ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR LEONARDO MACHADO ANTONIO E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 08 / 06 / 2011

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Leonardo Machado Antonio

Análise da Interação Solo-Estrutura Aplicada a *Riser* Rígido em Catenária Através da Formulação Co-Rotacional

Campinas, 2011.

73/2011

Leonardo Machado Antonio

Análise da Interação Solo-Estrutura Aplicada a *Riser* Rígido em Catenária Através da Formulação Co-Rotacional

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração:
Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador:
Prof. Dr. Renato Pavanello

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

An88a

Antonio, Leonardo Machado
Análise da interação solo-estrutura aplicada a riser rígido em catenária através da formulação co-rotacional / Leonardo Machado Antonio. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Renato Pavanello.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Interação solo-estrutura. 3. Dinâmica - Teoria não linear. 4. Estruturas marítimas. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Analysis of the soil-structure interaction applied to steel catenary riser using corotational formulation
Palavras-chave em Inglês: Finite elements method, Soil-structure interaction, Non-linear dynamic theory, Marine structures
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Celso Pupo Pesce, Euclides de Mesquita Neto
Data da defesa: 08/06/2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise da Interação Solo-Estrutura Aplicada a *Riser* Rígido em Catenária Através da Formulação Co-Rotacional

Autor: Leonardo Machado Antonio
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Celso Pupo Pesce
DEM/POLI/USP

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 8 de junho de 2011

Dedico este trabalho a minha família que é a base da minha vida.

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio e carinho incondicionais.

À minha esposa Kelly pela compreensão nas horas difíceis e pelo companheirismo sem tamanho que sempre me dá forças para prosseguir.

A todos os amigos sejam eles da infância, da faculdade ou do trabalho.

À Faculdade de Engenharia Mecânica que me formou não somente como profissional, mas também como pessoa.

Ao orientador Renato Pavanello pelo apoio, orientação, compreensão e, principalmente, pela amizade.

Aos amigos do laboratório: Morini, Marcel, Ricardo, William, Lee, Alberto, Anderson, Carlos, Renan, René, Bispo, Jaqueline, Renato, Pedro, Gustavo e Fabrício, pelas fantásticas e divertidas discussões.

Ao professor Louie Yaw pelo apoio durante a implementação do elemento de pórtico co-rotacional.

Aos engenheiros da Eduardo Nicolosi e Antonio Sulino pelo conhecimento fornecido acerca de linhas submarinas.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-graduação, em especial para a Denise, pelo apoio e compreensão que me auxiliaram na conclusão do trabalho.

Ao amigo Denis pelas discussões, sugestões e simulações que me guiaram para a conclusão do trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"A dúvida é o princípio da sabedoria."
(Aristóteles)

Resumo

A explotação de petróleo em ambientes *off-shore* possui inúmeras dificuldades, dentre as quais lâminas d'águas cada vez mais profundas. Neste contexto, as linhas submarinas são componentes de grande importância nesta atividade, pois estabelecem a comunicação entre as unidades de produção e os equipamentos submarinos. Este trabalho estuda a interação solo-estrutura de *risers* rígidos em catenária utilizando a formulação co-rotacional através de abordagens estática e dinâmica. A abordagem estática trata do equílibrio estático de estruturas não-lineares, no qual utiliza-se a estratégia de controle por carregamento;enquanto a abordagem dinâmica utiliza a discretização temporal de Newmark para resolução do equílibrio dinâmico de estruturas não-lineares. Este estudo mostra a implementação de modelos com um e dois parâmetros baseados das hipóteses de Winkler, Filonenko-Borodich e Pasternak no contexto interação da estrutura do *riser* com o leito marinho.

PalavrasChave: Elementos Finitos, Interação Solo-Estrutura, Formulação Co-rotacional, Estruturas Marítimas.

Abstract

The petroleum explotation on off-shore enviorments has differents dificulties, for example deeper water deths. In this context, the marine pipes are components of extreme importance, since they are the comunication between the production units and the subsea equipaments. This work studies the soil-structure interaction of steel cathenary risers using corotational formulation within static and dynamic approaches of structural calculation. The static approach focus on the non-linear static equilibrium of structures using the load control strategy. On the other side, the dynamic approach uses the Newmark time discretization to solve the non-linear dynamic equilibrium equation. This study shows the implementation of foundation with one and two parameter based on hipotheses of Winkler, Filonenko-Borodich and Pasternak in the riser structure and soil interaction context.

Key Words: Finite Elements, Soil-Structure Interaction, Corotational Formulation, Marine Structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A - Área transversal do corpo

A_i - Área transversal equivalente do corpo imerso em fluido

$\mathbf{B}$ - Matriz de transformação do referencial local para o global

$\mathbf{C}$ - Matriz de amortecimento

$\mathbf{C}_l$ - Matriz de rigidez material local pertencente ao termo da rigidez material

C_j - Configuração do corpo atual para o passo de carga j

$\mathbf{d}_i^j$ - Vetor deslocamento do nó i, para configuração j com origem no dado por C_0

e - Erro percentual

E - Módulo de Elasticidade

$\mathbf{g}_d$ - Vetor força de desequilíbrio dinâmica

$\mathbf{g}_e$ - Vetor força de desequilíbrio estática

h - Amplitude de *offset*

h_i - Função de interpolação de Hermite

h_g - Amplitude do movimento de *heave*

$\mathbf{h}$ - Matriz das funções de forma do elemento

H_0 - Força horizontal sobre o elemento de catenária

I - Momento de inércia de área

$\mathbf{K}$ - Matriz tangente de rigidez global

$\tilde{\mathbf{K}}$ - Equivalente dinâmica da matriz tangente de rigidez global

$\mathbf{K}_G$ - Termo geométrico da matriz tangente de rigidez

$\mathbf{K}_M$ - Termo material da matriz tangente de rigidez

$\mathbf{K}_s$ - Matriz tangente de rigidez global do elemento de solo

k - Sobrescrito indicando número da iteração no algoritmo de Newmark

k_1 - Primeiro parâmetro do solo

$\bar{k}_s$ - Segundo parâmetro do solo

l - Comprimento do corpo medido em C_j

l_0 - Comprimento inicial do corpo medido em C_0

$\mathbf{M}$ - Matriz de massa

M_i - Momento fletor no nó i do elemento

n - Sobrescrito indicando o número de iteração de método numérico

N - Esforço normal no elemento

N_c - Número de passos de carga

O - Origem do referencial inercial xy

O' - Origem do referencial local $x'y'$

$\mathbf{p}$ - Vetor de deslocamentos nodais global

$\dot{\mathbf{p}}$ - Vetor de velocidades nodais global

$\ddot{\mathbf{p}}$ - Vetor de acelerações nodais global

$\mathbf{p}_l$ - Vetor de deslocamentos nodais local

p_x - Pressão de deslocamento imposta pela fundação à estrutura

q - Magnitude do carregamento uniformemente distribuído

$\mathbf{q}_e$ - Vetor de esforços externos no corpo

$\mathbf{q}_i$ - Vetor de esforços internos no corpo

$\mathbf{q}_{li}$ - Vetor de esforços internos no corpo no referencial local

Q - Esforço cortante no elemento

$\mathbf{r}$ - Vetor de auxiliar para transformação de referenciais

s - Variável relativa ao domínio da estrutura em catenária

s_l - Comprimento total linha

s_r - Comprimento total do trecho *riser*

s_f - Comprimento do trecho da linha em contato com o solo

t - Tempo

T_g - Período do movimento do *heave*

u_g - Deslocamento do nó imerso no solo medido a partir da cota y_s

u_h - Deslocamento imposto pelo *heave* da UEP

u_i - Deslocamento na direção x do nó i

u_l - Deslocamento de translação local

V - Trabalho Virtual

v_i - Deslocamento na direção y do nó i

w - Peso linear do elemento de catenária

y_i - Posição y do nó i do elemento

y_s - Cota relativa a posição do solo

$\mathbf{x}_i$ - Vetor de posição nodal global do nó i

xy - Eixos ortogonais que formam o referencial inercial global

$x'y'$ - Eixos ortogonais que formam o referencial relativo

$\mathbf{r}$ - Vetor de auxiliar para transformação de referenciais

Letras Gregas

α - Ângulo formado entre o elemento em C_j e entre o elemento em C_0

β - Ângulo formado entre o elemento em C_j e o eixo x do referencial global ou constante de Newmark

β_0 - Ângulo formado entre o elemento em C_0 e o eixo x do referencial global

ϵ - Deformação transversal do elemento

ε - Tolerância numérica utilizada nos métodos iterativos

Φ_i - Coeficiente de proporcionalidade de Rayleigh

ς - Curvatura da viga

γ - Constante de Newmark

ω - Frequência angular do movimento de *offset*

Ω - Domínio do elemento de solo

ρ - Massa específica da linha rígida

ρ_l - Massa específica do fluido externo à estrutura

σ_N - Termo de tensão normal oriundo do esforço normal

σ_T - Termo de tensão normal oriundo do momento fletor

σ - Tensão normal total relativa aos efeitos axiais e de flexão

θ_i - Deslocamento de rotação no plano xy do nó i

θ_{li} - Deslocamento de rotação no referencial local para o nó i

θ_t - Ângulo de topo formado entre a *flex joint*

Símbolos para notações matemáticas

dx - diferencial de x

$df(x)/dx$ - Derivada da função $f(x)$ em função de x

$\delta\mathbf{v}$ - Diferenciação virtual do vetor $\mathbf{v}$

Δ - Intervalo ou diferença

$\|\mathbf{g}\|$ - Norma euclidiana do vetor $\mathbf{g}$

$\mathbf{A}^T$ - Matriz transposta de $\mathbf{A}$

u^* - Termo adimensional da variável u

Abreviações

ID - Diâmetro interno

LDA - Lâmina D'água

OD - Diâmetro externo

SCR - *Steel Catenary Riser*

TDP - *Touchdown Point*

UEP - Unidade Estacionária de Produção

VIV - Vibração Induzida por Vórtice

Sumário

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Contexto

A exploração e explotação *offshore* no cenário brasileiro é responsável pela maior parte da produção atual no país. Isso se deve as descobertas nos últimos anos que transformaram a exploração dos campos, que era inicialmente terrestre, para um cenário *offshore* em constante expansão. Uma das características das novas descobertas de acumulação de hidrocarbonetos é que sua localização situa-se em grandes profundidades no mar, o que projetou a indústria brasileira como uma das pioneiras no desenvolvimento de novas tecnologias para produção de petróleo nessa condição. Hoje, com as novas descobertas, em profundidades que ultrapassam os 2000 metros, a indústria de petróleo depara-se com novos obstáculos tecnológicos que devem ser vencidos para permitir que a produção seja feita de forma econômica e ecologicamente segura. Um dos grandes desafios é garantir uma boa comunicação dos equipamentos submarinos com a unidade de produção na superfície de forma a extrair os fluidos produzidos, mantendo a produção com a menor quantidade possível de intervenções. Essa comunicação deve ser capaz de garantir o transporte dos fluidos produzidos e de suprir os controles e necessidades operacionais dos equipamentos que antes, devido às baixas profundidades, eram realizados na própria superfície.

Um elemento importante nessa comunicação são as linhas de produção, que são os dutos e cabos que permitem a realização das atividades operacionais. As funções da linha concentram-se no transporte do fluido produzido do poço até a superfície, em prover transmissão eletro-hidráulica para o funcionamento dos equipamentos submarinos e do poço, e na injeção de fluidos para limpeza dos equipamentos e controle de poço.

A linha pode ser caracterizada como a união de dois trechos distintos:

- *Riser ou duto ascendente*: Extensão do duto que se encontra elevada em relação ao leito marinho e está sujeita a carregamentos de natureza dinâmica;

- *Flowline ou duto*: Porção do duto que está em contato com o solo e apresenta-se isenta de ou com pouca parcela de carga dinâmica.

A Figura 1.1 fornece a representação esquemática de uma linha de produção em catenária que conecta o poço à unidade de produção, onde estão destacados os trechos *riser* e *flowline*.

As linhas de produção, usualmente, têm as seguintes classificações:

- Duto Rígido;

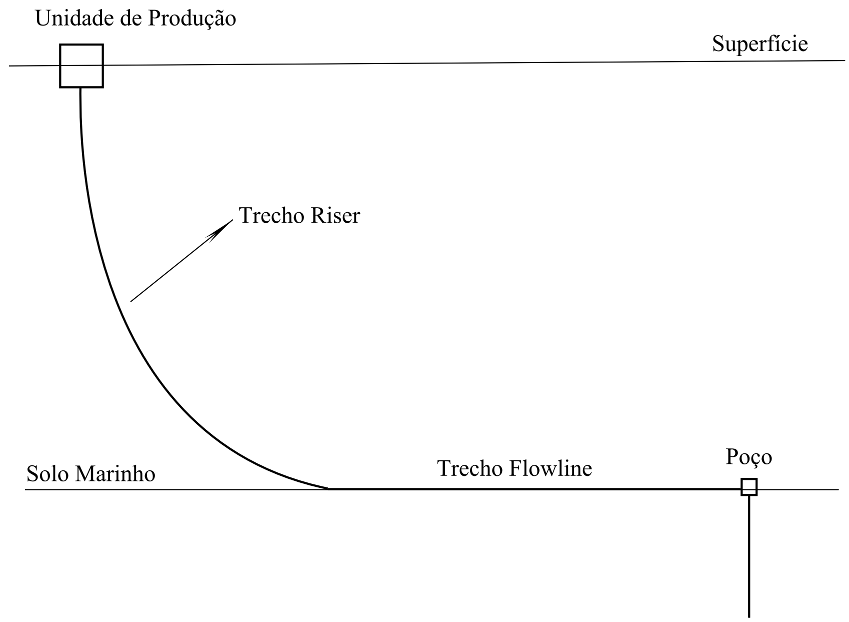

Figura 1.1: Distinção dos trechos de uma linha de produção que conecta o poço à unidade de produção.

- Duto Flexível.

Essa distinção diz respeito à forma estrutural interna a qual a linha foi fabricada. Enquanto a rígida é constituída por um corpo cilindrico metálico revestido com uma camada isolante, o que confere maior rigidez estrutural, a flexível é composta por uma série de camadas poliméricas intercaladas com camadas metálicas, o que confere maior flexibilidade estrutural.

O projeto de uma linha é multidisciplinar e de grande complexidade, devido à natureza dos fenômenos envolvidos durante a operação de produção. A linha de produção deve ser capaz de fornecer isolamento térmico adequado de forma a garantir o escoamento dos fluidos, resistir às intempéries (água salgada), ao atrito com o solo, corrosão, permeação de gases, etc. Do ponto de vista estrutural, deve resistir aos carregamentos ambientais, cargas dinâmicas como arrasto da correnteza, indução de vibração por vórtices, movimentos impostos pela embarcação ou plataforma flutuante, pressão interna e pressão externa sobre a estrutura etc.

A falha da linha por uma dessas razões além de proporcionar riscos ao meio ambiente e à segurança da operação, pode provocar paradas de produção que implicam em grandes prejuízos à atividade de explotação em função do custo de oportunidade gerado. A tendência em perfurar poços e produzir petróleo em regiões marinhas cada vez mais profundas implica em aumento na complexidade do projeto, pois as solicitações sobre a estrutura são agravadas necessitando, assim, projetos mais robustos. É importante ressaltar que a profundidade provoca limitações operacionais quanto ao número de linhas que podem ser ancoradas à unidade produtiva, pois o carregamento transmitido devido ao peso das linhas torna-se muito elevado.

Outro aspecto fundamental no projeto de *riser* em catenária para aplicação em águas profundas e ultras-profundas refere-se à modelagem dos fenômenos de interação da linha com o solo marinho na região do contato com o solo. Este problema é fortemente influenciado pelo comportamento mecânico do solo bem como por problemas de propagação de ondas elásticas que se propagam na estrutura do *riser*. Faz-se necessária uma modelagem precisa deste problema, uma vez que as maiores tensões de fadiga ocorrem nesta região.

Cria-se, assim, a necessidade de ferramentas de modelagem numéricas que possam auxiliar o dimensionamento e projeto destas estruturas, permitindo a instalação e operação, em condições seguras, com o máximo de desempenho possível. A partir desse contexto, esse trabalho pretende desenvolver um modelo a partir da formulação de elementos finitos não-linear para simular o comportamento do trecho *riser* em projeto, tanto sob solicitações estáticas como dinâmicas, incluindo a interação do solo com a linha.

1.2 Objetivos

Nesse trabalho procurou-se desenvolver uma ferramenta computacional para representar o comportamento estático e dinâmico do trecho *riser*, considerando a interação Solo-Estrutura. Assim, os objetivos propostos por este trabalho são apresentados, destacando os de maior importância como segue:

- Implementar, de forma estruturada, elementos de pórticos bidimensionais considerando efeitos da não-linearidade geométrica e grandes deslocamentos, através da formulação co-rotacional;

- Implementar o algoritmo de controle por carregamento, em conjunto com o método de Newton-Raphson, para resolução das equações não-lineares do equilíbrio estático de estruturas;

- Implementar algoritmo de Newmark não-linear, para análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo;

- Estudar, implementar e testar as alternativas para modelagem do fenômeno da interação solo-estrutura, avaliando a possibilidade de modelagem de contato com o solo por meio de impedâncias equivalentes.

Com relação ao estudo estático, pode se listar as seguintes metas:

- Implementação de algoritmo capaz de resolver problemas estáticos com não-leariada-de geométrica para grandes deslocamentos e pequenas deformações;

- Implementar como estratégia de resolução das equações estáticas não-lineares o método de controle por carregamento.

A análise dinâmica através do algoritmo de Newmark tem as seguintes etapas:

- Implementação do algoritmo de Newmark em conjunto com o método de Newton-Raphson para solução das equações dinâmicas não-lineares;

- Implementação de algoritmo para determinação da matriz de massa, de amortecimento e do vetor de carregamento externo em função do tempo.

Para a interação solo-estrutura:

- Implementação do modelo de Winkler descrito como molas nodais;

- Implementação do modelo de Winkler modelado como leito contínuo;

- Implementação do modelo de Filonenko-Borodich;

- Implementação do modelo de Pasternak;

- Adequação desses elementos dentro do estudo estático e dinâmico.

1.3 Contribuições e contexto

A análise e projeto de um *riser* em catenária é de grande complexidade, pois envolve um conjunto amplo de fenômenos que são estudados em diferentes áreas da engenharia. A estrutura é constantemente solicitada pelas variações do meio marinho, como correnteza, dinâmica das ondas na superfície, através do contato com o solo, movimento imposto pela unidade produtiva, fluxo interno de fluidos durante as operações de produção, etc. Esses tópicos são multi-disciplinares e possuem alta complexidade para modelagem dos fenômenos.

Nesse contexto, este trabalho faz parte de um projeto que visa construir um *software* para análise de *riser*. O projeto tem como objetivo a implementação gradual, no pacote computacional, da modelagem de cada fenômeno físico participante. Assim sendo, a contribuição principal deste trabalho corresponde ao estudo estático e dinâmico do *riser* com uma parcela da modelagem da interação solo-estrutura (*vide* destaque na Figura (1.2)). A implementação do módulo de estudo estático e do estudo dinâmico são bastante importantes dentro do *software*, pois constituem duas plataformas primitivas de análise. Ou seja, as demais ramificações, para a aplicação da simulação, serão implementadas considerando essas modalidades de estudo. Em resumo, as principais contribuições deste trabalho são:

- Implementação do módulo de estudo estático;
- Implementação do módulo de estudo dinâmico;
- Implementação de modelos básicos para representação do solo marinho.

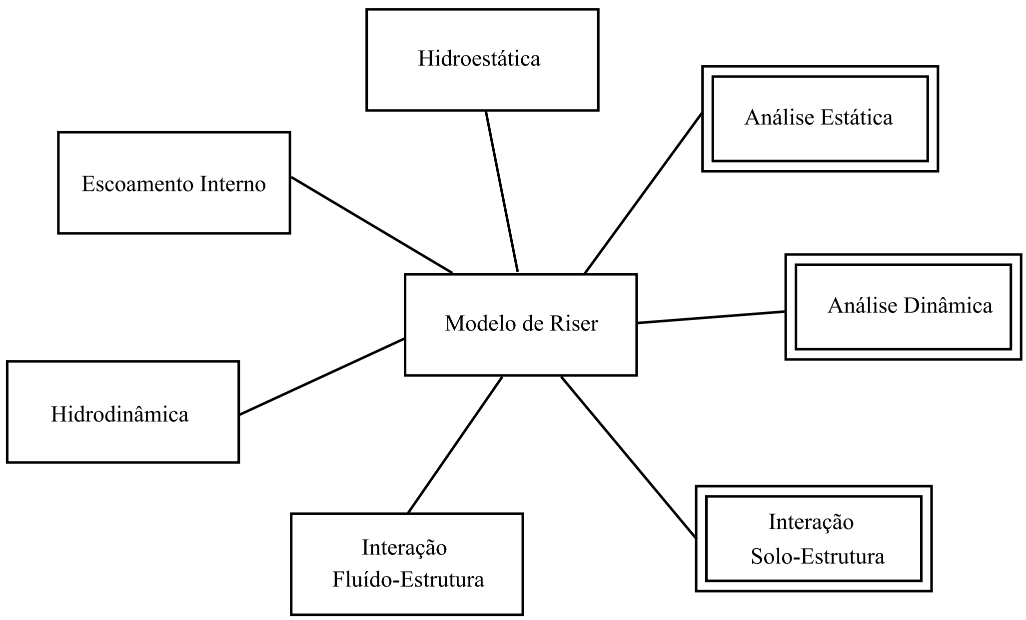

Figura 1.2: Diagrama sobre algumas das áreas que compõem os fenômenos presentes na mecânica dos *risers*

De forma atrelada, a implementação destes tópicos dependem de contribuições secundárias deste projeto, que são listadas a seguir:

- Implementação de um gerador de malha para discretizar o domínio do corpo em catenária na região do solo;
- Implementação do elemento de pórtico não-linear bidimensional através da formulação co-rotacional;
- Implementação da metodologia de cálculo numérico para resolução das equações não-lineares presentes tanto no caso dinâmico como estático;
- Implementação do algoritmo de integração de Newmark no tempo para o caso não-linear bidimensional;

- Implementação de elementos para representação do solo.

O código computacional desenvolvido segue a estrutura clássica de um programa de elementos finitos geral, permitindo que implementações futuras possam ser feitas com maior simplicidade.

1.4 Organização do Trabalho

Esse texto está estruturado em capítulos, em que cada um trata de um tema específico utilizado para o desenvolvimento do trabalho. O **Capítulo 2** traz a revisão bibliográfica sobre os temas tratados no estudo e que nortearam o desenvolvimento do trabalho em sua etapa inicial. O **Capítulo 3** trata da formulação co-rotacional aplicada aos elementos pórtico bidimensional, no qual mostram-se os conceitos envolvidos nesta abordagem culminando na equação que descreve a matriz tangente de rigidez e o vetor de esforços internos do elemento no referencial global. No **Capítulo 4** são descritos os conceitos envolvidos no estudo do equilíbrio estático para não-linearidade geométrica. Comentam-se os métodos de controle por carregamento e o algoritmo de Newton-Raphson para resolução das equações não-lineares. O **Capítulo 5** foca no estudo dinâmico não-linear de corpos não-rígidos utilizando a formulação co-rotacional através do integrador implícito de Newmark no tempo. Numa primeira parte, é apresentado a equação de equilíbrio dinâmico, passando pela explicação do procedimento de Newmark e do algoritmo de Newton-Raphson para resolução das equações não-lineares presentes no equilíbrio dinâmico. O **Capítulo 6** traz a descrição acerca da modelagem de diferentes fundações: fundação de Winkler modelada por molas nodal, fundação de Winkler modelada por leito, fundação de Filonenko-Borodich e fundação de Pasternak. No texto, explicam-se as diferenças principais em cada uma assim como a determinção da matriz global de rigidez e dos esforços internos. Ao final do capítulo, o texto comenta sobre a questão do problema de contato e sua modelagem no contexto de elementos finitos. O **Capítulo 7** comenta sobre as principais características de *risers* rígidos em catenária e algumas particularidades da estrutura. O **Capítulo 8** descreve o desenvolvimento computacional realizado de forma a automatizar o cálculo estrutural de *riser* rígido em catenária e também indica as implementações realizadas para o simulador. O **Capítulo 9** reúne todos os resultados obtidos neste estudo, no qual estão presentes validações com exemplos utilizados na literatura tanto para o estudo de pórticos planos em equilíbrio estático como dinâmico, como para resultados relativos ao estudo estrutural do *riser* rígido em catenária. O **Capítulo 10** traz os comentários finais acerca do trabalho e traz as sugestões para os próximos passos do estudo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os assuntos abordados para realização deste estudo, visando focar na problemática do estudo estático e dinâmico do trecho *riser* das linhas de produção e no contato desta estrutura com o solo marinho. Dentre os tópicos abordados, primeiramente é tratada a questão do dimensionamento e do projeto de *risers*, na qual procurou-se destacar algumas referências que tratam o problema de uma forma mais global, ou seja, observando as características comuns dentro da análise estrutural de *risers* com algumas citações ao estudo hidrodinâmico. Outro tópico mencionado tem relação com o estudo dinâmico do *riser*, no qual são citadas algumas metodologias de abordagem do caráter dinâmico da estrutura como, por exemplo, os domínios de análise: tempo ou freqüência. Por fim, é feita um breve revisão de trabalhos relativos à interação solo-estrutura, na qual se observa algumas características de modelagem dos fenômenos mecânicos do solo.

2.1 Dimensionamento e projeto de *risers* de produção

O projeto do *riser* é de grande complexidade devido à quantidade de fenômenos físicos presentes com grande interdisciplinaridade. Uma ampla revisão e reunião de assuntos relacionados à pesquisa de *riser* de produção podem ser observadas no trabalho de Patel & Seyed (1995), no qual fazem uma revisão sobre a modelagem do *riser*, em especial, o flexível. Abordam aspectos de análise estática da estrutura explicitando o caráter não-linear do problema e diversas configurações de linhas. Constata-se, a partir desta revisão, que vários trabalhos optaram por utilizar o método dos elementos finitos como ferramenta numérica de simulação. Na questão dinâmica, segregam o assunto em duas áreas distintas: solução no domínio da freqüência e no tempo. Dentre estes tópicos, relatam que a solução no domínio da freqüência proporciona grande economia de tempo, já que a análise se torna mais barata no aspecto computacional. Contudo, devido à não-linearidade inerente ao problema, a solução requer técnicas de linearização. A solução do domínio do tempo, embora mais cara computacionalmente, se ajusta bem à característica não-linear do problema. Dentre os integradores numéricos no tempo, destacam-se o integrador de Newmark, em especial o tipo β, devido à sua estabilidade incondicional, boa acurácia e sua relativa facilidade de implementação. Anteriormente a este trabalho, Bernitsas & Kokarakis (1988) indicam a importância da consideração dos efeitos não-lineares tanto na questão estrutural como de carregamento, ao comparar os resultados de modelos lineares com não-lineares e observar que esta consideração tem impacto considerável na resposta obtida. Essa conclusão é de grande importância e têm correspondência com o trabalho de Patel & Seyed (1995), que aponta para uniformidade de opiniões no momento de escolha dos modelos com relação à não-linearidade.

Mais relacionados ao aspecto de dimensionamento e projeto, Chaudhury et al. (1999) elencam os principais tópicos para projeto, teste e instalação de *risers* em águas rasas considerando, na análise, diversos fenômenos presentes no comportamento mecânico do *riser* de produção. Como objeto de análise, levaram em conta a modelagem não-linear do leito marinho e da junta de reforço (*flex-joint*), para conexão à unidade de produção, efeitos de vibração induzida por vórtices (VIV) e os efeitos de fadiga nas juntas da estrutura. Comentam que o modelo de solo empregado tem grande importância, pois sua escolha remete diretamente à viabilidade do projeto e sua economicidade. Em um escopo de análise paramétrica para investigação de *riser*, Pereira et al. (2007) analisam alguns parâmetros de influência dentro do projeto de *riser* rígido em águas ultra-profundas, dentre os quais: o diâmetro externo, espessura do duto, *offset* da plataforma, a profundidade de operação e parâmetros relativos às naturezas da onda e corrente atuando sobre a estrutura. Dentre os pontos principais de dimensionamento e projeto, consideraram o topo da estrutura e o ponto de contato com o solo marinho, denominado de *Touchdown Point* (TDP). Segundo os autores, a criticidade destes pontos relaciona-se à correspondência destes com as porções mais solicitadas da estrutura. Dentre os resultados obtidos, verificaram que o ângulo de topo e a espessura da parede têm grande contribuição para a redução da tensão no topo de estrutura, sendo que as *flexjoints*, nesse escopo, podem contribuir enormemente para o controle desta tensão. No estudo do TDP, concluíram que o movimento provocado pela embarcação, em especial o movimento de *heave*, pode causar grande esforço de compressão na estrutura. Assim, unidades de produção com movimentos de baixa amplitude tornam-se mais adequadas para a operação deste tipo de linha. O mesmo resultado foi verificado por Song et al. (2006), por meio de uma abordagem numérica utilizando o método dos elementos finitos através do *software* comercial ABAQUS. Os fenômenos incluídos na análise foram fadiga induzida pelos esforços gerados pelo movimento da embarcação, vibração induzida por vórtice oriunda do movimento de *heave*, entre outros. Os autores concluíram, também, que o problema de fadiga se torna crítico na área do TDP, devido aos grandes esforços envolvidos nesta área, especialmente para grandes diâmetros de duto.

Em um cenário de águas profundas, Andueza et al. (2001) estudaram o comportamento de *risers* híbridos, que consiste na configuração em que um *riser* flexível em catenária, ligado à unidade de produção, está em conjunto com um *riser* rígido vertical conectado ao poço. A junção entre as distintas estruturas é feita através de um componente bóia, que auxilia na sustentação do conjunto e, principalmente, do elemento vertical. A análise do modelo foi feita através do uso de elementos finitos, considerando não-linearidades e grandes deslocamentos, com o auxílio dos códigos computacionais MSC/Patran e ABAQUS. O modelo da configuração em questão foi testado considerando efeitos de tração axial, momentos fletores e pressão externa para as profundidades de 1800 e de 3000 metros. Dentre os resultados obtidos, este modelo se mostrou como uma boa alternativa para a explotação em águas profundas, pois não apresentou grandes variações de tensão com o movimento de *heave* e a intensidade da tração no topo da estrutura capaz de ser suportada pela embarcação.

Mais recentemente, Morini (2009), através uma abordagem estática, estudou a estrutura de *riser* rígido em catenária, utilizando a formulação posicional proposta por Coda & Greco (2004). Neste, o autor considerou carregamentos estáticos como o peso próprio e o empuxo, assim como esforços ligados à estrutura devido ao contato com o solo. Como modelo de solo, utilizou o conjunto de molas infinitas não-lineares, no qual não foram considerados os efeitos horizontais. Os resultados de simulação foram comparados com os fornecidos pelo *software* ANFLEX, obtendo boa proximidade de solução.

2.2 Estudo dinâmico de *risers*

Dentro do escopo da dinâmica de *riser*, Patel et al. (1984) fizeram um trabalho muito interessante, ao tratar os domínios do tempo e freqüência. Neste estudo, observam-se tendências que ainda permanecem nas publicações recentes: o uso da ferramenta de elementos finitos em conjunto com integrador de Newmark no domínio do tempo em um escopo não-linear para *riser* vertical. Os autores analisaram os deslocamentos e tensões na estrutura resultantes de carregamentos, oriundos de fatores como peso próprio, pressões internas e externas, empuxo, e forças ambientais derivadas de correntes marítimas e ondas. Larsen (1992) faz uma comparação entre resultados fornecidos por onze dos principais *softwares*, na época, para simulação estática e dinâmica de *riser*. Dentre as principais conclusões, observaram que, para a análise estática, diferenças significativas são obtidas a partir das diversas formas de modelar as forças de arrasto e a interação entre o solo-estrutura. Porém, de uma forma geral, as incertezas presentes são aceitáveis, tornando a análise estática como uma metodologia consolidada. Na questão dinâmica, as soluções mostraram considerável variação entre os valores de tensão, algo em torno de 10 a 15%, e apontam que tal variação tem origem nas diferentes formas de modelar os carregamentos hidrodinâmicos e o amortecimento estrutural. É possível constatar que há uma tendência entre os *softwares* de utilizar o método dos elementos finitos como ferramenta de discretização, enquanto faz-se uso do método de Newmark como integrador numérico para o domínio no tempo. A respeito do estudo dinâmico de *riser* rígidos em catenária (*Steel Catenary Riser* - SCR), Lane et al. (2001) comparam os métodos de modelagem dinâmica no domínio do tempo e da freqüência para previsão do tempo de vida em fadiga. Apresentam resultados, dentre os quais o fenômeno de interação solo-estrutura é incluído, utilizando uma ferramenta avançada no domínio da freqüência e, também, comparam com resultados de problemas análogos no domínio do tempo. Os autores concluem que a análise de freqüências do *riser* traz algumas vantagens durante o desenvolvimento do projeto, já que uma série de alternativas, passíveis de descarte, sejam desconsideradas na fase inicial do mesmo. Dessa forma, elimina-se uma série de opções que não seriam possíveis de ser implementadas, economizando tempo de simulação nas etapas mais avançadas do projeto.

Kubota (2003) analisou o comportamento de um *riser* rígido vertical solicitado através de carregamentos hidrodinâmicos. O escopo do estudo norteou a análise estática e dinâmica do *riser*, utilizando como ferramenta numérica o método dos elementos finitos novamente e fazendo uso da formulação de Garlekin. Com relação ao estudo dinâmico, elegeu o integrador de Newmark para solução das equações no domínio no tempo. O trabalho comparou os resultados numéricos obtidos com procedimentos experimentais, de um corpo esbelto sobre efeito de escoamento por corrente marítima, ondas e efeitos de VIV, obtendo razoável concordância. Pesce & Martins (2004) e Pesce et al. (2006) analisaram a dinâmica no domínio do tempo para a região do TDP de *riser* em catenária, obtendo a solução analítica para a aproximação quase estática do problema. Os autores comentam que a solução quase estática baseia-se na premissa de comportamento dinâmico de baixa velocidade do trecho suspenso, o que é válido para solos com rigidez suficientemente alta e ausência de impacto da estrutura contra a fundação. Os autores Yazdchi & Crisfield (2002) modelaram e implementaram a inclusão de carregamentos hidrodinâmicos e hidrostáticos em problemas tridimensionais de *riser*, ao abordar solução numérica para dinâmica no domínio do tempo através de formulação co-rotacional para vigas Reissner-Simo. Em seu trabalho, simularam cenários clássicos da estática e dinâmica de *riser*. Os resultados obtidos durante a validação mostraram boa correspondência com resultados presentes na literatura. Silveira & Martins (2003) fizeram análise do comportamento dinâmico no domínio do tempo de linhas utilizando o integrador temporal de Newmark. Neste último, os autores incluíram os efeitos não-lineares do amortecimento viscoso, dado pela formulação de Morison, e o contato da estrutura com o solo marinho.

2.3 Interação entre solo e estrutura

A região de contato entre o solo e a estrutura é de grande importância, pois, em geral, nos trabalhos publicados, observa-se que esta região é responsável por picos de tensão. Esses picos de tensão, somados às características dinâmicas do sistema, tornam a resistência à fadiga um assunto de notória relevância no dimensionamento da estrutura. Desta forma, a construção de um modelo bem caracterizado, assim como suas propriedades envolvidas, torna-se imprescindível para previsão de falhas e tomadas de decisões quanto às estratégias necessárias para interromper os mecanismos de falha. Silveira et al. (2000) e Silveira & Martins (2004) construíram uma representação do contato entre o solo e a estrutura considerando-o como um conjunto de molas e amortecedores verticais continuamente distribuídos. Desta maneira, conseguiram implementar a rigidez e amortecimento do solo para deslocamentos no sentido vertical através da introdução de coeficientes. No aspecto do projeto da linha de produção, analisando o fenômeno do contato com o solo, Leira et al. (2004) exploraram o tema discorrendo acerca de alguns modelos para a interação entre o solo e o *riser*. Comentam que a resposta do modelo é diretamente ligada à forma de interação com o solo, ou seja, o resultado do modelo está relacionado com as premissas de sua construção como, por exemplo: a consideração ou não do efeito de sucção, a característica não-linear da modelagem do solo (diferentes comportamentos para movimento ascendente ou descendente), entre outros. Desta forma, concluem que a qualidade da resposta depende da escolha do modelo para o caso estudado, o que terá grande impacto na previsão para falha por fadiga e, para modelos com maior simplicidade, a correção através de coeficientes pode não ser suficiente para caracterizar bem o modelo em relação à realidade. Um trabalho que tem o escopo semelhante foi realizado por Bridge et al. (2004), no qual comentam também sobre a importância da caracterização do modelo para análise do fenômeno de interação entre o solo e estrutura para garantir resultados aceitáveis durante o dimensionamento da linha, especialmente para determinação da falha por fadiga. Em especial, os autores discorrem sobre a mecânica vertical do contato com o solo, descrevendo os diferentes comportamentos do fenômeno ao distinguir o movimento descendente (relacionado ao enrijecimento do solo) do ascendente (efeito de sucção). Com relação a modelos numéricos para contato entre o *riser* e o solo, Kordkheili & Bahai (2007) consideraram, além dos efeitos analisados por Yazdchi & Crisfield (2002), os efeitos de não-linearidade da interação solo-estrutura através de uma abordagem numérica. Novamente, percebe-se que a abordagem numérica escolhida foi o método dos elementos finitos, sendo que a formulação proposta pelos autores baseou-se na formulação Lagrangeana. Para a simulação, o elemento adotado foi um elemento de viga com quatro nós e vinte e quatro graus de liberdade, no qual o componente não-linear da rigidez é de natureza puramente geométrica. Mais recentemente, Barros et al. (2009) discutem o comportamento de três diferentes tipos de modelos analíticos para interação solo-estrutura: Winkler, Pasternak e Kerr, apontando as diferentes implicações no comportamento dos deslocamentos e a distribuição de tensão no corpo. Os autores discorrem sobre as características de cada modelo quanto à caracterização do solo e suas implicações dentro do contexto da interação entre o solo e a estrutura. As soluções analíticas de cada modelo são comparadas com uma solução numérica feita através de uma abordagem de elementos finitos, na qual o solo foi modelado como contínuo. Dentre os resultados obtidos, o modelo de Winkler, em contrapartida aos demais modelos, apresentou uma solução oscilatória e observou-se que a escolha do modelo implicou diretamente na intensidade da tensão no corpo na região do TDP, fato que, para outros pontos do domínio do corpo, os resultados não exibem diferença significativa. Com relação à comparação com o modelo numérico contínuo, o modelo de Kerr mostrou soluções mais próximas.

2.4 Comentários a respeito da revisão bibliográfica

A partir dos trabalhos apresentados, observa-se uma freqüente utilização de ferramentas computacionais para dimensionamento e análise de *risers*. Dentre as ferramentas mais utilizadas para discretização, nota-se uma preferência patente pelo método dos elementos finitos, o que, de uma forma não menos categórica, o coloca como umas da príncipais ferramentas para discretização do espaço dentro deste assunto. Outra constatação, feita a partir de vários trabalhos sobre o tema, é que a construção do modelo de simulação é feita de forma a caracterizar os efeitos não-lineares da rigidez estrutural. Essa caracterização é realizada satisfatoriamente através de formulações de elementos finitos não-lineares, em especial, com relação à rigidez geométrica. Com respeito à análise dinâmica no domínio do tempo, o método de discretização e integração temporal tem preferência pela utilização do método de Newmark. Grande parte dos trabalhos relacionados nesta revisão apresentaram esses dois caminhos, preferencialmente, como alternativa para solução do problema, o que também é observado nos *software* comerciais específicos para o problema, como citado por Larsen (1992). Com relação à análise do contato solo-estrutura, observa-se uma grande preocupação acerca do tema de fadiga, em virtude dos esforços gerados à estrutura nessa região que têm grandes amplitudes de tensão e são de natureza cíclica. Nota-se que o tema ainda é de grande discussão, pois existe uma grande variedade de modelos que visam cobrir os fenômenos mecânicos presentes na interação. Essa discussão culmina na forma de utilização e aplicação de cada modelo, já que tanto de uma óptica computacional como analítica, o que se pode constatar é que há certa variabilidade de resultados a depender do modelo escolhido, de forma que o resultado de melhor qualidade não está necessariamente ligado à complexidade do modelo. Assim, a escolha do modelo é bastante crítica, porque, a depender de sua escolha, as soluções obtidas podem ter impactado na análise do dimensionamento da linha devido à distinção entre as soluções.

3 FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL PARA PÓRTICOS PLANOS

Este capítulo trata do equacionamento da formulação co-rotacional para o elemento de pórtico no plano em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Em todo o texto, o termo pórtico denomina-se como o corpo esbelto com dimensões axiais predominantes cujos graus de liberdade nodais são:

- deslocamentos de translação u e v, respectivamente nas direções x e y;
- rotação θ, em torno do eixo z.

Desta forma, o pórtico é a união dos modelos de barra e viga, no qual o primeiro trata do comportamento de alongamento e contração e o segundo da flexão do corpo. O modelo de viga adotado é o Euler-Bernoulli e utiliza suas hipóteses para construção da formulação.

A descrição de movimento co-rotacional tem origem no teorema de decomposição polar (Lapeira, 2007), em que o deslocamento total pode ser decomposto no movimento do corpo rígido mais deslocamento relativo. No contexto dos elementos finitos, consiste em fixar ao elemento um sistema local de coordenadas que rotaciona e translada em conjunto com o corpo. Assim, no referencial local, elimina-se a análise do movimento de corpo rígido concentrando-se somente nos deslocamentos relativos, que para este sistema de coordenadas são considerados pequenos. Essa premissa permite expressar os deslocamentos locais do elemento com baixa ordem de não-linearidade (Battini, 2002). Essa baixa ordem de não-linearidade é apenas aparente à medida em que a não-linearidade geométrica é incluída no movimento do sistema local de coordenadas.

As primeiras contribuições utilizando a abordagem co-rotacional são oriundas de Belytschko & Hsieh (1973), Oran (1973) e Oran & Kassimali (1976) em problemas transientes para vigas, para análise de grandes deslocamentos e estabilidade em estruturas, respectivamente. O termo co-rotacional foi inicialmente apresentado por Belytschko & Glaum (1979) referindo-se ao sistema local de coordenadas ligado ao elemento.

Este capítulo concentra-se, primeiramente, na dedução das equações para os esforços internos e da matriz tangente de rigidez para o elemento de pórtico plano. A dedução é baseada no texto de Crisfield (1991) e Battini (2002) e algumas alterações apresentadas por Souza (2000) para adequação às grandes rotações.

3.1 Formulação co-rotacional para elementos de pórtico plano

É dado um corpo orientado em um referencial inercial xy com origem O em uma configuração inicial C_0. Essa configuração é determinada pelos vetores posição $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, que correspondem aos vetores formados pela origem O e os nós das extremidades do elemento, como pode ser observado na Fig.(3.1). Com relação ao referencial inercial, define-se

$$\mathbf{p} = \left[\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \right]^T, \tag{3.1}$$

como o vetor de deslocamentos nodais globais[1], no qual u_i corresponde aos deslocamentos na direção x, v_i aos deslocamentos na direção y e θ_i as rotações no plano xy.

Uma vez solicitado com um carregamento externo, o corpo sairá de sua configuração inicial C_0 e atingirá uma nova denominada de C_j. Assim sendo, definem-se como $\mathbf{d}_1^j$ e $\mathbf{d}_2^j$ como os vetores de deslocamento dos nós do elemento e têm origem nos nós na configuração inicial C_0 e final nos nós da configuração final C_j, como pode ser observado na Fig.(3.1). Dessa forma, os vetores $\mathbf{d}_i^j$ podem ser explicitados em termos dos deslocamentos nodais globais como

$$\mathbf{d}_1 = \left[\begin{array}{cc} u_1 & v_1 \end{array} \right]^T \quad e \quad \mathbf{d}_2 = \left[\begin{array}{cc} u_2 & v_2 \end{array} \right]^T, \tag{3.2}$$

em que o índice j da configuração foi negligenciado por simplificação textual.

Sobre o corpo, posiciona-se um referencial relativo[2] $x'y'$ de origem O' coincidente como o primeiro nó do elemento que rotaciona e translada em conjunto com o corpo conforme altera sua configuração. Baseado nesse referencial móvel os únicos movimentos observados são as rotações nodais do corpo em relação ao plano $x'y'$ e medidas em relação a x', representados por θ_{l1} e θ_{l2}, e o deslocamento transversal axial na direção x', definido como u_l, como pode ser observado na Fig.(3.2). Dessa forma, define-se o vetor de deslocamentos nodais local como

$$\mathbf{p}_l = \left[\begin{array}{ccc} u_l & \theta_{l1} & \theta_{l2} \end{array} \right]^T. \tag{3.3}$$

Para relacionar o referencial local ao global é importante introduzir algumas relações entre as grandezas globais e locais. Partindo da determinação do comprimento do elemento na configuração inicial C_0, tem-se o seguinte resultado

$$l_0 = \|\mathbf{x}_{21}\|, \tag{3.4}$$

em que $\mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. De forma análoga, o comprimento do elemento numa configuração C_j

[1]O termo global remete às grandezas em relação ao referencial inercial

[2]Aqui tratado como referencial local

é dado por

$$l = \|\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21}\|\,, \tag{3.5}$$

no qual $\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$. Assim, o deslocamento nodal u_l do referencial local é calculado através da relação

$$u_l = l - l_0. \tag{3.6}$$

Crisfield (1991) comenta que em geral a relação (3.6) não é bem condicionada matematicamente e sugere a seguinte transformação

$$u_l = l - l_0 = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l + l_0} = \frac{l^2 - l_0^2}{l + l_0} = \frac{2}{l + l_0}\left(\mathbf{x}_{21} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_{21}\right)^T \mathbf{d}_{21}. \tag{3.7}$$

Para determinar a transformação com relação aos deslocamentos nodais de rotação, da Fig.(3.2), parte-se a seguinte relação entre ângulos

$$\theta_{l1} = \theta_1 - \alpha \quad e \quad \theta_{l2} = \theta_2 - \alpha. \tag{3.8}$$

Através da Fig.(3.2), é possível construir a seguinte relação angular

$$\alpha = \beta - \beta_0. \tag{3.9}$$

Dessa forma (3.8) transforma-se em

$$\theta_{l1} = \theta_1 - (\beta - \beta_0) \quad e \quad \theta_{l2} = \theta_2 - (\beta - \beta_0). \tag{3.10}$$

Utilizando relações trigonométricas a partir da equação de θ_{l1} em (3.10) é possível escrever

$$\sin\theta_{l1} = \sin(\theta_1 - (\beta - \beta_0)) = \cos\beta\sin(\theta_1 + \beta_0) - \sin\beta\cos(\theta_1 + \beta_0) \tag{3.11}$$

$$\cos\theta_{l1} = \cos(\theta_1 - (\beta - \beta_0)) = \cos\beta\cos(\theta_1 + \beta_0) + \sin\beta\sin(\theta_1 + \beta_0) \tag{3.12}$$

Analogamente, para θ_{l2} tem-se

$$\sin\theta_{l2} = \sin(\theta_2 - (\beta - \beta_0)) = \cos\beta\sin(\theta_2 + \beta_0) - \sin\beta\cos(\theta_2 + \beta_0) \tag{3.13}$$

$$\cos\theta_{l2} = \cos(\theta_2 - (\beta - \beta_0)) = \cos\beta\cos(\theta_2 + \beta_0) + \sin\beta\sin(\theta_2 + \beta_0) \tag{3.14}$$

As rotações θ_{l1} e θ_{l2} são determinadas por

$$\theta_{l1} = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\beta\sin(\theta_1+\beta_0) - \sin\beta\cos(\theta_1+\beta_0)}{\cos\beta\cos(\theta_1+\beta_0) + \sin\beta\sin(\theta_1+\beta_0)}\right) \tag{3.15}$$

$$\theta_{l2} = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\beta\sin(\theta_2+\beta_0) - \sin\beta\cos(\theta_2+\beta_0)}{\cos\beta\cos(\theta_2+\beta_0) + \sin\beta\sin(\theta_2+\beta_0)}\right) \tag{3.16}$$

Esse procedimento, diferentemente de Crisfield (1991), foi proposto por Souza (2000), pois permite o cálculo para grandes rotações. Assume-se que θ_{l1} e θ_{l2}, medidos em relação à corda do elemento tem valores moderados, menores do que $\pi/2$. Com relação a essa premissa, Aranha & Souza (2004) comentam que na prática isso não afeta o problema, já que à medida em que os membros estruturais são divididos em elementos menores, as rotações relativas locais tornam-se cada vez menores.

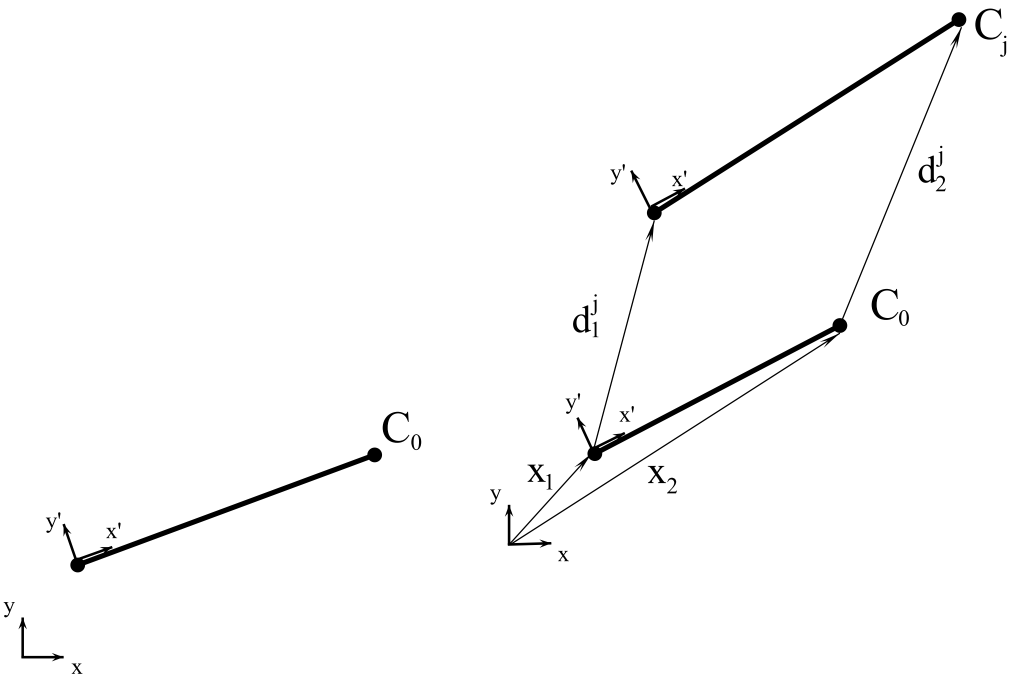

Figura 3.1: Movimento de corpo rígido de C_0 até C_j.

3.1.1 Deslocamentos Virtuais Locais

O deslocamento virtual no referencial local é obtido a partir da primeira variação do vetor local de deslocamentos, dado em (3.3), que resulta em

$$\delta\mathbf{p}_l = \begin{bmatrix} \delta u_l & \delta\theta_{l1} & \delta\theta_{l2} \end{bmatrix}^T. \tag{3.17}$$

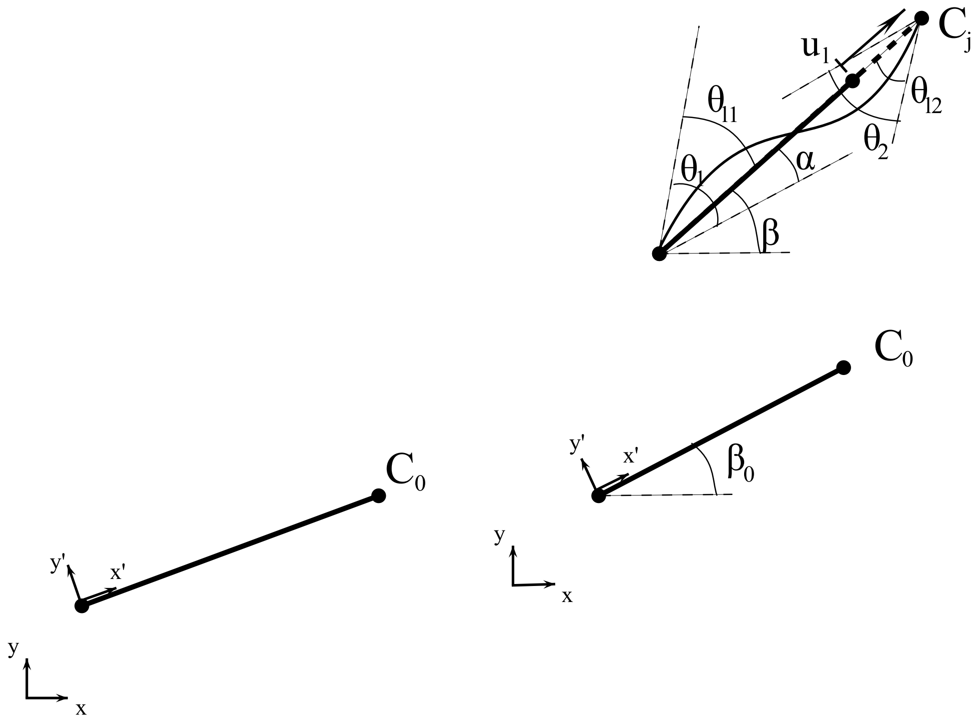

Figura 3.2: Movimento deformacional de C_0 até C_j.

Dessa forma, da primeira variação de cada uma das componentes, δu_l, $\delta\theta_{l1}$ e $\delta\theta_{l2}$, é possível explicitá-lo em função das variáveis globais. Para o primeiro termo, δu_l, a variação fornece o seguinte resultado

$$\delta u_l = \delta l = \cos\beta(\delta u_2 - \delta u_1) + \sin\beta(\delta v_2 - \delta v_1) = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \delta\mathbf{p}, \quad (3.18)$$

em que c e s correspondem a $\cos\beta$ e $\sin\beta$, respectivamente, e $\delta\mathbf{p}$ é o vetor de deslocamento virtual no referencial global. Por conveniência, define-se

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.19)$$

obtendo a seguinte equação

$$\delta u_l = \mathbf{r}\delta\mathbf{p}. \quad (3.20)$$

Para as rotações locais, o deslocamento virtual é determinado através da diferenciação de (3.10), resultando em

$$\delta\theta_{l1} = \delta\theta_1 - \delta\beta \quad e \quad \delta\theta_{l2} = \delta\theta_2 - \delta\beta. \quad (3.21)$$

Uma vez que β_0 é constante, a determinação do termo $\delta\beta$ pode ser feita através da variação de

$$\sin\beta = \frac{y_2 + v_2 - y_1 - v_1}{l}, \tag{3.22}$$

o que fornece o seguinte resultado

$$\delta\beta = \frac{1}{\cos\beta l^2}[(\delta v_2 - \delta v_1)l - (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)\delta l], \tag{3.23}$$

no qual $\delta l = \delta u_l$. Assim, tem-se:

$$\delta\beta = \frac{1}{\cos\beta l^2}\left((\delta v_2 - \delta v_1) - \cos\beta\sin\beta(\delta u_2 - \delta u_1) - \sin^2\beta(\delta v_2 - \delta v_1)\right). \tag{3.24}$$

Definindo um vetor $\mathbf{z}$ como

$$\mathbf{z} = \left[\begin{array}{cccccc} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{array}\right]^T, \tag{3.25}$$

a variação de (3.19) e (3.25) fornece as seguintes relações:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{z}\delta\beta \tag{3.26}$$

e

$$\delta\mathbf{z} = -\mathbf{r}\delta\beta. \tag{3.27}$$

Transformando (3.24) com relação às variáveis globais, tem-se:

$$\delta\beta = \frac{1}{l}\mathbf{z}\delta\mathbf{p}. \tag{3.28}$$

Assim, as equações presentes em (3.21) modificam-se da seguinte maneira:

$$\delta\theta_{l1} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^T \delta\mathbf{p} + \frac{1}{l}\mathbf{z}\delta\mathbf{p} \tag{3.29}$$

$$\delta\theta_{l2} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^T \delta\mathbf{p} + \frac{1}{l}\mathbf{z}\delta\mathbf{p} \tag{3.30}$$

Fazendo a correspondência de (3.18), (3.29) e (3.30), com (3.17), obtem-se a seguinte relação de transformação:

$$\delta\mathbf{p}_l = \mathbf{B}\delta\mathbf{p}, \tag{3.31}$$

em que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ s/l & -c/l & 1 & -s/l & c/l & 0 \\ s/l & -c/l & 0 & -s/l & c/l & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.32)$$

Estabelecida a relação geométrica entre as variáveis do elemento, pode-se partir para a formulação mecânica do problema.

3.1.2 Trabalho Virtual

O trabalho virtual V das forças internas no referencial global é dado por

$$V = \delta\mathbf{p}^T\mathbf{q}_i, \qquad (3.33)$$

no qual $\delta\mathbf{p}^T$ corresponde ao deslocamento virtual do corpo e $\mathbf{q}_i$ é o vetor de esforços internos. No referencial local, o trabalho pode ser escrito como

$$V = \delta\mathbf{p}_l^T\mathbf{q}_{li}. \qquad (3.34)$$

O termo $\mathbf{q}_{li}$ corresponde aos esforços internos no elemento no referencial local e é representado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{q}_{li} = \begin{bmatrix} N & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T, \qquad (3.35)$$

No qual o termo N corresponde ao esforço normal no elemento e M_1 e M_2 representam os momentos fletores presentes na extremidade do elemento como pode ser observado na Fig.(3.3). Igualando (3.33) a (3.34) e substituindo (3.31) em (3.34), obtem-se:

$$\delta\mathbf{p}^T\mathbf{q}_i = \delta\mathbf{p}^T\mathbf{B}^T\mathbf{q}_{li} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T\mathbf{q}_{li}. \qquad (3.36)$$

O que permite escrever uma transformação dos esforços internos do referencial local para o referencial global da seguinte maneira:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T\mathbf{q}_{li} = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T \qquad (3.37)$$

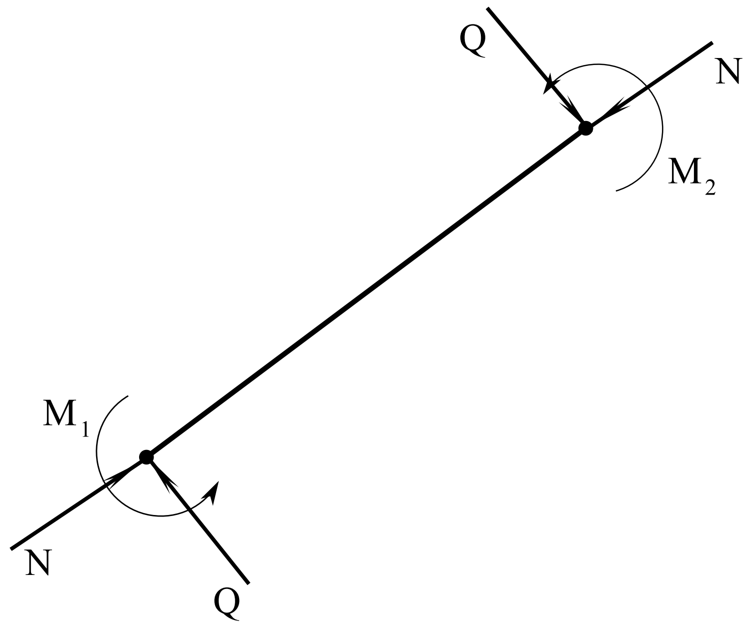

Figura 3.3: Forças internas presentes no elemento.

3.1.3 Determinação dos esforços internos

Uma vez determinada a relação de transformação dada por (3.37) é necessário calcular os termos presentes no vetor $\mathbf{q}_{li}$. Sua determinação está intimamente ligada às hipóteses assumidas com relação à lei constitutiva que rege o material. Este trabalho tratará a determinação dos esforços internos com a mesma abordagem dada por Crisfield (1991). Entretanto, Yshii (2002), em seu estudo, obtém os mesmos resultados através de uma abordagem mais generalista.

Assumindo o material como linear elástico, o esforço normal ao eixo transversal do corpo (referencial local) é dado por:

$$N = EA\frac{l - l_0}{l_0} = EA\frac{u_l}{l_0}. \tag{3.38}$$

Os momentos fletores M_1 e M_2 são dados por (Harrison, 1973):

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l_0}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{l1} \\ \theta_{l2} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

3.1.4 Matriz Tangente de Rigidez

A primeira variação de (3.37) é

$$\delta\mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T\delta\mathbf{q}_{li} + N\delta\mathbf{B}_1 + M_1\delta\mathbf{B}_2 + M_2\delta\mathbf{B}_3. \tag{3.40}$$

no qual $\mathbf{B}_i$ corresponde a i-ésima coluna de $\mathbf{B}^T$ escrito em (3.32). A partir da primeira variação de $\mathbf{q}_{li}$, composta por (3.38) e (3.39), e arranjando matricialmente, tem-se:

$$\delta\mathbf{q}_{li} = \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta M_1 \\ \delta M_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4I/A & 2I/A \\ 0 & 2I/A & 4I/A \end{bmatrix}\delta\mathbf{p}_l = \mathbf{C}_l\delta\mathbf{p}_l. \tag{3.41}$$

O que permite escrever o termo $\mathbf{B}^T\delta\mathbf{q}_{li}$ como:

$$\mathbf{B}^T\delta\mathbf{q}_{li} = \mathbf{B}^T\mathbf{C}_l\mathbf{B}\delta\mathbf{p}. \tag{3.42}$$

O termo $\delta\mathbf{B}_1$ é equivalente à variação de (3.19), fornecendo:

$$\delta\mathbf{B}_1 = \delta\mathbf{r}. \tag{3.43}$$

Substituindo (3.26) e (3.28) na equação anterior, obtem-se:

$$\delta\mathbf{B}_1 = \frac{1}{l}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\delta\mathbf{p}. \tag{3.44}$$

A variação de $\mathbf{B}_2$ fornece:

$$\delta\mathbf{B}_2 = \frac{1}{l}\delta\mathbf{z} + \frac{1}{l^2}\mathbf{z}\delta u_l. \tag{3.45}$$

Substituindo (3.20) e (3.26) em (3.45) leva a:

$$\delta\mathbf{B}_2 = \frac{1}{l^2}\left(\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T\right)\delta\mathbf{p}. \tag{3.46}$$

A variação de $\mathbf{B}_3$ é idêntica a $\mathbf{B}_2$ como é apresentado em (3.46). Assim, a equação completa para a matriz tangente de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{C}_l\mathbf{B} + \frac{N}{l}\mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{M_1 + M_2}{l^2}\left(\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T\right). \tag{3.47}$$

A matriz de rigidez pode ser dividida em dois termos, o primeiro

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_l \mathbf{B}, \tag{3.48}$$

é denominado de rigidez do material e, nesse estudo, é considerado linear. O segundo termo,

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{l}\mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{M_1 + M_2}{l^2}\left(\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T\right), \tag{3.49}$$

corresponde à rigidez geométrica e, para o contexto desse trabalho, é onde se concentra a não-linearidade do problema.

4 ESTUDO DA ESTÁTICA DE ESTRUTURAS GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES

Esse capítulo destina-se ao estudo do equilíbrio estático de estruturas admitindo não-linearidade geométrica. Todo o contexto de formulação para elementos finitos é feito através da abordagem co-rotacional deduzida anteriormente. O estudo estático baseia-se no equilíbrio entre as forças internas e externas, no qual a equação resultante é de caracter geometricamente não-linear e é resolvida através de método iterativo. O método iterativo admitido nesse estudo é o Newton-Rapshon. Existem outros métodos de resolução mais robustos, tais como Newton Modificado, Quasi-Newton, Secante Acelerada, *Arc-lenght*, entre outros, que são apresentados em mais detalhes em Crisfield (1991). Como o estudo de métodos iterativos foge do escopo do trabalho a opção pelo método de Newton-Rapshon se deve a sua implementação, mais simples em relação métodos supracitados.

Para o estudo estático tem-se como procedimento de resolução o controle por dois métodos: por carregamento e por deslocamento. No primeiro, utilizado nesse estudo, o carregamento é dividido em frações e o problema é resolvido de forma gradual adicionando estas frações até que o total cumulativo de adições forneça o carregamento total (inicialmente proposto). Dessa forma, a cada adição ou passo de carga (como será tratado no texto), o sistema é solicitado até uma configuração de equilíbrio, sendo a última relativa ao último passo de carga, ou seja, a configuração estática final do corpo. No segundo método, controle por deslocamento, o raciocínio é análogo, porém o deslocamento é inicialmente determinado, dividido em frações e depois gradualmente adicionado até que se obtenha o deslocamento final desejado, sob o equilíbrio de forças.

Este capítulo é composto pela resolução da equação de equilíbrio estático e a dedução de sua resolução através do método de Newton-Raphson, onde seu algoritmo é apresentado. Ao final do capítulo, é apresentado o algoritmo do método de controle por carregamento para resolução do problema estático não-linear.

4.1 Equilíbrio Estático

O equilíbrio estático se dá através da seguinte equação

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

em que $\mathbf{q}_i$ corresponde aos esforços internos no corpo e $\mathbf{q}_e$ aos esforços externos ou à solicitação à estrutura. Define-se como força de desequilíbrio a diferença entre as forças internas e externas e é representada por $\mathbf{g}_e$. É importante ressaltar que a equação presente em (4.1) é de caracter geometricamente não-linear devido à dependência não-linear de $\mathbf{q}_i$ com relação aos deslocamentos $\mathbf{p}$. Sendo assim, sua resolução é de caráter iterativo e o algoritmo de resolução escolhido foi o método Newton-Raphson.

4.1.1 Método de Newton-Raphson

Expandindo $\mathbf{g}_e$ em série de Taylor, tem-se

$$\mathbf{g}_e^{n+1} \approx \mathbf{g}_e^n + \frac{\partial \mathbf{g}_e^n}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_e^n}{\partial \mathbf{p}^2} \delta \mathbf{p}^2 + \cdots \tag{4.2}$$

O termo de primeira ordem, pode ser reescrito como

$$\frac{\partial \mathbf{g}_e^n}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}, \tag{4.3}$$

no qual $\mathbf{K}$ é matriz tangente de rigidez determinada em (3.47). Esse termo é normalmente tratado como matriz Hessiana, pois corresponde à segunda derivada da energia interna de deformação, ou como no texto aqui presente, a primeira derivada dos esforços internos. Negligenciando os termos de alta ordem e assumindo $\mathbf{g}_e^{n+1} = \mathbf{0}$, tem -se que:

$$\delta \mathbf{p}^n = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}_e^n(\mathbf{p}^n) \tag{4.4}$$

Assim, a nova estimativa para $\mathbf{p}$ é formada através da correção $\delta \mathbf{p}_n$ e assume a seguinte forma:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^0 + \delta \mathbf{p}^n. \tag{4.5}$$

Observa-se que a continuidade desse procedimento incorre em um processo iterativo. Cabe ressaltar que o termo $\mathbf{q}_i$, normalmente variante, é recalculado a cada interação.O termo $\mathbf{q}_e$, dos esforços externos, deve ser recalculado caso tenho dependência com a posição do corpo no espaço.

O processo iterativo irá cessar quando o termo de forças de desequilíbrio $\mathbf{g}_e$ for nulo, implicando assim na equivalência entre os esforços internos e externos. Do ponto de vista computacional este representa o critério de parada, devendo-se assumir um valor representativamente pequeno, no caso representado como ε, de forma a obter a maior proximidade da solução iterativa com a real.

O algoritmo de Newton-Raphson para resolução de (4.1) é dado a seguir, no qual assume-se como entrada um deslocamento inicial $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}_i$ e $\mathbf{K}$ são determinados respectivamente através de (3.37) e (3.47) e o sobre-índice n representa o contador de iteração para o processo iterativo:

1. **Inicialização**

   (a) Determinação da tolerância ε

   (b) Assumir correção inicial $\delta\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$

   (c) Assumir $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}$

   (d) Calcular $\mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}^0)$

   (e) Calcular $\mathbf{g}_e^0 = \mathbf{q}_i^0 - \mathbf{q}_e$

2. **Processo Iterativo**

   (a) Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{p}^n)$

   (b) Calcular a correção para $\mathbf{p}$: $\delta\mathbf{p}^{n+1} = \delta\mathbf{p}^n - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}_e^n$

   (c) Calcular $\mathbf{p}$ corrigido: $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}^{n+1}$

   (d) Calcular $\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}^{n+1})$

   (e) Calcular $\mathbf{g}_e^{n+1} = \mathbf{q}_i^{n+1} - \mathbf{q}_e$

   (f) Se $\|\mathbf{g}_e^{n+1}\| < \varepsilon$ então assumir convergência: $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1}$

   (g) Retornar ao item (a)

4.1.2 Método de controle por carregamento

O método de controle de carregamento consiste em dividir o esforço externo $\mathbf{q}_e$ em frações e, assim, solicitar a estrutura através da adição gradual e cumulativa dessas frações. Denomina-se passo de carga o valor das frações da solicitação externa e é representado por N_c. Durante o procedimento de controle de carregamento, para cada passo de carga, procura-se o deslocamento $\mathbf{p}$ que garanta equilíbrio estático através do algoritmo de Newton-Raphson.

Assim, para uma determinada solicitação $\mathbf{q}_e$ o algoritmo de controle por carregamento é dado por:

1. **Inicialização**

   (a) Determinar o número de passos de carga N_c

   (b) Assumir $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$

   (c) Determinar o incremento gradual de carga $\Delta\mathbf{q}_e = (1/N_c)\,\mathbf{q}_e$

2. **Processo de incremento de carga:** *loop* de 1 a N_c

(a) Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{p}^n)$

(b) Calcular o incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{q}_e$

(c) Calcular o deslocamento atual $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta\mathbf{p}$

(d) Calcular o carregamento atual $\mathbf{q}_e^{n+1} = \mathbf{q}_e^n + \Delta\mathbf{q}_e$

(e) Calcular o vetor de forças internas atual $\mathbf{q}_i(\mathbf{p}^{n+1})$

(f) Processo de Newton-Raphson para determinar $\mathbf{p} \Rightarrow \|\mathbf{g}_e\| < \varepsilon$

No qual $\mathbf{K}$ é matriz de rigidez determinada em (3.47), $\mathbf{q}_i$ é o vetor de esforços internos dado por (3.37) e os sobre-índice presentes nas variáveis indicam o número de passo de carga dentro do *looping*.

5 ESTUDO DA DINÂMICA DE ESTRUTURAS GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES

Este capítulo consiste no estudo do equilíbrio dinâmico de estruturas não-lineares no contexto da formulação co-rotacional. A primeira parte do texto trata do equilíbrio dinâmico não-linear e contextualiza-o com relação à abordagem co-rotacional. A segunda parte diz respeito ao procedimento de integração no tempo implícito não-linear de Newmark.

5.1 Equilíbrio Dinâmico

O equilíbrio dinâmico de uma estrutura é dado através da seguinte expressão

$$\mathbf{g}_d = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}_e + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \tag{5.1}$$

em que $\mathbf{q}_i$ corresponde ao vetor de forças internas dado por (3.37), $\mathbf{q}_e$ é a solicitação externa dependente do tempo, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são as matrizes de massa e de amortecimento da estrutura (discutidas mais adiante) e os vetores $\dot{\mathbf{p}}$ e $\ddot{\mathbf{p}}$ correspondem à velocidade e aceleração nodal no referencial global, respectivamente.

Define-se como $\mathbf{g}_d$ o vetor de desequilíbrio dinâmico. A equação de equilíbrio dinâmico de estruturas é composta pelo termo estático $\mathbf{g}_e$, mostrado no capítulo anterior, mais os termos $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}$ e $\mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}$ que correspondem às forças inerciais e de dissipação, respectivamente. A resolução de (5.1) é de caracter não-linear em razão da dependência do termo $\mathbf{g}_e$ com relação ao deslocamento $\mathbf{p}$, como visto no capítulo anterior. O método de integração no tempo utilizado para a resolução do problema é o de Newmark implícito.

5.1.1 Algoritmo de Newmark implícito não-linear

Dado um intervalo de tempo Δt a predição para o valor subsequente $n+1$ de $\mathbf{p}$ e $\dot{\mathbf{p}}$ através dos valores anteriores n, e pelo procedimento de integração no tempo de Newmark (Newmark, 1959) é dado por

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{p}}^n + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{p}}^{n+1} \tag{5.2}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}^{n+1} = \dot{\mathbf{p}}^n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{p}}^n + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{p}}^{n+1}, \tag{5.3}$$

em que β e γ são as constantes de Newmark. Dependendo dos valores destas constantes o método de integração pode ser considerado implícito ou explícito. Para $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ o método caracteriza-se como implícito. Segundo Géradin & Rixen (1997) a admissão desses valores garante o melhor método incondicionalmente estável da família de integradores de Newmark. A substituição destas constantes em (5.2) e (5.3) fornecem o seguinte resultado

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta t \dot{\mathbf{p}}^n + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{p}}^n + \ddot{\mathbf{p}}^{n+1}) \tag{5.4}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}^{n+1} = \dot{\mathbf{p}}^n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{p}}^n + \ddot{\mathbf{p}}^{n+1}). \tag{5.5}$$

A partir de (5.5), (5.4) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \frac{\Delta t^2}{2}(\dot{\mathbf{p}}^n + \dot{\mathbf{p}}^{n+1}). \tag{5.6}$$

Com todas as informações necessárias no passo n, é possível utilizar (5.5) e (5.6) para determinar $\dot{\mathbf{p}}^{n+1}$ e $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1}$ e substituir os valores em (5.1). Assim, é possível observar que a equação de equilíbrio dinâmico torna-se não linear para $\mathbf{p}^{n+1}$ e pode ser resolvida através do procedimento de Predição e Correção (Crisfield, 1997).

Expandindo $\mathbf{q}_i^{n+1}$ em série de Taylor e truncando a série no primeiro termo, tem-se

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \frac{\partial \mathbf{q}_i^n}{\partial \mathbf{p}^n}(\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n) = \mathbf{q}_i^n + \mathbf{K}^n \Delta \mathbf{p}, \tag{5.7}$$

no qual $\mathbf{K}^n$ é a matriz tangente de rigidez determinada através de (3.47) calculada no passo n. Para o passo $n+1$ a equação de equilíbrio dinâmico é dada por

$$\mathbf{q}_i^{n+1} - \mathbf{q}_e^{n+1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^{n+1} = \mathbf{0}. \tag{5.8}$$

Utilizando (5.5), (5.6) e (5.7) em (5.8), obtem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_e^{n+1} + \mathbf{K}^n \Delta \mathbf{p} + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\Delta \mathbf{p} - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{\mathbf{p}}^n - \ddot{\mathbf{p}}^n\right) + \mathbf{C}\left(\frac{2}{\Delta t}\Delta \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}}^n\right) = \mathbf{0}. \tag{5.9}$$

A equação (5.9) é equivalente a

$$\Delta \tilde{\mathbf{q}}_e = \tilde{\mathbf{K}}^n \Delta \mathbf{p}, \tag{5.10}$$

em que

$$\Delta\tilde{\mathbf{q}}_e = \mathbf{q}_e^{n+1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{p}}^n + \ddot{\mathbf{p}}^n\right) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^n \tag{5.11}$$

e

$$\tilde{\mathbf{K}}^n = \mathbf{K}^n + \frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}. \tag{5.12}$$

A Eq. (5.10) fornece o passo de predição e utiliza a matriz tangente de rigidez equivalente do caso dinâmico ($\tilde{\mathbf{K}}$) que leva em conta os termos de massa e amortecimento mostrado em (5.12).

Dessa forma, o deslocamento para o passo $n+1$ é dado por $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta\mathbf{p}$ e, através de (5.5) e (5.6) , é possível obter $\dot{\mathbf{p}}^{n+1}$ e $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1}$, respectivamente. Porém, essa solução normalmente não garante a condição de equilíbrio $\mathbf{g}_d = \mathbf{0}$ e desta forma, como no caso estático, a determinação de $\mathbf{p}^{n+1}$ que satisfaça a condição de equilíbrio é obtida a partir do algoritmo de Newton-Raphson. Expandindo $\mathbf{g}_d^{n+1}$ em uma série de Taylor truncada no termo de primeira ordem, onde os sobre-escritos n e k referem-se ao incremento de tempo e ao passo do processo de expansão, respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{g}_d^{n+1,k+1} = \mathbf{g}_d^{n+1,k} + \frac{\partial\mathbf{g}_e}{\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{g}_d^{n+1,k} + \tilde{\mathbf{K}}^{n+1}\delta\mathbf{p}^{n+1}. \tag{5.13}$$

Como no procedimento estático, assumindo $\mathbf{g}_d^{n+1,k+1} = \mathbf{0}$ o corretor $\delta\mathbf{p}^{n+1}$ é dado por

$$\delta\mathbf{p}^{n+1} = -\tilde{\mathbf{K}}^{n+1}\mathbf{g}_d^{n+1,k}. \tag{5.14}$$

Para $\mathbf{p}^{n+1}$, $\dot{\mathbf{p}}^{n+1}$ e $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1}$, tem-se o seguinte algoritmo de Newton-Raphson para solução da equação do equilíbrio dinâmico e determinação de $\mathbf{p}^{n+1,k+1}$, $\dot{\mathbf{p}}^{n+1,k+1}$ e $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1,k+1}$ correspondente à solução:

1. **Inicialização**

   (a) Determinação da tolerância ε

   (b) Assumir $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^{n+1}$

   (c) Assumir $\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{p}}^{n+1}$

   (d) Assumir $\ddot{\mathbf{p}}^0 = \ddot{\mathbf{p}}^{n+1}$

   (e) Calcular $\mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}^0)$

   (f) Calcular $\mathbf{g}_d^0 = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}^0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^0$

2. **Processo Iterativo**

   (a) Calcular $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p}^k)$

   (b) Calcular a correção para $\mathbf{p}$: $\delta\mathbf{p}^{k+1} = -\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{g}_d^k$

   (c) Calcular a correção: $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \delta\mathbf{p}^{k+1}$

   (d) Calcular a correção: $\dot{\mathbf{p}}^{k+1} = \dot{\mathbf{p}}^k + (2/\Delta t)\delta\mathbf{p}^{k+1}$

   (e) Calcular a correção: $\ddot{\mathbf{p}}^{k+1} = \ddot{\mathbf{p}}^k + (4/\Delta t^2)\delta\mathbf{p}^{k+1}$

   (f) Calcular $\mathbf{q}_i^{k+1} = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}^{k+1})$

   (g) Calcular $\mathbf{g}_d^{k+1} = \mathbf{q}_i^{k+1} - \mathbf{q}_e + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}^{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^{k+1}$

   (h) Se $\left\|\mathbf{g}_d^{k+1}\right\| < \left\|\mathbf{q}_i^{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^{k+1}\right\| \varepsilon$ então assumir convergência: $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^{k+1}, \dot{\mathbf{p}}^{n+1} = \dot{\mathbf{p}}^{k+1}$ e $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1} = \ddot{\mathbf{p}}^{k+1}$

   (i) Retornar ao item (a)

Cabe ressaltar que o sobre-índice k refere-se aos termos de contagem dentro do *looping* no algoritmo de Newton-Raphson, enquanto que n refere-se ao incremento de tempo do algoritmo de integração no tempo de Newmark.

O algoritmo implícito de integração no tempo de Newmark é mostrado a seguir:

1. **Inicialização**

   (a) Determinar a matriz de massa $\mathbf{M}$

   (b) Determinar t_i e t_f

   (c) Determinar Δt

   (d) Determinar $\mathbf{p}^0$

   (e) Determinar $\dot{\mathbf{p}}^0$

   (f) Calcular $\mathbf{q}_e^0 = \mathbf{q}_e(t_i)$

   (g) Calcular $\mathbf{q}_i^0$ para $\mathbf{p}^0$

   (h) Calcular $\mathbf{C}$

   (i) Calcular $\ddot{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_e^0 - \mathbf{q}_i^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}^0)$

2. **Processo de incremento de tempo:** *Loop* de t_i até t_f

   (a) Deteminar tempo: $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

   (b) Calcular carga externa: $\mathbf{q}_e^{n+1} = \mathbf{q}_e(t^{n+1})$

(c) Assumir $\ddot{\mathbf{p}}^{n+1} = \mathbf{0}$

(d) Calcular $\dot{\mathbf{p}}^{n+1} = \dot{\mathbf{p}}^{n} + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{\mathbf{p}}^{n}$

(e) Calcular $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^{n} + \dot{\mathbf{p}}^{n}\Delta t + \frac{1}{4}\Delta t^2 \ddot{\mathbf{p}}^{n}$

(f) Processo iterativo de Newton-Raphson para $\mathbf{p}^{n+1}$, $\dot{\mathbf{p}}^{n+1}$ e $\dot{\mathbf{p}}^{n+1} \Rightarrow \|\mathbf{g}_d\| = \mathbf{0}$

Nos problemas que serão abordados pela análise transiente, considerou-se que os incrementos de carga para cada intervalo de tempo são de pequena amplitude. Desta forma, não foi necessário adotar o método por carregamento para cada caso dinâmico.

6 DESCRIÇÃO DOS MODELOS DE FUNDAÇÃO

Um aspecto importante na análise de linhas de produção é a descrição de sua interação com o solo. A interação solo-estrutura é regida por complexos fenômenos que geram solicitações de magnitude considerável. No contexto de projetos de linhas submarinas, o trecho suspenso, o *riser*, sofre grande esforço ao tocar o leito marinho e, caso o carregamento tenha característica cíclica, poderá tornar crítico o fenômeno da fadiga. Devido a importância do ponto de contato na estrutura, é usual denominá-lo, no jargão de projeto de *risers*, de TDP - *Touchdown Point* e a região formada pelo conjunto de pontos que entram em contato com o solo de TDZ - *Touchdown Zone*. Essa região tem grande importância na análise e projeto de *riser*, pois normalmente implica em grandes magnitudes de tensão que podem ser críticas ao fenômeno de fadiga (Bridge et al., 2004).

Para a descrição da interação do solo com a estrutura existem diversos modelos matemáticos que descrevem a fundação. Um modelo de fundação comumente utilizado é o modelo de Winkler (Winkler, 1867, apud Barros et al., 2009) que consiste na representação do solo por um conjunto de molas infinitezimalmente próximas e independentes umas das outras. A rigidez do solo e seus efeitos perante a estrutura são representados a partir da rigidez das molas e os efeitos que estas impõem sobre a estrutura. Como as propriedades do solo neste modelo são descritas através de um parâmetro, no caso a rigidez, o modelo de fundação é denominado de: modelo de fundação de um parâmetro. No entanto, existem outros modelos mais complexos que incluem na descrição outros fenômenos e podem conter mais parâmetros na sua formulação. Um exemplo seria a inclusão de uma membrana elástica, como um segundo parâmetro cisalhante, para inclusão do fenômeno de interação entre molas adjacentes (Filonenko-Borodich, 1940; Pasternak, 1954; Mourelatos & Parsons, 1985; Stephens, 1989; Karadeniz, 1999; Teodoru et al., 2006; Dias, 2008; Teodoru, 2009; Akour, 2010), o que caracteriza este modelo como: modelo de fundação de dois parâmetros. O trabalho buscou estudar fundações de um e dois parâmetros e implementar suas discretizações no contexto de elementos finitos. Desta forma, os modelos de fundação abordados dividem-se em:

- Modelo de fundação de um parâmetro
    - Modelo de Winkler modelado como molas nodais
    - Modelo de Winkler modelado como leito
- Modelo de fundação de dois parâmetros
    - Modelo de Filonenko-Borodich

– Modelo de Pasternak

O primeiro grupo é baseado no modelo de Winkler, no qual o primeiro modelo é tratado como uma mola discreta que atua diretamente no nó do elemento e no segundo as molas são caracterizadas como um contínuo. O segundo grupo, com modelos de fundação de dois parâmetros, o modelo inclui uma fina membrana elástica na fundação de forma a caracterizar a interação entre o contínuo de molas adjacentes. Para descrever o modelo de fundação de Pasternak, o estudo seguiu a implementação fornecida por (Teodoru et al., 2006).

Outros autores modelam a rigidez do solo com maiores detalhes (Bridge et al., 2004; Leira et al., 2004; Clukey et al., 2007; You et al., 2008; Takafuji, 2010), descrevendo suas variações com os movimentos descendente e ascendente de formas distintas, de forma que são regidas por diferentes fenômenos. A resistência vertical oriunda do leito marinho pode ser subdividida em resistência à penetração descendente e resistência ascendente. No ciclo descendente, o solo apresenta comportamento elástico, enquanto que no ciclo ascendente, o *riser* pode ser submetido a forças de sucção. Com relação aos diferentes fenômenos presentes na interação solo-estrutura, Takafuji (2010) estudou exemplos com aplicação de atrito e presença de trincheira. Para o atual estudo, a rigidez segue uma curva linear e não foram incluídos fenômenos como atrito e trincheira, sendo a fundação diferenciada pela quantidade de parâmetros utilizados em sua descrição e modelagem.

6.1 Modelo de fundação de um parâmetro

6.1.1 Modelo de Winkler

O modelo Winkler assume que a superfície do solo está sujeita a deflexão em qualquer ponto de contato e esta é linearmente proporcional ao carregamento imposto pela fundação. O modelo não leva em conta a interação entre os pontos adjacentes da superfície considerando a deflexão independente dos esforços de contato entre as partes adjacentes, como pode ser observado na Figura (6.1). O modelo, assim, pode ser idealizado como um conjunto de molas lineares mutuamente independentes, no qual a pressão de reação que a fundação impõe à estrutura é dada por

$$p_s(x) = k_1 v(x), \tag{6.1}$$

em que k_1 é a rigidez do solo.

A equação diferencial que descreve o comportamento estático de uma viga linear sobre

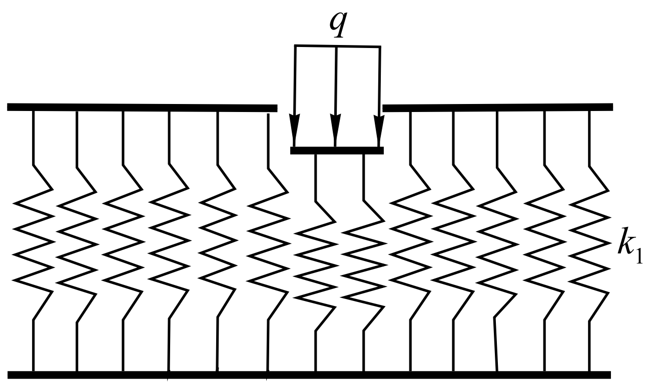

Figura 6.1: Modelo de Winkler

uma fundação Winkler é observada como

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) - p_s(x), \tag{6.2}$$

na qual sua expansão fornece o seguinte resultado

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} + k_1v(x) = q(x). \tag{6.3}$$

Vale ressaltar, que as equações anteriores tratam apenas da influência da fundação sobre a estrutura sob o aspecto da viga. A descrição dos esforços normais do corpo (tratada pelas equações clássicas da resistência dos materiais de forma desacoplada da equação anterior), ou seja, do comportamento de barra foi tomado como nulo. Desta forma, considerou-se que em todo o trabalho os modelos de fundação têm influência somente sobre os graus de liberdade relativos ao comportamente enquanto viga da estrutura (deslocamento transversal v, na direção y e rotação θ, em torno de z).

Este estudo dividiu a discretização por elementos finitos em duas abordagens distintas: 1) Modelo de fundação Winkler com aproximação de molas nodais e 2) Modelo de fundação Winkler como leito. O primeiro caso representa uma idealização, na qual a fundação é representada por molas que atuam diretamente nos nós do elemento. Enquanto que no segundo modelo, a atuação do solo é aproximada como um meio contínuo sob a estrutura.

Modelo de fundação Winkler como aproximação por molas nodais

O modelo de fundação como aproximação por molas nodais é caracterizado por um elemento de mola discreta que atua diretamente no nó do elemento de viga, como ilustrado na Fig. (6.2). O elemento de mola tem rigidez k_1 e atua na direção y.

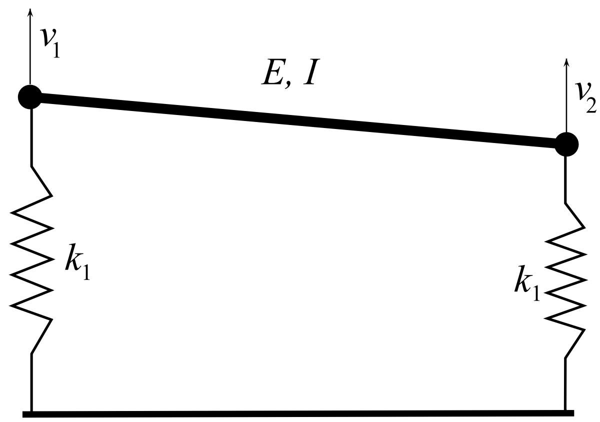

Figura 6.2: Fundação Winkler representada em molas nodais.

A matriz de rigidez do elemento de solo $\mathbf{K}_s$ para esse modelo é dada por

$$\mathbf{K}_s = [k_1], \tag{6.4}$$

O esforço interno transferido pela fundação à estrutura é dado por

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_s \begin{bmatrix} v_i \end{bmatrix}^T = k_1 v_i, \tag{6.5}$$

em que v_i corresponde ao grau de liberdade vertical ligado ao nó de ação da fundação, e k_1 é uma rigidez equivalente aproximada.

Modelo de fundação Winkler modelada como leito

Para o estudo do elemento feito através da abordagem de leito utiliza-se o método dos resíduos ponderados, no qual a função de aproximação assumiu-se linear e é dada por

$$v_e(x) = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) v_1 + \left(\frac{x}{l_0}\right) v_2. \tag{6.6}$$

Aplicando o método de Garlekin, obtem-se a seguinte matriz de rigidez do sistema

$$\mathbf{K}_s = \frac{k_1 l_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Analogamente, o esforço interno imposto à estrutura é dado por

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_s \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T, \tag{6.8}$$

Observa-se que este elemento considera a interação somente na direção vertical, o que se traduz pelos graus de liberdade v_i em que atua. Neste caso, k_1 é uma rigidez por unidade de comprimento da fundação.

6.2 Modelo de fundação com dois parâmetros

Diferentemente do modelo de Winkler, os modelos de dois parâmetros levam em conta a interação entre as infinitas molas adjacentes, o que, usualmente, é feito através da inclusão de uma fina membrana elástica. Comparando as Fig. (6.1) e (6.3) é possível verificar a diferença entre os modelos de um e dois parâmetros. Neste caso, é possível observar a interação entre as camadas adjacentes, o que é representada pela membrana superior sujeita a uma força equivalente $\bar{k}_s$.

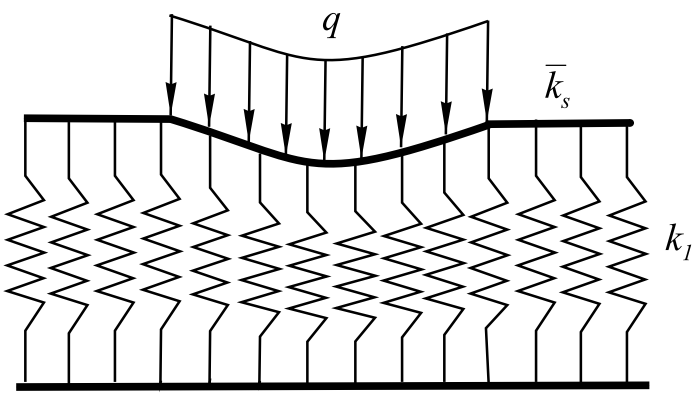

Figura 6.3: Modelo de fundação com dois parâmetros

Normalmente, os modelos de dois parâmetros definem a pressão de reação da fundação como (Zhaohua & Cook, 1983)

$$p_s(x) = k_1 v(x) - \bar{k}_s \frac{d^2 v(x)}{dx^2}, \tag{6.9}$$

em que k_1 é o primeiro parâmetro de rigidez específica do solo e $\bar{k}_s$ é o segundo parâmetro (parâmetro de cisalhamento). Observa-se que, caso o segundo parâmetro tenda a zero, o modelo tende ao modelo de Winkler.

No campo de estudo de vigas lineares, a equação que descreve a interação estática com a viga e a fundação é dada por

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x) - p_s(x), \tag{6.10}$$

o que pode ser escrito como

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} + k_1v(x) - \bar{k}_s\frac{d^2v(x)}{dx^2} = q(x). \tag{6.11}$$

A caracterização do elemento finito que representa esse o modelo de dois parâmetros neste trabalho foi realizada através de dois modelos. Os modelos são matematicamente idênticos, porém, no contexto da discretização por elementos finitos, diferem no número de graus de liberdade. O primeiro modelo é relacionado a um modelo de dois parâmetros e dois graus de liberdade baseado no estudo de Filonenko-Borodich (Filonenko-Borodich, 1940, apud Dias, 2008). O segundo, com quatro graus de liberdade, utilizam os trabalhos de Teodoru et al. (2006) e Teodoru (2009), que se baseiam-se no modelo de Pasternak e partem das seguintes premissas:

- Os elementos têm comprimento l_0 e possuem dois nós;
- Os elementos conectam-se com os outros somente através dos nós;
- O carregamento no elemento ocorre somente através dos nós.

6.2.1 Modelo de fundação de Filonenko-Borodich

Neste modelo assume-se a função de aproximação dada por (6.6), a mesma utilizado no modelo de Winkler modelado como leito. Desta forma, utilizando o método de resíduos ponderados de Garlekin obtem-se a seguinte matriz de rigidez para este elemento

$$\mathbf{K}_s = \frac{k_1l_0}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\bar{k}_s}{l_0}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

O esforço interno $\mathbf{q}_i$ é análogo ao modelo de Winkler e é dado por (6.8).

6.2.2 Modelo de fundação de Pasternak

Este modelo de fundação é descrito por dois parâmetros e quatro graus de liberdade e sua influência incide sobre os graus de liberdade verticais (na direção y) e rotacionais (em relação ao eixo z), como ilustrado na Fig. (6.4).

Assumindo uma aproximação cúbica para o deslocamento dada por

$$v_e(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \tag{6.13}$$

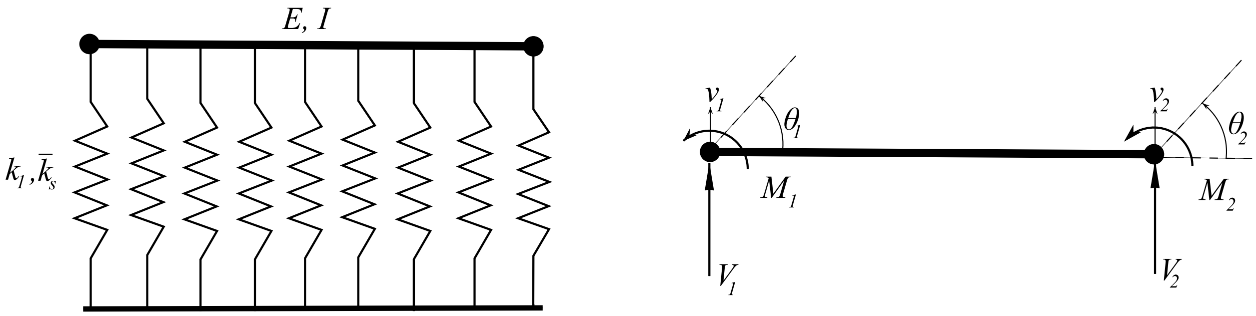

Figura 6.4: Viga sobre fundação de dois parâmetros e graus de liberdade afetados e seus respectivos esforços internos.

e aplicando as condições de contorno para determinação das constantes

$$\begin{cases} v_e(0) = v_1 \\ v_e(l) = v_2 \\ dv_e(0)/dx = \theta_1 \\ dv_e(l)/dx = \theta_2 \end{cases}, \tag{6.14}$$

obtem-se a função de interpolação dada por

$$v_e(x) = h_1 v_1 + h_2 \theta_1 + h_3 v_2 + h_4 \theta_2, \tag{6.15}$$

em que h_i são as funções de interpolação de Hermite dadas por

$$\begin{cases} h_1 = 1 - 3x^2/l_0^2 + 2x^3/l_0^3 \\ h_2 = x - 2x^2/l_0 + x^3/l_0^2 \\ h_3 = 3x^2/l_0^2 - 2x^3/l_0^3 \\ h_4 = -x^2/l_0 + x^3/l_0^2 \end{cases} \tag{6.16}$$

Utilizando o método dos resíduos ponderados de Garlekin, no qual a função ponderadora é dada pelas quatro funções h_i, obtem-se a seguinte matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_s = \frac{k_1 l_0}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_0 & 54 & -13l_0 \\ 22l_0 & 4l_0^2 & 13l_0 & -3l_0^2 \\ 54 & 13l_0 & 156 & -22l_0 \\ -13l_0 & -3l_0^2 & -22l_0 & 4l_0^2 \end{bmatrix} + \frac{\bar{k}_s}{30l_0} \begin{bmatrix} 36 & 3l_0 & -36 & 3l_0 \\ 3l_0 & 4l_0^2 & -3l_0 & -l_0^2 \\ -36 & -3l_0 & 36 & -3l_0 \\ 3l_0 & -l_0^2 & -3l^0 & 4l_0^2 \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Analogamente ao caso anterior, o esforço interno que o elemento introduz à estrutura é dado por

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_s \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T . \tag{6.18}$$

É importante observar que o modelo de Filonenko-Borodich é análogo ao modelo de Pasternak, pois partem do mesmo equacionamento, diferindo apenas da aproximação de elementos finitos adotada o que leva a um número de graus de liberdade diferente para cada elemento. Caso o segundo parâmetro seja nulo, os modelos tornam-se equivalentes ao modelo da fundação Winkler.

6.3 Modelagem do Contato

Dentro do campo do estudo estrutural de SCR, um ponto crítico a ser analisado é como a estrutura interage com o solo. A configuração de catenária e os esforços solicitantes podem induzir grandes deslocamentos na estrutura fazendo com que pontos inicialmente suspensos entrem em contado com o solo. Este fenômeno dentro do contexto de elementos finitos é denominado de estudo do contato e induz um efeito altamente não-linear na análise. Este contato é um ponto crítico à estrutura devido aos esforços gerados nesta interação, como explicado na introdução do capítulo.

Na literatura, constatou-se dois métodos principalmente utilizados para modelar este problema:

- Método das penalidades;
- Método dos multiplicadores de Lagrange.

Tais métodos fazem parte do contexto de estudo da otimização de sistemas. Neste estudo, como forma de modelagem, optou-se por utilizar o método das penalidades devido a sua melhor facilidade de implementação e relação com o problema, como será visto adiante.

6.3.1 Método das penalidades

O método das penalidades considera que a força de contato é proporcional à distância entre os dois corpos. No entanto, define-se que uma força de grande magnitude está associada com a penetração dos corpos, que matematicamente pode ser explicitada como (Bodur, 2006)

$$\Pi_c = \frac{1}{2} k u_d^2, \tag{6.19}$$

em que Π_c corresponde à energia de contato, k é o fator penalizador de grande magnitude e u_d a distância entre os corpos. É possível observar que esta descrição matemática da energia de contato é análoga a de uma mola. O efeito de (6.19) pode ser concebido como, a ação de uma mola de alta rigidez que atua em caso de contato. Para o caso de k tender ao infinito, implica que não há penetração entre os corpos. No entanto, devido a questões computacionais, este efeito não pode ser totalmente atingido. Bodur (2006) comenta que valores muito altos no fator penalizador pode levar a problemas de condicionamento do sistema.

Desta forma, a condição de restrição é explicitada como

$$y_i \leq y_s, \tag{6.20}$$

em que y_i é a coordenada do nó i da estrutura, y_s é a coordenada do solo. Uma vez que a equação (6.20) seja satisfeita, inclui-se o fator de penalidade no problema, no qual adiciona-se à rigidez da estrutura a penalização k. Essa penalização se traduz na adição de rigidez à estrutura, que se dá nas entradas da matriz global de rigidez relativas aos graus de liberdades contemplados pelo modelo. A mesma consideração é válida para a determinação do vetor de esforços internos $\mathbf{q}_i$ que é dada da seguinte maneira:

$$\mathbf{q}_i^{(s)} = k u_g, \tag{6.21}$$

no qual o termo u_g corresponde ao deslocamento computado a partir de y_s, como ilustrado na Fig. (6.5). Desta forma, adiciona-se o resultado obtido em (6.21) ao vetor global de esforços internos $\mathbf{q}_i$.

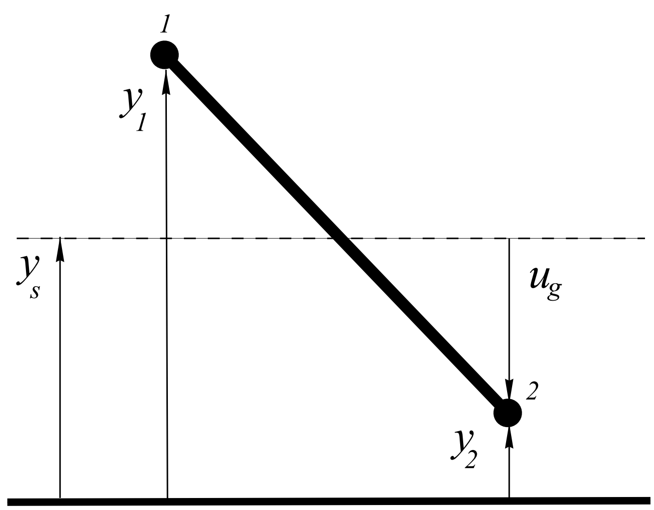

Figura 6.5: Ilustração de um elemento de pórtico com dois nós e as coordenadas e deslocamento relativos ao efeito de contato.

6.3.2 Considerações quanto ao efeito de descolamento

Para a implementação dos modelos de fundação e os fenômenos de interação neste trabalho, assumiu-se que há descolamento instantâneo do ponto do domínio da estrutura cuja cota geométrica seja superior à cota do topo da fundação dada por y_s. No contexto de elementos finitos, esse efeito se traduz nos nós do elemento e, desta forma, quando

$$y_i > y_s, \tag{6.22}$$

cessam imediatamente os efeitos da fundação sobre o nó i do elemento. Em resumo, se a coordenada y_i do nó i do elemento for menor do que y_s, a cota representativa do solo, então a fundação interage com a estrutura, caso contrário, seus efeitos são nulos. A Fig. (6.6) ilustra o comportamento de um SCR em fundação com efeito de descolamento instantâneo e sem descolamento após contato, em que F_s é a força de reação da fundação sobre a estrutura e y_i é a coordenada de um ponto qualquer do domínio da estrutura.

Este é um modelo simplificado do comportamento de contato e deslocamento da estrutura. Existem trabalhos que tratam com maiores detalhes os fenômenos de interação representando de formas distintas a penetração e o descolamento da estrutura em relação à fundação, como é o caso Bridge et al. (2004), Leira et al. (2004) e Takafuji (2010).

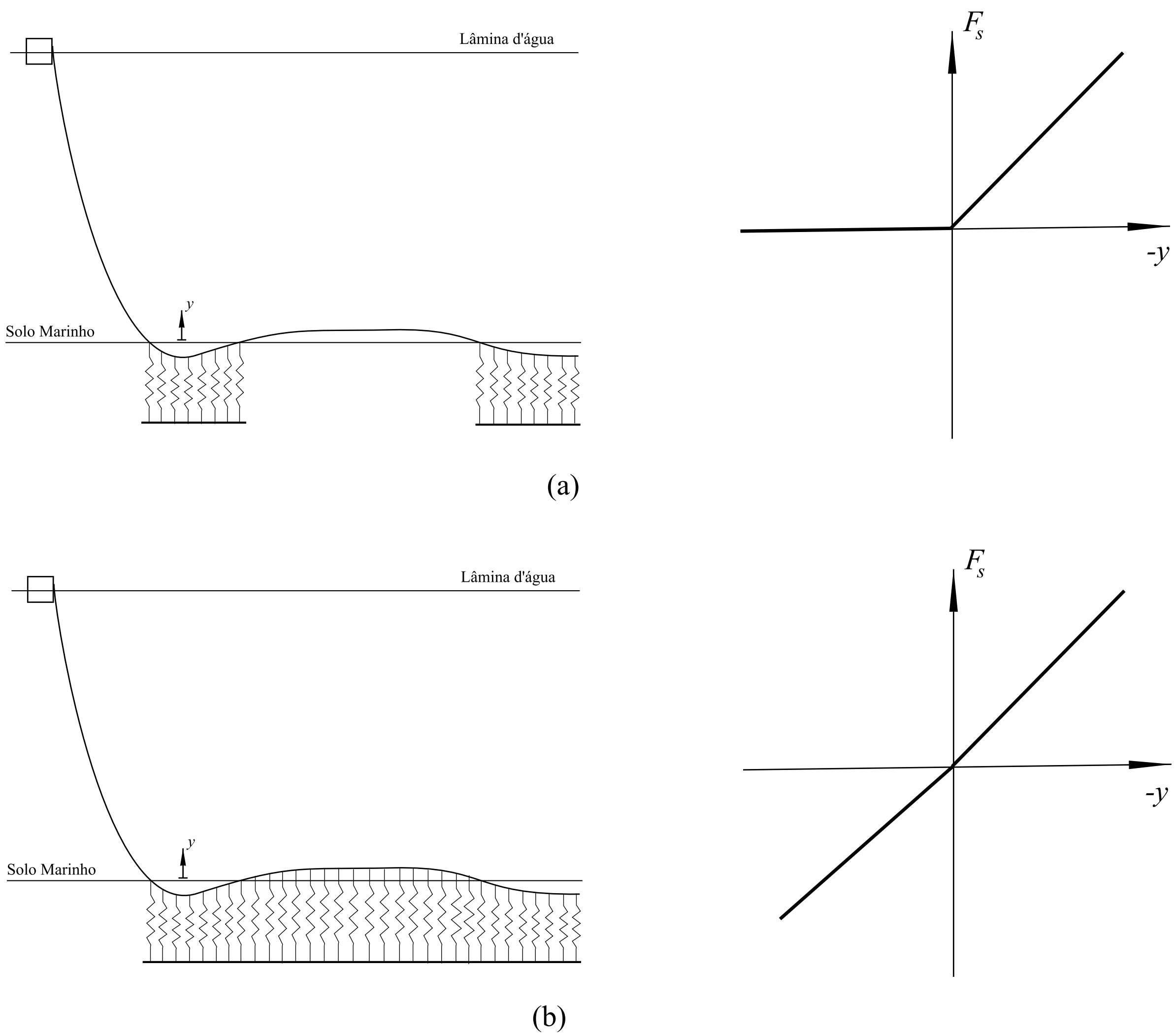

Figura 6.6: Representação de interação solo-estrutura (a) com efeito de descolamento e (b) sem efeito de descolamento.

7 ESTUDO DO *RISER* RÍGIDO EM CATENÁRIA PARA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

As linhas submarinas de produção tem um papel de grande importância dentro da estrutura de explotação *offshore*, pois são os elementos que permitem a comunicação entre o poço e as unidades estacionárias de produção. As principais funções das linhas são:

- **Transporte de fluidos produzidos**: Transporte do óleo, gás e água produzidos até a unidade estacionária para processamento ou armazenamento.
- **Injeção de produtos químicos**: Transporte de produtos químicos para tratamento e manutenção do poço e formação rochosa canhoneada.
- **Injeção de água na rocha reservatório**: Injeção de água como mecanismo de manutenção de pressão da rocha reservatório.
- **Alimentação com potência elétrica e transporte de dados de aquisição do poço**: Alimentação elétrica de equipamentos submarinos e transporte dos dados de aquisição de pressão e temperatura do poço.
- **Injeção de gás na coluna de produção**: Injeção de gás como mecanismo de elevação artificial dos fluidos produzidos.
- **Controle das funções do poço**: Controle hidráulico para o fechamento e abertura de válvulas de acesso ao poço.

Dentre as funções apresentadas, a linha de produção é responsável pelo transporte dos fluidos em poços de produção de petróleo e poços de injeção de água. A injeção de produtos químicos, alimentação elétrica e transporte de dados e controle hidráulico das válvulas do poço é realizada por uma linha denominada umbilical, que tem a função de suporte para o controle e manutenção do poço. Pode existir uma terceira linha para injeção de gás a depender do método de elevação artificial escolhido para produção dos fluidos. Essas estruturas são solicitadas de forma bastante similar, pois estão sujeitas às mesmas cargas ambientais, sejam elas de natureza fluido-dinâmica, como ação das ondas e correntes ou de natureza estática como o peso próprio, por exemplo.

As linhas de produção e injeção são divididas em dois tipos: flexíveis e rígidas. As linhas flexíveis são estruturas formadas pela junção de várias camadas metálicas e poliméricas superpostas umas às outras de forma a prover resistência e estanqueidade. Os dutos rígidos são uniões de tubos metálicos soldados transversalmente e revestidos externamente por um conjunto de camadas poliméricas de menor espessura fornecendo resistência à degradação pelo ambiente hostil e isolamento térmico do duto. Para casos no qual o gradiente térmico tem bastante influência sobre o escoamento dos fluido internamente ao duto é usual revestí-lo com uma camada espessa de poliuretano ou polipropileno de forma a garantir melhor isolamento do conjunto. A Fig. (7.1a)[1] mostra um conjunto de tubos revestidos com camada polimérica fina para garantir proteção à abrasão, corrosão e outros efeitos negativos ao transporte de fluido, enquanto que a Fig. (7.1b) mostra um tubo rígido revestido com uma camada de isolamento polimérica espessa para casos em que o gradiente térmico tem relevância. Ainda nas figuras, observa-se uma parte não revestidas nos tubos. Essa parte que não é revestida permite a operação de junção que é realizada através de solda. Após a união do trecho a parte exposta é revestida com camadas poliméricas de forma a garantir a proteção do conjunto com um todo.

(a) (b)

Figura 7.1: Tubos rígidos para montagem do duto rígido:(a) Tubos rígidos sem camada de isolamento. (b) Tudo rígido com camada de isolamento.(Fonte: Nicolosi & Sulino (2009)).

É usual dividir e discriminar, nas companhias de petróleo, a linha em catenária em duas regiões distintas, a parte suspensa denominada de trecho *riser* e o trecho apoiado ao solo denominado de trecho *flowline*. Basicamente, o trecho *riser* é mais solicitado por esforços de natureza dinâmica, enquanto que a porção de *flowline*, por estar na região em contato com o solo, sofre carregamentos de característica estática. Essa diferenciação, em função da natureza dos carregamentos, é melhor verificada para porções próximas ao trecho suspenso e para porções do duto mais distantes do ponto de contato com o solo, ou seja, para as regiões posicionadas na extremidade da estrutura.

[1]Imagens gentilmente cedidas pelos engenheiros da Petrobras Luiz Antonio Sulino e Eduardo Ribeiro Nicolosi.

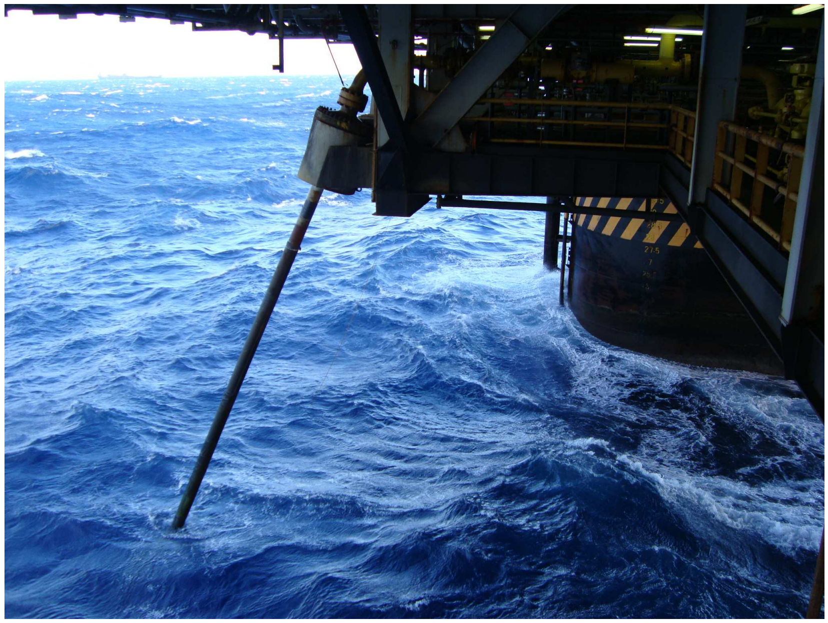

Figura 7.2: Trecho emerso do *riser* rígido em catenária conectado à plataforma P-18 da Petrobras.(Fonte: Nicolosi & Sulino (2009)).

7.1 Estudo do *riser* rígido em catenária

A interligação entre o poço (elemento produtor) e a unidade de produção marítima (e-lemento de processamento) é, como arranjo mais simples, dada por uma linha de produção unida a estes dois pontos. A linha é conectada à plataforma e quando suspensa de forma livre, até apoiar-se no solo marinho, assume uma configuração de catenária. Para dutos rígidos está configuração é denominada de SCR - *Steel Catenary Riser*, na qual sua conexão com a plataforma é feita através de um elemento mecânico que fornece rigidez denominado de *Flex Joint*, que pode ser observado nas Fig. (7.2). Nesta figura[2] observa-se o trecho inicial emerso do *riser* e o elemento *Flex Joint* conectados à unidade de produção.

Na outra extremidade, na interface entre linha e poço, há inúmeras formas de conexão que dependerão do arranjo submarino escolhido no projeto de explotação do campo. Comumente, para dutos rígidos, existe uma transição de trecho rígido para flexível, que se conecta ao poço. Esta conexão é realizada no trecho *flowline*, no qual os esforços de natureza dinâmica são menos críticos. Para este trabalho, a linha é considerada do tipo rígido de seção uniforme em toda sua extensão.

O trecho suspenso, denominado *riser*, quando estaticamente equilibrado e livre, ou seja, sem ação de forças externas oriundas de outros elementos estruturais de sustentação, assume uma configuração próxima à curva catenária. Seyed & Patel (1992) fornecem as seguintes

[2]Imagem gentilmente cedida pelo engenheiro da Petrobras Luiz Antonio Sulino.

equações para as coordenadas x e y de uma curva catenária de comprimento s:

$$x(s) = \frac{H_0}{w} \sinh^{-1}\left(\frac{ws}{H_0}\right) \tag{7.1}$$

e

$$y(x) = \frac{H_0}{w}\left[\cosh\left(\frac{wx}{H_0}\right) - 1\right], \tag{7.2}$$

em que H_0 é força horizontal atuando no elemento de estrutura e w é o peso próprio do elemento por comprimento. As equações de cada uma dessas grandezas são dadas por:

$$w = \rho A \tag{7.3}$$

e

$$H_0 = s_r w \tan\theta_t, \tag{7.4}$$

no qual ρ é a massa específica da estrutura, A é a área transversal do duto, s_r é o comprimento total do *riser* e θ_t é o ângulo de topo formado entre a *flex joint* e a unidade de produção.

A rigor, as equações apresentadas anteriormente descrevem estruturas inextensíveis e infinitamente flexíveis (hipóteses físicas para a dedução matemática), o que não ocorre na prática. No entanto, adotou-se como terminologia tratar a configuração ilustrada na Fig. (1.1) pelo termo catenária. Desta forma, a menção do termo catenária em todo texto deste trabalho remete à configuração estrutural da linha e não à descrição puramente matemática.

8 DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL

A partir da contextualização do problema e da aplicação dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores construíu-se um programa para análise estrutural de *riser* rígido em catenária. O programa dividi-se em dois módulos de cálculo estrutural: para análise estática e dinâmica, no qual cada módulo tem estruturas de programação distintas. O desenvolvimento computacional foi realizado utilizando-se o software MATLAB ® e ao conjunto de programas e rotinas foi dado o nome de MARINE.

O módulo estático tem como objetivo o auxílio à análise estrutural buscando o equilíbrio estático entre os esforços internos e externos, em cada passo de carga, até a configuração final da estrutura. O módulo dinâmico tem seu funcionamento baseado no equilíbrio dinâmico entre as forças internas, externas, inerciais e dissipativas, na qual a solução é obtida para cada intervalo de tempo.

8.1 Módulo estático para análise estrutural de linhas de produção marítimas

Este módulo faz uso dos conceitos apresentados nos capítulos referentes à formulação co-rotacional para pórticos planos e do equilíbrio estático de estruturas não lineares. Em conjunto ao elemento de pórtico co-rotacional, o programa faz uso dos elementos que descrevem a interação solo-estrutura. O programa é dividido em três etapas principais: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

8.1.1 Pré-processamento do módulo estático

O pré-processamento é responsável por reunir o conjunto de dados de entrada e montar os dados necessários para alimentar as etapas de processamento e pós-processamento. Os seguintes dados são necessário na entrada do pré-processamento:

- **Parâmetros e propriedades do sistema:** conjunto de dados que contém os parâmetros geométricos da estrutura propriedades do material constituinte da linha e propriedades do fluido no qual a linha está imersa (dados presentes na Tab.(8.1));

- **Discretização da estrutura:** descrição da quantidade de nós em que os trechos *riser* e *flowline* serão discretizados, no que a distribuição é feita uniformemente, embora possa ser distinta em cada trecho;

- **Condição de Contorno:** consiste na descrição dos apoios da estrutura que, para a atual implementação, se traduz nos graus de liberdade que serão atríbuidos, inicialmente, com deslocamento nulo.

Tabela 8.1: Parâmetros de entrada do pré-processamento do MARINE.

Dado de Entrada	Variável	Descrição
Parâmetros Geométricos	θ_t	Ângulo de Topo
	OD	Diâmetro Externo
	ID	Diâmetro Interno
	s_l	Comprimento da Total Linha
	s_f	Comprimento do Trecho *Flowline*
Propriedade dos Materiais	ρ	Massa Específica do Duto
	E	Módulo de Elasticidade do Duto
Propriedade dos Fluidos	ρ_l	Massa Específica do Fluido Externo

Desta forma, a partir da discretização desejada e utilizando (7.1) e (7.2), o programa gera a malha da estrutura e a conectividade dos nós, incluindo a descrição do solo. Uma vez determinados os nós e os elementos, o programa calcula o carregamento solicitante à estrutura, dado de entrada necessário para a etapa de processamento. A implementação atual do programa contempla o carregamento devido ao peso submerso da estrutura, que é o balanço entre o peso próprio e o empuxo. A determinação da magnitude do carregamento foi realizada considerando o corpo com massa específica perfeitamente uniforme. Desta forma, o peso próprio de um corpo horizontalmente posicionado pode ser modelado como um carregamento uniformemente distribuído em seu domínio. Similarmente, o efeito de empuxo sobre o corpo, quando imerso em meio com massa específica considerável, como por exemplo água salgada, tem o mesmo modelo de carregamento. O balanço entre estes dois esforços é denominado de peso submerso, como pode ser observado na Fig.(8.1). Equacionando o balanço de forças, tem-se:

$$q = g(\rho A - \rho_l A_i), \tag{8.1}$$

em que q a magnitude do carregamento devido ao peso submerso, g é aceleração gravitacional, A é a área transversal do corpo e A_i corresponde à área transversal equivalente ao volume de líquido deslocado pela introdução do corpo no meio fluido.

As áreas das seções transversais podem ser determinadas por:

$$A = \frac{1}{4}\pi(OD^2 - ID^2) \tag{8.2}$$

e

$$A_i = \frac{1}{4}\pi OD^2. \tag{8.3}$$

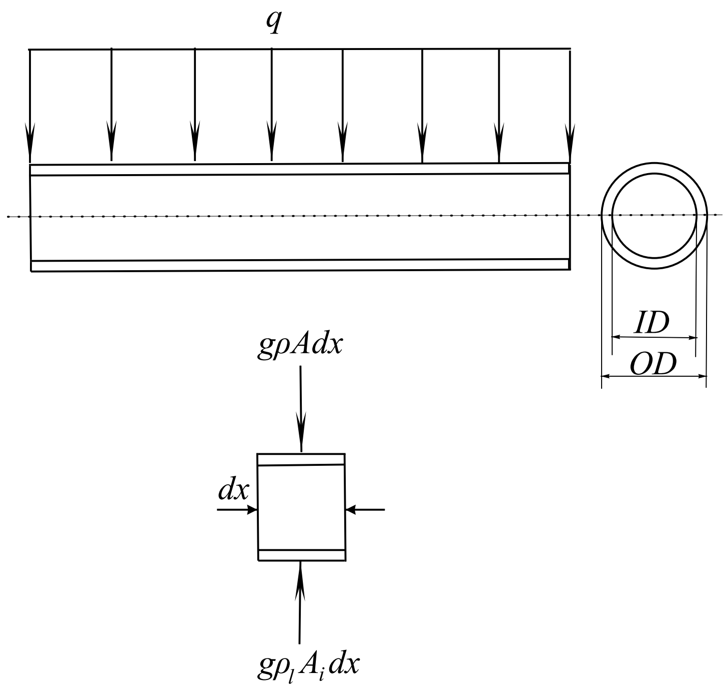

Figura 8.1: Carregamento equivalente para peso submerso

Esta descrição para o peso submerso é uma aproximação, pois é válida somente para corpos não vazados, o que não acontece com as linhas de produção por terem um geometria tubular. Seyed & Patel (1992) e Pesce (1997) descrevem de forma mais criteriosa tal efeito considerando ausência do campo de pressões externas nas extremidades livres através de um artifício de superposição de efeitos hidrostáticos. Esse artifício de superposição é descrito através das seguintes etapas: (i) Consideração do efeito da pressão externa em todo o corpo imerso ao fluído; (ii) Inclusão de efeito de pressão externa contrária nas extremidades, anulando o efeito de pressão externa nas extremidades vazadas. Assim, a composição dos esforços normais ao corpo em conjunto ao efeito de pressão externa contrária incluída pelo artifício de superposição é denominado de tração efetiva. Esse procedimento é ilustrado na na Fig. (8.2), em que E corresponde ao empuxo, p_{ext} a pressão externa atuando sobre o corpo, N o esforço normal, s a coordenada sobre o domínio do corpo e P o peso próprio do corpo. Para todo o trabalho, por motivo de simplificação, considerou-se a aproximação dada pela equação (8.1).

Para o caso do *riser* rígido em catenária em regiões distantes do solo, em virtude da orientação do elemento com relação à horizontal, o carregamento distribuído não será uniforme e normal ao eixo do corpo. Ou seja, a função que descreve o carregamento não será constante e assumirá uma forma linear. Neste trabalho, como aproximação e simplificação, adotou-se que o carregamento é sempre uniformemente distribuído no elemento, independentemente da

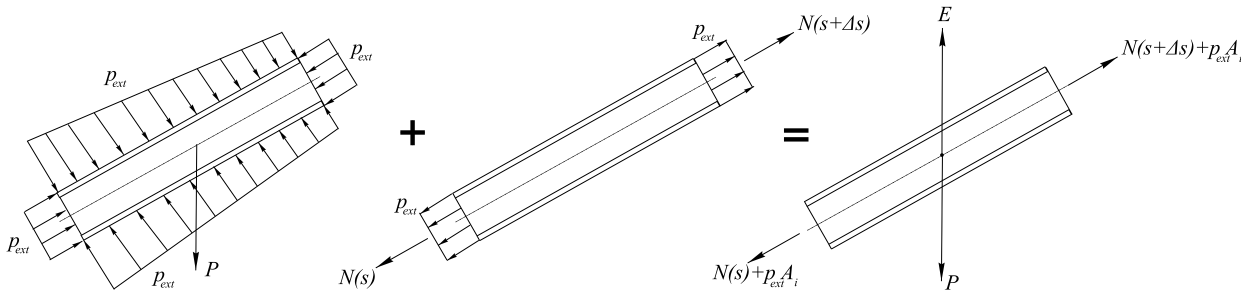

Figura 8.2: Artifício de superposição para determinação da tração efetiva.

orientação do elemento em relação à horizontal.

No contexto da discretização por elementos finitos, o carregamento distribuído incidente no elemento de pórtico deve ser transformado em esforços nodais equivalentes como mostrado na Fig.(8.3) e este cálculo é realizado através de

$$\mathbf{Q}_{eq} = \int_{\Omega} q\mathbf{h}d\Omega, \tag{8.4}$$

no qual Ω é o domínio do corpo e $\mathbf{h}$ é o vetor de funções de forma. Utilizando as aproximações cúbicas de Hermite para o vetor de funções de forma dadas na Tab.(8.2), tem-se

$$\mathbf{Q}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} & \frac{qL^2}{12} & \frac{qL}{2} & \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}^T, \tag{8.5}$$

em que cada valor corresponde aos graus de liberdade v_1, θ_1, v_2 e θ_2, respectivamente.

Tabela 8.2: Funções cúbicas de Hermite.

$\mathbf{h}$	Função
h_1	$1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$
h_2	$x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$
h_3	$\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$
h_4	$-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$

Como o *riser*, inicialmente constituído pela união de tubos rigorosamente retos, deforma-se enormemente em razão da configuração em catenária, a estrutura está sujeita a momento fletor inicial além daqueles oriundas dos carregamentos externos. Este fenômeno é contemplado na implementação do programa durante o pré-processamento, sendo sua saída incluída, posteriormente, no pós-processamento.

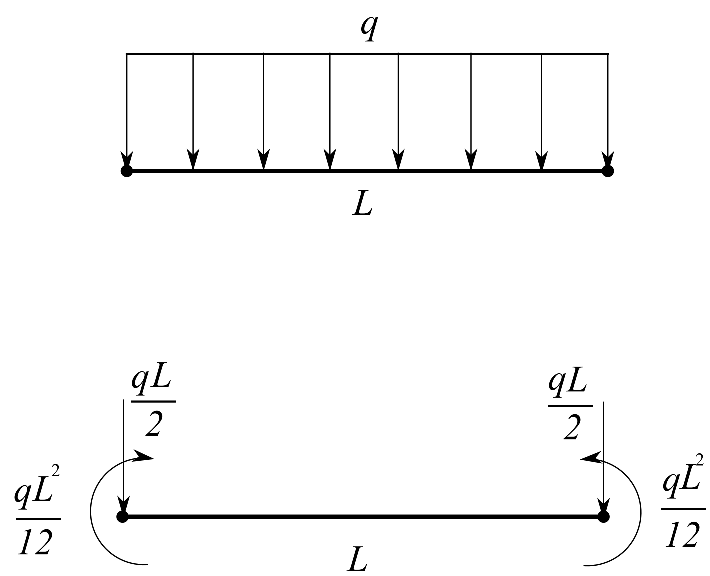

Figura 8.3: Representação para as forças equivalentes nodais.

Do cálculo diferencial é possível mostrar que a curvatura de um corpo esbelto é dada por

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}, \tag{8.6}$$

em que v representa o deslocamento vertical do corpo e x seu domínio. Das equações de resistência dos materiais tem-se a seguinte relação de curvatura para a viga

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{M}{EI}, \tag{8.7}$$

no qual M é o momento fletor, E o módulo de elasticidade do material do corpo e I o momento de inércia de área do corpo. Para o caso do *riser* em catenária livre o deslocamento vertical do corpo, v, é equivalente às coordenadas y da equação da catenária Assim, torna-se possível utilizando (7.2), (8.6) e (8.7) determinar o momento fletor inicial na linha, M_i, calculado no trecho suspenso da estrutura, que é dado por

$$M_i = EI \left\{ \frac{(w/H_0)\cosh(wx/H_0)}{\left[1 + \sinh^2(wx/H_0)\right]^{3/2}} \right\}. \tag{8.8}$$

8.1.2 Processamento do módulo estático

A etapa de processamento tem como objetivo, através da resolução da equação de equilíbrio estático dado em (4.1), fornecer o vetor de deslocamento e as forças internas finais correspondentes à solicitação externa. Desta forma, nessa etapa é processado o algoritmo do método de controle por carregamento e a resolução da equação de equilíbrio pelo método de Newton-Rapshon, tópicos presentes no capítulo Estudo do Equilíbrio Estático de Estruturas Não-Lineares.

8.1.3 Pós-processamento do módulo estático

O pós-processamento visa, a partir do vetor de deslocamentos e dos esforços internos de resposta da estrutura, determinar os deslocamentos, esforços internos e a tensão normal no domínio da estrutura. A implementação atual do programa calcula as tensões normais na estrutura devido aos esforços de flexão e tração-compressão.

A tensão normal devido aos esforços de flexão tem distribuição linear na área transversal de uma dada seção do corpo, como observado na Fig.(8.4a), e é determinada por

$$\sigma_T = -y\frac{M}{I}, \tag{8.9}$$

em que y é a posição vertical do ponto em relação à posição da linha neutra. Desta forma, a depender da porção vertical escolhida para o cálculo, o ponto pode estar em tração ou compressão. Para este estudo adotou-se, arbitrariamente, para o cálculo da tensão, o ponto extremo inferior vertical da seção transversal do corpo, o que transforma (8.9) em

$$\sigma_T = \frac{1}{2}OD\frac{M}{I}. \tag{8.10}$$

Como relatado no pré-processamento, ao termo M de (8.10), adiciona-se o termo inicial M_i, calculado por (8.8) oriundo da deformação inicial do corpo em função da configuração da catenária.

A tensão normal oriunda dos esforços de compressão-tração é uniforme na seção do corpo, Fig. (8.4b), e é determinada por

$$\sigma_N = \frac{N}{A}, \tag{8.11}$$

em que N é o esforço normal presente na seção e A é a área transversal do corpo na dada seção.

Assim, a tensão normal resultante na seção do corpo é dada pela adição destas duas componentes e é dada por

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_N. \tag{8.12}$$

Uma vez calculadas as tensões na estrutura, o pós-processamento gera um conjunto de

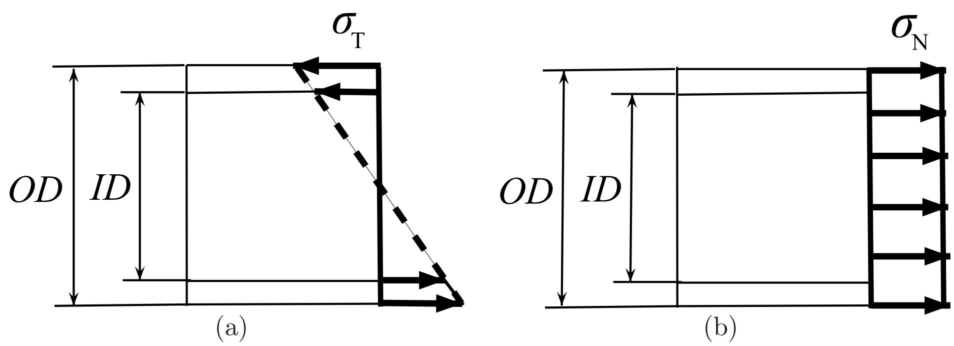

Figura 8.4: Tensões normais em uma seção do *riser*: (a) Tensão normal linear ocasionada por momento fletor. (b) Tensão normal uniforme por carregamento normal.

gráficos, nos quais a ordenada corresponde às variáveis de saída, como deslocamentos nodais, esforços internos e tensões normais. A abscissa indica o ponto sobre a estrutura, como mostrado na Fig.(8.5), onde o início corresponde ao ponto de conexão à unidade de produção e o final ao poço de petróleo. Por fim, o programa disponibiliza a opção da construção de um gráfico mostrando a estrutura deformada superposta à configuração inicial. A Fig.(8.6) ilustra um diagrama simplificado do programa para o módulo estático de MARINE.

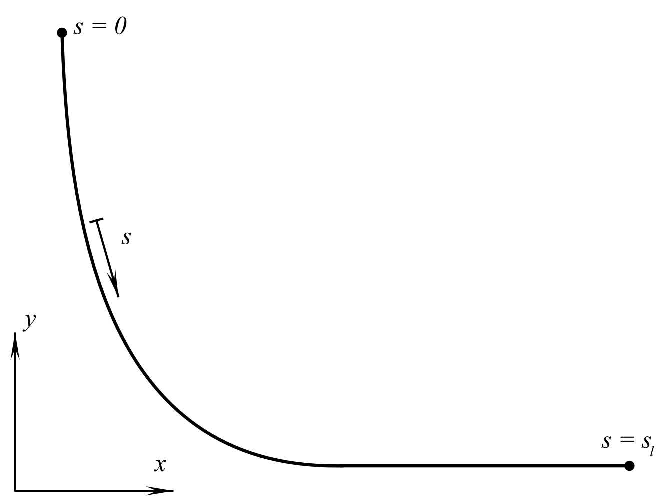

Figura 8.5: Ilustração da coordenada sobre a estrutura que representa abscissa dos gráficos de saída do pós-processamento.

8.2 Módulo dinâmico para análise estrutural de linhas de produção marítimas

O módulo dinâmico do MARINE, assim como o módulo estático, divide-se em três etapas computacionais: pré-processamento, processamento e pós-processamento. Utilizam-se os conceitos apresentados nos capítulos que tratam do elemento co-rotacional, descrição do solo e do estudo do equilíbrio dinâmico de estruturas não-lineares. Embora a estrutura de programação deste módulo seja similar ao estático, mostrando três macro-etapas, os algoritmos de cada etapa são diferentes.

8.2.1 Pré-processamento do módulo dinâmico

O pré-processamento é responsável por, analogamente ao caso estático, receber os dados de entrada (*input*). Além das propriedades dos materiais e parâmetros descritos no módulo estático, determina-se o tempo inicial e final de simulação, assim como o incremento de tempo. Essa etapa interage com o processamento na determinação de dois parâmetros principais: Determinação das condições de contorno e no cálculo do carregamento. As condições de contorno são inicializadas no pré-processamento e atualizadas a cada passo de tempo durante o processamento. O cálculo do carregamento no pré-processamento é relativo às cargas invariantes no tempo, deixando, desta forma, o processamento sujeito ao cálculo dos carregamentos variantes. Na atual implementação, contempla-se o cálculo do peso submerso, que é modelado exatamente como no módulo estático, ou seja, através de um carregamento uniformemente distribuído.

8.2.2 Processamento do módulo dinâmico

O processamento do módulo dinâmico é responsável por fazer o cálculo das variáveis cinemáticas para cada passo de tempo, assim como a atualização das condições de contorno e/ou carregamentos variantes no tempo. Todo o desenvolvimento da etapa de processamento dinâmico é baseada no capítulo Estudo do Equilíbrio Dinâmico de Estruturas Não-Lineares, no qual as equações são integradas e a solução que satisfaz o equilíbrio dinâmico é encontrada a partir do Método de Newton Raphson.

O cálculo da matriz de massa implementada no MARINE segue a definição dada por Cook (1995) e tem a seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{h}^T \mathbf{h} \rho dV, \tag{8.13}$$

em que $\mathbf{h}$ é o vetor contendo as funções de forma do elemento, ρ é a massa específica do elemento e V volume do elemento. Utilizando as funções de Hermite como função de forma e integrando (8.13), obtem-se a seguinte matriz de massa para o elemento de pórtico

$$\mathbf{M} = \frac{\rho l_0 A}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l_0 & 0 & 54 & -13l_0 \\ 0 & 22l_0 & 4l_0^2 & 0 & 13l_0 & -3l_0^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l_0 & 0 & 156 & -22l_0 \\ 0 & -13l_0 & -3l_0^2 & 0 & -22l_0^2 & 4l_0^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30l_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l_0 & 0 & -36 & 3l_0 \\ 0 & 3l_0 & 4l_0^2 & 0 & -3l_0 & -l_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l_0 & 0 & 36 & -3l_0 \\ 0 & 3l_0 & -l_0^2 & 0 & -3l_0 & 4l_0^2 \end{bmatrix}. \tag{8.14}$$

A transformação da matriz de massa para o referencial global é dada através da seguinte operação tensorial

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T}, \tag{8.15}$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

O termo de amortecimento, $\mathbf{C}$ é chamado de matriz de amortecimento e sua expressão é dada por:

$$\mathbf{C} = \int c\mathbf{h}^T\mathbf{h}dV, \tag{8.17}$$

Na prática, a determinação do coeficiente c em (8.17) é extremamente complicada ou até mesmo inviável (Galvão, 2004). Com o intuito de contornar essa dificuldade, a matriz de amortecimento é calculada através de

$$\mathbf{C} = \Phi_1\mathbf{M} + \Phi_2\mathbf{K}. \tag{8.18}$$

A equação (8.18) é conhecida como amortecimento proporcional ou de Rayleigh, em que Φ_1 e Φ_2 são os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh e sua determinação é de certa forma arbitrária. Maiores detalhes no procedimento de determinação destes coeficientes podem ser vistos em Chopra (1995). É importante ressaltar que a determinação dos parâmetros de amortecimento é realizada na etapa de pré-processamento.

Atualização do carregamento externo

Com relação à determinação do carregamento, diferentemente do módulo estático, a atualização é realizada também no processamento, pois os carregamentos variantes no tempo são atualizados nesta etapa e somados aos carregamentos invariantes. Esta implementação tem o intúito de reduzir o cálculo computacional durante os intervalos de tempo. Assim, o carregamento externo total ($\mathbf{q}_{et}$) é dado da seguinte forma

$$\mathbf{q}_{et} = \mathbf{q}_e(t) + \mathbf{q}_{ec}, \tag{8.19}$$

em que $\mathbf{q}_e(t)$ corresponde à parcela variante no tempo e $\mathbf{q}_{ec}$ os carregamentos constantes.

Cálculo das condições de contorno variantes no tempo

A atualização das condições de contorno segue a metodologia descrita por Cook et al. (2002), no qual modificam-se as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e o vetor de carregamento externo de forma a incluir o efeito de um grau de liberdade prescrito. Desta forma, seguindo essa metodologia, para uma matriz de rigidez $\mathbf{K}$ originalmente escrita como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

e o vetor de força externa dado por

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_i & \ldots & q_n \end{bmatrix}^T, \tag{8.21}$$

ao condicionar o grau de liberdade da estrutura u_i a ter seu valor prescrito dado por $u_p(t)$, tem-se que a matriz de rigidez transforma-se da seguinte maneira

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & 0 & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & 0 & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

e o vetor de força é reescrito como

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} q_1 - u_p(t)k_{1i} & q_2 - u_p(t)k_{2i} & \dots & u_p(t) & \dots & q_n - u_p(t)k_{ni} \end{bmatrix}^T. \tag{8.23}$$

Observa-se então que a coluna removida de $\mathbf{K}$ é multiplicada por $u_p(t)$ e subtraída de $\mathbf{q}_e$. Seguindo a abordagem de Rustad et al. (2008) e expandindo o conceito para as matrizes de massa e amortecimento, chega-se no seguinte vetor de esforços internos, que leva em conta todos os efeitos dinâmicos presentes no estudo:

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} q_1 - (u_p(t)k_{1i} + \dot{u}_p(t)c_{1i} + \ddot{u}_p(t)m_{1i}) \\ q_2 - (u_p(t)k_{2i} + \dot{u}_p(t)c_{2i} + \ddot{u}_p(t)m_{2i}) \\ \vdots \\ q_n - (u_p(t)k_{ni} + \dot{u}_p(t)c_{ni} + \ddot{u}_p(t)m_{ni}) \end{bmatrix}. \tag{8.24}$$

em que m_{ji} e c_{ji} são as entradas da coluna j relativas ao grau de liberdade prescrito das matrizes de massa e amortecimento, respectivamente, e $\dot{u}_p(t)$ e $\ddot{u}_p(t)$ correspondem à velocidade e aceleração do grau de liberdade prescrito. Como implementado por Rustad et al. (2008), por economia computacional, foram removidas do processo de montagem as linhas e colunas relativas ao grau de liberdade prescrito das matrizes de massa, amortecimento e rigidez, assim como sua entrada no vetor de força externa, respectivamente.

8.2.3 Pós-processamento do módulo dinâmico

O processamento do módulo dinâmico é responsável por receber resultados obtidos da etapa de processamento e reprocessá-los de forma a fornecer resultados para análise. Dentre os resultados fornecidos, pode-se citar:

- Variáveis cinemáticas em função do tempo;

- Esforços internos em relação ao domínio do corpo, para cada passo de tempo;
- Configurações do corpo no referencial x e y para cada etapa de tempo;
- Filme das configurações do corpo variando no tempo.

A Fig. (8.7) ilustra de forma simplificada o fluxograma do módulo dinâmico do MARINE.

Cálculo das variáveis cinemáticas no tempo

Como resposta fornecida no processamento, o MARINE fornece uma matriz com os resultados de cada variável cinemática, como: deslocamento, velocidade e aceleração. Desta forma, o pós-processamento possibilita selecionar o grau de liberdade desejado e construir o gráfico das variáveis em função do tempo de simulação.

Cálculo dos esforços internos no tempo

Analogamente ao cálculo das variáveis cinemáticas, o cálculo dos esforços internos é feito a partir dos dados do processamento que também é feito em forma de uma matriz, nos quais os valores dos esforços internos do esforço normal, cortante e momento fletor são armazenados para cada passo de tempo. Assim, o MARINE permite a construção do gráfico dos esforços internos em função do domínio do corpo para qualquer passo de tempo desejado.

Construção das configurações e filme no tempo

A atual implementação do MARINE permite a construção de um gráfico com as configurações do corpo em cada passo de tempo durante toda simulação e um filme da configurações do corpo no tempo.

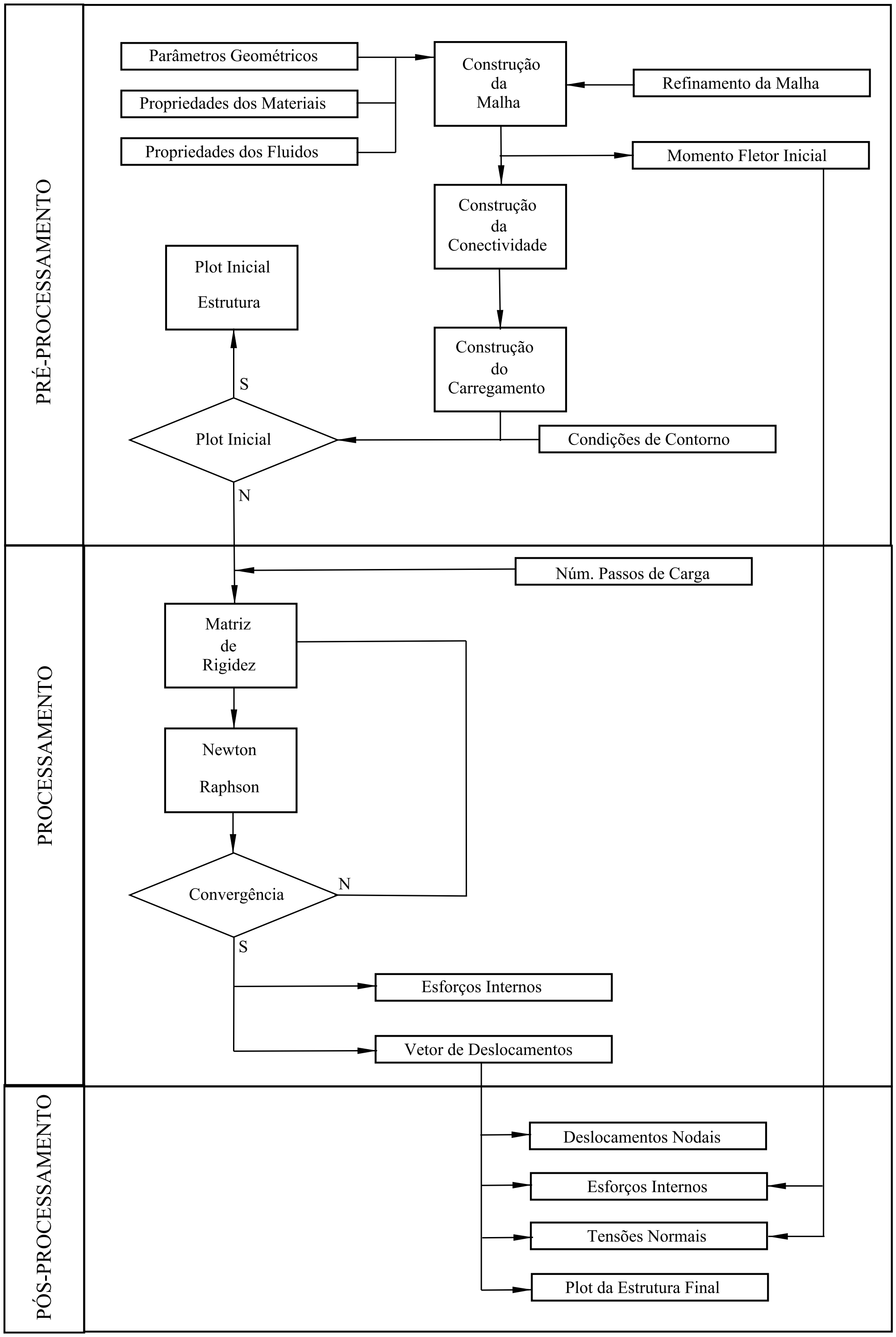

Figura 8.6: Diagrama Simplificado do funcionamento do módulo estático do MARINE.

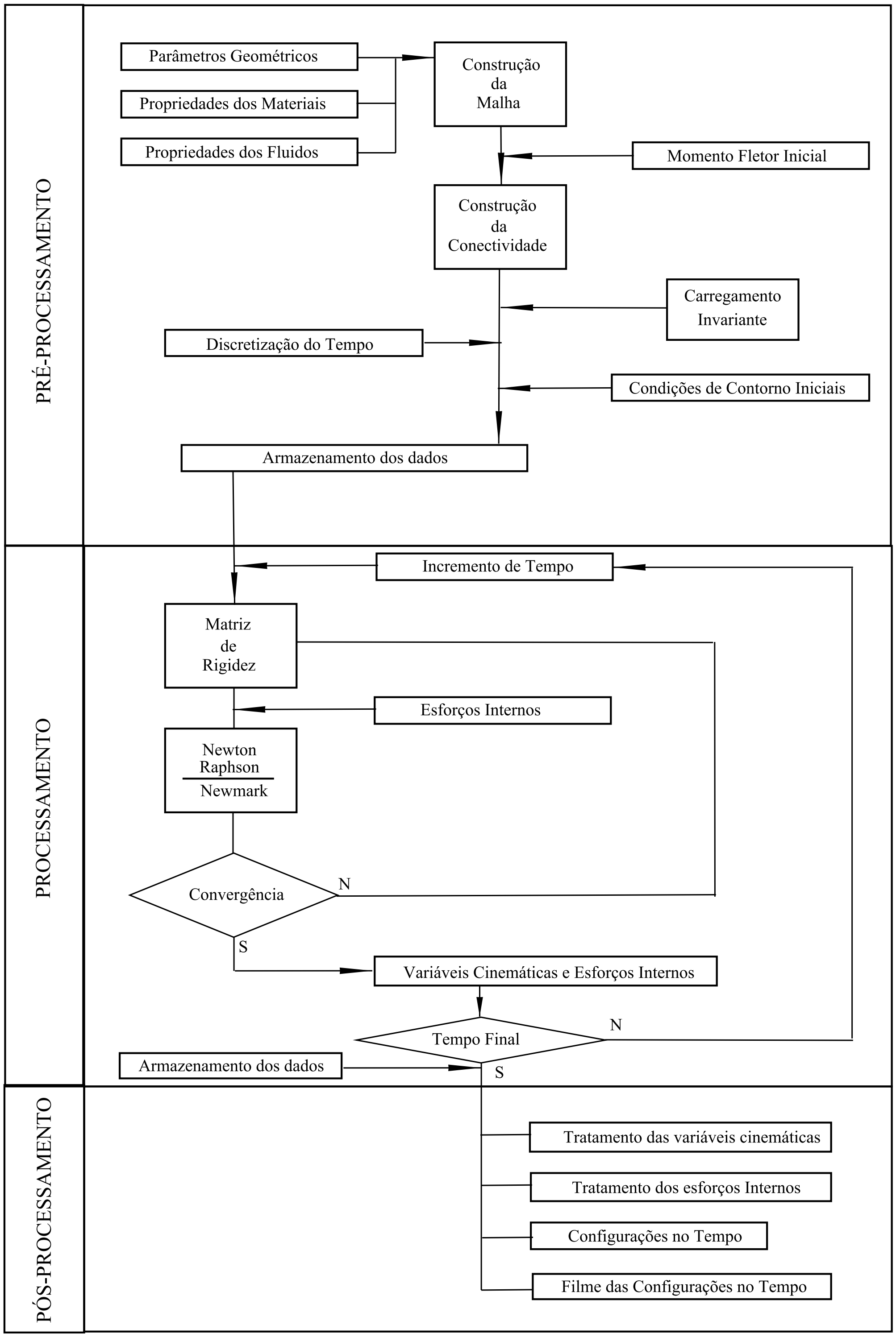

Figura 8.7: Diagrama Simplificado do funcionamento do módulo dinâmico do MARINE.

9 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo destina-se a mostrar os resultados e análises acerca dos tópicos abordados nos capítulos anteriores deste trabalho. A estruturação da apresentação dos resultados segue a seqüência dos capítulos, dividindo-se da seguinte forma:

- Resultados acerca do estudo de pórticos planos não-lineares com abordagem estática;
- Resultados da dinâmica não-linear de pórticos planos;
- Estudo da estática não-linear do SCR;
- Estudo dinâmico não-linear do SCR.

Os dois primeiros tópicos tem como objetivo principal a validação do elemento de pórtico plano não-linear co-rotacional para os estudos estático e dinâmico. Assim, a escolha dos exemplos de estudo foi feita a partir de casos apresentados na literatura. Com relação ao estudo do SCR, buscou-se inicialmente realizar a validação do código computacional, no qual os resultados numéricos obtidos foram comparados com os resultados do *software* ANFLEX, utilizado para cálculo estrutural de linhas submarinas pela empresa PETROBRAS. Além dos exemplos de validação, buscou-se analisar os resultados para os deslocamentos, esforços internos e tensão normal nos trechos *riser* e em contato com o solo.

9.1 Exemplos numéricos para pórtico plano com abordagem estática

Para a validação do elemento de pórtico co-rotacional com abordagem estática, foram estudadas três estruturas clássicas:

- Pórtico engastado com carregamento concentrado na extremidade;
- Pórtico engastado com carregamento uniformemente distribuído;
- Pórtico engastado com momento na extremidade.

Para os dois primeiros exemplos, a validação se dá inicialmente no âmbito linear. A determinação da ordem de grandeza dos carregamentos foram arbitrariamente escolhidas de forma a garantir comportamento linear da estrutura. Os valores numéricos para as grandezas de esforço cortante, momento fletor, campo de rotações e campo de deslocamentos são comparados com suas soluções analítico-lineares. Numa segunda etapa, os pórticos são solicitadas através de um carregamento que induz comportamento não-linear. Nesse caso as respostas numéricas são comparadas com soluções obtidas na literatura. O terceiro caso, pórtico engastado com momento na extremidade, é um exemplo de comportamento fortemente não-linear e, como modo de validação, sua solução numérica foi testada contra a analítica.

Na realização dos exemplos em todos os casos, sob comportamento linear, o corpo tem comprimento de 5 metros, secção transversal quadrada de lado 0,1 metro e módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa. Os parâmetros[1] para os estudo do comportamento não linear são: comprimento de 100 polegadas, seção transversal quadrada com lado igual a 1 polegada, módulo de elasticidade $E = 30$ psi.

9.1.1 Pórtico engastado com carregamento concentrado na extremidade

Neste caso, a estrutura estudada é representada por uma viga esbelta de comprimento L, engastada em uma extremidade e solicitada através de um carregamento concentrado F, com sentido negativo ao eixo vertical y, aplicada à outra extremidade. Para o comportamento linear, as soluções analíticas deste problema para determinação do esforço cortante, momento fletor, campo de rotações em z e campo de deslocamentos transversais, são dadas por:

$$V(x) = F, \tag{9.1}$$

$$M(x) = Fx - FL, \tag{9.2}$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Fx^2 - FLx\right) \tag{9.3}$$

e

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}FLx^2\right), \tag{9.4}$$

em que I é o momento de inércia da seção transversal do corpo e x é o domínio.

Para comparação, o carregamento F foi atribuído com módulo de $100N$, ordem de grandeza suficientemente pequena de forma a manter o corpo num regime de comportamento de rigidez geometricamente linear. Para a simulação, o corpo foi discretizado em 10 elementos e o carregamento dividido em 10 passos de carga. Os resultados podem ser observados na Fig.(9.1).

Este problema, para o caso de grandes deslocamentos, foi resolvido analiticamente por Bissopp & Drucker (1945) utilizando o conceito de integrais elípticas. Mais tarde, Mattiasson (1981) através de procedimento numérico expôs a solução analítica, antes em formato de integrais elípticas, em um conjunto de dados numéricos. Para a validação no regime não-linear,

[1] Os dados aqui não estão no SI para haver melhor concordância com a literatura.

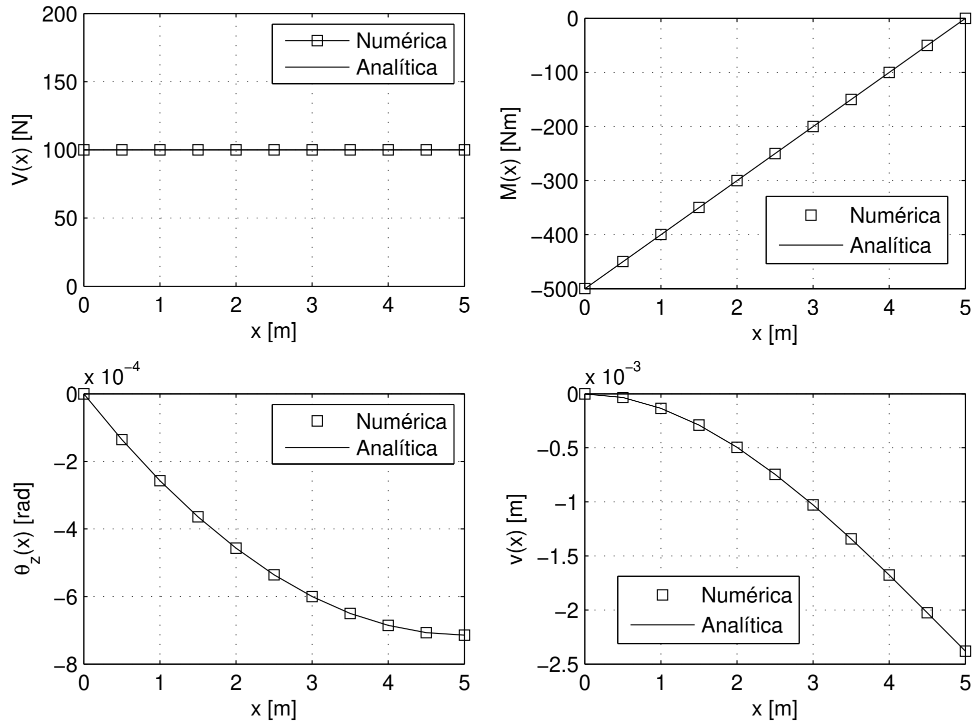

Figura 9.1: Soluções lineares para viga com carregamento concentrado na extremidade.

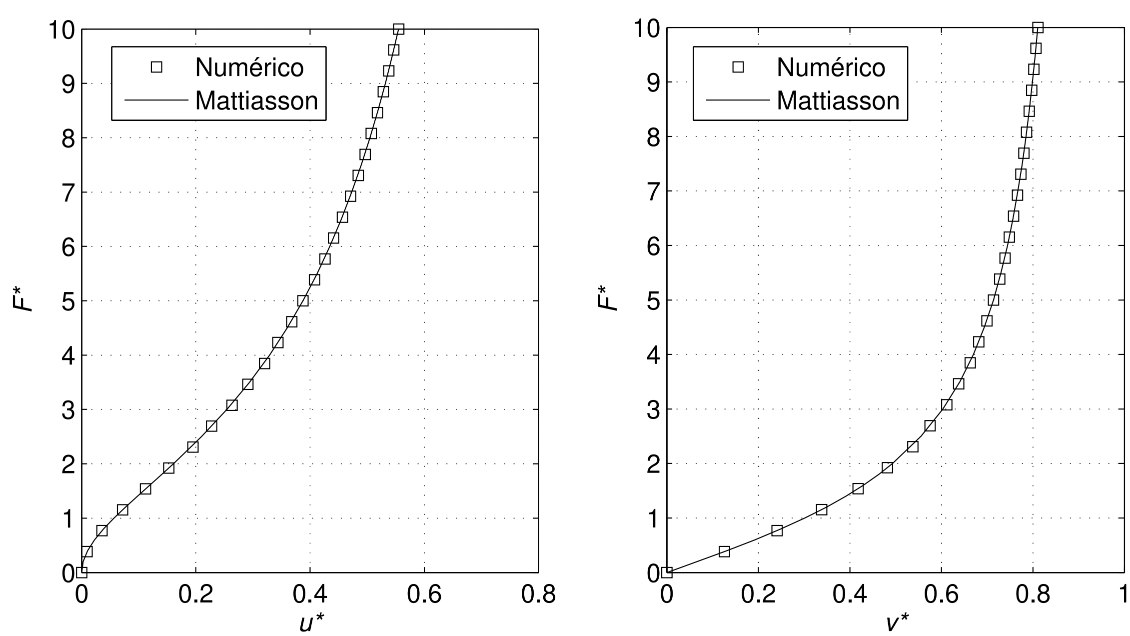

Figura 9.2: Comparação das soluções não-lineares de F^* em função de u^* e v^* para o carregamento concentrado. Deslocamentos medidos na extremidade livre.

foi feita análise comparativa através da transformação dos deslocamentos e carregamentos em grandezas adimensionais, como feito em Lapeira (2007). Desta forma, os deslocamentos da extremidade livre, $u(L)$ e $v(L)$, são relacionados com o carregamento F através de relações adimensionais dadas por:

$$u^* = v(L)/L, \tag{9.5}$$

$$v^* = u(L)/L \tag{9.6}$$

e

$$F^* = 10\frac{FL^2}{EI}. \tag{9.7}$$

A Fig.(9.2) mostra a comparação dos resultados obtidos numericamente com os de Mattiasson (1981), para tanto discretizou-se o corpo em 32 elementos e o carregamento em 26 passos de carga. Os valores dos resultados podem ser observados na Tab.(9.1).

A Fig.(9.3) ilustra as configurações que o corpo assume ao deformar-se através do carregamento F^* dividido em 10 passos de carga. Neste caso, adotou-se a viga com comprimento de 100 polegadas e seção transversal quadrada com lado medindo 1 polegada.

9.1.2 Pórtico engastado com carregamento uniformemente distribuído

O segundo caso de estudo representa uma viga de comprimento L que esta sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q em todo o seu domínio. A descrição do contorno deste caso é similar ao primeiro, ou seja, estrutura tem uma de suas extremidades engastada e a outra livre, o que pode ser observado na Fig.(9.4).

As soluções analíticas do comportamento linear desta estrutura para o esforço cortante, momento fletor, campo de rotações e campo de deslocamentos são representadas pelas equações:

$$V(x) = -qx + qL \tag{9.8}$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + qLx - \frac{1}{2}qL^2 \tag{9.9}$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}qLx^2 - \frac{1}{2}qL^2x\right) \tag{9.10}$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}qLx^3 - \frac{1}{4}qL^2x^2\right) \tag{9.11}$$

Para o caso numérico, realizou-se a mesma discretização do primeiro caso e assumiu-se um carregamento uniformemente distribuído de magnitude $q = 100N/m$, de forma a

Tabela 9.1: Soluções adimensionais não-lineares para viga com carregamento concentrado.

	Co-rotacional			Mattiasson (1981)		
Passo de Carga	F^*	u^*	v^*	F^*	u^*	v^*
0	0	0	0	0	0	0
1	0.3846	0.0096	0.1261	0.2	0.00265	0.06636
2	0.7692	0.0356	0.241	0.4	0.01035	0.13098
3	1.1538	0.0717	0.3386	0.6	0.02249	0.19235
4	1.5385	0.112	0.4182	0.8	0.03817	0.24945
5	1.9231	0.1527	0.4823	1	0.05643	0.30172
6	2.3077	0.1948	0.5376	1.2	0.0764	0.34901
7	2.6923	0.2276	0.5755	1.4	0.09732	0.39147
8	3.0769	0.2633	0.6119	1.6	0.1186	0.42941
9	3.4615	0.291	0.6379	1.8	0.13981	0.46326
10	3.8462	0.3204	0.663	2	0.16064	0.49346
11	4.2308	0.3437	0.6817	2.5	0.20996	0.55566
12	4.6154	0.3679	0.6998	3	0.25442	0.60325
13	5	0.3876	0.7139	3.5	0.29394	0.64039
14	5.3846	0.4077	0.7274	4	0.32894	0.66996
15	5.7692	0.426	0.7392	4.5	0.35999	0.69397
16	6.1538	0.441	0.7486	5	0.38763	0.71379
17	6.5385	0.4566	0.758	5.5	0.41236	0.73042
18	6.9231	0.471	0.7663	6	0.43459	0.74457
19	7.3077	0.4842	0.7738	6.5	0.45468	0.75676
20	7.6923	0.4964	0.7805	7	0.47293	0.76737
21	8.0769	0.507	0.7863	7.5	0.48957	0.7767
22	8.4615	0.518	0.7921	8	0.50483	0.78498
23	8.8462	0.5282	0.7973	8.5	0.51886	0.79239
24	9.2308	0.5377	0.8022	9	0.53182	0.79906
25	9.6154	0.5467	0.8067	9.5	0.54383	0.8051
26	10	0.5552	0.8109	10	0.555	0.81061

garantir comportamento da estrutura em regime linear. A Fig.(9.5) mostra a comparação dos resultados obtidos numericamente com o a solução linear analítica deste problema. É importante observar que a resposta numérica para o esforço cortante mostra-se em patamares, isso deve-se ao fato de que no modelo esta força é constante no elemento e o mesmo ocorre para o esforço normal.

Com relação ao estudo não linear deste problema, Rohde (1953) propôs uma aproximação para a solução analítica do problema utilizando uma abordagem adimensional análoga ao caso da viga com esforço concentrado na extremidade. Mais tarde, Urthaler & Reddy (2005) utilizaram esses resultados como base comparativa para seus resultados numéricos. Seguindo a mesma abordagem, os parâmetros adimensionais utilizados são os mesmos apresentados para

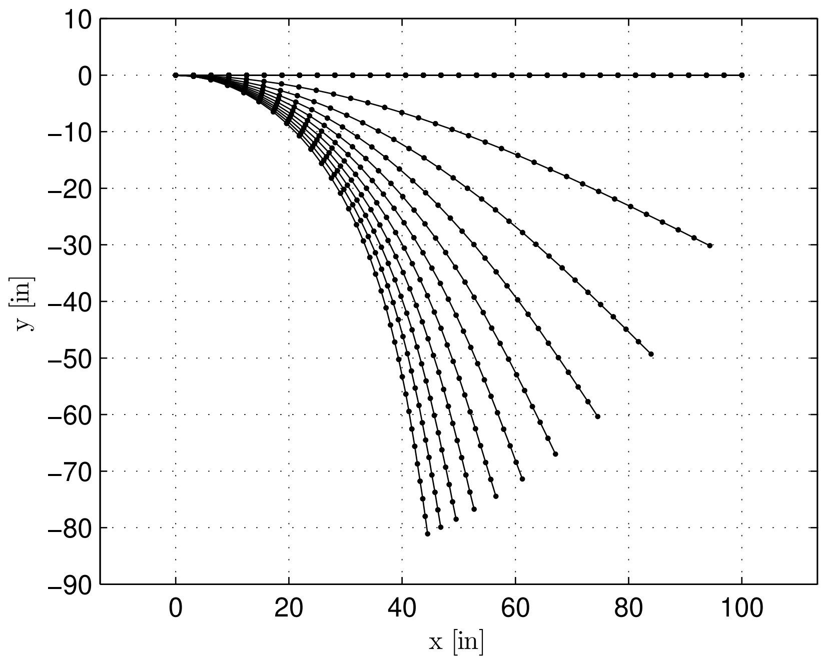

Figura 9.3: Configurações do pórtico solicitado por força concentrada para cada passo de carga durante a simulação até a posição final.

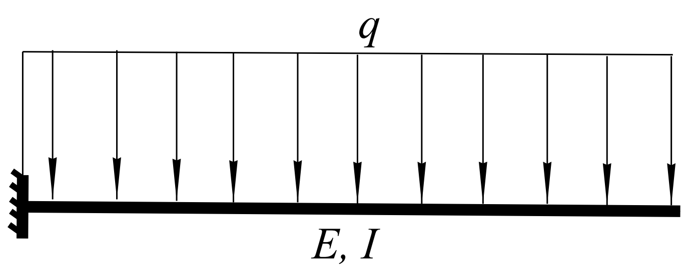

Figura 9.4: Pórtico com carregamento uniformemente distribuído.

os deslocamentos em (9.5) e (9.6). Para o carregamento distribuído o parâmetro adimensional na carga é dado por

$$q^* = 10 q_0 L^3 / EI. \tag{9.12}$$

A Fig. (9.6) ilustra o comportamento, em base adimensional, dos deslocamentos em função do carregamento. A Fig. (9.7) ilustra as configurações de equilibrio da estrutura para cada passo de carga.

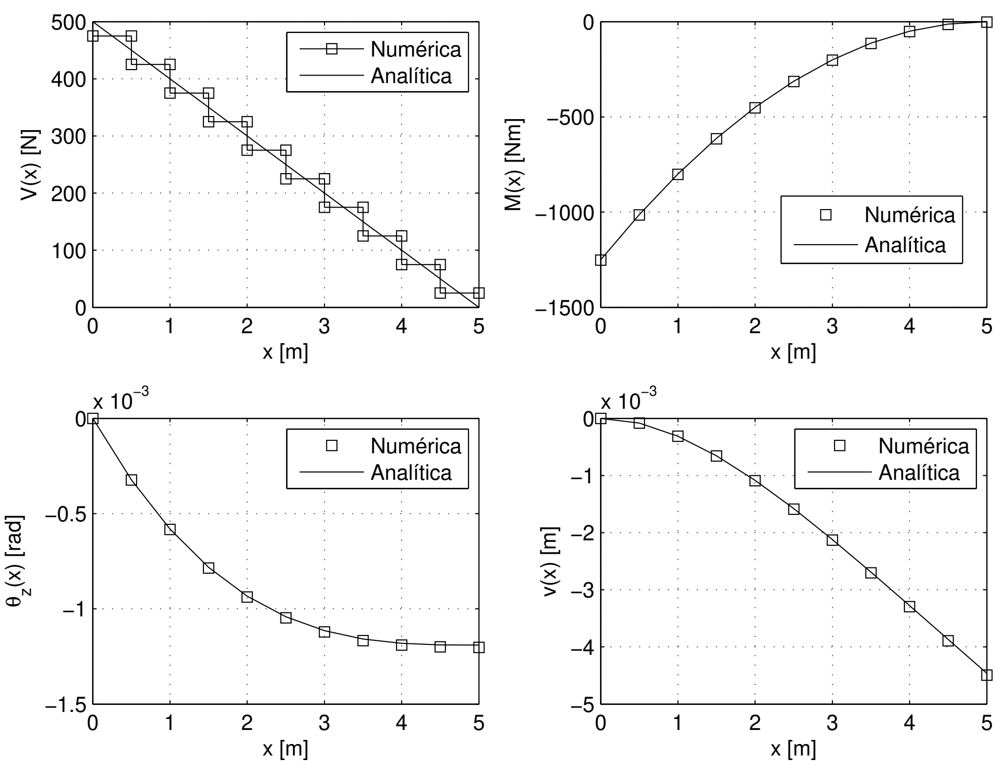

Figura 9.5: Soluções lineares para viga com carregamento uniformemente distribuído.

9.1.3 Pórtico engastado com momento na extremidade

O próximo exemplo, trata de um pórtico de comprimento L engastado, solicitado através de um carregamento representado por um binário de momento M aplicado à extremidade, como mostrado na Fig.(9.8). Esse tipo de caso é usualmente utilizado para verificar a robustez do modelo com relação às grandes rotações, assim como a validação, pois é um caso fortemente não linear.

Monteiro (2004) e Yshii (2002) comparam em seus trabalhos a solução analítica deste problema com o resultados numéricos através da formulação co-rotacional. A solução analítica para os deslocamentos é explicitada nas seguintes equações:

$$u(x) = x\left(\frac{\sin\theta(x)}{\theta(x)} - 1\right), \tag{9.13}$$

$$v(x) = x\left(\frac{1-\cos\theta(x)}{\theta(x)}\right), \tag{9.14}$$

$$\theta(x, M) = \frac{Mx}{EI}. \tag{9.15}$$

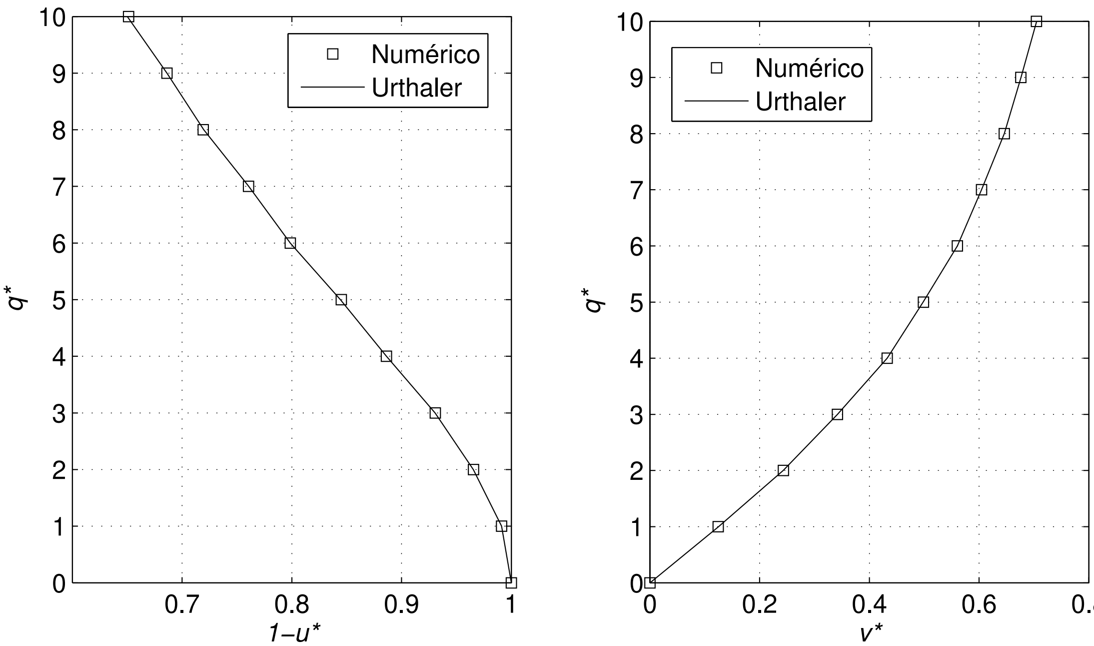

Figura 9.6: Comparação das soluções não-lineares de q^* em função de u^* e v^* para o carregamento uniformemente distribuído. Deslocamentos medidos na extremidade livre.

Seguindo a abordagem adimensional, o carregamento adimensional neste caso é dado por

$$M^* = n\frac{ML}{2\pi EI}, \tag{9.16}$$

em que n é o número de voltas e os deslocamentos são tratados analogamente aos do primeiro caso e são dados pelas equações (9.5) e (9.6).

A Fig.(9.9) mostra o resultado comparativo da solução analítica com a numérica utilizando uma discretização de 32 elementos, 20 passos de carga e para três voltas completas. Os resultados obtidos através das equações analíticas e a partir do modelo de elementos finitos são expostos na Tab.(9.2).

Neste caso, como os dados seguem a mesma sequência, foi possível determinar o erro percentual, e, de cada variável, no qual comparam-se os resultados numéricos com os analíticos da seguinte maneira

$$e = 100\left|\frac{u^* - \bar{u}^*}{u^*}\right|, \tag{9.17}$$

em que u^* representa a solução analítica e $\bar{u}^*$ o resultado numérico. A Fig.(9.10) ilustra a distribuição do erro de u^* e v^* em função dos passos de carga. Observa-se que os erros são inferiores a $1,5$ %, o que poderia ser reduzido refinando-se a malha ou aumentando o número

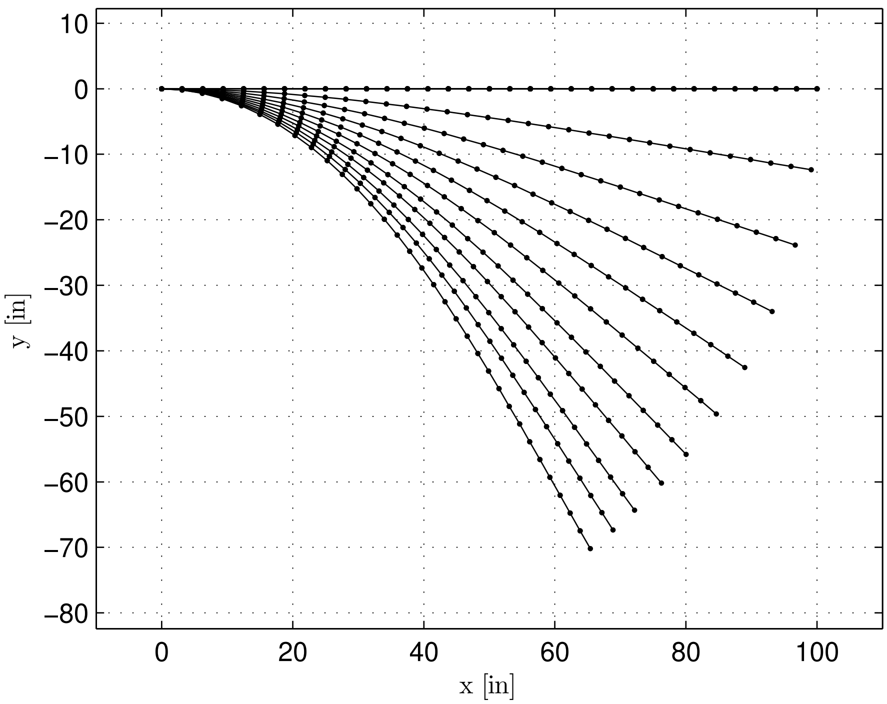

Figura 9.7: Configurações do pórtico sob carga uniformemente distribuída para cada passo de carga durante a simulação até a posição final.

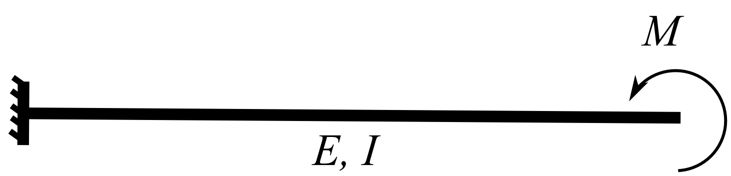

Figura 9.8: Pórtico engastado com momento na extremidade

de passos de carga.

Analogamente aos casos anteriores, a Fig.(9.11) traz as configurações de equilíbrio estático para cada passo de carga, no qual o carregamento imposto faz com que a estrutura adquira uma forma circular.

9.2 Exemplos numéricos para pórtico plano com abordagem dinâmica

Para o estudo de pórticos planos com abordagem co-rotacional foram escolhidos alguns exemplos presentes na literatura:

- Pórtico bi-engastado com força concentrada aplicado ao centro da estrutura;

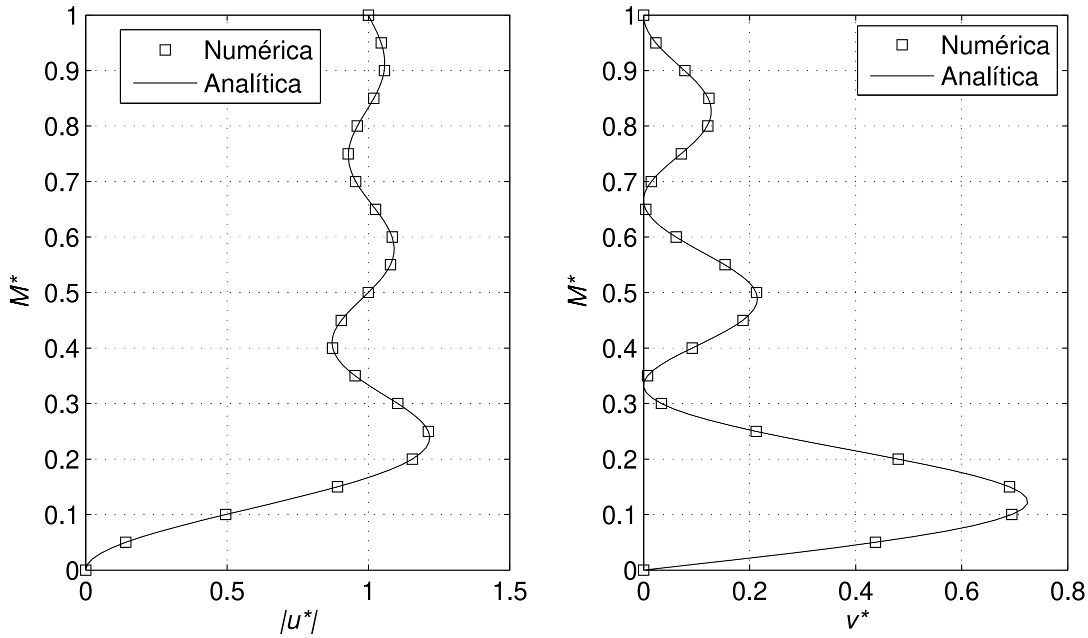

Figura 9.9: Comparação do modelo numérico com a solução analítica para três voltas.

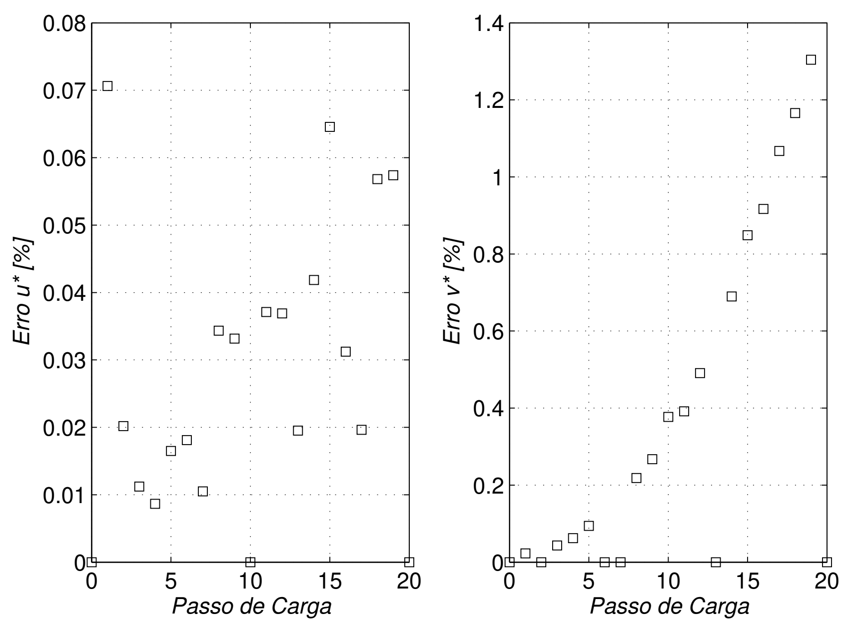

Figura 9.10: Erro numérico percentual para o caso de viga engastada com momento na extremidade.

- Pórtico engastado com carregamento concentrado na extremidade;
- Pórtico engastado com momento na extremidade;

Tabela 9.2: Soluções adimensionais não-lineares para viga com momento na extremidade.

	Co-rotacional			Analítico		
Passo de Carga	M^*	$\lvert u^* \rvert$	v^*	M^*	$\lvert u^* \rvert$	v^*
0	0	0	0	0	0	0
1	0.05	0.1415	0.4373	0.05	0.1416	0.4374
2	0.1	0.4953	0.6945	0.1	0.4954	0.6945
3	0.15	0.8906	0.6903	0.15	0.8907	0.69
4	0.2	1.156	0.4802	0.2	1.1559	0.4799
5	0.25	1.2124	0.2124	0.25	1.2122	0.2122
6	0.3	1.1041	0.0338	0.3	1.1039	0.0338
7	0.35	0.9531	0.0074	0.35	0.9532	0.0074
8	0.4	0.8736	0.0918	0.4	0.8739	0.0916
9	0.45	0.9043	0.1877	0.45	0.9046	0.1872
10	0.5	1	0.213	0.5	1	0.2122
11	0.55	1.0784	0.1538	0.55	1.078	0.1532
12	0.6	1.0845	0.0614	0.6	1.0841	0.0611
13	0.65	1.0254	0.004	0.65	1.0252	0.004
14	0.7	0.9551	0.0146	0.7	0.9555	0.0145
15	0.75	0.9287	0.0713	0.75	0.9293	0.0707
16	0.8	0.9607	0.1211	0.8	0.961	0.12
17	0.85	1.0195	0.1231	0.85	1.0193	0.1218
18	0.9	1.0567	0.0781	0.9	1.0561	0.0772
19	0.95	1.0458	0.0233	0.95	1.0452	0.023
20	1	1	0	1	1	0

- Pórtico com momento no vínculo.

9.2.1 Pórtico bi-engastado com força concentrada aplicada ao centro da estrutura

A estrutura estudada neste exemplo é composta por um pórtico esbelto com engastamento em ambas as extremidades e é solicitada com uma força concentrada variável no tempo $F(t)$ dada por um pulso retangular de curta duração (0,02 segundos). Este exemplo foi estudado por Rice & Ting (1993) e Behdinan et al. (1998), no qual a solução para o deslocamento $v(L/2)$ foi obtida utilizando técnicas de simetria. A simulação foi realizada para o tempo variando de 0 a 0,08 segundos, intervalo este dividido em 1000 incrementos. O comprimento da estrutura, 240 polegadas, foi discretizado em 8 elementos. A massa específica do material é de $4,567 \times 10^{-3}\ lbfs^2/in^4$, o módulo de elasticidade $30 \times 10^6\ psi$, área transversal e momento de inércia de área dados por 21.9 in^2 e 100 in^4, respectivamente. As unidades foram assim escolhidas para uma melhor comparação com a literatura. A Fig. (9.12) mostra o pulso retangular utilizado no carregamento e o resultado obtido em comparação com (Rice & Ting,

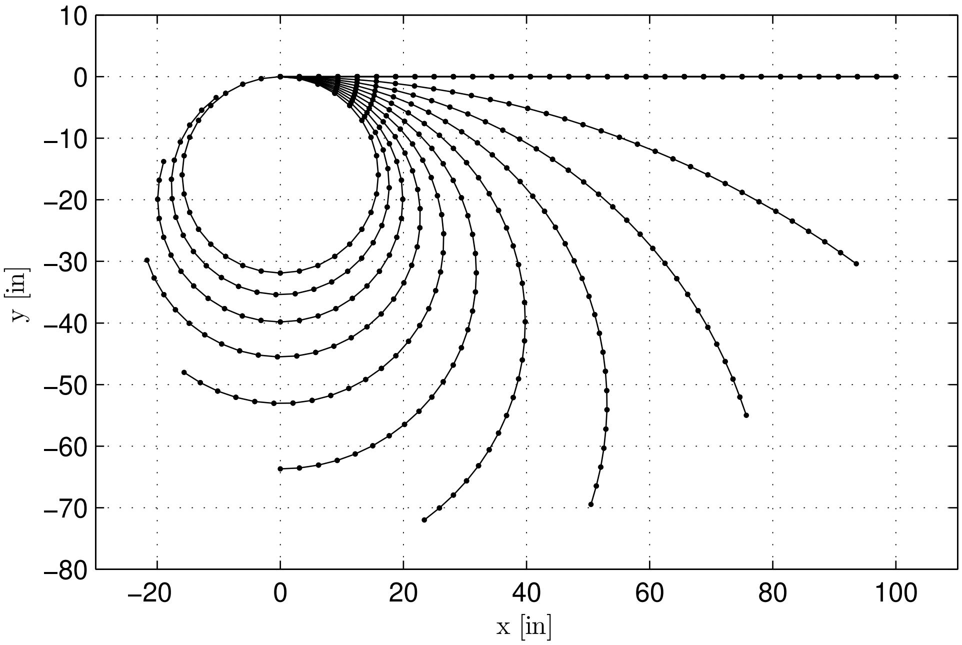

Figura 9.11: Configurações do pórtico até uma volta completa.

1993).

9.2.2 Pórtico engastado com força concentrada na extremidade

Este caso corresponde ao estudo de uma viga engastada em uma extremidade e solicitada através de um esforço concentrado, que é função do tempo, na outra extremidade. Esta estrutura foi estudada por Rice & Ting (1993) e Behdinan et al. (1998), no qual o esforço concentrado varia linearmente até atingir a magnitude de 1×10^5 lbf, no qual permanece constante. Para a simulação, o tempo total foi de 1 s dividido em 1000 intervalos de tempo e o corpo foi discretizado em 4 elementos. O corpo possui comprimento de 120 polegadas, massa específica $4,567 \times 10^{-3}$ $lbfs^2/in^4$, módulo de elasticidade 30×10^6 psi, área transversal e momento de inércia de área dado por 21.9 in^2 e 100 in^4, respectivamente. A variação no tempo do deslocamento transversal em y na extremidade do corpo, $v(L)$, pode ser observado na Fig. (9.13), no qual o resultado numérico é comparado com a solução obtida por Rice & Ting (1993) e Behdinan et al. (1998). Para melhor visualização da comparação, alguns pontos do resultado numérico obtido foram propositalmente negligenciados na construção do gráfico.

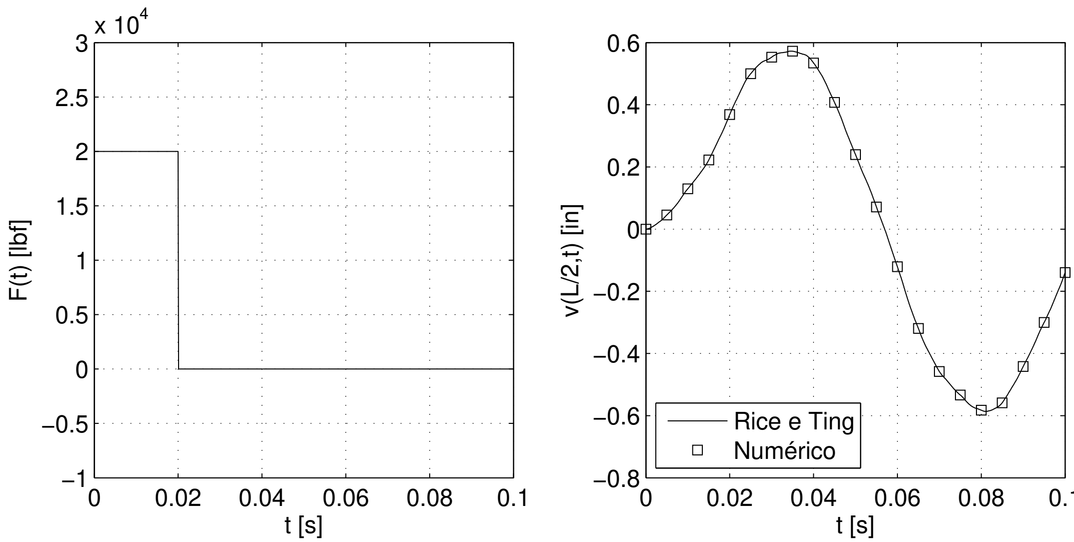

Figura 9.12: Pulso retangular de força e resposta para o deslocamento $v(L/2)$ para viga bi-engastada.

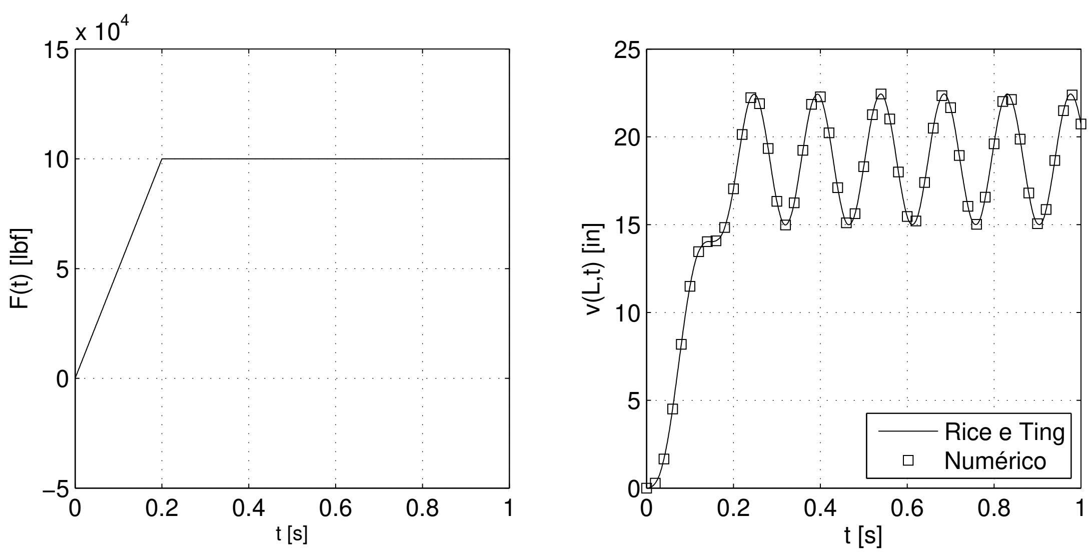

Figura 9.13: F(t) e resposta do deslocamento $v(L)$ para estrutura com engaste na extremidade.

Com o intuito de averiguar o comportamento do sistema com a presença de amortecimento estrutural foram escolhidos arbitrariamente os parâmetros de Raileigh, Φ_1 e Φ_2, como 0,010 e 0,008, respectivamente. A solução comparativa entre o caso amortecido e não amortecido são ilustradas na Fig. (9.14), no qual os parâmetros geométricos e materiais são os mesmos do caso anterior. O carregamento é o mesmo da Fig. (9.13).

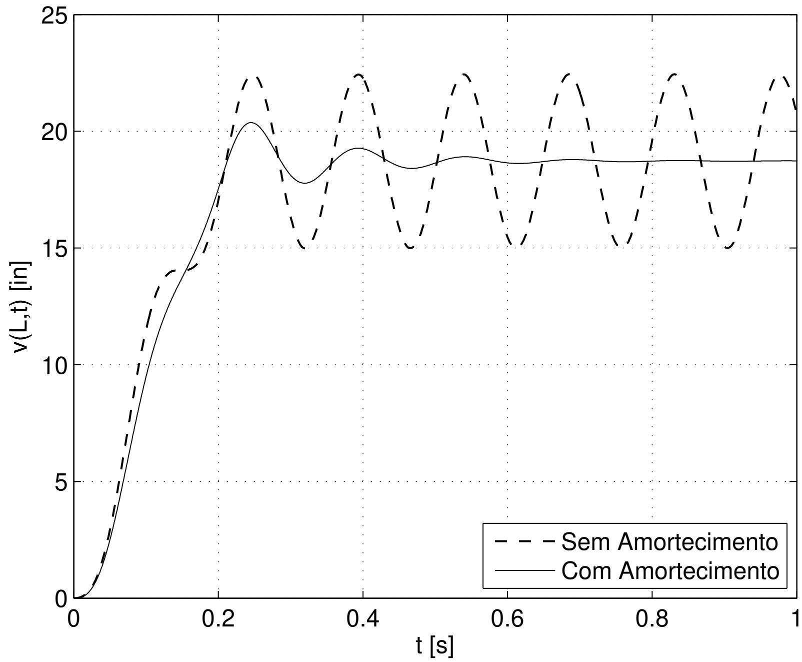

Figura 9.14: Comparação entre as respostas amortecidas e não amortecidas para o deslocamento $v(L)$ em função do tempo, para viga engastada com força concentrada na extremidade.

9.2.3 Pórtico engastado com momento na extremidade

Este exemplo é análogo ao caso três do estudo estático, no qual a viga está engastada em uma extremidade e é solicitada por um momento na outra extremidade. Estudado por Rice & Ting (1993), este exemplo ilustra uma situação na qual a estrutura após a solicitação obtém uma configuração circular. O momento máximo para que a estrutura obtenha uma configuração circular é dado por

$$M = \frac{2\pi EI}{L}. \tag{9.18}$$

Para simulação, mantiveram-se as mesmas propriedades materiais e geométricas do caso anterior; o tempo de simulação foi discretizado em 200 intervalos e o corpo foi modelado com 32 elementos. O carregamento foi modelado com uma função linear que pode ser escrita como

$$M(t) = \frac{2\pi EI}{L}t. \tag{9.19}$$

As configurações do corpo, no tempo, até que o valor máximo do carregamento seja atingido, são ilustradas na Fig. (9.15). Neste caso, para melhor visualização da figura, algumas

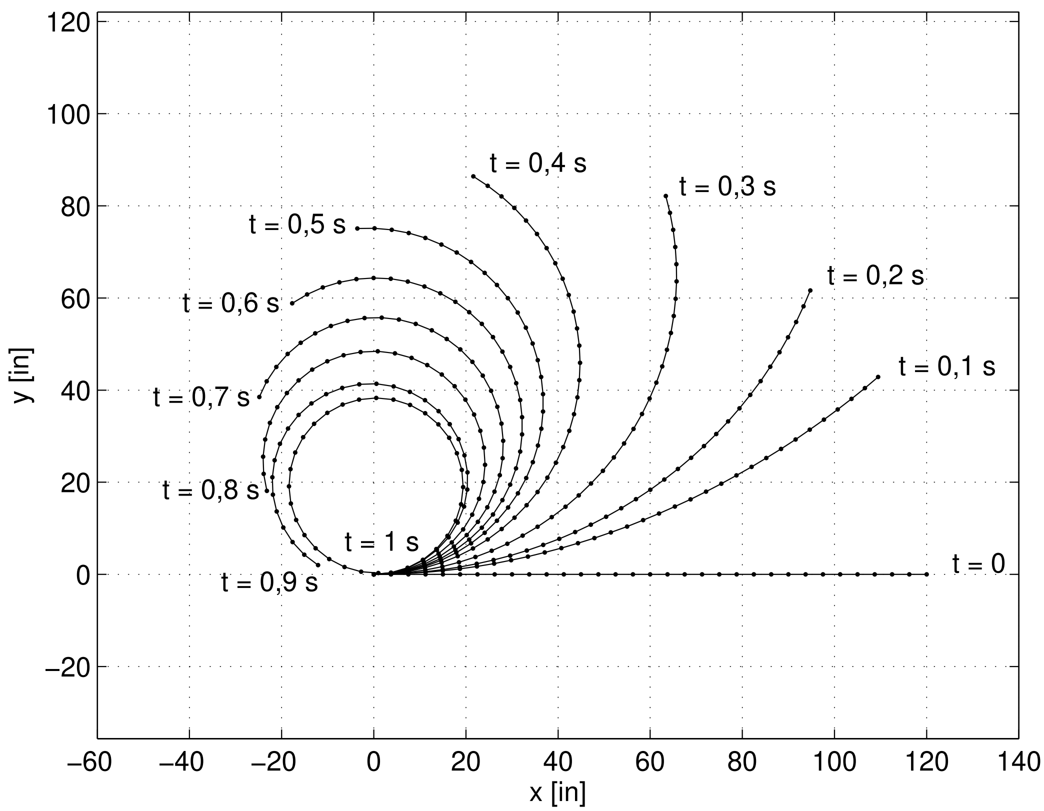

Figura 9.15: Configurações assumidas no tempo pela estrutura para momento na extremidade.

configurações intermediárias foram excluídas do gráfico. Analogamente ao caso anterior, a Fig. (9.16) ilustra a variação do deslocamento $v(L)$ no tempo para a volta completa, no qual comparam-se os casos com e sem amortecimento (mantendo os mesmos parâmetros de amortecimento estrutural do caso anterior).

9.2.4 Pórtico com momento no vínculo

Este exemplo foi inicialmente idealizado por Simo & Vu-Quoc (1986), no qual uma viga apoiada está fixada sobre um olhal que não oferece resistência à rotação. Desta forma, a estrutura sofre solicitação por momento concentrado no vínculo variante no tempo sob a forma de um pulso de curta duração regido pela seguite função (em Nm)

$$\begin{cases} M(t) = 70 \quad se \quad t \leq 5s \\ M(t) = o \quad se \quad t > 5s \end{cases} \tag{9.20}$$

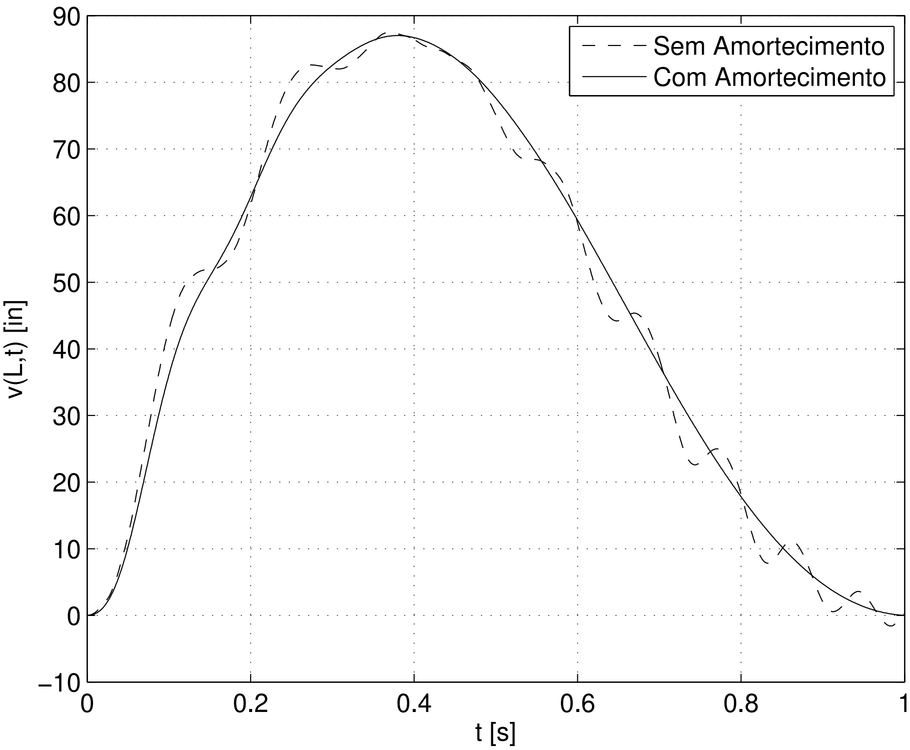

Figura 9.16: Comparação entre as respostas amortecidas e não amortecidas para o deslocamento $v(L)$ em função do tempo para viga engastada com momento na extremidade.

Após o cessar do carregamento a estrutura mantém-se girando por inércia. A Fig. (9.17) ilustra as configurações do corpo durante alguns instantes de tempo, o que indicou bastante proximidade ao resultado obtido por Simo & Vu-Quoc (1986).

9.2.5 Pórtico com deslocamento imposto na extremidade

Este exemplo, também apresentado por Simo & Vu-Quoc (1986), trata de um pórtico apoiado em uma extremidade sobre vínculo que permite que o corpo rotacione livremente, porém impede movimentos de translação na direção horizontal e vertical. A estrutura é submetida a condição de deslocamento prescrito, na qual a rotação θ_1 imposta na extremidade vinculada obedece a seguinte função (em radianos):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = 0,6t \quad se \quad t \leq 2.5s \\ \theta_1(t) = 1,5 \quad se \quad t > 2,5s \end{cases} \tag{9.21}$$

A primeira curva da função,crescimento linear da rotação até um valor próximo de $\pi/2$, repercute na estrutura como um movimento de ascensão, no qual a viga, inicialmente em

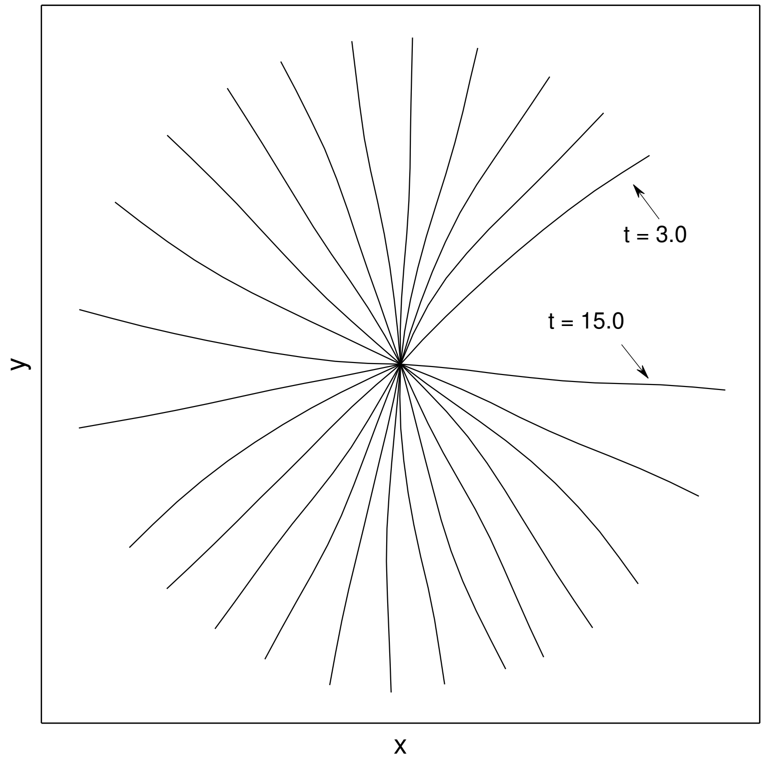

Figura 9.17: Configurações da viga girando em torno de vínculo, modelado como apoio simples nas direções transversais. Pulso de momento é aplicado junto ao vínculo.

configuração horizontal, passará a deslocar-se seguindo o crescimento da rotação imposta. A partir de 2,5 segundos, como indicado pela figura, o ângulo θ_1 mantem-se fixo e próximo de $\pi/2$ radianos, fazendo com que a estrutura inicie um comportamento de vibração livre. Neste exemplo, o corpo foi discretizado em 10 elementos e o tempo dividido em 5000 intervalos. Os parâmetros e propriedades utilizados para a simulação constam na Tab.(9.3).

Tabela 9.3: Parâmetros para simulação de pórtico com deslocamento prescrito.

Parâmetro	Valor
L	$10\ m$
EI	$1000\ Nm^2$
EA	$10000\ N$
$A\rho$	$1\ kg/m$
$I\rho$	$10\ kgm^2$

As Fig. (9.18) e (9.19) ilustram as configurações do corpo no tempo, no qual é possível observar o movimento realizado pela estrutura em função do movimento prescrito de acordo com a equação (9.21). A primeira figura indica o movimento inicial de ascensão do pórtico durante o início da rotação, enquanto que a segunda ilustra o corpo em vibração livre, correspondendo ao momento em que a rotação mantém-se fixa. Os resultados obtidos ficaram muito próximos da resposta de Simo & Vu-Quoc (1986).

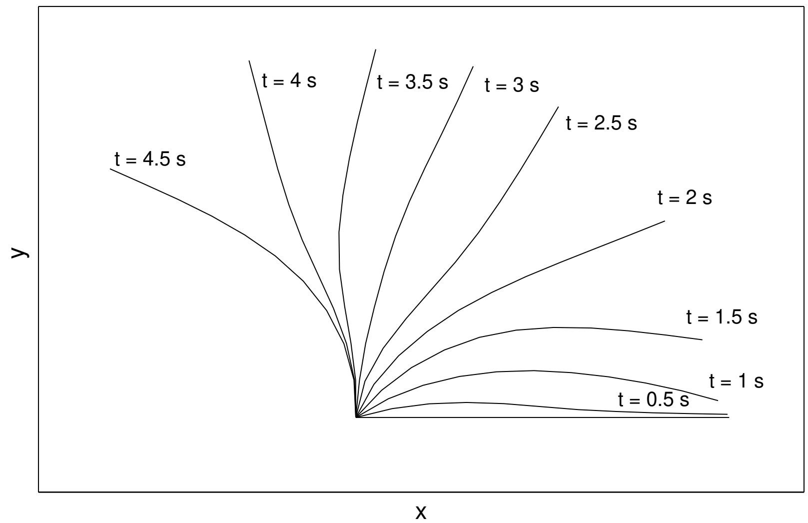

Figura 9.18: Configurações do corpo para o tempo de 0 a 4,5 segundos.

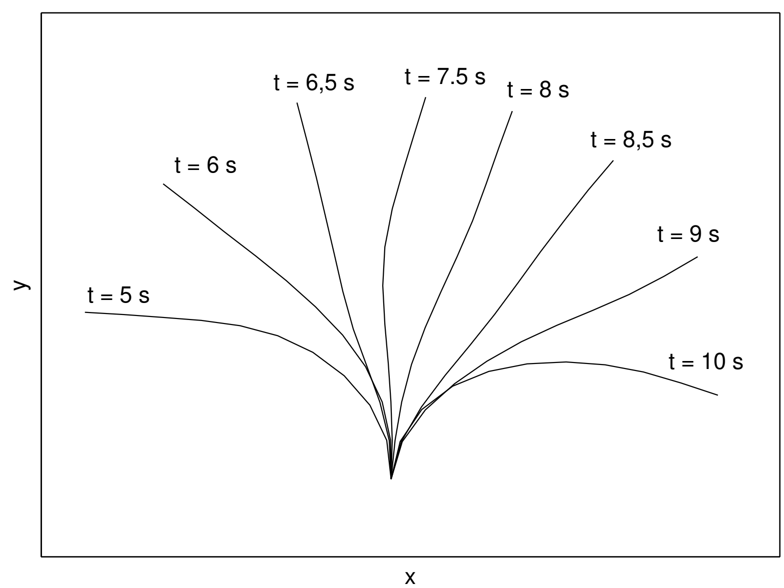

Figura 9.19: Configurações do corpo para o tempo de 5 a 10 segundos.

9.3 Estudo de pórticos planos sobre fundações elásticas

Nesta seção procurou-se avaliar os resultados utilizando os modelos de fundação abordados no capítulo 6, de descrição do solo. O exemplo estudado corresponde ao de um pórtico bi-engastado apoiado sobre uma fundação elástica, como pode ser observado na Fig. (9.20), no qual foram comparadas as respostas analíticas dos modelos de Winkler e Pasternak em relação às soluções numéricas obtidas através dos diversos modelos numéricos em elementos finitos de fundação.

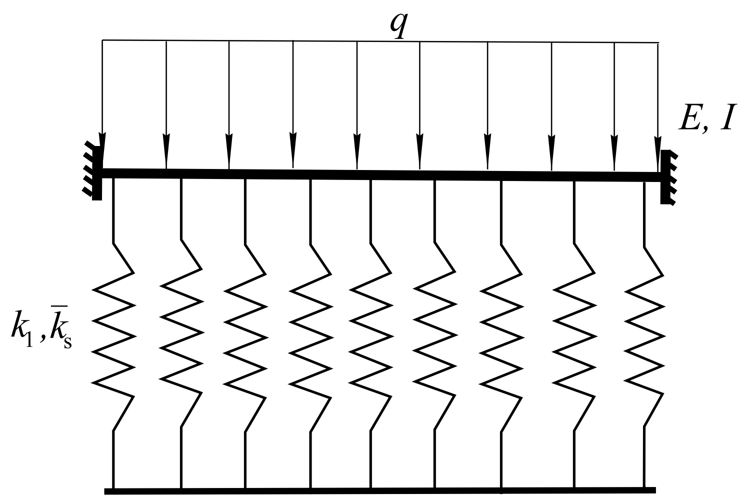

Figura 9.20: Exemplo de estudo de pórtico sobre fundação elástica.

Este estudo resume-se em duas análises, nas quais buscou-se verificar a qualidade das respostas numéricas para modelos de fundação de um e dois parâmetros. A primeira análise corresponde ao estudo dos modelos de um parâmetro, no qual as soluções numéricas utilizando modelos de Winkler em molas nodais e Winkler em leito são comparadas à solução analítica de uma viga geométrica e materialmente linear sobre uma fundação Winkler. Na segunda análise, as soluções dos modelos de dois parâmetros (Filonenko-Borodich e Pasternak) são comparadas com a solução analítica do problema de uma viga geometricamente linear sobre fundação de Pasternak. Para garantir comportamento geometricamente linear por parte da estrutura e possibilitar comparar as soluções analíticas às numéricas, arbitrou-se carregamento distribuído de baixa magnitude (mesma estratégia utilizada para o estudo do pórtico plano com abordagem estática). Para a simulação numérica foram utilizados 50 elementos de viga e os parâmetros estão contidos na Tab. (9.4).

Tabela 9.4: Parâmetros para simulação do pórtico apoiado sobre fundação elástica.

Parâmetro	Variável	Valor
Comprimento do Pórtico	L	$5\ m$
Propriedades Geométricas e Materiais do Pórtico	EI	$1.75 \times 10^6\ Nm^2$
Primeiro Parâmetro do Solo	k_1	$2 \times 10^7\ N/m/m$
Segundo Parâmetro do Solo	$\bar{k}_s$	$2 \times 10^7\ N$
Intensidade do Carregamento Uniformemente Distribuído	q	$100\ N/m$

9.3.1 Estudo de fundações de um parâmetro

No caso do modelo de Winkler, a solução analítica geral da equação (6.3) é dada por (Colajanni et al., 2009)

$$v(x) = e^{\bar{k}x}\left(C_1 \cos \bar{k}x + C_2 \sin \bar{k}x\right) + e^{-\bar{k}x}\left(C_3 \cos \bar{k}x + C_4 \sin \bar{k}x\right) + \frac{q}{k_1}, \tag{9.22}$$

em que C_i são constantes que dependem das condições de contorno do problema e

$$\bar{k} = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}}. \tag{9.23}$$

A Fig. (9.21) ilustra uma comparação da solução analítica com resultados numéricos obtidos através do modelo de Winkler em leito. Em conjunto com a análise comparou-se de forma qualitativa o modelo em molas nodais, em que adotou-se a rigidez equivalente numericamente igual à rigidez do modelo em leito. Para este exemplo, usou-se o modelo de Winkler em leito com dois graus de liberdade e em quatro graus de liberdade, no qual utilizou-se o modelo de dois parâmetros, tomando $\bar{k}_s$ como nulo. Os modelos de Winkler em leito mostraram respostas próximas à solução analítica, em que não se observou diferença significativa para dois e quatro graus de liberdade, como pode ser ilustrado na Fig.(9.22), que fornece o erro percentual das soluções numéricas em relação à analítica. É possível observar através destes resultados que o modelo de Winkler por molas nodais aproximou-se qualitativamente da solução analítica, para adoção de rigidez numericamente igual ao modelo em leito. É importante ressaltar que o modelo em molas nodais foi atribuído neste contexto com intuito qualitativo, em virtude do valor de rigidez adotado ser numericamente igual ao do modelo em leito e não equivalente.

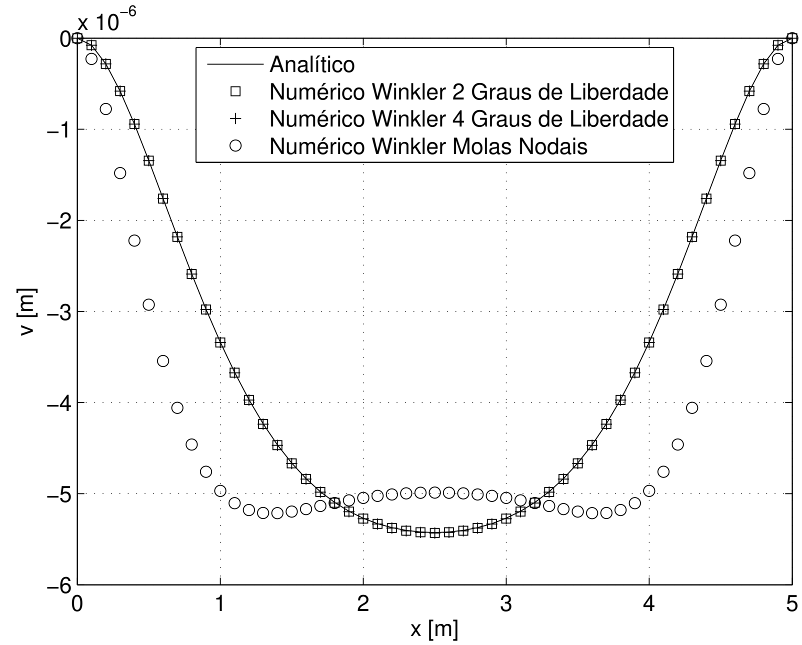

Figura 9.21: Comparação do resultado analítico com o numérico para o modelo de Winkler.

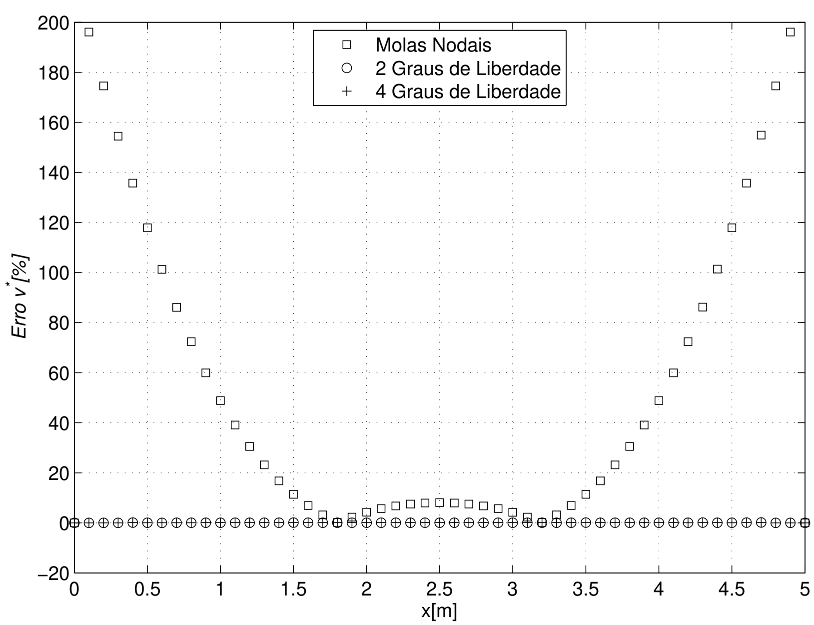

Figura 9.22: Erro percentual do deslocamento v para os modelos de fundação Winkler em relação à solução analítica.

A Tab.(9.5) mostra os valores dos resultados obtidos através dos elementos de fundação Winkler com relação aos analíticos (alguns valores foram negligenciados para melhor disposição dos dados a estrutura do texto), em que GDL é uma abreviação para Grau de Liberdade.

Tabela 9.5: Resultados numéricos para a fundação elástica de um parâmetro.

	Módulo do deslocamento transversal $\lvert v \rvert \times 10^{-6}$ $[m]$			
$x[m]$	Analítico	Molas Nodais	2 GDL	4 GDL
0	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.077	0.228	0.077	0.077
0.2	0.283	0.777	0.283	0.283
0.4	0.943	2.223	0.944	0.944
0.6	1.761	3.544	1.761	1.762
0.8	2.588	4.461	2.589	2.590
1.0	3.338	4.969	3.340	3.341
1.2	3.968	5.179	3.970	3.972
1.4	4.464	5.214	4.467	4.469
1.6	4.835	5.169	4.838	4.840
1.8	5.096	5.103	5.100	5.102
2.0	5.270	5.046	5.273	5.275
2.2	5.373	5.008	5.376	5.378
2.4	5.421	4.990	5.424	5.426
2.6	5.421	4.990	5.424	5.426
2.8	5.373	5.008	5.376	5.378
3.0	5.269	5.046	5.273	5.275
3.2	5.096	5.103	5.100	5.102
3.4	4.835	5.169	4.838	4.840
3.6	4.464	5.214	4.467	4.469
3.8	3.967	5.179	3.970	3.972
4.0	3.338	4.969	3.340	3.341
4.2	2.588	4.461	2.589	2.590
4.4	1.760	3.544	1.761	1.762
4.6	0.943	2.223	0.944	0.944
4.8	0.283	0.777	0.283	0.283
5.0	0.000	0.000	0.000	0.000

9.3.2 Estudo de fundações de dois parâmetros

A solução analítica do modelo de dois parâmetros sob uma viga linear representada matematicamente na equação (9.24) tem a seguinte forma (Barros et al., 2009):

$$v(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{-\alpha_1 x} + C_4 e^{\alpha_2 x} + \frac{q}{k_1}, \tag{9.24}$$

em que

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\bar{k}_s - \sqrt{\bar{k}_s^2 - 4k_1 EI}}{2EI}} \tag{9.25}$$

e

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\bar{k}_s + \sqrt{\bar{k}_s^2 - 4k_1 EI}}{2EI}}. \tag{9.26}$$

A Fig. (9.23) ilustra a comparação dos modelos numéricos a dois parâmetros em relação à solução analítica do modelo de Pasternak. Como comentado anteriormente, os modelos de Filonenko-Borodich e Pasternak são matemáticamente equivalente (Dias, 2008) diferindo na quantidade de graus de liberdade que cada modelo contempla em função da aproximação de elemento finito utilizada. Como ilustrado na Fig. (9.23), o resultado numérico de Filonenko-Borodich apresentou maior proximidade com relação a solução analítica do que o modelo de Pasternak. Para implementação do modelo de Pasternak em elementos finitos, seguiu-se rigorosamente o trabalho de Teodoru et al. (2006). Dias (2008) utilizou a mesma formulação obtendo matrizes de rigidez idênticas. Desta forma, a grande diferença obtida entre o modelo numérico de Pasternak e sua solução analítica pode ser atribuído às hipóteses utilizadas para a construção da matriz de rigidez do modelo. Vale ressaltar que a não-conformidade concentra-se no termo matricial do segundo parâmetro da equação (6.17), pois ao impor o segundo parâmetro do solo como nulo, a solução tornou-se coerente com o modelo de Winkler, como observado no exemplo anterior na Fig. (9.21), o que indica que sua aproximação numérica está coerente para este termo. A diferença entre as repostas entre os modelos numéricos e analíticos podem ser melhor observadas na Fig. (9.24) que ilustra o erro percentual de cada resposta.

É possível observar na Fig. (9.23) a comparação entre a solução analítica e numérica para o modelo de fundação a dois parâmetros.

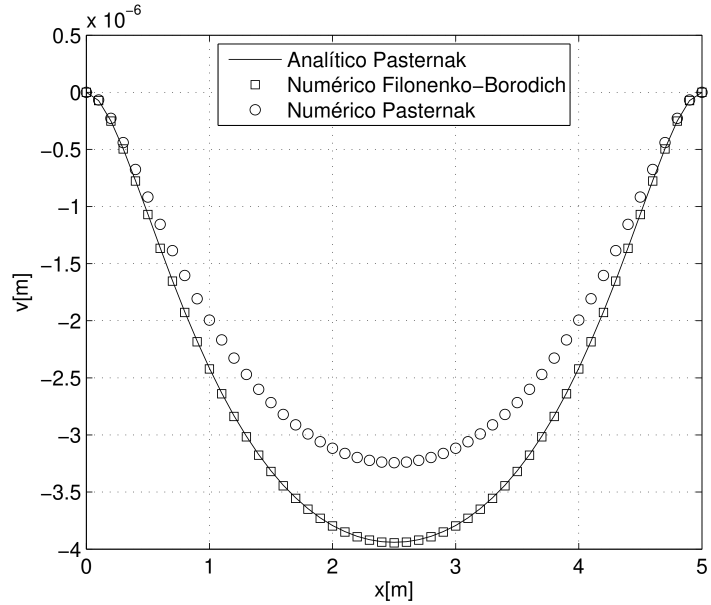

Figura 9.23: Comparação entre as respostas do modelo de fundação elástica de dois parâmetros e a solução analítica.

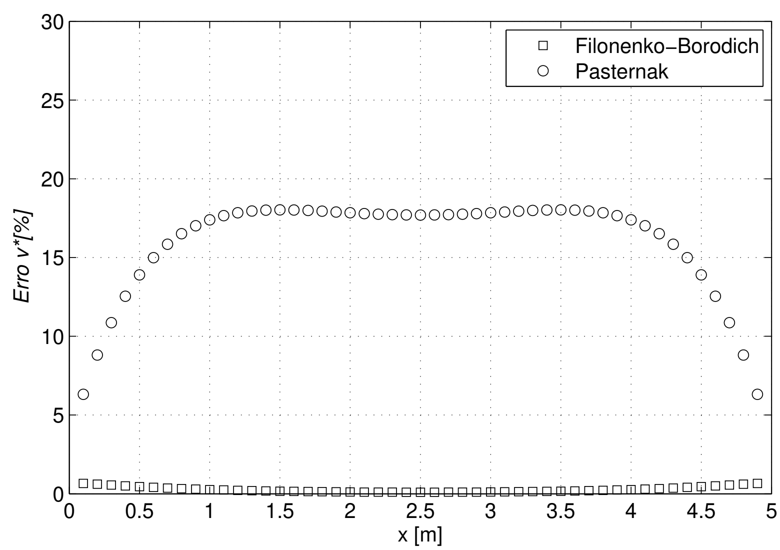

Figura 9.24: Erro percentual do deslocamento v para os modelos de fundação Filonenko-Borodich e Pasternak em relação à solução analítica.

A Tab. (9.6) ilustra os valores obtidos através das soluções analíticas e numéricas para os modelos de solo de dois parâmetros.

Tabela 9.6: Resultados numéricos para a fundação elástica de dois parâmetros.

	Módulo do deslocamento transversal $\lvert v \rvert \times 10^{-6}$ $[m]$		
$x[m]$	Analítico	Filonenko-Borodich	Pasternak
0	0	0	0
0.1	0.071749372	0.072217092	0.067216471
0.2	0.250462528	0.25198642	0.228405378
0.4	0.772406937	0.776267527	0.675506043
0.6	1.360720392	1.366232384	1.156746751
0.8	1.921235607	1.92753171	1.604001768
1	2.415465086	2.421887995	1.995361357
1.2	2.831969948	2.838123404	2.326731229
1.4	3.171664144	3.177360516	2.600401611
1.6	3.440378778	3.445571737	2.820492726
1.8	3.645182534	3.649912337	2.991177166
2	3.792622619	3.79697853	3.116014904
2.2	3.887927921	3.89202486	3.197726029
2.4	3.934677076	3.938642169	3.238128079
2.6	3.934677076	3.938642169	3.238128079
2.8	3.887927921	3.89202486	3.197726029
3	3.792622619	3.79697853	3.116014904
3.2	3.645182534	3.649912337	2.991177166
3.4	3.440378778	3.445571737	2.820492726
3.6	3.171664144	3.177360516	2.600401611
3.8	2.831969948	2.838123404	2.326731229
4	2.415465086	2.421887995	1.995361357
4.2	1.921235607	1.92753171	1.604001768
4.4	1.360720392	1.366232384	1.156746751
4.6	0.772406937	0.776267527	0.675506043
4.8	0.250462528	0.25198642	0.228405378
5	0	0	0

9.4 Resultados do módulo estático do MARINE

Com relação ao estudo da estática de SCR o trabalho buscou avaliar a coerência da implementação do módulo estático do MARINE, dividindo-se, em três seções:

- Validação da implementação computacional;
- Estudo da discretização da malha e resultados do pós-processamento;
- Influência das fundações no modelo de SCR.

Na primeira seção buscou-se comparar os resultados do módulo estático, seguindo a atual implementação em relação a um *software* utilizado na indústria de petróleo para projeto de linhas. A segunda seção tem com objetivo avaliar o impacto da discretização da malha na solução do problema e expor os resultados da atual implementação do módulo estático resultantes do pós-processamento do MARINE. A última seção compara as diferentes respostas obtidas para o momento fletor em função dos diversos modelos de fundação apresentados no trabalho, no contexto da estática do SCR. Em todos os exemplos, a configuração inicial da estrutura é dada pela curva catenária descrita pelas equações (7.1) a (7.4) e então atinge uma nova configuração a partir da inclusão do carregamento na simulação.

9.4.1 Validação da implementação do módulo estático do MARINE

Com o intuito de verificar o funcionamento da implementação do conjunto de diferentes tipos de elementos que compõe o módulo estático do MARINE, utilizou-se como base comparativa o *software* ANFLEX. Este *software* é utilizado no estudo de linhas *offshore*, auxiliando o cálculo e análise estrutural, para os projetos da PETROBRAS. Seu desenvolvimento foi realizado por iniciativa da empresa e parceiros, o que não o torna um *software* comercial disponível no mercado.

A comparação de validação do caso estático foi realizada fazendo uso de algumas considerações iniciais em ambos os programas, de forma a garantir as mesmas condições de simulação, como:

- Como carregamento foi utilizado o peso próprio da estrutura desconsiderando o efeito de empuxo;
- As condições de contorno consideradas foram:
  - A conexão com a plataforma foi considerada rígida para movimentos transversais, porém permitindo movimento de rotação;

– A conexão com o equipamento submarino foi considerada absolutamente rígida, ou seja, o vínculo adotado foi o de engaste.

- O elemento de solo utilizado foi o de Winkler em molas nodais, no qual k_1 foi determinado como 2×10^7 N/m, modelo este utilizado pelo ANFLEX.

A estrutura no MARINE foi discretizada em 2299 elementos de pórtico para representar o trecho suspenso e 700 elementos para trecho em contato com o solo e parte de uma configuração em catenária e é "relaxada" a partir da aplicação do peso próprio, como carregamento. Os parâmetros utilizados no pré-processamento e que descrevem o problema simulado para comparação podem ser observados na Tab.(9.7). Vale ressaltar que os parâmetros escolhidos para simulação não tiveram como objetivo representar um caso real de simulação, servindo apenas como insumo aos simuladores para comparação dos resultados.

Tabela 9.7: Parâmetros para simulação de SCR com 2067 metros sob ação do Peso Próprio.

Dado de Entrada	Variável	Valor
Ângulo de Topo	θ_t	$20°$
Diâmetro Externo da Linha	OD	$0,2731$ m
Diâmetro Interno da Linha	ID	0.2312 m
Comprimento Total da Linha	s_l	2067 m
Comprimento do Trecho em Contato com o Solo	s_f	734 m
Massa Específica da Linha	ρ	7850 kg/m^3
Módulo de Elasticidade	E	$2,08 \times 10^{11}$ N/m^2

Como verificação inicial, buscou-se comparar as malhas geradas para catenária livre em ambos os programas, como ilustrado na Fig.(9.25), onde, para melhor visualização do gráfico, alguns pontos gerados no MARINE não foram incluídos na figura. Observa-se grande proximidade das coordenadas iniciais da linha, o que indica que o gerador de malha para a configuração em "catenária" está coerente.

As Fig.(9.26) e (9.27) ilustram a comparação dos resultados fornecidos pelo ANFLEX e MARINE para os deslocamentos u e v, respectivamente, em função do comprimento de arco medido ao longo da linha, s. Como descrito no capítulo de desenvolvimento computacional, ilustrado na Fig.(8.5), a coordenada s corresponde à leitura realizada diretamente sobre a linha de produção, desta forma sua origem corresponde à *flexjoint* e seu final à conexão com o poço de petróleo. Analogamente à Fig.(9.25), para melhor visualização da comparação dos resultados, alguns pontos do resultado do MARINE foram omitidos. Pode-se observar que a resposta para os deslocamentos está coerente, ou seja, as solução numéricas para o módulo estático mostraram-se bastante próximas às soluções obtidas a partir do ANFLEX. Observa-se que a resposta para o deslocamento v mostrou resposta mais fidedigna do que a

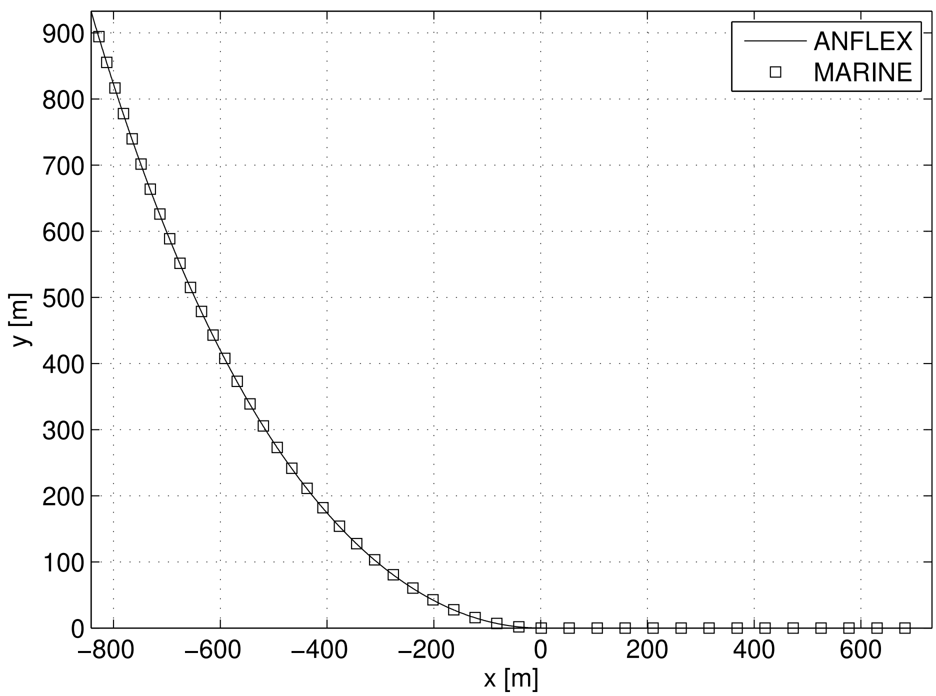

Figura 9.25: Comparação entre as curvas de catenária livre geradas no ANFLEX e MARINE, no qual não se considera empuxo nem tração efetiva.

obtida pelo deslocamento transversal u. Isso pode ser em razão da modelagem de contato com o solo, no qual no modelo do MARINE não considera efeitos de atrito da linha.

A Fig.(9.28) ilustra a comparação entre os resultados do momento fletor atuante na estrutura. É importante ressaltar que, assim como descrito no capítulo que trata da implementação computacional, o cálculo deste resultado considerou o momento inicial resultante da configuração de catenária, dado pela equação (8.8), além do gerado em função do alongamento causado pelo peso próprio. Para ilustrar melhor o resultado, alguns pontos da resposta do MARINE não foram incluídos no gráfico. Ainda com respeito a ilustração, pode-se observar grande proximidade entre as soluções.

9.4.2 Estudo da malha no módulo estático do MARINE

Uma vez comparadas as principais soluções obtidas no processamento, foi realizado um estudo de caso no módulo estático com o intuito de verificar a qualidade dos resultados em função do refino da malha, ou seja, buscou-se avaliar a influência da escolha da malha na análise. Além da avaliação da resposta, buscou-se analisar a influência da malha no processo interativo, o que se traduz pelo número de interações necessárias para se obter convergência. Desta forma, um mesmo caso foi simulado em seis diferentes malhas, que partem de um estado

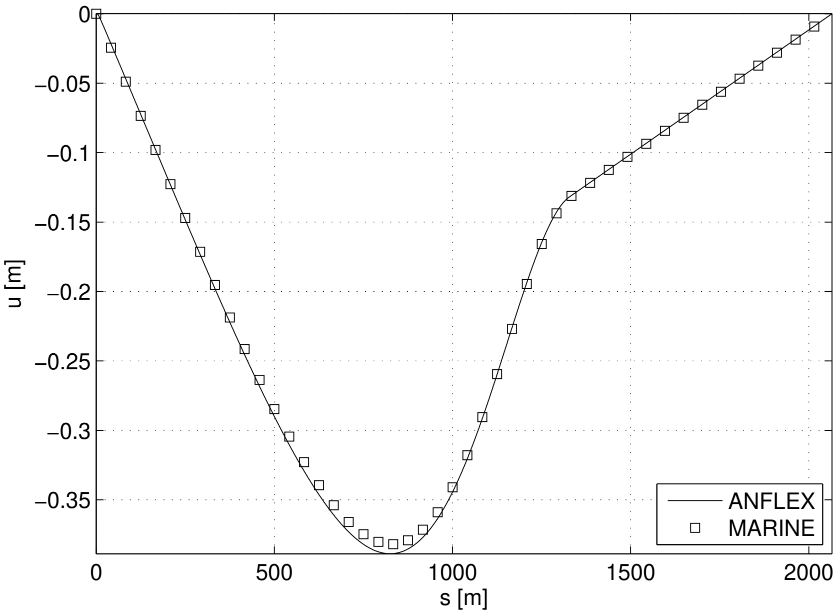

Figura 9.26: Comparação de resultados para o deslocamento u em relação à coordenada s.

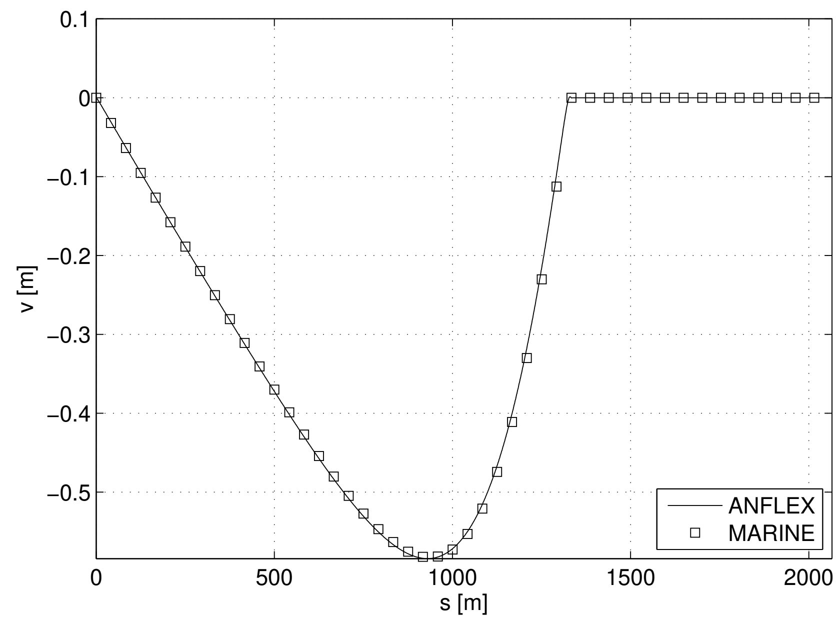

Figura 9.27: Comparação de resultados para os deslocamento v em relação à coordenada s.

com poucos elementos (malha grosseira) para uma malha com maior número de elementos (malha refinada). As malhas foram arbitrariamente escolhidas e os valores para o número de elementos e a quantidade de nós utilizados na estrutura e no solo são dados na Tab.(9.8). Os parâmetros geométricos e as propriedades dos materiais e dos fluidos envolvidos no caso

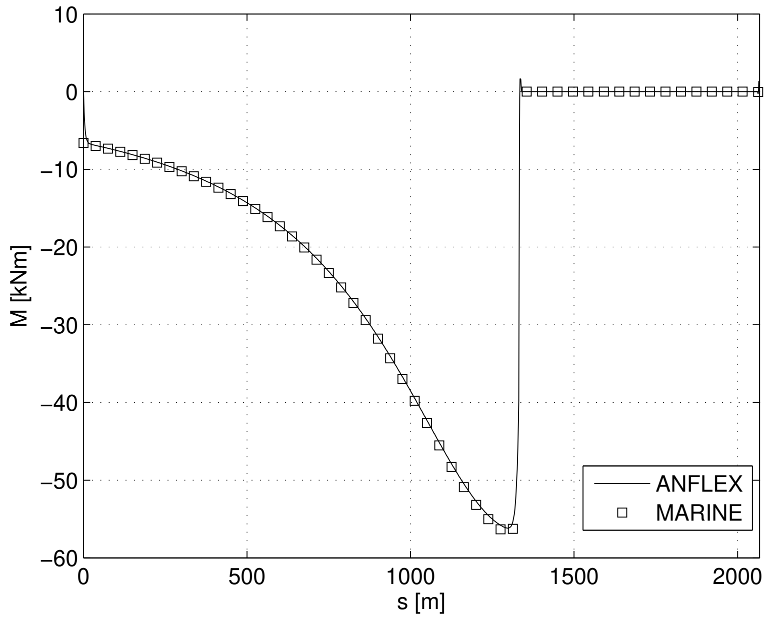

Figura 9.28: Comparação resultados para o momento fletor M em relação à coordenada s.

estudado são dados na Tab.(9.9).

Tabela 9.8: Malhas utilizadas para estudo de refinamento.

Malha	Número de Elementos	Número de Nós *Riser*	Número de Nós *Flowline*
1	104	100	5
2	131	125	7
3	166	167	10
4	269	250	20
5	539	500	40
6	1199	1000	200

A Fig. (9.29) mostra os resultados obtidos para o deslocamento u em razão das diferentes discretizações propostas para malha da estrutura. A figura exibe um comportamento bastante claro com relação à convergência das curvas para uma solução padrão, como observado a partir das malhas 4,5 e 6. Ainda na figura é possível obsevar, para a malha mais grosseira como é o caso da malha 1, que a solução exibe um comportamento bastante irregular, como é o caso da descontinuidade apresentada no inicio da curva (trecho entre 0 e 100 metros da coordenada s).

Para o estudo do impacto da malha no número de interações dividiu-se o carregamento em 20 passos de carga. Assim, procurou-se avaliar o número de iterações necessárias durante o processo iterativo de Newton-Raphson para cada malha e passo de carga, no qual os resultados

Tabela 9.9: Parâmetros de simulação para estudo de malha e número de iterações.

Dado de Entrada	Variável	Valor
Ângulo de Topo	θ_t	$20°$
Diâmetro Externo da Linha	OD	$0,2731\ m$
Diâmetro Interno da Linha	ID	$0.2312\ m$
Comprimento Total da Linha	s_l	$1200\ m$
Comprimento do Trecho em Contato com o Solo	s_f	$200\ m$
Massa Específica da Linha	ρ	$7850\ kg/m^3$
Módulo de Elasticidade	E	$2,08 \times 10^{11}\ N/m^2$
Massa Específica do Fluido Externo à Linha	ρ_l	$1050\ kg/m^3$

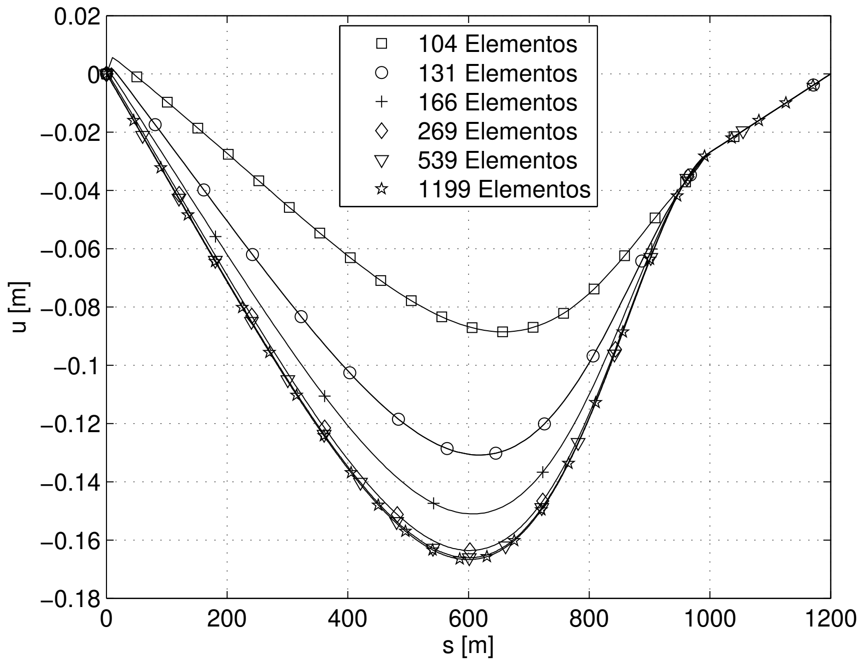

Figura 9.29: Comparação entre as soluções obtidas para o deslocamento u em diferentes malhas.

estão contidos na Tab.(9.10). É possível observar que, para malhas mais grosseiras, exige-se um número maior de iterações para sua resolução, o que indica poder trazer dificuldades numéricas durante a simulação. Observou-se, também, duas características neste resultado: 1) houve estabilização para três iterações por passo de carga para todas as malhas e 2) para as malhas mais refinadas, ou seja, 5 e 6 os passos de carga se estabilizaram em três.

Tabela 9.10: Números de iterações por passo de carga para diferentes malhas.

	Número de Elementos					
Passo de Carga	104	131	166	269	539	1199
1	6	5	5	4	3	3
2	4	4	4	3	3	3
3	4	3	3	3	3	3
4	4	3	3	3	3	3
5	4	3	3	3	3	3
6	4	3	3	3	3	3
7	3	3	3	3	3	3
8	3	3	3	3	3	3
9	3	3	3	3	3	3
10	3	3	3	3	3	3
11	3	3	3	3	3	3
12	3	3	3	3	3	3
13	3	3	3	3	3	3
14	3	3	3	3	3	3
15	3	3	3	3	3	3
16	3	3	3	3	3	3
17	3	3	3	3	3	3
18	3	3	3	3	3	3
19	3	3	3	3	3	3
20	3	3	3	3	3	3

Utilizando a malha 6, com 1199 elementos, e os mesmos parâmetros da Tab.(9.9) foi realizado uma simulação utilizando o MARINE com o intuíto de ilustrar as respostas fornecidas pelo pós-processamento do módulo estático para os deslocamentos (u, v e θ), os esforços internos (momento fletor M e esforço normal N) e tensão normal (σ) no intradorso (ponto extremo superior da seção transversal da linha) na estrutura, o que são ilustrados nas Fig.(9.30), (9.31) e (9.32). Ressalta-se que, para a realização desta simulação, foram considerados os efeitos de carregamento por empuxo no corpo.

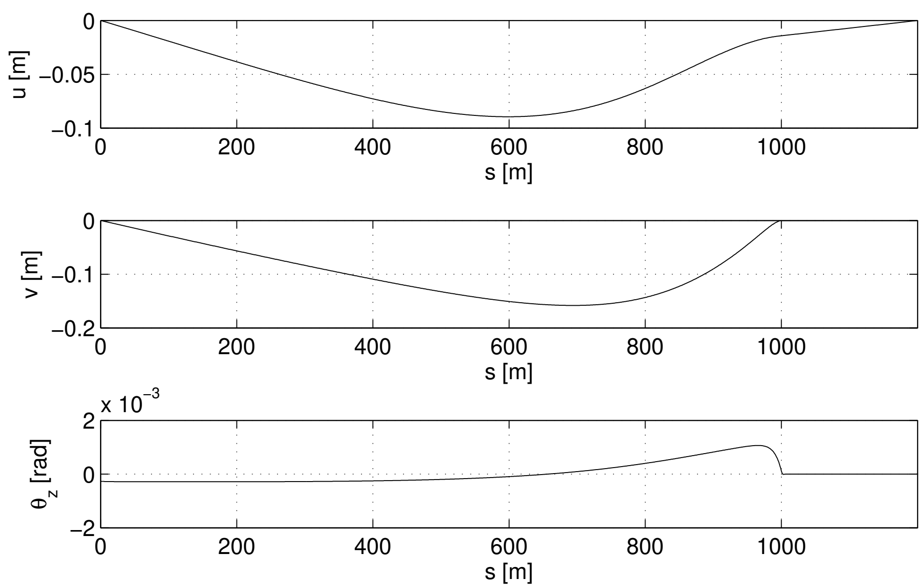

Figura 9.30: Distribuição dos deslocamentos u, v e θ_z na linha de 1200 metros.

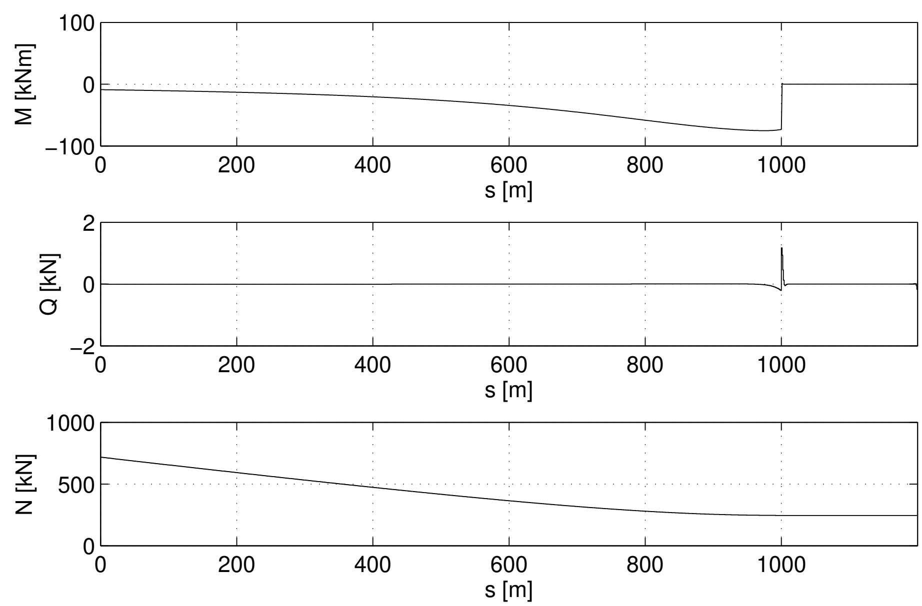

Figura 9.31: Distribuição do Momento Fletor M, Esforço Cortante Q e Força Normal N na linha de 1200 metros.

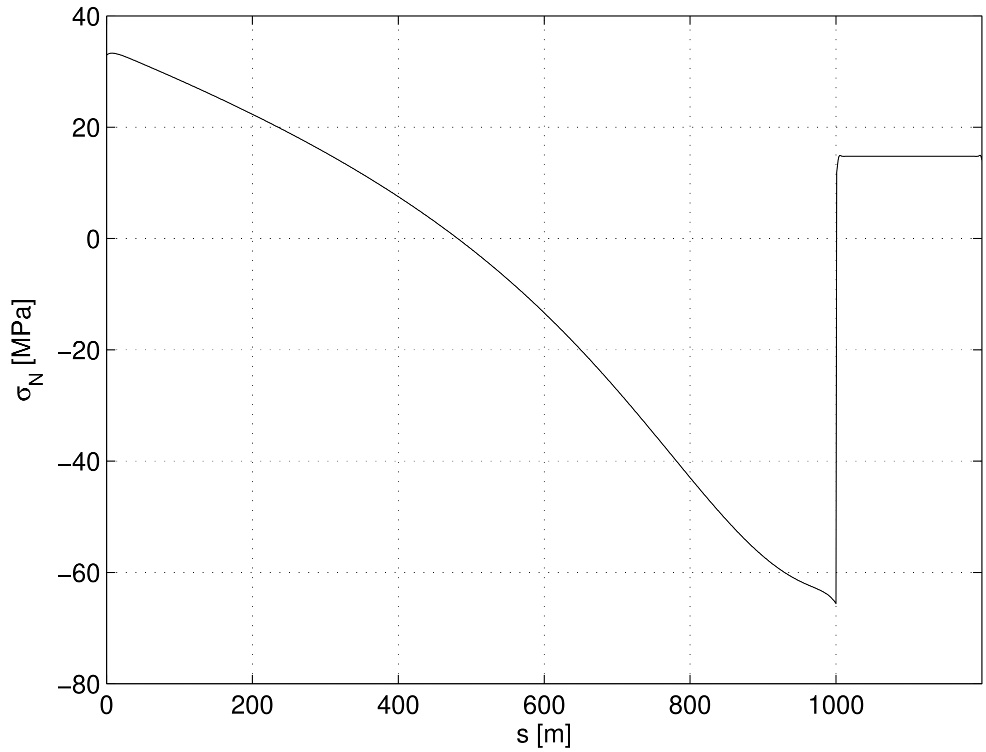

Figura 9.32: Distribuição da Tensão Normal σ no intradorso da linha de 1200 metros.

9.4.3 Estudo dos modelos de fundação aplicados à estática de SCR

Em todos os exemplos anteriores de estudo do SCR foi utilizado o modelo de fundação Winkler em molas nodais. Desta forma, com o intuito de avaliar o comportamento da resposta para diferentes fundações, este exemplo simula o caso SCR em caso estático utilizando os diversos modelos de fundação mencionados nos capítulos anteriores, tais como:

- **Fundação de um parâmetro:** Winkler em leito com dois e quatro graus de liberdade;
- **Fundação de dois parâmetros:** Filonenko-Borodich (dois graus de liberdade) e Pasternak (quatro graus de liberdade).

Os parâmetros materiais, geométricos e de fluido são os mesmos já apresentados na Tab. (9.9), em que k_1 e $\bar{k}_s$ foram tomados como 2×10^7 N/m^2 (2×10^7 N/m para o caso de Winkler em molas nodais) e 2×10^7 N, respectivamente. Para a simulação, consideraram-se os efeitos do peso próprio em conjunto com o empuxo (peso submerso) atuando na estrutura dividindo-se em dois passos de carga para cada modelo de fundação. A estrutura foi discretizada de forma a manter a taxa de um elemento por metro. Buscou-se avaliar o comportamento da resposta do momento fletor em relação ao domínio do corpo para os diferentes modelos de fundação, o que é ilustrado na Fig. (9.33). Com o intuito de se melhorar a visualização da resposta, o resultado é exposto em duas figuras que cobrem o intervalo de 998 a 1015 metros da linha. A figura à esquerda, que corresponde ao intervalo de 998 a 1000 metros, exibe os resultados no trecho suspenso, antes do TDP, enquanto que a figura à direita, de 1000 a 1015 metros, indicam os resultados no trecho apoiado. No restante do domínio da linha as respostas permanecem muito próximas não trazendo nenhuma informação relevante ao estudo. Ainda na Fig. (9.33) é possível observar que a diferença entre os valores de momento fletor imediatamente posterior e anterior ao TDP tem maior valor para o modelo de Winkler em molas nodais e o menor para o modelo de Pasternak (dois parâmetros com quatro graus de liberdade). Coincidentemente, conforme a complexidade do modelo aumenta a amplitude do momento fletor diminui.

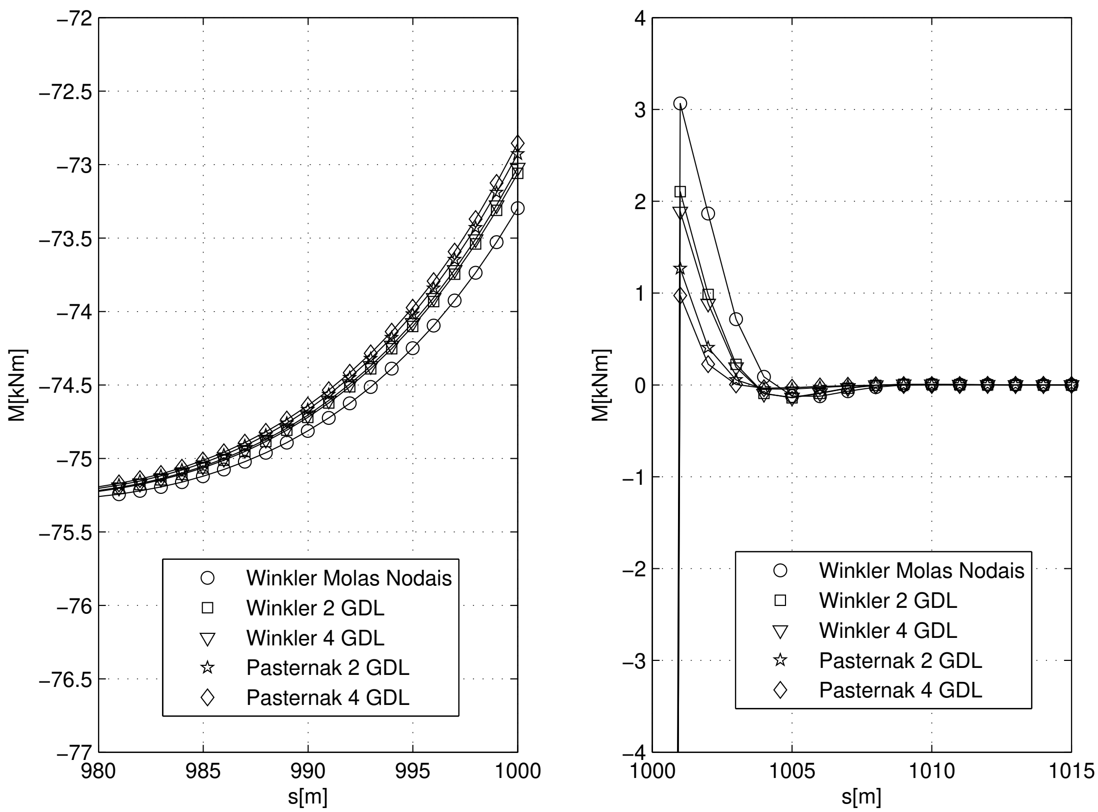

Figura 9.33: Comparação dos resultados do Momento Fletor na região do TDP para diversos modelos de fundação.

9.5 Resultados do módulo dinâmico do MARINE

Esta seção tem como intuito mostrar os resultados e análises realizados para o estudo da dinâmica de *risers* rígidos em catenária buscando desta forma reunir os conceitos anteriormente apresentados para construir o modelo de simulação. Desta forma, utiliza os conceitos e implementações abordadas nos capítulos de desenvolvimento do elemento de pórtico plano não-linear, do estudo da dinâmica não-linear de estrutura e da descrição dos modelos de fundação. Os exemplos desta seção têm como estratégia de estudo a seguinte sequência:

- Validação da dinâmica estrutural de SCR;
- Estudo de caso de SCR em contato com o solo;
- Avaliação do impacto do *heave* na estrutura.

A validação da dinâmica estrutural de SCR, analogamente ao estudo estático, foi realizada utilizando os resultados obtidos pelo *software* ANFLEX em comparação com o resultado do módulo dinâmico do MARINE.

O primeiro caso de estrutura escolhida para estudo foi a linha numa configuração em catenária apoiada sobre às extremidades sem interação com o solo e sob solicitação do peso próprio. Para este primeiro caso de simulação, não foram considerados os efeitos de empuxo excluindo, desta forma, os fenômenos relativos da interação do fluido com a estrutura. Como parâmetro de comparação, buscou-se averiguar a proximidade das respostas obtidas para as configurações finais da estrutura para os diferentes programas. Ainda neste exemplo, é realiza uma análise das soluções obtidas para a distribuição dos esforços internos da estrutura, no caso para esforço normal e momento fletor, para alguns intervalos de tempo da simulação.

O segundo exemplo de estudo busca avaliar o comportamento do SCR e sua interação com o solo marinho, no qual utilizou-se o modelo de molas nodais para representar a fundação. Dentre os resultados avaliados, procurou-se observar a variação dos esforços internos na linha (momento fletor e esforço normal) e o comportamento da tensão normal na região do TDP, em que consideraram-se os efeitos estáticos iniciais na análise.

O último caso de análise teve como objetivo avaliar a variação da tensão no tempo ocasionada pela ação do *heave* da embarcação (movimento vertical ocasionado em função das ondas marítimas) sobre o SCR. Ainda no exemplo, buscou-se avaliar o comportamento do valor máximo do módulo dos esforços internos para cada intervalo de tempo da simulação. Vale ressaltar que, assim como no estudo da estática de SCR, os parâmetros escolhidos para os exemplos estudos não tiveram como objetivo simular um caso real, mas garantir a mesma base de comparação, quando for o caso, e possibilitar análise direta de resultados.

9.5.1 *Riser* apoiado pelas extremidades sem contato com o solo

Com o intuito de verificar o funcionamento do módulo dinâmico, seguiu-se a mesma estratégia da estática de SCR, ou seja, procurou-se comparar os resultados obtidos com os do *software* ANFLEX. O exemplo escolhido para estudo foi o de uma linha totalmente suspensa apoiada pelas extremidades sem contato com o solo. Esta configuração é comum em algumas operações de conexão da linha com a UEP, pois durante o procedimento de conexão a estrutura fica apoiada nas embarcações de apoio de forma semelhante. A divisão deste estudo foi realizada em duas etapas, no qual a primeira é relativa aos resultados comparativos com o *software* de análise estrutural e a segunda trata dos esforços internos na linha, respostas estas resultantes do pós-processamento do MARINE.

As condições de contorno para este caso foram assumidas como vínculos que impõem restrição aos deslocamentos transversais no sentido vertical, objetivando, desta forma, simular o apoio das embarcações. A carga solicitante sobre a estrutura é devida somente ao peso próprio, desconsiderando-se, desta forma, efeitos do empuxo. O tempo de simulação foi de 0 a 5 segundos divididos em 5000 intervalos e o corpo foi discretizado em 199 elementos. Os parâmetros materiais e geométricos utilizados para esta simulação estão contidos na Tab. (9.11).

Tabela 9.11: Parâmetros do exemplo de linha apoiada pelas extremidades.

Dado de Entrada	Variável	Valor
Ângulo de Topo	θ_t	$30°$
Diâmetro Externo	OD	$0,2731\ m$
Diâmetro Interno	ID	$0.2312\ m$
Comprimento da Linha	s_l	$400\ m$
Massa Específica do *Riser*	ρ	$7850\ kg/m^3$
Módulo de Elasticidade	E	$2,08 \times 10^{11}\ N/m^2$

A comparação entre os resultados das configurações no tempo 0 e 5 segundos da linha apoiada pelas extremidades durante a simulação podem ser observadas na Fig. (9.34). Observa-se, no gráfico, que a estrutura parte de uma mesma configuração no tempo 0 (as curvas relativas ao ANFLEX e MARINE estão sobrepostas) e chega a configurações para o tempo 5 segundos diferentes, no qual o MARINE mostrou como resultado uma configuração tortuosa em relação à solução do ANFLEX.

As soluções, embora diferentes, mostraram comportamentos com relação ao deslocamento de mesma natureza. Baseando-se nos resultados anteriores de validação da dinâmica estrutural para pórticos planos, que mostraram grande proximidade com a literatura, duas observações podem ser feitas:

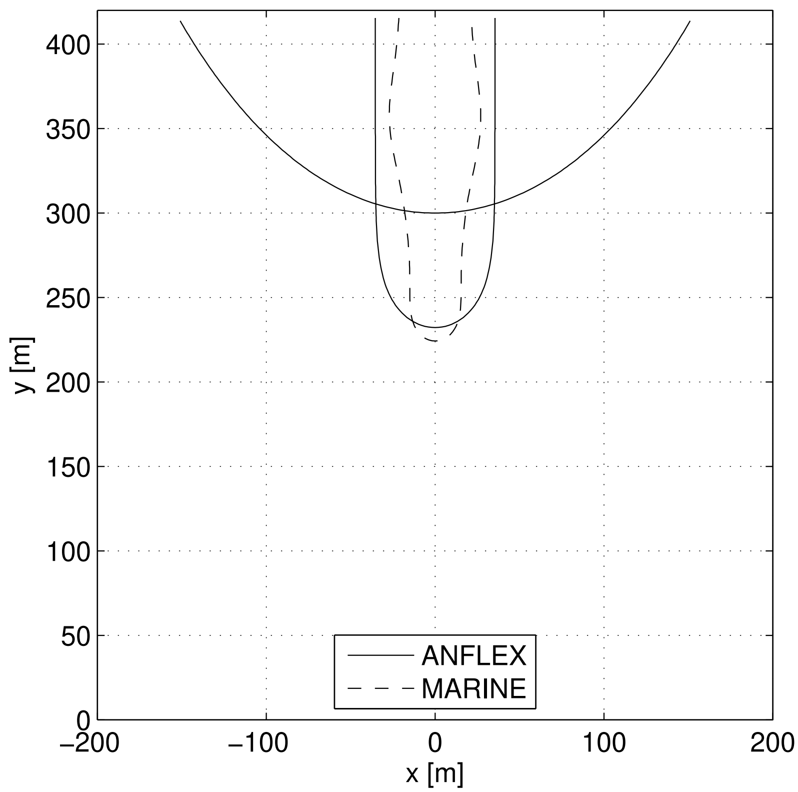

Figura 9.34: Comparação entre as configurações iniciais e finais do *riser* apoiado pelas extremidades resultantes do ANFLEX e MARINE.

1. A atual implementação do ANFLEX contempla uma gama de considerações que, no caso dinâmico, culminam em soluções diferentes das obtidas pelo MARINE;

2. Embora condizentes com a literatura, as validações de dinâmica estrutural não-linear deste trabalho, por serem configurações mais simples do que a de catenária, não exibiram problemas que podem ser de origem numérica, hipóteses de formulação e considerações de implementação que, no caso dinâmico, manifestam-se trazendo resultados incoerentes à análise estrutural de SCR.

Corroborando a segunda observação, a atual implementação do MARINE para cálculo do peso próprio, idealizado como carregamento uniformemente distribuído, não varia com configuração do corpo/elemento no plano e no tempo. Como demonstrado no capítulo de desenvolvimento computacional o cálculo dos esforços nodais equivalentes foram realizados considerando somente os efeitos de viga, ou seja, os efeitos axiais oriundos do carregamento distribuído não estão implementados. Desta forma, para elementos da estrutura em configurações mais próximas da vertical a distorção causada por este efeito é maior, pois nesta região os efeitos axiais são majorados e o de flexão reduzidos. No estudo dinâmico a influência torna-se mais perceptível, pois em geral a estrutura adquire grandes deslocamentos e rotações durante o tempo de simulação.

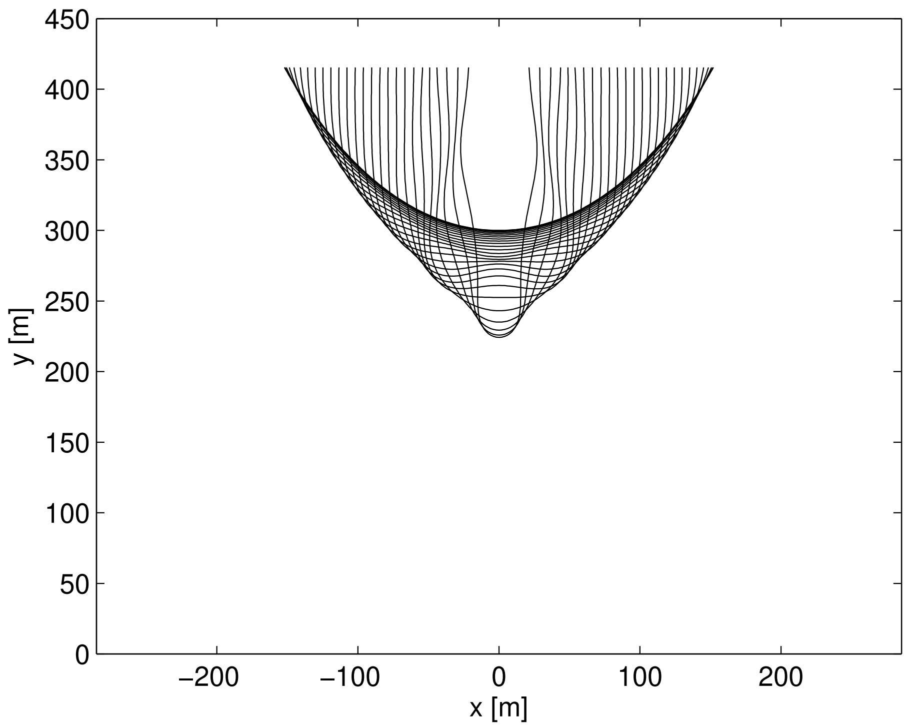

Figura 9.35: Configurações do *riser* suspenso em catenária dupla de 0 a 5 segundos.

A segunda etapa deste exemplo visa ilustrar os resultados obtidos pelo MARINE com relação às configurações e os esforços internos da estrutura. A Fig. (9.35) ilustra as configurações do corpo desde a inicial até a final, no tempo 5 segundos. Este gráfico é resultado do conjunto de *outputs* do pós-processamento do MARINE e para melhor visualição do resultado algumas configurações intermediárias foram removidas.

A Fig. (9.36) ilustra a distribuição do momento fletor na linha em catenária dupla para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos. Para o tempo 0 a distribuição dos momentos fletores é devida somente ao efeito da curvatura em catenária que induz momento inicial na análise da estrutura. O momento fletor no centro da estrutura apresenta momento fletor com amplitude de aproximadamente 2500 kNm. Esse resultado ilustra grande variação da distribuição do momento fletor na linha num curto intervalo de tempo (cinco segundos), em especial, o ponto central crítico da estrutura e, analizando-a somente através deste aspecto, mostrou-se mais passível à falha devido a maior amplitude de momento fletor.

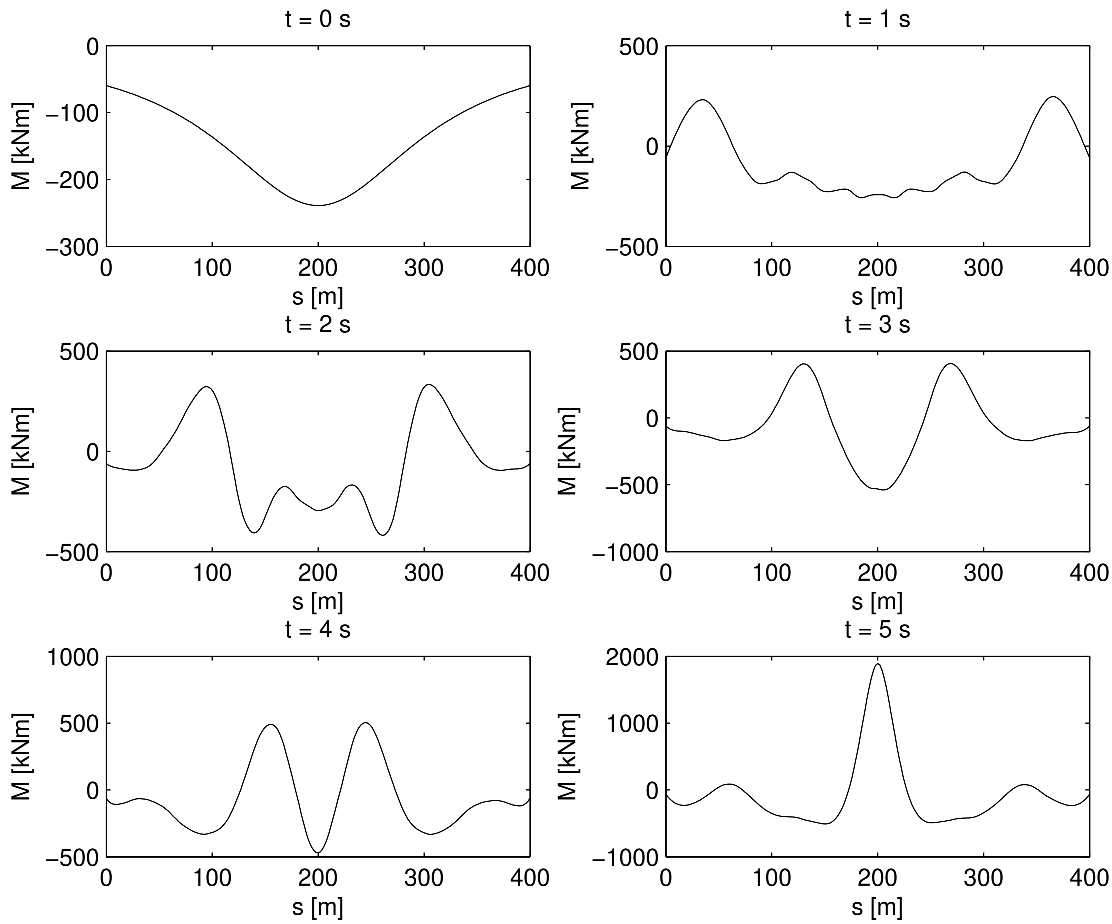

Figura 9.36: Distribuição do momento fletor na linha em catenária dupla para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos.

Analogamente, a distribuição dos esforços normais na estrutura para os tempos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos são ilustrados na Fig. (9.37). É possível observar que, diferentemente da análise de momento fletor, que considera efeitos prévios da curvatura, não se considerou efeitos iniciais na linha como observado no gráfico para o tempo 0. Desta forma, os resultados obtidos para o esforço normal são relativos somente à ação do peso próprio a partir da configuração curvada. Diferentemente do resultado do momento fletor, que leva em consideração os efeitos de curvatura, os pontos de maior solicitação situam-se nas extremidades da linha.

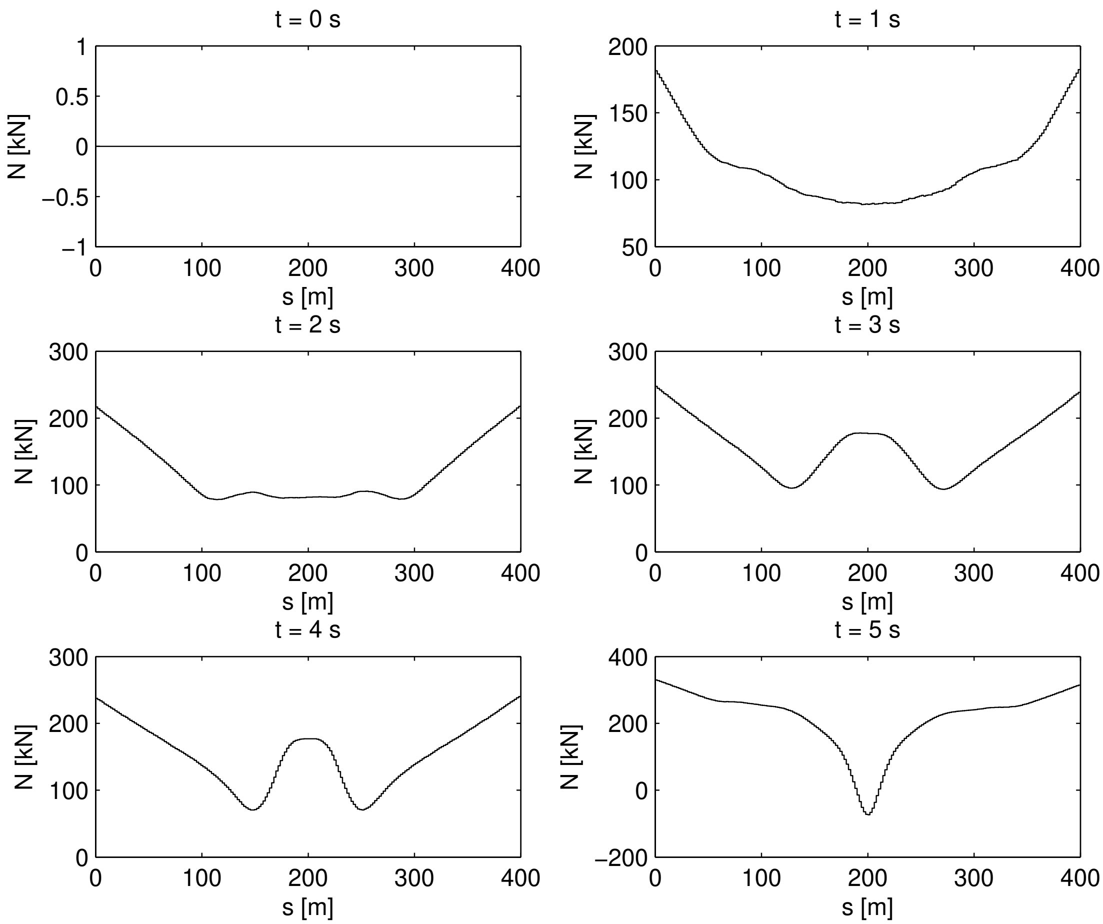

Figura 9.37: Distribuição do esforço normal na linha em catenária dupla para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos.

9.5.2 *Riser* rígido em catenária 400 metros sob ação do peso submerso

Esta caso tem como objetivo ilustrar as soluções advindas do MARINE para um SCR em contato com o solo marinho. Os parâmetros do caso são fornecidos na Tab. (9.12), no qual a linha está sujeita à solicitação do peso submerso. Com relação às condições de contorno considerou-se que:

1. Na extremidade inferior, em contato com os equipamentos submarinos, o vínculo é totalmente rígido, ou seja, a estrutura está engastada;

2. Na extremidade conectada à UEP, porção superior, a embarcação e a *flexjoint* proporcionam apoios absolutamente rígidos que se traduzem como vínculos que não permitem deslocamento transversal na direção vertical e rotacional com relação ao eixo z. Desta

forma, a extremidade superior pode movimentar-se livremente na direção horizontal.

Tabela 9.12: Parâmetros do SCR de 400 metros sob ação do peso submerso.

Dado de Entrada	Variável	Valor
Ângulo de Topo	θ_t	$15°$
Diâmetro Externo	OD	$0,2731\ m$
Diâmetro Interno	ID	$0.2312\ m$
Comprimento da Linha	s_l	$400\ m$
Comprimento do trecho de *flowline*	s_f	$200\ m$
Massa Específica do *Riser*	ρ	$7850\ kg/m^3$
Massa Especítica do Fluido	ρ_l	$1025\ kg/m^3$
Módulo de Elasticidade	E	$2,08 \times 10^{11}\ N/m^2$
Rigidez do Solo	k_1	$2 \times 10^7\ N/m^2$

Este exemplo foi simulado em duas etapas, nas quais a primeira foi realizado uma simulação estática sob solicitação do peso submerso, dividido em dois passos de carga e a segunda uma simulação dinâmica durante 5 segundos divididos em 5000 intervalos de tempo, também, sob solicitação do peso próprio. Para ambas simulações o corpo foi discretizado em 400 elementos uniformemente distribuídos.

Os resultados obtidos para o momento fletor e esforço normal foram somados aos mesmos esforços internos obtidos no ensaio dinâmico. Desta forma, buscou-se considerar o efeito de tração iniciais na linha, assim como os efeitos de curvatura e desta forma garantir que as soluções para os esforços internos no tempo inicial não sejam nulas, como observado na Fig. (9.37). Vale ressaltar que o efeito de curvatura, induzindo momento fletor inicial, não foi considerado durante a simulação dinâmica tendo em vista que este fenômeno é contemplado durante a simulação estática realizada previamente. Desta forma, evita-se dupla consideração do efeito sobre a estrutura. Com relação à fundação, o modelo utilizado para representar o solo marinho foi Winkler em molas nodais, cuja rigidez considerada foi $2 \times 10^7\ N/m$.

A Fig. (9.38) ilustra as configurações sucessivas do SCR, do tempo inicial ao final, em que algumas configurações intermediárias foram removidas para melhorar a visualização. Observa-se que há grande deslocamento do trecho suspenso da estrutura em um curto espaço de tempo. No mesmo sentido há variação do TDP da linha, assim como aumento da curvatura da parte suspensa no decorrer da análise.

Analogamente ao caso da linha em catenária dupla, a Fig. (9.39) ilustra a variação da distribuição dos momentos fletores nos tempos de 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos. É possível observar que para o tempo inicial a resposta tem a mesma característica da resposta do módulo estático, ou seja, para a parte suspensa da estrutura há uma variação maior do

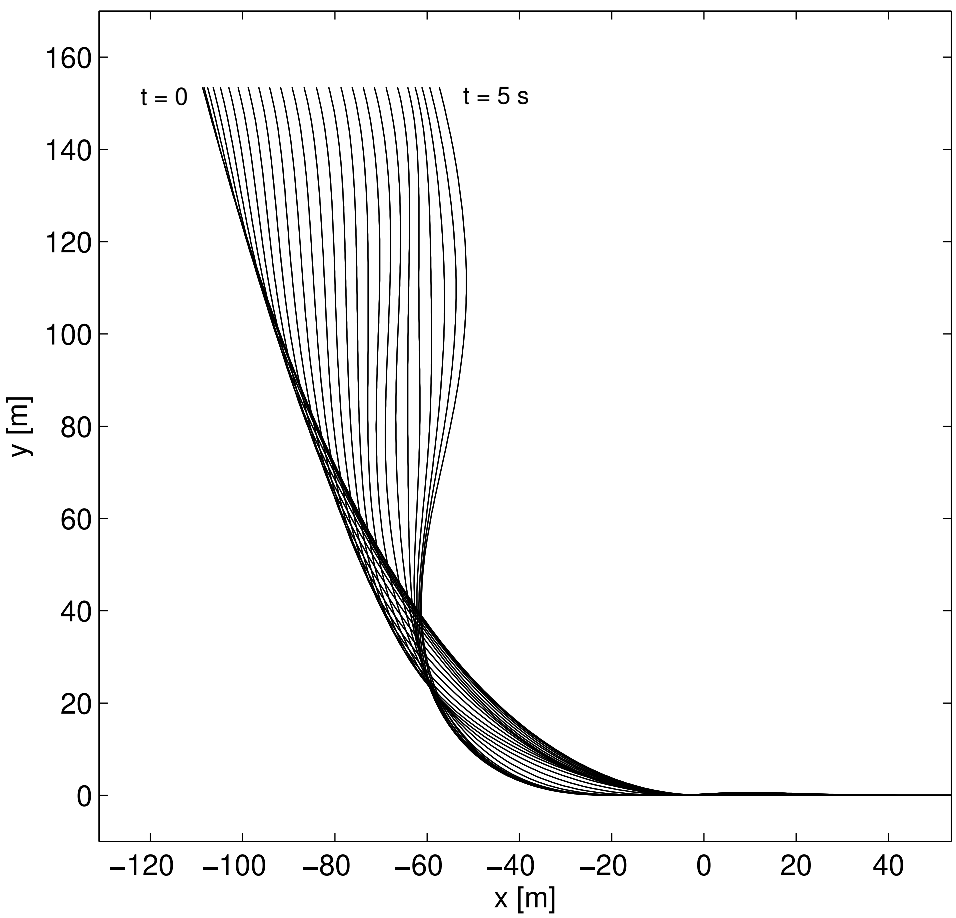

Figura 9.38: Configurações do SCR de 400 metros para os tempos de 0 a 5 segundos.

momento fletor até o módulo máximo, na região do TDP. Isso se deve à solução advinda da simulação estática do *riser*, no qual os efeitos de curvatura predominam. Para os tempos subseqüentes, observa-se que a região do TDP sempre ilustra os maiores módulos de momento fletor e varia sua posição na linha conforme a simulação prossegue, o mesmo é observado na Fig. (9.38). Ainda nos resultados, é possível observar que conforme a curvatura da parte suspensa aumenta, modifica-se a distribuição dos momentos fletores de forma que a solicitação nessa porção da análise passa a ser significativa.

A Fig. (9.40) ilustra a distribuição dos esforços normais na linha para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos. A inclusão dos efeitos da simulação estática inicial é bastante visível se comparado com o caso em catenária dupla, no qual a distribuição inicial na simulação dinâmica era de magnitude zero em toda extensão da linha. Com a inclusão dos efeitos iniciais tem-se uma distribuição mais realista, no qual a porção próxima à plataforma mostrou maior magnitude.

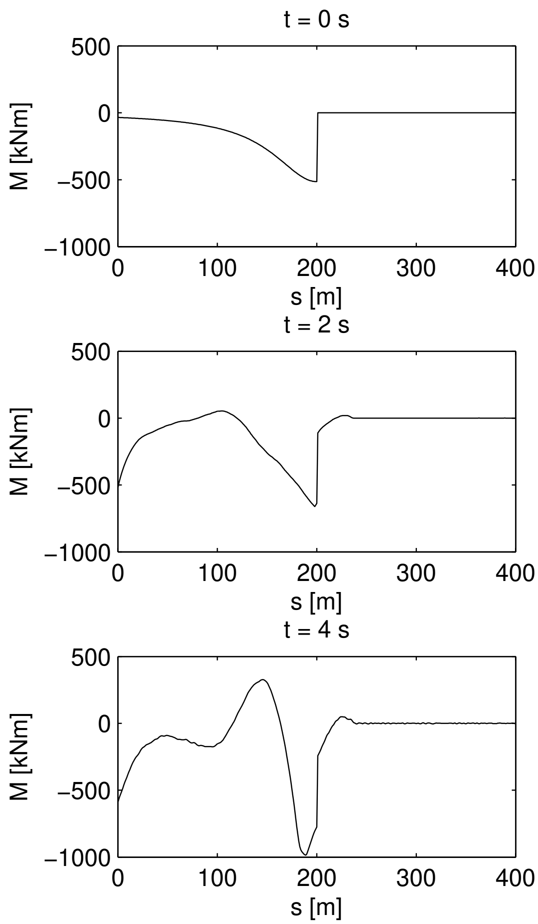

Figura 9.39: Distribuição do momento fletor no SCR de 400 metros para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos.

A distribuição da tensão normal ao longo da linha para os tempos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos pode ser observada na Fig. (9.41). Como citado nos casos anteriores, o cálculo da tensão normal à área transversal é realizado considerando os efeitos conjugados de flexão e tração. A partir da figura observa-se que, para o tempo inicial, este caso mostra que o efeito do momento fletor tem predominância em relação ao esforço normal, na qual verificou-se semelhança entre as curvas da tensão normal e a curva inicial de momento fletor em função da curvatura. Nas curvas para os tempos subseqüentes, observou-se que o esforço normal gerado na estrutura tem grande influência no cálculo na tensão, o que pode ser justificado pelo aumento do esforço normal no decorrer da simulação.

Com o intuito de obter um melhor detalhamento da tensão próxima à região do TDP, a Fig. (9.42) ilustra a variação da tensão normal em cinco pontos distintos da estrutura

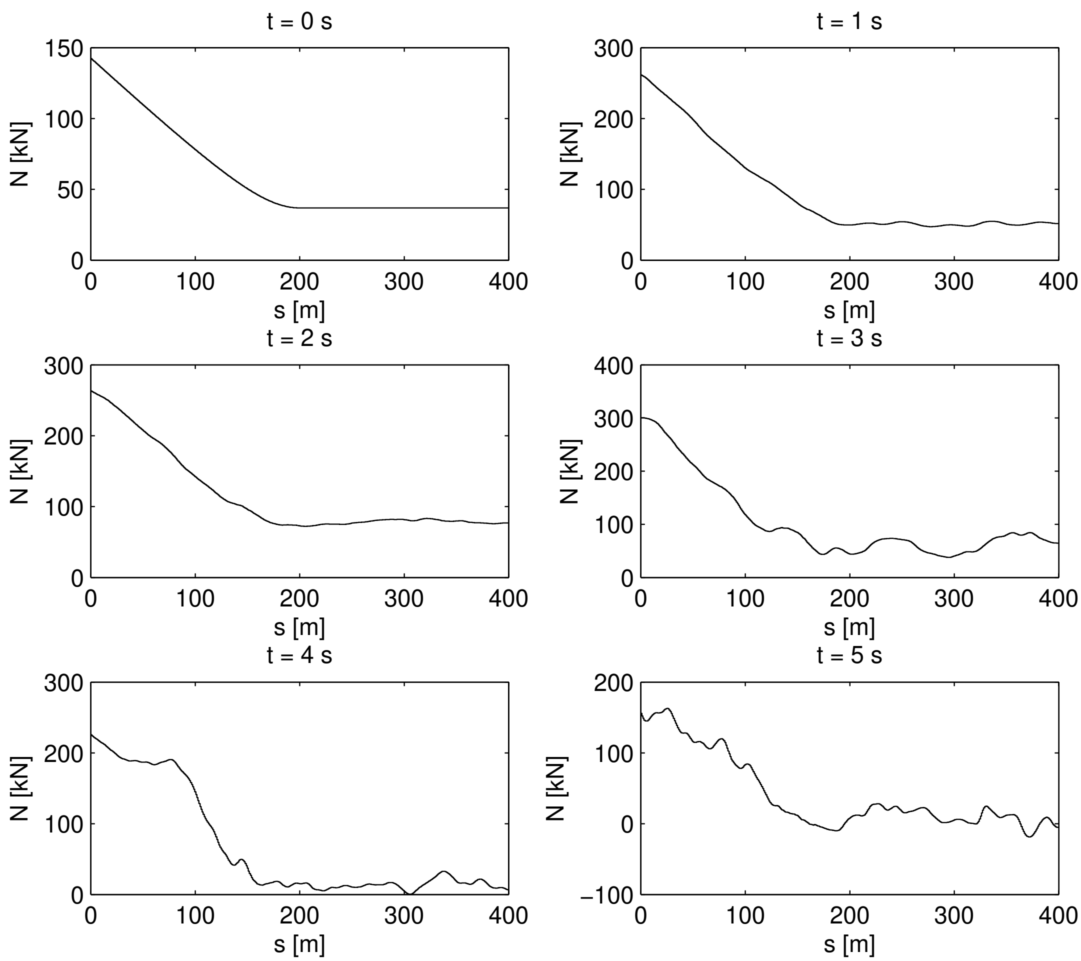

Figura 9.40: Distribuição do esforço normal no SCR de 400 metros para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos.

no tempo. Procurou-se verificar o comportamento da tensão normal com relação ao tempo para o ponto do TDP inicial e para pontos a montante e jusante do ponto inicial. Desta forma escolheram-se 4 pontos em relação ao TDP que distam 1 e 2 metros dispostos de forma simetricamente oposta. Verificou-se que no decorrer da simulação houve diminuição da magnitude de tensão nos três pontos iniciais, o que indica que a linha manteve contato com o solo, transferindo o TDP para outro ponto. A porção a "jusante" do ponto do TDP inicial, ao contrário, tem magnitude crescente durante a análise indicando que a tração aumenta no tempo. Este fato justifica-se pelo engaste que prende esse trecho da linha e pelo movimento induzido pela curvatura da porção suspensa que tende a puxar a linha, tracionando-a.

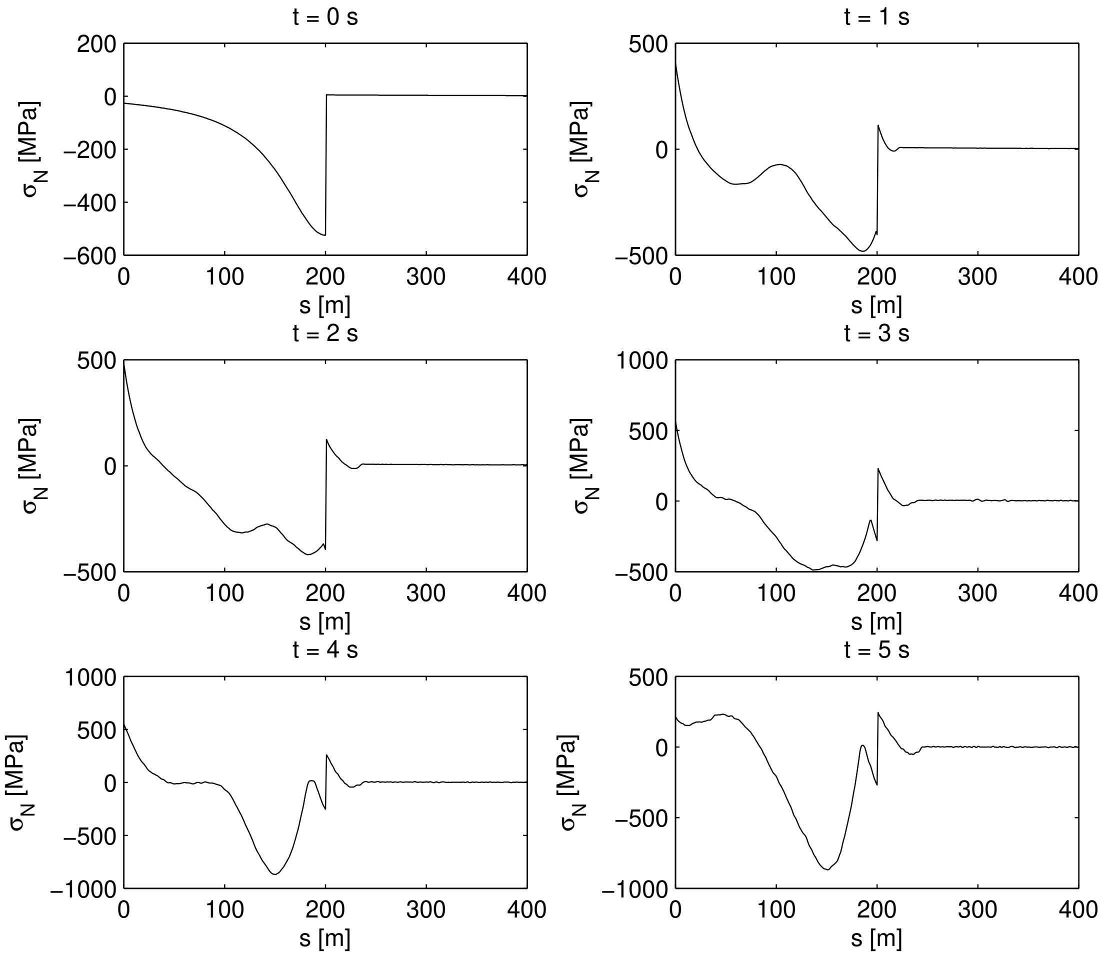

Figura 9.41: Distribuição da tensão normal ao longo no SCR de 400 metros para 0, 1, 2, 3, 4 e 5 segundos, no intradorso da estrutura.

9.5.3 Estudo da influência do *heave* na tensão normal no TDP

Este caso tem como objetivo fazer uma análise da variação da tensão no TDP em função do movimento de *heave* da UEP, que se traduz pela imposição de um movimento harmônico no nó da extremidade superior. O movimento de *heave* é ocasionado pela influência das ondas marítimas sobre a unidade flutuante que se reflete na estrutura através de um movimento de natureza oscilatório que, observando sob a óptica do TDP, torna crítico o efeito da fadiga. Desta forma, este estudo tem como resultado principal a análise da variação da tensão normal no TDP no intradorso da seção transversal resultante do movimento imposto no topo da estrutura pelo *heave*. Como tentativa de avaliação dos diferentes modelos de formação, o mesmo cenário foi simulado várias vezes de forma a contemplar os diversos modelos de

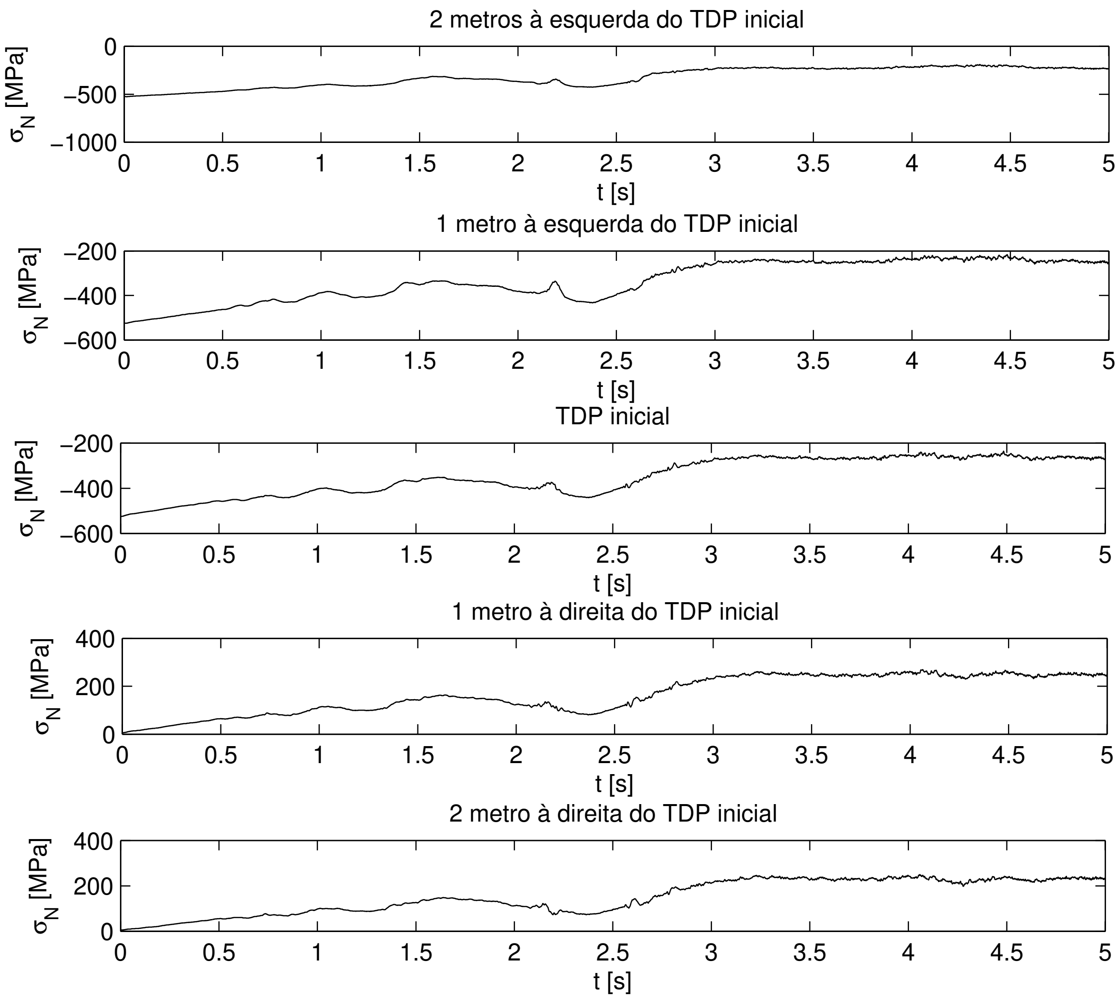

Figura 9.42: Distribuição da tensão normal em torno do TDP no tempo.

fundação supracitados.

O modelo de simulação para este caso é ilustrado na Fig. (9.43), onde constam as seguintes condições de contorno:

- **Extremidade inferior em contato com os equipamentos submarinos:** considerou-se vínculo do tipo engaste absolutamente rígido;

- **Extremidade superior em contato com a unidade de produção:** considerou-se vínculos na forma de apoio para os graus de liberdade horizontal e angular, no qual o grau de liberdade vertical foi considerado como um deslocamento imposto dado por u_h.

O modelo de movimento vertical do topo foi considerado como harmônico e é representado

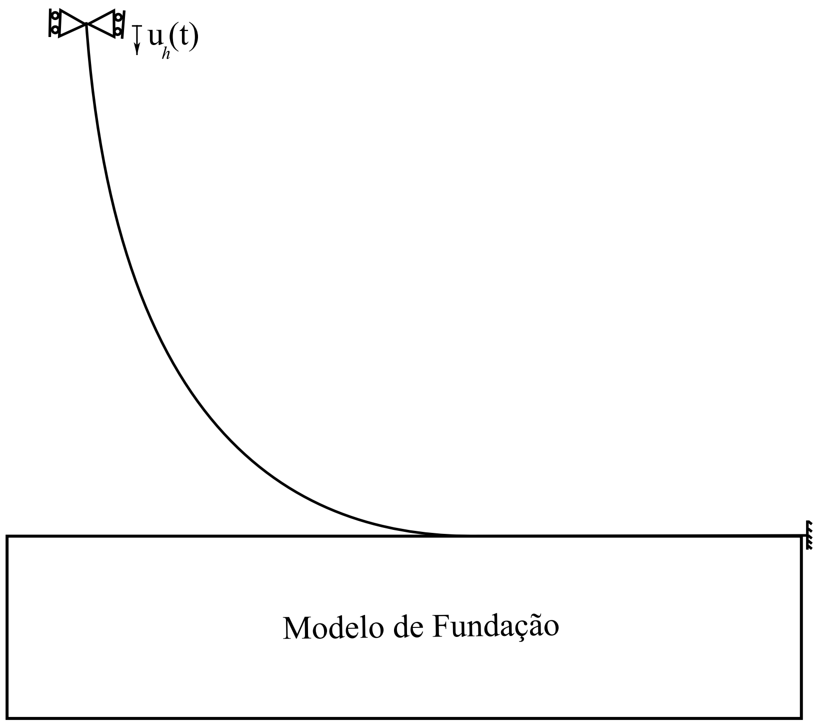

Figura 9.43: Modelo de SCR para análise da ação do *heave* na estrutura.

pela seguinte equação

$$u_h(t) = h_g \sin\left(2\pi \frac{t}{T_g}\right), \tag{9.27}$$

no qual, h_g é a amplitude da onda e T_g é o período. A velocidade e aceleração do ponto em questão são obtidas a partir das derivadas primeira e segunda da expressão definida na equação (9.27), representadas por

$$\begin{cases} \dot{u}_h(t) = u_g \left(\dfrac{2\pi}{T_g}\right) \cos\left(2\pi \dfrac{t}{T_p}\right) \\ \ddot{u}_h(t) = -u_g \left(\dfrac{2\pi}{T_g}\right)^2 \sin\left(2\pi \dfrac{t}{T_p}\right) \end{cases} \tag{9.28}$$

A simulação foi realizada em duas etapas, em que a primeira é relativa ao estudo estático da estrutura sob ação do peso submerso e a segunda é relativa ao movimento imposto de *heave* propriamente dito. Para a simulação, a estrutura foi discretizada em aproximadamente 400 elementos e o tempo de simulação dividido em 5000 intervalos, o restante dos parâmetros utilizados são dados na Tab. (9.13). Vale ressaltar que, na prática, para o o análise da variação da tensão no tempo sob a óptica do estudo da fadiga da estrutura, é necessário um intervalo de tempo mais representativo (alguns períodos de onda), no entanto, com o intuito

Tabela 9.13: Parâmetros do SCR de 400 metros sob ação do *heave*.

Dado de Entrada	Variável	Valor
Ângulo de Topo	θ_t	15°
Diâmetro Externo	OD	$0,2731\ m$
Diâmetro Interno	ID	$0.2312\ m$
Comprimento da Linha	s_l	$400\ m$
Comprimento do trecho flowline	s_f	$200\ m$
Massa Específica do *Riser*	ρ	$7850\ kg/m^3$
Massa Especítica do Fluido	ρ_l	$1025\ kg/m^3$
Módulo de Elasticidade	E	$2,08 \times 10^{11}\ N/m^2$
Primeiro Parâmetro do Solo	k_1	$2 \times 10^5\ N/m^2$
Segundo Parâmetro do Solo	$\bar{k}_s$	$2 \times 10^5\ N/m^2$
Amplitude da onda	h_g	$4\ m$
Período da Onda	T_g	$12\ s$
Tempo Inicial de Simulação	t_i	$0\ s$
Tempo Final de Simulação	t_f	$5\ s$

de diminuir o processamento, a quantidade e o gerenciamento dos dados processados, foi escolhido o mesmo intervalo de tempo dos casos anteriores, que é próximo a meio período de onda.

Com relação à utilização às fundações, o caso estudado foi simulado utilizando os mesmo parâmetros utilizando os diferentes modelos de fundação. Desta forma, procurou-se avaliar o comportamento da resposta no tempo da tensão normal no intradorso da área transversal da estrutura relativa ao TDP para cada modelo de fundação. A resposta da tensão normal em MPa é ilustrada na Fig. (9.44), no qual as soluções estão presentes em uma linha contínua e, para auxiliar a visualização das diferentes curvas, foram incluídos símbolos relativos a cada modelo, como descrito na legenda.

Na figura é possível observar que não houve diferença significativa nas respostas para os diversos modelos de fundação, no entanto, como observado nos símbolos relativos de cada modelo, para pontos mais próximos do tempo final, houve maior dispersão dos resultados. Isto dá indícios de que para análises práticas, ou seja, com tempo de simulação maior, os resultados podem apresentar diferença de modelo para modelo. Analisando a resposta geral do problema (desconsiderando as diferenças entre as curvas), evidencia-se uma grande variação da tensão no ponto de TDP inicial (curva resposta com com freqüência relativamente alta), que está hora em compressão hora em tração. Esta característica da curva, como citado anteriormente, corrobora a criticidade do fenômeno da fadiga e indica que o modelo de fundação, para este exemplo, tem pouco influência em relação ao movimento do TDP. Vale ressaltar que o exemplo não teve como objetivo avaliar um caso real, mas sim o comportamento das ferramentas computacionais estudadas aplicadas ao contexto do *riser*. Assim, seria interessante avaliar em trabalhos futuros o comportamento de casos reais e averiguar, por exemplo, a coerência da frequência da curva resposta que mostrou-se elevada nestes resultados.

Com o intuito de averiguar a influência da escolha do modelo de fundação na resposta dinâmica de SCR para os esforços internos na estrutura, procurou-se analisar o comportamento dos valores máximos do módulo do momento fletor no tempo. Para cada intervalo de tempo, guardou-se o valor máximo do módulo da distribuição dos esforços internos na estrutura, o que é ilustrado na Fig. (9.45). Em outras palavras, o valor máximo do módulo da distribuição do momento fletor (curva variante no tempo para o caso dinâmico), que pode estar em qualquer ponto do domínio do corpo, foi obtido para cada intervalo de tempo. Esse procedimento foi realizado para cada um dos modelos de fundação estudados neste trabalho.

Com relação ao momento fletor, a curva dos módulo máximo deste esforço interno é ilustrada na Fig. (9.45), na qual cada modelo é representado por um linha contínua e, para melhorar a visualização, por símbolos gráficos que foram incluídos no gráfico para certos pontos da resposta. Observou-se que o módulo máximo do momento fletor no domínio da estrutura é crescente até um patarmar de 22 MNm. Com relação aos modelos de fundação, não se observou diferença significativa para a ordem de grandeza apresentada, como constatado através da superposição das curvas contínuas e dos símbolos gráficos.

Assim, não se observou diferença significativa entre os modelos de fundação para este exemplo. No geral, a soluções apresentaram pouca diferenças, o que para o grau de grandeza observado torna-se insiginificante. No âmbito computacional, as simulações para os modelos de fundação apresentaram grande similaridade quanto ao tempo de processamento e na quantidade de interações para resolução das equações não-lineares.

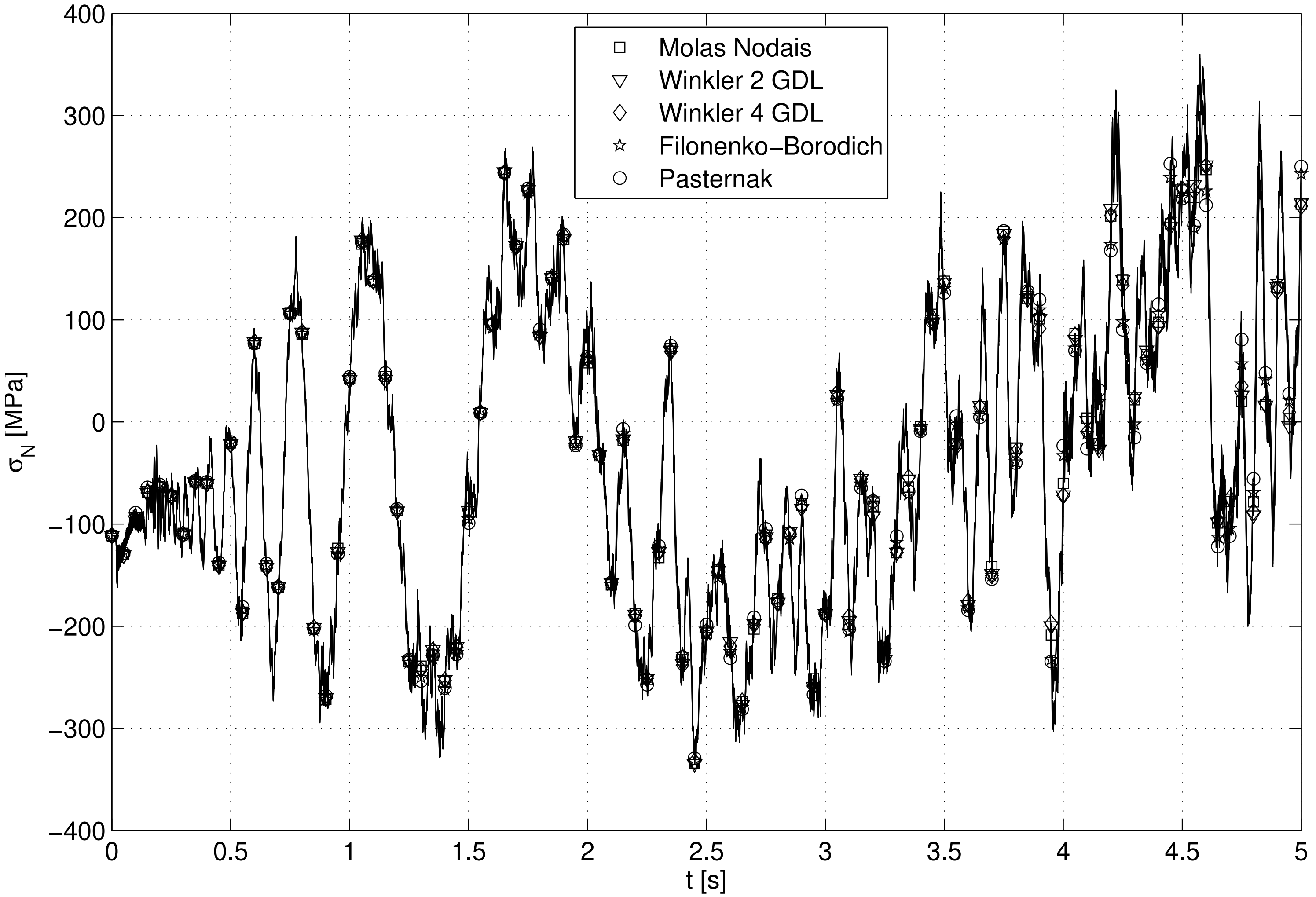

Figura 9.44: Tensão normal σ no intradorso da seção do TDP em relação ao tempo para os diversos modelos de fundação.

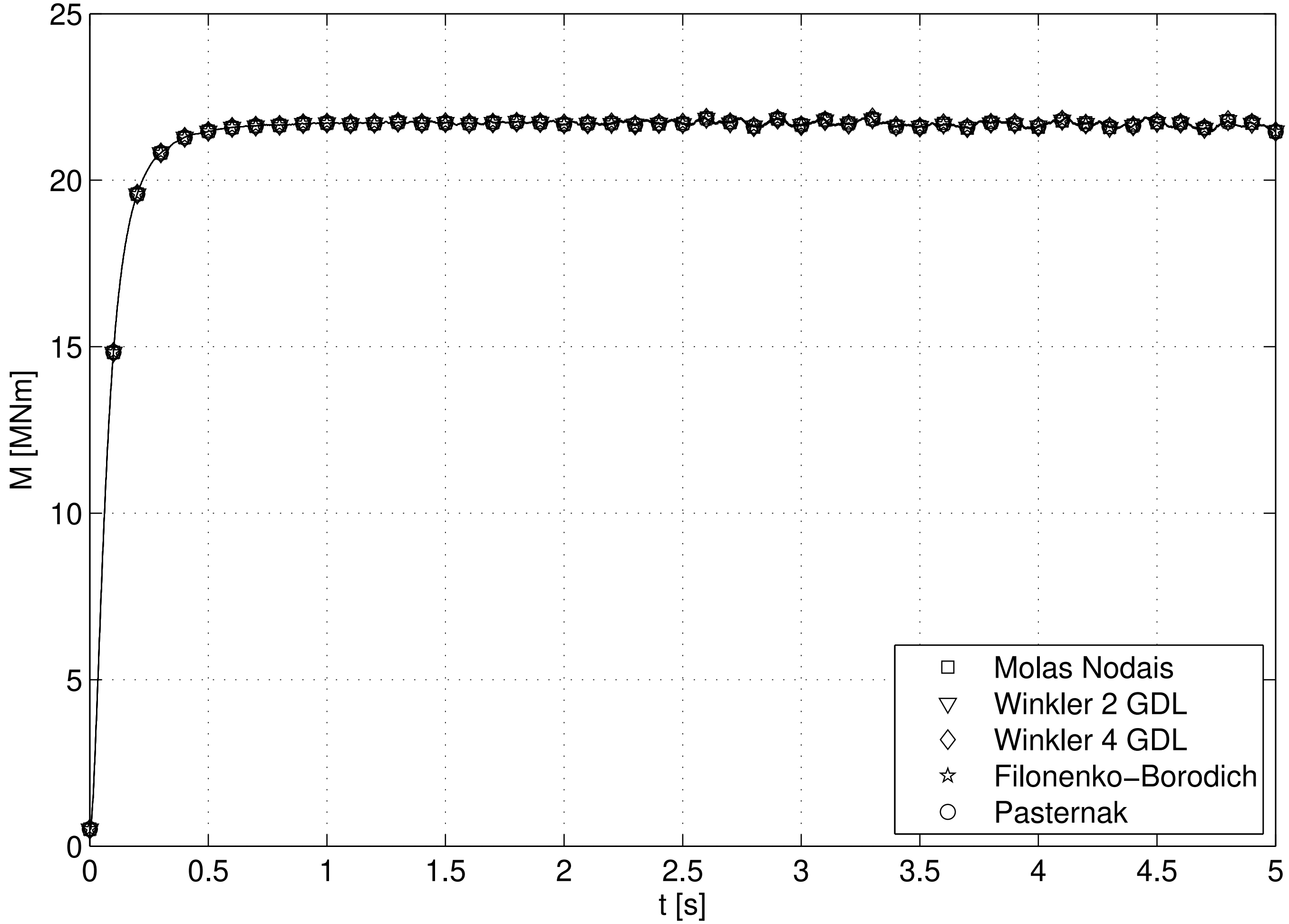

Figura 9.45: Módulo do momento fletor máximo para cada intervalo de tempo para os diversos modelos de fundação.

10 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Este capítulo final destina-se reunir as conclusões acerca dos temas estudados e indicar próximos passos para continuação do trabalho.

10.1 Conclusões e comentários acerca do estudo

O projeto de linhas submarinas é bastante complexo devido a pluralidade de fenômenos que envolvem o problema. A simulação da estrutura deve garantir que os resultados obtidos sejam o mais próximo da realidade, pois a segurança e economicidade na operação da atividade de explotação do petróleo pelas linhas submarinas depende fortemente destas análises. Desta forma, este trabalho teve como principal objetivo a construção de uma ferramenta computacional capaz de tratar problemas da estática e dinâmica de SCR levando consideração a interação solo-estrutura. O trabalho proposto buscou iniciar a implementação da base de um simulador estrutural, concentrando-se, desta forma, em alguns aspectos fundamentais:

- Implementação e validação do elemento de pórtico plano utilizando a formulação co-rotacional com abordagem no equilíbrio estático;
- Implementação da análise dinâmica no domínio do tempo para o elemento de pórtico co-rotacional;
- Implementação de diferentes tipos de fundação e avaliação do comportamento de cada modelo;
- Agrupar as etapas supracitadas de forma sistêmica afim de constituir um código capaz de propiciar análises estruturais para SCR.

Durante o desenvolvimento do elemento co-rotacional, foi possível observar diversas características que impactaram de forma significativa o andamento tanto do estudo estático como do dinâmico. Com relação à implementação e validação do elemento de pórtico bidimensional, no contexto estático, a maior dificuldade foi solucionar o problema de convergência para grandes rotações. A implementação do elemento, descrita no capítulo Formulação Co-rotacional para Pórticos, baseou-se no trabalho de Crisfield (1991) que não contempla casos com grandes rotações, o que teve impacto na resolução do caso da viga engastada solicitada através de um binário na extremidade livre. Este problema foi solucionado através do trabalho de Souza (2000), que propôs uma solução simples e barata, do ponto de vista computacional, para o problema com grandes rotações. Os exemplos para o estudo estático de pórticos bidimensionais mostraram resultados coerentes com a literatura, o que permite considerar que se obteve êxito na implementação estática do elemento e seus resultados podem ser considerados corretos.

No âmbito da dinâmica no domínio do tempo de pórticos bidimensionais, as principais dificuldades concentraram-se na própria implementação, que é mais complexa do que o caso estático. Na questão computacional, há maior exigência quanto memória e tempo de processamento, pois existe uma quantidade maior de variáveis para processar e armazenar. No entanto, para os exemplos de vigas bidimensionais dinâmicas, este problema não foi tão latente em virtude dos casos serem mais simples, repercutindo, desta forma, com maior criticidade nos exemplos aplicados ao SCR. Com relação aos exemplos numéricos estudados, houve grande proximidade das soluções numéricas obtidas com as da literatura. Os casos dinâmicos ilustrados exibiram soluções coerentes com a literatura o que permite que o elemento de viga co-rotacional para dinâmica não-linear seja considerado validado e suas respostas consideradas corretas.

No exemplo de estudo para fundações de um parâmetro constatou-se que os modelos da formulação em leito apresentaram melhores resultados, mostrando um erro significativamente menor do que o modelo de fundação Winkler modelado por molas nodais (elementos de molas discretas interligados diretamente aos nós do elemento). Com relação ao modelo de dois parâmetros o modelo de Filonenko-Borodich, com dois graus de liberdade por nó, mostrou-se mais preciso em relação à resposta analítica. O modelo de fundação de Pasternak, ao contrário do esperado, apresentou erro significativamente alto em relação à resposta analítica. Este resultado foi contra a expectativa, pois esperava-se que, como os modelos partem da mesma formulação, apresentassem respostas bastante próximas. Em razão do modelo de Pasternak ser mais complexo, com maior número de graus de liberdade, e pela implementação do modelo obedecer rigorosamente à formulação apresentada por Teodoru et al. (2006) esperava-se que apresentasse erro menor em relação à resposta analítica. O problema da discrepância de resultados, como comentado no exemplo, pode ter origem no segundo termo da matriz de rigidez do elemento desta fundação. O fato que corrobora esta constatação está no estudo do modelo de um parâmetro, no qual o modelo Winkler com quatro graus de liberdade, uma simplificação do elemento de Pasternak (tornando nulo o segundo parâmetro de rigidez e, conseqüentemente, o segundo termo da matriz de rigidez), mostrou-se coerente em relação à solução analítica.

Com respeito à implementação computacional da estática de SCR, o código desenvolvido mostrou resultados bastante próximos aos do ANFLEX, *software* escolhido como base de comparação. O que permite considerar que, para as condições testadas e fenômenos implementados, o módulo estático está validado. Dentre as principais dificuldades encontradas para construção e validação do módulo estático, pode-se citar a forte dependência da discretização do domínio da estrutura que, para malhas grosseiras, mostram resultados discrepantes. Isto pôde ser observado no estudo comparativo dos deslocamentos, em que, para o caso da malha mais grosseira, observou-se no início do gráfico descontinuidade que foge da natureza das curvas de resposta. Assim, é possível concluir que, para análises estáticas de SCR, é importante realizar antecipadamente uma análise de refinamento de malha de forma a averiguar a coerência da resposta. Com relação ao número de iterações, para as malhas mais grosseiras não houve aumento expressivo no número de iterações, o que pode ser tratado como uma diferença desprezível. Desta forma, observou-se que a convergência da resposta não depende fortemente da discretização do domínio do corpo, o que remete que a influência no número de iterações pode estar presente na ordem do elemento utilizada na formulação e no método numérico escolhido para resolução das equações não-lineares.

A aplicação de diferentes modelos de fundação no contexto da estática de SCR mostrou resultados com diferenças na curva de resposta da distribuição do momento fletor no domínio do corpo. Em geral, a maior diferença concentrou-se na região do TDP, no qual a amplitude de momento fletor para a região de contato reduziu-se gradualmente com o aumento da complexidade de modelo, ou seja, o modelo de Winkler em molas nodais apresentou a maior amplitude para momento fletor e o modelo de Pasternak a menor. No entanto, não se observou, para o cenário de simulação deste trabalho, diferença significativa entre os resultados obtidos através dos modelos de fundação.

Com relação à dinâmica de SCR, o estudo de validação do módulo dinâmico não obteve resultados fidedignos aos do *software* ANFLEX, tais como observado no estudo da estática do SCR. No entanto, devido aos estudos prévios de validação para pórtico co-rotacional e para os modelos de fundação, considerou-se que a diferença observada entre os resultados foi devida à questão de modelagem dos fenômenos que, no caso do ANFLEX, inclui outros efeitos, como comentado no capítulo de resultados. Em outras palavras, por ser um *software* de código fechado, é difícil garantir de forma criteriosa as mesmas considerações de simulação, o que para o caso dinâmico pode ter impactado nos resultados fornecendo resultados distintos. Fatos que corroboram com a diferença observada seriam, por exemplo: a fundação que não considera efeitos de atrito no contato, a modelagem do peso próprio que não leva em consideração a configuração do corpo no plano, entre outros. Ainda neste exemplo, observou-se uma característica importante com relação à distribuição dos esforços internos na linha: a inclusão de efeitos prévios à simulação que impactam no tempo inicial. Neste caso, a distribuição do momento fletor no tempo zero deve-se unicamente à condição de solicitação imposta pela curvatura, enquanto que o esforço normal é nulo em todo domínio da estrutura. Esta característica foi corrigida nos exemplos subseqüentes, em que a inclusão de efeitos prévios à simulação dinâmica devem-se à resposta estática da estrutura.

O segundo caso de estudo corresponde ao SCR de 400 metros em contato com o solo, no qual observa-se o mesmo tipo de problema do *riser* em catenária dupla na curva de resposta da configuração final. Ou seja, a estrutura adquire uma configuração sinuosa na porção superior do trecho suspenso ao invés de se obter uma curvatura contínua suave, sua forma mais provável. Com relação às curvas de resposta para o esforços internos e tensões, no geral observou-se um comportamento qualitativamente coerente. A questão da inclusão dos efeitos prévios à simulação foi realizada levando em conta os efeitos iniciais obtidos a partir da simulação estática e foram somados ao resultados obtidos para cada intervalo de tempo. Desta forma, a curva da distribuição do esforço normal no tempo inicial não é nula como observado no caso anterior, mas levam em conta a inclusão dos efeitos iniciais estáticos em adição à resposta dinâmica em cada intervalo de tempo, melhorando os resultados para análise da estrutura. Pela curva de distribuição da tensão normal, observou-se que a conexão com plataforma também constitui um ponto crítico na estrutura, além do TDP. Isto se deve ao fato da tensão normal ser calculada de forma conjugada em relação aos esforços internos, ou seja, considerando ambos os efeitos, o momento fletor é responsável por tornar crítica a região em contato com o solo e o esforço normal a conexão à plataforma.

O terceiro exemplo de dinâmica de SCR teve como objetivo averiguar o comportamento da estrutura e das solicitações internas utilizando os diferentes tipos de fundação. A solicitação escolhida para este caso foi o deslocamento imposto de forma a simular o movimento de *heave* da plataforma. Constatou-se que não houve variação significativa, em relação à ordem de grandeza do problema, entre os diferentes modelos de fundação. Observou-se na curva de tensão normal para o ponto inicial de TPD que, para intervalos de tempo próximos do tempo final, houve uma pequena diferença entre os resultados obtidos com cada fundação. Porém, para a análise da variação do valor máximo do módulo dos esforços internos, não houve diferença significativa entre os diferentes tipos de modelo de função. O mesmo foi constatado na análise do módulo do momento fletor máximo em cada intervalo de tempo. O que indica que, para o exemplo estudado, o modelo de fundação não tem grande influência na resposta. Analisando o gráfico da tensão normal, pode-se observar grande variação no estado de solicitação do corpo (tração-compressão), o que leva a constatar, como relatado na literatura, que este ponto é extremamente importante para a análise estrutural em função de ser crítico com relação à fadiga.

No geral, o elemento de pórtico co-rotacional mostrou-se bastante adequado para aplicação na análise estrutural de linhas submarinas em catenária. Embora o exemplo de validação dinâmica tenha exibido algumas diferenças em relação aos resultados do *software* utilizado como base de comparação, os resultados mostraram coerência quanto ao comportamento global da estrutura, o que dá indício que a razão da diferença está contida nas considerações dos fenômenos envolvidos. Com relação aos modelos de fundação, todos exibiram respostas com comportamentos semelhantes indicando que não há grande impacto na escolha do modelo. No entanto, modelos da formulação em leito mostraram resultados melhores resultados no estudo das fundações, o que os coloca em melhor posição no momento da escolha da fundação para representação do solo marinho.

10.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como listado no introdução do trabalho, o estudo estrutural de linhas submarinas é um assunto multidisciplinar que envolve diversas áreas de conhecimento. Desta forma, muitos fenômenos importante e indispensáveis não foram estudados e implementados na programação do simulador até o atual momento, pois fugiriam da proposta inicial do trabalho.

Com relação à área de estudo estrutural relativa ao *riser*, seria interessante buscar a implementação do elemento tridimensional, pois desta forma é possível analisar diferentes fenômenos que não podem ser descritos em uma óptica puramente planar.

No aspecto material da estrutura, iniciar estudos com relação à rigidez não-linear material, modelando comportamentos de tensão-deformação diferentes do regime elástico. Implementar novos tipos de elementos de *riser* capazes de representar diferentes revestimentos e camadas constituídas de outros materiais.

Com relação à discretização do domínio do corpo, introduzir algoritmos capazes de construir malhas distintas e não homogêneas capazes de refinar regiões específicas da estrutura que possuem maior peso na análise, como por exemplo o TDP e a conexão com a UEP. Construir geradores de malha para outras configurações de linhas submarinas além da configuração em catenária, como por exemplo:

- RHAS - *Riser* Híbrido Auto-Sustentável
- *Steep Wave*
- *Steep S*
- *Lazy Wave*
- *Lazy S*

Incluir nestas novas configurações elementos capazes de modelar junções de tubulações e bóias.

Com relação a modelagem de carregamentos, seria importante incluir efeitos dos carregamentos hidrodinâmicos ocasionados pelo meio ambiente, como é o caso de forças de correnteza e ondas, implementar os efeitos de forças de amortecimento viscoso no sistema e incluir atualização da força nodal equivalente tanto no comportamento de barra quanto de viga em função da posição geométrica do elemento no espaço. Incluir análise de VIV e outros fenômenos ligados ao comportamento oscilatório seja ele de baixa ou alta amplitude e freqüência.

No campo do processamento de cada módulo, implementar outros métodos de resolução da equação não-linear de forma a buscar maior robustez e velocidade convergência do método, assim como tornar o algoritmo mais barato computacionalmente. Implementar o código em outra linguagem programação, de forma a obter maior ganho no tempo de simulação.

No aspecto da interação solo-estrutura, incluir o fenômeno do atrito e analisar melhor cada modelo e adequá-lo a configuração tridimensional, de forma a incluir fenômenos em diferentes direções e criando a possibilidade de criar solos com características anisotrópicas. Implementar o modelo de Kerr para a fundação e verificar sua eficácia. Estudar com maior profundidade o comportamento dos parâmetros de rigidez e como variam em relação ao carregamento. Buscando, desta forma, modelar diferentes comportamentos para movimentos descentes e ascendentes.

Referências Bibliográficas

Akour, S. (2010). Dynamics of nonlinear beam on elastic foundation. In *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010, London, U. K.*

Andueza, A., Estefen, S., & Silva, R. D. (2001). Steel hybrid riser for water depths up to 3000 meters. In *20th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Rio de Janeiro, Brazil - OMAE2001/OFT-1051*.

Aranha, G. & Souza, R. M. (2004). Elemento finito de barra para análise gométrica não-linear estática e dinâmica através da formulação co-rotacional. In *Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural, Mendoza, Argentina*.

Barros, P. L. D. A., Pavanello, R., Mesquita, E., & Morooka, C. K. (2009). Scr-seafloor interaction modeling with winkler, pasternak and kerr beam-on-elastic-foundation theories. In *ASME 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Honolulu, Hawai - OMAE2009-79459*.

Battini, J. M. (2002). *Co-rotational beam elements in instability problems*. Technical report, Royal Institute of Technology, Departament of Mechanics, SE-100 44 Stockholm, Sweden.

Behdinan, K., Stylianou, M. C., & Tabarrok, B. (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154, 151–161.

Belytschko, T. & Glaum, L. (1979). Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, 10, 175–182.

Belytschko, T. & Hsieh, B. (1973). Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7, 255–271.

Bernitsas, M. & Kokarakis, J. (1988). Importance of nonlinearities in static riser analysis. *Applied Ocean Research*, 1, 1–9.

Bissopp, K. E. & Drucker, D. C. (1945). Large deflection of cantilever beams. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3, 272–275.

Bodur, M. (2006). Finite element analysis of discontinuous contact problems. Tese de Mestrado, Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University - Turquia.

Bridge, C., Laver, K., Clukey, E., & Evans, T. (2004). Steel catenary riser touchdown point vertical interaction models. In *Offshore Technology Conference, Houston, Texas - OTC 16628*.

Chaudhury, G., Kennefick, J., & McDermott, R. (1999). Design,testing, and installation of steel catenary risers. In *Offshore Technology Conference, Houston, Texas - OTC 10980*.

Chopra, A. (1995). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Upper Saddle River, Prentice Hall, 3 edition.

Clukey, E., Ghosh, R., Mokarala, P., & Dixon, M. (2007). Steel catenary riser (scr) design issues at touch down area. In *Proceedings of the Sixteenth (2007) International Offshore and Polar Engineering Conference, Lisboa, Portugal*.

Coda, H. & Greco, M. (2004). A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computacional Methods Applied in Mechanical Engineering*, 193, 3541–3557.

Colajanni, P. Falsone, G., & Recupero, A. (2009). Simplified formulation of solution for beams on winkler foundation allowing discontinuities due to loads and constraints. *International Journal of Engineering*, 25, 75–83.

Cook, D., Malkus, P., & Pleska, M. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, New York.

Cook, R. (1995). *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, New York.

Crisfield, M. A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*. Chichester.

Crisfield, M. A. (1997). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics*. John Wiley & Sons, New York.

Dias, G. M. (2008). Análise da interação riser-solo usando modelos de fundações elásticas pelo método dos elementos finitos. Trabalho de Gradução, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Filonenko-Borodich, M. (1940). Some approximate theories of elastic foundation (in russian). *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 46, 3–18.

Galvão, A. (2004). Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Géradin, M. & Rixen, D. (1997). *Mechanical Vibrations Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, New York.

Harrison, H. B. (1973). *Computer Methods in Structural Analysis*. Englewood Cliffes, Prentice-Hall.

Karadeniz, H. (1999). An interface beam element for the analysis of soil-structure interactions and pipelines. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 5, 286–293.

Kordkheili, S. & Bahai, H. (2007). Non-linear finite element analysis of flexible risers in presence of buoyancy force and seabed interaction boundary condition. *Archive of Applied Mechanics*, 78, 765–774.

Kubota, H. (2003). Comportamento de riser rígido de produção. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Lane, M., O'Sullivan, T., Grealish, F., Kavanagh, K., & Thompson, H. (2001). Advanced frequency domain analysis techniques for steel catenary risers. In *Offshore Technology Conference, Houston, Texas - OTC 13017*.

Lapeira, Y. (2007). On simple and accurate finite element models for nonlinear bending analysis of beams and plates. Tese de Doutorado, Texas A&M University, Texas.

Larsen, C. (1992). Flexible riser analysis - comparison of results from computer programs. *Marine Structures*, 5, 103–119.

Leira, B., Marintek, E., Karunakaran, D., & Farnes, K.-A. (2004). Analysis guidelines and application of a riser-soil interaction model including trench effects. In *23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vancouver, British Canada - OMAE2004-51527*.

Mattiasson, K. (1981). Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal of Numerical Methods In Engineering*, 17, 145–153.

Monteiro, F. A. C. (2004). Uma formulação co-rotacional geral: Aplicação a pórticos espaciais. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

Morini, R. (2009). Método dos elementos finitos posicional aplicado à análise estática de risers. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Mourelatos, Z. & Parsons, M. (1985). A finite element analysis of beams on elastic foundation including shear and axial effects. *Computer & Structures*, 27, 323–331.

Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the American Society of Civil Engineers, ASCE, EM3*, 85, 67–94.

Nicolosi, E. & Sulino, A. (2009). Curso de formação petrobras 2009 engenheiro de petróleo júnior Área de produção/reservatórios. Apostila do curso de formação.

Oran, C. (1973). Tangent stiffness in plane frames. *Journal of the Structural Division*, 99, 973–985.

Oran, C. & Kassimali, A. (1976). Large deformation of framed structures under static and dynamic loads. *Computers and Structures*, 6, 539–547.

Pasternak, P. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two constants (em russo). *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitecture.*

Patel, M., Sarohia, S., & Ng, K. (1984). Finite-element marine riser analysis of the marine riser. *Engineering Structures*, 6, 175–184.

Patel, M. H. & Seyed, F. B. (1995). Review of flexible riser modelling and analysis techniques. *Engineering Structures*, 17, 293–304.

Pereira, P., Morooka, C., Valdivia, P., & Suzuki, M. (2007). Design and analysis of steel catenary risers for ultra deep water application. In *Rio Pipeline Conference & Exposition 2007, Rio de Janeiro, Brasil - IBP1285-07.*

Pesce, C. (1997). Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em "catenária": uma abordagem analítica e experimental. Tese de livre-docência, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Pesce, C. & Martins, C. (2004). Riser-soil interaction: Local dynamics at tdp and a discussion on the eigenvalue problem. In *23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vancouver, Canadá - OMAE2004-51268.*

Pesce, C., Martins, C., & Silveira, L. (2006). Riser-soil interaction: Local dynamics at tdp and a discussion on the eigenvalue and the viv problems. *Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering*, 128, 39–55.

Rice, D. & Ting, E. (1993). Large displacement transient analysis of flexible strucures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1541–1562.

Rohde, F. V. (1953). Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load. *Quarterly of Applied Mathematics*, 11, 337–338.

Rustad, A., Larse, C., & Sorensen, A. (2008). Fem modelling and automatic control for collision prevention of top tensioned risers. *Marine Structures*, 21, 80–112.

Seyed, F. & Patel, M. (1992). Mathematics of flexible risers including pressure and internal flow effects. *Marine Structures*, 5, 121–150.

Silveira, E., Martha, L., Menezes, I., & Masetti, I. (2000). Um sistema computacional integrado para análise dinâmica não-linear geométrica de linhas de ancoragem. In *XXI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, CILAMCE, Rio de Janeiro, Brasil.*

Silveira, L. & Martins, C. (2003). Nonlinear time domain analysis of risers. In *17th International Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil - COBEM2003-1398.*

Silveira, L. & Martins, C. (2004). A numerical method to solve the static problem of a catenary riser. In *23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vancouver, Canadá - OMAE2004-51390.*

Simo, J. & Vu-Quoc, L. (1986). On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case: Part ii. *Journal of Applied Mechanics*, 53, 855–863.

Song, R., Mekha, B., & Sebastian, A. (2006). Independent design verification of scrs for ultra deepwater ihf development. In *25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Hamburgo, Alemanha - OMAE2006-92502.*

Souza, R. (2000). Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames. Tese de Doutorado, University of California, Berkeley.

Stephens, D. (1989). Finite element solution methods for linear and nonlinear beam-on-foundation problems. Tese de Doutorado, Rice University.

Takafuji, F. (2010). Dinâmica tridimensional de risers. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Teodoru, I. (2009). Ebbef2p - a computer code for analysing beams on elastic foundations. *Intersections/Intersectii - ISSN 1582-3024*, 6, 28–44.

Teodoru, I., Musat, V., & Vrabie, M. (2006). A finite element study of the bending behaviour of beams resting on two-parameter elastic foundation. *Beletinul Institutului Politehnic Din Iasi*, 52, 7–19.

Urthaler, Y. & Reddy, N. (2005). A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, 553–570.

Winkler, E. (1867). *Die Lehre von Elastizität und Festigkeit*. Prague.

Yazdchi, M. & Crisfield, M. A. (2002). Non-linear dynamic behaviour of flexible marine pipes and risers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, 1265–1308.

You, J., Biscontin, G., & Aubeny, C. (2008). Seafloor interaction with steel catenary risers. In *Proceedings of the Eighteenth (2008) International Offshore and Polar Engineering Conference*.

Yshii, Y. (2002). Formulação co-rotacional para pórticos planos. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

Zhaohua, F. & Cook, D. (1983). Beam elements on two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, 109, 1390–1402.