

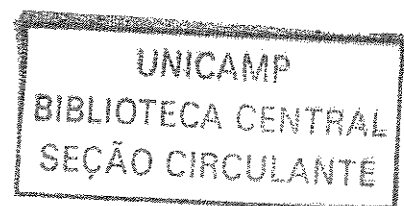
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL E
TESE DEFENDIDA POR Mariana Godoy
Vazquez E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 30 / 07 / 2004.
Marco Lúcio Bittencourt
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Construção de Funções de Interpolação para as Versões h e p do MEF através de Produto Tensorial

Autora: Mariana Godoy Vazquez
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

14/04



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Construção de Funções de Interpolação para as Versões h e p do MEF através de Produto Tensorial

Autora: Mariana Godoy Vazquez
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 2004
SP - BRASIL

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	11079c
V	EX
TOMBO BC/	61537
PROC.	16-86-09
C ☐	D ☒
PREÇO	11,00
DATA	03-1-03
Nº CPD	

3:bid:340 740

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V479c

Vazquez, Mariana Godoy

Construção de funções de interpolação para as
versões h e p do MEF através de produto tensorial. --
Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Interpolação. 2. Polinômios ortogonais. 3. Método
dos elementos finitos. I. Bittencourt, Marco Lúcio. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Construção de Funções de Interpolação para as Versões h e p do MEF através de Produto Tensorial

Autora: Mariana Godoy Vazquez

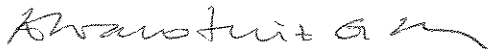
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho
UFRJ

Campinas, 30 de julho de 2004.

Dedicatória

Ao meu amor e à minha família.

Agradecimentos

Este trabalho é a realização de um antigo sonho, trabalhar com pesquisa matemática aplicada. Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt pela oportunidade e tempo dedicado à minha orientação.

Aos meus pais Ramon e Elisabete, meu irmão Ramon Filho e à minha querida avó Ottilia (*in memoriam*) pelo incentivo e apoio em todos os momentos difíceis.

À minha amiga, irmã e companheira Thais Godoy Vazquez, por todo equilíbrio e serenidade demonstrados, assim como sua valorosa colaboração matemática na fundamentação e finalização desse trabalho.

Ao meu amado esposo Gleberson, por todo carinho, compreensão e amor, principalmente na minha ausência.

Aos amigos engenheiros Geraldo Roberto de Souza, Hélio Fiori de Castro, Carlos Eduardo Leite Pereira pelo espírito colaborador de situar uma “matemática” na Engenharia Mecânica.

Ao amigo Pedro Henrique Baptistella, pela grande colaboração em todo o projeto na parte de implementação dos códigos e também, pela sua visão experiente.

Ao amigo Roberto Henrique Heiderich, do IMECC, pela sua importante contribuição na implementação de códigos em Elementos Finitos no início da pesquisa.

A todos os colegas, professores e funcionários da FEM que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

À CAPES, DPM, FEM e UNICAMP pelo suporte financeiro e institucional destinados a esse projeto.

“Ser é nada, tornar-se é tudo.”

Fernando Pessoa

Resumo

VAZQUEZ, Mariana Godoy. *Construção de Funções de Interpolação para as Versões h e p do MEF através de Produto Tensorial*. Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 73p. (Dissertação de Mestrado)

Nesse trabalho, apresentam-se procedimentos baseados em produto tensorial para a construção de funções de interpolação nodal (versão h) e modal (versão p), com emprego, respectivamente, de Polinômios de Lagrange e Jacobi em elementos finitos uni, bi (quadrados e triângulos) e tridimensionais (hexaedros e tetraedros). Os procedimentos apresentados são simples e permitem um tratamento uniforme para a construção das funções de interpolação. Realizaram-se estudos sobre o condicionamento numérico e a esparsidade de algumas bases aqui definidas. Em particular, para as funções triangulares modais tensorizáveis realizou-se um estudo sobre a influência das ponderações dos Polinômios de Jacobi na esparsidade e condicionamento numérico das matrizes locais de massa.

Palavras-chave

- Funções de Interpolação, Polinômios de Lagrange, Polinômios de Jacobi, Tensorização, Método de Elementos Finitos.

Abstract

VAZQUEZ, Mariana Godoy. *Construction of Interpolation Functions for the h and p Versions of the FEM using Tensorial Product*. Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 73p. (Master's Thesis)

This work presents procedures based on the tensorial product for the construction of nodal (version h) and modal (version p) interpolation functions, with the use of Lagrange and Jacobi polynomials, respectively, for one, two (square and triangles) and three-dimensional (hexahedral and tetrahedral) elements. The procedures presented are simple and permit an uniform treatment of the construction of the interpolation functions. The numerical conditioning and sparsity of some bases defined are studied. For the tensorial modal functions for triangles the influence of the weights of the Jacobi polynomials in the sparsity and numerical conditioning of the local mass matrices is considered.

Keywords

- Interpolation Functions, Lagrange Polynomials, Jacobi Polynomials, Tensorization, Finite Element Method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Objetivos	7
1.4	Organização do texto	7
2	Construção das Funções de Base Unidimensionais	8
2.1	Base Nodal	8
2.2	Base Modal	12
2.3	Resultados	15
3	Construção das Funções de Base para Quadrados e Hexaedros	19
3.1	Funções de Interpolação para Quadrados	19
3.1.1	Bases nodais	21
3.1.2	Bases modais	26
3.2	Funções de Interpolação para Hexaedros	28
3.2.1	Bases nodais	32
3.2.2	Bases modais	32
3.3	Resultados	34
4	Construção das Funções de Base para Triângulos e Tetraedros	37
4.1	Funções de Interpolação para Triângulos	37
4.1.1	Bases nodais	41
4.1.2	Bases modais	44
4.2	Funções de Interpolação para Tetraedros	46
4.2.1	Bases nodais	51
4.2.2	Bases modais	52
4.3	Resultados	54
5	Conclusão e Perspectivas Futuras	63

Referências Bibliográficas	65
A Interpolação Polinomial e Polinômios Ortogonais	68
A.1 Interpolação Polinomial	68
A.1.1 Polinômio de Interpolação de Lagrange	69
A.2 Sequência de Polinômios Ortogonais	70
A.2.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais	71
A.2.2 Polinômios Ortogonais Clássicos	73

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de funções de forma p para triângulos (Bittencourt, 2004).	2
2.1	Sistema local de coordenadas ξ_1	8
2.2	Elemento unidimensional linear de Lagrange.	9
2.3	Elemento unidimensional quadrático de Lagrange.	10
2.4	Elemento unidimensional cúbico de Lagrange.	10
2.5	Coordenadas naturais.	11
2.6	Mapeamento entre os sistemas local ξ_1 e natural L_1	11
2.7	Funções de interpolação modais para elementos unidimensionais quadrático, cúbico e quártico.	15
2.8	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Lagrange.	17
2.9	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Jacobi.	17
2.10	Condicionamento numérico das matrizes de massa dos elementos unidimensionais com bases de Lagrange e Jacobi.	18
2.11	Condicionamento numérico das matrizes de rigidez com bases de Lagrange e Jacobi.	18
3.1	Construção tensorial das funções de interpolação para quadrados.	19
3.2	Associação entre entidades topológicas e índices p e q no quadrado.	20
3.3	Elementos quadrangulares lagrangianos.	21
3.4	Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado linear.	22
3.5	Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado quadrático.	23
3.6	Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado cúbico.	24
3.7	Elementos quadrangulares da família Serendipity.	25
3.8	Funções de interpolação do quadrado de Serendipity quártico.	27
3.9	Funções de interpolação modais para o quadrado quadrático.	29
3.10	Funções de interpolação modais para o quadrado cúbico.	29
3.11	Construção tensorial das funções de interpolação para hexaedros.	30
3.12	Índices p , q e r e entidades topológicas no hexaedro.	30

3.13	Associação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.	31
3.14	Esparsidade das matrizes de massa dos quadrados de Lagrange.	35
3.15	Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos quadrados de Jacobi.	35
3.16	Condicionamento numérico das matrizes de massa dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.	36
3.17	Condicionamento numérico das matrizes de rigidez dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.	36
4.1	Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991).	38
4.2	Triângulo linear (Bittencourt, 1991).	39
4.3	Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991).	40
4.4	Entidades topológicas do triângulo, índices p , q , r e associação entre entidades e índices.	41
4.5	Triângulos da família nodal lagrangiana.	42
4.6	Funções de interpolação para o triângulo linear lagrangiano.	43
4.7	Funções de interpolação para o triângulo quadrático lagrangiano.	43
4.8	Funções de interpolação para o triângulo cúbico lagrangiano.	45
4.9	Funções de interpolação para o triângulo quadrático modal.	45
4.10	Funções de interpolação para o triângulo cúbico modal.	47
4.11	Funções de interpolação hierárquicas para o triângulo quadrático.	47
4.12	Funções de interpolação hierárquicas para o triângulo cúbico.	48
4.13	Coordenadas de volume.	48
4.14	Tetraedro linear (Bittencourt, 1991).	49
4.15	Entidades topológicas para tetraedros, índices p , q , r e s e associação entidades e índices.	50
4.16	Tetraedros da família nodal lagrangiana.	51
4.17	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos de Lagrange.	55
4.18	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos de Lagrange.	56
4.19	Esparsidade da matriz de massa do triângulo de Jacobi para $P = 3$.	57
4.20	Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos de Jacobi.	58
4.21	Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos de Jacobi.	59
4.22	Condicionamento numérico das matrizes de massa dos triângulos com bases de Lagrange e Jacobi.	62
4.23	Condicionamento numérico das matrizes de rigidez dos triângulos com bases de Lagrange e Jacobi.	62

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A qualidade da aproximação obtida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) depende do tamanho e da forma dos elementos, das propriedades do espaço de aproximação e regularidade da solução (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2002). Do ponto de vista computacional, a escolha da base para o espaço de aproximação influencia a precisão e eficiência dos procedimentos numéricos usados para o cálculo da solução aproximada. Em geral, as bases de elementos finitos consistem de funções polinomiais por partes definidas sobre os elementos da partição que interpola o domínio do problema.

Especificamente, a versão p do MEF tem as seguintes características principais (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999): integração numérica de alta ordem; diferenciação numérica; funções de forma apropriadas; mapeamento geométrico para domínios arbitrários; continuidade global C_0 entre os elementos; numeração dos graus de liberdade; aplicação das condições de contorno e pós-processamento dos resultados.

As funções de forma p (funções de base, funções ou modos de interpolação) são associadas às entidades topológicas (vértices, arestas, face e corpo) como ilustrado na Figura 1.1. Em geral, as funções usam polinômios unidimensionais de Legendre e Chebyshev (Szabó e Babuška, 1991; Vijayakar et al., 1987; Devloo et al., 1988).

Bases p hierárquicas ou modais são caracterizadas pelas seguintes propriedades

(Karniadakis e Sherwin, 1999):

1. os modos de vértice têm magnitude unitária em um vértice e são zero em todos os outros vértices do elemento;
2. os modos de aresta têm magnitude ao longo de uma aresta e são zero em todas as outras arestas e vértices do elemento;
3. os modos de face têm magnitude ao longo de uma face, mas são zero em todas as outras faces, arestas e vértices dos elementos;
4. No caso $3D$, têm-se as funções de volume ou de corpo com propriedades semelhantes.

Essas propriedades são ilustradas na Figura 1.1 para elementos triangulares.

O conceito de hierarquia significa que conjuntos de expansão de ordem mais alta X_{p+1} contém os termos dos conjuntos de expansão de ordem mais baixa X_p , i.e., $X_p \subset X_{p+1}$.

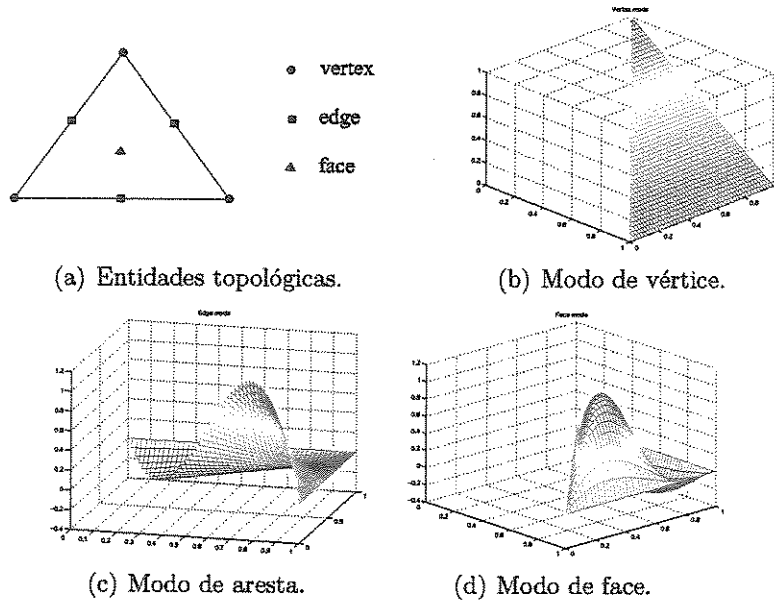


Figura 1.1: Exemplo de funções de forma p para triângulos (Bittencourt, 2004).

Também são importantes na versão p do MEF o tipo da malha (estruturada e não estruturada), o uso de produto tensorial, o emprego de coordenadas baricêntricas para

triângulos e tetraedros e as propriedades de condicionamento e esparsidade das matrizes locais (Babuska et al., 1989; Carnevali et al., 1993; Edgar e Surana, 1996; Szabó e Peano, 1987; Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001). As propriedades locais são determinadas pela definição das funções de forma e indiretamente influenciam as propriedades correspondentes das matrizes globais (Carnevali et al., 1993; Edgar e Surana, 1996; Zumbusch, 1995; Nogueira Jr., 2002). A melhor eficiência computacional das expansões estruturadas resultam de seu processo construtivo baseado no produto tensorial de bases unidimensionais. Segundo (Karniadakis e Sherwin, 1999) para serem competitivas as expansões não-estruturadas devem ser tão eficientes quanto as estruturadas, principalmente quando aplicadas à problemas dependentes do tempo.

O uso de produto tensorial na construção das funções de base é importante devido à simplicidade, flexibilidade e maior eficiência computacional. O principal enfoque desse trabalho será apresentar procedimentos tensorizáveis para a construção de funções de interpolação para quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros.

1.2 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica apresentada a seguir está baseada naquela apresentada em Nogueira Júnior (Nogueira Jr., 2002).

Vários conjuntos de funções de forma p estão apresentados na literatura.

Peano considerou famílias de funções de interpolação hierárquicas para elementos triangulares de lados retos que podem ser aplicadas para qualquer ordem polinomial (Peano, 1975). Cada novo grau de liberdade para $p \geq 2$ representa a p -ésima derivada da aproximação. As funções são mapeadas diretamente sobre os elementos da malha usando coordenadas baricêntricas.

Katz & Rossow estenderam o trabalho de Peano com a definição de um elemento de referência usando matrizes universais e vetores pré-computados para aumentar a performance computacional (Rossow e Katz, 1993).

Zienkiewicz apresentou funções para elementos hierárquicos quadrilaterais com um

bom número de condicionamento das matrizes locais, fácil imposição da continuidade entre os elementos e o uso de estimadores de erro (Zienkiewicz et al., 1981).

As funções hierárquicas clássicas para quadriláteros e hexaedros introduzidas por Szabó & Babuška (Szabó e Babuška, 1991) têm excelente esparsidade e propriedades de condicionamento devido ao uso de polinômios de Legendre e sua natureza tensorial (Edgar e Surana, 1996; Maitre e Pourquier, 1995). Entretanto, as funções para triângulos e tetraedros não têm propriedades similares e há um aumento exponencial do número de condicionamento local do elemento com a ordem do elemento p (Carnevali et al., 1993; Adjerd et al., 2001; Nogueira Jr., 2002).

Carnevali introduziu funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros com a propriedade de que as funções de aresta, face e corpo são ortogonais, no sentido do operador laplaciano, para as mesmas funções com ordens não superiores a $p - 2$, $p - 3$ e $p - 4$, respectivamente (Carnevali et al., 1993). Esse fato resultou em uma matriz de rigidez local com melhor número de condicionamento e esparsidade das matrizes locais comparado às funções definidas em (Szabó e Babuška, 1991).

Sherwin & Karniadakis apresentaram funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros baseadas em sistemas cartesianos colapsados, produto tensorial, polinômios ortogonais de Jacobi e integração numérica exata usando o produto tensorial da quadratura unidimensional de Gauss-Jacobi (Sherwin e Karniadakis, 1995; Karniadakis e Sherwin, 1999). Os sistemas de coordenadas colapsadas para triângulos e tetraedros são obtidos dos sistemas de coordenadas cartesianas definidos sobre quadriláteros e hexaedros, respectivamente. Tais funções foram aplicadas no estudo de problemas de fluídos definindo os métodos hp espectrais (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Webb & Abouchakra usaram polinômios de Jacobi para definir funções de forma para o triângulo referência $[0,1]$ 2-simplex (Webb e Abouchakra, 1995). A regra de quadratura definida em (Dunavant, 1985) foi usada. A extensão das funções para tetraedros é apresentada em Abouchakra (Abouchakra, 1996) com uso de matrizes universais pré-computadas.

Nogueira Júnior & Bittencourt (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001) mostraram as vantagens de usar polinômios de Jacobi para melhorar a eficiência computacional e a es-

parsidade das matrizes locais e globais. Também foi verificado que as funções propostas em Carnevalli (Carnevali et al., 1993) têm um aumento exponencial do número de condicionamento com a ordem do elemento, mas inferior ao verificado nas funções apresentadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991).

Adjerid (Adjerid et al., 2001) propôs novas funções para triângulos e tetraedros com melhor esparsidade e propriedades de condicionamento quando comparadas a Szabó & Carnevalli (Szabó e Babuška, 1991; Carnevali et al., 1993). As funções são baseadas em Szabó (Szabó e Babuška, 1991) e usam a ortogonalização das funções de face (2D) e de face e corpo (3D). A estratégia apresentada é muito similar a que foi usada em Mandel (Mandel, 1990b; Mandel, 1990a) para definir pré-condicionadores para métodos de decomposição de domínios em malhas de hexaedros.

Nogueira Jr. (Nogueira Jr., 2002) apresentou novos conjuntos de funções baseados em polinômios de Jacobi e tensorização em coordenadas colapsadas. As ponderações foram obtidas de tal maneira a diagonalizar as funções de face (2D) e de corpo (3D). Além disso, aplicou-se o método *hp* espectral em problemas de elasticidade linear com o uso de métodos iterativos e multigrid *hp*-adaptáveis.

As bases já mencionadas para triângulos e tetraedros não usam produto tensorial padrão de polinômios unidimensionais definidos em coordenadas baricêntricas. Na definição padrão de produto tensorial, bases unidimensionais para cada direção são multiplicadas termo a termo para construir bases de maior dimensão.

As funções modais para quadriláteros e hexaedros apresentadas em (Karniadakis e Sherwin, 1999) aplicam a definição padrão de produto tensorial. Entretanto, triângulos e tetraedros usam um produto deformado ou generalizado, devido ao uso do sistema de coordenadas colapsadas. As funções de forma para quadriláteros definidos em (Szabó e Babuška, 1991) usam tensorização dos polinômios de Legendre nas direções locais ξ e η com funções lineares $(1 \pm \xi)$ ou $(1 \pm \eta)$.

Em (Bittencourt, 2004), apresentam-se funções de forma modal e nodal para triângulos e tetraedros baseadas no produto tensorial de funções unidimensionais expressas em coordenadas baricêntricas. As funções nodais usam polinômios de Lagrange e são as

	Peano	Szabó	Webb	Bittencourt	Karniadakis
Hierarquia	sim	sim	sim	não	sim
Coordenadas	baricêntrica	baricêntrica	baricêntrica	baricêntrica	colapsada
Base polinomial	Legendre	Legendre	Jacobi	Jacobi	Jacobi
Tensorização	não	não	não	sim	não
Continuidade	não	não	não	sim	não

Tabela 1.1: Comparação de funções de base para triângulos.

funções de forma h padrão apresentadas na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991). As bases modais usam polinômios de Jacobi. O procedimento tensorizável para construir os conjuntos de funções modais e nodais é muito simples. Além disso, foi a primeira vez na literatura que as funções de interpolação h padrão e p foram construídas usando produto tensorial, contrariando a afirmação em (Karniadakis e Sherwin, 1999), que tal construção é impossível ou muito difícil. As funções modais têm uma continuidade global C_0 automática entre os elementos. Assim, não é necessário um procedimento adicional para impor tal continuidade, como ocorre com as funções de interpolação p presentes na literatura.

Como mencionado, as características de esparsidade e condicionamento numérico das matrizes locais dos elementos são fundamentais para a versão p do MEF. No caso de polinômios de Jacobi, tais características são influenciadas pela correta seleção das ponderações dos polinômios. Um dos objetivos deste trabalho é dar continuidade aos resultados apresentados em (Bittencourt, 2004), através de um estudo sobre os polinômios de Jacobi, suas propriedades de ortogonalidade e a seleção de suas ponderações para uso nas funções modais na matriz de massa dos triângulos. A escolha da matriz de massa foi feita, pois os seus coeficientes empregam o produto das funções de base e conseqüentemente o produto dos polinômios de Jacobi. Como será visto, uma dificuldade encontrada está relacionada ao acoplamento das coordenadas baricêntricas.

A Tabela 1.1 apresenta uma comparação de alguns conjuntos de funções de base triangulares considerando a existência de hierarquia, tipo de sistemas de coordenadas, base polinomial, tensorização e continuidade natural inter-elemento.

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo apresentar procedimentos tensorizáveis para a construção de funções de interpolação, utilizando polinômios de Lagrange e Jacobi, para quadrados, triângulos, hexaedros e tetraedros. Após a construção das funções, verificam-se o condicionamento e esparsidade de algumas bases definidas. Para as funções modais triangulares, verifica-se a influência das ponderações dos polinômios de Jacobi na esparsidade e condicionamento das matrizes de massa dos elementos.

1.4 Organização do texto

Os capítulos subseqüentes estão organizados de tal forma que no Capítulo 2 é apresentada a construção das funções de base unidimensionais h (nodal) e p (modal), além de um estudo sobre o condicionamento numérico e a esparsidade das funções definidas.

O Capítulo 3 apresenta a construção das funções de interpolação nodais e modais para quadrados (2D) e hexaedros (3D). Realiza-se um estudo sobre o condicionamento numérico e a esparsidade das funções nodais e modais para quadrados.

No Capítulo 4, apresenta-se o procedimento tensorizável para triângulos (2D) e tetraedros (3D) definidos em (Bittencourt, 2004). Considera-se o estudo das ponderações dos polinômios de Jacobi nos coeficientes da matriz de massa e a influência dessas ponderações na esparsidade e condicionamento numérico das matrizes locais dos elementos.

No Capítulo 5, consideram-se as conclusões e perspectivas futuras do presente trabalho.

No Apêndice A é feito um estudo sobre interpolação polinomial e polinômios ortogonais, que é a base para o estudo das ponderações dos polinômios ortogonais de Jacobi.

Capítulo 2

Construção das Funções de Base Unidimensionais

2.1 Base Nodal

A Figura 2.1 ilustra o sistema de coordenadas ξ_1 definido no intervalo fechado $[-1, 1]$. Considere o conjunto de $P_1 + 1$ pontos ξ_{1p} ($p = 0, \dots, P_1$) definidos em ξ_1 . O polinômio de Lagrange de ordem P_1 associado a cada coordenada ξ_{1p} é dado por (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$\begin{aligned} l_p^{(P_1)}(\xi_1) &= \prod_{q=0(p \neq q)}^{P_1} \frac{(\xi_1 - \xi_{1q})}{(\xi_{1p} - \xi_{1q})} \\ &= \frac{(\xi_1 - \xi_{10})(\xi_1 - \xi_{11}) \dots (\xi_1 - \xi_{1p-1})(\xi_1 - \xi_{1p+1}) \dots (\xi_1 - \xi_{1P_1})}{(\xi_{1p} - \xi_{10})(\xi_{1p} - \xi_{11}) \dots (\xi_{1p} - \xi_{1p-1})(\xi_{1p} - \xi_{1p+1}) \dots (\xi_{1p} - \xi_{1P_1})} \end{aligned} \quad (2.1)$$

e $l_p^{(0)}(\xi_1) = 0$.

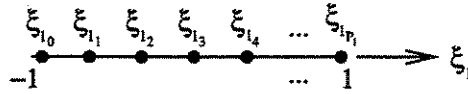


Figura 2.1: Sistema local de coordenadas ξ_1 .

Pela definição anterior, tem-se que $l_p^{(P_1)}(\xi_{1q}) = \delta_{pq}$, sendo δ_{pq} o delta de Kronecker,

isto é,

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}. \quad (2.2)$$

As funções de interpolação $N_p(\xi_1)$ associadas aos nós p ($p = 0, \dots, P_1$) dos elementos finitos unidimensionais são os próprios polinômios de Lagrange, ou seja,

$$N_p(\xi_1) = l_p^{(P_1)}(\xi_1). \quad (2.3)$$

As Figuras 2.2 a 2.4 ilustram os elementos unidimensionais de Lagrange com 2, 3 e 4 nós. As respectivas funções de interpolação são obtidas a partir de (2.1) e (2.3) e dadas por

• elemento linear de 2 nós:

$$N_0(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \quad \text{e} \quad N_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1); \quad (2.4)$$

• elemento quadrático de 3 nós:

$$N_0(\xi_1) = -\frac{1}{2}\xi_1(1 - \xi_1), \quad N_1(\xi_1) = 1 - \xi_1^2 \quad \text{e} \quad N_2(\xi_1) = \frac{1}{2}\xi_1(1 + \xi_1); \quad (2.5)$$

• elemento cúbico de 4 nós:

$$\begin{aligned} N_0(\xi_1) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(9\xi_1^2 - 1), & N_1(\xi_1) &= \frac{9}{16}(1 - \xi_1^2)(1 - 3\xi_1), \\ N_2(\xi_1) &= \frac{9}{16}(1 - \xi_1^2)(1 + 3\xi_1) & \text{e} & \quad N_3(\xi_1) = \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(9\xi_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

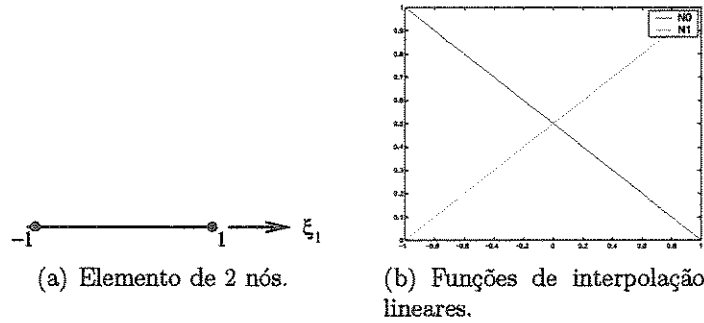


Figura 2.2: Elemento unidimensional linear de Lagrange.

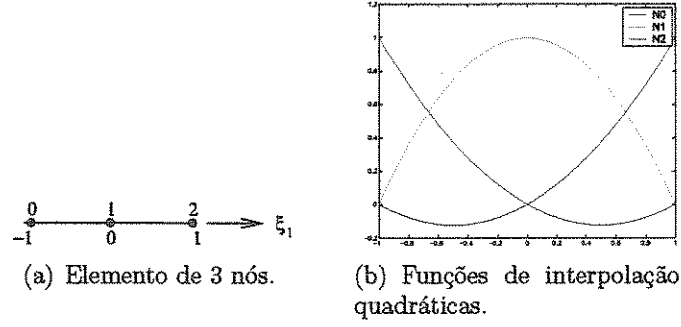


Figura 2.3: Elemento unidimensional quadrático de Lagrange.

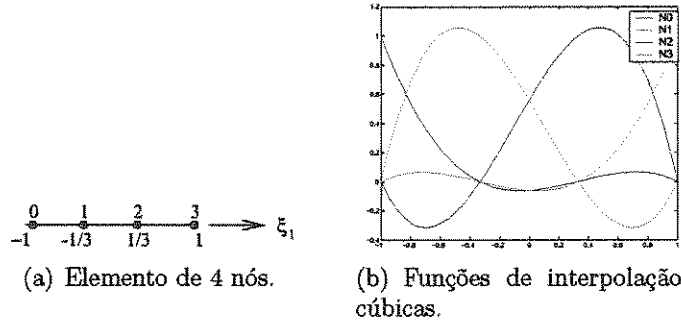


Figura 2.4: Elemento unidimensional cúbico de Lagrange.

A partir do segundo grau, além dos nós de vértice, os elementos possuem nós internos, aos quais associam-se funções de interpolação ou modos internos.

A seguinte expressão pode ser empregada para denotar as funções de forma de vértice ($p = 0$ e $p = P_1$) e internas ($0 < p < P_1$)

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1+\xi_1)L_p^{(P_1-1)}(\xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_1)L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \quad (2.7)$$

sendo $L_p^{(P_1-1)}(\xi_1)$ obtido da expressão geral (2.1) dos polinômios de Lagrange e

$$L_p^{(P_1-2)}(\xi_1) = -\frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P_1-1} (\xi_1 - \xi_{1_q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^{P_1} (\xi_{1_p} - \xi_{1_q})}. \quad (2.8)$$

Pode-se também trabalhar com as coordenadas naturais que são adimensionais (Cook et al., 1991). Para isso, considere a reta de comprimento l ilustrada na

Figura 2.5 e um ponto P sobre a mesma, o qual dista l_1 e l_2 das extremidades esquerda e direita, respectivamente. Observe que

$$l_1 + l_2 = l. \quad (2.9)$$

Dividindo-se a expressão anterior por l , tem-se

$$\frac{l_1}{l} + \frac{l_2}{l} = 1. \quad (2.10)$$

Definem-se as coordenadas naturais L_1 e L_2 pelas seguintes razões de comprimentos

$$L_1 = \frac{l_1}{l} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{l_2}{l}. \quad (2.11)$$

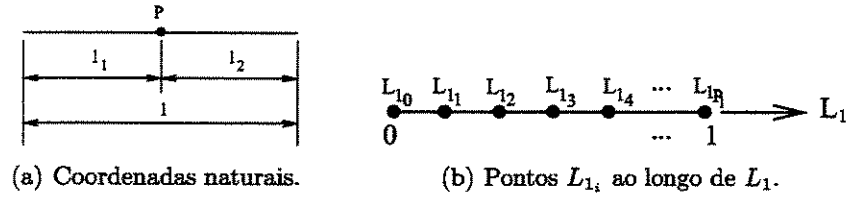


Figura 2.5: Coordenadas naturais.

Logo,

$$L_1 + L_2 = 1. \quad (2.12)$$

A partir da expressão anterior, verifica-se que uma das coordenadas naturais é dependente. Por exemplo,

$$L_2 = 1 - L_1. \quad (2.13)$$

Observe que L_1 e L_2 assumem os valores 0 e 1. Logo, o intervalo de variação de L_1 e L_2 é $[0, 1]$, ou seja, $L_1, L_2 \in [0, 1]$.

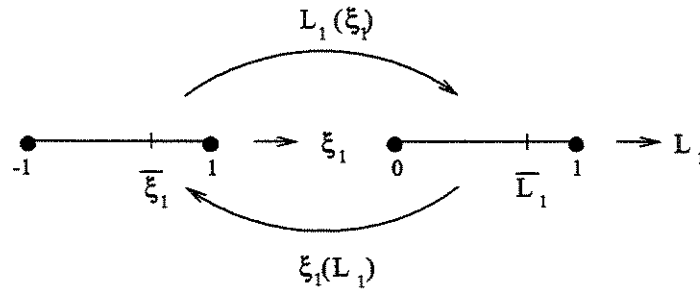


Figura 2.6: Mapeamento entre os sistemas local ξ_1 e natural L_1 .

Os mapeamentos entre os sistemas local ξ_1 e natural L_1 , ilustrados na Figura 2.6,

são dados por

$$L_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \quad \text{e} \quad \xi_1(L_1) = 2L_1 - 1. \quad (2.14)$$

Considerando os $P_1 + 1$ pontos na direção L_1 ilustrados na Figura 2.5(b), a expressão (2.1) para os polinômios de Lagrange é escrita como

$$\begin{aligned} l_p^{(P_1)}(L_1) &= \prod_{q=0, q \neq p}^{P_1} \frac{(L_1 - L_{1q})}{(L_{1p} - L_{1q})} = \\ &= \frac{(L_1 - L_{10})(L_1 - L_{11}) \dots (L_1 - L_{1_{p-1}})(L_1 - L_{1_{p+1}}) \dots (L_1 - L_{1_{P_1}})}{(L_{1p} - L_{10})(L_{1p} - L_{11}) \dots (L_{1p} - L_{1_{p-1}})(L_{1p} - L_{1_{p+1}}) \dots (L_{1p} - L_{1_{P_1}})}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Da mesma maneira, a partir das transformações em (2.14), as funções de interpolação dos elementos linear e quadrático, dadas em (2.4) e (2.5), são expressas em coordenadas naturais, respectivamente, como

$$N_0(L_1) = 1 - L_1 \quad \text{e} \quad N_1(L_1) = L_1; \quad (2.16)$$

$$N_0(L_1) = -(2L_1 - 1)(1 - L_1), \quad N_1(L_1) = 4L_1(1 - L_1) \quad \text{e} \quad N_2(L_1) = L_1(2L_1 - 1). \quad (2.17)$$

Em coordenadas naturais, a equação (2.7) é dada por

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} (1 - L_1)L_p^{(P_1-1)}(L_1) & p = 0 \\ L_1 L_p^{(P_1-1)}(L_1) & p = P_1 \\ (1 - L_1)L_1 L_p^{(P_1-2)}(L_1) & 0 < p < P_1 \end{cases}, \quad (2.18)$$

sendo

$$L_p^{(P_1-2)}(L_1) = -4 \frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P_1-1} (L_1 - L_{1q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^{P_1-1} (L_{1p} - L_{1q})}. \quad (2.19)$$

2.2 Base Modal

Devido à definição (2.1) dos polinômios de Lagrange, as funções de interpolação dadas em (2.3) estão diretamente relacionadas aos nós do elemento e portanto constituem uma base nodal.

No caso de uma base modal, tem-se apenas os nós de vértice do elemento. As funções de interpolação para elementos a partir do segundo grau não estão associadas às variáveis nodais. Para isso, deve-se empregar uma base polinomial cuja definição não

dependa de coordenadas nodais do elemento. Utiliza-se aqui os Polinômios Ortogonais de Jacobi, sendo os polinômios de Legendre e Chebyshev casos particulares.

Os polinômios de Jacobi unidimensionais de grau n , $P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1)$, são uma família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville (Karniadakis e Sherwin, 1999). Estes polinômios são ortogonais (Chihara, 1978) no intervalo $[-1, 1]$ com respeito à função peso $(1 - \xi_1)^\alpha(1 + \xi_1)^\beta$, $(\alpha, \beta > -1; \alpha, \beta \in \mathbb{R})$, da seguinte maneira

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi_1)^\alpha(1 + \xi_1)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1) P_m^{\alpha,\beta}(\xi_1) d\xi_1 = C \delta_{nm}, \quad \xi_1 \in [-1, 1], \quad (2.20)$$

sendo $C = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$ uma constante. A função Γ está definida no Apêndice A.

A relação de ortogonalidade anterior pode ser mapeada para o intervalo $[0, 1]$ de coordenadas naturais L_1 como

$$\int_0^1 (1 - L_1)^\alpha L_1^\beta P_n^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) P_m^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) dL_1 = D \delta_{nm}, \quad L_1 \in [0, 1], \quad (2.21)$$

e $D = \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} C$.

Os polinômios de Legendre e de Chebyshev correspondem às ponderações $(\alpha = \beta = 0)$ e $(\alpha = \beta = -\frac{1}{2})$, respectivamente.

A seguinte relação recursiva pode ser usada para calcular os polinômios de Jacobi e suas derivadas (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha,\beta}(\xi_1) &= 1, \\ P_1^{\alpha,\beta}(\xi_1) &= \frac{1}{2}[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\xi_1], \\ a_n^1 P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) &= (a_n^2 + a_n^3 \xi_1) P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1) - a_n^4 P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1), \\ b_n^1(\xi_1) \frac{d}{d\xi_1} P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1) &= b_n^2(\xi_1) P_n^{\alpha,\beta}(\xi_1) + b_n^3(\xi_1) P_{n-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1), \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_n^1 &= 2(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta), \\ a_n^2 &= (2n + \alpha + \beta + 1)(\alpha^2 - \beta^2), \\ a_n^3 &= (2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2), \\ a_n^4 &= 2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2), \\ b_n^1(\xi_1) &= (2n + \alpha + \beta)(1 - \xi_1^2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}b_n^2(\xi_1) &= n(\alpha - \beta - (2n + \alpha - \beta)\xi_1), \\b_n^3(\xi_1) &= 2(n + \alpha)(n + \beta).\end{aligned}$$

A partir das definições anteriores, as funções de interpolação modal podem ser definidas nos sistemas de coordenadas ξ_1 e L_1 de forma análoga às equações (2.7) e (2.18), bastando substituir os polinômios de Lagrange por Jacobi, ou seja,

$$N_p(\xi_1) = \phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

e

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 - L_1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ (1 - L_1)L_1P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Observe que as funções de vértice são as mesmas funções do elemento linear de Lagrange. As funções de interpolação ou modos internos para os elementos quadrático, cúbico e quártico estão ilustrados na Figura 2.7 e são dadas por

- elemento quadrático:

$$N_1(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1);$$

- elemento cúbico:

$$N_1(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1) \quad \text{e} \quad N_2(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_1^{\alpha,\beta}(\xi_1),$$

sendo

$$P_1^{\alpha,\beta}(\xi_1) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + (2 + \alpha + \beta)\xi_1);$$

- elemento quártico:

$$N_1(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1),$$

$$N_2(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_1^{\alpha,\beta}(\xi_1) \quad \text{e}$$

$$N_3(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_2^{\alpha,\beta}(\xi_1),$$

sendo

$$\begin{aligned}
P_2^{\alpha,\beta}(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) + \frac{1}{2}(2+\alpha)(3+\alpha+\beta)(-1+\xi_1) \\
&+ \frac{1}{8}(3+\alpha+\beta)(4+\alpha+\beta)(-1+\xi_1)^2.
\end{aligned}$$

Observa-se a hierarquia das funções de interpolação, pois o conjunto de funções de grau P_1 está incluído no conjunto de funções de grau $P_1 + 1$.

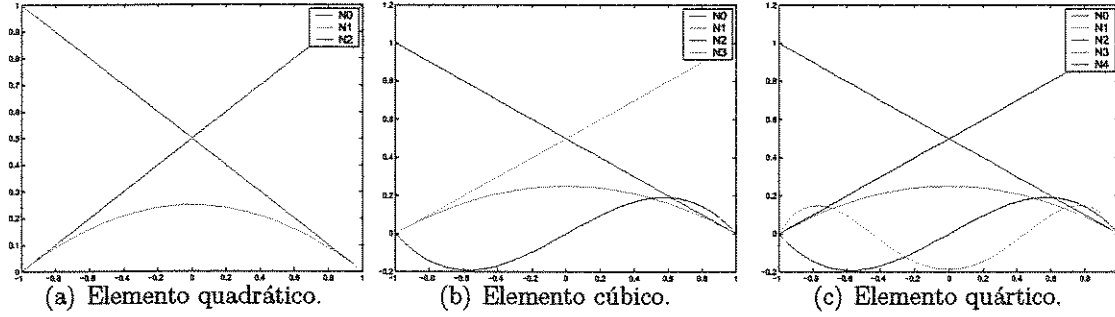


Figura 2.7: Funções de interpolação modais para elementos unidimensionais quadrático, cúbico e quártico.

2.3 Resultados

Nessa seção apresenta-se uma análise do condicionamento numérico e as esparsidades das matrizes de massa e rigidez dos elementos nodais e modais definidos.

Os coeficientes das matrizes de massa dos elementos unidimensionais são dados por (Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$m_{pq} = \int_{-1}^1 N_p(\xi_1) N_q(\xi_1) d\xi_1,$$

com $0 \leq p, q \leq P_1$.

Os coeficientes da matriz de massa correspondentes aos modos internos empregando polinômios de Jacobi podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
m_{pq} &= \int_{-1}^1 N_p(\xi_1) N_q(\xi_1) d\xi_1 \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta P_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) \phi_q(\xi_1) d\xi_1.
\end{aligned}$$

O termo $(1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta = (1-\xi)(1+\xi)$ corresponde às funções peso da relação

de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi (2.20) com $\alpha = \beta = 1$. Como $\phi_q(\xi_1)$ possui componentes interiores ($0 < q < P_1$), o seu grau é $q + 1$. Assim, a integral anterior zera quando $p - 1 > q - 1$, o que implica $p > q + 2$. Como a matriz é simétrica, há uma diagonal não-nula acima e uma abaixo da diagonal principal, tornando assim a matriz de massa interna tridiagonal (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Os coeficientes das matrizes de rigidez dos elementos unidimensionais são dados por

$$k_{pq} = \int_{-1}^1 N_{p,\xi_1}(\xi_1) N_{q,\xi_1}(\xi_1) d\xi_1,$$

com $0 \leq p, q \leq P_1$, e N_{p,ξ_1} a derivada de N_p com relação a ξ_1 .

Por sua vez, os coeficientes correspondentes aos modos internos podem ser escritos, após a integração por partes, como (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\begin{aligned} k_{pq} &= \int_{-1}^1 N_{p,\xi_1}(\xi_1) N_{q,\xi_1}(\xi_1) d\xi_1 \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi)^\alpha (1 + \xi)^\beta P_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_1) \frac{d^2}{d^2 \xi_1} \phi_q(\xi_1) d\xi_1. \end{aligned}$$

Usando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi (2.20), com $\alpha = \beta = 1$ e observando que $\frac{d^2}{d^2 \xi_1} \phi_q(\xi_1)$ é um polinômio de ordem $q - 1$, os coeficientes internos da matriz de rigidez zeram para $p > q$. Logo, essa matriz é simétrica e diagonal (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Os números de condição das matrizes de massa e rigidez são calculados por $k = \frac{\max \mu}{\min \mu}$, sendo μ o conjunto de auto-valores das matrizes. Como a matriz de rigidez é semi-definida positiva, $\min \mu$ é o primeiro valor singular diferente de zero (Nogueira Jr., 2002).

Foram determinados os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez usando polinômios de Lagrange e Jacobi até o grau 10.

Para a base de Lagrange, observa-se que os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez são iguais, como ilustrado na Figura 2.8 para $1 \leq p \leq 10$. Nesse caso, apresentam-se os coeficientes não-nulos das matrizes.

Os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez com polinômios de Jacobi é o mesmo encontrado em (Karniadakis e Sherwin, 1999) e estão ilustrados na Figura 2.9

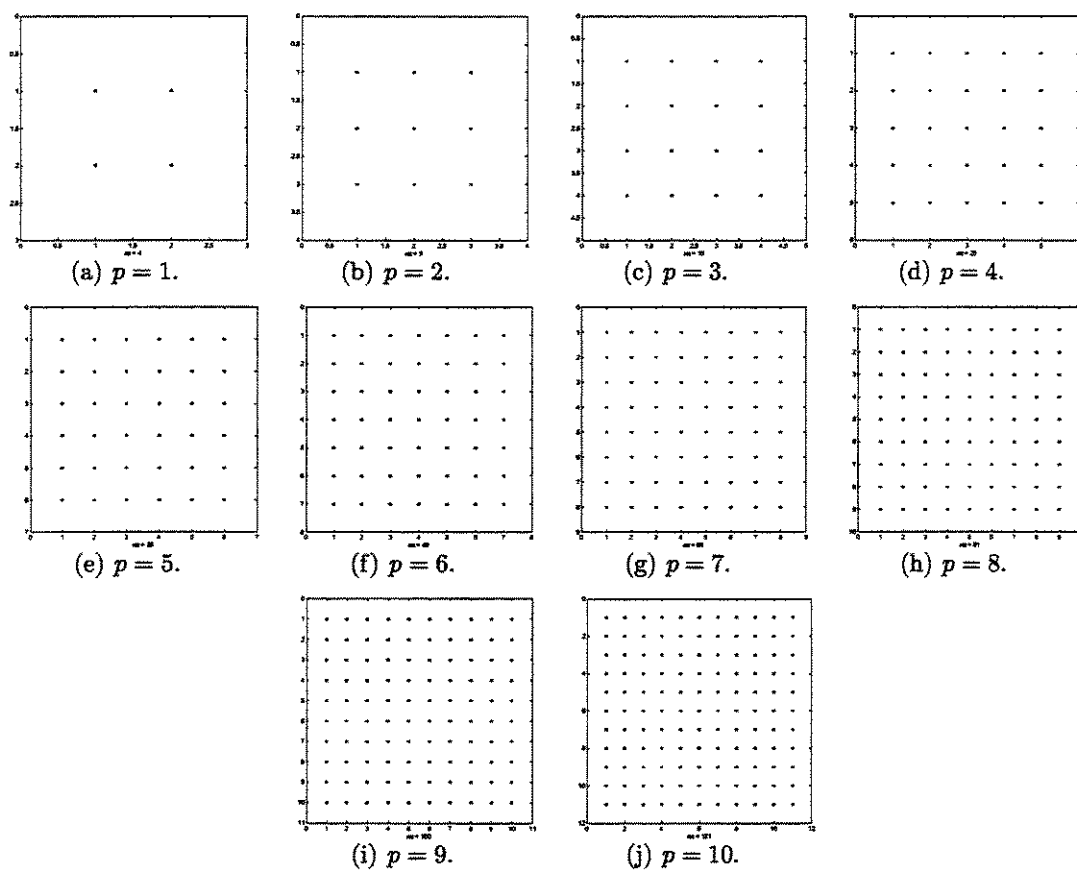


Figura 2.8: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Lagrange.

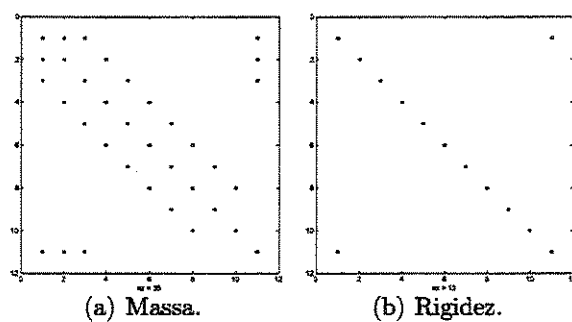


Figura 2.9: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez para os elementos unidimensionais de Jacobi.

apenas para $p = 10$ devido à hierarquia das matrizes.

As Figuras 2.10 e 2.11 apresentam o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi. Observa-se um melhor condicionamento dos polinômios de Lagrange no caso da matriz de massa, enquanto na matriz de rigidez os polinômios de Jacobi são superiores.

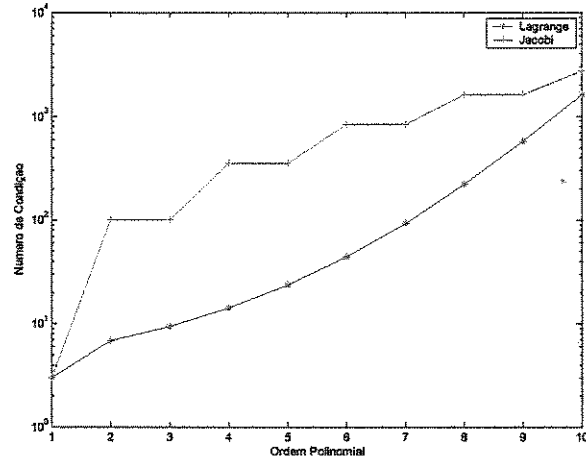


Figura 2.10: Condicionamento numérico das matrizes de massa dos elementos unidimensionais com bases de Lagrange e Jacobi.

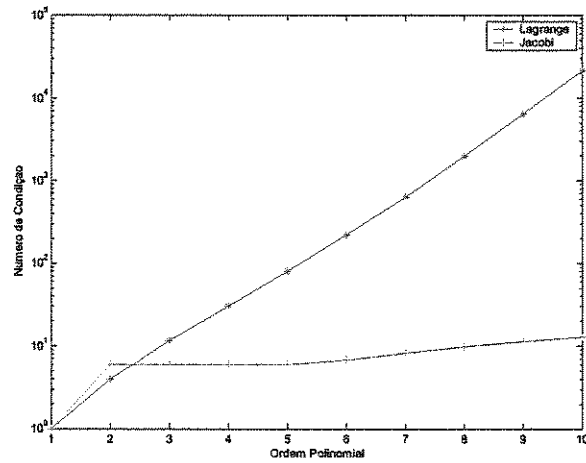


Figura 2.11: Condicionamento numérico das matrizes de rigidez com bases de Lagrange e Jacobi.

Capítulo 3

Construção das Funções de Base para Quadrados e Hexaedros

3.1 Funções de Interpolação para Quadrados

As funções de interpolação nodais e modais para elementos finitos quadrangulares são construídas pelo produto tensorial de funções unidimensionais nas direções ξ_1 e ξ_2 como ilustrado na Figura 3.1 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

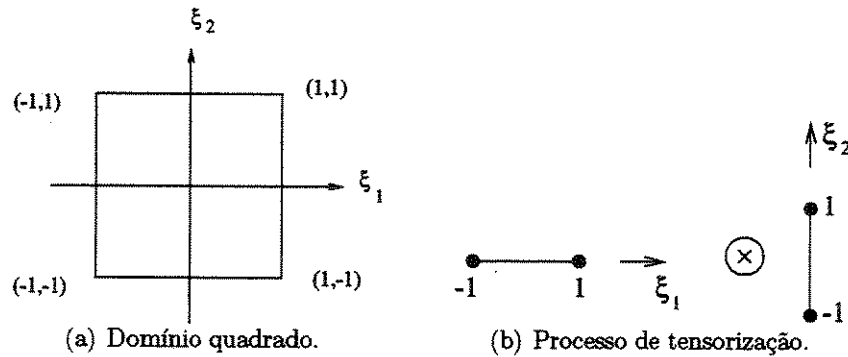


Figura 3.1: Construção tensorial das funções de interpolação para quadrados.

A partir da equação (2.7) e da Figura 3.1, as expressões das funções de interpolação para quadrados podem ser escritas através do seguinte produto de funções nas direções

ξ_1 e ξ_2

$$N_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 \leq p \leq P_1 \quad \text{e} \quad 0 \leq q \leq P_2, \quad (3.1)$$

sendo P_1 e P_2 os graus dos polinômios nas direções ξ_1 e ξ_2 conforme ilustrado na Figura 3.2(a).

De forma análoga ao caso unidimensional, pode-se associar as funções de interpolação às entidades topológicas do elemento que no caso do quadrado são os vértices (V_1, V_2, V_3, V_4), as arestas (A_1, A_2, A_3, A_4) e a face (F_1) ilustradas na Figura 3.2(b). Os índices p e q da equação (3.1) estão associados às entidades topológicas do quadrado de acordo com a Figura 3.2(c).

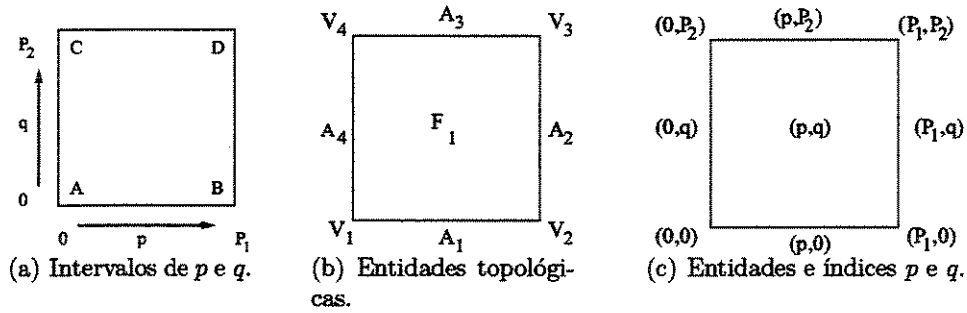


Figura 3.2: Associação entre entidades topológicas e índices p e q no quadrado.

A partir daí, as expressões para as funções de interpolação dos vértices V_1, V_2, V_3, V_4 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} N_{00}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \\ N_{P_1,0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \\ N_{P_1,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \\ N_{0,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analogamente, as funções das arestas A_1, A_2, A_3, A_4 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} N_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{P_1,q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \\ N_{p,P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{0,q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 < q < P_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Finalmente, as funções da face F_1 ou modos internos são

$$N_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2). \quad (3.4)$$

A partir do procedimento tensorizável anterior, definem-se as bases nodais e modais para o quadrado.

3.1.1 Bases nodais

A base nodal lagrangiana padrão (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999) para quadrados é obtida substituindo em (3.1) a definição da base unidimensional dada em (2.7). Os elementos linear, quadrático e cúbico lagrangianos estão ilustrados na Figura 3.3.

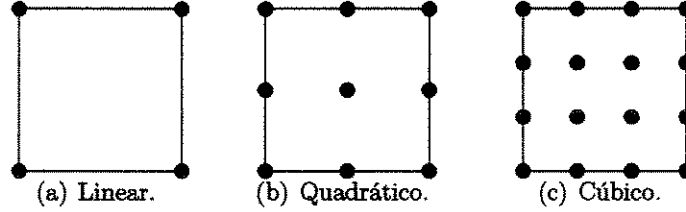


Figura 3.3: Elementos quadrangulares lagrangianos.

O elemento linear possui apenas funções de vértice, cujas expressões para $P_1 = P_2 = 1$ são obtidas substituindo-se (2.7) nas equações (3.2). Logo,

$$\begin{aligned} N_{00}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \\ N_{10}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\ N_{11}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), \\ N_{01}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

As funções de interpolação anteriores estão ilustradas na Figura 3.4.

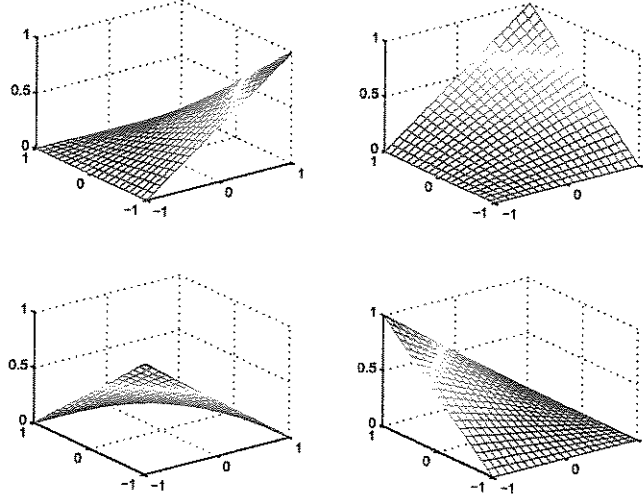


Figura 3.4: Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado linear.

As funções de vértice do elemento quadrático são obtidas de forma análoga. Portanto,

$$\begin{aligned}
 N_{00}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}\xi_1(1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_2), \\
 N_{20}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}\xi_1(1+\xi_1)\xi_2(1-\xi_2), \\
 N_{22}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}\xi_1(1+\xi_1)\xi_2(1+\xi_2), \\
 N_{02}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{4}\xi_1(1-\xi_1)\xi_2(1+\xi_2).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

As funções de aresta são determinadas de (2.7) e (3.3), isto é,

$$\begin{aligned}
 N_{10}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_2(1-\xi_2)(1-\xi_1^2), \\
 N_{21}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}\xi_1(1+\xi_1)(1-\xi_2^2), \\
 N_{12}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}\xi_2(1+\xi_2)(1-\xi_1^2), \\
 N_{01}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}\xi_1(1-\xi_1)(1-\xi_2^2).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, a função de face é obtida a partir de (3.4), ou seja,

$$N_{11}(\xi_1, \xi_2) = (1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2). \tag{3.8}$$

As funções de interpolação do elemento cúbico são obtidas de forma análoga. As Figuras 3.5 e 3.6 ilustram as funções dos elementos quadrático e cúbico, respectivamente.

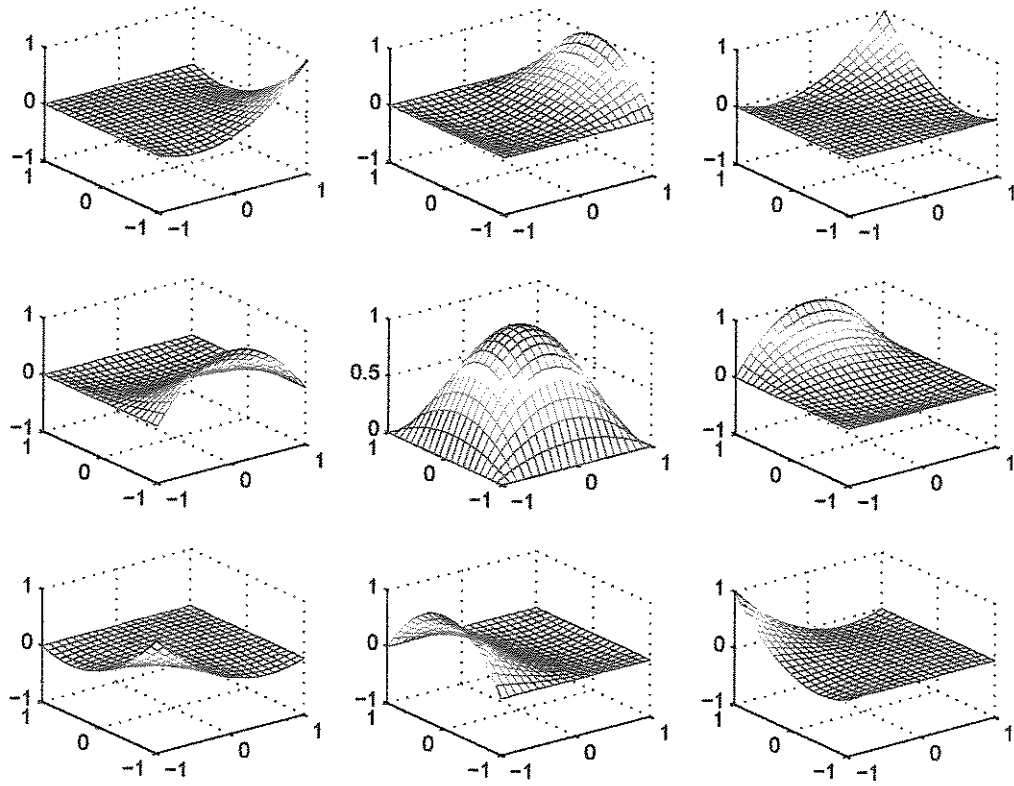


Figura 3.5: Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado quadrático.

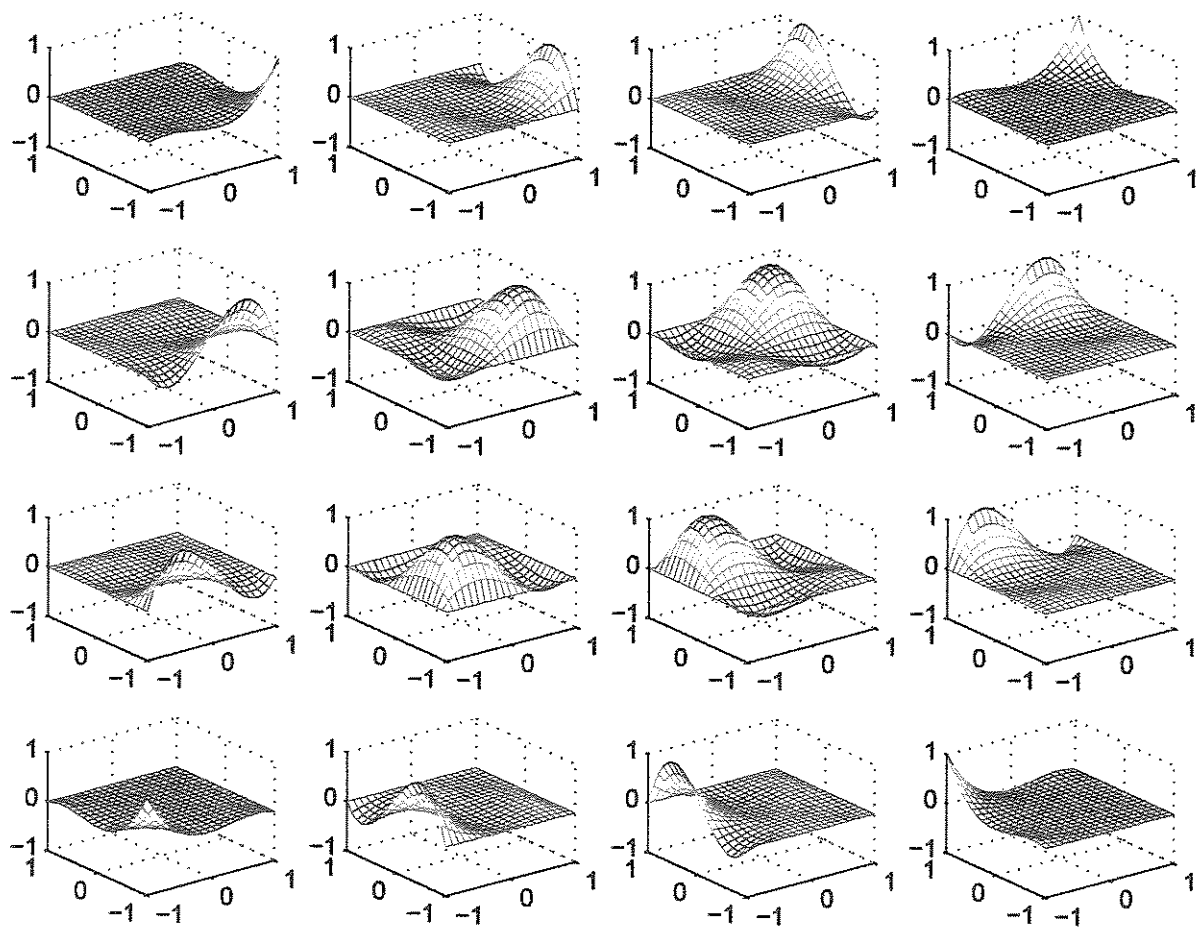


Figura 3.6: Funções de interpolação lagrangianas para o quadrado cúbico.

Como é conhecido (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999), a base nodal de Lagrange gera termos adicionais que não são necessários para garantir que a expansão local seja completa. Para evitar esse fato, trabalha-se com a base nodal de Serendipity, a qual necessita de nós internos no quadrado apenas a partir do quarto grau como ilustrado na Figura 3.7. Os elementos lineares das famílias de Lagrange e Serendipity são idênticos, assim como as funções de interpolação dos vértices de todos elementos.

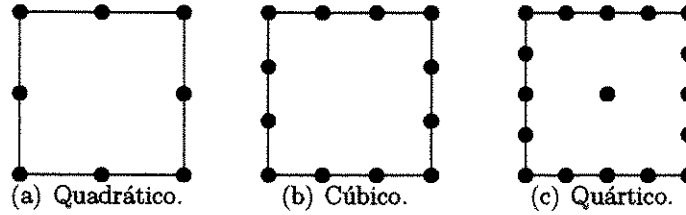


Figura 3.7: Elementos quadrangulares da família Serendipity.

As funções de interpolação de aresta são determinadas a partir de (3.1), mas substituindo a definição (2.7) por

$$\phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p(\xi_1)^{(P_1-2)} & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

As expressões das funções de aresta do elemento quadrático são

$$\begin{aligned} N_{10}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_1(\xi_1)\phi_0(\xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\ N_{21}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_2(\xi_1)\phi_1(\xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), \\ N_{12}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_2), \\ N_{01}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_1(\xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para o elemento cúbico, determinam-se as funções de aresta de forma análoga, ou seja,

$$N_{10}(\xi_1, \xi_2) = \frac{9}{32}(1 - 3\xi_1)(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2),$$

$$\begin{aligned}
N_{20}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 + 3\xi_1)(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), \\
N_{31}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 + \xi_1)((1 - 3\xi_2)(1 - \xi_2^2), \\
N_{32}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 + \xi_1)(1 + 3\xi_2)(1 - \xi_2^2), \\
N_{13}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 - 3\xi_1)(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), \\
N_{2,3}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 + 3\xi_1)(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), \\
N_{01}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 - \xi_1)(1 - 3\xi_2)(1 - \xi_2^2), \\
N_{02}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{9}{32}(1 - \xi_1)(1 + 3\xi_2)(1 - \xi_2^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A partir do quarto grau, as funções de face são obtidas de (3.1) mas usando a seguinte definição

$$\phi_p(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)L_p^{(P_1-4)}(\xi_1) \quad \text{e} \quad \phi_q(\xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)L_p^{(P_2-4)}(\xi_2) \tag{3.12}$$

para $P_1 = P_2 = P > 3$ e $1 < p, q < P - 1$. As funções de interpolação do elemento de quarto grau da família Serendipity estão ilustradas na Figura 3.8.

Uma família alternativa de elementos de Serendipity pode ser obtida impondo-se apenas a restrição $p + q \geq P - 2$ para os modos internos (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Um último conjunto de funções nodais de interpolação considera o emprego da definição (3.12) na equação (3.4). Esse conjunto será denominado Base Nodal Topológica em semelhança com as funções de interpolação da versão p , as quais estão associadas usualmente às entidades topológicas.

As funções de vértice para qualquer elemento desta família são sempre lineares e dadas pelas equações em (3.5). As funções de aresta são obtidas a partir de (3.3) e (3.9). As expressões para o elemento quadrático e cúbico são as mesmas indicadas em (3.10) e (3.11). As funções de face dos elementos são iguais àquelas da família lagrangiana.

3.1.2 Bases modais

A base modal mais simples para elementos quadrangulares é obtida substituindo a definição (2.24) em termos de polinômios de Jacobi na equação (3.1) (Karniadakis e

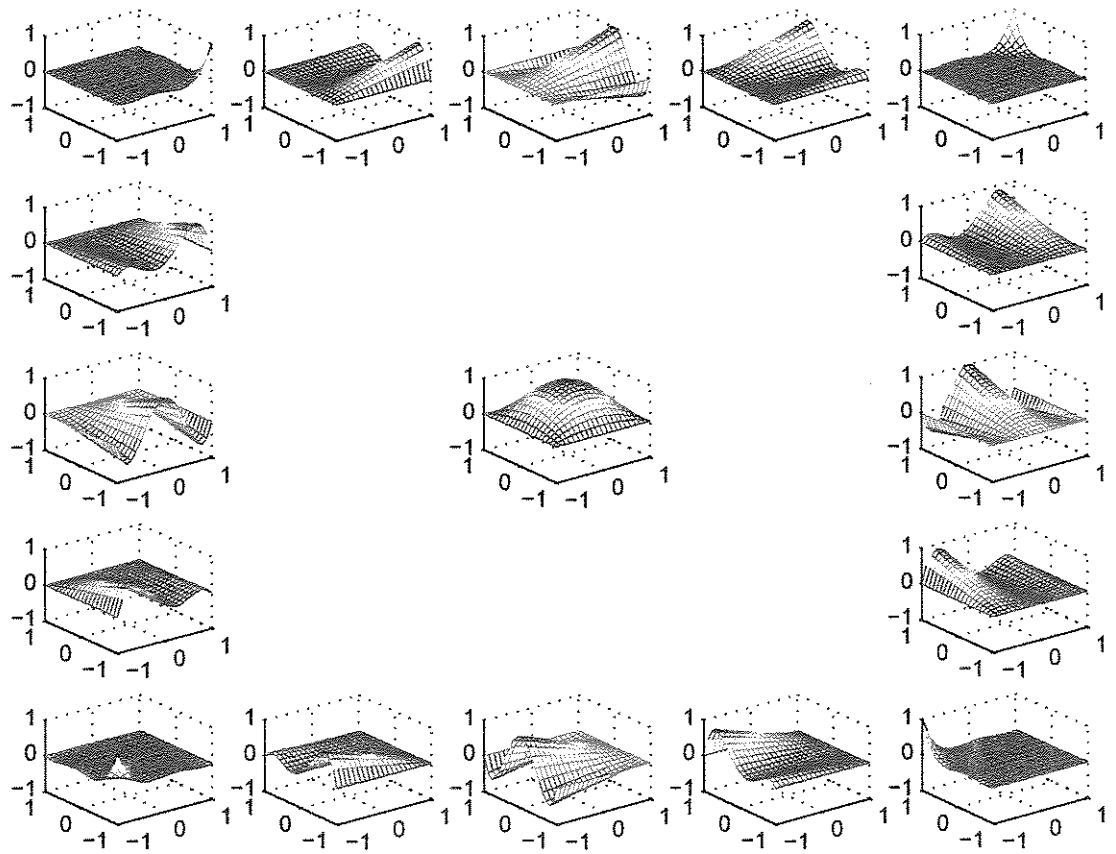


Figura 3.8: Funções de interpolação do quadrado de Serendipity quártico.

Sherwin, 1999). As funções de vértice são sempre lineares e dadas pelas equações em (3.5). Por sua vez, substituindo-se (2.24) nas expressões (3.3), têm-se as funções de interpolação de aresta

$$\begin{aligned} N_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{P_1q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \\ N_{pP_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1), \quad 0 < p < P_1, \\ N_{0q}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad 0 < q < P_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo (α_1, β_1) e (α_2, β_2) os coeficientes de ponderação nas direções ξ_1 e ξ_2 . Esses coeficientes serão selecionados de forma conveniente para alcançar uma melhor esparsidade das matrizes elementares. A partir de (2.24) e (3.6), obtêm-se as funções de face como

$$N_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad (3.14)$$

$0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$.

As Figuras 3.9 e 3.10 ilustram as funções de interpolação modais para os quadrados quadrático e cúbico com $P_1 = P_2 = P$ sendo $P = 2$ e $P = 3$, respectivamente. Pode-se obter uma base modal de Serendipity empregando a condição $p + q \geq P - 2$ (Karniadakis e Sherwin, 1999).

3.2 Funções de Interpolação para Hexaedros

De forma análoga ao caso de quadrados, as funções de interpolação para hexaedros são construídas através do produto tensorial de polinômios unidimensionais nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 conforme ilustrado na Figura 3.11 (Szabó e Babuška, 1991; Karniadakis e Sherwin, 1999).

A expressão geral das funções de interpolação para hexaedros obtida pelo produto tensorial é dada por

$$N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \quad (3.15)$$

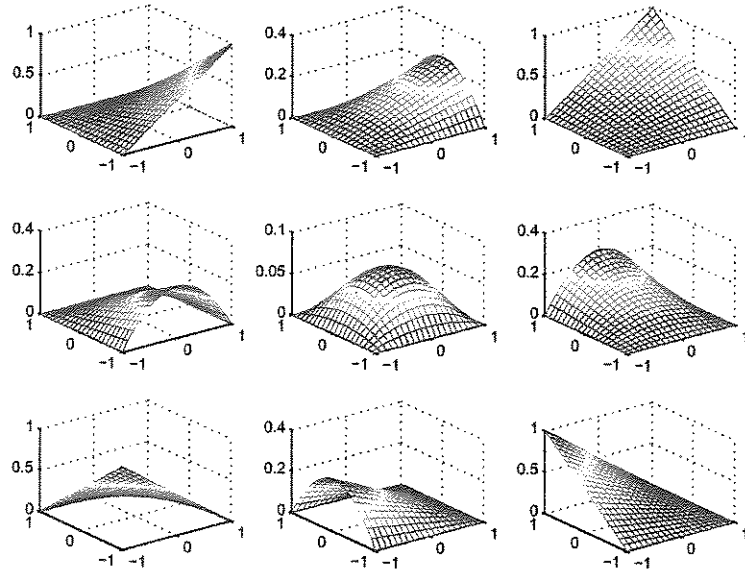


Figura 3.9: Funções de interpolação modais para o quadrado quadrático.

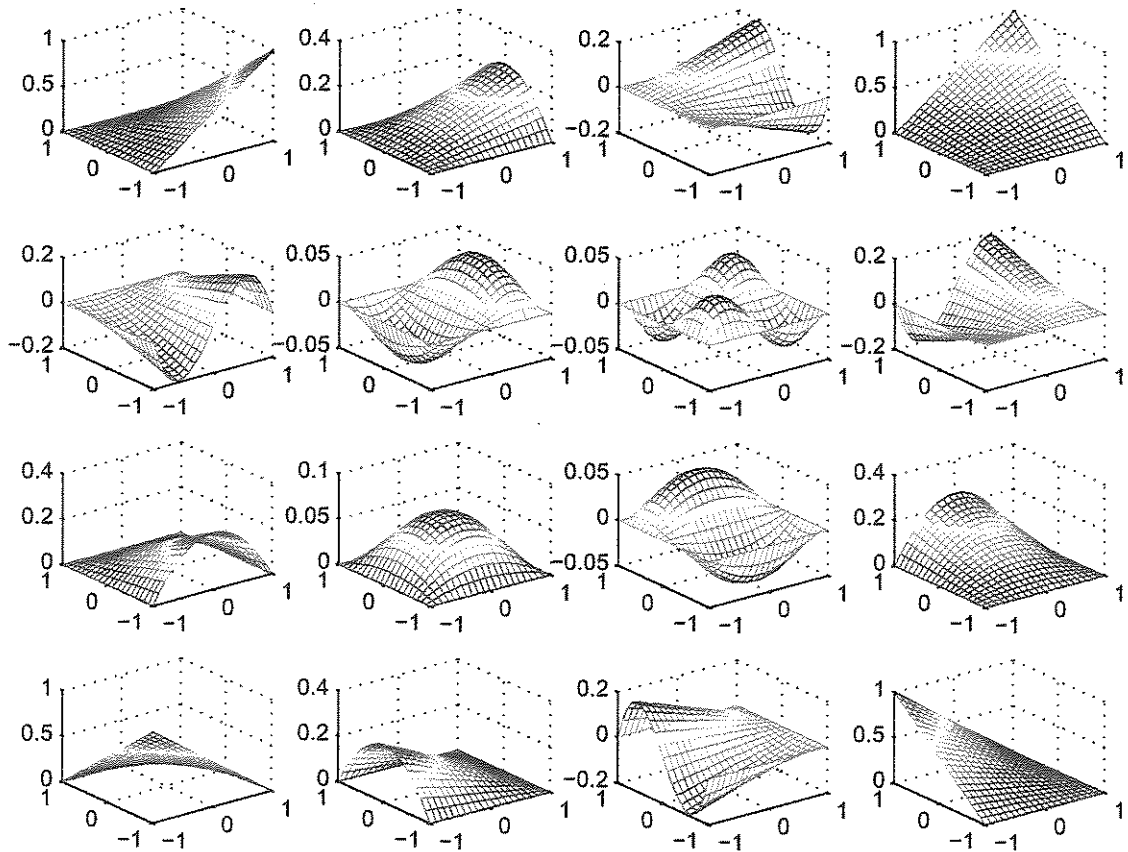


Figura 3.10: Funções de interpolação modais para o quadrado cúbico.

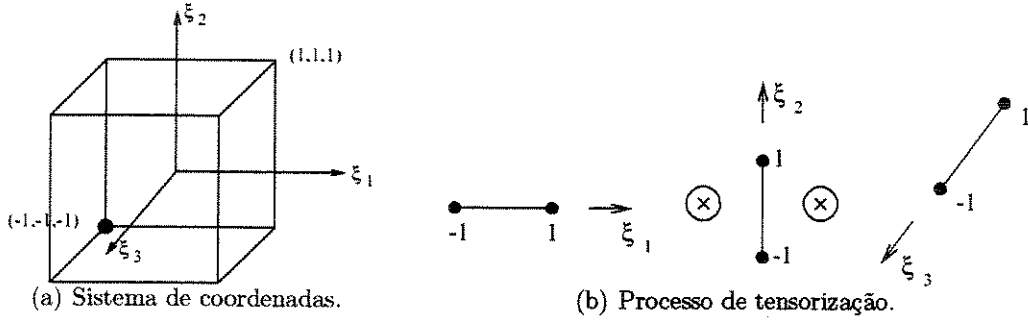


Figura 3.11: Construção tensorial das funções de interpolação para hexaedros.

com $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$ e $0 \leq r \leq P_3$, sendo P_1 , P_2 e P_3 os graus dos polinômios nas direções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3.12(a).

A Figura 3.12(b) ilustra as entidades topológicas do hexaedro, as quais são constituídas de 8 vértices (V_1 a V_8), 12 arestas (A_1 a A_{12}), 6 faces (F_1 a F_6) e um volume (C_1). A Figura 3.13 apresenta a relação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.

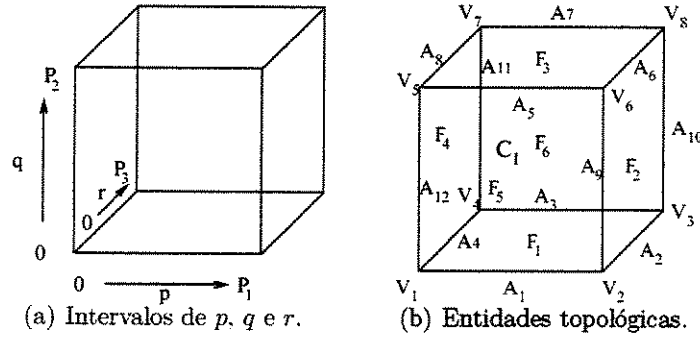


Figura 3.12: Índices p , q e r e entidades topológicas no hexaedro.

A partir da Figura 3.13 e da equação (3.15), as expressões das funções de interpolação dos vértices (V_1 a V_8) são, respectivamente,

$$N_{000}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3).$$

$$N_{P_1 00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{P_1 P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{0 P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

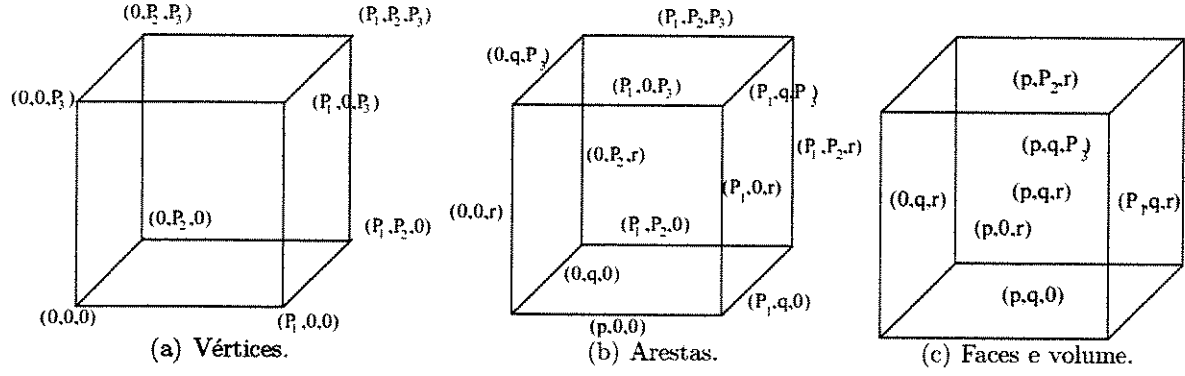


Figura 3.13: Associação entre os índices p , q e r e as entidades topológicas do hexaedro.

$$N_{00P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \quad (3.16)$$

$$N_{P_10P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{0P_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{P_1P_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3).$$

Analogamente, as funções de aresta são

$$N_{p00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{P_1q0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{pP_20}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_0(\xi_3),$$

$$N_{0q0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3)$$

$$N_{0P_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{P_1qP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{pP_2P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \quad (3.17)$$

$$N_{0qP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{P_10r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{P_1P_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),$$

$$N_{p0P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3),$$

$$N_{00r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_0(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3).$$

com $0 < p < P_1$, $0 < q < P_2$ e $0 < r < P_3$.

As expressões das funções de face são dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned}
N_{pq0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_0(\xi_3) \\
N_{P_1qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \\
N_{pqP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_{P_3}(\xi_3), \\
N_{0qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \\
N_{p0r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \\
N_{pP_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2)\phi_r(\xi_3),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Finalmente, a expressão geral da função de volume é

$$N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2)\phi_r(\xi_3), \quad 0 < p < P_1, \quad 0 < q < P_2, \quad 0 < r < P_3. \tag{3.19}$$

3.2.1 Bases nodais

As mesmas bases nodais obtidas para o quadrado podem ser construídas para o hexaedro. A família lagrangiana de elementos é determinada substituindo (2.7) nas expressões (3.16) a (3.19). O elemento linear possui apenas as 8 funções de vértice; o elemento quadrático tem ainda 12 funções de aresta, 6 funções de face e uma função de volume; já o elemento cúbico possui 8 funções de vértice, 24 funções de aresta, 24 funções de face e 8 funções de volume. O número total de nós é dado pelo produto $(P_1 + 1)(P_2 + 1)(P_3 + 1)$. A família Serendipity é obtida empregando a definição (3.9) nas expressões (3.16) a (3.19).

Finalmente, a base nodal topológica é determinada de forma análoga substituindo (3.9) nas equações (3.16) a (3.19).

3.2.2 Bases modais

A base modal apresentada em (Karniadakis e Sherwin, 1999) é obtida substituindo a definição (2.24) nas equações (3.16) a (3.19). A partir daí, as funções de vértice são dadas por

$$N_{000}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3),$$

$$\begin{aligned}
N_{P_1 00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\
N_{P_1 P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3), \\
N_{0 P_3 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3), \\
N_{00 P_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3), \\
N_{P_1 0 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3), \\
N_{0 P_2 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3), \\
N_{P_1 P_2 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

As funções de aresta possuem as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
N_{p00}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1), \\
N_{P_1 q 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2), \\
N_{p P_2 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1), \\
N_{0 q 0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2), \\
N_{0 P_2 r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3), \\
N_{P_1 q P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2), \\
N_{p P_2 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1), \\
N_{0 q P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2), \\
N_{P_1 0 r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3), \\
N_{P_1 P_2 r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3), \\
N_{p 0 P_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1), \\
N_{00 r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Por sua vez, as funções de face são

$$\begin{aligned}
N_{pq0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2), \\
N_{P_1 q r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{32}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3),
\end{aligned}$$

$$N_{pqP_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3),$$

$$N_{0qr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3),$$

$$N_{p0r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 + \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1)P_{r-1}^{1,1}(\xi_3),$$

$$N_{pP_2r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{32}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)P_{p-1}^{1,1}(\xi_1)P_{q-1}^{1,1}(\xi_2),$$

com $0 < p < P_1$, $0 < q < P_2$ e $0 < r < P_3$.

Finalmente, as funções de volume

$$N_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(\xi_3). \quad (3.22)$$

A base anterior é hierárquica.

3.3 Resultados

Esta seção apresenta uma análise do condicionamento numérico e das esparsidades das matrizes de massa e rigidez dos quadrados.

Na Figura 3.14 estão ilustrados, para $1 \leq p \leq 7$, os coeficientes não-nulos das matrizes de massa para a base de Lagrange.

As Figuras 3.15(a) e 3.15(b) apresentam os perfis de esparsidade para a base de Jacobi com $p = 7$. Empregaram-se as ponderações $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1$ para obter uma melhor esparsidade das matrizes de massa e rigidez.

As Figuras 3.16 e 3.17 apresentam o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi. Observa-se um melhor condicionamento da matriz de massa com o uso do polinômio de Lagrange.

Para a matriz de rigidez, até o grau 5, o condicionamento é melhor com o uso do polinômio de Lagrange. Após o grau 5 há uma efetiva melhora usando-se o polinômio de Jacobi (Figura 3.17).

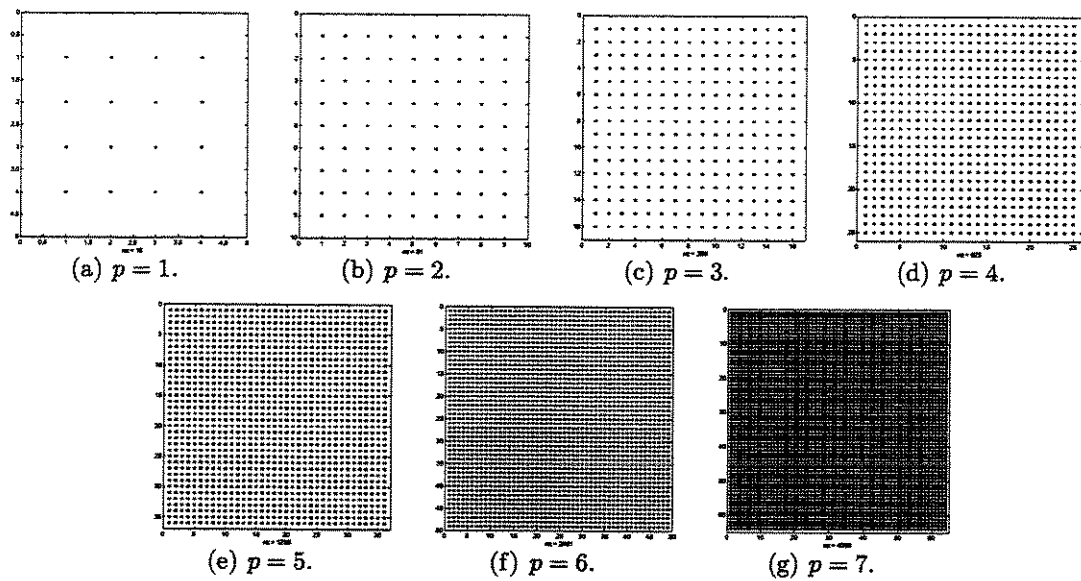


Figura 3.14: Esparsidade das matrizes de massa dos quadrados de Lagrange.

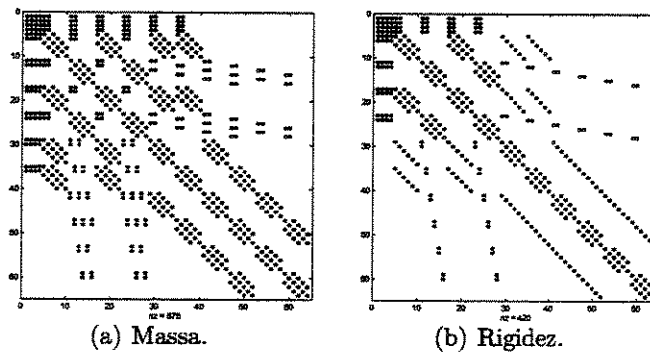


Figura 3.15: Esparsidade das matrizes de massa e rigidez dos quadrados de Jacobi.

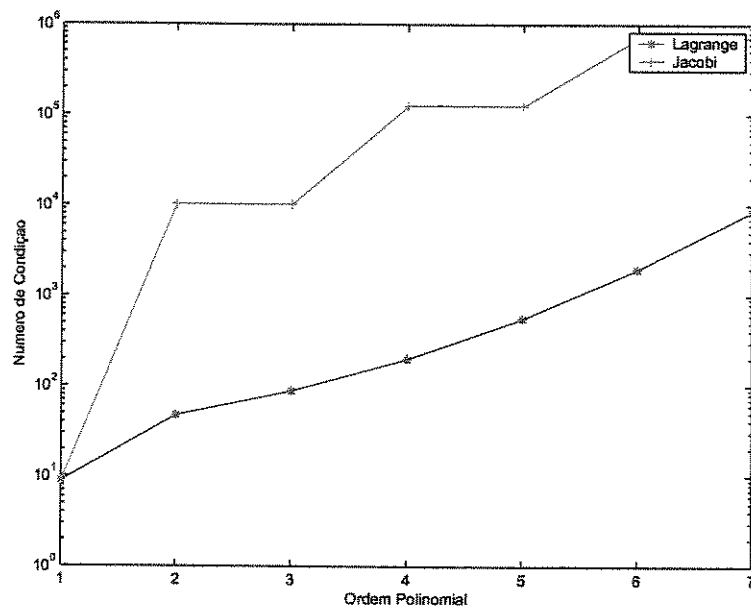


Figura 3.16: Condicionamento numérico das matrizes de massa dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.

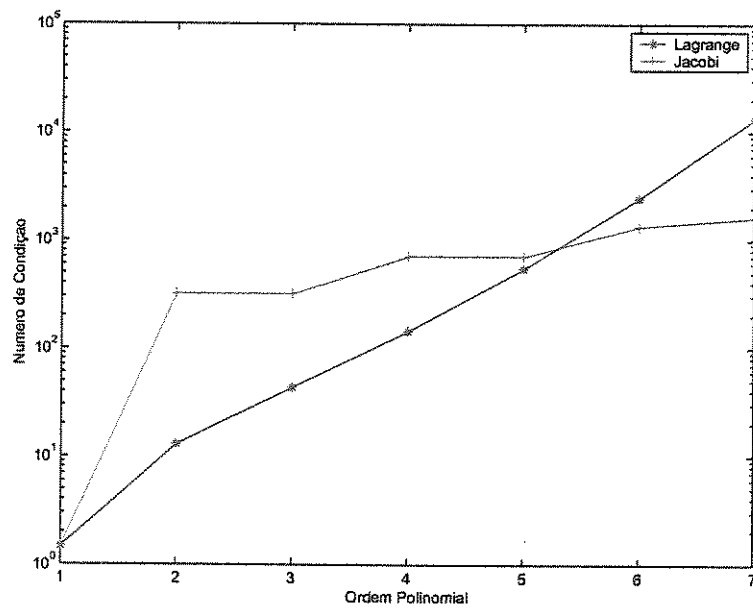


Figura 3.17: Condicionamento numérico das matrizes de rigidez dos quadrados com bases de Lagrange e Jacobi.

Capítulo 4

Construção das Funções de Base para Triângulos e Tetraedros

4.1 Funções de Interpolação para Triângulos

As coordenadas naturais, baricênticas ou de área têm sido historicamente empregadas para a construção de funções de interpolação em triângulos, devido principalmente à sua propriedade de simetria rotacional.

As coordenadas baricênticas para triângulos estão ilustradas na Figura 4.1. Dado um triângulo de área A e um ponto qualquer P , definem-se três subtriângulos com áreas A_1 , A_2 e A_3 e $A = A_1 + A_2 + A_3$. As coordenadas de área $0 \leq L_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$) são definidas pela razão entre as áreas dos subtriângulos e do triângulo original (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (4.1)$$

A partir de (4.1), observa-se que uma das coordenadas de área é dependente das outras duas. Segundo (Karniadakis e Sherwin, 1999), tal característica faz o processo de construção tensorial das funções de interpolação *muito difícil, senão impossível*. Em (Bittencourt, 1991; Bittencourt, 2004), apresentou-se um procedimento construtivo relativamente simples baseado no produto tensorial de polinômios unidimensionais expressos

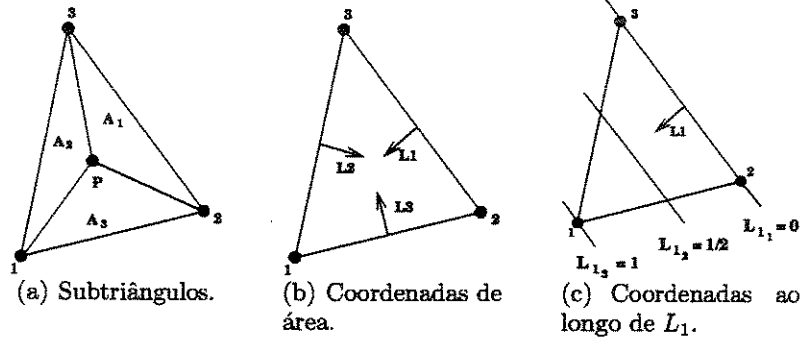


Figura 4.1: Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991).

em coordenadas naturais. Apresenta-se a seguir o procedimento tensorial definido nesses trabalhos considerando a base nodal lagrangiana padrão para triângulos apresentada na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991). Posteriormente, reescrevem-se as expressões na mesma notação empregada para quadrados e hexaedros.

As funções de forma nodais para triângulos podem ser escritas como o produto tensorial dos polinômios de Lagrange nas coordenadas L_1 , L_2 e L_3 da seguinte maneira

$$N_a(L_1, L_2, L_3) = l_b^{(b-1)}(L_1)l_c^{(c-1)}(L_2)l_d^{(d-1)}(L_3), \quad (4.2)$$

sendo a o número do nó; b , c e d os índices das coordenadas nodais nas direções L_1 , L_2 e L_3 , respectivamente, como ilustrado na Figura 4.1(c) para a direção L_1 . Os valores de b , c e d estão no intervalo fechado $[1, P_i + 1]$ e P_i ($i = 1, 2, 3$) denota o grau do polinômio na direção L_i .

Os polinômios de Lagrange indicados na equação anterior são dados por

$$\begin{aligned} l_b^{(b-1)}(L_1) &= \frac{(L_1 - L_{1_1})(L_1 - L_{1_2}) \dots (L_1 - L_{1_{b-1}})}{(L_{1_b} - L_{1_1})(L_{1_b} - L_{1_2}) \dots (L_{1_b} - L_{1_{b-1}})}, & b \geq 2, \\ l_c^{(c-1)}(L_2) &= \frac{(L_2 - L_{2_1})(L_2 - L_{2_2}) \dots (L_2 - L_{2_{c-1}})}{(L_{2_c} - L_{2_1})(L_{2_c} - L_{2_2}) \dots (L_{2_c} - L_{2_{c-1}})}, & c \geq 2, \\ l_d^{(d-1)}(L_3) &= \frac{(L_3 - L_{3_1})(L_3 - L_{3_2}) \dots (L_3 - L_{3_{d-1}})}{(L_{3_d} - L_{3_1})(L_{3_d} - L_{3_2}) \dots (L_{3_d} - L_{3_{d-1}})}, & d \geq 2, \quad l^{(0)} = 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Quando comparada à equação (2.15), deve-se observar que os polinômios de Lagrange em (4.3) são truncados nas coordenadas dos números indicados por b , c e d , respectivamente, ao invés de considerar todas as coordenadas $P_i + 1$ em cada direção L_i (Figura 4.1(c)). Os graus dos polinômios nas direções L_i não são P_i como seria espera-

do de (2.15), mas $b - 1$, $c - 1$ e $d - 1$, respectivamente. Esse é o principal ponto usado para obter as funções de forma nodal padrão para triângulos através de produto tensorial (Bittencourt, 1991).

Como exemplo considere o triângulo linear ilustrado na Figura 4.2. Ao longo de cada direção L_i há duas coordenadas denotadas por $L_{i1} = 0$ e $L_{i2} = 1$. Os índices a , b , c e d são dados na Tabela 4.1 e b , c e d podem assumir os valores 1 ou 2 para o triângulo linear. As funções de forma são obtidas das expressões (4.2) e (4.3) e da Tabela 4.1 como

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(L_1, L_2, L_3) &= l_2^{(1)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3) = \frac{L_1 - L_{11}}{L_{12} - L_{11}} = \frac{L_1 - 0}{1 - 0} = L_1, \\ N_2^{(1)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(0)}(L_1)l_2^{(1)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3) = \frac{L_2 - L_{21}}{L_{22} - L_{21}} = \frac{L_2 - 0}{1 - 0} = L_2, \\ N_3^{(1)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(0)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_2^{(1)}(L_3) = \frac{L_3 - L_{31}}{L_{32} - L_{31}} = \frac{L_3 - 0}{1 - 0} = L_3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Essas são as funções nodais de Lagrange para o triângulo linear encontradas na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991).

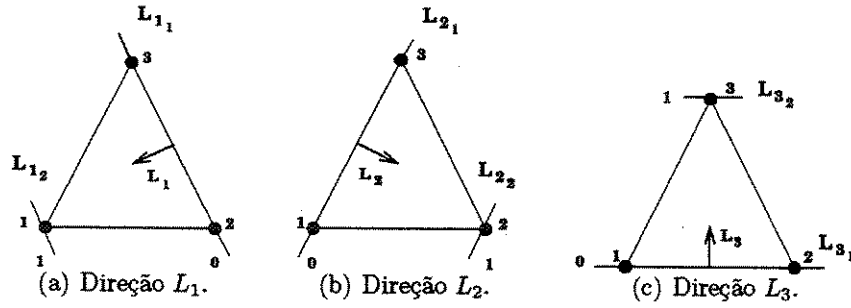


Figura 4.2: Triângulo linear (Bittencourt, 1991).

a	1	2	3
b	2	1	1
c	1	2	1
d	1	1	2

Tabela 4.1: Triângulo linear : índices a , b , c e d .

O mesmo procedimento pode ser aplicado ao triângulo quadrático mostrado na Figura 4.3. Nesse caso, há três coordenadas em cada direção L_i denotadas por $L_{i1} = 0$, $L_{i2} = \frac{1}{2}$ e $L_{i3} = 1$. A Tabela 4.2 apresenta os índices de a a d . Analogamente, as funções de forma h de Lagrange para o triângulo quadrático são obtidas das equações (4.2) e (4.3)

c da Tabela 4.2 como

$$\begin{aligned}
N_1^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_3^{(2)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3) = \frac{(L_1 - L_{11})(L_2 - L_{12})}{(L_{13} - L_{11})(L_{13} - L_{12})} = L_1(2L_1 - 1), \\
N_2^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(0)}(L_1)l_3^{(2)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3) = L_2(2L_2 - 1), \\
N_3^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(0)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_3^{(2)}(L_3) = L_3(2L_3 - 1), \\
N_4^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_2^{(1)}(L_1)l_2^{(1)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3) = 4L_1L_2, \\
N_5^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(0)}(L_1)l_2^{(1)}(L_2)l_2^{(1)}(L_3) = 4L_2L_3, \\
N_6^{(2)}(L_1, L_2, L_3) &= l_1^{(1)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_2^{(1)}(L_3) = 4L_1L_3.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

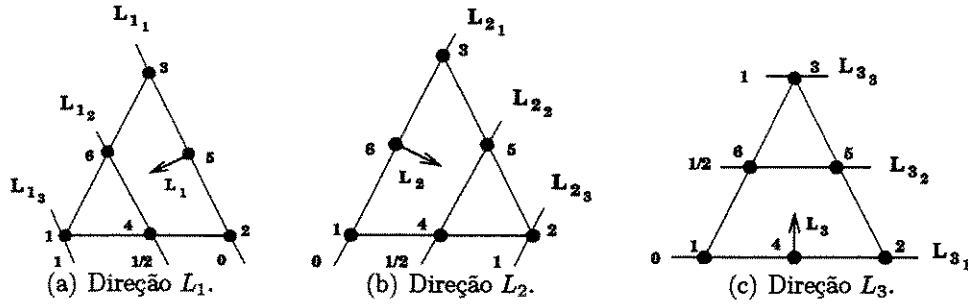


Figura 4.3: Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991).

a	1	2	3	4	5	6
b	3	1	1	2	1	2
c	1	3	1	2	2	1
d	1	1	3	1	2	2

Tabela 4.2: Triângulo quadrático: índices a , b , c , d .

A mesma notação usada para quadrados e hexaedros será empregada para triângulos. Para isso, considere as entidades topológicas do triângulo ilustrado na Figura 4.4(a), que são 3 vértices (V_1, V_2, V_3), 3 arestas (A_1, A_2, A_3) e uma face (F_1). A expressão geral para as funções de interpolação do triângulo é

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3), \tag{4.6}$$

sendo $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$, $0 \leq r \leq P_3$ conforme ilustrado na Figura 4.4(b).

As funções de vértice são obtidas a partir da equação (4.6) e da Figura 4.4 como

$$\begin{aligned}
N_{P_1 00}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3), \\
N_{0P_2 0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

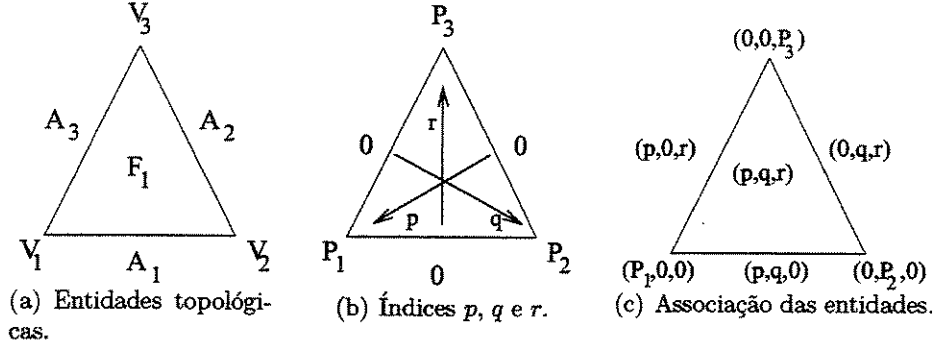


Figura 4.4: Entidades topológicas do triângulo, índices p, q, r e associação entre entidades e índices.

$$N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) = \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3).$$

Da mesma forma, as funções de aresta para $0 < p, q, r < P$ e $P_1 = P_2 = P$ são dadas por

$$\begin{aligned} N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3), \\ N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3), \\ N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalmente, as funções de face para $0 < p, q, r < P - 1$ são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3). \quad (4.9)$$

A seguir descrevem-se as bases nodais e modais para triângulos empregando a notação anterior. Em ambos os casos, assume-se que $P_1 = P_2 = P_3 = P$ para todas as funções discutidas nessa seção. Nesse caso, têm-se 3 funções de vértice, $3(P - 1)$ de aresta e $\frac{1}{2}(P - 1)(P - 2)$ de face. Além disso, as bases são construídas para $p + q + r = P$.

4.1.1 Bases nodais

Considere a seguinte definição

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ l_{p+1}^{(p)}(L_1) & 0 < p \leq P_1 \end{cases}, \quad (4.10)$$

com $l_{p+1}^{(p)}(L_1)$ dado pela equação (4.3). Empregando a equação (4.10) nas expressões (4.7) e (4.9), define-se a base nodal lagrangiana para triângulos. Os elementos linear, quadrático e cúbico estão ilustrados na Figura 4.5.

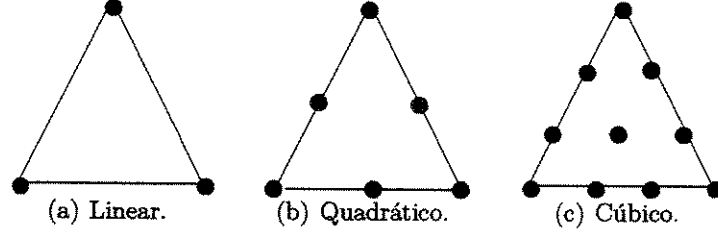


Figura 4.5: Triângulos da família nodal lagrangiana.

As funções de vértice do elemento linear são dadas a partir de (4.7) e (4.10) como

$$\begin{aligned} N_{100}(L_1, L_2, L_3) &= L_1, \\ N_{010}(L_1, L_2, L_3) &= L_2, \\ N_{001}(L_1, L_2, L_3) &= L_3. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Analogamente, as funções de vértice do elemento quadrático são

$$\begin{aligned} N_{200}(L_1, L_2, L_3) &= l_3^{(2)}(L_1) = L_1(2L_1 - 1), \\ N_{020}(L_1, L_2, L_3) &= l_3^{(2)}(L_2) = L_2(2L_2 - 1), \\ N_{002}(L_1, L_2, L_3) &= l_3^{(2)}(L_3) = L_3(2L_3 - 1). \end{aligned} \tag{4.12}$$

As funções de aresta são

$$\begin{aligned} N_{110}(L_1, L_2, L_3) &= 4L_1L_2, \\ N_{011}(L_1, L_2, L_3) &= 4L_2L_3, \\ N_{101}(L_1, L_2, L_3) &= 4L_1L_3. \end{aligned} \tag{4.13}$$

As funções de interpolação para os triângulos linear, quadrático e cúbico estão ilustradas nas Figuras 4.6 a 4.8.

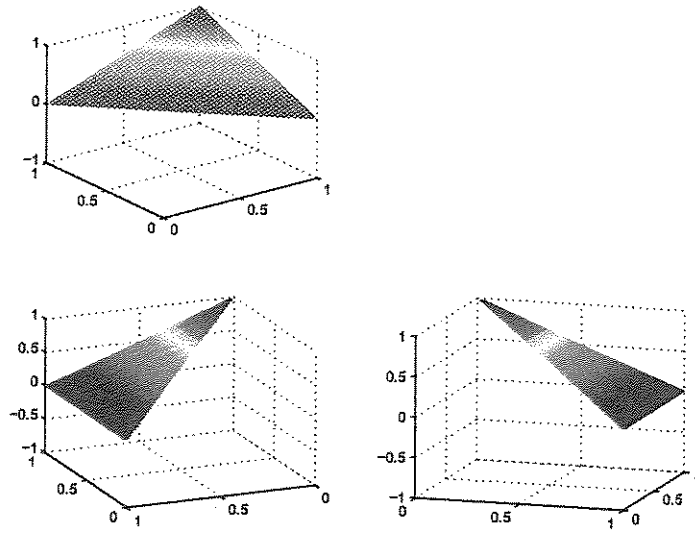


Figura 4.6: Funções de interpolação para o triângulo linear lagrangiano.

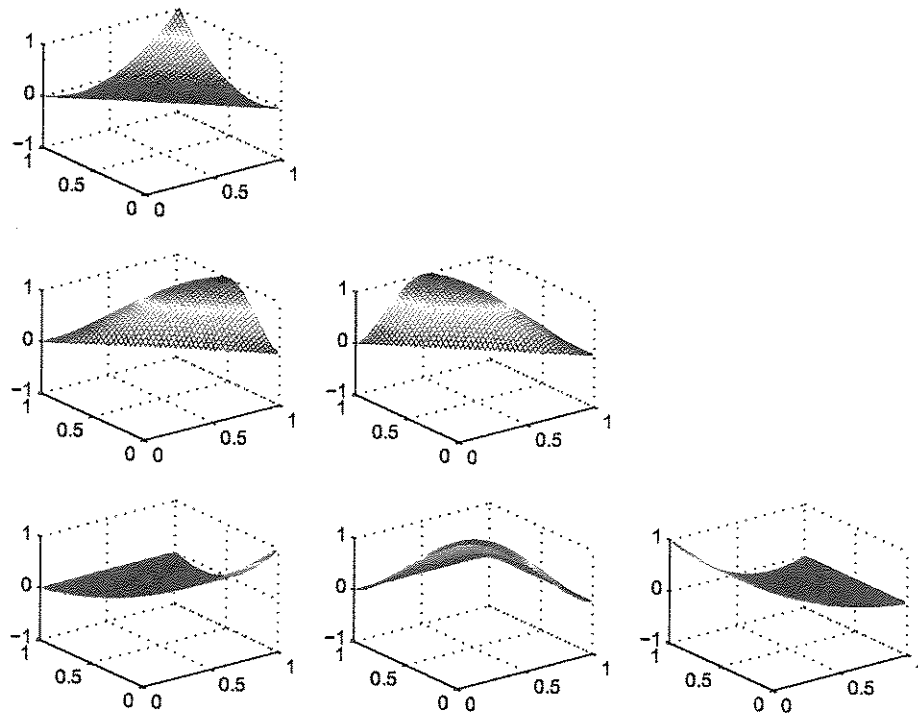


Figura 4.7: Funções de interpolação para o triângulo quadrático lagrangiano.

Para obter a base Nodal Topológica em triângulos considere a seguinte definição

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ l_{p+1}^{(p)}(L_1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Os elementos obtidos substituindo a definição anterior em (4.7) a (4.9) são os mesmos indicados na Figura 4.5. Mas independente do grau P , as funções de vértice serão sempre lineares e dadas por (4.11).

4.1.2 Bases modais

Considere a seguinte definição similar a (4.14) mas usando polinômios de Jacobi

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P_1 \\ L_1 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) & 0 < p < P_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Analogamente às bases de Lagrange, as bases modais para triângulos podem ser definidas usando as equações (4.7) a (4.9). Os modos de vértice são dados por

$$\begin{aligned} N_{P_1 00}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3) = L_1, \\ N_{0P_2 0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3) = L_2, \\ N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3) = L_3. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Os modos de aresta para $P \geq 2$ e $0 < p, q, r < P$ são

$$\begin{aligned} N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3) \\ &= L_1 L_2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1), \quad (p + q = P), \\ N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3) \\ &= L_1 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3 - 1), \quad (p + r = P), \\ N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3) \\ &= L_2 L_3 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3 - 1), \quad (q + r = P). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente, os modos de face para $P \geq 3$, $p + q + r = P$ e $0 < p, q, r < P - 1$ são

$$\begin{aligned} N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3) \\ &= L_1 L_2 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

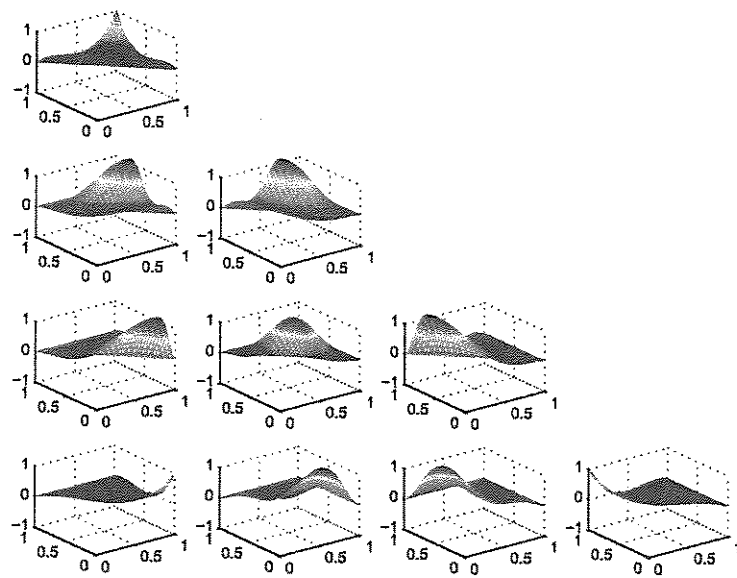


Figura 4.8: Funções de interpolação para o triângulo cúbico lagrangiano.

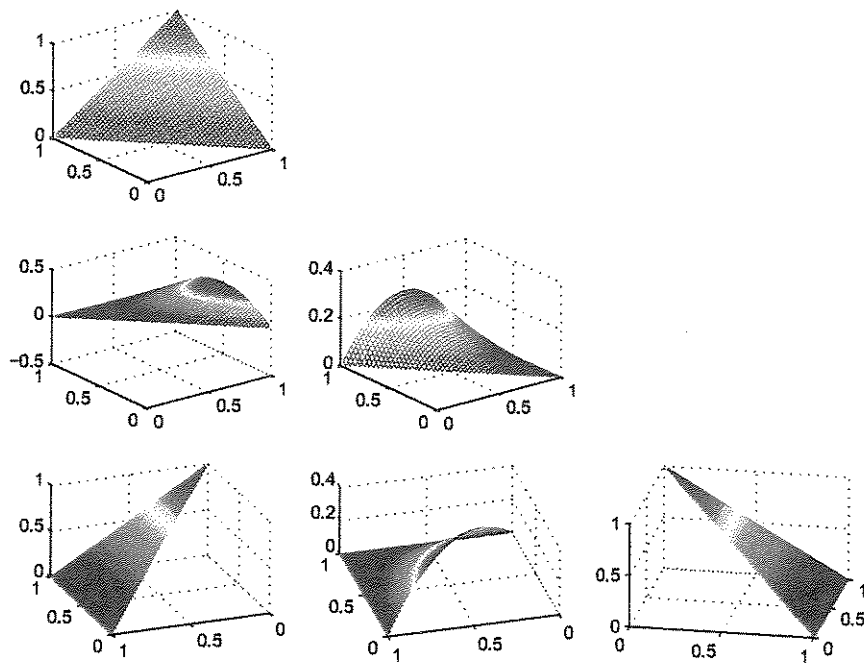


Figura 4.9: Funções de interpolação para o triângulo quadrático modal.

As funções de interpolação para os elementos quadrático e cúbico estão ilustradas nas Figuras 4.9 e 4.10.

Uma base hierárquica para triângulos é gerada tomando-se $p + q + r \leq P$. Para as funções de aresta consideram-se as seguintes relações para os índices p, q, r em (4.17), respectivamente: $r = 0$ e $q \geq p$; $q = 0$ e $p \geq r$; $p = 0$ e $r \geq q$. No caso das funções de face, têm-se $p \geq q$ e $r \geq q$ em (4.18). As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram as funções de interpolação para os elementos quadrático e cúbico. Observa-se que é necessário multiplicar as funções ímpares por -1 para garantir a continuidade C_0 na interface entre os elementos.

4.2 Funções de Interpolação para Tetraedros

Aplica-se o mesmo procedimento tensorizável dos triângulos para os tetraedros. Para isso, utilizam-se as coordenadas baricêntricas de volume apresentadas na Figura 4.13. Verifica-se que $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ e as coordenadas baricêntricas L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são definidas nesse caso pela razão entre os volumes dos tetraedros V_i e do tetraedro V , ou seja, (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991)

$$\frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} = 1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (4.19)$$

Do mesmo modo, as funções de forma nodais para o tetraedro são dadas pelo seguinte produto tensorial

$$N_a(L_1, L_2, L_3, L_4) = l_b^{(b-1)}(L_1)l_c^{(c-1)}(L_2)l_d^{(d-1)}(L_3)l_e^{(e-1)}(L_4), \quad (4.20)$$

sendo a o número do nó; b, c, d, e os índices das coordenadas nas direções L_1, L_2, L_3 e L_4 , respectivamente. O polinômio de Lagrange na direção L_4 é dado por

$$l_e^{(e-1)}(L_4) = \frac{(L_4 - L_{4_1})(L_4 - L_{4_2}) \dots (L_4 - L_{4_{e-1}})}{(L_{4_e} - L_{4_1})(L_{4_e} - L_{4_2}) \dots (L_{4_e} - L_{4_{e-1}})}. \quad (4.21)$$

O tetraedro linear é dado na Figura 4.14. Novamente há duas coordenadas ao longo de cada coordenada L_i denotadas como $L_{i_1} = 0$ e $L_{i_2} = 1$. A Tabela 4.3 apresenta os coeficientes a, b, c, d e e . As funções de forma são obtidas usando as equações (4.3), (4.20) e (4.21) e a Tabela 4.3. Logo,

$$N_1(L_1, L_2, L_3, L_4) = l_2^{(1)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3)l_1^{(0)}(L_4) = \frac{L_1 - L_{1_1}}{L_{1_2} - L_{1_1}} = L_1,$$

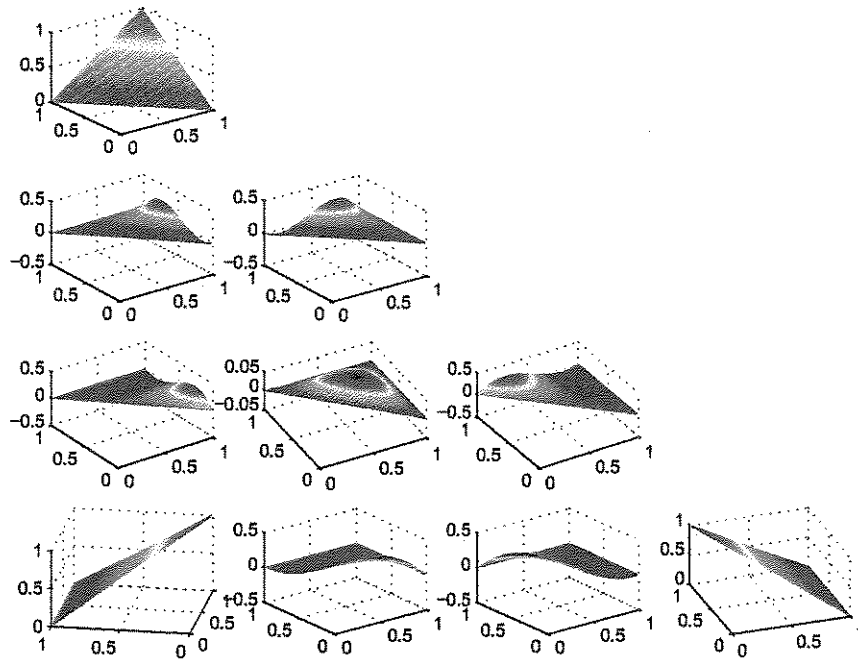


Figura 4.10: Funções de interpolação para o triângulo cúbico modal.

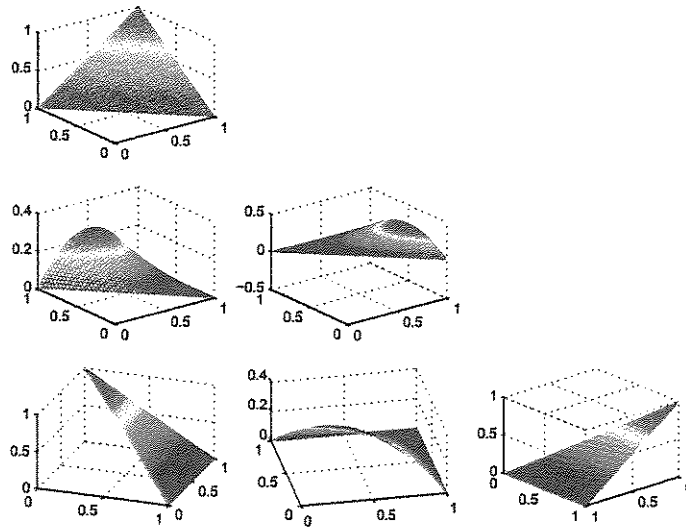


Figura 4.11: Funções de interpolação hierárquicas para o triângulo quadrático.

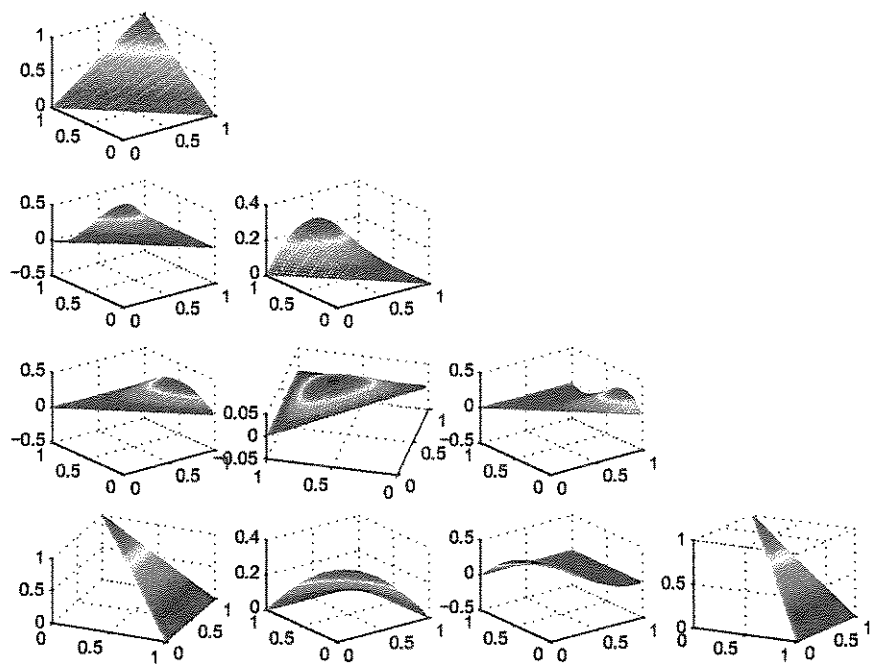


Figura 4.12: Funções de interpolação hierárquicas para o triângulo cúbico.

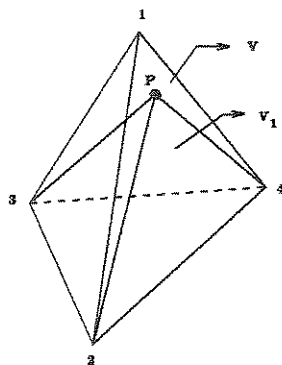


Figura 4.13: Coordenadas de volume.

$$N_2(L_1, L_2, L_3, L_4) = l_1^{(0)}(L_1)l_2^{(1)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3)l_1^{(0)}(L_4) = L_2, \quad (4.22)$$

$$N_3(L_1, L_2, L_3, L_4) = l_1^{(0)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_2^{(1)}(L_3)l_1^{(0)}(L_4) = L_3,$$

$$N_4(L_1, L_2, L_3, L_4) = l_1^{(0)}(L_1)l_1^{(0)}(L_2)l_1^{(0)}(L_3)l_2^{(1)}(L_4) = L_4.$$

Essas são as funções de forma padrão h para o tetraedro linear (Zienkiewicz e Taylor,

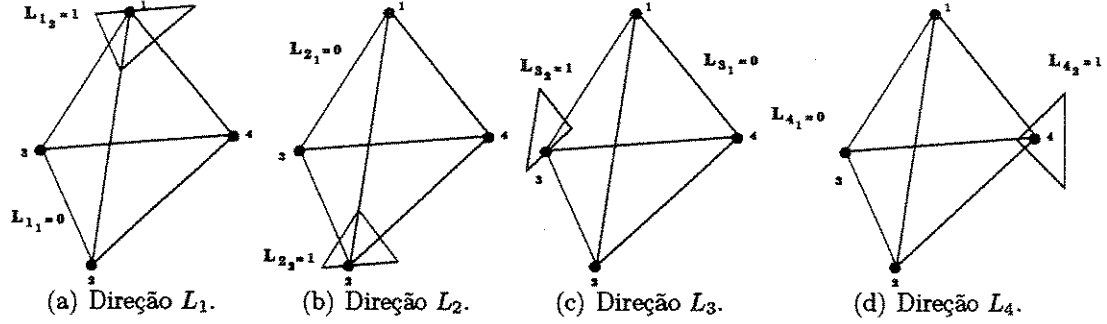


Figura 4.14: Tetraedro linear (Bittencourt, 1991).

a	1	2	3	4
b	2	1	1	1
c	1	2	1	1
d	1	1	2	1
e	1	1	1	2

Tabela 4.3: Tetraedro linear: índices a , b , c , d e e .

1989; Cook et al., 1991), mas construídas aqui usando o produto tensorial de polinômios unidimensionais expressos em coordenadas baricêntricas. O procedimento pode ser aplicado a triângulos e tetraedros de qualquer ordem.

De forma análoga aos elementos anteriores, associam-se as funções de interpolação com as respectivas entidades topológicas que, conforme ilustrado na Figura 4.15(a), constituem-se de 4 vértices (V_1 a V_4), 6 arestas (A_1 a A_6), 4 faces (F_1 a F_4) e um volume (C_1).

As funções de forma nodal e modal para tetraedros podem ser escritas em termos de entidades topológicas como

$$N_{pqrs}(L_1, L_2, L_3, L_4) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad (4.23)$$

sendo $0 \leq p \leq P_1$, $0 \leq q \leq P_2$, $0 \leq r \leq P_3$ e $0 \leq s \leq P_4$ com P_1 , P_2 , P_3 e P_4 os graus dos polinômios nas direções L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , respectivamente, conforme mostrado na Figura 4.15(b).

Considera-se a seguir o caso $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, para o qual têm-se 4 funções de vértice, $6(P-1)$ de aresta, $\frac{1}{2}(P-1)(P-2)$ de face e $\frac{1}{6}(P-1)(P-2)(P-3)$ de volume.

Baseado na equação (4.23) e na Figura 4.15, as funções de vértices são obtidas como

$$\begin{aligned} N_{P_1 000}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{0P_2 00}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{00P_3 0}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3)\phi_0(L_4), \\ N_{000P_4}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_{P_4}(L_4). \end{aligned} \quad (4.24)$$

As funções de aresta para $P \geq 2$ e $0 < p, q, r, s < P$ são

$$\begin{aligned} N_{pq00}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4), \quad (p+q=P), \\ N_{p0r0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad (p+r=P), \\ N_{p00s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad (p+s=P), \\ N_{0q0r}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad (q+r=P), \\ N_{0q0s}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad (q+s=P), \\ N_{00rs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad (r+s=P). \end{aligned} \quad (4.25)$$

As funções de face para $P \geq 3$ e $0 < p, q, r, s < P-1$ são dadas por

$$\begin{aligned} N_{pqr0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4), \quad (p+q+r=P), \\ N_{pq0s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4), \quad (p+q+s=P), \\ N_{p0rs}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad (p+r+s=P), \\ N_{0qrs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4), \quad (q+r+s=P). \end{aligned} \quad (4.26)$$

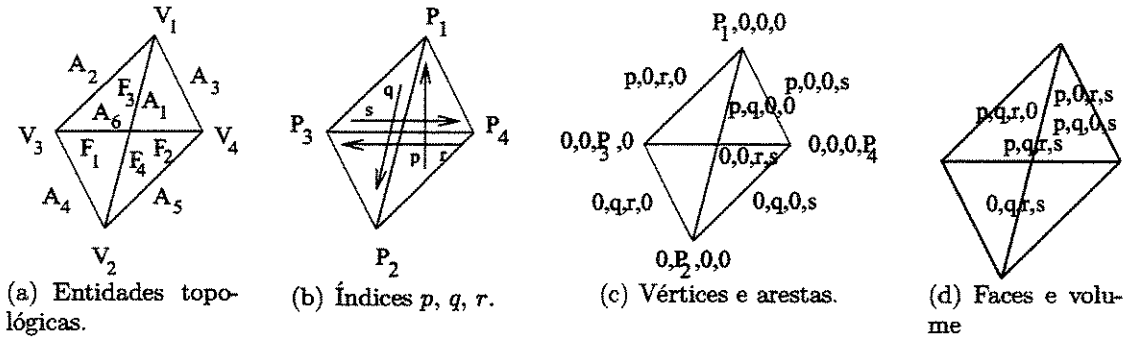


Figura 4.15: Entidades topológicas para tetraedros, índices p, q, r e s e associação entidades e índices.

Enfim, as funções de corpo para $P \geq 4$, $p + q + r + s = P$ e $0 < p, q, r, s < P - 2$ são

$$N_{pqrs}(\cdot) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4). \quad (4.27)$$

A seguir, apresentam-se as bases nodais e modais empregando as equações anteriores.

4.2.1 Bases nodais

Empregando a definição (4.10) nas expressões (4.24) a (4.27), obtém-se a base nodal lagrangiana padrão encontrada na literatura. A Figura 4.16 ilustra os elementos linear, quadrático e cúbico.

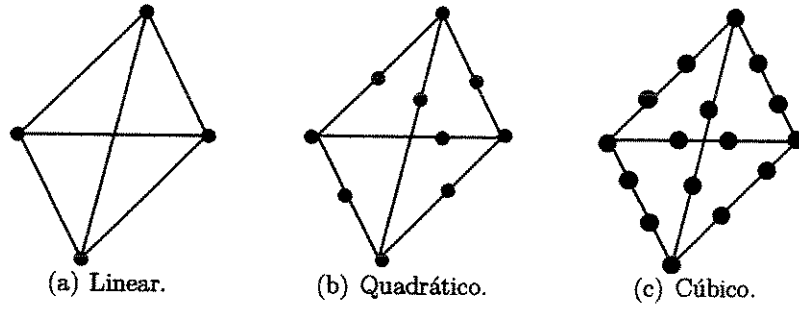


Figura 4.16: Tetraedros da família nodal lagrangiana.

As funções de vértice do elemento linear são

$$\begin{aligned} N_{P1000}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_1, \\ N_{0P100}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_2, \\ N_{00P10}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_3, \\ N_{000P1}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_4. \end{aligned} \quad (4.28)$$

As funções de vértice do elemento quadrático são

$$\begin{aligned} N_{2000}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_1(2L_1 - 1), \\ N_{0200}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_2(2L_2 - 1), \\ N_{0020}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_3(2L_3 - 1), \\ N_{0002}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_4(2L_4 - 1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Da mesma forma, as funções de aresta são

$$\begin{aligned}
N_{1100}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_1L_2, \\
N_{1010}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_1L_3, \\
N_{1001}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_1L_4, \\
N_{0110}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_2L_3, \\
N_{0101}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_2L_4, \\
N_{0011}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_3L_4.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Obtém-se a base Nodal Topológica empregando-se (4.14) nas expressões (4.24) a (4.27). Nesse caso, têm-se os mesmos elementos ilustrados na Figura 4.16, exceto que as funções de vértice serão sempre lineares e dadas por (4.28).

4.2.2 Bases modais

Para obter a base modal para tetraedros basta substituir (4.15) nas expressões (4.24) a (4.27). As funções de vértice são

$$\begin{aligned}
N_{P_1000}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_{P_1}(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4) = L_1, \\
N_{0P_200}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_{P_2}(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4) = L_2, \\
N_{00P_30}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_{P_3}(L_3)\phi_0(L_4) = L_3, \\
N_{000P_4}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_{P_4}(L_4) = L_4.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Os modos de aresta são também obtidos para $P \geq 2$ e $0 < p, q, r, s < P$ como

$$\begin{aligned}
N_{pq00}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_0(L_4) \\
&= L_1L_2P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1), \quad (p+q=P), \\
N_{p0r0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4) \\
&= L_1L_3P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1), \quad (p+r=P), \\
N_{p00s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_1L_4P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \quad (p+s=P), \\
N_{0pq0}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4) \\
&= L_2L_3P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1), \quad (q+r=P), \\
N_{0q0s}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_2L_4P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \quad (q+s=P), \\
N_{00rs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_3L_4P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \quad (r+s=P).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Os modos de face são definidos para $P \geq 3$, $0 < p, q, r, s < P-1$ e dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}
N_{pqr0}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_0(L_4) \\
&= L_1L_2L_3P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1), \\
&\quad (p+q+r=P), \\
N_{pq0s}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_1L_2L_4P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \\
&\quad (p+q+s=P), \\
N_{p0rs}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_1L_3L_4P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1-1)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \\
&\quad (p+r+s=P), \\
N_{0qrs}(\cdot) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4) \\
&= L_2L_3L_4P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2-1)P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3-1)P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4-1), \\
&\quad (q+r+s=P).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Finalmente, os modos de corpo para $P \geq 4$, $p + q + r + s = P$ e $0 < p, q, r, s < P - 2$ são dados pela expressão geral

$$\begin{aligned} N_{pqrs}(\cdot) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)\phi_s(L_4) \\ &= L_1 L_2 L_3 L_4 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3}(2L_3 - 1) P_{s-1}^{\alpha_4, \beta_4}(2L_4 - 1). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pode-se obter uma base hierárquica substituindo o sinal de igualdade nas relações entre os índices das funções de aresta e face por um sinal $\leq$ (ou seja, $p + q = P$ por $p + q \leq P$ e $p \geq q$), de forma análoga ao caso dos triângulos.

Exceto pela hierarquia, as bases nodais de Lagrange para triângulos e tetraedros têm todas as propriedades de qualquer base modal apresentada, ou seja, modos de vértices têm magnitude unitária no vértice e são zero em todos os outros vértices; modos de aresta têm magnitude ao longo de uma aresta e são zero ao longo de todas as outras arestas e vértices; modos de face têm magnitude ao longo de uma face mas são zero ao longo de todas as outras faces, arestas e vértices, e analogamente para os modos de corpo.

Conforme apresentado em (Bittencourt, 2004) as funções modais para triângulos e tetraedros (excluindo as hierárquicas) possuem uma continuidade C_0 natural nas arestas e faces dos elementos.

4.3 Resultados

Nesta seção apresenta-se uma análise do condicionamento numérico e as esparsidades das matrizes de massa e rigidez dos triângulos.

Na Figura 4.18 estão ilustrados, para $1 \leq p \leq 10$, os coeficientes não-nulos das matrizes de massa usando polinômios de Lagrange.

A seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi nas expressões das funções de interpolação da base modal para triângulos visando uma melhor esparsidade das matrizes locais não é trivial, devido à dependência das coordenadas baricêntricas e do limite de integração não fixo.

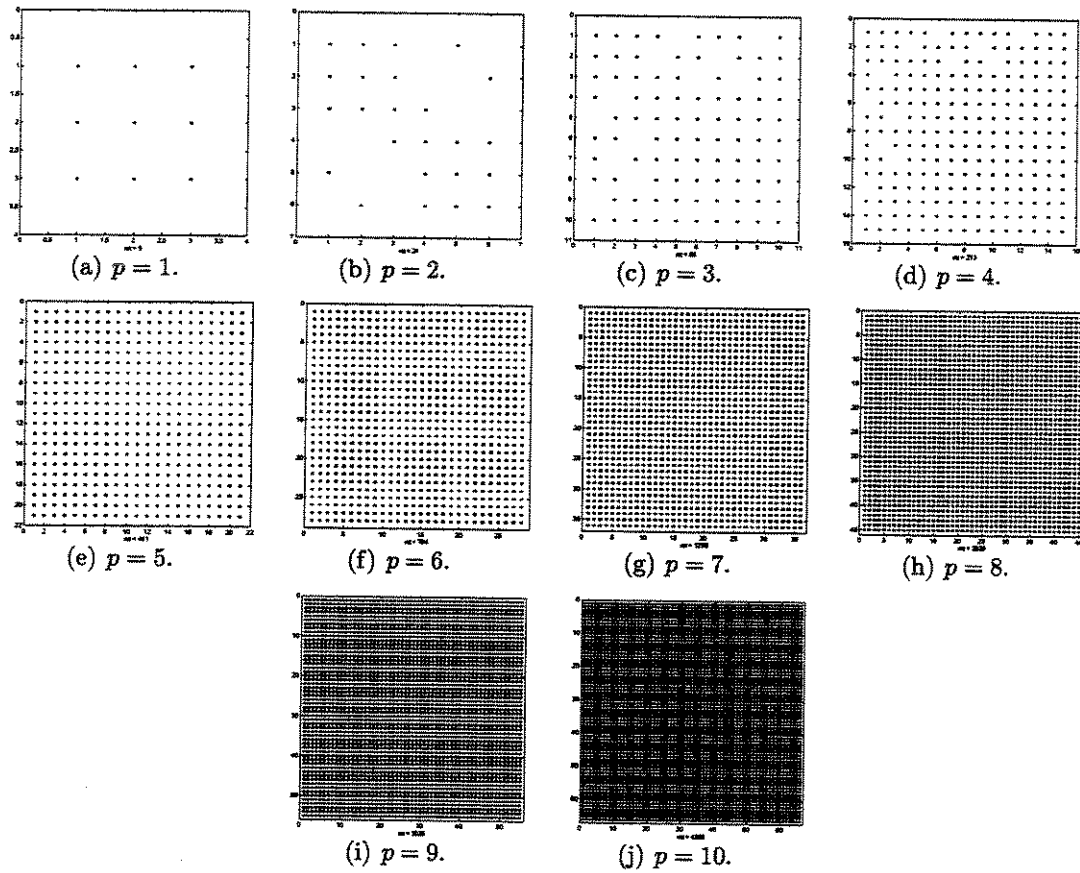


Figura 4.17: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos de Lagrange.

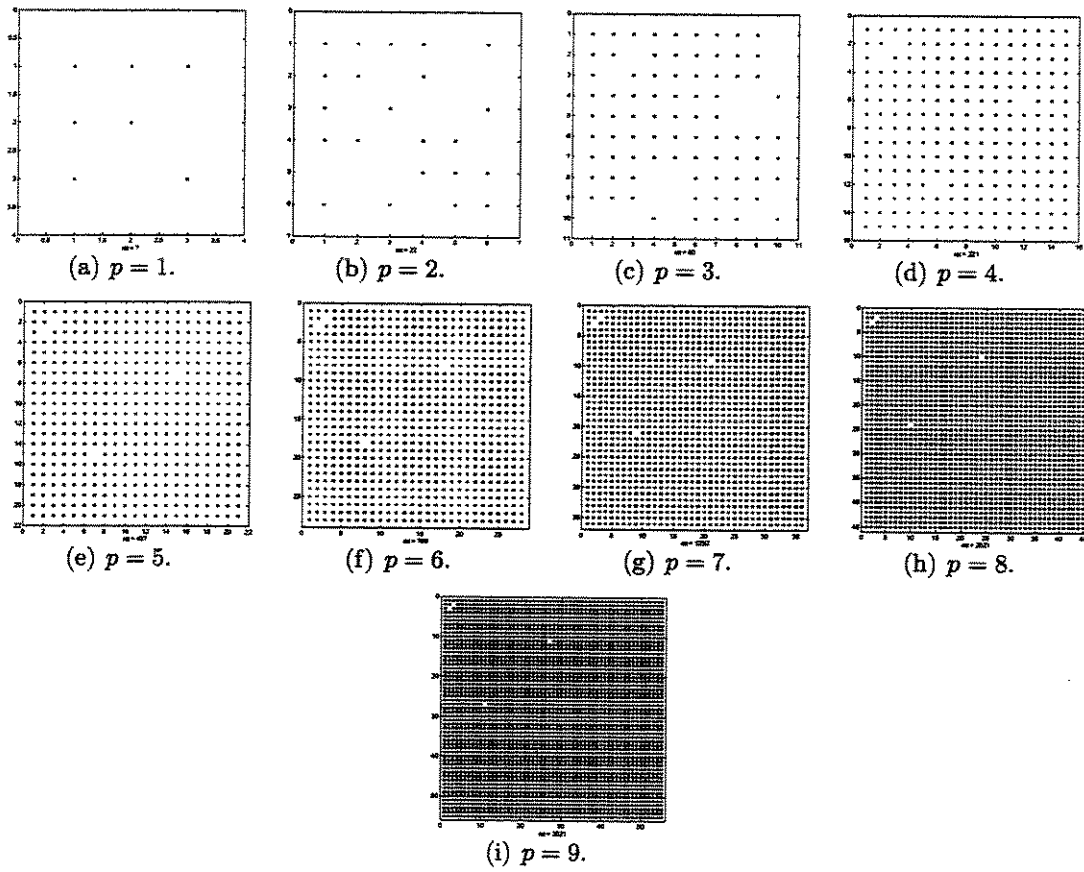


Figura 4.18: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos de Lagrange.

Para ilustrar esse fato, considere $P = 3$ e as duas funções de aresta

$$N_{12} = L_1 L_2 P_1^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) \quad \text{e} \quad N_{21} = L_1 L_2 P_1^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1).$$

O coeficiente correspondente da matriz de massa é

$$m_{12} = \int_A L_1^2 L_2^2 P_1^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_1^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) dA.$$

As ponderações que zeram o coeficiente são $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\alpha_2 = \beta_2 = 3$. A Figura 4.19 ilustra o perfil da matriz de massa, podendo-se observar a ortogonalidade entre as funções de uma mesma aresta.

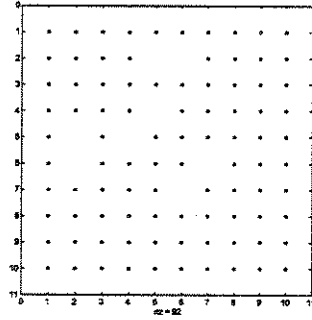


Figura 4.19: Esparsidade da matriz de massa do triângulo de Jacobi para $P = 3$.

As Figuras 4.20 e 4.21 ilustram os perfis de esparsidade das matrizes de massa e rigidez para $1 \leq P \leq 10$ usando as ponderações anteriores. Observa-se que essas ponderações não garantem a ortogonalidade entre todas as funções de uma mesma aresta.

Procurou-se, também, determinar as ponderações que zeram os coeficientes da matriz de massa correspondentes às funções de face triangulares, ou seja, considerou-se os seguintes termos

$$\int_A N_{pqr} N_{ijk} dA = \int_A L_1^2 L_2^2 L_3^2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1) P_{i-1}^{\alpha_4, \beta_4} (2L_1 - 1) P_{j-1}^{\alpha_5, \beta_5} (2L_2 - 1) P_{k-1}^{\alpha_6, \beta_6} (2L_3 - 1) dA \quad (4.35)$$

sendo $p-1$, $q-1$, $r-1$, $i-1$, $j-1$, $k-1$ os índices que se referem, respectivamente, aos valores dos graus dos polinômios nas direções L_1 , L_2 e L_3 ; os α_i , β_i são as ponderações respectivas.

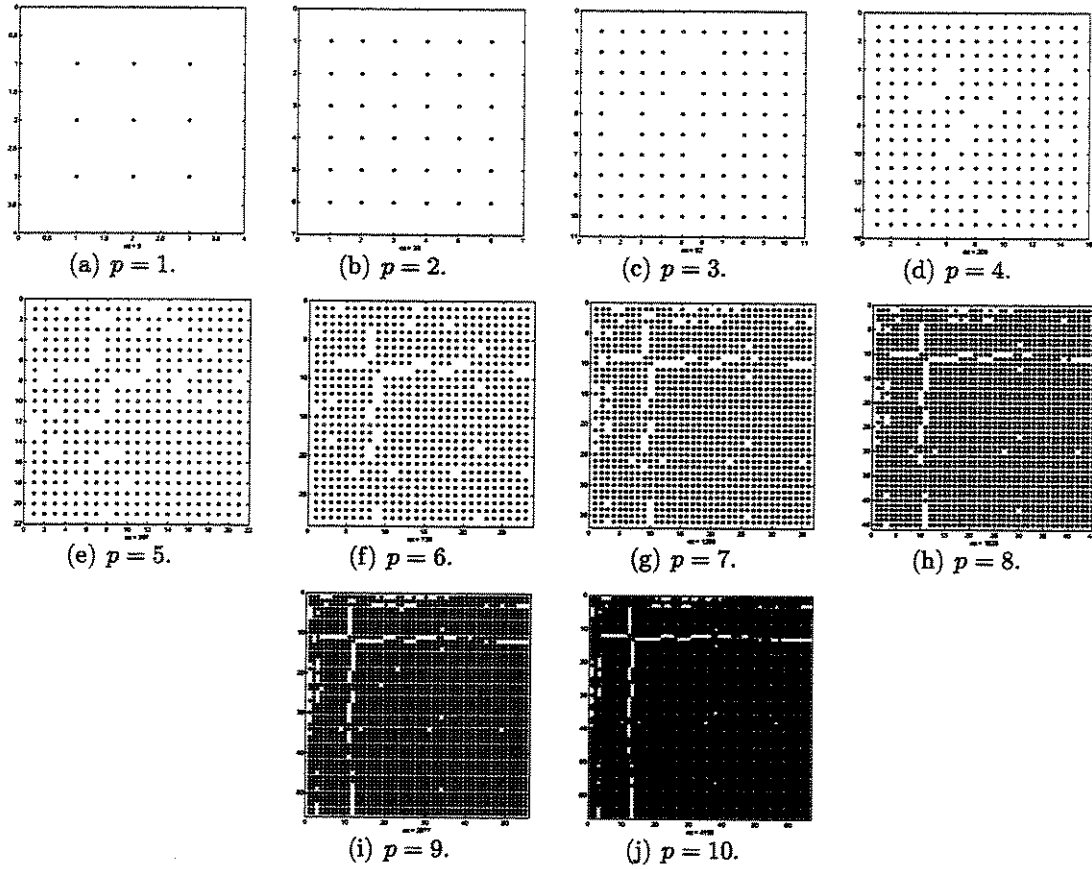


Figura 4.20: Esparsidade das matrizes de massa dos triângulos de Jacobi.

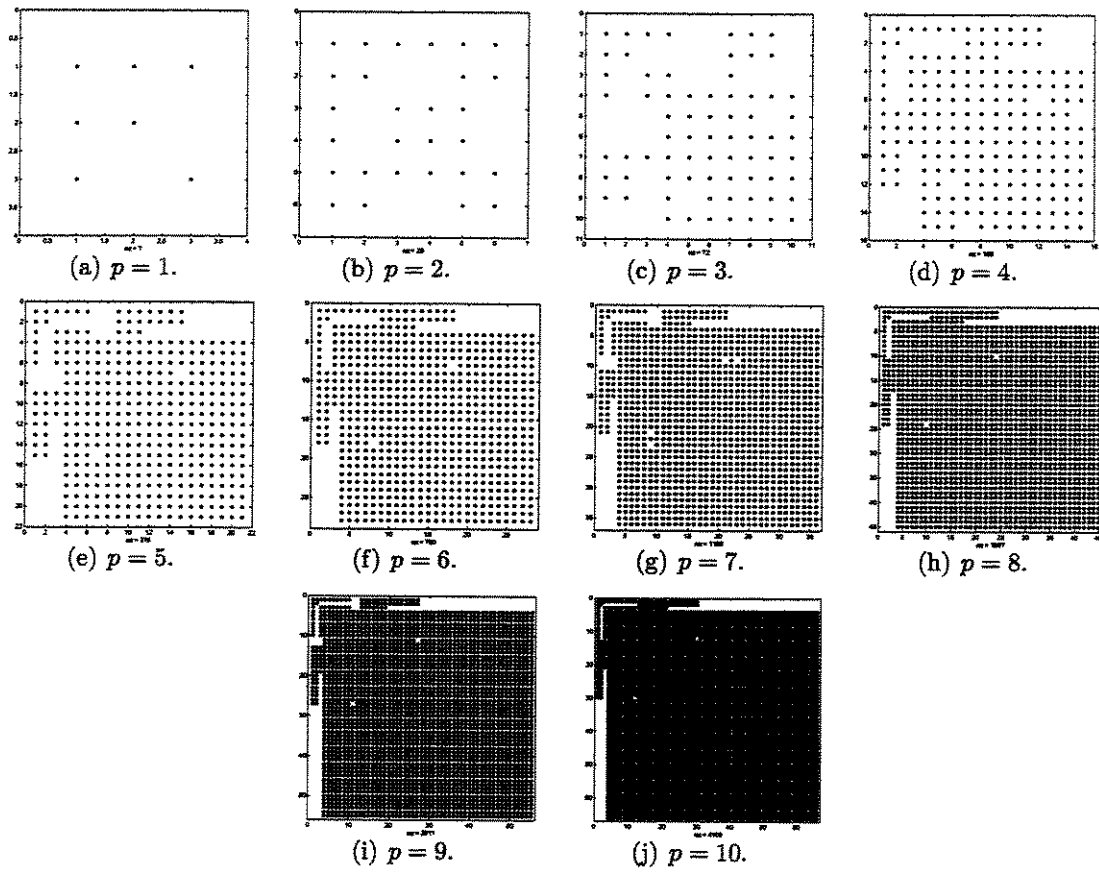


Figura 4.21: Esparsidade das matrizes de rigidez dos triângulos de Jacobi.

Observa-se que todo índice maior que 1 exerce influência no cálculo da integral.

Para uma melhor seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi que zeram a equação (4.35), elaborou-se um programa na linguagem *C* que procura por esses α 's e β 's. Os testes foram feitos para os graus 4, 5 e 6 das funções triangulares.

A submatriz de massa que contém apenas as integrais das funções de face dos elementos triangulares para $P = 4$ é dada por

$$M_{ff} = \begin{bmatrix} \int_A N_{112} N_{112} dA & \int_A N_{112} N_{121} dA & \int_A N_{112} N_{211} dA \\ & \int_A N_{121} N_{121} dA & \int_A N_{121} N_{112} dA \\ & & \int_A N_{112} N_{112} dA \end{bmatrix}.$$

Com uma apropriada seleção das ponderações desses polinômios, pode-se zerar apenas dois dos três coeficientes fora da diagonal ($\int_A N_{112} N_{121} dA$, $\int_A N_{112} N_{211} dA$ e $\int_A N_{121} N_{112} dA$) e garantir que os termos da diagonal não zeram. A tabela abaixo apresenta essas ponderações, sendo a um valor inteiro positivo qualquer.

Produtos	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	α_4	β_4	α_5	β_5	α_6	β_6
$N_{112} N_{121}$					2	1			a	a		
$N_{112} N_{211}$					2	1	a	a				
$N_{121} N_{112}$			2	1							a	a

Para $P = 4$, os índices p , q e r assumem os valores 1 ou 2 como indicado acima. O conjunto de índices pqr assim obtidos são denominados uma combinação. Para $P = 4$, o conjunto 112, 121 e 211 é a única combinação disponível. Observa-se que ao selecionar as ponderações nas direções L_1 e L_2 ou L_1 e L_3 ou L_2 e L_3 , consegue-se zerar apenas 2/3 dos coeficientes de uma mesma combinação.

Fez-se a seleção das ponderações para os graus 5 e 6. Nesses casos, têm-se um número maior de combinações dos índices p , q e r e novamente só é possível zerar 2/3 dos coeficientes da matriz de massa para uma mesma combinação. No entanto, para graus maiores as ponderações são distintas para cada uma das combinações, o que impede zerar

vários coeficientes da matriz de massa simultaneamente. Assim, deve-se escolher quais termos serão zerados.

Isso impede a obtenção de uma submatriz de massa das funções de face na forma diagonal. Esse fato resultaria numa maior eficiência computacional para a execução de procedimentos numéricos.

As Figuras 4.22 e 4.23 mostram o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez das bases de Lagrange e Jacobi juntamente com as bases de Szabó, Carnevalli, Webb e Sherwin (Nogueira Jr., 2002).

No caso da matriz de massa, observa-se um melhor condicionamento dos polinômios de Lagrange; para a matriz de rigidez, o condicionamento com as bases de Webb torna-se melhor a partir do grau 6.

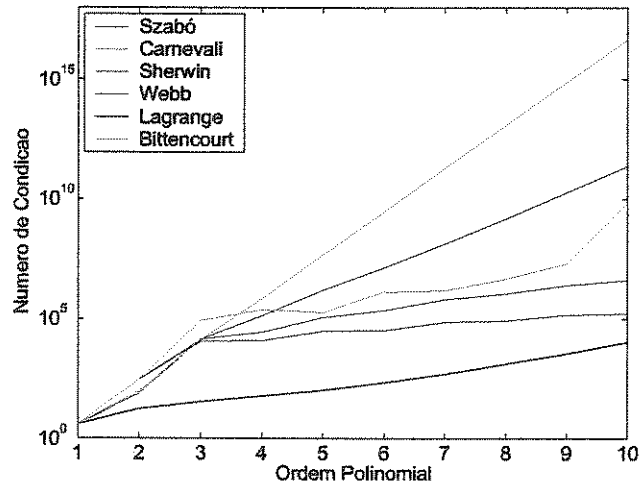


Figura 4.22: Condicionamento numérico das matrizes de massa dos triângulos com bases de Lagrange e Jacobi.

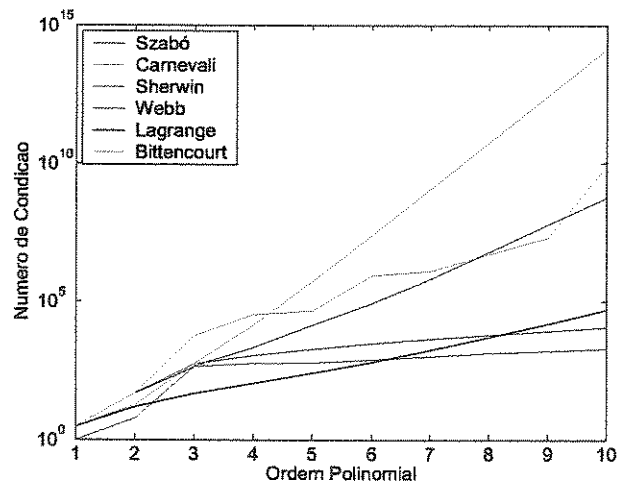


Figura 4.23: Condicionamento numérico das matrizes de rigidez dos triângulos com bases de Lagrange e Jacobi.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

Como pode ser visto ao longo deste trabalho, obtiveram-se processos de construção tensorial de funções de interpolação para as versões h e p do MEF usando polinômios de Lagrange e Jacobi, aplicados à quadrados, hexaedros, triângulos e tetraedros. Foi a primeira vez na literatura que se apresentou a construção tensorial dessas funções através de procedimentos tão simples e uniformes. Observa-se que a tensorização facilita muito a implementação computacional dos códigos.

De acordo com os resultados observados no Capítulo 2, conclui-se que o uso de polinômios de Jacobi gerou uma maior esparsidade nas matrizes de massa e rigidez, tornando, inclusive, a matriz de rigidez quasi-diagonal, o que resulta em baixo custo computacional para a sua determinação. Entretanto, no condicionamento numérico das matrizes de massa, o polinômio de Lagrange se mostrou melhor, enquanto que o polinômio de Jacobi gerou um condicionamento bastante superior.

No Capítulo 3, conclui-se que o uso de polinômios de Jacobi gerou uma esparsidade superior nas matrizes de massa e rigidez de quadrados quando comparada ao uso de polinômios de Lagrange. Mas, o condicionamento numérico das matrizes de massa se mostra melhor com o uso dos polinômios de Lagrange. Em relação às matrizes de rigidez, até o grau 5 o condicionamento é melhor com o uso de polinômios de Lagrange; após o grau 5, o uso de polinômios de Jacobi resultou num condicionamento numérico melhor.

Sobre o Capítulo 4, pode-se concluir que o uso de polinômios de Jacobi em triângulos

resulta numa melhor esparsidade tanto das matrizes de massa quanto das matrizes de rigidez. Em relação ao condicionamento numérico, o uso de polinômios de Lagrange se mostra superior nas matrizes de massa e rigidez, em relação ao comportamento de várias bases empregadas na versão p .

Assim, observa-se que o uso de polinômios de Jacobi gera sempre uma melhor esparsidade nas matrizes de massa locais dos elementos. No caso dos triângulos, na massa e na rigidez.

Também concluiu-se que uma correta seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi para as funções triangulares de face faz com que a submatriz de massa tenha um maior número de termos nulos, aumentando assim a eficiência computacional de procedimentos numéricos.

Devido ao uso de coordenadas baricêntricas e o acoplamento destas, não é possível obter uma regra geral de seleção das ponderações, dificultando assim esse processo. Como sugestão de continuidade deste trabalho propõe-se:

- pesquisa sobre outro sistema de coordenadas para a construção tensorial de funções triangulares de forma que não ocorra o acoplamento de coordenadas (não baricêntrico);
- o uso de outros polinômios ortogonais para a construção das funções de interpolação, como Legendre ou Chebyshev;
- emprego de procedimentos de integração numérica de Gauss-Jacobi extendendo as regras apresentadas em (Bittencourt, 2004);
- aplicação das funções modais para triângulos em problemas de elasticidade com procedimentos adaptáveis;
- estudo de procedimentos iterativos para a solução de sistemas de equações adequados às funções modais para triângulos e tetraedros.

Referências Bibliográficas

- Abouchakra, R. Hierarchal tetrahedral elements using orthogonal polynomials. In: *1996 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE'96)*, v. 18, p. 525–528, Calgary. part 2 (of 2), 1996.
- Adjerid, S., Aiffa, M. , Flaherty, J. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190p.2925–2941, 2001.
- Andrade, E., Bracciali, C. *Polinômios Ortogonais e Similares - Propriedades e Aplicações*. IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, 2003.
- Babuska, I., Griebel, M. , Pitkaranta, J. The problem of selecting the shape functions for *p*-type finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28p.1891–1908, 1989.
- Bittencourt, M. L. *Introdução ao Método de Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural*. Edição Preliminar, Campinas, 1991.
- Bittencourt, M. L. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. *submetido para publicação*, 2004.
- Carnevali, P., Morris, R. B., Tsuji, Y. , Taylor, G. New basis functions and computational procedures for *p*-version finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36p.3759–3779, 1993.
- Chihara, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series. Gordon and Breach - Science Publishers, New York, 1978.
- Cook, R., Malkus, D. , Plesha, M. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, USA, third ed., 1991.
- Devloo, P., Oden, J. , Pattani, P. Shape optimization of structures: A literature survey. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 70p.203–235, 1988.
- Dunavant, D. A. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 21p.1129–1148, 1985.
- Edgar, N. B., Surana, K. S. On the conditioning number and the selection criteria for *p*-version approximation functions. *Computers & Structures*, v. 60, n.4, p.521–530, 1996.

- Nogueira Jr., A. N. *Formulação p Do Método de Elementos Finitos Em Problemas de Elasticidade Linear e Não-Linear Com Malhas 3D Não-Estruturadas e Em Métodos Multigrid Algébricos*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002., Tese (Doutorado).
- Nogueira Jr., A. N., Bittencourt, M. Hierarchical basis functions for the p -version of the finite element method (in portuguese). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 17, n.1, p.37–59, 2001.
- Nogueira Jr., A. N., Bittencourt, M. Algebraic multigrid schemes for the p -version of the finite element method applied to 3D elliptical problems. In: *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna - Austria. Technical University of Vienna and IACM, 2002.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J. *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- Maitre, J., Pourquier, O. About the conditioning of matrices in the p -version of the finite element method for second order elliptic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 63p.341–348, 1995.
- Mandel, J. Hierarchical preconditioning and partial orthogonalization for the p -version finite element method. In: Chan, T., Glowinski, R. , Windlund, O., (Eds.), *Proceedings of the 3th International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, p. 141–156, Huston, Texas. SIAM, 1990a.
- Mandel, J. Two-level domain decomposition preconditioning for the p -version finite element method in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29p.1095–1108, 1990b.
- Peano, A. *Hierarchies of conforming finite elements*. Washington University - St. Louis, 1975., Dissertação (Mestrado).
- Rossow, M., Katz, I. Hierarchical finite elements and precomputed arrays. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 12p.977–999, 1993.
- Sherwin, S. J., Karniadakis, G. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38p.3775–3802, 1995.
- Szabó, B. A., Babuška, I. *Finite Element Analysis*. Wiley Interscience, New York, 1991.
- Szabó, B. A., Peano, A. G. Hierarchic finite elements. In: Kardestuncer, H., Norrie, D., (Eds.), *Finite Element Handbook*, p. 2227–2233. McGraw-Hill, New York, 1987.
- Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*, v. 23. American Mathematical Society - Colloquium Publications, New York, 1959.

- Vijayakar, S., Busby, H. , Houser, D. Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebyshev polynomials. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 24p.1461–1477, 1987.
- Webb, J. P., Abouchakra, R. Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38p.245–257, 1995.
- Zienkiewicz, O., Kelly, D., de S.R. Gago, J. , Babuška, I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. In: *MAFELAP*, p. 313–346, Brunel University, 1981.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*, v. 1. McGraw-Hill International Editions, fourth ed., 1989.
- Zumbusch, G. *Simultaneous h-p adaption in multilevel finite elements*. Freien Universitat Berlin, 1995., Tese (Doutorado), Germany.

Apêndice A

Interpolação Polinomial e Polinômios Ortogonais

Neste Apêndice será apresentada a base teórica matemática utilizada na análise das ponderações dos polinômios de Jacobi, como resultados e demonstrações de propriedades de interpolação polinomial e polinômios ortogonais (Szegő, 1959; Chihara, 1978; Andrade e Bracciali, 2003).

A.1 Interpolação Polinomial

Sejam $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, $n + 1$ pontos distintos de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $f(x)$ definida em $[a, b]$ com valores reais tal que

$$y_{n,i} = f(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Definição A.1.1 *Denomina-se polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos*

$x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, o polinômio de grau no máximo n , $P_n(x)$, que coincide com $f(x)$ nos $n + 1$ pontos dados, isto é,

$$y_{n,i} = P_n(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Teorema A.1.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com derivadas contínuas até a ordem $n + 1$ ($f \in C^{n+1}[a, b]$). Sejam $x \in [a, b]$ e $P_n(y)$ o polinômio de interpolação de $f(y)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos de $[a, b]$, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$. Então, o erro na interpolação é dado por*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b, \quad (\text{A.1})$$

sendo $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$ o polinômio dos nós.

A.1.1 Polinômio de Interpolação de Lagrange

Sejam $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ pontos distintos em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $P_n(x)$ o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Pode-se escrever $P_n(x)$ como a seguinte combinação linear

$$P_n(x) = f(x_{n,0})l_{n,0}(x) + f(x_{n,1})l_{n,1}(x) + \dots + f(x_{n,n})l_{n,n}(x),$$

sendo $l_{n,k}(x)$ os polinômios de grau n .

Para que $P_n(x_{n,i}) = f(x_{n,i})$ toma-se $l_{n,k}(x)$ tais que

$$\begin{cases} l_{n,k}(x_{n,k}) = 1, & k = 0, 1, \dots, n. \\ l_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & i, k = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq k. \end{cases}$$

Então, os polinômios $l_{n,k}(x)$ têm n raízes distintas que são $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,k-1}, x_{n,k+1}, \dots,$

$x_{n,n}$. Logo,

$$l_{n,k}(x) = c_k(x - x_{n,0}) \dots (x - x_{n,k-1})(x - x_{n,k+1}) \dots (x - x_{n,n}).$$

Como $l_{n,k}(x_{n,k}) = 1$, então

$$c_k = \frac{1}{(x_{n,k} - x_{n,0}) \dots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \dots (x_{n,k} - x_{n,n})}.$$

Portanto, para $k = 0, 1, \dots, n$,

$$l_{n,k}(x) = \frac{(x - x_{n,0}) \dots (x - x_{n,k-1})(x - x_{n,k+1}) \dots (x - x_{n,n})}{(x_{n,k} - x_{n,0}) \dots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \dots (x_{n,k} - x_{n,n})}, \quad (\text{A.2})$$

que são conhecidos como polinômios fundamentais de Lagrange.

O polinômio de interpolação de $f(x)$ pode, então, ser escrito como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) l_{n,k}(x), \quad (\text{A.3})$$

com $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, dados por (A.2) e conhecido como *Polinômio de Interpolação de Lagrange*.

A.2 Seqüência de Polinômios Ortogonais

Definição A.2.1 Diz-se que a seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(x)$ (não decrescente, não negativa e não identicamente nula, com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$) no intervalo (a, b) se

(i) $P_n(x)$ é de grau exatamente n , $n \geq 0$.

$$(ii) \quad \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Notação: Os polinômios ortogonais $P_n(x)$ serão representados por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Uma das maneiras de se construir uma seqüência de polinômios ortogonais $P_0(x), P_1(x), \dots, P_j(x), \dots$, com relação ao produto interno (A.4) é através do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Para isso, toma-se a base $b_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, e calcula-se $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, da seguinte forma:

$$P_0(x) = b_0(x) = 1$$

e, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$P_k(x) = x^k + \alpha_{k,0}P_0(x) + \alpha_{k,1}P_1(x) + \dots + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(x),$$

sendo

$$\alpha_{k,i} = -\frac{\langle x^k, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Pode-se tomar outras bases $\{b_k(x)\}$ desde que cada polinômio $b_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, seja de grau exatamente k .

A.2.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Teorema A.2.1 *Sejam $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$, pertencentes a uma seqüência de polinômios ortogonais. Então, eles são linearmente independentes.*

O teorema acima diz que os polinômios ortogonais $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n , $\mathcal{P}_n$.

Teorema A.2.2 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios e $w(x)$ uma função peso*

no intervalo (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) .

(b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \quad \forall \pi(x) \text{ de grau } \leq n-1.$

(c) $\langle x^m, P_n \rangle = \int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx \begin{cases} = 0, & \text{se } m < n, \\ \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Teorema A.2.3 *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas seqüências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,*

$$Q_j(x) = \zeta_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

sendo ζ_j uma constante que depende apenas de j .

Teorema A.2.4 (Zeros dos Polinômios Ortogonais) *Seja $P_n(x)$, $n \geq 1$, uma seqüência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então, os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Teorema A.2.5 (Relação de recorrência de três termos) *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

A.2.2 Polinômios Ortogonais Clássicos

Segundo (Chihara, 1978) os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, de Chebyshev de primeira espécie, Chebyshev de segunda espécie e de Gegenbauer), de Laguerre e de Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos.

Em (Szegő, 1959), encontramos a seguinte definição para polinômios ortogonais clássicos

Definição A.2.2 *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno (A.4) no intervalo (a, b) são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso, $w(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x),$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1) \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

Apresentamos apenas algumas informações sobre os polinômios de Jacobi e seus casos especiais de Legendre e Chebyshev de primeira espécie.

Polinômios de Jacobi: $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

Podem ser definidos através da fórmula de Rodrigues por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (\text{A.6})$$

Esses polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para obter-se o coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi, aplica-se à equação (A.6) acima, a regra de Leibnitz para calcular a n -ésima derivada do produto de duas funções

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x). \quad (\text{A.7})$$

Proposição A.2.1 *O coeficiente do termo de maior grau $a_{n,n}$ também pode ser dado por*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}, \quad (\text{A.8})$$

sendo Γ a função Gama, que pode ser dada como integral de Euler de segunda espécie por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0 \text{ ou } x > 0. \quad (\text{A.9})$$

Teorema A.2.6 *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Polinômios de Legendre: $P_n(x)$

São um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$. Portanto, $w(x) = 1$.

Assim, da fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, tem-se

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{A.11})$$

Do coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi, obtém-se

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(2n + 1)}{\Gamma(n + 1)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre ficará, então,

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie: $T_n(x)$

São um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = -1/2$ e portanto, ortogonais com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, no intervalo $[-1, 1]$.

São definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.12})$$

Teorema A.2.7 *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

