

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR José Nilton Martini

_____ E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 9 / 05 / 1996

Pavanello
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Análise Elasto-Acústica de Cascas

Axi-Simétricas

Autor : José Nilton Martini

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

05/96

M365a

29955/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas

Autor : José Nilton Martini

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

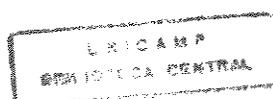
Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996

S.P. - Brasil



97 09486

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
Título	M365a
V.º	
TE.º	29955
PREÇO	28,197
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	06.05.97
N.º CPD	

CM-00097605-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M365a Martini, José Nilton
Análise elasto-acústica de cascas axi-simétricas / José
Nilton Martini.--Campinas, SP:[s.n.], 1996.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Fluidos. 2. Cascas (Engenharia). 3. Vibração.
4. Método dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas

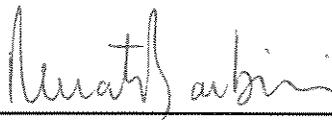
Autor: José Nilton Martini

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello

FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Renato Barbieri

FEJ-UDESC



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

FEM-UNICAMP

Campinas, 9 de maio de 1996

À memória de Irene e Valentin Martini

Agradecimentos

Sem o apoio e ajuda recebidos no período de elaboração desta dissertação, não seria possível obter este volume final. Portanto, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta auxiliaram para que este trabalho pudesse ser concluído. De maneira especial, agradeço ao CNPq por ter fornecido a bolsa de estudos no período; à UNICAMP por oferecer a infraestrutura necessária ao desenvolvimento desta dissertação; aos colegas do DMC pelo companheirismo; aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica pelo conhecimento compartilhado e pelo suporte; agradeço, particularmente, ao professor Renato Pavanello pela orientação precisa e entusiasmo; finalmente, agradeço à Rosa e Enoque Borges pelo apoio e pelos momentos agradáveis que passamos juntos.

O pensamento só começa com a dúvida

Sumário

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 <i>Acoplamento</i>	15
1.2 <i>Interação Fluido-Estrutura</i>	17
1.3 <i>Modelos Matemáticos</i>	19
1.4 <i>Problema Axi-Simétrico de Interação Fluido Estrutura</i>	23

CAPÍTULO 2 - MODELO ELASTO-ACÚSTICO AXI-SIMÉTRICO

2.1 <i>Domínio Sólido Axi-Simétrico</i>	26
Casca Fina Axi-Simétrica, 27. Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica, 31. Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica Pré-Tensionada, 33.	
2.2 <i>Domínio Fluido</i>	36
Equação da Conservação da Massa, 36. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento, 38. Relação entre Pressão e Densidade, 39. Equações Acústicas Linearizadas, 40.	
2.3 <i>Formulação em Pressão - Equação da Onda</i>	42
2.4 <i>Formulação em Pressão e Potencial de Deslocamento</i>	43
2.5 <i>Modelo Elasto-Acústico</i>	44
Formulação em Esforços e Pressão, 44. Formulação em Esforços, Pressão e Potencial de Deslocamentos, 45.	

CAPÍTULO 3 - FORMA INTEGRAL E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 <i>Forma Elasto-Acústica, Incluindo Efeito da Pré-Tensão, Formulação (u,p)</i>	48
3.2 <i>Forma Elasto-Acústica, Incluindo Efeito da Pré-Tensão, Formulação (u,p,ψ)</i>	53

3.3	<i>Elemento Finito de Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica</i>	56
3.4	<i>Elemento Finito de Fluido, Simetria Axial</i>	63
	Formulação em Pressão, 64. MEF Aplicado as Equações de Conservação de Massa e da Conservação da Quantidade de Movimento, Formulação (u,p), 66.	
3.5	<i>Modelo Matricial para Interação Fluido-Estrutura, Formulação (u,p)</i>	68
3.6	<i>Modelo Matricial para Interação Fluido-Estrutura, Formulação (u,p, ψ)</i>	68
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS		
4.1	<i>Validação Numérica do Modelo Estrutural</i>	71
	Freqüências Naturais de uma Placa Circular, 71. Vibrações Livres de uma Esfera de Parede Fina, 73. Vibrações Livres de uma Esfera de Paredes Finas Pré-Tensionada, 77.	
4.2	<i>Validação Numérica do Modelo Fluido</i>	80
	Cavidade Acústica de Forma Cilíndrica, 80. Cavidade Acústica de Forma Esférica, 84.	
4.3	<i>Validação Numérica do Modelo Elasto-Acústico</i>	87
	Comparação entre a Formulação Simétrica (u,p), e a Formulação Não-Simétrica, 88. Vibrações Livres de uma Esfera Preenchida de Fluido - Influência do Refinamento de Malha, 92. Efeito de uma Pré-Tensão sobre as Freqüências Elasto-Acústicas de uma Esfera Preenchida de Fluido, 96. Estudo Paramétrico do Efeito de Pré-Tensão Sobre as Freqüências Naturais, 100. Comparação dos Resultados Teórico-Experimentais de uma Placa Circular Submersa em Óleo, 104.	
	CONCLUSÃO	107

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109
ANEXO 1 - GEOMETRIA DE CASCA AXI-SIMÉTRICA TRONCÔNICA	112
ANEXO 2 - RELAÇÕES ENTRE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES	119
ANEXO 3 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	129
<i>A3.1 Funções de Interpolação para os Deslocamentos da Estrutura</i>	129
<i>A3.2 Funções de Interpolação para as Variáveis Acústicas</i>	134
ANEXO 4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	137
<i>A4.1 Programação Orientada para Objetos</i>	138
<i>A4.2 Definição e Organização de um Conjunto de Classes para MEF</i>	139
<i>A4.3 Detalhes de Funcionamento</i>	140

Resumo

MARTINI, J. N., *Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 149 p. Tese (Mestrado)

Neste trabalho estuda-se o problema elasto-acústico de cascas axi-simétricas interagindo com fluido interior. Os modelos matemáticos para casca axi-simétrica, para fluido e para acoplamento são apresentados na forma de equações diferenciais. A partir das equações diferenciais são obtidas formas integrais associadas, utilizando o método dos resíduos ponderados. Assume-se uma solução harmônica para o problema. O Método dos Elementos Finitos, (MEF), aplicado as equações integrais, é utilizado para aproximação da solução. O problema é implementado computacionalmente utilizando os conceitos de programação orientada para objetos. São realizados testes para validação dos modelos obtidos e dos códigos computacionais desenvolvidos. Como resultado são obtidas as frequências e os modos naturais de vibração dos sistemas desacoplados e do sistema acoplado. As soluções obtidas são comparadas com soluções analíticas e numéricas, bem como com resultados experimentais. Finalmente, realiza-se uma análise dos resultados obtidos e propõe-se trabalhos que darão continuidade ao tema.

Palavras Chave

Fluido-Estrutura, Casca, Axi-Simetria, Vibrações, Elementos Finitos

Abstract

MARTINI, J. N., *Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 149 p. Tese (Mestrado)

This work presents a study of the elasto-acoustic problem for axis-symmetric shells. The structure and the fluid are modeled by differential equations. The interface conditions between fluid and structure are presented. The derivation of the finite element formulation is based on the weak solution of differential equations presented and on the Galerkin method. A symmetric and a non-symmetric finite element formulation are derived. The Object Oriented Programming (OOP) technique are used to codify the problem. Some test cases to validate formulation and computational codes are shown. The natural frequencies and natural modes of vibration of axis-symmetric shells, acoustic cavities and the coupled problem are presented. The solutions obtained from this formulation are compared to analytical, numerical and experimental data.

Key Words

Fluid-Structure, Shell, Axial Symmetry, Vibration, Finit Element

Lista de Figuras

- Fig (1.1) - Pg 19 Exemplos de interação fluido-estrutura
- Fig (1.2) - Pg 22 Interação fluido-estrutura, tanque de fundo elástico
- Fig (2.1) - Pg 26 Estrutura com a forma de casca
- Fig (2.2) - Pg 27 Estrutura com a forma de casca axi-simétrica
- Fig (2.3) - Pg 28 Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica, vista paralela ao eixo de simetria
- Fig (2.4) - Pg 28 Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica, vista perpendicular ao eixo de simetria
- Fig (2.5) - Pg 29 Deslocamentos em um elemento de casca axi-simétrica
- Fig (2.6) - Pg 31 Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, vista paralela ao eixo de simetria
- Fig (2.7) - Pg 32 Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, vista perpendicular ao eixo de simetria
- Fig (2.8) - Pg 37 Ilustração equação da conservação da massa
- Fig (2.9) - Pg 38 Ilustração equação da conservação da quantidade de movimento
- Fig (3.1) - Pg 57 Geometria e condições de contorno para elemento finito de casca axi-simétrica troncônica
- Fig (3.2) - Pg 62 Componentes de deslocamento de um elemento finito, referenciados localmente e globalmente
- Fig (3.3) - Pg 63 (a) Elemento finito quadrilateral de quatro nós, (b) transformação de coordenadas do sistema global para o sistema natural
- Fig (4.1) - Pg 74 Quarto modo natural de vibração, utilizando malha regular

- Fig (4.2) - Pg 74 Malha de elementos finitos para esfera, distribuição exponencial de nós
- Fig (4.3) - Pg 76 Modos naturais de vibração para uma casca esférica, obtidos numericamente
- Fig (4.4) - Pg 79 Modos naturais de vibração para casca esférica pré-tensionada, obtidos numericamente
- Fig (4.5) - Pg 82 Malha de elementos finitos para cavidade acústica com a forma cilíndrica
- Fig (4.6) - Pg 83 Modos acústicos de vibração para cavidade cilíndrica, obtidos numericamente
- Fig (4.7) - Pg 85 Malha de elementos finitos para cavidade acústica de forma esférica
- Fig (4.8) - Pg 86 Modos acústicos de vibração para cavidade esférica, obtidos numericamente
- Fig (4.9) - Pg 89 Malha de elementos finitos para elementos estruturais e elementos de acoplamento
- Fig (4.10) - Pg 89 Malha de elementos finitos para fluido
- Fig (4.11) - Pg 93 Malha de elementos finitos para elementos estruturais e elementos de acoplamento, refinada
- Fig (4.12) - Pg 93 Malha de elementos finitos para o fluido, refinada
- Fig (4.13) - Pg 94,95 Modos naturais de vibração para sistema acoplado fluido-estrutura, casca esférica preenchida de fluido
- Fig (4.14) - Pg 98,99 Modos naturais de vibração para sistema acoplado fluido-estrutura, casca esférica pré-tensionada preenchida de fluido
- Fig (4.15) - Pg 102 Gráfico comparativo do efeito da pré-tensão sobre os valores das primeiras frequências de vibração do sistema acoplado
- Fig (4.16) - Pg 103 Ilustração da forma dos modos naturais de vibração, na análise do efeito da pré-tensão
- Fig (4.17) - Pg 105 Malha de elementos finitos para elementos estruturais e elementos de acoplamento, comparativo numérico-experimental

- Fig (4.18) - Pg 105 Malha de elementos finitos para o fluido, comparativo numérico- experimental
- Fig (4.19) - Pg 106 Variação da primeira frequência natural de vibração devido ao aumento da coluna de líquido
- Fig (A1.1) - Pg 113 Vistas do elemento de casca axi-simétrico e dos ângulos que definem este elemento
- Fig (A1.2) - Pg 114 Alteração do ângulo ϕ devido a deformação da estrutura
- Fig (A1.3) - Pg 115 Vetor T e os planos π_1 e π_2 vistos segundo as direções S, X e Z
- Fig (A1.4) - Pg 115 Projeção do vetor T no plano π_1 e ângulo desta projeção e o eixo de referência X
- Fig (A1.5) - Pg 116 Variação da distância entre um ponto da casca e o eixo de simetria, devido a deformação da casca
- Fig (A2.1) - Pg 120 Deslocamento u em um elemento diferencial de casca axi-simétrica
- Fig (A2.2) - Pg 123 Componentes do deslocamento em cascas axi-simétricas
- Fig (A3.1) - Pg 129 Comprimento, eixos de referência e deslocamentos de um elemento finito de casca axi-simétrica troncônica
- Fig (A3.2) - Pg 132 Transformação de coordenadas para elemento finito de casca axi-simétrica troncônica
- Fig (A3.3) - Pg 135 Elemento finito acústico quadrilateral de quatro nós
- Fig (A3.4) - Pg 135 Variáveis de parametrização para elemento finito acústico

Lista de Tabelas

Tab(4.1) - Pg 72	Dados do modelo de placa circular
Tab(4.2) - Pg 72	Freqüências naturais de vibração de placa circular com borda engastada
Tab(4.3) - Pg 73	Dados para o modelo de esfera
Tab(4.4) - Pg 75	Freqüências naturais de vibração para uma casca esférica de parede fina
Tab(4.5) - Pg 78	Freqüências naturais de vibração para uma casca esférica de parede fina submetida à uma pré-tensão
Tab(4.6) - Pg 81	Dados sobre cavidade de forma cilíndrica
Tab(4.7) - Pg 82	Freqüências naturais de vibração para cavidade acústica de forma cilíndrica
Tab(4.8) - Pg 84	Valores das isobáricas para os modelos acústicos de vibração da cavidade cilíndrica
Tab(4.9) - Pg 84	Dados sobre cavidade acústica de forma esférica
Tab(4.10) - Pg 85	Freqüências naturais de vibração para cavidade acústica de forma esférica
Tab(4.11) - Pg 87	Valores das isobáricas para os modos acústicos de vibração da cavidade esférica
Tab(4.12) - Pg 88	Dados para o modelo elasto-acústico, casca esférica preenchida de fluido
Tab(4.13) - Pg 91	Freqüências naturais de vibração, formulações (u,p) e (u,p,ψ) , e resultados numéricos para validação
Tab(4.14) - Pg 92	Freqüências naturais de vibração para o modelo elasto-acústico, efeito do refinamento de malha

- Tab(4.15) - Pg 96 Valores das isobáricas para os modos acoplados fluido-estrutura, casca esférica metálica preenchida de fluido
- Tab(4.16) - Pg 97 Freqüências naturais de vibração para modelo elasto-acústico, efeito da pré-tensão
- Tab(4.17) - Pg 100 Valores das isobáricas para os modos acoplados fluido-estrutura, casca esférica metálica preenchida de fluido
- Tab(4.18) - Pg 101 Dados para o sistema acoplado fluido-estrutura
- Tab(4.19) - Pg 101 Freqüências naturais de vibração para os sistemas isolados e acoplado
- Tab(4.20) - Pg 104 Dados para o caso de disco submerso em óleo

Nomenclatura

Letras Latinas

a_i	[]	Coefficiente i do polinômio interpolador para o deslocamento
c	[m/s]	Velocidade do som
E	[Pa]	Módulo de Elasticidade
F_{fi}	[]	i -ésima função de interpolação para o fluido
F_{pi}	[]	i -ésima função de interpolação para a pressão
F_{ui}	[]	i -ésima função de interpolação para o deslocamento u
F_{wi}	[]	i -ésima função de interpolação para o deslocamento w
$F_{\psi i}$	[]	i -ésima função de interpolação para o potencial de deslocamento
h	[m]	Espessura da casca
I_M	[]	Momento de inércia de massa
l_i	[m]	Comprimento inicial
l_f	[m]	Comprimento final
L	[m]	Comprimento do elemento finito de casca axi-simétrica
m	[kg]	Massa de um elemento diferencial de fluido
M_φ	[N]	Esforço de flexão por unidade de comprimento no plano meridional
M_φ	[N]	Esforço de flexão por unidade de comprimento no plano meridional no contorno
M_θ	[N]	Esforço de flexão por unidade de comprimento no plano circunferencial
N_φ	[N/m]	Esforço de membrana por unidade de comprimento no plano meridional

N_{φ}	[N/m]	Esforço de membrana por unidade de comprimento no plano meridional no contorno
N_{φ}^*	[N/m]	Pré-esforço de membrana por unidade de comprimento no plano meridional
N_{φ}^T	[N/m]	Esforço total de membrana por unidade de comprimento no plano meridional
N_{θ}	[N/m]	Esforço de membrana por unidade de comprimento no plano circunferencial
N_{θ}^*	[N/m]	Pré-esforço de membrana por unidade de comprimento no plano circunferencial
N_{θ}^T	[N/m]	Esforço total de membrana por unidade de comprimento no plano circunferencial
p	[Pa]	Pressão
\bar{p}	[Pa]	Aproximação para a pressão
p_i	[Pa]	Valor da pressão no nó i
p_0	[Pa]	Pressão no estado inicial
p'	[Pa]	Oscilação da pressão
Q_{φ}	[N/m]	Esforço cisalhante por unidade de comprimento no plano meridional
Q_{φ}	[N/m]	Esforço cisalhante por unidade de comprimento no plano meridional no contorno
r	[m]	Distância entre o eixo de simetria e um ponto da casca, medido perpendicularmente ao eixo de simetria
r	[]	Eixo de referência para um sistema cilíndrico
R	[]	Resíduo
r_0	[m]	Distância entre o eixo de simetria e um ponto da casca, medido perpendicularmente ao eixo de simetria
r_1	[m]	Raio do elemento de casca no plano meridional
r_2	[m]	Distância entre o eixo de simetria e um ponto da casca, medido perpendicularmente à casca
s	[J/kgK]	Entropia
s'	[]	Variável auxiliar para transformação de coordenadas
S	[]	Eixo de referência do sistema local para casca axi-simétrica troncônica

t	[s]	Tempo
u	[m]	Deslocamento da casca axi-simétrica na direção e sentido do eixo Y para casca axi-simétrica e do eixo S para casca axi-simétrica troncônica
\bar{u}	[m]	Aproximação para a variável u
u_i	[m]	Valor do deslocamento u no nó i
v_r	[m/s]	Componente de velocidade do fluido, sentido e direção do eixo r
v_z	[m/s]	Componente de velocidade do fluido, sentido e direção do eixo z
X	[]	Eixo de referência do sistema local para casca axi-simétrica e para casca axi-simétrica troncônica
Y	[]	Eixo de referência do sistema local para casca axi-simétrica
z	[]	Eixo de referência para um sistema cilíndrico
Z	[]	Eixo de referência do sistema local para casca axi-simétrica e para casca axi-simétrica troncônica
w	[m]	Deslocamento da casca axi-simétrica na direção e sentido do eixo Z para casca axi-simétrica para casca axi-simétrica troncônica
\bar{w}	[m]	Aproximação para a variável w
w_i	[m]	Valor do deslocamento w no nó i

Letras Gregas

α_{fi}	[]	Coeficientes das funções de aproximação para o fluido
α_{pi}	[]	Coeficientes das funções de aproximação para a pressão
α_{ui}	[]	Coeficientes das funções de aproximação para o deslocamento u
α_{wi}	[]	Coeficientes das funções de aproximação para o deslocamento w
$\alpha_{\psi i}$	[]	Coeficientes das funções de aproximação para o potencial de deslocamento
β	[rad]	Rotação em torno do eixo de referência X

χ_φ	[]	Deformação devido a flexão no plano meridional
χ_θ	[]	Deformação devido a flexão no plano circunferencial
δ	[m]	Deslocamento de um ponto
δ_n	[m]	Deslocamento da linha neutra
δ_z	[m]	Deslocamento de um ponto de cota z
δ_f	[m]	Deslocamento que gera deformação de flexão
ε_φ	[]	Deformação de membrana no plano meridional
ε_θ	[]	Deformação de membrana no plano circunferencial
ϕ	[rad]	Ângulo entre um elemento de casca axi-simétrica troncônica e o Eixo de Simetria
γ	[rad]	Ângulo que define o elemento de casca axi-simétrica
γ_d	[rad]	Ângulo que define o elemento de casca axi-simétrica deformado
η	[]	Variável de parametrização para o elemento de fluido
φ	[rad]	Ângulo entre o eixo de simetria e r_2
κ	[rad]	Ângulo entre o plano π_1 e o eixo de referência X
κ_d	[rad]	Ângulo entre o plano π_1 e o eixo de referência X deformado
κ_{cd}	[rad]	Componente devido a deformação do elemento do ângulo entre o plano π_1 e o eixo de referência X
λ	[]	Representação do contorno
π_i	[]	Plano i
θ	[rad]	Ângulo medido no plano circunferencial
ρ_e	[Kg/m ³]	Densidade da estrutura
ρ_f	[Kg/m ³]	Densidade do fluido
ρ_{f0}	[Kg/m ³]	Densidade inicial do fluido
ρ_f'	[Kg/m ³]	Variação na densidade do fluido
ν	[]	Coefficiente de Poisson
ω_i	[]	i-ésimo auto-valor de um auto-problema
ξ	[]	Variável de parametrização para o elemento de fluido
ψ	[m ²]	Potencial de deslocamento
$\bar{\psi}$	[m ²]	Aproximação para o potencial de deslocamento

Vetores e Matrizes

$\{C\}_E$	Carregamento equivalente do elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[C]$	Matriz global de compressibilidade do fluido
$[C]_E$	Matriz de compressibilidade para o elemento de fluido
$[B]$	Matriz para elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[D]$	Matriz para elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[F_{uw}]$	Matriz das funções de interpolação para os deslocamentos u e w
$\{F_f\}$	Vetor das funções de interpolação para os elementos de fluido
$\{F_u\}$	Vetor das funções de interpolação para o deslocamento u
$\{F_w\}$	Vetor das funções de interpolação para o deslocamento w
$[H]$	Matriz volumétrica global para o fluido
$[H]_E$	Matriz volumétrica para o elemento de fluido
$[J]$	Determinante da matriz de transformação de coordenadas para o elemento de fluido
$[K]$	Matriz de rigidez global para casca axi-simétrica troncônica
$[K]_E$	Matriz de rigidez para o elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[K_G]$	Matriz de enrijecimento global para casca axi-simétrica troncônica
$[K_G]_E$	Matriz de enrijecimento para o elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[M]$	Matriz de massa global para casca axi-simétrica troncônica
$[M]_E$	Matriz de massa para o elemento de casca axi-simétrica troncônica
$\{n\}$	Vetor normal a interface fluido-estrutura
$[P]$	Matriz global de interação
$[P]_E$	Matriz de interação para o elemento
$\{p\}$	Vetor dos valores nodais da pressão para o elemento de fluido
$\{\dot{p}\}$	Vetor dos valores nodais da segunda variação temporal da pressão para o elemento de fluido
$\{p_a\}$	Vetor dos valores nodais da pressão na interface
$\{rN\}$	Vetor das cargas nodais concentradas para o elemento de casca axi-simétrica troncônica
$[T]$	Matriz de transformação de coordenadas do sistema local para o sistema global para elementos de casca axi-simétrica troncônica

$\{u_e\}$	Vetor dos valores nodais de deslocamentos para elemento de casca axi-simétrica troncônica
$\{\ddot{u}_e\}$	Vetor dos valores nodais de aceleração para elemento de casca axi-simétrica troncônica
$\{u_f\}$	Vetor dos deslocamentos do fluido
$\{v_f\}$	Vetor das velocidades do fluido
$\{v_{f0}\}$	Vetor do estado inicial das velocidades do fluido
$\{v_f\}$	Vetor das variações na velocidade do fluido
$[Z]$	Matriz de formação para a matriz volumétrica
$\{\tau_l\}$	l -ésimo auto-vetor de um auto-problema
$\{\nabla p\}$	Vetor das variações da pressão em relação ao espaço
$\{\nabla \psi\}$	Vetor das variações do potencial de deslocamento em relação ao espaço
$\{\psi\}$	Vetor dos valores nodais do potencial de deslocamento
$\{\ddot{\psi}\}$	Vetor dos valores nodais da segunda variação temporal do potencial de deslocamento

Abreviações

ES	Eixo de Simetria
MEF	Método dos Elementos Finitos

Capítulo 1

Introdução

O número de problemas de engenharia em que existe interação entre fenômenos físicos é muito grande. A interação entre fluido e estrutura é uma das formas mais comuns de interação entre fenômenos físicos. Mas, apesar de ser um campo vasto e que apresenta grande aplicação prática, os vários problemas de interação entre fluido e estrutura existentes ainda carecem de estudos, motivando trabalhos nesta área.

Neste trabalho, procura-se mostrar o equacionamento, implementação e os resultados obtidos para o caso de interação entre cascas axi-simétricas em contato com fluido. Neste capítulo é mostrada a conceituação que existe para problemas acoplados, bem como as diversas formas de interação fluido-estrutura. Também são apresentados exemplos das formas mais comuns de modelamento matemático, tanto para a estrutura como para o fluido. Finalizando o capítulo, é mostrado o campo, relativamente vasto, de problemas de interação fluido-estrutura em que existe simetria em relação a um eixo, podendo, desta forma, utilizar a formulação desenvolvida neste trabalho.

No Capítulo 2 são apresentadas as equações diferenciais para casca fina axi-simétrica, as hipóteses utilizadas na obtenção destas e a forma simplificada destas mesmas equações, considerando o elemento diferencial com a forma troncônica. É apresentado, ainda, o equacionamento do enrijecimento estrutural devido a ação de uma pré-tensão. São apresentadas, também, as equações diferenciais para o

domínio fluido. Duas formulações, baseadas nas hipóteses acústicas, são apresentadas. A primeira formulação em pressão e a segunda uma formulação que combina o campo de pressão e o potencial de deslocamento do fluido, que será definido no próximo capítulo.

No Capítulo 3, as equações diferenciais obtidas no Capítulo 2 são colocadas em uma forma integral associada, utilizando o método dos resíduos ponderados. São mostradas, também, a forma integral fraca destas equações, que serão a base para a utilização do MEF. No Capítulo 3 são mostrados os suportes geométricos utilizados pelo MEF. E, finalmente, a forma matricial do problema proposto é mostrada, com base numa aproximação da solução via MEF.

Para validação da formulação obtida, são realizados, no Capítulo 4, um conjunto de testes numéricos. É testado o modelo para casca fina axi-simétrica troncônica, o modelo proposto para fluido “axi-simétrico” e o modelo para interação entre fluido e estrutura. Destes testes são apresentados, como resultado, as frequências e os modos naturais de vibração para cada modelo.

O Capítulo 5 apresenta uma análise crítica da formulação utilizada e dos resultados obtidos com ela. Ainda, neste capítulo, são apresentadas sugestões para próximos trabalhos.

A seguir uma classificação formal de acoplamentos é apresentada, bem como as categorias em que se dividem os problemas de interação entre fluido e estrutura.

1.1 Acoplamento

Muitas vezes, a título de simplificação, problemas que são acoplados são tratados de forma independente, conduzindo a resultados que são pouco confiáveis. No tratamento independente do problema, resolve-se as equações para um dos domínios, desconsiderando os efeitos do domínio

acoplado, e usa-se os resultados obtidos desta análise como condições que precisam ser respeitadas quando se resolvem as equações do domínio restante. Quando algum tipo de problema apresenta acoplamento, ou seja, interdependência entre fenômenos, apenas a consideração do problema como um todo pode resultar em uma análise precisa.

Para que seja obtida solução confiável de algum sistema acoplado, as equações que governam os fenômenos em questão devem ser resolvidas simultaneamente. Estes sistemas acoplados podem possuir maior ou menor grau de interdependência.

Os sistemas acoplados podem ser divididos em duas categorias básicas [1]. Estas categorias consideram os tipos possíveis de acoplamento. Na seqüência, estas categorias são apresentadas, bem como alguns exemplos para ilustrar cada uma delas.

1. O acoplamento ocorre na interface dos domínios através das condições de contorno impostas.
2. Os domínios estão sobrepostos, totalmente ou parcialmente. Aqui o acoplamento ocorre através das equações que descrevem os diferentes fenômenos.

Como exemplo da primeira categoria, pode-se citar o caso de interação fluido-estrutura. Neste caso, o domínio fluido é modelado utilizando, por exemplo, equações diferenciais que descrevem o comportamento deste domínio, qualquer que sejam as hipóteses envolvidas neste modelo. O domínio estrutural também pode ser modelado por equações diferenciais que descrevam o comportamento da estrutura. O acoplamento entre estes domínios ocorre apenas na interface. A pressão do fluido na interface resulta em uma força sobre a estrutura que, devido a seu comportamento elástico, deforma-se. O deslocamento da estrutura, devido à pressão do fluido, modifica o padrão

do escoamento deste, levando a uma alteração da pressão do fluido na interface, que altera o deslocamento da estrutura e assim por diante.

Na segunda categoria, em que os domínios se sobrepõe, considera-se como exemplo o caso de extrusão metálica. Neste problema existe uma forte interação entre o fluxo metálico e o campo de temperaturas no metal. Para este problema só existe um domínio. Neste domínio são utilizadas equações que governam o comportamento plástico do elemento extrudado, da geração de calor devido ao atrito e a distribuição de temperaturas no elemento. Considerando que o comportamento plástico do elemento extrudado é dependente do campo de temperaturas, que as condições de atrito dependem da temperatura e que a temperatura depende da geração de calor devido ao atrito, logo, tem-se um exemplo de problema acoplado em que existem domínios sobrepostos modelados por diferentes equações, que governam diferentes fenômenos, interdependentes.

Um problema que é acoplado, como mostrado acima, é o de interação fluido-estrutura. Neste tipo de problemas, nem o fluido nem a estrutura podem ser “resolvidos” de forma independente, pois as forças de interação na interface são desconhecidas. No próximo item busca-se mostrar os vários tipos de interação fluido-estrutura possíveis e sua conceituação usual.

1.2 Interação Fluido-Estrutura

A interação fluido-estrutura é um problema acoplado em que o acoplamento ocorre na interface dos domínios fluido e estrutura. A interação entre fluido e estrutura fica caracterizada quando tanto o fluido quanto a estrutura se movem e, deste movimento, resultam ações de interação na interface.

Pode-se dividir o comportamento dos problemas de interação entre fluido e estrutura em três grandes categorias [2], [3]. Estas três categorias podem ser definidas, resumidamente, da forma que segue:

1. Problemas em que existe um grande movimento relativo entre os domínios - Este problema é governado pelas características do escoamento do fluido. Um caso típico deste tipo de interação é o de “flutter” em asas de aviões ou a oscilação da suspensão de pontes. Nestes problemas pode-se desprezar os efeitos de compressibilidade do fluido.

2. Problemas de curta duração com deslocamento limitado do fluido - São problemas resultantes de impacto ou explosões onde ocorrem mudanças nas configurações do sistema. Aqui o deslocamento total é limitado, mas os efeitos da compressibilidade são muito importantes.

3. Problemas de longa duração em que o movimento do fluido é limitado - Nesta categoria estão incluídos fenômenos como a resposta periódica de estruturas “offshore” à ondas e terremotos, vibrações acústicas ou movimentação de embarcações.

Na Figura (1.1) (A) é exemplificado a categoria 1, a Figura (1.1) (B) exemplifica a categoria 2 e a Figura (1.1) (C) exemplifica a categoria 3.

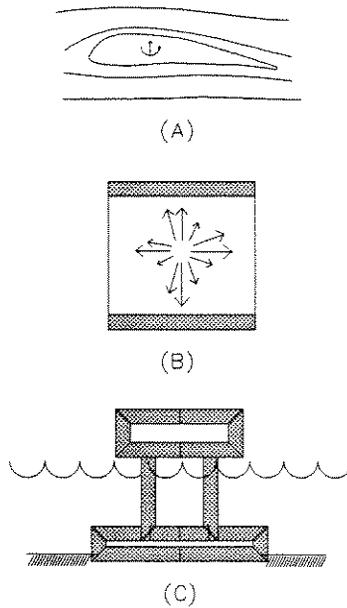


Figura 1.1 - Exemplos de interação fluido-estrutura

Neste trabalho é considerado o caso de vibrações harmônicas de sistemas acoplados fluido-estrutura, um problema, portanto, que pertence ao terceiro grupo. É importante, para que o problema de interação fluido-estrutura fique determinado, que os domínios fluido e estrutura sejam modelados e que a condição de acoplamento na interface seja definida. No próximo item são mostradas as formas usuais dos modelos que descrevem o comportamento da estrutura e de fluido, bem como as condições de acoplamento na interface.

1.3 Modelos Matemáticos

O equacionamento de determinado fenômeno é imprescindível para que o comportamento deste fenômeno seja simulado e estudado. Para o caso de interação fluido-estrutura, é necessário que sejam conhecidas as equações que governam o domínio estrutural e das equações que governam o domínio fluido e, então, equações que unam estas duas formulações na interface.

As estruturas são, geralmente, modeladas através de equações diferenciais em que as variáveis incógnitas são os deslocamentos.

Equações diferenciais das mais diversas formas podem ser obtidas dependendo das hipóteses consideradas. Pode-se modelar determinada estrutura considerando que ela se comporta como viga, como placa, como casca, pode-se, também, assumir um comportamento estrutural em que as hipóteses da elasticidade plana são satisfatórias, etc.

Nos modelos estruturais em que os deslocamentos são incógnitos é necessário, quando se considera o problema de interação fluido-estrutura, que seja incluído um termo de carregamento que pode ser igualado ao carregamento exercido pelo fluido.

Considerando-se o problema de interação fluido-estrutura, vibração harmônica, os modelos para o fluido geralmente seguem as hipóteses acústicas. Como hipóteses acústicas entende-se: considerar o fluido invíscito, desconsiderar os termos convectivos, considerar o escoamento irrotacional e admitir que pressão e densidade variam ao redor de valores constantes. Dos modelos matemáticos possíveis - que descrevem o comportamento físico do fluido - o mais utilizado, e que demonstra ser bastante confiável, para os problema em que existe um pequeno deslocamento relativo entre os domínios, é o modelo compressível-invíscito. Existem várias formas de modelar o meio fluido seguindo as hipóteses acima mencionadas. Pode-se dividir estes modelos em dois grupos básicos [4], que são mostrados abaixo :

1. Formulações baseadas no deslocamento.
2. Formulações baseadas em potencial.

Na primeira categoria o comportamento do fluido é descrito pelo seu deslocamento. Considera-se, ainda, que o fluido tem um comportamento elástico. Este modelo é bastante simples e para que a condição de acoplamento seja satisfeita, os deslocamentos normais à interface, do fluido e da estrutura, são igualados [3], [5].

Na segunda categoria, o movimento do fluido é representado por alguma forma de função escalar potencial. As formulações, dentre outras, que pertencem a esta categoria são: formulação em pressão, formulação em potencial de velocidades, formulação em pressão e potencial de deslocamento, etc.

A formulação em pressão talvez seja a forma mais conhecida para modelar o domínio fluido. Nesta equação a única variável é a pressão [6], [7]. Para que exista o acoplamento entre fluido e estrutura na interface iguala-se as velocidades normais à interface. Através desta igualdade é satisfeita a condição de continuidade cinemática para o problema.

Uma forma relativamente comum de modelar o domínio fluido, assumindo as hipóteses acústicas, é propor uma função potencial de velocidades [5]. Esta nova variável, potencial de velocidades, é utilizada para se escrever as equações acústicas. Para o caso de interação fluido-estrutura, a condição de acoplamento na interface dá-se pela continuidade cinemática de velocidades.

De forma similar ao modelo que utiliza o potencial de velocidades, pode-se definir uma função potencial de deslocamentos [8], [9]. Esta nova variável, potencial de deslocamentos, é introduzida nas equações acústicas. A condição de acoplamento entre fluido e estrutura é satisfeita igualando-se os deslocamentos normais à interface.

Um modelo matemático que define um problema de interação fluido-estrutura deve conter, como mencionado anteriormente, as equações que governam o domínio fluido, as equações que governam o domínio estrutural e as condições de acoplamento na interface.

Para ilustrar a interação entre fluido e estrutura, considere o problema de um recipiente de paredes rígidas e fundo elástico cheio de um fluido qualquer, Figura (1.2). O fundo elástico pode ser modelado pela formulação de viga. O fluido, modelado de acordo com as hipóteses

acústicas, pode ser representado por uma formulação em pressão. Desta forma, os dois domínios podem ser representados por equações matemáticas, restando, agora, incluir as condições de acoplamento nestas equações. O acoplamento que ocorre na interface entre os dois domínios pode ser incluído da maneira que segue:

O carregamento genérico incluído na equação que modela o domínio estrutural é igualado ao esforço que a pressão do fluido exerce sobre a estrutura.

A condição de continuidade cinemática deve ser obedecida. Para esta condição ser satisfeita, as velocidades normais a superfície, do fluido e da estrutura, são igualadas.

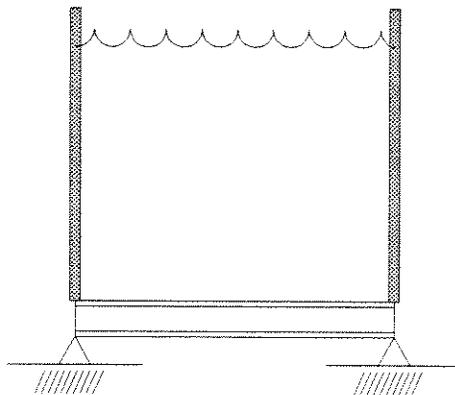


Figura 1.2 - Interação fluido-estrutura, tanque de fundo elástico

No caso acima, foi tratado do fenômeno de interação entre fluido e estrutura a título de ilustração, para problemas que respeitem as hipóteses assumidas para fluido e estrutura. De acordo com estas hipóteses, a estrutura deve ter a forma de viga e o fluido deve ter o comportamento acústico.

Em casos em que existe simetria em relação a um eixo, o modelo de interação fluido-estrutura deve ser específico. Como existem inúmeros problemas práticos em que existe interação entre fluido e estrutura que apresentam simetria em relação a um eixo, busca-se, neste texto,

apresentar uma formulação que modele este problema. Na seção seguinte, as características de problemas axi-simétricos são mostrados, bem como a apresentação de alguns exemplos.

1.4 Problema Axi-Simétrico de Interação Fluido-Estrutura

Problemas axi-simétricos são problemas em que geometria, carregamento e grandezas que definem o problema não sofrem variação em torno de um eixo. Muitos problemas de engenharia podem ser considerados como axi-simétricos, daí a importância deste tipo de análise. A vantagem de se utilizar uma formulação que apresenta algum tipo de simetria sobre uma formulação convencional é a redução do número de variáveis e do espaço dimensional. Nas formulações simétricas, que podem ser obtidas nas mais diversas áreas do conhecimento, existe um maior número de hipóteses e conseqüente maior dificuldade na obtenção das equações, mas resultam em problemas nos quais o esforço de cálculo é reduzido.

Problemas axi-simétricos ocorrem em vários campos da ciência. Pode-se citar como exemplo as áreas estrutural, térmica, fluidos, eletromagnetismo, etc. Na área estrutural são comuns estruturas que são simétricas em relação a um eixo, sendo bastante evidentes em vasos de pressão, tubulações, etc. Na área de fluidos pode-se citar, como exemplo, o escoamento em canais de seção circular ou o escoamento ao redor de um objeto de forma axi-simétrica, como esfera, cilindro, etc. Os modelos, como visto anteriormente, podem variar de acordo com as hipóteses assumidas. Isto acontece tanto para o modelo estrutural como para o modelo fluido.

Dos modelos estruturais simétricos em relação à um eixo, os mais conhecidos são os modelos para sólido de revolução e casca axi-simétrica. Como sólido de revolução entende-se objetos que possam ser representados como uma figura bi-dimensional rotacionada em torno de um eixo de simetria. Em cascas axi-simétricas, como o próprio nome diz, trata-se de cascas, portanto sujeito às hipóteses desta.

Esquemáticamente, representa-se uma casca axi-simétrica através da rotação, em torno do eixo de simetria, de uma curva com o perfil da casca.

Para o modelo de fluido em problemas que apresentam simetria axial, assume-se que as variáveis incógnitas não sofrem variação em relação ao eixo de simetria. Para o caso do comportamento do fluido ser modelado pelas hipóteses acústicas, formulação em pressão, por exemplo, a pressão deve ser considerada de tal forma que sua variação em torno do eixo de simetria seja igual a zero.

Através do uso de modelos axi-simétricos, para a estrutura e para o comportamento do fluido, chega-se a uma formulação para interação entre fluido e estrutura axi-simétrica. Como exemplos de interação fluido-estrutura em que pode-se adotar uma formulação simétrica em relação a um eixo, cita-se: comportamento dinâmico de estruturas como cilindros e placas circulares submersas, [10], problemas em bio-engenharia, como o estudo do globo ocular, [11], vasos de pressão, [9], etc.

No próximo capítulo, são obtidas equações que modelam o comportamento estrutural, considerando-se uma forma de casca axi-simétrica. Para o domínio fluido são obtidas equações que seguem as hipóteses acústicas. No domínio fluido, considera-se problemas que apresentam simetria axial. As condições de acoplamento são apresentadas para estes modelos. E, finalizando, apresenta-se a formulação conjunta para o problema de interação entre fluido e casca axi-simétrica.

Capítulo 2

Modelo Elasto-Acústico Axi-Simétrico

Diversos problemas práticos na engenharia envolvem sistemas onde meios sólidos estão em contato com meios fluidos. A modelagem deste tipo de problema, com vistas ao estudo de vibrações dos sistemas acoplados, tem sido feita de diversas formas, utilizando-se formulações matemáticas distintas e métodos de solução variados. O equacionamento para o problema de interação fluido-estrutura, onde a forma e o carregamento são simétricos em relação a um eixo, é apresentado neste capítulo. A estrutura é modelada adotando-se as hipóteses de Kirchhoff, para o caso de casca fina axi-simétrica. No domínio fluido, usa-se a teoria da acústica linear, para o caso de cavidades fechadas axi-simétricas.

Para que o problema de interação fluido-estrutura fique determinado, é necessário que as equações que governam o comportamento, separadamente, do fluido e da estrutura sejam conhecidas. Usando-se estas equações é possível obter uma formulação conjunta, através do uso de condições de fronteira. Nos casos aqui abordados serão tomadas as hipóteses de continuidade cinemática na direção normal da interface fluido-estrutura e a condição de escorregamento na direção tangencial à interface. A condição de equilíbrio na direção normal à interface também é imposta.

Neste capítulo são apresentadas as hipóteses básicas utilizadas na modelagem. O equacionamento é apresentado na sua forma diferencial, para ser utilizado no próximo capítulo dentro de uma formulação do tipo Resíduos Ponderados.

2.1 Domínio Sólido Axi-Simétrico

Um grande número de aplicações da engenharia envolvem geometrias, carregamentos e condições de contorno que podem ser abordados dentro da hipótese de axi-simetria. Dentre outras, pode-se citar: vasos de pressão, estruturas aeronáuticas e espaciais, submarinos, usinas nucleares, tubulações, além de inúmeras aplicações na bio-mecânica.

Em boa parte destes casos, a estrutura apresenta-se como um invólucro para algum tipo de fluido. Portanto, em muitos casos, a teoria de cascas axi-simétricas mostra-se conveniente para a modelagem da estrutura.

Uma estrutura com a forma de casca pode ser definida como uma superfície curva no espaço, com espessura finita, Figura (2.1). Sendo a espessura da casca considerada muito menor do que as outras dimensões. A forma geométrica da casca é definida pela sua espessura e as curvas que formam sua superfície média.

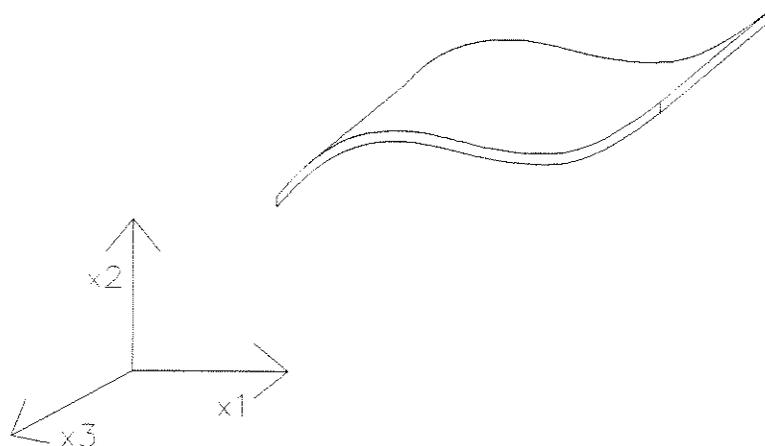


Figura 2.1 - Estrutura com a forma de Casca

Para uma casca definida no espaço tridimensional, são necessárias, portanto, a espessura e duas curvas em planos perpendiculares para definir sua geometria. Estas curvas, no caso limite, definem os raios de curvatura que determinado elemento infinitesimal de casca possui.

Para o caso específico de cascas com simetria axial, ou cascas de revolução, a geometria fica completamente estabelecida quando são conhecidas a espessura e a curva geratriz da casca, como pode-se ver na Figura (2.2). Como curva geratriz, entende-se a curva que pertence a um plano que contenha o eixo de simetria e que, quando rotacionada em torno deste, gera uma superfície.

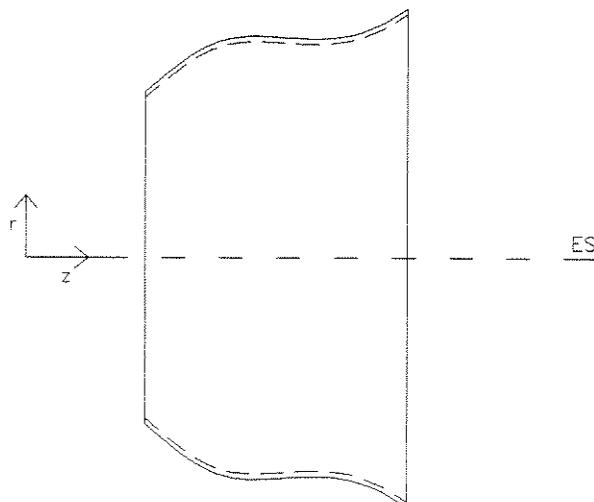


Figura 2.2 - Estrutura com a forma de casca axi-simétrica

2.1.1 Casca Fina Axi-Simétrica

O modelo utilizado neste trabalho é baseado nas hipóteses de Kirchhoff para cascas finas. Neste modelo não existe deformação no plano médio da casca. Os pontos que pertencem a um plano perpendicular ao plano médio da casca continuam pertencendo a um plano perpendicular ao plano médio depois da deformação e as tensões normais transversais são desprezadas.

As equações para casca fina axi-simétrica seguem a formulação proposta em [12], adicionando-se os termos referentes a inércia do elemento diferencial, com o objetivo de se realizar a análise dinâmica do problema.

Inicialmente, define-se a geometria de um elemento de casca axi-simétrica em suas vistas paralela ao eixo de simetria, Figura (2.3), e perpendicular ao eixo de simetria, Figura (2.4).

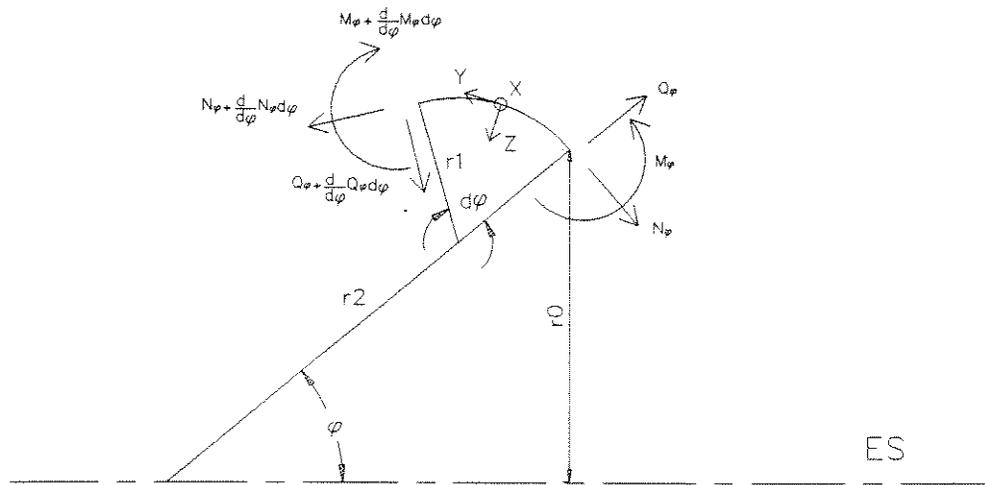


Figura 2.3 - Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica, vista paralela ao eixo de simetria (ES)

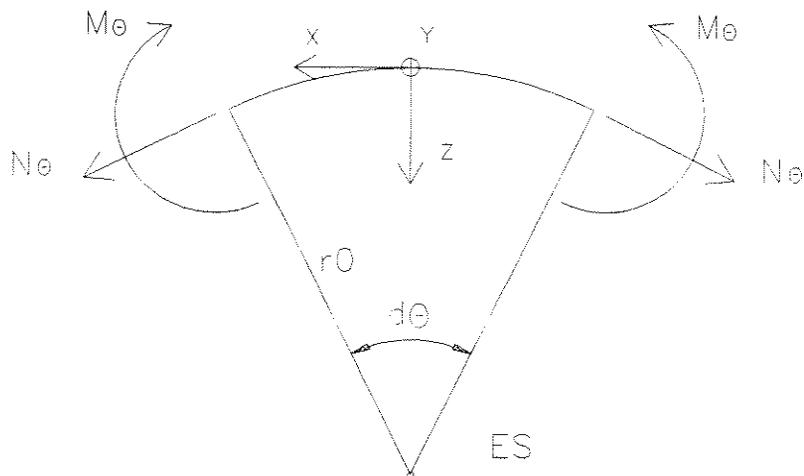


Figura 2.4 - Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica, vista perpendicular ao eixo de simetria (ES)

A definição dos principais parâmetros geométricos do problema é feita no Anexo 1. Os ângulos φ , $d\varphi$ e $d\theta$ e as posições r_0 , r_1 e r_2 definem completamente o sistema. Nas Figuras (2.3) e (2.4), são apresentados os esforços que atuam no elemento diferencial de casca. A partir deste referencial, as equações do movimento podem ser obtidas escrevendo-se a equação da conservação da quantidade de movimento.

A fim de levar-se em conta a presença de um carregamento genérico, que pode ser devido a presença de um fluido, será considerado que a casca está submetida a uma pressão normal a sua superfície média, de intensidade p .

Assume-se, também, que a casca é formada de um material homogêneo de densidade ρ_e . O campo de deslocamentos da casca axi-simétrica é mostrado na Figura (2.5). São considerados os deslocamentos u e w e a rotação β . No Anexo 2 são mostrados as definições dos deslocamentos, bem como as relações entre deslocamentos e deformações.

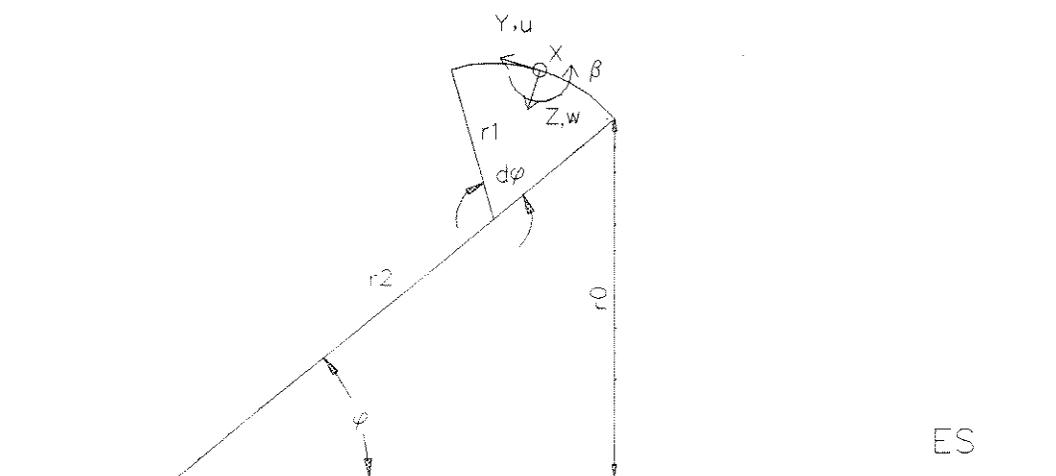


Figura 2.5 - Deslocamentos em um elemento de casca axi-simétrica

Assim, considerando o somatório de forças nas direções Y e Z e igualando a variação da quantidade de movimento linear nestas direções, obtém-se [12]:

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi) - r_0 Q_\varphi - N_\theta r_1 \cos(\varphi) - r_1 r_0 \rho_e h \ddot{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 Q_\varphi) + r_0 N_\varphi + N_\theta r_1 \sin(\varphi) + p r_1 r_0 - r_1 r_0 \rho_e h \ddot{w} = 0 \quad (2.2)$$

Onde, N_φ e N_θ são os esforços de membrana, Q_φ é o esforço cizalhante, ρ_e é a densidade do material, h a espessura da casca, \ddot{u} e \ddot{w} são as acelerações nas direções Y e Z e p é o carregamento aplicado na direção e sentido do eixo Z.

A última equação é obtida fazendo-se o somatório dos momentos em relação ao eixo X e igualando-se a variação da quantidade de movimento angular em torno deste mesmo eixo, o que resulta:

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 M_\varphi) - Q_\varphi r_0 r_1 - M_\theta r_1 \cos(\varphi) + \frac{I_M}{d\theta d\varphi} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.3)$$

Onde, M_φ e M_θ são momentos fletores por unidade de comprimento, I_M é o momento de inércia de massa do elemento e $\ddot{\beta}$ é a aceleração angular do sistema. As Equações (2.1) a (2.3) formam o conjunto das equações diferenciais que governam o problema do equilíbrio dinâmico de uma casca axi-simétrica.

Do ponto de vista prático, uma primeira aproximação para solução deste problema consiste em considerar que a casca é formada por segmentos retos, resultando em um elemento diferencial com a forma de tronco de cone, ou torncônico. Esta aproximação é conveniente para posterior aplicação do MEF e será adotada na seqüência.

2.1.2 Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica

A partir das equações para casca fina axi-simétrica, pode-se obter equações simplificadas, considerando que os elementos formam um tronco de cone. Utilizando-se, portanto, uma reta como curva geradora da casca.

Neste caso, os elementos não possuem curvatura no plano meridional, que é o plano que contém a curva geradora da casca. Devido a forma troncônica adotada, as equações anteriormente obtidas sofrem algumas alterações. Sob estas hipóteses, a geometria fica definida conforme mostrado nas Figuras (2.6) e (2.7).

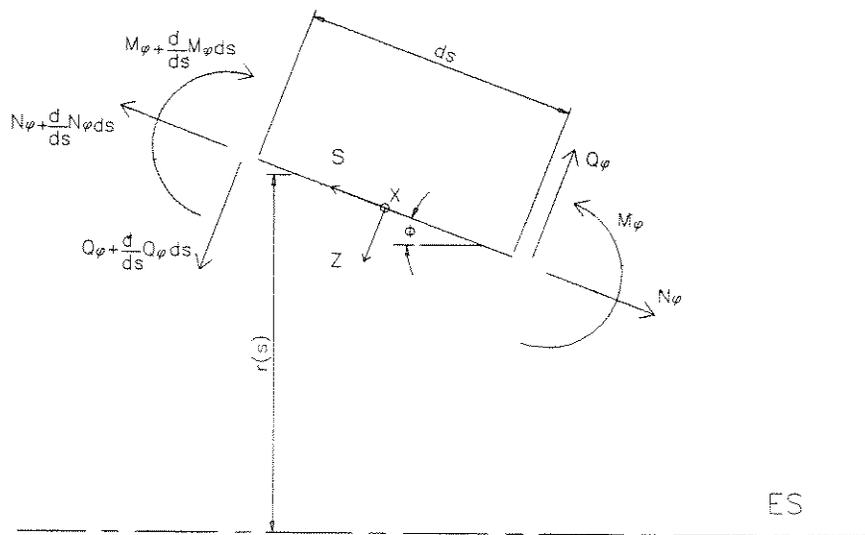


Figura 2.6 - Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, vista paralela ao eixo de simetria (ES)

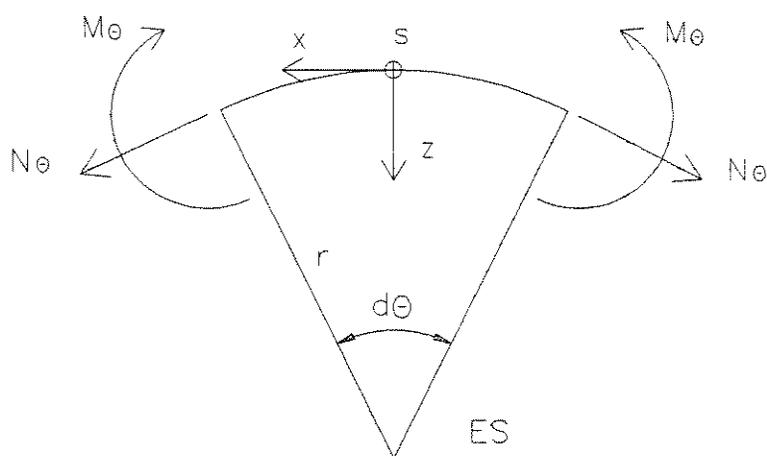


Figura 2.7 - Esforços e geometria de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, vista perpendicular ao eixo de simetria (ES)

No Anexo 1, são definidos os parâmetros geométricos básicos do problema, que são simplificados para o caso de casca troncônica. Os ângulos ϕ , $d\theta$ e a posição $r(s)$ definem a geometria do sistema. Nas Figuras (2.6) e (2.7) são apresentados os esforços que atuam no elemento diferencial de casca.

Fazendo-se o somatório de forças e momentos e aplicando-se a condição de conservação de quantidade de movimento linear e angular, são obtidas as equações listadas a seguir:

$$\frac{d}{ds}(rN_\phi) - N_\theta \sin(\phi) - \rho_e r h \ddot{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_\phi) + N_\theta \cos(\phi) + pr - \rho_e r h \ddot{w} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_\phi) - rQ_\phi - M_\theta \sin(\phi) + \frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.6)$$

Observa-se, neste caso, que as Equações (2.4) à (2.6) são simplificadas em relação às Equações (2.1) à (2.3), devido somente as hipóteses geométricas.

2.1.3 Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica Pré-Tensionada

As aplicações do modelo de casca axi-simétrica à problemas de estruturas que confinam um fluido considerado perfeito, são freqüentes. Pode-se citar os problemas em vasos de pressão, tubulações, habitáculos de veículos e, em bio-mecânica, na modelagem do globo ocular [11]. Na maioria destes casos, o fluido interior está a uma determinada pressão interna, o que altera significativamente o comportamento dinâmico do sistema.

Pode-se impor a estrutura uma pré-tensão devido aos esforços de membrana, acoplando os efeitos de membrana e flexão [11]. Este efeito é conhecido como não linearidade geométrica ou enrijecimento estrutural.

Para escrever as equações da casca axi-simétrica troncônica, incluindo-se os efeitos de não linearidade geométrica, é necessário considerar que a estrutura está em equilíbrio em sua posição deformada [13]. Considerando, portanto, as deformações e fazendo um somatório de forças nas direções S e Z e um equilíbrio de momentos em torno do eixo X, tem-se as seguintes equações de equilíbrio dinâmico:

$$\frac{d}{ds}(rN_\varphi) - N_\theta \sin(\phi) - Q_\varphi r \frac{d^2 w}{ds^2} + N_\theta \cos(\phi) \frac{dw}{ds} - \rho_e r h \ddot{u} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_\varphi) + N_\theta \cos(\phi) + N_\varphi r \frac{d^2 w}{ds^2} + N_\theta \sin(\phi) \frac{dw}{ds} + pr - \rho_e r h \ddot{w} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_\varphi) - M_\theta \sin(\phi) - Q_\varphi r + M_\theta \cos(\phi) \frac{dw}{ds} + \frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.9)$$

Estas equações são , quando os esforços são colocados como função dos deslocamentos, não-lineares. O que equivale dizer que a medida que aumentam os deslocamentos a estrutura se torna mais rígida.

Uma maneira de considerar, de forma aproximada e linearizada, os efeitos do enrijecimento de um carregamento estático sobre uma estrutura é fazendo algumas hipóteses simplificativas. As hipóteses consideradas são listadas abaixo:

h1- O pré-deslocamento inicial da estrutura devido a pré-carga estática gera apenas tensões de membrana.

h2- O enrijecimento estrutural é devido apenas a estas pré-tensões.

Utilizando estas hipóteses, pode-se escrever um conjunto de equações simplificadas que considerem o enrijecimento estrutural e que são lineares.

Primeiramente, considera-se o carregamento estático. Escreve-se a equação do equilíbrio observando que apenas as tensões de membrana estão presentes, ou seja:

$$\frac{d}{ds}(rN_{\varphi}^*) - N_{\theta}^* \sin(\phi) = 0 \quad (2.10)$$

$$N_{\theta}^* \cos(\phi) = 0 \quad (2.11)$$

Onde, N_{φ}^* e N_{θ}^* são os esforços devido a uma pré-tensão de membrana. Usando o princípio da superposição, que é válido para sistemas lineares, considera-se que os esforços totais N_{φ}^T e N_{θ}^T podem ser obtidos pela superposição dos esforços devido a pré-tensão N_{φ}^* e N_{θ}^* e dos esforços devido a carregamentos posteriores N_{φ} e N_{θ} (incluindo-se os esforços dinâmicos):

$$\begin{aligned} N_{\varphi}^T &= N_{\varphi}^* + N_{\varphi} \\ N_{\theta}^T &= N_{\theta}^* + N_{\theta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Utilizando estas tensões nas equações para o elemento deformado, Equações (2.7),(2.8) e (2.9) e aplicando as hipóteses h1 e h2, tem-se:

$$\frac{d}{ds}(r(N_{\varphi}^* + N_{\varphi})) - N_{\theta}\sin(\phi) - N_{\theta}^*\sin(\phi) + N_{\theta}^*\cos(\phi) \frac{dw}{ds} - \rho_e rh \ddot{u} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_{\varphi}) + N_{\theta}\cos(\phi) + N_{\varphi}^* r \frac{d^2 w}{ds^2} + N_{\theta}^*\sin(\phi) \frac{dw}{ds} + pr - \rho_e rh \ddot{w} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_{\varphi}) - M_{\theta}\sin(\phi) - Q_{\varphi}r + \frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.15)$$

Combinando as Equações (2.13) à (2.15) com as Equações (2.10) e (2.11), obtém-se as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico da casca axi-simétrica troncônica, sujeita a pré-tensão, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d}{ds}(rN_{\varphi}) - N_{\theta}\sin(\phi) - \rho_e rh \ddot{u} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_{\varphi}) + N_{\theta}\cos(\phi) + \frac{d}{ds}(rN_{\varphi}^* \frac{dw}{ds}) + pr + \rho_e rh \ddot{w} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_{\varphi}) - M_{\theta}\sin(\phi) - Q_{\varphi}r + \frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.18)$$

Observa-se que a única equação que é alterada, quando é considerado o enrijecimento da estrutura devido a pré-tensão, é a Equação.(2.17). O terceiro termo da Equação (2.17) é considerado para a obtenção da matriz de rigidez geométrica.

Assim, o conjunto de Equações (2.16) à (2.18) constituem o sistema de equações diferenciais que governam o problema de equilíbrio dinâmico de uma casca axi-simétrica troncônica submetida a uma pré-tensão. Na modelagem considera-se a ação de uma pressão p na interface, o que corresponde a condição de equilíbrio no modelo acoplado fluido-estrutura.

2.2 Domínio Fluido

Nos próximos itens, são descritos as hipóteses básicas para o modelo adotado para o domínio fluido, usando-se dois tipos de representação. Inicialmente, apresenta-se uma formulação em pressão e posteriormente uma formulação em potencial de deslocamentos.

O modelo acústico é utilizado para modelar o domínio fluido [14], [15]. Assumir as hipóteses acústicas equivale a dizer que o fluido é invíscido, que pressão e densidade variam em torno de valores constantes, que os termos convectivos são desprezados e o escoamento é irrotacional. Esta formulação, que é obtida através das equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento, é apresentada nas seções a seguir.

A partir das equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento são obtidas duas formulações, utilizando diferentes variáveis mas conservando as mesmas hipóteses. A primeira destas formulações é baseada no campo de pressões e resulta na conhecida equação da onda. A segunda formulação é baseada, além do campo de pressão, no potencial de deslocamento que é definido mais adiante [8]. Esta formulação resulta em um sistema matricial simétrico quando utilizada no MEF para aproximação da solução.

2.2.1 Equação da Conservação da Massa

Para se obter a equação da conservação da massa, considera-se o volume de controle definido em um sistema de referência cilíndrico. Para exemplificar, vide Figura (2.8), que mostra uma vista bidimensional deste volume de controle.

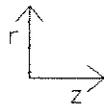
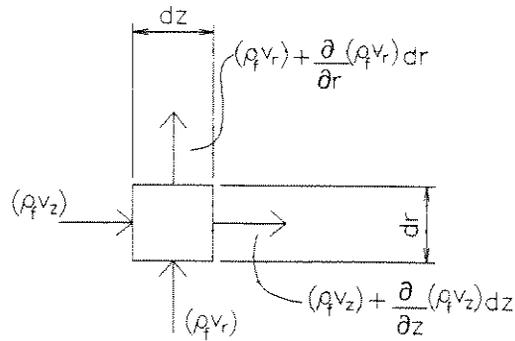


Figura 2.8 - Ilustração equação da conservação da massa

Em um sistema de referência cilíndrico, o vetor das velocidades do fluido é dado por:

$$\{v_f\}^T = \{v_r, v_\phi, v_z\} \quad (2.19)$$

Onde, v_r , v_ϕ e v_z são as componentes do vetor de velocidade em um sistema cilíndrico.

Pode-se descrever a equação da continuidade como sendo o balanço de massa realizado em um elemento diferencial. Realizando este balanço, obtém-se:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(\rho_f v_r) dr (rd\phi dz) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho_f v_\phi) r d\phi (dr dz) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_f v_z) dz (rd\phi dz) \quad (2.20)$$

Colocando esta equação em uma forma geral, escreve-se:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \{\nabla\} \bullet (\rho_f \{v_f\}) = 0 \quad (2.21)$$

Aqui ∇ é o operador Nabla e \bullet indica o produto escalar.

No próximo item é desenvolvida a equação da conservação da quantidade de movimento, que em conjunto com a Equação (2.21) são a base para o modelo acústico.

2.2.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

Para se obter a equação da conservação da quantidade de movimento, é realizado um somatório de forças sobre o elemento diferencial que é igualado a variação da quantidade de movimento. Para a dedução da equação, é utilizado, novamente, um sistema de referência cilíndrico. Na Figura (2.9) é mostrada uma vista bidimensional do elemento diferencial utilizado para se obter a equação da conservação da quantidade de movimento.

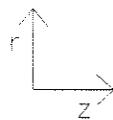
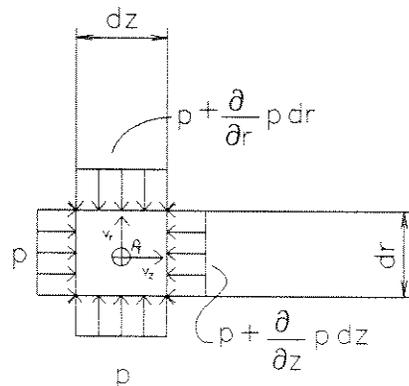


Figura 2.9 - Ilustração equação da conservação da quantidade de movimento

Para a obtenção destas equações, considera-se que a densidade e o vetor de velocidades são grandezas aproximadamente constantes para todo o interior do volume infinitesimal.

Portanto, igualando-se o somatório das forças que atuam no elemento diferencial, vide Figura (2.9), à variação da quantidade de movimento linear, tem-se:

$$-\{\nabla p\} = \rho_f \left(\frac{\partial \{v_f\}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \{v_f\}}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \{v_f\}}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial \{v_f\}}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

Sendo p o campo de pressão no fluido. Esta equação pode ser reescrita da forma abaixo:

$$-\{\nabla p\} = \rho_f \left(\frac{\partial \{v_f\}}{\partial t} + (\{v_f\} \cdot \nabla) \{v_f\} \right). \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) em conjunto com a Equação (2.21) determinam o comportamento do fluido, considerando-se as hipóteses acústicas. A relação entre pressão e densidade é obtida no item que segue.

2.2.3 Relação entre Pressão e Densidade

O estado de uma determinada substância fica totalmente determinado quando são conhecidas duas propriedades termodinâmicas independentes desta substância [16]. Portanto, pode-se escrever a pressão (p) como função da entropia (s) e da densidade do fluido (ρ_f), ou seja:

$$p = p(\rho_f, s) \quad (2.24)$$

Pode-se, também, expandir esta correlação em série de Taylor de seguinte maneira:

$$p + dp = p + \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial}{\partial s} ds \right) p + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial}{\partial s} ds \right)^2 p + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial}{\partial s} ds \right)^3 p + \dots \quad (2.25)$$

Parte-se da hipótese de que a propagação de onda no meio fluido é um processo adiabático e reversível e por conseqüência sua entropia permanece constante, ou seja, ds é igual a zero. Logo, a Equação (2.25) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$p + dp = p + \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f\right)p + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f\right)^2 p + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_f} d\rho_f\right)^3 p + \dots \quad (2.26)$$

Assim, a pressão de determinada substância pode ser escrita como função apenas da densidade, como indicado abaixo:

$$p = p(\rho_f) \quad (2.27)$$

As Equações (2.21), (2.23) e (2.27), quando combinadas, resultam em um problema que é não-linear, portanto de difícil solução. Estas relações podem ser linearizadas se algumas hipóteses forem assumidas. Na seqüência, estas hipóteses são mostradas bem como as equações linearizadas resultantes.

2.2.4 Equações Acústicas Linearizadas

Perturbações acústicas podem ser entendidas como variações de pequena amplitude de um estado geral de equilíbrio. Para um fluido, o estado geral de equilíbrio pode ser caracterizado pelos valores de pressão, densidade e velocidade na inexistência de perturbações. Quando existem perturbações, o valor de cada uma destas variáveis sofre pequenas variações, que podem ser expressas da seguinte forma:

$$p = p_0 + p' \quad (2.28)$$

$$\rho_f = \rho_{f0} + \rho_f' \quad (2.29)$$

$$\{v_f\} = \{v_{f0}\} + \{v_f'\} \quad (2.30)$$

Onde ρ_{f0} , p_0 e $\{v_{f0}\}$ são densidade, pressão e vetor de velocidades no estado geral de equilíbrio e ρ_f' , p' e $\{v_f'\}$ são as perturbações da densidade, da pressão e do vetor de velocidades, respectivamente.

Substituindo as igualdades (2.28) à (2.30) nas equações da continuidade, (2.21), conservação da quantidade de movimento, (2.23), e na relação entre densidade e pressão, (2.27), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{f0} + \rho_f') + \nabla \cdot [(\rho_{f0} + \rho_f')(\{v_{f0}\} + \{v_f'\})] = 0 \quad (2.31)$$

$$(\rho_{f0} + \rho_f')\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\{v_{f0}\} + \{v_f'\}) \cdot \nabla\right)(\{v_{f0}\} + \{v_f'\}) = -\nabla(p_0 + p') \quad (2.32)$$

$$p_0 + p' = p(\rho_{f0} + \rho_f') \quad (2.33)$$

Considerando que a velocidade inicial $\{v_{f0}\} = 0$, isto é, o fluido está inicialmente em repouso e desprezando perturbações de segunda ordem, chega-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial \rho_f'}{\partial t} + \rho_{f0}(\{\nabla\} \cdot \{v_f'\}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\rho_{f0} \frac{\partial \{v_f'\}}{\partial t} = -\{\nabla p'\} \quad (2.35)$$

Onde a Equação (2.34) é a equação da conservação da massa linearizada e a Equação (2.35) é a equação da conservação da quantidade de movimento linearizada. Considerando apenas o termo linear da relação entre pressão e densidade Equação (2.26), escreve-se:

$$p' = c^2 \rho_f' \quad (2.36)$$

Com c^2 definido da seguinte forma:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_f} \right)_0 \quad (2.37)$$

Onde c é a velocidade do som no meio.

As Equações (2.34), (2.35) e (2.36) modelam o domínio fluido sob hipóteses acústicas e são lineares. Pode-se, através destas equações, obter uma forma que seja função apenas do campo de pressão do fluido. Esta forma é conhecida como equação da onda e é bastante utilizada para modelar o domínio fluido, quando as hipóteses da acústica linear são adotadas. Para simplificação da simbologia, nos próximos itens p é representado apenas por p , e ρ_{f0} é representado por ρ_f .

2.3 Formulação em Pressão - Equação da Onda

Um das formas possíveis para o modelo acústico é a formulação em pressão. Nesta formulação, as equações acústicas linearizadas, obtidas anteriormente, sofrem manipulações algébricas de forma a resultar em apenas uma equação, função da pressão. Esta equação é obtida através da substituição da Equação (2.36) na Equação (2.34), esta nova relação é derivada em relação ao tempo e o resultado é combinado com a equação resultante da aplicação do operador ∇ na Equação (2.35), o que resulta na forma mostrada abaixo:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.38)$$

A equação acima é conhecida como equação da onda. Esta equação encerra todo o modelo acústico na variável pressão.

Uma outra forma de considerar o domínio fluido, formulação acústica, é introduzir uma nova variável nas equações da conservação da massa e da

conservação da quantidade de movimento. Esta nova variável é chamada de potencial de deslocamento e é mostrada a seguir.

2.4 Formulação em Pressão e Potencial de Deslocamento

Pode-se incluir, nas equações acústicas linearizadas, uma nova variável. Através desta nova variável pode-se, futuramente, em um modelo de elementos finitos, obter-se matrizes simétricas. A variável que é introduzida não altera o comportamento das equações. Esta nova variável é chamada de potencial de deslocamento e é definida da seguinte forma:

$$\{u_f\} = \{\nabla\Psi\} \quad (2.39)$$

Onde, $\{u_f\}$ é o deslocamento da partícula de fluido e Ψ é o potencial de deslocamento, portanto:

$$\{v_f\} = \left\{ \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right\} \quad (2.40)$$

Substituindo nas equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento linearizadas, Equações (2.38) e (2.39), o conceito de potencial de deslocamento e realizando manipulações algébricas, tem-se:

$$-\frac{1}{c^2\rho_f} p - \nabla^2\Psi = 0 \quad (2.41)$$

$$\rho_f \nabla \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\nabla p \quad (2.42)$$

As equações acima representam o modelo acústico utilizando o campo de pressão e o conceito de potencial de deslocamentos. Estas equações representam a equação da conservação da massa e da quantidade de movimento, agora utilizando uma nova variável.

Pode-se combinar as equações obtidas para o fluido com aquelas obtidas para a estrutura e, através de equações que compatibilizem os dois domínios, formar modelos que são utilizados para estudar o comportamento de problemas que apresentam interação entre estes fenômenos físicos.

2.5 Modelo Elasto-Acústico

Dois modelos para interação fluido-estrutura são propostos. No primeiro deles, a estrutura é representada por equações em que as variáveis são os esforços e o meio fluido é representado pelo campo de pressão. No segundo modelo, a estrutura continua sendo representada por equações em que as variáveis são os esforços, mas o meio fluido é representado, agora, pelo campo de pressão e pelo potencial de deslocamentos.

No primeiro modelo de interação fluido-estrutura, as equações do problema resultam em um sistema matricial não simétrico, quando se utiliza o MEF para aproximação da solução. O segundo modelo resulta em um sistema matricial simétrico quando se utiliza o MEF, mas tem o inconveniente de dobrar o número de graus de liberdade no domínio fluido.

2.5.1 Formulação em Esforços e Pressão

Neste modelo para interação fluido-estrutura axi-simétrico, são utilizadas as equações para casca fina axi-simétrica troncônica, Equações (2.16), (2.17) e (2.18), e a equação da onda, Equação (2.38), obtidas anteriormente. Para que estas equações sejam acopladas, é necessário estabelecer a continuidade cinemática e compatibilizar os esforços na interface. Para impor a continuidade cinemática, iguala-se as velocidades normais à interface do fluido e da estrutura. Na compatibilização dos esforços, deve-se considerar que a pressão atuante sobre a casca fina axi-simétrica é exercida pelo fluido.

Portanto, pode-se agrupar o problema de interação fluido-estrutura axi-simétrico como mostrado abaixo:

$$\frac{d}{ds}(rN_\varphi) - N_\theta \sin(\phi) - \rho_e r h \ddot{u} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_\varphi) + N_\theta \cos(\phi) + \frac{d}{ds}\left(rN_\varphi \cdot \frac{dw}{ds}\right) + pr - \rho_e r h \ddot{w} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_\varphi) - rQ_\varphi - M_\theta \sin(\phi) + \frac{I_M}{ds} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.45)$$

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.46)$$

$$\{\nabla p\} \cdot \{n\} = -\rho_f \{n\} \cdot \{\ddot{u}_e\} \quad (2.47)$$

Sendo que as três primeiras equações deste conjunto, Equações (2.43), (2.44) e (2.45), modelam a casca fina axi-simétrica troncônica pré-tensionada; deve-se ressaltar que as relações constitutivas para o material da casca são apresentadas no Capítulo 3. A quarta equação, Equação (2.46), modela o domínio fluido e a última equação, Equação (2.47), representa a condição de interface de continuidade cinemática. Na quinta equação $\{\ddot{u}_e\}$ é o vetor das acelerações da estrutura, $\{\ddot{u}, \ddot{w}\}^T$, e $\{n\}$ é o vetor normal a interface.

2.5.2 Formulação em Esforços, Pressão e Potencial de Deslocamentos

Neste modelo, o fluido, antes modelado pela equação da onda, é representado pelas equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento, utilizando a nova variável ψ . Novamente, as equações utilizadas para a estrutura são as Equações (2.16), (2.17) e (2.18), para o fluido são utilizadas as Equações (2.41) e (2.42).

No caso de interação fluido-estrutura, como condição de compatibilidade cinemática deve-se igualar os deslocamentos, normais à interface, da estrutura e do fluido. Para compatibilizar os esforços, faz-se com que a pressão que atua sobre a casca seja igualada a pressão do fluido.

Pode-se reunir as equações citadas acima em um conjunto de equações que modela o problema de interação fluido-estrutura em que o domínio fluido é representado pelas variáveis pressão e potencial de deslocamento. Este conjunto de equações é mostrado abaixo:

$$\frac{d}{ds}(rN_\phi) - N_\theta \sin(\phi) - \rho_e r h \ddot{u} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{ds}(rQ_\phi) + N_\theta \cos(\phi) + \frac{d}{ds}(rN_\phi \cdot \frac{dw}{ds}) + pr - \rho_e r h \ddot{w} = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{ds}(rM_\phi) - rQ_\phi - M_\theta \sin(\phi) + \frac{I_M}{ds d\theta} \ddot{\beta} = 0 \quad (2.50)$$

$$-\frac{1}{c^2 \rho_f} p - \nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.51)$$

$$\rho_f \nabla \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\nabla p \quad (2.52)$$

$$\{\nabla \Psi\} \cdot \{n\} = \{u_e\} \cdot \{n\} \quad (2.53)$$

Neste conjunto, as três primeiras equações, Equações (2.48), (2.49) e (2.50), modelam o domínio estrutural e encerram a compatibilização dos esforços. A quarta e a quinta equação, Equações (2.50) e (2.51), modelam o domínio fluido através das variáveis pressão e potencial de deslocamento. A sexta equação, Equação (2.53), é a condição necessária, na interface, de continuidade cinemática, nesta equação os deslocamentos normais à interface do fluido e da estrutura são igualados. E $\{u_e\}$ é o vetor dos deslocamentos da estrutura, ou seja, $\{u_e\} = \{u, w\}^T$.

Capítulo 3

Forma Integral e Método dos Elementos Finitos

As equações e as condições de contorno obtidas no Capítulo 2 governam o comportamento de problemas axi-simétricos acoplados que apresentam interação entre fluido e estrutura, considerando-se o efeito das pré-tensões sobre o comportamento dinâmico do sistema.

No Capítulo 2, são apresentadas duas formulações. Na primeira, adota-se, para o fluido, a pressão como variável, Equações (2.43) à (2.47). Na segunda, usa-se o potencial de deslocamentos e a pressão como variáveis no domínio fluido, Equações (2.48) à (2.53).

Estas equações diferenciais devem ser colocadas em uma forma integral, para possibilitar uma solução por elementos finitos. Para transformar equações diferenciais em equações integrais é utilizado o método dos resíduos ponderados. Neste capítulo, portanto, as equações diferenciais que governam o problema de interação fluido-estrutura axi-simétrico são colocadas em uma forma integral e, posteriormente, usa-se o MEF para se obter a solução aproximada do problema.

Finalmente, como resultado da aplicação do MEF, são apresentadas as matrizes dos elementos estruturais, do fluido e da interface, bem como os sistemas matriciais acoplados.

3.1 Forma Elasto-Acústica, Incluindo Efeito da Pré-Tensão, Formulação (u,p)

Nesta seção, trata-se da transformação das equações diferenciais de casca axi-simétrica troncônica, submetida a uma pressão interna, e do fluido, formulação em pressão, em sua forma integral fraca, utilizando para isto o método dos resíduos ponderados.

Dentre os métodos que utilizam a ponderação do resíduo, adota-se o método de Galerkin [17], onde as funções de ponderação são idênticas às funções de aproximação das variáveis.

Considera-se, para se obter a forma integral, o problema definido pelas Equações (2.43) à (2.47). Como primeiro passo, considerando apenas o domínio estrutural, Equações (2.43) à (2.45), através de substituições, pode-se escrever as seguintes equações diferenciais, Equações (3.1) e (3.2), que serão a base para aplicação do método dos resíduos ponderados.

$$\frac{d}{ds}(rN_\phi) - N_\theta \sin(\phi) - \rho_e r h \ddot{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}(rM_\phi) - \frac{dM_\theta}{ds} \sin(\phi) + N_\theta \cos(\phi) + \frac{d}{ds}(rN_\phi^* \frac{dw}{ds}) + pr - \rho_e r h \ddot{w} + \frac{d}{ds}(\frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\beta}) = 0 \quad (3.2)$$

Nas equações acima, N_ϕ^* são as pré-tensões de membrana, presentes no sistema.

Para aplicação do método clássico de Galerkin, são adotadas as seguintes aproximações:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_{ui} F_{ui} \quad (3.3)$$

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^N \alpha_{wi} F_{wi} \quad (3.4)$$

Onde \bar{u} e \bar{w} são aproximações para os deslocamentos u e w , α_{ui} e α_{wi} são os parâmetros da aproximação, F_{ui} e F_{wi} são as funções de interpolação e N é o número de funções para a aproximação. No caso de se aproximar a solução pelo MEF, α_{ui} e α_{wi} são as variáveis nodais do modelo discreto e F_{ui} e F_{wi} são as funções de forma para o elemento.

Substituindo estas aproximações nas Equações (3.1) e (3.2) e considerando que os esforços podem ser escritos como função dos deslocamentos, escreve-se:

$$R_1 = \frac{d}{ds}(r\bar{N}_\varphi) - \bar{N}_\theta \sin(\phi) - \rho_e r \bar{h} \dot{\bar{u}} \quad (3.5)$$

$$R_2 = \frac{d^2}{ds^2}(r\bar{M}_\varphi) - \frac{d\bar{M}_\theta}{ds} \sin(\phi) + \bar{N}_\theta \cos(\phi) + \frac{d}{ds}(r\bar{N}_\varphi^* \frac{d\bar{w}}{ds}) + pr - \rho_e r \bar{h} \dot{\bar{w}} + \frac{d}{ds}(\frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\bar{\beta}}) \quad (3.6)$$

Onde, R_1 e R_2 são definidos como os resíduos decorrentes do uso da aproximação para as variáveis das equações, como definido nas Equações (3.3) e (3.4). Estes resíduos são, seguindo o método de Galerkin, ortogonalizados, ou ponderados, em relação as funções utilizadas na aproximação das variáveis, o que permite escrever o problema em sua forma integral, como segue:

$$\int_{\Omega} (\frac{d}{ds}(r\bar{N}_\varphi) - \bar{N}_\theta \sin(\phi) - \rho_e r \bar{h} \dot{\bar{u}}) F_{ui} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} (\frac{d^2}{ds^2}(r\bar{M}_\varphi) - \frac{d\bar{M}_\theta}{ds} \sin(\phi) + \bar{N}_\theta \cos(\phi) + \frac{d}{ds}(r\bar{N}_\varphi^* \frac{d\bar{w}}{ds}) + pr - \rho_e r \bar{h} \dot{\bar{w}} + \frac{d}{ds}(\frac{I_M}{dsd\theta} \ddot{\bar{\beta}})) F_{wi} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.8)$$

Integrando por partes o primeiro termo da Equação (3.7), os dois primeiros termos e o último termo da Equação (3.8), tem-se as seguintes expressões para a forma integral fraca do problema:

$$\int_{\Omega} \left(-r \overline{N}_{\phi} \frac{dF_{ui}}{ds} - \overline{N}_{\theta} \sin(\phi) F_{ui} - \rho_c r h u F_{ui} \right) d\Omega + \int_{\lambda} r \overline{N}_{\phi} F_{ui} d\lambda = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} \left(r \overline{M}_{\phi} \frac{d^2 F_{wi}}{ds^2} + \overline{M}_{\theta} \sin(\phi) \frac{dF_{wi}}{ds} + \overline{N}_{\theta} \cos(\phi) F_{wi} + \frac{d}{ds} \left(r \overline{N}_{\phi} \frac{dw}{ds} \right) + p r F_{wi} \right) d\Omega -$$

$$\int_{\Omega} \left(\rho_c r h w F_{wi} + \frac{I_M}{ds d\theta} \beta \frac{dF_{wi}}{ds} \right) d\Omega + \int_{\lambda} \left(r \overline{Q}_{\phi} F_{wi} - r \overline{M}_{\phi} \frac{dF_{wi}}{ds} \right) d\lambda = 0$$

$$i=1, \dots, N \quad (3.10)$$

As Equações (3.9) e (3.10) podem ser escritas em função dos deslocamentos u e w , da casca axi-simétrica, o que permite escrever o sistema de uma forma mais conveniente para aplicação do MEF. Para colocar estas equações apenas como função de u e w utiliza-se as relações entre os esforços e as deformações, ou seja, as leis constitutivas da casca. Supondo-se um material de comportamento elástico linear isotrópico, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{\phi} \\ N_{\theta} \\ M_{\phi} \\ M_{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 \\ \nu C & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & \nu D \\ 0 & 0 & \nu D & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\phi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \chi_{\phi} \\ \chi_{\theta} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Onde:

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.12)$$

Nestas relações, E é o módulo de elasticidade do material, ν é o coeficiente de Poisson, h é a espessura da casca, ε_{ϕ} e ε_{θ} são as deformações de membrana e χ_{ϕ} e χ_{θ} são as deformações devido à flexão.

As relações entre as deformações e os deslocamentos, para casca axi-simétrica troncônica, apresentadas no Anexo 2, constituem o modelo cinemático do problema. Assumindo as hipóteses de casca fina de Kirchhoff, as deformações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_\varphi \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{1}{r}\sin(\phi) & -\frac{1}{r}\cos(\phi) \\ 0 & -\frac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin(\phi)\frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Utilizando as relações entre os esforços e os deslocamentos e desconsiderando o termo residual de inércia rotacional sobre o domínio, pode-se escrever as Equações (3.9) e (3.10) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} C \left\{ r \left(\frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{v}{r} (\bar{u}\sin(\phi) - \bar{w}\cos(\phi)) \right) \frac{dF_{wi}}{ds} + \left(\frac{1}{r} (\bar{u}\sin(\phi) - \bar{w}\cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \sin(\phi) F_{wi} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r t \bar{u} F_{wi} d\Omega = \int_{\lambda} r N_{\varphi} F_{wi} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} D \left\{ r \left(\frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} + \frac{v}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) \right) \frac{d^2 F_{wi}}{ds^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) + v \frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} \right) \sin(\phi) \frac{dF_{wi}}{ds} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ C \left(\frac{1}{r} (\bar{u}\sin(\phi) - \bar{w}\cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \cos(\phi) - \frac{d}{ds} (r N_{\varphi} \frac{d\bar{w}}{ds}) \right\} F_{wi} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r h \bar{w} F_{wi} d\Omega = \int_{\Omega} p r F_{wi} d\Omega + \int_{\lambda} (r Q_{\varphi} F_{wi} - r M_{\varphi} \frac{dF_{wi}}{ds}) d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.15)$$

O mesmo procedimento adotado para as equações de casca fina axi-simétrica troncônica é aplicado a equação da onda, escrita em função da variável pressão do fluido. A equação da onda, obtida no Capítulo 2, Equação (2.38), pode ter a variável pressão aproximada da seguinte forma:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^N \alpha_{fi} F_{fi} \quad (3.16)$$

Onde α_{fi} são os parâmetros da aproximação e F_{fi} são as funções de aproximação para o domínio fluido, \bar{p} é o campo aproximado das pressões e N é o número de funções utilizadas. Substituindo esta aproximação na equação da onda, resulta em:

$$R_3 = \nabla^2 \bar{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

Sendo R_3 definido como o resíduo decorrente da aproximação adotada na Equação (2.38). Ponderando o resíduo R_3 com as mesmas funções usadas para a aproximação de p , isto é, aplicando-se o método de Galerkin [17], tem-se a seguinte forma integral:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \bar{p} - \frac{1}{c^2} \ddot{\bar{p}}) F_{fi} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.18)$$

Integrando por partes o primeiro termo da Equação (3.18) e fazendo uso do teorema da divergência [19], pode-se escrever a forma fraca da integral da forma que segue:

$$\int_{\Omega} (\{\nabla \bar{p}\} \bullet \{\nabla F_{fi}\}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{\bar{p}} F_{fi} d\Omega = \int_{\lambda} (\{\nabla \bar{p}\} \bullet \{n\}) F_{fi} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.19)$$

Na Equação (3.19), $\{n\}$ representa o vetor normal exterior à superfície de contorno do fluido.

Assim, partindo-se das equações da casca submetida a uma pré-tensão N_ϕ^* , submetida a um carregamento devido a pressão do fluido e das equações de compatibilidade cinemática na interface fluido-estrutura, Equação (2.47), pode-se escrever o problema acoplado em sua forma integral fraca (u,p) , da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} C \left\{ r \left(\frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{v}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) \right) \frac{dF_{wi}}{ds} + \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \sin(\phi) F_{wi} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r \bar{u} F_{wi} d\Omega = \int_{\lambda} r N_\phi F_{wi} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.20)$$

$$\int_{\Omega} D \left\{ r \left(\frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} + \frac{v}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) \right) \frac{d^2 F_{wi}}{ds^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) + v \frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} \right) \sin(\phi) \frac{dF_{wi}}{ds} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ C \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \cos(\phi) - \frac{d}{ds} (r N_\phi^* \frac{d\bar{w}}{ds}) \right\} F_{wi} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r h \bar{w} F_{wi} d\Omega = \int_{\Omega} p r F_{wi} d\Omega + \int_{\lambda} (r Q_\phi F_{wi} - r M_\phi \frac{dF_{wi}}{ds}) d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} (\{\nabla p\} \bullet \{\nabla F_{fi}\}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} F_{fi} d\Omega = -\rho_r \int_{\lambda} (\{n\} \bullet \{\ddot{u}_e\}) F_{fi} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.22)$$

O conjunto de equações integrais, Equações (3.20) a (3.22), é a base da formulação (u,p) e será resolvido nas próximas seções, usando-se o MEF.

3.2 Forma Elasto-Acústica, Incluindo Efeito da Pré-Tensão, Formulação (u,p,ψ)

A formulação elasto-acústica (u,p) , apresentada no Item (3.1), conduz a um sistema matricial não simétrico quando é utilizada uma aproximação via MEF para a resolução. Com o intuito de se obter uma formulação simétrica para o

problema, usa-se, neste item, uma formulação em três campos (u,p,ψ), conforme mostrado no Capítulo 2.

Da mesma maneira como foi obtida uma forma integral, utilizando o método de Galerkin, para equação da onda, obtém-se a forma integral para as equações da conservação da massa, Equação (2.41), e da conservação da quantidade de movimento, Equação (2.42). Portanto, considere as seguintes aproximações para as variáveis destas equações:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^N \alpha_{pi} F_{pi} \quad (3.23)$$

$$\bar{\Psi} = \sum_{i=1}^N \alpha_{\psi i} F_{\psi i} \quad (3.24)$$

Onde, \bar{p} e $\bar{\Psi}$ são as aproximações da pressão p e do potencial de deslocamento ψ, α_{pi} e $\alpha_{\psi i}$ são os parâmetros de aproximação e F_{pi} e $F_{\psi i}$ são as funções de interpolação. Quando estas aproximações são substituídas nas equações (2.41) e (2.42), tem-se:

$$R_4 = \rho_f \nabla \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} + \nabla \bar{p} \quad (3.25)$$

$$R_5 = -\frac{1}{c^2 \rho_f} \bar{p} - \nabla^2 \bar{\Psi} \quad (3.26)$$

Sendo R_4 e R_5 definidos com os resíduos decorrentes do uso de aproximações para as variáveis p e ψ.

Aplicando-se o método de Galerkin, [17], às Equações (3.25) e (3.26), obtém-se a seguinte forma integral para o problema:

$$\int_{\Omega} \left(\rho_f \nabla \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} + \nabla \bar{p} \right) \nabla F_{pi} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{c^2 \rho_f} \bar{p} - \nabla^2 \bar{\Psi} \right) F_{pi} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.28)$$

O segundo termo da Equação (3.28) é então integrada por partes e, utilizando o teorema da divergência, [19], pode-se escrever a Equação (3.28) da seguinte forma :

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{c^2 \rho_f} \bar{p} F_{pi} d\Omega + \int_{\Omega} (\{\nabla \bar{\Psi}\} \bullet \{\nabla F_{pi}\}) d\Omega - \int_{\lambda} (\{\nabla \bar{\Psi}\} \bullet \{n\}) F_{pi} d\lambda = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.29)$$

Assim, partindo-se, de um lado, das equações da casca fina axi-simétrica troncônica submetida a uma pré-tensão e a um carregamento p devido a pressão do fluido, Equações (3.1) e (3.2), e, de outro lado, da equação de compatibilidade cinemática na interface fluido-estrutura, Equação (2.53), pode-se escrever o problema elasto-acústico em sua forma integral fraca (u, p, ψ) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} C \left\{ r \left(\frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{\nu}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) \right) \frac{dF_{ui}}{ds} + \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + \nu \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \sin(\phi) F_{ui} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r t \ddot{u} F_{ui} d\Omega = \int_{\lambda} r N_{\phi} F_{ui} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega} D \left\{ r \left(\frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) \right) \frac{d^2 F_{wi}}{ds^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) + \nu \frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} \right) \sin(\phi) \frac{dF_{wi}}{ds} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ C \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + \nu \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \cos(\phi) - \frac{d}{ds} (r N_{\phi} \frac{d\bar{w}}{ds}) \right\} F_{wi} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_e r h \ddot{w} F_{wi} d\Omega = \int_{\Omega} p r F_{wi} d\Omega + \int_{\lambda} (r Q_{\phi} F_{wi} - r M_{\phi} \frac{dF_{wi}}{ds}) d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.31)$$

$$\int_{\Omega} (\rho_f \nabla \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} + \nabla \bar{p}) \nabla F_{pi} d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} (\{\nabla \bar{\Psi}\} \bullet \{\nabla F_{pi}\}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c^2 \rho_f} \bar{p} F_{pi} d\Omega = \int_{\lambda} (\{u_e\} \bullet \{n\}) F_{pi} d\lambda \quad i=1, \dots, N \quad (3.33)$$

O sistema de equações integrais, Equações (3.30) à (3.33), é a base da formulação (u, p, ψ) , que é simétrica, todavia conduz a um número de graus de

liberdade maior, uma vez que para cada ponto do fluido tem-se duas variáveis p e ψ . Este conjunto de equações será resolvido, nas próximas seções, usando-se o MEF.

3.3 Elemento Finito de Casca Fina Axi-Simétrica Troncônica

O Método dos Elementos Finitos consiste em resolver equações, de forma aproximada, sobre um espaço geométrico definido através do uso de funções de aproximação para as variáveis do problema, [1], [2] e [18]. Estas funções são, geralmente, polinômios interpoladores que utilizam como parâmetros de aproximação os valores nodais das variáveis.

Fazendo uso das equações integrais, obtidas nos Itens (3.1) e (3.2), e do Método dos Elementos Finitos, é possível obter soluções aproximadas para as equações diferenciais mostradas no Capítulo 2.

O Método dos Elementos Finitos é aplicado às equações integrais, separadamente, da estrutura e do fluido. Os modelos obtidos com a aplicação deste método são agrupados, através das condições de fronteira, obtendo-se um modelo de elementos finitos para interação fluido-estrutura.

Assim, para o caso de casca fina axi-simétrica troncônica, considere o suporte geométrico mostrado na Figura (3.1). A geometria, bem como as condições de fronteira, mostradas na Figura (3.1), devem ser aplicadas nas equações (3.14) e (3.15), que são a forma integral fraca das equações diferenciais de casca fina axi-simétrica submetida a uma pré-tensão.

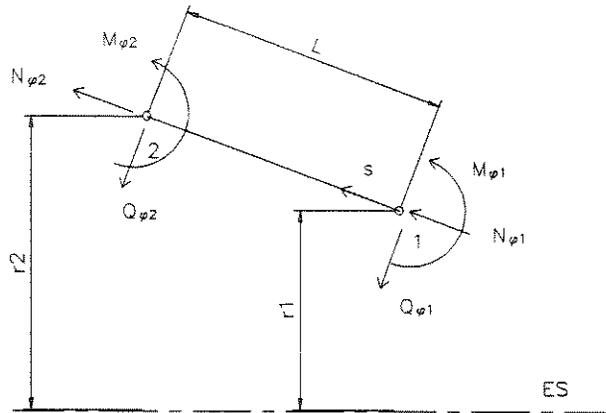


Figura 3.1 - Geometria e condições de contorno para elemento finito de casca axi-simétrica troncônica

Utilizando, portanto, os limites genéricos de integração para cada elemento em questão, a forma integral resulta em:

$$\int_0^L C \left\{ r \left(\frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{v}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) \right) \frac{dF_{wi}}{ds} + \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \sin(\phi) F_{wi} \right\} ds + \int_0^L \rho_e r h \bar{u} F_{wi} ds = [r N_\phi F_{wi}]_0^L \quad i=1, \dots, N \quad (3.34)$$

$$\int_0^L D \left\{ r \left(\frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} + \frac{v}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) \right) \frac{d^2 F_{wi}}{ds^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{ds} \sin(\phi) + v \frac{d^2 \bar{w}}{ds^2} \right) \sin(\phi) \frac{dF_{wi}}{ds} \right\} ds - \int_0^L \left\{ C \left(\frac{1}{r} (\bar{u} \sin(\phi) - \bar{w} \cos(\phi)) + v \frac{d\bar{u}}{ds} \right) \cos(\phi) - \frac{d}{ds} (r N_\phi \frac{d\bar{w}}{ds}) \right\} F_{wi} ds + \int_0^L \rho_e r h \bar{w} F_{wi} ds = \int_0^L p r F_{wi} ds + [r Q_\phi F_{wi} - r M_\phi \frac{dF_{wi}}{ds}]_0^L \quad i=1, \dots, N \quad (3.35)$$

Onde L é o comprimento do elemento.

As Equações (3.38) e (3.39) podem ser colocadas em uma forma matricial da forma que segue:

$$[M]_E \{\ddot{u}_e\} + ([K]_E + [K_G]_E) \{u_e\} = \{C\}_E \quad (3.40)$$

Na Equação (3.40), $[M]_E$ é a matriz de massa de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, $[K]_E$ é a matriz de rigidez de um elemento de casca axi-simétrica troncônica, $[K_G]_E$ é a matriz de rigidez geométrica para o elemento, $\{u_e\}$ é vetor dos deslocamentos nodais e $\{C\}_E$ é o vetor das cargas nodais equivalentes. As matrizes $[M]_E$ e $[K]_E$ são definidas abaixo da seguinte forma:

$$[K]_E = \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] r \left(\frac{L}{2}\right) ds' \quad (3.41)$$

$$[M]_E = \int_{-1}^{+1} [F_{uw}]^T \rho_e [F_{uw}] hr \left(\frac{L}{2}\right) ds' \quad (3.42)$$

Com $[B]$, $[D]$ e $[F_{uw}]$ definidos da forma que segue, [1]:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{dF_{u1}}{ds'} & 0 & 0 & \frac{dF_{u2}}{ds'} & 0 & 0 \\ \frac{\sin(\phi)}{r} & -F_{w1} \frac{\cos(\phi)}{r} & -F_{w2} \frac{\cos(\phi)}{r} & \frac{\sin(\phi)}{r} & -F_{w3} \frac{\cos(\phi)}{r} & -F_{w4} \frac{\cos(\phi)}{r} \\ 0 & -\frac{d^2 F_{w1}}{ds'^2} & -\frac{d^2 F_{w2}}{ds'^2} & 0 & -\frac{d^2 F_{w3}}{ds'^2} & -\frac{d^2 F_{w4}}{ds'^2} \\ 0 & -F_{w1} \frac{\sin(\phi)}{r} & -F_{w2} \frac{\sin(\phi)}{r} & 0 & -F_{w3} \frac{\sin(\phi)}{r} & -F_{w4} \frac{\sin(\phi)}{r} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$[D] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$[F_{uw}] = \begin{bmatrix} F_{u1} & 0 & 0 & F_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & F_{w1} & F_{w2} & 0 & F_{w3} & F_{w4} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

A matriz de rigidez geométrica, $[K_G]_E$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_G]_E = N_{\varphi}^* \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w2}}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dF_{w2}}{ds} & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w2}}{ds} & \frac{dF_{w2}}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dF_{w3}}{ds} & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w3}}{ds} & \frac{dF_{w2}}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dF_{w4}}{ds} & \frac{dF_{w1}}{ds} & \frac{dF_{w4}}{ds} & \frac{dF_{w2}}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r \left(\frac{L}{2} \right) ds \quad (3.46)$$

A carga nodal equivalente pode ser devido a uma pressão sobre a superfície do elemento ou devido a um carregamento concentrado aplicado as extremidades do elemento. Matricialmente, o carregamento pode ser escrito como indicado a seguir:

$$\{C_e\} = \int_{-1}^{+1} \{F_w\} pr \left(\frac{L}{2} \right) ds + \{r\bar{N}\} \quad (3.47)$$

Com os vetores $\{F_w\}$ e $\{r\bar{N}\}$ definidos da seguinte forma:

$$\{F_w\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{w1} \\ F_{w2} \\ 0 \\ F_{w3} \\ F_{w4} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\{\bar{rN}\} = \begin{Bmatrix} r_1 \overline{N_{\phi 1}} \\ r_1 \overline{Q_{\phi 1}} \\ r_1 \overline{M_{\phi 1}} \\ r_2 \overline{N_{\phi 2}} \\ r_2 \overline{Q_{\phi 2}} \\ r_2 \overline{M_{\phi 2}} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

As funções F_{w1} , F_{w2} , F_{w3} e F_{w4} são definidas no Anexo 3.

Quando se considera o problema de interação fluido-estrutura, a carga equivalente é a pressão exercida pelo fluido. Neste caso, a Equação (3.47) é escrita considerando-se apenas a pressão exercida pelo fluido na interface. Considerando-se que a pressão também é escrita como função dos valores nodais, pode-se rescrever a Equação (3.47) da forma que segue:

$$\{C\}_E = \int_{-1}^{+1} \{F_w\} \{F_u\}^T r \frac{L}{2} ds \{p_a\} = [P]_E \{p_a\} \quad (3.50)$$

Na Equação (3.50), $\{F_u\}$ é o vetor das funções de forma utilizadas para interpolar os valores de pressão do fluido na interface, $\{p_a\}$ é o vetor dos valores nodais do fluido na interface e $[P]_E$ é definido como a matriz de interação. Os vetores $\{F_u\}$ e $\{p_a\}$ são definidos na seqüência:

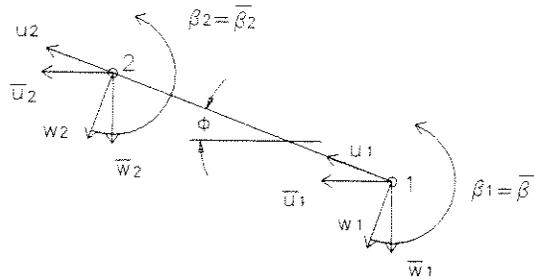
$$\{F_u\} = \begin{Bmatrix} F_{u1} \\ F_{u2} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\{p_a\} = \begin{Bmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

As funções F_{u1} e F_{u2} são definidas no Anexo 3.

Para compatibilizar os sistemas de referência de cada elemento, é necessário que se faça uma transformação de coordenadas do referencial local para um sistema de referência global [1]. A Figura (3.2) ilustra as componentes

do deslocamento referenciadas localmente e as componentes de deslocamento referenciados globalmente.



ES

Figura 3.2 - Componentes do deslocamento de um elemento finito, referenciados localmente e globalmente

Esta transformação de coordenadas pode ser colocada em uma forma matricial:

$$[T]\{\bar{u}\} = \{u\} \quad (3.53)$$

A matriz de transformação de coordenadas, $[T]$, para o caso em questão, assume a forma abaixo:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Aplicando-se a Transformação (3.53) na equação do movimento da casca, Equação (3.40), e adotando-se o procedimento usual de montagem das matrizes globais do sistema, obtém-se a formulação matricial do problema, no referencial global, para todo o domínio discretizado.

3.4 Elemento Finito de Fluido, Simetria Axial

Para aplicação do Método dos Elementos Finitos sobre o domínio fluido, são consideradas a forma fraca das equações integrais definidas nos Itens (3.2) e (3.3). Estas equações são obtidas pela aplicação do método de Galerkin às equações da onda, da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento, Equações (3.22), (3.32) e (3.33). Para fazer uso do Método dos Elementos Finitos, é necessário que a geometria do elemento seja definida. Neste trabalho, considera-se o domínio com a forma quadrilateral, como mostra a Figura (3.3)a. Para facilitar a integração das equações, é realizada uma transformação isoparamétrica de coordenadas [2], ilustrada pela Figura (3.3)b.

Devido a simetria axial proposta para o comportamento do fluido, o operador ∇ assume a forma abaixo indicada:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r} \right\} \quad (3.55)$$

O operador ∇ , com a forma da Equação (3.55), é considerado para a obtenção da forma aproximada de solução via MEF do domínio fluido.

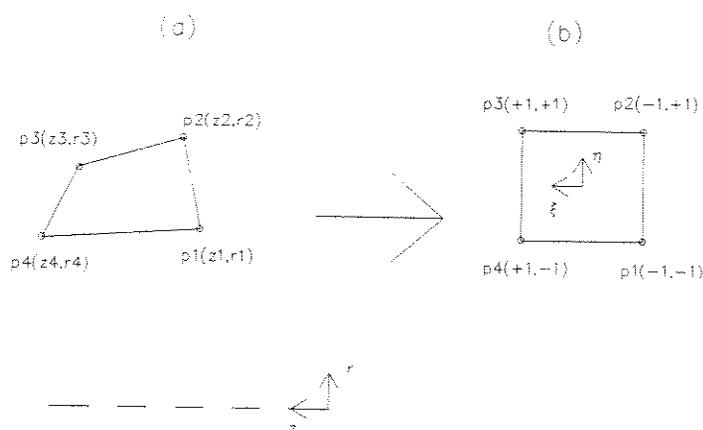


Figura 3.3 - (a) Elemento finito quadrilateral de 4 nós. (b) Transformação de coordenadas do sistema global para o sistema natural

São apresentadas, na seqüência, a aplicação do MEF sobre as duas formulações propostas para o fluido. A primeira, baseada no campo de pressões do fluido. A segunda, baseada, além do campo de pressões, no potencial de deslocamentos. Nas duas formulações a condição de interface apresentada é de interação com casca axi-simétrica. Como resultado da aplicação do MEF, é apresentado o problema na forma matricial, em função dos valores nodais das variáveis.

3.4.1 Formulação em Pressão

O modelo acústico, formulação em pressão, representado pela Equação (2.38) é utilizado na aplicação do MEF. A forma integral fraca associada a equação da onda, Equação (3.22), é usada como base para a aplicação do método. A condição de fronteira empregada é a de interação com casca axi-simétrica na interface. Esta condição é explicitada pela Equação (2.47).

Portanto, utilizando a Equação (3.22), fazendo a transformação de coordenadas indicada pela Figura (3.3) e, ainda, propondo aproximação clássica de elementos finitos para a variável p , tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\{\nabla \bar{p}\} \bullet \{\nabla F_{\bar{r}}\}) r |J| d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{c^2} \bar{p} F_{\bar{r}} r |J| d\xi d\eta = -\rho_f \int_{-1}^{+1} \bar{w} F_u \frac{L}{2} ds' \quad i=1, \dots, 4 \quad (3.56)$$

Na Equação (3.56), $|J|$ representa o determinante da matriz de transformação de coordenadas. ξ e η são as novas variáveis de parametrização e w é o deslocamento da estrutura normal à interface. Na interface é considerado a interação do fluido com o elemento de casca axi-simétrico apresentado no item anterior. A pressão foi aproximada pelos valores nodais, da forma que segue:

$$\bar{p} = N_{f1} p_1 + N_{f2} p_2 + N_{f3} p_3 + N_{f4} p_4 \quad (3.57)$$

Na Equação (3.57), p indica a aproximação para a variável p , N_{fi} são as funções de interpolação, definidas no Anexo 3, e p_i são os valores nodais da variável p .

A Equação (3.56) pode ser colocada na forma matricial clássica, para um problema cuja solução é aproximada por elementos finitos, da forma que segue:

$$[C]_E \{\ddot{p}\} + [H]_E \{p\} + \rho_f [P]_E^T \{\ddot{w}\} = 0 \quad (3.58)$$

Onde $[C]_E$ é a matriz de compressibilidade para o elemento e $[H]_E$ é a matriz volumétrica, também para o elemento de fluido. A matriz $[P]_E$ é a matriz de interação, para o elemento de interface. A matriz $[P]_E$ é definida na Equação (3.50), as matrizes $[C]_E$ e $[H]_E$ são definidas abaixo:

$$[H]_E = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([Z]^T [Z]) r |J| d\xi d\eta \quad (3.59)$$

$$[C]_E = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\{F_f\} \{F_f\}^T) r |J| d\xi d\eta \quad (3.60)$$

O vetor $\{p\}$, que contém os valores de pressão nodais, é definido abaixo:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

O vetor $\{\ddot{w}\}$ é o vetor dos coeficientes nodais da aproximação para a aceleração da estrutura normal à interface, e é mostrado abaixo:

$$\{\ddot{w}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{\beta}_1 \\ 0 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\beta}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

As matrizes utilizadas nas Equações (3.59) e (3.60) são definidas da seguinte forma:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{f1}}{\partial r} & \frac{\partial F_{f2}}{\partial r} & \frac{\partial F_{f3}}{\partial r} & \frac{\partial F_{f4}}{\partial r} \\ \frac{\partial F_{f1}}{\partial z} & \frac{\partial F_{f2}}{\partial z} & \frac{\partial F_{f3}}{\partial z} & \frac{\partial F_{f4}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\{F_f\} = \begin{Bmatrix} F_{f1} \\ F_{f2} \\ F_{f3} \\ F_{f4} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

As funções F_{f1} , F_{f2} , F_{f3} e F_{f4} são definidas no anexo 3.

Através das definições acima, o problema acústico, formulação em pressão, fica determinado, bem como a condição de acoplamento na interface com casca axi-simétrica.

3.4.2 MEF Aplicado as Equações de Conservação de Massa e da Conservação da Quantidade de Movimento, Formulação (p, ψ)

Nesta seção, é aplicado, novamente, o método dos elementos finitos, agora sobre a forma integral fraca das equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento, utilizando como variáveis a pressão

e o potencial de deslocamento, Equações (3.32) e (3.33). Considerando, portanto, estas equações, bem como o suporte geométrico e a transformação de coordenadas mostrados na Figura (3.3), pode-se escrever as equações seguintes:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\rho_0 \nabla \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} + \nabla \bar{p}) \nabla F_{pi} |J| d\xi d\eta = 0 \quad (3.65)$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\{\nabla \bar{\Psi}\} \cdot \{\nabla F_{pi}\}) |J| d\xi d\eta - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{c^2 \rho_f} \bar{p} F_{pi} |J| d\xi d\eta + \int_{-1}^1 w F_{ur} \frac{L}{2} ds' = 0 \quad (3.66)$$

Na Equação (3.66), o termo sobre a superfície considera a interação com elementos de casca axi-simétrica. Nas Equações (3.65) e (3.66), foram consideradas as interpolações, através dos valores nodais, para as variáveis p e ψ da forma que segue :

$$\bar{p} = F_{f1} p_1 + F_{f2} p_2 + F_{f3} p_3 + F_{f4} p_4 \quad (3.67)$$

$$\bar{\Psi} = F_{f1} \Psi_1 + F_{f2} \Psi_2 + F_{f3} \Psi_3 + F_{f4} \Psi_4 \quad (3.68)$$

As expressões para as funções F_{f1} , F_{f2} , F_{f3} e F_{f4} são encontradas no Anexo 3.

As equações (3.65) e (3.66) podem ser colocadas em uma forma matricial, como mostrado abaixo:

$$[H]_E \{p\} + \rho_f [H]_E \{\ddot{\Psi}\} = 0 \quad (3.69)$$

$$[H]_E \{\Psi\} - \frac{1}{c^2 \rho_f} [C]_E \{p\} + [P]_E^T \{w\} = 0 \quad (3.70)$$

As matrizes volumétrica e de compressibilidade para o elemento, $[H]_E$ e $[C]_E$, são definidas pelas Equações (3.59) e (3.60).

As Equações (3.69) e (3.70) definem o problema acústico, utilizando pressão e potencial de deslocamento como variáveis, bem como apresentam como condição de fronteira o acoplamento do fluido com casca axi-simétrica.

3.5 Modelo Matricial para Interação Fluido-Estrutura, Formulação u e p

Para se obter uma formulação matricial para o problema de interação fluido-estrutura, formulação u e p, consideram-se as Equações (3.40) e (3.58). Escrevendo estas equações de forma conjunta obtém-se a forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ \rho_f [P]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [P] \\ 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Neste modelo [M] representa a matriz de massa global da estrutura, [K] representa a matriz de rigidez global da estrutura, [C] é a matriz global de compressibilidade para o fluido, [H] é a matriz volumétrica global para o fluido e [P] é a matriz global de interação fluido-estrutura para a interface. O vetor $\{u_e\}$ representa o vetor global de deslocamentos da estrutura e $\{p\}$ representa o vetor global de pressões nodais do fluido.

Este sistema possui um número de graus de liberdade, para o problema de interação fluido-estrutura, mínimo, em contra-partida apresenta o inconveniente de o sistema matricial ser não-simétrico. Para contornar este problema, é apresentado, na seqüência, a formulação u, p e ψ que resulta em um sistema matricial simétrico.

3.6 Modelo Matricial para Interação Fluido-Estrutura, Formulação u, p e ψ

Neste modelo matricial, são utilizadas as Equações (3.40), (3.69) e (3.70). Neste modelo a equação matricial da estrutura, formulação em deslocamento, e do fluido, formulação em pressão e potencial de deslocamentos, são acoplados na interface através da matriz de interação. Este modelo matricial para o problema de interação fluido-estrutura é mostrado a seguir.

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & \rho_f[H] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{\ddot{\Psi}\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & 0 & [P] \\ 0 & 0 & [H] \\ [P]^T & [H] & -\frac{1}{c^2 \rho_f} [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{\Psi\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Neste modelo, as matrizes apresentadas são as mesmas utilizadas na Equação (3.71). A Equação (3.72) apresenta o conveniente de ser matricialmente simétrica, conseqüentemente pode-se utilizar algoritmos mais eficientes para resolução do auto-problema. Este sistema matricial apresenta como desvantagem o número consideravelmente maior de graus de liberdade. O número de graus de liberdade do fluido é dobrado, resultando em um maior tempo de cálculo na solução do sistema.

Supondo-se uma solução harmônica para as variáveis dos sistemas matriciais do problema de interação fluido-estrutura, Equações (3.71) e (3.72), pode-se obter, através da solução do auto-problema, as frequências e os modos naturais de vibração do sistema acoplado. Esta hipótese é adotada e, no Capítulo 4, são apresentados as soluções do auto-problema para os vários casos de formulações matriciais obtidas neste capítulo.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados do problema de vibrações livres para alguns casos que apresentam simetria axial e que podem ser modelados pela formulação deduzida nos capítulos anteriores. Primeiramente, são realizados testes para a validação do modelo de casca fina axi-simétrica troncônica. Também é realizado uma simulação numérica considerando a existência de pré-tensão na casca devido a uma pré-carga na forma de pressão interna. Na seqüência, o modelo apresentado para o fluido é testado utilizando formas geométricas que tenham solução conhecida. São realizados testes para o modelo de interação fluido-estrutura que são comparados com resultados experimentais e numéricos existentes na literatura. Nos testes dos modelos acoplados, procura-se mostrar a influência do fluido sobre o comportamento dinâmico do sistema.

De uma forma global, este capítulo tem o objetivo de mostrar o campo de aplicações dos modelos elasto-acústicos desenvolvidos neste trabalho, verificando a precisão obtida, a influência do refinamento da malha e as tendências de convergência dos resultados. É também verificada a qualidade dos programas desenvolvidos e se eles apresentam desempenho adequado. Para solução do auto-problema utiliza-se, em todos os casos estudados, o método QR através do uso do software comercial MATLAB®.

4.1 Validação Numérica do Modelo Estrutural

Para validação da formulação e da implementação computacional do caso de casca fina axi-simétrica troncônica foram escolhidos três testes: o primeiro considera que a estrutura tem a forma de uma placa circular, o segundo considera uma forma esférica para a casca e, finalmente, uma casca esférica submetida à pressão interna. Os resultados numéricos obtidos nestes testes são comparados com os apresentados por formulações analíticas disponíveis na literatura ou comparados com resultados numéricos de outros autores.

4.1.1 Frequências Naturais de uma Placa Circular

Um teste bastante simples, todavia representativo do comportamento em flexão do modelo estrutural implementado, é a análise das vibrações livres de uma placa circular. As condições de fronteira para este teste são de engastamento em toda a borda exterior. Utilizando o modelo de casca fina axi-simétrica troncônica mostrado no Capítulo 3 e o programa descrito no Anexo 4, pode-se resolver o problema de vibrações livres somente no domínio estrutural, que corresponde a solucionar o seguinte problema:

$$[M]\{\ddot{u}_e\} + [K]\{u_e\} = \{0\} \quad (4.1)$$

Para o caso de vibrações harmônicas a Equação (4.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{\tau_i\} = \{0\} \quad (4.2)$$

Onde, ω_i é o i -ésimo auto-valor do sistema e $\{\tau_i\}$ é o i -ésimo auto-vetor do sistema, que neste caso tem o significado de frequências e modos naturais de vibração respectivamente; $[K]$ representa a matriz de rigidez do sistema e $[M]$ representa a matriz de massa do sistema.

A geometria do problema e as características do material adotado para este teste são apresentados na Tabela (4.1).

Raio da Placa [m]	1.0
Espessura da Placa [m]	5.0e-3
Densidade do Material [Kg/m ³]	7.81e+3
Módulo Elástico [Pa]	207.0e+9
Poisson	0.292

Tabela 4.1 - Dados do modelo de placa circular

Dois modelos de elementos finitos são utilizados. Em ambos é utilizada uma malha regular. O primeiro modelo é composto por 11 nós e 10 elementos o segundo modelo é composto de 41 nós e 40 elementos, o que permite verificar a convergência do modelo proposto.

Os resultados numéricos obtidos para este problema podem ser comparados com os valores analíticos [20]. Na Tabela (4.2), são comparados os valores numéricos obtidos para as dez primeiras freqüências naturais de vibração, para as duas malhas propostas, com as dez primeiras freqüências naturais obtidas analiticamente.

Ordem das Freqüências	Freqüências MEF-11 nós Malha 1	Freqüências MEF-41 nós Malha 2	Freqüências Analíticas [20]	Diferença Percentual Malha 2 X Analítico
1	1.263e+1	1.263e+1	1.263e+1	-
2	4.918e+1	4.918e+1	4.917e+1	0.02
3	1.102e+2	1.102e+2	1.102e+2	-
4	1.958e+2	1.956e+2	1.956e+2	-
5	3.064e+2	3.054e+2	3.054e+2	-
6	4.425e+2	4.397e+2	4.396e+2	0.02
7	6.055e+2	5.984e+2	5.982e+2	0.03
8	7.967e+2	7.815e+2	7.813e+2	0.03
9	1.017e+3	9.890e+2	9.887e+2	0.03
10	1.259e+3	1.221e+3	1.221e+3	-

Tabela 4.2 - Freqüências naturais de vibração de placa circular com a borda engastada

Pode-se constatar, a partir dos resultados mostrados na Tabela (4.2), que os valores numéricos obtidos via MEF concordam com os valores analíticos dentro de uma diferença máxima de 0.03%, o que pode ser considerado bom. Observa-se, também, uma tendência de convergência para os valores analíticos, para as dez primeiras frequências analisadas, devido ao refinamento da malha.

4.1.2 Vibrações Livres de uma Esfera de Parede Fina

De acordo com as equações obtidas nos capítulos anteriores, é possível simular o comportamento dinâmico de uma estrutura com a forma esférica, usando-se o modelo de casca fina axi-simétrica troncônica. Neste problema aparecem as tensões de flexão e membrana acoplados, constituindo-se em um teste mais rigoroso para o modelo.

Considerando, portanto, uma casca esférica que, geometricamente e constitutivamente, é definida pelos dados da Tabela (4.3).

Raio da Esfera [m]	1.0
Espessura da Casca [m]	1.0e-3
Densidade [Kg/m ³]	7.81e+3
Módulo Elástico [Pa]	207.0e+9
Poisson	0.292

Tabela 4.3 - Dados para o modelo de esfera

Para a validação do modelo de elementos finitos implementado, utilizaram-se duas malhas: uma de 41 nós e malha regular e a outra de 91 nós e refinamento de malha exponencial nas extremidades. O modelo de elementos finitos utilizando malha exponencial é proposto devido a um desvio observado na forma do modo quando se utiliza uma malha regular. Na Figura (4.1) pode-se ver em destaque, dentro de círculos, o desvio na forma do quarto modo natural quando se utiliza uma malha regular de 41 nós.

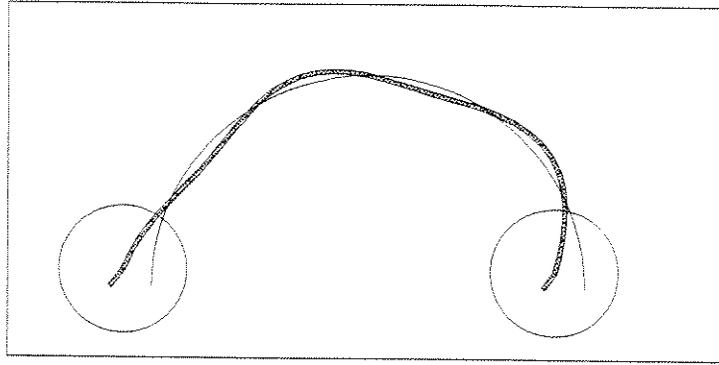


Figura 4.1 - Quarto modo natural de vibração, utilizando uma malha regular

Quando se utiliza, no lugar de uma malha regular, uma malha com espaçamento exponencial, o problema dos desvios na forma dos modos desaparecem. Na Figura (4.2) é representado graficamente a malha exponencial de 91 nós utilizada.

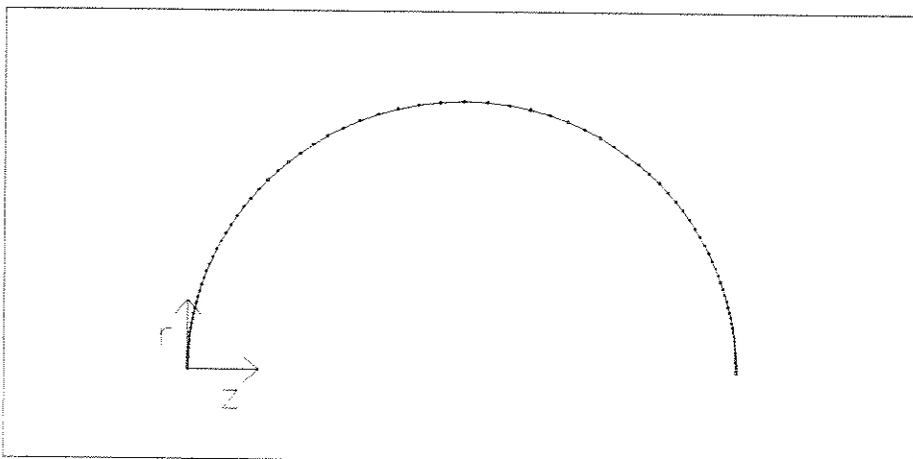


Figura 4.2 - Malha de elementos finitos para esfera, distribuição exponencial de nós

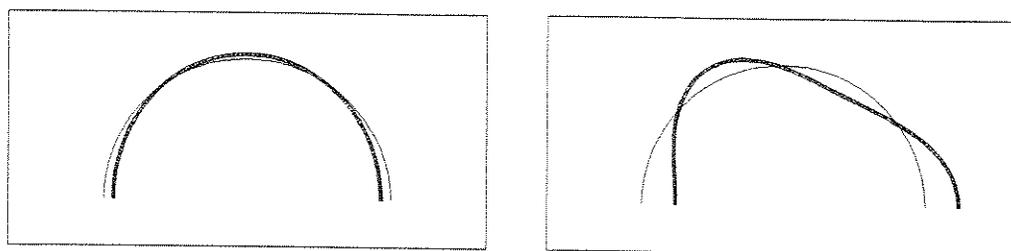
As frequências naturais de vibração obtidas numericamente, a partir de uma equação do tipo Equação (4.2), podem ser comparadas com as frequências naturais de vibração obtidas através de formulação analítica [20]. Este comparativo, entre as duas malhas utilizadas e o modelo analítico, é mostrado na Tabela (4.4).

Ordem das Frequências	Frequências MEF-41 nós Malha 1	Frequências MEF-91 nós Malha 2	Frequências Analíticas [20]	Diferença Percentual Malha2 X Analítico
1	6.034e+2	6.036e+2	6.032e+2	+0.07
2	7.138e+2	7.142e+2	7.137e+2	+0.07
3	7.570e+2	7.576e+2	7.569e+2	+0.07
4	7.782e+2	7.789e+2	7.781e+2	+0.10
5	7.902e+2	7.911e+2	7.901e+2	+0.13
6	7.978e+2	7.987e+2	7.976e+2	+0.14
7	8.029e+2	8.038e+2	8.025e+2	+0.16
8	8.066e+2	8.075e+2	8.061e+2	+0.17
9	8.094e+2	8.103e+2	8.087e+2	+0.20
10	8.118e+2	8.125e+2	8.108e+2	+0.21

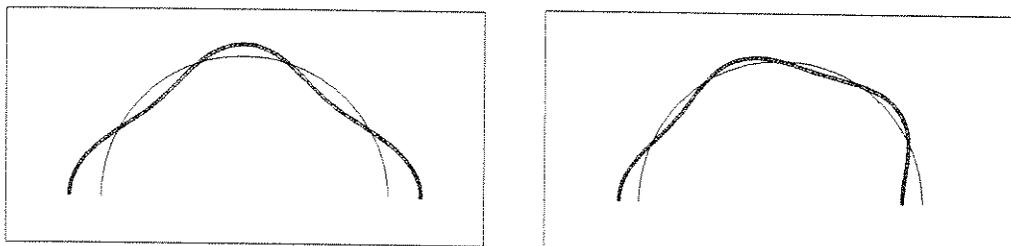
Tabela 4.4 - Frequências naturais de vibração de uma esfera de parede fina

Com relação a precisão obtida, pode-se considerar que o desvio máximo de 0.21% é aceitável para a malha adotada. Observa-se, também, que os modos de corpo rígido não são apresentados. Apesar da malha exponencial utilizada resolver os problemas de distorção na forma do modo, os valores das frequências naturais de vibração são piores do que aqueles obtidos para uma malha regular, mesmo que esta tenha um número menor de nós, vide Tabela (4.4).

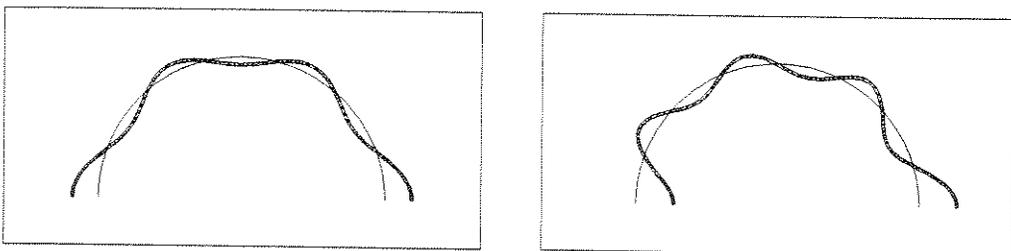
Os modos naturais de vibração associados as frequências listadas na Tabela (4.4) são mostrados na Figura (4.3).



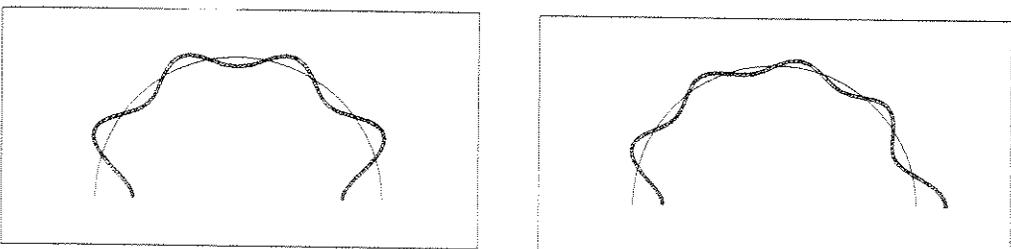
MODOS 1 e 2



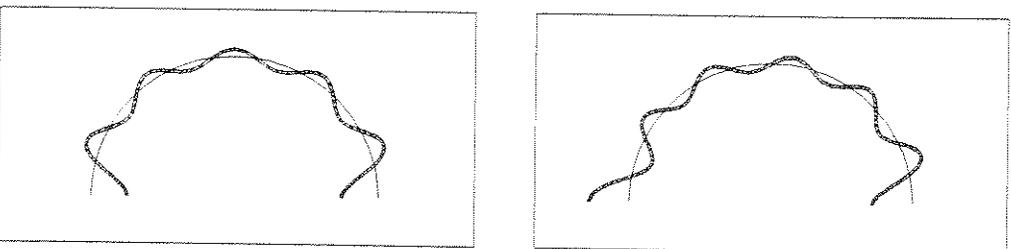
MODOS 3 e 4



MODOS 5 e 6



MODOS 7 e 8



MODOS 9 e 10

Figura 4.3 - Modos naturais de vibração para uma casca esférica, obtidos numericamente

Observa-se, da Figura (4.3), que os primeiros modos de vibração correspondem aos modos em flexão e que a densidade modal do sistema é alta (os dez primeiros modos do sistema estão situados entre 60 e 80 Hz).

Nota-se, também, que a distribuição exponencial adotada para os nós eliminou as pequenas distorções observadas nas extremidades, quando do uso de uma malha regular. A deformação dos modos nas extremidades foi observada, também, nos modos obtidos quando se utilizou o programa ANSYS® para esta análise. Comprovando, desta forma, que o cálculo dos modos de vibração da esfera modelada com elementos tronônicos axi-simétricos perdem precisão nos pontos próximos das extremidades. A partir desta constatação um estudo teórico mais aprofundado pode ser realizado para se verificar as causas destes desvios.

4.1.3 Vibrações Livres de uma Esfera de Paredes Finas Pré-Tensionada

Testando, ainda, a formulação para casca fina axi-simétrica tronônica, submete-se uma casca esférica à uma pressão interna e verifica-se o seu comportamento dinâmico. Adota-se, neste caso, as mesmas características geométricas e constitutivas adotadas no Item (4.1.2), mostradas na Tabela (4.3).

A pré-tensão considerada, na casca, é eqüivalente a tensão gerada por uma pressão interna de $100.0e+6$ [Pa].

Considerando o efeito de enrijecimento estrutural devido a pré-tensão, o problema de auto-valores e auto-vetores associado é o seguinte :

$$(([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_G(p)]) - \omega_i^2 [\mathbf{M}]) \{\tau_i\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Na Equação (4.3) $[\mathbf{K}_G]$ é a matriz de rigidez geométrica, função da pressão p , definida no Capítulo 3.

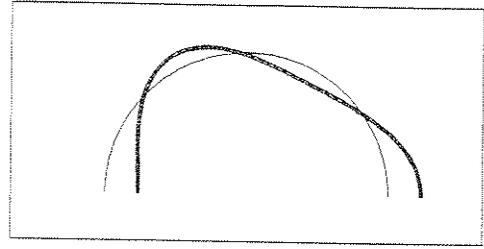
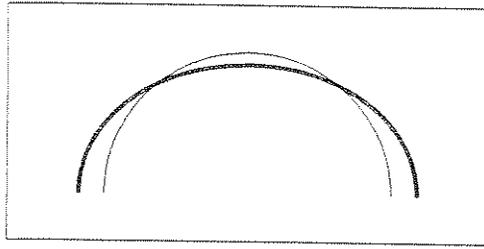
O modelo de elementos finitos é o mesmo utilizado para o teste de esfera sem pressão interna, malha exponencial, apresentado na Figura (4.2). As frequências naturais obtidas são comparadas com os frequências naturais fornecidas pelo programa comercial ANSYS® e são mostradas na Tabela (4.5).

Ordem das Frequências	Frequências MEF-91 nós Malha 1	Frequências ANSYS®	Diferença Percentual Malha 1 X ANSYS®
1	8.219e+2	8.216e+2	+0.04
2	1.290e+3	1.289e+3	+0.08
3	1.378e+3	1.378e+3	-
4	1.724e+3	1.723e+3	+0.06
5	1.826e+3	1.826e+3	-
6	2.144e+3	2.143e+3	+0.05
7	2.500e+3	2.500e+3	-
8	2.559e+3	2.558e+3	+0.04
9	2.971e+3	2.969e+3	+0.06
10	3.265e+3	3.265e+3	-

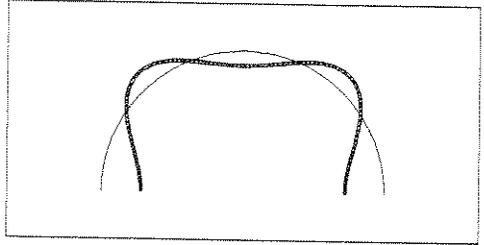
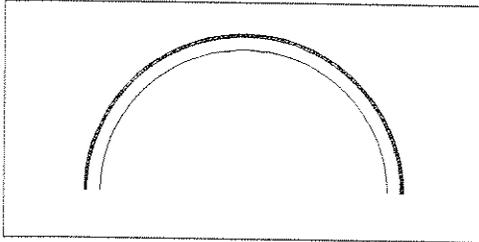
Tabela 4.5 - Frequências naturais de vibração para casca esférica de parede fina submetida à uma pré-tensão

Pode-se observar, da Tabela (4.5), uma boa concordância entre os resultados obtidos com aqueles fornecidos pelo programa ANSYS®, o que permite concluir que a implementação dos efeitos da pré-tensão sobre a casca é satisfatória.

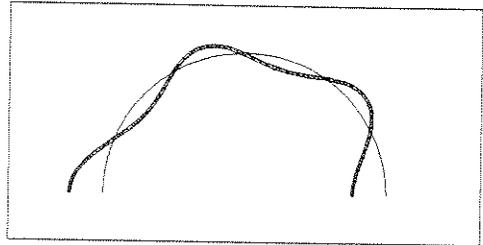
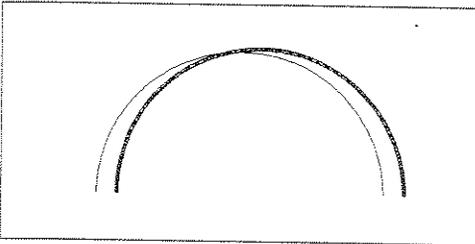
Os modos naturais de vibração associados as frequências mostradas na Tabela (4.5) são apresentados na Figura (4.4).



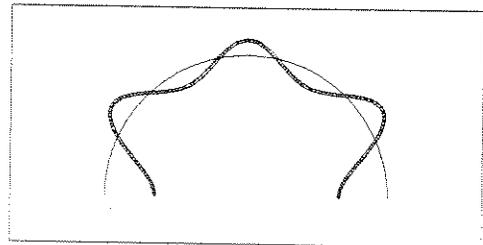
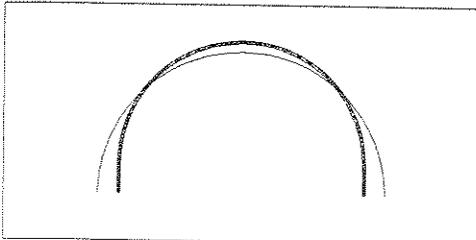
MODOS 1 e 2



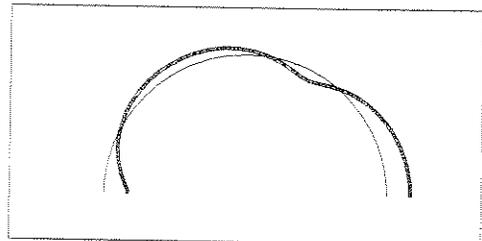
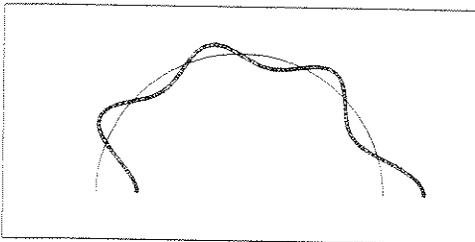
MODOS 3 e 4



MODOS 5 e 6



MODOS 7 e 8



MODOS 9 e 10

Figura 4.4 - Modos naturais de vibração para casca esférica pré-tensionada, obtidos numericamente

Comparando as Figuras (4.3) e (4.4), pode-se notar que não são apenas as frequências naturais de vibração que sofrem alteração quando a casca está

pré-tensionada. Os modos associados a estas frequências também sofrem alteração na sua forma. De forma geral, os modos predominantes à flexão, de 1 a 10 no caso sem pré-tensão e 1,2,4,6,8 e 9 no caso com pré-tensão, são os mais afetados. Observa-se, por exemplo, que a primeira frequência sem pré-tensão passou de 60.36 [Hz] para 82.19 [Hz], uma variação de 36.1%. Já a segunda frequência apresentou um aumento de 80.6%, esta diferença cresce a medida que as frequências se elevam, atingindo um aumento de 271% entre a sexta frequência sem pré-tensão e a nona frequência com pré-tensão, que são as frequências que apresentam os mesmos modos naturais de vibração. Finalmente, observa-se que modos do tipo respiração puro (Modo 3) e acoplados (Modos 5, 7 e 10) aparecem no caso de análise em que se considera o efeito do enrijecimento estrutural.

4.2 Validação Numérica do Modelo Fluido

Para testar a formulação proposta e a implementação computacional do modelo para o fluido, são utilizadas duas cavidades acústicas. A primeira com a forma cilíndrica e a segunda com a forma esférica. São obtidas as frequências acústicas e os modos correspondentes, para cada modelo utilizado. Os resultados numéricos obtidos nestes testes são comparados a soluções analíticas disponíveis na literatura.

4.2.1 Cavidade Acústica de Forma Cilíndrica

O primeiro teste proposto para o modelo fluido desacoplado, consiste em determinar as frequências e modos próprios de uma cavidade fechada, de forma cilíndrica.

As dimensões que definem o cilindro e as propriedades do fluido são dadas na Tabela (4.6).

Comprimento do Cilindro [m]	1.4e-1
Raio do Cilindro [m]	4.5e-2
Densidade do Fluido [Kg/m ³]	1.0e+3
Velocidade do Som no Meio [m/s]	1.5e+3

Tabela 4.6 - Dados sobre cavidade de forma cilíndrica

Utilizando o modelo de fluido perfeito, mostrado no Capítulo 3, e o programa descrito no Anexo 4, pode-se resolver o problema de determinação das freqüências e modos acústicos; que corresponde a solucionar o seguinte sistema matricial:

$$[C]\{\ddot{p}\} + [H]\{\dot{p}\} = \{0\} \quad (4.4)$$

Para o caso de oscilações harmônicas a Equação (4.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$([H] - \omega_i^2 [C])\{\tau_i\} = \{0\} \quad (4.5)$$

Onde, ω_i e $\{\tau_i\}$ são, agora, o i -ésimo auto-valor e o i -ésimo auto-vetor do sistema acústico e representam as freqüências e os modos acústicos do problema.

Dois modelos de elementos finitos, de malha regular, são utilizados neste teste. Um modelo utiliza 77 nós enquanto outro utiliza 150 nós. O modelo de elementos finitos de 150 nós utilizado pode ser observado na Figura (4.5). Este modelo é composto por 150 nós e 126 elementos. A condição de contorno de parede rígida é adotada em todo o contorno.

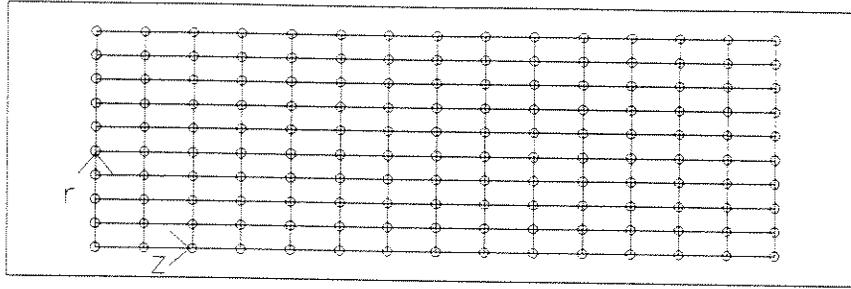


Figura 4.5 - Malha de elementos finitos para cavidade acústica com a forma cilíndrica

Na Tabela (4.7) as frequências naturais de vibração obtidas para este problema são comparadas com as frequências naturais obtidas através de formulação analítica [20]. Pode-se constatar, a partir da Tabela (4.7), que os valores obtidos via MEF concordam com os valores analíticos, apresentando uma diferença máxima de 5.0%. Os erros, apesar de aceitáveis, são maiores do que aqueles obtidos na validação da casca axi-simétrica troncônica. Esta elevação dos erros deve-se, provavelmente, ao uso de elementos em que a aproximação da variável é realizada por funções bilineares e não por funções de ordem mais elevada. Observa-se, também, uma tendência de convergência para as dez primeiras frequências acústicas, com relação ao refinamento da malha.

Ordem das Frequências	Frequências MEF-77 nós Malha 1	Frequências MEF-150 nós Malha 2	Frequências Analíticas [20]	Diferença Percentual Malha 2 X Analítica
1	5.379e+3	5.368e+3	5.357e+3	+0.2
2	1.089e+4	1.080e+4	1.071e+4	+0.8
3	1.667e+4	1.638e+4	1.607e+4	+1.9
4	2.055e+4	1.684e+4	1.620e+4	+3.8
5	2.124e+4	1.767e+4	1.707e+4	+3.4
6	2.285e+4	2.001e+4	1.943e+4	+2.9
7	2.325e+4	2.215e+4	2.143e+4	+3.2
8	2.646e+4	2.349e+4	2.282e+4	+2.9
9	2.953e+4	2.782e+4	2.686e+4	+3.4
10	3.073e+4	2.820e+4	2.679e+4	+5.0

Tabela 4.7 - Frequências naturais de vibração para cavidade acústica com a forma cilíndrica

Os modos naturais de vibração, associados as frequências mostradas na Tabela (4.7), são apresentados na Figura (4.6).

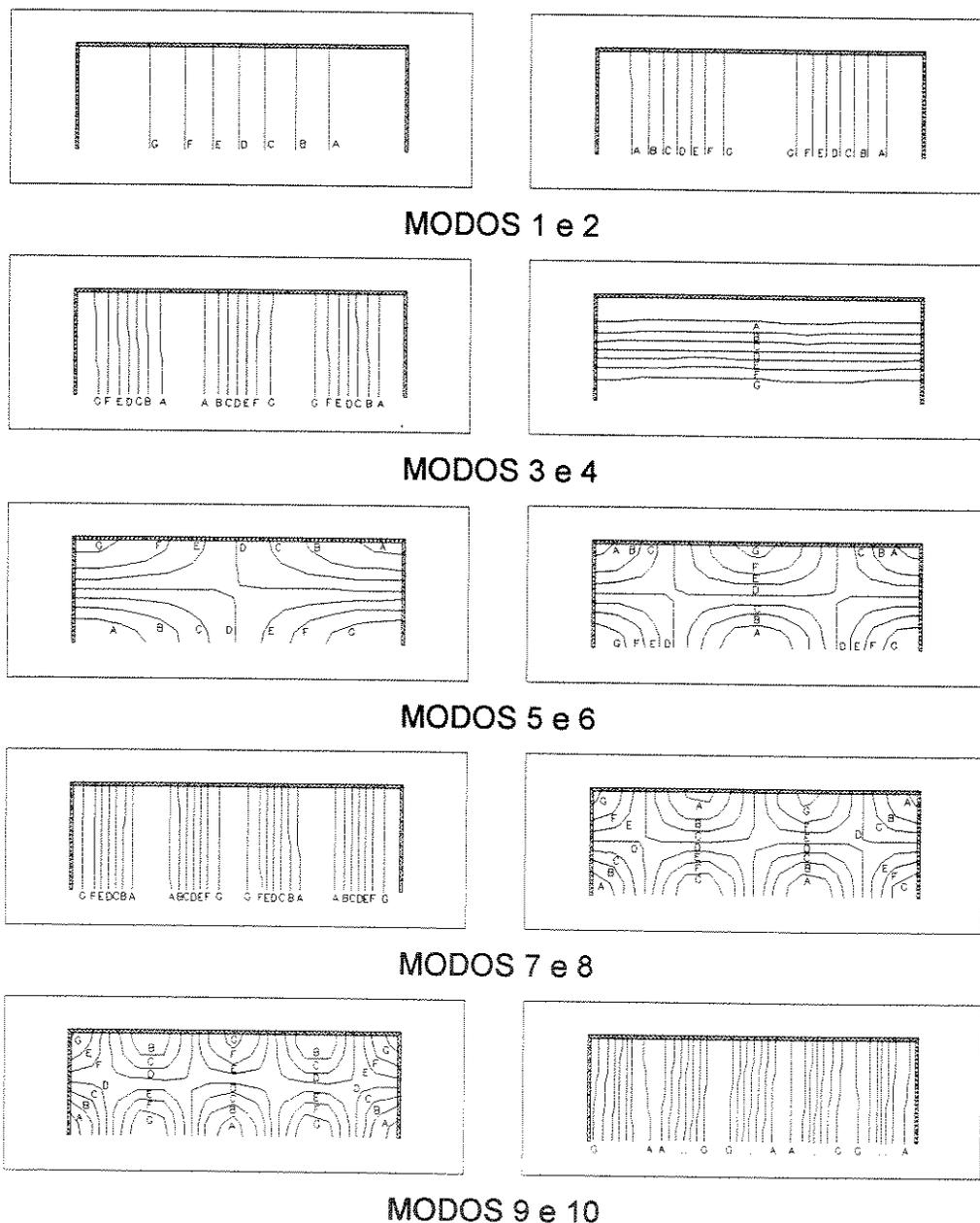


Figura 4.6 - Modos acústicos de vibração para cavidade cilíndrica, obtidos numericamente

Os modos apresentados na Figura (4.6) são representados pelas isobáricas. Na Tabela (4.8) os valores de pressão para cada iso-linha, correspondente a cada modo, são apresentados.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	-57.55	-58.46	-60.77	-52.09	-91.07	-91.41	-57.26	-93.60	-102.0	-68.06
B	-38.37	-39.03	-40.49	-32.34	-60.97	-60.84	-37.20	-62.56	-69.74	-45.53
C	-19.19	-19.59	-20.21	-12.60	-30.88	-30.28	-17.15	-31.51	-37.53	-22.99
D	0.00	-0.15	0.01	7.15	-0.79	0.29	2.91	-0.46	-5.32	-0.46
E	19.17	19.29	20.36	26.90	29.31	30.85	22.97	30.59	26.90	22.07
F	38.36	38.72	40.64	46.65	59.40	61.41	43.03	61.64	59.11	44.60
G	57.54	58.16	60.92	66.40	89.50	91.98	63.02	92.68	91.33	67.13
Min	-76.73	-77.90	-81.05	-71.84	-121.1	-122.0	-77.32	-124.7	-134.2	-90.60
Máx	76.73	77.80	81.20	86.15	119.6	122.5	83.14	123.7	123.5	89.67

Tabela 4.8 - Valores das isobáricas para os modos acústicos de vibração da cavidade cilíndrica

Com relação a forma dos modos acústicos, nenhum problema de distorção foi verificado, sendo que os modos apresentados na Figura (4.6) concordam com os previstos pela teoria de acústica linear.

4.2.2 Cavidade Acústica de Forma Esférica

O objetivo deste teste é verificar o comportamento dinâmico de uma cavidade acústica de forma esférica em que as paredes são consideradas rígidas. A cavidade acústica de forma esférica é definida, geometricamente e constitutivamente, de acordo com os dados apresentados na Tabela (4.9).

Raio da Esfera [m]	1.0
Densidade do Fluido [Kg/m ³]	1.15
Velocidade do Som [m/s]	340.0

Tabela 4.9 - Dados sobre cavidade acústica de forma esférica

Novamente, dois modelos de elementos finitos são utilizados para este problema. O primeiro modelo é composto por 106 nós e o segundo por 276 nós. A malha de elementos finitos de 276 nós e 250 elementos utilizada é mostrada na Figura (4.7).

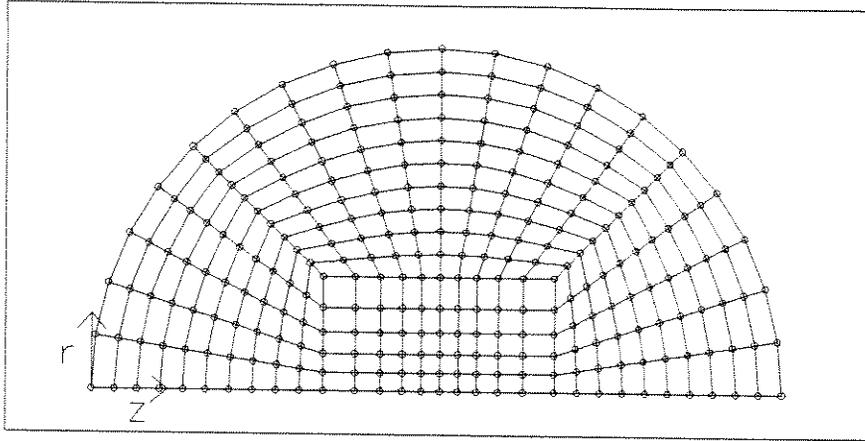


Figura 4.7 - Malha de elementos finitos para cavidade acústica de forma esférica

As freqüências naturais de vibração obtidas através destes modelos são mostradas na Tabela (4.10), onde são comparadas com aquelas obtidas analiticamente [11].

Ordem das Freqüências	Freqüências MEF-106 nós Malha 1	Freqüências MEF-276 nós Malha 2	Freqüências Analíticas [11]	Diferença Percentual Malha 2 X Analíticas
1	1.125e+2	1.124e+2	1.124e+2	-
2	1.818e+2	1.808e+2	1.806e+2	0.11
3	2.482e+2	2.453e+2	2.426e+2	1.11
4	2.490e+2	2.459e+2	2.438e+2	0.86
5	3.148e+2	3.085e+2	3.049e+2	1.18
6	3.292e+2	3.246e+2	3.208e+2	1.18
7	3.843e+2	3.720e+2	3.653e+2	1.18
8	4.038e+2	3.980e+2	3.936e+2	1.12
9	4.307e+2	4.228e+2	4.171e+2	1.37
10	4.584e+2	4.367e+2	4.241e+2	2.97

Tabela 4.10 - Freqüências naturais de vibração para cavidade acústica de forma esférica

Comparando as malhas utilizadas, percebe-se a tendência de convergência dos valores das freqüências naturais obtidas numericamente para aqueles obtidos analiticamente. Os valores de freqüência numéricos apresentam uma boa concordância com as freqüências analíticas,

apresentando uma diferença máxima, para as dez frequências sob análise, de aproximadamente 3%.

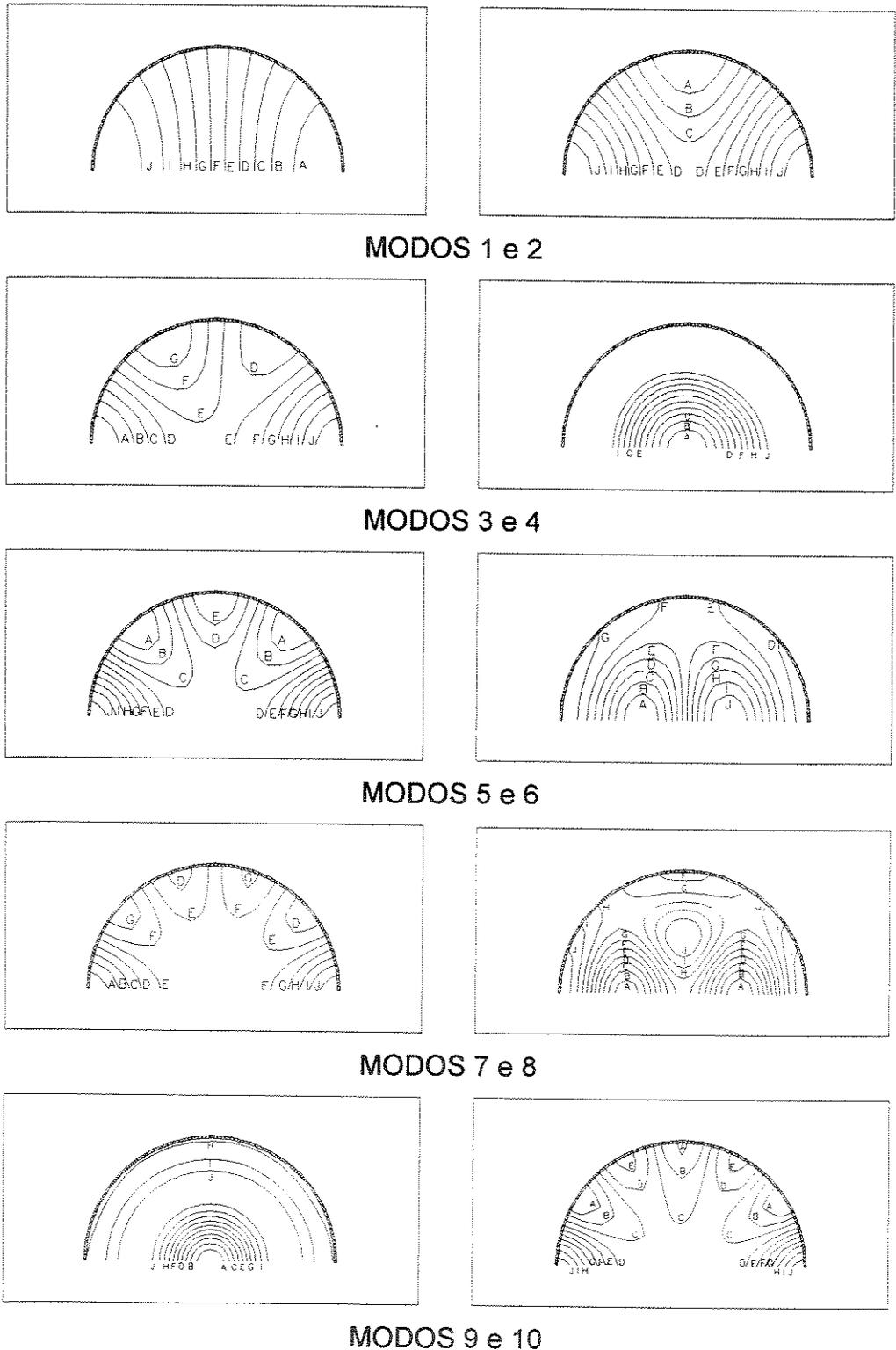


Figura 4.8 - Modos acústicos de vibração para cavidade esférica, obtidos numericamente

Os modos de vibração associados as frequências naturais de vibração apresentadas na Tabela (4.6) são mostrados na Figura (4.8).

Novamente, os modos de vibração, Figura (4.8), são representados pelas isobáricas. Na Tabela (4.11) os valores de pressão para cada caso são apresentados.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	-66.24	-40.97	-115.5	-146.2	-48.94	-132.8	-171.5	-160.6	-245.8	-64.59
B	-51.56	-25.43	-89.09	-132.5	-26.07	-103.6	-133.0	-135.5	-215.2	-33.17
C	-36.88	-9.88	-62.62	-118.8	-3.21	-74.49	-94.41	-110.4	-184.8	-1.75
D	-22.20	5.66	-36.16	-105.0	19.66	-45.35	-55.85	-85.22	-154.0	29.68
E	-7.52	21.21	-9.70	-91.29	42.52	-16.21	-17.29	-60.08	-123.4	61.10
F	7.15	36.75	16.76	-77.55	65.36	12.93	21.27	-34.94	-92.78	92.52
G	21.83	52.29	43.22	-63.81	88.25	42.07	59.83	-97.98	-62.18	123.9
H	36.51	67.84	69.68	-50.08	111.1	71.21	98.39	15.34	-31.57	155.4
I	51.19	83.38	96.15	-36.35	134.0	100.4	137.0	40.49	-0.97	186.8
J	65.87	98.93	122.6	-22.61	156.8	129.5	175.5	65.63	29.64	218.2
Min	-80.92	-56.51	-142.0	-160.0	-71.80	-161.9	-210.1	-185.8	-276.4	-96.01
Máx	80.55	114.5	149.1	46.07	179.7	158.6	214.1	90.77	60.25	249.6

Tabela 4.11 - Valores das isobáricas para os modos acústicos de vibração da cavidade esférica

Neste caso, as formas nodais assumem geometrias mais complexas, todavia usando-se a classificação usual de sistemas axi-simétricos, onde são definidos os números de diâmetros e círculos nodais, é possível diferenciar cada modo e observar a coerência dos resultados obtidos.

4.3 Validação Numérica do Modelo Elasto-Acústico

Para validação numérica do modelo proposto para interação fluido-estrutura, considera-se um sistema com a forma de casca esférica, preenchida de fluido. Deste sistema acoplado são obtidas as frequências e os modos naturais de vibração. Uma primeira simulação faz a comparação entre os valores obtidos numericamente, utilizando a formulação baseada no campo de pressão e a formulação que utiliza, além do campo de pressão, o potencial de deslocamento.

Uma segunda simulação apresenta os resultados numéricos obtidos quando é utilizada uma malha mais refinada.

Na seqüência é apresentado o efeito que uma pressão hidrostática interna tem sobre as freqüências e os modos de vibração do sistema. São apresentados, ainda, os valores de freqüência obtidos numericamente para efeito comparativo, da casca “seca”, da casca “seca” sob efeito de uma pressão interna, da cavidade acústica, da interação entre fluido-estrutura e , finalmente, da interação entre fluido e estrutura considerando a presença de uma pré-tensão na casca. O efeito de uma pressão interna crescente sobre as primeiras freqüências naturais é mostrado.

Finalizando, é apresentado um teste que compara dados experimentais, obtidos na literatura, com dados obtidos numericamente para uma placa circular submersa em óleo.

4.3.1 Comparação entre a Formulação Simétrica, (u,p), e a Formulação Não-Simétrica, (u,p,Ψ)

O objetivo principal deste teste é verificar o desempenho das formulações acopladas apresentadas no Capítulo 3, bem como o de verificar a validade do modelo de interface.

O modelo físico adotado consiste de uma casca esférica preenchida de fluido, que possui as características de um gás. As propriedades dos materiais e a geometria do sistema são mostrados na Tabela (4.12).

Raio da Esfera [m]	2.0
Espessura da Casca [m]	1.0e-3
Módulo Elástico [Pa]	7.5e+10
Densidade [Kg/m ³]	2.8e+3
Poisson	0.3
Densidade do Fluido [Kg/m ³]	2.0
Velocidade do Som [m/s]	600.0

Tabela 4.12 - Dados para o modelo elasto-acústico, casca esférica preenchida de fluido

O modelo de elementos finitos utilizado é composto de três tipos de elementos: elemento de casca axi-simétrica, elemento acústico axi-simétrico e elemento de interface fluido-estrutura axi-simétrico. São utilizados 12 elementos de casca axi-simétrico, resultando em 13 nós. Para os elementos de interface são utilizados, também, 12 elementos, totalizando 13 nós. No caso do modelamento acústico são utilizados 106 nós, correspondendo a 90 elementos. A Figura (4.9) apresenta a malha utilizada tanto para casca como para interface. A Figura (4.10) apresenta a malha utilizada para modelar o meio acústico.

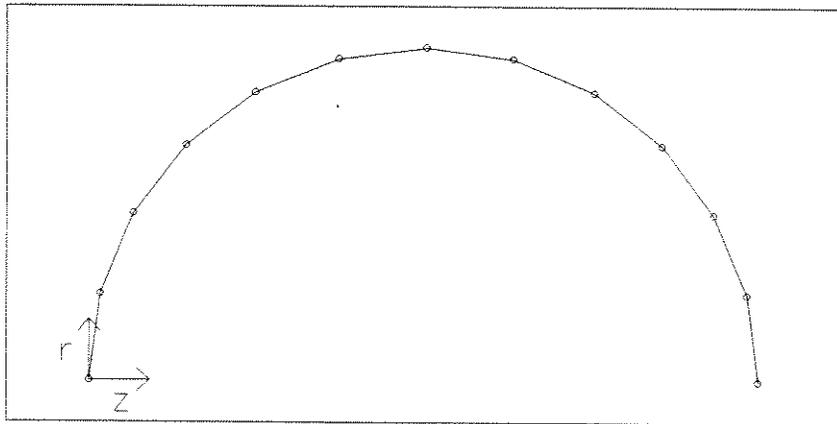


Figura 4.9 - Malha de elementos finitos para elementos estruturais e elementos de acoplamento

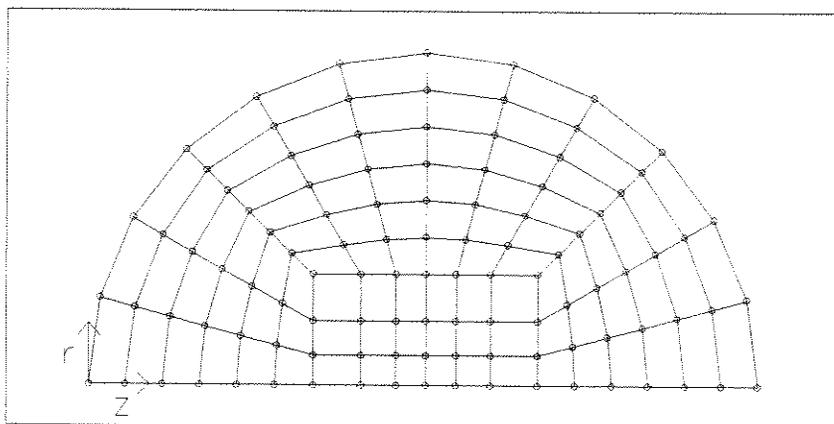


Figura 4.10 - Malha de elementos finitos para o fluido

Na Tabela (4.13) são mostradas as freqüências obtidas para este modelo, para as duas formulações deduzidas nos capítulos precedentes. Inicialmente

implementou-se a formulação não-simétrica, que tem o inconveniente de conduzir a algoritmos específicos para resolução do auto-problema e matricialmente apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ \rho_f[P]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ([K]+[K_G]) & [P] \\ 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Onde, considerando problemas de oscilações harmônicas, reduz-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} ([K]+[K_G]) & [P] \\ 0 & [H] \end{bmatrix} - \omega_i^{EF} \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ \rho_f[P]^T & [C] \end{bmatrix} \{\tau_i^{EF}\} = \{0\} \quad (4.7)$$

Onde, ω_i^{EF} são as frequências e $\{\tau_i^{EF}\}$ são os modos próprios elasto-acústicos do problema.

Para a formulação (u,p,ψ) , dentro da hipótese de movimento harmônico, é resolvido o seguinte problema de auto-valores e auto-vetores:

$$\begin{bmatrix} ([K]+[K_G]) & 0 & [P] \\ 0 & 0 & [H] \\ [P]^T & [H] & -\frac{1}{c^2\rho_f}[C] \end{bmatrix} - \omega_i^{EF} \begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & \rho_f[H] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\tau_i^{EF}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Também são mostrados na Tabela (4.13) as frequências numéricas obtidas em [11]. Os resultados apresentados em [11] baseiam-se em um modelo para discretizar o fluido de 238 elementos quadrilaterais lineares de quatro nós e 26 elementos triangulares lineares a três nós, a estrutura é discretizada por 32 elementos tronônicos de 2 nós e a interface é modelada por 32 elementos a 4 nós.

Ordem das Frequências	Frequências Numéricas [11]	Formulação (u,p)	Formulação (u,p, Ψ)
1	116.31	115.98	115.98
2	149.10	149.55	149.55
3	200.44	202.77	202.77
4	213.62	218.03	218.03
5	246.30	251.46	251.46
6	285.45	293.01	293.01
7	288.56	294.58	294.58
8	293.48	295.04	295.04
9	316.40	327.57	327.57

Tabela 4.13 - Frequências naturais de vibração, formulações (u,p) e (u,p, Ψ), e resultados numéricos para validação

A partir dos resultados apresentados na Tabela (4.13), duas conclusões podem ser tiradas.

Primeiramente, constata-se que as formulações (u,p) e (u,p, Ψ), como era de se esperar, conduzem a resultados idênticos. Do ponto de vista computacional, a formulação simétrica permite o uso de algoritmos convencionais de resolução do auto-problema, todavia o número de graus de liberdade do modelo é aumentado. O estudo de métodos numéricos apropriados de resolução do auto-problema, bem como uma comparação mais efetiva do desempenho computacional das duas formulações, foge do escopo deste trabalho e deverá ser abordado em outros estudos dentro do Departamento de Mecânica Computacional. Pelos resultados obtidos, pode-se concluir que as duas formulações são equivalentes.

A segunda conclusão que pode ser tirada diz respeito a comparação dos resultados obtidos com aqueles apresentados em [11]. Pode se observar boa concordância entre eles, sendo que as diferenças não ultrapassam 3.5% para as nove primeiras frequências observadas.

4.3.2 Vibrações Livres de uma Esfera Preenchida de Fluido - Influência do Refinamento de Malha

Este teste tem o objetivo de verificar se há convergência dos resultados a medida que se refina a malha de elementos finitos, além de apresentar os modos elasto-acústicos do problema.

Utilizando as mesmas características geométricas e de material do caso de interação fluido-estrutura apresentado no Item (4.3.1) e variando apenas o modelo de elementos finitos, obtém-se os resultados apresentados na Tabela (4.14). Neste item, propõe-se para o fluido uma malha de 276 nós e 250 elementos sendo que a estrutura e os elementos de interação são modelados utilizando uma malha de 21 nós e 20 elementos. As frequências para comparação são obtidas da literatura, [11].

Ordem das Frequências	Frequências Numéricos [11]	Frequências MEF-106 nós Malha 1	Frequências MEF-276 nós Malha 2
1	116.31	115.98	115.88
2	149.10	149.55	148.78
3	200.44	202.77	200.55
4	213.62	218.03	215.35
5	246.30	251.46	247.11
6	285.45	293.01	287.60
7	288.56	294.58	289.34
8	293.48	295.04	293.47
9	316.40	327.57	319.64

Tabela 4.14 - Frequências naturais de vibração para o modelo elasto-acústico, efeito do refinamento de malha

Pode-se observar que entre os modelos de 106 nós e de 276 nós há uma convergência a partir de limites superiores das frequências e os desvios, com relação a [11], não ultrapassam 1%, o que pode ser considerado satisfatório. É importante salientar que os únicos resultados obtidos para este caso foram fornecidos por [11], não sendo encontrados formulações analíticas.

Nas Figuras (4.11) e (4.12), são mostrados os modelos de elementos finitos utilizados para a estrutura, para o fluido e para a interface.

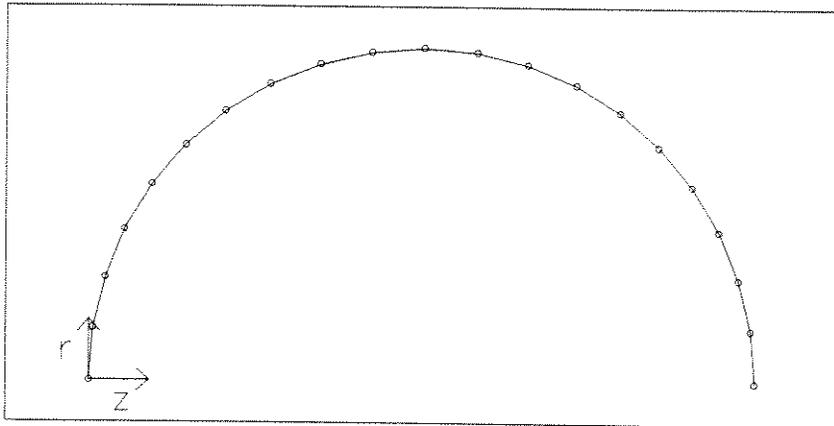


Figura 4.11 - Malha de elementos finitos para os elementos estruturais e elementos de acoplamento, refinada

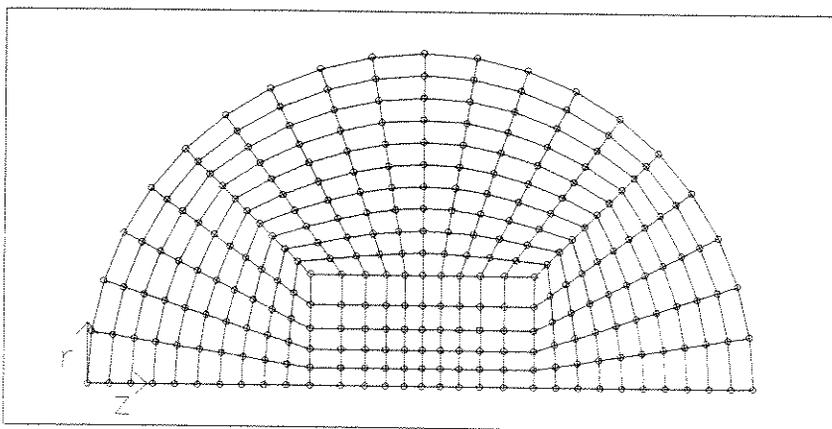
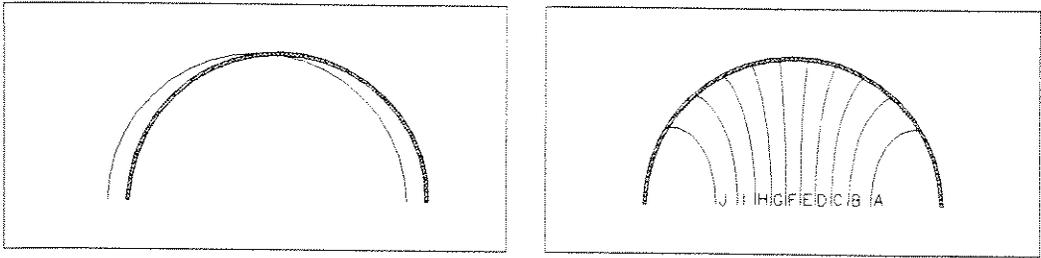
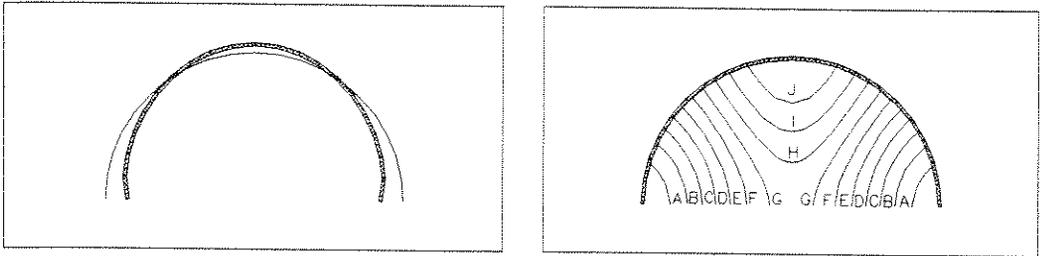


Figura 4.12 - Malha de elementos finitos para o fluido, refinada

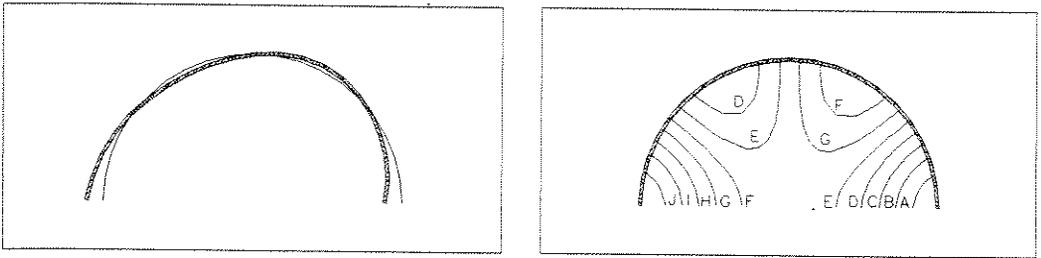
Na Figura (4.13) são apresentados os modos naturais de vibração, para o modelo acoplado de interação fluido-estrutura, associados as frequências naturais apresentadas na Tabela (4.14). Na Figura (4.13) são apresentados os modos, em deslocamento para a estrutura (à esquerda) e em isobáricas para o fluido (à direita).



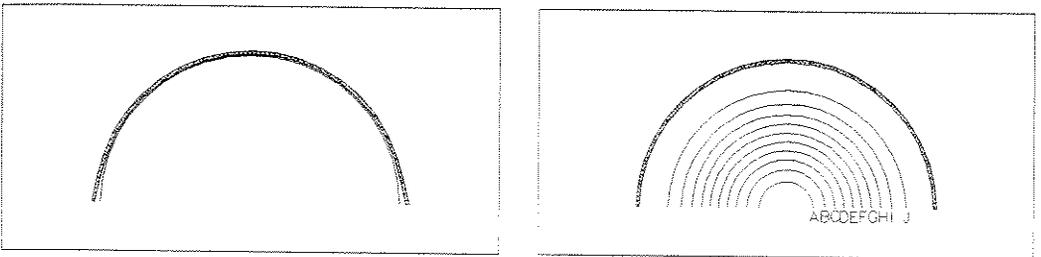
MODO 1



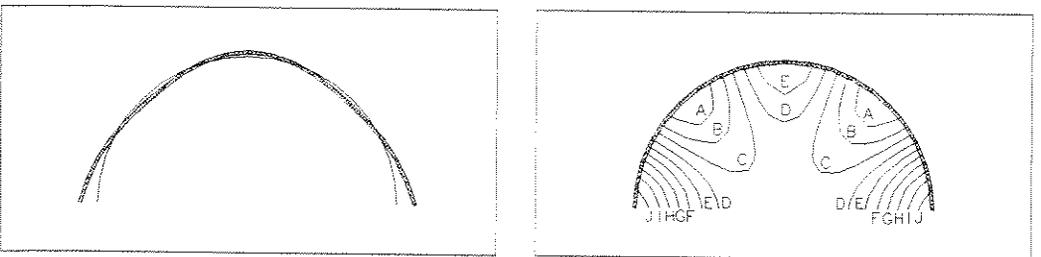
MODO 2



MODO 3

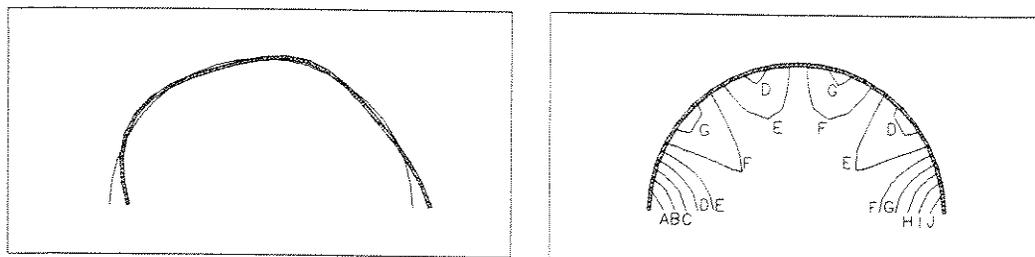


MODO 4

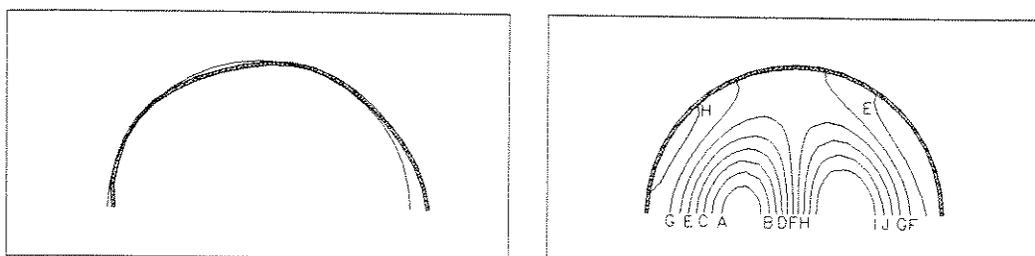


MODO 5

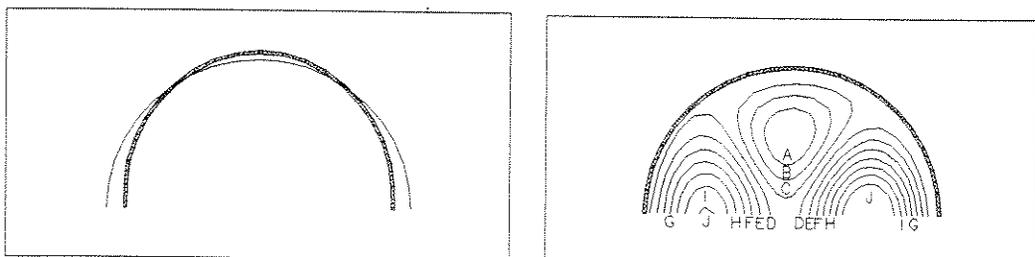
Figura 4.13 - Modos naturais de vibração para o sistema acoplado fluido-estrutura, casca preenchida de fluido.



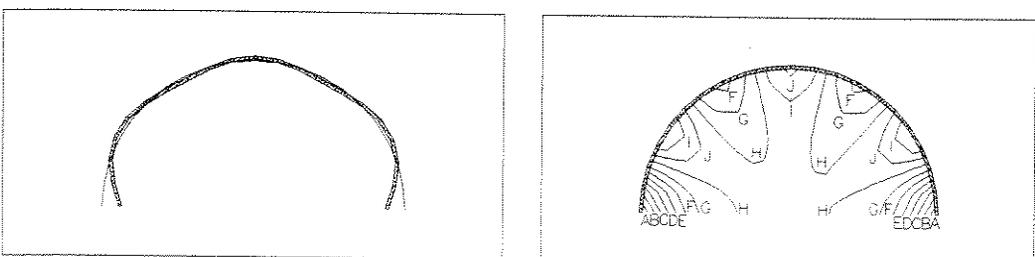
MODO 6



MODO 7



MODO 8



MODO 9

Figura 4.13 (continuação) - Modos naturais de vibração para o sistema acoplado fluido-estrutura, casca preenchida de fluido

Na Tabela (4.15), são apresentados os valores de pressão para os modos acoplados listados na Figura (4.13).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	-341.48	-488.03	-728.22	-732.88	-221.36	-1087.16	-736.39	-8.70	-1256.34
B	-265.79	-411.29	-567.00	-641.62	-118.83	-845.83	-597.10	-5.36	-1077.58
C	-190.09	-334.56	-405.79	-550.37	-16.30	-604.49	-457.81	-2.02	-898.81
D	-114.40	-257.82	-244.58	-459.12	86.23	-363.15	-318.52	1.32	-720.05
E	-38.70	-181.09	-83.37	-367.86	188.76	-121.82	-179.23	4.66	-541.29
F	36.99	-104.35	77.85	-276.61	291.28	119.59	-39.95	7.99	-362.53
G	112.69	-27.62	239.06	-185.36	393.81	360.85	99.34	11.33	-183.77
H	188.38	49.12	400.27	-94.10	496.34	602.19	238.63	14.67	-5.01
I	264.08	125.85	561.48	-2.85	598.87	843.53	377.92	18.01	173.77
J	339.77	202.59	722.70	88.41	701.40	1084.86	517.21	21.34	352.52
Mínimo	-417.18	-564.76	-889.43	-824.13	-323.89	-1328.50	-875.68	-12.03	-1435.10
Máximo	415.47	279.32	883.91	179.66	803.93	1326.20	795.79	28.02	531.28

Tabela 4.15 - Valores das isobáricas para os modos acoplados de interação fluido-estrutura, casca esférica metálica preenchida de fluido

Comparando-se os deslocamentos da estrutura e o perfil do campo de pressões do fluido observa-se uma perfeita correlação, o que mostra os efeitos de acoplamento do modelo.

4.3.3 Efeito de uma Pré-Tensão sobre as Frequências Elasto-Acústicas de uma Esfera Preenchida de Fluido

Considera-se, neste item, o mesmo sistema acoplado definido no tópico anterior, Tabela (4.12), mas agora sob o efeito de uma pré-tensão sobre a casca, equivalente ao efeito de uma pressão interna de 125.0 [Mpa], São obtidos as frequências e os modos naturais de vibração do sistema acoplado.

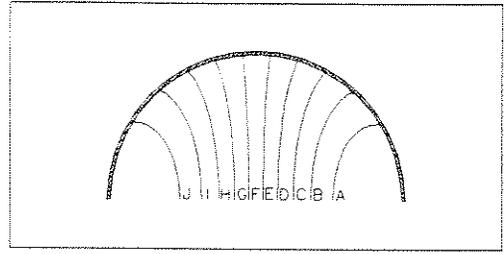
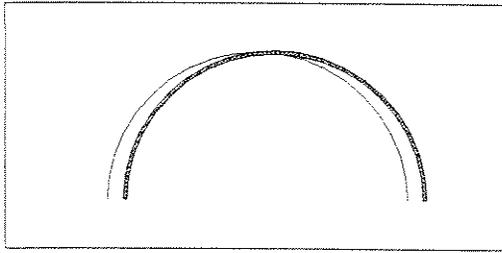
Neste problema foi utilizado a mesma discretização por elementos finitos apresentada no item anterior, Figuras (4.11) e (4.12). Os resultados obtidos são mostrados comparativamente com o caso em que não há pré-tensão da casca, vide Tabela (4.16).

Ordem das Frequências	Frequências MEF-276 nós Com Pré-Tensão	Frequências MEF-276 nós Sem Pré-Tensão
1	116.20	115.88
2	158.22	148.78
3	215.37	200.55
4	215.71	215.35
5	271.68	247.11
6	290.03	287.60
7	327.79	289.34
8	349.10	293.47
9	369.58	319.64

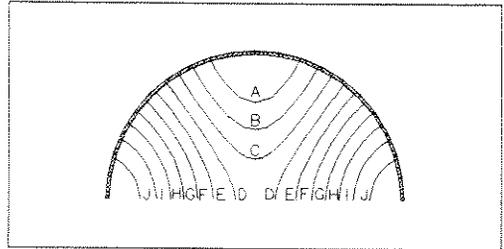
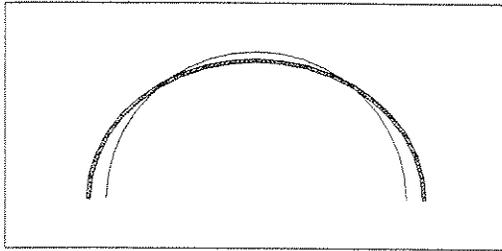
Tabela 4.16 - Frequências naturais de vibração para modelo elasto-acústico, efeito da pré-tensão

Diferente do caso de casca “seca”, a influência da pressão interna no modelo acoplado é menos acentuada. Este comportamento deve-se ao fato de os nove primeiros modos acoplados serem fluido-dominante, isto é, a energia preponderante destes modos advém das oscilações do fluido, sendo os movimentos da estrutura induzidos por estas oscilações.

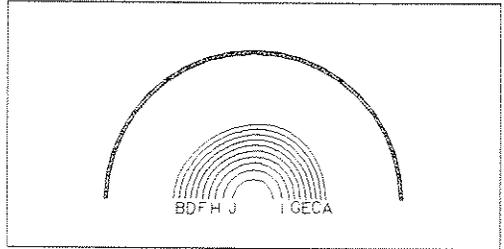
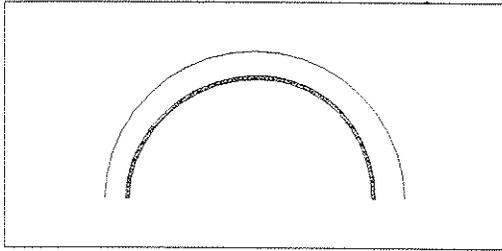
Na Figura (4.14) são mostrados os modos naturais de vibração do sistema acoplado fluido-estrutura submetido a uma pré-tensão relativos as frequências naturais de vibração apresentados na Tabela (4.16).



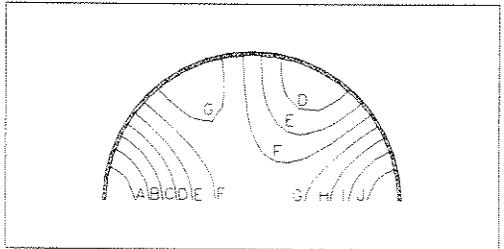
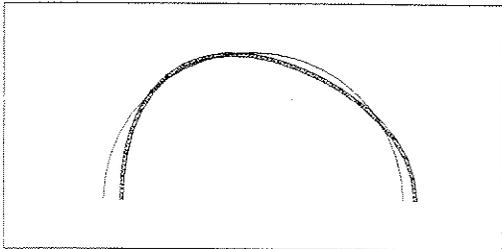
MODO 1



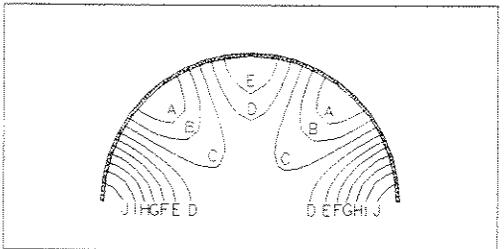
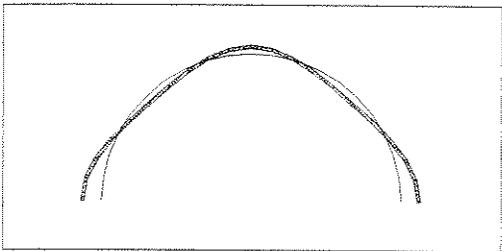
MODO 2



MODO 3

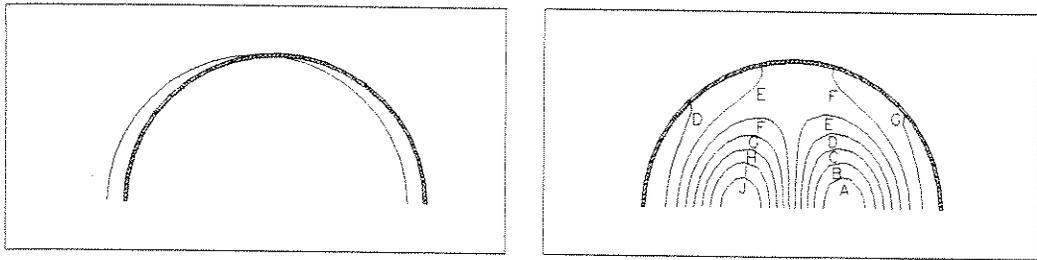


MODO 4

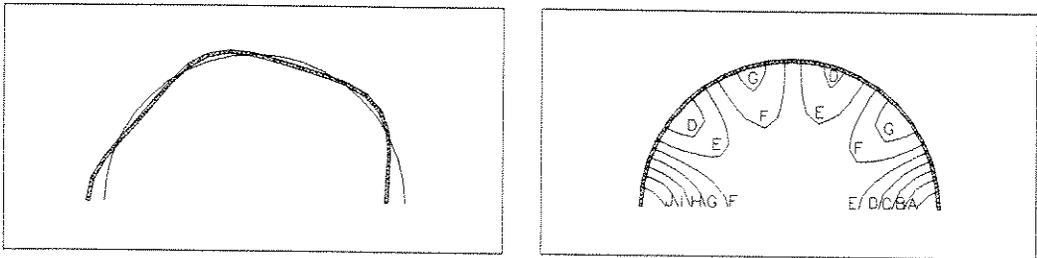


MODO 5

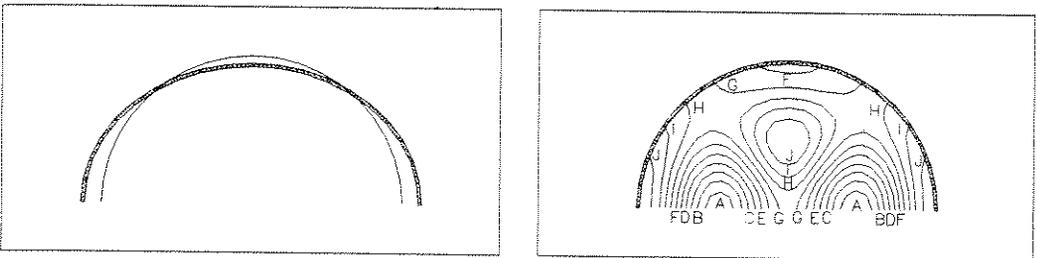
Figura 4.14 - Modos naturais de vibração para o sistema acoplado fluido-estrutura, casca esférica pré-tensionada preenchida de fluido



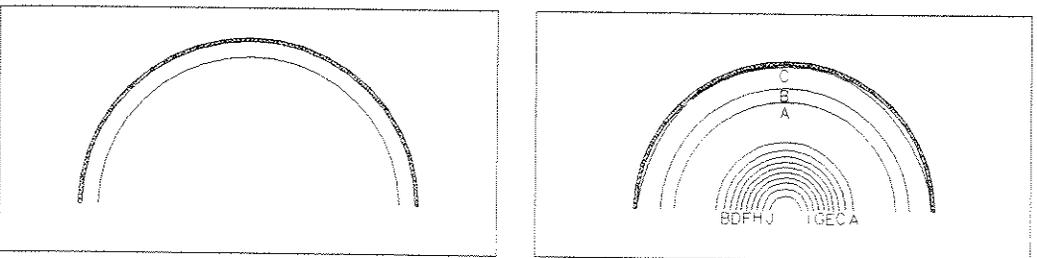
MODO 6



MODO 7



MODO 8



MODO 9

Figura 4.14 (continuação) - Modos naturais de vibração para o sistema acoplado fluido-estrutura, casca esférica pré-tensionada preenchida de fluido

Comparando as Figuras (4.13) e (4.14), pode-se notar a influência que uma pré-tensão de casca tem sobre a forma dos modos naturais de vibração, ou seja, a pré-tensão não desloca apenas as frequências mas influi na forma dos modos. As modificações mais notáveis referem-se ao cruzamento dos modos 3, 4 e 6, 7, o que demonstra que as famílias dos modos onde os movimentos da estrutura estão associados apenas a tensões de membrana

(modos de respiração) são menos influenciados pela pré-tensão, como era de se esperar.

Na Tabela (4.17) são mostrados os valores de pressão para o meio acústico, caso interação fluido-estrutura com pré-tensão estrutural.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	-458.87	-254.84	253.24	-614.84	-305.12	-823.21	-1011.16	-992.88	-174.97
B	-357.13	-158.20	304.37	-482.56	-162.55	-637.52	-789.01	-837.57	6.82
C	-255.38	-61.56	355.50	-350.29	-19.98	-451.83	-566.86	-682.25	188.60
D	-153.64	35.08	406.63	-218.02	122.60	-266.14	-344.72	-526.93	370.39
E	-51.90	131.72	457.77	-85.74	265.17	-80.45	-122.57	-371.61	552.18
F	49.85	228.36	508.90	46.54	407.74	105.25	99.57	-216.30	733.96
G	151.59	324.99	560.03	178.82	550.31	290.94	321.72	-60.98	915.75
H	253.33	421.63	611.16	311.09	692.89	476.63	543.86	94.34	1097.54
I	355.08	518.27	662.30	443.37	835.46	662.32	766.01	249.66	1279.33
J	456.82	614.91	713.43	575.64	978.03	848.01	988.16	404.97	1461.11
Min	-560.61	-351.48	-258.09	-747.12	-447.69	-1008.90	-1233.30	-1148.20	-356.76
Máx	558.56	711.55	764.56	707.92	1120.60	1033.70	1210.30	560.29	1642.90

Tabela 4.17 - Valores das isobáricas para os modos acoplados de interação fluido-estrutura, casca esférica metálica pré-tensionada preenchida de fluido

4.3.4 Estudo Paramétrico do Efeito de Pré-Tensão Sobre as Frequências Naturais

Busca-se, neste item, mostrar a influência que uma pré-tensão de casca tem sobre as frequências naturais de vibração de um sistema acoplado. Portanto, serão analisadas, em um sistema acoplado, as frequências naturais de vibração quando existe e quando não existe uma pré-tensão na casca. Ainda neste item, são mostrados gráficos em que pode ser notada a influência de uma pré-tensão crescente sobre as primeiras frequências naturais de vibração.

O caso escolhido para este estudo é o de interação fluido-estrutura entre uma casca esférica e o fluido interior. As dimensões e propriedades que caracterizam este problema são mostradas na Tabela (4.18).

Raio da Esfera [m]	1.0
Espessura da Casca [m]	1.0e-3
Módulo Elástico [Pa]	119.0e+9
Densidade [Kg/m ³]	8.91e+3
Poisson	0.326
Densidade do Fluido [Kg/m ³]	1.0e+3
Velocidade do Som [m/s]	1.5e+3

Tabela 4.18 - Dados para o sistema acoplado fluido-estrutura

Os dados da Tabela (4.18) foram adotados com o intuito de se obter freqüências de casca “seca” próximas daquelas obtidas para a cavidade acústica, com isto os fenômenos de interação aparecem de forma mais nítida.

As malhas para os elementos acústicos, elementos de casca e para os elementos de interação são idênticas aquelas das Figuras (4.11) e (4.12). Os valores das freqüências naturais de vibração para os casos de casca “seca”, casca submetida a uma pré-tensão, freqüências acústicas de uma esfera, interação fluido-estrutura e interação fluido-estrutura com pré-tensão são mostrados, para comparação, na tabela (4.19).

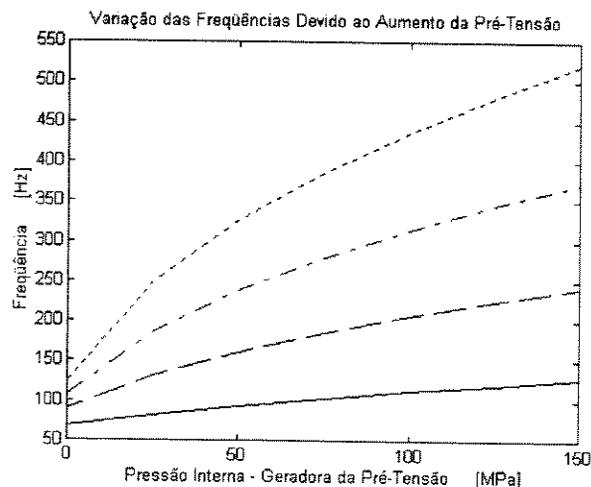
Freqüências Casca Seca	Freqüências Casca com Pré-Tensão	Freqüências Cavidade Acústica	Freqüências Interação Fluido-Estrutura	Freqüências Interação Fluido-Estrutura com Pré-Tensão
4.2399e2	6.8404e2	4.9566e2	6.6749e1	1.1846e2
5.0112e2	1.0040e3	7.9779e2	8.8746e1	2.2119e2
5.2955e2	1.1671e3	1.0820e3	1.0552e2	3.3675e2
5.4052e2	1.4324e3	1.0848e3	1.1995e2	4.6500e2
5.4428e2	1.6339e3	1.3610e3	1.3307e2	6.0551e2

Tabela 4.19 - Freqüências naturais de vibração para os sistemas isolados e acoplado

Na Tabela (4.19), pode-se perceber o aumento das primeiras freqüências naturais de vibração quando há presença de uma pré-tensão atuando na casca. Também pode-se perceber a queda que as primeiras freqüências naturais de vibração sofrem para o sistema acoplado, devido a grande massa adicional de

fluido presente, quando se considera interação entre fluido e estrutura. Neste caso o fluido é um líquido.

Para uma melhor análise da variação que sofrem as primeiras freqüências naturais de vibração do sistema acoplado fluido-estrutura, quando existe uma pré-tensão atuando na casca, é mostrado na Figura (4.15) o evidente aumento dos valores de freqüência para um aumento de pré-tensão da casca. Nesta figura foram consideradas as quatro primeiras freqüências naturais de vibração para o problema de interação fluido-estrutura. Os valores de freqüência foram obtidos para valores crescentes de pré-tensão de casca. Como pode-se ver a influência da pré-tensão é maior para a quarta freqüência natural de vibração do que para as demais sob análise. Este aumento é, provavelmente, devido a forma dos modos, Figura (4.16), que mostram uma grande deformação em flexão para os modos de maior grau. A deformação devido a flexão acarreta um sobre-enrijecimento devido a tensão de membrana presente, resultado da pré-tensão de casca.



Legenda : Traço contínuo-1ª Freqüência; Traço-Traço-2ª Freqüência; Traço-Ponto-3ª Freqüência; Ponto-Ponto-4ª Freqüência

Figura 4.15 Gráfico comparativo do efeito da pré-tensão sobre os valores das primeiras freqüências naturais de vibração do sistema acoplado

A Figura (4.16) mostra a forma dos quatro primeiros modos naturais de vibração que foram considerados para a análise.

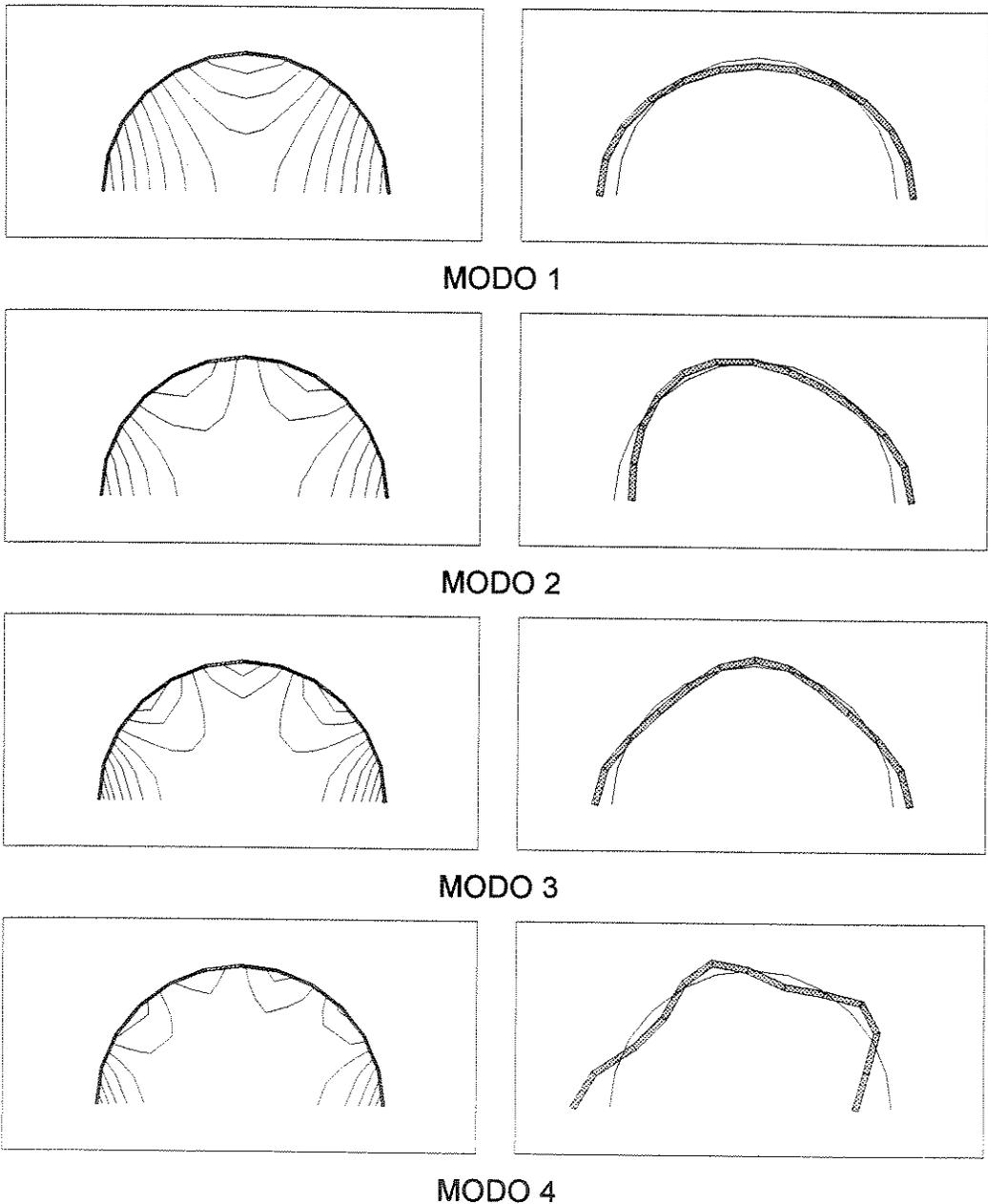


Figura 4.16 - Ilustração da forma dos modos naturais de vibração, na análise do efeito da pré-tensão

Observa-se, neste caso, que os quatro primeiros modos são predominantemente estruturais, ao contrário dos modos apresentados no item anterior, o que confirma a afirmativa de que neste exemplo o fenômeno de massa adicional é preponderante.

4.3.5 Comparação dos Resultados Teóricos-e Experimentais de uma Placa Circular Submersa em Óleo

Esta análise busca uma validação do modelo de interação fluido-estrutura proposto, através da comparação com os valores de freqüências naturais de vibração obtidos experimentalmente em [10].

Experimentalmente, foram obtidos os valores da primeira freqüência natural de vibração para uma placa circular metálica submersa. A altura da coluna de líquido é aumentada gradativamente e é observado a variação que a freqüência natural de vibração em questão sofre. O procedimento de teste e seus detalhes podem ser obtidos na referência [10].

O material utilizado para a placa circular é aço. A placa circular e o fluido utilizados no teste são definidos pela Tabela (4.20).

Raio da Disco [m]	150.0e-3
Espessura da Placa [m]	2.94e-3
Densidade do Fluido [Kg/m ³]	858.0
Viscosidade Cinemática [m ² /s]	82.0e-6

Tabela 4.20 - Dados para o caso de disco submerso em óleo

A malha de elementos finitos adotada, para todos os casos, é idêntica. A medida que a altura da coluna de líquido aumenta o aspecto do elemento é alterado. A malha considerada, para os elementos estruturais e para os elementos de interação é mostrada na Figura (4.17). Esta malha é formada de 11 nós e 10 elementos. A malha que modela o domínio fluido é apresentada na Figura (4.18). Esta malha é composta de 121 nós e 100 elementos. Na Figura (4.18) H representa o raio da placa que é fixo e W representa a profundidade de líquido que é variável.

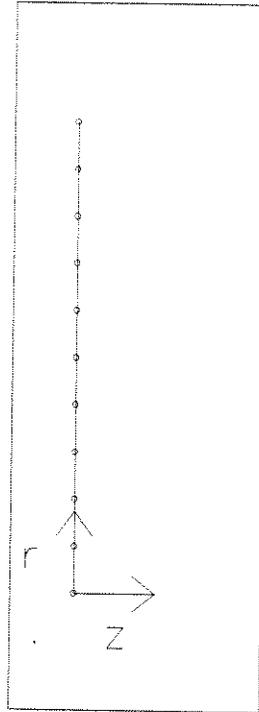


Figura 4.17 - Malha de elementos finitos para elementos estruturais e elementos de acoplamento, comparativo numérico-experimental

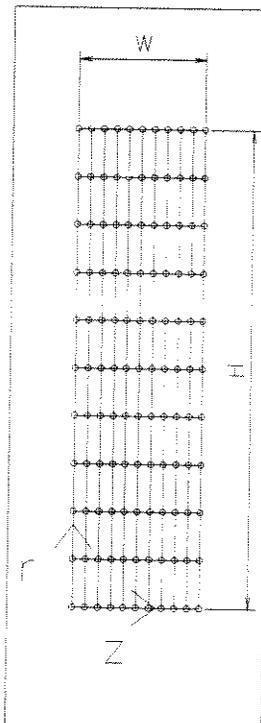


Figura 4.18 - Malha de elementos finitos para o fluido, comparativo numérico-experimental

Os dados experimentais obtidos podem ser comparados, então, com os valores obtidos numericamente, na forma da Figura (4.19). As propriedades do material para a placa, utilizado na simulação numérica, são as mesmas daquelas mostradas no início do capítulo para os casos de placa e casca esférica.

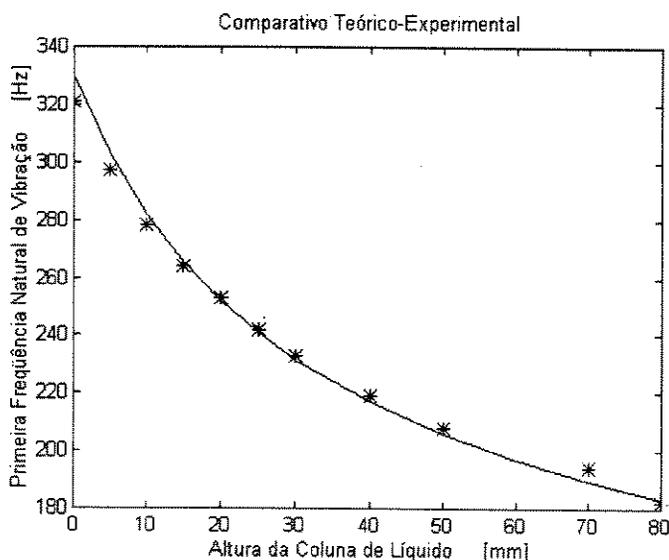


Figura 4.19 - Variação da primeira freqüência natural de vibração devido ao aumento da coluna de líquido

A Figura (4.19) mostra um bom acordo entre as freqüências obtidas experimentalmente e as freqüências obtidas numericamente, o que confirma, mais uma vez, a qualidade do modelo desenvolvido e do software implementado.

Conclusão

Este trabalho objetivou modelar matematicamente o comportamento dinâmico do problema de interação entre fluido e cascas axi-simétricas, obter uma solução aproximada via MEF e implementar o problema computacionalmente, utilizando os conceitos de programação orientada para objetos.

Os resultados numéricos, obtidos através dos modelos matemáticos deduzidos no Capítulo 2 e da forma para elementos finitos mostrada no Capítulo 3, mostraram-se bastante bons quando comparados com resultados para problemas semelhantes fornecidos pela literatura. Os resultados obtidos para os problemas desacoplados, tanto da estrutura com do fluido, mostraram-se coerentes com aqueles obtidos de formulações analíticas, validando assim não só os modelos estrutural e do fluido como os programas utilizados na simulação. Comparou-se o problema acoplado com soluções numéricas e com resultados experimentais de publicações disponíveis. Os resultados obtidos para o problema acoplado de interação entre casca axi-simétrica e fluido em comparação com os resultados obtidos da literatura apresentam-se coerentes, o que valida o modelo de interação fluido-estrutura proposto.

Portanto, o problema de interação entre cascas axi-simétricas e fluido, vibrações harmônicas, fica determinado através das equações desenvolvidas e dos métodos aplicados neste trabalho. É importante salientar que neste modelo os modos de vibração obtidos são axi-simétricos. Para próximos trabalhos este modelo pode ser incrementado, obtendo, desta forma, além dos modos de vibração axi-simétricos os modos circunferenciais.

Como este trabalho é restrito ao problema de vibrações harmônicas em sistemas acoplados fluido-estrutura, não se tratou da solução para o problema transiente. Devido ao grande número de aplicações práticas em que é necessário o conhecimento do comportamento de determinado sistema em cada momento, propõe-se este estudo para próximos trabalhos. O modelo adotado para descrever o comportamento do fluido também pode ser incrementado, resultando em análises mais precisas.

Os modelos matemáticos desenvolvidos neste trabalho foram implementados computacionalmente através do conceito de programação orientada para objetos. Como trata-se de um novo conceito de programação que vem sendo aplicado ao MEF recentemente, sugere-se que sejam realizados mais estudos nesta área. Devido ao volume de novos conceitos, tanto na forma de programação como na aplicação destes conceitos para o MEF, este trabalho está longe de ser conclusivo nesta área.

Considerando-se os objetivos iniciais deste trabalho e os resultados atingidos, pode-se concluir que os resultados obtidos com a formulação desenvolvida são bastante animadores mas há muito espaço para que os modelos sejam incrementados, de maneira a solucionar um maior número de problemas em que exista interação entre fluido e casca axi-simétrica.

Referências Bibliográficas

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London, 1971
- [2] COOK R. D., MALKUS D. S., PLESHA M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. JohnWiley & Sons, 1989
- [3] ZIENKIEWICZ, O. C., BETTESS, P. Fluid-Structure Interaction an Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, 1-16. John Wiley & Sons, 1978
- [4] NITIKITPAIBOON, C., BATHE, K. J. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Velocity Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction. *Computers & Structures*, Vol 47, No 4/5, pp 871-891, Pergamon Press Ltd, 1993
- [5] GALLI, L. *Estudo do Comportamento Dinâmico de Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura Utilizando-se uma Formulação Simétrica em Potenciais de Velocidade*, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, 1995. Tese (Mestrado)
- [6] PAVANELLO R., HENRY R. Modelagem de Acoplamento Dinâmico. Fluido-Estruturas Unidimensionais pelo Método dos Elementos Finitos. X COBEM, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 157-160, Dezembro, 1989
- [7] MARTINI, J. N., PAVANELLO, R. Análise Elasto-Acústica de Cascas Axi-Simétricas Acopladas a um Fluido Interior. COBEM-CIDIM, Brasil, 1995

- [8] SANDBERG, G., GÖRANSSON, P. A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, vol 123, pp 507-515, 1988
- [9] MARTINI, J. N., PAVANELLO, R. Análise Dinâmica de um Sistema Fluido-Casca, Axi-Simétrico, Utilizando o Método dos Elementos Finitos. *Congresso Norte-Nordeste*, Recife, 1996
- [10] TAKADA, H., OHNO, K. Natural Frequency of an Edge-Fixed Disc in Contact with a Liquid. *Bulletin of JSME*, Vol 29, No 251, Paper No 84-0635, 1986
- [11] COQUART, L. *Modélisations Mécanique et Numérique des Vibrations de Systèmes Couplés Fluide-Structure, Application a un Système Biomécanique: L'oeil*. Université Joseph Fourier, Grenoble, Thèse de Doctorat, France, 1990.
- [12] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959
- [13] TIMOSHENKO, S. P. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1961
- [14] PIERCE, A. D. *ACOUSTICS - An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1981
- [15] KIENSLER, L. E., FREY, A. P., POPPENS A. B., SANDERS, J. V. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, Singapore, 1982
- [16] VAN WYLEN, G. J., SONTAG, R. E. *Fundamentals of Classical Thermodynamics*. John Wiley & Sons, 1985
- [17] FLETCHER, C. A. J. *Computational Galerkin Methods*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1984

- [18] CONNOR J. J., BREBBIA C. A. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. Butterworth & Co, 1976
- [19] LOOMIS, L. H., STERNBERG, S. *Advanced Calculus*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1990
- [20] BLEVINS, R. D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes*. Van Nostrand Reinhold Company. New York, 1979
- [21] FISCHER, L. *Theory and Practice of Shell Structures*. Wilhelm Ernst & Sons, Berlin - Munich, 1968
- [22] ZIMMERMANN, T., DUBOIS-PÉLERIN, Y., BOMME, P. Object-Oriented Finite Element Programming : I. Governing Principles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* - 98, pp 291-303, North-Holland, 1992.
- [23] DUBOIS-PÉLERIN, Y., ZIMMERMANN, T., BOMME, P. Object-Oriented Finite Element Programming : II. A Prototype Program in Smalltalk. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* - 98, pp 361-397, North-Holland, 1992.
- [24] DUBOIS-PÉLERIN, Y., ZIMMERMANN Object-Oriented Finite Element Programming : III. An Efficient Implementation in C⁺⁺. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*-108, pp 165-183, North-Holland, 1993.
- [25] SCHOLZ, S. P. Elements of an Object-Oriented FEM ++ Program in C⁺⁺. *Computer & Structures*, V. 43, p. 517-529, 1992
- [26] MILLER, G. R. An Object-Oriented Approach to Structural Analysis and Design. *Computers & Structures*, Vol 40, pp 78-82, 1991
- [27] PAPPAS C. H., MURRAY III, W. H. *Turbo C++ Completo e Total*. Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1991.

Anexo 1

Geometria de Casca Axi-Simétrica Troncônica

As equações diferenciais que governam o comportamento de uma estrutura com a forma de casca axi-simétrica são obtidas, através da equação do movimento, para os eixos de referência arbitrados. Para que as componentes dos esforços nestes eixos sejam obtidas, é necessário que a posição dos esforços em relação a estes eixos sejam conhecidas. Portanto, os ângulos que definem o elemento diferencial devem ser conhecidos. Também é necessário que sejam definidas as variações que estes ângulos sofrem quando existe uma deformação, devido a um carregamento do elemento. Estas variações devem ser conhecidas para que o enrijecimento estrutural seja considerado. Quando o elemento está deformado, os esforços mudam sua posição relativa ao sistema de referência adotado, alterando a posição de equilíbrio. Os ângulos que definem a posição dos esforços para o elemento que sofre deformação podem ser colocados como função dos deslocamentos. Na seqüência, estes ângulos são demonstrados para o caso do elemento diferencial de casca axi-simétrica troncônica [21], bem como quando este elemento apresenta-se deformado [13].

É necessário, para definir um elemento diferencial de casca axi-simétrico troncônico, o comprimento do elemento e três ângulos. O comprimento é ds , conforme ilustrado pela Figura (2.6). Os três ângulos são: $d\theta$ que é um diferencial do ângulo θ e é medido no sentido circunferencial, ou seja, perpendicular ao eixo de simetria, o ângulo ϕ que representa a inclinação do elemento diferencial em relação ao eixo de simetria e o ângulo γ que pode ser

obtido como função dos primeiros. Para ilustrar o elemento e os ângulos em questão, considere a Figura (A1.1).

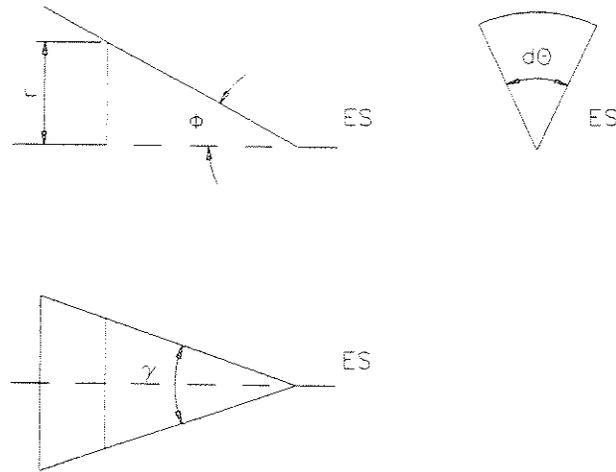


Figura A1.1 - Vistas do elemento de casca axi-simétrica e dos ângulos que definem este elemento

Primeiramente, o ângulo γ é colocado como função dos ângulos ϕ e $d\theta$. Considerando a Figura (A1.1), pode-se escrever:

$$\gamma = d\theta \sin(\phi) \quad (\text{A1.1})$$

Quando o elemento está sob a ação de um carregamento, este ângulo é alterado. Na quantificação desta mudança, é necessário conhecer a influência que a deformação, devido ao carregamento, tem sobre o ângulo γ . A Figura (A1.2) mostra a alteração do ângulo ϕ devido a deformação, que é alterado de um valor ϕ para um valor $\phi + dw/ds$, sendo w o deslocamento perpendicular ao eixo S , Figuras (2.6) e (2.7). Como o ângulo γ é obtido em função deste ângulo e do ângulo $d\theta$, que não sofre influência da deformação do elemento, γ pode ser reescrito utilizando as mesmas relações geométricas que foram usadas para se obter a Equação (A1.1). Portanto, para o elemento deformado, o ângulo γ é escrito da seguinte forma:

$$\gamma_d = d\theta \sin\left(\phi - \frac{dw}{ds}\right) \quad (\text{A1.2})$$

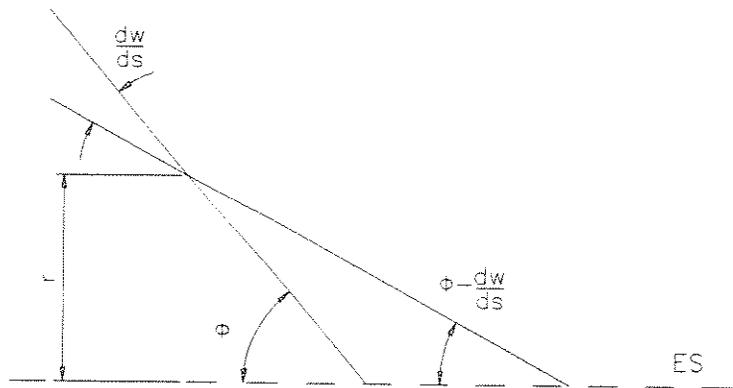


Figura A1.2 - Mudança do ângulo ϕ devido a deformação da estrutura

Pode-se escrever a Equação (A1.2) de uma outra forma. Para que isto ocorra, considere a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\sin(p_1 - p_2) = \cos(p_2) \sin(p_1) - \sin(p_2) \cos(p_1) \quad (\text{A1.3})$$

Na Equação (A1.3) p_1 e p_2 são ângulos quaisquer. Utilizando esta propriedade trigonométrica na Equação (A1.2), escreve-se:

$$\gamma_d = d\theta \left(\sin(\phi) - \frac{dw}{ds} \cos(\phi) \right) \quad (\text{A1.4})$$

Na Equação (A1.4), o termo (dw/ds) é considerado muito pequeno, o que equivale dizer que nesta equação $\cos(dw/ds) \sim 1$ e $\sin(dw/ds) \sim dw/ds$. Através da definição destes ângulos, é possível, considerando-se o elemento diferencial de casca axi-simétrica, obterem-se as componentes dos esforços em relação aos eixos desejados.

Para ilustrar a utilização dos ângulos obtidos anteriormente na obtenção das componentes dos esforços considere um vetor perpendicular as faces laterais de um elemento infinitesimal de casca axi-simétrica. Este vetor, representado pela letra T, é mostrado na Figura (A1.3). X, Z e S são os eixos do sistema de referência adotado, que também pode ser visto nas Figuras (2.6) e (2.7) e são indicados na Figura (A1.3). O ângulo κ é um ângulo obtido em

função dos ângulos definidos anteriormente e da deformação do elemento. π_1 e π_2 são planos indicados pela Figura (A1.3).

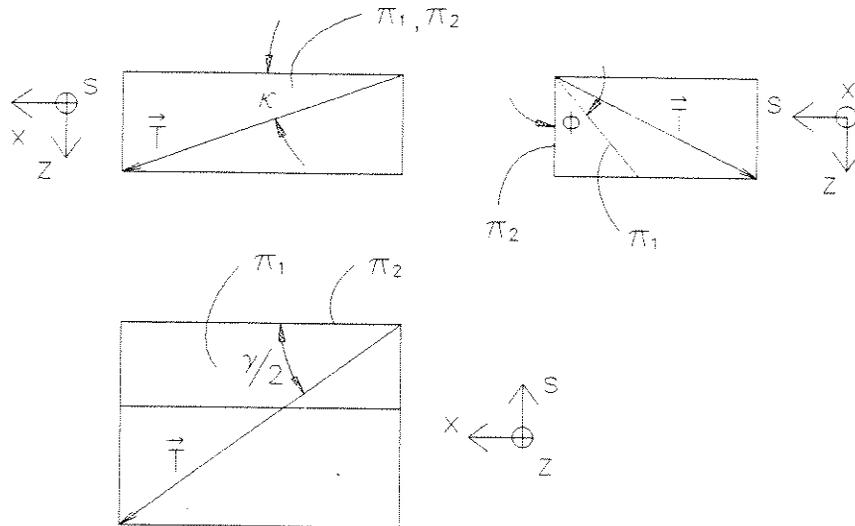


Figura A1.3 - Vetor T e planos π_1 e π_2 vistos segundo as direções S, X e Z

Para que sejam obtidas as projeções do vetor T (T_s , T_x , T_z), é necessário considerar os planos π_1 e π_2 . Primeiramente, é considerado o ângulo entre a projeção do vetor T no plano π_1 e o eixo de referência X, o que é facilmente obtido quando se considera uma vista perpendicular ao Eixo de Simetria, ilustrado na Figura (A1.4).

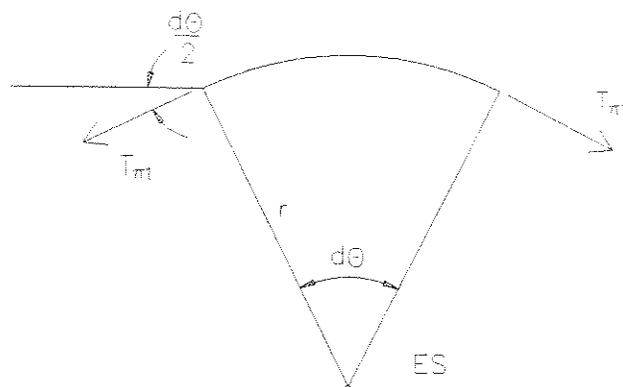


Figura A1.4 - Projeção do vetor T no plano π_1 e ângulo desta projeção em relação ao eixo de referência X

Portanto, considerando as Figuras (A1.3) e (A1.4), pode-se chegar a seguinte expressão para o ângulo κ , para o caso do elemento estar indeformado, da forma que segue:

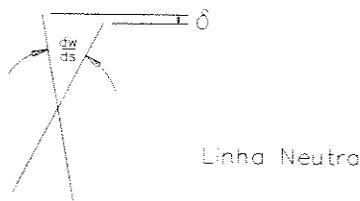
$$\kappa = \frac{d\theta}{2} \cos(\phi) \quad (\text{A1.5})$$

Para o caso do elemento sofrer deformação, este ângulo é escrito da forma que segue :

$$\kappa_d = \kappa + \kappa_{cd} \quad (\text{A1.6})$$

Onde κ_{cd} é a contribuição da deformação neste ângulo.

Para quantificar a contribuição da deformação κ_{cd} , considere a Figura (A1.5). Esta figura mostra que, devido a deformação, um ponto que pertença a casca tem sua posição relativa ao eixo de simetria alterada, devido a deformação. Esta alteração de posição faz surgir um ângulo, no plano circunferencial (perpendicular ao Eixo de Simetria), que deve ser considerado quando são obtidas as equações do movimento para uma casca deformada. A alteração da posição de um ponto sobre a casca é representado por δ .



ES

Figura A1.5 - Variação da distância entre um ponto e o Eixo de Simetria devido a deformação

O comprimento do elemento diferencial, no plano perpendicular ao eixo de simetria, sofre uma variação, devido a alteração de posição δ . Esta variação circunferencial é quantificada da forma que segue:

$$\Delta = \delta d\theta \quad (A1.7)$$

O deslocamento δ considerado pode ser colocado como função da cota z e da variação (dw/ds) da forma mostrada abaixo:

$$\delta = -z \frac{dw}{ds} \sin(\phi) \quad (A1.8)$$

Para calcular a variação do ângulo, utiliza-se a relação trigonométrica que relaciona os catetos, oposto e adjacente, ao ângulo desejado. Para encontrar os catetos, procede-se da seguinte forma: o cateto oposto é encontrado substituindo a cota z por um valor entre 0 e $(h/2)$ e o cateto adjacente é a própria cota escolhida. Desta forma o ângulo κ_{cd} resulta na seguinte expressão:

$$\kappa_{cd} = \frac{d\theta}{2} \frac{dw}{ds} \sin(\phi) \quad (A1.9)$$

Um vetor $\{T\}$, conforme mostrado na Figura (A1.3), tem suas componentes T_s , T_x e T_z , relacionadas aos eixos de referência S , X e Z , escritas da seguinte forma:

$$T_s = -|T| \cdot (\cos(\kappa) \cdot \sin(\gamma/2)) \quad (A1.10)$$

$$T_x = |T| \cdot (\cos(\kappa) \cdot \cos(\gamma/2)) \quad (A1.11)$$

$$T_z = |T| \cdot \sin(\kappa) \quad (A1.12)$$

Nas Equações (A1.10), (A1.11) e (A1.12) κ e γ devem ser substituídos por κ_d e γ_d quando é considerado a deformação do elemento.

Na obtenção das projeções do vetor T foram utilizados apenas dois ângulos, γ e κ . Abaixo estes ângulos são agrupados, para os casos deformado e indeformado.

$$\gamma = d\theta \sin(\phi) \quad (\text{A1.13})$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{2} \cos(\phi) \quad (\text{A1.14})$$

$$\gamma_d = d\theta \left(\sin(\phi) - \frac{dw}{ds} \cos(\phi) \right) \quad (\text{A1.15})$$

$$\kappa_d = \frac{d\theta}{2} \cos(\phi) + \frac{d\theta}{2} \frac{dw}{ds} \sin(\phi) \quad (\text{A1.16})$$

Através destes ângulos é possível decompor os esforços que agem em um elemento de casca axi-simétrico troncônico em suas componentes em relação aos eixos de referência adotados.

Anexo 2

Relações entre Deslocamentos e Deformações

As relações entre os deslocamentos e as deformações são necessárias para que as equações do movimento da casca fina axi-simétrica, obtidas no Capítulo 2, fiquem como função apenas dos deslocamentos. Portanto, são desenvolvidas, aqui, as relações entre os deslocamentos e as deformações para o caso de casca fina axi-simétrica e, por analogia, são obtidas as relações para casca fina axi-simétrica troncônica [12], [21].

Primeiramente, é necessário que sejam definidos as componentes do deslocamento. O deslocamento de um ponto que pertença a casca é representado pelo vetor $\{u_e\}$. Este vetor tem como componentes o deslocamento u , que tem a mesma direção e sentido do eixo S , e o deslocamento w , que tem direção e sentido do eixo Z , vide Figuras (2.6) e (2.7).

As deformações, originadas pelo deslocamento $\{u_e\}$, podem ser de membrana ou de flexão. As deformações de membrana são representadas pelo caractere ε e as deformações de flexão são representadas pelo caractere χ . As deformações de membrana e as deformações de flexão são obtidas para o plano meridional (plano que contém o Eixo de Simetria) e para o plano circunferencial (plano perpendicular ao Eixo de Simetria). As deformações que pertencem ao plano meridional são subscritas com o caractere φ e as deformações que pertencem ao plano circunferencial são subscritas com o caractere θ .

A relação entre o deslocamento u e a deformação ϵ_φ é a primeira a ser obtida. Considere, portanto, a Figura (A2.1), que ilustra o deslocamento u a partir de uma vista paralela ao Eixo de Simetria.

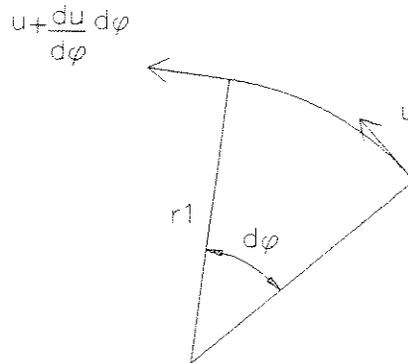


Figura A2.1 - Deslocamento u em um elemento diferencial de casca axi-simétrica

Define-se a deformação de uma determinada fibra como sendo a variação do comprimento desta dividido pelo comprimento inicial. Pode-se, portanto, escrever a deformação de membrana, ϵ_φ , da seguinte maneira:

$$\epsilon_\varphi = \frac{l_f - l_i}{l_i} \quad (A2.1)$$

Onde l_f é o comprimento final de determinada fibra e l_i é o comprimento inicial. Considerando a Figura (A2.1) pode-se escrever estes comprimentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} l_i &= r_1 d\varphi \\ l_f &= r_1 d\varphi + \frac{du}{d\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (A2.2)$$

Portanto, a deformação ε_φ originada pelo deslocamento u pode ser escrita combinando-se as Equações (A2.1) e (A2.2) da forma mostrada abaixo:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} \quad (\text{A2.3})$$

Na Equação (A2.3) r_1 e $d\varphi$ são definidos segundo a Figura (A2.1).

O deslocamento u , além de gerar deformações de membrana no plano meridional, gera, também, deformação de flexão no plano meridional. Ainda considerando a Figura (A2.1), pode-se encontrar uma relação entre o deslocamento u e a deformação χ_φ . Para o elemento considerado nesta figura, a variação do comprimento sobre a linha neutra, que é a linha em que a deformação de flexão é zero, é dado por:

$$\delta_n = \frac{du}{d\varphi} d\varphi \quad (\text{A2.4})$$

Considera-se, para obtenção da deformação χ_φ , que o elemento diferencial mantém sua forma de arco de circunferência. Devido a manutenção desta forma, pode-se relacionar a deformação que uma fibra localizada em qualquer ponto da casca, que pertença ao plano meridional, com a deformação sobre a linha neutra. Primeiro é considerado o deslocamento que uma fibra localizada uma cota z qualquer da linha neutra possui. Este deslocamento é representado pelo caractere δ_z , como mostrado abaixo:

$$\delta_z = \frac{(r_1 - z) \frac{du}{d\varphi} d\varphi}{r_1} \quad (\text{A2.5})$$

A variação no comprimento, associado a flexão pura, é a diferença entre o deslocamento da linha neutra, Equação (A2.4), e o deslocamento representado pela Equação (A2.5), ou seja:

$$\delta_f = \delta_z - \delta_n \quad (\text{A2.6})$$

Onde δ_f é o deslocamento que origina flexão e é função da cota z , medido a partir da linha neutra. Combinando as Equações (A2.4), (A2.5) e (A2.6), encontra-se a relação final para o deslocamento que origina tensões de flexão no plano meridional, esta relação é mostrada abaixo:

$$\delta_f = -\frac{z}{r_1} \frac{du}{d\phi} \quad (\text{A2.7})$$

Neste momento, é necessário que a deformação de flexão seja definida. A deformação de flexão pode ser considerada como uma deformação que é função da cota z e que varia linearmente em relação a esta cota. Considerando esta definição para a deformação de flexão, pode-se escrever χ_ϕ da forma abaixo:

$$z\chi_\phi = \frac{l_f - l_i}{l_i} \quad (\text{A2.8})$$

Para que a deformação de flexão seja equacionada é necessário que os comprimentos inicial e final sejam conhecidos. Estes comprimentos, de acordo com as deduções acima, podem ser escritos da forma que segue:

$$\begin{aligned} l_i &= (r_1 - z)d\phi \\ l_f &= (r_1 - z)d\phi + \delta_f \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

E considerando que $r_1 \gg z$, chega-se a seguinte expressão:

$$\chi_\phi = -\frac{1}{r_1} \frac{du}{r_1 d\phi} \quad (\text{A2.10})$$

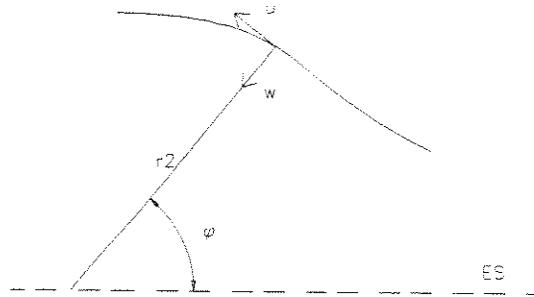


Figura A2.2 - Componentes do deslocamento em cascas axi-simétricas

O deslocamento u gera, também, deformações no plano circunferencial. Para quantificar a deformação de membrana no plano circunferencial, ϵ_θ , considere a Figura (A2.2). O deslocamento u altera a distância entre o ponto em que este ocorre e o Eixo de Simetria. Esta alteração de distância é representada por u' , que é mostrado abaixo:

$$u' = u \cos(\varphi) \quad (\text{A2.11})$$

O ponto considerado, que antes do deslocamento possuía um raio $r_2 \sin(\varphi)$, no plano circunferencial, possui agora um raio $(r_2 \sin(\varphi) + u')$. Fica evidente, portanto, que um deslocamento u induz deformação de membrana no plano circunferencial. Esta deformação pode ser conceituada como antes, da forma que segue:

$$\epsilon_\theta = \frac{l_f - l_i}{l_i} \quad (\text{A2.12})$$

Os comprimentos inicial e final são dados abaixo:

$$\begin{aligned} l_i &= 2\pi r_2 \sin(\varphi) \\ l_f &= 2\pi (r_2 \sin(\varphi) + u \cos(\varphi)) \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Portanto, combinando a Equação (A2.12) e a Equação (A2.13), a deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u \cos(\varphi)}{r_2 \sin(\varphi)} \quad (\text{A2.14})$$

Quando da dedução da Equação (A2.7), evidenciou-se que o deslocamento u gera variações de comprimento que são função da cota z . Portanto, u também gera deformação de flexão no plano circunferencial. Em uma cota z qualquer, considerando-se um deslocamento absoluto u , tem-se a seguinte expressão para o deslocamento:

$$\delta_z = -\frac{z}{r_1} u \quad (\text{A2.15})$$

Usando-se raciocínio análogo ao da dedução da relação (A2.10), escreve-se:

$$z \chi_{\theta} = \frac{l_r - l_i}{l_i} \quad (\text{A2.16})$$

Com os comprimentos final e inicial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} l_i &= (r_2 - z) \sin(\varphi) 2\pi \\ l_r &= ((r_2 - z) \sin(\varphi) + \delta_z \cos(\varphi)) 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A2.17})$$

E, ainda, considerando $r_2 \gg z$, chega-se a seguinte relação final para a deformação de flexão no plano circunferencial devido ao deslocamento u :

$$\chi_{\theta} = -\frac{u \cos(\varphi)}{r_1 r_2 \sin(\varphi)} \quad (\text{A2.18})$$

Assim como u , o deslocamento w também gera tensões de membrana e flexão nos planos meridional e circunferencial. Portanto, considera-se agora um deslocamento w em um ponto qualquer, ilustrado pela Figura (A2.2).

A primeira deformação, que se desenvolve devido ao deslocamento w , a ser considerada é a deformação de membrana no plano meridional, ϵ_φ . De acordo com a Figura (A2.2), percebe-se que devido ao deslocamento w o raio r_1 sofre uma redução de w . Devido a esta redução de r_1 o comprimento do elemento diferencial no plano meridional sofre uma mudança. Esta mudança é mostrada abaixo através dos comprimentos final e inicial do elemento:

$$\begin{aligned} l_f &= (r_1 - w)d\varphi \\ l_i &= r_1 d\varphi \end{aligned} \quad (A2.19)$$

Considerando a definição de deformação de membrana dada pela Equação (A2.1) e a Equação (A2.19), pode-se escrever ϵ_φ da forma que segue:

$$\epsilon_\varphi = -\frac{w}{r_1} \quad (A2.20)$$

A deformação de membrana no plano circunferencial, gerada pelo deslocamento w , é obtida de forma análoga à deformação de membrana, plano circunferencial, devido ao deslocamento u . Os comprimentos inicial e final, portanto, são escritos da forma abaixo:

$$\begin{aligned} l_i &= r_2 \sin(\varphi) 2\pi \\ l_f &= (r_2 - w) \sin(\varphi) 2\pi \end{aligned} \quad (A2.21)$$

Usa-se, para escrever a deformação de membrana, a definição da Equação (A2.12). Logo, a deformação ϵ_θ , devido ao deslocamento w , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\epsilon_\theta = -\frac{w}{r_2} \quad (A2.22)$$

Finalizando, pode-se encontrar ainda as deformações de flexão geradas pelo deslocamento w . Estas deformações são definidas através das Equações (A2.8) e (A2.12). Na quantificação das deformações de flexão é necessário encontrar o comportamento do deslocamento w em relação a cota z . Para a variação do deslocamento no plano meridional, usa-se um raciocínio similar ao adotado para o caso de viga, onde o deslocamento que gera deformação é obtido através da variação do deslocamento w . Assim, pode-se escrever este deslocamento, δ_z , como função da cota z e da variação do deslocamento w , da forma que segue:

$$\delta_z = -\frac{z}{r_1} \frac{dw}{d\phi} \quad (A2.23)$$

Pode-se escrever o comprimento inicial do elemento como função da cota z e o comprimento final como função, além da cota z , da variação do deslocamento w , ou seja:

$$\begin{aligned} l_i &= (r_1 - z)d\phi \\ l_f &= (r_1 - z)d\phi + \delta_z \end{aligned} \quad (A2.24)$$

Para escrever a relação final da deformação de flexão no plano meridional, função do deslocamento w , utiliza-se a definição dada pela Equação (A2.8), as relações dadas pelas Equações (A2.23) e (A2.24) e, ainda, considera-se $r_1 \gg z$, o que resulta em:

$$\chi_\phi = -\frac{1}{r_1} \frac{dw}{d\phi} \quad (A2.25)$$

Finalmente, considera-se a deformação de flexão no plano circunferencial gerada pelo deslocamento w . O deslocamento δ_z , gerado pelo deslocamento w , deve ser considerado para a dedução desta relação. Usa-se raciocínio análogo aquele utilizado para obtenção da Equação (A2.18), que quantifica a deformação de membrana no plano circunferencial devido ao deslocamento u .

Considera-se, portanto, como comprimentos inicial e final para as fibras, no plano circunferencial, a relação abaixo:

$$\begin{aligned} l_i &= (r_2 - z) \sin(\varphi) 2\pi \\ l_f &= ((r_2 - z) \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \delta_z) 2\pi \end{aligned} \quad (A2.26)$$

Substituindo a Equação (A2.26) na definição da Equação (A2.12) e, ainda, considerando $r_2 \gg z$, tem-se:

$$\chi_\theta = -\frac{dw \cos(\varphi)}{r_1 d\varphi r_2 \sin(\varphi)} \quad (A2.27)$$

Considerando a validade da sobreposição das deformações, pode-se adicionar os termos deduzidos acima para que as relações entre deslocamento e deformação sejam escritas de forma completa. Agindo desta maneira, as relações entre deformações e deslocamentos para casca fina axi-simétrica são escritas como segue:

$$\begin{aligned} \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{w}{r_1} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u \cos(\varphi)}{r_2 \sin(\varphi)} - \frac{w}{r_2} \\ \chi_\varphi &= -\frac{1}{r_1} \frac{du}{r_1 d\varphi} - \frac{1}{r_1 d\varphi} \frac{dw}{r_1 d\varphi} \\ \chi_\theta &= -\frac{u \cos(\varphi)}{r_1 r_2 \sin(\varphi)} - \frac{dw \cos(\varphi)}{r_1 d\varphi r_2 \sin(\varphi)} \end{aligned} \quad (A2.28)$$

As relações dadas pelas Equações (A2.28) são válidas para casca fina axi-simétrica. Uma casca fina axi-simétrica pode ser definida geometricamente como um segmento curvo rotacionado em torno de um eixo de simetria.

Para o caso dos elementos com a forma de tronco de cône, as relações definidas pela Equação (A2.28) podem ser simplificadas, já que o segmento curvo passa a ser descrito por um segmento reto. Para a simplificação das relações, considera-se que para um elemento troncônico as igualdades seguintes são verdadeiras:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \infty \\
 r_1 d\phi &= ds \\
 \sin(\phi) &= \cos(\phi) \\
 \cos(\phi) &= \sin(\phi) \\
 r_2 \sin(\phi) &= r
 \end{aligned}
 \tag{A2.29}$$

Portanto, combinando as relações dadas pelas Equações (A2.28) e (A2.29), são obtidas relações entre os deslocamentos e as deformações para casca fina axi-simétrica troncônica, mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\phi &= \frac{du}{ds} \\
 \epsilon_\theta &= \frac{1}{r}(u \sin(\phi) - w \cos(\phi)) \\
 \chi_\phi &= -\frac{d^2w}{ds^2} \\
 \chi_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{dw}{ds} \sin(\phi)
 \end{aligned}
 \tag{A2.30}$$

As relações, apresentadas pelas Equações (A2.30) em conjunto com as relações entre os esforços e as deformações, são usadas na transformação das equações diferenciais obtidas no Capítulo 2, que são função dos esforços, em equações diferenciais em que as incógnitas são os deslocamentos.

Anexo 3

Funções de Interpolação

Quando o Método dos Elementos Finitos é utilizado, usa-se funções de interpolação para aproximar as variáveis da equação. No problema de interação fluido-estrutura são necessárias funções que interpolem os deslocamentos da estrutura u e w , e de funções que interpolem, para o fluido, a pressão p e o potencial de deslocamento Ψ . Na seqüência são mostradas estas funções e a maneira como foram obtidas.

A3.1 Funções de Interpolação para os Deslocamentos da Estrutura

As considerações que seguem são baseadas em um elemento finito conforme ilustrado pela Figura (A3.1). Nesta figura são mostrados os nós, o sistema de referência e os deslocamentos em relação a estes eixos. Os valores nodais das variáveis são os coeficientes utilizados na interpolação

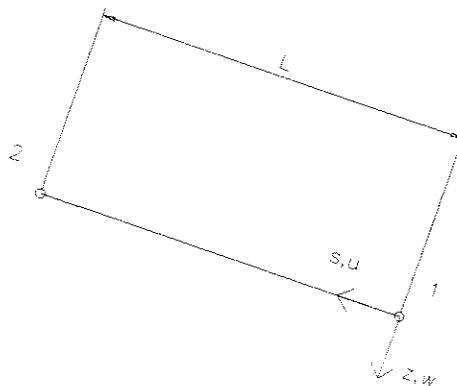


Figura A3.1 - Comprimento, eixos de referência e deslocamentos de um elemento finito de casca axi-simétrica troncônica

O deslocamento u é interpolado por um polinômio de grau 1. Este polinômio pode ser escrito da seguinte forma :

$$u(s) = a_0 + a_1s \quad (\text{A3.1})$$

Onde a_i são os coeficientes a determinar deste polinômio.

Conforme mencionado acima, os valores nodais das variáveis são utilizados como coeficientes dos polinômios em um modelo de elementos finitos. Portanto, considere as seguintes condições para a Equação (A3.1):

$$\begin{aligned} u(s=0) &= u_1 \\ u(s=L) &= u_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

Substituindo as condições dadas pela Equação (A3.2) na Equação (A3.1), pode-se escrever a Equação (A3.1) de forma que os coeficientes do polinômio sejam os valores nodais da variável u , ou seja:

$$u(s) = \left(1 - \frac{s}{L}\right)u_1 + \left(\frac{s}{L}\right)u_2 \quad (\text{A3.3})$$

A Equação (A3.3) é a forma utilizada para interpolar o deslocamento u no MEF para cascas axi-simétricas troncônicas.

Considerando, agora, o deslocamento perpendicular ao eixo s . Este deslocamento, vide Figura (A3.1), é representado pela letra w . Para este deslocamento, utiliza-se para interpolação um polinômio de grau 3. É necessário um polinômio deste grau, pois são utilizadas derivadas espaciais de ordem 2 no modelo de elementos finitos. Portanto, escreve-se:

$$w(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (\text{A3.4})$$

Na Equação (A3.4), os termos a_i são coeficientes que devem ser determinados, considerando-se as condições deste deslocamento na fronteira.

A primeira derivada da equação (A3.4) assume a forma abaixo :

$$\frac{dw(s)}{ds} = \beta(s) = a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 \quad (\text{A3.5})$$

De forma análoga aquela considerada para o deslocamento u , pode-se escrever a Equação (A3.4) de maneira que os coeficientes do polinômio sejam expressos pelos valores nodais da variável w . Para que esta forma seja encontrada, faz-se uso das condições de fronteira indicadas abaixo:

$$\begin{aligned} w(s)|_{s=0} &= w_1 \\ w(s)|_{s=L} &= w_2 \\ \frac{dw(s)}{ds}|_{s=0} &= \beta_1 \\ \frac{dw(s)}{ds}|_{s=L} &= \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

Aplicando as condições (A3.6) nas equações (A3.4) e (A3.5), são obtidas as seguintes expressões para os coeficientes do polinômio:

$$\begin{aligned} a_0 &= w_1 \\ a_1 &= \beta_1 \\ a_2 &= \frac{3}{L^2}(w_2 - w_1) - \frac{1}{L}(2\beta_1 + \beta_2) \\ a_3 &= \frac{2}{L^3}(w_1 - w_2) + \frac{1}{L^2}(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

Pode-se, ainda, para facilitar posterior integração, parametrizar s e por conseguinte u e w , através de uma nova variável. A Figura (A3.2) mostra a parametrização realizada. Esta figura apresenta a nova variável e seus valores máximos.

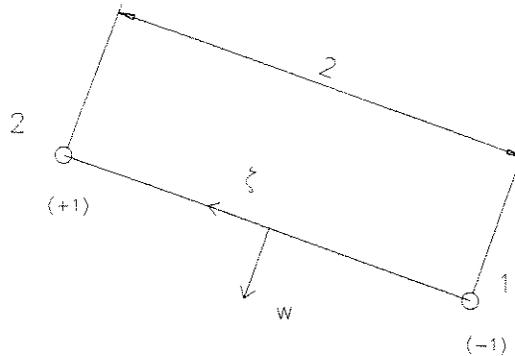


Figura A3.2 - Transformação de coordenadas para elemento finito de casca axi-simétrica tronçônica

Parametriza-se s de acordo com a variável ζ , da forma mostrada abaixo:

$$s = \frac{1}{2}(1-\zeta)s_1 + \frac{1}{2}(1+\zeta)s_2 \quad (\text{A3.8})$$

Considerando que s varia de 0 a L (comprimento do elemento), pode-se escrever s como função dos seus valores mínimo e máximo, conforme mostrado pela Equação (A3.8). Os valores de s para os nós, mostrados pela Figura (A3.2), são escritos abaixo:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= L \end{aligned} \quad (\text{A3.9})$$

Substituindo a Equação (A3.9) na Equação (A3.8) e utilizando esta parametrização na Equação (A3.3), equação que interpola a variável u , tem-se:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta)u_1 + \frac{1}{2}(1+\zeta)u_2 \quad (\text{A3.10})$$

Portanto, pode-se escrever u como função da variável ζ da seguinte forma:

$$u(\zeta) = F_{u1}(\zeta)u_1 + F_{u2}(\zeta)u_2 \quad (\text{A3.11})$$

Com as funções F_{u1} e F_{u2} assumindo a forma que segue:

$$\begin{aligned} F_{u1}(\zeta) &= \frac{1}{2}(1-\zeta) \\ F_{u2}(\zeta) &= \frac{1}{2}(1+\zeta) \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

A primeira derivada das funções apresentadas pelas Equações (A3.12) em relação a s são escritas da forma abaixo indicada:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{u1}}{ds} &= -\frac{1}{L} \\ \frac{dF_{u2}}{ds} &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

Utilizando, agora, o mesmo procedimento utilizado para a variável u na função que interpola a variável w através de seus valores nodais, escreve-se:

$$w(\zeta) = F_{w1}(\zeta)w_1 + F_{w2}(\zeta)\beta_1 + F_{w3}(\zeta)w_2 + F_{w4}(\zeta)\beta_2 \quad (\text{A3.14})$$

Sendo as funções F_{w1} , F_{w2} , F_{w3} e F_{w4} escritas conforme segue:

$$\begin{aligned} F_{w1}(\zeta) &= \frac{1}{4}(2-3\zeta+\zeta^3) \\ F_{w2}(\zeta) &= \frac{1}{8}(1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3)L \\ F_{w3}(\zeta) &= \frac{1}{4}(2+3\zeta-\zeta^3) \\ F_{w4}(\zeta) &= \frac{1}{8}(-1-\zeta+\zeta^2+\zeta^3)L \end{aligned} \quad (\text{A3.15})$$

A primeira derivada das funções mostradas na Equação (A3.15) em relação a s são escritas da forma que segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_{w1}}{ds} &= \frac{3}{2}(-1+\zeta^2)\frac{1}{L} \\
 \frac{dF_{w2}}{ds} &= \frac{1}{4}(-1-2\zeta+3\zeta^2) \\
 \frac{dF_{w3}}{ds} &= \frac{3}{2}(1-\zeta^2)\frac{1}{L} \\
 \frac{dF_{w4}}{ds} &= \frac{1}{4}(-1+2\zeta+3\zeta^2)
 \end{aligned}
 \tag{A3.16}$$

A segunda derivada das funções mostradas pela Equação (A3.15) em relação a s são escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2F_{w1}}{ds^2} &= \frac{6\zeta}{L^2} \\
 \frac{d^2F_{w2}}{ds^2} &= (-1+3\zeta)\frac{1}{L} \\
 \frac{d^2F_{w3}}{ds^2} &= -\frac{6\zeta}{L^2} \\
 \frac{d^2F_{w4}}{ds^2} &= (1+3\zeta)\frac{1}{L}
 \end{aligned}
 \tag{A3.17}$$

As funções obtidas aqui são utilizadas para a obtenção de uma solução aproximada pelo MEF para o caso de casca fina axi-simétrica troncônica. No próximo item, são apresentadas as funções utilizadas para interpolar as variáveis do domínio fluido através de seus valores nodais.

A3.2 Funções de Interpolação para as Variáveis Acústicas

Para o elemento acústico duas formulações são utilizadas. A primeira delas equaciona o problema utilizando apenas uma variável, a pressão. A segunda formulação faz o uso de duas variáveis para equacionar o problema, pressão e potencial de deslocamento. Como as duas variáveis utilizadas fazem o uso de funções de interpolação com um polinômio de mesmo grau, elas serão

representadas, aqui, apenas pela variável p . É necessário, para melhor compreender a forma do elemento utilizado para o domínio fluido, que se considere a Figura (A3.3). Esta figura mostra a geometria, os valores nodais do elemento e o sistema de referência, bem como a disposição, ordem, dos nós.

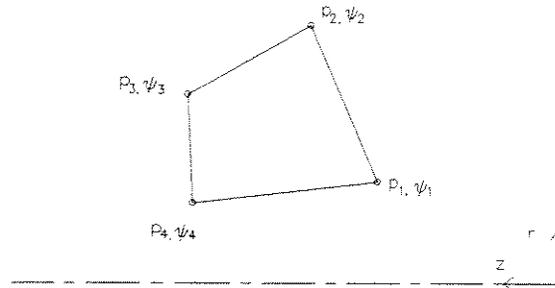


Figura A3.3 - Elemento finito acústico quadrilateral de 4 nós

Partindo, novamente, da idéia de parametrização, utilizam-se novas variáveis para que z e r , além das variáveis do problema, sejam interpolados através de seus valores nodais. Esta forma de parametrização em que as variáveis do problema e as variáveis geométricas são interpoladas pelas mesmas funções é chamado de isoparamétrico. As variáveis utilizadas para esta parametrização são mostradas na Figura (A3.4).

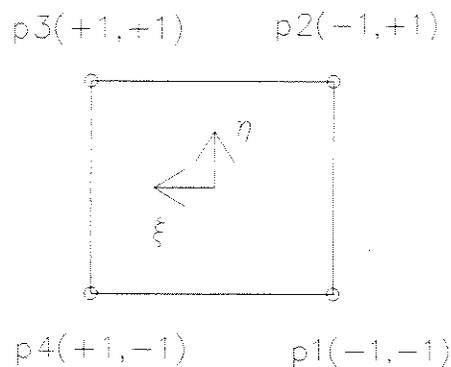


Figura A3.4 - Variáveis de parametrização para elemento finito acústico

As novas variáveis, utilizadas na parametrização, são ξ e η . Desta forma, pode-se escrever r , z e p da forma abaixo:

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) &= F_{f1}(\xi, \eta)r_1 + F_{f2}(\xi, \eta)r_2 + F_{f3}(\xi, \eta)r_3 + F_{f4}(\xi, \eta)r_4 \\ z(\xi, \eta) &= F_{f1}(\xi, \eta)z_1 + F_{f2}(\xi, \eta)z_2 + F_{f3}(\xi, \eta)z_3 + F_{f4}(\xi, \eta)z_4 \\ p(\xi, \eta) &= F_{f1}(\xi, \eta)p_1 + F_{f2}(\xi, \eta)p_2 + F_{f3}(\xi, \eta)p_3 + F_{f4}(\xi, \eta)p_4 \end{aligned} \quad (\text{A3.18})$$

Na Equação (A3.18) as funções F_{fi} são as funções utilizadas na parametrização. Estas funções são bilineares e são escritas da forma que segue:

$$\begin{aligned} F_{f1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ F_{f2} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ F_{f3} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ F_{f4} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \quad (\text{A3.19})$$

Para se obter a primeira derivada destas funções em relação a r e a z , a seguinte relação deve ser utilizada:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.20})$$

Onde $|J|$ é o determinante da matriz de transformação de coordenadas.

Fazendo uso das Equações (A3.18), (A3.19) e (A3.20) a aproximação da solução através dos valores nodais para as variáveis acústicas, utilizando o MEF, pode ser escrita. As funções aqui mostradas são utilizadas intensivamente no Capítulo 3 deste trabalho, que trata da implementação do MEF.

Anexo 4

Implementação Computacional

Ao aplicar o método dos elementos finitos, surge a necessidade de manipular informações em grande quantidade. Informações que podem estar na forma de cotas, propriedades de materiais, tipos de elementos, propriedades de cada elemento, etc. Para gerenciar este volume de informações, a utilização de computadores e de códigos computacionais é imperativa.

Usualmente, os códigos computacionais utilizados na engenharia, e em particular os códigos utilizados em programas de elementos finitos, fazem uso da programação orientada para procedimento. Este tipo de programação mostra-se bastante eficiente no processamento, mas a reutilização destes códigos ou sua atualização é muito complicada. Uma forma alternativa a este tipo de programação é a chamada programação orientada para objetos; neste estilo, pode-se aproximar o código computacional da maneira humana de *ver as coisas*. Na programação orientada para objetos, quando algum tipo de objeto é implementado, todos os dados para a compreensão deste são encontrados no próprio, facilitando assim sua atualização ou alteração. Neste tipo de programação há um alto nível de abstração e cada objeto deve ser definido em termos de variáveis componentes e de métodos que realizam as ações sobre as variáveis. Há, ainda, a possibilidade de comandar diferentes ações em diferentes objetos através de um mesmo comando, bem como a herança de atributos de uma classe *pai* para uma, ou várias, classes derivadas.

Nas seções que seguem são mostradas as características da programação orientada para objetos, as classes que foram criadas para o MEF fluido-estrutura axi-simétrico, sua inter-dependência e alguns detalhes de funcionamento [22], [23], [24], [25], [26]

A4.1 Programação Orientada para Objetos

A característica marcante na programação orientada para objetos é o uso intensivo de uma estrutura chamada classe. É através desta estrutura que é possível definir os objetos e seu comportamento. Um objeto pode ser qualquer coisa definível. A partir de uma definição inicial, é possível, através das classes, implementar computacionalmente este objeto [27].

As classes possuem características que permitem a definição de determinado objeto. A primeira destas características é a de suportar dados e funções. As funções que fazem parte das classes são chamados de métodos, e, através destes métodos, as variáveis de determinada classe são alteradas ou manipuladas. As variáveis e os métodos de uma classe podem ser do tipo público, protegido e privado. Estes tipos definem como será o acesso as variáveis e métodos da classe. O acesso e proteção de dados, permitido pelos tipos, é chamado de encapsulamento.

A classe, uma vez definida, pode servir de base para que outras classes sejam criadas a partir dela. A classe genitora pode conter informações básicas que serão utilizadas por um número qualquer de classes derivadas. As classes derivadas podem fazer uso das definições da classe genitora e adicionar métodos que sejam específicos. A esta característica dá-se o nome de hierarquia de classes. Pode-se, também, através da herança de atributos e sobrecarga de métodos construir novas classes, utilizando como base uma classe já existente.

Existe, ainda, o conceito de polimorfismo. O polimorfismo permite que através de uma mensagem sejam desencadeados procedimentos definidos, tanto nas classes derivadas como na classe genitora, simultaneamente.

A4.2 Definição e Organização de um Conjunto de Classes para MEF

A definição das classes utilizadas para o método dos elementos finitos e sua inter-dependência não é única. Uma das formas possíveis é o conjunto de classes mostrado abaixo:

MATRIZ
NÓ
GEOMETRIA
GAUSS
INTERFUN
MATERIAL
ELEMENTO
 AXICASCA
 AXIFLUIDO
INTERELEMENTO
 INTERFACE

Este conjunto de classes possibilita a resolução de problemas de interação fluido-estrutura através do conceito de programação orientada para objetos.

A classe **MATRIZ** é utilizada sempre que se faz necessário algum tipo de operação com vetores ou matrizes, como se trata de um programa de elementos finitos esta classe é utilizada intensivamente. Nas classes **NÓ** e **GEOMETRIA** estão definidas as variáveis e os métodos necessários para o gerenciamento de cada um dos nós do problema, bem como de cada grau de liberdade associado aos nós. A classe **GAUSS** define o conjunto de pontos de integração para determinado problema, enquanto na classe **INTERFUN** são calculados os valores das funções de interpolação nestes pontos. Na classe **MATERIAL** estão contidos os valores numéricos para as propriedades dos materiais utilizados no processamento do problema. A classe **ELEMENTO** define as variáveis tradicionais que um elemento finito possui, como matriz de

massa, matriz de rigidez, vetor de carga, etc. As classes derivadas **AXICASCA** e **AXIFLUIDO** definem como as variáveis da classe **ELEMENTO** devem ser calculadas para cada caso. A classe **INTERELEMENTO** é uma classe análoga à classe **ELEMENTO**, diferenciando-se daquela apenas por definir variáveis que são particulares a elementos finitos de interface. Finalmente, a classe **INTERFACE** define como as variáveis da classe **INTERELEMENTO** devem ser calculadas para o caso específico de interação fluido-estrutura axi-simétrico.

A4.3 Detalhes de Funcionamento

As classes **NÓ**, **GAUSS**, **INTERFUN** e **MATERIAL** podem ser consideradas como sub-classes. Estas sub-classes definem tipos de variáveis que são utilizadas nas outras classes. Por serem, basicamente, classes de estrutura simples, suas características não são comentadas. As demais classes, suas variáveis e principais características de funcionamento são mostrados a seguir.

MATRIZ

Variáveis

- Numero de linhas
- Número de colunas
- Largura de banda
- Elementos da matriz

Características

Esta classe realiza as principais operações com matrizes e vetores, bem como a solução de sistemas lineares. Através dos métodos implementados é habilitado o acesso e modificação de cada elemento da matriz. Existe, ainda, métodos especiais que permitem que se trabalhe com matrizes armazenadas na forma de banda.

Exemplo de Funcionamento

Nas próximas linhas são mostrados alguns detalhes de funcionamento desta classe.

Para declarar um tipo da classe matriz com, por exemplo, quatro linhas e 3 colunas, age-se da seguinte forma:

```
MATRIZ MatrizExemplo (4,3);
```

Para preencher cada elemento de uma matriz pode-se fazer a seguinte associação :

```
MatrizExemplo (2,2) = 3.9;
```

Desta forma, o elemento da linha dois coluna dois será associado ao valor 3.9. Uma outra forma de associação pode ser feita diretamente com matrizes. Suponha que se deseja copiar uma matriz qualquer, devidamente preenchida. Uma forma de obter-se uma cópia desta matriz é utilizar o operador =, como indicado abaixo:

```
MatrizExemplo = MatrizQualquer;
```

Agora a MatrizExemplo possui todas as características da MatrizQualquer, inclusive os valores de cada elemento daquela. Operações importantes como adição, subtração e multiplicação também podem ser realizadas utilizando o operador associado. Para se obter a inversa ou a transposta de uma matriz utilizam-se os seguintes comandos:

```
MatrizExemplo = !MatrizQualquer; // Transpõe MatrizQualquer e  
// armazena em MatrizExemplo.  
MatrizExemplo = inv(MatrizQualquer) // Inverte MatrizQualquer e  
// armazena em MatrizExemplo.
```

Utilizando esta classe é possível, também, resolver um sistema linear, multiplicar um tipo **MATRIZ** por um tipo `double`, mostrar na tela uma matriz além de vários tipos de inicialização do tipo.

GEOMETRIA

Variáveis

Número de nós

Propriedades dos nós

Nós

Graus de liberdade por nó

Condição de contorno

Características

Nesta classe, busca-se agrupar o problema geométrico controlando o armazenamento dos nós e associando a estes propriedades como sua localização na matriz global. Esta classe também habilita o usuário a associar a cada nó um número de graus de liberdade. A classe **GEOMETRIA** utiliza, entre suas variáveis, a classe pré-definida `Nó`.

Exemplo de Funcionamento

Para uma melhor compreensão do funcionamento desta classe, considere um suporte geométrico para um problema de elementos finitos. Supondo que seja um problema bidimensional, os nós podem ser armazenados em vetores de duas linhas e uma coluna. Supondo que a malha para elementos finitos seja composta por quatro nós, define-se a geometria da seguinte forma:

GEOMETRIA ExemploDeGeometria (4);

Desta forma é declarado um suporte geométrico para quatro nós. Considerando que Nóx, Nóy, Nóz, Nów, declarados como tipo **MATRIZ**. Pode-se associar estes nós ao tipo **GEOMETRIA** ExemploDeGeometria, da forma que segue:

ExemploDeGeometria (453) = Nóx;

ExemploDeGeometria (12) = Nóy;

ExemploDeGeometria (7) = Nóz;

ExemploDeGeometria (98) = Nów;

O que foi feito, é a associação de determinado nó a uma geometria. Portanto, neste exemplo, na geometria definida o nó denominado Nóx é associado à ExemploDeGeometria com o número de nó igual a 453. De forma análoga Nóy é associado à ExemploDeGeometria com número de nó igual a 12, Nóz e Nów são associados da mesma forma com números de nó igual a 7 e 98, respectivamente.

Para associar um determinado número de graus de liberdade a cada nó que pertença ao tipo **GEOMETRIA** é realizado o seguinte comando:

ExemploDeGeometria (453,2);

ExemploDeGeometria (12,3);

ExemploDeGeometria (7,2);

ExemploDeGeometria (98,2);

Com estes comandos a classe **GEOMETRIA** associa 3 graus de liberdade ao número do nó 12, para os demais nós é associado 2 graus de liberdade. Pode-se, desta forma, obter a ordem global de uma matriz de elementos finitos, para esta geometria, bem como associar a cada grau de liberdade a condição de contorno desejada.

ELEMENTO

Variáveis

Número do elemento
Número de nós
Número de pontos de Gauss
Número dos nós
Material
Nós do elemento
Matriz de massa
Matriz de rigidez
Vetor de carga S
Vetor de carga C

Características

Através desta classe, é possível agrupar os dados pertinentes a um elemento como número do elemento, número de nós, etc. Utilizando os métodos implementados, as variáveis matriz de massa, matriz de rigidez, vetor de carga C e vetor de carga S são calculadas e posteriormente resgatadas.

Exemplo de Funcionamento

Esta classe define, de forma geral, os dados necessários para que um elemento, qualquer, possa ser implementado. Cada elemento implementado utiliza as definições desta classe. Os elementos implementados utilizam-se das variáveis definidas e sobrecarregam os métodos desta classe.

Além das variáveis, mostradas acima, esta classe possui vários métodos. Os métodos de maior importância desta classe são aqueles que integram, utilizando os pontos de Gauss definidos, uma determinada matriz. Os métodos desta classe são acessados apenas pelas classes **AXICASCA** e **AXIFLUIDO**

pois são métodos virtuais. Para o funcionamento indireto desta classe vide **AXICASCA** e **AFLUIDO**.

AXICASCA

Variáveis

Comprimento do elemento

Espessura

Ângulo

Características

Esta classe herda todos os métodos da classe **ELEMENTO** e pode-se citar, como métodos próprios, os responsáveis pela montagem das matrizes [B], [D], [N] e [T], que são as matrizes que formam as matrizes de rigidez e massa. Por exemplo $[K] = [B]^T[D][B]$; e $[M] = \rho[N]^T[N]$; onde [T] = matriz de transformação de coordenadas. A montagem destas matrizes para o elemento de casca axi-simétrica é o principal objetivo desta classe.

Exemplo de Funcionamento

Considere a seguinte declaração:

```
AXICASCA *ExemploDeAxिकासca;
```

```
ExemploDeAxिकासca = new AXICASCA [52];
```

Desta forma, é criado, no programa gerenciador, um vetor com 52 elementos de casca, que são inicializados, para o caso particular do quarto elemento de casca, da forma que segue:

```
ExemploDeAxिकासca[3].InicializaAxिकासca(NumeroDoElemento, NumeroDeNos, NumeroDePontosDeGauss, EspessuraDoElemento, VetorDeNos);
```

Com esta declaração, inicializa-se um elemento de casca axi-simétrico. O número do elemento é NumeroDoElemento, com NumeroDeNos nós. Para integração são utilizados NumeroDePontosDeGauss pontos, a espessura do elemento é definida em EspessuraDoElemento e, finalmente, VetorDeNos armazena na forma matricial os nós do elemento. Com estes dados pode-se montar todas as matrizes desejadas para o elemento em questão e, posteriormente, resgatá-las.

Para o resgate de determinada propriedade do elemento, por exemplo a matriz de rigidez, ainda considerando o quarto elemento, utilizam-se os seguintes comandos:

```
ExemploDeAxिकासca[3].CalculaMatrizDeRigidez();  
// Manda a ordem para que a matriz de rigidez do quarto elemento seja calculada.
```

```
MatrizDeRigidezElemento=ExemploDeAxिकासca[3].RetornaMatrizDeRigidez();  
// Associa ao tipo MatrizDeRigidezElemento a matriz de rigidez do  
// quarto elemento.
```

AXIFLUIDO

Variáveis

--

Características

Esta classe possui as mesmas características creditadas a classe *Axicasca*, diferenciando-se apenas pelo fato de aquelas matrizes serem montadas para o caso de fluido axi-simétrico.

Exemplo de Funcionamento

O funcionamento desta classe é bastante similar ao da classe anterior. A inicialização segue o mesmo padrão definido para a *AXICASCA*. Para efeito comparativo segue um exemplo de inicialização de um elemento qualquer.

```
ExemploDeAxifluido[8].InicializaElemento(NumeroDoElemento,NumeroDeNos,  
NumeroDePontosDeGauss, VetorDeNos);
```

Como pode-se perceber, a inicialização é praticamente igual, diferencia-se de *AXICASCA* apenas pelo fato de, para o fluido, não ser necessário a definição da espessura. Para resgatar os dados a ação necessária é a mesma apresentada em *AXICASCA*.

INTERELEMENTO

Variáveis

Número do elemento
Número de nós
Número de pontos de Gauss
Número dos nós
Material
Nós do elemento
Matriz de pressão
Matriz de interação

Características

As mesmas que a classe elemento, apenas com um diferencial, as matrizes de rigidez e massa e os vetores de carga são agora substituídos por duas matrizes, a matriz de pressão e a matriz de interação. Estas matrizes consideram os efeitos da pressão do fluido sobre a estrutura na matriz de pressão o deslocamento da estrutura sobre o fluido na matriz de interação.

Exemplo de Funcionamento

Esta classe possui, assim como a classe **ELEMENTO**, apenas métodos virtuais, impossibilitando uma demonstração do seu funcionamento. A sua estrutura de funcionamento é a mesma da classe **ELEMENTO** e, basicamente, define a integração das matrizes utilizando os pontos de Gauss desejados. Além disso, armazena os dados que são comuns aos elementos de interface e que são listados acima em Variáveis.

INTERFACE

Variáveis

Comprimento do elemento

Ângulo

Características

Análogamente as classes **AXICASCA** e **AXIFLUIDO** esta classe fornece um conjunto de matrizes para que a classe **INTERELEMENTO** possa calcular as matrizes de pressão e de interação. As variáveis da classe são calculadas automaticamente quando da inicialização do elemento.

Exemplo de Funcionamento

A declaração e inicialização dos elementos que pertencem a esta classe são realizados de maneira análoga aquela mostrada para as classes **AXICASCA** e **AXIFLUIDO**.

Através destas classes implementadas, é resolvido o problema de interação entre fluido e cascas axi-simétricas. Os resultados obtidos e mostrados no Capítulo 4 utilizaram as estruturas apresentadas neste anexo.