

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

ASPECTOS DE RESISTÊNCIA MECÂNICA
DE UMA COLUNA DE PERFURAÇÃO EM
ANÁLISE TRIDIMENSIONAL

Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Ronaldo João
Czerwinski e aprovada
pela comissão julgadora em 25/03/1994.

Prodonoff
ORIENTADOR

15/94
Autor: Ronaldo João [Czerwinski 297
Orientador: Victor [Prodonoff t

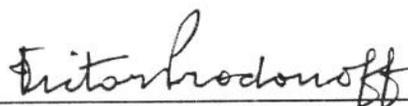
Março de 1994

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A Dissertação "Aspectos de Resistência Mecânica de uma Coluna de Perfuração em Análise Tridimensional", elaborada por Ronaldo João Czerwinski e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pela Sub-comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 25 de Março de 1994.

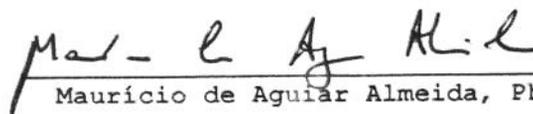
Banca Examinadora:



Victor Prodonoff, Ph. D.



Fernando Iguti, Ph. D.



Maurício de Aguiar Almeida, Ph. D.

À minha esposa Virgínia

... aos meus filhos Ana Paula

Daniela

Leonardo

AGRADECIMENTOS

- . Ao Prof. Victor Prodonoff, quem sugeriu o tema, pela dedicada orientação.
- . Ao Prof. Fernando Iguti e ao Eng. André Gustavo Di Palma Cordovil por esclarecimentos e apoio.
- . À PETROBRÁS e à UNICAMP pela oportunidade de participação no Curso de Mestrado em Engenharia de Petróleo da UNICAMP.

RESUMO

Este trabalho apresenta as adaptações realizadas em um código computacional utilizado em análise de resistência mecânica de colunas de perfuração de poços petrolíferos, de forma a implementá-lo para o espaço tridimensional.

O programa original, que utilizava a técnica dos elementos finitos na resolução de problemas estáticos e dinâmicos, era restrito a elementos planares. Foram criadas rotinas para cálculos de matrizes de elementos tridimensionais do tipo BARRA e VIGA-COLUNA 3D, bem como realizadas as modificações necessárias para o recebimento destas pelo programa original. Novas subrotinas elaboram os cálculos das matrizes de rigidez, geométrica e de massa.

Os tipos de análise do problema são os mesmos que já estavam implantados: análise estática, análise dinâmica por integração numérica e análise dinâmica por superposição modal. Podem ou não serem considerados os efeitos da força axial além daqueles causados por forças transversais e momentos fletores.

Estas análises nos fornecem os deslocamentos nos nós, forças axiais e momentos fletores internos, cálculo das frequências, modos naturais de vibração e resposta dinâmica.

Para validação do programa foram efetuados testes comparativos com exemplos publicados na literatura, incluindo-se os de análise de colunas de perfuração de poços petrolíferos.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE FIGURAS	xi
NOMENCLATURA	xiii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - JUSTIFICATIVA/OBJETIVO	1
1.2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA PERFURAÇÃO	1
1.3 - AMPLITUDE E DELIMITAÇÃO DO TRABALHO	3
1.4 - ORGANIZAÇÃO	5
CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	6
2.1 - MÉTODOS APROXIMADOS	6
2.2 - ELEMENTOS FINITOS	7
2.3 - FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	8
CAPÍTULO III - O PROGRAMA ANESDE 2.0	21
3.1 - INTRODUÇÃO	21
3.2 - METODOLOGIA	21
3.3 - ELEMENTOS	22
3.4 - AS ANÁLISES	24
3.5 - ANÁLISE DINÂMICA POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	26
3.6 - ANÁLISE DINÂMICA POR SUPERPOSIÇÃO MODAL	27
3.7 - FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO	28
3.8 - PROBLEMAS COM CARGAS NÃO NULAS	31
3.9 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA	34
3.10- SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO PARTICULAR	35
3.11- DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	37
3.12- CARREGAMENTO TRANSIENTE	38

3.13- SOLUÇÃO FINAL	38
CAPÍTULO IV - O PROGRAMA ANESDE 3.0	40
4.1 - INTRODUÇÃO	40
4.2 - MODIFICAÇÕES	40
4.3 - UNIDADES PRINCIPAIS	41
4.4 - PRÉ-PROCESSADOR	43
4.5 - PROCESSADOR	45
4.6 - PÓS-PROCESSADOR	49
CAPÍTULO V - O ELEMENTO BARRA 3D	50
5.1 - INTRODUÇÃO	50
5.2 - O TEOREMA DO DESLOCAMENTO UNITÁRIO	51
5.3 - MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES FORÇAS-DESLOCAMENTOS ..	53
5.4 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PELO TEOREMA DOS DESLOCAMENTOS UNITÁRIOS	53
5.5 - TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS	56
5.6 - MATRIZ DE MASSA	58
5.7 - TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS LOCAIS PARA GLOBAIS	61
CAPÍTULO VI - O ELEMENTO VIGA-COLUNA 3D	62
6.1 - INTRODUÇÃO	62
6.2 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	63
6.3 - FORÇAS AXIAIS F_1 e F_7	65
6.4 - MOMENTOS TORÇORES - F_4 e F_{10}	67
6.5 - FORÇAS CISALHANTES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Y}$ - F_2 e F_8	68
6.6 - MOMENTOS FLETORES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Y}$ - F_6 e F_{12}	71
6.7 - FORÇAS CISALHANTES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Z}$ - F_3 e F_9	74
6.8 - MOMENTOS FLETORES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Z}$ - F_5 e F_{11}	75
6.9 - A MATRIZ DE RIGIDEZ	75
6.10 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE MASSA	77

6.11 - TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS	79
CAPÍTULO VII - TESTES	82
7.1 - INTRODUÇÃO	82
7.2 - TESTES DO ELEMENTO BARRA 3D	83
7.3 - TESTES DO ELEMENTO VIGA-COLUNA 3D	90
7.4 - VIGA-COLUNA 3D. VIBRAÇÕES NATURAIS DE UMA BARRA NO ESPAÇO	93
7.5 - VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISE ESTÁTICA DE UMA ESTRUTURA TIPO TRIPÉ	97
7.6 - BARRA 3D E VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISE ESTÁTICA DE UM PÓRTICO TRIDIMENSIONAL	99
7.7 - VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISES DE COLUNAS DE PERFURAÇÃO	105
CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	117
8.1 - RESUMO	117
8.2 - CONCLUSÕES.....	117
8.3 - RECOMENDAÇÕES	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	119

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
7.1 - Comparação de resultados; exemplo da fig. 7.1. Estrutura sujeita à carga de tração	89
7.2 - Comparação de resultados; exemplo da fig. 7.1. Estrutura sujeita à carga de compressão	89
7.3 - Freqüências naturais de uma barra de 10 cm de comprimento, seção 0.5x1.0 cm, engastada numa extremidade e livre na outra ..	96
7.4 - Dimensões das barras	100
7.5 - Grupo de materiais	101
7.6 - Coordenadas nodais	102
7.7 - Conectividade e grupo de material	103
7.8 - Carregamento	104
7.9(a)- Deslocamento do nó 22 na direção X global	104
7.9(b)- Momento fletor do nó 1 em relação ao eixo Z global	105
7.9(c) - Momento fletor do nó 25 em relação ao eixo Z global	105
7.10 - Dimensões dos componentes da coluna de perfuração	107

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 - Domínio Ω e contorno Γ do problema	14
3.1 - Elemento tipo barra 2D	22
3.2 - Elemento tipo viga 2D	23
3.3 - Elemento tipo viga-coluna 2D	24
4.1 - Fluxograma de Blocos do ANESDE 3.0	42
5.1 - Elemento Barra 3D	51
5.2 - Coordenadas locais e globais	56
5.3 - Deslocamentos locais em um elemento tipo Barra 3D	59
6.1 - Elemento viga-coluna 3D	63
6.2 - Cargas e deslocamentos na viga-coluna 3D - sentido positivo	64
6.3 - Condições de Contorno - Forças Axiais F_1 e F_7	65
6.4 - Momentos Torçores - Condições de Contorno	68
6.5 - Forças cisalhantes F_2 e F_8 - Condições de contorno	70
6.6 - Momentos fletores F_6 e F_{12} - Condições de contorno	72
6.7 - Convenção de sinais das forças cisalhantes e dos momentos fletores	74
6.8 - Elemento viga-coluna 3D em sistema de coordenadas locais	77
6.9 - Sistemas global e local	80
7.1 - Cavalete formado por elementos tipo Barra 3D	83
7.2 - Primeiro posicionamento da estrutura	
(a) Teste de tração: $F = 5000$ kgf	
(b) Teste de compressão: $F = -5000$ kgf	84
7.3 - Segundo posicionamento da estrutura	
(a) Teste de tração: $F = -5000$ kgf	
(b) Teste de compressão: $F = +5000$ kgf	84

7.4 - Corte dos nós 1-3 mostrando os elementos 1 e 3 antes e após aplicação da carga de tração	86
7.5 - Corte dos nós 1-3 mostrando os elementos 1 e 3 antes e após aplicação da carga de compressão	88
7.6 - Barra sobre o eixo X: (a) positivo (b) negativo	90
7.7 - Cargas resultantes atuando na barra	91
7.8 - Caso 1	92
7.9 - Caso 2	93
7.10 - Barra utilizada nos testes com o ANESDE 2.0	94
7.11 - Barra espacial utilizada nos testes com o ANESDE 3.0	94
7.12 - (a) Seção A-A original (b) Seção A-A rodada	95
7.13 - Tripé equilátero	98
7.14 - Deslocamentos dos nós D e C no pórtico espacial de Souza	99
7.15 - Pórtico trimensional	100
7.16 - Modelagem das cargas devido ao peso próprio	108
7.17 - Cargas de desbalanceamento máximas ($t=0,250s$)	109
7.18 - Deformações devido desbalanceamento	111
7.19 - Cargas de empenamento máximo ($t=0,250s$)	112
7.20 - Deformações e momentos devido empenamento	114
7.21 - Esquema de cargas devido ao desbalanceamento (sobre o plano XY) e ao empenamento (sobre o plano ZY)	115
7.22 - Deformações e momentos devido cargas combinadas	116

NOMENCLATURA

{ }	-	Vetor
[]	-	Matriz
{0}	-	Vetor nulo
A	-	Área transversal, m^2
A_0	-	Amplitude da excitação harmônica, m
a	-	Coeficiente angular da rampa, N/s
a^e	-	Deslocamentos nodais do elemento e
δa^e	-	Deslocamento virtual do elemento e
a_i	-	Parâmetros das funções de forma
C_r	-	Amortecimento modal
[C]	-	Matriz de amortecimento
[D]	-	Matriz elástica
E	-	Módulo de Young, Pa
F	-	Força, N
$F(t)$	-	Força de excitação, N
$F_r(t)$	-	Força de excitação no espaço modal, N
{F}, {R}	-	Vetor de cargas
I	-	Valor do impulso, kgm/s
I_y	-	Inércia de rotação, m^4
I_z	-	Inércia de rotação, m^4
J_x	-	Inércia à torção, m^4
K, k	-	Rigidez
[K]	-	Matriz de rigidez
[K _G]	-	Matriz de rigidez geométrica
L, ℓ	-	Comprimento do elemento, m
M	-	Matriz de massa, massa, kg
[M]	-	Matriz de massa

- \bar{M} - Matriz de massa equivalente no sistema local
 N - Função de posição
 N_i - Funções de forma
 P_0 - Valor da carga súbita, N
 q - Cargas no elemento
 q^e - Forças nodais estaticamente equivalentes às tensões nas fronteiras e cargas distribuídas no elemento
 $T, [t]$ - Matriz de transformação
 t - Tempo, s
 Δt - Intervalo de tempo
 U, u - Deslocamento
 δU_r - Deslocamento virtual
 u_a - Deslocamento aproximado
 \bar{u}, \bar{U} - Deslocamento local
 $\{u\}$ - Vetor de deslocamentos
 $\{\dot{u}\}$ - Vetor de velocidades
 $\{\ddot{u}\}$ - Vetor de acelerações
 W_e^e - Trabalho externo realizado pelas forças nodais
 W_i^e - Trabalho interno feito pelas tensões e forças distribuídas
 X, Y, Z ou x, y, z - Eixos globais
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ou $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - Eixos locais
 X - Vetor de deslocamentos, m
 \dot{X} - Vetor de velocidades, m/s
 \ddot{X} - Vetor de acelerações, m/s
 X_0 - Resposta dinâmica em frequências, m
 X_e - Deflexão estática, m
 β, β_r - Razão das frequências ω_e e ω_r
 ϵ - Deformações

- ε_0 - Deformações iniciais
- ε_a - Deformações aproximadas
- Γ - Contorno do domínio do problema
- Γ^e - Contorno de cada elemento
- ζ - Razão entre X_0 e X_e
- η_r - Deslocamento no espaço modal
- $\dot{\eta}_r$ - Velocidade no espaço modal
- $\ddot{\eta}_r$ - Aceleração no espaço modal
- $\{\eta\}$ - Vetor de deslocamentos no espaço modal
- θ - Ângulo genérico, rd
- ξ, ξ_r - Razão de amortecimento modal
- ρ - Massa específica volumétrica, kg/m³
- σ - Tensões
- σ_0 - Sistema de tensões residuais iniciais
- τ - Variável muda em Duhamel, tempo, s
- ϕ - Ângulo de defasagem, rd
- ϕ - Modo natural de vibração
- $\{\phi\}$ - Autovetor
- $\Phi_{x\bar{x}}, \Phi_{x\bar{y}}, \Phi_{x\bar{z}}$ - Ângulo entre os eixos x e \bar{x}, \dots
- Φ_y, Φ_z - Parâmetros de deformação devido cisalhamento
- ω_d, ω_{dr} - Freqüência natural amortecida, rd/s
- ω_e - Freqüência de excitação, rd/s
- ω_r, ω_n - Freqüência natural de vibração, rd/s
- Ω - Domínio do problema
- Ω^e - Domínio de cada elemento

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1 - JUSTIFICATIVA/OBJETIVO

A análise bidimensional de uma coluna de perfuração satisfaz as necessidades para poços verticais ou com pequenas inclinações. Entretanto, para poços de grandes inclinações, a broca caminha no sentido do rolamento, afastando-se do plano vertical de projeto. O azimute passa a influenciar o comportamento da coluna, decisivamente. Por outro lado, mesmo nos poços verticais, devido o atrito da coluna com a formação ou revestimento, o contato combinado com a rotação produz um movimento de precessão da coluna (Movimento de rotação de um corpo rígido que gira e está sujeito à ação de um conjugado externo). Uma melhor simulação requer uma análise dinâmica tridimensional.

O objetivo deste trabalho foi preparar um código computacional que permitisse análises espaciais, estáticas e dinâmicas, de colunas de perfuração. Ele foi conseguido através de ampliações/alterações de um código já existente e em uso, restrito ao plano, que utiliza o método dos elementos finitos.

1.2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA PERFURAÇÃO

O uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) tem crescido gradativamente na Engenharia de Perfuração de poços petrolíferos. Entre os diversos tipos de análises, estão a trajetória dos poços e a resistência mecânica dos materiais, abrangendo efeitos causados por vibrações mecânicas. Inicialmente foram utilizados grandes programas comerciais. Posteriormente as companhias passaram a desenvolver programas próprios, menores e mais práticos.

Dentre os trabalhos na indústria petrolífera em que foram utilizados programas de elementos finitos, citamos:

- Nicholson (1972), analisou a influência da composição de fundo na trajetória de um poço com um modelo de elemento finito tipo viga, não linear. Seu estudo se limita à análise de trechos retos e inclinados de poços considerando a restrição imposta à coluna pelas paredes do poço ou de seu revestimento.

- Wolfson (1974), desenvolveu um modelo analítico para colunas de perfuração direcional utilizando direções e forças na broca calculadas por um modelo utilizando o MEF.

- Millheim (1976), iniciou uma série de artigos abordando a análise da tendência da trajetória da coluna de perfuração, através do uso de um programa de elementos finitos comercialmente disponível, evoluindo da análise estática à dinâmica. É dada ênfase nestes trabalhos à teoria básica do método, incluindo a formulação da não linearidade geométrica devido a grandes deslocamentos. A restrição imposta pelas paredes do poço é modelada como um elemento de barra, disponível no programa utilizado, sendo também sugerido o uso de molas bilineares para esta modelagem. Estudos de Millheim se estendem até 1983.

- Warren (1977), publicou um artigo apresentando um programa de MEF para análise tridimensional de composições de fundo. Fez um estudo para avaliar as forças de contato entre tubo e parede do poço ou revestimento que ocorrem numa coluna de perfuração submetida a diversas intensidades de tração.

- Brakel (1986), utilizou o MEF para determinar o comportamento transiente de uma coluna de perfuração durante a perfuração, sendo incorporados efeitos de interação rocha-broca.

- Bonafé (1986), analisou o comportamento de diversas composições de fundo, sob diferentes situações, utilizando um programa de elementos finitos de grande porte.

- Burgess (1987), estudou o efeito de vibrações transversais em falhas de componentes de colunas de perfuração. Obteve importantes resultados na prevenção destas falhas em pontos críticos pré-determinados.

- Sampaio (1989), implementou um código computacional para previsão da taxa de variação azimutal na perfuração de poços direcionais.

- Guz (1990), implementou um código computacional que permite a análise estática estrutural não linear de uma coluna de perfuração sob as mais diversas condições, considerando efeito de contato ou de restrição ao deslocamento lateral. Foram utilizados elementos tipo viga-coluna 2D e barra 2D.

- Cordovil (1991), implementou um código computacional bidimensional considerando condições dinâmicas por integração direta e via superposição modal. Com este código analisou colunas de perfuração sob diversos aspectos.

- Prodonoff et alli (1991), realizaram análise estática não linear de tensões em coluna de perfuração, utilizando elementos tipo viga-coluna de dois nós, bidimensional.

- Cordovil & Prodonoff (1992), estudaram efeitos dinâmicos devido a imperfeições de uma coluna de perfuração.

1.3 - AMPLITUDE E DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho utiliza a metodologia da análise estrutural linear (pequenas deformações), com o método dos elementos finitos, para a análise de colunas de perfuração quanto a aspectos de resistência

mecânica nos campos bi e tri-dimensionais. São possíveis análises estáticas, dinâmicas por integração numérica, dinâmicas por superposição modal, obtenção dos modos naturais de vibração e frequências naturais. Pode ser aplicado tanto a análise de colunas de perfuração como de qualquer estrutura. Devido a metodologia utilizada, está limitado à pequenas deformações.

A análise considera tanto a teoria de viga curta como o da viga longa, bastando considerar ou não termos que relacionam deformação e cisalhamento. Para as análises em que temos elementos de pequenos comprimentos em relação às espessuras destes elementos devemos considerar efeitos cisalhantes nas deformações empregando a teoria de viga curta. Na maioria das análises de colunas de perfuração não consideramos o efeito do cisalhamento, utilizando a teoria de viga longa. O programa também permite considerar ou não o efeito da força axial nas deformações. A força axial influi na rigidez do elemento; para análises de colunas inteiras, submetidas a grandes cargas axiais causadas por forças externas e pelo peso próprio este efeito deve se considerado.

Os elementos que compõem a estrutura podem ter seções genéricas e qualquer orientação espacial. Podem estar localizados sobre qualquer dos eixos X, Y, Z, sobre qualquer plano formado por estes eixos ou em qualquer dos oito quadrantes. Mas deve ser observado que um dos eixos para os quais são considerados os momentos de inércias deve estar na posição horizontal (deve ser paralelo ao plano horizontal formado pelos eixos globais X e Z).

O programa foi codificado em FORTRAN, podendo ser executado em micros tipo PC(AT286, 386, 486) ou em MAINFRAME. Devido ao grande número de dados e pela limitação da linguagem FORTRAN utilizada em sistema operacional DOS, os micros que utilizam este sistema operacional

estão restritos às análises mais simples, como estática, dinâmica por integração numérica, e pequenas análises por superposição modal.

1.4 - ORGANIZAÇÃO

O trabalho está organizado na forma de capítulos e anexos, de forma a facilitar a sua compreensão. Inicialmente, neste capítulo de Introdução, foram apresentadas a justificativa e o objetivo, seguidos pelas referências bibliográficas quanto ao uso do Método dos Elementos Finitos, na perfuração, bem como as amplitudes e delimitações do trabalho.

O segundo capítulo é dedicado ao Método dos Elementos Finitos, comentando-se brevemente a sua base teórica. Já no terceiro capítulo, descreve-se o programa original: layout, metodologia, elementos, tipos de análises possíveis, e limitações. No quarto capítulo é comentado o programa final, após as alterações, em especial sobre os acréscimos efetuados. O quinto e o sexto capítulos referem-se aos elementos tridimensionais criados, barra e viga-coluna 3D, respectivamente. Apresenta-se a modelagem destes, com a determinação das matrizes de rigidez e de massa e a transformação de sistemas de coordenadas. São apresentadas informações do trabalho efetuado de uma forma geral.

No sétimo capítulo estão os testes efetuados para validação do programa, com os resultados comparados tanto a soluções analíticas como a de programas de uso geral. Finalmente, no oitavo capítulo, temos um resumo com as conclusões e sugestões.

CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - MÉTODOS APROXIMADOS

Um dos objetivos da engenharia é o estudo e solução de problemas físicos reais. Muitos problemas podem ser adequadamente representados por equações diferenciais, em conjunto com as condições de contorno. Sendo um modelo contínuo, o mesmo tenderá a infinitos graus de liberdade. Com exceção dos casos mais simples, em geral é difícil e até impossível montar soluções analíticas exatas do sistema de equações diferenciais que satisfaçam as condições de contorno. Uma alternativa é substituir o problema físico real, contínuo, com infinito número de graus de liberdade, por um equivalente, aproximado, discreto, com finito número de graus de liberdade, de solução viável. Entre os métodos numéricos destacam-se o das diferenças finitas, variacionais, e de resíduos ponderados.

O maior problema relativo a utilização direta dos métodos de aproximação corresponde à seleção de soluções aproximadas globais que são válidas em todos os trechos do sistema em estudo. As funções escolhidas devem satisfazer as condições de contorno essenciais do problema, e também devem representar convenientemente outras características que o mesmo possui. Para melhorar as soluções numéricas obtidas é necessário utilizar funções de ordem cada vez maiores e de difíceis ou impossíveis resoluções. O método dos elementos finitos soluciona tais problemas. Permite aplicar as aproximações correspondentes aos métodos anteriores de um forma mais simples.

2.2 - ELEMENTOS FINITOS

O MEF é uma classe importante de problemas de valores de contorno. Começou como uma extensão de métodos matriciais para análise de estruturas, tendo sido desenvolvido no estudo de tensões em estruturas complexas de aeronaves. Seu uso tem sido extendido, sendo reconhecido como uma ferramenta versátil e potente, de larga aplicação em todas as ciências físicas e de engenharia.

Conforme Bathe, 1976, a designação de "Elementos Finitos" foi dada pela primeira vez em um artigo de Clough, 1960, que utilizou esta técnica para análise de problemas de estado plano de tensão.

A chave do MEF consiste em utilizar aproximações por partes, ou regiões, em vez de efetuar aproximações de caráter global.

Primeiro o domínio de integração do problema é subdividido em um número discreto de pequenas regiões, finitas. Sobre cada região é suposto um comportamento aproximado para as incógnitas do problema. As aproximações podem ser do mesmo tipo das dos métodos aproximados.

Com a subdivisão em regiões será possível adotar funções simples que representam o comportamento aproximado local. Desta forma, para obter-se melhores soluções aproximadas, não será imprescindível adotar funções de ordem maior. Simplesmente se efetuará uma subdivisão mais fina, com maior número de regiões, menores, mas mantendo funções de aproximação de baixa ordem.

Para aplicação do MEF devemos seguir diversos passos:

1. Inicialmente temos um domínio contínuo, com infinitos graus de liberdade, em que o problema é regido por funções de difícil ou impossível resolução.

2. Deve ser processada a discretização do domínio em subregiões ideais, definindo a malha dos elementos finitos. Cada malha

será caracterizada pelo tipo de elemento finito utilizado, podendo ser único ou não. Todo elemento estará definido por sua forma geométrica, pelas funções de aproximação que utiliza, e pelo tipo de problema para o qual foi desenvolvido. Em cada elemento são identificados certos pontos, chamados de nós ou de pontos nodais.

3. Após a definição da malha de elementos é necessário definir as funções que aproximam o comportamento do problema em cada elemento, em vez de efetuar uma aproximação global. Corresponde à definição das funções contínuas de interpolação que aproximem o fenômeno físico em cada elemento.

4. Obtenção das matrizes características do problema.

5. Dar um tratamento global com a montagem do sistema global de equações através de superposição dos resultados obtidos para cada elemento.

6. Introdução das equações de contorno.

7. Solução do sistema de equações.

8. Cálculo dos resultados secundários.

2.3 - FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

O MEF provê uma técnica geral e sistemática para construção de funções de bases para aproximações de problemas de valores de contorno. A principal idéia é que as funções podem ser definidas por parte sobre subregiões do domínio, chamados de elementos finitos, e que sobre qualquer subdomínio, a função de base pode ser função muito simples, tal como um polinômio de baixo grau. A seleção desta função representa o ponto crítico do método.

Estas funções devem ser:

- simples

- definidas elemento por elemento
- suaves
- escolhidas de forma que a solução aproximada seja precisamente os valores da função global nos pontos nodais

No nosso caso, o da mecânica dos sólidos, podemos considerar enfoques físicos e genéricos na definição das funções de aproximação e na obtenção das matrizes características. O físico é aplicável apenas no caso particular da elasticidade linear. Os genéricos correspondem a processos aplicáveis a outros campos da engenharia e física. São divididos em matemático e variacional.

2.3.1 - Enfoque Físico

Pelo enfoque físico as matrizes características dos elementos são calculadas de forma análoga aos cálculos utilizados em análise estrutural a partir de métodos matriciais, universalmente aceitos em projetos de estruturas.

Os métodos matriciais são baseados no conceito de substituir a estrutura contínua real por um modelo equivalente feito de elementos estruturais discretos, dos quais são conhecidas as propriedades inerciais e elásticas.

As matrizes representando estas propriedades em todos os elementos são consideradas como construindo blocos. Quando colocados juntos e de acordo com um conjunto de regras derivadas da teoria da elasticidade, fornecem as propriedades estáticas e dinâmicas da estrutura completa.

Przemieniecki, 1985, utiliza este enfoque no desenvolvimento do estudo de elementos finitos no cálculo de estruturas complexas de aeronaves.

Zienkiewicz, 1989, demonstra os três processos na aplicação do MEF.

Neste enfoque as formulações matemáticas são derivadas a partir das relações físicas, sendo consideradas as funções de deslocamentos, deformações e tensões aplicadas a cada elemento.

a) Funções Deslocamentos

$$u \approx u_a = \sum N_i a_i^e = N \cdot a^e \quad (2.1)$$

onde

N são funções de posição

a^e são os deslocamentos nodais do elemento e .

b) Deformações

$$\varepsilon = L \cdot u \quad (2.2)$$

onde L são os operadores lineares obtidos a partir das relações que nos dão as deformações em função dos deslocamentos (Timoshenko, 1951).

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= L \cdot u_a \\ \varepsilon_a &= L \cdot N \cdot a^e \\ \varepsilon_a &= B \cdot a^e \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$B = L \cdot N \quad (2.4)$$

c) Tensões

Para o caso do comportamento elástico linear:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (2.5)$$

onde

σ_0 é o sistema de tensões residuais iniciais

ϵ são as deformações

ϵ_0 são as deformações iniciais

D é a matriz de elasticidade contendo as propriedades do material, obtida das relações tensões deformações.

d) Força Nodal Equivalente

São as forças nodais estaticamente equivalente às tensões nas fronteiras e cargas distribuídas no elemento:

$$(q^e)^T = \{q_i \quad q_j \quad \dots\}.$$

As cargas distribuídas, notadas por b , são definidas como aquelas atuando em um volume unitário de material no elemento com direções correspondentes às dos deslocamentos u naquele ponto.

O procedimento mais simples para fazer as forças nodais estaticamente equivalentes às tensões e cargas distribuídas nas fronteiras é impor um deslocamento nodal virtual e igualar os trabalhos internos e externos devidos as forças e tensões durante o deslocamento.

Assim:

δa^e = deslocamento virtual

$$\delta u = N \cdot \delta a^e \tag{2.6a}$$

$$\delta \epsilon = B \cdot \delta a^e \tag{2.6b}$$

W_e^e = trabalho externo feito pelas forças nodais

$$W_e^e = (\delta a^e)^T \cdot q^e \tag{2.7}$$

$W_i^e =$ trabalho interno feito pelas tensões e forças distribuídas.

$$W_i^e = \delta \epsilon^T \cdot \sigma - \delta u^T \cdot b \quad (2.8)$$

ou
$$W_i^e = \delta a^T (B^T \cdot \sigma - N^T \cdot b) \quad (2.9)$$

Igualando os trabalhos internos e externos correspondentes ao elemento inteiro (todo volume):

$$W_e = \int_v W_i^e$$

$$(\delta a^e)^T \cdot q^e = (\delta a^e)^T \left(\int_v B^T \cdot \sigma d(vol) - \int_v N^T \cdot b d(vol) \right). \quad (2.10)$$

Como a relação (2.10) é válida para qualquer valor de deslocamento virtual, a igualdade dos múltiplos deve existir:

$$q^e = \int_v B^T \cdot \sigma d(vol) - \int_v N^T \cdot b d(vol). \quad (2.11)$$

Aplicando a lei de Hooke:

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (2.5)$$

Chegamos a:

$$q^e = K^e \cdot a^e + f^e \quad (2.12)$$

onde:

$$K^e = \int_v B^T \cdot D \cdot B d(vol) \quad (2.13a)$$

$$f^e = - \int_v N^T \cdot b d(vol) - \int_v B^T \cdot D \epsilon_0 d(vol) + \int_v B^T \cdot \sigma_0 d(vol) \quad (2.13b)$$

onde os termos de (2.13b) correspondem, respectivamente, a forças no corpo, deformações iniciais e tensões iniciais.

A partir dos cálculos de todos elementos deve ser interconectado e solucionado o conjunto inteiro.

Normalmente forças concentradas externas podem existir nos nós, devendo ser adicionadas nas considerações de equilíbrio.

2.3.2 - Enfoques Genéricos

Correspondem aos enfoques matemáticos baseados na aplicação dos resíduos ponderados e na aplicação do cálculo variacional.

Pela generalização dos conceitos do MEF, além dos problemas da mecânica dos sólidos, podem ser resolvidos outros problemas contínuos da física e engenharia, colocados em equações diferenciais e condições de contorno apropriadas.

Da forma mais genérica, o problema corresponde a uma função desconhecida de u que satisfaz um conjunto de equações diferenciais em um domínio Ω (volume, área, etc.).

$$\mathbf{A}(u)^T = \{A_1(u) \ A_2(u) \ \dots \} = 0 \quad (2.14)$$

junto com as condições no contorno Γ do domínio,

$$\mathbf{B}(u)^T = \{B_1(u) \ B_2(u) \ \dots \} = 0 \quad (2.15)$$

conforme figura 2.1.

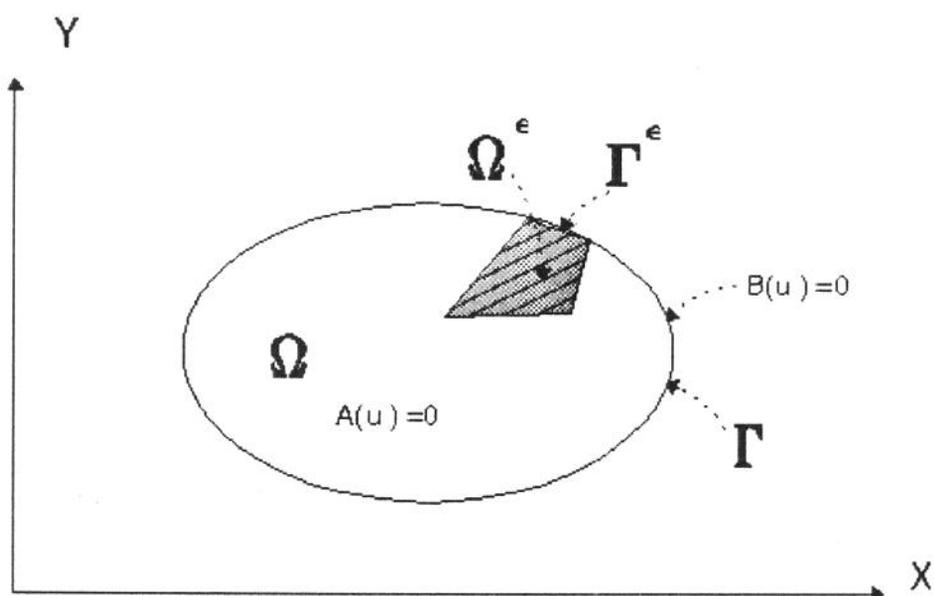


Figura 2.1 - Domínio Ω e contorno Γ do problema.

O MEF busca uma solução aproximada que tem a mesma forma de aproximação do enfoque físico:

$$u \approx u_a = \sum N_i \cdot a_i = N \cdot a \quad (i = 1 \text{ a } \Gamma) \quad (2.16)$$

onde

N_i são funções de forma e

a_i são os parâmetros das funções de forma, sendo todos ou alguns desconhecidos.

Procedendo da mesma forma que do enfoque físico, queremos:

- (a) funções de forma definidas localmente para cada elemento,
- (b) as propriedades dos sistemas discretos são conservadas quando as equações de aproximação são fundidas na forma de integral. Assim, com este objetivo, nós buscamos fundir a equação da qual os parâmetros desconhecidos a_i são obtidos na forma de integral.

$$\int_{\Omega} G_j(u_a) d\Omega + \int_{\Gamma} g_j(u_a) d\Gamma = 0 \quad (j = 1 \text{ a } n) \quad (2.17)$$

em que G_j e g_j são funções conhecidas.

Estas formas integrais permitirão a obtenção da aproximação elemento por elemento e que um conjunto global seja montado utilizando procedimentos desenvolvidos para sistemas discretos.

Desde que G_j e g_j são integráveis, temos:

$$\int_{\Omega} G_j d\Omega + \int_{\Gamma} g_j d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega^e} G_j d\Omega + \int_{\Gamma^e} g_j d\Gamma \right) \quad (2.18)$$

onde

Γ^e = contorno de cada elemento

Ω^e = domínio de cada elemento.

Dois procedimentos distintos podem ser empregados na obtenção das aproximações nesta forma de integral:

O método dos resíduos ponderados e o variacional.

a) Método dos resíduos ponderados

Por este enfoque é inicialmente obtida uma formulação fraca, do tipo integral, e então feita uma aproximação utilizando o método dos resíduos ponderados.

a.1) Formulação fraca equivalente a equações diferenciais

O conjunto das equações (2.14) deve ser zero em cada ponto do domínio Ω .

$$\mathbf{A}(u)^T = \{ A_1(u) \quad A_2(u) \quad \dots \} = 0 \quad (2.14)$$

Assim

$$\int_{\Omega} V^T \cdot A(u) d\Omega \equiv \int (v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots) d\Omega \equiv 0 \quad (2.19)$$

Onde

$$V^T = \{v_1 \quad v_2 \quad \dots\} \quad (2.20)$$

é um conjunto de funções arbitrárias com o mesmo número de equações (ou componentes de u) envolvidas.

A formulação é entretanto mais potente. Se a equação (2.19) é satisfeita para qualquer V então as equações diferenciais (2.14) são satisfeitas em todos os pontos do domínio.

Se as condições de contorno

$$B(u)^T = \{B_1(u) \quad B_2(u) \quad \dots\} = 0 \quad (2.15)$$

devem ser simultaneamente satisfeitas, ou nós asseguramos tais satisfações pela escolha de uma função u_a ou requeremos que

$$\int_{\Gamma} V_b^T \cdot B(u) d\Gamma \equiv \int v_1 B_1(u) + v_2 B_2(u) + \dots d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

para qualquer conjunto de funções V .

Se a formulação integral

$$\int_{\Omega} V^T \cdot A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} V_b^T \cdot B(u) d\Gamma = 0 \quad (2.22)$$

está satisfeita para todo V e V_b , ela é equivalente para satisfazer as equações diferenciais (2.14) e suas condições de contorno (2.15).

Para que a equação (2.22) possa ser avaliada, devem ser impostas restrições quanto às famílias de funções permissíveis para V e u . Por exemplo, devem ser evitadas funções que resultem em qualquer termo nas integrais tornarem-se infinitos.

As funções escolhidas para V e V_b devem ser simples, de valores finitos, sem restringir a validade do estabelecido previamente.

Para as funções u devem ser escolhidas funções dependentes da ordem n de diferenciação das equações $A(u)$ e $B(u)$.

Devem ter $(n-1)$ derivadas contínuas.

Em muitas ocasiões é possível resolver as integrais (2.22) por parte e substituí-las por uma formulação alternativa da forma

$$\int_{\Omega} C(v)^T \cdot D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(V_b)^T \cdot F(u) d\Gamma = 0. \quad (2.23)$$

Em (2.23) os operadores C e F contém derivadas de ordem mais baixa do que as dos operadores A e B . Agora uma ordem mais baixa de continuidade é requerida na escolha da função u a um preço de mais alta continuidade para v e v_b .

A formulação (2.23) é agora mais "permissível" do que o problema original colocado por (2.14), (2.15) ou (2.22). É chamada formulação fraca destas equações.

As formulações (2.22) e (2.23) formarão a base das aproximações de elementos finitos.

a.2) Aproximações para formulações tipo integrais: O método dos resíduos ponderados

Se uma função u desconhecida é aproximada pela expansão

$$u \approx u_a = \sum N_i a_i = N \cdot a \quad (i = 1 \text{ a } \Gamma) \quad (2.16)$$

em um caso geral é impossível satisfazer as equações diferenciais e as condições de contorno.

As formulações (2.22) e (2.23) podem ser aproximadas se em lugar de qualquer função v nós colocarmos um conjunto finito de funções prescritas

$$v = w_j, \quad v_b = w_{bj} \quad (j = 1 \text{ a } n) \quad (2.24)$$

onde n é o número de parâmetros a_i desconhecidos no problema e n é um número menor ou igual que Γ .

Assim teremos para (2.22) e (2.23) um conjunto de equações ordinárias das quais poderão ser determinados os parâmetros a_i desconhecidos.

$$\int_{\Omega} W_j^T \cdot A(N_a) d\Omega + \int_{\Gamma} W_{bj}^T \cdot B(N_a) d\Gamma = 0 \quad (j = 1 \text{ a } n) \quad (2.25)$$

$$\int_{\Omega} C(W_j)^T \cdot D(N_a) d\Omega + \int_{\Gamma} E(W_{bj})^T \cdot F(N_a) d\Gamma = 0 \quad (j = 1 \text{ a } n) \quad (2.26)$$

sendo que $A(N_a)$ e $B(N_a)$ representam o resíduo ou erro obtido pela substituição de u por u_a na equação diferencial e na condição de contorno. As equações (2.25) e (2.26) são "integrais ponderadas de tais resíduos" e as aproximações são chamadas de "resíduos ponderados".

Quase todos conjuntos de funções independentes w_j podem ser usados para o propósito de peso e, de acordo com a função escolhida, um diferente nome pode ser dado ao processo. Utilizando simplesmente as funções formas originais como peso, $w_j = N_j$, teremos o "método de Galerkin".

b) Cálculo Variacional (Enfoque Variacional)

O cálculo variacional é uma técnica de análise numérica utilizada na obtenção de soluções aproximadas de problemas de valores de contorno. Trata de problemas de máximos e mínimos de um tipo especial de funções, do tipo integral, chamadas funcionais, e que é solução exata do problema do contínuo.

O funcional Π é definido por

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, \frac{\partial}{\partial x} u, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, \frac{\partial}{\partial x} u, \dots) d\Gamma \quad (2.27)$$

em que u é a função desconhecida.

F , E são operadores especificados.

A solução para o problema contínuo é uma função u que faz Π estacionário com respeito a pequenas variações δu . Para a solução do problema contínuo.

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.28)$$

Se dado um problema, um princípio variacional pode ser encontrado, imediatamente métodos são estabelecidos para obtenção de soluções aproximadas. São da forma de integrais simples, apropriadas para análise por elementos finitos.

Assumindo uma expansão de funções testes na forma usual

$$u \approx u_a = \sum N_i \cdot a_i = N \cdot a \quad (i = 1 \text{ a } \Gamma) \quad (2.16)$$

podemos inseri-la na equação (2.27) e escrever:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \delta a \quad (2.29)$$

A equação (2.29) sendo verdadeira para qualquer variação δa produz um conjunto de equações.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.30)$$

da qual são achados os parâmetros a_i .

A especificação original do funcional Π foi dada em termos de integrais do domínio e do contorno. Desta forma as equações para a aproximação por elementos finitos são necessariamente da forma de integrais.

O processo de achar o estacionário com respeito aos parâmetros a_i de funções testes é antigo, sendo associado aos nomes de Rayleigh e Ritz. É muito importante na análise por elementos finitos.

Se o funcional Π é quadrático, isto é, a função u e suas derivadas ocorrem em potências que não excedem a dois, a equação (2.30) reduz-se a uma forma linear usual

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} \equiv K.a + f = 0 \quad (2.31)$$

Freqüentemente os aspectos físicos de problemas podem ser estabelecidos diretamente em uma forma de princípio variacional.

Teoremas como o da minimização da energia potencial total para obtenção do equilíbrio em sistemas mecânicos são considerados por muitos como as bases da formulação.

Princípios variacionais deste tipo são naturais. Infelizmente eles não existem para todos os problemas contínuos para os quais equações diferenciais bem definidas podem ser formuladas.

Entretanto existem outras categorias de princípios variacionais. Estes princípios sempre podem ser construídos para qualquer problema especificado diferencialmente:

i) ou extendendo o número de funções desconhecidas u por variáveis adicionais conhecidas como múltiplos de Lagrange;

ii) ou por procedimentos impondo um grau mais alto de requerimentos de continuidade, tais como problemas dos mínimos quadrados.

CAPÍTULO III - O PROGRAMA ANESDE 2.0

3.1 - INTRODUÇÃO

O programa original, desenvolvido pelo CENPES, nomeado de ANESDE - Análise Estática e Dinâmica de Estruturas - teve sua origem na Universidade de Berkeley, Califórnia, EUA, resultando no SAP IV. Após aperfeiçoamento no Instituto Militar de Engenharia (IME), foi levado para o CENPES, tendo servido de base para duas teses de mestrado. Guz, 1990, implementou o elemento tipo viga-coluna, bi-dimensional. Cordovil, 1990, a resposta dinâmica. Também foram efetuadas alterações de forma a possibilitar execução via compilador MICROSOFT FORTRAN 5.0, FORTRAN 77, F77, de usos mais comuns (originalmente trabalhava no ambiente BURROUGHS). Foi então rebatizado como ANESDE 2.0.

Com este programa podem ser realizadas análises estáticas e dinâmicas de aspectos de resistência dos materiais de uma coluna de perfuração. Para isto a coluna de perfuração, e todo o sistema participante, deve ser modelada com um ou mais elementos disponíveis na biblioteca de elementos.

3.2 - METODOLOGIA

Em síntese, este programa de elementos finitos inicialmente lê os dados das informações de controle, dos pontos nodais, dos elementos e dos materiais.

Em seguida monta as matrizes de rigidez e massa, elemento por elemento, no espaço local, rodando-as para o global. Completado o sistema de equações no espaço global, este é resolvido conforme a análise pretendida. Como solução são obtidos os deslocamentos nodais. A partir

destes deslocamentos são calculados os resultados secundários, como as forças axiais e os momentos fletores.

Para esta série de cálculos o programa manuseia um número muito grande de dados. Com a finalidade de otimizar a área de processamento central para os cálculos das equações correspondentes ao sistema global são utilizados dois vetores para locação dinâmica de memória e vários arquivos de trabalho. Um dos vetores é para valores inteiros e o outro para reais. Os dados ocupando os vetores são transferidos para os arquivos de trabalho, liberando área de processamento para outros valores.

3.3 - ELEMENTOS

Os elementos disponíveis no programa ANESDE 2.0 são os tipos barra, viga, viga-coluna e quadrilátero, todos planares.

O elemento tipo barra, de dois nós, tem dois graus de liberdade por nó. Pode apenas suportar cargas axiais e sofrer deslocamentos axiais.

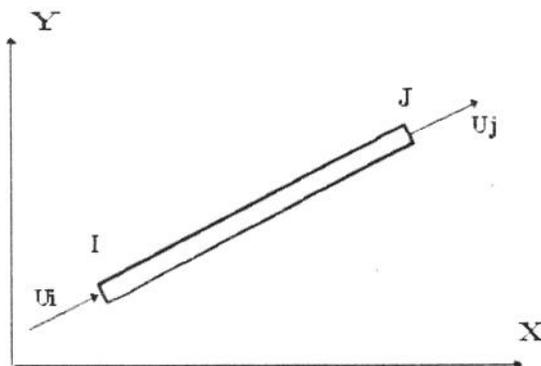


Fig. 3.1 - Elemento tipo barra 2D

O elemento tipo viga, de dois nós, tem dois graus de liberdade por nó. Pode suportar cargas transversais e momentos. Sofre

deslocamentos transversais e rotações. Deve estar alinhado com um dos eixos.

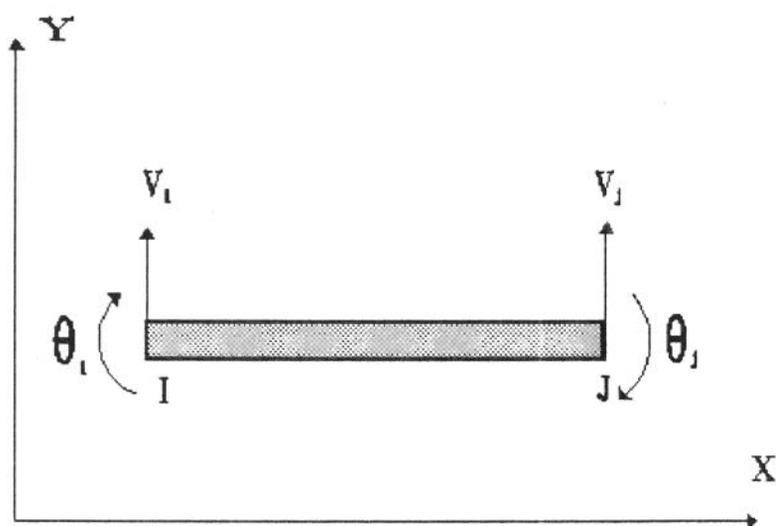


Fig. 3.2 - Elemento tipo viga 2D

O elemento tipo viga-coluna, de dois nós, tem três graus de liberdade por nó. Neste elemento são combinados os elementos anteriores. Suporta cargas axiais, transversais e momentos. Sofre deslocamentos axiais, transversais e rotações. Não necessita estar alinhado com qualquer dos eixos globais.

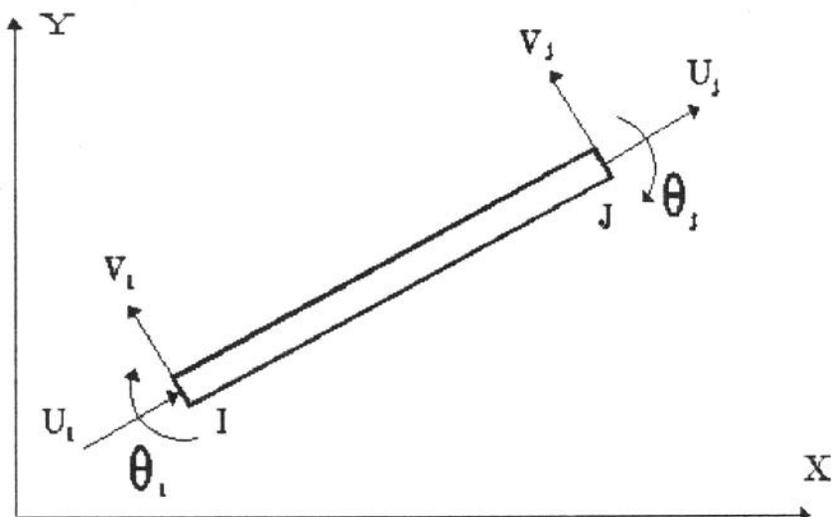


Fig. 3.3 - Elemento tipo viga-coluna 2D

Por último um elemento quadrilátero contido no plano e formado por quatro nós. Tem dois graus de liberdade por nó, correspondentes aos deslocamentos nos sentidos X e Y. É utilizado para cálculos de estado plano de tensão e de deformação.

3.4 - AS ANÁLISES

As análises disponíveis, estática e dinâmica, são selecionadas através da entrada de dados. As dinâmicas podem ser por integração direta, passo a passo, ou superposição modal.

3.4.1 - Análise Estática

É a análise mais simples. Consiste na resolução do sistema de equações

$$[K]. \{U\} = \{R\} \quad (3.1)$$

Como soluções principais obtemos os deslocamentos nos nós e a partir destas são calculadas as forças axiais, tensões, e momentos fletores (quando for o caso).

3.4.2 - Análise Dinâmica

Para solucionar problemas através da análise dinâmica é necessário resolver o sistema de equações

$$[M].\{\ddot{u}\} + [C].\{\dot{u}\} + [K].\{u\} = \{R\} \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é derivada de considerações estáticas no tempo t , isto é:

$$F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = R(t) \quad (3.3)$$

onde

$$F_I(t) = M\ddot{u} \text{ (forças de inércia)}$$

$$F_D(t) = C\dot{u} \text{ (forças de amortecimentos viscosos)}$$

$$F_E(t) = Ku \text{ (forças elásticas)}$$

Desta forma análise dinâmica é em princípio o equilíbrio estático no tempo t , incluindo efeitos de forças de inércia dependentes da aceleração e forças dinâmicas dependentes da velocidade.

A partir de (3.2) obtemos os deslocamentos, velocidades e acelerações nos nós para cada intervalo de tempo definido por Δt . A partir destes dados são calculadas as demais soluções.

O programa dispõe de opções de análise dinâmica por integração numérica, passo a passo, e por superposição modal.

3.5 - ANÁLISE DINÂMICA POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Na integração direta a equação (3.2) é integrada usando um procedimento passo a passo. O termo "direta" significa que antes da integração numérica nenhuma transformação de equações em diferentes formas é realizada.

Em essência, integração numérica direta é baseada em duas idéias.

A primeira, em vez de satisfazer (3.2) a qualquer tempo t , é satisfeita (3.3) a intervalos discretos Δt . Desta forma as técnicas de soluções empregadas em análise estática também podem serem utilizadas em integração direta.

A segunda, a forma é assumida da variação de deslocamentos, velocidades e acelerações em cada intervalo de tempo Δt . A forma assumida destas variações é que determinam a precisão, estabilidade e custo da solução. Os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $t_0=0$ devem ser conhecidos. Para a solução do problema no intervalo de tempo de t_0 a T , este intervalo é dividido em intervalos Δt e são calculadas soluções aproximadas para cada Δt , sempre baseado na solução anterior. O processo de cálculo para cada intervalo é o mesmo.

No programa ANESDE 2.0 é utilizado o método de Newmark para integração direta, sendo usadas as seguintes suposições.

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (3.4)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t + \alpha \ddot{u}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (3.5)$$

onde α e δ são parâmetros. Newmark originalmente propôs um esquema estável incondicionalmente ao método de aceleração média constante, onde

$$\delta = 1/2$$

$$\alpha = 1/4$$

Para a resolução dos deslocamentos, velocidades e acelerações é solucionado o sistema de equações constituído por (3.4), (3.5) e (3.2). No caso do ANESDE 2.0 a estrutura é considerada inicialmente um repouso ($u=0, \dot{u}=0, \ddot{u}=0$), sendo resolvido unicamente o caso de carregamento constante subitamente aplicado, sendo considerado um esquema incondicionalmente estável, onde

$$\delta \geq 1/2 \text{ e } \alpha \geq 1/4 \cdot (1/2 + \delta)^2$$

Mais detalhes podem ser vistos em Bathe & Wilson (1976).

3.6 - ANÁLISE DINÂMICA POR SUPERPOSIÇÃO MODAL

O sistema estudado pelo ANESDE 2.0 é um sistema discreto, composto por equações lineares (pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio), em que o movimento é estabelecido por equações diferenciais ordinárias. Temos um número finito de inógnitas ou graus de liberdade acoplados entre si. Através da análise modal este sistema complexo pode ser decomposto em um conjunto de equações desacopladas, independentes, com um grau de liberdade cada. A resposta dinâmica é então montada como uma combinação linear dos autovetores. É primeiramente calculada no espaço definido pelos autovalores (espaço normal) e após

transformada para o espaço real. Pela superposição modal podemos calcular:

- Freqüências e modos naturais de vibração;
- Soluções no domínio da freqüência;
- Modelos com carregamentos transientes;
- Modelos com carregamentos simples:
 - subitamente aplicado
 - impacto
 - crescente linear
 - harmônico

Para o primeiro, freqüências e modos naturais de vibração, o carregamento e o amortecimento são nulos. Os demais são os seis tipos de carregamentos considerados no programa ANESDE. Para serem resolvidos é necessário primeiramente calcular as freqüências e modos naturais de vibração.

Nos próximos itens são resumidos os procedimentos de resoluções de problemas por superposição modal.

3.7 - FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

A equação geral do movimento é dada por

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = Q(t) \quad (3.6)$$

onde

M = matriz de massa

C = matriz de amortecimento

K = matriz de rigidez

Não havendo forças externas ($Q=0$) e nem de amortecimento ($C=0$) temos uma vibração livre sem amortecimento, ou seja, uma vibração natural.

A equação geral reduz-se a:

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (3.7)$$

e as respostas desta representam as frequências naturais e os modos de vibrações correspondentes.

Com apenas um grau de liberdade, a resposta é colocada como e^{st} :

$$x = e^{st}$$

$$\dot{x} = s \cdot e^{st}$$

$$\ddot{x} = s^2 \cdot e^{st}$$

Substituindo em (3.7) chegamos a solução geral

$$x = A \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot t\right) + B \cdot \text{cos}\left(\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot t\right) \quad (3.8)$$

em que as constantes A e B dependem da forma inicial do movimento, e onde $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$ é designado por frequência natural de vibração. É um valor característico do sistema e é independente da forma inicial do movimento.

Para a condição inicial

$$t = 0$$

$$x = 0$$

$$\dot{x} = 0$$

e com vários graus de liberdade, a resposta é assumida como

$$\{x(t)\} = \{\phi\} \cdot \text{cos}(\omega_n \cdot t) \quad (3.9)$$

que representa um movimento livre e sem amortecimento.

Derivando (3.9) temos a velocidade e a aceleração

$$\{\dot{x}(t)\} = -\omega_n \cdot \{\phi\} \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \quad (3.10)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega_n^2 \{\phi\} \cdot \text{cos}(\omega_n \cdot t) \quad (3.11)$$

Substituindo em (3.7)

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \cdot M \cdot \{\phi\} \cdot \text{cos}(\omega_n \cdot t) + K \cdot \{\phi\} \cdot \text{cos}(\omega_n \cdot t) &= 0 \\ K \cdot \{\phi\} - \omega_n^2 M \{\phi\} &= 0 \\ [K - \omega_n^2 M] \{\phi\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde (3.12) é um problema de autovalores em que

ω_n = frequência natural de vibração

ϕ = modo natural de vibração.

Resolvendo o problema de autovalor generalizado dado por (3.12) são obtidas as frequências naturais e os modos naturais de vibração.

O programa ANESDE calcula os "p" menores autovalores solicitados e seus correspondentes autovetores. É usada a técnica da procura no determinante ou da iteração no subespaço disponível na memória central. Para verificar se os "p" menores autovalores foram encontrados é utilizado o teste de Sturm. Os procedimentos podem ser vistos em detalhes em Cordovil, 1991.

O mesmo procedimento pode ser realizado com a matriz de amortecimento não nula. Para um grau de liberdade, a equação correspondente tem a forma

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (3.13)$$

onde

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_n} = \text{razão de amortecimento}$$

resultando

$$\omega_d = (1 - \xi^2)^{1/2} \cdot \omega_n$$

sendo ω_d frequência natural amortecida.

3.8 - PROBLEMAS COM CARGAS NÃO NULAS

A partir dos dados obtidos de frequências e modos naturais de vibração, no espaço normal, podem ser calculados os seis problemas em que a excitação não é nula. Ela pode aparecer como deslocamentos impostos, acelerações dos suportes e forças externas.

Para este fim são utilizadas as propriedades da matriz espectral de autovalores e da matriz modal. As equações diferenciais são desacopladas e resolvidas no espaço normal para finalmente serem transformadas para o real.

Para os casos de carregamentos simples (constante subitamente aplicado, linearmente crescente, impacto e harmônico) existem respostas específicas. Para o caso de carregamento transiente é utilizada a integral de Duhamel. As velocidades e acelerações são conseguidas através da derivação dos deslocamentos, usando a regra de Leibnitz.

3.8.1 - Seqüência para Aplicação da Superposição Modal

Para a aplicação da Superposição Modal é necessário seguir uma seqüência de procedimentos, desde a equação inicial, para chegar-se a solução da equação modal.

a) Equação do Movimento

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q\} \quad (3.14)$$

b) Obtenção das Frequências e Modos Naturais de Vibração

A partir do problema de autovalor

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\} \quad (3.15)$$

são obtidas as frequências e modos naturais

$$[\omega^2] = \text{matriz espectral de autovalores}$$

$$[\phi] = \text{matriz modal, de autovetores}$$

c) Desacoplamento das Equações Diferenciais

Para o desacoplamento das equações são utilizadas duas propriedades dos autopares:

Se $[K]$ é simétrica, definida positiva ou semidefinida positiva e $[M]$ é simétrica, definida positiva, os autovalores tem as seguintes propriedades:

$$[\phi]^T[M][\phi] = [I] \quad (3.16)$$

$$[\phi]^T[K][\phi] = [\omega^2] \quad (3.17)$$

Primeiro é feita mudança de variável:

$$\{X\} = [\phi]\{\eta\} \quad (3.18)$$

$$\{\ddot{X}\} = [\phi]\{\ddot{\eta}\} \quad (3.18a)$$

Substituindo (3.18) e (3.18a) em (3.14) e fazendo $[C]=0$

$$[M][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [K][\phi]\{\eta\} = \{Q\} \quad (3.19)$$

Premultiplicando por $[\phi]^T$ e utilizando as propriedades (3.16)

e (3.17)

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [\phi]^T[K][\phi]\{\eta\} = [\phi]^T\{Q\} \quad (3.20)$$

$$[I]\{\ddot{\eta}\} + [\omega^2]\{\eta\} = \{F\} \quad (3.21)$$

Incluindo o amortecimento modal $2\xi\omega$

$$\{\ddot{\eta}\} + [2\xi\omega]\{\dot{\eta}\} + [\omega^2]\{\eta\} = \{F\} \quad (3.22)$$

Equações desacopladas (equações normais ou modais)

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = F_r, \quad r = 1, n \quad (3.23)$$

onde

$$F_r(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{j,r} Q_j(t) \quad (3.24)$$

$$\phi_{j,r} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{1,r} \\ \vdots \\ \phi_{j,r} \\ \vdots \\ \phi_{n,r} \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

d) Equacionamento da resposta dinâmica

O próximo passo é a solução da equação da variável modal, para cada frequência natural.

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = F_r \quad (3.26)$$

Devem ser resolvidas a equação homogênea e a particular. Se a velocidade inicial $\dot{\eta}_r(0)$ ou o deslocamento inicial $\eta_r(0)$ não são nulos, uma resposta de vibração livre deve ser adicionada para cada modo e esta é obtida a partir da resolução da equação homogênea.

$$\ddot{\eta}_r^h + 2\xi_r\dot{\eta}_r^h + \omega_r^2\eta_r^h = 0 \quad (3.27)$$

Para a obtenção da solução devida a forças externas deve ser resolvida a equação particular que define F_r . Para este fim utiliza-se a solução geral proposta por Duhamel em forma de integral.

A solução completa será a soma das duas.

e) Solução Final

Após a composição das respostas homogêneas com as particulares estas são transformadas para o espaço real.

3.9 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

$$\ddot{\eta}_r^h + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r^h + \omega_r^2 \eta_r^h = 0 \quad r = 1, n \quad (3.28)$$

$$\eta_r^h(t) = e^{-\xi_r \omega_r t} \left[\frac{\dot{\eta}_r(0) + \eta_r(0) \xi_r \omega_r}{\omega_d} \cdot \text{sen}(\omega_d t) + \eta_r(0) \cdot \text{cos}(\omega_d t) \right] \quad (3.29)$$

onde

$\eta_r(0)$ e $\dot{\eta}_r(0)$ provém das condições iniciais

$$\{\eta(0)\} = [\phi]^T [M] \{X(0)\} \quad (3.30)$$

$$\{\dot{\eta}(0)\} = [\phi]^T [M] \{\dot{X}(0)\} \quad (3.31)$$

$\{X(0)\}$ = deslocamento inicial

$\{\dot{X}(0)\}$ = velocidade inicial

Derivando em relação ao tempo temos $\dot{\eta}_r^h(t)$ e $\ddot{\eta}_r^h(t)$.



3.10 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO PARTICULAR

Para a resposta modal com carga externa é utilizada a solução geral proposta por Duhamel em forma de integral para cada modo. Ela expressa a resposta dinâmica de um sistema como a superposição da resposta a infinitos impulsos, que representam os pontos de carregamentos.

$$\eta_r^p(t) = \frac{1}{\omega_{d,r}} \int_0^t N_r(\tau) \cdot e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \cdot \text{sen}[\omega_{d,r} (t-\tau)] d\tau \quad (3.32)$$

onde $\omega_{d,r}$ é a frequência natural amortecida.

3.10.1 - Carregamento Constante Subitamente Aplicado

No caso de uma força subitamente aplicada que permanece constante com o tempo, $F_r(t) = P_0$, resolvendo-se por Duhamel.

$$\eta_r^p(t) = \frac{P_0}{\omega_{d,r} \omega^2} \left[\omega_{d,r} - \left(\omega_{d,r} \cdot \cos(\omega_{d,r} t) + \xi_r \cdot \omega_r \cdot \text{sen}(\omega_{d,r} t) \right) \right] \cdot e^{-\xi_r \omega_r t} \quad (3.33)$$

$$\dot{\eta}_r^p(t) = \frac{P_0}{\omega_{d,r}} \cdot \text{sen}(\omega_{d,r} t) \cdot e^{-\xi_r \omega_r t} \quad (3.34)$$

$$\ddot{\eta}_r^p(t) = \frac{P_0}{\omega_{d,r}} \left[\omega_{d,r} \cos(\omega_{d,r} t) - \xi_r \omega_r \text{sen}(\omega_{d,r} t) \right] \cdot e^{-\xi_r \omega_r t} \quad (3.35)$$

3.10.2 - Carregamento Linearmente Crescente (Rampa)

Neste caso temos uma carga externa $F_r(t) = a \cdot t$. Resolvendo-se por Duhamel, tem-se:

$$\eta_r(t) = \frac{a}{\omega_d \omega^3} \left[\left[2\xi_r \omega_d \cos(\omega_d t) + \omega_r (2\xi_r^2 - 1) \sin(\omega_d t) \right] e^{-\xi_r \omega_r t} + \omega_d (\omega_r t - 2\xi_r) \right] \quad (3.36)$$

$$\dot{\eta}_r(t) = \frac{-a}{\omega_d \omega^2} \left[\left[\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi_r \omega_r \sin(\omega_d t) \right] e^{-\xi_r \omega_r t} - \omega_d \right] \quad (3.37)$$

$$\ddot{\eta}_r(t) = \frac{a}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \cdot e^{-\xi_r \omega_r t} \quad (3.38)$$

3.10.3 - Excitação Harmônica

A excitação harmônica é uma carga definida como

$$F_r(t) = A_0 \sin(\omega_e t), \text{ onde}$$

A_0 = amplitude da excitação harmônica, m

ω_e = frequência de excitação, rd/s

Aplicando-se Duhamel e desprezando-se os termos em que aparecem ω_d , isto é, sem amortecimento, fica:

$$\eta_r^p(t) = \frac{A_0 / \omega_r^2}{(1 - \beta_r^2)^2 + (2\xi_r \beta_r)^2} \left[2\xi_r \beta_r \cos(\omega_e t) - (1 - \beta_r^2) \sin(\omega_e t) \right] \quad (3.39)$$

Derivando-se a expressão acima, tem-se a velocidade e a aceleração.

3.10.4 - Carga de Impacto

O carregamento tipo impacto é definido como um carregamento tipo pulso, com duração tendendo a zero. Esta força é assumida constante durante o pulso.

$$F_r = I\delta(t)$$

A expressão do deslocamento é

$$\eta_r(t) = \frac{I}{\omega_{dr}} \text{sen}(\omega_{dr} t) e^{-\xi_r \omega_r t}$$

3.11 - DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Outra solução possível é a do domínio da frequência. A resposta em frequência consiste na solução da equação geral para

$$F_r(t) = A_0 \text{sen}(\omega_e t)$$
$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = A_0 \text{sen}(\omega_e t)$$

A solução adimensional fica:

$$\zeta = \frac{X_o}{X_e} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.40)$$

$$\text{tg}(\phi) = \left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right) \quad (3.41)$$

onde:

X_e = deflexão estática, m

X_o = resposta dinâmica, m

ζ = amplificação dinâmica

ϕ = ângulo de fase, rd

$\xi = \frac{C}{C_c} =$ razão de amortecimento

$\beta = \frac{\omega_e}{\omega_n} =$ razão de frequência

3.12 - CARREGAMENTO TRANSIENTE

Carregamento transiente é aquele definido por forças aleatórias, fornecidas por pares de pontos $(t, F_r(t))$.

A solução dos deslocamentos é obtida aplicando a integral Duhamel. A solução das velocidades é obtida derivando a solução anterior com uso da regra de Leibnitz e reaplicando Duhamel. Para a solução das acelerações pode-se usar o mesmo processo ou a equação diferencial do movimento.

$$\eta_r^p(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t F_r(\tau) e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \cdot \text{sen}[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (3.42)$$

$$\dot{\eta}_r^p(t) = -\xi_r \omega_r \eta_r^p(t) + \int_0^t F_r(\tau) \cos[\omega_d(t-\tau)] e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} d\tau \quad (3.43)$$

$$\ddot{\eta}_r^p(t) = -2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r^p(t) - \omega_r^2 \eta_r^p(t) + F_r(t) \quad (3.44)$$

3.13 - SOLUÇÃO FINAL

A solução completa no espaço normal será a soma da solução homogênea com a particular:

$$\eta_r(t) = \eta_r^h(t) + \eta_r^p(t) \quad (3.45)$$

$$\dot{\eta}_r(t) = \dot{\eta}_r^h(t) + \dot{\eta}_r^p(t) \quad (3.46)$$

$$\ddot{\eta}_r(t) = \ddot{\eta}_r^h(t) + \ddot{\eta}_r^p(t) \quad (3.47)$$

Para a solução final a solução completa é transformada para o espaço real.

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \cdot \{\phi\}^r \quad (3.48)$$

$$\{\dot{\mathbf{X}}\} = \sum_{r=1}^n \dot{\eta}_r(t) \cdot \{\phi\}^r \quad (3.49)$$

$$\{\ddot{\mathbf{X}}\} = \sum_{r=1}^n \ddot{\eta}_r(t) \cdot \{\phi\}^r \quad (3.50)$$

"O vetor deslocamento $\{\mathbf{X}\}$ é a soma dos deslocamentos modais $\{\phi\}^r$, cada um multiplicado por um peso $\eta_r(t)$ variável com o tempo. São somas dos modos naturais de vibração, em proporções entre si que dependem das condições iniciais $\{\mathbf{X}(0)\}$ e $\{\dot{\mathbf{X}}(0)\}$ e das forças excitadoras $\{Q\}$ ".

A teoria e o desenvolvimento do processo de cálculo por superposição modal e suporte matemático são encontrados em Hildebrand (1965), Gouvêa, Bathe (1976), Tavares (1985), Clough (1989), Cordovil (1990) e Prodonoff (1990).

CAPÍTULO IV - O PROGRAMA ANESDE 3.0

4.1 - INTRODUÇÃO

O programa ANESDE 3.0 provém do programa ANESDE 2.0, após inclusões das rotinas dos elementos tri-dimensionais. Para receber estas rotinas foram necessárias modificações no programa original, sem alterar as estruturas de resolução dos problemas.

4.2 - MODIFICAÇÕES

As modificações necessárias foram quanto o uso dos vetores de locação dinâmica de memória, e de chamadas das subrotinas adicionais.

Os vetores estavam sendo utilizados para armazenar, na fase intermediária de cálculos, apenas duas das três coordenadas dos elementos, devido serem todos os elementos planares. Com isto estava sendo economizada uma maior área para o processamento. Esta fase foi reestruturada, de forma a permitir o armazenamento das três coordenadas, X, Y e Z. Também foram adicionados novos controles, para que os vetores citados pudessem armazenar as novas variáveis inerentes aos elementos.

Para a chamada das novas subrotinas foram definidos novos dados de controles correspondentes a estas.

Originalmente, no caso de elemento tipo barra, era definido um controle principal, específico para barra, e um controle secundário para o tipo de barra, no caso, único. Foi aproveitado este controle secundário para a chamada do elemento barra tridimensional, a partir da definição de mais um valor para esta variável.

No caso de elemento tipo viga, era definido um controle principal, específico para viga, e um controle secundário, para o tipo de

viga. Este controle secundário escolhia entre chamada do elemento viga ou viga-coluna de dois nós, tipo simples ou tipo Reissner. Foi adicionado um valor de forma a aproveitar esta seleção para a chamada do elemento viga-coluna tridimensional, no caso, tipo simples ou Reissner.

4.3 - UNIDADES PRINCIPAIS

O programa ANESDE 3.0 é constituído por um programa principal que coordena todo o sistema e cinquenta e três subrotinas. Pode ser em três unidades funcionais:

- Pré-processador - Unidade de leitura
- Processador - Unidade de montagem e resolução do problema
- Pós-processador - Unidade de impressão dos resultados

O pré-processador lê os dados de entrada e de controle (define os parâmetros dependentes do problema e matrizes dos dados). O processador é a unidade de montagem e resolução do problema principal. São calculadas as matrizes de rigidez, de massa e elástica conforme os elementos utilizados e o tipo de análise e resolvido o problema. A última unidade imprime os resultados.

Para melhor entendimento do ANESDE 3.0 as subrotinas são aglutinadas formando diversos blocos principais, conforme mostrado na figura 4.1.

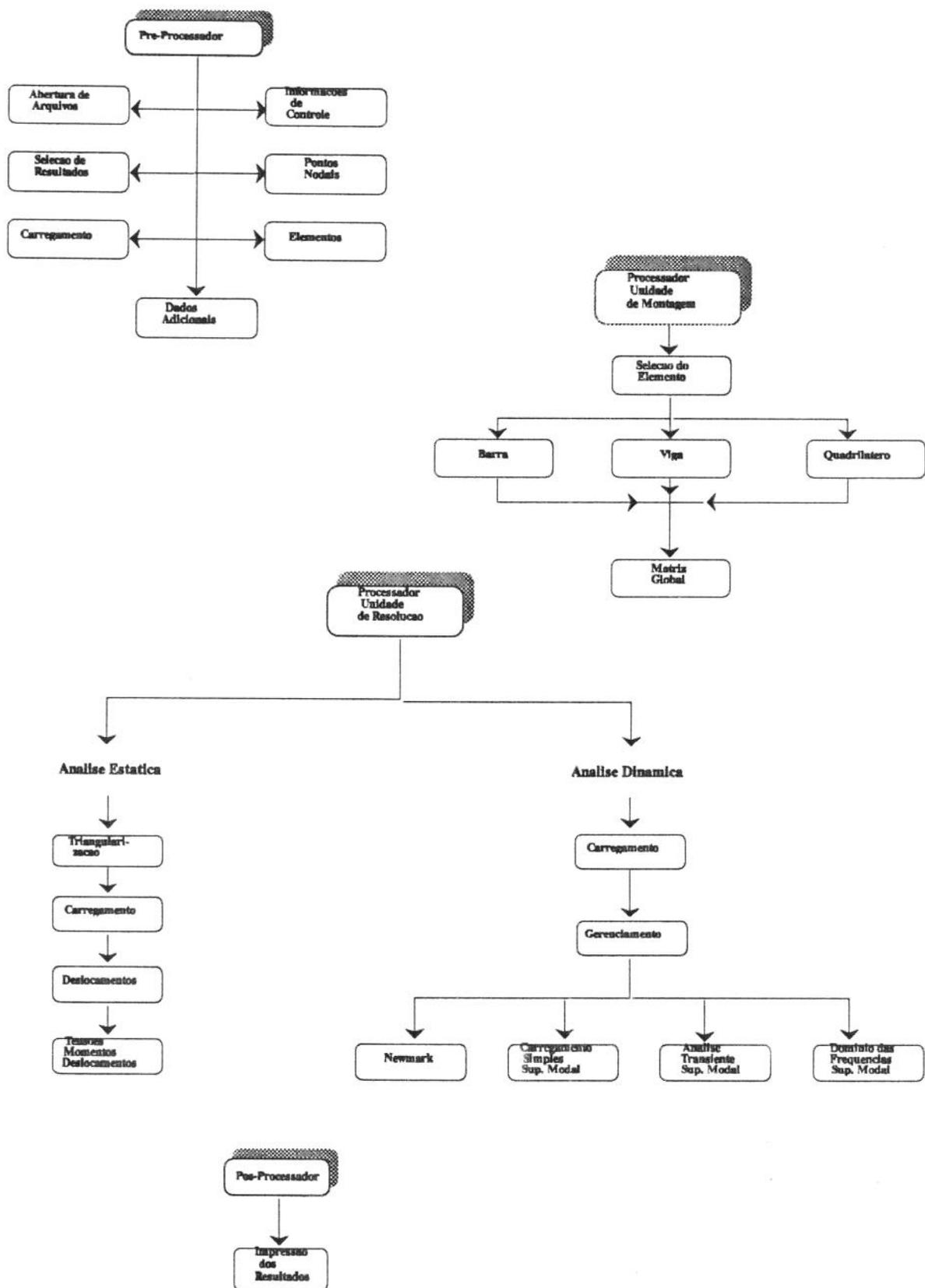


Fig. 4.1 - Fluxograma de Blocos do ANESDE 3.0

4.4 - PRÉ-PROCESSADOR

Conforme esquema da figura 4.1 o pré-processador é constituído por sete blocos, todos coordenados pelo programa principal. Corresponde à unidade de abertura dos arquivos de trabalho e leitura dos dados de entrada constituídos pelos dados de controle e da modelagem do problema. Os dados de entrada são característicos do problema a ser resolvido. Estas informações são colocadas externamente em arquivos específicos de cada problema e são:

a) Dados de Controle

- Tipo de análise desejada.
- Valores de controles utilizados na solução do problema.
- Número dos nós e elementos dos quais são desejados os resultados.

b) Dados dos Pontos Nodais

- Número de pontos nodais.
- Coordenadas dos pontos nodais.
- Condição de contorno dos pontos nodais.

c) Dados dos Elementos

- Número de grupos de elementos.
- Tipo de elemento de cada grupo.
- Número de elementos em cada grupo.
- Propriedades dos elementos.
- Número dos nós dos elementos.

d) Dados de Carregamento

- Número dos nós carregados.
- Tipo de carregamento.
- Direção do carregamento.
- Valor da carga.

O primeiro bloco corresponde à abertura dos arquivos de trabalho. São constituídos por 14 arquivos, um de dados de entrada, um de saída e os outros são arquivos intermediários. Nos arquivos intermediários são guardados os dados dos nós, cargas, elementos e todos os dados lidos e calculados que são necessários na resolução da análise. Desta forma não ocupam a memória disponível do computador a não ser quando necessário.

O segundo bloco lê as informações do controle principal, pertinentes à qualquer cálculo estrutural, estático ou dinâmico. Entre estes estão o número de pontos nodais, de grupos de elementos, o tipo de análise desejada e o tipo de carregamento.

O terceiro bloco é o dos resultados a serem impressos. São lidos os números dos nós e elementos dos quais são desejadas as soluções, de forma a reduzir o volume do arquivo de saída e facilitar o estudo.

No bloco quatro são lidos os pontos nodais. Para cada nó são dadas as condições de contorno, livre ou não, e as coordenadas X, Y, Z. A partir destes dados é calculado o número de equações do problema.

O quinto bloco faz a leitura dos dados de carregamento. Conforme o tipo de análise são chamadas subrotinas diferentes para leitura do número dos nós carregados, direção ou grau de liberdade de cada carga e valor desta. É então montada o vetor carga e guardada no arquivo de trabalho específico.

No bloco seguinte são lidos os dados que caracterizam os elementos finitos que compõem a modelagem do problema. A partir da informação do número de grupos de elementos, para cada grupo é lido o tipo de elemento, o número de elementos constituintes deste grupo, as propriedades e números dos nós das extremidades. As rotinas que constituem este bloco permitem geração automática de elementos.

O sétimo e último bloco desta unidade é específico para as análises dinâmicas. Neste bloco são lidos valores de controle utilizados na solução do problema, controles estes diferentes em tipo e quantidade de dados conforme a análise dinâmica selecionada.

4.5 - PROCESSADOR

O processador do ANESDE 3.0 executa a montagem e resolução do problema.

4.5.1 - Montagem

Para a montagem do problema o processador é constituído por cinco blocos. Os blocos correspondentes aos elementos são selecionados conforme os elementos que constituem o problema, sendo chamados para análise estática e dinâmica, mas os procedimentos internos de cada bloco variam com o tipo de análise.

As reservas de espaço nas tripas (vetor de alocação dinâmica) e a quantidade de matrizes a serem montadas dependem do tipo de análise e do elemento em questão.

Na análise estática são montadas as matrizes de rigidez K e elástica C , sendo que esta última é empregada de forma diferente conforme o elemento. Para barras servem aos cálculos de tensões. Para viga aos de momentos fletores.

Para a análise dinâmica é calculada também a matriz de massa.

Outro ponto interessante é a rotação das matrizes do espaço local para o global. Como nos casos de viga-coluna 2D e viga-coluna 3D os eixos locais não estão alinhados com os globais é necessário rodar as matrizes de rigidez e massa para o global.

Para melhor entendimento dos procedimentos são descritos os blocos do fluxograma:

1ª) Seleção do Elemento - Neste bloco são inicialmente reservados espaços nas tripas, conforme o tipo de análise. Após é chamado o bloco do elemento que compõe cada grupo de elementos, até passar por todos os elementos do último grupo.

2ª) Barra - No caso de elemento tipo barra é chamado este bloco que seleciona entre barra 2D e barra 3D. São montadas as matrizes de rigidez, massa (no caso dinâmico) e elástica. Esta última é utilizada nos cálculos das tensões nos elementos deste tipo.

3ª) Viga - Neste bloco é selecionado o elemento entre os tipos de vigas existentes no programa, Viga 2D, Viga-Coluna 2D, Viga Coluna 3D e calculadas as matrizes. No caso dos elementos tipo Viga-Coluna 2D e 3D, que não são obrigados a terem seus eixos alinhados com os globais, as matrizes são rodadas do sistema local para o global. A matriz C será utilizada nos cálculos dos momentos fletores.

4ª) Quadrilátero - Só existe um tipo de elemento quadrilátero no ANESDE. Neste bloco são chamadas as rotinas que calculam as matrizes deste. A matriz C é usada no cálculo das tensões em dois casos distintos: estado plano de tensões e estado plano de deformações.

5ª) Matriz Global - Para qualquer dos cinco tipos de elementos são calculadas as matrizes de rigidez e massa a cada chamada de um elemento. Após, estas matrizes são rodadas para o espaço global, se for o caso. O próximo passo consiste na triangularização das matrizes deste elemento, pelo fato de serem simétricas, e adição destas nas matrizes de rigidez e massa globais compactadas. Desta forma ao serem calculadas as matrizes do último elemento do problema também estará concluída a montagem das matrizes de todo o sistema.

4.5.2 - Resolução

Após montadas as matrizes globais do problema é processada a resolução deste conforme análise requerida.

a) Análise Estática

1ª) Triangularização - No caso da análise estática, após obtenção da matriz de rigidez global, é realizada a triangularização por Cholesky (vide Bathe, 1976):

$$L \times D \times L^T$$

Isto só é possível em sistemas definidos positivos para os quais todos elementos da diagonal são positivos. A partir deste ponto o problema pode ser resolvido para um ou mais carregamentos, sem repetir os cálculos anteriores.

2ª) Carregamento - São lidos os valores das cargas.

3ª) Deslocamentos - Os deslocamentos são calculados por meio de redução e substituição. Após, os resultados são impressos no arquivo de saída.

4ª) Tensões/Momentos - O último passo corresponde aos cálculos das tensões e momentos fletores. Para estes cálculos são chamados todos os elementos da estrutura e utilizados os deslocamentos e a matriz C. A solução é impressa no arquivo de saída.

Havendo mais casos de carregamentos as três últimas fases são repetidas.

b) Análise Dinâmica

Para cada tipo de análise dinâmica temos seqüências diferentes para solução do problema.

1ª) Vetor carga - O vetor carga é lido do arquivo de trabalho correspondente à análise sendo realizada.

2ª) Gerenciamento - O segundo bloco desta parte corresponde ao gerenciamento da resolução das equações de equilíbrio conforme o tipo de análise. Existem quatro opções de chamada:

- a) Integração direta por Newmark;
- b) Superposição modal para carregamentos simples;
- c) Análise transiente;
- d) Problema no domínio das freqüências.

3ª) Resolução por Newmark - A partir da chamada da rotina NEWM são resolvidas as equações de equilíbrio dos elementos finitos usando o método de integração direta de Newmark, passo a passo. Primeiro são calculadas as constantes de integração e é montada a matriz de rigidez efetiva a partir do uso das matrizes de rigidez e massa e de constantes de integração. Esta matriz é triangularizada da mesma forma que ocorre no caso da solução estática.

Agora, para cada intervalo de tempo é calculado a carga efetiva a partir dos dados obtidos no tempo anterior e resolvido o problema por decomposição e substituição para o cálculo do deslocamento. São então calculadas as velocidades e acelerações a partir do deslocamento e então as tensões ou momentos fletores.

Este procedimento é repetido passo a passo até concluído o período para o qual o problema está sendo analisado.

4ª) Carregamento Simples - Para a resolução de problemas de carregamentos simples por superposição modal é chamada a rotina MSUP. O

primeiro passo para a resolução do problema consiste na resolução do auto-problema, obtendo os autopares (frequências e modos naturais). O próximo passo é calcular o deslocamento, a velocidade e a aceleração para cada equação decomposta através do uso da integral de Duhamel para o tempo $t+\Delta t$.

Com estes resultados são calculadas as tensões para todos os elementos. Este procedimento é repetido para todo período considerado.

5ª) Análise transiente - Para resolução de problemas de análise transiente é chamada a rotina GENER. Da mesma forma do caso anterior são calculados os autopares para a decomposição das equações. Então são calculados para cada $t+\Delta t$ os deslocamentos, velocidades e acelerações chamando a rotina SIMPSON, que executa as integrações necessárias para a resolução. Com estes dados são calculadas as tensões.

6ª) Domínio das Frequências - Para este caso é chamada a rotina RESPFREQ. Primeiro são calculados os autopares. Após são calculadas a amplitude e ângulo de fase para cada autopar. No relatório final são impressos para cada frequência a razão de frequência, amplitudes, angulos de fase e razão de amplitude.

4.6 - PÓS-PROCESSADOR

O pós-processador corresponde ao gerenciamento da impressão dos dados do problema e soluções, conforme o tipo de análises e elementos.

No caso de análises estáticas são impressos os deslocamentos, momentos fletores, forças axiais e tensões. Na dinâmica estes dados são impressos para cada intervalo de tempo solicitado, junto com informações de velocidade e aceleração. Na resolução por superposição modal também são impressos os autopares, a velocidade e a aceleração.

CAPÍTULO V - O ELEMENTO BARRA 3D

5.1 - INTRODUÇÃO

Para transformar o programa ANESDE2.0 em um com possibilidades de analisar colunas de perfuração em análise tri-dimensional foram criados os elementos Barra 3D e Viga-Coluna 3D. Os códigos destes elementos são constituídos pelos códigos principais de cada elemento e pelas subrotinas geradoras das matrizes características locais, transformação destas para globais e transformação dos deslocamentos globais em locais, para os cálculos das soluções secundárias.

No caso da barra foi criado apenas uma rotina englobando todos os passos citados acima.

Esta rotina está dividida em várias partes. A primeira corresponde a leitura e geração de informações dos elementos e materiais constituintes destes. São lidos os dados de todos os materiais a serem utilizados por elementos deste tipo, os nós constituintes de cada elemento e o número correspondente ao material. Na segunda parte são criadas as matrizes características. A matriz de rigidez já é criada no sistema global. A matriz de massa local e global é a mesma. A terceira e última parte corresponde aos cálculos secundários, força axial e tensão.

Devemos lembrar aqui que os cálculos principais, cujas soluções são os deslocamentos nodais, são realizados por rotinas constituintes do programa original.

O elemento tipo Barra 3D é um elemento simples, que não tem resistência à flexão. Só suporta forças axiais e só sofre deslocamentos axiais, tendo três graus de liberdade por nó.

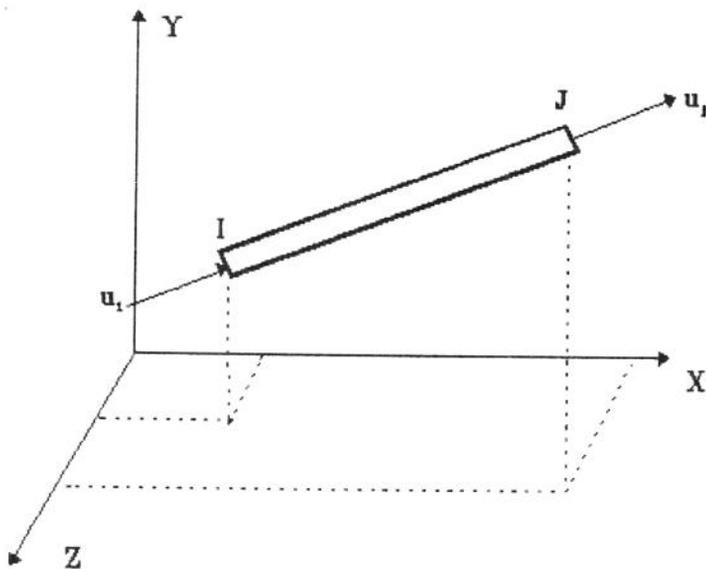


Fig. 5.1 - Elemento Barra 3D

A matriz de rigidez deste elemento pode ser obtida por vários processos. O desenvolvimento a ser apresentado neste trabalho corresponde a aplicação do teorema do deslocamento unitário.

5.2 - O TEOREMA DO DESLOCAMENTO UNITÁRIO

Este teorema é baseado no princípio do trabalho virtual e usado para determinar a força F_r necessária para manter o equilíbrio em uma estrutura para a qual a distribuição das tensões é conhecida.

Se um deslocamento virtual δU_r é apresentado no ponto de aplicação e na direção de uma força F_r , de forma que deformações virtuais $\delta \epsilon_r$ são produzidas na estrutura, quando o trabalho virtual é igualado à energia de deformação virtual, obtemos a seguinte equação:

$$F_r \cdot \delta U_r = \int_v \sigma^T \cdot \delta \epsilon_r \cdot dv \quad (5.1)$$

Em uma estrutura elástica linear, $\delta \underline{\epsilon}_r$ é proporcional a δU_r , isto é:

$$\delta \underline{\epsilon}_r = \underline{\epsilon}_r \cdot \delta U_r \quad (5.2)$$

onde $\underline{\epsilon}_r$ representa a distribuição das deformações compatíveis devido a um deslocamento unitário ($\delta U_r = 1$) aplicado na direção de F_r . As deformações $\underline{\epsilon}_r$ devem ser compatíveis somente com si próprio e com o deslocamento unitário imposto.

Substituindo (5.2) em (5.1), obtém-se:

$$F_r \cdot \delta U_r = \int_v \sigma^T \cdot \underline{\epsilon}_r \cdot \delta U_r \cdot dv \quad (5.3)$$

Cancelando os fatores δU_r :

$$F_r = \int_v \sigma^T \cdot \underline{\epsilon}_r \cdot dv \quad (5.4)$$

A equação (5.4) representa o teorema do deslocamento unitário, que estabelece que a força necessária, a um ponto r em uma estrutura, para manter equilíbrio sob uma distribuição de tensões especificadas, que pode ser derivada de uma distribuição de deslocamentos especificados, é igual a integral sob o volume da estrutura das tensões σ multiplicada pelas deformações $\underline{\epsilon}_r$, compatível com um deslocamento unitário correspondendo à força requerida. Este teorema é restrito a elasticidade linear devido a consideração em (5.2).

5.3 - MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES FORÇAS - DESLOCAMENTOS

O capítulo fundamental na aplicação do método de deslocamento matricial é a determinação das características de rigidez dos elementos da estrutura.

Podemos aplicar vários métodos para este propósito:

- 1) Teorema do deslocamento unitário;
- 2) Teorema de Castigliano (primeira parte);
- 3) Solução e equações diferenciais para os deslocamentos dos elementos;
- 4) Inversão das relações deslocamentos/forças.

O primeiro método é muito conveniente pois produz diretamente relações de forças/deslocamentos na equação matricial.

5.4 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PELO TEOREMA DOS DESLOCAMENTOS UNITÁRIOS

Para determinar a força típica F_i , podemos usar o teorema dos deslocamentos unitários.

$$F_i = \int_v \underline{\epsilon}_i \cdot \underline{\sigma}^T \cdot dv \quad (5.5)$$

sendo

$\underline{\epsilon}_i$ - matriz de deformações compatíveis devido a um deslocamento unitário na direção i .

$\underline{\sigma}$ - matriz das tensões devido as forças aplicadas F .

Os deslocamentos unitários podem ser aplicados em todos os pontos onde as forças estão agindo:

$$F = \int_v \underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma}^T \cdot dv \quad (5.6)$$

Desde que estamos trabalhando com um sistema linear, as deformações totais "e" devem ser expressas pela relação

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (5.7)$$

onde \mathbf{b} representa a matriz das deformações exatas devidas aos deslocamentos unitários \mathbf{u} .

Das relações deformações/tensões temos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \quad (5.8)$$

Substituindo (5.7) em (5.8)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (5.9)$$

e (5.9) em (5.6):

$$F = \int_V \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \cdot dV$$

$$F = \int_V \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \cdot dV \cdot \mathbf{u} \quad (5.10)$$

$$\text{ou} \quad F = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad (5.11)$$

$$\text{onde} \quad \mathbf{k} = \int_V \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \cdot dV \quad (5.12)$$

sendo que $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pode ser obtida facilmente, mas \mathbf{b} , representando a distribuição de deformações exatas, pode ser difícil ou até impossível de se obter analiticamente. Por isto é requerido o uso de funções entre deslocamentos e deformações.

Naturalmente, o grau de aproximação depende da forma com que as equações de equilíbrio e compatibilidade são satisfeitas.

Uma aproximação possível é selecionar a matriz \mathbf{b} que satisfaça apenas as equações de compatibilidade.

Denotando esta matriz aproximada por \mathbf{b} e observando que

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{b}, \text{ obtemos da equação (5.12)}$$

$$\mathbf{k} \approx \int_V \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \cdot dV \quad (5.13)$$

No caso em estudo, a barra, em que existe apenas forças e deslocamentos axiais, temos:

$$u_x = u_1 + (u_2 - u_1) \cdot \frac{x}{\ell} \quad (5.14)$$

onde u_1 é o deslocamento a $x = 0$,

u_2 é o deslocamento a $x = \ell$,

e ℓ é o comprimento do elemento barra.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{\ell}(u_2 - u_1) \quad (5.15)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Neste caso, a distribuição dada por (5.16) é exata; assim:

$$b = b = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na barra, que é um elemento uni-dimensional,

$$x = E$$

A matriz de rigidez

$$k = \int_v \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot dv$$

$$k = \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot dx$$

$$k = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = k \cdot u$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

A expressão (5.17) é a equação matricial que relaciona as forças com os deslocamentos, no caso da barra. Considera coordenadas locais, apenas na direção do eixo longitudinal, denominado \bar{x} . Complementando a equação acima para o caso tridimensional, adicionando as

forças e deslocamentos transversais, bem como linhas e colunas de zeros na matriz de rigidez, teremos:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x_1} \\ \bar{F}_{y_1} \\ \bar{F}_{z_1} \\ \bar{F}_{x_2} \\ \bar{F}_{y_2} \\ \bar{F}_{z_2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Na forma compacta:

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u} \quad (5.19)$$

5.5 - TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS

O próximo passo é determinar a matriz de rigidez em relação as coordenadas globais X, Y, Z, de forma a possibilitar a montagem do sistema completo.

A figura abaixo apresenta os eixos locais e globais, e os ângulos entre o eixo local \bar{x} e os eixos globais.

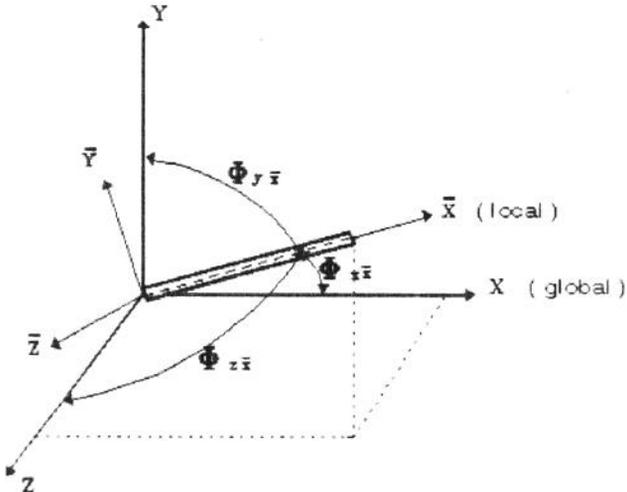


Fig. 5.2 - Coordenadas locais e globais

Os ângulos dos demais eixos locais com os globais não foram apresentados devido a estética. Os nove ângulos entre os eixos locais e globais, que nos darão os cossenos diretores, a serem utilizados nas transformações entre os dois sistemas são:

- $\Phi_{x\bar{x}}$ - ângulo entre o eixo x e \bar{x}
- $\Phi_{x\bar{y}}$ - ângulo entre o eixo x e \bar{y}
- $\Phi_{x\bar{z}}$ - ângulo entre o eixo x e \bar{z}
- $\Phi_{y\bar{x}}$ - ângulo entre o eixo y e \bar{x}
- $\Phi_{y\bar{y}}$ - ângulo entre o eixo y e \bar{y}
- $\Phi_{y\bar{z}}$ - ângulo entre o eixo y e \bar{z}
- $\Phi_{z\bar{x}}$ - ângulo entre o eixo z e \bar{x}
- $\Phi_{z\bar{y}}$ - ângulo entre o eixo z e \bar{y}
- $\Phi_{z\bar{z}}$ - ângulo entre o eixo z e \bar{z}

As relações entre as forças locais e globais são:

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= F_x \cdot \cos \Phi_{x\bar{x}} + F_y \cdot \cos \Phi_{y\bar{x}} + F_z \cdot \cos \Phi_{z\bar{x}} \\ \bar{F}_y &= F_x \cdot \cos \Phi_{x\bar{y}} + F_y \cdot \cos \Phi_{y\bar{y}} + F_z \cdot \cos \Phi_{z\bar{y}} \\ \bar{F}_z &= F_x \cdot \cos \Phi_{x\bar{z}} + F_y \cdot \cos \Phi_{y\bar{z}} + F_z \cdot \cos \Phi_{z\bar{z}} \end{aligned}$$

Reescrevendo as equações acima, para cada nó do elemento, na forma matricial, temos:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x_1} \\ \bar{F}_{y_1} \\ \bar{F}_{z_1} \\ \bar{F}_{x_2} \\ \bar{F}_{y_2} \\ \bar{F}_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{z\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{x\bar{y}} & \cos \Phi_{y\bar{y}} & \cos \Phi_{z\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{x\bar{z}} & \cos \Phi_{y\bar{z}} & \cos \Phi_{z\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{z\bar{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{y}} & \cos \Phi_{y\bar{y}} & \cos \Phi_{z\bar{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{z}} & \cos \Phi_{y\bar{z}} & \cos \Phi_{z\bar{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

ou $\bar{F} = T.F$, onde T é a matriz de transformação.

Da mesma forma, $\bar{u} = T.u$

Da equação (5.19), temos

$$\bar{F} = \bar{k}.\bar{u} = \bar{k}.T.u$$

$$T.F = \bar{k}.T.u$$

$$F = T^T.\bar{k}.T.u$$

como $F = k.u$,

$$k = T^T.\bar{k}.T \tag{5.21}$$

Procedendo com os cálculos matriciais conforme a equação acima, chegamos na matriz de rigidez global do elemento tipo Barra 3D:

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

onde:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \cos^2 \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{x\bar{x}} \cdot \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{x\bar{x}} \cos \Phi_{z\bar{x}} \\ \cos \Phi_{y\bar{x}} \cdot \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos^2 \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{y\bar{x}} \cdot \cos \Phi_{z\bar{x}} \\ \cos \Phi_{z\bar{x}} \cdot \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{z\bar{x}} \cdot \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos^2 \Phi_{z\bar{x}} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Podemos notar que dos nove cossenos diretores, no caso Barra 3D, só utilizamos três, os referentes ao eixo \bar{x} .

5.6 - MATRIZ DE MASSA

Nos métodos matriciais de análise de estruturas nós nos deparamos com quantidades discretas, forças concentradas e momentos, deflexões e rotações a um ponto. Assim todas equações de elasticidade

para meios contínuos são reformuladas como equações matriciais usando estas quantidades discretas.

Para problemas estáticos em que são consideradas pequenas deformações:

$$\bar{u} = a \bar{U} \quad (5.24)$$

onde

$$\bar{u} = \{\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z\}$$

$$\bar{U} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n\}$$

$$a = a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Para problemas dinâmicos a relação simples (5.24) só é válida para casos especiais. Ela será uma boa aproximação desde que U seja determinado de equações dinâmicas do sistema e seja considerado um grande e suficiente número de deslocamentos U.

Assim a matriz de massa equivalente (ou consistente) no sistema local é dada por:

$$\bar{M} = \int_v \rho a^T a dv \quad (5.25)$$

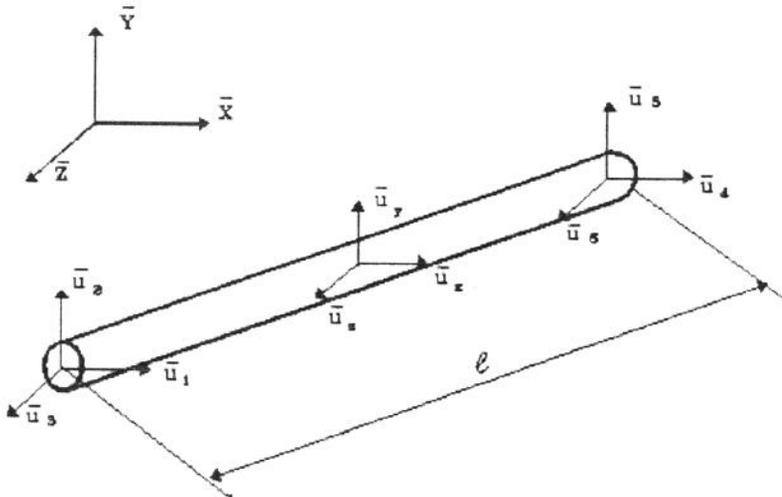


Fig. 5.3 - Deslocamentos locais em um elemento tipo Barra 3D

Da figura 5.3 temos:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= \bar{u}_1 + (\bar{u}_4 - \bar{u}_1)\xi \\ \bar{u}_y &= \bar{u}_2 + (\bar{u}_5 - \bar{u}_2)\xi \\ \bar{u}_z &= \bar{u}_3 + (\bar{u}_6 - \bar{u}_3)\xi\end{aligned}\tag{5.26}$$

onde

$$\xi = \frac{x}{\ell}\tag{5.27}$$

ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{Bmatrix}\tag{5.28}$$

Assim

$$a = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}\tag{5.29}$$

Colocando a equação da massa

$$\bar{M} = \int_v \rho a^T a dv\tag{5.25}$$

em relação a ξ e considerando ρ e A constantes:

$$\bar{M} = \rho A \ell \int_0^1 a^T a d\xi\tag{5.30}$$

Introduzindo "a":

$$\bar{M} = \rho A \ell \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi \\ \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\bar{M} = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

5.7 - TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS LOCAIS PARA GLOBAIS

$$[M] = T^T [\bar{M}] T \quad (5.32)$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{z\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{x\bar{y}} & \cos \Phi_{y\bar{y}} & \cos \Phi_{z\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Phi_{x\bar{z}} & \cos \Phi_{y\bar{z}} & \cos \Phi_{z\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{x}} & \cos \Phi_{y\bar{x}} & \cos \Phi_{z\bar{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{y}} & \cos \Phi_{y\bar{y}} & \cos \Phi_{z\bar{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_{x\bar{z}} & \cos \Phi_{y\bar{z}} & \cos \Phi_{z\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Realizando o produto em (5.32) é observado que a matriz de massa do elemento Barra 3D é invariante quando transformado do sistema local para global. Isto se deve a que não temos deformações laterais e que a distribuição da massa em relação ao centro gravitacional do elemento não é alterada.

Assim

$$[M] = [\bar{M}] \quad (5.34)$$

CAPÍTULO VI - O ELEMENTO VIGA-COLUNA 3D

6.1 - INTRODUÇÃO

O elemento tipo viga-coluna 3D foi assumido como sendo uma barra, uniaxial, com dois nós, de seção transversal uniforme e características do material constantes. Resiste a forças axiais e transversais, a momentos fletores e a momentos torçores. É um elemento com seis graus de liberdade em cada nó (Fig. 6.1 e 6.2).

Pode estar orientado em qualquer direção e sentido em relação as coordenadas globais X, Y, Z, inclusive com coordenadas negativas. Quanto à teoria de cálculos para formação das matrizes de rigidez e massa, são considerados: a possibilidade de usar ou não o efeito das cargas axiais no deslocamento transversal e rotação (flexão); a opção de considerar ou não o efeito da deformação cisalhante; e a escolha entre viga simples ou viga de Reissner.

Para as leituras de informações e cálculos necessários no desenvolvimento de análise com este elemento foram criadas cinco rotinas. A primeira e principal lê e gera informações sobre os elementos e materiais, determina as variáveis necessárias aos cálculos dos elementos das matrizes características e administra a montagem local e global destas. Por último realiza os cálculos secundários, no caso, momentos fletores. As demais rotinas que constituem este elemento são:

- Cálculo das matrizes de rigidez e massa locais.
- Cálculo dos cossenos diretores.
- Rotação das matrizes locais para globais.
- Rotação dos deslocamentos globais para locais.

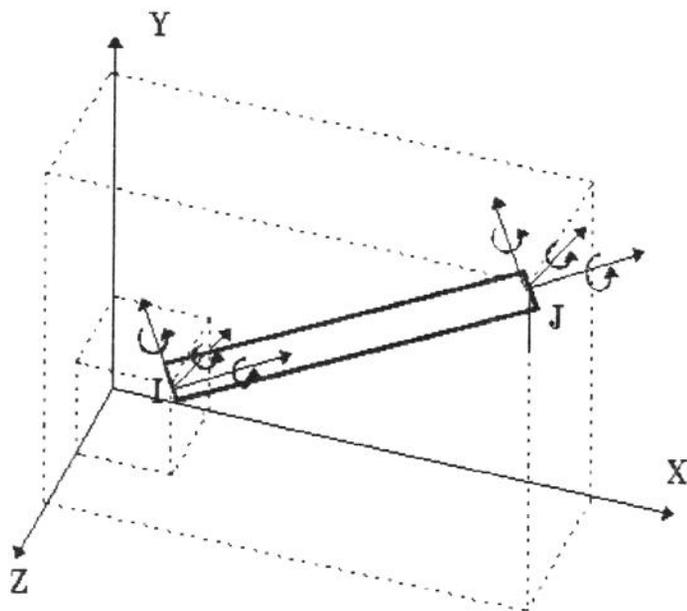


Fig. 6.1 - Elemento viga-coluna 3D.

6.2 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A viga-coluna 3D, como definida neste trabalho, está sujeita ao mais geral estado de cargas, suportando simultaneamente cargas axiais, transversais, fletoras e torções. Com este elemento podem ser investigados casos especiais em que estas cargas atuam separadamente ou em conjunto. As cargas atuando neste elemento são:

- Forças axiais - F_1 e F_7
- Forças cisalhantes - F_2, F_3, F_8 e F_9
- Momentos fletores - F_5, F_6, F_{11} e F_{12}
- Momentos torçores - F_4 e F_{10}

Da mesma forma que suporta doze cargas, tem doze deslocamentos, definidos como u_1 a u_{12} . O sentido positivo de cada deslocamento é o mesmo de sua carga correspondente (Fig. 6.2).

As forças axiais e os momentos torçores dependem apenas dos seus respectivos deslocamentos. Os momentos fletores e as forças cisalhantes dependem dos seus correspondentes deslocamentos e daqueles correspondentes as cargas atuando no plano perpendicular ao seu.

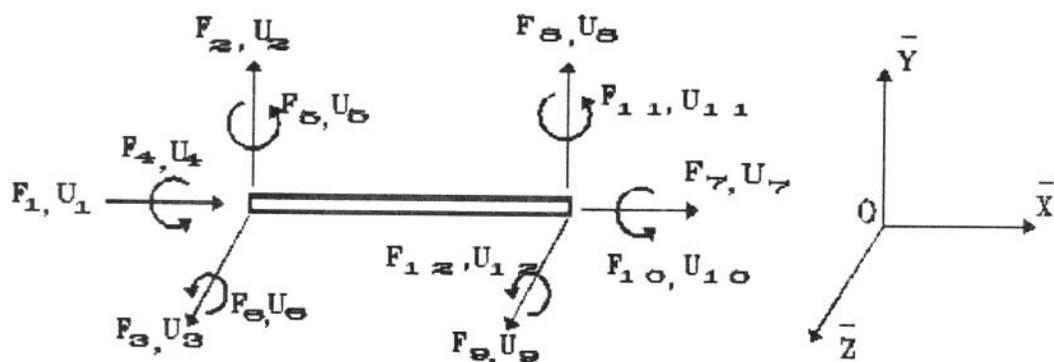


Fig. 6.2 - Cargas e deslocamentos na viga-coluna 3D - sentido positivo

Como o cruzamento dos planos $\bar{x}-\bar{y}$ e $\bar{x}-\bar{z}$ coincide com o eixo principal \bar{x} , as flexões e cisalhamentos podem ser considerados independentemente.

Para a determinação das propriedades de rigidez podem ser utilizados vários métodos (Martin, 1966) (Przemieniecki, 1985). Neste estudo são obtidas diretamente das equações diferenciais da teoria das vigas.

Os coeficientes de rigidez derivados destas equações serão exatas dentro dos limites assumidos na teoria das vigas.

Como os planos fletores $\bar{x}\bar{y}$ e $\bar{x}\bar{z}$ são assumidos coincidir com o eixo principal da seção transversal e que o eixo $O\bar{x}$ coincide com o eixo central da viga coluna, todas as forças podem ser separadas em seis grupos independentes um dos outros. Para cada grupo serão derivados os coeficientes de rigidez.

As forças atuando em cada grupo são:

- 1ª) Forças axiais - F_1 e F_7 .
- 2ª) Momentos torçores - F_4 e F_{10} .
- 3ª) Forças cisalhantes no plano $\bar{x}\bar{y}$ - F_2 e F_8 .
- 4ª) Momentos fletores no plano $\bar{x}\bar{y}$ - F_6 e F_{12} .
- 5ª) Forças cisalhantes no plano $\bar{x}\bar{z}$ - F_3 e F_9 .
- 6ª) Momentos fletores no plano $\bar{x}\bar{z}$ - F_5 e F_{11} .

6.3 - FORÇAS AXIAIS F_1 e F_7

Os deslocamentos, para o caso da viga da figura 6.3(a) são dados pela equação diferencial

$$F_1 = -\frac{du}{dx} \cdot E \cdot A \quad (6.1)$$

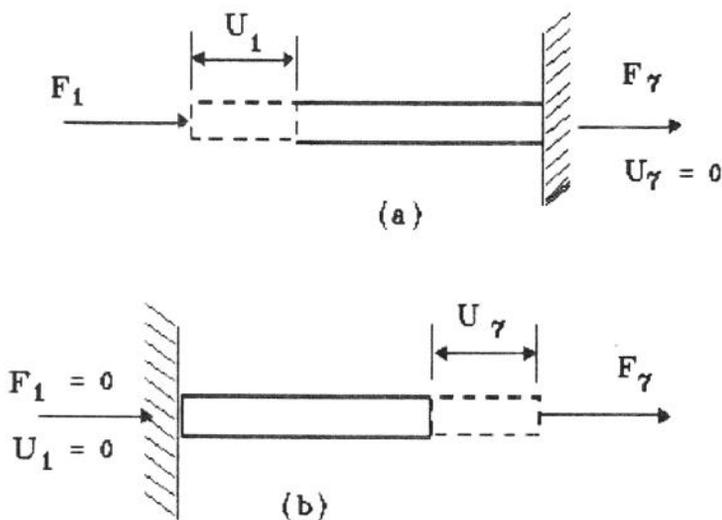


Fig. 6.3 Condições de Contorno - Forças Axiais F_1 e F_7 .

Integrando a equação 6.1:

$$F_1 \cdot x = - u \cdot E \cdot A + C_1 \quad (6.2)$$

Onde C_1 é uma constante de integração.

Assumindo que no extremo esquerdo da viga, a $x = 0$, temos deslocamento u_1 e que no extremo direito, a $x = L$, o deslocamento é zero, fig. 6.3(a), obtemos C_1 e F_1 :

$$C_1 = F_1 \cdot L \quad (6.3)$$

$$F_1 = \frac{E \cdot A}{L} \cdot u_1 \quad (6.4)$$

Para cumprir a equação de equilíbrio,

$$F_1 = - F_7 \quad (6.5)$$

A interpretação algébrica da relação força-deslocamento, $F=K \cdot u$, pode ser usado para definir os coeficientes de rigidez individuais devido às forças axiais:

$$K_{1,1} = \frac{E \cdot A}{L} \quad (6.6)$$

$$K_{7,1} = -\frac{E \cdot A}{L} \quad (6.7)$$

Os outros elementos desta coluna são zeros.

Da mesma forma, assumindo $u_1 = 0$ e $u_7 \neq 0$, fig. 6.3(b), obtém-se os elementos

$$K_{1,7} = \frac{-E \cdot A}{L} \quad (6.8)$$

$$K_{7,7} = \frac{E \cdot A}{L} \quad (6.9)$$

Os demais elementos da sétima coluna são nulos. Do mesmo modo, são nulos os demais elementos da primeira e sétima colunas.

6.4 - MOMENTOS TORÇORES - F_4 e F_{10}

A equação diferencial que relaciona o momento torçor com o deslocamento correspondente, consideradas as condições de contorno da figura 6.4(a), é:

$$F_4 = -G.J. \frac{d\theta}{dx} \quad (6.10)$$

onde

$G.J$ é a resistência à torção da seção da viga.

Integrando a equação (6.10), obtemos:

$$F_4 \cdot x = -G.J.\theta + C_1 \quad (6.11)$$

Considerando as condições de contorno $\theta = 0$ a $x = L$ é obtido o valor da constante de integração C_1 :

$$C_1 = F_4 \cdot L \quad (6.12)$$

Na extremidade esquerda, $x = 0$, $\theta = u_4$, assim:

$$F_4 = \frac{G.J}{L} \cdot u_4 \quad (6.13)$$

Pelas condições de equilíbrio para os momentos torçores

$$F_{10} = -F_4 \quad e$$

$$K_{4,4} = \frac{F_4}{u_4} = \frac{G.J}{L} \quad (6.14)$$

$$K_{10,4} = \frac{F_{10}}{u_4} = -\frac{GJ}{L} \quad (6.15)$$

Da mesma forma, assumindo $u_4 = 0$ e $u_{10} \neq 0$, fig. 6.4(b), obtém-se os elementos da matriz de rigidez:

$$K_{10,10} = \frac{G.J}{L} \quad (6.16)$$

$$K_{4,10} = -\frac{G.J}{L} \quad (6.17)$$

Todos os outros coeficientes da quarta e décima colunas e linhas são nulos.

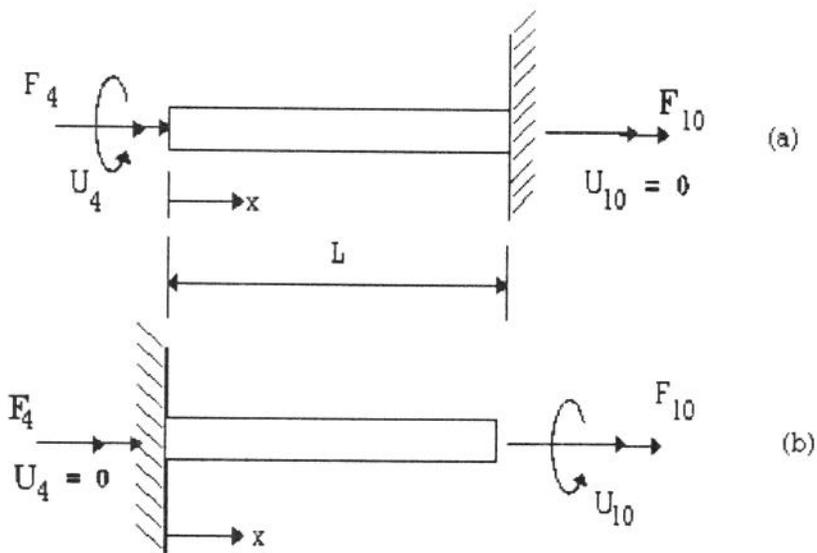


Fig. 6.4 - Momentos Torçores - Condições de Contorno

6.5 - FORÇAS CISALHANTES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Y}$ - F_2 e F_8

No plano $\bar{x}-\bar{y}$ existem deformações laterais devido forças cisalhantes associadas com momentos fletores. Estes deslocamentos são dados por:

$$v = v_b + v_s$$

onde v_b são os deslocamentos laterais devido às deformações fletoras e v_s devido às deformações cisalhantes, conforme figura 6.5(a).

As equações diferenciais que relacionam estas cargas com estes deslocamentos em 6.5(a), são:

Devido deformações cisalhantes

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{-F_2}{G.A_s} \quad (6.19)$$

onde A_s corresponde à área transversal efetivamente em cisalhamento.

Devido deflexões fletoras

$$E.I_z \cdot \frac{d^2V_b}{dx^2} = F_2 \cdot x - F_6 \quad (6.20)$$

Integrando estas duas equações e trabalhando-as, chegamos a:

$$E.I_z \cdot v = \frac{F_2 \cdot x^3}{6} - \frac{F_6 \cdot x^2}{2} + \left(C_1 - \frac{F_2 \cdot E \cdot I_z}{G \cdot A_s} \right) \cdot x + C_2 \quad (6.21)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

Considerando as condições de contorno da fig. 6.5(a) temos:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_s}{dx} = -\frac{F_2}{GA_s} \quad \text{a } x = 0 \text{ e a } x = L \quad (6.22)$$

$$v = 0$$

$$\text{a } x = L.$$

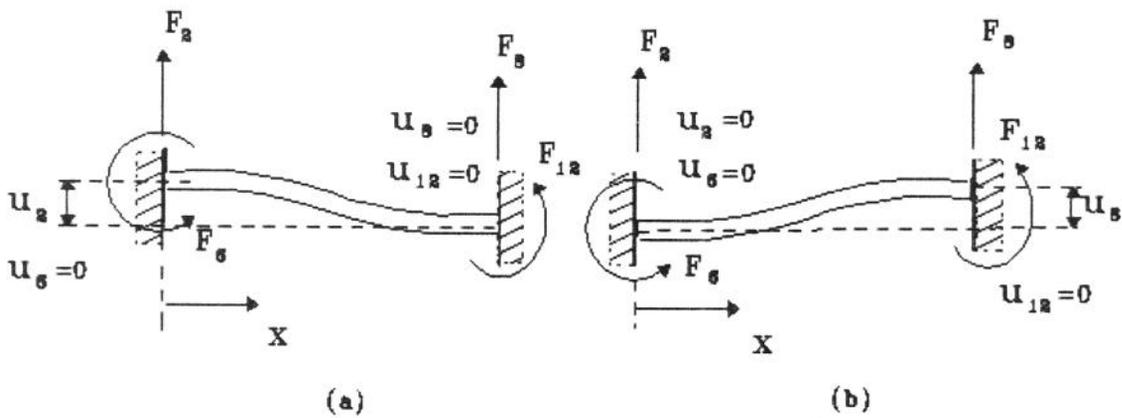


Fig. 6.5 - Forças cisalhantes F_2 e F_8 - Condições de contorno

Aplicando estas condições de contorno na equação 6.21,

temos

$$E \cdot I_z \cdot v = \frac{F_2 \cdot x^3}{6} - \frac{F_6 \cdot x^2}{2} - \frac{F_2 \cdot \Phi \cdot x \cdot L^2}{12} + (1 + \Phi) \cdot \frac{L^3 \cdot F_2}{12} \quad (6.23)$$

onde
$$F_6 = \frac{F_2 \cdot L}{2} \quad (6.24)$$

e
$$\Phi = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{G \cdot A_s \cdot L^2} \quad (6.25)$$

As demais forças atuando na viga-coluna podem ser determinadas das equações de equilíbrio.

$$F_8 = -F_2 \quad (6.26)$$

$$F_{12} = -F_6 + F_2 \cdot L \quad (6.27)$$

No extremo esquerdo, $x = 0$, $v = u_2$. Da equação (6.23)

$$u_2 = (1 + \Phi) \cdot \frac{L^3 \cdot F_2}{12 \cdot E \cdot I_z} \quad (6.28)$$

A partir destas equações, obtemos:

$$K_{2,2} = \frac{F_2}{u_2} = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^3} \quad (6.29)$$

$$K_{6,2} = \frac{F_6}{u_2} = \frac{F_2 \cdot L}{2u_2} = \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^2} \quad (6.30)$$

$$K_{8,2} = \frac{F_8}{u_2} = \frac{-12 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^3} \quad (6.31)$$

$$K_{12,2} = \frac{F_{12}}{u_2} = -\left(\frac{F_6 + F_2 \cdot L}{u_2}\right) = \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^2} \quad (6.32)$$

Os demais coeficientes da coluna dois são nulos.

Da mesma forma, utilizando as condições de contorno, conforme figura 6.5(b), obtém-se:

$$K_{8,8} = K_{2,2} = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^3} \quad (6.33)$$

$$K_{12,8} = -K_{6,2} = \frac{-6 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L^2} \quad (6.34)$$

6.6 - MOMENTOS FLETORES NO PLANO $\bar{X}\bar{Y}$ - F_6 e F_{12}

Para a determinação dos coeficientes de rigidez associados com as rotações sobre o eixo \bar{z} (u_6 e u_{12}) serão considerados momentos fletores e forças cisalhantes conforme as condições de contorno

apresentadas pelas figuras 6.6(a) e 6.6(b). As deflexões podem ser determinadas da equação (6.21) mas as constantes de integração devem ser avaliadas das condições de contorno da figura 6.6.

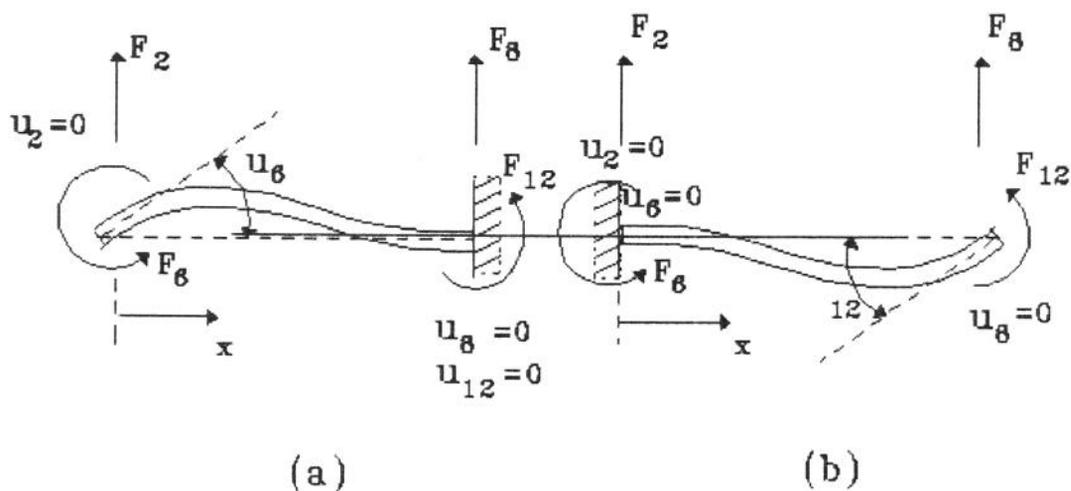


Fig. 6.6 - Momentos fletores F_6 e F_{12} - Condições de contorno

Pela figura 6.6(a), temos:

$$v = 0 \quad \text{a } x = 0 \quad \text{e a } x = L \quad (6.35)$$

$$\text{e} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv_s}{dx} = -\frac{F_2}{GA_s} \quad \text{a } x = L \quad (6.36)$$

Aplicando estas condições de contorno, a equação (6.21)

torna-se:

$$E \cdot I_z \cdot v = \frac{F_2}{6} \cdot (x^3 - L^2 \cdot x) + \frac{F_6}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) \quad (6.37)$$

$$\text{e} \quad F_2 = \frac{6 \cdot F_6}{(4 + \Phi) \cdot L} \quad (6.38)$$

As forças remanescentes atuando na viga podem ser determinadas das equações de equilíbrio.

$$F_8 = -F_2 \quad (6.26)$$

$$F_{12} = -F_6 + F_2 \cdot L \quad (6.27)$$

No extremo esquerdo, $x = 0$, temos:

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{dv}{dx} - \frac{dv_s}{dx} = u_6 \quad (6.39)$$

assim
$$u_6 = \frac{F_6 \cdot (1 + \Phi) \cdot L}{E \cdot I_z \cdot (4 + \Phi)} \quad (6.40)$$

A partir destas equações obtém-se

$$K_{6,6} = \frac{F_6}{u_6} = \frac{(4 + \Phi) \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot L} \quad (6.41)$$

$$K_{8,6} = \frac{F_8}{u_6} = \frac{-F_2}{u_6} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) L^2} \quad (6.42)$$

$$K_{12,6} = \frac{F_{12}}{u_6} = \left(\frac{-F_6 + F_2 \cdot L}{u_6} \right) = \frac{(2 - \Phi) \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) L} \quad (6.43)$$

Se a deflexão do lado esquerdo da viga-coluna é igual a zero, como mostrado pela figura 6.6(b), é evidente por simetria que:

$$K_{12,12} = K_{6,6} = \frac{(4 + \Phi) \cdot E \cdot I_z}{(1 + \Phi) L} \quad (6.44)$$

6.7 - FORÇA CISALHANTES NO PLANO $\bar{X}-\bar{Z}$ - F_3 e F_9

Os coeficientes de rigidez associados com os deslocamentos u_3 e u_9 podem ser derivados diretamente dos resultados anteriores. Entretanto deve ser observado que a convenção de sinais adotada é a da figura 6.2. As posições de momentos fletores positivos nos planos $\bar{x}-\bar{y}$ e $\bar{x}-\bar{z}$ são diferentes, conforme ilustrado pela figura 6.7.

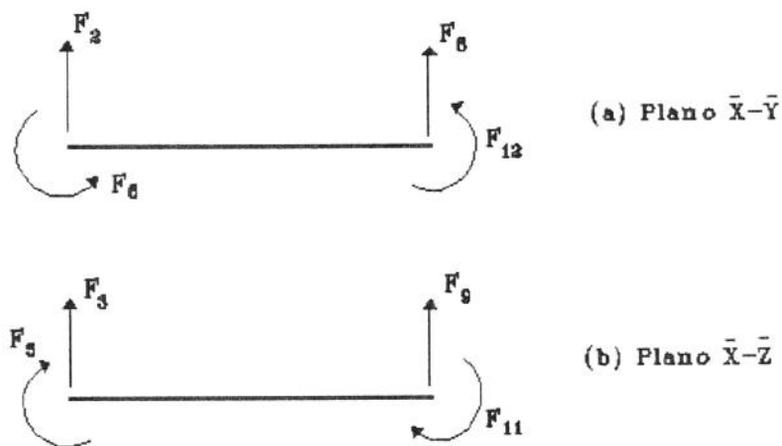


Fig. 6.7 - Convenção de sinais das forças cisalhantes e dos momentos fletores

As direções positivas dos momentos fletores F_5 e F_{11} são opostas as de F_6 e F_{12} . Desta forma:

$$K_{3,3} = K_{2,2} \quad (6.45)$$

$$K_{5,3} = -K_{6,2} \quad (6.46)$$

$$K_{9,3} = K_{8,2} \quad (6.47)$$

$$K_{11,3} = -K_{12,2} \quad (6.48)$$

$$K_{9,9} = K_{8,8} \quad (6.49)$$

$$K_{11,9} = -K_{12,8} \quad (6.50)$$

onde
$$\Phi_y = \left(\frac{12EI_z}{GA_x \ell^2} \right) = 24(1+\nu) \frac{A}{A_y} \left(\frac{r_z}{\ell} \right)^2 \quad (6.55)$$

$$\Phi_z = \frac{12EI_y}{GA_y \ell^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_x} \left(\frac{r_y}{\ell} \right)^2 \quad (6.56)$$

representam parâmetros de deformação devido cisalhamento.

No cálculo da matriz de rigidez o programa ANESDE 3.0 permite fazer duas outras considerações:

a) Pode ser considerado o efeito da força axial estática na matriz de rigidez. Para isto é somada à matriz elástica a matriz de rigidez geométrica.

$$K = K_e + K_g \quad (6.57)$$

onde K_e é a matriz de rigidez elástica e K_g é a matriz de rigidez geométrica.

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & \frac{2}{15}PL & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{PL}{30} & 0 \\ 0 & \frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15}PL & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{PL}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{P}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6P}{5L} & 0 & \frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6P}{5L} & 0 & \frac{P}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & -\frac{PL}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{10} & 0 & \frac{2}{15}PL & 0 \\ 0 & \frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{PL}{30} & 0 & -\frac{P}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15}PL \end{bmatrix}$$

(6.58)

Na matriz K_g , o valor de P corresponde à força axial estática e o valor de L ao comprimento do elemento.

b) Os parâmetros de deformação devido ao cisalhamento Φ_y e Φ_z podem ser desconsiderados. No caso da coluna de perfuração, como a

razão do raio de giração em relação ao comprimento do elemento tem valor muito pequeno, os parâmetros Φ_y e Φ_z podem ser negligenciados.

6.10 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

Da mesma forma que para Barra 3D, para o elemento viga-coluna 3D a propriedade de inércia de um sistema estrutural discreto idealizado é expressada pela matriz de massa equivalente (ou consistente).

$$\bar{M} = \int_v \rho \cdot a^T \cdot a \cdot dv \tag{5.25}$$

Em um sistema de coordenadas locais nós devemos selecionar o sistema mostrado na figura 6.8.

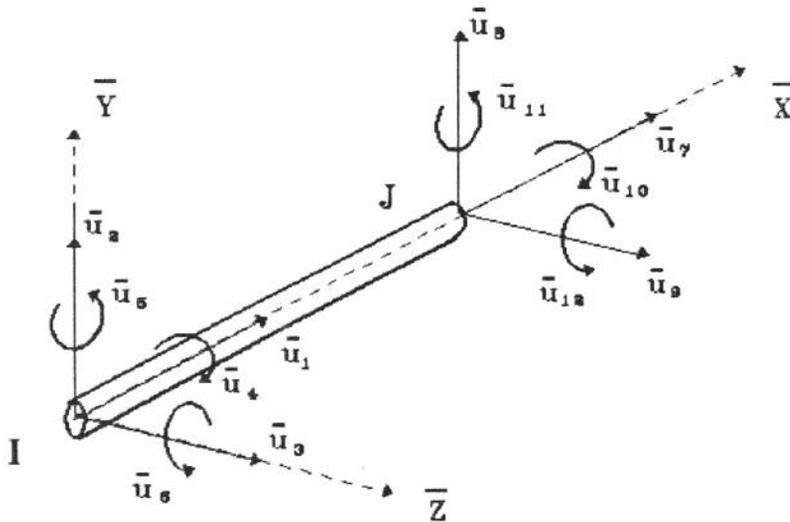


Fig. 6.8 - Elemento viga-coluna 3D em sistema de coordenadas locais

A origem é no nó I com o eixo $0\bar{x}$ tomado ao longo do comprimento do elemento e com os eixos $0\bar{y}$ e $0\bar{z}$ sendo os eixos principais da seção transversal da viga-coluna.

A matriz \bar{U} para este elemento consiste de doze deslocamentos, sendo seis de deflexões e seis de rotações.

$$\bar{U} = \{\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{12}\}$$

Pela teoria da engenharia de flexões e torções e negligenciando deformações cisalhantes, pode ser obtida a matriz a partir da relação

$$\bar{u} = a\bar{U}$$

$$a^T = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\eta & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 \\ 6(\xi - \xi^2)\zeta & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ 0 & -(1-\xi)\ell\zeta & -(1-\xi)\ell\eta \\ (1-4\xi+3\xi^2)\ell\zeta & 0 & (-\xi+2\xi^2-\xi^3)\ell \\ (-1+4\xi-3\xi^2)\ell\eta & (\xi-2\xi^2+\xi^3)\ell & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 6(-\xi+\xi^2)\eta & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 \\ 6(-\xi+\xi^2)\zeta & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 \\ 0 & -\ell\xi\zeta & -\ell\xi\eta \\ (-2\xi+3\xi^2)\ell\zeta & 0 & (\xi^2-\xi^3)\ell \\ (2\xi-3\xi^2)\ell\eta & (-\xi^2+\xi^3)\ell & 0 \end{bmatrix}$$

(6.59)

Os parâmetros adimensionais utilizados na equação são

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \eta = \frac{y}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\ell} \quad (6.60)$$

onde ℓ é o comprimento do elemento tipo viga-coluna 3D.

Substituindo a matriz a na equação

$$\bar{M} = \int_V \rho \cdot a^T a \cdot dv \quad (5.25)$$

e resolvendo a integral resulta na matriz de massa equivalente do elemento viga-coluna 3D:

onde T é a matriz dos cossenos diretores.

$$\begin{aligned}
 F &= T^{-1} \bar{F} = T^T \bar{F} \\
 \bar{u} &= T \cdot u \\
 \bar{F} &= \bar{K} \cdot \bar{u} = \bar{K} \cdot T \cdot u \\
 TF &= \bar{K} T u \\
 F &= T^T \bar{K} T u \\
 F &= K u
 \end{aligned}$$

$$K = T^T \bar{K} T \tag{6.62}$$

e, da mesma forma,

$$M = T^T \bar{M} T \tag{6.63}$$

Assim, para a transformação de \bar{K} e \bar{M} para o sistema global é necessário calcular a matriz T dos cossenos diretores e realizar os produtos matriciais definidos em (6.62) e (6.63).

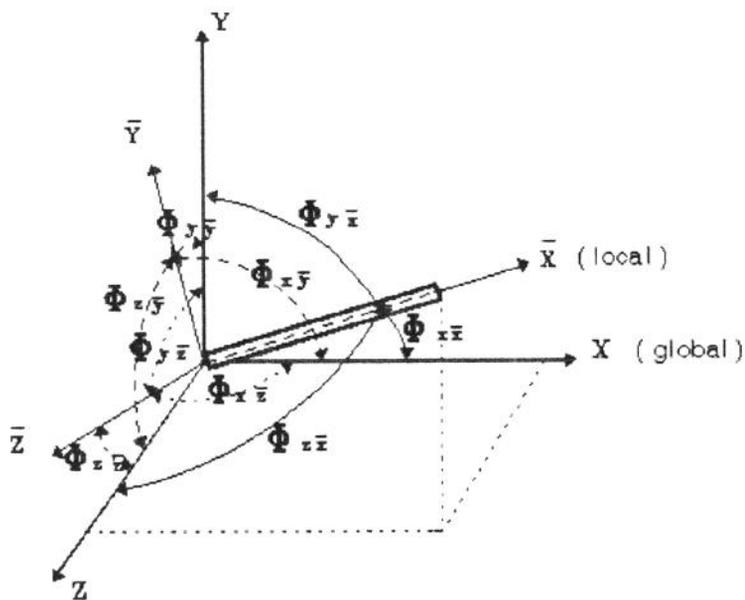


Fig. 6.9 - Sistemas global e local

Obtenção dos Cossenos Diretores

Dos nove cossenos diretores, três são de determinação direta. São os correspondentes aos ângulos formados pelo eixo local \bar{x} com os eixos globais.

$$\begin{aligned}\cos\theta_{x\bar{x}} &= \frac{Lx}{L} \\ \cos\theta_{y\bar{x}} &= \frac{Ly}{L} \\ \cos\theta_{z\bar{x}} &= \frac{Lz}{L}\end{aligned}\tag{6.64}$$

Para os outros seis cossenos diretores é definida a direção do eixo local \bar{y} como a direção de um dos momentos de inércia principais da seção transversal do elemento. A partir deste ponto é definida a direção do eixo local \bar{z} e são calculados os cossenos diretores correspondentes.

Na figura (6.9) podemos ver os nove ângulos formados pelos eixos dos sistemas local e global. Os cossenos destes ângulos formarão a matriz $[t]$, a partir da qual será definida a matriz de transformação $[T]$.

$$[T] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}\tag{6.65}$$

onde

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x\bar{x}} & \cos\theta_{y\bar{x}} & \cos\theta_{z\bar{x}} \\ \cos\theta_{x\bar{y}} & \cos\theta_{y\bar{y}} & \cos\theta_{z\bar{y}} \\ \cos\theta_{x\bar{z}} & \cos\theta_{y\bar{z}} & \cos\theta_{z\bar{z}} \end{bmatrix}\tag{6.66}$$

CAPÍTULO VII - TESTES

7.1 - INTRODUÇÃO

Com a finalidade de validar o programa ANESDE 3.0 quanto às rotinas acrescentadas e quanto ao uso deste programa em análise de aspectos de resistência mecânica de uma coluna de perfuração, são apresentados resultados de exemplos estudados.

Primeiro é apresentado um conjunto de testes do elemento BARRA 3D em análise estática. A seguir, resultados de uma batelada de testes com o elemento Viga-Coluna 3D. Estes testes citados visam verificar a validade do programa quanto a modelagem de elementos em qualquer quadrante e em qualquer sentido. O conjunto seguinte foi reservado a testes mais complexos. No terceiro conjunto de testes são apresentados resultados de vibrações naturais utilizando o elemento Viga-Coluna 3D. Seus resultados são comparados com os obtidos com o programa ANESDE 2.0. Como este programa está restrito à análise linear é apresentado um teste em que uma estrutura tipo tripé está submetida a uma carga estática. Os resultados são comparados com os de análise não linear com o intuito de mostrar a limitação do programa. O último teste genérico consiste de um pórtico espacial composto pela combinação de elementos tipo Barra 3D e tipo Viga-Coluna 3D. A análise é estática e os resultados são comparados com os de análise realizada com outro programa de elementos finitos. Para finalizar são apresentados resultados de testes em que a estrutura é uma coluna de perfuração submetida a cargas isoladas e combinadas devido ao empenamento, desbalanceamento e força de atrito. Este conjunto de testes visa mostrar uma pequena parcela do potencial do programa ANESDE 3.0 para a análise de colunas de perfuração.

7.2 - TESTES DO ELEMENTO BARRA 3D

Para validação deste elemento foram realizadas análises estáticas em uma estrutura tipo cavalete, composta por quatro elementos tipo Barra 3D, supostos homogêneos, engastados em uma das extremidades e unidos na outra, conforme fig. 7.1.

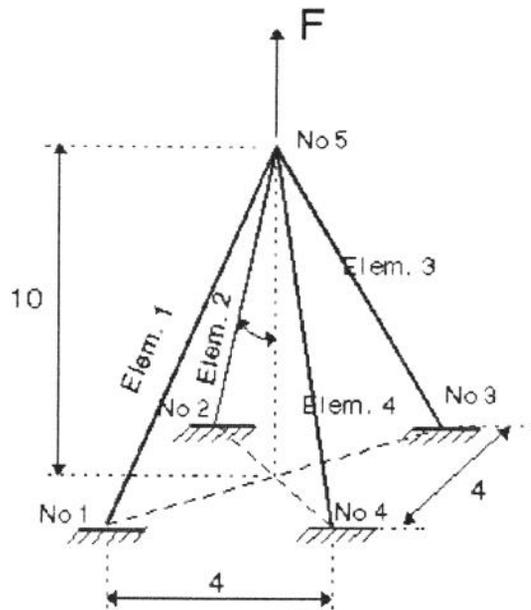


Fig. 7.1 - Cavalete formado por quatro elementos tipo Barra 3D

7.2.1 - Análises Numéricas

Para a análise pelo ANESDE 3.0 esta estrutura foi modelada de forma a ter elementos nos oito diferentes quadrantes. Foi posicionada de duas diferentes formas e, para cada uma delas, foram realizados dois testes: um quanto a compressão e o outro quanto a tração. Os diferentes posicionamentos da estrutura são apresentados nas figuras 7.2 e 7.3.

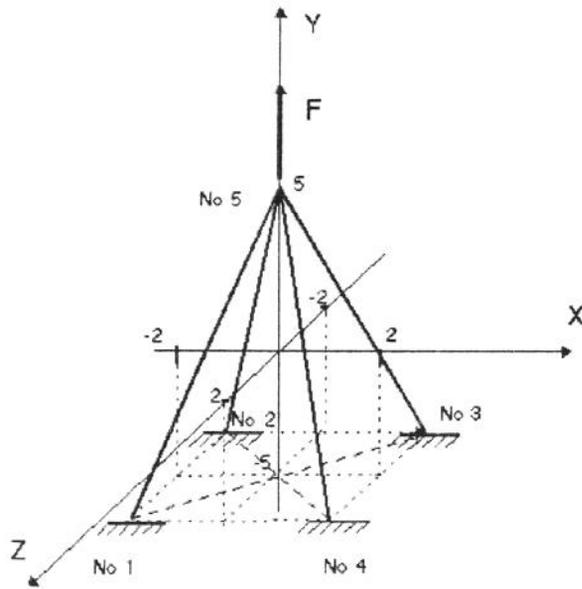


Fig. 7.2 - Primeiro posicionamento da estrutura

(a) Teste de tração: $F = 5000 \text{ kgf}$

(b) Teste de compressão: $F = -5000 \text{ kgf}$

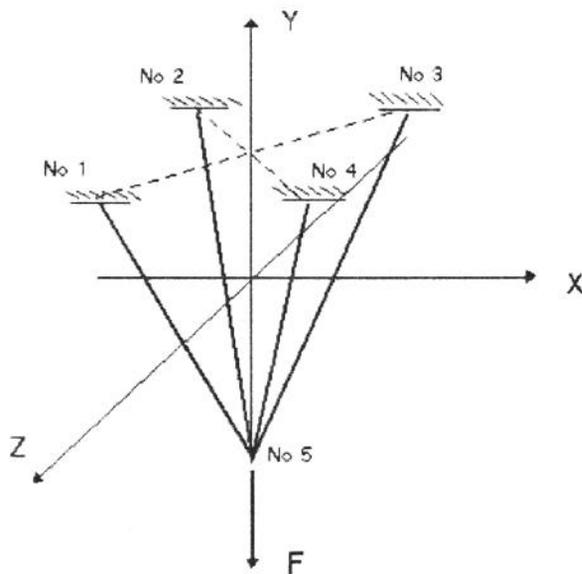


Fig. 7.3 - Segundo posicionamento da estrutura

(a) Teste de tração: $F = -5000 \text{ kgf}$

(b) Teste de compressão: $F = +5000 \text{ kgf}$

Para todos os casos, as características do material foram as mesmas:

$$E = 2100000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{Seção transversal} = 1.0 \text{ cm} \times 1.0 \text{ cm}$$

Os deslocamentos dos nós e as forças internas nos elementos são comparados com resultados analíticos.

7.2.2 - Solução Analítica - Carga de Tração

$$L_1 = 10.39230485 \text{ cm (comprimento de cada barra)}$$

$$A = 1.0 \times 1.0 = 1.0 \text{ cm}^2 \text{ (área da seção transversal)}$$

$$F = 5000 \text{ kgf (força aplicada)}$$

Força axial atuando em cada barra:

$$\gamma = \arctan \frac{d}{h_1} = 15.79316905^\circ$$

$$F_a = \frac{5000}{4 \cdot \cos \gamma} = 1299.038106 \text{ kgf}$$

$$\sigma = \frac{F_a}{A} = 1299.038106 \text{ kgf/cm}^2$$

Deslocamento axial (U_a) de cada barra:

$$K = \frac{E \cdot A}{L_1} = 202072.5941 \text{ kgf/cm}$$

$$U_a = \frac{F_a}{K} = 0.006428571 \text{ cm}$$

Deslocamento do nó 5:

L_1 - comp. original de cada barra

L_2 - comp. deformado de cada barra

h_1 - altura original

h_2 - altura deformada

U_a - desl. axial de cada barra

U_v - desl. vertical do nó 5

γ - ângulo original formado pela barra e bissetriz

β - ídem, após deformação

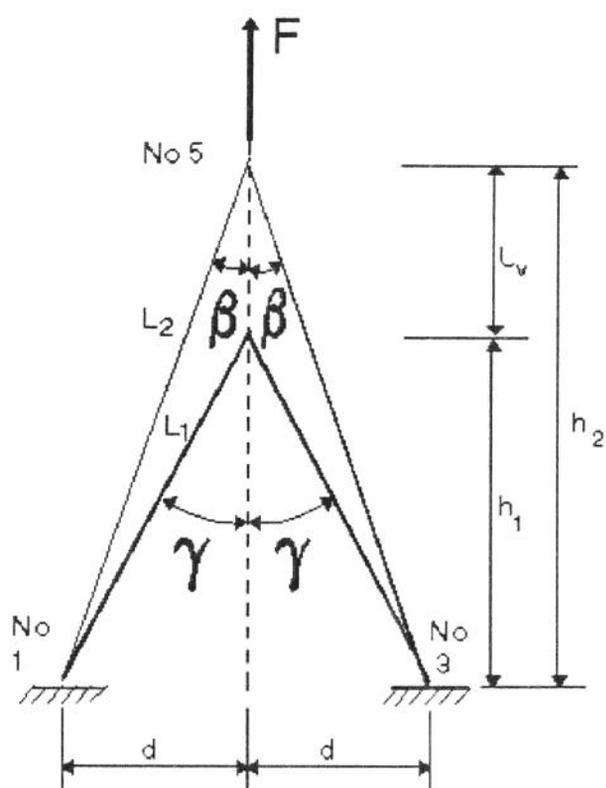


Fig. 7.4 - Corte dos nós 1-3 mostrando os elementos 1 e 3 antes e após aplicação da carga de tração.

Considerando $\gamma = \beta$ devido hipótese de pequenos deslocamentos,

temos:

$$L_2 = L_1 + U_a = 10.39873342 \text{ cm}$$

$$U_v = \frac{U_a}{\cos \gamma} = 0.006680767 \text{ cm}$$

Considerando γ diferente de β , temos:

$$\beta = \arcsin \frac{d}{L_2} = 15.78315081^\circ$$

$$h_2 = L_2 \cdot \cos \beta = 10.00668061 \text{ cm}$$

$$U_v = h_2 - h_1 = 0.006680610 \text{ cm}$$

$$\text{Diferença} = 0.0023949\%$$

7.2.3 - Solução Analítica - Carga de Compressão

$$L_1 = 10.39230485 \text{ cm (comprimento de cada barra)}$$

$$A = 1.0 \times 1.0 = 1.0 \text{ cm}^2 \text{ (área da seção transversal)}$$

$$F = -5000 \text{ kgf (força aplicada)}$$

Força axial atuando em cada barra:

$$\gamma = \arctan \frac{d}{h_1} = 15.79316905^\circ$$

$$F_a = -\frac{5000}{4 \cdot \cos \gamma} = -1299.038106 \text{ kgf}$$

$$\sigma = \frac{F_a}{A} = -1299.038106 \text{ kgf/cm}^2$$

Deslocamento axial (U_a) de cada barra:

$$K = \frac{E \cdot A}{L_1} = 202072.5941 \text{ kgf/cm}$$

$$U_a = \frac{F_a}{K} = -0.006428571 \text{ cm}$$

Deslocamento do nó 5:

L_1 - comp. original de cada barra

L_2 - comp. deformado de cada barra

h_1 - altura original

h_2 - altura deformada

U_a - desl. axial de cada barra

U_v - desl. vertical do nó 5

γ - ângulo original deformado pela barra e bissetriz

β - ídem, após deformação

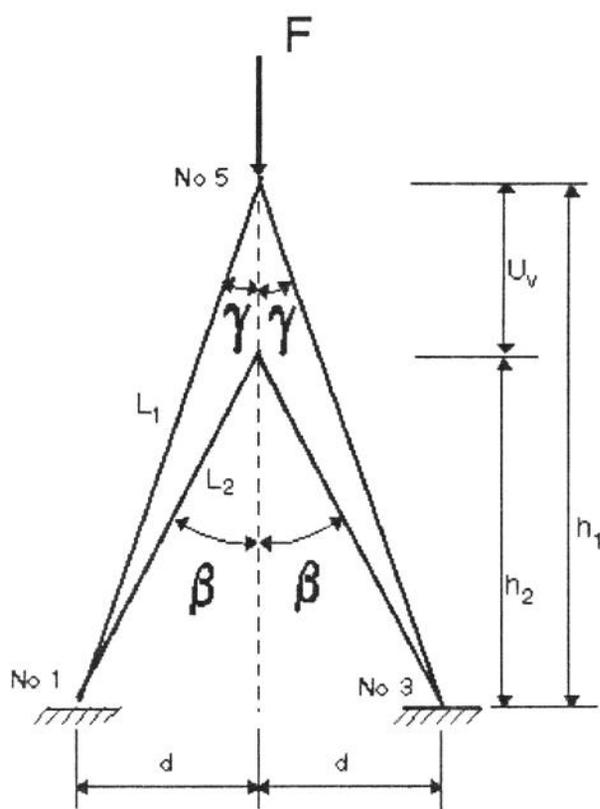


Fig. 7.5 - Corte dos nós 1-3 mostrando os elementos 1 e 3 antes e após aplicação da carga de compressão

Considerando $\gamma = \beta$ devido hipótese de pequenos deslocamentos, temos:

$$U_v = \frac{U_a}{\cos \gamma} = -0.006680767 \text{ cm}$$

Considerando γ diferente de β , temos:

$$L_2 = L_1 + U_a = 10.38587628 \text{ cm}$$

$$\beta = \arcsin \frac{d}{L_2} = 15.80320017^\circ$$

$$h_2 = L_2 \cos \beta = 9.993319073 \text{ cm}$$

$$U_v = h_2 - h_1 = -0.006680927 \text{ cm}$$

$$\text{Diferença} = 0.0023500\%$$

7.2.4 - Comparação de Resultados

Nas tabelas que seguem são comparados os resultados do ANESDE 3.0 com a solução analítica. Em função dos resultados conseguidos, conclui-se que as rotinas instaladas estão corretas, permitindo cálculos com elementos posicionados em qualquer dos quadrantes.

Tabela 7.1 - Comparação de resultados; exemplo da fig. 7.1.

- Estrutura sujeita à carga de tração

<u>Tipo de Análise</u>	<u>Força Axial (kgf)</u>	<u>Desl. nó 5 (cm)</u>
Analítica ($\gamma = \beta$)	1299.038106	0.006680767
Analítica ($\gamma \neq \beta$)	1299.038106	0.006680610
MEF - caso 1	1299.038106	0.006680767
MEF - caso 2	1299.038106	0.006680767

Tabela 7.2 - Comparação de resultados; exemplo da fig. 7.1.

- Estrutura sujeita à carga de compressão

<u>Tipo de Análise</u>	<u>Força Axial (kgf)</u>	<u>Desl. nó 5 (cm)</u>
Analítica ($\gamma = \beta$)	-1299.038106	-0.006680767
Analítica ($\gamma \neq \beta$)	-1299.038106	-0.006680927
MEF - caso 1	-1299.038106	-0.006680767
MEF - caso 2	-1299.038106	-0.006680767

7.3 - TESTES DO ELEMENTO VIGA-COLUNA 3D

Com a finalidade de validar o elemento tipo Viga-Coluna 3D quanto a trabalhar sobre os eixos globais, sobre os planos formados por estes, e nos oito quadrantes, foi modelada uma estrutura simples, constituída de uma barra suposta homogênea, de seção retangular, engastada em uma extremidade e com uma carga transversal na outra.

Esta barra de 10 cm de comprimento foi dividida em 10 elementos de comprimentos iguais. A escolha das coordenadas dos nós foi feita de forma que tivéssemos comprimentos dos elementos positivos e negativos. Por exemplo, sobre o eixo X positivo e sobre o eixo X negativo, fig. 7.6. No total foram definidas 22 posições da barra:

- Seis sobre os eixos;
- oito sobre os planos;
- Oito espaciais nos quadrantes.

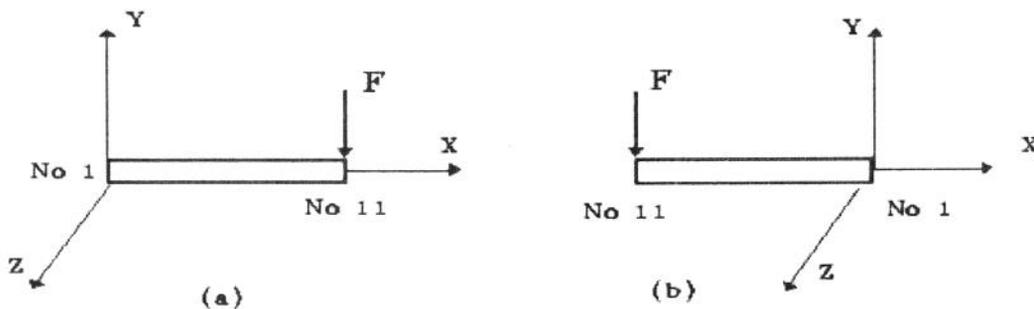


Fig. 7.6 - Barra sobre o eixo X

(a) positivo

(b) negativo

7.3.1 - Análises Numéricas

Para cada posição da barra foram corridos quatro casos de carregamentos, de forma a termos uma força transversal nas direções positivas e negativas dos eixos locais \bar{y} e \bar{z} , fig. 7.7. Na modelagem do problema, para todas as posições definidas, foram posicionadas cargas de forma que a resultante destas sempre fosse uma força transversal de 100 kgf. Assim, para barra sobre um dos eixos globais, a força era composta por uma única carga. Quando sobre um dos planos compreendidos pelos eixos globais, a força transversal era composta por uma ou duas cargas.

No caso espacial, a força transversal é composta por duas ou três cargas.

Os resultados destes testes foram comparados com os de solução analítica, sendo idênticos.

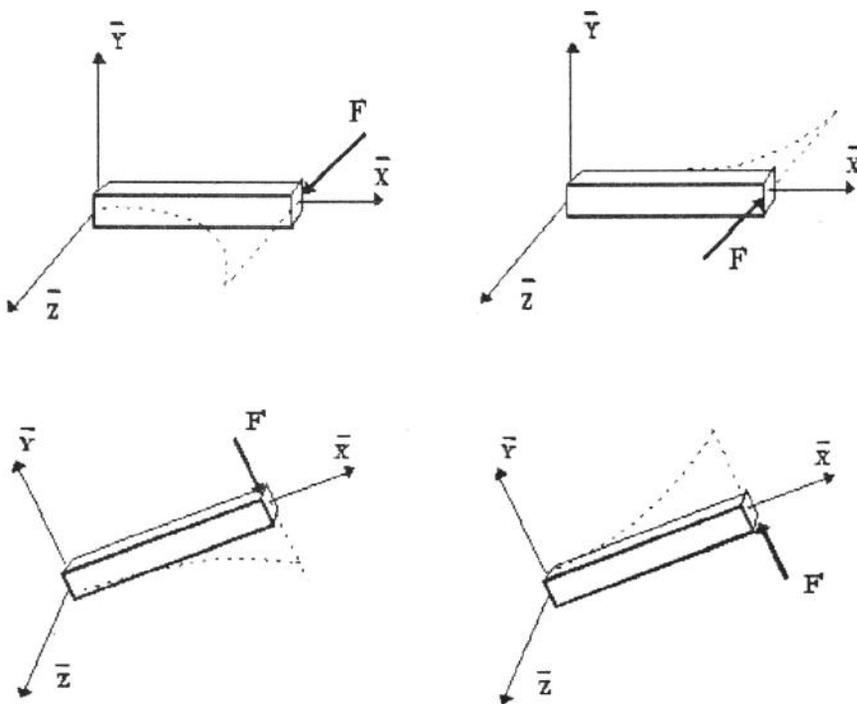


Fig. 7.7 - Cargas resultantes atuando na barra

7.3.2 - Solução Analítica

Caso 1 - Carga transversal no sentido negativo do eixo \bar{y}
local.

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{24} \text{ cm}^4$$

$$V_{11} = \frac{F.L^2}{3EI_z} = 0.40 \text{ cm}$$

$$M_1 = F.L = 1000 \text{ kgf.cm}$$

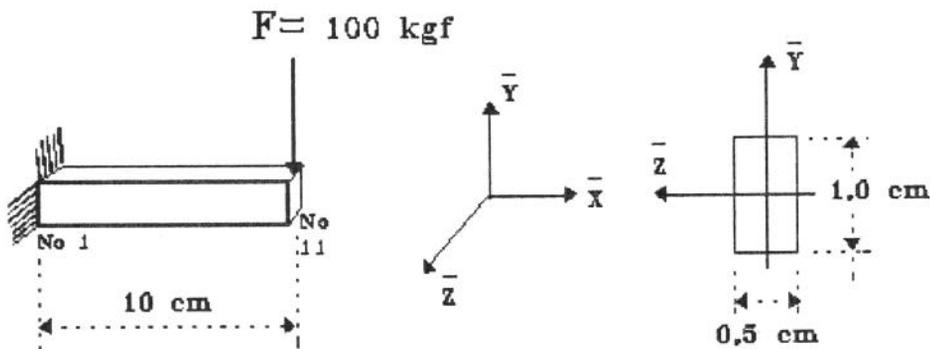


Fig. 7.8 - Caso 1

Caso 2 - Carga transversal no sentido positivo do eixo \bar{z}
local.

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{1}{96} \text{ cm}^4$$

$$V_{11} = \frac{F.L^2}{3EI_y} = 1.60 \text{ cm}$$

$$M_1 = F.L = 1000 \text{ kgf.cm}$$

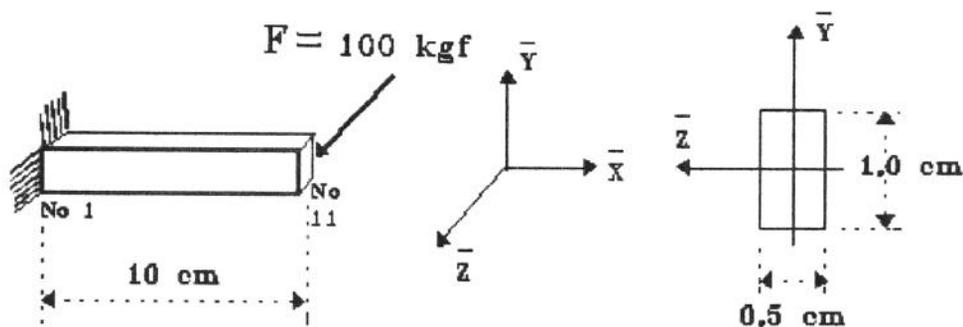


Fig. 7.9 - Caso 2

7.4 - VIGA-COLUNA 3D. VIBRAÇÕES NATURAIS DE UMA BARRA NO ESPAÇO

Para validação do elemento tipo Viga-Coluna 3D quanto a obtenção das frequências naturais de vibrações foram realizados testes em uma barra no espaço. Os resultados obtidos foram comparados com os de testes efetuados com o programa ANESDE 2.0, que considera apenas a condição planar, e pelo próprio ANESDE 3.0, com graus de liberdade restritos, simulando o caso planar.

Para os testes utilizando o programa ANESDE 2.0, foi utilizado o modelo da figura 7.10, que corresponde a uma barra homogênea, de 10 cm de comprimento, seção retangular de base 0.5 cm e altura 1.0 cm, dividido em 10 elementos de mesmo comprimento.

Para os testes com o programa ANESDE 3.0, utilizando o elemento Viga-coluna 3D, foi criado o modelo da figura 7.11, que corresponde a mesma barra homogênea, de 10 cm de comprimento, utilizada nos testes com o ANESDE 2.0, mas com coordenadas espaciais. Esta barra também foi dividida em 10 elementos de comprimentos iguais.

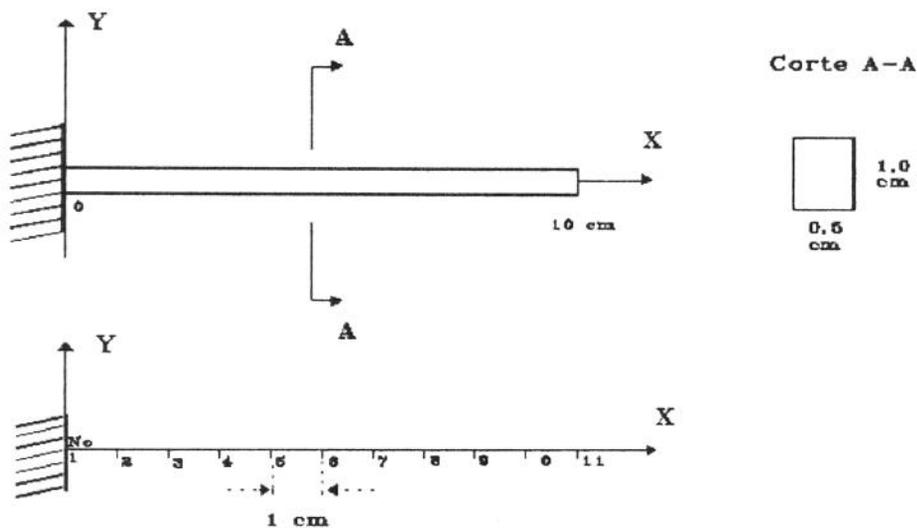


Fig. 7.10 - Barra utilizada nos testes com o ANESDE 2.0

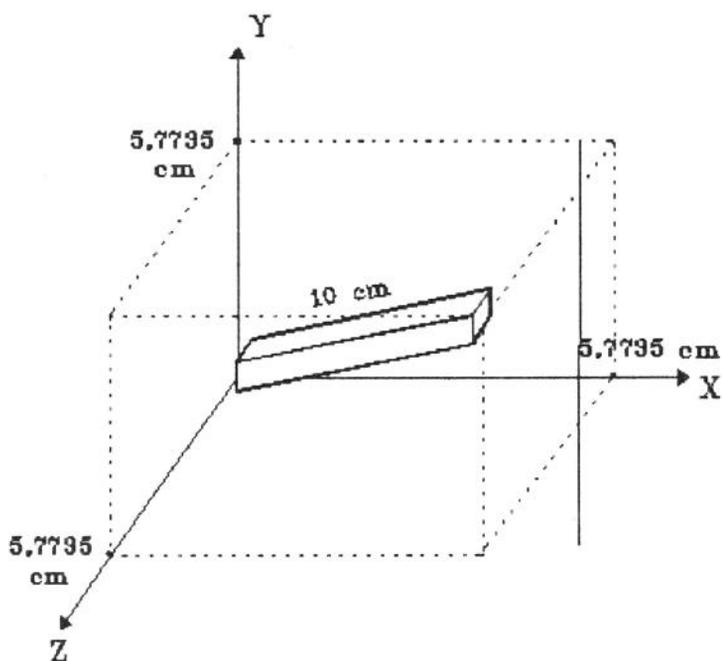


Fig. 7.11 - Barra espacial utilizada nos testes com o ANESDE 3.0

7.4.1 - Testes com o Programa ANESDE 2.0

Com o ANESDE 2.0 foram corridos testes independentes para obtenção das menores frequências naturais nos sentidos dos eixos X

(sentido axial), dos eixos Y e Z (sentidos transversais), e torção do eixo X.

Como o programa ANESDE 2.0 não calcula diretamente as frequências no plano XZ, já que é planar, a barra foi rodada 90° em torno do eixo X, passando a seção A-A a ter base de dimensão 1.0 cm e altura de 0.5 cm, conforme figura 7.12.

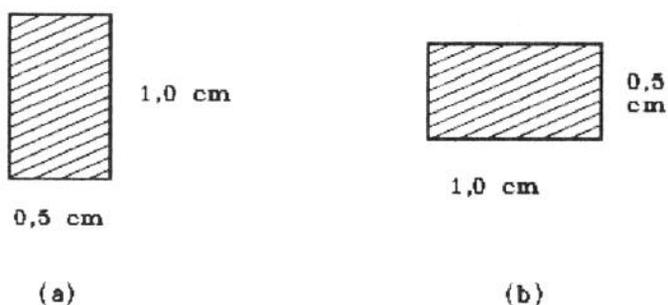


Fig. 7.12 - (a) Seção A-A original (b) Seção A-A rodada

Desta forma foi simulado o plano XZ para cálculos das frequências naturais no sentido do eixo Z. Para os cálculos de vibrações quanto à torção foi necessária uma nova simulação. Desta vez foram colocados dados de entrada, de forma a simularmos a torção utilizando as equações de cálculos axiais.

7.4.2 - Testes com o Programa ANESDE 3.0

Com o programa ANESDE 3.0 foi testada a barra espacial conforme figura 7.11. Primeiramente foram realizados os mesmos testes feitos com o ANESDE 2.0. Para isto foram restringidos os graus de liberdade de forma a só permitir deslocamentos em um sentido em cada

teste. As menores frequências naturais obtidas nesta batelada de testes foram as mesmas das obtidas nos testes com o programa planar.

Por último foi testada novamente a barra espacial, agora sem restrições de graus de liberdade, permitindo movimentos em todos os sentidos, com excessão do nó 1, engastado. Neste teste foram obtidas, de uma só vez, as quarenta menores frequências naturais, nas direções principais (X, Y, Z) e no sentido de torção do eixo X. Os resultados obtidos neste teste continham todas as frequências naturais encontradas anteriormente. As trinta menores frequências naturais calculadas para o elemento viga-coluna 3D e as obtidas com o elemento viga-coluna 2D são mostradas na tabela que se segue.

Tabela 7.3 - Frequências naturais de uma barra de 10 cm de comprimento, seção 0.5x1.0 cm, engastada numa extremidade e livre na outra.

BARRA 3D	BARRA PLANAR E			
	BARRA 3D SIMULANDO PLANAR		AXIAL	TORÇÃO
	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z		
80		80		
160	160			
502		502		
1005	1005			
1408		1408		
1758				1758
2486	2486	2486	2486	
2761		2761		
2816	2816			
4572		4572		
5317				5317
5523	5523			
6850		6850		
7520	7520	7520	7520	
9008				9008
9145	9145			
9611		9611		
12739	12739	12739	12739	
12876		12876		
12918				12918
13700	13700			
16649		16649		

17128				17128
18268	18268	18268	18268	
19222	19222			
20697		20697		
21690				21690
24223	24223	24223	24223	
25753	25753			
26558				26558

7.5 - VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISE ESTÁTICA DE UMA ESTRUTURA TIPO

TRIPÉ

Com a finalidade de mostrar limitações que existem no programa ANESDE 3.0 devido ser um programa para análise linear, foi analisada estaticamente uma estrutura constituída de um pórtico espacial em forma de tripé, proposta por Souza, 1984, de análise não-linear, e comparados os resultados.

O pórtico, constituído por três barras, forma uma pirâmide equilátera de lados 31.177 cm, conforme fig. 7.13. Tem dois extremos engastados (A e B) e um extremo que permite apenas deslocamentos sobre o eixo X global (C). No ponto C é aplicada uma carga na direção positiva do eixo X.

$$L = 31.177 \text{ cm}$$

$$\text{Seção transversal} = 1 \times 1 \text{ cm}$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$G = 1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$I_y = 8.333 \times 10^{-2} \text{ cm}^4$$

$$I_z = 8.333 \times 10^{-2} \text{ cm}^4$$

$$J = 0.333 \text{ cm}^4$$

$$C_v = 1 \times 10^{-9} \text{ cm}^6$$

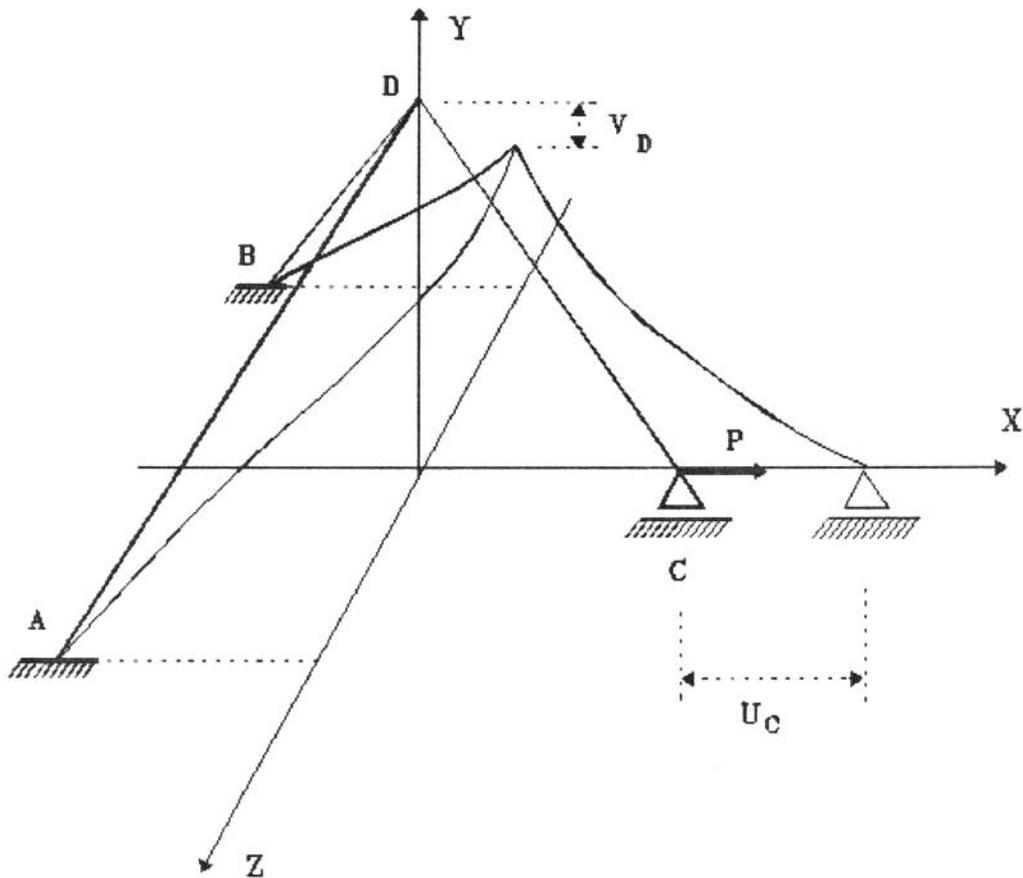


Fig. 7.13 - Tripé equilátero

Para a análise não linear desta estrutura, Souza dividiu cada barra em três elementos e submeteu a estrutura a 600 passos de carga.

Para a análise linear, estática, com o ANESDE 3.0, cada barra foi dividida em cinco elementos. Os resultados obtidos encontram-se na figura 7.14. Observa-se a grande diferença de resultados quando a estrutura é solicitada com grandes cargas.

PORTICO ESPACIAL DE SOUZA

Análise linear x não linear

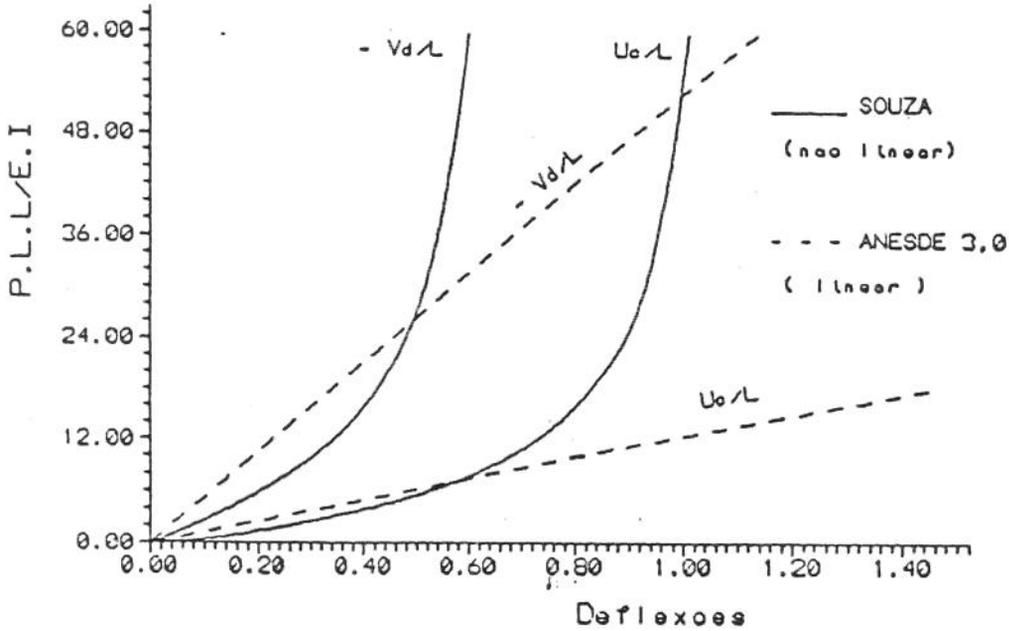


Fig. 7.14 - Deslocamentos dos nós D e C no pórtico espacial de Souza

7.6 - BARRA 3D E VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISE ESTÁTICA DE UM PÓRTICO TRIDIMENSIONAL

O pórtico da figura 7.15 foi analisado estaticamente e os resultados comparados com os obtidos por Benjamim, 1982

Trata-se de uma estrutura composta por barras de seção circular vazadas, cujas dimensões encontram-se na tabela 7.4. As barras estão divididas em cinco grupos diferentes de acordo com as características geométricas da seção transversal, tabela 7.5.

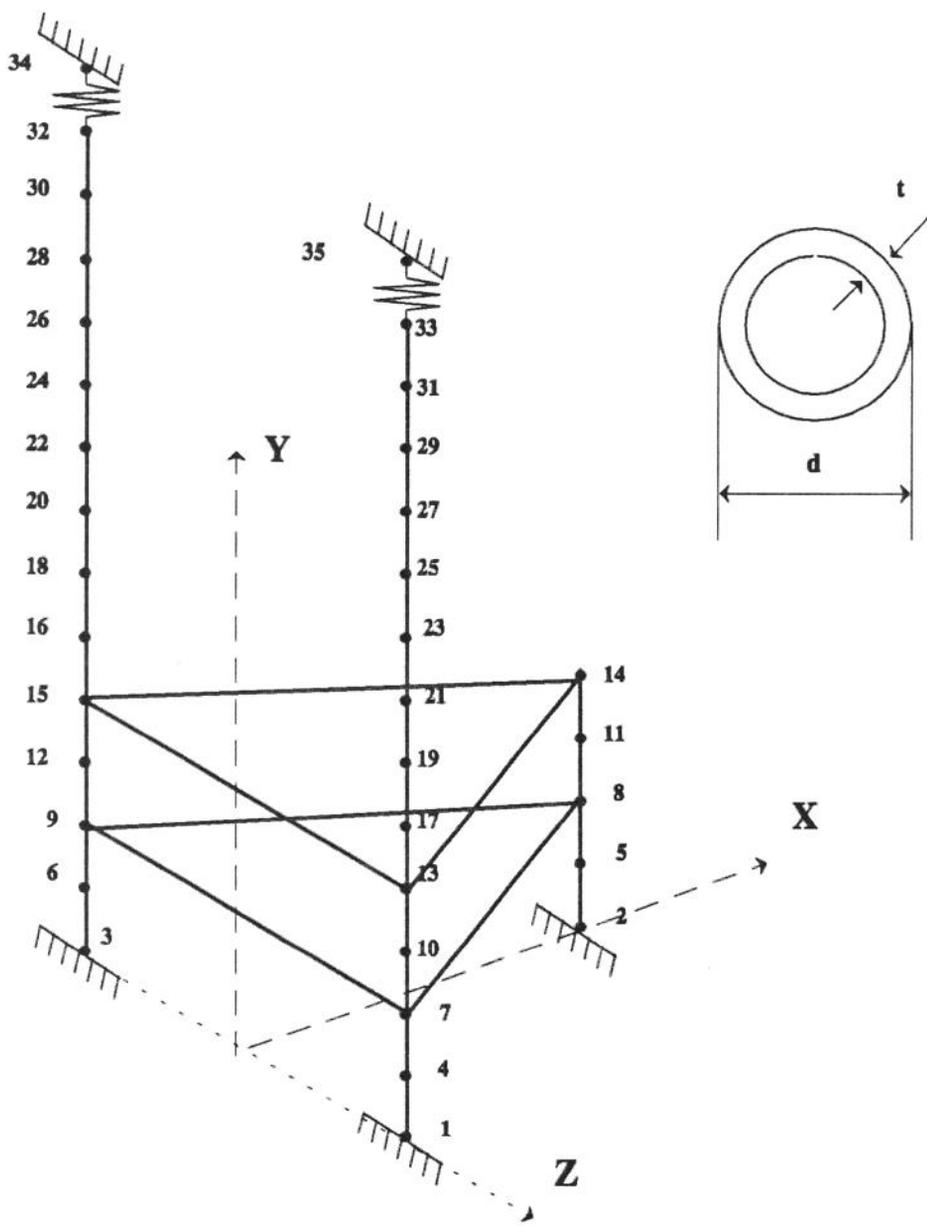


Fig.7.15 - Pórtico trimensional

Tabela 7.4 - Dimensões das barras

Tipo de seção	d (mm)	t (mm)
1	762	25.4
2	508	15.9
3	219	8.2
4	508	25.4

Tabela 7.5 - Grupo de materiais

Grupo	Área (m ²)	Momento de Inércia (m ⁴)
1	5. 878 x 10 ⁻²	47. 3 x 10 ⁻⁴
2	5. 878 x 10 ⁻²	39. 9 x 10 ⁻⁴
3	0. 542 x 10 ⁻²	0. 3 x 10 ⁻⁴
4	3. 851 x 10 ⁻²	11. 2 x 10 ⁻⁴
5	0. 191 x 10 ⁻²	0. 0

O primeiro grupo reúne barras formadas por dois tubos, um externo e um interno, de seções tipo 1 e 2. Por questões de projeto, somam-se os momentos de inércia, mas considera-se apenas a área do tubo externo. Os grupos 2, 3 e 4 reúnem as barras de seção tipo 1, 3 e 4, respectivamente. O grupo 5 é constituído por dois elementos fictícios, que possuem rigidez apenas na direção axial, simulando o comportamento de duas molas ($k = AE/L = 19\ 052\ 499\ \text{N/m}$). Estão situados nos apoios superiores.

A estrutura está discretizada em 35 nós, 38 elementos. Na tabela 7.6 encontram-se as coordenadas nodais. Na tabela 7.7 estão registradas a conectividade dos elementos e os grupos de características geométricas a que pertencem. O carregamento a qual está submetido a estrutura é mostrado na tabela 7.8.

Tabela 7.6 - Coordenadas nodais

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0.00	0.00	2.29
2	2.29	0.00	0.00
3	0.00	0.00	-2.29
4	0.00	10.00	2.29
5	2.29	10.00	0.00
6	0.00	10.00	-2.29
7	0.00	15.00	2.29
8	2.29	15.00	0.00
9	0.00	15.00	-2.29
10	0.00	20.00	2.29
11	2.29	20.00	0.00
12	0.00	20.00	-2.29
13	0.00	30.00	2.29
14	2.29	30.00	0.00
15	0.00	30.00	-2.29
16	0.00	40.00	-2.29
17	0.00	40.00	2.29
18	0.00	50.00	-2.29
19	0.00	50.00	2.29
20	0.00	60.00	-2.29
21	0.00	60.00	2.29
22	0.00	70.00	-2.29
23	0.00	70.00	2.29
24	0.00	80.00	-2.29
25	0.00	80.00	2.29
26	0.00	90.60	-2.29
27	0.00	90.60	2.29
28	0.00	96.90	-2.29
29	0.00	96.90	2.29
30	0.00	100.00	-2.29
31	0.00	100.00	2.29
32	0.00	102.00	-2.29
33	0.00	102.00	2.29
34	0.00	122.00	-2.29
35	0.00	122.00	2.29

Tabela 7.7 - Conectividade e grupo de material

<u>Elemento</u>	<u>Nó Inicial</u>	<u>No Final</u>	<u>Grupo</u>
1	1	4	1
2	2	5	2
3	3	6	1
4	4	7	1
5	5	8	2
6	6	9	1
7	7	9	3
8	7	8	3
9	8	9	3
10	7	10	1
11	8	11	2
12	9	12	1
13	10	13	1
14	11	14	2
15	12	15	1
16	13	15	3
17	13	14	3
18	14	15	3
19	13	17	4
20	15	16	4
21	17	19	4
22	16	18	4
23	19	21	4
24	18	20	4
25	21	23	4
26	20	22	4
27	23	25	4
28	22	24	4
29	25	27	4
30	24	26	4
31	27	29	4
32	26	28	4
33	29	31	4
34	28	30	4
35	31	33	4
36	30	32	4
37	32	34	5
38	33	35	5

Tabela 7.8 - Carregamento

Nó (N)	Carga na Direção X (N)	Carga na Direção Y
4	1 252. 5	-118 230. 0
5	1 252. 5	-118 230. 0
6	1 252. 5	-118 230. 0
10	1 973. 3	-118 230. 0
11	1 973. 3	-118 230. 0
12	1 973. 3	-118 230. 0
13	3 108. 1	-118 230. 0
14	1 554. 1	- 59 114. 0
15	3 108. 1	-118 230. 0
16	4 896. 8	- 95 652. 0
17	4 896. 8	- 95 652. 0
18	7 748. 2	- 37 141. 0
19	7 748. 2	- 37 141. 0
20	12 375. 0	- 37 141. 0
21	12 375. 0	- 37 141. 0
22	20 039. 0	- 37 141. 0
23	20 039. 0	- 37 141. 0
24	34 686. 0	- 38 256. 0
25	34 686. 0	- 38 256. 0
26	42 353. 0	- 31 388. 0
27	42 353. 0	- 31 388. 0
28	20 083. 0	- 17 456. 0
29	20 083. 0	- 17 456. 0
30	-----	- 9 471. 0
31	-----	- 9 471. 0
32	-----	584 890. 0
33	-----	584 890. 0

Os resultados obtidos na análise utilizando o programa ANESDE 3.0 estão comparados com os resultados disponíveis na dissertação de Benjamin na Tabela 7.9.

Tabela 7.9(a) - Deslocamento do nó 22 na direção X global

Benjamin Solução Linear	ANESDE 3.0 Solução Linear
2.2458 m	2.2458 m

Tab. 7.9(b) - Momento fletor do nó 1 em relação ao eixo Z global

Benjamin Solução Linear	ANESDE 3.0 Solução Linear
-1 573 660 Nm	-1 573 660 Nm

Tab. 7.9(c) - Momento fletor do nó 25 em relação ao eixo Z global

Benjamin Solução Linear	ANESDE 3.0 Solução Linear
1 102 000 Nm	1 102 000 Nm

Com estes resultados verificamos que o programa ANESDE 3.0 para análise linear de estruturas espaciais, utilizando elementos tipo Viga-coluna 3D combinados com elementos tipo Barra 3D, está satisfatório.

7.7 - VIGA-COLUNA 3D. ANÁLISE DE COLUNAS DE PERFURAÇÃO

7.7.1 - Introdução

O programa ANESDE foi implementado com os elementos espaciais visando análises espaciais de colunas de perfuração quanto a aspectos de resistência mecânica. Conforme necessidade, podem ser realizadas análises estáticas, dinâmicas e no domínio das frequências. O ponto crítico para estas análises são:

- Definição dos parâmetros desejados;
- Modelagem correspondente ao problema, podendo ser simples ou complexa, dependendo das condi-

ções de contorno (composição da coluna, cargas atuando, etc.).

Após a modelagem do problema deve ser preparado o arquivo de dados de entrada conforme Capítulo IV.

Um caso que pode ser estudado é o efeito causado por vibrações. Se tivermos vibrações próximas a uma frequência natural, poderão ocorrer ressonâncias, que podem provocar aumentos dos valores de cargas em vários pontos, causando quebra prematura de equipamentos. Burgess, 1987, escreveu um artigo sobre análises de colunas de perfuração considerando as vibrações ocasionadas pela rotação durante a perfuração. Com estes estudos foi melhorado o rendimento da perfuração. Cordovil e Prodonoff, 1992, analisaram colunas de perfuração quando montadas com equipamentos empenados e desbalanceados. Estes casos citados correspondem a estudos que exigem uma modelagem complexa, passando por várias fases, incluindo uso de outros programas:

- Modelagem inicial para utilização de um programa de análise estática não-linear que permita a identificação dos pontos em que temos contato da coluna com o poço.

- Utilização de dados conseguidos no item anterior para montagem do modelo a ser analisado em um programa que permita análise dinâmica, no caso, o ANESDE.

- Realizar análise no domínio das frequências para obtenção de excitações críticas devido ressonância.

- Análises das informações e sugestões.

Para demonstrar parte do potencial do programa quanto a análise de colunas de perfuração, foram executados testes simulando uma coluna de perfuração empenada, desbalanceada e submetida a força de atrito transversal. Para estes testes foi considerada a mesma coluna

utilizada no trabalho de Cordovil e Prodonoff. Para a sua discretização ela foi dividida em 151 elementos, cinquenta para os tubos de perfuração e os restantes para o BHA (Composição de fundo). Os componentes da coluna de perfuração, bem como os nós iniciais e finais de cada componente encontram-se na tabela abaixo:

Tabela 7.10 - Dimensões dos componentes da coluna de perfuração

Componente	Compr. (m)	D.Ext. (m)	D.Int. (m)	Compr. (m) Acumulado	Nó Inicial	Nó Final
Tubos	850.0000	0. 1270	0. 10861	850. 0000	1	51
Comandos	107.6249	0. 1491	0. 07137	957. 6249	51	71
XO	0.4267	0. 1905	0. 07137	958. 0516	71	72
FRS	0.9761	0. 1778	0. 08255	959. 0277	72	74
MWD	14.0513	0. 1778	0. 12700	973. 0790	74	102
XO	0.4572	0. 1808	0. 07137	973. 5362	102	103
Comando	8.9306	0. 1778	0. 04877	982. 4668	103	121
XO	0.4267	0. 1778	0. 06020	982. 8935	121	122
Estab.	1.2192	0. 1778	0. 06020	984. 1127	122	124
XO	0.3048	0. 1905	0. 07137	984. 4175	124	125
Amortecedor	2.3165	0. 2017	0. 06020	986. 7340	125	130
XO	0.2134	0. 2032	0. 07290	986. 9474	130	131
Comando	12.4358	0. 1969	0. 07137	999. 3832	131	151
Broca	0.3048	0. 3112	0. 00000	999. 6880	151	152

O primeiro nó e o 123º (correspondente ao nó do centro do estabilizador) foram restritos quanto aos movimentos laterais. O último nó, correspondente ao nó da broca com a formação, foi restrito quanto aos movimentos laterais, vertical e rotação sobre o eixo axial. Os demais nós não sofreram restrições.

7.7.2 - Coluna Desbalanceada

Para o estudo de efeitos causados por desbalanceamento foi utilizado o elemento Viga-coluna 3D. A execução do programa é feita em duas fases:

- Na primeira são calculados os deslocamentos globais e as forças axiais devido o peso próprio da coluna e da força de tração exercida no primeiro nó (de sentido contrário do peso próprio). O peso próprio da coluna é calculado externamente e é dado como entrada do programa, na forma de carga vertical, atuando em cada nó. A força de tração é aplicada no primeiro nó da discretização, de forma a termos como resultante para força axial no último elemento (broca) o valor do peso sobre a broca desejado. Na figura 7.16 temos um modelo simplificado da modelagem das cargas devido ao peso próprio.

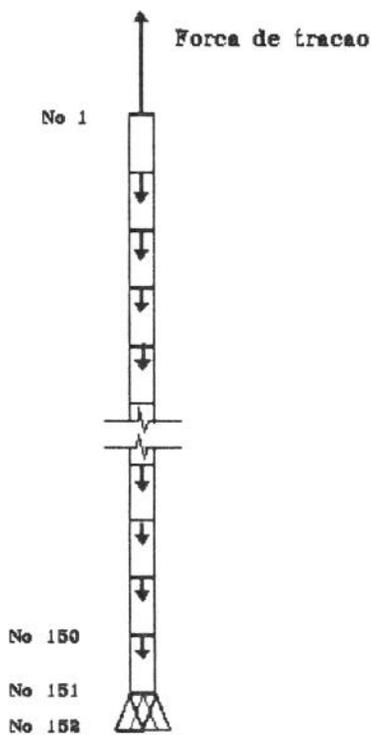


Fig.7.16 - Modelagem das cargas devido ao peso próprio.

Com as forças axiais é criada a matriz de rigidez geométrica que será somada à matriz elástica, na segunda fase.

Com este procedimento é considerado o efeito da rigidez causado pelo peso próprio da coluna de perfuração.

Na segunda fase é realizada a análise dinâmica. Para esta fase são alteradas as cargas atuando. Agora as cargas utilizadas são devido o desbalanceamento da coluna de perfuração. São calculadas

externamente e correspondem aos dados de carregamentos colocados no arquivo de entrada. Neste trabalho foi suposto que todo o conjunto do BHA (nós 51 a 152) estava desbalanceado, com $\epsilon = 0.10$, máximo permitido pela norma. As cargas de desbalanceamento máximas foram consideradas ocorrerem na direção do eixo local X (fig. 7.17). Considerando que a coluna de perfuração esta trabalhando a 60 rpm, as cargas máximas ocorrem para o tempo 0,250 segundos.

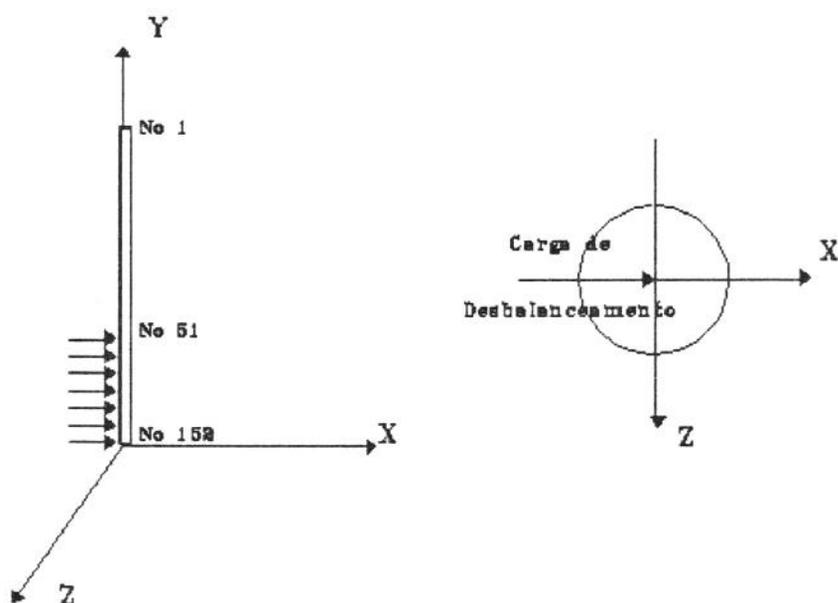


Fig. 7.17 - Cargas de desbalanceamento máximas ($t=0,250s$)

Foi utilizada a expressão proposta por Burgess para a força em relação ao tempo:

$$\{F(t)\} = \{A \cdot \text{sen}(\omega_e \cdot t)\}$$

$$A = m \cdot \omega_e^2 \cdot e \quad (\text{Amplitude da força excitadora} - m)$$

m (massa do elemento - Kg)

ω_e (frequência de excitação - rad/s)

$e = \epsilon \cdot d_c$ (excentricidade)

ϵ (razão de excentricidade)

d_c (diâmetro externo da coluna - m)

A frequência de excitação ω , foi considerada como causada pela rotação da coluna de perfuração, no caso 60 rpm, que equivale a $2.\pi$ rad/s.

A partir da frequência de excitação, da razão de excentricidade da massa e do diâmetro dos elementos, foram calculados externamente a excentricidade e a amplitude da força excitadora. Os valores obtidos para amplitude da força excitadora foram distribuídos para cada nó desbalanceado nos dados de entrada de carga. O valor de ω , também é fornecido com os dados de entrada.

Na figura 7.18 tem-se os gráficos dos deslocamentos transversais X profundidade e momentos fletores X profundidade para os tempos 0,125 seg. e 0,250 seg.

Para o tempo $t=0,250s$ ocorre o deslocamento transversal máximo na direção x:

$$t = \frac{T_e}{4}$$

T_e = período da frequência excitadora

Nos gráficos pode ser observado que os deslocamentos sofridos no intervalo composto pelos comandos desbalanceados é muito superior aos do restante da coluna. Ocorrem também grandes momentos junto ao estabilizador e na mudança de elementos balanceados para desbalanceados.

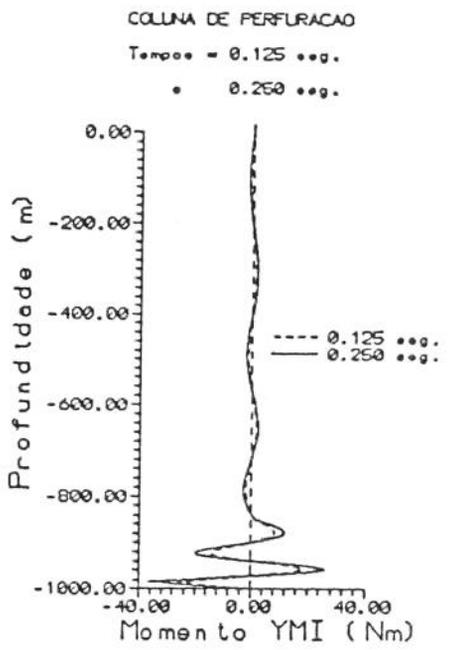
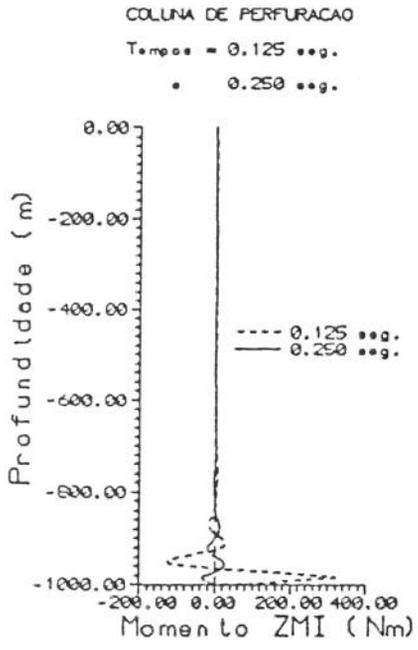
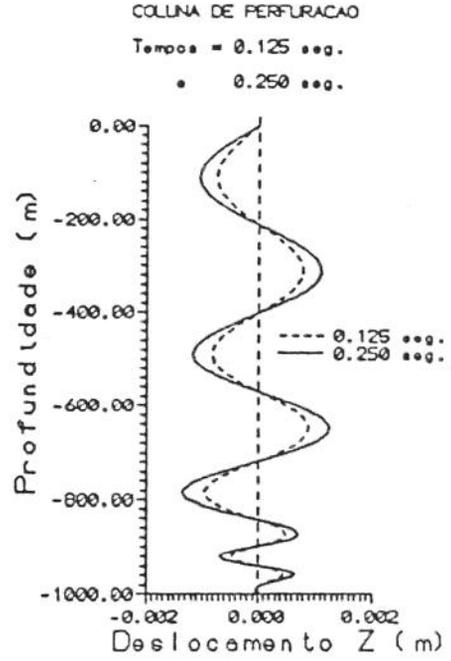
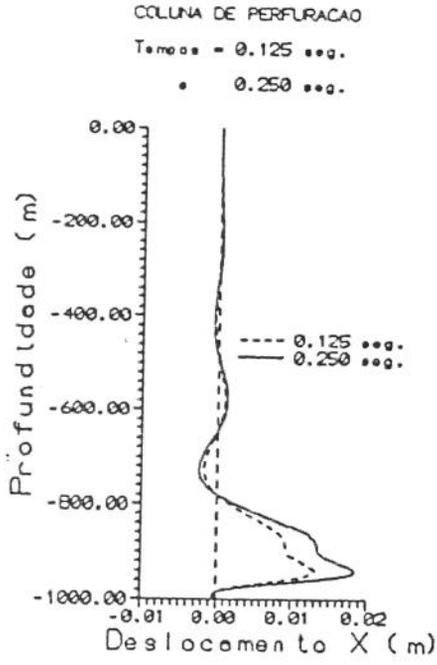


Figura 7.18 - Deformações devido desbalanceamento.

7.7.3 - Coluna Empenada

O processo deste teste foi o mesmo do anterior, utilizando a mesma coluna de perfuração. A diferença entre eles são apenas as cargas utilizadas na segunda fase de cálculos e o comprimento da coluna carregada. Neste caso foi considerada que toda coluna estava igualmente empenada. A carga máxima provocada pelo empenamento foi considerada como na direção do eixo z para o tempo $t=0,250s$.

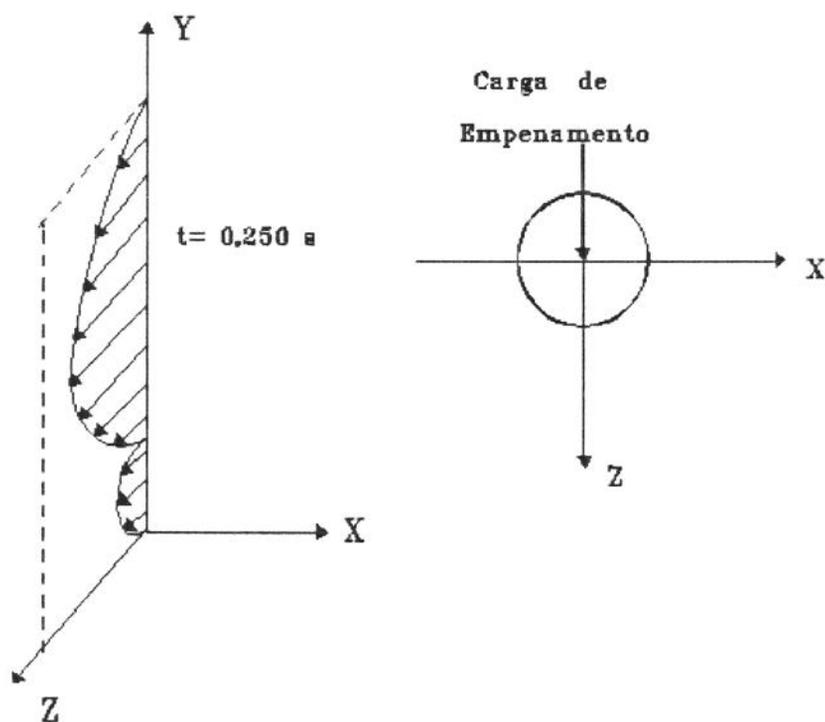


Fig. 7.19 - Cargas de empenamento máximo ($t=0,250s$)

Para a força em relação ao tempo foi utilizada a expressão do teste anterior,

$$\{F(t)\} = \{A.\text{sen}(\omega_e.t)\}$$

$$A = m.\omega_e^2.e \quad (\text{amplitude da força excitadora - m})$$

$$m \quad (\text{massa do elemento - kg})$$

$$\omega_e = 2.\pi \text{ rad/s} \quad (\text{frequência de excitação - rad/s})$$

$$e = \frac{d_p - d_c}{2}.\text{sen}\left\{\frac{\pi.X}{L_c}\right\} \quad (\text{excentricidade})$$

$$d_p \quad (\text{diâmetro do poço - m})$$

$$d_c \quad (\text{diâmetro externo da coluna - m})$$

$$X \quad (\text{profundidade - m})$$

$$L_c \quad (\text{comprimento da coluna - m})$$

Na figura 7.20 são mostrados os gráficos dos deslocamentos transversais X profundidade e momentos fletores X profundidade, para os tempos 0,125 s. e 0,250 s.

7.7.4 - Coluna Submetida a Cargas Combinadas de Desbalanceamento e Empenamento

Como último teste de coluna de perfuração é apresentada a mesma coluna, mas submetida a cargas combinadas de desbalanceamento e empenamento. A coluna e as cargas utilizadas foram as mesmas dos testes anteriores. Esta análise foi realizada em duas etapas:

- Na primeira, uma análise estática em que a coluna estava submetida ao peso próprio e forças de atrito. Nesta etapa foram obtidos os deslocamentos e forças axiais causados por este carregamento. As forças axiais foram utilizadas para geração da matriz geométrica a ser somada à matriz elástica da segunda etapa.

- Na segunda etapa foi novamente utilizada a expressão de Burgess para força em relação ao tempo,

$\{F(t)\} = \{A.\text{sen}(\omega_e.t)\}$, e o carregamento foi constituído pelas cargas de

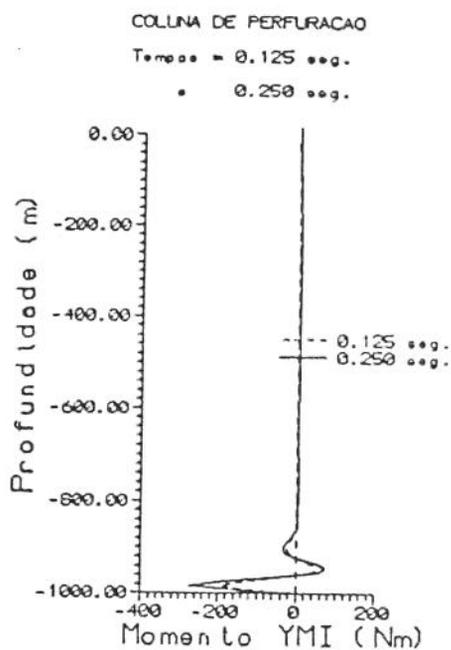
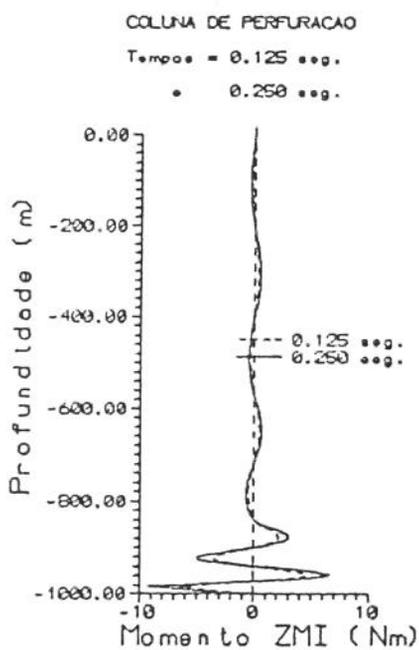
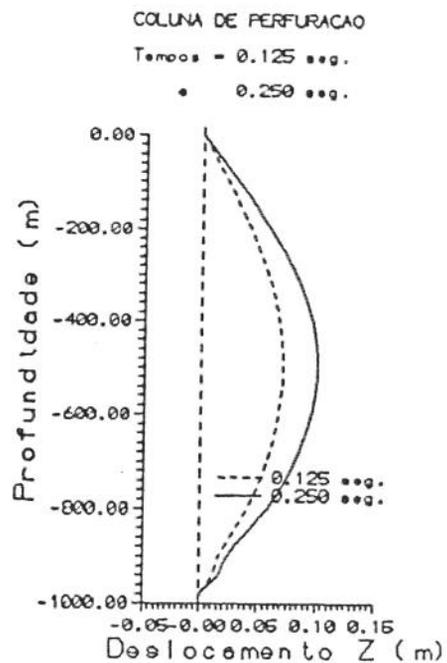
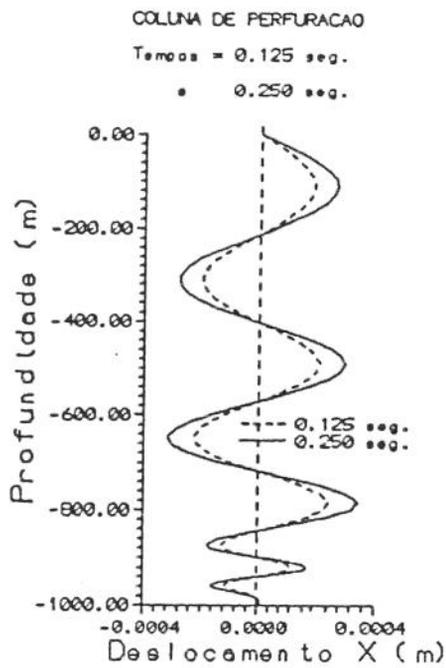


Figura 7.20 - Deformações e momentos devido empenamento.

desbalanceamento e empenamento, mas foram consideradas como atuando em planos independentes, conforme figura 7.21.

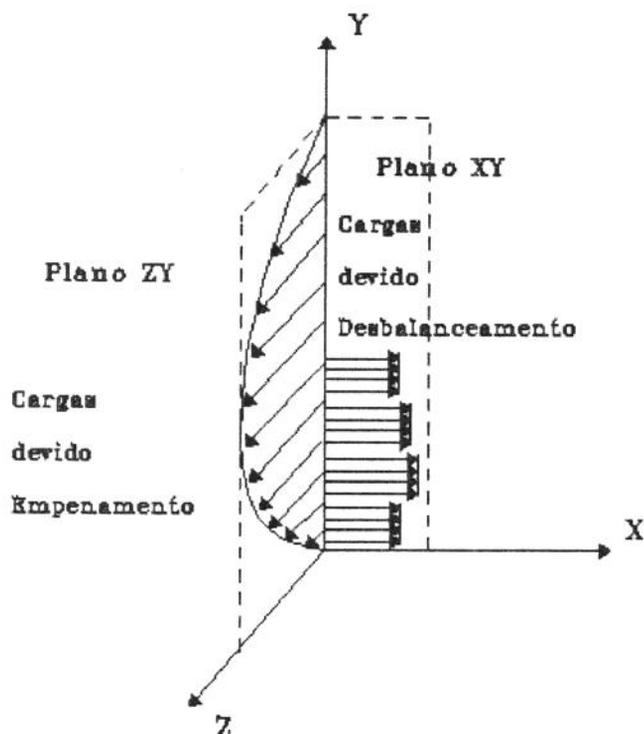


Fig. 7.21 - Esquema de cargas devido ao desbalanceamento (sobre o plano XY) e ao empenamento (sobre o plano ZY)

Na figura 7.22 são apresentados em gráficos as deformações e momentos atuando na coluna de perfuração devido a esta composição de cargas. É observado grandes deformações no intervalo constituído por elementos desbalanceados e empenados. Produzem grandes momentos junto ao estabilizador e junto a elementos submetidos a diferentes tipos e valores de carga. Quanto a resistência mecânica das colunas de perfurações é importante observar se os elementos destas não estão com problemas de empenamento ou desbalanceamento. Caso seja desejado elementos desbalanceados devem serem estudadas as cargas que as colunas sofrerão para um correto dimensionamento.

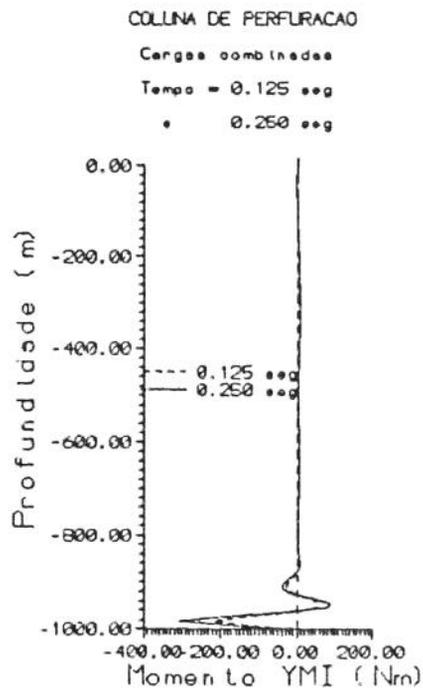
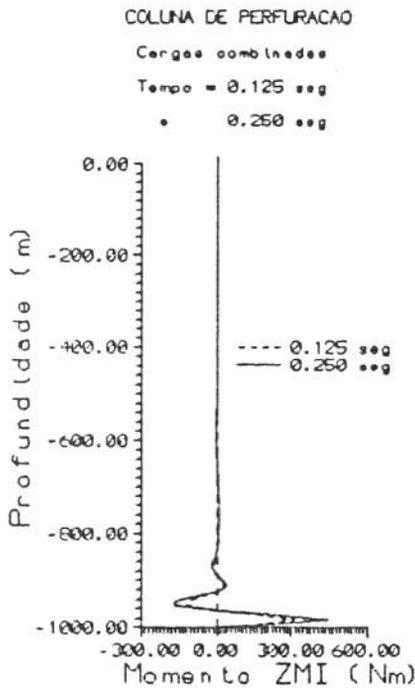
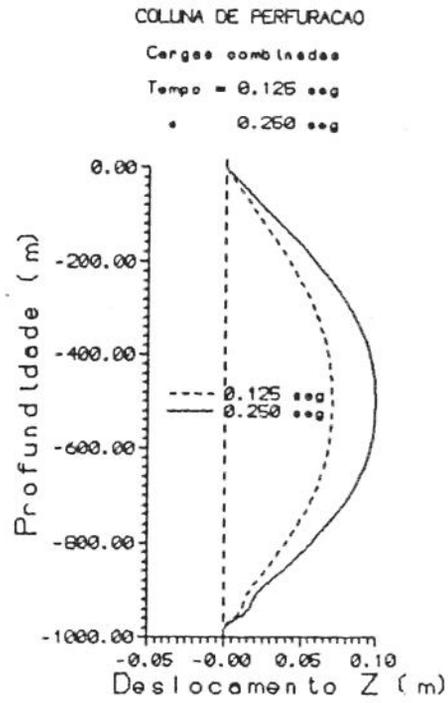
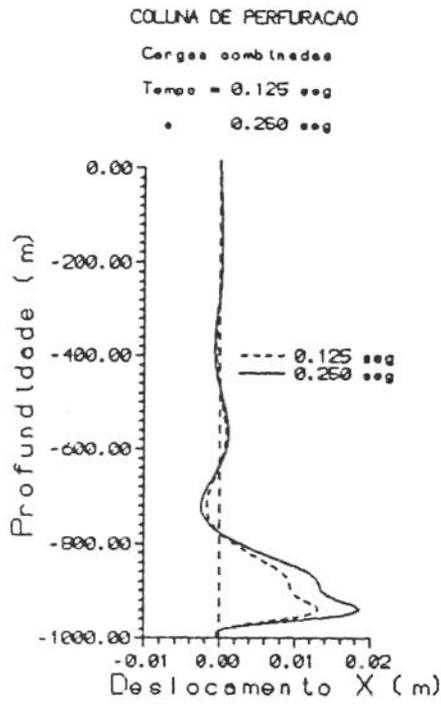


Figura 7.22 - Deformações e momentos devido cargas combinadas.

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1 - RESUMO

a) Um programa numérico que utiliza o método dos elementos finitos para análises bidimensionais, estáticas e dinâmicas, de colunas de perfuração quanto a resistência dos materiais foi modificado e ampliado para que possa ser utilizado em análises tridimensionais.

b) O programa tridimensional foi validado por meio de testes em que os resultados concordaram com os de testes efetuados com outros programas e com soluções analíticas.

8.2 - CONCLUSÕES

a) O programa ANESDE 3.0 é uma ferramenta potente e genérica para análise de coluna de perfuração. Permitirá um acompanhamento freqüente das tensões a que está submetida a coluna de perfuração nas mais diversas situações, desde que corretamente modelado o problema.

b) Com o ANESDE 3.0 são calculadas as freqüências e modos naturais, permitindo evitar as rotações da coluna que dariam ressonância.

8.3 - RECOMENDAÇÕES

a) Estudar os principais casos em que seria útil realizar análises de colunas de perfuração com o ANESDE 3.0. Para cada caso selecionado deverá ser modelado o problema.

b) Preparar pré e pós-processadores amigáveis com o usuário para os casos selecionados. Assim disporíamos para estes casos de uma forma simples de entrada de dados e de saída dos resultados a serem estudados.

c) Preparar um programa que forneça as matrizes de rigidez para o caso estático, tridimensional, de grandes deformações.

d) Considerar os limites impostos pelas paredes do poço e diâmetro externo da coluna. Com isto poderá ser analisado casos que ultrapassem a análise linear, com restrições aos deslocamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATHE, Klaus-Jürgen & Wilson, Edward L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1976.

BENJAMIN, A.C. Análise Não-linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos (Dissertação de Mestrado). Rio de Janeiro: Univ. Federal do Rio de Janeiro - Escola de Engenharia, 1982.

BONAFÉ, Luís A.S. O Método dos Elementos Finitos Aplicados à Análise de Colunas de Perfuração. (Dissertação de Mestrado em Engenharia do Petróleo). Ouro Preto: UFOP, 1986.

BRAKEL, Johannes Daniel. Prediction of Wellbore Trajectory Considering Bottom Hole Assembly and Drillbit Dynamics. (Dissertação de Doutorado). Tulsa: The University of Tulsa, 1986.

BURGUESS, T. M. & DAS, P. K. Improving BHA Reliability with Drill String Vibration Models: Field Experience and Limitations. SPE/IADC 16109, março 1987.

CORDOVIL, André G.D.P. Análise Modal. (Trabalho Semestral da Disciplina IP 421). Campinas: UNICAMP, 1990.

- CORDOVIL, André G.D.P. Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração via Superposição Modal. (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Petróleo). Campinas: UNICAMP, novembro de 1991.
- CORDOVIL, André G.D.P. & PRODONOFF, Victor. Efeitos Dinâmicos Devido às Imperfeições de uma Coluna de Perfuração. Rio de Janeiro: VIII Congresso Latino-Americano de Perfuração, 1992.
- GUZ, José L. Estudo da Coluna de Perfuração através da Implementação do Elemento Finito de Viga-Coluna. (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Petróleo). Campinas: UNICAMP/FEM/DEP, dezembro de 1990.
- MARTIN, Harold C. Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. New York: McGraw-Hill, 1966.
- MILLHEIM, K. K. & JORDAN, S. & RITTER, C. J. Bottom-Mole Assembly Using the Finite-Element. SPE 6057, agosto/1976.
- MILLHEIM, K. K. The Effect of Hole Curvature on the Trajectory of a Borehole. SPE 6779, 12 outubro de 1977.
- MILLHEIM K.K. Evaluating and Planning Directional Wells Utilizing Post Analysis Techniques and a Three Dimensional Bottom Hole Assembly Program. SPE 8339, 27 de outubro de 1978.

MILLHEIM K.K. Computer Simulation of the Directional Drilling Process. SPE 9990: 483, 18/03/1982.

MILLHEIM, K.K. & HUGGINS, R.L. An Engineering Simulator for Drilling SPE 12075 & SPE 12210, 08/10/1983.

NICHOLSON Jr., Robert W. Analysis of Constrained Directional Drilling Assemblies. (Dissertação de Doutorado) Tulsa: The University of Tulsa, 1972.

PLÁCIDO, João C.R. Cálculo da Fadiga em Colunas de Perfuração. (Dissertação de Mestrado). Ouro Preto: UFOP, 1986.

PRODONOFF, Victor. Vibrações Mecânicas: Simulação e Análise. Rio de Janeiro: Maity Comunicação e Ed., 1990.

PRODONOFF, Victor & PLÁCIDO, João C.R. & PEREIRA, M.J. Programa ANESDE-Análise Estática e Dinâmica de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro: Petrobrás/CENPES, 1990.

PRODONOFF, Victor et Alli. Análise de Tensões em Colunas de Perfuração Utilizando a Técnica dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro: Petrobrás/CENPES, 1991.

PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of Matrix Structural Analysis. New York: Dover Publications, 1985.

RIBEIRO, P.R. Estudo da Interação entre o Solo e a Cabeça de Poço pelo Método dos Elementos Finitos. (Dissertação de Mestrado), Campinas: UNICAMP, 1989.

SAMPAIO Jr. J.H.B. Previsão da Taxa de Variação Azimutal na Perfuração de Poços Direcionais. (Dissertação de Mestrado). Campinas: UNICAMP/FEM/DEP, 1989.

TAVARES, H.F., SAPTAV. Análise Estática e Dinâmica de Treliças e Vigas. (Dissertação de Mestrado). Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 1985.

TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J. N. Teoria da Elasticidade. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

WARREN, T. The Effect of Hole Curvature in Drill Pipe While Drilling Inside Casing or Open Hole. SPE 6708, 1977.

WOLFSON, Larry. Three-Dimensional Analysis of Constrained Directional Drilling Assemblies in a Curved Hole. (Dissertação de Mestrado). Tulsa: The University of Tulsa, 1974.

ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method. New Delhi: Tata McGraw-Hill, 1989.