

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM NUMÉRICA PARA SEGUIMENTO
DINÂMICO DE BOLHAS EM ESCOAMENTO
INTERMITENTE HORIZONTAL GÁS-LÍQUIDO**

Autor: Erick de Moraes Franklin
Orientador: Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

05/2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

MODELAGEM NUMÉRICA PARA SEGUIMENTO
DINÂMICO DE BOLHAS EM ESCOAMENTO
INTERMITENTE HORIZONTAL GÁS-LÍQUIDO

Autor: Erick de Moraes Franklin
Orientador: Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção de título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004
S.P. – Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

MODELAGEM NUMÉRICA PARA SEGUIMENTO
DINÂMICO DE BOLHAS EM ESCOAMENTO
INTERMITENTE HORIZONTAL GÁS-LÍQUIDO

Autor: Erick de Moraes Franklin
Orientador: Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa, Presidente
UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Moreira Ganzarolli
UNICAMP

Prof. Dr. José Roberto Fagundes Netto
PETROBRÁS

Campinas, 28 de Maio de 2004

UNIVERSIDADE	FE
CHAMADA	7/1/unicamp
	F854m
	EX
IMBO BC/	61518
IOC.	16-86-05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
FEÇO	11.00
DATA	03-1-05
CPD	

bid: 340840

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F854m	<p>Franklin, Erick de Moares</p> <p>Modelagem numérica para seguimento dinâmico de bolhas em escoamento intermitente horizontal gás-líquido / Erick de Moraes Franklin. --Campinas, SP: [s.n.], 2004.</p> <p>Orientador: Eugênio Spanó Rosa.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Seguimentos de pistões. 2. Escoamento bifásico.</p> <p>I. Rosa, Eugênio Spanó. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

Agradecimentos

Aos colegas e professores do DE da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, meus sinceros agradecimentos.

À Capes, agradeço o financiamento da bolsa de estudos referente a este trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa, pelo incentivo constante aos estudos e ao trabalho, pela ajuda tantas vezes prestada e pela confiança em mim depositada. Mais que um orientador, um amigo.

Em especial, ofereço meus agradecimentos e esta dissertação à Renata Bianconi, companheira de todas as horas. À ela devo a coragem para elaborar esta dissertação.

Resumo

Franklin, Erick de Moraes, *Modelagem Numérica para Seguimento Dinâmico de Bolhas em escoamento Intermitente Horizontal Gás-líquido*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 255 p. Dissertação (Mestrado)

O escoamento gás-líquido intermitente em padrão golfadas de líquido é composto por uma sucessão de bolhas de gás alongadas e pistões de líquido. Esta seqüência de bolhas alongadas e pistões de líquido interage cinematicamente e dinamicamente a medida que viaja ao longo da tubulação. Estas interações é que produzem o caráter intermitente do escoamento, isto é, elas não são periódicas no tempo nem no espaço. Pretende-se neste trabalho apresentar um modelo lagrangeano e uni-dimensional para seguimento dinâmico de pistões que incorpore a intermitência intrínseca ao fenômeno. Estimativas do gradiente de pressão e dos comprimentos, velocidades e freqüência das estruturas de gás e líquido serão resultantes da modelagem. No modelo dinâmico, as bolhas e pistões são objetos computacionais definidos por volumes discretos que estão acoplados devido às trocas de massa e quantidade de movimento em cada célula unitária. Os parâmetros do escoamento são determinados por meio do fechamento de balanços integrais de massa em cada bolha e em cada pistão e de quantidade de movimento em cada pistão. Os pistões de líquido e as bolhas de gás são iniciados na entrada da tubulação. A propagação de cada pistão e cada bolha é seguida dinamicamente pelo modelo revelando como as estruturas de gás e líquido evoluem ao longo da linha. Assim, dada uma distribuição na entrada, o modelo é capaz de calcular as distribuições de comprimentos de bolhas e pistões em qualquer lugar do duto. Os resultados numéricos são comparados com dados experimentais.

Palavras Chave

Escoamento Bifásico Horizontal, Estrutura do Escoamento, Seguimento de Pistões

Abstract

Franklin, Erick de Moraes, *Bubble Dynamic Segments Numeric Modeling in Horizontal Gas-liquid Intermittent Flow*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 255 p. Dissertação (Mestrado)

The intermittent gas-liquid slug flow is composed of a succession of elongated gas bubbles and liquid slugs. The sequence of elongated bubbles and liquid slugs is under kinematic and dynamic interactions along the flow. These interactions are responsible for the flow intermittence profile, i.e., they are not periodically in time nor in space. The purpose of this work is to present an one-dimensional dynamic slug tracking model, which intrinsically involves the intermittent phenomena. The pressure gradient and lengths, velocities and frequencies estimates of the gas-liquid structures will be provided by the model. In the dynamic model the bubbles and the slugs are computational objects defined by discrete volumes that are together due to the mass and momentum exchanges in each unit cell. The flow parameters are determined through the closure of mass balance integrals for each gas bubble and liquid slug and through momentum balance integrals for each liquid slug. The liquid slugs and the gas bubbles are formed at the duct inlet. The propagation of each slug and each bubble is dynamically tracked by the model, revealing how the gas and liquid structures evolve along the line. So, given an inlet distribution, the model is capable to calculate the slug and bubble lengths distributions at any location along the pipe. The numeric results are compared with experimental data.

Keywords

Horizontal Slug Flow, Flow Structure, Slug Tracking

Índice

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas.....	x
Nomenclatura	xii
Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica.....	6
Capítulo 3 - Modelo Uni-dimensional	14
3.1 – Equações de Conservação da Massa e da Quantidade de Movimento em Escoamento Bifásico Uni-dimensional.....	15
Nesta seção é apresentada a forma geral das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento assim como o sistema de indexação dos volumes de controle (bolhas e pistões).....	15
3.1.1 – Conservação da Massa	15
3.1.2 – Conservação da Quantidade de Movimento.....	16
3.1.3 – Sistema de Coordenadas e de Indexação.....	18
3.2 – Equações de Conservação Aplicadas ao Pistão de Líquido	21
3.2.1 – Conservação da Massa	22
3.2.2 – Conservação da Quantidade de Movimento.....	23
3.3 – Acoplamento Pistão-Bolha.....	24
3.3.1 – Conservação da Massa Através do Nariz do Pistão j	25
3.3.2 – Conservação da Quantidade de Movimento Através da Frente do Pistão j	26
3.3.3 – Conservação da Quantidade de Movimento Através do Nariz da Bolha j.....	28
3.3.4 – Acoplamento das Pressões dos Pistões e das Bolhas	30
3.4 – Equações de Conservação Aplicadas à Bolha e ao Filme Líquido	32

3.4.1 - Conservação de Massa.....	32
3.4.1.1– Filme de Líquido	33
3.4.1.2– Fase Gasosa.....	34
3.4.2 – Conservação da Quantidade de Movimento.....	36
3.5 – Sistema de Equações a Ser Resolvido.....	36
3.5.1 – Condições Iniciais e de Contorno.....	37
3.5.2 – Comprimentos de Bolhas e Pistões na Entrada.....	39
3.6 – Equações de Fechamento	42
3.6.1 – Atrito do Pistão de Líquido com a Parede.....	42
3.6.2 – Velocidade da Bolha	44
3.6.3 – Continuidade da Massa de Gás no Interior de uma Bolha (Abordagem Lagrangeana)	
.....	47
3.6.4 – Aumento de Pressão Devido à Aceleração do Líquido.....	48
3.6.5 – Variação de Pressão Hidrostática.....	48
3.7 – Tratamento de Singularidades.....	49
3.7.1 – Entrada de uma Bolha e de um Pistão.....	49
3.7.2 – Saída de uma Bolha e Saída de um Pistão	51
3.7.3 – Coalescência.....	53
Capítulo 4 - Implementação do Modelo de Solução Numérica	55
4.1 – Discretização das Equações	55
4.1.1 – Discretização do Sistema Acoplado (U e P_G)	56
4.1.2 – Discretização das Equações de Fechamento para Frentes de Bolha e de Pistão (y e x).....	63
4.2 – Algoritmos para Tratamento de Singularidades e Inserção de Sondas	63
4.2.1 – Condições de Contorno e Condições Iniciais.....	64
4.2.1.1 – Condições de Contorno	64
4.2.1.2 – Condições de Iniciais	67
4.2.2 – Entrada de Bolhas e Pistões	69
4.2.3 – Saída de Bolhas e de Pistões	75
4.2.4 – Coalescência de bolhas.....	79
4.2.5 – Inserção de Sondas Virtuais	82

4.2.5.1 – Sondas Eulerianas	82
4.2.5.2 – Sonda Lagrangeana	83
4.2.5.3 – Sonda Espacial	83
4.2.5.4 – Sonda Entrada	84
4.2.7 – Algoritmo Geral	84
4.2.7 – Código Numérico	85
4.3 – Comparação com Modelo Analítico	86
Capítulo 5 - Resultados e Discussões.....	94
5.1 – Critério de da Escolha do Passo de Tempo	95
5.2 – Caso Periódico.....	102
5.2.1 – Condições na Entrada ($z = 0$)	103
5.2.1.1 – Partida de Linha (Escoamento Transiente)	103
5.2.1.2 – Escoamento Estabilizado (Escoamento Periódico)	105
5.2.2 – Seguindo uma bolha	108
5.2.3 – Análise ao Longo do Duto Utilizando-se as Sondas Espaciais	114
5.2.4 – Batimento	117
5.2.5 – Análise do Aumento do Comprimento da Tubulação	122
5.2.6 – Influência de C_0	128
5.2.7 – Influência da Variação de Pressão Devido à Expansão do Líquido.....	132
5.2.7.1 – Variação de Pressão Devido à Aceleração do Líquido	133
5.2.7.2 – Variação de Pressão Devido à Variação da Altura Hidrostática	138
5.2.8 – Influência da Viscosidade do Líquido.....	141
5.2.9 – Influência da Densidade do Líquido	143
5.2.10 – Análise do Efeito de Esteira e Coalescência de Bolhas	144
5.2.10.1 – Análise da Influência de b_w no Efeito de Esteira.	145
5.2.10.2 – Análise da Influência de a_w e de b_w no Efeito de Esteira (Comparações entre Diversas Leis de Esteira).....	150
5.3 – Comparação do Caso Periódico com Dados Experimentais	158
5.4 – Intermitência na Entrada e Comparação com Dados Experimentais	163
Capítulo 6 - Conclusões e Próximos Passos.....	180
Referências Bibliográficas	183

Anexo I.....	187
Anexo II.....	189
Anexo III.....	198
Anexo IV.....	214
IV.2 – Transporte de Quantidade de Movimento.....	216
IV.3 – Identificação dos Termos.....	217
Anexo V.....	221

Lista de Figuras

Figura 3. 1 - Célula unitária e sistema de indexação.....	19
Figura 3. 2 - Sistema de coordenadas e sistema de indexação.....	20
Figura 3. 3 - Volume de controle englobando o pistão j.....	22
Figura 3. 4 - Conservação da massa e da quantidade de movimento através do nariz do pistão j.....	25
Figura 3. 5 - Conservação da quantidade de movimento através do nariz da bolha j.....	29
Figura 3. 6 - Volume de controle englobando a bolha j. A superfície de controle é mostrada através de linhas tracejadas.	32
Figura 3. 7. Introdução de bolhas e pistões no domínio de cálculo.	50
Figura 3. 8. Pistão deixando o duto.	52
Figura 3. 9. Bolha deixando o duto.	53
Figura 4. 1. Ilustração da discretização utilizada no tempo e no espaço.....	57
Figura 4. 2. Início da entrada de uma bolha no duto.....	66
Figura 4. 3. Pistão entrando no duto.....	66
Figura 4. 4 - Modelagem da entrada de bolhas no sistema.....	70
Figura 4. 5 - Saída de pistões e de bolhas.	76
Figura 4. 6. Coalescência de bolhas.	79
Figura 4. 7. Comparação entre as soluções analítica e numérica para comprimentos de bolhas e de pistões em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.....	88
Figura 4. 8. Comparação entre as soluções analítica e numérica para velocidade superficial do gás em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.....	89
Figura 4. 9. Comparação entre soluções analítica e numérica para pressão nas bolhas em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.....	89

Figura 5. 1. Variação da precisão com a constante C.	101
Figura 5. 2. Variação da pressão (absoluta) durante partida de linha.	104
Figura 5. 3. Variação da pressão (absoluta) com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).	106
Figura 5. 4. Variação da velocidade superficial do gás com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).	107
Figura 5. 5. Variação da velocidade de mistura com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).	108
Figura 5. 6. Pressão em uma bolha ao longo da do duto.	110
Figura 5. 7. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto.	110
Figura 5. 8. Velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto.	111
Figura 5. 9. Comprimento de uma bolha ao longo do duto.	112
Figura 5. 10. Comprimento de um pistão ao longo do duto.	113
Figura 5. 11. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.	115
Figura 5. 12. Diferenças entre soluções numéricas e analítica para as pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.	115
Figura 5. 13. Diferenças entre soluções numéricas e analítica para as pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em $t = 50s$ e $t = 56s$ e seguindo-se uma bolha.	116
Figura 5. 14. Velocidades das frentes das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.	117
Figura 5. 15. Flutuações da pressão ao longo do tubo.	121
Figura 5. 16. Flutuações da pressão ao longo do tempo.	122
Figura 5. 17. Pressão em uma bolha ao longo da do duto, parametrizada pelo comprimento total do duto.	123
Figura 5. 18. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (1L).	124
Figura 5. 19. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (2L).	124
Figura 5. 20. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (4L).	125

Figura 5. 21. Velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto, parametrizada pelo comprimento total do duto.	126
Figura 5. 22. Comprimento de uma bolha ao longo do duto, parametrizado pelo comprimento total do duto.....	127
Figura 5. 23. Comprimento de um pistão ao longo do duto, parametrizado pelo comprimento total do duto.....	128
Figura 5. 24. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0	129
Figura 5. 25. Velocidades das frentes das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0	130
Figura 5. 26. Comprimentos das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0	130
Figura 5. 27. Comprimentos dos pistões que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0	131
Figura 5. 28. Média da frequência de uma célula ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de C_0	131
Figura 5. 29. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A	134
Figura 5. 30. Média da velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de ΔP_A	135
Figura 5. 31. Comprimentos das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A	136
Figura 5. 32. Comprimentos dos pistões que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A	137
Figura 5. 33. Média da frequência de uma célula ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de ΔP_A	138
Figura 5. 34. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_H (Caso A)	139
Figura 5. 35. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_H (Caso B).	141

Figura 5. 36. Gradiente linear de pressão das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito da viscosidade.....	142
Figura 5. 37. Gradiente linear de pressão das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito da densidade.....	144
Figura 5. 38- Influência do valor de b_w sobre a taxa de coalescência média.....	147
Figura 5. 39 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 70D$	148
Figura 5. 40 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 254D$	149
Figura 5. 41 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 509D$	149
Figura 5. 42 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 769D$	150
Figura 5. 43. Influência da lei de esteira sobre a taxa de coalescência média.	151
Figura 5. 44. Média das pressões das bolhas em algumas seções do duto.....	153
Figura 5. 45. Médias das velocidades das frentes de bolha em algumas seções do duto.....	154
Figura 5. 46. Médias dos comprimentos de bolhas em algumas seções do duto.	155
Figura 5. 47. Médias dos comprimentos de pistões em algumas seções do duto.....	156
Figura 5. 48. Médias das freqüências da células em algumas seções do duto.	157
Figura 5. 49. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 2.....	170
Figura 5. 50. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 3.....	170
Figura 5. 51. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 4.....	171
Figura 5. 52. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 2.	172
Figura 5. 53. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 3.	172
Figura 5. 54. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 4.	173
Figura 5. 55. Distribuição das freqüências das células na estação 2.....	174
Figura 5. 56. Distribuição das freqüências das células na estação 3.....	174
Figura 5. 57. Distribuição das freqüências das células na estação 4.....	175
Figura 5. 58. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 2.....	176
Figura 5. 59. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 3.....	176
Figura 5. 60. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 4.....	177
Figura 5. 61. Comparação dos valores médios numéricos e experimentais.....	179
Figura II. 1. Pressões das bolhas ao longo do duto.	190

Figura III. 1. Apenas uma bolha presente no escoamento.	204
Figura III. 2. Solução numérica para apenas uma bolha presente no escoamento e $j_{G(0)} \neq 0$	208
Figura III. 3. Solução numérica para apenas uma bolha presente no escoamento e $j_{G(0)} = 0$	210
Figura III. 4. Comparação das soluções numéricas com a solução analítica no caso em que apenas uma bolha escoo no duto.	211
Figura III. 5. Comparação das soluções analítica e numérica para comprimentos de bolhas e de pistões.	212
Figura III. 6. Comparação das soluções analítica e numérica para velocidade superficial do gás.	212
Figura III. 7. Comparação das soluções analítica e numérica para pressão nas bolhas.	213
Figura IV. 1. Volume de controle e referencial.	215

Lista de Tabelas

Tabela 4. 1. Configuração adotada para comparação entre soluções analítica e numérica.....	87
Tabela 4. 2 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.1s$.	91
Tabela 4. 3 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.01s$	92
Tabela 4. 4 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.001s$	93
Tabela 5. 1. Condições de caso padrão a serem utilizadas nas simulações.....	95
Tabela 5. 2. Resumo das simulações utilizando-se f na entrada.	98
Tabela 5. 3 - Resumo das simulações utilizando-se L_S na entrada.	98
Tabela 5. 4. Simulações utilizando frequências na seção de entrada.....	99
Tabela 5. 5. Simulações utilizando comprimentos de pistões na seção de entrada.....	100
Tabela 5. 6. Resumo da análise do critério de Courant.....	100
Tabela 5. 7. Frequências e números de onda.....	119
Tabela 5. 8. Legendas das figuras 5. 24 à 5. 28.	132
Tabela 5. 9. Características dos escoamentos simulados para verificação de ΔP_H	140
Tabela 5. 10. Dados experimentais (valores médios).....	159
Tabela 5. 11. Dados de entrada utilizados pelo modelo.....	159
Tabela 5. 12 . Simulação utilizando valores médios.	160
Tabela 5. 13. Simulação utilizando valores médios.....	161
Tabela 5. 14. Simulação utilizando valores médios.....	161
Tabela 5. 15. Simulação utilizando valores médios.....	162
Tabela 5. 16. Resumo das simulações realizadas para o caso intermitente.	165

Tabela 5. 17. Dados experimentais (valores médios e desvios padrão).....	166
Tabela 5. 18. Solução numérica na estação 2 (valores médios e desvios padrão).	167
Tabela 5. 19. Solução numérica na estação 3 (valores médios e desvios padrão).	167
Tabela 5. 20. Solução numérica na estação 4 (valores médios e desvios padrão).	168
Tabela 5. 21. Comparação entre médias e desvios padrões numéricos e experimentais.	168
Tabela II. 1. Valores numéricos a serem utilizados na solução analítica.....	195
Tabela III. 1. Solução analítica tabelada.	200

Nomenclatura

Letras Latinas

1-D – Uni-dimensional

A_T – área da seção transversal

C_0 – constante da velocidade da bolhas (Moissis & Griffith (1962))

D – diâmetro

d - diferencial

F – força

f – fator de atrito de Fanno

fat – fator de atrito (definido no texto)

Fr – Número de Froude

g – aceleração gravitacional

H – razão pressão / densidade do líquido

h – função relativa ao fator de esteira

I – razão força interfacial / volume

j – velocidade superficial

L – comprimento

L – comprimento total do duto (sem subscrito)

m – massa

N – valor novo

n – número total de células unitárias no interior do duto

O – valor antigo

P – pressão

R – constante universal dos gases

R_B – taxa de coalescência

R_k – fração volumétrica da fase k

Re – número de Reynolds

S – área

T – temperatura

T_k – força de atrito na parede / volume da fase k

t – instante de tempo

U – velocidade da fase líquida

V – velocidade

V_0 – constante de arrasto da velocidade de frente de bolhas (Moissis & Griffith (1962))

x – posição da frente do pistão

y – posição da frente da bolha

z – posição longitudinal

Letras Gregas

β - fator de intermitência

Δ - intervalo

ϵ - fração de vazio

λ - fração de vazio

λ - gradiente de pressão linear

μ - viscosidade dinâmica

ν - viscosidade cinemática

ρ - densidade

Σ - somatório

τ - tensão

ξ - altura do centro de pressão

Superescritos

$\bar{\quad}$ - média espacial

$\dot{\quad}$ - taxa temporal

Subscritos

0 – inicial

A – aceleração do fluido

atm – atmosférico (referente à)

B – bolha

ext – externa

f – filme líquido

G – fase gasosa

H – força hidrostática

j – índice da célula unitária

k – fase k

L – fase líquida

n – última célula

r – relativo

S – pistão

Abreviações

< > - média temporal

analit.. – analítica

config – configuração

CTE – constante

freq – frequência

QDM – quantidade de movimento

sol. - solução

V.C. – volume de controle

vol – volume

Siglas

CFD – Computational Fluid Dynamics

DE – Departamento de Energia

FEM – Faculdade de Engenharia Mecânica

Multlab – Laboratório de Escoamentos Multifásicos

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

Capítulo 1

Introdução

A ocorrência de escoamentos multifásicos é freqüente tanto na natureza como em processos industriais. Na natureza, eles consistem, por exemplo, no transporte de sedimentos por rios e correntes marinhas ou no transporte de água e gelo por massas de ar escoando na atmosfera terrestre. Nas indústrias química, petroquímica e nuclear é comum a ocorrência de duas ou mais fases em evaporadores, condensadores, geradores de vapor, reatores químicos e no transporte de misturas em tubulações.

A presença de duas ou mais fases em um escoamento torna possível o aparecimento de diversos padrões que não são observados em escoamentos monofásicos. Estes padrões são funções das fases presentes, de suas quantidades, de suas distribuições, de suas velocidades e da orientação do escoamento.

No caso dos escoamentos gás-líquido em tubulação, embora diferentes entre si, os padrões podem ser classificados em dois grupos principais: um grupo com estrutura do tipo disperso e outro com estrutura do tipo separado. Os escoamentos do tipo disperso apresentam uma fase secundária dispersa em uma fase principal. Já os escoamentos do tipo separado apresentam duas fases bem distintas e, de certa forma, estratificadas. Um terceiro grupo pode ser derivado destes dois, uma vez que os escoamentos intermitentes são formados pela ocorrência das estruturas do tipo disperso e separado sucessivamente.

Quando gás e líquido escoam sob determinadas vazões, o padrão de escoamento intermitente em regime de golfadas de líquido pode ocorrer. Este padrão de golfadas (ou “slug

flow”, em inglês) é composto por seqüências de bolhas alongadas de gás seguidas sucessivamente por pistões de líquido. As bolhas alongadas ocupam, em geral, grande parte da seção transversal do duto e são estruturas do tipo separado. Os pistões de líquido ocupam toda a seção transversal do duto, porém podem conter pequenas bolhas dispersas. Os pistões são então estruturas de líquido monofásico (na ausência de bolhas dispersas) ou de líquido com bolhas dispersas (na presença de bolhas dispersas). O interesse por este tipo de escoamento se torna mais significativo no momento em que ele ocorre em atividades industriais nas áreas de petróleo e energia nuclear, vitais para o desenvolvimento econômico de países e/ou regiões. O correto entendimento deste tipo de escoamento torna-se então relevante para os países que possuem indústrias deste tipo.

Este padrão apresenta características localmente não estacionárias, ligadas à própria dinâmica do escoamento, e não às condições com as quais ele é gerado. Assim, mesmo quando as condições na entrada de um duto são estacionárias, o escoamento visto por um observador em um referencial inercial é intermitente, com bolhas alongadas aparecendo alternadamente com pistões de líquido. Estes dois estados se sucedem de forma aleatória, induzindo flutuações de pressão e de velocidade, de forma que o escoamento não é periódico nem no tempo nem no espaço. Logo, intermitência e irregularidade são características intrínsecas a este padrão de escoamento.

Devido às características de intermitência e irregularidade, o escoamento bifásico de gás e líquido no regime de golfadas de líquido é considerado complexo. A partir dos modelos correlacionais para queda de pressão, as primeiras abordagens mecánísticas surgiram após o conceito de Célula Unitária (Wallis (1969)). Provavelmente o primeiro modelo fluido-dinâmico utilizando o conceito de Célula Unitária para escoamento em golfadas foi desenvolvido por Duckler & Hubbard (1975). Eles deram origem a uma classe de modelos conhecidos por modelos de Célula Unitária, onde o mais recente foi proposto por Taitel & Barnea (1990). Esta classe de modelos considera o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de tal forma que ele se torna periódico no espaço e no tempo. Esta hipótese permite que ele seja modelado a partir de seus valores médios com o auxílio de equações constitutivas de fechamento. Embora simples de serem aplicados e úteis em muitas aplicações, os modelos de Célula Unitária não abordam a questão da intermitência e irregularidade e se baseiam fortemente em equações constitutivas, baseadas por

sua vez em dados experimentais. Estas limitações impedem a aplicação do modelo em fenômenos transientes assim como em novos cenários (onde dados experimentais são escassos para construir novas leis constitutivas).

Os modelos baseados nas teorias de dois fluidos e fluxo de deslizamento foram introduzidos nas décadas de 80 e 90 como alternativa ao modelo de Célula Unitária. Baseados em princípios de conservação de massa e de quantidade de movimento eles são mais generalistas e requerem menor uso de correlações empíricas para fechamento. Capazes de modelar fenômenos transientes e considerar interações entre estruturas gás-líquido, eles encontraram aplicações para determinação de queda de pressão. As maiores limitações encontram-se no fato deles serem eulerianos e na implementação de equações constitutivas para o arrasto de bolhas e o atrito na parede. A modelagem das fases gasosa e líquida por conceitos eulerianos impede que ele faça uma distinção entre a ocorrência de cada uma delas, fornecendo uma concentração volumétrica das fases que reflete uma média volumétrica e temporal de sua ocorrência. O desenvolvimento de equações constitutivas para esta classe de modelos também é complexo e há poucos dados disponíveis na literatura. Por fim, pode-se dizer que estes modelos são mais complexos quanto a implementação computacional, propiciando problemas de difusão numérica que, freqüentemente, comprometem seus resultados.

Uma alternativa aos modelos eulerianos são os modelos lagrangeanos que surgiram na década de 90. A proposta de um modelo lagrangeano é motivada por algumas vantagens que tal modelo apresenta quando comparado aos modelos eulerianos de dois fluidos ou de fluxo de deslizamento. Uma das vantagens do modelo lagrangeano é que modelos físicos, como para a propagação de frentes de bolhas, podem ser incorporados diretamente e facilmente no modelo. A incorporação de modelos físicos para a propagação das fronteiras gás-líquido em modelos eulerianos de dois fluidos não é tarefa fácil e envolve em geral uma modelagem cuidadosa de leis de arrasto para gás-líquido. Outra vantagem do modelo lagrangeano está ligada à difusão numérica. A difusão numérica das posições das fronteiras gás-líquido é eliminada no modelo lagrangeano, uma vez que pistões e bolhas são objetos computacionais a serem seguidos. A difusão numérica em modelos eulerianos de dois fluidos pode ser significativa.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo lagrangeano e sua implementação numérica para escoamento horizontal de gás e líquido no padrão de golfadas. O modelo proposto realiza o seguimento de bolhas e de pistões ao longo do escoamento uni-dimensional no interior de uma tubulação, levando em consideração a intermitência e a interação existentes neste tipo de escoamento. Ele é baseado em balanços integrais de massa para cada bolha e cada pistão e de quantidade de movimento para cada pistão, em equações constitutivas e em um esquema numérico para a resolução do sistema de equações resultantes.

No modelo proposto, pistões e bolhas são seguidos individualmente na forma de fronteiras gás-líquido e o objetivo principal é a resolução da estrutura deste escoamento no tempo e no espaço. Isto envolve o seguimento numérico de pistões e bolhas conforme eles se propagam por uma tubulação, iniciando e removendo-os conforme eles entram na tubulação, coalescem e desaparecem no interior da tubulação ou deixam a tubulação. Dessa forma, a evolução das estruturas no modelo é determinada pela iniciação de pistões e bolhas na entrada da tubulação, pelo subsequente desenvolvimento das estruturas devido aos efeitos de esteira, atrito, coalescência e expansão e, finalmente, pela saída das estruturas na seção de descarga da tubulação.

Dada a complexidade dos escoamentos intermitentes, a implementação de hipóteses simplificadoras foi necessária para a formulação do modelo. São elas:

- O modelo é uni-dimensional e aplica-se a escoamentos horizontais isotérmicos;
- O pistão de líquido é tratado como uma fase única, isto é, o pistão é considerado não aerado;
- A pressão ao longo de uma bolha de gás é assumida constante.
- As bolhas estão sempre em contato com a parede superior do duto;
- As bolhas possuem duas partes principais: uma frente curva (nariz) e um corpo com interface plana, conforme ilustrado na figura 1. 1. Considera-se que a interface plana possui altura constante, não variando no espaço nem no tempo;
- Considera-se que não há transferência de massa entre as fases e que não há mudanças de fase;
- A fase gasosa é tratada como um gás ideal;

- A fase líquida é tratada como fluido incompressível e tem comportamento de fluido newtoniano.

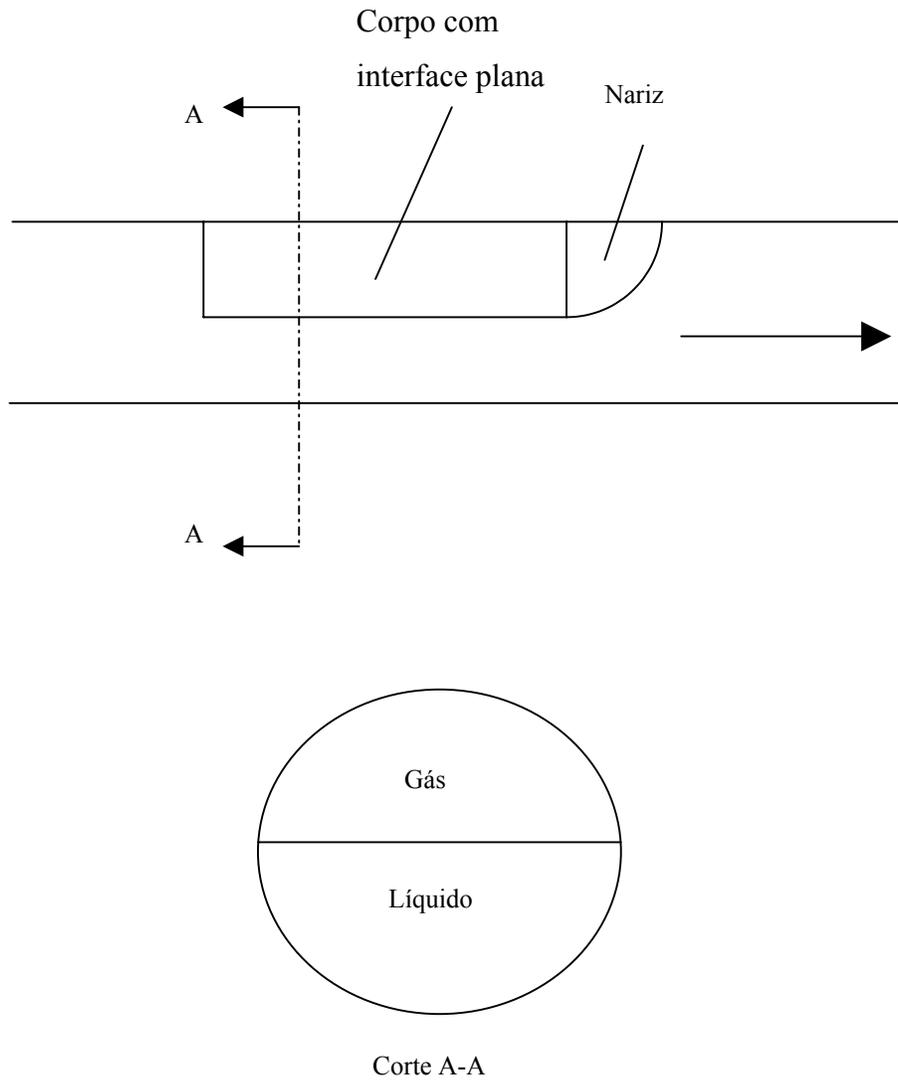


Figura 1. 1 - Ilustração da forma das bolhas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O escoamento intermitente em padrão de golfadas é caracterizado pela sucessão de bolhas alongadas e de pistões de líquidos. O estudo e a modelagem deste tipo de escoamento vêm sendo necessários ao desenvolvimento de indústrias de importância econômico-social, como a petrolífera e a nuclear, por exemplo. Os primeiros trabalhos nesta área surgiram na década de 60, porém o número de pesquisas e estudos nesta área vem crescendo, de forma que na última década ocorreu o desenvolvimento de um grande número de modelos matemáticos e computacionais.

A modelagem do escoamento em padrão de golfadas com o propósito de se calcular parâmetros do escoamento foi proposta inicialmente por Duckler & Hubbard (1975) e posteriormente utilizada e modificada por Nicholson et al. (1978), Stanislav et al. (1986) e Taitel & Barnea (1990), entre outros. Duckler & Hubbard (1975) utilizaram o conceito de célula unitária com o intuito de representar as estruturas gás-líquido. Ela divide o escoamento em duas estruturas: um pistão de líquido, que carrega líquido com gás disperso, e uma bolha alongada escoando sobre um filme líquido.

Certamente a metodologia mais utilizada para a modelagem de escoamentos em padrão de golfadas provém dos modelos de regime permanente, revisados em Taitel & Barnea (1990). Os modelos de regime permanente consideram um escoamento quase-estacionário onde as estruturas gás-líquido não se alteram no tempo nem no espaço. Dessa forma, o escoamento passa a ser visto como um escoamento periódico com bolhas de gás alongadas se alternando com pistões de líquido. Os modelos são formados por um conjunto de equações algébricas derivadas das equações de transporte de massa e de quantidade de movimento e de equações constitutivas

aplicadas à uma única célula unitária. Utilizando a hipótese de velocidade de célula unitária constante, os modelos de regime permanente são relativamente fáceis de implementar e fornecem resultados confiáveis em termos de pressões médias e vazões médias. Entretanto, não são capazes de fornecer resultados confiáveis para parâmetros freqüentemente necessários, como a distribuição dos comprimentos de pistões ou o máximo comprimento de pistão. Isto se deve principalmente ao fato que tais modelos não consideram a intermitência nem a irregularidade do escoamento (suas principais características), não sendo assim capazes de prever as evoluções cinemática e dinâmica das estruturas gás-líquido. Também, como tais modelos se baseiam fortemente em leis de fechamento, que por sua vez dependem de dados experimentais, eles não são facilmente adaptáveis à novos cenários, como mudanças no diâmetro da tubulação, mudanças nas propriedades dos fluidos e pressões na linha, por exemplo.

Modelos eulerianos que utilizam os modelos de dois fluidos, de fluxo de deslizamento e “no-pressure wave”, foram propostos para tratar estes escoamentos intrinsecamente transientes, como comparados em Masella et al. (1998). Tais modelos necessitam em geral de uma grande quantidade de dados experimentais para alimentar leis constitutivas para as velocidades de propagação das fronteiras. Ainda, necessitam de uma cuidadosa modelagem de leis como a do arrasto para gás-líquido e a elaboração de um cuidadoso esquema numérico e de malhas para evitar ou, ao menos, atenuar a difusão numérica. A complexidade de modelos deste tipo é verificada em Pauchon et al (1994) (não é apenas para padrão golfadas, mas o inclui) e em De Henau & Raithby (1995). Um modelo um pouco mais simples é o apresentado por Teychené et al. (2003), porém ele é formulado para um escoamento em regime permanente e totalmente desenvolvido. A complexidade em relação à elaboração de malhas é descrita em Omgba (2000).

Entretanto, os modelos eulerianos apresentam a vantagem de lidar com transientes e instabilidades. Issa & Kemppf (2002) apresentam uma modelagem uni-dimensional para simulação do padrão por golfadas em tubos horizontais ou quase horizontais baseada no modelo de dois fluidos. O modelo apresentado é capaz de simular, à partir de um escoamento estratificado, o crescimento das instabilidades e capturar automaticamente seu subsequente desenvolvimento em padrão golfadas. Diversas simulações numéricas para crescimento de instabilidades e formação de escoamento pistonado são realizadas e comparadas com mapas de

padrão de fluxo e com soluções analíticas de instabilidades do tipo Kelvin-Helmholtz. O acordo é bom. Simulações quanto à evolução do escoamento por golfadas também são realizadas e comparadas com dados experimentais. O acordo é bastante razoável.

Em Campbell et al. (2003), os autores utilizam um pacote de CFD para resolução de um modelo euleriano de dois fluidos. O modelo implementado não é apenas para escoamento intermitente, mas o inclui. Diversas simulações são realizadas e o gradiente de pressão é comparado com outros modelos. A concordância entre eles não é boa.

Uma metodologia menos restritiva é o seguimento de cada pistão de líquido e bolha de gás ao longo do duto. Esta classe de métodos é freqüentemente referida como “modelo de seguimento de pistões” (ou, em inglês, “slug tracking model”). Eles empregam uma abordagem lagrangeana para seguir as frentes de bolha e de pistão, evitando assim problemas de difusão numérica. Ainda, eles requerem menos equações constitutivas e, dessa forma, são mais favoráveis à novos cenários. Embora muito atrativa, existem relativamente poucos estudos empregando a metodologia de seguimento de pistões. Um dos precursores desta classe de modelos é o modelo de previsão de distribuição de comprimentos de pistões proposto por Barnea & Taitel (1993), um modelo puramente cinemático. Para elaboração do modelo, os autores utilizaram apenas equações para a velocidade translacional das bolhas (Moïssis & Griffith (1962)). Como a velocidade da frente do pistão foi assumida igual à velocidade da frente da bolha (traseira do pistão) à sua frente, as posições de cada frente de bolha e de cada frente de pistão são obtidas à partir de integrações numéricas das velocidades das frentes de bolhas e de pistões, respectivamente. As integrações são todas de ordem unitária.

Um modelo mais sofisticado é o proposto por Zheng et al. (1994), capaz de seguir cada frente e prever o crescimento de pistões, sua geração e sua dissipação, levando em consideração diferentes inclinações da tubulação. Este modelo também é puramente cinemático, porém utiliza a equação de conservação da massa para a fase líquida (além das correlações para a velocidade translacional da bolha). A conservação da massa para a fase líquida é empregada principalmente para prever a formação de pistões (acúmulo de líquido) ou dissipação de pistões em mudanças de

declividade: em trechos descendentes seguidos de ascendentes (“low elbow”) ocorre formação de pistões e em trechos ascendentes seguidos de trechos descendentes ocorre dissipação de pistões.

Tanto o modelo de Barnea & Taitel (1993) quanto o de Zheng et al. (1994) são puramente cinemáticos e, dessa forma, perdem generalidade. Também, ambos estão restritos ao caso de propriedades constantes do fluido e a compressibilidade do gás é ignorada.

Straume et al. (1992) apresenta o desenvolvimento de um modelo lagrangeano-euleriano para escoamento bifásico por golfadas (horizontal, inclinado e vertical) e apresenta simulações numéricas para estes tipos de escoamento, assim como comparações com resultados experimentais e com modelos puramente eulerianos. O que os autores apresentam é basicamente um esquema lagrangeano de seguimento de pistões implementado sobre um esquema unidimensional já existente (no caso, o OLGA), de forma a não se perder informações (como ocorre nos esquemas puramente eulerianos), a se manter as discontinuidades entre fases e a se prever o escoamento de forma mais precisa. Este modelo não é puramente cinemático. O escoamento é discretizado em pequenos volumes de controle correspondentes à cada bolha e à cada pistão, logo que se movem junto às bolhas e aos pistões e cujas fronteiras se deformam. Estes volumes de controle são então sobrepostos aos volumes de controle referentes ao esquema euleriano (já existentes). Equações modificadas de transporte de massa e de quantidade de movimento para cada fase, oriundas do modelo de 2 fluidos, são aplicadas à cada volume de controle euleriano e equações (ou correlações) de fechamento são também utilizadas. As equações de transporte foram modificadas de forma a utilizar informações provenientes dos volumes de controle lagrangeanos e a evitar a difusão numérica. As posições das frentes de bolhas são então atualizadas com base na integração de correlações para a velocidade da bolha e as posições das frentes de pistão são atualizadas com base na integração de balanços de fluxo de líquido através da frente do pistão. Todas as integrações são de ordem unitária. Os pistões e as bolhas podem ser iniciados, coalescidos ou destruídos dinamicamente, levando-se em consideração inclusive a formação de pistões gerados pelo terreno (variações angulares da tubulação). Os autores comparam os resultados de diversas simulações numéricas com dados experimentais. O acordo entre eles é bastante razoável.

Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996) propuseram um modelo de seguimento de pistões implementado utilizando a metodologia de programação orientada ao objeto (no caso, C++). Este modelo é uma continuação do esquema proposto por Straume et Al. (1992), possuindo algumas das características já descritas. Ele também é um esquema lagrangeano implementado sobre um esquema euleriano (OLGA), porém possui algumas modificações:

- O modelo aplica as equações de transporte diretamente sobre os V.C.s lagrangeanos (móveis e deformáveis), e não mais sobre os V.C.s eulerianos.
- Devido à manipulação da equação de transporte de massa do líquido no V.C. formado pelas bolhas, uma equação para o holdup de cada bolha é obtida e a hipótese de fração de vazão constante em todo o escoamento não é necessária.
- Outra novidade neste modelo é o tipo de discretização adotada, característica de linguagens orientadas ao objeto. Uma estrutura (classe) discreta chamada “Unit” é definida, contendo dados comuns aos pistões e às bolhas, que por sua vez são classes derivadas da “Unit”. As equações para bolhas e para pistões são inseridos em suas respectivas classes, sendo transparentes para a “Unit”. O programa é assim capaz de trabalhar com V.C.s dentro de outros V.C.s, constituindo uma estrutura modular. Devido à modularidade desta estrutura discreta, novas classes podem ser facilmente criadas e incluídas no programa.

As hipóteses de pressão constante ao longo de uma bolha, de bolha cilíndrica, de altura constante do filme líquido sob a bolha, de escoamento isotérmico e de escoamento dominado por forças gravitacionais foram feitas por Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996). Embora Straume et al. (1992) tenha considerado a aeração dos pistões em seu esquema, Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996) utilizaram a hipótese de pistão não aerado. Os autores comparam os resultados de diversas simulações numéricas com dados experimentais. Com exceção da pressão, todos os demais parâmetros apresentam bom acordo com os dados experimentais.

Recentemente, Grenier (1997) propôs um modelo de seguimento de pistões em escoamento horizontal. Como no caso de Straume et al. (1992), Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996), o escoamento é discretizado em volumes de controle correspondentes à cada

bolha e à cada pistão. Tais volumes de controle se movem junto às bolhas e aos pistões e suas fronteiras se deformam, no entanto, neste caso, o modelo é puramente lagrangeano. Equações integrais de transporte de massa e de quantidade de movimento para cada fase são aplicados à cada volume de controle e através suas fronteiras (descritas em relação à um referencial inercial). Equações (ou correlações) de fechamento para o atrito parietal e para a velocidade da bolha (Nicklin et Al. (1962), Moissis & Griffith (1962) e Bendiksen (1984)) são também utilizados. A manipulação de tais equações fornece um sistema de duas equações a ser resolvido por um processo de marcha no tempo para a velocidade de mistura em cada pistão e para a pressão de cada bolha. As posições das frentes de bolha são então atualizadas pela integração da correlação para a velocidade da bolha (Moissis & Griffith (1962)) e as posições das frentes de pistão são atualizadas pela integração da continuidade do gás presente em cada bolha. As integrações são de ordem unitária. As hipóteses de pistão não aerado, de pressão constante ao longo de uma bolha, de bolha cilíndrica, de altura constante do filme líquido sob a bolha, de fração de vazio constante em todo o escoamento, de lei dos gases perfeitos aplicável à fase gasosa e de escoamento isotérmico foram assumidas. O aumento da pressão devido à expansão do líquido que flui do filme líquido para o pistão seguinte foi desprezada. Simulações foram realizadas e comparadas com dados experimentais e mostraram acordo razoável.

Fagundes Netto (1999), através de uma análise teórica e experimental, determinou o perfil de bolhas isoladas em meio ao escoamento da fase líquida em regimes permanente e transiente assim como a interação entre duas bolhas que se seguem em meio a um escoamento líquido. Os resultados relativos à interação entre bolhas foram introduzidos no código desenvolvido por Grenier (1997). Com estas novas leis de interação, os resultados numéricos fornecidos pelo código apresentaram um melhor acordo com os dados experimentais observados por Grenier (1997). Ainda, um modelo utilizando equações de transporte de momentos estatísticos foi proposto pelo autor. Uma comparação entre tal modelo, capaz de prever em qualquer posição do duto a distribuição de comprimentos de pistões e de bolhas à partir da distribuição na entrada, o modelo de seguimento de pistões (Grenier (1997)) e dados experimentais mostrou que o modelo de transporte de momentos estatísticos prevê bem a evolução das estruturas do escoamento (exceto o desvio padrão dos comprimentos de bolha). Em comparação aos modelos de seguimento de pistão, ele apresenta um ganho de tempo de cálculo bastante significativo.

Em Al-Safran et al. (2002), os autores propõem um modelo lagrangeano de seguimento de pistões capaz de predizer distribuições de comprimento de pistão e de bolha e o máximo comprimento de pistão em qualquer seção do escoamento. O modelo é para escoamentos horizontais e inclinados. Desta forma, o modelo é capaz de prever a evolução de bolhas e pistões, incluindo a formação e a dissipação de pistões de líquido em regiões com variação de declividade.

O modelo assume as hipóteses de pressão constante ao longo de uma bolha, de bolha cilíndrica, de altura constante do filme líquido sob a bolha, de lei dos gases perfeitos aplicável à fase gasosa e de escoamento isotérmico. O aumento da pressão devido à expansão do líquido que flui do filme líquido para o pistão seguinte também foi desprezada. Os pistões foram considerados como aerados, porém se considera que não há transferência de massa de gás entre bolhas e pistões. Os autores apresentam uma comparação entre os resultados de simulações e dados experimentais. O acordo entre as simulações e os resultados experimentais é razoavelmente bom.

Em Nydal et al. (2003), os autores fazem uma breve descrição de um modelo de seguimento de bolhas que é praticamente o mesmo descrito em Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996). A novidade neste trabalho é que a possibilidade de inclusão de novas classes computacionais (conforme mencionado acima em Nydal & Barnerjee (1995) e Nydal & Barnerjee (1996)) é apresentada e simulada. Uma nova classe denominada “Pig” é adicionada ao modelo para simulações de operações de “pigging”¹ em meio a escoamentos por golfadas. Simulações foram feitas por este modelo e comparadas com dados experimentais. As simulações realizadas são relacionadas com transição para o padrão de Golfadas, operações de “pigging” em meio a escoamentos por golfadas e eliminação de “terrain slugging”. Elas se acordaram relativamente bem com resultados experimentais.

¹ Operação de limpeza de dutos pela passagem de um objeto sólido (em geral uma esfera) ocupando a seção transversal do duto em quase toda sua integralidade.

O modelo desenvolvido nesta dissertação baseia-se principalmente nos conceitos apresentados por Grenier (1997) para o desenvolvimento de um modelo lagrangeano unidimensional para seguimento de pistões e de bolhas em escoamento intermitente horizontal. Tal modelo incorpora a interação entre sucessivas células, considerando a intermitência e a irregularidade intrínsecas ao padrão golfadas. Este modelo é capaz de prever parâmetros como comprimentos e velocidades de cada bolha e cada pistão ao longo da tubulação. Um dos principais avanços em relação ao modelo de Grenier (1997) e aos demais modelos de seguimento de pistões refere-se a modelagem dos termos de pressão.

Capítulo 3

Modelo Uni-dimensional Escoamento Pistonado

Neste capítulo é apresentada a formulação de um modelo lagrangeano e uni-dimensional para seguimento dinâmico de pistões e bolhas, incorporando a intermitência intrínseca ao fenômeno. O modelo tem como meta fornecer estimativas dos comprimentos, velocidades e frequências das estruturas de gás e líquido.

O modelo é desenvolvido a partir das equações integrais de conservação da massa e de conservação da quantidade de movimento. A conservação da massa é aplicada a volumes de controle, V.C.s, que englobam bolhas e pistões de forma individual. A conservação da quantidade de movimento é aplicada a V.C.s englobando cada pistão.

As principais hipóteses e simplificações foram descritas no capítulo 1 e são aqui repetidas por conveniência:

- O modelo é uni-dimensional e aplica-se a escoamentos horizontais isotérmicos;
- O pistão de líquido é tratado como uma fase única, isto é, o pistão é considerado não aerado;
- A pressão ao longo de uma bolha de gás é assumida constante.
- As bolhas estão sempre em contato com a parede superior do duto;
- As bolhas possuem duas partes principais: uma frente curva (nariz) e um corpo com interface plana, conforme ilustrado na figura 1.1. Considera-se que a interface plana possui altura constante, não variando no espaço nem no tempo;
- Considera-se que não há transferência de massa entre as fases e que não há mudanças de fase;
- A fase gasosa é tratada como um gás ideal;

- A fase líquida é tratada como fluido incompressível e tem comportamento de fluido newtoniano.

3.1 – Equações de Conservação da Massa e da Quantidade de Movimento em Escoamento Bifásico Uni-dimensional

Nesta seção é apresentada a forma geral das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento assim como o sistema de indexação dos volumes de controle (bolhas e pistões).

3.1.1 – Conservação da Massa

A equação integral da conservação de massa para um volume de controle (V.C.) é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dS = 0, \quad (3.1)$$

e, para o caso em que há mais de uma fase presente, sem transferência de massa entre as fases e sem mudança de fase,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} R_k \rho_k \, d\forall + \int_{SC} R_k \rho_k \vec{V}_{kr} \cdot \vec{n} \, dS = 0, \quad (3.2)$$

onde:

k – índice referente à fase k. k = L ou G representando as fases líquida ou gasosa;

R_k – fração volumétrica da fase k presente na região considerada;

ρ_k – densidade da fase k;

V_{kr} – velocidade da fase k em relação à fronteira do V.C. medida à partir de um referencial inercial;

ds - elemento de área;

dV - elemento de volume;

Para o caso de um escoamento uni-dimensional, haverá apenas variações ao longo da direção do escoamento (eixo z). No caso de uma tubulação horizontal de área transversal constante e igual à A_T , o balanço aplicado entre as seções z_1 e z_2 é:

$$A_T \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_2} R_k \rho_k dz + (R_k \rho_k V_{kr} A_T)_{saído} - (R_k \rho_k V_{kr} A_T)_{entrando} = 0.$$

(3.3)

Aproximando ainda a integral de volume por seu valor médio,

$$\int_{z_1}^{z_2} \phi dz = (z_2 - z_1) \bar{\phi},$$

(3.4)

e, convencionando que massa entra em z_1 e sai em z_2 , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(z_2 - z_1) \overline{R_k \rho_k}] + (R_k \rho_k V_{kr})_{z=z_2} - (R_k \rho_k V_{kr})_{z=z_1} = 0.$$

(3.5)

3.1.2 – Conservação da Quantidade de Movimento

A equação integral da conservação da quantidade de movimento para um volume de controle (V.C.) é:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \vec{V}_r \cdot \vec{n} dS,$$

(3.6)

e, para o caso em que há mais de uma fase presente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} R_k \rho_k \vec{V}_k d\forall + \int_{SC} R_k \rho_k \vec{V}_k \vec{V}_{kr} \cdot \vec{n} dS = \sum \vec{F}_{ext} , \quad (3.7)$$

onde, neste caso:

V_k – velocidade absoluta da fase k medida à partir de um referencial inercial;

V_{kr} – velocidade da fase k em relação à velocidade da fronteira do V.C. medida à partir de um referencial inercial.

Como no caso da conservação da massa, simplificando para escoamento uni-dimensional:

$$\left[A_T \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_2} R_k \rho_k V_k dz + (R_k \rho_k V_k V_{kr} A_T)_{saíndo} - (R_k \rho_k V_k V_{kr} A_T)_{entrando} \right] = \sum F_{ext} , \quad (3.8)$$

e assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(z_2 - z_1) \overline{R_k \rho_k V_k} \right] + (R_k \rho_k V_k V_{kr})_{z=z_2} - (R_k \rho_k V_k V_{kr})_{z=z_1} = \frac{\sum F_{ext}}{A_T} . \quad (3.9)$$

A somatória das forças externas deve levar em consideração as forças devido à diferença de pressão, ao atrito parietal e à interação entre fases. Assim:

$$\sum F_{ext} = A_T (P_k)_{z=z_1} - A_T (P_k)_{z=z_2} + \int_{z_1}^{z_2} T A_T dz + \int_{z_1}^{z_2} I A_T dz , \quad (3.10)$$

onde:

T – termo referente ao atrito com a parede. T tem unidade de $\frac{Força}{Volume}$ ²,

$(P_k)_z$ - pressão sofrida pela fase k na posição z;

I – termo relativo às forças interfaciais. I tem unidade de $\frac{Força}{Volume}$.

E assim, utilizando (3. 4):

$$\sum F_{ext} = A_T(P_k)_{z=z_1} - A_T(P_k)_{z=z_2} + \bar{T}A_T(z_1 - z_2) + \bar{I}A_T(z_1 - z_2) \quad (3. 11)$$

Substituindo (3. 11) em (3. 9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(z_2 - z_1)\overline{R_k \rho_k V_k}] + (R_k \rho_k V_k V_{kr})_{z=z_2} - (R_k \rho_k V_k V_{kr})_{z=z_1} = \\ = (P_k)_{z=z_1} - (P_k)_{z=z_2} + \bar{T}(z_1 - z_2) + \bar{I}(z_1 - z_2) \end{aligned} \quad (3. 12)$$

3.1.3 – Sistema de Coordenadas e de Indexação

O presente trabalho consiste em uma modelagem do escoamento gás líquido em padrão de golfadas à partir de uma abordagem lagrangeana. O escoamento é então dividido em “sub-estruturas” (bolhas de gás e pistões de líquido) a serem seguidas. Logo, as equações de transporte de massa e de quantidade de movimento para escoamento bifásico uni-dimensional serão aplicadas a volumes de controle formados por cada bolha e cada pistão. Elas também serão aplicadas a volumes de controle infinitesimais englobando as fronteiras gas-líquido.

² Aqui o termo relativo ao atrito com a parede possui sinal positivo pois define-se na seção 3.5.6

$$\bar{T} = -\frac{2}{D} \rho_L f_j U_j^2$$

A análise utiliza o conceito de célula (Wallis (1969)), formada por um pistão de líquido e a bolha que o segue. Como este trabalho tem uma abordagem lagrangeana, o uso deste conceito facilita o tratamento e a indexação das bolhas e dos pistões a serem seguidos ao longo do escoamento. A Figura 3. 1 apresenta a $j^{\text{ésima}}$ célula contendo um pistão de líquido de comprimento L_{Sj} seguido por uma bolha de comprimento L_{Bj} .

Para a aplicação das equações de conservação, deve-se definir previamente o referencial e o sistema de coordenadas a serem utilizados. Como o escoamento possui mais de uma fase, o número de termos nas equações tende a ser grande, logo também é importante uma definição prévia do sistema de índices a ser utilizado. A Figura 3. 2 apresenta o referencial (inercial), o sistema de coordenadas e o sistema de índices a serem utilizados.

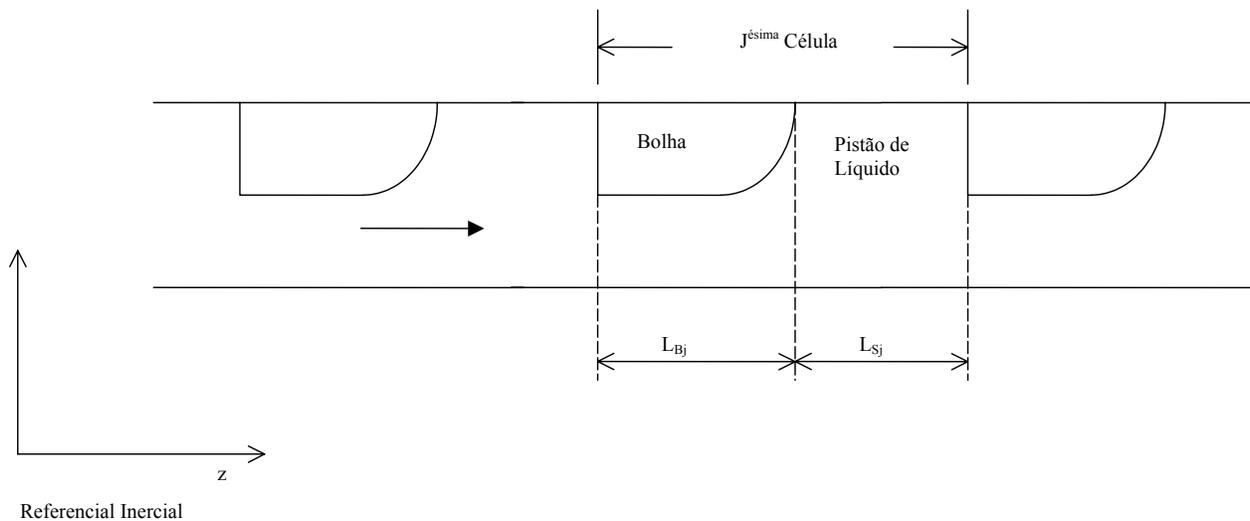


Figura 3. 1 - Célula unitária e sistema de indexação

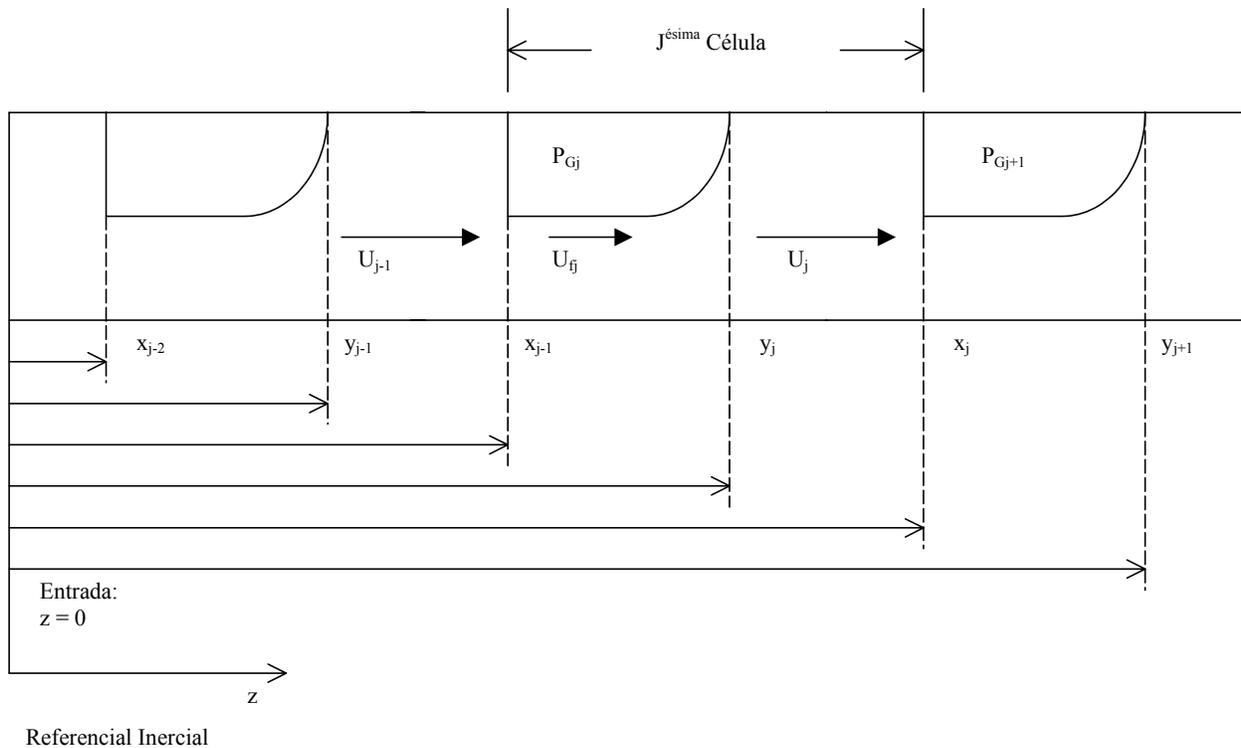


Figura 3. 2 - Sistema de coordenadas e sistema de indexação

Definidos os sistemas de coordenadas e de indexação a serem utilizados, fica claro das figuras 3. 1 e 3. 2. algumas variáveis a serem utilizadas para representação do escoamento. Para a célula de índice j:

- P_{Gj} é a pressão do gás contido no interior da bolha de índice j;
- U_j é a velocidade do líquido contido no interior do pistão de índice j;
- U_{fj} é a velocidade do líquido contido no interior do filme líquido sob a bolha de índice j;
- x_j é a posição da frente do pistão de índice j, isto é, é a posição referente à fronteira entre o pistão de índice j e a bolha de índice j+1;
- y_j é a posição da frente do bolha de índice j, isto é, é a posição referente à fronteira entre a bolha de índice j e o pistão de índice j;
- $\frac{dx_j}{dt}$ é a velocidade da frente do pistão de índice j;
- $\frac{dy_j}{dt}$ é a velocidade da frente da bolha de índice j;

- $L_{Sj} = x_j - y_j$ é o comprimento do pistão de índice j ;
- $L_{Bj} = y_j - x_{j-1}$ é o comprimento da bolha de índice j .

3.2 – Equações de Conservação Aplicadas ao Pistão de Líquido

Com relação ao pistão de líquido, as duas principais hipóteses utilizadas são:

Hipótese 1: o pistão é considerado não aerado. Esta hipótese implica em 3 conseqüências:

- $R_{SL} =$ fração volumétrica de líquido no pistão $= R_L = 1$;
- As equações de conservação devem ser escritas apenas para a fase líquida;
- $I = 0$ (não existem forças atuando entre as fases).

Hipótese 2: : Densidade do líquido, ρ_L , é constante ao longo do escoamento.

A Figura 3. 3 apresenta o volume de controle englobando o pistão de índice j . Este volume de controle, descrito em relação à um referencial inercial, é móvel e deformável. Suas fronteiras se deslocam, de forma a seguir o pistão ao longo do escoamento e de permitir que o pistão aumente ou diminua de volume. As equações de conservação de massa e quantidade de movimento para o pistão de líquido serão aplicadas em relação à este volume de controle.

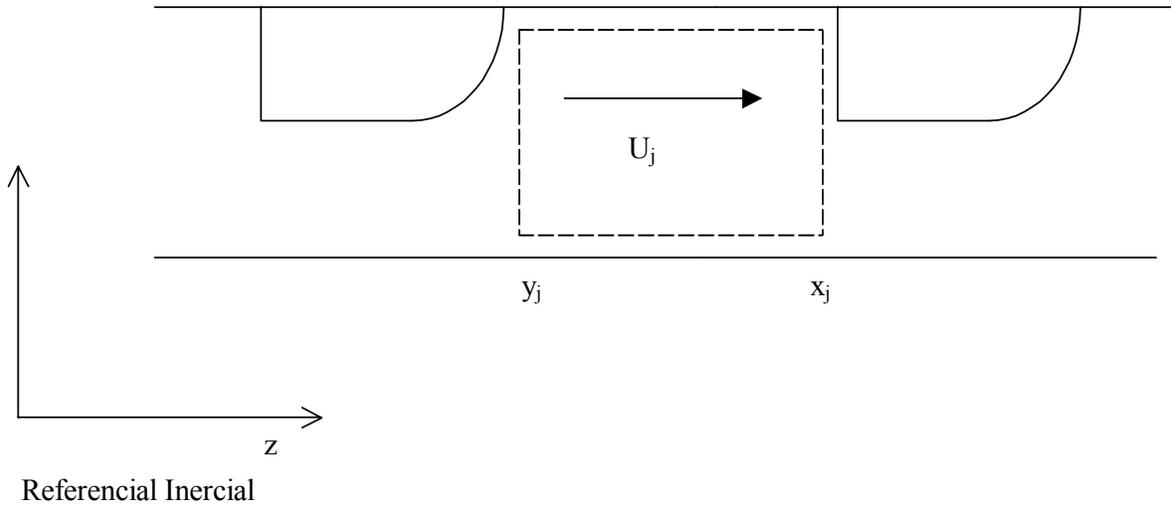


Figura 3.3 - Volume de controle englobando o pistão j

3.2.1 – Conservação da Massa

Da equação (3. 5), utilizando-se as já mencionadas hipóteses, o volume de controle conforme a Figura 3. 3 e as definições de acordo com a Figura 3. 2 , tem-se para o pistão j:

$$\rho_L \frac{d}{dt} [(x_j - y_j)] + \rho_L \left[(U_j)_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} \right] - \rho_L \left[(U_j)_{z=y_j} - \frac{dy_j}{dt} \right] = 0,$$

(3. 13)

onde:

U_j é a velocidade do líquido no pistão;

$\frac{dx_j}{dt}$ e $\frac{dy_j}{dt}$ são as velocidades das fronteiras (são respectivamente as velocidades da frente

do pistão e da traseira do pistão). Como x_j e y_j são função apenas do tempo, a derivada parcial foi substituída por uma derivada ordinária.

$$\frac{dx_j}{dt} - \frac{dy_j}{dt} + (U_j)_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} - (U_j)_{z=y_j} + \frac{dy_j}{dt} = 0, \quad (3.14)$$

$$(U_j)_{z=x_j} = (U_j)_{z=y_j} = \bar{U}_j = U_j. \quad (3.15)$$

A principal conclusão da conservação da massa para o pistão de líquido é que a velocidade do líquido no pistão é constante. Assim, os índices relativos à posição (x_j e y_j) serão abandonados no caso da velocidade do líquido no pistão. Ainda, conforme Duckler e Hubbard (1975), a velocidade média do líquido no pistão não aerado é igual à velocidade de mistura: $U_j = j = j_L + j_G$.

3.2.2 – Conservação da Quantidade de Movimento

Das equações (3.12) e (3.15), utilizando-se as já mencionadas hipóteses, o volume de controle conforme a Figura 3.3 e as definições de acordo com a Figura 3.2, tem-se para o pistão j :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(x_j - y_j) \rho_L U_j] &= \rho_L U_j \left(\frac{dx_j}{dt} - U_j \right) - \rho_L U_j \left(\frac{dy_j}{dt} - U_j \right) + \\ &+ (P_{Lj})_{z=y_j} - (P_{Lj})_{z=x_j} + (x_j - y_j) \bar{T}_{Lj} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como U_j e ρ_L são constantes no espaço, o símbolo de média foi removido. \bar{T}_{Lj} é a média espacial da tensão devido ao atrito do líquido com a parede do duto (por unidade de volume).

A equação (3.16) pode ter seus termos expandidos :

$$\rho_L U_j \frac{dx_j}{dt} - \rho_L U_j \frac{dy_j}{dt} + (x_j - y_j) \rho_L \frac{dU_j}{dt} = \rho_L U_j \frac{dx_j}{dt} - \rho_L U_j^2 - \rho_L U_j \frac{dy_j}{dt} + \rho_L U_j^2 + (P_{Lj})_{z=y_j} - (P_{Lj})_{z=x_j} + (x_j - y_j) \overline{T_{Lj}}, \quad (3.17)$$

que após as devidas simplificações torna-se,

$$(x_j - y_j) \rho_L \frac{dU_j}{dt} = (P_{Lj})_{z=y_j} - (P_{Lj})_{z=x_j} + (x_j - y_j) \overline{T_{Lj}}. \quad (3.18)$$

P_L representa a pressão estática do fluido. Nele não está contemplado o termo de pressão devido a altura do filme, de tal modo que a pressão no topo do tubo é P_L e no fundo do tubo é $P_L + r g D$. Cabe ressaltar que $(P_{Lj})_{z=y_j}$ e $(P_{Lj})_{z=x_j}$ representam as pressões na fronteira do pistão, no lado do pistão de líquido, ver figura 3.3.

3.3 – Acoplamento Pistão-Bolha

É conveniente substituir na equação (3.18) as pressões nas faces do pistão de líquido pela pressão do gás nas bolhas vizinhas ao pistão. Isto se deve principalmente ao fato da pressão do gás contido em uma bolha ser constante ao longo da bolha.

Uma forma de se relacionar as pressões do líquido nas fronteiras do pistão, $(P_{Lj})_{z=y_j}$ e $(P_{Lj})_{z=x_j}$, com as pressões nas bolhas à sua traseira e à sua frente é por meio de balanços de massa e de quantidade de movimento nas fronteiras do pistão.

3.3.1 – Conservação da Massa Através do Nariz do Pistão j

Aplica-se a equação da continuidade a um volume de controle que envolve a traseira da bolha j+1 e a frente do pistão j (fronteira entre o pistão e a bolha à sua frente, em $z = x_j$; ver Figura 3. 4; nesta figura também estão representados o diâmetro da tubulação e a espessura média do filme de líquido abaixo da bolha, D e h_f respectivamente). Este volume de controle possui fronteiras não deformáveis que seguem a interface gás-líquido. Assim, da equação (3. 3):

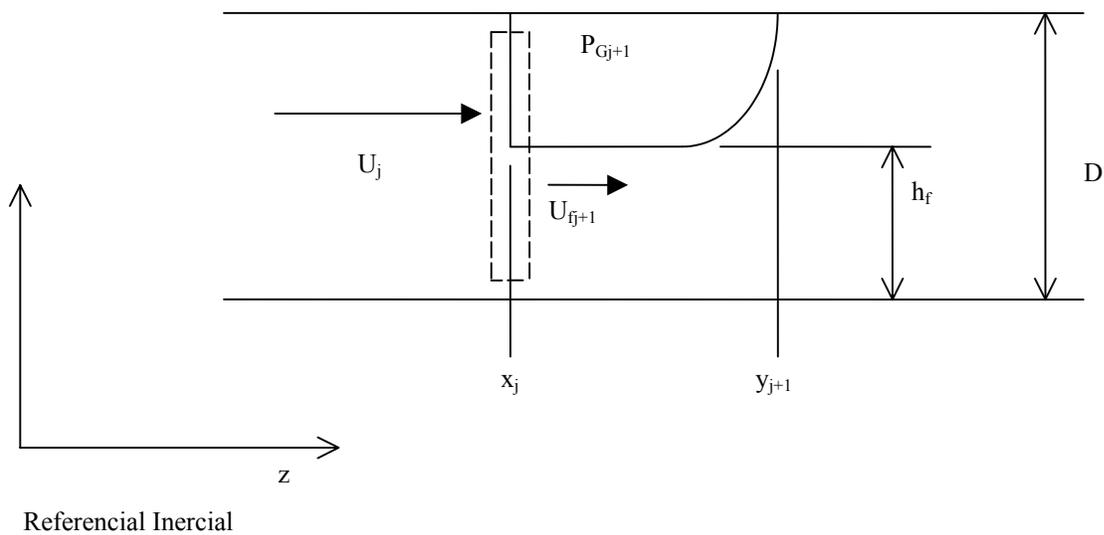


Figura 3. 4 - Conservação da massa e da quantidade de movimento através do nariz do pistão j

$$\left(R_k \rho_k V_{kr} A_T \right)_{saindo} - \left(R_k \rho_k V_{kr} A_T \right)_{entrando} = 0 ,$$

(3. 19)

pois, o volume de controle é não deformável e infinitesimal. Logo suas superfícies de controle não apresentam movimento entre si e, como o líquido é incompressível, o termo de acúmulo é desprezado. Tem-se então:

$$(R_{fj+1})_{z=x_j} \rho_L \left[(U_{fj+1})_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} \right] A_T - \rho_L \left[(U_j)_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} \right] A_T = 0, \quad (3.20)$$

onde R_f é o mesmo que R_{BL} = fração volumétrica de líquido na bolha. Mais adiante, aparecerá o termo R_G , que é o mesmo que R_{BG} = fração volumétrica de gás na bolha. Logo, $R_{fj} + R_{Gj} = 1$, ou $R_{Gj} = 1 - R_{fj}$.

Arrumando os termos da equação:

$$(R_{fj+1})_{z=x_j} \left[\frac{dx_j}{dt} - (U_{fj+1})_{z=x_j} \right] = \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right]. \quad (3.21)$$

3.3.2 – Conservação da Quantidade de Movimento Através da Frente do Pistão j

Aplica-se a equação da conservação da quantidade de movimento à um volume de controle que envolve a traseira da bolha j+1 e a frente do pistão j (fronteira entre o pistão e a bolha à sua frente, em $z = x_j$; ver Figura 3. 4). Este volume de controle possui fronteiras não deformáveis que seguem a interface gás-líquido. Assim, da equação (3. 8):

$$\left[(R_k \rho_k V_k V_{kr} A_T)_{saindo} - (R_k \rho_k V_k V_{kr} A_T)_{entrando} \right] = \sum F_{ext}, \quad (3.22)$$

onde, por se tratar de um volume de controle infinitesimal, o termo de acúmulo foi desprezado. Também, como se trata de um volume infinitesimal, o termo relativo ao atrito com a parede pode ser desprezado. Assim:

$$\begin{aligned}
& (R_{fj+1})_{z=x_j} \rho_L (U_{fj+1})_{z=x_j} \left[(U_{fj+1})_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} \right] A_T - \rho_L (U_j)_{z=x_j} \left[(U_j)_{z=x_j} - \frac{dx_j}{dt} \right] A_T = \\
& = \left[(P_{Lj})_{z=x_j} + \rho_L g \frac{D}{2} \right] A_T - \left[(P_{Gj+1})_{z=x_j} + \rho_L g (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f \right] A_T
\end{aligned}
\tag{3. 23}$$

A velocidade do líquido no pistão, U_j , é constante.

No termo relativo à somatória das forças externas:

- $\rho_L g \frac{D}{2}$ refere-se à pressão hidrostática que o pistão de líquido exerce no V.C.;
- $\rho_L g (\xi_{j+1})_{z=x_j}$ refere-se à pressão hidrostática que o filme líquido exerce no V.C.;
- $(\xi_{j+1})_{z=x_j}$ é a altura do centro de pressão em $z = x_j$, $\left((\xi_{j+1})_{z=x_j} = \frac{h_f}{2} \right)$. Ela é calculada aproximando-se a seção transversal do duto por uma seção retangular;
- $(P_{Lj})_{z=x_j}$ refere-se à pressão no pistão de líquido na posição $z = x_j$;
- $(P_{Gj+1})_{z=x_j}$ refere-se à pressão na bolha de gás na posição $z = x_j$. Como a pressão na bolha é suposta constante ao longo de seu comprimento, pode-se fazer: $(P_{Gj+1})_{z=x_j} = P_{Gj+1}$.

Então:

$$\begin{aligned}
& (P_{Lj})_{z=x_j} + \rho_L g \frac{D}{2} - \left[P_{Gj+1} + \rho_L g (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f \right] = \rho_L U_j \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right] + \\
& - (R_{fj+1})_{z=x_j} \rho_L (U_{fj+1})_{z=x_j} \left[\frac{dx_j}{dt} - (U_{fj+1})_{z=x_j} \right]
\end{aligned}
\tag{3. 24}$$

e, utilizando-se resultado da equação (3. 21):

$$\begin{aligned}
(P_{Lj})_{z=x_j} + \rho_L g \frac{D}{2} - [P_{Gj+1} + \rho_L g (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f] &= \rho_L U_j \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right] + \\
- \rho_L (U_{fj+1})_{z=x_j} \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right] &= \rho_L \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right] \left[U_j - (U_{fj+1})_{z=x_j} \right]
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Expandindo e reagrupando o balanço de massa através do nariz do pistão (equação (3.21)) em termos da velocidade do líquido:

$$\left[U_j - (U_{fj+1})_{z=x_j} \right] = \frac{[1 - (R_{fj+1})_{z=x_j}]}{(R_{fj+1})_{z=x_j}} \left(\frac{dx_j}{dt} - U_j \right).
\tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.25) e isolando para $(P_{Lj})_{z=x_j}$:

$$(P_{Lj})_{z=x_j} = P_{Gj+1} - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f \right) + \rho_L \frac{[1 - (R_{fj+1})_{z=x_j}]}{(R_{fj+1})_{z=x_j}} \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right]^2,
\tag{3.27}$$

onde $(P_{Lj})_{z=x_j}$ refere-se à pressão no pistão j em $x = x_j$ e P_{Gj+1} refere-se à pressão na bolha j+1.

3.3.3 – Conservação da Quantidade de Movimento Através do Nariz da Bolha j

Aplica-se a equação da conservação da quantidade de movimento à um volume de controle que envolve a traseira do pistão j e a frente da bolha j (fronteira entre o pistão e a bolha que o segue, em $z = y_j$; ver Figura 3.5). Este volume de controle possui fronteiras não deformáveis que seguem a interface gás-líquido.

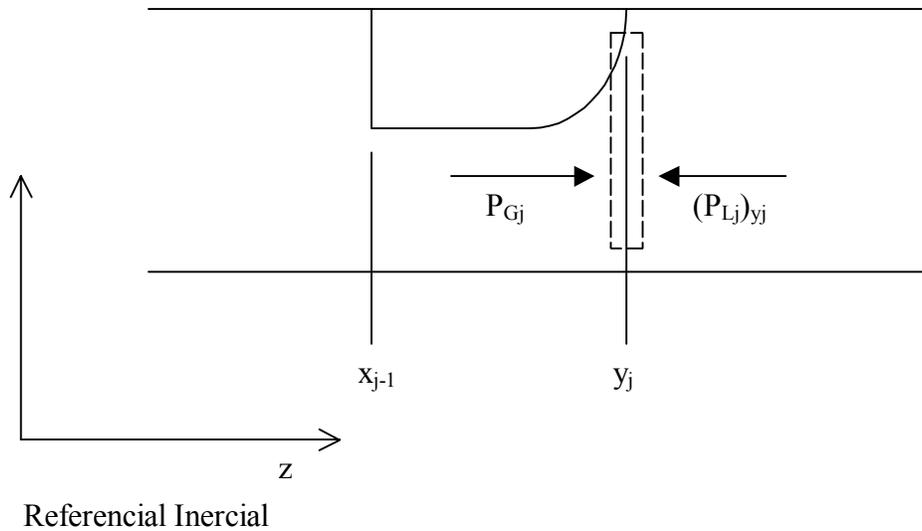


Figura 3. 5 - Conservação da quantidade de movimento através do nariz da bolha j

Fazendo-se a hipótese de que, no nariz da bolha, o gradiente de velocidades é desprezível, teremos que, além do termo relativo ao acúmulo (volume infinitesimal), o termo relativo ao fluxo de quantidade de movimento será desprezível. Assim:

$$\sum F_{ext} = 0 .$$

(3. 28)

Ainda, como se trata de um volume infinitesimal, o termo relativo ao atrito com a parede pode ser desprezado. Teremos então apenas a contribuição dos termos relativos às pressões:

$$\left[(P_{Gj})_{z=y_j} + \rho_L g \frac{D}{2} \right] - \left[(P_{Lj})_{z=y_j} + \rho_L g \frac{D}{2} \right] = 0 ,$$

(3. 29)

onde $(P_{Gj})_{z=y_j}$ no primeiro termo é referente à pressão na bolha. Como a pressão na bolha é suposta constante ao longo de seu comprimento, $(P_{Gj})_{z=y_j} = P_{Gj}$ no primeiro termo. No segundo termo, $(P_{Lj})_{z=y_j}$ é relativo à pressão do pistão em $z = y_j$. Assim:

$$(P_{Lj})_{x=y_j} = P_{Gj}, \quad (3.30)$$

onde $(P_{Lj})_{z=y_j}$ é a pressão no pistão j em $z = y_j$ e P_{Gj} é a pressão na bolha j.

3.3.4 – Acoplamento das Pressões dos Pistões e das Bolhas

Substitui-se (3.27) e (3.30) na equação (3.18) a fim de se obter uma expressão em função de $(P_{Gj+1})_{z=x_j}$ e $(P_{Gj})_{z=y_j}$ na bolha, isto é, em função das pressões P_{Gj+1} e P_{Gj} das bolhas à frente e atrás do pistão de líquido. Fazendo as substituições:

$$\begin{aligned} \rho_L (x_j - y_j) \frac{dU_j}{dt} = & P_{Gj} - P_{Gj+1} + (x_j - y_j) \overline{f_{Lj}} - \rho_L \frac{[1 - (R_{fj+1})_{z=x_j}]}{(R_{fj+1})_{z=x_j}} \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right]^2 + \\ & + \rho_L g \left[\frac{D}{2} - (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Note que as pressões nesta equação representam as pressões das bolhas à jusante e à montante do pistão j.

Esta é uma equação que relaciona :

$$\rho_L (x_j - y_j) \frac{dU_j}{dt} \rightarrow \text{Termo relativo à aceleração da massa de líquido no pistão;}$$

$$P_{Gj} - P_{Gj+1} \rightarrow \text{Pressões das bolhas à jusante e à montante do pistão de líquido;}$$

$(x_j - y_j)\overline{T_{Lj}}$ → Termo relativo ao atrito do pistão de líquido com a parede;

$\rho_L \frac{[1 - (R_{fj+1})_{z=x_j}]}{(R_{fj+1})_{z=x_j}} \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right]^2$ → Termo relativo à variação de pressão devido à

aceleração do líquido fluindo do filme líquido para o pistão que o segue. Ele será chamado de ΔP_{Aj} . A identificação deste termo com a aceleração sofrida pelo líquido é apresentada no Anexo IV;

$\rho_L g \left[\frac{D}{2} - (\xi_{j+1})_{z=x_j} R_f \right]$ → Termo representando a diferença das pressões hidrostática

entre a frente de uma bolha a traseira da bolha a sua frente. Ele será chamado de ΔP_{Hj} ;

A equação pode ser escrita como:

$$\rho_L (x_j - y_j) \frac{dU_j}{dt} = P_{Gj} - P_{Gj+1} + (x_j - y_j)\overline{T_{Lj}} - \Delta P_{Aj} + \Delta P_{Hj},$$

(3. 32)

ou, rearrumando:

$$P_{Gj} = P_{Gj+1} + \rho_L L_{Sj} \frac{dU_j}{dt} - L_{Sj} \overline{T_{Lj}} + \Delta P_{Aj} - \Delta P_{Hj}.$$

(3. 33)

Considerando que T_{Lj} é negativo (como será visto na seção 3.6.1), a pressão em uma dada bolha é igual à: 1) pressão da bolha precedente; 2) somada à aceleração do líquido no pistão que as separa; 3) somada ao atrito do pistão de líquido que as separa; 4) somada ao ganho de pressão devido à aceleração do líquido fluindo do filme líquido sob a bolha precedente para o pistão que as separa; 5) subtraída da variação de pressão hidrostática entre sua frente e a traseira da bolha precedente.

3.4 – Equações de Conservação Aplicadas à Bolha e ao Filme Líquido

Com relação à bolha, as principais hipóteses utilizadas são: i) não há gradiente de pressão ao longo de uma bolha; ii) a lei dos gases perfeitos é válida para o gás presente em uma bolha; iii) o escoamento é isotérmico.

3.4.1 - Conservação de Massa

A Figura 3. 6 apresenta um volume de controle cujas fronteiras são coincidentes com a parede do tubo e sua seção transversal. O V.C. possui uma extensão axial de tal forma que ele engloba a bolha de índice j . Como ele intercepta toda a seção transversal do tubo, nele estão presentes as fases gasosa e líquida na forma estratificada. Desta forma, a equação da continuidade será resolvida para a fase gasosa e para a fase líquida separadamente. Após, estas equações serão rearrumadas de forma a se obter uma única equação relacionando a pressão da bolha com as velocidades de líquido nos pistões imediatamente à sua frente e à sua traseira.

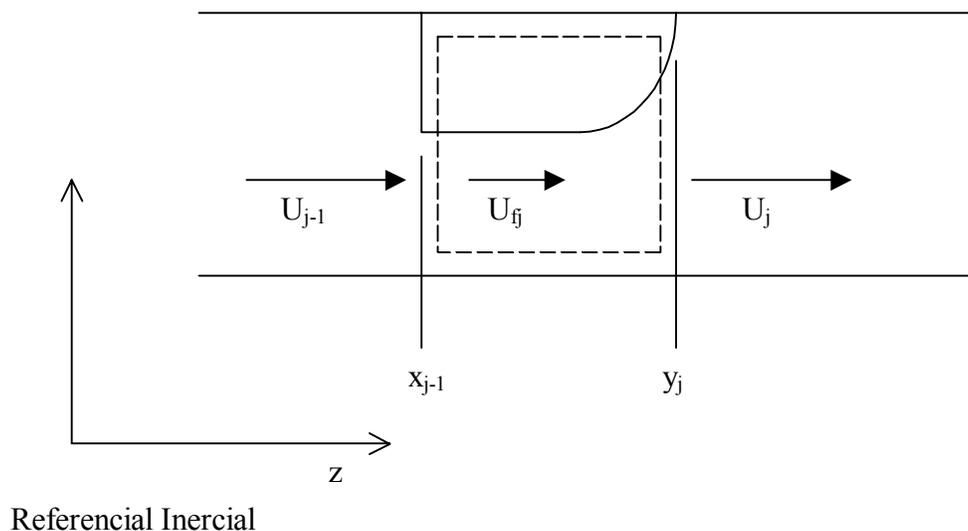


Figura 3. 6 - Volume de controle englobando a bolha j . A superfície de controle é mostrada através de linhas tracejadas.

3.4.1.1– Filme de Líquido

O balanço de massa para o filme de líquido abaixo da bolha j (equação (3. 5)) , observando que $\rho_{ff} = \rho_L = \text{constante}$:

$$\frac{d}{dt} [(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{ff}}] = (R_{ff})_{z=y_j} \left[\frac{dy_j}{dt} - (U_{ff})_{z=y_j} \right] - (R_{ff})_{z=x_{j-1}} \left[\frac{dx_{j-1}}{dt} - (U_{ff})_{z=x_{j-1}} \right]. \quad (3. 34)$$

Aplicando a conservação de massa de líquido através das fronteiras da bolha j (em $z = x_{j-1}$ e em $z = y_j$):

$$(R_k \rho_k V_{kr} A_T)_{saindo} - (R_k \rho_k V_{kr} A_T)_{entrando} = 0. \quad (3. 19)$$

Pois, como no caso da conservação de massa através do nariz do pistão j (equação (3. 19)), o volume de controle é infinitesimal e o termo de acúmulo é desprezado.

Em $z = x_{j-1}$:

$$(R_{ff})_{z=x_{j-1}} \left[\frac{dx_{j-1}}{dt} - (U_{ff})_{z=x_{j-1}} \right] = \frac{dx_{j-1}}{dt} - U_{j-1}. \quad (3. 35)$$

Em $x = y_j$

$$(R_{ff})_{z=y_j} \left[\frac{dy_j}{dt} - (U_{ff})_{z=y_j} \right] = \frac{dy_j}{dt} - U_j. \quad (3. 36)$$

Substituindo as equações (3. 35) e (3. 36) na equação (3. 34):

$$\frac{d}{dt} [(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{ff}}] = \left(\frac{dy_j}{dt} - U_j \right) - \left(\frac{dx_{j-1}}{dt} - U_{j-1} \right). \quad (3. 37)$$

Expandindo e reagrupando os termos da equação (3. 37) chega-se a:

$$\overline{R_{Gj}} \left[\frac{dy_j}{dt} - \frac{dx_{j-1}}{dt} \right] + (y_j - x_{j-1}) \frac{d\overline{R_{Gj}}}{dt} = U_j - U_{j-1}, \quad (3. 38)$$

onde a fração de líquido na bolha foi expressa por meio da fração de gás: $\overline{R_{lf}} = 1 - \overline{R_{Gj}}$.

3.4.1.2– Fase Gasosa

Dada a hipótese de pistão não aerado, a bolha não perde massa de gás para o pistão de líquido. Logo, a massa de gás é constante . Para a bolha j:

$$(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj} \rho_{Gj}} = \text{Constante}, \quad (3. 39)$$

e assim:

$$\frac{d}{dt} [(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj} \rho_{Gj}}] = 0. \quad (3. 40)$$

Das hipóteses de validade da lei dos gases perfeitos, de escoamento isotérmico e de ausência de gradiente de pressão ao longo de uma bolha, pode-se dizer que $\overline{\rho_{Gj}} = \rho_{Gj}$, já que $\overline{\rho_{Gj}}$ é uma média espacial e que:

$$(P_{Gj})_{z=x_{j-1}} = (\rho_{Gj} RT_{Gj})_{z=x_{j-1}} = (P_{Gj})_{z=y_j} = (\rho_{Gj} RT_{Gj})_{z=y_j}; \quad (3. 41)$$

$$(\rho_{Gj})_{z=x_{j-1}} RT = (\rho_{Gj})_{z=y_j} RT \Rightarrow (\rho_{Gj})_{z=x_{j-1}} = (\rho_{Gj})_{z=y_j} = \overline{\rho_{Gj}} = \rho_{Gj}. \quad (3. 42)$$

Expandindo e reagrupando os termos da equação (3. 40):

$$\rho_{Gj} \left\{ \overline{R_{Gj}} \left[\frac{dy_j}{dt} - \frac{dx_{j-1}}{dt} \right] + (y_j - x_{j-1}) \frac{d\overline{R_{Gj}}}{dt} \right\} + (y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj}} \frac{d\rho_{Gj}}{dt} = 0 .$$

(3. 43)

Mas, o termo entre chaves equivale ao lado esquerdo da equação (3. 38). Assim:

$$\rho_{Gj} \{ U_j - U_{j-1} \} + (y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj}} \frac{d\rho_{Gj}}{dt} = 0 ,$$

(3. 44)

ou,

$$U_j = U_{j-1} - \frac{(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj}}}{\rho_{Gj}} \frac{d\rho_{Gj}}{dt} .$$

(3. 45)

Das hipóteses de validade da lei dos gases perfeitos, de escoamento isotérmico e de ausência de gradiente de pressão ao longo de uma bolha, pode-se dizer que:

$$P_{Gj} = \rho_{Gj} RT \Rightarrow \frac{1}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt} = \frac{1}{(\rho_{Gj} RT)} \frac{d(\rho_{Gj} RT)}{dt} = \frac{1}{\rho_{Gj}} \frac{d\rho_{Gj}}{dt} .$$

(3. 46)

Assim, a equação (3. 45) expressa em termos da pressão da bolha j é:

$$U_j = U_{j-1} - \frac{(y_j - x_{j-1}) \overline{R_{Gj}}}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt} .$$

(3. 47)

Além disso, reconhecendo que o comprimento da bolha é $L_{Bj} = y_j - x_{j-1}$:

$$U_j = U_{j-1} - \frac{L_{Bj} \overline{R_{Gj}}}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt},$$

(3. 48)

onde P_{Gj} é a pressão na bolha j.

Percebe-se através desta equação que a variação temporal da pressão em uma bolha depende diretamente da diferença das velocidades do líquido nos pistões à jusante e à montante da bolha. Ou, de um outro ponto de vista, a velocidade do líquido em um pistão é função da velocidade do líquido no pistão seguinte e da variação temporal do volume da bolha que os separa (Fagundes Netto (1999)).

3.4.2 – Conservação da Quantidade de Movimento

Neste trabalho, as equações da conservação da quantidade de movimento em uma bolha não são utilizadas pelo modelo. Para referência, tais equações são apresentadas no Anexo I.

3.5 – Sistema de Equações a Ser Resolvido

Das equações de conservação de massa e quantidade de movimento para o pistão (seções 3.2 e 3.3) e de conservação de massa para a bolha (seção 3.4), foram obtidas as equações (3. 32) e (3. 48) que constituem o sistema de equações a ser resolvido. Por conveniência, elas estão abaixo representadas:

$$\rho_L (x_j - y_j) \frac{dU_j}{dt} = P_{Gj} - P_{Gj+1} + (x_j - y_j) \overline{T_{Lj}} - \Delta P_{Aj} + \Delta P_{Hj};$$

(3. 32)

$$U_j = U_{j-1} - \frac{L_{Bj} \overline{R_{Gj}}}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt}.$$

(3. 48)

Estas são as principais equações do modelo em questão, formando um sistema de duas equações acopladas a serem resolvidas. Se dividirmos ambas as equações por $L_{Bj} = y_j - x_{j-1}$, perceberemos que este sistema é similar a um sistema hiperbólico de equações. No entanto, neste caso, não temos derivadas espaciais, apenas diferenças em relação ao espaço. O sistema é discreto no espaço e contínuo no tempo.

No espaço, as equações para cada V.C. estão acopladas. Na equação (3. 32), uma pressão em j+1 cria uma dependência do V.C. j com o V.C. j+1. Na equação (3. 48), uma velocidade em j-1 cria uma dependência do V.C. j com o V.C. j-1.

No tempo, o sistema é contínuo. Dependendo do esquema numérico a ser utilizado, o sistema pode ser discretizado similarmente aos sistemas hiperbólicos de equações. Como ocorre com os sistemas hiperbólicos, apenas as condições em uma fronteira devem ser conhecidas, e a solução caminha desta fronteira em diante.

Como será apresentado no capítulo 4, o sistema formado pelas equações (3. 32) e (3. 48) será discretizado de forma implícita. Conhecidos os valores no instante inicial, a solução será calculada para os instantes posteriores. Como no caso da solução numérica de sistemas hiperbólicos de equações, a solução adotada para as equações (3. 32) e (3. 48) se constitui em um processo numérico de marcha no tempo que, neste caso, será sempre resolvido para U e para P_G. Para tanto, as demais variáveis deste sistema deverão ser conhecidas no tempo anterior.

3.5.1 – Condições Iniciais e de Contorno

Na equação (3. 32) há uma derivada de primeira ordem da velocidade do líquido em relação ao tempo e há a diferença de pressões entre duas bolhas consecutivas. Nesta diferença de pressões, percebe-se que a pressão à jusante (j+1) sempre aparece. Já na equação (3. 48) há uma

derivada de primeira ordem da pressão na bolha em relação ao tempo e há a diferença de velocidades de líquido em dois pistões consecutivos. Nesta diferença, percebe-se que uma velocidade à montante ($j-1$) sempre aparece. Desta forma, para a resolução deste sistema de equações, são necessárias uma condição inicial e uma condição de contorno para a pressão e também uma condição inicial e uma condição de contorno para a velocidade. Em virtude da pressão à jusante ($j+1$) estar sempre presente, a condição de contorno para a pressão deve ser à jusante, isto é, na saída. No caso da velocidade do líquido no pistão, tem-se sempre uma velocidade à montante ($j-1$), o que significa que a condição de contorno para a velocidade deve ser à montante, isto é, na entrada.

Analisando-se fisicamente o escoamento em tubulação horizontal e as condições operacionais que geralmente são encontradas em campo, as condições iniciais e de contorno são assumidas como segue:

- i) Condição inicial para a velocidade de líquido nos pistões: como condição inicial, considera-se que o escoamento é um escoamento monofásico de líquido e que a frente da primeira bolha está exatamente na entrada do duto ($z = 0$), logo não há gás no interior da tubulação. Como, na prática, os valores de j_L na entrada do duto são conhecidos, o valor inicial de U no interior do duto é conhecido (na ausência de gás, $U = j_L$).
- ii) Condição inicial para a pressão das bolhas: conforme explicado em (i), considera-se que inicialmente tem-se um escoamento monofásico de líquido e que a frente da primeira bolha está exatamente na entrada do duto ($z = 0$). Logo, a pressão inicial da primeira bolha (única em vias de entrar no duto) pode ser calculada como a pressão na saída do duto ($z = L$) somada à perda de pressão devido ao escoamento da fase líquida (ocupando inicialmente todo o duto).
- iii) Condição de contorno para a velocidade de líquido na entrada: a velocidade de líquido no pistão na entrada do duto é supostamente conhecida. Isto porque, na prática, os valores de j_L na entrada e de j_G na saída são conhecidos. O valor de j_G na entrada pode então ser calculado à partir da pressão na entrada (equação (3. 50)) e, como $U = j = j_L + j_G$, U pode ser calculado na entrada (equação (3. 51)).
- iv) Condição de contorno para a pressão: a pressão na saída do duto ($z = L$) é assumida igual à pressão atmosférica, uma vez que é comum o escoamento descarregar à pressão

atmosférica. No caso de se desejar simular um escoamento que descarregue a uma pressão diferente da atmosférica, basta alterar este valor no modelo.

A condição de contorno iii pode ser calculada como segue:

$$j_G = \frac{Q}{A_T} = \frac{\dot{m}_G}{\rho_G A_T} = \frac{RT}{P_G} \frac{\dot{m}_G}{A_T}, \quad (3.49)$$

considerando aplicável a lei dos gases perfeitos. Rearrmando os termos e considerando as hipóteses de escoamento isotérmico em duto de seção transversal constante e de vazão mássica de gás constante:

$$j_{G(z=0)} = \frac{j_{G(z=L)} P_{G(z=L)}}{P_{G(z=0)}} \quad (3.50)$$

$$U_{(z=0)} = j_L + j_{G(z=0)} \quad (3.51)$$

3.5.2 – Comprimentos de Bolhas e Pistões na Entrada

O modelo em questão utiliza comprimentos de bolhas e pistões na entrada e prevê sua evolução ao longo de toda a tubulação. Assim, além das condições de contorno, devemos necessariamente conhecer os comprimentos de pistões e bolhas na entrada do duto. Existem três maneiras de se fornecer tais comprimentos ao modelo:

- 1) Se conhecermos a distribuição dos comprimentos de pistões na entrada, a distribuição de comprimentos de bolhas pode ser calculada da equação (3.53).
- 2) Se conhecermos as frequências das células na entrada, os comprimentos de pistões e bolhas podem ser calculados com as equações (3.55) e (3.54).
- 3) Fornecer diretamente as distribuições de comprimentos de bolhas e de pistões na entrada, caso conheçamos estes valores.

O modelo de seguimento de bolhas e pistões propaga e permite a interação entre as estruturas gás-líquido ao longo do duto a partir de uma população de bolhas e pistões inserida na seção de entrada (condição de contorno). Quanto melhor for a representação física desta população na entrada, os resultados numéricos estarão mais próximos dos casos reais. Como dificilmente se tem disponível os tamanhos dos pistões e bolhas na entrada, consideraremos na entrada uma aproximação do modelo de Célula Unitária, onde são válidas as relações cinemáticas:

$$j_G = V_B \overline{R_G} \frac{L_B}{L_B + L_S} \quad \text{e} \quad L_B + L_S = \frac{V_B}{f_u},$$

(3. 52)

onde f_u é a frequência da unidade. Estas relações podem ser rearrumadas em função do comprimento do pistão ou em função da frequência da unidade. Assim temos para cada caso:

Caso 1 (L_S conhecido):

$$L_B = \frac{L_S}{\left[\frac{V_B \overline{R_G}}{j_G} - 1 \right]}$$

(3. 53)

Caso 2 (f_u conhecido):

$$L_B = \frac{j_G}{R_G f_u};$$

(3. 54)

$$L_S = \frac{V_B \overline{R_G} - j_G}{R_G f_u};$$

(3. 55)

onde f_u pode ser uma distribuição conhecida (dados experimentais) na seção de entrada ou pode ser calculada à partir das velocidades superficiais na seção de entrada (dado conhecido pois é condição de contorno). Duas correlações foram adotadas para serem utilizadas pelo modelo: Heywood & Richardson (1979):

$$f_u = 0.0434 \left[\frac{j_L}{j} \left(\frac{2.02}{D} + \frac{j^2}{gD} \right) \right]^{1.02},$$

(3. 56)

e Greskovich & Shrier (1972):

$$f_u = 0.0226 \left[\frac{j_L}{j} \left(\frac{2.02}{D} + \frac{j^2}{gD} \right) \right]^{1.2}$$

(3. 57)

Observa-se que nos casos 1 e 2 uma aproximação do modelo de Célula Unitária é feita na seção de entrada. Isto é necessário para a obtenção dos comprimentos.

Faz-se aqui alguns comentários a respeito dos casos 1 e 2. Nota-se que ambos os casos resultam em estimativas de L_S e L_B que satisfazem a conservação da massa de gás na bolha. O caso 1 fornece uma estimativa de L_B baseado no conhecimento de R_G , L_S , j_G e V_B . Entretanto, como o presente modelo não possui um sub-modelo para a fração de vazio, a proposição do caso 1 permite estimativas de L_B que resultam em frequências de células não compatíveis com a realidade, isto é, f_u sendo uma função forte de j_L e fraca de j_G .

$$f_u = \frac{V_B}{(L_S + L_B)}$$

(3. 58)

Para superar esta deficiência do caso 1, foi proposto o caso 2. Nele, estimativas de L_S e L_B satisfazem, simultaneamente, a conservação da massa de gás na bolha e a frequência das células obtidas por correlações experimentais.

Destaca-se porém que, para ambos os casos, R_G ainda é uma variável arbitrada. Num desenvolvimento futuro deste trabalho será introduzido um sub-modelo para determinação de R_G a fim de superar esta limitação.

3.6 – Equações de Fechamento

Do sistema de equações apresentado na seção 3.5, percebe-se que há um maior número de incógnitas que de equações. Como descrito na seção 3.5, as equações acopladas (3. 32) e (3. 48) devem ser resolvidas para U e para P_G . Os demais termos presentes nestas equações devem ser conhecidos, mesmo que em um tempo anterior. Assim, o uso de equações de fechamento se faz necessário para tais termos.

Nas subseções que seguem, serão apresentadas equações que permitem o fechamento do modelo, isto é, que forneçam meios de calcular a tensão por unidade de volume devido ao atrito no pistão de líquido (T_{Lj}), as posições das frentes de bolhas (y_j), as posições das frentes dos pistões (x_j), a variação da pressão devido à expansão do líquido (DP_{Aj}) e a variação da pressão devido ao termo hidrostático (DP_{Hj}).

3.6.1 – Atrito do Pistão de Líquido com a Parede

Nas equações para o pistão (equação (3. 16), por exemplo), utilizamos o termo T_{Lj} . Lá, ele que aparece como positivo devido à sua definição. Ele representa a força de atrito que a parede exerce no líquido por unidade de volume.

$$\overline{T_{Lj}} = -\frac{F}{L_{Sj}A_T} = -\frac{1}{L_{Sj}A_T} \int_0^{L_{Sj}} \tau_j \pi D dx = -\frac{1}{L_{Sj}A_T} \overline{\tau_j} \pi D L_{Sj},$$

(3. 59)

$$\overline{T}_{L_j} = -\frac{4}{\pi D^2} \overline{\tau}_j D \pi = -\frac{4}{D} \overline{\tau}_j, \quad (3.60)$$

onde F é a força de atrito, A_T é a área transversal do duto e L_S é o comprimento do pistão. A tensão τ_j é determinada por meio do fator de atrito de Fanno,

$$\tau_j = \frac{1}{2} f_j \rho_L U_j^2. \quad (3.61)$$

Como o pistão não é aerado, aplica-se o fator de atrito, f_j , para escoamento monofásico. No caso de escoamentos totalmente desenvolvidos, ele é calculado em função do número de Reynolds do pistão, Re_j , conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} Re_j \leq 2000 &\Rightarrow f_j = \frac{16}{Re_j} \\ 2000 < Re_j \leq 10^4 &\Rightarrow \text{transição} \\ 10^4 < Re_j < 10^5 &\Rightarrow f_j = 0.079 (Re_j)^{-0.25} \\ Re_j \geq 10^5 &\Rightarrow f_j = 0.046 (Re_j)^{-0.2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde $Re_j = \frac{\rho_L U_j D}{\mu}$.

Ressalta-se que, devido à dinâmica do padrão golfadas de líquido, o escoamento da fase líquida não é totalmente desenvolvido (ao contrário das correlações utilizadas). Como não é de conhecimento do autor a existência de correlações de f para escoamentos no interior de pistões de líquido (em meio ao padrão golfadas), o uso das correlações (3.62) é uma aproximação necessária.

Definindo-se a variável fat em função do fator de atrito, $fat_j = \frac{2f_j}{D}$, e substituindo a equação (3.61) na equação (3.60):

$$\overline{T_{Lj}} = -fat_j \rho_L U_j^2,$$

(3. 63)

Substituindo na equação (3. 32) levando-se em consideração que $L_{Sj} = x_j - y_j$:

$$P_{Gj+1} = P_{Gj} - \rho_L L_{Sj} \frac{dU_j}{dt} - L_{Sj} fat_j \rho_L U_j^2 - \Delta P_{Aj} + \Delta P_{Hj}.$$

(3. 64)

3.6.2 – Velocidade da Bolha

A velocidade da frente da bolha (V_{Bj}) é determinada através de relações cinemáticas. Elas constituem modelos propostos por Nicklin (1962), Moissis & Grift (1962), Bendiksen (1984), Barnea & Taitel (1993), Grenier (1997) e Fagundes Netto (1999). O avanço no espaço e no tempo da frente da bolha (y_j) será determinado através da integração da velocidade da frente da bolha a cada passo de tempo.

$$\left(\frac{dy_j}{dt} \right) = V_{Bj} \Rightarrow y_j = \int_{t_0}^{t_0+dt} V_{Bj} dt$$

(3. 65)

Estudando o deslocamento de bolhas isoladas em meio a um escoamento vertical, Nicklin (1962) propôs uma relação para velocidade da bolha isolada escoando em um meio líquido:

$$(V_{Bj})_{\infty} = C_0 U_j + V_0.$$

(3. 66)

onde C_0 e V_0 são constantes, $V_0 = C_1 \sqrt{gD}$, e $(V_{Bj})_0$ é a velocidade de deslocamento de uma bolha isolada escoando em um meio líquido (escoamento vertical).

Em um estudo experimental, Bendiksen (1984) levantou valores dos coeficientes C_0 e V_0 para diversas condições de inclinação de escoamento e diversas vazões de gás e de líquido. Para o caso de escoamento horizontal, Bendiksen (1984) sugere:

$$\begin{cases} C_0 = 1.0 \text{ e } V_0 = 0.54\sqrt{gD} & \text{para } Fr < 3.5 \\ C_0 = 1.2 \text{ e } V_0 = 0 & \text{para } Fr > 3.5 \end{cases}$$

(3. 67)

onde g é a aceleração da gravidade e Fr é o número de Froude baseado na velocidade de mistura:

$$Fr = \frac{J}{\sqrt{gD}}$$

Moissis & Griffith (1962) estudaram a esteira formada por um corpo em forma de bolha de Taylor e a interação entre duas bolhas em meio a um escoamento vertical. Neste estudo, os autores verificaram que a velocidade de ascensão de uma bolha que escoar na esteira da bolha precedente é função unicamente da distância entre elas. Os autores propõem a seguinte relação:

$$V_{Bj} = (V_{Bj})_{\infty} \left[1 + h_{(L_{Sj})} \right],$$

(3. 68)

onde,

$$h_{(L_{Sj})} = a_w \exp\left(-b_w \frac{L_{Sj}}{D}\right).$$

(3. 69)

Aqui, a_w e b_w são constantes. Os autores encontraram $a_w = 8$ e $b_w = 1.06$ para um escoamento vertical.

Grenier (1997) propõe, baseado em dados experimentais e em seu modelo de seguimento de pistões, os valores $a_w = 0.4$ e $b_w = 0.5$ para escoamentos horizontais.

Em seu modelo de seguimento de pistões, Barnea & Taitel (1993) propuseram uma modificação da correlação de Moissis & Griffith (1962). Para escoamentos horizontais, eles adotaram para os coeficientes a_w e b_w :

$$a_w = 5.5 \quad \text{e} \quad b_w = \frac{6D}{L_{stab}}, \quad (3.70)$$

onde L_{stab} é o comprimento mínimo de um pistão estável. Se o comprimento do pistão à frente da bolha for maior que L_{stab} , o efeito de esteira é desprezado ($h_{(L_{Sj})} = 0$). Os autores utilizam em suas simulações $L_{stab}/D = 10$ para casos com baixa velocidade de mistura, $L_{stab}/D = 15$ para os demais casos.

Estudando a interação entre duas bolhas em escoamento horizontal, Fagundes Netto (1999) verificou que a velocidade da bolha que escoo na esteira da precedente não é uma função monótona decrescente do comprimento do pistão entre elas. Para algumas distâncias entre bolhas, foi verificado inclusive que a segunda bolha possui uma velocidade menor que a precedente. Uma lei exponencial como a proposta por Moissis & Griffith (1962) não prevê este tipo de comportamento. Uma nova correlação é então proposta por Fagundes Netto (1999) para escoamentos horizontais:

$$V_{Bj} = (V_{Bj})_{\infty} \left(1 + \nu_0 \left(1 - \frac{L_{Sj}}{L_{crit}} \right) \exp\left(-k \frac{L_{Sj}}{D} \right) \right), \quad (3.71)$$

onde k é uma constante de ajuste experimental, L_{crit} é um comprimento crítico e ν_0 é uma constante igual ao valor de $\frac{[V_{Bj} - (V_{Bj})_{\infty}]}{(V_{Bj})_{\infty}}$ quando L_{Sj} tende à zero. O autor afirma que os melhores resultados foram obtidos com $\nu_0 = 0.22$, $L_{crit} = 6.3D$ e $k = 0.16$.

A equação (3. 71) pode ser tratada no formato das equações (3. 68) e (3. 69), fazendo-se para tanto $a_w = v_0 \left(1 - \frac{L_{sj}}{L_{crit}} \right)$ e $b_w = k$. Embora neste caso a_w não seja uma constante, esta forma é conveniente pois pode ser implementada numericamente junto com as equações (3. 68) e (3. 69).

Neste modelo, o avanço no espaço e no tempo da frente da bolha (y_j) será determinado através da integração da velocidade da frente da bolha a cada passo de tempo (equação (3. 65)). Para tanto, a velocidade da bolha será calculada à partir das equações (3. 66), (3. 68) e (3. 69). Os coeficientes C_0 e V_0 são utilizados de acordo com Bendiksen (1984) ou de acordo com dados experimentais do Multilab-FEM. Os coeficientes a_w e b_w são utilizados de acordo com Moissis & Griffith (1962), Barnea & Taitel (1993), Grenier (1997) ou Fagundes Netto (1999).

3.6.3 – Continuidade da Massa de Gás no Interior de uma Bolha (Abordagem Lagrangeana)

O avanço no espaço e no tempo da frente do pistão (x_j) pode ser determinado à partir da continuidade da massa de gás no interior da bolha à sua frente e do avanço da frente da mesma bolha.

Dada a hipótese de pistão não aerado, a bolha não troca massa de gás com os pistões em sua vizinhança. Assim, a massa de gás é constante com o tempo e com o espaço em uma bolha,

$$m_G = \rho_G \overline{R_G} V_G = CTE, \tag{3. 72}$$

e, considerando as hipóteses de pressão constante ao longo de uma bolha e de lei dos gases perfeitos aplicável à fase gasosa,

$$m_G = \frac{P_G}{RT} \overline{R_G} A_T L_B = CTE.$$

(3. 73)

Ainda, considerando as hipóteses de escoamento isotérmico em duto de seção transversal constante e de bolhas com interface plana, temos para a bolha j+1:

$$P_{Gj+1}L_{Bj+1} = P_{Gj+1}(y_{j+1} - x_j) = CTE .$$

(3. 74)

Assim, considerando a constância no tempo, o avanço da frente de um pistão pode ser calculado com base no avanço da frente da bolha à sua frente e na variação da pressão desta mesma bolha.

3.6.4 – Aumento de Pressão Devido à Aceleração do Líquido

O termo referente à aceleração do líquido escoando do filme líquido para o pistão que o segue (DP_{Aj}) pode ser modelado de forma relativamente simples se considerarmos a velocidade da frente do pistão aproximadamente igual ao produto C_0U_j . Teremos então:

$$\Delta P_{Aj} = \rho_L \frac{[1 - (R_{ff+1})_{z=x_j}]}{(R_{ff+1})_{z=x_j}} \left[\frac{dx_j}{dt} - U_j \right]^2 \equiv C_A \rho_L \frac{\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} U_j^2 \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2$$

(3. 75)

onde C_A é uma constante de ajuste (ver Anexo IV).

3.6.5 – Variação de Pressão Hidrostática

Como consideramos a altura do filme líquido constante, o termo referente à variação da pressão hidrostática (DP_{Hj}) pode ser modelado como:

$$\Delta P_{H_j} = \rho_L g \left[\left(\xi_j \right)_{z=y_j} - \left(\xi_{j+1} \right)_{z=x_j} R_f \right] = \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \rho_L U_j^2 \left(\frac{1}{Fr_j} \right)^2 \left(1 - \frac{h_f}{D} R_f \right)$$

(3. 76)

Conforme a equação acima e apresentado no Anexo IV, para elevados números de Froude este termo é desprezível face ao aumento da pressão devido à aceleração do líquido fluindo do filme para o pistão que o segue.

3.7 – Tratamento de Singularidades

Esta seção faz uma discussão dos processos de entrada e saída de bolhas no domínio de cálculo e também da coalescência entre bolhas. Estes são eventos que ocorrem fisicamente em escoamentos por golfadas e devem ser considerados pelo modelo. A apresentação formal do tratamento numérico das singularidades será abordada na seção 4.2 do capítulo 4.

3.7.1 – Entrada de uma Bolha e de um Pistão

Para a introdução de uma bolha, devemos conhecer seu comprimento. Conforme apresentado na seção 3.5, o comprimento da bolha na entrada pode ser obtido de três formas distintas:

- calculado a partir da distribuição de comprimentos de pistões na seção de entrada (equação (3. 53)), caso conheçamos este dado;
- calculada a partir da distribuição de frequências da unidade na entrada (equação (3. 54)), caso conheçamos este dado;
- distribuição de comprimentos de bolhas obtida diretamente de dados experimentais.

Para a introdução de um pistão, também devemos conhecer seu comprimento. Ele pode ser obtido de duas formas distintas:

- distribuição de comprimentos de pistões obtida diretamente de dados experimentais;
- calculado a partir da distribuição de frequências da unidade na entrada (equação(3. 55)), caso conheçamos este dado.

A figura 3. 7 ilustra o processo de introdução de bolhas e pistões no domínio de cálculo. Ela apresenta, de forma esquemática, as posições das primeiras bolhas e pistões com relação ao tempo. O eixo x corresponde à posição ao longo do duto e o eixo y corresponde ao tempo.

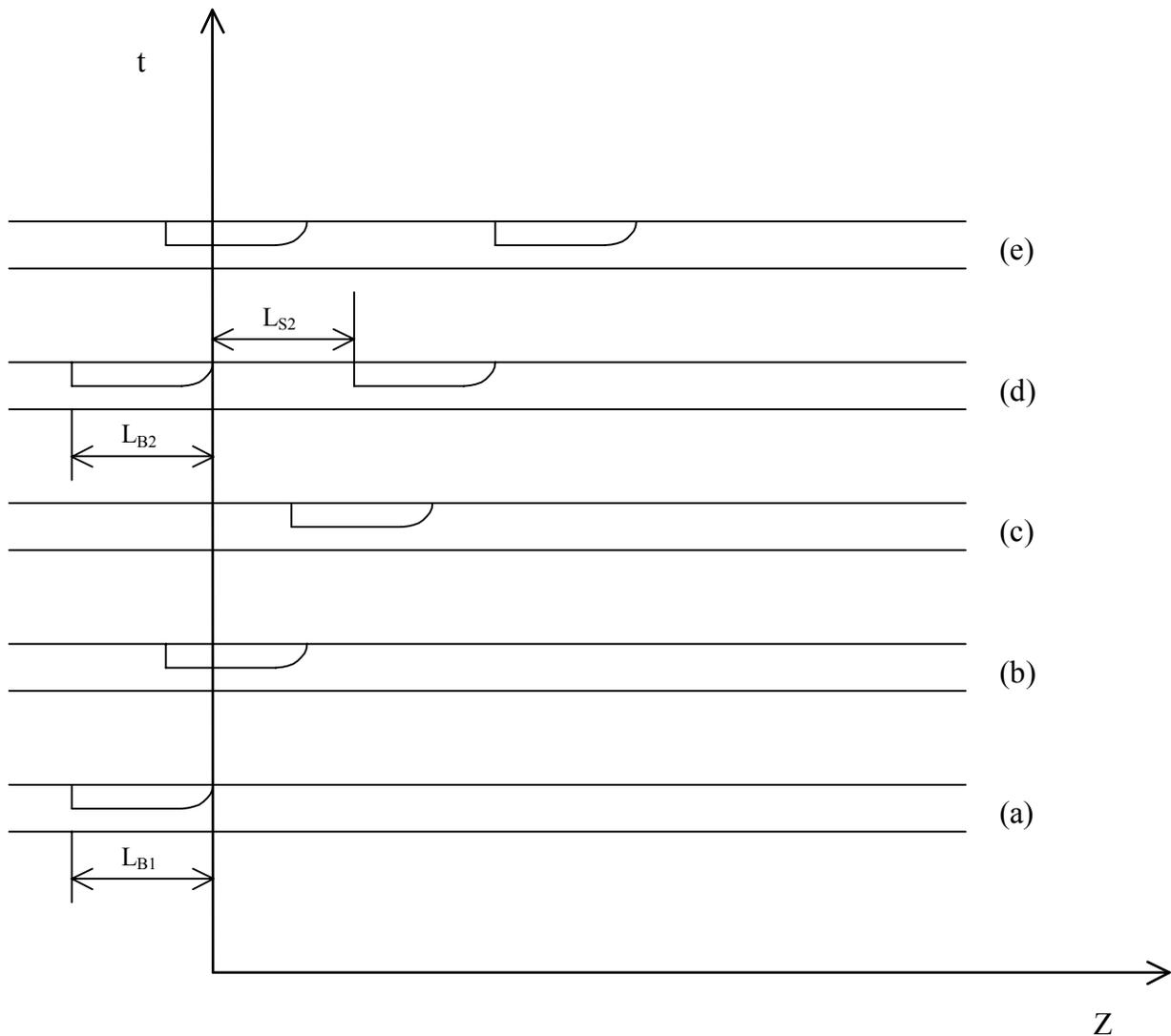


Figura 3. 7. Introdução de bolhas e pistões no domínio de cálculo.

Conforme apresentado na seção 3.5, o processo de cálculo é iniciado considerando que o tubo encontra-se totalmente preenchido com a fase líquida e que a frente da primeira bolha está exatamente na entrada do duto ($z = 0$). O instante inicial corresponde ao instante de tempo (a) da figura 3. 7. No instante inicial, o comprimento da primeira bolha é obtido através de uma das três maneiras citadas acima. Como a frente da bolha que entra encontra-se em $z = 0$, sua traseira possui um valor negativo. À partir deste instante, a evolução desta bolha é prevista pelas equações (3. 32), (3. 48), (3. 65) e (3. 74) e as posições de sua frente e de sua traseira são atualizadas a cada passo de tempo.

Quando a posição da traseira da primeira bolha assumir um valor positivo, a bolha já se encontra totalmente no duto e inicia-se a introdução de um pistão no duto. Este instante corresponde ao instante (c) da figura 3. 7. Devido às condições de contorno, o modelo funciona de forma a estar sempre calculando a velocidade de mistura na seção de entrada. Este pistão englobará uma velocidade de mistura igual à da entrada. Também, o comprimento do pistão que entra será obtido de acordo com uma das duas maneiras descritas acima.

Quando a traseira da bolha à frente do pistão (= frente do pistão) assumir uma coordenada z maior que o comprimento calculado para o pistão, a próxima bolha deve entrar no duto. Isto equivale ao instante (d) da figura 3. 7. Os processos para entrada de bolhas e pistões são então repetidos sucessivamente.

3.7.2 – Saída de uma Bolha e Saída de um Pistão

Em escoamentos por golfadas, tem-se ora uma bolha deixando o duto, ora um pistão de líquido. Cada uma destas estruturas, ao deixar o duto, afeta de forma diferente o escoamento no interior do duto. O modelo deve considerar tal fato.

Quando um pistão está em vias de deixar o duto, a bolha que está mais perto da saída não possui bolhas à sua frente. Para tal bolha não se verificam efeitos de esteira. Em termos das coordenadas do modelo, quando a coordenada x_n é maior que a posição z da saída do duto, um

pistão está deixando o duto e, neste caso, a $n^{\text{ésima}}$ bolha (última bolha) não possui bolhas à sua frente. Então, para essa bolha:

$$\frac{dy_n}{dt} = C_0 U_n + v_0.$$

(3. 77)

A figura 3. 8 ilustra a situação da última célula quando um pistão está deixando o duto.

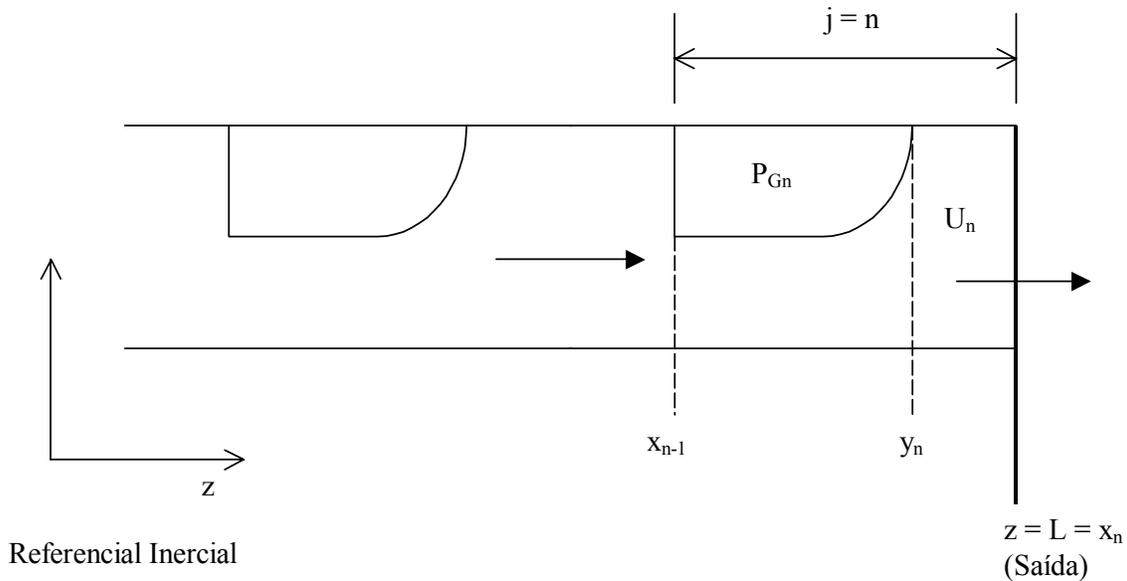


Figura 3. 8. Pistão deixando o duto.

Quando uma bolha está deixando o duto, a pressão da bolha que está saindo é igual à pressão atmosférica. Ainda, como forma de aproximação, pode-se igualar a velocidade da traseira da bolha que sai à velocidade que tinha sua frente no instante imediatamente anterior à sua saída, chamada aqui de $V_{saída}$. Em termos das coordenadas do modelo, quando a coordenada y_n é maior que a posição z da saída do duto, uma bolha está deixando o duto. Então, para essa bolha:

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = V_{saída}$$

$$P_n = P_{atm}$$

(3.78)

A figura 3. 9 ilustra a situação da última célula quando uma bolha está deixando o duto.

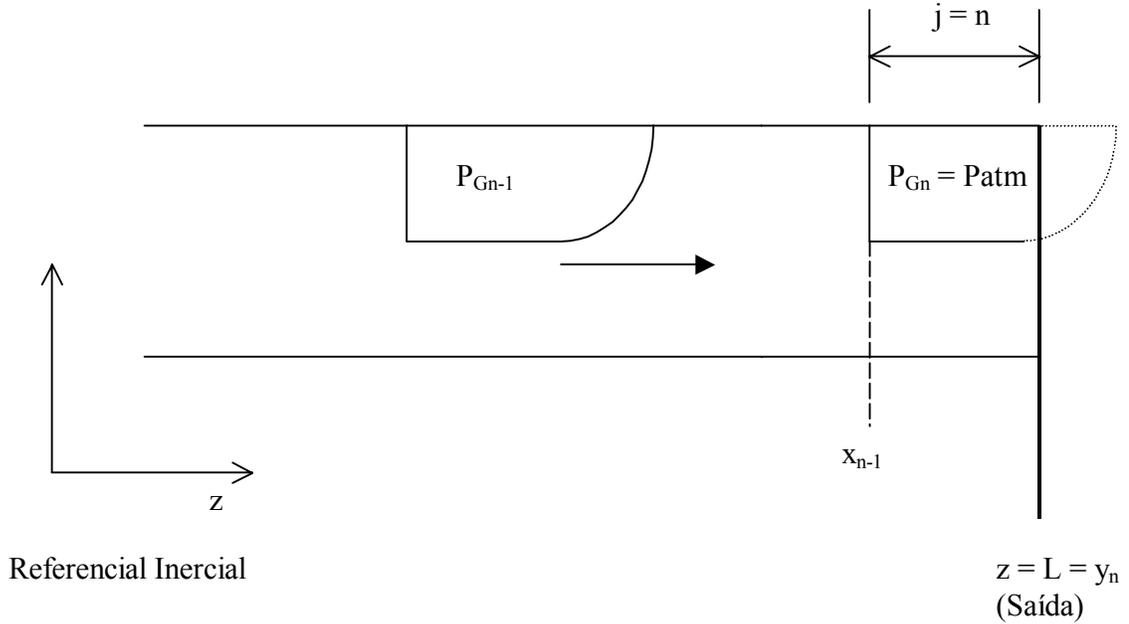


Figura 3. 9. Bolha deixando o duto.

3.7.3 – Coalescência

Em escoamentos por golfadas, o fenômeno da coalescência é comumente observado. Ele ocorre quando uma bolha tem velocidade maior que a bolha à sua frente e, em dado instante, ela a alcança. Este choque entre as bolhas origina uma bolha maior, formada pelas massas de gás das duas bolhas que coalesceram.

Em termos do modelo, quando há uma situação em que o valor da abscissa da frente de uma bolha iguala ou ultrapassa o valor da abscissa da traseira da bolha à sua frente, isto é, $y_j \geq x_j$,

considera-se que houve uma coalescência. Neste caso, todas as bolhas e pistões localizados à jusante da posição em questão são renumerados e o comprimento da nova bolha formada é calculado. A massa de gás desta nova bolha é conservada, isto é, ela é considerada como a soma das massas de gás das bolhas que coalesceram e o comprimento é então calculado. No caso de bolhas com interface plana, com a mesma fração de vazio e sujeitas a pressões semelhantes, o comprimento resultante pode ser aproximado pela soma dos comprimentos das bolhas que coalesceram. Considera-se que o valor de R_G é constante antes e após a coalescência.

Capítulo 4

Implementação do Modelo de Solução Numérica

Este capítulo dá um tratamento numérico ao modelo desenvolvido no capítulo 3, de forma que o modelo possa ser resolvido através de métodos computacionais. A implementação numérica se inicia com a discretização do sistema formado pelas equações (3. 64) e (3. 48) e com a discretização das equações de fechamento (3. 65) e (3. 74). Também são apresentados algoritmos para tratar as singularidades (entrada, saída e coalescência de bolhas) e a inserção de sondas virtuais. Por fim, a solução numérica é confrontada com uma solução analítica conhecida por meio de um caso teste a fim de validar os procedimentos desenvolvidos.

4.1 – Discretização das Equações

O sistema acoplado de equações a ser resolvido numericamente é formado pelas equações (3. 64) e (3. 48):

$$P_{Gj+1} = P_{Gj} - \rho_L L_{Sj} \frac{dU_j}{dt} - L_{Sj} f a t_j \rho_L U_j^2 - \Delta P_{Aj} + \Delta P_{Hj}; \quad (3. 64)$$

proveniente da transporte de quantidade de movimento em um pistão, e,

$$U_j = U_{j-1} - \frac{L_{Bj} \overline{R_{Gj}}}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt}, \quad (3. 48)$$

proveniente da conservação das massas de gás e líquido em uma bolha.

Como apresentado na seção 3.5, a solução adotada para esta sistema constitui-se em um processo numérico de marcha no tempo que será sempre resolvido para U (velocidade do líquido no interior dos pistões) e para P_G (pressão no interior das bolhas). Para tanto, todas variáveis deste sistema deverão ser conhecidas no tempo anterior, de forma a calcularmos U e P_G no tempo presente.

As equações de fechamento a serem resolvidas numericamente são:

$$\left(\frac{dy_j}{dt} \right) = V_{Bj} \quad (3.65)$$

$$P_{Gj+1} L_{Bj+1} = P_{Gj+1} (y_{j+1} - x_j) = CTE \quad (3.74)$$

As equações de fechamento (3.65) e (3.74) são resolvidas, a cada passo de tempo, após as equações (3.64) e (3.48). Assim, uma vez determinados U e P_G , as equações de fechamento (3.65) e (3.74) fornecem respectivamente o avanço da frente da bolha e o avanço da frente do pistão. As equações (3.65) e (3.74) não são acopladas.

4.1.1 – Discretização do Sistema Acoplado (U e P_G)

A discretização do sistema de equações (3.64) e (3.48) se faz no tempo, pois no espaço ela já foi realizada (através da formulação em volumes finitos envolvendo cada bolha e cada pistão). Para a discretização no tempo, é utilizado um esquema implícito de diferenças finitas de ordem unitária, conforme apresentado abaixo. Para as diferenças espaciais de pressão e de velocidade, foi alcançada uma melhoria na precisão da solução através de uso de um esquema do tipo Crank-Nicholson (onde as diferenças espaciais são uma média entre as diferenças no tempo anterior e as diferenças no tempo atual).

A discretização é apresentada a seguir. Com relação ao tempo, os super-índices “O” e “N” indicam o valor da variável no tempo anterior (t_0) e no tempo presente ($t_0 + \Delta t$), respectivamente. A figura 4. 1 apresenta, de forma esquemática, a discretização feita no espaço e no tempo. O eixo das abcissas corresponde a distância longitudinal ao longo do duto e o eixo das ordenadas corresponde ao tempo.

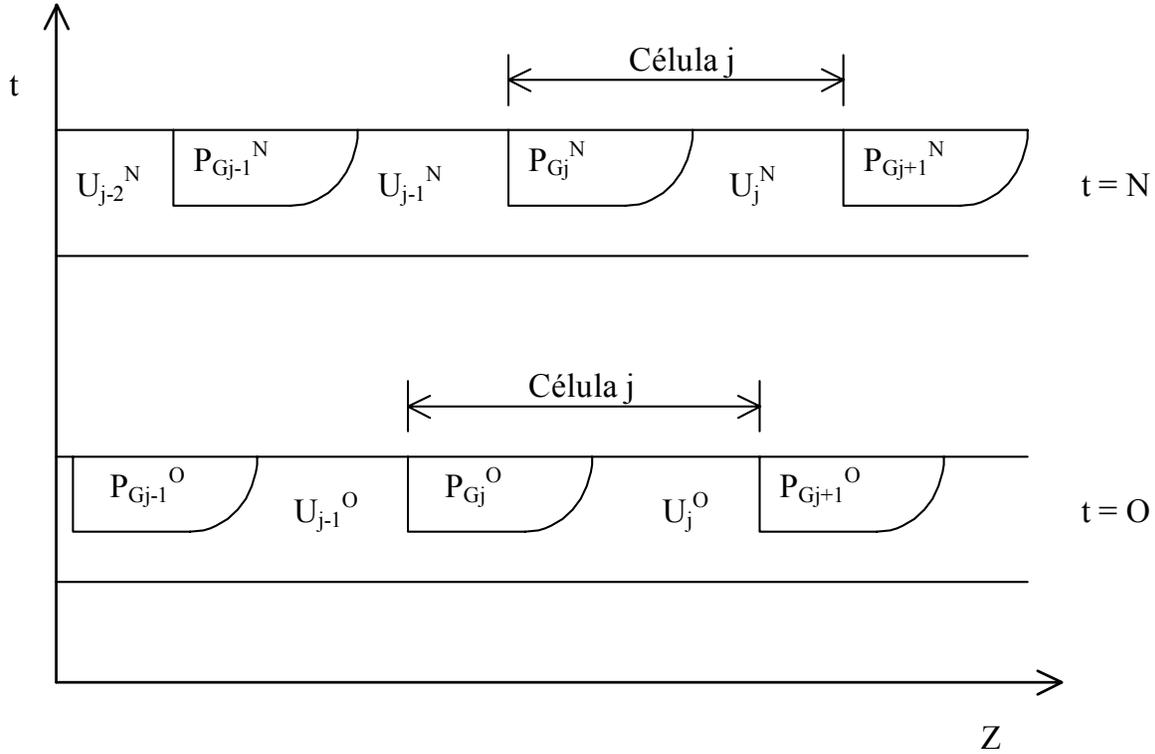


Figura 4. 1. Ilustração da discretização utilizada no tempo e no espaço.

Por conveniência, o sistema é apresentado novamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j - U_{j-1} + \frac{L_{Bj} \overline{R_{Gj}}}{P_{Gj}} \frac{dP_{Gj}}{dt} = 0 \\ P_{Gj+1} - P_{Gj} + \rho_L L_{Sj} \frac{dU_j}{dt} + L_{Sj} f a t_j \rho_L U_j^2 + \Delta P_{Aj} - \Delta P_{Hj} = 0 \end{array} \right. ,$$

utilizando os esquemas numéricos já mencionados e lembrando que DP_{Aj} pode ser modelado pela equação (3. 75),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(U_j^O - U_{j-1}^O) + (U_j^N - U_{j-1}^N)}{2} + \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O (P_{Gj}^N - P_{Gj}^O)}{P_{Gj}^O \Delta t} = 0 \\ \frac{(P_{Gj+1}^O - P_{Gj}^O) + (P_{Gj+1}^N - P_{Gj}^N)}{2} + \rho_L L_{Sj}^O \frac{(U_j^N - U_j^O)}{\Delta t} + L_{Sj}^O fat_j^O \rho_L U_j^O U_j^N + \\ + C_A \rho_L \frac{\overline{R_G}^O}{1 - \overline{R_G}^O} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2 U_j^O U_j^N - \Delta P_{Hj}^O = 0 \end{array} \right.$$

Faz-se $H = \frac{P_G}{\rho_L}$ de forma que o sistema fique melhor condicionado, evitando-se trabalhar

com números muito grandes (como pressões absolutas da ordem de 10^5). Rearrumando os termos, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} (U_j^N - U_{j-1}^N) + (U_j^O - U_{j-1}^O) + \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{H_j^O} \frac{H_j^N}{\Delta t} = \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{\Delta t} \\ (H_{j+1}^N - H_j^N) + (H_{j+1}^O - H_j^O) + 2L_{Sj}^O \frac{U_j^N}{\Delta t} + 2L_{Sj}^O fat_j^O U_j^O U_j^N + \\ + 2C_A \frac{\overline{R_G}^O}{1 - \overline{R_G}^O} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2 U_j^O U_j^N - 2 \frac{\Delta P_{Hj}^O}{\rho_L} = 2L_{Sj}^O \frac{U_j^O}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Isolando as variáveis a serem determinadas no tempo $t_0 + \Delta t$ (super-índice “N”) daquelas já conhecidas no tempo t_0 (super-índice “O”), ficamos com:

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_{j-1}^N + \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{H_j^O \Delta t} H_j^N + U_j^N = \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{\Delta t} + U_{j-1}^O - U_j^O \\ -H_j^N + 2 \left(\frac{L_{Sj}^O}{\Delta t} + L_{Sj}^O fat_j^O U_j^O + C_A \frac{\overline{R_G}^O}{1 - R_G^O} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2 U_j^O \right) U_j^N + H_{j+1}^N = \\ = 2L_{Sj}^O \frac{U_j^O}{\Delta t} - H_{j+1}^O + H_j^O + 2 \frac{\Delta P_{Hj}^O}{\rho_L} \end{array} \right.$$

Fazendo-se ainda, para facilidade de escrita:

$$L_{Sj} fat_j \rho_L U_j^O U_j^O = \Delta P_{Tj}^O, \text{ e, } C_A \rho_L \frac{\overline{R_G}^O}{1 - R_G^O} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2 U_j^O U_j^O = \Delta P_{Aj}^O,$$

obtém-se o sistema implícito de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_{j-1}^N + \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{H_j^O \Delta t} H_j^N + U_j^N = \frac{2L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}}^O}{\Delta t} + U_{j-1}^O - U_j^O \\ -H_j^N + 2 \left(\frac{L_{Sj}^O}{\Delta t} + \frac{\Delta P_{Tj}^O}{\rho_L U_j^O} + \frac{\Delta P_{Aj}^O}{\rho_L U_j^O} \right) U_j^N + H_{j+1}^N = 2L_{Sj}^O \frac{U_j^O}{\Delta t} - H_{j+1}^O + H_j^O + 2 \frac{\Delta P_{Hj}^O}{\rho_L} \end{array} \right.$$

(4.1)

Tem-se um sistema para j indo de 1 até n células unitárias no duto.

j = 1

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_0^N + \frac{2L_{B1}^O \overline{R_{G1}}^O}{H_1^O \Delta t} H_1^N + U_1^N = \frac{2L_{B1}^O \overline{R_{G1}}^O}{\Delta t} + U_0^O - U_1^O \\ -H_1^N + 2 \left(\frac{L_{S1}^O}{\Delta t} + \frac{\Delta P_{T1}^O}{\rho_L U_1^O} + \frac{\Delta P_{A1}^O}{\rho_L U_1^O} \right) U_1^N + H_2^N = 2L_{S1}^O \frac{U_1^O}{\Delta t} - H_2^O + H_1^O + 2 \frac{\Delta P_{H1}^O}{\rho_L} \end{array} \right. ;$$

j = 2

$$\begin{cases} -U_1^N + \frac{2L_{B2}^O \overline{R_{G2}^O}}{H_2^O \Delta t} H_2^N + U_2^N = \frac{2L_{B2}^O \overline{R_{G2}^O}}{\Delta t} + U_1^O - U_2^O \\ -H_2^N + 2 \left(\frac{L_{S2}^O}{\Delta t} + \frac{\Delta P_{T2}^O}{\rho_L U_2^O} + \frac{\Delta P_{A2}^O}{\rho_L U_2^O} \right) U_2^N + H_3^N = 2L_{S2}^O \frac{U_2^O}{\Delta t} - H_3^O + H_2^O + 2 \frac{\Delta P_{H2}^O}{\rho_L} \end{cases} ;$$

j = n

$$\begin{cases} -U_{n-1}^N + \frac{2L_{Bn}^O \overline{R_{Gk}^O}}{H_n^O \Delta t} H_n^N + U_n^N = \frac{2L_{Bn}^O \overline{R_{Gn}^O}}{\Delta t} + U_{n-1}^O - U_n^O \\ -H_n^N + 2 \left(\frac{L_{Sn}^O}{\Delta t} + \frac{\Delta P_{Tn}^O}{\rho_L U_n^O} + \frac{\Delta P_{An}^O}{\rho_L U_n^O} \right) U_n^N + H_{n+1}^N = 2L_{Sn}^O \frac{U_n^O}{\Delta t} - H_{n+1}^O + H_n^O + 2 \frac{\Delta P_{Hn}^O}{\rho_L} \end{cases} .$$

Este sistema pode ser reescrito na forma matricial:

$$A^O X^N = B^O,$$

(4. 2)

onde a matriz A é constituída por coeficientes determinados no tempo “O”:

e B é um vetor constituído por coeficientes determinados no tempo anterior (“O”):

$$B^O = \begin{bmatrix} \frac{2\overline{R_{G1}}^O L_{B1}^O}{\Delta t} - U_1^O + U_0^O + U_0^N \\ \frac{2L_{S1}^O U_1^O}{\Delta t} - H_2^O + H_1^O + 2 \frac{\Delta P_{H1}^O}{\rho_L} \\ \frac{2\overline{R_{G2}}^O L_{B2}^O}{\Delta t} - U_2^O + U_1^O \\ \vdots \\ \frac{2L_{S_{n-1}}^O U_{n-1}^O}{\Delta t} - H_n^O + H_{n-1}^O + 2 \frac{\Delta P_{H_{n-1}}^O}{\rho_L} \\ \frac{2\overline{R_{Gn}}^O L_{Bn}^O}{\Delta t} - U_n^O + U_{n-1}^O \\ \frac{2L_{S_n}^O U_n^O}{\Delta t} - H_{n+1}^O + H_n^O - H_{n+1}^N + 2 \frac{\Delta P_{Hn}^O}{\rho_L} \end{bmatrix}$$

(4. 5)

A matriz A é uma matriz tridiagonal $2n. \times 2n$ e os vetores X e B são $2n$, onde n é o número total de células unitárias presentes no duto. Dessa forma, a matriz A e os vetores X e B são transientes, isto é, seus tamanhos variam com o tempo devido a entrada, saída e coalescência de bolhas.

Destaca-se que as condições de contorno do problema estão no vetor B e serão apresentadas na seção 4.2.1.

Destaca-se ainda que, embora o sistema de equações acopladas tenha sido discretizado de forma implícita, ele utiliza os valores de y e x calculados no tempo anterior, que por sua vez foram calculados através das equações (3. 65) e (3. 74), discretizadas explicitamente (seção 4.1.2). Como (3. 65) e (3. 74) são discretizadas explicitamente, espera-se que o conjunto de 4 equações discretas (sistema (4. 1) e equações (4. 6) e (4. 7)) utilizado pelo modelo esteja sujeito ao critério de Courant. Esta discussão é apresentada na seção 5.1.

4.1.2 – Discretização das Equações de Fechamento para Frentes de Bolha e de Pistão (y e x)

Para cada intervalo de tempo da solução numérica, após a obtenção de U_j e H_j , as posições das frentes de bolhas e de pistões devem ser calculadas. Isto é possível a partir das equações de fechamento (3. 65) e (3. 74), discretizadas de forma explícita, como segue:

Para as frentes de bolhas, faz-se uma integração de ordem unitária da equação (3. 65):

$$\left(\frac{dy_j}{dt} \right) = V_{Bj} \Rightarrow \frac{y_j^N - y_j^O}{\Delta t} = V_{Bj}^N$$
$$y_j^N = y_j^O + \Delta t V_{Bj}^N$$

(4. 6)

Para as frentes de pistões, faz-se um esquema numérico explícito de ordem unitária a partir da equação (3. 74):

$$P_{Gj+1} L_{Bj+1} = P_{Gj+1} (y_{j+1} - x_j) = cte ;$$
$$P_{Gj+1}^N (y_{j+1}^N - x_j^N) = P_{Gj+1}^O (y_{j+1}^O - x_j^O);$$
$$x_j^N = y_{j+1}^N - \frac{P_{Gj+1}^O}{P_{Gj+1}^N} (y_{j+1}^O - x_j^O).$$

(4. 7)

4.2 – Algoritmos para Tratamento de Singularidades e Inserção de Sondas

Os algoritmos para o tratamento das condições de contorno, das condições iniciais, das singularidades (entrada, saída e coalescência de bolhas) e a lógica das sondas virtuais são apresentadas nesta seção.

4.2.1 – Condições de Contorno e Condições Iniciais

Esta seção está relacionada à seção 3.5.1, onde são discutidas as condições de contorno e iniciais do problema. Faz-se aqui uma abordagem de cunho numérico, discutindo-se a inserção das condições de contorno no modelo numérico.

4.2.1.1 – Condições de Contorno

Conforme visto na seção 3.5.1, para resolver o sistema formado pelas equações (3. 64) e (3. 48) são necessárias uma condição de contorno para a pressão das bolhas e uma condição de contorno para a velocidade de mistura nos pistões. A condição para a pressão nas bolhas deve ser fornecida na seção de descarga do duto e a condição para a velocidade de mistura nos pistões deve ser fornecida na seção de entrada do duto.

Da física do problema, a pressão na seção de saída do duto é a pressão de descarga, freqüentemente igual a pressão atmosférica e simbolizada por P_{atm} . Caso se necessite trabalhar com uma pressão de descarga diferente da pressão atmosférica, basta alterar o valor de P_{atm} para um valor mais adequado. Já a velocidade de mistura na seção de entrada pode ser calculada a partir da equação (3. 51).

Ainda, foi visto na seção 3.5.2 que o modelo utiliza comprimentos de bolhas e pistões na seção de entrada e prevê sua evolução ao longo de toda a tubulação. Os comprimentos na seção de entrada, apesar de não serem explicitamente condições de contorno, devem ser conhecidos.

Do esquema numérico desenvolvido na seção 4.1.1, percebe-se que as condições de contorno do problema encontram-se no vetor B. Estas condições são apresentadas nos itens (i) e (ii) abaixo. Os comprimentos de pistões e de bolhas na seção de entrada encontram-se tanto na matriz A quanto no vetor B sempre que uma bolha inicia seu processo de entrada no duto. O cálculo destes valores é comentado no item (iii) abaixo.

i) U_0^N e U_0^O

Estas variáveis correspondem a velocidade de mistura na seção de entrada ($z = 0$). U_0^O já é conhecido do tempo anterior e U_0^N é calculado de acordo com as equações (3. 50) e (3. 51). O valor de U_0^N é calculado a cada passo de tempo e é sempre utilizado pelo vetor B. Assim, para cada iteração numérica faz-se:

$$j_{G(z=0)} = \frac{j_{G(z=L)} P_{G(z=L)}}{P_{G(z=0)}} = \frac{j_{Gatm} P_{atm}}{P_{G(z=0)}}$$

onde,

$$P_{G(z=0)} = P_{G1} , \text{ se tivermos uma bolha na seção de entrada do duto.}$$

(4. 8)

$$P_{G(z=0)} = P_{G1} + fat_0^0 U_0^O U_0^O \rho_L^0 L_{S0} , \text{ se tivermos um pistão na seção de entrada do duto.}$$

(4. 9)

$$U_{(z=0)}^N = j_L + j_{G(z=0)}$$

As figuras 4. 2 e 4. 3 abaixo ilustram a pressão a velocidade de mistura utilizadas na entrada ($z = 0$) quando se tem uma bolha ou um pistão entrando no duto. Ainda, quando se tem uma bolha entrando no duto, o valor de U_0 a ser utilizado deveria ser o valor da velocidade de mistura atrás da bolha que entra, isto é, em uma posição negativa no eixo z (figura 4. 2). Como aproximação, mesmo quando tem-se uma bolha entrando no duto, o modelo numérico calcula U_0 em $z = 0$, como apresentado anteriormente.

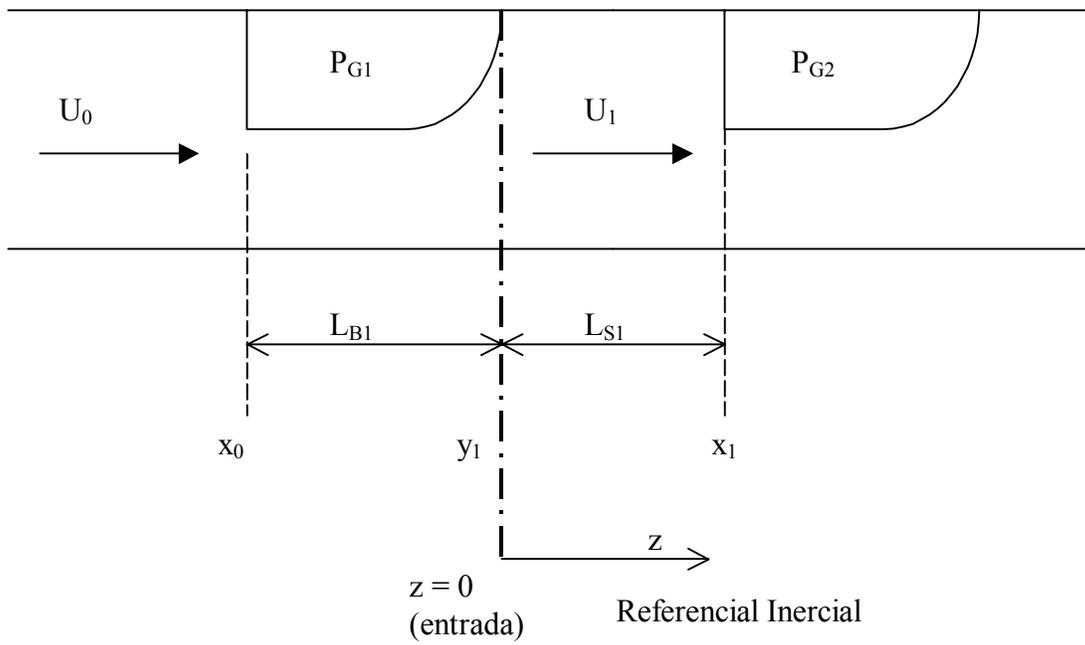


Figura 4. 2. Início da entrada de uma bolha no duto

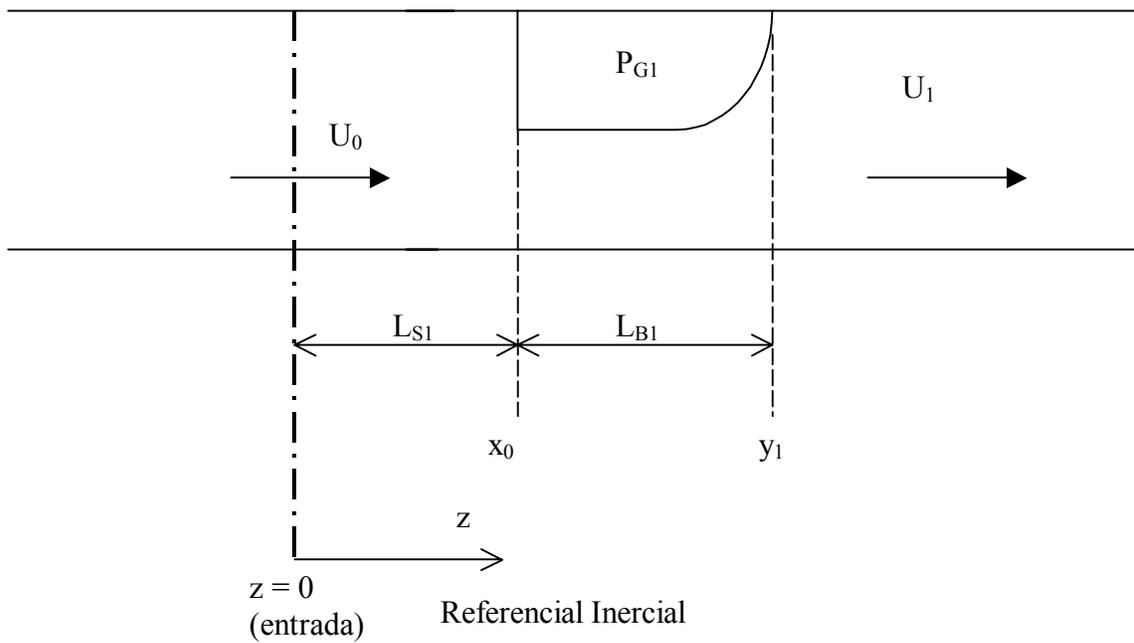


Figura 4. 3. Pistão entrando no duto

$$\text{ii) } H_{k+1}^N = H_{k+1}^O = P_{atm}/\rho_L;$$

Estas variáveis correspondem a pressão na seção de descarga do duto ($z = L$), divididas pela densidade da fase líquida. Este valor é constante e é sempre imposto a H_{k+1}^N e a H_{k+1}^O , já que a pressão na seção de descarga do duto é, em geral, constante e igual a pressão atmosférica. No caso da pressão de descarga ser diferente da pressão atmosférica, basta utilizar tal valor dividido pela densidade do líquido. Assim, faz-se a cada iteração:

$$H_{k+1} = \frac{P_{(z=L)}}{\rho_L} = \frac{P_{atm}}{\rho_L}$$

(iii) L_{S1} e L_{B1} quando uma bolha inicia sua entrada no duto.

Os comprimentos de bolhas e pistões na seção de entrada possuem o índice 1 e estão presentes tanto no vetor B quanto na matriz A. Os cálculos destes valores estão relacionados ao processo de entrada de bolhas e pistões no duto e são descritos na seção 4.2.2.

4.2.1.2 – Condições de Iniciais

As condições iniciais somente são conhecidas caso consideremos (conforme descrito em 3.5) o instante imediatamente anterior a entrada da primeira bolha, tendo-se assim um escoamento monofásico de líquido. Desta forma:

- i) A velocidade inicial do líquido (U) em todo o duto é igual a velocidade superficial do líquido na entrada (j_L);
- ii) A pressão inicial da primeira bolha (isto é, a pressão em $z = 0$) é a pressão na seção de saída do duto ($z = L$) somada a queda de pressão devido ao atrito da fase líquida (ocupando inicialmente todo o duto).

Em termos numéricos, as condições iniciais são:

L = dado de entrada do modelo

D = dado de entrada do modelo

L_{S0}^0 = dado de entrada do modelo

$\overline{R_G}$ = dado de entrada do modelo

$$U_0^0 \equiv j_L + j_{G(z=0)}^0$$

$$U_1^1 \equiv j_L$$

$$U_1^0 \equiv j_L$$

fat_1^0 = calculado à partir do escoamento monofásico

$\rho_L^0 = \rho_L = \rho_L$ = dado de entrada do modelo

$$P_2^0 = P_2^N = P_{atm}$$

$$P_1^0 = P_2^0 + fat_1^0 U_1^0 U_1^0 \rho_L^0 L$$

$$x_1^0 = x_1 = L$$

$$y_1^0 = 0$$

L_{B1}^0 = entrada do modelo

$$x_0^0 = 0 - L_{B1}^0$$

onde L é o comprimento total do duto e D é o seu diâmetro.

Não é esperado que o valor inicial assumido para L_B guarde memória para o escoamento que segue. Isto foi de fato verificado nas diversas simulações realizadas. Os valores de L_S podem ser dados diretamente ao modelo ou podem ser calculados a partir da frequência da primeira célula a entrar no duto.

Como pode-se perceber das condições iniciais e de contorno, no instante $t=t_0$ tem-se um sistema apresentado abaixo, onde só há uma bolha entrando no duto.

$$\begin{bmatrix} \frac{2L_{B1}^0 \overline{R_{G1}}^0}{H_1^0 \Delta t} & +1 \\ -1 & 2 \left(\frac{L_{S1}^0}{\Delta t} + \frac{\Delta P_{T1}^0}{\rho_L U_1^0} + \frac{\Delta P_{E1}^0}{\rho_L U_1^0} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^N \\ U_1^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\overline{R_{G1}}^0 L_{B1}^0}{\Delta t} + U_0^N \\ \frac{2L_{S1}^0 U_1^0}{\Delta t} - \frac{Pa}{\rho_L} + 2 \frac{\Delta P_{H1}^0}{\rho_L} \end{bmatrix}$$

A primeira iteração deve ser realizada com base nas condições iniciais e na solução da equação matricial. O algoritmo para a primeira iteração é apresentado abaixo.

Algoritmo para a primeira iteração:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^N = \text{resolução da matriz} \\ H_1^N = \text{resolução da matriz} \\ P_{G1}^N = H_1^N \rho_L \\ (V_{B1}^N)_\infty = C_0 U_1^N + V_0 \\ V_{B1}^N = (V_{B1}^N)_\infty (1 + h_{(L_{S1})}^O) \\ y_1^N = y_1^O + \Delta t V_{B1}^N \\ x_1^N = x_0^O = L = \text{comprimento do duto} \\ x_0^N = y_1^N - \frac{P_{G1}^O}{P_{G1}^N} (y_1^O - x_0^O) \\ L_{S1} = x_1^N - y_1^N \\ L_{B1}^N = y_1^N - x_0^N \\ fat_1^N = \text{calculado à partir de } Re_j \end{array} \right.$$

onde fat_1^0 é calculado em função do número de Re_j , conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} Re_j \leq 10^4 &\Rightarrow fat_j = \frac{32}{Re_j D} \\ 10^4 < Re_j < 10^5 &\Rightarrow fat_j = \frac{0.158}{D} (Re_j)^{-0.25} \\ Re_j \geq 10^5 &\Rightarrow fat_j = \frac{0.092}{D} (Re_j)^{-0.2} \\ \text{onde, } Re_j &= \frac{\rho_L U_j D}{\mu} \end{aligned}$$

4.2.2 – Entrada de Bolhas e Pistões

Esta seção está diretamente relacionada às seções 3.7.1 e 4.2.1.1. Conforme visto na seção 3.7.1, pistões e bolhas estão sempre entrando no duto. A entrada de uma nova célula no duto

aumenta o número total de células no interior do duto e altera os índices de todas as demais células. Ainda, conforme visto na seção 4.2.1.1, o modelo necessita dos comprimentos de pistões e bolhas na seção de entrada. Assim, tais comprimentos são calculados e utilizados no momento da introdução de bolhas e pistões no duto. Esta seção tem por objetivo apresentar esquematicamente como estes fatores são introduzidos numericamente no modelo.

A figura 4. 4 apresenta de forma esquemática a introdução de pistões ($t = t_0$) e de bolhas ($t = t_1$) na seção de entrada. O eixo das abcissas corresponde ao eixo longitudinal do duto e o eixo das ordenadas corresponde ao tempo. As variáveis e os índices envolvidos no processo de introdução de bolhas e pistões são apresentados na figura.

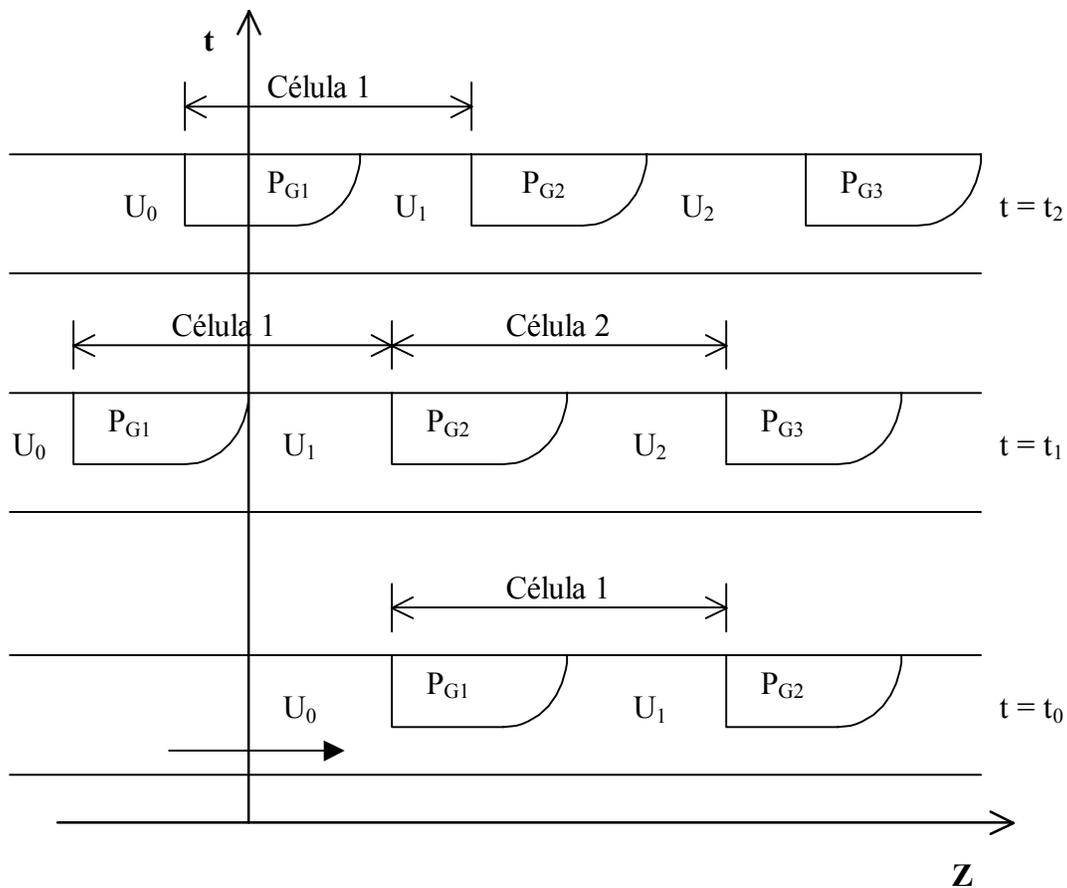


Figura 4. 4 - Modelagem da entrada de bolhas no sistema

Numericamente, a entrada de um pistão está ocorrendo sempre que a traseira da bolha 1 (posição $z = x_0$) tiver um valor positivo. Este é o caso do instante $t = t_0$ na figura 4. 4. Para este pistão, que ainda não faz parte de uma célula pois não há bolhas atrás dele, a velocidade de mistura é chamada de U_0 e é calculada pelas equações (3. 50) e (3. 51). A pressão na seção de entrada, P_0 , é calculada pela equação (4. 9).

A entrada de uma bolha tem início quando a traseira da bolha $j = 1$ (posição $z = x_0$) ultrapassa em z o comprimento L_S do próximo pistão a entrar no duto. Este é o caso do instante $t = t_1$ na figura 4. 4. A pressão na seção de entrada, P_0 , é calculada pela equação (4. 8) e a velocidade de mistura na seção de entrada é calculada pelas equações (3. 50) e (3. 51). O comprimento do próximo pistão a entrar no duto deve ser conhecido. Ele provém da distribuição dos comprimentos de pistão na entrada ou da distribuição de frequências na entrada do duto (equação 3. 55). O comprimento da bolha que começa a entrar é calculada com base no comprimento do pistão a sua frente (equação (3. 53)) ou baseado na distribuição de frequências na entrada do duto (equação (3. 64)). Assim:

$$x_0 > L_S(0) \Rightarrow \text{entrada de uma nova bolha}$$

Uma consequência da entrada de uma bolha é que deve-se renumerar todas a bolhas e pistões, assim como as grandezas a eles associadas. Isto é necessário devido a convenção adotada, na qual a numeração das células cresce da entrada para a saída do duto. Assim, ao entrar uma nova bolha no duto, os índices de cada célula unitária devem ser acrescidos do valor 1. Em termos numéricos:

$$\begin{aligned}
x_2^N &= x_1^O \\
y_2^N &= y_1^O \\
L_{B2}^N &= L_{B1}^O \\
L_{S2}^N &= L_{S1}^O \\
U_2^N &= U_1^O \\
. \\
. \\
. \\
x_n^N &= x_{n-1}^O \\
y_n^N &= y_{n-1}^O \\
L_{Bn}^N &= L_{Bn-1}^O \\
L_{Sn}^N &= L_{Sn-1}^O \\
U_n^N &= U_{n-1}^O \\
. \\
. \\
.
\end{aligned}$$

E, lembrando que enquanto o pistão entrava no duto ele não fazia parte de uma célula nem possuía índice, os valores de entrada da nova célula devem ser atribuídos. Tais valores são conhecidos (condições de contorno) ou podem ser calculados. Em termos numéricos:

$$\begin{aligned}
x_1^N &= \text{valor} \\
y_1^N &= \text{valor} \\
L_{B1}^N &= \text{valor} \\
L_{S1}^N &= \text{valor} \\
U_1^N &= \text{valor} \\
. \\
. \\
.
\end{aligned}$$

Conforme comentado na seção 4.2.1.1, quando se tem uma bolha entrando no duto, o valor de U_0 a ser utilizado deveria ser o valor da velocidade de mistura atrás da bolha que entra, isto é,

em uma posição negativa no eixo z. Como aproximação, mesmo quando tem-se uma bolha entrando no duto, o modelo numérico calcula U_0 em $z = 0$ (ver figuras 4. 2 e 4. 4).

Nota-se que enquanto a bolha não entrou totalmente no duto, o modelo considera um valor negativo para a posição de sua traseira (instantes $t = t_1$ e $t = t_2$ na figura 4. 4). Entretanto, isto não impede que, a partir deste instante, o modelo calcule os parâmetros relativos a esta bolha e ao pistão a sua frente. Assim, a partir do momento que uma bolha iniciou sua entrada no duto, o modelo segue calculando seu deslocamento, sua velocidade, seu comprimento e sua pressão para os instantes de tempo seguintes. Os valores dos comprimentos de pistões e de bolhas na seção de entrada são necessários apenas no instante do início da entrada de uma bolha. Para as próximas iterações estes valores não são mais necessários.

Quando a posição da traseira da primeira bolha assumir um valor positivo, inicia-se a entrada de um novo pistão. Inicia-se novamente o processo de introdução de um pistão, conforme descrito anteriormente, até que se deva introduzir a próxima bolha.

O algoritmo formulado para a entrada de pistões e bolhas é como segue:

Algoritmo para entrada de pistões e bolhas:

Enquanto $0 < x_0 <$ comprimento do próximo pistão a entrar no duto

Pistão está entrando no duto;

$$P_{G(0)} = P_{G1} + fat_0^0 U_0^0 U_0^0 \rho_L^0 L_{S0}$$

$$j_{G(0)} = \frac{j_{Gatm} P_{atm}}{P_{G(0)}}$$

$$U_0^N = j_L + j_{G(0)}$$

Quando $x_0 >$ comprimento do próximo pistão a entrar no duto

Bolha inicia sua entrada no duto

$n = n + 1$ (onde n é o número de bolhas no duto)

Para j decrescendo de n a 2

$$\begin{aligned}
x_j^N &= x_{j-1}^O \\
y_j^N &= y_{j-1}^O \\
L_{Bj}^N &= L_{Bj-1}^O \\
L_{Sj}^N &= L_{Sj-1}^O \\
U_j^N &= U_{j-1}^O \\
P_{Gj}^N &= P_{Gj-1}^O \\
H_j^N &= H_{j-1}^O \\
V_{Bj}^N &= V_{Bj-1}^O
\end{aligned}$$

Para $j=1$ (nova bolha)

$$\begin{aligned}
x_1^N &= x_0^O \\
y_1^N &= 0 \\
U_1^N &= U_0^O \\
(V_{B1}^N)_\infty &= C_0 U_1^N + V_0 \\
V_{B1}^N &= (V_{B1}^N)_\infty (1 + h_{(L_{S1})}) \\
L_{S1}^N &= x_1^N - y_1^N \\
L_{B1}^N &= \frac{L_{S1}^N}{\left[\frac{V_{B1}^N R_G}{j_{G(0)}} - 1 \right]}, \text{ ou, } L_{B1}^N = \frac{j_{G(0)}}{R_G f_u} \\
x_0^N &= y_1^N - L_{B1}^N \\
fat_1^N &= \text{valor calculado} \\
P_{G1}^N &= P_{G2}^N + \rho_L L_{B1}^N fat_1^N U_1^N U_1^N \\
H_1^N &= \frac{P_{G1}^N}{\rho_L} \\
j_{G(0)} &= \frac{P_{atm} J_{Gam}}{P_1} \\
U_0^N &= J_L + J_{G(0)}
\end{aligned}$$

OBS: O valor do próximo pistão a entrar no duto pode ser dado diretamente ao modelo ou calculado a partir da frequência da célula na seção de entrada (equação (3. 55)).

4.2.3 – Saída de Bolhas e de Pistões

Esta seção está diretamente relacionada à seção 3.7.2, no entanto aqui faz-se uma abordagem de cunho numérico. Na saída, conforme apresentado na seção 3.7.2, tem-se dois casos distintos: a saída de uma bolha e a saída de um pistão. Faremos aqui uma análise separada de cada caso. Numericamente, o modelo faz o mesmo, isto é, identifica se há uma bolha ou um pistão deixando o duto e aplica o algoritmo adequado.

A figura 4. 5 apresenta, de forma esquemática, as posições das células ao longo do duto com relação ao tempo. O eixo das abcissas corresponde a posição ao longo do duto e o eixo das ordenadas corresponde ao tempo. Esta figura ilustra os dois casos: em $t = t_0$ tem-se um pistão deixando o duto e em $t = t_1$ tem-se uma bolha deixando o duto.

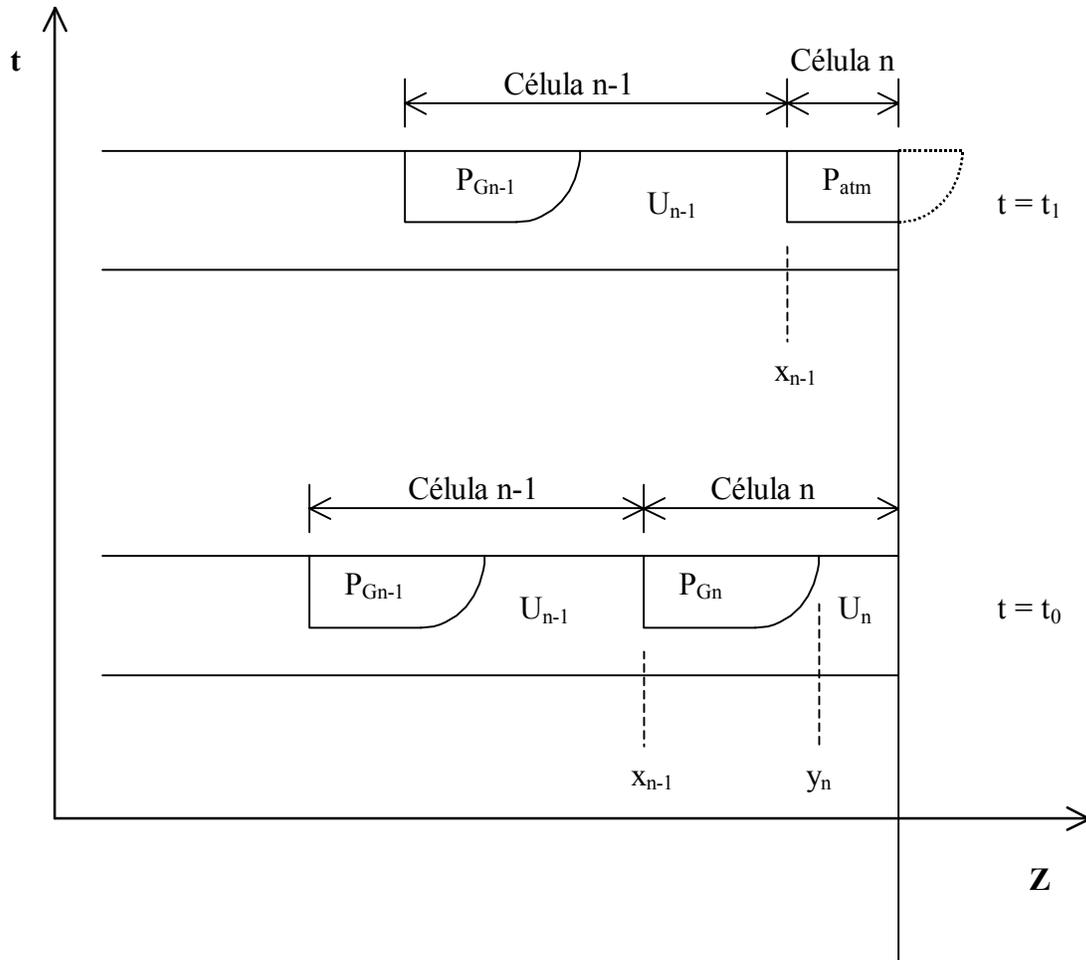


Figura 4.5 - Saída de pistões e de bolhas.

Caso A: Saída de um pistão ($t = t_0$)

Enquanto a frente da última bolha estiver a uma distância da origem menor que o comprimento do duto, isto é, $y_n < L$, teremos um pistão deixando o duto. Neste caso, o comprimento do pistão n diminui com o tempo conforme a frente da última bolha (y_n) se desloca em direção a seção de saída.

Observa-se que, para este último pistão, a posição de sua frente está parada em $z = L$. Assim, enquanto um pistão estiver deixando o duto, $x_n = L$. Percebe-se também que, como a

última bolha não possui bolhas a sua frente, ela não estará sujeita ao efeito de esteira: $V_{Bn} = V_{Bn0}$.

Um algoritmo para o tratamento da última célula quando temos um pistão deixando o duto é como abaixo.

Algoritmo para a última célula quando tem-se um pistão saindo:

Se $y_n < L$ H pistão saindo

$$U_n^N = \text{resolução da matriz}$$

$$H_n^N = \text{resolução da matriz}$$

$$P_{Gn}^N = H_n^N \rho_L$$

$$V_{Bn}^N = (V_{Bn}^N)_\infty = C_0 U_n^N + V_o$$

$$x_n^N = \text{constante} = L$$

$$y_n^N = y_n^O + V_{Bn}^N \Delta t$$

$$L_{Sn}^N = x_n^N - y_n^N$$

$$L_{Bn}^N = y_n^N - x_{n-1}^N$$

$$fat_n^N = \text{valor calculado de } Re_n$$

Caso B: Saída de uma bolha ($t = t_1$)

A partir do momento em que a frente da última bolha estiver a uma distância da origem maior ou igual ao comprimento do duto, isto é, $y_n \geq L$, teremos uma bolha deixando o duto. Neste caso, o comprimento da bolha n diminui com o tempo conforme a traseira da última bolha (x_{n-1}) se desloca em direção a seção de saída.

Observa-se que, para esta última bolha, a posição de sua frente está parada em $z = L$. Assim, enquanto uma bolha estiver deixando o duto, $y_n = L$. Também, como a última bolha está na seção de descarga, sua pressão é igual a pressão de descarga, em geral igual a pressão atmosférica: $P_{Gn} = P_{atm}$. (condição de contorno do problema, conforme descrito nas seções 3.51 e 4.2.1.1).

Quando a traseira da última bolha atingir ou ultrapassar a seção de saída, isto é, $x_{n-1} \bar{=} L$, considera-se que a última célula deixou o duto. O número total de células no duto é decrescido de uma unidade.

Como descrito na seção 3.7.2, a partir do momento que uma bolha começa a deixar o duto, é assumido que sua traseira possui uma velocidade igual a que sua frente possuía no instante imediatamente anterior ao início da saída, chamada de $V_{saída}$.

Um algoritmo para o tratamento da última célula quando temos uma bolha deixando o duto é como abaixo.

Algoritmo para a bolha que sai:

Se $y_n \bar{=} L$ H bolha saindo

$$P_{Gn}^N = P_{atm}$$

$$H_n^N = \frac{P_{Gn}^N}{\rho_L}$$

$$y_n^N = \text{constante} = L$$

$$x_n^N = \text{constante} = L$$

$$V_{saída} = V_{Bn}^O$$

$$\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta t} \cong V_{saída} \Rightarrow \Delta x_{n-1} = V_{saída} \Delta t \Rightarrow x_{n-1}^N = x_{n-1}^O + V_{saída} \Delta t$$

$$L_{S_n}^N = 0$$

$$L_{B_n}^N = y_n^N - x_{n-1}^N$$

$$n^N = n^O - 1$$

OBS: Quando uma bolha está deixando o duto, o pistão que estava a sua frente não existe mais. Entretanto, como forma de simplificar o algoritmo utilizado, a posição da frente do pistão que já deixou o duto é, mesmo após sua saída, fixada em $z = L$.

4.2.4 – Coalescência de bolhas

Esta seção está diretamente relacionada à seção 3.7.3, no entanto aqui faz-se uma abordagem de cunho numérico.

Quando ocorre uma situação em que a abscissa da frente de uma bolha $j = k$ iguala ou ultrapassa o valor da abscissa da traseira da bolha $j = k+1$ a sua frente, isto é, $y_k \geq x_k$, considera-se que a coalescência está ocorrendo. Além da nova bolha formada, uma reindexação deverá ser feita nas células a frente da nova bolha (em virtude do sistema de indexação adotado). O número total de células no duto também deverá ser decrescido.

A figura 4. 6 apresenta, de forma esquemática, as posições das células ao longo do duto com relação ao tempo. O eixo das abcissas corresponde a posição ao longo do duto e o eixo das ordenadas corresponde ao tempo. Esta figura ilustra o processo de reindexação durante o coalescimento de bolhas: em $t = t_0$ a coalescência está prestes a ocorrer e em $t = t_1$ ela já ocorreu.

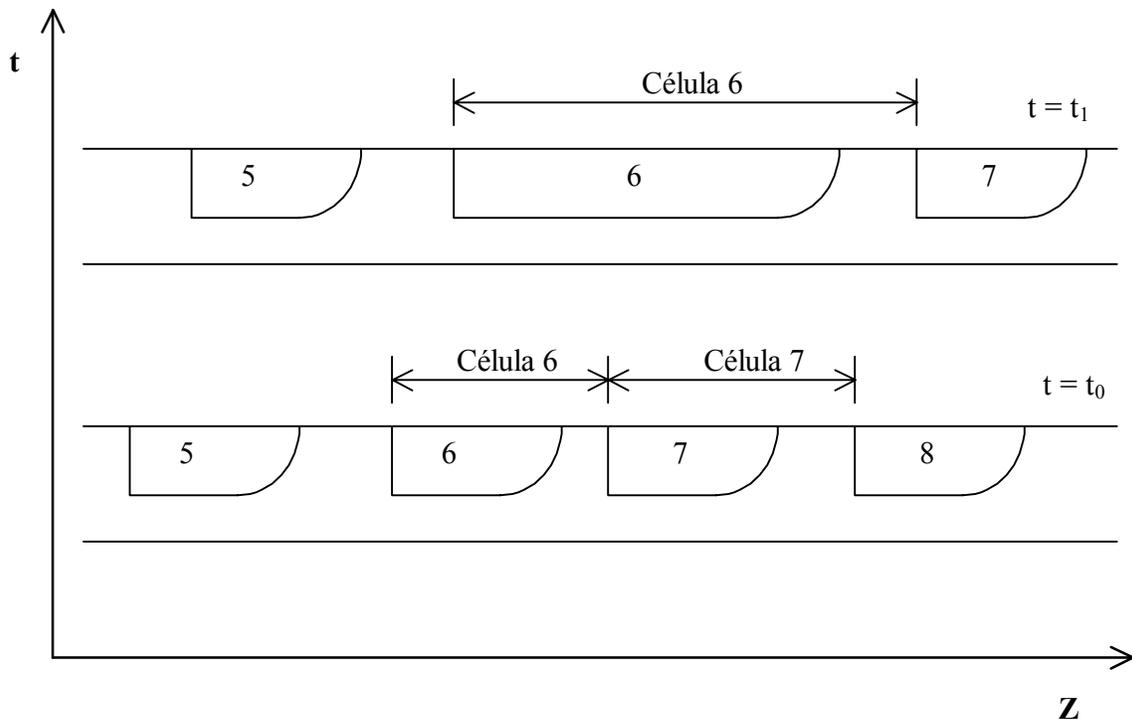


Figura 4. 6. Coalescência de bolhas.

Para uma melhor compreensão, o processo de reindexação de células e de cálculo da nova célula formada pode ser dividido como segue.

A - Células a frente da nova bolha formada

Como as bolhas k e $k+1$ se uniram, o número de bolhas (e de células unitárias) presentes no duto diminui. Utilizando a convenção adotada, na qual a numeração das células cresce da entrada para a saída do duto, a nova bolha formada será $j = k$ e todas as demais células a sua frente deverão ser reindexadas.

B - Nova bolha formada (bolha k):

O comprimento da nova bolha formada é obtido da conservação da massa, isto é, a massa de gás da nova bolha formada é a soma das massas de gás presentes nas bolhas que coalesceram. No caso de bolhas com interface plana, com mesma fração de vazio e sujeitas a pressões semelhantes, o comprimento resultante será aproximadamente a soma dos comprimentos das bolhas que coalesceram. Já a pressão da nova bolha é aproximada pela média aritmética das pressões das duas bolhas no instante imediatamente anterior ao coalescimento (seus valores são bastante próximos).

O índice da nova bolha, dada a convenção adotada, passará a ser $j = k$. O pistão a sua frente (antigo pistão $k+1$) também terá o índice k . A frente da nova bolha será a frente da antiga bolha $k+1$ e a traseira da nova bolha será a traseira da antiga bolha k . Isto significa que $x_{k-1}^N = x_{k-1}^O$ (ver figura 4. 6).

Numericamente, para que o cálculo da nova célula e a reindexação possam ser realizados com sucesso, a ordem dos cálculos deverá ser:

1. Cálculos e reindexação da nova bolha formada. Reindexação do pistão imediatamente a frente da nova bolha formada;
2. Reindexação de todas as células a frente da nova bolha formada (j indo de $k+1$ a $n-1$);
3. Diminuição do número de bolhas presentes no duto ($n^N = n^O - 1$).

Um algoritmo para o processo de coalescimento de bolhas pode ser escrito como segue.

Algoritmo para o coalescimento de bolhas:

Se $y_k \geq x_k$ H coalescência de bolhas

Células que coalesceram:

$$\begin{aligned}x_k^N &= x_{k+1}^O \\y_k^N &= y_{k+1}^O \\L_{S_k}^N &= L_{S_{k+1}}^O \\L_{B_k}^N &= L_{B_k}^O + L_{B_{k+1}}^O \\U_k^N &= U_{k+1}^O \\P_{G_k}^N &= \frac{(P_{G_k}^O + P_{G_{k+1}}^O)}{2} \\H_k^N &= \frac{P_{G_k}^N}{\rho_L} \\fat_k^N &= fat_{k+1}^O \\V_{B_k}^N &= V_{B_{k+1}}^O\end{aligned}$$

Células a frente das que coalesceram:

Para j indo de k + 1 a n - 1

$$\begin{aligned}x_j^N &= x_{j+1}^O \\y_j^N &= y_{j+1}^O \\L_{B_j}^N &= L_{B_{j+1}}^O \\L_{S_j}^N &= L_{S_{j+1}}^O \\U_j^N &= U_{j+1}^O \\P_{G_j}^N &= P_{G_{j+1}}^O \\H_j^N &= H_{j+1}^O \\fat_j^N &= fat_{j+1}^O \\V_{B_j}^N &= V_{B_{j+1}}^O\end{aligned}$$

Diminuição do número total de células no duto:

$$n = n - 1$$

4.2.5 – Inserção de Sondas Virtuais

Uma vez feita a implementação numérica do modelo, é necessário escolher e implementar a forma com que os resultados numéricos serão fornecidos. A forma escolhida neste trabalho foi a gravação de dados específicos por sondas virtuais. Estas sondas são na verdade posições e a instantes indicados para a gravação de alguns dados em arquivo de saída. As posições e os instantes podem variar conforme o objetivo de uma simulação. Por este motivo, quatro tipos de sondas foram escolhidas e implementadas no código numérico. Elas são descritas a seguir.

4.2.5.1 – Sondas Eulerianas

Experimentalmente, para se fazer uma análise estatística da distribuição de bolhas e pistões em uma determinada região do duto, é necessário que se meça uma quantidade de bolhas e de pistões passando por esta região (estacionária no espaço).

Como neste modelo estamos seguindo bolhas e pistões, pode-se proceder como no caso de um experimento real: instalam-se sondas virtuais em determinadas posições fixas do domínio e obtêm-se dados relativos às bolhas e aos pistões que passaram por esta posição.

Cada sonda deste tipo está fixa em uma posição de tal modo que:

- a) Sempre que uma frente de bolha (y_j) passar pela sonda, os dados de tal bolha serão gravados (apenas uma vez, até que passe a traseira desta mesma bolha).
- b) Sempre que uma frente de pistão (x_j) passar pela sonda, os dados relativos a tal pistão serão gravados (apenas uma vez, até que passe a traseira deste mesmo pistão).

No entanto, o algoritmo para a inserção destas sondas é dificultado pelo fato dos pistões e bolhas estarem sempre sendo re-indexados. Esta re-indexação, devido a entrada, saída e coalescência de bolhas, deve ser levada em consideração. Para se conseguir isto, um número considerável de contadores foi incluída na sub-rotina responsável por esta tarefa. Maiores

detalhes estão na listagem do código (Anexo V). A sub-rotina “sub_passaprobe” contém todos os quatro tipos de sonda.

4.2.5.2 – Sonda Lagrangeana

Como este é um modelo de seguimento de bolhas e de pistões, podemos implementar uma sonda que seja fixa a frente de uma bolha. Desta forma, tal sonda se movimentará juntamente com a frente de bolha desejada, gravando dados relativos a tal bolha e ao pistão a sua frente conforme a bolha se move ao longo do duto. Ela equivale a seguir uma bolha específica do ponto de vista de um referencial lagrangeano.

Numericamente isto se traduz em:

- 1) escolha de uma determinada bolha e atribuição de uma variável para o índice da bolha escolhida;
- 2) a variável recém atribuída deve monitorar a variação do índice da bolha escolhida conforme ela se desloca ao longo da tubulação;
- 3) a cada intervalo de tempo desejado, os dados relativos à bolha e ao pistão à sua frente são registrados em um arquivo. O dado relativo à posição da sonda é registrado como sendo igual à posição do nariz da bolha.

Como no caso das sondas estatísticas, o algoritmo para a inserção destas sondas é dificultado pelo fato dos pistões e bolhas estarem sempre sendo re-indexados. Maiores detalhes estão na listagem do código (Anexo V).

4.2.5.3 – Sonda Espacial

Em alguns casos, podemos estar interessados no comportamento espacial de todas as bolhas e pistões ao longo de todo o duto em um dado instante. Este tipo de sonda tem como objetivo registrar a situação de todo o duto em determinados instantes. Numericamente isto se traduz como:

- 1) escolha dos instantes para se executar os registros
- 2) registro em um arquivo, a cada instante especificado, dos dados relativos a todos os pistões e bolhas presentes no duto.

4.2.5.4 – Sonda Entrada

Em alguns casos podemos estar interessados nas condições na entrada do duto. Para isto, foi implementada a sonda entrada. Ela permite o monitoramento das condições na entrada desde o início da simulação, o que significa que partidas de linha podem ser acompanhadas por esta sonda.

A implementação deste tipo de sonda foi possível pois as condições na entrada são constantemente atualizadas pelo modelo (pressão, velocidade de mistura e velocidade superficial do gás). Em outras posições ao longo do duto isto não acontece, pois o modelo segue frentes de bolhas e de pistões, e não posições específicas.

Numericamente, ela se traduz em:

- a) escolha do intervalo de tempo entre cada registro;
- b) registro, a cada instante previamente especificado, da pressão, da velocidade de mistura e da velocidade superficial do gás na entrada ($z = 0$) em um arquivo.

4.2.7 – Algoritmo Geral

Como forma de se estruturar o processo de cálculo numérico, um algoritmo é descrito nesta seção. Ele engloba os as equações descritas na seção 4.1, os algoritmos para as singularidades e as sondas virtuais. O algoritmo proposto é como segue.

Algoritmo:

Cálculo dos valores iniciais utilizando os dados de entrada, conforme descrito na seção 4.2.1.2.

Primeira iteração, conforme descrito na seção 4.2.1.2.

Entrada em “loop”, enquanto o número total de bolhas a sair do duto for menor que o desejado:

Se $x_0 >$ comprimento do pistão a entrar, entrada de bolhas (seção 4.2.2)

Se $x_{n-1} > L$, número total de bolhas diminui ($n = n-1$)

Para $i = 1$ a $n-1$

Se $y_{(i)} > x_{(i)}$, coalescência de bolhas (seção 4.2.4)

Nova iteração, sempre na seguinte ordem:

1. Resolução da equação matricial, fornecendo U_j^N e H_j^N para todas as células, isto é , para j indo de 1 a n ;
2. Cálculo $P_{Gj}^N = H_j^N \rho_L$ para j indo de 1 a n ;
3. Cálculo de $y_j^N = y_j^O + V_{Bj}^N$, para j indo de 1 a n ;
4. Cálculo de fat_j^N , para j indo de 1 a n ;
5. Resolução das demais equações para $j = 1$;
6. Resolução das demais equações para j indo de 2 a $n-1$;
7. Resolução das demais equações para $j = n$, observando sempre se temos um pistão ou uma bolha saindo, de forma a utilizar as equações do caso A ou do caso B (seção 4.2.3).

Se for o caso, efetuar gravações conforme o tipo de sonda escolhida (seção 4.2.5)

4.2.7 – Código Numérico

Os algoritmos da seção 4.2.6, junto com o modelo numérico descrito na seção 4.1 e com as sondas virtuais, foram transformados em código computacional de forma que as simulações possam ser realizadas.

Inicialmente foi cogitado de se escrever o código em Fortran, como rotina do Mathematica ou em Visual Basic (VB). Após experimentações com estas linguagens, optou-se pelo Visual Basic. Esta escolha foi fundamentada em diversos fatores: i) o VB tem uma grande capacidade de interagir com bancos de dados e trabalha com diversos formatos de arquivos de entrada e saída; ii) o VB é a linguagem oficial da Microsoft, sendo a linguagem utilizada nas macros do Excel. Assim, não é necessário a priori se ter um compilador VB, pois pode-se escrever as rotinas em

Excel; iii), por ser a linguagem oficial da Microsoft, os programas escritos em VB podem interagir com diversos aplicativos da Microsoft; iv) o VB é uma linguagem orientada ao evento, o que significa que o programa pode ser escrito de forma que se tenha uma boa interface gráfica com o usuário (“user friendly interface”); v) o VB é uma linguagem estruturada e de fácil compreensão.

Diversas versões do código foram escritas. Uma versão para simulação de escoamento periódico encontra-se listada no Anexo V.

4.3 – Comparação com Modelo Analítico

Como forma de testar a consistência do modelo numérico, um caso com solução analítica conhecida é simulado numericamente e seus resultados são comparados com a solução analítica. Seguindo a mesma idéia de Grenier (1997), o caso teste escolhido e cuja solução analítica é conhecida é um escoamento periódico sem efeito de esteira. O escoamento periódico é aquele no qual os comprimentos de bolhas e pistões são todos idênticos na entrada do duto ($z = 0$). Este é um escoamento possível de ser resolvido analiticamente caso sejam feitas algumas hipóteses. A formulação da solução analítica assim como as hipóteses adotadas encontram-se no Anexo II.

Para a comparação em questão, a configuração escolhida é como apresentada na tabela 4. 1.

Diâmetro interno da linha (mm)	26
Comprimento total da linha (mm)	20098
Velocidade superficial do líquido na entrada (m/s)	0.5
Velocidade superficial do gás na seção de saída (m/s)	0.5
Pressão na seção de saída do duto (Pa)	94700
Gradiente linear de pressão (Pa/m)*	110
Comprimento dos pistões na seção de entrada do duto (m)	0.213
Fração de vazio das bolhas (adimensional)	0.54
C_0 (adimensional)	1.2
V_0 (adimensional)	0
C_A (adimensional)	0

Tabela 4. 1. Configuração adotada para comparação entre soluções analítica e numérica.

* O modelo analítico utiliza o valor do gradiente linear de pressão obtido dos resultados numéricos ($l = 110 \text{ Pa/m}$).

Para a obtenção da solução numérica, utilizou-se o código numérico escrito para esta finalidade. Os parâmetros da linha foram introduzidos no código numérico e as simulações foram realizadas. As simulações foram realizadas em 3 passos de tempo diferentes de forma a se investigar a influência do passo de tempo na solução numérica. Os 3 passos de tempo utilizados foram: $\Delta t = 0.1\text{s}$, $\Delta t = 0.01\text{s}$, e $\Delta t = 0.001\text{s}$.

Para estas simulações foram utilizadas as sondas do tipo estatística. Visto que o escoamento é periódico na entrada e não há efeito de esteira nem coalescências, o escoamento torna-se periódico ao longo de todo o duto após a partida da linha. Assim, em cada sonda, após o efeito transiente de partida onde o tubo começa a ser preenchido por bolhas e pistões em toda a sua extensão, obtém-se bolhas e pistões exatamente iguais (escoamento periódico em todo o domínio). Estes valores iguais (periódicos) foram utilizados na comparação com a solução analítica.

O resultado numérico, parametrizado para 3 passos de tempo (0.1s, 0.01s e 0.001s) é apresentado nas figuras 4. 7 a 4. 9 abaixo, comparado à solução analítica. A Figura 4. 7 apresenta os comprimentos de pistões e bolhas normalizados pelo diâmetro do duto (L_S/D e L_B/D) em função de suas posições ao longo do duto (coordenada z , em diâmetros de duto). A Figura 4. 8 apresenta a velocidade superficial do gás (em m/s) em função da posição ao longo do duto (coordenada z , em diâmetros de duto). A Figura 4. 9 apresenta a pressão da bolha (em mbar) em função de sua posição ao longo do duto (coordenada z , em diâmetros de duto).

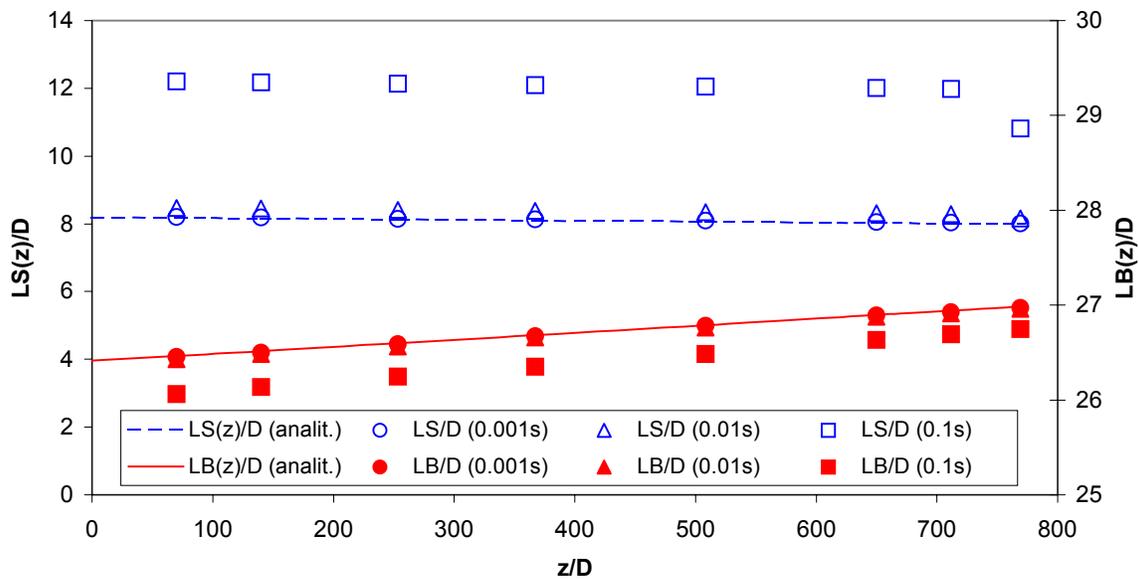


Figura 4. 7. Comparação entre as soluções analítica e numérica para comprimentos de bolhas e de pistões em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.

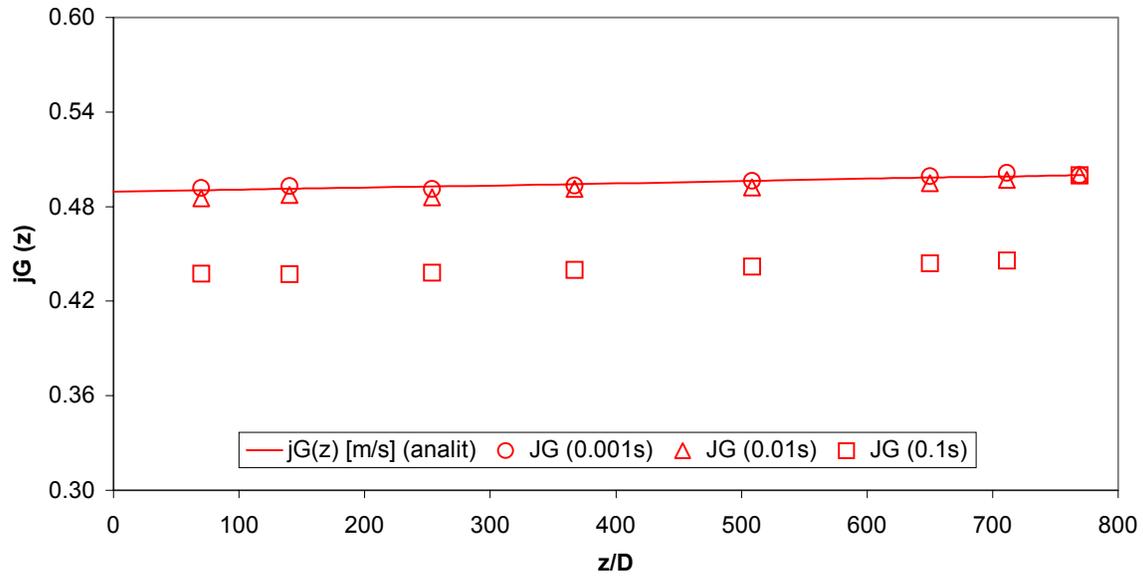


Figura 4. 8. Comparação entre as soluções analítica e numérica para velocidade superficial do gás em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.

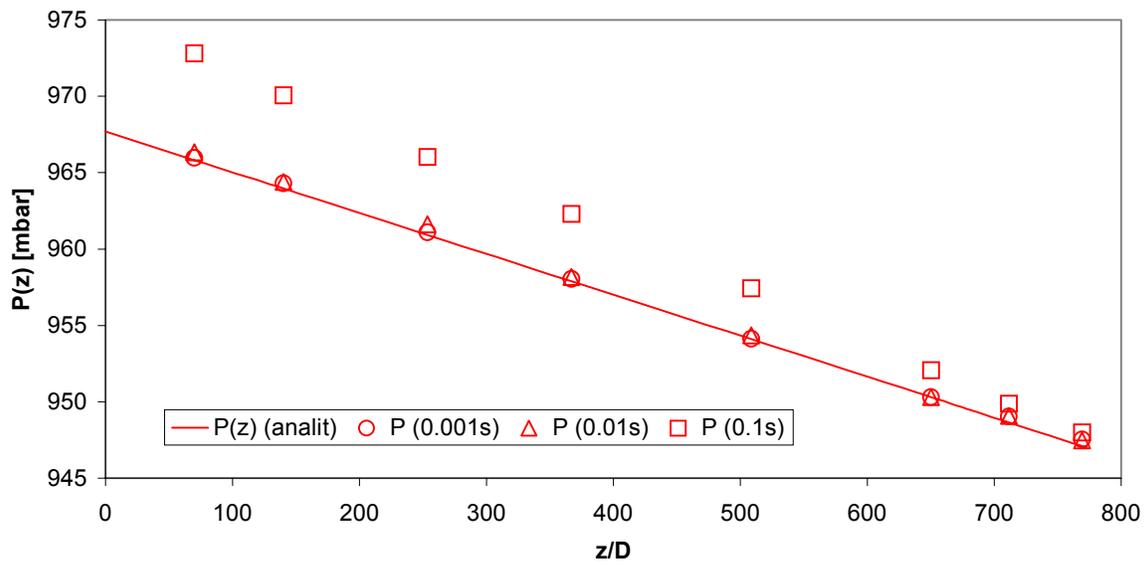


Figura 4. 9. Comparação entre soluções analítica e numérica para pressão nas bolhas em função do passo de tempo: 0.1s, 0.01s e 0.001s.

Com base nas figuras acima, percebe-se uma convergência da solução numérica para a solução analítica com a diminuição do passo de tempo utilizado. Esta convergência é mais visível no caso dos comprimentos de pistão. Para $\Delta t = 0.001s$, o acordo entre as soluções numérica e analítica é satisfatório.

As tabelas 4. 2 a 4. 4 apresentam de forma qualitativa o desvio entre as soluções analítica e numérica com a diminuição do passo de tempo para o caso teste simulado. No capítulo 5 faz-se uma análise mais detalhada da variação deste desvio com o passo de tempo. Nestas tabelas, a coluna “Posição” apresenta o valor da coordenada z (em metros) onde o parâmetro foi calculado, a coluna “Analítico” apresenta o resultado do parâmetro calculado analiticamente, a coluna “Simulação” apresenta o resultado do parâmetro calculado numericamente e a coluna “Erro (%)” apresenta o erro (ou desvio) relativo entre as soluções analítica e numérica, para cada posição. Os valores da pressão (P) são em mbar, os valores da velocidade superficial do gás (j_G) são em m/s, os valores do comprimento da bolha (LB) e do comprimento do pistão (LS) são em diâmetros de tubulação.

O erro relativo foi calculado como:

$$\text{Erro} = \frac{|\text{resultado analítico} - \text{resultado numérico}|}{\text{resultado analítico}} \quad (4. 10)$$

Uma inspeção visual nas tabelas 4. 2 a 4. 4 revela que todas as variáveis numéricas apresentam uma redução no erro quando o passo de tempo é reduzido de 0.1s para 0.01s, como era de se esperar. Os erros para $Dt = 0.01s$ são sempre menores que 4% para qualquer variável.

Reduzindo-se em uma ordem de magnitude o passo de tempo, isto é, $Dt = 0.001s$ (tabela 4. 4), os erros tornam-se menores ainda quando comparados àqueles da tabela 4. 3. Destaca-se que as taxas de convergência das variáveis P, j_G , L_B/D e L_S/D são distintas. Nota-se que P é a variável que atinge o menor erro mais rapidamente, enquanto L_S/D é aquela que atinge o erro mais lentamente.

Por último, destaca-se aqui que a obtenção de um erro relativo tão pequeno quanto se queira entre as soluções numérica e analítica confere confiabilidade ao método numérico e ao modelo desenvolvido. As principais características do método e do modelo são explorados no capítulo 5.

Parâmetro	Posição	Analítico	Simulação	Erro (%)
P (mbar)	1.8	965.83	972.82	0.7%
	3.6	963.95	970.06	0.6%
	6.6	960.91	966.02	0.5%
	9.5	957.87	962.30	0.5%
	13.2	954.08	957.42	0.3%
	16.9	950.29	952.05	0.2%
	18.5	948.65	949.86	0.1%
	20.0	947.10	947.99	0.1%
jG (m/s)	1.8	0.49	0.44	10.7%
	3.6	0.49	0.44	11.0%
	6.6	0.49	0.44	11.1%
	9.5	0.49	0.44	11.0%
	13.2	0.50	0.44	11.0%
	16.9	0.50	0.44	10.9%
	18.5	0.50	0.45	10.7%
	20.0	0.50	0.50	0.0%
LB/D	1.8	26.46	26.06	1.5%
	3.6	26.52	26.14	1.4%
	6.6	26.60	26.25	1.3%
	9.5	26.68	26.35	1.3%
	13.2	26.79	26.48	1.1%
	16.9	26.90	26.63	1.0%
	18.5	26.94	26.69	0.9%
	20.0	26.99	26.75	0.9%
LS/D	1.8	8.17	12.21	49.4%
	3.6	8.16	12.18	49.3%
	6.6	8.13	12.14	49.4%
	9.5	8.10	12.10	49.4%
	13.2	8.06	12.06	49.6%
	16.9	8.02	12.01	49.7%
	18.5	8.01	11.98	49.7%
	20.0	7.99	10.81	35.3%

Tabela 4. 2 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.1s$

Parâmetro	Posição	Analítico	Simulação	Erro (%)
P (mbar)	1.8	965.83	966.34	0.1%
	3.6	963.95	964.41	0.0%
	6.6	960.91	961.62	0.1%
	9.5	957.87	958.16	0.0%
	13.2	954.08	954.34	0.0%
	16.9	950.29	950.31	0.0%
	18.5	948.65	949.06	0.0%
	20.0	947.10	947.47	0.0%
jG (m/s)	1.8	0.49	0.49	1.0%
	3.6	0.49	0.49	0.8%
	6.6	0.49	0.49	1.4%
	9.5	0.49	0.49	0.7%
	13.2	0.50	0.49	0.8%
	16.9	0.50	0.49	0.7%
	18.5	0.50	0.50	0.4%
	20.0	0.50	0.50	0.0%
LB/D	1.8	26.46	26.43	0.1%
	3.6	26.52	26.49	0.1%
	6.6	26.60	26.56	0.1%
	9.5	26.68	26.66	0.1%
	13.2	26.79	26.76	0.1%
	16.9	26.90	26.88	0.1%
	18.5	26.94	26.91	0.1%
	20.0	26.99	26.96	0.1%
LS/D	1.8	8.17	8.47	3.6%
	3.6	8.16	8.45	3.6%
	6.6	8.13	8.42	3.6%
	9.5	8.10	8.39	3.6%
	13.2	8.06	8.35	3.6%
	16.9	8.02	8.31	3.6%
	18.5	8.01	8.29	3.5%
	20.0	7.99	8.17	2.2%

Tabela 4.3 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.01s$

Parâmetro	Posição	Analítico	Simulação	Erro (%)
P (mbar)	1.8	965.83	965.97	0.0%
	3.6	963.95	964.29	0.0%
	6.6	960.91	961.10	0.0%
	9.5	957.87	958.05	0.0%
	13.2	954.08	954.14	0.0%
	16.9	950.29	950.30	0.0%
	18.5	948.65	949.02	0.0%
	20.0	947.10	947.53	0.0%
jG (m/s)	1.8	0.49	0.49	0.3%
	3.6	0.49	0.49	0.4%
	6.6	0.49	0.49	0.3%
	9.5	0.49	0.49	0.2%
	13.2	0.50	0.50	0.0%
	16.9	0.50	0.50	0.2%
	18.5	0.50	0.50	0.5%
	20.0	0.50	0.50	0.0%
LB/D	1.8	26.46	26.46	0.0%
	3.6	26.52	26.50	0.1%
	6.6	26.60	26.59	0.0%
	9.5	26.68	26.67	0.0%
	13.2	26.79	26.78	0.0%
	16.9	26.90	26.89	0.0%
	18.5	26.94	26.93	0.1%
	20.0	26.99	26.97	0.1%
LS/D	1.8	8.17	8.21	0.4%
	3.6	8.16	8.18	0.3%
	6.6	8.13	8.15	0.3%
	9.5	8.10	8.13	0.4%
	13.2	8.06	8.09	0.4%
	16.9	8.02	8.05	0.3%
	18.5	8.01	8.03	0.3%
	20.0	7.99	8.01	0.2%

Tabela 4. 4 - Diferenças relativas entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 0.001s$

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Com base no modelo numérico apresentado no Capítulo 4, diversas simulações foram realizadas no intuito de se verificar o comportamento do modelo. Os resultados destas simulações serão apresentados e discutidos em sub-seções.

A seção 5.1 trata da escolha do passo de tempo e do critério de Courant para estabilidade. A seção 5.2 analisa casos em que a inserção de bolhas e pistões ocorre periodicamente. Finalmente a seção 5.3 analisa casos reais onde a intermitência na geração de bolhas e pistões é obtida da função densidade de probabilidade das frequências medidas experimentalmente.

Os casos periódicos analisados na seção 5.2 são casos que permitem a comparação da solução numérica com a solução analítica apresentada no Anexo II. Nesta seção em particular, é realizada uma análise paramétrica do modelo. Para tanto são definidas na tabela 5. 1 as condições operacionais de um “caso padrão”. Ele é utilizado em toda a seção 5.2 como referência para análise das variações dos parâmetros.

Diâmetro interno da linha (mm)	26
Comprimento total da linha (mm)	20098
Densidade da fase líquida (kg/m ³)	999
Temperatura ambiente (°C), escoamento isotérmico	23
Viscosidade da fase líquida (Pa.s)	0.000855
Constante do ar (J/kgK)	287
Velocidade superficial do líquido na entrada (m/s)	0,5
Velocidade superficial do gás na seção de saída (m/s)	0,5
Pressão na seção de saída do duto (Pa)	94700
Frequências das células na seção de entrada (f_u)	Heywood & Richardson (1979)
Fração de vazio das bolhas (R_G) (adimensional)	0,54
C_0 (adimensional)	1,2
V_0 (adimensional)	0
C_A (adimensional)	0
DP_{Hj} (Pa)	0
Passo de tempo (s)	0,0005

Tabela 5. 1. Condições de caso padrão a serem utilizadas nas simulações.

5.1 – Critério de da Escolha do Passo de Tempo

Conforme visto no Capítulo 4, o sistema acoplado de equações (equações (3. 64) e (3. 48)) foi discretizado de forma implícita e é resolvido para P_G e U . Já as equações (3. 65) e (3. 74), resolvidas para y e x , foram discretizadas de forma explícita.

Para cada passo de tempo, o sistema acoplado de equações é resolvido para P_G e U no tempo novo, utilizando para tanto valores de y e x do tempo anterior. Após cálculo de P_G e U , os valores de y e x são então calculados para o tempo novo (equações (3. 65) e (3. 74)).

Assim, apesar do sistema acoplado ser resolvido implicitamente, o uso das equações (3. 65) e (3. 74), resolvidas explicitamente, faz com que o esquema numérico esteja sujeito ao critério de Courant.

Para a análise do critério de Courant, deve-se conhecer uma velocidade característica, um comprimento característico e um tempo característico. Segundo tal critério, para a obtenção de uma solução numérica estável explícita no tempo, a velocidade característica deve ser menor ou igual ao comprimento característico dividido pelo tempo característico.

No modelo em questão, tem-se como velocidade característica a velocidade das bolhas, V_B . Esta velocidade, quando integrada no tempo, nos fornece as posições das frentes de bolha. O comprimento característico é o comprimento das células. Pelo critério de Courant tem-se:

$$V_B \leq \frac{L_u}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{L_u}{V_B} = T_u \quad (5. 1)$$

onde Δt é o passo de tempo da solução numérica, L_u é o comprimento das células e T_u é o período das células.

A equação (5. 1) deve ser respeitada para que o modelo numérico realize as simulações de forma estável. Se o passo de tempo for maior que o período da unidade, a solução numérica deve ser instável ou impossível de ser encontrada. Entretanto, a mera utilização da equação (5. 1) não assegura que a precisão numérica desejada será atingida pelo modelo.

Uma outra forma de se escrever a equação (5. 1) é:

$$\Delta t = CT_u \quad , \quad \text{onde } 0 < C \leq 1 \quad (5. 2)$$

onde C é uma constante relacionada à precisão desejada. Quanto menor o valor de C , maior deve ser a precisão obtida.

Uma forma de se realizar uma análise do critério de Courant é através da solução numérica de um escoamento com solução analítica conhecida. De posse das soluções numérica e analítica, o passo de tempo e a constante C podem ser relacionadas à precisão da solução, definida aqui como a diferença relativa entre as soluções numérica e analítica (equação (4. 10)). O escoamento idealizado com solução analítica conhecida é como descrito na seção 4.3 e no Anexo II. Entretanto, para a análise do critério de Courant, diversas condições de velocidades superficiais e de comprimentos das células são utilizados de forma a se verificar a universalidade da equação (5. 2).

Conforme visto no Anexo II, existem 2 formas de obtenção da solução analítica para o escoamento idealizado. Uma delas considera uma correlação para as frequências em $z = 0$. A outra considera conhecido o comprimento dos pistões em $z = 0$. Aqui ambas as soluções analíticas são comparadas as respectivas soluções numéricas, isto é, a que utiliza correlação para as frequências na seção de entrada e a que utiliza os comprimentos dos pistões na seção de entrada.

As condições para as simulações encontram-se listadas nas tabelas 5. 2 e 5. 3. Nelas, para cada ponto simulado, a coluna “ j_G ” apresenta a velocidade superficial do gás (em Sm/s), a coluna “ j_L ” apresenta a velocidade superficial do líquido (em m/s), a coluna “ $L_{S(z=0)}$ ” apresenta o comprimento dos pistões na entrada do duto (em metros) e a coluna “ $\overline{R_G}$ ” apresenta os valores de fração de vazio da bolha.

O “S” em Sm/s indica que a velocidade superficial do gás é dada nas condições padrão (“standard”, em inglês), isto é, à pressão atmosférica e temperatura ambiente.

Ponto #	j_G (Sm/s)	j_L (m/s)	$\overline{R_G}$
1	0,63	0,33	0,63
4	0,50	0,50	0,54
8	0,67	1,33	0,36

Tabela 5. 2. Resumo das simulações utilizando-se f na entrada.

Ponto	j_G (Sm/s)	j_L (m/s)	$L_{S(z=0)}$ (m)	$\overline{R_G}$
2	1,33	0,33	0,2600	0,75
4	0,50	0,50	0,2130	0,54
8	0,67	1,33	0,1568	0,36

Tabela 5. 3 - Resumo das simulações utilizando-se L_S na entrada.

Foi visto na seção 4.3 que o parâmetro mais sensível ao passo de tempo é o comprimento dos pistões. Desta forma, o erro relativo dos pistões determinado em uma posição 70D a jusante do ponto de injeção de bolhas (sonda 1) foi escolhido para se avaliar a variação da precisão com o passo de tempo.

As tabelas 5. 3 e 5. 4 apresentam os resultados de algumas simulações utilizando frequências ou comprimentos de pistões na seção de entrada, respectivamente. A linha com o símbolo “#” seguido de um número indica as velocidades, comprimentos e frações de vazio do escoamento, conforme tabelas 5. 1 e 5. 2. A coluna “passo (s)” indica o passo de tempo utilizado (em segundos). A coluna “ T_u (s)” indica a média dos períodos das células ao longo da tubulação (em segundos), obtidas da solução numérica. A coluna “C” representa a constante C, calculada como o passo de tempo dividido pela média dos períodos das células. A coluna “Erro LS est. 1” é o erro relativo dos comprimentos de pistões na sonda 1 (situada a 70D da entrada), calculado conforme equação (4. 10).

#4			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,4	0,7961	0,5024	233,4%
0,1	0,6013	0,1663	68,1%
0,08	0,5601	0,1426	34,8%
0,05	0,5503	0,0909	26,6%
0,03	0,5400	0,05557	19,9%
0,01	0,5211	0,01919	0,8%
0,001	0,5212	0,001919	0,9%
0,0001	0,5200	0,000192	0,1%
#8			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,3	0,6015	0,4987	329,8%
0,1	0,3945	0,2535	81,2%
0,08	0,3973	0,2014	79,6%
0,03	0,3505	0,08355	31,4%
0,001	0,3364	0,002973	1,2%
0,0003	0,3358	0,000893	0,3%
#1			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,05	0,8285	0,06035	35,0%
0,03	0,8149	0,03681	17,3%
0,01	0,8017	0,01247	5,2%
0,001	0,7971	0,001255	0,4%
0,0001	0,7967	0,000126	0,1%

Tabela 5. 4. Simulações utilizando frequências na seção de entrada.

#4			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,1	0,8006	0,1249	26,1%
0,03	0,7808	0,03842	14,0%
0,01	0,7593	0,01317	1,7%
0,002	0,7566	0,00243	0,7%
0,001	0,7553	0,001324	0,2%
0,0001	0,7550	0,000132	0,1%
#8			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,1	0,2975	0,3361	93,3%
0,01	0,2600	0,03847	12,5%
0,001	0,2546	0,003927	1,0%
0,00025	0,2543	0,000982	0,2%
#2			
Passo (s)	Tu (s)	C	Erro LS est. 1
0,1	1,1811	0,08466	35,1%
0,01	1,1453	0,008731	2,8%
0,001	1,1431	0,000875	0,3%

Tabela 5. 5. Simulações utilizando comprimentos de pistões na seção de entrada.

A tabela 5. 5 apresenta de forma aproximada as faixas de C encontradas para a obtenção da faixa de precisão desejada. A coluna “Faixa Erro Ls na sonda 1” apresenta as faixas de erro (conforme equação (4.10)) encontradas para os comprimentos de pistão na sonda 1. A coluna “Faixa de C” apresenta as faixas da constante C relacionadas à “Faixa Erro Ls na sonda 1”.

Solução utilizando freqüências	
Faixa Erro Ls na sonda 1	Faixa de C
> 100%	$C > 0,5$
$80\% < \text{erro} < 100\%$	$0,25 < C < 0,5$
$35\% < \text{erro} < 80\%$	$0,08 < C < 0,25$
$15\% < \text{erro} < 35\%$	$0,035 < C < 0,08$
$5\% < \text{erro} < 15\%$	$0,012 < C < 0,035$
$1\% < \text{erro} < 5\%$	$0,002 < C < 0,012$
$0,1\% < \text{erro} < 1\%$	$0,00013 < C < 0,002$
Solução utilizando comprimentos	
Faixa Erro Ls na sonda 1	Faixa de C
> 90%	$C > 0,3$
$35\% < \text{erro} < 90\%$	$0,1 < C < 0,3$
$15\% < \text{erro} < 35\%$	$0,03 < C < 0,1$
$5\% < \text{erro} < 15\%$	$0,01 < C < 0,03$
$1\% < \text{erro} < 5\%$	$0,003 < C < 0,01$
$0,1\% < \text{erro} < 1\%$	$0,0001 < C < 0,003$

Tabela 5. 6. Resumo da análise do critério de Courant.

Da tabela 5. 5, observa-se que os resultados obtidos utilizando-se as frequências das células na seção de entrada se acordam bem com os obtidos utilizando-se os comprimentos de pistões na seção de entrada. Estes dados são apresentados de forma gráfica na das figura 5. 1. Neste gráfico foram utilizadas as médias das faixas de erro para L_S na sonda 1 (eixo y, “Erro relativo médio (%)”) e as respectivas médias das faixas de C (eixo x, “C médio”). O ajuste linear dos pontos também se encontra no gráfico, assim como sua equação.

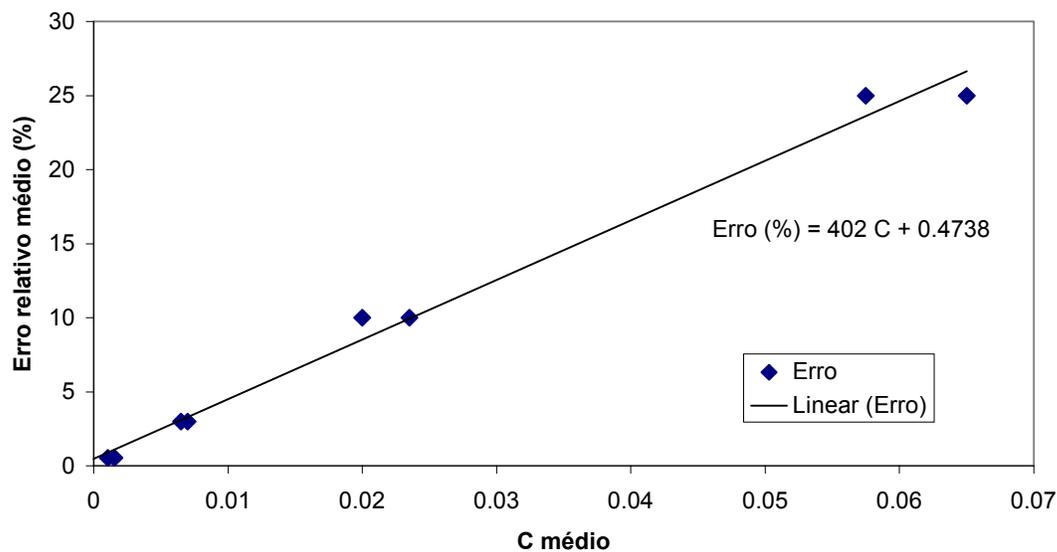


Figura 5. 1. Variação da precisão com a constante C.

Percebe-se que o erro varia de forma aproximadamente linear com C. Atribui-se o comportamento linear do erro à implementação de um esquema de primeira ordem na discretização das equações do modelo. Como o erro relativo deve tender a zero com a diminuição de C médio, pode-se desprezar a constante da equação de ajuste dos pontos e aproximar a variação da precisão com C médio como abaixo:

$$\text{Erro (\%)} = 400C, \text{ ou, } C = \text{Erro (\%)} / 400$$

(5. 3)

Para as simulações apresentadas neste trabalho, decidiu-se realizar os cálculos com um erro máximo de 0,5% nos comprimentos de pistões. Esta decisão foi tomada com base em um melhor compromisso entre precisão da solução e gasto computacional. Ressalta-se ainda que este erro máximo é válido para os comprimentos de pistões e fatores correlacionados a ele (como o fator de intermitência, por exemplo). Para os demais parâmetros, o erro será sempre significativamente menor que 0,5%.

Utilizando-se as equações (5. 2) e (5. 3), podemos estimar o passo de tempo a ser utilizado para obtenção de um erro da ordem de 0,5%. Neste caso (tabela 5. 1), $C \cong 0,00125$, $T_u \cong 0.52s$ e $\Delta t \cong 0,0006s$.

Para garantir um erro menor que 0.5%, podemos utilizar $\Delta t = 0,0005s$. De fato, utilizando-se este passo de tempo e comparando as soluções numérica e analítica, o erro de L_S na sonda 1 é igual a 0,4%. Para um total de 90 bolhas deixando o duto, o tempo computacional é da ordem de 5 minutos se o código for executado através do Microsoft Excel e se utilizarmos um processador com “clock” de 750 MHz e 127 MB de memória Ram. Caso um arquivo executável seja criado para o código, o arquivo é executado diretamente e o tempo computacional é reduzido pela metade.

5.2 – Caso Periódico

Esta seção faz uma análise dos resultados do modelo somente em casos onde a introdução dos pistões e bolhas ocorre de forma periódica. Decidiu-se fazer uma análise detalhada destes casos, pois além de revelar um pouco da física de casos reais, eles também permitem que se conheça melhor o comportamento e a confiabilidade do método numérico empregado. Seu grande atrativo é a possibilidade de comparação direta com a solução analítica (Anexo II), uma vez disponível o gradiente de pressões.

Esta é a maior seção do capítulo de resultados. Por conveniência ela está dividida em dez partes. A sub-seção 1 analisa as condições na entrada do duto desde a partida até a estabilização

do escoamento. Na sub-seção 2 é realizado o seguimento de uma bolha, revelando valores que P , V_B , L_B/D e L_S/D assumem a medida que a bolha viaja ao longo do duto. De forma complementar, na sub-seção 3 é realizada uma análise espacial das bolhas. Isto é equivalente a se tirar uma fotografia que revelasse, em um único instante, as propriedades P , V_B , L_B/D e L_S/D ao longo do duto. O fenômeno de batimento é discutido na sub-seção 4. Na sub-seção 5 é estudado o efeito que o aumento do comprimento total da tubulação causa nas propriedades do escoamento. O efeito que variações no parâmetro C_0 causa na saída do modelo é revelado na sub-seção 6. A influência que o coeficiente de aceleração e que o termo hidrostático do filme de líquido causa no gradiente de pressão é abordada na sub-seção 7. As variações de viscosidade e densidade da fase líquida nos resultados do modelo são vistas nas sub-seções 8 e 9, respectivamente. Por último, a ocorrência de efeito de esteira e coalescência de bolhas é analisada na sub-seção 10.

5.2.1 – Condições na Entrada ($z = 0$)

Conforme mencionado no capítulo 4, pressão, velocidade de mistura e velocidade superficial do gás são constantemente atualizadas pelo modelo em $z = 0$. Desta forma, pode-se monitorar em $z = 0$ como estes valores variam com o tempo, tanto em um escoamento periódico (estabilizado), como em um escoamento transiente (durante uma partida de linha, por exemplo). Esta sub-seção analisa, especificamente, os resultados na seção de entrada do duto ($z = 0$) para as condições de partida de linha e para o escoamento estabilizado.

5.2.1.1 – Partida de Linha (Escoamento Transiente)

Devido às condições iniciais adotadas pelo modelo (ver capítulo 3), mesmo um escoamento com características periódicas na entrada (comprimentos de pistões e bolhas possuem distribuição de Dirac) e com vazões constantes de ambas as fases é inicialmente transiente. Isto acontece porque o duto encontra-se inicialmente totalmente preenchido com a fase líquida e, enquanto não houver células ao longo de todo o duto, as características do escoamento estarão mudando.

Como pressão e velocidades superficiais são constantemente calculadas na seção de entrada, os efeitos transientes que ocorrem a partir do instante inicial de simulação (partida de linha) podem ser acompanhados. A figura 5. 2 abaixo apresenta a variação de pressão na entrada do duto ($z=0$) durante a partida de linha do caso teste em questão. A linha contínua é a resposta numérica fornecida pelo modelo e a linha tracejada é a solução analítica calculada conforme o Anexo II. A solução analítica foi calculada para o escoamento periódico já estabilizado e não prevê o efeito transiente de uma partida de linha. Ela está presente na figura 5. 2 como um parâmetro de comparação.

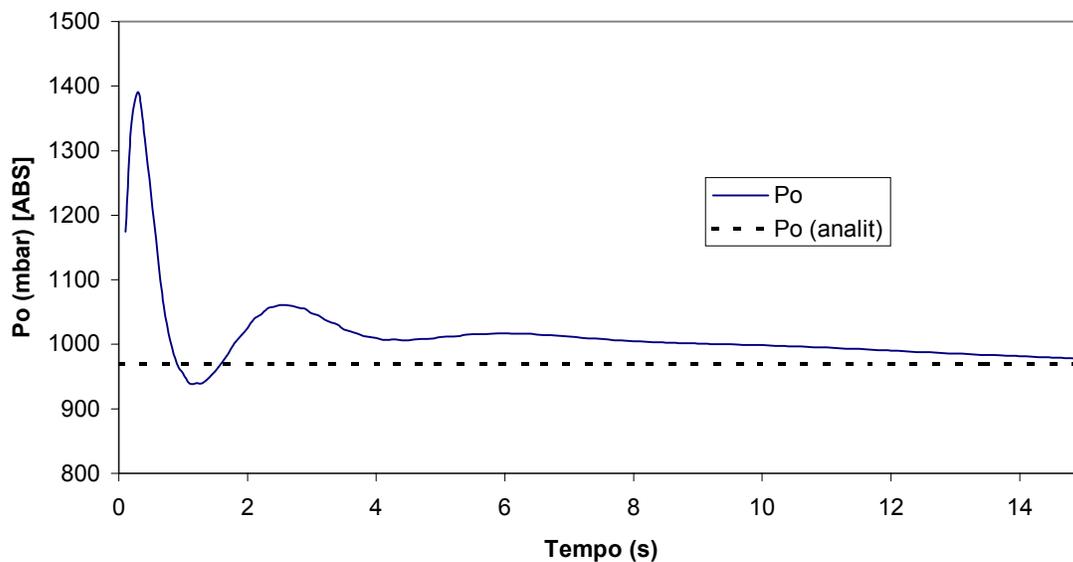


Figura 5. 2. Variação da pressão (absoluta) durante partida de linha.

Da figura 5. 2 percebe-se que a pressão na entrada do duto inicia-se com um valor acima do valor em um escoamento já estabilizado, atinge um pico, atinge um mínimo abaixo do valor em um escoamento já estabilizado, atinge um segundo pico menor que o primeiro e decresce suavemente para o valor em um escoamento estabilizado.

O escoamento se inicia com um valor de pressão mais elevado que o de um escoamento estabilizado pois, de acordo com as condições iniciais do problema, tem-se apenas líquido escoando no duto, com velocidade j_L . Isto significa um elevado valor de atrito viscoso se comparado com a solução estabilizada, daí o valor elevado de pressão.

Durante a entrada da primeira bolha, a velocidade de mistura na entrada do duto passa a ser $j_L + j_{G(z=0)}$. Conforme explicado na seção 5.2.1.2, este é um valor da velocidade de mistura para a célula que entra no duto. Assim, durante a entrada da primeira bolha, tem-se o duto preenchido em sua quase totalidade por fase líquida (exceto na entrada) e a velocidade de mistura na entrada é maior que j_L . O modelo recebe este aumento na velocidade de mistura na entrada e, com um duto quase todo preenchido com fase líquida, calcula um atrito viscoso maior que o do instante inicial, daí o primeiro pico.

A subsequente entrada das primeiras bolhas introduz efeito de compressão e expansão da fase gasosa. É isto o que causa a oscilação entre um valor mínimo e o segundo pico de pressão. Após este segundo pico, conforme o duto vai sendo totalmente preenchido com fase líquida, a pressão vai diminuindo até atingir o valor para escoamento estabilizado.

Todo este processo de partida de linha é conforme esperado fisicamente.

5.2.1.2 – Escoamento Estabilizado (Escoamento Periódico)

Após a partida de linha, o duto se encontra totalmente preenchido com bolhas e pistões e o escoamento torna-se estável, isto é, periódico ao longo de toda a tubulação. Logo, em uma determinada seção da tubulação, bolhas e pistões com as mesmas características se alternarão de forma periódica. Esta alternância de estruturas gás-líquido faz com que a pressão também se alterne de forma periódica. A figura 5. 3 apresenta a pressão na entrada ($z = 0$) calculada numericamente (P_o) em função do tempo e a pressão calculada analiticamente (P_o (analit)) em função do tempo.

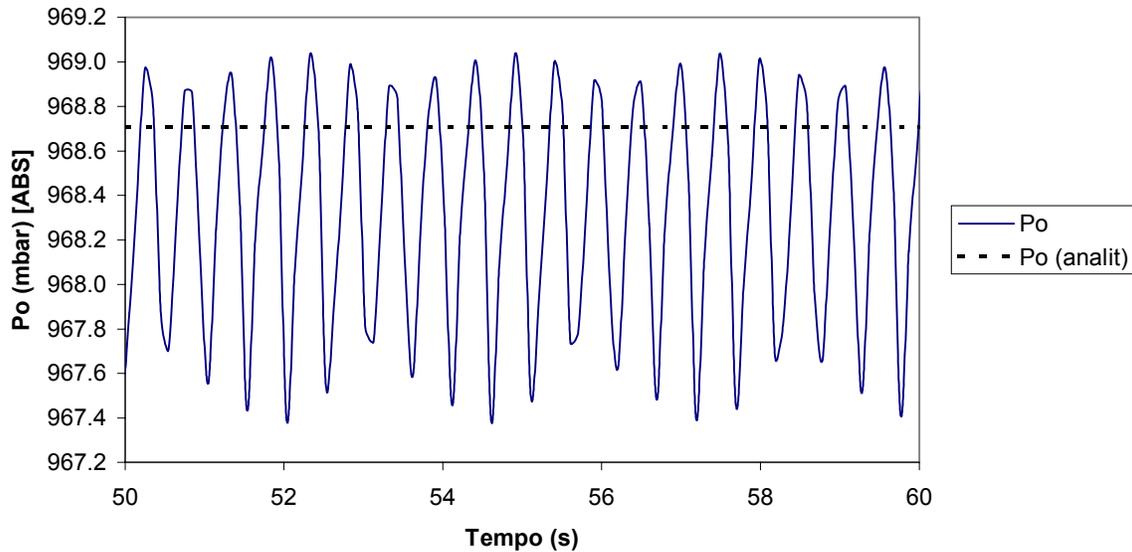


Figura 5. 3. Variação da pressão (absoluta) com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).

Percebe-se que a solução numérica oscila periodicamente em torno da solução analítica. A oscilação da pressão é fisicamente esperada, uma vez que tem-se bolhas e pistões entrando e deixando o duto periodicamente, o que causa flutuações periódicas de pressão em cada seção do duto. Já na solução analítica, conforme apresentado no Anexo II, a pressão foi calculada seguindo uma bolha ao longo da tubulação e não se considerou flutuações nas condições limites (entrada e saída). Destaca-se entretanto que a diferença entre o valor médio da pressão e a solução analítica diferem em menos de 0,06%.

No caso da velocidade superficial do gás, ela é calculada pelo modelo numérico como uma média da célula unitária (equação (3. 52)), uma vez que multiplica-se a velocidade da bolha por sua fração de vazio e pelo fator de intermitência. Assim, a velocidade superficial do gás calculada em uma dada seção não é a velocidade instantânea nesta seção, mas um valor médio da velocidade superficial do gás da célula que passa por ela. Esta média pode ser temporal, baseada no período da célula, ou espacial, baseada nos comprimentos de bolhas e pistões.

Na seção de entrada, a velocidade superficial do gás é uma condição de contorno e é calculada conforme a equação (3.50). Como a pressão na entrada do duto oscila periodicamente, o valor médio da velocidade superficial do gás da célula também deve oscilar.

A figura 5. 4 apresenta na seção de entrada a velocidade superficial do gás calculada numericamente (j_{Go}) em função do tempo e a velocidade superficial do gás calculada analiticamente (j_{Go} (analit)) em função do tempo. A diferença entre a média temporal da solução numérica e a solução analítica é menor que 0,05%.

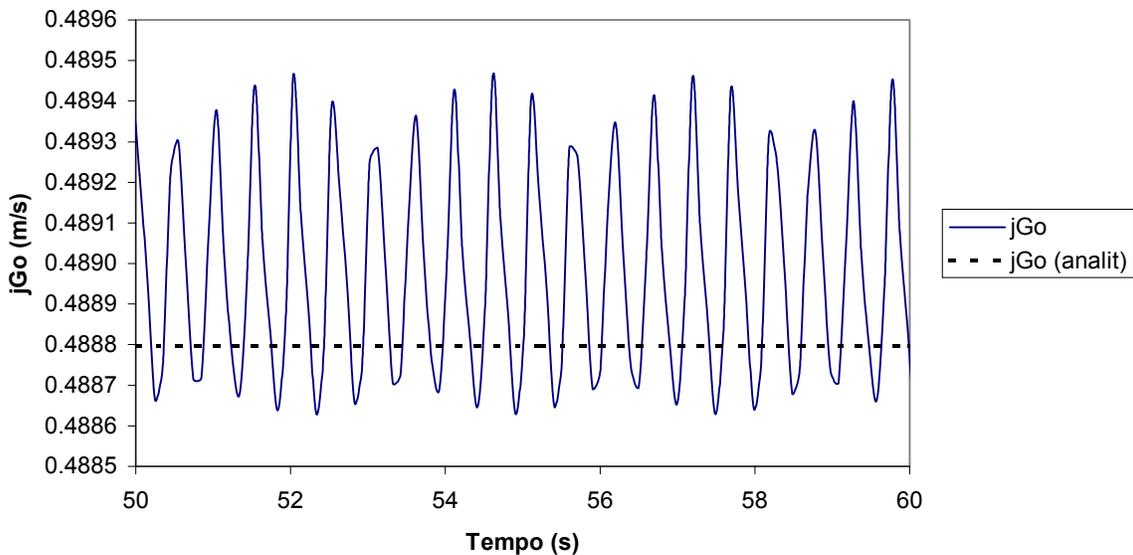


Figura 5. 4. Variação da velocidade superficial do gás com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).

A velocidade de mistura na seção de entrada é condição de contorno e é calculada à partir da equação (3. 51). A velocidade superficial do líquido é considerada constante na seção de entrada e é igual ao valor médio da velocidade superficial do líquido na célula que entra no duto. Como a velocidade de mistura na entrada é calculada como a soma das velocidades superficiais de líquido e de gás na seção de entrada, ela é igual ao valor médio da velocidade de mistura na célula que passa por esta seção. Ainda, por ser função da velocidade superficial do gás, a velocidade de mistura calculada pelo modelo numérico irá oscilar.

A figura 5. 5 apresenta na seção de entrada a velocidade de mistura calculada numericamente (U_o) em função do tempo e a velocidade de mistura calculada analiticamente (U_o (analit)) em função do tempo. A diferença entre a média temporal da solução numérica e a solução analítica é menor que 0,03%.

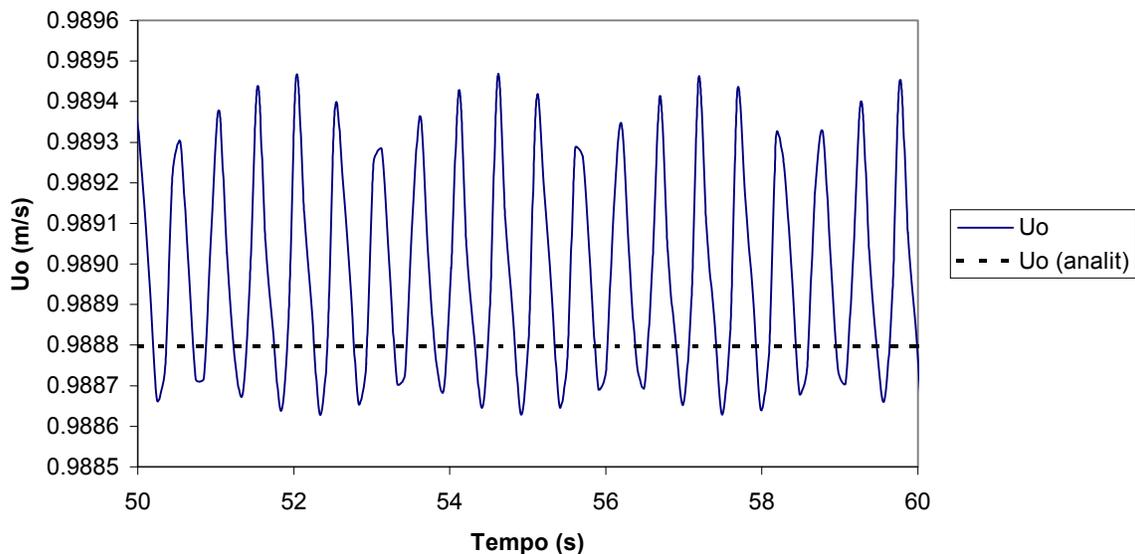


Figura 5. 5. Variação da velocidade de mistura com o tempo na seção de entrada ($z = 0$).

5.2.2 – Seguindo uma bolha

Por este ser um modelo lagrangeano, pode-se acompanhar os parâmetros relativos a uma célula unitária conforme ela se desloca ao longo do duto. Este tipo de monitoramento foi realizado por meio da sonda lagrangeana, apresentada no capítulo 4.

Nesta seção são apresentados os dados relativos a uma célula (pistão seguido de bolha) que foi monitorada desde sua entrada no duto até o momento de sua saída. O escoamento possui as características descritas na tabela 5. 1 e a bolha monitorada foi escolhida apenas após a estabilização do escoamento. A frequência de amostragem dos registros da célula foi de 10Hz. Ressalta-se aqui que o valor das posições se referem ao valor da frente da bolha.

A pressão, a velocidade e os comprimentos da bolha e do pistão, conforme eles viajam ao longo do duto, são apresentados de forma gráfica nas figuras 5. 6 a 5. 10. Nestes gráficos a linha tracejada representa a solução analítica, as linhas fina e grossa representam as soluções numéricas para os passos de tempo $\Delta t = 0,0005s$ e $\Delta t = 0,0001s$, respectivamente. De acordo com a análise de erros da seção 5.1, os erros relativos das soluções numéricas correspondentes aos passos de tempo de $0,0005s$ e de $0,0001s$ devem apresentar um limite superior de $0,5\%$ e $0,1\%$, respectivamente. Este limite corresponde ao comprimento do pistão. Todos os outros parâmetros exibem erros menores.

A figura 5. 6 apresenta a pressão da bolha em mbar em função de sua posição axial no duto (z/D). Nota-se que a medida que a bolha viaja ao longo do duto, em direção à saída, sua pressão cai. Em termos médios, o gradiente de pressão é linear, porém nota-se que a pressão apresenta oscilações em torno da média. As oscilações de pressão ao longo do duto são melhor representadas se for descontado do sinal da pressão seu valor médio. Isto é realizado na figura 5. 7. Observa-se que a amplitude das oscilações se afastam do valor médio da pressão na proporção de 1:1600. O sinal da diferença de pressão reporta, tipicamente, um fenômeno de batimento. Observa-se também que as soluções numéricas para $\Delta t = 0,0005s$ e $\Delta t = 0,0001s$ são praticamente coincidentes para a pressão.

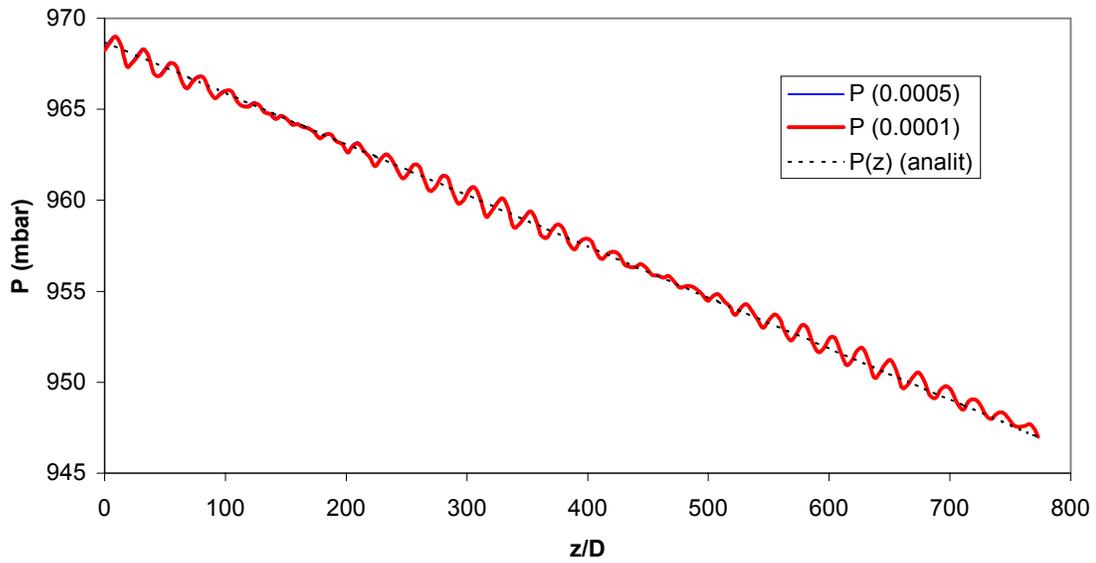


Figura 5. 6. Pressão em uma bolha ao longo da do duto.

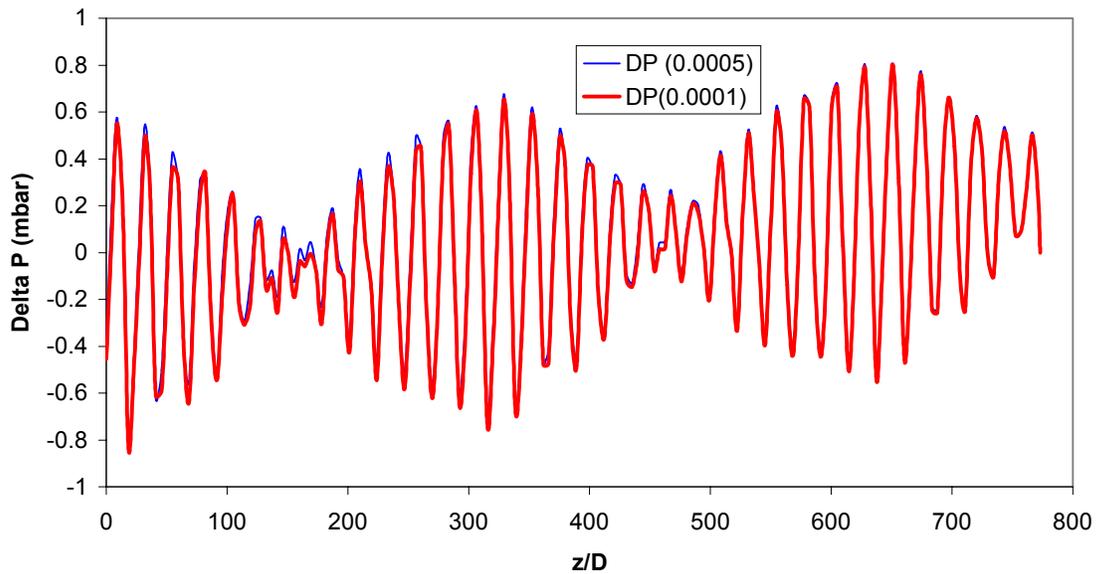


Figura 5. 7. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto.

A figura 5. 8 mostra a evolução da velocidade da frente de bolha a medida que ela viaja ao longo do duto. Em termos médios há um aumento de V_B a medida que z/D aumenta devido à expansão do gás, que causa um aumento da velocidade de mistura. Entretanto, assim como a

pressão, V_B apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude oscila em aproximadamente 1:100 de seu valor médio. A figura não mostra diferença entre as soluções numéricas para $\Delta t = 0,0005s$ e $\Delta t = 0,0001s$.

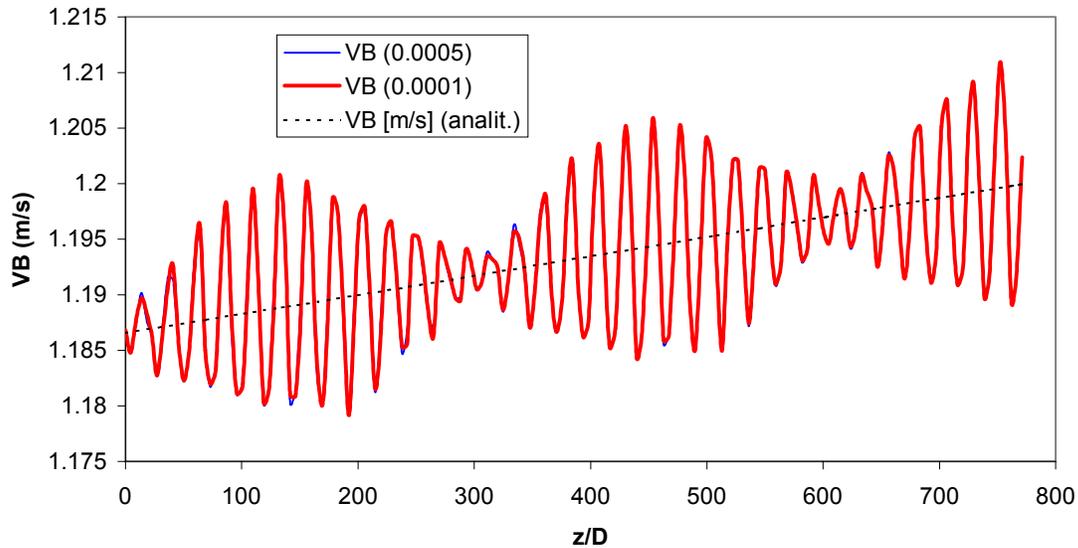


Figura 5. 8. Velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto.

A evolução da razão entre o comprimento de uma bolha e o diâmetro da linha (L_B/D) ao longo do duto é apresentada na figura 5. 9. Ela mostra que o comprimento da bolha cresce com o aumento de z/D . Isto pode ser explicado pelo fato que quando z/D aumenta, a pressão cai e o gás na bolha se expande. Assim como a pressão e V_B , o comprimento da bolha também apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude oscila na proporção 1:200 em torno de seu valor médio. Nota-se também que os resultados numéricos de L_B são insensíveis à variação do passo de tempo.

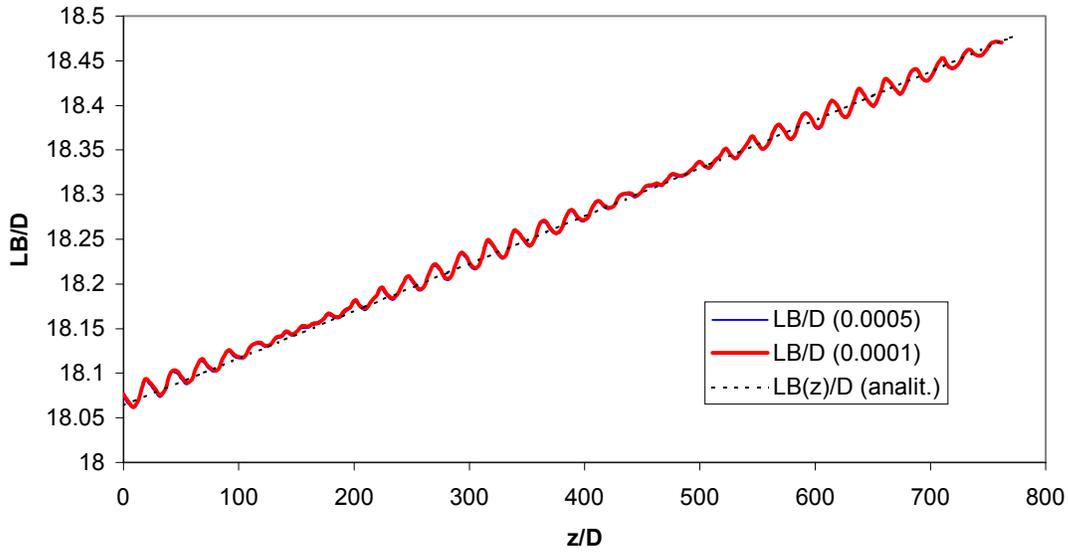


Figura 5. 9. Comprimento de uma bolha ao longo do duto.

Por último, o comprimento do pistão, expresso pela razão entre seu comprimento e o diâmetro da linha (L_S/D), é mostrado na figura 5. 10 em função do comprimento da linha (z/D). A razão L_S/D decresce a medida que o pistão viaja ao longo do duto. Destaca-se porém que a taxa de decréscimo de L_S/D com z/D é pequena, $\frac{\Delta L_S}{\Delta(z/D)} \cong \frac{-1}{5000}$. Assim como os outros parâmetros do escoamento, L_S também apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude oscila em uma proporção de 1:500 em torno de seu valor médio.

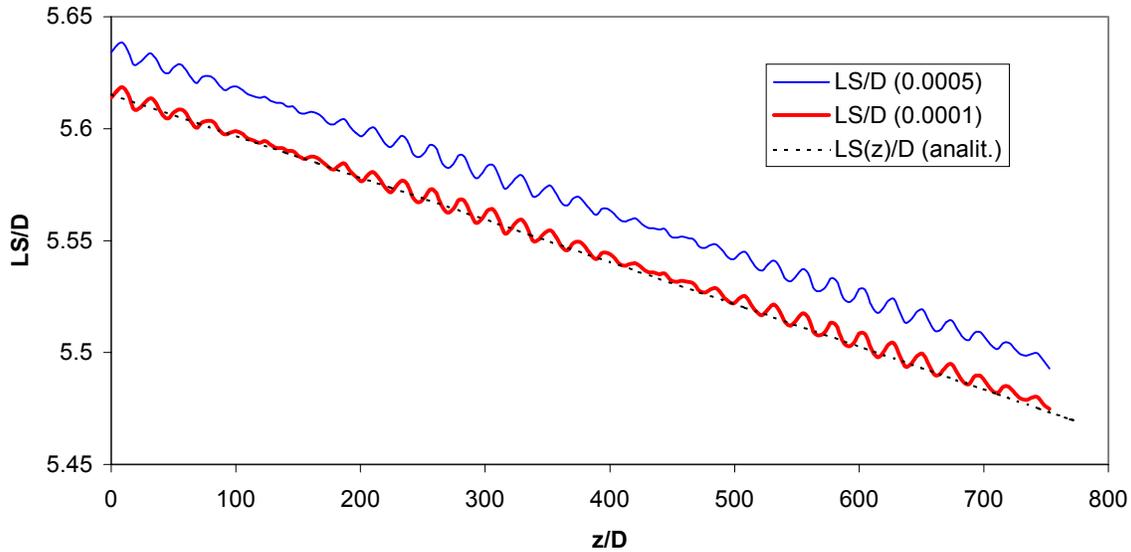


Figura 5. 10. Comprimento de um pistão ao longo do duto.

Os comprimentos de pistão, conforme esperado, apresentam uma diminuição significativa dos erros com a diminuição do passo de tempo de 0,0005s para 0,0001s. No entanto, apesar da solução obtida com $\Delta t = 0,0005s$ estar um pouco afastada da solução analítica (figura 5. 10), o erro relativo é sempre menor que 0,5%. Assim, o critério de erro é verificado ao longo de todo o duto.

Percebe-se que a solução numérica oscila sempre em torno da solução analítica. Conforme apresentado na seção 5.2.1.2 , a solução numérica considera os efeitos nos limites do domínio de cálculo, isto é, efeitos devido a entrada e saída de bolhas e pistões. A entrada e saída periódica de bolhas e pistões provoca uma oscilação periódica do número de células presentes no duto e da pressão na entrada do duto, assim como das velocidades superficial do gás e de mistura na seção de entrada. Esta oscilação nas condições de contorno na entrada se refletem também de forma periódica na célula conforme ela viaja ao longo do duto.

Já a solução analítica não considera os efeitos oscilatórios nos limites do domínio de cálculo. De fato, ela utiliza o gradiente linear de pressão médio obtido da solução numérica, que é

na verdade o gradiente de pressão ao longo do duto calculado a partir da pressão média em cada seção. Assim, calculada a pressão, ela calcula todos os demais parâmetros a partir da pressão média do escoamento. Por este motivo todos os demais parâmetros oscilam em torno do valor analítico, que na realidade é um valor médio.

Das figuras acima percebe-se que um fenômeno de batimento ocorre durante os cálculos dos parâmetros apresentados. Este fenômeno será discutido qualitativamente na seção 5.2.4.

5.2.3 – Análise ao Longo do Duto Utilizando-se as Sondas Espaciais

Conforme apresentado no capítulo 4, é possível o registro em um dado instante da situação presente ao longo de todo o duto, isto é, do registro de todos os parâmetros referentes a todas as células que se encontram no domínio de cálculo. Estes registros são apresentados nesta seção.

As figuras 5. 11 a 5. 14 apresentam os dados relativos a pressão e a velocidade da frente das bolhas presentes no duto em alguns instantes. O escoamento possui as características apresentadas na tabela 5. 1 e os instantes dos registros foram escolhidos apenas após a estabilização do escoamento. Eles são: 50s, 52s, 54s, 56s e 58s.

A figura 5. 11 mostra a pressão das bolhas ao longo do duto para os instantes de tempo de 50 segundos a 58 segundos, após ter ocorrido a estabilização do escoamento. Como era de se esperar, a pressão média cai de forma linear com a distância da entrada do duto. Entretanto os valores da pressão mostram uma oscilação que é melhor visualizada na figura 5. 12. Por conveniência, a figura 5. 12 mostra a diferença de pressão entre as soluções numérica e analítica, Δp , em função da distância z/D para os cinco intervalos de tempo escolhidos. Por meio dela pode-se visualizar como a pressão varia no tempo e no espaço para uma posição específica do duto. No caso em questão, nota-se que os sinais correspondentes aos instante 50s e 56s estão defasados de aproximadamente 180° , sugerindo que o período de oscilação é de 12 segundos.

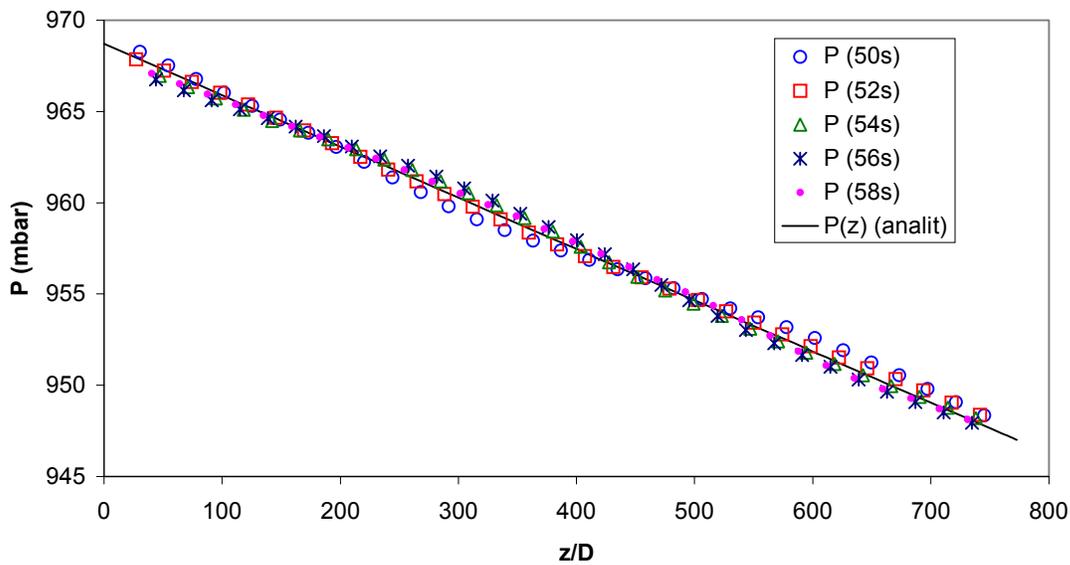


Figura 5. 11. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.

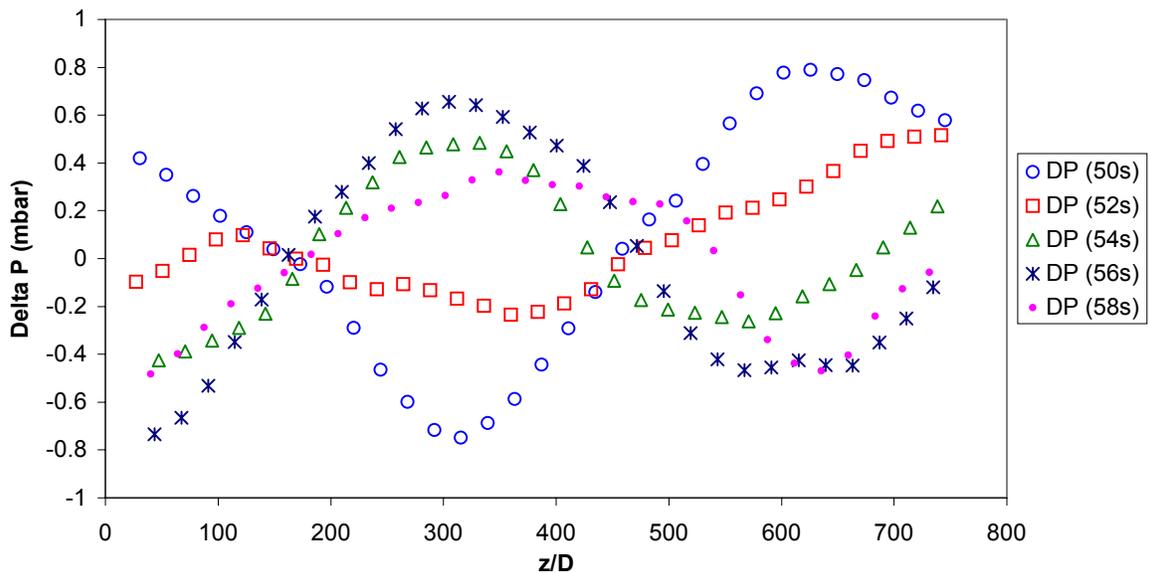


Figura 5. 12. Diferenças entre soluções numéricas e analítica para as pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.

Devido a periodicidade do escoamento que foi imposta ao modelo, a pressão seguindo uma bolha deve conter também a informação correspondente às diversas bolhas no duto nos diferentes instantes de tempo. A figura 5. 13 mostra uma superposição das figuras 5. 7 e 5. 12 para os

instantes 50s e 56s somente. Como era de se esperar, os valores de Delta P ao longo do duto (símbolos) estão também representados por Delta P seguindo uma bolha (linha contínua). A figura também mostra de forma explícita a dependência no tempo e no espaço da pressão, revelando sua natureza ondulatória. Além disto, os resultados da figura 5. 13 mostram também a consistência do método numérico empregado.

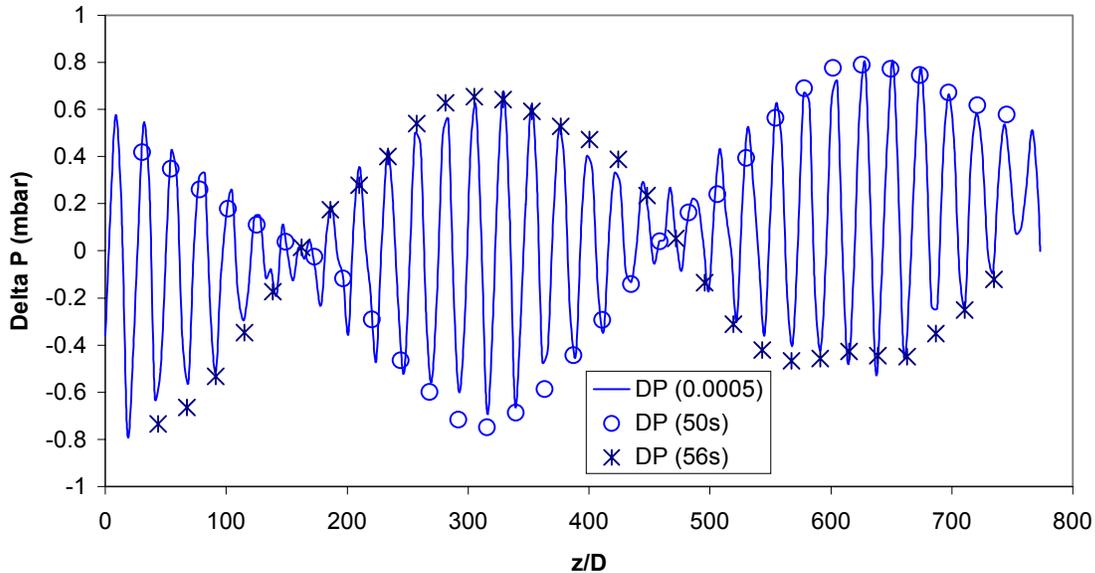


Figura 5. 13. Diferenças entre soluções numéricas e analítica para as pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em $t = 50s$ e $t = 56s$ e seguindo-se uma bolha.

A figura 5. 14 mostra a velocidade das frentes das bolhas ao longo do duto para os instantes 50s a 58s. Nota-se que V_B também varia no espaço e no tempo como P . Os dados também mostram que os sinais de V_B apresentam uma defasagem de 180° para aproximadamente 6 segundos, conforme indicam as curvas para 50s e 56s.

Resultados similares são encontrados para L_B/D e L_S/D , porém não serão apresentados aqui.

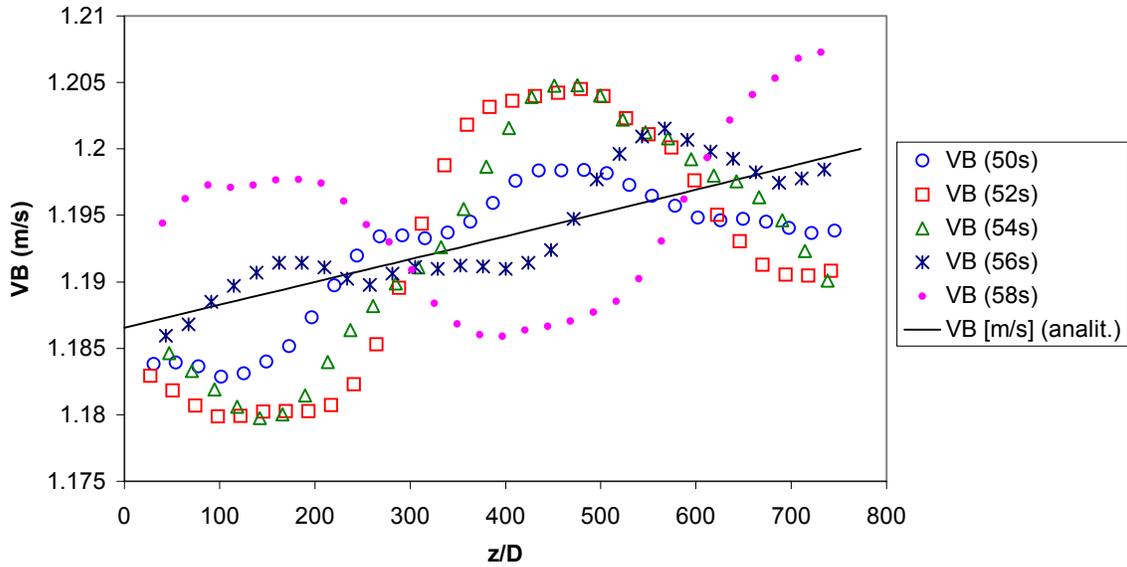


Figura 5. 14. Velocidades das frentes das bolhas que se encontram no interior do duto em diferentes instantes de tempo.

5.2.4 – Batimento

Foi observado nas seções anteriores que as propriedades do escoamento intermitente, tais como pressão, velocidade da frente da bolha e os comprimentos do pistão e da bolha apresentam oscilações ao redor de um valor médio, reconhecido aqui como aquele fornecido pela solução analítica. Cabe destacar que estas observações aplicam-se ao caso padrão estudado onde os pistões e as bolhas são introduzidos periodicamente e não há efeito de esteira entre bolhas.

Conforme dito anteriormente, atribui-se estas oscilações à entrada e à saída de pistões e bolhas do tubo. Neste caso, os pistões e as bolhas introduzidas de forma periódica na entrada do tubo devem também sair do tubo de forma periódica. Da equação (3. 54) pode-se mostrar que o valor médio esperado para frequência é dado por:

$$f_u = \frac{J_G}{L_B \cdot R_G}$$

(5. 4)

Como J_G e L_B variam linearmente com a pressão ao longo do duto, pode-se dizer que a frequência média esperada das células é constante ao longo do duto. Entretanto, como o período e o comprimento onde ocorre a bolha e o pistão são distintos o fenômeno de introdução e remoção não pode ser representado por uma única frequência ou comprimento de onda. Isto é, sua representação requer um pacote de ondas representado por frequências e comprimentos de ondas que apresentam características semelhantes entre si. O sinal resultante das diversas frequências e comprimentos é denominado por onda de grupo. Ele se move com uma velocidade que é diferente da velocidade de onda de cada componente.

O fenômeno é complexo de ser analisado em toda sua extensão e propõe-se uma abordagem simplificada. Aqui o fenômeno ondulatório será representado por apenas duas frequências e dois números de onda. Esta representação será empregada para representar as flutuações de pressão encontradas nos resultados numéricos, veja figura 5. 7. O modelo considera que as flutuações de pressão causadas pela introdução ou remoção de um pistão ou de uma bolha, ΔP_p e ΔP_b , são representados por duas ondas somente:

$$\begin{aligned}\Delta P_p &= a \cdot \text{Sen}(2\pi \cdot f_1 \cdot t - 2\pi \cdot k_1 \cdot z) \\ \Delta P_b &= a \cdot \text{Sen}(2\pi \cdot f_2 \cdot t - 2\pi \cdot k_2 \cdot z)\end{aligned}\tag{5.5}$$

onde a é a amplitude, igual para ambas, f_1 e f_2 as frequências e k_1 e k_2 os números de onda. Considera-se que o sinal de pressão resultante vem da superposição destas duas ondas:

$$\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_b\tag{5.6}$$

ou substituindo-se as expressões para ΔP_p e ΔP_b e fazendo manipulações trigonométricas, tem-se que:

$$\Delta P = 2a \cdot \text{Sen}\left(2\pi \cdot \frac{(f_1 + f_2)}{2} \cdot t - 2\pi \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2} \cdot z\right) \cdot \text{Cos}\left(2\pi \cdot \frac{(f_1 - f_2)}{2} \cdot t - 2\pi \cdot \frac{(k_1 - k_2)}{2} \cdot z\right)\tag{5.7}$$

O termo com a função seno representa uma onda cuja frequência e número de onda é a média das ondas originais e sua velocidade de onda será: $(f_1+f_2)/(k_1+k_2)$. Espera-se que f_1 e f_2 assim como k_1 e k_2 sejam próximos entre si portanto o termo com o seno representa uma onda cuja frequência e número de onda próximo das ondas originais. O termo com a função co-seno por sua vez tem frequência e número de onda dado pelas diferenças: (f_1-f_2) e (k_1-k_2) , além disto a sua velocidade é dada por $(f_1-f_2)/(k_1-k_2)$. O termo com co-seno varia mais lentamente no tempo e no espaço em relação ao termo com seno.

Atribuindo-se valores apropriados para a , f_1 , f_2 , k_1 , k_2 pode-se representar aproximadamente as oscilações da diferença de pressão previstas pelo modelo numérico. As figuras 5. 15 e 5. 16 mostram as flutuações da pressão ao longo do tubo ou ao longo do tempo como determinadas pelo modelo (linha fina). O comportamento deste sinal é típico do fenômeno de batimento (veja Gough, Richards & Williams (1996)). Nas figuras 5. 15 e 5. 16 também está mostrado uma curva em linha grossa que representa o envelope das oscilações de pressão. Ela vem do termo com o co-seno na equação (5. 7). Os valores para f , k e a utilizados estão mostrados na tabela 5. 7.

	$f(1/s)$	$k(1/m)$	a
Sinal (1): ΔP_P	1,927	1,615	0,33
Sinal (2): ΔP_B	1,793	1,492	0,33

Tabela 5. 7. Frequências e números de onda.

Os valores para f_1 e k_1 são obtidos diretamente dos valores médios do modelo numérico, k_1 é igual ao inverso do comprimento médio de uma célula, isto é: $k_1 = 1/(L_S+L_B)$. Por sua vez a frequência é obtida da razão entre a velocidade média de propagação da frente da bolha e o comprimento da célula: $f_1=V_B/(L_S+L_B)$. Os valores para a , f_2 e k_2 foram obtidos a partir do melhor ajuste entre as curvas.

Os dados da tabela 5. 7 permitem estimar a velocidade de onda para cada componente:

$$c_1 = \frac{f_1}{k_1} = 1,19 \text{ (m/s)} \quad \& \quad c_2 = \frac{f_2}{k_2} = 1,29 \text{ (m/s)} \quad (5.8)$$

O valor de c_1 é reconhecido como a velocidade de propagação da frente da onda, V_B . O valor de c_2 é a velocidade de propagação da segunda onda. Como $c_1 \neq c_2$ pode-se afirmar que o meio é dispersivo (Gough, Richards & Williams (1996)), isto é, a velocidade de propagação das ondas varia com o comprimento de onda. Neste caso a velocidade de onda do grupo, c_g , é definida (Gough, Richards & Williams (1996)) por:

$$c_g = \frac{f_1 - f_2}{k_1 - k_2} = 1,09 \text{ (m/s)} \quad (5.9)$$

Diferente de c_1 e c_2 , a velocidade de onda do grupo representa a velocidade com que o pacote de ondas viaja. Em termos da diferença de pressão representada nas figuras 5. 15 e 5. 16, observa-se que a amplitude máxima da pressão não viaja nem com c_1 nem com c_2 porém ela ocorre dentro do envelope (linha grossa) que viaja com c_g .

Dentro do contexto de aplicação esta informação perde seu significado porque a amplitude de oscilação é muito menor que o valor não periódico. Para o caso padrão estudado tem-se que a queda de pressão entre a entrada e saída da linha é de 21mBar, já amplitude do sinal de pressão é estimado pelo valor da constante a da tabela 5. 7, $a = 0,33$ mBar. Assim a razão entre a amplitude do sinal de pressão e sua queda é:

$$\frac{a}{\Delta P} = \frac{0,33}{21} = 0,016 \quad (5.10)$$

De interesse complementar, a razão de $a/\Delta P$ também pode ser estimada a partir do fenômeno de introdução e remoção de bolhas. As oscilações de pressão são causadas principalmente pelo pistão de líquido. Neste caso, entre as extremidades da tubulação sempre haverá uma fração de pistão entrando e outra saindo. Como a queda de pressão será proporcional ao número de pistões, propõe-se que:

$$\frac{a}{\Delta P} \approx \frac{0,5}{33} = 0,015$$

(5.11)

onde 0,5 no numerador representa a fração de pistão que está entrando ou saindo e 33 no denominador representa o número de células dentro do tubo.

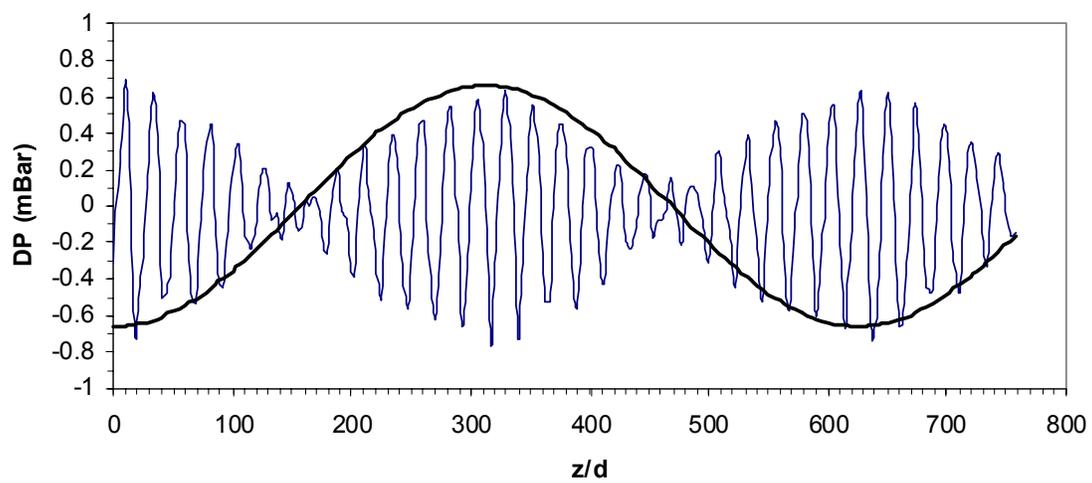


Figura 5. 15. Flutuações da pressão ao longo do tubo.

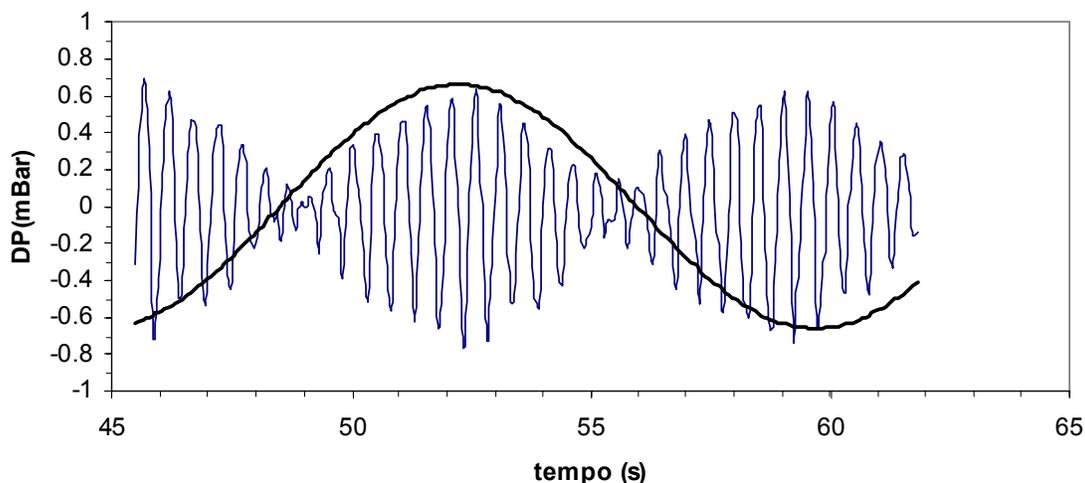


Figura 5. 16. Flutuações da pressão ao longo do tempo.

5.2.5 – Análise do Aumento do Comprimento da Tubulação

Nesta seção são analisados os efeitos causados pelo aumento do comprimento total da tubulação. O escoamento possui as características descritas na tabela 5. 1, a exceção do comprimento total do duto.

O escoamento foi simulado com o comprimento total do duto duplicado e quadruplicado, isto é, $L = 40196\text{mm}$ e $L = 80392\text{mm}$, respectivamente. Nas simulações foram utilizadas sondas do tipo lagrangeano e os dados relativos a uma célula, que foi monitorada desde sua entrada no duto até o momento de sua saída, foram gravados apenas após a estabilização do escoamento. A frequência de amostragem dos registros da célula é de 10Hz. O valor das posições se referem ao valor da frente da bolha.

Para cada um dos comprimentos de duto, a figura 5. 17 apresenta a pressão em uma bolha conforme ela viaja ao longo da tubulação (z/D). Na figura, 1L equivale a um comprimento de duto igual a 20098mm, 2L a um comprimento de 40196mm e 4L a um comprimento de 80392mm.

Da figura 5. 17 percebe-se que o gradiente total de pressão ao longo do duto não se altera. Logo, a diferença de pressão (média) sentida por uma bolha entre sua entrada no duto e sua saída é diretamente proporcional ao comprimento total do duto. Ainda, a amplitude de oscilação em torno do valor médio parece diminuir com o aumento do comprimento total do duto.

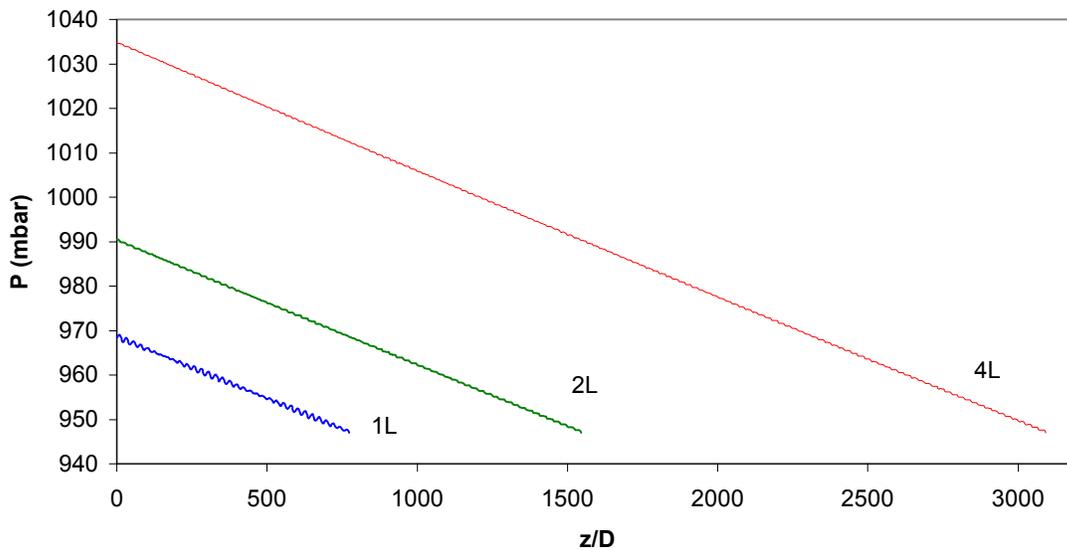


Figura 5. 17. Pressão em uma bolha ao longo do duto, parametrizada pelo comprimento total do duto.

As oscilações de pressão ao longo do duto são melhor representadas se for descontado do sinal da pressão seu valor médio, o que é feito nas figuras 5. 18, 5. 19 e 5. 20 para os comprimentos totais 1L, 2L e 4L respectivamente. Destas figuras fica claro que a amplitude das oscilações diminui com o aumento do comprimento total do duto.

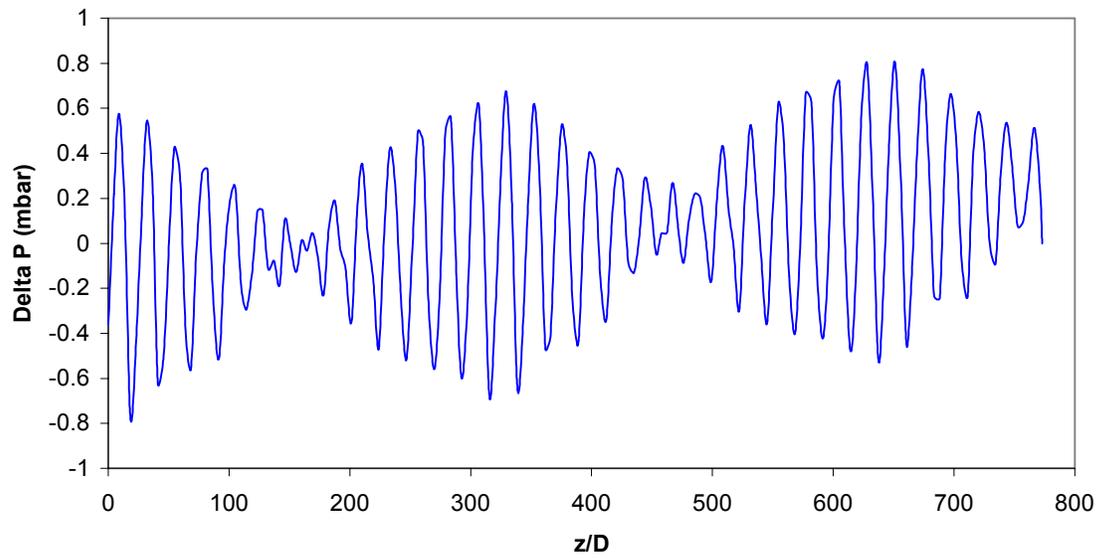


Figura 5. 18. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (1L).

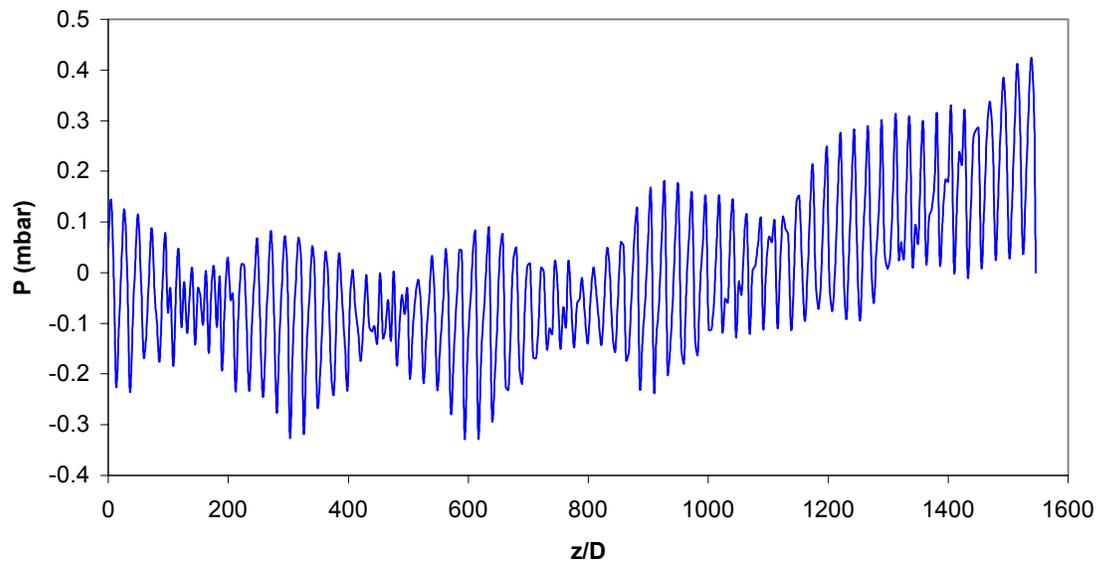


Figura 5. 19. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (2L).

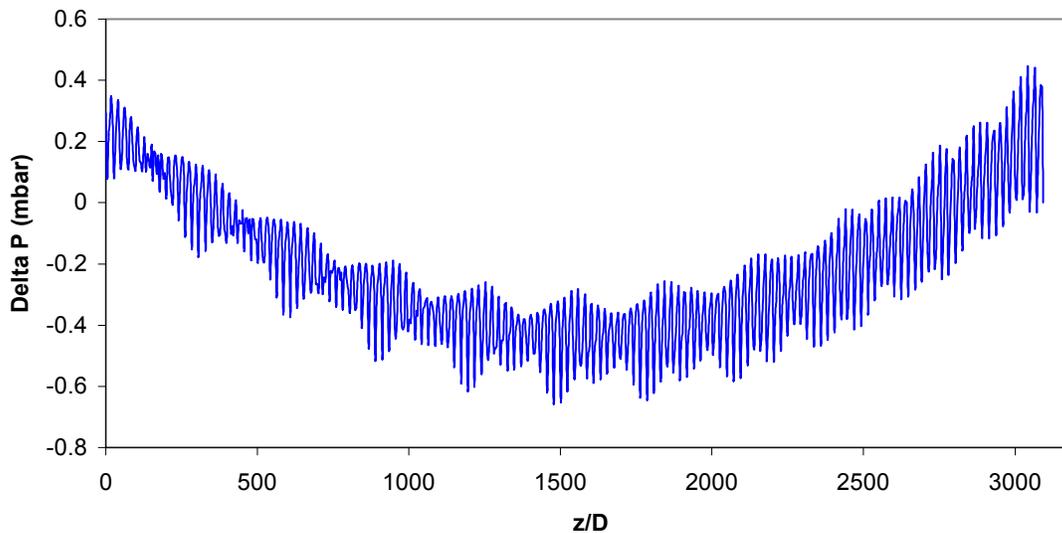


Figura 5. 20. Diferença entre as soluções numéricas e a analítica para a pressão de uma bolha ao longo do duto (4L).

A figura 5. 21 mostra, para cada comprimento total de duto, a evolução da velocidade da frente de bolha a medida que ela viaja ao longo do duto. Em termos médios há, em todos os casos, um aumento de V_B a medida que z/D aumenta devido à expansão do gás, que causa um aumento da velocidade de mistura. Entretanto, assim como a pressão, V_B apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude em torno do valor médio diminui com o aumento do comprimento total do duto.

Nota-se ainda que nos três casos V_B na seção de saída possui o mesmo valor médio. Isto ocorre porque a velocidade de mistura na seção de saída foi fixada da mesma forma para os três casos: $j_{(z=L)} = j_{G(z=L)} + j_L$.

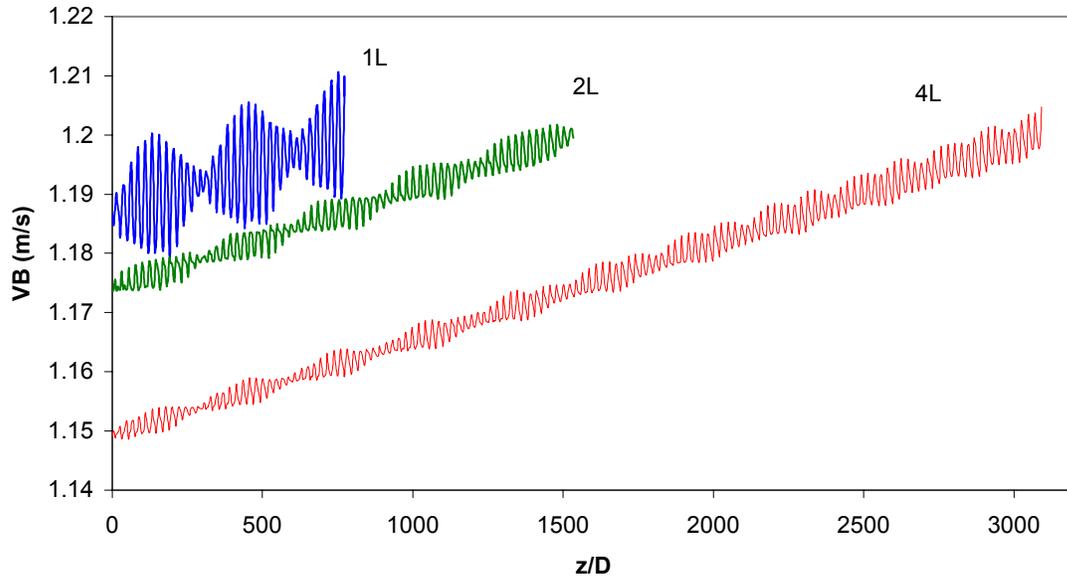


Figura 5. 21. Velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto, parametrizada pelo comprimento total do duto.

A evolução da razão entre o comprimento de uma bolha e o diâmetro da linha (L_B/D) ao longo do duto é apresentado na figura 5. 22. Ela mostra que o comprimento da bolha cresce com o aumento de z/D . Isto pode ser explicado pelo fato que quando z/D aumenta, a pressão cai e o gás na bolha se expande. Assim como a pressão e V_B , o comprimento da bolha também apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude de oscilação diminui com o aumento do comprimento total do duto.

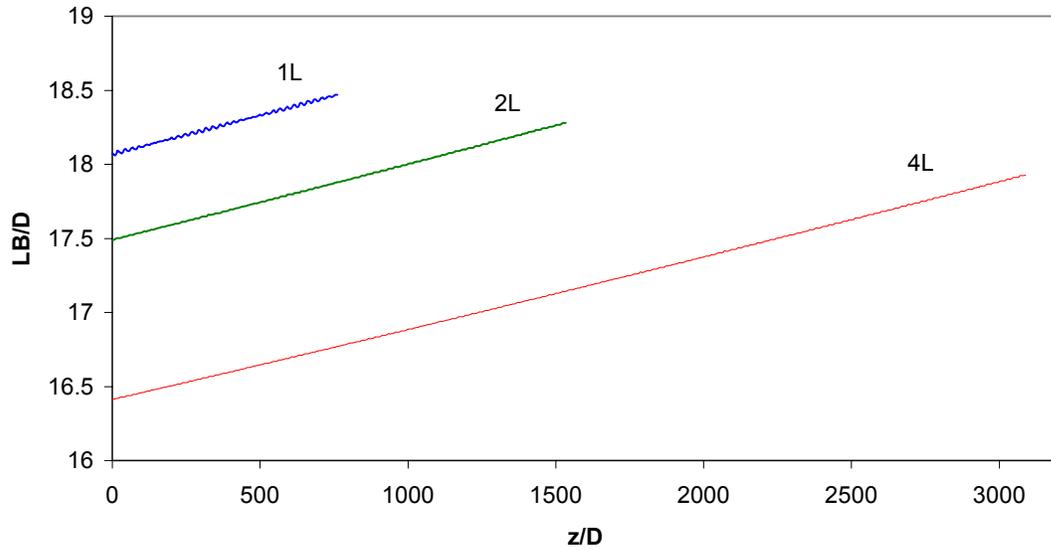


Figura 5. 22. Comprimento de uma bolha ao longo do duto, parametrizado pelo comprimento total do duto.

O comprimento do pistão, expresso pela razão entre seu comprimento e o diâmetro da linha (L_S/D), é mostrado na figura 5. 23 em função do comprimento da linha (z/D). A razão L_S/D decresce a medida que o pistão viaja ao longo do duto. Assim como os outros parâmetros do escoamento, L_S também apresenta um comportamento oscilatório cuja amplitude diminui com o aumento do comprimento total do duto.

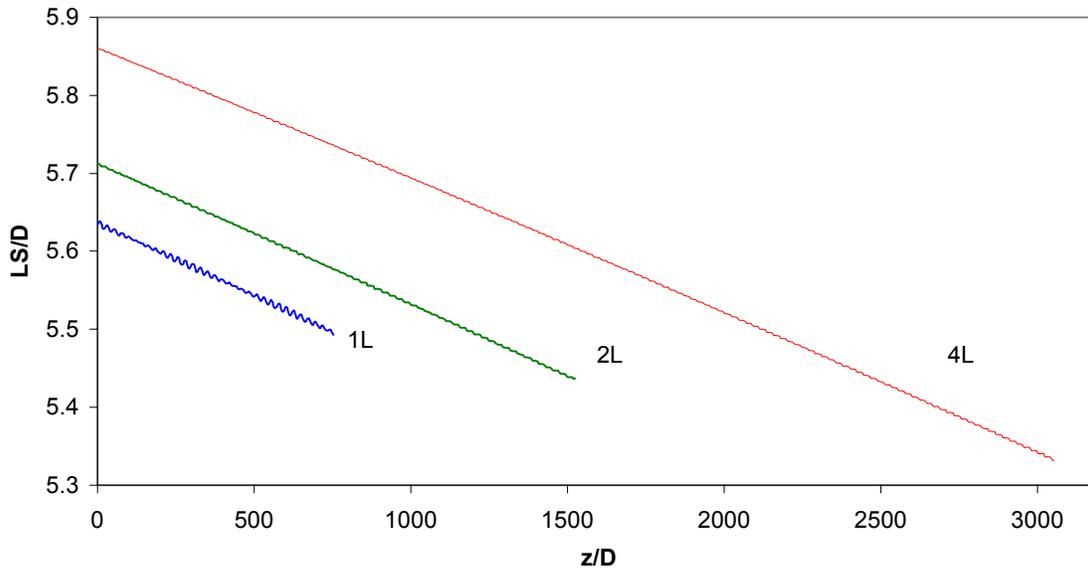


Figura 5. 23. Comprimento de um pistão ao longo do duto, parametrizado pelo comprimento total do duto.

5.2.6 – Influência de C_0

Na seção 3.6.2 foram discutidas diversas correlações para a velocidade da frente da bolha. Em todas as correlações, a velocidade da frente da bolha é função da velocidade de mistura no pistão à sua frente. Esta função possui sempre uma constante C_0 que é multiplicada pela velocidade de mistura, juntamente com a velocidade de deslizamento, V_0 , considerada constante (equação (3. 66)).

Também foi visto na seção 3.6.2 que existem diversos valores propostos para a constante C_0 . Esta seção tem por objetivo verificar a sensibilidade do modelo à variação em C_0 . O escoamento possui as características descritas na tabela 5. 1, a exceção do valor de C_0 , o qual será variado. As análises são realizadas utilizando-se sondas do tipo espacial (seção 4.2.5.3).

As figuras a seguir apresentam a variação de alguns parâmetros com C_0 . As figuras 5. 24, 5. 25 e 5. 26 apresentam as pressões das bolhas, as velocidades das frentes das bolhas e os comprimentos das bolhas que se encontram no interior da tubulação, respectivamente. A figura 5. 27 apresenta os comprimentos dos pistões que se encontram no interior da tubulação. A figura 5.

28 apresenta, para cada C_0 , o valor médio da frequência de uma célula ao longo do duto. Este valor médio foi calculado utilizando sonda do tipo lagrangeana. A tabela 5. 8 apresenta a simbologia da legenda dos gráficos. Os valores que se encontram entre parênteses estão relacionados ao valor da constante C_0 .

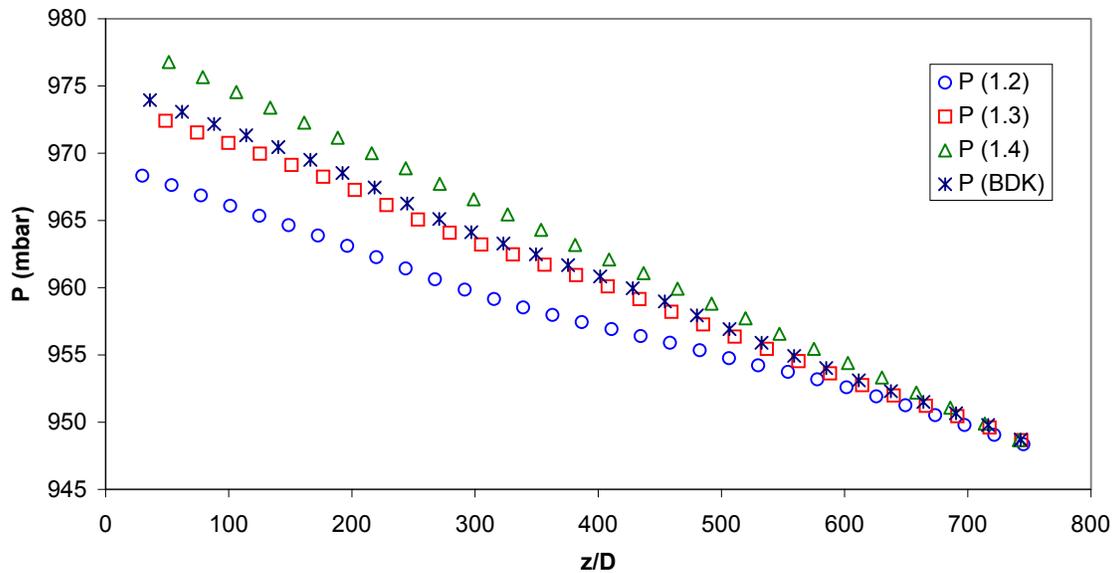


Figura 5. 24. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0 .

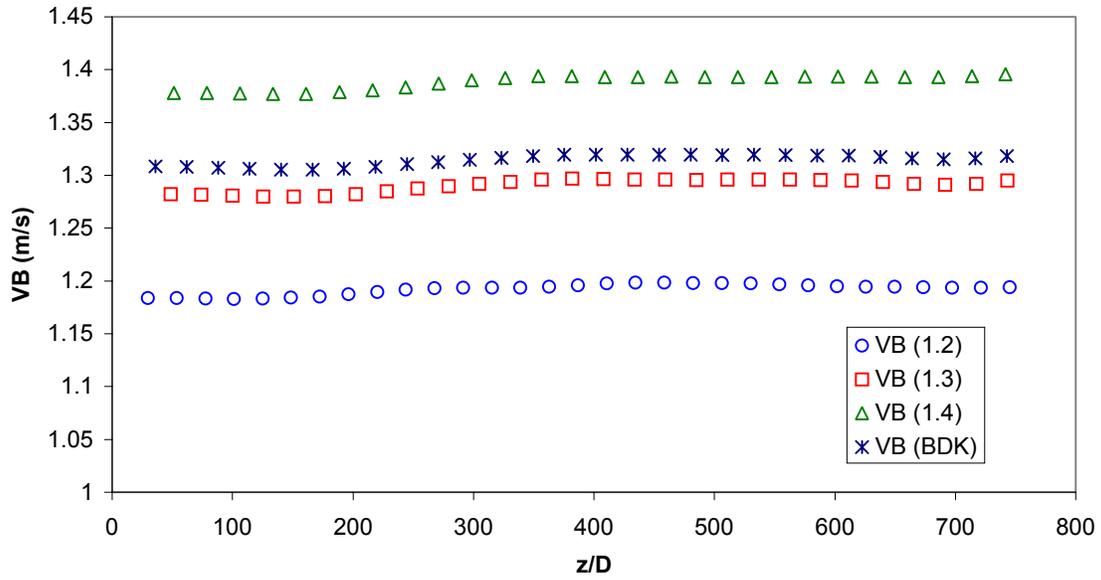


Figura 5.25. Velocidades das frentes das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0 .

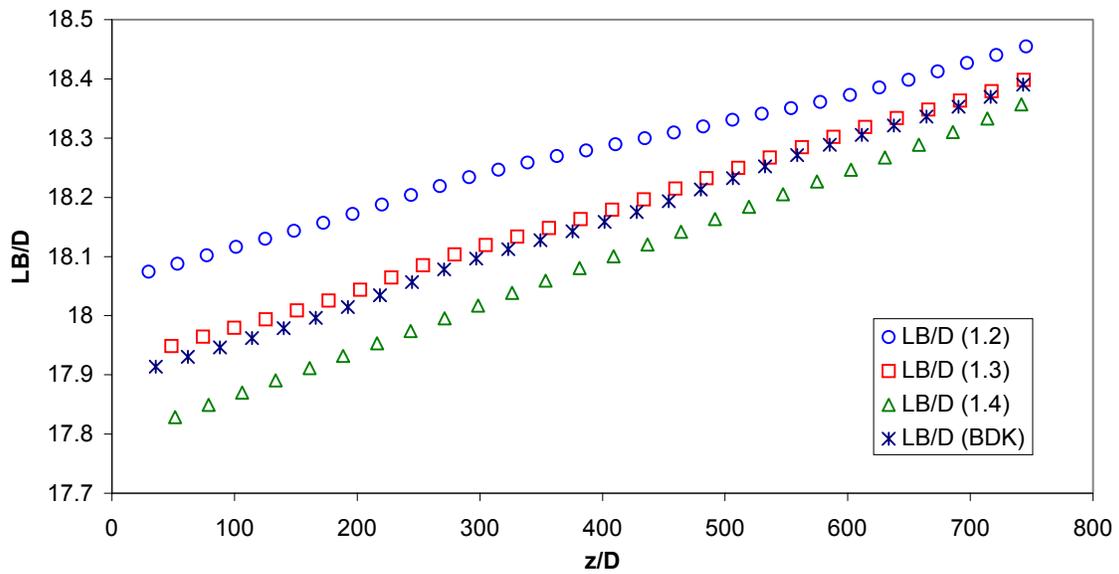


Figura 5.26. Comprimentos das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0 .

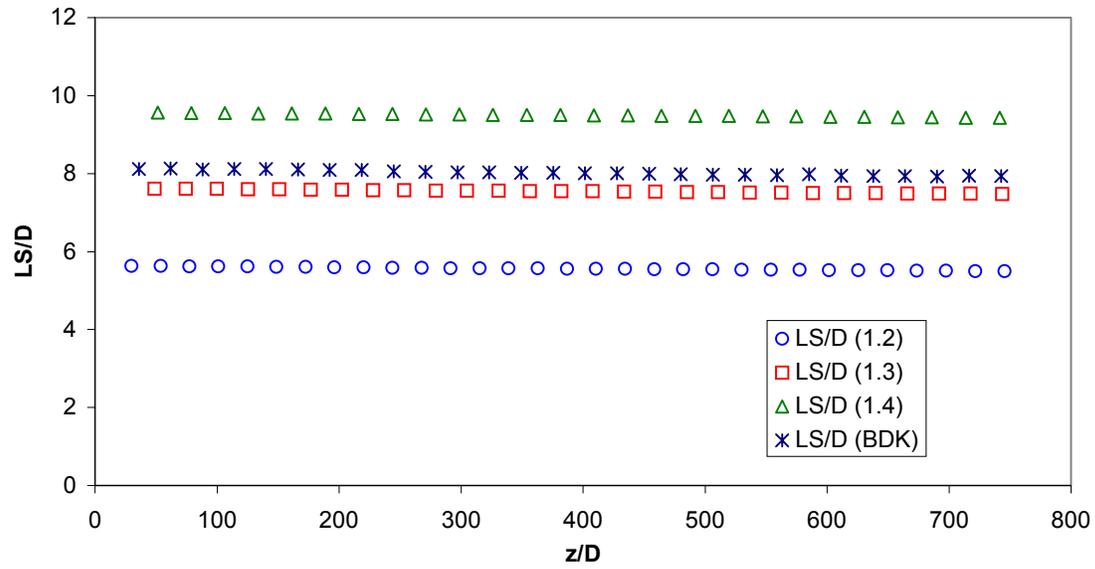


Figura 5. 27. Comprimentos dos pistões que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de C_0 .

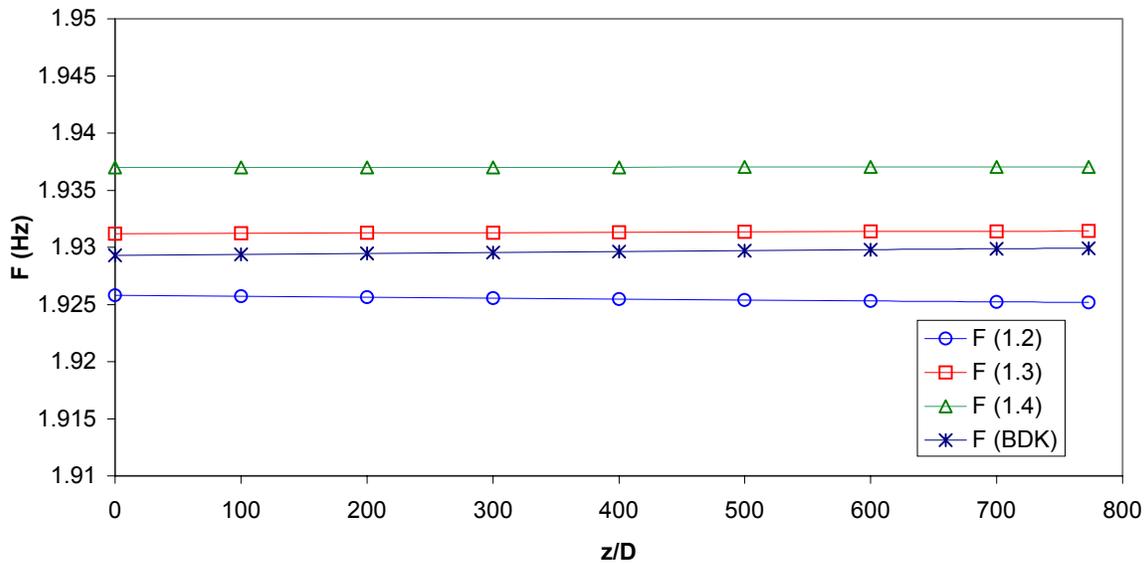


Figura 5. 28. Média da frequência de uma célula ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de C_0 .

Legenda	C₀	V₀	OBS
1,2	1,2	0	
1,3	1,3	0	
1,4	1,4	0	
BDK	1,0	$0,54\sqrt{gD}$	Valor sugerido por Bendiksen (1984), conforme equação (3.66).

Tabela 5. 8. Legendas das figuras 5. 24 à 5. 28.

Como esperado, as velocidades das bolhas aumentam com o aumento em C_0 e em V_0 (figura 5. 25), uma vez que, na ausência de efeitos de esteira, as velocidades das frentes de bolhas são calculadas utilizando-se a equação (3. 66). Da figura 5. 24, percebe-se que o aumento da velocidade das bolhas (aumento em C_0) provoca um aumento no gradiente de pressão total do duto. Assim, as pressões no interior do duto tendem a se elevar com o aumento do valor de C_0 .

Observa-se que, no caso da utilização da correlação proposta por Bendiksen (1984), embora o valor de C_0 seja 1, o valor de V_0 é diferente de zero. Na prática, este valor de V_0 diferente de zero atua de forma a aumentar a velocidade das frentes de bolha. Isto equivale a um valor de C_0 maior do que 1, no caso de se igualar V_0 a zero.

Com o aumento do gradiente de pressão no interior da tubulação, é de se esperar que os comprimentos das bolhas diminuam, uma vez que as bolhas estão sujeitas a pressões mais elevadas. Isto de fato ocorre e pode se visto na figura 5. 26 (comprimentos de bolhas diminuem com o aumento em C_0). Já as frequências das unidades (figura 5. 28), não se alteram significativamente com o aumento de C_0 .

5.2.7 – Influência da Variação de Pressão Devido à Expansão do Líquido

Aplicando-se a equação de transporte da quantidade de movimento ao volume de controle englobando um pistão de líquido (seções 3.2 e 3.3), obteve-se uma equação (equação (3. 32)) que

envolve dois termos relativos à variação de pressão devido ao efeito de expansão da fase líquida. No Anexo IV e nas seções 3.3.4, 3.6.4 e 3.6.5 estes dois termos (ΔP_A e ΔP_H) são discutidos. Esta seção tem por objetivo avaliar os efeitos destes termos na resposta numérica fornecida pelo modelo. Em um primeiro instante os efeitos de ΔP_A são avaliados isoladamente. Após, os efeitos de ΔP_H são avaliados em conjunto com ΔP_A .

5.2.7.1 – Variação de Pressão Devido à Aceleração do Líquido

Nesta seção são avaliados os efeitos que ΔP_A causa na solução numérica. Este termo é apresentado e discutido na seção 3.6.4 e no Anexo IV.

O efeito de ΔP_A na solução numérica é avaliado através da constante de ajuste C_A . Quando ela é nula não há o efeito de aceleração. Quando ela é maior que zero, há o efeito de aceleração. Também, quanto maior o valor de C_A , maior é o valor de ΔP_A e conseqüentemente seu efeito na solução numérica.

O efeito da aceleração do filme de líquido nas propriedades do escoamento é investigado variando-se o parâmetro C_A do modelo. As figuras 5. 29 a 5. 33 mostram a evolução ao longo do duto da pressão na bolha, da velocidade da frente da bolha, dos comprimentos da bolha e do pistão e, finalmente, as frequências das células. Os resultados numéricos são mostrados para quatro valores distintos de C_A , a saber: 0; 1; 2,5 e 5. Eles são identificados na legenda dos gráficos. Em particular, $C_A = 0$ reproduz o caso teste padrão e servirá de referência para comparação com os demais casos onde $C_A > 0$.

A figura 5. 29 apresenta a pressão ao longo do duto. Observa-se que o aumento de C_A causa um aumento do gradiente de pressão. Isto é esperado conforme a análise realizada no Anexo IV.

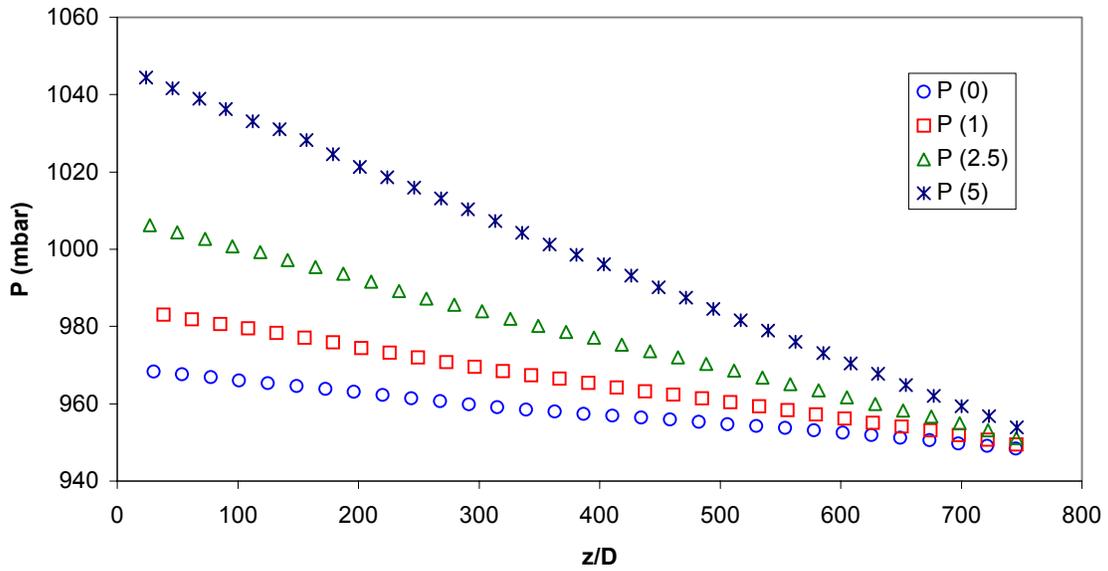


Figura 5. 29. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A .

A figura 5. 30 mostra, para cada valor de C_A , a média da velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto. Este valor médio foi calculado utilizando a sonda do tipo lagrangeana. A velocidade da frente de bolha diminui com o aumento de C_A . De fato, o aumento de C_A causa um aumento da pressão, que por sua vez reduz a velocidade superficial do gás. Esta, por consequência, também causa uma redução na velocidade de mistura. Como V_B é proporcional à velocidade de mistura, o decréscimo de V_B com o aumento de C_A é justificado.

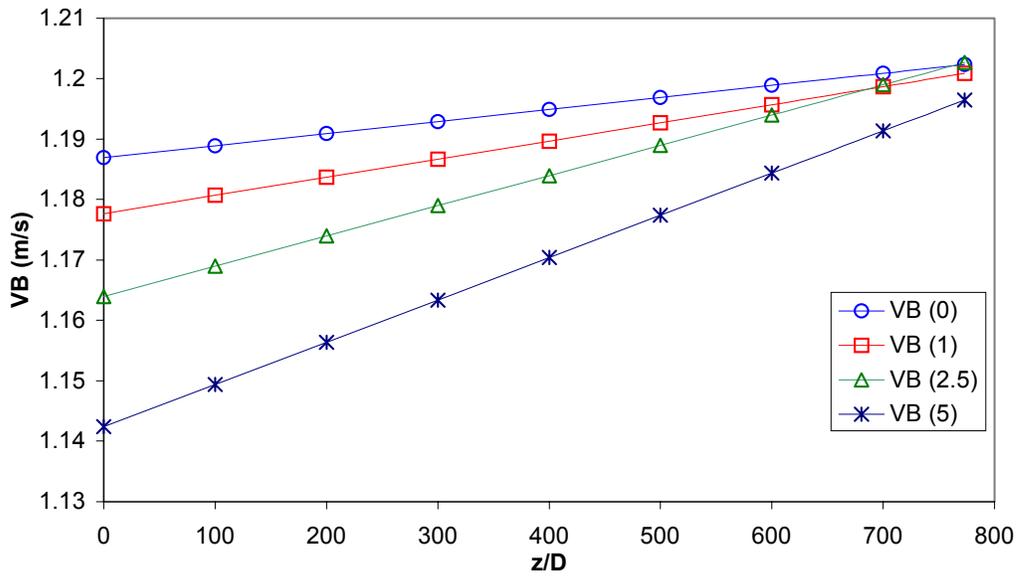


Figura 5. 30. Média da velocidade da frente de uma bolha ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de ΔP_A .

Com o aumento do gradiente de pressão, é de se esperar que os comprimentos das bolhas diminuam, uma vez que eles estão sujeitos a pressões mais elevadas. Isto de fato ocorre e está mostrado na figura 5. 31, onde a abcissa representa o comprimento adimensional do duto e a ordenada a razão entre comprimento da bolha e diâmetro do duto.

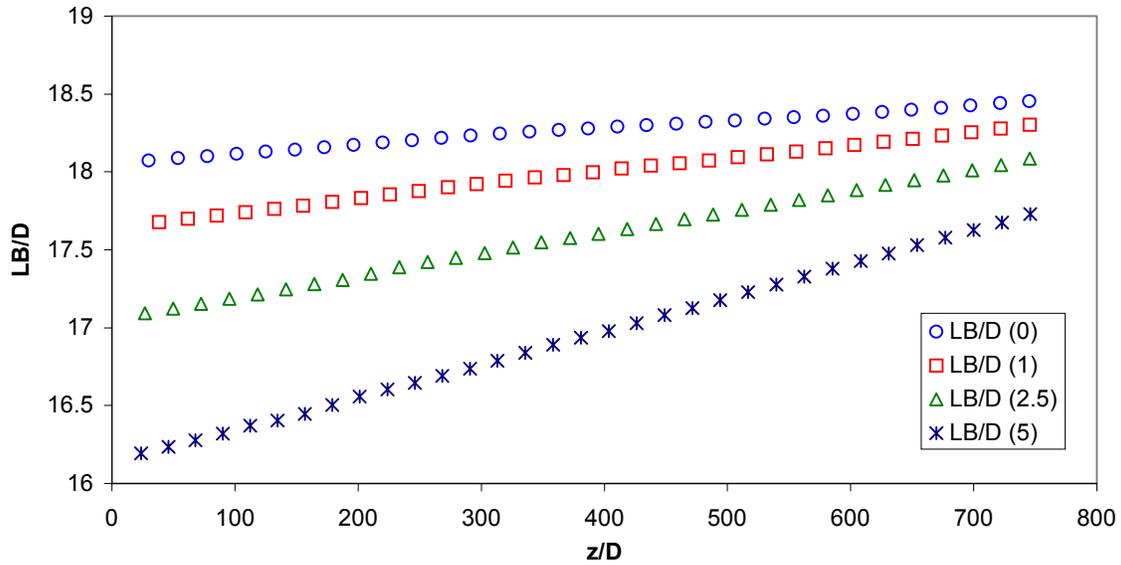


Figura 5. 31. Comprimentos das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A .

A evolução do comprimento do pistão de líquido ao longo do duto é apresentado na figura 5. 32. O eixo x representa o comprimento adimensional do duto e o eixo y a razão L_S/D . Observe-se que o aumento de C_A causa L_S/D maiores na entrada e menores na saída do duto. As curvas L_S/D apresentam um comportamento linear com z/D e se cruzam em $z/D @ 450$. O comportamento de L_S/D pode ser explicado recorrendo-se ao modelo analítico:

$$\frac{L_S}{D} = \frac{V_B}{f_u D} - \frac{j_G}{f_u D} \frac{1}{R_G}$$

(5. 12)

De acordo com a equação (5. 12), L_S/D depende de três parâmetros: V_B , f_u e j_G . A fração de vazio das bolhas deveria ser o quarto mas não está modelado aqui. Enquanto f_u é constante ao longo do duto (ver figura 5. 33), V_B é proporcional à velocidade de mistura e varia com a pressão, assim como j_G , porém ambos variam com taxas diferentes. Devido a subtração entre os dois termos, do lado direito da equação, é de se esperar que as retas L_S/D se cruzem conforme mostrado na figura 5. 32.

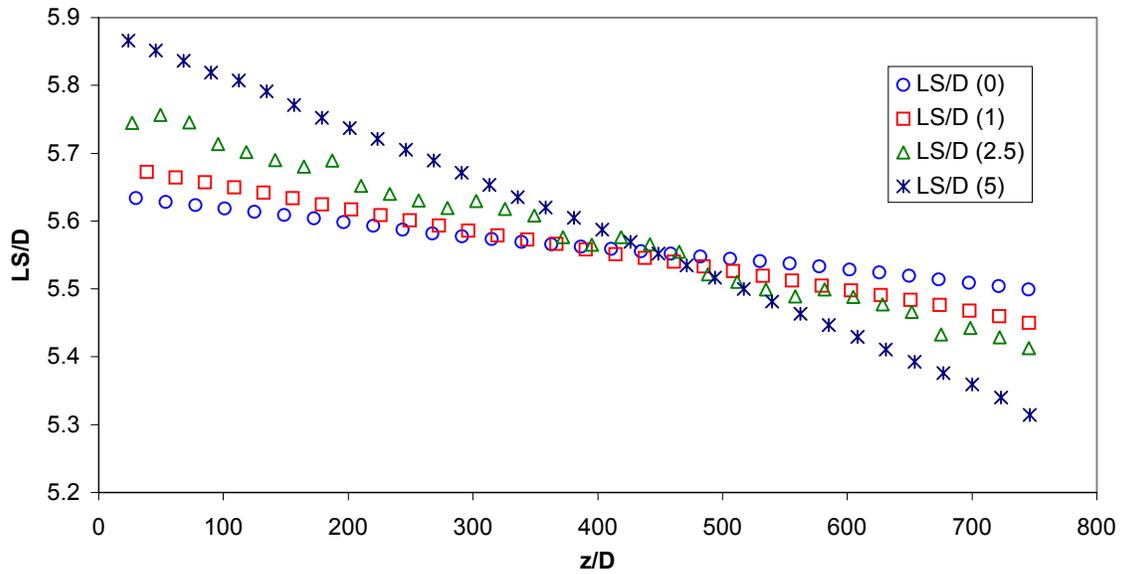


Figura 5. 32. Comprimentos dos pistões que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_A .

A figura 5. 33 apresenta, para cada valor de C_A , a média da frequência de uma célula ao longo do duto. Este valor médio foi calculado utilizando a sonda do tipo lagrangeana de forma a se eliminar da figura as oscilações. Observa-se que os resultados numéricos para a frequência não variam ao longo do duto. Isto é esperado do modelo pois, na ausência de efeito de esteira nas bolhas e com R_G constante, a frequência média das bolhas é dada por:

$$f_u = \frac{j_G}{L_B} \frac{1}{R_G}$$

(5. 13)

Como j_G e L_B apresentam a mesma taxa de decaimento com a pressão, a frequência permanece constante. Por outro lado, a variação de f_u com C_A ocorre porque f_u é um parâmetro de entrada do modelo, determinado por meio das correlações de Heywood & richardsin (1979) ou de Grskovich & Shrier (1972). Nestas correlações, a frequência é diretamente proporcional a j_L e inversamente proporcional a j . Como o aumento de C_A traz uma diminuição da velocidade de mistura, é de se esperar que a frequência prevista na seção de entrada aumente com o aumento de C_A .

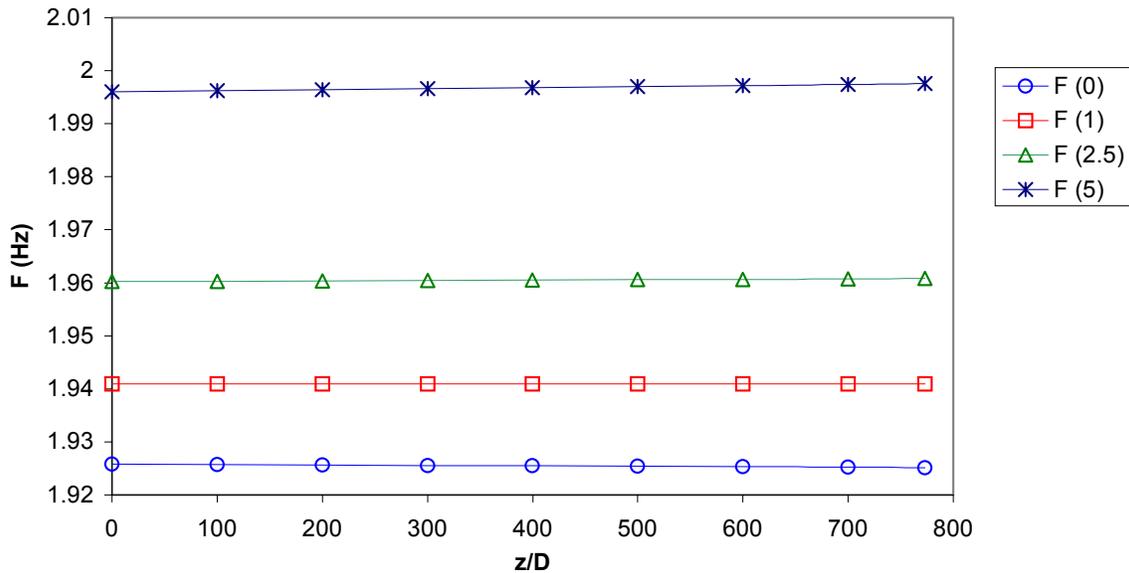


Figura 5. 33. Média da frequência de uma célula ao longo do duto (sonda lagrangeana). Avaliação do efeito de ΔP_A .

5.2.7.2 – Variação de Pressão Devido à Variação da Altura Hidrostática

Nesta seção são avaliados os efeitos que ΔP_H causa na solução numérica. Este termo é apresentado e discutido na seção 3.6.5 e no Anexo IV.

O efeito de ΔP_H na solução numérica é avaliado através de sua presença ou não no escoamento, isto é, ele não possui coeficiente de ajuste. No entanto, como este termo atua no sentido da diminuição do gradiente total de pressão no duto (Anexo IV), ele será analisado junto com ΔP_A .

A figura 5. 34 apresenta a variação da pressão ao longo da linha na presença de ΔP_H e C_A . Na legenda do gráfico, as palavras “com” ou “sem” correspondem à presença ou à ausência de ΔP_H , respectivamente. Os valores numéricos que se encontram entre parênteses correspondem aos valores C_A utilizados. Os casos simulados são como na tabela 5. 1, à exceção de ΔP_H e ΔP_A ,

que são variados. A nomenclatura “Caso A” foi feita para diferenciar estes casos de outros com números de Froude mais elevados, conforme será visto a seguir.

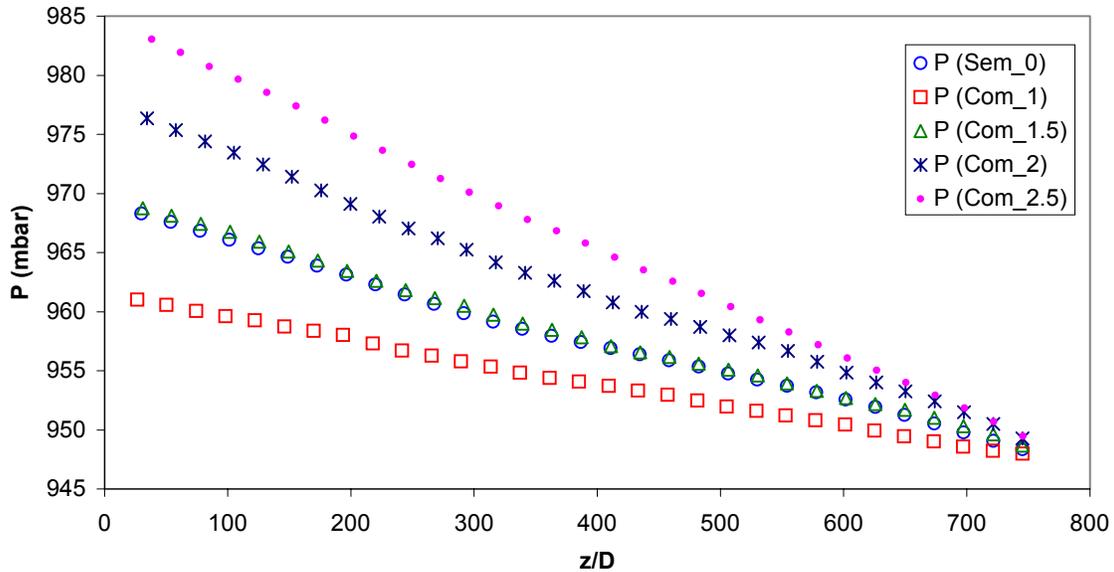


Figura 5. 34. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_H (Caso A).

O caso padrão é representado pelos círculos abertos, onde não estão presentes ΔP_H e ΔP_A . A introdução de ΔP_H ocorre no caso representado pelos quadrados. Neste caso, mesmo com $C_A = 1$, observa-se uma redução no gradiente de pressão em relação à referência. O caso representado por triângulos recupera o gradiente de pressão do caso padrão às custas do aumento de C_A ($C_A = 1.5$). Valores superiores de C_A (representados pelos asteriscos e pelos círculos preenchidos) causam gradientes de pressão superiores ao do caso padrão. Pode se dizer que o modelo para queda de pressão hidrostática reduz o gradiente de pressão enquanto o coeficiente C_A do modelo de aceleração causa um aumento do gradiente de pressão. Para os casos em questão (tabela 5. 1, a exceção de ΔP_H e ΔP_A , que são variados), $C_A = 1,5$ compensa os efeitos de redução de ΔP_H .

O peso relativo entre de ΔP_H e ΔP_A na queda de pressão é ponderado pelo inverso de Froude. Para números de Froude elevados, a contribuição de ΔP_H é desprezível face à ΔP_A . Entretanto, para baixos números de Froude, ela é tão importante quanto de ΔP_A (ver Anexo IV).

Para verificar a dependência de ΔP_H com Froude, foi simulado um escoamento com 2,6 vezes a velocidade de mistura do caso padrão.

Para referência, a tabela 5. 9 mostra as condições operacionais dos casos com número de Froude elevados (Caso B), assim como com números de Froude baixos (Caso A). O Froude do caso B é cerca de 5,2, enquanto que o do caso A é 2,0. A fração de vazios do caso B é 0,48, enquanto que a do caso A vale 0,54. Todos os demais parâmetros são coincidentes com as propriedades descritas na tabela 5. 1.

Ponto	J_g (Sm/s)	J_L (m/s)	$\overline{R_G}$	Fr
Caso A	0,50	0,50	0,54	2,0
Caso B	1,33	1,33	0,48	5,2

Tabela 5. 9. Características dos escoamentos simulados para verificação de ΔP_H .

A figura 5. 35 mostra a variação da pressão ao longo do duto para o Caso B descrito na tabela 5. 9 quando o parâmetro C_A vale 0 e 1,5. O ponto representado pelos círculos não contém contribuição de ΔP_H nem de ΔP_A e portanto tornam-se uma referência. O ponto representado pelos asteriscos contém contribuições de ΔP_H e ΔP_A , sendo calculado para $C_A = 1,5$. Nota-se que o gradiente de pressão para este ponto é maior que o gradiente de pressão quando ΔP_H e ΔP_A são nulos. Observando o Caso A (figura 5. 34), nota-se que quando $C_A = 1,5$ e ΔP_H está presente, o efeito no gradiente de pressão é nulo, isto é, o efeito é o mesmo que quando ΔP_H e ΔP_A são nulos.

Conclui-se portanto que a contribuição de ΔP_H no Caso B (Froude igual a 5,2) é menor que no Caso A (Froude igual a 2,0), quando comparada à de ΔP_A . Em outras palavras, a influência de ΔP_H no termo de expansão do líquido que flui do filme líquido para o pistão que o segue decresce com o aumento do número de Froude.

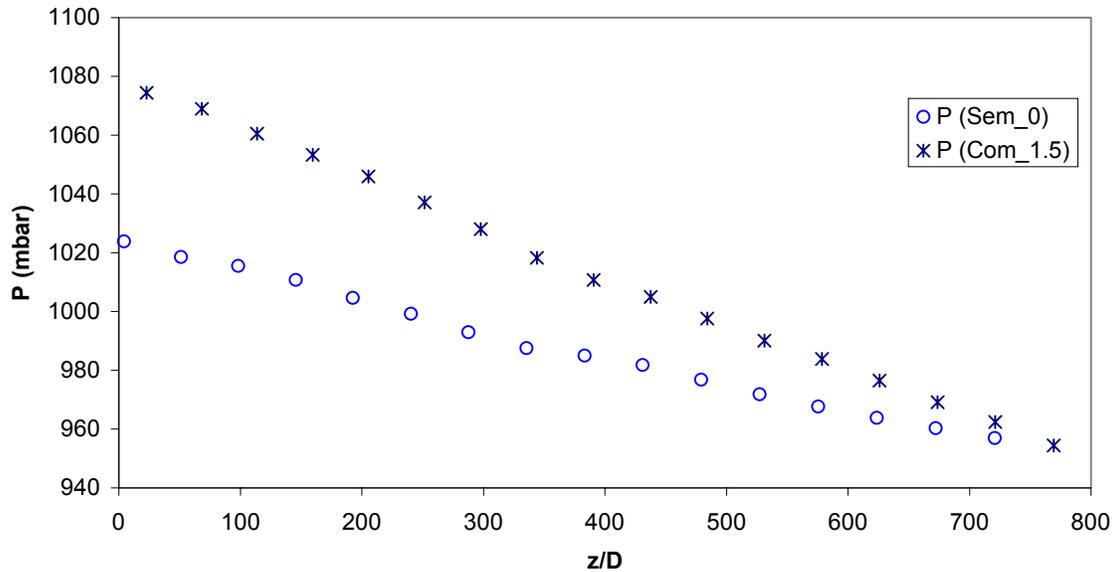


Figura 5. 35. Pressões das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito de ΔP_H (Caso B).

5.2.8 – Influência da Viscosidade do Líquido

Esta seção tem por objetivo avaliar o efeito da variação da viscosidade na respostas numérica do modelo. Simulações são realizadas com escoamento possuindo as características descritas na tabela 5. 1, a exceção do valor da viscosidade. Foram utilizados quatro valores distintos de viscosidade: 0,0000855Pa.s; 0,000855Pa.s; 0,005Pa.s e 0,027Pa.s.

Fisicamente, espera-se que o aumento da viscosidade provoque um aumento no atrito da fase líquida com a parede, acarretando um aumento no gradiente de pressão no interior da tubulação.

No modelo proposto, a viscosidade está presente apenas no fator de atrito do líquido com a parede (seção 3.6.1), ou seja, a viscosidade está presente apenas na equação (3. 64) (no termo referente ao atrito do líquido com a parede). Entretanto, os comprimentos dos pistões também são importantes para a determinação do atrito com a parede, assim como o número total de pistões no interior do duto. Assim, variando-se a viscosidade do líquido, o gradiente de pressão do duto irá

variar em função do valor da viscosidade, mas também em função dos comprimentos de bolhas e pistões existentes ao longo do duto.

A figura 5. 36 apresenta o gradiente de pressão em função da viscosidade da fase líquida. Observa-se que o gradiente de pressão cresce seguindo uma lei de potência (expressa na figura) com o aumento da viscosidade. Isto se deve ao aumento do atrito entre a fase líquida e a parede do duto durante a passagem dos pistões. Conforme mencionado anteriormente, o aumento do atrito está relacionado ao aumento da viscosidade e às variações dos comprimentos de bolhas e de pistões.

Para o caso padrão estudado (tabela 5. 1) pode-se dizer que o aumento da viscosidade da fase líquida equivale a um aumento do gradiente de pressão. As demais variáveis tais como V_B , L_B/D , L_S/D e f_u seguem o mesmo comportamento quando há um aumento no gradiente de pressão e não serão aqui discutidas pois coincidem com o comportamento descrito na seção 5.2.7.

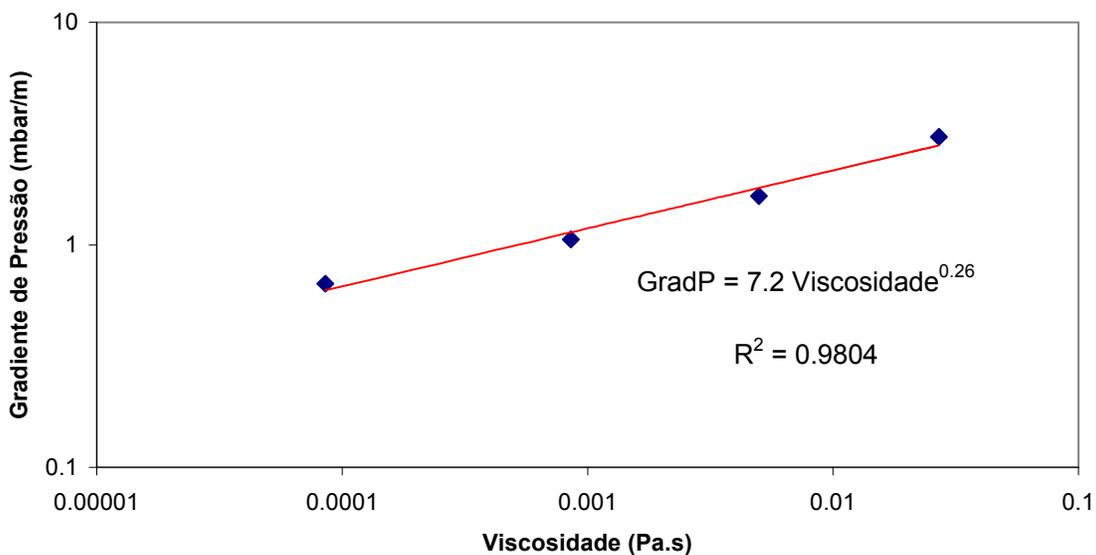


Figura 5. 36. Gradiente linear de pressão das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito da viscosidade.

5.2.9 – Influência da Densidade do Líquido

Esta seção tem por objetivo avaliar o efeito da variação da densidade do líquido na resposta numérica do modelo. Simulações foram realizadas com escoamento possuindo as características descritas na tabela 5. 1, a exceção do valor da densidade do líquido. Foram tomados quatro valores distintos de densidade: 100kg/m^3 , 500kg/m^3 , 999kg/m^3 , 1500kg/m^3 e 2000kg/m^3 .

No modelo proposto a densidade da fase líquida aparece na equação da quantidade de movimento (equação 3. 63) multiplicando linearmente o termo de aceleração da velocidade de mistura, o termo de atrito e os termos referentes à expansão do líquido. Desconsiderando os termos de expansão do líquido (caso analisado aqui), uma inspeção direta na equação (3. 64) mostra que há um aumento do gradiente de pressão com o aumento da densidade.

A figura 5. 37 mostra o gradiente de pressão em função da densidade da fase líquida. Observa-se que o gradiente de pressão cresce linearmente com o aumento de densidade, como era de se esperar. Para o caso padrão (tabela 5. 1), pode-se dizer que o aumento da densidade da fase líquida equivale a um aumento do gradiente de pressão. As demais variáveis tais como V_B , L_B/D , L_S/D e f_u seguem o mesmo comportamento quando há um aumento no gradiente de pressão e não serão aqui discutidas pois coincidem com o comportamento descrito na seção 5.2.7.

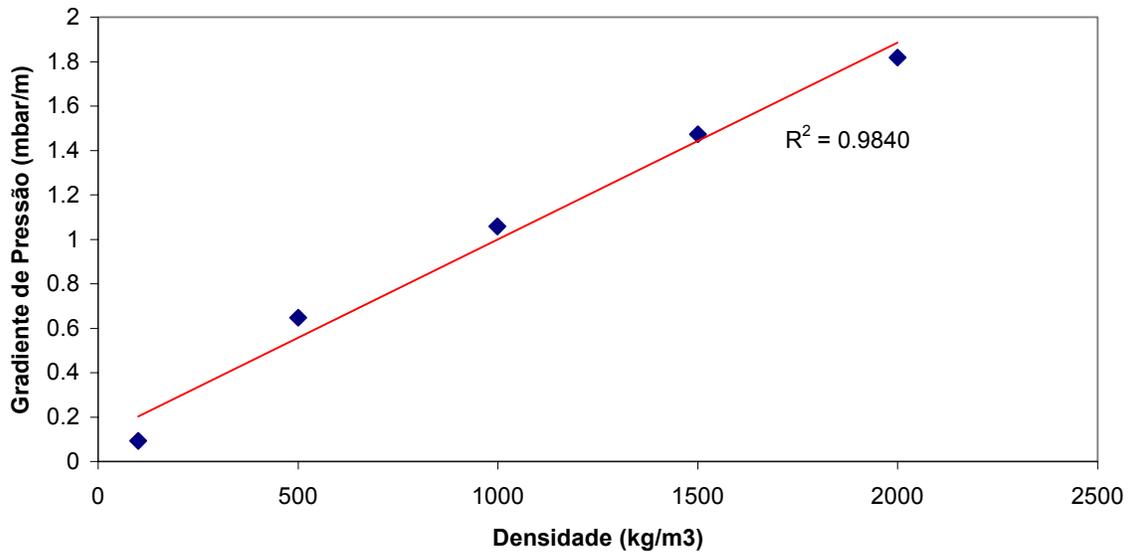


Figura 5.37. Gradiente linear de pressão das bolhas que se encontram no interior do duto em um dado instante. Avaliação do efeito da densidade.

5.2.10 – Análise do Efeito de Esteira e Coalescência de Bolhas

A verificação e a análise do efeito de esteira foram feitas através de simulações de escoamentos periódicos com as características descritas na tabela 5. 1, porém considera-se agora o termo responsável pelo efeito de esteira (equações (3. 68) e (3.69)).

Mesmo em um escoamento com formação periódica de pistões e de bolhas o efeito de esteira atua de forma distinta nas diversas bolhas. Isto depende obviamente do tamanho dos pistões na entrada ($z = 0$). Se eles forem muito grandes, o efeito de esteira não aumentará de forma significativa as velocidades das respectivas bolhas que os seguem.

Por outro lado, se os comprimentos dos pistões em $z = 0$ forem suficientemente pequenos para que o efeito de esteira seja significativo, então espera-se que este atue de forma diferente nas diversas bolhas do escoamento. Uma explicação qualitativa é feita a seguir:

1. A primeira bolha a entrar no duto, por não ter bolhas à sua frente, não sofre efeito de esteira;

2. No instante da entrada da segunda bolha, por existir um pistão de pequeno comprimento à sua frente, ela sofre o efeito de esteira e passa a viajar de forma mais rápida que a primeira.
3. No instante da entrada da terceira bolha, a segunda bolha se aproximou da primeira, o que significa que o comprimento do pistão entre a primeira e a segunda bolhas diminuiu. Como o escoamento é periódico, o comprimento do pistão entre a segunda e terceira bolhas é maior que o do pistão entre a primeira e segunda bolhas, logo a segunda bolha tem velocidade maior que a terceira bolha, que por sua vez tem velocidade maior que a primeira bolha.
4. No instante da entrada da quarta bolha, a segunda bolha se aproximou mais ainda da primeira, e se afastou mais ainda da terceira, o que significa que o comprimento do pistão entre a segunda e a terceira bolhas aumentou. Como o escoamento é periódico, o comprimento do pistão entre a segunda e a terceira bolhas é maior que o do pistão entre a terceira e a quarta. Como consequência a velocidade da segunda bolha é maior que o da quarta bolha, que é maior que o da terceira bolha, que é maior que o da primeira bolha.
5. Este processo continua conforme o escoamento evolui. Ao longo do comprimento do duto, ele faz com que a segunda bolha tenda a coalescer com a primeira e com que a quarta bolha tenda a coalescer com a terceira. Com as coalescências, os pistões menores que existiam entre as bolhas coalescidas deixam de existir, restando apenas os maiores pistões. Se estes pistões maiores forem grandes o suficiente para inibir o efeito de esteira, não ocorrem mais coalescências deste ponto do escoamento em diante, caso contrário elas continuarão ocorrendo. Percebe-se assim que o escoamento periódico tende à evoluir para um escoamento com bolhas e pistões com tamanhos maiores.

5.2.10.1 – Análise da Influência de b_w no Efeito de Esteira.

Como visto na seção 3.6.2, todas as correlações sugeridas para o efeito de esteira possuem a forma da equação (3. 69). Ainda, todas elas se relacionam com o comprimento dos pistões à frente de cada bolha. Por este motivo, para se iniciar uma análise do efeito de esteira, foram simuladas escoamentos com as características descritas ao final da seção 5.1.1, porém com as seguintes alterações:

- 1) o efeito de esteira está presente através da equação (3. 69). O valor de b_w será variado e o de a_w será sempre igual a 8;

2) não se utilizará como dado de entrada as frequências das células em $z = 0$, mas os comprimentos dos pistões em $z = 0$. Este comprimento é $8,1D$.

A aceleração da bolha que vem atrás, induzida pela bolha que vem a sua frente, causa uma diminuição no comprimento do pistão entre as bolhas e eventualmente ele pode desaparecer, quando então as duas bolhas coalescem. A taxa de coalescência é uma medida direta do efeito de esteira entre bolhas.

A taxa de coalescência média (equação (5. 14)) é calculada entre duas sondas consecutivas. Para se traçar um gráfico da taxa de coalescência média ao longo do duto, pode-se utilizar a posição média entre as probes como uma aproximação para a posição onde ocorrem as coalescências.

A taxa de coalescência média, R_B , em um trecho de tubulação de comprimento $\Delta L/D$, é calculada como:

$$\overline{R_B} = \frac{-1}{(\Delta L/D)} \ln \left(\frac{N_{B(z_2)}}{N_{B(z_1)}} \right) \geq 0,$$

(5. 14)

onde N_B é o número de bolhas que passaram na seção z em questão e R_B expressa a razão entre o número de bolhas que coalesceram e o número de bolhas que passaram, divididos pelo comprimento do duto sobre seu diâmetro.

A figura 5. 38 apresenta de forma gráfica as taxas de coalescência médias (eixo y) em função da coordenada z do duto (eixo x). Os valores na legenda são os valores utilizados para a constante b_w .

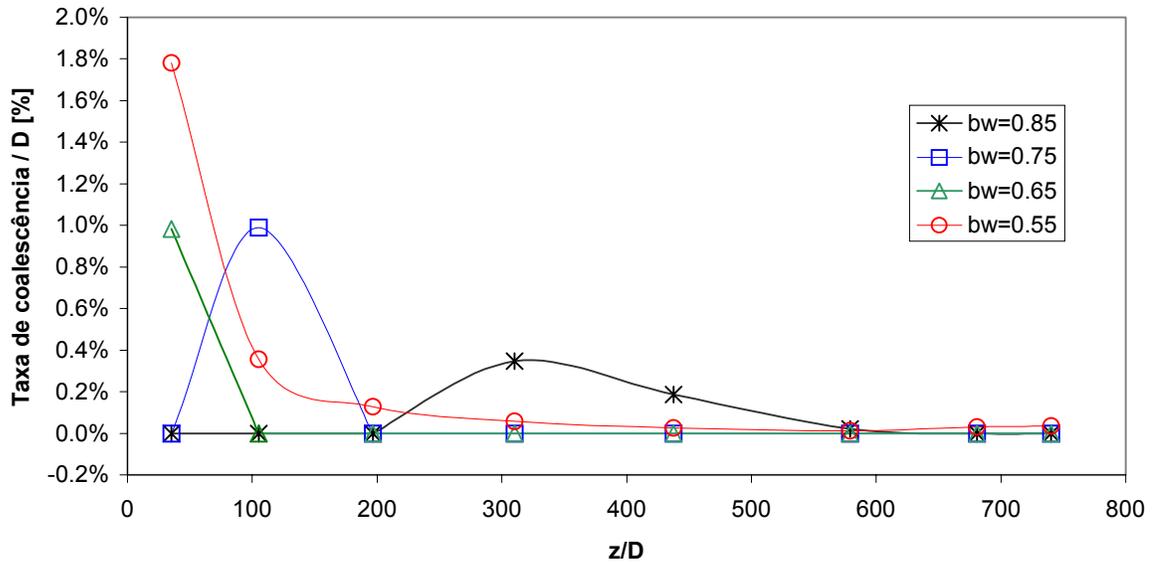


Figura 5. 38- Influência do valor de b_w sobre a taxa de coalescência média.

Da figura 5. 38 fica claro que, fixado o comprimento de pistão na seção de entrada, quanto menor o valor de b_w , mais próximas da seção de entrada as coalescências ocorrem e maior é sua intensidade, isto é, mais forte tornam-se as coalescências. Pode-se então dizer que, fixado um valor para b_w , quanto menor o valor do comprimento dos pistões na entrada, mais forte é o efeito de esteira e mais coalescências tendem a ocorrer. Isto é o que se verifica experimentalmente e o que se esperava do modelo.

Para o caso simulado, variando-se o valor de b_w entre 1,06 e 0,55, percebe-se que o efeito de esteira se torna mais forte conforme b_w se aproxima de 0. Com base nas simulações realizadas, pode-se dizer que:

- Para $b_w = 1,06$ a $b_w = 0,95$, o efeito de esteira não é forte o suficiente para provocar o coalescimento de bolhas.
- Com $b_w = 0,90$, o efeito de esteira é capaz de provocar o coalescimento de bolhas no trecho final do tubo.
- De $b_w = 0,90$ a $b_w = 0,65$, o efeito de esteira vai se fortalecendo de modo à, gradativamente, provocar o coalescimento de bolhas cada vez mais próximo da entrada. Para $b_w = 0,7$ e $b_w = 0,65$ as coalescências ocorrem todas no início do duto.

- Para $b_w = 0,60$ e $b_w = 0,55$ o efeito de esteira passa a ser forte o suficiente para provocar a coalescência de bolhas na região inicial do duto. Para $b_w < 0,55$ o efeito de coalescência é muito forte, passa-se a ter bolhas com comprimento comparável ao do duto e o modelo não é mais aplicável.

Os gráficos das figuras 5. 39 a 5. 42 mostram a evolução dos comprimentos de bolha e de pistão para o escoamento em questão. Eles foram feitos a partir de simulações utilizando $a_w = 8$ e $b_w = 0,6$. Estes gráficos são histogramas em uma dada posição do duto, apresentando as frequências relativas de ocorrência dos comprimentos de bolhas e de pistões.

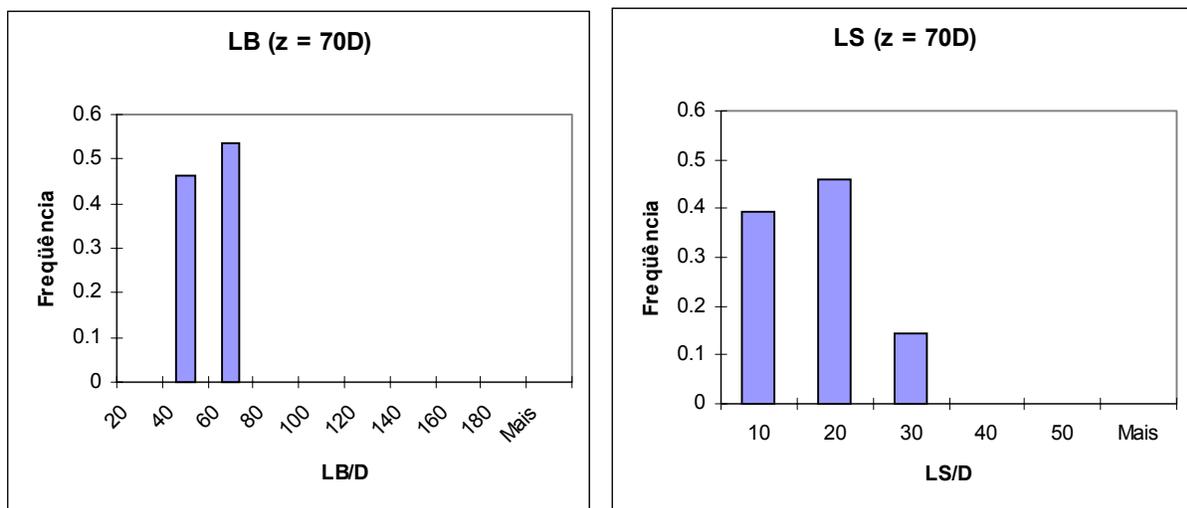


Figura 5. 39 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 70D$.

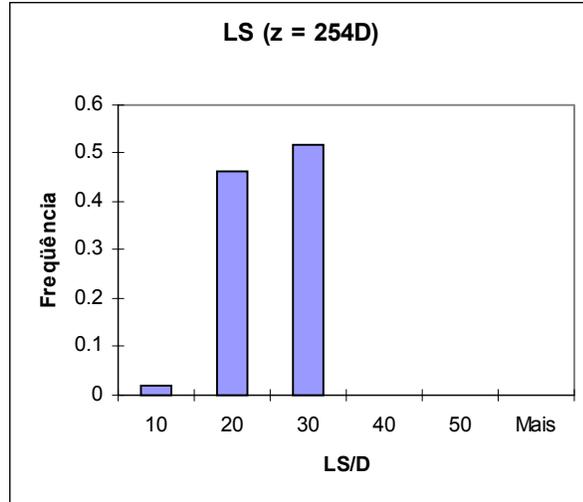
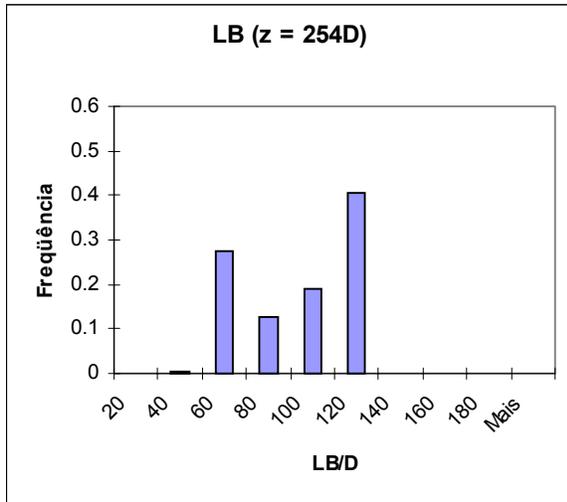


Figura 5. 40 - Comprimentos de bolhas e pistões em z = 254D.

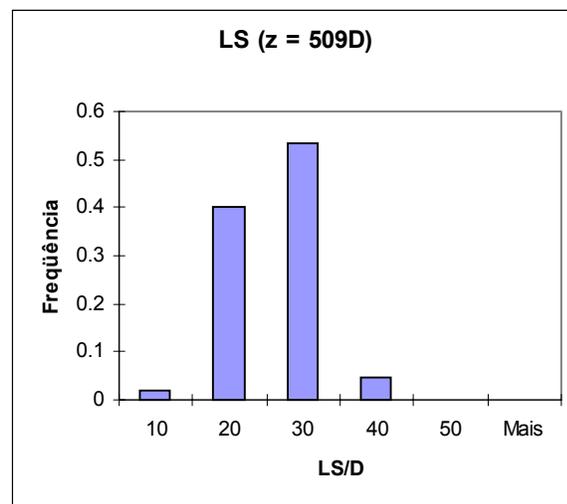
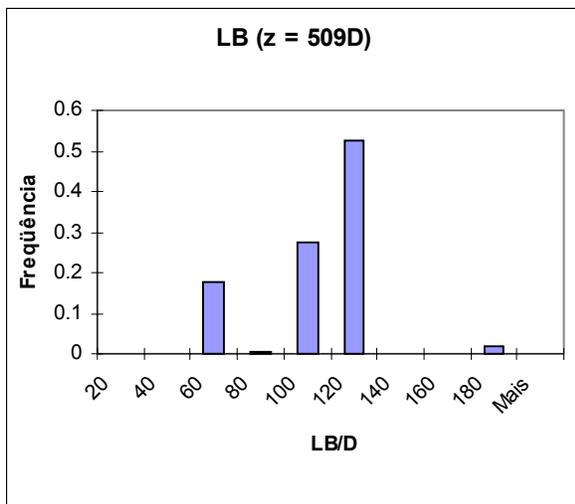


Figura 5. 41 - Comprimentos de bolhas e pistões em z = 509D.

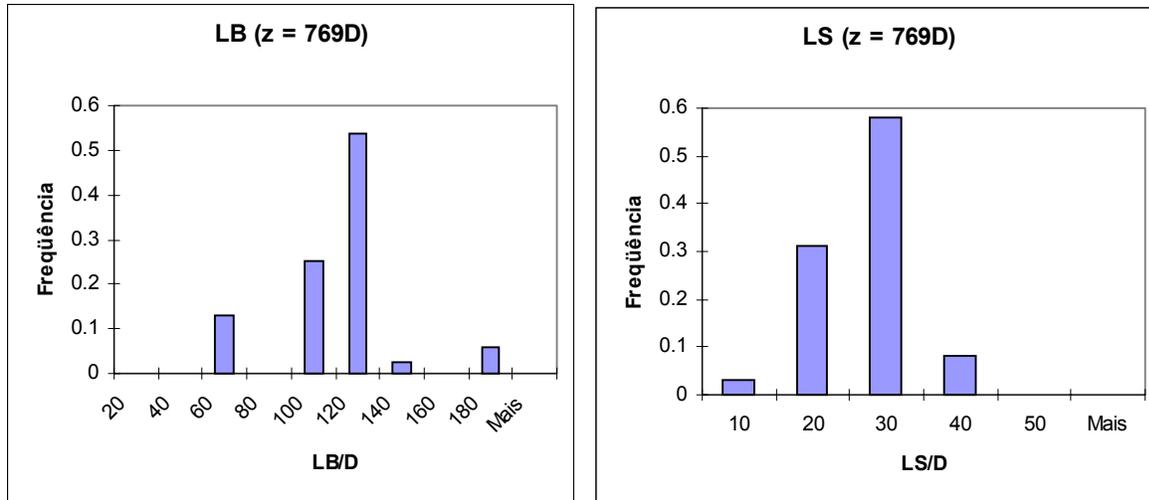


Figura 5. 42 - Comprimentos de bolhas e pistões em $z = 769D$.

Das figuras 5. 39 a 5. 42 , percebe-se que, para $b_w = 0,60$, o efeito de esteira sobre as bolhas é muito forte, com muitas coalescências ocorrendo antes da posição $z = 70D$. As coalescências continuam ocorrendo até a posição $z = 509D$, onde os pistões menores encontram-se em pequena quantidade. Devido ao aumento do comprimento dos pistões, as coalescências praticamente não ocorrem da posição $z = 509D$ à $z = 769D$. Pode-se dizer então que em $z = 509D$ o escoamento se encontra desenvolvido.

Desta maneira, observa-se que o efeito de esteira, mesmo em um escoamento periódico, atua de forma a reorganizar o escoamento em torno de uma distribuição diferente daquela da entrada para comprimentos de bolhas e pistões. O escoamento evolui ao longo do duto e aparecem diferentes comprimentos de bolhas e pistões em uma mesma seção.

5.2.10.2 – Análise da Influência de a_w e de b_w no Efeito de Esteira (Comparações entre Diversas Leis de Esteira).

Na seção 3.6.2 foram apresentadas quatro leis para o efeito de esteira. Todas as leis podem ser colocadas na forma da equação (3. 69). Assim, o que difere entre as leis são os valores assumidos por a_w e por b_w .

Esta seção tem por objetivo examinar o efeito de cada lei de esteira quando aplicada ao escoamento com características descritas na tabela 5. 1.

A figura 5. 43 apresenta de forma gráfica as taxas de coalescência médias (eixo y) em função da coordenada z/D do duto (eixo x). Os valores das taxas de coalescência médias e de suas posições ao longo do duto foram calculadas conforme descrição da seção 5.2.10.1. Na legenda da figura, “M&G” significa que a lei proposta por Moissis & Griffith (1962) foi utilizada; “Grenier” significa que a lei proposta por Grenier (1997) foi utilizada; “B&T” significa que a lei proposta por Barnea & Taitel (1993) foi utilizada; “FN” significa que a lei proposta por Fagundes Netto (1999) foi utilizada.

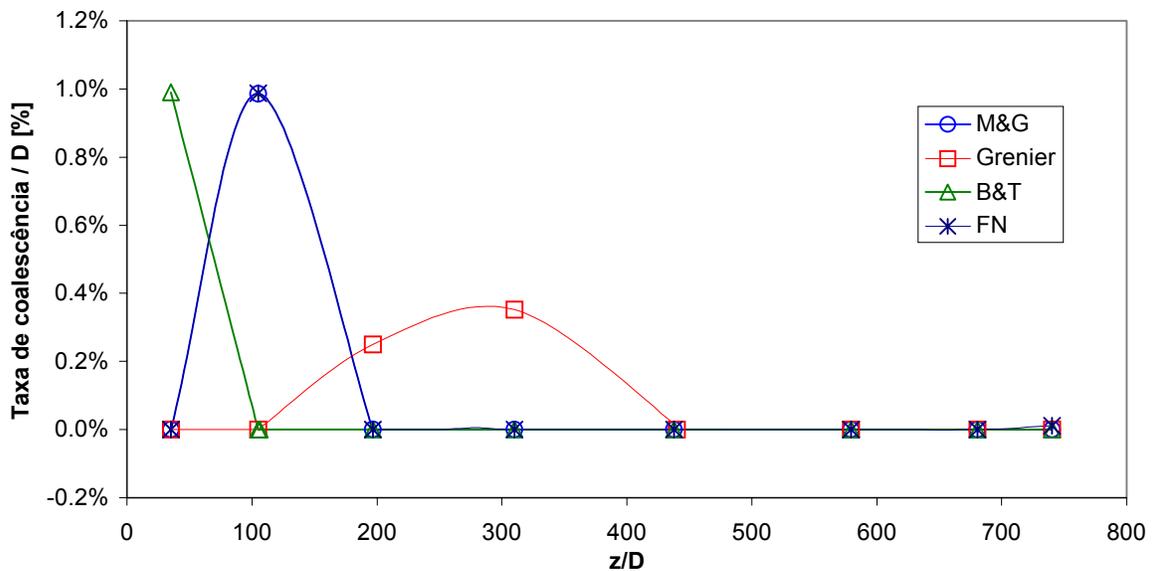


Figura 5. 43. Influência da lei de esteira sobre a taxa de coalescência média.

Calculando-se os comprimentos dos pistões na entrada à partir da correlação de frequência de Heywood & Richardson (1979), encontra-se para o escoamento em questão valores da ordem de $5D$. Estes valores são relativamente pequenos, de forma que todas as leis de esteira são influenciadas.

Da figura 5. 43 percebe-se que as leis propostas por Moissis & Griffith (1962) e por Fagundes Netto (1999) são fortes o suficiente para provocar as coalescências um pouco após a seção de entrada (em torno de $z = 100D$). Após esta região (como será visto logo a seguir), os pistões de comprimento pequeno desaparecem, o que faz com que pistões possuam um comprimento médio grande o suficiente para inibir o efeito de esteira e evitar as coalescências.

A lei proposta por Barnea & Taitel (1993) é bastante forte para este escoamento. As coalescências ocorrem em uma região extremamente próxima da seção de entrada ($z < 100D$). Após esta região os pistões de comprimento pequeno desaparecem e não há mais coalescências.

A lei proposta por Grenier (1997) é um pouco mais fraca e as coalescências ocorrem em uma região um pouco anterior à metade do duto (mais intensas entre $z = 200D$ e $z = 400D$). Após esta região os pistões de comprimento pequeno desaparecem e não há mais coalescências.

As figuras 5. 44 a 5. 48 apresentam alguns parâmetros do escoamento em questão sob o efeito de esteira. Os gráficos destas figuras foram feitos utilizando-se as sondas do tipo Eulerianas, conforme descrito na seção 4.2.5.1. Cada simulação foi realizada para um total de 300 bolhas saindo do duto, o que significa que, levando em consideração as coalescências, um número maior de bolhas entrou no duto. Para o cálculo das médias, os efeitos transientes (partida de linha) foram desprezados.

Nas figuras 5. 44 a 5. 48, os símbolos discretos são as respostas numéricas do modelo e a linha contínua é a solução analítica (caso sem efeito de esteira). Na legenda das figuras, “M&G” significa que a lei proposta por Moissis & Griffith (1962) foi utilizada; “Grenier” significa que a lei proposta por Grenier (1997) foi utilizada; “B&T” significa que a lei proposta por Barnea & Taitel (1993) foi utilizada; “FN” significa que a lei proposta por Fagundes Netto (1999) foi utilizada. “analit” é a solução analítica calculada para o caso em que não há efeito de esteira.

A figura 5. 44 apresenta o valor médio das pressões das bolhas que passam em determinadas seções do duto. Percebe-se que o efeito de esteira possui uma pequena influência no gradiente de pressão. As leis de esteira propostas por Moissis & Griffith (1962), por Barnea &

Taitel (1993) e por Grenier (1997) tendem a aumentar o gradiente de pressão, enquanto a lei proposta por Fagundes Netto (1999) tende a diminuir o gradiente de pressão.

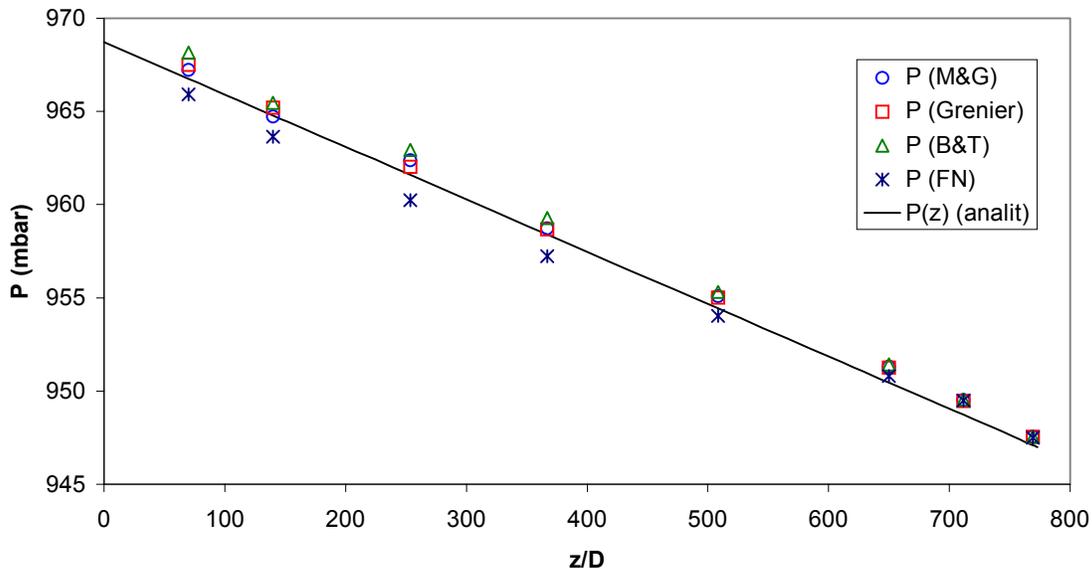


Figura 5. 44. Média das pressões das bolhas em algumas seções do duto.

A figura 5. 45 apresenta o valor médio das velocidades das frentes das bolhas que passam em determinadas seções do duto. Como era de se esperar, percebe-se que o efeito de esteira influencia fortemente a velocidade das frentes de bolha.

Segundo a figura 5. 43, as leis propostas por Moissis & Griffith (1962) e Fagundes Netto (1999) possuem elevadas taxas de coalescência em regiões próximas a entrada do duto ($z @ 100D$). Espera-se então que estas leis produzam maiores velocidades de frentes de bolha na região em torno de $z = 100D$. Isto é verificado em parte na figura 5. 45, onde velocidades acima da calculada analiticamente são verificadas antes de $z = 100D$. Entretanto, velocidades maiores devem ocorrer em torno de $z = 100D$, as quais não foram registradas devido ao posicionamento escolhido para as sondas.

Ainda, a lei proposta por Fagundes Netto (1999) prevê um valor negativo para o efeito de esteira para bolhas que seguem pistões de comprimento entre $6,3D$ e $30D$. Isto é de fato verificado na figura 5. 45.

A lei proposta por Barnea & Taitel (1993) produz elevadas taxas de coalescência em uma região muito próxima da entrada do duto. Como nenhuma sonda foi posicionada tão perto da entrada, as elevadas velocidades produzidas por esta lei não podem ser verificadas na figura 5. 45.

Já para a lei proposta por Grenier (1997), a figura 5. 43 mostra que as coalescências ocorrem em uma região um pouco anterior à metade do duto (entre $z = 200D$ e $z = 400D$). De fato, é nesta região que a figura 5. 45 mostra as maiores velocidades de frentes de bolha.

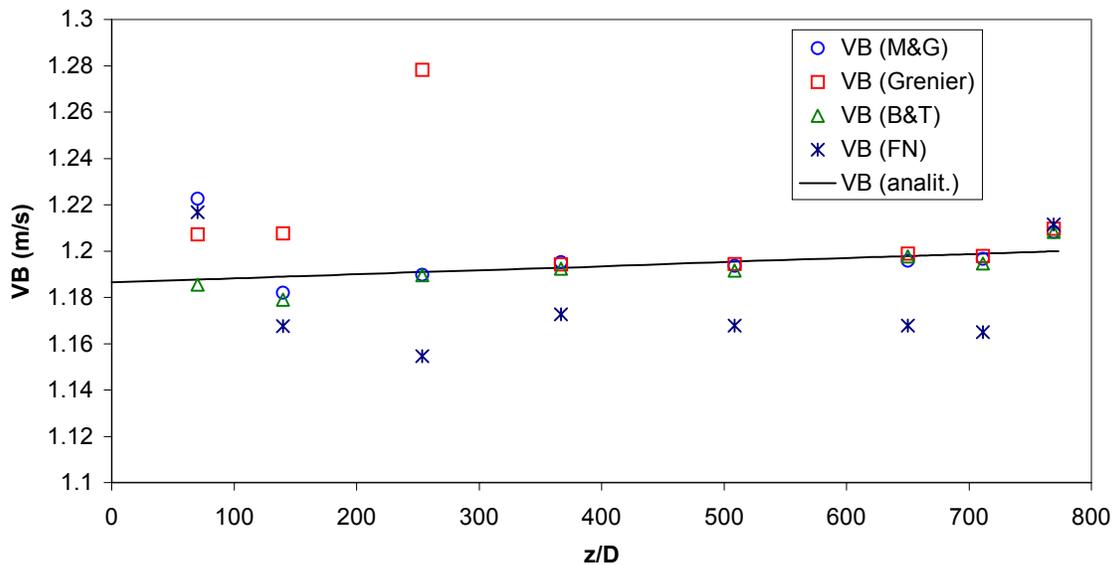


Figura 5. 45. Médias das velocidades das frentes de bolha em algumas seções do duto.

A figura 5. 46 apresenta o valor médio dos comprimentos das bolhas que passam em determinadas seções do duto.

Para a lei proposta por Barnea & Taitel (1993), como as coalescências ocorrem antes da posição da primeira sonda, as bolhas registradas nas simulações já haviam coalescido. Assim, o valor médio em todas as sondas é maior que o valor calculado analiticamente.

No caso das leis de Moïssis & Griffith (1962) e de Fagundes Netto (1999), o valor médio dos comprimentos de bolhas aumenta significativamente na região em torno de $z = 100D$, conforme esperado. Já no caso da lei de Grenier (1997), o valor médio dos comprimentos de bolha aumenta significativamente na região entre $z = 200D$ e $z = 400D$, conforme esperado da figura 5. 43.

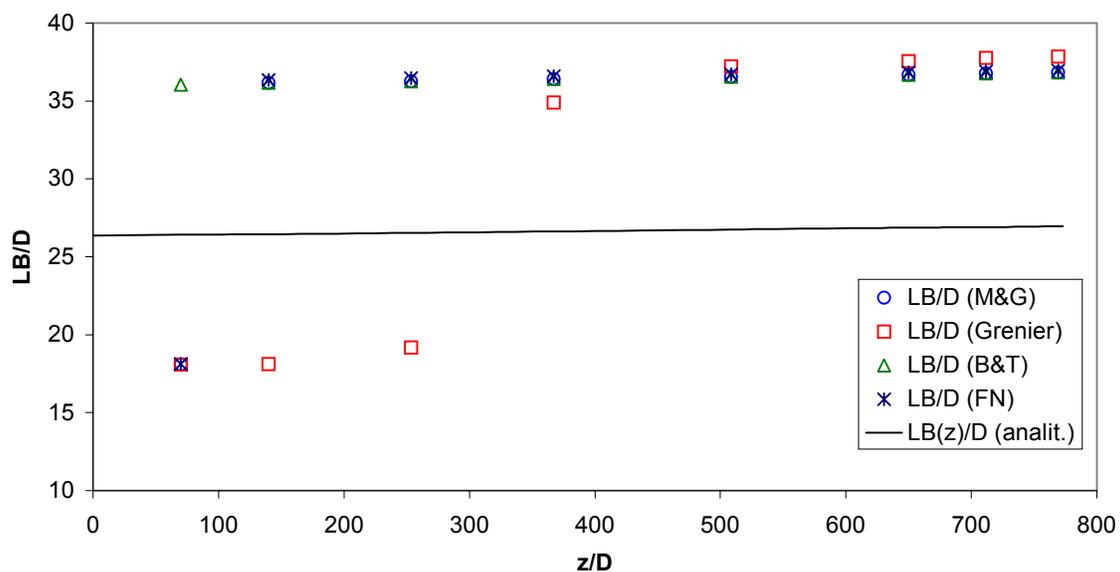


Figura 5. 46. Médias dos comprimentos de bolhas em algumas seções do duto.

A figura 5. 47 apresenta o valor médio dos comprimentos das pistões que passam em determinadas seções do duto.

Para a lei proposta por Barnea & Taitel (1993), como as coalescências ocorrem antes da posição da primeira sonda, as células registradas nas simulações já haviam coalescido. O coalescimento de bolhas provoca a diminuição do número de pistões pequenos e assim, o valor

médio dos comprimentos dos pistões em todas as sondas é maior que o valor calculado analiticamente.

No caso das leis de Moissis & Griffith (1962) e de Fagundes Netto (1999), o valor médio dos comprimentos de pistões aumenta significativamente na região em torno de $z = 100D$, conforme esperado. Já no caso da lei de Grenier (1997), o valor médio dos comprimentos de pistões aumenta significativamente na região entre $z = 200D$ e $z = 400D$, conforme esperado da figura 5. 43.

Com exceção da lei proposta por Fagundes Netto (1999), após a região de coalescimento de bolhas, os pistões de menor comprimento desapareceram e o valor médio dos comprimentos de pistões aumenta. Este aumento dos comprimentos de pistões inibe o efeito de esteira. No caso da lei proposta por Fagundes Netto (1999) estes pistões de maior comprimento estão entre $6,3D$ e $30D$, provocando um efeito de esteira que tende a diminuir a velocidade das bolhas.

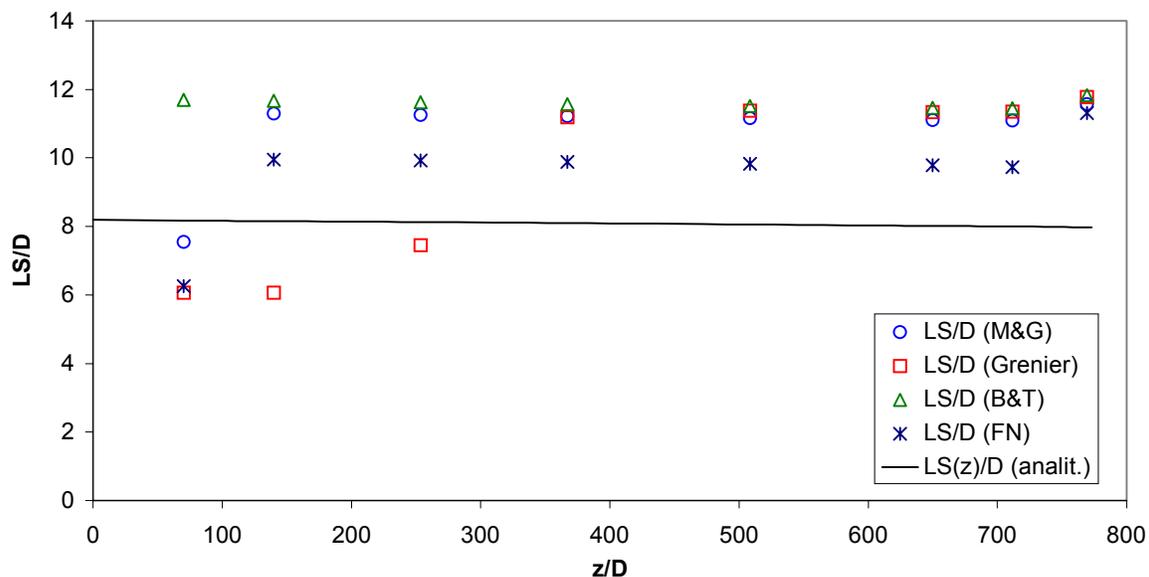


Figura 5. 47. Médias dos comprimentos de pistões em algumas seções do duto.

A figura 5. 48 apresenta o valor médio das freqüências das células que passam em determinadas seções do duto.

Para a lei proposta por Barnea & Taitel (1993), como as coalescências ocorrem antes da posição da primeira sonda, as bolhas registradas nas simulações já haviam coalescido. Assim, o valor médio das freqüências em todas as sondas é menor que o valor calculado analiticamente.

No caso das leis de Moissis & Griffith (1962) e de Fagundes Netto (1999), o valor médio das freqüências das células diminui significativamente na região em torno de $z = 100D$, conforme esperado. Já no caso da lei de Grenier (1997), o valor médio dos das freqüências das células diminui significativamente na região entre $z = 200D$ e $z = 400D$, conforme esperado da figura 5. 43.

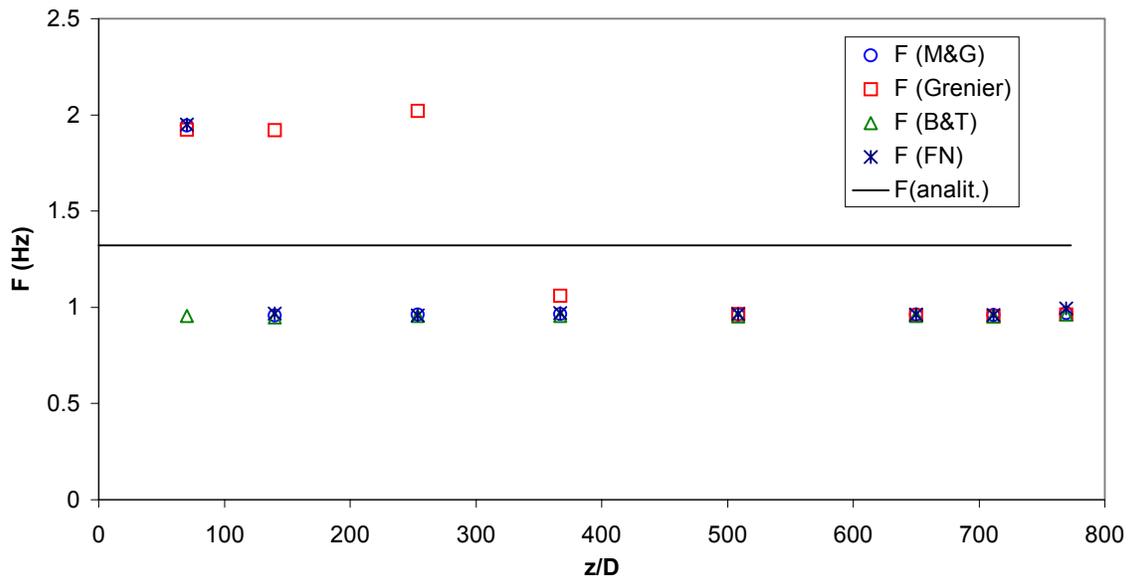


Figura 5. 48. Médias das freqüências da células em algumas seções do duto.

5.3 – Comparação do Caso Periódico com Dados Experimentais

O objetivo desta seção é comparar com dados experimentais (Rosa (2003)) a resposta do modelo proposto quando aplicado ao caso periódico.

Para tanto, um caso periódico será idealizado onde as condições de contorno do problema (dados de entrada do modelo numérico) serão os valores médios de um escoamento real medidos em uma primeira estação de medida. Os valores médios fornecidos pelo modelo numérico em posições relativas a outras estações de medida serão comparados com os valores médios destas últimas.

Todos os parâmetros das equações de fechamento e singularidades (como C_0 , V_0 , a_w , b_w , etc.) serão variados de forma a se buscar um melhor acordo entre a média dos valores fornecidos pelo modelo em uma dada seção e a média dos valores medidos experimentalmente nesta mesma seção. Para manter uma relação entre as velocidades superficiais e a frequência da célula, utilizaremos no modelo numérico a frequência em $z = 0$ (estação 1 dos dados experimentais) como dado de entrada.

As tabelas 5. 10 e 5. 11 abaixo apresentam alguns dados relativos ao escoamento medido experimentalmente e ao escoamento periódico idealizado, respectivamente. Estes são os dados que serão comparados em algumas seções do duto e os dados de entrada do modelo numérico. O ponto experimental a ser simulado corresponde ao ponto 4 de Rosa (2003), para escoamento de ar e água com misturador de correntes paralelas.

Estação	Posição (L/D)	V_B (m/s)	L_B/D	L_S/D	P (mbar)	F_u (Hz)	R_G	j_L (cm/s)	j_G (cm/s)
1	0	1,38	13,2	5,17	1040	2,89	0,500	52,5	47,2
2	140D	1,20	15,4	7,88	1030	2,02	0,513	52,5	47,8
3	367D	1,11	16,8	11,2	1020	1,51	0,512	52,5	48,1
4	650D	1,11	19,2	13,8	993	1,29	0,488	52,5	49,6

Tabela 5. 10. Dados experimentais (valores médios).

Observa-se aqui que a distância da estação 1 à seção de descarga é de 773D. A pressão de descarga é de 94700 Pa. O diâmetro do duto é 0,026m.

Nos experimentos realizados (Rosa 2003), a estação de medida 1 encontrava-se a 127D de um misturador de correntes paralelas. Para a comparação com soluções numéricas, a estação de medida 1 funciona como a seção de entrada do modelo, fornecendo as frequências das células a serem utilizadas pelo modelo na seção de entrada. Por este motivo, sua posição passa a ser, em termos do modelo, $z = 0$. As posições das demais estações de medida são então estabelecidas em relação à estação 1. Os resultados de simulações numéricas em posições correspondentes às demais estações de medidas são comparados com os respectivos dados experimentais.

Pressão de descarga (mbar)	947
Comprimento total do Duto (D)	773
Diâmetro do duto (m)	0,026
f_u em $z = 0$ (Hz)	2,89
j_L em $z = 0$ (cm/s)	52,5
j_G em $z = L$ (cm/s)	50
R_G médio (adimensional)	0,506

Tabela 5. 11. Dados de entrada utilizados pelo modelo

Diversas simulações foram realizadas utilizando-se os dados da tabela 5. 11. Os parâmetros das equações de fechamento e singularidades (como C_0 , V_0 , a_w , b_w , etc.) foram variados. A comparação entre os resultados numéricos e os dados experimentais é feito em forma de tabelas. Como o escoamento foi idealizado em termos de valores médios, as comparações utilizam apenas os valores médios fornecidos pelo modelo, de forma a se calcular os erros em relação aos dados experimentais. Os erros relativos foram calculados como a diferença entre a solução numérica e a medida experimental dividida pela medida experimental, tudo na mesma seção transversal.

As tabelas 5. 12 a 5. 15 apresentam as comparações entre resultados numéricos e dados experimentais para algumas simulações selecionadas. Nestas tabelas, com relação aos parâmetros utilizados pelo modelo, “BDK” significa que a correlação proposta por Bendiksen (1984) foi utilizada; “Com” significa que a variação de pressão devido à diferença de altura hidrostática (equação (3. 76)) foi utilizada; “M&G” significa que a lei proposta por Moissis & Griffith (1962) foi utilizada; “Grenier” significa que a lei proposta por Grenier (1997) foi utilizada; “FN” significa que a lei proposta por Fagundes Netto (1999) foi utilizada.

Parâmetros utilizados na simulação					
C_0	C_A	DP_H	Esteira	R_G	$F_{u(z=0)}$ (Hz)
1.4	2	Com	Grenier	0.506	2.89
Erros relativos ao dados experimentais					
Posição (L/D)	V_B	L_B/D	L_S/D	P	F_u
140D	16%	-22%	-17%	1%	43%
367D	30%	-22%	-37%	-3%	92%
650D	29%	37%	-10%	-3%	15%

Tabela 5. 12 . Simulação utilizando valores médios.

Parâmetros utilizados na simulação					
C_0	C_A	DP_H	Esteira	R_G	$F_{u(z=0)}$ (Hz)
BDK	2	Com	M&G	0.506	2.89
Erros relativos ao dados experimentais					
Posição (L/D)	V_B	L_B/D	L_S/D	P	F_u
140D	6%	64%	13%	-5%	-29%
367D	16%	52%	-22%	-5%	-5%
650D	18%	36%	-38%	-4%	13%

Tabela 5. 13. Simulação utilizando valores médios.

Parâmetros utilizados na simulação					
C_0	C_A	DP_H	Esteira	R_G	$F_{u(z=0)}$ (Hz)
1.3	2	Com	Grenier	0.506	2.89
Erros relativos ao dados experimentais					
Posição (L/D)	V_B	L_B/D	L_S/D	P	F_u
140D	17%	-19%	-24%	-4%	53%
367D	19%	53%	-14%	-5%	-4%
650D	21%	40%	-29%	-4%	11%

Tabela 5. 14. Simulação utilizando valores médios.

Para os casos simulados apresentados nas tabelas 5. 12 a 5. 14, os erros relativos aos comprimentos de pistões e bolhas (e assim, relativos às frequências das células) são razoavelmente altos, enquanto os erros relativos às pressões são relativamente pequenos. A explicação para erros elevados na previsão de comprimentos de bolhas e pistões está relacionado a aproximações feitas nas simulações em questão e a falta de um sub-modelo para a fração de vazio das bolhas.

As relações utilizadas na seção de entrada com base na frequência (equações (3. 54) e (3. 55)) foram obtidas considerando válido o modelo de célula unitária na seção de entrada. Esta foi

uma aproximação feita para se estimar comprimentos de bolhas e de pistões na seção de entrada com base nos valores das velocidades superficiais de cada fase. Entretanto, embora dos experimentos realizados se saiba que na estação 1 ($z = 0$ para o modelo) tem-se intensa interação entre bolhas, a aproximação feita é razoavelmente válida quando utilizamos valores médios. Os valores dos comprimentos médios calculados na entrada com base nos dados experimentais ($f_{u(z=0)}$) apresentam um erro de 5% para L_B e de 13% para L_S . Tais erros são propagados pelo modelo, daí uma parte dos erros observados para os comprimentos de bolhas e de pistões.

As simulações realizadas aqui utilizaram valores médios. Informações foram perdidas no processo de média, o que tende a aumentar os desvios que o modelo apresenta em relação aos dados experimentais. Espera-se que utilizando as distribuições reais de frequências das células na seção de entrada, os comprimentos de bolhas e de pistões previstos pelo modelo se aproximem dos dados experimentais.

Ainda, o modelo proposto não possui um sub-modelo para a fração de vazios na bolha. Um valor médio baseado nos dados experimentais foi utilizado e considerado constante no tempo e no espaço. Como este é um valor médio, ele provavelmente produz bons resultados para bolhas de comprimento em torno da média tomada ao longo de todo o escoamento. Para as bolhas que possuem um comprimento diferente desta média, os erros podem ser grandes.

Parâmetros utilizados na simulação					
C_0	C_A	DP_H	Esteira	R_G	$F_{u(z=0)}$ (Hz)
BDK	2	Com	FN	0.506	2.89
Erros relativos ao dados experimentais					
Posição (L/D)	V_B	L_B/D	L_S/D	P	F_u
140D	5%	65%	2%	-5%	-29%
367D	15%	122%	11%	-6%	-22%
650D	15%	172%	8%	-4%	-42%

Tabela 5. 15. Simulação utilizando valores médios.

Para o caso apresentado na tabela 5. 15, apenas os erros relativos aos comprimentos de bolhas (e, assim, frequências das células) são elevados. Os erros relativos ao valor médio dos comprimentos dos pistões é sensivelmente menor que nos casos apresentados anteriormente, embora o valor médio dos comprimentos de bolhas apresente um erro significativamente maior.

A diferença deste último caso para os anteriores é principalmente causada pelo uso da Lei proposta por Fagundes Netto (1999). O uso desta última, mesmo com os valores médios do escoamento, prevê razoavelmente bem os comprimentos médios de pistões ao longo do duto. Esta lei de esteira parece prever a coalescência de bolhas de forma a gerar pistões de tamanhos próximos aos medidos experimentalmente.

No caso dos comprimentos de bolhas previstas, o erro é muito elevado. Entretanto, não se pode afirmar que tais erros estejam vinculados a lei de esteira utilizada. A falta de um sub-modelo para a fração de vazios nas bolhas é uma fonte de erro que se reflete mais intensamente na previsão dos comprimentos de bolhas.

5.4 – Intermitência na Entrada e Comparação com Dados Experimentais

Esta seção se propõe a comparar os resultados fornecidos pelo modelo numérico com dados medidos experimentalmente (Rosa (2003)). Para tanto, uma abordagem semelhante a da seção 5.3 é utilizada. Dados experimentais (frequências das células) em uma primeira estação de medida serão utilizados como entrada para o modelo numérico. A resposta do modelo em seções correspondentes às outras estações de medida serão comparadas com os dados experimentais.

Diferentemente da seção 5.3, o escoamento não é mais considerado como periódico. As frequências das células utilizadas pelo modelo na seção de entrada obedecem à distribuição obtida experimentalmente. O modelo calcula na seção de entrada ($z = 0$) comprimentos de bolhas e de pistões com base na distribuição real de frequência de células (equações (3. 54) e (3. 55)). Entretanto, o modelo calcula uma velocidade de mistura na entrada praticamente constante, soma das velocidades superficiais do gás e do líquido em $z = 0$. Com base nestes valores em $z = 0$, o modelo calcula os parâmetros do escoamento ao longo do restante do duto.

As comparações são feitas em termos de valores médios e também em termos de distribuições reais e distribuições fornecidas pelo modelo numérico. Todos os parâmetros relativos às equações de fechamento e singularidades (como C_0 , V_0 , a_w , b_w , etc.) são variados de forma a se buscar um melhor acordo com os experimentos. Ainda, devido à falta de um sub-modelo para a fração de vazios das bolhas, o valor utilizado pelo modelo (constante no tempo e no espaço) será variado em torno da média experimental, de forma a se buscar um valor que represente de maneira mais adequada o verificado experimentalmente.

O ponto experimental a ser simulado e comparado é o ponto 4 de Rosa (2003), para escoamento de ar e água com misturador de correntes paralelas. A tabela 5. 10, apresenta os dados relativos ao ponto experimental escolhido. Nos experimentos realizados (Rosa 2003), a estação de medida 1 encontrava-se a 127D de um misturador de correntes paralelas. Para a comparação com soluções numéricas, a estação de medida 1 funciona como a seção de entrada do modelo, fornecendo as frequências das células a serem utilizadas pelo modelo na seção de entrada. Por este motivo, sua posição passa a ser, em termos do modelo, $z = 0$. As posições das demais estações de medida são então estabelecidas em relação à estação 1. Os resultados de simulações numéricas em posições correspondentes às demais estações de medidas são comparados com os respectivos dados experimentais.

Diversas simulações são realizadas e comparadas com os dados experimentais. Em um primeiro momento apenas os valores médios e os desvios padrões dos dados numéricos e experimentais são confrontados. Isto é uma forma relativamente simples de verificar se os parâmetros do escoamento estão adequados. Com base nesta comparação inicial, para as simulações em que os valores médios e os desvios padrões mais se aproximam dos dados experimentais, as distribuições geradas numericamente são então comparadas às distribuições experimentais. Isto é feito através de histogramas.

A tabela 5. 16 apresenta um resumo dos parâmetros utilizados nas simulações realizadas. Cada simulação foi chamada de ponto e recebeu um número (coluna “Simul. #”). Os valores de C_0 (coluna “Co”), C_A (coluna “CA”) e R_G (coluna “RG”) são apresentados na tabela. “BDK”

significa que a correlação proposta por Bendiksen (1984) foi utilizada e “EXP” significa que valores experimentais de C_0 medidos por Rosa & Fagundes Netto (2004) foram utilizados. A coluna “DPH” indica se ΔP_H foi utilizado durante as simulações (“com” indica que ΔP_H foi utilizado e “sem” indica que ΔP_H não foi utilizado). A coluna “EST” indica qual lei de esteira foi utilizada (“Grenier”, “FN” e “MG” indicam que a lei de esteira proposta por Grenier (1997), por Fagundes Netto (1999) ou por Moissis & Griffith (1962) foi utilizada, respectivamente).

Simul.#	Co	CA	DPH	EST	RG
1	1,4	2	com	Grenier	0,506
2	BDK	2	com	FN	0,506
3	1,4	2	com	Grenier	0,540
4	BDK	2	com	Grenier	0,506
5	BDK	2	com	Grenier	0,540
6	1,3	2	com	Grenier	0,540
7	1,2	2	com	Grenier	0,540
8	1,3	2	com	Grenier	0,506
9	BDK	2	com	FN	0,540
10	1,4	2	com	Grenier	0,560
11	BDK	2	com	Grenier	0,560
12	BDK	2	com	MG	0,506
13	BDK	2	com	FN	0,560
14	EXP	2	com	FN	0,506
15	EXP	2	com	Grenier	0,506
16	1,4	2	com	Grenier	0,580
17	EXP	2	com	Grenier	0,560
18	1,1	0	sem	Grenier	0,506
19	1,3	2	com	FN	0,506

Tabela 5. 16. Resumo das simulações realizadas para o caso intermitente.

A tabela 5. 17 apresenta os dados experimentais de alguns parâmetros do escoamento. Os resultados numéricos para estes mesmos parâmetros são apresentados adiante. As colunas “E2”, “E3” e “E4” apresentam os dados relativos às estações 2 ($z = 140D$), 3 ($z = 367D$) e 4 ($z = 650D$), respectivamente (conforme tabela 5. 10). “<VB> (m/s)”, “<LB/D>”, “<LS/D>”, “<fu> (Hz)” e “<RG>” apresentam os valores médios medidos para a velocidade das frentes de bolha (em metros por segundo), para o comprimento de bolhas normalizado pelo diâmetro, para o comprimento de pistões normalizado pelo diâmetro, para a frequência das células (em Hertz) e para a frção de vazio das bolhas, respectivamente. “P (mbar)” apresenta a pressão medida em cada seção (oscilações não estão presentes nos dados experimentais), em mbar. “SVB (m/s)”,

“SLB/D”, “SLS/D” e “Sfu (Hz)” apresentam os desvios padrões para a velocidade das frentes de bolha, para o comprimento de bolhas, para o comprimento de pistões e para a frequência das células, respectivamente.

	E2	E3	E4
<VB> (m/s)	1,20	1,11	1,11
SVB (m/s)	0,21	0,06	0,07
<LB/D>	15,40	16,80	19,20
SLB/D	7,41	6,72	7,16
<LS/D>	7,88	11,20	13,80
SLS/D	9,19	6,70	6,24
<fu> (Hz)	2,02	1,51	1,29
Sfu (Hz)	0,15	0,20	0,20
P (mbar)	1030	1020	993
<RG>	0,513	0,512	0,488

Tabela 5. 17. Dados experimentais (valores médios e desvios padrão).

As tabelas 5. 18, 5. 19 e 5. 20 apresentam as médias e os desvios padrões dos valores calculados numericamente pelo modelo nas estações 2 , 3 e 4 (posições $z = 140D$, $z = 367D$ e $z = 650D$), respectivamente. A coluna “Simul. #” corresponde ao número da simulação realizada, conforme a tabela 5. 16. “<VB> (m/s)”, “<LB/D>”, “<LS/D>” e “<fu> (Hz)” apresentam os valores médios medidos para a velocidade das frentes de bolha (em metros por segundo), para o comprimento de bolhas normalizado pelo diâmetro, para o comprimento de pistões normalizado pelo diâmetro e para a frequência das células (em Hertz), respectivamente. “P (mbar)” apresenta a pressão medida em cada seção (oscilações não estão presentes nos dados experimentais), em mbar. “SVB (m/s)”, “SLB/D”, “SLS/D” e “Sfu (Hz)” apresentam os desvios padrões para a velocidade das frentes de bolha, para o comprimento de bolhas, para o comprimento de pistões e para a frequência das células, respectivamente.

Os valores presentes nas tabelas 5. 18, 5. 19 e 5. 20 podem ser diretamente confrontados com os valores da tabela 5. 17 para verificação de quais simulações mais se aproximam dos dados medidos experimentalmente.

Estação 2 (z = 140D)									
Simul.#	<VB> (m/s)	SVB (m/s)	<LB/D>	SLB/D	<LS/D>	SLS/D	<fu> (Hz)	Sfu (Hz)	P (mbar)
1	1,41	0,037	17,57	6,32	7,10	3,71	1,60	0,16	1018
2	1,28	0,062	28,07	9,59	9,53	4,26	2,22	0,24	976
3	1,40	0,057	14,86	4,99	9,71	3,82	2,42	0,13	1035
4	1,31	0,048	23,77	8,53	8,92	3,49	1,76	0,21	979
5	1,30	0,050	19,49	7,00	9,23	3,52	1,97	0,18	988
6	1,32	0,053	18,28	6,38	9,35	3,60	2,07	0,17	997
7	1,25	8,187	22,93	3,61	8,66	0,07	1,71	0,21	972
8	1,25	0,060	29,96	9,65	8,71	3,56	1,38	0,24	966
9	1,27	0,060	22,31	8,35	9,68	4,25	1,75	0,21	984
10	1,39	0,056	13,66	4,52	9,81	3,38	2,49	0,13	1045
11	1,30	0,047	17,62	6,25	9,43	3,65	2,11	0,17	993
12	1,30	0,267	28,75	10,62	10,70	4,56	1,43	0,26	968
13	1,27	0,056	20,09	7,42	9,85	4,13	1,85	0,19	989
14	1,18	0,061	38,91	13,29	8,67	3,94	1,11	0,33	957
15	1,18	0,058	27,24	12,25	4,53	3,64	1,76	0,30	956
16	1,38	0,054	12,64	4,15	9,98	3,82	2,56	0,12	1056
17	1,19	0,048	23,62	8,34	8,76	3,48	1,62	0,22	964
18	1,15	0,053	44,95	14,99	8,46	3,31	0,96	0,38	958
19	1,30	0,054	26,05	8,86	9,89	4,03	1,60	0,22	983

Tabela 5. 18. Solução numérica na estação 2 (valores médios e desvios padrão).

Estação 3 (z = 367D)									
Simul.#	<VB> (m/s)	SVB (m/s)	<LB/D>	SLB/D	<LS/D>	SLS/D	<fu> (Hz)	Sfu (Hz)	P (mbar)
1	1,42	0,037	24,47	9,30	12,24	4,55	1,68	0,23	992
2	1,26	0,036	44,30	15,79	13,90	4,61	1,50	0,39	966
3	1,31	0,037	20,48	7,58	12,52	4,55	1,84	0,20	1002
4	1,30	0,048	34,72	12,56	12,23	4,81	1,23	0,32	967
5	1,30	0,046	27,71	10,27	12,22	4,64	1,42	0,27	973
6	1,33	0,046	25,19	9,48	12,23	4,95	1,57	0,25	978
7	1,23	0,040	34,25	12,15	12,26	4,66	1,16	0,32	963
8	1,23	0,022	46,88	15,97	12,57	4,59	0,89	0,41	960
9	1,26	0,025	33,37	12,31	13,47	4,31	1,17	0,32	971
10	1,40	0,029	18,72	6,70	12,71	4,57	1,92	0,18	1009
11	1,30	0,051	24,39	9,03	12,21	4,86	1,55	0,24	976
12	1,30	0,206	33,91	12,32	12,07	4,98	1,21	0,30	968
13	1,26	0,027	30,40	11,27	13,82	4,00	1,24	0,30	974
14	1,15	0,034	71,71	22,47	13,02	4,20	0,58	0,57	953
15	1,17	0,030	68,89	19,32	10,95	4,16	0,98	0,49	956
16	1,40	0,045	17,39	6,03	12,83	4,64	1,97	0,17	1015
17	1,18	0,029	35,64	12,60	12,43	4,85	1,09	0,35	958
18	1,13	0,034	72,68	22,04	12,01	4,46	0,58	0,57	955
19	1,29	0,038	38,56	13,82	13,54	4,61	1,09	0,34	970

Tabela 5. 19. Solução numérica na estação 3 (valores médios e desvios padrão).

Estação 4									
Simul.#	<VB> (m/s)	SVB	<LB/D>	SLB/D	<LS/D>	SLS/D	<fu> (Hz)	Sfu	P (mbar)
1	1,43	0,037	30,76	12,00	14,68	5,57	1,39	0,29	962
2	1,27	0,022	52,01	17,88	15,34	3,59	0,81	0,42	954
3	1,43	0,037	24,74	9,52	14,34	4,96	1,60	0,24	965
4	1,30	0,027	43,72	15,86	14,68	5,70	1,00	0,41	954
5	1,30	0,019	32,94	12,10	13,80	4,87	1,21	0,31	956
6	1,33	0,022	31,80	11,74	14,46	5,02	1,25	0,31	958
7	1,24	0,036	42,59	15,00	14,90	5,86	0,96	0,41	953
8	1,23	0,022	56,73	18,48	14,51	4,67	0,73	0,46	951
9	1,26	0,021	39,64	14,50	15,27	3,66	0,99	0,36	955
10	1,43	0,033	22,89	8,93	14,54	5,21	1,65	0,24	967
11	1,30	0,016	30,61	11,02	14,39	4,74	1,24	0,30	957
12	1,30	0,016	37,58	14,45	12,87	5,15	1,11	0,35	954
13	1,26	0,023	33,98	11,85	14,72	3,59	1,09	0,29	956
14	1,30	0,048	90,54	28,51	13,94	5,09	0,47	0,71	950
15	1,17	0,034	37,74	24,96	12,45	4,96	0,46	0,64	948
16	1,43	0,027	21,06	8,03	14,59	5,20	1,72	0,22	970
17	1,15	0,041	47,85	16,39	14,52	5,04	0,81	0,46	950
18	1,13	0,032	93,00	28,60	14,36	5,01	0,45	0,73	950
19	1,30	0,024	45,92	16,69	15,15	0,02	0,92	0,39	955

Tabela 5. 20. Solução numérica na estação 4 (valores médios e desvios padrão).

Observa-se nas tabelas 5. 18, 5. 19 e 5. 20 que não há uma única simulação dentre as dezenove tentativas que representa os dados experimentais com o menor erro. De fato há uma alternância de um conjunto delas a medida que o escoamento evolui da estação 2 à estação 4. Para uma análise inicial, procurou-se as simulações que resultassem, da estação 2 à 4, em valores próximos dos medidos experimentalmente. A busca foi realizada para cinco variáveis (nas estações 2, 3 e 4): $\langle V_B \rangle$, $\langle L_B/D \rangle$, $\langle L_S/D \rangle$, $\langle f_u \rangle$ e P, totalizando assim 15 variáveis para as três estações. As simulações que melhor concordam com os dados experimentais estão assinaladas na tabela 5. 21, onde cada “x” significa que, para tal simulação, um parâmetro apresentou o menor erro (dentre todas as simulações).

		Número da Simulação																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Melhor Valor	X		X		X	X	X				X	X	X		X	X	X		X	
			X		X	X					X	X			X		X		X	
			X			X						X			X		X			
																	X			
																	X			
																	X			

Tabela 5. 21. Comparação entre médias e desvios padrões numéricos e experimentais.

Infelizmente os resultados não são conclusivos com relação a escolha de parâmetros de simulação. C_0 variou de 1.0 a 1.4, incluindo os valores resultantes da correlação de Bendiksen (1984). O efeito de esteira gerou resultados bons para as correlações de Grenier (1997), Fagundes Netto (1999) e Moissis & Griffith (1962). Destaca-se porém que nenhuma escolha de parâmetros gera resultados precisos para $\langle V_B \rangle$, $\langle L_B/D \rangle$, $\langle L_S/D \rangle$, $\langle f_u \rangle$. Pode-se dizer entretanto que a simulação número 10 é a que apresenta o menor erro relativo se considerarmos todas as cinco variáveis.

Para a simulação número 10 é realizada uma análise da evolução das populações de pistões e bolhas ao longo do duto. Esta análise é feita por meio de histogramas comparando resultados numéricos com dados experimentais. A frequência relativa das variáveis foi obtida por classificação de dados numéricos e ajuste pelo algoritmo de Saporta (1990).

As figuras 5. 49, 5. 50 e 5. 51 apresentam as distribuições de comprimentos de bolhas nas estações 2, 3 e 4 respectivamente. O eixo das abcissas apresenta os valores dos comprimentos de bolhas normalizados pelo diâmetro do duto (L_B/D) e o eixo das ordenadas apresenta a frequência de ocorrência dos comprimentos. Na legenda destas figuras, “Num” é relativo à distribuição numérica e “Exp” é relativo à distribuição experimental.

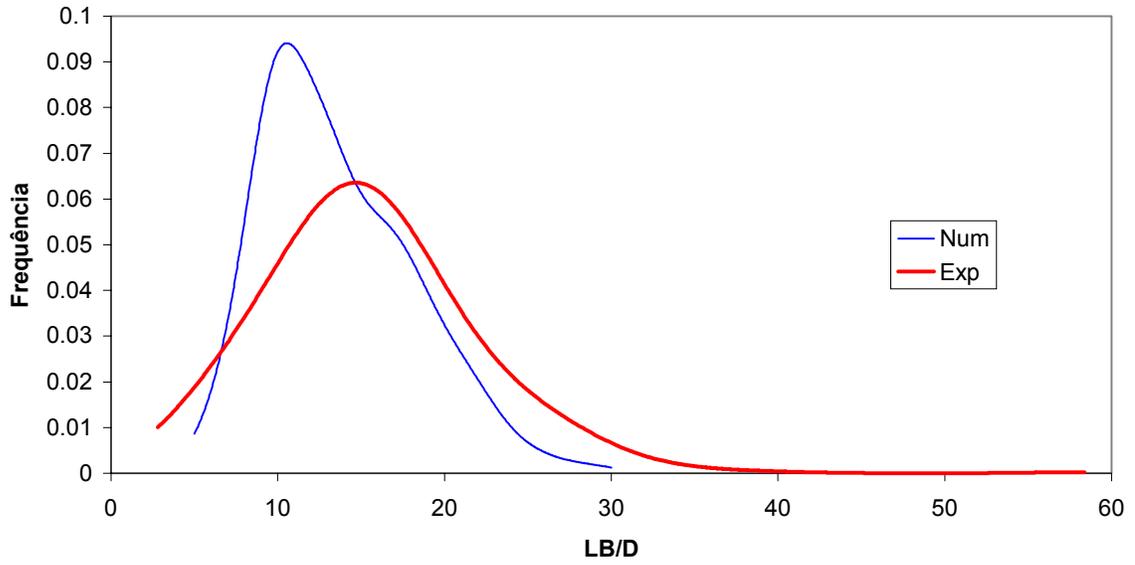


Figura 5. 49. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 2.

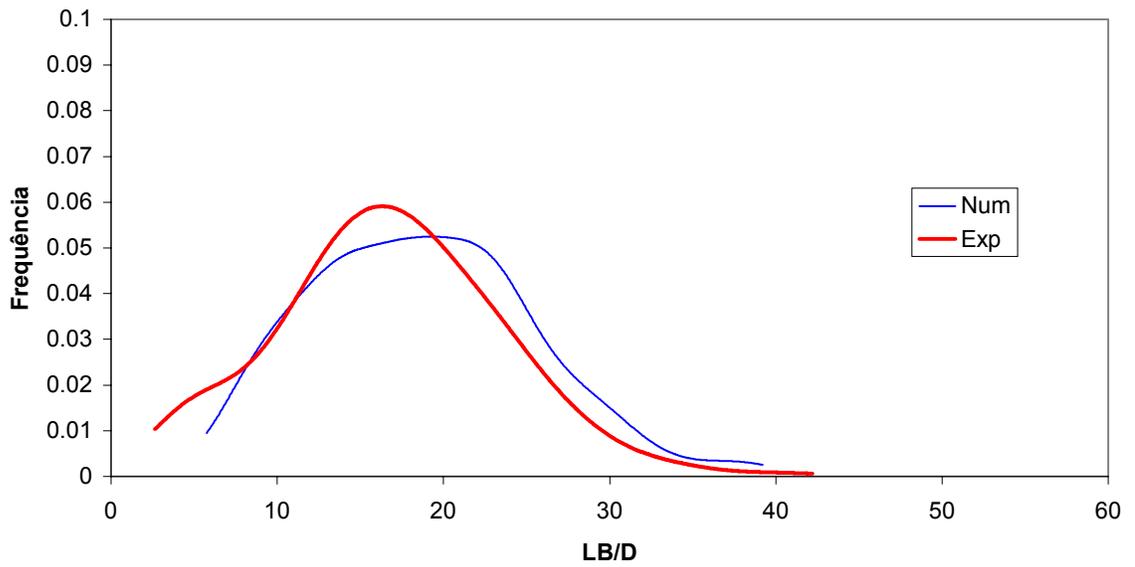


Figura 5. 50. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 3.

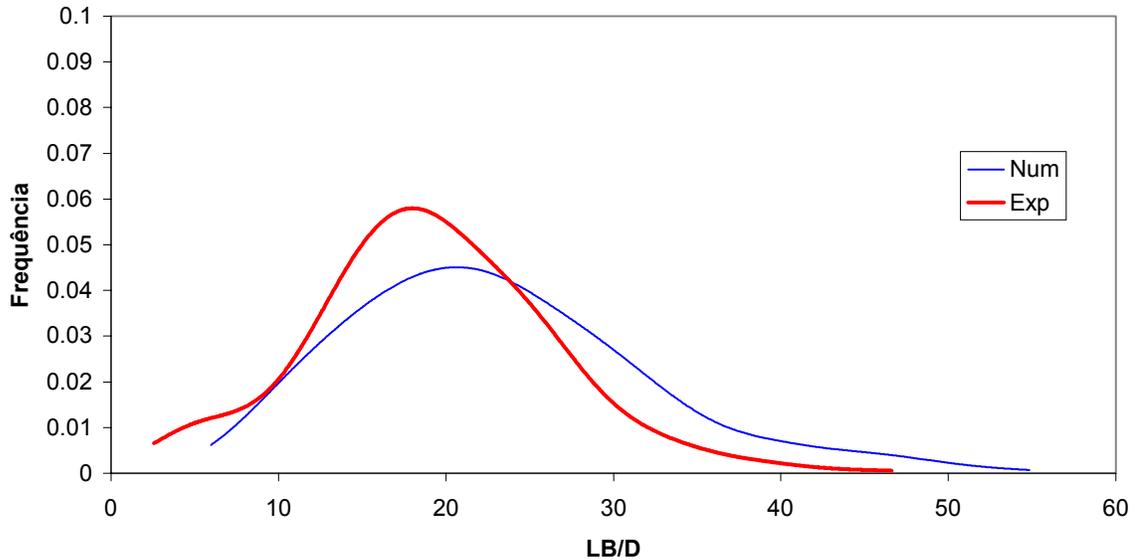


Figura 5. 51. Distribuição dos comprimentos de bolha na estação 4.

Destas figuras, percebe-se que na estação 2 há uma diferença significativa entre os valores mais prováveis e entre os espalhamentos das distribuições experimental e numérica. Esta diferença diminui nas estações 3 e 4. Aparentemente, as estruturas na seção de entrada são calculadas com um determinado erro e este erro é corrigido conforme o escoamento evolui ao longo do duto. Em termos do desvio padrão, ou do grau de espalhamento de L_B/D , observa-se que há uma inversão em relação aos dados experimentais. Para a estação 2 a distribuição numérica tem espalhamento menor que a experimental. Esta situação se inverte na estação 4. O uso de uma lei de esteira adequada parece corrigir o erro dos comprimentos de bolha a medida que o escoamento se desenvolve.

As figuras 5. 52, 5. 53 e 5. 54 apresentam as distribuições de comprimentos de pistão nas estações 2, 3 e 4, respectivamente. O eixo das abcissas apresenta os valores dos comprimentos de pistões normalizados pelo diâmetro do duto (L_S/D) e o eixo das ordenadas apresenta a frequência de ocorrência dos comprimentos. Na legenda destas figuras, “Num” é relativo à distribuição numérica e “Exp” é relativo à distribuição experimental.

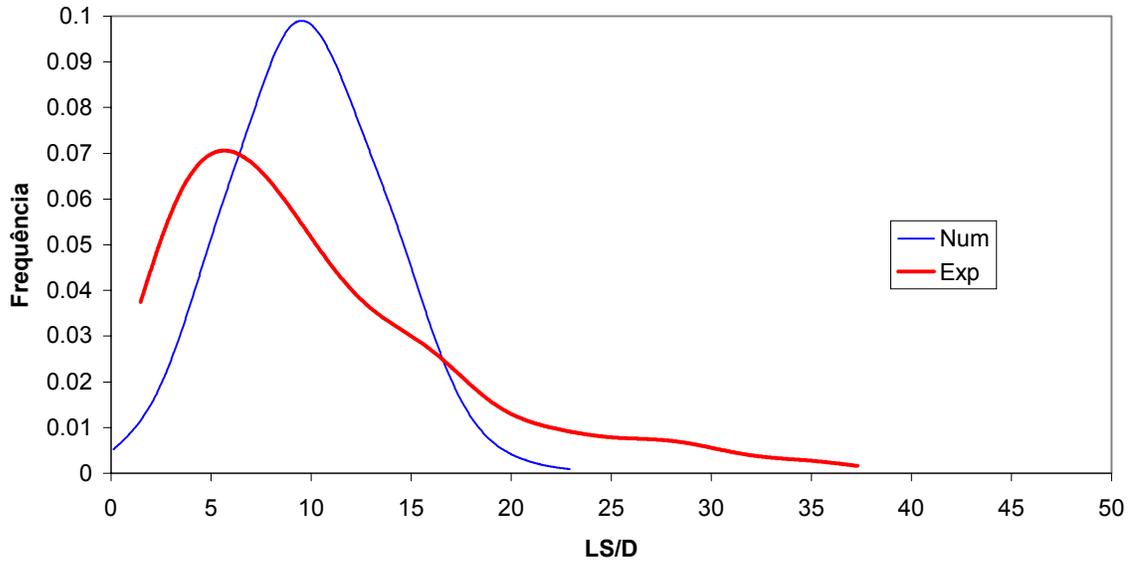


Figura 5. 52. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 2.

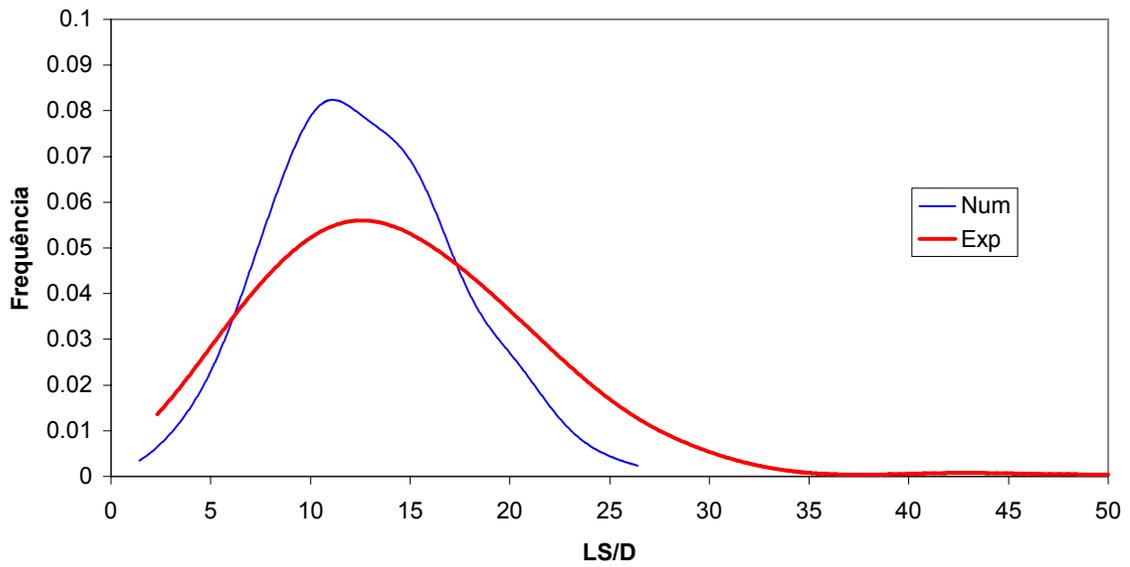


Figura 5. 53. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 3.

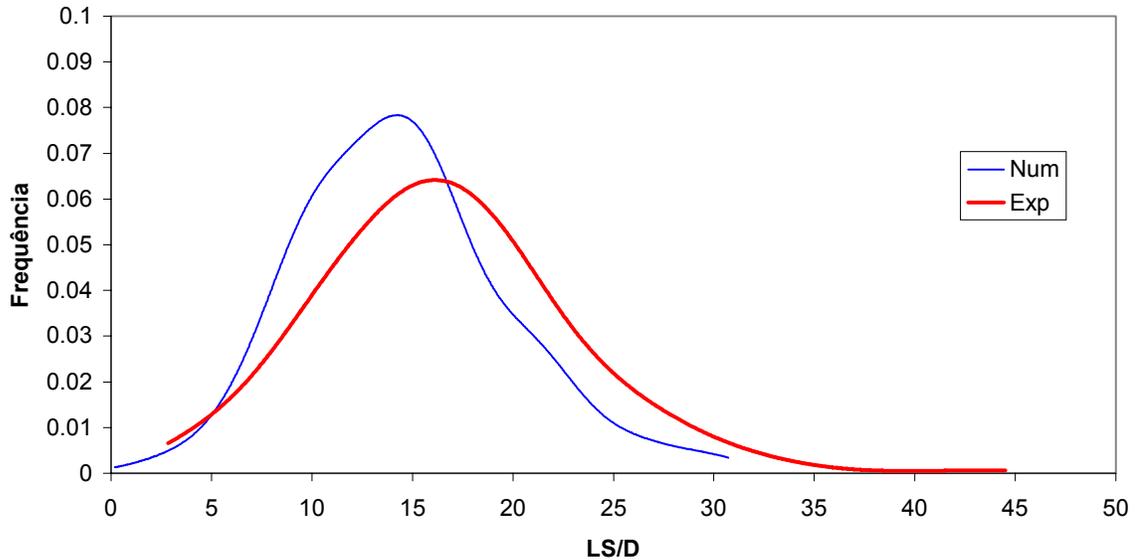


Figura 5. 54. Distribuição dos comprimentos de pistão na estação 4.

Percebe-se que na estação 2 há uma diferença significativa entre os valores mais prováveis e entre os espalhamentos das distribuições. Esta diferença diminui conforme o escoamento evolui para as estações 3 e 4. Diferentemente dos comprimentos de bolha, as populações de L_S/D sempre apresentam um espalhamento menor que os dados experimentais.

As figuras 5. 55, 5. 56 e 5. 57 apresentam as distribuições de frequências de células nas estações 2, 3 e 4, respectivamente. O eixo das abcissas apresenta os valores das frequências das células (em Hertz) e o eixo das ordenadas apresenta a frequência de ocorrência frequências das células. Na legenda destas figuras, “Num” é relativo à distribuição numérica e “Exp” é relativo à distribuição experimental.

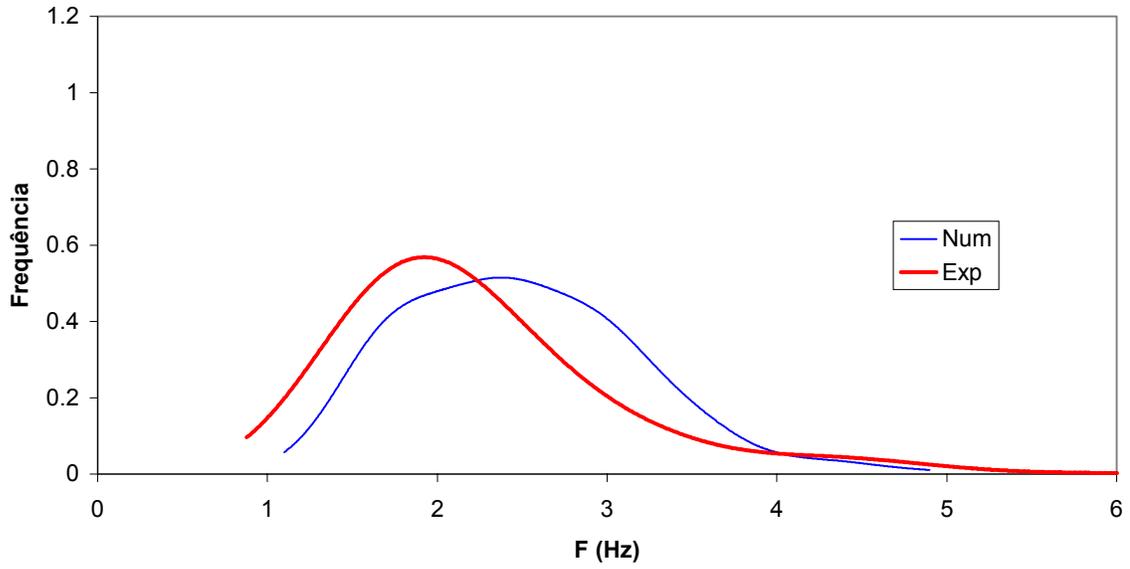


Figura 5. 55. Distribuição das frequências das células na estação 2.

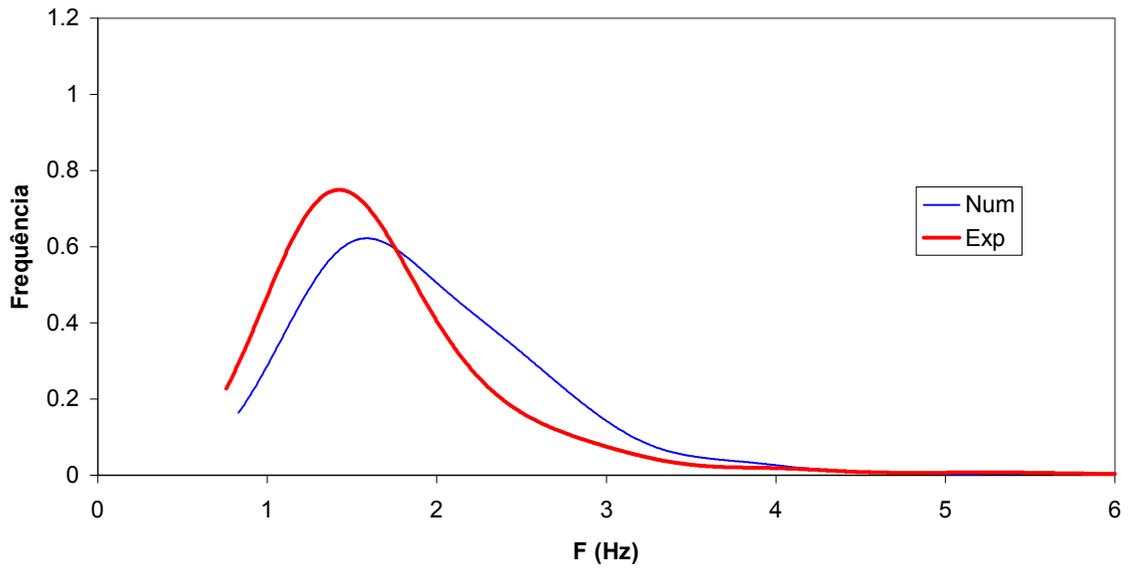


Figura 5. 56. Distribuição das frequências das células na estação 3.

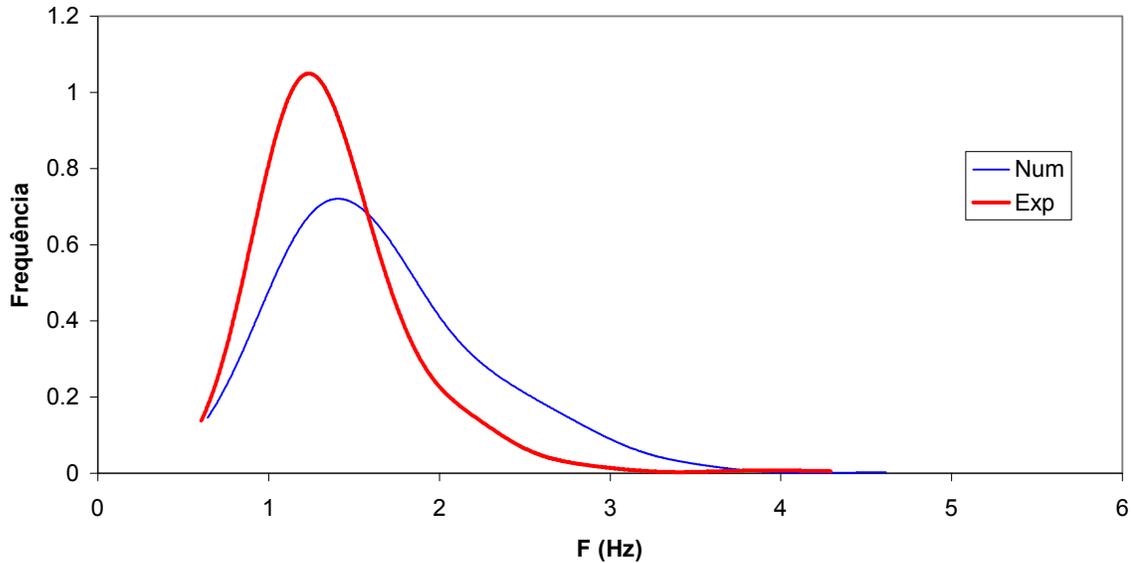


Figura 5. 57. Distribuição das freqüências das células na estação 4.

Destas figuras, observa-se que as freqüências calculadas numericamente apresentam uma tendência semelhante a medida experimental. Enquanto na estação 2 os espalhamentos das distribuições são semelhantes e os valores mais prováveis não coincidem, na estação 4 os valores mais prováveis praticamente coincidem, embora haja uma diferença no espalhamento.

As figuras 5. 58, 5. 59 e 5. 60 apresentam as distribuições das velocidades das frentes de bolha nas estações 2, 3 e 4, respectivamente. O eixo das abcissas apresenta os valores das velocidades das frentes de bolha (em m/s) e o eixo das ordenadas apresenta a freqüência de ocorrência das velocidades. Na legenda destas figuras, “Num” é relativo à distribuição numérica e “Exp” é relativo à distribuição experimental.

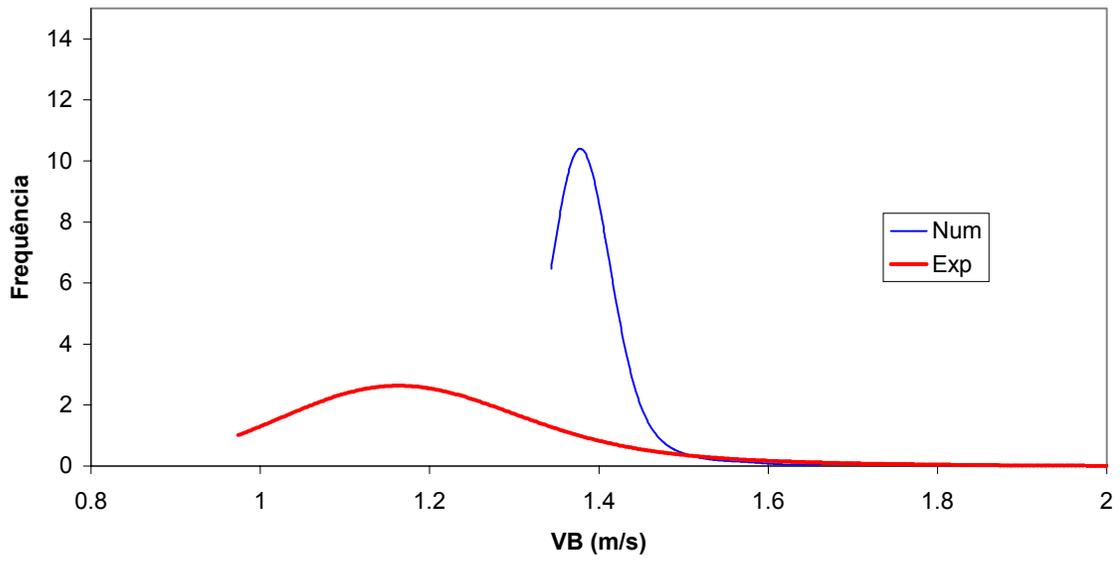


Figura 5. 58. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 2.

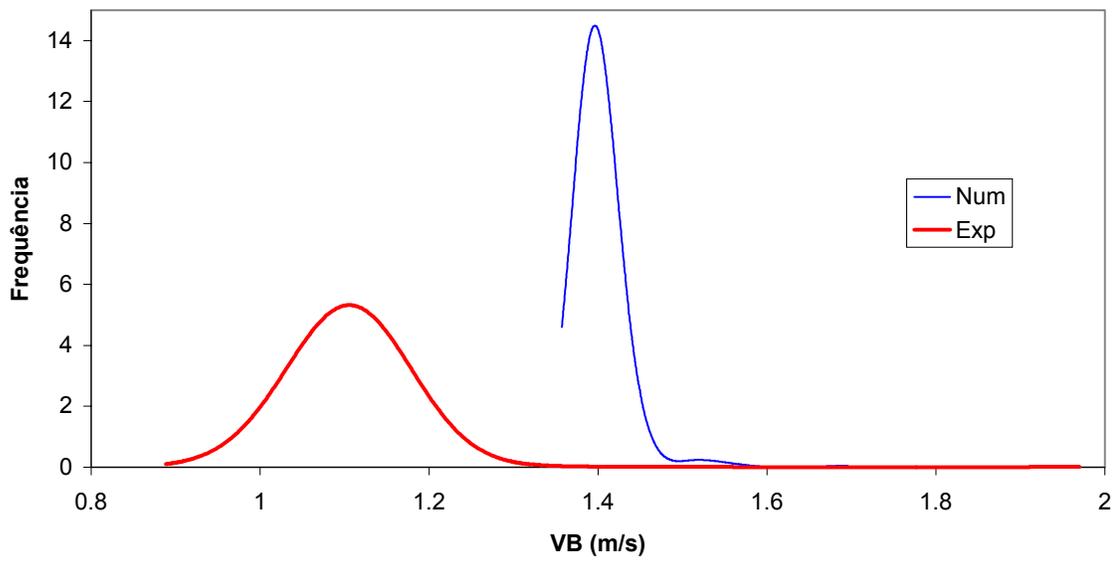


Figura 5. 59. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 3.

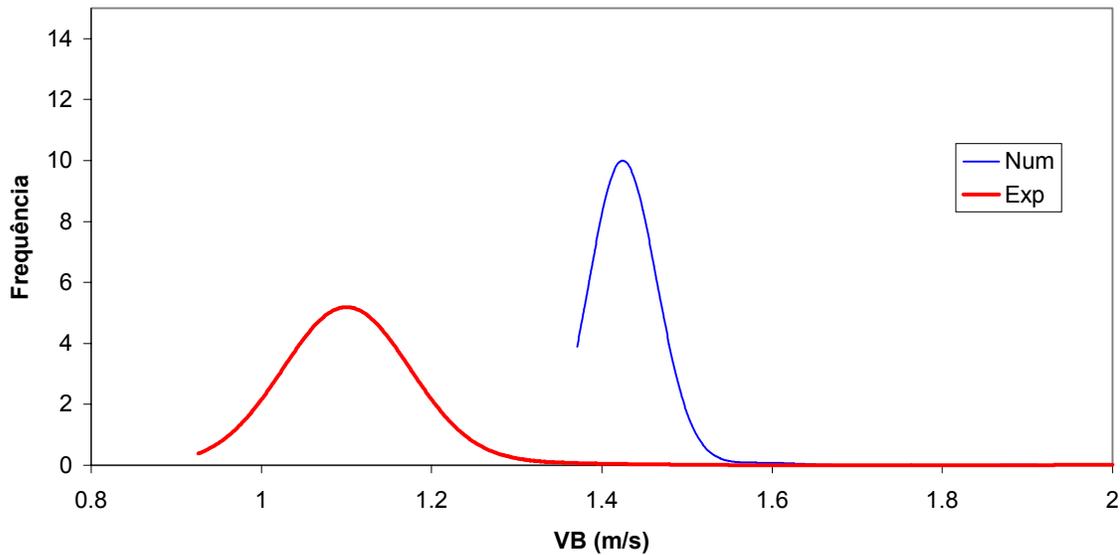


Figura 5. 60. Distribuição das velocidades de frente de bolha na estação 4.

Contrariamente ao verificado para as frequências das células e para os comprimentos, as populações de velocidades de frentes de bolha calculadas e medidas apresentam grandes diferenças. A explicação para isto parece estar na velocidade de mistura na seção de entrada (condição de contorno).

No presente modelo a velocidade superficial do líquido não varia na entrada ($z = 0$), sendo constante ao longo do tempo e igual à j_L médio. Por outro lado, j_G na seção de saída ($z = L$) também não varia com o tempo e é igual a j_G médio. Desta maneira a velocidade de mistura na entrada, j , apresenta oscilações de pequena amplitude ao redor da média devido às flutuações de j_G induzidas pelas variações de pressão. Como V_B depende diretamente de j , pode-se esperar que V_B não tenha um grande espalhamento ao redor da média se j também não tiver. De fato, a figura 5. 58 mostra uma distribuição de valores numéricos de V_B com valor mais provável de 1,4 e com espalhamento bem menor que o da distribuição experimental. A distribuição de V_B determinada numericamente deve-se à presença do efeito de esteira e também da distribuição das frequências das células na entrada. Nota-se porém que a ação combinada destes dois mecanismos não é suficiente para representar a distribuição de V_B experimental.

Em escoamentos reais, verifica-se experimentalmente que a velocidade de mistura à frente das bolhas, em uma dada seção transversal, também varia com o tempo. Ela certamente é influenciada pelo processo de formação das golfadas e j deve variar de célula para célula. Este fato em si é relevante pois ele permite que as velocidades dos pistões variem, influenciadas pelo processo de formação, de tal modo que as bolhas mais rápidas alcançam as bolhas mais lentas simplesmente porque elas foram formadas com velocidades maiores. No atual estágio de desenvolvimento deste modelo não foi implementada uma condição de contorno de j na entrada advinda de uma distribuição estatística. Portanto, a distribuição de V_B resultante do modelo origina-se unicamente da ação do efeito de esteira pois as bolhas são formadas com velocidades quase idênticas.

A figura 5. 61 apresenta comparações entre os valores médios calculados numericamente (simulação # 10) e medidos experimentalmente. Nestes gráficos, os eixos das ordenadas referem-se às respostas numéricas e os eixos das abcissas às medidas experimentais. $\langle P \rangle$, $\langle LB/D \rangle$, $\langle LS/D \rangle$ e $\langle VB \rangle$ se referem, respectivamente, aos valores médios da pressão das bolhas, dos comprimentos de bolha normalizados pelo diâmetro do duto, dos comprimentos de pistão normalizados pelo diâmetro do duto e das velocidades das frentes de bolhas. Os pontos representados nos gráficos são relativos às estações 2, 3 e 4 (posições $z = 140D$, $z = 367D$ e $z = 650D$), respectivamente.

Da figura 5. 61, percebe-se uma concordância relativamente boa entre os dados numéricos e experimentais para a pressão das bolhas e para os comprimentos de bolhas e pistões. O mesmo não ocorre quanto às velocidades de frente de bolha. As diferenças observadas quanto aos valores médios de velocidades de frente de bolha devem-se principalmente, conforme explicado anteriormente, às condições adotadas para a velocidade de mistura na seção de entrada ($z = 0$).

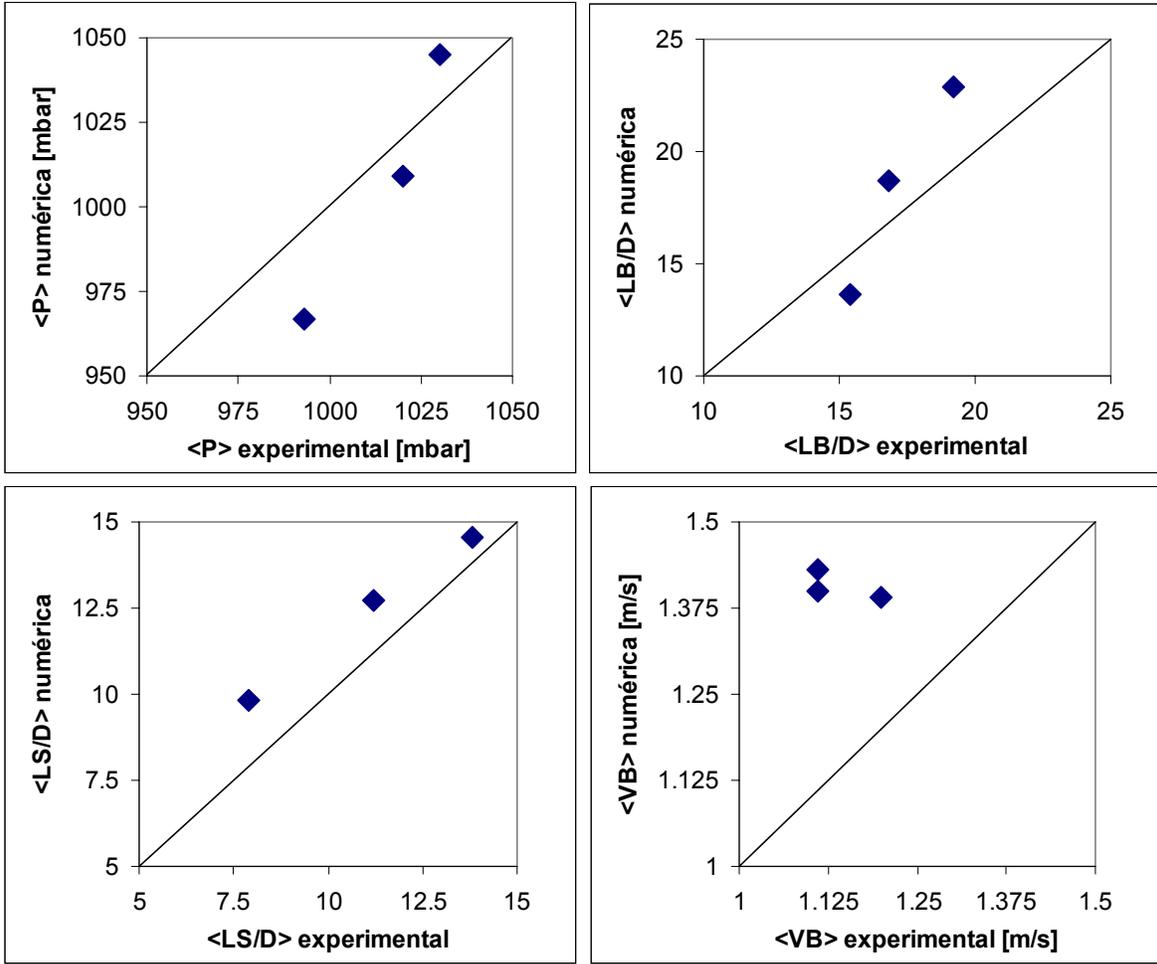


Figura 5. 61. Comparação dos valores médios numéricos e experimentais.

Capítulo 6

Conclusões e Próximos Passos

Uma modelagem lagrangeana uni-dimensional é proposta para o escoamento horizontal gás-líquido em padrão de golfadas de líquido. O modelo proposto baseia-se na divisão espacial do escoamento em volumes de controle e na aplicação das equações de transporte de massa e de quantidade de movimento. Equações de fechamento são utilizadas para o fechamento do modelo. Por fim, tem-se um modelo que incorpora as interações típicas de escoamentos em padrão de golfadas de líquido.

No modelo, cada volume de controle engloba individualmente um pistão de líquido ou uma bolha (fase gasosa + filme de líquido). As equações de transporte de massa são aplicadas a ambas as fases e as de transporte de quantidade de movimento são aplicadas apenas à fase líquida. O modelo aqui proposto, diferentemente de todos os modelos de seguimento de pistões apresentados na revisão bibliográfica, considera as variações de pressão devido ao líquido que se expande ao escoar do filme líquido para o pistão que o segue.

Realizada a modelagem matemática do escoamento, suas equações são discretizadas e um esquema numérico de ordem unitária é proposto. Ainda, além do modelo e suas condições de contorno, o esquema numérico incorpora as singularidades presentes no escoamento por golfadas, como a entrada, a saída e a coalescência de bolhas.

Um código numérico foi escrito em Visual Basic utilizando o esquema numérico proposto. O código, orientado ao evento, foi escrito de forma interagir facilmente com seus usuários e a servir como ferramenta de simulação do modelo.

Simulações numéricas foram executadas de forma a se testar as consistências do modelo e do esquema numérico propostos. As simulações foram realizadas basicamente em duas etapas: para escoamentos periódicos na seção de entrada e para escoamentos intermitentes na seção de entrada.

Os casos periódicos permitem a obtenção de uma solução analítica aproximada. O termo aproximado deve-se ao fato que os efeitos de entrada e saída de bolhas e pistões não são considerados na solução analítica. Por outro lado, as soluções numéricas incorporam intrinsecamente os efeitos de entrada e saída de bolhas e pistões. Sua principal consequência é a introdução de múltiplas frequências que causam o fenômeno de batimento na solução. Entretanto, a amplitude das oscilações é menor que um centésimo do valor médio das variáveis e seu efeito, em termos aplicados, pode ser desprezado. Sob este ponto de vista, a solução analítica de casos periódicos permite verificar a consistência do método numérico e estabelecer um critério de erro para o tamanho do passo de tempo. Ainda, utilizando os casos periódicos, pode-se analisar a sensibilidade do modelo numérico a variações de densidade, viscosidade, comprimento de linha, C_0 , V_0 e também de diferentes leis de efeito de esteira.

O modelo numérico foi aplicado a um caso real (intermitente na seção de entrada) gerando resultados comparáveis aos dados experimentais. O modelo se mostra capaz de prever a evolução das estruturas gás-líquido, entretanto ele necessita de informações precisas na seção de entrada. Isto é, como o modelo propaga bolhas e pistões ao longo do duto, a introdução não consistente de bolhas e pistões faz com que inconsistências sejam propagadas. É certo que o modelo também permite a interação entre bolhas e pistões de tal forma que eventualmente os efeitos de entrada possam ser esquecidos. Entretanto, quando se compara resultados em seções onde o escoamento se desenvolve, aumenta a relevância do conhecimento preciso de dados na seção de entrada. Não obstante destes fatos, os resultados gerados pelo modelo se comportam de forma semelhante ao verificado experimentalmente.

Ainda em relação à aplicação do modelo a um caso real, foram realizadas 19 simulações na tentativa de revelar um melhor ajuste de C_0 , V_0 e lei de esteira. Este ponto não foi esclarecido

pelo presente trabalho pois surgiram pelo menos cinco casos bem sucedidos e entre eles não se pode dizer com clareza se uma lei de esteira é preferível à outra ou se uma correlação de velocidade prevalece sobre outra.

O modelo de seguimento de pistões se apresenta como promissor para a previsão da evolução de estruturas gás-líquido e pressões em escoamentos por golfadas de líquido. Este trabalho, porém, dedicou-se principalmente ao seu desenvolvimento analítico e numérico. Torna-se necessário para o futuro a confrontação deste modelo com mais dados experimentais, de forma a se melhor conhecer seu comportamento e a revelar eventuais deficiências. No atual estágio de conhecimento do modelo foram detectadas possíveis melhorias futuras: a introdução de um sub modelo para a fração de vazios nas bolhas, um cálculo mais adequado das velocidades de mistura na seção de entrada (incluindo flutuações) e modificações no modelo para simulação de pistões aerados. Trabalhos futuros poderão trazer estas melhorias.

Referências Bibliográficas

- Al-safran, E. M., Taitel, Y., Brill, J. P. Prediction of slug length distribution along a hilly terrain pipeline using slug tracking model. Proceedings of ETCE2002 ASME Engineering Technology Conference on Energy, Houston, Texas, 2002, Prod-29162.
- Bendiksen, K. H. An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 10, pp. 467-483, 1984.
- Campbell, A. M., Oyeneyin, M. B., Noble, R. A. CFD modelling of horizontal two-phase flow in annuli. Proceedings of the 11th International Conference on Multiphase 03, San Remo, Itália, 2003, pp. 29-42.
- De Henau, V., Raithby, G. D. A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines – I. theory. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 21, (3), pp. 335-349, 1995.
- De Henau, V., Raithby, G. D. . A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines – II. Validation. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 21, (3), pp. 351-363, 1995.
- Dukler, A. E., Hubbard, M. G. A model for gas-liquid slug in horizontal and near horizontal tubes. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, v.14, (4), pp. 337-347, 1975.
- Fabre, J., Liné, A. Modelling of two-phase slug flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.24, pp. 21-46, 1992.

- Fagundes Netto, José Roberto. *Dynamique de poches de gaz isolées en écoulement permanent et non permanent horizontal*. Toulouse: Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999, 166p. Tese (Doutorado)
- Franklin, E. M., Rosa, E. S. Bubble dynamic segments numeric modelling in horizontal gas-liquid intermittent flow. Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil, 2003, CD ROM.
- Franklin, E. M., Rosa, E. S. Dynamic slug tracking model for horizontal gas-liquid flow. Proceedings of the 3rd International Symposium on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation, Pisa, Itália, 2004, a ser publicado.
- Grenier, Philippe. *Evolution des longueurs de bouchons en écoulement intermittent horizontal*. Toulouse: Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997, 193p. Tese (Doutorado)
- Issa, R.I., Kemppf, M. H. M. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 29, pp. 69-95, 2002.
- Masella, J.M., Tran Q.H., Ferre, D., Pauchon C., Transient simulation of two-phase flows in pipes. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 24, pp. 739-755, 1998.
- Moissis, R., Griffith, P. Entrance effects in a two-phase slug flow. *J. Heat Transfer*, v.84, pp. 29-39, 1962.
- Nicklin, D. J., Wilkes, J. O., Davidson, J. F. Two phase flow in vertical tubes. *Trans. Inst. Chem. Engineers*, v. 40, pp. 61-68, 1962.
- Nydal, O. J., Banerjee, S. Object oriented dynamic simulation of slug flow. Proceedings of II International Conf. On Multiphase Flow, Kyoto, Japão, 1995, pp. IF2-7 – IF2-14.

- Nydal, O. J., Banerjee, S. Dynamic slug tracking simulations for gas-liquid flow in pipes. Chem. Eng. Comm., v. 141-142 , pp. 13-39, 1996.
- Nydal, O. J., Klebert, P., Wangensteen, T., Kristiansen, O., Transient two phase flow model. Proceedings of the 11th International Conference on Multiphase 03, San Remo, Itália, 2003, pp. 171-184.
- Omgba, C., Hanich, L., Thompson, C., Lezeau, P. Adaptative grid refinement for transient two-phase flows. Proceedings of the AMIF-ESF Workshop, Aussois, França, 2000, Internet.
- Pauchon, C., Dhulesia, H., Binh-Cirlot, G., Fabre, J. TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation. Proceedings of the SPE Annual Technical Conference, Nova Orleans, Estados Unidos, 1994, SPE28545, pp. 25-28.
- Rosa, E. S., Morales, E. R., Melo, A. I., Freire, R., França, F. A. The evolution of horizontal slug flow, Proceedings of XVI Congresso Brasileiro Eng. Mecânica, COBEM, Uberlândia, Brazil, 2001, pp. 1 a10, CD ROM.
- Rosa, E. S. Flow structure in the horizontal slug flow. Proceedings of IX Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT, Caxambu, Brazil, 2002, CD ROM.
- Rosa, E. S., Duarte, M. The influence of viscosity on the gas-liquid slug flow. Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil, 2003, CD ROM.
- Rosa, E. S., Fagundes Netto, J. R. Viscosity effect and flow development in horizontal slug flows. Proceedings of the 5th International Conference on Multiphase Flow, Yokohama, Japão, 2004, a ser publicado.
- Rosa, E. S. Relatório de Pesquisa do projeto “ Estudos da Termofluidodinâmica de Processos de Produção”, PETROBRAS contrato número 650412201-7, 2003.

Saporta, G. *Probabilité, analyse des données et statistique*. Paris: Editions Technip, 1990.

Straume, T., Nordsveen, M., Bendiksen, K. Numerical simulation of slugging in pipelines. *Multiphase Flow in Wells and Pipelines*, v. 144, pp. 103-112, 1992.

Taitel, Y., Barnea, D. Two phase slug flow. In *Advances in Heat Transfer* (edited by Harnett, J.P. and Irvine, T.F. Jr), v. 20, pp. 83-132, 1990.

Taitel, Y., Barnea, D. A model for slug length distribution in gas-liquid slug flow. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 19, pp. 829-838, 1993.

Taitel, Y., Barnea, D. Effect of gas compressibility on a slug tracking model. *Chemical Engineering Science*, v. 53, (11), pp. 2089-2097, 1998.

Teychené, S., Décarre, S., Henriot, V., Liné, A. Downward two phase gas-liquid flow modelling. *Proceedings of the 11th International Conference on Multiphase 03*, San Remo, Itália, 2003, pp. 147-153.

Wallis, G. B. *One-dimensional two-phase flow*. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1969, 408p.

Zheng, G., Brill, J.P., Taitel, Y., Slug flow behavior in a hilly terrain pipeline. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 20, (1), pp. 63-79, 1994.

Anexo I

Conservação da Quantidade de Movimento na Bolha j

Se seguirmos o mesmo procedimento realizado no caso do pistão chega-se facilmente à:

I.1 – Filme líquido

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(y_j - x_{j-1}) \overline{\rho_L R_{\text{fl}} U_{\text{fl}}} \right] &= (\rho_L R_{\text{fl}} U_{\text{fl}})_{z=y_j} \left[\frac{dy_j}{dt} - (U_{\text{fl}})_{z=y_j} \right] \\ &- (\rho_L R_{\text{fl}} U_{\text{fl}})_{z=x_{j-1}} \left[\frac{dx_{j-1}}{dt} - (U_{\text{fl}})_{z=x_{j-1}} \right] + (R_{\text{fl}} P_{\text{fl}})_{z=x_{j-1}} - (R_{\text{fl}} P_{\text{fl}})_{z=y_j} \\ &+ (y_j - x_{j-1}) (\overline{T_{\text{fl}}} - \overline{I_{\text{fl}}}) \end{aligned}$$

(I. 1)

I.2 – Fase gasosa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(y_j - x_{j-1}) \overline{\rho_G R_{Gj} U_{Gj}} \right] &= (\rho_G R_{Gj} U_{Gj})_{z=y_j} \left[\frac{dy_j}{dt} - (U_{Gj})_{z=y_j} \right] \\ &- (\rho_G R_{Gj} U_{Gj})_{z=x_{j-1}} \left[\frac{dx_{j-1}}{dt} - (U_{Gj})_{z=x_{j-1}} \right] + P_{Gj} \left[(R_{Gj})_{z=x_{j-1}} - (R_{Gj})_{z=y_j} \right] \\ &+ (y_j - x_{j-1}) (\overline{T_{Gj}} - \overline{I_{Gj}}) \end{aligned}$$

(I. 2)

E, como a pressão é constante ao longo de uma bolha,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(y_j - x_{j-1}) \overline{\rho_G R_{Gj} U_{Gj}} \right] &= (\rho_G R_{Gj} U_{Gj})_{z=y_j} \left[\frac{dy_j}{dt} - (U_{Gj})_{z=y_j} \right] \\ &- (\rho_G R_{Gj} U_{Gj})_{z=x_{j-1}} \left[\frac{dx_{j-1}}{dt} - (U_{Gj})_{z=x_{j-1}} \right] + (R_{Gj} P_{Gj})_{z=x_{j-1}} - (R_{Gj} P_{Gj})_{z=y_j} \\ &+ (y_j - x_{j-1}) (\overline{T_{Gj}} - \overline{I_{Gj}}) \end{aligned}$$

(I. 3)

Anexo II

Solução Analítica de um Escoamento Idealizado (Caso Teste)

II.1 – Desenvolvimento da Solução

Um escoamento em padrão golfadas pode ser idealizado de forma que exista uma solução analítica. Isto é possível fazendo-se as hipóteses abaixo:

- a) O escoamento é isotérmico em duto de seção transversal constante.
- b) O escoamento é periódico, isto é, os comprimentos de bolhas e pistões são todos idênticos na entrada do duto ($z = 0$).
- c) As bolhas possuem fração de vazio constante no tempo e no espaço.
- d) Os pistões de líquido são não-aerados.
- e) A velocidade da frente de uma bolha é função unicamente da velocidade do líquido no pistão precedente, isto é, não há efeito de esteira.

A solução analítica é determinada através do balanço de massa de gás seguindo uma bolha (lagrangeano), do balanço de massa de gás em uma seção transversal (euleriano) e considerando que a pressão de uma bolha é conhecida durante sua trajetória longo do duto.

A pressão de uma bolha de gás em função de sua posição z no duto é dada por:

$$P_{G(z)} = P_{Gsaida} + \lambda(L - z),$$

(II. 1)

onde P_{Gsaida} é a pressão de descarga e deve ser conhecida (em geral ela é igual à pressão atmosférica) e λ é o gradiente linear de pressão. O valor de λ deve ser conhecido “a priori “. Ele pode ser obtido por meio de simulação numérica ou de dados experimentais.

A equação (II. 1) propõe que para qualquer instante de tempo a pressão de uma bolha só depende de sua posição z no duto. A figura II. 1 ilustra a situação em que as bolhas que passam pelas posições z_1 e z_2 apresentam sempre as mesmas pressões P_1 e P_2 , respectivamente.

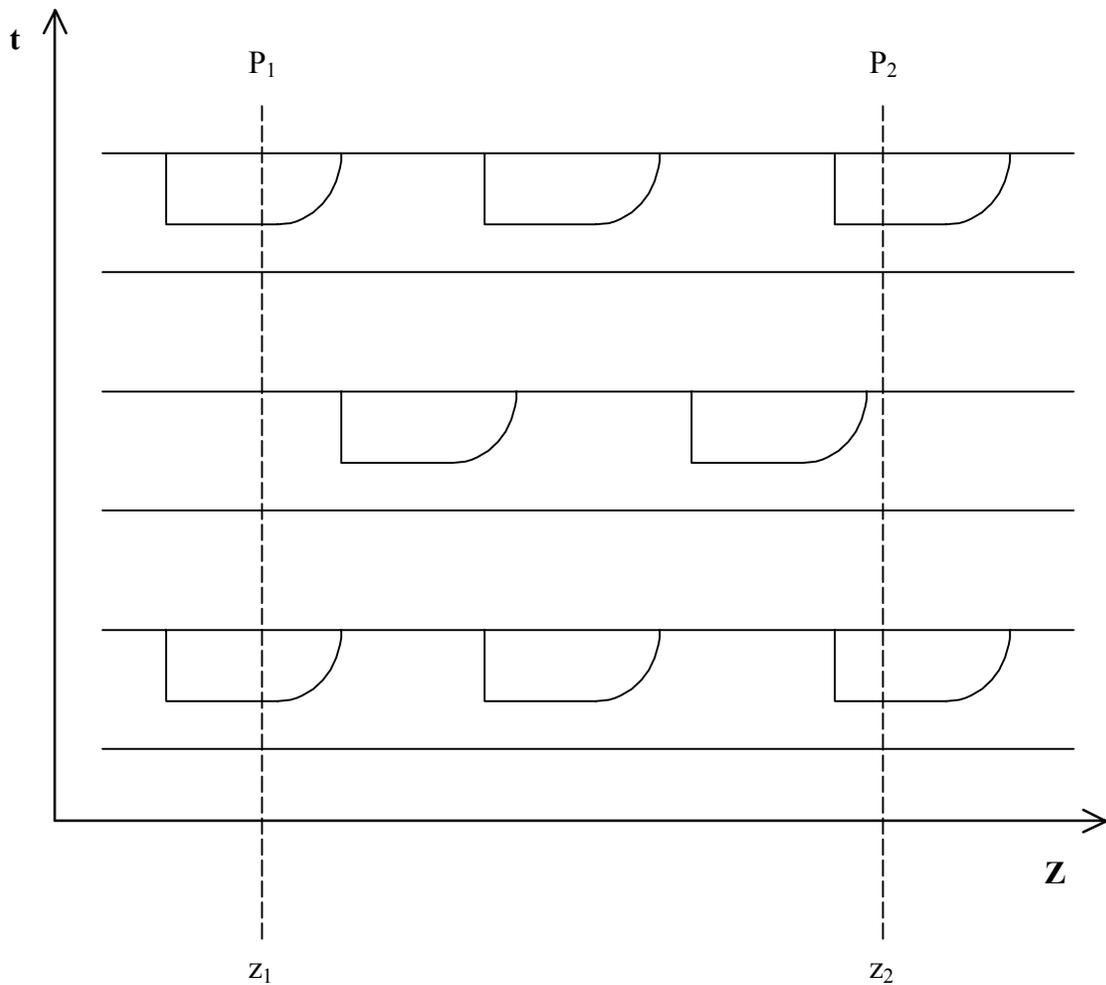


Figura II. 1. Pressões das bolhas ao longo do duto.

O comprimento total da bolha pode ser determinado através da conservação da massa de gás seguindo uma bolha. Como o pistão de líquido é não aerado, a massa de gás na bolha é constante. Isto permite estabelecer uma relação entre L_B , P_G e R_G .

$$m_G = \rho_G \overline{R_G} Vol_G = \frac{P_G}{RT} \overline{R_G} A_T L_B = CTE ,$$

(II. 2)

onde R é a constante universal dos gases, T é a temperatura e A_T é a área da seção transversal. No modelo a fração de vazios e a temperatura do gás na bolha são constantes, portanto o produto da pressão pelo comprimento da bolha é constante:

$$P_G L_B = CTE = P_{G(z)} L_{B(z)} = P_{G(0)} L_{B(0)} ,$$

(II. 3)

ou, em termos do comprimento da bolha:

$$L_{B(z)} = \frac{L_{B(0)} P_{G(0)}}{P_{G(z)}} .$$

(II. 4)

A equação (II. 4) mostra que a bolha se expande da entrada ($z = 0$) à saída ($z = L$). A velocidade superficial do gás em uma célula pistão-bolha é determinada utilizando a aproximação do modelo de célula unitária:

$$j_G = V_B R_G \beta ,$$

(II. 5)

onde β é o fator de intermitência definido por $\beta = L_B / (L_S + L_B)$. j_G definido na equação (II. 5) representa uma média espacial da velocidade do gás na célula unitária. Entretanto, como todo gás viaja com a bolha, pode-se dizer que a vazão mássica de gás seguindo-se uma bolha ou aquela da média espacial são coincidentes, isto é:

$$\dot{m}_G = j_G A \frac{P_G}{RT} = CTE . \quad (\text{II. 6})$$

Em termos de j_G :

$$j_{G(z)} = \frac{j_{G(z=L)} P_{G(z=L)}}{P_{G(z)}} . \quad (\text{II. 7})$$

Como as bolhas e pistões são gerados periodicamente, pode-se dizer que a média da vazão mássica de líquido entre a geração de uma célula pistão-bolha e outra é a mesma. Além disto, como o líquido é incompressível, a vazão média de líquido em cada célula é constante. Em vista disto, pode-se dizer que sua velocidade superficial, j_L , também é. Neste caso, a velocidade de mistura pode ser calculada como:

$$U_{(z)} = j_L + j_{G(z)} . \quad (\text{II. 8})$$

Os comprimentos dos pistões ao longo do duto podem ser obtidos à partir de um balanço de massa de gás na seção transversal desejada. Da equação (3. 53):

$$L_{S(z)} = \left[\frac{V_{B(z)} \overline{R}_G}{j_{G(z)}} - 1 \right] L_{B(z)} . \quad (\text{II. 9})$$

Ou então, conforme descrito na seção 3.5.2, podem ser obtidos a partir das frequências das células na seção desejada (equação (3. 55)):

$$L_{S(z)} = \frac{V_{B(z)} \overline{R}_G - j_{G(z)}}{\overline{R}_G f_{u(z)}} \quad (\text{II. 10})$$

Ainda, para se obter os comprimentos de bolha (equação (II. 4)), é necessário conhecermos os comprimentos de bolha na seção de entrada. Isto pode ser feito de duas formas, conforme descrito na seção 3.5.2. Se conhecermos os comprimentos de pistão na entrada, podemos utilizar a equação (3. 53):

$$L_{B(z=0)} = \frac{L_{S(z=0)}}{\left[\frac{V_{B(z=0)} \overline{R}_G}{j_{G(z=0)}} - 1 \right]} \quad (\text{II. 11})$$

Se conhecermos as frequências das células na seção de entrada, podemos utilizar a equação (3. 54):

$$L_{B(z=0)} = \frac{j_{G(z=0)}}{R_G f_{u(z=0)}} \quad (\text{II. 12})$$

Ainda, da hipótese (e), a velocidade V_B da frente de uma bolha nas equações (II. 9), (II. 10) e (II. 11) é calculada como:

$$V_{B(z)} = (V_{B(z)})_{\infty} = C_0 U_{(z)} + V_0 \quad (\text{II. 13})$$

II.2 – Ordem da Solução e Condições de Contorno

Para uma obtenção bem sucedida da solução analítica, a ordem de cálculo deve ser:

- 1) Determinação da pressão sofrida pelas bolhas, qualquer que seja a posição em que elas se encontrem (equação (II. 1)). Este é um dado de entrada do modelo analítico e deve ser conhecido previamente.
- 2) Determinação da velocidade superficial do gás ao longo de toda a tubulação (equação (II. 7)).

- 3) Determinação da velocidade de mistura ao longo de toda a tubulação (equação (II. 8)).
- 4) Determinação da velocidade das frentes de bolha ao longo de toda a tubulação (equação (II. 13)).
- 5) Determinação do comprimento das bolhas na seção de entrada (equação (II. 11) ou equação (II. 12)).
- 6) Determinação dos comprimentos de bolhas ao longo de toda a tubulação (equação (II. 4)).
- 7) Determinação dos comprimentos de pistão ao longo de toda a tubulação (equação (II. 9) ou equação (II. 10)).
- 8) Determinação dos demais parâmetros desejados (períodos, frequências, fator de intermitência, etc.) utilizando modelo de Célula Unitária.

Desta ordem de cálculo, percebe-se que alguns valores devem ser necessariamente conhecidos. Alguns são valores nas fronteiras da tubulação (condições de contorno), outros são parâmetros necessários para os cálculos.

As condições de contorno são:

- CC1) Pressão de saída (descarga), utilizada na equação (II. 1);
- CC2) Velocidade superficial do gás nas condições atmosféricas, utilizada na equação (II. 7);
- CC3) Velocidade superficial do líquido na entrada (que é constante ao longo da tubulação), utilizado na equação (II. 8);
- CC4) Comprimento dos pistões na seção de entrada (utilizado na equação (II. 11)), ou então a frequência das células na seção de entrada, pois da equação (II. 10) pode-se obter os comprimentos de pistão na seção de entrada.

Os parâmetros que devem ser conhecidos são:

- PR1) O gradiente linear de pressão, utilizado na equação (II. 1);
- PR2) Os fatores cinemáticos do deslocamento da bolha (C_0 e V_0), utilizados na equação (II. 13);
- PR3) A fração de vazio, R_G , (aqui considerada constante no tempo e no espaço), utilizada nas equações (II. 9) a (II. 12).

II.3 – Resultados com Valores Numéricos

Aqui é apresentada a solução analítica utilizada na seção 4.3. Esta configuração tem linha e vazões de gás e líquido coincidentes com simulações realizadas no MULTLAB / FEM – UNICAMP e cujos dados estão disponíveis no MULTLAB (Rosa (2003)). Para esta solução, foi admitido conhecido o valor dos comprimentos de pistões na seção de entrada.

Para a comparação em questão, a configuração escolhida é como apresenta na tabela II. 1:

Diâmetro interno da linha (mm)	26
Comprimento total da linha (mm)	20098
Velocidade superficial do líquido na entrada (m/s)	0.5
Velocidade superficial do gás na seção de saída (m/s)	0.5
Pressão na seção de saída do duto (Pa)	94700
Gradiente linear de pressão (Pa/m)*	110
Comprimento dos pistões na seção de entrada do duto (m)	0.213
Fração de vazio das bolhas (adimensional)	0.54
C_0 (adimensional)	1.2
V_0 (adimensional)	0
C_A (adimensional)	0

Tabela II. 1. Valores numéricos a serem utilizados na solução analítica.

O gradiente de pressão linear utilizado na equação (II. 1) é obtido por meio de simulação numérica. A simulação numérica é realizada utilizando-se condições idênticas àquelas da solução analítica de forma a se obter a distribuição de pressão ao longo do duto. Esta distribuição de pressão é um dado de entrada do modelo analítico, que neste caso é:

$$P_{G(z)} = 94700 + 110(100 - z),$$

onde P_G é dado em Pa e z em metros.

A média de velocidade superficial do gás é determinada por meio da equação (II. 7):

$$j_{G(L)} = \frac{P_{(0)}j_{G(0)}}{P_{(L)}} \Rightarrow 1 = \frac{[94700 + 11000]j_{G(0)}}{94700} \Rightarrow j_{G(0)} = 0.49$$

$$j_{G(z)} = \frac{94700}{P_{G(z)}} j_{G(0)}.$$

A velocidade de líquido no pistão é igual à velocidade de mistura e é determinada por meio da equação (II. 8).

$$U_{(z)} = 1 + j_{G(z)}$$

O comprimento da bolha na entrada, $L_{B(0)}$, é determinado a partir da equação (II. 11), pois $L_{S(0)}$ é dado conhecido:

$$L_{S(0)} = \left[\frac{1.2U_{(0)}0.54}{j_{G(0)}} - 1 \right] L_{B(0)} \Rightarrow 0.213 = \left[\frac{1.2U_{(0)}0.54}{j_{G(0)}} - 1 \right] L_{B(0)} \Rightarrow L_{B(0)} \cong 0.685,$$

e, conhecido $L_{B(0)}$, o comprimento da bolha em qualquer posição pode ser calculado à partir da equação (II. 4):

$$L_{B(z)} = \frac{96911L_{B(0)}}{P_{(z)}}$$

O comprimento do pistão pode ser calculado à partir da equação (II. 9):

$$L_{S(z)} = \left[\frac{C_0 U_{(z)} \overline{R_G}}{j_{G(z)}} - 1 \right] L_{B(z)} = \left[\frac{1.2U_{(z)}0.54}{j_{G(z)}} - 1 \right] L_{B(z)}$$

II.4 – Comentários Sobre o Modelo Analítico

- O modelo analítico propaga uma única célula pistão-bolha e não permite a interação entre elas. Assim, ele faz um seguimento lagrangeano de uma célula da entrada até a saída.
- Ele não considera os efeitos viscosos ou inerciais dos termos da equação de transporte da quantidade de movimento. O resultado líquido destes termos é transmitido por meio do perfil de pressão.
- Não há efeitos de entrada ou de saída de bolhas no modelo analítico.
- Se a introdução de bolhas e pistões for periódica, então pode-se dizer que o resultado de uma única bolha repete o que acontece com uma seqüência de bolhas tanto no espaço quanto no tempo.

Anexo III

Caso Teste Utilizando-se Valores Propostos por Grenier

Resolve-se aqui o caso teste (modelo analítico) utilizando-se as mesmas condições utilizadas por Grenier (1997). Para um escoamento ar-água:

$$j_L = 1m / s$$

$$j_{Gatm} = 1m / s$$

$$P_{saida} = 106000Pa$$

$$\overline{R_G} = 0.7$$

$$L_S(0) = 1m$$

$$L = 100m$$

$$\lambda = 265$$

$$D = 0.059$$

OBS: O valor de λ foi obtido da solução numérica. Notar também que aqui a variável z foi chamada de x . Em ambos os casos, $C_0 = 1.2$, $V_0 = 0$ e $C_E = 0$.

III.1 – Solução analítica

Seguindo a mesma formulação desenvolvida no Anexo II:

- Pressão

$$P_{G(x)} = 106000 + 265(100 - x).$$

- j_G

$$j_{G(L)} = \frac{P_{(0)}j_{G(0)}}{P_{(L)}} \Rightarrow 1 = \frac{[106000 + 26500]j_{G(0)}}{106000} = \frac{132500j_{G(0)}}{106000} \Rightarrow j_{G(0)} = 0.8,$$

$$j_{G(x)} = \frac{106000}{P_{G(x)}} j_{G(0)}.$$

- U

$$U_{(x)} = 1 + j_{G(x)}.$$

- L_B

Quando entra uma bolha:

$$L_S = \left[\frac{V_B \overline{R_G}}{j_G} - 1 \right] L_B = \left[\frac{C_0 U_j \overline{R_G}}{j_G} - 1 \right] L_B,$$

$$L_{S(0)} = \left[\frac{1.2U_{(0)}0.7}{j_{G(0)}} - 1 \right] L_{B(0-L_B)},$$

mas, aproximando o comprimento da bolha em x=0-L_B pelo seu comprimento em x=0:

$$L_{S(0)} = \left[\frac{1.2U_{(0)}0.7}{j_{G(0)}} - 1 \right] L_{B(0)} \Rightarrow 1 = \left[\frac{1.2U_{(0)}0.7}{j_{G(0)}} - 1 \right] L_{B(0)} \Rightarrow L_{B(0)} \cong 1.12 .$$

$$L_{B(x)} = \frac{132500L_{B(0)}}{P_{(x)}}.$$

-L_S

$$L_{S(x)} = \left[\frac{C_0 U_{(x)} \overline{R_G}}{j_{G(x)}} - 1 \right] L_{B(x)} = \left[\frac{1.2 U_{(x)} 0.7}{j_{G(x)}} - 1 \right] L_{B(x)},$$

$$L_{S(x)} = \left[\frac{0.84 U_{(x)}}{j_{G(x)}} - 1 \right] L_{B(x)}.$$

A tabela III 1 abaixo apresenta a solução analítica em forma de tabela.

x [m]	P(x) [Pa]	P(x) [bar]	j _G (x) [m/s]	U(x) [m/s]	LB(x) [m]	LS(x) [m]	LB(x)/D	LS(x)/D
0	132500	1.33	0.80	1.80	1.12	1.00	19.08	16.98
12.5	129188	1.29	0.82	1.82	1.15	1.00	19.57	16.90
25	125875	1.26	0.84	1.84	1.18	0.99	20.08	16.82
37.5	122563	1.23	0.86	1.86	1.21	0.99	20.62	16.73
50	119250	1.19	0.89	1.89	1.25	0.98	21.20	16.64
62.5	115938	1.16	0.91	1.91	1.28	0.97	21.80	16.54
75	112625	1.13	0.94	1.94	1.32	0.97	22.44	16.44
87.5	109313	1.09	0.97	1.97	1.36	0.96	23.12	16.33
100	106000	1.06	1.00	2.00	1.40	0.96	23.85	16.21

Tabela III. 1. Solução analítica tabelada.

III.2 – Resolução numérica do Problema

A solução numérica foi obtida em duas etapas. Inicialmente foi obtida uma solução numérica considerando apenas uma bolha escoando no duto. Em seguida outra solução foi feita considerando-se um trem de bolhas presente no duto. Ambas as soluções numéricas foram comparadas com a solução analítica.

O esquema numérico utilizado para o caso em que apenas uma bolha está presente no duto é um pouco diferente do apresentado no capítulo 4 e encontra-se descrito à seguir. A distinção entre os esquemas consiste nas diferenças de velocidades de líquido entre 2 pistões consecutivos e nas diferenças de pressões entre duas bolhas consecutivas. Foi verificado que o esquema

apresentado no capítulo 4 apresenta uma precisão um pouco melhor. O esquema apresentado abaixo foi utilizado para o caso de uma bolha pois estes cálculos foram realizados em uma fase inicial de desenvolvimento do modelo numérico.

Partindo-se do sistema de equações original, equações (3. 53) e (3. 47), a discretização foi feita como abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j^N - U_{j-1}^N + \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O} (P_{Gj}^N - P_{Gj}^O)}{P_{Gj}^O \Delta t} = 0 \\ P_{Gj+1}^N - P_{Gj}^N + \rho_L L_{Sj}^O \frac{(U_j^N - U_j^O)}{\Delta t} + L_{Sj}^O fat_j^O \rho_L U_j^O U_j^N = 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j^N - U_{j-1}^N + \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O} P_{Gj}^N}{P_{Gj}^O \Delta t} = \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O} P_{Gj}^O}{P_{Gj}^O \Delta t} \\ P_{Gj+1}^N - P_{Gj}^N + \rho_L L_{Sj}^O \frac{U_j^N}{\Delta t} + L_{Sj}^O fat_j^O \rho_L U_j^O U_j^N = \rho_L L_{Sj}^O \frac{U_j^O}{\Delta t} \end{array} \right. .$$

Fazendo $H = \frac{P_G}{\rho_L}$ de forma que o sistema seja melhor condicionado:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j^N - U_{j-1}^N + \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O} H_j^N}{H_j^O \Delta t} = \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O}}{\Delta t} \\ H_{j+1}^N - H_j^N + L_{Sj}^O \frac{U_j^N}{\Delta t} + L_{Sj}^O fat_j^O U_j^O U_j^N = L_{Sj}^O \frac{U_j^O}{\Delta t} \end{array} \right. ,$$

e assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_{j-1}^N + \frac{L_{Bj}^O \overline{R_{Gj}^O}}{H_j^O \Delta t} H_j^N + U_j^N = \frac{\overline{R_{Gj}^O} L_{Bj}^O}{\Delta t} \\ -H_j^N + \left(L_{Sj}^O fat_j^O U_j^O + \frac{L_{Sj}^O}{\Delta t} \right) U_j^N + H_{j+1}^N = \frac{L_{Sj}^O U_j^O}{\Delta t} \end{array} \right. .$$

Este sistema pode ser reescrito da forma matricial:

$$A^O X^N = B^O \Rightarrow A^t X^{t+\Delta t} = B^t,$$

onde:

$$A^O = \begin{bmatrix} \frac{L_{B1}^O \overline{R_{G1}}^O}{H_1^O \Delta t} & +1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & L_{S1}^O fat_1^O U_1^O + \frac{L_{S1}^O}{\Delta t} & +1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \frac{L_{B2}^O \overline{R_{G2}}^O}{H_2^O \Delta t} & +1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \frac{L_{Bk}^O \overline{R_{Gk}}^O}{H_k^O \Delta t} & +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_{Sk}^O fat_k^O U_k^O + \frac{L_{Sk}^O}{\Delta t} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^N = \begin{bmatrix} H_1^N \\ U_1^N \\ H_2^N \\ U_2^N \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ H_{k-1}^N \\ U_{k-1}^N \\ H_k^N \\ U_k^N \end{bmatrix}$$

$$B^o = \begin{bmatrix} \frac{\overline{R_{G1}^o} L_{B1}^o}{\Delta t} + U_0^N \\ \frac{L_{S1}^o U_1^o}{\Delta t} \\ \frac{\overline{R_{G2}^o} L_{B2}^o}{\Delta t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{L_{Sk-1}^o U_{k-1}^o}{\Delta t} \\ \frac{\overline{R_{Gk}^o} L_{Bk}^o}{\Delta t} \\ \frac{L_{Sk}^o U_k^o}{\Delta t} + \frac{Pa}{\rho_L} \end{bmatrix}$$

III.2.1 – Aplicação para apenas uma bolha no duto

III.2.1.1 – Formulação

A figura III 1 ilustra um caso hipotético no qual apenas uma bolha está presente no duto.

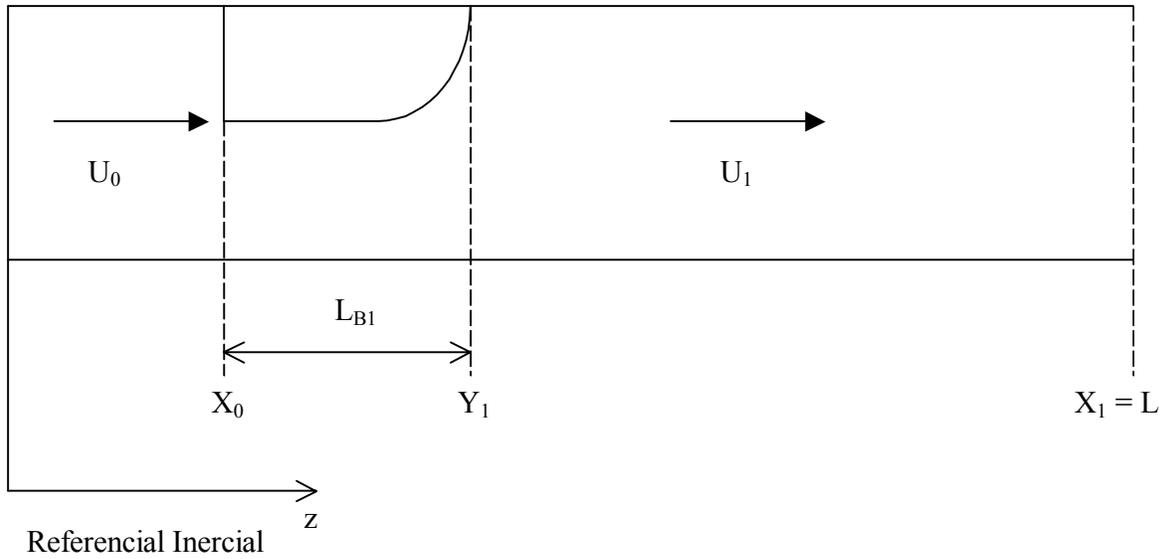


Figura III. 1. Apenas uma bolha presente no escoamento.

No caso em que consideramos apenas uma bolha no duto, o sistema se reduz para $j=1$:

$$\begin{cases} -U_0^N + \frac{L_{B1}^O \overline{R_{G1}}}{H_1^O \Delta t} H_1^N + U_1^N = \frac{\overline{R_{G1}} L_{B1}^O}{\Delta t} \\ -H_1^N + \left(L_{S1}^O fat_1^O U_1^O + \frac{L_{S1}^O}{\Delta t} \right) U_1^N + H_2^N = \frac{L_{S1}^O U_1^O}{\Delta t} \end{cases}$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{B1}^O \overline{R_{G1}}}{H_1^O \Delta t} & +1 \\ -1 & L_{S1}^O fat_1^O U_1^O + \frac{L_{S1}^O}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^N \\ U_1^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{R_{G1}} L_{B1}^O}{\Delta t} + U_0^N \\ \frac{L_{S1}^O U_1^O}{\Delta t} - \frac{Pa}{\rho_L} \end{bmatrix},$$

que é o sistema do tipo $A^t X^{t+\Delta t} = B^t$.

Junto com este produto de matrizes, deve-se calcular em cada incremento de tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^N = y_1^O + C_0 U_1^N \Delta t [1 + h(x_0^O - y_1^O)] \\ x_1^N = y_2^N - \frac{P_{G2}^O}{P_{G2}^N} (y_2^O - x_j^O) \\ x_0^N = y_1^N - \frac{P_{G1}^O}{P_{G1}^N} (y_1^O - x_0^O) \\ L_{S1} = x_1^N - y_1^N \\ L_{B1}^N = y_1^N - x_0^N \\ fat_1^N = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^N D}{v} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{D} \end{array} \right.$$

Mas, neste caso, sabe-se que:

$h = 0$ (não há efeitos de esteira);

P_{G2} é constante;

ρ_L é constante;

$X_1 = \text{constante} = L = 100$;

$X_0^O = 0 - L_{B1}^O$;

Tem-se então:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^N = y_1^O + C_0 U_1^N \Delta t \\ x_1^N = x_0^O = 100 \\ x_0^N = y_1^N - \frac{P_{G1}^O}{P_{G1}^N} (y_1^O - x_0^O) \\ L_{S1} = x_1^N - y_1^N \\ L_{B1}^N = y_1^N - x_0^N \\ fat_1^N = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^N D}{v} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{D} \end{array} \right.$$

Como no caso do trem de bolhas (capítulo 3), para solução numérica deste sistema é necessário conhecer as pressões P_1 e P_2 e a velocidade U_1 em $t=t_0$, a pressão P_2 (na saída) e a velocidade U_0 (na entrada). Ainda como explicado nos capítulos 3 e 4, consideraremos que em $t=t_0$ o nariz de uma bolha estará entrando no duto, isto é, estará na abscissa $x=0$.

III.2.1.1.2 – Resolução Numérica

Utilizando as mesmas condições da solução analítica:

$$j_L = 1m/s$$

$$j_{Gatm} = 1m/s$$

$$P_{saída} = 106000Pa$$

$$\overline{R_G} = 0.7$$

$$L_S(0) = 1m$$

$$L = 100m$$

$$\lambda = 265$$

Como estamos lidando com apenas uma bolha no duto, podemos interpretar os dados de 2 formas diferentes:

III.2.1.1.2.1 – Caso em que $j_G(0)$ é diferente de 0

Neste caso hipotético, apenas uma bolha entra no duto apesar de ter-se uma vazão constante de ar na entrada. Logo:

$$L = 100$$

$$D = 0.0589$$

$$L_{S1}^0 = 100$$

$$L_{B1}^0 = 1.12$$

$$P_{G1}^0 = 132500$$

$$\rho_{L1}^0 = \rho_{L1} = \rho_L = 955$$

$$\overline{R_G} = 0.7$$

$$U_0^0 \cong U_1^1 = j_L + j_G(0) = 1.8$$

$$U_1^0 \cong U_1^1 = 1.90$$

$$fat_1^0 = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^0 D}{\nu} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{D} = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^0 0.0589}{8.97E-7} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{0.0589}$$

$$P_{G2}^0 = P_{G2} = 106000 \Rightarrow H_2^0 = H_2 = \frac{106000}{\rho_L}$$

$$x_1^0 = x_1 = 100$$

$$y_1^0 = 0$$

$$x_0^0 = 0 - L_{B1}^0 = -1.12$$

$$V_1^0 = \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^0 = 1.2U_1^0 = 2.28$$

Observando sempre que:

$$x_1^N = x_1^0$$

Resolvendo o sistema abaixo com $\Delta t = 0.01$ segundos (programa UmaBolhab.m):

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{B1}^0 \overline{R_{G1}}}{H_1^0 \Delta t} & & & + 1 \\ & & & \\ -1 & L_{S1}^0 fat_1^0 U_1^0 + \frac{L_{S1}^0}{\Delta t} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^N \\ U_1^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{R_{G1}} L_{B1}^0}{\Delta t} + U_0^N \\ \frac{L_{S1}^0 U_1^0}{\Delta t} - \frac{Pa}{\rho_L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1^N = y_1^O + C_0 U_1^N \Delta t \\ x_1^N = x_0^O = 100 \\ x_0^N = y_1^N - \frac{P_{G1}^O}{P_{G1}^N} (y_1^O - x_0^O) \\ L_{S1} = x_1^N - y_1^N \\ L_{B1}^N = y_1^N - x_0^N \\ fat_1^N = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^N D}{\nu} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{D} \end{cases}$$

Obtém-se o resultado ilustrado na figura III 2.

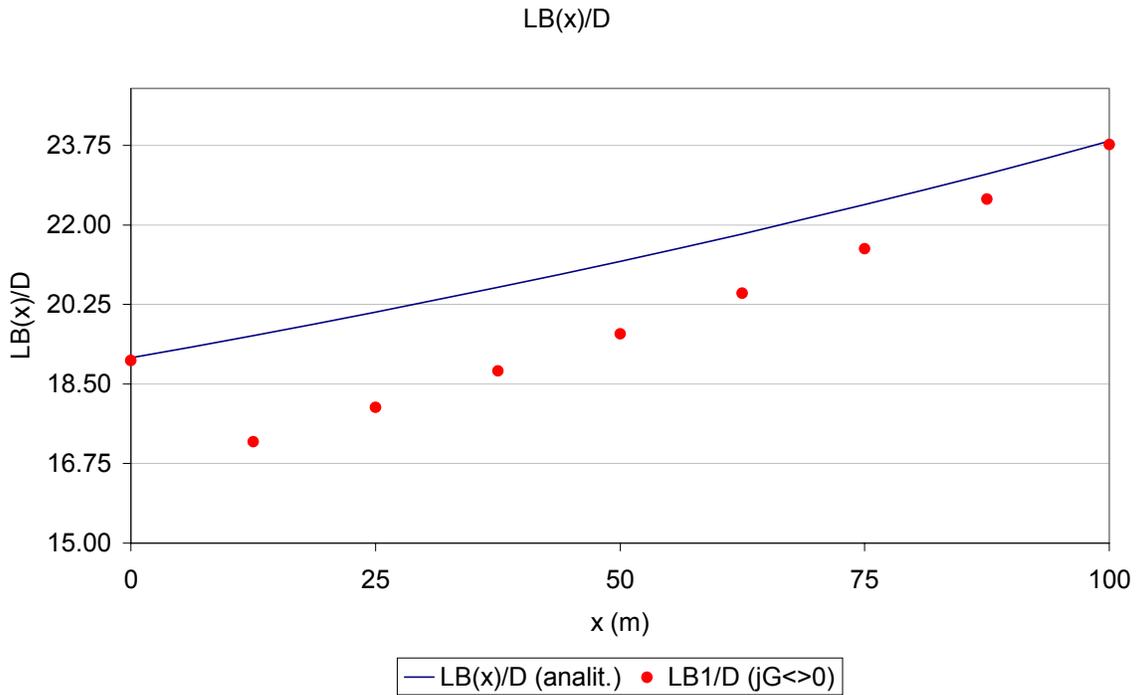


Figura III. 2. Solução numérica para apenas uma bolha presente no escoamento e $j_{G(0)} \neq 0$.

$$\begin{cases} y_1^N = y_1^O + C_0 U_1^N \Delta t \\ x_1^N = x_0^O = 100 \\ x_0^N = y_1^N - \frac{P_{G1}^O}{P_{G1}^N} (y_1^O - x_0^O) \\ L_{S1} = x_1^N - y_1^N \\ L_{B1}^N = y_1^N - x_0^N \\ fat_1^N = 0.079 \left[\left(\frac{U_1^N D}{\nu} \right)^{-0.25} \right] \frac{2}{D} \end{cases}$$

Obtém-se o resultado apresentado na figura III 3.

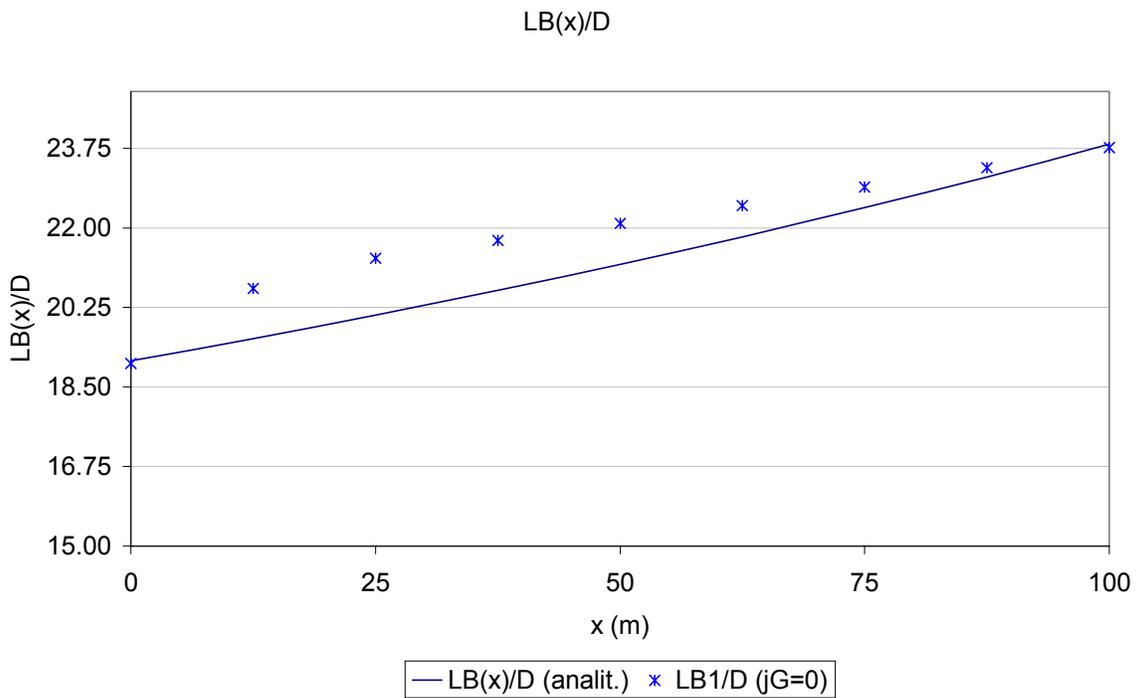


Figura III. 3. Solução numérica para apenas uma bolha presente no escoamento e $j_{G(0)} = 0$.

A figura III 4 compara as soluções para os dois casos de $j_{G(0)}$ com a solução analítica.

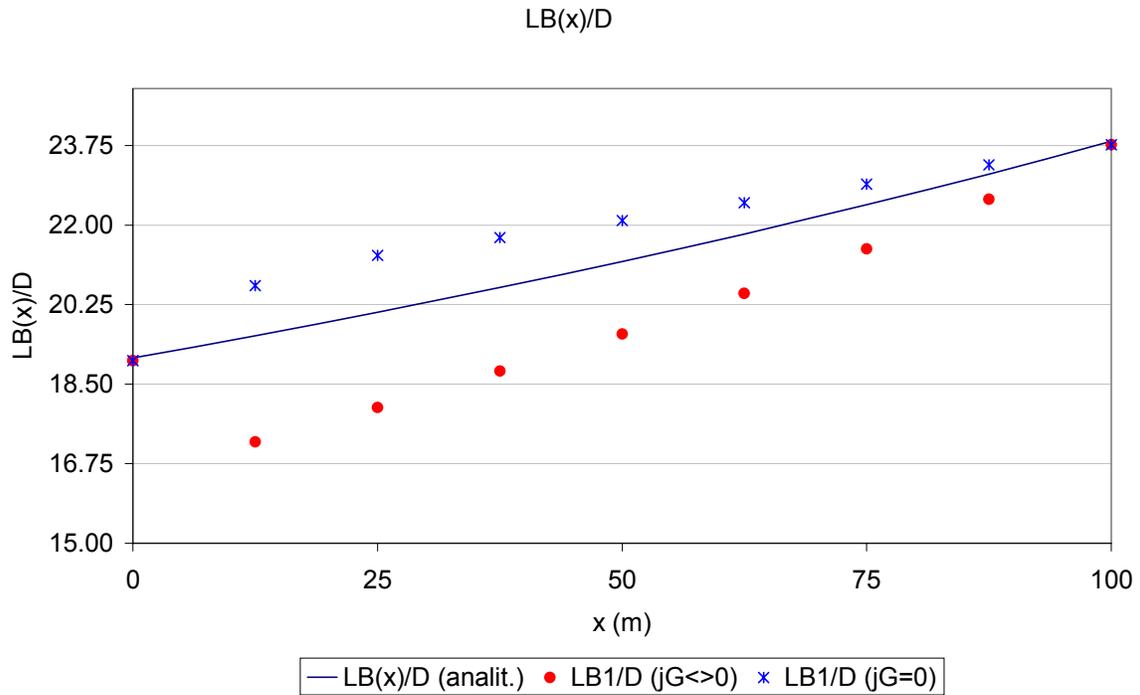


Figura III. 4. Comparação das soluções numéricas com a solução analítica no caso em que apenas uma bolha escoa no duto.

III.2.2 – Aplicação para um trem de bolhas no duto

Para um trem de bolhas, utiliza-se a formulação descrita na seção 4.2. O resultado, utilizando-se o programa periodF2.xls (macro no Excel escrita em Visual Basic) com $\Delta t = 0.001s$ e probes do tipo fixa (ver capítulo 4) é mostrado nas figuras abaixo:

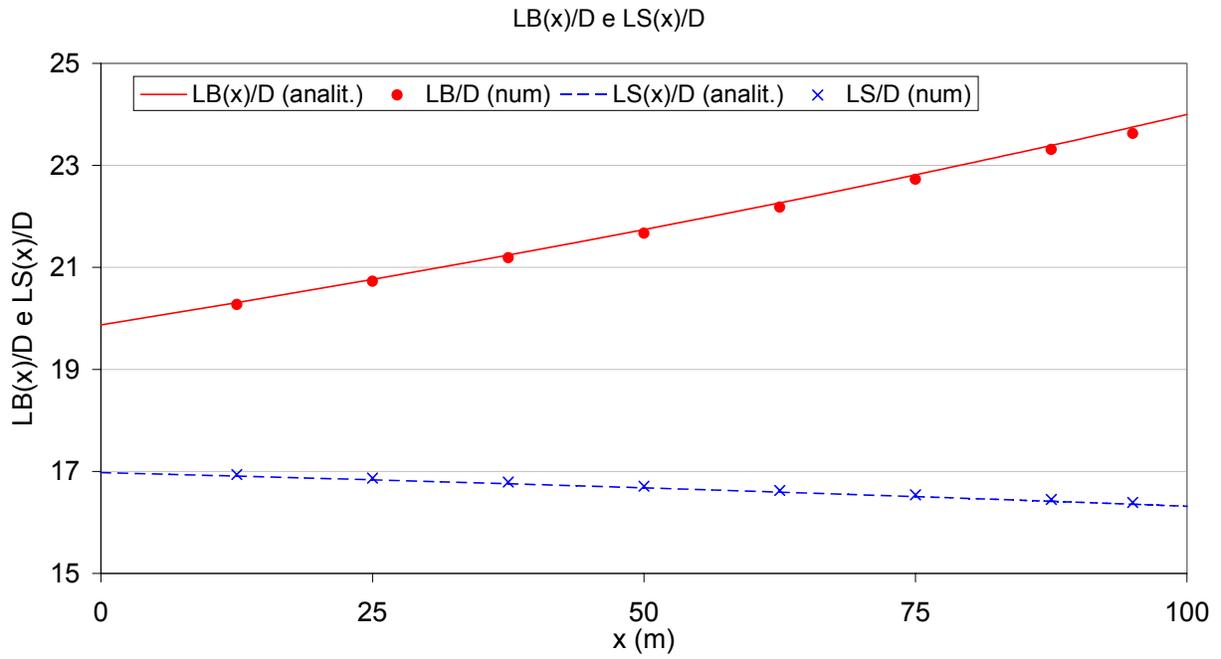


Figura III. 5. Comparação das soluções analítica e numérica para comprimentos de bolhas e de pistões.

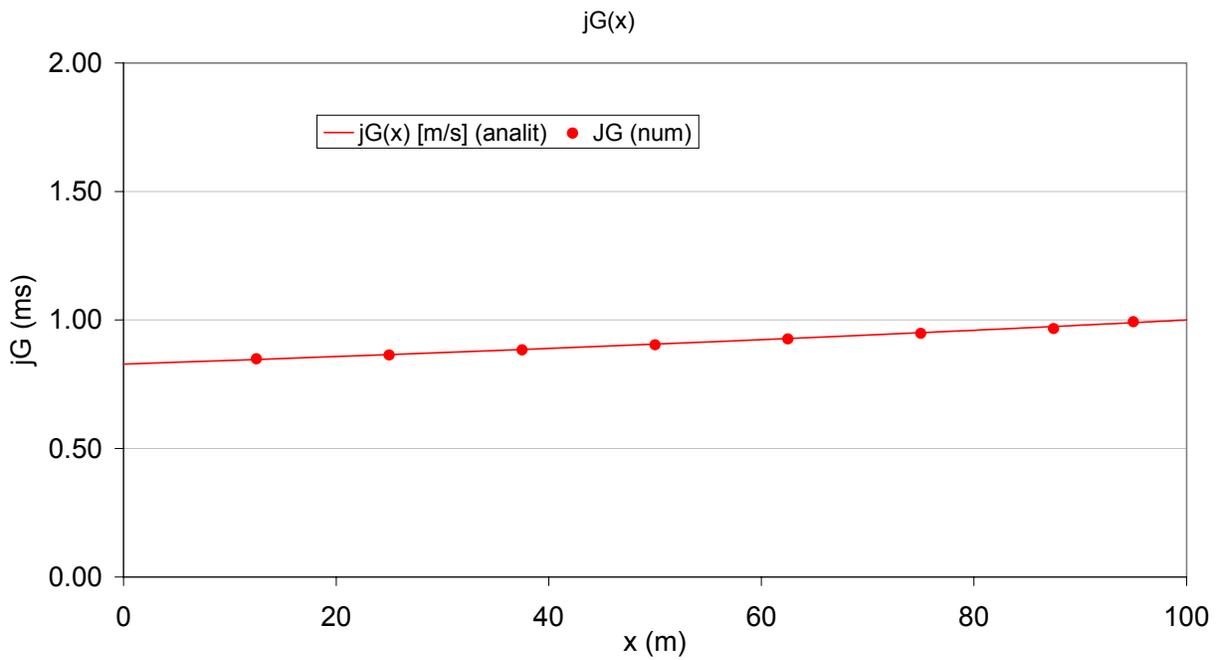


Figura III. 6. Comparação das soluções analítica e numérica para velocidade superficial do gás.

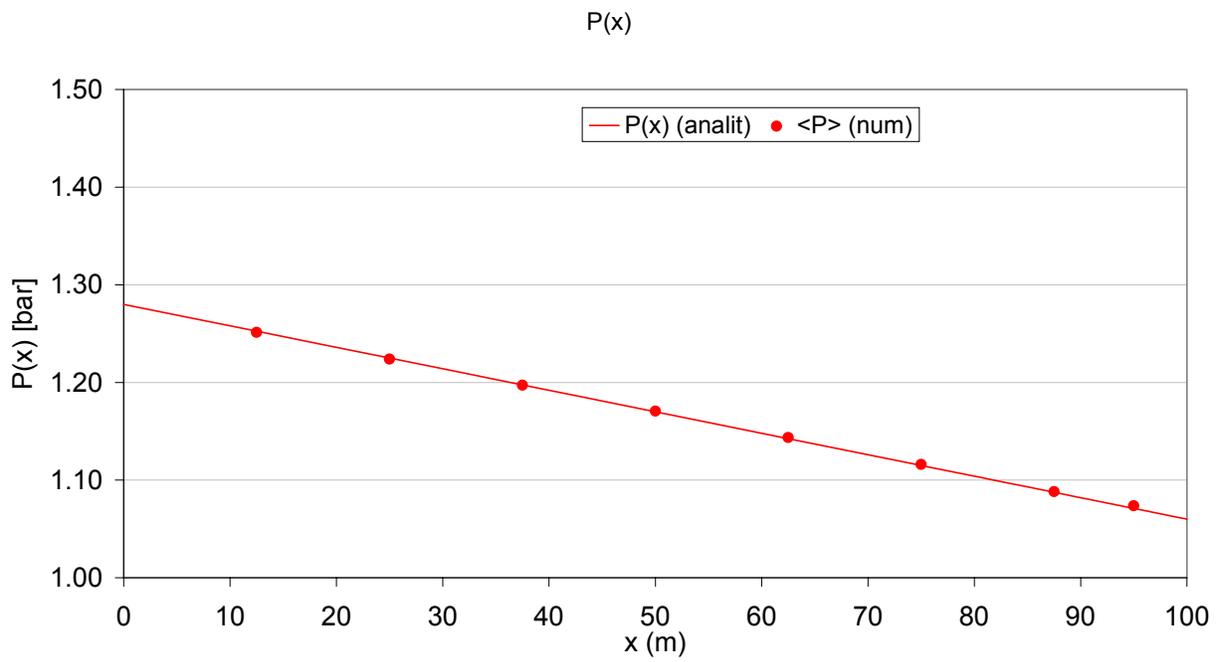


Figura III. 7. Comparação das soluções analítica e numérica para pressão nas bolhas.

Observa-se um excelente acordo entre a solução analítica e a solução numérica.

Anexo IV

Termo de Expansão do Líquido que Flui do Filme para o Pistão

Na seção 3.6.4 é modelado um termo cujo significado físico foi relacionado ao aumento de pressão devido à desaceleração do líquido fluindo do filme líquido para o pistão que o segue. Este anexo tem por objetivo justificar o significado físico deste termo.

Para tanto, balanços integrais de massa e de quantidade de movimento para a fase líquida serão aplicados a um volume de controle que se move com a velocidade de uma bolha. As equações de transporte serão escritas com base em um referencial não inercial que também se move com a velocidade de uma bolha. Assim, as seguintes hipóteses são adotadas:

- a) o volume de controle é não deformável e se move com V_{Bj+1} ;
- b) o sistema de referência se move com V_{Bj+1} ;
- c) o modelo de Célula Unitária é adotado;

A figura IV. 1 abaixo apresenta o volume de controle (linhas tracejadas) e o referencial adotados.

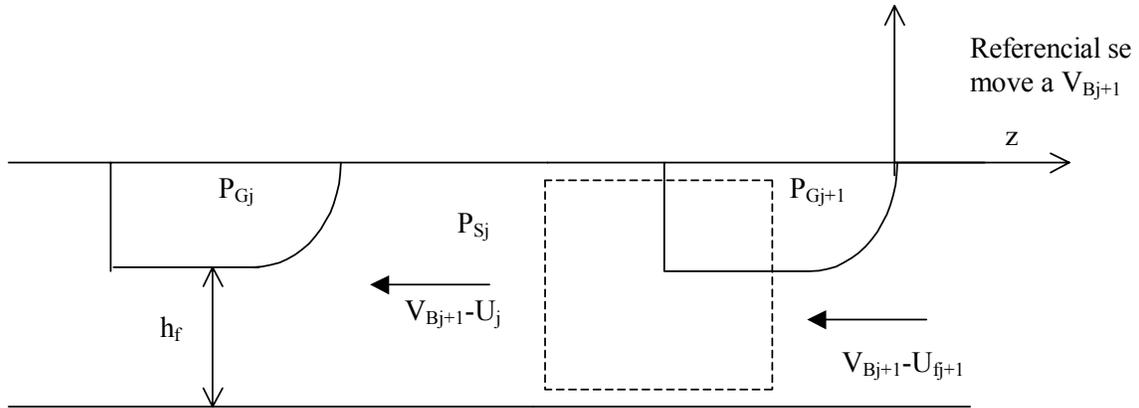


Figura IV. 1. Volume de controle e referencial

IV.1 – Transporte de Massa

Aplicando-se a equação integral do transporte de massa ao volume de controle adotado e considerando as hipóteses mencionadas, obtém-se:

$$(V_{Bj+1} - U_j)A_T - (V_{Bj+1} - U_{fj+1})A_T(1 - \overline{R_G}) = 0; \quad (\text{IV. 1})$$

$$U_{fj+1} = V_{Bj+1} - \frac{(V_{Bj+1} - U_j)}{(1 - \overline{R_G})} \quad \text{H} \quad \frac{U_{fj+1}}{U_j} = \frac{1 - \frac{V_{Bj+1}}{U_j} \overline{R_G}}{(1 - \overline{R_G})}. \quad (\text{IV. 2})$$

Das hipóteses adotadas, tem-se que:

$$V_{Bj} = (V_{Bj})_{\infty} = C_0 U_j + V_0, \quad (\text{IV. 3})$$

onde $V_0 = C_1 \sqrt{gD}$ e $V_{Bj+1} = V_{Bj}$ (hipótese (c)). Tem-se então:

$$\frac{V_{Bj}}{U_j} = C_0 + \frac{V_0}{U_j} = C_0 + \frac{C_1}{Fr_j}.$$

(IV. 4)

A equação (IV. 2) se reduz a:

$$\frac{U_{fj+1}}{U_j} = \frac{1 - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} \right) \overline{R_G}}{(1 - \overline{R_G})}.$$

(IV. 5)

IV.2 – Transporte de Quantidade de Movimento

Aplicando-se a equação integral do transporte de quantidade de movimento ao volume de controle adotado e considerando as hipóteses mencionadas, obtém-se:

$$A_T (P_{Gj+1} - P_{Sj}) + \rho_L g \left(\frac{h_f}{2} R_f - \frac{D}{2} \right) = (V_{Bj+1} - U_j)^2 \rho_L A_T - (V_{Bj+1} - U_{fj+1})^2 \rho_L A_T (1 - \overline{R_G}),$$

(IV. 6)

ou,

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = (V_{Bj+1} - U_{fj+1})^2 \rho_L (1 - \overline{R_G}) - (V_{Bj+1} - U_j)^2 \rho_L - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right).$$

(IV. 7)

Rearranjando os termos, a diferença de pressão é expressa por duas parcelas: uma devido à aceleração do líquido e outra devido à pressão hidrostática do filme:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \rho_L U_j^2 \left[\left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - \frac{U_{fj+1}}{U_j} \right)^2 (1 - \overline{R_G}) - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 \right] - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right). \quad (\text{IV. 8})$$

IV.3 – Identificação dos Termos

Substituindo (IV. 5) em (IV. 8), obtém-se:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \rho_L U_j^2 \left[\left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - \frac{1 - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} \right) \overline{R_G}}{(1 - \overline{R_G})} \right)^2 (1 - \overline{R_G}) - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 \right] + \rho_L U_j^2 \left[\left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - \frac{1 - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} \right) \overline{R_G}}{(1 - \overline{R_G})} \right)^2 - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 \right] - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right), \quad (\text{IV. 9})$$

ou,

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \rho_L U_j^2 \left[\frac{\left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2}{1 - \overline{R_G}} - \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 \right] - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right), \quad (\text{IV. 10})$$

e finalmente:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \rho_L \frac{\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} U_j^2 \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 - \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right). \quad (\text{IV. 11})$$

O líquido que flui do filme líquido para o pistão que o segue se expande. Das equações (IV. 6) e (IV. 11), percebe-se que esta expansão provoca uma variação de pressão devido à variação

de velocidades (desaceleração do líquido) e devido à variação de altura hidrostática entre as seções. Chamando-se o primeiro termo do segundo membro da equação (IV. 11) de variação de pressão devido à aceleração (ΔP_{Aj}) e o segundo termo de variação de pressão devido aos efeitos hidrostáticos (ΔP_{Hj}):

$$\Delta P_{Aj} = C_A \rho_L U_j^2 \frac{\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} \left(C_0 + \frac{V_0}{U_j} - 1 \right)^2 ;$$

(IV. 12)

$$\Delta P_{Hj} = \rho_L g \left(\frac{D}{2} - \frac{h_f}{2} R_f \right) ;$$

(IV. 13)

onde o coeficiente de ajuste C_A foi introduzido na equação (IV. 12) de forma a suportar os efeitos de expansão tri-dimensional do fluxo de líquido e a troca de quantidade de movimento não uniforme.

A diferença de pressão expressa pela contribuição dos dois termos pode então ser escrita como:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \Delta P_{Aj} - \Delta P_{Hj} .$$

(IV. 14)

Comparando as equações (IV. 11) e (IV. 14) com a equação (3. 31), percebemos que os dois últimos termos desta última correspondem a $-(P_{Sj} - P_{Gj+1})$, isto é, $-\Delta P_{Aj} + \Delta P_{Hj}$. Isto nos leva diretamente à equação (3. 32).

Nota-se que ΔP_{Aj} e ΔP_{Hj} são sempre positivos. Eles atuam então de forma oposta em relação ao comportamento das bolhas. Da equação (3. 33) fica claro que ΔP_{Aj} atua de forma a aumentar o gradiente total de pressão no duto, enquanto ΔP_{Hj} atua de forma a diminuir o gradiente total de pressão no duto.

Podemos rearrumar a equação (IV. 11) de forma a obter uma expressão em função do número de Froude:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \frac{1}{2} \rho_L U_j^2 \left[\frac{2\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} \left(C_0 + \frac{C_1 \sqrt{gD}}{U_j} - 1 \right)^2 - \frac{2gD}{U_j^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{h_f}{2D} R_f \right) \right], \quad (\text{IV. 15})$$

ou,

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \frac{1}{2} \rho_L U_j^2 \left[\frac{2\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{Fr_j} \right)^2 \left(1 - \frac{h_f}{D} R_f \right) \right]. \quad (\text{IV. 16})$$

Da equação (IV. 16), para números de Froude elevados ($Fr_j \gg 3.5$), a variação de pressão hidrostática torna-se desprezível face à variação de pressão devido a desaceleração do líquido. Neste caso, a diferença de pressão pode ser aproximada por:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \rho_L U_j^2 \frac{\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} (C_0 - 1)^2, \quad (\text{IV. 17})$$

visto que para $Fr > 3.5$, $C_1 = 0$ (Bendiksen (1984)).

Por outro lado, considerando-se ainda os dados obtidos por Bendiksen (1984), quando $Fr_j < 3.5$ a diferença de pressão se torna:

$$(P_{Sj} - P_{Gj+1}) = \frac{1}{2} \rho_L U_j^2 \left[\frac{2\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} \left(\frac{C_1}{Fr_j} \right)^2 - \left(\frac{1}{Fr_j} \right)^2 \left(1 - \frac{h_f}{D} R_f \right) \right], \quad (\text{IV. 18})$$

uma vez que $C_0 = 1$ para $Fr_j < 3.5$.

As parcelas correspondentes aos efeitos da aceleração e da altura hidrostática (equações (IV. 12) e (IV. 13)) reescritas em função do número de Froude (equação (IV. 16)) são:

$$\Delta P_{Aj} = C_A \rho_L U_j^2 \frac{\overline{R_G}}{1 - \overline{R_G}} \left(C_0 + \frac{C_1}{Fr_j} - 1 \right)^2,$$

(IV. 19)

$$\Delta P_{Hj} = \frac{1}{2} \rho_L U_j^2 \left(\frac{1}{Fr_j} \right)^2 \left(1 - \frac{h_f}{D} R_f \right).$$

(IV. 20)

Anexo V

Listagem do Programa

Módulo principal para escoamento periódico

```
Dim sai As Integer
Dim Vsaida As Double
```

```
'Este programa fornece dados de pistões e bolhas em
diferentes
'posições. Considera-se apenas o caso de um
escoamento periódico.
```

```
Sub periodico()
```

```
On Error GoTo ErrorHandler
```

```
If ProbeOption1 = True Then
    Open "C:\entrada.txt" For Output As #10
    Write #10, "t", "Po", "jGo", "Uo"
End If
```

```
'Condições iniciais (contadores)
```

```
tp(0) = 0
For j = 1 To 8
    tp(j) = 0
    tb(j) = 0
    q(j) = 1
    qb(j) = 1
Next j
total = 0
totalcoal = 0
calcator1 = 0
calcator2 = 0
calcator3 = 0
total2 = 0
testeest = 0
testeest2 = 0
tempo1 = 0
tempo2 = 0
```

```
tempo3 = 0
FotoCont = 1
For j = 1 To 3000
    tempo2M(j) = 0
Next j
TempoTotal = 0
```

```
'Condições iniciais (modelo)
```

```
n = 1
hf = d * (0.8799 * (1 - rg) + 0.06)
LS(1) = L
u(1) = JLent
Re(1) = Abs(ro * u(1) * d / mi)
Call atrito
p(1) = Patm + ro * LS(1) * fat(1) * u(1) * u(1)
h(1) = p(1) / ro
jg0 = Patm * jgadm / (p(1))
u(0) = JLent + jg0
If EntOption = 2 Then Call frequency
LB(1) = LB0
x(1) = L
y(1) = 0
x(0) = 0 - LB(1)
he(1) = 0
Call C0calc
VelBinf(1) = C0(1) * u(1) + V0(1)
VelB(1) = VelBinf(1) * (1 + he(1))
VBent = VelB(1)
```

```
If rg <= jg0 / (C0(1) * (JLent + jg0)) Then
    UserForm3.Show
    GoTo 10
End If
```

```
T(1) = LS(1) * fat(1) * u(1)
E(1) = 0
HD(1) = 0
```

```
tol = 0
```

```

tol2 = 1.3 * LS0

'Cálculo dos primeiros termos da matriz
a(1) = (2 * rg * LB(1)) / (dt * h(1))
a(2) = 2 * (LS(1) / dt + T(1) + E(1))
b(1) = 1
c(1) = -1
f(1) = 2 * rg * LB(1) / dt + 2 * u(0) - u(1)
f(2) = 2 * LS(1) * u(1) / dt - 2 * Patm / ro + h(1)

'Primeira rodada no dt especificado
Call Tridiag

hn(1) = xx(1)
un(1) = xx(2)
pn(1) = hn(1) * ro
he(1) = 0
Call C0calc
VelBinf(1) = C0(1) * un(1) + V0(1)
VelBn(1) = VelBinf(1) * (1 + he(1))
yn(1) = y(1) + dt * VelBn(1)
xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))
xn(1) = x(1)
LSn(1) = xn(1) - yn(1)
LBn(1) = yn(1) - xn(1)

Re(1) = Abs(ro * un(1) * d / mi)
Call atrito
If xn(0) < 0 Then
  jg0 = Patm * jgadm / (pn(1))
  u(0) = JLent + jg0
End If
If xn(0) > 0 Then
  Re(0) = Abs(ro * u(0) * d / mi)
  Call atrito0
  p(0) = p(1) + ro * xn(0) * fat(0) * u(0) * u(0)
  jg0 = Patm * jgadm / p(0)
  u(0) = JLent + jg0
End If

TempoTotal = TempoTotal + dt
If EntOption = 2 Then Call frequency

'Novas rodadas até o número de bolhas especificado

While total < npro + 1

  If xn(0) >= LS0 Then Call entrada

  If xn(n - 1) >= L Then Call Saida

  If n > 1 Then
    For z = 1 To n - 1
      If yn(z) > xn(z) Then Call Coal
    Next z

```

```

End If

For j = 1 To n
  LB(j) = LBn(j)
  LS(j) = LSn(j)
  p(j) = pn(j)
  u(j) = un(j)
  h(j) = hn(j)
  y(j) = yn(j)
  VelB(j) = VelBn(j)
  x(j) = xn(j)
Next j

x(0) = xn(0)

'cálculo das perdas por atrito e por expansão do líquido

For j = 2 To n - 1
  T(j) = LS(j) * fat(j) * u(j)
  E(j) = Ce * rg * ((C0(j - 1) + (V0(j - 1) / u(j - 1)) - 1) ^ 2) * u(j - 1) / (1 - rg)
  HD(j) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)
Next j
T(1) = LS(1) * fat(1) * u(1)
If x(0) <= 0 Then
  E(1) = 0
  HD(1) = 0
Else
  E(1) = Ce * rg * ((C0(1) + (V0(1) / u(0)) - 1) ^ 2) * u(0) / (1 - rg)
  HD(1) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)
End If
If y(n) >= L Then
  T(n) = 0
Else
  T(n) = LS(n) * fat(n) * u(n)
End If
E(n) = Ce * rg * ((C0(n - 1) + (V0(n - 1) / u(n - 1)) - 1) ^ 2) * u(n - 1) / (1 - rg)
HD(n) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)

'limpeza da matriz anterior
For j = 1 To 2 * n
  a(j) = 0
  f(j) = 0
Next j

For j = 1 To 2 * n - 1
  c(j) = 0
  b(j) = 0
Next j

'nova matriz em t

```

```

For j = 1 To n
  a(2 * j - 1) = (2 * rg * LB(j)) / (dt * h(j))
  a(2 * j) = 2 * (LS(j) / dt + T(j) + E(j))
  If j <> 1 Then f(2 * j - 1) = 2 * rg * LB(j) / dt -
u(j) + u(j - 1)
  If j <> n Then f(2 * j) = 2 * LS(j) * u(j) / dt - h(j)
+ 1) + h(j) + 2 * HD(j)
Next j

f(1) = 2 * rg * LB(1) / dt + 2 * u(0) - u(1)
f(2 * n) = 2 * LS(n) * u(n) / dt - 2 * Patm / ro +
h(n) + 2 * HD(j)

```

```

For j = 1 To 2 * n - 1
  b(j) = 1
  c(j) = -1
Next j

```

```

'resolução da equação matricial
'obtere H e U em t+dt
Call Tridiag

```

```

'cálculo das grandezas em t+dt
For j = 1 To n
  hn(j) = xx(2 * j - 1)
  un(j) = xx(2 * j)
  pn(j) = hn(j) * ro
  If j <> n And est2 = 3 Then aw = v0fag * (1 -
LS(j) / Lcrit)
  If j <> n And est2 = 5 Then
    If LS(j) >= Lstab Then
      aw = 0
    Else
      aw = 5.5
    End If
  End If
  If j = n Then he(j) = 0
  If j <> n And est = 2 Then he(j) = aw * exp((-bw
/ d) * (x(j) - y(j)))
  If j <> n And est = 1 Then he(j) = 0
  Call C0calc
  VelBinf(j) = C0(j) * un(j) + V0(j)
  VelBn(j) = VelBinf(j) * (1 + he(j))
  yn(j) = y(j) + dt * VelBn(j)
  Re(j) = Abs(ro * un(j) * d / mi)
Next j

```

```

Call atrito

```

```

If n > 1 Then

```

```

  xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))

```

```

  For j = 1 To n - 1

```

```

    xn(j) = yn(j + 1) - (p(j + 1) / pn(j + 1)) * (y(j +
1) - x(j))
    LSn(j) = xn(j) - yn(j)
    LBn(j) = yn(j) - xn(j - 1)
  Next j

```

```

  If yn(n) < L Then

```

```

    xn(n) = L
    LSn(n) = xn(n) - yn(n)
    LBn(n) = yn(n) - xn(n - 1)
    sai = 0
  End If

```

```

  End If

```

```

  If yn(n) >= L Then

```

```

    yn(n) = L
    pn(n) = Patm
    hn(n) = pn(n) / ro
    xn(n) = L
    LSn(n) = 0
    If sai = 0 Then
      Vsaida = VelBn(n)
      sai = 1
    End If
    VelBn(n) = Vsaida
    xn(n - 1) = x(n - 1) + Vsaida * dt
    LBn(n) = yn(n) - xn(n - 1)
  End If

```

```

  End If

```

```

  If n = 1 Then

```

```

    xn(1) = L
    xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))
    LSn(1) = xn(1) - yn(1)
    LBn(1) = yn(1) - xn(0)
  End If

```

```

  End If

```

```

  If xn(0) < 0 Then

```

```

    jg0 = Patm * jgatm / (pn(1))
    u(0) = JLent + jg0
  End If

```

```

  End If

```

```

  If xn(0) > 0 Then

```

```

    Re(0) = Abs(ro * u(0) * d / mi)
    Call atrito0
    p(0) = p(1) + ro * xn(0) * fat(0) * u(0) * u(0)
    jg0 = Patm * jgatm / p(0)
    u(0) = JLent + jg0
  End If

```

```

  End If

```

```

  un(0) = u(0)

```

```

  pn(0) = p(0)

```

```

  TempoTotal = TempoTotal + dt

```

```

  'verificação freqüência na entrada

```

```

  If EntOption = 2 Then Call frequency

```

```

'Passagem de bolhas e pistões pela probe
Call passaprobe

Wend

contador = contador + 1

'cálculo do gradiente de pressão total
gradP = (Patm - pbolha(1, npro - 4)) / (L - Probe(1))

'cálculo das taxas de coalescências
Call txcoal

'saída de dados
Call escreve

If ProbeOption1 = True Then Close #10

ErrorHandler:
  If Err <> 0 Then
    Call conserta
  End If

10 End Sub

Sub frequency()
'Esta sub calcula comprimentos de bolhas e de pistões
na entrada baseados na
'frequência na entrada

If FreqOption = 1 Then
  f0 = 0.0434 * ((JLent / Abs(u(0))) * ((2.02 / d) +
(u(0) * u(0) / (9.81 * d)))) ^ 1.02
End If
If FreqOption = 2 Then
  f0 = 0.0226 * ((JLent / Abs(u(0))) * ((2.02 / d) +
(u(0) * u(0) / (9.81 * d)))) ^ 1.2
End If
If FreqOption = 3 Then
  f0 = f0exp
End If
LB0 = jg0 / (rg * f0)
If TempoTotal <> 0 Then LS0 = (VBent * rg - jg0) /
(rg * f0)

End Sub

Sub escreve()

UserForm5.Show

End Sub

```

Módulo principal para escoamento intermitente

```

Sub intermitente()

'On Error GoTo ErrorHandler

'abrindo arquivo excell com dados experimentais e
armazenando as frequências
'na estação 1
Application.FindFile
i = 3
While Worksheets("nome").Range("P" & i) <> 0
  fent(i - 2) = 1 /
  Val(Worksheets("nome").Range("P" & i))
  i = i + 1
Wend
ndata = i - 3

If ProbeOption1 = True Then
  Open "C:\entrada.txt" For Output As #10
  Write #10, "t", "Po", "jGo", "Uo"
End If

'Condições iniciais (contadores)
tp(0) = 0
For j = 1 To 8
  tp(j) = 0
  tb(j) = 0
  q(j) = 1
  qb(j) = 1
Next j
total = 0
totalcoal = 0
calcator1 = 0
calcator2 = 0
calcator3 = 0
total2 = 0
testeest = 0
testeest2 = 0
tempo1 = 0
tempo2 = 0
tempo3 = 0
FotoCont = 1
For j = 1 To 3000
  tempo2M(j) = 0
Next j
TempoTotal = 0

'Condições iniciais (modelo)
n = 1
hf = d * (0.8799 * (1 - rg) + 0.06)
LS(1) = L
u(1) = JLent
Re(1) = Abs(ro * u(1) * d / mi)
Call atrito

```

```

p(1) = Patm + ro * LS(1) * fat(1) * u(1) * u(1)
h(1) = p(1) / ro
jg0 = Patm * jgadm / (p(1))
u(0) = JLent + jg0
Call frequency2
LB(1) = LB0
x(1) = L
y(1) = 0
x(0) = 0 - LB(1)
he(1) = 0
Call C0calc
VelBinf(1) = C0(1) * u(1) + V0(1)
VelB(1) = VelBinf(1) * (1 + he(1))
VBent = VelB(1)

If rg <= jg0 / (C0(1) * (JLent + jg0)) Then
  UserForm3.Show
  GoTo 10
End If

T(1) = LS(1) * fat(1) * u(1)
E(1) = 0
HD(1) = 0

tol = 0
tol2 = 1.3 * LS0

' Cálculo dos primeiros termos da matriz
a(1) = (2 * rg * LB(1)) / (dt * h(1))
a(2) = 2 * (LS(1) / dt + T(1) + E(1))
b(1) = 1
c(1) = -1
f(1) = 2 * rg * LB(1) / dt + 2 * u(0) - u(1)
f(2) = 2 * LS(1) * u(1) / dt - 2 * Patm / ro + h(1)

' Primeira rodada no dt especificado
Call Tridiag

hn(1) = xx(1)
un(1) = xx(2)
pn(1) = hn(1) * ro
he(1) = 0
Call C0calc
VelBinf(1) = C0(1) * un(1) + V0(1)
VelBn(1) = VelBinf(1) * (1 + he(1))
yn(1) = y(1) + dt * VelBn(1)
xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))
xn(1) = x(1)
LSn(1) = xn(1) - yn(1)
LBn(1) = yn(1) - xn(0)

Re(1) = Abs(ro * un(1) * d / mi)
Call atrito
If xn(0) < 0 Then
  jg0 = Patm * jgadm / (pn(1))
  u(0) = JLent + jg0

```

```

End If
If xn(0) > 0 Then
  Re(0) = Abs(ro * u(0) * d / mi)
  Call atrito0
  p(0) = p(1) + ro * xn(0) * fat(0) * u(0) * u(0)
  jg0 = Patm * jgadm / p(0)
  u(0) = JLent + jg0
End If

TempoTotal = TempoTotal + dt
Call frequency2

```

'Novas rodadas até o número de bolhas especificado

```
While tp(0) < 2 * ndata - 1
```

```
  If xn(0) >= LS0 Then Call entrada
```

```
  If xn(n - 1) >= L Then Call Saida
```

```
  If n > 1 Then
```

```
    For z = 1 To n - 1
```

```
      If yn(z) > xn(z) Then Call Coal
```

```
    Next z
```

```
  End If
```

```
  For j = 1 To n
```

```
    LB(j) = LBn(j)
```

```
    LS(j) = LSn(j)
```

```
    p(j) = pn(j)
```

```
    u(j) = un(j)
```

```
    h(j) = hn(j)
```

```
    y(j) = yn(j)
```

```
    VelB(j) = VelBn(j)
```

```
    x(j) = xn(j)
```

```
  Next j
```

```
  x(0) = xn(0)
```

'cálculo das perdas por atrito e por expansão do líquido

```
  For j = 2 To n - 1
```

```
    T(j) = LS(j) * fat(j) * u(j)
```

```
    E(j) = Ce * rg * ((C0(j - 1) + (V0(j - 1) / u(j - 1)) - 1) ^ 2) * u(j - 1) / (1 - rg)
```

```
    HD(j) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)
```

```
  Next j
```

```
  T(1) = LS(1) * fat(1) * u(1)
```

```
  If x(0) <= 0 Then
```

```
    E(1) = 0
```

```
    HD(1) = 0
```

```
  Else
```

```
    E(1) = Ce * rg * ((C0(1) + (V0(1) / u(0)) - 1) ^ 2) * u(0) / (1 - rg)
```

```

    HD(1) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)
End If
If y(n) >= L Then
    T(n) = 0
Else
    T(n) = LS(n) * fat(n) * u(n)
End If
E(n) = Ce * rg * ((C0(n - 1) + (V0(n - 1) / u(n - 1))
- 1) ^ 2 * u(n - 1) / (1 - rg)
HD(n) = Chid * 9.81 * 0.5 * (d - hf)

```

'limpeza da matriz anterior

```

For j = 1 To 2 * n
    a(j) = 0
    f(j) = 0
Next j

```

```

For j = 1 To 2 * n - 1
    c(j) = 0
    b(j) = 0
Next j

```

'nova matriz em t

```

For j = 1 To n
    a(2 * j - 1) = (2 * rg * LB(j)) / (dt * h(j))
    a(2 * j) = 2 * (LS(j) / dt + T(j) + E(j))
    If j < 1 Then f(2 * j - 1) = 2 * rg * LB(j) / dt -
u(j) + u(j - 1)
    If j < n Then f(2 * j) = 2 * LS(j) * u(j) / dt - h(j)
+ 1) + h(j) + 2 * HD(j)
Next j

```

```

f(1) = 2 * rg * LB(1) / dt + 2 * u(0) - u(1)
f(2 * n) = 2 * LS(n) * u(n) / dt - 2 * Patm / ro +
h(n) + 2 * HD(j)

```

```

For j = 1 To 2 * n - 1
    b(j) = 1
    c(j) = -1
Next j

```

'resolução da equação matricial

'obterei H e U em t+dt
Call Tridiag

'cálculo das grandezas em t+dt

```

For j = 1 To n
    hn(j) = xx(2 * j - 1)
    un(j) = xx(2 * j)
    pn(j) = hn(j) * ro
    If j < n And est2 = 3 Then aw = v0fag * (1 -
LS(j) / Lcrit)
    If j < n And est2 = 5 Then

```

If LS(j) >= Lstab Then

aw = 0

Else

aw = 5.5

End If

End If

If j = n Then he(j) = 0

If j < n And est = 2 Then he(j) = aw * exp((-bw
/ d) * (x(j) - y(j)))

If j < n And est = 1 Then he(j) = 0

Call C0calc

VelBinf(j) = C0(j) * un(j) + V0(j)

VelBn(j) = VelBinf(j) * (1 + he(j))

yn(j) = y(j) + dt * VelBn(j)

Re(j) = Abs(ro * un(j) * d / mi)

Next j

Call atrito

If n > 1 Then

xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))

For j = 1 To n - 1

xn(j) = yn(j + 1) - (p(j + 1) / pn(j + 1)) * (y(j +
1) - x(j))

LSn(j) = xn(j) - yn(j)

LBn(j) = yn(j) - xn(j - 1)

Next j

If yn(n) < L Then

xn(n) = L

LSn(n) = xn(n) - yn(n)

LBn(n) = yn(n) - xn(n - 1)

sai = 0

End If

If yn(n) >= L Then

yn(n) = L

pn(n) = Patm

hn(n) = pn(n) / ro

xn(n) = L

LSn(n) = 0

If sai = 0 Then

Vsaida = VelB(n)

sai = 1

End If

VelBn(n) = Vsaida

xn(n - 1) = x(n - 1) + Vsaida * dt

LBn(n) = yn(n) - xn(n - 1)

End If

End If

If n = 1 Then

xn(1) = L

```

    xn(0) = yn(1) - (p(1) / pn(1)) * (y(1) - x(0))
    LSn(1) = xn(1) - yn(1)
    LBN(1) = yn(1) - xn(0)
End If

If xn(0) < 0 Then
    jg0 = Patm * jgatm / (pn(1))
    u(0) = JLent + jg0
End If
If xn(0) > 0 Then
    Re(0) = Abs(ro * u(0) * d / mi)
    Call atrito0
    p(0) = p(1) + ro * xn(0) * fat(0) * u(0) * u(0)
    jg0 = Patm * jgatm / p(0)
    u(0) = JLent + jg0
End If

un(0) = u(0)
pn(0) = p(0)

TempoTotal = TempoTotal + dt

'verificação frequência na entrada
Call frequency2

'Passagem de bolhas e pistões pela probe
Call passaprobe

Wend

contador = contador + 1

'cálculo do gradiente de pressão total
'gradP = (Patm - pbolha(1, npro - 4)) / (L - Probe(1))
gradP = 0

'cálculo das taxas de coalescências
Call txcoal

'saída de dados
Call escreve2

If ProbeOption1 = True Then Close #10

'ErrorHandler:
' If Err <> 0 Then
'     Call conserta
' End If

10 End Sub

Sub frequency2()
'Esta sub calcula comprimentos de bolhas e de pistões
na entrada baseados na
'frequência na entrada

```

```

If tp(0) + 1 <= ndata Then
    f0 = fent(tp(0) + 1)
Else
    f0 = fent(tp(0) + 1 - ndata)
End If

LB0 = jg0 / (rg * f0)
If TempoTotal <> 0 Then LS0 = (VBent * rg - jg0) /
(rg * f0)

End Sub

Sub escreve2()

UserForm5.Show

End Sub

```

Módulo para cálculo de singularidades e equações auxiliares

```

Sub Tridiag()

' Resolução do sistema
' Método de Gauss para matriz tridiagonal

For i = 1 To 2 * n - 1
    m = c(i) / a(i)
    c(i) = 0
    a(i + 1) = a(i + 1) - m * b(i)
    f(i + 1) = f(i + 1) - m * f(i)
Next i

xx(2 * n) = f(2 * n) / a(2 * n)
For i = 2 * n - 1 To 1 Step -1
    xx(i) = (f(i) - b(i) * xx(i + 1)) / a(i)
Next i

End Sub

Sub atrito()

'esta sub é responsável pelo cálculo do fator de atrito
para todas as células
'com exceção da primeira

For j = 1 To n
    If Re(j) <= 5000 Then fat(j) = 32 / (Re(j) * d)
    If Re(j) > 5000 And Re(j) < 100000 Then fat(j) =
(0.158 / d) * (Re(j) ^ (-0.25))

```

```

    If Re(j) >= 100000 Then fat(j) = (0.092 / d) *
(Re(j) ^ (-0.2))
Next j

```

```
End Sub
```

```
Sub atrito0()
```

```
'esta sub é responsável pelo cálculo do fator de atrito
para primeira célula
```

```

If Re(0) <= 5000 Then fat(0) = 32 / (Re(0) * d)
If Re(0) > 5000 And Re(0) < 100000 Then fat(0) =
(0.158 / d) * (Re(0) ^ (-0.25))
If Re(0) >= 100000 Then fat(0) = (0.092 / d) * (Re(0)
^ (-0.2))

```

```
End Sub
```

```
Sub entrada()
```

```
'esta sub introduz uma nova bolha e faz a
renumeração das
'bolhas e pistões
```

```
'aumentando o número de bolhas ao longo do duto e
que já entraram no duto
n = n + 1
tp(0) = tp(0) + 1
```

```
'verificando se o tubo já encheu e marcando situação
de cada probe
```

```

If total <> 0 And trans = True Then
    trans = False
    For i = 1 To 8
        nestab(i) = tp(i)
    Next i
End If

```

```
'reindexando índice da bolha que está sendo seguida
If testeest2 = 1 And ProbeOption2 = True Then
indiceBM = indiceBM + 1
```

```
If n >= 2 Then
```

```

    For j = 2 To n
        xn(n + 2 - j) = xn(n + 1 - j)
        yn(n + 2 - j) = yn(n + 1 - j)
        LSn(n + 2 - j) = LSn(n + 1 - j)
        LBn(n + 2 - j) = LBn(n + 1 - j)
        pn(n + 2 - j) = pn(n + 1 - j)
        un(n + 2 - j) = un(n + 1 - j)
        hn(n + 2 - j) = hn(n + 1 - j)
        VelBn(n + 2 - j) = VelBn(n + 1 - j)
        fat(n + 2 - j) = fat(n + 1 - j)
    Next j

```

```

    Next j
End If

```

```

xn(1) = xn(0)
LSn(1) = xn(1) - 0
yn(1) = 0
un(1) = u(0)
Call C0calc

```

```
If n <> 1 And est2 = 3 Then aw = v0fag * (1 - LSn(1)
/ Lcrit)
```

```
If n <> 1 And est2 = 5 Then
```

```
    If LSn(1) >= Lstab Then
```

```
        aw = 0
```

```
    Else
```

```
        aw = 5.5
```

```
    End If
```

```
End If
```

```
If n <> 1 And est = 2 Then he(1) = aw * exp((-bw / d)
* LSn(1))
```

```
If n <> 1 And est = 1 Then he(1) = 0
```

```
If n = 1 Then he(1) = 0
```

```
VelBinf(1) = C0(1) * un(1) + V0(1)
```

```
VelBn(1) = VelBinf(1) * (1 + he(1))
```

```
VBent = VelBn(1)
```

```
For j = 1 To n
```

```
    Re(j) = Abs(ro * un(j) * d / mi)
```

```
Next j
```

```
Call atrito
```

```
pn(1) = pn(2) + ro * LSn(1) * fat(1) * un(1) * un(1)
```

```
hn(1) = pn(1) / ro
```

```
jg0 = Patm * jg0 / (pn(1))
```

```
u(0) = JLent + jg0
```

```
If EntOption = 1 Then LBn(1) = LS0 / ((VelBn(1) *
rg - jg0) / jg0)
```

```
If EntOption = 2 Or EntOption = 3 Then LBn(1) =
LB0
```

```
xn(0) = 0 - LBn(1)
```

```
tambolha(0, tp(0)) = LBn(1)
```

```
End Sub
```

```
Sub Saida()
```

```
'esta sub reduz o número de células após a saída de
uma bolha
```

```
If indiceBM = n And testeest2 = 1 Then testeest2 = 2
```

```
n = n - 1
```

```
total = total + 1
```

```
End Sub
```

Sub Coal()

'Esta sub calcula os dados da nova bolha formada pela coalescência

'de 2 outras. Ela também faz a renumeração

'celula z, com hipotese de bolhas cilindricas

xn(z) = xn(z + 1)

yn(z) = yn(z + 1)

LSn(z) = xn(z) - yn(z)

LBn(z) = yn(z) - xn(z - 1)

pn(z) = (pn(z) + pn(z + 1)) / 2

un(z) = un(z + 1)

hn(z) = pn(z) / ro

VelBn(z) = VelBn(z + 1)

fat(z) = fat(z + 1)

C0(z) = C0(z + 1)

V0(z) = V0(z + 1)

'demais celulas

If z < n - 1 Then

For j = z + 1 To n - 1

xn(j) = xn(j + 1)

yn(j) = yn(j + 1)

LSn(j) = LSn(j + 1)

LBn(j) = LBn(j + 1)

pn(j) = pn(j + 1)

un(j) = un(j + 1)

hn(j) = hn(j + 1)

VelBn(j) = VelBn(j + 1)

fat(j) = fat(j + 1)

C0(j) = C0(j + 1)

V0(j) = V0(j + 1)

Next j

End If

If testeest2 = 1 And ProbeOption2 = True Then

If indiceBM > z Then

indiceBM = indiceBM - 1

End If

End If

n = n - 1

totalcoal = totalcoal + 1

End Sub

Sub txcoal()

'Esta sub calcula as taxas de coalecências (TC) entre probes

For j = 0 To 8

somabolha(j) = 0

mediabolha(j) = 0

Next j

For j = 0 To 8

For i = 1 To tp(j)

somabolha(j) = somabolha(j) + tambolha(j, i)

Next i

mediabolha(j) = somabolha(j) / tp(j)

Next j

For j = 0 To 7

i = Int((Probe(j + 1) - Probe(j)) / (0.5 * (mediabolha(j) + mediabolha(j + 1))))

TC(j) = Abs((d / (Probe(j + 1) - Probe(j))) * Log(tp(j + 1) / (tp(j) - i)))

Next j

End Sub

'sub rotina para o cálculo de médias desprezando partida de linha

Sub medias()

If tp(8) - nestab(8) > 2 Then

For i = 1 To 8

somaLB(i) = 0

somaLS(i) = 0

somaP(i) = 0

somajg(i) = 0

somaJ(i) = 0

somaVB(i) = 0

somajl(i) = 0

somaVS(i) = 0

somaTu(i) = 0

somaDVbs(i) = 0

somaF(i) = 0

somaJgJ(i) = 0

somaJgJl(i) = 0

somaFr(i) = 0

somaRe(i) = 0

somaC0(i) = 0

somaV0(i) = 0

somaJLCell(i) = 0

somaJgCell(i) = 0

somaBeta(i) = 0

Next i

For i = 1 To 8

For j = nestab(i) To tp(i) - 1

somaLB(i) = somaLB(i) + tambolha(i, j)

somaLS(i) = somaLS(i) + tampist(i, j)

somaP(i) = somaP(i) + pbolha(i, j)

somajg(i) = somajg(i) + jg(i, j)

somaJ(i) = somaJ(i) + velmist(i, j)

somaVB(i) = somaVB(i) + velbolha(i, j)

somajl(i) = somajl(i) + jl(i, j)

somaVS(i) = somaVS(i) + velpist(i, j)

somaTu(i) = somaTu(i) + period(i, j)

```

    somaDVbs(i) = somaDVbs(i) + (velbolha(i, j)
- velpist(i, j))
    somaF(i) = somaF(i) + freq(i, j)
    somaJgJ(i) = somaJgJ(i) + (jg(i, j) / velmist(i,
j))
    somaJgJl(i) = somaJgJl(i) + (jg(i, j) / jL(i, j))
    somaFr(i) = somaFr(i) + Frprobe(i, j)
    somaRe(i) = somaRe(i) + Reprobe(i, j)
    somaC0(i) = somaC0(i) + C0probe(i, j)
    somaV0(i) = somaV0(i) + V0probe(i, j)
    somaJLCell(i) = somaJLCell(i) + jLCell(i, j)
    somaJgCell(i) = somaJgCell(i) + jgCell(i, j)
    somaBeta(i) = somaBeta(i) + Beta(i, j)
Next j
Next i
For i = 1 To 8
    mediaLB(i) = somaLB(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaLS(i) = somaLS(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaP(i) = somaP(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediajg(i) = somajg(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaJ(i) = somaJ(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaVB(i) = somaVB(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediajl(i) = somajl(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaVS(i) = somaVS(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaTu(i) = somaTu(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaDVbs(i) = somaDVbs(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaF(i) = somaF(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaJgJ(i) = somaJgJ(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaJgJl(i) = somaJgJl(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaFr(i) = somaFr(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaRe(i) = somaRe(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaC0(i) = somaC0(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaV0(i) = somaV0(i) / (tp(i) - nestab(i))
    mediaJLCell(i) = somaJLCell(i) / (tp(i) -
nestab(i))
    mediaJgCell(i) = somaJgCell(i) / (tp(i) -
nestab(i))
    mediaBeta(i) = somaBeta(i) / (tp(i) - nestab(i))
Next i
End If
End Sub

```

Módulo para cálculo de C_0 e V_0

```

Sub C0calc()
If n <> 1 Then
    For j = 1 To n
        froude(j) = un(j) / Sqr(9.81 * d)
    Next j
Else
    froude(1) = u(1) / Sqr(9.81 * d)
End If

```

```

'Manual
If C0option = 1 Then
    For j = 1 To n
        C0(j) = C0cte
        V0(j) = V0cte
    Next j
End If

'Bendiksen
If C0option = 2 Then
    For j = 1 To n
        If froude(j) < 3.5 Then
            C0(j) = 1
            V0(j) = 0.54 * Sqr(9.81 * d)
        End If
        If froude(j) >= 3.5 Then
            C0(j) = 1.2
            V0(j) = 0
        End If
    Next j
End If

'Experimental
If C0option = 3 Then
    For j = 1 To n
        V0(j) = 0
        If mi <= 0.014 Then
            If mixer = 1 Then
                If yn(j) <= 450 * d Then
                    C0(j) = 1.15
                Else
                    C0(j) = 1.12
                End If
            Else
                If yn(j) <= 450 * d Then
                    C0(j) = 1.18
                Else
                    C0(j) = 1.12
                End If
            End If
        Else
            If mixer = 1 Then
                If yn(j) <= 450 * d Then
                    C0(j) = 1.31
                Else
                    C0(j) = 1.27
                End If
            Else
                If yn(j) <= 450 * d Then
                    C0(j) = 1.33
                Else
                    C0(j) = 1.27
                End If
            End If
        End If
    Next j
End If

```

```

Next j
End If

```

```

End Sub

```

Módulo para se gravação de dados nas sondas virtuais

```

Sub passaprobe()

```

```

'Probes tradicionais

```

```

For r = 1 To 8

```

```

If Probe(r) > 0 And Probe(r) <= L Then

```

```

'Passagem de bolhas pela probe

```

```

For j = 1 To n

```

```

If yn(j) >= Probe(r) And xn(j - 1) < Probe(r) And
q(r) = 1 Then

```

```

q(r) = q(r) + 1

```

```

tp(r) = tp(r) + 1

```

```

tambolha(r, tp(r)) = LBN(j)

```

```

velbolha(r, tp(r)) = VelBn(j)

```

```

pbolha(r, tp(r)) = pn(j)

```

```

jgCell(r, tp(r)) = jgadm * Patm / pbolha(r,
tp(r))

```

```

jLCell(r, tp(r)) = un(j) - jgCell(r, tp(r))

```

```

VS(j - 1) = (xn(j - 1) - x(j - 1)) / dt

```

```

If he(j) <> 0 Then

```

```

period(r, tb(r)) = LSn(j - 1) / VS(j - 1) +
LBN(j) / VelBn(j)

```

```

Else

```

```

period(r, tb(r)) = (LSn(j - 1) + LBN(j)) /
VelBn(j)

```

```

End If

```

```

freq(r, tb(r)) = 1 / period(r, tb(r))

```

```

C0probe(r, tb(r)) = C0(j)

```

```

V0probe(r, tb(r)) = V0(j)

```

```

If he(j) <> 0 Then

```

```

Beta(r, tb(r)) = (LBN(j) / VelBn(j)) / ((LSn(j)
- 1) / VS(j - 1) + (LBN(j) / VelBn(j)))

```

```

Else

```

```

Beta(r, tb(r)) = LBN(j) / (LSn(j - 1) +
LBN(j))

```

```

End If

```

```

jg(r, tp(r)) = VelBn(j) * rg * Beta(r, tb(r))

```

```

If j = n And Probe(r) >= L - tol2 Then

```

```

jg(r, tp(r)) = jgadm

```

```

End If

```

```

If j <> n Then

```

```

jL(r, tp(r)) = un(j + 1) - jg(r, tp(r))

```

```

Else

```

```

jL(r, tp(r)) = un(j) - jg(r, tp(r))

```

```

End If

```

```

End If

```

```

Next j

```

```

If q(r) <> 1 Then

```

```

w(r) = 1

```

```

For j = 1 To n

```

```

If yn(j) >= Probe(r) And w(r) = 1 Then

```

```

While yn(w(r)) < Probe(r)

```

```

w(r) = w(r) + 1

```

```

Wend

```

```

If xn(w(r) - 1) >= Probe(r) Then

```

```

q(r) = 1

```

```

End If

```

```

End If

```

```

Next j

```

```

End If

```

```

'Passagem de pistões pela probe

```

```

If LSn(n) <= L - Probe(r) Then

```

```

For j = 1 To n

```

```

If xn(j) >= Probe(r) And yn(j) < Probe(r) And
qb(r) = 1 Then

```

```

qb(r) = qb(r) + 1

```

```

tb(r) = tb(r) + 1

```

```

tampist(r, tb(r)) = LSn(j)

```

```

velmist(r, tb(r)) = un(j)

```

```

velpist(r, tb(r)) = (xn(j) - x(j)) / dt

```

```

Reprobe(r, tb(r)) = Re(j)

```

```

Frprobe(r, tb(r)) = froude(j)

```

```

End If

```

```

Next j

```

```

If qb(r) <> 1 Then

```

```

wb(r) = 1

```

```

For j = 1 To n

```

```

If xn(j) >= Probe(r) And wb(r) = 1 Then

```

```

While xn(wb(r)) < Probe(r)

```

```

wb(r) = wb(r) + 1

```

```

Wend

```

```

If yn(wb(r)) >= Probe(r) Then

```

```

qb(r) = 1

```

```

End If

```

```

End If

```

```

Next j

```

```

End If

```

```

End If

```

```

End If

```

```

Next r

```

```

'Probe entrada (z=0)

```

```

If ProbeOption1 = True Then

```

```

tempo1 = tempo1 + dt

```

```

calcator1 = calcator1 + 1

```

```

If tp(0) >= nent1 Then

```

```

If calcator1 >= fator1 Then

```

```

calcator1 = 0

```

```

If xn(0) > 0 Then

```

```

        Write #10, tempo1, p(0), jg0, u(0)
    Else
        Write #10, tempo1, pn(1), jg0, u(0)
    End If
End If
End If
End If

'Probe seguindo uma Bolha
If testeest2 = 0 And tp(0) >= nent2 Then
    testeest2 = 1
    indiceBM = 1
End If
If ProbeOption2 = True Then
    tempo2 = tempo2 + dt
    calcfator2 = calcfator2 + 1
    If testeest2 = 1 And calcfator2 >= fator2 Then
        total2 = total2 + 1
        calcfator2 = 0
        Position2(total2) = yn(indiceBM)
        pbolha2(total2) = pn(indiceBM)
        tambolha2(total2) = LBn(indiceBM)
        velbolha2(total2) = VelBn(indiceBM)
        C02(total2) = C0(indiceBM)
        V02(total2) = V0(indiceBM)
        VS2(total2) = (xn(indiceBM) - x(indiceBM)) /
dt
        If he(indiceBM) <> 0 Then
            period2(total2) = LSn(indiceBM) /
VS2(indiceBM) + LBn(indiceBM) /
VelBn(indiceBM)
        Else
            period2(total2) = (LSn(indiceBM) +
LBn(indiceBM)) / VelBn(indiceBM)
        End If
        freq2(total2) = 1 / period2(total2)
        If he(indiceBM) <> 0 Then
            Beta2(total2) = (LBn(indiceBM) /
VelBn(indiceBM)) / ((LSn(indiceBM) /
VS2(indiceBM)) + (LBn(indiceBM) /
VelBn(indiceBM)))
        Else
            Beta2(total2) = LBn(indiceBM) /
(LSn(indiceBM) + LBn(indiceBM))
        End If
        jg2(total2) = jgatm * Patm / pbolha2(total2)
        If Position2(total2) >= L - tol2 Then
            jg2(total2) = jgatm
        End If
        If indiceBM <> n Then
            jL2(total2) = un(indiceBM + 1) - jg2(total2)
        Else
            jL2(total2) = un(indiceBM) - jg2(total2)
        End If
        tampist2(total2) = LSn(indiceBM)

```

```

        velmist2(total2) = un(indiceBM)
        velpist2(total2) = (xn(indiceBM) -
x(indiceBM)) / dt
        Reprobe2(total2) = Re(indiceBM)
        Frprobe2(total2) = froude(indiceBM)
        tempo2M(total2) = tempo2
    End If
End If

```

```

'Probe pega tudo
If testeest = 0 And tp(8) >= nent3 Then testeest = 1
If ProbeOption3 = True Then
    If VariasFotos = True Then
        tempo3 = tempo3 + dt
        calcfator3 = calcfator3 + 1
    End If
    If VariasFotos = True And FotoCont > nFotos
Then testeest = 2
    If (testeest = 1 And VariasFotos = False) Or
(testeest = 1 And calcfator3 >= fator3 And
VariasFotos = True) Then
        If VariasFotos = False Then testeest = 2
        For j = 1 To n
            calcfator3 = 0
            tempo3M(FotoCont) = tempo3
            Position3(FotoCont, j) = yn(j)
            pbolha3(FotoCont, j) = pn(j)
            tambolha3(FotoCont, j) = LBn(j)
            velbolha3(FotoCont, j) = VelBn(j)
            C03(FotoCont, j) = C0(j)
            V03(FotoCont, j) = V0(j)
            VS3(FotoCont, j - 1) = (xn(j - 1) - x(j - 1)) / dt
            If he(j) <> 0 Then
                period3(FotoCont, j) = LSn(j - 1) /
VS3(FotoCont, j - 1) + LBn(j) / VelBn(j)
            Else
                period3(FotoCont, j) = (LSn(j - 1) +
LBn(j)) / VelBn(j)
            End If
            freq3(FotoCont, j) = 1 / period3(FotoCont, j)
            If he(j) <> 0 Then
                Beta3(FotoCont, j) = (LBn(j) / VelBn(j)) /
((LSn(j - 1) / VS3(FotoCont, j - 1)) + (LBn(j) /
VelBn(j)))
            Else
                Beta3(FotoCont, j) = LBn(j) / (LSn(j - 1) +
LBn(j))
            End If
            jg3(FotoCont, j) = VelBn(j) * rg *
Beta3(FotoCont, j)
            If j = n And Position3(FotoCont, j) >= L - tol2
Then
                jg3(FotoCont, j) = jgatm
            End If
            If j <> n Then

```

```

        jL3(FotoCont, j) = un(j + 1) - jg3(FotoCont,
j)
    Else
        jL3(FotoCont, j) = un(j) - jg3(FotoCont, j)
    End If
    tampist3(FotoCont, j) = LSn(j)
    velmist3(FotoCont, j) = un(j)
    velpist3(FotoCont, j) = (xn(j) - x(j)) / dt
    Reprobe3(FotoCont, j) = Re(j)
    Frprobe3(FotoCont, j) = froude(j)
Next j
If VariasFotos = True Then FotoCont =
FotoCont + 1
End If
End If
End Sub

```

Código do formulário para entrada de dados

```

Private Sub IntCheckBox_Change()

If IntCheckBox.Value = True Then
    EntOption = 3
    If FreqFrame.Visible = True Then
FreqFrame.Visible = False
    If CompFrame.Visible = True Then
CompFrame.Visible = False
    End If
End Sub

Private Sub CalculoButton_Click()

'dados gerais
dt = Val(Interval.Text)
npro = Val(num.Text)
jgadm = Val(gas.Text)
JLent = Val(liq.Text)
rg = Val(alfa.Text)
If EntOption = 1 Then
    LS0 = Val(pistao.Text)
    LB0 = Val(bol.Text)
    FreqOption = 0
End If
If EntOption = 2 Then
    If FreqOption1 = True Then FreqOption = 1
    If FreqOption2 = True Then FreqOption = 2
    If FreqOption3 = True Then
        FreqOption = 3
        f0exp = Val(FreqTextBox.Text)
    End If

```

```

End If
trans = True

'fatores expansão (aceleração e hidrostático) líquido
filme-slug
Ce = Val(exp.Text)
If HidButton1.Value = True Then Chid = 1
If HidButton2.Value = True Then Chid = 0

'Dados C0
If C0Button1.Value = True Then
    C0cte = Val(C0TextBox.Text)
    V0cte = 0
    C0option = 1
End If
If C0Button2.Value = True Then C0option = 2
If C0Button3.Value = True Then C0option = 3

```

```

'Opções de saída de dados
If SaiCheckBox1.Value = True Then
    outsai1 = True
Else
    outsai1 = fase
End If
If SaiCheckBox2.Value = True Then
    outsai2 = True
Else
    outsai2 = fase
End If
If SaiCheckBox3.Value = True Then
    outsai3 = True
Else
    outsai3 = fase
End If
If SaiCheckBox4.Value = True Then
    outsai4 = True
Else
    outsai4 = fase
End If
If SaiCheckBox5.Value = True Then
    outsai5 = True
Else
    outsai5 = fase
End If

'Opções de probes
If EntCheckBox.Value = True Then
    ProbeOption1 = True
    nent1 = Val(EntTextBox.Text)
    fator1 = Val(Fator1TextBox.Text)
Else
    ProbeOption1 = False
End If
If TrackCheckBox.Value = True Then

```

```

ProbeOption2 = True
nent2 = Val(BolhaTextBox.Text)
fator2 = Val(Fator2TextBox.Text)
Else
ProbeOption2 = False
End If
If ProbeCheckBox.Value = True Then
ProbeOption3 = True
nent3 = Val(FotoTextBox.Text)
If FotoOption1.Value = True Then
VariasFotos = False
nFotos = 1
End If
If FotoOption2.Value = True Then
VariasFotos = True
fator3 = Val(Fator3TextBox.Text)
nFotos = Val(NumFotoTextBox.Text)
End If
Else
ProbeOption3 = False
End If

'config automática
If CheckBox1.Value = False Then
If Config1.Value = True Then outc = 1
If Config2.Value = True Then outc = 2
Call configura
End If

'config manual
If CheckBox1.Value = True Then
outc = 0
Probe(0) = 0
Probe(1) = Val(Position1.Text)
Probe(2) = Val(Position2.Text)
Probe(3) = Val(Position3.Text)
Probe(4) = Val(Position4.Text)
Probe(5) = Val(Position5.Text)
Probe(6) = Val(Position6.Text)
Probe(7) = Val(Position7.Text)
Probe(8) = Val(Position8.Text)
L = Val(comprimento.Text)
d = Val(diametro.Text)
ro = Val(Densidade.Text)
mi = Val(Viscosidade.Text)
Patm = Val(pressure.Text)
End If
If mixerButton1.Value = True Then mixer = 1
If mixerButton2.Value = True Then mixer = 2

'efeito de esteira
If Button5.Value = True Then est = 1
If Button6.Value = True Then est = 2
If WakeButton1.Value = True Then
est2 = 1

```

```

aw = Val(esteiraaw.Text)
bw = Val(esteirabw.Text)
End If
If WakeButton2.Value = True Then
est2 = 2
aw = 0.4
bw = 0.5
End If
If WakeButton3.Value = True Then
est2 = 3
v0fag = Val(v0TextBox.Text)
Lcrit = d * Val(LcritTextBox.Text)
bw = 0.16
aw = 0
End If
If WakeButton4.Value = True Then
est2 = 4
aw = 8
bw = 1.06
End If
If WakeButton5.Value = True Then
est2 = 5
aw = 0
If JLent + jgadm < 1.5 Then
Lstab = 10 * d
Else
Lstab = 15 * d
End If
bw = 6 * d / Lstab
End If

'chamando rotinas principais
Select Case EntOption
Case 1
Call periodico
Case 2
Call periodico
Case 3
If IntCheckBox.Value = True Then Call
intermitente
If IntCheckBox.Value = False Then MsgBox
"marcar intermitente ou escolher opção de entrada!"
Case Else
MsgBox "É necessário escolher uma opção de
entrada!"
End Select

End Sub

Private Sub CompButton_Click()
If IntCheckBox.Value = False Then
EntOption = 1

```

```

    If FreqFrame.Visible = True Then
FreqFrame.Visible = False
    If CompFrame.Visible = False Then
CompFrame.Visible = True
    Else
    MsgBox "Desmarcar Intermitente!"
    End If
End Sub

Private Sub FreqButton_Click()
    If IntCheckBox.Value = False Then
        EntOption = 2
        If FreqFrame.Visible = False Then
FreqFrame.Visible = True
            If CompFrame.Visible = True Then
CompFrame.Visible = False
            Else
                MsgBox "Desmarcar Intermitente!"
            End If
        End
    Sub

```

OBS: os módulos referentes a declarações de variáveis e a geração de arquivos de saída não são aqui apresentados por não serem de relevância à compreensão do modelo e por serem muito extensos.