

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO

DEBORA MONDINI

Migração por extrapolação de ondas
em três dimensões

CAMPINAS
2011

Este exemplar corresponde à redação final
de tese defendida por Debora Mondini
aprovada pela comissão julgadora em 15 /
04 / 2011.

maria Amélia novais Schleicher
Orientadora

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO

**Migração por extrapolação de ondas
em três dimensões**

Autor: Debora Mondini

Orientadora: Maria Amélia Novais Schleicher

Curso: Ciências e Engenharia de Petróleo

Área de Concentração: Reservatório e Gestão

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à Comissão de Pós Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo.

Campinas, 2011

SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M745m Mondini, Debora
Migração por extrapolação de ondas em três
dimensões / Debora Mondini. --Campinas, SP: [s.n.],
2011.

Orientador: Maria Amélia Novais Schleicher.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto
de Geociências.

1. Migração. 2. Equação da onda. 3. Padé,
Aproximante de. I. Schleicher, Maria Amélia Novais.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências. III.
Título.

Título em Inglês: Migration by wave extrapolation in three dimensions

Palavras-chave em Inglês: Migration, Wave equation, Padé, the approximant

Área de concentração: Reservatórios e Gestão

Titulação: Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

Banca examinadora: Jessé Carvalho Costa, Carlos Cunha

Data da defesa: 15/04/2011

Programa de Pós Graduação: Ciências e Engenharia de Petróleo

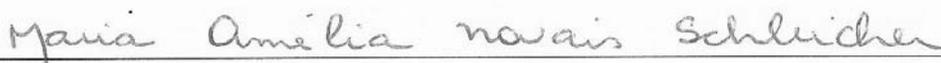
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Migração por extrapolação de ondas
em três dimensões

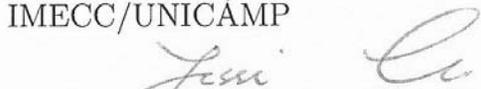
Autor: Debora Mondini

Orientadora: Maria Amélia Novais Schleicher

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta
Dissertação:



Profa. Dra. Maria Amélia Novais Schleicher
IMECC/UNICAMP



Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa
UFPA



Dr. Carlos Cunha
Petrobras

Campinas, 15 de Abril de 2011.

Agradecimentos

À minha orientadora, Maria Amélia Novais Schleicher, sem o seu apoio e o incentivo, desde a graduação não teria chegado até aqui. Sou muito grata pela orientação.

Aos Profs. Jessé Carvalho Costa e Joerg Schleicher pela ajuda durante o Mestrado.

Aos colegas de pós-graduação, em especial Momoe Sakamori Pisnitchenko e Tiago Antonio Alves Coimbra, pelas críticas e sugestões.

A minha família pelo apoio durante esta jornada.

Aos meus amigos Claudia Akemi Furushima Porto e João Paulo Porto pela ajuda, suporte e pelo ouvido a disposição.

À Petrobras, pelo apoio financeiro.

Resumo

Em três dimensões, os métodos de migração baseados na resolução da equação da onda unidirecional, além de enfrentar problemas para imagear refletores com fortes mergulhos e tratar ondas evanescentes, ainda são computacionalmente caros. Para os problemas de imagear refletores com forte mergulho e ondas evanescentes, nessa dissertação, usamos a aproximação em série de Padé complexa. Pelo fato da resolução do problema tridimensional ser computacionalmente cara, ao longo dos anos várias técnicas foram elaboradas com o objetivo de reduzir os custos e ainda manter a qualidade do método de migração que se estiver usando. Uma técnica comumente utilizada é o *splitting*.

Nosso objetivo com esse trabalho é testar os operadores de migração usando a aproximação em série de Padé complexa, a técnica de *splitting* em duas ou quatro direções alternadas, bem como o termo de correção de Li. Para o caso de *splitting* em apenas duas direções, enfrentamos o problema de anisotropia numérica, ou seja, o operador de migração age de forma diferente em direções diferentes, resultando em grandes erros de posicionamento. Para corrigir esse problema usamos a correção de Li. Sem alterar a migração FD 2D, a correção de Li é uma extrapolação do campo residual por um deslocamento de fase.

Quando o *splitting* é aplicado em quatro direções (nas coordenadas horizontais e nas diagonais) de forma alternada ainda podemos enfrentar problemas de anisotropia numérica e conseqüentemente mau posicionamento dos refletores muito inclinados. Por isso, testamos a aplicação da correção de Li para este caso. Nessa dissertação, comparamos os resultados obtidos pela técnica de migração FD, os testes foram realizados em um meio homogêneo e nos dados sintéticos 3D SEG-EAGE.

Palavras chaves: migração 3D, extrapolação, equação da onda, *splitting*, Padé complexo.

Abstract

In three dimensions, migration methods based on solving the one-way wave equation, besides facing problems to handle evanescent waves and to image steep dip reflectors, are still computationally expensive. For the problems of imaging steep dip reflectors and treat evanescent waves, in this dissertation, we use the complex Padé approximation. Because solving three dimensional problems is computationally expensive, several techniques have been developed in order to reduce costs and still maintain the quality of the migration method. A commonly used technique is splitting.

Our goal with this study is to test the migration operators using the complex Padé approximation, the technique of splitting into two or four alternating directions, as well as the Li correction term. For the case of splitting in two directions only, we face the problem of numerical anisotropy, i.e., the migration operator acts differently in different directions, resulting in a mispositioning of the reflectors in the situation where the strike direction of the reflector is far off the migration planes. To correct for this problem we use the Li correction. Without changing 2D FD migration, Li correction is an extrapolation of the residual wave field by a phase shift.

When splitting is applied in four directions (the horizontal coordinates and the diagonals) alternately we can still face problems of numerical anisotropy and consequently mispositioning of steep dip reflectors. Because of that, we also tested the application of the Li correction. In this dissertation, we compare the results obtained by the FD migration technique. The tests were conducted in a homogeneous media and synthetic 3D data in SEG-EAGE.

Key words: 3D migration, extrapolation, wave equation, splitting, complex Padé.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Equação da onda unidirecional	7
2.1 Motivação	7
2.2 Dedução da equação da onda unidirecional	8
2.3 Relação de dispersão	10
2.4 Aproximação do operador raiz quadrada	11
2.4.1 Frações contínuas	12
2.4.2 Séries de potência, de Taylor e de MacLaurin	15
2.4.3 Série de Padé	16
2.4.4 Série de Padé complexa	18
3 Métodos de migração por equação da onda	21
3.1 Deslocamento de fase (<i>Phase-Shift</i>)	21
3.2 Deslocamento de fase mais interpolação (PSPI)	22
3.3 <i>Split-step</i>	23
3.4 Diferenças finitas (FD)	25
3.5 Diferenças finitas e Fourier (FFD)	26
3.6 Diferenças finitas e Fourier mais interpolação (FFDPI)	28
3.7 Operadores FD e FFD com a aproximação de Padé complexa	29
3.7.1 Diferenças finitas (FD)	29
3.7.2 Diferenças finitas e Fourier (FFD)	31

4	Implementação	35
4.1	<i>Splitting</i>	35
4.2	Correção para <i>splitting</i> em duas direções (correção de Li)	38
4.3	Implementação das migrações	40
4.3.1	Implementação da migração FD	40
4.3.2	Implementação da migração FFD	42
5	Resultados Numéricos	45
5.1	Testes em meio homogêneo	45
5.1.1	Efeitos da correção de Li	46
5.1.2	Aproximações de Padé real e complexa	50
5.1.3	Número de termos e ângulo de rotação	57
5.1.4	Interpolação	66
5.1.5	<i>Splitting</i> em 4 direções	70
5.1.6	Discussão dos resultados	73
5.2	Testes em meio não homogêneo	74
5.2.1	Migração FFDPI	78
5.2.2	Efeito da correção de Li	81
5.2.3	Velocidade média	88
5.2.4	Aproximações de Padé real e complexa	95
5.2.5	Suavização de média móvel	108
5.2.6	Interpolação	113
5.2.7	Número de termos e ângulo de rotação	120
5.2.8	<i>Splitting</i> em 4 direções	138
5.2.9	Discussão dos resultados	143
6	Conclusão	145
	Bibliografia	147
A	Aproximação do operador raiz quadrada em série de Padé complexa	151
B	Derivação do operador de continuação para baixo do método FFD	155
B.1	Ordem zero	157
B.2	Primeira ordem	157
B.3	Segunda ordem	158
B.4	Terceira ordem	159
B.5	Quarta ordem	159

Lista de Tabelas

2.1	Correspondência entre o alcance da migração e a aproximação do operador raiz quadrada.	14
2.2	Valores dos coeficientes α e β para a aproximação do operador raiz quadrada.	15

Lista de Figuras

1.1	Métodos de migração e seus domínios de operação.	2
2.1	Representação do experimento hipotético refletor explosivo.	8
4.1	Modelo 3D de uma refletor inclinado. O ângulo de inclinação do refletor é θ e o ângulo de azimute entre a linha de interesse e a inclinação do refletor é ϕ . . .	36
4.2	Ilustração de azimute.	37
5.1	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções sem correção de Li.	47
5.2	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li a cada 9 passos.	48
5.3	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li a cada 15 passos.	49
5.4	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li.	51
5.5	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15° , com correção de Li.	52
5.6	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li.	53
5.7	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25° , com correção de Li.	54
5.8	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li.	55
5.9	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45° , com correção de Li.	56

5.10	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°	58
5.11	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°	59
5.12	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°	60
5.13	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°	61
5.14	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 5°	62
5.15	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 15°	63
5.16	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 25°	64
5.17	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 45°	65
5.18	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade.	67
5.19	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade.	68
5.20	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade.	69
5.21	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas sem correção de Li.	71
5.22	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas com correção de Li.	72
5.23	Modelo do sal da EAGE/SEG. Representação por 4 cortes em $x = 3.0$ km (topo esquerda), $x = 8.32$ km (topo direita), $y = 3.0$ km (fundo esquerda) e $y = 8.32$ km (fundo direita).	76
5.24	Modelo do sal da EAGE/SEG. Representação por 4 cortes horizontais nas profundidades $z = 1.1$ m (topo esquerda), $z = 2.1$ km (topo direita), $z = 2.7$ km (fundo esquerda) e $z = 3.1$ km (fundo direita).	77
5.25	Resposta impulso obtida por migração FFDPI com <i>splitting</i> em duas direções no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	79

5.26	Resposta impulso obtida por migração FFDPI com <i>splitting</i> em duas direções no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	80
5.27	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais. . . .	82
5.28	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais. . .	83
5.29	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 6 passos. Representação por cortes verticais.	84
5.30	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 6 passos. Representação por cortes horizontais.	85
5.31	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 12 passos. Representação por cortes verticais.	86
5.32	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 12 passos. Representação por cortes horizontais.	87
5.33	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da velocidade. Representação por cortes verticais.	89
5.34	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da velocidade. Representação por cortes horizontais.	90
5.35	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da vagarosidade. Representação por cortes verticais.	91
5.36	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da vagarosidade. Representação por cortes horizontais.	92
5.37	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média do cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.	93
5.38	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média do cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.	94

5.39	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	96
5.40	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	97
5.41	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais. . . .	98
5.42	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais. . .	99
5.43	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	100
5.44	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	101
5.45	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais. . . .	102
5.46	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais. . .	103
5.47	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	104
5.48	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	105
5.49	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais. . . .	106
5.50	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45°, com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais. . .	107

5.51	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções sem a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	109
5.52	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções sem a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	110
5.53	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	111
5.54	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções com a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	112
5.55	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade. Representação por cortes verticais.	114
5.56	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade. Representação por cortes horizontais.	115
5.57	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.	116
5.58	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.	117
5.59	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.	118
5.60	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.	119
5.61	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes verticais.	122

5.62	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes horizontais.	123
5.63	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes verticais.	124
5.64	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes horizontais.	125
5.65	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes verticais.	126
5.66	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes horizontais.	127
5.67	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes verticais.	128
5.68	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes horizontais.	129
5.69	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 5°. Representação por cortes verticais.	130
5.70	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 5°. Representação por cortes horizontais.	131
5.71	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes verticais.	132
5.72	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15°. Representação por cortes horizontais.	133
5.73	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes verticais.	134

5.74	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25°. Representação por cortes horizontais.	135
5.75	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 45°. Representação por cortes verticais.	136
5.76	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 45°. Representação por cortes horizontais.	137
5.77	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	139
5.78	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	140
5.79	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.	141
5.80	Resposta impulso obtida por migração FD com <i>splitting</i> em quatro direções alternadas com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.	142

Capítulo 1

Introdução

Por causa da sua superioridade em áreas de geologia complexa, atualmente, a migração por equação da onda está por substituir a migração Kirchhoff no imageamento de dados sísmicos reais, até mesmo em três dimensões. Enquanto a migração Kirchhoff conta com vários anos de desenvolvimento tecnológico que tornaram seu uso muito eficiente, implementações tridimensionais eficientes para a migração por equação da onda encontram-se ainda em fase de desenvolvimento. Neste trabalho, o foco é combinar as técnicas existentes de aceleração para a migração por equação da onda em três dimensões com métodos implementacionais mais estáveis propostos recentemente, com o intuito de tornar o processo mais rápido em modelos com grandes contrastes de velocidades.

Os métodos de migração baseados na equação da onda apresentam melhor resultado do que a migração Kirchhoff na presença de forte variação lateral de velocidade, mas possuem limitações para imagear refletores inclinados com grandes ângulos (acima de 45°). Entretanto, em três dimensões, o custo computacional da migração por extrapolação do campo de onda é maior, tornando as técnicas de migração lentas em comparação à migração Kirchhoff. A maioria dos métodos que utilizam a equação da onda são baseados em resolver a equação da onda acústica unidirecional. Utilizar esta equação ao invés da equação da onda completa já reduz parte do problema de custo computacional, pois considera apenas um sentido de propagação. Fatorar formalmente a equação da onda em duas equações de sentido único é possível desde que a velocidade seja constante. Quando consideramos que a velocidade é localmente constante e utilizamos a equação da onda unidirecional, estamos fazendo uma aproximação.

Existem muitos métodos diferentes para resolver numericamente a equação da onda unidirecional. Esses métodos podem ser agrupados em três classes: métodos de Fourier, tais como Deslocamento de Fase (*Phase-Shift*) (Gazdag, 1980), Deslocamento de Fase mais Interpolação (*Phase-Shift Plus Interpolation*–PSPI) (Gazdag and Sguazzero, 1984), *Split-Step* (SS)

(Stoffa et al., 1990) resolvidos no domínio de número de onda; método de Diferenças Finitas (*Finite Difference*–FD) (Claerbout, 1985); métodos híbridos, tais como *Phase Screen* (Xie and Wu, 1998) e Diferenças Finitas e Fourier (*Fourier Finite Difference*–FFD) (Ristow and Rühl, 1994), bem como sua versão mais estável Diferenças finitas e Fourier mais interpolação (*Fourier Finite Difference Plus Interpolation*–FFDPI) (Biondi, 2002).

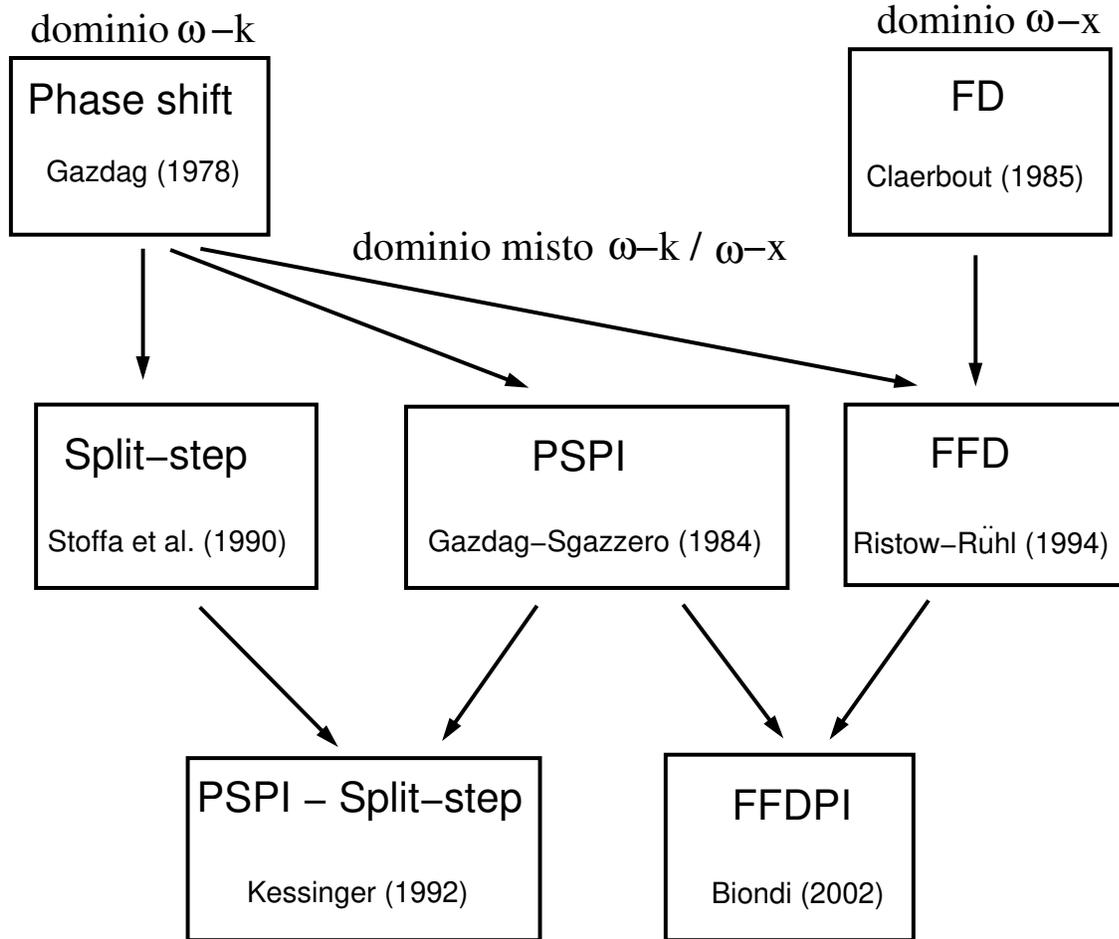


Figura 1.1: Métodos de migração e seus domínios de operação.

Na Figura 1.1 podemos ver os domínios em que os diferentes métodos de migração operam. Note que ω significa domínio da frequência, x domínio do espaço e k domínio do número de onda.

Na primeira classe de métodos temos o método de migração por deslocamento de fase que é eficiente pois lida bem com eventos com fortes mergulhos desde que não haja variação lateral de velocidade. Porém, a sua qualidade diminui rapidamente quando as variações laterais do meio aumentam. Quando houver variação lateral de velocidade moderada, podemos utilizar os métodos de deslocamento de fase mais interpolação ou *split-step*, sendo que o primeiro

faz uso de várias velocidades de referência, realizando-se posteriormente em cada ponto da imagem uma etapa de interpolação entre os campos retropropagados com as velocidades mais próximas da velocidade local, e o segundo é baseado em aproximações para o operador de migração que pressupõem pequenos contrastes de velocidade, acrescentando-se assim um operador de correção ao operador de migração por deslocamento de fase.

Na segunda classe, os métodos de diferenças finitas (FD) explícitos ou implícitos vêm de uma linha de algoritmos de migração por equação da onda que implementam o operador de deslocamento de fase no domínio do espaço. A migração FD tem a vantagem de lidar bem com variações quaisquer de velocidade, mas apresenta restrições quando há grandes ângulos de incidência (abertura angular maior do que 45°), e não consegue descrever bem a propagação de ondas evanescentes.

Um exemplo de onda evanescente ocorre quando uma onda plana incide com ângulo maior do que o ângulo crítico em uma interface plana separando dois meios homogêneos. Neste caso, a onda transmitida é uma onda evanescente com direção de propagação paralela à interface e amplitude decaindo exponencialmente com a distância à interface. Matematicamente, ondas evanescentes são caracterizadas por vetores de onda em que uma ou mais componentes possuem valor complexo.

Na terceira classe, o método de diferenças finitas e Fourier (FFD) fornece uma aproximação melhor do operador de migração, portanto, apresenta vantagens em relação a cada um dos métodos citados acima. O método FFD pode se tornar instável no caso de fortes contrastes de velocidade (Biondi, 2002). Por isso, para corrigir esta limitação, Biondi (2002) propôs modificações ao método FFD, tornando-o incondicionalmente estável, até para velocidades de referência maiores do que a velocidade do meio. Estas modificações permitem a inclusão de um passo de interpolação, de modo a realizar o que foi chamado de diferenças finitas e Fourier mais interpolação (FFDPI). O custo computacional deste método é significativamente maior por causa da interpolação que exige a propagação de ondas com múltiplas velocidades de referência.

Em ambos os métodos de migração, FD e FFD, a aproximação em série de Padé real ou uma simples expansão em série de Taylor são usados para aproximar o operador raiz quadrada. Mas operadores reais não conseguem lidar com ondas evanescentes (Millinazzo et al., 1997). Para resolver este problema, Amazonas et al. (2007) propuseram uma aproximação em série de Padé complexa. Esta expansão foi anteriormente usada em geofísica. Zhang and Hoversten (2003) utilizaram o método FD, mas sua implementação não era eficiente para grandes ângulos de abertura de migração. Zhang et al. (2004) extraíram a solução de *split-step* Padé complexo e Fourier da equação da onda unidirecional usando as aproximações em série de Padé.

Amazonas et al. (2007) usaram a aproximação em série de Padé complexa para aproximar

diretamente o operador raiz quadrada da equação da onda unidirecional. Eles apresentaram dois algoritmos de migração, FD e FFD, ambos em duas dimensões, que se mostraram mais estáveis do que a implementação com coeficientes reais. Assim, esses algoritmos admitem uma abertura angular arbitrária e garantem uma qualidade do desempenho equivalente ao algoritmo proposto por Biondi (2002), a um custo computacional consideravelmente inferior. Esses trabalhos mostram que a aproximação em série de Padé complexa atenua imprecisões e instabilidades devido à presença de ondas evanescentes.

A aplicação de uma técnica de migração por equação da onda em três dimensões acrescenta o problema do custo computacional aos problemas de estabilidade e precisão. Por isso, Claerbout (1985) propôs a ideia de *splitting*, que consiste em aproximar o operador 3D por uma sequência de operadores 2D dentro de planos, geralmente ao longo dos eixos de coordenadas horizontais, nas direções *inline* e *crossline*. Assim, pode-se realizar o processo em menos tempo, assim aumentando a eficiência do método. Para o caso de *splitting* em apenas duas direções, enfrentamos a desvantagem de ser incorreto para refletores com alta inclinação, resultando em grandes erros de posicionamento desses refletores na situação em que a direção de mergulho do refletor está longe das direções dos planos de migração, gerando assim uma forte anisotropia numérica, ou seja, um operador de migração bastante diferente do correto.

Quando o *splitting* é aplicado em um operador de migração de diferenças finitas implícito de tal forma que as equações resultantes são resolvidas alternadamente nas direções *inline* e *crossline*, o esquema FD resultante é conhecido como esquema implícito de direções alternadas, ou em inglês, Alternating-Direction-Implicit (ADI) (Wachspress and Harbetler, 1960; Douglas, 1962; Mitchell and Griffiths, 1980). O preço a se pagar pela economia quando se faz uso do *splitting* é uma piora na precisão do resultado final, conforme o azimute aumentar. Porém, utilizando o *splitting*, Diet (1984) observou que, para ângulos de inclinação do refletor de até 45° , os resultados são bastante aceitáveis.

Esquemas de diferenças finitas implícito de 45° são bastante utilizados pois lidam bem com variações laterais de velocidade. Este esquema fornece um bom equilíbrio entre eficiência computacional e precisão com garantia de estabilidade incondicional. Quando em três dimensões, além do problema de conseguir imagear corretamente grandes ângulos de mergulho, ainda aparece o problema da quebra da simetria circular, também chamado de anisotropia numérica, ou seja, o operador de migração age de forma diferente em diferentes direções.

Para melhorar esse comportamento e ainda manter os custos computacionais referentes ao método sob controle, diferentes procedimentos foram propostos ao longo dos anos. Ristow (1980) (veja também Ristow and Rühl (1997)) propôs além da migração 2D nas direções dos eixos, fazer a migração 2D na direção das diagonais entre os eixos. Kitchenside (1988) usou a migração por deslocamento de fase no domínio frequência-número de onda seguido de

um passo adicional de propagação do campo de onda residual para reduzir o erro causado pelo *splitting*. Graves and Clayton (1990) propuseram a implementação de um operador de correção de fase usando diferenças finitas e incorporando uma função de amortecimento para garantir a estabilidade do esquema de migração FD 3D.

Invertendo a ideia de Kitchenside (1988), que propaga o campo de onda usando deslocamento de fase e o campo de onda residual usando diferenças finitas, Li (1991) propôs usar o esquema de migração FD convencional mais uma correção do campo residual por um deslocamento de fase para melhorar a qualidade da imagem migrada. Sem qualquer mudança na migração 2D convencional, a correção de Li adiciona um filtro de deslocamento de fase em certos passos da extrapolação para baixo.

Collino and Joly (1995) resolveram uma nova família de equações 3D usando o método ADI. Essas novas equações reduzem significativamente a anisotropia numérica, mas são aproximadamente quatro vezes mais caras que o *splitting* convencional em duas direções. Wang (2001) desenvolveu uma técnica alternativa para melhorar a precisão da solução FD. Para garantir estabilidade e eficiência, ele mantém o esquema FD implícito e as direções alternadas, mas interpola entre as soluções ADI e o campo de onda, antes de cada passo da extrapolação. Ele chamou o método resultante de ADI mais interpolação (ADIPI). A desvantagem desse método é que ele pode produzir instabilidades na presença de forte variação lateral de velocidade.

Zhou and McMechan (1997) propuseram uma equação da onda de 45° que pode ser expressa como um sistema de equações diferenciais de primeira e segunda ordem (Zhang et al., 1988), e fatorada como o produto entre dois termos unidimensionais que correspondem às direções laterais (Mitchell and Griffiths, 1980; Graves and Clayton, 1990). A grande vantagem dessa técnica é que a extrapolação FD convencional precisa apenas de algumas mudanças. Assim, a eficiência do *splitting* convencional é preservada, sem a necessidade de adicionar nenhum termo de compensação de erro. Mesmo assim, esta técnica pode ser instável na presença de forte variação lateral de velocidade, além do que, o modelo de velocidade precisa ser bastante suave.

Nosso objetivo com esse trabalho é testar os operadores de migração usando a aproximação em série de Padé complexa, a técnica de *splitting* em duas ou quatro direções alternadas, bem como o termo de correção de Li (1991). Para tal, comparamos as respostas impulso da migração FD variando os parâmetros tais como número de termos da aproximação Padé real ou complexa, intervalo de aplicação da correção de Li e interpolação com peso.

Por ser um filtro de deslocamento de fase, o termo de correção obedece as mesmas regras que a migração por deslocamento de fase, ou seja, a velocidade pode variar apenas com a profundidade, devendo ser portanto, constante lateralmente. Ou então, quando houver

variações laterais moderadas, usamos as regras da migração por deslocamento de fase mais interpolação. Por isso, velocidades de referência devem ser escolhidas adequadamente. Essa escolha é feita usando o algoritmo de Lloyd (Clapp, 2004). Esse algoritmo consiste em dado um intervalo de valores de velocidade, subdividimos esse intervalo, encontramos o valor médio de cada subintervalo, removemos as regiões que não contêm valores e estabelecemos novos subintervalos. Por ser um procedimento recursivo, a primeira divisão de subintervalos pode ser feita de maneira simétrica. No final, teremos subintervalos melhor definidos de modo que o valor médio de cada subintervalo será a velocidade de referência.

No capítulo 2 falamos sobre o experimento hipotético conhecido como refletor explosivo, mostramos a fatoração da equação da onda em duas equações unidirecionais, falamos sobre a relação de dispersão e os diferentes modos de aproximar o operador raiz quadrada, dentre eles, as frações contínuas, as séries de potência, de Taylor, de McLaurin, de Padé e de Padé complexa. No capítulo 3 fazemos uma revisão dos métodos de migração, dentre eles, deslocamento de fase, deslocamento de fase mais interpolação, *split-step*, FD, FFD e FFDPI, bem como o desenvolvimento dos métodos FD e FFD com a aproximação em série de Padé complexa. No capítulo 4 tratamos as questões ligadas a implementação, ou seja, falamos sobre a técnica de *splitting*, o termo de correção de Li, a como pode ser feita a implementação dos métodos FD e FFD usando a aproximação complexa.

Em seguida temos os resultados numéricos, primeiro os testes em meio homogêneo, e em seguida os testes no modelo de sal da SEG-EAGE. Nesses testes, geramos um grande número de figuras com o objetivo de comparar a maior quantidade de informação possível. Para isso, temos 6 classes diferentes de testes para o meio homogêneo e 7 classes diferentes para o modelo de sal.

Capítulo 2

Equação da onda unidirecional

2.1 Motivação

Considere um experimento hipotético, onde fonte e receptor estão localizados na mesma posição. A energia que será registrada no receptor será aquela cujos raios têm incidência normal no refletor. O problema é que este experimento é impossível de ser realizado. Agora imagine que em um determinado momento o refletor explode, então, cada ponto do refletor é equivalente a uma fonte, e cada fonte gera uma frente de onda que se propaga para cima. Na superfície existe um receptor que grava a chegada dessa energia. O modelo que descreve esse experimento é chamado de refletor explosivo (Loewenthal et al., 1976). Na Figura 2.1 podemos ver o modelo correspondente a este experimento. Cinematicamente, a seção sísmica que resulta do modelo de refletor explosivo é equivalente a uma seção de afastamento nulo, com uma importante diferença. A seção de afastamento nulo é registrada com o tempo de trânsito duplo, ou seja, da fonte até o refletor e deste até o receptor. Enquanto que no modelo de refletor explosivo, o tempo de trânsito registrado se refere ao deslocamento desde a fonte posicionada sobre o refletor até os receptores posicionados na superfície. Portanto, para que haja compatibilidade entre as seções, podemos considerar que a velocidade de propagação é a metade da velocidade verdadeira. Deste modelo hipotético do refletor explosivo, uma migração consiste somente do reposicionamento na onda sísmica registrada para a sua posição fonte, no tempo $t = 0$.

Desta forma, vemos que necessitamos, ao menos aproximadamente, meramente as ondas que propagam para cima para a realizar uma migração pós-empilhamento ou de afastamento nulo. Na próxima seção vemos como separar a equação da onda, que descreve a propagação em todas as direções, em duas equações unidirecionais, que descrevem as ondas com direção de propagação preferencialmente para cima e preferencialmente para baixo.

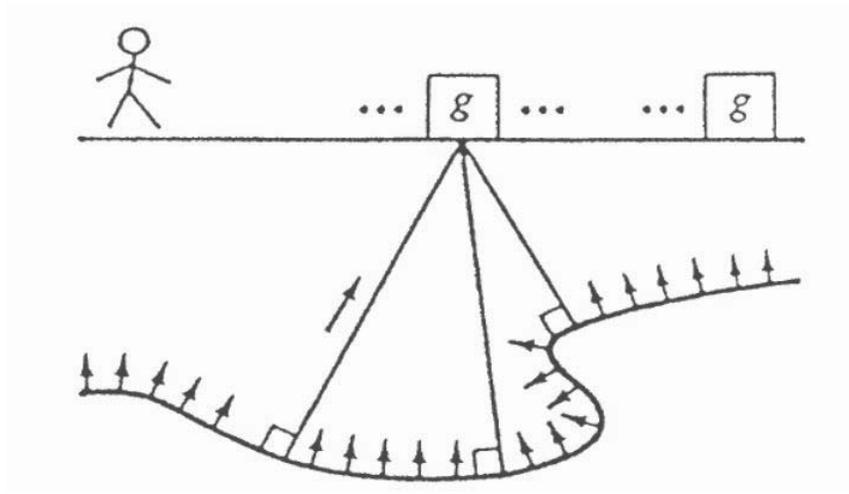


Figura 2.1: Representação do experimento hipotético refletor explosivo.

2.2 Dedução da equação da onda unidirecional

Um exemplo de equação hiperbólica é a equação da onda. Ela governa a propagação de ondas acústicas em um determinado meio. É uma equação diferencial parcial de segunda ordem que descreve a evolução do campo de pressão p como uma função da posição \mathbf{x} e do tempo t . A equação da onda acústica para um meio homogêneo é dada por Leontovich and Fock (1946)

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

onde ∇ é o operador Laplaciano, $p(\mathbf{x}, t)$ é o campo de pressão, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e v é a velocidade do meio; considerada constante.

Definimos a transformada de Fourier nas coordenadas horizontais x e y e no tempo t como

$$P(k_x, k_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}, t) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} dt dx dy, \quad (2.2)$$

e sua inversa nas mesmas variáveis como

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} P(k_x, k_y, z, \omega) e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} d\omega dk_x dk_y. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) na equação (2.1), obtém-se

$$\frac{\partial^2 P(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z^2} = \frac{(-i\omega)^2}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2) \right) P(k_x, k_y, z, \omega), \quad (2.4)$$

onde P ainda representa o campo de pressão, mas no domínio do número de onda e frequência.

A equação (2.4) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} \right] P(k_x, k_y, z, \omega) = 0. \quad (2.5)$$

Os dois operadores diferenciais em colchetes comutam. Desta forma, todo $P(k_x, k_y, z, \omega)$ que satisfaz uma das duas equações

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} \right] P(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (2.6)$$

ou

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} \right] P(k_x, k_y, z, \omega) = 0, \quad (2.7)$$

automaticamente satisfaz também a equação (2.5). Inspeção detalhada mostra que as equações (2.6) e (2.7) descrevem ondas propagando preferencialmente para baixo e para cima, respectivamente.

Para a migração, a equação de interesse é aquela que descreve as ondas para cima, ou seja

$$\frac{\partial P(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} P(k_x, k_y, z, \omega). \quad (2.8)$$

Passando a transformada de Fourier inversa nos números de onda horizontais k_x e k_y na equação acima, podemos escrever formalmente

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} P(\mathbf{x}, \omega).$$

Considerando que a velocidade é localmente constante, ou seja, a propagação das ondas em cada local \mathbf{x} é bem descrita por uma velocidade constante, mas o valor desta velocidade constante depende de \mathbf{x} , podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{v(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} P(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.9)$$

Usamos o sentido ascendente pois vamos retropropagar, ou extrapolar para baixo os dados registrados $P(x, y, z = 0, t)$ até obtermos $P(x, y, z, t = 0)$ que, como vimos, pelo modelo de

refletor explosivo é a posição do refletor. Para os exemplos numéricos dessa dissertação, vamos testar os algoritmos de migração através de suas respostas impulso. Então a seção sísmica consiste apenas de um sinal localizado em um traço no centro do modelo. Daí, a partir do tempo onde esse sinal estiver, somos capazes de traçar a isócrona correspondente. Como o próprio nome já diz, uma isócrona é a superfície representando o local que uma onda pode alcançar em um determinado tempo fixo. Para um meio homogêneo é uma esfera.

2.3 Relação de dispersão

Agora, note que a partir da transformada de Fourier no tempo e nas coordenadas x , y e z da equação (2.1), obtemos

$$-ik_z = \pm \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)}, \quad (2.10)$$

onde o sinal $+$ descreve ondas propagando para cima e o sinal $-$ ondas propagando para baixo. A equação (2.10) é conhecida como relação de dispersão, que em termos de ângulo de fase θ pode ser escrita como

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1,$$

onde $\text{sen}\theta = v(k_x^2 + k_y^2)/\omega$. Porém, para ângulos θ reais não havia um significado no caso em que o seno fosse maior do que 1. No entanto, uma vez que os dados podem ser uma função arbitrária no domínio (t, x, y) , sua transformada de Fourier pode ser uma função arbitrária no domínio (ω, k_x, k_y) . Portanto, na prática, sempre existe energia para ângulos de fase cujo seno é maior do que 1 (Claerbout, 1985). Quando isso acontecer, o ângulo θ precisa ser complexo. Neste caso, o termo k_z para ondas propagando para cima pode ser escrito como

$$-ik_z = \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)} = \frac{-\omega}{v} \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2) - 1},$$

que é a relação de dispersão de uma onda evanescente.

Note que a expressão obtida para k_z na equação (2.10) é igual a expressão que aparece na equação (2.8). Assim, respeitando o sinal, podemos reescrever a equação (2.8) como

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -ik_z P(\mathbf{x}, \omega),$$

cuja solução pode ser escrita como

$$P(x, y, z, \omega) = P(x, y, z_0, \omega) e^{-ik_z(z-z_0)}, \quad (2.11)$$

onde z_0 é a profundidade na qual se conhece uma condição inicial $P(x, y, z_0, \omega)$.

Uma forma mais geral de escrever a solução (2.11) é

$$P(x, y, z + \Delta z, \omega) = P(x, y, z, \omega)e^{-ik_z\Delta z}. \quad (2.12)$$

Assim, $P(x, y, z_0, \omega)$ ainda é o valor inicial para o primeiro passo. De uma forma geral, a condição inicial para a próxima equação é a solução da equação anterior. Para a implementação do operador indicado pela raiz quadrada na equação (2.12) é necessário uma representação operacional, ou seja, é preciso aproximar esse operador. Para meios sem variação lateral de velocidade, os operadores podem ser representados exatamente no domínio de Fourier (Gazdag, 1978). Para meios com variação lateral de velocidade, o operador admite aproximações em frações contínuas (Claerbout, 1985), em série de Taylor (Stoffa et al., 1990), em série de Padé real (Ristow and Rühl, 1994), e em série de Padé complexa (Amazonas et al., 2007).

Os diferentes métodos de migração são determinados dependendo da aproximação do operador de propagação que se utiliza. Como já foi dito, a solução da equação (2.12) requer a especificação de uma condição inicial para o campo de onda em um nível inicial. Estamos chamando essa condição inicial de $P(x, y, z_0, \omega)$.

Na apresentação teórica feita nessa dissertação, os métodos de migração serão desenvolvidos primeiramente, como foram propostos por seus idealizadores e posteriormente, usando a aproximação de Padé complexa e a técnica de *splitting*.

2.4 Aproximação do operador raiz quadrada

Os métodos de migração que utilizam a equação da onda em geral baseiam-se em diferentes aproximações do operador raiz quadrada da equação da onda unidirecional. Para resolver a equação numericamente, o operador raiz quadrada precisa ser expandido e aproximado de alguma forma. As quatro formas de se aproximar o operador que serão abordadas nessa dissertação já foram mencionadas antes, são elas frações contínuas, série de potência, série de Taylor, e as séries de Padé real e complexa.

2.4.1 Frações contínuas

Podemos escrever uma função em forma de frações contínuas (Olds, 1963) como

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

Em geral, os números $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, podem ser reais ou complexos, e o número de termos pode ser finito ou infinito.

As frações contínuas simples infinitas têm a forma

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

onde o primeiro termo a_1 , é, geralmente, um inteiro positivo ou negativo, podendo ser zero, e os demais termos são inteiros positivos. Ou então, elas também podem ser finitas, sendo representadas por

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Uma forma mais conveniente de escrever a fração contínua acima é

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

e os termos a_1, a_2, \dots, a_n são chamados quocientes parciais da fração contínua. Qualquer número racional p/q pode ser expandido em uma fração contínua simples finita

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

Considerando as frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, \quad c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \quad \dots,$$

essas são chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ... convergentes, respectivamente, da fração contínua

$$[a_1, a_2, \dots, a_n].$$

O n -ésimo convergente

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

é igual à própria fração.

Agora considere a equação para o número de onda k_z dada por

$$k_z = \frac{(-i\omega)}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} = \frac{(-i\omega)}{v} R, \quad (2.13)$$

com

$$R = \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}.$$

Podemos escrever um polinômio de ordem n , usando a aproximação de frações parciais da forma (Claerbout, 1985)

$$R_{n+1} = 1 + \frac{\frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + R_n}. \quad (2.14)$$

Se a sequência dada pelo polinômio acima converge quando n tende a ∞ , temos

$$R = 1 + \frac{\frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + R}$$

que é equivalente a

$$R = \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}. \quad (2.15)$$

A raiz quadrada da equação (2.15) nos dá a raiz quadrada da equação (2.13). Geometricamente, esta equação diz que o cosseno ao quadrado do ângulo incidente é igual a um menos o seno ao quadrado do mesmo ângulo. Quando truncamos a expansão, geramos erros no ângulo, e ainda, geralmente, somente os termos de baixa ordem são usados na aproximação, aumentando o erro. Como podemos ver na Tabela 2.1, tomando como início da sequência $R_0 = 1$, obtemos os alcances da migração dados em ângulos, dependendo de quantos termos são considerados na aproximação (Claerbout, 1985).

5°	$R_0 = 1$
15°	$R_1 = 1 + \frac{X^2}{2}$
45°	$R_2 = 1 + \frac{X^2}{2 + \frac{X^2}{2}}$
60°	$R_3 = 1 + \frac{X^2}{2 + \frac{X^2}{2 + \frac{X^2}{2}}}$

Tabela 2.1: Correspondência entre o alcance da migração e a aproximação do operador raiz quadrada.

onde

$$X^2 = \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Godfrey and Claerbout (1979) mostraram que os métodos de 15° e 45° são truncamentos de uma expansão de frações contínuas. Por várias razões históricas as equações dadas na Tabela 2.1 são ditas equação de 5°, 15°, 45° e 60°, respectivamente, sendo que o nome significa o alcance dos ângulos que são adequadamente tratados. Normalmente, se usa a aproximação de 45°.

Ainda, se depois da expansão fatorarmos a equação de acordo com Ma (1982), temos

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{i\omega}{v(\mathbf{x})} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + \beta_n \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right] P,$$

onde os coeficientes otimizados α_n e β_n são dados na Tabela 2.2 (Lee and Suh, 1985).

N	ângulo	α	β
2	65°	0.4782	0.3764
4	80°	0.0403	0.8740
		0.4573	0.2227
6	87°	0.0042	0.9729
		0.0813	0.7444
		0.4142	0.1508
8	90°	0.0005	0.9941
		0.0148	0.9194
		0.1176	0.6145
		0.3670	0.1057
10	90°	0.0002	0.9974
		0.0042	0.9648
		0.0339	0.8249
		0.1438	0.4833
		0.3180	0.0736

Tabela 2.2: Valores dos coeficientes α e β para a aproximação do operador raiz quadrada.

Conforme vemos na Tabela 2.2, quanto maior a ordem da aproximação mais termos da série temos que usar, mas em compensação melhoramos o ângulo, chegando até 90°.

2.4.2 Séries de potência, de Taylor e de MacLaurin

As séries de potência são uma generalização da noção de polinômio. Uma série de potência de uma variável é uma soma infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots, \quad (2.16)$$

onde a_n denota o coeficiente do n -ésimo termo e c é uma constante. Esta série geralmente surge como uma série de Taylor de uma função.

A série de Taylor é a representação de uma função suficientemente suave como uma série de potência, cujos coeficientes são calculados a partir dos valores de suas derivadas num único ponto. Se a série for centrada em zero, também é chamada de série de MacLaurin. É comum usar apenas um número finito de termos da série para aproximar a função.

A série de Taylor em torno de c de uma função real ou complexa, $f(x)$ que é infinitamente diferenciável na vizinhança de um número real ou complexo c é a série de potência

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots, \quad (2.17)$$

que também pode ser escrita em forma de somatório como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!} (x - c)^n.$$

2.4.3 Série de Padé

Utilizar a aproximação em série de Taylor pode apresentar algumas dificuldades inerentes a tais séries. Muitas vezes a convergência da série é extremamente lenta, ou então, o seu raio de convergência não engloba regiões de interesse particular do problema que está sendo estudado. O método de Padé permite-nos partir de uma série de potência e obter muito mais informações do que a própria série pode nos fornecer diretamente. Sendo uma função racional, os aproximantes de Padé são mais ricos analiticamente do que as funções polinomiais resultantes de truncamentos sucessivos das séries de Taylor. O uso dos aproximantes de Padé vem mostrando que não somente convergem mais rapidamente do que a série de Taylor como, também, se estendem a regiões muito além da definida pelo raio de convergência da série de Taylor, apesar do fato que esses aproximantes de Padé tenham como base apenas os coeficientes da série de Taylor da função que queremos representar (Aguilera-Navarro et al., 1999).

Os aproximantes de Padé são funções racionais, ou seja, quocientes de dois polinômios, que representam a expansão. Esses aproximantes são caracterizados por dois inteiros positivos L e M , graus do numerador e denominador, respectivamente, da função racional, e são representados pela notação $[L/M]$. Explicitamente, o aproximante de Padé é definido por

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad L, M \geq 0$$

com

$$P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L$$

e

$$Q_M(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M.$$

Para determinar a ordem de nossa aproximação quando utilizamos os aproximante de Padé, podemos escrever

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \mathcal{O}(x^{L+M+1}), \quad (2.18)$$

a condição acima nos garante que $f(x)$ e o aproximante de Padé $P_L(x)/Q_M(x)$ diferem apenas por termos da ordem de x^{L+M+1} .

A partir da condição (2.18), podemos escrever

$$P_L(x) = f(x)Q_M(x) + \mathcal{O}(x^{L+M+1}) .$$

Desenvolvendo o membro direito desta expressão, até termos da ordem de x^{L+M} inclusive, fazendo $q_0 = 0$ e comparando termos de mesma potência de x encontramos o seguinte sistema de $L + M + 1$ equações algébricas

$$\begin{aligned} p_0 &= f_0 \\ p_1 &= f_1 + f_0 q_1 \\ p_2 &= f_2 + f_1 q_1 + f_0 q_2 \\ &\vdots \\ p_L &= f_L + f_{L-1} q_1 + \dots + f_0 q_L \\ 0 &= f_{L+1} + f_L q_1 + \dots + f_{L-M+1} q_M \\ 0 &= f_{L+2} + f_{L+1} q_1 + \dots + f_{L-M+2} q_M \\ &\vdots \\ 0 &= f_{L+M} + f_{L+M-1} q_1 + \dots + f_L q_M \end{aligned} \tag{2.19}$$

com

$$f_n \equiv 0 \quad \text{se} \quad n < 0 \quad \text{e} \quad q_j \equiv 0 \quad \text{se} \quad j > M .$$

O sistema (2.19) de $L + M + 1$ equações, em princípio, determina os coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ em termos dos coeficientes f_n da expressão (2.17), com $c = 0$. Examinando a estrutura do sistema (2.19), constatamos que para resolvê-lo podemos considerar primeiramente as últimas M equações, aquelas que envolvem apenas os coeficientes q_j . Uma vez determinados, esses coeficientes podem ser simplesmente inseridos nas primeiras $L + 1$ equações que nos darão imediatamente os coeficientes p_i . Não temos portanto, a necessidade de resolver o sistema completo de equações (2.19), bastando resolver o subsistema que envolve apenas os coeficientes q_j .

Então usando o método de aproximantes de Padé na equação (2.8), podemos reescrever o operador raiz quadrada como

$$\sqrt{1 + Z} \approx 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n Z}{1 + b_n Z}, \tag{2.20}$$

que é equivalente a fatoração de Ma (1982) e os coeficientes a_n e b_n são coeficientes de Padé

reais (Bamberger et al., 1988) e são dados por

$$a_n = \frac{2}{2N+1} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2N+1} \right) \quad \text{e} \quad b_n = \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right).$$

Essa aproximação é usada na maioria dos esquemas de migração FD. Dependendo do número N de termos usados na expansão, obtemos os diferentes esquemas de migração, tais como 15° , 45° e 60° .

2.4.4 Série de Padé complexa

Como vimos, a aproximação de Padé real é bastante utilizada, pois permite uma implementação numérica eficiente e uma ordem de erro superior a outros métodos de aproximação. Entretanto, se estivermos buscando imagens com boa precisão para grandes ângulos de propagação, a equação (2.20) apresenta a desvantagem de que para ângulos próximos de 90° , o argumento Z (lembrando que $Z = -\sin^2 \theta$) se torna muito próximo de -1 . E quando $Z < -1$, o lado esquerdo da equação (2.20) é complexo enquanto o lado direito continua real, causando uma inconsistência na equação. Fisicamente, isso significa que a representação da equação (2.20) não pode tratar de forma apropriada ondas evanescentes, o que é responsável pelo comportamento instável do algoritmo na presença de forte variação lateral de velocidade.

No plano complexo, a expansão de Padé com coeficientes reais corresponde às aproximações da raiz quadrada com linha de corte ao longo do eixo real negativo. Assim, Millinazzo et al. (1997) propuseram a introdução de um ângulo de fase α , que rotaciona a linha de corte, melhorando a representação da parte evanescente do espectro, e conseqüentemente, a estabilidade da aproximação.

Considerando a rotação da linha de corte no plano complexo, a representação para a raiz quadrada tem a forma

$$\sqrt{1+Z} = e^{i\alpha/2} \sqrt{(1+Z)e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha/2} \sqrt{1 + [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}, \quad (2.21)$$

que após a expansão em série de Padé conforme equação (2.20) [veja Apêndice (A)] nos dá

$$\sqrt{1+Z} \approx C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z}, \quad (2.22)$$

onde os coeficientes de Padé complexos são dados por

$$A_n = \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2}, \quad B_n = \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)},$$

$$C_0 = e^{i\alpha/2} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right]. \quad (2.23)$$

Note que, na equação (2.23), C_0 é aproximadamente 1. Essa aproximação torna-se melhor quanto mais termos são usados no somatório. Entretanto, como para um número finito de termos essa aproximação será sempre imperfeita, podemos considerar diretamente $C_0 = 1$.

Mais recentemente, Yevick and Thomson (2000) propuseram outra forma de aproximar o operador. Além de rotacionar o operador raiz quadrada e fazer a aproximação em série de Padé, como em Millinazzo et al. (1997), eles ainda fazem uma aproximação em série de Padé no operador de propagação, ou seja, na exponencial. Baseado em testes realizados por eles, mesmo para ordens baixas da expansão de Padé ($n \leq 3$), o erro introduzido por usar essa forma de aproximação do propagador é muito menor do que o erro introduzido pela rotação e expansão do operador raiz quadrada.

Capítulo 3

Métodos de migração por equação da onda

O objetivo da migração pós-stack é obter um mapa do refletor, ou seja, reconstruir o campo inicial $p(\mathbf{x}, t = 0)$, a partir do campo de onda registrado em $z = 0$, ou seja, $p(x, y, z = 0, t)$. Como estamos trabalhando com ondas que se propagam somente para cima, supomos que o tempo t corresponde ao trecho do refletor até a superfície.

Os operadores diferenciais na equação (2.8) devem ser aproximados. Problemas de precisão e estabilidade podem aparecer dependendo da ordem da aproximação usada, da amostragem espacial, e se a implementação é implícita ou explícita. A seção sísmica gravada na superfície $P(x, y, z = 0, t)$ serve como condição inicial para a solução $P(x, y, z, t = 0)$.

Vamos fazer uma breve explicação dos métodos de migração que utilizam a equação da onda unidirecional, como deslocamento de fase, deslocamento de fase mais interpolação, *split-step*, diferenças finitas, diferenças finitas e Fourier, e diferenças finitas e Fourier mais interpolação. Comparações entre alguns desses métodos podem ser encontradas em Etgen and Zhang (2009) e Sava and Hill (2009).

3.1 Deslocamento de fase (*Phase-Shift*)

O método de deslocamento de fase foi criado por Gazdag (1978), e é utilizado quando a variação da velocidade depende somente da profundidade, ou seja, $v = v(z)$. Neste caso, este método resolve de forma bastante precisa a equação que governa o processo de migração, ou seja, a equação da onda unidirecional.

A ideia é obter a solução operando no domínio de número de onda ao invés do domínio do espaço, ou seja, usamos a transformada de Fourier para calcular as derivadas parciais ao invés de usar, por exemplo, diferenças finitas. Isso permite formular procedimentos numéricos

que são praticamente livres de erros de truncamento. Isso significa que o método pode ser aplicado para uma camada de espessura arbitrária.

Como já foi dito, a solução da equação da onda unidirecional está representada na equação (2.12). No domínio da frequência e números de onda k_x e k_y , temos a solução para o método de deslocamento de fase dada por

$$P(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, k_y, z, \omega)e^{-ik_z \Delta z}. \quad (3.1)$$

Quando o meio for homogêneo, a solução da equação acima, (3.1), é exata. Porém, quando houver variação vertical da velocidade, dividimos o meio em camadas de forma que cada camada possua velocidade constante. Como as camadas podem ser escolhidas arbitrariamente finas, este procedimento, apesar de aproximado, pode ter qualquer precisão desejada.

A grande vantagem da migração por deslocamento de fase é que ela não requer nenhum tipo de espaçamento especial, e ainda é um método preciso que consegue imagear refletores com até 90° de inclinação (Han, 1998).

3.2 Deslocamento de fase mais interpolação (PSPI)

O método anterior é usado para resolver a equação da onda unidirecional quando a variação da velocidade depende somente da profundidade. Quando a variação da velocidade também acontecer lateralmente, porém de forma moderada, precisamos utilizar um método que leve essa nova variação em consideração. Por causa das muitas vantagens da migração por deslocamento de fase, Gazdag and Sguazzero (1984) desenvolveram um método aproximado chamado deslocamento de fase mais interpolação (PSPI).

A ideia deste método consiste em dois passos, no primeiro passo o campo de onda é extrapolado pelo método de deslocamento de fase usando l campos de velocidade lateralmente uniformes, resultando em l campos de onda de referência. No segundo passo, o campo de onda aproximado para um determinado valor de velocidade é obtido interpolando os campos de onda de referência associados às duas velocidades mais próximas. O método PSPI é incondicionalmente estável em duas e três dimensões, e a precisão dele está relacionada com a quantidade de campos de onda de referência interpolados para obter o campo de onda final.

Como a extrapolação de cada campo de onda de referência é feita por deslocamento de fase com velocidade constante, o método PSPI funciona bem para meios com variação lateral de velocidade moderada, onde a hipótese de uma velocidade localmente constante é aproximadamente satisfeita.

Como a migração PSPI envolve uma aproximação da velocidade verdadeira por velocidades

de referência, sua implementação é feita em vários passos. Primeiro aplica-se a transformada de Fourier com respeito a x e y . Em seguida é feita a operação de deslocamento de fase usando duas ou mais velocidades de referência. Daí é aplicada a transformada de Fourier inversa nos campos de onda $P(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega)$, resultando nos campos de onda de referência. E finalmente, esses campos de onda

$$P_j(x, y, z + \Delta z, \omega) = A_j e^{i\theta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

são interpolados.

Por exemplo, para duas velocidades de referência v_1 e v_2 , calcula-se a amplitude A e o ângulo de fase θ da onda interpolada através de

$$A = \frac{A_1(v_2 - v) + A_2(v - v_1)}{v_2 - v_1} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\theta_1(v_2 - v) + \theta_2(v - v_1)}{v_2 - v_1}, \quad (3.2)$$

onde A_1 e θ_1 são a amplitude e o ângulo de fase para o campo associado a v_1 , e A_2 e θ_2 são a amplitude e o ângulo de fase para o campo associado a v_2 .

Daí, a partir das equações (3.2), podemos escrever a solução

$$P(x, y, z + \Delta z, \omega) = A e^{i\theta}.$$

O uso de mais velocidades de referência implica num custo computacional maior, mas uma ponderação entre o custo e a qualidade do resultado deve ser levado em consideração. Como o método PSPI consiste de cálculos de soluções analíticas seguido de interpolações, erros de truncamento devido a diferenciação finita são minimizados. Finalmente, talvez o mais importante atributo deste método seja o fato de que ele pode ser aplicado a problemas de qualquer dimensão.

3.3 *Split-step*

O método *split-step* foi desenvolvido por Stoffa et al. (1990) para melhorar o desempenho do método de migração por deslocamento de fase em meios com variação lateral de velocidade. Ele também pode ser aplicado a dados sísmicos em duas ou três dimensões. O método *split-step* é um método híbrido, ou seja, ele é implementado tanto no domínio frequência-espaco quanto no domínio frequência-número de onda e ainda leva em consideração pequenas variações laterais de velocidade.

Para levar essa variação de velocidade em consideração, é definida uma vagarosidade (inverso da velocidade) de referência como sendo a vagarosidade média no intervalo a ser

migrado, e um termo de perturbação que varia com o espaço. A vagarosidade média define um número de onda vertical de referência que é usado no domínio frequência-número de onda para extrapolar os dados através de um intervalo como no método deslocamento de fase, usando um campo de velocidade constante. O termo de perturbação define uma contribuição de "fonte" que é levado em consideração pela aplicação de um segundo deslocamento de fase, mas no domínio frequência-espaço.

Uma grande vantagem desse método é que se a região a ser migrada não apresentar variação lateral de velocidade, este método é exato e o número de onda está correto para ângulos de até 90°.

A partir do operador raiz quadrada, somamos e subtraímos a ele o mesmo operador, mas com uma velocidade de referência, e obtemos o resultado dado por

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} &= \frac{i\omega}{v_r(z)} \sqrt{1 + \frac{v_r^2(z)}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \\ &+ \left\{ \frac{i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right. \\ &\left. - \frac{i\omega}{v_r(z)} \sqrt{1 + \frac{v_r^2(z)}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right\}, \end{aligned}$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Se expandirmos as raízes dos dois últimos termos da equação anterior em série de Taylor em torno de zero, e mantivermos somente os termos de ordem zero obtemos

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} &\approx \frac{-i\omega}{v_r(z)} \sqrt{1 + \frac{v_r^2(z)}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \\ &- \frac{i\omega}{v_r(z)} \left(\frac{v_r(z)}{v(\mathbf{x})} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (2.8), obtemos

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{-i\omega}{v_r(z)} \left[\sqrt{1 + \frac{v_r^2(z)}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} + \frac{v_r(z)}{v(x, y, z)} - 1 \right] P(\mathbf{x}, \omega).$$

Então a solução da equação da onda unidirecional quando usamos o método *split-step*

pode ser escrita da seguinte forma

$$\bar{P}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, k_y, z, \omega) e^{\frac{-i\omega}{v_r(z)} \sqrt{1 - \frac{v_r^2(z)}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)} \Delta z} \quad (3.4)$$

$$P(x, y, z + \Delta z, \omega) = \bar{P}(x, y, z + \Delta z, \omega) e^{-i\omega \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})} - \frac{1}{v_r(z)} \right) \Delta z}, \quad (3.5)$$

em que a equação (3.4) está no domínio frequência-número de onda e descreve um deslocamento no tempo, idêntico ao apresentado na migração por deslocamento de fase com velocidade constante. E a equação (3.5) está no domínio frequência-espço e serve como um termo de correção, também é um deslocamento no tempo, mas baseado na diferença entre a vagarosidade exata e a de referência, em cada posição do espaço.

Apesar deste método ser incondicionalmente estável e permitir pequenas variações laterais de velocidade, ele apresenta problemas para imagear grandes ângulos. Contudo, quando o modelo de velocidades apresentar grandes variações, o uso de mais de uma velocidade de referência se faz necessário. A introdução dessas várias velocidades de referência foi feita por Kessinger (1992). Entretanto, agora o custo computacional do método *split-step* estendido, também chamado de SSPI é equivalente ao custo computacional do método PSPI.

Computacionalmente, os métodos baseados no deslocamento de fase (*phase-shift*, PSPI e *split-step*) têm a vantagem de que somente as frequências de interesse precisam ser migradas, o que é um resultado muito bom para migração de dados 3D, porque é possível resolver o problema na memória do computador, sem a necessidade dos altos custos causados pela transferência de dados do disco e para o disco.

3.4 Diferenças finitas (FD)

Este método aproxima o operador raiz quadrada da equação da onda unidirecional (2.8) por uma série de Padé (Bamberger et al., 1988; Claerbout, 1985), uma aproximação real. Então, podemos escrever a raiz quadrada como

$$\frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \approx \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + b_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right], \quad (3.6)$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Então este operador aproximado pode ser implementado em cascata, considerando cada

termo do somatório. Uma estratégia é resolver a primeira equação diferencial

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega),$$

seguido pelas expressões dentro do somatório, ou seja,

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \left[\frac{a_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + b_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right] P(\mathbf{x}, \omega), \quad (n = 1, \dots, N).$$

A resolução em cascata deste sistema de equações diferenciais procede de modo que cada solução da equação anterior é utilizada como condição inicial para a equação seguinte. A primeira equação tem solução analítica para modelos em que dentro de uma camada de tamanho Δz a velocidade satisfaça $v(\mathbf{x}) = v(x, y)$. Pode-se expressar o campo de onda no nível $z + \Delta z$ em função do campo no nível anterior, z , da forma

$$P(z + \Delta z, \omega) = P(z, \omega) \exp \left[\frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \Delta z \right].$$

As equações diferenciais associadas às parcelas do somatório são dadas por

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + b_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -a_n \frac{v(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.7)$$

Como geralmente as derivadas parciais dentro do operador na equação (3.6) são aproximadas por operadores de diferenças finitas, o método de migração baseado nessa aproximação é denominado de migração por diferenças finitas ou migração FD. Uma forma de resolução é o chamado método de Crank-Nicolson (Claerbout, 1985). O ponto positivo nesta técnica é que ela não tem limitações em relação a variações no modelo de velocidade, e o ponto negativo é que ela tem problemas com refletores com forte mergulho. Para resolver este problema, mais parcelas devem ser utilizadas na aproximação. Para $N = 1$, esta técnica migra corretamente eventos com mergulho de até 45° (Ristow and Rühl, 1994). Para evitar reflexões nas bordas do modelo, precisamos usar condições de fronteira absorventes.

3.5 Diferenças finitas e Fourier (FFD)

Tentando superar as limitações do método *split-step*, ou seja, imagear grandes ângulos, Ristow and Rühl (1994) desenvolveram o método diferenças finitas e Fourier (FFD). Esta técnica reúne as vantagens de dois métodos, deslocamento de fase e diferenças finitas.

Rühl and Ristow (1995) mostraram que os métodos *split-step* e FFD têm uma relação com os métodos deslocamento de fase e diferenças finitas. Similar ao desenvolvimento feito por Stoffa et al. (1990), usaram um termo de perturbação como uma fonte secundária na equação da onda, e então obtiveram o método FD a partir do método deslocamento de fase na presença de forte variação lateral de velocidade. Portanto, partindo do método deslocamento de fase, os métodos *split-step* e FFD são passos intermediários para chegar no método FD (Han, 1998). Como para o deslocamento no tempo é necessária uma velocidade que varie no máximo com a profundidade, a ideia aqui é separar o campo de velocidades em dois, ou seja, um campo constante de referência, e outro variável. O operador deste método é obtido calculando uma aproximação melhor do que a da equação (3.3), que é dada pela diferença de operadores da equação (3.3), ou seja, entre o operador raiz quadrada da equação (2.8) usando a velocidade verdadeira, $v(\mathbf{x})$, e o mesmo operador usando uma velocidade de referência, v_r , no domínio frequência-espaco, sendo

$$d = \frac{-i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} - \frac{-i\omega}{v_r} \sqrt{1 + \left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}. \quad (3.8)$$

Expandindo ambos os operadores da equação (3.8) em série de Taylor em torno de zero e reorganizando os termos de mesma ordem, temos

$$d \approx \left(\frac{\omega}{v(\mathbf{x})} - \frac{\omega}{v_r}\right) + \frac{\omega}{v(\mathbf{x})} (1-p) \sum_{n=1}^N \frac{X^2}{a_n + b_n X^2}$$

em que estamos usando as notações

$$p = \frac{v_r}{v(\mathbf{x})} \quad \text{e} \quad X^2 = \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

onde também $v_r \leq v(\mathbf{x})$ e os parâmetros a_n e b_n dependem de p . Agora, juntando as duas séries em uma e agrupando os termos de mesma ordem [veja desenvolvimento no Apêndice B], temos

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} &\approx \frac{-i\omega}{v_r} \sqrt{1 + \left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} \\ &+ \left(\frac{\omega}{v(\mathbf{x})} - \frac{\omega}{v_r}\right) + \frac{\omega}{v(\mathbf{x})} (1-p) \sum_{n=1}^N \frac{\frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}{a_n + b_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com o valor teórico de $\sigma = p^2 + p + 1$.

Similar ao procedimento feito no método FD, a resolução da equação da onda unidirecional usando esta aproximação é feita em passos, onde o primeiro termo é equivalente ao operador de migração por deslocamento de fase, e portanto é resolvido na frequência-número de onda. O segundo termo é equivalente ao operador de migração *split-step* e é resolvido no domínio da frequência-espço. Finalmente, o último termo, a menos de um termo de escala é equivalente ao operador de migração por diferenças finitas e é resolvido como tal. E como antes, a solução da equação anterior é condição inicial para a próxima equação.

A grande desvantagem desse método é que quando ele é aplicado na presença de descontinuidades acentuadas no modelo de velocidade, ele apresenta instabilidade numérica, apesar de admitir variações laterais de velocidade arbitrárias.

3.6 Diferenças finitas e Fourier mais interpolação (FFDPI)

Devido às instabilidades numéricas do método FFD causadas quando variações da velocidade nos termos que acompanham as segundas derivadas $p^2 \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ e $\sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ têm suas partes imaginárias diferentes de zero, a partir do método FFD, Biondi (2002) desenvolveu o método FFDPI, que é incondicionalmente estável. Ele começa a partir da equação (3.10). Biondi (2002) reescreve a última parte do operador dentro do somatório como

$$\frac{(1-p) \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}{a_n + b_n \sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} = \frac{(1-p) b_n \sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}{b_n \sigma a_n + b_n \sigma^2 \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)},$$

garantindo, assim que a parte imaginária dos termos que acompanham as segundas derivadas sejam nulas.

Quando usado em conjunto com um esquema de diferenças finitas implícito, a expansão em frações contínuas de Muir (Jacobs and Muir, 1981) é uma aproximação computacionalmente mais eficiente do que uma expansão em série de Taylor. Uma expansão em frações contínuas de segunda ordem é tão precisa quanto uma expansão em série de Taylor de quarta ordem.

O termo $\sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ é reescrito como o produto de matrizes simétricas da forma $\Sigma^T X^2 \Sigma$, onde Σ é uma matrix diagonal que contém os valores das raízes quadradas de σ .

Biondi (2002) provou que esta maneira de implementação estabiliza a migração FFD, mesmo na presença de forte variação lateral de velocidade e para velocidades de referência maiores do que as velocidades do meio. Portanto, essa técnica de migração possui todas as características necessárias para ser utilizada em um algoritmo de migração por equação da onda quando quisermos precisão e eficiência próximo de grandes ângulos de propagação. Para conseguir a precisão que queremos, podemos interpolar os campos de onda obtidos para uma coleção considerável de velocidades de referência. Teoricamente, quanto maior o número de velocidades de referência utilizadas, maior a precisão do método. A estrutura do método FFDPI é similar ao método PSPI (Gazdag and Sguazzero, 1984) e ao método *split-step* estendido (Kessinger, 1992), exceto pelo fato de que inclui uma correção FFD para melhorar seu desempenho em altos ângulos de propagação.

3.7 Operadores FD e FFD com a aproximação de Padé complexa

Utilizar a aproximação de Padé complexa nos operadores dos métodos de migração de diferenças finitas (FD), e diferenças finitas e Fourier (FFD) reduz as imprecisões e instabilidades devido às ondas evanescentes e produz imagens com menos ruído numérico do que aquelas obtidas quando se usa a aproximação de Padé real para o operador raiz quadrada da equação (2.8), principalmente em meios com fortes variações laterais de velocidade.

Apresentamos a seguir, o desenvolvimento dos métodos FD e FFD com a aproximação de Padé complexa.

3.7.1 Diferenças finitas (FD)

Este método aproxima o operador da onda unidirecional da equação (2.8) por uma série de Padé (Bamberger et al., 1988; Claerbout, 1985). A sua versão complexa é obtida substituindo os coeficientes reais a_n e b_n pelos respectivos coeficientes complexos A_n e B_n , resultando em

[veja Apêndice A para o desenvolvimento]

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + B_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right] P(\mathbf{x}, \omega), \quad (3.10)$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Os coeficientes A_n e B_n são dados na equação 2.23.

Como na sua versão real, este operador pode ser implementado em cascata, considerando cada termo do somatório. Assim, resolvemos a primeira equação diferencial

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega),$$

seguido pelas equações dentro do somatório, ou seja,

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \left[\frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + B_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right] P(\mathbf{x}, \omega) \quad (n = 1, \dots, N).$$

Novamente, para resolver esse sistema de equações consideramos que cada solução da equação anterior é uma condição inicial para a equação seguinte. A primeira equação tem solução analítica para modelos em que dentro de uma camada de tamanho Δz a velocidade satisfaça $v(\mathbf{x}) = v(x, y)$. Pode-se expressar o campo de onda no nível $z + \Delta z$ em função do campo no nível anterior, z , da forma

$$P(x, y, z + \Delta z, \omega) = P(\mathbf{x}, \omega) \exp \left[\frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \Delta z \right].$$

As equações diferenciais associadas às parcelas do somatório são dadas por

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + B_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -A_n \frac{v(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.11)$$

Assim como sua versão real, essa equação geralmente é resolvida por diferenças finitas. O método de migração baseado nela é denominado de migração por diferenças finitas ou migração FD. As grandes vantagens de usar a versão complexa são que além de essa técnica não ter limitações em relação a variações no modelo de velocidade, ela ainda consegue tratar

ondas evanescentes. O ponto negativo permanece o mesmo do método de diferenças finitas, que é a dificuldade de imaginar refletores com forte mergulho.

3.7.2 Diferenças finitas e Fourier (FFD)

A versão complexa do método FFD criado por Ristow and Rühl (1994) começa exatamente como a versão real, ou seja, calculando a diferença entre o operador raiz quadrada usando a velocidade verdadeira, e o mesmo operador usando uma velocidade de referência no domínio frequência-espço

$$\frac{i\omega}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} - \frac{i\omega}{v_r} \sqrt{1 + \left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}. \quad (3.12)$$

Agora, expandindo ambos os operadores da equação (3.12) em série de Padé complexa conforme equação (2.22), temos

$$i\frac{\omega}{v_r} \left\{ p \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}{1 + B_n \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} \right] - \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{p^2 A_n \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}{1 + p^2 B_n \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} \right] \right\},$$

onde estamos novamente usando a notação

$$p = \frac{v_r}{v(\mathbf{x})}.$$

Agora, juntando as duas séries em uma, expandindo os termos fracionários em série de Taylor, e agrupando os termos de mesma ordem, temos

$$i\frac{\omega}{v_r} \left\{ p - 1 + \left[\sum_{n=1}^N A_n p(1-p) \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) (1 - B_n \frac{(1-p^3)}{(1-p)} \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) B_n^2 \frac{(1-p^5)}{(1-p)} \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \dots \right) \right] \right\}.$$

Como

$$\frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n, \quad (p < 1)$$

essa expressão é equivalente a uma expansão em série de Taylor até segunda ordem de uma expressão de Padé da forma

$$i \frac{\omega}{v_r} \left\{ p \sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} - \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right\} \approx$$

$$i \frac{\omega}{v_r} \left\{ (p - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p (1 - p) \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + B_n \sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right\},$$

onde $\sigma = 1 + p + p^2$. Portanto, ao invés de usarmos a aproximação obtida através da série de Taylor, usamos a aproximação obtida através da série de Padé complexa. Isso porque, quando usamos em conjunto com um esquema de diferenças finitas implícito, a expansão em série de Padé complexa, temos uma aproximação que precisa de duas ordens a menos para ter a mesma precisão que uma aproximação em série de Taylor.

Usando essa aproximação, a equação da onda unidirecional (2.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \left\{ i \frac{\omega}{v_r} \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} + \right.$$

$$\left. i \frac{\omega}{v_r} \left[(p - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p (1 - p) \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + B_n \sigma \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} \right] \right\} P, \quad (3.13)$$

que é equivalente à migração FFD de Ristow and Rühl (1994), mas com os coeficientes de Padé complexos.

Como visto acima, o valor teórico para σ obtido dessa expressão é $\sigma = 1 + p + p^2$. Entretanto, experimentos numéricos em duas dimensões feitos por Amazonas et al. (2007) indicam que outras expressões para σ podem produzir melhores resultados. Para contrastes pequenos de velocidade, eles sugerem $\sigma = 3p$, e para maior semelhança quando houver grandes ângulos de propagação, eles propõem usar $\sigma = 1 + p^3$.

Assim como no método de diferenças finitas, a implementação desse método é feita em

casata. O primeiro termo é equivalente ao operador do método de deslocamento de fase, uma vez que temos a presença de uma velocidade de referência, sendo portanto uma velocidade constante. O segundo termo é equivalente ao operador do método *split-step*, sendo resolvido de forma análoga. E o terceiro termo é equivalente ao operador do método de diferenças finitas, que será resolvido como tal, ou seja, em casata. As equações diferenciais associadas às parcelas do somatório são dadas por

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \sigma B_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -A_n p(1-p) \frac{v(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.14)$$

Capítulo 4

Implementação

Neste capítulo, abordaremos as questões implementacionais das técnicas de migração discutidas anteriormente. Nota-se que o foco desta dissertação está na comprovação das técnicas implementacionais.

4.1 *Splitting*

Nesta seção, vamos apresentar a técnica de *splitting*, lembrando que o nosso objetivo é diminuir o custo computacional, porém manter a qualidade do resultado final. Visando esse objetivo, devido à dificuldade de resolução, ao invés de usar a equação da onda completa, partimos dela, e obtivemos duas equações de onda unidirecionais, mais fáceis de resolver. Dessas duas equações, usamos apenas uma, aquela que descreve a propagação para cima. Daí, por conta do operador raiz quadrada poder ser complexo, no caso de ondas evanescentes, devemos usar uma aproximação complexa. Por isso, usamos a aproximação de Padé complexa, cujo erro é duas ordens maior do que o erro da série de Taylor, por exemplo. E agora, ainda precisamos de mais uma aproximação para os operadores de derivadas direcionais, para que possamos dividir nosso problema em duas direções distintas. Dessa forma, podemos resolver o problema de três dimensões em dois passos de duas dimensões. Essa nova aproximação é chamada de *splitting*.

Claerbout (1985) propuseram a ideia de *splitting*, que consiste em aproximar o operador 3D por uma sequência de operadores 2D dentro de planos, geralmente ao longo dos eixos de coordenadas horizontais, nas direções *inline* e *crossline*. Assim, podemos realizar o processo em menos tempo, e manter a eficiência do método. Para o caso de *splitting* em apenas duas direções, enfrentamos a desvantagem de ser incorreto para refletores com alta inclinação, resultando em grandes erros de posicionamento desses refletores na situação em que a direção de mergulho do refletor está longe das direções dos planos de migração, gerando assim, uma

forte anisotropia numérica, ou seja, um operador de migração bastante diferente do correto. O preço a se pagar pela economia quando se faz uso do *splitting* é uma piora na precisão do resultado final, conforme o azimute aumentar. O método FD perde em precisão para azimutes fora das direções de *splitting*, porém Diet (1984) observou que, para ângulos de inclinação do refletor de até 45°, os resultados são bastante aceitáveis. Veja na Figura 4.1 um esquema de refletor inclinado em três dimensões.

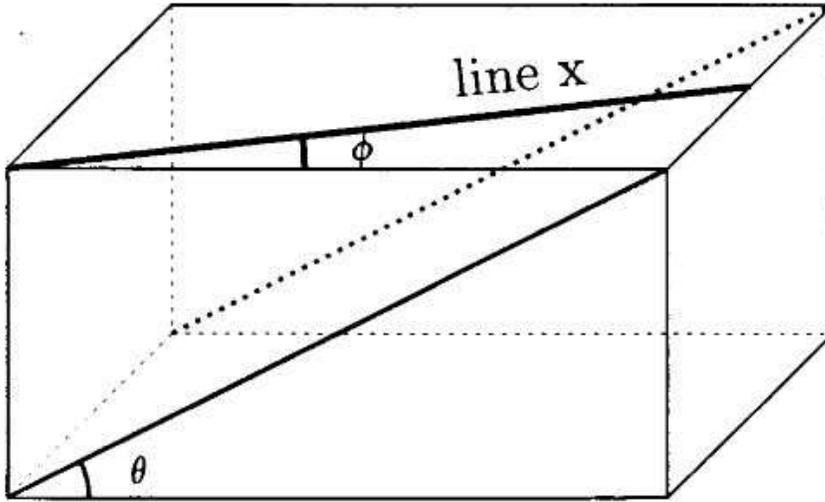


Figura 4.1: Modelo 3D de uma refletor inclinado. O ângulo de inclinação do refletor é θ e o ângulo de azimute entre a linha de interesse e a inclinação do refletor é ϕ .

A ideia para encontrar a aproximação para o operador raiz quadrada é expandi-lo em série de Taylor, e expandir sua representação em série de Padé complexa em série de potência. Daí os coeficientes desconhecidos são obtidos comparando os termos dessas duas séries. Quanto mais operadores 2D em sequência e mais direções forem escolhidas, mais termos da série de potência podem ser comparados para obter um operador de migração com melhor simetria circular.

A expansão em série de Taylor do operador raiz quadrada é

$$\sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{8} \left(\left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)^3 + \dots$$

A aproximação do operador raiz quadrada por série de Padé complexa é

$$\sqrt{1 + \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)} \approx 1 + \frac{2}{K} \sum_{j=1}^K \sum_{n=1}^N \frac{A_n w_j^n}{1 + B_n w_j^n}, \quad (4.1)$$

onde N é o número de termos da série de Padé, ou seja, o número de operadores em sequência. Geralmente usa-se $N = 1, 2$ ou 3 . Além disso, A_n e B_n são os $2N$ coeficientes desconhecidos da representação de Padé. No outro somatório, K é o número de direções usadas no *splitting*. Geralmente usa-se $K = 2, 3, 4$ ou 6 . Finalmente, w_j são os operadores de derivadas nas direções de *splitting* para aplicação dos operadores 2D, sendo definidos por

$$w_j = \cos \phi_j u_x + \sin \phi_j u_y$$

com $\phi_j = (j - 1)\Delta\phi$, ($j = 1, 2, \dots, K$) sendo o ângulo de azimute da direção de *splitting* e

$$u_x^2 = \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad u_y^2 = \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ângulo de azimute é uma medida em um sistema de coordenadas esféricas ou cilíndricas. É o ângulo entre o norte e a projeção do vetor do ponto de referência ao ponto de observação no plano de referência.

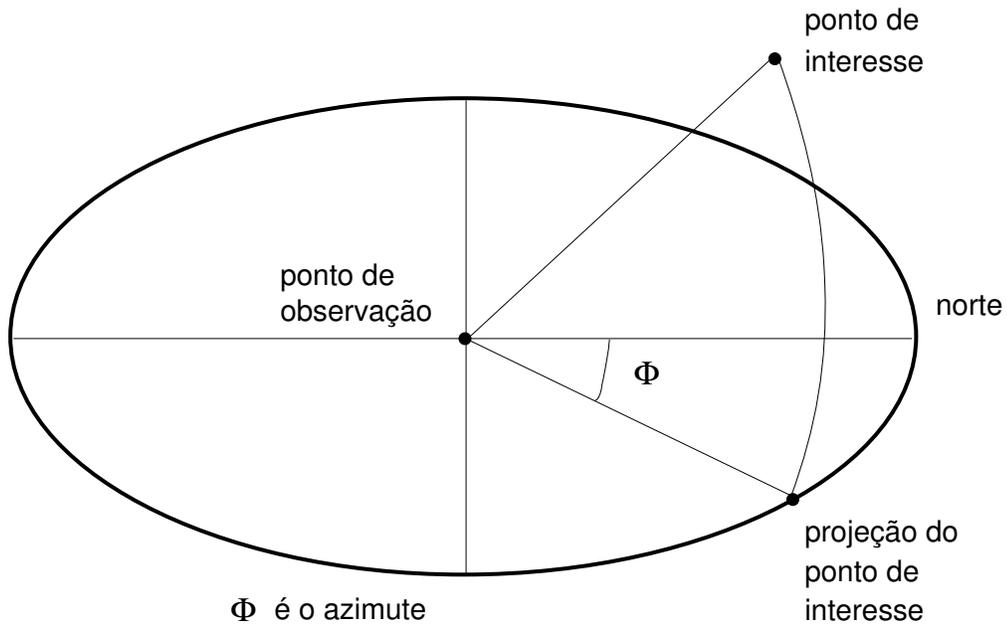


Figura 4.2: Ilustração de azimute.

Ao aproximar a representação do operador na equação (4.1) por uma série de potência e

comparar com a aproximação do mesmo operador em série de Taylor, obtém-se os coeficientes desconhecidos A_n e B_n . Note que os termos $(u_x^2 + u_y^2)$ não dependem do ângulo de azimute ϕ_j .

4.2 Correção para *splitting* em duas direções (correção de Li)

Como já vimos, fazer o *splitting* em apenas duas direções causa anisotropia numérica, ou seja, o aparecimento de erros nas imagens de grandes estruturas complexas. Para compensar esses erros e ainda preservar a eficiência do método de diferenças finitas, Li (1991) propôs a aplicação de um operador de correção de fase, implementado ou como o método de deslocamento de fase ou como o método de deslocamento de fase mais interpolação. Esse operador de diferença é obtido avaliando a diferença entre o operador de migração exato e o operador de migração com a aproximação de Padé complexa, ou seja, avalia-se a diferença entre o operador completo (até 90°) e o operador de diferenças finitas com limitação angular e *splitting*.

A ideia desse método é fazer a migração FD convencional 2D nas duas direções onde foi feito o *splitting* e mais uma extrapolação do campo de onda residual pelo método de deslocamento de fase quando a variação lateral da velocidade for pequena, e pelo método de deslocamento de fase mais interpolação quando a variação lateral da velocidade for relevante.

Para obtermos o termo de correção de Li, expandimos a equação da onda unidirecional, equação (2.8), em série de Padé complexa e aplicamos a técnica de *splitting* em duas direções. Esta aproximação consiste em aproximar o operador de migração na forma

$$E = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1 + B_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}{1 + B_n \frac{\partial^2}{\partial y^2}}.$$

O erro cometido por este operador é descrito pela diferença

$$E = \sqrt{1 + \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)} - \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{1 + B_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}{1 + B_n \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right]. \quad (4.2)$$

Ou seja, a correção de Li também corrige as distorções causadas pelo método FD para ângulos elevados. Para obtermos o operador de correção de Li, esta diferença ainda precisa

ser expandida e aproximada por causa da existência de uma raiz quadrada. Isso é feito usando a aproximação em série de Padé complexa que já foi discutida. Então a equação diferencial a ser resolvida é

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \left[\frac{i\omega}{v(x)} E \right] P,$$

onde E denota o operador de erro obtido em (4.2). Se usarmos o método de diferenças finitas para a realização deste operador, a solução da equação acima pode ser representada como (Li, 1991)

$$P(z + \Delta z) = e^{[i(k_z^r - \frac{\omega}{v_r})\Delta z]} \prod_{n=1}^N \frac{p_n + iq_n}{p_n - iq_n} \prod_{n=1}^N \frac{r_n + is_n}{r_n - is_n} P(z),$$

onde os coeficientes são dados por

$$k_z^r = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_r}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2},$$

$$p_n = \frac{1 - \left[\mu\Delta x^2 + B_n \left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2\right] \bar{k}_x^2}{\Delta z},$$

$$q_n = \frac{v_r A_n \bar{k}_x^2}{2\omega},$$

$$r_n = \frac{1 - \left[\mu\Delta y^2 + B_n \left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2\right] \bar{k}_y^2}{\Delta z},$$

$$s_n = \frac{v_r A_n \bar{k}_y^2}{2\omega},$$

com μ sendo o termo aditivo do esquema de Claerbout (1985) detalhado no [Apêndice C], também conhecido como 'o truque do 1/6' (método de Douglas).

As aproximações numéricas para os números de onda k_x^2 e k_y^2 são as definidos por Claerbout (1985), como

$$\bar{k}_x^2 = \frac{2 - 2 \cos(k_x \Delta x)}{\Delta x^2},$$

$$\bar{k}_y^2 = \frac{2 - 2 \cos(k_y \Delta y)}{\Delta y^2}.$$

Pelo fato do erro indicado na equação (4.2) ser pequeno em cada passo da extrapolação, o efeito do processo de compensação é similar ao da migração residual, caso em que as ondas de propagam muito pouco em cada passo. Portanto, quando a variação lateral de velocidade for

moderada, é razoável substituir a velocidade verdadeira $v(\mathbf{x})$ por uma velocidade de referência v_r . Mais ainda, por se basear no método de deslocamento de fase, essa velocidade de referência pode variar apenas com a profundidade.

Para a escolha dessas velocidades de referência, estamos usando o método de Lloyd (1982). A principal ideia por trás desse método é iterativamente melhorar o valor de uma função olhando para valores estatísticos de cada região (média, mediana e variância), e então alterar as fronteiras das regiões em cada iteração na tentativa de encontrar a melhor solução baseado em algum critério.

As grandes vantagens dessa técnica são que a migração por diferenças finitas em duas dimensões não precisa ser alterada, o termo de correção precisa ser aplicado apenas em certos passos da extrapolação, não há limitação para o ângulo de inclinação do refletor e sem erro causado pelo *splitting*. As duas últimas são vantagens ligadas ao uso da migração por deslocamento de fase.

4.3 Implementação das migrações

Nesta seção mostramos como foi feita a implementação dos métodos de migração FD e FFD. Ambos usam a aproximação de Padé complexa em seu desenvolvimento.

4.3.1 Implementação da migração FD

Uma implementação estável deste método pode ser realizada usando o esquema de diferenças finitas de Crank-Nicolson (Crank and Nicolson, 1947; Mitchell and Griffiths, 1980). Para tal, define-se o operador

$$X^2 \equiv \frac{v^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) .$$

Aproximando a derivada em relação a z na equação (3.11) por diferenças finitas e aplicando o operador do lado direito ao ponto médio do intervalo de continuação, $[z, z + \Delta z]$, obtém-se

$$(1 + B_n X^2) \frac{P^{j+1}(\mathbf{x}, \omega) - P^j(\mathbf{x}, \omega)}{\Delta z} = -i \left(\frac{\omega}{v} \right) A_n X^2 \frac{P^{j+1}(\mathbf{x}, \omega) + P^j(\mathbf{x}, \omega)}{2} ,$$

em que $P^j(\mathbf{x}, \omega) \equiv P(x, y, j\Delta z, \omega)$. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\left[1 + \left(B_n + i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right) X^2 \right] P^{j+1}(\mathbf{x}, \omega) = \left[1 + \left(B_n - i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right) X^2 \right] P^j(\mathbf{x}, \omega) .$$

Para obter a solução numérica da equação acima aproxima-se X^2 por um operador de diferenças finitas

$$X^2 \approx \mathbf{X}^2 = \frac{v^2(x_k, y_l, z_j)}{\omega^2} \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right),$$

onde os operadores \mathbf{D}_x^2 e \mathbf{D}_y^2 podem representar, por exemplo, operadores de diferenças de segunda ordem [Veja Apêndice C para o operador de diferença de maior ordem], ou seja,

$$\mathbf{D}_x^2 P_{k,l}^j = P_{k+1,l}^j - 2P_{k,l}^j + P_{k-1,l}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_y^2 P_{k,l}^j = P_{k,l+1}^j - 2P_{k,l}^j + P_{k,l-1}^j,$$

para $k = 1, \dots, n_x$ e $l = 1, \dots, n_y$, com n_x e n_y denotando o número de pontos da malha nas direções x e y .

Utilizando esta aproximação, o esquema de diferenças finitas para continuação do campo de ondas para baixo é

$$\left\{ \mathbf{I} + \left[B_n + i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right] \mathbf{X}^2 \right\} \mathbf{P}^{j+1} = \left\{ \mathbf{I} + \left[B_n - i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right] \mathbf{X}^2 \right\} \mathbf{P}^j,$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{P}^j é a matriz formada pelos elementos $P_{k,l}^j$ para j fixo, isto é, para um determinado nível.

Introduzindo a notação

$$(\mathbf{C}_n)_{k,l} = \frac{v^2(x_k, y_l, z_j)}{\omega^2} \left[B_n + i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right]$$

e

$$(\mathbf{C}_n^*)_{k,l} = \frac{v^2(x_k, y_l, z_j)}{\omega^2} \left[B_n - i \left(\frac{\omega \Delta z}{2v} \right) A_n \right]$$

a equação acima toma a forma

$$\left[\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \right] \mathbf{P}^{j+1} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \right] \mathbf{P}^j. \quad (4.3)$$

Na técnica do *splitting* bi-direcional, também conhecida como método implícito de direções alternadas (Wachspress and Harbetler, 1960; Douglas, 1962; Mitchell and Griffiths, 1980) substitui-se a equação (4.3) pela equação aproximada

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \mathbf{P}^{j+1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \mathbf{P}^j. \quad (4.4)$$

Esta equação fatorada tem a vantagem de poder ser executada em duas etapas unidirecionais. Supondo que o operador inverso em y , $(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \mathbf{D}_y^2 / \Delta y^2)^{-1}$ comuta com ambos os

operadores em x , a equação (4.4) pode ser escrita como

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} \right) \mathbf{P}^{j+1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} \right) \tilde{\mathbf{P}}^j, \quad (4.5)$$

onde o valor intermediário $\tilde{\mathbf{P}}^j$, definido por

$$\tilde{\mathbf{P}}^j = \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \mathbf{P}^j$$

pode ser encontrado resolvendo o sistema

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \tilde{\mathbf{P}}^j = \left(\mathbf{I} + \mathbf{C}_n^* \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \mathbf{P}^j. \quad (4.6)$$

A vantagem deste *splitting* está no tempo computacional. E sua grande desvantagem é a introdução de anisotropia numérica azimutal na propagação do campo de onda.

4.3.2 Implementação da migração FFD

Aplicando o método de Crank-Nicolson (Crank and Nicolson, 1947; Mitchell and Griffiths, 1980) para a discretização da equação (3.14), obtemos

$$1 + B_n \sigma X^2 \frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta z} = -ik_0 A_n p (1 - p) X^2 \frac{P^{j+1} + P^j}{2}, \quad (4.7)$$

onde $P^j = P(x, y, z_j, \omega)$.

Note que a equação (4.7) representa um esquema de equações implícito. Rearranjando os termos, temos

$$\left\{ 1 + \left[B_n \sigma + i \frac{k_0 \Delta z}{2} A_n p (1 - p) \right] X^2 \right\} P^{j+1} = \left\{ 1 + \left[B_n \sigma - i \frac{k_0 \Delta z}{2} A_n p (1 - p) \right] X^2 \right\} P^j. \quad (4.8)$$

Então discretizamos as variáveis laterais, ou seja, aproximamos X^2 pelo seu operador de diferenças finitas \mathbf{X}^2 , dado por

$$\mathbf{X}^2 = \frac{v(x_k, y_l, z_j)^2}{\omega^2} \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right),$$

onde os operadores \mathbf{D}_x^2 e \mathbf{D}_y^2 representam operadores de diferenças finitas de segunda ordem

[Veja Apêndice C para o operador de diferença de maior ordem]. E obtemos

$$X^2 \approx \mathbf{X}^2 = \frac{v^2(x_k, y_l, z_j)}{\omega^2} \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right), \quad (4.9)$$

com

$$\mathbf{D}_x^2 P_{k,l}^j = P_{k+1,l}^j - 2P_{k,l}^j + P_{k-1,l}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_y^2 P_{k,l}^j = P_{k,l+1}^j - 2P_{k,l}^j + P_{k,l-1}^j, \quad (4.10)$$

para $k = 1, \dots, n_x$ e $l = 1, \dots, n_y$, com n_x e n_y denotando o número de pontos da malha nas direções x e y .

A equação diferencial resultante é equivalente à equação diferencial da equação (4.3)

$$\left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}_n \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \right] \mathbf{P}^{j+1} = \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}_n^* \left(\frac{\mathbf{D}_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{D}_y^2}{\Delta y^2} \right) \right] \mathbf{P}^j \quad (4.11)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{P}^j é a matriz formada pelos elementos $P_{k,l}^j$ em um nível de profundidade fixo z_j . Ainda $\tilde{\mathbf{C}}_n$ e $\tilde{\mathbf{C}}_n^*$ são matrizes complexas com elementos dados por

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}_n \right)_{k,l} = \frac{v^2}{\omega^2} \left[B_n \sigma + i \frac{k_0 \Delta z}{2} A_n p (1 - p) \right] \quad (4.12)$$

e

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}_n^* \right)_{k,l} = \frac{v^2}{\omega^2} \left[B_n \sigma - i \frac{k_0 \Delta z}{2} A_n p (1 - p) \right]$$

com $v = v(x_k, y_l, z_j)$, $\sigma = \sigma(x_k, y_l, z_j)$ e $p = p(x_k, y_l, z_j) = \frac{1}{v(x_k, y_l, z_j)}$.

A implementação do operador (4.11) por *splitting* direcional segue então a mesma ideia conforme discutido no caso da migração FD nas equações (4.3) até (4.6).

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo, comparamos as respostas impulso da migração FD detalhada anteriormente em meio homogêneo e no modelo de sal da SEG-EAGE.

5.1 Testes em meio homogêneo

Testamos o método de migração FD para o caso de afastamento nulo em um meio homogêneo por meio de sua resposta impulso. Para tal, usamos os seguintes parâmetros: Fonte: Pulso Ricker com frequência central de 25 Hz; malha de migração com $\Delta x = \Delta y = 12.5$ m, $\Delta z = 10$ m; a velocidade de migração é constante de 2.5 km/s; e o pulso a ser migrado posicionado simetricamente com o seu centro deslocado por 0.46 s. Nosso cubo de dados, tem 301 pontos nas direções x e y e 190 pontos na direção z . A linha em vermelho nos cortes verticais e diagonal indica a posição teórica do evento, dada pelo círculo $z = \sqrt{(vt_e)^2 - (x - x_f)^2}$, onde $vt_e = 2500 \times 0.46 = 1150$ m é a posição de observação do evento e $x_f = 300 \times 12.5/2 = 1875.0$ é a posição da fonte. A aparência não circular desta curva deve-se à diferença de escala dos eixos nesta figura.

Para representarmos os resultados, usamos cortes verticais em $x = 1875.0$ m (centro do modelo) e $x = 1000$ m, um corte diagonal e cortes horizontais nas profundidades de $z = 150$ m, $z = 750$ m e $z = 1250$ m. Embora a velocidade de migração seja constante, ao invés de usar a velocidade verdadeira, vamos usar uma velocidade de referência. Para fazer a interpolação linear dos campos, podemos usar como peso, a razão entre a velocidade média e a velocidade de referência, ou então a razão entre o cubo da velocidade média e o cubo da velocidade de referência.

Além do que foi mencionado, ainda podemos variar outros parâmetros, tais como o ângulo de rotação e o número de termos da série de Padé complexa, o intervalo de aplicação da correção de Li, o número de direções para a aplicação do *splitting*, e ainda usar a aproximação

em série de Padé real ao invés da aproximação complexa. Caso não seja dito nada ao contrário, os parâmetros padrões para a realização dos testes são três termos da série de Padé complexa, ângulo de rotação de 45° , correção de Li a cada 9 passos e interpolação linear dos campos usando a razão entre a velocidade média e a velocidade de referência.

5.1.1 Efeitos da correção de Li

No primeiro conjunto de testes investigamos o efeito da correção de Li. Esperamos que quando for usada, ela melhore o problema de anisotropia numérica. A Figura 5.1 mostra o resultado da migração FD usando *splitting* em duas direções (direções x e y , ou seja, *inline* e *crossline*), sem a aplicação da correção de Li. Como esperávamos, nos cortes horizontais da Figura 5.1 vemos um desvio do formato circular para o formato de losango, resultado mais visível nos cortes mais rasos. Nos cortes verticais vemos artefatos de migração, e no corte fora do centro, vemos uma grande diferença entre o evento teórico (linha em vermelho) e o resultado que obtivemos. No corte diagonal também podemos observar o posicionamento já correto do evento. Semelhante o corte vertical pelo centro da esfera, paralelo ao eixo x não observamos nenhum desvio do formato correto. O fato da resposta impulso não possuir simetria esférica, contrariando seu formato teórico, é conhecido como anisotropia numérica, como discutido no Capítulo 3.

Na Figura 5.2 vemos o resultado da migração FD com aplicação da correção de Li a cada 9 passos em profundidade. Vemos ainda a total recuperação do formato circular, mas no nível mais raso, o surgimento de artefatos. A aplicação da correção de Li gera descontinuidades na frente de onda a cada nível de sua aplicação. Isso também é evidenciado na Figura 5.3, quando aumentamos o intervalo de aplicação da correção de Li de 9 para 15 passos, ainda nesta figura, vemos a redução dos artefatos no nível mais raso, mas podemos notar a distorção do formato circular. Nos outros níveis, temos o formato circular preservado. Não há presença de artefatos nos cortes verticais dessas duas figuras e embora o corte vertical central seja igual ao obtido na Figura 5.1, nos cortes verticais fora do centro e diagonal podemos notar a posição corrigida do evento.

Quando não usamos a correção de Li e o operador é resolvido somente na direção dos eixos x e y , os maiores erros estão nas diagonais (Li, 1991). Por isso, quando aplicamos a correção a cada 9 passos, como na Figura 5.2, vemos a completa recuperação do formato circular e a amplitude do sinal é uniforme, fato que não acontece na Figura 5.3, pois como o intervalo de aplicação da correção foi aumentado de 9 para 15 passos, parte da energia que deveria estar na direção das diagonais não é levada em consideração, por isso nessa última figura vemos uma não uniformidade do sinal.

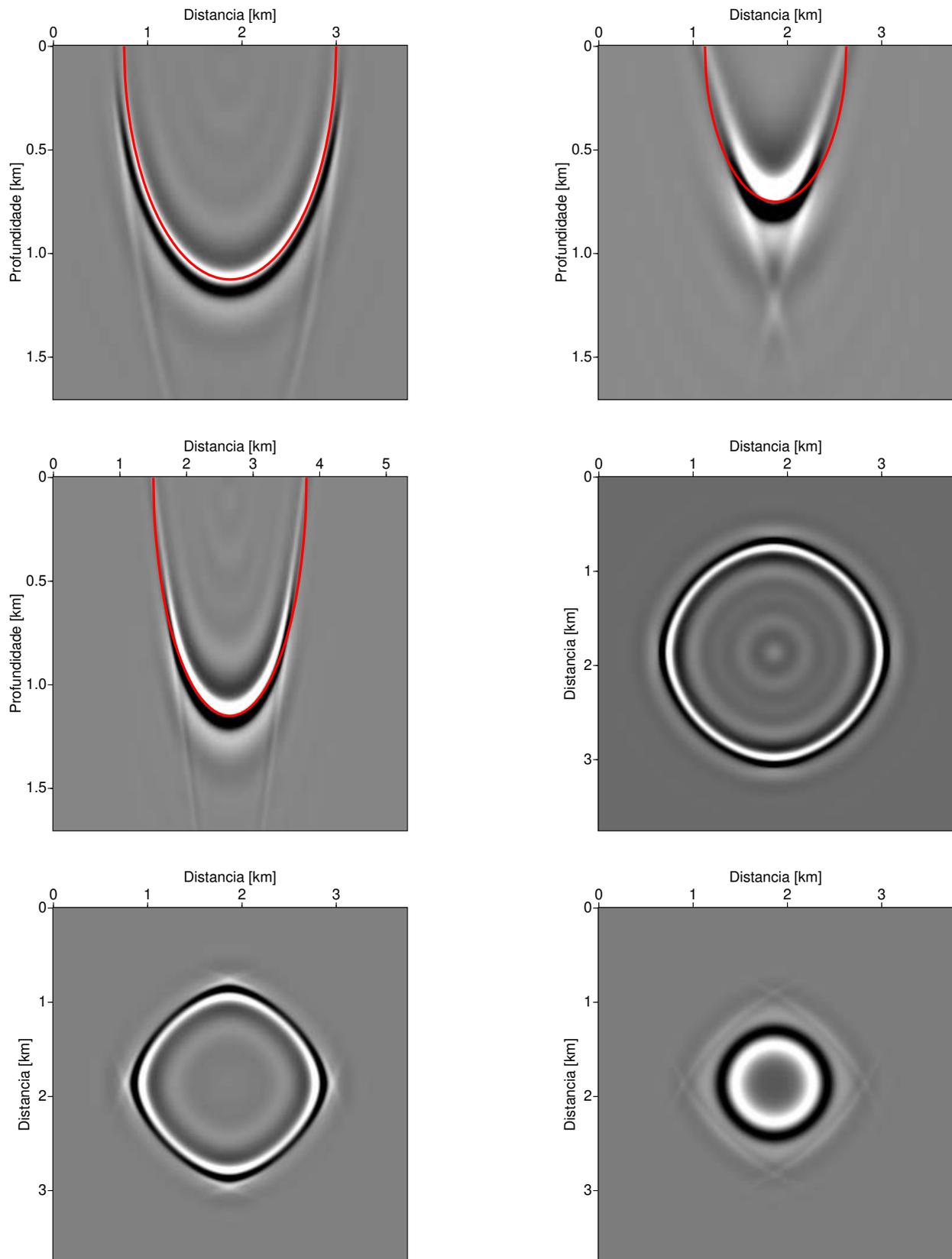


Figura 5.1: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções sem correção de Li.

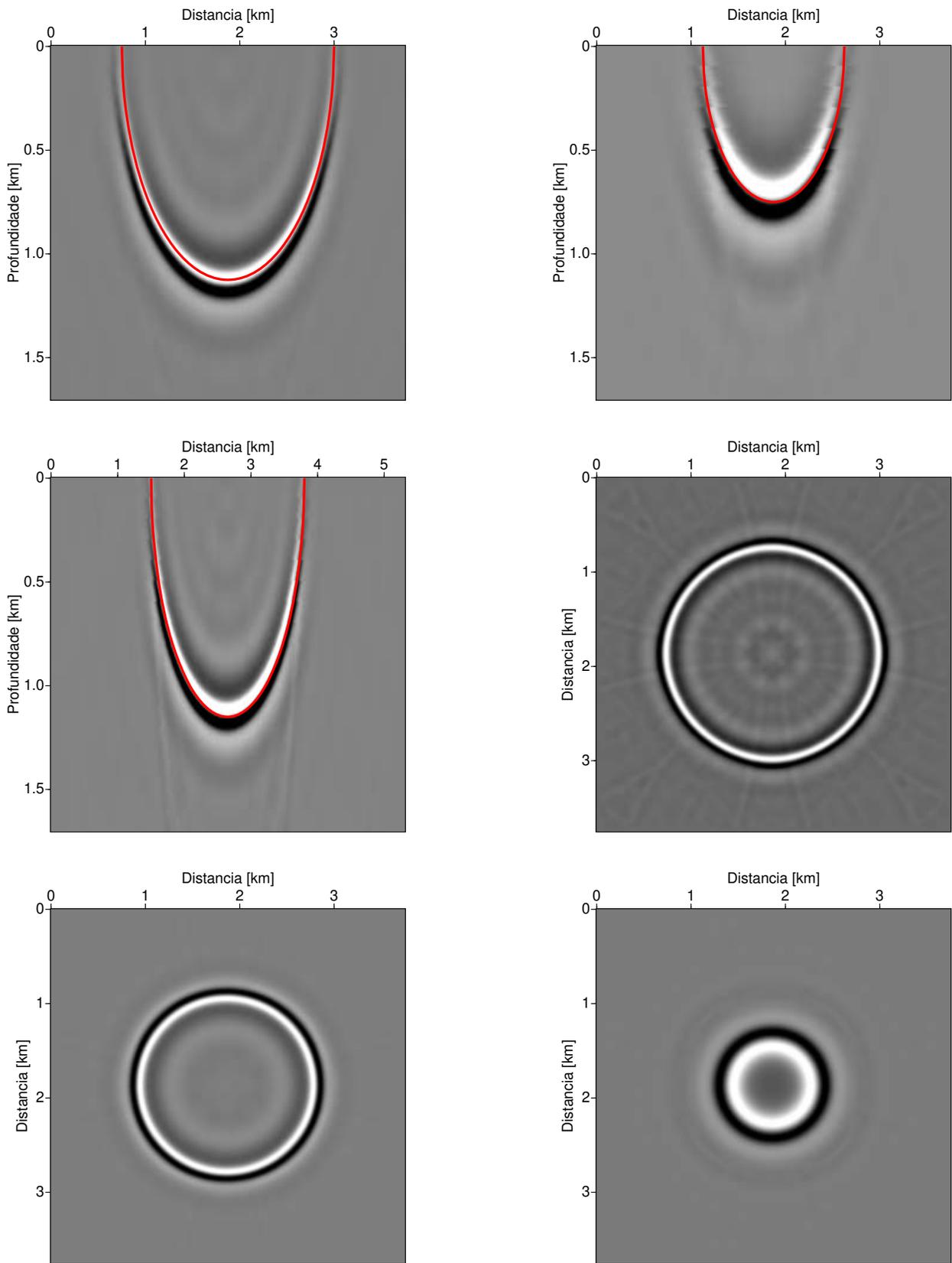


Figura 5.2: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li a cada 9 passos.

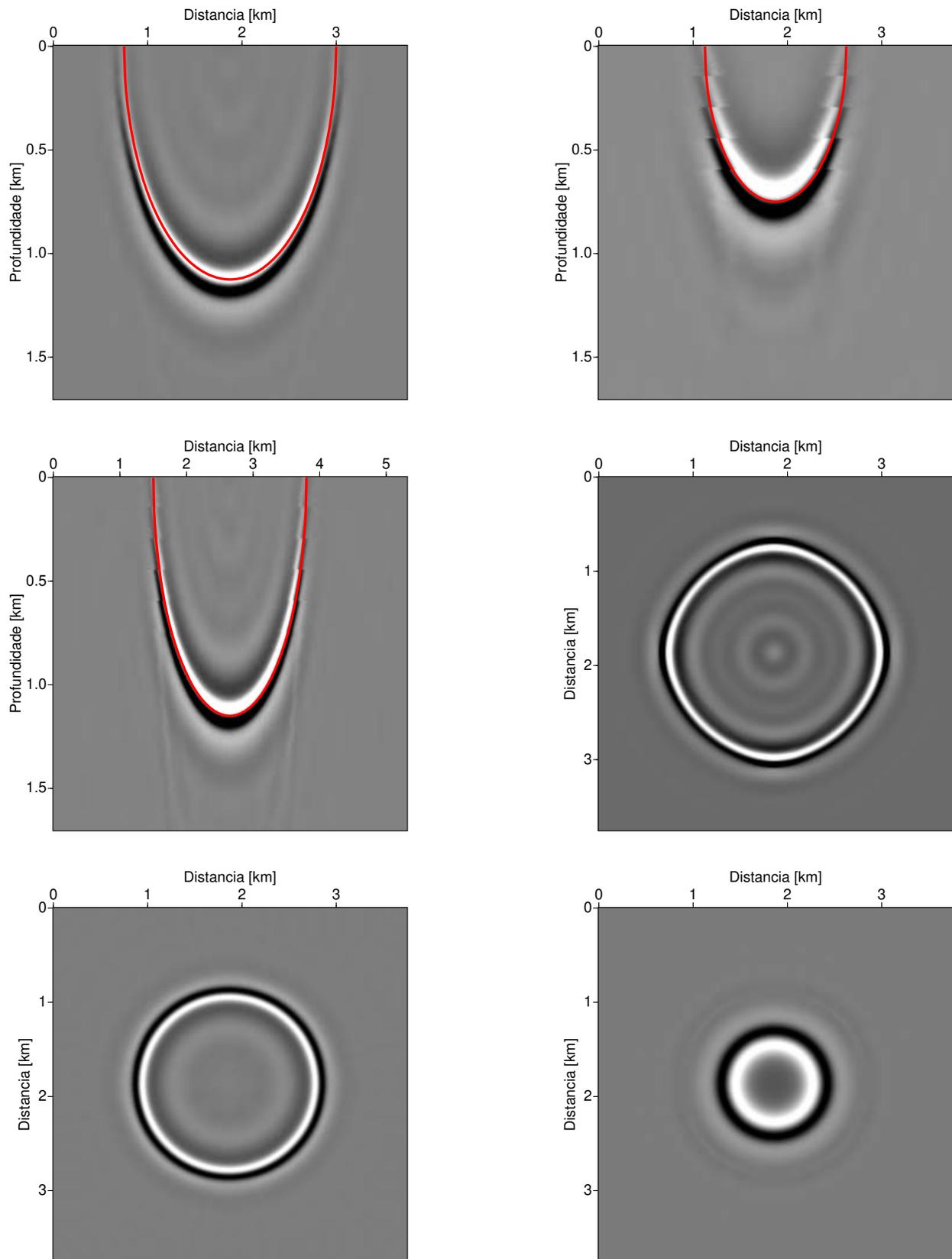


Figura 5.3: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li a cada 15 passos.

5.1.2 Aproximações de Padé real e complexa

Neste conjunto de testes, queremos comparar os resultados quando usamos a aproximação em série de Padé na sua versão real e na sua versão complexa. Nota-se que para a aproximação complexa, usamos o ângulo de rotação que fornece o melhor resultado para o dado número de termos. A dependência do ângulo de rotação será discutida na próxima seção. A velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade, usamos a correção de Li a cada 9 passos, a interpolação linear dos campos usando a velocidade média.

As Figuras 5.4 e 5.5 mostram os resultados da migração FD quando usamos a aproximação de Padé real e a aproximação de Padé complexa, respectivamente, considerando apenas um termo da série. Na Figura 5.4 vemos o surgimento de artefatos de migração logo no início, e as discontinuidades causadas pela correção de Li tem o seu formato alterado. Na Figura 5.5 vemos que os eventos estão levemente suavizados.

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram os resultados da migração FD quando usamos a aproximação de Padé real e a aproximação de Padé complexa, respectivamente, considerando apenas dois termos da série. Na Figura 5.6 ainda vemos artefatos de migração logo no início, e na Figura 5.7 vemos que os eventos continuam levemente suavizados porém mais destacados do que na Figura 5.5.

As Figuras 5.8 e 5.9 mostram os resultados da migração FD quando usamos a aproximação de Padé real e a aproximação de Padé complexa, respectivamente, considerando três termos da série. Na Figura 5.8 vemos a presença de artefatos de migração na profundidade intermediária. Nos cortes verticais e diagonal que não vemos na Figura 5.9, esses artefatos indicam o começo do tratamento inadequado de ondas evanescentes. Os artefatos presentes no corte mais raso são iguais nas duas figuras.

No caso do meio homogêneo, podemos dizer que embora apareçam artefatos quando usamos a aproximação real, como sua amplitude é muito pequena, o resultado final não sofre alterações significativas. Com relação ao custo computacional, o uso da aproximação real torna o algoritmo aproximadamente duas vezes mais barato do que o uso da aproximação complexa.

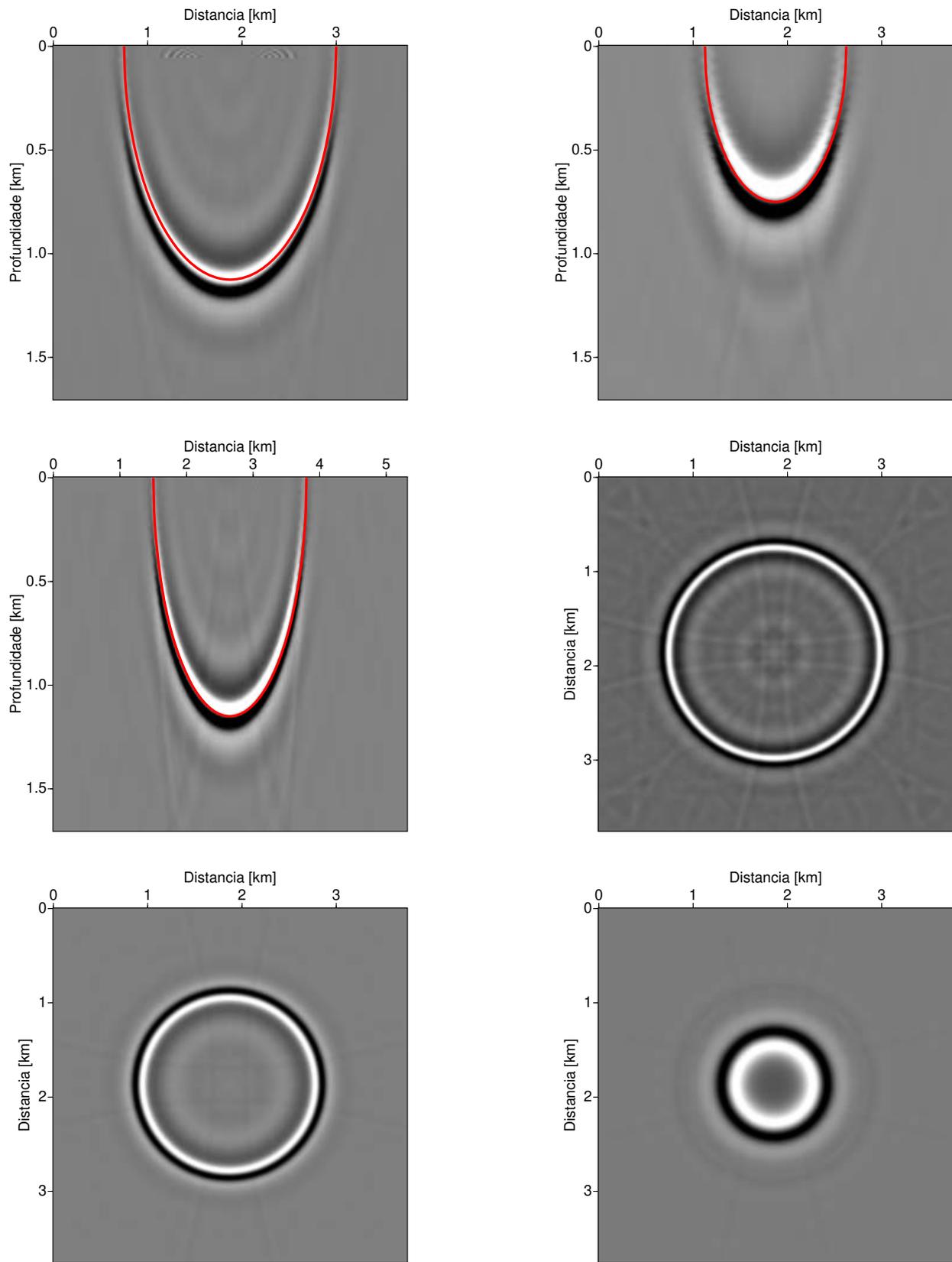


Figura 5.4: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li.

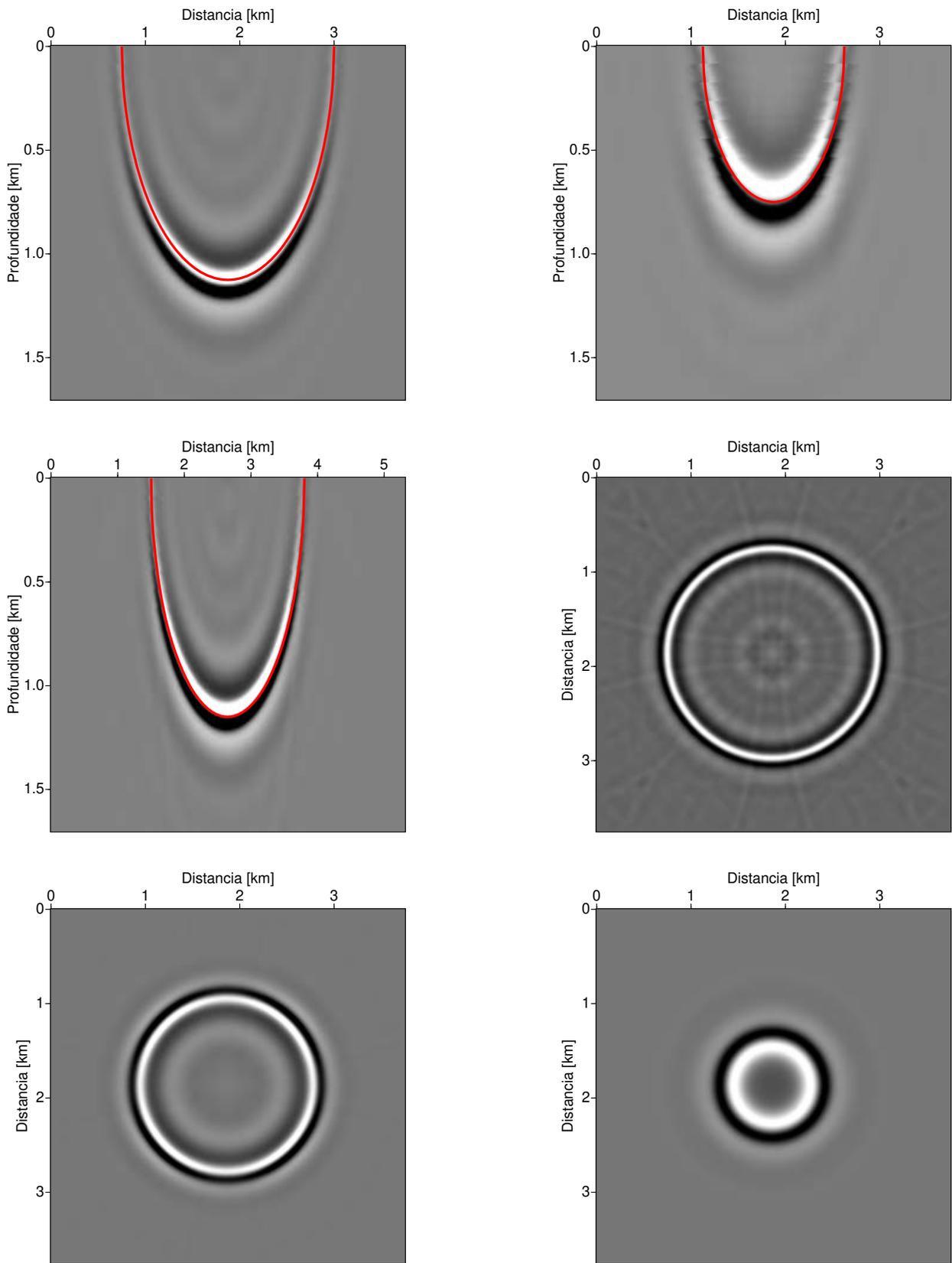


Figura 5.5: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15° , com correção de Li.

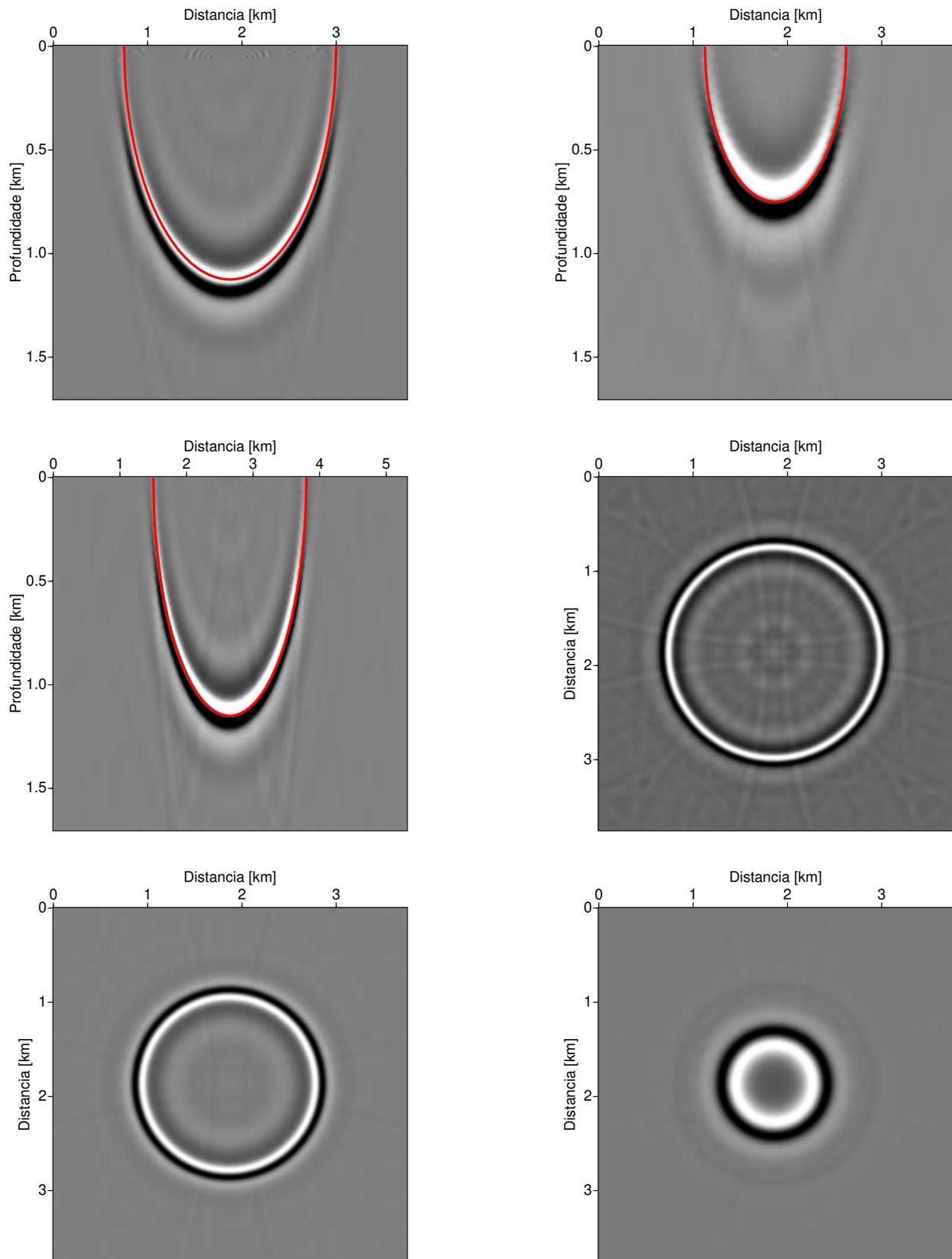


Figura 5.6: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li.

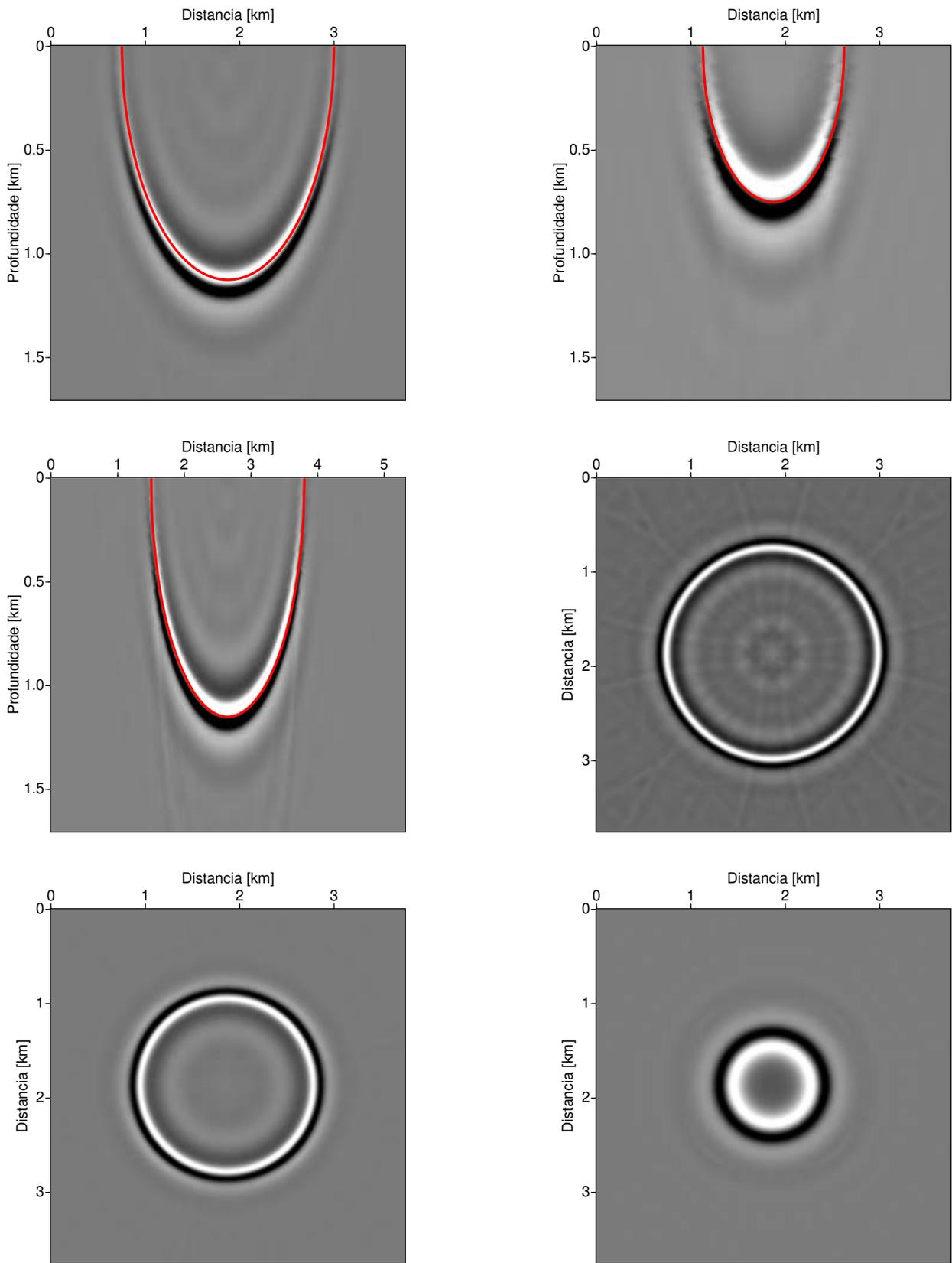


Figura 5.7: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25° , com correção de Li.

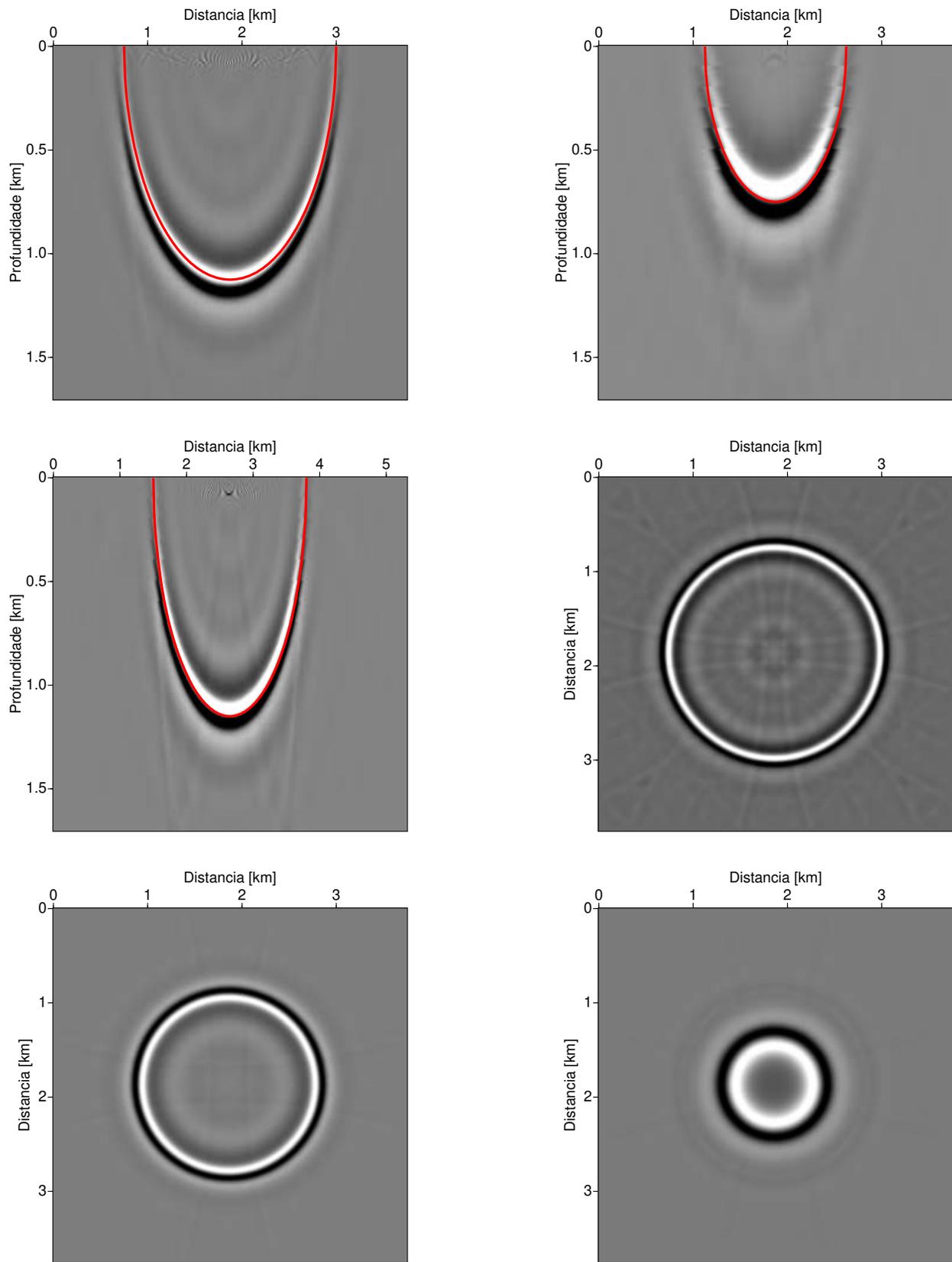


Figura 5.8: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li.

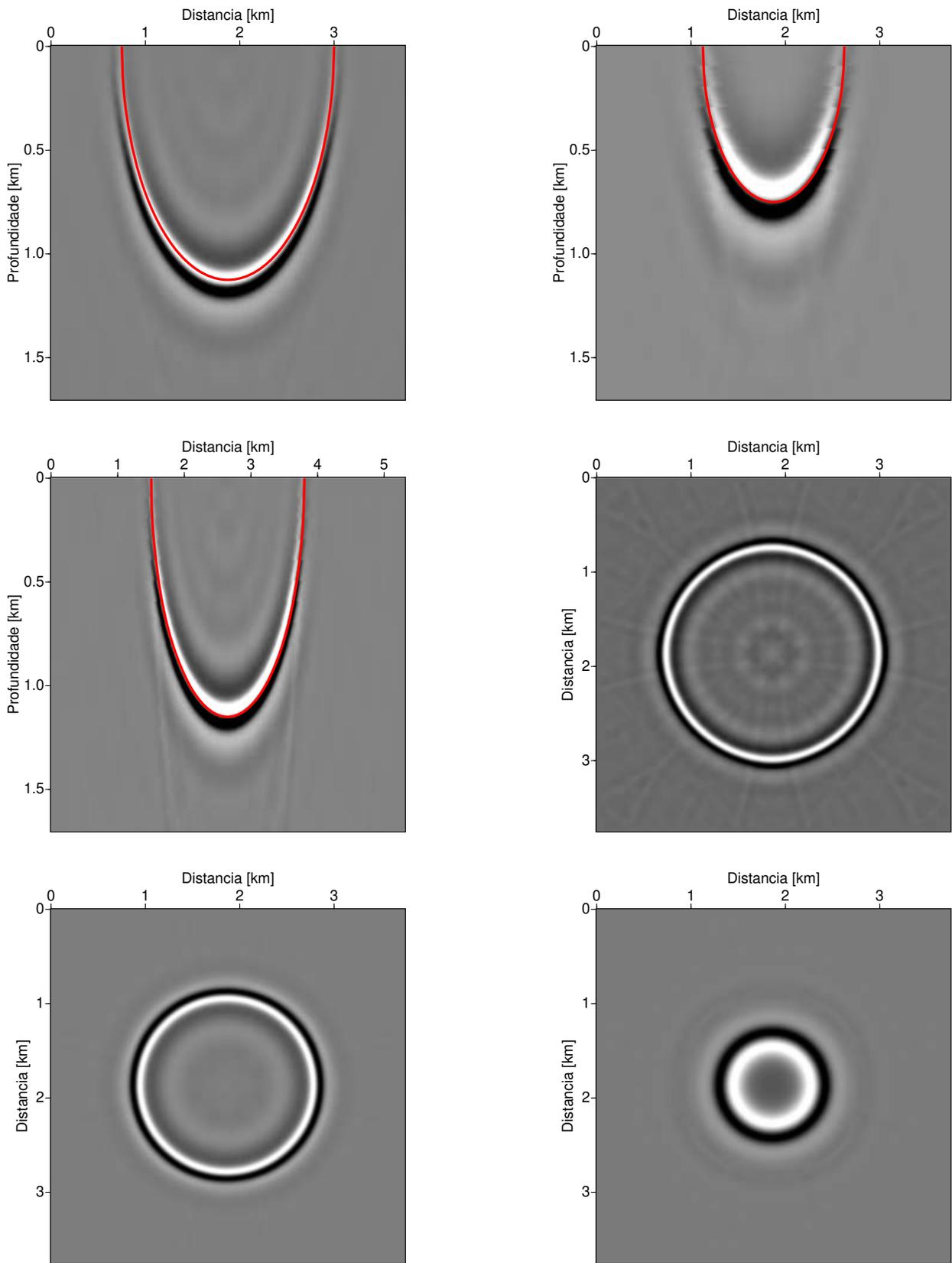


Figura 5.9: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45° , com correção de Li.

5.1.3 Número de termos e ângulo de rotação

Neste conjunto de testes queremos ver os resultados quando variamos tanto o número de termos quanto o ângulo de rotação da série de Padé complexa. Baseado em testes que não serão mostrados aqui, já sabemos que quanto menos termos da série são usados menor deve ser o ângulo de rotação. Testamos as combinações de 1 termo da série de Padé com os ângulos de 15° e 25° , 2 termos da série de Padé com os ângulos de 15° e 25° , e 3 termos da série de Padé com os ângulos de 5° , 15° , 25° e 45° . Aqui usamos a série de Padé complexa, a velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade, usamos a correção de Li a cada 9 passos e a interpolação dos campos é feita usando a velocidade média.

Nas Figuras 5.10 e 5.11 vemos o resultado da migração FD quando usamos 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° e 25° , respectivamente. Nessas figuras podemos ver que quando usamos apenas 1 termo da série de Padé, devemos usar um ângulo de rotação muito pequeno. No corte vertical, a perda de amplitude da primeira para a segunda figura é facilmente notada. Vemos mais artefatos no corte mais raso da primeira figura, e uma perda de amplitude na direção dos eixos no corte intermediário na segunda figura. Estes efeitos aumentam para ângulos de rotação maiores.

Nas Figuras 5.12 e 5.13 vemos o resultado da migração FD quando usamos 2 termos da série de Padé e variamos o ângulo de rotação de 15° e 25° , respectivamente. Nessas figuras podemos notar que com 2 termos da série de Padé usar o ângulo de rotação de 15° fornece um corte vertical com mais amplitude do que quando usamos o ângulo de 25° . Porém na Figura 5.12 vemos artefatos com maior amplitude no corte horizontal mais raso. Nota-se que não há melhoria perceptível no posicionamento do evento pelo uso do segundo termo de Padé em comparação às Figuras 5.10 e 5.11.

Nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 vemos o resultado da migração FD quando usamos 3 termos da série de Padé e variamos o ângulo de rotação de 5° , 15° , 25° e 45° , respectivamente. Nessas figuras vemos que com 3 termos da série de Padé os artefatos presentes no corte horizontal mais raso são iguais independente do ângulo de rotação que usamos. O mesmo acontece com a amplitude no corte vertical para todos os ângulos, ou seja, para os ângulos de 5° , 15° , 25° e 45° .

Podemos notar na Figura 5.11 no corte vertical fora do centro que não há presença de artefatos. Note que neste teste, estamos usando apenas 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Porém como a quantidade e amplitude dos artefatos presentes das outras figuras é pequena, não houve alteração significativa do resultado.

Quanto menos termos da série de Padé são usados menor é o tempo computacional, então se o ângulo de inclinação dos refletores for pequeno, mesmo com a grande perda de amplitude quando usamos apenas 1 termo, o resultado será satisfatório.

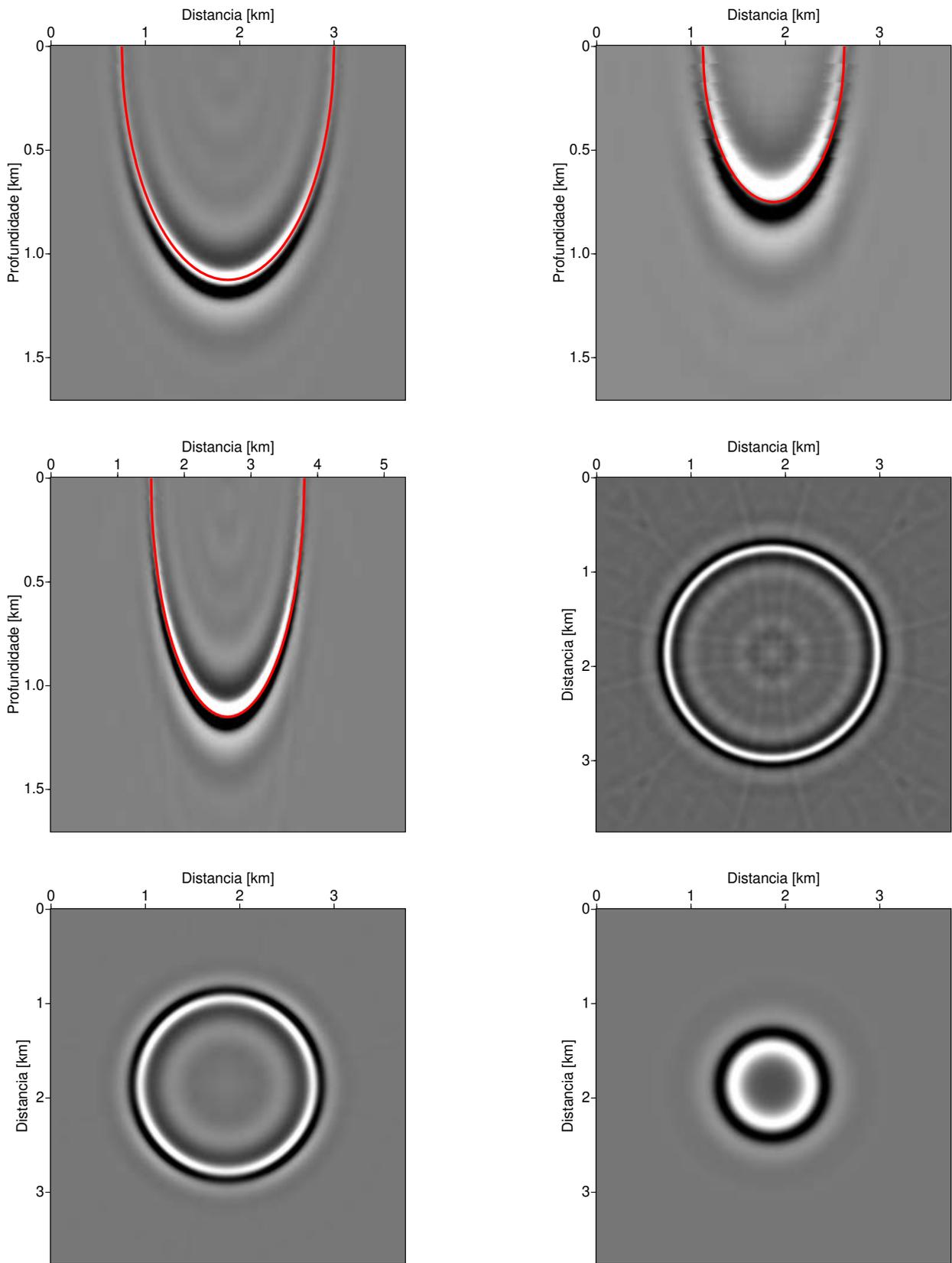


Figura 5.10: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° .

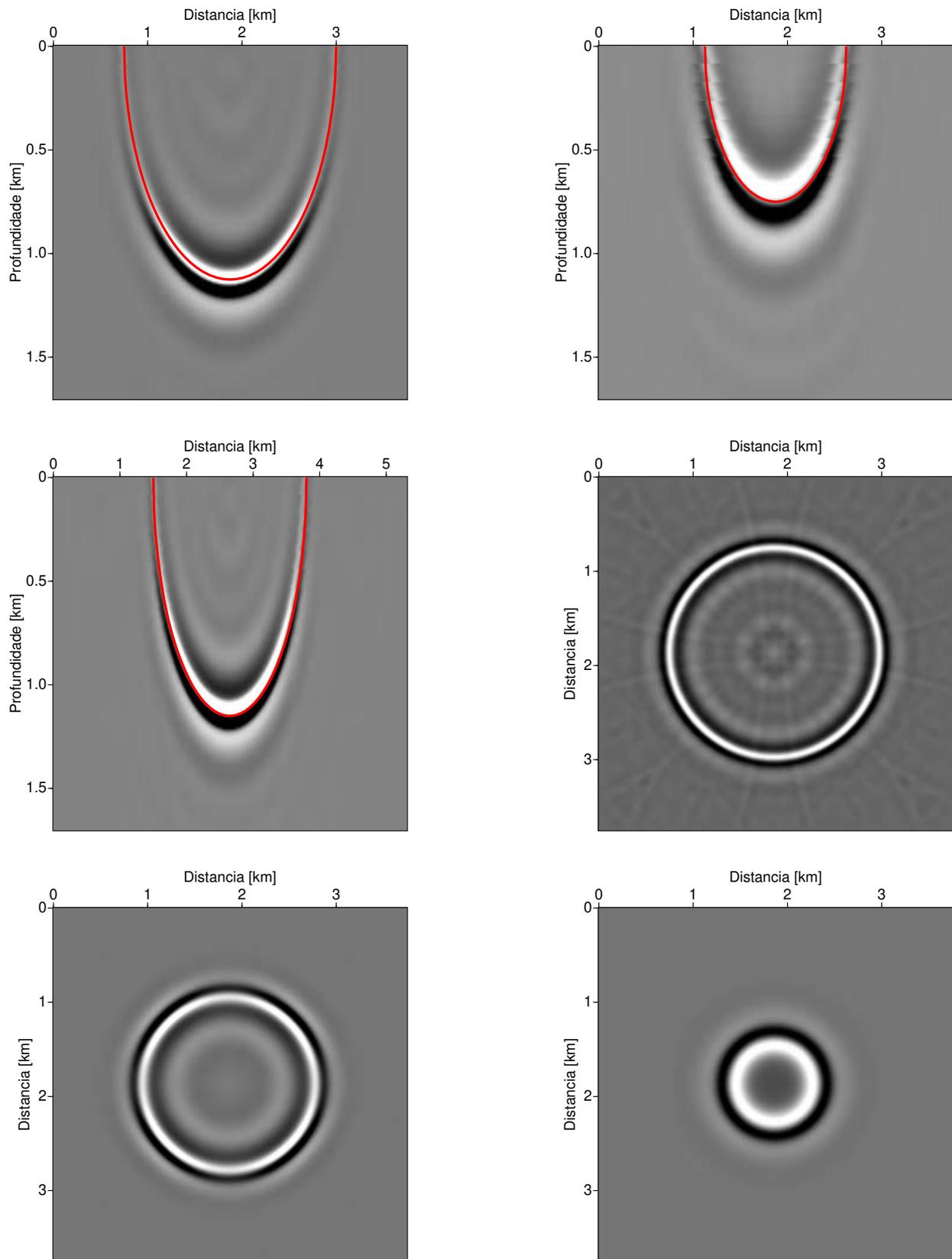


Figura 5.11: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° .

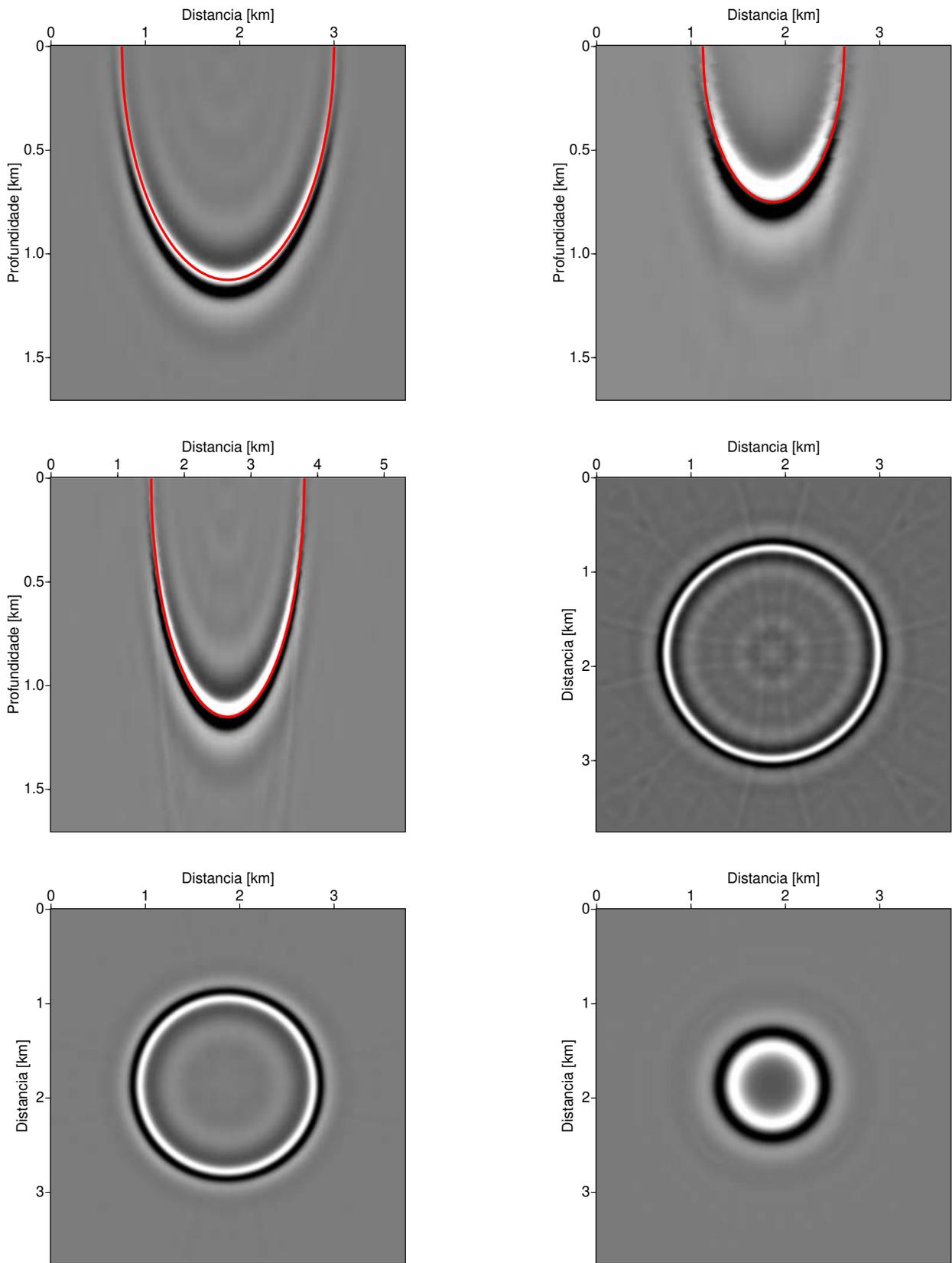


Figura 5.12: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° .

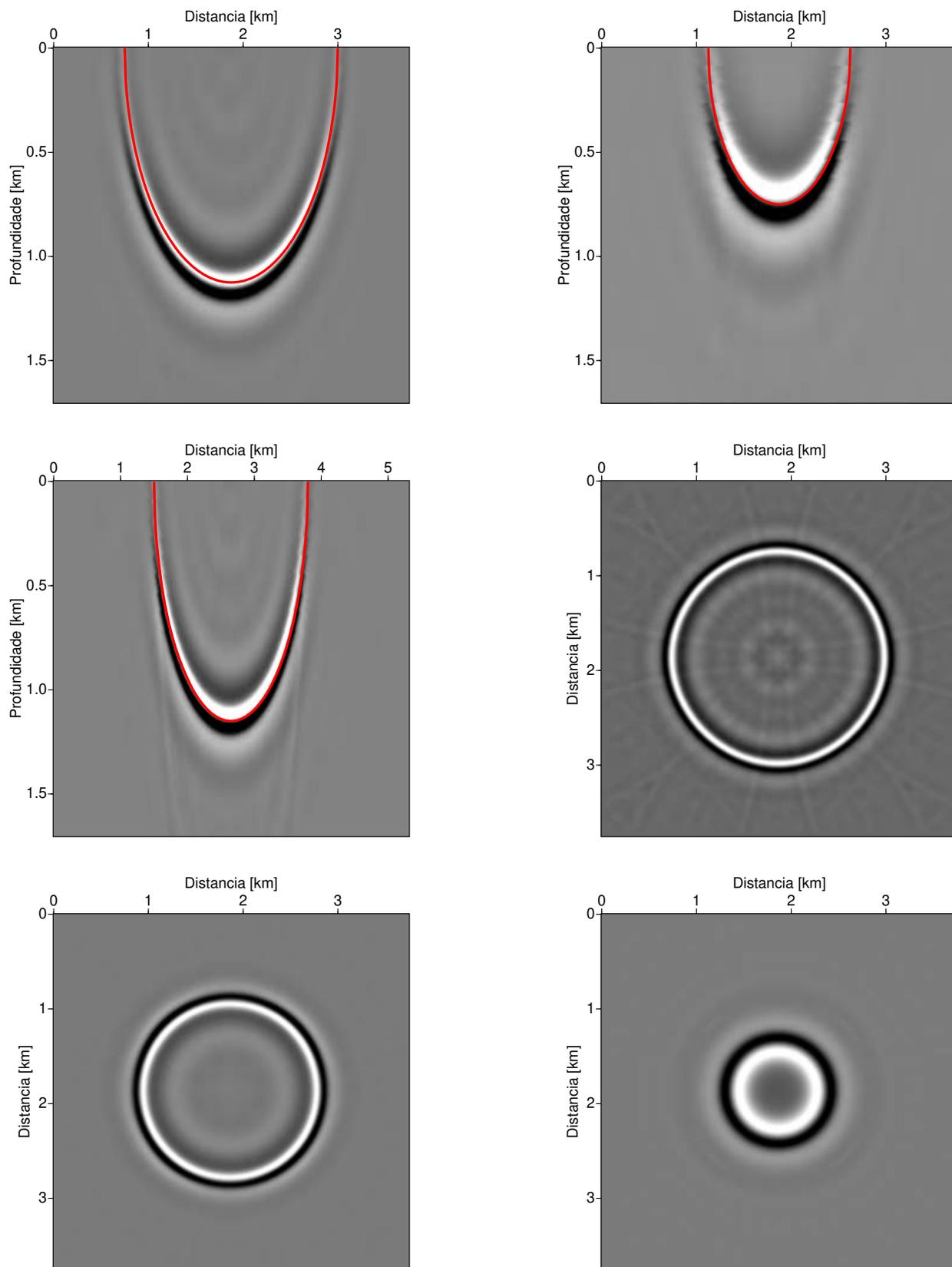


Figura 5.13: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° .

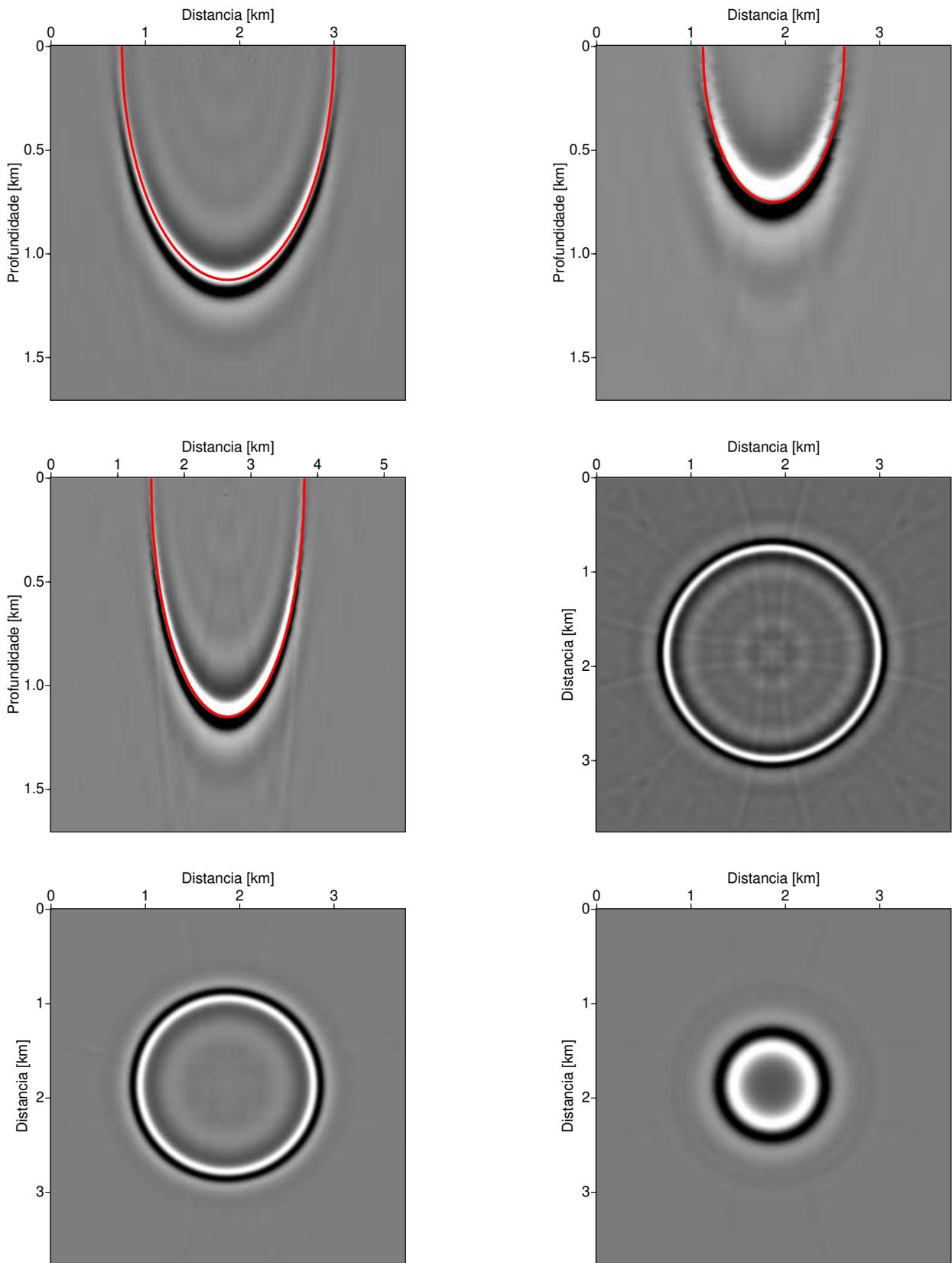


Figura 5.14: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 5° .

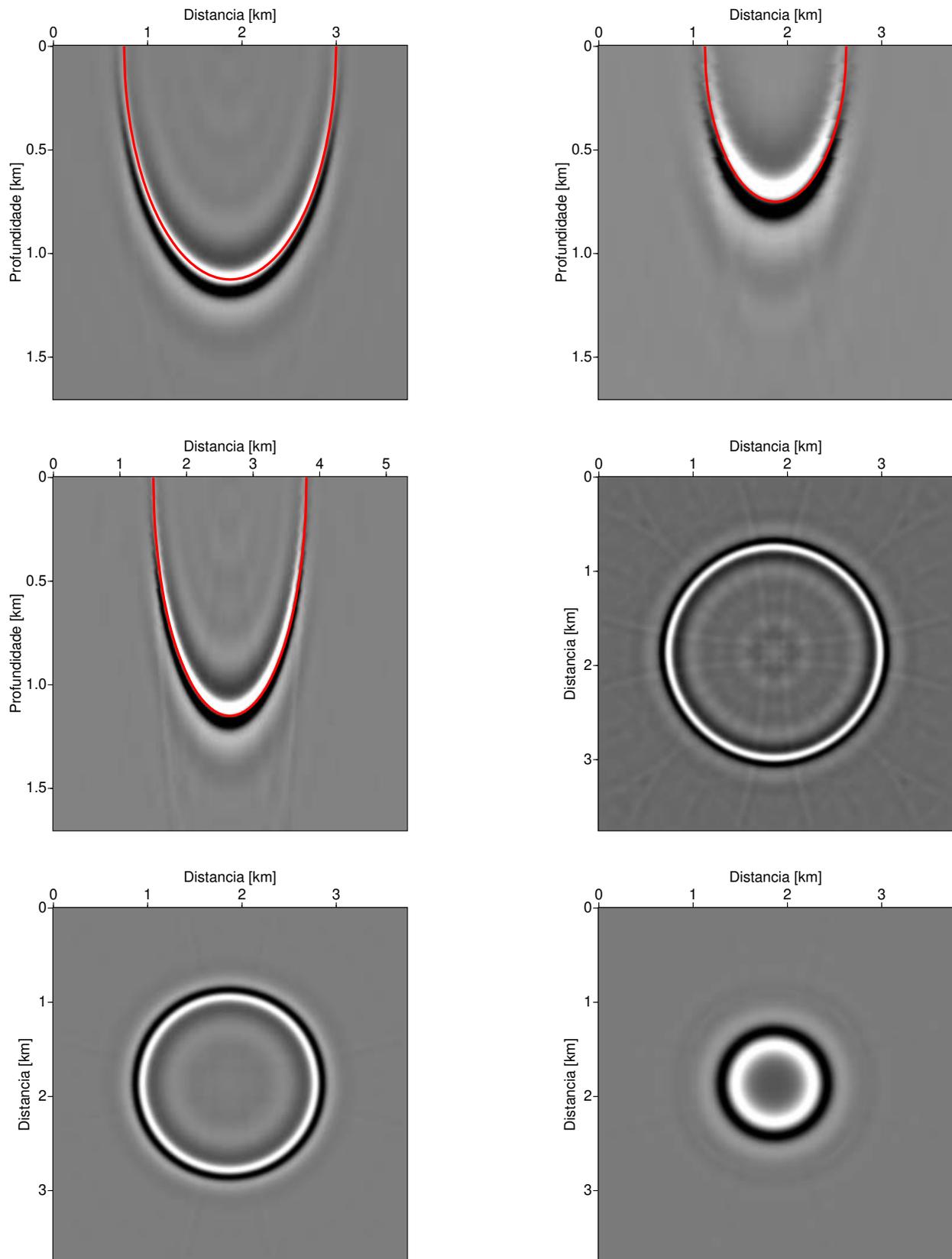


Figura 5.15: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 15° .

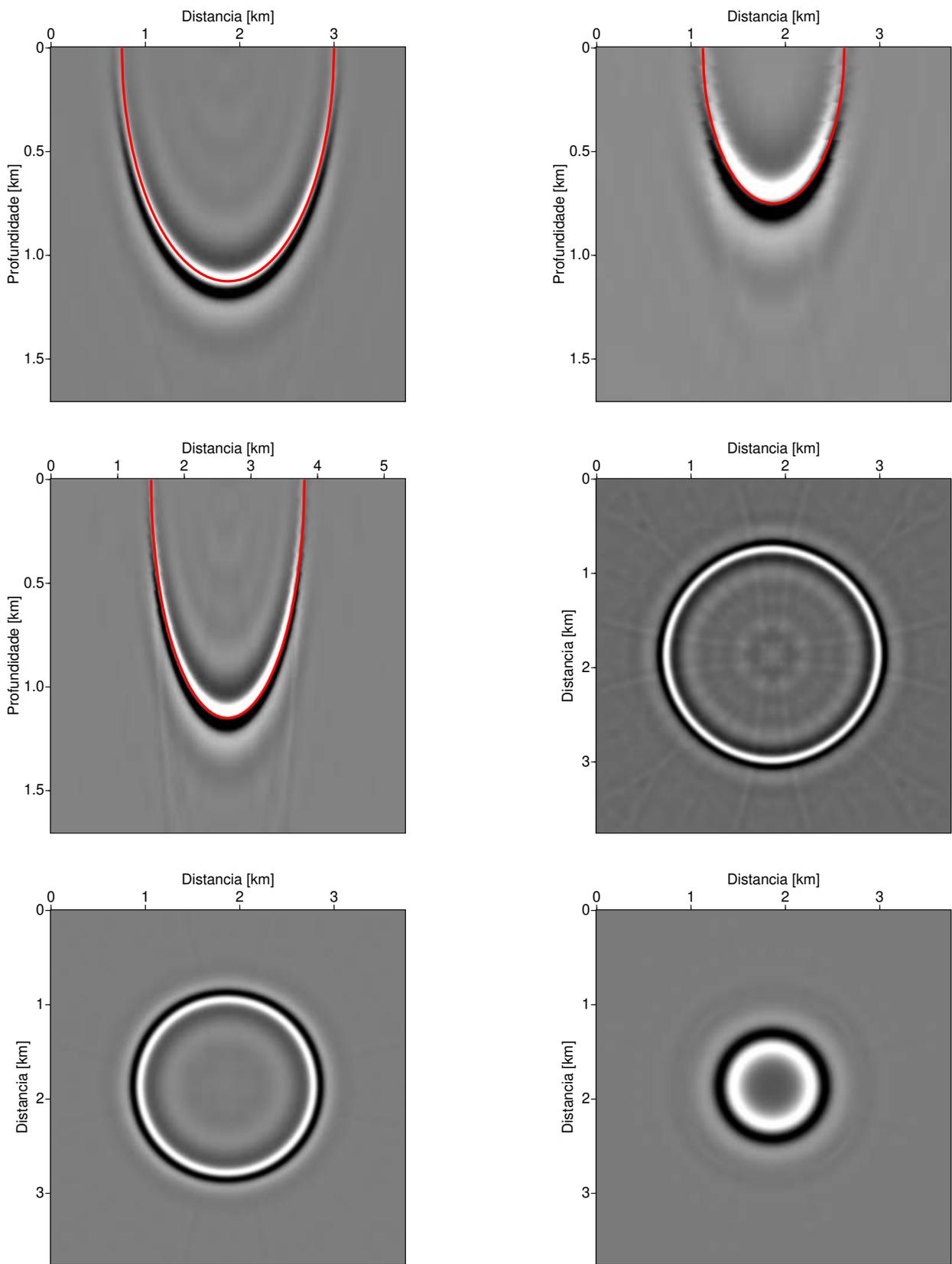


Figura 5.16: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 25° .

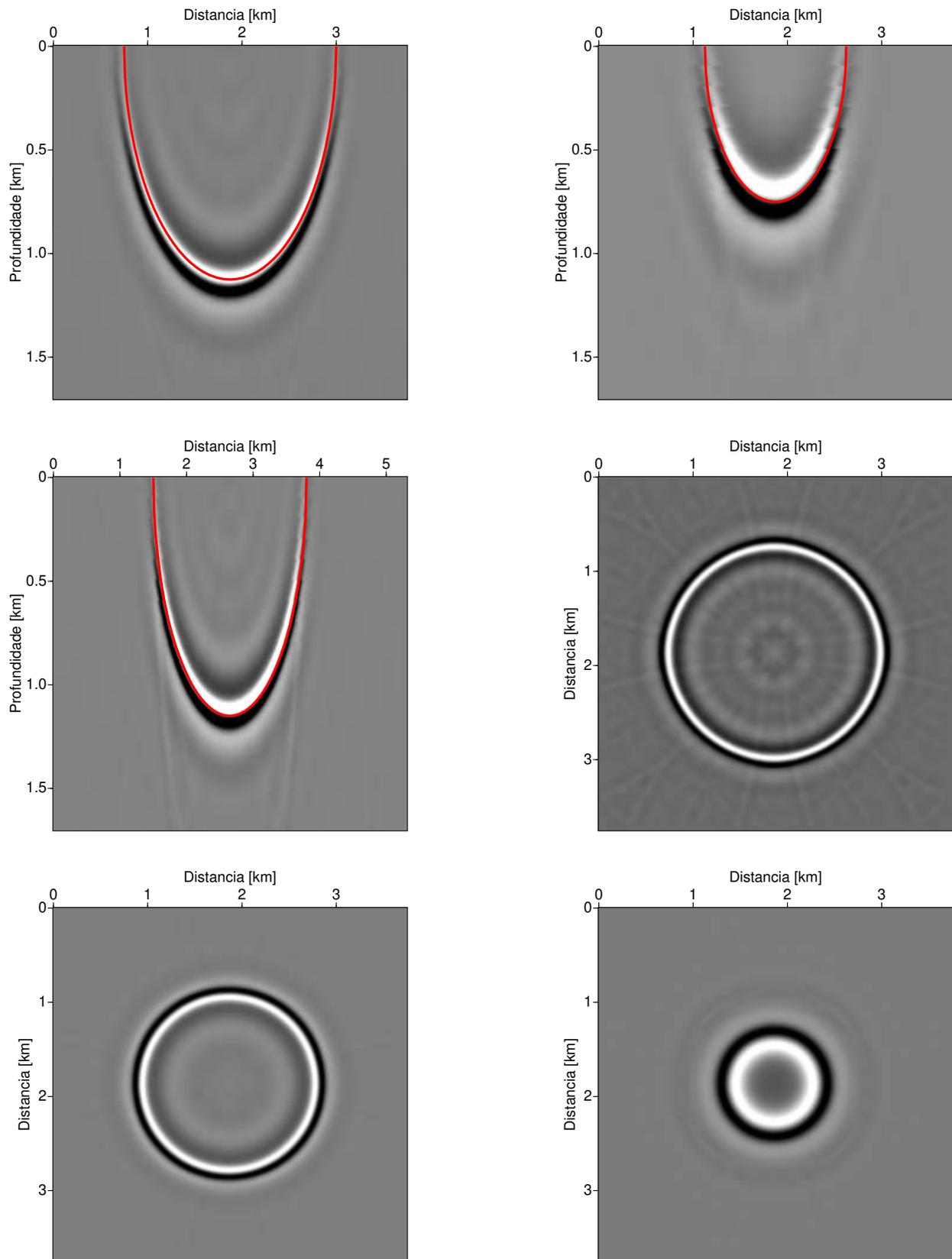


Figura 5.17: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e ângulo de rotação de 45°.

5.1.4 Interpolação

Neste conjunto de testes queremos ver os resultados quando usamos diferentes formas de interpolação dos campos obtidos após a correção de Li. Comparamos aqui a interpolação linear ponderada usando a velocidade média

$$peso = (v_{mean} - v_{r_i}) / (v_{r_{i+1}} - v_{r_i}) ,$$

ou o cubo da velocidade média

$$peso = (v_{mean}^3 - v_{r_i}^3) / (v_{r_{i+1}}^3 - v_{r_i}^3)$$

nas interpolações executadas em correspondência à equação 3.2.

Nas Figuras 5.18, 5.19 e 5.20 vemos os resultados da migração FD quando fazemos a interpolação linear ponderada usando a velocidade, o cubo da velocidade, e o cubo da velocidade média combinada com o cubo da velocidade, respectivamente. Como consequência de usar o cubo da velocidade média para calcular a razão que é usada na interpolação linear dos campos, vemos nas Figuras 5.19 e 5.20 um aumento significativo tanto na quantidade quanto na amplitude dos artefatos de migração no corte mais raso. Ainda nessas duas figuras, no corte mais profundo podemos ver um artefato com formato quase que quadrado e nos cortes verticais um maior erro de posicionamento nos primeiros níveis, bem como uma redução da amplitude.

Embora haja uma diferença sutil entre os artefatos presentes nos cortes verticais e diagonal das três figuras, levando em consideração os artefatos presentes nos cortes horizontais, principalmente o corte mais raso, concluímos que, apesar dos artefatos não terem amplitudes muito fortes, que a interpolação dos campos usando a velocidade como peso é a mais indicada.

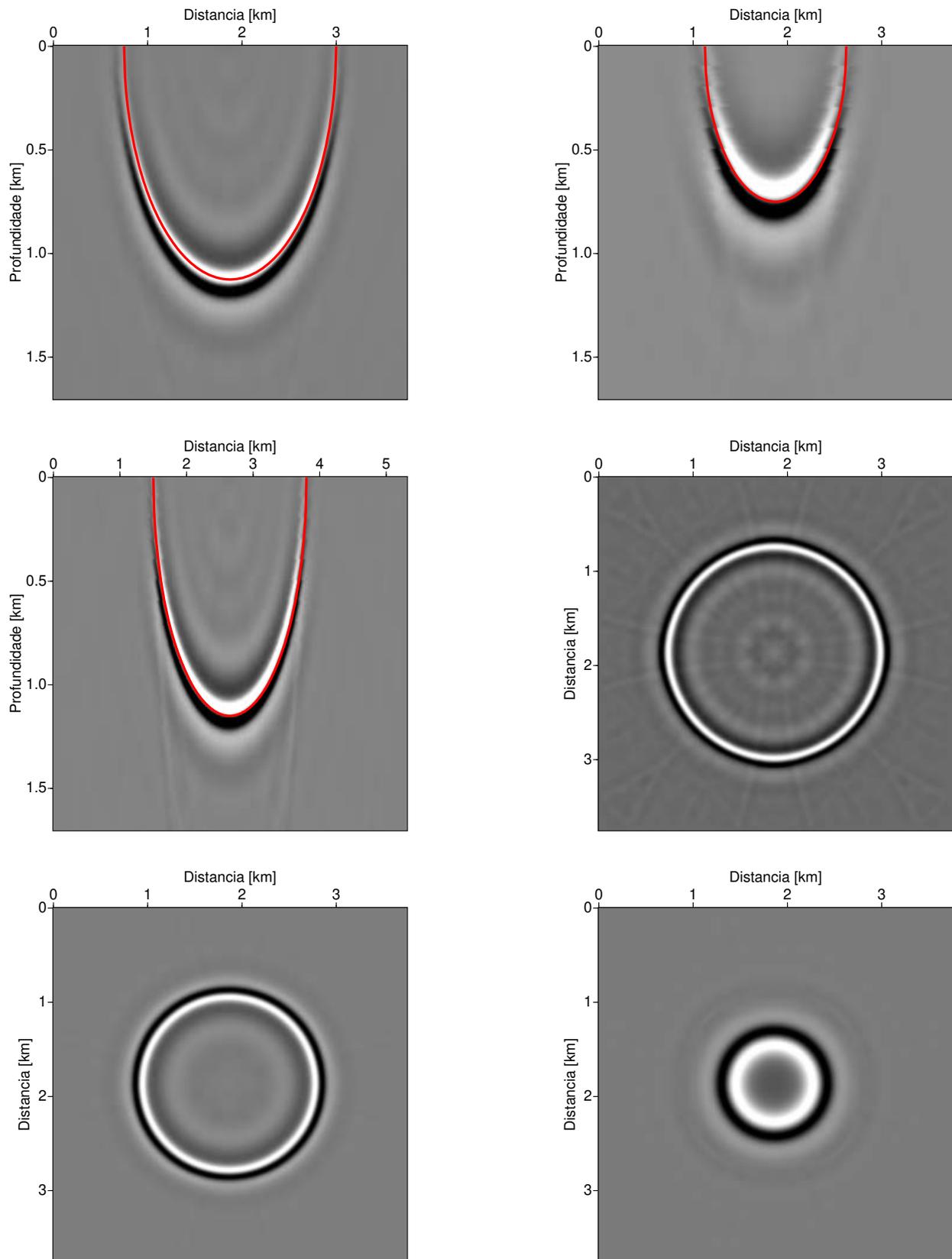


Figura 5.18: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade.

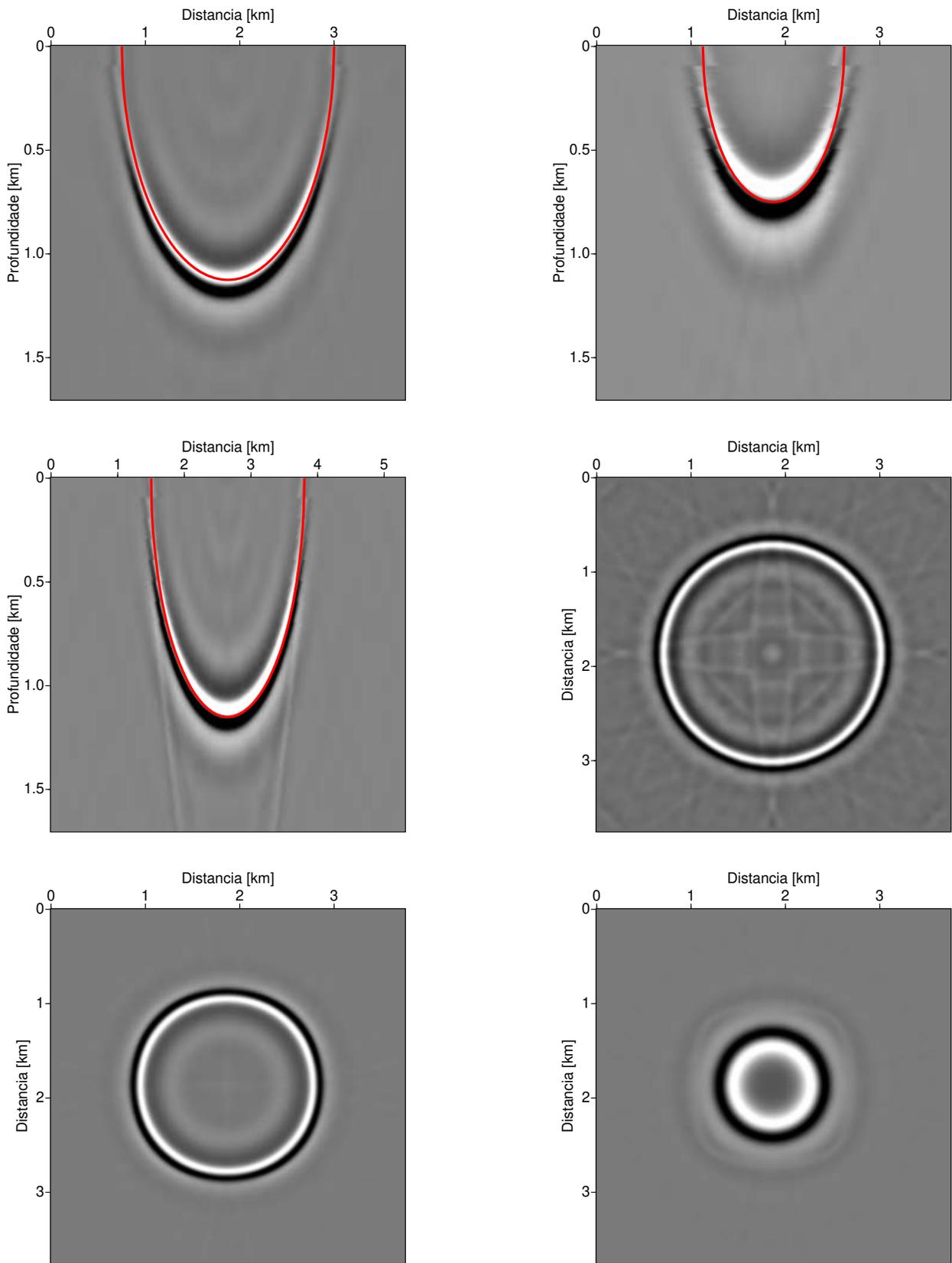


Figura 5.19: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade.

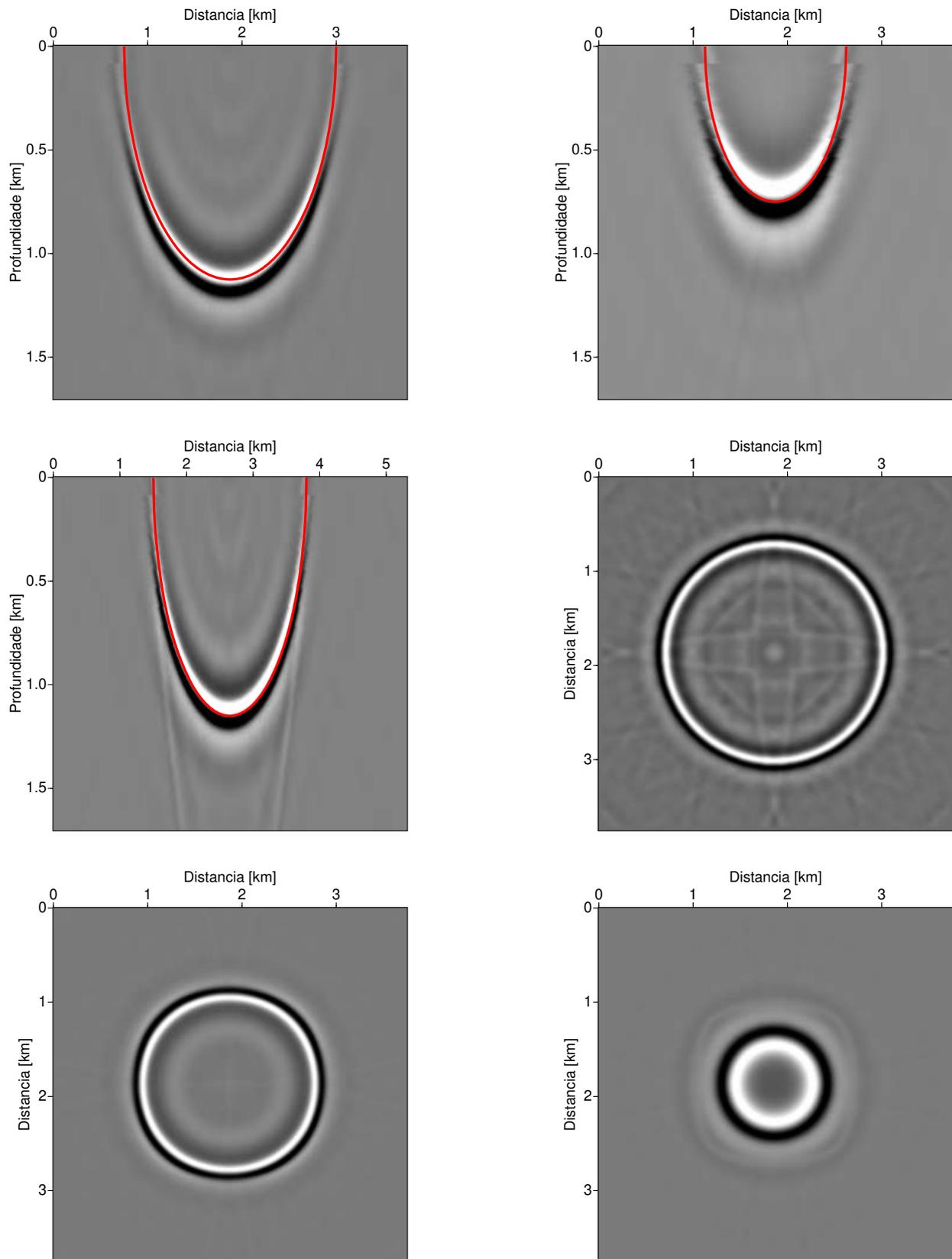


Figura 5.20: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade.

5.1.5 *Splitting* em 4 direções

Neste conjunto de testes queremos verificar o resultado quando usamos o *splitting* em quatro direções alternadas. Como estamos aplicando o *splitting* também nas diagonais, esperamos que o problema de anisotropia seja reduzido. Caso não seja, também testamos aplicar a correção de Li com essa forma de *splitting*. Aqui usamos a série de Padé complexa com 3 termos, a velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade e a interpolação dos campos é feita usando a velocidade média.

Nas Figuras 5.21 e 5.22 vemos o resultado da migração FD quando fazemos o *splitting* em quatro direções alternadas, sem e com a correção de Li, respectivamente. Comparando as Figuras 5.1 (*splitting* bidirecional sem correção de Li) e 5.21 (*splitting* em 4 direções alternadas sem correção de Li) observamos que o *splitting* aplicado nas 4 direções é significativamente melhor, sendo que os dois procedimentos tem aproximadamente o mesmo custo computacional. Notamos que o erro de posicionamento da resposta impulso nos cortes diagonal e fora do centro na Figura 5.21 é quase o correto enquanto o na Figura 5.1 é bastante incorreto nos ângulos intermediários. Mesmo nos cortes horizontais, vemos que o erro foi significativamente reduzido.

Comparando as Figuras 5.21 e 5.22, podemos notar que a diferença entre elas está no corte horizontal mais raso, em que na primeira não vemos artefatos, e no corte intermediário, em que na primeira figura o formato circular é levemente distorcido para o formato octogonal. No corte horizontal mais profundo os resultados são iguais. Nos cortes verticais, principalmente, aquele deslocado do centro e no corte diagonal da Figura 5.21, podemos notar uma pequena diferença entre a posição teórica e o resultado que obtivemos logo no início da figura. Em contrapartida, na Figura 5.22 podemos notar o surgimento de artefatos de migração nos cortes horizontais. A partir desses fatos, podemos concluir que apesar do *splitting* em 4 direções alternadas sem a aplicação da correção de Li ser capaz de recuperar grande parte do posicionamento do evento, mesmo com o aparecimento de artefatos, a correção de Li recupera totalmente o posicionamento dos eventos. Notamos que o efeito das descontinuidades da correção de Li na Figura 5.22 é reduzido em comparação à Figura 5.2, resultado do melhor posicionamento do evento antes da aplicação da correção de Li.

O custo computacional de fazer o *splitting* em quatro direções alternadas é o mesmo de fazer o *splitting* em duas direções, pois sendo alternado, em um nível resolvemos na direção dos eixos x e y , e no nível seguinte resolvemos da direção das diagonais.

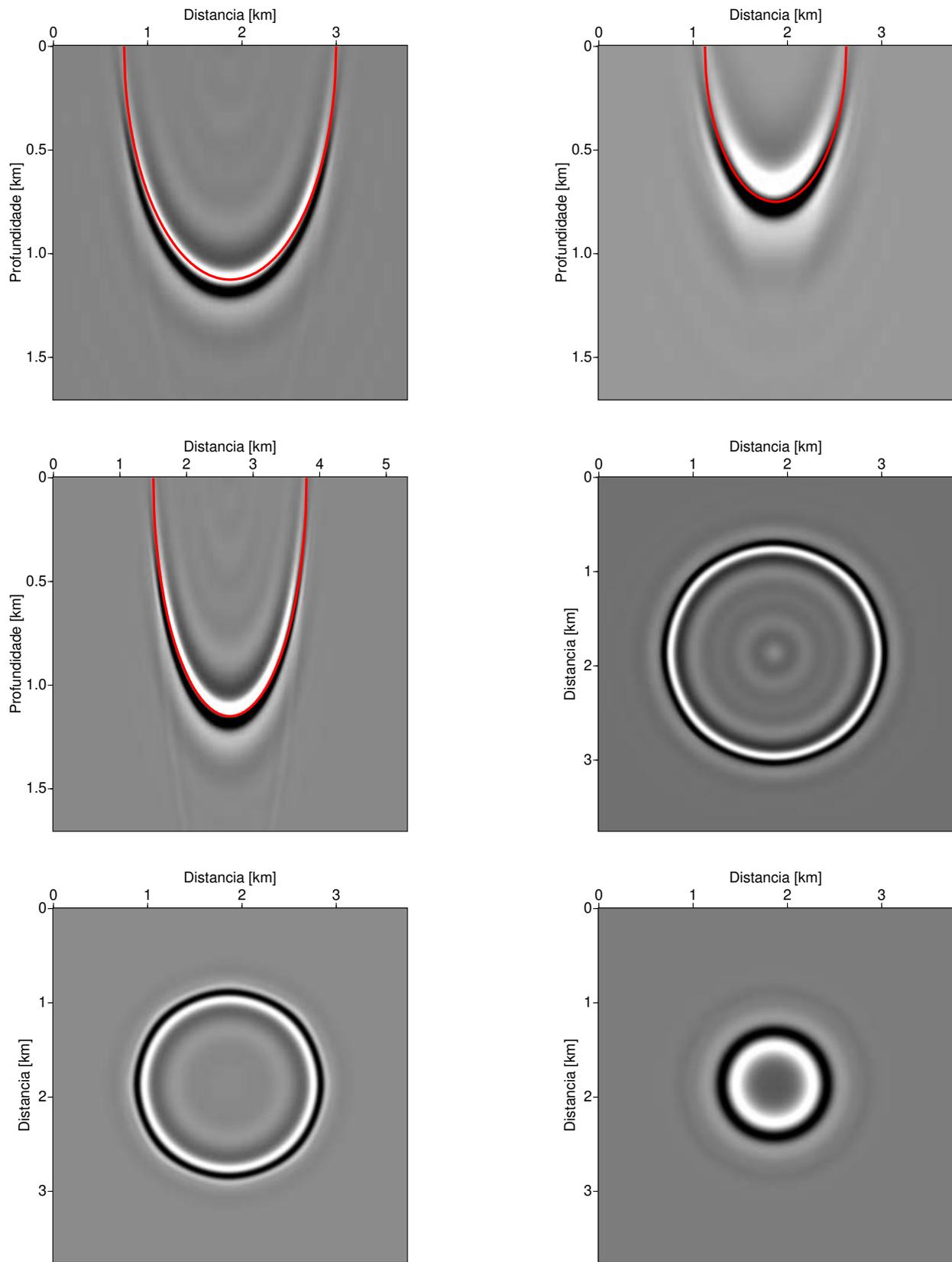


Figura 5.21: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas sem correção de Li.

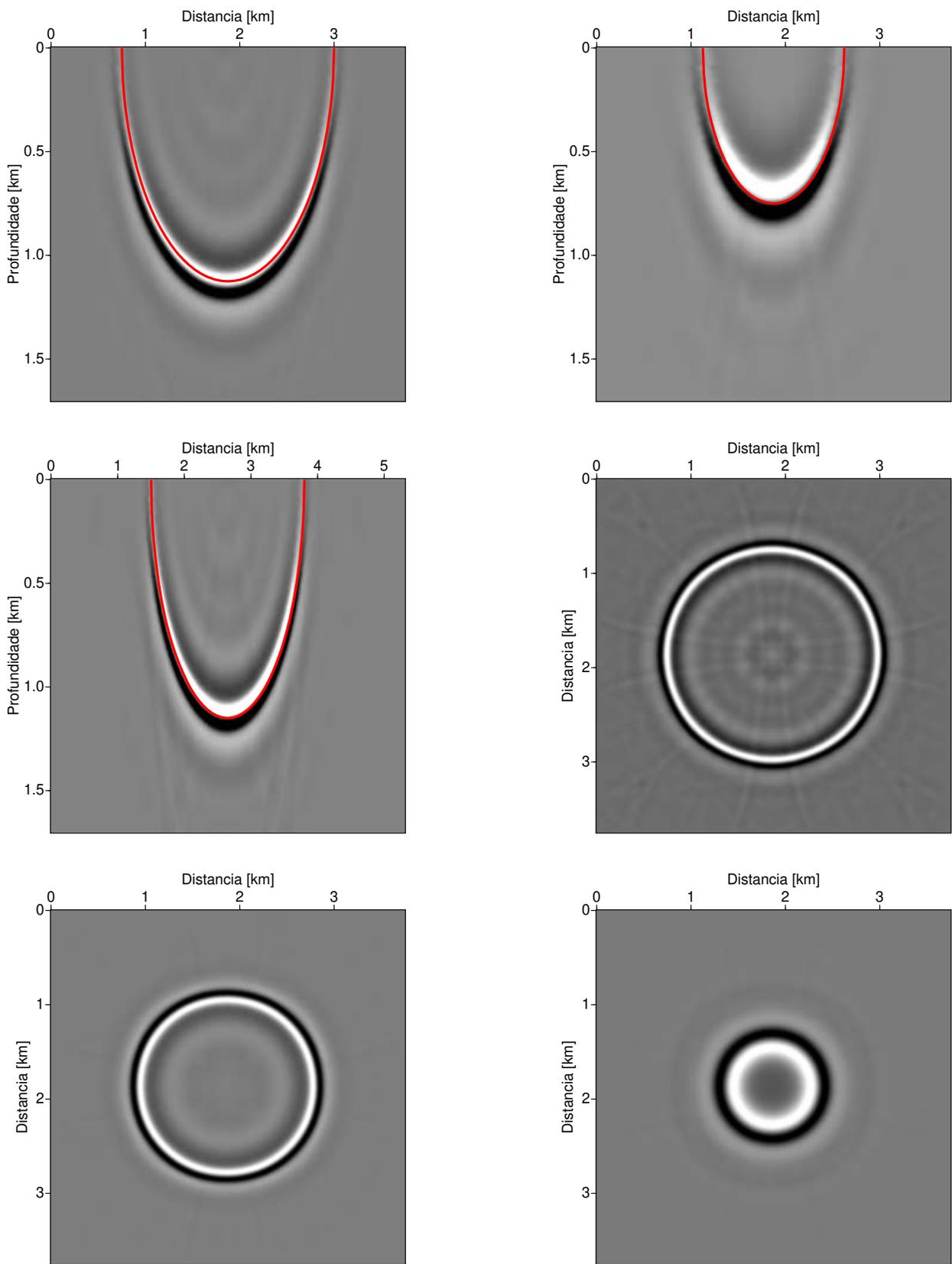


Figura 5.22: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas com correção de Li.

5.1.6 Discussão dos resultados

Considerando todos os testes feitos em meio homogêneo, podemos tirar as primeiras conclusões preliminares: quando o ângulo de inclinação dos refletores for pequeno é suficiente utilizar a aproximação em série de Padé com apenas 1 termo com ângulo de rotação de 15° ou até mesmo a aproximação real. Para refletores com ângulos de inclinação maiores, os melhores parâmetros são 3 termos da série de Padé complexa com ângulo de rotação de 45° . Em ambos os casos, o melhor resultado é obtido ao calcular a velocidade média usando a vagarosidade e interpolar os campos usando a velocidade média. O *splitting* em duas direções e em quatro direções alternadas têm o mesmo custo computacional, por isso, recomendamos usar o último. E finalmente, aplicar o termo de correção de Li é absolutamente necessário para o *splitting* bidirecional, pois apesar de introduzir artefatos de migração, estes estão presentes apenas nos cortes mais rasos. Já no *splitting* em 4 direções alternadas, a correção de Li será necessária somente para correções de ângulos intermediários de propagação em direções entre as diagonais e os eixos de coordenadas, quando maior precisão possível for desejada. Nos nossos testes, o intervalo para se aplicar essa correção foi de 9 passos, então para um meio quase homogêneo, diminuir esse tamanho de passo aumenta o custo computacional, porém não melhora o resultado significativamente. Nos cortes mais profundos, além de não haver artefatos, o formato circular é completamente recuperado, acabando com o problema de anisotropia numérica.

5.2 Testes em meio não homogêneo

Após os testes no modelo homogêneo, testamos alguns dos métodos de migração para o caso de afastamento nulo por meio das suas respostas impulso no modelo de sal da EAGE/SEG. Para tal, usamos os seguintes parâmetros: Fonte: Pulso Ricker com frequência central de 15 Hz; malha de migração com $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 20$ m (para evitar dispersão numérica, tratamos o modelo como se o espaçamento fosse de 10 m); pulso a ser migrado posicionado simetricamente com o seu centro em $t = 2.2$ s.

Para representarmos os resultados, usamos os cortes verticais paralelos ao plano yz em $x = 3.0$ km e $x = 8.32$ km, paralelos ao plano xz em $y = 3.0$ km e $y = 8.32$ km e horizontais nas profundidades $z = 1.1$ km, $z = 2.1$ km, $z = 2.7$ km e $z = 3.1$ km. Estes mesmos cortes do modelo são representados nas Figuras 5.23 e 5.24. Para podermos usar o método de Lloyd para a escolha das velocidades de referência, para cada nível de profundidade, calculamos a velocidade média ($v_{mean}(x, y)$), usando todos os pontos (x, y) do modelo de velocidades. Comparamos a qualidade dos resultados ao calcular a velocidade média usando a velocidade, a vagarosidade ou então o cubo da velocidade. Assim, o uso do método de Lloyd para determinar as velocidades de referência implica que o número de velocidades possíveis é variável, sendo que o número máximo que permitimos foi 10.

Aplicamos uma suavização do modelo de velocidade com a finalidade de verificar se assim as descontinuidades da frente de onda causadas pela correção de Li diminuíssem. Para tal, a vagarosidade média em cada nível foi suavizada aplicando uma média móvel na forma

$$\bar{v}_{ij} = (\bar{v}_{i+1j} + \bar{v}_{ij+1} + \bar{v}_{i-1j} + \bar{v}_{ij-1})/4, \quad (5.1)$$

onde \bar{v}_{ij} representa a vagarosidade média do intervalo vertical sob consideração na localização (x_i, y_j) . Esta média foi aplicada recursivamente 20 vezes.

Quando não especificado, usamos em nossos testes numéricos os seguintes parâmetros: três termos da série de Padé complexa, ângulo de rotação de 45° , velocidade média igual a média da vagarosidade, suavização de média móvel em cada nível aplicada recursivamente 20 vezes, correção de Li a cada 6 passos e interpolação linear dos campos usando a razão entre a velocidade média e a velocidade de referência. Comparamos os resultados variando esses parâmetros individualmente. A redução do intervalo de aplicação da correção de Li em comparação aos exemplos no meio homogêneo se deve ao fato das velocidades serem maiores, implicando em maiores erros causados pela anisotropia numérica, que exige então que a correção seja executada mais cedo.

Para fazer a interpolação linear dos campos usando pesos, testamos calcular a razão entre a velocidade média e a velocidade de referência, ou então a razão entre o cubo da velocidade

média e o cubo da velocidade de referência. O *splitting* em quatro direções aplicado alternadamente entre os níveis, ou seja, em cada nível apenas duas direções de *splitting* são usadas, tem o mesmo custo computacional que o *splitting* em apenas duas direções.

Além do que foi mencionado, ainda testamos a variação de outros parâmetros, tais como o ângulo de rotação e o número de termos da série de Padé complexa, o intervalo de aplicação da correção de Li, o número de direções para a aplicação do *splitting*, e ainda usar a aproximação em série de Padé real ao invés da aproximação complexa.

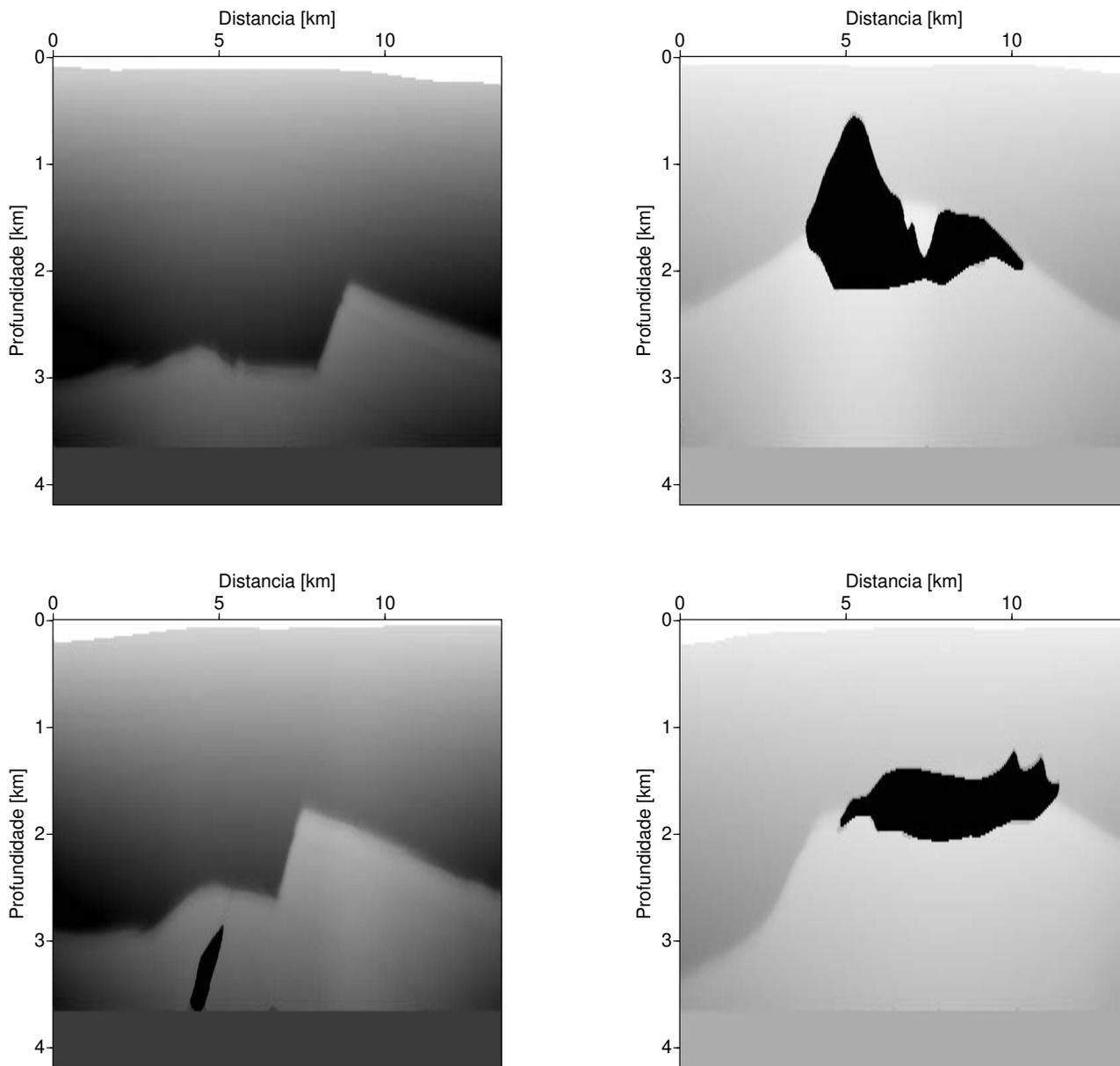


Figura 5.23: Modelo do sal da EAGE/SEG. Representação por 4 cortes em $x = 3.0$ km (topo esquerda), $x = 8.32$ km (topo direita), $y = 3.0$ km (fundo esquerda) e $y = 8.32$ km (fundo direita).

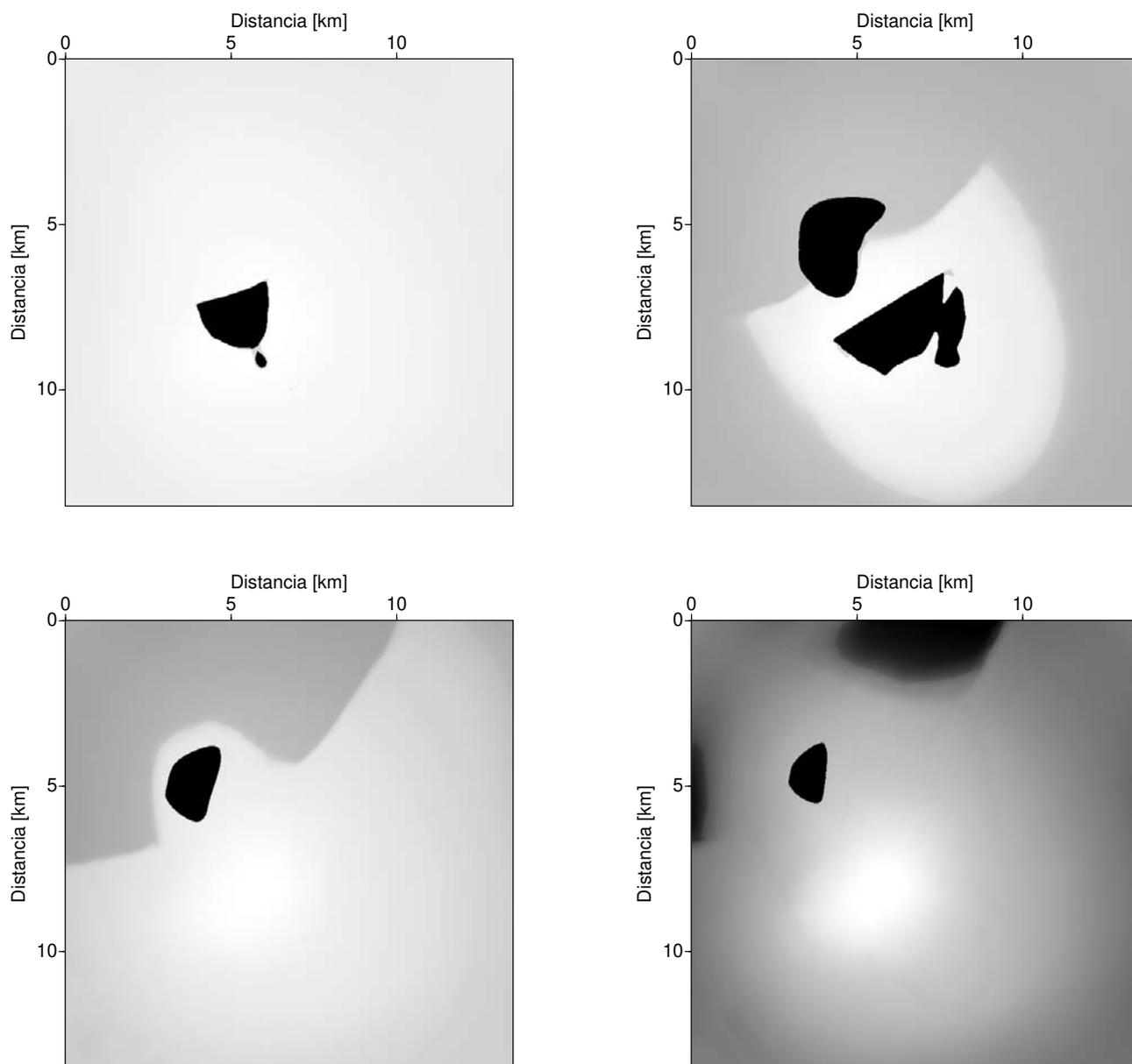


Figura 5.24: Modelo do sal da EAGE/SEG. Representação por 4 cortes horizontais nas profundidades $z = 1.1$ m (topo esquerda), $z = 2.1$ km (topo direita), $z = 2.7$ km (fundo esquerda) e $z = 3.1$ km (fundo direita).

5.2.1 Migração FFDPI

Por ser um método muito robusto, podemos usar o resultado obtido pela migração FFDPI como base de comparação com os resultados obtidos pelo método FD. Aqui estamos usando o método de Lloyd para a escolha das velocidades de referência, 1 termo da série de Padé complexa, ângulo de rotação de 45° e *splitting* em duas direções. Por ser um método auto-suficiente, o número de velocidades de referência varia em cada nível, porém o número máximo de velocidades que permitimos foi 10.

Apesar da dispersão numérica visível nestas figuras, elas não apresentam sinais de anisotropia numérica, de modo que o posicionamento dos eventos pode ser considerado confiável.

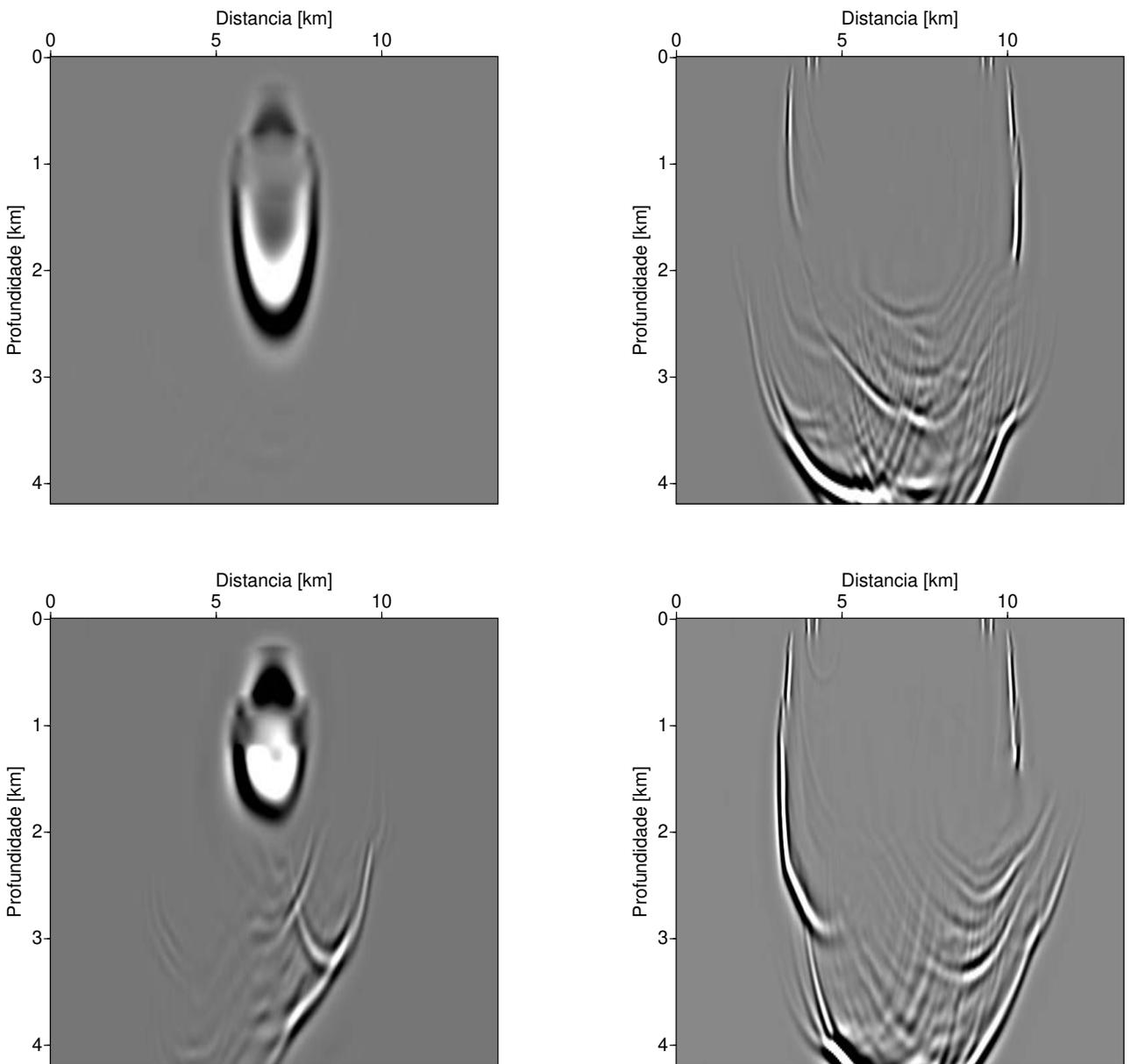


Figura 5.25: Resposta impulso obtida por migração FFDPI com *splitting* em duas direções no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

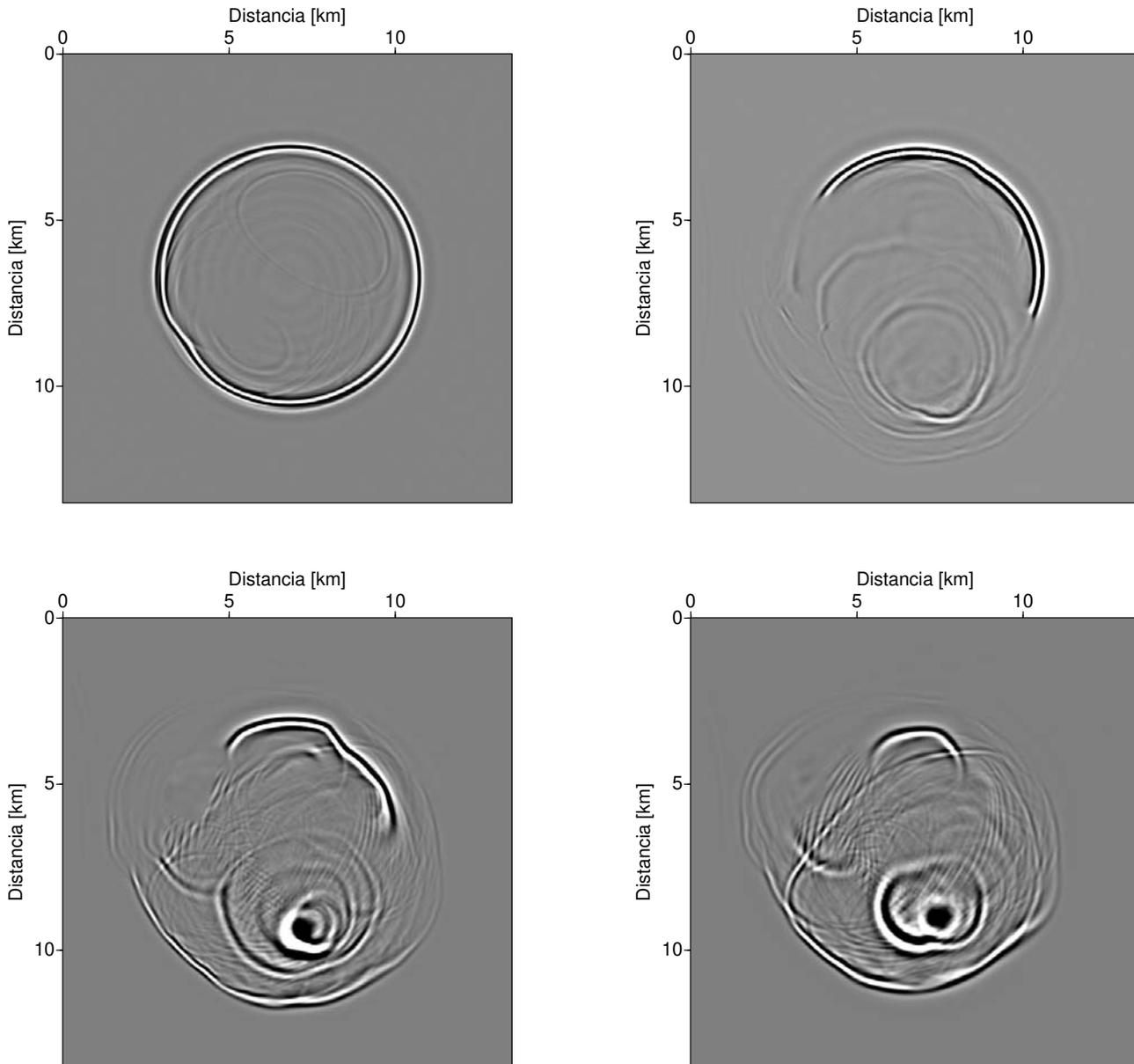


Figura 5.26: Resposta impulso obtida por migração FFDPI com *splitting* em duas direções no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

5.2.2 Efeito da correção de Li

No primeiro conjunto de testes investigamos o efeito da aplicação da correção de Li. Esperamos que quando for usada, a correção de Li amenize o problema de anisotropia numérica.

Nas Figuras 5.27 e 5.28 vemos os cortes mencionados da resposta impulso da migração FD usando *splitting* em duas direções sem correção de Li. As Figuras 5.29 e 5.30 mostram os respectivos resultados com a aplicação da correção de Li a cada 6 passos, e as Figuras 5.31 e 5.32 a cada 12 passos. Como primeiro resultado dos testes numéricos efetuados, observamos que não foi possível estender o intervalo da aplicação da correção de Li a 9 ou 15 intervalos como no modelo homogêneo, devido a fortes efeitos de descontinuidades nas frentes de ondas.

Como esperávamos, nos cortes horizontais da Figura 5.28 vemos um desvio do formato circular para o formato de losango e o aparecimento de artefatos, resultado mais visível nos cortes mais rasos, indicando a forte anisotropia numérica causada pelo *splitting*. Na Figura 5.30 vemos a total recuperação do formato circular, mas no nível mais raso, o surgimento de artefatos. E na Figura 5.32, quando aumentamos o intervalo de aplicação da correção de Li de 6 para 12 passos, vemos uma redução dos artefatos no nível mais raso, e o formato circular permanece preservado. Do segundo corte horizontal em diante, os resultados mostrados nas Figuras 5.30 e 5.32 são muito similares. Alguns eventos que são bem focalizados na Figura 5.32 perdem ligeiramente o foco na Figura 5.30. A comparação com os resultados a migração FFDPI revela que os cortes na Figura 5.30 apresentam um posicionamento ligeiramente melhor. Porém, notamos frentes de onda mais contínuas nos cortes da Figura 5.32. A amplitude nessas figuras é consideravelmente maior do que na Figura 5.28.

Comparando os cortes verticais das Figuras 5.27 e 5.29 vemos o surgimento de artefatos de migração, uma diminuição da amplitude e o aparecimento de descontinuidades nas frentes de onda na segunda figura. E quando aumentamos o intervalo de aplicação da correção de Li de 6 para 12 passos, vemos na Figura 5.31 um padrão de 'dentes' mais espaçado do que na figura anterior, porém uma diminuição na quantidade de artefatos. A partir dessa figura podemos concluir que a presença das descontinuidades é consequência da aplicação da correção de Li, e que se aumentarmos o intervalo da aplicação da correção aumentamos o tamanho das descontinuidades das frentes de onda. Em geral, podemos observar que a redução do intervalo de aplicação da correção de Li melhora o posicionamento, mas prejudica ligeiramente a focalização dos mesmos.

A comparação com os resultados do método FFDPI mostra que a correção de Li de fato melhora o posicionamento dos eventos. Atrasos nas direções diagonais foram corrigidos, tanto pela aplicação a cada 6 passos quanto a cada 12 passos.

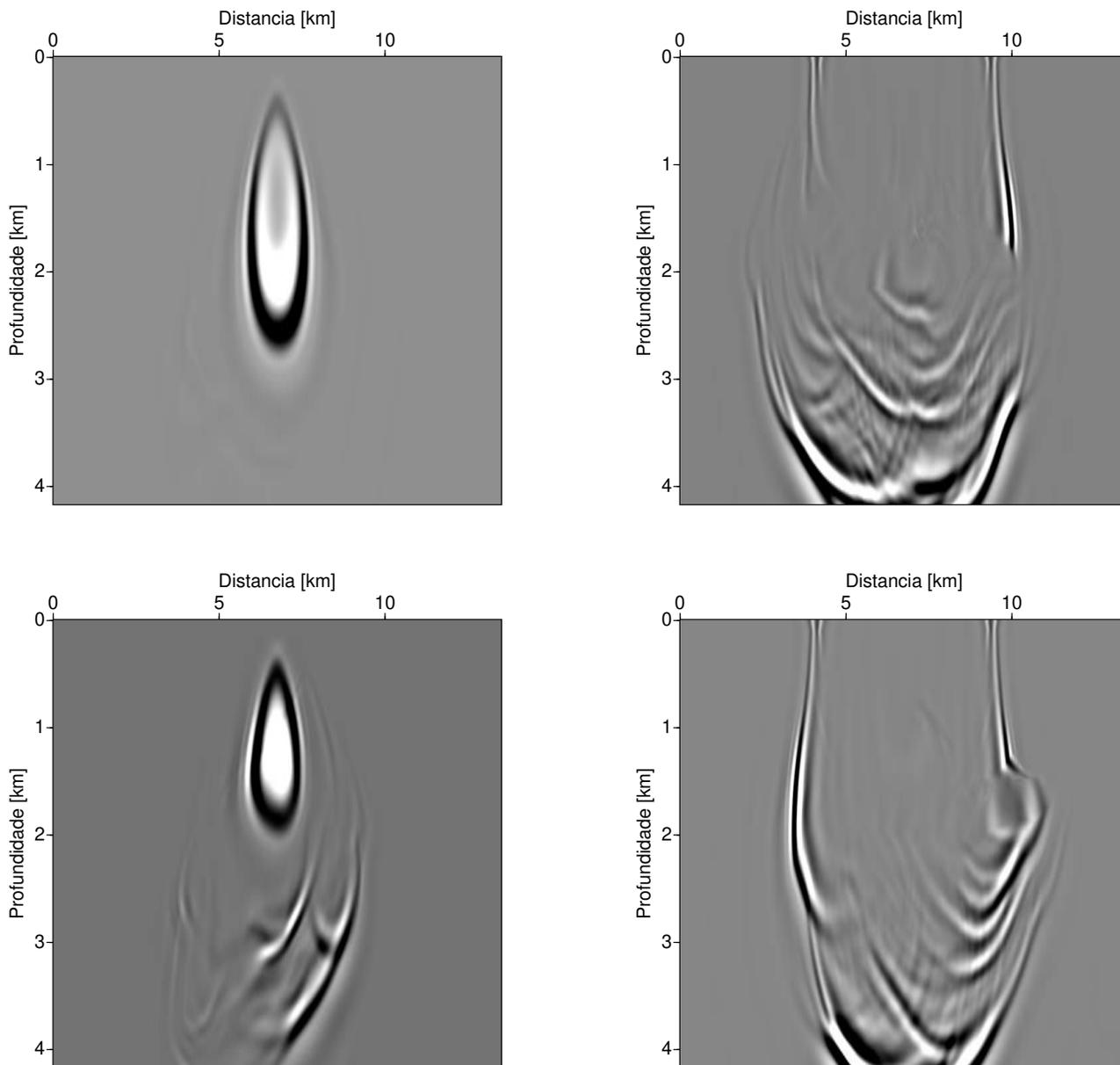


Figura 5.27: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

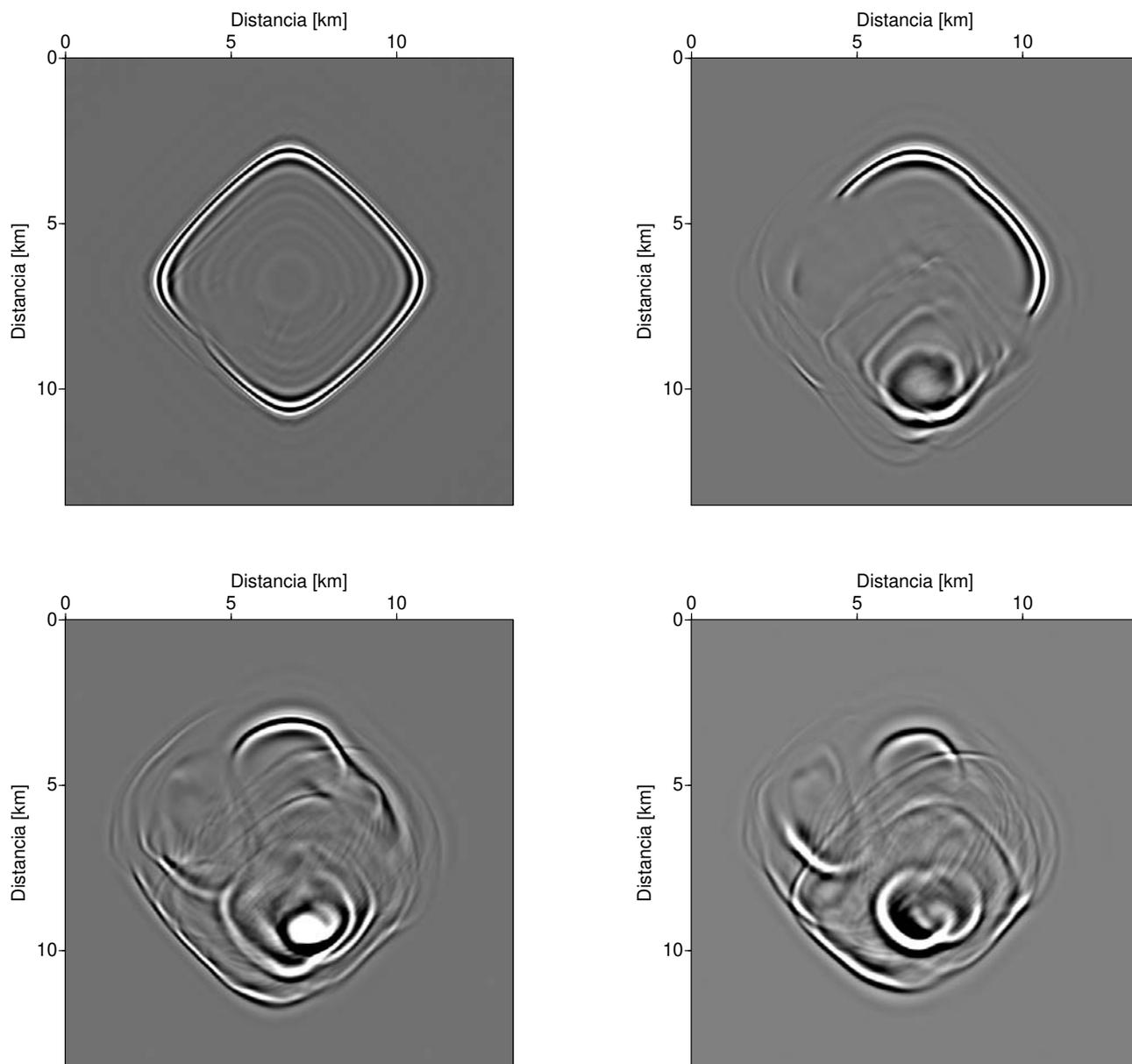


Figura 5.28: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

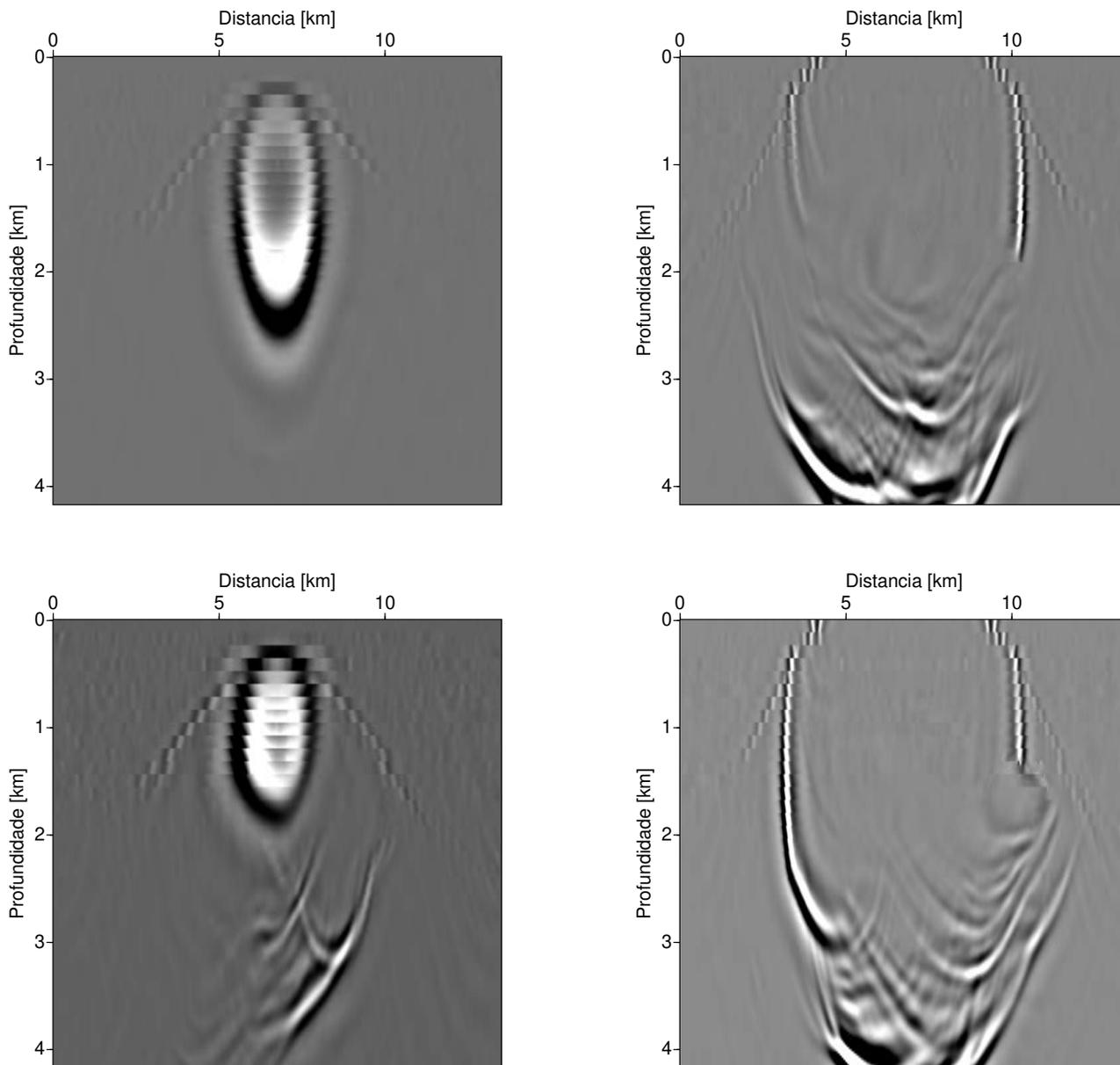


Figura 5.29: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 6 passos. Representação por cortes verticais.

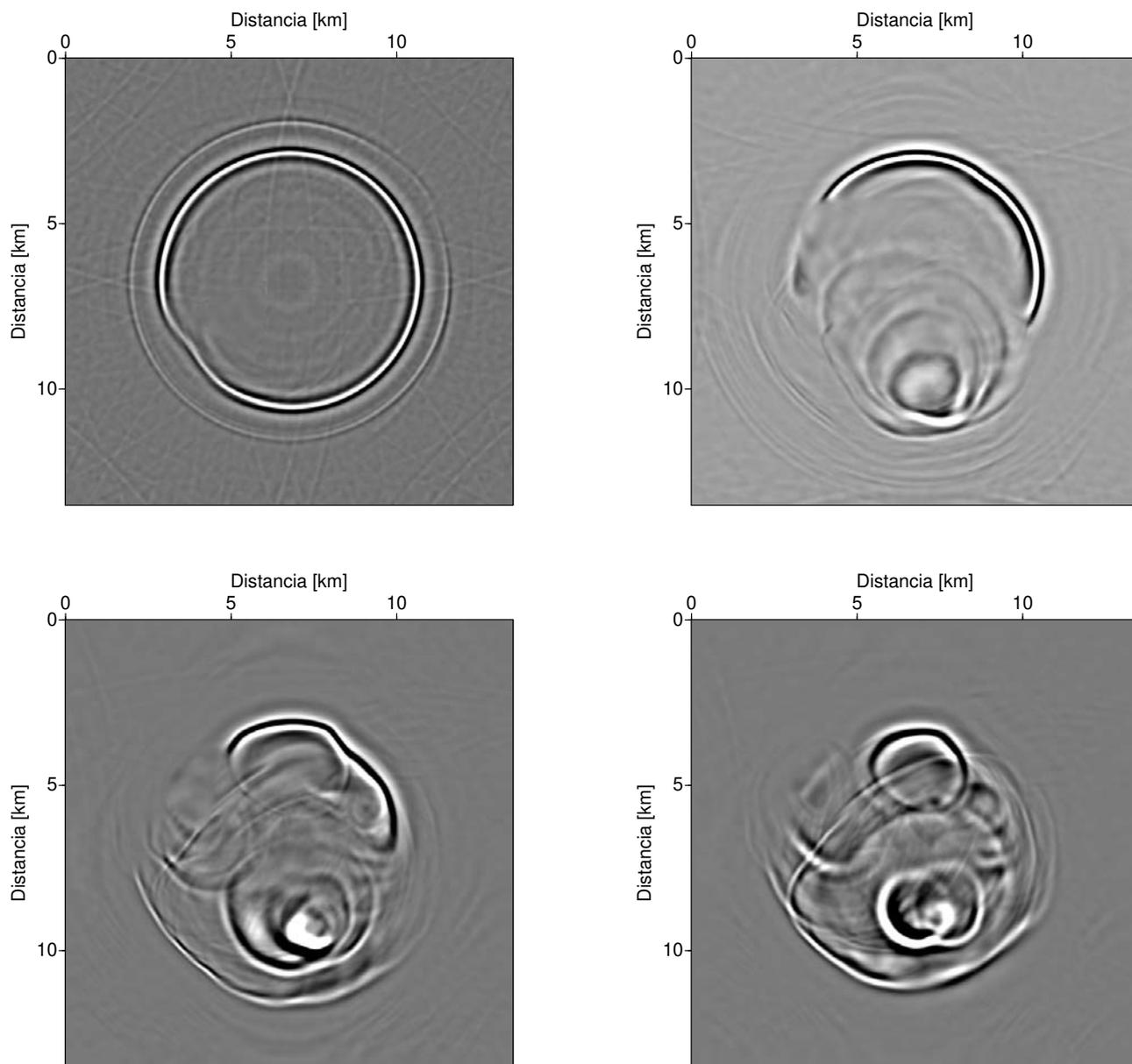


Figura 5.30: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 6 passos. Representação por cortes horizontais.

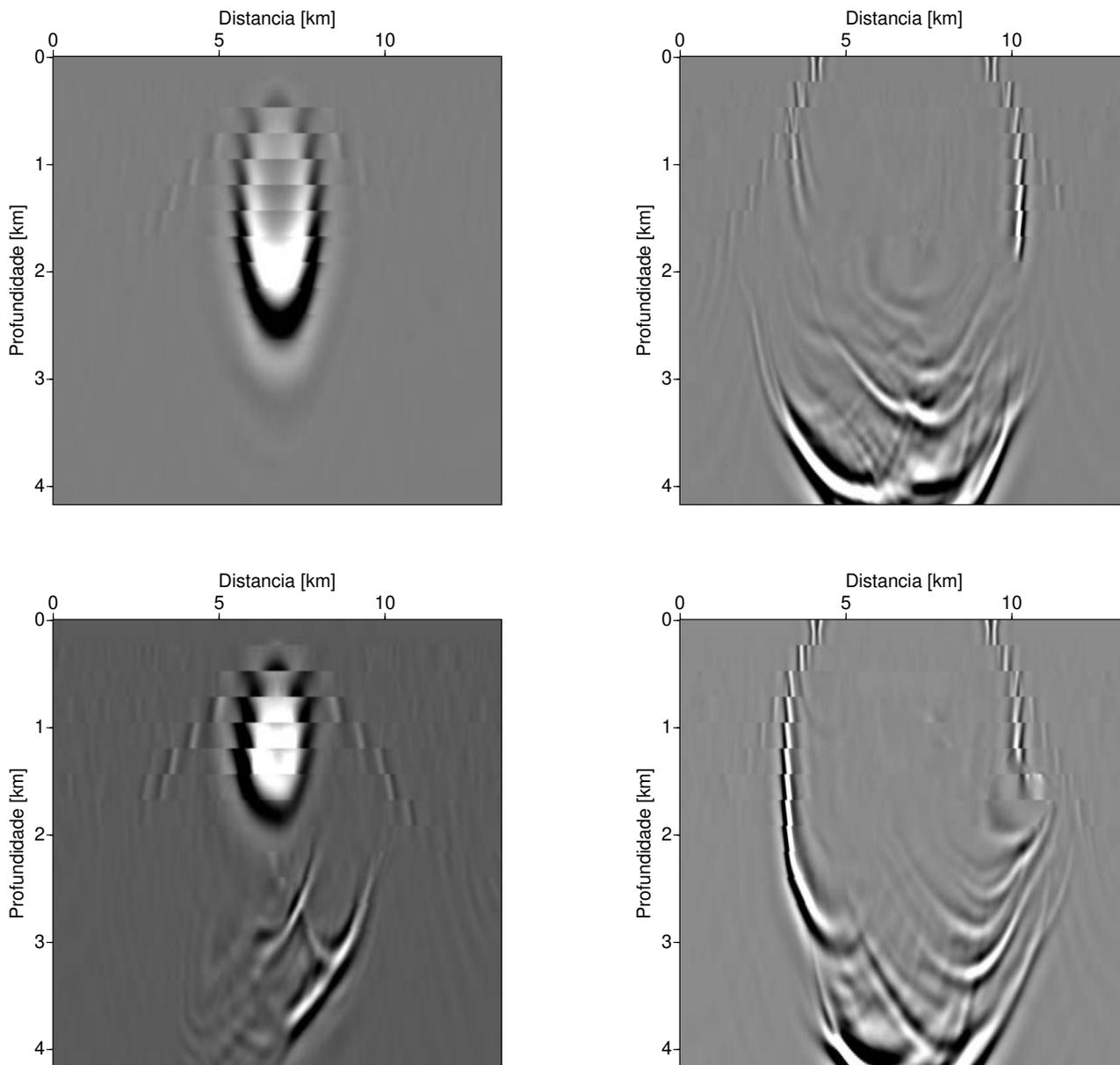


Figura 5.31: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 12 passos. Representação por cortes verticais.

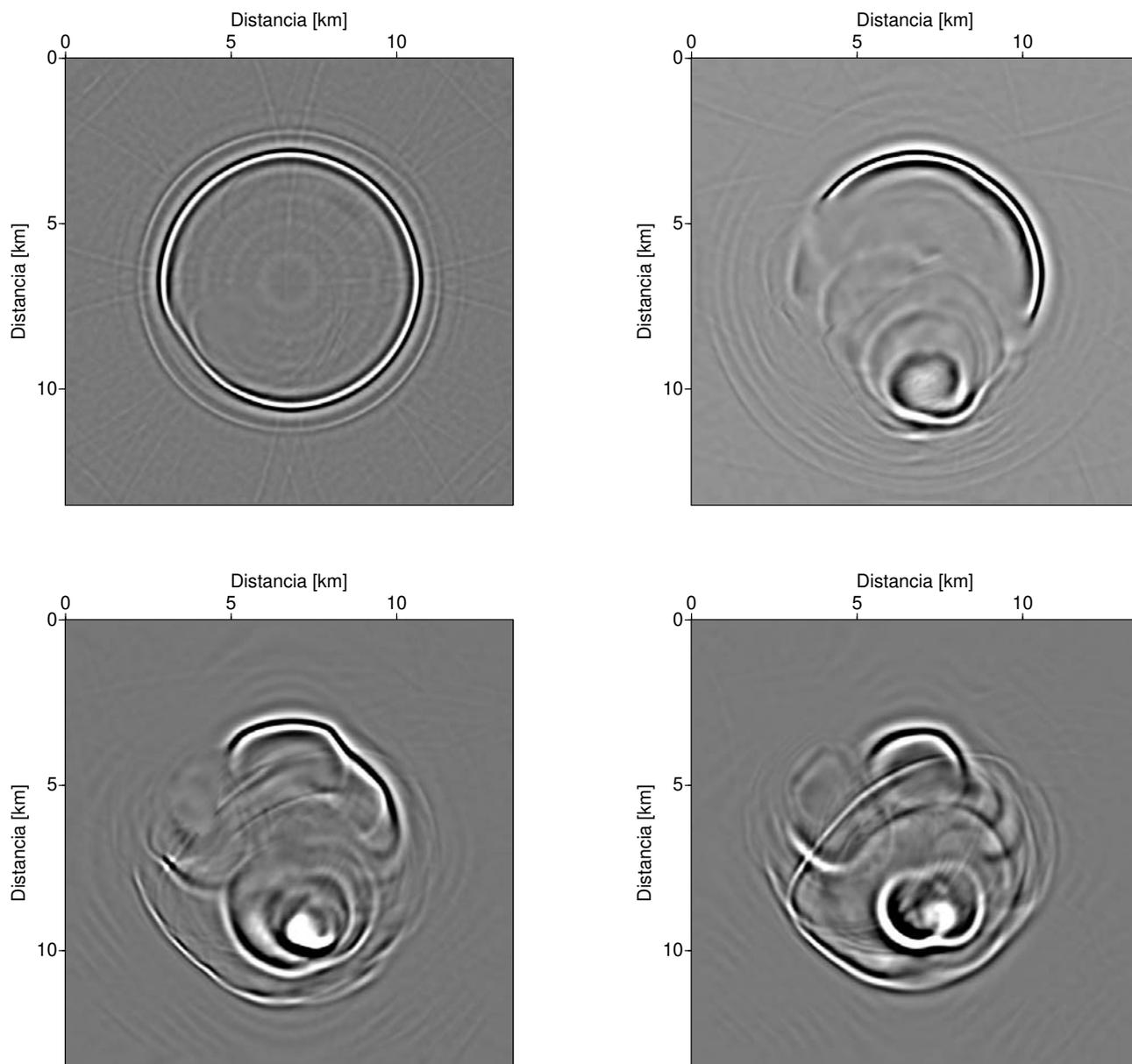


Figura 5.32: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG a cada 12 passos. Representação por cortes horizontais.

5.2.3 Velocidade média

Para podermos usar o método de Lloyd para a escolha das velocidades de referência, para cada nível de profundidade, calculamos a velocidade média ($v_{mean}(x, y)$) usando todos os pontos (x, y) do modelo de velocidades. Usamos o método de Lloyd para determinar as velocidades de referência, portanto para cada nível, o número de velocidades é variável, sendo que o número máximo que permitimos foi 10.

A partir das velocidades máxima e mínima, obtemos vários valores de velocidades de referência, e comparando a velocidade média com as velocidades de referência, podemos determinar qual velocidade de referência usar em cada ponto do modelo. Escolhemos como velocidade de referência aquela que for mais próxima da velocidade do meio.

Como já foi dito, existem várias forma para calcularmos a velocidade média. Podemos usar a velocidade, a vagarosidade, e o cubo da velocidade. Neste conjunto de testes, queremos verificar o resultado quando fazemos tais variações. Aqui usamos 3 termos da série de Padé complexa, correção de Li a cada 6 passos e interpolação linear dos campos usando a velocidade média.

Mostramos os mesmos cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.33 e 5.34 são obtidas usando a velocidade média, as Figuras 5.35 e 5.36 usando a vagarosidade média e as Figuras 5.37 e 5.38 usando a média do cubo da velocidade.

Nos cortes verticais das Figuras 5.33 e 5.35 podemos notar mais artefatos de migração da primeira figura, presente em todos os cortes. As Figuras 5.35 e 5.37 não apresentam diferenças visíveis, ou seja, não há vantagens em usar o cubo da velocidade para calcular a velocidade média, porém obtemos um resultado pior quando usamos simplesmente a velocidade. Usar a vagarosidade média fornece um resultado melhor do que usar a velocidade média pois a vagarosidade é a quantidade física que de fato determina a propagação.

Considerando agora os cortes horizontais nas Figuras 5.34 e 5.36 vemos muito mais artefatos de migração na primeira figura no corte mais raso. E não há diferenças visíveis entre os cortes horizontais nas Figuras 5.36 e 5.38. Até mesmo os artefatos presentes no corte mais raso são iguais nessas figuras.

Concluimos que o cálculo da velocidade média através da vagarosidade ou do cubo da velocidade é equivalente e não influencia o resultado final da correção de Li.

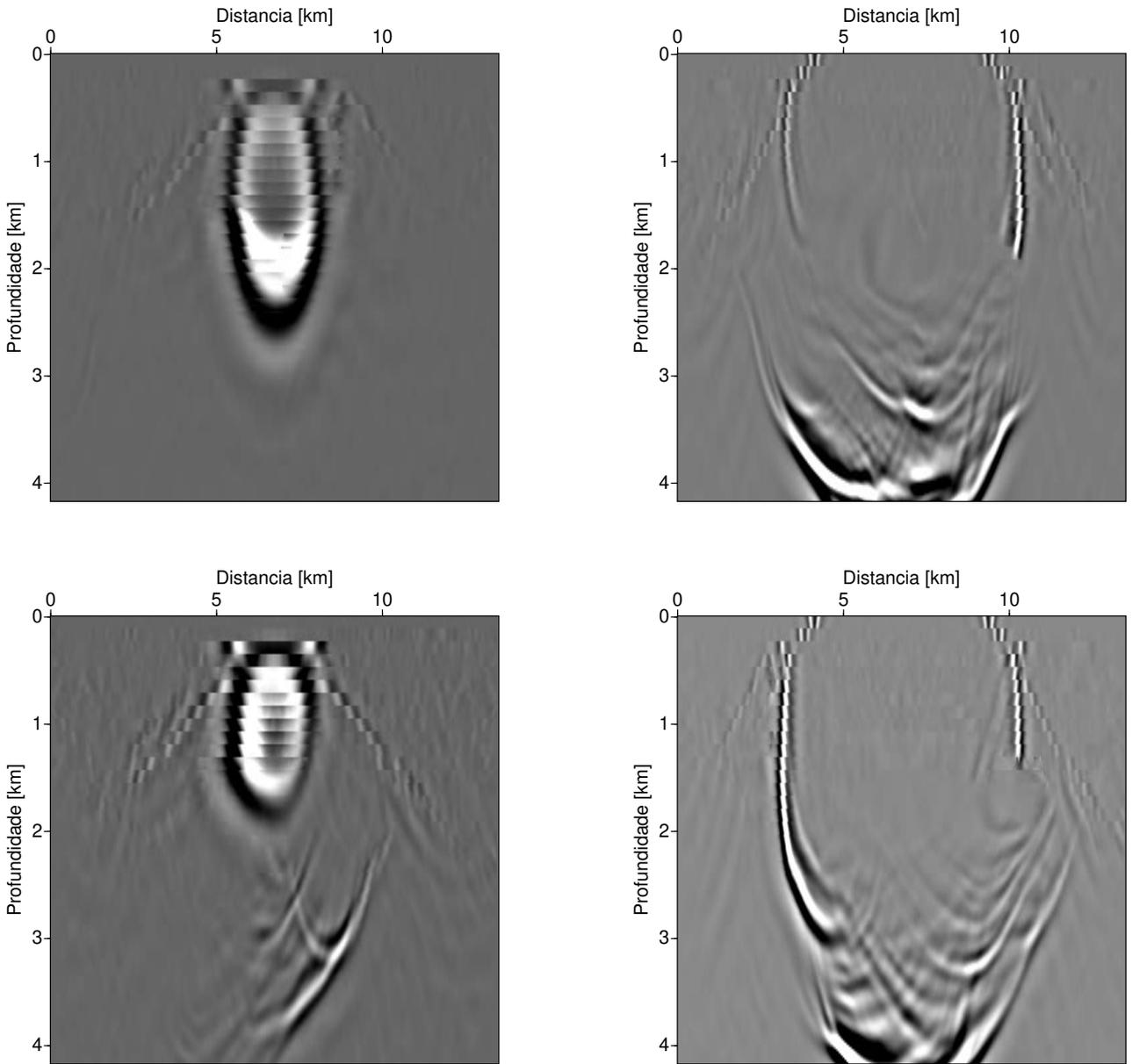


Figura 5.33: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da velocidade. Representação por cortes verticais.

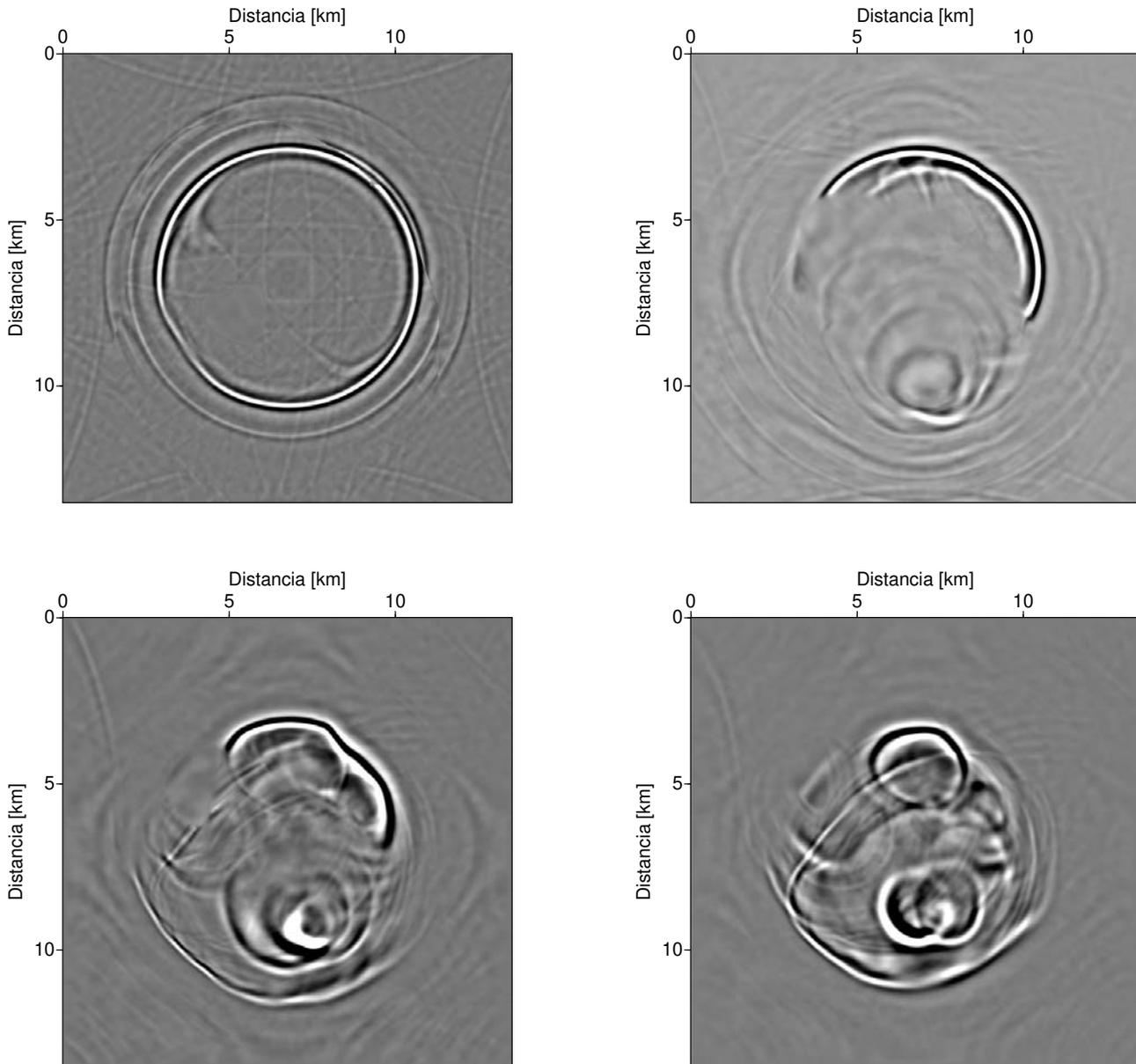


Figura 5.34: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da velocidade. Representação por cortes horizontais.

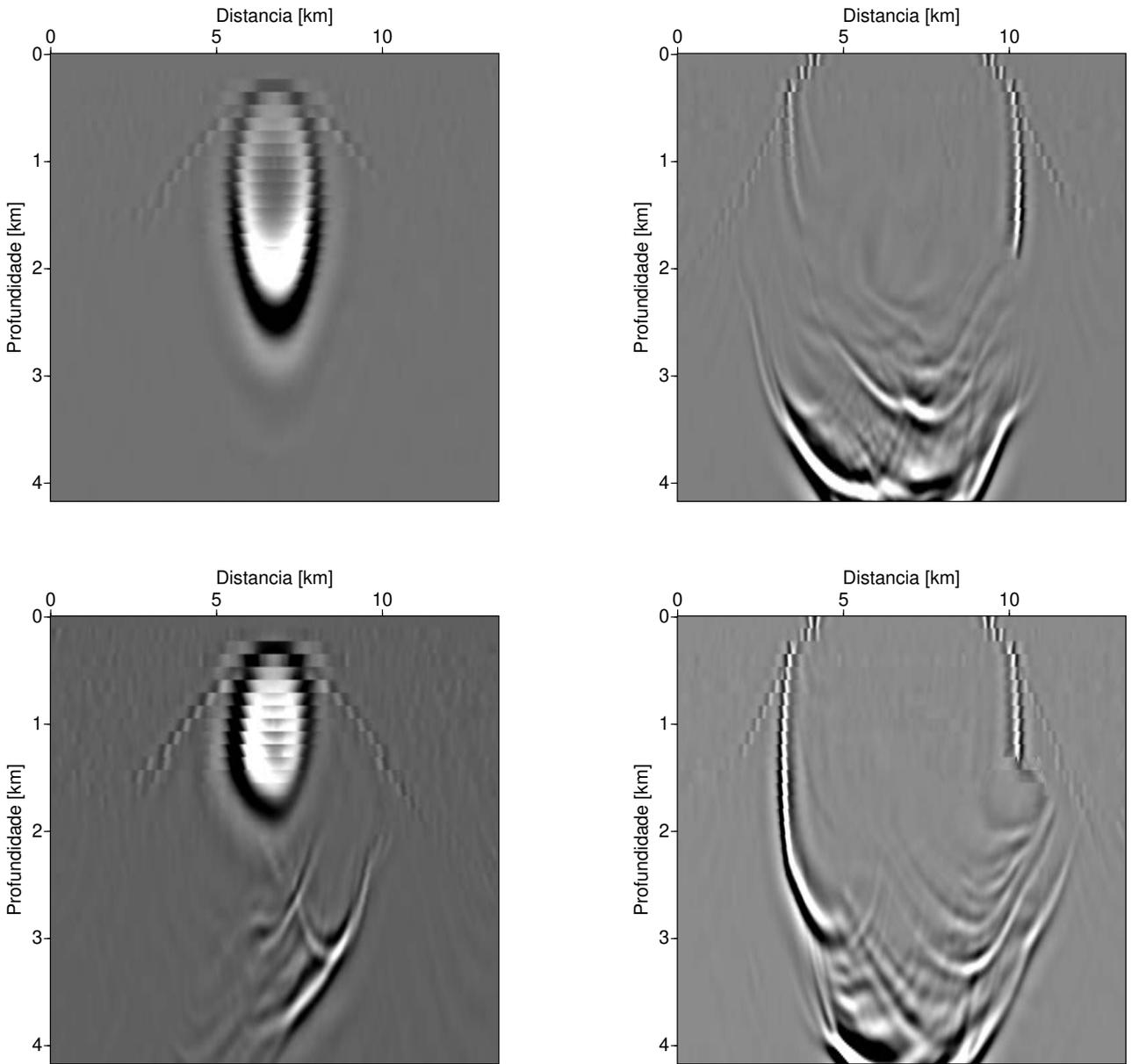


Figura 5.35: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da vagarosidade. Representação por cortes verticais.

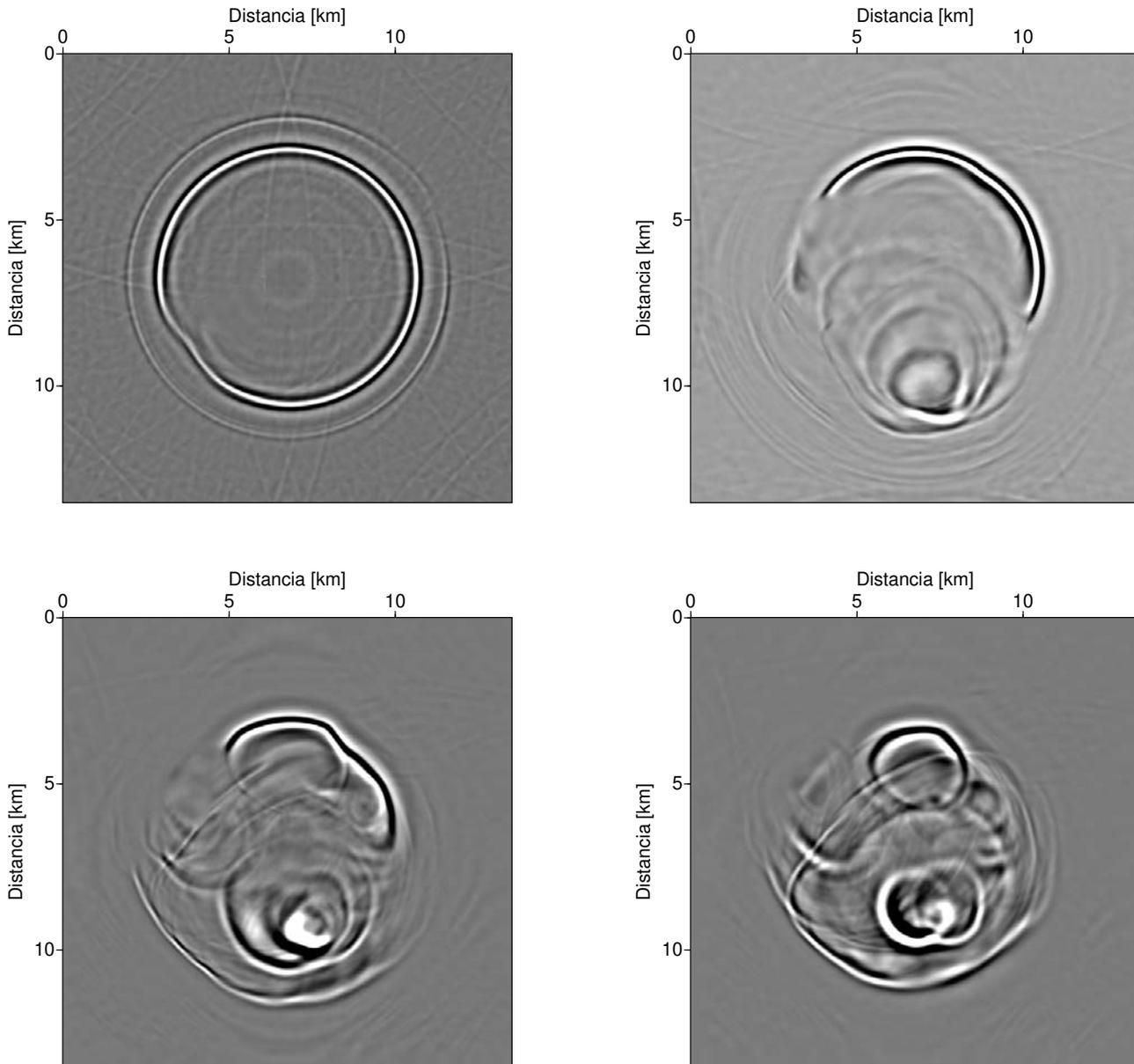


Figura 5.36: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média da vagarosidade. Representação por cortes horizontais.

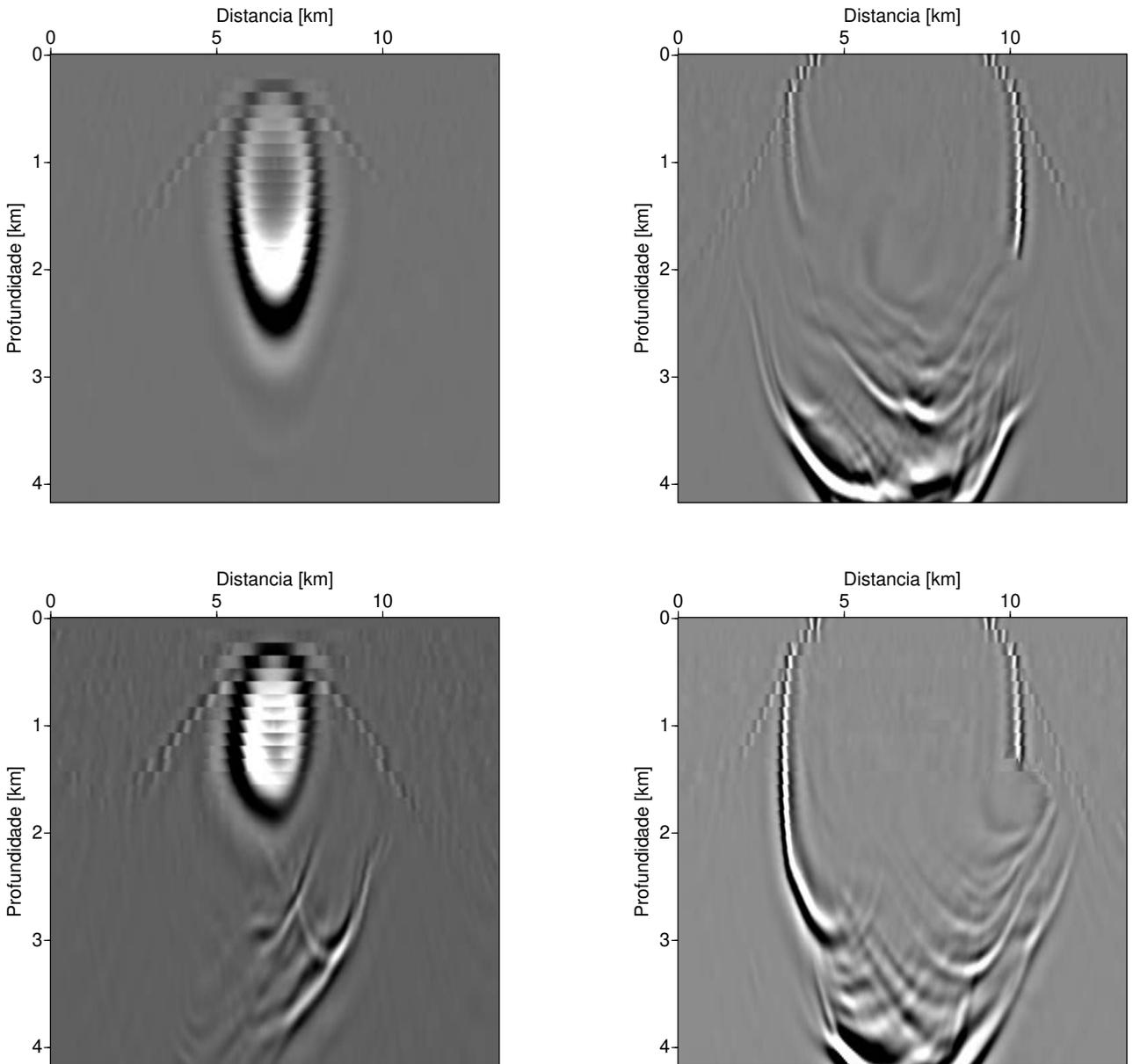


Figura 5.37: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média do cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.

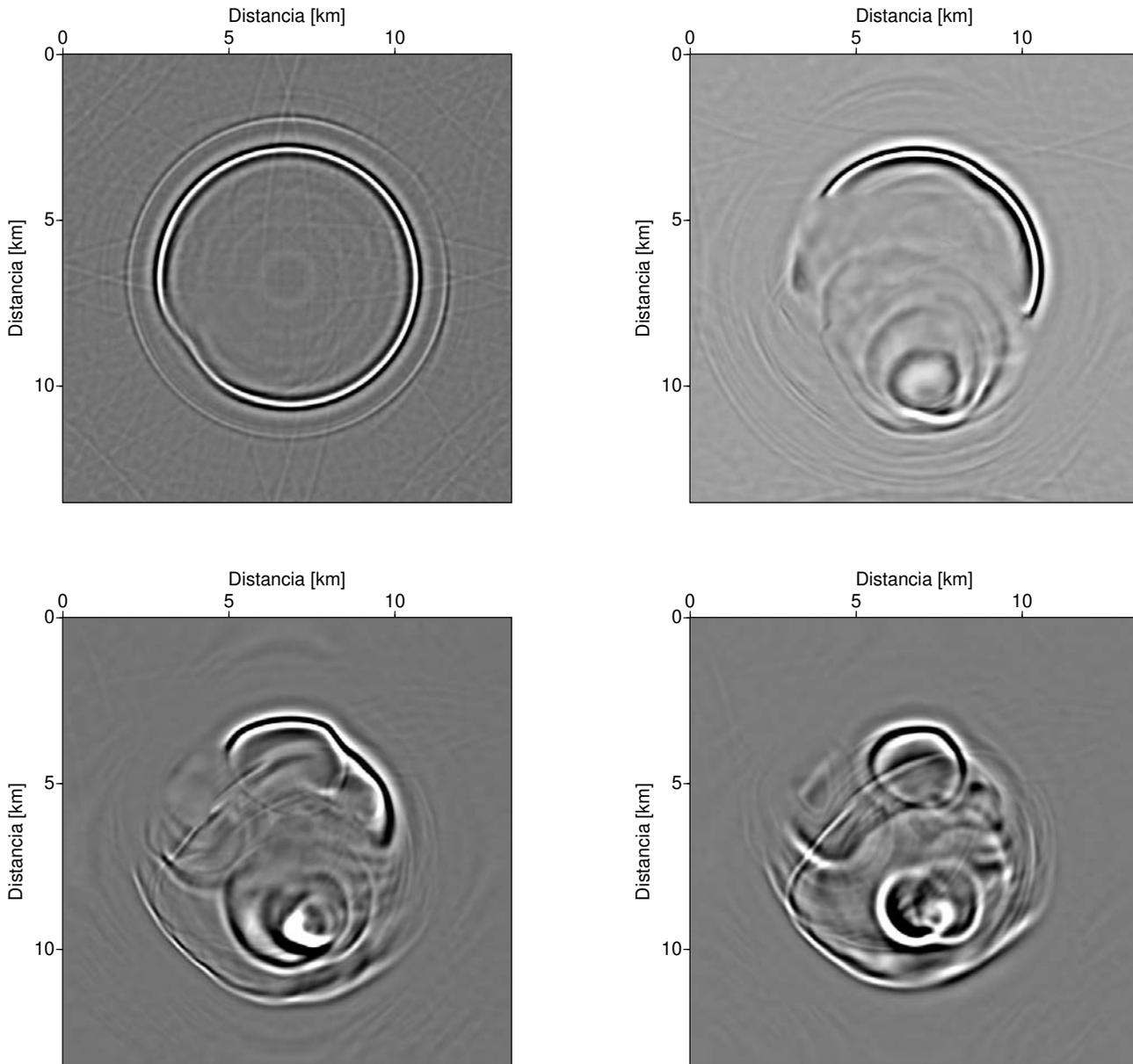


Figura 5.38: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG usando média do cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.

5.2.4 Aproximações de Padé real e complexa

Neste conjunto de testes, queremos verificar os resultados quando usamos a aproximação em série de Padé na sua versão real e na sua versão complexa. A velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade, usamos a correção de Li a cada 6 passos, a interpolação linear dos campos usando a velocidade média, e 3 termos da série de Padé independente se esta é real ou complexa.

Mostramos os mesmos cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.39 e 5.40 são obtidas usando a aproximação de Padé real, as Figuras 5.41 e 5.42 usando a aproximação de Padé complexa, todas com apenas 1 termo da série. As Figuras 5.43 e 5.44 são obtidas usando a aproximação de Padé real, as Figuras 5.45 e 5.46 usando a aproximação de Padé complexa, agora com 2 termos da série. E finalmente, as Figuras 5.47 e 5.48 são obtidas usando a aproximação de Padé real, as Figuras 5.49 e 5.50 usando a aproximação de Padé complexa, com 3 termos da série.

Quando usamos apenas 1 termo da série de Padé, podemos ver nas Figuras 5.39 e 5.40 o surgimento de artefatos de migração em todos os cortes, enquanto que nas Figuras 5.41 e 5.42, apesar de não haver artefatos, os eventos estão muito suavizados.

Quando usamos 2 termos da série de Padé, na versão real mostrada nas Figuras 5.43 e 5.44 podemos notar facilmente a permanência dos artefatos principalmente nos cortes verticais. Na versão complexa mostrada nas Figuras 5.45 e 5.46 podemos notar que os eventos estão mais marcados em comparação com os resultados quando usamos apenas 1 termo da série de Padé (Figura 5.41).

Quando usamos 3 termos da série de Padé, não é possível identificar nenhuma diferença visível entre os resultados usando a aproximação real (Figuras 5.47 e 5.48) e a aproximação complexa (Figuras 5.49 e 5.50). Os resultados são virtualmente idênticos.

Porém note que os resultados mostrados quando usamos 3 termos da série de Padé real são praticamente iguais aos resultados de quando usamos 2 termos da série de Padé complexa (Figuras 5.45, 5.46, 5.49 e 5.50). Por causa de tamanha semelhança, podemos dizer que como dito no desenvolvimento teórico dessa dissertação, é mais vantajoso usar a aproximação complexa, pois neste caso, é possível trabalhar com menos termos na aproximação de Padé. Neste exemplo, precisaríamos resolver 2 sistemas lineares ao invés de 3 (quando usamos a aproximação real) para obter uma qualidade equivalente.

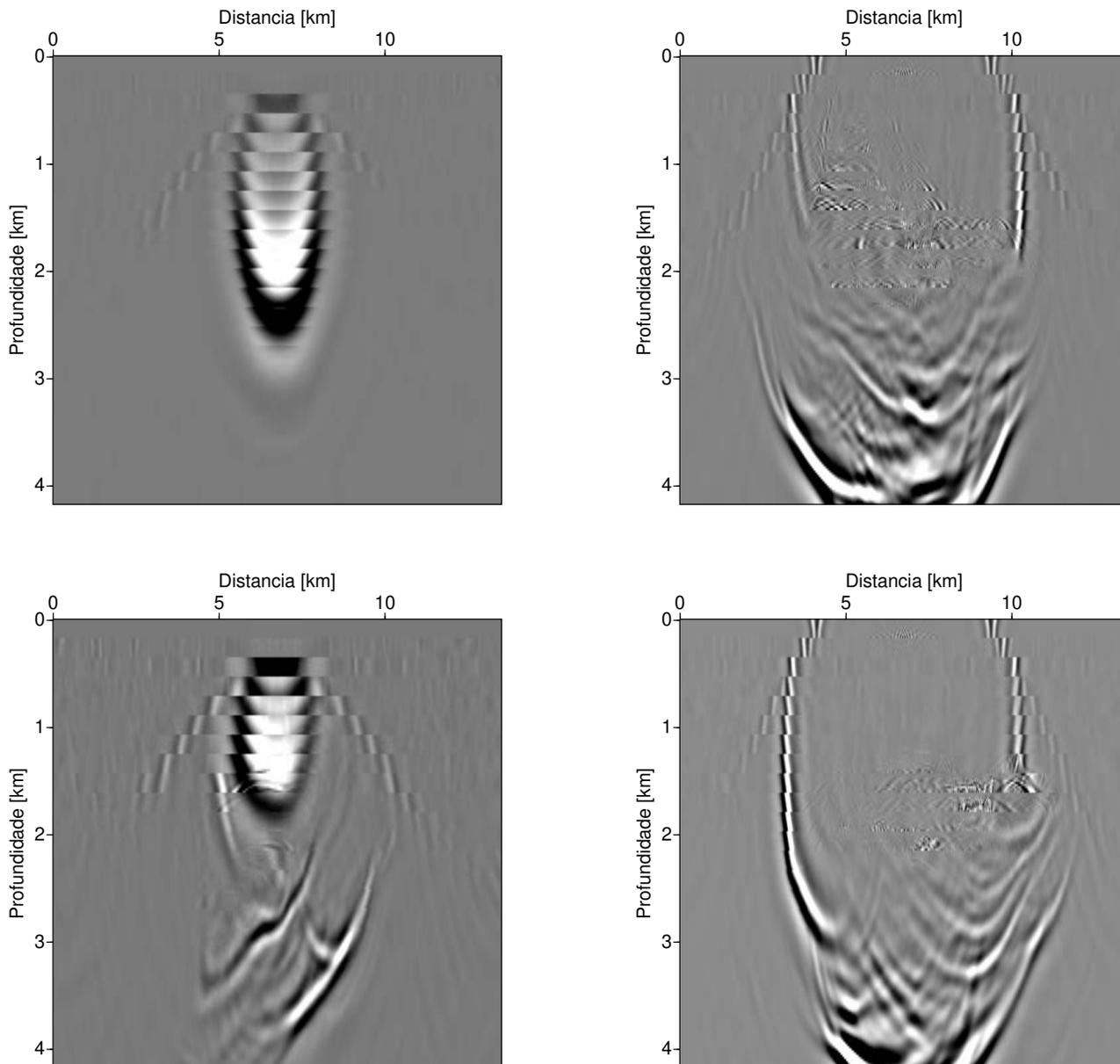


Figura 5.39: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

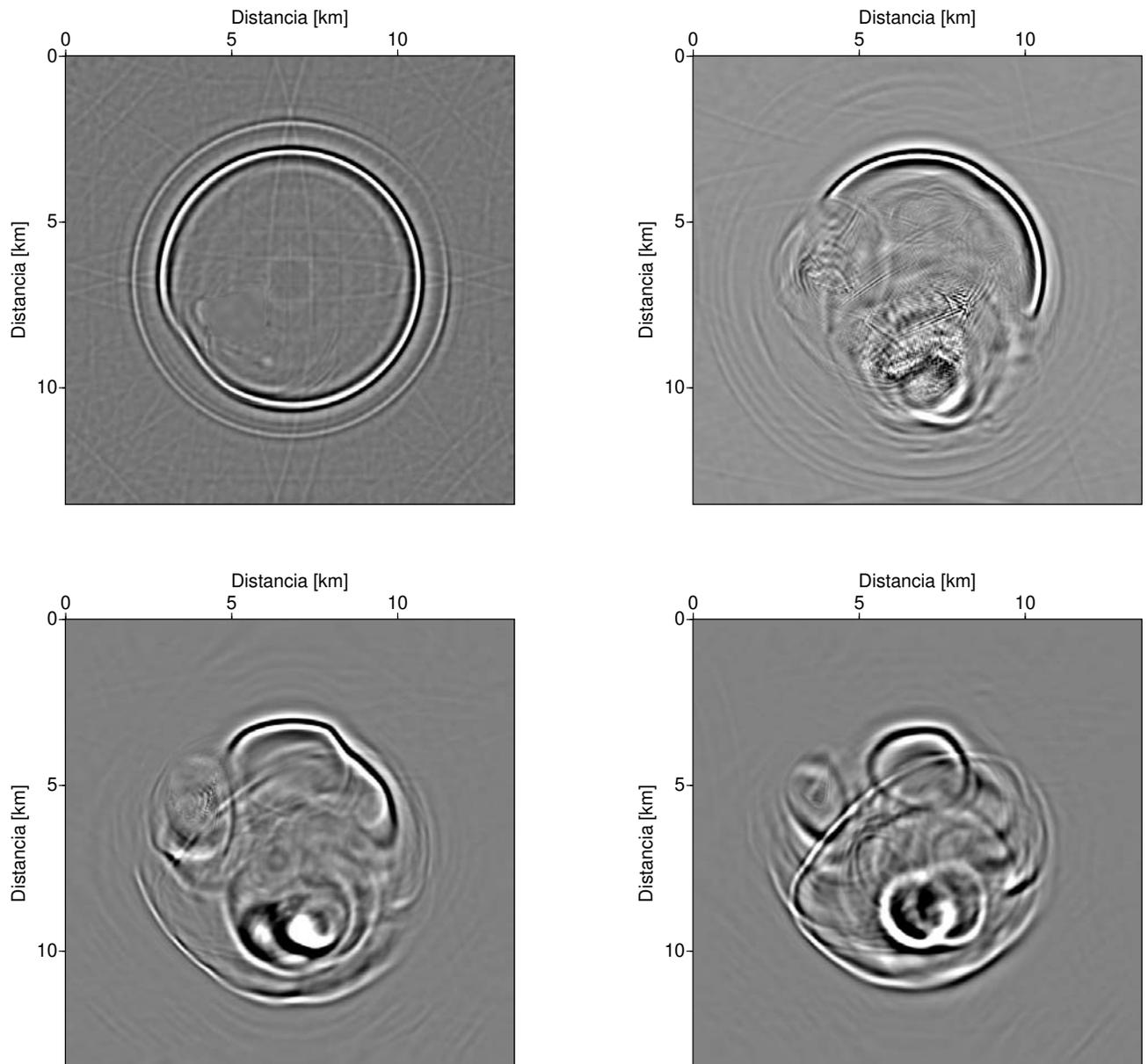


Figura 5.40: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 1 termo e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

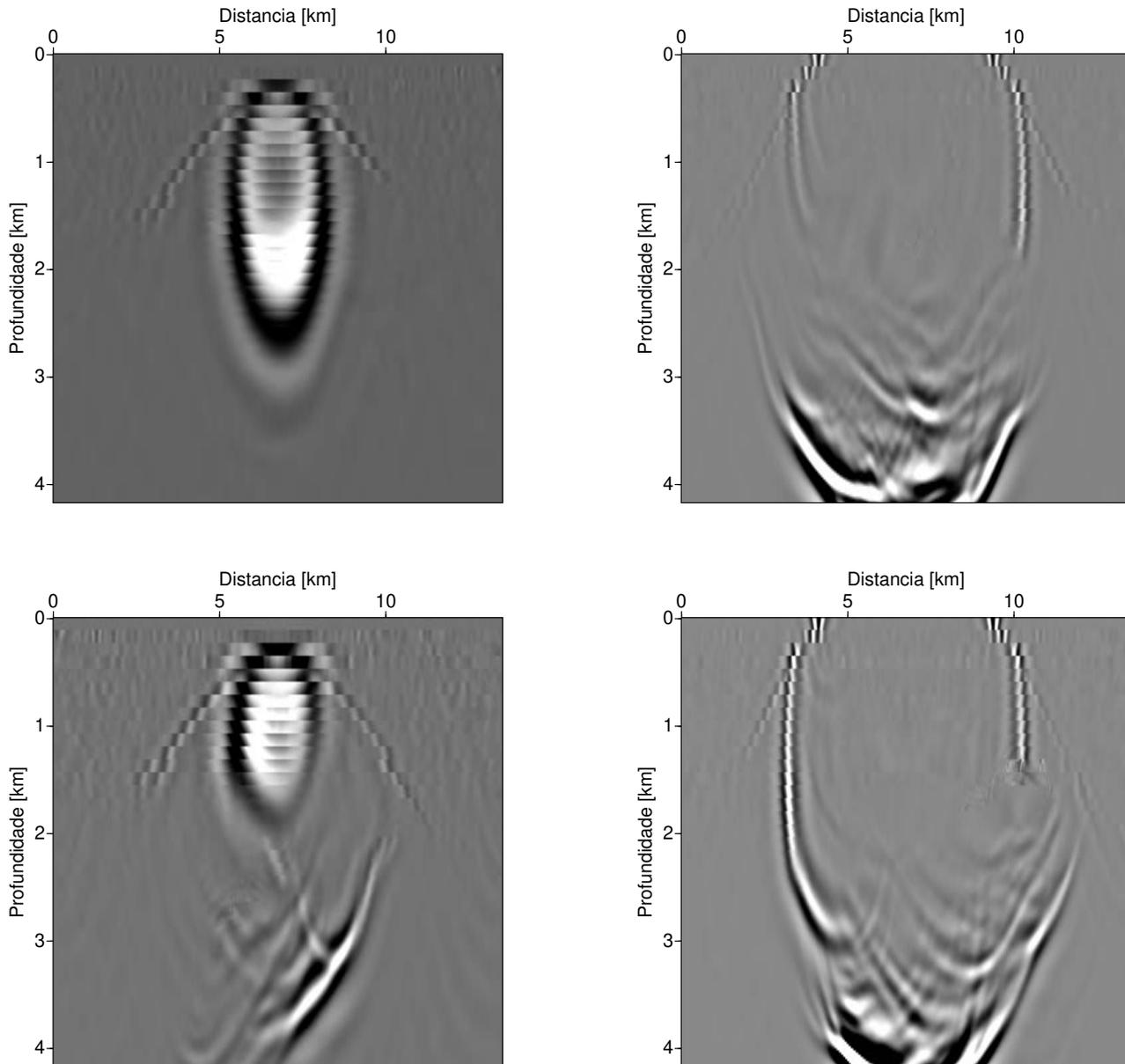


Figura 5.41: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

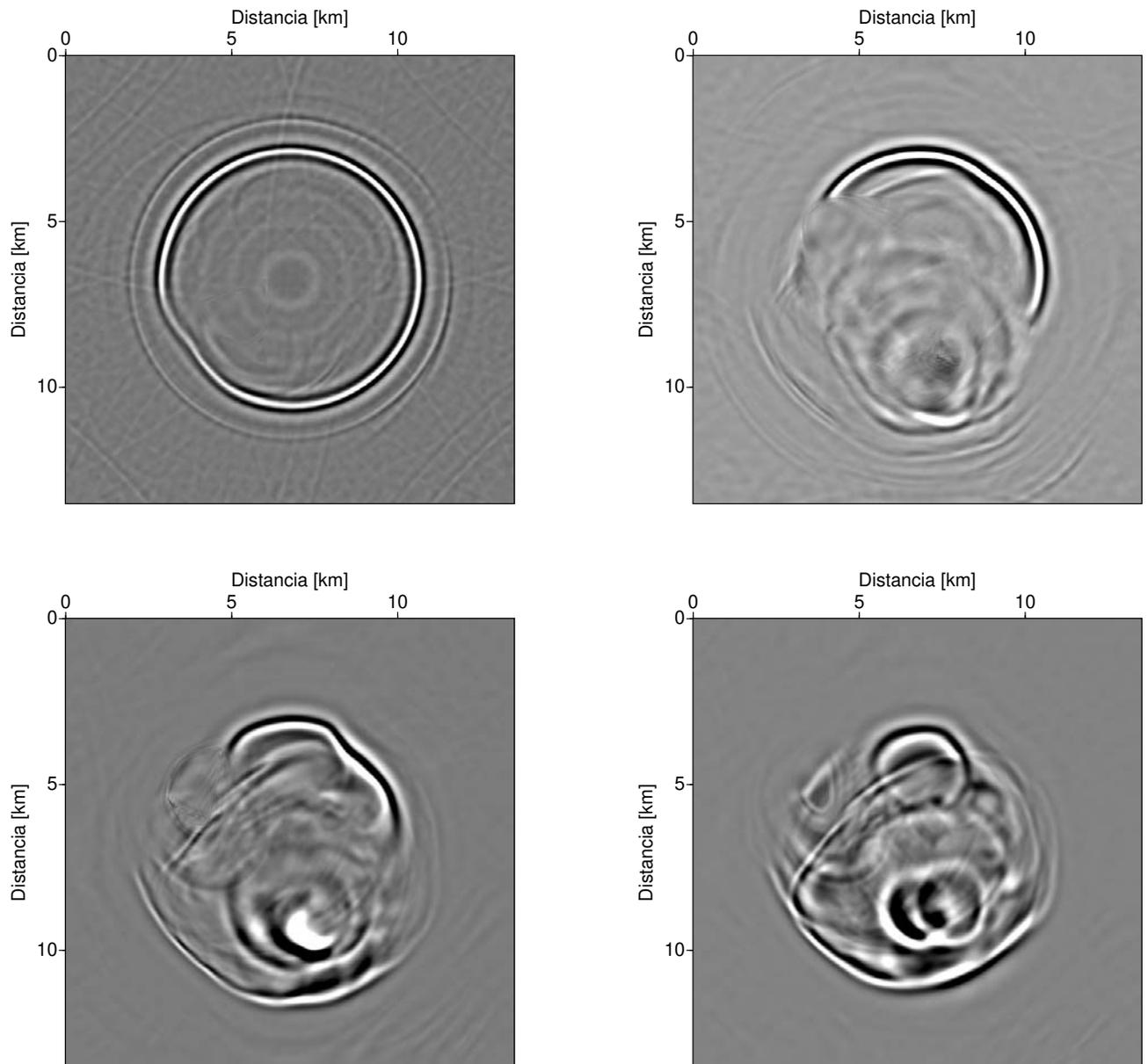


Figura 5.42: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 1 termo e ângulo de rotação de 15° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

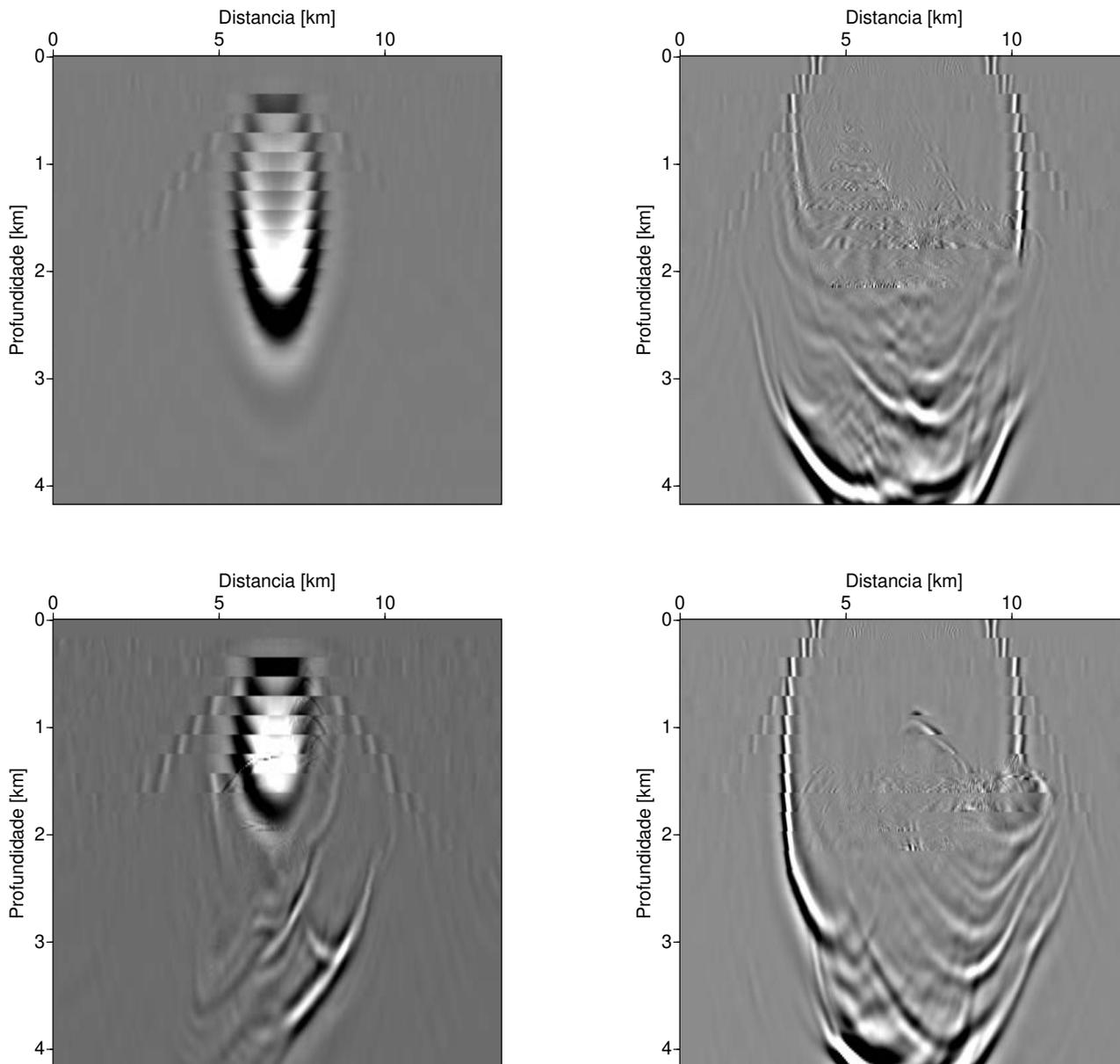


Figura 5.43: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

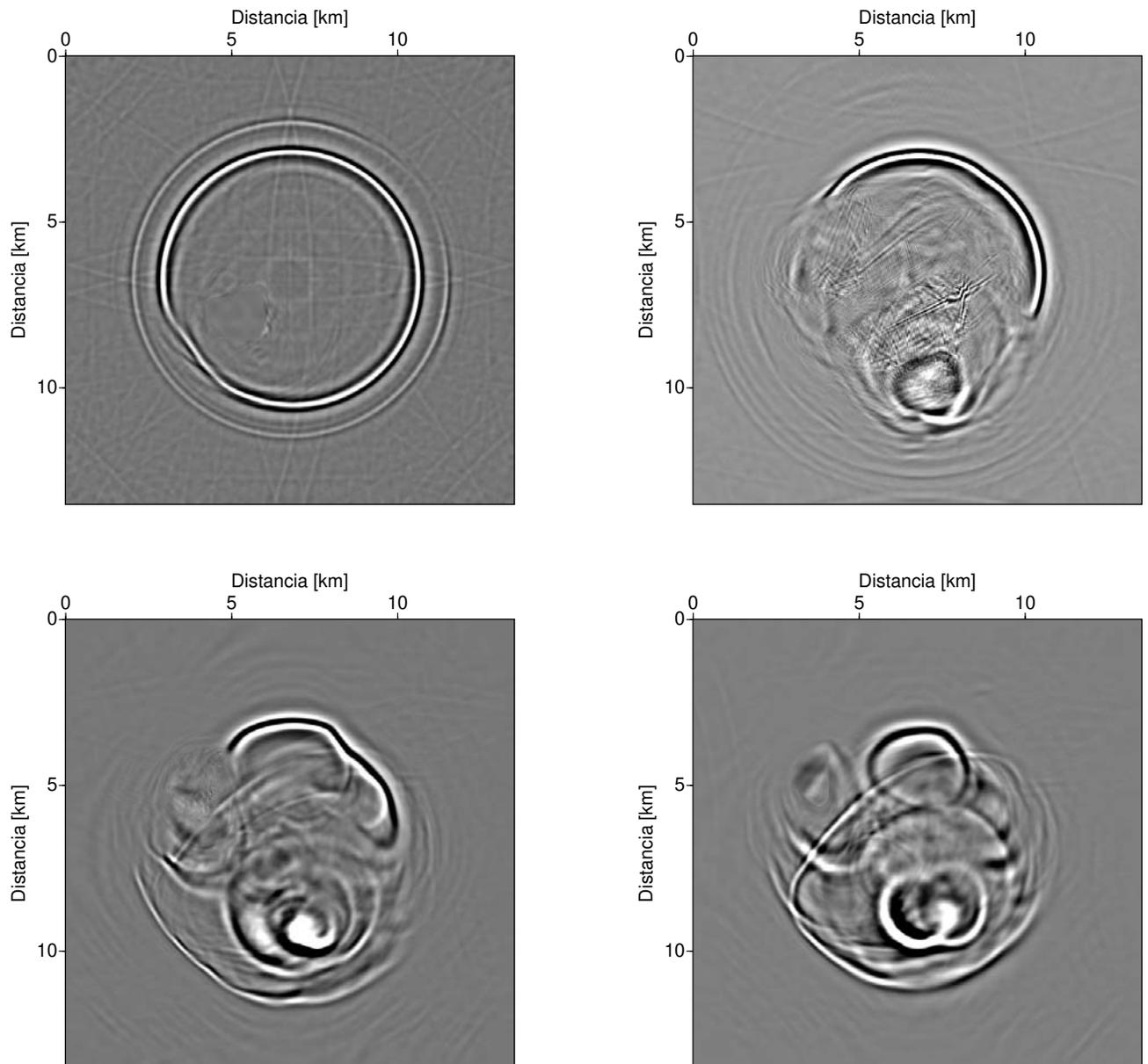


Figura 5.44: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 2 termos e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

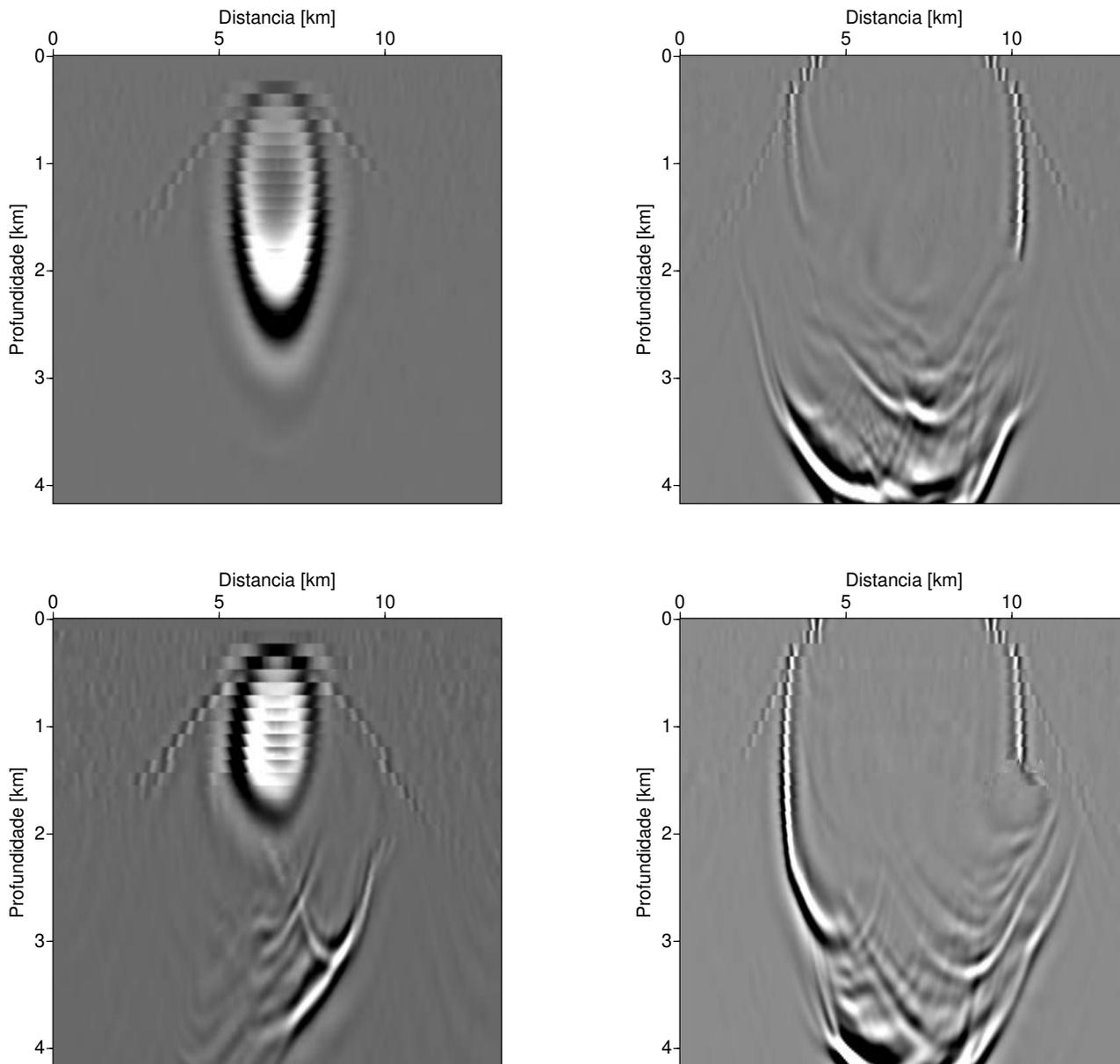


Figura 5.45: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

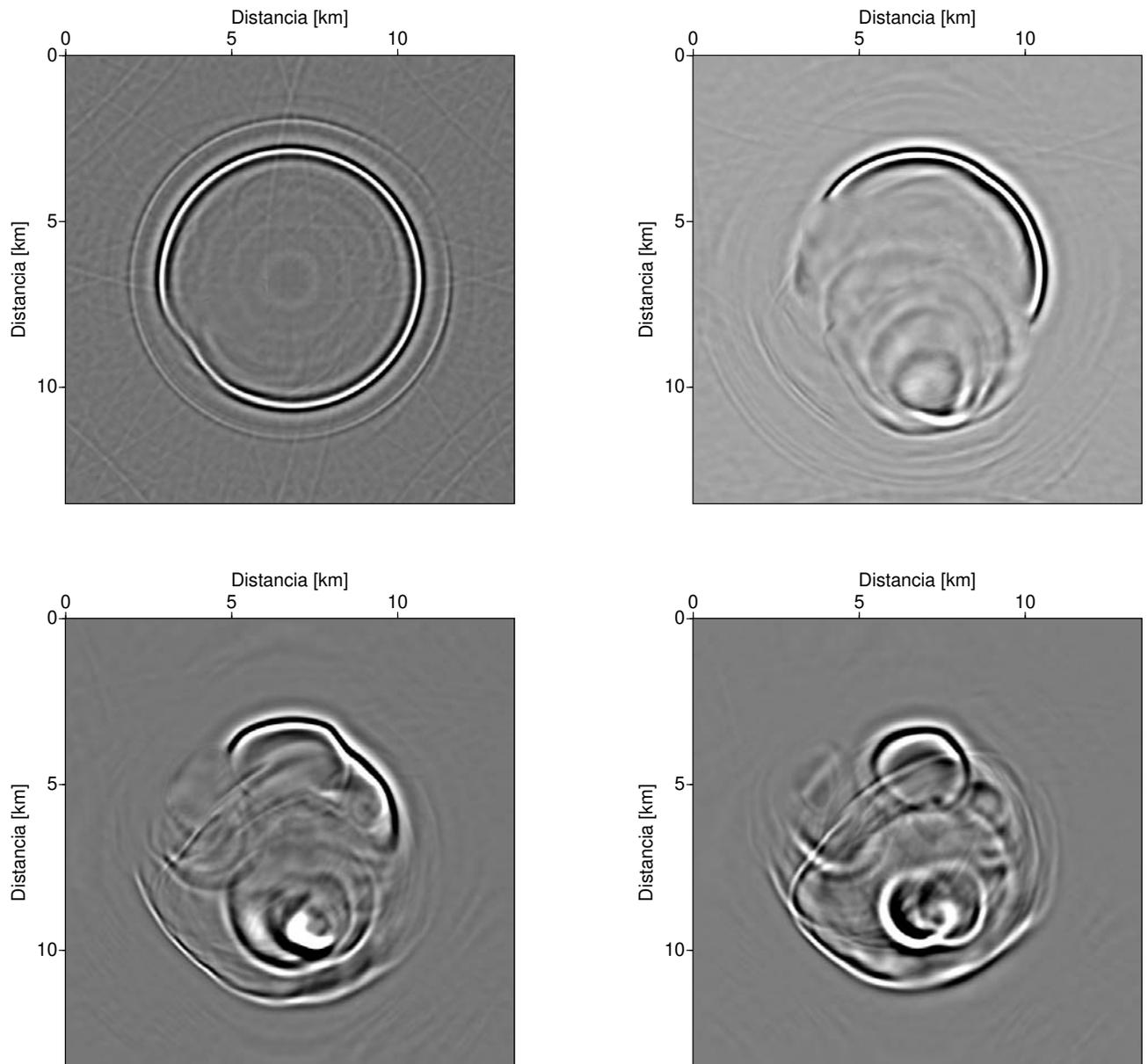


Figura 5.46: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 2 termos e ângulo de rotação de 25° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

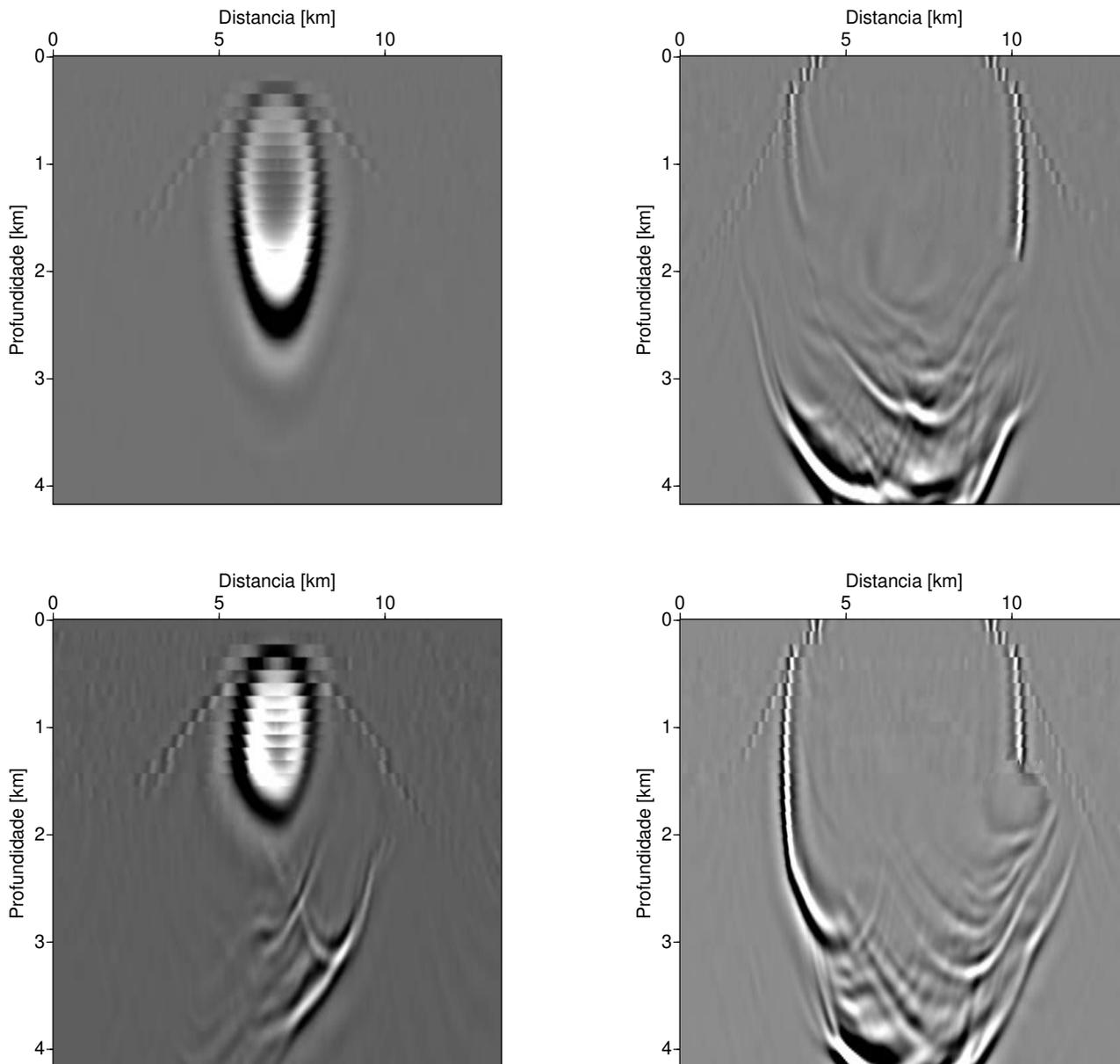


Figura 5.47: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

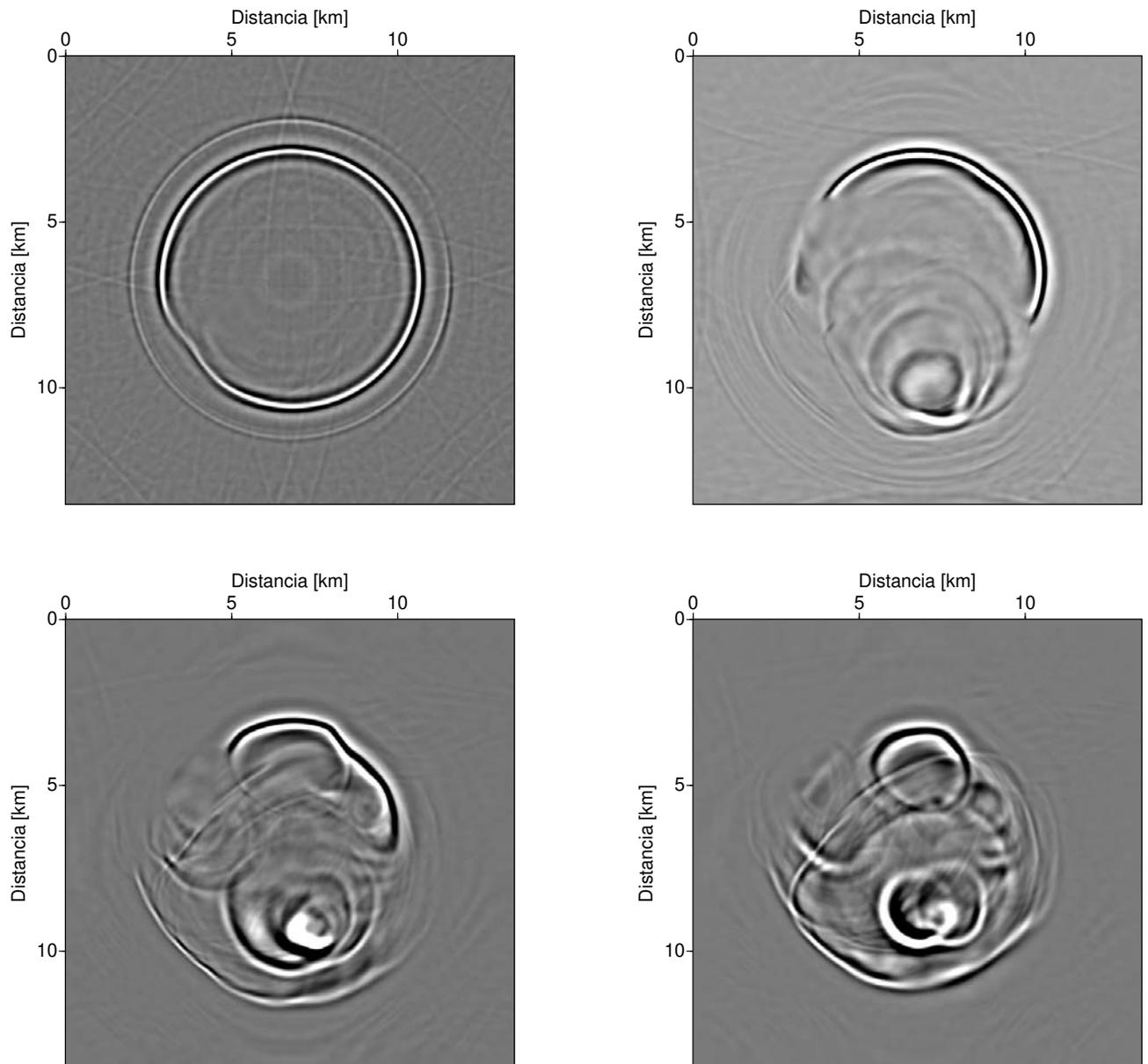


Figura 5.48: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé real com 3 termos, e correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

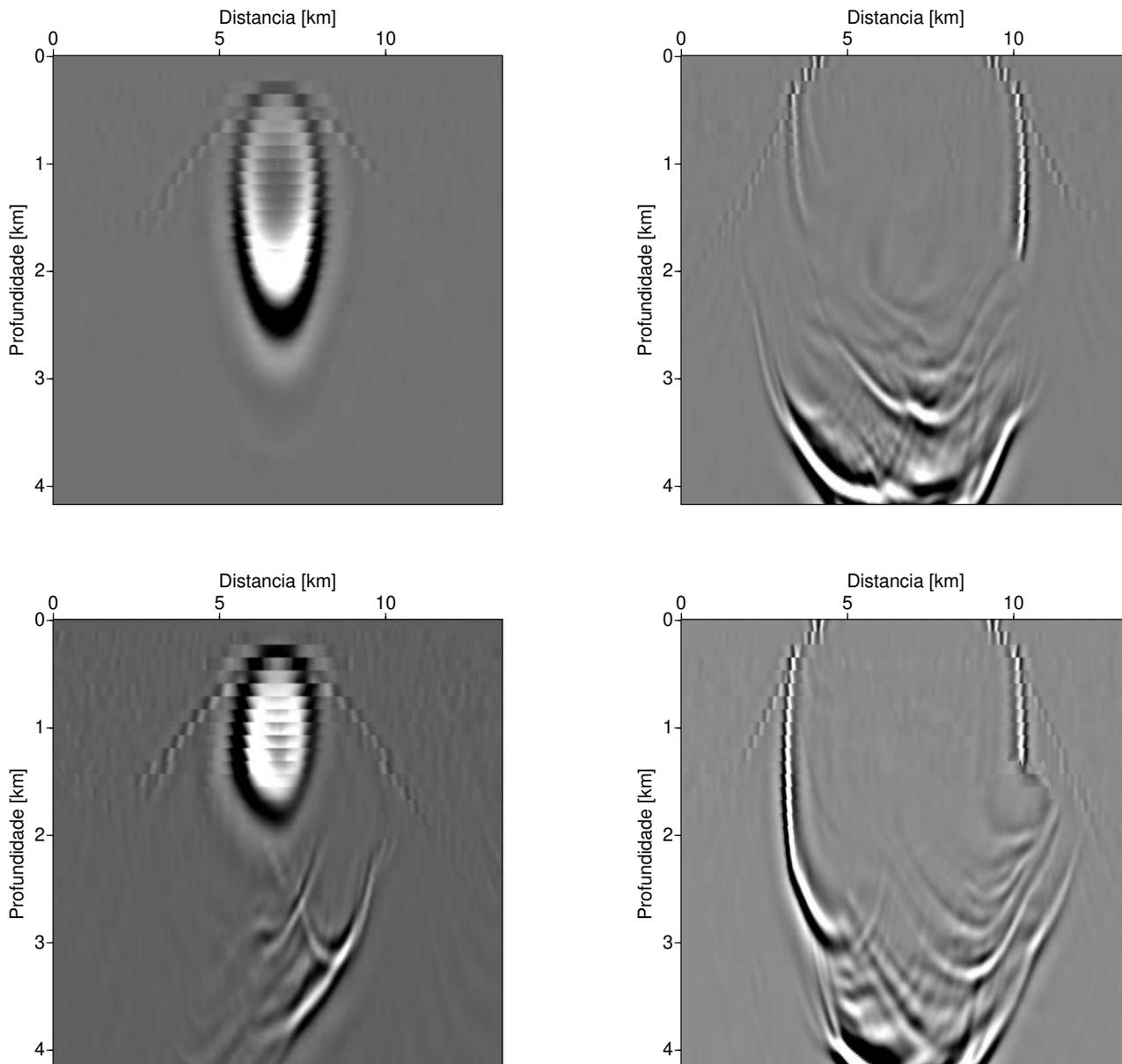


Figura 5.49: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

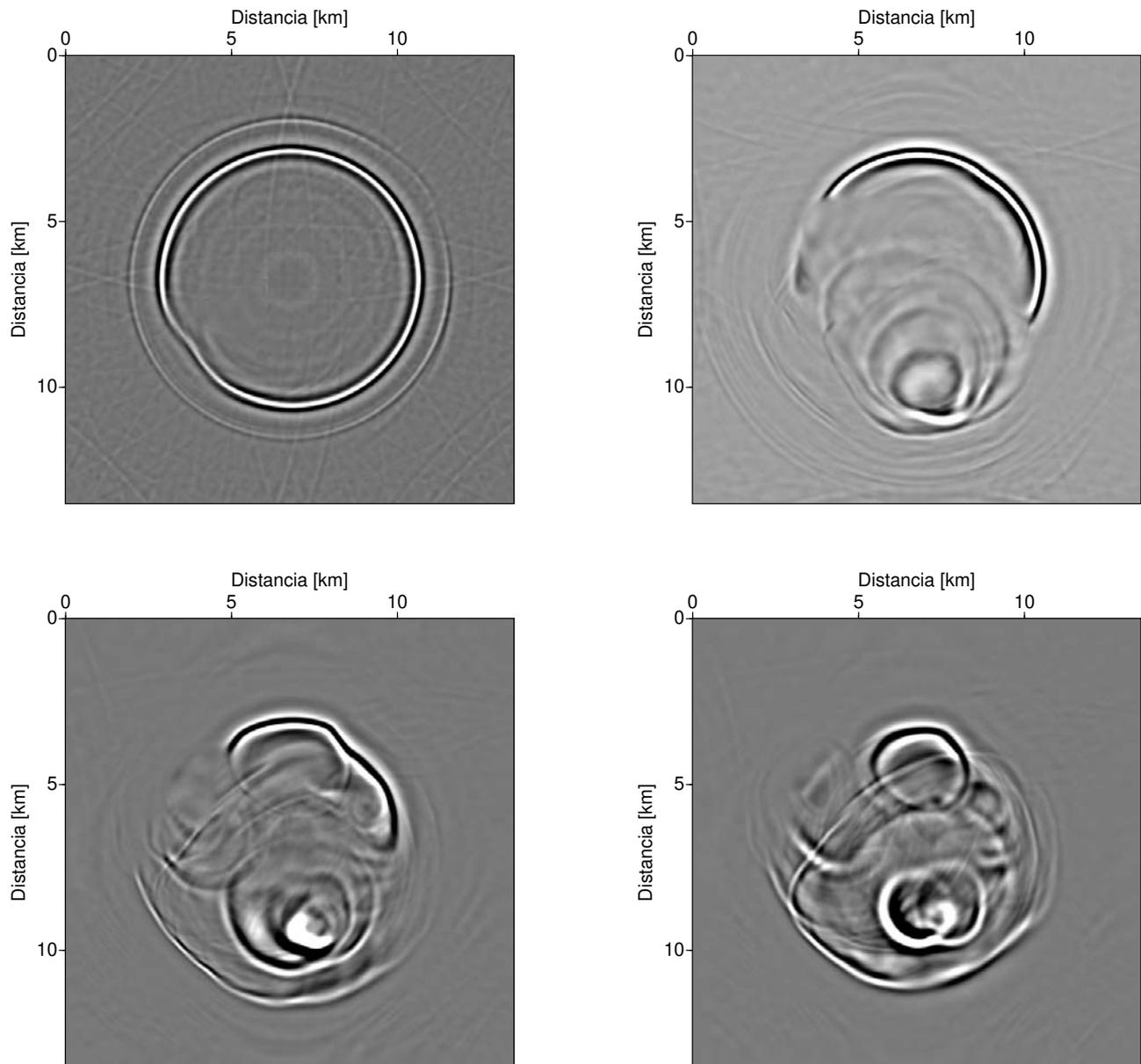


Figura 5.50: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com aproximação de Padé complexa com 3 termos e ângulo de rotação de 45° , com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

5.2.5 Suavização de média móvel

Em todos os testes até agora foi aplicada uma suavização no modelo de velocidade usando uma média móvel conforme descrita na equação (5.1). Neste conjunto de testes, queremos saber qual a vantagem de aplicar essa média móvel. A velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade, usamos a correção de Li a cada 6 passos, a interpolação linear dos campos usando a velocidade média, e 3 termos da série de Padé complexa.

Mostramos os mesmos cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.51 e 5.52 são obtidas quando não usamos a suavização, e as Figuras 5.53 e 5.54 quando usamos a suavização de média móvel. Nota-se que para as Figuras 5.51 e 5.52, foi aplicado um filtro mediana móvel de tamanho $7 \times 7 \times 7$, somente para eliminar os *spikes* artificiais contidos no modelo para marcar os refletores. Estas figuras não apresentam diferenças visíveis.

Os artefatos e as amplitudes presentes tanto nos cortes verticais (Figuras 5.51 e 5.53) quando nos cortes horizontais (Figuras 5.52 e 5.54), bem como as descontinuidades dos eventos causadas pela correção de Li, são iguais. Por isso, podemos dizer que não há vantagens em aplicar esse tipo de suavização no modelo de velocidades.

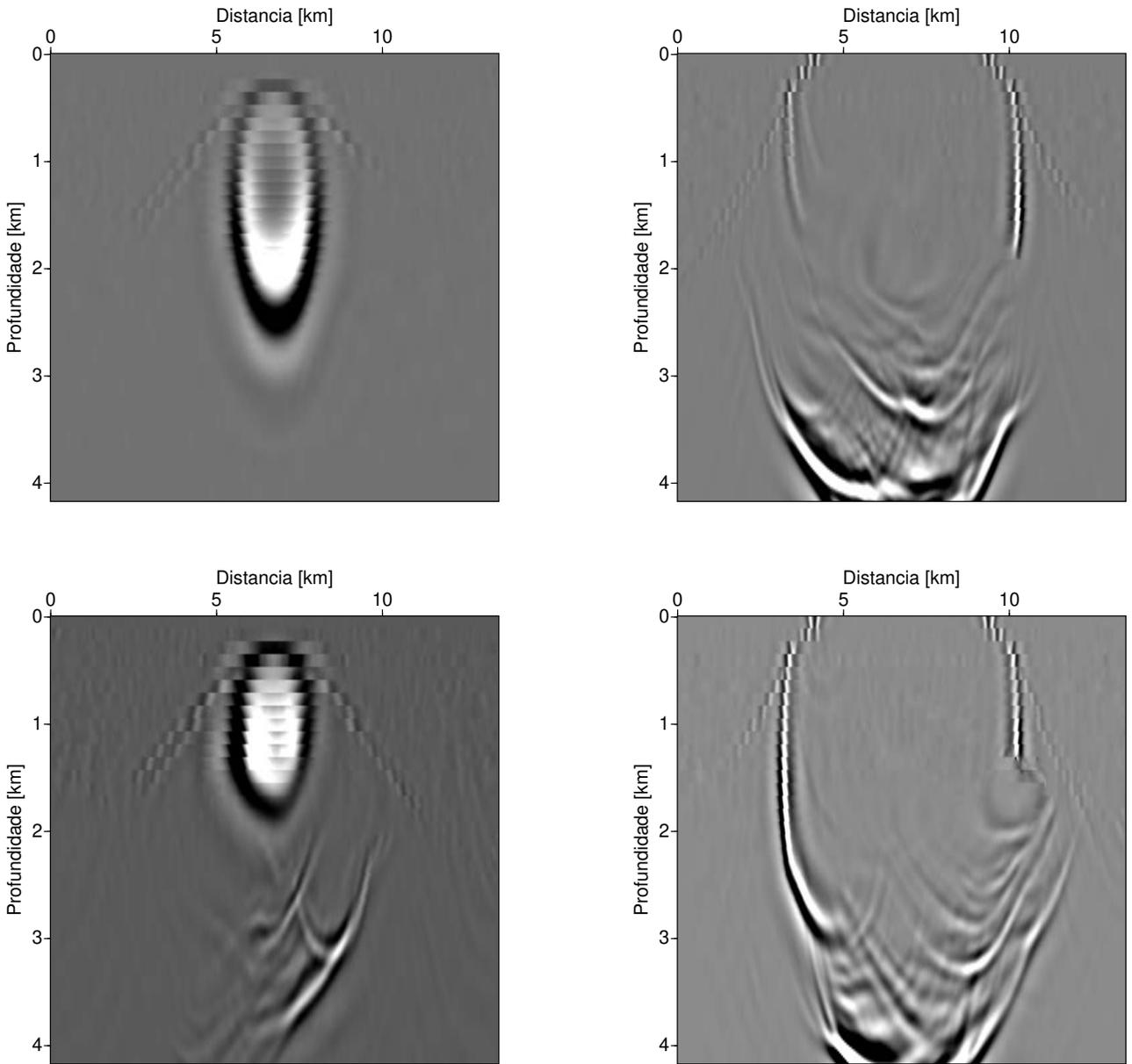


Figura 5.51: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções sem a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

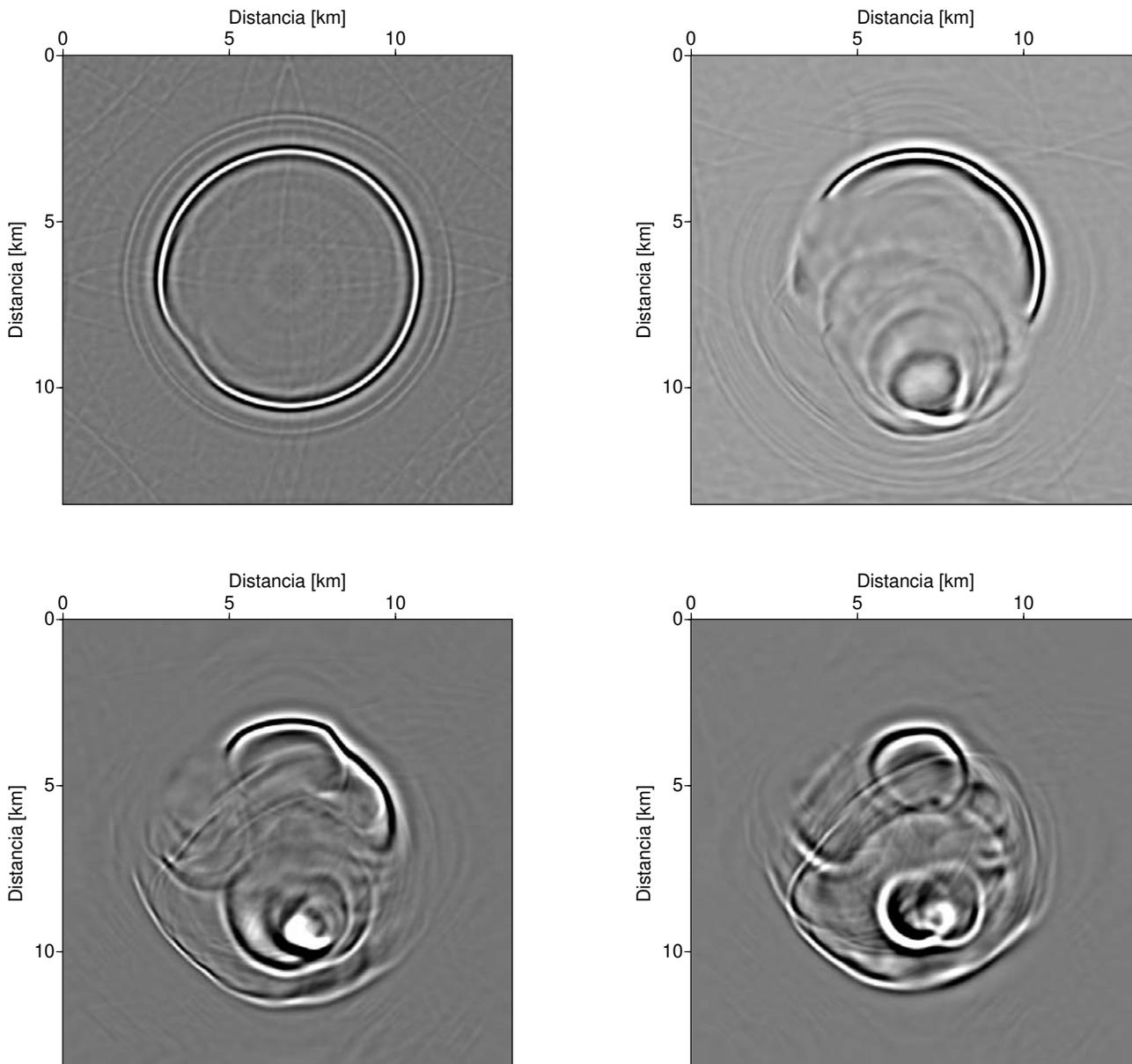


Figura 5.52: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções sem a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

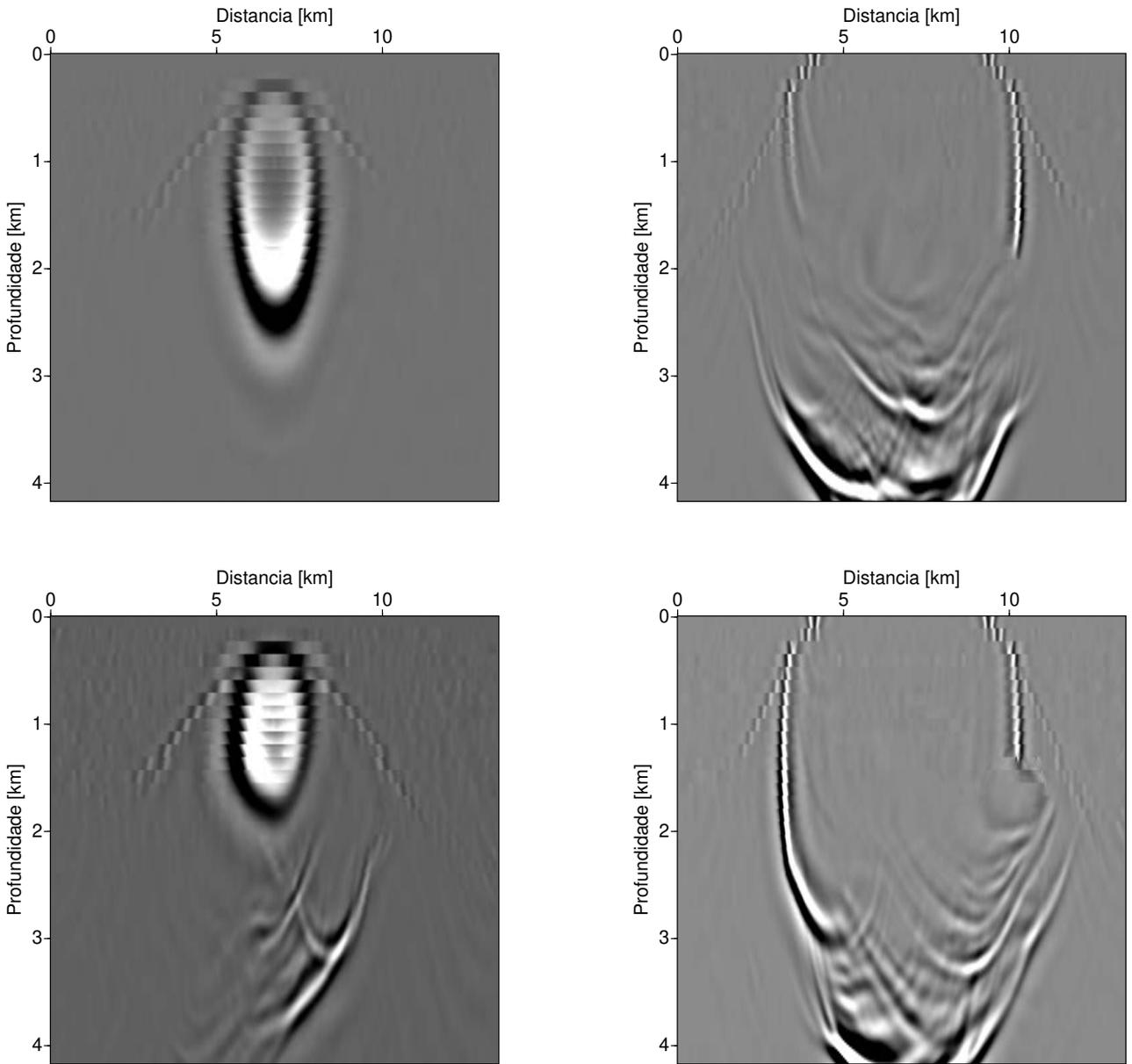


Figura 5.53: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

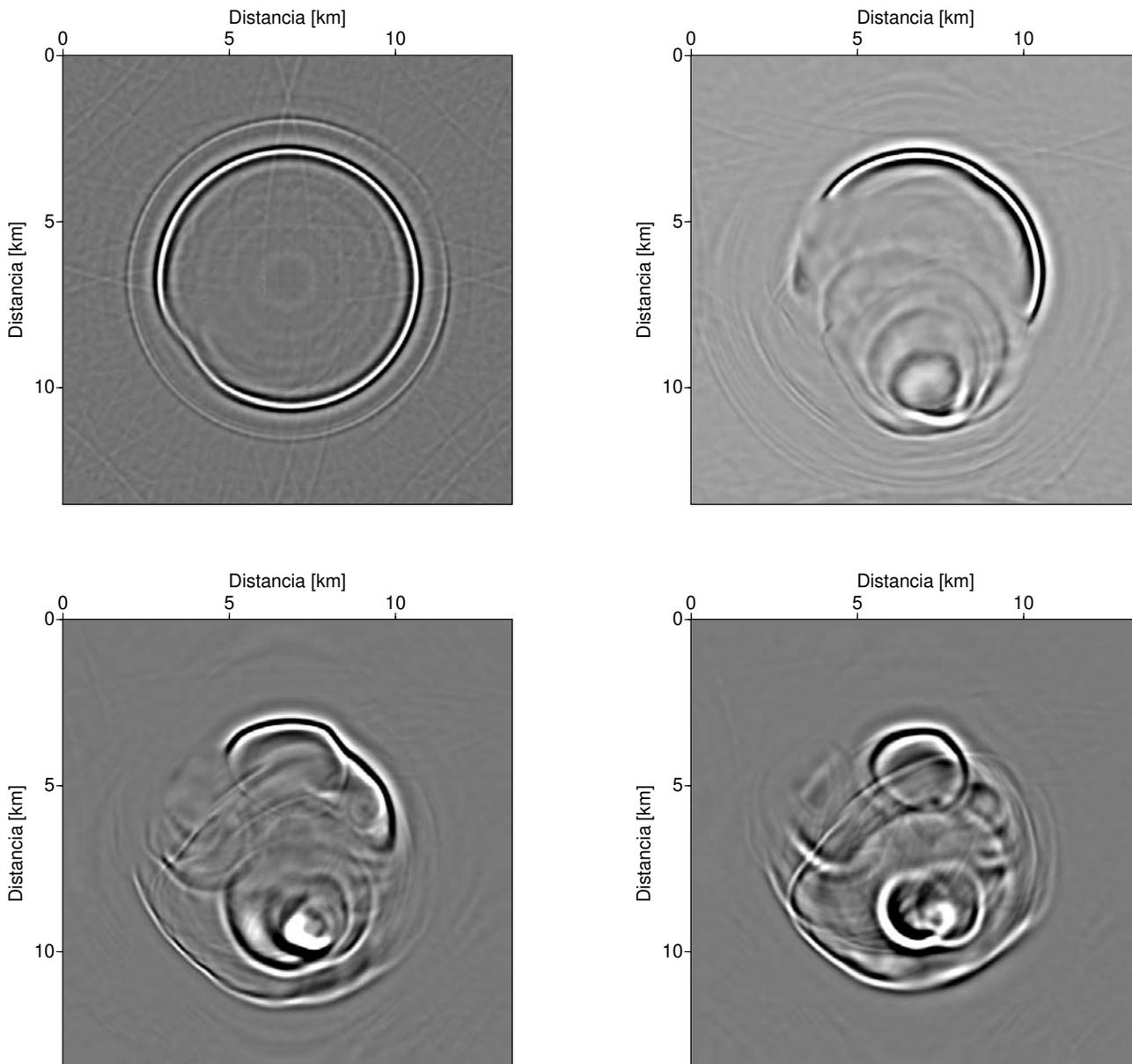


Figura 5.54: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções com a suavização de média móvel e com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

5.2.6 Interpolação

Neste conjunto de testes quisemos ver os resultados quando usamos diferentes formas de interpolação, ou seja, fazemos a interpolação dos campos obtidos a partir da correção de Li com diferentes velocidades, usando a velocidade média ou usando o cubo da velocidade média. Também quisemos saber o resultado quando combinamos usar o cubo da velocidade para obter a velocidade média e fazemos a interpolação usando o cubo da velocidade média. Aqui usamos a série de Padé complexa com 3 termos, a velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade e usamos a correção de Li a cada 6 passos.

Mostramos os mesmos cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.55 e 5.56 são obtidas quando fazemos a interpolação linear ponderada usando a velocidade, as Figuras 5.57 e 5.58 quando usamos o cubo da velocidade, e as Figuras 5.59 e 5.60 quando usamos o cubo da velocidade média combinado com o cubo da velocidade.

Podemos ver mais artefatos nos cortes verticais das duas figuras (Figuras 5.57 e 5.59) em que usamos o cubo da velocidade média para encontrar o peso da interpolação do que na Figura 5.55. Nos cortes horizontais, Figuras 5.56, 5.58 e 5.60 vemos além dos artefatos de migração um aumento em sua amplitude, e em contra partida vemos uma perda de amplitude do sinal nas duas últimas figuras. Concluimos que apenas o uso da velocidade fornece um melhor resultado.

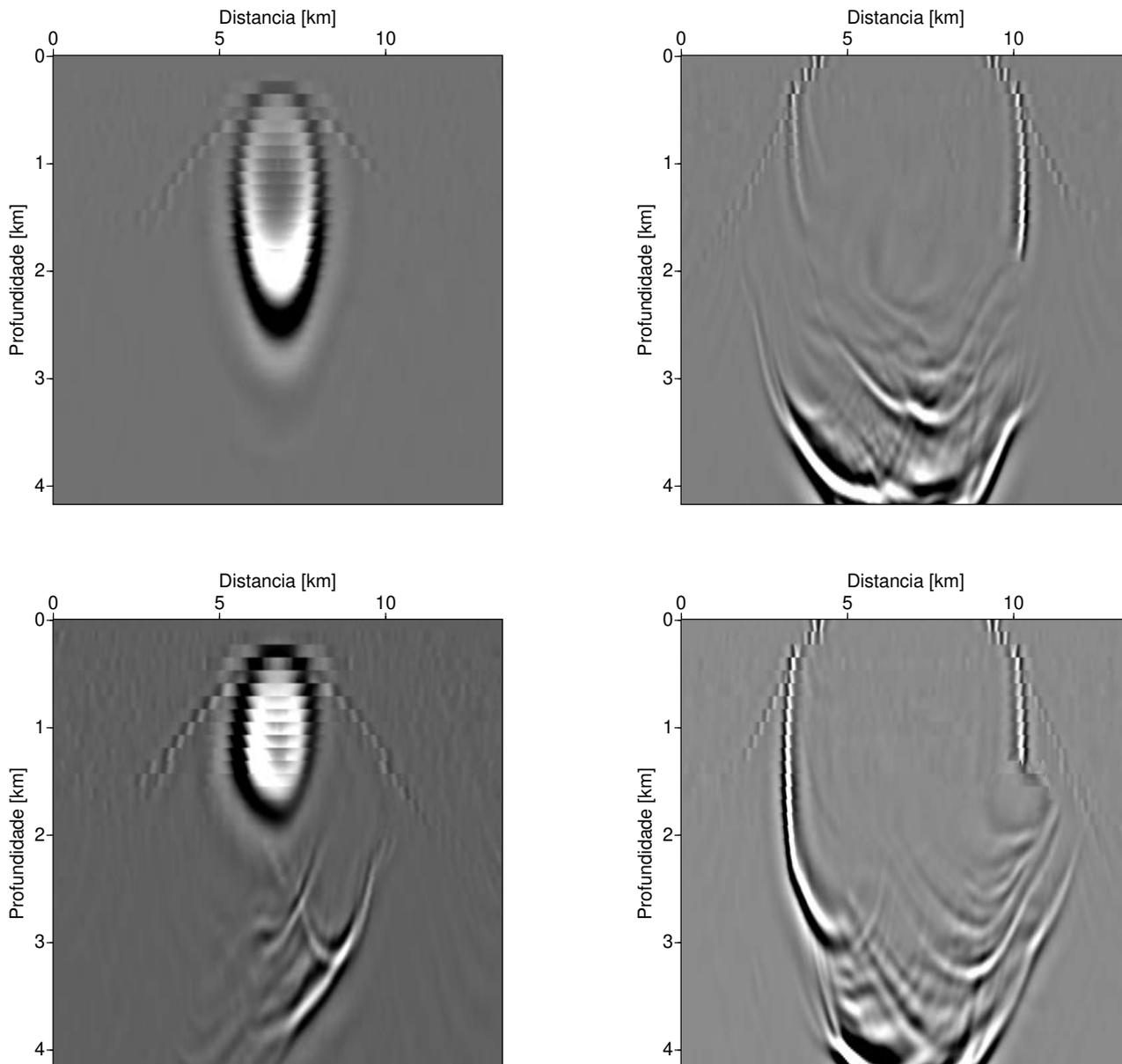


Figura 5.55: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade. Representação por cortes verticais.

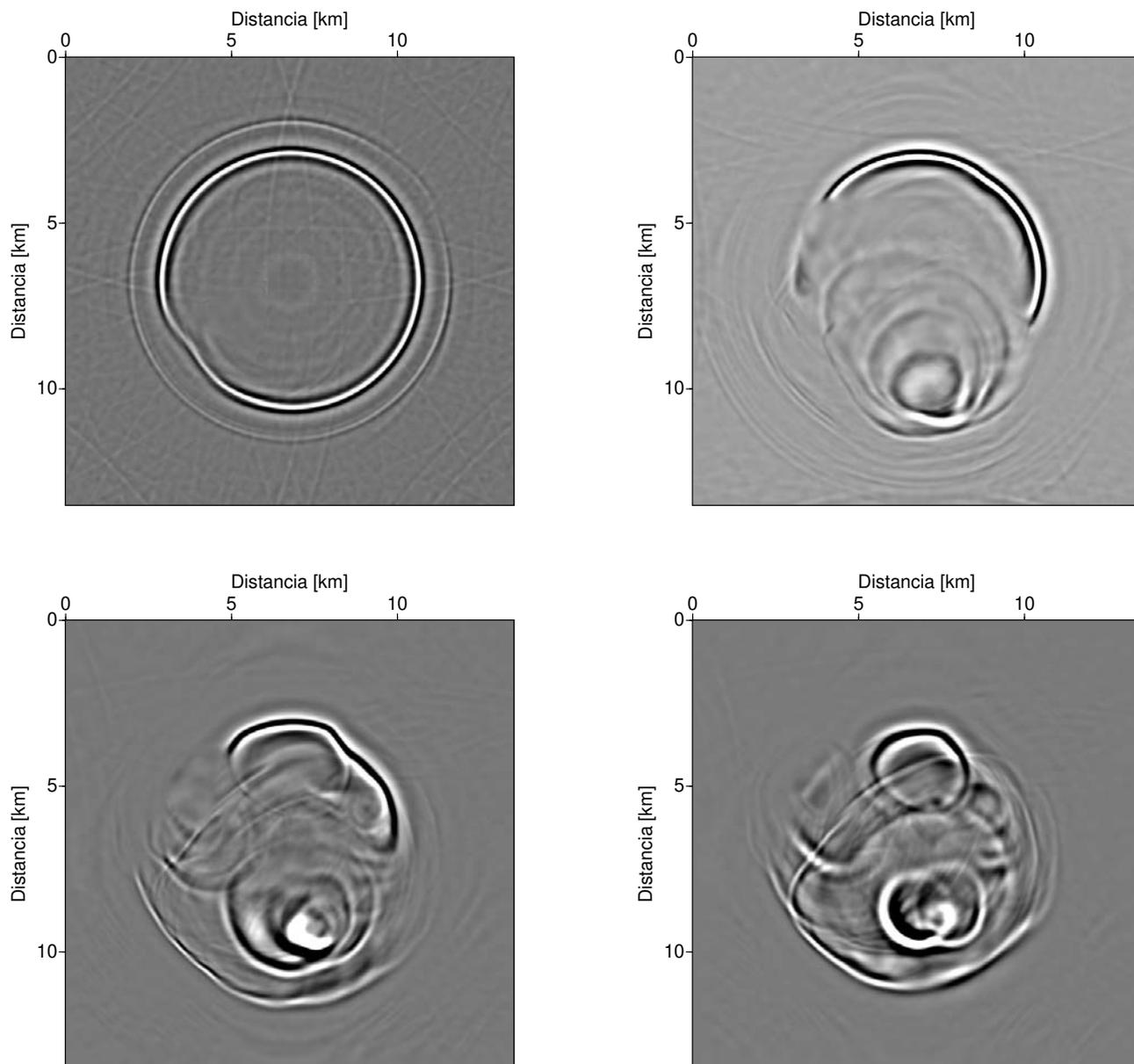


Figura 5.56: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando a velocidade. Representação por cortes horizontais.

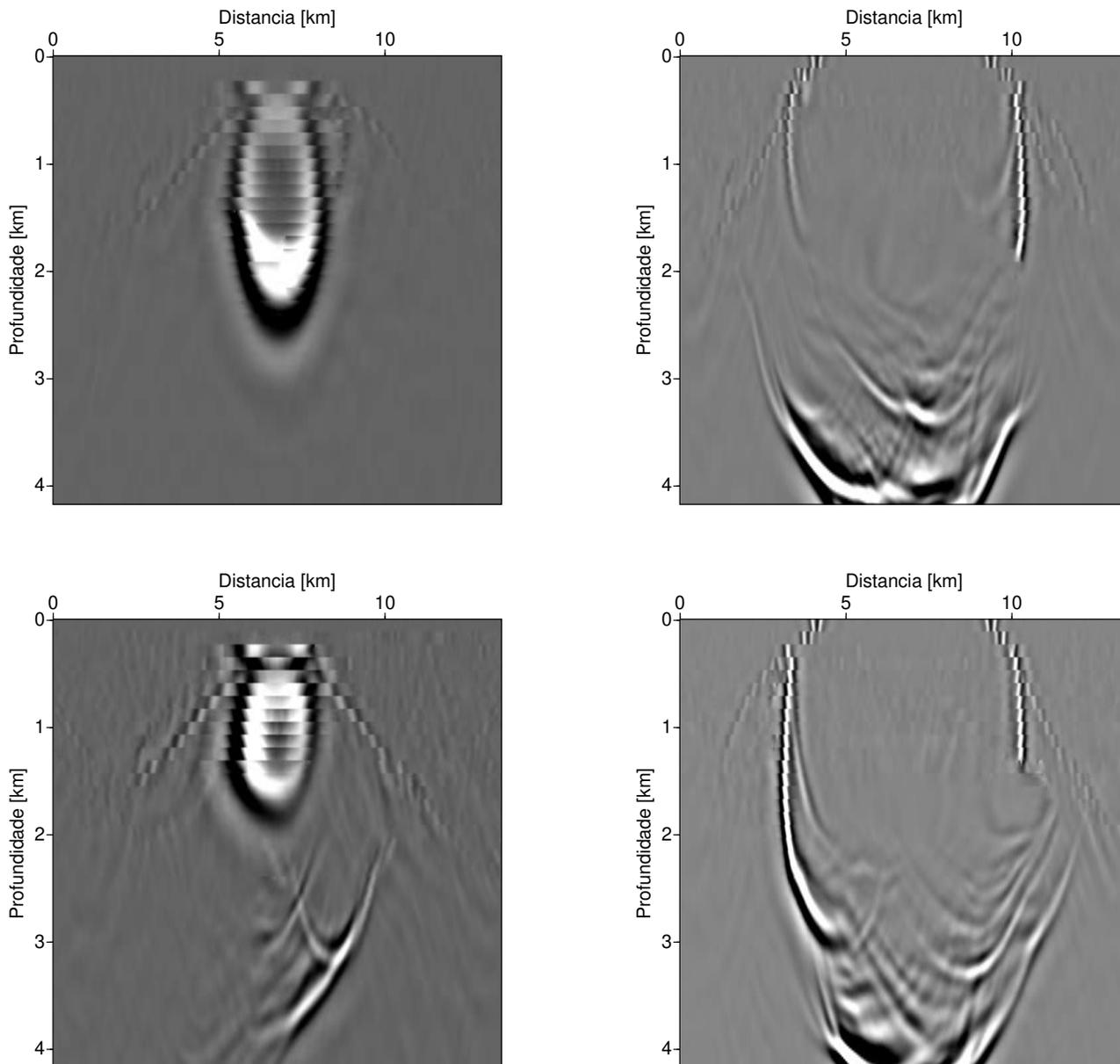


Figura 5.57: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.

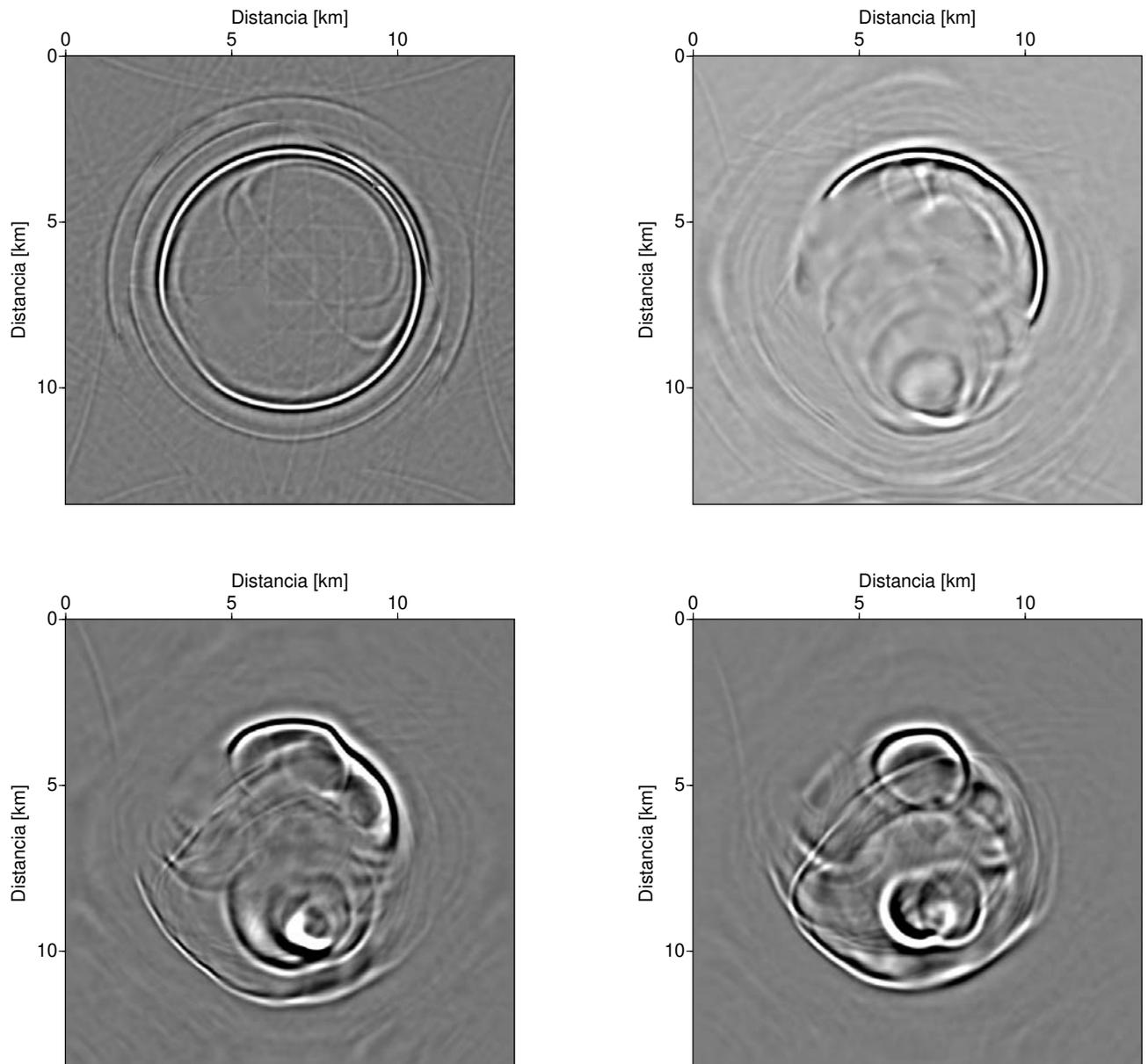


Figura 5.58: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.

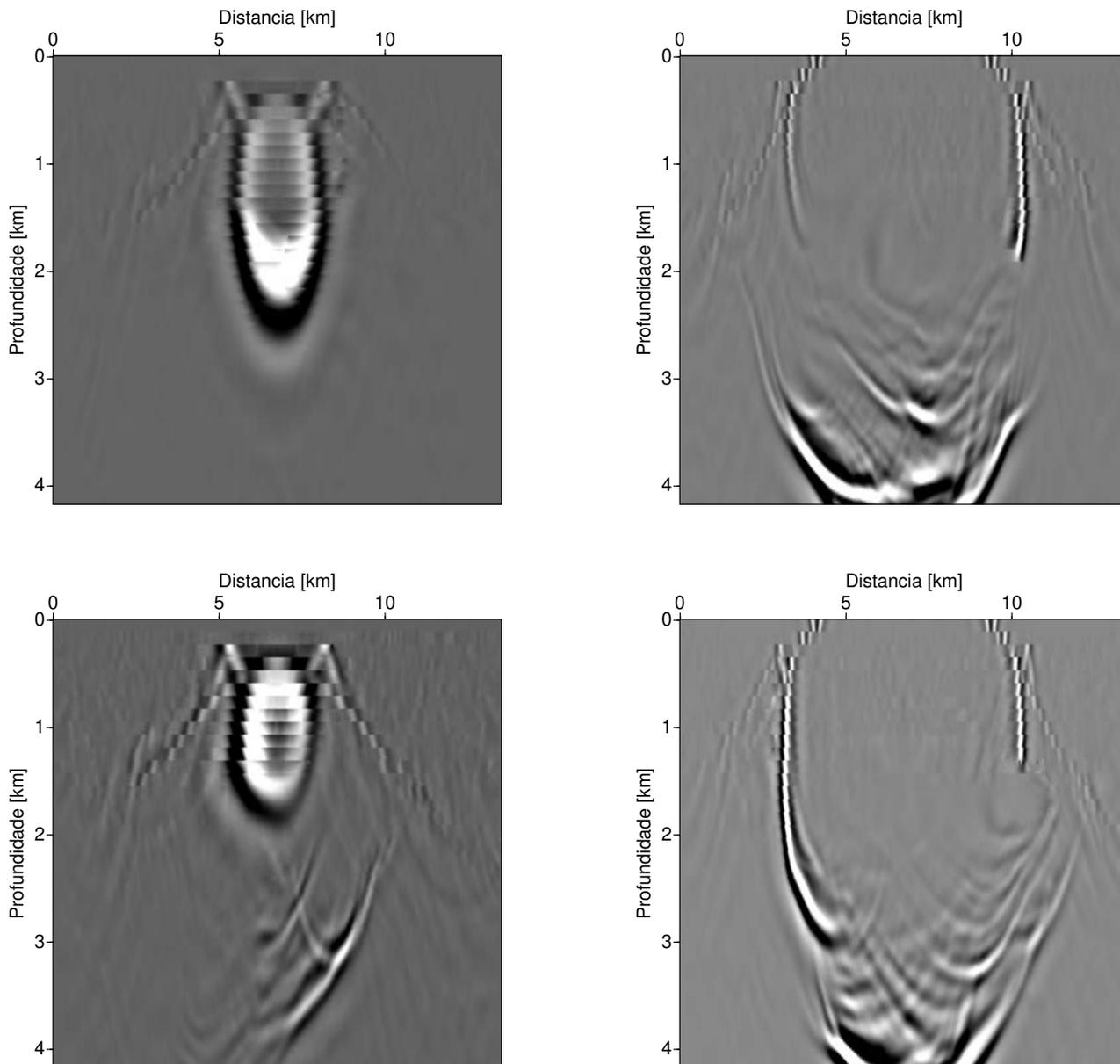


Figura 5.59: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes verticais.

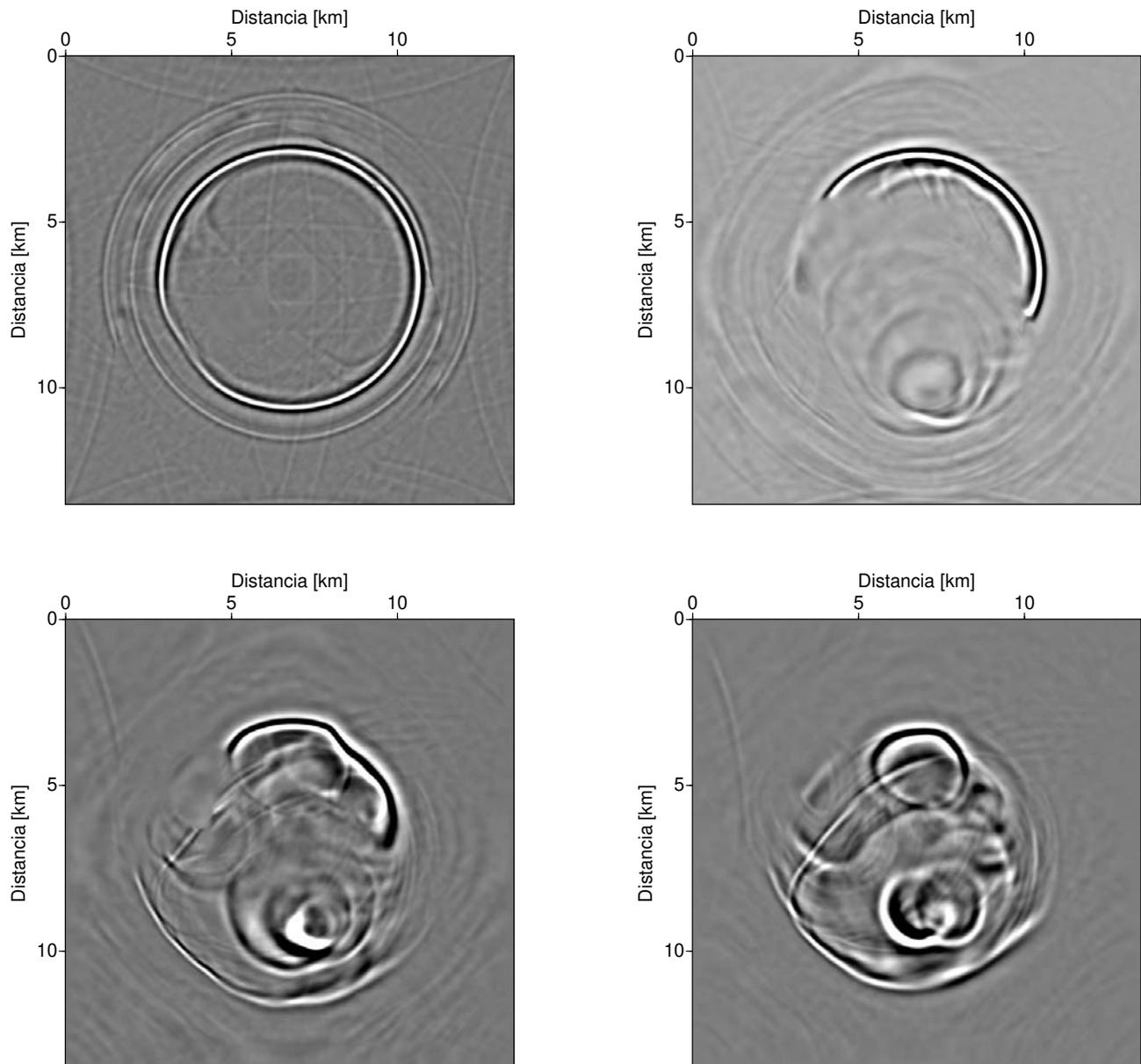


Figura 5.60: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, média do cubo da velocidade e interpolação linear dos campos usando o cubo da velocidade. Representação por cortes horizontais.

5.2.7 Número de termos e ângulo de rotação

Neste conjunto de testes quisemos ver os resultados quando variamos tanto o número de termos quanto o ângulo de rotação da série de Padé complexa. Baseado em testes que não serão mostrados aqui, já sabemos que quanto menos termos da série são usados menor deve ser o ângulo de rotação. Testamos as combinações de 1 termo da série de Padé com os ângulos de 15° e 25° , 2 termos da série de Padé com os ângulos de 15° e 25° , e 3 termos da série de Padé com os ângulos de 5° , 15° , 25° e 45° . Aqui usamos a série de Padé complexa, a velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade, usamos a correção de Li a cada 6 passos e a interpolação dos campos é feita usando a velocidade média.

Mostramos os cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.61 e 5.62 são obtidas quando usamos apenas 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° , e as Figuras 5.63 e 5.64 quando usamos 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . As Figuras 5.65 e 5.66 são obtidas quando usamos 2 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 15° , e as Figuras 5.67 e 5.68 quando usamos 2 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 25° .

As Figuras 5.69 e 5.70 são obtidas usando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 5° , as Figuras 5.71 e 5.72 usando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 15° , as Figuras 5.73 e 5.74 usando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 25° , e as Figuras 5.75 e 5.76 usando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação de 45° .

Podemos ver que a amplitude é menor nos cortes verticais da Figura 5.63 do que na Figura 5.61. Nos cortes horizontais da Figura 5.64 vemos uma perda de amplitude na direção dos eixos no corte mais raso. Ou seja, quando usamos apenas 1 termo da série de Padé, devemos usar um ângulo de rotação muito pequeno, porque quanto maior o ângulo de rotação, maior o amortecimento das frentes de onda nos altos ângulos de propagação.

Com 2 termos da série de Padé os resultados mostrados nos cortes verticais (Figuras 5.65 e 5.67) obtidos quando usamos os ângulos de 15° e 25° , e nos cortes horizontais (Figuras 5.66 e 5.68) quando usamos os mesmos ângulos são iguais. Comparando as Figuras 5.61 e 5.65, podemos observar que a perda de amplitude é menos percebida quando usamos 2 termos.

Com 3 termos da série de Padé a quantidade de artefatos é igual nos cortes verticais nas Figuras 5.69, 5.71, 5.73 e 5.75, porém podemos notar uma melhora gradativa na amplitude do sinal. Nos cortes horizontais nas Figuras 5.70, 5.72, 5.74 e 5.76 vemos que os artefatos presentes são iguais independente do ângulo de rotação que usamos. Portanto, com 3 termos da série de Padé podemos variar o ângulo de rotação e ainda assim obter o mesmo resultado.

Pelo que pudemos observar nesse classe de testes, parece razoável usar apenas 2 termos da série de Padé e ainda assim obter um resultado similar ao obtido usando 3 termos da série de Padé. A vantagem em usar menos termos da série é uma redução do custo computacional. Sendo assim, as conclusões destes teste são as mesmas do caso homogêneo.

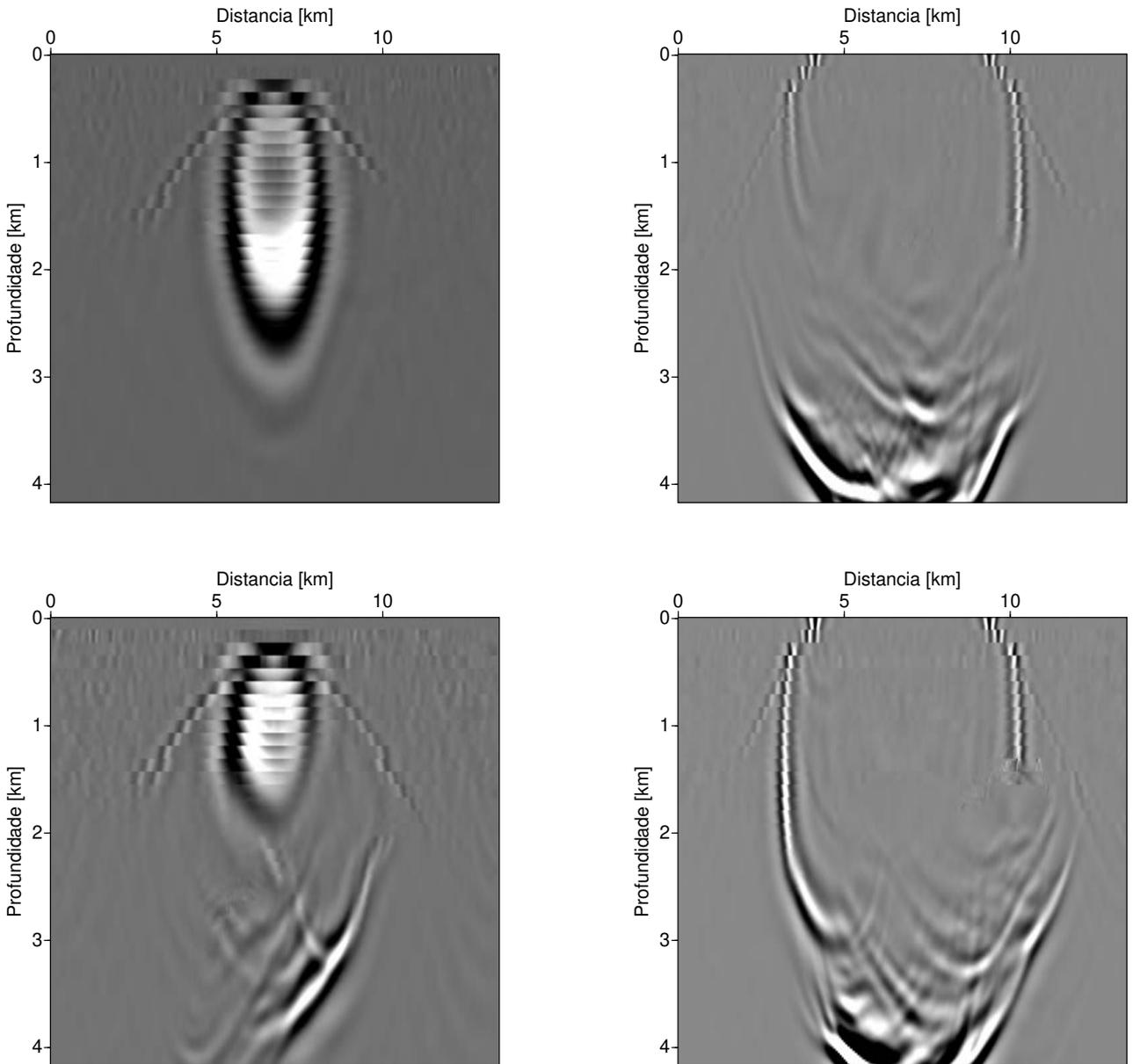


Figura 5.61: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes verticais.

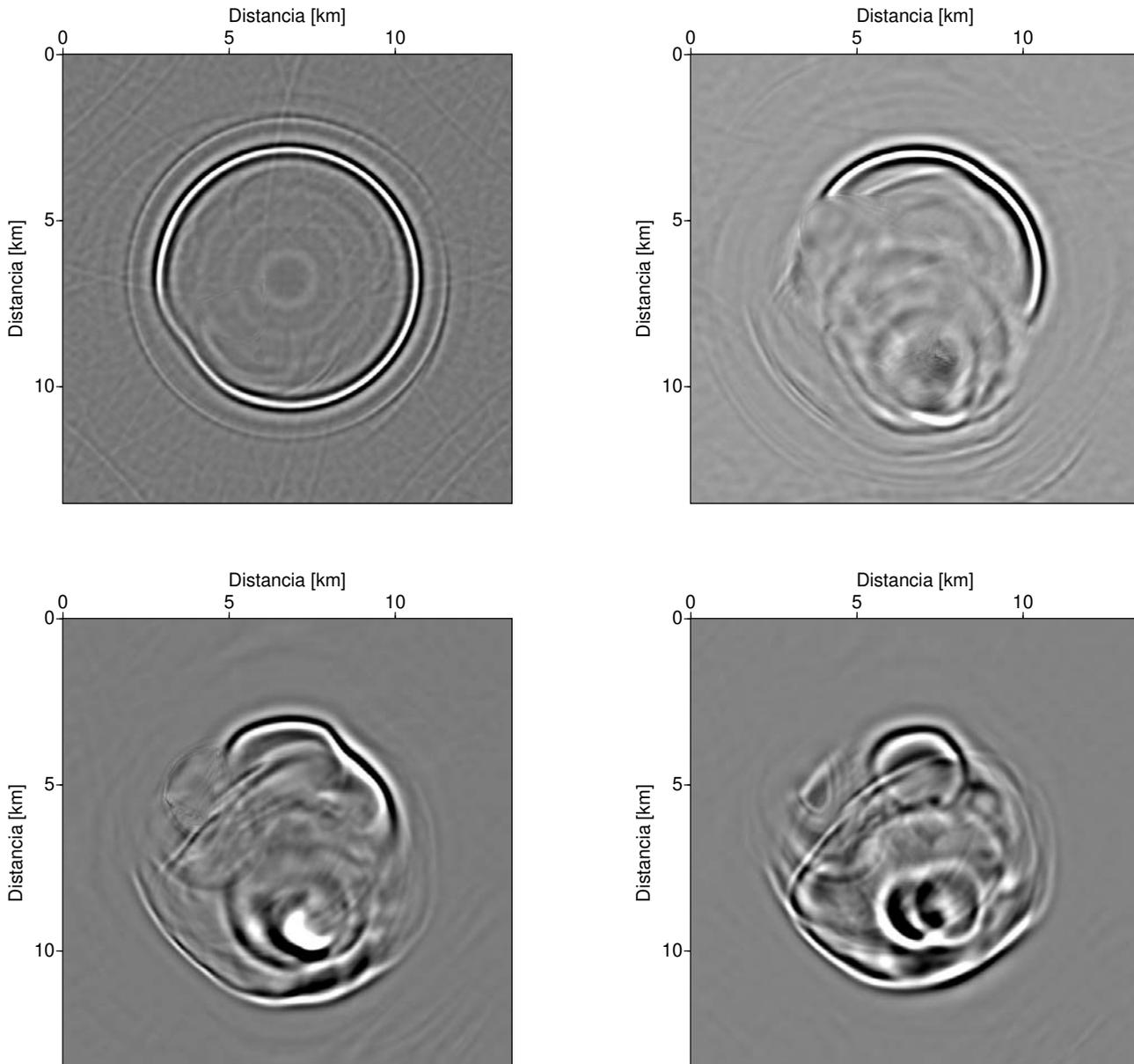


Figura 5.62: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes horizontais.

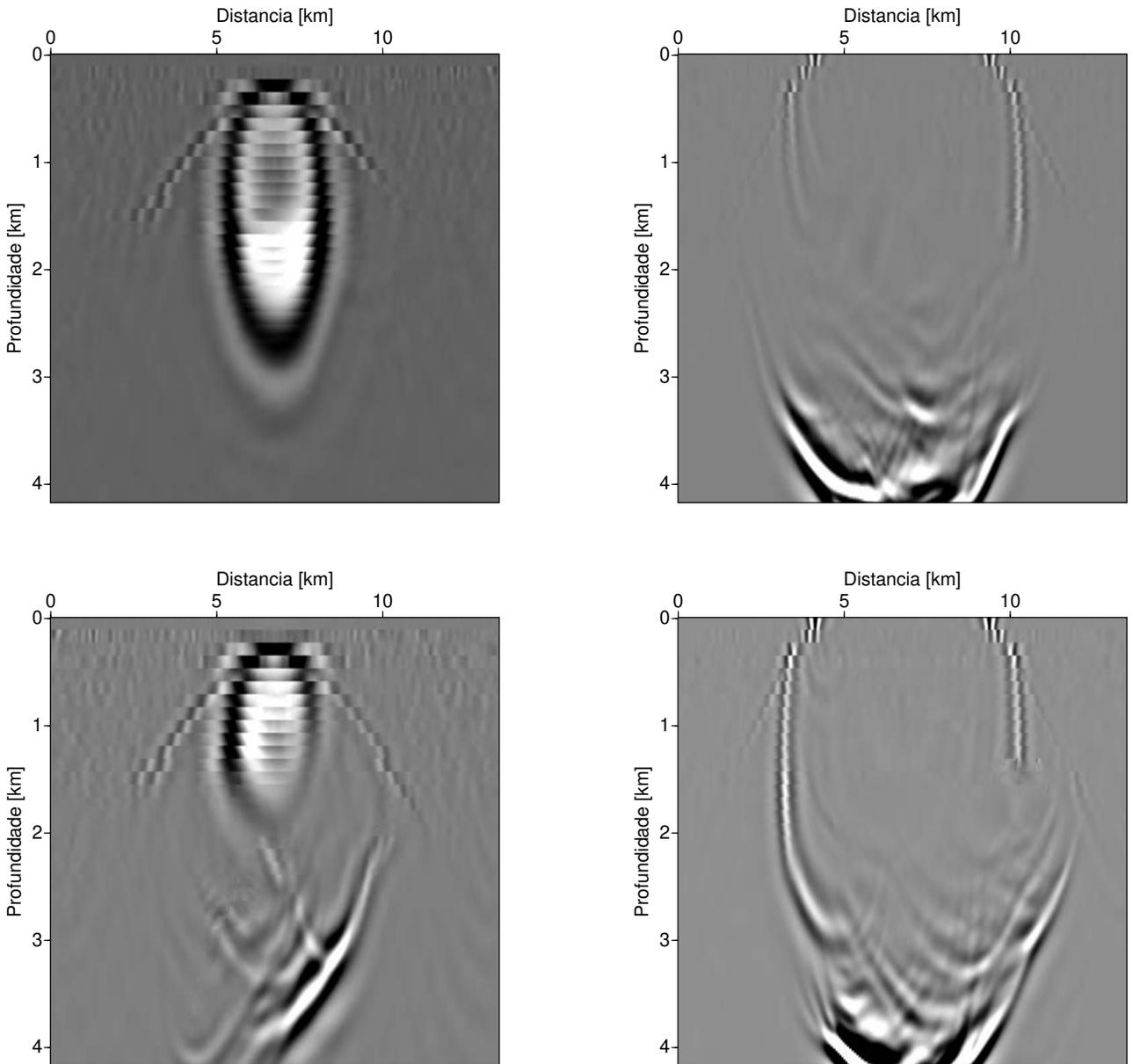


Figura 5.63: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes verticais.

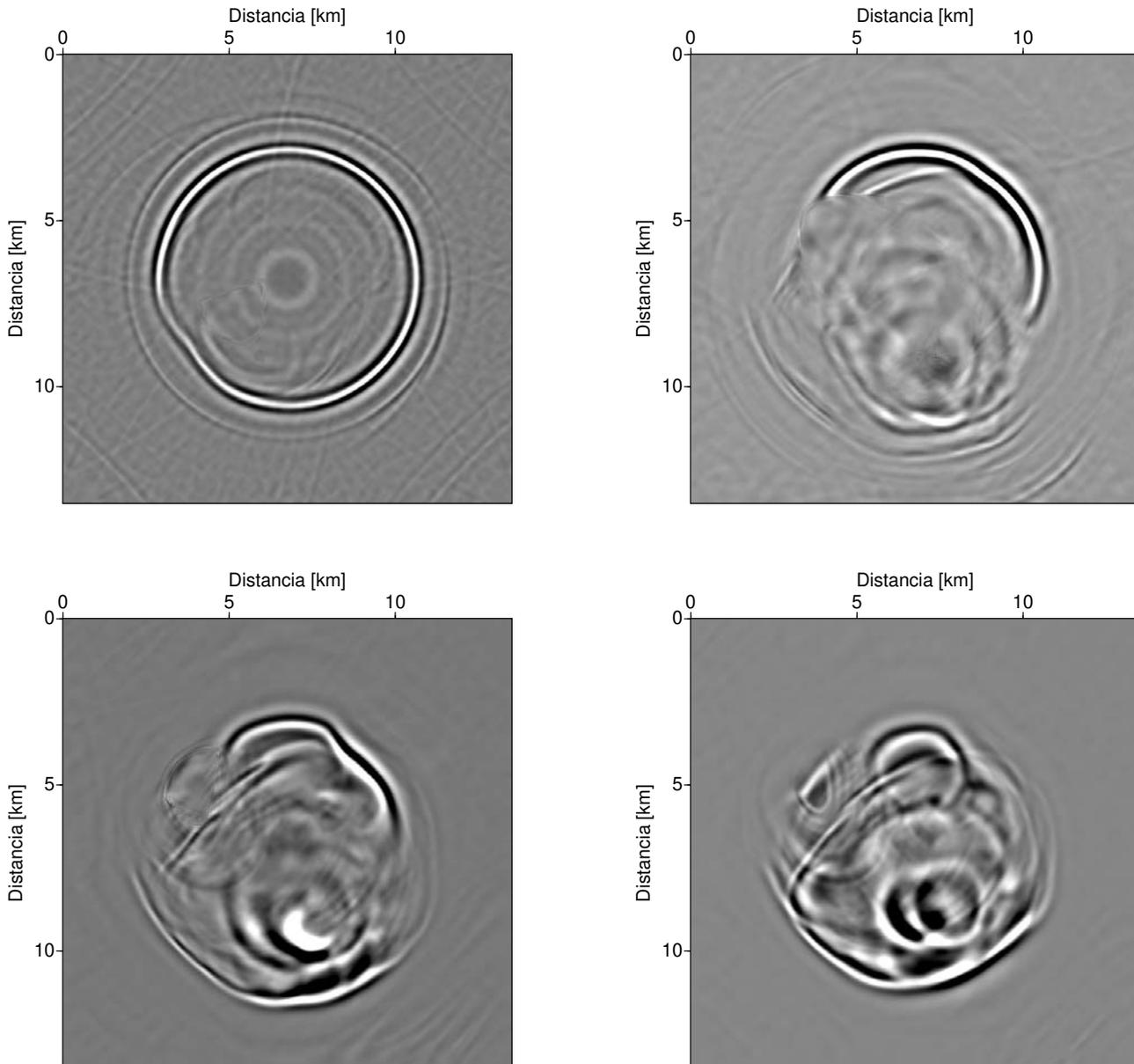


Figura 5.64: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 1 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes horizontais.

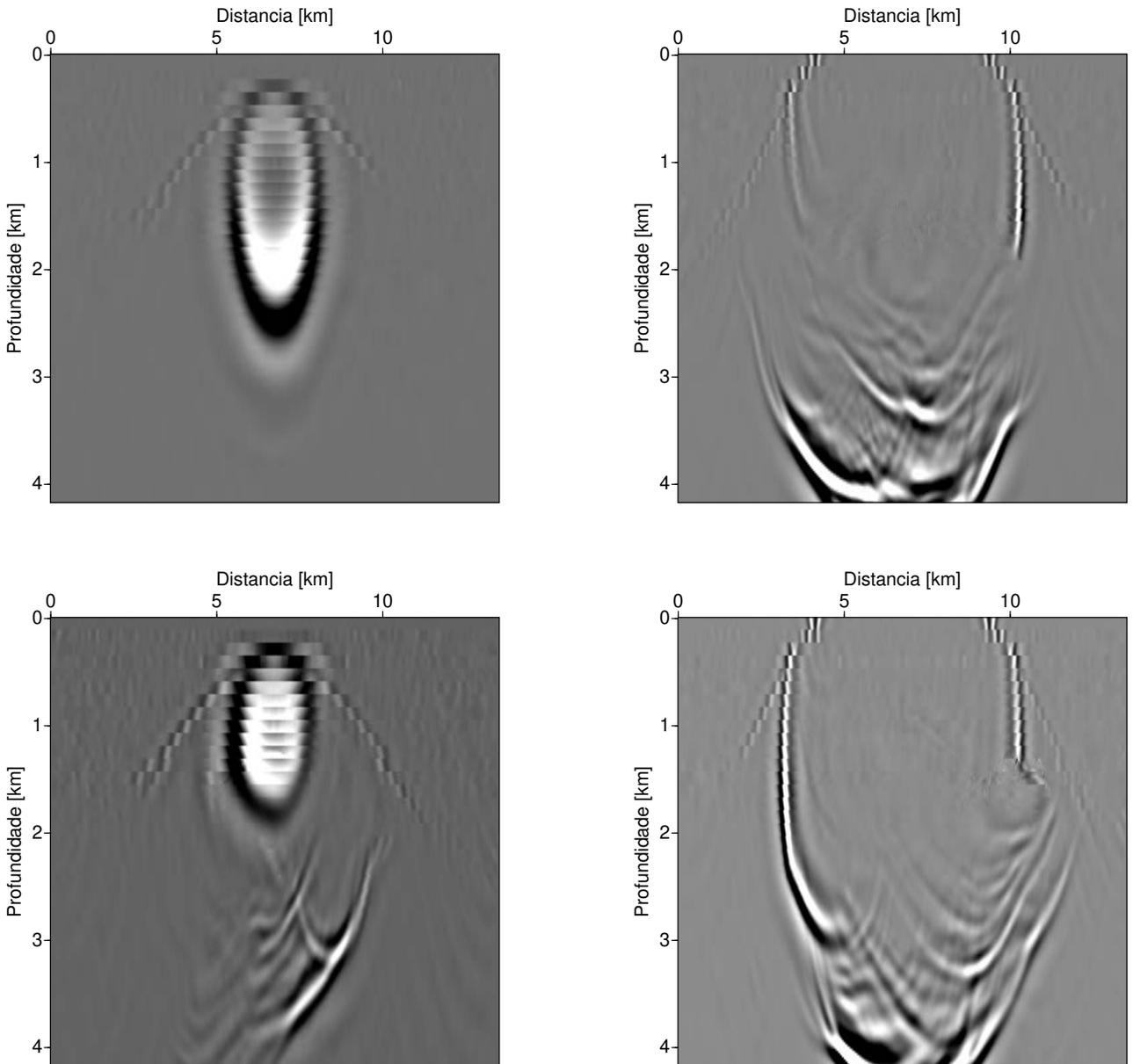


Figura 5.65: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes verticais.

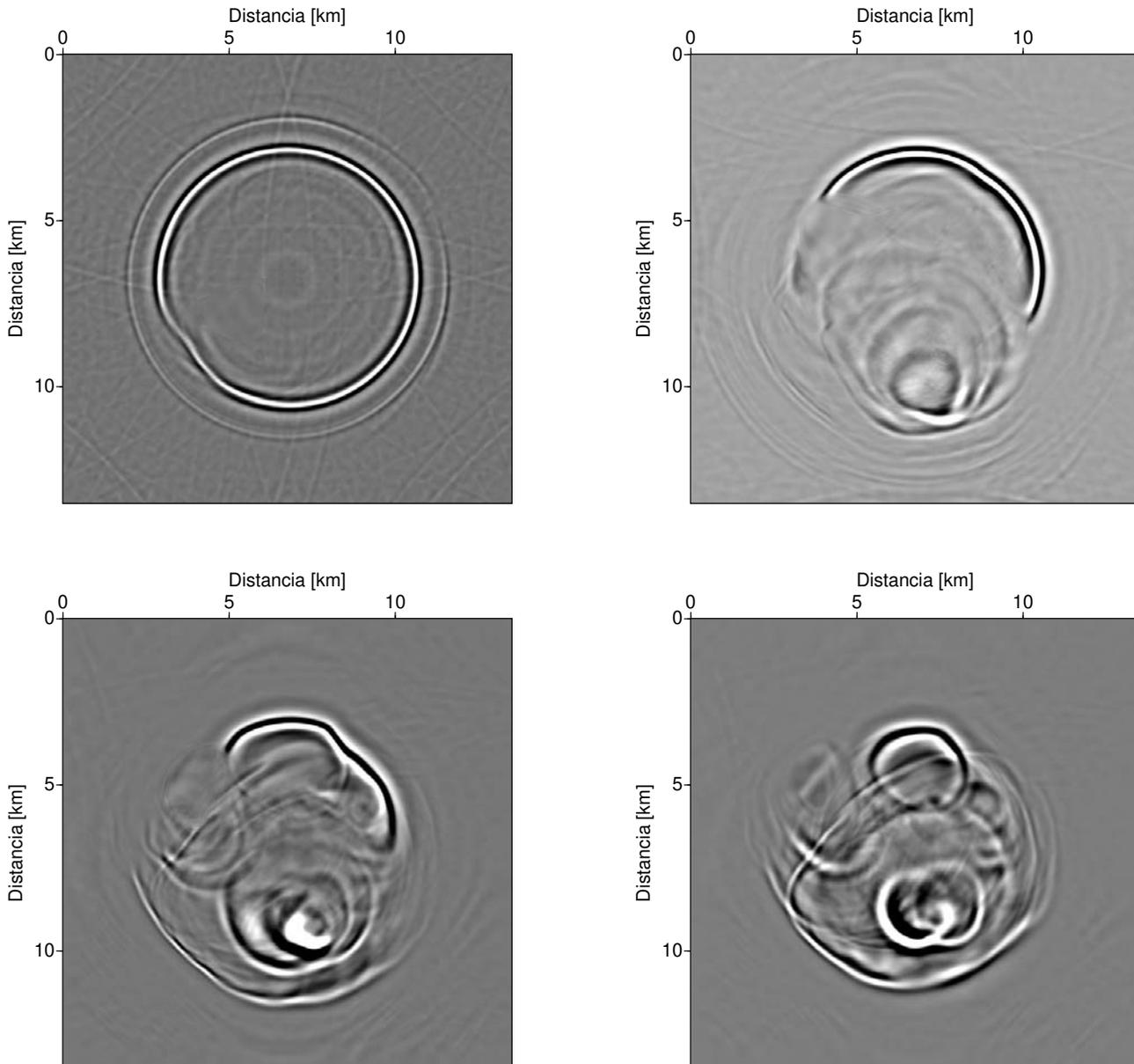


Figura 5.66: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes horizontais.

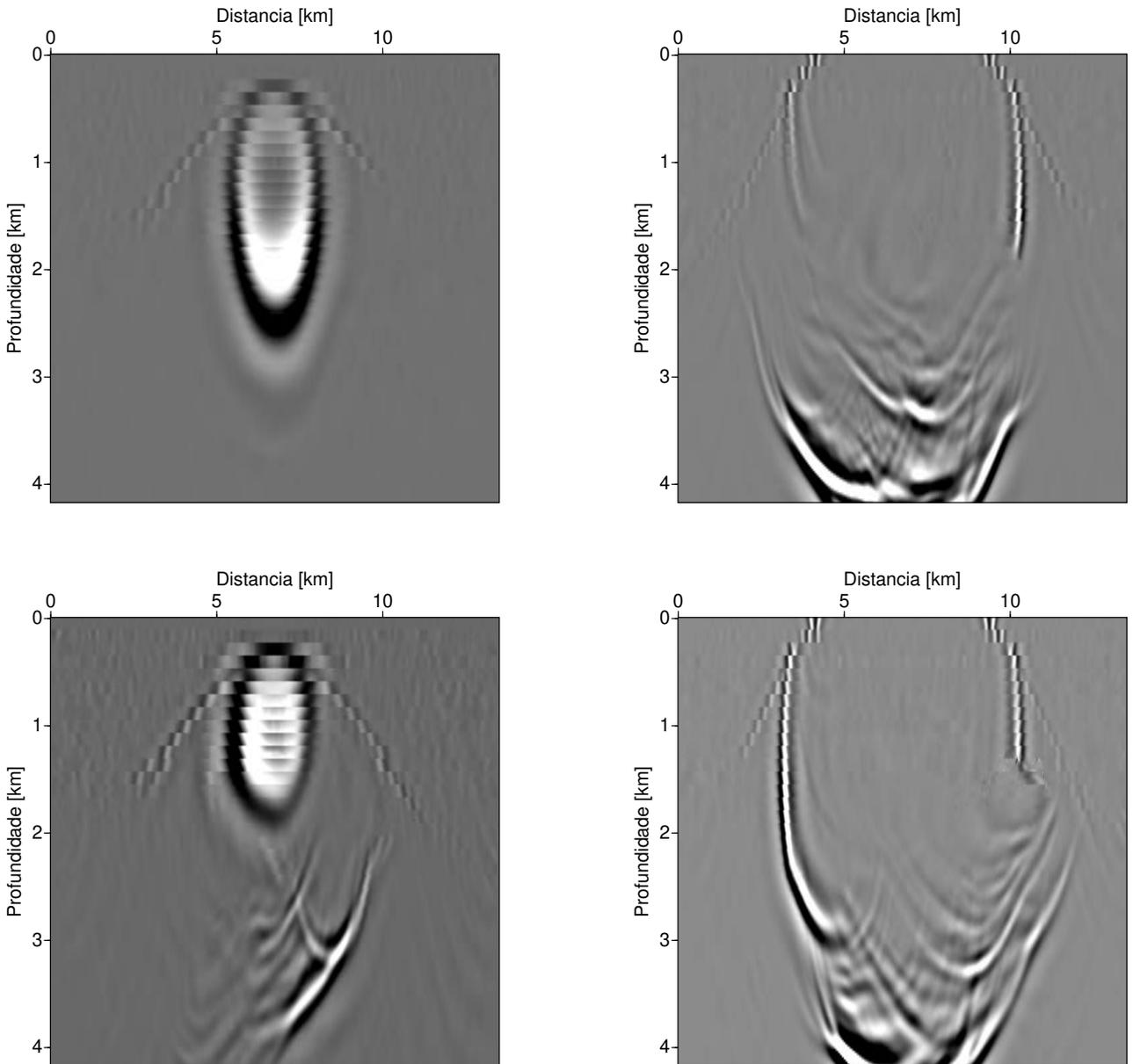


Figura 5.67: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes verticais.

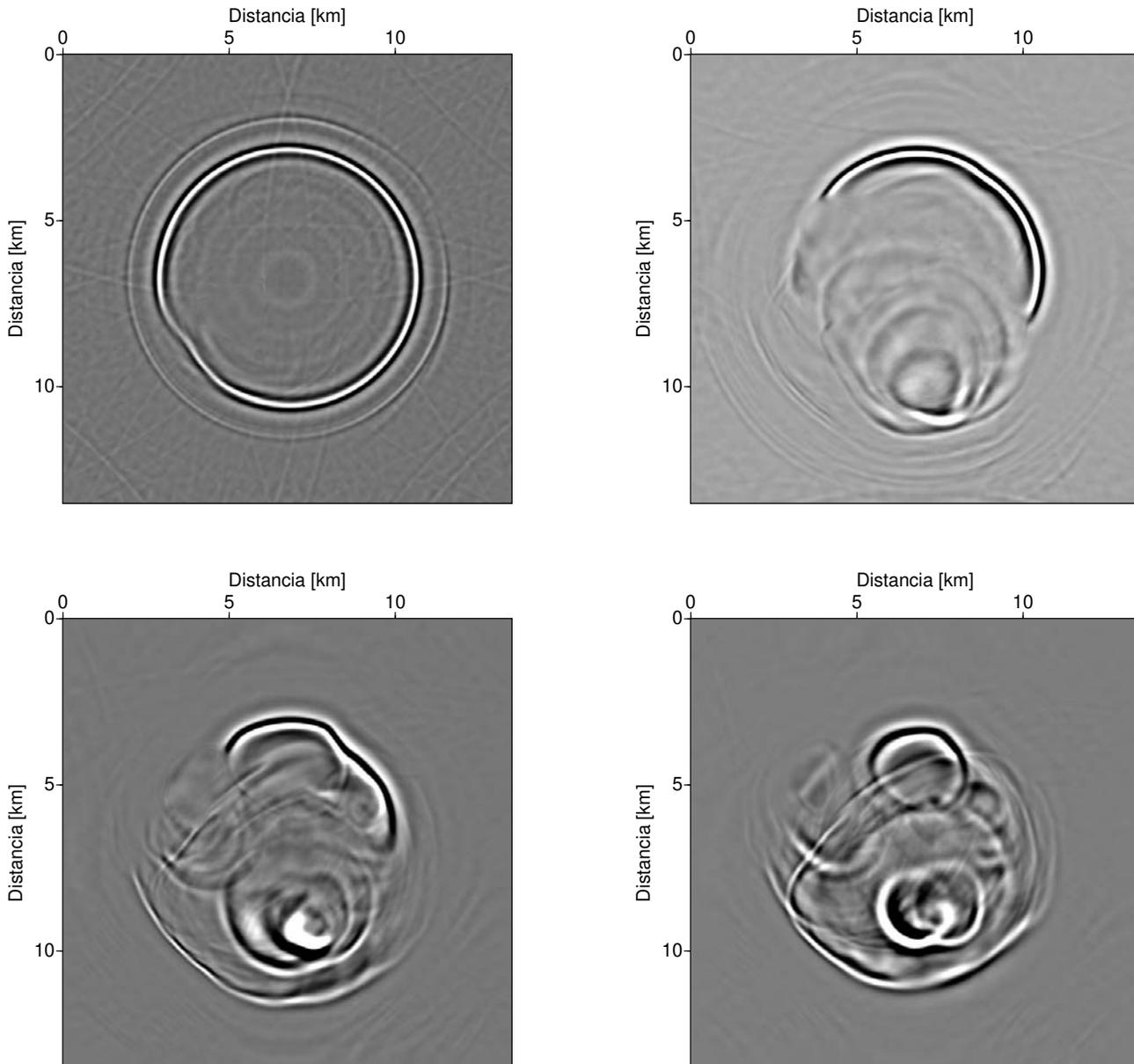


Figura 5.68: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 2 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes horizontais.

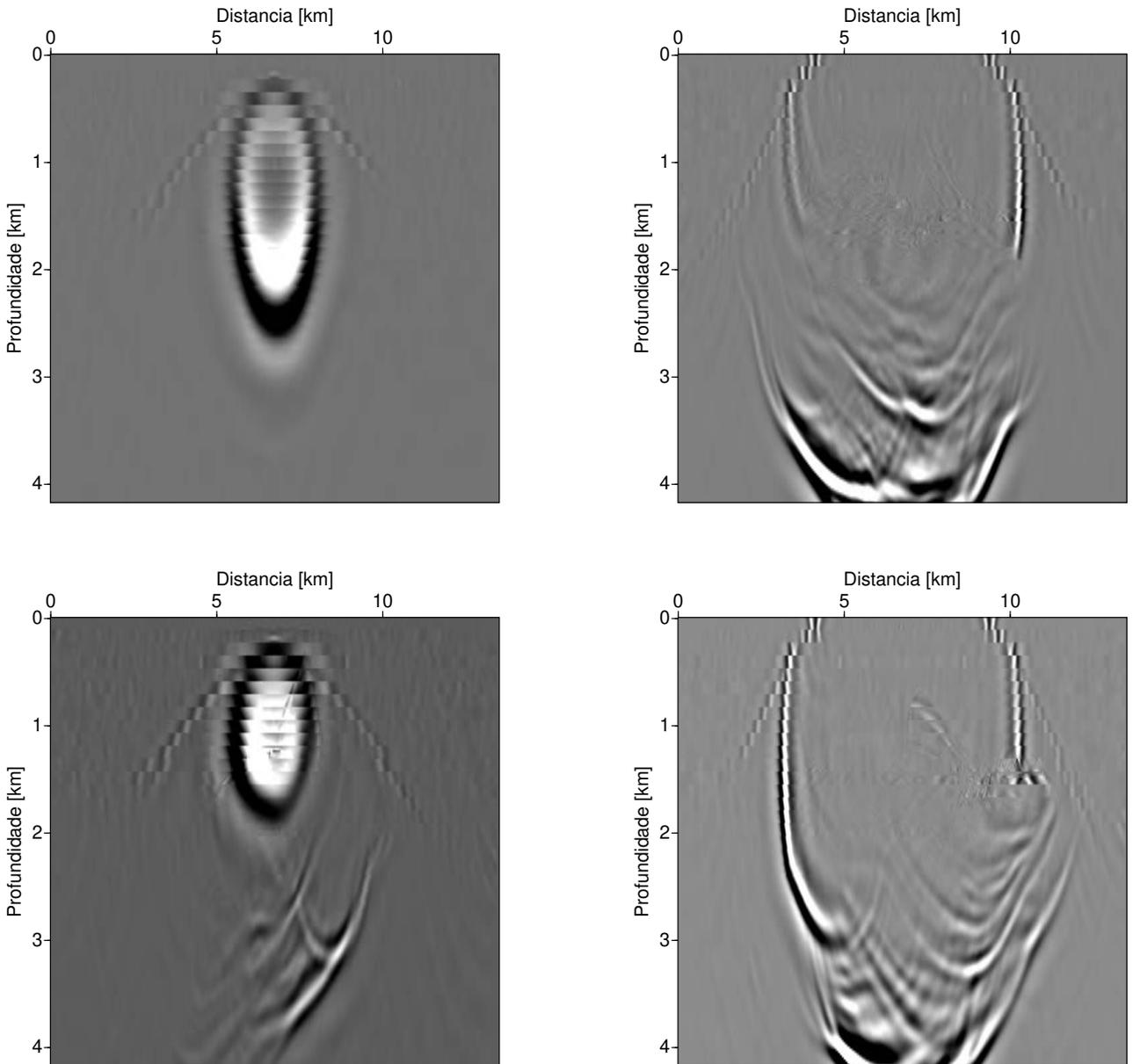


Figura 5.69: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 5° . Representação por cortes verticais.

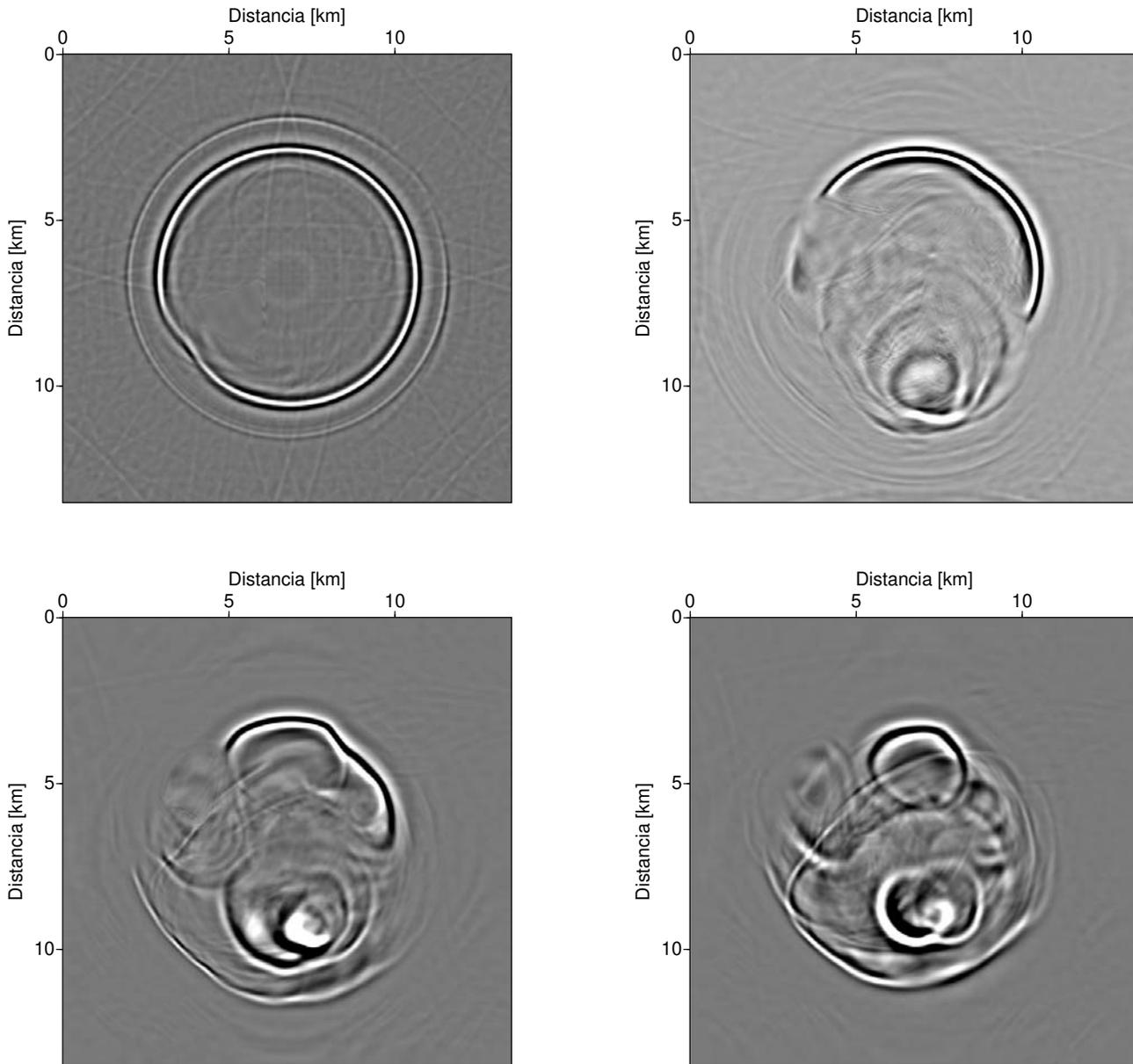


Figura 5.70: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 5° . Representação por cortes horizontais.

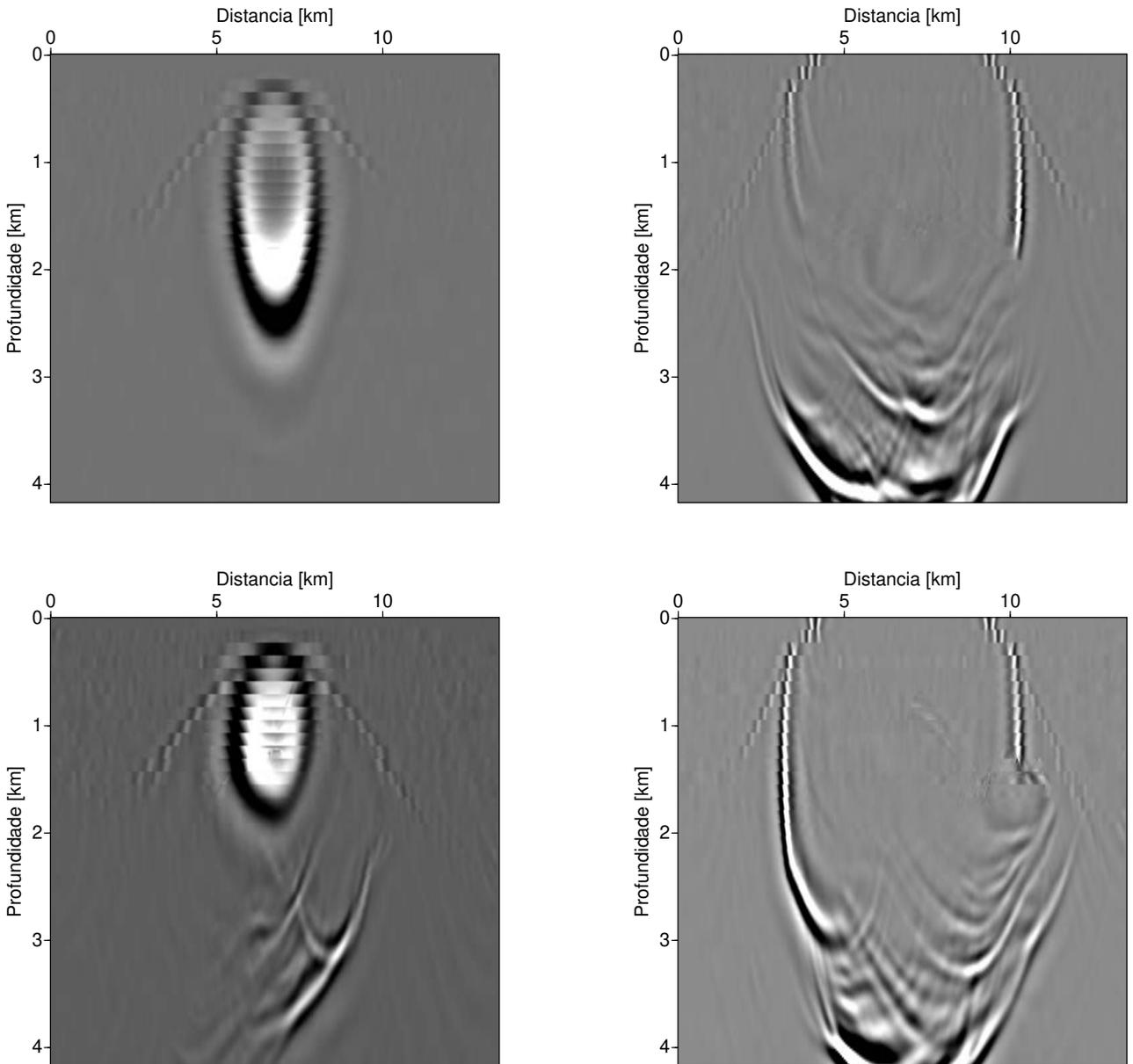


Figura 5.71: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes verticais.

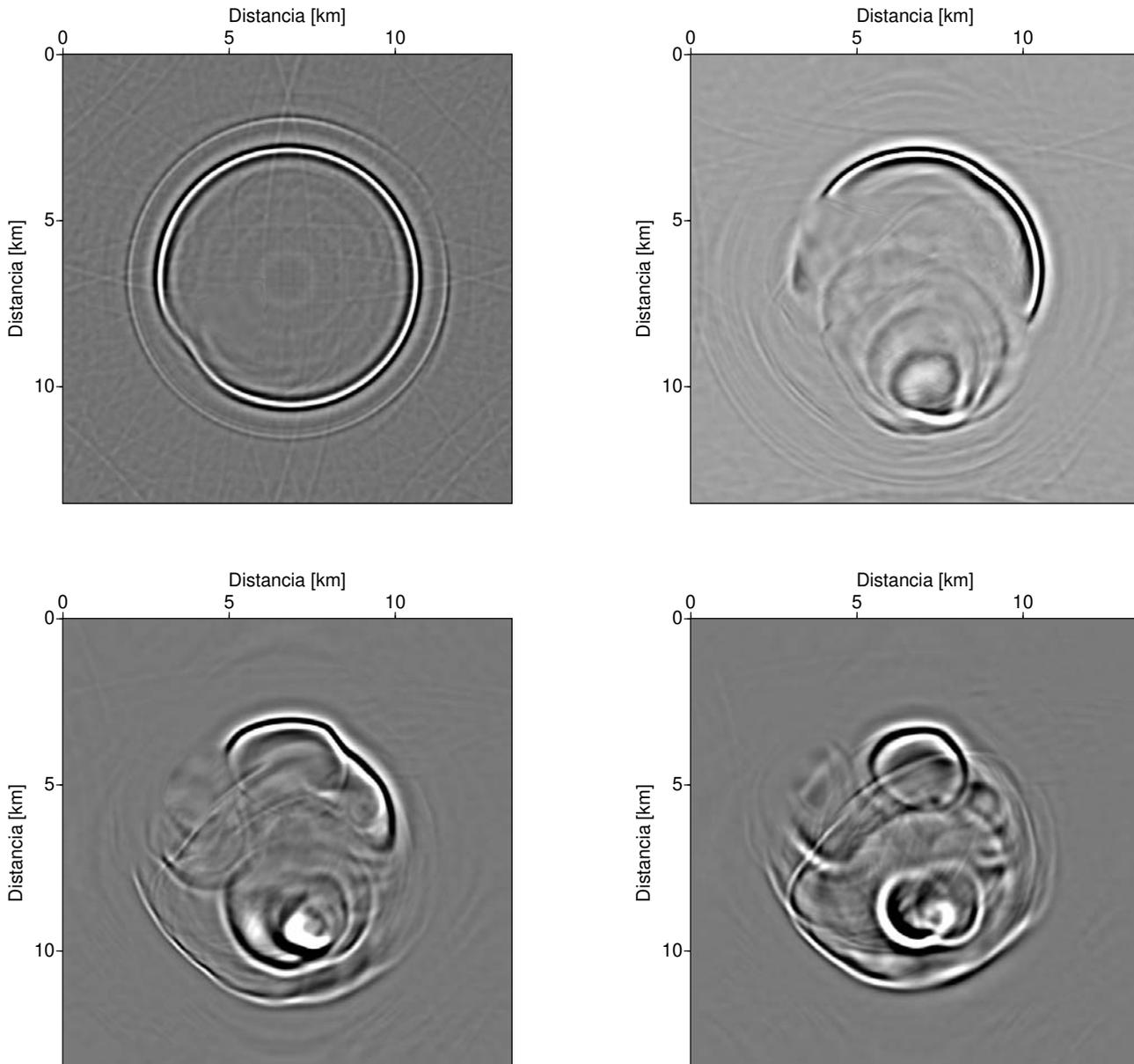


Figura 5.72: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 15° . Representação por cortes horizontais.

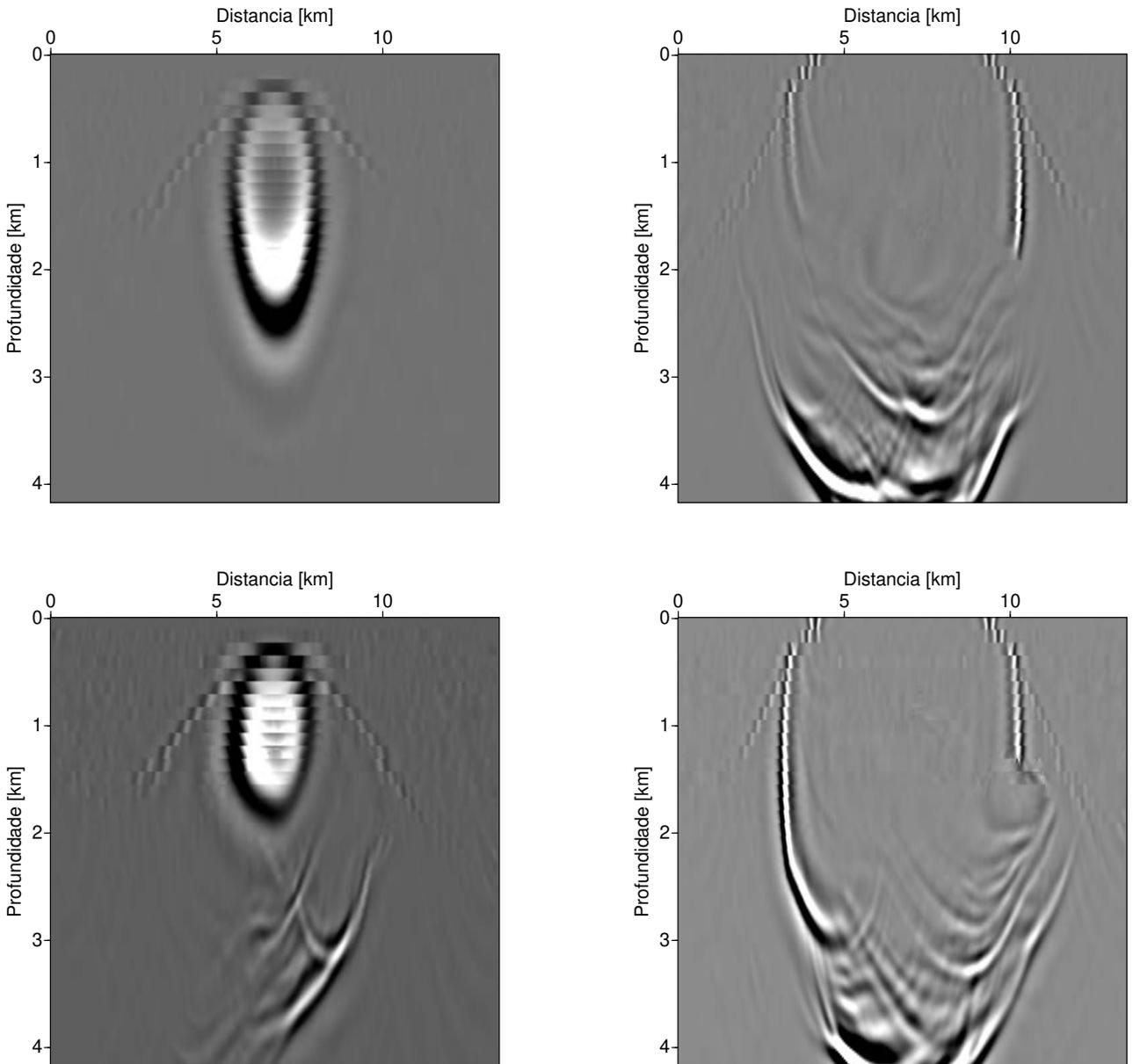


Figura 5.73: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes verticais.

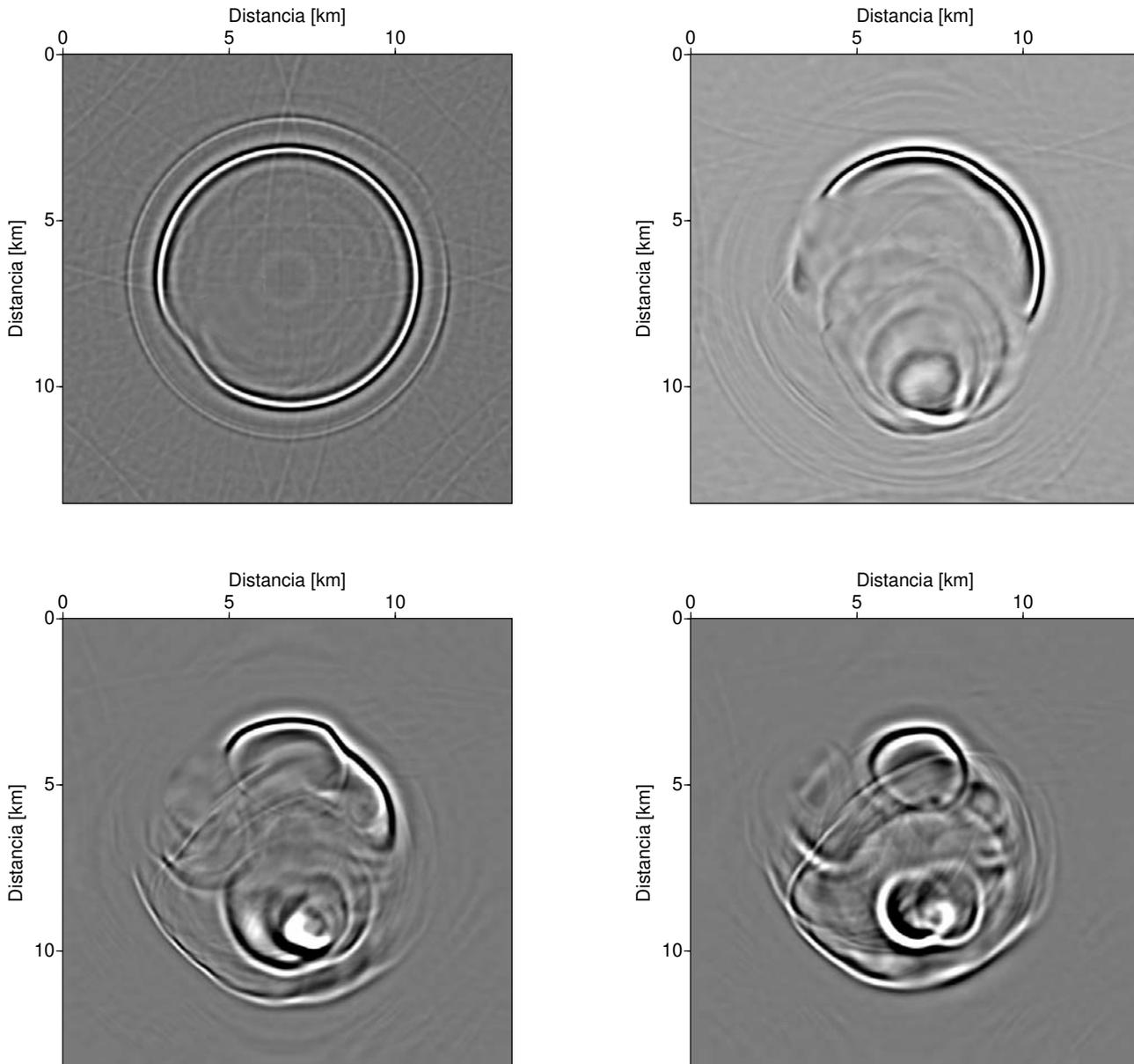


Figura 5.74: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 25° . Representação por cortes horizontais.

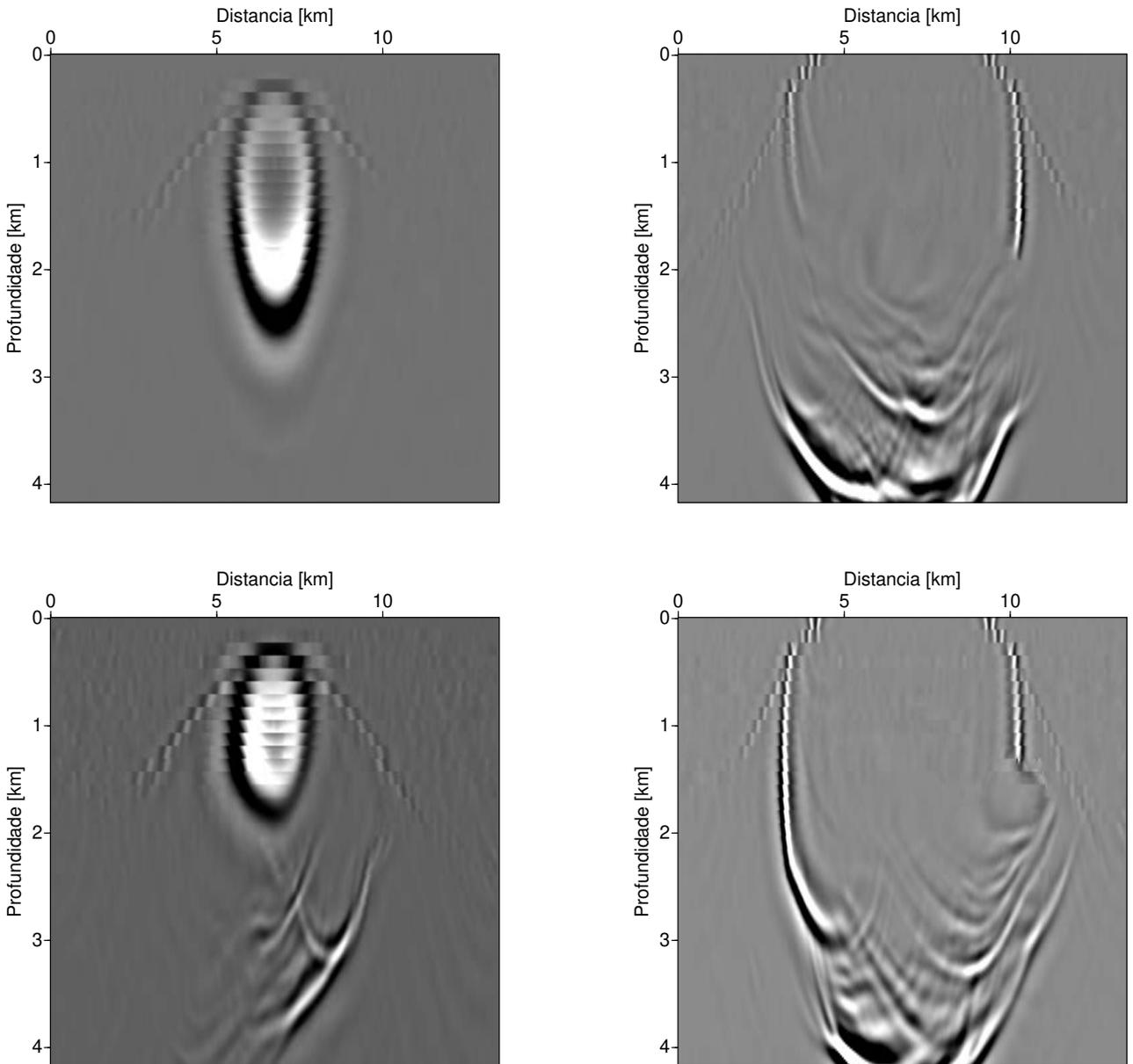


Figura 5.75: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 45° . Representação por cortes verticais.

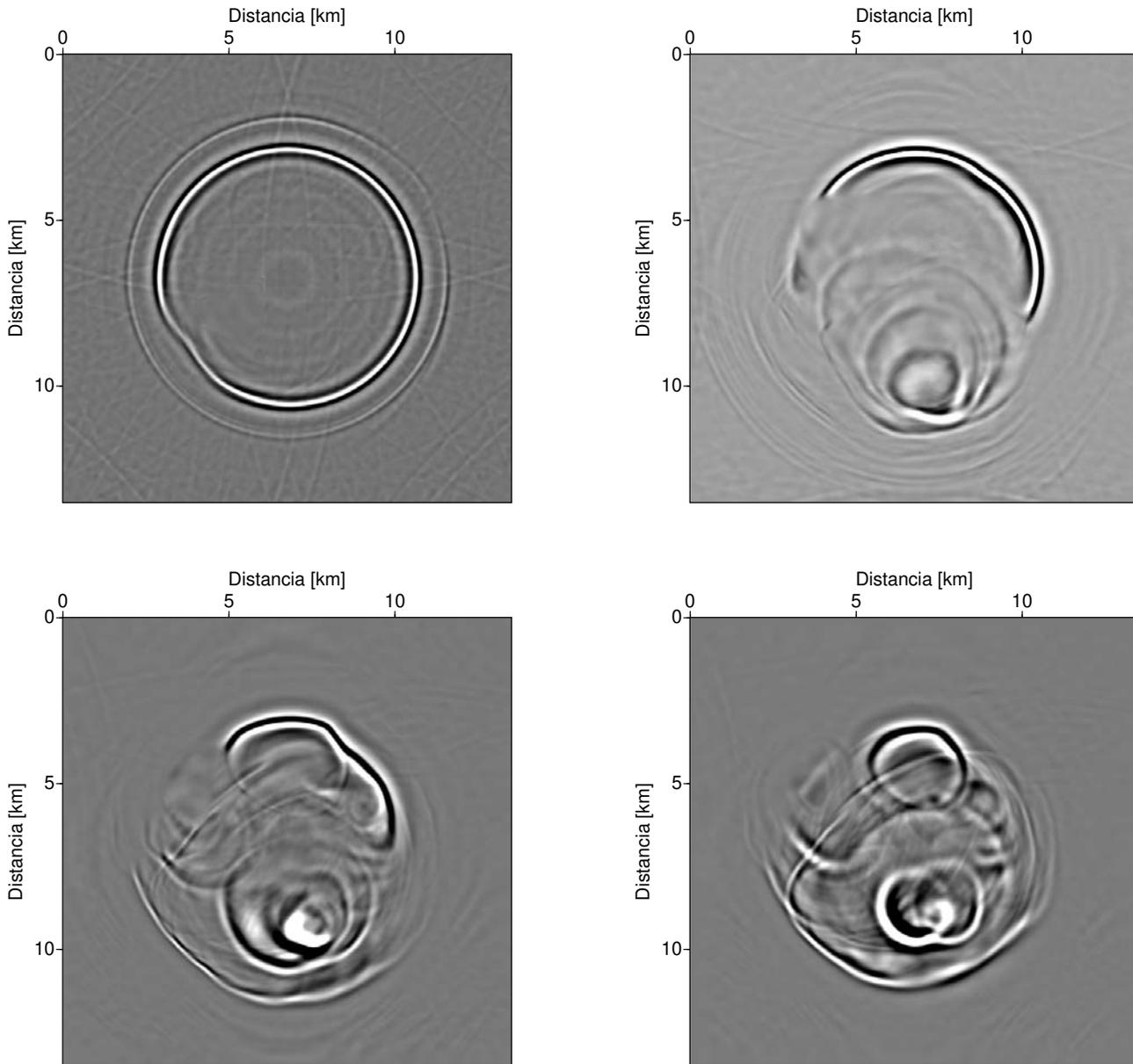


Figura 5.76: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em duas direções, com correção de Li no sal da EAGE/SEG, 3 termo da série de Padé e ângulo de rotação de 45° . Representação por cortes horizontais.

5.2.8 *Splitting* em 4 direções

Neste conjunto de testes queremos verificar o resultado quando usamos o *splitting* em quatro direções alternadas. Como estamos aplicando o *splitting* também nas diagonais, esperamos que o problema de anisotropia seja melhorado. Para corrigir o restante da anisotropia numérica também testamos aplicar a correção de Li com essa forma de *splitting*. Aqui usamos a série de Padé complexa com 3 termos, a velocidade média é calculada usando a média da vagarosidade e a interpolação dos campos é feita usando a velocidade média.

Mostramos os mesmos cortes da resposta impulso como antes. As Figuras 5.77 e 5.78 são obtidas usando o *splitting* em quatro direções alternadas sem correção de Li, e as Figuras 5.79 e 5.80 usando o *splitting* em quatro direções alternadas com correção de Li. Comparando as Figuras 5.77 e 5.78 com as correspondentes obtidas com *splitting* em duas direções (Figuras 5.27 e 5.28) sem correção de Li, observamos que as localizações dos eventos são melhores. Porém, pelo formato octogonal do evento no corte mais raso da Figura 5.78, vemos que apenas o *splitting* em quatro direções alternadas não resolve o problema de anisotropia numérica. Sendo assim, faz-se necessário uma correção de Li.

Sabendo que a diferenças entre os cortes verticais nas Figuras 5.77 e 5.79 é aplicar ou não a correção de Li, podemos ver claramente que esta correção reposiciona os eventos corretamente, mas novamente gera os artefatos de migração já conhecidos ("dentes").

Notamos que o *splitting* em quatro direções alternadas melhora o posicionamento dos eventos em comparação ao *splitting* em somente duas direções (compare Figuras 5.77 e 5.78 com Figuras 5.29 e 5.30). Porém notamos que no corte mais raso, para altos ângulos de propagação, efeitos de anisotropia numérica continuam visíveis. O formato do evento deixa de apresentar um formato de losango, mas assemelha-se a um octógono. Outros erros de posicionamento remanescentes ficam evidentes ao comparas as Figuras 5.77 e 5.78 com as correspondentes figuras do método FFDPI (Figuras 5.25 e 5.26). Portanto, concluímos que mesmo com o *splitting* alternado em quatro direções, ainda necessitamos de uma correção de Li para melhorar a precisão do posicionamento. As Figuras 5.79 e 5.80 mostram estes resultados após a correção de Li.

A comparação com as Figuras 5.29 e 5.30, obtidas usando *splitting* bidirecional com correção de Li, mostra que apesar do melhor posicionamento do *splitting* em 4 direções alternadas, a correção de Li do *splitting* bidirecional alcança a mesma qualidade. Figuras 5.29 e 5.30 são virtualmente idênticas às Figuras 5.79 e 5.80.

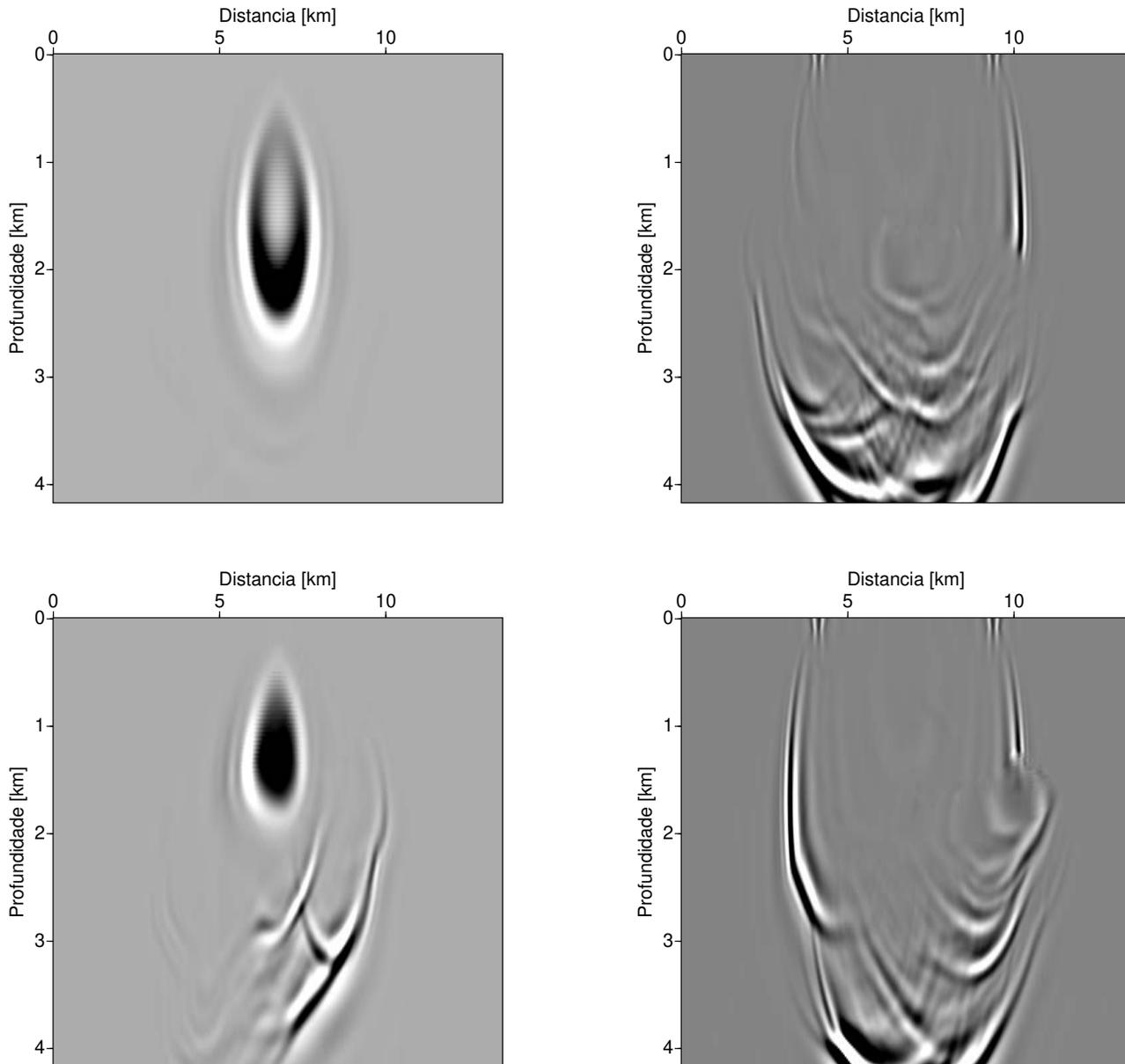


Figura 5.77: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

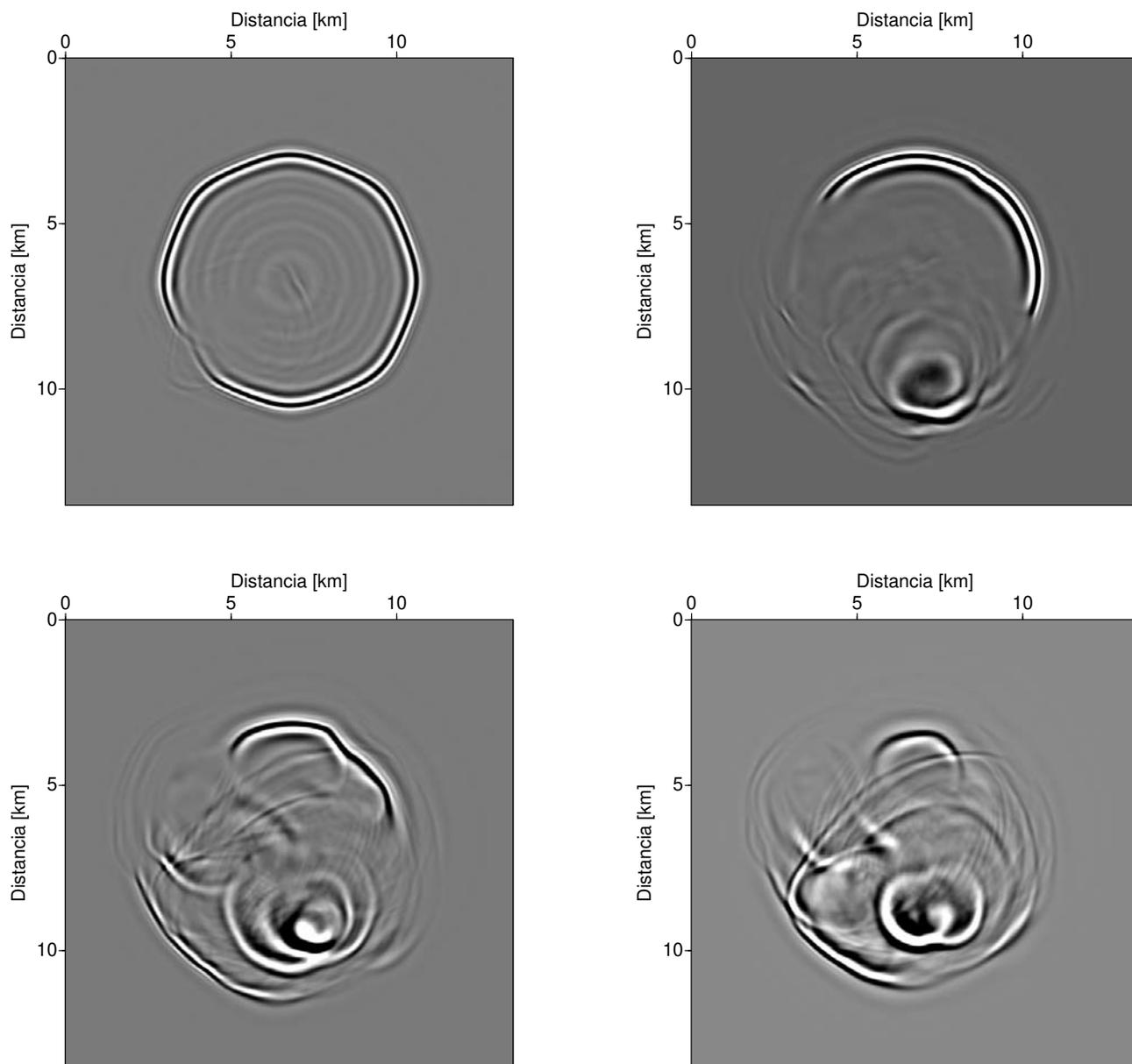


Figura 5.78: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas sem correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

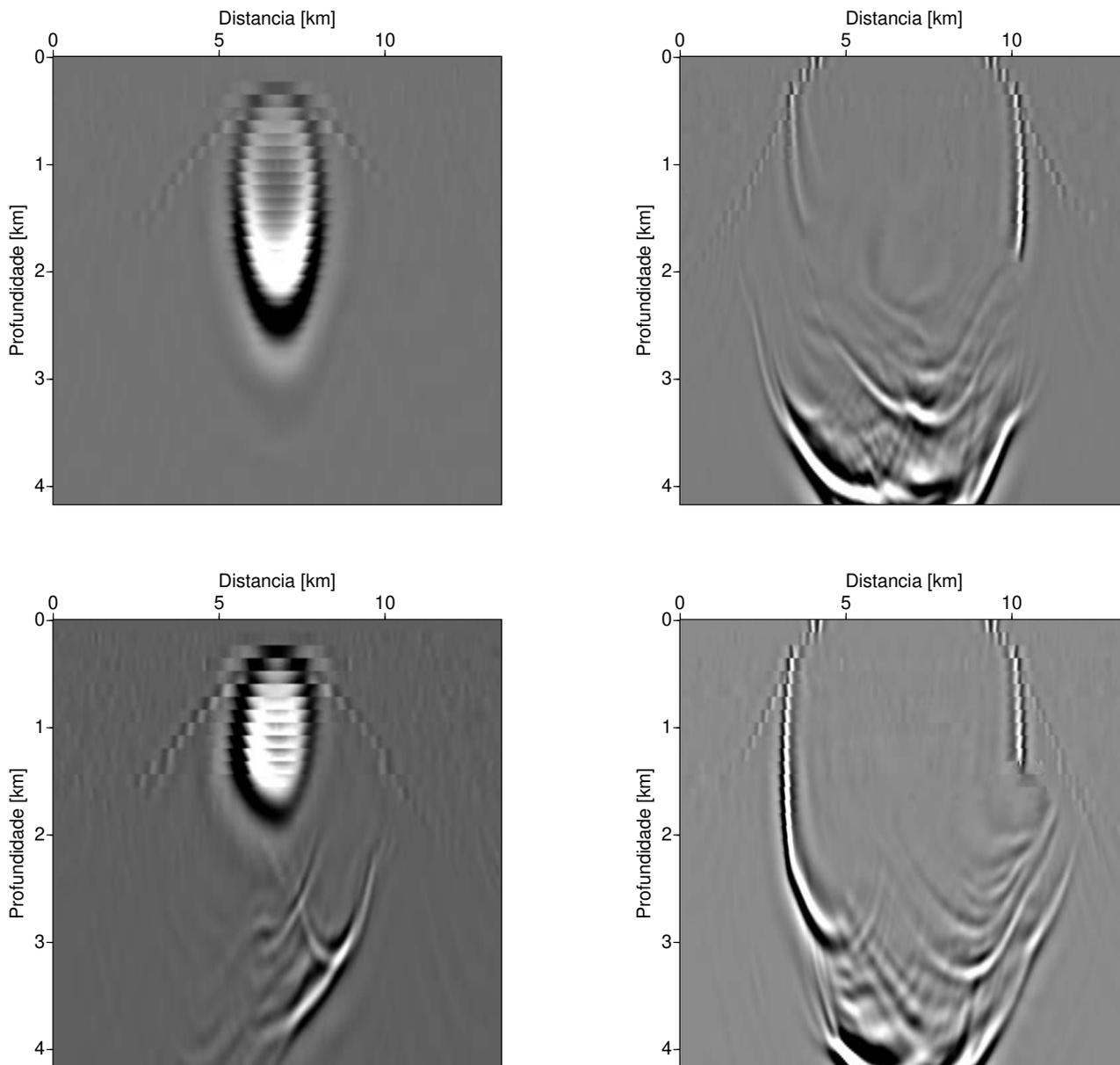


Figura 5.79: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes verticais.

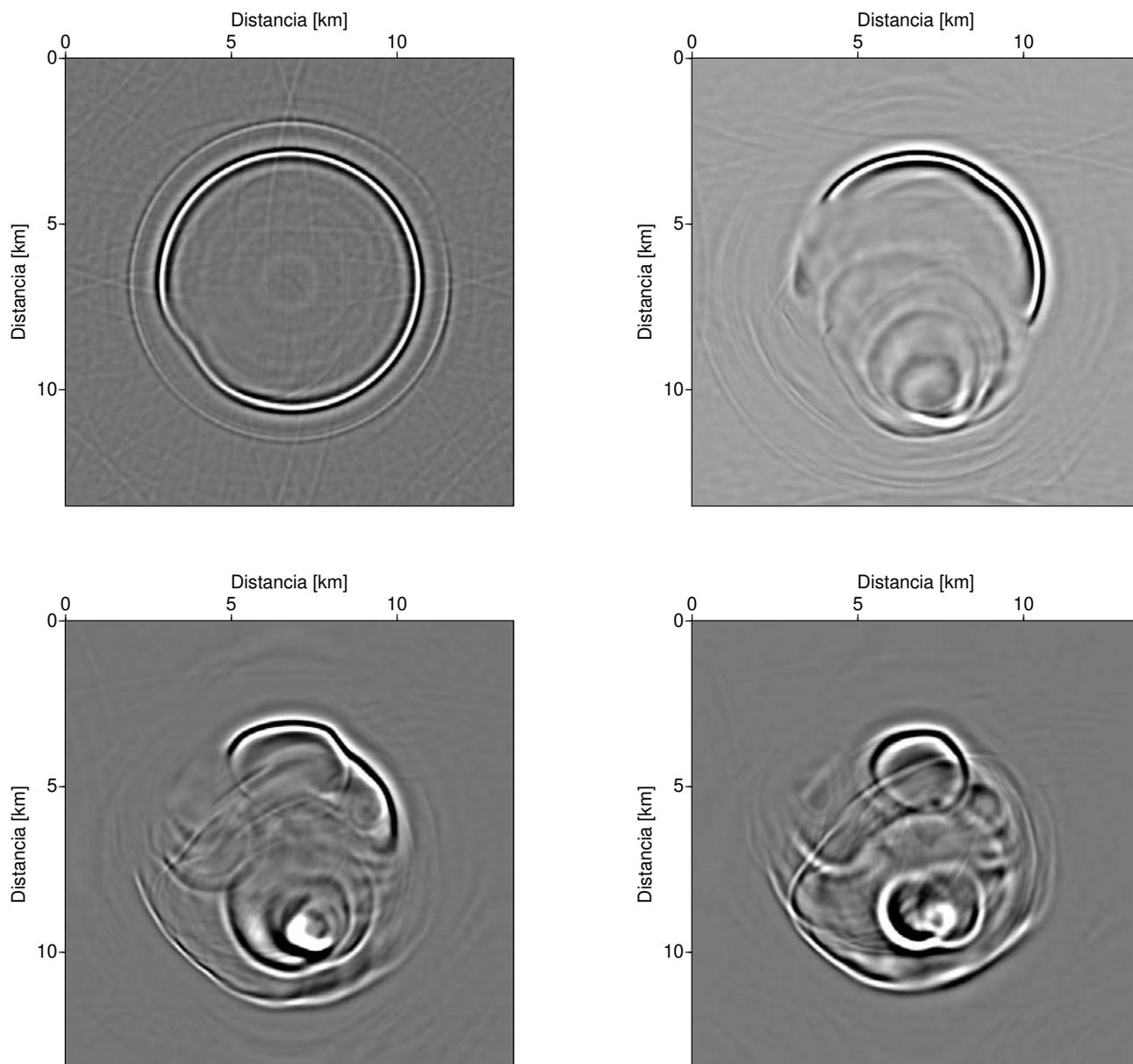


Figura 5.80: Resposta impulso obtida por migração FD com *splitting* em quatro direções alternadas com correção de Li no sal da EAGE/SEG. Representação por cortes horizontais.

5.2.9 Discussão dos resultados

Comparando as figuras acima, vemos em geral muita semelhança. Assim como nos testes do meio homogêneo, considerando todos os testes feitos para o meio não homogêneo, podemos concluir que os melhores parâmetros são 3 termos da série de Padé complexa com ângulo de rotação de 45° , calcular a velocidade média usando a vagarosidade e interpolar os campos usando a velocidade média. O *splitting* em duas direções e em quatro direções alternadas têm o mesmo custo computacional. Por isso, dadas as óbvias vantagens do último quanto ao seu comportamento respectivo á anisotropia numérica, consideramos que este procedimento deve ser adotado como padrão. Quando a anisotropia numérica remanescente ficar além do nível tolerado, ainda pode-se aplicar uma correção de Li para melhorar o seu desempenho. E finalmente, aplicar o termo de correção de Li para *splitting* em duas direções é absolutamente necessário, pois apesar de introduzir artefatos de migração, estes estão presentes apenas nos cortes mais rasos. Nos cortes mais profundos, além de não haver artefatos, o formato circular é completamente recuperado, acabando com o problema de anisotropia numérica.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação comparamos diversas formas implementacionais da migração de diferenças finitas (FD) em três dimensões usando a aproximação de Padé complexa.

A partir dos testes numéricos, podemos concluir que as técnicas de migração FD em que aplicamos a correção de Li (1991) mostraram uma ótima recuperação do formato circular, porém ainda apresentaram erros de fase e surgiram artefatos de migração.

Comparando o desempenho das aproximações de Padé real e complexa, chegamos às seguintes conclusões: a expansão em série de Padé real mostrou um resultado semelhante ao obtido quando usamos a aproximação complexa, tanto no meio homogêneo quanto no modelo de sal. A série de Padé complexa, apesar de mais cara do que a série de Padé real permite que usemos apenas 2 termos ao invés de 3, reduzindo portanto o número de sistemas lineares a resolver, diminuindo o custo computacional. Quanto menos termos da série são usados, seja ela real ou complexa, mais pobre é nossa aproximação e portanto pior é a imagem migrada. Porém, para meios com grande variação de velocidade, como é o caso do modelo de sal SEG/EAGE, os resultados mostraram um desempenho superior da aproximação complexa. Utilizar menos termos da série de Padé complexa afeta o resultado final de forma negativa se o ângulo de rotação não for variado. Essa variação deve obedecer a seguinte regra, quanto menos termos da série são usados menor deve ser o ângulo de rotação.

Em uma outra série de teste de testes, comparamos os resultados usando diversas formas de calcular as velocidades de referência e os pesos da interpolação. Observamos que calcular a velocidade média usando a vagarosidade fornece o melhor resultado em comparação com as outras possibilidades de se encontrar essa velocidade média. A quantidade de artefatos que aparecem quando usamos a velocidade média para calcular os pesos antes de realizar a interpolação é menor e têm amplitude menor também.

A aplicação do *splitting* em mais de duas direções é útil para reduzir a anisotropia numérica, mas é custoso. Além disso, para as diagonais, efeitos de mascaramento (*alia-*

sing) podem surgir pelo fato do intervalo da malha ficar um fator $\sqrt{2}$ maior. Outras direções fora dos eixos e das diagonais complicam ainda mais o problema pois demandam reamostragem. Uma maneira de reduzir o custo do *splitting* em quatro direções é a aplicação deste em direções alternadas, nos eixos e nas diagonais. Esta aplicação alternada tem o mesmo custo do *splitting* em duas direções, mas apresenta uma qualidade bastante elevada. Os resultados numéricos em quatro direções apresentados nesta dissertação utilizam exclusivamente esta aplicação alternada, e mostram que as imagens obtidas usando o *splitting* em 4 direções alternadas é mais eficiente pois destaca eventos que foram suavizados pelo *splitting* em duas direções.

Quando o meio tiver mergulhos moderados, baseado nos testes realizados com o método FD, o uso dessa técnica de migração com aproximação em série de Padé complexa do operador raiz quadrada fornece um resultado com qualidade aceitável. O *splitting* em duas ou quatro direções alternadas fica a critério do usuário, porém o termo de correção de Li não deve ser esquecido. Apesar da introdução de artefatos de migração, ele mantém o formato circular. Porém, apesar da melhor qualidade do *splitting* em 4 direções alternadas em comparação ao *splitting* bidirecional, o resultado após correção de Li fica indistinguível.

Referências Bibliográficas

- Aguilera-Navarro, M. C. K. e Aguilera-Navarro, V. C., R. C. Ferreira, and N. Teramon (1999). Os aproximantes de Padé. *Matemática universitária* 26/27, 49–66.
- Amazonas, D. e Costa, J., J. Schleicher, and R. Pestana (2007). Wide angle FD and FFD migration using complex Padé approximations. *Geophysics* 72(6), S215–S220.
- Bamberger, A. e Engquist, B., L. Halpern, and P. Joly (1988). Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. *J. Appl. Math.* 48, 129–154.
- Biondi, B. (2002). Stable wide-angle Fourier finite-difference downward extrapolation of 3-D wavefields. *Geophysics* 67(3), 872–882.
- Claerbout, J. F. (1985). *Imaging the Earth's Interior*. Boston: Blackwell Scientific Publications, Inc.
- Clapp, R. G. (2004). Reference velocity selection by a generalized Lloyd method. *SEG, Expanded Abstracts* 23(1), 981–984.
- Collino, F. and P. Joly (1995). Splitting of operators, alternate directions and paraxial approximation of the 3D wave equation. *SIAM Journal on Scientific Computing* 16, 1019–1048.
- Crank, J. and P. Nicolson (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50–67.
- Diet, J. P. (1984). A review of the three-dimensional migration theory and the laterally inhomogeneous case. *SEG, Expanded Abstracts* 3(1), 447–449.
- Douglas, J. (1962). Alternating direction methods for three space variables. *Numerische Mathematik* 4, 41–63.

- Etgen, J. e Gray, S. H. and Y. Zhang (2009). An overview of depth imaging in exploration geophysics. *Geophysics* 74(6), WCA5–WCA17.
- Gazdag, J. (1978). Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics* 73, 1342–1351.
- Gazdag, J. (1980). Wave equation migration with the accurate space derivative method. *Geophysical Prospect* 28(01), 60–70.
- Gazdag, J. and P. Sguazzero (1984). Interval velocity analysis by wave extrapolation. *Geophysical Prospect* 32(03), 454–479.
- Godfrey, R. J. e Muir, F. and J. F. Claerbout (1979). Stable extrapolation. *Stanford Exploration Project Report SEP-16*, 83–87.
- Graves, R. W. and R. W. Clayton (1990). Modeling acoustic waves with paraxial extrapolators. *Geophysics* 55, 306–319.
- Han, B. (1998). A comparison of four depth-migration methods. *SEG, Expanded Abstracts* 17(1), 1104–1107.
- Jacobs, B. and F. Muir (1981). Convergence of the continued fractions for the square root function. *Stanford exploration project report* 26, 183–196.
- Kessinger, W. (1992). Extended split-step Fourier migration. *SEG, Expanded Abstracts* 11(1), 917–920.
- Kitchenside, P. (1988). Steep dip 3-D migration: Some issues and examples. In *58th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pp. 976–978.
- Lee, M. and S. Suh (1985). Optimization of one-way equation. *Geophysics* 50, 1634–1637.
- Leontovich, M. A. and V. A. Fock (1946). Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth’s surface by the method of parabolic equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 16, 557–573.
- Li, Z. (1991). Compensating finite-difference errors in 3-D migration and modeling. *Geophysics* 56(10), 1650–1660.
- Lloyd, S. P. (1982). Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory* 28, 127–135.

- Loewenthal, D. e Roberson, R., J. Sherwood, and L. Lu (1976). The wave equation applied to migration. *Geophysical Prospecting* 24, 380–399.
- Ma, Z. (1982). Finite-difference migration with higher-order approximation. *Geophysical Prospecting* 17, 6–15.
- Millinazzo, F. A., C. A. Zala, and G. H. Brooke (1997). Square-root approximations for parabolic equation algorithms. *Journal of the Acoustical Society of America* 101(2), 760–766.
- Mitchell, A. R. and D. F. Griffiths (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. Wiley.
- Olds, C. D. (1963). *Continued fractions*, Volume 9. New York: Mathematical Association of America.
- Ristow, D. (1980). *3-D downward extrapolation of seismic data in particular by finite difference method*. Ph. D. thesis, University of Utrecht.
- Ristow, D. and T. Rühl (1994). Fourier finite-difference migration. *Geophysics* 59(12), 1882–1893.
- Ristow, D. and T. Rühl (1997). 3D implicit finite-difference migration by multiway splitting. *Geophysics* 62, 554–567.
- Rühl, T. and D. Ristow (1995). Fourier FD migration: The missing link between phase-shift and FD migration. *SEG, Expanded Abstracts* 14(1), 1232–1235.
- Sava, P. and S. J. Hill (2009). Overview and classification of wavefield seismic imaging methods. *The Leading Edge* 28(2), 170–183.
- Stoffa, P. L. e Fokkema, J. T., R. M. de Luna Freire, and W. P. Kessinger (1990). Split-step Fourier migration. *Geophysics* 55, 410–421.
- Wachspress, E. L. and G. J. Harbetler (1960). An alternating-direction-implicit iteration technique. *SIAM Journal* 8, 403–424.
- Wang, Y. (2001). ADI plus interpolation: Accurate finite-difference solution to 3D paraxial wave equation. *Geophysical Prospecting* 49, 547–556.
- Xie, X. R. and R. S. Wu (1998). Improve the wide angle accuracy of screen method under large contrast. pp. 1811–1814.

Yevick, D. and D. J. Thomson (2000). Complex Padé approximants for wide-angle acoustic propagators. *J. Acoust. Soc. Am.* 108(6), 2784–2790.

Zhang, L. e Rector, J. W. and G. M. Hoversten (2003). Split-step complex Padé migration. *Journal of Seismic Exploration* 12, 229–236.

Zhang, G. Q. e Zhang, S. L., Y. X. Wang, and C. Y. Liu (1988). A new algorithm for finite-difference migration of steep dips. *Geophysics* 53, 167–175.

Zhou, H. and G. A. McMechan (1997). One-pass 3-d seismic extrapolation with the 45° wave equation. *Geophysics* 62, 1817–1824.

Apêndice A

Aproximação do operador raiz quadrada em série de Padé complexa

Usando a equação (2.20) para aproximar a raiz quadrada da equação (2.21), temos

$$\begin{aligned} R_{\alpha,N}(Z) &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n[(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}{1 + b_n[(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]} \right\} \\ &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1) + b_n e^{-i\alpha} Z} \right\} \\ &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] \left[1 + \frac{b_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação da equação anterior, podemos definir

$$B_n = \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}.$$

Substituindo na equação entre chaves, temos

$$\begin{aligned} R_{\alpha,N}(Z) &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\} \\ &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\}. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo um termo $\sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}$, podemos escrever

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} - \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\}.$$

Agora, definimos

$$C_0 = e^{\frac{-i\alpha}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right].$$

Daí,

$$\begin{aligned} R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + e^{\frac{i\alpha}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \{1 - [1 + B_n Z]\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \right\} \\ &= C_0 + e^{\frac{i\alpha}{2}} \sum_{n=1}^N \{ -a_n B_n (e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} \} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de B_n na expressão entre chaves, tem-se

$$\begin{aligned} R_{\alpha,N}(Z) &= C_0 + e^{\frac{i\alpha}{2}} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{-a_n b_n e^{-i\alpha} (e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} [1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)]}{1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)} \right\} \\ &\quad \frac{Z}{[1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \\ &= C_0 + e^{\frac{i\alpha}{2}} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)][1 + B_n Z]} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{\frac{-i\alpha}{2}}}{[1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)]^2} \right\} \frac{Z}{[1 + B_n Z]}. \end{aligned}$$

Finalmente, definimos

$$A_n = \frac{a_n e^{\frac{-i\alpha}{2}}}{[1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1)]^2}.$$

Dessa forma, a aproximação para a raiz quadrada usando coeficientes complexos é dada

por

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z},$$

ou seja,

$$\sqrt{1+Z} \approx C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z},$$

onde

$$C_0 = e^{\frac{i\alpha}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right],$$

$$A_n = \frac{a_n e^{\frac{-i\alpha}{2}}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \quad \text{e} \quad B_n = \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}.$$

Apêndice B

Derivação do operador de continuação para baixo do método FFD

A partir da equação da onda unidirecional no domínio frequência e número de onda k_x e k_y dada por

$$\frac{\partial P(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 - \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)} P(k_x, k_y, z, \omega) ,$$

se a velocidade é constante ($v(\mathbf{x}) = v$) ou varia somente com a profundidade ($v(\mathbf{x}) = v(z)$), a solução da equação acima pode ser escrita como

$$P(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = \exp \left(i\Delta z \sqrt{1 - \frac{v^2(\mathbf{x})}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)} \right) P(k_x, k_y, z, \omega) . \quad (\text{B.1})$$

Se a variação lateral da velocidade for muito fraca, podemos trabalhar com uma velocidade constante de referência v_r e ainda aplicar o operador (B.1). Porém, quanto maior a variação lateral da velocidade $v(\mathbf{x})$, tanto maior será o erro desta abordagem. Este erro ou função diferença d entre os operadores raiz quadrada é escrito como

$$d = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 - \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2)} - \frac{(-i\omega)}{v_r} \sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{\omega} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2)} , \quad (\text{B.2})$$

onde $v(\mathbf{x})$ é o campo de velocidade e v_r é o campo de velocidade constante. Para futuras aproximações, devemos considerar

$$v_r \leq v(\mathbf{x}) \quad \text{em} \quad (z, z + \Delta z)$$

e ainda, estamos considerando a notação simplificada

$$X^2 = \left(\frac{v(\mathbf{x})}{\omega} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2) \quad \text{e} \quad Y^2 = \left(\frac{v_r}{\omega} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2) = p^2 X^2 ,$$

onde

$$p = \frac{v_r}{v(\mathbf{x})} .$$

A expansão em série de Taylor de ambas as raízes quadradas na equação (B.2) nos leva a

$$\frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \sqrt{1 - X^2} = \frac{(-i\omega)}{v(\mathbf{x})} \left[1 - \frac{1}{2} X^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} X^{2n} \right] \quad (\text{B.3})$$

com $m = \frac{1}{2}$, e

$$\frac{(-i\omega)}{v_r} \sqrt{1 - Y^2} = \frac{(-i\omega)}{v_r} \left[1 - \frac{1}{2} Y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} Y^{2n} \right] \quad (\text{B.4})$$

com $m = \frac{1}{2}$, onde

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

é o coeficiente binomial para todo número real m e todo inteiro n .

Subtraindo as equações (B.3) e (B.4) e reorganizando os termos, obtemos

$$d = \frac{(-i\omega)}{v_r} (p-1) - \frac{1}{2} X^2 \frac{(-i\omega)}{v_r} p(1-p) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} X^{2n} \frac{(-i\omega)}{v_r} p(1-p^{2n-1}) . \quad (\text{B.5})$$

Agora, fatorando os termos $(1 - p^{2n-1})$ para $n = 2, 3, \dots$ na equação acima, obtemos

$$(1 - p^{2n-1}) = (1 - p) \delta_n ,$$

onde

$$\delta_n = \sum_{l=0}^{2n-2} p^l . \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a equação (B.6) na equação (B.5) temos

$$d = \frac{(-i\omega)}{v_r} (p-1) - \frac{1}{2} X^2 \frac{(-i\omega)}{v_r} p(1-p) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} X^{2n} \frac{(-i\omega)}{v_r} p(1-p) \delta_n .$$

À equação acima, adicionamos e subtraímos

$$\frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) ,$$

e obtemos

$$d = \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ 1 - \frac{1}{2}X^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} X^{2n} p(1-p) \delta_n \right\} + \\ + \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) .$$

E nossa aproximação até quarta ordem para o operador de continuação para baixo do método FFD pode ser escrita como

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ 1 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{\delta_2}{8}X^4 - \frac{\delta_3}{16}X^6 - \frac{5\delta_4}{128}X^8 \right\} + \\ + \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) . \quad (\text{B.7})$$

Podemos aproximar a equação (B.8) de modo a obter diferentes ordens de aproximação. A seguir mostramos as aproximações de ordem zero até ordem quatro.

B.1 Ordem zero

A aproximação de ordem zero é representada pelo primeiro termo da equação (B.8) e é conhecida como aproximação *split-step* (Stoffa et al., 1990)

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) .$$

B.2 Primeira ordem

A aproximação de primeira ordem é dada pelos dois primeiros termos da equação (B.8)

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p)\frac{1}{2}X^2 .$$

B.3 Segunda ordem

Tomando mais um termo entre chaves na equação (B.8), obtemos a aproximação de segunda ordem

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ \frac{1}{2}X^2 + \frac{\delta_2}{8}X^4 \right\}. \quad (\text{B.8})$$

Queremos substituir a expressão entre chaves na equação (B.8) por um termo racional da forma

$$\frac{X^2}{a_1 - b_1 X^2}.$$

Uma expansão em série de Taylor da equação anterior nos dá

$$\frac{X^2}{a_1} \frac{1}{1 - \frac{b_1}{a_1} X^2} = \frac{X^2}{a_1} \left\{ 1 + \frac{b_1}{a_1} X^2 + \dots \right\} \approx \frac{1}{a_1} X^2 + \frac{b_1}{a_1^2} X^4.$$

Comparando os coeficientes até X^4 obtemos os valores

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{\delta_2}{8} = \frac{1}{2}(p^2 + p + 1). \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a aproximação racional com os coeficientes encontrados na equação (B.8), temos

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \frac{X^2}{2 - b_1 X^2}.$$

Se houver grande variação de velocidade p se aproxima de zero. Neste caso, o valor de b_1 é 0.5 e nossa aproximação fica

$$\sqrt{1 - X^2} \approx 1 - \frac{X^2}{2 - 0.5X^2},$$

similar à aproximação R_2 de Muir (Claerbout, 1985). Por outro lado, se p é igual a 1, então $b_1 = 1.5$ e nossa aproximação fica

$$\sqrt{1 - X^2} \approx 1 - \frac{X^2}{2 - 1.5X^2},$$

se $0 < p < 1$ o coeficiente b_1 pode ser obtido de acordo com equação (B.9). Note que os coeficientes a_1 e b_1 foram obtidos comparando os coeficientes da série de Taylor e talvez não sejam os melhores valores a se usar.

B.4 Terceira ordem

A aproximação de terceira ordem é dada por

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ \frac{1}{2}X^2 + \frac{\delta_2}{8}X^4 + \frac{\delta_3}{16}X^6 \right\}.$$

Usando a mesma ideia da aproximação de segunda ordem, ou seja, aproximar a equação anterior por um termo racional, expandimos o termo racional dado por

$$\frac{X^2}{a_1 - b_1 X^2} + \frac{1}{a_2} X^2$$

em série de Taylor, e comparando os termos, obtemos os coeficientes a_1 , a_2 e b_1 desconhecidos

$$a_1 = 4\frac{\delta_3}{\delta_2^2}, \quad b_1 = 2\frac{\delta_3^2}{\delta_2^3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} - \frac{\delta_2^2}{4\delta_3}.$$

E nossa aproximação final é dada por

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ \frac{X^2}{a_1 - b_1 X^2} + \frac{1}{a_2} X^2 \right\}$$

Os casos extremos acontecem quando $p = 0$ ou $p = 1$. No primeiro caso, os coeficientes assumem os valores $a_1 = 4$, $b_1 = 2$ e $a_2 = 4$, e no segundo caso, assumem os valores $a_1 = 20/9$, $b_1 = 50/27$ e $a_2 = 20$.

B.5 Quarta ordem

Seguindo os mesmos passos anteriores, a aproximação de quarta ordem é dada por

$$d \approx \frac{(-i\omega)}{v_r}(p-1) - \frac{(-i\omega)}{v_r}p(1-p) \left\{ \frac{X^2}{a_1 - b_1 X^2} + \frac{X^2}{a_2 - b_2 X^2} \right\}$$

Apêndice C

Operador de diferenças finitas de maior ordem

Uma maneira de aumentar a ordem dos operadores de diferenças finitas sem aumentar o custo computacional para a sua implementação é conhecida como Esquema de Douglas Generalizado para operadores FD (Douglas, 1962; Claerbout, 1985). Ele pode ser deduzido da seguinte maneira.

Considere uma função $\varphi(x)$ contínua e suficientemente suave. Somando as séries de Taylor de $\varphi_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$ e de $\varphi_{i+1} = \varphi(x_{i+1})$ em torno do ponto x_i resulta em

$$\mathbf{D}_x^2 \varphi \equiv \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Big|_{x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \Big|_{x_i} \Delta x^4 + \frac{1}{360} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} \Big|_{x_i} \Delta x^6 + \mathcal{O}(\Delta^8 x), \quad (\text{C.1})$$

o que resulta em

$$\frac{1}{\Delta_x^2} \mathbf{D}_x^2 \varphi_i = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{1}{12} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \Big|_{x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{360} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} \Big|_{x_i} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta^6 x).$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao operador de diferenças \mathbf{D}_x^2 que está relacionado com a segunda derivada da função $\varphi(x)$, obtém-se

$$\frac{1}{\Delta_x^2} \mathbf{D}_x^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_{x_i} = \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \Big|_{x_i} + \frac{1}{12} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} \Big|_{x_i} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4).$$

Substituindo na equação (C.1) a quarta derivada pela discretização feita na equação anterior, pode-se escrever

$$\frac{1}{\Delta_x^2} \mathbf{D}_x^2 \varphi_i = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{1}{12} \left[\frac{1}{\Delta_x^2} \mathbf{D}_x^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_{x_i} - \frac{1}{12} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} \Big|_{x_i} \Delta x^2 \right] \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4).$$

Simplificando, obtemos

$$\frac{1}{\Delta_x^2} \mathbf{D}_x^2 \varphi_i = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{12} \mathbf{D}_x^2 \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_{x_i} + \mathcal{O}(\Delta x^4) .$$

Pela inversa da equação acima, encontra-se a seguinte aproximação de quarta ordem para a segunda derivada

$$\left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_{x_i} = \frac{\hat{\mathbf{D}}_x^2}{\Delta x^2} \varphi_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) ,$$

onde o operador $\hat{\mathbf{D}}_x^2$ é definido como

$$\hat{\mathbf{D}}_x^2 \equiv (\mathbf{I} + \mu \mathbf{D}_x^2)^{-1} \mathbf{D}_x^2 , \quad (\text{C.2})$$

sendo o valor teórico $\mu = 1/12$. Outros valores numéricos para o fator μ são discutidos na literatura para aumentar a precisão numérica. Valores frequentemente propostos são $\mu = 1/6$, $\mu = 0.14$ ou $\mu = 0.15$. Vale notar que ao primeiro valor proposto, $\mu = 1/6$, devemos o nome de truque do 1/6 de Claerbout (1985).

Nota-se que as operações complexas representadas pelo operador em (C.2) nunca precisam ser executadas. A substituição dos operadores \mathbf{D}_x^2 e \mathbf{D}_y^2 pelos correspondentes operadores $\hat{\mathbf{D}}_x^2$ e $\hat{\mathbf{D}}_y^2$ na equação (4.3), após as devidas simplificações e desprezando termos de quarta derivadas, fornece novamente equações no mesmo formato, em função dos operadores originais \mathbf{D}_x^2 e \mathbf{D}_y^2 . A única modificação resultante é a adição de termos $\gamma_x = \mu \Delta x^2$ e $\gamma_y = \mu \Delta y^2$ aos coeficientes C_n e seus complexos conjugados, ou seja, a substituição de C_n por $C_n + \gamma_x$ na equação (4.5) e por $C_n + \gamma_y$ na equação (4.6).