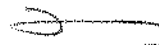


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR ATHAIL RANGEL
PULINO FILHO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20 / 12 / 1991

Assinado 

ORIENTADOR

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS COBERTURAS PÊNSEIS

Eng. Athail Rangel Pulino Filho

040/91

Departamento de Mecânica Computacional

Eng. Athail Rangel Pulino Filho ^{atb}

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica,
como parte dos requisitos para a obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, Dezembro de 1991.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica
Departamento de Mecânica Computacional

Tese de : Doutorado

Título da Tese : Contribuição ao Estudo das Coberturas Pênseis

Autor : Athail Rangel Pulino Filho

Orientador : Prof. Dr. Fernando Iguti +

Aprovado por


F. Iguti

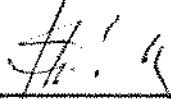
Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente



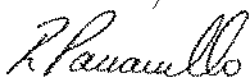
Prof. Dr. Antonio Marmo de Oliveira.



Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta.



Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli.



Prof. Dr. Renato Pavanello.

Campinas, de de 1991.

"A menos que as normas sejam veladas por convenções ou definições, razão alguma nos poderá ser dada explicando-nos porque não deveriam elas ser completamente diferentes".

Bertrand Russell
(An Outline of Philosophy)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação de Elementos Finitos para a análise estática e dinâmica de estruturas pênseis para coberturas construídas a partir de cabos flexíveis de aço de alta resistência.

Elementos finitos de dois nós, que admitem grandes deslocamentos e equações constitutivas não lineares, são usados para discretizar cabos livremente suspensos, cabos – treliça e redes tridimensionais. Esses elementos são acoplados a elementos convencionais de pórtico (pequenos deslocamentos e pequenas deformações) usados para discretizar a estrutura de apoio dos cabos. O modelo admite forças nodais conservativas, alongamento de cabos para a introdução de forças de protensão e variações de temperatura (nos cabos).

Configurações de equilíbrio estático são obtidas pela minimização da Energia Potencial Total, com o emprego de um algoritmo do tipo quase-Newton (*self-scale quasi-Newton algorithm*). Esse algoritmo é também usado para a determinação de configurações iniciais de redes tridimensionais pela minimização da Energia Potencial Total, com restrições de igualdade em deslocamentos.

A Energia Potencial Total é escrita como função dos deslocamentos nodais e dos alongamentos de protensão para a determinação automática dos valores dos alongamentos que garantem tensões de tração em qualquer cabo iguais ou maiores que um valor previamente especificado.

Frequências e modos próprios de vibração, para pequenas oscilações em torno de uma configuração de equilíbrio estático, são determinadas com a solução de uma expressão linearizada da equação de equilíbrio dinâmico. A resposta dinâmica é obtida pela integração no tempo da equação de equilíbrio dinâmico, com um algoritmo implícito baseado no esquema de Newmark. Uma configuração de equilíbrio em um dado instante é associada a um ponto de mínimo da Energia Total, obtido com o algoritmo quase-Newton acima citado.

ABSTRACT

This work presents a finite element approach to static and dynamic analysis of counterstressed cable structures.

Two nodes, constant strain finite elements are used to model hanging cables, plane prestressed cable trusses and 3-D prestressed cable networks. The two nodes elements are assembled with truss, beam and frame elements to the static analysis of mixed (composite) structures.

The theorem of minimum total potential energy is used to determine static equilibrium configurations of the described mixed structures. The nonlinear problem of equilibrium is solved through a self-scaling quasi-Newton algorithm.

The concept of *reduced length* at the undeformed configuration is introduced to evaluate the effect of prestressing forces and temperature changes.

The initial shape of prestressed networks is determined by constrained minimization of the total potential energy.

A modified formulation of the two nodes element is used to automatically determine the *reduced length* of each element of the network in order to assure that all elements are in tension at the equilibrium configuration, to a given external load.

A linearized dynamic equilibrium equation is used to determine natural frequencies and modes of prestressed cable nets. Dynamic equilibrium configurations are determined by minimizing the Total Energy of the network.

ÍNDICE

1. Introdução.

1.1 - Generalidades	1-2
1.2 - Coberturas pênseis	1-3
1.2.1 - Cabos livremente suspensos	1-3
1.2.2 - Cabos—treliça	1-4
1.2.3 - Redes tridimensionais	1-5
1.2.4 - Sistemas <i>abertos e fechados</i>	1-7
1.3 - Objetivos e conteúdo deste trabalho	1-7
1.3.1 - Breve resenha bibliográfica	1-7
1.3.2 - Objetivos deste trabalho	1-10
1.3.3 - Conteúdo do trabalho	1-11
Referências	1-13

2. Análise Estática de Redes Flexíveis e Estruturas Mistas.

2.1 - Introdução	2-2
2.2 - Elemento de cabo com deformação constante	2-2
2.2.1 - Deformação	2-2
2.2.2 - Energia Potencial Total	2-4
2.2.3 - Gradiente da Energia Potencial Total	2-4
2.3 - Elemento de cabo com deformação linear	2-6
2.3.1 - Deformação	2-6
2.3.2 - Energia Potencial Total	2-7
2.3.3 - Gradiente da Energia Potencial Total	2-8
2.4 - Configurações de equilíbrio estático	2-10
2.4.1 - Introdução	2-10
2.4.2 - Algoritmo quase-Newton	2-10
2.4.3 - Exemplos	2-11
2.5 - Estruturas mistas	2-15
2.6 - Protensão	2-17
2.6.1 - Introdução	2-17
2.6.2 - Protensão imposta	2-18
2.6.3 - Protensão automática	2-20
2.7 - Determinação de configurações iniciais	2-22
2.8 - Variações de temperatura	2-25
Referências	2-29

3. Análise Dinâmica de Redes Flexíveis.

3.1 - Introdução	3-2
------------------	-----

3.2 - Equação de movimento	3-2
3.3 - Modos e frequências naturais de cabos flexíveis	3-4
3.3.1 - Equação de movimento linearizada	3-4
3.3.2 - Matriz Hessiana para o elemento de dois nós	3-5
3.3.3 - Exemplos	3-7
3.4 - Frequências naturais e protensão	3-9
3.5 - Equilíbrio dinâmico não amortecido	3-13
3.5.1 Esquema <i>predictor-corrector</i> explícito	3-14
3.5.2 Trabalho potencial dinâmico total	3-19
3.6 - Vibrações livres amortecidas	3-22
3.6.1 - Algoritmo <i>predictor-corrector</i> explícito	3-23
3.6.2 - Algoritmo implícito	3-26
3.7 - Vibrações forçadas amortecidas	3-27
Referências	3-30
- 4. Exemplo de cobertura com rede de dupla curvatura.	
4.1 - Introdução	4-2
4.2 - Dados gerais	4-3
4.3 - Rede com bordas indeslocáveis	4-5
4.3.1 - Configuração inicial	4-6
4.3.2 - Alongamentos de protensão	4-6
4.3.3 - Tensões nos cabos	4-8
4.3.4 - Modos e frequências naturais	4-8
4.4 - Inclusão do anel de borda	4-10
4.5 - Comentários	4-12
Referências	4-12
5. Conclusões e comentários.	
5.1 - Introdução	5-2
5.2 - Sobre a formulação para a análise estática	5-2
5.3 - Sobre a análise dinâmica	5-3
5.4 - Temas para pesquisas complementares	5-3
Referências	5-4
Apêndice A.	
A.1 - Tensões e deformações conjugadas	A-1
A.2 - Equação constitutiva de cabos flexíveis	A-3
Referências	A-3

Apêndice B.

B.1 - Método de Newton	B-1
B.1.1 - Busca linear	B-2
B.1.2 - Matriz Hessiana não positiva definida	B-2
B.2 - Métodos quase-Newton	B-3
Referências	B-3

Apêndice C.

C.1 - Exemplo 2.4.3-2: dados e resultados	C-1
C.2 - Exemplo 2.4.3-3	C-3
C.3 - Exemplo 3.4-3	C-3
C.4 - Exemplo 3.5.1-2	C-4

Apêndice D.

D.1 - Algoritmo quase-Newton	D-1
D.2 - Busca linear	D-3
D.3 - Energia potencial total	D-6
D.4 - Algoritmo implícito	D-8
Referências	D-10

LISTA DE FIGURAS

Figura	Legenda	pag.
1.2-1	Cabos livremente suspensos em planos paralelos	1-3
1.2-2	Cabos livremente suspensos dispostos radialmente	1-3
1.2-3	Cabos—treliça do tipo Zetlin	1-4
1.2-4	Cabo Jawerth	1-5
1.2-5	Cabos—treliça em arranjos radiais	1-5
1.2-6	Arena de Raleigh,N.C.	1-6
1.2-7	Rede com mastros, estais e cabos de borda	1-6
2.2.1-1	Elemento de dois nós	2-3
2.3.1-1	Elemento de três nós	2-6
2.4.3-1	Exemplo 2.4.3-1	2-12
2.4.3-2	Energia Potencial Total	2-13
2.4.3-3	$\eta(\nu)$	2-13
2.4.3-4	Cabo livremente suspenso	2-14
2.4.3-5	Configuração indeformada	2-14
2.4.3-6	Configuração indeformada	2-14
2.4.3-7	Cabo com restrição unilateral	2-15
2.5-1	Estrutura mista	2-16
2.5-2	Elástica da viga	2-17
2.6.2-1	Rede em parabolóide hiperbólico	2-20
2.7-1	Exemplo 2.7-1 : planta (esc. 1:40)	2-23
2.7-2	Exemplo 2.7-1 : perspectiva	2-24
2.7-3	Exemplo 2.7-2 : perspectiva	2-25
2.8-1	Exemplo 2.8-1 : Cabo Zetlin	2-27
2.8-2	Exemplo 2.8-2 : Pórtico	2-28
3.3.3-1	Exemplo 3.3.3-2 : Modos naturais	3-8
3.4-1	Cabo Zetlin	3-10
3.4-2	Modo associado a ω_1	3-11
3.4-3	Parabolóide hiperbólico	3-12
3.4-4	Exemplo 3.4-3 : frequências naturais	3-13
3.4-5	Modo associado a ω_1	3-13
3.5.1-1	Exemplo 3.5.1-1	3-15
3.5.1-2	Cabo livremente suspenso	3-16
3.5.1-3	Cabo Zetlin : resposta dinâmica	3-17
3.5.1-4	Cabo Zetlin : variação da tensão axial	3-17
3.5.1-5	Parabolóide hiperbólico : resposta dinâmica	3-18
3.5.2-1	Cabo Zetlin : resposta dinâmica	3-21

Figura	Legenda	pag.
3.6-1a	Razão de amortecimento 0%	3-24
3.6-1b	Razão de amortecimento 2%	3-24
3.6-1c	Razão de amortecimento 5%	3-24
3.6-1d	Razão de amortecimento 10%	3-25
3.6-2	Cabo-treliça	3-25
3.6-3	Cabo-treliça com amortecimento e protensão automática	3-26
3.6-4a	Razão de amortecimento 0%	3-27
4.2-1	Perspectiva	4-3
4.2-2	Projeção no plano (x,y)	4-3
4.2-3	Projeção no plano (y,z)	4-4
4.2-4	Projeção no plano (x,z)	4-4
4.3.4-1	Equilíbrio e modos 1 e 4	4-9
4.4-1	Seção transversal do anel de borda	4-10
4.4-2	Deformação do anel de borda	4-11
A-1	Elemento de treliça	A-1

LISTA DE TABELAS

Tabela	Conteúdo	pag.
2.6.2-1	Alongamentos de protensão (cm)	2-20
2.6.3-1	Alongamentos de protensão	2-22
2.7.1-1	Coordenadas nodais prescritas	2-24
2.7.2-1	Coordenadas nodais prescritas	2-25
2.8-1-1	Alongamentos de protensão	2-27
2.8.1-2	Deformações e variação de temperatura	2-27
2.8.2-1	Tensões máximas e mínimas	2-28
3.3.3-1	Frequências naturais (rad/s)	3-9
3.4-1		3-9
3.4.1-1	Frequências naturais (rad/s)	3-10
3.4.1-2	Frequências naturais (rad/s)	3-11
3.5.1-1	Exemplo 3.5.1-1, resultados	3-16
3.5.2-1	Exemplo 3.5.2-1, resultados	3-21
3.5.2-2	Exemplo 3.5.2-3, resultados	3-22
3.7-1	Exemplo 3.7-1, resultados	3-29
4.2-1	Coordenadas do anel de borda	4-5
4.3-1	Cabos paralelos ao eixo y	4-5
4.3-2	Cabos paralelos ao eixo x	4-6
4.3.2-1	Ações sobre a rede	4-6
4.3.2-2	Cabos paralelos ao eixo y	4-7
4.3.2-3	Cabos paralelos ao eixo x	4-7
4.3.3-1	Tensões nos cabos	4-8
4.3.3-2	Coordenada z do nó central da rede	4-8
4.3.4-1	Modos e frequências naturais	4-10
4.4-1	Tensões nos cabos	4-11
4.4-2	Solicitações máximas no anel de borda (kN,m)	4-11

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
α	área da seção transversal do elemento de cabo
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	escalares auxiliares para o cálculo da energia de deformação do elemento finito parabólico
α_k	comprimento do passo na busca unidimensional do algoritmo quase-Newton
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	escalares auxiliares para o cálculo do gradiente da energia de deformação do elemento finito parabólico
β	coeficiente angular da equação constitutiva linear de cabos pré-estirados
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	escalares auxiliares para o cálculo da energia de deformação do elemento finito parabólico
γ	estiramento do elemento finito de dois nós
$\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \gamma_{x_3}$	componentes do gradiente da energia de deformação do elemento de dois nós
$\gamma_{x_i}, \gamma_{x_j}$	componentes genéricas do gradiente da energia de deformação do elemento de dois nós
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$	escalares auxiliares para o cálculo da energia de deformação do elemento finito parabólico
δ	escalar auxiliar para o cálculo da deformação do elemento finito de dois nós
ϵ	deformação
$\nabla \epsilon$	gradiente da deformação
$\epsilon_{\frac{1}{2}}$	medida linear da deformação
ϵ_m	família de medidas de deformação
ϵ_0	medida logarítmica da deformação
η	força nodal (Exemplo 2.4.3-1)
η_1, η_2	funções interpoladoras de Lagrange, lineares
θ	ângulo entre um elemento e a horizontal (Exemplo 2.4.3-1)
κ	relação entre força axial e alongamento (Apêndice A)
$\bar{\kappa}$	energia cinética de um elemento finito de dois nós
λ	distância entre pontos nodais de um elemento finito de dois nós na configuração indeformada
μ	alongamento de protensão
ν	deslocamento nodal (Exemplo 2.4.3-1)
ξ	coordenada local do elemento finito parabólico
$\bar{\pi}$	energia de deformação do elemento finito de dois nós
$\nabla \bar{\pi}$	gradiente da energia de deformação do elemento finito de dois nós

Símbolo	Significado
$\Pi(x)$	Energia Potencial Total
Π_0	Energia Potencial Total inicial
$\nabla \Pi(x)$	gradiente da Energia Potencial Total
ψ_1, ψ_2, ψ_3	escalares auxiliares no cálculo do gradiente da energia de deformação do elemento finito protendido
ρ	massa específica do cabo
σ	tensão normal uniforme na seção transversal de um cabo
τ	variável auxiliar de integração
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	coeficientes auxiliares (eq. 2-46)
φ	força axial aplicada nas extremidades do elemento finito de dois nós (Apêndice A)
χ	relação entre o alongamento de protensão e a distância entre pontos nodais do elemento finito de dois nós na configuração indeformada
ω	freqüência circular (rad/s)
$\cos \eta, \cos \gamma, \cos \xi$	cosenos diretores do elemento finito de dois nós na configuração indeformada
a	vetor auxiliar (algoritmo implícito)
b	vetor auxiliar (algoritmo implícito)
c	vetor alongamento de protensão
d	auto-vetor
$d_{\gamma_1}, d_{\gamma_2}, d_{\gamma_3}$	vetores auxiliares para o cálculo do gradiente da energia de deformação do elemento finito parabólico
d_k	direção de descenso na busca unidimensional do algoritmo quase-Newton
dp	comprimento do elemento finito parabólico na configuração deformada
ds	comprimento do elemento finito parabólico na configuração indeformada
dx, dy, dz	componentes do comprimento do elemento parabólico na configuração atual
f	vetor forças nodais estáticas conservativas
f_t	vetor forças nodais conservativas com intensidade variável com o tempo
$f_{x,i}, f_{y,i}, f_{z,i}$	forças nodais nas direções x, y e z, aplicadas no nó i de um arranjo de elementos finitos parabólicos
$g(x)$	vetor gradiente da Energia Potencial Total
g_k, g_{k+1}	vetores gradiente da Energia Potencial Total nas iterações k e k + 1 do algoritmo quase-Newton
h	metade do comprimento do elemento finito parabólico na configuração indeformada

Símbolo	Significado
l	vetor associado à configuração indeformada do elemento finito de dois nós
l'	vetor associado à configuração deformada do elemento finito de dois nós
m	número de elementos finitos de uma discretização
n	número de deslocamentos livres de um arranjo discreto
o	vetor ordenamento dos graus de liberdade
o_k	componente do vetor o
p	vetor deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (nó inicial, ordem local)
$\bar{p}$	vetor deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (nó inicial, ordem global)
p_k	vetor passo de descenso na busca unidimensional do algoritmo quase-Newton
q	vetor deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (nó final, ordem local)
$\bar{q}$	vetor deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (nó final, ordem global)
q_g	ação gravitacional uniformemente distribuída sobre um elemento finito parabólico
q_k	vetor auxiliar na busca unidimensional do algoritmo quase-Newton
r	vetor que descreve a trajetória de um ponto qualquer do eixo do elemento finito de dois nós
$\dot{r}$	vetor que descreve a velocidade de um ponto qualquer do eixo do elemento finito de dois nós
s	escalar auxiliar para o cálculo da energia de deformação do elemento finito parabólico
u	vetor unitário na direção da configuração indeformada do elemento finito de dois nós
v	vetor velocidades nodais do elemento finito de dois nós
x	vetor deslocamentos nodais
$\dot{x}, \ddot{x}$	primeira e segunda derivadas do vetor x em relação ao tempo
x_i	deslocamento nodal genérico de um elemento finito de dois nós
x_{o_k}	deslocamento nodal genérico do elemento finito de dois nós (ordem global)
$x_t, x_{t+\Delta t}$	configurações de equilíbrio dinâmico nos instantes t e $t + \Delta t$
$x_{o_1} \dots x_{o_6}$	deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (ordem global)
$\bar{x}_1 \dots \bar{x}_6$	deslocamentos nodais do elemento finito de dois nós (ordem local)

Símbolo	Significado
x_1, x_2, x_3	coordenadas nodais do elemento finito parabólico
y_1, y_2, y_3	coordenadas nodais do elemento finito parabólico
z_1, z_2, z_3	coordenadas nodais do elemento finito parabólico
C	matriz de amortecimento de um arranjo de elementos finitos de dois nós
$\bar{C}$	matriz de amortecimento de um elemento de dois nós
$\mathcal{F}(x_{t+\Delta t})$	função <i>pseudo</i> Energia Total no instante $t + \Delta t$, sem forças de amortecimento
$\mathcal{F}_c(x_{t+\Delta t})$	função <i>pseudo</i> Energia Total no instante $t + \Delta t$, com amortecimento viscoso
$\bar{G}$	parcela da matriz Hessiana da energia de deformação de um elemento finito de dois nós
$\bar{H}$	matriz Hessiana da energia de deformação de um elemento finito de dois nós
I	matriz identidade
K	matriz de rigidez de um elemento de pórtico (sistema global)
$\mathcal{K}$	energia cinética de um arranjo de elementos finitos de dois nós
$\bar{L}$	parcela da matriz Hessiana da energia de deformação de um elemento finito de dois nós
$\mathcal{L}$	Energia Total de um arranjo de elementos finitos de dois nós
M	matriz de massa consistente de um arranjo de elementos finitos de dois nós
$\bar{M}$	matriz de massa consistente de um elemento finito de dois nós
N	vetor de funções de interpolação de Lagrange parabólicas
N_i	função de interpolação de Lagrange parabólica
R	reta real
S_k, S_{k+1}	aproximações da inversa da Hessiana da Energia Potencial Total nas iterações k e $k+1$ do algoritmo quase-Newton
V	espaço vetorial normado

Capítulo 1: Introdução.

1.1 Generalidades.

A redução do peso próprio e a minimização dos custos e do tempo de execução estão entre os principais objetivos da pesquisa em ciência e técnica das construções.

O elevado peso próprio das construções assírias (40 kN/m^2), romanas (15 kN/m^2) e do período gótico ($5\text{-}10 \text{ kN/m}^2$) pode ser atribuído, essencialmente, ao baixo rendimento estrutural dos materiais então disponíveis. Os tijolos e outros materiais litóides, podendo ser submetidos apenas a tensões de compressão, devem estar associados a esquemas estruturais que se baseiam no efeito estabilizante da gravidade, tais como arcos, abóbadas e cascas de grande espessura.

Materiais com elevada resistência à tração e à compressão permitem a utilização de esquemas estruturais mais eficientes e, como regra geral, a elaboração de projetos mais econômicos e que exigem menor tempo para sua execução. As estruturas metálicas convencionais, por exemplo, têm peso próprio dez vezes menor, e são executadas em tempo duas a três vezes menor, que estruturas convencionais de concreto armado.

Os fios e cabos de aço de alta resistência possibilitaram o desenvolvimento de esquemas estruturais que têm todos os seus elementos tracionados, aproveitando ao máximo a capacidade do material: as coberturas pênses. Segundo Majowiecki(1985), *essas estruturas pertencem a uma nova tradição construtiva, com relação (peso próprio/capacidade portante) muito menor que a unidade.*

As estruturas pênses para cobertura são um resultado direto do desenvolvimento científico e tecnológico. Requerem, como se verá, material de alta resistência, modelos teóricos mais complexos que os utilizados para analisar estruturas convencionais, e o emprego de recursos de computação eletrônica só disponíveis nas últimas três décadas.

Embora a primeira referência à utilização de cabos em estruturas para coberturas date do ano 70 de nossa era (Coliseu Romano, com $189\text{m} \times 156\text{m}$), o Edifício da Feira Estadual (State Fair Arena), de Raleigh (NC), nos Estados Unidos (1953), é freqüentemente citado na literatura como um marco do desenvolvimento moderno das coberturas pênses (veja-se fig. 1.2-6). Desde então, obras notáveis em dimensão e beleza arquitetônica foram projetadas e executadas em todos os continentes. Uma descrição detalhada de dezenas de obras significativas pode ser encontrada em Majowiecki (op. cit.).

As coberturas pênses têm sido usadas em construções com finalidades as mais variadas: estádios e ginásios esportivos, piscinas, reservatórios de água, salas para concertos, teatros, torres de refrigeração, hangares, grandes armazens e edifícios industriais.

No Brasil tem-se notícia da existência de apenas quatro projetos que utilizam esse esquema estrutural: dois em casca protendida suspensa (Araraquara, SP e Rolândia, PR); uma cobertura em cabos livremente suspensos (Templo Israelita, RJ) e uma cobertura em rede tridimensional protendida com dupla curvatura (Pavilhão da Feira Internacional de Indústria e Comércio, RJ). Como também acontece em alguns países economicamente mais desenvolvidos (Buchholdt, 1985), esse número reduzido de obras pode ser atribuído, entre outros fatores, ao total desconhecimento, entre arquitetos e engenheiros calculistas, dos métodos de cálculo e regras gerais para o projeto das coberturas pênses.

1.2 Coberturas pênses.

Uma das principais características das coberturas construídas a partir de cabos flexíveis é a facilidade de adaptação a formas arquitetônicas irregulares. Entretanto, a maioria dos projetos realizados nos últimos cinquenta anos enquadra-se em um dos esquemas descritos a seguir.

1.2.1 Cabos livremente suspensos.

As coberturas pênses podem ser uma associação de cabos livremente suspensos dispostos em arranjos paralelos (fig. 1.2-1) ou radiais (fig. 1.2-2).

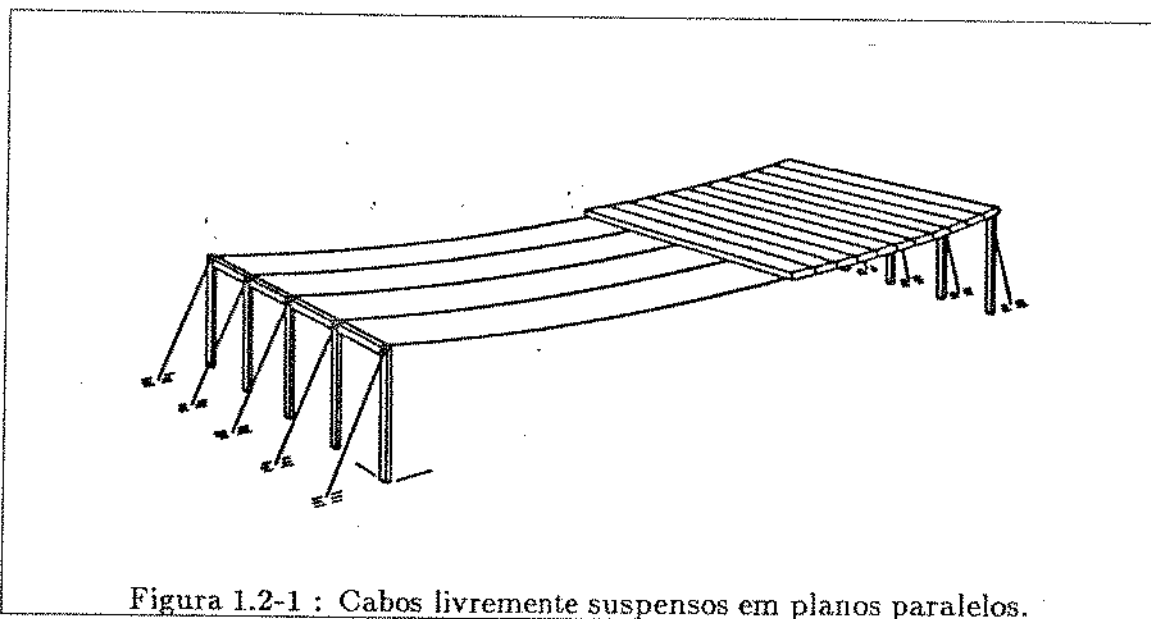


Figura 1.2-1 : Cabos livremente suspensos em planos paralelos.

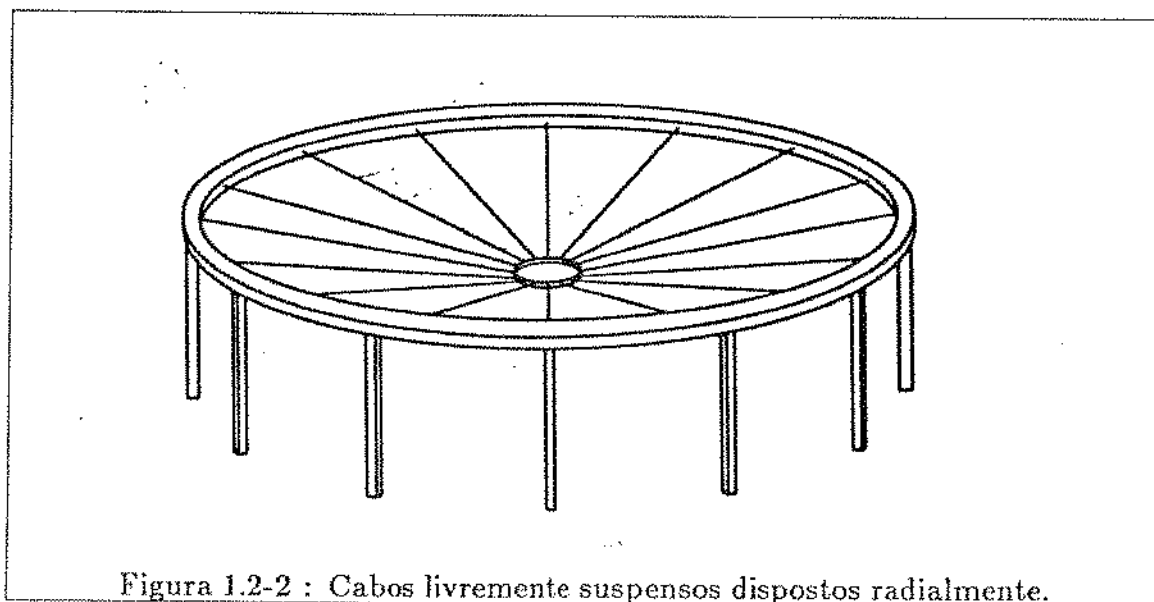


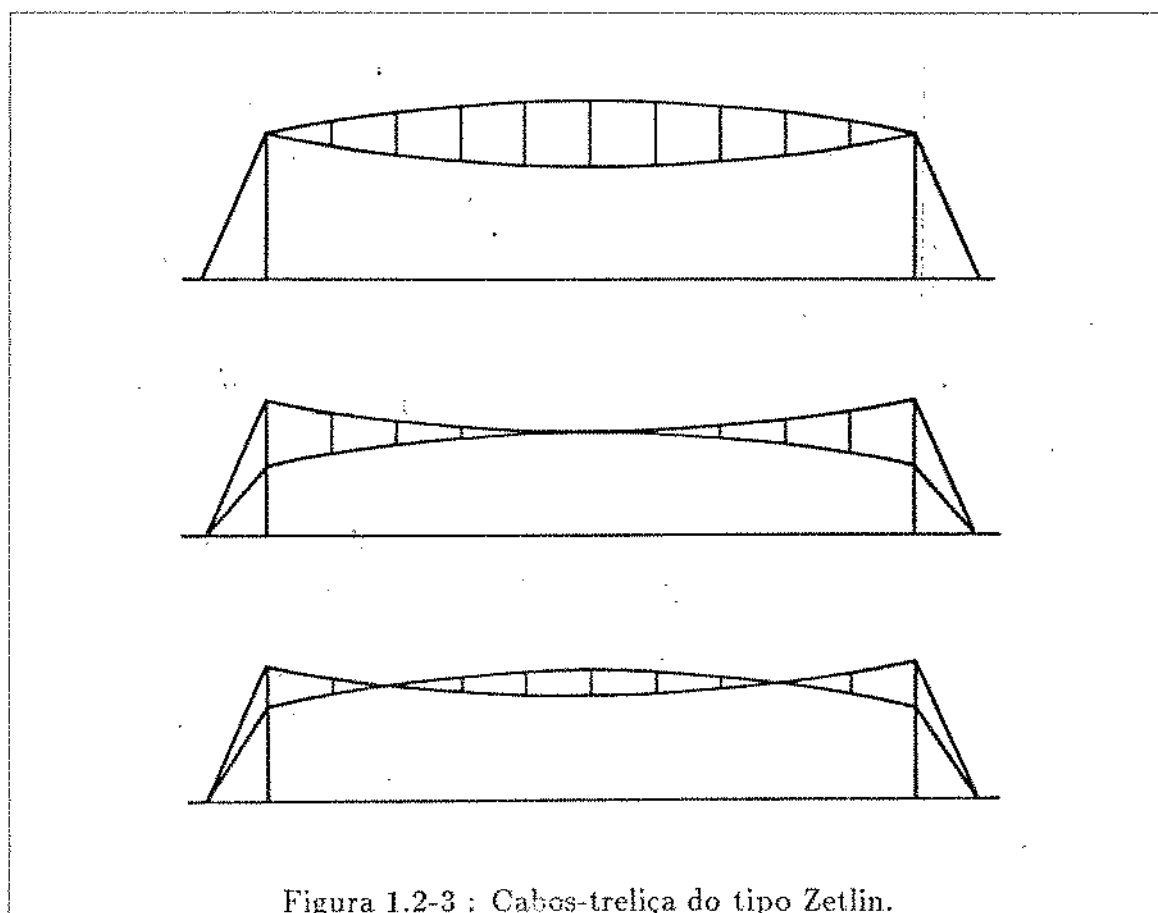
Figura 1.2-2 : Cabos livremente suspensos dispostos radialmente.

Os cabos livremente suspensos (como se verá no Capítulo 2) experimentam gran-

des deslocamentos quando submetidos a ações acidentais (que alteram a configuração de equilíbrio quando atuam ações permanentes). Esses deslocamentos podem, com frequência, danificar os materiais de cobertura fixados nos cabos. Uma maneira de conseguir a estabilização (redução de deslocamentos) dos cabos é utilizar materiais de cobertura com peso próprio suficientemente grande de modo a garantir que os deslocamentos provocados por ações acidentais sejam relativamente pequenos. Outra alternativa é a construção de cascas protendidas a partir de elementos pré-moldados de argamassa armada (veja-se, por exemplo, Barbato e Martinelli, 1985), nas quais os cabos são usados como suportes dos elementos pré-moldados e, em serviço, como cabos de protensão da casca.

1.2.2 Cabos-treliça.

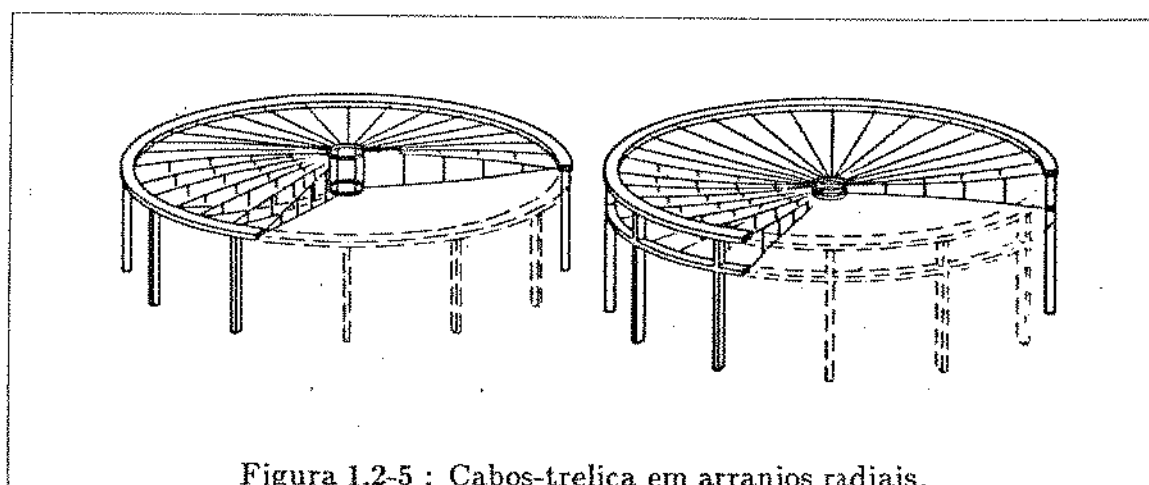
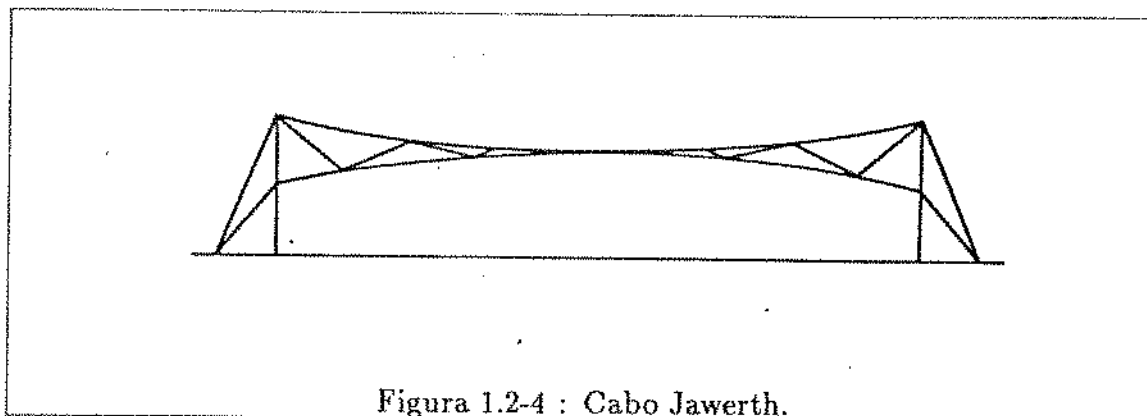
Os cabos-treliça são arranjos planos de cabos flexíveis interligados por elementos verticais ou inclinados. Na figura (1.2-3) apresentam-se três exemplos de pórticos planos em que a trave horizontal é um cabo-treliça com ligações verticais (cabo Zetlin), variando-se a posição relativa dos cabos principais (superior e inferior).



Alguns projetos realizados com cabos-treliça do tipo Zetlin apresentaram problemas construtivos em virtude da excessiva deslocabilidade horizontal dos pontos de fixação

do material de cobertura. Para resolver parcialmente este problema o engenheiro sueco David Jawerth propôs o esquema mostrado na figura (1.2-4). As ligações verticais são substituídas por diagonais. Neste esquema, os deslocamentos horizontais dos cabos superior e inferior são menores.

Os cabos-treliça são também usados em coberturas com planta circular ou elíptica, como as mostradas na figura (1.2-5). Os cabos são dispostos em planos radiais e podem ou não estar conectados a um anel central tracionado.



1.2.3 Redes tridimensionais.

As redes tridimensionais são arranjos espaciais de cabos cujos nós (intersecção de dois cabos) pertencem a superfícies regulares ou superfícies de forma qualquer. Para que o conjunto não apresente deslocamentos excessivos ou afrouxamento localizado de cabos (veja-se seção (1.2.4) e Capítulo 2) é desejável que a superfície que contém os nós da rede tenha curvatura gaussiana negativa (produto das curvaturas, em um ponto, em duas direções ortogonais).

A figura (1.2-6) mostra o esquema estrutural da Arena de Raleigh (veja-se seção 1.1). Uma rede de dupla curvatura foi associada a dois arcos dispostos em planos inclinados e apoiados sobre pilares relativamente esbeltos.

As redes tridimensionais adaptam-se com facilidade a formas menos convencionais, como a mostrada na figura (1.2-7).

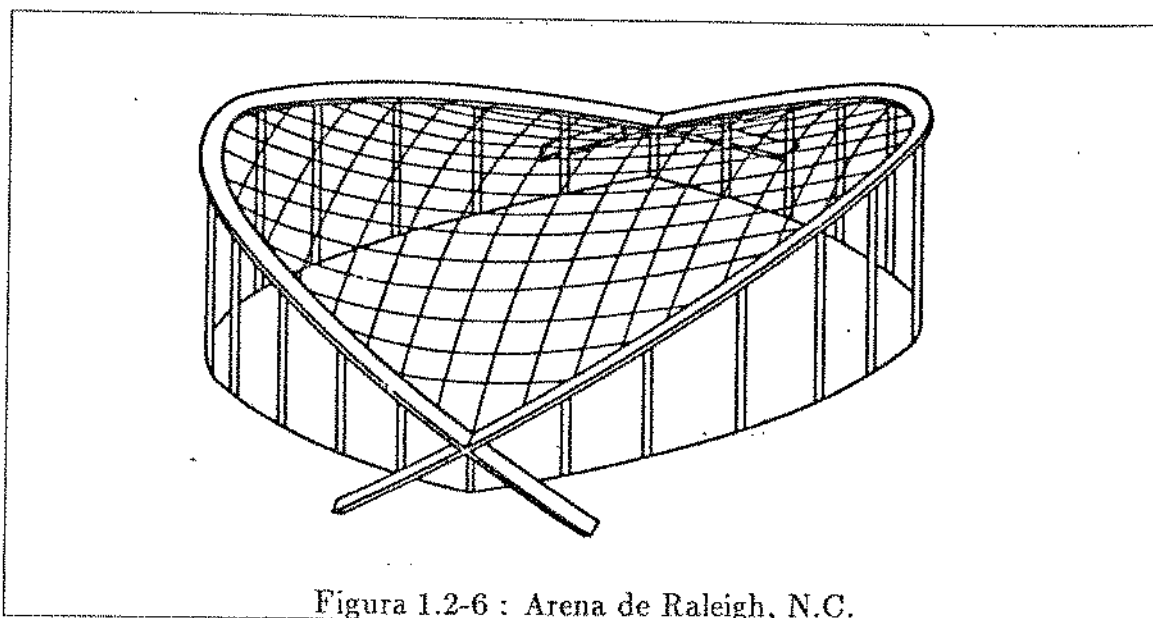


Figura 1.2-6 : Arena de Raleigh, N.C.

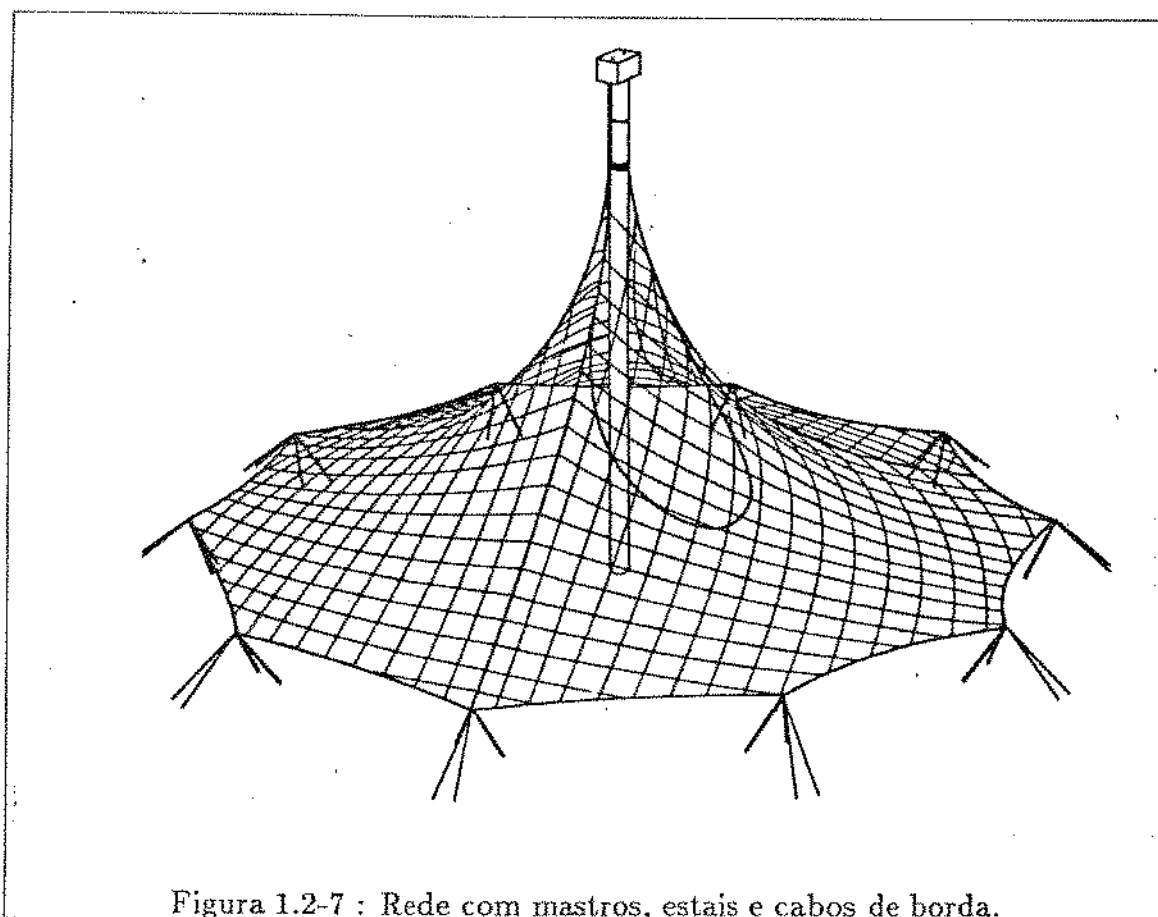


Figura 1.2-7 : Rede com mastros, estais e cabos de borda.

O procedimento mais freqüentemente adotado para estabilizar (veja-se seção 1.2.1) os cabos-treliça e as redes tridimensionais é o de protender (introduzir tensões de tração)

um ou mais cabos do conjunto.

1.2.4 Sistemas fechados e abertos.

Os esquemas estruturais das coberturas pênséis são chamados *abertos* ou *fechados* dependendo da forma como os esforços que os cabos exercem sobre os seus pontos de fixação são transferidos para as fundações. Os esquemas mostrados nas figuras (1.2-1), (1.2-3) e (1.2-4) são chamados *abertos* porque esses esforços são totalmente transferidos para as fundações pelos elementos verticais (pilares) e pelos elementos inclinados (estais). Já os esquemas das figs. (1.2-2), (1.2-5) e (1.2-6) são chamados *fechados* porque os anéis interno (tracionado) e/ou externo (comprimido) absorvem (de forma autoequilibrada) as componentes horizontais daqueles esforços.

1.3 Objetivos e conteúdo deste trabalho.

1.3.1 Breve resenha bibliográfica.

Modelos teóricos para a análise estática e dinâmica de coberturas pênséis devem ser formulados com base em alguns aspectos característicos desses esquemas estruturais, sendo significativamente distintos dos modelos usados em estruturas convencionais.

Apresentam-se, a seguir, as principais características do comportamento mecânico das redes flexíveis e alguns aspectos específicos do projeto de coberturas pênséis, com uma breve resenha de alguns modelos para análise estática e dinâmica dessas estruturas encontrados na literatura consultada.

- **Não linearidade geométrica :** os cabos flexíveis, não sendo dotados de rigidez à flexão e ao cisalhamento, transmitem aos pontos de fixação as solicitações a que estejam submetidos mudando sua geometria (em relação a uma configuração indeformada) até que se desenvolvam tensões axiais de tração que garantam o equilíbrio (estático ou dinâmico). Os modelos descritos na literatura consultada admitem, sem excessão, grandes deslocamentos em relação a uma configuração de referência. Essa configuração não é, para muitos autores (por exemplo, Bruno et al.,1990; Peyrot,1980; Krishna et al.,1982; Godbole et al.,1984), a configuração indeformada;
- **Equação constitutiva dos cabos :** a equação constitutiva de um cabo helicoidal isolado (relação carga axial/deslocamento axial) é não linear, assemelhando-se ao comportamento de um material elasto-plástico, com deformações residuais permanentes. Essas deformações permanentes aparecem porque os fios que compõem o cabo tendem a comprimir o núcleo (que também é deformável), reduzindo o *índice de vazios* existente originalmente entre eles. Com base em resultados experimentais, alguns autores (veja-se, por exemplo, Kassimali e Feraidoonian,1987; Jonatowski e Birnstiel,1970; Irvine,1975) sugerem equações constitutivas não lineares para cabos isolados.

Os cabos usados em coberturas pênseis são, em geral, submetidos a um processo de pré-estiramento (com forças axiais correspondentes a 55% da carga de ruptura). Esse procedimento faz com que o cabo passe a apresentar, relação linear entre a força axial aplicada e o estiramento correspondente (veja-se, por exemplo, Buchholdt, 1985, pag. 247). Se o modelo de deformação for linear (veja-se Apêndice A) a relação tensão $\times$ deformação conjugada também o será.

- **Protensão e configurações de referência :** as forças de protensão são tensões de tração instaladas em uma rede de cabos com os seguintes objetivos principais: evitar o afrouxamento de cabos quando a rede é submetida a uma dada ação externa; reduzir os deslocamentos nodais (que, quando excessivos, prejudicam o material de cobertura) e, como se verá no Capítulo 3, melhorar o comportamento da rede quando submetida a solicitações dinâmicas.

A maioria dos algoritmos encontrados na literatura para a obtenção de configurações de equilíbrio estático (para uma dada ação externa) adota como configuração inicial de referência uma configuração de equilíbrio onde atuam o peso próprio dos cabos e tensões iniciais de protensão, ora especificadas em termos de deformações iniciais (Cannarozzi, 1987; Gershwindner e West, 1980; Triantafyllou e Grinfogel, 1986; Godbole et al., 1984; Papadrakakis, 1983), ora em termos de forças resultantes externas (provocadas por um estado de solicitações internas supostas conhecidas) (Clarke, 1980; Gambhir e Batchelor, 1977).

Alguns autores apresentam métodos (mais ou menos empíricos) para a determinação dessa configuração inicial. Majowiecki (1985) sugere que, sempre que possível, sejam adotadas formas regulares para as quais, em muitos casos, existem expressões analíticas que descrevem o equilíbrio para uma dada ação externa (no caso, o peso próprio dos cabos e as forças de protensão). Quando isto não for possível, em virtude de imposições do projeto arquitetônico, o autor citado vale-se de uma solução por diferenças finitas do problema da membrana sujeita a grandes deslocamentos. Jonatowski e Birnstiel (1970) sugerem um processo de tentativa e erro, partindo de configurações supostamente próximas da solução procurada.

Em toda a literatura pesquisada, nenhuma descrição foi encontrada de métodos operacionais que permitam a determinação do valor das forças de protensão e da forma como elas devam ser aplicadas.

- **Configurações de equilíbrio estático :** Em virtude da inexistência de soluções analíticas (exceto para casos muito simples), a análise de coberturas pênseis exige geralmente o uso de métodos numéricos. Os cabos de um dado arranjo podem ser discretizados com elementos finitos e uma configuração de equilíbrio para uma dada ação externa é descrita pelos deslocamentos nodais relativos a uma configuração de referência. Esses deslocamentos são *uma* das soluções do sistema de equações algébricas não lineares que descreve o equilíbrio de forças na configuração procurada.

O método mais freqüentemente empregado para a obtenção de soluções do sistema acima descrito é o método de Newton (Newton-Raphson), em geral em forma incremental em carregamentos (veja-se, por exemplo, Bruno, Maceri e Olivito, 1990;

Ahmadi-Kashani e Bell,1988; Peyrot,1980; Molcom e Glockner,1979; Peyrot e Goulois,1978; Kassimali e Feraidoonian,1987; Godbole et al.,1984; Krishna et al.,1982).

As restrições ao emprego desse método são descritas de maneira detalhada no Apêndice B deste trabalho e listadas a seguir de forma sucinta:

1. O método de Newton-Raphson é um método de solução de sistemas de equações algébricas não lineares usado, no contexto da análise não linear de estruturas, para a obtenção de extremos da função não linear Energia Potencial Total. De forma iterativa, o método busca minimizar o desbalanceamento das forças externas e internas que atuam na estrutura até encontrar uma configuração (descrita em termos de deslocamentos nodais) em que esse desbalanceamento (desequilíbrio) seja nulo (a menos de uma tolerância numérica). Em modelos não lineares uma configuração que satisfaz as equações de equilíbrio não é, necessariamente, uma configuração de equilíbrio estável, porque a Energia Potencial Total nesta configuração pode ter atingido um ponto de máximo, onde as equações de equilíbrio também são satisfeitas.
 2. Em cada iteração, o método de Newton-Raphson avalia a matriz de rigidez tangente (ou instantânea) da estrutura para determinar a nova direção de busca (veja-se Apêndice B). Para que a nova direção seja uma direção em que a Energia Potencial Total decresce, a matriz de rigidez tangente deve ser positiva definida. Isto pode deixar de ocorrer durante o processo iterativo, exigindo *providências numéricas* para tornar a matriz positiva definida. Esta é, provavelmente, uma explicação para se adotar como configuração inicial aquela em que atuam, em equilíbrio, o peso próprio dos cabos e as forças de protensão.
 3. Embora muitos autores enfatizem a rapidez de convergência do método de Newton-Raphson em termos de número de iterações, a necessidade de avaliação da matriz de rigidez pode tornar o método desvantajoso (em termos de tempo computacional) em relação, por exemplo, ao método quase-Newton usado neste trabalho, ou ao método dos gradientes conjugados (veja-se, por exemplo, Buchholdt e Moossavinejad,1982).
- **Estruturas mistas :** As coberturas pênséis são (a menos de casos muito particulares) uma associação de cabos flexíveis e elementos estruturais mais rígidos (elementos de viga, placa ou casca). Os cabos apoiam-se em uma estrutura de suporte que apresenta, em geral, comportamento linear (pequenos deslocamentos e pequenas deformações). Embora relativamente pequenos, os deslocamentos da estrutura de apoio influem (como se verá no Capítulo 2) no estado de solicitação do arranjo de cabos, alterando, conseqüentemente, seu comportamento estático e dinâmico.

Alguns autores apresentam modelos para a análise da estrutura mista (cabos e estrutura de apoio). Peyrot e Goulois(1979) sugerem uma formulação em que se

calcula a matriz de rigidez de cabos isolados a partir da equação da catenária elástica e depois se associam cabos e elementos lineares de pórtico. Os autores, entretanto, não fazem referência a forças de protensão, aplicando o modelo desenvolvido na análise de torres estaiadas e linhas de transmissão de energia elétrica. Godbole et al.(1984) apresentam uma associação de elementos de cabo e de viga (para modelar estruturas do tipo mostrado na figura (1.2-5) e relatam problemas de convergência no método de Newton-Raphson para incrementos de carga não suficientemente pequenos, além de *convergência* para soluções erradas!

- **Análise dinâmica :** As coberturas pênseis (cabos e material de revestimento) são, em geral, mais leves e flexíveis que outros esquemas estruturais. São mais resistentes a ações sísmicas porém mais sensíveis à ação do vento. A observação de algumas estruturas reais parece indicar que os problemas ocorridos em virtude de comportamento dinâmico instável deveram-se a protensão insuficiente ou curvatura inadequada da superfície que contém a rede de cabos (Buchholdt,1985). Como se verá no Capítulo 3, a resposta dinâmica e as frequências naturais das redes flexíveis variam de maneira significativa com a variação das forças de protensão.

1.3.2 Objetivos deste trabalho.

Este trabalho propõe um método para análise de coberturas pênseis que difere dos métodos citados na seção anterior nos seguintes aspectos:

1. Configurações de equilíbrio estático (para um dado carregamento externo, em presença ou não de forças de protensão e/ou variações de temperatura) de cabos isolados, cabos-treliça e redes tridimensionais são obtidas a partir de uma configuração inicial indeformada;
2. Uma configuração de equilíbrio é um ponto de mínimo da função escalar Energia Potencial Total. Pontos de mínimo são obtidos com um algoritmo do tipo quase-Newton que usa valores da função e de seu gradiente, sendo desnecessária a avaliação da matriz de rigidez da estrutura. O método empregado garante, além disso, que um ponto de equilíbrio é um ponto de mínimo da Energia Potencial Total (equilíbrio estável);
3. A protensão de um cabo-treliça ou de uma rede tridimensional é modelada por alongamento de um ou mais elementos da rede, discretizada com elementos finitos. Este procedimento (alongar cabos) é idêntico ao empregado em estruturas reais para instalar forças de protensão. Desenvolveu-se um algoritmo do tipo Bendes (esquema de Jacobi) que determina, automaticamente, o valor dos alongamentos e em quais elementos eles devem ser aplicados, de modo a garantir que, para um dado carregamento externo, todos os cabos de uma rede estejam submetidos a tensão de tração igual ou maior que um valor previamente estabelecido.
4. A equação de equilíbrio dinâmico de um arranjo qualquer de cabos flexíveis é integrada pela minimização da Energia Total, com o mesmo algoritmo quase-Newton

acima citado. Buchholdt e Moossavinejad(1982) apresentam método semelhante, minimizando a Energia Total com um algoritmo do tipo gradientes conjugados e afirmam que os tempos computacionais são significativamente menores que os obtidos com um método do tipo Newton-Raphson. Os métodos do tipo quase-Newton tendem a ser mais rápidos e eficientes que os métodos do tipo gradientes conjugados (Gill et al.,1981).

1.3.3 Conteúdo do trabalho.

No Capítulo 2 descreve-se uma formulação para a obtenção de configurações de equilíbrio estático de cabos isolados, cabos-treliça e redes tridimensionais. Os cabos são discretizados com elementos finitos de dois nós (deformação constante). Essa discretização é validada (em deslocamentos) com uma solução obtida com elementos parabólicos (Coyette e Guisset,1988) de três nós (deformação linear) e com uma solução apresentada por Peyrot e Goulois(1979) para a equação diferencial de equilíbrio da catenária elástica. A formulação do elemento finito de dois nós é modificada para incluir alongamentos de protensão e o efeito da variação de temperatura (modelo térmico linear, desacoplado). Para determinar a protensão ótima (mínima energia) de um dado arranjo de cabos (para um dado carregamento externo) a Energia Potencial Total é escrita como um funcional de dois campos (deslocamentos e alongamentos de protensão) e submetida a um processo de minimização alternada (quase-Newton em deslocamentos e incremental em alongamentos). A configuração inicial de redes tridimensionais de forma qualquer (conhecidas as coordenadas cartesianas de alguns pontos característicos) é determinada como um problema de mínimo (com deslocamentos prescritos) da Energia Potencial total, com o auxílio de um programa comercial de Otimização (MINOS).

No Capítulo 3 utiliza-se uma formulação linearizada da equação de movimento para a determinação das frequências e modos naturais de vibração de cabos isolados, cabos-treliça e redes tridimensionais protendidas. Estuda-se a influência da protensão no valor das frequências naturais de um cabo Zetlin e de uma rede em parabolóide hiperbólico. A equação de equilíbrio dinâmico é integrada com um algoritmo implícito (esquema de Newmark). Configurações de equilíbrio dinâmico são obtidas pela minimização da Energia Total em um dado instante, com o algoritmo quase-Newton acima citado. Os resultados são comparados com um algoritmo de Newmark explícito sugerido por Coyette e Guisset(1988) e com o algoritmo descrito por Newmark(1959).

Finalmente, no Capítulo 4 apresenta-se o ante-projeto estrutural de uma cobertura pênsil com um anel de borda de planta elíptica e rede protendida de dupla curvatura (*em forma de sela*).

Informações complementares (porém necessárias para a melhor compreensão de alguns tópicos do trabalho) foram colocadas em quatro apêndices, cujo conteúdo é descrito a seguir.

Uma discussão sucinta sobre modelos de deformação e o uso de tensões e deformações conjugadas é apresentada no Apêndice A.

No Apêndice B procura-se justificar a escolha do método de programação não linear adotado (*self-scaling quasi-Newton algorithm*) e são discutidas as suas principais vantagens sobre outros métodos, quando se pretende analisar estruturas que apresentam

grandes deslocamentos e configuração indeformada cinematicamente indeterminada.

No Apêndice C fornecem-se resultados numéricos de alguns dos exemplos apresentados nos Capítulos 2 e 3 com o objetivo de facilitar eventuais comparações com outros métodos de análise.

No Apêndice D são apresentadas as principais rotinas (em linguagem Pascal) dos programas para computador desenvolvidos para a análise dos exemplos ilustrativos e do ante-projeto discutido no Capítulo 4.

Referências.

- [1-01] - Ahmadi-Kashani,K.; Bell,A.J., *The Analysis of Cables Subjected to Uniformly Distributed Loads*, Engineering Structures,v.10,pp.174-184,1988.
- [1-02] - Barbato,R.L.A.; Martinelli,D.A.O., *Ferrocement precast structural elements for hanging roofs*, INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FERROCEMENT, Bangkok, Thailand, 1985.
- [1-03] - Bruno,D.; Maceri,F.; Olivito,R.S., *Analysis of the Elastic Response of Stay and Stayed Systems*, IABSE PERIODICA,n.1,1990.
- [1-04] - Buchholdt,H.A., *An Introduction to cable roof structures*, Cambridge University Press,1985.
- [1-05] - Buchholdt,H.A.; Moossavinejad,S., *Nonlinear dynamic response analysis using conjugate gradients*, Engineering Structures,v.4,pp.44-52,1982.
- [1-06] - Cannarozzi,M., *A Minimum Principle for Traction in the Elastostatics of Cable Networks*, Int. J. Solids Struct.,v.23,n.5,pp.551-568,1987.
- [1-07] - Clarke,D. *Design of Counterstressed Cable Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 11,pp.2259-2278,1980.
- [1-08] - Coyette,J.P.; Guisset,P., *Cable Network Analysis by a Nonlinear Programming Technique*, Engineering Structures,v.10,pp.41-46,1988.
- [1-09] - Gambhir,M.L.; Batchelor,B.V., *A Finite Element for 3-D Cablenets*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.11,pp.1699-1718,1977.
- [1-10] - Geschwindner,L.F.; West,H.H., *Forced Vibration of Cable Networks*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 9,pp.1885-1898,1980.
- [1-11] - Gill,P.E.; Murray,W.; Wright,M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, London,1982.
- [1-12] - Godbole,P.N.; Krishna,P.; Jain,J.K., *Boundary Effects in Suspended Cable Roofs*,Journal of Structural Engineering,v.110,n.5,pp.1099-1113,1984.
- [1-13] - Irvine,H.M., *Post-Elastic Response of Suspended Cables*, Journal of the Engineering Mechanics Division,v.101,EM 6,pp.725-737,1975.
- [1-14] - Jonatowski,J.J.; Birnstiel,C., *Inelastic Stiffened Suspension Space Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE,v.96,ST 6,pp. 1143-1166,1970.
- [1-15] - Kassimali,A.; Feraidoonian,H.P., *Strength of Cable Trusses Under Combined Loads*, Journal of Structural Engineering,v.113,n.5,pp.907-924,1987.

- [1-16] - Krishna,P.; Gupta,V.K.; Ahuja,A.K.; Mittal,A.K., *Performance of Cable Trusses Under Static Loads*, Journal of the Structural Division- ASCE, ST 1,v.108,pp.265-282,1982.
- [1-17] - Majowiecki,M., *Tensostrutture: progetto e verifica*, CISIA, Milão, 1985.
- [1-18] - Peyrot,A.H., *Marine Cable Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 12,pp.2391-2404,1980.
- [1-19] - Molcolm,D.J.; Glockner,P.G., *Optimum Cable Configuration for Air-Supported Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 2, pp.421-435,1979.
- [1-20] - Newmark,N.M., *A Method of Computation for Structural Dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE,v.85,EM 3,pp.67-94,1959.
- [1-21] - Papadrakakis,M., *Inelastic Dynamic Response of Cable Networks*, Journal of Structural Engineering,v.109,n.5,pp.1139-1154,1983.
- [1-22] - Peyrot,A.H.; Goulois,A.M., *Analysis of Flexible Transmission Lines*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 5,pp.763-779,1978.
- [1-23] - Pimenta,P.M., *Análise Não Linear de Treliças Espaciais*, BT/PEF 8604, EPUSP, USP, São Paulo,1986.
- [1-24] - Triantafillou,M.S.; Grinfogel,L., *Natural Frequencies and Modes of Inclined Cables*,Journal of Structural Engineering,v.112,n.1,pp.139-148,1986.

Capítulo 2:

Análise Estática de Redes Flexíveis e Estruturas Mistas.

2.1 Introdução

Neste capítulo descreve-se uma formulação teórica para a obtenção de configurações de equilíbrio estático de estruturas resultantes da associação de cabos flexíveis (cabos livremente suspensos, cabos-treliça e redes tridimensionais) e estruturas reticuladas convencionais (vigas, pórticos e treliças).

Os cabos são discretizados com elementos finitos retos de dois nós cuja formulação permite grandes deslocamentos e grandes deformações elásticas. Esses elementos são acoplados a elementos finitos convencionais (deslocamentos e deformações infinitesimais) de treliça, viga e pórtico.

O modelo admite as seguintes solicitações externas: forças conservativas aplicadas nos nós dos elementos de cabo e treliça; forças conservativas e momentos aplicados nos nós dos elementos de viga e pórtico; variações de temperatura nos elementos de cabo e treliça.

As forças de protensão (veja-se Capítulo 1, pag. 1-6) são modeladas por alongamentos (incluídos na formulação do elemento de cabo) que podem ser prescritos para um ou mais elementos.

Em redes com elevado número de cabos a determinação da protensão adequada (suficiente para garantir o não afrouxamento de cabos sob diversas condições de solicitação) pode ser bastante trabalhosa. No item (2.3.2) apresenta-se um algoritmo que calcula os valores dos alongamentos e indica em quais elementos eles devem ser aplicados de modo a assegurar que nenhum elemento tenha deformação de tração inferior a um valor previamente especificado.

A escolha de um elemento com interpolação linear em deslocamentos (e, portanto, com deformação constante) para discretizar os cabos flexíveis simplifica consideravelmente a modelagem de forças de protensão e de variações de temperatura. Um elemento parabólico de três nós (Coyette e Guisset, 1988), cuja formulação é descrita no item (2.3), e um algoritmo para obtenção de solução numérica da equação do cabo elástico flexível livremente suspenso (Peyrot e Goulois, 1979) foram usados para avaliar o comportamento do elemento de dois nós. Os resultados encontrados para deslocamentos nodais (veja-se Exemplo 2.2) justificam plenamente a utilização deste elemento.

2.2 Elemento de cabo com deformação constante.

2.2.1 Deformação.

Uma medida linear da deformação axial de um elemento de cabo é dada por

$$\epsilon = \frac{\|l'\| - \|l\|}{\|l\|} \quad (2.1)$$

onde (veja-se Figura 2.2.1-1)

$$l' = l + q - p$$

e

- $l = \lambda u$: vetor que representa a configuração indeformada do elemento;
 λ : distância entre pontos nodais do elemento na configuração indeformada;
 u : vetor na direção da configuração indeformada ($\|u\| = 1$);
 l' : vetor que representa a configuração deformada do elemento;
 p, q : vetores deslocamentos nodais.

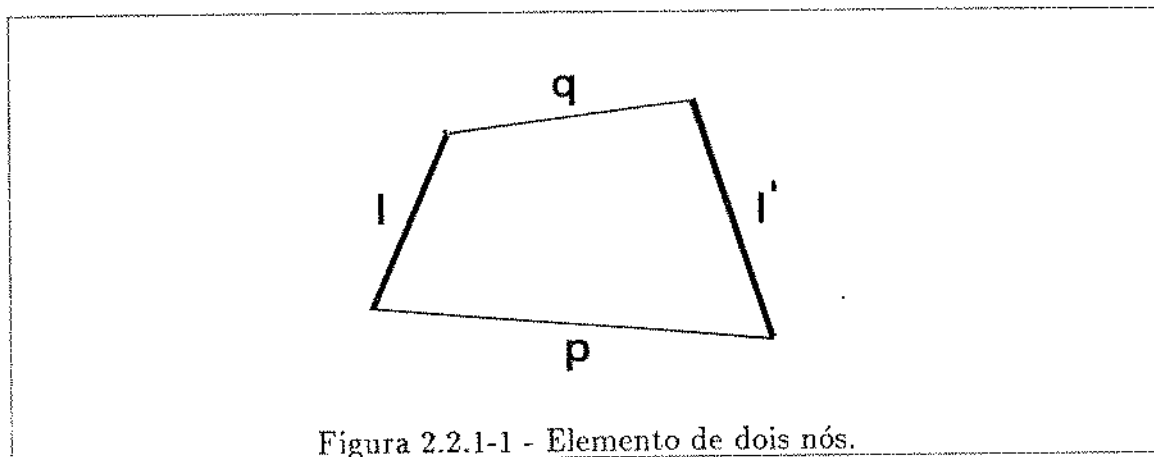


Figura 2.2.1-1 - Elemento de dois nós.

Fazendo

$$z = q - p$$

segue

$$\epsilon = \frac{(\lambda^2 + 2\lambda u^t z + z^t z)^{1/2}}{\lambda} - 1 \quad (2.2)$$

Ou, se

$$\delta = \lambda^{-1} z^t (2u + \lambda^{-1} z)$$

então

$$\epsilon = (1 + \delta)^{1/2} - 1 \quad (2.3)$$

Os vetores p e q contêm os deslocamentos nodais do elemento em um sistema tridimensional de coordenadas cartesianas

$$p^t = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3)$$

$$q^t = (\bar{x}_4 \ \bar{x}_5 \ \bar{x}_6)$$

e o vetor u os cossenos diretores do vetor l no mesmo sistema

$$u^t = (\cos \eta \ \cos \gamma \ \cos \xi)$$

2.2.2 Energia potencial total.

A energia potencial de deformação de um elemento de cabo com deformação constante pode ser escrita como:

$$\bar{\pi} = \alpha \lambda \int_0^\epsilon \sigma(\tau) d\tau$$

onde

$\sigma = \sigma(\tau)$: relação constitutiva do cabo para tensões e deformações conjugadas;
 $\bar{\pi}$: energia potencial de deformação de um elemento de cabo;
 α : área da seção transversal do elemento de cabo.

Seja n o número de deslocamentos livres de um arranjo de cabos e seja x um vetor cujas componentes representam estes deslocamentos. Os deslocamentos impedidos podem ser representados pelas componentes $x_i \mid i > n$.

A energia potencial total de um arranjo de cabos é dada por

$$\Pi(x) = \sum_{\text{cabos}} \bar{\pi} - f^t x + \Pi_0 \quad (2.4)$$

onde

Π_0 : energia potencial total inicial;
 f : vetor que contém as forças nodais estáticas conservativas.

Tendo escrito a energia potencial total como função dos deslocamentos livres, as possíveis configurações de equilíbrio estático podem ser encontradas através de técnicas de Otimização, uma vez que estas posições correspondem a pontos de mínimo local da função $\Pi(x)$. Neste trabalho utilizou-se um algoritmo do tipo quase-Newton (Luenberger, 1973), descrito em detalhes no item (2.3.2) deste Capítulo e nos Apêndices B e D.

O algoritmo de minimização utiliza os valores de $\Pi(x)$ e de sua derivada $g(x) = \nabla \Pi(x)$. É necessário, portanto, determinar a expressão de $g(x)$.

2.2.3 Gradiente da energia potencial total.

O gradiente da expressão (2.4) é dado por

$$\nabla \Pi(x) = \sum_{\text{cabos}} \nabla \bar{\pi} - f \quad (2.5)$$

onde

$$\nabla \bar{\pi} = \alpha \lambda \sigma(\epsilon) \nabla \epsilon$$

Assim, para se estabelecer a expressão do gradiente da energia potencial total é necessário determinar o gradiente da deformação de um elemento de cabo. É interessante

observar que, para um elemento, a deformação ϵ é função de no máximo seis componentes do vetor x e, portanto, o gradiente de ϵ terá no máximo seis componentes não nulas.

Definindo $o_k (k = 1, 2, \dots, 6)$ como sendo o índice da variável x de maneira que x_{o_k} represente os deslocamentos das extremidades do elemento, segue

$$\bar{p}^t = (x_{o_1} \ x_{o_2} \ x_{o_3})$$

$$\bar{q}^t = (x_{o_4} \ x_{o_5} \ x_{o_6})$$

e

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_k}} = 0 \quad | \quad o_k > n$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_1}} = -\lambda^{-1}(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \eta + \lambda^{-1}(x_{o_4} - x_{o_1})] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_2}} = -\lambda^{-1}(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \gamma + \lambda^{-1}(x_{o_5} - x_{o_2})] \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_3}} = -\lambda^{-1}(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \xi + \lambda^{-1}(x_{o_6} - x_{o_3})] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_4}} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_1}} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_5}} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_2}} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_6}} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{o_3}} \quad (2.11)$$

Assim,

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_k}} = 0 \quad | \quad o_k > n$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_1}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \eta + \lambda^{-1}(x_{o_4} - x_{o_1})] \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_2}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \gamma + \lambda^{-1}(x_{o_5} - x_{o_2})] \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_3}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \xi + \lambda^{-1}(x_{o_6} - x_{o_3})] \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_4}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_1}} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_5}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_2}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_6}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_3}} \quad (2.17)$$

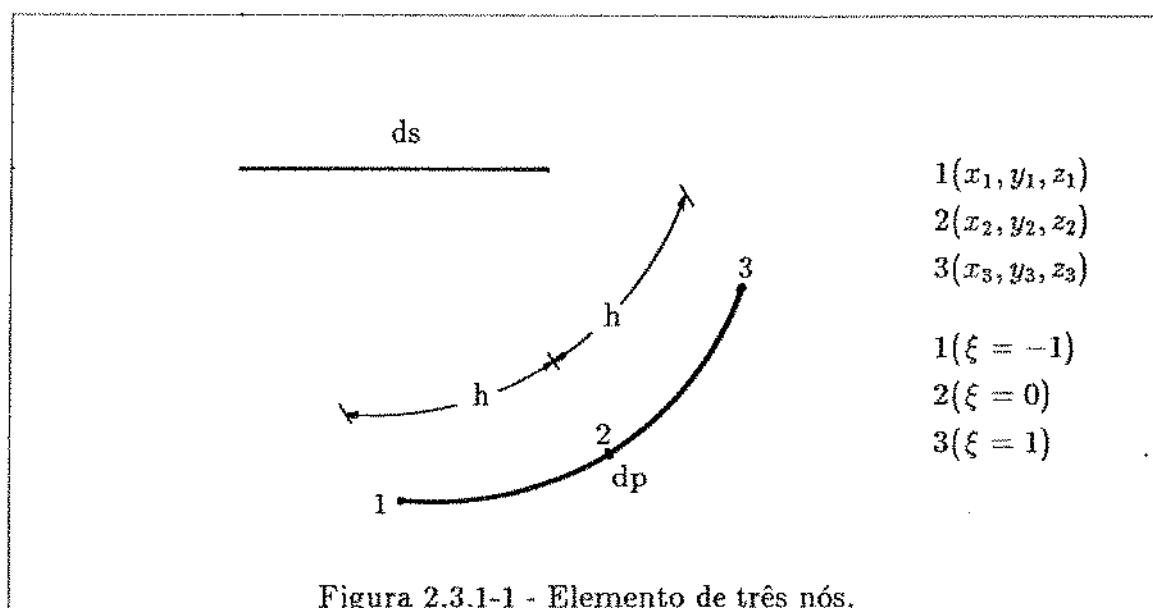
2.3 Elemento de cabo com deformação linear.

A formulação de um elemento parabólico de três nós descrita a seguir é bastante semelhante àquela apresentada por Coyette e Guisset (1988). Estes autores calculam a energia potencial total e seu gradiente por integração numérica de Gauss. Neste trabalho utilizam-se formas fechadas das duas integrais envolvidas (ítems 2.3.2 e 2.3.3).

2.3.1 Deformação.

A deformação linear do elemento de cabo mostrado na figura (2.3.1-1) é dada por

$$\epsilon = \frac{dp - ds}{ds} = \frac{dp}{ds} - 1 \quad (2.18)$$



onde dp é o comprimento deformado do elemento com comprimento inicial (indeformado) ds .

Lembrando que

$$dp = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

pode-se escrever

$$\epsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} - 1 \quad (2.19)$$

Introduzindo a coordenada local ξ , definida pela relação $ds = h d\xi$, as coordenadas cartesianas contínuas do cabo podem ser expressas em termos das coordenadas nodais usando as funções de interpolação de Lagrange

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) y_i \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) z_i$$

onde

$$N^t = \left[\frac{\xi(\xi-1)}{2}, (1-\xi^2), \frac{\xi(\xi+1)}{2} \right]$$

Assim, pode-se escrever

$$\epsilon = \frac{1}{h} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{d\xi} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{d\xi} y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{d\xi} z_i \right)^2} - 1 \quad (2.20)$$

2.3.2 Energia potencial total.

Admitindo que a relação constitutiva do material seja dada por $\sigma(\epsilon) = \beta \epsilon$ (veja-se, sobre este assunto, Pimenta (1986) e Apêndice A) a energia de deformação, para um elemento, é dada por

$$\bar{\pi} = \frac{1}{2} \beta \alpha h \int_{-1}^1 \epsilon^2 d\xi \quad (2.21)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \alpha_x &= x_1 - 2x_2 + x_3 & ; & & \beta_x &= \frac{x_3 - x_1}{2} \\ \alpha_y &= y_1 - 2y_2 + y_3 & ; & & \beta_y &= \frac{y_3 - y_1}{2} \\ \alpha_z &= z_1 - 2z_2 + z_3 & ; & & \beta_z &= \frac{z_3 - z_1}{2} \end{aligned}$$

pode-se escrever

$$\frac{dx}{d\xi} = \alpha_x \xi + \beta_x \quad ; \quad \frac{dy}{d\xi} = \alpha_y \xi + \beta_y \quad ; \quad \frac{dz}{d\xi} = \alpha_z \xi + \beta_z$$

e

$$\bar{\pi} = \frac{1}{2} \beta \alpha h \int_{-1}^1 \left[\frac{\sqrt{\gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi + \gamma_3}}{h} - 1 \right]^2 d\xi \quad (2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 \\ \gamma_2 &= 2(\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z) \\ \gamma_3 &= \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \end{aligned}$$

Integrando (2.22), vem

$$\bar{\pi} = \beta \alpha \left[\frac{\gamma_1}{3} + \gamma_3 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1 s} + s - \left(\frac{\gamma_2^2}{4\gamma_1} - \gamma_3 \right) \ln \gamma_4 + h \right] \quad (2.23)$$

onde

$$\gamma_4 = \frac{2\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + 2\gamma_1 + \gamma_2}{2\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)} - 2\gamma_1 + \gamma_2}$$

$$s = \sqrt{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} + \sqrt{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3}$$

A energia potencial das ações externas é dada por

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_g + \mathcal{W}_f \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{W}_g$ é a energia potencial de ações gravitacionais q_g , uniformemente distribuídas ao longo dos elementos de cabo (supostas atuando na direção de um eixo global z , com sentido $-z$), e $\mathcal{W}_f$ é a energia potencial de forças concentradas nos nós dos elementos de cabo

$$\mathcal{W}_g = \sum_{elem.} q_g h \int_{-1}^1 (\sum N_i z_i) d\xi \quad (2.25)$$

$$\mathcal{W}_f = - \sum_{nós} (f_{x,i} x_i + f_{y,i} y_i + f_{z,i} z_i) \quad (2.26)$$

As componentes da iésima força e coordenadas do ponto de aplicação são dadas por $(f_{x,i}, f_{y,i}, f_{z,i})$ e (x_i, y_i, z_i) , respectivamente.

A expressão de $\mathcal{W}_g$ integrada em ξ resulta

$$\mathcal{W}_g = \sum \frac{qh}{3} (z_1 + 4z_2 + z_3)$$

Assim, considerando (2.21) e (2.24), a energia potencial total de um arranjo de elementos parabólicos é dada por

$$\Pi(x) = \sum_{elem.} \bar{\pi} + \mathcal{W}_g + \mathcal{W}_f + \Pi_0 \quad (2.27)$$

2.3.3 Gradiente da energia potencial total.

O gradiente da expressão (2.27) é dado por

$$\nabla \Pi = \sum_{elem.} \nabla \bar{\pi} + \nabla \mathcal{W}_g + \nabla \mathcal{W}_f \quad (2.28)$$

O vetor $\nabla \bar{\pi}$ tem nove componentes não nulas associadas aos nove graus de liberdade do elemento

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y_k} = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z_k} = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial z_k} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.31)$$

Com os vetores auxiliares

$$d_{\gamma_1}(k) = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_i} \quad (k = 1, 4, 7 ; i = 1, 2, 3)$$

$$d_{\gamma_1}(k) = \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_i} \quad (k = 2, 5, 8 ; i = 1, 2, 3)$$

$$d_{\gamma_1}(k) = \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_i} \quad (k = 3, 6, 9 ; i = 1, 2, 3)$$

e os correspondentes $d_{\gamma_2}(k)$ e $d_{\gamma_3}(k)$, pode-se escrever

$$\nabla \bar{\pi} = \frac{1}{2} \alpha \beta \left\{ \frac{2}{h} \left[\frac{d_{\gamma_1}(k)}{3} + d_{\gamma_3}(k) \right] - [\alpha_1 d_{\gamma_1}(k) + \alpha_2 d_{\gamma_2}(k) + \alpha_3 d_{\gamma_3}(k)] \right\} \quad (k = 1, \dots, 9) \quad (2.32)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{(s - 3\gamma_2^2)/(s\gamma_1) + (0.75\gamma_2^2/\gamma_1 - \gamma_3)\alpha_3}{2a}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\gamma_2/s - \gamma_2\alpha_3/2}{\gamma_1}$$

$$\alpha_3 = \ln \left[\frac{2\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + 2\gamma_1 + \gamma_2}{2\sqrt{\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)} + 2\gamma_1 + \gamma_2} \right]$$

As nove componentes do gradiente da energia potencial das ações externas são

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_i} = -f_{x,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y_i} = -f_{y,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_1} = \frac{q_g h}{3} - f_{z,1} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_2} = \frac{4q_g h}{3} - f_{z,2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_3} = \frac{q_g h}{3} - f_{z,3} \quad (2.37)$$

2.4 Configurações de equilíbrio estático.

2.4.1 Introdução.

Configurações de equilíbrio estático de um arranjo espacial de cabos (submetidos a uma dada ação externa) podem ser encontradas com técnicas de Otimização (programação não linear) uma vez que essas configurações correspondem a pontos de mínimo local da função $\Pi(x)$ (eq. (2.4) ou eq. (2.27)).

Como já dito na Introdução (veja-se Capítulo 1, seção 1.3), o método mais frequentemente encontrado na bibliografia (veja-se, por exemplo, Peyrot e Goulois, 1979; Godbole, Krishna e Jain, 1984; Verma e Leonard, 1978; Leonard e Tuah, 1986; Argyris e Scharpf, 1971) é o método de Newton (Newton-Raphson), em geral associado a uma formulação incremental em forças.

Neste trabalho utiliza-se um algoritmo do tipo quase-Newton. A idéia básica dos métodos quase-Newton é construir uma aproximação para a inversa da matriz Hessiana de $\Pi(x)$ (usada no cálculo da direção de Newton)

$$H(x) = \nabla \cdot [\nabla \Pi(x)]^t$$

com base no comportamento de $\Pi(x)$ e $g(x) = \nabla \Pi(x)$.

Dois fatores presentes na análise matricial de estruturas podem justificar o uso de um algoritmo quase-Newton:

- os métodos quase-Newton partem do pressuposto de que a avaliação da matriz Hessiana $H(x)$ (matriz de rigidez) requer um esforço computacional excessivo;
- a matriz de rigidez pode, durante o processo iterativo, deixar de ser definida positiva. No caso de redes de cabos, por exemplo, na configuração indeformada a matriz de rigidez é singular.

Uma discussão mais detalhada sobre a escolha desse tipo de algoritmo é apresentada no Apêndice B.

2.4.2 Algoritmo quase-Newton

O algoritmo quase-Newton descrito a seguir, com reinicialização da inversa aproximada da Hessiana, é sugerido por Luenberger (1973).

para qualquer x_0 inicial ($k = 0$) faça

passo 1 :

$$S_k = I \quad (I = \text{matriz identidade}) ;$$

passo 2 :

$$d_k = -S_k g_k ;$$

passo 3 :

minimize $\Pi(x_k + \alpha_k d_k)$ em relação a $\alpha_k \geq 0$,
para obter α_k , x_{k+1} , $p_k = \alpha_k d_k$, $q_k = g_{k+1} - g_k$;

passo 4 :

se k não é um múltiplo inteiro de n faça

$$S_{k+1} = \left[S_k - \frac{S_k q_k q_k^t S_k}{q_k^t S_k q_k} \right] \frac{p_k^t q_k}{q_k^t S_k q_k} + \frac{p_k p_k^t}{p_k^t q_k}$$

$k = k + 1$, vá para o passo 2 ;

se k é um múltiplo inteiro de n vá para o passo 1

O passo 3 é uma minimização unidimensional de $\Pi(x)$ na variável α_k (*linesearch*) e deve ser suficientemente acurado de modo a garantir que a matriz S_{k+1} seja definida positiva (veja-se Apêndice B).

O algoritmo de minimização unidimensional usado neste trabalho pode ser encontrado em (Laszdon, 1970, pag. 13). Detalhes da sua implementação computacional são apresentados no Apêndice D.

2.4.3 Exemplos

Os exemplos apresentados a seguir têm o objetivo de ilustrar a utilidade e versatilidade das formulações até aqui descritas.

O modelo não linear (no sentido geométrico), aplicado a uma estrutura simples como a treliça do exemplo (2.4.3-1), desvenda resultados não acessíveis quando se trabalha com a hipótese de deslocamentos e deformações infinitesimais.

O exemplo (2.4.3-2) é usado para verificar a validade da utilização dos elementos de dois nós (deformação constante) para discretizar cabos flexíveis.

O exemplo (2.4.3-3), embora trate de um caso não diretamente relacionado com coberturas pênseis, tem o objetivo de evidenciar a possibilidade de fácil acoplamento dos algoritmos computacionais desenvolvidos com programas comerciais de Otimização para a análise de problemas mais complexos (contato unilateral sem atrito).

Exemplo 2.4.3-1 : determinar as configurações de equilíbrio estático da treliça mostrada na figura (2.4.3-1) abaixo.

(O elemento com deformação constante é um elemento de treliça e será usado na resolução deste exemplo.)

O comprimento das barras 1 e 2 é λ e o ângulo entre cada uma delas e a horizontal é θ . As barras têm seção transversal α e admite-se que o material seja dado por

$$\sigma_{\frac{1}{2}}(\epsilon) = \beta \epsilon_{\frac{1}{2}} \quad (\text{Veja-se Apêndice A}).$$

Considerando a simetria e a formulação apresentada no item (2.2) pode-se escrever

$$\begin{aligned} f^t &= \begin{pmatrix} 0 & -\eta \end{pmatrix} : \text{vetor de forças nodais;} \\ x^t &= \begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix} : \text{vetor deslocamentos livres;} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon = (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} - 1; \\ \delta &= \lambda^{-1} (2\nu \sin \theta + \lambda^{-1} \nu^2) \end{aligned}$$

A energia potencial total resulta

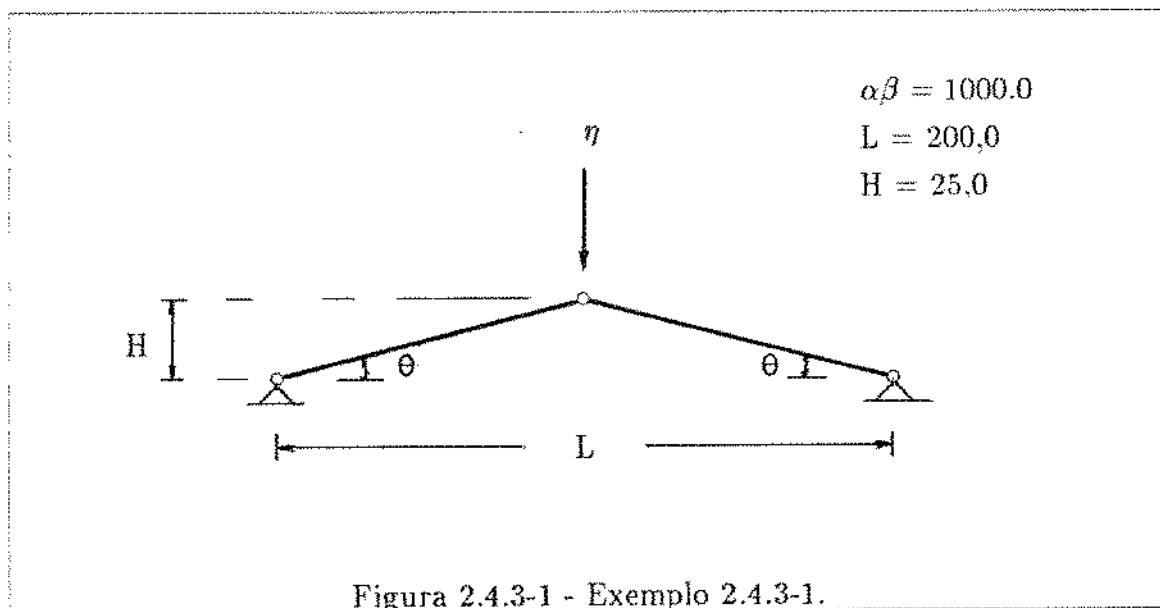
$$\Pi(\nu) = \alpha\beta\lambda\epsilon^2 + \eta\nu$$

que é uma função de uma variável cujo gradiente é dado por

$$\nabla\Pi(\nu) = \frac{d\Pi(\nu)}{d\nu} = 2\alpha\beta\lambda\epsilon\frac{d\epsilon}{d\nu} + \eta$$

onde

$$\frac{d\epsilon}{d\nu} = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}(\sin\theta + \lambda^{-1}\nu)$$



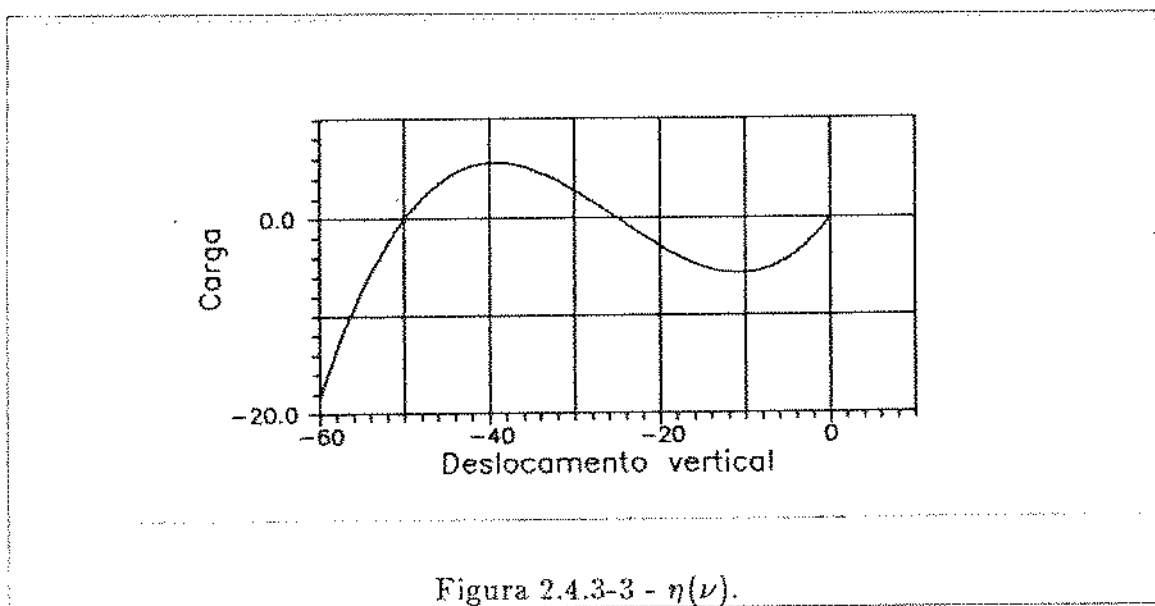
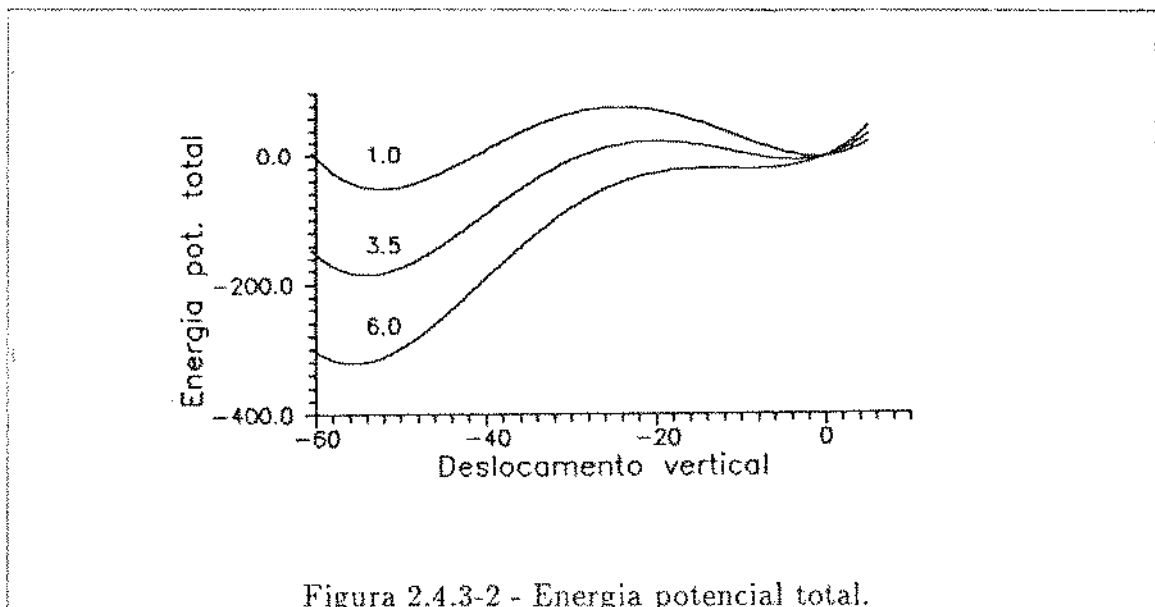
As funções $\Pi(\nu)$ e $\eta(\nu)$ são mostradas nas figuras (2.4.3-2) e (2.4.3-3), respectivamente, para os valores numéricos indicados na figura (2.4.3-1). Na figura (2.4.3-2) a função Energia Potencial Total para três valores de η e, na figura (2.4.3-3), a função $\eta(\nu)$, obtida quando se iguala a derivada de $\Pi(\nu)$ a zero (condição para que $\Pi(\nu)$ seja estacionária).

As figuras (2.4.3-2) e (2.4.3-3) fornecem informações interessantes sobre o comportamento da treliça quando analisada com um modelo não linear (grandes deslocamentos, deformações elásticas finitas).

A primeira constatação é a de que há um valor de ν (ν_c) abaixo do qual a estrutura apresenta duas configurações de equilíbrio estático. Observe-se que para $\eta = 1,0$ e $\eta = 3,5$ as curvas $\Pi(\nu)$ correspondentes apresentam dois pontos de mínimo, o que deixa de acontecer quando $\eta = 6,0$. O valor característico η_c é dado por $\eta_c = \eta(\nu_c)$ onde

$$\nu_c = \lambda[-\sin\theta \pm (\cos^{\frac{4}{3}}\theta - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}]$$

Para os valores numéricos adotados o valor de ν_c associado ao ponto de mínimo de η (ver figura (2.4.3-3)) é $\nu_c = -10.712323$ e, para esse valor de ν tem-se $\eta_c = -5.65914$. Para valores de η acima de η_c a treliça deixa de ter duas configurações de equilíbrio.



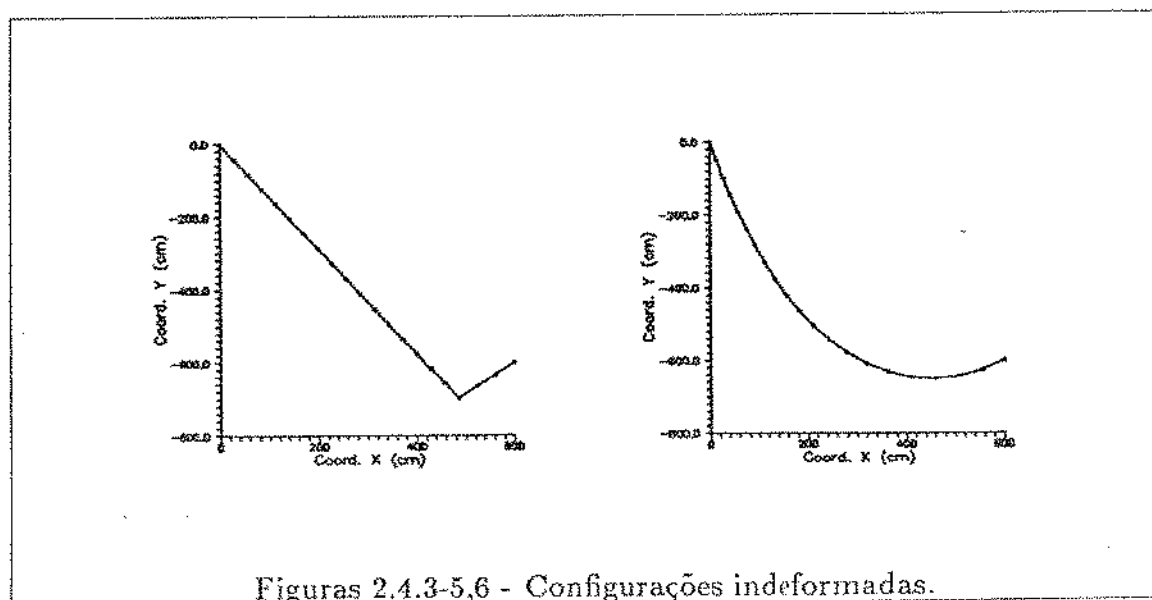
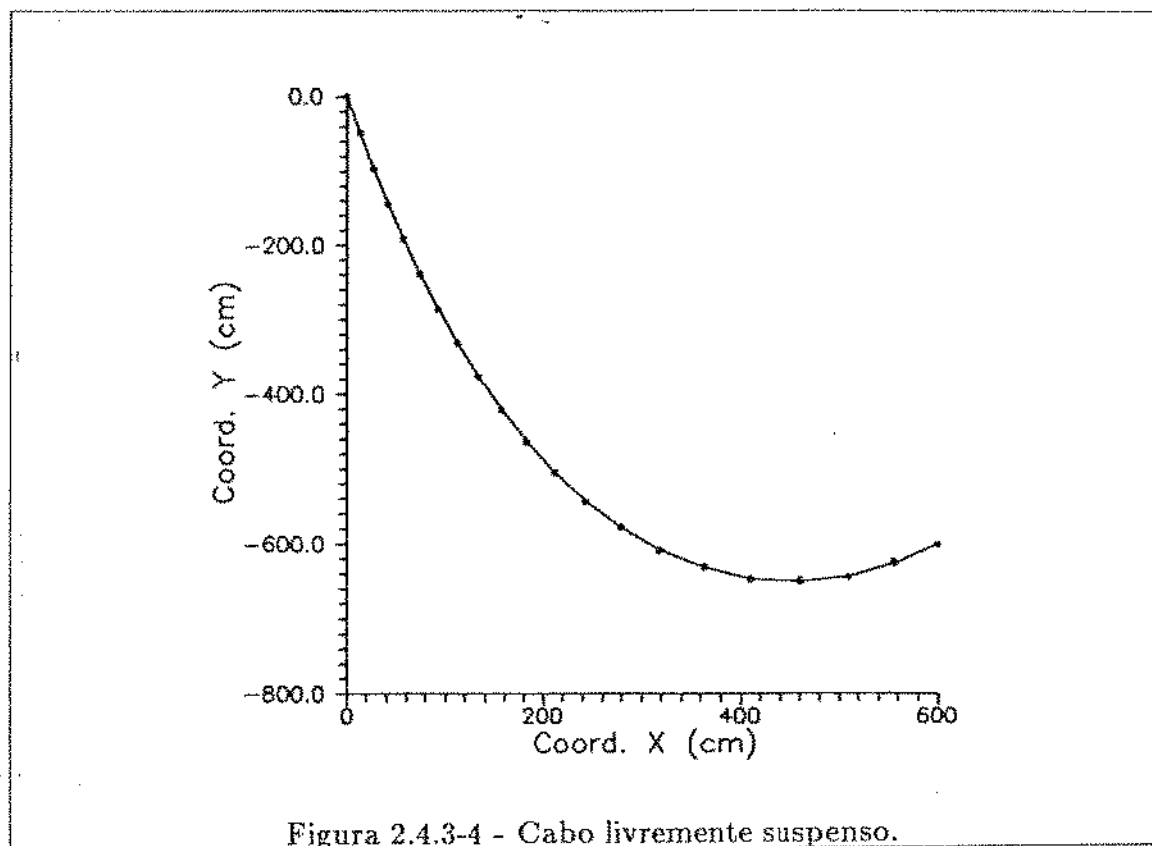
Exemplo 2.4.3-2 : O cabo livremente suspenso mostrado na figura (2.4.3-4) tem comprimento indeformado de $10,0m$, seção transversal de $1,0cm^2$ e extremidades fixas nos pontos $(0,0)$ e $(6,-6)$ metros.

O cabo está submetido a uma ação gravitacional uniforme de $0,981kN/m$ (distribuído ao longo de seu comprimento).

Supõe-se que a relação constitutiva seja dada por

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \beta \epsilon_{\frac{1}{2}} \quad (\beta = 14580kN/cm^2)$$

A configuração de equilíbrio estático foi determinada discretizando-se o cabo com 20 elementos de dois nós e os resultados obtidos para deslocamentos comparados com uma discretização usando 10 elementos de três nós e com uma solução apresentada por Peyrot e Goulois (1979). A linha contínua da figura (2.4.3-4) é a solução de Peyrot e as marcas são as soluções obtidas com os dois elementos finitos acima citados.



Foram usadas duas configurações iniciais mostradas nas figuras (2.4.3-5) e (2.4.3-6) (ponto x_0 do algoritmo da pag. 2-10). Nas duas configurações o comprimento indeformado está dividido em vinte partes iguais. A configuração da figura (2.4.3-5) é obtida resolvendo, como primeiro passo, o problema do cabo indeformável e sem peso submetido a uma ação gravitacional concentrada móvel. Os dois segmentos de cabo resultantes são, então, ajustados para que cada um deles seja múltiplo de 1/20 do comprimento indeformado total. A configuração da figura (2.4.3-6) é a catenária, obtida como solução de um problema de minimização restrita (veja-se Luenberger, 1984, pp. 301, 303). As coordenadas nodais das duas configurações são apresentadas no Apêndice C.

Exemplo 2.4.3-3 : Um cabo flexível tem comprimento, peso total e área da seção transversal iguais a 1,0. A relação constitutiva do cabo é dada por $\sigma = \beta \epsilon$ com $\beta = 500,0$. O cabo está apoiado sobre uma superfície indeformável e tem uma das extremidades fixa. Na extremidade livre atuam duas forças: uma horizontal f_x e uma vertical f_y . A figura (2.4.3-7) mostra as configurações de equilíbrio estático para $f_x = 0,2$, $f_x = 0,3$, $f_x = 0,4$ e $f_y = 2f_x$ (curvas a, b e c, respectivamente).

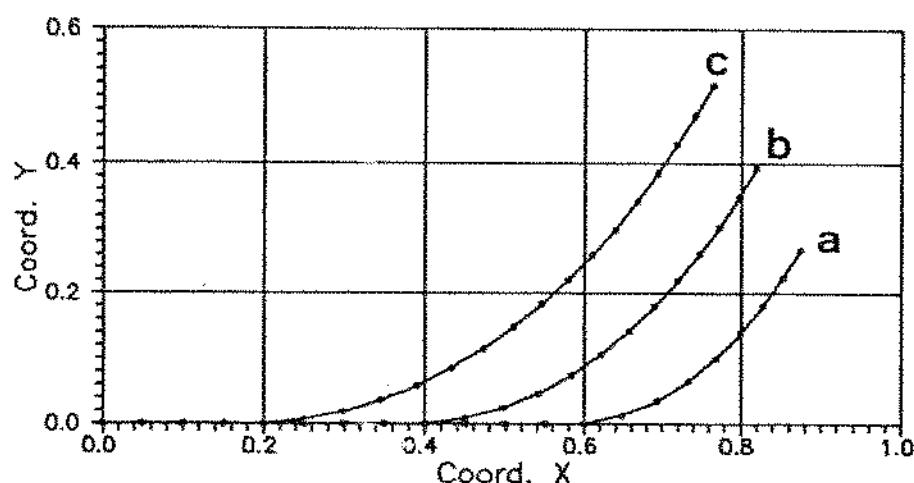


Figura 2.4.3-7 - Cabo com restrição unilateral.

Este problema foi resolvido com o programa comercial de Otimização MINOS (Modular In-core Nonlinear Optimization System), com 20 elementos de dois nós (item 2.2). Os valores usados são adimensionais.

2.5 Estruturas mistas.

Em coberturas pênseis, pontes estaiadas e algumas outras aplicações, os cabos flexíveis são associados a outros elementos estruturais tais como vigas, pilares e placas. A inclusão destes elementos nos modelos descritos nos itens (2.2) e (2.3) é feita com três modificações relativamente simples em termos formais:

- alteração da função Energia potencial total, com acréscimo da parcela correspondente aos novos elementos;
- alteração no gradiente da nova Energia potencial total;
- compatibilização dos deslocamentos nodais livres.

Descreve-se, a seguir, a formulação que associa elementos de cabo de dois nós com elementos de pórtico (deslocamentos e deformações infinitesimais).

A expressão da Energia potencial total passa a ser

$$\Pi(x) = \sum_{elem.} \bar{\pi} + \frac{1}{2} \sum_{elem.} x^t K x - f^t x + \Pi_0 \quad (2.38)$$

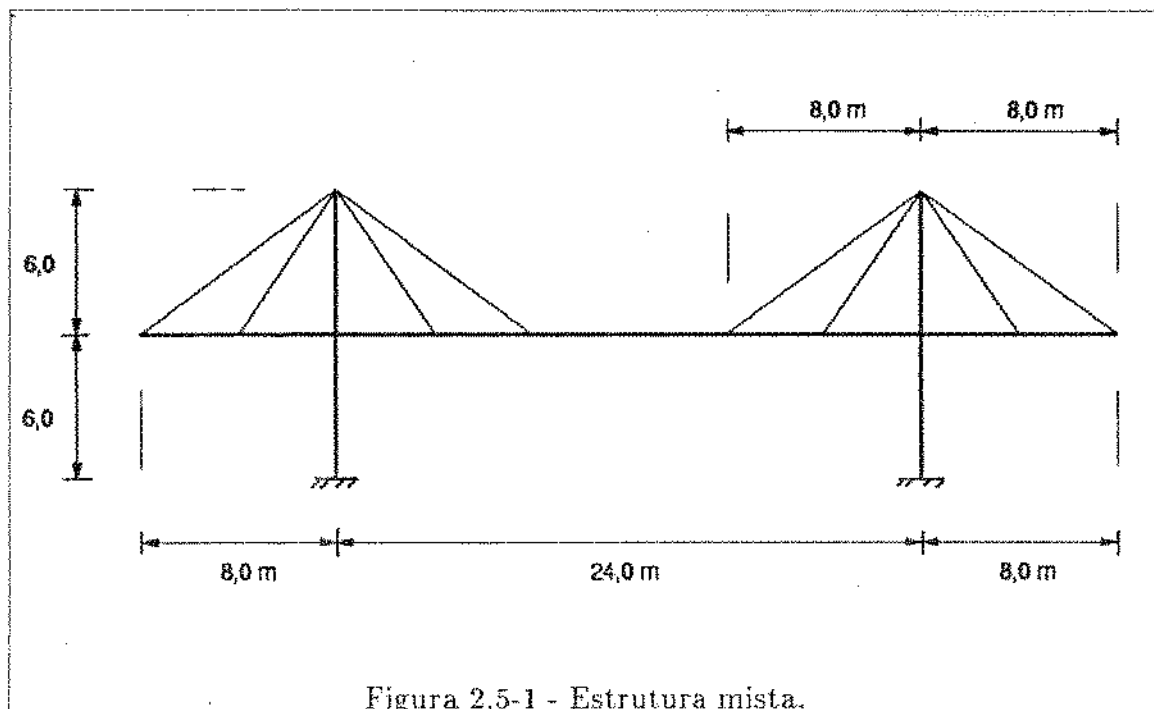
onde K é a matriz de rigidez de um elemento de pórtico no sistema global de referência. O vetor f contém, agora, forças e momentos aplicados nos nós do arranjo discreto.

O gradiente de $\Pi(x)$ passa a ser

$$\nabla \Pi(x) = \sum_{elem.} \alpha \lambda \sigma(\epsilon) \nabla \epsilon + \sum_{elem.} K x - f \quad (2.39)$$

Nas expressões acima o vetor x contém os deslocamentos nodais livres da estrutura. Para a elaboração de programas para cálculo automático é necessário considerar a compatibilidade entre os elementos de cabo (seis graus de liberdade) e de pórtico (doze graus de liberdade) (veja-se Apêndice D).

Exemplo 2.5-1 : A estrutura mostrada na figura (2.5-1) associa elementos de cabo de dois nós e elementos de pórtico.

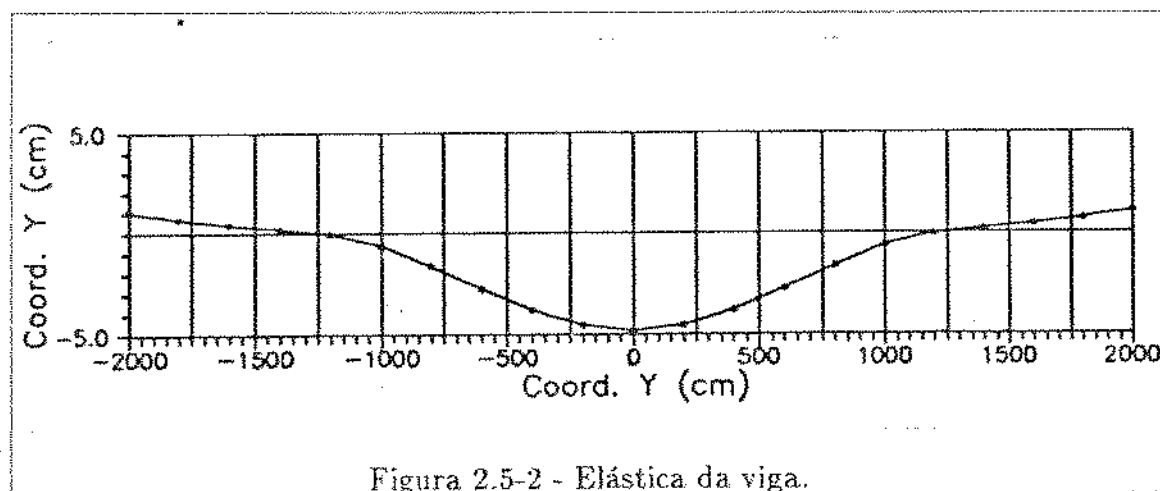


A estrutura foi discretizada com 16 elementos de cabo de dois nós (grandes deslocamentos e deformações elásticas finitas) e 24 elementos de pórtico (deslocamentos e

deformações infinitesimais), sendo 20 na viga horizontal.

As dimensões estão indicadas na figura (metros). As características dos elementos são (kN, cm):

Elemento	Seção	Inércia	Young
Estais	3,87	—	14715,0
Viga	121,0	77401,0	20601,0
Colunas	388,0	315000,0	20601,0



A estrutura está submetida a uma ação gravitacional uniformemente distribuída sobre a viga horizontal, igual a 15,77 kN/m .

A figura (2.5-2) mostra a configuração deformada do eixo da viga. O deslocamento vertical do ponto central da viga é de -4,8135cm.

2.6 Protensão.

2.6.1 Introdução.

Como já dito na Introdução deste trabalho, um cabo flexível (ou arranjo de cabos flexíveis) muda consideravelmente sua forma para equilibrar ações externas (ou variações nessas ações). Os deslocamentos relativos são, em geral, grandes e representam um grave inconveniente em muitas aplicações práticas. Este é o caso, por exemplo, das estruturas pênseis para coberturas, onde o material de revestimento é danosamente afetado por deslocamentos excessivos.

Em estruturas para coberturas, a estabilização de cabos (redução da magnitude dos deslocamentos relativos) pode ser feita, basicamente, de três maneiras:

- introdução de elementos estruturais com rigidez à flexão (arcos, traves, cascas);
- utilização de elementos para revestimento com peso próprio suficientemente grande de modo a reduzir os deslocamentos causados por ações acidentais;
- introdução de uma família adicional de cabos, em geral submetidos a esforços iniciais de tração (forças de protensão). Forças de protensão com intensidade adequada podem, também, impedir que partes de um arranjo de cabos se afrouxem, ficando

submetidas somente à ação de seu peso próprio e deixando de contribuir para o equilíbrio do conjunto.

Apresenta-se, a seguir, uma formulação do elemento de dois nós (descrito anteriormente no item 2.2) que permite modelar redes de cabos submetidas a forças iniciais de protensão. A protensão é introduzida por meio de alongamento de um ou mais elementos de cabo.

Como se verá a seguir, além dos deslocamentos nodais, a formulação do elemento passa a incluir uma variável adicional, μ , que representa o alongamento do elemento. Essa variável pode ser tratada como um valor conhecido *a priori* e, nesse caso, a protensão é aqui chamada de *protensão imposta*. A variável μ pode, como se verá na seção (2.6.3), ser considerada mais uma incógnita a ser determinada no processo de minimização da Energia Potencial Total. Neste caso a protensão é automaticamente determinada e o processo foi aqui chamado de *protensão automática*.

2.6.2 Protensão imposta

A soma vetorial da pag. 2-2 (veja-se também fig. 2.2.1-1) pode ser reescrita como

$$l' = l + q - p + c$$

onde

- $l = (\lambda - \mu)u$: vetor que representa a configuração indeformada do elemento;
- λ : distância entre pontos nodais do elemento na configuração indeformada;
- $\mu = \|c\|$: alongamento de protensão;
- u : vetor na direção da configuração indeformada ($\|u\| = 1$);
- l' : vetor que representa a configuração deformada do elemento;
- p, q : vetores deslocamentos nodais;
- $c = \mu u$: vetor alongamento de protensão.

Fazendo

$$z = q - p + c$$

e

$$\delta = (\lambda - \mu)^{-1} z' (2u + (\lambda - \mu)^{-1} z)$$

a expressão da deformação do elemento tem a mesma forma indicada pela equação (2.3).

A energia potencial total de um arranjo de elementos (agora submetidos, também, a alongamentos de protensão) é a indicada na eq. (2.4), alterando-se a energia de deformação de um elemento para

$$\bar{\pi} = \alpha(\lambda - \mu) \int_0^\epsilon \sigma(\tau) d\tau$$

Fazendo

$$(q - p + \mu u)^t = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3)$$

para um elemento, o gradiente da energia de deformação passa a ser

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_k}} = 0 \quad | \quad o_k > n$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_1}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \eta + (\lambda - \mu)^{-1}\psi_1] \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_2}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \gamma + (\lambda - \mu)^{-1}\psi_2] \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_3}} = -\sigma(\epsilon)\alpha(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}[\cos \xi + (\lambda - \mu)^{-1}\psi_3] \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_4}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_1}} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_5}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_2}} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_6}} = -\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_{o_3}} \quad (2.45)$$

Desta forma, configurações de equilíbrio estático de um arranjo de cabos (ou de estruturas mistas) em que um ou mais cabos sejam submetidos a alongamentos para a introdução de forças de protensão, podem ser obtidas com o mesmo algoritmo quase-Newton descrito no item (2.4.2) deste capítulo.

Como já dito na seção (2.6.1), a expressão protensão imposta se deve ao fato de que os valores de μ , e os elementos que devem ser alongados, são supostos conhecidos *a priori*.

Exemplo 2.6.2-1 : A rede de cobertura mostrada na figura (2.6.2-1) tem configuração indeformada definida por geratrizes parabólicas com relação flecha / vão igual a 1/10.

A planta é um quadrado de lado 30,0 metros. Os cabos estão dispostos em dois conjuntos ortogonais (na configuração indeformada) e afastados entre si de 5,0 metros (projeção no plano (x,y)). A rede está submetida a uma ação gravitacional de 196,2 N/m², uniformemente distribuída. Os cabos têm relação constitutiva dada por

$$\sigma(\epsilon) = \beta \epsilon \quad \beta = 14715,0 \text{ kN/cm}^2$$

e área da seção transversal $\alpha = 1,0 \text{ cm}^2$.

Para a ação indicada e não havendo protensão, os *cabos tensores* (concavidade para baixo) tenderiam a se afrouxar, buscando configurações que equilibram apenas o seu peso próprio. Os *cabos de carga* (concavidade para cima) funcionariam como cabos livremente suspensos.

No modelo discreto usado neste trabalho para analisar a rede, a tentativa de afrouxamento de um cabo (ou trecho de cabo) pode se manifestar pelo aparecimento de deformações de compressão em um ou mais elementos uma vez que o elemento de dois nós funciona, também, como elemento de treliça porque a restrição $\epsilon \geq 0$ não foi incluída na formulação. Isto pode acontecer, no exemplo em estudo, se cada cabo for discretizado com apenas 6 elementos de dois nós.

Alongando de um valor adequado os elementos de extremidade dos *cabos tensores*, todos os elementos da rede passam a apresentar deformações de tração na configuração de equilíbrio estático para as ações indicadas. Numerando os *cabos tensores* de 1 a 5, os alongamentos indicados na Tabela (2.6.2-1) (aplicados nos elementos de extremidade) garantem que, no equilíbrio, nenhum elemento da rede terá deformação de tração inferior a 0,000105.

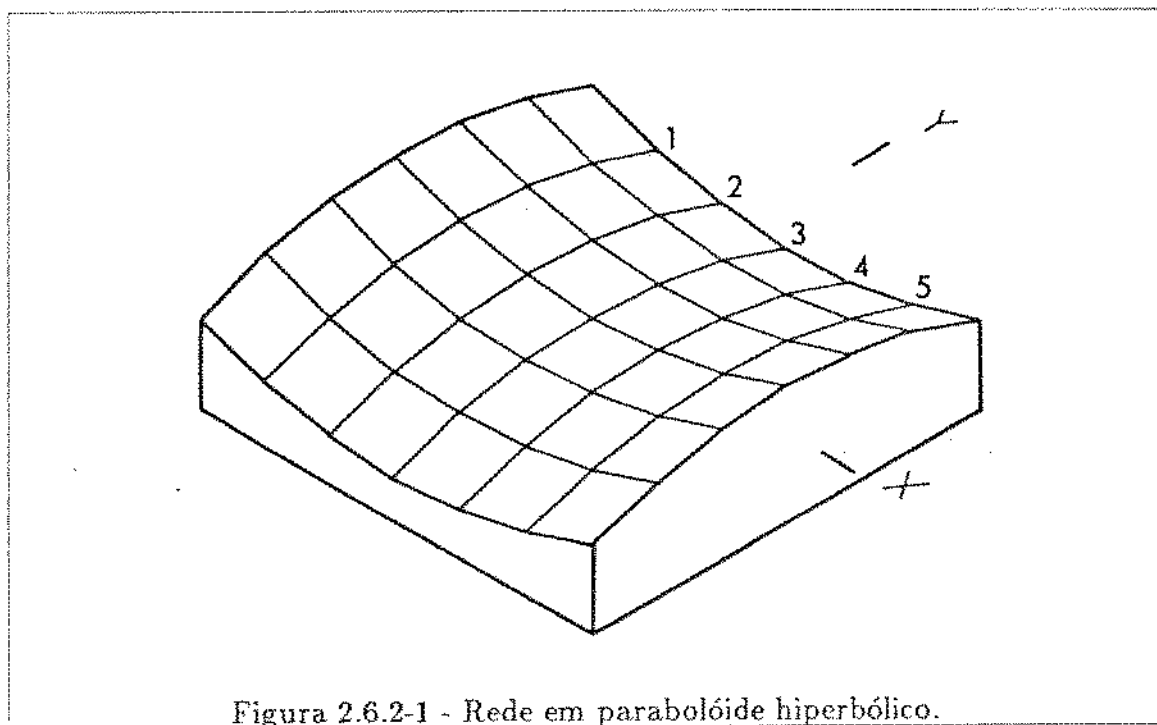


Figura 2.6.2-1 - Rede em parabolóide hiperbólico.

Cabo	1	2	3	4	5
Alongamento μ	2,88	4,37	4,81	4,37	2,88

Tabela 2.6.2-1 : Alongamentos de protensão (cm).

O deslocamento vertical do ponto central da rede é $-15,109\text{cm}$.

2.6.3 Protensão automática.

Os alongamentos de protensão devem ser suficientemente grandes para garantir que, no equilíbrio, nenhum elemento de uma rede esteja frouxo. Por outro lado, eles devem ser, também, os menores possíveis, porque as forças de protensão aumentam os esforços transmitidos pelos cabos aos pontos de fixação, encarecendo as estruturas de suporte e os elementos das fundações.

Em redes com muitos elementos a determinação dos valores dos alongamentos e dos elementos em que eles devem aplicado, atendendo aos pressupostos citados no parágrafo anterior, pode se tornar uma tarefa bastante trabalhosa. Descreve-se, a seguir, um algoritmo que determina quais elementos de um arranjo de cabos devem ser alongados (e de que valor) de modo a garantir que a energia potencial do conjunto seja mínima e que nenhum elemento tenha deformação de tração inferior a um valor especificado.

Em termos de programação não linear, o problema tem a seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } \Pi(x) ; & \text{sujeito a } \epsilon_i \geq \bar{\epsilon} \\ (i = 1, \dots, m) & (m = \text{numero de elementos}) \end{array}$$

A restrição

$$\epsilon = (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} - 1 \geq \bar{\epsilon}$$

(veja-se eq. 2.3), pode ser substituída por

$$\delta \geq (\bar{\epsilon} + 1)^2 - 1 = \delta_0$$

Sejam

$$\chi = \frac{\mu}{\lambda} < 1$$

e

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \lambda^{-1}(x_{o4} - x_{o1}) + \chi \cos \eta & ; & \quad \phi_2 = \lambda^{-1}(x_{o5} - x_{o2}) + \chi \cos \gamma \\ \phi_3 &= \lambda^{-1}(x_{o6} - x_{o3}) + \chi \cos \xi \end{aligned}$$

Então, o escalar δ pode ser escrito como

$$\delta = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}{(1 - \chi)^2} + \frac{2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}{1 - \chi} \quad (2.46)$$

Assim, o valor de χ que satisfaz as condições

$$\delta - \delta_0 \geq 0 \quad e \quad \chi < 1$$

está no intervalo

$$\frac{\delta_0 - \delta}{\delta_0 + 1 + [(\delta + 1)(\delta_0 + 1)]^{\frac{1}{2}}} \leq \chi < 1 \quad (2.47)$$

O valor de μ que assegura a condição $\epsilon \geq \bar{\epsilon}$ é dado por

$$\mu = \chi \lambda$$

Pode-se, então, estabelecer o seguinte algoritmo:

- ⇒ para qualquer configuração inicial x^0 e para $\mu_i = 0,0$ ($i = 1, \dots, m$), faça
- ⇒ $k = 0$;
- ⇒ controle = falso;
- ⇒ repita até que controle = verdadeiro
 - $k = k + 1$;
 - $\mu_i^k = \lambda_i \chi_i^k$ ($i = 1, \dots, m$) ;
 - obter x^k que minimiza $\Pi(x)$;
 - se $(\epsilon_i^k \geq \bar{\epsilon})$ então controle = verdadeiro.

Exemplo 2.6.3-1 : Para a rede em parabolóide hiperbólico do Exemplo (2.6.2-1) pretende-se determinar quais elementos devem ser alongados, e de que valor, de modo a garantir que qualquer elemento da estrutura discreta tenha deformação mínima de tração maior ou igual a 1/10000.

O algoritmo para minimização restrita foi utilizado para resolver o problema e os resultados encontrados estão na Tabela (2.6.3-1). Apenas os cabos *tensores* (numerados de 1 a 5) foram alongados (protendidos). Os resultados estão em centímetros.

Elemento	1	2	3	4	5	6
Cabo 1	1,0134	0,9534	0,9179	0,9180	0,9533	1,0134
Cabo 2	1,5264	1,4429	1,3967	1,3967	1,4429	1,5264
Cabo 3	1,6828	1,5895	1,5387	1,5387	1,5896	1,6828
Cabo 4	1,5264	1,4429	1,3967	1,3967	1,4429	1,5264
Cabo 5	1,0133	0,9534	0,9180	0,9179	0,9534	1,0133

Tabela 2.6.3-1 : Alongamentos de protensão.

É interessante observar que os alongamentos usados para a solução do exemplo anterior (2.6.2-1) são a soma dos alongamentos obtidos para cada cabo *tensor* (veja-se tabela 2.6.3-1) repartida entre os dois elementos das extremidades do cabo.

2.7 Determinação de configurações iniciais.

A forma de uma rede de cabos deve atender especificações de um projeto arquitetônico e, também, ser eficiente sob o ponto de vista da análise estrutural.

A determinação de formas iniciais com o uso de modelos reduzidos tem se mostrado um procedimento demorado e muito impreciso (Majowiecki, 1985; Argyris et al., 1973). A formulação descrita neste trabalho para análise estática de redes tridimensionais pode ser usada para a determinação da forma inicial de alguns tipos de redes.

O problema geral que se pretende resolver é o de encontrar as coordenadas nodais de uma rede de cabos flexíveis que coincida (aproximadamente) com uma superfície no espaço descrita por alguns parâmetros básicos tais como dimensões características e coordenadas de pontos característicos. O procedimento básico adotado pode ser assim descrito:

Resolver o problema de programação não linear

determinar $\min \Pi(x)$

dados

$$x_i = \bar{x}_i$$

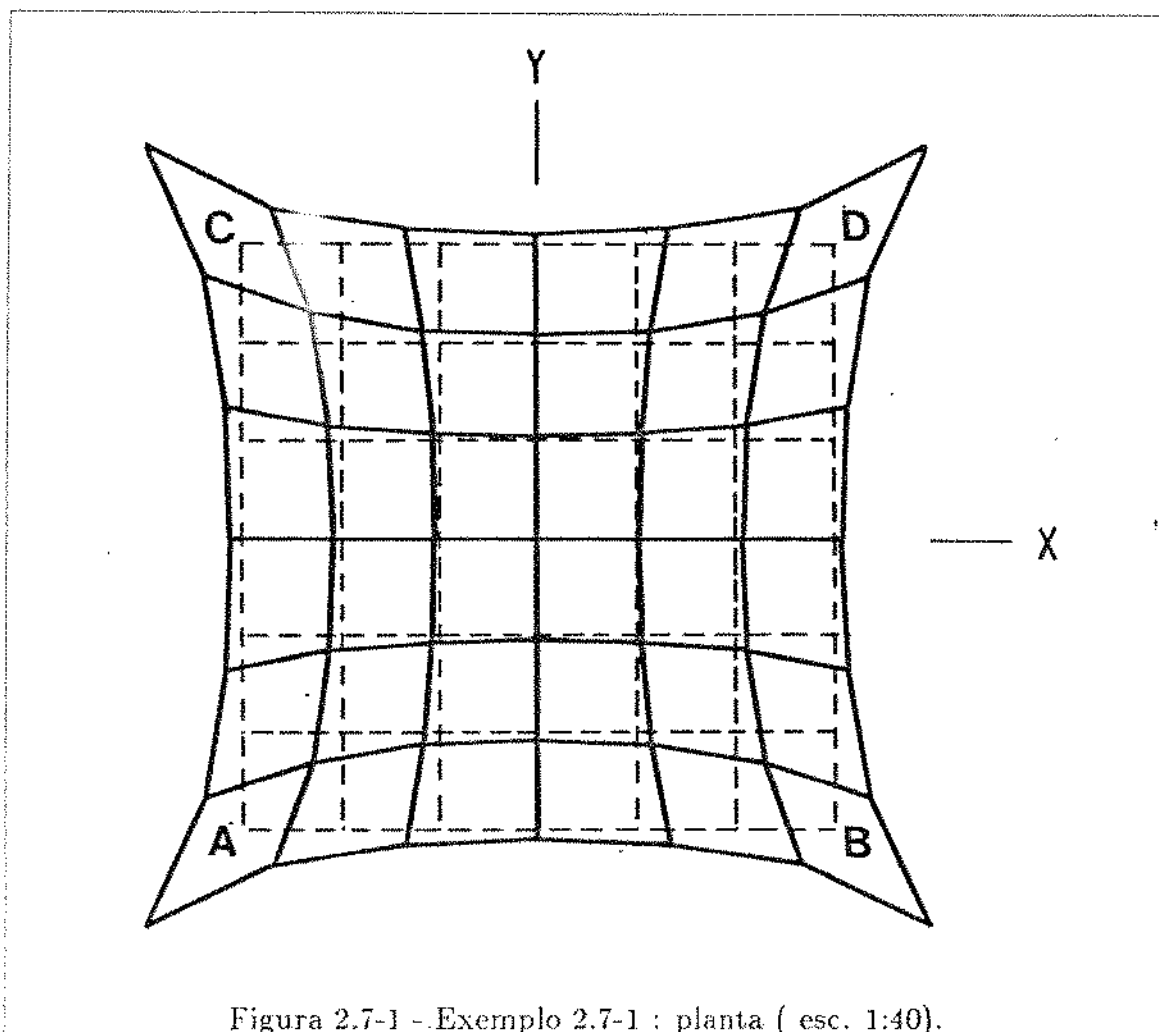
$$y_i = \bar{y}_i$$

$$z_i = \bar{z}_i$$

$$i = 1, \dots, npc \quad (npc = \text{número de pontos característicos.})$$

para uma rede plana, com malha qualquer, sem vínculos nodais e submetida a uma ação gravitacional uniformemente distribuída e de intensidade *adequada*.

Exemplo 2.7-1 : Determinar as coordenadas nodais de uma rede tridimensional que se adapte (aproximadamente) a um parabolóide hiperbólico de bordas curvas, circunscrito por um quadrado de lado 40,0 metros e com vértices adjacentes desnivelados de 10,0 metros.



O problema foi resolvido a partir de uma rede plana (6 x 6) quadrada, de lado 30,0 metros submetida a uma ação gravitacional uniforme de $40.0 \text{ N} / \text{m}^2$, impondo-se aos

pontos A, B, C e D (veja-se figura 2.7-1) os deslocamentos indicados na Tabela (2.7.1-1).

A solução encontrada é mostrada nas figuras (2.7-1) e (2.7-2). O ponto central do parabolóide proposto tem coordenada $z = 0.0$. Na solução aproximada esta coordenada é $z = -0.0512$ metros. Esta diferença pode ser reduzida ajustando-se o valor da ação uniforme aplicada na rede básica. Os cabos têm seção transversal com 1.0cm^2 de área e supõe-se que se comportem como material perfeitamente elástico com $\beta = 5000,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$.

Ponto	x (m)	y (m)	z (m)
A	-20,00	-20,00	5,00
B	20,00	-20,00	-5,00
C	-20,00	20,00	-5,00
D	20,00	20,00	5,00

Tabela 2.7.1-1 : coordenadas nodais prescritas.

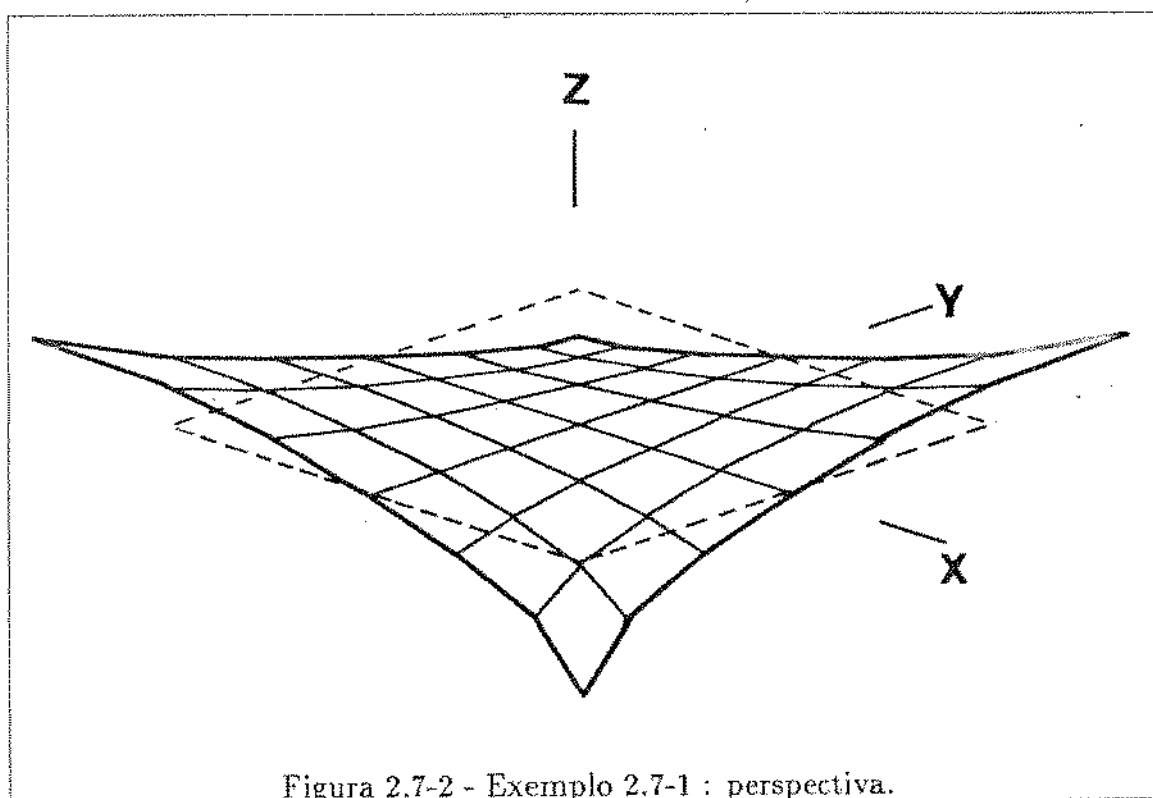


Figura 2.7-2 - Exemplo 2.7-1 : perspectiva.

Exemplo 2.7-2 : A mesma rede básica do exemplo anterior foi usada para se obter a rede tridimensional mostrada na figura (2.7-3). Aos pontos A, B, C e D foram impostas as coordenadas mostradas na Tabela (2.7.2-1) e, ao ponto central da rede básica foi imposta a coordenada $z = 10,0\text{m}$.

Ponto	x (m)	y (m)	z (m)
A	-25,00	-25,00	10,00
B	25,00	-25,00	-10,00
C	-25,00	25,00	-10,00
D	25,00	25,00	10,00

Tabela 2.7.2-1 : Coordenadas nodais prescritas.

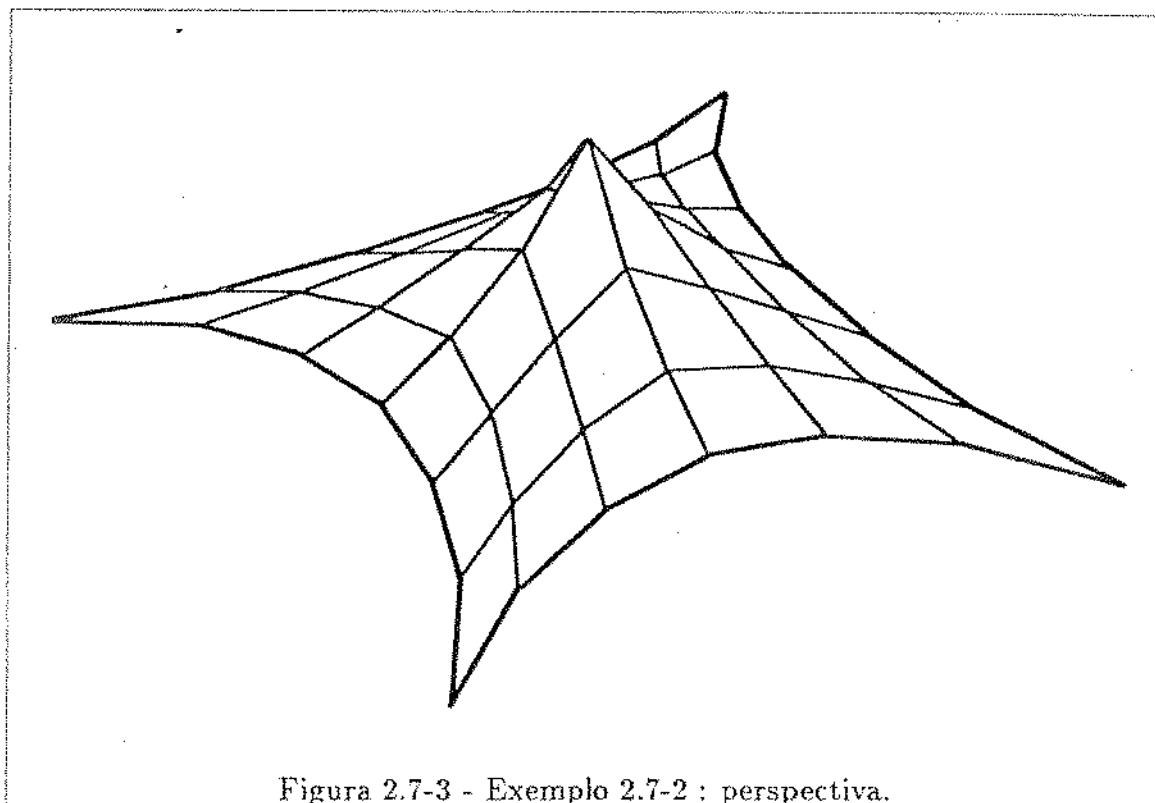


Figura 2.7-3 - Exemplo 2.7-2 : perspectiva.

Exemplo 2.7-3 : O procedimento descrito nesta seção foi usado para determinar uma configuração inicial para o parabolóide hiperbólico dos Exemplos (2.6.2-1) e (2.6.3-1). Aos nós de borda da rede básica foi imposta a condição de coincidirem com a forma da borda da rede dos exemplos citados (parábolas com relação flecha/vão igual a 1/10). As características dos cabos são as mesmas dos dois exemplos anteriores e a ação uniforme aplicada à rede básica é também a mesma. A configuração encontrada coincide com a utilizada naqueles exemplos, a menos de pequena imprecisão numérica.

Obtidas as coordenadas nodais de uma rede pelo processo descrito, é necessário, ainda, ajustá-la a eventuais formas arquitetônicas propostas uma vez que, tomando a forma encontrada como configuração indeformada ainda ocorrerão deslocamentos provocados pelas ações atuantes na estrutura real. Deve-se, então, determinar a protensão eventualmente necessária e mudar as seções transversais dos cabos (por exemplo, aumento da seção transversal dos cabos de borda).

2.8 Variações de temperatura.

O elemento finito de dois nós com alongamentos de protensão, cuja formulação está descrita no item (2.6.2), pode ser usado para avaliar (aproximadamente) a influência de variações de temperatura em cabos pertencentes a uma rede.

As hipóteses feitas são as seguintes:

- o estado de solicitação de um elemento não interfere na variação de seu comprimento provocada por variações de temperatura (modelo térmico desacoplado);
- a variação de comprimento do elemento protendido provocada por deformações elásticas é desprezada;
- o comprimento λ de um elemento (independente de seu estado de solicitação) varia linearmente com uma variação de temperatura Δt , ou seja,

$$\Delta\lambda = \alpha_T \lambda \Delta t = -\mu_T$$

onde α_T é o coeficiente de dilatação térmica do material do cabo.

Chamando de λ_0 o comprimento do elemento na configuração indeformada e λ a distância entre os pontos nodais do elemento na configuração indeformada (sem a parcela da deformação), pode-se escrever

$$\Delta\lambda = \alpha_T(\lambda_0 + \mu_p)\Delta t = -\mu_T \quad (2.48)$$

onde μ_p é o alongamento de protensão do elemento.

Assim, a análise de uma rede onde um ou mais elementos são submetidos a alongamentos de protensão e/ou variação de temperatura é feita com o mesmo algoritmo usado para a análise de redes protendidas, (item 2.6.2) sendo o comprimento indeformado do elemento dado agora por

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 - \alpha_T \Delta t} [\lambda - \mu_p(1 - \alpha_T \Delta t)] \quad (2.49)$$

Note-se que o alongamento devido à variação de temperatura tem sinal contrário ao sinal de Δt .

Exemplo 2.8-1 : O cabo-treliça mostrado na figura (2.8-1) tem as seguintes características:

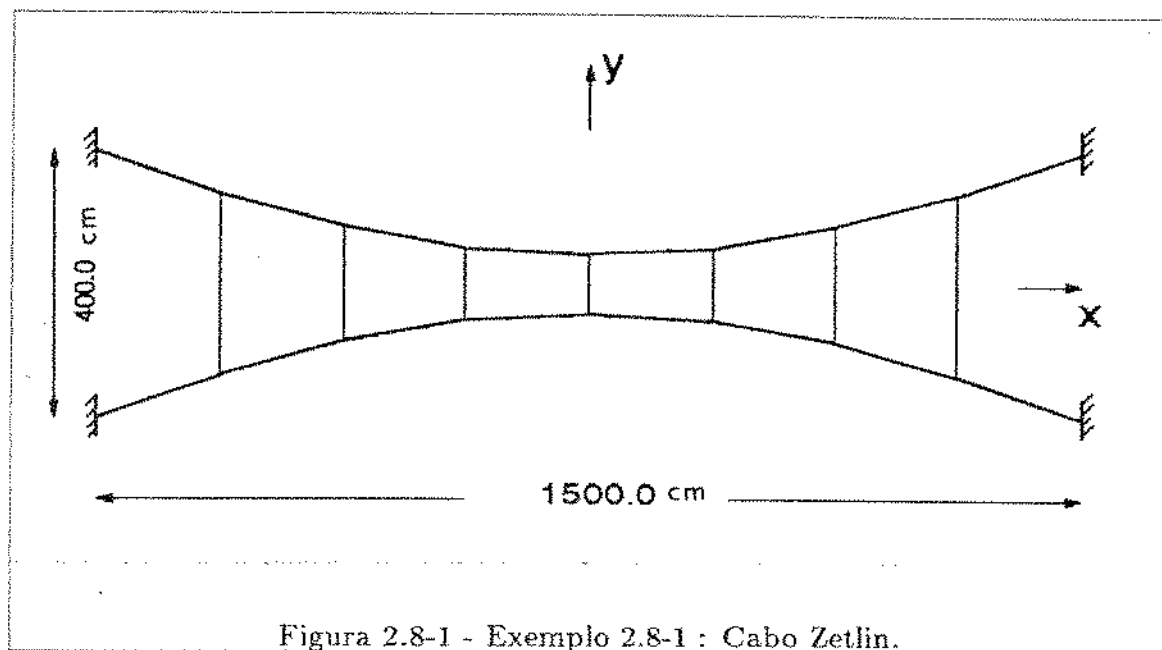
- na configuração indeformada os nós dos cabos superior e inferior pertencem a parábolas com relação flecha/vão igual a 1/10;
- os montantes são igualmente espaçados na horizontal;
- seção transversal do cabo superior = $2,5 \text{ cm}^2$;
- seção transversal do cabo inferior = $1,5 \text{ cm}^2$;
- seção transversal dos montantes = $1,0 \text{ cm}^2$;
- módulo de Young = $1500,0 \text{ tf/cm}^2$;
- forças gravitacionais de $0,254 \text{ tf}$ aplicadas nos nós do cabo superior;
- as dimensões na figura estão em centímetros.

O algoritmo de protensão automática descrito no item (2.6.3) foi usado para determinar o nível de protensão (valor dos alongamentos) e em quais elementos

eles devem ser aplicados, de modo a garantir que todos os elementos tenham deformação de tração maior ou igual a 0.0001. Numerando (da esquerda para o centro) os elementos do cabo inferior de 9 a 12 e os elementos verticais de 17 a 20, os alongamentos desses elementos são mostrados na Tabela (2.8.1-1)

Elemento	9	10	11	12	17	18	19	20
μ_p (cm)	0,2835	0,2892	0,2922	0,2936	0,9785	0,6393	0,4342	0,3653

Tabela 2.8.1-1 : alongamentos de protensão.



A Tabela (2.8.1-2) apresenta os valores das deformações máxima e mínima nos elementos da rede para uma variação de temperatura $\Delta t = \pm 30^\circ C$.

Elemento	1	20
$\Delta t = 0^\circ C$	0,001128	0,000101
$\Delta t = +30^\circ C$	0,000847	0,000035
$\Delta t = -30^\circ C$	0,001411	0,000169

Tabela 2.8.1-2 : deformações e variação de temperatura.

O elemento 1 é o elemento de extremidade do cabo superior.

Exemplo 2.8-2 : O pórtico da figura (2.8-2) tem como trave horizontal um cabo-treliça com as mesmas seções transversais do cabo-treliça do exemplo (2.8-1). Na configuração indeformada os cabos superior e inferior são parábolas com relação flecha/vão igual a 1/15. Os pilares são perfis I 12" (60,71), padrão americano. Os estais são cabos com seção transversal igual a $5,0 \text{ cm}^2$. Nos nós do cabo superior estão aplicadas ações gravitacionais de 2,45 kN.

Com base em resultados fornecidos pelo algoritmo de protensão automática (item (2.6.3)) os elementos de extremidade do cabo inferior foram protendidos com alongamentos de 5,0cm. Estes alongamentos garantem tensões de tração em todos os cabos do pórtico.

A Tabela (2.8.2-1) mostra a variação das tensões máxima e mínima nos cabos (kN/cm^2) quando uma variação de temperatura $\Delta t = +20^\circ C$ é imposta aos estais e aos elementos do cabo superior.

Elemento	1	28
$\Delta t = 0^\circ C$	20,22	0,02
$\Delta t = +20^\circ C$	19,72	-

Tabela 2.8.2-1 :tensões máximas e mínimas.

O elemento 1 é o elemento de extremidade do cabo superior e o elemento 28 é a quarta ligação vertical, da esquerda para a direita.

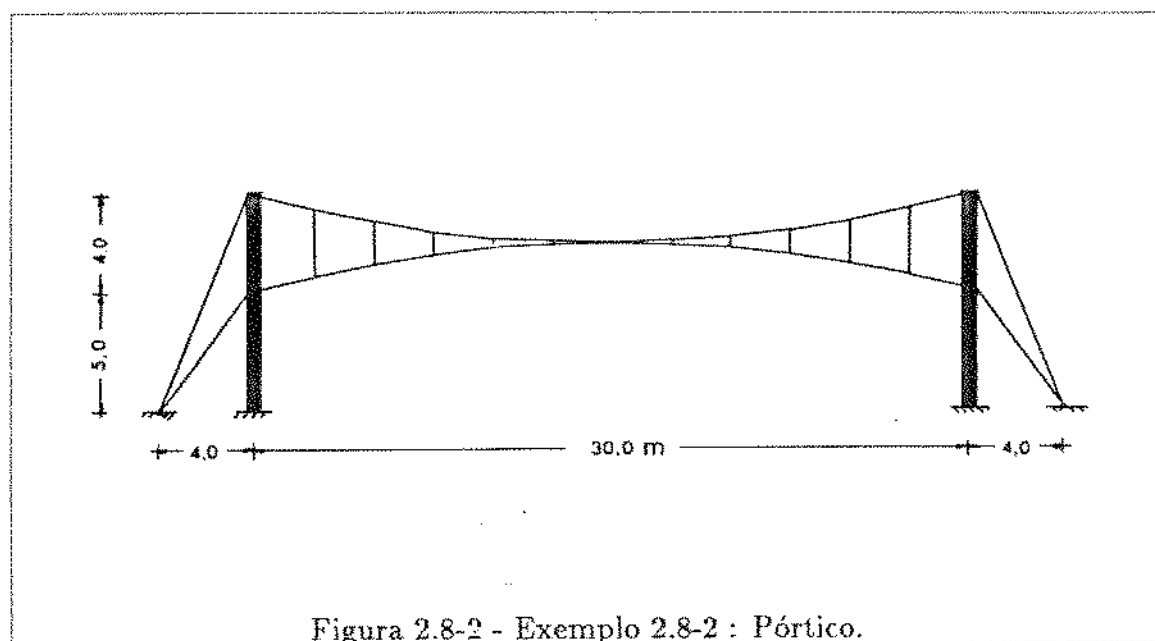


Figura 2.8-2 - Exemplo 2.8-2 : Pórtico.

Com a variação de temperatura prescrita o cabo inferior e todas as ligações verticais se afrouxam passando o cabo superior a se comportar como um cabo livremente suspenso.

Referências.

- [2-01] - Argyris, J.H.; Dunne, P.C.; Angelopoulos, T., *Shape Determination of Prefabricated Prestressed Networks*, ICST, Londres, 1973.
- [2-02] - Argyris, J.H.; Scharpf, D.W., *Large deflection analysis of prestressed networks*,

- Journal of the Structural Division - ASCE, ST3, pp. 633-654, 1971.
- [2-03] - Coyette,J.P.; Guisset,P., *Cable Network Analysis by a Nonlinear Programming Technique*, Engineering Structures, v. 10, pp. 41-46, 1988.
 - [2-04] - Godbole,P.N.; Krishna,P.; Jain,J.K., *Boundary Effects in Suspended Cable Roofs*, Journal of Structural Engineering, v. 110, n. 5, pp. 1099-1113, 1984.
 - [2-05] - Lasdon,L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Co., Londres, 1970.
 - [2-06] - Leonard,J.W.; Tuah,H., *Nonlinear deterministic and stochastic response of cable systems with large bodies under hydrodynamic loads*, Engineering Structures, v. 8,pp. 93-106, 1986.
 - [2-07] - Luenberger,D.G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publ. Co., 1973.
 - [2-08] - Luenberger,D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publ. Co., 1984.
 - [2-09] - Majowiecki,M., *Tensostrutture: progetto e verifica*, CISIA, Milão, 1985.
 - [2-10] - Peyrot,A.H.; Goulois,A.M., *Analysis of Cable Structures*, Computers & Structures,v. 10, pp. 805-813, 1979.
 - [2-11] - Pimenta,P.M., *Análise Não Linear de Treliças Espaciais*, BT/PEF 8604, EPUSP, USP, São Paulo, 1986.
 - [2-12] - Veletsos,A.S.; Darbre,G.R., *Free Vibration of Parabolic Cables*, Journal of Structural Engineering, v. 109, n. 2, pp. 503-519, 1983.
 - [2-13] - Verma,V.K.; Leonard,J.W., *Nonlinear Behavior of Cable-Reinforced Membranes*, Journal of Engineering Mechanics Division, v. 104, n. EM4, pp.735-750, 1978.

Capítulo 3:

Análise Dinâmica de Cabos Flexíveis e Redes Protendidas.

3.1 Introdução.

Estudam-se neste capítulo alguns aspectos teóricos da análise dinâmica de cabos flexíveis e redes protendidas.

As redes protendidas são, em geral, mais leves e mais flexíveis que outras estruturas para cobertura (veja-se Capítulo 1) e, por isso, mais sensíveis a solicitações dinâmicas. As frequências e modos naturais de vibração das redes (assim como os deslocamentos nodais e tensões axiais no cabos) dependem de sua forma e do *nível de protensão*. As frequências naturais podem, em muitos casos, atingir valores que coincidem com regiões do espectro da fonte excitadora (vento, por exemplo) em que a energia é alta (Buchholdt, 1985), com consequências significativas sob o ponto de vista da análise estrutural.

A análise dinâmica de uma rede de cabos flexíveis deve ser desenvolvida com as seguintes etapas:

- a) determinação das frequências e modos naturais de vibração e análise da influência da geometria da rede e das forças de protensão nas frequências naturais;
- b) determinação dos parâmetros de amortecimento;
- c) determinação das solicitações externas variáveis com o tempo;
- d) cálculo da resposta dinâmica.

Neste capítulo são descritos procedimentos relacionados somente com as etapas a) e d) acima citadas uma vez que *"a determinação das solicitações externas variáveis com o tempo e dos parâmetros de amortecimento baseia-se, essencialmente, em dados experimentais, sendo grande a distância entre os dados disponíveis e os necessários para a análise numérica"* (Krishna, 1978).

3.2 Equação de movimento.

A equação de Lagrange que descreve o equilíbrio dinâmico de um arranjo de cabos flexíveis em um dado instante t pode ser assim escrita

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{L} = K - \Pi(x) - \int_0^t f_t \dot{x} d\tau \quad (3.2)$$

é a energia total do arranjo de cabos, K é a energia cinética, f_t é o vetor que contém as forças nodais conservativas variáveis com o tempo. x o vetor que contém os deslocamentos nodais livres (veja-se Capítulo 2, pag. 2-4) e $\dot{x}$ a derivada de x em relação ao tempo.

Levando (3.2) em (3.1), vem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) + g(x) - f_t = 0 \quad (3.3)$$

uma vez que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \nabla \Pi(x) = g(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \int_0^t f_t dt$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = f_t$$

A energia cinética K pode ser escrita como

$$K = \sum_{elem} \bar{\kappa}$$

onde $\bar{\kappa}$ é a energia cinética de um elemento de cabo.

Considerando a figura (2.2.1-1) (pag. 2-3, Capítulo 2), seja r um vetor que descreve a trajetória de um ponto qualquer da configuração indeformada do elemento de cabo. Assim,

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \dot{r}^t \rho \alpha \dot{r} d\lambda \quad (3.4)$$

onde ρ é a massa específica do cabo.

Usando as funções de interpolação de Lagrange

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

pode-se escrever

$$r = \eta_1 p + \eta_2 q$$

$$\dot{r} = \eta_1 \dot{p} + \eta_2 \dot{q} = N^t v$$

onde

$$N^t = [\eta_1 \quad \eta_2]$$

Considerando α e ρ constantes no elemento, a equação (3.4) pode ser reescrita

$$\bar{\kappa} = \frac{\rho \alpha \lambda}{4} \int_{-1}^1 v^t N^t N v d\xi \quad (3.5)$$

onde (veja-se Cap. 2, pag. 2-4)

$$v^t = [\dot{p} \quad \dot{q}] = [\dot{x}_{o1} \quad \dot{x}_{o1} \quad \dot{x}_{o2} \quad \dot{x}_{o4} \quad \dot{x}_{o5} \quad \dot{x}_{o6}]$$

$$d\xi = \frac{\lambda}{2} d\lambda$$

Derivando (3.5) em relação a v e integrando em ξ , vem

$$\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial v} = \bar{M} v$$

onde

$$\bar{M} = \frac{\rho \alpha \lambda}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é chamada matriz de massa consistente do elemento de cabo.

Assim, (3.3) pode ser reescrita como

$$M \ddot{x} + g(x) - f_t = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$M = \sum_{elem.} \bar{M}$$

3.3 Modos e frequências naturais de cabos flexíveis.

As frequências e modos naturais de vibração de um arranjo de cabos flexíveis (para pequenas oscilações em torno de uma configuração de equilíbrio estático) podem ser obtidas pela formulação linearizada descrita a seguir.

3.3.1 Equação de movimento linearizada.

Na ausência de forças nodais variáveis com o tempo a equação (3.6) se reduz a

$$M \ddot{x} + g(x) = 0 \quad (3.7)$$

Seja x^* o vetor que descreve uma configuração de equilíbrio estático. Expandindo $g(x)$ em série de Taylor, vem

$$g(x) = g(x^*) + H(x^*) (x - x^*) + r \quad (3.8)$$

onde

$$H(x^*) = \nabla[\nabla\Pi(x^*)]^t$$

é a matriz Hessiana da energia potencial total, avaliada no ponto x^* , e r o vetor correspondente ao truncamento da série.

Se x for *suficientemente próximo* de x^* (pequenas oscilações) então (3.8) pode ser reescrita

$$g(x) \simeq H(x^*) (x - x^*) \quad (3.9)$$

uma vez que $g(x^*) = 0$ (equilíbrio estático) e o vetor r tende a zero com $x \rightarrow x^*$.

Levando (3.9) em (3.7), vem

$$M \ddot{x} + H(x^*) (x - x^*) = 0 \quad (3.10)$$

Fazendo

$$d = x - x^*$$

$$\ddot{d} = \ddot{x}$$

e levando em (3.10), vem

$$M \ddot{d} + H(x^*) d = 0 \quad (3.11)$$

Como M é definida positiva a solução da equação diferencial (3.11) é equivalente à solução do problema de auto-valores

$$\omega^2 M d = H(x^*) d \quad (3.12)$$

onde ω é uma frequência natural da rede de cabos e d o modo (auto-vetor) associado.

3.3.2 Matriz Hessiana para o elemento de dois nós.

Para um elemento, tem-se (veja-se Cap. 2, pag. 2-4)

$$\bar{\pi} = \alpha \lambda \int_0^\epsilon \sigma(\tau) d\tau$$

$$\nabla \bar{\pi} = \alpha \lambda \sigma(\epsilon) \nabla \epsilon$$

$$\bar{H} = \nabla(\nabla \bar{\pi})^t = \alpha \lambda \{ \nabla[\sigma(\epsilon)](\nabla \epsilon)^t + \sigma(\epsilon) \nabla(\nabla \epsilon)^t \} \quad (3.13)$$

A função $\sigma(\epsilon)$ depende do modelo de deformação adotado e da relação constitutiva do material (veja-se Apêndice A). Admitindo (veja-se Apêndice A) que $\sigma(\epsilon) = \beta \epsilon$, então

$$\bar{H} = \alpha \beta \lambda (\bar{G} + \epsilon \bar{L}) \quad (3.14)$$

onde

$$\bar{G} = (\nabla \epsilon)(\nabla \epsilon)^t$$

$$\bar{L} = \nabla(\nabla \epsilon)^t$$

Lembrando que (Cap. 2, pag. 2-5), para um elemento, o vetor $\nabla \epsilon$ tem no máximo seis componentes não nulas,

$$\nabla \epsilon = (\gamma_{x_1} \ \gamma_{x_2} \ \gamma_{x_3} \ -\gamma_{x_1} \ -\gamma_{x_2} \ -\gamma_{x_3})$$

então

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & -\bar{G}_{11} & -\bar{G}_{12} & -\bar{G}_{13} \\ \bar{G}_{12} & \bar{G}_{22} & \bar{G}_{23} & -\bar{G}_{21} & -\bar{G}_{22} & -\bar{G}_{23} \\ \bar{G}_{13} & \bar{G}_{23} & \bar{G}_{33} & -\bar{G}_{31} & -\bar{G}_{23} & -\bar{G}_{33} \\ -\bar{G}_{11} & -\bar{G}_{21} & -\bar{G}_{31} & \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} \\ -\bar{G}_{12} & -\bar{G}_{22} & -\bar{G}_{23} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{22} & \bar{G}_{23} \\ -\bar{G}_{13} & -\bar{G}_{23} & -\bar{G}_{33} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{23} & \bar{G}_{33} \end{bmatrix}$$

com

$$\bar{G}_{ij} = \gamma_{x_i} \ \gamma_{x_j} = \bar{G}_{ji}$$

A matriz $\bar{L}$, também simétrica, é dada por

$$l_{ij} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_{o_j}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

e tem a mesma estrutura que a matriz $\bar{G}$, com

$$l_{11} = \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_1}} \left[\cos \eta + \frac{x_{o_4} - x_{o_1}}{\lambda} \right] + \frac{(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}}{\lambda^2}$$

$$l_{22} = \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_2}} \left[\cos \gamma + \frac{x_{o_5} - x_{o_2}}{\lambda} \right] + \frac{(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}}{\lambda^2}$$

$$l_{33} = \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_3}} \left[\cos \xi + \frac{x_{o_6} - x_{o_3}}{\lambda} \right] + \frac{(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}}{\lambda^2}$$

$$l_{12} = \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_2}} \left[\cos \eta + \frac{x_{o_4} - x_{o_1}}{\lambda} \right]$$

$$l_{13} = \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_3}} \left[\cos \eta + \frac{x_{o_4} - x_{o_1}}{\lambda} \right]$$

$$l_{23} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \delta)^{-\frac{3}{2}}}{\lambda} \frac{\partial \delta}{\partial x_{o_3}} \left[\cos \gamma + \frac{x_{o_6} - x_{o_2}}{\lambda} \right]$$

onde

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_{o_1}} = -2(\lambda)^{-1} [\cos \eta + \lambda^{-1}(x_{o_4} - x_{o_1})]$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_{o_2}} = -2(\lambda)^{-1} [\cos \gamma + \lambda^{-1}(x_{o_6} - x_{o_2})]$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_{o_3}} = -2(\lambda)^{-1} [\cos \xi + \lambda^{-1}(x_{o_6} - x_{o_3})]$$

3.3.3 Exemplos.

Nos exemplos apresentados a seguir o problema de auto-valores (eq. 3.12) foi resolvido pelo método de Jacobi generalizado.

Exemplo 3.3.3-1 : Um cabo flexível tem comprimento indeformado igual a 8,0622 metros e está livremente suspenso entre dois pontos nivelados (na horizontal) distantes entre si 8,0 metros. O peso do cabo é 7.75N/m e a área da seção transversal $\alpha = 1,0\text{cm}^2$. A relação constitutiva é linear com $\beta = 9810,0\text{kN/cm}^2$.

A menor frequência natural (para pequenas oscilações em torno do equilíbrio estático) associada a um modo assimétrico é dada por (Veletsos et al.,1983)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_c}} \quad \text{rd/s}$$

onde L é a distância entre pontos de fixação, T é a resultante horizontal da tensão axial no cabo, $T = 0,1451\text{kN}$, e ρ_c é a massa específica do cabo por unidade de comprimento do vão

$$\rho_c = \frac{7,75 \times 8,0622}{8,0 \times 9,81} = 0,796 \text{ kg/m}$$

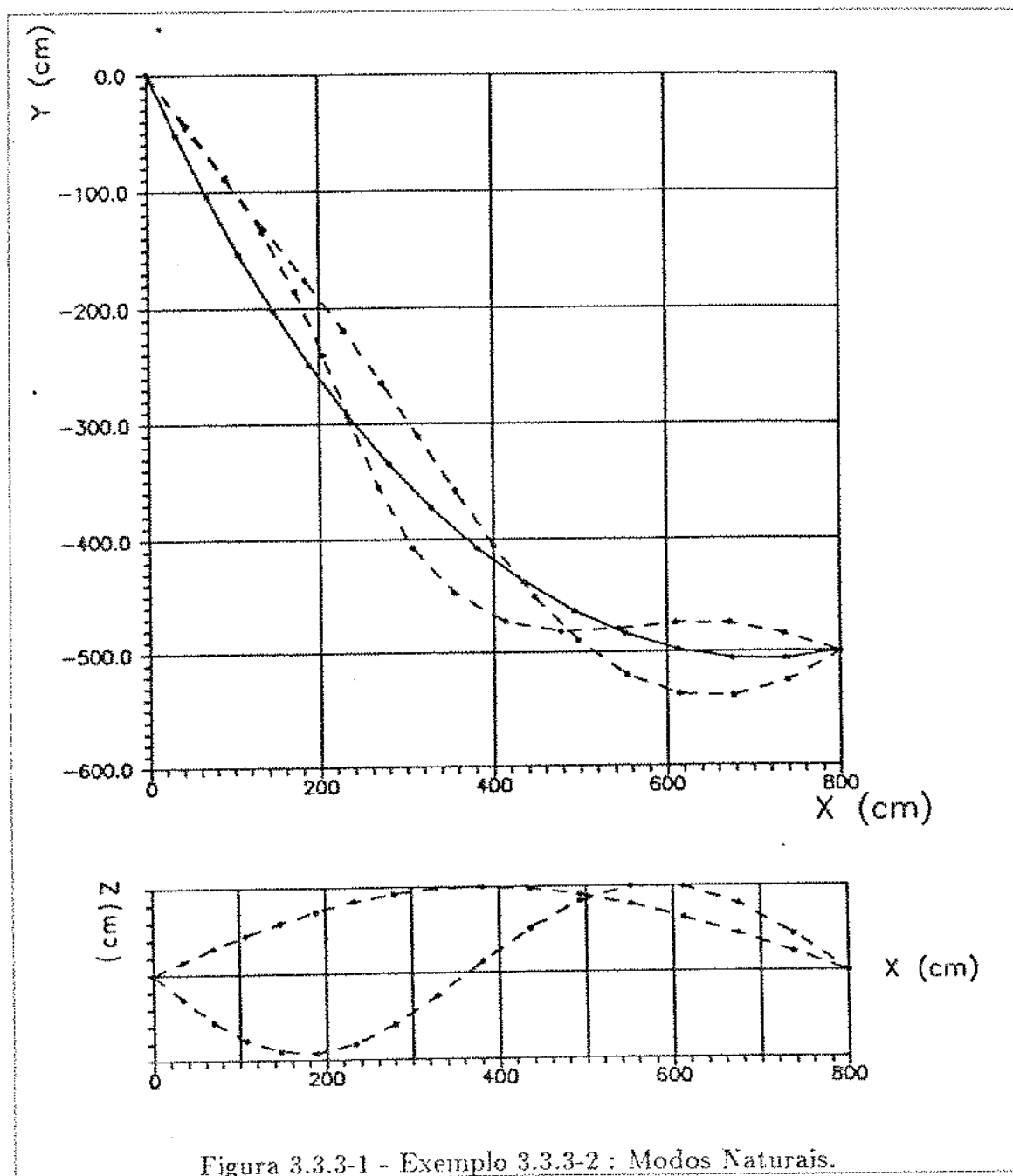
O valor de ω_1 calculado pela expressão analítica acima é $\omega_1 = 1,04930\text{rd/s}$.

O cabo foi discretizado com 16 elementos de dois nós. Na configuração de equilíbrio estático a flecha (deslocamento vertical do ponto central) é 0,3728 metros. O valor encontrando para a menor frequência (resolvendo a equação (3.12)) foi $\omega_1 = 1,05099\text{rd/s}$ (erro : 0,15 % em relação à solução analítica apresentada pelos autores acima citados).

Exemplo 3.3.3-2 : O cabo livremente suspenso mostrado na figura (3.3.3-1) tem comprimento indeformado igual a 10,0 metros, área da seção transversal igual a $1,0\text{cm}^2$ e

está submetido a uma ação gravitacional uniformemente distribuída ao longo do comprimento de $98,1 \text{ kN/m}$. A relação constitutiva é linear com $\beta = 9810 \text{ kN/cm}^2$. O cabo tem as extremidades fixas nos pontos (0,0) metros e (8,-5) metros. O plano (x,y) é o plano do papel.

Henghold e Russel(1976) determinaram as quatro primeiras freqüências naturais do cabo usando oito elementos parabólico de três nós, matriz de massa consistente e deformação quadrática (Green, veja-se Apêndice A). Os resultados apresentados pelos dois autores são comparados na Tabela (3.3.3-1) com os obtidos discretizando-se o cabo com 16 elementos de dois nós.



-	$(\omega_z)_1$	$(\omega_z)_2$	$(\omega_{xy})_1$	$(\omega_{xy})_2$
Henghold	2,7151	5,4246	4,8782	7,7553
Este trabalho	2,6883	5,3379	4,7805	7,5038

Tabela 3.3.3-1 : freqüências naturais (rad/s).

É interessante observar que a solução analítica é um limitante inferior das soluções aproximadas obtidas com elementos finitos.

A figura (3.3.3-1) mostra os modos associados às quatro primeiras freqüências. Dois modos estão contidos no plano (x,y) e dois em planos ortogonais ao plano (x,y).

3.4 Freqüências naturais e protensão.

A introdução de forças de protensão em redes de cabos flexíveis aumenta sua rigidez, alterando, portanto, suas freqüências naturais de vibração.

A determinação dos modos e freqüências naturais de vibração de uma rede protendida pode ser feita introduzindo-se pequenas alterações na formulação apresentada no item anterior (3.3). A partir da expressão modificada da deformação (item 2.6, Cap. 2) pode-se deduzir a expressão da matriz Hessiana da energia potencial total que considera os alongamentos de protensão. As novas expressões para as matrizes $\bar{G}$ e $\bar{L}$ (eq. 3.13) são obtidas fazendo-se as substituições indicadas na Tabela (3.4-1).

λ	por	$(\lambda - \mu)$
$(x_{o4} - x_{o1})$	por	$(x_{o4} - x_{o1} + \mu \cos \eta)$
$(x_{o5} - x_{o2})$	por	$(x_{o5} - x_{o2} + \mu \cos \gamma)$
$(x_{o6} - x_{o3})$	por	$(x_{o6} - x_{o3} + \mu \cos \xi)$

Tabela 3.4-1

nas expressões deduzidas no item (3.3) deste capítulo.

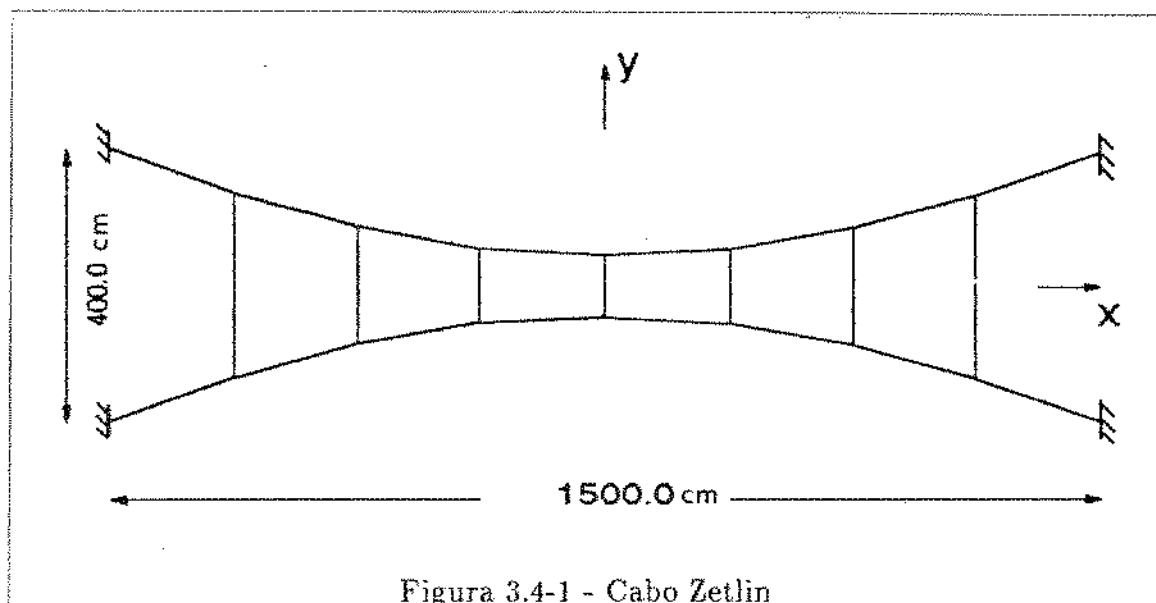
Como, em geral, o alongamento de protensão μ é pequeno em relação ao comprimento indeformado do elemento, a matriz de massa M pode ser considerada invariante com a protensão. A equação (3.12) mantém, então, a mesma forma.

Exemplo 3.4-1 : A figura (3.4-1) mostra um cabo-treliça do tipo Zetlin com as seguintes características:

- na configuração indeformada os cabos superior e inferior são descritos por parábolas com relação flecha/vão igual a 1/10;
- os montantes são igualmente espaçados na horizontal;
- seção transversal do cabo superior = $2,5 \text{ cm}^2$;
- seção transversal do cabo inferior = $1,5 \text{ cm}^2$;
- seção transversal dos montantes = $1,0 \text{ cm}^2$;
- módulo de Young = $14715,0 \text{ kN / cm}^2$;
- forças gravitacionais permanentes de $2,49 \text{ kN}$ aplicadas nos nós do cabo superior;
- as dimensões na figura estão em centímetros.

Na configuração de equilíbrio estático (para as forças nodais acima descritas) o cabo inferior e os cabos verticais de ligação se afrouxam, ficando submetidos somente à ação de seu peso próprio. Nestas circunstâncias, os cabos frouxos deixam de contribuir para o equilíbrio global restando-lhes a função de atuar como estabilizadores do cabo superior em caso de inversão do sentido das ações nodais (vento, por exemplo). As forças de protensão introduzem tensões iniciais de tração em todos os cabos e, dependendo de seu valor, impedem o afrouxamento de um ou mais deles quando o conjunto é submetido a ações externas.

A protensão pode ser introduzida pelo alongamento do cabo superior (e/ou inferior) ou pelo alongamento dos montantes. Neste caso optou-se pelo alongamento dos montantes. A Tabela (3.4.1-1) mostra a variação das quatro primeiras frequências naturais do cabo-treliça (para pequenas oscilações em torno do equilíbrio estático) quando se varia o parâmetro c que representa a fração entre o alongamento de um elemento vertical e seu comprimento indeformado.



Deve-se observar que só foram consideradas frequências associadas a modos contidos no plano (x,y) uma vez que esses esquemas estruturais são empregados em arranjos paralelos interligados por elementos adicionais tais como contraventamentos, terças, etc.

c	w_1	w_2	w_3	w_4
0.01	1,100	1,666	2,323	2,936
0.02	1,489	2,205	3,113	3,886
0.05	2,347	3,267	4,850	5,616

Tabela 3.4.1-1 : frequências Naturais (rad/s).

A figura (3.4-2) mostra o modo associado à menor frequência natural.

Para cada nível de protensão as quatro frequências naturais foram determinadas considerando-se somente a massa dos cabos ($\rho = 7,89 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$). As forças aplicadas nos nós do cabo superior podem representar o peso do material de revestimento

(quando o cabo treliça é usado para estruturas de cobertura) cujo valor é, em geral, muito superior ao peso do cabo e atua sobre ele de maneira quase uniforme. Para avaliar a influência da massa do material de revestimento nos valores das frequências naturais o peso próprio do cabo superior (e, portanto, sua massa) foi alterado de modo a incluir o peso do material de cobertura

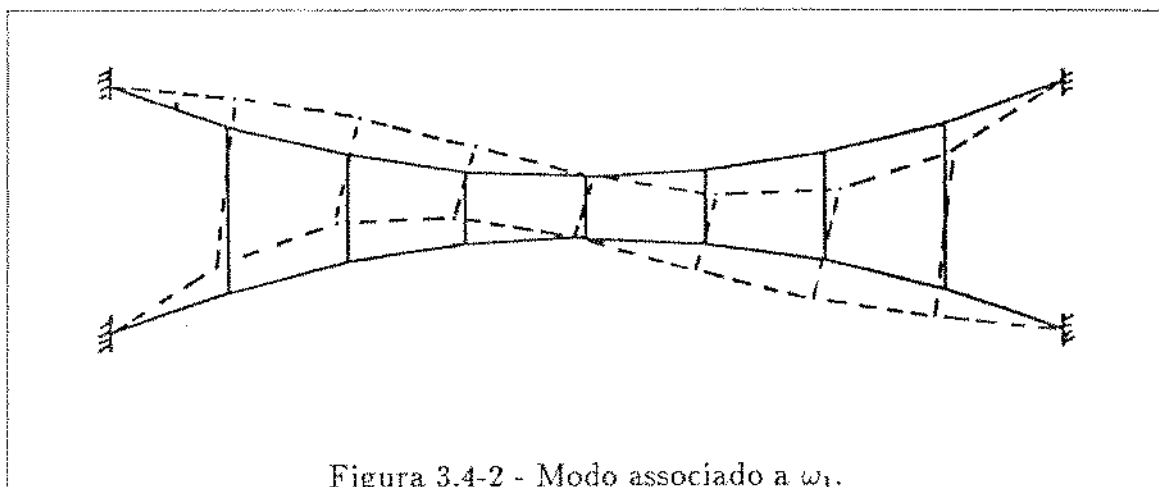


Figura 3.4-2 - Modo associado a ω_1 .

$$p_{c.s.} = 19,37 + \frac{7 \times 2490,0}{15,0} = 1182,1 \text{ N/m}$$

$$\rho_{c.s.} = \frac{1182,1}{2,5 \times 9,81 \times 100} = 0,482 \text{ kg/cm}^2$$

As quatro primeiras frequências para $c = 0,02$ são mostradas na tabela (3.4.1-2).

c	w_1	w_2	w_3	w_4
0.02	0.266	0.394	0.579	0.732

Tabela 3.4.1-3: frequências Naturais (rad/s).

Exemplo 3.4-2 : A rede em parabolóide hiperbólico da figura (3.4-3) tem planta quadrada com lado 90,0 pol. (2,28 m) e geratrizes retas com inclinação (na configuração indeformada) igual a $1/8$. Os cabos têm seção transversal igual a $0,0125 \text{ pol}^2$ ($8,1 \text{ mm}^2$) e pesam 0,0026 lb/pol. (0,455 N/m).

Gambhir e Batchelor (1977) determinaram a frequência fundamental da rede para pequenas oscilações em torno de uma configuração de equilíbrio estático em que as resultantes horizontais das tensões nos cabos (peso próprio e protensão) valem 200,0 libras (890 N). Os cabos têm comportamento elástico linear com $\beta = 10 \times 10^6 \text{ psi}$ ($69 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$).

A rede foi discretizada com 24 elementos de dois nós. Para reproduzir (aproximadamente) a condição de equilíbrio imposta pelos autores citados o algoritmo de protensão

automática (Cap. 2, item 2.6.3) foi usado para determinar os valores dos alongamentos necessários em todos os elementos da rede ($\epsilon \geq 0.0016$). A frequência fundamental encontrada com esta hipótese foi $\omega_1 = 31,27 Hz$, enquanto Gambhir e Batchelor apresentam o valor $\omega_1 = 31,48 Hz$ (0,67 % de diferença).

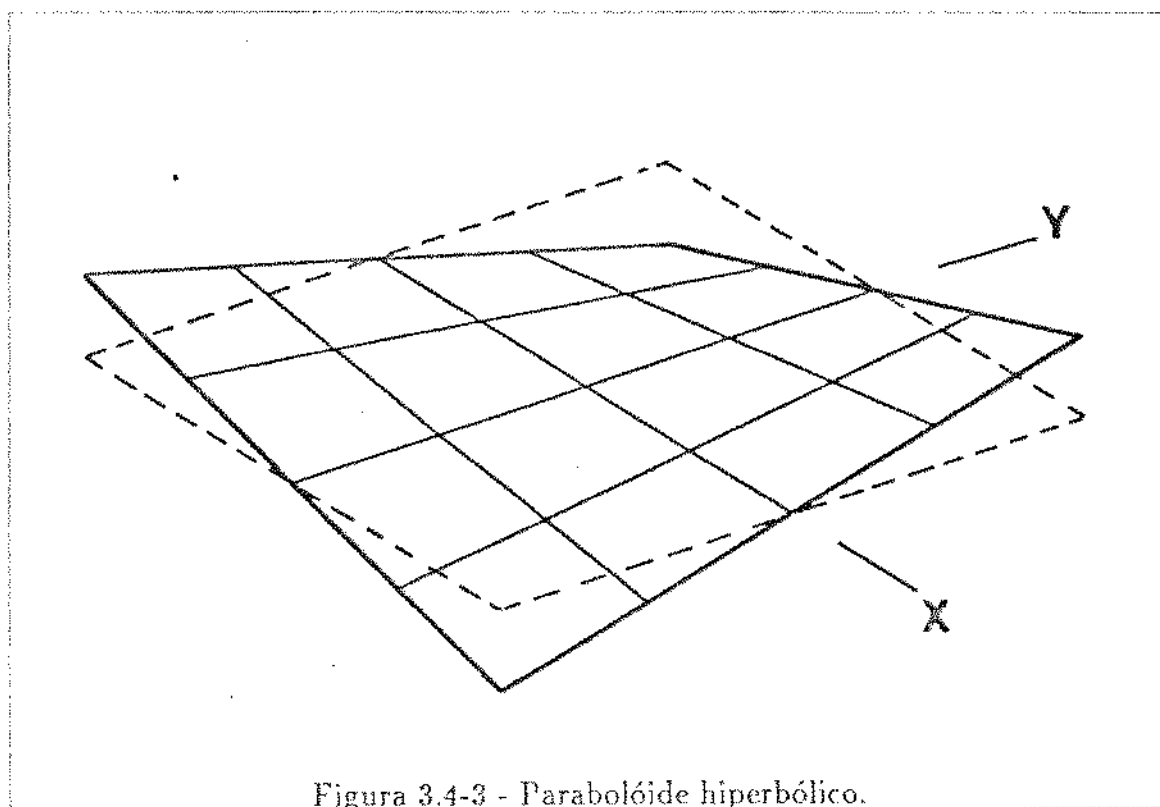


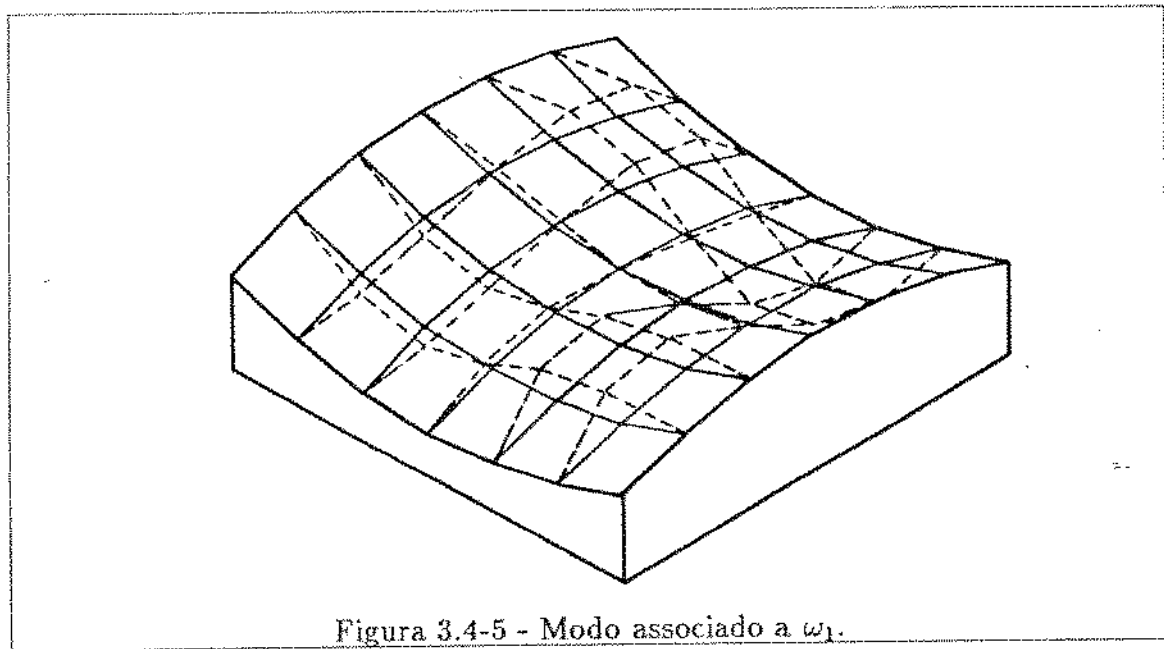
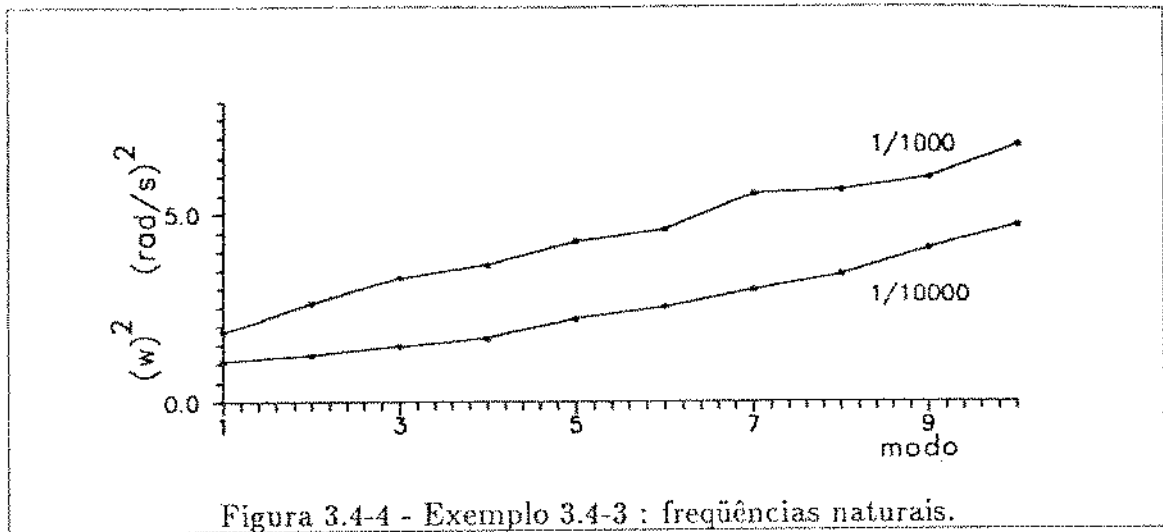
Figura 3.4-3 - Parabolóide hiperbólico.

Uma outra alternativa estudada para simular a citada condição de equilíbrio estático foi a imposição de alongamentos de protensão em cada cabo (admitindo pequenas as deformações devidas ao peso próprio) de modo a garantir a resultante horizontal de 200.0 libras. O valor encontrado para a frequência fundamental foi $\omega_1 = 31,52 Hz$ (0,14 % de diferença).

Exemplo 3.4-3 : O algoritmo de protensão automática foi usado para determinar os alongamentos de protensão necessários para que os cabos da rede em parabolóide hiperbólico do *Exemplo 2.6.2-1* (Cap. 1, pag. 2-19) tenham deformação mínima igual a 1/10000 e 1/1000, quando atuam as ações descritas naquele exemplo.

A figura (3.4-4) mostra a variação do quadrado das dez primeiras frequências naturais quando a deformação mínima prescrita passa de 1/10000 para 1/1000. É interessante observar que a influência da protensão é mais acentuada nas menores frequências.

Na figura (3.4-5) apresenta-se o modo associado à menor frequência natural (linhas tracejadas) para pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio estático (linhas contínuas).



3.5 Equilíbrio dinâmico não amortecido.

Pretende-se obter soluções aproximadas para o problema de valor inicial

$$M \ddot{x} + g(x) - f_t = 0 \quad (3.15)$$

com as condições iniciais

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

A resposta dinâmica pode ser obtida por integração direta da equação (3.15) (análise no domínio do tempo) ou por superposição modal (análise no domínio das frequências). A análise modal tem uma série de vantagens sobre os métodos de integração no tempo

mas sua aplicação restringe-se a modelos lineares (ou quase lineares). Como *não se tem claramente estabelecida a validade da aplicação da superposição modal na análise dinâmica de redes flexíveis* (Buchholdt,1985), neste trabalho optou-se por algoritmos para integração numérica no domínio do tempo.

Apresentam-se, a seguir, duas alternativas para a obtenção de soluções aproximadas da equação (3.15). Um algoritmo explícito, baseado no método de Newmark (1959), e um algoritmo implícito via minimização do trabalho potencial dinâmico total (Buchholdt e Moossavinejad,1982).

3.5.1 Esquema *predictor-corrector* explícito.

A equação (3.15) pode ser integrada numericamente com o seguinte procedimento baseado no método de Newmark :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta_1 \right) \ddot{x}_t + \beta_1 \ddot{x}_{t+\Delta t} \right] \quad (3.16)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \Delta t \left[(1 - \beta_2) \ddot{x}_t + \beta_2 \ddot{x}_{t+\Delta t} \right] \quad (3.17)$$

Um esquema do tipo *predictor-corrector* pode ser montado a partir da equação de equilíbrio no tempo $t + \Delta t$, modificada

$$M \tilde{x}_{t+\Delta t} + \tilde{g}_{t+\Delta t} = f_t(t + \Delta t) \quad (3.18)$$

onde

$$\tilde{g}_{t+\Delta t} = g(\tilde{x}_{t+\Delta t})$$

Com os valores preditos para deslocamentos e velocidades

$$\tilde{x}_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta_1 \right) \ddot{x}_t$$

$$\dot{\tilde{x}}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \Delta t (1 - \beta_2) \ddot{x}_t$$

calcula-se a aceleração usando (3.18) e corrige-se os valores preditos com

$$x_{t+\Delta t} = \tilde{x}_{t+\Delta t} + \Delta t^2 \beta_1 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{\tilde{x}}_{t+\Delta t} + \Delta t \beta_2 \ddot{x}_{t+\Delta t}.$$

Estabelece-se, então, o seguinte algoritmo:

dados $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 = M^{-1}[f(0) - g(x_0)]$, Δt , $t = 0$

passo 1 :

$$\tilde{x}_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta_1 \right) \ddot{x}_t$$

$$\dot{\tilde{x}}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \Delta t (1 - \beta_2) \ddot{x}_t$$

passo 2 :

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = M^{-1}[f(t + \Delta t) - g(\tilde{x}_{t+\Delta t})]$$

passo 3 :

$$x_{t+\Delta t} = \hat{x}_{t+\Delta t} + \Delta t^2 \beta_1 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{\hat{x}}_{t+\Delta t} + \Delta t \beta_2 \ddot{x}_{t+\Delta t}.$$

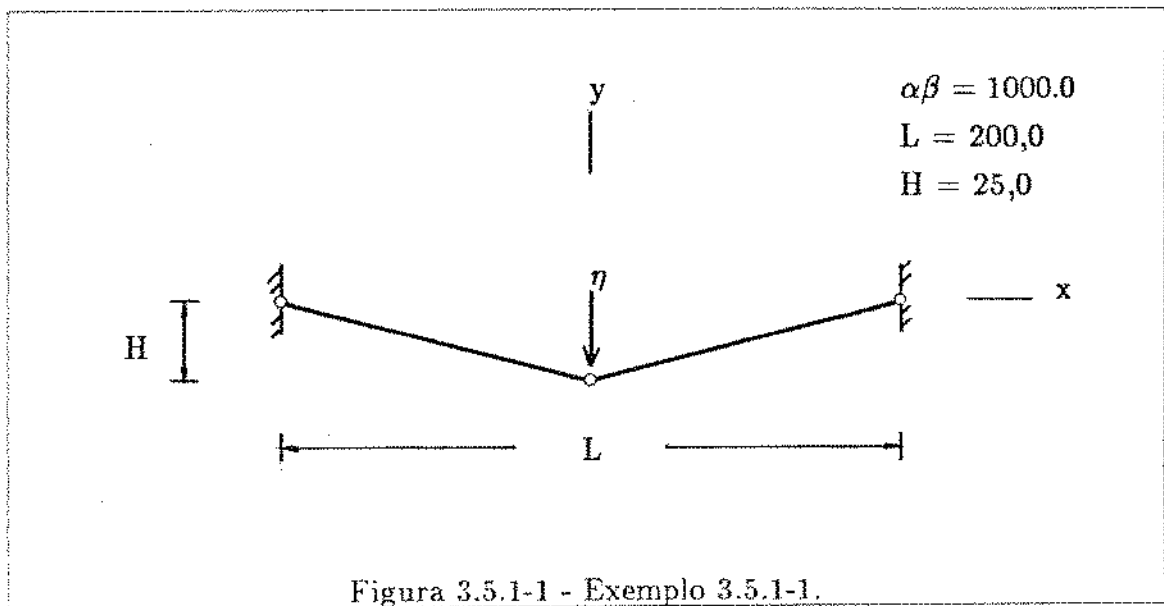
passo 4 :

$$t = t + \Delta t$$

vá para o passo 1

A proposta original de Newmark inclui um processo iterativo no *passo 2* de modo a garantir que a aceleração prevista para o instante $t + \Delta t$ coincida (a menos de uma tolerância numérica) com a aceleração calculada usando (3.18).

Exemplo 3.5.1-1 : Para pequenos valores da força η , a treliça da figura (3.5.1-1) apresenta relação linear entre a força e o deslocamento vertical do nó central, ν .



Nestas condições, pode-se associar o comportamento da treliça ao comportamento de um sistema massa-mola (linear) com equilíbrio dinâmico dado por

$$m \ddot{u} + k u = \nu(t) \quad (3.19)$$

onde m é o valor da massa, k o coeficiente da mola linear e $\nu(t)$ a fonte excitadora. Se $\nu(t) = \nu_0 \cos \omega t$ a solução de (3.19) é dada por

$$u(t) = u_0 - \frac{\nu_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t) \quad (3.20)$$

onde ω_0 é a frequência natural da mola ($\omega_0 = (k/m)^{\frac{1}{2}}$).

A frequência natural e o termo da matriz de massa associados ao deslocamento vertical do nó central da treliça são

$$\omega_0 = 1,2887 \text{ rad/s} \quad ; \quad m_v = 0.68718$$

(estes valores foram obtidos com as formulações descritas no ítem (3.4) deste capítulo).

Admitindo-se que a fonte excitadora tenha amplitude $\nu_0 = 0,5$ e frequência $\omega = 5,0 \text{ rad/s}$, apresentam-se, na Tabela (3.5.1-1), os valores da coordenada y do nó central da treliça obtidos com a equação (3.20) e com o algoritmo *predictor-corrector* com $\Delta t = 0,001 \text{ s}$. Todos os valores são adimensionais.

t (s)	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
eq. (3.20)	-25,0	-25,0133	-24,0401	-25,0531	-25,0364	-24,9998
pred. corr.	-25,0	-25,0133	-25,0401	-25,0531	-25,0363	-24,9997

Tabela 3.5.1-1 : Exemplo 3.5.1-1, resultados.

Exemplo 3.5.1-2 : Um cabo tem comprimento indeformado 1,0 e tem, no instante $t = 0$, as extremidades fixas em dois pontos nivelados distantes entre si 0,881. Tem-se $\alpha\beta = 500,0$ e $\rho g = 1,0$.

No instante $t = 0,0$ a extremidade direita do cabo é solta e ele passa a oscilar livremente sob ação de seu peso próprio, sem resistência do ar ou amortecimento.

A figura (3.5.1-2) mostra as configurações do cabo entre os instantes $t = 0,0$ e $t = 3,6$ segundos, a intervalos de 0,4 segundos. O algoritmo explícito foi usado para integrar a equação de movimento, com $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,50$ e $\Delta t = 0,001 \text{ s}$.

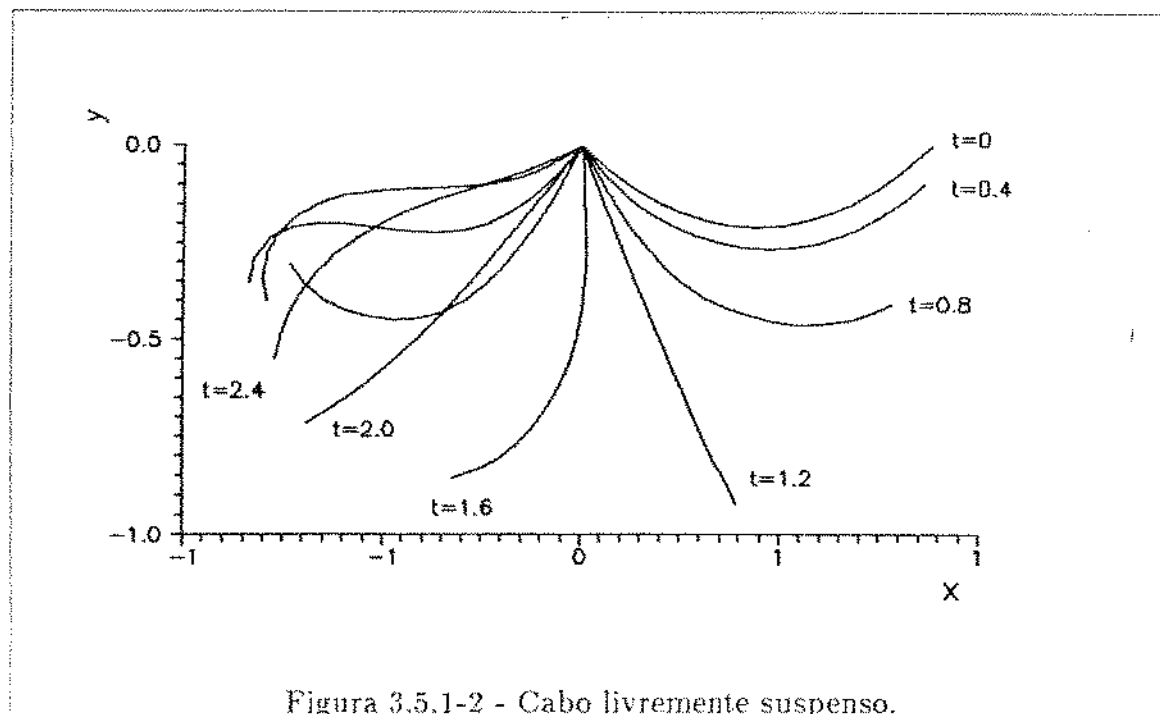


Figura 3.5.1-2 - Cabo livremente suspenso.

Este problema foi estudado por Coyette e Guisset, 1988 e Fried, 1982. Os autores não apresentam resultados numéricos mas as configurações por eles apresentadas para os mesmos instantes t mostrados na figura (3.5.1-2) são bastante semelhantes.

Exemplo 3.5.1-3 : Para avaliar a influência da protensão na resposta dinâmica do cabo-treliça do Exemplo (3.4-1) aplica-se ao nó de ordenada $x = -375,0\text{cm}$ do cabo inferior a ação nodal $f_t(t) = -0,981 \cos \omega t \text{ kN}$, na direção y, com frequência $\omega = 2,0 \text{ rd/s}$.

A figura (3.5.1-3) mostra a variação da coordenada y do nó de ordenada $x = 375,0\text{cm}$ do cabo inferior para os três níveis de protensão estudados (veja-se Exemplo (3.4-1)).

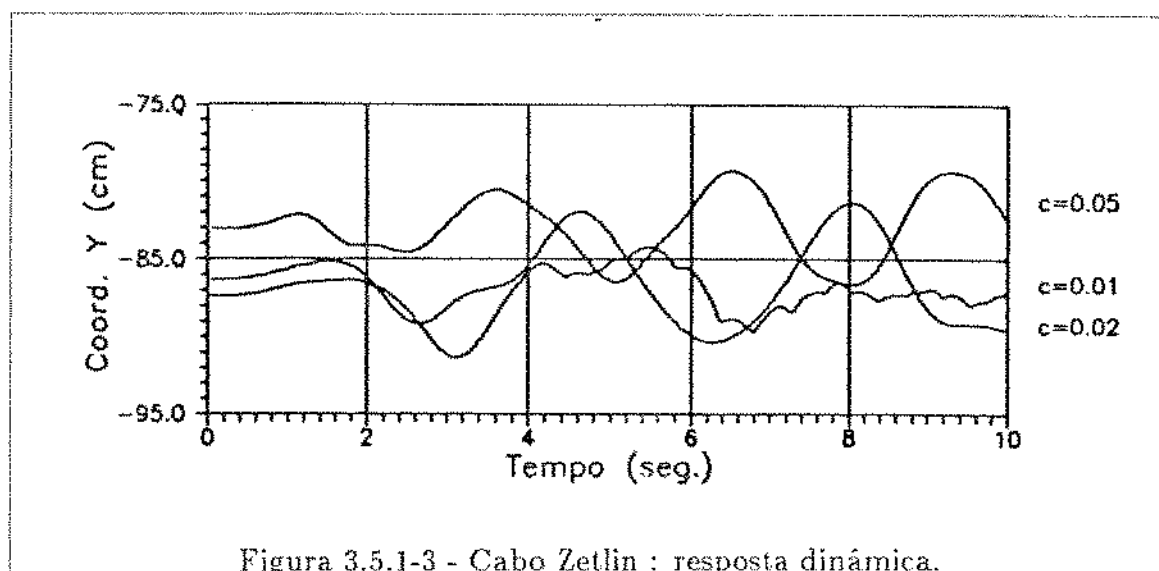


Figura 3.5.1-3 - Cabo Zetlin : resposta dinâmica.

Para a fonte excitadora acima especificada ocorre afrouxamento do cabo inferior e das ligações verticais para o nível de protensão $c=0,01$. Os resultados apresentados na figura (3.5.1-3) foram obtidos *desligando-se* os elementos comprimidos sempre que $\epsilon < 0$. Para $c=0,02$ e $c=0,05$ nenhum elemento se afrouxa no intervalo (0,10) segundos.

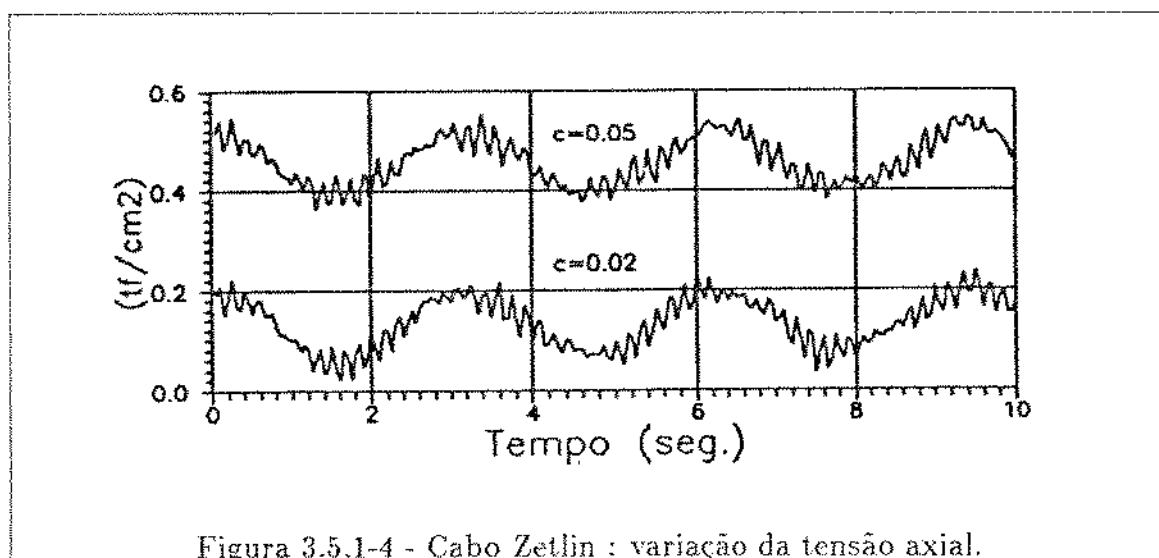


Figura 3.5.1-4 - Cabo Zetlin : variação da tensão axial.

A resposta foi determinada com os parâmetros $\beta_1 = 0,25$; $\beta_2 = 0,50$ e para um incremento de tempo $\Delta t = 0,002$ segundos. A ação dinâmica é aplicada na configuração de equilíbrio estático para as ações estáticas indicadas no exemplo (3.4-1) com os três

níveis de protensão adotados.

A figura (3.5.1-4) mostra a variação da tensão axial na segunda ligação vertical (a partir da esquerda) para os níveis de protensão $c=0,02$ e $c=0,05$.

Exemplo 3.5.1-4 : O nó central do parabolóide hiperbólico do Exemplo (2.6.2-1) é excitado, na configuração de equilíbrio estático, por uma força $f_t(t) = -0,49 \cos \omega t$ kN com frequência $\omega = 1,0$ rad/s, aplicada na direção z. A figura (3.5.1-5) mostra a variação da coordenada z do nó para os dois níveis de protensão adotados ($\epsilon \geq 1/10000$ e $\epsilon \geq 1/1000$).

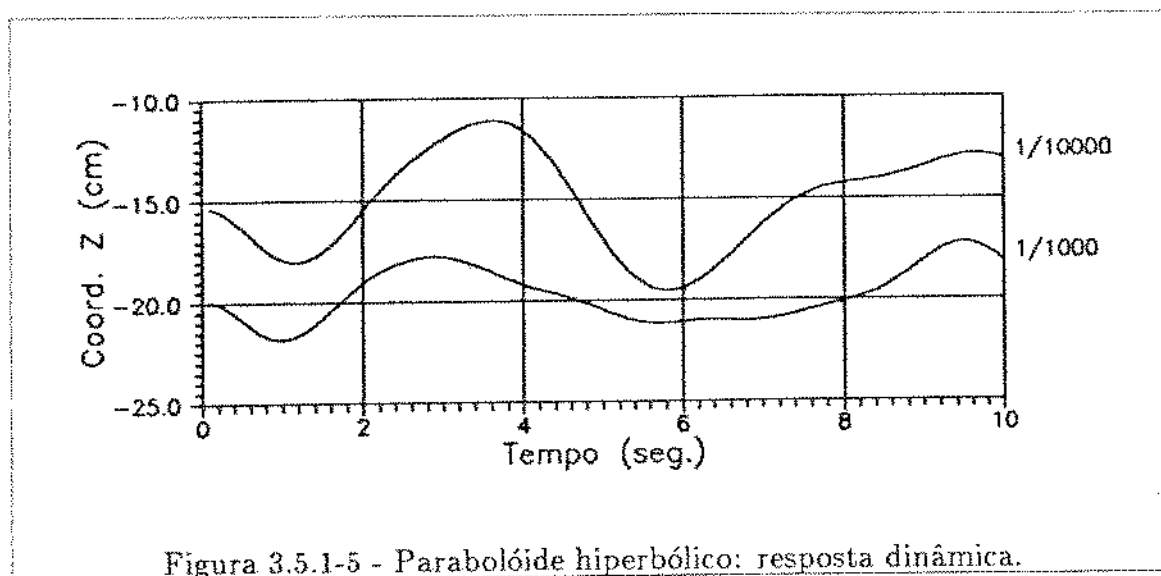


Figura 3.5.1-5 - Parabolóide hiperbólico: resposta dinâmica.

É interessante observar a redução da amplitude dos deslocamentos nodais com o aumento do nível de protensão.

Se a amplitude da fonte excitadora for aumentada de 0,49 kN para 0,981 kN ocorre afrouxamento dos cabos tensores (concavidade para baixo) no instante $t = 0,78$ s quando o nível de protensão garante $\epsilon \geq 1/10000$ (veja-se o Exemplo 2.6.2-1).

As frequências naturais da rede associadas ao deslocamento vertical do nó central são $\omega = 1,59$ rad/s ($\epsilon \geq 1/10000$) e $\omega = 2,04$ rad/s ($\epsilon \geq 1/1000$).

No algoritmo explícito adotou-se $\beta_1 = 0,25$; $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,01$ segundos.

A obtenção de soluções aproximadas para a equação de movimento por integração no domínio do tempo permite determinar, para uma dada excitação dinâmica, se um ou mais elementos de uma rede protendida se afrouxam, deixando de contribuir para o equilíbrio do conjunto. É importante ressaltar, no entanto, que a formulação apresentada neste trabalho não permite descrever corretamente o comportamento da rede após o afrouxamento de um ou mais elementos. O *desligamento* temporário de elementos (usado para traçar a curva $c=0,01$ da figura (3.5.1-3)) é um procedimento matematicamente incorreto tanto em análise estática quanto em análise dinâmica. Nos dois casos, esse desligamento é equivalente a introduzir irregularidades na função Energia Potencial Total não permitidas pelas hipóteses básicas dos algoritmos para obtenção de mínimos aqui utilizados. Além disso, no caso de análise dinâmica a trajetória dos

nós adjacentes ao elemento *desligado* fica indeterminada.

Esses problemas podem ser teoricamente resolvidos aumentando-se o número de elementos de cabo entre dois nós principais da rede. Por exemplo, o cabo superior do cabo-treliça da figura (3.4-1) tem apenas um elemento entre os pontos de fixação das ligações verticais, onde estão aplicadas as forças nodais externas. Se forem usados dois ou mais elementos para discretizar o mesmo trecho, aplicando-se nos novos nós forças nodais que representem o peso próprio do cabo, qualquer tentativa de aproximação dos nós principais fará com que o trecho de cabo entre eles se comporte como cabo livremente suspenso (sujeito somente ao peso próprio).

A solução sugerida no parágrafo anterior pode, entretanto, esbarrar em problemas numéricos nos algoritmos computacionais em virtude da grande diferença normalmente existente entre o valor do peso próprio dos cabos e o valor das ações nodais principais (em geral, peso do material de cobertura, sobrecargas ou ação estática do vento).

3.5.2 Trabalho potencial dinâmico total.

Nos algoritmos explícitos para integração da equação (3.15) os deslocamentos nodais no instante $(t + \Delta t)$ são calculados em função dos valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações nodais no instante (t) e com uma hipótese sobre o comportamento das acelerações nodais no intervalo $(t, t + \Delta t)$ (os valores dos parâmetros β_1 e β_2 dependem da hipótese feita). A estabilidade dos algoritmos explícitos depende, além de outros fatores, do valor do intervalo de integração Δt .

Nos algoritmos implícitos os deslocamentos nodais no instante $(t + \Delta t)$ são determinados como solução da equação de equilíbrio dinâmico no próprio instante $(t + \Delta t)$. A equação discreta de equilíbrio depende, novamente, de uma hipótese sobre o comportamento das acelerações nodais no intervalo e dos valores (supostos conhecidos) dos deslocamentos, velocidades e acelerações nodais no instante (t) . Para modelos não lineares o sistema de equações de equilíbrio é um sistema algébrico não linear.

Os algoritmos implícitos são, em geral, mais estáveis, permitindo a adoção de valores maiores para o incremento de tempo Δt . Esta característica pode ser adequada (e econômica) quando a análise da resposta dinâmica de um modelo estrutural deve ser feita durante um período de tempo relativamente grande. Este pode ser o caso, por exemplo, da ação dinâmica do vento sobre edificações (Buchholdt, 1985).

Descreve-se, a seguir, um algoritmo implícito em que os deslocamentos nodais no instante $(t + \Delta t)$ são obtidos como um ponto de mínimo da função trabalho potencial dinâmico total (Hughes, 1978).

Uma expressão aproximada para $\tilde{x}$ em (3.15) pode ser obtida explicitando-se $\tilde{x}_{t+\Delta t}$ em (3.16)

$$\tilde{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta_1} (x_{t+\Delta t} + a) \quad (3.21)$$

onde

$$a = -[x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta_1) \ddot{x}_t].$$

Substituindo (3.21) em (3.15) vem

$$\frac{1}{\Delta t^2 \beta_1} M(x_{t+\Delta t} + a) + g(x_{t+\Delta t}) - f_t(t + \Delta t) \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) será idênticamente nula para qualquer configuração x que no instante $t + \Delta t$ minimize o funcional (Hughes, 1978)

$$\mathcal{F}(x_{t+\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t^2 \beta_1} M\left(\frac{1}{2}x_{t+\Delta t} + a\right) \cdot x_{t+\Delta t} + \Pi(x_{t+\Delta t}) - f_t(t + \Delta t) \cdot x_{t+\Delta t} + \text{const} \quad (3.23)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao funcional dado em (3.23) é a equação de equilíbrio dinâmico (3.22). Assim, uma configuração $x_{t+\Delta t}$ que minimize (3.23) satisfaz (aproximadamente) (3.15) no instante $t + \Delta t$.

No programa para computador desenvolvido para a resolução dos exemplos apresentados, o mínimo de (18) foi obtido com o algoritmo quase-Newton descrito no item (2.4.2) (Cap. 2).

É interessante observar que uma configuração que anula (3.22) não necessariamente é um ponto de mínimo de (3.23).

Pode-se, então, estabelecer o seguinte algoritmo:

dados $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 = M^{-1}[f(0) - g(x_0)]$, Δt , $t = 0$

passo 1 :

$$x_{t+\Delta t} \quad \text{t.q.} \quad \mathcal{F}(x_{t+\Delta t}) = \min \mathcal{F}(x_{t+\Delta t})$$

passo 2 :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{t+\Delta t} &= (x_{t+\Delta t} + a) / \Delta t^2 / \beta_1 \\ \dot{x}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_t + \Delta t [(1 - \beta_2) \ddot{x}_t + \beta_2 \ddot{x}_{t+\Delta t}] \end{aligned}$$

passo 3 :

$$\begin{aligned} t &= t + \Delta t \\ &\text{vá para o passo 1} \end{aligned}$$

Exemplo 3.5.2-1 : A treliça do Exemplo (3.5.1-1) foi analisada com o algoritmo implícito acima descrito. Como o funcional (3.23) não é resultado da integração de (3.22) (e, portanto, não é a expressão real do trabalho potencial dinâmico total) o algoritmo quase-Newton foi montado, para a análise dinâmica, com dois esquemas de busca linear: um que se vale do valor da função (3.23) e de sua derivada (3.22) (cf. Lasdon, 1970), e outro que utiliza apenas os valores da derivada (método da falsa posição). Os resultados obtidos com os dois tipos de busca linear são apresentados na Tabela (3.5.2-1), juntamente com os resultados analíticos e com os resultados obtidos com o algoritmo explícito. Nas duas versões do algoritmo implícito adotou-se $\beta_1 = 0,25$; $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,01$ segundos (incremento de tempo dez vezes maior que o usado no algoritmo explícito!).

t (seg.)	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
eq. (3.20)	-25,0	-25,0133	-24,0401	-25,0531	-25,0364	-24,9998
<i>explícito</i>	-25,0	-25,0133	-25,0401	-25,0531	-25,0363	-24,9997
<i>implícito A</i>	-25,0	-25,0133	-25,0401	-25,0531	-25,0363	-24,9997
<i>implícito B</i>	-25,0	-25,0133	-25,0400	-25,0531	-25,0363	-24,9997

Tabela 3.5.2-1 : Exemplo 3.5.2-1, resultados.

Na tabela, *implícito A* é o método quasi-Newton com busca linear avaliando o valor da função e de sua derivada, e *implícito B* se refere à busca linear somente com valores das derivadas (veja-se Apêndices B e D).

Exemplo 3.5.2-2 : O Exemplo (3.5.1-3) foi resolvido com o algoritmo implícito (tipo A). Usou-se $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,015$ segundos. A figura (3.5.2-1) mostra os resultados encontrados (linhas contínuas: Exemplo (3.5.1-3); (marcas: algoritmo implícito do tipo A). Foram analisados os níveis de protensão $c=0,02$ e $c=0,03$.

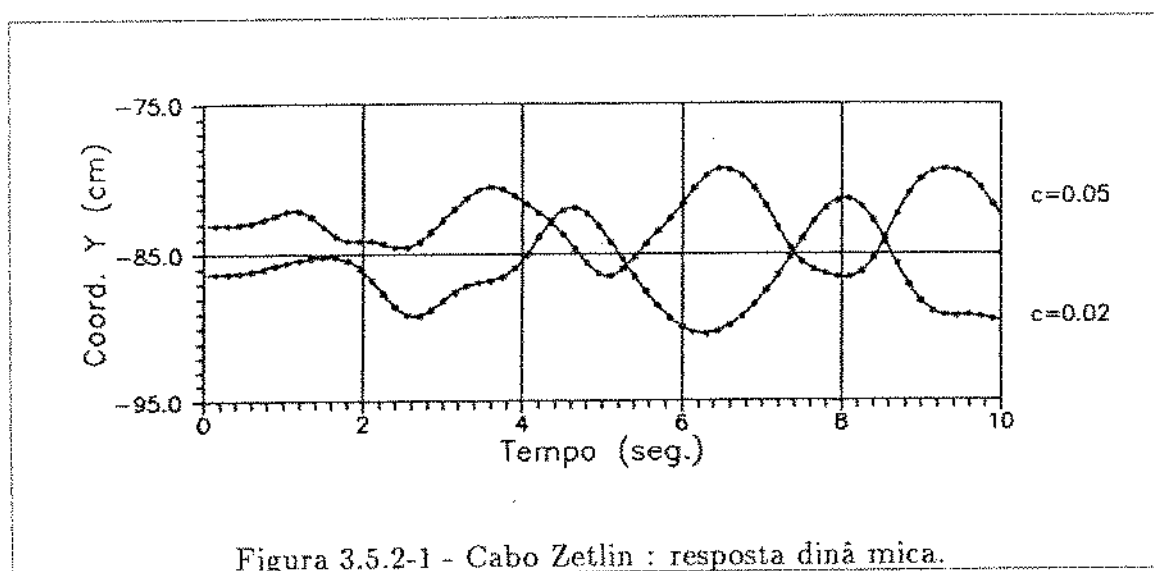


Figura 3.5.2-1 - Cabo Zetlin : resposta dinâmica.

Exemplo 3.5.2-3 : No nó de coordenadas $(x=5, y=-10)$ da rede em parabolóide hiperbólico do Exemplo (3.5.1-4) aplica-se uma excitação dada por $f_t(t) = -0,981 \cos \omega t$ kN ($\omega = 1,0$ rad/s) na direção z. Na Tabela (3.5.2-2) apresentam-se os tempos computacionais para análise da rede em uma estação SUN SPARC 1+ ,no intervalo (0,10) segundos. O algoritmo implícito é comparado com o método de Newmark (original).

Para o método de Newmark usou-se $\Delta t = 0,01$ segundos e no algoritmo implícito $\Delta t = 0,04$ segundos. As tolerâncias indicadas na tabela referem-se ao processo iterativo em acelerações do algoritmo de Newmark (veja-se item 3.5.1) e à norma do gradiente do trabalho potencial dinâmico total no caso do algoritmo implícito.

Os tempos são indicados em minutos, segundos e décimos de segundo e, para cada tolerância, apresenta-se o valor da coordenada z do nó $(x=5, y=-10)$ no instante $t = 10,0$ segundos. As tolerâncias são $\text{tol1} = 0,01$; $\text{tol2} = 0,001$ e $\text{tol3} = 0,0001$.

Método	tol1	coord. z	tol2	coord. z	tol3	coord. z
Newmark	1:28.0	-101.008	1:56.9	-101.008	2:25.9	-101.008
Implícito	0:53.9	-100.715	1:39.5	-101.050	2:22.7	-101.016

Tabela 3.5.2-2 : Exemplo 3.5.2-3, resultados.

A integração da equação de movimento pela minimização do trabalho dinâmico potencial total com o emprego de um algoritmo quase-Newton mostrou-se, nos exemplos analisados, uma alternativa promissora. Como ocorre com outros métodos implícitos, sua aplicabilidade depende, também, da frequência da fonte excitadora e, em certa medida, do número de incógnitas envolvidas.

3.6 Vibrações livres amortecidas.

Pretende-se obter soluções aproximadas para o problema de valor inicial

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + g(x) = 0 \quad (3.24)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

onde C é chamada matriz de amortecimento viscoso (proporcional às velocidades nodais) e o vetor f_t (veja-se eq. 3.15) é identicamente nulo.

Para um elemento, supondo conhecida uma distribuição de amortecimento $\phi(\xi)$ ao longo do elemento, a matriz de amortecimento pode ser escrita

$$\bar{C} = \int_{-1}^1 \phi(\xi) N^t N d\xi \quad (3.25)$$

onde N é o vetor que contém as funções de interpolação de Lagrange (veja-se eq. (3.5)).

Em situações reais, a determinação da função $\phi(\xi)$ é impraticável (Clough et al., 1975). Por esse motivo, o amortecimento é geralmente modelado com base em experimentações feitas em modelos ou estruturas reais semelhantes à que se pretende analisar.

Admitindo, em primeira aproximação, que a função $\phi(\xi) = \phi$ seja conhecida e constante ao longo do elemento, a matriz $\bar{C}$ pode ser escrita

$$\bar{C} = \phi \int_{-1}^1 N^t N d\xi \quad (3.26)$$

e, para um arranjo de cabos,

$$C = \sum_{elem.} \bar{C} \quad (3.27)$$

3.6.1 Algoritmo predictor-corrector explícito.

O algoritmo descrito no item (3.5.1) pode ser usado para a obtenção de soluções aproximadas de (3.24), alterando-se o cálculo da aceleração no instante $t = 0$

$$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 = -M^{-1}[g(x_0) + C\dot{x}_0]$$

e o passo 2

passo 2 :

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = -M^{-1}[g(\tilde{x}_{t+\Delta t}) + C\dot{x}_{t+\Delta t}]$$

Exemplo 3.6.1-1 : O deslocamento vertical do nó central da treliça do Exemplo (3.5.1-1) é quase linear com a carga η e, se $\eta \leq 0,1$, o coeficiente de proporcionalidade é $k = 1,1468$. A frequência natural (na configuração indeformada) associada ao deslocamento vertical do nó central é $\omega = 40,75$ rad/s e, portanto, a componente de amortecimento crítico (segundo o modelo acima descrito) associada a esse deslocamento é dada por

$$c_c = 2 m \omega = 0,056$$

onde $m = 6,8718 \times 10^{-4}$.

Um sistema (linear) massa-mola-amortecedor com as características acima descritas tem deslocamento da massa dado por

$$x(t) = e^{-\frac{c}{c_c}\omega t} \left[\frac{\dot{x}(0) + x(0)\frac{c}{c_c}\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x(0) \cos \omega_D t \right] \quad (3.28)$$

onde

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \frac{c}{c_c}}$$

As figuras (3.6-1a,b,c,d) mostram o valor da coordenada y do nó central, no intervalo (0–1,0) s, calculado com o algoritmo *predictor-corrector* (marcas) e com a equação (3.28) (linhas contínuas) para amortecimentos iguais a 0 %, 2 %, 5 % e 10 % do amortecimento crítico c_c . As condições iniciais são $\dot{x}(0) = 0,0$ e $x(0) = -0,1$. No algoritmo explícito usou-se $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,001$.

Para uma carga estática $\eta = 0,1$ a coordenada y do nó central vale $y = -25,0872$. Se as condições iniciais do problema dado pela equação (3.24) forem $\dot{x}(0) = 0,0$ e $x(0) = 0,0$, com uma razão de amortecimento de 20% a coordenada y no instante $t = 1,0$ s coincide com o valor estático, $y = -25,0872$.

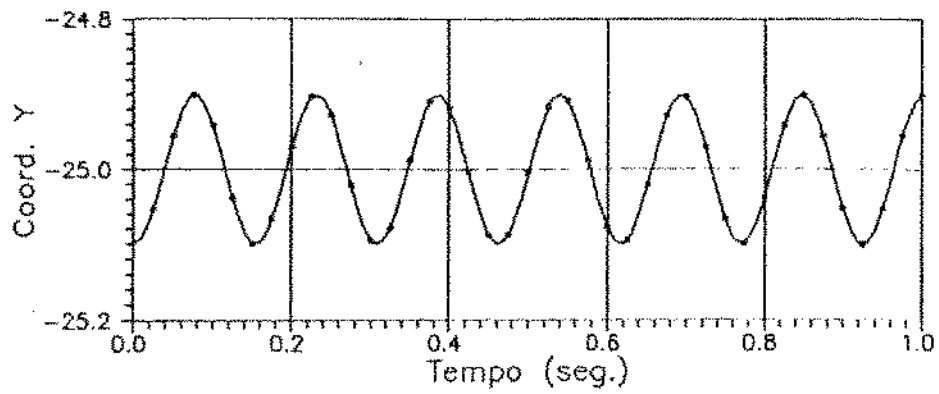


Figura 3.6-1a : Razão de amortecimento 0%.

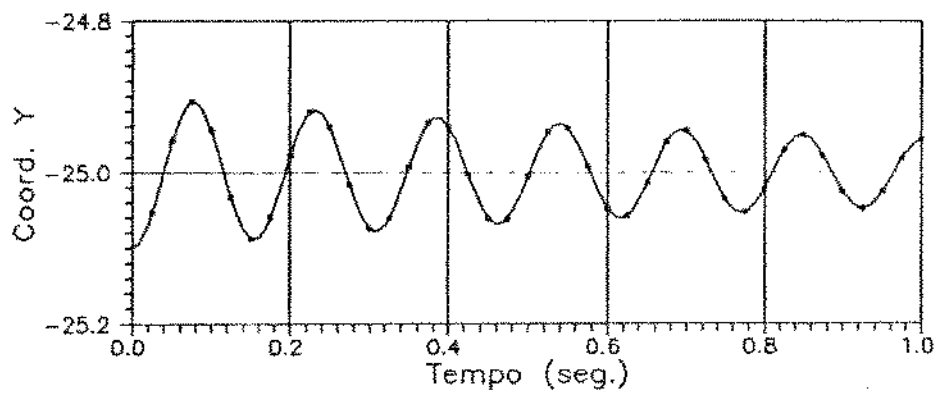


Figura 3.6-1b : Razão de amortecimento 2%.

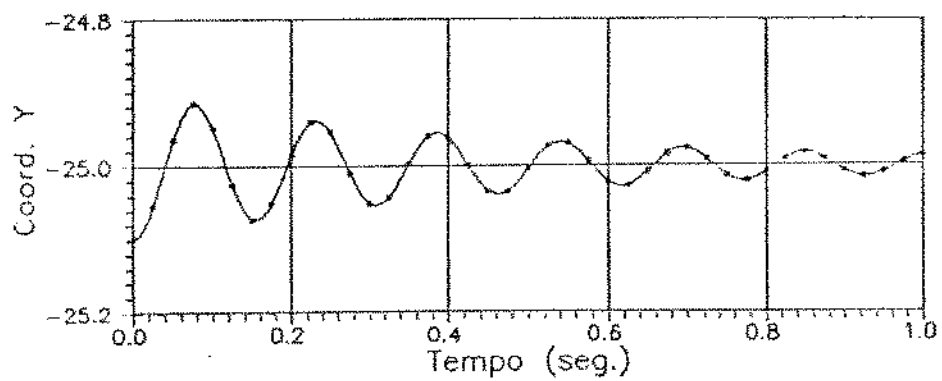
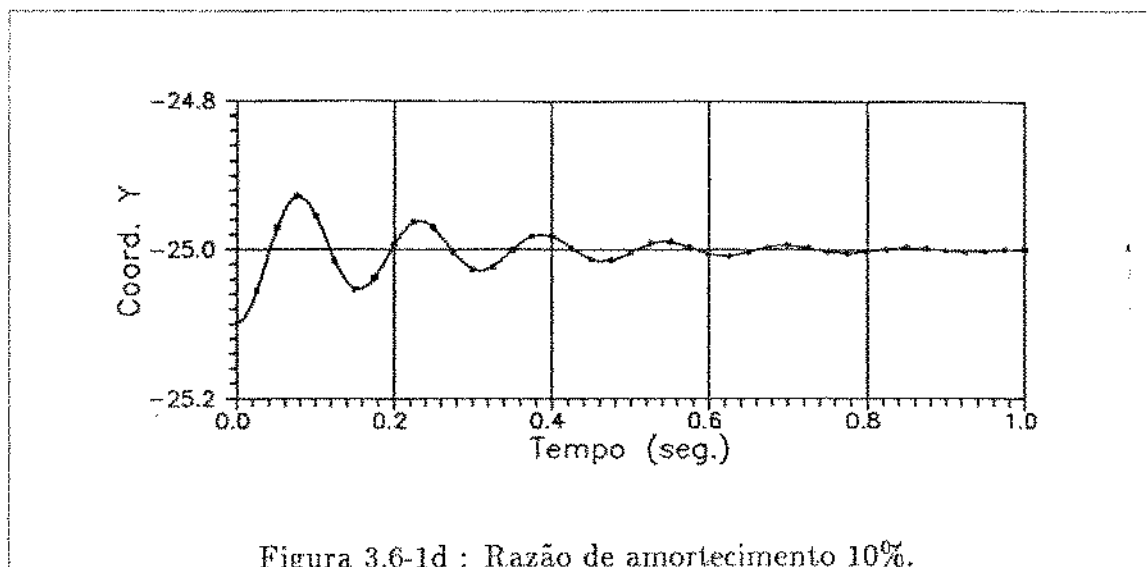


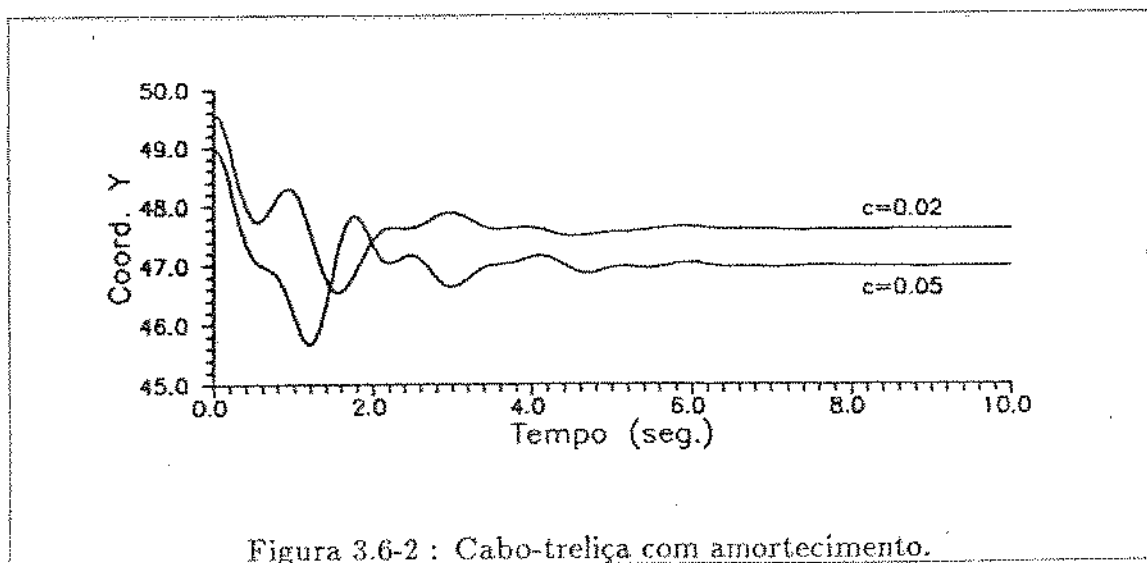
Figura 3.6-1c : Razão de amortecimento 5%.



Exemplo 3.6.1-2 : Imagine-se que o carregamento gravitacional do cabo-treliça do Exemplo (3.4-1) seja aplicado instantaneamente nas configurações de equilíbrio estático que equilibram somente os encurtamentos de protensão.

A figura (3.6-2) mostra a variação da coordenada y do nó central do cabo superior no intervalo $(0,0-10,0)$ s para os níveis de protensão $c=0,02$ e $c=0,05$ (veja-se Exemplo 3.4-1), admitindo-se um coeficiente de amortecimento constante e igual para todos os cabos $\phi = 0,0005$. Os resultados foram obtidos com o algoritmo explícito, com $\beta_1 = 0,25$, $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,002$ s.

A partir do tempo $t = 8,0$ segundos as soluções encontradas para os dois níveis de protensão coincidem (a menos de uma tolerância numérica) com as soluções estáticas correspondentes.



Exemplo 3.6.1-3 : Para verificar a influência da forma de protensão na resposta dinâmica amortecida, o algoritmo de protensão automática (Cap. 2, item 2.6.3) foi usado para determinar os alongamentos de protensão do cabo-treliça do exemplo anterior de modo a garantir as mesmas deformações mínimas obtidas com os alongamentos dos montantes $c=0.02$ ($\epsilon_{min} = 0.0082 \%$) e $c=0.05$ ($\epsilon_{min} = 0.0304 \%$).

Os resultados obtidos (para os mesmos dados e parâmetros do exemplo anterior) são mostrados na figura (3.6-3). Na curva A os deslocamentos verticais do nó central do cabo superior para $\epsilon_{min} = 0.0082 \%$ e na curva B os mesmos deslocamentos para $\epsilon_{min} = 0.0304 \%$.

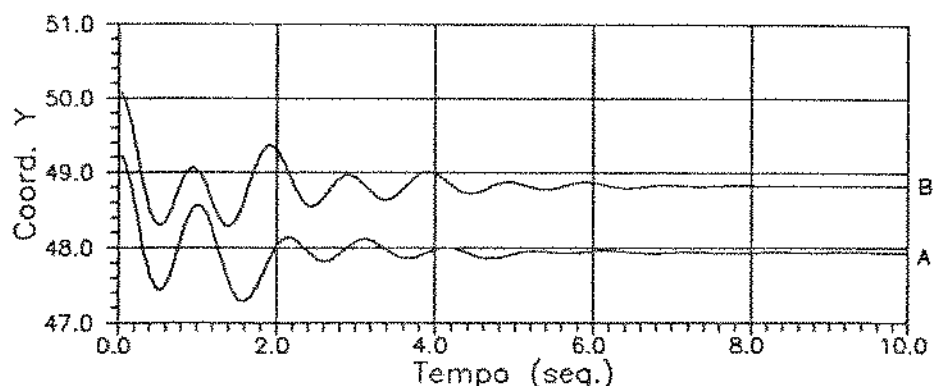


Figura 3.6-3 : Cabo-treliça com amortecimento e protensão automática.

Parece ser possível afirmar que o uso da protensão automática, embora não operacional (porque, em geral, atribui alongamentos a um número elevado de elementos), resulta em um comportamento dinâmico mais regular do cabo-treliça analisado para os dois níveis de protensão impostos.

A utilidade da protensão automática como diretriz para a especificação da protensão necessária em um número pequeno de elementos (procedimento normalmente usado na prática) foi demonstrada nos exemplos (2.6.2-1) e (2.6.3-1) do Capítulo 2.

3.6.2 Algoritmo implícito.

O algoritmo implícito descrito em (3.5.2) pode ser modificado para a obtenção de soluções aproximadas da equação (3.24).

Uma expressão aproximada para $\dot{x}$ em (3.24) pode ser obtida substituindo-se (3.21) em (3.17)

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{\beta_2}{\Delta t \beta_1} (x_{t+\Delta t} + a) + b \quad (3.29)$$

onde

$$b = \dot{x}_t + \Delta t(1 - \beta_2)\ddot{x}_t$$

Levando (3.21) e (3.29) em (3.24), escrita no instante $t + \Delta t$, vem

$$\frac{1}{\beta_1(\Delta t)^2} M(x_{t+\Delta t} + a) + C \left[\frac{\beta_2}{\Delta t \beta_1} (x_{t+\Delta t} + a) + b \right] + g(x_{t+\Delta t}) \quad (3.30)$$

A expressão (3.30) será idênticamente nula para qualquer configuração x que, no instante $t + \Delta t$, minimize o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(x_{t+\Delta t}) = & \frac{1}{\Delta t^2 \beta_1} M \left(\frac{1}{2} x_{t+\Delta t} + a \right) \cdot x_{t+\Delta t} \\ & + C \left[\frac{\beta_2}{\Delta t \beta_1} (x_{t+\Delta t} + c) + r \right] \cdot x_{t+\Delta t} + \Pi(x_{t+\Delta t}) + const \end{aligned} \quad (3.31)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao funcional (3.31) é a equação de equilíbrio dinâmico (3.30) no instante $t + \Delta t$.

Modificando-se a condição inicial em acelerações

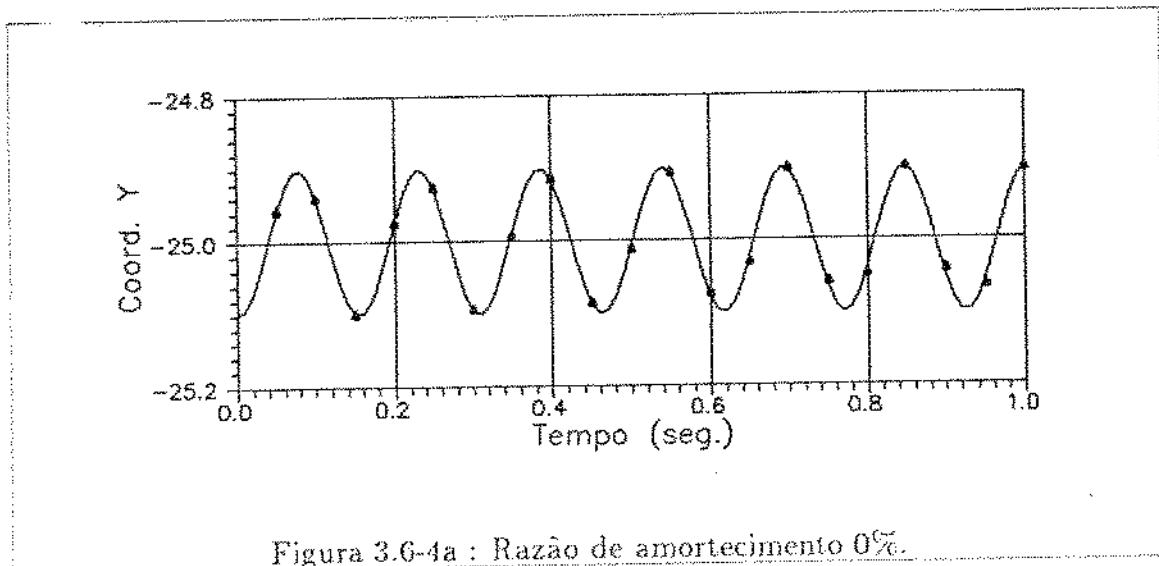
$$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 = -M^{-1} [g(x_0) + C\dot{x}_0]$$

e o funcional minimizado no *passo 1* (que passa a ser o dado pela equação (3.31)), a estrutura do algoritmo da pag. (3-19) se mantém a mesma e aplicável à obtenção de soluções aproximadas para (3.24).

Exemplo 3.6.2-1 : O exemplo (3.6.1-1) foi resolvido com o algoritmo implícito, usando-se os mesmos parâmetros e um intervalo de tempo $\Delta t = 0,005$ segundos (cinco vezes maior que no algoritmo explícito).

Os resultados são mostrados nas figuras (3.6-4a,b,c,d). As linhas contínuas são os resultados obtidos com a equação (3.28) e as marcas os resultados obtidos com o algoritmo implícito.

Para intervalos de tempo maiores que o adotado observa-se um aumento artificial (numérico) do período da oscilação (veja-se, por exemplo, Clough & Penzien, 1975).



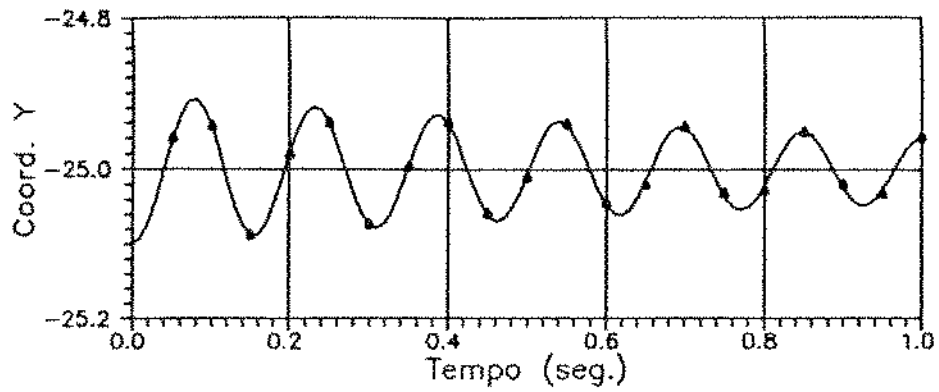


Figura 3.6-4b : Razão de amortecimento 2%.

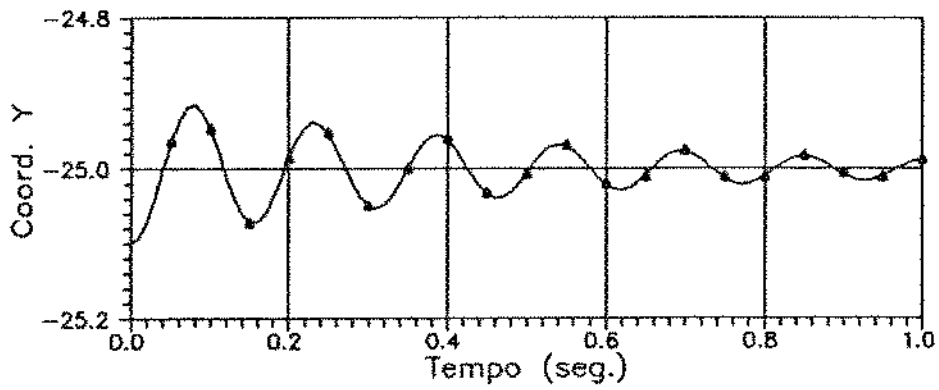


Figura 3.6-4c : Razão de amortecimento 5%.

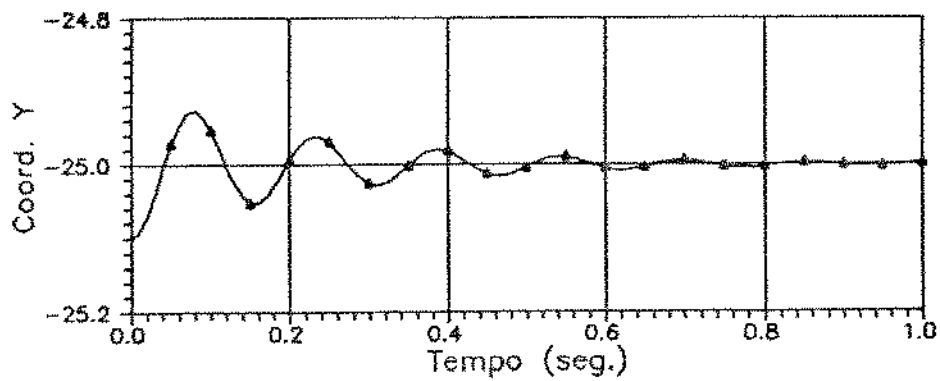


Figura 3.6-4d : Razão de amortecimento 10%.

O exemplo (3.6.1-2) foi resolvido com o algoritmo implícito usando-se um intervalo de tempo $\Delta t = 0,01$ segundos. Os resultados obtidos mostram boa concordância com os encontrados usando-se o algoritmo explícito e um intervalo de tempo cinco vezes menor.

3.7 Vibrações forçadas amortecidas.

Quando estão presentes forças nodais variáveis com o tempo as formulações descritas nas seções (3.5) e (3.6) se combinam e os algoritmos explícito e implícito mantêm as mesmas estruturas descritas nas citadas seções.

Alterando-se a condição inicial em acelerações e o funcional (3.31) de modo a incluir o vetor $f_i(t)$, que contém as forças nodais variáveis com o tempo, obtêm-se algoritmos análogos aos apresentados e que permitem a obtenção de soluções aproximadas para a equação

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + g(x) = f_i(t) \quad (3.32)$$

que descreve o equilíbrio de um arranjo de cabos flexíveis submetido a forças nodais estáticas e/ou forças nodais variáveis com o tempo.

Exemplo 3.7-1 : A rede em parabolóide hiperbólico da figura (2.6.2-1) é submetida, na configuração de equilíbrio estático (com protensão automática garantindo $\epsilon \geq 1/1000$), a uma solicitação dinâmica nodal aplicada no nó central, na direção z, dada por

$$f(t) = f_0 \varphi(t)$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2,5t & \text{se } 0,0 \leq t \leq 0,4 \\ 0,39065(t-2)^2 & \text{se } 0,4 < t \leq 2,0 \end{cases}$$

e $f_0 = -1,962$ kN (veja-se, Buchholdt et al., 1982)

As figuras (3.7-1a,b,c,d) mostram a variação da coordenada z do nó central para amortecimentos ϕ iguais a 0,0 ; 0,0001 ; 0,0002 e 0,0005 .

Os resultados foram obtidos em uma estação SUN SPARC 1+ . A Tabela (3.7-1) mostra os tempos computacionais para os quatro valores de amortecimento usados

ϕ	0.0000	0,0001	0,0002	0,0005
Tempo	12:36.7	12:23.4	11:44.7	9:31.6

Tabela 3.7-1 : Exemplo 3.7-1, resultados.

Os tempos na tabela são indicados em minutos, segundos e décimos de segundo. Foi usado o algoritmo implícito, com $\beta_1 = 0,25$; $\beta_2 = 0,5$ e $\Delta t = 0,01$ s.

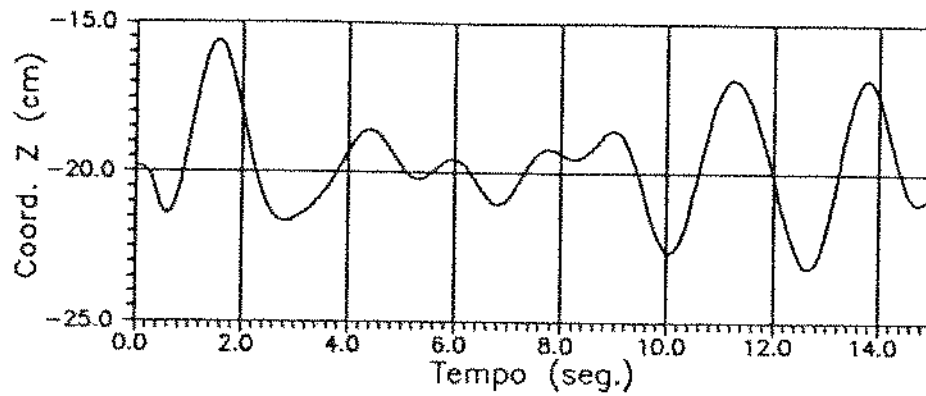


Figura 3.7-1a : Amortecimento $\phi = 0.0$.

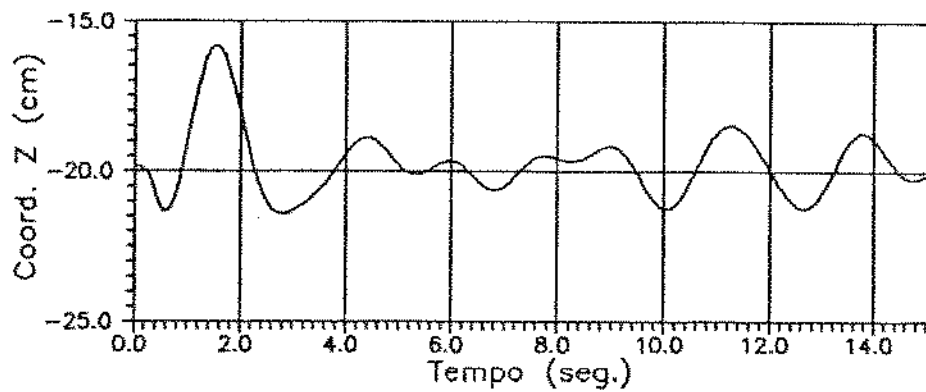


Figura 3.7-1b : Amortecimento $\phi = 0.0001$.

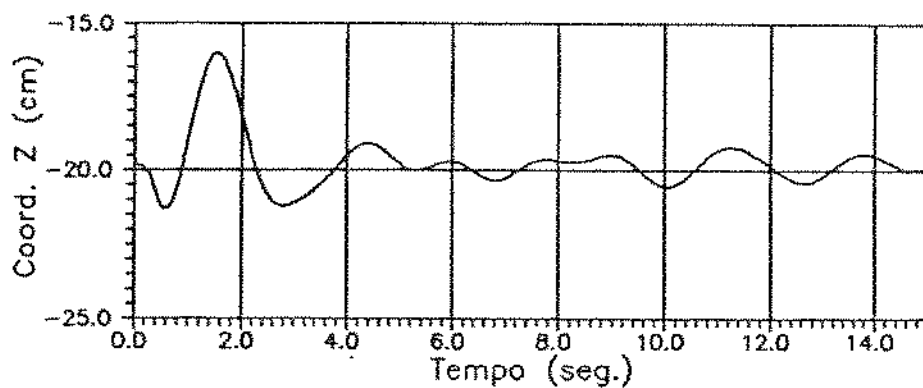


Figura 3.7-1c : Amortecimento $\phi = 0.0002$.

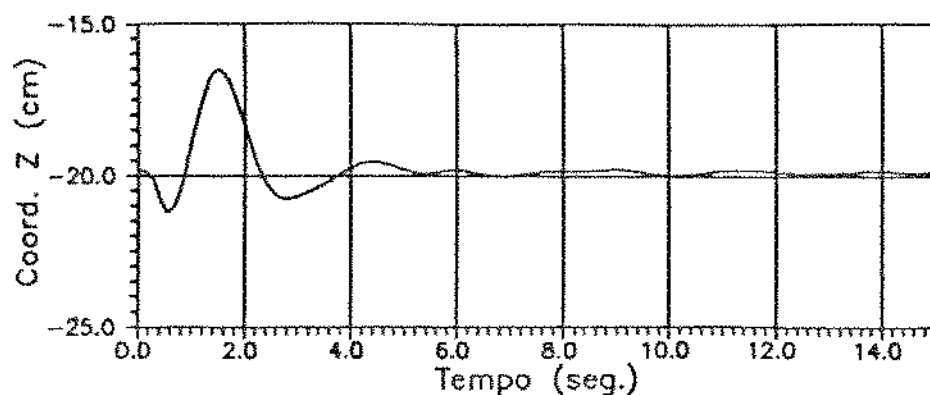


Figura 3.7-1d : Amortecimento $\phi = 0,0005$.

Referências.

- [3-01] - Buchholdt, H.A., *An Introduction to cable roof structures*, Cambridge University Press, 1985.
- [3-02] - Buchholdt, H.A.; Moossavinejad, S., *Nonlinear dynamic response analysis using conjugate gradients*, Engineering Structures, v.4, pp.44-52, 1982.
- [3-03] - Clough, R.W.; Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Book Co., 1975.
- [3-04] - Coyette, J.P.; Guisset, P., *Cable Network Analysis by a Nonlinear Programming Technique*, Engineering Structures, v.10, pp.41-46, 1988.
- [3-05] - Fried, I., *Large deformation static and dynamic finite element analysis of extensible cables*, Computers & Structures, v.15, n.3, pp.315-319, 1982.
- [3-06] - Gambhir, M.L.; Batchelor, V., *A Finite Element for 3-D Prestressed Cablenets*, Int. J. for Num. Methods in Engineering, v.11, pp.1699-1718, 1977.
- [3-07] - Henghold, W.M.; Russel, J.J., *Equilibrium and natural frequencies of cable structures*, Computers & Structures, v.6, pp.267-271, 1976.
- [3-08] - Hughes, T.R.J.; Caughey, T.K.; Liu, W.K., *Finite Element Methods for Nonlinear Elastodynamics Which Conserve Energy*, Journal of Applied Mechanics, v.45, pp.366-369, 1978.
- [3-09] - Krishna, P., *Cable Suspended Roofs*, McGraw-Hill Book Co., 1978.
- [3-10] - Lasdon, L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Co., 1970.
- [3-11] - Newmark, N.M., *A Method of Computation for Structural Dynamics*, Journal of the Eng. Mech. Division, v.85, EM3, pp.67-94, 1959.
- [3-12] - Veletsos, A.S.; Darbre, G.R., *Free Vibrations of Parabolic Cables*, Journal of Structural Engineering, v.109, n.2, pp.503-519, 1983.

Capítulo 4:

Exemplo de Cobertura com Rede de Dupla Curvatura.

4.1 Introdução.

O objetivo deste Capítulo é o de mostrar a aplicação dos procedimentos descritos nos Capítulos 2 e 3 na análise de um exemplo com dimensões e características de um projeto real. A estrutura analisada é uma rede tridimensional protendida, fixada a um anel de borda de concreto armado apoiado sobre pilares de concreto (veja-se seção 4.2). Segundo a classificação apresentada no Capítulo 1 (veja-se seção 1.2.4) a estrutura é um sistema fechado.

A partir das informações básicas apresentadas na seção (4.2), a análise se desenvolve nas seguintes etapas:

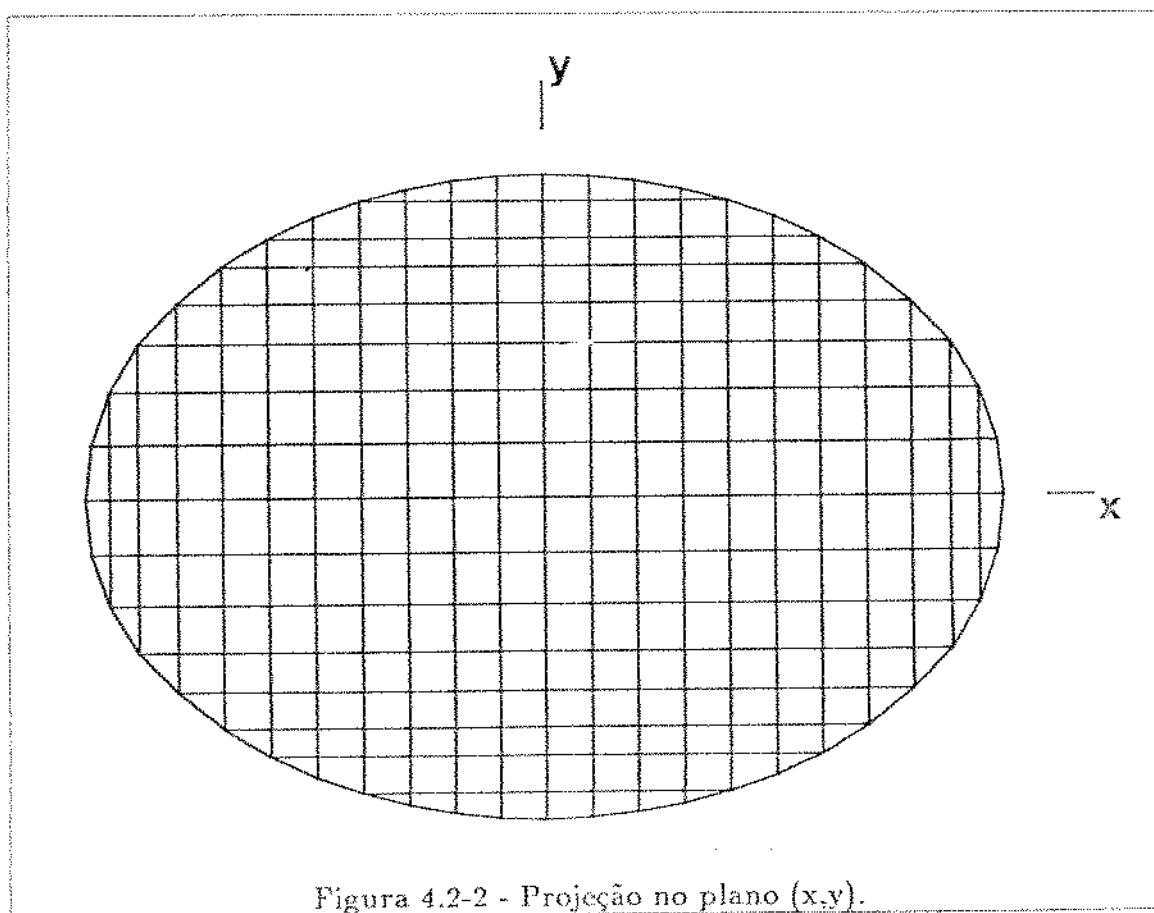
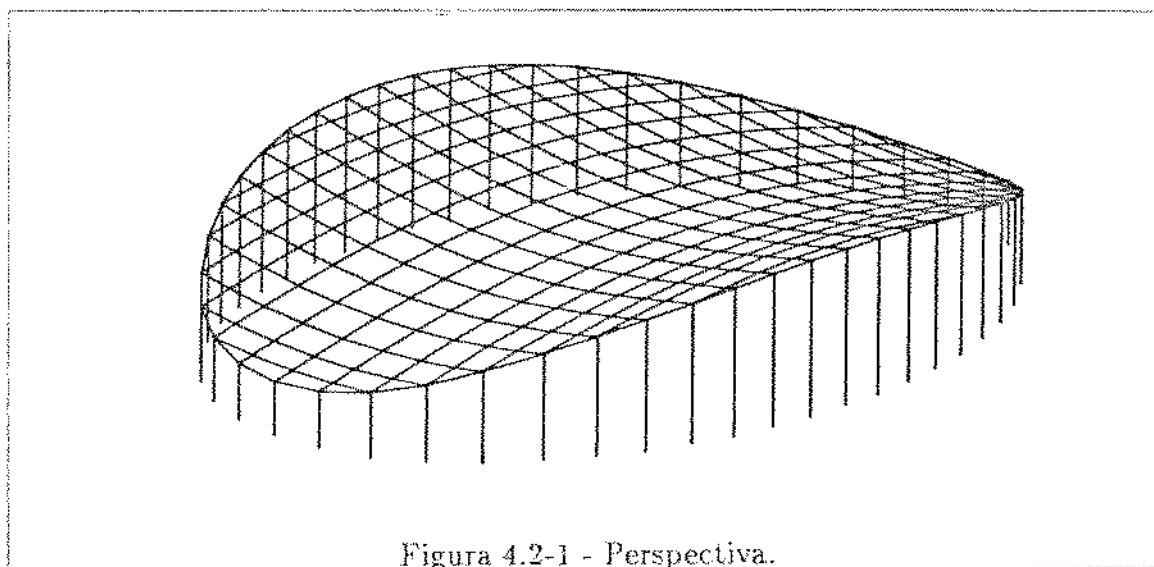
- determinação da geometria indeformada da rede de dupla curvatura;
- determinação da protensão ótima (envoltória de protensão) para carga permanente e três hipóteses de ação estática do vento, admitindo-se que os cabos da rede estejam fixados a pontos indeslocáveis;
- determinação das frequências naturais da rede protendida.
- inclusão do anel de borda e análise (preliminar) da influência da deformabilidade do anel na protensão dos cabos e nos deslocamentos nodais;

Muitos tópicos que devem estar presentes em uma análise estrutural mais completa não foram abordados, ou porque fogem ao escopo geral do trabalho (cujo objetivo principal é o de apresentar novos algoritmos para a análise de coberturas pênseis), ou pela inexistência de dados (este é o caso, por exemplo, da análise do comportamento dinâmico da rede quando submetida à ação do vento). Alguns tópicos considerados importantes são listados a seguir e devem ser objeto de pesquisas que o autor pretende desenvolver:

- análise estática da estrutura mista (rede, anel de borda e pilares) para carga permanente e três hipóteses de ação estática do vento;
- acoplamento dos elementos de cabo a elementos de chapa (no espaço) ou elementos tridimensionais (sólidos), para avaliar com maior acurácia os esforços solicitantes internos do anel de borda;
- análise da influência da inclinação das seções transversais do anel de borda no valor dos esforços solicitantes internos nele atuantes;
- análise da ação estática do vento sobre o conjunto estrutural (como se verá a seguir, considerou-se apenas a ação do vento sobre o material de revestimento fixado à rede protendida);
- determinação da resposta dinâmica da estrutura mista.

4.2 Dados gerais.

O esquema de barras da estrutura analisada é mostrado nas figuras (4.2-1) a (4.2-4). Na figura (4.2-1) uma vista em perspectiva do conjunto estrutural, mostrando a rede,



o anel de borda e os pilares. Na figura (4.2-2) a planta do conjunto, mostrando a projeção no plano (x,y) do anel e da rede. Na figura (4.2-3) a projeção no plano (y,z) e, finalmente, na figura (4.2-4) a projeção no plano (x,z).

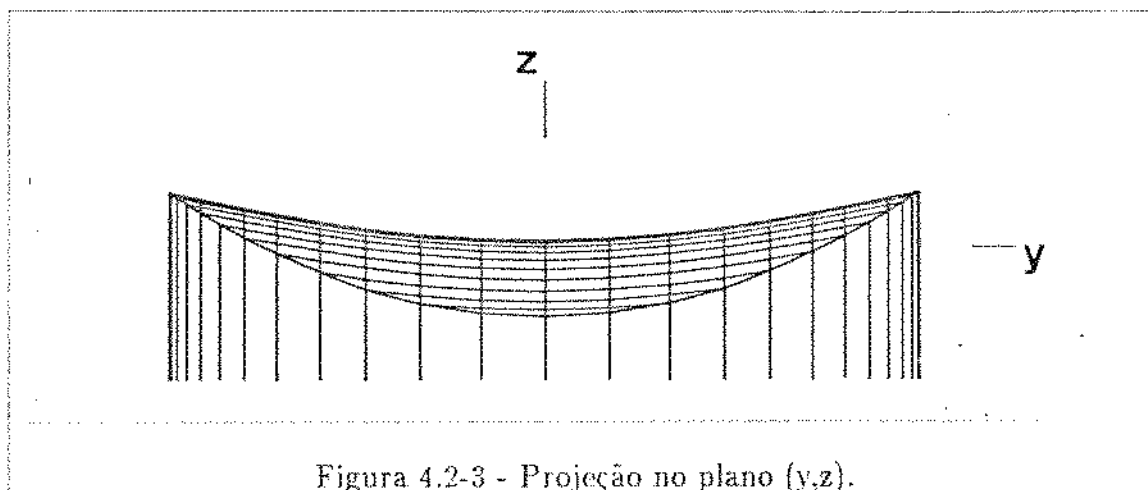


Figura 4.2-3 - Projeção no plano (y,z).

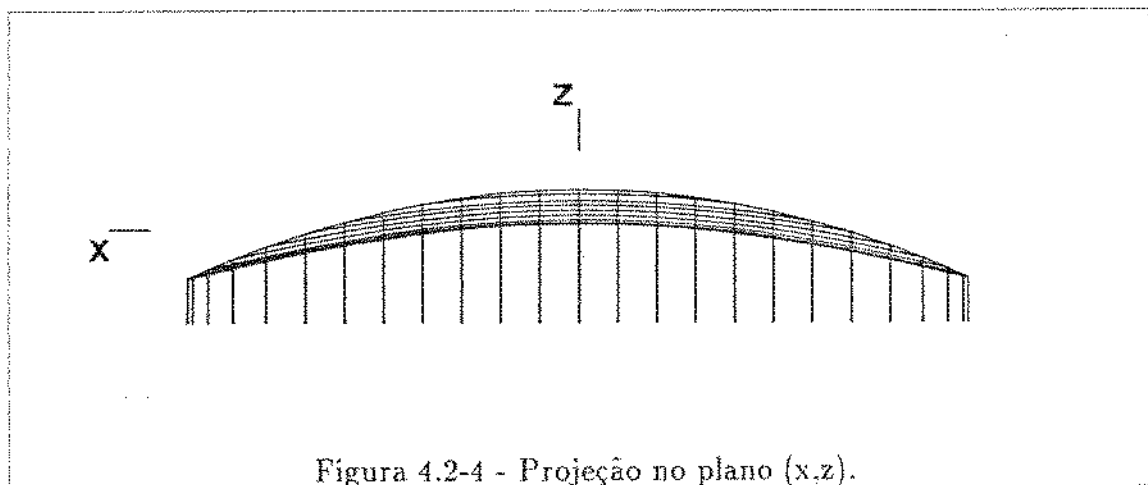


Figura 4.2-4 - Projeção no plano (x,z).

A geometria do anel (na configuração indeformada) pode ser assim descrita: em planta (veja-se figura 4.2-2) o anel de borda é um polígono cujos vértices, no intervalo $-40,0m \leq x \leq 40,0m$, pertencem a uma elipse de eixos $100,0m$ e $70,0m$, e, para $x > 40,0m$ e $x < -40,0m$, a circunferências de raio $27,05m$ (com centro sobre o eixo x). Em uma projeção no plano (x,z) os vértices do polígono pertencem a uma parábola com relação flecha/vão igual a $11,25/100$. A tabela (4.2-1) mostra as coordenadas dos vértices do anel (configuração inicial) para $x \geq 0,0$ e $y \geq 0,0$.

As bases dos pilares estão na cota ($z = -12,0m$). Desta forma, os pilares mais altos têm $17,0m$ (extremidades do eixo menor) e os mais baixos $5,75m$ (extremidades do eixo maior).

x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
50,00	0,00	-6,25	25,00	30,31	2,19
49,33	5,96	-5,95	20,00	32,08	3,20
47,37	11,63	-5,08	15,00	33,38	3,99
44,21	16,73	-3,80	10,00	34,29	4,55
40,00	21,00	-2,20	5,00	34,82	4,89
35,00	24,99	-0,51	0,00	35,00	5,00
30,00	28,00	0,95			

Tabela 4.2-1 : Coordenadas do anel de borda.

4.3 Rede com bordas indeslocáveis.

Nesta seção, admitindo que a rede de cabos tenha pontos de fixação indeslocáveis, determina-se a sua geometria indeformada (coordenadas nodais) usando o algoritmo descrito na seção (2.7) do Capítulo 2. Determinam-se, a seguir, os alongamentos de protensão com o algoritmo descrito na seção (2.6.3) e as configurações de equilíbrio estático para ação permanente e três hipóteses de ação estática do vento.

A malha da rede (afastamento entre cabos nas direções x e y) depende do material de revestimento, entre outros fatores. Neste exemplo admitiu-se uma *distribuição* de cabos tal que se tenha, nas duas direções, uma *taxa* de $2,0\text{cm}^2$ de seção transversal de cabo por metro (em projeção no plano (x,y)). Para reduzir o número de incógnitas, adotou-se uma rede com cabos coincidindo (nas duas direções) com os vértices do anel de borda (poligonal). Em um projeto real, o número de cabos pode ser maior que o adotado (21 paralelos ao eixo y e 15 paralelos ao eixo x). Para alguns materiais de cobertura (por exemplo, telhas sanduiche) o afastamento entre cabos adotado é suficiente e a rede poderia ser definitiva. Pode-se, no entanto, admitir que o material de revestimento exija vãos menores e a rede analisada seria considerada, então, uma simplificação (substituição de dois ou mais cabos por um cabo equivalente). Dentro de certos limites, essa simplificação é suficientemente boa para que os resultados obtidos possam ser considerados definitivos.

Com a hipótese feita no parágrafo anterior, as áreas das seções transversais dos cabos resultaram as indicadas nas tabelas (4.3-1) e (4.3-2) abaixo. Os cabos paralelos ao eixo x foram numerados de 1 a 8 (da borda para o centro e considerando a simetria), e os cabos paralelos ao eixo y foram numerados de 1 a 11 (idem).

Cabo	Seção (cm^2)
1	5,80
2	7,16
3	9,20
4 a 11	10,00

Tabela 4.3-1 : Cabos paralelos ao eixo y.

Cabo	Seção (cm ²)	Cabo	Seção (cm ²)
1	7.00	5	9.38
2	7.10	6	10.76
3	7.00	7	11.60
4	8.26	8	11.80

Tabela 4.3-2 : Cabos paralelos ao eixo x.

Admite-se que os cabos sejam pré-estirados e tenham relação constitutiva linear com coeficiente angular $\beta = 14715,0 \text{ kN/cm}^2$ (veja-se Apêndice A).

4.3.1 Configuração inicial.

A partir de uma rede plana ($z = 0,0$), cuja forma coincide com a mostrada na figura (4.2-2), o algoritmo descrito na seção (2.7) foi usado para determinar a configuração inicial da rede (coordenadas nodais) impondo-se aos nós das extremidades dos cabos a condição de posicionar-se nas coordenadas indicadas na Tabela (4.2-1). A forma encontrada é a mostrada na figura (4.2-1), com algumas modificações descritas a seguir.

Se a rede inicial (plana) é constituída por duas famílias de cabos retos e ortogonais entre si (com malha quadrada ou retangular), é de se esperar que na configuração obtida com o algoritmo da seção (2.7) os cabos deixem de ser retos e não pertençam mais a dois conjuntos ortogonais (vejam-se, por exemplo, as figuras 2.7-1 e 2.7-3 do Capítulo 2). No exemplo ora em estudo, embora a figura (4.2-1) mostre uma rede com cabos retos e ortogonais entre si, a rede obtida com o algoritmo de determinação de configurações iniciais também apresentou distorções, com desvios da forma reta variando entre 1,0 e 12,0 cm. Essas distorções foram consideradas pouco significativas diante das dimensões da rede e adotou-se como geometria inicial aquela mostrada na figura (4.2-2), em que foram preservadas apenas as coordenadas z fornecidas pelo algoritmo. Essa modificação facilitou a avaliação das forças nodais equivalentes às ações uniformemente distribuídas aplicadas sobre a rede.

4.3.2 Alongamentos de protensão.

As solicitações externas consideradas na análise da rede com bordas indeslocáveis estão indicadas na Tabela (4.3.2-1).

Solicitação	Valor (N/m ²)	Valor (N/m ²)
Permanente	-120,0	
Vento (caso A)	640,0	
Vento (caso B)	640,0	-16,0
Vento (caso C)	400,0	-400,0

Tabela 4.3.2-1 : Solicitações sobre a rede.

As solicitações indicadas na tabela são consideradas uniformemente distribuídas em projeção no plano (x,y). Os sinais referem-se ao sentido positivo do eixo z. No caso B de solicitação de vento o primeiro valor é aplicado nos quadrantes 1 e 4 (ainda considerando o plano (x,y)) e o segundo valor aplicado nos quadrantes 2 e 3. No caso C de solicitação de vento, o primeiro valor é aplicado nos quadrantes 1 e 3 e o segundo valor nos quadrantes 2 e 4.

As solicitações devidas ao vento mostradas na Tabela (4.3.2-1) foram determinadas com base em uma pressão básica de obstrução de $800.0N/m^2$ (Majowiecki,1985; Szabò et al.,1984) e usando coeficientes de forma sugeridos por Szabò,1984,pag.31.

O algoritmo de protensão automática (seção (2.6.3) do Capítulo 2) foi usado para determinar os alongamentos de protensão necessários para garantir uma deformação mínima de tração de 1/10000 (veja-se, por exemplo, Majowiecki,1985,pag.135) quando atua a combinação correspondente ao caso A de vento, indicada na Tabela (4.3.2-1). A Tabela (4.3.2-2) mostra os resultados obtidos (metade da soma dos alongamentos dos elementos de cada cabo). O algoritmo especificou alongamentos apenas para os cabos paralelos ao eixo y.

Cabo	Alongamento (cm)	Cabo	Alongamento (cm)
1	1,15	7	12,13
2	2,92	8	12,23
3	5,56	9	12,04
4	8,02	10	12,07
5	9,91	11	12,18
6	11,26		

Tabela 4.3.2-2 : Cabos paralelos ao eixo y.

Estes alongamentos, embora estejam associados a menor valor para a Energia Potencial Total (dentre as ações simétricas), não foram suficientes para garantir um resíduo mínimo de tração para o caso B de solicitação de vento. Fez-se, então um *ajustamento* dos valores e o resultado é mostrado na Tabela (4.3.2-3) abaixo.

Cabo	Alongamento (cm)	Cabo	Alongamento (cm)
1	1,25	7	14,00
2	3,50	8	12,23
3	7,30	9	12,04
4	10,50	10	12,07
5	13,00	11	12,18
6	14,00		

Tabela 4.3.2-3 : Cabos paralelos ao eixo y.

4.3.3 Tensões nos cabos.

A Tabela (4.3.3-1) mostra as tensões máximas e mínimas em todos os elementos dos cabos da rede para a combinação da carga permanente com as três hipóteses de vento mostradas na Tabela (4.3.2-1). A Tabela mostra os resultados para as seguintes hipóteses:

- Caso I : carga permanente + protensão;
- Caso II : carga permanente + protensão + vento A;
- Caso III : carga permanente + protensão + vento B;
- Caso IV : carga permanente + protensão + vento C;

Caso	Elementos	Cabo	$\sigma_{max}(kN/cm^2)$	$\sigma_{min}(kN/cm^2)$
I	29,40,209,220	cabo 5 (// a y)	36,88	
I	252,253,486,487	cabo 1 (// a x)		4,21
II	359,380	cabo 8 (// a x)	55,42	
II	2,3,246,247	cabo 1 (// a y)		4,12
III	41,54	cabo 6 (// a y)	55,52	
III	166,179	cabo 8 (// a y)		1,18
IV	54,195	cabo 6 (// a y)	43,86	
IV	292,488	cabo 1 (// a x)		5,67

Tabela 4.3.3-1 : Tensões nos cabos.

Se a tensão de ruptura dos cabos for (Majowiecki,1985,pag.308) $\sigma_r = 138,1kN/cm^2$, tem-se uma segurança mínima em relação à ruptura igual a 2,48, correspondente ao Caso III de carga (veja-se Tabela 4.3.3-1).

As coordenadas z do nó central da rede, para as hipóteses de carga consideradas, são indicadas na Tabela (4.3.3-2) abaixo.

Caso	z (m)	Caso	z(m)
I	1,05	III	1,12
II	1,41	IV	1,07

Tabela 4.3.3-2 : Coordenada z do nó central da rede.

4.3.4 Modos e freqüências naturais.

A Tabela (4.3.4-1) mostra as dez primeiras freqüências naturais da rede (com bordas indeslocáveis) para pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio estático sob ação da carga permanente.

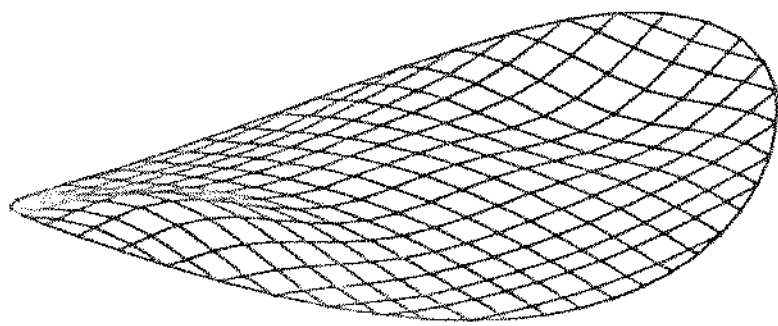
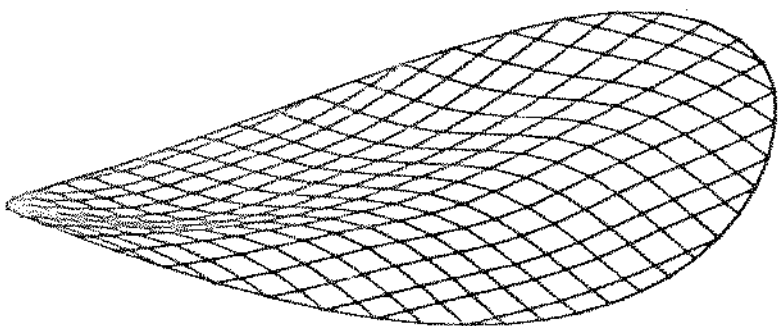
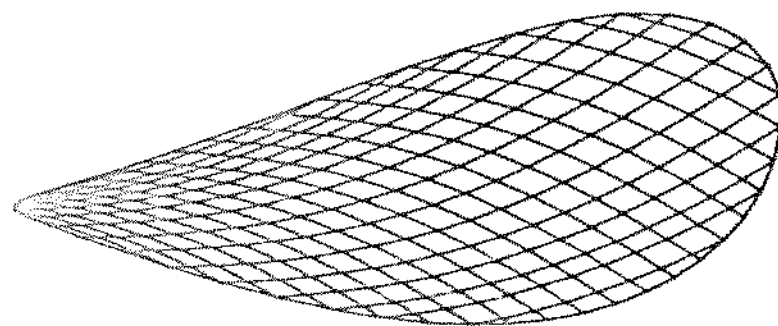


Figura 4.3.4-1 - Equilíbrio e modos 1 e 4.

Modo	Frequência (rad/s)
1	16,7565
2	17,6923
3	19,9610
4	21,4998
5	22,5848
6	23,0332
7	23,0738
8	23,4573
9	25,3016
10	25,8552

Tabela 4.3.4-1 : Modos e frequências naturais.

Na Figura (4.3.4-1), a configuração de equilíbrio estático e os modos 1 e 4.

4.4 Inclusão do anel de borda.

Para avaliar a influência da deformabilidade do anel de borda no comportamento da rede de cabos (perda de protensão, deslocamentos e variações nas tensões máximas e mínimas), foram incluídos no (esquema estrutural da rede isolada) 48 elementos de pórtico (veja-se seção 2.5 do Capítulo 2), com seção transversal constante mostrada na Figura (2.5-1).

Para este estudo de pré-dimensionamento, admite-se que o eixo local $\bar{x}$ dos elementos do anel seja paralelo ao plano (x,y) global. O estudo da inclinação da seção (que deve ser função do ângulo entre o plano horizontal e a tangente ao cabo no ponto de fixação no anel) não será apresentado.

A estrutura mista (rede e anel de borda) foi analisada supondo que os nós do anel têm apenas os deslocamentos verticais (direção z) impedidos.

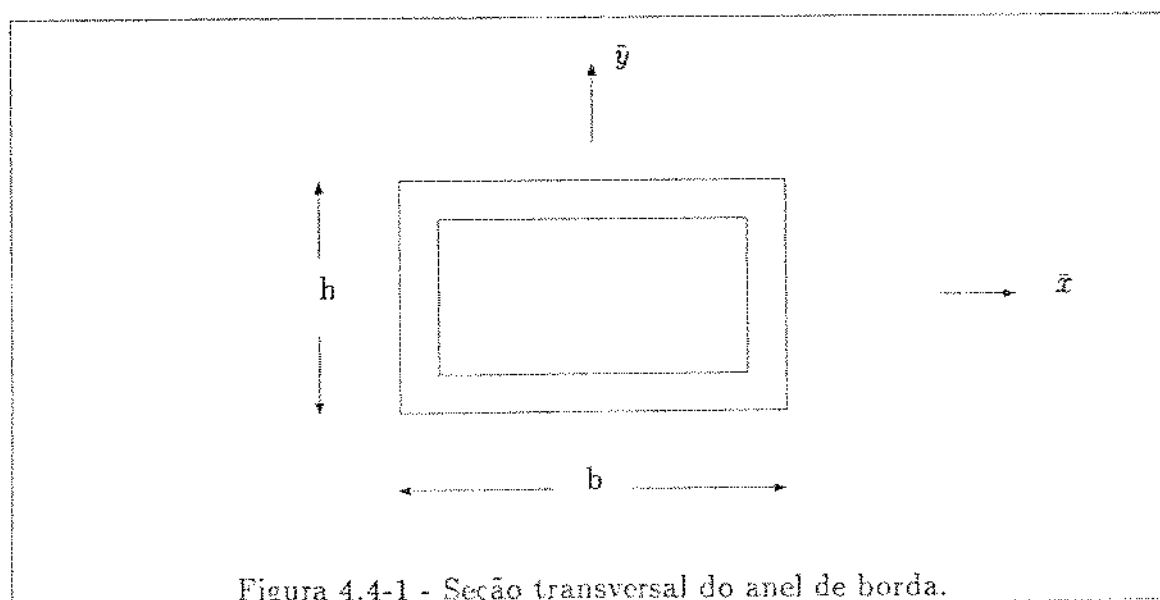


Figura 4.4-1 - Seção transversal do anel de borda.

As dimensões da seção transversal do anel são $b = 5,0m$, $h = 4,0m$ e espessura constante da seção vazada $t = 0,60m$. Admite-se que o concreto tenha módulo de deformação $\beta_c = 2943,0 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,129$.

A estrutura mista foi analisada apenas para o caso I de solicitação (veja-se Tabela 4.3.3-1).

Os novos valores das tensões máxima e mínima nos cabos são indicados na Tabela (4.4-1).

Caso	Elementos	Cabo	$\sigma_{max} (kN/cm^2)$	$\sigma_{min} (kN/cm^2)$
I	29,40,209,220	cabo 5 (// a y)	34,34	
I	252,253,486,487	cabo 1 (// a x)		3,84

Tabela 4.4-1 : Tensões nos cabos.

A coordenada z do nó central da rede passa de $1,05m$ (veja-se Tabela 4.3.3-2) para $0,89m$. Na Tabela (4.4-2) abaixo são os indicados os esforços solicitantes máximos no anel de borda, referidos ao sistema local de coordenadas mostrado na Figura (4.4-1) (os esforços indicados não atuam em uma mesma seção transversal).

N_x	N_y	N_z	M_x	M_y	M_z
2709,0	1260,0	818,0	1471,0	6867,0	23443,0

Tabela 4.4-2 : Esforços máximos no anel de borda (kN , m).

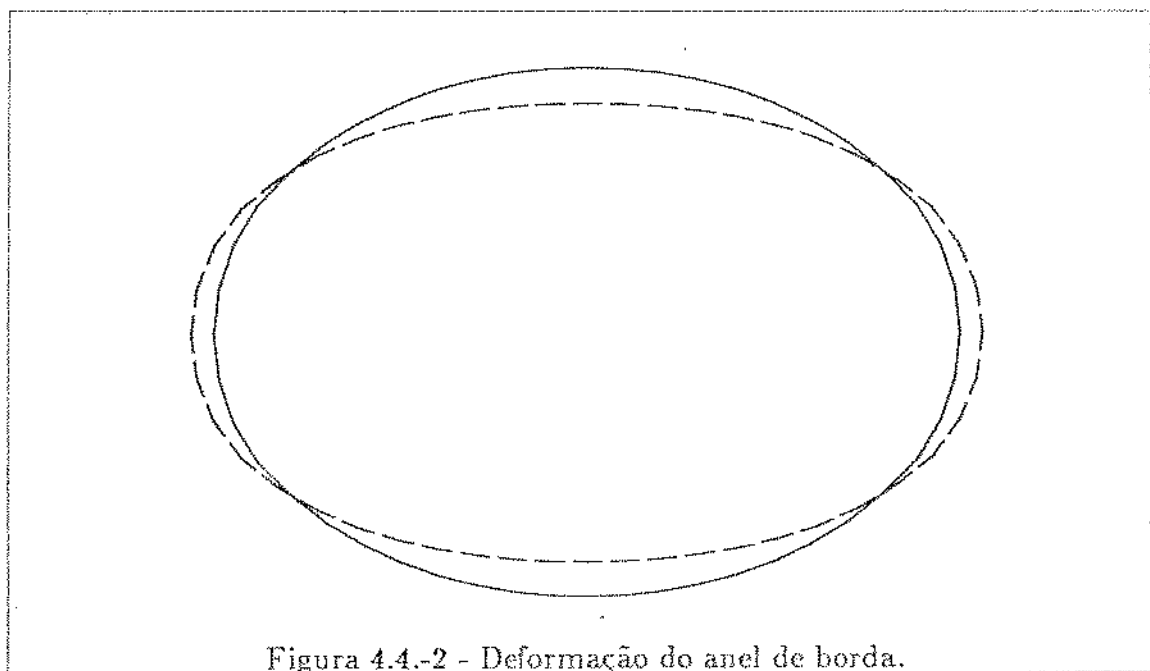


Figura 4.4-2 - Deformação do anel de borda.

A Figura (4.4-2) mostra as configurações inicial (linha contínua) e deformada (linha tracejada) do anel (os deslocamentos estão ampliados).

4.5 Comentários.

1. Sobre a protensão adotada: a determinação da *envoltória* de protensão para as quatro combinações de ações consideradas foi feita aplicando-se o algoritmo de protensão automática considerando apenas a rede isolada (com pontos de fixação dos cabos supostos indeslocáveis). Para a esta hipótese, os alongamentos que conduzem a menor Energia Potencial Total foram obtidos (como já dito) para a combinação das ações permanentes com o vento de sucção homogênea (cabo B), e os cabos alongados são os paralelos ao eixo y (em contraposição ao usualmente indicado na literatura). Observando a Figura (4.4-2), parece ser possível concluir que, ao considerar a deformabilidade do anel, alongamentos distribuídos nas duas famílias de cabos podem conduzir a uma solução melhor para o conjunto.

Quando se determina a protensão *ótima* para as ações permanentes, o algoritmo indica alongamentos para as duas famílias. Esses alongamentos, entretanto, não são suficientes para garantir que, quando atuam as outras hipóteses de solicitação, todos os cabos estejam tracionados. É provável que um conjunto de alongamentos obtido a partir da solução obtida para as ações permanentes (com incrementos adequados e lineares) resulte em uma melhor distribuição de esforços no anel de borda:

2. Sobre a seção transversal do anel de borda: as dimensões adotadas para a seção transversal do anel de borda são bastante semelhantes àsquelas indicadas por Majowiecki,(1985) para o Estádio Olímpico de Atenas, que tem planta circular com raio de 126,0m. A modelagem do anel (com tais dimensões) usando elementos de pórtico de eixo reto não é, provavelmente, suficientemente precisa. Como o acoplamento dos cabos a elementos sólidos resulta em um aumento considerável do número de incógnitas envolvidas (e, também, pode introduzir instabilidade numérica, em virtude da grande diferença de rigidez entre os elementos de cabo e os elementos tridimensionais sólidos), uma análise posterior do anel de borda, submetido a esforços nodais correspondentes aos transmitidos pelas extremidades dos cabos, pode ser mais adequada que a análise do conjunto estrutural.

Referências.

- [4-01] - Buchholdt,H.A., *An Introduction to cable roof structures*, Cambridge University Press,1985.
- [4-02] - Szabó,J.; Kollár,L.; Pavlović,M.N.,*Structural Design of Cable-Suspended Roofs*,John Wiley & Sons,1984.

Capítulo 5:

Comentários e Conclusões.

5.1 Introdução.

Neste capítulo estão reunidos alguns comentários sobre as vantagens e limitações dos modelos teóricos apresentados nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho. Apresentam-se também algumas conclusões, fundamentadas, essencialmente, nos resultados obtidos para os exemplos apresentados (e outros exemplos feitos pelo autor e não incluídos no trabalho), e na pesquisa bibliográfica realizada. Na seção (5.4) são sugeridos temas para pesquisas complementares abordando aspectos da análise ainda não suficientemente esclarecidos.

5.2 Sobre a formulação para a análise estática.

Embora alguns autores (veja-se, por exemplo, Fried, 1982; Peyrot e Goulois, 1979) enfatizem a inadequação do elemento de dois nós (eixo reto e deformação constante) para discretizar cabos flexíveis, sua utilização em cabos—treliça e redes tridimensionais protendidas mostrou-se eficiente em termos da consistência e qualidade dos resultados obtidos. Nos dois esquemas estruturais citados, as características geométricas, as forças de protensão e a relação entre o peso próprio dos cabos e as ações externas são fatores que fazem com que trechos de cabos se comportem como elementos tracionados com deformação constante e eixo quase reto (como cordas de instrumentos musicais). A formulação do elemento de dois nós permite, também, a fácil inclusão da variável cinemática μ , usada para modelar alongamentos de protensão e variações de temperatura.

Dois algoritmos apresentados no Capítulo 2 parecem promissores como instrumentos auxiliares no projeto e dimensionamento de coberturas pênseis:

- o primeiro deles é o que permite a determinação automática dos elementos que devem ser alongados (e qual o valor do alongamento) de modo a garantir que toda a rede esteja submetida a tensões de tração iguais ou maiores que um valor especificado. Embora ainda não diretamente operacional (por que pode especificar alongamento de muitos elementos de um mesmo cabo) este algoritmo mostrou-se de utilidade quase imediata quando adotado o critério de *concentrar* os alongamentos de protensão nos elementos da extremidade do cabo (procedimento usado na prática).
- o segundo algoritmo que se mostrou útil (e eficiente) é o que determina a configuração inicial (indeformada) de redes tridimensionais. Como já dito na Introdução do trabalho, um dos problemas encontrados com frequência na literatura, é o da determinação de uma configuração inicial (em geral, em equilíbrio com o peso próprio dos cabos e forças de protensão) usada como ponto de partida para algoritmos de minimização que determinam uma configuração de equilíbrio para as ações citadas e outras ações externas. O algoritmo quase-Newton usado neste trabalho possibilita a adoção de uma configuração inicial indeformada (portanto sem equilíbrio) e cinematicamente indeterminada. Também sob o ponto de vista prático, o conhecimento da configuração indeformada de uma rede permite especificar, com precisão, os comprimentos de corte dos cabos e os pontos de intersecção entre cabos para a pré-montagem da rede antes de sua fixação definitiva na estrutura de apoio.

5.3 Sobre a análise dinâmica.

Embora o algoritmo implícito (via minimização da Energia Total) para a integração numérica da equação de movimento tenha se mostrado eficiente (em termos de acurácia e tempo computacional), os exemplos estudados não são suficientes para recomendar sua utilização em lugar de algoritmos explícitos ou mesmo de outros esquemas implícitos. Além disso, a escolha de algoritmos para a solução de problemas de equilíbrio dinâmico depende, sempre, das ações dinâmicas em jogo, e não se trabalhou com nenhuma ação dinâmica real (vento, por exemplo).

5.4 Temas para pesquisas complementares.

Alguns aspectos da análise estática e dinâmica de redes protendidas e estruturas mistas não estão ainda bem estabelecidos (neste trabalho e na literatura consultada). Alguns deles são apresentados a seguir.

- **Afrouxamento de cabos.** A expressão afrouxamento de cabos, freqüentemente encontrada na literatura e neste trabalho, não tem significado muito claro. Para um elemento finito de dois nós, a expressão parece pretender descrever a situação em que os nós do elemento (pontos da extremidade) tenham entre si distância menor que a existente na configuração indeformada. Como o elemento de dois nós é, na verdade, um elemento de treliça, esta situação (diminuição do comprimento indeformado) significa compressão do elemento, o que não faz sentido para cabos suficientemente flexíveis.

Dois procedimentos (incorretos) são encontrados na literatura para resolver esta situação: o primeiro deles (mais freqüente) é desligar o elemento que apresente deformações de compressão. Isto introduz irregularidades na função Energia Potencial Total que contrariam os requisitos exigidos pelos algoritmos de minimização. O segundo procedimento é adotar uma relação constitutiva unilateral para o elemento de cabo ($\sigma(\epsilon) \geq 0$). Este segundo procedimento, embora matematicamente correto (se bem implementado em termos computacionais), também não descreve o fenômeno físico adequadamente porque um elemento de cabo pertencente a uma rede estará, sempre, no mínimo submetido a ação do seu peso próprio e, portanto, tracionado.

Pretende-se, em pesquisa subsequente a este trabalho, estudar a possibilidade de modelar cabos com elementos de dois nós usando discretizações variáveis, ou seja, quando um elemento apresentar deformações de compressão (durante um processo iterativo) ele é dividido em dois elementos (de igual comprimento, por exemplo) e a iteração é repetida para que se manifeste o comportamento de cabo livremente suspenso.

- **Freqüências naturais.** Como já dito no Capítulo 3, as freqüências naturais das redes foram determinadas, neste trabalho, a partir de uma expressão linearizada da equação de equilíbrio dinâmico. Pretende-se estudar a influência da consideração

de mais termos na expansão em série de Taylor (veja-se seção 3.3.1 do Capítulo 3) da expressão do gradiente da Energia Potencial Total.

- Dinâmica da estrutura mista. Outro ponto não corretamente abordado no trabalho foi o da determinação de configurações de equilíbrio dinâmico. Estudou-se somente o comportamento dinâmico das redes, sob o pressuposto de que a resposta dinâmica da estrutura de apoio (normalmente muito mais rígida) teria, em termos de deslocamentos, pouco influência sobre o comportamento da rede protendida.
- **Ação do vento.** Em coberturas pênseis, a determinação da resposta dinâmica da rede de cabos (e da estrutura de apoio) submetida à ação do vento, considerado como ação variável com o tempo, deve estar presente em uma análise estrutural mais completa.
- **Estudo de viabilidade econômica das coberturas pênseis.** Mesmo em países onde a utilização de coberturas pênseis é bastante freqüente, afirma-se (veja-se, por exemplo, Buchholdt,1985) que não há estudos suficientes sobre a viabilidade econômica desses esquemas estruturais em projetos de menor porte (edifícios industriais leves, por exemplo). A maior utilização de coberturas pênseis, no Brasil, depende, ainda, de estudos de viabilidade econômica e disponibilidade de materiais e equipamentos (cabos, conectores, esticadores de alta resistência, equipamentos de elevação e protensão, etc.).

Referências.

- [5-1] - Buchholdt,H.A., *An Introduction to cable roof structures*, Cambridge University Press,1985.
- [5-2] - Fried,I.,*Large deformation static and dynamic finite element analysis of extensible cables*,Computers & Structures,v.15,n.3,pp.315-319,1982.
- [5-3] - Peyrot,A.H.; Goulois,A.M., *Analysis of Flexible Transmission Lines*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST 5,pp.763-779,1978.

Apêndice A

A.1 Tensões e deformações conjugadas.

O texto apresentado a seguir é uma transcrição, quase literal, de parte do Capítulo 2 da publicação **Análise Não Linear de Treliças Espaciais**, de autoria do Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta, da EPUSP-USP. O objetivo desta transcrição é o de contribuir para a melhor compreensão de algumas afirmativas feitas nos Capítulos 2 e 3, em especial na dedução da Energia Potencial Total e na dedução da matriz Hessiana da Energia Potencial Total.

Considere-se o elemento de treliça mostrado na figura (A-1), abaixo.

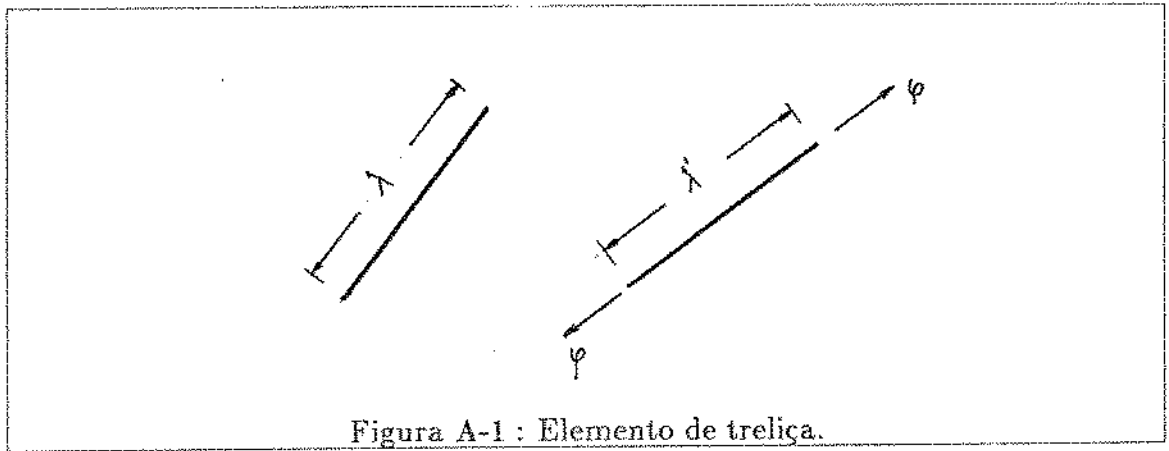


Figura A-1 : Elemento de treliça.

Em uma configuração de referência o elemento tem comprimento λ e área da seção transversal α . Em uma configuração na qual o elemento está submetido a uma força axial φ , o comprimento do elemento é λ' e a área da seção transversal α' .

Define-se como medida de deformação do elemento qualquer função que relacione os comprimentos λ e λ' . Uma medida básica de deformação é o estiramento, dado por

$$\gamma = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

Uma família de medidas de deformação pode ser, por exemplo, assim definida

$$\epsilon_m = \begin{cases} (2m)^{-1} (\gamma^{2m} - 1) & \text{se } m \neq 0 \\ \ln \gamma & \text{se } m = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Alguns elementos dessa família são freqüentemente encontrados na literatura:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (\gamma^2 - 1)/2 & (\text{Green}) \\ \epsilon_{\frac{1}{2}} &= \gamma - 1 & (\text{Linear}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \ln \gamma & (\text{Hencky}) \\ \varepsilon_{-\frac{1}{2}} &= 1 - \gamma^{-1} & (\text{Reiner}) \\ \varepsilon_{-1} &= (1 - \gamma^{-2})/2 & (\text{Almansi})\end{aligned}$$

A potência da força axial φ , por unidade de volume da configuração de referência, é dada por

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\alpha \lambda} \varphi \dot{\lambda}' \quad (\text{A.3})$$

onde $\dot{\lambda}'$ é a taxa de variação, no tempo, do comprimento do elemento.

Para a família de deformações (A.2) as taxas de deformação são dadas por

$$\dot{\varepsilon}_m = \gamma^{2m} \frac{\dot{\lambda}'}{\lambda'} \quad (\text{A.4})$$

de onde se tem

$$\dot{\lambda}' = \lambda' \gamma^{-2m} \dot{\varepsilon}_m \quad (\text{A.5})$$

Levando (A.5) em (A.3), vem

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\alpha \lambda} \varphi \dot{\lambda}' \gamma^{-2m} \dot{\varepsilon}_m = \sigma_m \dot{\varepsilon}_m \quad (\text{A.6})$$

Assim, por identificação de termos, pode-se escrever

$$\sigma_m = \frac{\varphi}{\alpha} \gamma^{1-2m} \quad (\text{A.7})$$

Desta forma, escolhido um modelo de deformação (ou seja, escolhido um valor para m), a tensão deve ser calculada pela expressão (A.7) (com o mesmo valor de m) para que o produto das duas seja a potência específica (o que é conceitualmente fundamental).

A título de ilustração, seja um material cuja equação constitutiva, obtida por meio de ensaios em um corpo de prova, seja linear para $m = 0$

$$\sigma_0 = \beta \varepsilon_0 \quad (\text{A.8})$$

isto é, um material que apresenta relação linear (com coeficiente angular β) quando a deformação logarítmica (ou natural, ou de Hencky) e a tensão de Kirchhoff-Trefftz são usadas para registrar os resultados do ensaio de tração axial.

Se se pretende construir um modelo teórico baseado na deformação linear ($m = 1/2$), a relação tensão×deformação nesse modelo não será linear, como se verá a seguir.

Para $m = 1/2$, pode-se escrever

$$\gamma = 1 + \varepsilon_{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9})$$

Mas,

$$\varepsilon_0 = \ln \gamma = \ln(1 + \varepsilon_{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.10})$$

Fazendo $m = 0$ e $m = 1/2$ em (A.7), vem

$$\sigma_0 = \gamma \sigma_{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.11})$$

Levando (A.9), (A.10) e (A.11) em (A.8), vem

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \beta (1 + \varepsilon_{\frac{1}{2}})^{-1} \ln(1 + \varepsilon_{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.12})$$

que é a relação $\sigma(\varepsilon)$ que deve ser usada quando se adota a deformação linear para modelar o material caracterizado, originalmente, pela equação (A.8).

A.2 Equação constitutiva de cabos flexíveis.

O modelo de deformação adotado neste trabalho é o chamado modelo linear ($m = 1/2$). A relação entre este modelo de deformação e sua tensão conjugada pode ser determinada com base na equação (A.7) e em resultados obtidos por meio de ensaios de tração axial.

Os cabos flexíveis usados em estruturas são submetidos a um pré-estiramento (como já dito na Introdução deste trabalho), com uma força axial equivalente a 55% da carga de ruptura. Esse procedimento faz com que o cabo passe a apresentar uma relação linear entre a carga axial e o estiramento (veja-se, por exemplo, Scalzi e McGrath, 1971). Usando a notação da seção anterior, pode-se escrever

$$\varphi = \kappa(\lambda' - \lambda) \quad (\text{A.13})$$

Lembrando que

$$\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \quad (\text{A.14})$$

e

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\varphi}{\alpha} \quad (\text{A.15})$$

pode-se escrever

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\kappa \varphi \lambda}{\alpha} \varepsilon_{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.16})$$

Assim, os cabos pré-estirados apresentam uma relação linear entre a deformação linear ($m = 1/2$) e sua tensão conjugada. O coeficiente da relação linear (A.16) é determinado com base em resultados experimentais (veja-se, por exemplo, Majowicki (1985), p.247).

É importante ressaltar que para qualquer outro modelo de deformação a relação tensão×deformação não será linear (Pimenta, 1986).

Referências.

- [A-1] - Majowiecki, M., *Tensostrutture: progetto e verifica*, CISIA, Milão, 1985.
- [A-2] - Pimenta, P.M., *Análise Não Linear de Treliças Espaciais*, BT/PEF 8604, EPUSP, USP, São Paulo, 1986.
- [A-3] - Scalzi, J.B.; McGrath, W.K., *Mechanical Properties of Structural Cables*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.97, ST12, pp.2837-2844, 1971.

Apêndice B

Este apêndice tem, essencialmente, dois objetivos: a) apresentar, para o leitor não familiarizado com métodos de programação não linear, uma descrição simples e sucinta das idéias básicas que fundamentam o método de Newton, quase unanimemente citado na literatura como o mais eficiente e acurado; b) justificar, qualitativamente, a utilização, neste trabalho, de um algoritmo do tipo quase-Newton

B.1 Método de Newton.

Dada a função não linear

$$\Pi(x) : V \longrightarrow R$$

sejam x_0 e x dois elementos de V e d uma direção em V tal que

$$x = x_0 + d \quad (\text{B.1})$$

Admitindo conhecidos o gradiente e a Hessiana de $\Pi(x)$ no ponto x_0 ,

$$\nabla \Pi(x_0) = g(x_0) \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla [\nabla \Pi(x_0)]^t = H(x_0) \quad (\text{B.3})$$

pode-se escrever

$$\Pi(x) \simeq \Pi(x_0) + g(x_0)^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H(x_0)(x - x_0)$$

ou, usando (B.1),

$$\Pi(x) \simeq \Pi(x_0) + g(x_0)^t d + \frac{1}{2} d^t H(x_0) d \quad (\text{B.4})$$

O segundo membro de (B.4) é uma função quadrática $\phi(d)$. Se $H(x_0)$ for definida positiva, o mínimo de $\phi(d)$ é solução do sistema

$$H(x_0) d = -g(x_0) \quad (\text{B.5})$$

Chamando de d^* a solução de (B.5), então

$$\phi(d^*) \leq \phi(d) \quad \forall d$$

e

$$\phi(d^*) - \phi(d) \leq 0 \quad \forall d$$

ou, usando (B.4),

$$\Pi(x_0 + d^*) \leq \Pi(x_0) \quad \forall d \quad (\text{B.6})$$

Assim, se x for suficientemente próximo de x_0 , e se (B.5) tiver solução única, a direção d é uma direção de descenso da função $\Pi(x)$.

Um algoritmo de minimização em que a direção de busca de mínimos seja dada pela equação (B.5) é chamado de *método de Newton*, e a solução de (B.5) é chamada de direção de Newton.

A formulação básica do método de Newton acima descrita devem ser acrescentadas duas modificações para que se tenha uma implementação eficiente e acurada.

B.1.1 Busca linear.

Embora d^* seja um ponto de mínimo de $\phi(d)$, o valor $\Pi(x^*)$ pode ser maior que o valor $\Pi(x_0)$ se x^* não for suficientemente próximo de x_0 e a aproximação quadrática tornar-se grosseira. Para solucionar este problema, a equação (B.1) pode ser modificada com a introdução de um parâmetro $\alpha \leq 1,0$

$$x = x_0 + \alpha d \quad (\text{B.7})$$

O objetivo passa a ser, então, determinar α^* tal que

$$\Pi(x_0 + \alpha^* d) = \min_{\alpha} \Pi(x_0 + \alpha d)$$

B.1.2 Matriz Hessiana não positiva definida.

Se $H(x_0)$ for singular o método falha porque não há solução para o sistema dado em (B.5). Se $H(x_0)$ não for positiva definida, a aproximação quadrática $\phi(d)$ não necessariamente tem um mínimo ou mesmo um ponto estacionário (Gill et al., 1981).

A solução para esses dois problemas (que podem estar presentes, por exemplo, quando se busca mínimos da função não linear Energia Potencial Total) é construir uma matriz $\tilde{H}(x_0)$, positiva definida, a partir da matriz $H(x_0)$. Na literatura sobre programação não linear podem ser encontradas diferentes propostas para a construção da matriz $\tilde{H}(x_0)$.

Em vista das observações feitas acima, fica claro que a atraente simplicidade da formulação básica do método de Newton deixa de existir em uma implementação eficiente. Além disso, às excelentes condições de convergência (em termos de número de iterações) deve-se contrapor o aumento do tempo computacional (em relação a uma implementação da formulação básica) em virtude das modificações descritas.

Uma observação importante sobre a forma de cálculo da direção descida d deve agora ser feita: se x^* for suficientemente próximo de x_0 , a solução da equação (B.5) é uma direção de descenso da função $\Pi(x)$ para qualquer matriz positiva definida que seja usada em lugar de $H(x_0)$. Este fato é usado nos métodos quase-Newton, cuja estrutura básica é descrita a seguir.

B.2 Métodos quase-Newton.

Nos métodos quase-Newton parte-se do pressuposto de que o cálculo da matriz Hessiana $H(x_0)$, usada na determinação da direção de descenso de $\Pi(x)$, é impraticável ou requer um esforço computacional excessivo. A idéia básica é construir uma aproximação para a inversa de $H(x_0)$, eliminando a necessidade de, em cada iteração, calcular $H(x_0)$ e resolver o sistema (B.5).

Diversas propostas são encontradas na literatura para a construção da inversa aproximada de $H(x_0)$, variando desde uma aproximação que se mantém constante em todas as iterações, até formas mais sofisticadas, em que as aproximações são atualizadas em cada iteração com base no comportamento da função $\Pi(x)$ e de seu gradiente, $g(x)$. O algoritmo usado neste trabalho é uma variação do chamada método DFP (Davidon, Fletcher e Powell). Sua formulação detalhada pode ser encontrada em Luenberger, 1984. A implementação computacional usada neste trabalho é apresentada no Apêndice D.

Embora não tenham sido feitos, neste trabalho, estudos comparativos entre uma implementação eficiente do método de Newton e a implementação quase-Newton acima descrita, é possível afirmar, com base em observações encontradas nas referências, que o método quase-Newton contém um bom compromisso entre espaço de memória necessário, acurácia, rapidez e versatilidade.

Referências.

- [B-1] - Gill, P.E.; Murray, W.; Wright, M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1982.
- [B-2] - Luenberger, D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publ. Co., 1984.

Apêndice C

Este apêndice contém resultados numéricos de alguns dos exemplos apresentados nos Capítulos 2 e 3. O objetivo é o de possibilitar a comparação com resultados obtidos com o emprego de outros modelos teóricos e/ou técnicas de resolução.

C.1 Exemplo 2.4.3-2.

Configuração de equilíbrio (figura 2.4.3-4) :

Dois nós		Três nós		P. e G. (1979)	
X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13.0968	-48.2757	13.0802	-48.2807	13.0510	-48.2881
26.9826	-96.3290	26.9484	-96.3397	26.8331	-96.3714
41.7538	-144.1161	41.7009	-144.1335	41.5805	-144.1659
57.5246	-191.5813	57.4517	-191.6063	57.2121	-191.6774
74.4309	-238.6523	74.3367	-238.6864	74.1464	-238.7386
92.6361	-285.2345	92.5190	-285.2797	92.1444	-285.4021
112.3373	-331.2021	112.1954	-331.2606	111.9846	-331.3109
133.7735	-376.3843	133.6050	-376.4593	133.0830	-376.6539
157.2355	-420.5454	157.0385	-420.6414	156.9034	-420.6259
183.0751	-463.3546	182.8479	-463.4777	182.1652	-463.7848
211.7116	-504.3398	211.4535	-504.4983	211.5521	-504.2453
243.6250	-542.8190	243.3380	-543.0241	242.4959	-543.5267
279.3161	-577.8072	279.0082	-578.0729	279.4952	-577.1630
319.1915	-607.9131	318.8819	-608.2521	317.9748	-609.0939
363.3208	-631.2969	363.0449	-631.7095	363.6406	-629.4589
411.0661	-645.8624	410.8695	-646.3173	410.2741	-647.4967
460.8068	-649.8673	460.7169	-650.2917	460.2714	-646.9985
510.2023	-642.7570	510.1980	-643.0684	510.1739	-643.8804
557.0461	-625.4920	557.0708	-625.6461	555.6321	-623.0569
600.0000	-600.0000	600.0000	-600.0000	600.0000	-600.0000

Configurações indeformadas (figuras 2.4.3-5,6) :

Figura 2.4.3-5		Figura 2.4.3-6	
X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
28.5840	-41.0238	13.0820	-48.2583
57.1680	-82.0476	26.9521	-96.2960
85.7520	-123.0714	41.7068	-144.0694
114.3361	-164.0952	57.4599	-191.5229
142.9201	-205.1190	74.3473	-238.5848
171.5041	-246.1428	92.5320	-285.1607
200.0882	-287.1666	112.2108	-331.1253
228.6722	-328.1905	133.6225	-376.3087
257.2562	-369.2143	157.0576	-420.4765
285.8403	-410.2381	182.8679	-463.2998
314.4243	-451.2619	211.4729	-504.3089
343.0083	-492.2857	243.3550	-542.8256
371.5923	-533.3095	279.0197	-577.8688
400.1764	-574.3333	318.8844	-608.0483
428.7604	-615.3571	363.0353	-631.5153
457.3444	-656.3810	410.8471	-646.1453
485.9285	-697.4048	460.6860	-650.1554
523.9523	-664.9365	510.1681	-642.9772
561.9761	-632.4682	557.0521	-625.6023
600.0000	-600.0000	600.0000	-600.0000

C.2 Exemplo 2.4.3-3.

Configurações de equilíbrio estático:

$f_z = 0.2$		$f_z = 0.3$		$f_z = 0.4$	
X	Y	X	Y	X	Y
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0500	0.0000	0.0500	0.0000	0.0500	0.0000
0.1000	0.0000	0.1001	0.0000	0.1001	0.0000
0.1501	0.0000	0.1501	0.0000	0.1501	0.0000
0.2001	0.0000	0.2001	0.0000	0.2002	0.0000
0.2501	0.0000	0.2501	0.0000	0.2498	0.0062
0.3001	0.0000	0.3002	0.0000	0.2984	0.0183
0.3501	0.0000	0.3502	0.0000	0.3452	0.0359
0.4002	0.0000	0.4002	0.0000	0.3900	0.0583
0.4502	0.0000	0.4496	0.0082	0.4324	0.0848
0.5002	0.0000	0.4971	0.0240	0.4725	0.1149
0.5502	0.0000	0.5418	0.0464	0.5101	0.1478
0.6002	0.0000	0.5834	0.0742	0.5455	0.1832
0.6488	0.0121	0.6219	0.1062	0.5788	0.2206
0.6935	0.0345	0.6573	0.1416	0.6101	0.2597
0.7335	0.0645	0.6898	0.1796	0.6395	0.3002
0.7689	0.0999	0.7199	0.2196	0.6673	0.3419

C.3 Exemplo 3.4-3.

A tabela abaixo mostra os quadrados das frequências naturais (em rad/s) para os dez primeiros modos.

modo	$\epsilon \geq 1/10000$	$\epsilon \geq 1/1000$
1	1.0749	1.8602
2	1.2467	2.6263
3	1.4792	3.3188
4	1.6940	3.6655
5	2.2208	4.3225
6	2.5499	4.6317
7	2.9885	5.5660
8	3.4123	5.6741
9	4.1161	6.0015
10	4.7395	6.8770

C.4 Exemplo 3.5.1-2.

Configurações de equilíbrio para os instantes $t = 0.0$ s, $t = 0.8$ s e $t = 2.0$ s .

$t = 0.0s$		$t = 0.8s$		$t = 2.0s$	
X	Y	X	Y	X	Y
0.0000	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.0455	-0.0430	0.02915	-0.05541	-0.03758	-0.05027
0.0939	-0.0827	0.06013	-0.10982	-0.07526	-0.10044
0.1453	-0.1184	0.09288	-0.16317	-0.11427	-0.14956
0.1997	-0.1492	0.12853	-0.21463	-0.15323	-0.19869
0.2569	-0.1745	0.16689	-0.26410	-0.19252	-0.24752
0.3166	-0.1933	0.20881	-0.31059	-0.23188	-0.29629
0.3781	-0.2050	0.25533	-0.35247	-0.27157	-0.34476
0.4405	-0.2089	0.30669	-0.38821	-0.31341	-0.39138
0.5029	-0.2050	0.36252	-0.41642	-0.35546	-0.43779
0.5644	-0.1933	0.42153	-0.43716	-0.39913	-0.48266
0.6241	-0.1745	0.48198	-0.45324	-0.44391	-0.52641
0.6813	-0.1492	0.54405	-0.46083	-0.49005	-0.56870
0.7357	-0.1184	0.60657	-0.46007	-0.53773	-0.60923
0.7871	-0.0827	0.66835	-0.45055	-0.58729	-0.64739
0.8355	-0.0430	0.72824	-0.43261	-0.63852	-0.68325
0.8810	0.0000	0.78556	-0.40768	-0.69130	-0.71674

Apêndice D

Apresentam-se, neste Apêndice, as listagens em linguagem PASCAL das rotinas que fazem parte dos programas usados para a resolução dos exemplos apresentados ao longo do texto.

D.1 Algoritmo quase-Newton

O algoritmo quase-Newton, cuja listagem em PASCAL é apresentada nesta seção, é descrito por Luenberger,(1984) (*self-scaling quasi-Newton algrithm*).

```
procedure quasineuton(var n,minor    :integer;
                      var maxnorm,f :double;
                      var x,g       :dvector);
var
anykey           :char;
i,j              :integer;
sum,pq,qhq,gamma,aux1,aux2 :double;
d,p,q,hq        :dvector;

begin
{ initiate H }
for j:=1 to n do
begin
for i:=1 to n do h^[i,j]:=0.0;
h^[j,j]:=1.0
end;

{ initiate: objective, gradient }
objective(n,f,x,g);

{ initiate d }
for i:=1 to n do d[i]:=-g[i];

minor:=0;
while notoptimal(n,minor,maxnorm,f,g) and (not keypressed) do
begin
minor:=minor + 1;
```

```

{ update: objective, x, gradient / calculate: p, q }
linesearch(n,f,x,g,d,p,q);

{ calculate Hq }
for i:=1 to n do
    begin
        sum:=0.0;
        for j:=1 to n do sum:=sum + h^[i,j] * q[j];
        hq[i]:=sum
    end;

{ calculate: pq, qHq }
pq:=0.0;
qhq:=0.0;
for i:=1 to n do
    begin
        pq:=pq + p[i] * q[i];
        qhq:=qhq + q[i] * hq[i]
    end;

{ calculate scale factor }
gamma:=pq / qhq;

{ update H }
for i:=1 to n do
    begin
        aux1:=hq[i] / qhq;
        aux2:=p[i] / pq;
        for j:=1 to n do h^[i,j]:=(h^[i,j] - aux1 * hq[j]) * gamma
+ aux2 * p[j]
    end;

{ d = - Hg }
for i:=1 to n do
    begin
        sum:=0.0;
        for j:=1 to n do sum:=sum + h^[i,j] * g[j];
        d[i]:=-sum

```

```

end
end;

{ clear keyboard buffer }
while keypressed do anykey:=readkey
end;

```

D.2 Busca linear.

A rotina de minimização unidimensional apresentada nesta seção pode ser encontrada em Lasdon,(1970).

```

procedure linesearch(var n           :integer;
                    var f0           :double;
                    var x0,g0,d,p,q :dvector);

const
  tol      = 1.0E-0001; { linesearch tolerance: 0 <= tol < 1 }
  factor   = 1.0E+0001; { f(1) is not much greater than f(0) }
  maxintpn = 20;        { maximum number of interpolations }

var
  k,intpn                                     :integer;
  a,b,alpha,fa,fb,f,df0,dfa,dfb,df,u1,u2,delta,maxdf :double;
  x,g                                           :dvector;

begin
  { initiate fa }
  fa:=f0;

  { initiate fb }
  for k:=1 to n do x[k]:=x0[k] + d[k];
  objective(n,fb,x,g);

  { adjust d / update fb }
  maxdf:=factor * (abs(fa) + 1.0);
  while (fb - fa) > maxdf do
    begin

```

```

        for k:=1 to n do
            begin
                d[k]:=0.5 * d[k];
                x[k]:=x0[k] + d[k]
            end;
        objective(n,fb,x,g)
    end;

{ initiate: df0, dfb, dfa }
df0:=0.0; dfb:=0.0;
for k:=1 to n do
    begin
        df0:=df0 + d[k] * g0[k];
        dfb:=dfb + d[k] * g[k]
    end;
dfa:=df0;

{ verify }
if df0 >= 0.0
then    begin
        closegraph;
        writeln('Line Search Failure');
        halt
    end;

b:=1.0;
while (dfb < 0.0) and (fb < fa) do
    begin
        fa:=fb;
        dfa:=dfb;

        b:=b + b;
        for k:=1 to n do x[k]:=x0[k] + b * d[k];
        objective(n,fb,x,g);

        dfb:=0.0;
        for k:=1 to n do dfb:=dfb + d[k] * g[k]
    end;
a:=trunc(0.5 * b);

{ calculate alpha }

```

```

u1:=(fa - fb) / (b - a) * 3.0 + dfa + dfb;
u2:=sqrt(sqr(u1) - dfa * dfb);
if u1 < 0.0 then delta:=u2 - u1 else delta:=-dfa * dfb / (u2 + u1);
alpha:=b - (dfb + delta) / (dfb - dfa + u2 + u2) * (b - a);

{ calculate f }
for k:=1 to n do x[k]:=x0[k] + alpha * d[k];
objective(n,f,x,g);

{ calculate df }
df:=0.0;
for k:=1 to n do df:=df + d[k] * g[k];

{ initiate: maxdf, intpn }
maxdf:=-tol * df0;
intpn:=1;

{ repeat the interpolation if necessary }
while ((fa < f) or (fb < f) or (abs(df) > maxdf)) and (intpn < maxintpn) do
begin
    intpn:=intpn + 1;

    if df > 0.0
    then begin
        b:=alpha;
        fb:=f; dfb:=df
      end
    else begin
        a:=alpha;
        fa:=f; dfa:=df
      end;

    { calculate alpha }
    u1:=(fa - fb) / (b - a) * 3.0 + dfa + dfb;
    u2:=sqrt(sqr(u1) - dfa * dfb);
    if u1 < 0.0 then delta:=u2 - u1 else delta:=-dfa * dfb / (u2 + u1);
    alpha:=b - (dfb + delta) / (dfb - dfa + u2 + u2) * (b - a);

    { calculate f }
    for k:=1 to n do x[k]:=x0[k] + alpha * d[k];
    objective(n,f,x,g);

```

```

    { calculate df }
    df:=0.0;
    for k:=1 to n do df:=df + d[k] * g[k]
    end;

{ calculate: p, q }
for k:=1 to n do
    begin
    p[k]:=x[k] - x0[k];
    q[k]:=g[k] - g0[k]
    end;

{ update: objective, x, gradient }
f0:=f;
for k:=1 to n do
    begin
    x0[k]:=x[k];
    g0[k]:=g[k]
    end
end;

```

D.3 Energia Potencial Total.

Apresenta-se, a seguir, a rotina que calcula a Energia Potencial Total para um arranjo bidimensional de elementos de cabo e pórtico.

```

procedure objective(var n    :integer;
                   var f    :double;
                   var x,g  :dvector);

var
i,j,k,node,e      :integer;
cx,cy,l           :single;
aux0,aux1,aux2,epsilon :double;
o                 :array [1..6] of integer;
d,ge              :array [1..6] of double;

begin
{ initiate: objective, gradient }
f:=0.0;

```

```

for k:=1 to n do
    begin
        f:=f - force[k] * x[k];
        g[k]:=-force[k]
    end;

{ truss elements }
for e:=1 to nte do with truss[e] do
    begin
        cx:=cosx;
        cy:=cosy;
        l:=length - cut;

        node:=link1;
        o[1]:=neword[1,node];
        o[2]:=neword[2,node];
        node:=link2;
        o[3]:=neword[1,node];
        o[4]:=neword[2,node];
        for k:=1 to 4 do if (o[k] <= n) then d[k]:=x[o[k]] else d[k]:=0.0;

        { calculate epsilon }
        aux1:=(d[3] - d[1] + cutx) / l;
        aux2:=(d[4] - d[2] + cuty) / l;
        aux0:=aux1 * (cx + cx + aux1) + aux2 * (cy + cy + aux2);
        epsilon:=aux0 / (sqrt(1.0 + aux0) + 1.0);

        {
            if (epsilon < 0.0) then epsilon:=0.0; }

        { update objective }
        f:=f + young * area * l * epsilon * epsilon / 2.0;

        { update gradient }
        aux0:=epsilon / sqrt(1.0 + aux0) * young * area;
        ge[3]:=aux0 * (aux1 + cx);
        ge[4]:=aux0 * (aux2 + cy);
        ge[1]:=-ge[3];
        ge[2]:=-ge[4];
        for k:=1 to 4 do if (o[k] <= n) then g[o[k]]:=g[o[k]] + ge[k]
        end;

{ frame elements }
for e:=1 to nfe do with frame[e] do

```

```

begin
node:=link1;
o[1]:=neword[1,node];
o[2]:=neword[2,node];
o[3]:=neword[3,node];
node:=link2;
o[4]:=neword[1,node];
o[5]:=neword[2,node];
o[6]:=neword[3,node];
for k:=1 to 6 do if (o[k] <= n) then d[k]:=x[o[k]] else d[k]:=0.0;

{ update gradient }
for i:=1 to 6 do
begin
aux0:=0.0;
for j:=1 to 6 do aux0:=aux0 + stiff[i,j] * d[j];
ge[i]:=aux0
end;
for k:=1 to 6 do if (o[k] <= n) then g[o[k]]:=g[o[k]] + ge[k];

{ update objective }
aux0:=0.0;
for i:=1 to 6 do aux0:=aux0 + d[i] * ge[i];
f:=f + aux0 / 2.0
end
end;

```

D.4 Algoritmo implícito.

Apresenta-se, a seguir, a estrutura do algoritmo implícito usado na solução dos exemplos do Capítulo 3.

```

time:=0.0;
assign(io,outfile); rewrite(io);
{ steps:= trunc(tmax / dt + 0.5); }

forcet(time);

{ calculate a0 = (1/M) * [ft - g(x0)] }
gradient(n,x0,g);
for k:=1 to n do g[k]:= ft[k] - g[k];
solvell(n,g,m);
for k:=1 to n do a0[k]:=g[k];

```

```

while (time <= tmax) and (not keypressed) do
    begin
        timestep:=timestep + 1;

        { calculate c1 = - 4.0 * (x0 + dt * v0) / dt / dt - a0
          c2 = v0 + dt (a0 + c1) / 2.0 }

        for k:=1 to n do c1[k]:= -4.0 * (x0[k] + dt * v0[k]) / dt / dt - a0[k]
        for k:=1 to n do c2[k]:= v0[k] + dt * (a0[k] + c1[k]) / 2.0;

        { calculate predictor value of x and v at time (t + dt) }
        for k:=1 to n do
            begin
                x0[k]:= x0[k] + dt * v0[k] + dt * dt * a0[k] / 4.0;
                v0[k]:= v0[k] + dt * a0[k] / 2.0
            end;

        { minimize W (x) }
        taux:=time + dt;
        forcet(taux);
        quasinewton(iteration,n,maxerror,f,x0,g);

        { calculate value of v and a at (t + dt) }
        for k:=1 to n do
            begin
                a0[k]:= 4.0 * x0[k] / dt / dt + c1[k];
                v0[k]:= v0[k] + dt * a0[k] / 4.0
            end;

        { update time, configuration }
        time:= time + dt;
        if (timestep mod 1) = 0 then
            begin
                { coordinates at time t }
                for node:=1 to nodes do
                    begin

```

```

        aux:=ordx[node];
        if aux <= n then xfinal[node]:=xo[node] + x0[aux]
            else xfinal[node]:=xo[node];
        aux:=ordy[node];
        if aux <= n then yfinal[node]:=yo[node] + x0[aux]
            else yfinal[node]:=yo[node]
        end;
    end;

{ writedata }
{
    for node:=1 to nodes do
        writeln(io,xfinal[node]:12:5,yfinal[node]:12:5);}
        writeln(io,time,' ',yfinal[10]);
        writeln(time,' ',yfinal[10])

    end

end;

```

Referências.

- [D-1] - Gill,P.E.; Murray,W.; Wright,M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, London,1982.
- [D-2] - Lasdon,L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Co.,Londres, 1970.
- [D-3] - Luenberger,D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publ. Co., 1984.

Bibliografia

- [001] - Adeli,H.; Balasubramanyam,K.V.,*Interactive Microcomputer-Aided Design of Circular Suspension Cable Roofs*, Computers & Structures,v.23,n6,1986.
- [002] - Afshari,H.; Soler,A.I.,*Vibration of Cable Gridworks With Small Initial Deformation*,Journal of Applied Mechanics-ASME,v.41,n.3,pp.131-136, 1974.
- [003] - Ahmadi-Kashani,K.; Bell,A.J.,*The Analysis of Cables Subject to Uniformly Distributed Loads*,Eng. Structures,v.10,July,1988,pp.174-184.
- [004] - Argyris,J.H.; Scharpf,D.W.,*Large deflection analysis of prestressed networks*, Journal of the Structural Division-ASCE,ST3,1972,pp.633-654.
- [005] - Avent,R.R.,*Nonlinear Field Analysis of Structural Nets*, Journal of the Structural Division-ASCE,v.95,n.ST5,pp.889-907,1969.
- [006] - Baron,F.; Venkatesan,M.S.,*Nonlinear analysis of cable and truss structures*, Journal of the Structural Division-ASCE,ST2,1971,pp.679-710.
- [007] - Bathish,G.N.,*Free Vibrational Characteristics of Pretensioned Cable Roofs*, Journal of the Engineering for Industry-ASME,v.32,1972.
- [008] - Belitschko,T.; Schoeberle,D.F.,*On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics*,Journal of Applied Mechanics, Dez.,1975
- [009] - Benedettini,F.; Rega,G.; *Non-Linear Dynamics of an Elastic Cable Under Planar Excitation*,Int. J. Non-Linear Mechanics,v.22,n.6,pp.497-509, 1987.
- [010] - Bruno,D.; Maceri,F.; Olivito,R.S.,*Analysis of the Elastic Response of Stay and Stayed Systems*,IABSE PERIODICA 1/1990,February 1990,ISSN 0377-7278.
- [011] - Buchanan,G.R.,*Two-Dimensional Cable Analysis*,Journal of the Structural Division-ASCE,v.96,n.ST7,pp.1581-1587,1970.
- [012] - Buchholdt,H.A.,*An Introduction to Cable Roof Structures*,Cambridge University Press, 1985.
- [013] - Buchholdt,H.A.; Moossavinejad,S.,*Nonlinear dynamic response analysis using conjugate gradients*,Engineering Structures,v.4,1982,pp.44-52.
- [014] - Cannarozzi,M.,*A Minimum Principle for Traction in the Elastostatics of Cable Networks*,Int. J. Solids Structures,v.23,1987.
- [015] - Chu,K.H.; Ma,D.C.C.,*Nonlinear Cable and Frame Interaction*, Journal of the Structural Division-ASCE,v.102,n.ST3,pp.569-589,1976.
- [016] - Clarke,D.,*Design of Countersressed Cable Structures*, Journal of the Structural Division-ASCE,ST11,pp.,2259-2278,Nov.1980
- [017] - Contro,R.,*Presstressing design method for cable net structures*, Engineering Structures,v.7,1985,pp.183-188.
- [018] - Contro,R.; Mayer,G.; Zavelani,A.,*Inelastic analysis of suspension structures by nonlinear programming*,Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer.,v.5, 1975,pp.127-143.
- [019] - Coyette,J.P.; Guisset,P.,*Cable Network Analysis by a Nonlinear Programming Technique*,Eng. Structures,1988,v.10,January,pp.41-46.

- [020] - Dominguez,R.F.; Smith,C.E.,*Dynamic Analysis of Cable Systems*, Journal of the Structural Division—ASCE,v.98,n.ST8,pp.1817–1834,1972.
- [021] - Epstein,M.; Tene,Y.,*Nonlinear Analysis of Pin-Jointed Space Trusses*, Journal of the Structural Division—ASCE,v.97,n.ST9,pp.2189–2202,1971.
- [022] - Fried,I.,*Large deformation static and dynamic finite element analysis of extensible cables*,Computers & Structures,v.15,n.3,1982,pp.315–319.
- [023] - Gambhir,M.L.; Batchelor,B. de V.,*A Finite Element for 3-D Prestressed Cablenets*,Int. J. for Num. Methods in Eng.,v.11,1977,pp.1699–1718.
- [024] - Gasparini,D.A.; Perdikaris,P.C.; Kanj,N.,*Dynamic and Static Behavior of Cable Dome Model*,Journal of Structural Engineering,v.115,n.2,Feb.1989, pp.363–381.
- [025] - Geschwindner,L.F.; West,H.H.,*Forced Vibrations of Cable Networks*, Journal of the Structural Division—ASCE,ST9,Sept.1980,pp.1885–1898.
- [026] - Geschwindner,L.F.; West,H.H.,*Parametric Investigations of Vibrating Cable Networks*,Journal of the Structural Division—ASCE,ST3,pp.465–479, March 1979.
- [027] - Godbole,P.N.; Krishna,P.; Jain,J.K.,*Boundary Effects in Suspended Cable Roofs*,Journal of Structural Engineering,v.110,n.5,pp.1099–1113, May 1984.
- [028] - Greenberg,D.P.,*Inelastic Analysis of Suspension Roof Structures*, Journal of the Structural Division—ASCE,v.96,n.ST5,pp.905–930,1970.
- [029] - Haber,R.B.; Abel,J.F.,*Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I - formulations*,Comp. Methods in Appl. Mech. and Engineer.,30,1982,pp.263–284.
- [030] - Haber,R.B.; Abel,J.F.,*Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part II - implementation*,Comp. Methods in Appl. Mech. and Engineer.,30,1982,pp.263–284
- [031] - Hagedorn,P.; Schafer,B.,*On Non-Linear Free Vibrations of an Elastic Cable*, Int. J. Non-Linear Mechanics,v.15,pp.333–340,1980.
- [032] - Henghold,W.M.; Russell,J.J.,*Equilibrium and natural frequencies of cable structures (anonlinear finite element approach)*,Computers & Structures, v.6,1976,pp.267–271.
- [033] - Henghold,W.M.; Russell,J.J.; Morgan,J.D.,*Free Vibrations of Cable in Three Dimensions*,Journal of the Structural Division—ASCE,v.103,n.ST5,pp. 1127–1136,1977.
- [034] - Hitchings,D.; Ward,P.,*The nonlinear steady-state response of cable networks*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer.,v.9,pp.191–201,1976.
- [035] - Huddleston,J.V.,*Computer Analysis of Extensible Cables*,Journal of the Engineering Mechanics Division,V.107,n.EM1,pp.27–37,Feb 1981.
- [036] - Huddleston,J.V.,*Nonlinear Buckling and Snap-Over of a Two-Member Frame*, Int. J. Solids Structures,v.3,pp.1023–1030,1967.
- [037] - Hughes,T.J.K.; Caughey,T.K.; Liu,K.H.,*Finite Element Methods for Nonlinear Elastodynamics Which Conserve Energy*,Journal of Applied Mechanics, v.45,1978.
- [038] - Hughes,T.J.K.; Liu,K.H.,*Implicit-Explicit Finite Elements in Transient*

- Analysis: Stability Theory*, Journal of Applied Mechanics, v.45, 1978.
- [039] - Hughes, T.J.K.; Liu, K.H., *Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples*, Journal of Applied Mechanics, v.45, 1978.
 - [040] - Irvine, H.M., *Analytical Solutions for Pretensioned Cable Nets*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.102, n.EM1, pp.43-69, Feb. 1976.
 - [041] - Irvine, H.M., *Post-Elastic Response of Suspended Cables*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.101, n.EM6, pp.725-737, Dec. 1975.
 - [042] - Irvine, H.M., *Statics and Dynamics of Cable Trusses*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.101, n.EM4, pp.429-446, 1975.
 - [043] - Irvine, H.M., *Statics of Suspended Cables*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.101, n.EM3, pp.187-205, 1975.
 - [044] - Irvine, H.M.; Jennings, P.C., *Lateral Stability of Cable Truss*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.101, n.EM4, pp.403-416, 1975.
 - [045] - Irvine, H.M.; Sinclair, G.B., *The suspended elastic cable under the action of concentrated vertical loads*, Int. Journal Solids Structures, v.12, 1976, pp.309-317.
 - [046] - Jayaraman, H.B., *A Curved Element for the Analysis of Cable Structures*, Computers & Structures, v.14, pp.325-333, 1981.
 - [047] - Jonatowski, J.J.; Birnstiel, C., *Inelastic Stiffened Suspension Space Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.96, n.ST6, pp.1143-1166, 1970.
 - [048] - Judd, B.J.; Wheen, R.J., *Nonlinear Cable Behavior*, Journal of the Structural Division - ASCE - ST3, pp.567-575, March 1978.
 - [049] - Kar, A.K.; Okazaki, C.Y., *Convergence in Highly Nonlinear Cable Net Problems*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.99, n.ST3, pp.321-334, 1973.
 - [050] - Kassimali, A.; Feraidoonian, H.P., *Strength of Cable Trusses Under Combined Loads*, Journal of Structural Engineering, v.113, n.5, May, 1987, pp.907-924.
 - [051] - Knapp, R.H., *Derivation of a New Stiffness Matrix for Helically Armoured Cables Considering Tension and Torsion*, Int. J. for Numer. Methods in Engineer., v.14, 1979, pp.515-529.
 - [052] - Krishna, P., *Cable-Suspended Roofs*, McGraw-Hill Book Company, 1978.
 - [053] - Krishna, P.; Agarwal, T.P., *Study of Suspended Roof Model*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.97, n.ST6, pp.1671-1684, 1971.
 - [054] - Krishna, P.; Gupta, V.K.; Abuja, A.K.; Mittal, A.K., *Performance of Cable Trusses Under Static Loads*, Journal of the Structural Division, ST1, v.108, Jan. 1982, pp.265-282.
 - [055] - Kunieda, H., *Parametric Resonance of Suspension Roofs in Wind*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.102, EM1, 1976.
 - [056] - Leonard, J.W., *Incremental Response of 3-D Cable Networks*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.99, n.EM3, pp.621-929, 1973.
 - [057] - Leonard, J.W., *Nonlinear Dynamics of Curved Cable Elements*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.99, N.EM3, pp.616-621, 1973.
 - [058] - Leonard, J.W. Nath, J.H., *Comparison of finite element and lumped parameter methods for oceanic cables*, Engineering Structures, v.3, pp.153-167, 1981.

- [059] - Leonard, J.W.; Recker, W.W., *Nonlinear Dynamics of Cables With Low Initial Tension*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.98, n.EM2, pp.293–309.
- [060] - Leonard, J.W.; Tuah, H., *Nonlinear deterministic and stochastic response of cable systems with large bodies under hydrodynamic loads*, Engineering Structures, v.8, 1986, pp.93–106
- [061] - Lewis, W.J.; Jones, M.S., *Dynamic Relaxation Analysis of the Non-Linear Static Response of Pretensioned Cable Roofs*, Computers & Structures, v.18, n.6, pp.989–997, 1984.
- [062] - Luongo, A.; Rega, G.; Vestroni, F., *Planar Non-Linear Free Vibrations of an Elastic Cable*, Int. J. Non-Linear Mechanics, v.19, n.1, pp.39–52, 1984.
- [063] - Ma, D.; Leonard, J.; Chu, K.H., *Slack-Elasto-Plastic Dynamics of Cable Systems*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.105, n.EM2, Apr. 1979, pp.207–222.
- [064] - Maier, G.; Conro, R., *Energy Approach to Inelastic Cable-Structure Analysis*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.101, n.EM5, pp.531–548, 1975.
- [065] - Majowiecki, M., *Tensostrutture: progetto e verifica*, CISIA, Milano, 1985.
- [066] - Majowiecki, M., *Structures suspendues, système Jawerth*, Acier-Stahl-Steel, v.4, 1971.
- [067] - Mattos, H. S.; Sampaio, R., *Análise do Comportamento de Tubulações Submarinas Submetidas a Ação de Correntes*, COBEM 87 - IX Congresso de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1987.
- [068] - Michalos, J.; Birnstiel, C., *Movements of a Cable Due to Changes in Loading*, ASCE Transactions, V.127, part II, pp.267–303, 1962.
- [069] - Molcolm, D.J.; Glockner, P.G., *Optimum Cable Configuration for Air-Supported Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE, ST2, Feb. 1979, pp.421–435.
- [070] - Mollmann, H., *Analysis of Plane Prestressed Cable Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.96, n.ST10, pp.2059–2082, 1970.
- [071] - Morales, R.C., *Shear-Volume Method of Solving Tensions in Cables*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.94, n.ST1, pp.111–119, 1968.
- [072] - Morris, N.F., *Analysis of Cable-Stiffened Space Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE, ST3, March 1976, pp. 501–513.
- [073] - Morris, N.F., *Dynamic Response of Cable Networks*, Journal of the Structural Division, v.100, ST10, 1974.
- [074] - Morris, N.F., *Modal Analysis of Cable Networks*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.101, n.ST1, pp.97–108, 1975.
- [075] - Mote, S.H.; Chu, K.H., *Cable trusses subjected to earthquakes*, Journal of the Structural Division, ASCE, v.104, n.ST4, pp.667–680, 1978.
- [076] - Murray, T.M.; Willems, N., *Analysis of Inelastic Suspension Structures*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.97, ST12, –2806, 1971.
- [077] - Nappi, A., *Piecewise-linear constitutive laws for the analysis of truss-like structures and of cable-networks*, Engineering Structures, v.7,

- pp.176–182,1985.
- [078] - Newmark,N.M.,*A Method of Computation for Structural Dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE,v.85,EM3,1959.
 - [079] - O'Brien,W.T.,*Behavior of Loaded Cable Systems*,Journal of the Structural Division - ASCE,v.94,n.ST10,pp.2281–2302,1968.
 - [080] - O'Brien,T.,*General Solution of Suspended Cable Problems*,Journal of the Structural Division - ASCE,v.93,n.ST1,pp.1–26,1967.
 - [081] - O'Brien,W.T.; Francis,A.J.,*Cable Movements under Two-dimensional Loads*, Journal of the Structural Division - ASCE,v.90,n.ST3,pp.89–123,1964.
 - [082] - Ozdemir,H.,*A finite element approach for cable problems*,Int. Journal Solids Structures,v.15,1979,pp.427–437.
 - [083] - Panagiotopoulos,P.D.,*A variational inequality approach to the inelastic stress-unilateral analysis of cable-structures*,Computers & Structures, v.6,1976,pp.133–139.
 - [084] - Papadrakakis,M.,*Inelastic Dynamic Response of Cable Networks*, Journal of Structural Engineering,v.108,n.5,May 1983,pp.1139–1154.
 - [085] - Peyrot,A.H.,*Marine Cable Structures*,Journal of the Structural Division - ASCE - ST12,Dec.1980,pp.2291–2404.
 - [086] - Peyrot,A.H.;Goulois,A.M.,*Analysis of Cable Structures*,Computers & Structures, v.10,pp.805–813,1979.
 - [087] - Peyrot,A.H.; Goulois,A.M.,*Analysis of Flexible Transmission Lines*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST5,pp.763–779,May 1978.
 - [088] - Poskitt,T.J.,*Numerical Solution of Nonlinear Structures*,Journal of the Structural Division - ASCE,v.93,n.ST4,pp.69–94,1967.
 - [089] - Ramberg,S.E.; Griffin,O.M.,*Free Vibrations of Taut and Slack Marine Cables*, Journal of the Structural Division - ASCE,ST11,Nov.1977,pp.2079–2092.
 - [090] - Roussel,P.,*Numerical solution of static and dynamic equations of cables*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer.,v.9,1976,pp.65–74.
 - [091] - Rozvany,G.I.N.; Wang,C.M.,*On the Prager-Structures - I*, Int. Journal Mech. Sciences,v.25,n.7,pp.639–657,1983.
 - [092] - Rozvany,G.I.N.; Wang,C.M.; Dowd,M.,*Prager-structures: archgrids and cable networks of optimal layout*,Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer., v.31,1982,pp.91–113.
 - [093] - Russell,J.J.; Morgan,J.D.; Henghold,W.M.,*Cable Equilibrium and Stability in a Steady Wind*,Journal of the Structural Division - ASCE,ST2, pp.301–311,Feb.1978.
 - [094] - Saafan,S.A.,*Theoretical analysis of suspension roofs*,Journal of the Structural Division, ASCE,ST2,1970,pp.393–405.
 - [095] - Scalzi,J.B.; McGrath,W.K.,*Mechanical Properties of Structural Cables*, Journal of the Structural Division - ASCE,v.97,n.ST12, pp.2837–2844,1971.
 - [096] - Siev,A. K; Eidelman,J.,*Stress Analysis of Prestressed Suspended Roofs*, Journal of the Structural Division - ASCE,v.90,n.ST4,pp.103–121,1964.
 - [097] - Sinclair,G.B.; Hodder,S.B.,*Exact solutions for elastic cable systems*, Int. Journal Solids Structures.v.17,1981,pp.845–854.

- [098] - Soler, A.L.; Afshari, H., *On Analysis of Cable Network Vibrations Using Galerkin's Method*, Journal of Applied Mechanics, Ser., 1970.
- [099] - Sub-comité de Estruturas Pênséis, Structural Division - ASCE, *Cable Suspended Roof Construction State-of-the-Art*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.97, n.ST6, pp.1715-1761, 1971.
- [100] - Sullivan, B.J.; Batterman, S.C., *Nonlinear Static and Dynamic Deformations of Viscoelastic Cables*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.106, n.EM3, pp.543-571, 1980.
- [101] - Szabó, J.; Kollár, L.; Pavlović, M.N., *Structural Design of Cable-Suspended Roofs*, John Wiley & Sons, 1984.
- [102] - Tottenham, H.; Williams, P.G., *Cable Net: Continuous System Analysis*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.96, n.EM3, pp.277-293, 1970.
- [103] - Triantafyllou, M.S.; Grinfogel, L., *Natural Frequencies and Modes of Inclined Cables*, Journal of Structural Engineering, v.112, n.1, pp.139-148, Jan. 1986.
- [104] - Veletsos, A.S.; Darbre, G.R., *Free Vibration of Parabolic Cables*, Journal of Structural Engineering, v.109, n.2, pp.503-519, Feb. 1983.
- [105] - Verma, V.K.; Leonard, J.W., *Nonlinear Behavior of Cable-Reinforced Membranes*, Journal of the Engineering Mechanics Division, v.104, n.EM4, pp.735-750, Aug. 1978.
- [106] - Wang, C.M., *Optimal shape of cables*, Journal of Engineering Mechanics - ASCE, V.110, n.11, pp.1649-1653, 1984.
- [107] - Wang, C.Y., *The Elastic Catenary*, Intern. J. Mechanical Sciences, v.24, n.6, pp.349-357, 1982.
- [108] - Wang, C.M.; Pulmano, V.A.; Lee, S.L., *Cable Optimization under Selfweight and Concentrated Loads*, I. Struct. Mech., 14(2), 191-207, 1986.
- [109] - Wang, C.M.; Rozvany, G.I.N., *On Plane Prager-Structures - II*, Int. Journal Mech. Sciences, v.25, n.7, pp.529-541, 1983.
- [110] - Watts, A.M.; Frith, R.H., *Efficient numerical solution of the dynamic equations of cables*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineer., v.25, pp.1-9, 1981.
- [111] - West, H.H., *Discretized Initial-Value Analysis of Cable Nets*, Int. J. Solids Structures, v.9, pp.1403-1420, 1973.
- [112] - West, H.H.; Geschwindner, L.F.; Schoski, J.E., *Natural Vibrations of Suspension Cables*, Journal of the Structural Division - ASCE, v.101, n.ST11, pp.2277-2291, 1975.
- [113] - Wilson, A.J.; Wheen, R.J., *Inclined Cables Under Loads - Design Expressions*, Journal of the Structural Division - ASCE - ST5, pp.1061-1078, May 1977.
- [114] - Zarghamee, M.S., *Analysis of Structures by Quadratic Programming*, Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE, v.97, SA5, pp.1495-1502, 1971.