = \frac{\partial\theta^i}{\partial\bar{\theta}^r} \frac{\partial\theta^j}{\partial\bar{\theta}^s} \frac{\partial\theta^k}{\partial\bar{\theta}^t} \varepsilon_{ijk}$, para o caso em questão, para $\bar{\theta}_3 = \theta_3$,

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{\theta}^\alpha} \frac{\partial\theta^\mu}{\partial\bar{\theta}^\beta} \varepsilon_{\lambda\mu},$$

tal que ε_α é um tensor covariante superficial de ordem dois. De modo similar, ε^α é um tensor contravariante superficial de ordem dois. Observe-se que

$$\varepsilon_{\alpha\beta 3} = \sqrt{\frac{g}{a}} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta 3} = \sqrt{\frac{a}{g}} \varepsilon^{\alpha\beta}$$

e
$$\varepsilon^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} \varepsilon^{\lambda\mu},$$

portanto

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} = 2, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} = 2,$$

$$a^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} a_{\lambda\mu}, \quad a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\beta\mu} a^{\lambda\mu}$$

O produto destes tensores é dado por $\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu}$, tal que, por exemplo,

$$\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} A^{\lambda\mu} = A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha} \quad \text{Num caso particular, tal delta pode ser simplificado, de acordo com}$$

as regras acima, para

$$\delta_{\lambda\beta}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\beta} = a_{\lambda\mu} a_{\beta\rho} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\rho} = a^{\alpha\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^\alpha = 2$$

Tem-se ainda, para $\theta_3 = 0$, que

$$\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta = \varepsilon_{\beta\rho} \mathbf{a}^\rho, \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}^\beta = \varepsilon^{\beta\rho} \mathbf{a}_\rho$$

e
$$[\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_3] = \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad [\mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta \mathbf{a}_3] = \varepsilon^{\alpha\beta}$$

O produto escalar

$$dr \cdot da_3 = -b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta = -b^{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta = -b_\beta^\alpha d\theta_\alpha d\theta^\beta$$

onde $b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha} = \frac{[\mathbf{a}_{\alpha,\beta} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}{\sqrt{a}}$,

é chamado *segunda forma fundamental* da superfície. Os coeficientes $b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}$ são tensores superficiais simétricos de ordem dois, relacionados pelas fórmulas

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} = a_{\beta\lambda} b^{\alpha\lambda}, \quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} b_\lambda^\beta, \quad b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda.$$

O invariante $2H = b_\alpha^\alpha$ é chamado *curvatura média* da superfície, e

$$K = \frac{|b_{\alpha\beta}|}{a} = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2$$

é chamado *curvatura gaussiana* da superfície.

Os símbolos de Christoffel relativos à superfície $\theta_3 = 0$ são

$$\overline{\{\beta\gamma\alpha\}} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\alpha\gamma,\beta} + a_{\beta\gamma,\alpha}),$$

$$\{\beta\gamma\}^\alpha = a^{\alpha\lambda} \overline{\{\beta\gamma\lambda\}} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{\gamma,\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{\beta,\gamma} = -\mathbf{a}_{\gamma,\beta} \cdot \mathbf{a}^\alpha.$$

$$\{\beta 3\}^\alpha = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha} = -b_\beta^\alpha$$

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{\alpha,3} = b_{\alpha\beta}$$

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha 3 \end{matrix} \right\}} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = 0, \quad \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 33 \end{matrix} \right\}} = 0, \quad \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 33 \end{matrix} \right\}} = 0, \quad \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\alpha \end{matrix} \right\}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial \theta^\alpha}$$

Os valores do tensor de Riemann-Christoffel na superfície $\theta_3 = 0$ são

$$R^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \overline{R^\lambda_{\alpha\beta\gamma}} + \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 3\beta \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 3\gamma \end{matrix} \right\}}$$

e $R^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\gamma,\beta \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\beta,\gamma \end{matrix} \right\}} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\beta \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\gamma \end{matrix} \right\}}$

onde $\overline{R^\lambda_{\alpha\beta\gamma}} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\gamma,\beta \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta,\gamma \end{matrix} \right\}} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\beta \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\gamma \end{matrix} \right\}}$

é chamado tensor superficial de Riemann-Christoffel. Como o espaço em questão é euclidiano, seu valor é nulo, o que resulta em

$$\bar{R}^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 3\gamma \end{matrix} \right\}} - \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\}} \cdot \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ 3\beta \end{matrix} \right\}}$$

Rebaixando o índice superior encontra-se $\bar{R}_{\lambda\alpha\beta\gamma} = a_{\lambda\mu} \bar{R}^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ e, em particular,

$$\bar{R}_{\alpha\alpha\beta\gamma} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\gamma} = 0 \quad (\alpha, \gamma \text{ não-somados})$$

$$\bar{R}_{1212} = \bar{R}_{2121} = -\bar{R}_{2112} = -\bar{R}_{122}$$

Assim, todo componente não-nulo de $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é igual a \bar{R}_{121} ou a $-\bar{R}_{1212}$, e

$$\bar{R}_{1212} = |b_{\alpha\beta}| = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$$

Portanto a curvatura gaussiana se torna $K = \frac{R_{1212}}{a}$ ou $K = \frac{1}{4} \varepsilon^{\lambda\alpha} \varepsilon^{\beta\gamma} \bar{R}_{\lambda\alpha\beta\gamma}$, mostrando que K é um invariante da superfície, sendo esta última expressão conhecida como equação da superfície de Gauss.

Como $R^3_{\alpha\beta\gamma}$ também é nulo obtém-se $b_{\alpha 1} |b_{2\alpha}| = b_{\alpha 2} |b_{1\alpha}|$, conhecida como *equação da superfície de Codazzi*.

Tais equações foram deduzidas a partir de três das seis componentes independentes do tensor de Riemann-Christoffel para a superfície $\theta_3 = 0$. As outras três componentes, que devem ser zero, são $R_{\alpha 3\beta}$ que fornecem as relações

$$g_{\alpha\beta,33} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda,3} g_{\beta\mu,3}$$

As derivadas dos vetores de base são facilmente deduzidas e são conhecidas como fórmulas de Weingarten e Gauss:

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}} \mathbf{a}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_{,\beta}^{\alpha} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{matrix} \right\}} \mathbf{a}^{\lambda} + b_{\beta}^{\alpha} \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda}$$

Da última equação tem-se

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} \Rightarrow d\mathbf{a}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 = b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\beta} d\theta^{\alpha} d\theta^{\gamma}$$

que é chamada *terceira forma fundamental* da superfície.

Considere-se agora um vetor no espaço em estudo, que pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v^3 \mathbf{a}_3 = v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + v_3 \mathbf{a}^3$$

Suas derivadas são dadas por

$$v_{,\alpha} = (v_\lambda |_\alpha - b_{\alpha\lambda} v_3) \mathbf{a}^\lambda + (v_{3,\alpha} + b_{\alpha 3}^\lambda v_\lambda) \mathbf{a}_3 = (v^\lambda |_\alpha - b_{\alpha}^\lambda v^3) \mathbf{a}_\lambda + (v_{,\alpha}^3 + b_{\lambda\alpha} v^\lambda)$$

e

$$v_{,3} = v_{\alpha,3} \mathbf{a}^\alpha + v_{3,3} \mathbf{a}_3 = v_{,3}^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v_{,3}^3 \mathbf{a}_3$$

onde $v_\lambda |_\alpha = v_{\lambda,\alpha} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda\alpha \end{smallmatrix} \right\} v_\mu$, $v^\lambda |_\alpha = v_{,\alpha}^\lambda - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\alpha \end{smallmatrix} \right\} v^\mu$

Numa transformação genérica de coordenadas espaciais, v_r e \mathbf{g}^r se transformam respectivamente com as regras covariante e contravariante de transformação. Numa transformação de superfície, como a tratada, como $\bar{\theta}_3 = \theta_3$, e assumindo-se $\theta_3 = 0$, encontra-se que $v_\alpha, \mathbf{a}^\alpha$ se transformam respectivamente com as regras covariante e contravariante para transformação de coordenadas superficiais. Portanto, verifica-se que $v_\alpha \mathbf{a}^\alpha$ (e $v^\alpha \mathbf{a}_\alpha$) são invariantes sob transformações de coordenadas superficiais, e são chamados *vetores superficiais* com componentes covariante e contravariante v_α, v^α respectivamente, ou simplesmente vetores superficiais covariante e contravariante.

Como $v_\alpha \mathbf{a}^\alpha = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ e $\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta$ (ou $\mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta$) segue que

$$v^\alpha = a^{\alpha\beta} v_\beta \quad e \quad v_\alpha = a_{\alpha\beta} v^\beta,$$

que estabelece o método para subida e descida de índices para vetores superficiais. E, como em três dimensões, pode-se estender o conceito de derivação covariante para tensores superficiais de qualquer ordem.

No caso especial da geometria tratada em que a superfície é um *plano*, o vetor \mathbf{a}_3 é um vetor unitário *constante*, perpendicular à superfície plana. Neste caso,

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = 0$$

e, $b_{\alpha\beta} = 0$, $\bar{R}_{1212} = 0$, que, como o tensor de Riemann-Christoffel se anula para a superfície $\theta_3 = 0$, a ordem da diferenciação covariante superficial é irrelevante. Para este caso, uma série de resultados especiais podem ser citados:

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = a_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad g_{33} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 =$$

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^3 = 0, \quad g^{33} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^3 =$$

$$g = |g_{ij}| = |a_{\alpha\beta}| = a$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha i \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta 3 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\lambda, \quad \mathbf{a}_{,\beta}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}$$

e verifica-se que todas as grandezas geométricas (exceto \mathbf{R}) são independentes de θ_3 .

O teorema de Green correspondente para esta geometria existe entre uma integral em torno da curva c sobre uma superfície e uma integral sobre a superfície limitada por c . Se \mathbf{u} for a normal unitária à curva c na superfície, então

$$\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha, \quad u_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{d\theta^\beta}{ds}$$

e

$$\iint_S v^\alpha |_\alpha| dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} v^\alpha)_{,\alpha} dS = \int_c u_\alpha v^\alpha ds = \int_c \epsilon_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{d\theta^\beta}{ds} ds$$

Apêndice B - A goma guar e seus derivados

B.1 Introdução

A goma guar foi introduzida comercialmente no mercado em 1953 e seu consumo teve um rápido crescimento a partir de então devido não somente ao papel do guaran (outro nome da goma) como viscosificador de sistemas aquosos mas também como ponte de hidrogênio e reagente químico para indústrias como a mineração e produção de papel. A goma, uma *galactomanana*, é um polissacarídeo não-iônico.

A goma guar é derivada da semente da planta guar, *Cyanopsis tetragonolobus*, da família Leguminosae; esta planta se desenvolve em forma de vagem. Ela vem sendo cultivada há séculos na Índia e no Paquistão, onde é uma das principais plantações, sendo usada como alimento. Foi introduzido nos EUA no início deste século, mas somente a partir de 1946 seu potencial como planta comercial e seu valor no incremento da fertilidade do solo adquiriu algum interesse.

A planta guar necessita de muito pouca superfície molhada durante sua época de crescimento, sendo, portanto, adaptável para desenvolvimento em regiões semi-áridas onde plantações menos resistentes perecem. É essencial que sua colheita ocorra antes da primeira chuva que segue a primeira geada caso contrário muitas das sementes secam e enegrecem, a produção de goma decresce, e a goma é contaminada por pontos negros.

A semente do guar é dicotiledônea, tendo um diâmetro aproximado de 8 mm. A composição média de seus vários componentes é dada na Tabela B.1. Fica evidente da análise dos dados que, para a obtenção de galactomanana relativamente pura, o endosperma deve ser separado da casca e do germe.

Parte	Proteína (N x 6.25), %	Éter Extraído, %	Cinza, %	Mistura, %	Fibra, %	Tipo de Carboidrato
Casca (14-17%)	5	0.3	4	10	36.0	D-Glicose
Endosperma (35-42%)	5	0.6	0.6	10	1.5	Galacto- manana
Germe (43-47%)	55.3	5.2	4.6	10	18.0	D-Glicose

Tabela B.1 - Composição dos Componentes da Semente do Guar

Sua casca é removida por amolecimento em banho de água e esmagamento, e sua purificação é feita por moagem e peneiramento em vários estágios. A separação do germe é conseguida por moagem diferencial. Diversos tipos de moedores, como os de atrito, de martelo ou rolantes, podem ser utilizados devido a diferença de dureza entre o endosperma e o germe. Após a separação do endosperma, ele é transformado em um pó fino e comercializado como goma guar.

A goma guar qualificada para alimentação é basicamente endosperma puro. Ela tem normalmente um pequeno resíduo de casca e germe, resultante de imperfeições na purificação. Contudo, como a semente inteira é comestível, tal contaminação somente dilui a quantidade de galactomanana disponível. A goma guar está incluída nas normas de identificação do Food and Drug Administration para queijos e seus subprodutos, sobremesas congeladas e temperos de salada.

Uma análise típica das impurezas da goma guar para alimentação fornece, em geral: fibra, 2.5%; mistura, 10-15%; proteína (nitrogênio x 6.25), 5-6%; cinza, 0.5-0.8%. Comparando-se tais resultados com os do endosperma puro (Tabela B.1) verifica-se a efetividade da separação das técnicas usuais de processamento comercial.

A maioria da goma guar comercializada pela indústria de alimentos produz uma viscosidade de 3-5 *Pa.s* em uma solução a 1%. Sua viscosidade é influenciada pela pureza e, também, pelas técnicas de processamento.

A goma guar produzida para uso industrial vem acompanhada de aditivos que favorecem sua dispersão, controle de viscosidade e gelificação, que atuam como preservantes ou qualquer outra especificação necessária para uma utilização industrial específica. Além disso algumas propriedades como taxa de hidratação, gelificação controlada e quebra de viscosidade podem ser variadas. Tais propriedades podem ser controladas através de técnicas de processamento e, portanto, classes específicas de goma guar podem ser projetadas para aplicações especiais. Diversas classes e modificações estão disponíveis comercialmente.

Não existe limite prático para a quantidade potencial de goma guar que pode estar disponível em caso de aumento de demanda. A planta guar é uma planta anual, resistente, e pode ser facilmente adaptada em várias áreas. Um mercado ascendente pode ser acomodado pelas plantações existentes visto que as plantações da Índia e Paquistão destinadas à produção de goma são ainda pequenas.

B.2 Utilização industrial

Nos EUA o guar foi inicialmente estudado como uma fonte de goma em 1945. A General Mills iniciou sua plantação no sudoeste do país, e, em 1949, 1700 acres já haviam sido plantados no Texas. Ao mesmo tempo o Institute of Paper Chemistry em Appleton, Wisconsin, comparava o uso da goma guar com o da goma do feijão de alfarroba e de outros aditivos para a manufatura de papel. Contudo, somente a partir de 1953 a goma guar começou a ser produzida em quantidades comerciais. Nesse intervalo de tempo, a demanda pela goma de feijão de alfarroba cresceu rapidamente devido às indústrias de alimento, de papel e têxtil. Em 1951 a demanda por essa goma excedeu seu limite armazenado, forçando grande aumento em seu preço (a alfarrobeira é uma árvore perene). Duas companhias americanas, Stein, Hall & Co., Inc. e General Mills, Inc., construíram instalações e iniciaram a produção comercial de goma guar em meados de 1953. Algum tempo após, os produtores europeus de goma de feijão de alfarroba começaram a produzir goma guar também.

A goma guar foi originalmente desenvolvida como substituta da goma do feijão da alfarroba, contudo, logo se verificou que, embora ambas gomas sejam galactomananas, existem diferenças significativas em suas composições e comportamentos químicos. A goma do feijão de alfarroba requer cozimento a elevadas temperaturas para atingir sua viscosidade máxima enquanto que a goma guar é hidratada em água fria. Aquela tem em média somente uma unidade de D-galactopiranosil como um ramo para quatro unidades de D-manopyranosil, enquanto que, nesta, a relação é de 1:1. O maior número de ramos na goma guar é o fator responsável por sua mais fácil hidratação e pela atividade diferenciada de suas pontes de hidrogênio em relação a outra. Algumas aplicações industriais serão descritas para exemplificar a utilização convencional deste colóide hidrofílico como viscosificador e

aglutinante, e seus usos específicos, que dependem de sua composição química e configuração molecular.

B.2.1 Mineração

A goma guar é usada na flotação da espuma de potassa como um reagente auxiliar, precipitando a ganga, resíduo que pode conter argila, talco, ou folhelho. Tal ação da goma guar resulta da ponte de hidrogênio entre a molécula de goma com a superfície mineral hidratada das argilas. Sua configuração global de ramificações alinhadas com ocorrência regular dos ramos de D-galactopiranosil favorece bastante tal tipo de reação. O fato de ambas as unidades de D-manopiranosil e D-galactopiranosil do guaran possuírem grupos de hidroxila-cis favorece a formação de pontes de hidrogênio.

Agente decantador.- A goma guar é também utilizada como floculante ou agente decantador na concentração de minérios e resíduos na indústria de mineração. Na prática, a lama e os resíduos dos processos de beneficiamento mineral podem ser concentradas de forma que a água possa ser reutilizada, facilitando o descarte ou reprocessamento dos sólidos. Normalmente, grandes tanques e espessantes são utilizados nesse processo. A adição de goma guar na proporção de 0.1 - 0.5 lb/ton de sólidos secos (1 kg/4100 - 20500 kg) agiliza a decantação dos sólidos suspensos. Isso reduz a quantidade de espessante necessária para a decantação de uma mesma quantidade de sólidos.

Filtração - Na mineração, as operações de filtração são projetadas para a remoção de partículas suspensas de lama e argila. Tais partículas tendem a formar um reboco bastante compacto e úmido que tampona a superfície do filtro. A adição da goma guar à pasta, por métodos similares aos descritos acima, resulta na floculação dessas pequenas partículas. A quantidade de goma necessária é o dobro, ou mais, da usada para a decantação. Esses grandes

flocos tendem a obstruir a tela do filtro permitindo, ao mesmo tempo, a canalização da água através do reboco. Esta ação aumenta a eficiência da filtração e resulta num reboco seco.

Tratamento da água - A goma guar não é tóxica e é aprovada pelo Serviço de Saúde Pública americano para uso no tratamento de água potável como coagulante em conjunção com outros coagulantes como o alume (sulfato de alumínio potássio), sulfato de ferro III, e cal (óxido de cálcio). Ela aumenta o tamanho dos flocos inicialmente formados pelo coagulante, aumentando assim a taxa de decantação das impurezas sólidas, reduzindo o carregamento de sólidos para os filtros, e aumentando seus períodos de lavagem reversa. Em águas industriais, a goma guar floclula argilas, carbonatos, hidróxidos e sílica quando usada sozinha ou em conjunto com coagulantes inorgânicos.

B.2.2 Alimentos

A goma guar é geralmente utilizada em alimentos como espessante e como aglutinante de água livre em molhos e temperos de salada. É também usada como aglutinador de água livre e como estabilizador em sorvetes. A água livre em uma mistura de sorvete resulta numa textura granular, cristais de gelo, pobres propriedades de liquefação e baixa resistência ao choque térmico no produto final. A incorporação de um estabilizador contendo quantidades da goma guar de aproximadamente 0.3% da mistura de sorvete resulta num produto mascável, de textura suave, com lenta liquefação e boa resistência a choques térmicos. A goma guar incorpora a água livre sem modificar a característica viscosa da mistura. Ela é também particularmente recomendável na pasteurização rápida devido às suas propriedades de rápida hidratação. Ela está incluída nas normas de sorvetes e no Food Chemicals Codex.

É, também, usada na estabilização de sobremesas congeladas. A retenção das propriedades de hidratação máxima em meios ácidos é um fator importante para o uso da

goma guar. Outros alimentos que podem ser estabilizados pela goma guar devido sua habilidade de aglutinar água são os alimentos congelados, queijos, recheios de tortas, e alimentos para cães.

B.2.3 Cosméticos e Fármacos

A goma guar é usada para espessar vários cosméticos e fármacos. É também usada como aglutinante em comprimidos. A goma granulada é usada para este propósito. A goma guar grosseiramente granulada está sendo estudada como laxante.

B.2.4 Indústria do Papel

A indústria do papel se tornou o maior usuário de galactomananas. Estima-se que cerca de 10 milhões de quilogramas de galactomananas (gomos guar e de feijão de alfarroba) são usados anualmente por essa indústria, sendo o guar em maior proporção.

Aditivo de umidificação final - O maior uso de galactomanana na fabricação de papel está na umidificação final do processo. A goma é adicionada à pasta em suspensão antes da folha ser formada numa máquina Fourdrinier ou de cilindro. O processo pastoso, projetado para remover a lignina, produzindo desta forma uma pasta fibrosa de celulose, também remove grande parte das *hemiceluloses* normalmente presentes na madeira. Tais hemiceluloses, que são geralmente mananas e xilenas, poderiam contribuir significativamente para as propriedades de hidratação da pasta e resistência do papel formado pela pasta. As galactomananas compensam ou suplementam os hemiceluloses naturais. As vantagens obtidas pela adição de galactomananas à pasta são: (a) melhoria na formação da folha com distribuição mais regular de fibras (sem feixes de fibras); (b) aumento da resistência à ruptura de Mullen; (c) aumento da resistência à dobras; (d) aumento da resistência à tração; (e) aumento de *pick* (*pick* é a medida da força necessária para extrair uma fibra da superfície de

uma folha); (f) maior facilidade na hidratação da pasta (a pasta é processada de forma a ter a superfície de suas fibras aumentada, possibilitando uma maior aderência à água; a adição de galactomannans auxilia tal retenção, diminuindo o tempo de processamento e, conseqüentemente, reduzindo o consumo de energia); (g) melhoria na qualidade final do produto; (h) diminuição da porosidade; (i) uniformização do prensamento de meios corrugados; (j) aumento da velocidade das máquinas; (k) aumento da retenção de finos.

Aceita-se, em geral, que o efeito das pontes de hidrogênio é um dos principais fatores que afetam as ligações entre fibras. Uma análise da estrutura molecular das galactomananas mostra uma molécula rígida com grupos de hidroxila primários e secundários. É difícil efetuar uma comparação entre as eficiências das gomas de feijão de alfarroba e guar na produção de papel porque a quantidade de variáveis envolvidas é muito grande, como a formulação da goma, tipo de pasta, tempo de batimento, e condições das máquinas. Contudo, muitos na indústria do papel acreditam ser a goma guar a mais eficiente. Uma outra propriedade dessa goma torna sua aplicação prática na fabricação de papel mais aceitável. Tais gomas sempre contêm uma quantidade de casca como contaminante. A casca proveniente da alfarroba tem cor vermelha/marrom o que resulta, em folhas brancas, pontos pequenos, mas visíveis; a casca do guar é branca, o que a torna imperceptível.

As soluções de goma são preparadas por cozimento e são, geralmente, bombeadas para a sucção de uma bomba ventilada. A goma guar pode ser processada de forma a dispensar tal operação, racionalizando sua utilização.

B.2.5 Explosivos

A goma guar é adicionada como agente impermeabilizante na produção de cápsulas de explosivos de nitrato de amônia resistentes à água. A capacidade da goma guar de hidratar em soluções saturadas de nitrato de amônia resultou no uso em larga escala da goma como

agente espessante e gelificante para pastas explosivas. Muitas patentes para o uso da goma guar nesta aplicação foram requeridas.

B.2.6 Tabaco

A goma guar encontrou uso como aglutinador de finos fragmentados de tabaco na produção de tabaco reconstituído para produtos para fumantes. Nesse processo uma mistura de finos de tabaco de alta qualidade, goma guar e umectante são passados por cilindros de aço muito próximos que giram à velocidades superficiais diferentes. A folha obtida é então parcialmente resfriada. A lâmina resultante tem a resistência à tração e a espessura da folha de tabaco e pode a ela ser misturada pois conserva seu odor e sabor.

B.2.7 Derivados

Muitos derivados de goma guar foram preparados e reportados na literatura. Incluem a goma guar oxidada, carboximetilada, hidroxialquilada (denomina-se *alquila* o radical resultante da retirada de um hidrogênio de um hidrocarboneto alifático) e várias outras modificações carboidratadas. Alguns desses derivados encontram usos importantes nas indústrias têxtil e de papel.

Nos últimos anos os hidroxialquilguar tem assumido papel importante. Materiais à base de hidroximetilguar e hidroxipropilguar com variações em viscosidade e substituição molar estão disponíveis. A derivação através do uso de óxidos alquilados tem modificado as propriedades do guar para utilização em determinadas áreas.

O guar regular, por exemplo, é rapidamente adsorvido por superfícies minerais hidratadas através de pontes de hidrogênio facilitando sua floculação. A taxa de adsorção é modificada pela introdução de ramificações laterais de hidroxialquilas permitindo uma grande variação na taxa de floculação, importante para a indústria da mineração.

De modo similar, o guar interage com as superfícies celulósicas hidratadas afetando a formação e a resistência de uma lâmina durante a produção de papel. As taxas de adsorção são alteradas, pela hidroxialquilação, para aplicações úteis na fabricação de papel.

Um dos novos melhoramentos obtidos pela hidroxialquilação do guar é a solubilidade em solventes aquosos como os glicóis e o álcool. Tal solubilização permite a utilização dos derivados de hidroxialquilguar como espessantes para pastas explosivas.

A compatibilidade eletrolítica, uma importante propriedade do guar, foi estendida pela hidroxialquilação para cobrir as soluções saturadas de sal de cálcio. Isso é particularmente útil em aplicações como o fraturamento de poços de petróleo e pastas aquosas explosivas.

Os derivados de hidroxialquilguar são mais biodegradáveis que os éteres de celulose. Esse grau intermediário de biodegradabilidade sugere seu uso na indústria têxtil.

B.3 Estrutura

A metilação, fragmentação e oxidação periodatada mostram que a goma guar (guaran) consiste de cadeias lineares de unidades de (1→4)-β-D-manopiranosil com unidades de α-D-galactopiranosil unidas por ligações (1→6). A hidrólise enzimática da goma guar fornece manobiose (4-O-β-D-manopiranosil-D-manose), manotriose e 6-O-α-D-galactopiranosil-D-manopiranosil, confirmando os resultados de uma metilação inicial e mostrando que as ligações β-D-(1→4) estão presentes na manana e que a cadeia lateral de unidades de D-galactose são unidas por ligações α-D-(1→6).

A relação de D-galactose para D-manose na goma guar é de 1:2, com cadeias laterais simples de unidades de D-galactopiranosil ligadas a uma longa cadeia composta de unidades de D-manopiranosil (figura B.1). O peso molecular reportado é de 220.000.

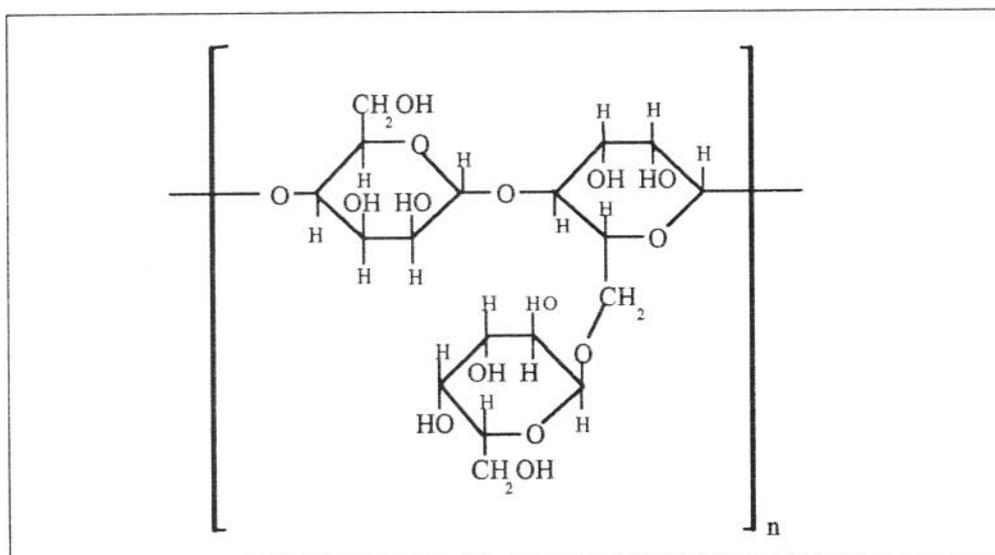


Fig. B.1 Unidade estrutural da goma guar (Guaran).

O HPG (HidroxiPropilGuar) é obtido através da reação do propileno óxido com a molécula de goma guar e possui uma estabilidade térmica maior que a da goma, além de gerar soluções mais viscosas. Tal reação desloca as hidroxilas do topo e base da estrutura,

intercalando um radical de propileno óxido no topo, e dois radicais na base. Como resultado, o HPG forma uma cadeia polimérica maior que a goma e seu peso molecular sobe para 2.000.000^(115, 281).

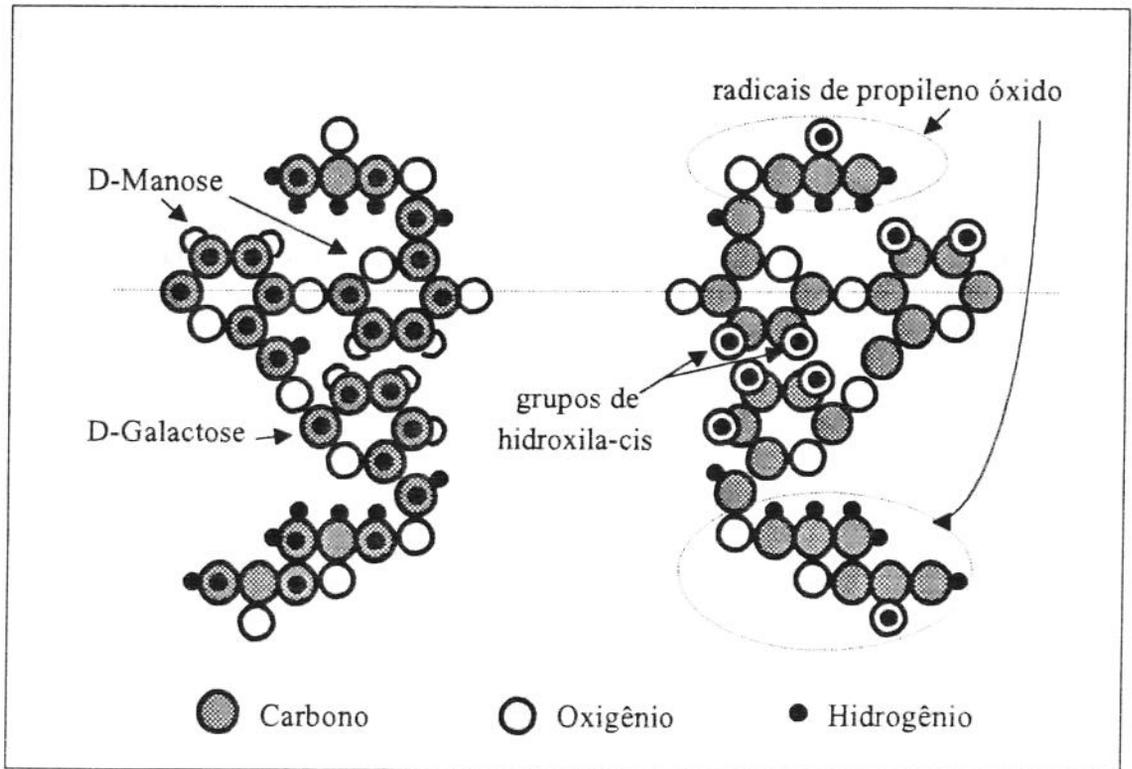


Fig. B.2 - Unidade estrutural do HPG (verso e frente).

O objetivo inicial de seu desenvolvimento foi a obtenção de um produto que apresentasse um teor de resíduos inferior (o teor apresentado pela goma guar se encontra na faixa de 8 a 12%, enquanto que no HPG ele se situa na faixa de 1 a 4%)^(108, 155), e que permitisse um maior controle de suas propriedades quanto à degradação devido a temperatura^(110, 111, 236) e à sua reticulação^(5, 28, 41, 87, 254). A figura B.2 mostra uma unidade estrutural idealizada do HPG.

B.4 Propriedades

B.4.1 Viscosidade

A goma guar forma dispersões (soluções) coloidais viscosas quando hidratada em água fria; suas viscosidades podem ser medidas através de viscosímetros rotacionais como o Brookfield Syncro-Lectric ou o Haake Rotovisco. Tais soluções exibem variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento, comportamento típico dos fluidos não-newtonianos. As soluções mais diluídas de goma guar mostram uma resposta menos pseudo-plástica: a viscosidade de uma solução a 0.3% mostra pequena variação a taxas superiores a 60 rpm. A viscosidade das soluções de goma guar pode também ser medida em instrumentos tipo pipeta, como os viscosímetros Dudley, Engler, e Ostwald. Tais equipamentos são mais adequados para soluções de goma a concentrações inferiores a 1000 ppm (1 mg/l). Reômetros de extrusão são adequados para medição de altas viscosidades, que ocorrem em concentrações superiores a 2%.

Para se preparar uma solução de goma guar, a goma seca deve ser vigorosamente agitada em um tanque de água. Quando a dispersão é conseguida, a agitação é reduzida e mantida até a solução se tornar viscosa. Tal resultado é obtido dentro de um mínimo de 5 minutos até, preferencialmente, 30 minutos (algumas classes de goma guar podem continuar se espessando por 24 horas). A viscosidade é dependente do tempo, temperatura, concentração, pH, resistência iônica, e tipo de agitação.

Tempo - A viscosidade sob agitação de uma solução de goma guar se apresenta sempre crescente, tendendo à estabilização após a primeira hora. A manutenção da viscosidade é conseguida através de aditivos em concentração adequada. Entre os aditivos mais efetivos encontram-se o formaldeído e os fenóis clorados e os ácidos benzóico e sórbico.

Temperatura - A viscosidade de uma solução totalmente hidratada de goma guar varia quase que diretamente com o inverso da temperatura na faixa 20°- 80°C Os fatores que influenciam no desenvolvimento de viscosidade são o aumento de viscosidade resultante de rápido aquecimento e o decréscimo de viscosidade causado pela efeito de degradação devido ao aquecimento prolongado. Medições efetuadas em períodos superiores a 24 horas mostram uma boa estabilidade da solução após 2 horas de aquecimento. As viscosidades máximas das dispersões de goma guar são encontradas na faixa 25°- 40°. Quanto menor a temperatura, menor é a taxa com que a viscosidade aumenta.

Concentração - Em soluções diluídas, a viscosidade da goma guar aumenta linearmente com a concentração, até cerca de 0.5%. Depois disso, as soluções de goma guar se comportam como soluções não-newtonianas principalmente como resultado de atrações superficiais complexas em altas concentrações. A tabela B.2 compara as viscosidades de diversos colóides medidos de maneira similar.

Goma	mPa.s
Goma arábica (20% por peso)	50
Goma de feijão de alfarroba	100
Metilcelulose	150
Goma de tragacanto	200
Goma de carrageen (*)	300
Carboximetilcelulose sódica	1.200
Goma karaya (**)	1.500
Alginato de sódio	2.000
Goma guar	4.200

(*) variedade de musgo irlandês.

(**) planta indiana.

Tabela B.2 - Viscosidades Comparativas de Soluções Hidratadas de 1% de Goma a 1%

pH - A goma guar é estável sob uma larga faixa de pH. A natureza não-iônica da molécula é responsável pela viscosidade quase constante na faixa de pH de 1 a 10.5.

Contudo, goma guar previamente hidratada é compatível com alta alcalinidade; e gomas guar modificadas que desenvolvem altas viscosidades em soluções cáusticas concentradas foram desenvolvidas recentemente. A taxa ótima de hidratação ocorre entre os pH de 7.5 e 9. Apesar da diferença de taxas, as viscosidades máximas são as mesmas em meios ácidos ou alcalinos.

Resistência iônica - Devido a sua não-ionicidade, a goma guar é compatível com sais sob uma ampla faixa de concentração eletrolítica. A alta concentração de sais polivalentes afeta a hidratação e produz géis.

B.4.2 Redução de fricção

A goma guar, com sua configuração de ligações longas e regulares, reduz e minimiza as perdas de pressão por fricção da água quando em fluxo turbulento e apresenta grande resistência à degradação por cisalhamento quando constantemente reciclado. Pode-se expressar sua eficiência na redução de fricção como um percentual de perda de pressão eliminado pela presença da goma:

$$\% \text{ redução de fricção} = \frac{\Delta P_{H_2O} - \Delta P_{sol.goma}}{\Delta P_{H_2O}} \times 100 \ .$$

B.4.3 Géis

O íon borato atua como um agente reticulador na goma guar hidratada formando géis estruturais coesivos, sendo tal reação inicialmente reportada em 1943⁽⁷⁰⁾. A formação e a resistência desses géis dependem do pH, da temperatura e da concentração dos reagentes. A faixa ótima de pH para formação de gel é 7.5 - 10.5. A transformação solução-gel é reversível; o gel pode ser liquefeito pela queda do pH abaixo de 7 e pelo aquecimento. Os polissacarídeos com numerosos grupos de hidroxila adjacentes na posição cis podem formar géis boratados tri-dimensionais. Os géis boratados podem ainda ser liquefeitos pela adição de

um poliálcool de baixo peso molecular, como o glicerol ou o manitol, capaz de reagir com o íon borato.

O íon borato inibirá a hidratação da goma guar se estiver presente quando da adição do pó de goma à água. As concentrações mínimas necessárias para inibição da hidratação dependem do pH. Por exemplo, com 1% de goma guar, 0.25-0.5% (baseado no peso de goma guar) de bórax (tetraborato de sódio) é necessário em pH 10-10.5; em pH 7.8-8, requer-se 1.5-2% de bórax. A reação complexante é reversível porque o rebaixamento do pH abaixo de 7 permite à goma sua hidratação normal. Essa técnica é utilizada em geral para se obter melhor mistura e mais fácil dispersão.

A goma guar pode ser insolubilizada ou gelificada por íons metálicos de transição para a formação de géis úteis comercialmente. Esses géis são dependentes do pH e irreversíveis, diferentemente do que ocorre com o íon borato. As características desses géis variam grandemente com o cátion utilizado.

B.4.4 Filmes

A goma guar forma filmes resistentes e dobráveis, sensíveis à água. A literatura descreve a produção de filmes altamente orientados que são alongados 150%. Cita, também, a utilização de derivados de triacetato. Os filmes produzidos com triacetato não são coloridos e tem resistência à tração inferior aos filmes de triacetato de celulose ou de triacetato de amilose de batata. Tais filmes podem ser plastificados tornando-se leves e dobráveis.

Apêndice C - Parâmetros reológicos

Parâmetros reológicos são variáveis características de um fluido em escoamento representadas por funções. Na literatura recebe também as denominações *funções materiais*, *funções viscométricas* e outras⁽¹⁹⁾. Tais parâmetros são definidos de acordo com o tipo de fluxo a que o fluido está submetido.

O escoamento cisalhante simples é dado pelo campo vetorial

$$v_x = \dot{\gamma}_{yx} y; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0$$

onde o gradiente de velocidade $\dot{\gamma}_{yx}$ pode ser função do tempo. Seu valor absoluto é chamado *taxa de cisalhamento* $\dot{\gamma}$. Para o escoamento cisalhante permanente (também chamado de escoamento viscométrico) tal taxa é independente do tempo; neste subentende-se que a taxa é mantida por tempo suficiente para que todas as tensões no fluido sejam independentes do tempo. A característica desse fluxo, mostrado nas figuras abaixo, é que a distância l entre duas partículas vizinhas, inicialmente no eixo y e separadas por uma distância l_0 , após um intervalo de tempo Δt , torna-se

$$l = l_0 \sqrt{1 + (\dot{\gamma} \Delta t)^2} \sim l_0 \dot{\gamma} \Delta t \quad (\dot{\gamma} = \text{cte.})$$

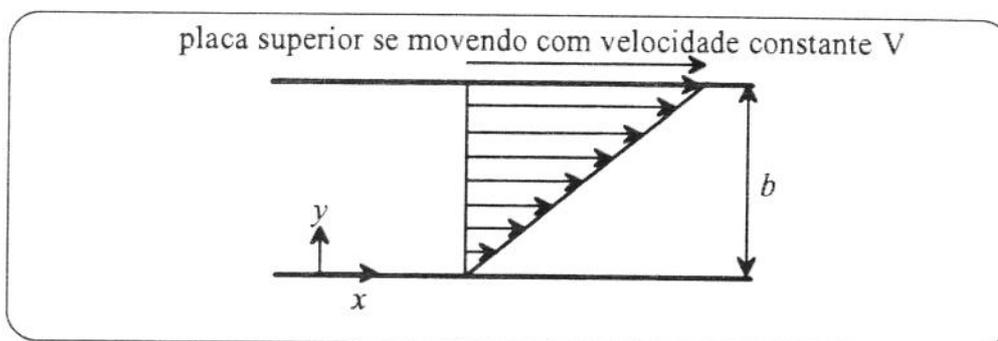


Fig. C.1 Escoamento cisalhante simples com taxa de cisalhamento $\dot{\gamma} = \frac{V}{b}$; $v_x = \dot{\gamma} y$

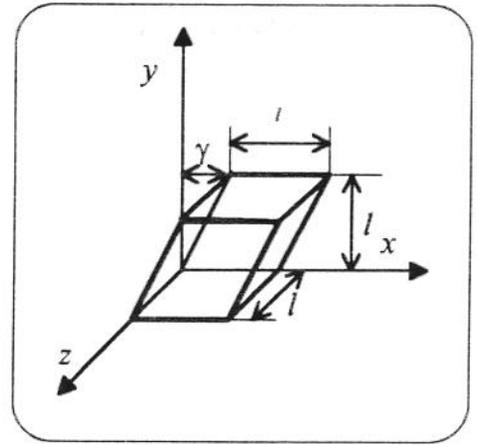
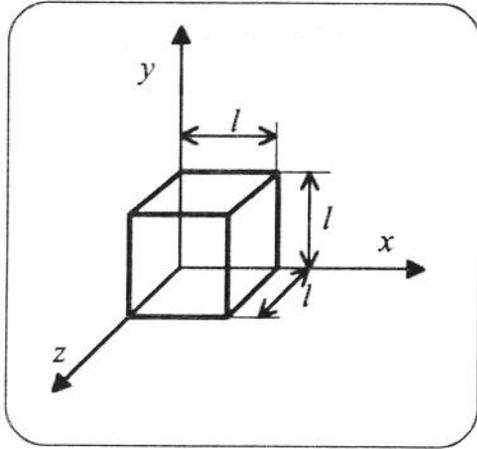


Fig C.2 Cubo unitário de material **Fig C.3** Escoamento cisalhante simples permanente
 $t = t_1$ $t = t_2 > t_1$ $\gamma = \dot{\gamma}(t_2 - t_1)$

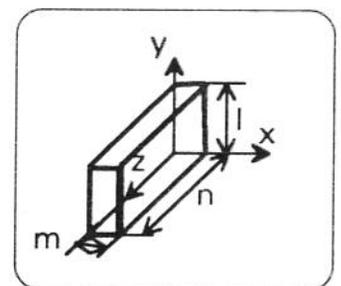
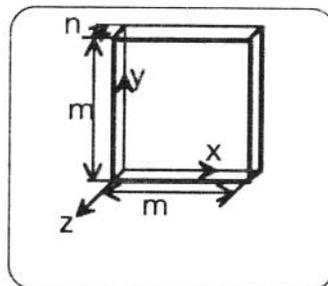
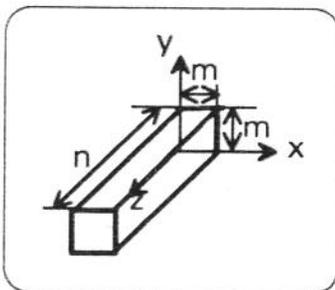
O escoamento extensional simples é dado pelo campo vetorial

$$v_x = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon} (1 + b)x; \quad v_y = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon} (1 - b)y; \quad v_z = +\dot{\epsilon} z$$

onde $0 \leq b \leq 1$ e $\dot{\epsilon}$ é a taxa de alongação, que pode depender do tempo. A depender do valor de b tem-se alguns tipos especiais deste fluxo:

- escoamento uniaxial : $(b = 0, \quad \dot{\epsilon} > 0)$
- escoamento biaxial : $(b = 0, \quad \dot{\epsilon} < 0)$
- escoamento planar : $(b = 1)$

A distância entre duas partículas de fluidos, neste caso, varia exponencialmente conforme: $l = l_0 \exp(\dot{\epsilon} \Delta t)$ ($\dot{\epsilon} = cte.$). Em todos os casos os volumes são preservados e as deformações são mostradas abaixo:



escoamento uniaxial

escoamento biaxial

escoamento planar

Fig C.4 Tipos de escoamento extensional $m = l/\sqrt{l}$; $n = \exp[\dot{\epsilon}(t_2 - t_1)]$

Os tensores tensão, $\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$, em forma matricial, serão dados por

$$\begin{pmatrix} p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{yx} & p + \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} p + \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p + \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p + \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

para os fluxos cisalhante e extensional, respectivamente. As tensões que são utilizadas nos cálculos de escoamento cisalhante são a cisalhante (τ_{yx}) e a primeira e segunda diferenças de tensões normais ($\tau_{xx} - \tau_{yy}$ e $\tau_{yy} - \tau_{zz}$), enquanto que no escoamento extensional somente as duas diferenças de tensões normais ($\tau_{zz} - \tau_{xx}$ e $\tau_{yy} - \tau_{xx}$) são importantes, sendo a última nula para os fluxos uniaxial e biaxial ($b = 0$).

C.1 Parâmetros para o escoamento cisalhante

Os principais parâmetros reológicos (com suas respectivas equações definidoras) do escoamento cisalhante permanente são:

<i>viscosidade</i>	$\tau_{yx} = -\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{yx}$
<i>primeira diferença de tensão normal</i>	$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{yx}^2$
<i>segunda diferença de tensão normal</i>	$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{yx}^2$

Estas funções são pares, razão pela qual são escritas como parâmetros de $\dot{\gamma} = |\dot{\gamma}_{yx}|$, a taxa de cisalhamento que é um invariante do tensor taxa de deformação.

Em termos experimentais, a viscosidade é a função viscométrica mais conhecida. Devido à importante dependência destes parâmetros em relação à temperatura, elas são geralmente grafadas em curvas-tipo reduzidas por um parâmetro a_T definido por

$$a_T = \frac{\eta_0(T)}{\eta_0(T_0)} \frac{c_0 T_0}{c T} \quad \text{gerando as curvas} \quad \frac{\eta}{a_T} \text{ vs. } a_T \cdot \dot{\gamma}, \quad \frac{\Psi_1}{a_T^2} \text{ vs. } a_T \cdot \dot{\gamma} \quad e \quad \frac{\Psi_2}{a_T^2} \text{ vs. } a_T \cdot \dot{\gamma}.$$

Em soluções diluídas a viscosidade é dominada pelo solvente tornando difícil a visualização do efeito do

polímero sobre a viscosidade; isto pode ser obtido através da expansão da *viscosidade relativa* η_{rel} , definida como a relação entre a viscosidade da solução e a do solvente η_s , $\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_s}$, em uma série de Taylor em função da concentração c .

$$\eta_{rel} = 1 + [\eta]c + k'[\eta]^2c^2 + \dots$$

onde $[\eta]$ e k' são independentes da concentração. O coeficiente $[\eta]$ é a *viscosidade intrínseca* da solução e k' é o *coeficiente de Huggins*; da equação anterior segue que

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\eta - \eta_s}{c \eta_s} \right)$$

A segunda diferença de tensão normal é pouco estudada por ser muito menor que a primeira. Por muito tempo pensou-se que $\tau_{yy} = \tau_{zz}$ ou $\Psi_2 = 0$, o que era conhecido como "hipótese de Weissenberg". Hoje sabe-se que ela se situa em torno de 10% de Ψ_1 e que é negativa, porém o conhecimento de seu comportamento e efeitos é ainda incompleto. Os parâmetros de tensão normal não ocorrem em fluidos newtonianos; para os não-newtonianos elas podem ser associadas a uma compressão complementar no eixo y , num experimento de escoamento entre placas, e, por serem negativas, exigiriam a aplicação de uma tensão normal às mesmas para impedir sua separação quando em fluxo.

Uma medida da "elasticidade" do fluido é a *relação de tensões*, $(\tau_{yy} - \tau_{xx})/\tau_{yx}$. Esta relação é nula para os fluidos newtonianos, e para os não-newtonianos no limite de baixas taxas de cisalhamento. Ela varia de 2 a 3 para o polietileno e de 20 a 30 para a poliácridamida

Diversos parâmetros são obtidos de experimentos em escoamento cisalhante simples transiente, detalhados em BIRD, ARMSTRONG E HASSAGER. A tabela abaixo relaciona resumidamente os principais.

Escoamento	Função	Equação
a. Permanente	$\eta(\dot{\gamma})$	$\tau_{yx} = -\eta \dot{\gamma}_{yx}$
	$\Psi_1(\dot{\gamma})$	$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1 \dot{\gamma}_{yx}^2$
	$\Psi_2(\dot{\gamma})$	$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2 \dot{\gamma}_{yx}^2$
b. Oscilatório de pequena amplitude	$\eta'(\omega)$	$\tau_{yx} = -\eta' \dot{\gamma}^0 \cos \omega t$
	$\eta''(\omega)$	$\tau_{yx} = -\eta'' \dot{\gamma}^0 \sin \omega t$
	$G'(\omega) = \eta'' \omega$	$\tau_{yx} = -G' \eta^0 \sin \omega t$
	$G''(\omega) = \eta' \omega$	$\tau_{yx} = -G'' \eta^0 \cos \omega t$
c. Crescimento de tensão antes do permanente	$\eta^+(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{yx} = -\eta^+ \dot{\gamma}_0$
	$\Psi_1^+(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1^+ \dot{\gamma}_0^2$
	$\Psi_2^+(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2^+ \dot{\gamma}_0^2$
d. Relaxação de tensão após o permanente	$\eta^-(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{yx} = -\eta^- \dot{\gamma}_0$
	$\Psi_1^-(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1^- \dot{\gamma}_0^2$
	$\Psi_2^-(t, \dot{\gamma}_0)$	$\tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2^- \dot{\gamma}_0^2$
e. Relaxação de tensão após pulso cisalhante	$G(t, \gamma_0)$	$\tau_{yx} = -G \gamma_0$
	$G\Psi_1(t, \gamma_0)$	$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -G\Psi_1 \gamma_0^2$
f. Arrasto (creep)	$J(t, \tau_0)$	$\gamma_{yx}(0, t) = -J \tau_0$
g. Retrocesso (recoil) após permanente	$\gamma_r(0, t, \tau_0)$	$\gamma_r = \int_0^t \dot{\gamma}_{yx}(t') dt'$
	$\gamma_\infty(\tau_0)$	$\gamma_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_r$
	$J_e^0(\tau_0)$	$\gamma_\infty = J_e^0(\tau_0) \tau_0$

Tab. C.1 Parâmetros para o escoamento cisalhante simples

$$v_x = \dot{\gamma}_{yx} y, \quad v_y = v_z = 0$$

C.2 Parâmetros para o escoamento extensional

No escoamento extensional o regime permanente dificilmente é alcançado, sendo praticamente impossível obtê-lo para os polímeros de baixa densidade e soluções poliméricas. Desta forma, os parâmetros para o regime transiente são muito importantes e estão, resumidamente, tabelados abaixo:

Escoamento	Função	Equação
a. Permanente	$\bar{\eta}_1(\dot{\epsilon})$	$\tau_{zz} - \tau_{xx} = -\bar{\eta}_1 \dot{\epsilon}$
	$\bar{\eta}_2(\dot{\epsilon})$	$\tau_{yy} - \tau_{xx} = -\bar{\eta}_2 \dot{\epsilon}$
b. Crescimento de tensão início do permanente	$\bar{\eta}_1^+(t, \dot{\epsilon}_0)$	$\tau_{zz} - \tau_{xx} = -\bar{\eta}_1^+ \dot{\epsilon}_0$
	$\bar{\eta}_2^+(t, \dot{\epsilon}_0)$	$\tau_{yy} - \tau_{xx} = -\bar{\eta}_2^+ \dot{\epsilon}_0$
c. Arrasto (creep) - b = 0	$D(t, \sigma_0)$	$\epsilon(0, t) = -D\sigma_0$
d. Recuperação livre após permanente (b=0)	$\epsilon_r(0, t, \sigma_0)$	$\epsilon_r = \int_0^t \dot{\epsilon}(t') dt'$
	$\epsilon_\infty(\sigma_0)$	$\epsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_r$

Tab. C.2 Parâmetros para o escoamento extensional.

C.3 Correlações úteis para os parâmetros reológicos

C.3.1 Efeitos da temperatura

Conforme visto anteriormente, o efeito da temperatura pode ser incluído nos parâmetros reológicos através da constante a_T . Tal parâmetro pode ser descrito numa dependência de Arrhenius na forma

$$a_T = \exp \left[\frac{\Delta \tilde{H}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

onde $\Delta \tilde{H}$ é conhecida como *energia de ativação para escoamento* e depende dos parâmetros moleculares dos polímeros podendo, portanto, ter grande variação. Uma importante correlação para esta constante é a *equação WLF*⁽⁷⁸⁾ válida para temperaturas compreendidas entre T_g (temperatura entre as zonas de transição e vítrea) e $T_g + 100$,

$$\log a_T = \frac{-c_1^0(T-T_0)}{c_2^0+(T-T_0)}$$

Se T_0 é tomado como a temperatura de transição vítrea, então $c_1^0 = 17.44$ e $c_2^0 = 51.6 K$, que devem ser usados quando não se dispõe de dados específicos sobre o polímero; se são

disponíveis, é preferível tomar-se $c_1^0 = 8.86$ e $c_2^0 = 101.6 K$ e escolher-se o T_0 que melhor se ajusta aos dados⁽⁷⁸⁾.

Para soluções poliméricas sugere-se trabalhar com $\eta - \eta_s$ e $\eta_0 - \eta_s$ em substituição a η e η_0 .

C.3.2 Efeitos da concentração e peso molecular

Os efeitos da concentração já foram introduzidos na definição de viscosidade específica anteriormente. Estendendo-se esta discussão, uma relação bastante genérica entre a concentração e o peso molecular pode ser dada por:

$$[\eta]_0 = K' M^a$$

onde o valor de K' depende do par polímero-solvente em estudo e a , conhecido como *expoente de Mark-Houwink*, se situa entre 0.5 e 0.8. Inicialmente pensou-se que a relação acima era linear (regra de Staudinger).

Experimentalmente, descobriu-se que a baixas concentrações ($c[\eta_0] < 1 - 5$) os parâmetros se correlacionam melhor com $c[\eta_0]$ e a altas concentrações com M^a , o que sugere diferentes tipos de interações moleculares nestas faixas.

Uma forma conveniente de se apresentar a função viscosidade de forma reduzida é grafar-se $(\eta - \eta_s)/(\eta_0 - \eta_s)$ vs. $\lambda \dot{\gamma}$ onde λ é uma constante característica de tempo da solução polimérica. A forma de λ sugerida pela teoria molecular é $\beta = \lambda \dot{\gamma} = [\eta]_0 \eta_s \frac{M}{RT} \dot{\gamma}$. O comportamento de λ_0 em função de c e M é relativamente bem conhecido; em baixas concentrações uma expressão na forma $\eta_0 = \eta_0(c[\eta])$ pode ser usada na consolidação de dados de um dado sistema polimérico. Como exemplo cita-se a equação de Martin

$$\eta_0 - \eta_s = \eta_s c[\eta]_0 \exp(k'' c[\eta]_0)$$

onde k'' é uma constante arbitrária. O comportamento de η_0 em altas concentrações é governado pelo produto cM .

Diversas outras correlações são obtidas através da análise da teoria molecular em conjunção com os dados experimentais e estão disponíveis nos textos básicos de teoria reológica^(19,78).

C.3.3 Relações entre as propriedades viscoelásticas lineares e os parâmetros viscométricos

De uma análise dos dados de viscosidade e viscosidade dinâmica fica evidente que $\eta(\dot{\gamma})$ e $\eta(\omega)$ são parâmetros similares de seus argumentos, sendo idênticos nos valores baixo de taxa de cisalhamento e frequência e diferenciando-se nos altos valores onde a viscosidade dinâmica decai mais rápido que a viscosidade. A *regra de Cox-Merz*⁽¹⁹⁾, largamente utilizada, corrige esta distorção igualando a viscosidade à magnitude da viscosidade complexa na forma

$$\eta(\dot{\gamma}) = |\eta^*(\omega)|_{\omega = \dot{\gamma}} = \eta'(\omega) \left[1 + \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 \right]_{\omega = \dot{\gamma}}^{0.5}$$

Tal relação já foi testada em inúmeras soluções poliméricas com grande sucesso e os erros encontrado em geral estão dentro das faixas de imprecisão dos equipamentos utilizados nas medições. Uma interessante alternativa para a regra de Cox-Merz é a *relação reflexiva de Gleissle* dada por

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta^+(t)_{t=1/\dot{\gamma}} \quad \eta^+(t) = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta^+(t, \dot{\gamma})$$

Similarmente à regra de Cox-Merz, a *regra de Laun*⁽¹⁹⁾ propõe o seguinte empirismo para a primeira diferença de tensões normais

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{2\eta''(\omega)}{\omega} \left[1 + \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 \right]_{\omega = \dot{\gamma}}^{0.7}$$

que possui a relação reflexiva de Gleiselle correspondente dada por

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \Psi_1^+(t)_{t=k/\dot{\gamma}} \quad 2.5 \leq k \leq$$

Laun ainda propôs a relação

$$-\eta_\infty(\dot{\gamma}) = \frac{\eta''}{\eta'} \left[1 + \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 \right]_{\omega = \dot{\gamma}}^{1.5} = \frac{\Psi_1 \dot{\gamma}}{2\eta} \left[1 + \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 \right]_{\omega = \dot{\gamma}}^{1.3}$$

Apêndice D - Modelos reológicos

Este apêndice comporta, basicamente, uma compilação sintetizada de tópicos registrados em BIRD, ARMSTRONG & HASSAGER (vol.1, 1987), a mais completa referência bibliográfica neste assunto.

D.1 Fluido newtoniano generalizado

A lei da viscosidade de Newton declara que uma força cisalhante aplicada a uma área unitária de um fluido provoca no mesmo uma reação proporcional ao gradiente negativo da velocidade local, o que é matematicamente expresso por:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

onde μ , *viscosidade*, é uma constante definida para uma determinada temperatura, pressão e concentração. Todos os gases e a maioria dos líquidos simples são descritos por esta equação e recebem a denominação de *fluidos newtonianos*.

A simplicidade e praticidade desta lei levaram os pesquisadores a estender tal definição aos demais fluidos, conhecidos por fluidos *não-newtonianos*, através da conceituação da *viscosidade não-newtoniana*, η , que é função dos fatores acima e também do gradiente de velocidade, e que é chamado de *taxa de cisalhamento*, $\dot{\gamma}$. Generalizando para um campo de velocidades genérico, a lei de Newton generalizada é expressa por:

$$\tau = -\eta \dot{\gamma}$$

onde estão presentes os tensores de tensão e de taxa de cisalhamento. Num campo tensorial esta viscosidade é função de invariantes escalares do tensor taxa de cisalhamento.

Diversos modelos foram definidos para o tratamento analítico de $\eta(\dot{\gamma})$, tratando-se de empirismos que buscam ajustar os resultados experimentais obtidos a funções matemáticas que os descrevam adequadamente.

O modelo de Carreau-Yasuda é composto por cinco parâmetros e oferece suficiente flexibilidade para ajustar uma grande variedade de curvas experimentais, sendo dado por:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}}$$

onde η_0 e η_{∞} são as viscosidade nas taxas de cisalhamento nula e infinita, λ é uma constante de tempo, n é um adimensional que descreve a inclinação da curva na região da lei de potência, e a é outro adimensional que descreve a transição entre esta região e outra definida pela taxa de cisalhamento nula.

Esta expressão delimita marcadamente três regiões em um gráfico logarítmico da viscosidade contra a taxa de cisalhamento, a primeira, uma reta paralela ao eixo de taxa de cisalhamento que define η_0 , a segunda, linear descendente, conhecida por região da lei de potências, e a terceira, como a primeira, que define η_{∞} . Na maioria das aplicações industriais a segunda região acima descrita descreve adequadamente os fluidos de interesse, o que reduz a equação anterior a:

$$\eta = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

conhecida por modelo de Ostwald-de Waele ou modelo de potência, onde n tem o mesmo sentido que no modelo anterior e é conhecido por índice de comportamento, e K , chamado de índice de consistência, equivale a $\eta_0 \lambda^{n-1}$ para $\eta_{\infty} \ll \eta_0$. Embora importante e largamente utilizado, este modelo apresenta três inconvenientes:

- ✓ não descreve a viscosidade para taxas de cisalhamento muito baixas e isto pode levar a erros significativos em alguns tipos de problemas⁽¹⁹⁾,
- ✓ o parâmetro K não permite a obtenção do tempo e viscosidade característicos, o que prejudica uma análise dimensional dos argumentos,
- ✓ não há como relacionar os parâmetros K e n ao peso molecular e à concentração visto que as correlações existentes os referem a outros parâmetros como η_0 ou $\eta^*(\omega)$.

Outros modelos possuem aplicação prática como o *modelo de Bingham*, bastante utilizado em determinadas classes de fluido, e que define um limite de escoamento (yield stress), que é uma tensão mínima abaixo da qual não existe escoamento, e uma viscosidade efetiva, que é uma região linear que se desenvolve acima deste limite; o *modelo de potência truncado*, que combina o conceito de limite de escoamento com a lei de potências, sendo, portanto, um modelo de três parâmetros; o *modelo de Eyring*, desenvolvido a partir da teoria molecular dos líquidos; e o *modelo de Ellis* que relaciona a viscosidade à tensão ao invés da taxa de cisalhamento.

A principal restrição imposta à utilização deste tipo de modelagem na análise de problemas envolvendo fluidos não-newtonianos, mesmo dentro de suas respectivas faixas de utilização, é a dissociação dos mesmos quanto aos componentes elásticos em geral presentes nestes fluidos e inexistente nos fluidos newtonianos. Isto só é permissível quando os efeitos elásticos não são importantes, ou seja, quando o *número de Débora*, o grupo adimensional que mede tal efeito, é bem menor que um determinado valor crítico. Este número é particularmente importante em problemas onde o escoamento não é puramente cisalhante, ou seja, em fluxos em camadas de contorno (boundary-layer), em orifícios, em problemas de instabilidade, em fluxos turbulentos, em agitação e mistura, em fiação de fibras (fiber spinning), no preenchimento de moldes, em películas e membranas, em fluxo com viscosidade dependente da pressão e em escoamento ao redor de esferas. Tais problemas devem ser estudados através de modelos viscoelásticos não-lineares.

B.2 Viscoelasticidade linear

O desenvolvimento da teoria matemática da viscoelasticidade linear é baseado no princípio da superposição, o que implica em que a resposta em qualquer tempo é diretamente proporcional ao valor do sinal inicial. O pressuposto de linearidade resulta da formulação de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Tais constantes são parâmetros dos materiais, tais como viscosidade e módulo de rigidez, e esta restrição tem como resultado que a teoria linear só é aplicável a pequenas variações em suas variáveis (tensão e deformação).

A equação diferencial geral da viscoelasticidade pode ser escrita como:

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \tau = \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \beta_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)$$

Se β_0 é o único parâmetro não nulo tem-se: $\tau = \beta_0$ que é a *equação da elasticidade de Hooke* com β_0 como o módulo de rigidez. Se β_1 é o único parâmetro não nulo tem-se $\tau = \beta_1 \dot{\gamma}$

que é a *lei da viscosidade de Newton* com β_1 sendo o coeficiente de viscosidade.

Tomando-se os parâmetros $\beta_0 (= G)$ e $\beta_1 (= \eta)$ e mantendo-se os demais nulos tem-se:

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

que é a mais simples equação da viscoelasticidade, conhecida como *modelo de Kelvin* e também chamada de modelo de Voigt. Se uma tensão $\bar{\tau}$ é aplicada em $t = 0$ e mantida constante após, tal modelo resulta em:

$$\gamma = \frac{\bar{\tau}}{G} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_K}\right) \right] \quad \text{onde } t_K = \frac{\eta}{G}$$

A constante de tempo acima definida controla a taxa de crescimento do deslocamento devido à imposição da citada tensão. Enquanto que no modelo de Hooke o valor final de deslocamento é alcançado instantaneamente, no de Kelvin ele é retardado, razão pela qual esta constante de tempo é chamada de *tempo de retardação*.

Uma melhor compreensão destes modelos é proporcionada com a introdução de modelos mecânicos, que é um método popular de descrever o comportamento viscoelástico linear e que se resume à composição de sistemas com diversos arranjos de molas e amortecedores. em paralelo ou em série, de forma a simular adequadamente o comportamento esperado do fluido.



Fig. D.1 Modelos básicos de viscoelasticidade linear.

Outro modelo importante é o *modelo de Maxwell*, que consiste na associação em série dos elementos, como mostrado acima, e que é equacionado por:

$$\tau + t_M \dot{\tau} = \eta \dot{\gamma}$$

onde, portanto, $\alpha_1 = t_M$ e $\beta_1 = \eta$.

Se for aplicada uma deformação $\bar{\gamma}$ em $t = 0$ e mantida, pode-se mostrar que

$$\tau = \eta \bar{\gamma} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_M}\right) \right]; \quad t > 0$$

o que implica em que o crescimento da tensão é retardado pela constante de tempo t_M . Por outro lado, se o fluido estivesse sob a ação de uma deformação constante no valor acima para tempos negativos e esta fosse removida em $t = 0$, tem-se, para tempos positivos, a resposta:

$$\tau = \eta \bar{\gamma} \exp\left(-\frac{t}{t_M}\right)$$

Neste caso a tensão relaxa exponencialmente de seu valor de equilíbrio até zero e a constante de tempo, t_M , é chamada de *tempo de relaxação*.

A partir das duas formas canônicas acima explicitadas torna-se possível a formulação de uma infinidade de modelos, porém já foi demonstrado que qualquer variação proposta pode ser reduzida à uma combinação das duas formas acima.

D.3 Equações constitutivas diferenciais

A partir da especificação de um campo de velocidades $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$, onde (x_1, x_2, x_3) é um conjunto de coordenadas cartesianas, define-se os seguintes tensores cinemáticos:

ij^{ésimo} componente

(cartesiano)

tensor gradiente de velocidade :	$\nabla \mathbf{v}$	$\frac{\partial}{\partial x_i} v_j$
tensor taxa de deformação :	$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$	$\frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$
tensor vorticidade :	$\mathbf{w} = \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T$	$\frac{\partial}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$

O tensor taxa de deformação é simétrico (os tensores estão grafados em **negrito**) enquanto que o tensor vorticidade é anti-simétrico, e o tensor gradiente de velocidade é a metade da soma destes dois:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{w})$$

Ou seja, o tensor gradiente de velocidade pode ser decomposto em suas partes simétrica e anti-simétrica. O tensor taxa de deformação possui seis componentes cartesianos independentes enquanto que o vorticidade possui três.

O tensor taxa de deformação descreve a taxa com que partículas vizinhas se movem independentemente de rotações rígidas superpostas e o tensor vorticidade é a medida da taxa local de rotação do fluido. Por esta razão, o tensor vorticidade não aparece na equação constitutiva do fluido newtoniano e o tensor gradiente de velocidade é nela substituído pelo tensor taxa de deformação (que, em notação não-tensorial, é chamado de taxa de cisalhamento).

Define-se, a seguir, a derivada convectiva do tensor taxa de deformação, que é colocada de forma recursiva:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(1)} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(n+1)} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\gamma}_{(n)} - \{(\nabla\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(n)} + \boldsymbol{\gamma}_{(n)} \cdot (\nabla\mathbf{v})\}$$

onde o símbolo de derivada acima refere-se à derivada substantiva^(19, 192).

Um exemplo do cálculo destas derivadas, em forma matricial, é mostrado a seguir:

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}(t); \quad (\nabla\mathbf{v})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}(t)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(1)} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}(t)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}_{yx} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx}^2$$

Se o escoamento é permanente $\boldsymbol{\gamma}_{(n)} = 0$ para $n \geq 3$.

A derivada convectiva do tensor tensão é definida como:

$$\boldsymbol{\tau}_{(1)} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\tau} - \{(\nabla\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla\mathbf{v})\}$$

ou,

$$\boldsymbol{\tau}_{(1)} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\tau} - \{\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla\mathbf{v})\}^T - \{\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla\mathbf{v})\}$$

caso o tensor tensão seja simétrico. Este tensor, para escoamento cisalhante puro, será dado em forma matricial por:

$$\boldsymbol{\tau}_{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 2\tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O modelo convectivo de Jeffreys, também conhecido como *fluido B de Oldroyd* é equacionado por:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \boldsymbol{\tau}_{(1)} = -\eta_0 [\boldsymbol{\gamma}_{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{\gamma}_{(2)}]$$

onde η_0 , λ_1 e λ_2 são, respectivamente, a viscosidade para taxa nula de cisalhamento, o tempo de relaxação e o tempo de retardação. Este modelo é importante por conter diversos outros como casos especiais⁽¹⁹⁾:

- ✓ Se $\lambda_2 = 0$, ele se reduz ao *modelo convectivo de Maxwell*, bastante utilizado para o cálculo de escoamento viscoelástico devido sua simplicidade.
- ✓ Se $\lambda_1 = 0$, ele se simplifica para um fluido de segunda ordem sem o segundo coeficiente de tensão normal.
- ✓ Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ele se torna um fluido newtoniano com viscosidade η_0 .

Em termos matriciais, para escoamento cisalhante, a equação torna-se:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_1 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 \cdot \dot{\gamma}_{yx} \\ & = -\eta_0 \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}_{yx} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \dot{\gamma}_{yx} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \cdot \dot{\gamma}_{yx}^2 \right] \end{aligned}$$

gerando um conjunto de equações diferenciais acopladas para os componentes do tensor tensão:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt} \right) \tau_{xx} - 2\tau_{yx} \lambda_1 \dot{\gamma}_{yx}(t) = 2\eta_0 \lambda_2 \dot{\gamma}_{yx}^2(t)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right) \tau_{yy} = 0$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right) \tau_{zz} = 0$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{d}{dt}\right) \tau_{yx} - \tau_{yy} \lambda_1 \dot{\gamma}_{yx}(t) = -\eta_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{d}{dt}\right) \dot{\gamma}_{yx}(t)$$

Verifica-se que as tensões normais $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$, o que anula o termo grifado da quarta equação. Para o escoamento cisalhante permanente, este sistema fornece as seguintes funções viscométricas:

$$\eta = \eta_0; \quad \Psi_1 = 2\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2); \quad \Psi_2 = 0$$

Para o escoamento oscilatório (pequenas amplitudes), fornece as funções:

$$\eta'(\omega) = \eta_0 \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 \omega^2}{1 + \lambda_1^2 \omega^2}; \quad \eta''(\omega) = \eta_0 \omega \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1^2 \omega^2}$$

O modelo não-linear mais simples é o *modelo de White-Metzner*, que é uma modificação do modelo convectivo de Maxwell, dado por:

$$\tau + \frac{\eta(\dot{\gamma})}{G} \tau_{(1)} = -\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{(1)}$$

onde G é uma constante e $\dot{\gamma}$ é segundo invariante do tensor taxa de deformação. Este modelo reproduz razoavelmente bem a relação entre a viscosidade e a taxa de cisalhamento e o primeiro coeficiente de tensão normal, porém apresenta problemas na reprodução do escoamento extensional (como o modelo de Maxwell); ele se mostrou bastante útil no campo da hidrodinâmica.

A introdução de invariantes dos tensores tensão e taxa de deformação para a inclusão de não-linearidades nos modelos viscoelásticos tem sido um dos recursos bastante utilizados. Para o tensor taxa de deformação ele são definidos da seguinte forma:

$$I = \sum_i \dot{\gamma}_{ii}; \quad II = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}; \quad III = \sum_i \sum_j \sum_k \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{jk} \dot{\gamma}_{ki}$$

Para fluidos incompressíveis $I = 2(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$. Para escoamento cisalhante $III = 0$, portanto, somente o segundo invariante é não-nulo neste fluxo. Ao invés dele, prefere-se trabalhar com a magnitude do tensor taxa de deformação, que é definida como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} = \sqrt{\frac{1}{2} II}$$

sendo esta magnitude, como já afirmado anteriormente, chamada de taxa de cisalhamento nestes fluxos.

Outros modelos que implementaram os invariantes em sua formulação foram os de *Phan-Thien-Tanner*, de origem molecular, e o *FENE-P*, incluindo, ambos, o invariante $tr \tau$ (traço do tensor tensão)^(19, 175) com algum sucesso.

Outra forma de tratar as não-linearidades é a inclusão de termos quadráticos no gradiente de velocidade. Como o modelo de Jeffrey inclui termos quadráticos, Oldroyd sugeriu a sistematização deste procedimento, o que gerou o chamado *modelo Oldroyd de 8 constantes*:

$$\begin{aligned} & \underline{\tau + \lambda_1 \tau_{(1)}} + \frac{1}{2} \lambda_3 \{ \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \} + \frac{1}{2} \lambda_5 (tr \tau) \boldsymbol{\gamma}_{(1)} + \frac{1}{2} \lambda_6 (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\gamma}_{(1)}) \boldsymbol{\delta} \\ & = -\underline{\eta_0 [\boldsymbol{\gamma}_{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{\gamma}_{(2)}]} + \lambda_4 \{ \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \} + \frac{1}{2} \lambda_7 (\boldsymbol{\gamma}_{(1)} : \boldsymbol{\gamma}_{(1)}) \boldsymbol{\delta} \end{aligned}$$

onde os termos sublinhados pertencem ao modelo convectivo de Jeffrey.

Diversos modelos foram formulados a partir de simplificações da equação acima. Com oito constantes e termos extra, este modelo oferece grande flexibilidade para a descrição das propriedades reológicas dos fluidos não-newtonianos, porém dá uma resposta inferior ao de White-Metzner no ajuste quantitativo da viscosidade e do primeiro coeficiente de tensão normal⁽¹⁹⁾.

O *modelo de Giesekus* foi formulado a partir da introdução de não-linearidades no tensor tensão e é equacionado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_s + \tau_p \\ \tau_s = -\eta_s \dot{\gamma} \\ \tau_p + \lambda_1 \tau_{p(1)} - \alpha \frac{\lambda_1}{\eta_p} \{ \tau_p \cdot \tau_p \} = -\eta_p \dot{\gamma} \end{array} \right.$$

Portanto, este modelo é escrito levando-se em conta a contribuição do solvente e do polímero ao tensor tensão, que é a forma com que as equações constitutivas derivadas da teoria cinética surgem naturalmente para as soluções poliméricas.

O modelo de Giesekus possui quatro parâmetros: uma constante de tempo, λ_1 ; as contribuições do solvente e polímero para a viscosidade de taxa nula de cisalhamento, η_s e η_p ; e o *fator de mobilidade* adimensional, α . A origem deste último termo pode ser associada ao movimento browniano anisotrópico e/ou ao arrasto hidrodinâmico das moléculas constituintes do polímero.

Este sistema de equações pode ser condensado através da substituição de τ_p na última equação por $\tau - \tau_s = \tau + \eta_s \dot{\gamma}$:

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} - a \frac{\lambda_1}{\eta_0} \{ \tau \cdot \tau \} - a \lambda_2 \{ \gamma_{(1)} \cdot \tau + \tau \cdot \gamma_{(1)} \} = -\eta_0 [\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} - a \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \{ \gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)} \}]$$

onde $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$; $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\eta_s}{\eta_p}$; $a = \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}$

Verifica-se que a equação condensada de Giesekus é um caso especial do modelo de Oldroyd de 8 constantes, com a inclusão do termo $\{ \tau \cdot \tau \}$. Se $a = 0$ ela resulta no modelo convectivo de Jeffrey. Vários modelos foram formulados com base nesta equação. A inclusão do termo $\{ \tau \cdot \tau \}$ possibilita a obtenção de funções viscoelásticas bastante realistas tanto para o escoamento cisalhante quanto para o extensional.

Inúmeros outros modelos diferenciais podem ser encontrados na literatura, porém eles se resumem a uma das metodologias aqui citadas, ou seja, o tratamento de não-linearidades

através da introdução termos não-lineares nos tensores tensão, taxa de deformação ou gradiente de velocidade. Basicamente, todos são generalizações do modelo de Jeffrey.

D.4 Equações constitutivas integrais

A formulação de modelos integrais necessita da introdução de funções de deslocamento para a descrição do movimento das partículas do fluido; para tanto introduz-se o conceito dos *tensores finitos de deformação*.

Considere-se uma partícula de fluido movendo-se como parte de um contínuo. Em algum tempo passado t' a partícula tem a posição \mathbf{r}' , e no presente tempo t ela ocupa a posição \mathbf{r} . O movimento da partícula pode ser descrito pelas funções

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t, t') \quad \text{ou} \quad x'_i(x_i, t, t')$$

que dá a posição passada \mathbf{r}' da partícula \mathbf{r}, t como função do tempo t' , ou pelas funções

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}', t', t) \quad \text{ou} \quad x_i(x'_i, t', t)$$

que dá a posição atual \mathbf{r}, t . Estas funções são chamadas *funções de deslocamento*.

Do ponto de vista matemático, estas funções são iguais, razão pela qual a primeira será utilizada em todos os casos. Define-se, a seguir, os *tensores gradiente de deslocamento*

$$\Delta_{ij}(\mathbf{r}, t, t') = \frac{\partial x'_i(x_i, t, t')}{\partial x_j}$$

que mede o deslocamento no tempo t' em relação ao tempo t , e

$$E_{ij}(\mathbf{r}, t, t') = \frac{\partial x_i(x'_i, t', t)}{\partial x'_j}$$

que mede o deslocamento no tempo t em relação ao tempo t' . Os tensores acima são inversos entre si, ou seja, em coordenadas cartesianas:

$$\sum_m \Delta_{im} E_{mj} = \delta_i$$

Para fluidos incompressíveis $\det(\Delta_{ij}) = \det(E_{ij}) = 1$. Tais tensores são geralmente assimétricos e contem informações sobre a deformação e a rotação da vizinhança de uma dada partícula, não sendo, portanto, apropriados para utilização em equações constitutivas. Para este propósito são definidos tensores finitos de deformação: o *tensor deformação de Cauchy*

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{r}, t, t') = \{\Delta^T \cdot \Delta\} \quad \text{ou} \quad B^{-1}(\mathbf{r}, t, t') = \sum_m \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_j}$$

e o *tensor deformação de Finger*

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t, t') = \{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T\} \quad \text{ou} \quad B(\mathbf{r}, t, t') = \sum_m \frac{\partial x_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x_j}{\partial x'_m}$$

Tais tensores, como os de gradiente de tensão, são inversos entre si e possuem determinante unitário para fluidos incompressíveis. Suas propriedades adicionais são:

- ✓ Eles são simétricos (como pode ser visto em suas definições)
- ✓ Eles são positivo-definidos.
- ✓ Eles descrevem a deformação, do tempo t' ao tempo t , do material nas vizinhanças de uma partícula, independentemente de rotações rígidas superpostas.
- ✓ Eles se reduzem ao tensor unitário se o deslocamento não envolve deformação.

A última propriedade permite a definição de dois tensores finitos de deformação nulos para um movimento de corpo rígido:

$$\boldsymbol{\gamma}^{[0]}(\mathbf{r}, t, t') = \{\Delta^T \cdot \Delta\} - \boldsymbol{\delta} \quad \text{ou} \quad \gamma_{ij}^{[0]}(\mathbf{r}, t, t') = \sum_m \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_j} - \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{[0]}(\mathbf{r}, t, t') = \boldsymbol{\delta} - \{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T\} \quad \text{ou} \quad \gamma_{[0]ij}(\mathbf{r}, t, t') = \delta_{ij} - \sum_m \frac{\partial x_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x_j}{\partial x'_m}$$

que são chamados de *tensores (finitos) relativos de tensão*. Para pequenos gradientes de deslocamento eles se reduzem ao tensor infinitesimal de deformação $\boldsymbol{\gamma}$.

Note-se que os tensores finitos de tensão são definidos em termos de funções de deslocamento e não em termos de campos de velocidade, o que permite a formulação de modelos integrais. A velocidade de uma partícula de fluido é dada por:

$$\mathbf{w}'(\mathbf{r}, t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t, t') \quad e \quad \mathbf{w}(\mathbf{r}', t', t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{r}', t', t)$$

e o campo espacial de velocidades é dado por:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t, t') \quad e \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{r}', t', t)$$

Como exemplo de cálculo dos tensores cinemáticos, tome-se o caso de escoamento cisalhante simples, $v_x = y \dot{\gamma}_{yx}(t)$. As funções de deslocamento são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} x = y \dot{\gamma}_{yx}(t); \quad \frac{\partial}{\partial t} y = \frac{\partial}{\partial t} z = 0$$

A solução destas equações sob a condição $(x, y, z) = (x', y', z')$ em $t = t'$ é:

$$x = x' - y'' \gamma_{yx}(t, t'); \quad y = y'; \quad z = z'$$

onde $\gamma_{yx}(t, t') = \int_{t'}^t \dot{\gamma}_{yx}(t'') dt''$, e $\dot{\gamma}_{yx}$ é o gradiente de velocidade. Então a representação matricial é facilmente encontrada para os tensores

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_{yx} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{yx} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que são inversos entre si. Por multiplicação de matrizes se encontra:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_{yx}^2 & -\gamma_{yx} & 0 \\ -\gamma_{yx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{yx} & 0 \\ \gamma_{yx} & 1 + \gamma_{yx}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, conforme as definições dos tensores relativos, encontra-se

$$\boldsymbol{\gamma}_{[0]} = \begin{pmatrix} -\gamma_{yx}^2 & \gamma_{yx} & 0 \\ \gamma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma}^{[0]} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{yx} & 0 \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yx}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note-se a presença de não-linearidades nestes tensores.

A primeira modificação do modelo geral linear de viscoelasticidade é a substituição do tensor infinitesimal de tensão por um de seus tensores relativos. A teoria molecular sugere fortemente o seguinte modelo:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{[0]}(t, t') dt'$$

onde $M(t-t')$ é a função memória. Este modelo é conhecido como *líquido elástico de Lodge* ("rubberlike liquid") e é quase-linear devido a dependência linear entre a tensão e a história do tensor deformação.

Conforme a escolha da função memória, os seguintes modelos são reproduzidos:

- ✓ modelo convectivo de Maxwell

$$m(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_1}\right)$$

- ✓ modelo convectivo de Jeffrey (líquido B de Oldroyd)

$$M(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda_1^2} \left[\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_1}\right) + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \delta(t-t') \right]$$

- ✓ modelo convectivo generalizado de Maxwell

$$m(t-t') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_0}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_1}\right)$$

Este último é conhecido como *modelo reticulado de Lodge*, desenvolvido a partir da teoria molecular de polímeros fundidos. A teoria de Rouse e de Zinn para soluções poliméricas diluídas também utiliza esta formulação.

Como para os modelos diferenciais, as variações acima resultam em viscosidades independentes da taxa de cisalhamento. A introdução de não-linearidades pode ser conseguida através de:

- ✓ invariantes de \mathbf{B} na função memória,
- ✓ tensores relativos na forma não-linear no integrando
- ✓ termos integrais de segunda ou maior ordem contendo produtos dos tensores relativos avaliados em diferentes tempos passados t', t'', t''', \dots

Os invariantes do tensor deformação de Finger são dados por:

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{B}; \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)]; \quad I_3 = \det(\mathbf{B})$$

Para fluidos incompressíveis, $\det \mathbf{B} = 1$. A aplicação do teorema de Cayley-Hamilton resulta:

$$\mathbf{B}^2 - I_1 \mathbf{B} + I_2 \delta = \mathbf{B}^{-1}$$

e os invariantes podem ser reescritos da seguinte forma:

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{B} = \text{tr}(\delta - \gamma_{[0]}); \quad I_2 = \text{tr} \mathbf{B}^{-1} = \text{tr}(\delta - \gamma^{[0]})$$

Tais conceitos permitem a introdução dos modelos integrais mais importantes: a equação *K-BKZ* (tal nome se deve a dois trabalhos independentes lançados por A.Kaye e por B.Bernstein, E.Kearsley & L.Zapas) dada por:

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{\partial V(t-t', I_1, I_2)}{\partial I_1} \gamma_{[0]} + \frac{\partial V(t-t', I_1, I_2)}{\partial I_2} \gamma^{[0]} \right] dt'$$

e a equação de *Rivlin-Sawyers*, dada por:

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t [\psi_1(t-t', I_1, I_2) \gamma_{[0]} + \psi_2(t-t', I_1, I_2) \gamma^{[0]}] dt'$$

Note-se que ambas equações incluem $\gamma_{[0]}$ e $\gamma^{[0]}$

A equação *K-BKZ* foi formulada a partir da constatação de que os polímeros fundidos se comportam ora como sólidos elásticos e ora como líquidos newtonianos (ver Tanner⁽²⁵⁵⁾ sobre a importância desta equação na Reologia). A equação de Rivlin-Sawyers derivou-se da constatação física de que as tensões no tempo t gerada por deformações provocadas em diferentes tempos passados t' são independentes entre si.

Pouquíssimos trabalhos foram publicados com base nestas equações em sua forma geral. Em geral, assume-se que as funções escalares V e ψ devam ser escritas com produtos de fatores dependentes do tempo e da deformação, na forma:

$$V(t-t', I_1, I_2) = M(t-t')W(I_1, I_2)$$

$$\psi_i(t-t', I_1, I_2) = M(t-t')\phi(I_1, I_2)$$

onde $M(t-t')$ é a função de memória. As equações fatoradas são:

$$K-BKZ; : \quad \tau(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') \left[\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1} \gamma_{[0]} + \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} \gamma^{[0]} \right] dt'$$

$$\text{Rivlin - Sawyers : } \tau(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') [\phi_1(I_1, I_2) \gamma_{[0]} + \phi_2(t-t', I_1, I_2) \gamma^{[0]}] dt'$$

A função W é chamada *função potencial*. No limite de pequenos gradientes de deslocamento os invariantes I_1 e I_2 se aproximam do valor 3 e os tensores relativos se aproximam do tensor infinitesimal de tensão. Por conseguinte, as funções acima definidas deve obedecer às seguintes relações:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)_{3,3} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)_{3,3} = 1$$

$$\phi_1(3, 3) + \phi_2(3, 3) = 1$$

Estas equações constitutivas são suficientemente flexíveis para descrever diversos fenômenos reológicos e são progressivamente utilizadas no cálculo numérico de fluxos.

Várias teorias moleculares para sistemas poliméricos resultam em equações constitutivas na forma da K-BKZ fatorada: as teorias de Rouse e Zinn para soluções poliméricas diluídas, a teoria de Curtiss-Bird para polímeros fundidos, e a teoria de sistemas reticulados de Lodge. A equação de Rivlin-Sawyers é apresentada numa forma mais amigável para o desenvolvimento de modelos específicos. Algumas funções viscométricas obtidas a partir dela são listadas a seguir:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \int_0^{\infty} M(s) s (\phi_1 + \phi_2) ds$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \int_0^{\infty} M(s) s^2 (\phi_1 + \phi_2) ds \quad \Psi_2(\dot{\gamma}) = \int_0^{\infty} M(s) s^2 \phi_2 ds$$

$$\eta'(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} M(s) \sin \omega s ds; \quad \eta''(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} M(s) (1 - \cos \omega s) ds$$

Para se obter as funções equivalentes para o modelo K-BKZ, basta substituir ϕ_j por $\frac{\partial W}{\partial I_j}$.

Os principais modelos obtidos da equação de Rivlin-Sawyers foram desenvolvidos por Phillips e WAGNER, sendo este último, o mais testado na prática.

Apêndice E - Reometria

Na parte experimental deste trabalho foram utilizadas, basicamente, três geometrias de fluxo: cilindros coaxiais, cone-placa e placa-placa (ou discos paralelos). Estas são as geometrias mais utilizadas em medições de reologia de fluidos por gerarem fluxos definidos como cisalhantes e viscométricos. Neste apêndice será desenvolvido o equacionamento básico do escoamento de fluido, em regime permanente, nestas geometrias. O equacionamento do escoamento oscilatório é similar, podendo ser encontrado nas referências bibliográficas^(19, 256, 282). O escoamento pulsado em capilares, utilizado em um dos equipamentos, pode, também, ser encontrado nestas referências⁽²⁶⁰⁻²⁶³⁾.

Conforme já definido, o tensor total de tensão pode ser decomposto em

$$\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$$

e a equação de estado representativa para este regime de fluxo é a equação CEF, dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{[1]} + \frac{1}{2} \Psi_1 \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{[2]} - \Psi_2 \{ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{[1]} \bullet \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{[1]} \}.$$

E.1 Cilindros coaxiais

A geometria de cilindros coaxiais é a mais utilizada para medições de viscosidade de fluidos. Seu escoamento é expresso em coordenadas cilíndricas e seu campo de velocidades é dado por:

$$v_\theta = r\omega; \quad v_r = v_z = 0$$

e sua taxa de cisalhamento por

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = r \frac{d\omega}{dr}$$

De acordo com a equação de estado CEF, seu tensor tensão, $\boldsymbol{\tau}$, é expresso por

$$\tau = \begin{pmatrix} \Psi_2 \dot{\gamma}^2 & \eta \dot{\gamma} & 0 \\ \eta \dot{\gamma} & (\Psi_1 + \Psi_2) \dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

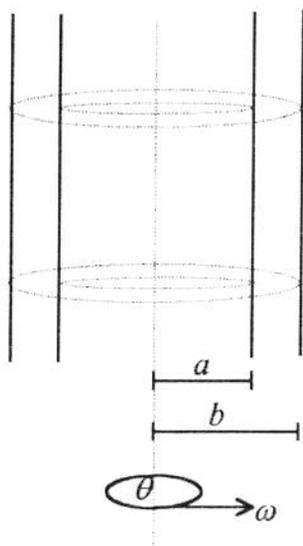


Fig. E.1 Geometria de cilindros coaxiais.

Nestas condições, as equações de momento são dadas por

$$\begin{cases} r \frac{d\tau_{rr}}{dr} = \Psi_1 \dot{\gamma}^2 - \rho r^2 \omega^2 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ser usada para a determinação do primeiro coeficiente de tensão normal, mas sua resolução analítica resulta em uma série infinita, o que dificulta sua utilização prática. Além disso, normalmente requer a utilização prática de uma geometria composta por um anular relativamente grande, o que compromete a medição da viscosidade, razões pelas quais é pouco utilizada para estes propósitos.

A determinação da viscosidade nesta geometria não é um problema trivial, a não ser em casos de anular muito pequeno. Resolvendo-se a segunda equação tem-se

$$\tau_{r\theta} = \frac{A}{r^2}, \text{ onde } A = \text{cte. de integração}$$

O torque (T) a uma distância r , no fluido, é dado por

$$T = 2\pi r^2 \tau_{r\theta} \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = \frac{T}{2\pi r^2}$$

Assumindo-se agora uma relação inversa para a taxa de cisalhamento, na forma $\dot{\gamma} = g(\tau)$, obtém-se, de sua integração

$$\Delta\omega = \omega_a - \omega_b = \int_b^a \frac{1}{r} g\left(\frac{T}{2\pi r^2}\right) dr$$

Mudando-se as variáveis de integração,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{g(s)}{s} ds, \quad \text{onde} \begin{cases} s_1 = \frac{T}{2\pi b^2} \\ s_2 = \frac{T}{2\pi a^2} \end{cases}$$

Diferenciando-se tal equação obtém-se

$$2T \frac{\partial \Delta\omega}{\partial T} = g(s_1) - g(s_2)$$

ou, alternativamente,

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{b^2}{a^2} \\ Y(s_1) &= 2T \frac{\partial \Delta\omega}{\partial T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} Y[\beta^n s_1]$$

Felizmente, quando o anular é muito menor que os diâmetros dos cilindros, a taxa de cisalhamento pode ser considerada homogênea e constante em todo o fluido, sendo dada diretamente por sua definição

$$\dot{\gamma} = \frac{b}{a-b} \Delta\omega$$

e a tensão cisalhante dada por sua relação com o torque, sendo, portanto, a viscosidade calculada diretamente. Quando a relação entre os raios (β) é de 0.98, pode-se esperar uma variação de 4% nesta tensão; se for de 0.99 tal variação cai para 2%. Devido a estas características, este escoamento é considerado, na literatura, como *parcialmente controlável*⁽²⁵⁶⁾.

E.2 Cone-placa

Nesta geometria o fluido é colocado no espaço entre o cone e a base e é aplicada uma velocidade angular ω à base¹, sendo medidos o torque (T) no cone e a força normal total (F_N) atuante (alguns equipamentos permitem a medição da distribuição de pressão gerada). A partir destes dados, os parâmetros reológicos são calculados.

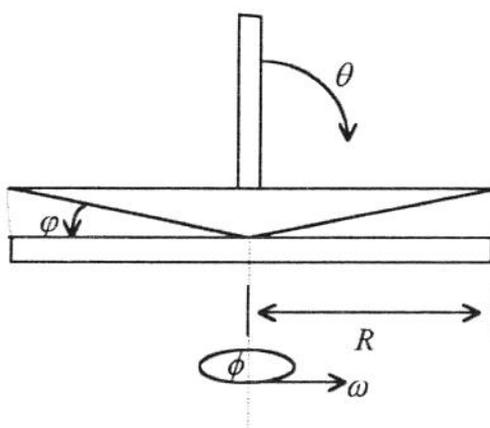


Fig E.2 Geometria cone-placa.

A geometria deste fluxo é esférica, porém, como o ângulo entre o cone e a placa é pequeno (neste caso foi utilizado um cone com $\phi = 4^\circ$), algumas simplificações são permitidas. A velocidade na placa é dada por ωr a um raio r qualquer e a velocidade transmitida ao fluido pode ser aproximada por

$$v_\phi = \omega r \left(\frac{\pi - \theta}{2\phi} \right)$$

e a taxa de cisalhamento será dada por

$$\dot{\gamma}_{\theta\phi} = \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin\phi} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} v_\phi = -\frac{\omega}{\phi}$$

Logo, a taxa de cisalhamento é constante em toda a amostra. O torque será dado pela integração da força exercida na superfície do cone e o braço de momento em r .

¹ em alguns outros equipamentos a velocidade é aplicada ao cone.

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^R |\tau_{\theta\phi}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} r^2 dr d\phi$$

Como a taxa de cisalhamento é constante, esta tensão também o será, resultando

$$\tau_{\theta\phi} = \frac{3T}{2\pi R^3}$$

Portanto, aplicando-se a equação de estado CEF tem-se a viscosidade

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{3T\phi}{2\pi R^3 \omega}$$

Ignorando-se os efeitos inerciais, a equação de movimento, em coordenadas esféricas, é dada por

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r}$$

Como o componente radial da tensão é nulo, tem-se, pelas relações dos parâmetros reológicos,

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} = -(\Psi_1 + 2\Psi_2) \dot{\gamma}^2; \quad \text{onde} \quad r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \ln r}$$

A força exercida sobre o cone é devida ao componente de tensão total $\pi_{\theta\theta}$ atuante no fluido. Como a tensão $\tau_{\theta\theta}$ é constante, o gradiente de pressão pode ser substituído pelo gradiente de tensão total

$$\frac{\partial}{\partial \ln r} \pi_{\theta\theta} = -(\Psi_1 + 2\Psi_2) \dot{\gamma}$$

Como o sistema é finito, em sua extremidade (raio R) o componente radial do tensor total de tensão tem o valor da pressão atmosférica (p_a) e, do balanço de forças na interface fluido-ar, o segundo coeficiente de tensão normal assume o valor

$$\Psi_2 = \frac{p_a - \pi_{\theta\theta}(R)}{\dot{\gamma}^2}$$

Integrando-se a equação diferencial e combinando-a à condição de contorno obtém-se

$$\pi_{\theta\theta} = \pi_{\theta\theta}(R) - (\Psi_1 + 2\Psi_2) \dot{\gamma}^2 \ln \frac{r}{R} = p_a - \Psi_2 \dot{\gamma}^2 - (\Psi_1 + 2\Psi_2) \dot{\gamma}^2 \ln \frac{r}{R}$$

A força normal exercida no cone pelo fluido será dada por

$$F_n = 2\pi \int_0^R \pi \theta r dr - \pi R^2 p_a$$

logo

$$\Psi_1 = \frac{2F_n}{\pi R^2 \dot{\gamma}^2}$$

O componente inercial não foi considerado para permitir o equacionamento analítico deste tipo de fluxo, o que é normalmente feito na literatura consultada^(19, 256, 282), porém ele existe e, no caso do equipamento utilizada, sua correção é feita diretamente pelo *software* que comanda sua operação. Tal efeito está equacionado em Walters.

E.3 Placa-placa

A operação desta geometria para a obtenção dos parâmetros reológicos é similar à da geometria cone-placa, e seu escoamento é equacionado em coordenadas cilíndricas.

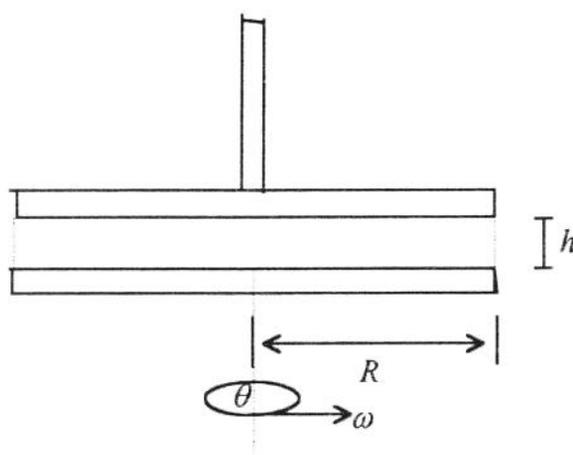


Fig. E.3 Geometria placa-placa.

O campo de velocidades envolvido é dado por:

$$v_\theta = r\omega(z); \quad v_r = v_z = 0.$$

e a taxa de cisalhamento é

$$\dot{\gamma} = r \frac{d\omega}{dz} = r\omega'$$

Usando-se a equação CEF e desprezando-se os efeitos gravitacionais e de inércia, as equações de movimento podem ser escritas como

$$\begin{cases} \text{componente } r & 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{r} \dot{\gamma}^2 \\ \text{componente } \theta & 0 = \frac{\partial}{\partial z} \eta \dot{\gamma} \\ \text{componente } z & 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2 \dot{\gamma}^2 \end{cases}$$

O componente θ mostra que a tensão de cisalhamento e, conseqüentemente, a taxa, são independentes de z , podendo ser integrada, resultando

$$v_\theta = \frac{r\omega z}{h} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{r\omega}{h} = \dot{\gamma}_R \frac{r}{R}; \quad \dot{\gamma}_R = \frac{R\omega}{h}$$

O torque no disco inferior é dado por

$$T = 2\pi \int_0^R (-r\tau_{z\theta}) r dr = 2\pi \int_0^R \eta \dot{\gamma} r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{\dot{\gamma}_R^3} \int_0^{\dot{\gamma}_R} \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^3 d\dot{\gamma}$$

o que, diferenciado, fornece

$$\eta(\dot{\gamma}_R) = \frac{T}{\dot{\gamma}_R} \left[3 + \frac{d \ln \frac{T}{2\pi R^3}}{d \ln \dot{\gamma}_R} \right]$$

Portanto a viscosidade, nesta geometria, é medida em função da taxa de cisalhamento na extremidade dos discos pois a mesma não é homogênea no escoamento torsional.

A distribuição de pressões nas placas é obtida pela integração do componente r da equação de movimento

$$p(r) - p_a = \int_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}_R} (\Psi_1 + \Psi_2) \dot{\gamma} d\dot{\gamma}$$

A tensão total sobre o disco é dada pela adição da tensão τ_{zz} aos dois membros da equação

$$\pi_{zz} - p_a = \int_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}_R} (\Psi_1 + \Psi_2) \dot{\gamma} d\dot{\gamma} - \Psi_2 \dot{\gamma}$$

A força normal resulta da integração desta expressão em toda a área do disco,

$$F_n = \frac{\pi R^2}{\dot{\gamma}_R^2} \int_0^{\dot{\gamma}_R} (\Psi_1 - \Psi_2) \dot{\gamma}^3 d\dot{\gamma}$$

ou

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{F_n}{\pi R^2 \dot{\gamma}_R^2} \left[2 + \frac{d \ln \frac{F_n}{\pi R^2}}{d \ln \dot{\gamma}_R} \right]$$

Também neste caso a correção do efeito inercial é necessária. Tal fator, resultante das forças centrífugas atuantes no fluido, é dado por

$$F_{nz} = \frac{-3\pi\rho\omega^2 R^4}{40}.$$

Apêndice F - Modelos de Geometria de Fratura

Serão apresentados neste apêndice os modelos básicos para o dimensionamento de uma fratura. Tais modelos sofreram, com o tempo, vários aperfeiçoamentos, porém tais contribuições os tornam, em geral, numéricos, e não provocam mudanças substantivas nos resultados conseguidos.

F.1 Modelo de Carter

O modelo de CARTER equaciona especificamente a filtração de fluido que ocorre durante um fraturamento hidráulico, sendo importante por definir volumetricamente o processo e por ser utilizado em conjunto com os outros dois modelos básicos de geometria da fratura. Neste modelo a fratura, de altura h , possui um abertura constante, w , sendo alimentada por uma vazão constante de fluido, q_0 , que será dividida pelas suas duas asas, cada uma com comprimento L .

A velocidade de filtração do fluido pelas paredes da fratura é definida empiricamente pelos resultados de um teste estático de filtração, sendo dada por $v = \frac{C}{\sqrt{t-\tau}}$ onde C é a constante de filtração medida experimentalmente, e τ representa o tempo em que a filtração inicia em um determinado ponto da fratura.

Devido à simetria do problema, ele será examinado somente em uma asa da fratura. O balanço volumétrico neste caso é dado por:

$$\frac{dV_a}{dt} = wh \frac{dL}{dt} = \frac{q_0}{2} - q_p \quad V_a = \frac{V}{2} = \text{volume de uma asa}$$

onde q_p , vazão de perda, é dada por

$$q_p = \int_0^A v \, dA = \int_0^A v \frac{dA}{d\tau} d\tau = C \int_0^A \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}; \quad A = hL$$

Portanto,

$$\frac{q_0}{h} = 2C \int_0^L \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + w \frac{dL}{dt}$$

Tal integral é uma convolução que pode ser apropriadamente tratada por transformadas de Laplace, resultando

$$V = \frac{q_0 t}{\alpha^2} \left[\frac{2\alpha}{\pi} - 1 + e^{\alpha^2} \operatorname{erfc}(\alpha) \right] \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{2C}{w} \sqrt{\pi t}$$

A eficiência do fluido de fraturamento, que é a relação entre o volume da fratura e o volume bombeado de fluido, pode ser inferida diretamente deste resultado.

F.2 Modelo de Perkins & Kern

Estes autores se baseiam, basicamente, no modelo de propagação de fraturas proposto por SNEDDON, sendo um modelo elástico para a condição de deformações planas. É assumido que a pressão p numa seção vertical da fratura, perpendicular à sua direção de propagação, é constante, o que implica em que sua abertura, de perfil elíptico nesta seção, seja dada por

$$w(x, t) = \frac{1-\nu}{G} h \Delta p \quad \text{onde } \nu \text{ e } G \text{ são módulos elásticos da rocha}$$

Assume-se ainda que a pressão na extremidade é igual à pressão tectônica original, S , e que a queda de pressão ao longo da fratura é dada pela resistência viscosa ao fluxo. O gradiente de pressão devido a um escoamento em um duto elíptico, para as condições iniciais consideradas (uma asa da fratura), é dado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta p = -\frac{32}{\pi} \frac{q_0 \mu}{w^3 h} \quad \mu = \text{viscosidade newtoniana}$$

Assumindo-se que a variação da vazão na direção de fluxo é nula, e acoplando-se estas equações, obtém-se, após integração, a abertura máxima da fratura,

$$w(0, t) = \sqrt[4]{\frac{128}{\pi} \frac{1-\nu}{G} q_0 \mu L}$$

que resulta em uma queda de pressão dada por:

$$\Delta p = p_w - S = \sqrt[4]{\frac{128}{\pi} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 \frac{q \mu L}{h^4}}$$

A filtração não é considerada no desenvolvimento deste método, portanto, para o dimensionamento de fraturas hidráulicas em rochas permeáveis, ele deve ser utilizado em conjunto com o equacionamento proposto no modelo de Carter.

Posteriormente, NORDGREN acoplou estas duas teorias através de uma equação de continuidade local dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} q + \frac{\pi h}{4} \frac{\partial}{\partial t} w + q_p = 0 \quad \text{onde} \quad q_p = \frac{2hC}{\sqrt{t-\tau}}$$

obtendo a equação diferencial não-linear

$$\frac{G}{64(1-\nu)\mu h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w^4 - \frac{\partial}{\partial t} w = \frac{8C}{\sqrt{t-\tau}}; \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

submetida à condição inicial $w(0,0) = 0$ e às condições de contorno

$$\begin{cases} w(x, t) = 0; & \text{para } x > L(t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} w^4\right)_{x=0} = \frac{128}{\pi} \frac{1-\nu}{G} q_0 \mu \end{cases}$$

que deve ser resolvida numericamente. Caso se considere a constante de filtração suficientemente grande, tal equação pode ser simplificada e sua solução corresponderá à solução de Carter para tempos suficientemente grandes:

$$L \rightarrow \frac{q_0 \sqrt{t}}{2\pi h C} \quad \text{e} \quad q = \frac{q_0}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{x}{L}\right)$$

Tais resultados, modificados por um novo enfoque, são o ponto de partida para a modelagem da filtração utilizada no presente trabalho.

F.3 Modelo de Geertsma & de Klerk

Este modelo utiliza os princípios expostos em trabalho de KHRISTIANOVITCH, que equaciona a propagação da fratura a partir da (teoria) proposta por MUSKHELISHVILI para a Teoria da Elasticidade, onde as variáveis complexas têm papel fundamental. A equação básica utilizada foi proposta por ENGLAND & GREEN, formulada para a condição de deformações planas. É assumido que a área da seção vertical da fratura, perpendicular à sua direção de propagação, é retangular, tendo uma abertura constante w , e que a propagação da fratura é estável, para o que é utilizado o critério de BARENBLATT. A partir de tais premissas, a abertura máxima da fratura é dada por

$$w(0, t) = 2 \frac{1-\nu}{G} L \Delta p$$

e a variação de pressão ao longo da fratura é deduzida do escoamento de um fluido newtoniano em placas paralelas que, nas condições propostas, é formulado por

$$p_w - p(x) = \frac{6 q_0 \mu}{h} \int_0^x \frac{dx}{w^3}$$

O sistema resultante de tais equações fornece, com algumas aproximações,

$$w(0, t) = \sqrt[4]{\frac{42}{\pi} \frac{1-\nu}{G} \frac{q_0 \mu L^2}{h}}$$

sendo a queda de pressão ao longo da fratura dada por

$$\Delta p = \sqrt[4]{\frac{21}{8\pi} \left(\frac{G}{1-\nu}\right)^3 \frac{q_0 \mu}{h L^2}}$$

Como para o método anterior, este equacionamento precisa ser acoplado ao resultado da teoria de Carter pois foi formulado para uma fratura com paredes impermeáveis.

O principal aperfeiçoamento proposto para este método foi feito por DANESHY através de estudos numéricos da equação integral de England & Green, do critério de Barenblatt e da teoria de Carter.

Conforme exposto, o fluido de fraturamento é tratado como um fluido newtoniano, e os métodos são refinados, dentre deste aspecto, através de algum modelo empírico que represente seu caráter não-newtoniano, em geral o modelo de potências. Como características principais destes dois modelos básicos cita-se, para o primeiro, a formulação de fraturas mais delgadas e longas que as do segundo; no primeiro modelo, a queda de pressão ao longo da fratura se desenvolve de forma ascendente, enquanto que no segundo, ela é descendente.

F.4 Modelo de Nolte

A partir da publicação dos métodos básicos citados, centenas de trabalhos foram publicados analisando seus resultados e propondo aperfeiçoamentos. Somente a partir da década de 80, com a publicação de uma série de artigos de NOLTE, uma nova metodologia passou a ser utilizada na análise dos dados de um fraturamento. O método de Nolte não é propriamente um procedimento para o dimensionamento de um fraturamento, porém seus princípios podem ser utilizados para tal fim.

Este método é dirigido ao estudo da filtração que ocorre durante o processo, que é a chave para a compreensão e integração dos fenômenos envolvidos no mesmo. O método de Carter, embora seja uma formulação matematicamente elegante e precisa para o tratamento da filtração, é desenvolvido sob o ponto de vista lagrangeano, o que dificulta seu acoplamento às demais teorias de geometria de fratura. Nolte propõe que a área gerada de fratura seja equacionada em termos do tempo de bombeio através da relação

$$\delta^e = \left(\frac{a}{A}\right)^e = \frac{\tau}{t}; \quad 1 \leq e \leq 2$$

onde $e = 1$ corresponde a uma perda de fluido desprezível, e $e = 2$ a uma perda predominante de fluido. A e t são, respectivamente a área da fratura e o tempo no instante em estudo, e a e τ a área e o tempo em um instante anterior qualquer.

A taxa de perda de fluido em uma área incremental é representada pela expressão de Carter $q_I(t, da) = \frac{2C da}{\sqrt{t-\tau(a)}}$, resultando

$$q_I(t, a) = \frac{2CA}{\sqrt{t}} \int_0^\delta \frac{da}{\sqrt{1-\delta^e}} = \frac{2CA}{\sqrt{t}} \begin{cases} 2(1-\sqrt{1-\delta}) \\ \sin^{-1}\delta \end{cases} = \frac{2CA_0}{\sqrt{t}} \begin{cases} 2\sqrt{\frac{t}{t_0}}(1-\sqrt{1-\delta}) \\ \sin^{-1}\delta \end{cases}$$

onde A_0 e t_0 representam a área e o tempo no final do bombeio.

Adimensionalizando-se o tempo na forma: $t_D = \frac{t-t_0}{t_0} = \frac{t}{t_0} - 1$, obtem-se

$$q_I(t, A_0) = \frac{2CA_0}{\sqrt{t}} \begin{cases} 2(1-\sqrt{1+t_D}) \\ \sin^{-1}(1+t_D)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} = \frac{2CA_0}{\sqrt{t}} f(t_D)$$

A partir de tal formulação, Nolte define funções e expressões adicionais que permitem, a partir dos dados medidos de queda de pressão após o término do bombeio, definir as dimensões da fratura e a eficiência do fluido de fraturamento.

Vários dos conceitos deste modelo são utilizados no método proposto neste trabalho a partir de uma nova conceituação da relação entre área e tempo durante o processo.

Apêndice G

Escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos

Este apêndice é um levantamento do estado-da-arte sobre o escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos. A caracterização de tais fluidos e o equacionamento de diversos aspectos relacionados ao seu escoamento em meios porosos são abordados. As não-linearidades presentes nestes equacionamentos são tratadas de forma não-convencional através da introdução da transformação de Boltzmann, que permite consolidar as dependências espacial e temporal numa única variável, da caracterização do escoamento de fluidos num reservatório como um problema de contorno móvel (*moving boundary problem*), e do tratamento de problemas de valor inicial (*initial value problems*) de equações não-autônomas pela metodologia de séries de Lie, o que permite a resolução analítica da equação da difusividade para determinados casos de interesse. São abordados, ainda, aspectos relacionados ao mecanismo de segregação gravitacional, ao avanço frontal quando do deslocamento de fluidos, a problemas observados na utilização desses fluidos (adsorção, filtração, volume poroso inacessível, etc.), e a avaliação de propriedades físicas do meio poroso em testes de fluxo com a utilização dos mesmos. As diversas discussões levantadas na literatura são citadas para oferecer um amplo painel a respeito do assunto.

Este apêndice se apoia basicamente em artigos publicados por PASCAL inserindo a contribuição teórica dada por TOROK & ADVANI. No final, é efetuada a caracterização dos fluidos não-newtonianos, sua classificação e as limitações dos modelos disponíveis; a generalização lei de Darcy de forma a contemplar estes fluidos, sendo tal extensão criticada; são apresentados dois tratamentos clássicos da equação da difusividade linearizada, uma devida a ODEH & YANG e outra a IKOKU & RAMEY; são examinados os

equacionamentos para escoamento permanente e transiente com o enfoque de sua utilização como métodos para a medição prática de parâmetros de fluxo e rocha; é estudado o deslocamento de fluidos imiscíveis, o fenômeno da digitação viscosa e estendida a modelagem para o deslocamento de fluidos miscíveis; é equacionado o mecanismo de segregação gravitacional com a presença deste fluidos; e, finalmente, são discutidos alguns aspectos práticos importantes observados na injeção de polímeros com a finalidade de recuperação suplementar de óleo.

Além das monografias da SPE disponíveis sobre o assunto, diversos livros textos podem ser consultados para o embasamento teórico do tema^(7, 12, 38, 54, 63, 217). Devido à grande quantidade de variáveis e parâmetros utilizados no desenvolvimento deste apêndice, optou-se por uma nomenclatura própria para o mesmo, listada em seu final, procurando-se preservar a nomenclatura normalmente adotada pelas suas principais referências.

G.1 Equações básicas

Pascal apresenta a análise deste problema para diversos casos de interesse prático. As equações básicas para a descrição dos fluxos permanente e transiente de fluidos de potência (*power-law fluids*) são as seguintes:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\frac{1-n}{n}} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = n a^2 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

para escoamento unidimensional e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r}\right) = n a^2 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

para escoamento radial.

$$\text{O coeficiente } a^2 \text{ é dado pela relação } a^2 = \phi c_t \left(\frac{\mu_{ef}}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3)$$

Obtidas as distribuições de pressão, as distribuições de velocidade podem ser conseguidas através da lei de Darcy modificada, expressa por:

$$v(x, t) = \left(-\frac{k}{\mu_{ef}} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4)$$

e

$$v(r, t) = \left(-\frac{k}{\mu_{ef}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

G.2 Escoamento linear

G.2.1 - Produção a pressão constante.

O sistema de fluxo a ser analisado é um reservatório linear de óleo com fronteira externa fechada. Assume-se que no instante inicial $t=0$ a pressão no reservatório é constante e igual a p_e , e, para $t > 0$, o reservatório é depletado por uma pressão constante de produção p_w em uma de suas extremidades.

Dois períodos se distinguem neste escoamento: o primeiro compreende o tempo gasto para que a perturbação na pressão atinja a fronteira externa, que depende da permeabilidade do reservatório, da compressibilidade do fluido e de seus parâmetros reológicos, e que é conhecido como período *transiente*; o período posterior é conhecido como *pseudo-permanente* ou *permanente* a depender das condições de contorno impostas na fronteira.

Portanto, o período transiente se caracteriza pela descompressão em $0 < t < t_m$, sendo t o tempo em que a perturbação atinge a fronteira, e $0 < x < l(t)$, onde $l(t)$ é a posição da frente da perturbação (sendo L o comprimento do reservatório). Neste quadro, as seguintes condições iniciais e de contorno podem ser impostas:

$$\begin{cases} t = 0 & p(x, 0) = p_e \\ t > 0 & p(\infty, t) = p_e ; \\ t > 0 & p(0, t) = p_w \end{cases} \quad 0 < t < t_m \quad (6)$$

Contudo, pode ser mostrado que, para $t < t_m$ e $n < 1$, a distribuição de pressão $p(x, t)$ correspondente a estas condições são idênticas às obtidas quando determinadas considerando-se um problema de fronteiras moveis, desde que $p(x, t) = p_e$ para $x > l(t)$.

Por outro lado, a pressão $p(x, t)$ e sua derivada $\frac{\partial p}{\partial x}$ devem ser funções contínuas de x e t para quaisquer $x > 0$ e $t > 0$, mas, como $p(x, t)$ é constante para $x > l(t)$, então $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l(t)} = 0$. Como resultado, as seguintes condições devem ser consideradas:

$$\begin{cases} p[l(t), t] = p_e & 0 < t < t_m \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l(t)} = 0 & 0 < t < t_m \\ p(0, t) = p_w & 0 < t < t_m \\ l(0) = 0 & \end{cases} \quad (7)$$

Aplicando-se a transformação generalizada de Boltzmann

$$\eta = x t^{\frac{-n}{n+1}} \quad (8)$$

a equação básica (1) é reduzida, para $0 < x < l(t)$, à equação diferencial ordinária não-linear

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{n a^2}{1+n} \eta \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0 \quad (9)$$

para $0 < \eta < \eta_1$ onde $\eta_1 = \frac{l(t)}{t^{\frac{n}{n+1}}}$ (10)

As condições de contorno serão dadas por:

$$p(\eta_1) = p_e; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0; \quad p(0) = p_w. \quad (11)$$

Para fluidos newtonianos, $n = 1$ e a eq.(9) se torna:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{n}{2} a^2 \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

já bastante conhecida, cuja solução é:

$$\frac{p_e - p(x, t)}{p_e - p_w} = 1 - \text{Erf} \left(\frac{x a}{2 \sqrt{t}} \right) \quad (13)$$

$$\operatorname{Erf}\left(\frac{xa}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{xa}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx \quad (14)$$

Para $n < 1$, de (9) obtém-se:

$$\frac{dp}{d\eta} = \left(C_1 - \frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n} \eta^2\right)^{\frac{n}{1-n}} \quad (15)$$

e da segunda condição de contorno tem-se: $C_1 = \frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n} \eta_1^2$

Integrando-se a eq.(15) com a condição $p(0) = p_w$ obtém-se a distribuição de pressões no intervalo $0 < x < l(t)$, que pode ser escrita como:

$$p(\eta) - p_w = \left(\frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n}\right)^{\frac{n}{1-n}} \eta_1^{\frac{1+n}{1-n}} J_n(\eta) \quad (16)$$

onde $J_n(\eta) = \int_0^{\frac{\eta}{\eta_1}} (1-x^2)^{\frac{n}{1-n}} dx; \quad 0 < \frac{\eta}{\eta_1} < 1$ (17)

Para se determinar η_1 a condição $p(\eta_1) = p_e$ pode ser usada. Como consequência, de (16) tem-se:

$$p_e - p_w = \left(\frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n}\right)^{\frac{n}{1-n}} \eta_1^{\frac{1+n}{1-n}} J_n(\eta_1) \quad (18)$$

$$J_n(\eta_1) = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{1-n}} dx \quad (19)$$

que independe de η_1 .

Tomando-se a seguinte notação:

$$\Delta p = p_e - p_w \quad e \quad L_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{1-n}} dx \quad (20)$$

de (18) obtém-se:

$$\eta_1 = \left(\frac{\Delta p}{L_n}\right)^{\frac{1-n}{1+n}} \left(\frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n}\right)^{\frac{-n}{1+n}} = \text{constante} \quad (21)$$

e, de (8),

$$l(t) = \left(\frac{\Delta p}{L_n}\right)^{\frac{1-n}{1+n}} \left(\frac{na^2}{2} \frac{1-n}{1+n}\right)^{\frac{-n}{1+n}} t^{n(1+n)} \quad (22)$$

A relação (22) fornece a posição da frente em qualquer tempo t , desde que L_n possa ser obtido de (20) exatamente para certos valores de m , ou aproximadamente através da utilização de métodos numéricos de integração

Como pode ser verificado na eq.(22) a posição da frente depende fortemente dos parâmetros reológicos n e a , ou seja, de $\frac{k}{\mu_{ef}}$, conforme equacionamento do modelo de poros.

$$\frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2H} \left(\frac{n\phi}{1+3n} \right)^n \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}} \quad (23)$$

A viscosidade aparente dos fluidos de potência depende da taxa de cisalhamento. Conseqüentemente, os efeitos reológicos na frente dependerão da queda de pressão, Δp . As seguintes relações ilustram como tais efeitos aparecem em $l(t)$, para alguns casos particulares:

$$n = \frac{1}{3} \rightarrow l(t) = \frac{\left(\frac{2\Delta p}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{a^2}{24}\right)^{\frac{1}{4}}}; \quad n = \frac{1}{2} \rightarrow l(t) = \frac{\left(\frac{3\Delta p}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{a^2}{12}\right)^{\frac{1}{3}}}; \quad n = \frac{3}{4} \rightarrow l(t) = \frac{\left(\frac{35\Delta p}{\pi}\right)^{\frac{1}{7}} t^{\frac{3}{7}}}{\left(\frac{3a^2}{56}\right)^{\frac{3}{7}}} \quad (24)$$

Para um fluido newtoniano, $n=1$, de (13) tem-se:

$$l(t) = \sqrt{\frac{4t}{a^2}}; \quad a^2 = \frac{\phi \mu c t}{k} \quad (24a)$$

Esta relação mostra que a posição da frente independe de Δp . Desde que η_1 é determinado por (21), a distribuição de pressões pode ser obtida de (16) e expressa por

$$\frac{p(\eta)-p_w}{p_e-p_w} = \frac{J_n(\eta)}{J_n(\eta_1)}, \quad 0 < \frac{\eta}{\eta_1} < 1 \quad (25)$$

Alguns valores de $J_n(\eta)$ podem ser conseguidos analiticamente através da transformação $x = \sin y$:

$$J_n(\eta) = \int_0^{\sin^{-1} \frac{\eta}{\eta_1}} (\cos \alpha)^{\frac{n}{1-n}} d\alpha \quad (26)$$

onde

$$\begin{cases} \int (\cos \alpha)^{2k} d\alpha = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \alpha + \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{2k}{m} \frac{\sin(2k-2m)\alpha}{2k-2m} \\ \frac{1+n}{1-n} = 2k \quad \text{ou} \quad n = \frac{2k-1}{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int (\cos \alpha)^{2k+1} d\alpha = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=0}^k \binom{2k+1}{m} \frac{\sin(2k-2m+1)\alpha}{2k-2m+1} \\ \frac{1+n}{1-n} = 2k+1 \quad \text{ou} \quad n = \frac{k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (28)$$

Para ilustrar os desvios ocasionados no escoamento em relação ao comportamento newtoniano calculou-se tais integrais para alguns casos de interesse:

$$J_{\frac{1}{3}}(\eta) = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \frac{\eta}{\eta_1} + \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (29)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(\eta) = \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right) \quad (30)$$

$$J_{\frac{3}{4}}(\eta) = \frac{24}{35} \frac{\eta}{\eta_1} - \frac{8}{35} \frac{\eta^3}{\eta_1^3} + \frac{5}{35} \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right) + 5 \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right)^3 \quad (31)$$

$$J_{\frac{3}{5}}(\eta) = \frac{3}{8} \sin^{-1} \frac{\eta}{\eta_1} + \frac{3}{8} \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \frac{\eta}{\eta_1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (32)$$

Destas relações para $\eta = \eta_1$ obtêm-se os seguintes valores para L_n :

$$L_{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{4}, \quad L_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad L_{\frac{3}{4}} = \frac{16}{35}, \quad L_{\frac{3}{5}} = \frac{3\pi}{16} \quad (34)$$

Um problema de especial interesse na Engenharia de Reservatórios é a determinação do declínio da vazão em $x = 0$ durante o mecanismo de depleção natural sob pressão constante. Desde que a distribuição de pressões é conhecida de (16), então a lei de Darcy modificada (4) permite o cálculo da variação da vazão com x e t :

$$q(x, t) = F \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} t^{-\frac{1}{1+n}} \left[\frac{n(1-n)a^2}{2(1+n)} \left(\eta_1^2 - \frac{x^2}{t^{1+n}} \right) \right]^{\frac{1}{1+n}} \quad (35)$$

G.2.2 - Produção com vazão conhecida.

Apresenta grande interesse prático o estudo do comportamento da pressão em reservatórios produzidos com determinadas vazões. Observações de campo dão conta de que a vazão de produção declina em uma contínua função monotônica do tempo. Pode-se verificar na eq.(35), para pressão constante em $x = 0$, que o declínio da vazão pode ser expresso pela relação:

$$q(0, t) = q_0 = C t^{\frac{-1}{1+n}} \quad (36)$$

onde C é uma constante.

Como um exemplo de aplicação, considere-se o caso em que a vazão de produção siga o comportamento dado em (36). Neste caso as seguintes condições de contorno ocorrem:

$$\left\{ \begin{array}{l} p[l(t)] = p_e \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l(t)} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\mu_{ef}}{k} \left(\frac{q_0}{F} \right)^n = A t^{\frac{-n}{1+n}} \end{array} \right. ; \quad 0 < t < t_m \quad (37)$$

Para a eq.(9) tais condições se tornam:

$$p(\eta_1) = p_e; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = A = \text{constante} \quad (38)$$

De (37) obtém-se a variação de vazão imposta:

$$q_0 = q(0, t) = F \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} A^{\frac{1}{n}} t^{\frac{-1}{1+n}} \quad (39)$$

Deve-se notar que a transformação (8) impõe certas limitações na obtenção de uma solução exata para a eq.(9) e que se resumem na necessidade de se expressar as condições de contorno somente em função de η .

Seguindo-se o procedimento anterior, C_1 em (15) será dado por: $C_1 = A^{\frac{1-n}{n}}$. A eq.(15) se tornará:

$$\frac{dp}{d\eta} = A(1 - B\eta^2)^{\frac{n}{1-n}} \quad (40)$$

onde $B = A^{\frac{n-1}{n}} \phi c_t \left(\frac{\mu_{ef}}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n(1-n)}{2(1+n)}$ (41)

Usando a condição $\left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1} = 0$ obtêm-se, de (40)

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{B}} = \text{constante} \quad (42)$$

e $l(t) = \eta_1 t^{\frac{n}{1+n}} = \frac{1}{\sqrt{B}} t^{\frac{n}{1+n}}$ (43)

A distribuição de pressões pode ser obtida pela integração de (40)

$$p(\eta) = p_e - A \eta_1 J_n\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right); \quad 0 < \frac{\eta}{\eta_1} < 1 \quad (45)$$

onde $J_n\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right) = \int_{\frac{\eta}{\eta_1}}^0 (1-x^2)^{\frac{n}{1-n}} dx$

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\sqrt{B} x}{t^{\frac{n}{1+n}}} \quad (46)$$

Esta integral é similar a (17) e será avaliada, aqui, para dois valores:

$$n = \frac{1}{2}; \quad p(x, t) - p_e = \frac{A}{\sqrt{B}} \left(\frac{\sqrt{B} x}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \frac{B \sqrt{B} x^3}{t} - \frac{2}{3} \right) \quad (46a)$$

$$n = \frac{1}{3}; \quad p(x, t) - p_e = \frac{A}{\sqrt{B}} \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{B} x}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B} x^3}{t^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 - \frac{Bx^2}{\sqrt{t}}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (46b)$$

com B determinado de (41) para estes valores de n .

G.3 - Escoamento radial

Dois casos serão estudados para o escoamento radial: poço produzindo em reservatório infinito com pressão ou vazão especificadas.

Como no caso anterior, as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} p[l(t)] = p_e; & 0 < t < t_m \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=l(t)} = 0; & 0 < t < t_m \\ l(0) = 0 \end{cases} \quad (47)$$

onde $l(t)$ é a posição da frente no momento t . Para $r > l(t)$ a distribuição de pressão deve ser $p(r,t) = p_e$. Pretende-se determinar a função $p(r,t)$ que satisfaz a eq.(2) em $r < r < l(t)$, sendo r o raio do poço. No poço tem-se:

$$p(r_w, t) = p_w \quad (48)$$

ou
$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = \frac{\mu_{ef}}{k} \left(\frac{q_0}{2\pi h r_w} \right)^n \quad (49)$$

a depender das condições de pressão constante ou vazão especificada.

Aplicando-se a transformação generalizada de Boltzmann

$$\eta = r t^{\frac{-n}{n+1}} \quad (50)$$

a eq.(2) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{n a^2}{1+n} \eta \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0 \quad (51)$$

onde $\eta_w < \eta < \eta_1$, $\eta_w = r_w t^{\frac{-n}{n+1}}$ e $\eta_1 = l(t) t^{\frac{-n}{n+1}}$.

As condições (47) expressas em termos de η são:

$$p(\eta_1) = p_e \quad e \quad \frac{dp}{dr} \Big|_{r=l(t)} = \frac{1}{t^{\frac{n}{n+1}}} \frac{dp}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0 \quad (52)$$

e as condições (48) e (49):

$$p(\eta_w) = p_w \quad e \quad \frac{dp}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_w} = \frac{\mu_{ef}}{k} \left(\frac{q_0}{2\pi h r_w} \right)^n t^{\frac{n}{n+1}} \quad (53)$$

Chamando-se $u = \frac{dp}{d\eta}$ a eq.(51) se reduz a uma equação típica de Bernoulli:

$$\frac{du}{d\eta} + \frac{n}{\eta}u + \frac{na^2}{1+n}\eta u^{(2-\frac{1}{n})} = 0 \quad (54)$$

cuja solução geral é:

$$u(\eta) = \left[C_1 \eta^{n-1} - \frac{(1-n)a^2}{(1+n)(3-n)} \eta^2 \right]^{\frac{n}{1-n}} \quad (55)$$

e, portanto,

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{1}{\eta^n} \left[C_1 - \frac{(1-n)a^2}{(1+n)(3-n)} \eta^{(3-n)} \right]^{\frac{n}{1-n}} \quad (56)$$

sendo C_1 determinado com a última condição de (52). Portanto,

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{1}{\eta^n} \left[\frac{(1-n)a^2}{(1+n)(3-n)} \right]^{\frac{n}{1-n}} [\eta_1^{(3-n)} - \eta^{(3-n)}]^{\frac{n}{1-n}} \quad (57)$$

Integrando (57) obtém-se:

$$p(\eta) = p_e - B \int_{\eta}^{\eta_1} \eta^{-n} [\eta_1^{(3-n)} - \eta^{(3-n)}]^{\frac{n}{1-n}} d\eta \quad (58)$$

ou, usando-se a transformação $x = \frac{\eta}{\eta_1}$

$$p(\eta) = p_e - B \eta^{(1+n)(1-n)} \int_{\frac{\eta}{\eta_1}}^{\frac{\eta_1}{\eta_1}} x^{-n} [1 - x^{(3-n)}]^{\frac{n}{1-n}} dx \quad (58)$$

onde $\eta_w < \eta < \eta_1$ e $B = \left[\frac{(1-n)a^2}{(1+n)(3-n)} \right]^{\frac{n}{1-n}}$ (60)

A resolução da eq.(58) pressupõe o conhecimento de η_1 . Para o caso de produção a pressão constante, considerando-se que

$$\begin{cases} \frac{\eta_w}{\eta_1} = \frac{r_w}{l(t)} \cong 0 \\ \Delta p = p_e - p_w = B \eta^{(1+n)(1-n)} J_n(0) \end{cases} \quad (61)$$

onde $J_n(0) = \int_0^1 x^{-n} (1 - x^{3-n})^{\frac{n}{1-n}} dx$ (62)

obtém-se $\eta_1 = \left[\frac{1}{B} \frac{\Delta p}{J_n(0)} \right]^{\frac{1-n}{1+n}} = \text{constante}$ (63)

logo, a posição da frente é dada por $l(t) = \eta_1 t^{\frac{n}{1+n}}$.

Para o caso de produção com vazão especificada, considerando-se que ela declina segundo

$$q(r_w, t) = q_0 = A t^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad n < 1 \quad (64)$$

então
$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \frac{\mu_{ef}}{k} \left(\frac{A}{2\pi h r_w} \right)^n t^{\frac{n(n-1)}{n+1}} \quad (65)$$

obtém-se:
$$\eta_1 = \left[\frac{\mu_{ef} \left(\frac{A}{2\pi h} \right)^n}{B} \right]^{\frac{1-n}{n(3-n)}} = \text{constante} \quad (66)$$

e a posição da frente é dada por:
$$l(t) = \eta_1 t^{\frac{n}{n+1}} \quad (67)$$

Analisando-se os resultados obtidos para $n = \frac{1}{2}$, para pressão constante obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_e - p(r, t) = \Delta p \left[1 - \frac{6\sqrt{r}}{5t^{\frac{1}{6}}} \left(\frac{5B}{3\Delta p} \right)^{\frac{1}{6}} + \frac{r^3}{t} \frac{B}{3\Delta p} \right] \\ l(t) = \sqrt[3]{\frac{3\Delta p}{5B}} t \end{array} \right. \quad (67a)$$

Para o caso de vazão especificada:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_e - p(r, t) = \frac{1}{B^{\frac{1}{5}}} \left(\frac{\mu_{ef}}{k} \right)^{\frac{6}{5}} \left(\frac{A}{2\pi h} \right)^{\frac{3}{5}} \left[\frac{5}{2} - \frac{2\sqrt{r}}{t^{\frac{1}{6}}} \left(\frac{kB}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^{\frac{1}{10}} + \frac{r^3}{3t} \left(\frac{kB}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^{\frac{3}{5}} \right] \\ l(t) = \left(\frac{\mu_{ef}}{k} \right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{A}{2\pi h} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \quad (67b)$$

G.4 Linearização da equação da difusividade

As equações básicas (1) e (2) descrevem o escoamento transiente de fluidos de potência em meios porosos, nos quais, para $n < 1$ a viscosidade aparente aumenta com o decréscimo da taxa de cisalhamento.

Em suas derivações, uma equação reológica empírica foi usada para relacionar a viscosidade aparente a taxa de cisalhamento, expressa por:

$$\mu_{ap} = K \dot{\gamma}^{n-1}, \quad n < 1 \quad (68)$$

sendo

$$\dot{\gamma} = \frac{3n+1}{n} \frac{v}{\sqrt{8k\phi}} \quad (69)$$

Como as equações (68) e (69) são empíricas, suas limitações são evidentes. As observações experimentais, reportadas em estudos reológicos, tem mostrado que certos fluidos não-newtonianos não apresentam comportamento condizente com os previstos pela teoria, especialmente em taxas de cisalhamento muito altas ou muito baixas. Como os efeitos reológicos são dependentes das vazões empregadas, coloca-se em questão da validade de tais equações para quaisquer valores de vazão ou queda de pressão que possam ocorrer durante o fluxo no reservatório.

As equações (1) e (2) podem ser linearizadas de forma a se obter relações mais simples para a interpretação dos parâmetros de fluxo medidos em poços. Por exemplo, por

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = n(2\pi h)^{1-n} \frac{\mu_{ef}}{k} \phi c_t r^{1-n} q^{n-1}(r, t) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (70)$$

Esta equação sugere que, pela substituição de $q(r, t)$ por q , onde q é a vazão imposta no poço, ela se transforma em uma equação linear com o coeficiente variável r^{1-n} . Neste caso, a eq.(70) pode ser rescrita como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \Omega r^{1-n} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (71)$$

$$\text{onde } \Omega = n\phi c_t \frac{\mu_{ef}}{k} \left(\frac{q_0}{2\pi h}\right)^{n-1} = \text{constante} \quad (72)$$

É particularmente interessante que uma equação similar a (71) possa representar as condições de escoamento de um fluido de viscosidade variável expressa por $\mu = \mu_w \left(\frac{r}{r_w}\right)^{1-n}$ onde μ_w é a viscosidade relativa a r_w .

Nesta situação, tem-se a seguinte equação para a distribuição de pressões:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu_w}{k} \phi c_t \left(\frac{r}{r_w}\right)^{1-n} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (74)$$

Comparando-se (71) e (74) verifica-se que ambas possuem a mesma forma, devendo ter soluções similares. O mesmo pode ser notado quando se compara estes equacionamentos com o da difusão de calor em sólidos não-homogeneos. Conseqüentemente, a linearização baseada na hipótese de vazão constante pode permitir a utilização das soluções destes sistemas, disponíveis na literatura. Porém, sabe-se que tal utilização pode apresentar desvios significativos nos regimes em que o escoamento é lento, ou seja, distante do poço .

G.5 Outro enfoque matemático

Mais recentemente, Torok e Advani, aplicando a teoria anterior (Pascal) para o equacionamento do fraturamento hidráulico, introduziram na análise deste problema a utilização das séries de Lie, para o caso do escoamento linear.

A partir da eq.(9), abaixo repetida,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{n a^2}{1+n} \eta \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0$$

considerando-a sobre um domínio semi-infinito $0 < \eta < \infty$ e sob as condições:

$$\begin{cases} p(0) = p_e \\ \frac{dp}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = p'_e \end{cases} \quad (75)$$

A integração da eq.(9) sob estas condições fornece

$$\frac{dp}{d\eta} = \left[\frac{n(n-1)a^2}{2(n-1)} \eta^2 + (p'_e)^{\frac{1-n}{n}} \right]^{\frac{n}{1-n}} \quad (76)$$

que é uma equação não-autônoma, ou seja, possui termos em que a variável dependente aparece explicitamente. Desta forma, tal equação pode ser colocada na forma

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\eta} = \left[\frac{n(n-1)a^2}{2(n-1)} \xi^2 + (p'_e)^{\frac{1-n}{n}} \right]^{\frac{n}{1-n}} \\ \frac{d\xi}{d\eta} = 1; \quad \xi(0) = 0 \end{cases} \quad (77)$$

onde ξ é uma variável auxiliar.

Tal problema de valor inicial comporta um operador infinitesimal associado definido

$$\text{como } U = \left[\frac{n(n-1)a^2}{2(n-1)} \xi^2 + (p'_e)^{\frac{1-n}{n}} \right]^{\frac{n}{1-n}} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (77a)$$

A solução em série da eq.(9), desenvolvida em série de Lie, tem a representação

$$p(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} [U^j p]_{\substack{p=p_e \\ \xi=0}} \eta^j \quad (78)$$

Aplicando a condição (77) em (78) obtém-se:

$$p(n) = p_e - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1.3.5.7 \dots (2j-1) n^{j+1} N_j a^{2j} \eta^{2j}}{(n+1)^j (2j+1)!} \quad (79)$$

na qual o fator N_j é dado por:

$$N_j = (-2n+1)(-3n+2) \dots (-jn+j-1) (p'_e)^{\frac{n(1+j)}{n}} \quad (80)$$

que, para fluido newtoniano se reduz a $N_j = (-1)^{j-1} p'_e$ e a expansão em séries se torna:

$$p(\eta) = p_e + \frac{2p'_e}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)j!} \left(\frac{\eta a}{2} \right)^{2j+1} \quad (81)$$

Tal série é convergente e corresponde à série de MacLaurin da função erro.

Conseqüentemente, a solução (81) pode ser rescrita em sua forma clássica

$$p(\eta) = p_e + \frac{p'_e}{a} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta a}{2}\right)$$

A solução da eq.(1) será dada por

$$p(\eta) = p_e - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1.3.5.7 \dots (2j-1) n^{j+1} N_j a^{2j} x^{2j+1} t^{-\frac{n(2j+1)}{n+1}}}{(n+1)^j (2j+1)!} \quad (82)$$

que é a solução para o segundo caso examinado no escoamento linear, ou seja, quando a

vazão é especificada. Como foi visto, neste caso, $v(0, t) = C t^{\frac{-1}{1+n}}$ a qual, combinada com

a condição (75) e a lei de Darcy modificada implica em

$$C^n = -\frac{k}{\mu_e p'_e}$$

e, portanto, N_j em (82) pode ser expresso por:

$$N_j = (-2n + 1)(-3n + 2) \dots (-jn + j - 1) \left(-\frac{\mu_{ef}}{k} C^n \right)^{\frac{n(j+1)-j}{n}} \quad (83)$$

Como exemplo, considere-se o caso em que $n = \frac{1}{2}$. Neste caso $N_j = 0$ para $j \geq 2$ e a solução em série (82) se reduz a:

$$p(x, t) = p_e - \frac{\mu_{ef}}{k} \sqrt{C} \frac{x}{\sqrt[3]{t}} - \frac{x^3 a^2}{36t}$$

São apresentados, a seguir, tópicos específicos e importantes relacionados ao assunto deste apêndice, cujos resultados foram utilizados anteriormente em seu desenvolvimento.

G.6 Caracterização dos fluidos não newtonianos

Os fluidos newtonianos caracterizam-se pela obediência à Lei da Viscosidade de Newton, que relata uma relação linear entre a tensão e a taxa de cisalhamento aplicadas ao fluido. A viscosidade é o coeficiente linear desta reta. Os fluidos que não obedecem tal lei são genericamente chamados de não-newtonianos.

O comportamento reológico, em regime permanente, da maioria dos fluidos pode ser expresso por uma relação entre a tensão e taxa de cisalhamento na forma^(24, 21):

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$

onde η pode ser função tanto de τ_{yx} quanto de $\frac{dv_x}{dy}$. Em regimes em que η decresce com o aumento da taxa cisalhante, o comportamento é chamado pseudoplástico; quando o contrário ocorre, é denominado dilatante. Se η independe da taxa, o comportamento é newtoniano, com η igual a μ .

Numerosas relações empíricas, ou "modelos", tem sido propostas para expressar tal relação. Duas delas se destacam na Indústria do Petróleo: o modelo binghamiano, ou *Bingham plastic*, que se caracteriza por uma tensão de escoamento (*yield stress*) antes da qual o fluido se comporta rigidamente e após a qual o mesmo desenvolve uma relação linear tensão-taxa de cisalhamento como os newtoniano (tal modelo encontra grande aplicação na descrição dos fluidos de perfuração e cimentação), e o modelo de potência, ou *power-law*, ou de Ostwald-de Waele, onde tal relação é descrita por:

$$\tau_{yx} = -K \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy}$$

onde K é denominado índice de consistência, e n índice de comportamento. Quando $n = 1$ a relação se reduz à Lei de Newton.

Um modelo escolhido como dos mais representativo é uma composição dos dois modelos acima, ou seja, é um modelo de potência que admite uma tensão inicial para o início do escoamento. Conhecido como *Modelo de Hershel-Buckley*, ele é dado por:

$$\tau_{yx} = -K \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^n + \tau_0 = K \dot{\gamma}^n + \tau_0; \quad \tau_{yx} > \tau_0$$

Este modelo reflete os dois aspectos mais importantes observados nos óleos pesados ou parafínicos: a existência de uma tensão de escoamento e o comportamento não-newtoniano acima dela. Deve ser notado que para taxas altas de cisalhamento o efeito desta tensão é desprezível; porém, para taxas baixas, ele não deve ser desprezado. As taxas observadas no escoamento destes óleos podem variar na faixa de 0.1 a 1.0 s⁻¹, o que justifica a utilização deste modelo.

Sob condições transientes, tipos adicionais de comportamento podem ser descritos. Fluidos que mostram uma diminuição limitada de η no tempo quando submetidos a uma tensão τ constante aplicada subitamente, são conhecidos como *tixotrópicos*, enquanto que os que apresentam um aumento com o tempo são chamados de *reopéticos*. Fluidos que retornam parcialmente à sua forma original são conhecidos por *pseudo-plásticos*.

É importante ressaltar que estes modelos são simplesmente fórmulas empíricas de ajuste de curvas, válidos para determinadas condições de temperatura, pressão e concentração, e da faixa de taxas de cisalhamento para as quais foram ajustados. As viscosidades de gases puros e líquidos estão disponíveis na literatura e apresentam importante variação com a pressão e temperatura, havendo diversas correlações para a correção destes aspectos. Com respeito à última, as seguintes relações são recomendadas⁽²¹⁸⁾:

$$\begin{cases} K(T) = K(T_0) \exp\left(-a \frac{T-T_0}{T_0}\right) \\ \tau_0(T) = \tau_0(T_0) + b \frac{T-T_0}{T_0} \\ n(T) = n(T_0) + c \frac{T-T_0}{T_0} \end{cases}$$

onde a , b e c são constantes empíricas e T_0 é a temperatura de referência.

G.7 Lei de Darcy para fluidos não-newtonianos

Para sua utilização com fluidos de potência, a Lei de Darcy deve sofrer uma adaptação visto não haver uma definição explícita de viscosidade (μ) neste modelo.

Inicialmente, dois conceitos devem ser estabelecidos⁽²⁴⁾:

- ✓ *Viscosidade aparente* : é a viscosidade obtida pela comparação da Lei de Newton com a equação do modelo. Praticamente, corresponde ao coeficiente linear da reta que liga a origem do gráfico da tensão cisalhante contra sua taxa ao ponto desejado na curva de potência.
- ✓ *Viscosidade efetiva* : é a tangente à curva de potência no ponto desejado. Tal parâmetro, contrariamente ao anterior, não tem unidade de viscosidade. No modelo binghamiano, é chamada de viscosidade plástica.

A tensão de cisalhamento em um duto circular de comprimento L e raio R é equacionada por⁽²¹⁾:

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} r$$

Para o modelo de potência:

$$\tau_{yx} = -K \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} = K \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n$$

$$\frac{dv_z}{dy} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2KL} r \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2L} r \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} r^{1+\frac{1}{n}} + C_1$$

Como $v_z = 0$ em $r = R$ determina-se C_1 e obtêm-se:

$$v_z = \frac{n}{n+1} \left(\frac{P_0 - P_L}{2KL} \right)^{\frac{1}{n}} R^{1+\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right]$$

A velocidade média é obtida através de integração:

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{n}{3n+1} \left(\frac{P_0 - P_L}{2KL} \right)^{\frac{1}{n}} R^{1+\frac{1}{n}}$$

Para a utilização destes dados em um meio poroso torna-se necessária a adoção de um modelo de poros para se obter uma relação entre a permeabilidade dada pela Lei de Darcy e a porosidade, tortuosidade e fatores de forma do meio poroso.

O método clássico consiste na combinação da *equação de Hagen-Poiseuille* com o *modelo poros de Kozeny*. Inicialmente define-se o raio hidráulico da seção (R_h) que é equivalente a metade do raio do duto circular modelado.

$$R_h = \frac{\text{volume disponível ao flux}}{\text{superfície total molhada}}$$

O modelo de poros fornece $R_h = \frac{8k}{\phi}$, e a velocidade superficial, que é a que interessa neste caso, é dada por: $v = \phi \bar{v}_z$, resultando:

$$v = \frac{n\phi}{3n+1} \left(\frac{P_0 - P_L}{2KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2n}}$$

que é a *equação de Blake-Kozeny* adaptada para fluidos não-newtonianos. Tal equação pode ser escrita como:

$$v = - \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{onde} \quad \frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2K} \left(\frac{n\phi}{3n+1} \right)^n \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

que é a *Lei de Darcy para fluidos não-newtonianos* segundo este modelo. Caso se adote o *modelo de poros de Kozeny-Carman*, o parâmetro acima será escrito como:

$$\frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{12 k^{\frac{n+1}{2}} (1500\phi)^{\frac{n-1}{2}}}{K \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n}$$

porém tal modelo não leva em conta a tortuosidade, sendo adotada neste trabalho a primeira estimativa.

A literatura citada é pródiga em discussões a respeito da validade dos procedimentos adotados acima, devido à forte dependência de n e K com respeito à pressão e temperatura. Heuristicamente está comprovada a equivalência entre a Lei de Darcy e as equações de Stokes-Navier, porém, o principal problema observado nos modelos de poro reside em se encontrar valores representativos para o diâmetro médio de poros devido a complexidade da estrutura do meio poroso. Tais constatações podem provocar desvios significativos entre os parâmetros reais e os modelados. Apesar disso, embora os modelos de poro não sejam uma representação realista do meio poroso, os mesmos são largamente aceitos quando utilizados para o equacionamento do escoamento de fluidos newtonianos. Sua extensão para os não-newtonianos deve ser acompanhada de diversos cuidados principalmente centrados na adequada caracterização dos mesmos para as condições de reservatório.

A expressão da Lei de Darcy pode ser generalizada para o modelo reológico mais completo como:

$$\vec{v} = \left[-\frac{k}{\mu_{ef}} (\nabla P - \vec{\alpha}_0) \right]^{\frac{1}{n}}$$

que é válida sob as condições:

$$\begin{cases} |\nabla P| > \alpha_0; & v \neq 0 \\ |\nabla P| > \alpha_0; & v = 0 \end{cases}$$

O gradiente inicial (*threshold gradient*) α_0 é dado por:

$$\alpha_0 = \frac{\beta \tau_0}{\sqrt{k}}$$

onde β é uma constante adimensional a ser determinada experimentalmente.

Para escoamento radial permanente a combinação destas equações fornece:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = 0 \quad \text{onde} \quad \chi(r) = P(r) - \alpha_0 r$$

Integrando, tem-se:

$$P(r) = P_w + \alpha_0(r - r_w) + \frac{\mu_{ef}}{k(1-n)} \left(\frac{q_0}{2\pi h} \right)^n (r^{1-n} - r_w^{1-n})$$

e

$$q_0 = 2\pi h \left[\frac{k(1-n)P_e - P_w - \alpha_0(r_e - r_w)}{\mu_{ef} r_e^{1-n} - r_w^{1-n}} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Na prática, $r_e \ll r_w$. Portanto, pode-se escrever:

$$\left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{1-n} \cong 1 + (1-n) \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right)$$

e

$$q_0 = 2\pi h r_e^{\frac{n-1}{n}} \left[\frac{k}{\mu_{ef}} \left(\frac{P_e - P_w}{\ln \frac{r_e}{r_w}} - \frac{\alpha_0(r_e - r_w)}{\ln \frac{r_e}{r_w}} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

que é a Lei de Darcy para fluido não-newtoniano.

G.8 Equação da difusividade para fluidos não-newtonianos

A dedução da equação da difusividade para fluidos não-newtonianos segue os mesmos passos que a de newtonianos. As diferenças observadas na literatura residem nas simplificações introduzidas durante seus desenvolvimentos pelos autores consultados.

Duas abordagens distintas podem ser destacadas. A primeira, apresentada por van POOLEN & JARGON e aprimorada por ODEH & YANG, explicitam a viscosidade através de uma relação empírica com a velocidade e adaptam a equação da difusividade tradicional a este parâmetro resolvendo-a numericamente (primeiro) ou semi-analiticamente (segundo). O segundo enfoque é dado por IKOKU & RAMEY Jr. que utilizam a Lei de Darcy modificada e, através de simplificações, resolvem a equação resultante por Transformada de Laplace. Tal procedimento é também adotado por PASCAL e TOROK & ADVANI, que, posteriormente, melhoram estes resultados pela utilização da transformação geral de Boltzmann. Resumidamente, estas abordagens estão colocadas a seguir:

A equação da continuidade para escoamento radial num meio poroso é escrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) = -\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho)$$

ODEH & YANG sugerem a utilização da lei de Darcy convencional e as relações densidade-pressão, obtendo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{c \phi}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

onde o termo quadrático da derivada da pressão em relação ao raio foi desprezado.

Através de relação empírica entre a viscosidade e a taxa de cisalhamento para o fluido a ser utilizado, dada por

$$\mu \dot{\gamma}^{\frac{1}{n}} = A$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento, n e A são parâmetros do fluido; e através de relações retiradas de modelo de poros:

$$\dot{\gamma} = \frac{v \sqrt{2}}{\sqrt{k \phi c^f}} = \frac{1500 q}{h r \sqrt{k \phi}} \quad c^f = 2.3$$

obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = r^{\frac{1}{n}} B \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{onde} \quad B = \frac{A \phi^{1 - \frac{1}{2n}} c^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1}{n}}}{k^{1 - \frac{1}{2n}} (1500 q)^{\frac{1}{n}}}$$

Para fluidos newtonianos, $n \rightarrow \infty$ e $\mu = A = \text{constante}$, esta equação se reduz a forma convencional da equação da difusividade em meios porosos.

A solução, por transformadas de Laplace, para longo tempo e $q = \text{cte.}$ resulta:

$$P_w - P_i = \frac{q \mu_{rw}}{2 \pi k h} \left[\frac{n^{\frac{2n-1}{n+1}} (2n+1)^{\frac{2}{2n+1}} \frac{1}{r^{2n+1}}}{\Gamma\left(\frac{2n}{2n+1}\right) r_w^{\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{2n+1}}} - n \right]$$

onde μ_{rw} = viscosidade em r_w .

A solução para regime permanente é dada por:

$$q^{1 - \frac{1}{n}} = \frac{2 \pi k^{1 - \frac{1}{2n}} h^{1 - \frac{1}{n}} 1500^{\frac{1}{n}}}{n A \phi^{\frac{1}{2n}} (r_d^{\frac{1}{n}} - r_w^{\frac{1}{n}})} (P_w - P_{rd})$$

Nas soluções acima, os parâmetros de fluido, conforme descritos pelos autores, devem ser conseguidos em laboratório através de testes com viscosímetro tubular.

IKOKU & RAMEY Jr. propõe um procedimento mais genérico, utilizando o modelo de fluidos de potência. A partir da equação da continuidade obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho \left(-\frac{k}{\mu_{ef}} \frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho)$$

Aplicando-se as definições de compressibilidade tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho \left(-\frac{k}{\mu_{ef}} \frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] - c \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1+n}{n}} = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

que se reduz a:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + cn \left(-\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 = c_t \phi n \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1+n}{n}} \frac{\partial P}{\partial t}$$

onde $c_t = (c + c_f)$ é a compressibilidade total, e $c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P}$.

Assumindo-se compressibilidade de fluido constante e pequena, e pequenos gradientes de pressão, o termo quadrático pode ser desprezado. Verifica-se, portanto, que a equação se reduz à forma convencional caso se trabalhe com fluido newtoniano.

Caso se assuma que a vazão é constante a cada raio r ,

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} \mu_r \cong \left(\frac{k}{\mu_{ef}} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{q}{2\pi kh}$$

portanto:
$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = Gr^{1-n} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{onde} \quad G = \frac{n\phi c_t \mu_{ef}}{k} \left(\frac{2\pi h}{q} \right)^{1-n}$$

Esta é a equação diferencial parcial linearizada para o escoamento de fluidos não-newtonianos, *power law*, em meios porosos.

Conforme citado pelos próprios autores, a imposição de vazão radial constante produz distorções próximo ao raio de investigação, embora não cause erros muito grandes para muitas soluções.

A solução para vazão constante é obtida através de transformadas de Laplace. Para o poço, uma inversão aproximada sugerida é:

$$P_{DNw} \cong \frac{(3-n)^{\frac{2(1-n)}{3-n}} t_{DNN}^{\frac{1-n}{3-n}}}{(1-n)\Gamma\left(\frac{2}{3-n}\right)} - \frac{1}{1-n}$$

Para longo tempo é fornecida a solução:

$$P_{DNw} \cong \frac{\left(\frac{q}{2\pi h}\right)^{\frac{1+n}{3-n}} \left(\frac{\mu_e f}{k}\right)^{\frac{1-n}{3-n}}}{(1-n)\Gamma\left(\frac{2}{3-n}\right)} \left[\frac{(3-n)^2 t}{n\phi c_t} \right]^{\frac{1-n}{3-n}}$$

O raio de investigação é deduzido como:

$$r_{inv} = \left[\Gamma\left(\frac{2}{3-n}\right) \right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{(3-n)^2 t}{G} \right]^{\frac{1}{3-n}}$$

G.9 Propriedades físicas do meio poroso

A utilização de fluidos não-newtonianos em testes de escoamento em meios porosos permite a determinação dos coeficientes da Lei de Darcy modificada. A literatura lista dois métodos para este fim: o primeiro é desenvolvido a partir de dados medidos em testes de fluxo em estado permanente enquanto que o segundo é baseado na resposta de pressão medida durante escoamento transiente de pequena duração⁽²⁰²⁾.

G.9.1 - Escoamento permanente

O primeiro método se baseia nas relações apresentadas anteriormente. A Lei de Darcy modificada pode ser escrita como:

$$\vec{v} = \left[-\frac{k}{\mu_{ef}}(\nabla P - \vec{\alpha}_0) \right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{onde} \quad \frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2K} \left(\frac{n\phi}{1+3n} \right)^n \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

que é válida sob as condições:

$$\begin{aligned} |\nabla P| > \alpha_0; & \quad v \neq 0 \\ |\nabla P| > \alpha_0; & \quad v = 0 \end{aligned}$$

O gradiente inicial (threshold gradient) α é dado por:

$$\alpha_0 = \frac{\beta \tau_0}{\sqrt{k}}$$

onde β é uma constante adimensional a ser determinada experimentalmente.

Da mesma forma que nesta seção, pode-se deduzir para o escoamento linear a expressão:

$$\Delta P = P_e - P_w = \frac{\mu_{ef} L}{k A^n} q_o^n + \alpha_0 L$$

De acordo com esta equação, pode-se plotar $\Delta P \times q_o^n$ obtendo-se uma reta com coeficientes

$$m = \frac{\mu_{ef} L}{k A^n}; \quad b = \alpha_0 L$$

G.9.2 - Escoamento transiente

No instante $t = 0$ supõe-se o sistema em equilíbrio com escoamento permanente. A partir disto ($t > 0$) aplica-se uma perturbação no sistema e estuda-se seu comportamento transiente. Para o escoamento linear, as seguintes equações podem ser escritas:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -c \frac{\partial f}{\partial t} \quad t > 0$$

$$\frac{\mu_{ef}}{k} v_0^n \left[\left(1 + \frac{g}{v_0} \right)^n - 1 \right] = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad t > 0$$

onde as funções $g(x,t)$ e $f(x,t)$ expressam os desvios do escoamento permanente e são relacionadas às distribuições de pressão e velocidade no escoamento transiente pelas relações:

$$\begin{cases} P(x,t) = P_0(x) + f(x,t) & t > 0 \\ v(x,t) = v_0 + g(x,t) & t > 0 \end{cases}$$

nas quais a velocidade no escoamento permanente v_0 e a correspondente distribuição de pressões $P_0(x)$ são dadas pelas relações:

$$v_0 = \frac{q_0}{A}; \quad P_0(x) = \frac{\mu_{ef}}{k} v_0 x^n + P_w \quad t > 0$$

Linearizando a segunda equação acima através de série de potências, e truncando após o terceiro termo:

$$\frac{\mu_{ef}}{k} n v_0^n \left[\frac{g}{v_0} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{g}{v_0} \right)^2 \right] = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad t > 0$$

o que resulta, após composição com a primeira equação, em:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = a^2 \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

na qual $\Psi(x,t)$ é relacionado a função $g(x,t)$ pela relação:

$$\Psi(x,t) = 1 + (n-1) \frac{g(x,t)}{v_0} \quad n \neq 1$$

e

$$a^2 = \frac{n \mu_{ef} v_0^{n-1}}{k} c_t$$

e a função $f(x,t)$ é expressa por:

$$f(x,t) - f(x,0) = -\frac{1}{c_t} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} d\tau$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método da perturbação, expressando-se $\Psi(x,t)$ em série de potência em termos de um parâmetro ε de pequeno valor:

$$\Psi = 1 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots + \varepsilon^n \Psi_n$$

com as seguintes linearizações para Ψ_n :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + a^2 \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}; \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i \frac{\partial \Psi_{n-i}}{\partial t}$$

Pascal mostra que, devido à pequena variação na velocidade proporcionada pela perturbação, uma aproximação pela linearização de primeira ordem (primeira equação da série) leva a desvios pouco significativos. Após a consideração de condições iniciais e de contorno apropriadas chega-se a:

$$\Psi_1 = \frac{n-1}{\epsilon v_0} \left[g_w \left(1 - \frac{x}{l} \right) + g_e \frac{x}{l} \right] - \frac{2(n-1)}{\pi \epsilon v_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_w - (-1)^m g_e}{m} \exp(-m^2 \tau) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

onde $\tau = \frac{\pi^2 t}{a^2 l^2}$ é o tempo adimensional.

Conhecido Ψ_1 , pode-se obter a velocidade:

$$v(x, t) = v_0 + \frac{\epsilon v_0}{n-1} \Psi_1(x, t)$$

Após simplificações chega-se a:

$$P(x, t) = P_0(x) - \frac{a^2 l g_w}{2 c_t} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) + \frac{2 a^2 l g_w}{\pi^2 c_t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m}{m^2} \exp(-m^2 \tau) \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Em $x = 0$ esta equação pode ser simplificada para:

$$\frac{P(0, t) - P_{wl}}{P_w - P_{wl}} = \exp\left(-\frac{\pi^2 t}{a^2 l^2}\right) \quad \text{ou} \quad \ln \Delta P(t) = \ln \Delta P_w - \frac{\pi^2 t}{a^2 l^2}$$

onde

$$\Delta P(t) = P(0, t) - P_{wl}; \quad \Delta P_w = P_w - P_{wl}; \quad P_{wl} = P(0, \infty)$$

Pode-se plotar $\Delta P(0, t) \times t$ em escala logarítmica obtendo-se:

$$m = \frac{\pi^2}{a^2 l^2} \quad e \quad b = \ln \Delta P_w$$

Tais relações são usadas para a determinação de a^2 e $\frac{k}{\mu_e f}$ a partir das relações anteriores.

Conhecendo-se a solução para a situação em que as condições de contorno são constantes pode-se obter a solução para condições variáveis através do princípio da superposição, expresso pela integral de Duhamel^(38, 144), visto que o problema foi linearizado.

Pascal efetua, ainda, um estudo numérico do equacionamento proposto para verificação do truncamento efetuado na série de potências e mostra que as distribuições de pressão e velocidade são representativas para valores de

$$\left| \frac{(n-1)g_w}{v_0} \right| < 0.1$$

Dentro deste limite, o equacionamento, embora não forneça o transiente exato de pressão, é uma aproximação válida pois o desvio da velocidade em relação ao estado permanente é relativamente pequeno.

G.10 Dinâmica de fronteiras moveis no meio poroso

G.10.1 - Deslocamento de fluidos imiscíveis

PASCAL efetua dois estudos^(197,200) para a adaptação das teorias disponíveis de deslocamento de fluidos aos fluidos não-newtonianos: para o modelo binghamiano e para o misto (Herschel-Buckley). O primeiro permite a obtenção de uma solução exata e se baseia no equacionamento proposto por Muskat para fluidos incompressíveis.

Considere-se o deslocamento tipo pistão de um fluido 2, mobilidade $\frac{k_1}{\mu_1}$, por um fluido 1 de mobilidade $\frac{k_2}{\mu_2}$, conforme figura abaixo:

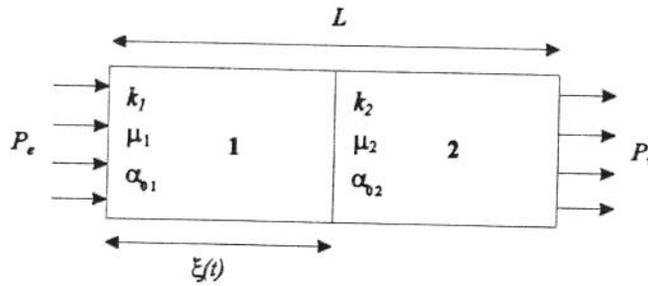


Fig. G.1 Deslocamento de fluidos imiscíveis.

Para um fluido não-newtoniano, modelo de Bingham, a seguinte relação é válida:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} + \tau_0; \quad \tau > \tau_0$$

A lei de Darcy modificada para este fluido é dada por:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \vec{\alpha}_0) \quad \text{sob as condições:} \quad \begin{cases} |\nabla P| > \alpha_0; & v \neq 0 \\ |\nabla P| > \alpha_0; & v = 0 \end{cases}$$

O gradiente inicial (threshold gradient) α é dado por: $\alpha_0 = \frac{\beta \tau_0}{\sqrt{k}}$ onde β é uma constante adimensional a ser determinada experimentalmente.

Considerando-se fluxo horizontal e fluidos incompressíveis, então a equação da continuidade e a lei de Darcy fornecem:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_1}{dx} - \alpha_{01} \right) = 0; & 0 < x < \xi(t) \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_2}{dx} - \alpha_{02} \right) = 0; & \xi(t) < x < L \end{cases}$$

fornecendo as seguintes distribuições:

$$P_1(x) = a_1 + \alpha_{01}x + b_1; \quad P_2(x) = a_2 + \alpha_{02}x + b_2$$

As condições de contorno externas e na frente são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow P_1(0) = P_e \\ x = L \rightarrow P_2(L) = P_w \end{array} \right\} P_e > P_w$$

$$x = \xi(t) \rightarrow \begin{cases} v_1(\xi) = v_2(\xi) \\ P_1(\xi) = P_2(\xi) \end{cases}$$

negligenciado-se a pressão capilar.

A condição de velocidade acima, de acordo com a lei de Darcy, pode ser escrita como

$$\left. \frac{dP_1}{dx} \right|_{x=\xi(t)} = M \left. \frac{dP_2}{dx} \right|_{x=\xi(t)} + \alpha_{01} - M\alpha_{02}$$

Sob tais condições obtém -se:

$$P_1(x) = -M \Delta P \frac{1 - \Omega_{02}(1 - \bar{\xi}) - \Omega_{01}\bar{\xi}}{(M-1)\bar{\xi}+1} \frac{x}{L} + \alpha_{01} \frac{x}{L} + P_e$$

$$P_2(x) = \Delta P \frac{1 - \Omega_{02}(1 - \bar{\xi}) - \Omega_{01}\bar{\xi}}{(M-1)\bar{\xi}+1} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \alpha_{01} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + P_w$$

onde $\Delta P = P_e - P_w$; $\bar{\xi} = \frac{\xi(t)}{L}$; $\Omega_{01} = \frac{\alpha_{01}L}{\Delta P}$; $\Omega_{02} = \frac{\alpha_{02}L}{\Delta P}$

A distribuição de velocidades será dada por:

$$v_1(x) = v_2(x) = \frac{k_2 \Delta P}{\mu_2 L \phi} \frac{1 - \Omega_{02}(1 - \bar{\xi}) - \Omega_{01}\bar{\xi}}{(M-1)\bar{\xi}+1}$$

onde ϕ é a porosidade efetiva.

Definindo-se $\varphi(x, t) = x - \xi(t)$ obtém -se a velocidade da frente pela lei de Darcy:

$$v = \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{k}{\mu \phi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \alpha_0 \right) \Big|_{x=\xi(t)}$$

Portanto:

$$\phi \frac{\mu_1}{k_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_1}{dx} - \alpha_{01} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad \phi \frac{\mu_2}{k_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dP_2}{dx} - \alpha_{02} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Como $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1$ chega-se a:

$$\frac{d\bar{\xi}}{dT} = \frac{1 - \Omega_{02}(1 - \bar{\xi}) - \Omega_{01}\bar{\xi}}{(M-1)\bar{\xi}+1}; \quad T = \frac{k_2 \Delta P t}{\mu_2 \phi L^2}$$

Integrando-se e explicitando-se o tempo adimensional acima:

$$T = \frac{(M-1)\bar{\xi}}{\Omega_{02}(1-N)} + \left[\frac{1}{\Omega_{02}(1-N)} - \frac{(M-1)(1-\Omega_{02})}{\Omega_{02}^2(1-N)^2} \right] \ln \left[1 + \frac{\Omega_{02}(1-N)\bar{\xi}}{1-\Omega_{02}} \right]$$

onde

$$N = \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}}$$

Para fluidos newtonianos, $\Omega_{01} = \Omega_{02} = 0$, e

$$T = \bar{\xi} + \frac{1}{2}(M-1)\bar{\xi}^2$$

que é a solução de MUSKAT para o problema.

Para o caso de se ter água como fluido deslocante e óleo pesado como fluido deslocado, $\Omega_{01} = 0$ e $\Omega_{02} = \Omega$, obtém-se

$$v^*(\xi) = \frac{\mu_2 \phi L v(\xi)}{k_2 \Delta P} = \frac{1 - \Omega(1 - \bar{\xi})}{(M-1)\bar{\xi} + 1}$$

para a velocidade da frente, e,

$$T = \frac{(M-1)\bar{\xi}}{\Omega} + \left[\frac{1}{\Omega} - \frac{(M-1)(1-\Omega)}{\Omega^2} \right] \ln \left[1 + \frac{\Omega \bar{\xi}}{1-\Omega} \right]$$

Para o caso de se ter um fluido não-newtoniano como deslocante e óleo leve como deslocado, $\Omega_{01} = 0$ e $\Omega_{02} = \Omega$, obtém-se

$$v^*(\xi) = \frac{1 - \Omega \bar{\xi}}{(M-1)\bar{\xi} + 1}$$

e,

$$T = \frac{(1-M)\bar{\xi}}{\Omega} + \left(\frac{1-M}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega} \right) \ln(1 - \Omega \bar{\xi})$$

Das relações anteriores tira-se:

$$\Delta P = P_e - P_w = \frac{\mu_2 Q_2 L}{k_2} [1 + (M-1)\bar{\xi}(T)] + \alpha_0 L [1 - \bar{\xi}(T)]$$

o que, integrada, fornece a produção acumulada:

$$N_p = \int_0^L Q(\tau) d\tau = \phi L A \bar{\xi}(T)$$

Tratamento similar pode ser efetuado para fluidos de potência, porém as equações resultantes são não-lineares, impedindo a obtenção de soluções analíticas exatas.

G.10.2 - Instabilidade de interfaces

Outro ponto considerado por PASCAL é a instabilidade de interfaces, geradora do fenômeno denominado digitação viscosa (*viscous fingering*). Para estudá-la, considera-se o deslocamento vertical de uma interface horizontal de acordo com a lei de Darcy modificada:

$$v_1 = -\frac{k_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \alpha_{01} + \gamma_1 \frac{dz}{dx} \right); \quad v_2 = -\frac{k_2}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \alpha_{02} + \gamma_2 \frac{dz}{dx} \right)$$

Quando um *finger* aparece, a velocidade dentro do mesmo é dada por:

$$(v_1)_2 = -\frac{k_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \alpha_{01} + \gamma_1 \frac{dz}{dx} \right); \quad \frac{dz}{dx} = \sin \alpha = 1$$

$$\Delta v = (v_1)_2 - v_2 = \left(\frac{k_1 \mu_2}{k_2 \mu_1} - 1 \right) v_2 - \frac{k_1}{\mu_1} (\gamma_1 - \gamma_2) \sin \alpha - \frac{k_1}{\mu_1} (\alpha_{01} - \alpha_{02})$$

$$\begin{cases} M = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}; & \Delta \gamma = \gamma_2 - \gamma_1; & \Delta \alpha = \alpha_{01} - \alpha_{02}; \\ \Delta v = \left(\frac{1}{M} - 1 \right) v_2 - \frac{k_1}{\mu_1} \Delta \gamma \sin \alpha - \frac{k_1}{\mu_1} \Delta \alpha \end{cases}$$

Quando as forças viscosas são muito superiores às gravitacionais, $\sin \alpha \rightarrow 0$ e o deslocamento é estável para:

$$\left(\frac{1}{M} - 1 \right) v_2 - \frac{k_1}{\mu_1} \Delta \alpha < 0$$

portanto

$$M > \frac{\mu_1 v_2}{\mu_1 v_2 + k_1 \Delta \alpha}$$

G.10.3 - Deslocamento de fluidos compressíveis

Para o modelo de potência generalizado tem-se que:

$$\vec{v} = \left[-\frac{k}{\mu_{ef}} (\nabla P - \vec{\alpha}_0) \right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{onde} \quad \frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2K} \left(\frac{n\phi}{1+3n} \right)^n \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

A equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -c_l \frac{\partial p}{\partial t}$$

Para escoamento permanente tem-se que:

$$\frac{k}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2K} \left(\frac{n\phi}{1+3n} \right)^n \left(\frac{8k}{\phi} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

Tomando-se $f(x,t)$ e $g(x,t)$, funções representativas dos desvios a partir do estado permanente, pode-se escrever:

$$\begin{cases} P(x,t) = P_0(x) + f(x,t) \\ v(x,t) = v_0 + g(x,t) \end{cases}$$

Substituindo-se nas relações anteriores:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -C_t \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{k}{\mu_{ef}} v_0^n \left[\left(1 + \frac{g}{v_0} \right)^n - 1 \right] = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

Expressando o termo entre parêntesis em série de potência vem:

$$\left(1 + \frac{g}{v_0} \right)^n = 1 + \frac{g}{v_0} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{g}{v_0} \right)^2 + \dots$$

$$\frac{n\mu_{ef} v_0^{n-1}}{k} g(x,t) = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial g}{\partial t}; \quad \text{onde} \quad a^2 = \frac{n\mu_{ef} v_0^{n-1}}{k} C_t$$

Para a figura inicial desta seção tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} t > 0 \rightarrow \begin{cases} P_1(0,t) = \bar{P}_e \\ P_2(L,t) = \bar{P}_w \end{cases} \\ t = 0 \rightarrow \begin{cases} P_1(x,0) = P_{01}(x); & 0 < x < \xi_0 \\ P_2(x,0) = P_{02}(x); & \xi_0 < x < L \end{cases} \\ \xi(0) = \xi_0; & 0 < \xi_0 < L \\ P_1(0,0) = P_e; & P_1(L,0) = P_w \end{cases}$$

A localização da frente é determinada da lei de Darcy modificada:

$$t > 0; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{k_i}{n_i \mu_{ef} v_0^{n-1}} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)}; \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad [0 < x < \xi(t)] \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial f_2}{\partial t} \quad [\xi(t) < x < L]$$

com condições de contorno similares às acima

Na interface tem-se:

$$x = \xi(t) \rightarrow \begin{cases} f_1[\xi(t), t] = f_2[\xi(t), t] \\ \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} = M \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} \end{cases}$$

onde

$$M = \frac{n_1 \mu_{e1} v_0^{n_1-1} k_2}{n_2 \mu_{e2} v_0^{n_2-1} k_1}$$

G.11 Mecanismo de segregação gravitacional

O escoamento em um sistema dominado pelo mecanismo de segregação gravitacional⁽²⁰¹⁾ pode ser equacionado tomando-se dois fluidos imiscíveis e incompressíveis (1 e 2) separados por uma interface móvel.

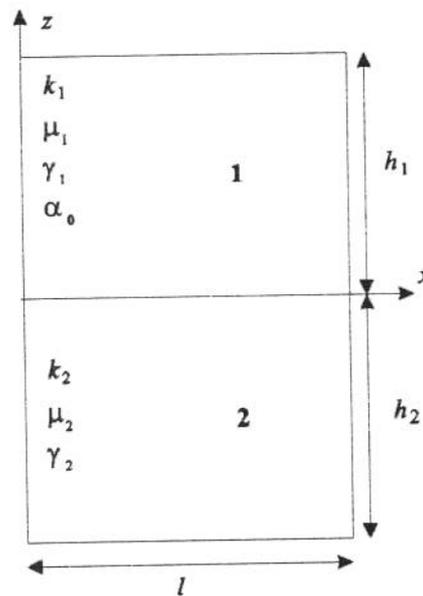


Fig. G.2 Segregação gravitacional em meios porosos

$$\begin{cases} v_{x1}(x, z, t) = -\frac{k_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} - \alpha_0 \right) \\ v_{z1}(x, z, t) = -\frac{k_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} - \alpha_0 + \gamma_1 \right) \\ \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial x} = 0; \quad \gamma_1 = \rho_1 g \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_{x2}(x, z, t) = -\frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} \\ v_{z2}(x, z, t) = -\frac{k_2}{\mu_2} \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \gamma_2 \right) \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{z2}}{\partial x} = 0; \quad \gamma_2 = \rho_2 g \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < l \\ 0 < z < h_1 \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < l \\ -h_2 < z < 0 \end{array} \right.$$

Considerando-se seladas as fronteiras em $x = 0$ e $x = l$, as condições de contorno serão dadas por:

$$v_{x1}(0, z, t) = v_{x1}(l, z, t) = 0 \quad v_{x2}(0, z, t) = v_{x2}(l, z, t) = 0$$

Assumindo-se que o perfil da interface seja descrito por uma função $\xi(x, 0)$ e que, para tempos positivos, o fluxo é alterado pela parada simultânea dos processos de injeção e produção nas fronteiras $z = h_1$ e $z = -h_2$, o problema se reduz a determinar a evolução no tempo da interface, ou seja, determinar a função $z = \xi(x, t)$. Neste caso, as condições nas fronteiras serão dadas por

$$v_{z1}(x, h_1, t) = 0 \quad v_{z2}(x, -h_2, t) = 0 \quad t > 0$$

Os gradientes de pressão serão dados por:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_0; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = \alpha_0 - \gamma_1; \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_0; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = \gamma_2; \end{array} \right\} t > 0$$

Na interface, a continuidade de pressão deve ser satisfeita. Na presença de forças capilares tem-se:

$$P_2[x, \xi(x, t), t] = P_1[x, \xi(x, t), t] - P_c$$

Seja $\varphi(x, z, t) = 0$ a equação da interface, então:

$$\varphi(x, z, t) = z - \xi(x, t) = 0$$

Devido à continuidade de velocidades na interface, obtém-se:

$$-\frac{\mu_2 \phi}{k_2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} + \gamma_2 \right) = 0$$

ou,

$$-\frac{\mu_2 \phi}{k_2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} - \alpha_0 \right) - \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} + \gamma_1 - \alpha_0 \right) = 0$$

onde ϕ é a porosidade efetiva.

Para se homogeneizar as condições de contorno, introduz-se as funções:

$$P_1^*[x, z, t] = P_1[x, z, t] + \gamma_1 z - \alpha_0(x, z); \quad P_2^*[x, z, t] = P_2[x, z, t] + \gamma_2 z$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1^*}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial P_1^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial P_1^*}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial P_1^*}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = 0; \\ \frac{\partial^2 P_2^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2^*}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial P_2^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial P_2^*}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial P_2^*}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0; \end{aligned}$$

De onde, obtêm-se:

$$\xi(x, t) = \frac{P_2^* - P_1^*}{\Delta\gamma + \alpha_0} + \frac{P_c - \alpha_0 x}{\Delta\gamma + \alpha_0}$$

$$v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\Delta\gamma + \alpha_0} \left(\frac{\partial P_2^*}{\partial t} - \frac{\partial P_1^*}{\partial t} \right) - \frac{\alpha_0}{\Delta\gamma + \alpha_0} \frac{dx}{dt}$$

onde

$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 = (\rho_2 - \rho_1)$$

A solução analítica do sistema acima apresenta muitas dificuldades. Para se conhecer o perfil da interface $[z = \xi(x, t)]$ podem ser efetuadas algumas simplificações sem perda de generalidade. Desta forma, será assumido que:

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1 \quad \text{e} \quad |\epsilon \xi| \ll 1$$

onde ϵ é a máxima curvatura inicial da interface. Será desprezada, ainda, a componente de velocidade na direção x . Portanto:

$$\frac{\mu_2 \phi}{k_2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial P_2^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad t > 0$$

ou

$$\frac{\mu_2 \phi}{k_2} \frac{1}{\Delta\gamma + \alpha_0} \left(\frac{\partial P_2^*}{\partial t} - \frac{\partial P_1^*}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_2^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

e

$$\xi(x, t) = \frac{P_2^*(x, 0, t) - P_1^*(x, 0, t)}{\Delta\gamma + \alpha_0} + \frac{P_c - \alpha_0 x}{\Delta\gamma + \alpha_0}$$

e, definindo-se as funções auxiliares como

$$P_1^*(x, z, t) = \varphi_1(x, z) \exp(-\beta t) + A_1; \quad P_2^*(x, z, t) = \varphi_2(x, z) \exp(-\beta t) + A_2$$

são obtidas as equações:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0;$$

$$\frac{\mu_2 \phi}{k_2} \frac{1}{\Delta\gamma + \alpha_0} (\varphi_1(x, 0) - \varphi_2(x, 0)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

Tal sistema é satisfeito pelas expressões:

$$\varphi_{1n}(x, z) = A_{1n} \cosh \frac{n\pi(z-h_1)}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < z < h_1 \end{cases}$$

$$\varphi_{2n}(x, z) = A_{2n} \cosh \frac{n\pi(z-h_2)}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad \begin{cases} 0 < x < l \\ -h_2 < z < 0 \end{cases}$$

A condição de continuidade na velocidade fica: $M \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$

sendo M a razão de mobilidades.

Das condições de contorno obtém -se: $\frac{A_{2n}}{A_{1n}} = -M \frac{\sinh \frac{n\pi h_1}{l}}{\sinh \frac{n\pi h_2}{l}}$

Das relações do sistema encontram-se os valores próprios β expressos por:

$$\beta_n = \frac{k^2 (\Delta\gamma + \alpha_0)}{\mu_2 \phi} \frac{\frac{n\pi}{l} \sinh \frac{n\pi h_1}{l} \sinh \frac{n\pi h_2}{l}}{\sinh \frac{n\pi h_1}{l} \cosh \frac{n\pi h_2}{l} + \frac{1}{M} \sinh \frac{n\pi h_2}{l} \cosh \frac{n\pi h_1}{l}}$$

Portanto, a função de perfil da interface pode ser expressa por:

$$\xi(x, t) = \frac{A_0}{\Delta\gamma + \alpha_0} - \frac{1}{\Delta\gamma + \alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\beta t) \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{P_c - \alpha_0}{\Delta\gamma + \alpha_0}$$

onde

$$A_n = A_{1n} \left(\cosh \frac{n\pi h_1}{l} + M \sinh \frac{n\pi h_1}{l} \coth \frac{n\pi h_2}{l} \right); \quad A_0 = A_2 - A_1$$

A determinação de A_0 e A_n é um problema de desenvolvimento em séries de Fourier.

Portanto em $t = 0$:

$$\begin{cases} A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l [(\Delta\gamma + \alpha_0)\xi(x, 0) + \alpha_0 x - P_c] \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ A_0 = -\frac{1}{l} \int_0^l [(\Delta\gamma + \alpha_0)\xi(x, 0) + \alpha_0 x - P_c] dx \end{cases}$$

viscosidade de um fluido de potência é menor nos capilares mais largos e, portanto, a fração do fluxo total que passa pelos poros mais largos é maior que para os fluidos newtonianos sob as mesmas condições. Os resultados obtidos apontaram para uma redução de 10% na viscosidade de fluidos de $n = 0.5$, o que explica parcialmente a questão.

- ✓ *Efeito da flutuação da vazão de injeção* :- O escoamento pulsado de fluidos não-newtonianos por tubos acarretam uma maior vazão dos mesmos em relação à observada em escoamento permanente. Ao mesmo tempo, espera-se uma maior perda de carga em fluxo por um meio irregular que em capilares retos. Estes autores conseguiram em laboratório um fator que, inserido no modelo de poros (Kozeny), corrige esta distorção.
- ✓ *Volume poroso inacessível* :- O fenômeno conhecido por volume poroso inacessível se resume na constatação de que o polímero flui mais rápido que a solução salina na qual está disperso. A hipótese inicial aventada para explicação do fenômeno foi que os poros mais delgados não permitem a passagem do polímero, os quais são preferencialmente molhados pela água associada resultando num volume de poroso de 20 a 30% inacessível às partículas. Baseados em cromatografia hidrodinâmica, alguns autores sugerem que as partículas de polímero ocupam preferencialmente as partes centrais dos poros, onde as velocidades são maiores; o que explicaria a repetição do fenômeno mesmo em capilares retos. Outros autores associam o movimento browniano a que estariam sujeitas as partículas coloidais para explicar a maior velocidade das partículas de maior diâmetro e propõe uma relação empírica que possui alguma consistência com os resultados práticos observados. Os autores acima observaram em seus experimentos, pela utilização de traçadores, que este fenômeno é mais pronunciado em plugs de menor permeabilidade.
- ✓ *Retenção biopolimérica* :- As experiências efetuadas em testemunhos buscando simular o processo de injeção de polímeros indicaram uma retenção importante dos mesmos no meio poroso. A depender das características da amostra utilizada, notou-se uma retenção variável entre 15 e 50% do polímero injetado tendo-se concluído ser a mesma irreversível.

A distribuição de pressões pode ser expressa por:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x, z, t) = \alpha_0 x + (\alpha_0 - \gamma_1)z + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \exp(-\beta t) \cosh \frac{n\pi(z-h_1)}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} + A_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < l \\ 0 < z < h_1 \end{array} \right. \\ P_2(x, z, t) = -\gamma_2 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \exp(-\beta t) \cosh \frac{n\pi(z-h_2)}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} + A_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < l \\ -h_2 < z < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

G.12 Aspectos práticos relacionados à injeção de polímeros

Tanto na área de Perfuração quanto na de Completação encontram-se disponíveis um grande número de artigos sobre a utilização de polímeros como fluidos de perfuração, completção e estimulação. Um dos pontos mais interessantes que sobressai é o estudo da filtração de soluções poliméricas, quando de seu bombeio para as zonas produtoras. É bastante conhecida e estudada a formação de reboco nestas operações, indicando a desidratação destas soluções na entrada do meio poroso. Tal aspecto não é encontrado em literaturas reservadas à Engenharia de Reservatório consultadas.

TEEUW & HASSELINK realizaram um trabalho bastante detalhado a respeito do comportamento hidrodinâmico das soluções bio-poliméricas em meios porosos e concluíram que as soluções poliméricas exibem um comportamento de fluido não-newtoniano quando em escoamento; sua viscosidade não é constante e depende da vazão aplicada. Observaram que a viscosidade de tais fluidos em testes com plugs (amostras) é cerca de metade da medida em viscosímetros, tanto rotativos quanto tubulares, o que afeta grandemente o dimensionamento de projetos utilizando tais soluções. Os principais efeitos notados que contribuem para tal distorção são:

- ✓ *Efeito da distribuição de poros:*- Quando um fluido é deslocado por um sistema de capilares paralelos de diferentes raios e sob o mesmo diferencial de pressão, sua taxa de cisalhamento nos capilares é diretamente proporcional aos raios. Conseqüentemente, a

Nomenclatura

a	constante da equação da difusividade	U	operador infinitesimal associado
B, C	constantes	v	velocidade
C	constante de filtração	V	volume de óleo
c	compressibilidade total	x	coordenada linear
F	área da seção transversal	α	gradiente de ruptura
g	aceleração gravitacional	ϕ	porosidade
h	espessura do reservatório	$\dot{\gamma}$	taxa de cisalhamento
K	índice de consistência do fluido	γ	peso específico
k	permeabilidade	η	coordenada de Boltzmann
l	posição da frente	ρ	massa específica
L	comprimento do reservatório; grupo adimensional	τ	tensão de cisalhamento
M	razão de mobilidades	ξ	posição da frente adimensional; coordenada
N	produto de índices	μ_{ap}	viscosidade aparente
n	índice de comportamento do fluido	μ_{ef}	viscosidade efetiva
p	pressão	ϑ, φ	funções adimensionais
q	vazão	Ω	grupo adimensional
r	coordenada radial		
t	tempo		
T	tempo adimensional		

Apêndice H - Variáveis complexas

A aplicação da teoria de variáveis complexas na resolução de problemas bi-dimensionais em elasticidade foi consolidada por Muskhelishvili em um livro inovador e aperfeiçoada por diversos outros autores que atuaram dentro deste enfoque. Tal teoria é centrada principalmente na utilização das propriedades das integrais de Cauchy e complementada pela teoria de Hilbert para arcos. As curvas consideradas posicionam-se no lado direito de um sistema cartesiano de eixos $0x, 0y$ e são consideradas simples, ou seja, elas não se interceptam.

H.1 Curvas suaves. Condição de Hölder

Um *arco suave* é definido pelas equações paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (s_a \leq s \leq s_b)$$

onde s_a, s_b são duas constantes finitas e $x(s), y(s)$ são funções contínuas no intervalo fechado indicado com as seguintes propriedades:

- 1 $x(s), y(s)$ tem primeira derivada contínua no intervalo citado e estas derivadas nunca se anulam simultaneamente. Os valores de $x'(s), y'(s)$ nas extremidades do intervalo devem ser interpretados como $x'(s_a + 0), y'(s_a + 0)$ e $x'(s_b - 0), y'(s_b - 0)$ respectivamente.
- 2 Se $s_a \leq s_1, s_2 \leq s_b, s_1 \neq s_2 \Rightarrow x(s_1) \neq x(s_2)$ ou $y(s_1) \neq y(s_2)$.

Os pontos a e b , correspondentes aos valores de s_a e s_b são as extremidades do arco e a ele pertencem, o que o define como um arco fechado; quando tais pontos não pertencem ao arco, ele é considerado aberto.

Define-se como direção positiva para este arco à direção que corresponde a um aumento do parâmetro s . O arco de extremidades a, b será denominado ab onde tal ordem indica que a direção positiva vai de a para b .

Um *contorno suave* é uma curva suave na qual a condição 2 acima é relaxada e os pontos a e b se confundem, onde as funções acima e suas derivadas se igualam, ou seja,

$$x(s_1) \neq x(s_2) \text{ ou } y(s_1) \neq u(s_2) \text{ desde que } s_a < s_1, s_2 < s_b, s_1 \neq s_2, \text{ mas}$$

$$x(s_b) = x(s_a), \quad y(s_b) = y(s_a), \quad x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0), \quad y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0)$$

A união de um número finito de arcos e contornos suaves que não se interceptam é chamada uma curva seccionalmente suave L , que pode ser formada por diversas partes desconectadas. As extremidades de cada arco que compõe a curva L são chamadas extremidades de L . Em cada ponto t de L , não coincidente com uma extremidade, pode-se traçar um círculo infinitesimal que é dividido por L em duas partes, esquerda e direita quando vistas a partir da direção positiva de L , que serão consideradas como as vizinhanças esquerda e direita de t . Se L for composto por contorno e for fronteira de uma região conectada, sua direção positiva será definida tal que, se L for descrita nesta direção, tal direção estará sempre à esquerda ou à direita. A parte do plano à esquerda será denominada de S^+ e a da direita de S^- .

Seja L uma curva seccionalmente suave, α um ângulo agudo arbitrário ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), e seja $R_0 = R_0(\alpha)$ um número positivo, função de α , em posição diferente do ponto t em L , tal que:

- 1 A parte de L , dentro de um círculo Γ com raio $R \leq R_0$ e centro em algum ponto t de L , é formado por um arco simples ab . Se L consistir de um único contorno, as extremidades a, b deste arco se encontrarão sempre dentro da circunferência de Γ . Se um arco for uma parte de L uma de suas extremidades, ou ambas, poderão estar compreendidas em Γ .

2 O ângulo não-obtuso entre as tangentes de dois pontos quaisquer do arco ab não excede a α .

Portanto, para um dado ângulo α , R_0 é chamado raio padrão; o círculo Γ_0 de raio R_0 círculo padrão; o arco ab , parte da curva L , cortado pelo círculo Γ_0 , é chamado arco padrão.

Dada uma função complexa $\Phi(t)$ de posição no arco L , onde t indica tanto o ponto (x,y) quanto o número complexo $t = x + iy$ correspondente, tal função satisfaz a *condição de Hölder* {condição $H(\mu)$ } em L se, para quaisquer dois pontos t_1, t_2 em L

$$|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu \quad (1)$$

onde A e μ são constantes reais positivas.

Se L for uma curva seccionalmente suave então $\Phi(t)$ satisfaz a condição de Hölder em L se a condição acima for válida para todo arco ou contorno pertencente à L .

H.2 Funções seccionalmente contínuas

Seja a função $\Phi(z)$ do ponto $z = x + iy$ definida e contínua nas vizinhanças de uma curva seccionalmente suave L . Seja t um ponto de L não coincidente com as extremidades. Diz-se que $\Phi(z)$ é contínua no ponto t pela esquerda (ou pela direita) se $\Phi(z)$ tender para um limite definido $\Phi^+(t)$ {ou $\Phi^-(t)$ } quando z se aproxima de t pela esquerda (ou direita) percorrendo L .

Se a função $\Phi(z)$ for contínua à esquerda (ou direita) de qualquer ponto do segmento L' da curva L , então $\Phi(z)$ é dita contínua à esquerda (ou direita) de L' . Neste caso a função $\Phi^+(t)$ {ou $\Phi^-(t)$ } é necessariamente contínua em L' .

Se t for um ponto de extremidade, $\Phi(z)$ será contínua na extremidade t se $\Phi(z)$ tender a um limite definido quando z tender a t através de qualquer caminho que não toque L . Tal limite será chamado $\Phi^\pm(t)$. Portanto, no caso de extremos nenhuma distinção será feita entre os limites à direita ou esquerda e a função será dita contínua no extremo.

Uma função $\Phi(z)$ contínua em alguma vizinhança de uma curva seccionalmente suave L e contínua sobre L à esquerda e direita, incluindo os extremos, é dita ser *seccionalmente contínua* na vizinhança de L , inclusive em seus extremos. Caso tal continuidade não se estenda aos extremos ela será chamada de curva de descontinuidade da função seccionalmente contínua $\Phi(z)$.

H.3 Funções seccionalmente holomórficas

Seja $\Phi(z)$ uma função holomórfica em toda região finita que não contenha pontos de uma curva seccionalmente suave L . Seja, ainda, $\Phi(z)$ contínua sobre L à esquerda e à direita, com a possível exceção dos extremos, mas satisfazendo nos extremos a condição

$$|\Phi(z)| = C|z - c|^{-\alpha} \quad (2)$$

onde c é um extremo e C é uma constante real positiva; α é real e $0 < \alpha < 1$. Neste caso $\Phi(z)$ é denominada *função seccionalmente holomórfica* com curva de descontinuidade L , sendo L em geral chamada de fronteira.

Se, na vizinhança de um ponto no infinito, a expansão em série de potências

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (3)$$

de $\Phi(z)$ contem somente um número finito de potências positivas de z , então $\Phi(z)$ é dita ser de grau finito no infinito. Se a_k for o último coeficiente não-nulo desta expansão, o grau de $\Phi(z)$ no infinito é dito ser igual a k . Quando k é positivo, tal ponto é um polo de ordem k de

$\Phi(z)$; se negativo, é um zero de ordem k . Se k for nulo, ou seja, $\Phi(z)$ tender a um limite definido a_0 não-nulo quando $|z| \rightarrow \infty$, $\Phi(z)$ terá um polo ou zero de ordem nula no infinito. Finalmente, quando $k \leq 0$, $\Phi(z)$ será dita seccionalmente holomórfica incluindo o ponto no infinito.

As funções holomórficas (ou analíticas regulares) possuem propriedades bem conhecidas. Sejam S_1 e S_2 duas regiões do plano, limitadas por curvas suaves, tendo no interior pontos comuns posicionados ao longo de uma curva seccionalmente suave L , que é parte de suas fronteiras, sendo que os extremos de L não estão nela incluídos. Sejam $\Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$ funções holomórficas respectivamente de S_1 e S_2 contínuas em L e com valores de contorno iguais ao longo de L , tal que

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$$

onde t é um ponto de L , e $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ os valores de contorno das funções $\Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$.

Então a função $\Phi(z)$ definida por

$$\begin{cases} \Phi(z) = \Phi_1(z) & (z \in S_1) \\ \Phi(z) = \Phi_2(z) & (z \in S_2) \\ \Phi(z) = \Phi(t) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) & (z \in L) \end{cases} \quad (4)$$

é holomórfica em $S_1 + S_2 + L$.

Tal resultado pode ser modificado mantendo-se as mesmas condições e supondo-se $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ contínuas sobre L a partir de S_1 e S_2 , respectivamente, exceto num número finito de pontos c_1, c_2, \dots, c_m em L , nas vizinhanças dos quais

$$|\Phi_1(z)| \leq \frac{\text{const}}{|z-c_n|^\alpha}, \quad |\Phi_2(z)| \leq \frac{\text{const}}{|z-c_n|^\alpha} \quad (\alpha < 1, n = 1, 2, \dots, m)$$

Então a função $\Phi(z)$ definida é holomórfica em $S_1 + S_2 + L$ desde que possua valores convenientes nos pontos c_1, c_2, \dots, c_m .

Portanto, se $\Phi(z)$ for uma função seccionalmente holomórfica com respeito a uma curva de descontinuidade L , e em qualquer segmento L' de L $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, então este segmento poderá ser eliminado e a função $\Phi(z)$ terá uma curva de descontinuidade $L - L'$.

H.4 Integrais de Cauchy

A partir das definições anteriores pode-se explicitar algumas propriedades importantes da *integral de Cauchy* definida por

$$\boxed{\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z}}, \quad (5)$$

na qual a integração se dá ao longo de uma curva seccionalmente suave ou contorno L , dentro de uma região finita do plano. Se a *função densidade* $\phi(t)$ satisfizer à condição $H(\mu)$ em L , então a função $\Phi(z)$ é uma função seccionalmente holomórfica, que se anula no infinito, com uma curva de descontinuidade L . Além disso,

$$\boxed{\begin{cases} \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \\ \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-t_0} \end{cases}} \quad (6)$$

onde t_0 é um ponto sobre L que não coincide com os extremos onde $\phi(t_0) = 0$. Se ocorrer tal coincidência então $\Phi^+(t_0) = \Phi^-(t_0) = \Phi(t_0)$. Tais expressões são conhecidas como *fórmulas de Plemelj*.

Ainda, se

$$\boxed{\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-t_0}}, \quad (7)$$

e se $\phi(t)$ satisfizer a condição $H(\mu)$ em L então $\Phi^+(t_0)$, $\Phi^-(t_0)$ e $\Phi(t_0)$ também à satisfarão em todos os pontos, exceto em vizinhanças arbitrariamente pequenas daqueles extremos nas

quais $\phi(t) \neq 0$, a condição $H(\mu)$ para $\mu < 1$ e a condição $H(\mu - \varepsilon)$ para $\mu = 1$ onde ε é uma quantidade positiva arbitrariamente pequena.

As integrais que ocorrem em (6) e (7) são conhecidas como *o valor principal das integrais de Cauchy*.

Quando a curva L , caminho de integração, se estende para o infinito, a satisfação das condições dadas não é suficiente. Quando, por exemplo, L é uma linha reta infinita assume-se ainda que $\phi(t)$ satisfaz a condição $H(\mu)$ em L e que possui valor finito quando $t \rightarrow \pm\infty$. Supõe-se também que, para $|t|$ suficientemente grande,

$$|\phi(t) - \phi(\infty)| < \frac{\text{const}}{|t|^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

que é a condição H para um ponto no infinito. Portanto, a integral de Cauchy pode ser considerada como definida se for entendida como o limite, tendendo a infinito, da integral calculada sobre o segmento ab , onde a e b são pontos, em ambos os lados e a igual distância de algum ponto determinado. As fórmulas de Plemelj ainda mantêm-se verdadeiras, mas a integral de Cauchy não tende a zero quando $|z| \rightarrow \infty$. De fato

$$\Phi(z) \rightarrow \pm \frac{1}{2} \phi(\infty) \quad \text{para } |z| \rightarrow \infty, \quad ,$$

sendo positiva em S^+ e negativa em S^- . Se $\phi(\infty) = 0 \Rightarrow \Phi(z) \rightarrow 0$ para $|z| \rightarrow \infty$.

É conveniente definir-se um limite único para o módulo da derivada da integral de Cauchy nas proximidades do contorno. Como antes, seja L uma curva seccionalmente suave e $\phi(t)$ satisfazendo a condição $H(\mu)$ sobre L . Considere-se a derivada da integral de Cauchy

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{(t-z)^2} \quad (8)$$

Seja t_0 um ponto arbitrário de L tal que sua distância ao extremo mais próximo de L , desde que esta contenha arcos, não seja inferior a um número arbitrário fixado R . Seja $R_0 = R_0(\alpha)$ o raio padrão para L , correspondente a um ângulo agudo arbitrariamente fixado α ,

e ρ uma constante positiva tal que $\rho < R_0$, $\rho < R$. Se L consistir somente de contornos, a condição $\rho < R$ poderá ser omitida.

Se a distância entre os pontos z e R não ultrapassar ρ , tal que $|z - t_0| \leq \rho$, e se o ângulo não-obtuso entre estes pontos e a tangente à L em t_0 não forem menores que uma quantidade definida $\beta > \alpha$, então

$$\begin{cases} |\Phi'(z)| < C|z - t_0|^{\mu-1} & (\mu < 1) \\ |\Phi'(z)| < C|\log(z - t_0)| & (\mu = 1) \end{cases}, \quad (9)$$

onde C é uma constante.

Se L contiver arcos, e se não se mantiver a condição de que t_0 se localiza a uma distância finita em relação às extremidades, o que implica na omissão da condição $\rho < R$, então, mantidas as demais condições na posição de z ,

$$|\Phi'(z)| = \frac{C}{|z - t_0|}, \quad (10)$$

onde C é uma constante.

Os resultados acima são aplicáveis à funções densidade que apresentem descontinuidade em um número finito de pontos de L , não necessariamente coincidentes com os extremos, desde que os limites à esquerda e à direita da função nestes pontos sejam definidos.

H.5 Funções seccionalmente holomórficas com descontinuidades nos contornos

Seja S^+ uma região conectada limitada por um ou mais contornos suaves que não se interceptam L_0, L_1, \dots, L onde L_0 contem os demais (figura H.1) e pode ser ausente (ou seja, pode ser infinito).

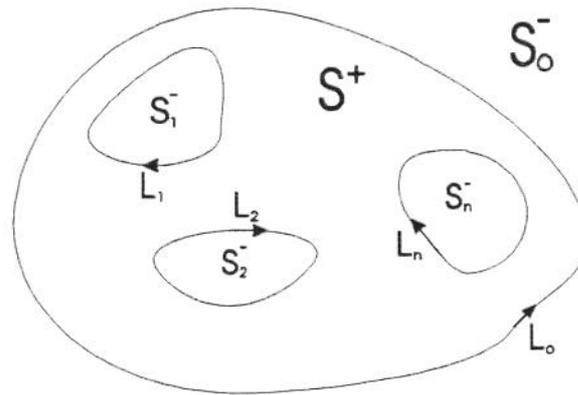


Fig. H.1 Região conectada limitada por contornos suaves que não se interceptam.

A união dos contornos L_0, L_1, \dots, L_n é chamada L e S^+ é o complemento de $S^+ + L$. Logo, S^- consiste das regiões finitas $S_1^-, S_2^-, \dots, S_n^-$ limitadas por L_1, L_2, \dots, L_n e, se L_0 existir, da região infinita S_0^- limitada por L_0 . Se $\phi(t)$ satisfaz a condição $H(\mu)$ em L , deseja-se encontrar a função $\Phi(z)$, seccionalmente holomórfica em todo o plano e zero no infinito, satisfazendo à seguinte condição de contorno

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \quad \text{em } L. \quad (11)$$

O problema é imediatamente resolvido através da fórmula (6) de Plemelj. Assim,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z} \quad (12)$$

satisfaz todas as condições requeridas. Tal solução é única porque a diferença $\Psi(z)$ de duas soluções satisfaz a condição $\Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0) = 0$. Logo $\Psi(z)$ é holomórfica em todo o plano e, como ela se anula no infinito, $\Psi(z) = 0$.

Tal resultado pode ser generalizado encontrando-se uma função seccionalmente holomórfica em todo o plano, exceto possivelmente no infinito, que tenha um grau k finito e não-negativo lá, satisfazendo a condição de contorno em L . A solução geral é

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z} + P_k(z), \quad (13)$$

onde $P_k(z)$ é um polinômio qualquer de grau não-superior a k . Esta solução também é única.

H.6 Funções de classe H e H^*

Seja L a união dos arcos suaves L_1, L_2, \dots, L_n com extremos a_r, b_r , de forma que a direção positiva de L seja tomada de a_r para b_r , ou c_r (ou simplesmente c) quando tal definição não tenha importância. O plano cortado por $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ é chamado de S , e a fronteira L não pertence a S .

Diz-se que a função $\phi(t)$ definida em L pertence à classe H se ela satisfizer a condição H para qualquer $\mu > 0$ em todos os arcos fechados L_μ de L , incluindo-se os extremos. Se $\phi(t)$ satisfizer a condição $H(\mu)$ somente na vizinhança de algum extremo c de L , diz-se que ela pertence à classe H na vizinhança de c .

Quando $\phi(t)$ satisfaz à condição $H(\mu)$ em toda a parte fechada de L que não contenha extremos, e, se próxima a um extremo c ela tiver a forma

$$\phi(t) = \frac{\phi^*(t)}{(t-c)^\alpha} \quad (0 \leq \alpha < 1), \quad (14)$$

onde $\phi^*(t)$ pertence à classe H , então diz-se que $\phi(t)$ pertence à classe H^* em L . Se tal condição for válida somente na vizinhança de um extremo c , ela é dita pertencer à classe H^* da vizinhança de c .

H.7 Funções seccionalmente holomórficas para descontinuidades em arcos

Se $\phi(t)$ for uma função da classe H^* em L , então

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z} + P_k(z) \quad (15)$$

será uma função seccionalmente holomórfica, exceto possivelmente no infinito, onde terá um grau finito $k \geq -1$, satisfazendo à condição de contorno

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \quad \text{em } L, \quad (16)$$

onde $P_k(z)$ é um polinômio arbitrário de grau não-superior a k , sendo que $P_{-1}(z) = 0$. A função seccionalmente holomórfica $\Phi(z)$ satisfazendo tal condição é dada unicamente por (15) e tal unicidade pode ser mostrada de forma semelhante à utilizada anteriormente.

Em particular, para $k = -1$, que corresponde ao pressuposto que $\Phi(z)$ se anula no infinito, o problema tem a solução única

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z} \quad (17)$$

H.8 Problema de Hilbert para arcos

Serão examinados dois casos especiais de problema de Hilbert para arcos.

Problema 1. Achar a função seccionalmente holomórfica $\Phi(z)$ de grau k no infinito satisfazendo a condição de contorno

$$\Phi^+(t_0) + \kappa \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \quad (18)$$

em uma curva seccionalmente suave L que consiste de uma união de arcos, onde κ é uma constante positiva e $\phi(t)$ satisfaz à condição $H(\mu)$, sendo conhecida em toda a curva.

A função holomórfica $\Phi(z)$, conforme mostrado anteriormente, deve satisfazer à condição (2) podendo, portanto, tornar-se infinita em c com grau inferior a 1. Porém, pode-se obter soluções em que $\Phi(z)$ se mantém finita em m extremos particulares de L .

Denomina-se os extremos a_r, b_r dos arcos $L_r (r = 1, 2, \dots, n)$ de $c_s (s = 1, 2, \dots, 2n)$ qualquer que seja a ordem, e define-se

$$R(z) = \frac{\prod_{r=1}^m (z-c_r)}{\prod_{r=m+1}^{2n} (z-c_r)}, \quad R_0(z) = \prod_{r=1}^n \left(\frac{z-a_r}{z-b_r} \right) \quad (19)$$

Se m for 0 ou $2n$, o numerador e denominador de $R(z)$ são substituídos por 1. A função $\sqrt{R(z)}$ se refere ao ramo que é holomórfico em S , isto é, no plano cortado por L que, quando próximo a infinito, pode ser expandido na série de potências

$$\sqrt{R(z)} = z^{m-n} + A_1 z^{m-n-1} + \dots \quad (20)$$

Os valores de contorno desta função, à esquerda e à direita, serão

$$[\sqrt{R(z)}]^+ = \sqrt{R(t)} \quad (21)$$

$$\text{tal que } [\sqrt{R(z)}]^- = -\sqrt{R(t)}. \quad (22)$$

$$\text{Ainda, se considerarmos } \ln \kappa = 2\pi\gamma, \quad (23)$$

então $\{R_0(z)\}^i$ designa o ramo que é holomórfico no plano cortado por L , e se comporta de forma que $\{R_0(z)\}^{i\gamma} \rightarrow$ quando $|z| \rightarrow \infty$. (24)

Os valores de contorno de $\{R_0(z)\}^i$ em L serão dados por

$$[\{R_0(t)\}^{i\gamma}]^+ = \{R_0(t)\}^i \quad (25)$$

$$\text{e portanto, } [\{R_0(t)\}^{i\gamma}]^- = \frac{\{R_0(t)\}^i}{\kappa} \quad (26)$$

$$\text{Então, se } X_m = \{R_0(z)\}^{i\gamma} \sqrt{\{R(z)\}}, \quad (27)$$

conclui-se que $X_m(z)$ é holomórfica no plano cortado por L , e, no infinito,

$$X_m(z) = O(z^{m-n}). \quad (28)$$

$$\text{Ainda, } X_m^+(t) = \{R_0(t)\}^{i\gamma} \sqrt{R_0(t)}; \quad X_m^- = -\frac{X_m^+}{\kappa}, \quad (29)$$

e $X_m(z)$ é nula nos m extremos c_r ($r = 1, 2, \dots, m$), enquanto que nos $2n - m$ extremos c_s ($s = m + 1, \dots, 2n$) ela é infinito de ordem $1/2$.

Portanto a solução do problema 1 é aquela em que $\Phi(z)$ é finita nos m extremos c_r ($r = 1, 2, \dots, m$), mas pode ser infinita nos demais extremos com grau menor que 1. Considere-se a função $\frac{\Phi(z)}{X_m(z)}$ que é holomórfica no plano cortado por L , e que é finita de grau

$k + n - m$ no infinito. Como $\Phi(z)$ se mantém limitada próxima dos extremos c_1, \dots, c_m nos quais $X_m(z)$ se torna zero, então perto destes extremos

$$\left| \frac{\Phi(z)}{X_m(z)} \right| < \frac{\text{const}}{|z - c_r|^\alpha} \quad (\alpha < 1),$$

enquanto que nos demais extremos a função satisfaz uma condição semelhante, visto que $\Phi(z)$ pode ser infinita de graus inferiores a 1 e $X_m(z)$ é infinita de ordem $\frac{1}{2}$. Logo a função considerada é holomórfica no plano inteiro, de grau finito $k + n - m$ no infinito e, de (18) e (29), satisfazendo às condições de contorno,

$$\left[\frac{\Phi(t_0)}{X_m(t_0)} \right]^+ - \left[\frac{\Phi(t_0)}{X_m(t_0)} \right]^- = \frac{\phi(t_0)}{X_m^+(t_0)} \quad (30)$$

em L excluindo-se seus extremos. Conforme definido anteriormente, $\frac{\phi(t)}{X_m(t)}$ é uma função da classe H^* em L , portanto, de (16) a solução procurada é

$$\frac{\Phi(z)}{X_m(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{(t-z)X_m^+(t)} + P_{k+n-m}(z) \quad (k+n-m \geq -$$

$$\text{ou} \quad \Phi(z) = \frac{\{R_0(z)\}^{i\gamma} \sqrt{R_0(z)}}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(t) dt}{(t-z)\{R_0(z)\}^{i\gamma} \sqrt{R_0(z)}} + \{R_0(z)\}^{i\gamma} \sqrt{R_0(z)} P_{k+n-m}(z) \quad (31)$$

onde $P_{k+n-m}(z)$ é um polinômio arbitrário de grau não-superior a $k + n - m$ e $P_{-1}(z) = 0$. A solução é também válida para $k + n - m < 1$ se $P_{k+n-m}(z) = 0$ e $\phi(t)$ satisfizerem condições adicionais.

Problema 2. As funções $\Phi(z)$, $\phi(t)$ satisfazem as mesmas condições anteriores porém a condição de contorno é dada por

$$\Phi^+(t_0) - \exp\{2\pi i(\frac{1}{2} + \beta)\} \Phi^-(t_0) = \phi(t_0) \quad (0 \leq \beta < \frac{1}{2}) \quad (32)$$

em L . Também aqui se permitirá que $\Phi(z)$ seja infinita com grau menor que 1 em todos os extremos.

Para se resolver este problema toma-se

$$S(z) = \prod_{r=1}^n (z - a_r)^{\frac{1}{2} + \beta} (z - b_r)^{\frac{1}{2} - \beta} \quad (33)$$

onde $S(z)$ é holomórfica no plano cortado por L , e

$$S(z) \rightarrow z^n \text{ quando } |z| \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Como anteriormente, toma-se $S^+(t) = S(t)$ (35)

obtendo-se $S^-(t) = \exp\{2\pi i(\frac{1}{2} + \beta)\}S(t)$. (36)

Portanto, a condição de contorno (32) se torna

$$\Phi^+(t_0)S^+(t_0) - \Phi^-(t_0)S^-(t_0) = \phi(t_0)S(t_0) \quad (37)$$

e $\phi(t)S(t)$ satisfaz a condição de Hölder em L , e $\Phi(z)S(z)$ é holomórfica em todo o plano, exceto no infinito, onde tem grau $k + n$, e portanto

$$\Phi(z)S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{S(t)\phi(t)}{t-z} dt + Q_{k+n}(z),$$

onde $Q_{k+n}(z)$ é um polinômio arbitrário de grau não-superior a $k + n$. Ainda, se $k + n \geq -1$ e

$Q_{-1}(z) = 0$ tem-se

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i S(z)} \int_L \frac{S(t)\phi(t)}{t-z} dt + \frac{Q_{k+n}(z)}{S(z)} \quad (38)$$

Apêndice I - Mecânica de Fraturas

Este apêndice desenvolve a teoria básica necessária para a compreensão da Mecânica de Fraturas, que resulta da aplicação da Teoria das Variáveis Complexas à Teoria da Elasticidade, conforme proposto por MUSKHELISHVILI e complementado por SOKOLNIKOFF e GREEN & ZERNA. Esta última referência é a base deste apêndice, da qual é uma compilação resumida, sendo o mesmo dividido em quatro capítulos principais que abordam as teorias para deformações finitas, para deformações infinitesimais e para deformações planas, e sua aplicação à problemas planos para corpos isotrópicos, onde a Mecânica de Fraturas é examinada.

Ele é baseado nos conceitos expostos nos apêndices A e H, dos quais usa diversos resultados importantes, sendo os mesmos, portanto, básicos para sua compreensão e acompanhamento, e possui uma notação própria, definida em seu próprio corpo ou originada nos citados apêndices.

I. Teoria geral para deformações finitas

Este capítulo trata a Teoria Geral da Elasticidade para deslocamentos finitos usando a notação de tensores e vetores resumida no apêndice A. A partir da análise efetuada estabelece-se uma equação de estado genérica que é a base para o equacionamento do movimento tanto de líquidos quanto de sólidos.

1. Relações geométricas

Considere-se que todos os pontos de um corpo tri-dimensional contínuo, chamado corpo B_0 , esteja em repouso no tempo $t = t_0$ em relação a um sistema de coordenadas cartesianas de eixos x_i . O vetor posição de um ponto P_0 do corpo B_0 em relação à origem é

$$\mathbf{r} = x_k \delta_k, \quad (1)$$

onde δ_k são os vetores unitários que definem os eixos coordenados.

Suponha-se que o corpo B_0 é deformado de forma que no tempo t o ponto P_0 tenha se movido para P . O vetor posição de P com referência à mesma origem é expresso por

$$\mathbf{R} = y_k \delta_k. \quad (2)$$

O vetor posição de P com referência ao ponto P_0 , designado por \mathbf{v} , é chamado de *vetor deslocamento*, sendo dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = (y_k - x_k) \delta_k. \quad (3)$$

Assume-se que cada ponto P , no tempo t , relaciona-se com sua posição original P_0 no tempo $t = t_0$ através das equações

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, t), \quad (4,5)$$

onde x_i, y_i são biunívocas e continuamente diferenciáveis com respeito a cada uma de suas variáveis, exceto possivelmente em pontos singulares, curvas e superfícies. A condição necessária para deformação de um material real é

$$\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| > 0. \quad (6)$$

Para o sistema de coordenadas fixo considerado, os componentes de *velocidade* do ponto P , no tempo t , são w_i , onde

$$w_i = \dot{y}_i, \quad (7)$$

com o ponto designando a diferenciação com respeito ao tempo, mantendo-se os componentes x_j fixas. Logo

$$\dot{\mathbf{v}} = w_k \delta_k. \quad (8)$$

O vetor aceleração é dado por

$$\ddot{\mathbf{v}} = \dot{w}_k \delta_k, \quad (9)$$

podendo ser escrito como \dot{w}_k na seguinte forma alternativa

$$\dot{w}_k = \frac{\partial w_k}{\partial t} + w_m \frac{\partial w_k}{\partial y_m}, \quad (10)$$

desde que w_k seja considerado como uma função de y_m e t . O símbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ indica a derivação parcial com respeito a t mantendo-se y_m fixas.

A partir da condição (6) pode-se escrever o gradiente de deslocamento na forma

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = R_{ik} M_{kj}, \quad (11)$$

onde M_{kj} é um tensor simétrico positivo-definido, e R_{ik} é um tensor rotação, tal que

$$R_{ik} R_{jk} = R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij}, \quad |R_{ij}| = 1 \quad (12)$$

Define-se os tensores taxa de deformação, d_{ij} , e vorticidade, ω_{ij} , por

$$2d_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial y_j} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i}, \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial y_j} - \frac{\partial w_j}{\partial y_i}. \quad (13)$$

Pode-se transpor todas as definições dadas para um novo sistema de coordenadas

$$x_i = x_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (14)$$

$$\text{e } y_i = y_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t), \quad (15)$$

genérico e curvilíneo, que se movimenta continuamente com o corpo quando ele passa do estado B_0 no instante de tempo t_0 para o estado B no tempo t .

Definindo-se em B_0 um vetor contravariante $d\theta^i$, para a relação (14)

$$d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j, \quad (16)$$

De (4) e (16) tem-se, para um intervalo de tempo determinado,

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial y^i}{\partial \theta^j} d\theta^j, \quad d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial y^j} dy^j, \quad (17)$$

de forma que $d\theta^i$ se mantém um vetor contravariante sob qualquer transformação, inclusive transformações de coordenadas no estado B .

Usando-se (14) e (15), os vetores posição (1) e (2) dos pontos P_0 e P podem ser rescritos nas formas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) \quad (18)$$

e o vetor deslocamento (3) se torna

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t). \quad (19)$$

Os vetores de base $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$, e os tensores métricos g_{ij}, g^{ij} podem ser definidos para o sistema curvilíneo θ_i no corpo B_0 , tal que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{r}_{,i} \\ \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j &= \delta_j^i \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^r}{\partial \theta^j} \\ g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^r} \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Da mesma forma, os vetores de base $\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$, e os tensores métricos G_{ij}, G^i , podem ser definidos para o sistema curvilíneo do corpo B no tempo t

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \mathbf{R}_{,i} \\ \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j &= \delta_j^i \\ G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \frac{\partial y^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial y^r}{\partial \theta^j} \\ G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j = \frac{\partial \theta^i}{\partial y^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial y^r} \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Define-se o tensor simétrico γ_{ij} , chamado *tensor deformação*, por

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}), \quad (22)$$

que pode ser interpretado como o tensor que mede a diferença dos quadrados dos elementos de linha do ponto θ_i nos corpos B_0 e B , onde os elementos de linha ds_0 e ds , correspondentes a \mathbf{r} e \mathbf{R} , são dados por

$$ds_0^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j, \quad ds^2 = G_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (23)$$

e

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\gamma_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (24)$$

Se a deformação entre os corpos B_0 e B for rígida então $\gamma_{ij} = 0$

O vetor deformação pode ser expresso em termos do vetor deslocamento e vetores de base a partir de (3), (20), (21) e (22)

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{R}_{,i} = \mathbf{r}_{,i} + \mathbf{v}_{,i} = \mathbf{g}_i + \mathbf{v}_{,i} \quad (25)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{v}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{v}_{,i} + \mathbf{v}_{,i} \cdot \mathbf{v}_{,j}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{v}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{v}_{,i} + \mathbf{v}_{,i} \cdot \mathbf{v}_{,j}) . \quad (26)$$

O vetor deslocamento pode ser expresso em termos dos vetores de base de B_0 e B

$$\mathbf{v} = v_m \mathbf{g}^m, \quad \mathbf{v}_{,i} = v_{m|i} \mathbf{g}^m, \quad (27)$$

ou

$$\mathbf{v} = V_m \mathbf{G}^m, \quad \mathbf{v}_{,i} = V_{m||i} \mathbf{G}^m, \quad (28)$$

onde a barra simples indica a derivação covariante com respeito a B_0 e a barra dupla a derivação covariante com respeito a B . Tais derivadas são definidas, com o auxílio dos símbolos de Christoffel, por

$$v_{m|i} = v_{m,i} - \left\{ \begin{matrix} r \\ m \ i \end{matrix} \right\}_0 v_r \quad (29)$$

e

$$V_{m||i} = V_{m,i} - \left\{ \begin{matrix} r \\ m \ i \end{matrix} \right\} V_r \quad (30)$$

Introduzindo (27) e (28) em (26), e usando (20) e (21), o tensor deformação se torna

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i|j} + v_{j|i} + v_{|i}^r v_{r|j}) = \frac{1}{2}(V_{i||j} + V_{j||i} + v_{||i}^r v_{r||j}) . \quad (31)$$

Tensores de deformação mistos podem ser formados de acordo com os tensores métricos escolhidos. Para os objetivos deste estudo define-se o tensor misto de deformação

$$\gamma_j^i = g^{ik} \gamma_{kj} = \frac{1}{2}(g^{ik} G_{kj} - \delta_j^i) \quad (32)$$

Pode-se formar três invariantes a partir de um tensor simétrico de segunda ordem. Em particular, os invariantes de deformação podem ser obtidos do tensor misto de deformação, e são os coeficientes de potência de λ na expansão do determinante

$$|\lambda\delta_s^r + \delta_s^r + 2\gamma_s^r| = |\lambda\delta_s^r + g^{rm}G_{ms}| = \frac{G}{g}|\lambda G^{rm}g_{ms} + \delta_s^r| = \lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_1. \quad (33)$$

onde

$$\begin{cases} I_1 = 3 + 2\gamma_r^r = g^{rs}G_{rs} \\ I_2 = 3 + 4\gamma_r^s + 2(\gamma_r^r\gamma_s^s - \gamma_s^r\gamma_r^s) = G^{rs}g_{rs}I_3, \\ I_3 = |\delta_s^r + 2\gamma_s^r| = |g^{rm}G_{ms}| = \frac{G}{g} \end{cases}, \quad (34)$$

e

$$G = |G_{ij}|; \quad g = |g_{ij}|. \quad (35)$$

Se o contínuo for incompressível, os elementos volumétricos serão preservados durante a deformação tal que $G = g$ e

$$I_3 = 1. \quad (36)$$

2. Tensão. Equações de movimento

Assume-se que o corpo B_0 é movido para sua posição deformada B pela ação de forças de corpo \mathbf{F} por unidade de massa e superfície e forças de contato \mathbf{P} por unidade de área do contorno de B . Assume-se, ainda, que \mathbf{F} e \mathbf{P} variam com o tempo e são, respectivamente, funções contínua e seccionalmente contínua com respeito às suas variáveis espaciais.

Considere-se um elemento ΔS da superfície situada do corpo deformado B contendo em sua área um ponto θ . Seja \mathbf{n} um vetor unitário normal a ΔS em θ direcionado de um lado de ΔS que será considerado negativo para outro, positivo. Suponha-se a porção do corpo situada no lado positivo exercendo uma força na outra porção através desta superfície, e que esta força é estaticamente equivalente à força $\Delta \mathbf{T}$ em θ acoplada à uma conjugada $\Delta \mathbf{G}$. Imagine-se, agora, a área ΔS tendendo a zero, mantendo o ponto θ sempre em seu interior. Neste contexto, assume-se que o vetor $\frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta S}$ tende a um limite definido, e o vetor $\frac{\Delta \mathbf{G}}{\Delta S}$ tende a zero. O vetor

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta S} \quad (37)$$

é chamado *vetor tensão* e pertence a um elemento cuja normal unitária é \mathbf{n} e representa a força, por unidade de área da superfície do corpo deformado, exercida pelo material localizado no lado positivo da área sobre o material do outro lado. Assume-se que \mathbf{t} satisfaz as condições de continuidade e diferenciabilidade suficientes para validar as análises posteriores.

Assume-se que a força exercida pelo lado negativo da superfície sobre o lado positivo é $-\mathbf{t}$ por unidade de área. Quando dois corpos estão em contato, assume-se que a natureza das ações entre eles, sobre a superfície em contato, tem a mesma natureza das ações entre duas porções do mesmo corpo.

A aceleração de cada ponto do corpo B é representada pelo vetor \mathbf{f} , assumido contínuo. Considere-se um volume arbitrário Ω do corpo B limitado por uma superfície fechada S . Postula-se a equação de movimento de Cauchy na forma

$$\int_S \mathbf{t} ds + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{F} - \mathbf{f}) d\Omega = 0, \quad (38)$$

para o volume Ω , e a equação de momentos de Cauchy (com respeito aos eixos fixos)

$$\int_S \mathbf{R} \times \mathbf{t} ds + \int_{\Omega} \rho \mathbf{R} \times (\mathbf{F} - \mathbf{f}) d\Omega = 0, \quad (39)$$

onde ρ é a densidade do corpo B .

Em um ponto qualquer P do corpo deformado B constrói-se um paralelepípedo limitado pelas faces $\theta_i = cte.$, $\theta_i + d\theta_i = cte.$, e um tetraedro cujos vértices são formados pelas curvas coordenadas PP_i de comprimentos ds_i , e as curvas P_1P_2, P_2P_3, P_3P (ver figura) que são definidas, em seus limites, pelos três vetores

$$ds_j - ds_i = \mathbf{G}_j d\theta^j - \mathbf{G}_i d\theta^i \quad (i, j \text{ não somados, } i \neq j) \quad (40)$$

As superfícies $\theta_i = \text{cte.}$ do tetraedro têm área $\frac{1}{2}dS_i$ e podem ser representadas vetorialmente por $\frac{\mathbf{G}^i dS_i}{2\sqrt{G^{ii}}}$. (41)

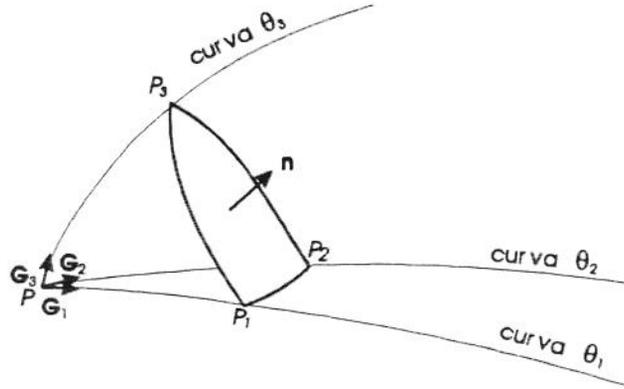


Fig. I.1 Tetraedro curvilíneo infinitesimal

Também, a área de $P_1P_2P_3$ é designada por $\frac{1}{2}dS$ e é representada vetorialmente por

$$\frac{1}{2}\mathbf{n} dS, \tag{42}$$

onde \mathbf{n} é a normal unitária da superfície. Portanto, como a área $P_1P_2P_3$ é vetorialmente equivalente à superfícies $\theta_i = \text{cte.}$ do tetraedro, tem-se

$$\mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{G}^i dS_i}{2\sqrt{G^{ii}}}, \tag{43}$$

tal que se n_i forem os componentes contravariantes de \mathbf{n} com respeito à base vetorial \mathbf{G}_i ,

$$n_i \sqrt{G^{ii}} dS = dS_i, \tag{44}$$

Em P do corpo deformado B um vetor tensão \mathbf{t} , conforme definido, é associado a elementos de área normais ao vetor unitário \mathbf{n} . Se as coordenadas θ_i forem transformadas em um novo sistema de coordenadas $\bar{\theta}_i$, e o vetor unitário \mathbf{n} mantém-se inalterado, então o vetor tensão \mathbf{t} é um invariante. Vetores tensão $-\mathbf{t}_i$ são também associados a elementos de área em P nas superfícies $\theta_i = \text{cte.}$ Eles não serão invariantes sob uma mudança de coordenadas de θ_i para $\bar{\theta}_j$ se, após tal transformação forem considerados vetores tensão $-\bar{\mathbf{t}}_j$ associados aos elementos de área em P nas superfícies $\bar{\theta}_j = \text{cte.}$ O uso do termo "vetor" para estas tensões se

justifica, contudo, desde que cada $-t_i$ associado aos elementos de área em P nas superfícies *fixas* coincidentes com $\theta_i = cte.$ seja um invariante.

Pela aplicação da equação de movimento (38) ao tetraedro infinitesimal PP_1P_2P tem-se, no limite, mantendo-se a direção \mathbf{n} fixada,

$$\mathbf{t} dS = \mathbf{t}_i dS_i . \quad (45)$$

As forças volumétricas e acelerações de massa atuantes no tetraedro não são consideradas nesta equação por possuírem ordem de grandeza muito inferior às das forças superficiais.

De (44) e (45) encontra-se

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii}} \quad (46)$$

Como, sob uma transformação genérica de coordenadas, \mathbf{t} é um invariante e n_i é um vetor covariante, segue de (46) que $\mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii}}$ é transformado de acordo com um tipo de transformação contravariante. Deve-se portanto escrever

$$\mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii}} = \tau^{ij} \mathbf{G}_j = \tau_j^i \mathbf{G}^j, \quad (47)$$

onde τ^{ij}, τ são os tensores contravariante e misto associados de um tensor de segunda ordem chamado *tensor tensão*. Posteriormente se provará que o tensor tensão τ^{ij} é simétrico, o que permite escrever o tensor misto na forma τ_j^i ao invés de τ_j^i ou τ_j^i

O vetor tensão \mathbf{t}_i exercido pelo corpo na região $\theta_i > 0$ sobre o corpo na região $\theta_i < 0$, através da superfície $\theta_i = cte.$, tem componentes positivos quando τ^{ij} é positivo.

O tensor tensão covariante pode ser definido pela equação

$$\tau_{ij} = G_{ir} \tau_j^r . \quad (48)$$

Através de (47) verifica-se que os tensores contravariante e misto de tensão relacionam-se através do vetor $\mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii}}$. O tensor tensão covariante não pode ser relacionado a este vetor de uma forma simples, razão pela qual é considerado de pouca importância.

De (46) e (47) obtêm-se

$$\mathbf{t} = \frac{n_i \mathbf{T}_i}{\sqrt{G}} = \tau^{ij} n_i \mathbf{G}_j = \tau_j^i n_i \mathbf{G}^j, \quad (49)$$

onde $\mathbf{T}_i = \mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii} G} = \sqrt{G} \tau^{ij} \mathbf{G}_j = \sqrt{G} \tau_j^i \mathbf{G}^j$ (50)

e é introduzido para utilização posterior. A grandeza \mathbf{T}_i tem uma interpretação simples. Um elemento de área no ponto θ_r do corpo B na superfície θ_i é dado por

$$\sqrt{G^{ii} G} d\theta^j d\theta^k \quad (i \text{ não somado}, i \neq j \neq k)$$

e a força através deste elemento é dada por

$$\mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii} G} d\theta^j d\theta^k = \mathbf{T}_i d\theta^j d\theta^k \quad (51)$$

Os três vetores tensão \mathbf{t}_i em (47) podem ser colocados na forma

$$\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_{(ij)} \mathbf{G}_j}{\sqrt{G_{jj}}} \quad (52)$$

onde $\frac{\mathbf{G}_j}{\sqrt{G_{jj}}}$ são vetores unitários ao longo das curvas coordenadas e

$$\sigma_{(ij)} = \frac{\mathbf{G}_j}{\sqrt{G_{jj}}} \tau^{ij} \quad (53)$$

Os *componentes físicos* do tensor tensão com referência aos eixos oblíquos ao longo de \mathbf{G}_i são, portanto, $\sigma_{(ij)}$. As funções $\sigma_{(ij)}$ não são, certamente, os componentes de um tensor.

Com auxílio de (49) e de conceitos de análise tensorial a equação (38) se torna

$$\int_{\tau} \{ \mathbf{T}_{i,i} + \rho(\mathbf{F} - \mathbf{f}) \sqrt{G} \} \frac{d\tau}{G} = 0, \quad (54)$$

para todo volume arbitrário Ω em B . Logo, como o integrando é uma função contínua de θ_i ,

$$\boxed{\mathbf{T}_{i,i} + \rho \mathbf{F} \sqrt{G} = \rho \mathbf{f} \sqrt{G}.} \quad (55)$$

Ainda, usando-se (49) e (55) a equação (39) se reduz a

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}_i \times \mathbf{T}_i \frac{d\Omega}{G} = 0,$$

para todo volume arbitrário Ω em B . Se o integrando for uma função contínua de θ_i ,

$$\mathbf{G}_i \times \mathbf{T}_i = 0 . \quad (56)$$

Segue de (50) e (56) que

$$\tau^{ij} = \tau^{ji} \quad (57)$$

Pode-se expressar as equações de movimento (55) em diversas formas alternativas.

As mais úteis são dadas a seguir. Se

$$\mathbf{F} = F^i \mathbf{G}_i = F_i \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{f} = f^i \mathbf{G}_i = f_i \mathbf{G}^i, \quad (58)$$

então, de (50) e (55) tem-se

$$\tau^{ij} \parallel_i + \rho F^j = \rho f^j, \quad \tau_j^i \parallel_i + \rho F_j = \rho f_j, \quad (59)$$

onde a linha dupla indica a derivada covariante com respeito ao corpo deformado B .

As condições de contorno na superfície do corpo, na qual as forças atuam requerem que

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}. \quad (60)$$

Se as forças de superfície \mathbf{P} forem expressa em termos de seus componentes,

$$\mathbf{P} = P^j \mathbf{G}_j = P_j \mathbf{G}^j, \quad (61)$$

usando-se (49), as condições de contorno podem ser expressas nas formas alternativas

$$\tau^{ij} n_i = P^j \quad (62)$$

ou $\tau_j^i n_i = P_j \quad (63)$

3. Elasticidade

Considere-se um volume arbitrário Ω do corpo deformado B limitado por uma superfície fechada S . A taxa de trabalho das forças superficiais sobre S somada a taxa de trabalho das forças de corpo através de Ω subtraída da taxa de aumento da energia cinética da massa em S é

$$R = \int_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{v}} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\Omega . \quad (64)$$

Usando (49) esta se torna

$$R = \int_S (\mathbf{T}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}) \frac{n_i dS}{\sqrt{G}} + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{F} - \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{v}} d\Omega .$$

Transformando a integral de superfície em integral de volume e usando (55) e (50) tem-se

$$R = \int_{\Omega} \mathbf{T}_i \cdot \dot{\mathbf{v}} \frac{d\Omega}{\sqrt{G}} \quad \text{ou} \quad R = \int_{\Omega} \tau^{ij} \mathbf{G}_j \cdot \dot{\mathbf{v}}_{,i} d\Omega , \quad (65)$$

Como τ^{ij} é simétrico

$$R = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau^{ij} (\mathbf{G}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \dot{\mathbf{v}}_{,i}) d\Omega . \quad (66)$$

Da Análise Tensorial tem-se

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{G}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \dot{\mathbf{v}}_{,i}) , \quad (67)$$

portanto

$$R = \int_{\Omega} \tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} d\Omega \quad (68)$$

Com referência ao corpo B , onde

$$\tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} = \rho \dot{E} , \quad (69)$$

$$\text{tem-se} \quad R = \int_{\Omega} \rho \dot{E} d\Omega , \quad (70)$$

onde τ^{ij} e $\dot{\gamma}_{ij}$ são funções biunívocas que dependem somente do estado de deformação de B no tempo t , do tensor métrico inicial g_{ij} , e de tensores que representam as propriedades físicas do corpo B_0 . Portanto pode-se escrever

$$E = E(\gamma_{ij}) , \quad (71)$$

$$\text{e} \quad \dot{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ji}} \right) \dot{\gamma}_{ij} . \quad (72)$$

Quando estas condições são satisfeitas, o corpo B_0 é dito *elástico*. Os valores de $\dot{\gamma}_{ij}$ são arbitrários, sujeitos a $\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ji}$, o que resulta em

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (73)$$

A derivação com respeito a γ_{ij} nas duas expressões acima deve ser efetuada mantendo-se constantes os demais componentes do tensor deformação, inclusive γ_{ji} se $i \neq j$.

A função E é chamada *potencial elástico* do corpo (por unidade de massa). Pode-se mostrar que E existe em, no mínimo, dois casos físicos: quando as mudanças que ocorrem no corpo são reversíveis e isotérmicas, ou reversíveis e isoentrópicas. Nestes dois casos E é representada por duas diferentes funções, que cobrem diversos casos práticos importantes.

A expressão (73) pode ser convenientemente expressada em termos de um potencial elástico W medido por unidade de volume do corpo não-deformado B_0 . Como os elementos de massa são conservados sob deformação

$$\rho_0 \sqrt{g} = \rho \sqrt{G}, \quad (74)$$

onde ρ_0 é a densidade de B_0 . Portanto

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{I_3}} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right), \quad (75)$$

onde $W = \rho_0 E$ e $W = W(\gamma_{ij})$. (76)

A relação entre tensão e deformação desenvolvida é genérica. A partir desse ponto serão considerados corpos com densidade constante quando em estado de repouso, e que são homogêneos e isotrópicos. Um corpo é dito *elasticamente isotrópico*, ou simplesmente isotrópico, se o potencial elástico W depender somente dos três invariantes I_1, I_2, I_3 e de funções escalares das coordenadas θ_i . Quando estas funções escalares são constantes o corpo é dito *elasticamente homogêneo*. Portanto, se o corpo for homogêneo e isotrópico

$$W = W(I_1, I_2, I_3). \quad (77)$$

De (73) e (74) obtém-se o tensor tensão na forma

$$2\tau^{ij} \sqrt{I_3} = \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right) =$$

$$= \frac{\partial W}{\partial I_1} \left(\frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ji}} \right) + \frac{\partial W}{\partial I_2} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ji}} \right) + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (78)$$

Utilizando-se (32) e (34) tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ji}} = 4g^{ij} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ji}} = 4(g^{ij}g^{rs} - g^{ir}g^{js})G_{rs} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ji}} = 4I_3 G^{ij} \end{array} \right. , \quad (79)$$

Portanto, (78) torna-se

$$\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + p G^{ij} \quad (80)$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \\ \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} \\ p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} \\ B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir}g^{js}G_{rs} = \varepsilon^{irm}\varepsilon^{jsn}g_{rs}\frac{G_{mn}}{g} \end{array} \right. \quad (81)$$

As três funções Φ , Ψ e p dependem somente de I_1, I_2, I_3 sendo, portanto, funções escalares invariantes.

Se, além de homogêneo e isotrópico, o corpo B_0 for também incompressível, o terceiro invariante de deformação será unitário, e somente se conhecerá o valor da função de energia de deformação W em termos de I_1 e I_2 . Portanto

$$I_3 = 1, \quad W = W(I_1, I_2). \quad (82)$$

As equações tensão-deformação (80) mantêm a mesma forma, se simplificando para

$$\Phi = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = 2\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad (83)$$

e p não pode ser avaliado a partir de (81) pois é o valor da derivada $\frac{\partial W}{\partial I_3}$ em $I_3 = 1$. A função

p é uma função escalar desconhecida que representa a pressão hidrostática, e será encontrada a partir das equações de equilíbrio e condições de contorno.

Embora a forma particular de W não seja uma preocupação imediata, certos corpos incompressíveis que se comportam como borrachas ("rubber-like") apresentam um potencial elástico na forma

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (84)$$

Esta forma para W representa os primeiros dois termos de uma expansão de W em uma série dupla de potências de $I_1 - 3$, $I_2 - 3$ e a condição necessária e suficiente para que $W \geq 0$ é dada por $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$. Quando $C_2 = 0$ a expressão para W se reduz à forma usada por Rivlin para o chamado *sólido neo-hookeano*. A relação (75) é básica no desenvolvimento dos modelos integrais de Rivlin-Sawiers e K-BKZ, que podem ser estudados em TANNER e BIRD, ARMSTRONG & HASSAGER, e que, desta forma, mostra que as equações de estado, tanto a Lei de Newton quanto a Lei de Hooke e os demais modelos reológicos mais completos, possuem o mesmo embasamento teórico, diferenciando-se pelas hipóteses assumidas em suas formulações.

II. Teoria Clássica da Elasticidade

A teoria clássica (ou infinitesimal) da elasticidade encontra-se em desenvolvimento à muitos anos e tem sido utilizada para a solução de uma grande variedade de problemas. Aqui considera-se a teoria clássica como um caso limite da teoria geral do capítulo I e apresenta-se os resultados em notação tensorial para um sistema geral de coordenadas curvilíneas θ_i . As soluções das equações fundamentais para um corpo isotrópico são dadas em termos de funções harmônicas que podem ser usadas para resolver alguns problemas tri-dimensionais.

1. Deformação

A partir dos conceitos formulados no capítulo anterior, substitui-se o vetor deslocamento \mathbf{v} por $\epsilon \mathbf{v}$, onde ϵ é um parâmetro adimensional de pequena magnitude, e mantêm-se somente as primeiras potências de ϵ nas expressões para deformação, tensão, etc.. Em certas grandezas, como a densidade ρ , descarta-se todas as potências de ϵ . Então, sem perda de generalidade, substitui-se ϵ pela unidade no final do processo de aproximação. Isso equivale a assumir que os componentes de \mathbf{v} com respeito aos vetores de base \mathbf{g}_m , \mathbf{g}^n , e suas derivadas em relação a θ_i e o tempo t são suficientemente pequenos de forma a poder-se desprezar os produtos dessas grandezas quando comparadas às suas primeiras potências. Com essa aproximação o tensor covariante de deformação γ_{ij} torna-se

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{v}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{v}_{,i}) = \frac{1}{2}(v_i|_j + v_j|i). \quad (1)$$

De relações do capítulo anterior,

$$V_m = v_n \mathbf{g}^n \cdot (\mathbf{g}_m + \mathbf{v}_{,m}) = v_m + v_n v^n|_m|$$

$$e \quad V_m||_i| = v_n|_i| \mathbf{g}^n \cdot (\mathbf{g}_m + \mathbf{v}_{,m}) = v_m|_i| + v_n|_i| v^n|_m|,$$

e portanto, aproximadamente,

$$V_m = v_m, \quad V_m|_i = v_m|_i \quad (2)$$

Segue que a segunda forma para γ_{ij} (capítulo I) também se reduz a (1). Os componentes do tensor deformação tem pequenos valores, com as ordens de grandeza dos deslocamentos e suas derivadas.

O tensor misto de deformação é definido por

$$\gamma_j^i = g^{im} \gamma_{mj}, \quad (3)$$

com o que se define o tensor contravariante de deformação

$$\gamma^{ij} = g^{im} g^{jn} \gamma_{mn} = g^{im} \gamma_m^j \quad (4)$$

As deformações γ_{ij} conforme definidas em (1) não são funções independentes.

Eliminando-se o deslocamento v_i pode-se mostrar que

$$\boxed{\gamma_{im}|_{jk} + \gamma_{jk}|_{im} - \gamma_{ik}|_{jm} - \gamma_{jm}|_{ik} =} \quad (5)$$

que são conhecidas como as *equações da compatibilidade*.

A variação de um elemento de volume durante a deformação é caracterizada pela expressão $\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$ que é chamada dilatação cúbica ou simplesmente *dilatação*. A partir de relações do capítulo anterior chega-se a

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \gamma_i^i = g^{im} \gamma_{mi}$$

Com o auxílio de (3) e (1) tal expressão se reduz a

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \gamma_i^i = v^r|_r \quad (6)$$

Ainda, como $\rho \sqrt{G} = \rho_0 \sqrt{g}$ tem-se que, aproximadamente, $\rho = \rho_0$. (7)

2. Tensão. Equações de movimento

Mantendo-se somente os termos significativos, segue das equações fundamentais em termos dos potenciais elásticos que

$$\tau^{ij} = s^{ij} = \pi^{ij} = t^{ij} \quad (8)$$

e portanto todas as formas do tensor tensão são simétricas. Assumindo-se que τ^{ij} é $O(\varepsilon)$, as relações da teoria geral se tornam

$${}_0\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i, \quad {}_0\mathbf{t} = \mathbf{t}, \quad (9)$$

e todas as formas do tensor tensão são medidas por área unitária do corpo sem deformação. O prefixo ${}_0$ será omitido nas fórmulas subseqüentes e τ^{ij} será usado para todos os tensores tensão (no caso, simétricos), por unidade de área do corpo sem deformação. As equações para deformações finitas, na teoria infinitesimal, são dadas por

$$\mathbf{t}_i \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \mathbf{g}_j = \tau_j^i \mathbf{g}^j, \quad \tau^{ij} = \tau^{ji} \quad (10)$$

$$\mathbf{t} = \tau^{ij} n_i \mathbf{g}_j = \tau_j^i n_i \mathbf{g}^j = \frac{n_i \mathbf{T}_i}{\sqrt{g}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{T}_i = \sqrt{g g^{ii}} \mathbf{t}_i = \sqrt{g} \tau^{ij} \mathbf{g}_j = \sqrt{g} \tau_j^i \mathbf{g}^j \quad (12)$$

$$\mathbf{T}_{i,i} + \rho \mathbf{F} \sqrt{g} = \rho \mathbf{f} \sqrt{g}, \quad (13)$$

$$\tau^{ij}|_i + \rho F^j = \rho f^j, \quad (14)$$

$$\tau_j^i|_i + \rho F_j = \rho f_j, \quad (15)$$

onde $\mathbf{n} = n_i \mathbf{g}^i = n^i \mathbf{g}_i,$ (16)

$$\mathbf{F} = F_i \mathbf{g}^i = F^i \mathbf{g}_i, \quad (17)$$

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{g}^i = f^i \mathbf{g}_i, \quad (18)$$

e \mathbf{n} é uma normal unitária à superfície no corpo sem deformação. Os índices dos tensores são elevados ou rebaixados com o auxílio dos tensores métricos g_{ij}, g^{ij} . Em particular

$$\tau_j^i = g_{jr} \tau^{ir}, \quad \tau_{ij} = g_{ir} \tau_j^r = g_{ir} g_{js} \tau^{rs} \quad (19)$$

E rescreve-se as condições que devem ser satisfeitas na superfície de contorno do corpo sob a ação de forças superficiais conhecidas, numa forma apropriada para a teoria infinitesimal. Logo, omitindo-se o prefixo ${}_0$,

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}, \quad (20)$$

e, se $\mathbf{P} = P^i \mathbf{g}_i = P_i \mathbf{g}^i$, (21)

tem-se as formas alternativas

$$\tau^{ij} n_i = P^j, \quad \tau_j^i n_i = P_j \quad (22)$$

3. Relações tensão-deformação

Quando a deformação é infinitesimal a relação entre o tensor tensão τ^{ij} e o potencial elástico W se torna

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (23)$$

No capítulo I discutiu-se somente os corpos homogêneos e isotrópicos. Neste considera-se somente a teoria infinitesimal, mas pode-se incluir nesta discussão corpos que não são necessariamente isotrópicos. O potencial elástico W , consistentemente com as aproximações já feitas com a deformação infinitesimal, pode ser escrito como

$$W = \text{constante} + E^{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} E^{ijrs} \gamma_{ij} \gamma_{rs}, \quad (24)$$

onde E^{ij} é $O(\epsilon)$ e, sem perda de generalidade, pode-se assumir que E^{ij} e E^{ijr} possuem as propriedades de simetria

$$E^{ij} = E^{ji}, \quad E^{ijrs} = E^{jirs} = E^{ijsr} = E^{rsji} \quad (25)$$

As funções E^{ij} , E^{ijr} não dependem de γ_{ij} , e como W é invariante, elas devem ser tensores.

Se W for considerado nulo no estado inicial B_0 , onde $\gamma_{ij} = 0$, então a constante será nula.

Das três relações anteriores tem-se

$$\tau^{ij} = E^{ij} + E^{ijrs} \gamma_{rs} \quad (26)$$

Como o corpo no instante $t = 0$ está livre de tensões e deformações, E^{ij} é nulo e

$$\tau^{ij} = E^{ijrs} \gamma_{rs} \quad (27)$$

Tal expressão fornece uma relação geral entre tensão e deformação (infinitesimal), e os coeficientes E^{ijr} são chamados de coeficientes elásticos do corpo. Eles dependem do tensor métrico g_{ij} do corpo sem deformação B_0 e das propriedades físicas de B_0 . As funções E^{ijr} são os coeficientes de uma expansão do potencial elástico em termos dos componentes de deformação, e W existe, ao menos, para um corpo elástico que sofre uma troca de estado isotérmica ou adiabática. Em geral as constantes físicas correspondentes (e, portanto, os coeficientes elásticos) são diferentes nesses dois casos. Tais diferenças numéricas são constatadas em experimentos envolvendo os dois fenômenos físicos citados, porém, para vários propósitos, elas não são expressivas e podem ser ignoradas.

A partir desta expressão o potencial elástico W pode ser escrito como

$$W = \frac{1}{2} E^{ijrs} \gamma_{ij} \gamma_{rs} = \frac{1}{2} \tau^{ij} \gamma_{ij} \quad (28)$$

Como os tensores associados a deslocamentos infinitesimais e gradientes de deslocamento são relacionados através dos tensores métricos g_{ij} , g^{ij} do corpo sem deformação, pode-se expressar o potencial elástico e as relações tensão-deformação como

$$W = \frac{1}{2} E_{rs}^{ij} \gamma_{ij} \gamma^{rs} = \frac{1}{2} E_{ijrs} \gamma^{ij} \gamma^{rs} = \frac{1}{2} \tau_{ij} \gamma^{ij} = \frac{1}{2} \tau_j^i \gamma_i^j \quad (29)$$

$$\tau^{ij} = E_{rs}^{ij} \gamma^{rs}, \quad \tau_{ij} = E_{ijrs} \gamma^{rs} = E_{ij}^{rs} \gamma \quad (30)$$

Os tensores associados E_{rs}^{ij} , E_{ijr} possuem propriedades simétricas similares às citadas anteriormente. Por exemplo

$$E_{rs}^{ij} = g_{rm} g_{sn} E^{ijmn} = E_{rs}^{ji} = E_{sr}^{ij} = E_s^{ji} \quad (31)$$

sendo que a ordem do par de sufixos i, j em relação ao par r, s é irrelevante.

Objetivando analisar as propriedades dos coeficientes elásticos em maior detalhe, todas as funções estão referidas às coordenadas retangulares x_i no corpo indeformado B_0 . Nesse sistema de coordenadas não há distinção entre tensores contravariante, covariante e

misto e pode-se designar o tensor de deformação por e_{ij} , o tensor tensão por t_{ij} e os coeficientes elásticos por c_{rs}^{ij} . Devido à simetria das propriedades elásticas,

$$c_{rs}^{ij} = c_{rs}^{ji} = c_{sr}^{ij} = c_{sr}^{ji} = c_{ij}^{rs} \quad (32)$$

e a relação adicional $c_{rs}^{ij} = c_{ij}^{rs}$ é verdadeira porque as coordenadas são retangulares. O potencial elástico (29) se torna

$$W = \frac{1}{2} c_{rs}^{ij} e_{ij} e_{rs}, \quad (33)$$

e
$$t_{ij} = c_{rs}^{ij} e_{rs} \quad (34)$$

Se a densidade do corpo original B_0 for constante e se os coeficientes elásticos c_{rs}^{ij} forem constantes, diz-se que o corpo é *elasticamente homogêneo*. Nesse caso as derivadas covariantes dos coeficientes elásticos genéricos E_{rs}^{ij} são nulas, tal que

$$E_{rs}^{ij}|_t = 0, \quad E^{ijrs}|_t = 0, \quad E_{ijrs}|_t = 0 \quad (35)$$

Quando o corpo é homogêneo, os coeficientes c_{rs}^{ij} são constantes e eles definem as propriedades físicas do corpo. Em geral essas constantes dependem da orientação dos eixos retangulares x_i em cada ponto do corpo. Se, contudo, a expressão para o potencial elástico W tiver sempre a mesma forma independentemente da orientação dos eixos retangulares então as constantes elásticas são constantes que independem dos eixos e o corpo é chamado *elasticamente isotrópico*, ou simplesmente *isotrópico*. Caso contrário ele é chamado *anelotrópico* ou *anisotrópico*.

No restante deste capítulo serão considerados somente os corpos homogêneos conforme definido acima. Contudo, resultados semelhantes são observados em corpos não-homogêneos. As hipóteses de homogeneidade e isotropia quando aplicadas a um corpo resultam em uma razoável concordância entre os resultados experimentais e teóricos para uma grande variedade de materiais, apesar da maioria das estruturas dos materiais ser formada de substâncias cristalinas e poucos tipos destas não serem isotrópicas. A

concordância é explicada pelo fato de que as dimensões da maioria dos cristais são pequenas quando comparadas com o corpo inteiro e que eles são distribuídos caoticamente, tal que o comportamento do corpo é isotrópico

Materiais como os cristais naturais e madeira são aelotrópicos. A simetria estrutural do corpo aelotrópico genérico pode introduzir relações entre os coeficientes elásticos e, a seguir, alguns casos particulares de simetria elástica serão discutidos.

4. Coeficientes elásticos

As propriedades simétricas fornecem 21 coeficientes elásticos c_{rs}^{ij} para um corpo anisotrópico (ou aelotrópico). Tais coeficientes podem ser adequadamente apresentados na tabela abaixo

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{33}^{11} & c_{23}^{11} & c_{13}^{11} & c_{12}^{11} \\
 & c_{22}^{22} & c_{33}^{22} & c_{23}^{22} & c_{13}^{22} & c_{12}^{22} \\
 & & c_{33}^{33} & c_{23}^{33} & c_{13}^{33} & c_{12}^{33} \\
 & & & c_{23}^{23} & c_{13}^{23} & c_{12}^{23} \\
 & & & & c_{13}^{13} & c_{12}^{13} \\
 & & & & & c_{12}^{12}
 \end{array} \tag{36}$$

Se o sistema de coordenadas x_i for substituído por outro sistema cartesiano retangular \bar{x}_i , então os coeficientes c_{rs}^{ij} se tornam \bar{c}_r^{ij} e, devido às suas características tensoriais,

$$\bar{c}_{mn}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_s} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_p} \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_t} c_{pst}^{rs} \tag{37}$$

a partir das regras básicas de transformação. Ainda, a relação entre os componentes da deformação e_{ij} , com referência aos eixos x_i , é

$$\bar{e}_{rs} = \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} e_{ij} \tag{38}$$

Para um corpo anisotrópico genérico o potencial elástico W é uma função de todos os componentes da deformação tal que

$$W = W(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{23}, e_{31}) \quad (39)$$

(a) *Simetria com respeito a um plano (13 coeficientes)*

Considere-se uma troca de eixos

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = -x_3 \quad (40)$$

Logo $\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_\alpha} = \delta_\alpha^r \quad (\alpha = 1, 2), \quad \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_3} = -\delta_3^r,$

e $\bar{e}_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}, \quad \bar{e}_{33} = e_{33}, \quad \bar{e}_{\alpha 3} = -e_{\alpha 3}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$

Ainda, o potencial elástico W , que é um invariante, pode agora ser expresso em termos dos componentes da deformação \bar{e}_r . Se a expressão para W em termos de \bar{e}_r puder ser obtida simplesmente pela substituição de e_{rs} por \bar{e}_r então o corpo é dito elasticamente simétrico com respeito ao plano $x_3 = 0$. Neste caso W pode ser escrito como

$$W = W(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{13}^2, e_{23}^2, e_{12}, e_{23}, e_{12}) \quad (41)$$

Portanto, de (23),

$$c_{3\delta}^{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^{3\delta} = c_{33}^{\alpha 3} = c_{\alpha 3}^{33} = 0 \quad (\alpha, \beta, \delta = 1, 2) \quad (42)$$

Em outras palavras, todos os coeficientes que contêm o índice 3 uma ou três vezes desaparecem. A tabela de coeficientes então se torna

$$\begin{array}{cccccc} c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{33}^{11} & 0 & 0 & c_{12}^{11} \\ & c_{22}^{22} & c_{33}^{22} & 0 & 0 & c_{12}^{22} \\ & & c_{33}^{33} & 0 & 0 & c_{12}^{33} \\ & & & c_{23}^{23} & c_{13}^{23} & 0 \\ & & & & c_{13}^{13} & 0 \\ & & & & & c_{12}^{12} \end{array} \quad (43)$$

(b) *Simetria em relação a dois planos ortogonais: Ortotropia (9 coeficientes)*

Um corpo é dito ser elasticamente simétrico com respeito a dois planos perpendiculares $x_3 = 0$ e $x_1 = 0$ se, quando os eixos forem substituídos por

$$\bar{x}_1 = -x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = -x_3 \quad (44)$$

o potencial elástico W se reduz a uma função do tipo

$$W = W(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}^2, e_{23}^2, e_{31}^2, e_{12}, e_{23}, e_{31}) \quad (45)$$

Em particular, quando W é dado por (33), todos os coeficientes c_{rs}^{ij} da tabela (43) que contem o índice 1 uma ou três vezes devem desaparecer. Os coeficientes, portanto, se reduzem a 9, dados por

$$\begin{matrix} c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^{22} & c_{33}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{23}^{23} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13}^{13} & 0 \\ & & & & & c_{12}^{12} \end{matrix} \quad (46)$$

O exame de (45) mostra que a simetria elástica com relação a dois planos ortogonais implica numa simetria elástica em relação ao terceiro plano que é ortogonal aos dois planos originais. Ainda, desde que o corpo é homogêneo segue que ele têm, então, três planos ortogonais de simetria em cada ponto, sendo porisso chamado *ortrópico*. Esta não é uma propriedade física exata da madeira, porém a hipótese de que ela é um corpo ortrópico é uma excelente aproximação para muitos propósitos.

(c) *Isotropia transversal (5 coeficientes)*

A isotropia transversal é obtida de um corpo ortrópico mudando os eixos para

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \\ \bar{x}_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases} \quad (47)$$

e o potencial elástico W em termos de \bar{e}_r pode ser obtido de (46) simplesmente substituindo e_{rs} por \bar{e}_r . Os valores de $\frac{\partial x_i}{\partial x_r}$ que correspondem a (47) são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} = \cos \alpha, & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} = \sin \alpha, \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} = 0, & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} &= 1, \end{aligned}$$

e, de (38),

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{11} = e_{11} \cos^2 \alpha + 2e_{12} \cos \alpha \sin \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha \\ \bar{e}_{22} = e_{11} \sin^2 \alpha - 2e_{12} \cos \alpha \sin \alpha + e_{22} \cos^2 \alpha \\ \bar{e}_{12} = (e_{22} - e_{11}) \cos \alpha \sin \alpha + e_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \bar{e}_{13} = e_{13} \cos \alpha + e_{23} \sin \alpha \\ \bar{e}_{23} = -e_{13} \sin \alpha + e_{23} \cos \alpha \\ \bar{e}_{33} = e_{33} \end{array} \right. \quad (48)$$

Segue que, para todos os valores do ângulo α

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{11} + \bar{e}_{22} = e_{11} + e_{22} \quad \bar{e}_{11} \bar{e}_{22} - \bar{e}_{12}^2 = e_{11} e_{22} + e_{12}^2 \\ \bar{e}_{13}^2 + \bar{e}_{23}^2 = e_{13}^2 + e_{23}^2 \quad |\bar{e}_{ij}| = |e_{ij}| \end{array} \right. \quad (49)$$

e portanto W , como dado por (45), se reduz a

$$W = W(e_{11} + e_{22}, e_{11} e_{22} - e_{12}^2, e_{33}, e_{13}^2 + e_{23}^2, |e_{ij}|) \quad (50)$$

Quando W é dado por (33) e as constantes elásticas por (46), então (50) implica em

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{33}^{11} = c_{33}^{22}, \quad c_{13}^{13} = c_{23}^{23} \\ c_{11}^{11} = c_{22}^{22}, \quad c_{12}^{12} = \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) \end{array} \right. \quad (51)$$

Para a isotropia transversal a tabela (46) se torna

$$\begin{array}{cccccc} c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^{22} & c_{33}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{23}^{23} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13}^{13} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) \end{array} \quad (52)$$

(d) *Corpos isotrópicos (2 coeficientes)*

Se o potencial elástico não se alterar sob qualquer mudança possível para outro sistema cartesiano retangular de eixos, o corpo é definido como *isotrópico*, sendo W neste caso função dos invariantes da deformação. Alternativamente, partindo-se do caso (c), W não poderá se alterar sob as transformações

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_3 = x_3 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha \\ \bar{x}_1 = -x_3 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha \\ \bar{x}_2 = x_2 \end{array} \right. , \quad (53)$$

$$e \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = x_3 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha \\ \bar{x}_3 = -x_2 \sin \alpha + x_3 \cos \alpha \\ \bar{x}_1 = x_1 \end{cases} \quad (54)$$

Ou seja, para W ser expresso em termos de \bar{e}_r ele deve ser obtido de (50) simplesmente substituindo-se e_{rs} por \bar{e}_r . Por analogia com a seção (c), para se validar (53) tem-se

$$\begin{cases} c_{22}^{11} = c_{33}^{22}, & c_{11}^{11} = c_{33}^{33} \\ c_{12}^{12} = c_{13}^{13} = \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) \end{cases} \quad (55)$$

Segue automaticamente que W não é alterado em sua forma sob as transformações (54). Os coeficientes agora se reduzem a dois, c_{11}^{11} e c_{22}^{11} , conforme a tabela

$$\begin{array}{cccccc} c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{22}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) \end{array} \quad (56)$$

Verifica-se que W não se altera sob todas as possíveis trocas para outro sistema de coordenadas retangulares, isto é, ele é a mesma função de \bar{e}_r como é de e_{rs} quando x_i é trocado para \bar{x}_i .

Os coeficientes elásticos c_{rs}^{ij} para um corpo isotrópico com referência a coordenadas cartesianas retangulares no corpo sem deformação são obtidos de (56) podendo ser expressos na notação alternativa

$\lambda + 2G$	λ	λ	0	0	0
	$\lambda + 2G$	λ	0	0	0
		$\lambda + 2G$	0	0	0
			G	0	0
				G	0
					G

(57)

onde $\lambda = c_{22}^{11}, \quad G = \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11})$ (58)

Os coeficientes E_{rs}^{ij} , em coordenadas gerais, são agora dados pela transformação tensorial

$$E_{rs}^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^n} \frac{\partial \theta^p}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^t}{\partial x^s} c_{pt}^{mn}. \quad (59)$$

Da tabela (57) e das propriedades simétricas (32) pode-se expressar os coeficientes c_{rs}^{ij} na forma compacta

$$c_{rs}^{ij} = \lambda \delta^{ij} \delta_{rs} + G(\delta_r^i \delta_s^j + \delta_s^i \delta_r^j). \quad (60)$$

Logo, em coordenadas gerais tem-se

$$E_{rs}^{ij} = \lambda g^{ij} g_{rs} + G(\delta_r^i \delta_s^j + \delta_s^i \delta_r^j), \quad (61)$$

visto que esta equação tensorial se reduz a (60) quando as coordenadas são cartesianas retangulares. Este resultado também segue imediatamente de (59) e (60), e é a forma geral para os coeficientes elásticos para um corpo homogêneo isotrópico. As constantes λ , G são as *constantes elásticas de Lamé* e são algumas vezes colocadas na forma

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (62)$$

onde as constantes E e ν são os módulos de Young e Poisson, respectivamente. A constante de Lamé G é conhecida como módulo de rigidez e a relação (61) é geralmente expressa em termos de G e ν . Logo

$$E_{rs}^{ij} = G(\delta_r^i \delta_s^j + \delta_s^i \delta_r^j + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g_{rs}), \quad (63)$$

e
$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \quad (64)$$

De (27) e (63) a relação tensão-deformação para corpos isotrópicos toma a forma

$$\tau^{ij} = G(g^{ir} g^{js} + g^{is} g^{jr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{rs}) \gamma_{rs} \quad (65)$$

que pode ainda ser escrita como

$$\begin{cases} \tau^{ij} = 2G(\gamma^{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} \gamma_r^r) \\ \tau_j^i = 2G(\gamma_j^i + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_j^i \gamma_r^r) \\ \tau_{ij} = 2G(\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} g_{ij} \gamma_r^r) \end{cases} \quad (66)$$

Pode-se também expressar os componentes de deformação em termos dos componentes de tensão.

$$\begin{cases} E \gamma_{rs} = [(1 + \nu)g_{ir} g_{js} - \nu g_{ij} g_{rs}] \tau^{ij} = (1 + \nu) \tau_{rs} - \eta g_{rs} \tau^{ij} \\ E \gamma_s^r = (1 + \nu) \tau_s^r - \nu \delta_s^r \tau_i^i \\ E \gamma^{rs} = (1 + \nu) \tau^{rs} - \nu g^{rs} \tau_i^i \end{cases} \quad (67)$$

De (66) e (6) tem-se imediatamente que

$$\begin{cases} \tau_r^r = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \gamma_r^r = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nu^r |r| \\ \nu^r |r| = \gamma_r^r = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} \tau_r^r \end{cases} \quad (68)$$

que dão importantes relações entre o invariante de deformação $\gamma_r^r = \nu^r |r|$ e o invariante de tensão τ_r^r .

Quando o material não apresenta propriedades simétricas ainda é possível, em geral, expressar os componentes de deformação em termos dos componentes de tensão resolvendo as equações (27) ou (30) para γ_{rs}

$$\gamma_{rs} = F_{ijrs} \tau^{ij} = F_{rs}^{ij} \tau_{ij} \quad (69)$$

onde $E^{ijrs} F_{ijmn} = E_{ij}^{rs} F_{mn}^{ij} = \frac{1}{2}(\delta_m^r \delta_n^s + \delta_n^r \delta_m^s)$ (70)

As propriedades simétricas dos tensores F_{ijrs}, F_r^i são similares as de E_{ijrs}, E_r^i e portanto não serão consideradas em detalhes. Observe-se, porém, que se os coeficientes elásticos F_{rs}^{ij} forem designados por s_{rs}^{ij} em relação aos eixos coordenados cartesianos, então

$$s_{rs}^{ij} = s_{rs}^{ji} = s_{sr}^{ij} = s_{sr}^{ji} = s_{ij}^{rs} \quad (71)$$

e a relação tensão-deformação (60) torna-se

$$e_{rs} = s_{ij}^{rs} t_{ij} \quad (72)$$

Também, o potencial elástico W é

$$W = \frac{1}{2} S_{ij}^{rs} t_{rs} t_{ij}. \quad (73)$$

5. Equações diferenciais para um corpo isotrópico

A teoria clássica da elasticidade é governada pelas seguintes equações: as equações de movimento, dadas por

$$\tau^{ij}|_i + \rho F^j = \rho f^j, \quad (74)$$

e as relações tensão-deformação

$$\tau^{ij} = E^{ijrs} \gamma_{rs} \quad (75)$$

onde, para um material isotrópico,

$$E^{ijrs} = G(g^{ir}g^{js} + g^{is}g^{jr} + \frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{rs}) \quad (76)$$

Além disso, os componentes do tensor de deformação γ_{rs} podem ser expressos em termos dos deslocamentos através da fórmula

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2}(v_r|_s + v_s|_r) \quad (77)$$

Tal sistema de equações deve ser satisfeito em todos os pontos internos do corpo. Na superfície externa do corpo certas condições de contorno devem ser satisfeitas. Quando tensões superficiais são especificadas na superfície,

$$\tau^{ij} n_i = P^j, \quad (78)$$

tal sistema é conhecido como o primeiro problema de valores de contorno. Alternativamente, pode-se fornecer deslocamentos na superfície, o que caracteriza o segundo problema de valores de contorno. Tem-se um problema misto de valores de contorno quando tensões superficiais atuam em uma parte do contorno, sendo a outra parte preenchida por condições de deslocamento.

Observe-se que, considerando-se a linearidade das equações do sistema, o princípio da superposição é aplicável. Assim, suponha-se que sob a influência de forças $F^{(1)}$ e acelerações $f^{(1)j}$ externas encontrem-se as tensões e os deslocamentos $\tau^{(1)ij}, v_j^{(1)}$ e correspondendo a forças $F^{(2)}$ e acelerações $f^{(2)}$ externas encontrem-se as tensões e os deslocamentos $\tau^{(2)ij}, v_j^{(2)}$. Então, porque as equações fundamentais são lineares, segue que as tensões $\tau^{(1)ij} + \tau^{(2)ij}$ e os deslocamentos $v_j^{(1)} + v_j^{(2)}$ correspondem à forças de corpo $F^{(1)j} + F^{(2)j}$ e acelerações $f^{(1)j} + f^{(2)j}$.

Considere-se um corpo elástico limitado em equilíbrio governado pelas equações (74) com $f^i = 0$, (75) e (77), e sujeito a um dos conjuntos de condições de contorno mencionados. Se, sob hipóteses convenientemente suaves, uma solução destas equações existir, então pode-se provar que tal solução é única se a energia de deformação for positivo-definida. (Sob tensões superficiais especificadas na superfície do corpo, os deslocamentos são únicos, independentemente de deslocamentos de corpo rígido.) Se o corpo for infinito a unicidade da solução requer considerações adicionais que não serão consideradas aqui. Também, a existência de singularidades exige condições adicionais.

As equações (74)-(77) podem ser expressas em formas alternativas, que serão agora consideradas. Inicialmente substitui-se (75) em (74) e usa-se (77), observando de (76) que

$$E^{ijrs}|_i = 0$$

$$\text{Então } E^{ijrs} v_s|_{ri} + \rho F^j = \rho f^j, \quad (79)$$

que é um conjunto de três equações diferenciais para os três componentes de v_s , do vetor deslocamento. Usando-se (76), as equações (79) tornam-se

$$v^j|_r^r + \frac{v^r|_r^j}{1-2\nu} + \frac{\rho F^j}{G} = \frac{\rho f^j}{G} \quad (80)$$

usando-se a notação descrita no Apêndice 1. Tomando-se a derivada covariante de (80) em relação a θ^j obtêm-se

$$v^j \Big|_{rj}^r + \frac{v^r \Big|_{rj}^j}{1-2\nu} + \frac{\rho F^j \Big|_j}{G} = \frac{\rho f^j \Big|_j}{G},$$

assumindo que ρ é constante. Como

$$v^j \Big|_{rj}^r = v^j \Big|_{jr}^r = v^j \Big|_{rj}^j$$

esta equação se reduz a

$$\frac{2(1+\nu)v^j \Big|_{rj}^r}{1-2\nu} + \frac{\rho F^j \Big|_j}{G} = \frac{\rho f^j \Big|_j}{G} \quad (81)$$

Assumindo-se que as forças de corpo e acelerações obedecem à lei

$$F^j \Big|_j = 0, \quad f^j \Big|_j = 0, \quad (82)$$

então $v^j \Big|_{rj}^r = 0,$ (83)

ou, de (6), $\gamma_i^i \Big|_r^r = 0.$ (84)

De (68) e (84) tem-se ainda que $\tau_i^i \Big|_r^r = 0.$ (85)

Comparando-se as equações (83) e (84) com relações do Apêndice 1 vê-se que a dilatação γ_i^i e o invariante de tensão τ_i^i são funções harmônicas desde que as equações (82) sejam satisfeitas.

Ainda, encontra-se de (80) que

$$v^j \Big|_{ri}^r + \frac{v^r \Big|_{ri}^j}{1-2\nu} + \frac{\rho F^j \Big|_i^i}{G} = \frac{\rho f^j \Big|_i^i}{G} \quad (86)$$

Se todos componentes das forças de corpo e acelerações em coordenadas cartesianas retangulares forem constantes então

$$F^j \Big|_i^i = 0, \quad f^j \Big|_i^i = 0, \quad (87)$$

logo $v^j \Big|_{ri}^r + \frac{v^r \Big|_{ri}^j}{1-2\nu} = 0.$ (88)

Mas, de (83) encontra-se que $v^r \Big|_{ri}^j = 0,$

portanto $v^j \Big|_{ri}^r = 0$ (89)

Isto mostra que quando as equações (87) são satisfeitas cada componente do deslocamento em coordenadas cartesianas retangulares é uma função bi-harmônica (ver Apêndice 1).

Até aqui foram obtidas equações que envolvem somente os componentes do vetor deslocamento. Obtêm-se agora as equações que contêm somente componentes do tensor tensão. Para isto combina-se (68) e (77) para dar

$$G(v_s|r| + v_r|s|) = \tau_{rs} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{rs} \tau_i^i,$$

e elevando os sufixos r, s em ambos os lados da equação tem-se

$$G(v^s|r| + v^r|s|) = \tau^{rs} - \frac{\nu}{1+\nu} g^{rs} \tau_i^i. \quad (90)$$

que leva a $G(v^s|_i^r + v^r|_i^s) = \tau^{rs}|_i^i - \frac{\nu}{1+\nu} g^{rs} \tau_m^m|_i^i.$ (91)

De (68) e (80) encontra-se, respectivamente,

$$2Gv^i|_i^{rs} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \tau_i^i|^{rs}, \quad (92)$$

$$v^s|_i^{ir} = -\frac{\nu^i|^{sr}}{1-2\nu} - \frac{\rho}{G}(F^s|r| - f^s|r|), \quad (93)$$

e, trocando as posições de r e s ,

$$v^r|_i^{is} = -\frac{\nu^i|^{rs}}{1-2\nu} - \frac{\rho}{G}(F^r|s| - f^r|s|). \quad (94)$$

O deslocamento v^r pode ser eliminado das equações (90)-(93), para $v^r|_i^{si} = v^r|_i^{is}$,

$$\tau^{rs}|_i^i + \frac{\tau_i^i|^{rs}}{1+\eta} - \frac{\eta g^{rs} \tau_m^m|_i^i}{1+\eta} = -\rho (F^s|r| + F^r|s| - f^s|r| - f^r|s|), \quad (95)$$

As equações (95) são um conjunto de equações diferenciais para os componentes de tensão τ^r . Tais equações podem ser expressas em uma maneira ligeiramente diferente eliminando-se $\tau_m^m|_i^i$. Assim, rebaixando-se o sufixo r em (95) e contraindo-se $r=s$, obtêm-se

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \tau_i^r|_i^r = -\rho (F^r|r| - f^r|r|), \quad (96)$$

Substituindo $\tau_r^r|_i^i$ em (5.5.21) tem-se

$$\tau^{rs} \Big|_i + \frac{\tau_i^{i|rs|}}{1+\nu} = -\frac{\nu\rho}{1+\nu} g^{rs} (F^i \Big|_i - f^i \Big|_i) - \rho (F^s \Big|_r + F^r \Big|_s - f^s \Big|_r - f^r \Big|_s). \quad (97)$$

Se as relações (87) forem mantidas, então, usando (85) obtêm-se as equações

$$\tau^{rs} \Big|_{ij} = 0, \quad \text{e, usando (67),} \quad \gamma^{rs} \Big|_{ij} = 0$$

Quando, portanto, as equações (87) são satisfeitas, todos os componentes dos tensores tensão e deformação, referentes a coordenadas cartesianas retangulares, são funções bi-harmônicas.

III. Estado plano de deformação

Na elasticidade, como em outros ramos da física matemática, é geralmente difícil encontrar uma solução explícita para um dado problema tri-dimensional, mas seu análogo em duas dimensões freqüentemente pode ser resolvido. As teorias de deformações planas e tensões planas generalizada, e a clássica teoria da flexão transversal de placas delgadas são exemplos bem conhecidos de teorias bi-dimensionais. Nessas teorias, com relação aos corpos isotrópicos, a equação bi-harmônica tem um papel preponderante, e muitas soluções dessa equação tem sido obtidas através da análise de variáveis reais. A introdução da elasticidade bi-dimensional, e a solução de problemas especiais é, contudo, grandemente simplificada pelo uso de técnicas de variáveis complexas. Além disso, a quantidade de problemas que podem ser resolvidos é multiplicada. O primeiro uso de desenvolvimento de métodos da teoria de funções complexas em problemas elásticos bi-dimensionais foi feito por Kolosoff e Muskhelishvili e suas idéias estão expostas em livros deste último. Muitos dos trabalhos anteriores destes autores não foram, por algum tempo, divulgados à comunidade internacional de forma que trabalhos subseqüentes de outros autores contêm algumas duplicidades.

O desenvolvimento de teorias bi-dimensionais e a solução de problemas envolvendo corpos anisotrópicos são bastante posteriores que para os corpos isotrópicos e o uso pioneiro das técnicas de variáveis complexas neste campo se devem a Lechnitzky, Savin e outros autores russos. Tais trabalhos também não estiveram rapidamente disponíveis e o desenvolvimento independente por outros autores não contem referências a eles.

No presente capítulo a atenção é restrita às equações fundamentais para o estado plano de deformação para materiais iso- e anisotrópicos. As notações do cálculo tensorial são mantidas sempre que possível tal que os aspectos da teoria de variáveis complexas são

introduzidos naturalmente pela conversão do sistema de coordenadas para coordenadas complexas.

1. Sistema de coordenadas

Usando a notação do Apêndice 1 e expressando o vetor posição \mathbf{R} de um ponto qualquer de um corpo sem deformação na forma especial

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) + \theta_3 \mathbf{a}_3, \quad (1)$$

onde \mathbf{a}_3 é um vetor unitário constante, perpendicular à superfície *plana* $\theta_3 = 0$, escolhe-se os eixos retangulares x_i tal que

$$\theta_3 = x_3, \quad (2)$$

e as origens dos vetores \mathbf{R} e \mathbf{r} e dos eixos x_i são coincidentes. As curvas θ_i então se encontram no plano (x_1, x_2) . Todas as fórmulas desenvolvidas no Apêndice 1 são aqui aplicáveis, portanto

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = 0 \quad b_{\alpha\beta} = 0, \quad \bar{R}_{1212} = 0 \quad (3)$$

Como o tensor de Riemann-Christoffel para a superfície plana $\theta_3 = 0$ é nulo, segue que a ordem da diferenciação covariante com respeito às coordenadas de superfície θ_α é irrelevante. Como referência, repete-se os resultados do Apêndice 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3 \\ g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = a_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad g_{33} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \\ g^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^3 = 0, \quad g^{33} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^3 = 1 \\ g = |g_{ik}| = |a_{\alpha\beta}| = a, \quad \overline{\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ ik \end{array} \right\}} = 0, \quad \overline{\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta 3 \end{array} \right\}} = 0 \\ \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\beta \end{array} \right\} \mathbf{a}_\lambda, \quad \mathbf{a}_{,\beta}^\alpha = -\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\lambda \end{array} \right\} \mathbf{a}^\lambda \end{array} \right. , \quad (4)$$

e observa-se que todas as grandezas geométricas (exceto \mathbf{R}) são independentes de x_3 . Os símbolos de Christoffel com respeito à superfície $\theta_3 = 0$ são designados, sem ambigüidades, por $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}$, com a barra omitida, onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} = a^{\alpha\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\lambda \end{smallmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\lambda \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2}(a_{\lambda\beta,\gamma} + a_{\lambda\gamma,\beta} - a_{\beta\gamma,\lambda}) \\ \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \lambda a \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial \theta^\alpha} \end{array} \right. \quad (5)$$

2. Função de tensão de Airy

Considere-se o seguinte estado de tensão em um corpo

$$\tau^{\alpha 3} = 0, \quad (6)$$

sendo todas os demais componentes $\tau^{\alpha\beta}, \tau^{33}$ do tensor tensão independentes de θ_3 . Se verá adiante que tal estado surge sob as condições de deformações planas. Então,

$$\mathbf{T}_\alpha = \sqrt{a} \tau^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{T}_3 = \sqrt{a} \tau^{33} \mathbf{a}_3 \quad (7)$$

e como as funções \mathbf{T}_i são independentes de θ_3 , as equações de equilíbrio se tornam

$$\mathbf{T}_{\alpha,\alpha} + \rho \sqrt{a} \mathbf{F} = 0 \quad (8)$$

onde \mathbf{F} deve ser um vetor de força de corpo bi-dimensional nas variáveis θ_α . Em muitos problemas práticos o vetor força de corpo pode ser derivado de uma função potencial, assim assume-se aqui que

$$\mathbf{F} = -U_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha \quad (9)$$

onde U é uma função escalar invariante das coordenadas θ_1 e θ_2 . As equações de equilíbrio (8) podem ser rescritas como

$$\mathbf{T}_{\alpha,\alpha} - \rho \sqrt{a} U_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathbf{T}_\alpha - \rho \sqrt{a} U \mathbf{a}^\alpha]_{,\alpha} = 0 \quad (10)$$

desde que, de (4) e (5),

$$[\sqrt{a} U \mathbf{a}^\alpha]_{,\alpha} = [U_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha + U \{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \lambda \alpha \end{smallmatrix} \} \mathbf{a}^\alpha - U \{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha \lambda \end{smallmatrix} \} \mathbf{a}^\lambda] \sqrt{a} = \sqrt{a} U_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha.$$

De (10) pode-se expressar \mathbf{T}_α como

$$\mathbf{T}_\alpha = \sqrt{a} \varepsilon^{\gamma\alpha} \boldsymbol{\chi}_{,\gamma} + \rho \sqrt{a} U \mathbf{a}^\alpha \quad (11)$$

onde $\boldsymbol{\chi}$ é um vetor no plano $\theta_3 = 0$. Se

$$\boldsymbol{\chi} = \chi^\beta \mathbf{a}_\beta, \quad (12)$$

então $\boldsymbol{\chi}_{,\gamma} = \chi^\beta |_{,\gamma} \mathbf{a}_\beta,$ (13)

logo $\mathbf{T}_\alpha = \sqrt{a} \varepsilon^{\gamma\alpha} \chi^\beta |_{,\gamma} \mathbf{a}_\beta + \rho \sqrt{a} U \mathbf{a}^\alpha$ (14)

Portanto, com (7) tem-se

$$\tau^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta = \varepsilon^{\gamma\alpha} \chi^\beta |_{,\gamma} \mathbf{a}_\beta + \rho U \mathbf{a}^\alpha \quad (15)$$

O tensor $\tau^{\alpha\beta}$ é, contudo, simétrico, tal que $\varepsilon^{\gamma\alpha} \chi^\beta |_{,\gamma} = \varepsilon^{\gamma\beta} \chi^\alpha |_{,\gamma}$ e pode-se portanto considerar

$$\chi^\beta = \varepsilon^{\rho\beta} \phi_{,\rho} \quad (16)$$

Logo $\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\gamma\alpha} \varepsilon^{\rho\beta} \phi_{,\rho\gamma} + \rho U a^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\rho} \phi_{|\gamma\rho} + \rho U a^\alpha$ (17)

onde ϕ é uma função escalar invariante de θ_1, θ_2 onde, portanto, a ordem da diferenciação covariante é irrelevante. A função ϕ é conhecida como *função de tensão de Airy*. As equações (17) podem ainda ser escritas nas formas alternativas

$$\begin{cases} \tau_\beta^\alpha = \delta_{\beta\rho}^{\alpha\gamma} \phi_{|\gamma}^\rho + \rho U \delta_\beta^\alpha \\ \phi_{|\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\rho} \tau^{\gamma\rho} + \rho U a_{\alpha\beta} \\ \phi_{|\beta}^\alpha = \delta_{\beta\rho}^{\alpha\gamma} \tau_\gamma^\rho + \rho U \delta_\beta^\alpha \end{cases} \quad (18)$$

O vetor $\boldsymbol{\chi}$ pode ser interpretado fisicamente da seguinte forma: considere-se uma curva aberta AB posicionada no plano $x_3 = 0$, e suponha-se a direção positiva tomada de A para B (ver figura). A curva AB separa o plano em duas regiões, 1 e 2, e a força exercida pela região 1 na região 2 através do elemento ds da curva AB é $-\mathbf{t} ds$ medida por unidade de comprimento do eixo x_3 . Como o vetor tensão \mathbf{t} está localizado no plano $x_3 = 0$ tem-se que

$$\mathbf{t} = \frac{n_\alpha \mathbf{T}_\alpha}{\sqrt{a}},$$

onde n_α são os componentes covariantes do vetor unitário normal \mathbf{n} em qualquer ponto de AB ,

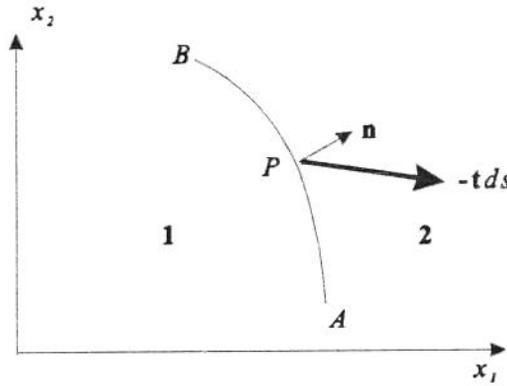


Fig. I.2 - Vetor força na curva que separa as regiões 1 e 2

direcionados da região 1 para a região 2. A força total \mathbf{P} exercida através da parte AP da curva AB , medida por unidade de comprimento do eixo x_3 é, portanto,

$$\mathbf{P} = - \int_A^P \frac{n_\alpha \mathbf{T}_\alpha}{\sqrt{a}} ds = - \int_A^P n_\alpha (\epsilon^{\gamma\alpha} \boldsymbol{\chi}_{,\gamma} + \rho U \mathbf{a}^\alpha) ds, \quad (19)$$

usando-se (11). Com relação aos eixos cartesianos x_α , os componentes de \mathbf{n} são $(\frac{\partial x_2}{\partial s}, -\frac{\partial x_1}{\partial s})$, e portanto, por transformação tensorial,

$$n_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{d\theta^\beta}{ds} \quad (20)$$

A expressão (19), portanto, torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= - \int_A^P \epsilon_{\alpha\beta} (\epsilon^{\gamma\alpha} \boldsymbol{\chi}_{,\gamma} + \rho U \mathbf{a}^\alpha) \frac{d\theta^\beta}{ds} ds \\ &= - \int_A^P \boldsymbol{\chi}_{,\gamma} \frac{d\theta^\beta}{ds} ds - \rho \int_A^P U \mathbf{n} ds = \boldsymbol{\chi} - \rho \int_A^P U \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (21)$$

somada a um vetor constante arbitrário que pode ser absorvido por $\boldsymbol{\chi}$ visto que não afeta as tensões. Na ausência de forças de corpo tem-se a fórmula reduzida

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\chi}. \quad (22)$$

O momento sobre o eixo x_3 das forças exercidas pela região 1 sobre a região 2 através de AP , medido por unidade de comprimento do eixo x_3 , é dado por

$$\mathbf{M} = \int_A^P [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\chi}] \frac{d\theta^\beta}{ds} ds - \rho \int_A^P U [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] ds =$$

$$[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\chi}]_A^P - \int_A^P [\mathbf{a}_\alpha \times \boldsymbol{\chi}] \frac{d\theta^\beta}{ds} ds - \rho \int_A^P U \varepsilon_{\alpha\beta} [\mathbf{r} \times \mathbf{a}^\beta] \frac{d\theta^\beta}{ds} ds.$$

De (12) e (16),

$$\mathbf{a}_\alpha \times \boldsymbol{\chi} = \chi^\beta [\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta \mathbf{a}^3 = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\beta} \phi_{,\rho} \mathbf{a}_3 = \phi_{,\alpha} \mathbf{a}_3$$

e
$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\chi} = \varepsilon_{\alpha\beta 3} \chi^\beta \mathbf{a}^3 = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\beta} r^\alpha \phi_{,\rho} \mathbf{a}_3 = r^\alpha \phi_{,\alpha} \mathbf{a}$$

onde
$$\mathbf{r} = r^\alpha \mathbf{a}_\alpha = r_\alpha \mathbf{a}^\alpha \tag{23}$$

Também,
$$\varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{r} \times \mathbf{a}^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} r_\lambda [\mathbf{a}^\lambda \times \mathbf{a}^\alpha] = \varepsilon_{\alpha\beta} r_\lambda \varepsilon^{\lambda\alpha} \mathbf{a}_3 = -r_\beta$$

Logo, a menos de uma constante arbitrária que pode ser absorvida por ϕ sem afetar a distribuição de tensões,

$$\mathbf{M} = \left[r^\alpha \phi_{,\alpha} - \phi + \rho \int_A^P U r_\beta \frac{d\theta^\beta}{ds} ds \right] \mathbf{a}_3, \tag{24}$$

sendo, portanto, um binário de magnitude

$$M = r^\alpha \phi_{,\alpha} - \phi + \rho \int_A^P U r_\beta \frac{d\theta^\beta}{ds} ds \tag{25}$$

atuante no eixo x_3 . Quando as forças de corpo são nulas ele se torna

$$M = r^\alpha \phi_{,\alpha} - \phi. \tag{26}$$

Se a curva AB for uma fronteira simples de um corpo e for inteiramente livre de forças, então, na ausência de forças de corpo,

$$\boldsymbol{\chi} = 0, \quad r^\alpha \phi_{,\alpha} - \phi = 0, \tag{27}$$

em todos os pontos dessa curva. De (12) e (16) vê-se que $\boldsymbol{\chi} = 0$ implica em

$$\phi_{,1} = 0, \quad \phi_{,2} = 0, \tag{28}$$

em todos os pontos de AB e, portanto, ϕ é constante em AB . Tomando esta constante como zero, as condições (28) podem substituir (27) em todos os pontos de uma curva de contorno simples em um corpo livre de forças aplicadas e com forças de corpo nulas.

3. Corpos isotrópicos

O tensor tensão τ_k^i se relaciona com o vetor deslocamento através de

$$\tau_k^i = 2G(\gamma_k^i + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_k^i\gamma_r^r), \quad (29)$$

$$\gamma_k^i = \frac{1}{2}g^{ir}(v_r|_k| + v_k|_r|), \quad (30)$$

quando o corpo é homogêneo e isotrópico, e as deformações são infinitesimais.

Considere-se agora um estado de deformação chamado *deformação plana* onde

$$v^\alpha = v^\alpha(\theta_1, \theta_2), \quad v^3 = 0 \quad (31)$$

Segue de (29), (30) e (4) que

$$\begin{cases} \gamma_{r3} = \gamma_r^3 = \gamma_3^r = \gamma^{r3} = 0 \\ \gamma_r^r = \gamma_\alpha^\alpha \\ \tau^{\alpha 3} = \tau_\alpha^3 = \tau_\alpha^3 = 0 \end{cases}, \quad (32)$$

com todos os outros componentes dos tensores tensão e deformação sendo independentes de x_3 , e que

$$\begin{cases} \tau_\beta^\alpha = 2G(\gamma_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_\beta^\alpha\gamma_\lambda^\lambda) \\ \gamma_\beta^\alpha = \frac{1}{2}a^{\alpha\lambda}(v_\alpha|_\beta| + v_\beta|_\alpha|) = \frac{1}{2}(v^\alpha|_\beta| + v_\beta|^\alpha|) \\ \tau_3^3 = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\gamma_\lambda^\lambda \end{cases} \quad (33)$$

sendo as derivadas covariantes relativas às duas variáveis θ_α com os símbolos de Christoffel dados por (5). Contraindo-se com respeito aos índices α, β nas duas primeiras equações de (33) tem-se

$$\tau_\alpha^\alpha = \frac{2G}{1-2\nu}\gamma_\alpha^\alpha = \frac{2G}{1-2\nu}v^\alpha|_\alpha| \quad (34)$$

logo, resolvendo para γ_{β}^{α} ,

$$2\mu\gamma_{\beta}^{\alpha} = \tau_{\beta}^{\alpha} - \eta\delta_{\beta}^{\alpha}\tau_{\lambda}^{\lambda} = \mu(\nu^{\alpha}|\beta| + \nu_{\beta}|\alpha|). \quad (35)$$

Ainda, de (33) e (34), $\tau_3^3 = \eta\tau_{\alpha}^{\alpha}$. (36)

A derivação covariante de (35) com respeito ao índice contravariante α fornece

$$\tau_{\beta}^{\alpha}|\alpha^{\beta} - \nu\delta_{\beta}^{\alpha}\tau_{\lambda}^{\lambda}|\alpha^{\beta} = G(\nu^{\alpha}|\beta_{\alpha} + \nu_{\beta}|\alpha^{\beta})$$

ou, como $\nu_{\beta}|\alpha^{\beta} = \nu^{\alpha}|\beta_{\alpha} = \nu^{\alpha}|\alpha^{\beta}$ e usando-se (34),

$$\tau_{\beta}^{\alpha}|\alpha^{\beta} - \nu\tau_{\alpha}^{\alpha}|\beta = 2G\nu^{\alpha}|\beta_{\alpha} = (1 - 2\nu)\tau_{\alpha}^{\alpha}|\beta$$

Logo $\tau_{\beta}^{\alpha}|\alpha^{\beta} = (1 - \eta)\tau_{\alpha}^{\alpha}|\beta$ (37)

Como τ^{α} é nulo e todos os outros componentes de tensão são independentes de θ_3 , pode-se usar os resultados da seção anterior obtendo-se

$$\tau_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}\phi|\gamma^{\rho} + \rho U\delta_{\beta}^{\alpha} \quad (38)$$

Desta equação segue que

$$\begin{cases} \tau_{\alpha}^{\alpha} = \phi|\alpha^{\alpha} + 2\rho U \\ \tau_{\beta}^{\alpha}|\alpha^{\beta} = \phi|\alpha^{\beta} + \rho U|\alpha^{\alpha} \\ \tau_{\beta}^{\alpha}|\alpha^{\beta} = \delta_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}\phi|\alpha^{\rho} + \rho U|\alpha^{\alpha} = \rho U|\alpha^{\alpha} \end{cases} \quad (39)$$

sendo o termo $\delta_{\beta\rho}^{\alpha\gamma}\phi|\alpha^{\rho}$ nulo desde que $\phi|\alpha^{\rho}$ seja simétrico em γ e α (ou β e ρ). Se agora forem substituídos os resultados (37) e (39) obtém-se a equação diferencial

$$\phi|\alpha^{\beta} + \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}U|\alpha^{\alpha} = 0 \quad (40)$$

para α . Também, de (36) e (39)

$$\tau_3^3 = \nu\tau_{\alpha}^{\alpha} = \nu(\phi|\alpha^{\alpha} + 2\rho U) \quad (41)$$

Na ausência de forças de corpo (40) se torna

$$\phi|\alpha^{\beta} = 0, \quad (42)$$

desde que $\eta \neq 1$, tal que nesse caso ϕ é uma função bi-harmônica plana. No caso geral,

$$\phi = -\frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}U' + \psi, \quad (43)$$

onde ψ é uma função escalar harmônica tal que

$$\psi \Big|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (44)$$

e onde U' é um escalar que é uma integral particular da equação

$$U' \Big|_{\alpha}^{\alpha} = U. \quad (45)$$

Com a finalidade de resolver os problemas de deformação plana deve-se encontrar uma função que satisfaça a equação bi-harmônica (44) e respeite as condições de contorno adequadas. Em muitos casos a solução de problemas é grandemente simplificada com o uso de variáveis complexas, introduzidas na próxima seção.

4. Variáveis complexas

Define-se as coordenadas complexas (z, \bar{z}) pelas fórmulas

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (46)$$

e representa-se os vetores de base covariante e contravariante respectivamente por \mathbf{A}_α e \mathbf{A}^α .

O vetor posição \mathbf{r} pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = z^\alpha \mathbf{A}_\alpha = z_\alpha \mathbf{A}^\alpha \quad (47)$$

Como complemento, usa-se a notação $z^3 = x_3$. Por transformações tensoriais

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{\partial z}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} x_2 = x_1 + ix_2 = z, \\ z^2 &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} x_2 = x_1 - ix_2 = \bar{z}, \end{aligned}$$

tal que as coordenadas complexas (z, \bar{z}) podem também ser designadas por z^α . Se A_α for um tensor métrico covariante em coordenadas complexas, então o quadrado do elemento de linha terá a forma

$$ds^2 = dx_i dx_i = dz d\bar{z} + dx_3 dx_3 = A_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta + dz^3 dz^3$$

$$\text{Logo } \begin{cases} A_{12} = \frac{1}{2}, & A^{12} = 2, & \sqrt{A} = \frac{1}{2}i \\ A_{11} = A_{22} = A^{11} = A^{22} = 0, & A = |A_{\alpha\beta}| \end{cases} \quad (48)$$

onde A^α é o tensor métrico contravariante em coordenadas complexas.

Nas coordenadas cartesianas retangulares x_i , designou-se os componentes do vetor deslocamento por $u_i (= u^i)$ e do tensor tensão por $t_{rs} (= t_s^r = t^{rs})$ e verificou-se que essas funções são também os componentes físicos de deslocamento e tensão. No sistema de coordenadas complexas z^i designa-se os componentes do vetor deslocamento por D^i , os componentes covariantes do vetor deslocamento por D_i e os tensores tensão contravariante, misto e covariante respectivamente por T^{rs}, T_s^r, T_{rs} . Trabalha-se principalmente com os componentes contravariantes D^i e T^{rs} , mas as formas associadas desses tensores podem ser obtidas imediatamente com o auxílio dos tensores métricos (48).

Os tensores D^i e T^r podem ser expressos em termos de u_i e t_{rs} respectivamente por transformações tensoriais adequadas:

$$\begin{cases} D^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} u^k \\ T^{rs} = \frac{\partial z^r}{\partial x^m} \frac{\partial z^s}{\partial x^n} t^{mn} \end{cases}, \quad (49)$$

ou, em suas formas completas,

$$D = D^1 = u_1 + i u_2, \quad \bar{D} = D^2 = u_1 - i u_2, \quad w = D^3 = u_3, \quad (50)$$

$$\begin{cases} T^{11} = t_{11} - t_{22} + 2i t_{12} \\ T^{22} = t_{11} - t_{22} - 2i t_{12} \\ T^{12} = t_{11} + t_{22} \\ T^{13} = t_{13} + i t_{23} \\ T^{23} = t_{13} - i t_{23} \\ T^{33} = t_{33} \end{cases}, \quad (51)$$

lembrando-se que $u^i = u_i, t^{rs} = t_{rs}$. De (50) e (51) verifica-se que quando os índices 1 e 2 são intercambiados em D^i e T^{rs} , as funções são substituídas por suas conjugadas complexas, e por conveniência, introduz-se a notação D, \bar{D} para D^1, D^2 respectivamente, onde a barra designa a conjugada complexa.

Em alguns problemas especiais as coordenadas x_i serão substituídas por

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = Z, \quad (52)$$

onde Z será usado em maiúscula para evitar confusão com a variável complexa

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (53)$$

A tensão t_{rs} será notada por $\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{xy}$ sendo que nestes componentes de tensão será escrito z e não Z visto não haver risco de confusão, e porque, na elasticidade bi-dimensional, normalmente só se utiliza os componentes σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} . Também serão substituídos $T^{12}, T^{11}, T^{22}, u_1$ e u_2 por $\Theta, \Phi, \bar{\Phi}, u_x$ e u_y respectivamente, tal que

$$\begin{cases} \Theta = T^{12} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \Phi = T^{11} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} \\ \Psi = T^{13} = \sigma_{xx} + i\sigma_{yz} \\ D = u_x + iu_y \end{cases} \quad (54)$$

Os tensores métricos que correspondem às coordenadas complexas (46) tem componentes constantes tal que a derivação covariante nesse sistema de coordenadas se reduz à diferenciação parcial. Em particular, as equações (35) e (44) se tornam

$$A^{\alpha\beta} U'_{,\alpha\beta} = U, \quad A^{\alpha\lambda} A^{\beta\mu} \Psi_{,\alpha\lambda\beta\mu} = 0,$$

e usando (48) elas podem ser escritas como

$$\boxed{4 \frac{\partial^2 U'}{\partial z \partial \bar{z}} = U,} \quad (55)$$

e

$$\boxed{\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z \partial \bar{z} \partial \bar{z} \partial z} = 0.} \quad (56)$$

A equação (56) pode ser integrada imediatamente obtendo-se

$$\psi = z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \bar{z}\Omega(z) + \omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z}), \quad (57)$$

onde $\Omega(z)$, $\omega(z)$ são funções arbitrárias da variável complexa z , as quais, operando com suas conjugadas complexas, tornam ψ uma função real. Frequentemente $\Omega(z)$, $\omega(z)$ serão referidas como potenciais complexos. A expressão completa para ϕ é

$$\phi = z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \bar{z}\Omega(z) + \omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z}) - \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}U'. \quad (58)$$

A forma contravariante de (38) é

$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\rho}\phi|_{\gamma\rho} + \rho U a^{\alpha\beta}, \quad (59)$$

e, de (33),
$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}a^{\alpha\beta}\nu\gamma|_{\gamma} + G(a^{\beta\gamma}\nu^{\alpha}|_{\gamma} + a^{\alpha\gamma}\nu^{\beta}|_{\gamma}) \quad (60)$$

Passando-se as equações (59) e (60) para coordenadas complexas obtêm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = T^{11} = -4\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} = 4G\frac{\partial D}{\partial z} \\ \Theta = T^{12} = 4\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} + 2\rho U = \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\bar{z}}\right) \end{array} \right. , \quad (61)$$

que, com (58) e (55) fornecem

$$G\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial^2 U'}{\partial z\partial\bar{z}} - z\bar{\Omega}''(\bar{z}) - \bar{\omega}''(\bar{z}),$$

$$G\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial\bar{z}}\right) = \frac{2\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial^2 U'}{\partial z\partial\bar{z}} + 2(1-2\nu)[\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})],$$

onde $\Omega'(z) = \frac{d\Omega(z)}{dz}$, $\bar{\Omega}'(\bar{z}) = \frac{d\bar{\Omega}(\bar{z})}{d\bar{z}}$, etc.

Essas equações podem ser integradas resultando

$$GD = \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial U'}{\partial z} + (3-4\nu)\Omega(z) - z\bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}) \quad (62)$$

De (58) e (61) o tensor tensão complexo é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{4\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial^2 U'}{\partial z\partial\bar{z}} - 4[z\bar{\Omega}''(\bar{z}) - \bar{\omega}''(\bar{z})] \\ \Theta = \frac{\rho U}{1-\nu} + 4[\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})] \end{array} \right. \quad (63)$$

Também, de (41) e (51),

$$T^{33} = t_{33} = \nu T^{12} = \eta\Theta \quad (64)$$

De (28) tem-se que, quando as forças de corpo são nulas, a curva de contorno simples do corpo é inteiramente livre de forças aplicadas se

$$\phi_{,1} = \phi_{,2} = 0.$$

Na notação complexa tal expressão é substituída pela condição $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, ou

$$\bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + \omega'(z) = 0. \tag{65}$$

Retornando ao caso em que forças de corpo estão presentes, pode-se expressar a força resultante (21) e o momento resultante (65), na origem, na notação complexa. Se a força resultante \mathbf{P} tiver componentes (X, Y) ao longo dos eixos x_1 e x_2 respectivamente, então uma simples transformação tensorial fornecerá

$$\mathbf{P} = (X + iY)\mathbf{A}_1 + (X - iY)\mathbf{A}_2 = P\mathbf{A}_1 + \bar{P}\mathbf{A}_2, \tag{66}$$

e os vetores de base \mathbf{A}_α serão constantes em módulo e direção. Também, de (12) e (16),

$$\boldsymbol{\chi} = 2i\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{A}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\mathbf{A}_2\right). \tag{67}$$

Se agora (21) for passada para coordenadas complexas encontrar-se-á

$$\mathbf{P} = 2i\mathbf{A}_1\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} - 2i\mathbf{A}_2\frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho i\mathbf{A}_1 \int_A^P U dz - \rho i\mathbf{A}_2 \int_A^P U d\bar{z}, \tag{68}$$

Logo
$$\begin{cases} P = X + iY = 2i\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} + \rho i \int_A^P U dz \\ = 2i[z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \Omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z}) - \frac{2i\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial U'}{\partial \bar{z}}] + \rho i \int_A^P U dz \end{cases} \tag{69}$$

Transformando (25) para coordenadas complexas tem-se

$$M = z\frac{\partial \phi}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} - \phi + \frac{1}{2}\rho \int_A^P U(zd\bar{z} + \bar{z}dz), \tag{70}$$

ou
$$\begin{cases} M = z\bar{z}[\Omega(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})] + z\omega'(z) + \bar{z}\bar{\omega}'(\bar{z}) - \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z}) + \\ + \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu}\left(U' - z\frac{\partial U'}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial U'}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{1}{2}\rho \int_A^P U(zd\bar{z} + \bar{z}dz). \end{cases} \tag{71}$$

Em muitos problemas as tensões e os deslocamentos devem ser biunívocos, e, de (62) e (63), vê-se que as condições para isso são

$$\begin{cases} [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})]_A^A = 0 \\ [z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \omega'(z)]_A^A = 0 \\ [(3 - 4\nu)\Omega(z) - z\bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z})]_A^A = 0 \end{cases}, \quad (72)$$

desde que a integral U' juntamente com suas derivadas superiores à segunda ordem sejam biunívocas. Em (72) os colchetes $[\]_A^A$ indicam que as funções internas percorrem todo o contorno no sentido positivo convencional, mantendo a área percorrida à esquerda, sendo que o contorno envolve inteiramente o corpo. Derivando a última equação de (72) vê-se que as três condições podem ser substituídas por

$$\begin{cases} [\Omega'(z)]_A^A = 0, \quad [\omega''(z)]_A^A = 0 \\ (3 - 4\nu)[\Omega(z)]_A^A = [\bar{\omega}'(\bar{z})]_A^A \end{cases}. \quad (73)$$

Quando essas condições para tensões e deslocamentos biunívocos são satisfeitas, as equações (69) para P e (71) para M , quando aplicadas a um contorno, se reduzem a

$$\begin{cases} P = 8i(1 - \nu)[\Omega(z)]_A^A - 2\rho \int_S \frac{\partial U}{\partial z} dS \\ M = [z\omega'(z) + \bar{z}\bar{\omega}'(\bar{z}) - \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z})]_A^A + \rho i \int_S \left(\bar{z} \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) dS \end{cases}, \quad (74)$$

assumindo-se que U satisfaz as condições suficientes para a aplicação do teorema de Stokes, estendendo-se a integral em (69) por toda a área fechada pelo contorno.

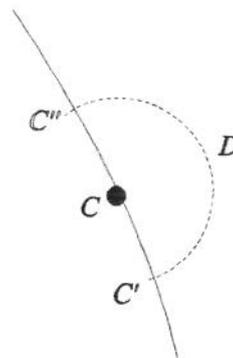


Fig. I.3 - Ponto de singularidade no contorno

Até agora assumiu-se que $\frac{\partial\phi}{\partial z}, \frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}}$ são contínuas em todo o corpo elástico. Se essas funções tiverem descontinuidades finitas num ponto C do contorno mas mantiverem-se biunívocas e contínuas na vizinhança desse ponto no corpo, então C será um ponto de aplicação de uma força concentrada. Se uma curva indefinidamente pequena $C'DC''$ do corpo (ver figura) for cortada então a força resultante atuando em $C'DC''$ se tornará, no limite,

$$P_C = X_C + iY_C = 2i \left[\frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}} \right]_{C'}^{C''} = 2i [z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \Omega(z) + \bar{\omega}'(\bar{z})]_{C'}^{C''}, \quad (75)$$

assumindo-se que as forças de corpo não provocam descontinuidade em C . Ainda, se ϕ for contínua em C não existe momento concentrado neste ponto desde que, de (70),

$$M = \left[z \frac{\partial\phi}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial\phi}{\partial \bar{z}} - \phi \right]_{C'}^{C''} = \frac{1}{2}i \{ z\bar{P}_C - \bar{z}P_C \} = x_C Y_C - y_C X_C,$$

tal que M é o momento da força (X_C, Y_C) sobre a origem.

5. Transformação conforme

A utilidade da solução em variáveis complexas para os problemas em deformação plana pode ser estendida através da transformação conforme. Para esse propósito supõe-se que as curvas θ_α formam um sistema ortogonal que pode ser obtida por uma transformação conforme de algum sistema ortogonal conhecido (ou seja, as curvas x_α) e toma-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \zeta^1 = \theta_1 + i\theta_2, \quad \bar{\zeta} = \zeta^2 = \theta_1 - i\theta_2, \quad \xi = \theta_1, \quad \eta = \theta_2 \\ \zeta^3 = \theta_3 = x_3 = z^3, \quad z = z(\zeta), \quad \frac{dz}{d\zeta} = J e^{i\varepsilon} \end{array} \right., \quad (76)$$

onde J e ε são reais. As coordenadas (ξ, η) são usadas ao invés de (θ_1, θ_2) por conveniência. O quadrado do elemento de linha se torna

$$ds^2 = J^2 d\zeta^1 d\zeta^2 + d\zeta^3 d\zeta^3 = J^2 (d\theta^1 d\theta^1 + d\theta^2 d\theta^2) + dz^3 dz^3. \quad (77)$$

Os tensores métricos $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$ que correspondem às curvas θ_α têm, portanto, os valores

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = J^2, & a_{12} = 0, & a = J^4 \\ a^{11} = a^{22} = \frac{1}{J^2}, & a^{12} = 0 \end{cases} \quad (78)$$

O vetor deslocamento e o tensor tensão contravariantes que correspondem às coordenadas complexas ζ^i são designados por

$$V^1 = V, \quad V^2 = \bar{V}, \quad V^3 = w$$

e Γ^{rs} respectivamente, tal que

$$V^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \theta^k} v^k, \quad \Gamma^{rs} = \frac{\partial \zeta^r}{\partial \theta^m} \frac{\partial \zeta^s}{\partial \theta^n} \tau^{mn}. \quad (79)$$

Logo $V^1 = v^1 + iv^2, \quad V^2 = v^1 - iv^2, \quad V^3 = v^3,$ (80)

$$\begin{cases} \Gamma^{11} = \tau^{11} - \tau^{22} + 2i\tau^{12} \\ \Gamma^{22} = \tau^{11} - \tau^{22} - 2i\tau^{12} \\ \Gamma^{12} = \tau^{11} + \tau^{22} \\ \Gamma^{13} = \tau^{13} + i\tau^{23} \\ \Gamma^{23} = \tau^{13} - i\tau^{23} \\ \Gamma^{33} = \tau^{23} \end{cases} \quad (81)$$

Transformações tensoriais fornecem

$$D^i = \frac{\partial z^i}{\partial \zeta^k} V^k, \quad T^{rs} = \frac{\partial z^r}{\partial \zeta^m} \frac{\partial z^s}{\partial \zeta^n} \Gamma^{mn}, \quad (82)$$

tal que $\begin{cases} D = J e^{i\epsilon} V^1 = J e^{i\epsilon} V, \quad \bar{D} = J e^{-i\epsilon} V^2 = J e^{-i\epsilon} \bar{V} \\ \Phi = T^{11} = J^2 e^{2i\epsilon} \Gamma^{11}, \quad \bar{\Phi} = T^{22} = J^2 e^{-2i\epsilon} \Gamma^{22}, \quad T^{33} = \tau^{33} \\ \Theta = T^{12} = J^2 \Gamma^{12}, \quad \Psi = T^{13} = J e^{i\epsilon} \Gamma^{13}, \quad \bar{\Psi} = T^{23} = J e^{-i\epsilon} \Gamma^{23} \end{cases}$ (83)

Os componentes físicos da tensão com referência às curvas θ_α , notados por σ_{ik} , são dados por

$$\sigma_{ik} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{g^{ii}}} \tau^{ik}, \quad (84)$$

e portanto, usando (78) e (4),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} = \sigma_{11} = J^2 \tau^{11}, \quad \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{22} = J^2 \tau^{22}, \quad \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{12} = J^2 \tau^{12} \\ \sigma_{\xi z} = \sigma_{13} = J^2 \tau^{13}, \quad \sigma_{\eta z} = \sigma_{23} = J^2 \tau^{23}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33} = \tau^{33} \end{aligned} \right\}, \quad (85)$$

onde os sufixos ξ, η, z são normalmente utilizados ao invés de 1, 2, 3 em aplicações onde o sistema de coordenadas é (ξ, η, Z) . De (54), (81), (83) e (85) tem-se que

$$\Theta' = \Theta, \quad \Phi' = e^{-2i\varepsilon}\Phi, \quad \Psi' = e^{-i\varepsilon}\Psi, \quad (86)$$

$$\text{onde } \begin{cases} \Theta' = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} \\ \Phi' = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta} + 2i\sigma_{\xi\eta} \\ \Psi' = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \sigma_{\xi z} + i\sigma_{\eta z} \end{cases} \quad (87)$$

Finalmente, nota-se os componentes físicos de deslocamento ao longo das curvas θ_1, θ_2 (ou ξ, η) por u_ξ, u_η tal que

$$u_\xi = v^1 \sqrt{g_{11}} = Jv^1, \quad u_\eta = v^2 \sqrt{g_{22}} = Jv^2. \quad (88)$$

As equações (50), (80), (83) e (88) então fornecem

$$u_\xi + iu_\eta = JV^1 = e^{-i\varepsilon}D = e^{-i\varepsilon}(u_x + iu_y). \quad (89)$$

Os componentes físicos de tensão e deslocamento relativos às curvas θ_α podem agora ser expressos em termos de funções complexas. Se

$$\Omega(z) = f(\zeta), \quad \omega(z) = g(\zeta),$$

então, de (62), (63), (87), (88) e (89),

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = \frac{\rho U}{1-\nu} + 4\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})\} = \frac{\rho U}{1-\nu} + 4\{f'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz} + \bar{f}'(\bar{\zeta})\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta} + 2i\sigma_{\xi\eta} &= \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \left\{ \frac{4\rho(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^2 U'}{\partial \bar{z} \partial z} - 4z\bar{\Omega}''(\bar{z}) - 4\bar{\omega}''(\bar{z}) \right\} \\ &= \frac{4\rho(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \left\{ \frac{\partial U'}{\partial \bar{z}} \right\} - 4 \frac{d\zeta}{dz} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left\{ z \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} f'(\bar{\zeta}) + \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} g'(\bar{\zeta}) \right\} \end{aligned} \quad (91)$$

$$G(u_\xi + iu_\eta) = \sqrt{\frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}}} \left\{ \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\partial U'}{\partial \bar{z}} + (3-4\nu)f(\zeta) - z \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} f'(\bar{\zeta}) - \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} g'(\bar{\zeta}) \right\} \quad (92)$$

De (83), (94) e (95) a força resultante que atua no arco AP de uma curva qualquer é

$$\text{dada por } \mathbf{P} = - \int_A^P \varepsilon_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda d\theta^\beta. \quad (93)$$

Se \mathbf{A}_μ forem os vetores de base covariantes relativos às coordenadas complexas z, \bar{z} então

$$\mathbf{a}_\lambda = \mathbf{A}_\mu \frac{\partial z^\mu}{\partial \theta^\lambda}, \quad (94)$$

tal que
$$\mathbf{P} = - \int_A^P \varepsilon_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\lambda} \frac{\partial z^\mu}{\partial \theta^\lambda} \mathbf{A}_\mu d\theta^\beta .$$

Logo, usando (66),

$$P = X + iY = - \int_A^P \varepsilon_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\lambda} \frac{\partial z^1}{\partial \theta^\lambda} d\theta^\beta . \quad (95)$$

Adaptando-se as coordenadas θ_α ao sistema ortogonal (ξ, η) definido em (76) e usando-se

$$(85) \quad P = - \int_A^P \left\{ \left(\sigma_{\xi\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \sigma_{\xi\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) d\eta - \left(\sigma_{\xi\eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \sigma_{\eta\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) d\xi \right\} . \quad (96)$$

Em particular, a força exercida no arco da curva coordenada $\xi = \text{constante}$ se torna

$$P(\eta) = i \int_A^P (\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\xi\eta}) \frac{dz}{d\eta} d\eta , \quad (97)$$

pois, nesta curva, $\frac{\partial z}{\partial \xi} = -i \frac{\partial z}{\partial \eta}$.

6. Propriedades dos potenciais complexos para corpos isotrópicos

Conforme mostrado, se o campo de tensões for dado, a parte real de $\Omega'(z)$ será conhecida e portanto $\Omega'(z)$ ficará determinada a menos de uma constante puramente imaginária iC ; e também $\Omega(z)$ a menos dos termos adicionais

$$iCz + \alpha + i\beta .$$

Segue que $\omega''(z)$ é completamente determinada como também $\omega(z)$ exceto pelos termos

$$(\alpha' + i\beta')z + \alpha'' + i\beta'' .$$

Substituindo-se $\Omega(z)$ por $\Omega(z) + iCz + \alpha + i\beta$

e $\omega(z)$ por $w(z) + (\alpha' + i\beta')z + \alpha'' + i\beta''$,

o sistema de tensões permanece inalterado, mas, de (62),

$$GD = (GD)_{original} + 4(1 - \nu)iCz - \alpha' + i\beta' + (3 - 4\nu)(\alpha + i\beta) , \quad (98)$$

com o deslocamento adicional representando um deslocamento de corpo rígido. Se os deslocamentos forem dados em todos os pontos, nem todas as cinco constantes $C, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ estarão disponíveis e somente um dos pares α, β e α', β' poderá ser escolhido arbitrariamente.

Quando a região S ocupada pelo corpo (bi-dimensional) é finita e simplesmente conectada, então pode-se supor que o estado de tensões é tal que $\Omega(z), \omega(z)$ são holomórficas na região aberta S ; as tensões e os deslocamentos serão, então, biunívocos. Se S for multiplamente conectada, pode-se supor S limitada por um ou mais contornos suaves não-interceptantes L_0, L_1, \dots, L_n onde L contem todos os outros. O contorno L_0 pode estar ausente (ou seja, pode ser reduzido a um ponto no infinito), e neste caso, a região S será infinita com certos contornos L_1, L_2, \dots, L_n como fronteiras internas. Como deseja-se que as tensões e deslocamentos sejam biunívocas, então, devido (73), deve-se assumir que

$$\Omega'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k + ib_k}{2\pi(z-z_k)} + \Omega'_0(z),$$

onde o ponto z_k está dentro do contorno L_k (e, portanto, fora de S) e onde $\Omega_0(z)$ é holomórfica em S , exceto provavelmente no infinito. E a_k e b_k são constantes reais. Logo

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) \ln(z - z_k) + \Omega_0(z).$$

Ao redor de algum contorno L'_k , que contém L_k e não corta os demais contornos, $\Omega(z)$ cresce de $i(a_k + ib_k)$. De (73) assume-se que

$$\omega'(z) = -\frac{3-4\nu}{2\pi} \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) \ln(z - z_k) + \omega'_0(z),$$

onde $\omega'_0(z)$ é holomórfica em S exceto possivelmente no infinito.

Fazendo-se os contornos L'_k tenderem aos contornos L_k excetuando-se os pontos de descontinuidade de $\Omega(z), \Omega'(z), \omega'(z)$ em L_k (onde forças isoladas podem agir), que são

excluídos por pequenas curvas que tendem a zero (ver figura I.3). As forças resultantes exercidas nos contornos L_k , dadas por (74), são

$$P_k = X_k + iY_k = -8(1 - \nu)(a_k + ib_k),$$

quando as forças de corpo estão ausentes, e portanto

$$\begin{cases} \Omega(z) = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)} \sum_{k=1}^n P_k \ln(z - z_k) + \Omega_0(z) \\ \omega'(z) = \frac{3-4\nu}{16\pi(1-\nu)} \sum_{k=1}^n \bar{P}_k \ln(z - z_k) + \omega'_0(z) \end{cases} \quad (99)$$

Quando a região S é infinita, então, para $|z|$ suficientemente grande,

$$\Omega(z) = -\frac{P \ln z}{16\pi(1-\nu)} + \phi_0(z),$$

$$\omega'(z) = \frac{(3-4\nu)P \ln z}{16\pi(1-\nu)} + \psi'_0(z),$$

onde $P = X + iY = \sum_{k=1}^n P_k$, (100)

e (X, Y) é a força resultante que age em todas as fronteiras L_1, L_2, \dots, L_n . As funções $\phi_0(z)$ e $\psi'_0(z)$ indicam funções holomórficas que, para $|z|$ suficientemente grande, podem ser desenvolvidas em séries de Laurent. Se as tensões forem mantidas limitadas no infinito,

$$\phi_0(z) = (B + iC)z + \alpha + i\beta + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{z} + \dots,$$

$$\psi'_0(z) = (B' + iC')z + \alpha' + i\beta' + \frac{\alpha'_1 + i\beta'_1}{z} + \dots$$

Assim, para grandes valores de $|z|$,

$$\begin{cases} \Omega(z) = (B + iC)z - \frac{P \ln z}{16\pi(1-\nu)} + \alpha + i\beta + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right) \\ \omega'(z) = (B' + iC')z - \frac{(3-4\nu)\bar{P} \ln z}{16\pi(1-\nu)} + \alpha' + i\beta' + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right) \end{cases} \quad (101)$$

e, de (63), na ausência de forças de corpo,

$$\Theta = 8B = N_1 + N_2, \quad \Phi = -4(B' - iC') = (N_1 - N_2)e^{2i\alpha},$$

onde N_1, N_2 são as tensões principais no infinito e α é o ângulo entre N_1 e o eixo Ox .

Se ω_0 for uma rotação no infinito,

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{|z| \rightarrow \infty} \Rightarrow \omega_0 = \frac{4(1-\nu)C}{G}. \quad (102)$$

Observa-se que os deslocamento somente são limitados no infinito se

$$B = C = B' = C' = X = Y = 0,$$

e portanto $\Omega(z), \omega'(z)$ são holomórficas no infinito. Os deslocamentos são ilimitados no infinito se a resultante das forças nas fronteiras não for nula.

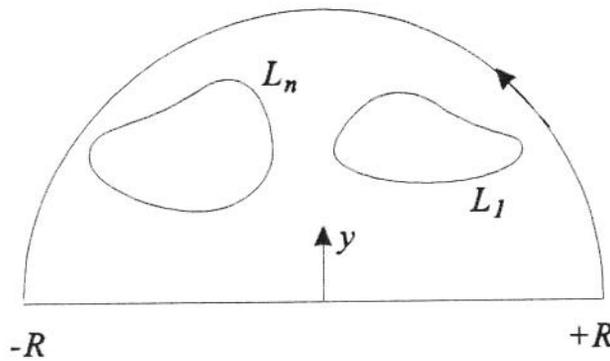


Fig. I.4 - Semi-plano limitado internamente por contornos suaves não-interceptantes

Se as tensões não forem limitadas no infinito mas possuírem valores conhecidos, pode-se adicionar termos adequados a $\Omega(z), \omega'(z)$, respectivamente

$$\sum_{r=2}^m (B_r + iC_r)z^r, \quad \sum_{r=2}^m (B'_r + iC'_r)z^r.$$

Quando a região S é limitada por uma curva simples fechada L , e se estende ao infinito, então, se as tensões e a rotação forem nulas no infinito,

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{P}{16\pi(1-\nu)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''(z) = -\frac{(3-4\nu)\bar{P}}{16\pi(1-\nu)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \quad (103)$$

para grandes valores de $|z|$.

Os resultados (101) e (104) não se mantêm, em geral, se parte da fronteira da região S estiver na parte finita do plano e o restante se estender ao infinito. Por exemplo, suponha-se que S é limitada internamente pelos contornos L_1, L_2, \dots, L_n e externamente pelo eixo real $y=0$, de $x=-R$ a $x=R$, e o semicírculo $|z|=R$ no semi-plano superior, onde $R \rightarrow \infty$

(figura anterior). Suponha-se que a tensão resultante sobre L_1, L_2, \dots, L_n e o eixo real de $x = -R$ a R é $P = X + iY$, então a tensão resultante exercida sobre o semicírculo $|z| = R$ é $-P$ quando $R \rightarrow \infty$. Para valores elevados de $|z|$, assume-se que

$$\Omega'(z) = \frac{A+iE}{2\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega''(z) = -\frac{A+iE}{2\pi z^2} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

$$\omega''(z) = \frac{A'+iE'}{2\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

quando as tensões de rotação desaparecem no infinito. Se, ainda, alguma tensão aplicada à fronteira de S ao longo do eixo real for $\mathbf{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, então

$$x\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(x) + x\bar{\Omega}''(x) + \omega''(x)\} \rightarrow 0,$$

quando $|x| \rightarrow \infty$, tal que $A + iE + A' - iE' = 0$ ou $A' = -A$, $E' = E$.

Logo, para altos valores de $|z|$,

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases} \quad (104)$$

IV. Problemas planos para corpos isotrópicos

No capítulo anterior foi desenvolvida a teoria de deformação plana para corpos isotrópicos. Green & Zerna mostram que a teoria para tensões planas generalizadas é similar de forma que ela pode ser generalizada para problemas planos. No presente capítulo são discutidos alguns problemas especiais para deformação plana com ênfase na Mecânica de Fraturas. Outros casos podem ser encontrados nas referências citadas neste apêndice.

1. Fórmulas para deformação plana e tensão plana generalizada.

Se (x,y) forem coordenadas cartesianas retangulares e $z = x + iy$, temos que, quando as forças de corpo são nulas,

$$\mu D = \mu(u_x + iu_y) = \kappa\Omega(z) - z\bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}), \quad (1)$$

$$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})\}, \quad (2)$$

$$\Phi = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = -4\{z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{\omega}''(\bar{z})\}, \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xy} = 2\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{\omega}''(\bar{z})\}, \quad (4)$$

$$P = X + iY = 2i\{z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \Omega(z) + \bar{\omega}'(\bar{z})\}, \quad (5)$$

$$M = z\bar{z}\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})\} + z\omega'(z) + \bar{z}\bar{\omega}'(\bar{z}) - \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z}), \quad (6)$$

onde, para deformação plana, $\kappa = 3 - 4\nu$. (7)

Os problemas de tensão plana generalizada são adaptados às equações acima considerando-se

$$\kappa = 3 - 4\sigma = \frac{3-\nu}{1+\nu}. \quad (8)$$

de forma que, por exemplo, σ_{xx} é a força real por unidade de área em deformação plana, mas σ_{xx} é força por unidade de comprimento da curva $x = \text{constante}$ no plano (x,y) em tensão plana generalizada.

Considerando-se uma transformação conforme dada por

$$z = z(\sigma), \quad \sigma = e^\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (9)$$

onde (ξ, η) são um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, então,

$$\mu(u_\xi + iu_\eta) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\sigma}}} \left\{ \kappa f(\sigma) - z \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} f'(\bar{\sigma}) - \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} \bar{g}'(\bar{\sigma}) \right\}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \left\{ \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} f'(\bar{\sigma}) + \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} \bar{g}'(\bar{\sigma}) \right\}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta} + 2i\sigma_{\xi\eta} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}) = -4 \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\sigma}} \left\{ z \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} f'(\bar{\sigma}) + \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{z}} \bar{g}'(\bar{\sigma}) \right\}, \quad (12)$$

onde $\Omega(z) = f(\sigma), \quad \omega(z) = g(\sigma). \quad (13)$

A introdução das variáveis complexas σ e ζ é conveniente em aplicações onde se transforma uma região para o interior, ou exterior, de um círculo unitário no plano σ . Tem-se, ainda, que

$$P(\eta) = i \int_A^P (\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\xi\eta}) \frac{dz}{d\eta} d\eta \quad (14)$$

na curva $\xi = \text{constante}$, ou

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta) = i(\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\xi\eta}) \frac{dz}{d\eta}. \quad (15)$$

Em particular, em coordenadas polares (r, θ) dadas por

$$z = \sigma = e^\zeta = re^{i\theta}, \quad r = e^\xi, \quad \eta = \theta, \quad \frac{dz}{d\sigma} = 1, \quad (16)$$

então $\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \{ \kappa \Omega(z) - z \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}) \}, \quad (17)$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \{ \Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) \}, \quad (18)$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = -4 \{ \bar{z} \bar{\Omega}''(\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{2} \bar{\omega}''(\bar{z}) \}, \quad (19)$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = 2 \{ \Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{z} \bar{\Omega}''(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{2} \bar{\omega}''(\bar{z}) \}, \quad (20)$$

$$P(\theta) = - \int_A^P (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta}) r e^{i\theta} d\theta, \quad (22)$$

sendo esta última verdadeira sobre as curvas $r = \text{constante}$.

Quando a região S ocupada pelo corpo se estende ao infinito e é limitada internamente por uma ou mais curvas fechadas não-interceptantes localizadas inteiramente na parte finita do plano, para grandes valores de $|z|$,

$$\begin{cases} \Omega'(z) = B + iC - \frac{P}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''(z) = B' + iC' + \frac{\kappa\bar{P}}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \quad (22)$$

quando as tensões são limitadas no infinito, onde

$$8B = N_1 + N_2, \quad 4(B' + iC') = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha} \quad (23)$$

Em (23), N_1, N_2 são os valores das tensões principais no infinito e α é o ângulo entre N_1 e o eixo x . Também $\frac{(\kappa+1)C}{G}$ é a rotação no infinito e $P = X + iY$ é a força resultante que atua sobre todas as fronteiras internas.

Quando tensões e rotação desaparecem no infinito

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''(z) = \frac{\kappa\bar{P}}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \quad (24)$$

Os resultados acima não são verdadeiros quando uma parte da fronteira da região S se estende ao infinito. Supondo-se S como o semi-plano, $y > 0$ ou $y < 0$, e $P = X + iY$ como a força resultante atuando na fronteira $0x$, estando as outras fronteiras da parte finita do plano, então, quando tensões e rotação desaparecem no infinito, e quaisquer tensões aplicadas na fronteira $0x$ são $\mathbf{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ para grandes valores de $|x|$,

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \quad (25)$$

2. Troca de origem

Se a origem for trocada do ponto $z = 0$ para $z_1 \equiv z - c = 0$, o deslocamento D será dado pelas duas expressões

$$\mu D = \kappa \Omega(z) - z \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}) = \kappa \Omega_1(z_1) - z_1 \bar{\Omega}'_1(\bar{z}_1) - \bar{\omega}'_1(\bar{z}_1),$$

onde $\Omega_1(z_1), \omega_1(z_1)$ são os potenciais complexos correspondentes a origem $z = c$. Logo

$$\kappa \{ \Omega(z) - \Omega_1(z_1) \} - z \{ \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\Omega}'_1(\bar{z}_1) \} - \bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'_1(\bar{z}_1) - c \bar{\Omega}'_1(\bar{z}_1) = 0,$$

$$\text{tal que } \Omega(z) \equiv \Omega_1(z_1) \quad \omega(z) \equiv \omega_1(z_1) - \bar{c} \Omega_1(z_1). \quad (26)$$

3. Força concentrada e momento em placa infinita

Suponha-se que uma força concentrada $P = X + iY$ e um momento M agindo num ponto considerado como origem em uma placa infinita. Se as tensões e a rotação devido a estas desaparecerem no infinito, a fórmula (22) sugere que se assuma, para os potenciais, os valores

$$\Omega(z) = -\frac{P \ln z}{4\pi(\kappa+1)}, \quad \omega(z) = \frac{\kappa \bar{P} z \ln z}{4\pi(\kappa+1)} + A \ln z.$$

Envolvendo-se a origem por uma curva fechada qualquer verifica-se de (5) e (6) a existência de uma força P e um momento M na origem se

$$2\pi i(\bar{A} - A) = M.$$

O termo contendo a parte real de A não contribui para a força ou o momento na origem e pode-se, portanto, tomar os potenciais complexos para a força P e o momento M como

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(z) = -\frac{P \ln z}{4\pi(\kappa+1)} \\ \omega(z) = \frac{\kappa \bar{P} z \ln z}{4\pi(\kappa+1)} + \frac{i M \ln z}{4\pi} \end{array} \right. \quad (27)$$

As tensões e rotação correspondentes a estes potenciais desaparecem no infinito, mas o deslocamento se torna infinito lá. Também as tensões e deslocamento são infinitos na origem.

Usando (27), para uma força $P = X + iY$ e um momento M no ponto $z = c$ em uma placa infinita tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(z) = -\frac{P \ln(z-c)}{4\pi(\kappa+1)} \\ \omega(z) = \frac{\kappa \bar{P} (z-c) \ln(z-c)}{4\pi(\kappa+1)} + \frac{P \bar{c} \ln(z-c)}{4\pi(\kappa+1)} + \frac{iM \ln(z-c)}{4\pi} \end{array} \right. \quad (28)$$

4. Potenciais complexos gerais para placa infinita

Suponha-se que uma placa infinita recebe a ação de um número finito n de forças isoladas $P_r = X_r + iY_r$ e momentos M_r ($r = 1, 2, \dots, n$) nos pontos $z = z_r$. Não existe nenhuma outra singularidade de tensões ou deslocamentos na parte finita da placa, e no infinito a distribuição de tensões é suposta conhecida.. Se os potenciais complexos forem notados por $\Omega_0(z), \omega_0(z)$, tem-se, além dos termos devido a deslocamentos de corpos rígido,

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{4\pi(\kappa+1)} \sum_{r=1}^n P_r \ln(z - z_r) + \sum_{r=1}^n A_r z^r, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \omega_0(z) = & \frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)} \sum_{r=1}^n \bar{P}_r \ln(z - z_r) + \\ & + \frac{1}{4\pi(\kappa+1)} \sum_{r=1}^n P_r \bar{z}_r \ln(z - z_r) + \frac{i}{4\pi} \sum_{r=1}^n M_r \ln(z - z_r) + \sum_{r=2}^m B_r z^r, \end{aligned} \quad (30)$$

onde as constantes (complexas) A_r, B_r têm valores conhecidos. Por exemplo, de (23), se o estado de tensões no infinito for uniforme e a rotação desaparece lá,

$$8\bar{A}_1 = 8A_1 = N_1 + N_2, \quad 8B_2 = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \quad (31)$$

com as demais constantes A_r, B_r sendo nulas.

5. Forças isoladas na fronteira

Suponha-se que uma força concentrada $P = X + iY$ age no ponto C ($z = c$) na fronteira do corpo. Deseja-se determinar a singularidade dos potenciais complexos devido a esta força e portanto assume-se que eles contêm os termos

$$\Omega(z) = \alpha \ln(z - c), \quad \omega(z) = \beta(z - c)\ln(z - c) + \gamma \ln(z - c),$$

onde α, β, γ são constantes complexas. Conforme visto anteriormente, se a função tensão ϕ for contínua em $z = c$, não existirá momento isolado neste ponto. Portanto

$$\alpha \bar{c} + \gamma = 0.$$

A descontinuidade em $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ em C deve ser finita e, aplicando (5) à curva $C'DC''$ extraída do material, enquanto a curva se reduz a zero tal que C se posiciona entre C' e C'' , encontra-se

$$\alpha + \bar{\beta} = 0, \quad P = -2\pi(\alpha - \bar{\beta}).$$

Assim as singularidades dos potenciais complexos são

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(z) = -\frac{P}{4\pi} \ln(z - c) \\ \omega(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi}(z - c)\ln(z - c) + \frac{P\bar{c}}{4\pi} \ln(z - c) \end{array} \right. \quad (32)$$

Se as forças isoladas P agirem no ponto $z = c$ na fronteira de um furo feito numa placa infinita, então, devido a (22) para $\Omega(z), \omega'(z)$ no infinito, os potenciais complexos devem conter os termos

$$\left. \begin{array}{l} \Omega(z) = -\frac{P \ln z}{4\pi(\kappa+1)} - \frac{P}{4\pi} \ln \frac{z-c}{z} \\ \omega(z) = \frac{\kappa \bar{P} z \ln z}{4\pi(\kappa+1)} + \frac{\bar{P} z}{4\pi} \ln \frac{z-c}{z} + \frac{P\bar{c} - \bar{P}c}{4\pi} \ln \frac{z-c}{z} \end{array} \right\} \quad (33)$$

Quando uma força concentrada P age, na origem, sobre a fronteira da região semi-infinita $y \geq 0$, então, considerando-se $c = 0$ em (32), estes potenciais devem conter os termos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega(z) = -\frac{P}{4\pi} \ln z \\ \omega(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi} z \ln z \end{array} \right. \quad (34)$$

Entretanto, encontra-se para esse caso em (4)

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) + \frac{\bar{P}}{2\pi} \left(\frac{z}{z^2} - \frac{1}{\bar{z}} \right),$$

que desaparece em todos os pontos da fronteira $y = 0$, onde $\bar{z} = z$, exceto na origem. Os potenciais (34) portanto fornecem a distribuição de tensões devido a uma força concentrada P na origem da fronteira $y = 0$ de uma região semi-infinita livre de tensões.

Usando-se coordenadas polares encontra-se, a partir de (18) e (19), que

$$\begin{aligned} \pi r(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) &= -2F \cos(\theta - \varepsilon), \\ \pi r(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta}) &= -2F \cos(\theta - \varepsilon), \end{aligned}$$

onde $P = Fe^{i\varepsilon}$ é uma força de magnitude F agindo a um ângulo ε com o eixo x . Logo

$$\pi r\sigma_{rr} = -2F \cos(\theta - \varepsilon), \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0. \quad (35)$$

Quando uma distribuição genérica de tensões é dada ao longo da fronteira $y = 0$ de uma região semi-infinita, os potenciais complexos correspondentes podem ser encontrados por integração. Contudo, tal método não será considerado agora.

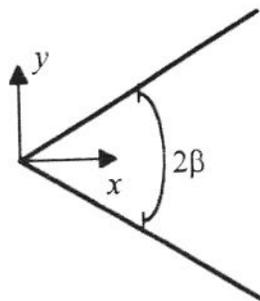


Fig 1.5 - Cunha infinita

Através de uma ligeira modificação nos potenciais complexos (34) pode-se resolver o problema para uma força concentrada $P = Fe^{i\varepsilon}$ atuando no vértice de uma cunha infinita limitada pelas retas $\theta = \pm\beta$ (ver figura). Assim, assumindo

$$\begin{cases} \Omega(z) = -\frac{L}{4\pi} \ln z \\ \omega(z) = \frac{\bar{L}}{4\pi} z \ln z \end{cases}, \quad (36)$$

onde L é uma constante, aplica-se (5) a uma circunferência de raio $r = \text{constante}$ na cunha de $\theta = -\beta$ a $\theta = \beta$ e obtêm-se

$$2L\beta + \bar{L} \sin 2\beta = \pi P,$$

$$2\bar{L}\beta + L \sin 2\beta = \pi \bar{P},$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} (L + \bar{L})(2\beta + \sin 2\beta) = 2\pi F \cos \epsilon \\ (L - \bar{L})(2\beta - \sin 2\beta) = 2\pi i F \sin \epsilon \end{cases} \quad (37)$$

Logo, de (18), (19), (36) e (37) tem-se

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{2F}{r} \left(\frac{\cos \theta \cos \epsilon}{2\beta + \sin 2\beta} + \frac{\sin \theta \sin \epsilon}{2\beta - \sin 2\beta} \right) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

e a solução é portanto satisfatória para uma cunha sem tensões aplicadas sobre suas arestas.

6. Extensão dos potenciais complexos para o semi-plano

Considere-se um corpo que ocupa o semi-plano superior $y > 0$, notado por região S^+ , cuja fronteira $y = 0$ do corpo será designada L . Define-se os potenciais complexos $\Omega(z)$, $\omega(z)$ que são holomórficos nesse plano exceto possivelmente no infinito. As funções

$$\bar{\Omega}(z) = \overline{\Omega(\bar{z})}, \quad \bar{\omega}(z) = \overline{\omega(\bar{z})},$$

são então holomórficas para pontos z pertencentes ao semi-plano inferior S^- , desde que quando z está em S^- , \bar{z} pertence a S^+ . Alternativamente, se

$$\Omega(z) = \Omega_1(x, y) + i\Omega_2(x, y),$$

$$\text{então} \quad \bar{\Omega}(z) = \Omega_1(x, -y) - i\Omega_2(x, -y).$$

Estende-se agora a definição de $\Omega(z)$ para todo o plano complexo através de

$$\Omega(z) = -z\bar{\Omega}'(z) - \bar{\omega}'(z) \quad (z \in S^+). \quad (39)$$

Esta extensão de $\Omega(z)$ para o semi-plano inferior é escolhida tal que cada função $\Omega(z)$ seja a continuação analítica de outra através das partes não carregadas da fronteira onde $P = X + iY = 0$ [ver (5)].

Se $z \in S^+ \Rightarrow \bar{z} \in S^-$ tal que, de (39),

$$\Omega(\bar{z}) = -\bar{z}\bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}) \quad (z \in S^+),$$

ou $\bar{\omega}'(\bar{z}) = -\Omega(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\Omega}'(\bar{z}) \quad (z \in S^+).$ (40)

Diferenciando-se em relação a \bar{z} ,

$$\bar{\omega}''(\bar{z}) = -\Omega'(\bar{z}) - \bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\Omega}''(\bar{z}) \quad (z \in S^+) \quad (41)$$

Através de (40) e (41) as fórmulas (1)-(5) se tornam, para $z \in S^+$,

$$\mu D = \kappa\Omega(z) + \Omega(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\bar{\Omega}'(\bar{z}), \quad (42)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})\}, \quad (43)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = 4\{\Omega'(\bar{z}) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\bar{\Omega}''(\bar{z})\}, \quad (44)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xy} = 2\{\Omega'(z) - \Omega'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Omega}''(\bar{z})\}, \quad (45)$$

$$P = X + iY = 2i\{\Omega(z) - \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Omega}'(\bar{z})\}. \quad (46)$$

Observe-se que

$$\mu \frac{\partial D}{\partial x} = \kappa\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\bar{\Omega}''(\bar{z}). \quad (47)$$

Quando as tensões e rotação desaparecem no infinito no semi-plano S^+ , tem-se de (25) que $\Omega'(z) = O(\frac{1}{z})$ em S^- no infinito, e portanto,

$$\Omega'(z) = O(\frac{1}{z}), \quad (48)$$

para valores grandes de $|z|$ em todo o plano $S^+ + S^-$.

7. Primeiro problema de valores de contorno para o semi-plano

Neste problema as tensões externas são dadas em todos os pontos do contorno L do semi-plano S^+ e pode-se dividir convenientemente o problema em duas partes. Na primeira supõe-se que todo o contorno L está livre de tensões e que a distribuição de tensões, com singularidades conhecidas, existe em S^+ tal que tensões e rotação são nulas no infinito. Supõe-se, portanto, que os potenciais complexos $\Omega_0(z)$, $\omega_0(z)$ definem o sistema de tensões que tem singularidades somente em S^+ e que é tal que

$$\begin{cases} \Omega'_0(z) = -\frac{P}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''_0(z) = \frac{\kappa P}{4\pi(\kappa+1)z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \quad (49)$$

para grandes valores de $|z|$. A seguir, procura-se os potenciais complexos $\Omega_1(z)$, $\omega(z)$ tal que os potenciais combinados

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z), \quad \omega(z) = \omega_0(z) + \omega_1(z), \quad (50)$$

anulem as tensões aplicadas em L e, para grandes $|z|$, de (25),

$$\begin{cases} \Omega'_0(z) = -\frac{P}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \omega''_0(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi z} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}. \quad (51)$$

Segue de (49) e (50) que $\Omega'_1(z)$ e $\omega''_1(z)$ são ambos $\mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ para grandes valores de $|z|$ em S^+ .

Se portanto a definição de $\Omega_1(z)$ for estendida de (39) para

$$\begin{cases} \Omega_1(z) = -z\bar{\Omega}'_1(z) - \bar{\omega}'_1(z) \\ \Omega'_1(z) = -\bar{\Omega}'_1(z) - z\bar{\Omega}''_1(z) - \bar{\omega}''_1(z) \end{cases} \quad (z \in S^-), \quad (52)$$

logo $\Omega'_1(z)$ será definido em todo o plano e é $\mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ no infinito. Também

$$\omega'_1(z) = -\bar{\Omega}_1(z) - z\Omega'_1(z) \quad (z \in S^+). \quad (53)$$

De (4), (45) e (50),

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = 2\{\Omega'_1(z) - \Omega'_1(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Omega}''_1(\bar{z})\} + 2\{\Omega'_0(z) + \Omega'_0(\bar{z}) + z\bar{\Omega}''_0(\bar{z}) + \bar{\omega}_0(\bar{z})\}. \quad (54)$$

Assumindo-se que $\lim_{y \rightarrow 0} y \bar{\Omega}''_1(\bar{z}) = \lim_{y \rightarrow 0} y \bar{\Omega}''_1(x - iy) = 0$ (55)

e que os limites $[\Omega_1'(x)]^+, [\Omega_1'(x)]^-$ existem em L , logo, se as tensões aplicadas em L forem nulas,

$$[\Omega_1'(x)]^+ - [\Omega_1'(x)]^- = -\Omega_0'(x) - \bar{\Omega}_0'(x) - x\bar{\Omega}_0''(x) - \bar{\omega}_0''(x) \quad (56)$$

para todos os pontos x em L . Da definição dos potenciais complexos, $\Omega_0(z)$, $\omega_0(z)$, e de (49), tem-se que o membro direito de (56) satisfaz as condições suficientes para se escrever a (única) solução $\Omega_1'(z)$ dessa equação, que desaparece no infinito, como

$$\Omega_1'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_0'(t) + \bar{\Omega}_0'(t) + t\bar{\Omega}_0''(t) + \bar{\omega}_0''(t)}{t-z} dt. \quad (57)$$

De (49) a integral (57), tomada ao longo do semicírculo infinito em S^+ ou em S^- , desaparece, podendo-se avaliá-la pela teoria de resíduos. A regularidade da função $\bar{\Omega}_0'(z) + z\bar{\Omega}_0''(z) + \bar{\omega}_0''(z)$ em S^+ e de $\bar{\Omega}_0'(z)$ em S^- é verificada, logo

$$\begin{cases} \Omega_1'(z) = -\bar{\Omega}_0'(z) - z\bar{\Omega}_0''(z) - \bar{\omega}_0''(z) & (z \in S^+) \\ \Omega_1'(z) = \Omega_0'(z) & (z \in S^-) \end{cases} \quad (58)$$

Tal solução pode ser escrita por inspeção de (56). Segue que

$$\begin{cases} \Omega_1(z) = -z\bar{\Omega}_0'(z) - \bar{\omega}_0'(z) & (z \in S^+) \\ \Omega_1(z) = \Omega_0(z) & (z \in S^-) \end{cases} \quad (59)$$

a menos de constantes não essenciais.

De (59) e (53) obtêm-se os potenciais (2) *completos* para o semi-plano S^+ como

$$\begin{cases} \Omega(z) = \Omega_0(z) - z\bar{\Omega}_0'(z) - \bar{\omega}_0'(z) \\ \omega'(z) = \omega_0'(z) - \bar{\Omega}_1'(z) - z\Omega_1'(z) = \omega_0'(z) - \bar{\Omega}_0(z) + z\bar{\Omega}_0'(z) + z^2\bar{\Omega}_0''(z) + z\bar{\omega}_0''(z) \end{cases} \quad (60)$$

Observe-se de (49) que $\Omega'(z)$, $\bar{\omega}''(z)$ têm a forma correta para valores elevados de $|z|$. A expressão completa para deslocamento e tensões agora segue de (1)-(3), e (60). Em particular, desde que as tensões aplicadas na borda sejam nulas, segue de (2) que o valor de σ_{xx} na borda é dado por

$$\sigma_{xx} = -4\{x\Omega_0''(x) + x\bar{\Omega}_0''(x) + \omega_0''(x) + \bar{\omega}_0''(x)\}. \quad (61)$$

Antes de se considerar aplicações para os resultados acima, a teoria é complementada resolvendo o problema para o semi-plano com uma dada distribuição de tensões sobre o contorno L e sem singularidades no semi-plano S^+ . Suponha-se que as tensões aplicadas são $O(\frac{1}{x^2})$ em L , e se as tensões e rotação desaparecerem no infinito então, para grandes valores de $|z|$, de (25), os potenciais complexos $\Omega(z)$, $\omega(z)$ serão dados por

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi z} + O(\frac{1}{z^2}) \\ \omega''(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi z} + O(\frac{1}{z^2}) \end{cases} \quad (62)$$

Na fronteira L assume-se que

$$\sigma_{xx} = p(x), \quad \sigma_{xy} = q(x), \quad (63)$$

onde $p(x)$, $q(x)$ e suas derivadas $p'(x)$, $q'(x)$ satisfazem a condição H (Hölder) no contorno L , e x^2p , x^2q , x^3p' , x^3q' satisfazem a condição H nas vizinhanças do ponto no infinito.

Dois métodos são indicados para a solução. No primeiro, adota-se a definição de $\Omega(z)$ em S^- como na seção anterior. Segue então de (62) que $\Omega'(z) = O(\frac{1}{z})$ em todo o plano, e, de (45),

$$[\Omega'(x)]^+ - [\Omega'(x)]^- = \frac{1}{2}\{p(x) - iq(x)\}, \quad (64)$$

dado que
$$\lim_{y \rightarrow 0} y \bar{\Omega}''(\bar{z}) = 0 \quad (65)$$

e desde que os limites $[\Omega'(x)]^+$, $[\Omega'(x)]^-$ existam. A solução desejada (e única) desse problema de valor de contorno é,

$$\Omega'(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t) - iq(t)}{t-z} dt \quad (66)$$

e as tensões e deslocamentos podem então ser encontrados de (42)-(44). Verifica-se que a condição (65) é satisfeita.

No segundo método de solução considera-se

$$\begin{cases} V(z) = 4\Omega'(z) + 2z\Omega''(z) + 2\omega''(z) \\ W(z) = 2z\Omega''(z) + 2\omega''(z) \end{cases}, \quad (67)$$

$$\text{tal que } \begin{cases} \Omega'(z) = \frac{1}{4}\{V(z) - W(z)\} \\ \omega''(z) = \frac{1}{2}W(z) - \frac{1}{4}z\{V'(z) - W'(z)\} \end{cases}, \quad (68)$$

e observa-se, de (4) e (63), que

$$\text{re } V(z) = p(x), \quad \text{im } W(z) = q(x) \quad (69)$$

no contorno L onde z é real. Também, de (25),

$$V(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad W(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (70)$$

para altos valores de $|z|$. Em (69) $\text{re } V(z)$ designa a parte real de $V(z)$, e $\text{im } W(z)$ designa a parte imaginária de $W(z)$. Segue de um resultado bastante conhecido que

$$V(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t) dt}{t-z}, \quad W(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(t) dt}{t-z} \quad (71)$$

De (2), (3), e (68).

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = V(z) - W(z) + \bar{V}(\bar{z}) - \bar{W}(\bar{z}) \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy} = -2W(z) + (z - \bar{z})\{V'(z) - W'(z)\} \end{cases}, \quad (72)$$

e, no contorno $y = 0$,

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = V(z) - W(z) + \bar{V}(\bar{z}) - \bar{W}(\bar{z}) \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy} = -2W(z) \end{cases}. \quad (73)$$

8. Força concentrada e momento em corpo semi-infinito

Se uma força concentrada $P = X + iY = Fe^{i\epsilon}$ e um momento concentrado M agirem no ponto $z = ib \in S^+$, então, de (28),

$$\begin{cases} \Omega_0(z) = -\frac{P \ln(z-ib)}{4\pi(\kappa+1)} \\ \omega_0(z) = \frac{\kappa \bar{P}(z-ib) \ln(z-ib)}{4\pi(\kappa+1)} - \frac{ibP \ln(z-ib)}{4\pi(\kappa+1)} + \frac{iM \ln(z-ib)}{4\pi} \end{cases} \quad (74)$$

A distribuição completa de tensões e deslocamento podem agora ser obtidas dos potenciais complexos (50) e (54). Restringindo a atenção ao valor da tensão na borda, tem-se, de (61),

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{\pi(x^2+b^2)} \left\{ \left(\frac{3-\kappa}{1+\kappa} b^2 - x^2 \right) xX - \left(b^2 - \frac{3-\kappa}{1+\kappa} x^2 \right) bY \right\} - \frac{4Mbx}{\pi(x^2+b^2)^2}. \quad (75)$$

Os resultados para distribuição contínua de tensões podem ser obtidos por integração.

9. Exemplos de tensões dadas na fronteira de corpo semi-infinito

EXEMPLO 1. Como um primeiro exemplo, considere-se o problema de uma distribuição uniforme de tensões normais e cisalhantes em $y = 0$ de $x = -a$ a $x = a$. Assim

$$\begin{cases} p(x) = -p, & q(x) = q \quad (|x| \leq a) \\ p(x) = 0, & q(x) = 0 \quad (|x| > a) \end{cases}, \quad (76)$$

onde p, q são constantes, e, de (71),

$$V(z) = \frac{ip}{\pi} \ln \frac{z-a}{z+a}, \quad W(z) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{z-a}{z+a}. \quad (77)$$

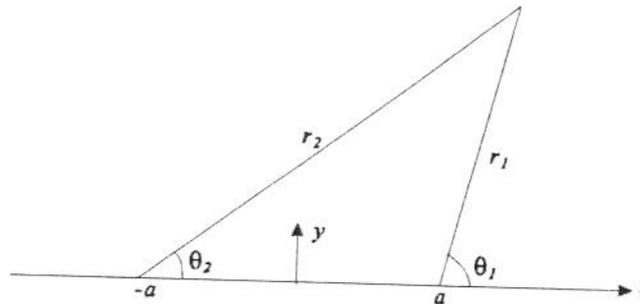


Fig. 1.6 - Coordenadas bipolares

Escrevendo-se $z - a = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + a = r_2 e^{i\theta_2}$ (ver figura), segue de (52) que

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -\frac{2p}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{2q}{\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = \left(\frac{ip+q}{\pi} \right) (e^{2i\theta_1} - e^{2i\theta_2}) - \frac{2q}{\pi} \left\{ \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_2 - \theta_1) \right\} \end{cases} \quad (78)$$

Estes resultados podem também ser obtidos de (66), (43), e (44). No caso especial em que q é nulo, resultados semelhantes podem ser conseguidos por outros métodos.

O caso limite quando $a \rightarrow 0$ e p, q tendem a infinito de forma que

$$2ap \rightarrow Y, \quad 2aq \rightarrow -X,$$

onde X, Y são constantes, é de algum interesse. De (77)

$$V(z) \rightarrow -\frac{iY}{\pi z}, \quad W(z) \rightarrow \frac{X}{\pi z},$$

e portanto (68) fornece

$$\Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi z}, \quad \omega''(z) = \frac{\bar{P}}{4\pi z},$$

o que concorda com os potenciais complexos (34) para uma força concentrada $P = X + iY$ na origem da fronteira

EXEMPLO 2. Neste exemplo supõe-se que a força cisalhante é nula tal que $q(x) = 0$, e

$$\begin{cases} p(x) = -\frac{Y}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} & (|x| \leq a) \\ = 0 & (|x| > a) \end{cases}, \quad (79)$$

onde Y é uma constante e é a pressão normal total exercida sobre a faixa considerada. Nesse caso $p(x)$ não satisfaz a condição H em $x = \pm a$, mas a fórmula (71) é ainda válida: logo $W = 0$ e

$$V(z) = \frac{iY}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-z)\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (80)$$

Por $\sqrt{a^2 - t^2}$ para $|t| < a$ deve-se entender uma quantidade positiva, e $\sqrt{a^2 - z^2}$ é o ramo, holomórfico no plano cortado ao longo de $(-a, a)$, que assume valores positivos no lado superior. Também, para grandes valores de $|z|$ esse ramo vale $-iz + O(1)$. A integral

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-z)\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{a^2 - t^2}},$$

efetuada no sentido horário circula um contorno Δ que cerca o corte. Como a integral de contorno ao redor de um círculo infinito é nula, segue que

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-z)\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

e portanto
$$V(z) = -\frac{Y}{\pi\sqrt{a^2-z^2}} = \frac{Y}{i\pi\sqrt{z^2-a^2}}. \quad (81)$$

Logo, de (68) os potenciais complexos correspondentes são

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{iY}{4\pi} \ln\{z + \sqrt{z^2 - a^2}\} = -\frac{iY}{4\pi} \ln\{z + i\sqrt{a^2 - z^2}\} \\ \omega'(z) &= -\frac{iY}{4\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \ln\{z + \sqrt{z^2 - a^2}\} \right] = -\frac{Y}{4\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - i \ln\{z + i\sqrt{a^2 - z^2}\} \right], \end{aligned} \right. \quad (82)$$

a menos de constantes, e as tensões e deslocamentos são então dados por (1)-(4). Em particular verifica-se que o componente y do deslocamento, u_y , em $y = 0$ é constante quando $|x| < a$ e que as tensões são dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= -\frac{2Y}{\pi\sqrt{r_1 r_2}} \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} &= -\frac{2Yr^2 \sin \theta}{\pi\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\{\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\}} \end{aligned} \right. \quad (83)$$

10. Segundo problema de valor de contorno para o semi-plano

Aqui os valores dos deslocamentos são dados para todos os pontos da fronteira L de S^+ , e como para o primeiro problema consideram-se dois casos. No primeiro, os deslocamentos da borda são nulos e procura-se os potenciais complexos (50), onde $\Omega_0(z)$ e $w_0(z)$ definem um dado sistema de tensões com singularidades apenas em S^+ . Estendendo-se a definição de $\Omega_1(z)$ para todo o plano através de (52), então, de (1), (47), e (50), a derivada do deslocamento total em qualquer ponto da placa é

$$G \frac{\partial D}{\partial x} = \kappa \Omega_1'(z) + \Omega_1'(\bar{z}) + (\bar{z} - z) \bar{\Omega}_1''(\bar{z}) + \kappa \Omega_0'(z) - \bar{\Omega}_0'(\bar{z}) - z \bar{\Omega}_0''(\bar{z}) - \bar{w}_0''(\bar{z}). \quad (84)$$

Logo, fazendo hipóteses similares às anteriores, exceto para forma especial (51), segue que, se $D = 0$ na fronteira,

$$\kappa[\Omega_1'(x)]^+ + [\Omega_1'(x)]^- = -\kappa\Omega_0'(x) + \bar{\Omega}_0'(x) + x\bar{\Omega}_0''(x) + \bar{w}_0''(x), \quad (85)$$

para todos os pontos x em L , onde $\Omega'_1(z)$ desaparece no infinito. Para resolver esta equação toma-se

$$\begin{cases} A(z) = \kappa\Omega'_1(z) & (z \in S^+) \\ A(z) = -\Omega'_1(z) & (z \in S^-) \end{cases},$$

tal que (85) se torna

$$A^+(x) - A^-(x) = -\kappa\Omega'_0(x) + \bar{\Omega}'_0(x) + x\bar{\Omega}''_0(x) + \bar{\omega}''_0(x),$$

e $A(z)$ desaparece no infinito. Logo, o (único) valor de $A(z)$ é

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{-\kappa\Omega'_0(t) + \bar{\Omega}'_0(t) + t\bar{\Omega}''_0(t) + \bar{\omega}''_0(t)\} \frac{dt}{t-z}$$

Esta integral pode ser calculada por um processo similar ao usado anteriormente

$$\begin{cases} A(z) = \kappa\Omega'_1(z) = \bar{\Omega}'_0(z) + z\bar{\Omega}''_0(z) + \bar{\omega}''_0(z) & (z \in S^+) \\ A(z) = -\Omega'_1(z) = \kappa\Omega'_0(z) & (z \in S^-) \end{cases} \quad (86)$$

Pode-se ainda obter este resultado de (85). Por integração de (86) tem-se

$$\begin{cases} \kappa\Omega_1(z) = z\bar{\Omega}'_0(z) + \bar{\omega}'_0(z) & (z \in S^+) \\ \Omega_1(z) = -\kappa\Omega_0(z) & (z \in S^-) \end{cases}, \quad (87)$$

a menos de constantes não essenciais, e portanto, através de (53), os potenciais complexos completos para o semi-plano S^+ são

$$\begin{cases} \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z) = \Omega_0(z) + \frac{1}{\kappa}\{z\bar{\Omega}'_0(z) + \bar{\omega}'_0(z)\} \\ \omega'(z) = \omega'_0(z) + \omega'_1(z) = \omega'_0(z) - \bar{\Omega}_1(z) - z\Omega'_1(z) \\ = \omega'_0(z) + \kappa\bar{\Omega}_0(z) - \frac{1}{\kappa}\{z\bar{\Omega}'_0(z) + z^2\bar{\Omega}''_0(z) + \bar{\omega}''_0(z)\} \end{cases} \quad (88)$$

Os deslocamentos e tensões agora seguem de (1)-(4).

Quando os deslocamento assumem valores conhecidos no contorno L assume-se que as tensões e rotação desaparecem no infinito, e que

$$u_x = g_1(x), \quad u_y = g_2(x). \quad (89)$$

Assume-se que $g'_1(x), g'_2(x), g''_1(x), g''_2(x)$ satisfazem a condição H em L , e, nas vizinhanças de um ponto no infinito, $x^2g'_1(x), x^2g'_2(x), x^3g''_1(x), x^3g''_2(x)$ também satisfazem a condição H .

Dois métodos de solução são também possíveis e análogos aos usados para o primeiro problema para tensões determinadas, somente um deles será examinado aqui. Se a definição de $\Omega(z)$ for prolongada para S^- por (39), então $\Omega'(z) = O(\frac{1}{z})$ em todo o plano para grandes valores de $|z|$, e se os valores no contorno das derivadas do deslocamento forem iguais às derivadas dos valores de contorno, e se (65) for ainda satisfeita, então, de (47),

$$\kappa[\Omega'_1(x)]^+ + [\Omega'_1(x)]^- = \mu\{g'_1(x) + ig'_2(x)\}. \quad (90)$$

Essa equação pode ser resolvida por um método similar ao usado para a equação (85) tal que

$$\begin{cases} \Omega'(z) = \frac{\mu}{2\pi\kappa i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_1(t) + ig'_2(t)}{t-z} dt & (z \in S^+) \\ \Omega'(z) = -\frac{\mu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_1(t) + ig'_2(t)}{t-z} dt & (z \in S^-) \end{cases} \quad (91)$$

As formas especiais (51) não são válidas aqui e a força resultante sobre todo o contorno pode ser infinita.

11. Problema de valor de contorno misto para o semi-plano

Sejam $L = L_1 + \dots + L_n$ um número finito de segmentos L_r ($r = 1, 2, \dots, n$) do contorno Ox do semi-plano S^+ , e sejam dados os componentes de deslocamento em L e os componentes externos de tensão na parte restante L' do contorno. O problema aqui pode ser reduzido ao caso em que os componentes externos de tensão σ_{xx}, σ_{xy} , dados em L' , são nulos.

Assume-se portanto que

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{em } L', \quad (91)$$

e no restante do contorno L os deslocamentos D assumem valores conhecidos. Por simplicidade a discussão será restrita ao caso em que L contem um segmento com extremidades a, b e

$$D = u_x + iu_y = g(x) = g_1(x) + i g_2(x), \tag{92}$$

sendo $g(x)$ uma função conhecida em L . Assume-se que $g(x)$ tem uma derivada $g'(x)$ que satisfaz a condição H em L .

Adotando-se a notação anterior, onde $\Omega(z)$ é definida em todo o plano e, para valores elevados de $|z|$, $\Omega'(z) = \mathbf{O}(\frac{1}{z})$, assume-se que os limites $[\Omega'(x)]^+, [\Omega'(x)]^-$ existem para todos os pontos do eixo x , exceto possivelmente nos pontos a, b , e que

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \bar{\Omega}''(\bar{z}) = \lim_{y \rightarrow 0} y \bar{\Omega}''(x - iy) = 0 \quad (\forall x \neq a, b) \tag{93}$$

Estas hipóteses podem ser verificadas quando a solução do problema é obtida. De (41), (91) e (93) segue que

$$[\Omega'(x)]^+ + [\Omega'(x)]^- = 0 \quad \text{em } L',$$

tal que pode-se assumir que $\Omega'(z)$ é holomórfica em todo o plano cortado por L . De (47) as demais condições de contorno (92) em ab fornecem

$$\kappa[\Omega'(x)]^+ + [\Omega'(x)]^- = \mu g'(x) \quad \text{em } L. \tag{94}$$

O problema (94) é um caso particular de problema de Hilbert que foi resolvido no Apêndice H. A solução geral, que admite a possibilidade de $\Omega'(z)$ ser infinita nas extremidades a, b , com grau inferior a 1, é

$$\Omega'(z) = \frac{\mu\{R_0(z)\}^{i\gamma}}{2\pi\kappa i \sqrt{R(z)}} \int_a^b \frac{g'(t)\sqrt{R(t)}}{(t-z)\{R_0(t)\}^{i\gamma}} dt + \frac{H\{R_0(z)\}^{i\gamma}}{\sqrt{R(z)}}, \tag{95}$$

onde H é uma constante complexa, $2\pi\gamma = \ln \frac{1}{\kappa}$, \tag{96}

e
$$\left. \begin{aligned} R(z) &= (z-a)(b-z) \\ R_0(z) &= (z-a)(z-b) \end{aligned} \right\} \tag{97}$$

Por $\{R_0(z)\}^i$ entenda-se o ramo que é holomórfico no plano cortado por ab , tomando valores positivos $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ no lado superior a ab . Para valores elevados de $|z|$

$$\sqrt{R(z)} = -iz + \mathbf{O}(1). \tag{98}$$

Ainda, $\{R_0(z)\}^i$ é um ramo holomórfico na mesma região, tendendo a 1 quando $|z| \rightarrow \infty$, e $\{R_0(t)\}^i$ designa os valores de $\{R_0(z)\}^i$ no lado superior de ab .

Assumindo-se que a força total $P = X + iY$ é dada no segmento ab , então, como

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z\Omega'(z) = -\frac{P}{4\pi},$$

segue de (5) que
$$H = \frac{iP}{4\pi}. \tag{99}$$

A aplicação mais simples da teoria dessa seção é a pressurização de uma fundação em solo, na qual supõe-se ser o solo aderente à fundação, sem escorregamento. Se a base da fundação for plana e o corpo se mover somente na direção vertical, então

$$g(x) = ik, \quad g'(x) = 0,$$

Onde k é uma constante real, tal que

$$\Omega'(z) = \frac{iP\{(z-a)(z-b)\}^{i\gamma}}{4\pi\sqrt{(z-a)(b-z)}}. \tag{100}$$

Os valores de tensões e deslocamentos podem agora ser encontrados de (42)-(44).

Os resultados desta seção podem ser generalizado para a aplicação a problemas de deslocamento conhecido em mais de um segmento L_r do eixo x .

12. Fraturas

O efeito de fraturas na distribuição de tensão dentro de um corpo sólido tem uma importante aplicação na teoria de ruptura proposta por Griffith. Ela assume que as superfícies limitantes do sólido possuem tensão superficial e que, quando uma fratura se propaga, a redução na energia de deformação é equilibrada pelo aumento na energia potencial devido a esta tensão superficial.

Uma grande variedade de problemas de valor de contorno associados a fraturas pode ser formulada, mas a atenção será restrita a dois casos. Em ambos, é considerado um meio

infinito bi-dimensional contendo n fraturas colineares situadas ao longo dos segmentos $L_r = a_r b_r$ ($r = 1, \dots, n$) do eixo real, supondo-se que todos os componentes de tensão desaparecem no infinito e que não há força resultante sobre nenhuma fratura. Isso significa que

$$\Omega(z) = \mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \omega'(z) = \mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (101)$$

ao menos, para elevados valores de $|z|$.

Supõe-se que as fratura são abertas simetricamente ao eixo x , por uma distribuição normal de deslocamento dada ao longo dos segmentos de linha $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ no primeiro problema. Devido à simetria em relação ao eixo x pode-se substituir estes problemas por problemas equivalentes colocados para o semi-plano S^+ ($y > 0$):

PROBLEMA 1

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 0 & \text{em todos os pontos de } 0x \\ u_y = 0 & \text{em } 0x, \text{ fora de } L \\ u_y = f(x) & \text{em } L \end{cases}, \quad (102)$$

e PROBLEMA 2

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 0 & \text{em todos os pontos de } 0x \\ \sigma_{yy} = -p(x) & \text{em } L \\ u_y = 0 & \text{em } 0x, \text{ fora de } L \end{cases}, \quad (103)$$

onde $f(x)$ e $p(x)$ satisfazem a condição H em L .

Como $\sigma_{xy} = 0$ em todos os pontos de $0x$ para ambos os problemas, define-se $\Omega(z)$ no semi-plano S^- pelas fórmulas

$$\Omega(z) = \bar{\Omega}(z), \quad \Omega'(z) = \bar{\Omega}'(z) \quad (z \in S^-), \quad (104)$$

$$\text{tal que } \Omega(\bar{z}) = \bar{\Omega}(\bar{z}), \quad \Omega'(\bar{z}) = \bar{\Omega}'(\bar{z}) \quad (z \in S^+). \quad (105)$$

Segue de (101) que $\Omega(z) = \mathbf{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ em todo o plano para altos valores de $|z|$, e, de (1)-(4), que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu D = \kappa \Omega(z) - \Omega(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\Omega'(\bar{z}) \\ \mu \frac{\partial D}{\partial x} = \kappa \Omega'(z) - \Omega'(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\Omega''(\bar{z}) \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\{\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z})\} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = 4(\bar{z} - z)\Omega''(\bar{z}) \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = 2\{\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Omega''(\bar{z})\} \end{array} \right. , \quad (106)$$

e, na fronteira $0x$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu D = \kappa \Omega(z) - \Omega(\bar{z}) \\ \mu \frac{\partial D}{\partial x} = \kappa \Omega'(z) - \Omega'(\bar{z}) \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 2\{\Omega'(z) + \Omega'(\bar{z})\} \\ \sigma_{xy} = 0 \end{array} \right. , \quad (107)$$

visto que $\lim_{y \rightarrow 0} y\bar{\Omega}'(\bar{z}) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} y\bar{\Omega}''(\bar{z}) = 0$

13. Fratura de perfil dado

Deseja-se determinar a distribuição de tensão que produzirá uma fratura de determinado perfil e toma-se, portanto, as condições de contorno do Problema 1 em descrito anteriormente. As demais condições de contorno (102) impostas em u_y fornecem, usando (107),

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^+(x) - \Omega^-(x) = \frac{2iGf(x)}{\kappa+1} \text{ dentro de } L \\ \Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 0 \text{ fora de } L \end{array} \right. , \quad (108)$$

e portanto, como $\Omega(z)$ desaparece no infinito,

$$\Omega(z) = \frac{G}{\pi(\kappa+1)} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} \quad (109)$$

Considere-se um exemplo onde temos uma fratura se estendendo de $x = -a$ para

$$x = a \text{ e } f(x) = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (|x| \leq a) ,$$

onde A é uma constante. Logo, de (109)

$$\Omega(z) = \frac{GA}{\pi a^2(\kappa+1)} \int_L \frac{(a^2-t^2) dt}{t-z} = \frac{GA}{\pi a^2(\kappa+1)} \left\{ 2az + (z^2 - a^2) \ln \frac{z-a}{z+a} \right\} \quad (110)$$

Segue de (107) que a tensão aplicada à fratura é

$$\sigma_{yy} = -\frac{16 GA}{\pi a(\kappa+1)} \left(1 + \frac{x}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} \right) \quad (0 \leq x \leq a). \quad (111)$$

14. Fratura aberta por pressão dada

O Problema 2 dá as condições de contorno para fraturas abertas por uma distribuição de pressão determinada $p(x)$ em uma série de fraturas L_r ($r = 1, 2, \dots, n$). Logo, de (103) e (107),

$$\begin{cases} \Omega^+(x) + \Omega^-(x) = -\frac{1}{2}p(x) & \text{dentro de } L \\ \Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 0 & \text{fora de } L \end{cases} \quad (112)$$

Segue que $\Omega'(z)$ é holomórfica em todo o plano cortado por L de ordem $\frac{1}{2}$ no infinito, e satisfaz a primeira condição de (112) nas fraturas L . Por simplicidade se restringirá a atenção a uma única fratura ab tal que a solução geral de $O(\frac{1}{2})$ no infinito, que permite a possibilidade de descontinuidades nas bordas da fratura de ordem não superior a 1, é

$$\Omega'(z) = -\frac{1}{4\pi i \sqrt{R(z)}} \int_a^b \frac{p(t) \sqrt{R(t)}}{t-z} dt, \quad (113)$$

onde $\sqrt{R(z)}$ é definido como para o problema misto. Pode-se verificar que a condição (105) é satisfeita.

O exemplo mais simples é dado por uma fratura $-l \leq x \leq l, y = 0$ aberta por uma pressão constante tal que $p(x) = p$, onde p é uma constante e

$$\Omega'(z) = -\frac{p}{4\pi i \sqrt{l^2 - z^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t-z} dt, \quad (114)$$

Esta integral pode ser avaliada substituindo-a por uma integral de contorno, que fornece

$$\begin{cases} \Omega'(z) = -\frac{1}{4}p \left\{ 1 + \frac{iz}{\sqrt{l^2 - z^2}} \right\} = -\frac{1}{4}p \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} \right\} \\ \Omega(z) = -\frac{1}{4}p \left\{ z - i\sqrt{l^2 - z^2} \right\} = -\frac{1}{4}p \left\{ z - \sqrt{z^2 - l^2} \right\} \end{cases} \quad (115)$$

Segue então de (106) que

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2p \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2) - 1 \right\} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = \frac{2ip l^2 \sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{\frac{3}{2}i(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases}, \quad (116)$$

e, de (107), na fronteira $y = 0$,

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p & (|x| \leq l) \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \left\{ \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - l^2}} - 1 \right\} & (|x| > l) \\ u_y = \frac{p(\kappa+1)}{4\mu} \sqrt{l^2 - x^2} & (|x| \leq l) \end{cases} \quad (117)$$

A fórmula para u_y em (117) mostra que uma pressão uniforme p abre uma fratura elíptica.

Supondo-se nesta solução uma tensão uniforme

$$\sigma_{yy} = p, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xx} = 0,$$

pode-se encontrar o efeito de uma fratura na distribuição de tensão em um corpo que se encontra sob uma tensão uniforme p perpendicular à fratura.

15. Equação de England & Green

ENGLAND & GREEN generalizaram a solução do dimensionamento de fraturas propondo o potencial

$$\Omega(z) = \int_0^a \frac{F_1(t) + zF_2(t)}{\sqrt{z^2 - t^2}} dt, \quad (118)$$

onde $F_1(t)$ e $F_2(t)$ são funções contínuas de t no intervalo $0 \leq t \leq a$, e

$$\sqrt{z^2 - t^2} = \xi e^{i\eta} \quad (-\pi \leq \eta \leq \pi), \quad (119)$$

$$\text{onde } \xi^2 \cos 2\eta = x^2 - y^2 - t^2, \quad \xi^2 \sin 2\eta = 2xy \quad (120)$$

Considerando-se uma fratura que se desenvolve ao longo do eixo real, entre os pontos $-a$ e a , impõem-se as seguintes condições em $y = 0$,

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = -f(x) - g(x), & (y = 0, \quad -a \leq x \leq a) \\ \sigma_{xy} = 0, & (y = 0, \quad \forall x) \\ u_y = 0, & (y = 0, \quad |x| > a) \end{cases} \quad (121)$$

onde $f(x)$ é uma função par e $g(x)$ é uma função ímpar, seccionalmente contínuas no intervalo real definido. Sob tais condições, as equações básicas se tornam

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = 2\{\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})\}, \\ 2iGu_y = (\kappa + 1)\{\Omega'(z) - \bar{\Omega}'(\bar{z})\}. \end{cases} \quad (122)$$

Tal sistema pode ser resolvido com o auxílio das equações integrais auxiliares

$$4 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F_1(t)}{\sqrt{x^2-t^2}} dt = -f(x) \quad (0 \leq x \leq a), \quad (123)$$

$$4 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{x F_2(t)}{\sqrt{x^2-t^2}} dt = -g(x) \quad (0 \leq x \leq a). \quad (124)$$

que são equações classificadas genericamente na literatura como *tipo Volterra*, ou, para o caso específico, como *tipo Abel*, possuindo solução conhecida⁽²⁴¹⁾, na forma

$$F_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \int_0^x f(u) du,$$

$$F_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \int_0^x g(u) du,$$

e, trocando-se a ordem de integração,

$$F_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) \sqrt{t^2-u^2} du = -\frac{t}{2\pi} \int_0^t \frac{f(u) du}{\sqrt{t^2-u^2}}, \quad (125)$$

$$e \quad F_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t g(u) \cos^{-1}\left(\frac{u}{t}\right) du = -\frac{1}{2\pi t} \int_0^t \frac{u g(u) du}{\sqrt{t^2-u^2}} \quad (126)$$

O deslocamento normal das superfícies da fratura será calculado de (122)

$$\frac{Gu_y}{\kappa+1} = -\int_{|x|}^a \frac{F_1(t)+F_2(t)}{\sqrt{t^2-x^2}} dt \quad (|x| \leq a) \quad (127)$$

Para o caso específico examinado no corpo do trabalho, a pressão interna considerada é uma função par, $p(x)$, simplificando as funções auxiliares

$$\begin{cases} f(x) = p(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (128)$$

Portanto, de (125),

$$\begin{cases} F(t) = -\frac{t}{2\pi} \int_0^t \frac{p(u) du}{\sqrt{t^2-u^2}} \\ G(t) = 0 \end{cases} \quad (129)$$

e, de (127)

$$\frac{G}{\kappa+1} u_y = \frac{1}{2\pi} \int_x^a \frac{t dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \int_0^t \frac{p(u) du}{\sqrt{t^2-u^2}} \quad (130)$$

Como $w = 2u_y$ e $\kappa = 3 - 4\nu$,

$$\boxed{w = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \int_x^a \frac{t dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \int_0^t \frac{p(u) du}{\sqrt{t^2-u^2}}} \quad (131)$$

conforme consta no texto.